مجموعه کتابهای شوم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مرکز نشر دانشگاهی

دینامیک شاره‌ها

ویلیام هیوز
جان برایتون

ترجمهٔ علی پذیرنده

مجموعه کتابهای شوم

دینامیک شاره‌ها

ویلیام هیوز، جان برایتون

ترجمهٔ علی پذیرنده

مرکز نشر دانشگاهی

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه

پیشگفتار

وقتی به اطراف خود می‌نگریم، بیشتر اجسام را جامد می‌بینیم، اما هنگامی که به اقیانوسها، جو و فضای بیرونی می‌اندیشیم، درمی‌یابیم که بخش عمدهٔ سطح زمین و کل جهان به حالت شاره است.

علی‌رغم علاقهٔ دانشمندان به ماهیت جهان (که بیشتر آن گاز است)، توجه مهندسان به ابزاری معطوف است که با شاره کار می‌کنند. در واقع، مشکل است بتوان ماشین، دستگاه، و یا ابزاری یافت که به نوعی محتوی شاره نباشد و یا مکانیک شاره‌ها در طراحی آن به‌کار نرفته باشد. پمپها، هواکشها، دمنده‌ها، موتورهای جت، موشکها، و توربینهای گازی اساساً ماشینهای شاره‌ای هستند. هواپیماها و کشتیها از میان شاره‌ها حرکت می‌کنند. حرکت جو و هوا تابع قانون دینامیک شاره‌هاست. همهٔ ماشینها را باید روغن‌کاری کرد، و روغن شاره است. حتی لامپهای خلأ برای کارکرد خود به گاز الکترونی متکی‌اند. از مفاهیم بنیادی دینامیک شاره‌ها، بدون توجه به پیچیدگی و غامضی دستگاه، می‌توان استفاده کرد.

دینامیک شاره‌ها جایگاه مهمی در علوم و مهندسی جدید دارد. این موضوع یکی از پایه‌های علم هوانوردی و فضانوردی، مهندسی مکانیک، هواشناسی، مهندسی دریایی، مهندسی عمران، مهندسی محیط زیست، و در حقیقت پایهٔ هر رشتهٔ علمی یا مهندسی است.

از این کتاب می‌توان به‌عنوان متنی مستقل و یا تکمیلی برای دروس مقدماتی دینامیک شاره‌ها در دورهٔ کارشناسی استفاده کرد. اما، یکی از جنبه‌های منحصر به فرد این کتاب محتوای گستردهٔ موضوعات مکانیک شاره‌های آن است. این کتاب شامل موضوعاتی است که می‌توان آن را به‌عنوان مرجع یا متنی تکمیلی برای دروس دورهٔ متوسطه یا دورهٔ کارشناسی به‌کار برد.

چند فصل اول این کتاب در اصل برای دانشجویان سالهای اول نوشته شده است، که بیشتر بر روی مفاهیم اساسی حرکت شاره تأکید دارد. در سه فصل اول استنتاج معادلات پایستگی به هر دو شکل انتگرالی و دیفرانسیلی را بررسی می‌کنیم. مثالهای زیادی در کتاب برای انتقال ایده‌های مهم حجم کنترل، معادلهٔ برنولی و حرکت کلی شاره آورده شده است. خلاصه‌ای از معادلات مهم و بحث کلی روشهای حل مسئله را، که برای دانشجویان جدید سودمند است، در فصل ۳ آورده‌ایم.

سطح علمی این کتاب از فصلی به فصل دیگر تغییر می‌کند. فصلهای ۱ تا ۵ و فصل ۷ در سطح معرفی مکانیک شاره‌ها برای دورهٔ کارشناسی است. فصلهای ۶ و ۸ به آئرودینامیک جریانها فروصوتی و فراصوتی می‌پردازد و پیشرفته‌تر از سطح دورهٔ کارشناسی است.

بخش پایانی کتاب با موضوعاتی سروکار دارد که در حال‌حاضر مورد توجه پژوهشگران است. این فصلها طوری نوشته شده‌اند که افراد ناآشنا به این رشته‌های خاص آشنایی خوبی دربارهٔ مدلهای ریاضی، ساده‌سازیها و روشهای روزآمد به‌دست می‌آورند. اگر خواننده به مطالعهٔ عمیقتری علاقه‌مند باشد، می‌تواند به مراجع موجود در فصلها رجوع کند. اینها همراه با این کتاب می‌توانند مبنای خوبی برای برنامهٔ مطالعاتی شخصی باشند.

در این نوع کتابها، موضوعات و کاربردهای به‌کار رفته کاملاً محدود است و بسیاری از زمینه‌های مورد علاقهٔ فعلی را شامل نمی‌شود. به‌عنوان مثال، کاربرد ماشینهای شاره‌ای و زمینهٔ در حال رشد دینامیک شاره‌های محاسباتی (CFD) در این کتاب گنجانده نشده است. اما، به‌نظر می‌رسد که بر روی جنبه‌های فیزیکی و بیان ریاضی دینامیک شاره‌ها، متناسب با کتابی در سطح مقدماتی، تأکید شده است. درک کامل مطالب این کتاب خواننده را به ادبیات موجود در انواع موضوعهای خاص رهنمون می‌سازد.

تغییرات زیادی در ویرایش سوم اعمال، و موضوعات زیادی اضافه شده است تا آن‌را متنی روزآمد و قابل استفاده کند. فصلی کاملاً جدید دربارهٔ حرکت موج و پایداری افزوده شده است. از نمادگذاری فازور مختلط برای توصیف رفتار موج، کاربرد آن در امواج صوتی، امواج برشی و امواج سطحی استفادهٔ گسترده‌ای شده است. بدین ترتیب، طبیعتاً مفهوم پایداری شاره از رفتار رشد امواج نتیجه می‌شود. ضمناً به مثالهای زیادی دربارهٔ تجربیات روزمره اشاره شده است.

ویلیام اف. هیوز
جان آ. برایتون

۱

مقدمه

۱-۱ شاره چیست؟

دینامیک، مطالعهٔ حرکت ماده، را می‌توان به دو بخش دینامیک اجسام جامد و دینامیک اجسام غیرجامد تقسیم کرد. بخش دوم را معمولاً به دو دسته‌بندی کلی کشسانی (اجسام جامد کشسان) و مکانیک شاره‌ها تقسیم می‌کنند. از آنجا که بخش بزرگی از کرهٔ زمین را شاره تشکیل می‌دهد، بدیهی است که مهندسان و دانشمندان باید اطلاعاتی دربارهٔ شاره‌ها داشته باشند. قبل از هر چیز، شاره چیست؟ تفاوت شاره با میله‌ای فولادی که آن را مادهٔ جامد کشسان می‌نامیم، چیست؟

به شکل ساده، شاره را می‌توان ماده‌ای دانست که در مقابل نیروی برشی یا تنش، بدون جابه‌جایی، همچون در جسم جامد، نمی‌تواند مقاومت کند. شاره‌ها را معمولاً به گازها یا مایعات تقسیم می‌کنند. مایع دارای نیروهای بین مولکولی است که باعث نگه‌داشتن آن می‌شوند، به‌طوری‌که دارای حجم است ولی شکل معینی ندارد. هنگامی‌که مایعی را به درون ظرفی می‌ریزیم، به‌اندازهٔ حجم خود بدون توجه به شکل ظرف، آن را پُر می‌کند. تراکم‌پذیری مایعات کم است و چگالی آنها برحسب دما یا فشار اندکی تغییر می‌کند. از سوی دیگر، گاز حاوی مولکولهای در حال حرکت است که با برخورد به یکدیگر آن را پخش می‌کنند. گاز شکل خاصی ندارد و در هر ظرفی که قرار گیرد شکل آن را به خود می‌گیرد. برای هر جرم یا سیستم گازی معین، فشار، دما و حجم گاز تابع رابطه‌ای خاص به‌نام معادلهٔ حالت است.

شاره، با توجه به کاربردهای فراوان مکانیک شاره‌ها، یکی از حیاتی‌ترین و بنیادی‌ترین شاخه‌های پژوهش در مطالعات علمی کاربردی و مهندسی است. جریان شاره‌ها در لوله‌ها و کانالها برای مهندسان عمران دارای اهمیت است. مطالعهٔ ماشین‌آلات شاره‌ها نظیر پمپها، کمپرسورها، مبدلهای حرارتی، موتورهای جت و موشک و نظایر آنها بیانگر اهمیت مکانیک شاره‌ها نزد مهندسان مکانیک است. آئرودینامیک، جریان هوا بر روی اجسام،

دارای اهمیت بنیادی برای مهندسان هوا_فضا در طراحی هواپیماها، گلوله‌ها و موشکهاست. در هواشناسی، آب‌شناسی و اقیانوس‌شناسی مطالعهٔ شاره‌ها اساس کار است، زیرا جو و اقیانوس هر دو شاره هستند. امروزه در مهندسی جدید، در بسیاری از رشته‌های تحصیلی، مکانیک شاره‌ها را همراه با مکانیک کلاسیک آموزش می‌دهند. به‌عنوان مثال، مکانیک شاره‌ها و نظریهٔ الکترومغناطیس تحت عنوان علم مغناطو هیدرودینامیک آموزش داده می‌شود. دانش مغناطو هیدرودینامیک در انواع جدید دستگاههای تبدیل انرژی و مطالعهٔ پدیده‌های ستاره‌ای و یون‌سپهر، اهمیت فراوان دارد.

اکنون، در می‌یابیم که برای مهندسان و دانشمندان امروزی آشنایی با مکانیک شاره‌ها بسیار ضروری است و روشن است که مکانیک شاره‌ها و کاربردهای آن موضوع گسترده‌ای در رشته‌های تخصصی است. آنچه در این کتاب آمده است ارائهٔ اغلب ایده‌های بنیادی همراه با بسیاری از کاربردهای آنهاست. پس از تسلط بر این مبانی، مطالعهٔ کتابهای پیشرفته‌تر و منابع تحقیقاتی درک و دانش خواننده را از جنبه‌های تخصصی مکانیک شاره‌ها بالا خواهد برد. اما، لازم است قبل از ورود به موضوعات پیشرفته‌تر، در درک مبانی آن‌قدر تسلط یافت که با گذشت زمان فراموش نشود و بتوان همیشه بر آنها تکیه کرد.

اکنون، موضوع مکانیک شاره‌ها را با ارائهٔ مقدمه‌ای بر ایده‌های بنیادی و بهره‌گیری از فرمولبندی ریاضی آغاز می‌کنیم و آن را تا نظریه‌های جدید ابرصوتی و مغناطوهیدرودینامیک تعمیم می‌دهیم.

۱-۲ مدل ریاضی

در مکانیک اجسام جامد صلب، معمولاً سؤال می‌شود که مکان ذره در فضا نسبت به زمان چیست؟ با دانستن جواب این سؤال، تمام سؤالات دیگر نظیر سرعت و شتاب را می‌توان جواب داد. اگر موقعیت بردار $\mathbf{r}$ مکان ذره را نشان دهد، آن‌گاه $\mathbf{r}(t)$ پارامتر مهمی است. سرعت و شتاب به‌سادگی عبارت‌اند از $d\mathbf{r}(t)/dt$ و $d^{۲}\mathbf{r}(t^{۲})/d$.

اما، در مطالعهٔ شاره با ذره سروکار نداریم، بلکه با پیوستار در ارتباط هستیم. در واقع، مجبور به ردیابی تک‌تک ذرات یا حتی قطره‌های کوچک شاره نیستیم. به‌جای آن، راحت‌تر است سؤال کنیم که: در نقطه‌ای از فضا (نسبت به یک دستگاه مختصات ثابت اختیاری)، سرعت، شتاب و خواص ترمودینامیکی ذره نسبت به زمان چیست؟ با گذشت زمان، شاره در هر نقطه از فضا دائماً با شارهٔ جدید دیگری مبادله می‌شود، به‌گونه‌ای که نمی‌توان هر یک از ذرات شاره را ردیابی کرد، بلکه سرنوشت شاره را در نقطه‌ای از فضا بدون توجه به مقدار جزئی شارهٔ موجود در هر زمان خاص می‌توان ردیابی کرد. چنین بیانی از شاره را تعریف اویلر می‌نامند، برخلاف تعریف لاگرانژ که هر یک از ذرات را، مانند دینامیک اجسام جامد، ردیابی می‌کند. این مسائل را به‌طور کامل در فصل ۳ بررسی خواهیم کرد.

در بالا، به واژهٔ پیوستار اشاره کردیم. این واژه از نظر شاره به چه معناست؟ فرض کنیم که فاصلهٔ بین ذرات شاره (یا مولکولها)، یا به بیان دقیقتر، مسافت آزاد میانگین بسیار کوچک است. منظور از «بسیار کوچک» در مقایسه با ابعاد فیزیکی است که در مسائل مکانیک شاره‌ها به‌کار می‌رود. در آئرودینامیک، ضخامت یک بال چند مرتبه بزرگتر از مسافت آزاد میانگین ذرات هوای گذرنده از روی سطح بال هواپیماست. بنابراین، فرض می‌کنیم که تمام عملیات محدودکنندهٔ ریاضی در حد معقولی در نظر گرفته می‌شوند و هر حجم شاره را می‌توان به‌طور پیوسته به حجمهای کوچکتر و کوچکتر تقسیم کرد تا آنجا که مشخصهٔ پیوستاری شاره حفظ شود. روشن است که سرانجام، این تقسیم کردنها متوقف خواهد شد، اما تا آنجا ادامه می‌دهیم که با حفظ مشخصهٔ شاره به مرز میکروسکوپی برسیم.

اما، اگر چنین شرایطی فراهم نباشد، همچون در گازهای بسیار رقیق که مسافت آزاد میانگین آنها از مرتبهٔ ابعاد فیزیکی مسئله است، آن‌گاه فرض پیوستاری نقص می‌شود و باید از روشهای میکروسکوپی همچون نظریهٔ جریانهای مولکولهای آزاد استفاده کرد. در اینجا نظریهٔ گازهای بسیار رقیق را در نظر نمی‌گیریم بلکه توجه خود را به پیوستار همگن و همسانگردی معطوف می‌کنیم که با روشهای ماکروسکوپی قابل بررسی باشند.

تعداد متغیرهای اصلی در مکانیک شاره‌ها ۵ تاست، که شامل سه مؤلفهٔ سرعت و دو خاصیت ترمودینامیکی است. هر یک از دو خاصیت ترمودینامیکی همچون فشار، دما، چگالی، آنتالپی، آنتروپی و غیره کافی است تا حالت شاره و بنابراین بقیهٔ خواص شاره را تعیین کند. میدان جریان شاره با مشخص شدن بردار سرعت $\mathbf{V}$ و دو خاصیت ترمودینامیکی برحسب مکان و زمان به‌دست می‌آید. بنابراین، به پنج معادلهٔ مستقل نیاز است. این معادلات معمولاً سه مؤلفهٔ معادلهٔ حرکت، یک معادلهٔ پیوستگی و یک معادلهٔ انرژی هستند. غالباً معادلهٔ حالت را نیز برای امکان نوشتن

معادلهٔ انرژی برحسب سه متغیر (دما، چگالی و فشار) به‌جای فقط دو متغیر، وارد می‌کنند. در این حالت، شش متغیر و شش معادله در اختیار داریم. در جریان متلاطم، مجهولات بیشتری با همان تعداد معادلات، ظاهر می‌شوند، که مانع فرمولبندی کامل نظری مسأله خواهد شد.

در شارهٔ تراکم‌ناپذیر به معادلهٔ انرژی نیاز نیست، زیرا چگالی را متغیری معلوم فرض می‌کنند و برای بیان کامل جریان شاره، تنها به فشار و سرعت نیاز خواهد بود. بدین ترتیب، دما جدا می‌شود، اما در صورت نیاز به این پارامتر، از معادلهٔ انرژی برای به‌دست آوردن آن باید استفاده کرد.

۱-۳ تعریفها

جریان شاره‌ها را می‌توان به روشهای مختلف طبقه‌بندی کرد. در اینجا، چند نوع مختلف شاره و رابطهٔ آنها با تجربیات و مشاهدات روزمره را بررسی می‌کنیم. نخست، به تعریف چند اصطلاح می‌پردازیم تا به زبان مشترکی برای بیان جریان شاره دست یابیم. در آینده تعریفهای دقیقتری خواهیم داشت، اما در حال حاضر به چند تعریف ساده و تا اندازه‌ای آموزنده می‌پردازیم.

فشار: فشار در شارهٔ ساکن (ایستا) به‌صورت نیروی فشاری عمود بر واحد سطح (تنش عمودی)، که بر روی سطح غوطه‌ور در درون شاره وارد شده است، تعریف می‌شود. فشار را می‌توان با نیروی وارد بر یک وجه مکعب واحد (مکعبی به ابعاد واحد)، که در درون شاره غوطه‌ور شده است، اندازه‌گیری کرد. تصور ما این است که این مکعب باعث اختلال شاره نمی‌شود، بنابراین فشار واقعی در هر نقطه در درون شاره معادل با نیروی وارد بر یک وجه مکعب تقسیم بر مساحت آن وجه خواهد بود، که در حد، سطح به سوی بینهایت کوچک می‌گراید. فشار در هر نقطه در درون شارهٔ ساکن همسانگرد است، یعنی نیروی وارد بر تمام وجه‌های مکعب، بدون توجه به جهت‌گیری مکعب در فضا، یکسان است. چنین فشاری همسانگرد را فشار هیدروستاتیکی می‌گویند. این فشاری است که در ترمودینامیک (قانون گازها) به کار می‌رود و یکی از خواص ترمودینامیکی است. اگر فشار از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر در درون شاره تغییر کند، نیروی فشاری خالص بر هر حجم ثابت شاره وارد می‌شود و با نیروی حجمی، همچون گرانش، باید خنثی شود، در غیر این‌صورت، شاره به حرکت در خواهد آمد و نیروی فشاری مزبور در شاره شتاب به‌وجود می‌آورد.

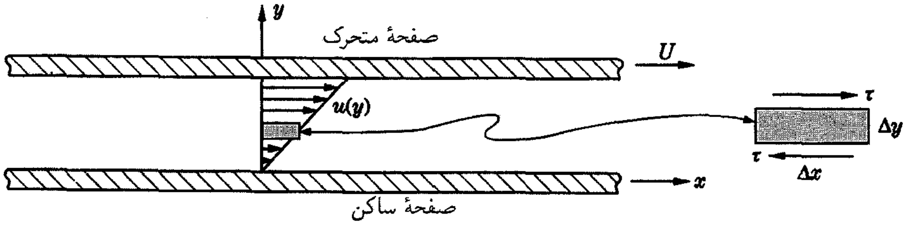
در وضعیت دینامیکی (هنگامی‌که شاره جابه‌جا می‌شود)، نه تنها نیروهای فشار در شاره به‌وجود خواهد آمد، بلکه نیروهای برشی یا تنشی نیز ایجاد خواهد شد. اما، فشار هنوز همسانگرد است و به همان صورت تعریف می‌شود، اما باید به شکل تنش عمودی بر سطحی اندازه‌گیری شود که همراه شاره به‌طور موضعی حرکت خواهد کرد. گاهی در تعریف فشار در گازهای متحرک به مشکل برمی‌خوریم، زیرا تنشهای عمود بر وجه مکعب در تمام جهتها یکسان نیستند. البته، هنوز می‌توان فشار هیدروستاتیکی همسانگرد داشت، ولی نیروهای کوچک دیگری در جهتهای خاص، به‌علت اثرهای گران‌روی شاره، ایجاد می‌شوند. این مفاهیم را در دو فصل آینده با جزئیات بیشتر بحث خواهیم کرد.

گران‌روی، اصطکاک و جریان ایده‌آل: تمام شاره‌ها گران‌روی دارند که باعث اصطکاک می‌شود. اهمیت این اصطکاک در شرایط فیزیکی به نوع شاره و پیکربندی فیزیکی یا الگوی جریان بستگی دارد. اگر اصطکاک، چشم‌پوشیدنی باشد، جریان را ایده‌آل می‌گویند. اصطکاک ممکن است ناشی از گران‌روی یا تلاطم جریان شاره باشد.

به‌طور کلی، گران‌روی معیار مقاومت شاره در مقابل برش در شارهٔ متحرک است (به یاد داریم که شارهٔ ساکن نمی‌تواند در مقابل برش، همچون جامد، مقاومت کند). دو صفحهٔ موازی بزرگ همچون شکل ۱-۱ را در نظر می‌گیریم که در حال حرکت نسبی پایا هستند. سرعت شاره در فاصلهٔ صفحات دارای نیمرخ خطی است (البته، به‌شرطی که در طول این صفحات در جهت حرکت گرادیان فشار وجود نداشته باشد). هیچ لغزشی در بین شاره و صفحات وجود ندارد، یعنی در فصل مشترک بین شاره و جامد سرعت شاره همان سرعت جامد است. اگر حجم کوچکی از شاره را مانند شکل ۱-۱ در نظر بگیریم، تنش برشی τ در بالا را (که در این حالت مقدار عددی آن برابر تنش برشی در پایین است) می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1\text{-}1)$$

که μ گران‌روی، ثابت تناسب بین تنش برشی و گرادیان سرعت است. یکاهای μ در دستگاه یکاهای انگلیسی برابر $\mathrm{lb_f.s/ft^2}$ و در دستگاه SI برابر



شکل ۱-۱ حرکت شاره بین دو صفحهٔ موازی برای نمایش گران‌روی. سرعت u در طول مجرا خطی، در پایین صفر، و در بالا U است.تنش برشی را در سمت راست می‌توان دید.

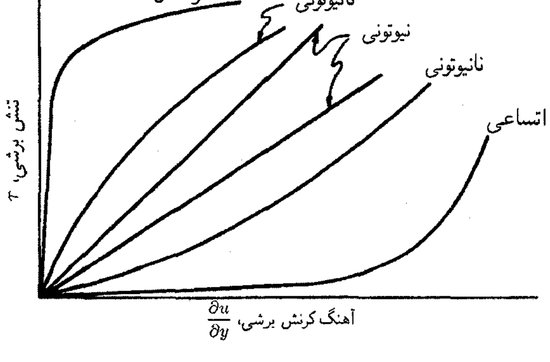
$\mathrm{N.s/m^2}$ است. غالباً گران‌روی را با یکای پواز نیز اندازه‌گیری می‌کنند. یک پواز برابر $1\mathrm{dyne.s/cm^2}$ است. نسبت گران‌روی به چگالی جرمی ρ را گران‌روی سینماتیک می‌گویند و با v نشان می‌دهند.

گران‌روی مایع تابع دماست و با افزایش دما کاهش می‌یابد (همان‌گونه که برای روشن شدن خودرو در هوای سرد به استارت بیشتری نیاز است)، اما گران‌روی گازها با افزایش دما افزایش می‌یابد. گران‌روی شاره‌ها نیز به فشار بستگی دارد، اما در مسائل مهندسی این وابستگی در مقایسه با تغییرات دما از اهمیت کمتری برخوردار است.

چنین رابطهٔ ساده‌ای بین تنش برشی و گرادیان سرعت معروف به رابطهٔ نیوتونی است. به‌طور کلی، شاره‌هایی را که از این رابطه پیروی می‌کنند شارهٔ نیوتونی می‌نامند. (رابطهٔ کلی‌تر شارهٔ نیوتونی را که شامل گرادیانهای سرعت در سه بعد است، بعداً ارائه خواهیم کرد.)

هر چند رابطهٔ خطی نیوتونی تقریبی است ولی با کمال تعجب می‌بینیم که برای شاره‌های مختلف نتیجهٔ خوبی به‌دست می‌دهد. اما برای بعضی از مواد، تنش برشی نه تنها تابع گرادیان سرعت (آهنگ کرنش برشی) بلکه تابع نیروی کرنش معمولی نیز است. چنین موادی را گران‌رو-کشسان می‌نامند. حتی شاره‌های گران‌روی ساده که تنش برشی آنها فقط به گرادیان سرعت بستگی دارد، ممکن است نیوتونی نباشند و در واقع رابطهٔ غیرخطی پیچیده‌ای بین تنش برشی و آهنگ کرنش وجود دارد. اگر رابطهٔ آهنگ تنش-کرنش شاره به کار اولیه یا کرنش وارده بستگی داشته باشد، شاره را تیکسوتروپیک می‌نامند (مانند مرکب چاپگر).

یکی دیگر از انواع شاره‌ها، شاره‌ای است که رفتار مومسان دارد و با تنش تسلیم ظاهری مشخص می‌شود، یعنی شاره تا نقطهٔ تسلیم دارای رفتار جامد است؛ سپس رفتار آن همانند شارهٔ گران‌رو می‌شود. بعضی از گریسها و روغنهای خمیری دارای چنین رفتاری هستند. در مقابل این نوع شاره‌های مومسان، شاره‌های اتساعی هستند که در آهنگهای کرنش پایین با گران‌روی کم به‌آسانی جاری می‌شوند، اما با افزایش آهنگ کرنش به‌صورت جامد درمی‌آیند (چنین مواردی را ماسهٔ روان می‌نامند). شکل ۱-۲ رفتار شاره‌های مختلف را به‌صورت نمودار نشان می‌دهد.



شکل ۱-۲ انواع مختلف شاره‌های گران‌رو و مومسان.

آب، هوا و گازها اساساً نیوتونی‌اند، اما در مکانیک شاره‌ها بررسی شاره‌هایی که گران‌رو ـ کشسان یا نانیوتونی هستند، از اهمیت زیادی برخوردارند، هر چند هنوز به‌خوبی شناخته نشده‌اند و پی به ارزش آنها برده نشده است.

بدین‌ترتیب، اصطکاک یا تنشهای درونی را می‌توان با گران‌روی در شاره ایجاد کرد. وانگهی، تلاطم ممکن است باعث ایجاد تنشهای برشی در شاره شود. در بخش بعد دربارهٔ تلاطم بحث خواهیم کرد.

اگر شاره‌ای گران‌روی نداشته باشد و به‌طور متلاطم جریان نیابد، آن را شارهٔ ایده‌آل، و یا به‌طور صحیحتر جریان مورد نظر را ایده‌آل می‌گویند. بدین‌ترتیب، جریان ایده‌آل دارای اصطکاک درونی نیست و بنابراین اتلاف یا افت درونی ندارد. درواقع هیچ شاره‌ای ایده‌آل واقعی نیست، اما بعضی از شاره‌ها، حداقل در نواحی خاصی از جریان و تحت شرایط خاص نزدیک به حالت ایده‌آل می‌شوند و آنها را برای تحلیل به‌صورت ایده‌آل در نظر می‌گیرند. به‌عنوان مثال، جریان هوا بر روی اجسام (آئرودینامیک)، به‌جز در لایه‌ای نازک در مجاورت بال یا سطح که لایهٔ مرزی نامیده می‌شود، جریانی ایده‌آل است. همان‌گونه که خواهیم دید، جریانهای واقعی شاره را بهتر است به نواحی‌مختلف تقسیم کرد و هر یک را ایده‌آل، گران‌رو یا متلاطم در نظر گرفت.

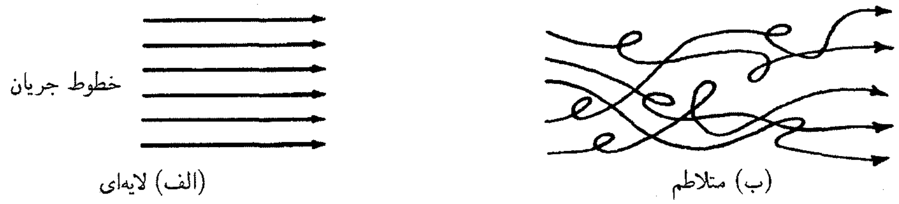
جریان لایه‌ای و جریان متلاطم: اصطلاحات جریان لایه‌ای و جریان کاملاً گران‌رو را به‌طور مترادف به کار می‌برند و به‌معنی آن است که شاره، بر خلاف جریان متلاطم که دارای مؤلفه‌های سرعتی با تغییرات تلاطمی کاتوره‌ای و تأثیرگذار بر روی مقادیر میانگین است، به طور ورقه‌ای یا لایه‌ای جریان دارد (شکل ۱-۳). جریان باریک رنگ یا جوهری که به درون جریانی لایه‌ای تزریق می‌شود،نوار جریان باریکی به‌وجود می‌آورد که همیشه حاوی همان ذرات شاره است. اما، در جریان متلاطم خط رنگ به سرعت به‌هم می‌ریزد و در حین جاری شدن شاره با آن آمیخته می‌شود؛ در این حالت، خطوط و ابرهای فراوانی را می‌بینیم که، با جاری شدن شاره، به‌سرعت گسترده و پخش می‌شوند. خروج مایع غلیظ از دهانهٔ بطری مثالی واضح از جریان لایه‌ای است.

چه چیزی نوع جریان لایه‌ای یا متلاطم را مشخص می‌کند؟ در هر شارهٔ مفروض سرعت و شکل یا اندازهٔ مجرا نوع جریان را مشخص می‌کنند. جریان شاره با افزایش سرعت در حین فرایند انتقال از لایه‌ای به متلاطم تغییر می‌کند. در طبیعت، هر دو نوع جریان وجود دارد، اما به نظر می‌رسد جریان متلاطم پیشامدی عادی‌تر است.

مثال ساده‌ای از این انتقال را می‌توان در بالا رفتن دود سیگار یا دودکش مشاهده کرد. دود تا مسافتی به شکل لایه‌ای بالا می‌رود و سپس به‌طور ناگهانی در هم‌برهم می‌شود و به‌صورت متلاطم در می‌آید و ستون دود به سرعت پهن و پخش می‌شود. تلاطم شاره به عمل پخش دود کمک می‌کند و باعث می‌شود جریانی آشفته شکل بگیرد.

اثرهای گران‌روی هنوز در جریان متلاطم وجود دارد، اما معمولاً تحت تأثیر تنشهای برشی تلاطمی حاکم قرار می‌گیرد.

کشش سطحی: اصطلاح کشش سطحی معمولاً برای مشخص‌کردن تنش ظاهری در لایهٔ سطحی مایع به‌کار می‌رود. این لایه شبیه پوسته‌ای تنیده عمل می‌کند و باعث ایجاد اختلاف فشار در سطح خمیدهٔ مایع می‌شود (که فصل مشترک هوا ـ مایع است). در واقع، کشش سطحی، انرژی مربوط به هر نوع فصل مشترک شاره ـ شاره است و متداولترین نوع آن هوا ـ مایع خواهد بود. چون سطح مایع شبیه پوسته عمل می‌کند، از آنجا می‌فهمیم که چرا سطح مایع در درون لولهٔ مویین مقعر است، و چرا قطرات باران کم و بیش کروی هستند.



شکل ۱-۳ جریان لایه‌ای و متلاطم. خطها مسیر ذرات را نشان می‌دهند.

در امتداد سطح مشترک شاره، اختلاف فشار Δp با کشش سطحی T (نیرو بر واحد سطح) خنثی می‌شود، در هر نقطه از سطح مشترک، خمیدگی سطح با دو شعاع R_1 و R_2 مشخص می‌شود (در هر دو صفحهٔ متعامد، هر دو بر سطح عمودند) نتیجه عبارت است از $\Delta p = T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. به کمک روابط هندسی معمول می‌توان شعاعهای خمیدگی را برحسب معادلهٔ سطح بیان کرد.

جریان تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر: شاره‌ها را معمولاً به دو گروه تقسیم می‌کنند ــگازها و مایعات. گازها تراکم‌پذیرند و چگالی آنها به‌آسانی برحسب دما و فشار تغییر می‌کند. از سوی دیگر، مایعات به سختی متراکم می‌شوند و در بیشتر مسائل آنها را تراکم‌ناپذیر می‌پندارند. تنها در شرایطی چون انتشار صوت در مایعات به‌فرض تراکم‌پذیری مایعات نیاز است.

چگالی شاره یکی از خاصیتهای ترمودینامیکی است که به‌حالت شاره بستگی دارد چگالی (ρ) را بهتر است برحسب تابع فشار و دما بیان کرد. چنین رابطه‌ای که ممکن است جنبهٔ پدیده‌شناسی داشته، یا با توجه به خواص میکروسکوپی به‌دست آمده باشد، معروف به معادلهٔ حالت است. برای گازهای کامل معادلهٔ حالت را می‌توان به‌صورت $p = \rho RT$ بیان کرد که R ثابت عمومی گازهاست. معادلات پیچیده‌تری برای گازهای واقعی به‌کار می‌رود که رفتار آنها متفاوت از رفتار گازهای کامل است. وابستگی چگالی مایع به دما، درست مانند جامد، با ضریب انبساط بیان می‌شود و وابستگی فشاری آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$dp = \beta\,\frac{d\rho}{\rho} \tag{۲-۱}$$

که β ضریب تراکم حجمی است. ضریب تراکم حجمی آب، $۳ \times ۱۰^5\,\text{psi}$ است، به‌گونه‌ای که برای تغییر جزئی در چگالی به فشار بسیار زیادی نیاز است. (برای تراکم بی‌درروی هوای جو β حدود $۲۰\,\text{psi}$ است.) بدین‌ترتیب، برای بیشتر کاربردها، مایعات را تراکم‌ناپذیر در نظر می‌گیرند. در واقع، تحت شرایط خاص همراه با تغییرات جزئی فشار، گازها را می‌توان تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت. (حالت آئرودینامیک فروصوتی که در اعداد ماخ پایین، هوا را تراکم‌ناپذیر فرض می‌کنند.)

جریانهای فروصوتی و فراصوتی: در جریانهای تراکم‌پذیر تفاوت فاحشی بین جریانهایی که سرعتهای کمتر از صوت دارند (جریان فروصوتی) و جریانهایی که سرعتهای بالاتر از صوت دارند (جریان فراصوتی) وجود دارد. (سرعت صوت در هوا در شرایط متعارف $۳۳۰\,\text{m/s}$ است.) تفاوتهای بین جریانهای فروصوتی و فراصوتی را بعداً یادآور خواهیم شد ولی باید به یاد داشته باشیم که موج ضربه‌ای زمانی ایجاد می‌شود که سرعت فراصوتی باشد.

عدد ماخ M معیاری از سرعت نسبی است و عبارت است از سرعت شاره به سرعت موضعی صوت

$$M = \frac{V}{a} \tag{۳-۱}$$

که V سرعت شاره و a سرعت موضعی صوت است. هنگامی که $M < ۱$، جریان فروصوتی و هنگامی‌که $M > ۱$ جریان فراصوتی داریم. برای جریانهای موجود در پیرامون اجسام که M کوچکتر از ۰٫۳ است، جریان را می‌توان تقریباً تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت. جریان گذر صوتی زمانی ایجاد می‌شود که بر روی قسمتی از بدنه (مثلاً، هواپیما یا موشک) شاره با سرعت $M < ۱$ جریان یابد و در قسمت دیگر همان جسم شاره با سرعت $M > ۱$ جریان داشته باشد، بنابراین در نقطه‌ای بر روی بدنه، خواهیم داشت $M = ۱$. چگونه ممکن است بر روی یک جسم و در یک زمان $M > ۱$ و $M < ۱$ باشد؟ پاسخ این است که سرعت صوت و سرعت شاره بر روی جسم تغییر می‌کند. به طور کلی، دما بر روی جسم تغییر می‌کند و در نتیجه سرعت صوت باید تغییر کند.

جریان پایا: منظور از جریان پایا این است که مؤلفه‌های سرعت و خواص ترمودینامیکی در هر نقطه از فضا نسبت به زمان تغییر نکند، در واقع، اگر تک‌تک ذرات شاره را تعقیب کنیم، می‌بینیم که خواص و سرعت آنها در سرتاسر جریان تغییر می‌کند. اما، این موضوع مهم نیست. در مکانیک شاره‌ها همیشه این سؤال مطرح می‌شود؛ در هر نقطه از فضای شاره بدون توجه به اینکه چه ذره‌ای در هر لحظه درکجا قرار دارد، چه فرایندی رخ می‌دهد؟ با این تصور، جریان پایا بدین معنی است که هیچ تغییری در هر نقطه نسبت به زمان رخ نمی‌دهد. تصویر متحرک و یا لحظه‌ای نشان می‌دهد

که همه چیز مثل هم است. نکتهٔ مهم درک این واقعیت است که شاره ممکن است در یک نقطه از فضای جریان، حتی شتاب داشته باشد. ذره شاره نیز ممکن است در امتداد جریان حرکت کند اما در هر نقطهٔ معین از فضا رفتار ذره درست شبیه ذرهٔ دیگری است که در آن مکان بوده است.

انواع یا گروههای جریان: دربارهٔ تعریفهای اصلی به‌کار رفته در جریان شاره‌ها قبلاً بحث کرده‌ایم. اکنون، می‌خواهیم ببینیم چه نوع جریانهایی در شرایط فیزیکی واقعی وجود دارند و سپس آنها را طبقه‌بندی کنیم. خواهیم دید که این طبقه‌بندی می‌تواند شامل جریان لایه‌ای تراکم‌ناپذیر، جریان فراصوتی ایده‌آل تراکم‌پذیر، جریان لایه‌ای تراکم‌پذیر، جریان متلاطم تراکم‌ناپذیر و جز آن باشد.

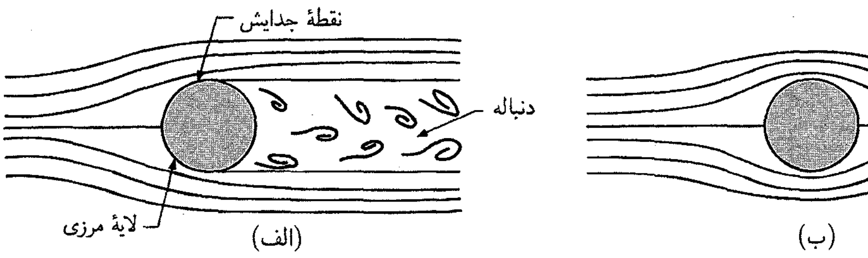
۱-۴ طبقه‌بندیهای فیزیکی و انواع جریانها

راههای فراوانی برای طبقه‌بندی جریان شاره‌ها ــ بر پایهٔ ساختار جریان که در بالا اشاره شد، یا پایهٔ وضعیت فیزیکی یا پیکربندی شاره وجود دارد ــ اکنون به بعضی از این طبقه‌بندیها اشاره می‌کنیم.

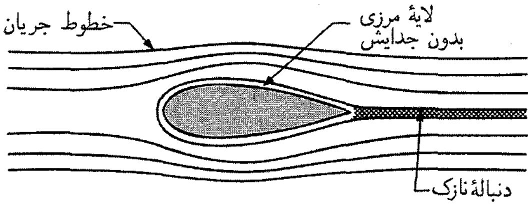
اصولاً دو نوع پیکربندی شاره یا موقعیت مکانی جریان وجود دارد، جریان درونی و جریان بیرونی. منظور از جریان درونی، جریان در درون لوله، کانال و نظایر آن است، به‌گونه‌ای که جریان در درون سازه محصور است. جریان بیرونی جریان شاره بر روی اجسام، همچون در آئرودینامیک است. اکنون به بررسی کاملتر این جریانها می‌پردازیم.

جریان بیرونی: ناحیهٔ جریان را در اطراف هر جسم می‌توان به سه قسمت تقسیم کرد. جریان در فاصله‌های دور از جسم اساساً ایده‌آل و بدون اصطکاک است. در نزدیکی جسم، جریان لایهٔ برشی ایجاد می‌کند (زیرا سرعت جریان نسبت به سطح جسم باید صفر باشد)، که در این حالت نقش گران‌روی یا تلاطم اهمیت می‌یابد. این لایهٔ گران‌رو، را لایهٔ مرزی می‌نامند. لایهٔ مرزی ممکن است دارای جریان لایه‌ای یا متلاطم باشد. در پشت جسم دنباله‌ای در شاره (ناحیهٔ سوم کاملاً مشخص) به‌وجود می‌آید که معمولاً ناحیه‌ای با شدت تلاطم بالا و فشار پایین [از این‌رو، پسای (پس‌کشی) ناشی از این دنباله] است. شکل ۱-۴ جریان موجود بر روی استوانه را همراه با دنباله نشان می‌دهد. این دنباله به‌علت جداشدن لایهٔ مرزی از سطح جسم ایجاد می‌شود. در واقع، ناحیهٔ جریان ایده‌آل موجود در پشت جسم و در خارج از دنباله و خود ناحیهٔ دنباله، به‌وسیلهٔ لایهٔ برشی مشخص شده است (شکل ۱-۴ الف).

لایهٔ مرزی به وجود آمده به‌علت گران‌روی شاره، عامل ایجاد دنباله است. اگر شاره هیچ‌گونه گران‌روی نمی‌داشت، به‌گونه‌ای که به مفهوم مطلق بدون اصطکاک بود، آن‌گاه جدایش و دنباله وجود نداشت. اگر دنباله به‌وجود نیاید، شکل جریان شاره (که ایده‌آل است) از سر تا پشت استوانه متقارن خواهد بود و فشار در جلو و پشت استوانه یکسان است و هیچ‌گونه پسایی بر روی جسمی که وارد شاره می‌شود، به‌وجود نمی‌آید. عدم وجود پسا، مغایر با شواهد تجربی است و می‌دانیم که تمام شاره‌ها دارای اصطکاک درونی هستند. در روزهای نخستین پیدایش علم مکانیک شاره‌ها، تصور می‌شد گران‌روی ناچیز است و جریان از نظر ریاضی در همه جا ایده‌آل است و بنابراین پسایی که نظریه پیش‌بینی می‌کرد، وجود ندارد (شکل ۱-۴ (ب)). از آنجا که این نتیجه‌گیری مغایر با تجربه بود آن را پارادوکس دالامبر نامیدند. این موضوع تا زمانی‌که پرانتل (یک آلمانی



شکل ۱-۴ (الف) لایهٔ مرزی و جدایش شاره بر روی استوانه. (ب) جریان ایده‌آل در صورت عدم جدایش.



شکل ۱-۵ خطوط جریان اطراف جسم. باریک شدن انتهای جسم مانع جدایش لایهٔ مرزی می‌شود.

متخصص در دینامیک شاره‌ها) مفهوم واقعی لایهٔ مرزی را در اوایل قرن بیستم ارائه کرد، به قوت خود باقی ماند تا اینکه در این زمان آشکار شد که هیچ‌گونه پارادوکسی وجود ندارد، بلکه هر مقدار جزئی گران‌روی باعث ایجاد دنباله، و سپس پسا می‌شود.

اگر جسمی آئرودینامیکی باشد (شکل ۱-۵)، یعنی لبهٔ فرار آن به‌تدریج به‌صورت پربندهای صاف درآید، هیچ‌گونه جدایش به‌وجود نخواهد آمد و لایهٔ مرزی جسم را در بر می‌گیرد. آئرودینامیکی بودن پسا (پس‌کشی) را کاملاً کاهش می‌دهد و بیشتر اجسام آئرودینامیک (بالهای هواپیما و...) از این نوع‌اند. در چنین حالتهایی جریان در اطراف جسم به‌جز در لایهٔ مرزی و دنبالهٔ نازک ایده‌آل است. همان‌گونه که خواهیم دید، در این حالت لایهٔ مرزی نسبتاً باریک است و شکل جریان، به‌جز برای محاسبهٔ پسای اصطکاکی، با جریانی ایده‌آل بیان می‌شود. در آئرودینامیک فروصوتی، نیروی برآ (بالابر) با جریان ایده‌آل پتانسیل، و پسا اساساً به‌وسیلهٔ لایهٔ مرزی تعیین می‌شود.

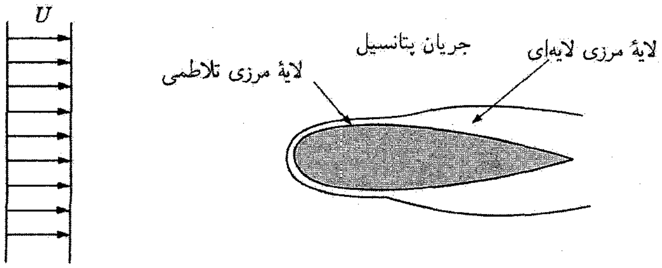
لایهٔ مرزی برحسب پارامترهای شاره ممکن است لایه‌ای یا متلاطم باشد. در بیشتر حالتهای علمی، لایهٔ مرزی در طول جسم از جریان آرام به متلاطم تبدیل می‌شود. گذار به جریان متلاطم معمولاً جدایش را به تأخیر می‌اندازد، اما برای جسمهای نسبتاً آئرودینامیکی جدایش ممکن است مشخص نباشد و لایهٔ مرزی متلاطم همچون شکل ۱-۶، وارد ناحیهٔ دنباله شده باشد.

اگر سرعت جریان کم باشد، آنگاه تغییرات چگالی جزئی است و جریان را می‌توان تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت. (این مفهوم را در فصل ۷ توضیح خواهیم داد.) پس جریان مطابق شکل ۱-۵ یا ۱-۶ است.

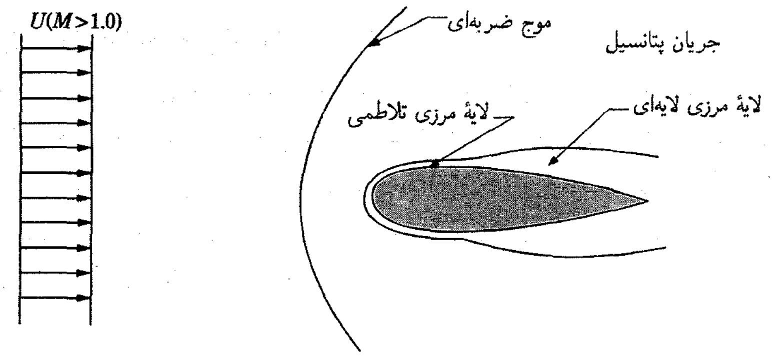
اگر سرعت شاره تا آنجا افزایش یابد که عدد ماخ بزرگتر از ۰٫۳ بشود، آنگاه تغییرات چگالی مهم خواهد شد، اما شکل کلی جریان مطابق شکلهای قبل است. به هر حال، هنگامی‌که عدد ماخ بزرگتر از ۱ شود، موج ضربه‌ای به‌وجود می‌آید و جریان همانند شکل ۱-۷ می‌شود.

اگر عدد ماخ باز هم افزایش یابد و بیشتر از ۶ شود، آنگاه تجزیه و یونش رخ می‌دهد.

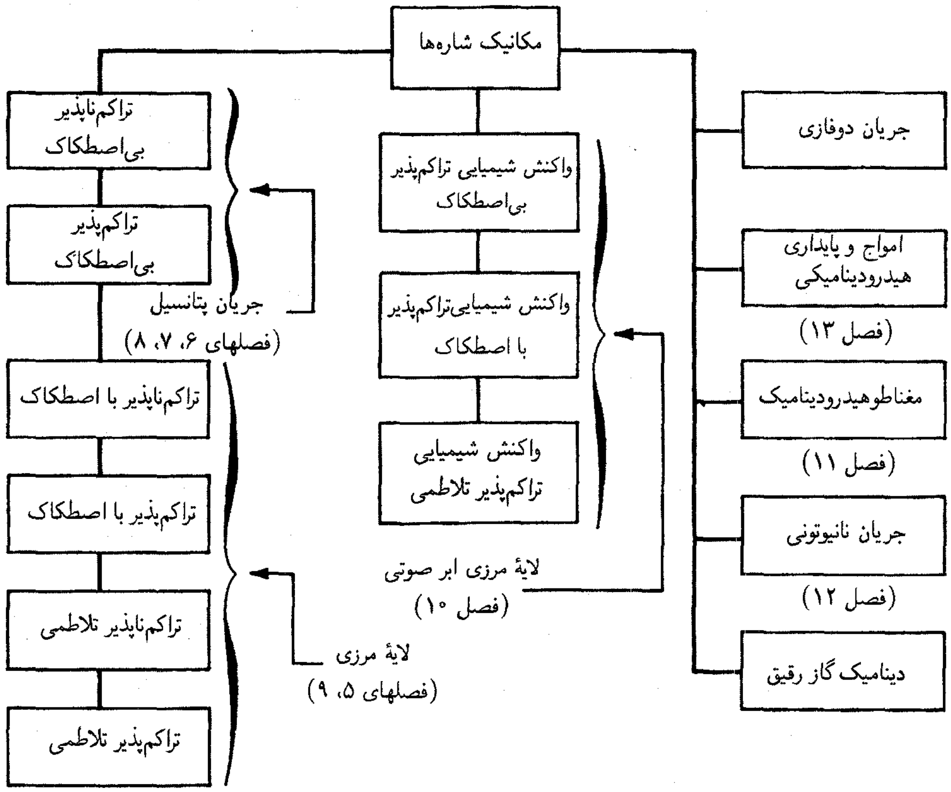
جریان درونی: جریان شاره در درون لوله‌ها، کانالها، شیپوره‌ها و ماشین‌آلات حاوی شاره‌ها، به‌وسیلهٔ دیوارها محصور می‌شود و معمولاً جریان درونی نامیده می‌شود. این جریان را در قسمت اصلی مجرا برای گازها تقریباً ایده‌آل در نظر می‌گیرند، اما با وجود این بر روی دیواره‌ها لایه‌ای مرزی (معمولاً متلاطم) به‌وجود می‌آید. لایهٔ مرزی در هر دو نوع جریان متلاطم و گران‌رو در پایین دست جریان ضخیمتر می‌شود و سرانجام تمام مجرا یا لوله را فرا می‌گیرد.



شکل ۱-۶ جریان فروصوتی، با انتقال لایهٔ مرزی بدون جدایش. در ضخامت لایهٔ مرزی اغراق شده است.



شکل ۱-۷ جریان فراصوتی در اطراف جسم.



شکل ۱-۸ تقسیم‌بندی نمونه‌وار مکانیک شاره‌ها.

اکنون، می‌توان جریان را برحسب نوع آن طبقه‌بندی کرد. شکل ۱-۸، از سمت چپ به راست، ساده‌ترین تا پیچیده‌ترین نوع جریان را نشان می‌دهد. این نوع تقسیم‌بندی کاملاً اختیاری است و انواع مختلف جریانهایی را نشان می‌دهد که معمولاً با روشهای ریاضی خاص مشخص می‌شوند.

روش دیگر طبقه‌بندی جریان که درک آن تا اندازه‌ای ساده‌تر است، به موقعیت فیزیکی جریان مربوط می‌شود. در این کتاب سعی شده است که، به‌جای تقسیم‌بندی کتاب بر حسب کاربردهای مختلف، نتایج هر فصل را به کاربردهای عملی آن مربوط کنیم. در اغلب کتابهای درسی آمیزه‌ای از این تقسیم‌بندیها وجود دارد. این کتاب را می‌توانستیم به همان شکل، مثلاً توربوماشینها، جریان در کانالهای باز، آئرودینامیک، امواج و آکوستیک فصل‌بندی کنیم. بسیاری از این کاربردها در سراسر این کتاب بحث خواهد شد و در قالب مسائل حل شده خواهد آمد.

۱-۵ حرکت شاره چگونه توصیف می‌شود؟

برای بیان حرکت شاره معمولاً این سؤال مطرح می‌شود: خواص ترمودینامیکی و مکانیکی شاره چیست؟ بردار سرعت و شتاب شاره در هر مکان خاص در فضا و در هر زمان خاص چیست؟ معمولاً سعی نمی‌شود که تک‌تک ذرات شاره را ردیابی کنند. این روش مبتنی بر تعیین موقعیت نقطه در فضا بر روی دستگاه مختصات، درست شبیه تعیین مختصات بر روی نقشه، است. بدین ترتیب، می‌توان آنچه را که در آن نقطه نسبت به زمان رخ می‌دهد، بیان کرد. ذرات مختلف شاره ممکن است به‌طور پیوسته از یک نقطه گذر کنند، اما اگر تمام ذرات همین عمل را انجام دهند و دارای یک خاصیت باشند، می‌گوییم که جریان در آن نقطه پایاست. (ذرات شاره ممکن است هر یک دارای سرعت و شتاب معینی باشند، اما این کمیتها در جریان پایا ثابت هستند.)

در مکانیک شاره‌ها معمولاً از مختصات فضایی که معرف «مؤلفه‌های میدان» یا مکان $\mathbf{r}$ در فضاست، استفاده می‌کنند. مشتقهای مؤلفه نسبت به زمان نظیر dx/dt بی‌معنی هستند. بدین ترتیب، مسئلهٔ اصلی در مکانیک شاره‌ها یافتن مؤلفهٔ سرعت (و خواص دیگر) برحسب تابع مکان $\mathbf{r}$ و زمان t است. چنین دستگاه مختصاتی معروف به دستگاه اویلری است که به‌نام ریاضی‌دان معروف قرن ۱۸، ل. اویلر، نامگذاری شده است.

این نوع دستگاه مختصات بر خلاف دستگاه مختصات لاگرانژی است که در مکانیک اجسام صلب (و گاهی در مکانیک شاره‌ها برای مقاصد خاصی) به‌کار می‌رود. این دستگاه، مکان ذره را با $\mathbf{r}(t)$ نشان می‌دهد. این مختصات مکان نقطه را برحسب زمان مشخص می‌کند. سرعت و شتاب به ترتیب عبارت‌اند از $d\mathbf{r}/dt$ و $d^2\mathbf{r}/dt^2$.

روشن است که در دستگاه مختصات اویلری مشتق $\mathbf{r}$ بی‌معنی است و برای بیان سرعت و شتاب باید از روش خاصی استفاده کرد. این روش را در فصل ۳ بررسی خواهیم کرد. باید به خاطر داشت که سرعت و شتاب بردار هستند و، صرف‌نظر از چگونگی نمایش آنها، در هر دو دستگاه مختصات اویلری و لاگرانژی یکسان هستند.

این نکته که شاره در «جریان پایا» دارای شتاب است، برای دانشجویان مبتدی گاهی گیج‌کننده خواهد بود. باید به یاد داشت که جریان پایا به رویدادهایی اشاره دارد که در نقطهٔ ثابتی در فضا (نسبت به زمان) رخ می‌دهد. اگر کسی سوار بر ذرهٔ شارهٔ متحرکی باشد، تغییرات شاره را نسبت به زمان، حتی در جریان پایا نیز مشاهده می‌کند. به‌طور خلاصه، در جریان پایا ذرات دارای رفتار و خواص یکسان در حین عبور از هر موقعیت مفروض در میدان جریان (یعنی از هر نقطه مفروض در فضا) هستند.

۱-۶ یکاها در مکانیک شاره‌ها

در این کتاب قانونهای مکانیک شاره‌ها را به شکل معادلات ریاضی بیان خواهیم کرد. این معادلات به یکاهای به‌کار رفته بستگی ندارند. در حال حاضر، در سراسر دنیا دو دسته یکا به‌طور گسترده به‌کار می‌رود: سیستم مهندسی انگلیسی و سیستم متریک بین‌المللی SI. سیستم SI در اغلب کشورهای دنیا پذیرفته شده و جایگزین سیستم انگلیسی شده است، اما در بسیاری از کشورها هنوز از سیستم انگلیسی استفاده می‌شود و ممکن است تا چندین سال نیز ادامه یابد. در هر حال، آشنایی با هر دو سیستم ضروری است. در پیوست بحث کاملتری دربارهٔ یکاها ارائه کرده‌ایم، اما در زیر مقدمهٔ کوتاهی در این‌باره آورده‌ایم.

در هر سیستم یکاهای مفروض، با دو روش می‌توان مجموعهٔ یکاهای سازگار با مکانیک شاره‌ها را به‌دست آورد. با استفاده از ابعاد اصلی M، L، T و θ (جرم، طول، زمان و دما) یا F، L، T و θ (نیرو، طول، زمان و دما) می‌توان ابعاد دیگر را برحسب این ابعاد اصلی به کمک تعریفها و قانونهای مختلف بیان کرد. (اگر پدیده‌های الکتریکی مورد نظر باشند باید بعد الکتریکی دلخواه دیگری، مثلاً بار الکتریکی را انتخاب کرد.)

انتخاب هر یک از ابعاد اصلی M، L، T و θ یا F، T، L و θ اختیاری است، اما باید به دقت از قانون حرکت نیوتونی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ پیروی کنند. به‌طور مثال، اگر یکای نیرو را پوند نیرو ($\mathrm{lb_f}$) انتخاب کنیم، آنگاه یکای جرم، مقدار ماده‌ای است که با اعمال نیروی یک پوند نیرو ($\mathrm{lb_f}$) شتابی برابر $\mathrm{ft/s^2}$، به‌دست می‌دهد. این یکای جرم را اسلاگ می‌گویند. در سیستم SI، یکای نیرو نیوتون (N) و یکای جرم متناظر کیلوگرم (kg) است. شتابی که یک نیوتون (N) به یک کیلوگرم (kg) می‌دهد برابر با یک متر بر مجذور ثانیه ($\mathrm{m/s^2}$) است.

یک اسلاگ در میدان گرانشی زمین شتابی برابر $g\ \mathrm{ft/s^2}$ شتاب ایجاد می‌کند (که g شتاب مربوط به گرانی‌است). بنابراین، نیروی گرانشی (بر روی سطح زمین در سطح تراز دریا) وارد بر یک اسلاگ برابر $\mathrm{lb_f}$ ۳۲٫۱۷۴ است. یک اسلاگ در سطح زمین ۳۲٫۱۷۴ پوند وزن دارد. جرم یک کیلوگرم در سطح زمین تحت نیروی g نیوتون قرار دارد که g در سطح تراز دریا برابر $\mathrm{m/s^2}$ ۹٫۸۰۷ است.

با روشهای دیگری مستقل از قانون نیوتون می‌توان جرم و نیرو را مرتبط کرد. یک پوند جرم ($\mathrm{lb_m}$) مقدار جرمی است که اگر در سطح اسمی زمین آویزان شود با نیرویی برابر یک پوند نیرو ($\mathrm{lb_f}$) به طرف زمین جذب می‌شود. به همین ترتیب در یکاهای SI یک کیلوگرم (kg) جرم مقدار ماده‌ای است که با نیروی یک کیلوگرم نیرو ($\mathrm{kg_f}$) جذب می‌شود. برای اینکه شرایط قانون دوم نیوتون و همگنی ابعادی برقرار باشد، باید ضریب تبدیل g_c به‌صورت $\mathbf{F} = m\mathbf{a}/g_c$ به‌کار رود (F برحسب $\mathrm{lb_f}$ و m بر حسب $\mathrm{lb_m}$ یا F برحسب $\mathrm{kg_f}$ و m برحسب $\mathrm{kg_m}$ است) که g_c از لحاظ عددی برابر مقدار g در سطح اسمی زمین در کنار دریا است. بنابراین

$$g_c = ۳۲٫۱۷۴ \frac{\mathrm{lb_m}}{\mathrm{lb_f}} \frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s^2}} \qquad \text{در یکاهای انگلیسی}$$
$$g_c = ۹٫۸۰۷ \frac{\mathrm{kg_m}}{\mathrm{kg_f}} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \qquad \text{در یکاهای SI}$$

در این کتاب از هر دو سیستم مهندسی انگلیسی و SI استفاده می‌شود، که در جدول زیر آمده است. لازم به یادآوری است که اگر مجبور به استفاده از یکایی شدیم که جرم برحسب $\mathrm{lb_m}$ و نیرو برحسب $\mathrm{lb_f}$ باشد باید از ضریب تبدیل g_c در تمام معادلات دینامیکی استفاده کنیم. این نوع دستگاه یکاها اغلب در ابتدا گیج‌کننده است، اما با بیان جرم برحسب اسلاگ و کیلوگرم از ضریب تبدیل g_c پرهیز می‌کنیم و به هیچ وجه در روابط ظاهر نمی‌شود. در به‌کارگیری از سیستم یکاها در این کتاب مقدار g معمولاً همان شتاب گرانی موضعی است. تبدیل یک $\mathrm{lb_m}$ به اسلاگ به‌طور ساده برابر ۳۲٫۱۷۴ پوند جرمی است، به‌گونه‌ای‌که مقدار عددی g_c ضریب تبدیل است.

بعد	یکای مهندسی انگلیسی	یکای بین‌المللی
نیرو	پوند (lb)	نیوتون (N)
جرم	اسلاگ(slug)	کیلوگرم (kg)
زمان	ثانیه (s)	ثانیه (s)
طول	فوت (ft)	متر (m)
فشار	$\mathrm{lb/ft^2}$	پاسکال ($\mathrm{N/m^2 = Pa}$)
سرعت	$\mathrm{ft/s}$	$\mathrm{m/s}$
شتاب	$\mathrm{ft/s^2}$	$\mathrm{m/s^2}$
گران‌روی	$\mathrm{lb.s/ft^2}$	$\mathrm{N.s/m^2 = pa.s}$
دمای مطلق	درجه رانکینی (°R)	درجه کلوین (K)
چگالی	اسلاگ بر فوت مکعب ($\mathrm{slug/ft^3}$)	$\mathrm{kg/m^3}$
وزن مخصوص	پوند بر فوت مکعب ($\mathrm{lb/ft^3}$)	$\mathrm{N/m^3}$

مسائل تکمیلی

فهرست زیر شامل چند آزمایش ساده است که در آنها رفتار جریان شاره‌ها بررسی شده است.

۱-۱ کمی شربت یا سوپ را در بشقابی بریزید. مقدار کمی شیر بر روی شربت بریزید و آن دو را مخلوط کنید. چه اتفاقی می‌افتد؟ گران‌روی به‌اندازه‌ای زیاد است که آمیختگی ناشی از به‌هم‌زدن لایه‌ای و نسبتاً کند است. آمیختگی تلاطمی بسیار سریعتر از آمیختگی لایه‌ای است. چرا؟ پخش مولکولی در شربت غلیظ نیز رخ می‌دهد که در مقایسه با اثر آمیختگی بی‌اهمیت تلقی می‌شود.

۱-۲ بالا رفتن دود سیگار را تماشا کنید. نخست، حرکت دود لایه‌ای است ولی ناگهان متلاطم می‌شود. با حرکت روبه بالای دود جریان ناپایدار می‌شود و به‌صورت متلاطم در می‌آید.

۱-۳ شیر آب را بازکنید و جریان را به‌گونه‌ای تنظیم کنید که ریزش بسیار ضعیف لایه‌ای داشته باشید، چه اتفاقی ممکن است در چند سانتی‌متری رخ دهد. جریان مجدداً ناپایدار و متلاطم می‌شود.

۱-۴ در مثال بالا آهنگ جریان آب را افزایش دهید: چه اتفاقی می‌افتد؟ جریان آب در درون لوله متلاطم می‌شود و در حین خروج از شیر متلاطم است.

۱-۵ سیستمی از یک ابر کم ارتفاع را در یک روز بادی به‌ویژه در هوای ابری و باران شدید در نظر بگیرید. آیا جریان متلاطم است؟ آیا جریان متفاوت از جریان آب در شیر است؟

۱-۶ از یک سیگار روشن یا یک پیپ ستونی از دود خارج می‌شود. مدادی را به‌طور افقی در درون جریان دود نگه‌دارید. با مشاهدهٔ دود بر روی مداد جریان دود در دو طرف سیگار از هم جدا می‌شوند. با دمیدن بر سیگار و یا پیپ ستون دود غلیظی ایجاد می‌شود که برای انجام آزمایش بهتر است.

۱-۷ در آزمایش قبلی چرا دود بالا می‌رود؟

سؤالات فکری

۱-۸ وزن جسمی به جرم یک اسلاگ در روی زمین چقدر است؟

جواب: ۳۲٫۲ lb

۱-۹ یک وزنه ۱ $\mathrm{lb_m}$ در روی زمین چقدر وزن دارد؟

جواب: ۱ lb

۱-۱۰ نیروی گرانشی سطح ماه $\frac{1}{6}$ نیروی گرانشی کرهٔ زمین است. یک پوند جرم روی سطح ماه چقدر وزن دارد؟

جواب: ۱٫۶ lb

۱-۱۱ وزن جسم را گاهی بر حسب کیلوگرم ($\mathrm{kg_f}$) می‌دهند. یک کیلوگرم جرم در سطح زمین چقدر وزن دارد؟

جواب: ۱ kg

۱-۱۲ نیوتون، مقیاس خاصی برای اندازه‌گیری وزن است. جسمی با وزن یک نیوتون را در نظر بگیرید. این جسم در مقیاس استاندارد چقدر وزن دارد؟

جواب: ۰٫۱۰۳ kg

۱-۱۳ یک حباب کروی صابون در هوا معلق است. فشار هوا در درون حباب چگونه است؟ اگر قطر حباب D، کشش سطحی مؤثر لایهٔ حباب T باشد، فشار درون حباب چقدر است؟

جواب: $\Delta p = ۴T/D$ (Δp افزایش فشار بر فشار جو)

۱-۱۴ میز هوا یک سطح تخت بزرگی است که برای نگه‌داشتن اجسام سنگین بر روی لایهٔ نازک هوا و حرکت بی‌اصطکاک آنها به‌کار می‌رود. هوا به درون حفره‌های خالی نزدیک هم در سطح میز دمیده می‌شود. صفحه‌ای سنگین به مساحت یک متر مربع را که در فاصلهٔ 1mm بالای سطح میز بر روی بالشتک هوا معلق است، در نظر بگیرید. برای به حرکت درآوردن این صفحه با سرعت 1m/s به‌طور افقی چه نیرویی لازم است؟ $\mu = 2{,}18 \times 10^{-5}\text{N}^2/\text{m}^2$.

جواب: $2{,}18 \times 10^{-2}\text{N}$

۱-۱۵ مسئلهٔ بالا را با روغن موتور با گران‌روی $\mu = 0{,}10\text{N}^s/\text{m}^2$ تکرار کنید. خواص اصطکاکی هوا را با روغن مقایسه کنید. جواب را به پوند تبدیل و مقایسه کنید.

۲

استاتیک شاره‌ها

۲-۱ فشار

قبل از شروع به بررسی واقعی دینامیک شاره‌ها، بهتر است دربارهٔ استاتیک شاره‌ها بحث کنیم؛ زیرا این موضوع کاربردهای روزمرهٔ مسائل واقعی مهندسی را بدون درگیر شدن با مفاهیم پیچیده بیان می‌کند. مفهوم فشار اهمیت ویژه‌ای در استاتیک شاره‌ها دارد. به‌عنوان مثال، فشار در تعیین نیروی وارد بر سد از طرف حجم آب، یا به‌طور کلی در تعیین نیروی وارد بر اجسام غوطه‌ور اهمیت دارد. در سالهای اخیر در کاوشهای گسترده در عمق اقیانوسها، بازیافت اجسام در نواحی دوردست زیرآبی و اطمینان از نجات غواصان، توجه زیادی به این بخش از دینامیک شاره‌ها شده است.

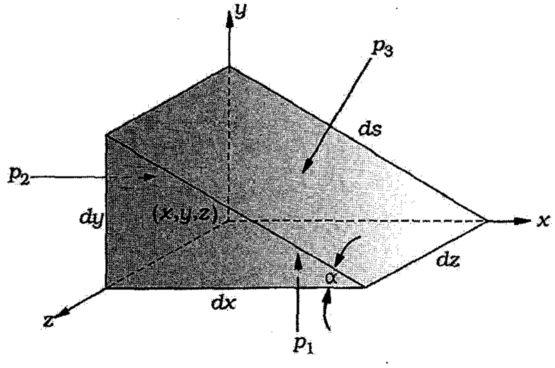
فشار را به‌صورت تنش یا نیرو بر واحد سطح تعریف می‌کنند.

$$p \equiv \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \qquad (۲-۱)$$

هنگامی که فرض می‌کنیم سطح شارهٔ واقعی به سوی صفر می‌گراید، این مشکل ایجاد می‌شود که دیگر با پیوستار سروکار نخواهیم داشت. بنابراین، تناقضی بین فرض پیوستاری و تعریف عمومی مشتق و کمیتهای دیفرانسیلی وجود دارد. این مشکل یا تناقض در نحوهٔ ایجاد معادلات دیفرانسیل مکانیک شاره‌ها به‌چشم می‌خورد، اما آن را، با فرض پیوستار بودن شاره تا هر اندازهٔ ماکروسکوپی مورد نظر می‌توان حل کرد.

اکنون، ظرفی حاوی مایع ساکن را در نظر می‌گیریم. اگر مرزی خیالی را در اطراف قسمت کوچکی از حجم کلی در نظر بگیریم، نیروی خالص وارد بر تودهٔ شاره باید صفر باشد، زیرا این حجم معیار شتابی ندارد. در اینجا مطابق شکل ۲-۱، حجم کوچکی را انتخاب می‌کنیم.

چون حرکت نسبی در این شاره وجود ندارد، تنش برشی در تمام نقاط صفر است. تنها نیروهای سطحی وارد بر جزء شاره عمود هستند



شکل ۲-۱ تعادل نیروهای فشار وارد بر حجم کوچک شاره.

(فشار). فقط نیروی حجمی ناشی از میدان گرانشی زمین وجود دارد که در جهت منفی y بر شاره وارد می‌شود. از این‌رو، با جمع نیروها در جهت x، داریم

$$p_۲ dydz - p_۳ dzds \sin\alpha = ۰$$

که $ds\sin\alpha = dy$ و بنابراین، $p_۲ = p_۳$. در جهت y، داریم[۱]

$$p_۱ dxdz - p_۳\ dzds\cos\alpha - \frac{۱}{۲}\rho g\ dxdydz = ۰$$

که ρ چگالی جرمی شاره و $ds\cos\alpha = dx$، که نتیجه می‌دهد

$$p_۱ - p_۳ - \frac{۱}{۲}\rho g dy = ۰$$

چون جملهٔ سوم، در مقایسه با دو جملهٔ اول، کوچک است، داریم

$$p_۱ = p_۲ = p_۳$$

چون حجم معیار را می‌توان با هر جهت‌گیری انتخاب کرد، و زاویهٔ α نیز اختیاری است، بنابراین فشار در هر نقطهٔ شارهٔ ساکن در تمام جهتها یکسان است، یعنی همسانگرد است.

در یکاهای مهندسی انگلیسی، فشار برحسب $\text{lb}_f/\text{ft}^۲$ یا $\text{lb}_f/\text{in.}^۲$ (یا psi) داده می‌شود. در سیستم SI فشار برحسب $\text{N/m}^۲$ یا پاسکال (Pa) است. یک پاسکال برابر $۱\text{N/m}^۲$ است. چون یک پاسکال مقدار کوچکی است به همین خاطر فشار را معمولاً برحسب kPa یا MPa بیان می‌کنند، برای «احساس» کلی بزرگی فشار در سیستم SI خاطرنشان می‌سازیم که یک اتمسفر (۱۴٫۷psi) تقریباً برابر ۱۰۱۰۰۰Pa، ۱۰۱kPa و یا ۰٫۱۰۱MPa است.

فشار بیشتر از فشار جو را فشار نسبی می‌نامند. در بسیاری از مسائل فقط اختلاف فشار اهمیت دارد و استفاده از فشار نسبی مناسب‌تر است. اما، به‌علت استفاده از فشار مطلق، مثلاً در معادلات قانون گازهای ایده‌آل، به این نکته باید توجه داشت. در یکاهای انگلیسی، فشار $\text{lb}_f/\text{in.}^۲$ را به‌صورت psia برای فشار مطلق، و psig برای فشار نسبی می‌نویسند.

---

۱. در این کتاب اسلاگ را به‌عنوان واحد جرم در سیستم انگلیسی، و kg را به عنوان واحد جرم در سیستم SI به‌کار برده‌ایم. بنابراین یکای ρ برابر $\text{slug/ft}^۳$ یا $\text{kg/m}^۳$ و یکای وزن مخصوص (γ) برابر با $\text{lb}_f/\text{ft}^۳$ یا $\text{N/m}^۳$ است. γ عبارت است از $\gamma = \rho g$. معمولاً از نوشتن f معرف نیرو به‌صورت شاخص پایین در lb_f صرف‌نظر می‌کنیم چون lb همه‌جا برای نیرو به‌کار می‌رود. برای بحث بیشتر دربارهٔ یکاها و ابعاد، خواننده می‌تواند به پیوست ب مراجعه کند.

۲-۲ معادلات دیفرانسیل استاتیک شاره‌ها

تعادل را به‌صورت حالتی تعریف می‌کنیم که هریک از ذرات شاره یا در حالت سکون‌اند و یا نسبت به ذرات دیگر هیچ حرکت نسبی ندارند. اختلاف اساسی بین این دو حالت این است که در اولی سیستم کلی شاره دارای شتاب نیست و در دومی شاره می‌تواند شتاب داشته باشد. در اینجا، هر دو حالت را بررسی خواهیم کرد.

دو نوع نیرو برای بررسی وجود دارند: (۱) نیروهای حجمی، که نیروهای وارد بر ذرات شاره در فاصلهٔ دور هستند (مثلاً نیروی گرانی، میدان مغناطیسی) و (۲) نیروهای سطحی، که نیروهای ناشی از تماس مستقیم بین ذرات شاره یا بین ذرات و دیواره‌های جامدند (نیروهای ناشی از فشار یا نیروی مماسی، یعنی تنش برشی).

دوباره، به ظرف حاوی شارهٔ در حال سکون برمی‌گردیم. اما این‌بار، ذرهٔ بینهایت کوچک و مکعبی شاره را در داخل ظرف، مطابق شکل ۲-۲، انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم که نیروی گرانی در جهت منفی z اثر می‌کند.

می‌توان فرض کرد که فشار وارد بر هریک از وجوه مکعب مقدار ثابتی است، زیرا می‌توان نشان داد که تمام تغییرات از مرتبهٔ دوم هستند و در نتیجهٔ نهایی تأثیری ندارند. از جمع نیروها در جهتهای مختلف، داریم

$$p\,dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right) dydz = 0 \qquad \text{در جهت } x:$$

$$p\,dxdz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right) dxdz = 0 \qquad \text{در جهت } y:$$

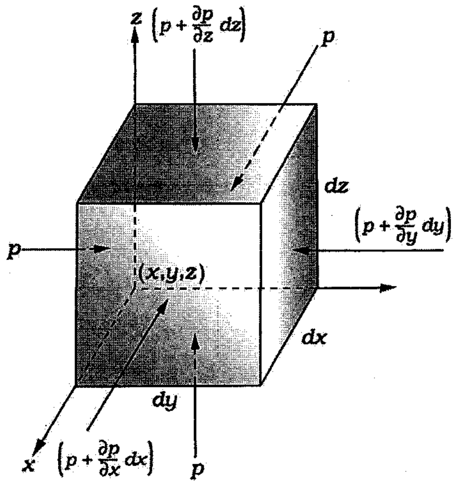
$$p\,dxdy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) dxdy - \rho g\,dxdydz = 0 \qquad \text{در جهت } z:$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{۲-۲}$$

از معادلات (۲-۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{۲-۳}$$



شکل ۲-۲

که رابطهٔ مهمی در استاتیک شاره‌هاست. اگر چگالی جرمی شاره ثابت باشد، با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۲-۳) بین دو ارتفاع $z_۱$ و $z_۲$ خواهیم داشت

$$\int_{p_۱}^{p_۲} dp = -\rho g \int_{z_۱}^{z_۲} dz$$

$$p_۲ - p_۱ = -\rho g(z_۲ - z_۱) \tag{۲-۴}$$

که تغییر فشار برحسب ارتفاع را برای شاره‌ای بیان می‌کند که در حال تعادل استاتیکی است. معادلهٔ (۲-۳) را می‌توان با در نظر گرفتن نیروهای وارد بر استوانهٔ دایره‌ای قائم، که محور آن عمود بر سطح زمین است، به‌طور ساده و مستقل به‌دست آورد.

معادلهٔ (۲-۴) برای شارهٔ تراکم‌ناپذیر معتبر است. اکنون، تغییرات فشار را در شاره‌های تراکم‌پذیر در نظر می‌گیریم. معادلهٔ (۲-۳) را برای گاز کامل به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$dp = -\frac{pg}{RT}dz$$

که R ثابت عمومی گازها و T دمای مطلق است. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ بالا برای جو تکدما، خواهیم داشت

$$\ln\frac{p}{p_۱} = -\frac{g}{RT}(z - z_۱)$$

$$p = p_۱ e^{-(g/RT)(z-z_۱)} \tag{۲-۵}$$

که $p_۱$ فشار گاز در ارتفاع $z_۱$ است. در $z_۱ = ۰$ فشار جو در سطح زمین $p_۱$ است و دیده می‌شود که در دمای ثابت فشار به‌طور نمایی کاهش می‌یابد. اما واقعیت این است که دما با ارتفاع کاهش می‌یابد، گرچه در شرایط غیرمعمول ممکن است تا ارتفاع کمی از سطح زمین افزایش یابد که اصطلاحاً دگرگونی دما نامیده می‌شود.

۲-۳ فشارسنجی

فشارسنج وسیله‌ای است که با استفاده از جابه‌جایی ستونهای شاره، اختلاف فشار را تعیین می‌کند. معادله (۲-۴) اختلاف فشار و ارتفاع ستونهای شاره را به هم مرتبط می‌کند. این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$p_۲ - p_۱ = \gamma h = \rho g h \tag{۲-۶}$$

$$h = -(z_۲ - z_۱) \tag{۲-۷}$$

شکل ۲-۳ فشارسنج Uشکلی را برای اندازه‌گیری اختلاف فشار نشان می‌هد. اختلاف دو فشار p_A و p_B را می‌توان به‌صورت زیر تعیین کرد. فشار در نقطه a عبارت است از

$$p_a = h_۱\gamma_{\text{آب}} + (h_۳ - h_۱)\gamma_{\text{هوا}} + p_A$$

یا

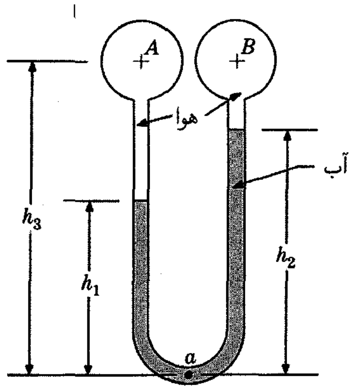
$$p_a = h_۲\gamma_{\text{آب}} + (h_۳ - h_۲)\gamma_{\text{هوا}} + p_B \tag{۲-۸}$$

از تفریق دو رابطه داریم

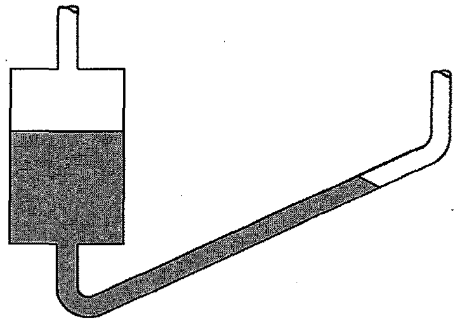
$$p_A - p_B = (h_۲ - h_۱)(\gamma_{\text{آب}} - \gamma_{\text{هوا}}) \tag{۲-۹}$$

وزن مخصوص هوا در مقایسه با آب بسیار کم است، و به این معناست که اختلاف فشار هوا برابر با اختلاف ارتفاع ستونها ضرب در وزن مخصوص آب است.

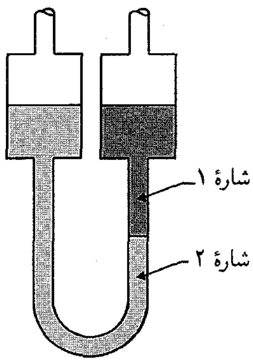
$$p_A - p_B = (h_۲ - h_۱)\gamma_{\text{آب}} \tag{۲-۱۰}$$



شکل ۲-۳ فشارسنج Uشکل.



شکل ۲-۴ فشارسنج مایل.



شکل ۲-۵ فشارسنج دوشاره‌ای.

فشارسنجها برحسب نوع استفاده دارای شکلها و جهتهای مختلف و شاره‌های متفاوت هستند. به‌عنوان مثال، برای بهبود در دقت اندازه‌گیری، به‌جای فشارسنج قائم، می‌توان از فشارسنج مایل همچون شکل۲-۴، یا فشارسنجهای دوشاره‌ای همچون شکل۲-۵ استفاده کرد. روش ارتباط اختلاف فشارها با تغییر شکل ستونهای شاره در این دو فشارسنج اساساً شبیه فشارسنج Uشکل است.

۲-۴ نیروهای شاره‌ای وارد بر اجسام غوطه‌ور

نیروی کل وارد بر جسم را می‌توان از جمع برداری نیروهای دیفرانسیلی وارد بر سطح به‌دست آورد،

$$\mathbf{F} = \int_A d\mathbf{F} \tag{۲-۱۱}$$

که

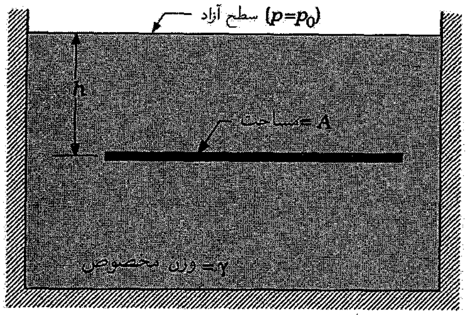
$$d\mathbf{F} = p\,d\mathbf{A}$$

و

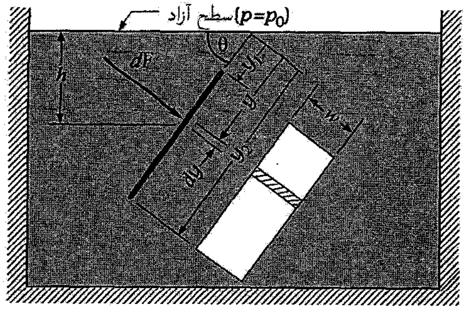
$$p = p_\circ + \gamma h \tag{۲-۱۲}$$

که $p_\circ$ فشار در سطح آزاد، h ارتفاع (عمق) از زیر سطح آزاد است.

این معادلات برای تعیین نیروهای وارد بر سطوح غوطه‌ور لازم‌اند. درکاربردهای خاص آنچه که لازم است داشتن عمق h و مساحت دیفرانسیلی



شکل ۲-۶ صفحهٔ افقی غوطه‌ور.



شکل ۲-۷ صفحهٔ مایل غوطه‌ور.

dA برحسب متغیر انتگرال‌گیری یکسان است. همچنین، پیش از انتگرال‌گیری معادله، آن را باید به‌صورت اسکالر (نرده‌ای) نوشت. اکنون، چند حالت خاص را در نظر می‌گیریم.

سطح تخت افقی: سطح افقی تختی را به فاصلهٔ h در زیر سطح مایعی همچون شکل ۲-۶ در نظر می‌گیریم. نیروی وارد بر سطح (از یک طرف) عبارت است از

$$F = \int_A dF = \int_A (p_{\circ} + \gamma h) dA = (p_{\circ} + \gamma h) A \tag{۲-۱۳}$$

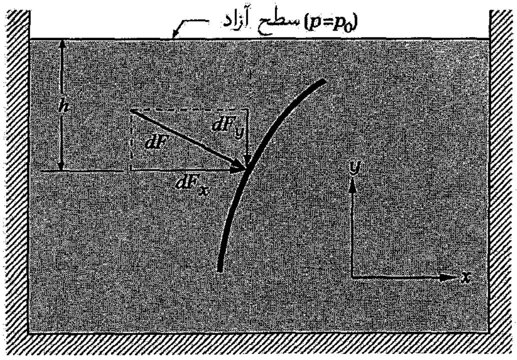
سطح تخت مایل: مطابق شکل ۲-۷، سطح مایل غوطه‌وری را درنظر می‌گیریم. در این حالت، نیروی وارد بر صفحه (عمود بر صفحه) عبارت است از

$$F = \int_A dF = \int_A (p_{\circ} + \gamma h) dA = p_{\circ} A + \gamma \int_{y_1}^{y_2} w y \sin\theta dy$$
$$= p_{\circ} A + \frac{1}{2} \gamma w \sin\theta (y_2^2 - y_1^2) \tag{۲-۱۴}$$

سطح خمیده: در سطح خمیده‌ای همچون شکل ۲-۸ مؤلفه‌های نیرو عبارت‌اند از

$$F_x = \int_A (p_{\circ} + \gamma A) dA_x \tag{۲-۱۵}$$

$$F_y = \int_A (p_{\circ} + \gamma h) dA_y \tag{۲-۱۶}$$



شکل ۲-۸

انتگرال‌گیری از این معادلات ممکن است همیشه مناسبترین روش برای تعیین نیروهای وارد بر اجسام غوطه‌ور نباشند. به‌عنوان مثال، مؤلفهٔ عمودی نیروی وارد بر هر سطح غوطه‌ور برابر است با وزن (یا معادل وزن) شارهٔ موجود بر روی سطح به اضافهٔ نیروی ناشی از فشار وارد بر سطح آزاد مایع، و مؤلفهٔ افقی نیرو را می‌توان با در نظر گرفتن سطح عمودی تختی تعیین کرد که تصویر سطح موردنظر است.

نیروی شناوری: بنابر اصل ارشمیدس هر جسم غوطه‌ور تحت تأثیر نیروی بالارونده‌ای قرار می‌گیرد که مساوی وزن شارهٔ جابه‌جا شده است. از این‌رو، این نیرو (نیروی شناوری) برابر با حجم جسم غوطه‌ور ضرب در وزن مخصوص شاره خواهد بود.

درک این نکته مهم است که نیروی شناوری را می‌توان از جمع تمام مؤلفه‌های عمودی فشار در سطح وارد بر سطح جسم غوطه‌ور محاسبه کرد

$$F_B = \int_A p dA_y \qquad (۲-۱۷)$$

و همان‌گونه که اشاره شد، برابر است با

$$F_B = \gamma \times \text{حجم} \qquad (۲-۱۸)$$

۲-۵ شتاب‌گیری شاره‌ها در نبود تنش برشی

در بخشهای پیشین شاره‌ها را ساکن در نظر می‌گرفتیم. اکنون، شاره‌هایی را بررسی می‌کنیم که دارای شتاب ثابت (نسبت به زمان) هستند، اما هریک از ذرات شاره نسبت به ذرهٔ مجاورش حرکتی ندارد، به‌گونه‌ای که شاره به‌صورت جسمی صلب حرکت می‌کند. به‌عنوان مثال، ظرف حاوی مایعی را در نظر می‌گیریم که دارای شتاب ثابت رو به بالا و به طرف راست **a**، همچون شکل ۲-۹ است. با استفاده از همان روش بخش ۲-۲ به‌آسانی می‌توان نشان داد که قانون نیوتون برای ذرهٔ بینهایت کوچک موجود در درون ظرف به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -(\rho a_y + \gamma)$$

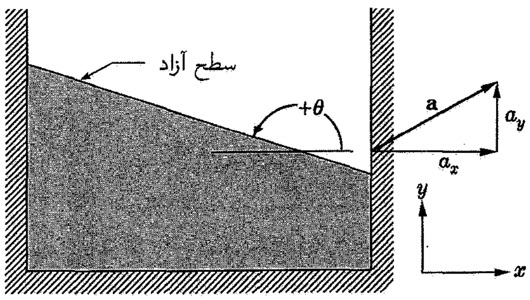
پس از انتگرال‌گیری، داریم

$$p = -[\rho a_x x + (\rho a_y + \gamma) y] + C \qquad (۲-۱۹\text{الف})$$

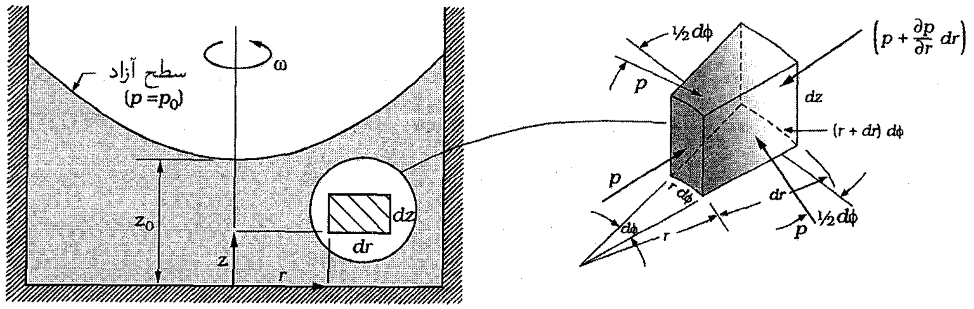
شکل سطح آزاد مایع با شرط $p = p_۰$ تعیین می‌شود که به‌صورت سطح تخت در می‌آید. سطوح فشار ثابت صفحاتی موازی هستند که شیب آنها نسبت به صفحهٔ افقی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\theta = \tan^{-۱} a_x/(a_y + g) \qquad (۲-۱۹\text{ب})$$

که θ در شکل ۲-۹ مشخص شده است.



شکل ۲-۹ ظرف حاوی شارهٔ شتابدار. جهت گرانی در جهت منفی y است، به‌گونه‌ای که a_x و a_y به‌ترتیب موازی و عمود بر سطح زمین هستند. اگر a_x و a_y مثبت باشند، آنگاه شیب سطح منفی خواهد بود (مطابق شکل).



شکل ۲-۱۰ ظرف حاوی مایع چرخان. نیروی گرانی در جهت منفی z است.

مثال دیگرکه با آن مواجه می‌شویم، ذراتی با شتاب ثابت هستند که درون شاره‌ای با چرخش یکنواخت و بدون حرکت نسبی بخشهای مختلف آن قرار دارند. فرض می‌کنیم که ω سرعت زاویه‌ای ثابت و ρ چگالی مایع است. دستگاه مختصات قطبی r و z را مطابق شکل۲-۱۰ انتخاب می‌کنیم. ϕ مختصهٔ زاویه‌ای است. شتاب مرکزگرای ذره در شعاع r و در جهت r برابر با $-\omega^۲ r$ است. با استفاده از قانون نیوتن در جهت z، داریم

$$-\rho g r\ dr\ d\phi\ dz + pr\ dr\ d\phi - \left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right) r\ dr\ d\phi = ۰ \qquad \text{یا} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

در جهت r، با فرض $\sin\frac{۱}{۲}d\phi \approx \frac{۱}{۲}d\phi$، داریم

$$p\ dz\ r\ d\phi - \left(p+\frac{\partial p}{\partial r}dr\right) dz(r+dr)d\phi + ۲p\ dz\ dr\left(\frac{۱}{۲}d\phi\right) = -\rho\ dz\ r\ d\phi\ dr\ \omega^۲ r$$

که با حذف جمله‌های مرتبهٔ بالا، می‌توان نوشت

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^۲ r \tag{۲-۲۰}$$

می‌دانیم که $p=p(r,z)$ و

$$dp = \frac{\partial p}{dr}dr + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

با قراردادن معادل عبارتهای $\partial p/\partial r$ و $\partial p/\partial z$ خواهیم داشت

$$dp = \rho\omega^۲ r\ dr - \rho g\ dz$$

پس از انتگرال‌گیری، داریم

$$p = \frac{۱}{۲}\rho\omega^۲ r^۲ - \rho g z + C \tag{۲-۲۱}$$

در $r=۰$ و $z=-z_۰$، داریم $p=p_۰$. بدین ترتیب، معادلهٔ (۲-۲۱) به‌صورت زیر می‌شود

$$p - p_۰ = \frac{۱}{۲}\rho\omega^۲ r^۲ + \rho g(z_۰ - z) \tag{۲-۲۲}$$

در سطح آزاد که $p=p_۰$، داریم

$$z = z_۰ + \frac{۱}{۲}\omega^۲ r^۲/\rho g \tag{۲-۲۳}$$

که سهمی دورانی است.

باید توجه داشت که برای z ثابت، p با افزایش $r^۲$ افزایش می‌یابد. دستگاه و پمپهای مرکزگریز بر پایهٔ این اصل کار می‌کنند. با دوران شدید مایع موجود در ظرف سر بسته اختلاف فشار زیادی بین مرکز و محیط ایجاد می‌شود.

۲-۶ کشش سطحی

اگر سطح مشترک دو شارهٔ آمیخته‌نشدنی خمیدگی داشته باشد، اختلاف فشار بین دو سطح در محل فصل مشترک پایدار می‌ماند. علت آن، رفتار فصل مشترک به‌صورت غشایی است که تاو آن با کشش سطحی مشخص می‌شود. این کشش سطحی T، که برحسب $\mathrm{lb_f/ft}$ یا $\mathrm{N/m}$ اندازه‌گیری می‌شود، خاصیتی از دو شارهٔ در حال تماس است. غالباً با سطح مشترک مایع_هوا سروکار داریم، اما این مفهوم برای هر دو نوع شاره‌ای به‌کار می‌رود. کشش سطحی T را برای ترکیب شاره‌های مختلف در جدولهای مرجع می‌توان یافت.

اگر سطح مشترک خمیده‌ای را در نظر بگیریم، اختلاف فشار Δp در فصل مشترک بین دو شاره عبارت است از

$$\Delta p = T\left(\frac{۱}{R_۱}+\frac{۱}{R_۲}\right) \tag{۲-۲۴}$$

که $R_۱$ و $R_۲$ شعاعهای خمیدگی (در نقطهٔ تلاقی) برای هر دو خط متعامد رسم شده بر روی سطح است. این در نقطهٔ تلاقی جمع $\frac{۱}{R_۱}+\frac{۱}{R_۲}$ برای هر دو خط مشابه یکسان است. Δp مقدار اختلاف فشار در هر نقطهٔ تلاقی با $R_۱$ و $R_۲$ معلوم است. مثلاً، در هر نقطهٔ موجود بر روی سطح کره اختلاف فشار $\frac{۲T}{R} = \Delta p = T\left(\frac{۱}{R_۱}+\frac{۱}{R_۲}\right)$ یکسان است، زیرا شعاع حجم در همه‌جا R است.

حبابهای صابون معلق در هوا مثالهایی از سطوح کروی هستند که فشار درونی آن بیشتر از فشار جو بیرونی است؛ کشش سطحی لایهٔ نازک حباب صابون این اختلاف فشار را جبران می‌کند. سقوط آزاد قطرات ریز آب شکل تقریباً کروی دارند، زیرا کشش سطحی شکل قطره را حفظ می‌کند. (اگر چه مقاومت هوا تا اندازه‌ای باعث اعوجاج می‌شود).

۲-۷ خلاصه

در این فصل دربارهٔ نیروهای وارد بر شاره‌هایی بحث کرده‌ایم که (۱) در حالت تعادل ایستا (شارهٔ ساکن) و (۲) دارای شتاب ثابت بودند. در هر دو حالت عدم وجود حرکت نسبی بین ذرات شاره باعث صفر شدن تنشهای مماسی در همه‌جا می‌شود. بنابراین تنها نیروهایی که بر ذرات شاره وارد می‌شوند ناشی از (۱) فشار تنش سطحی عمودی) و (۲) نیروی گرانی (نیروی حجمی یکنواخت جسم) است.

نشان دادیم که فشار در هر نقطه از شارهٔ در حالت تعادل ایستا در تمام جهتها یکسان است. از این‌رو، فشار تابع اسکالر مختصات فضا و زمان است.

برای شارهٔ در حال تعادل ایستا، تغییرات فشار برحسب ارتفاع از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma = -\rho g$$

و برای شارهٔ تراکم‌ناپذیر، داریم

$$p_۲ - p_۱ = -\gamma(z_۲ - z_۱)$$

که برای تعیین فشار از طریق فشارسنجهای مختلف سودمند خواهد بود.

نیروهای وارد بر سطوح غوطه‌ور را می‌توان با انتگرال‌گیری فشار در مساحت سطح روی تمام سطح برای مؤلفه‌های اسکالر معادلهٔ بردار به‌دست آورد:

$$F_x = \int_A p\,dA_x, \qquad F_y = \int_A p\,dAy$$

که $p = p_۰ + \gamma h$. بنابراین درکاربرد این معادلات برای مسئله‌ای خاص، تنها نکته‌ای که می‌ماند ارتباط دادن مساحتهای جزئی و عمق زیر سطح h به متغیر انتگرال‌گیری متداول و مناسب است.

نیروی شناوری را به دو روش می‌توان تعیین کرد: (۱) انتگرال‌گیری مؤلفهٔ عمودی فشار ضرب‌در مساحت روی سطح جسم غوطه‌ور یا (۲) حجم شارهٔ جابه‌جاشده ضرب‌در وزن مخصوص شاره.

برای شاره‌ای که دارای شتاب ثابت است اما حرکت نسبی بین ذرات خود ندارد، قانون نیوتون برای ذرهٔ بینهایت کوچک شاره به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x,\ \frac{\partial p}{\partial y} = -(\rho a_y + \gamma)$$

که a_x و a_y به ترتیب مؤلفه‌های بردار شتاب موازی و عمود بر سطح زمین‌اند.

مسائل حل‌شده

۲-۱ فشارسنج جیوه‌ای شکل ۲-۱۱ به ورودی و خروجی پمپ آبی (سمت چپ به ورودی و سمت راست به خروجی) وصل است. با این فرض که ورودی و خروجی در ارتفاع یکسان هستند، افزایش فشار در پمپ آب را تعیین کنید.

فشار در نقطهٔ a را با استفاده از ارتفاع ستون سمت چپ به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$p_a = h_۱ \gamma_{\text{جیوه}} + h_۲ \gamma_{\text{جیوه}} + h_۳ \gamma_{\text{آب}} + p_{\text{ورودی}}$$

و سمت راست را با استفاده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم

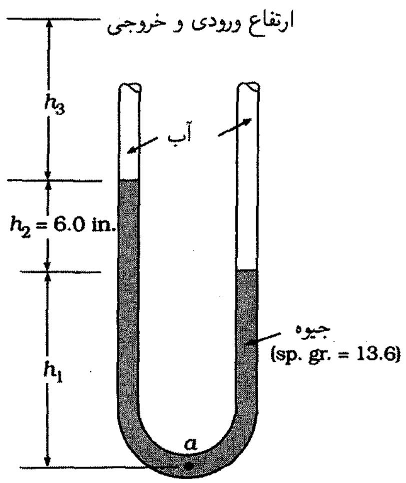
$$p_a = h_۱ \gamma_{\text{جیوه}} + h_۲ \gamma_{\text{آب}} + h_۳ \gamma_{\text{آب}} + p_{\text{خروجی}}$$

با تفریق رابطه‌های بالا، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

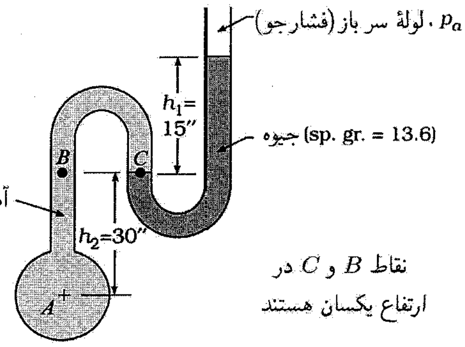
$$\begin{aligned} p_{\text{خروجی}} - p_{\text{ورودی}} &= h_۲(\gamma_{\text{جیوه}} - \gamma_{\text{آب}}) \\ &= \frac{۶}{۱۲}[۶۲٫۴(۱۳٫۶ - ۱)] = ۳۹۳\ \text{psf} \end{aligned}$$

وزن مخصوص آب $۶۲٫۴\ \text{lb}_f/\text{ft}^۳$ و وزن مخصوص جیوه $۱۳٫۶\ \text{lb}_f/\text{ft}^۳$ است.

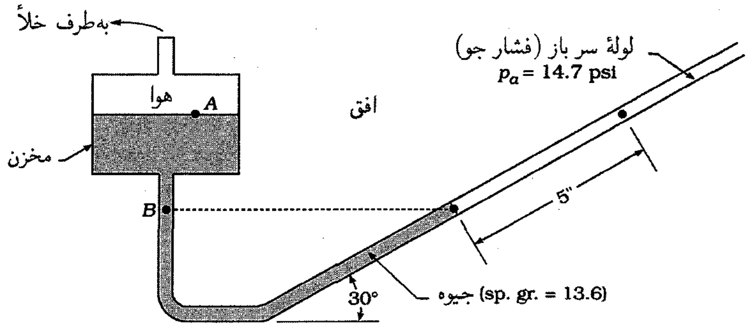
۲-۲ در شکل ۲-۱۲ فشار نسبی را در نقطهٔ A با فشارسنج تعیین کنید. فشار مطلق در نقاط C و B یکسان است. فشار مطلق در نقطهٔ B برابر



شکل ۲-۱۱



شکل ۲-۱۲



شکل ۲-۱۳

است با $p_B = \gamma_1 h_1 + P_a$. پس داریم

$$P_A = (p_a + \gamma_1 h_1)\gamma_2 h_2$$

برای راحتی وزن مخصوص جیوه و آب را به‌ترتیب با γ_1 و γ_2 مشخص کرده‌ایم. بنابر تعریف فشار نسبی، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} p_{A\ \text{پیمانه‌ای}} &= p_A - p_a = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 \\ &= ۶۲{,}۴(۱۳{,}۶)\left(\frac{۱۵}{۱۲}\right) + ۶۲{,}۴\left(\frac{۳۰}{۱۲}\right) \\ &= ۱۲۱۶ \text{ psf} = ۸{,}۴۵ \text{ psi} \end{aligned}$$

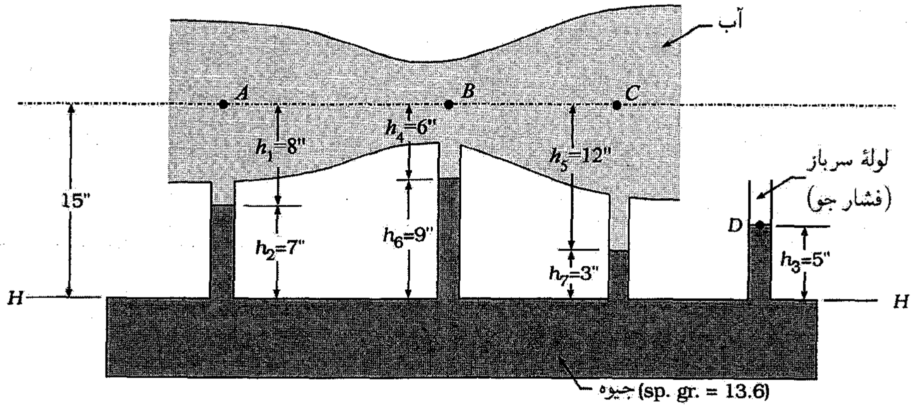
۳-۲ در فشارسنج مایل شکل ۲-۱۳ فشار را در نقطهٔ A تعیین کنید.

$$p_B = p_A + \gamma h$$

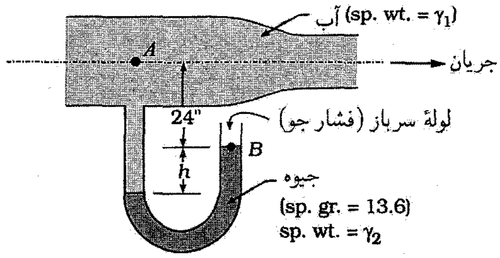
p_B فشار جو است به گونه‌ای که

$$p_A = p_a - \gamma h = ۱۴{,}۷ - ۶۲{,}۴(۱۳{,}۶)\left(\frac{۲{,}۵}{۱۲}\right)\left(\frac{۱}{۱۴۴}\right) = ۱۳{,}۴۷ \text{ psi}$$

توجه کنید که سطح جیوه در لولهٔ مایل پایین‌تر از سطح جیوه در مخزن است، زیرا مخزن به پمپ خلأ وصل است.



شکل ۲-۱۴



شکل ۲-۱۵

۲-۴ در شکل ۲-۱۴ فشار پیمانه‌ای را در نقاط A، B و C لولهٔ پر از آب جاری به‌دست آورید.

با توجه به وزن مخصوص آب $\gamma_۱$ و وزن مخصوص جیوه $\gamma_۲$ از نقطهٔ D نسبت به سطح HH شروع می‌کنیم و سپس فشار نقاط دیگر را به‌دست می‌آوریم

$$p_A = p_a + \gamma_۲ h_۳ - \gamma_۱ h_۱ - \gamma_۲ h_۲$$

اما، داریم $p_{\text{نسبی}} = p - p_a$ ، بنابراین

$$p_{A\,\text{نسبی}} = \frac{۶۲٫۴(۱۳٫۶)}{۱۷۲۸}(۵) - \frac{۶۲٫۴}{۱۷۲۸}(۸) - \frac{۶۲٫۴(۱۳٫۶)}{۱۷۲۸}(۷) = -۱٫۲۸ \text{ psi}$$

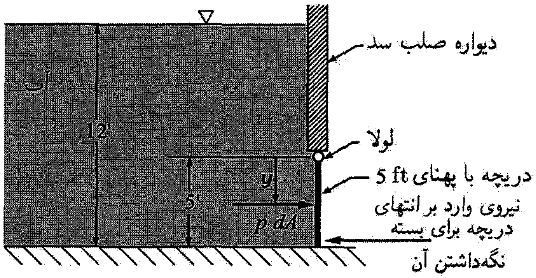
(عدد ۱۷۲۸ ضریب تبدیل وزن مخصوص از $\text{lb}_\text{f}/\text{in}^۳$ به $\text{lb}_\text{f}/\text{ft}^۳$ است.) با همین روش فشار را در B و C تعیین می‌کنیم

$$p_{B\,\text{نسبی}} = \gamma_۲ h_۳ - \gamma_۱ h_۴ - \gamma_۲ h_۶ = -۲٫۱۷ \text{ psi}$$
$$p_{C\,\text{نسبی}} = \gamma_۲ h_۳ - \gamma_۱ h_۵ - \gamma_۲ h_۷ = ۰٫۵۵ \text{psi}$$

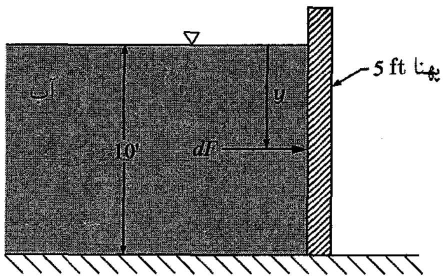
۲-۵ آب در شیپورهٔ باریکی مطابق شکل ۲-۱۵ جریان دارد. اگر فشارسنج فشار نسبی را در نقطهٔ A برابر با ۵ psi نشان دهد، ارتفاع h را تعیین کنید.

برای محاسبهٔ فشار در نقطهٔ A از طریق فشار نقطهٔ B، داریم

$$p_A = p_a + \gamma_۲ h - \gamma_۱ (h + ۲۴)$$
$$p_{A\,\text{پیمانه‌ای}} = ۵ = \frac{۶۲٫۴(۱۳٫۶h)}{۱۷۲۸} - \frac{۶۲٫۴}{۱۷۲۸}(h + ۲۴)$$



شکل ۲-۱۷



شکل ۲-۱۶

که، خواهیم داشت

$$h = ۱۲٫۹\text{in.} = ۱۲٫۹ \times ۲٫۵۴ = ۳۲٫۷۷\text{cm}$$

۶-۲ نیروی کل واردشده از طرف آب پشت سد در شکل ۲-۱۶ را تعیین کنید. پهنای سد ۵ فوت و عمق آب ۱۰ فوت است.

برای به‌دست آوردن نیروی کل از نیروی فشار روی دیوارهٔ سد انتگرال می‌گیریم

$$F = \int_A dF = \int_A p\, dA = \int_۰^{۱۰} ۵\gamma y\, dy = ۵\gamma y^۲/۲\Big]_۰^{۱۰} = ۱۵۶۰۰\ \text{lb}_\text{f}$$

فشار جو بر روی سطح آب را در نظر نمی‌گیریم، زیرا این فشار با فشار هوایی که در پشت سد است خنثی می‌شود.

۷-۲ نیروی کل لازم برای جلوگیری از بازشدن دریچهٔ سد شکل ۲-۱۷ را تعیین کنید. پهنای در ۵ فوت است.

برای اینکه در باز نشود گشتاور کل وارد بر محور در به‌خاطر تعادل ایستا باید صفر باشد. با در نظر گرفتن گشتاورها داریم

$$۵F - \int_A yp\, dA = ۰$$

بنابراین

$$۵F = \int_۰^۵ y\gamma(۷+y)۵dy = ۵(۶۲٫۴)\left[(y^۲/۲) + (y^۳/۳)\right]_۰^۵$$

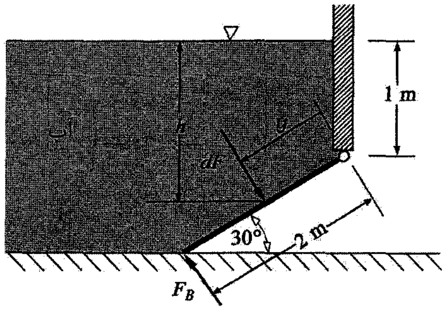
و $F = ۸۰۵۰\text{lb}_\text{f}$

۸-۲ نیروی کل فشار آب وارد بر سطح مایل موجود در شکل ۲-۱۸ را به‌دست آورید. سطح با پهنای ۳ متر در بالا لولا شده است.

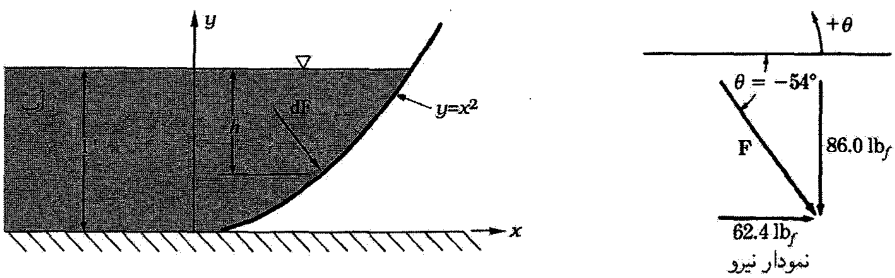
نیروی کل وارد بر دریچه عمود بر دریچه است و با انتگرال‌گیری فشار روی سطح به‌دست می‌آید.

$$F = \int_A dF = \int_A pdA = \int_A \gamma h dA = \int_۰^۲ \gamma(۱ + y\sin ۳۰^\circ)(۳dy)$$
$$= ۳(۹۸۱۰)\left[۱y + \frac{۱}{۴}y^۲\right]_۰^۲ = ۸٫۸۳ \times ۱۰^۴\text{N}$$

چون فشار جو بر سطح سمت راست دریچه وارد می‌شود، آن را در محاسبات در نظر نمی‌گیرند. پس از تجزیهٔ نیروی کل به دو مؤلفهٔ x و y، محل مناسب نیروی برایند را می‌توان طوری تعیین کرد که معادل کل نیروی فشار در تعیین واکنش لولا و لبهٔ پایین صفحه باشد. در مسئلهٔ ۲-۹ نیروی واکنش لبهٔ پایین صفحه را محاسبه می‌کنیم. پس از این محاسبات، یافتن مکان نیروی برایند بسیار ساده است.



شکل ۲-۱۸



شکل ۲-۱۹

۲-۹ مطلوب است محاسبهٔ نیروی واکنش سطح زیرین بر نقطه انتهایی دریچهٔ مسئلهٔ ۲-۸. مکان تک‌ـنیروی F را که معادل کل نیروی فشار آب است، به‌دست آورید.

جمع گشتاورها پیرامون لولا (محور دوران) باید صفر باشد. چون فشار منحصراً عمود بر سطح دریچه وارد می‌شود، نیروهای واکنش در لولا و ته ظرف عمود بر صفحه خواهد بود، البته، چنانچه از وزن صفحه صرف‌نظر کنیم با ناچیز شمردن وزن صفحه، جمع گشتاورها پیرامون محور لولا را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$F_B \times ۲ = \int_A y dF = \int_A y(\gamma h) dA$$
$$= \gamma \int_۰^۲ y(۱ + y \sin ۳۰°)(۳dy) = ۳(۹۸۱۰)\left[\frac{۱}{۲}y^۲ + \frac{y^۳}{۶}\right]^۲ = ۹٫۸۱ \times ۱۰^۴ \text{ N.m}$$

و $F_B = ۴٫۹۰۵ \times ۱۰^۴$.

اگر نیروی برایند معادل فشار F در نقطهٔ $y = y_۰$ قرار گیرد، آن‌گاه $F y_۰ = F_B(۲)$، و خواهیم داشت

$$y_۰ = \frac{۲F_B}{F} = \frac{۲(۴٫۹۰۵ \times ۱۰^۴)}{۸٫۸۳ \times ۱۰^۴} = ۱٫۱۱ \text{ m}$$

۲-۱۰ مطلوب است تعیین نیروی فشار وارد بر سطح خمیدهٔ شکل۲-۱۹. پهنای صفحهٔ خمیده ۲ فوت است.

معادلهٔ عمومی نیروی آب وارد بر سطح صفحه را می‌توان به شکل $\mathbf{F} = \int_A d\mathbf{F}$ نوشت، ولی این معادله را قبل از انتگرال‌گیری باید به‌صورت اسکالر در آورد. بنابراین،

$$F_x = \int_A dF_x = \int_A p dA_x = \int_A (\gamma h) ۲dy$$

با قرار دادن h برحسب y، خواهیم داشت

$$F_x = ۲\gamma \int_{۰}^{۱} (۱ - y)dy = ۲(۶۲٫۴) \left[y - \frac{y^۲}{۲} \right]_{۰}^{۱} = ۶۲٫۴ \text{ lb}_\text{f}$$

همین‌گونه، می‌توان F_y را به‌دست آورد، اما باید به یاد داشت که F_y در جهت مثبت y است و نیروی فشار رو به پایین و در جهت منفی y وارد می‌شود. بنابراین

$$F_y = \int_A dF_y = -\int_A p dA_y = -۲\gamma \int_{۰}^{۱} (۱ - y)dx$$

با نوشتن y برحسب x، می‌توان به‌طور صریح انتگرال گرفت

$$F_y = -۲\gamma \int_{۰}^{۱} (۱ - x^۲)dx = -۸۶٫۰ \text{ lb}_\text{f}$$

علامت منفی بیانگر این است که F_y رو به پایین وارد می‌شود. مقدار کل نیروی فشار عبارت است از

$$|\mathbf{F}| = (F_x^۲ + F_y^۲)^{۱/۲} = ۱۰۶٫۴ \text{ lb}_\text{f}$$

جهت آن از رابطهٔ $\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = -۱٫۳۸$ یا $\theta = -۵۴°$ به‌دست می‌آید.

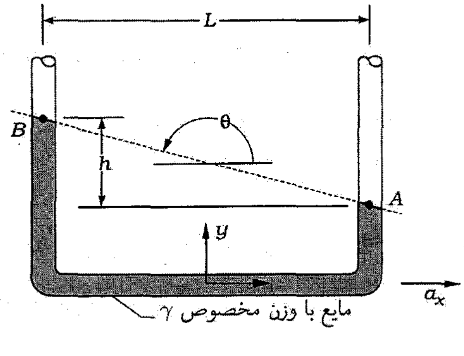
زاویهٔ θ مقدار مایل بودن $\mathbf{F}$ را نسبت به افق نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل ۲-۱۹ مشخص شده است زاویهٔ θ منفی است و بنابراین نیروی برایند رو به پایین وارد می‌شود.

۲-۱۱ برای اندازه‌گیری شتاب حرکت خودرو می‌توان از شتاب‌سنج Uشکلی مطابق شکل۲-۲۰ استفاده کرد. شتاب‌سنج به گونه‌ای بر روی خودرو نصب می‌شود که لوله‌های آن به‌طور قائم قرار می‌گیرند. قسمتی از لولهٔ Uشکل از مایعی با وزن مخصوص γ پر شده است. در شرایط شتاب ثابت a_x سطح مایع مطابق شکل قرار می‌گیرد. رابطه‌ای بین پارامترهای دستگاه و شتاب به‌دست آورید.

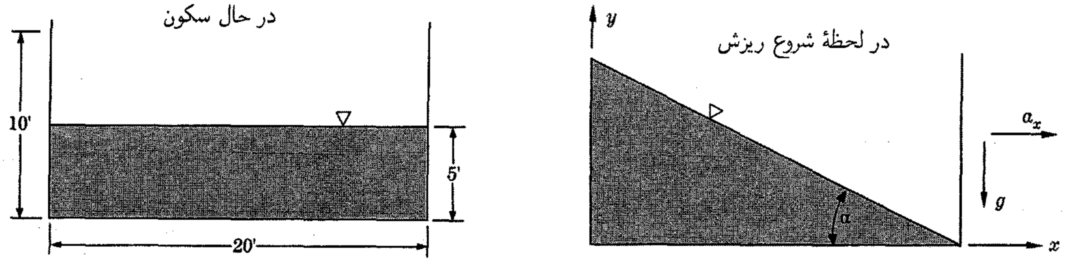
رفتار شاره در لوله درست مانند رفتار آن در ظرفی به پهنای L است. در این حالت زاویهٔ θ با معادلهٔ (۲-۱۹ ب) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\tan\theta = \frac{-h}{L} = \frac{-a_x}{g}$$

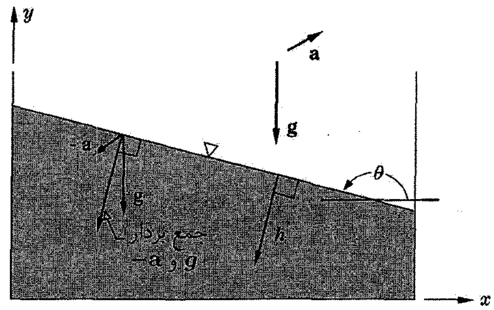
و به آسانی می‌توان شتاب را از رابطهٔ $a_x = \frac{gh}{L}$ به‌دست آورد.



شکل ۲-۲۰



شکل ۲-۲۱



شکل ۲-۲۲

۲-۱۲ در حالتی که ارتفاع آب در محفظهٔ ساکن ۵ فوت است. مقدار a_x برای سرریز آب از دیوارهٔ پشتی محفظهٔ شکل۲-۲۱ چقدر است؟

با افزایش a_x ارتفاع آب در جدارهٔ پشتی محفظه بالا می‌رود. با رسیدن آب به لبهٔ بالایی محفظه، آب دقیقاً ۵ فوت بالا رفته است و آب در لبهٔ مقابل ۵ فوت پایین آمده است. بنابراین، در آغاز سرریز، داریم $\tan\alpha = ۱۰/۲۰ = a_x/g$، به‌گونه‌ای که $a_x = g/۲ = ۱۶٫۱\ \mathrm{ft/s^۲}$، یادآور می‌شویم که برای سادگی، زاویهٔ α را برابر با زاویهٔ θ معادلهٔ (۲-۱۹ ب) ولی با علامت منفی در نظر گرفته‌ایم.

۲-۱۳ نشان دهید هنگامی که محفظه‌ای حاوی مایع با شتاب ثابت **a** در میدان گرانشی **g** حرکت می‌کند توزیع فشار در محفظه مانند حالتی است که محفظه در حالت سکون در میدان گرانشی خیالی $(\mathbf{g}-\mathbf{a})$ قرار دارد. این بدان معنی است که شتاب گرانی در جهت منفی y وارد می‌شود، شدت میدان خیالی برابر $\sqrt{(a_y+g)^۲+a_x^۲+a_z^۲}$ است و جمع بردار **g** و منفی **a** را در شکل۲-۲۲ نشان داده‌ایم. اگر محفظه در میدان گرانشی آزادانه رها شود، آنگاه فشار نسبی مایع درون آن در همه‌جا صفر خواهد بود. این موضوع را توضیح دهید.

معادلهٔ (۲-۱۹الف) نشان می‌دهد که سطحهای فشار ثابت در شاره صفحه‌های مستوی هستند. با این فرض که تغییراتی در جهت z وجود ندارد و شتاب در جهت منفی y وارد شود، تغییرات فشار عمود بر صفحه‌های فشار ثابت را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ دیفرانسیل‌گیری متغیر عمود بر سطح ثابت نوشت

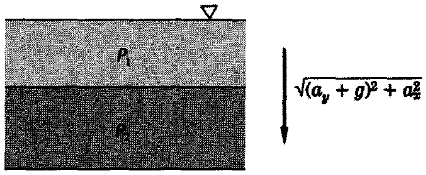
$$\frac{dp}{dh}=\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^۲+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^۲\right]^{۱/۲}$$

با انجام محاسبات، به نتیجه زیر می‌رسیم

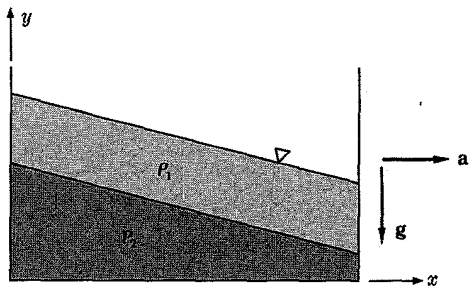
$$\frac{dp}{dh}=\rho\sqrt{(a_y+g)^۲+a_x^۲}$$

با تعمیم محاسبات در سه بعد (و نیروی گرانی در جهت منفی y)، خواهیم داشت

$$\frac{dp}{dh}=\rho\sqrt{(a_y+g)^۲+a_x^۲+a_z^۲}$$



شکل ۲-۲۴



شکل ۲-۲۳

با انتگرال‌گیری از رابطهٔ بالا، داریم

$$p = p_\circ + \rho h \sqrt{(a_y + g)^۲ + a_x^۲ + a_z^۲}$$

سطح آزاد و صفحه‌های فشار ثابت آنچنان مایل قرار دارند که عمود بر بردار $(\mathbf{g} - \mathbf{a})$ هستند و این موضوع از معادلهٔ (۲-۱۹ ب) به‌خوبی روشن است.

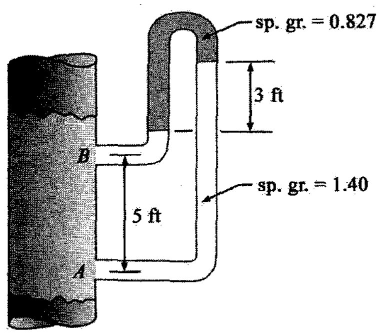
۲-۱۴ دربارهٔ رفتار دو شارهٔ آمیخته‌نشدنی با چگالی جرمی متفاوت که در محفظهٔ شکل ۲-۲۳ با شتاب ثابت در حرکت است بحث کنید. نیروی گرانی در جهت منفی و بردار شتاب a فقط دارای مؤلفه‌های x و y است.

از مسئلهٔ ۲-۱۳ درمی‌یابیم که رفتار سیستم به‌گونه‌ای‌است که گویا شدت میدان گرانشی برابر $(\mathbf{g} - \mathbf{a})$ است. چون سطحهای فشار ثابت تخت هستند، این مسئله را به سیستم ساده‌ای همچون شکل ۲-۲۴ می‌توان تبدیل کرد و میدان گرانشی هم‌ارزی را برای آن در نظر گرفت و با آن به‌صورت مسئلهٔ استاتیکی ساده‌ای درست نظیر فشارسنج دو شاره‌ای برخورد کرد. به‌جای آن، معادلهٔ تعادل (۲-۹الف) را می‌توانستیم حل کنیم و همان نتیجه‌ها را به‌دست آوریم. شیب سطح آزاد و فصل مشترک عیناً نظیر تک‌مایع است.

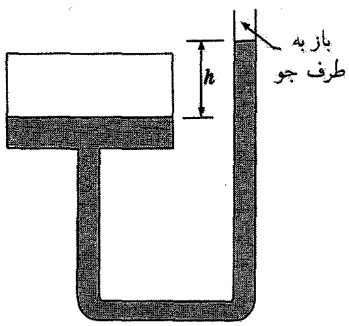
مسائل تکمیلی

۲-۱۵ فشار در سطح مایع ظرف شکل ۲-۲۵ به میزان psi ۴٫۰ بیش از فشار جو است. اگر مایع درون ظرف (الف) آب و (ب) جیوه باشد، ارتفاع h را تعیین کنید.

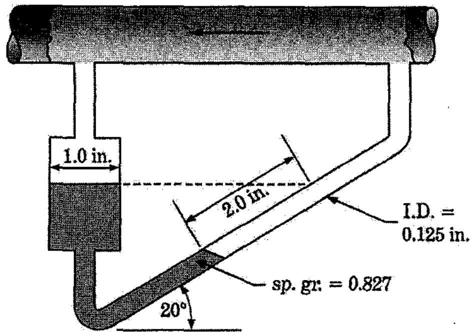
۲-۱۶ اختلاف فشار بین نقاط A و B جریان مایع در لولهٔ عمودی شکل ۲-۲۶ را تعیین کنید.



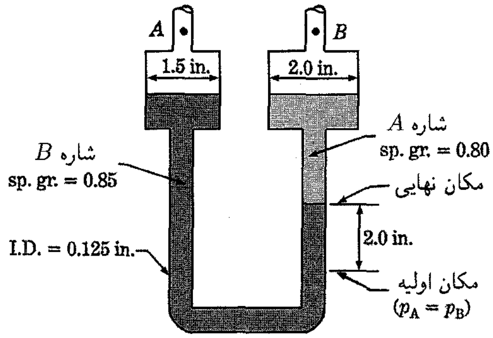
شکل ۲-۲۶



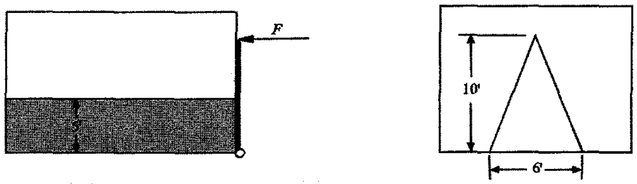
شکل ۲-۲۵



شکل ۲-۲۷



شکل ۲-۲۸



شکل ۲-۲۹

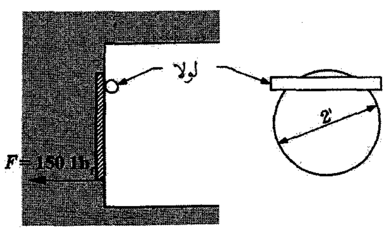
۲-۱۷ در مسألهٔ ۲-۱۶، اگر جریان مایع به‌جای عمودی افقی می‌بود، فشارسنج چه فشاری را نشان می‌داد؟ نقاط A و B در ارتفاع یکسان قرار دارند، اما فشارسنج در همان امتداد قبلی است.

۲-۱۸ برای اندازه‌گیری اختلاف فشار هوا در لولهٔ موجود در شکل ۲-۲۷ بین دو نقطهٔ مشخص شده از فشارسنج مایل استفاده شده است. اختلاف فشار برحسب psi برای شرایط مفروض در این شکل چقدر است؟

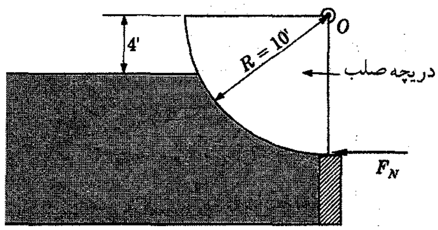
۲-۱۹ فشارسنجهای دو شاره‌ای همچون شکل ۲-۲۸ می‌توانند اختلاف فشار اندک را با دقت بیشتری در مقایسه با فشارسنجهای تک‌شاره‌ای اندازه‌گیری کنند. اختلاف فشار $p_A - p_B(\text{psi})$ را برای اختلاف ۲٫۰ اینچی در مرز مشترک دو شاره به‌دست آورید.

۲-۲۰ نیمی از ظرف شکل ۲-۲۹ پر از آب است و به جو راه دارد. دری مثلثی شکل به ته ظرف لولا شده است و با نیروی F محکم بسته شده است. نیروی F را به‌دست آورید.

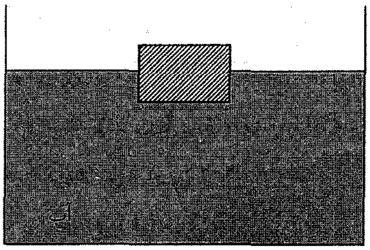
۲-۲۱ با توجه به شکل ۲-۳۰ غواصی می‌خواهد بداند همراه با محفظه تا چه عمقی می‌تواند در آب فرو رود و در عین حال بتواند در آن را بازکند. با فرض اینکه فشار درون محفظه برابر با فشار جو است و بیشترین نیرویی که غواص می‌تواند اعمال کند $150\,\text{lb}_f$ است، عمق بیشینه را محاسبه کنید.



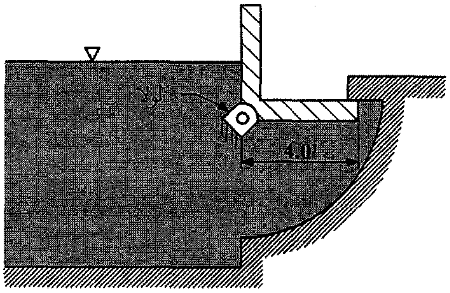
شکل ۲-۳۰



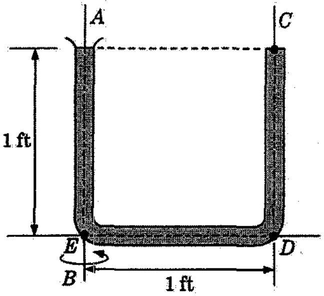
شکل ۲-۳۱



شکل ۲-۳۲



شکل ۲-۳۳



شکل ۲-۳۴

۲-۲۲ در شکل ۲-۳۱ نیروی وارد بر نقطهٔ O واقع بر دریچهٔ صلب ربع استوانه‌ای را به‌دست آورد. طول دریچه ۳۰ فوت و وزن آن قابل‌چشم‌پوشی است. نیروی F_N وارد بر انتهای دریچه را محاسبه کنید.

۲-۲۳ در ظرف آب شکل ۲-۳۲ جسمی با گرانی ویژه ۰٫۵ بر روی آب شناور است. اگر به ظرف و مایع شتاب بالاروندهٔ $10\,\mathrm{ft/s^2}$ داده شود، مکان جسم نسبت به سطح آب چه خواهد بود؟

۲-۲۴ با بالا آمدن آب در طرف چپ دریچهٔ مستطیلی شکل ۲-۳۳ دریچه به‌طور خودکار باز می‌شود. ارتفاع آب در بالای لولا چقدر باید باشد تا چنین اتفاقی رخ دهد؟

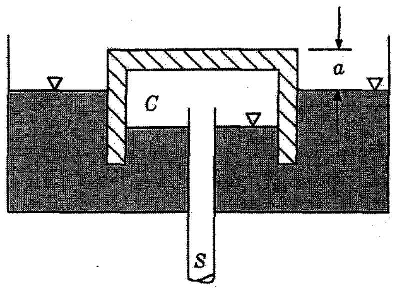
۲-۲۵ لولهٔ Uشکلی مطابق شکل ۲-۳۴ حول خط AB دوران می‌کند. سرعت زاویه‌ای برابر یک دور در ثانیه است. فشار را در C، D و E تعیین کنید. انتهای لوله در C بسته است.

۲-۲۶ نوعی فشارسنج نسبتاً جدید به‌صورت یک قوطی وارونه با دیواره‌های قائم ضخیم در حالت شناور بر روی مایع مطابق شکل ۲-۳۵ پیشنهاد شده است، که حساستر از فشارسنج Uشکل برای اندازه‌گیری فشار است. در این فشارسنج جیوه‌ای فشاری که باید اندازه‌گیری شود توسط لولهٔ S به اتاقک بستهٔ C مرتبط است. قوطی وارونه در محفظهٔ آبی که از بالا با جو ارتباط دارد شناور است. فاصلهٔ سطح آب تا بالای قوطی a معیاری از فشار است. حساسیت این فشارسنج چقدر است، به‌عبارت دیگر تغییر a نسبت به تغییر فشار چقدر است؟

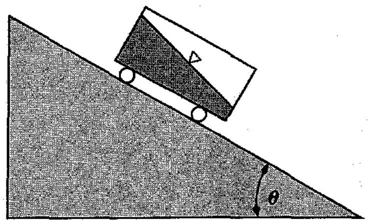
۲-۲۷ دو مسئلهٔ ۲-۸ و ۲-۹ را با در نظرگرفتن وزن دریچه حل کنید. دریچه قطعه‌ای فولادی به ضخامت $\frac{1}{4}$ اینچ است.

۲-۲۸ مسائل ۲-۷ و ۲-۸ را با فرض اینکه در هر حالت آب به عمق ۲ فوت در طرف راست دریچه وجود دارد، حل کنید.

۲-۲۹ در مسئلهٔ ۲-۷ بردار برایند نیروی وارد بر دریچه را در نتیجهٔ فشار آب به‌دست آورید. این تک نیرویی است که می‌تواند جایگزین نیروی آب باشد و توسط نیروهای عکس‌العمل لولا و F تعیین می‌شود.



شکل ۲-۳۵



شکل ۲-۳۶

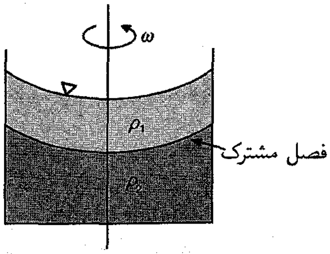
۲-۳۰ گاری حاوی آب شکل ۲-۳۶ بر روی سطح تخت شیب‌داری به‌طرف پایین در حرکت است. شیب سطح آزاد را به‌دست آورید. در این محاسبه از اصطکاک چرخها و مقاومت هوا صرف‌نظر می‌کنیم.

۲-۳۱ استوانه قائم پر از آب نفوذناپذیری با سرعت زاویه‌ای ω حول محور استوانه می‌چرخد. توزیع فشار در استوانه چگونه است؟ سوراخ کوچکی در مرکز استوانه وجود دارد که فشار روی مایع برابر با فشار جو است.

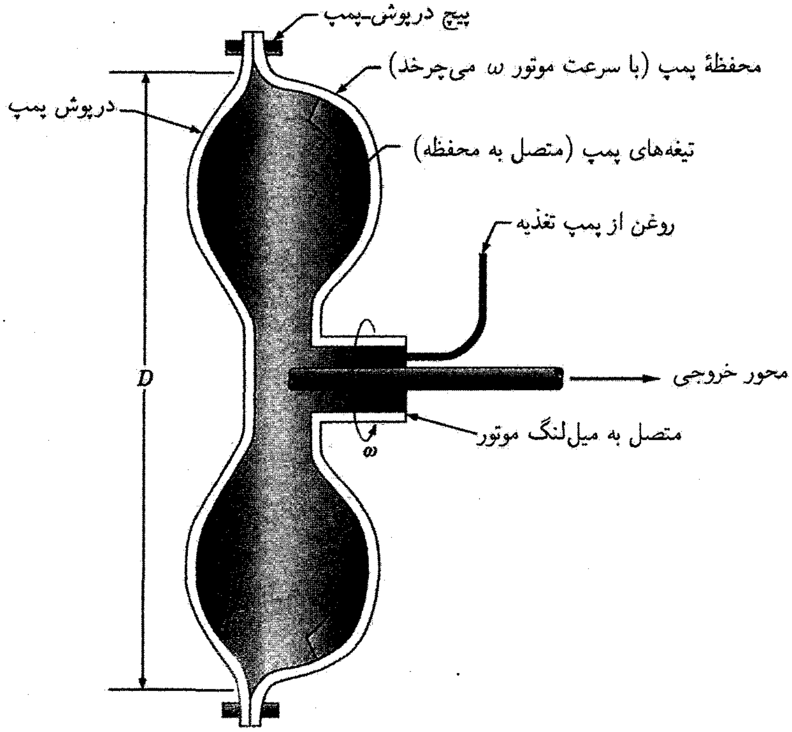
۲-۳۲ در مسئلهٔ ۲-۳۱ استوانه در میدان گرانش صفر می‌چرخد. در این حالت توزیع فشار آب چگونه است؟

۲-۳۳ در میدان گرانش صفر، مخزن سوخت موشکی که حاوی سوخت مایع با چگالی ρ است با شتاب ثابت a حرکت می‌کند. توزیع فشار در مخزن چگونه است؟ آیا شکل مخزن بر آن تأثیر دارد؟ توضیح دهید.

۲-۳۴ مخزنی استوانه‌ای حاوی دو مایع آمیخته‌نشدنی با چگالیهای ρ_1 و ρ_2 که $\rho_2 > \rho_1$ است مطابق شکل۲-۳۷ با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. توزیع فشار، شکل فصل مشترک مایعها، و شکل سطح آزاد مایع را مشخص کنید.



شکل ۲-۳۷



شکل ۲-۳۸

۲-۳۵ آیا شکل لولهٔ Uشکل تأثیری بر جواب مسئلهٔ ۲-۱۱ دارد؟ از نظر عملکرد پارامترها چقدر اهمیت دارند؟

۲-۳۶ در مسئلهٔ ۲-۱۲ با افزایش a_x چه پدیده‌ای رخ می‌دهد. آیا با افزایش a_x تمام محفظه تخلیه می‌شود؟

۲-۳۷ بالنی پر از گاز هلیوم (که از هوا سبکتر است) درون خودرویی قرار دارد. اگر تمام پنجره‌های خودرو بسته باشد و خودرو با شتاب ثابت حرکت کند توزیع فشار هوا در خودرو چگونه است؟ آیا بالن به‌طرف جلو یا عقب خم می‌شود؟ اگر بالن از هوا پر شده باشد و از سقف خودرو آویزان شود جواب سؤالات بالا چگونه است؟ توضیح دهید.

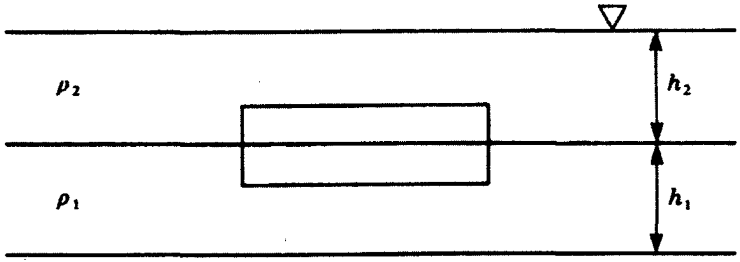
۲-۳۸ یکی از مسائلی که در برابر طراحان تبدیل گشتاور بوئیک دینافلو مطرح است تعیین تنش کششی بیشینه در پیچهایی است که درپوش پمپ را به محفظهٔ آن، همچون شکل ۲-۳۸، متصل می‌کنند.

کارکرد دستگاه دینافلو به شرح زیر است: میل‌لنگ موتور به محفظهٔ پمپ جفت شده است و آن را با سرعت موتور ω می‌چرخاند. محفظهٔ پمپ و درپوش آن واحدی نفوذناپذیر در مقابل روغن را تشکیل می‌دهند، مجموعهٔ آب‌بندی‌شده‌ای که در پیرامون محور خروجی تعبیه شده است و با سرعتی برابر یا کمتر از سرعت محفظهٔ پمپ می‌چرخد، این محفظه را پر از روغن، در فشار ثابت «تغذیه»، به‌وسیلهٔ پمپ تغذیهٔ کمکی نگه می‌دارند. برای تمام مقاصد عملی، این پمپ از طریق مرکز دوران خود روغن را به محفظهٔ پمپ می‌رساند.

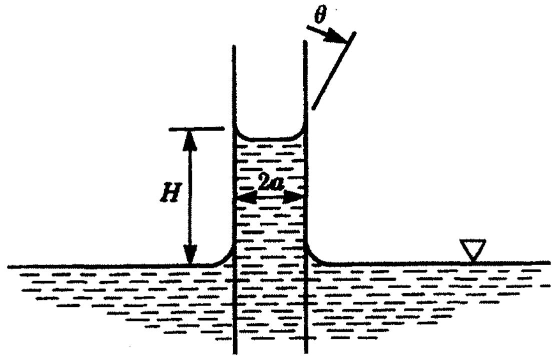
تیغه‌های شعاعی، یا پره‌های پمپ که روغن را به استاتور و توربین می‌رسانند (در شکل دیده نمی‌شوند)، در درون محفظهٔ پمپ قرار دارند و به محور خروجی متصل شده‌اند.

تنش کششی مورد انتظار در پیچ درپوش پمپ چقدر است؟ قطر محفظهٔ پمپ D فوت و سرعت زاویه‌ای آن ω رادیان در ثانیه است.

۲-۳۹ منشوری قائم با چگالی ρ_0 در فصل مشترک دو مایع آمیخته‌نشدنی با چگالی‌های ρ_1 و ρ_2 همچون شکل ۲-۳۹ شناور است. برحسب



شکل ۲-۳۹



شکل ۲-۴۰

پارامترهای مربوط پیدا کنید:

الف) عمقی را که منشور در مایع زیرین شناور است.

ب) شرایطی را که منشور در سطح مایع بالایی شناور می‌ماند.

ج) شرایطی را که منشور به کف مایع زیرین فرو می‌رود.

۲-۴۰ لولهٔ شیشه‌ای نازکی به شعاع a به درون سطح آزاد مایع خاصی (شکل ۲-۴۰) فرو رفته است. دیده می‌شود که مایع تا ارتفاع H در لوله بالا می‌آید. اندازهٔ زاویهٔ θ به خاصیت «ترشوندگی» شیشه توسط مایع بستگی دارد و پارامتر ثابتی است که فقط به جنس لوله مایع (این پارامتر را می‌توان از روی داده‌های جدول‌بندی شده به‌دست آورد) بستگی دارد. اگر θ همان‌گونه که دیده می‌شود، مثبت باشد، می‌گویند که مایع لوله را تر کرده است. اگر θ منفی باشد، یعنی تحدب مایع رو به بالا باشد، می‌گویند که مایع لوله را تر نمی‌کند. برای وضعیت ترنکننده آیا مایع در لوله پایین می‌رود یا بالا؟ سطح آزاد مایع در لوله دارای شکل کروی است. برای مقدار مثبت θ، T فصل مشترک هوا و مایع و a شتاب، رابطه‌ای برای H به‌دست آورید. بالا رفتن مایع در لولهٔ باریک را اصطلاحاً مویینگی می‌نامند و عامل نفوذ مایع از محیطهای متخلخل است. راهنمایی: شعاع سطح کروی چقدر است؟ جواب $H = 2T\cos\theta/\rho g a$.

۲-۴۱ کوشش کنید که سوزن خیاطی را بر روی سطح کاسهٔ آب شناور نگه دارید. با دقت این کار را می‌توان انجام داد. توضیح دهید چرا سوزن در آب فرو نمی‌رود. (اثرهای کشش سطحی). ارتفاع آب را در نزدیکی سوزن رسم کنید و علت شکل آن را توضیح دهید. آیا آب سوزن را تر می‌کند؟ آیا θ مثبت است یا منفی (شکل ۲-۴۰). را ببینید.

نمادگذاریهای فصل ۲

$\mathbf{a}$ = شتاب

$\mathbf{F}$ = نیرو

g = شتاب گرانشی زمین

h = ارتفاع مایع (شاره)

p = فشار

R = ثابت گاز

T = دما، کشش سطحی

γ = وزن مخصوص $= \rho g$

ρ = چگالی

ω = سرعت زاویه‌ای

۳

مدلهای ریاضی حرکت شاره

۳-۱ مقدمه و روش

در این فصل شکل ریاضی مدل حرکت شاره را به‌دست خواهیم آورد. باید به خاطر داشت که این مدلها صرفاً تقریبهایی برای جریان واقعی شاره‌اند و درک محدودیتها و استفادهٔ مناسب از معادلات این فصل کاملاً ضروری است. این مدلهای ریاضی را به‌دقت به‌دست می‌آوریم و بر روی مفاهیم فیزیکی آنها تأکید خواهیم کرد.

شارهٔ واقعی از مولکولهایی تشکیل شده است که بین آنها فضای خالی وجود دارد. اما به‌طور کلی، در موقع ایجاد مدلهای ریاضی، بهتر است که فرض شود شاره محیطی پیوسته ــ پیوستار ــ است. در مدلسازی هم همین راهکار را دنبال خواهیم کرد، در انجام چنین کاری بلافاصله ساختار واقعی شاره را به‌صورت انتزاعی در نظر می‌گیریم و مدلی برای نمایش خود شاره معرفی می‌کنیم. لازم به یادآوری است در حالی‌که اغلب جریان شاره‌ها را پیوسته در نظر می‌گیرند، اما در مدلهای ریاضی رفتار آماری تک‌تک مولکولهای شاره منظور می‌شود که برای مطالعهٔ رفتار گازهای رقیق نیز لازم است. مثالهایی دربارهٔ راهکار حرکت ذره‌ای شاره را می‌توان در کتابهای چپمن و کولینگ و نیز کرتیس و بِرد در مرجعهای ۴ و ۵ یافت.

در این فصل ابتدا معادلات اصلی شاره را به شکل انتگرالی برای حجم معیاری دلخواه به‌دست می‌آوریم و سپس معادلات دیفرانسیل جریان شاره را با کاربرد معادلات انتگرالی برای جزء حجمی استخراج می‌کنیم. همان‌گونه که در فصل ۱ اشاره شد، در جریان شاره پنج متغیر اصلی وجود دارد: سه مؤلفهٔ سرعت، و دو خاصیت ترمودینامیکی. بنابراین پنج معادلهٔ اصلی داریم که جریان را توصیف می‌کند و شامل سه معادله مربوط به مؤلفه‌های تکانه، معادلهٔ پیوستگی و معادلهٔ انرژی است. به‌طور کلی معادلهٔ انرژی در جریان تراکم‌ناپذیر منفرد می‌شود، زیرا چگالی ثابت است. در جریان متلاطم، شرایط تا اندازه‌ای پیچیده‌تر است و معمولاً نمی‌توان مجموعه معادلات بسته‌ای را به‌دست آورد. بحث معادلات اصلی جریان

متلاطم را تا فصل ۹ بررسی نخواهیم کرد. معادلات اساسی خاصی همچون معادلهٔ حالت را ممکن است به کار ببریم تا خواص ترمودینامیکی بیشتری وارد معادلات شوند.

۳-۲ معادلات انتگرالی

در مطالعهٔ حرکت شاره، چهار قانون اصلی را در نظر می‌گیریم:

(الف) پایستگی جرم

(ب) قانون دوم نیوتون

(ج) پایستگی انرژی (قانون اول ترمودینامیک)

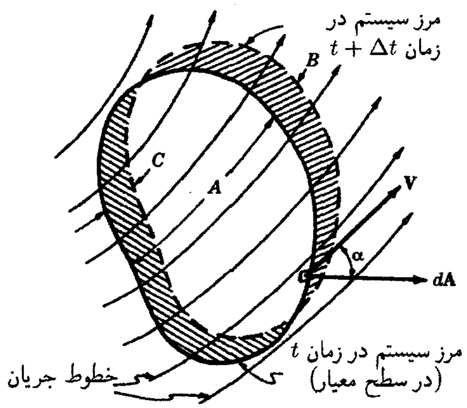
(د) قانون دوم ترمودینامیک

این قانونها برای مقدار ثابتی ماده (سیستم) اعمال می‌شود که ماهیت خود را تحت شرایط مختلف حفظ می‌کند. در حقیقت، این قانونها را نمی‌توان به‌طور معنی‌داری به‌کار برد، مگر اینکه سیستم مورد نظر مشخص باشد.

تعیین شناسایی شاره و پیروی از مقادیر ثابت ماده در تحلیل حرکت شاره‌ها معمولاً کار ساده‌ای نیست. به‌جای آن، معمولاً دیدگاه نظری میدان و شناسایی ناحیه یا حجم ثابت معینی در فضا به‌نام حجم کنترل پذیرفته می‌شود. اما، این چهار قانون اصلی برای حجمهای ثابت به‌کار نمی‌روند، بلکه برای مقادیر ثابت ماده استفاده می‌شوند. بنابراین، وظیفهٔ اصلی ما به دست آوردن معادلاتی است که برای حجمهای معیار حاصل از روابط شناخته شده به‌کار می‌روند. بدین‌ترتیب، این پرسش مطرح می‌شود که خواص شاره در درون حجم معیار ثابت در هر زمان مفروض، بدون توجه به این حقیقت که شاره در این حجم معیار به‌طور پیوسته تغییر می‌کند، چیست؟

اکنون، معادلات انتگرالی حرکت شاره را به‌دست می‌آوریم. در اینجا، به استخراج کامل این معادلات می‌پردازیم تا خواننده بهتر به نحوهٔ کاربرد آنها در وضعیتهای فیزیکی مختلف پی‌ببرد. در روشهای استخراج معادلات حجم معیار از طریق قانونهای اصلی شناخته شده از الگویی اصلی پیروی می‌شود که با اصلاحات اندکی برای کمیتهای فیزیکی مختلف قابل تعمیم است. پس از به‌دست آوردن معادلات، آنها را می‌توان در حل مسائل فیزیکی که در حرکت شاره رخ می‌دهد به‌کار برد.

پایستگی جرم: اکنون، توجه خود را و به میدان جریانی معطوف می‌کنیم که با خطوط جریان شکل ۳-۱ مشخص شده است و مقدار خاصی ماده در زمان t، محصور در میان خط پر، در نظر می‌گیریم. در لحظهٔ $t + \Delta t$ مرز سیستم به مکان تازه‌ای انتقال می‌یابد که با خط‌چین مشخص شده است.



شکل ۳-۱ حرکت ماده از درون حجم معیار.

با در نظرگرفتن ناحیه‌های A، B، و C، سیستمی داریم که در زمان t ناحیهٔ A و در زمان $t+\Delta t$ ناحیه‌های B و $A-C$ را اشغال می‌کند. فرض می‌کنیم که m جرم ماده در ناحیه‌های مختلف باشد و در زمانهای مختلف با شاخصهای مناسب مشخص شده باشد.

$$m_A(t) = m_A(t+\Delta t) - m_C(t+\Delta t) + m_B(t+\Delta t)$$

پس از بازآرایی رابطهٔ بالا و تقسیم بر Δt، داریم

$$\frac{m_A(t+\Delta t) - m_A(t)}{\Delta t} = \frac{m_C(t+\Delta t) - m_B(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

با حدگیری به‌صورت $\Delta t \to ۰$. طرف چپ این رابطه به‌صورت زیر در می‌آید

$$\lim_{\Delta t\to ۰} \frac{m_A(t+\Delta t) - m_A(t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t}(m)_{\text{C.V.}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \rho d\mathscr{V}$$

که ρ چگالی جرمی، $\mathscr{V}$ حجم، و .C.V نشانگر حجم معیار ثابت در فضاست که با سطح معیار (.C.S) کراندار شده است. طرف راست معادله عبارت است از

$$\lim_{\Delta t\to ۰} \left\{\frac{m_C(t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{m_B(t+\Delta t)}{\Delta t}\right\} = \dot{m}_{\text{in}} - \dot{m}_{\text{out}}$$

که به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\dot{m}_{\text{in}} - \dot{m}_{\text{out}} = -\int_A \rho V \cos\alpha dA = \int_{\text{C.S.}} \rho \mathbf{V}.d\mathbf{a}$$

که $\dot{m}_{\text{in}}$ و $\dot{m}_{\text{out}}$ نشانگر آهنگ جریان جرمی ورودی و خروجی حجم معیار، و $\mathbf{V}$ بردار سرعت است. v مقدار بردار سرعت، α زاویهٔ بین بردار سرعت و خط عمود بر سطح است. بدین ترتیب، معادلهٔ پیوستگی برای حجم معیار به شکل زیر در می‌آید

$$\int_{\text{C.S.}} \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \rho d\mathscr{V} \tag{۳-۱}$$

معادلهٔ (۳-۱) شکل انتگرالی معادلهٔ پیوستگی است و از نظر فیزیکی به این معناست که آهنگ خالص جریان جرم خروجی از سطح معیار برابر با آهنگ زمانی کاهش جرم در درون حجم معیار است. معادلهٔ (۳-۱) را با ساده‌سازیهای کلی در نظر می‌گیریم و سپس مثالهای خاصی را حل می‌کنیم.

چون حجم معیار ثابت است طرف راست معادلهٔ (۳-۱) برای جریان پایا صفر می‌شود $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} = ۰\right)$ که رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\int_{\text{C.S.}} \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} = ۰ \tag{۳-۲}$$

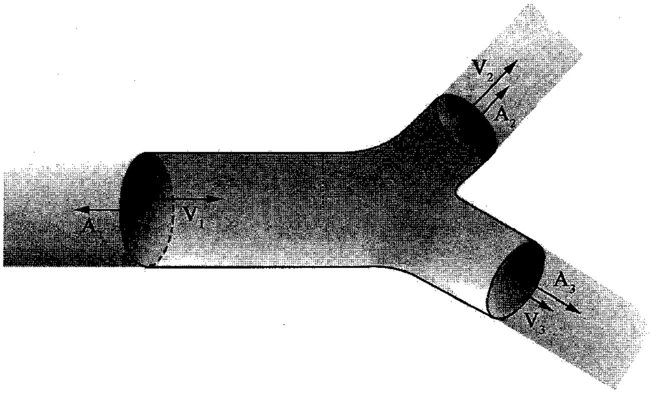
برای جریان شارهٔ تراکم‌ناپذیر، داریم

$$\int_{\text{C.S.}} \mathbf{V}.d\mathbf{A} = ۰$$

در جریان پایای شکل۳-۲، شاره وارد قسمت ۱ می‌شود و از قسمتهای ۲ و ۳ خارج خواهد شد، بنابراین

$$\int_{\text{C.S.}} \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} = ۰$$

$$\int_{A_۲} \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} + \int_{A_۳} \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} + \int_{A_۱} \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} = ۰$$



شکل ۳-۲ پیوستگی در جریان چندشاخه.

با این فرض که سرعت عمود بر همه سطحهایی است که شاره از آنها عبور می‌کند، داریم

$$\int_{A_۲} \rho_۲ V_۲ dA + \int_{A_۳} \rho_۳ V_۳ dA - \int_{A_۱} \rho_۱ dA = ۰$$

اگر چگالیها و سرعتها در ناحیه‌های مربوط به خود یکنواخت باشند، خواهیم داشت

$$\rho_۲ V_۲ A_۲ + \rho_۳ V_۳ A_۳ - \rho_۱ V_۱ A_۱ = ۰ \qquad (۳-۳)$$

برای تک لولهٔ بدون خروجی سوم این معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\rho_۲ A_۲ V_۲ = \rho_۱ A_۱ V_۱ \qquad (۴-۳)$$

فرضهای منظور شده در ایجاد معادلهٔ (۳-۴) عبارت‌اند از (الف) جریان پایا، (ب) سرعتها عمود بر سطحها هستند، (ج) سرعت و چگالی در ناحیه‌های مربوط به خود ثابت هستند و (د) هر حجم معیار دارای یک ورودی و یک خروجی است.

تکانه: اکنون، معادلهٔ تکانه را برای حجم معیار به‌دست می‌آوریم. این معادله یکی از مهمترین رابطه‌های ریاضی در حرکت شاره است. با این معادله می‌توان مسائل شامل نیروهای شاره وارد بر سطحهای صلب و شاره‌های دیگر همچون نیروی وارد بر زانویی، نیروی رانش موتور جت، نیروهای برآ و (بالابر) پسای (پس‌کشی) وارد بر بالهای هواپیما و بسیاری دیگر را بررسی کرد.

نیروی خالص $\mathbf{F}$ که بر ذره یا مجموعه‌ای از ذرات با جرم ثابت وارد می‌شود، از قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آید

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{M}}{dt} \qquad (۵-۳)$$

که $\mathbf{M}$ تکانهٔ خطی کل مجموعهٔ ذرات است. اگر فرض کنیم که نیروی وارده در طول زمان Δt ثابت باشد، می‌توان نوشت

$$\mathbf{F}\Delta t = \Delta\mathbf{M} \qquad (۶-۳)$$

طرف راست معادلهٔ (۳-۶) با مراجعه به شکل ۳-۱ عبارت است از

$$\Delta\mathbf{M} = \mathbf{M}_A(t+\Delta t) - \mathbf{M}_C(t+\Delta t) + \mathbf{M}_B(t+\Delta t) - \mathbf{M}_A(t)$$

پس از بازآرایی این رابطه و تقسیم آن بر Δt، داریم

$$\frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta t}=\frac{\mathbf{M}_A(t+\Delta t)-\mathbf{M}_A(t)}{\Delta t}+\frac{\mathbf{M}_B(t+\Delta t)-\mathbf{M}_C(t+\Delta t)}{\Delta t} \tag{۳-۷}$$

با تعیین مقدار حدی معادلهٔ (۳-۷) زمانی‌که $\Delta t \to ۰$، جملهٔ اول طرف راست به‌صورت زیر در می‌آید

$$\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\mathbf{M}_A(t+\Delta t)-\mathbf{M}(t)}{\Delta t}=\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{M})_{\text{C.V.}}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}}\rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V}$$

و جمله دوم

$$\lim_{\Delta t\to ۰}\left[\frac{\mathbf{M}_B(t+\Delta t)-\mathbf{M}_C(t+\Delta t)}{\Delta t}\right]=\lim_{\Delta t\to ۰}\left\{\frac{\left[\sum\limits_B \Delta \mathbf{M}(t+\Delta t)\right]_B}{\Delta t}-\frac{\left[\sum\limits_C \Delta \mathbf{M}(t+\Delta t)\right]_C}{\Delta t}\right\}$$

$$=\sum_B \Delta\dot{\mathbf{M}}-\sum_C \Delta\dot{\mathbf{M}}=\left[\sum \Delta\dot{m}\mathbf{V}\right]_{out}-\left[\sum \Delta\dot{m}\mathbf{V}\right]_{in}$$

$$=\int_{\text{C.S.}}\mathbf{V}\rho\mathbf{V}.d\mathbf{A}$$

که $\sum\limits_B \Delta\mathbf{M}(t+\Delta t)$ تکانهٔ مربوط به جرمی است که از مرز ناحیهٔ B در زمان Δt گذشته است. $\sum\limits_B \Delta\dot{m}$ آهنگ زمانی عبور تکانه از سطح به درون ناحیهٔ B در زمان t است. بنابراین، معادلهٔ (۳-۶) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}}\mathcal{V}\rho d\mathbf{V}+\int_{\text{C.S.}}\mathbf{V}\rho\mathbf{V}.d\mathbf{A} \tag{۳-۸}$$

نیروی کل $\mathbf{F}$ از نیروی کل سطح $\mathbf{F}_s$ (فشار و نیروی برشی) و نیروی حجمی $\mathbf{B}$ به‌عنوان نیروی واحد حجم تشکیل شده است. معادلهٔ تکانه برای حجم معیار به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{F}_s+\int_{\text{C.V.}}\mathbf{B}d\mathcal{V}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}}\mathbf{V}\rho d\mathcal{V}+\int_{\text{C.S.}}\mathbf{V}\rho\mathbf{V}.d\mathbf{A} \tag{۳-۹}$$

لازم به تأکید است این معادله وقتی معتبر است که محورها بدون شتاب حرکت کنند، زیرا شکل معمول قوانین نیوتون تحت این شرایط صادق است.[۱]

در حالت جریان پایا و نیروهای حجمی قابل چشمپوشی معادلهٔ (۳-۹) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{F}_s=\int_{\text{C.S.}}\mathbf{V}\rho\mathbf{V}.d\mathbf{A} \tag{۳-۱۰}$$

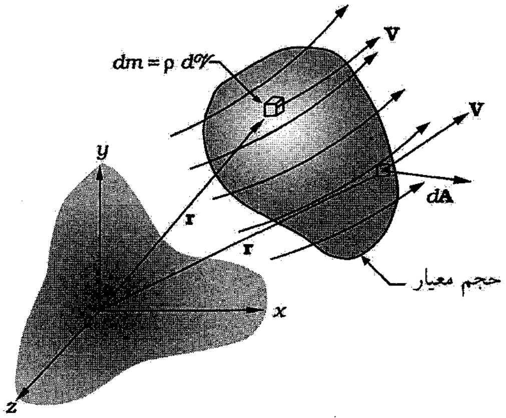
وانگهی، اگر فرض کنیم که چگالی و سرعت در تمام ناحیه‌هایی که شاره از سطح معیار عبور می‌کند یکنواخت است، برای ورودی ۱ و خروجی ۲ می‌توان نوشت

$$\sum \mathbf{F}_x=\dot{m}(V_{x_۲}-V_{x_۱}),\quad \sum \mathbf{F}_y=\dot{m}(V_{y_۲}-V_{y_۱}),\quad \sum \mathbf{F}_z=\dot{m}(V_{z_۲}-V_{z_۱})$$

تکانه زاویه‌ای: به‌جای استخراج دقیق معادلهٔ تکانه زاویه‌ای، فقط به نوشتن معادله و بحث بر روی مفهوم فیزیکی آن بسنده می‌کنیم. برای اطلاع از طریقهٔ به‌دست آوردن می‌توانید به مرجع ۱۱ و ۱۳ مراجعه کنید.

---

۱. در حالتی‌که حجم معیار شتابدار ولی بدون چرخش است، جمله‌ای مانند $-m\ddot{\mathbf{R}}$ به‌طرف چپ معادلهٔ (۳-۹) اضافه می‌شود که m جرم کل در حجم معیار، و $\ddot{\mathbf{R}}$ شتاب نسبت به چارچوب مرجع لخت است. طریقهٔ به‌دست آمدن معادلهٔ کامل آن در [۱۳] آمده است.



شکل ۳-۳ تکانهٔ زاویه‌ای در حجم معیار.

دوباره، معادلهٔ تکانهٔ خطی (۳-۹) را می‌نویسیم

$$\mathbf{F}_s + \int_{\text{C.V.}} \mathbf{B} d\mathscr{V} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \mathbf{V}\rho d\mathscr{V} + \int_{\text{C.S.}} \mathbf{V}\rho \mathbf{V}.d\mathbf{A}$$

سپس معادلهٔ (۳-۹) را به‌صورت حاصل‌ضرب برداری هر یک از جمله‌ها در بردار مکان $\mathbf{r}$ می‌نویسیم

$$\int_{\text{C.S.}} \mathbf{r}\times d\mathbf{F}_s + \int_{\text{C.V.}} \mathbf{r}\times \mathbf{B} d\mathscr{V} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \mathbf{r}\times\mathbf{V}\rho d\mathscr{V} + \int_{\text{C.S.}} \mathbf{r}\times\mathbf{V}\rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} \qquad (۳\text{-}۱۱)$$

که معادلهٔ تکانهٔ زاویه‌ای است. اکنون، به تفسیر فیزیکی هر یک از جمله‌ها می‌پردازیم. با مراجعه به شکل ۳-۳ تأکید می‌شود که $\mathbf{V}$ سرعت مطلق نسبت به دستگاه مختصات ثابتی است که در آن حجم معیار نیز ساکن است.

عبارت انتگرالده جملهٔ اول $\mathbf{r}\times d\mathbf{F}_s$ گشتاور حول مبدأ مربوط به نیروی $d\mathbf{F}_s$ در سطح معیار را به‌دست می‌دهد. انتگرالده جملهٔ دوم گشتاور حول مبدأ مربوط به نیروی حجمی وارد بر جزء حجمی بی‌نهایت کوچک $d\mathscr{V}$ است. انتگرالده جملهٔ سوم تکانهٔ زاویه‌ای جزء جرمی بی‌نهایت کوچک $\rho d\mathscr{V}$ است. با انجام انتگرال‌گیری تکانهٔ زاویه‌ای جرم کل درون حجم معیار به‌دست می‌آید. آخرین جمله آهنگ گذار تکانه زاویه‌ای از میان سطح معیار است.

درکاربرد معادلهٔ (۳-۱۱) از شکل مؤلفهٔ اسکالر استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال، اگر معادله را برای محور z، همچون شکل ۳-۴، بنویسیم (برای جریان پایا و نیروهای حجمی ناچیز)، داریم

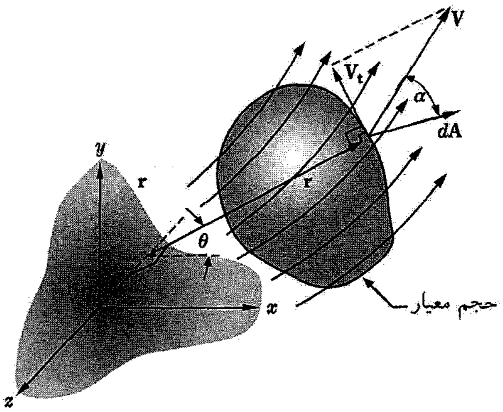
$$T_z = \int_{\text{C.S.}} (\mathbf{r}\times\mathbf{V})_z(\rho\mathbf{V}.d\mathbf{A}) \qquad (۳\text{-}۱۲)$$

که T_z گشتاور خالص وارد بر حجم معیار حول محور z است

$$(\mathbf{r}\times\mathbf{V})_z = rV_t, \qquad \rho\mathbf{V}.d\mathbf{A} = \rho V\cos\alpha dA$$

که V_t مؤلفهٔ بردار سرعت عمود بر محور z و $\mathbf{r}$، α زاویهٔ بین بردار سرعت و سطح $d\mathbf{A}$ است. آن‌گاه

$$T_z = \int_{\text{C.S.}} \rho r V_t V\cos\alpha dA \qquad (۳\text{-}۱۳)$$



شکل ۳-۴ تکانهٔ زاویه‌ای حول محور z.

فرض می‌کنیم که جریان کل به حجم معیار در سطح $A_۲$ وارد می‌شود و آن را در سطح A_z ترک می‌کند که بر روی هر یک از ρ، V، و $\cos\alpha$ یکنواخت هستند. بنابر تعریف، $r_۲V_{t۲}$ مقدار میانگین rV_t بر روی سطح $A_۲$ و $r_۱V_{t۱}$ مقدار میانگین بر روی سطح $A_۱$ است.

$$r_۲V_{t_۲} = \frac{۱}{A_۲}\int_{A_۲} rV_t dA, \qquad r_۱V_{t_۱} = \frac{۱}{A_۱}\int_{A_۱} rV_t dA$$

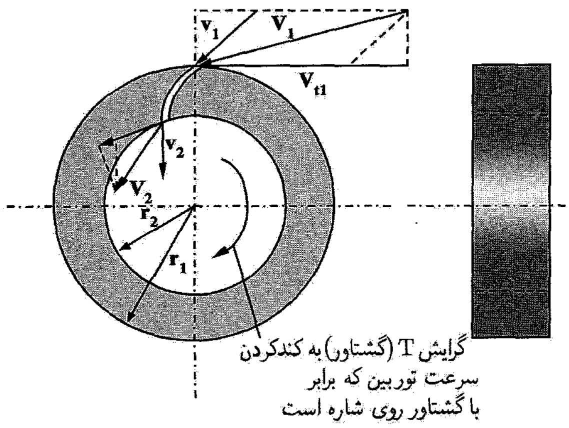
با توجه به معادلهٔ پیوستگی، برای Q آهنگ جریان حجمی، داریم

$$\rho_۱A_۱V_۱\cos\alpha_۱ = \rho_۲V_۲A_۲\cos\alpha_۲ = \rho_۱Q_۱$$

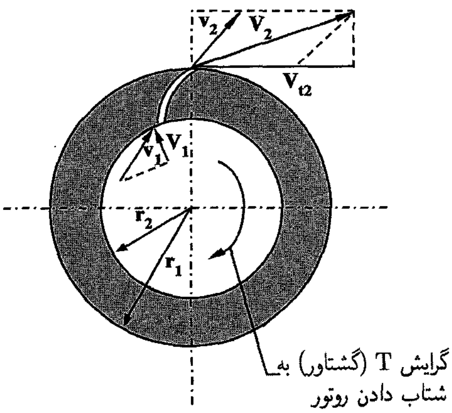
آن‌گاه معادلهٔ (۳-۱۳) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$T_z = \rho_۱Q_۱(r_۲V_{t_۲} - r_۱V_{t_۱}) \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

معادلهٔ (۳-۱۴) در روتور توربوماشینها به‌کار می‌رود، زیرا جریان مطلق در داخل روتور چرخه‌ای است و با تقریب خوبی می‌توان ρ، Vو $\cos\alpha$ را در ورودی ۱ و خروجی ۲ یکنواخت در نظر گرفت (شکلهای ۳-۵ و ۳-۶ را ببینید). در این شکلها **v** مربوط به روتور (سرعت نسبی) و **V** سرعت نسبت به زمین (سرعت مطلق) است. برای روشن شدن موضوع فقط یک پرهٔ توربین را نشان داده‌ایم.



شکل ۳-۵ نمودار سرعت برای پره‌ای با جریان شعاعی.



شکل ۳-۶ نمودار سرعت برای گرداننده توربین با جریان شعاعی.

اگر از اصطکاک یاتاقان و نیروی پسای شاره بر روی جدارهٔ خارجی روتور و تنشهای برشی شاره در ۱ و ۲ صرف‌نظر کنیم، آنگاه گشتاور خارجی T بر روی محور روتور برابر با برایند گشتاور خارجی در دو طرف دستگاه خواهد بود. T برای توربین ساعتگرد، و برای کمپرسور پادساعتگرد است. بنابراین، برای توربین، داریم

$$T = \rho_1 Q_1 (r_1 V_{t1} - r_2 V_{t2}) \tag{۳-۱۵}$$

و برای پروانهٔ کمپرسور یا پمپ (V_{t1} معمولاً صفر است)، خواهیم داشت

$$T = \rho_1 Q_1 (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \tag{۳-۱۶}$$

توربوماشینهای بالا دستگاههایی با جریان شعاعی‌اند، یعنی جریان درون روتور در جهت شعاعی یا عمود بر محور دوران است. توربوماشینها می‌توانند دارای جریان شعاعی (جریان موازی با محور دوران) یا جریان آمیخته (جریان میانی بین جریان محوری و شعاعی) باشند.

انرژی: بیان ریاضی قانون اول ترمودینامیک[1] عبارت است از

$$Q - W = \Delta E \tag{۳-۱۷}$$

که

$Q =$ گرمای داده‌شده به دستگاه،

$W =$ کار انجام گرفته توسط دستگاه، و

$\Delta E =$ تغییر انرژی دستگاه است.

همان‌گونه که در بخشهای قبلی اشاره شده، قویاً تأکید می‌شود که این قانون برای سیستم به‌کار می‌رود. بنابراین، مانند گذشته باید رابطه‌های ریاضی را برای حجم معیار تعیین کنیم.

گرما و کار در معادلهٔ (۳-۱۷) شامل برهم‌کنش دستگاه با دستگاههای دیگر است، اما انرژی وابسته به جرم سیستم است و معمولاً به سه قسمت تقسیم می‌شود

$$E = U + \frac{1}{2} m V^2 + mgz$$

که $U =$ انرژی ورودی مربوط به رفتار اتمها و مولکولهای دستگاه

$\frac{1}{2} m V^2 =$ انرژی جنبشی، و

$mgz =$ انرژی پتانسیل مربوط به مکان دستگاه در میدان گرانشی زمین است.

معادلهٔ (۳-۱۷) را برمبنای واحد جرم می‌نویسیم

$$q - w = \Delta e \tag{۳-۱۸}$$

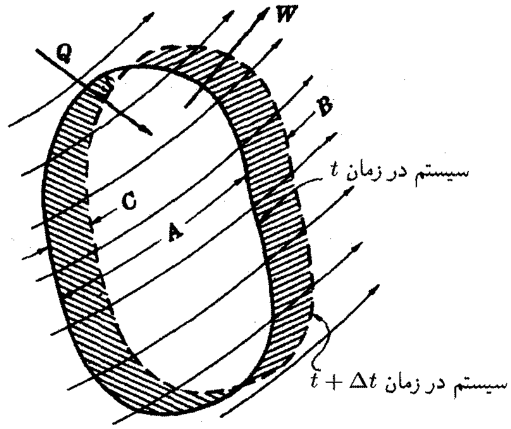
که

$$q = \frac{Q}{m},\ w = \frac{W}{m},\ e = \frac{E}{m}$$

اکنون، این سیستم را مطابق شکل ۳-۷ در زمان t در نظر می‌گیریم. پس از مدت زمان‌کوتاه $t + \Delta t$، این سیستم به مکان دیگری انتقال یافته است. معادلهٔ انرژی سیستم برای این تغییر عبارت است از

$$Q - W = E_f - E_i$$

۱. تعریف کار و گرما را می‌توان در مرجعهای ۷ و ۱۵ یافت.



شکل ۳-۷ حجم معیار برای موازنهٔ انرژی.

که E_f انرژی نهایی و E_i انرژی اولیهٔ سیستم است. از تقسیم این رابطه بر Δt، داریم

$$\frac{Q}{\Delta t}-\frac{W}{\Delta t}=\frac{E_f-E_i}{\Delta t} \tag{۳-۱۹}$$

اکنون، طرف راست معادله را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{E_f-E_i}{\Delta t}&=\frac{E_A(t+\Delta t)-E_C(t+\Delta t)+E_B(t+\Delta t)-E_A(t)}{\Delta t}\\&=\frac{E_A(t+\Delta t)-E_A(t)}{\Delta t}+\frac{E_B(t+\Delta t)-E_C(t+\Delta t)}{\Delta t}\end{aligned}$$

وقتی $\Delta t\to \circ$، اولین جملهٔ طرف راست به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to\circ}\frac{E_A(t+\Delta t)-E_A(t)}{\Delta t}&=\frac{\partial}{\partial t}(E)_{\text{C.V.}}=\frac{\partial}{\partial t}\int edm\\&=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}}e\rho d\mathcal{V}\end{aligned}$$

و آخرین جمله به‌صورت زیر می‌شود

$$\frac{E_B(t+\Delta t)-E_C(t+\Delta t)}{\Delta t}=\frac{\left(\sum\Delta me\right)_B|_{t+\Delta t}}{\Delta t}=\frac{\left(\sum\Delta me\right)C|_{t+\Delta t}}{\Delta t}$$

که مجموع آن عبارت است از جرم عبورکرده از سطح؛ Δm جرم نمونه‌وار، و e انرژی ذخیره‌شده در جرم Δm است. در حد وقتی $\Delta t\to\circ$ معادلهٔ آخر به شکل زیر در می‌آید

$$\lim_{\Delta t\to\circ}\frac{E_B(t+\Delta t)+E_C(t+\Delta t)}{\Delta t}=\int_{\text{out}}ed\dot{m}-\int_{\text{int}}ed\dot{m}=\int_{\text{C.S.}}e\rho\mathbf{V}.d\mathbf{A}$$

بنابراین، داریم

$$\lim_{\Delta t\to\circ}\frac{E_f-E_i}{\Delta t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}}e\rho d\mathcal{V}+\int_{\text{C.S.}}e\rho\mathbf{F}d\mathbf{A}$$

کار انجام شده در مرز سیستم با محیط خارج ممکن است در نتیجهٔ تنشهای عمودی و یا مماسی انجام گیرد. کار انجام شده در مرز ناشی از تنشهای عمودی (فشار هیدروستاتیک) را کار جریان شاره می‌نامند. این کاری است که روی جزء جرم $(\Delta m)_B$ انجام می‌گیرد. مثلاً، در جابه‌جایی

شاره در خروج از ناحیهٔ A در زمان Δt کار برابر با $pdA\Delta x$ است. اما $dA\Delta x$ حجم جزء جرم Δm است و می‌توان آن را به‌صورت $\frac{(\Delta m)_B}{\rho}$ نوشت: بنابراین، کار جریان شاره برای هر دو حالت جریان خروجی و ورودی عبارت است از

$$\begin{aligned}\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\text{کار جریان شاره}} &= \lim_{\Delta t\to ۰}\left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{\text{کار جریان شاره}}\\ &= \lim_{\Delta t\to ۰}\left[\frac{\sum(p/\rho)(\Delta m)_B|_{t+\Delta t}}{\Delta t}-\frac{\sum(p/\rho)(\Delta m)_C|_{t+\Delta t}}{\Delta t}\right]\\ &= \int_{\text{C.S.}}(p/\rho)\rho\mathbf{V}.d\mathbf{A}\end{aligned}$$

معادلهٔ انرژی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_S}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}}e\rho d\mathscr{V}+\int_{\text{C.S.}}(e+p/\rho)\rho\mathbf{V}.d\mathbf{A} \qquad (۳-۲۰)$$

که

$$e=u+\frac{۱}{۲}V^{۲}+gz$$

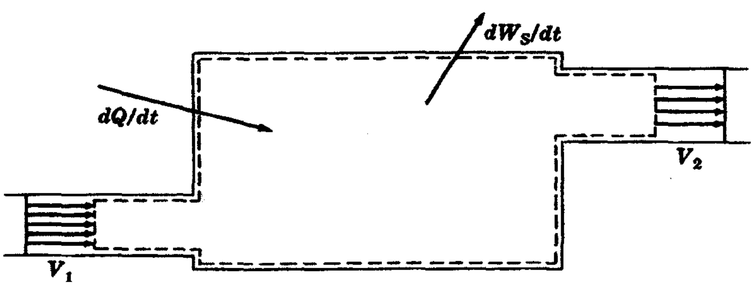
و $\frac{dW_S}{dt}$ آهنگ انجام کار برای تمام انواع کار بجز کار جریان شاره است. معادلهٔ (۳-۲۰) بیان‌کنندهٔ آهنگ دمای اضافه شده به سیستم منهای کار انجام شده به‌وسیلهٔ سیستم (بجز کار جریان شاره) است که برابر با آهنگ تغییر انرژی ذخیره‌شده در حجم معیار به‌اضافه آهنگ خالص جریان انرژی ذخیره‌شده و کار جریان شارهٔ خارج شده از حجم معیار می‌شود.

اکنون، جریان پایای یک‌بعدی سیستم موجود در شکل ۳-۸ را در نظر می‌گیریم. کار نیروی برشی انجام شده روی مقطع محور دوار را کار محور می‌نامند. کارهای انجام شده بر روی همهٔ قسمتهای دیگر مرز برابر صفر است، زیرا سرعت یا صفر است و یا عمود بر نیروی برشی خواهد بود. بنابراین، از معادلهٔ (۳-۲۰) نتیجه می‌شود

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_s}{dt}=\int_{A_۱+A_۲}\left(\frac{p}{\rho}+u_۱+\frac{۱}{۲}V^{۲}+gz\right)\rho V dA$$

چون جریان یک بعدی است p، V، u، ρ در مقطع $A_۱, A_۲$ یکنواخت‌اند، اگر علاوه بر این شرایط از تغییرات z بر روی سطحها صرف‌نظر کنیم، داریم

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_S}{\Delta t}=\left(\frac{p_۲}{\rho_۲}+u_۲+\frac{۱}{۲}V_۲^{۲}+gz_۲\right)\rho_۲A_۲V_۲-\left(\frac{p_۱}{\rho_۱}+u_۱+\frac{۱}{۲}V_۱^{۲}+gz_۱\right)\rho_۱A_۱V_۱$$



شکل ۳-۸ سیستم جریان پایا با مبادلهٔ کار و گرما.

از معادلهٔ پیوستگی برای جریان پایای یک بعدی نتیجه می‌شود

$$\rho_۱ A_۱ V_۱ = \rho_۲ A_۲ V_۲ = \frac{dm}{dt} = \text{آهنگ جریان جرم}$$

که با نشاندن در معادلهٔ انرژی، خواهیم داشت

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_S}{dt} = \left[\left(\frac{p_۲}{\rho_۲} - \frac{p_۱}{\rho_۱}\right) + (u_۲ - u_۱) + \frac{V_۲^۲ - V_۱^۲}{۲} + g(z_۲ + z_۱)\right]\frac{dm}{dt} \qquad (۲۱\text{-}۳)$$

با نوشتن معادلهٔ (۳-۲۱) برای هر واحد حجم جریان شاره، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$q - w_S = \left(\frac{p_۲}{\rho_۲} - \frac{p_۱}{\rho_۱}\right) + (u_۲ - u_۱) + \frac{V_۲^۲ - V_۱^۲}{۲} + g(z_۲ - z_۱) \qquad (\text{۳-۲۲ الف})$$

این معادله موازنهٔ ترمودینامیکی جریان انرژی پایا در یک بعد است.

این معادله را می‌توان برحسب آنتالپی ویژهٔ h که $h = p/\rho + u$، نوشت

$$q - w_S = (h_۲ - h_۱) + \frac{V_۲^۲ - V_۱^۲}{۲} + q(z_۲ - z_۱)$$

با فرض تراکم‌ناپذیری جریان شاره و بازآرایی معادلهٔ (۳-۲۲الف) می‌رسیم به

$$-w_S = \frac{p_۲ - p_۱}{\rho} + \frac{V_۲^۱ - V_۱^۲}{۲} + g(z_۲ - z_۱) + (u_۲ - u_۱ - q)$$

در اغلب جریانهای واقعی، تمام کمیتهای معادلهٔ پیشین، بجز انرژی درونی و انتقال گرما را می‌توان مستقیماً اندازه‌گیری کرد. به‌طور مثال، این موضوع به‌ویژه برای جریان مایعات در لوله‌ها صدق می‌کند. بنابراین، روش متداول چنین تعریف می‌شود

$$gH_L = u_۲ - u_۱ - q$$

به‌گونه‌ای که

$$-w_S = \frac{p_۲ - p_۱}{\rho} + \frac{V_۲^۲ - V_۱^۲}{۲} + g(z_۲ - z_۱) + gH_L \qquad (\text{۳-۲۲ب})$$

که H_L را «اتلاف» یا «افت هد» می‌گویند و بیانگر تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی گرمایی‌است. با برقراری جریان در درون پمپ یا لوله، شاره دچار تغییر شکل برشی می‌شود زیرا شاره در تماس با سطح جامد نمی‌لغزد. تنشهای برشی در نتیجهٔ این تغییر شکلها در شارهٔ گران‌رو شکل می‌گیرند. دما بیشتر از دمای جریان بی‌اصطکاک می‌شود. افزایش دما موجب افزایش $u_۲ - u_۱$ و گرمای انتقالی به محیط اطراف خواهد شد.

برای جریان بی‌اصطکاک شارهٔ تراکم‌ناپذیر با کار محوری صفر، معادلهٔ (۳-۲۲ب) به‌صورت زیر نوشته می‌شود، زیرا H_L صفر است

$$\frac{p_۲ - p_۱}{\rho} + \frac{V_۲^۲ - V_۱^۲}{۲} + g(z_۲ - z_۱) = ۰ \qquad (\text{۳-۲۲ج})$$

اکنون، این معادله را با معادلهٔ برنولی که بعداً آن را از معادلهٔ تکانه به‌دست خواهیم آورد، مقایسه می‌کنیم. در واقع، از مقایسهٔ معادلهٔ (۳-۲۲الف) با اولین انتگرال معادلهٔ حرکت برای شاره تراکم‌ناپذیر می‌توان ثابت کرد که $(u_۲ - u_۱ - q)$ جمله افت هد است. این معادله شبیه معادله (۳-۲۲ب) یعنی معادلهٔ تعمیم یافتهٔ برنولی است که مستقیماً از معادلهٔ تکانهٔ بررسی شده در بخش ۳-۳ به دست آمده است. دانستن این نکته بسیار مهم

است که معادلهٔ (۳-۲۲ب)، و نه معادلهٔ (۳-۲۲الف)، منحصراً از معادلهٔ تکانه به‌دست آمده است. معادلهٔ (۳-۲۲الف) معادلهٔ کلی انرژی برای جریان شاره تراکم‌پذیر است، اما وقتی می‌گوییم جریان تراکم‌ناپذیر است و مقدار انرژی $(u_۲ - u_۱ - q)$ انرژی تلف‌شدهٔ جریان بی‌اصطکاک است؛ تمام اطلاعات ترمودینامیکی واقعی را حذف کرده‌ایم و فقط موازنهٔ انرژی مکانیکی اضافه بر معادلهٔ حرکت را در اختیار داریم. برای جریان تراکم‌ناپذیر بی‌اصطکاک معادلهٔ (۳-۲۲ج) شبیه معادلهٔ برنولی معمولی است و قسمت دیگر معادلهٔ (۳-۲۲ب) در حالت $H_L = ۰$ ، قانون اول است. یعنی، $q - \Delta u = ۰$ برای واحد جرم شارهٔ جاری همان قانون اول ترمودینامیک و مستقل از معادلهٔ (۳-۲۲ج) است.

معادلهٔ کلی انرژی (۳-۲۲الف) شامل قانون اول ترمودینامیک و موازنهٔ انرژی مکانیکی است. باید به‌خاطر داشت که موازنهٔ انرژی مکانیکی (برابری آهنگ افزایش انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل به آهنگ کار ناشی از نیروهای انتقالی) را می‌توان از معادلهٔ تکانهٔ به‌دست آورد و مستقل از موازنهٔ ترمودینامیکی معروف به قانون اول است.

قانون دوم ترمودینامیک: روش تعیین قانون دوم ترمودینامیک برای هر حجم معیار مشابه روشی است که در قانونهای اصلی دیگر به‌کار می‌رود. به‌جای استخراج کامل معادله، فقط نتیجه‌ها داده خواهند شد. برای به‌دست آوردن تفصیلی معادله می‌توان به مرجعهای ۸ و ۱۰ مراجعه کرد.

قانون دوم برای سیستم عبارت است از

$$dS - \frac{dQ}{T} \geq ۰$$

(که S آنتروپی سیستم است). این رابطه نشان می‌دهد که تغییر آنتروپی منهای مقدار گرمای انتقال‌یافته به سیستم تقسیم بر دما برابر یا بزرگتر از صفر است. با استفاده از روشهای بخشهای قبل شکل حجم معیار قانون دوم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} s\rho d\mathscr{V} + \int_{\text{C.S.}} s\rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} - \int_{\text{C.S.}} \frac{\mathbf{q}}{T}.d\mathbf{A} \geq ۰ \qquad (۳\text{-}۲۳)$$

که $\mathbf{q}$ بردار شار گرمایی، آهنگ انتقال گرما بر واحد سطح، s آنتروپی ویژه، یعنی آنتروپی واحد جرم است.

اگر فرض کنیم که جریان شاره پایا و بی‌دررو است و فقط یک ورودی و یک خروجی دارد (شکل ۳-۸). آنگاه معادلهٔ (۳-۲۳) به شکل زیر نوشته می‌شود

$$s_۲ - s_۱ \geq ۰$$

اگر فرایند برگشت‌پذیر فرض شود، آنگاه

$$s_۲ - s_۱ = ۰$$

که می‌گویند فرایند تک‌آنتروپی است.

آنتروپی خاصیتی است که به خاصیتهای دیگر مربوط می‌شود. قانون دوم جایگاه ویژه‌ای در بررسی جریان گازها دارد.

۳-۳ معادلات دیفرانسیل

در بخش قبل با استفاده از قانونهای اصلی، معادلات انتگرالی قابل استفاده در حجم معیار را به‌دست آوردیم. اکنون، با استفاده از قانونهای اصلی معادلات دیفرانسیلی دینامیک شاره‌ها را به‌دست می‌آوریم. برای این‌کار چند روش وجود دارد که سه روش مختلف متداولتر است. نخست، با استفاده از حساب برداری، رابطه‌های دیفرانسیلی را از طریق رابطه‌های انتگرالی به‌دست می‌آوریم. در این روش به هیچ استدلال فیزیکی دیگری نیاز نیست و از ریاضیات محض و خشک استفاده می‌شود. در روش دوم، با استفاده از رابطه‌های انتگرالی برای جزء حجم و گرایادن حجم به سوی صفر، رابطه‌های دیفرانسیلی را به‌دست می‌آوریم. در روش سوم، معادلات اصلی را مستقیماً برای جزء حجم به کار می‌بریم و برای این‌کار، رابطه‌های انتگرالی اصلی را برای جزء حجمی به‌دست می‌آوریم.

برای تشریح این روشها، معادلهٔ دیفرانسیلی پیوستگی را با روش اول، معادلهٔ تکانه را با روش دوم و معادلهٔ انرژی را با روش سوم به‌دست می‌آوریم.

نکتهٔ مهمی که باید به خاطر داشت این است که مؤلفه‌هایی که برای مکان و زمان به کار می‌روند، مشخص‌کنندهٔ مکان تک‌تک ذرات نیستند. سؤال این است که خواص و سرعت ذرات برحسب مکان و زمان کدام‌اند؟ به‌عنوان مثال، در دستگاه مختصات دکارتی، داریم $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_{۱}, t)$، یا $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$. چنین مختصاتی را مختصات اویلری در مقابل مختصات لاگرانژی می‌نامند که در خصوص دینامیک اجسام صلب به‌کار می‌رود. در مختصات لاگرانژی شتاب $\ddot{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{r}$ نشانگر مکان ذره یا محل نقطه‌ای ثابت در جسم جامد است. در مکانیک شاره‌ها می‌توان از مختصات لاگرانژی استفاده کرد ولی مفید نیست و منحصراً از مختصات اویلری استفاده می‌شود. از این‌رو، روشن است که در دستگاه اویلری $\ddot{\mathbf{r}}$ معرف شتاب نیست زیرا چنین کمیتی بی‌معنی است، چون $\mathbf{r}$ فقط کمیت ثابت در فضاست و روشن است که مشتق آن بی‌معنی خواهد بود. با جریان یافتن شاره، ذرات از هر نقطهٔ مورد نظری می‌گذرند و دارای شتاب هستند که می‌توان آن‌را برحسب سرعت شاره نوشت. رابطه‌های مربوط در زیر به‌دست می‌آیند.

۳-۳-۱ پیوستگی (پایستگی جرم)

از معادلهٔ (۳-۱) شروع کنیم

$$\int_{\text{C.S.}} (\rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \rho d\mathscr{V} \qquad [۳-۱]$$

و با استفاده از قضیهٔ گاؤس، طرف چپ معادله را به انتگرال حجمی تبدیل می‌کنیم. در این صورت، معادلهٔ (۳-۱) به شکل زیر درمی‌آید

$$\int_{\text{C.V.}} \nabla(\rho\mathbf{V})d\mathscr{V} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \rho d\mathscr{V} = \int_{\text{C.V.}} [\nabla.(\rho\mathbf{V}) + \partial\rho/\partial t)d\mathscr{V} = ۰ \qquad (۳\text{-}۲۴)$$

چون حجم معیار اختیاری است انتگرالده باید صفر باشد. در این صورت، شکل دیفرانسیلی معادلهٔ پیوستگی عبارت است از

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\mathbf{V}) = ۰ \qquad (۳\text{-}۲۵)$$

که می‌توانستیم آن را مستقیماً با استفاده از معادلهٔ (۳-۱) برای حجم معیار به دست آوریم.

در جریان پایا، $\partial\rho/\partial t = ۰$ و داریم

$$\nabla.(\rho\mathbf{V}) = ۰ \qquad (۳\text{-}۲۶)$$

و برای جریان شاره تراکم‌ناپذیر، داریم

$$\nabla.\mathbf{V} = ۰ \qquad (۳\text{-}۲۷)$$

معادلهٔ پیوستگی در دستگاه مختصات به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = ۰ \qquad (۳\text{-}۲۸)$$

که برای جریان شاره تراکم‌ناپذیر به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = ۰ \qquad (۳\text{-}۲۹)$$

معادلهٔ پیوستگی در تانسور دکارتی به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = ۰ \qquad (۳\text{-}۳۰)$$

تانسور دکارتی به اختصار در پیوست هـ آمده است:

۳-۳-۲ معادلهٔ تکانه

معادلهٔ تکانه را با استفاده از شکل انتگرالی معادلهٔ پیوستگی برای جزء حجم به‌دست می‌آوریم. مکعبی کوچک را در نظر می‌گیریم، بنابراین نتایج فقط در دستگاه مختصات دکارتی معتبرند. شکل برداری کلی معادله در بهترین وضع با روش ریاضی صوری به‌دست می‌آید. ولی در اینجا فقط نتایج را ارائه می‌کنیم. البته معادلات برای هر دستگاه مختصاتی (استوانه‌ای، کروی و جز آن) همچون دستگاه دکارتی قابل حصول است منتها باید جزء حجم مناسب دستگاه مختصات را در ابتدا انتخاب کرد.

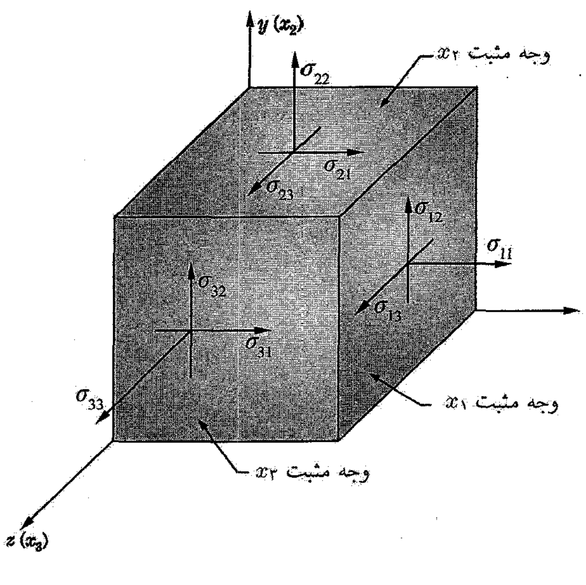
قبل از به‌دست آوردن معادله، نخست مفهوم تانسور تنش را مرور خواهیم کرد. در بررسی موازنهٔ تکانه تنشهای برشی و عمود (شامل فشار) را باید به‌حساب بیاوریم. (پس از به‌دست آوردن معادله، این تنشهای برشی و عمودی را مرتبط با مؤلفه‌های سرعت می‌کنیم و شکل نهایی معادلهٔ تکانه را به دست می‌آوریم.)

شارهٔ مکعبی شکل ۳-۹ را در نظر بگیرید. تنشها با σ_{ij} مشخص می‌شوند. شاخص پایین اول مشخص‌کنندهٔ وجهی است که تنش به آن وارد می‌شود: شاخص پایین دوم جهت اعمال تنش در وجه مثبت را نشان می‌دهد. در وجه منفی تنشها از نظر مقدار برابر، ولی در جهت مخالف با تنشهای وجه مثبت‌اند. (وجه به‌صورت صفحهٔ عمود بر محور شاخص پایین مشخص شده است. به‌عنوان مثال، وجه ۱ عمود بر محور x یا $x_۱$ است). وجه‌های مثبت و منفی را در شکل ۳-۹ نشان داده‌ایم. تنشها ممکن است در دورن شاره تغییر و در نتیجهٔ گرادیان آنها به‌وجود آید. اما، آرایهٔ تنشها σ_{ij} (به‌تعداد ۹ تا) ممکن است در هر نقطه از فضا برحسب $\mathbf{r}$ و t وجود داشته باشد. تانسور تنش به‌صورت زیر نوشته می‌شود

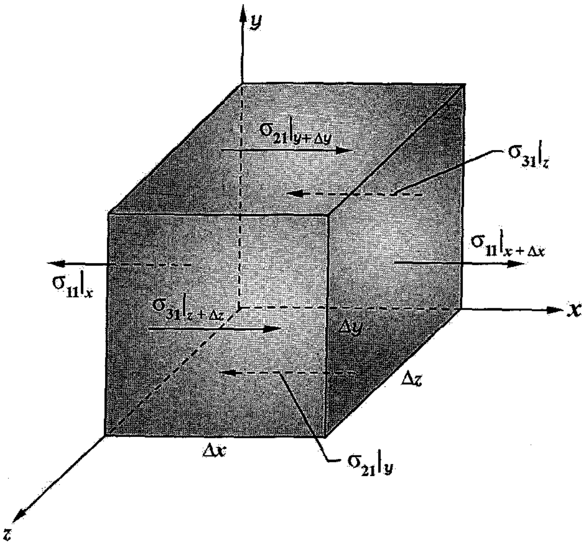
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{۱۱} & \sigma_{۱۲} & \sigma_{۱۳} \\ \sigma_{۲۱} & \sigma_{۲۲} & \sigma_{۲۳} \\ \sigma_{۳۱} & \sigma_{۳۲} & \sigma_{۳۳} \end{bmatrix} \tag{۳-۳۱}$$

تانسور تنش باید متقارن باشد، یعنی $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ، در غیر این‌صورت اگر جزء حجم را فشرده کنیم، بدیهی است حجم ریزتر می‌شود و در این حالت با سرعت زاویه‌ای بسیار زیادی می‌چرخد. بنابراین، شش مؤلفهٔ مستقل تانسور تنش وجود دارد.

اکنون، معادلهٔ انتگرالی تکانهٔ (۳-۹) را برای جزء مکعبی، که تنشهای موجود در آن نیروی خارجی $\mathbf{F}_s$ را تشکیل می‌دهند، به‌کار می‌بریم. با رجوع به شکل ۳-۱۰ می‌توان معادلهٔ موازنهٔ تکانه را در جهت x نوشت



شکل ۳-۹ تنشها در نقطه‌ای از فضا. وجه‌های مثبت نشان‌داده شده‌اند. سمت مخالف وجه منفی است. تنشها در وجه‌های منفی برابر، و در جهت مخالف با وجه‌های مثبت‌اند.



شکل **۳-۱۰** مکعبی برای استنتاج معادلهٔ تکانه. تنشها را فقط در جهت x نشان داده‌ایم.

$$\begin{aligned}(\sigma_{۱۱}\big|_{x+\Delta x} - \sigma_{۱۱}\big|_x)\Delta y\Delta z + (\sigma_{۲۱}\big|_{y+\Delta y} - \sigma_{۲۱}\big|_y)\Delta x\Delta y \\ + (\sigma_{۳۱}\big|_{z+\Delta z} - \sigma_{۳۱}\big|_z)\Delta x\Delta y + Bx\Delta x\Delta y\Delta z = \frac{\partial}{\partial t}(u\rho)\Delta x\Delta y\Delta z \\ + \Delta y\Delta z(\rho u^{۲}\big|_{x+\Delta x} - \rho u^{۲}\big|_x) + \Delta x\Delta y(\rho uv\big|_{y+\Delta y} - \rho uv\big|_y) \\ + \Delta x\Delta y(\rho uw\big|_{z+\Delta z} - \rho uw\big|_z)\end{aligned}$$

اگر این معادله را بر $\Delta x\Delta y\Delta z$ تقسیم کنیم و Δx، Δy و Δz به‌سوی صفر میل دهیم، در ترکیب با معادلهٔ پیوستگی (۳-۲۸) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید. (با همین روش مؤلفه‌های y و z به‌دست می‌آیند)

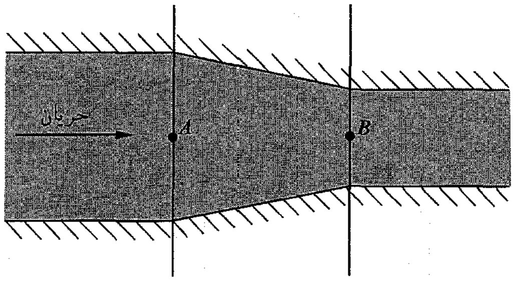
$$\begin{aligned}\rho\frac{Du}{Dt} &= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial\sigma_{۱۱}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{۱۲}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{۱۳}}{\partial z} + B_x \\ \rho\frac{Dv}{Dt} &= \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial\sigma_{۲۱}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{۲۲}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{۲۳}}{\partial z} + B_y \qquad (۳\text{-}۳۲) \\ \rho\frac{Dw}{Dt} &= \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial\sigma_{۳۱}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{۳۲}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{۳۳}}{\partial z} + B_z\end{aligned}$$

و با نمادگذاری تانسور دکارتی، داریم

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial_{xj}} + B_i \qquad (۳\text{-}۳۳)$$

جمله‌های طرف چپ، شتاب هستند. جملهٔ $\partial/\partial t$ جملهٔ ناپایایی است و تغییر زمانی در نقطه‌ای ثابت از فضا را نشان می‌دهد. جمله‌های طرف چپ، بجز $\frac{\partial}{\partial t}$، را شتابهای همرفت می‌نامند و دلیل وجود آنها کار در مختصات اویلری است.

عملگر D/Dt را مشتق کامل می‌گویند. به‌طورکلی، D/Dt عملگری برداری است و در نتیجه، مؤلفه‌های $\frac{D}{Dt}$ که بر روی بردار عمل می‌کنند، شبیه عملگر D/Dt که بر روی مؤلفه‌های اسکالر بردار بجز در دستگاه مختصات دکارتی، عمل می‌کنند، نیستند. معادلات (۳-۳۲) را می‌توان به



شکل ۳-۱۱ مجرای همگرا.

شکل برداری معتبر در تمام دستگاههای مختصات تعمیم داد. در این حالت شتاب برابر است با $\rho D\mathbf{V}/Dt$ که

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}.\nabla)\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla(\frac{1}{2}V^2) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

عملگر برداری $D\mathbf{V}/Dt$ در دستگاههای مختصات مختلف در پیوست پ داده شده است. در تعیین جملهٔ همرفت یعنی $(\mathbf{V}.\nabla)\mathbf{V}$ باید دقت کرد. هر چند این جمله مکرراً به کار می‌رود ولی آن را فقط در دستگاه مختصات دکارتی می‌توان بسط داد (و واقعاً فرمولبندی برداری مناسبی نیست). عبارتی هم‌ارز ولی رابطهٔ برداری بهتر و مناسبتری برای شتاب همرفت، $[\Delta(\frac{1}{2}V^2) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})]$ است که قابل بسط به مؤلفه‌ها در هر دستگاه مختصات است.

عملگر مشتق کامل را می‌توان برای کمیتهای اسکالر همچون دما به کار برد. مفهوم فیزیکی این نتیجه [که خود اسکالر (نرده‌ای) است] نشانگر آهنگ تغییر آن کمیت نسبت به زمان است که ناظر همراه با شاره در هر مکان در فضا و در هر لحظهٔ زمانی اندازه‌گیری می‌کند.

برای بیان مفهوم فیزیکی شتاب همرفت، شاره‌ای را در نظر بگیرید که در مجرایی همگرا همچون شکل ۳-۱۱ جریان می‌یابد. سرعت در نقطهٔ B بیشتر از نقطهٔ A است. زیرا سطح در B کوچکتر است. بنابراین، ذرات شاره در حرکت از A به B شتاب می‌گیرند، زیرا سطح جریان تغییر می‌کند (شتاب همرفت). وانگهی، اگر آهنگ تغییر زمانی جرم شاره را اعمال کنیم (مثلاً، آهنگ جریان جرم شاره در یک لحظهٔ خاص ۳ پوند در ثانیه و ۵ ثانیه بعد ۴ پوند در ثانیه باشد)، آنگاه هر یک از نقاط جریان تحت تأثیر افزایش سرعت یا شتاب موضعی قرار می‌گیرد. بنابراین، شتاب موضعی رخ می‌دهد. زیرا جریان ناپایاست و شتاب همرفت به‌وجود می‌آید، زیرا سطح تغییر می‌کند. نکتهٔ مهم این است که شتاب، بردار است و بیان آن در مختصات اویلری یا لاگرانژی تغییری در مقدار آن ندارد. به بیانی دیگر، در هر نقطه از فضا در هر زمان مفروض، شاره در آن نقطه دارای سرعت و شتاب، بزرگی و جهت خاصی است. از این‌رو، $D\mathbf{V}/Dt = \ddot{\mathbf{r}}$، که $\mathbf{r}$ مختصهٔ لاگرانژی است و D/Dt برحسب مختصات اویلری بیان می‌شود.

در بیشتر حالتها، جریانهای پایا را باید بررسی کرد. یعنی، در بیشتر مکانها شتاب موضعی صفر است و شتاب ذره تنها ناشی از اثرهای همرفت است.

۳-۳-۳ معادلهٔ تکانه برای جریان بی‌اصطکاک

در جریان بی‌اصطکاک تنشهای برشی وجود ندارند و تنشهای عمودی فقط به‌صورت فشار همسانگردند. چون تنشهای عمودی (σ_{11}، σ_{22}، و σ_{33}) را، اگر از نوع کششی باشند، به‌صورت مثبت تعریف کرده‌ایم، می‌توان نوشت

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$$

بدین‌ترتیب، معادلات حرکت در دستگاه دکارتی عبارت‌اند از

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i \qquad (۳-۳۴)$$

و در شکل مؤلفه‌ای عبارت‌اند از

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+B_x$$
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+B_y \qquad (۳-۳۵)$$
$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+B_z$$

این معادلات معروف به معادلات اویلر برای جریانهای بی‌اصطکاک‌اند. اگر جریان تراکم‌ناپذیر باشد، چگالی ثابت است و سه معادلهٔ اویلر به‌اضافهٔ معادلهٔ پیوستگی تشکیل چهار معادله برحسب چهار مجهول u، v، w و p را می‌دهد. حل این دستگاه معادلات غالباً دشوار است، زیرا جمله‌های شتاب همرفت، معادلات را غیرخطی می‌کند.

شکل کلی برداری معادلات اویلر عبارت‌اند از

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}.\nabla)\mathbf{V}=\rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\nabla(\frac{۱}{۲}V^{۲})-\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})\right]=-\nabla p+\mathbf{B} \qquad (۳-۳۶)$$

نخستین انتگرال مهم معادلهٔ حرکت را می‌توان با انتگرال‌گیری (۳-۳۶) بین دو نقطهٔ خط جریان انجام داد. فرض می‌کنیم که ds جزء طول در امتداد خط جریان است. در این‌صورت، داریم

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{\nabla}}{\partial t}.ds+\nabla\left(\frac{V^{۲}}{۲}\right).ds-\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V}).ds\right]=-(\nabla p+\rho\nabla\psi).ds \qquad (۳-۳۷)$$

چون $\mathbf{V}$ موازی با ds است، جملهٔ $\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})$ عمود بر ds است و

$$\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V}).ds=۰$$

بنابراین، جریان بی‌اصطکاک را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\int_{۱}^{۲}\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}.ds+\frac{V_{۲}^{۲}-V_{۱}^{۲}}{۲}+\int_{۱}^{۲}\frac{dp}{\rho}+\psi_{۲}-\psi_{۱}=۰ \qquad (۳-۳۸)$$

این معادله را معمولاً برای حالت پایا می‌نویسند و پتانسیل گرانشی ψ برابر g_z است (که z ارتفاع از یک سطح مرجع است). بنابراین، نیروی گرانش با $-\rho g\hat{z}$ است) که $\hat{z}$ بردار یکه در راستای عمودی است. در این حالت معادلهٔ (۳-۳۸) به‌صورت رابطهٔ زیر درمی‌آید

$$\frac{V_{۱}^{۲}-V_{۱}^{۲}}{۲}+\int_{۱}^{۲}\frac{dp}{\rho}+g(z_{۲}-z_{۱})=۰ \qquad (۳-۳۹)$$

که معادلهٔ تعمیم‌یافتهٔ برنولی یا اویلر نامیده می‌شود. برای جریان تراکم‌ناپذیر، داریم

$$\frac{V_{۱}^{۲}-V_{۱}^{۲}}{۲}+\frac{p_{۲}-p_{۱}}{\rho}+g(z_{۲}-z_{۱})=۰ \qquad (۳-۴۰)$$

که معادلهٔ برنولی، یعنی شکل انتگرالی بسیار مهم معادلهٔ حرکت است. باید به‌خاطر داشت که معادلهٔ (۳-۴۰) بر اساس جریان پایا، بی‌اصطکاک، تراکم‌ناپذیر، که نیروی گرانش تنها نیروی حجمی است بنا نهاده شده است. این معادله در سرتاسر خط جریان برقرار است.

وقتی بخواهیم از معادلهٔ (۳-۳۷) بین هر دو نقطهٔ میدان جریان (بین دو خط مختلف جریان) انتگرال بگیریم، یا اگر $\nabla \times \mathbf{V} = 0$، به معادلهٔ برنولی یا اویلر می‌رسیم. این جمله را به‌عنوان دوران شاره می‌شناسند و اگر $\Delta \times \mathbf{V} = 0$، جریان را غیر دورانی می‌گویند. معیار غیردورانی بودن را در فصل ۶ بررسی خواهیم کرد.

نکتهٔ جالب این است که معادلهٔ (۳-۴۰) نظیر معادلهٔ (۳-۲۲ج) از رابطه‌ها و ملاحظات انرژی به‌دست آمده است. از مقایسهٔ معادلهٔ (۳-۴۰) با (۳-۲۲ب) و (۳-۲۲ج) دیده می‌شود که $(u_2 - u_1 - q)$ باید جملهٔ اتلاف باشد و در حقیقت، می‌توان (۳-۲۲ب) و (۳-۲۲ج) را از معادلهٔ تکانه به‌دست آورد. معادلهٔ (۳-۲۲ب)، از جملهٔ w_s را از انتگرال‌گیری شکل تعمیم‌یافتهٔ معادلهٔ (۳-۳۶)، با در نظر گرفتن جمله‌های گران‌روی (مولد H_L) و این فرض که $\mathbf{B}$ دارای بخش ناپایستار (مولد w_S) است، به‌دست می‌آید. شکل تعمیم‌یافتهٔ معادلهٔ تکانه را به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۳-۵۴) در بخش ۳-۵، همزمان با بحث معادلات ناویه-استوکس، ارائه می‌کنیم: انتگرال‌گیری را در اینجا انجام نخواهیم داد، زیرا استفاده از، راهکار انتگرالی برای ایجاد (۳-۲۲ب) انجام کار را بسیار ساده‌تر می‌کند.

اکنون به جریان اصطکاکی برمی‌گردیم، اما نخست آهنگ تنش و آهنگ کرنش را در شاره‌ها توضیح می‌دهیم.

۳-۴ سینماتیک و رابطه‌های آهنگ تنش-کرنش در شاره‌ها

اگر بخواهیم بحث خود را به شاره‌های گران‌رو تعمیم دهیم. لازم است دربارهٔ آهنگ تغییر تنش و کرنش بحث مفصلتری بکنیم. نخست، حرکت سیستم کوچکی حاوی شاره با شکل دلخواه، مثلا یک مکعب، را در نظر می‌گیریم. حرکت مکعب ممکن است دو نوع باشد. حرکت جسم صلب و حرکت تغییر شکل. حرکت جسم صلب خود نیز ممکن است به حرکت انتقالی و دوران تقسیم شود. معمولاً این حرکت را با بررسی رد مکان مرکز جرم سیستم و دوران سیستم توصیف می‌کنیم. وقتی سیستم حرکت جسم صلب داشته باشد، ممکن است تغییر شکل دهد. تغییر شکل سیستم شاره را می‌توان با انبساط (آهنگ انبساط حجمی یا تراکم) و آهنگ کرنش برشی سیستم مشخص کرد. این حالتها را در شکل ۳-۱۲ نشان داده‌ایم.

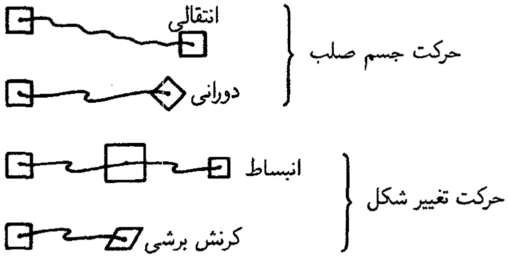
اکنون رابطه‌های کمّی برای تمام این مقادیر را می‌توان برحسب بردار سرعت $\mathbf{V}$ (یا u_i) و مشتقهای آنها در زیر نشان داد.

۳-۴-۱ انتقال

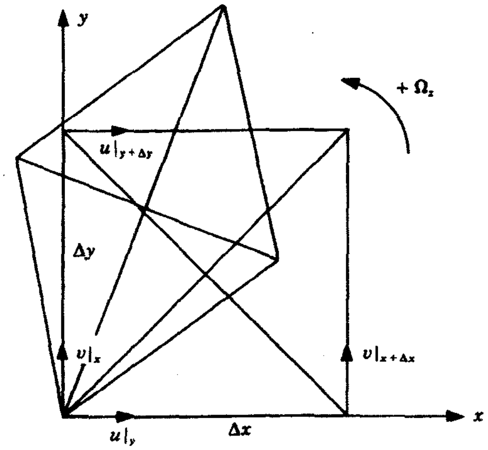
آهنگ انتقال به سادگی با بردار سرعت $\mathbf{V}$ مشخص می‌شود و متناظر است با سرعت مرکز جرم جزء شاره وقتی این جزء شاره به‌سوی صفر میل می‌کند.

۳-۴-۲ دوران

آهنگ دوران (سرعت زاویه‌ای) خاصیتی فیزیکی است که در هر نقطه تعریف می‌شود. سیستم شارهٔ متناهی دارای سرعت زاویه‌ای میانگین است و با بینهایت کوچک شدن سیستم (در حد) بردار سرعت زاویه‌ای $\mathbf{\Omega}$ دقیقاً تعریف می‌شود. $\mathbf{\Omega}$ دقیقاً برابر $\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{V})$ است. این رابطه را می‌توان به آسانی با آزمایش دوران در ۲بعد مشاهده کرد. مربعی را در صفحه xy شکل ۳-۱۳ در نظر بگیرید. خطوط قطری را که تحت دوران عمودی باقی



شکل ۳-۱۲ انواع حرکت که در موقع برهم‌نهش، سینماتیک جزء کوچکی از شاره را به‌طور کامل توصیف می‌کنند. شکل مکعب اختیاری است. هر چند شکل ۲بعدی است ولی حرکت ۳بعدی است.



شکل ۳-۱۳ نمایش مکعب دورانی و برشی در صفحهٔ xy.

می‌مانند رسم می‌کنیم و با میانگین‌گیری سرعت زاویه‌ای اضلاع، Ω_z را برای جزء حجم به‌دست می‌آوریم. سرعت زاویه‌ای ضلع Δx برابر است با

$$(v|_{x+\Delta x} - v|_x)/\Delta x$$

و سرعت زاویه‌ای ضلع Δy،

$$-(u|_{y+\Delta y} - u|_y)/\Delta y$$

با میانگین‌گیری این دو رابطه سرعت زاویه‌ای مربع به‌دست خواهد آمد و در حد وقتی Δx و Δy به‌سوی صفر می‌گرایند، داریم

$$\Omega_z = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{۳-۴۱}$$

و همین‌گونه

$$\Omega_x = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad \Omega_y = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

این مؤلفه‌های دکارتی $\mathbf{\Omega}$ را به‌عنوان مؤلفه‌های تاو سرعت می‌شناسیم، به‌گونه‌ای که

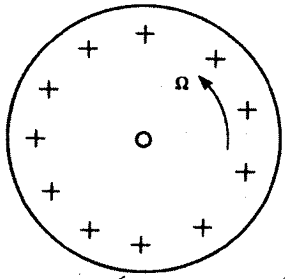
$$\mathbf{\Omega} = \frac{۱}{۲}(\nabla \times \mathbf{V}) = \frac{۱}{۲}\omega \tag{۳-۴۲}$$

تاو بردار سرعت را سرعت گردشار ($\omega = \nabla.\mathbf{V}$) می‌گویند، که نقش مهمی در مکانیک شاره‌ها دارد.

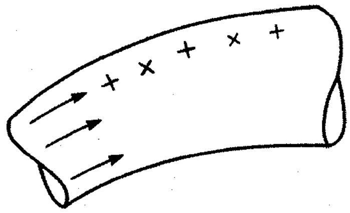
حرکت دورانی در هر جریان شارهٔ خاص ممکن است رخ دهد یا ندهد. معمولاً، اثرهای گران‌روی یا اصطکاک در شاره ایجاد سرعت گردشاری می‌کند. جریان شاره‌ای که سرعت زاویه‌ای $\mathbf{\Omega}$ (و سرعت گردشاری ω) در آن صفر است، جریانی غیردورانی است و همان‌گونه که در فصل ۶ خواهیم دید مشخصهٔ جریان آئرودینامیک است. مثال سادهٔ جریان غیردورانی جریان گردشاری است که در مکانیک شاره‌ها معروف به گرادبهٔ پتانسیل است.

راهی ساده برای نمایش «گردشاری» این است که جسم کوچکی نظیر برگ را روی سطح آب آزاد رها کنیم. مشاهده می‌کنیم که جسم ضمن حرکت همراه جریان دوران می‌کند. گردشاری که موقع تخلیه آب از ظرفشویی یا وان ایجاد می‌شود غیردورانی است و جسم سبک شناور بر روی آب نمی‌چرخد، بلکه ضمن دور زدن همراه آب موازی با خود باقی می‌ماند (جسم شناور بر روی مسیری دایره‌ای حرکت انتقالی بی‌دوران دارد).

سنجه‌های گردشاری را غالباً از اجسام سخت کوچک شناور صلیبی شکل می‌سازند تا با آنها بتوان دوران را مشاهده کرد. علت انتخاب جسم صلیبی شکل، به‌جای میلهٔ کوچک، این است که سرعت زاویه‌ای میانگین دو خط عمود جسم صلیبی شکل باید اندازگیری شود تا سرعت زاویه‌ای



(الف) جریان غیردورانی درگردشارخروج از سوراخ جسم ضمن حرکت در مسیر دایره‌ای، حول خود دوران نمی‌کند.



(ب) جریان دورانی شارهٔ گران‌رو در یک لوله.

شکل ۳-۱۴ (الف) جریان غیردورانی درگردشار خروج از سوراخ. جسم ضمن حرکت در مسیر دایره‌ای، حول خود دوران نمی‌کند.(ب) جریان دورانی در شارهٔ گران‌رو در یک لوله.

جزء کوچک مشخص شود. بنابراین، برای اندازه‌گیری جسم مناسب است. به‌عنوان مثال، در جریان برشی دورانی شارهٔ گران‌رو، میله‌ای سبک فوراً خود را با خطوط جریان همراستا می‌کند و دوران نمی‌کند، در حالی‌که جسم صلیبی شکل حول محور خود دوران می‌کند (شکل ۳-۱۴).

۳-۴-۳ تغییر شکل کرنش برشی

با توجه به جزء مربعی، شکل ۳-۱۳ ، می‌بینیم که آهنگ کرنش برشی در صفحهٔ xy یعنی γ_{xy} آهنگی است که دو ضلع مربع را به‌هم نزدیک می‌کند و به آسانی می‌توان نوشت

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{۳-۴۳}$$

با همین استدلال برای ابعاد دیگر، می‌نویسیم

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

یا با نمادگذاری تانسور دکارتی، داریم

$$\gamma_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \gamma_{ji} \tag{۳-۴۴}$$

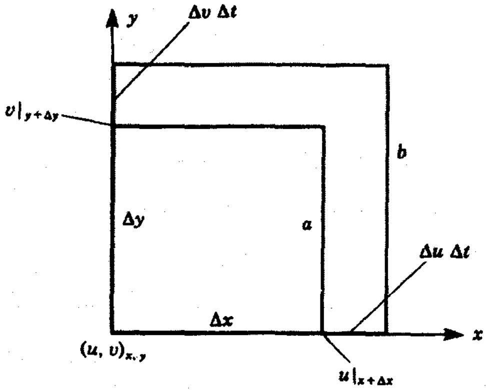
که دیده می‌شود متقارن هستند زیرا با تغییر i و j معادله تغییر نمی‌کند. آهنگ کرنش برشی را نمی‌توان به‌آسانی به‌صورت برداری نوشت. باید توجه داشت که رابطه‌های قبلی فقط در مختصات دکارتی معتبرند و هنگام استفادهٔ آنها در دستگاههای دیگر باید محتاط بود. مؤلفه‌ها در دستگاههای دیگر در پیوست ج آمده‌اند.

۳-۴-۴ اتساع

اتساع بیانگر آهنگ انبساط یا انقباض سیستم کوچکی از شاره است. با توجه به شکل ۳-۱۵ می‌توان اتساع را برحسب سرعت بیان کرد.

مربعی را به ابعاد $\Delta x \times \Delta y$ در نظر بگیرید که تصویر مکعب کوچکی به ابعاد Δx، Δy و Δz در صفحهٔ xy است (که در شکل ۳-۱۵ به‌صورت a مشخص شده است.) پس از زمان Δt مربع از a به b انبساط می‌یابد. شکلهای مشابهی برای صفحه‌های دیگر می‌توان رسم کرد. افزایش حجم مکعب در زمان Δt برابر است با

$$\Delta u \Delta t \Delta y \Delta z + \Delta v \Delta t \Delta x \Delta z + \Delta w \Delta t \Delta x \Delta y$$



شکل ۳-۱۵ انبساط مکعب نشانگر اتساع است.

از تقسیم آن بر $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$ و گرفتن حد، رابطهٔ آهنگ افزایش حجم (بر واحد حجم شاره) به‌دست می‌آید

$$\phi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \qquad (۳\text{-}۴۵)$$

که شکل برداری آن به‌صورت زیر است

$$\phi = \nabla . \mathbf{V} \qquad (۳\text{-}۴۶)$$

مقدار عددی اتساع مستقل از دستگاه مختصات به کار رفته است.[۱]

۳-۴-۵ رابطه‌های آهنگ کرنش-تنش در شاره‌ها

در شاره‌ها تانسور گرادیان سرعت به‌صورت $\partial u_i/\partial x_j$ نوشته می‌شود. بخش متقارن این تانسور را تانسور آهنگ کرنش، و بخش نامتقارن آن را تانسور دوران می‌گویند که به $\nabla \times \mathbf{V}$ مربوط می‌شود. تانسور آهنگ کرنش را با e_{ij} و تانسور دوران را با Ω_{ij} نشان می‌دهند. تانسور گرادیان سرعت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \Omega_{ij} \qquad (۳\text{-}۴۷)$$

جمله‌های تانسور دوران مربوط به سرعت زاویه‌ای (Ω_i) ذرهٔ شارهٔ بینهایت کوچک عبارت‌اند از

$$\Omega_۱ = \Omega_{۳۲} = -\Omega_{۲۳}, \quad \Omega_۲ = \Omega_{۱۳} = -\Omega_{۳۱}, \quad \Omega_۳ = \Omega_{۲۱} = -\Omega_{۱۲} \qquad (۳\text{-}۴۸)$$

که $\Omega_۱$، $\Omega_۲$ و $\Omega_۳$ مؤلفه‌های تانسور سرعت زاویه‌ای $\mathbf{\Omega}$ (برداری محوری) هستند. Ω_{ij} مؤلفه‌های تانسور دورانی نامتقارن $(\Omega_{ij} = -\Omega_{ji})$ متناظر هستند. به‌کمک رابطه‌های ریاضی می‌توان نشان داد که در مقابل هر بردار محوری تانسوری نامتقارن وجود دارد.

رابطهٔ مهم زیر را به‌صورت برداری می‌نویسیم

۱. از نظر ریاضی ϕ اولین مقدار ناوردای تانسور آهنگ کرنش است.

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \tag{۳-۴۹}$$

سرعت زاویه‌ای فیزیکی شاره برابر نصف تاو بردار سرعت است.

مؤلفه‌های قطری (عمودی) تانسور آهنگ کرنش را می‌توان مستقیماً با آهنگهای واقعی کرنش عمودی مشخص کرد. اما، جمله‌های غیرقطری (مؤلفه‌های آهنگ برشی) e_{ij} که در آن $i \neq j$، برابر با نصف آهنگ واقعی مؤلفه‌های کرنش برشی هستند، که با γ_{ij} مشخص می‌شوند. به ضریب $\frac{1}{2}$ برای تبدیل e_{ij} به تانسوری واقعی نیاز است. این تانسورها را می‌توان به‌صورت $e_{ii} = \gamma_{ii}$ و $e_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ نوشت که $i \neq j$. مؤلفه‌های دکارتی تانسور آهنگ کرنش و تانسور دوران را در معادلات زیر آورده‌ایم. (فهرست کامل آنها در [۶] آمده است.)

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad & e_{xy} = e_{yx} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad & e_{yz} = e_{zy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad & e_{xz} = e_{zx} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{۳-۵۰}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_x &= \Omega_{zy} = -\Omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\omega_x\\
\Omega_y &= \Omega_{xz} = -\Omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\omega_y\\
\Omega_z &= \Omega_{yx} = -\Omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\omega_z
\end{aligned}$$

با نوشتن آن به‌صورت نمادگذاری تانسور دکارتی کامل که ۱، ۲ و ۳ به ترتیب متناظر با، x، y و z هستند، $\partial u_i/\partial x_j$ به‌صورت $e_{ij} + \Omega_{ij}$ نوشته می‌شود.

جمع مؤلفه‌های قطری ϕ است که می‌توان آن را به‌صورت اثر ماتریس $\partial u_i/\partial x_j$ تشخیص داد.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\\
\frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\\
\frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3}
\end{bmatrix}
&=
\begin{bmatrix}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0\\
0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0\\
0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3}
\end{bmatrix}\\
&+\begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0
\end{bmatrix}\\
&+\begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\\
-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\\
-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & 0
\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۳-۵۱}$$

اکنون، بنابر تعریف، برای شارهٔ نیوتونی تانسور تنشی و تانسور آهنگ کرنش ارتباط خطی دارند. کلیترین رابطه (در نمادگذاری مختصات تانسور دکارتی) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} = -p\delta_{ij} + ۲\mu_e)_{ij} + \delta_{ij}\lambda\phi \qquad (۵۲\text{-}۳)$$

که σ'_{ij} تانسور تنش انحرافی است و اختلاف بین تانسور تنش کلی و فشار همسانگرد p را نشان می‌دهد. فشار مکانیکی p به‌صورت $p = -\frac{۱}{۳}(\sigma_{۱۱} + \sigma_{۲۲} + \sigma_{۳۳}) = -\frac{۱}{۳}\sigma_{ii}$ تعریف می‌شود، که تانسور تنش ناورداست. مؤلفه‌های عمودی تانسور تنش انحرافی $\sigma'_{۱۱}$، $\sigma'_{۲۲}$ و $\sigma'_{۳۳}$ اختلاف بین تنشهای عمودی واقعی $\sigma_{۱۱}$، $\sigma_{۲۲}$ و $\sigma_{۳۳}$ و میانگین آنها را نشان می‌دهند. این مؤلفه‌های عمودی σ'_{ij}، که معیار ناهمسانگردی تانسور تنش‌اند، فقط در شارهٔ متحرک وجود دارند و معمولاً صرف‌نظرکردنی هستند. لازم به یادآوری است که فشار مکانیکی p، که در اینجا تعریف شده، همیشه نمی‌تواند با فشار ترمودینامیکی مشخص شود، اما اختلاف آنها از دیدگاه مهندسی قابل بحث نیست. ϕ انبساط شاره است که به‌صورت $\nabla.\mathbf{V}$ (یا $\partial u_k/\partial x_k$) تعریف می‌شود و مقدار آن برای شارهٔ تراکم‌ناپذیر صفر است. δ_{ij} دلتای کرونکر است. λ ضریب دوم گران‌روی است. ضریب دوم دیگر گران‌روی به صورت $\zeta = \lambda + \frac{۲}{۳}\mu$ تعریف می‌شود که برای گاز تک‌اتمی صفر است. معادلهٔ (۳-۵۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{۲}{۳}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \zeta\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \qquad (۵۳\text{-}۳)$$

برای آشنایی با روش کامل به‌دست آوردن این معادله مرجعهای مربوط را ببینید.

اکنون این معادله را می‌توان در معادلهٔ تکانه قرار داد تا معادلهٔ کامل حرکت برای شارهٔ گران‌رو به‌دست آید. این معادلات را معادلات حرکت ناویه‌ـاستوکس می‌گویند.

۳-۵ معادلات ناویه‌ـاستوکس

معادلات ناویه‌ـاستوکس معادلات کامل حرکت برای شارهٔ گران‌رو هستند. با استفاده از معادلات (۳-۵۳) و (۳-۳۳) معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{۲}{۳}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) \qquad (۵۴\text{-}۳)$$

مشتقهای گران‌روی را معمولاً می‌توان با خطایی جزئی از معادله حذف کرد. برای شاره تراکم‌ناپذیر ($\nabla.\mathbf{V} = ۰$) این معادلات به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شوند

$$\rho\frac{DV}{Dt} = -\nabla_p + \mathbf{B} + \mu\nabla^۲ V \qquad (۵۵\text{-}۳)$$

که معادلهٔ بسیار مهمی‌است و برای متخصصان دینامیک شاره‌ها کاملاً شناخته شده است. برای نیروی حجمی گرانشی، می‌توان به‌جای $\mathbf{B}$ از $-\rho\nabla\psi$ استفاده کرد. مهمترین نکته‌ای که باید به‌خاطر داشت این است که D/Dt و $\nabla^۲$ عملگرهایی برداری هستند که نمی‌توان آنها را برای مؤلفه‌های سرعت، بجز در مختصات دکارتی، بکار برد. به‌جای آن ابتدا باید عملگرها عمل کنند و بعد مؤلفه‌ها نوشته شوند. مؤلفه‌های این معادله در مختصات مختلف در پیوست ج و مرجع ۶ داده شده‌اند: جملهٔ $\nabla^۲\mathbf{V}$ را، اگر به‌صورت $\nabla^۲\mathbf{V} = \nabla(\nabla.\mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$ نوشته شود. می‌توان به‌طور صریح محاسبه کرد.

هر چند معادلهٔ (۳-۵۵) ساده به‌نظر می‌رسد، ولی حل آن به‌علت حضور جمله‌های غیر خطی در طرف چپ مشکل است و در حقیقت یکی‌از چالشهای اصلی در مکانیک شاره‌هاست.

اکنون، معادلات کامل ناویه‌ـاستوکس را با معادلات اویلری برای جریان بی‌اصطکاک می‌توان مقایسه کرد. اختلاف در جمله‌های اضافی مربوط به گران‌روی است. اگر شاره تراکم‌ناپذیر باشد، تمام مشتقات به شکل $\partial u_i/\partial x_j (i \neq j)$ هستند. بنابراین برای شاره تراکم‌ناپذیر، حتی‌اگر μ صفر

نباشد، به شرطی که مشتقهای $\partial u_i/\partial x_j$ کوچک باشند و معادلات (ناویه‌ـاستوکس) به صورت سادهٔ معادلات اویلر درآیند، از جمله‌های گران‌روی می‌توان صرف‌نظر کرد.

بنابراین، اگر گران‌روی اندک باشد، یا مشتق سرعتها نسبت به جهت، بجز جهت سرعت، کوچک باشد، معادلات ناویه‌ـاستوکس به معادلات اویلر تبدیل می‌شوند، تقریب اخیر در مکانیک شاره‌ها بسیار مهم است. فرض می‌شود که برای بسیاری از جریانها دو ناحیه وجود دارد: یکی نزدیک به سطح جسم جامد، که جمله‌های گران‌روی اهمیت می‌یابند (و باید از معادلات ناویرـاستوکس استفاده کرد)، و دیگری ناحیهٔ دور از سطح، که از معادلات اویلر با تقریب خوب استفاده می‌شود. این دو ناحیهٔ مشخص موضوع دو فصل بعد، یعنی «جریان لایهٔ مرزی» (فصل ۵) و «جریان پتانسیل» (فصل ۶) هستند. روش برخورد با این موضوعها، به‌علت شکلهای مختلف معادلات آنها، کاملاً متفاوت است.

گاهی از شکلهای دیگر معادلهٔ حرکت، به‌ویژه برای جریان تراکم‌ناپذیر که ρ ثابت فرض می‌شود، استفاده می‌شود. برای جریان تراکم‌ناپذیر معادلهٔ برداری حرکت همراه با معادلهٔ پیوستگی چهار معادله با چهار مجهول را تشکیل می‌دهند: سه مؤلفه سرعت و یک معادلهٔ فشار.

به‌عنوان روش جایگزین برای حل به اصطلاح متغیرهای اولیهٔ $\mathbf{V}$ و p، متغیرهای دیگری برای توصیف میدان جریان ممکن است ارائه شوند، که به کمک آنها می‌توان $\mathbf{V}$ و p و p را به‌دست آورد.

نکتهٔ جالب، معادلهٔ حرکت برحسب سرعت گردشار $\boldsymbol{\omega}$ است. اگر تاو تمام جمله‌ها را در معادلهٔ برداری (۳-۵۵) به دست آوریم (با قرار دادن $\mathbf{B} = -\rho\nabla\psi$) و با دانستن این موضوع که تاو گرادیان هر اسکالری (نرده‌ای) صفر است (به‌گونه‌ای که جمله‌های فشار و نیروی حجمی صفر می‌شوند) درمی‌یابیم که

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \qquad (۳\text{-}۵۶)$$

که ν گران‌روی سینماتیک (μ/ρ) است. با بسط و استفاده از معادلهٔ پیوستگی $\nabla.\mathbf{V} = 0$ و این حقیقت که $\nabla.\boldsymbol{\omega} = \nabla.(\nabla \times \mathbf{V}) = 0$ (چون دیورژانس تاو هر بردار باید صفر باشد) داریم

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega}.\mathbf{V})\mathbf{V} + (\mathbf{V}.\nabla)\boldsymbol{\omega} = \partial \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \qquad (۳\text{-}۵۷)$$

و بنابر تعریف عملگر D/Dt، که به‌صورت $\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}.\nabla)$ نوشته می‌شود، خواهیم داشت

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}.\nabla)\mathbf{V} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \qquad (۳\text{-}۵۸)$$

این معادله را همراه با معادلهٔ پیوستگی، برای توصیف میدان سرعت جریان شارهٔ گران‌روی تراکم‌ناپذیر، می‌توان به‌کار برد (فشار را می‌توان از معادلهٔ اولیه حرکت تعیین کرد).

از نظر فیزیکی، این معادله نشان می‌دهد که چگونه گردشار در شارهٔ متحرک انتقال می‌یابد. اولین جملهٔ طرف راست، جملهٔ انتقالی و جملهٔ دوم جملهٔ پخش است که به ν (گران‌روی سینماتیکی) بستگی دارد و پخشندگی گران‌رو نامیده می‌شود. اگر ν صفر فرض شود (همچون در جریان ناگران‌رو که اثرهای گران‌روی ناچیز است) این معادله نشان می‌دهد که گردشاری در درون شاره پخش نمی‌شود و در واقع میدان گردشاری در درون شاره «بی‌حرکت» می‌شود. همچون میدان مغناطیسی و الکتریکی، میدان برداری گردشاری را نیز می‌توان با خطهای میدان مشخص کرد. خطهای میدان جهت بردار گردشاری را در هر یک از نقطه‌ها نشان می‌دهد و فاصلهٔ بین خطهای میدان نشاندهندهٔ شدت گردشاری‌است. اگر گردشاری متوقف شود، این خطها به مولکولهای شاره متصل می‌شوند و با آنها حرکت می‌کنند. این موضوع را می‌توان این چنین بیان کرد که خطهای شاره بر خطهای گردشاری منطبق‌اند. خط شاره خطی‌است که از زنجیرهٔ مولکولهای شاره تشکیل شده است و ماهیت خود را، حتی اگر جابه‌جا شود و یا تاب بردارد، حفظ می‌کند. قضیه‌های بسیاری را از این مفهوم فیزیکی می‌توان به‌دست آورد؛ برای جزئیات بیشتر می‌توانید به فصل ۶ مراجعه کنید.

در جریان دوبعدی، $(\boldsymbol{\omega}.\nabla)\mathbf{V} = 0$ (زیرا $\boldsymbol{\omega}$ بر $\mathbf{V}$ عمود است) و این معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \qquad (۳\text{-}۵۹)$$

در جریان دوبعدی شارهٔ گران‌روی تراکم‌ناپذیر، تابع جریانی را می‌توان تعریف کرد. مفهوم فیزیکی تابع جریان را در فصل ۶ بحث می‌کنیم، اما کاربرد آن در حل معادلات حرکت شارهٔ گران‌رو را در اینجا بررسی خواهیم کرد. تابع جریان تابعی اسکالر (زده‌ای) است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(ψ نمادی است که برای هر دو پارامتر تابع جریان و پتانسیل گرانش به‌کار می‌رود.)

این تعریف ذاتاً در تابع پیوستگی $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند، و مشخصهٔ تابع جریان راهی برای بیان جریان شارهٔ تراکم‌ناپذیر دوبعدی است. با قرار دادن تعریف قبل در معادلهٔ گردشاری معادلهٔ زیر برای جریان دوبعدی به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 \psi) + \nu \nabla^4 \psi = 0 \tag{۳-۶۰}$$

این معادله این امتیاز را دارد که به‌عنوان معادلهٔ منفرد اسکالر جریان شاره (به‌جای معادلهٔ برداری) را توصیف می‌کند؛ اما غالباً فرمولبندی شرایط مرزی بسیار دشوار است.

این معادلات را در اینجا دنبال نخواهیم کرد. اما یادآوری می‌کنیم که فرمولبندی گردشاری و تابع جریان غالباً برای تحلیل عددی جریان شاره مناسب است.

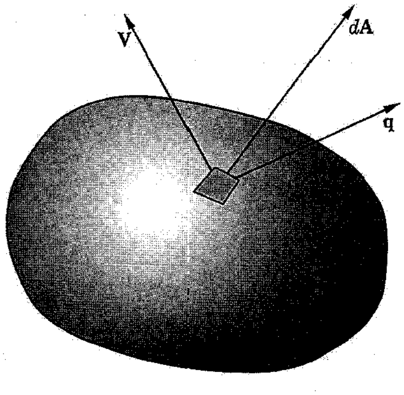
۳-۶ معادلهٔ انرژی

نخست، معادلهٔ انرژی را با در نظرگرفتن موازنهٔ آن در حجم معیار به‌دست می‌آوریم و سپس شکل دیفرانسیلی آن را با روش صرفاً ریاضی پیدا می‌کنیم. این عملیات را مانند روش انتگرالی پیش گفته در این فصل آغاز می‌کنیم، اما اکنون حجم معیاری را بدون توجه به حرکت سیستم در نظر می‌گیریم. حجم معیار شکل ۳-۱۶ را در نظر بگیرید.

فرض می‌کنیم که در نقطه‌ای بر روی سطح، $\mathbf{V}$ بردار سرعت و $\mathbf{q}$ آهنگ شارگرمایی است. $\mathbf{q}$ پارامتری برداری است که آهنگ شارگرمایی از طریق رسانش و تابش را نشان می‌دهد. آهنگ جریان گرمایی کل به درون حجم معیار dQ/dt عبارت است از

$$-\int_{\text{C.S.}} \mathbf{q}.d\mathbf{A} = -\int_{\text{C.S.}} q_i dA_i$$

دوباره، کار انجام شده به‌وسیلهٔ شارهٔ موجود در حجم معیار را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد: کار برگشت‌پذیر، که توسط فشار در سطح معیار انجام می‌شود، و کار برگشت‌ناپذیر، که به‌وسیلهٔ تنشهای برشی بر روی این سطح انجام خواهد شد. آهنگ کار کل انجام شده به‌وسیلهٔ شاره در حجم



شکل ۳-۱۶ حجم معیار برای موازنهٔ انرژی.

معیار برحسب تانسور تنش (به شکل تانسور دکارتی) عبارت است از

$$\frac{dW}{dt} = -\int_{\text{C.S.}} u_i \sigma_{ji} dA_j$$

اکنون، می‌توان گفت که آهنگ خالص افزایش انرژی کل (شامل انرژی جنبشی، انرژی درونی و انرژی پتانسیل) در حجم معیار برابر است با آهنگ جریانهای گرمایی به درون حجم معیار به اضافه آهنگ تولید گرمای درونی منهای آهنگ انجام کار شاره بر روی محیط اطراف خود. در نتیجه، داریم

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \rho e d\mathscr{V} + \int_{\text{C.S.}} \rho e u_i dA_i = -\int_{\text{C.S.}} q_i dA_i + \int_{\text{C.S.}} u_i \sigma_{ij} dA_j + \int_{\text{C.V.}} q''' d\mathscr{V}$$

باید به یادداشت که e انرژی کل واحد جرم از رابطهٔ $e = \frac{V^۲}{۲} + u + \psi$ به‌دست می‌آید، که ψ پتانسیل گرانشی است که قبلاً در به‌دست آوردن انتگرال با gz مشخص شده بود. q''' آهنگ تولید گرمای درونی در واحد حجم است. تانسور تنش را می‌توان به دو بخش فشاری و نیروی برشی به‌صورت زیر تقسیم کرد:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

با استفاده از قضیهٔ گاؤس، معادلهٔ انرژی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{\text{C.V.}} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho e u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} q_i + q''' + \frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j \sigma'_{ij})\right] d\mathscr{V} = ۰$$

چون حجم اختیاری است، انتگرالده خود باید صفر باشد، با بسط جمله‌ها و ترکیب آنها با معادلهٔ پیوستگی، داریم

$$\rho\frac{De}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} q_i - p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial \sigma'_{ji}}{\partial x_j} + \Phi + q''' \qquad (۳-۶۱)$$

که $\Phi = \sigma_{ij}\partial u_j/\partial x_i$ تابع اتلاف است[۱] و بیانگر آهنگی است که تنشهای انحرافی بر روی شاره کار برگشت‌ناپذیر انجام می‌دهند. این تابع را برحسب u_i در پیوست (ج) آورده‌ایم. در اینجا، مشتق کامل بر روی کمیت اسکالر عمل می‌کند و نباید نگران خاصیتهای برداری آن، همچون در معادلهٔ حرکت، باشیم. شکلهای D/Dt را در دستگاههای مختصات مختلف در پیوست ج آورده‌ایم. از نظر فیزیکی، مشتق، آهنگ تغییر خاصیت یا پارامتری است که ناظر سوار بر جریان شاره آن را می‌بیند. اگر، به‌جای در نظر گرفتن حجم معیار، مجبور به بررسی ذرهٔ ثابت به‌خصوص شارهٔ به‌خصوصی بودیم، $\partial/\partial t$ را به‌جای آن به‌کار می‌بردیم. شکل D/Dt به این علت به‌وجود می‌آید که واقعاً موازنه را بلافاصله بر روی سیستم شاره (در حجم معیار)، اما در مختصات اویلری می‌نویسیم.

این معادله مفید است، اما معادلهٔ تکانه در آن پنهان است و باید آن را از این معادله جدا کرد تا ساده شود. در طرف چپ معادله، آهنگهای افزایش انرژی جنبشی و پتانسیل قرار دارند و در طرف راست معادله، جمله‌های سوم و چهارم شامل آهنگهایی هستند که تحت آنها تنشها (شامل فشار) کار انجام می‌دهند. با انجام ضرب داخلی $\mathbf{V}$ در معادلهٔ حرکت (۳-۳۳) و با فرض اینکه نیروی حجمی $B_i = -\rho\frac{\partial\psi}{\partial x_i}$ نیروی گرانشی پایستار است، داریم

$$\rho u_i\frac{Du_i}{Dt} = \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{V^۲}{۲}\right) = -u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_i} - \rho u_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \qquad (۳-۶۲)$$

که معادلهٔ انرژی مکانیکی است. چون ψ نسبت به زمان ثابت است، می‌توان $\rho\frac{\partial\psi}{\partial t}$ را چون صفر است به طرف چپ معادله افزود، بنابراین

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{V^۲}{۲} + \psi\right) = -u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_i}$$

۱. گاهی جملهٔ اتلاف را به‌صورت $\mu\Phi$ می‌نویسند، آنگاه Φ با ضریب μ با آنچه داریم متفاوت است.

ازکم کردن آن از معادلهٔ انرژی (۳-۶۱)، خواهیم داشت

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \Phi + q''' \tag{۳-۶۳}$$

که شکل نهایی معادلهٔ انرژی است. در اینجا، u انرژی درونی در واحد جرم است.

ساده‌سازیهای متفاوتی را می‌توان اعمال کرد. اکنون، قانون فوریه رسانش گرمایی، یعنی $\mathbf{q} = -\kappa\nabla T$ را معرفی می‌کنیم و با فرض گازکامل ($du = c_v dT$) و رسانندگی گرمایی ثابت و همچنین $\nabla.\nabla T = \nabla^2 T$ و $\partial u_i/\partial x_i = \nabla.\mathbf{V}$ سرانجام می‌توان نوشت

$$\rho c_v\frac{DT}{Dt} = -p\nabla.\mathbf{V} + \kappa\nabla^2 T - \nabla.\mathbf{q}_r + q''' + \Phi \tag{۳-۶۴}$$

که $\mathbf{q}_r$ بردار شارگرمایی تابش است. لازم به یادآوری است که c_v ممکن است تابع دما باشد و در آن‌صورت در خارج از مشتق (و نه درون آن) قرار می‌گیرد.

معادلهٔ (۳-۶۴) را می‌توان به شکلهای دیگری نوشت. اگر آنتالپی ویژهٔ $h = u + p/\rho$ را معرفی کنیم، معادلهٔ (۳-۶۴) را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \kappa\nabla^2 T - \nabla.\mathbf{q}_r + q''' + \Phi \tag{۳-۶۵}$$

برای گازکامل، خواهیم داشت

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \kappa\nabla^2 T - \nabla.\mathbf{q}_r + q''' + \Phi \tag{۳-۶۶}$$

باید توجه داشت که c_v و c_p خارج از مشتق هستند (حتی‌اگر c_v و c_p تابع دما باشند). این موضوع از تعریف c_v و c_p نتیجه می‌شود.

باید به‌خاطر داشته باشیم که شارهٔ تراکم‌ناپذیر گازکامل نیست و هر دو پارامتر h و u تابع T و p هستند. بدین ترتیب، بهتر است با معادلهٔ (۳-۶۳) شروع کنیم و $\nabla.\mathbf{V} = 0$ را در معادله وارد کنیم. c_v و c_p برای بیشتر مایعات نزدیک به‌هم هستند (به استثنای فلزات مایع) و با دقت قابل قبولی که غالباً کافی است u تابع ضعیف p در مایعات است، به‌گونه‌ای که $du \approx c_v dT \approx c_p dT$، برای مایعات معادلهٔ مناسب زیر به‌دست می‌آید

$$\rho c_v\frac{DT}{Dt} = \kappa\nabla^2 T - \nabla.\mathbf{q}_r + q''' + \Phi \tag{۳-۶۷}$$

اگر به دقت بیشتری نیاز باشد، از جدول خواص ترمودینامیکی برای محاسبهٔ u یا h در معادلات (۳-۶۳) یا (۳-۶۵) باید استفاده کرد. هر یک از این معادلات معتبر هستند و انتخاب u یا h به شرایط بستگی دارد.

گاهی استفاده از معادلهٔ کلی (۳-۶۱)، به‌ویژه برای شاره‌های بی‌اصطکاک، سودمند است. برای شاره‌های بی‌اصطکاک که $\sigma'_{ij} = 0$، معادلهٔ (۳-۶۱) (با قرار دادن $\psi = gz$، استفاده از قانون فوریه، و وارد کردن آنتالپی) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2} + gz + h\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \kappa\nabla^2 T - \nabla.\mathbf{q}_r + q'''$$

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right) = -p\nabla.\mathbf{V} - \mathbf{V}.\nabla p + \kappa\nabla^2 T - \nabla.\mathbf{q}_r + q''' \tag{۳-۶۸}$$

معمولاً $\mathbf{q}_r$ صرف‌نظرکردنی است و q''' غالباً صفر است، مگر برای مواردی که خواصی چون مقاومت گرمایی وجود داشته باشد. در معادلهٔ دینامیک شاره‌ها به‌ندرت باید $\mathbf{q}_r$ و q''' را منظور کرد، ولی به‌منظور کامل بودن معادله این دو را گنجانده‌ایم.

دوباره برای مقایسه به معادلات (۳-۲۲ب)، (۳-۲۲ج) و (۳-۴۰) مراجعه می‌کنیم. معادلهٔ (۳-۲۲ب) معادلهٔ واقعی انرژی است. اما می‌دانیم که چون معادلهٔ کلی انرژی [(۳-۶۱) یا (۳-۶۸)]جمله‌ای تکانه‌ای به‌صورت پنهان دارد، معادلهٔ (۳-۲۲ج) معادلهٔ انرژی مکانیکی است و در واقع شبیه معادلهٔ برنولی یعنی، معادلهٔ (۳-۴۰) خواهد بود.

۳-۶-۱ قانون دوم ترمودینامیک و تولید آنتروپی

با وارد کردن مفهوم آهنگ تولید آنتروپی در واحد حجم (θ) معادلهٔ (۳-۲۳) را می‌توان به تساوی تبدیل کرد. با وارد کردن بردار شار گرمایی $\mathbf{q}$ رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\int_{\text{C.V.}} \theta dv - \int_{\text{C.S.}} \frac{\mathbf{q}}{T}.d\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \rho s d\mathscr{V} + \int_{\text{C.S.}} \rho s \mathbf{V}.d\mathbf{A} \qquad (۳\text{-}۶۹)$$

با استفاده از قانون گاؤس و معادلهٔ پیوستگی، به‌دست می‌آوریم

$$\theta - \nabla.(\mathbf{q}/T) = \rho\frac{Ds}{Dt} \qquad (۳\text{-}۷۰)$$

با وارد کردن معادلهٔ انرژی و استفاده از رابطهٔ اصلی ترمودینامیکی، خواهیم داشت

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho T\frac{Ds}{Dt} - p\nabla.\mathbf{V} \qquad (۳\text{-}۷۱)$$

که شکل مختصات اویلری رابطهٔ زیر است

$$du = Tds - pd(\frac{۱}{\rho})$$

معادلهٔ (۳-۷۰) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت (از تابش صرف‌نظر، و فرض می‌کنیم که قانون فوریه برقرار است)

$$\theta = \frac{\Phi}{T} + \frac{\mathbf{q}.\mathbf{q}}{\kappa T^{۲}} = \frac{\Phi}{T} + \kappa\left(\frac{\nabla T}{T}\right)^{۲} \qquad (۳\text{-}۷۲)$$

که آهنگ تولید آنتروپی دو فرایند برگشت‌ناپذیری جریانهای گرمایی و اتلاف انرژی گران‌رو را نشان می‌دهد.

۳-۷ رابطه‌های بین تکانه، انرژی، ترمودینامیک، و معادلهٔ برنولی

در بخش ۳-۲، در موقع استنتاج معادلهٔ عمومی انرژی، یادآور شدیم که این معادله شامل دو موازنهٔ مستقل انرژی است. موازنهٔ قانون اول ترمودینامیک بین کار، گرما و انرژی درونی، و موازنهٔ انرژی مکانیکی محض جداگانه.

اکنون، این رابطهٔ انرژی مکانیکی را مستقیماً از معادلهٔ حرکت می‌توان به‌دست آورد. این موازنه نشان می‌دهد که آهنگ افزایش انرژی جنبشی و پتانسیل در شاره برابر آهنگ کار نیروهای خارجی بر شاره است، که شامل هیچ‌گونه اطلاعات ترمودینامیکی نیست. این موازنهٔ انرژی مکانیکی را در حالت کلی به‌عنوان معادلهٔ برنولی تعمیم‌یافته می‌شناسند. این معادله را می‌توان به انتگرال‌گیری از معادلهٔ حرکت برای حرکت ناپایا (معادلهٔ ناویه-استوکس) در طول خط جریان به‌دست آورد، برای سادگی، فرض می‌کنیم که گران‌روی ثابت است. افزون بر آن، نیروی حجمی ناشی از گرانش را با $-\rho\nabla\psi$ برای واحد حجم نشان می‌دهیم. در شکل برداری، داریم

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^{۲}}{۲}\right) - \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})\right] = -\nabla p + \psi\nabla^{۲}\mathbf{V} - \rho\nabla\psi$$

اکنون، در طول خط جریان جزء طول ds را در نظر می‌گیریم. از تقسیم این معادله بر ρ، معادله‌ای بر پایهٔ واحد جرم به‌دست می‌آید. از ضرب برداری داخلی ds با معادلهٔ حرکت و انتگرال‌گیری بین دو نقطهٔ ۱ و ۲ در دو راستای جریان در خط جریان، خواهیم داشت

$$\int_{۱}^{۲}\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}.ds + \int_{۱}^{۲}\nabla\left(\frac{V^{۲}}{۲}\right).ds - \int_{۱}^{۲}[\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V}).ds] = -\int_{۱}^{۲}\left(\frac{\nabla p}{\rho}\right)ds - \int_{۱}^{۲}\nabla\psi.ds + \int_{۱}^{۲}\frac{\mu}{\rho}\nabla^{۲}\mathbf{V}.ds$$

جملهٔ $\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$ عمود بر خط جریان است، بنابراین ضرب داخلی آن با ds صفر می‌شود. هر چند اثبات این موضوع خارج از حوزهٔ کار ماست، ولی جملهٔ گران‌روی، کار انجام شده در واحد جرم جریان شاره را توسط نیروهای اصطکاک نشان می‌دهد، که باعث تأخیر حرکت شاره از نقطهٔ ۱ به نقطهٔ ۲ می‌شود. بنابراین، معادله را می‌توان برای واحد جرم به‌صورت زیر نوشت

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}.ds + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + (\psi_2 - \psi_1) + w_f = 0 \tag{۳-۷۳}$$

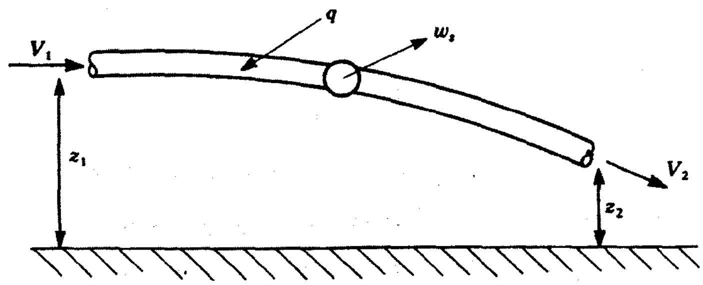
که w_f کار انجام شده توسط نیروهای اصطکاک تأخیری است که در حرکت شاره از ۱ به ۲ رخ می‌دهد.

اگر جریان را درون لوله یا مجرایی در نظر بگیریم که دستگاهی درون آن قرار دارد، معادله را می‌توان برای حالت کلی گسترش داد. این دستگاه ممکن است از طریق محوری (از میان لوله) به چشمهٔ توان خارجی یا چاه، مثلاً توربین، پمپ یا چرخ پایی متصل شده باشد. یا قسمتی از این لوله را می‌توان تصور کرد که، شبیه تسمهٔ پیوستهٔ متحرک از روی سوراخ لوله، می‌تواند حرکت کند. این تسمه می‌تواند شاره را به حرکت درآورد یا توسط شاره به حرکت در آید. این کار انتقال یافته به شاره یا از شاره به دیواره را در سرتاسر لوله با w_s برای واحد جرم شاره نشان می‌دهیم و آن را به‌عنوان کار محور می‌شناسیم. بنابر قرارداد، اگر کار توسط شارهٔ جاری انجام شود، w_s مثبت است و اگر بر روی شاره کار انجام گیرد، منفی است. کار محور w_s را نباید با w_t اشتباه گرفت: w_s بیانگر کاری است که از مرز حجم معیار (لوله) می‌گذرد، در حالی‌که w_f کار انجام شده به‌وسیلهٔ نیروهای اصطکاکی در درون لوله است.

معادلهٔ (۳-۷۳) را می‌توان برای هر یک از خط‌های جریان در میان لوله یا مجرا یا محفظهٔ دستگاه با در نظر گرفتن آهنگ جریان جرمی به‌عنوان تابع وزن میانگین‌گیری کرد، یا اگر خواص شاره در سطح مقطع جریان یکنواخت باشد، (مانند جریان متلاطم)، معادلهٔ (۳-۷۳) برای جریان حجمی لوله، همچون شکل ۳-۱۷، کاملاً معتبر است. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ حرکت شاره از درون دستگاه موجود در لوله، نیروهای (برشی و فشار) واردشده از طریق اجزای دستگاه به‌صورت نیروهای حجمی ناپایستار موضعی در شاره ظاهر خواهند شد که به معادلهٔ حرکت اضافه می‌شوند. در اینجا نیز انتگرال‌گیری صریح آسان نیست، زیرا خطهای جریان در حین عبور شاره از میان دستگاه یکپارچگی خود را از دست می‌دهند. با در نظر گرفتن کار انجام شده توسط این نیروها و همچنین کار نیروی محور که از طریق بدنهٔ لوله انتقال می‌یابد، معادله‌ای به‌دست می‌آید که معادلهٔ تعمیم‌یافتهٔ برنولی نام دارد. این معادله را به جریان پایا و جریانی که دارای سرعت و خواص یکنواخت در طول لوله است، محدود می‌کنیم. افزون بر آن، پتانسیل گرانشی را با تابع $\psi = -gz$ بیان می‌کنیم، که z ارتفاع از سطحی دلخواه است

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{z} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + w_s + w_f = 0 \tag{۳-۷۴}$$

توان مربوط به w_s برابر $\dot{m}w_s$ است که $\dot{m}$ آهنگ جریان جرم شاره است. w_f همیشه کمیتی مثبت است ولی w_s ممکن است منفی یا مثبت باشد؛ مثلاً برای توربین مثبت و برای پمپ منفی است.



شکل ۳-۱۷ جریان درون لوله. w_s و q کار محور و گرمای داده‌شده به واحد جرم شارهٔ جاری است. z ارتفاع بالای خط مرجع دلخواه است.

معمولاً w_f را به‌عنوان افت هد برحسب هد هم‌ارز شارهٔ در حال عبور بیان می‌کنند. $w_f = gH_L$، که H_L افت هد (برحسب بعد طول) است. به‌عنوان مثالی خاص، لوله‌ای با سطح مقطع یکنواخت را در نظر می‌گیریم که جریان شاره‌ای با چگالی ثابت از آن عبور می‌کند (بنابر پیوستگی، $V_۱ = V_۲$) و در ارتفاع ثابت $z_۲ = z_۱$ و $w_s = ۰$ است. در این حالت، H_L افت فشار ناشی از اثرهای اصطکاک را نشان می‌دهد. فشارسنج تفاضلی که حاوی شارهٔ جاری است، ارتفاع را در نقطهٔ ۲ نشان می‌دهد که به اندازهٔ H_L پایینتر از نقطهٔ ۱ است.

بدین‌ترتیب معادلهٔ (۳-۷۴) را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$+w_s = -\int_۱^۲ \frac{dp}{\rho} + \frac{V_۱^۲ - V_۲^۲}{۲} + g(z_۱ - z_۲) - gH_L \qquad (۳\text{-}۷۵)$$

برای شاره تراکم‌ناپذیر، داریم

$$+w_s = \frac{p_۱ - p_۲}{\rho} + \frac{V_۱^۲ - V_۲^۲}{۲} + g(z_۱ - z_۲) - gH_L \qquad (۳\text{-}۷۶)$$

برای توربین، $(p_۱/\rho + V_۲^۲/۲ + gz_۱) > (p_۲/\rho + V_۲^۲/۲ + gz_۲)$ و w_s عدد مثبتی است؛ بنابراین، می‌بینیم که افت هد، توان خروجی توربین را برای شرایط مفروض در ورودی و خروجی لوله کاهش می‌دهد. برای پمپ، $(p_۱/\rho + V_۱^۲/۲ + gz_۱) < (p_۲/\rho + V_۲^۲/۲ + gz_۲)$ و w_s منفی‌است؛ بنابراین، وجود افت هد به توان ورودی پمپ بیشتری برای شرایط مفروض در ورودی و خروجی لوله نیاز دارد.

معادلهٔ انرژی کل (۳-۲۲) ظاهراً بسیار شبیه (۳-۷۵) است و تحت همان شرایط به‌دست آمده است. در حالی‌که هر یک از این معادلات رابطه‌ای خاص را برای w_s به‌دست می‌دهد، باید هر یک از این دو را تحت شرایط مناسب به‌کار گرفت. در حالی‌که استفاده از معادلهٔ انرژی کل به دانستن اطلاعاتی در خصوص q و Δu نیاز دارد، معادلهٔ تعمیم یافتهٔ برنولی نیازمند مشخصات H_L است. افزون بر آن، معادلهٔ انرژی دارای جملهٔ $p_۲/\rho_۲ - p_۱/\rho_۱$ (برای هر دو جریان تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر) و معادلهٔ برنولی دارای جملهٔ $\int_۱^۲ \frac{dp}{\rho}$ است. معمولاً این دو جمله یکسان نیستند. رابطهٔ بین دو معادله، بنابر تعریف، به شکل زیر است

$$\frac{p_۲}{\rho_۲} - \frac{p_۱}{\rho_۱} = \int_۱^۲ d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \int_۱^۲ \frac{dp}{\rho} + \int_۱^۲ pd\left(\frac{۱}{\rho}\right)$$

با نشاندن این عبارت، به جای $p_۲/\rho_۲ - p_۱/\rho_۱$، در معادلهٔ انرژی (۳-۲۲الف)، داریم

$$-w_s = \int_۱^۲ \frac{dp}{\rho} + \frac{V_۲^۲ - V_۱^۲}{۲} + g(z_۲ - z_۱) + \int_۱^۲ pd(\frac{۱}{\rho}) + (u_۱ - u_۱) - q \qquad (۳\text{-}۷۷)$$

این معادله بر اساس واحد جرم (یعنی‌سیستم شارهٔ جاری) نوشته شده است. نسبت به ناظری که «همراه شاره حرکت می‌کند»، قانون اول ترمودینامیک برای «سیستم» موجود بین حالتهای ۱ و ۲ به شکل زیر است:

$$q - w = u_۲ - u_۱ \qquad (۳\text{-}۷۸)$$

که w کل کار انجام شده به‌وسیلهٔ سیستم بر محیط اطراف است که شامل کار برگشت‌پذیر زیر

$$\int_۱^۲ pd(\frac{۱}{\rho})$$

و کار برگشت‌ناپذیر $-w_f$ است. w_f دقیقاً همان تابعی است که در معادلهٔ برنولی تعریف شد و باید، با توجه به قانون دوم ترمودینامیک، عددی مثبت باشد. یعنی $+w_f$ کار انجام شده بر «روی» سیستم به‌وسیلهٔ نیروهای اصطکاک است، که در اصل همان نقش گرمای اضافه‌شده به سیستم را دارد و از نظر ترمودینامیکی اتلاف انرژی است. از جمع این دو معادله، معادلهٔ (۳-۷۸) به شکل زیر درمی‌آید

$$w_f = (u_۲ - u_۱) + \int_۱^۲ pd(\frac{۱}{\rho}) - q$$

اکنون، با کم کردن این معادله از معادلهٔ انرژی (۳-۷۷)، معادلهٔ تعمیم‌یافتهٔ برنولی (۳-۷۴) به دست می‌آید. همچنین، چون $w_f = qH_L$، در می‌یابیم که gH_L باید برابر باشد با

$$(u_۲ - u_۱) + \int_۱^۲ p(\frac{۱}{\rho}) - q$$

در شارهٔ تراکم‌ناپذیر (با ρ ثابت)، این معادله به‌صورت سادهٔ زیر درمی‌آید

$$gH_L = (u_۲ - u_۱) - q$$

می‌بینیم که معادلهٔ تعمیم‌یافتهٔ برنولی و معادلهٔ انرژی کل هم‌ارزند. معادلهٔ انرژی شامل اطلاعات ترمودینامیکی است که برحسب کار برگشت‌ناپذیر هم‌ارز در معادلهٔ تعمیم‌یافتهٔ برنولی بیان می‌شود. به‌بیان دیگر، معادلهٔ انرژی شامل مجموع دو موازنهٔ انرژی مستقل است، یکی مکانیکی و دیگری ترمودینامیکی. اما معادلهٔ برنولی، موازنهٔ انرژی مکانیکی محض را نشان می‌دهد. هر یک از این معادلات ممکن است، بسته به شرایط، مناسب‌تر باشند. معادلهٔ برنولی برای جریان شارهٔ تراکم‌ناپذیر مناسب‌تر، و معادلهٔ انرژی کل غالباً برای شاره‌های تراکم‌پذیر در موتورهای گرمایی، که تغییر آنتالپی دارای اهمیت است، سودمندتر خواهد بود.

در فصلهای ۴ و ۵ خواهیم دید که چگونه افت هِد در موقعیتهای عملی محاسبه می‌شود.

۳-۸ خلاصه، کاربردها و مسائل

به‌دست آوردن معادلات این فصل طولانی و خسته‌کننده است. این معادلات را نمی‌توان «رابطه‌های پیش پا افتاده» تلقی کرد. راهکار کاتوره‌ای انتخاب معادلات و عددگذاری در آنها و امید به اینکه جوابها مطلوب باشند، ممکن است به فاجعه منجر شود. درک معنای معادلات و محدودیتها یا مرزهای شکلهای خاص معادلات بسیار مهم است.

شیوهٔ این فصل شروع از قانونهای اصلی، نوشتن معادلات سیستم متناظر، به‌دست آوردن معادلات انتگرال حجم معیار، به‌دست آوردن معادلات دیفرانسیل و سپس ساده کردن معادلات و یا به‌شکل عملی درآوردن معادلات بوده است. خلاصهٔ آن را در جدول زیر آورده‌ایم:

قانونهای اصلی	معادلات سیستم	معادلات انتگرال (حجم معیار)	یا معادلات دیفرانسیل
۱. پیوستگی	۱. $\frac{d}{dt}(m) = ۰$	۱. معادلهٔ (۳-۱)	۱. معادلهٔ (۳-۲۵)
۲. تکانهٔ خطی	۲. $\frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) = \mathbf{F}$	۲. معادلهٔ (۳-۹)	۲. معادلهٔ (۳-۳۲)، (۳-۳۴)، (۳-۵۴)
۳. تکانهٔ زاویه‌ای	۳. $\frac{d}{dt}(m\mathbf{r} \times \mathbf{V}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$	۳. معادلهٔ (۳-۱۱)	۳.
۴. انرژی	۴. $\frac{d}{dt}(E) = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$	۴. معادلهٔ (۳-۲۰)	۴. معادلهٔ (۳-۶۴)، (۳-۶۵)
۵. قانون دوم ترمودینامیک	۵. $dS - \frac{dQ}{T} \geqq ۰$	۵. معادلهٔ (۳-۲۳)	۵. معادلهٔ (۳-۶۹)، (۳-۷۲)

۳-۸-۱ معادلات انتگرالی

هر چهار معادلهٔ انتگرالی برای حجم معیار به شکل زیرند

$$\text{اثرهای خارجی} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{C.V.}} \xi \rho d\mathcal{V} + \int_{\text{C.S.}} \xi \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} \qquad (۳-۷۹)$$

قانون اصلی	اثرهای خارجی	ξ
پیوستگی	0	1
تکانهٔ خطی	$\mathbf{F}_s + \int_{\text{C.V.}} \mathbf{B} d\mathscr{V}$	$\mathbf{V}$
تکانهٔ زاویه‌ای	$\int_{\text{C.S.}} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_s + \int_{\text{C.V.}} \mathbf{r} \times \mathbf{B} d\mathscr{V}$	$\mathbf{r} \times \mathbf{V}$
انرژی	$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$	e

با خلاصه کردن آنها به این شکل می‌بینیم که شباهتهایی در این معادلات وجود دارد. همچنین، با نگاهی به گذشته، مشاهده می‌کنیم که اصولاً روشهای به‌دست آوردن معادلات حجم معیار یکسان هستند.

۳-۸-۲ شکلهای ویژه معادلات انتگرالی

۱. پیوستگی ــ جریان پایای یک‌بعدی:

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \qquad [\text{۳-۴}]$$

۲. تکانهٔ ــ جریان شارهٔ پایای یک‌بعدی با چگالی و سرعت یکنواخت در ناحیه‌های ورودی و خروجی:

$$F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x}), \quad F_y = \dot{m}(V_{2y} - V_{1y}), \quad F_z = \dot{m}(V_{2z} - V_{1z})$$

۳. تکانه زاویه‌ای ــ سرعت یکنواخت در A_1 و A_2، جریان پایای روتور:

$$T_z = \rho_1 Q_1 (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \qquad [\text{۳-۱۴}]$$

۴. انرژی ــ جریان پایای یک‌بعدی:

$$q - w_s = (p_2/\rho_2 - p_1/\rho_1) + (u_2 - u_1) + (V_2^2 - V_1^2)/2 + g(z_2 - z_1) \qquad [\text{۳-۲۲ الف}]$$

۵. معادلهٔ تعمیم‌یافتهٔ برنولی:

$$w_s = -\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) - gH_L \qquad [\text{۳-۷۵}]$$

۳-۸-۳ معادلات دیفرانسیل

۱. پیوستگی:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \qquad [\text{۳-۲۵}]$$

که برای جریان سادهٔ تراکم‌ناپذیر عبارت است از

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = 0 \qquad [\text{۳-۲۷}]$$

۲. تکانه:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \qquad [\text{۳-۵۴}]$$

برای چگالی و گران‌روی ثابت معادلهٔ تکانه برابر است با

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=-\nabla p+\mathbf{B}+\mu\psi\nabla^{2}\mathbf{V} \qquad [۵۵\text{-}۳]$$

۳. معادلهٔ انرژی:

$$\rho c_v\frac{DT}{Dt}=-p\nabla.\mathbf{V}+\kappa\nabla^{2}T-\nabla.\boldsymbol{q}_r+\Phi+q''' \qquad [۶۴\text{-}۳]$$

برای معادلات تفصیلی در دستگاههای مختصات دیگر پیوست و مرجع ۶ را ببینید.

۳-۸-۴ راهکار حل مسائل

در این فصل بعضی از معادلات مهم و کلی مکانیک شاره‌ها را به دست آوردیم. پس از اینکه خواننده درک درستی از این معادلات پیدا کرد، گام بعدی استفاده از این معادلات در حل مسائل فیزیکی است. در حالی‌که هیچ چیزی نمی‌تواند جای تجربه را در حل مسائل بگیرد ذکر چند راهنمایی کلی در اینجا مفید است.

اکنون، چند روش ممکن در حل مسائل فیزیکی واقعی را در نظر بگیرید. به‌طور کلی سه راه وجود دارد:

۱. معادلات انتگرالی-اثرهای کلی

۲. معادلات دیفرانسیلی-توزیعها

۳. کار را با قانونهای اصلی آغاز می‌کنیم و معادلاتی را به دست می‌آوریم که مناسب وضعیت ویژه هستند.

معادلات انتگرالی معمولاً برای تعیین اثرهای کلی مناسب‌اند: به‌عنوان مثال، نیروی کل وارده از طرف شاره‌های جاری به جدارهٔ لوله یا پروانهٔ روتور. معادلات دیفرانسیلی معمولاً هنگامی که شرایط توزیع‌پذیری مورد نظر است، مناسب‌اند؛ مثلاً، توزیع (میدان) سرعت و فشار در اطراف جسمی آئرودینامیک. امکان دست‌یابی به این معادلات را با استفاده از قانونهای اصلی برای هر مسئلهٔ ویژه نباید نادیده گرفت (هر چند این معادلات را می‌توان همیشه از معادلات انتگرالی یا دیفرانسیلی اصلی تحت مفروضات مناسب به‌دست آورد). این روش، به‌ویژه در ایجاد معادلات لایهٔ مرزی بسیار مناسب است.

معادلات این فصل ابزارهایی هستند که در حل مسائل فیزیکی واقعی (یا شاید برای درک بهتر ماهیت مسئله) به کار می‌روند. نقطهٔ شروع، حل مسائل فیزیکی است و جواب مسئله هرگز (یا به‌ندرت) می‌تواند وضعیت فیزیکی واقعی را تشریح کند، بلکه تقریبی است که میزان دقت آن به دقت مدل ریاضی بستگی دارد. مثلاً، شیوهٔ حل مسئله می‌تواند به‌شرح زیر باشد:

۱. مسئلهٔ فیزیکی خاص

۲. ارائهٔ مدل فیزیکی ـــ مسئلهٔ فیزیکی واقعی را با ارائهٔ مسئله‌ای جدید ولی ساده آغاز می‌کنیم. مثلاً، فرض کنید که در جریان یک‌بعدی و پایا، شاره تابع معادلهٔ حالت گازهای کامل است و جزء آن. بنابراین، فرضها مدل را می‌سازند.

۳. مدل ریاضی ـــ معادلات مربوط به مدل فیزیکی را انتخاب می‌کنیم.

۴. حل ـــ هر چند راه‌حلهای دقیق ساده برای بسیاری از مسائل عملی واقعی در مکانیک شاره‌ها وجود دارد، بیشتر مسائل در مکانیک شاره‌ها از نظر ریاضی بسیار مشکل‌اند. راه‌حلهای مسائل معمولاً تحت تأثیر فرضهای ساده‌سازی، برای حل‌پذیر کردن معادلات یا توسل به تحلیل عددی، قرار می‌گیرند. در ادامهٔ بحث این کتاب، به طبقه‌بندیهای مختلف جریان شاره می‌پردازیم که بر اساس پیش‌فرضهایی مدل شده‌اند.

۵. آزمایش ـــ گام پایانی، تعیین درستی مدل توسط آزمایش است. این گام در مکانیک شاره‌ها بسیار مهم است. آزمایش به بهبود مدل می‌انجامد.

مراجع

1. Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge, 1967.
2. Bird, R. B., Stewart, W. E., and Lightfoot, E. N., *Transport Phenomena*, John Wiley, 1960.
3. Brenkert, K. Jr., *Elementary Theoretical Fluid Mechanics*, John Wiley, 1960.
4. Chapman, S., and Cowling, T. G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, 1961.
5. Curtiss, C. F., and Bird, R. B., *Molecular Theory of Gases and Liquids*, John Wiley, 1954.
6. Hughes, W. F., and Gaylord, E. W., *Basic Equations of Engineering Science*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1964.
7. Keenan, J. H., *Thermodynamics*, John Wiley, 1941.
8. Landau, L. D., and Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics*, Addison-Wesley, 1959.
9. Pai, S. I., *Viscous Flow Theory*, Vols. I and II, Van Nostrand, 1956.
10. Reynolds, W. C., *Thermodynamics*, McGraw-Hill, 1965.
11. Sabersky, R. H., Acosta, A. J., and Hauptmann, E. G., *Fluid Flow*, 3rd ed., Macmillan Co., 1971.
12. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed., McGraw-Hill, 1986.
13. Shames, I. H., *Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, 1962.
14. Sommerfeld, A., *Dynamics of Deformable Media*, Academic Press, 1950.
15. Van Wylen, G. J., and Sonntag, R. E., *Fundamentals of Classical Thermodynamics*, 3rd ed., John Wiley, 1985.
16. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1974.

مسائل حل‌شده

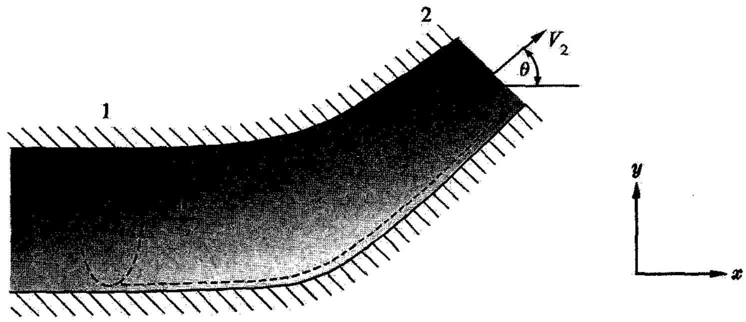
۳-۱ جریان شارهٔ تراکم‌پذیر جاری از میان لوله‌ای خمیده را مطابق شکل ۳-۱۸ در نظر بگیرید. نیروی شاره وارد بر دیوارهٔ لوله را بین مقطعهای ۱ و ۲ تعیین کنید.

نخست، حجم معیار شاره را که با نقطه‌چین مشخص شده است، انتخاب می‌کنیم. معادلهٔ (۳-۹) برای جریان پایا عبارت است از

$$\mathbf{F}_s + \int_{\text{C.V.}} \mathbf{b}\, d\mathscr{V} = \int_{\text{C.S.}} \mathbf{v}\rho\mathbf{V}.d\mathbf{A}$$

فرض می‌کنیم که سرعتها و فشارها در دو مقطع $A_۱$ و $A_۲$ یکنواخت هستند. نیروهای سطحی در جهتهای x و y به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$F_{sx} = p_۱A_۱ - p_۲A_۲\cos\theta + F_{px}$$
$$F_{sy} = -p_۲A_۲\sin\theta + F_{py}$$



شکل ۳-۱۸

که ρ فشار (شاره) و F_{px} و F_{py} نیروهای مجهول دیوارهٔ لوله بر شاره‌اند، تنها نیروی حجمی مربوط به گرانش، و برابر وزن شاره بین مقطعهای ۱ و ۲ است. در بسیاری از مسائل، از وزن در مقابل نیروهای دیگر می‌توان چشم پوشید، به‌ویژه برای گازها، که در اینجا ناچیز است. جمله‌های تکانهٔ شاره به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\int_{\text{C.S.}} V_x \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} = \rho_2 A_2 V_2^2 \cos\theta - \rho_1 A_1 V_1^2$$
$$\int_{\text{C.S.}} V_y \rho \mathbf{V}.d\mathbf{A} = \rho_2 A_2 V_2^2 \sin\theta$$

آن‌گاه، معادلات به‌صورت زیر نوشته می‌شوند

$$F_{px} = p_2 A_2 \cos\theta - p_1 A_1 + \rho_2 A_2 V_2^2 \cos\theta - \rho_1 A_1 V_1^2$$
$$F_{py} = p_2 A_2 \sin\theta + \rho_2 A_2 V_2^2 \sin\theta$$

مؤلفه‌های نیروی شاره بر دیوارهٔ لوله، R_x و R_y، در جهت مخالف F_{px} و F_{py} هستند و بنابراین، داریم

$$R_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta - \rho_1 A_1 V_1 (V_1 - V_2 \cos\theta)$$
$$R_y = -p_2 A_2 \sin\theta - \rho_2 A_2 V_2^2 \sin\theta$$

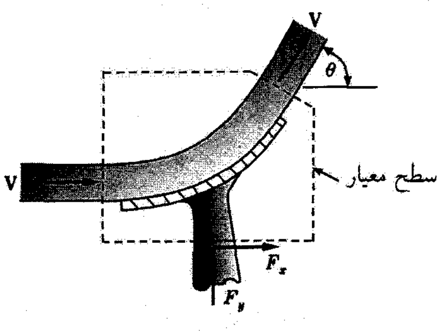
۳-۲ جریان پایای جت آبی را که بر پره‌ای ثابت فرود می‌آید، در نظر بگیرید (شکل۳-۱۹). نیروی لازم را برای اینکه پره در سر جای خود نگه داشته شود، تعیین کنید. فرض کنید که جت آب کاملاً بر روی سطح پره جریان می‌یابد و شکل و مقطع آن در طول مسیر ثابت می‌ماند، آن‌گاه می‌توان معادلهٔ تکانه را برای حجم معیار شکل۳-۱۹ نوشت.

سطح کل جت آب در معرض فشار جو به‌اضافهٔ نیروی اضافی آب در تماس با پره قرار می‌گیرد. این نیروی اضافی دقیقاً برابر نیروی لازم برای چرخاندن آب در روی پره است. اعمال فشار جو بر جت آب با فشار جو در جهت مخالف خنثی می‌شود. بنابراین، داریم

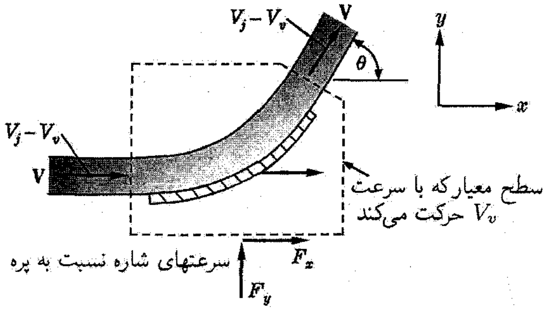
$$F_x = \rho A V^2 \cos\theta - \rho A V^2,\ F_y = \rho A V^2 \sin\theta$$

که برابر نیروی لازم برای نگه‌داری پره در جای خود است.

۳-۳ در مسئلهٔ ۳-۲ دیدیم که پره با سرعت V_v در جهت مثبت x حرکت می‌کند که این سرعت کمتر از سرعت جت آب، V_j، است. شکل۳-۲۰ حرکت پره را نشان می‌دهد. نیروی لازم وارد بر پره را برای اینکه سرعت پره ثابت بماند و شتاب نگیرد، تعیین کنید.



شکل ۳-۱۹



شکل ۳-۲۰

نخست، معادلهٔ تکانه را در دستگاه مختصات مرجع ساکن نسبت به پره می‌نویسیم. بنابراین، تمام سرعتها نسبت به پره محاسبه می‌شوند. سرعت شاره نسبت به پره هنگام ورود به حجم معیار برابر $V_j - V_v$ است. اگر از اصطکاک صرف‌نظر کنیم. معادلهٔ برنولی، سرعت خروج آب را نسبت به پره همان سرعت قبلی $V_j - V_v$ در زاویهٔ θ به‌دست می‌دهد. چون سرعت همان سرعت قبلی است، سطح مقطع A نیز باید یکسان باشد. از معادلهٔ تکانه، داریم

$$F_x = \rho A (V_j - V_v)^۲ \cos\theta - \rho A (V_j - V_v)^۲,\ F_y = \rho A (V_j - V_v)^۲ \sin\theta$$

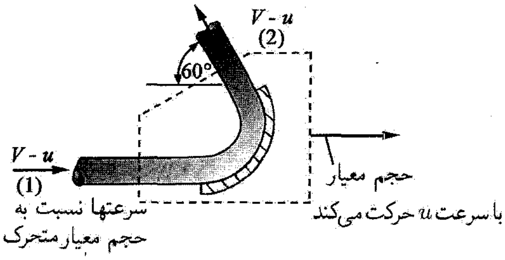
که نیروهای خالص لازم را برای جلوگیری از شتاب گرفتن پره به‌دست می‌دهد. چون پره در حال تعادل است، نیروهای وارده از طرف شاره به پره باید $-F_x$ و $-F_y$ باشند و نیروهای عکس‌العمل پره به شاره F_x و F_y هستند.

راه دیگر، سطح معیار را درست بر روی سطح درونی پره انتخاب می‌کنیم که در این حالت شامل شاره نیز می‌شود. روش تحلیل کاملاً مانند قبل است، اما نیروی وارد بر شاره (توسط پره) را به‌سرعت به‌صورت F_x و F_y به‌دست می‌آوریم.

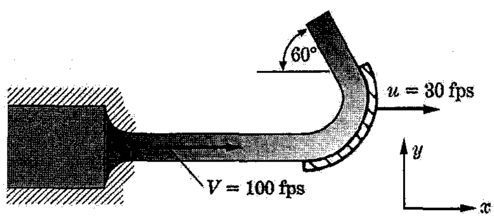
۳-۴ پره‌ای مطابق شکل ۳-۲۱ با سرعت ثابت $u = ۳۰\,\text{fps}$ حرکت می‌کند و سرعت جت آب در شیپوره برابر $V = ۱۰۰\,\text{fps}$ است. مساحت شیپوره $۰٫۰۴\,\text{ft}^۲$ است. نیروی کل وارد بر پره را به‌دست آورید.

حجم معیار را دور پره مطابق شکل ۳-۲۲ در نظر بگیرید. سرعتها نسبت به حجم معیار برابر $V - u = ۱۰۰ - ۳۰ = ۷۰\,\text{ft/s}$ در جهت ورودی به پره و خروجی با سرعت $V - u = V_۰\,\text{ft/s}$ در جهت مشخص شده است. بنابراین، نیروی وارد بر شاره از معادلهٔ تکانهٔ جریان پایا تعیین می‌شود. در جهت x، داریم

$$F_x = \dot{m}(V_{۲x} - V_{۱x})$$



شکل ۳-۲۲



شکل ۳-۲۱

که آهنگ جریان جرمی، $\dot{m}$، نسبت به سطح معیار برابر است با

$$\dot{m} = \rho A(V - u) = \rho A(۱۰۰ - ۳۰)$$

مؤلفه‌های x سرعت ورودی و خروجی از حجم معیار عبارت‌اند از

$$V_{۱x} = V - u \quad و \quad V_{۲x} = -(V - u)\cos ۶۰^\circ$$

با نشاندن سرعتها در معادلهٔ تکانه، خواهیم داشت

$$F_x = \rho A(V - u)[-(V - u)\cos ۶۰^\circ - (V - u)]$$
$$= -\rho A(V - u)^۲(\cos ۶۰^\circ + ۱) = -(۶۲٫۴/۳۲٫۲)(۰٫۰۴)(۱۰۰ - ۳۰)^۲(\cos ۶۰^\circ + ۱)$$

نیروی وارد بر شاره یا نیروی وارد بر پره $F_x = ۵۶۹ \text{ lb}_\text{f}$

در جهت y داریم $F_y = \dot{m}(V_{۲y} - V_{۱y})$

سرعتهای ورودی و خروجی در جهت y عبارت‌اند از

$$V_{۱y} = ۰, V_{۲y} = (V - u)\sin ۶۰^\circ$$

با نشاندن این سرعتها در معادلهٔ تکانه، خواهیم داشت

$$F_y = \rho A(V - u)[(v - u)\sin ۶۰^\circ - ۰]$$

$= \rho A(V - u)^۲ \sin ۶۰^\circ = (۶۲٫۴/۳۲٫۲)(۱۰۰ - ۳۰)^۲ \sin ۶۰^\circ = ۳۲۹ \text{ lb}_\text{f}$ نیروی وارد بر شاره

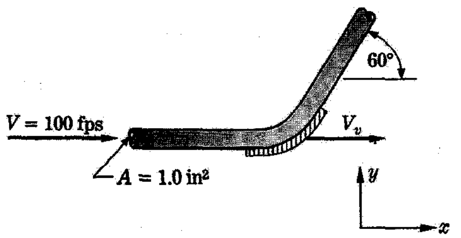
یا نیروی وارد بر پره $F_y = -۳۲۹ \text{ lb}_\text{f}$.

مقدار نیروی وارد بر پره برابر است با

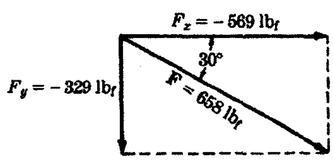
$$|\mathbf{F}| = (F_x^۲ + F_y^۲)^{۱/۲} = \left[(۵۶۹)^۲ + (-۳۲۹)^۲\right]^{۱/۲} = ۶۵۸ \text{ lb}_\text{f}$$

جهت نیروی وارد $\tan\theta = -\frac{۳۲۹}{۵۶۹} = -۰٫۵۷۸$ یا $\theta = -۳۰^\circ$ است علامت منفی نشان می‌دهد که نیروی وارد رو به پایین است. سرانجام، نیروهای وارد بر پره مطابق شکل ۳-۲۳ هستند.

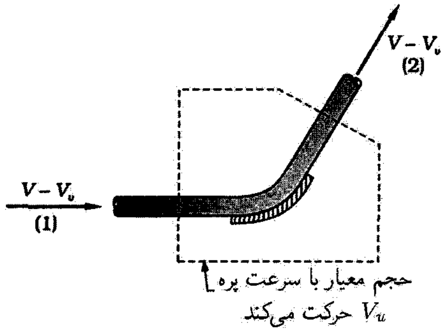
۳-۵ جت آبی با سرعت ۱۰۰ft/s به پره‌ای متحرک با سرعت ۴۰ft/s مطابق شکل ۳-۲۴ برخورد می‌کند. مطلوب است تعیین (الف) توان انتقال یافته به پره (ب) سرعت مطلق آب خروجی از پره



شکل ۳-۲۴



شکل ۳-۲۳



شکل ۳-۲۵

(الف) توان انتقال یافته به پره برابر است با حاصل‌ضرب نیرو در جهت حرکت پره و سرعت پره. بنابراین

$$\text{توان} = F_x V_v$$

نیروی شاره بر پره را می‌توان از معادلهٔ تکانهٔ برای حجم معیار که سرعت حرکت آن برابر سرعت پره است، به‌دست آورد (شکل۳-۲۵) معادلهٔ تکانه برای حجم معیار عبارت است از

$$F_x = \dot{m}(V_{۲x} - V_{۱x})$$

نیروی وارد بر شاره، F_x، همان‌گونه که در مسئلهٔ ۳-۳ گفته شد، نیروی وارد شده بر پره از طرف عوامل خارجی است.
آهنگ جریان جرمی نسبت به سطح معیار برابر است با $\dot{m} = \rho A(V - V_v)$. سرعتها در جهت x ورودی و خروجی حجم معیار عبارت‌اند از

$$V_{۱x} = V - V_v \qquad \text{و} \qquad V_{۲x} = (V - V_v)\cos ۶۰^\circ$$

با نشاندن در معادلهٔ تکانه، داریم

$$F_x = \rho A(V - V_v)[(V - V_v)\cos ۶۰^\circ - (V - V_v)] = \rho A(V - V_v)^{۲}(\cos ۶۰^\circ - ۱)$$
$$= (۶۲٫۴/۳۲٫۲)(۱۰۰/۱۲ - ۴۰/۱۲)^{۲}(\cos ۶۰ - ۱) = -۶٫۴۸\ \text{lb}_\text{f}$$

که نیروی وارد بر شاره است و
نیروی وارد بر پره: $F_x = ۶٫۴۸\ \text{lb}_\text{f}$
بنابراین، توان برابر است با

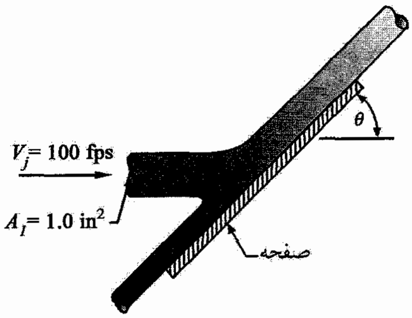
$$۶٫۴۸(۴۰) = ۲۵۹\text{ft} - \text{lb}_\text{f}/\text{s} = ۰٫۴۷۲ \quad \text{اسب بخار}$$

(ب) سرعت خروج شاره از پره از جمع سرعتهای شاره نسبت به پره (V_rel) و سرعت پره به‌دست می‌آید. بنابراین، سرعت مطلق شاره‌ای که از پره خارج می‌شود، در جهت x برابر است با

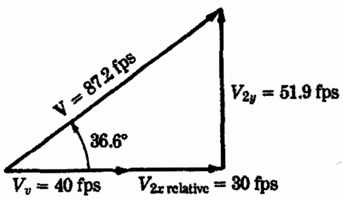
$$V_{۲x} = V_{x\text{rel}} + V_v = (۱۰۰ - ۴۰)\cos ۶۰^\circ + ۴۰ = ۷۰\ \text{fps}$$

و سرعت خروج شاره از پره در جهت y برابر است با

$$V_{۲y} = (۱۰۰ - ۴۰)\sin ۶۰^\circ = ۵۱٫۹\ \text{fps}$$



شکل ۳-۲۷



شکل ۳-۲۶

سرعت مطلق شاره خروجی از پره برابر است با

$$|\mathbf{V}_۲| = (V_{۲x}^۲ + V_{۲y}^۲)^{۱/۲} = \left[(V_۰)^۲ + ۵۱٫۹)^۲\right]^{۱/۲} = ۸۷٫۲ \text{ fps}$$

جهت خروج شاره از پره با

$$\tan\theta = \frac{۵۱٫۹}{۷۰} = ۰٫۷۴۱, \Rightarrow \theta = ۳۶٫۶^\circ$$

داده می‌شود. نمودار بردار سرعت شاره خروجی از پره را در شکل ۳-۲۶ نشان داده‌ایم

۳-۶ نیروی جت آبی وارد بر صفحهٔ مایل را برحسب زاویهٔ θ، مطابق شکل ۳-۲۷ تعیین کنید.

حجم معیار موجود در شکل ۳-۲۸ را در نظر بگیرید که شاره از مقطع ۱ وارد و از مقطعهای ۲ و ۳ خارج می‌شود. آهنگ جریان جرم شارهٔ ورودی به حجم معیار برابر است با آهنگ جرم شاره خروجی از حجم معیار. بنابراین، داریم

$$A_۱V_j = A_۲V_۲ + A_۳V_۳, \quad \text{یا} \quad \rho A_۱V_j = \rho A_۲V_۲ + \rho A_۳V_۳$$

معادلهٔ برنولی را در طول خط بین مقاطع ۱ و ۲ و بین مقاطع ۱ و ۳ می‌نویسیم

$$p_۱/\rho + \frac{۱}{۲}V_j^۲ = p_۲/\rho + \frac{۱}{۲}V_۲^۲$$

و

$$p_۱/\rho + \frac{۱}{۲}V_j^۲ = p_۳/\rho + \frac{۱}{۲}V_۳^۲$$

که از تمام تغییرات ارتفاع صرف‌نظر کرده‌ایم. اگر فرض کنیم که فشارها در مقاطع ۱، ۲ و ۳ برابر فشار جو باشد، آن‌گاه از معادلهٔ برنولی نتیجه می‌شود

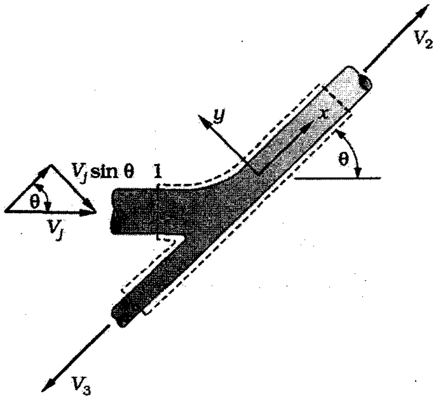
$$V_j = V_۲ = V_۳$$

با بهره‌گیری از اینکه سرعتها برابرند، از معادلهٔ پیوستگی، داریم

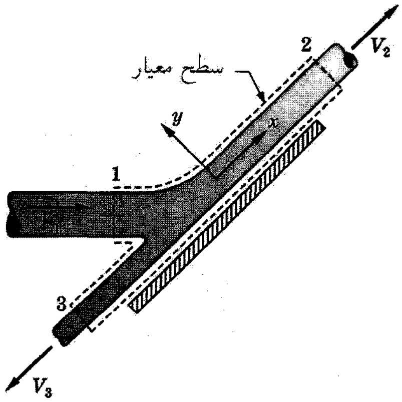
$$A_۱ = A_۲ + A_۳$$

اکنون، معادلهٔ تکانهٔ جریان پایای شاره را در جهت x در صفحه می‌نویسیم. از تنشهای برشی شاره در تماس با صفحه صرف‌نظر می‌کنیم. با مراجعه به شکل ۳-۲۹ برای F_x نیروی وارد از طرف صفحه به شاره داریم

$$F_x = ۰ = \rho A_۲V_۲^۲ - \rho A_۳V_۳^۲ - \rho A_۱V_j^۲\cos\theta$$



شکل ۳-۲۹



شکل ۳-۲۸

که به شکل سادهٔ $A_۱ \cos\theta = A_۲ - A_۳$ درمی‌آید. از جمع این معادله با رابطه‌ای که از پیوستگی به‌دست آمد می‌توان به رابطهٔ زیر رسید

$$A_۳ = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos\theta)A_۱ \quad \text{و} \quad A_۲ = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos\theta)$$

گام بعدی، نوشتن معادلهٔ تکانه در جهت y عمود بر صفحه است، بردار F_y، مؤلفهٔ y نیروی وارد بر صفحهٔ شاره است

$$F_y = \rho A_۱ V_j^۲ \sin\theta$$

که جواب عددی آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$F_y = (۶۲{,}۴/۳۲{,}۲)\frac{۱}{۱۴۴}(۱۰۰)^۲ \sin\theta = ۱۳۵ \sin\theta \ \mathrm{lb_f}$$

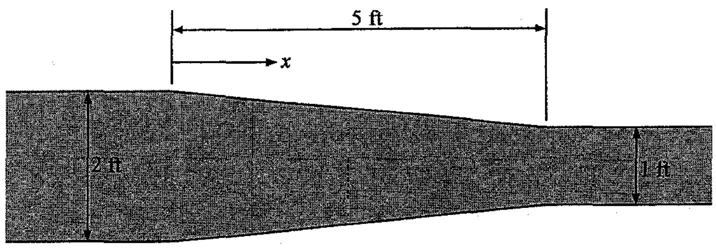
۳-۷ مجرای دوبعدی همگرای شکل ۳-۳۰ دارای مقطع متغیر خطی است. آهنگ جریان شارهٔ تراکم‌ناپذیر برابر مقدار ثابت $Q = ۱۰\mathrm{ft}^۳/\mathrm{s}$ در واحد پهنای مجراست. شتاب برحسب فاصلهٔ x چقدر است؟ شتاب در نقطه‌ای به‌فاصلهٔ یک فوت از شروع مقطع همگرا چقدر است؟

فرض کنید که جریان شاره شبه یک بعدی است و از تغییرات مقطع صرف‌نظر می‌شود. در این صورت، با توجه به پیوستگی، برای آهنگ جریان Q، داریم

$$Q = uA = u(۲ - x/۵)$$

که u سرعت شاره در مجرا تابع x است و از رابطهٔ بالا تعریف می‌شود، زیرا Q ثابت است. در این‌صورت، شتاب از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$



شکل ۳-۳۰

ولی چون جریان شاره پایاست. نتیجه می‌شود که $\partial u/\partial t = ۰$ و با دیفرانسیل‌گیری می‌توان $\partial u/\partial x$ را که به سادگی $\frac{du}{dx}$ است، به‌دست آورد، چون u فقط تابع x است. بنابراین

$$a_x = u\frac{du}{dx} = \left(\frac{۵Q}{۱۰ - x}\right)\left[\frac{۵Q}{(۱۰ - x)^۲}\right] = \frac{(۵ \times ۱۰)^۲}{(۱۰ - x)^۳} = \frac{۲۵۰۰}{۱۰ - x)^۳}\ \mathrm{ft/s^۲}$$

x برحسب فوت است. در $x = ۱\ \mathrm{ft}$، $a_x = ۳٫۴۳\ \mathrm{ft/s^۲}$.

۳-۸ در مسئلهٔ ۳-۷ فرض می‌کنیم که جریان ناپایاست و با آهنگ $۲\ \mathrm{ft^۳/s^۲}$ (در واحد پهنای مجرا) افزایش می‌یابد. در این حالت، شتاب در زمانی‌که به $Q = ۱۰\mathrm{ft^۳/s}$ بر واحد فوت پهنای مجرا برسد، چقدر است؟

مانند مسئلهٔ ۳-۷ شتاب با رابطهٔ $a_x = \partial u/\partial t + u(\partial u/\partial x)$ داده می‌شود و $u(\partial u/\partial x)$ مانند مسئلهٔ قبل است. اما در این حالت $\partial u/\partial t \neq ۰$. آهنگ شاره از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\left(۲ - \frac{x}{۵}\right) = ۲\ \mathrm{ft^۳/s^۲/ft}$$

بنابراین، در $x = ۱\ \mathrm{ft}$، داریم $\partial u/\partial t = ۱۰/۱۰ - x = ۱٫۱۱\ \mathrm{ft/s^۲}$ و مقدار a_x از جمع $\partial u/\partial t$ و $u(\partial u/\partial x)$ در نقطهٔ $x = ۱\mathrm{ft}$ به‌دست می‌آید.

$$a_x = ۱٫۱۱ + ۳٫۴۳ = ۴٫۵۴\ \mathrm{ft/s^۲}$$

۳-۹ موتور جت شکل ۳-۳۱ به‌صورت درجا بر روی سکو (پایه)یی آزمایش می‌شود. سرعت ورودی هوا $۵۰۰\mathrm{ft/s}$ و گازهای مانده و تولیدی با سرعت $۳۵۰۰\mathrm{fps}$ از لوله خارج می‌شوند.

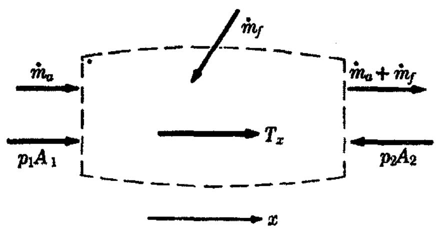
در ورودی و گازهای مانده در خروجی در فشار جو قرار دارند. نسبت سوخت به هوا ۱/۵۰ است و سطح مقطع ورودی و خروجی هر دو ۲ فوت مربع است. چگالی هوای ورودی $۰٫۰۰۲۴\frac{\mathrm{slug}}{\mathrm{ft^۳}}$ است. نیروی T_x لازم برای ثابت نگه‌داشتن موتور جت را تعیین کنید.

حجم معیاری مطابق شکل را در اطراف شاره در درون موتور بین مقاطع ۱ و ۲ در نظر بگیرید (شکل ۳-۳۲). معادلهٔ تکانه جریان پایای شاره عبارت است از

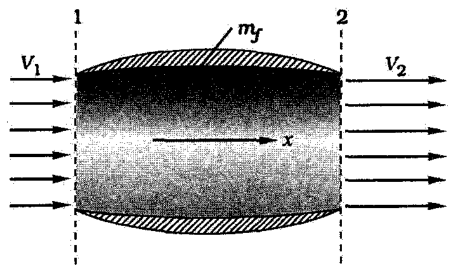
$$F_x = (\dot m_a + \dot m_f)V_{۲x} - \dot m_a V_{۱x}$$

که F_x نیروی کل خارجی وارد شده به موتور است و شامل نیروهای فشار و جمع نیروی عکس‌العمل سکو T_x نیز است. $\dot m_a$ آهنگ جریان جرمی و $\dot m_f$ جریان جرم سوخت است. بنابر اصل پیوستگی، $\dot m_a$ باید در ورودی و خروجی یکسان باشد. فرض می‌کنیم که تکانهٔ سوخت وقتی وارد موتور می‌شود در جهت x ناچیز است. در این‌صورت، می‌توان نوشت

$$p_۱A_۱ - p_۲A_۲ + T_x = (\dot m_a + \dot m_f)V_{۲x} - \dot m_a V_{۱x}$$



شکل ۳-۳۲



شکل ۳-۳۱

اما چون سطح مقطع ورودی و خروجی یک اندازه‌اند، و فرض کرده‌ایم که

$$p_۱ = p_۲ = ۱\mathrm{Atm}$$

بنابراین، رابطه به‌صورت زیر درمی‌آید

$$T_x = (\dot m_f + \dot m_a)V_{۲x} - \dot m_a V_{۱x} = \left(\frac{\dot m_f}{\dot m_a} + ۱\right)\dot m_a V_{۲x} - \dot m_a V_{۱x}$$

فرض می‌کنیم که هوای ورودی در شرایط متعارف $\rho_۱ = ۰٫۰۰۲۴\mathrm{slug/ft^۳}$، بنابراین آهنگ جریان جرمی هوا

$$\dot m_a = \rho_۱ A_۱ V_۱ = ۰٫۰۰۲۴ \times ۲ \times ۵۰۰ = ۲٫۴۰\mathrm{slug/s}$$

و مقدار T_x برابر است با

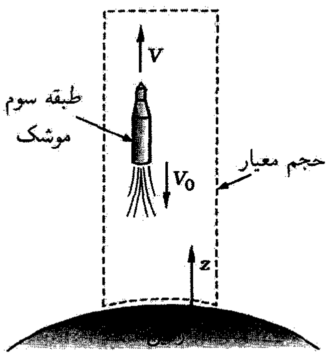
$$T_x = (\frac{۱}{۵۰} + ۱)(۲٫۴۰) \times (۳۵۰۰) - (۲٫۴) \times (۵۰۰) = ۷۳۰۰\mathrm{lb_f}$$

بدین ترتیب، رانشِ وارد بر موتور در حالتی که بر روی سکو قرار دارد، برابر T_x و در جهت عکس آن است.

۳-۱۰ موشکی سه طبقه را به‌منظور کاوش فضایی در نظر می‌گیریم. دو طبقهٔ اول موشک باعث دورشدن موشک تا چنان مسافتی از زمین می‌شود که از جاذبهٔ گرانشی زمین و مقاومت اصطکاکی که در خلال این پیمایش می‌توان چشم پوشید. طبقهٔ سوم این موشک وقتی از موشک جدا می‌شود که به ارتفاع بیشینهٔ خود از زمین رسیده باشد، که البته در آن زمان سرعتش نسبت به زمین صفر خواهد بود. موتور موشک نهایی به‌گونه‌ای طراحی شده است که سرعت جت خروجی نسبت به موشک در مقدار ثابت $V_\circ \mathrm{ft/s}$ حفظ می‌شود. سرعت نهایی طبقهٔ سوم موشک برحسب پارامترهای مربوط چقدر است؟

در شکل ۳-۳۳ حجم معیاری را به شکل استوانه به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که از زمین تا بالای طبقهٔ سوم موشک را می‌پوشاند. این حجم معیار شامل طبقهٔ سوم موشک، سوخت آن و تمام موادی است که از طبقهٔ سوم خارج می‌شود. در این‌صورت، تکانهٔ موشک به‌اضافهٔ سوخت و تمام موادی که از موشک خارج می‌شود، ثابت می‌ماند. هیچ نیروی خارجی به موشک وارد نمی‌شود. اگر M جرم موشک طبقهٔ سوم و m جرم لحظه‌ای سوخت موشک باشد، جرم سوخت موشک با آهنگ dm/dt تغییر می‌کند و علامت منفی آن به‌علت کاهش جرم سوخت است. اگر V سرعت موشک باشد، آن‌گاه مؤ لفهٔ z تکانهٔ موشک به اضافهٔ سوخت مانده در موشک در زمان t برابر $(M+m)V$ است و مؤلفهٔ تکانهٔ سوخت خروجی از انتگرال $\int_\circ^t -dm/dt(V - V_\circ)dt$ به‌دست می‌آید. موازنهٔ تکانه‌ها به‌صورت زیر است

$$\frac{d}{dt}\left[(M+m)V\right] - \frac{dm}{dt}(V - V_\circ) = (M+m)\frac{dV}{dt} + V_\circ\frac{dm}{dt} = \circ$$



شکل ۳-۳۳

که V سرعت مطلق موشک در جهت z است. اما، $m \neq m_\circ + (dm/dt)\,t$، بلکه $m_\circ$ جرم اولیهٔ سوخت در زمان $t = \circ$ و مقارن با زمانی است که طبقهٔ سوم روشن می‌شود؛ dm/dt را ثابت فرض می‌کنیم و به‌صورت سادهٔ $\dot{m}$ می‌نویسیم. بنابراین

$$(M + m + \dot{m}t)\frac{dV}{dt} + V_\circ \dot{m} = \circ$$

این معادله را می‌توان از $V = \circ$ در زمان $t = \circ$ تا $V = V_f$ وقتی که سوخت تمام می‌شود ($m = \circ$) انتگرال‌گیری کرد. V_f سرعت نهایی موشک طبقهٔ سوم است. سرانجام، سوخت در زمان $t = m_\circ / - \dot{m}$ تمام می‌شود. یادآور می‌شویم که $\dot{m}$ منفی است.

$$V_f = V_\circ \ln \frac{M + m_\circ}{M} \quad \text{و} \quad \int_\circ^{V_f} dV = -\int_\circ^{-m_\circ/\dot{m}} \frac{V_\circ \dot{m}}{M + m_\circ + \dot{m}t} dt$$

۳-۱۱ لایهٔ مرزی دوبعدی سادهٔ آب را بر روی صفحه‌ای تخت همچون شکل ۳-۳۴ در نظر بگیرید. سرعت در لبهٔ حمله، یکنواخت و برابر U است. توزیع سرعت در پایین دست جریان در لبهٔ فرار را در شکل نشان داده‌ایم. نیروی برشی شاره را بر روی صفحه با استفاده از روش حجم معیار به‌دست آورید.

مطابق شکل، حجم معیاری مستطیلی را انتخاب می‌کنیم. می‌توان نوشت

$$\mathbf{F} = \int_{\text{C.S.}} (\rho \mathbf{V})\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$$

که $\mathbf{F}$ نیروی کل وارد بر شاره است. اما فرض می‌کنیم که فشار در سرتاسر جریان یکنواخت است و اگر معادلهٔ تکانه را در جهت موازی صفحه (جهت x) بنویسیم، F_x نیروی برشی وارد شده از سوی صفحه بر شاره است. شاره در طول سطح از ۲ به ۳ با سرعتی کم، عمود بر صفحه، و دارای مؤلفه سرعتی موازی صفحه که تقریباً U است، جریان دارد. در این حالت، F_x بر واحد پهنای صفحه برابر است با

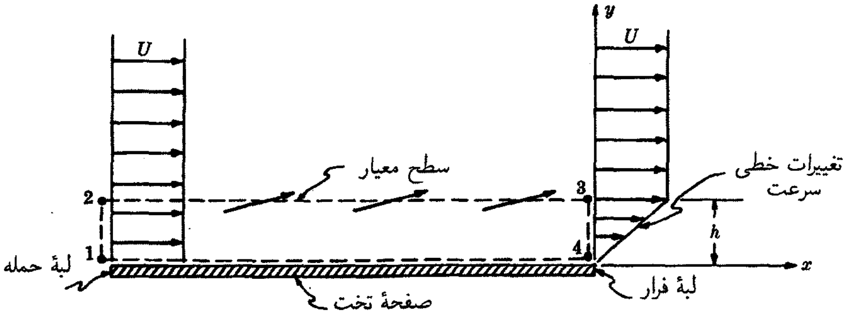
$$F_x = \underbrace{-\rho U^۲ h}_{۱-۲} + \underbrace{\int_\circ^h (\rho U^۲ y^۲/h^۲)dy}_{۳-۴} + \underbrace{\dot{m}U}_{۲-۳}$$

که $\dot{m}$ آهنگ جریان جرمی در واحد پهنا در سطح ۲ به ۳، و برابر است با

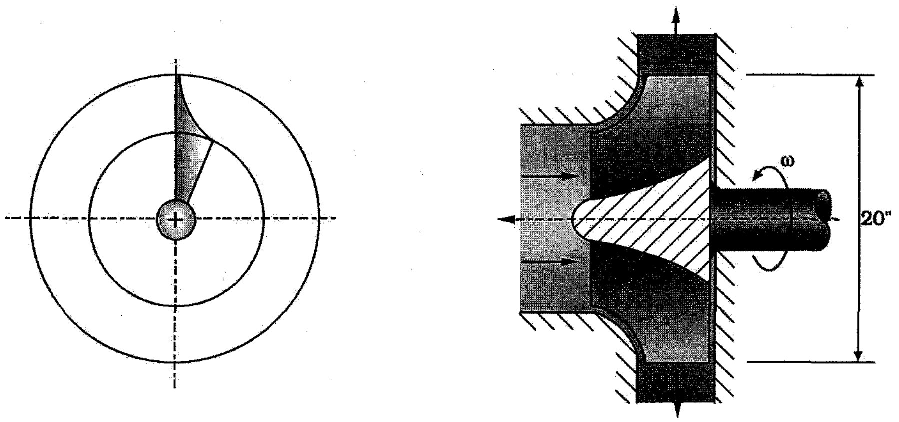
$$\dot{m} = \rho U h - \rho U h/۲ = \rho U h/۲$$

بنابراین

$$F_x = -\rho U^۲ h + \rho U^۲ h/۳ + \rho U^۲ h/۲ = -\rho U^۲ h/۶$$



شکل ۳-۳۴



شکل ۳-۳۵

این حقیقت که F_x منفی‌است، نشان می‌دهد که نیروی کندکننده و واردشده بر شاره در جهت منفی x است. نیروی شاره بر صفحه برابر F_x و در جهت مخالف آن است.

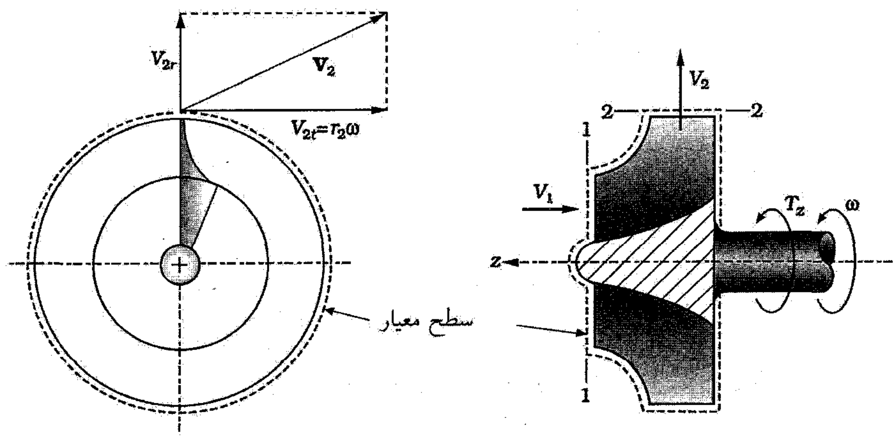
۳-۱۲ پمپ آب گریز از مرکزی مطابق شکل۳-۳۵ آب را با آهنگ $10\ \mathrm{ft^3/s}$ می‌مکد. آب در جهت محور با پروانه برخورد می‌کند. شعاع پروانه ۱۰ اینچ است و پره‌ها یک اینچ ارتفاع دارند و در جهت شعاعی هستند. توان ورودی به روتور را که با سرعت $1000\mathrm{rpm}$ می‌چرخد، تعیین کنید.

توان ورودی برابر حاصل‌ضرب گشتاور محور T در سرعت زاویه‌ای ω روتور است. توان برابر $T\omega$ است. با دانستن سرعت زاویه‌ای، گشتاور را می‌توان از معادلهٔ تکانهٔ زاویه‌ای جریان پایا به‌دست آورد. گشتاور حول محور دوران از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$T_z = \int_{\mathrm{C.S.}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho \mathbf{V}.d\mathbf{A}$$

که سطح معیار را حول پروانه در نظر گرفته‌ایم (شکل۳-۳۶)، به‌گونه‌ای‌که گشتاور موجود در معادله گشتاوری است که محور محرک بر روتور وارد می‌کند. با فرض یکنواخت بودن سرعت در سطحهای ورودی و خروجی، می‌توان نوشت

$$T_z = \rho_1 Q_1 (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1})$$



شکل ۳-۳۶

که $\rho_1 Q_1 = \dot{m}$ آهنگ جرم شاره است. چون جریان در ورودی پروانه در جهت محور است، مؤلفهٔ مماسی سرعت V_{t1} صفر است. بنابراین فقط به تعیین مؤلفهٔ مماسی سرعت در خروجی نیاز است. با این فرض که هیچ‌گونه نشتی در خروجی پروانه نداریم، یعنی شاره دقیقاً سطح پره‌ها را می‌پیماید، آنگاه سرعت مماسی در خروجی برابر است با

$$v_{t2} = r_2\omega = \left(\frac{10}{12}\right)\left(1000 \times \frac{2\pi}{60}\right) = 87{,}3\text{ft/s}$$

و برای گشتاور داریم

$$T_z = \left(\frac{62{,}4}{32{,}2}\right)(1{,}0)\left(\frac{10}{12}\right)(87{,}3) = 141 \text{ lb}_\text{f}.\text{ft}$$

توان لازم $141\left(1000 \times \frac{2\pi}{60}\right) = 14800 \text{ ft.lb}_\text{f}/\text{s}$ یا ۲۷ اسب بخار است.

۳-۱۳ آب از میان لوله‌ای افقی از طریق شکاف ۱/۸ اینچی، همچون شکل۳-۳۷، به خارج جریان دارد. آهنگ کل جریان $1 \text{ ft}^3/\text{s}$ است. سرعت جریان به‌طور خطی از مقداری بیشینه در یک انتهای شکاف تا مقدار صفر در انتهای دیگر تغییر می‌کند. تکانهٔ حول محور لوله عمودی ناشی از خروج آب از شکاف را تعیین کنید.

نخست، تابع توزیع سرعت را تعیین می‌کنیم. اگر $u_{\max}$ سرعت بیشینه در ورودی باشد (شکل۳-۳۷) سرعت در هر نقطه از لوله عبارت است از

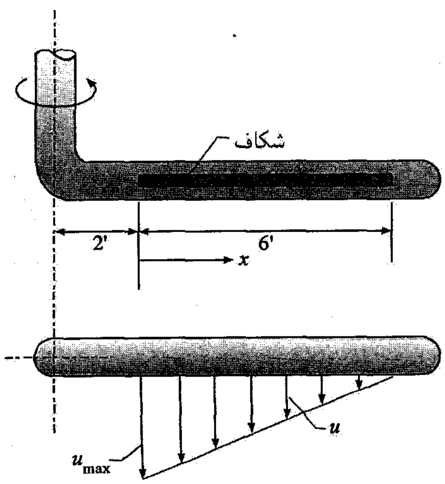
$$u = u_{\max}\left(1 - \frac{x}{6}\right)$$

مقدار $u_{\max}$ را می‌توان از معادلهٔ پیوستگی به‌دست آورد. آهنگ کل شاره Q از انتگرال‌گیری زیر به‌دست می‌آید

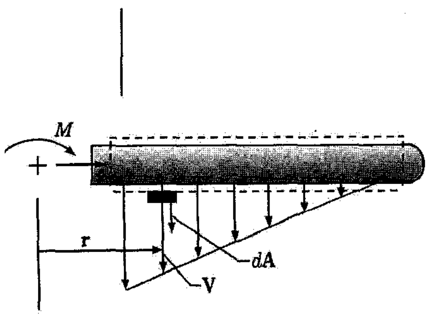
$$Q = \int_A u dA = \int_0^6 u_{\max}\left(1 - \frac{x}{6}\right)\left(\frac{1}{8}/12\right)dx = 1$$

و، $u_{\max} = 32 \text{ ft/s}$. گشتاور نیروی عکس‌العمل لولهٔ رابط به لوله افقی را می‌توان با در نظر گرفتن حجم معیار، همچون شکل۳-۳۸، تعیین کرد. چون $\mathbf{r}$ عمود بر $\mathbf{V}$ و $d\mathbf{A}$ موازی با $\mathbf{V}$ است M گشتاور وارد بر لولهٔ رابط به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$M = \int_{\text{C.S.}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho\mathbf{V}.d\mathbf{A} = \int_{\text{C.S.}} (ru)\rho u dA$$



شکل ۳-۳۷



شکل ۳-۳۸

و چون $r = ۲ + x$ و $u = ۳۲(۱ - \frac{x}{۶})$، داریم

$$M = (۳۲)^۲ \rho \int_۰^۶ (۲ + x)(۱ - x/۶)^۲ (\frac{۱}{۸}/۱۲) dx$$

با توجه به اینکه $\rho = ۶۲٫۴/۳۲٫۲ \text{ slug/ft}^۲$، خواهیم داشت

$$M = ۱۴۵ \text{ lb}_\text{f}.\text{ft}$$

این گشتاور حول محور لولهٔ رابط است که در تعیین تنشها اهمیت دارد. همچون شکل۳-۳۸، علامت تکانه مثبت است. گشتاور وارد بر لولهٔ رابط عمودی توسط لولهٔ افقی برابر M و علامت آن مخالف است.

۳-۱۴ تصویر از بالای چمن‌آب‌پاش خودکاری را در شکل۳-۳۹ نشان داده‌ایم. آب‌پاش دارای دو بازوی مجهز به شیپوره‌های ۹۰ درجه است که حول محور لوله در صفحهٔ افقی می‌چرخند. آهنگ جریان آب از هر لوله با سطح خروجی A برابر Q است. سرعت مطلق خروج آب از شیپوره را به دست آورید. اگر (الف) آب‌پاش اصطکاک نداشته باشد (ب) آب‌پاش دارای اصطکاک ثابتی باشد که گشتاور آن (T_f) در حرکت آب‌پاش اثر می‌گذارد.

حجم معیاری استوانه‌ای را انتخاب کنید. معادلهٔ تکانهٔ زاویه‌ای (۳-۱۴) را می‌توان در نقطهٔ محوری O نوشت. (جریان آب از زیر محور بدون هیچ‌گونه سرعت زاویه‌ای وارد دستگاه می‌شود.)

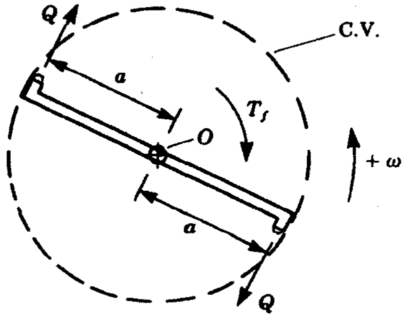
$$T = ۲\rho Q_۱ a V_t$$

V_t سرعت مطلق مماسی (یعنی نسبت به حجم معیار ساکن) بر سطح حجم معیار است. و Q آهنگ جریان عبوری از سطح حجم معیار است. Q دارای مقدار یکسان نسبت به بازوی متحرک یا نسبت به حجم معیار است. ضریب ۲ به علت وجود دو شیپوره ظاهر می‌شود. سرعت محیطی شیپوره $a\omega$ است، بنابراین سرعت مطلق V_t را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$T = ۲\rho a Q(a\omega - V) \quad \text{بنابراین} \quad V_t = (a\omega - \frac{Q}{A})$$

که $V = \frac{Q}{A}$ سرعت نسبی آب خروجی از شیپوره نسبت به خود شیپوره است. برای حالت (الف) $T = ۰$ و بنابراین $V_t = ۰$، و در نتیجه

$$a\omega = \frac{Q}{A} = V$$



شکل ۳-۳۹

مفهوم فیزیکی این عبارت این است که آب با سرعت صفر نسبت به زمین از لولهٔ آب‌پاش خارج می‌شود و به زمین می‌ریزد و فقط دایره‌ای خیس در زیر آب‌پاش ایجاد می‌کند. ω از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\omega = \frac{V}{a} = \frac{Q}{aA}$$

در حالت (ب)، $-T_f = 2\rho Q a(a\omega - V)$. علامت منفی به این علت ظاهر می‌شود که T_f گشتاور کندکننده است و از این‌رو، ω از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\omega = \left(\frac{V}{a} - \frac{T_f}{2\rho\, Q a^2}\right)$$

سرعت مطلق جت آب برابر است با $-(T_f/2\rho Q a)$. اگر T_f افزایش یابد که آب‌پاش را متوقف کند، آن‌گاه $\omega = 0$ و $T_f = 2\rho Q^2 a/A$. در این‌صورت، سرعت مطلق جت آب به مقدار بیشینهٔ خود می‌رسد و البته برابر است با $V = \frac{Q}{A}$ برای آب‌پاشی سطحی دایره‌ای بر روی زمین باید گشتاوری اصطکاکی به روتور وارد شود. بحث جالب این موضوع را در مسئلهٔ ۶-۳۵ ببینید.

۳-۱۵ جهش هیدرولیکی پدیدهٔ جالبی است که در طبیعت رخ می‌دهد. این پدیده ناشی از ناپیوستگی ناگهانی در عمق مایع جاری است. در رودهای دارای جذر و مد ممکن است جهش در جریانهای آب ساکن یا متحرک رخ دهد. این جهش را به‌سادگی می‌توان در آزمایشگاه ایجاد کرد. بشقاب غذایی را به‌طور افقی زیر شیر آب نگه‌دارید و این پدید را مشاهده کنید. شیر آب را باز کنید تا آب به وسط بشقاب بریزید. آب به سرعت در تمام جهتها در لایه‌ای نازک جریان می‌یابد و یکباره قبل از رسیدن به لبهٔ بشقاب ضخامت آن در لبهٔ بشقاب زیاد می‌شود.

رابطهٔ بین ضخامت جریان آب بالارو و پایین‌رو را برحسب پارامترهای مناسب در شکل ۳-۴۰ به‌دست آورید.

حجم معیاری به عمق W عمود بر صفحهٔ کاغذ را در نظر بگیرید. جهش نسبت به آن ساکن است. فرض کنید که سرعتهای V_1 و V_2 در مجرا یکنواخت‌اند. با این فرض که حجم معیار بسیار نازک است، از نیروهای اصطکاکی وارد به ته می‌توان صرف‌نظر کرد. با توجه به اصل پیوستگی، می‌توان نوشت

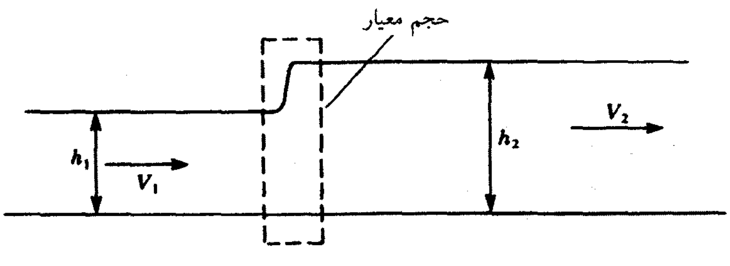
$$w\rho h_1 V_1 = w\rho h_2 V_2 = Q$$

و با توجه به معادلهٔ تکانه (با در نظر گرفتن نیروی فشار هیدروستاتیکی وارد بر هر یک از وجه‌ها)، داریم

$$\frac{\rho g h_1^2}{2} - \frac{\rho g h_2^2}{2} = \rho V_2^2 h_2 - \rho V_1^2 h_1$$

با ترکیب این دو معادله، خواهیم داشت

$$(h_1 - h_2)\left(h_1 + h_2 - \frac{2h_1 V_1^2}{g h_2}\right) = 0$$



شکل ۳-۴۰

اگر پرانتز اول صفر باشد، آنگاه $h_۲ = h_۱$، که متناظر با جریان یکنواخت است، ولی اگر پرانتز دوم را برابر صفر قرار دهیم، $h_۲$ را برحسب $h_۱$ و آهنگ جریان Q را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$\frac{h_۲}{h_۱} = -\frac{۱}{۲} + \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{۲Q^۲}{w^۲ g h_۱^۳}}$$

با در نظر گرفتن انرژی و قانون دوم ترمودینامیک می‌توان نشان داد که $V_۲ < V_۱$ و $h_۱ < h_۲$، زیرا به علت وجود اصطکاک در جهش انرژی تلف می‌شود.

نکتهٔ جالب این است که با گراییدن $h_۱$ به $h_۲$ جهش به‌صورت موج سطحی کوچک درمی‌آید. در شرایط حدی، از معادلات بالا درمی‌یابیم که $V_۲ = V_۱ = \sqrt{gh}$، که $h \approx h_۱ \approx h_۲$.

۱۶-۳ سطح آب در مخزنی تا ارتفاع h بالاتر از توربین قرار دارد (شکل ۳-۴۱). آب از طریق لوله‌ای به قطر D جریان می‌یابد و از طریق توربین به درون رودخانه تخلیه می‌شود. لولهٔ تخلیه هم‌سطح توربین است. توان تولیدی بیشینه توسط توربین را به دست آورید. از تمام اتلافهای انرژی صرف‌نظر می‌کنیم.

معادلهٔ تعمیم یافتهٔ برنولی را برای شاره تراکم‌ناپذیر بین نقطه‌های ۱ و ۲ می‌نویسیم و فرض می‌کنیم که سطح آب ثابت و سرعت شاره در نقطهٔ ۱ ناچیز است؛ از اتلافها نیز صرف‌نظر می‌کنیم.

$$w_s = \frac{p_۱ - p_۲}{\rho} + \frac{V_۱^۲ - V_۲^۲}{۲} + g(z_۱ - z_۲)$$

با قرار دادن $z_۲ = ۰$، $z_۱ = h$، $V_۱ = ۰$ و $p_۱ = p_۲ = ۰$، نتیجه می‌شود

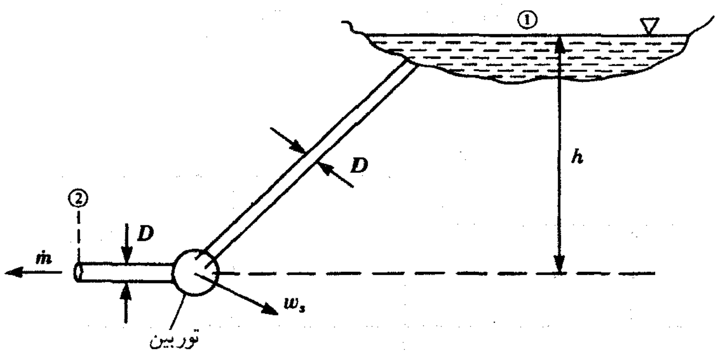
$$w_s = -\frac{V_۲^۲}{۲} + gh$$

و توان خروجی برابر است با

$$\dot{m} w_s = \rho V_۲ A w_۲ = \rho V_۲ \pi D^۲ w_s / ۴ = T\omega$$

که T گشتاور (چرخشی) خروجی توربین و ω سرعت زاویه‌ای است. آن‌گاه، می‌توان نوشت

$$\text{توان خروجی} = \dot{m} w_s = \frac{\rho V_۲ \pi D^۲ w_s}{۴} = \frac{\rho V_۲ \pi D^۲}{۴}\left(gh - \frac{V_۲^۲}{۲}\right)$$



شکل ۳-۴۱

دو مقدار برای $V_۲$ وجود دارد که توان خروجی صفر است، $V_۲ = ۰$، $V_۲ = \sqrt{۲gh}$. در حالت $V_۲ = ۰$ گشتاور (چرخشی) به توربین وارد می‌شود ولی جریان نداریم و روشن است که محور متوقف شده است و مانع چرخش توربین می‌شود ($\omega = ۰$). در $V_۲ = \sqrt{۲gh}$ توربین آزادانه می‌چرخد ولی گشتاور وارد نمی‌کند. توان بیشینه را می‌توان با مقداری از $V_۲$ که رابطهٔ بالا را بیشینه می‌کند، به‌دست آورد و سپس با نشاندن آن در معادله توان بیشینه به‌دست می‌آید.

$$\frac{d}{dV_۲}(\text{توان}) = \frac{\rho\pi D^۲}{۴}\left(gh - \frac{۳V_۲^۲}{۲}\right) = ۰ \quad V_۲\Big|_{\text{توان بیشینه}} = \sqrt{۲gh/۳}$$

و توان بیشینه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$P_{\max} = \frac{\rho\pi D^۲}{۴}\left(\frac{۲gh}{۳}\right)^{۳/۲}$$

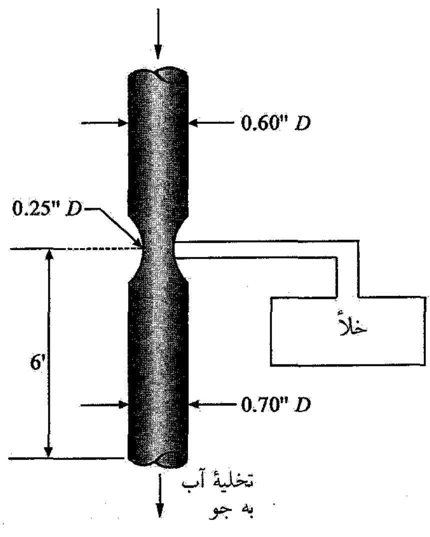
مسائل تکمیلی

۳-۱۷ یکی‌از راههای ایجاد خلأ استفاده از تخلیهٔ آب از طریق ونتوری و اتصال گلوگاه آن به محفظهٔ تخلیه همچون شکل۳-۴۲ است. چه مقدار آب باید از ونتوری تخلیه شود تا خلائی برابر ۲۰ اینچ جیوه ایجاد کند؟

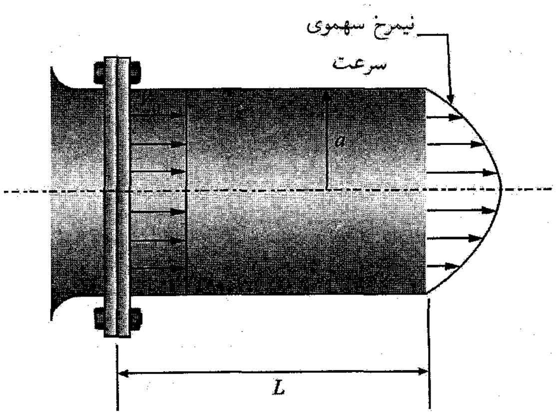
۳-۱۸ لوله‌ای استوانه‌ای به شعاع a ft و طول L ft به‌وسیلهٔ فلانچ و پیچ، همچون شکل۳-۴۳، به دهانهٔ خروجی صافی مخزن مایعی متصل شده است. سرعت خروج مایع در مقطع اتصال یکنواخت و مقدار آن $V_۰$ است. در دهانهٔ خروجی که مایع به جو تخلیه می‌شود، به‌علت وجود اصطکاک در لوله، توزیع سرعت شاره به صورت سهمی است. چه نیرویی باید توسط پیچها تأمین شود تا لوله در محل خود محکم بماند؟

۳-۱۹ در مسئلهٔ ۳-۱۱، اگر تنش برشی (ناشی از اصطکاک گران‌روی) بر دیواره $\tau_۰$ lb.in^۲ باشد، فشار جریان بالادست بر فلانچ چقدر است؟

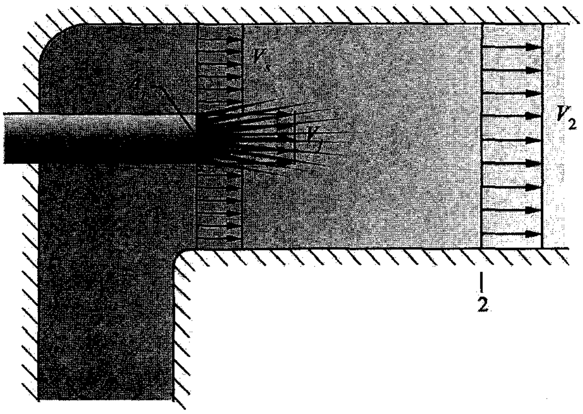
۳-۲۰ اگر صفحه با سرعت V_p (که کمتر از سرعت جت آب است) در همان جهت جت آب حرکت کند، نیروی جت آب در صفحهٔ مایل مسئلهٔ ۳-۶ چقدر خواهد شد؟



شکل ۳-۴۲



شکل ۳-۴۳



شکل ۳-۴۴

۳-۲۱ کشتی‌ای با سرعت ثابت ۲۵ m/h به‌وسیله نیروی پیشرانش جت هیدرولیکی رانده می‌شود نیروی پسای کل ۳۰۰۰lb است. قطر مقطع خروجی جت در شیپورهٔ خروجی ۲ فوت است. سرعت مطلق جت شاره را تعیین کنید.

۳-۲۲ پمپ جت آب شکل ۳-۴۴ دارای سطح مقطع $A_j = ۰٫۰۵\text{ft}^۲$، و سرعت جت آب $V_j = ۹۰\text{ft/s}$ است. این آب وارد جریان آب دومی می‌شود که سرعت آن $V_s = ۱۰\text{ft/s}$ و در لوله‌ای با سطح مقطع ثابت $A = ۰٫۶\ \text{ft}^۲$ جریان دارد. در مقطع ۲ آب به‌گونه‌ای آمیخته شده است که سرعت یکنواخت است. از نیروی برشی دیواره صرف‌نظر می‌کنیم. فشار را در مقطع ۲ تعیین کنید. فشار در شیپوره ۱۰psi است.

۳-۲۳ شاره‌ای با جریان پایا در لوله‌ای استوانه‌ای جریان دارد. نیمرخ سرعت به شکل سهموی است که در جدارهٔ لوله صفر است و در خط مرکزی به مقدار بیشینهٔ V_c می‌رسد. مؤلفه‌های سرعت شعاعی و محیطی صفر هستند.

۱. رابطه‌هایی را برای موارد زیر برحسب V_c و پارامترهای مناسب دیگر برای شارهٔ گذرنده از میان هر لوله‌ای با مقطع مفروض به‌دست آورید.

(الف) مقدار شاره جاری

(ب) تکانه محوری شاره

(ج) انرژی جنبشی شاره

۲. برای شاره‌ای با چگالی ثابت، خطای استفاده از این رابطه‌ها را برحسب درصد بیابید.

(الف) $\rho V^۲ A$ برای تکانه

(ب) $\rho A V^۳/۲$ برای انرژی جنبشی

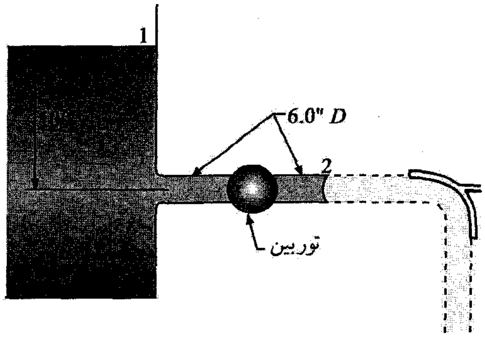
که ρ چگالی شاره، A سطح مقطع لوله و V آهنگ جرمی جریان تقسیم بر ρA است.

نیمرخ سرعت از معادلهٔ $u = V_c[۱ - (r/R)^۲]$ به‌دست می‌آید که R شعاع لوله است.

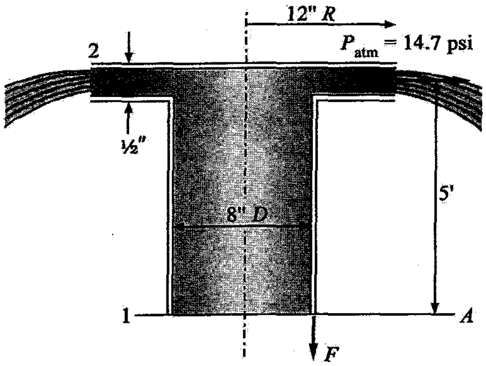
۳-۲۴ آب از مخزنی بزرگ وارد لوله می‌شود و در موقع خروج از لوله به یک تیغهٔ منحرف‌کنندهٔ ۹۰°، همچون شکل ۳-۴۵، برخورد می‌کند. اگر نیروی رانش افقی ۲۰۰lb بر تیغهٔ منحرف‌کننده وارد شود، توان توربین برحسب اسب‌بخار چقدر است؟

۳-۲۵ آب به‌طور پایا از میان لوله‌ای قائم بالا می‌رود و وارد ناحیهٔ حلقوی بین صفحه‌های گرد می‌شود (شکل ۳-۴۶). سپس، به‌طور شعاعی به شکل ورقهٔ آزاد آب از فاصلهٔ صفحه‌ها خارج می‌شود. (الف) اگر از نیروی اصطکاک به‌طور کلی صرف‌نظر کنیم، جریان آب از لوله چقدر است؟ فشار در A برابر ۲۴٫۷ psi است. (ب) نیرو را در جدارهٔ لوله در مقطع A تعیین کنید. از وزن لوله صرف‌نظر کنید.

۳-۲۶ وانتی با سرعت $V = ۱۰۰\ \text{ft/s}$ در سطح زمین تحت تأثیر نیروی ثابت $F = ۱۰۰۰\ \text{lb}$ حرکت می‌کند. در زمان $t = ۰$ بار وانت از



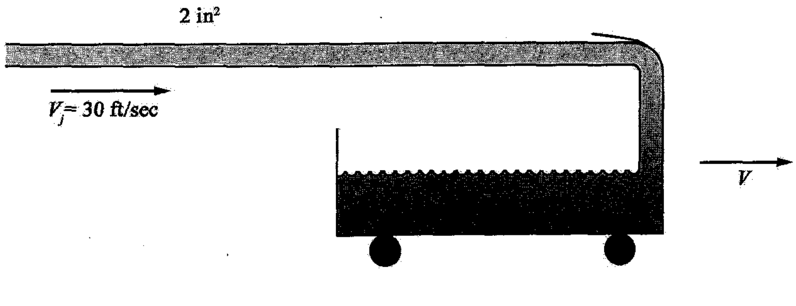
شکل ۳-۴۵



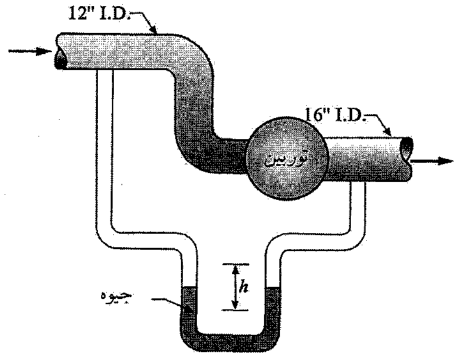
شکل ۳-۴۶

سوراخی در کف وانت بیرون می‌ریزد. با فرض اینکه بار وانت با آهنگ ۱۰ lb/s و به‌طور قائم بیرون می‌ریزد و وانت تحت تأثیر نیروی ثابت F حرکت می‌کند، سرعت وانت را پس از ۲۰ ثانیه به دست آورید. جرم اولیهٔ بار ۲۰۰۰ lb است.

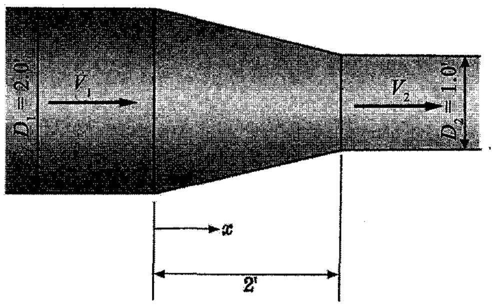
۳-۲۷ مخزن آبی به شکل واگن (شکل ۳-۴۷) در مسیر بی‌اصطکاک تختی به‌وسیلهٔ جت آب حرکت می‌کند، جت آب دارای سرعت افقی ۳۰ ft/s است. سطح مقطع جت آب ۲ اینچ مربع است. جت آب از واگن سبقت می‌گیرد، به انتهای آن برخورد می‌کند و به درون واگن می‌ریزد. هیچ آبی به بیرون نمی‌ریزد. در زمان $t = ۰$ سرعت واگن $V = ۱۰$ ft/s و جرم واگن و آب درون آن ۱۰۰ lb است. زمان لازم برای اینکه واگن بتوان شتاب بگیرید و سرعت آن از ۱۰ ft/s به ۲۰ ft/s برسد را به‌دست آورید. فرض کنید در تمام مدت جت آب واگن را تعقیب می‌کند و به درون آن می‌ریزد.



شکل ۳-۴۷



شکل ۳-۴۸



شکل ۳-۴۹

۳-۲۸ هنگامی‌که آب به‌طور پایا در درون توربین موجود در شکل۳-۴۸ جریان دارد، توربین ۷۵ اسب بخار توان تولید می‌کند. آهنگ جریان آب ۱۲۰۰lb/s است. قطر درونی لولهٔ ورودی به توربین ″۱۲ و قطر درونی لولهٔ خروجی ″۱۶ است. بقیهٔ لوله‌کشیها را نشان نداده‌ایم و فشار ورودی و خروجی مشخص نیست. تغییر در ارتفاع لوله‌ها نیز مشخص نشده است. فشارسنج متصل به لولهٔ ورودی و خروجی حاوی جیوه است. ارتفاع h بین ستونهای جیوه تحت شرایط جریان پایا چقدر است و در کدام ستون ارتفاع جیوه بالاتر می‌رود؟

۳-۲۹ لوله‌ای مطابق شکل۳-۴۹ دارای قسمت همگراست. در زمان خاصی سرعت آب ورودی $V_1 = ۳۰\,\mathrm{ft/s}$ است و با آهنگ $۲\mathrm{ft/s^۲}$ تغییر می‌کند. گرادیان فشار (dp/dx) را در $x = ۱\mathrm{ft}$ و زمانی‌که $V_1 = ۳۰\,\mathrm{ft/s}$ است تعیین کنید. فرض کنید که سرعت در هر مقطعی یکنواخت است.

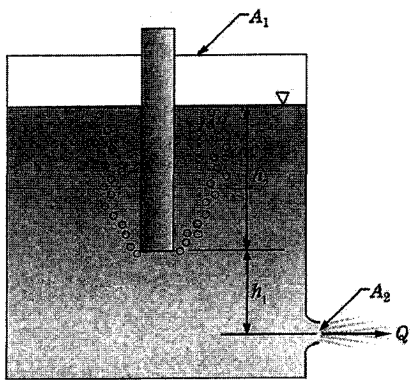
۳-۳۰ معادلهٔ تکانه را برحسب تنشها در مختصات استوانه‌ای با استفاده از شکل انتگرالی برای جزء حجم مناسب به‌دست آورید.

۳-۳۱ مسئلهٔ ۳-۳۰ را در مختصات کروی تکرار کنید.

۳-۳۲ جزئیات به‌دست آوردن معادلهٔ انرژی را بنویسید.

۳-۳۳ در مسئلهٔ ۳-۸، اگر به‌جای افزایش آهنگ جریان شاره، کاهش آهنگ جریان داشته باشیم، شتاب را به دست آورید.

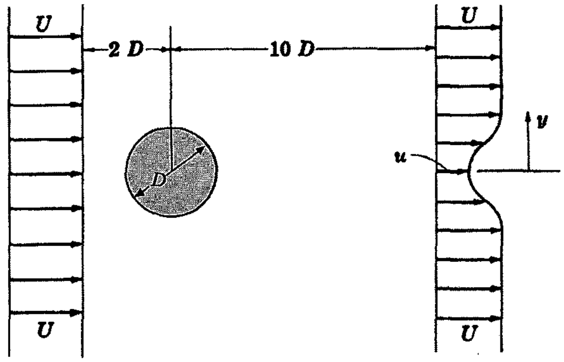
۳-۳۴ استوانهٔ سربسته‌ای دارای لوله‌ای مرتبط با جو است و به‌اندازهٔ $h_۲$ به درون محفظهٔ شارهٔ تراکم‌ناپذیر فرو رفته است (شکل۳-۵۰). شاره از طریق شیپوره‌ای به مقطع $A_۲$ در فاصلهٔ $h_۱$ از انتهای لوله تخلیه می‌شود. اگر سطح مقطع استوانه $A_۱$ باشد آهنگ جریان Q را برحسب زمان به‌دست آورید.



شکل ۳-۵۰

داده‌های سرعت در فاصلهٔ ۱۰ برابر قطر در پایین‌دست جریان:

y/D	u/U
0	0.5
0.5	0.6
1.0	0.8
1.5	0.9
2.0	1.0



شکل ۳-۵۱

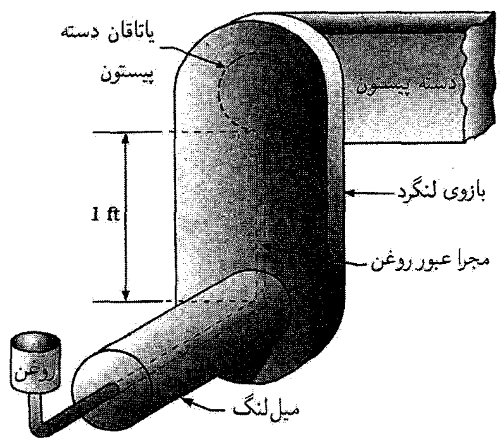
۳-۳۵ مسئلهٔ ۳-۱۱ را با انتخاب حجم معیاری که سطح بالایی آن روی خط جریان قرار می‌گیرد، دوباره حل کنید.

۳-۳۶ استوانه‌ای در جریان یکنواخت شارهٔ تراکم‌ناپذیری با چگالی ρ (شکل ۳-۵۱) قرار دارد. نیمرخ سرعتها را در بالادست و پایین‌دست جریان، همچون در شکل، اندازه گرفته‌اند. نیروی پسای وارد بر استوانه در واحد طول را به‌دست آورید. راهنمایی: حجم بزرگ اطراف استوانه را به‌عنوان حجم معیار در نظر بگیرید.

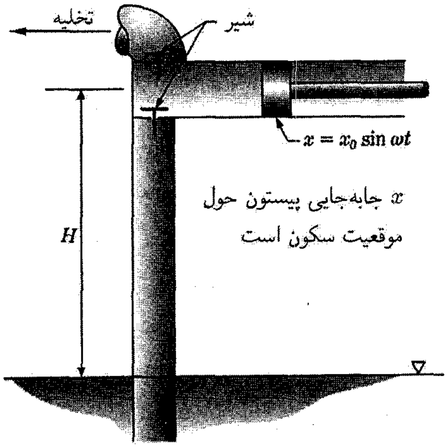
۳-۳۷ یاتاقان دسته پیستونی به روغن‌کاری نیاز دارد. این کار با روغن مخصوصی با وزن مخصوص ۰٫۸ انجام می‌شود. روغن باید از مرکز میل‌لنگ در فشار جو تزریق شود. روغن از طریق سوراخ باریکی به یاتاقان دسته پیستون می‌رسد. سرعت دورانی (rpm) کمینهٔ میل‌لنگ چقدر باید باشد تا فشار روغن در یاتاقان دستهٔ پیستون موقعی که بازوی لنگ در موقعیت قائم قرار دارد، همچون شکل ۳-۵۲، مثبت باشد؟

۳-۳۸ پمپ آبی مطابق شکل ۳-۵۳ آب را از مخزنی به ارتفاع H می‌رساند. حرکت پیستون پمپ سینوسی است. در سرعتهای بسیار بالا معلوم شده است که جلو پیستون حباب ایجاد می‌شود و باعث برگشت آب به مخزن خواهد شد. این پدیده‌ای ناخواسته است و پمپ به راه‌اندازی دوباره نیاز خواهد داشت.

بسامد بیشینهٔ پیستون چقدر باید باشد تا در موقعیت نقطهٔ مرگ پایین کاویتاسیون ایجاد نشود. کاویتاسیون در شرایطی رخ می‌دهد که فشار شاره به مقدار صفر مطلق می‌رسد، یا دست کم به این حد می‌گراید. این بسامد بیشینه مقداری حدی است و اگر بسامد از این حد فراتر رود، فشار بر روی سطح پیستون افت پیدا می‌کند و به زیر صفر مطلق می‌رسد؛ بسامد نتیجهٔ آن کاویتاسیون و جدایش شاره است.



شکل ۳-۵۲



شکل ۳-۵۳

نمادگذاریهای فصل ۳

$A =$ سطح

$\boldsymbol{a} =$ بردار شتاب

$\mathbf{B} =$ بردار نیروی حجمی در واحد حجم

$D/D_t =$ مشتق کامل یا مادی

$e =$ انرژی کل واحد جرم $(e = u + V^{۲}/۲ + gz)$

$e_{ij} =$ تانسور آهنگ تنش

$E =$ انرژی کل

$g =$ شتاب گرانی موضعی

$H_L =$ افت هد

$m =$ جرم

$\dot{m} =$ شار جرمی

$\mathbf{M} =$ بردار تکانه

$p =$ فشار

$q =$ انتقال گرمای واحد جرم شارهٔ سیال

$\mathbf{q} =$ بردار شار گرما (آهنگ جهت‌دار انتقال گرمای واحد سطح)

$\mathbf{q}_r =$ بردار شار گرمای تابشی

$g''' =$ آهنگ تولید گرمای درونی واحد حجم

$Q =$ گرمای کل انتقالی به سیستم، آهنگ جریان حجمی

$r =$ مؤلفه شعاعی

$s =$ آنتروپی واحد جرم

$S =$ آنتروپی سیستم

$t =$ زمان

$T =$ دمای مطلق

$T_z =$ گشتاور حول محور z

$u =$ سرعت در جهت x، انرژی درونی واحد جرم

$u_i =$ سرعت در جهت x_i $(i = ۱, ۲, ۳)$

$U =$ انرژی درونی دستگاه، سرعت جریان آزاد

$v =$ سرعت در جهت y

$\mathbf{V} =$ بردار سرعت

$V_t =$ سرعت مماسی

$\mathcal{V} =$ حجم

$w =$ سرعت در جهت z

$W =$ کار انجام‌شده توسط سیستم

$w_s =$ کار انجام‌شده توسط محور به‌وسیلهٔ واحد جرم جریان شاره

$w =$ کار انجام شده به‌وسیلهٔ واحد جرم جریان شاره

$x_i =$ مختصه‌های $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$

$x, y, z =$ مختصه‌های مربوط به $(x_۳, x_۲, x_۱)$

$\alpha =$ زاویهٔ بین عمود بر سطح و بردار سرعت

$\gamma_{ij} =$ تانسور آهنگ تنش برشی

$\delta_{ij} =$ دلتای کرونکر $\delta_{ij} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\theta =$ آهنگ تولید آنتروپی واحد حجم

$\kappa =$ رسانش گرمایی

$\mu =$ گران‌روی

$\nu =$ گران‌روی جنبشی

$\rho =$ چگالی (جرمی)

$\sigma_{ij} =$ تانسور تنش، $\sigma'_{ij} =$ تانسور تنش انحرافی

$\Phi =$ تابع اتلاف

$\psi =$ پتانسیل گرانشی، تابع جریان

$\boldsymbol{\omega} =$ بردار سرعت گردشاری

$\boldsymbol{\Omega} =$ بردار سرعت زاویه‌ای

$\Omega_{ij'} =$ تانسور دورانی

۴

تحلیل ابعادی و تشابه

۴-۱ تشابه در دینامیک شاره‌ها

نتایج بسیار مهمی از مباحث ابعادی را می‌توان در مکانیک شاره‌ها به‌دست آورد. پارامترهای مربوط به هر وضعیت فیزیکی را می‌توان با گروههای مستقل بی‌بعد که جریان شاره را مشخص می‌کنند، ادغام کرد. این پارامترهای بی‌بعد به دقت تعریف و در دینامیک شاره‌ها نامگذاری شده‌اند.

این پارامترهای بی‌بعد را، که Π نامیده می‌شوند، می‌توان با روش تحلیل ابعادی یا مستقیماً از معادلات دیفرانسیل حاکم، که نتیجهٔ آن بی‌بعد کردن رابطه‌هاست، به‌دست آورد.

مسئلهٔ مربوط به جریان شاره مانند جریان موجود بر روی اجسام جامد را در نظر بگیرید. طرح و خواص جریان شاره از روی شکل هندسی جسم و پارامترهای شارهٔ مربوط تعیین می‌شوند. می‌گوییم دو شاره مشابه‌اند اگر از نظر هندسی شبیه هم باشند و تمام پارامترهای بی‌بعد مربوط آنها برای هر دو شاره یکسان باشد. مدلی (نظیر تونل باد) و نمونهٔ کوچک شده‌ای را درنظر می‌گیریم. چگونه می‌توان اندازه‌گیریهایی انجام شده بر روی این مدل را به نمونهٔ کوچک‌شده مربوط کرد؟ جواب این است که با روشهای تشابه، یعنی با یکسان‌سازی شکل هندسی و Πهای یکسان برای هر دو می‌توان این کار را انجام داد.

مفهوم جریان مشابه و رابطهٔ مدل ـ نمونه کوچک‌شده را می‌توان با بررسی شکل بی‌بعد معادلات حاکم درک کرد. روشن است که اگر تمام معادلات دیفرانسیل مربوطه بی‌بعد نوشته شوند، اندازهٔ جسم، اگر شکل آن از نظر هندسی متشابه باشد، اهمیت ندارد. پارامترهای بی‌بعد (که به‌صورت ضریبهای بی‌بعد در معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شوند) باید برای هر دو جریان یکسان باشند. این پارامترها به خواص شاره و ابعاد فیزیکی مشخصهٔ جسم (به‌عنوان مرجع) بستگی دارند. بنابراین در جریانهای مشابه، معادلات دیفرانسیل توصیف‌کننده برای مدل و نمونهٔ کوچک‌شده یکسان

هستند. اندازه‌گیریها را می‌توان برای هر متغیر بی‌بعد مثلاً فشار بی‌بعد، بر روی مدل انجام داد. مقدار فشار بی‌بعد مناسب برای مدل و برای نمونهٔ کوچک‌شده یکسان است، و با تبدیل کمیت‌ها به شکل بعددار، داده‌های گرفته شده از روی مدل را می‌توان مستقیماً برای نمونهٔ کوچک‌شده به‌کار برد.

به‌طور خلاصه، دو جریان را مشابه می‌گویند، اگر پارامترهای بی‌بعد متغیرها، صرف‌نظر از اندازهٔ طرح جریان، یکسان باشند، به شرطی که شباهت هندسی آنها حفظ شده باشد.

در عمل، همیشه ممکن نیست که تمام پارامترهای بی‌بعد را برای مدل و نمونهٔ کوچک‌شده در یک زمان یکسان کرد. در چنین حالتهایی باید مصالحه صورت گیرد، اما، در بیشتر جریانهای مهم شباهتهای کافی برای سودمند کردن این روش وجود دارد. غالباً فقط تعداد خاصی از پارامترهای بی‌بعد برای هر جریان مفروض مهم هستند و این واقعیت که تمام پارامترها را نمی‌توان یکسان کرد، اهمیتی ندارد.

در بخش بعد، معادلات دیفرانسیل اصلی مکانیک شاره‌ها را بررسی می‌کنیم و به ماهیت معادلات دیفرانسیل بی‌بعد پی خواهیم برد. اما نخست، از روش دیگری برای یافتن پارامترهای بی‌بعد برای هر مسئلهٔ مفروض، یعنی تحلیل ابعادی، استفاده می‌کنیم.

تحلیل ابعادی یا قضیهٔ P_i بوکینگهام. روشی برای یافتن پارامترهای بی‌بعد مربوط، بدون اطلاع از معادلات دیفرانسیل مربوط، است. این روش مستلزم دانستن تمام متغیرهای مربوط در هر مسئلهٔ مفروض است. بنابراین، این متغیرها با هم ترکیب می‌شوند و به‌صورت چندین گروه بی‌بعد مستقل Π در می‌آیند. روش نظام‌مند دست‌یابی به این Πها را در مسئلهٔ ۴-۸ آورده‌ایم. مزیت چنین روشی این است که به دانستن معادلات حاکم یا قانونهای این مسائل پیچیده نیاز نیست، اما باید تمام متغیرها را شناخت و فقط متغیرهای مربوط را وارد مسئله کرد. افزودن متغیرهای نامربوط یا حذف هر متغیر مربوط باعث بی‌اعتبار شدن تحلیل خواهد شد. این محدودیتها نسبتاً جدی‌اند و معمولاً بهتر است تحلیل را از معادلات دیفرانسیل حاکم شروع کنیم. در هر صورت، به محض یافتن پارامترها، داده‌های تجربی را می‌توان به‌دست آورد و به‌صورت پارامترهای بی‌بعد همبسته کرد.

تعداد Πها برای هر مسئلهٔ مفروض ثابت است و معمولاً، اما نه همیشه، برابر است با تعداد کل متغیرها منهای تعداد ابعاد اصلی. در مکانیک، سه‌بعد اصلی وجود دارد که مستقل از هم هستند. گزینهٔ واقعی اختیاری است، اما سه گزینهٔ بسیار متداول عبارت‌اند از جرم، طول و زمان؛ البته، در جریان تراکم‌پذیر، دما نیز به‌عنوان متغیر وارد می‌شود، بنابراین چهار متغیر اصلی وجود دارند.

مجموعهٔ Πهای اصلی را باید به‌گونه‌ای انتخاب کرد که مستقل باشند. در واقع، تعدادی از Πها را از ضرب یا تقسیم Πهای دیگر می‌توان به‌دست آورد، اما تعداد Πهای مستقل برای هر مسئلهٔ مفروض ثابت است. بنابراین، مجموعه‌ای یکتا از Πها برای هر مسئله وجود ندارد؛ اما در مکانیک شاره‌ها پارامترهای بی‌بعد خاصی وجود دارند که معمولاً بررسی می‌شوند و دارای اهمیت فیزیکی‌اند.

پس از یافتن مجموعهٔ Πها، آنها را می‌توان به شکل تابع بیان کرد؛ یعنی هر یک از Πها را می‌توان به‌صورت تابع Πهای دیگر نوشت. این شکل تابعی را نمی‌توان با روش تحلیل ابعادی به‌دست آورد، بلکه آن را می‌توان فقط با حل‌کردن معادلات حاکم و یا به کمک آزمایش یافت. در کارهای تجربی، بهتر است که نتایج را به شکل بی‌بعد به‌صورت نمودارهای Π بیان کرد. از این رو، همبستگی بین Πها را می‌توان تعیین کرد. گذشته از حذف مقیاس آزمایش به‌عنوان یک پارامتر، شکل بی‌بعد معادلات باعث کاهش تعداد متغیرها تا حداقل سه برابر می‌شود. تحلیل ابعادی ابزاری حیاتی در تمام آزمایشهای علمی و مهندسی‌ست.

۴-۲ پارامترهای جریان تراکم‌ناپذیر

در جریان تراکم‌ناپذیر برای بیان خواص جریان فقط به معادلات حرکت و پیوستگی نیاز است. در این معادلات چهار متغیر مستقل وجود دارند —سه مؤلفهٔ سرعت و یک مؤلفهٔ فشار— که در چهار معادله ظاهر می‌شوند. وانگهی، پارامترهای دیگری مانند خواص شاره، گران‌روی و چگالی، و پتانسیل گرانشی وجود دارند که در فرمولبندی Π وارد می‌شوند.

اگر متغیرهای بی‌بعد زیر را، به‌صورت مستقل و غیرمستقل، معرفی کنیم (که با ستاره مشخص شده‌اند)، این معادلات را می‌توان به شکل بی‌بعد و بهنجارشده نوشت

$$p^* = p/\rho V_\circ^{2}, \qquad \mathbf{V}^* = \mathbf{V}/V_\circ, \qquad t^* = t/t_\circ = tV_\circ/L, \qquad \mathbf{r}^* = \mathbf{r}/L, \qquad \psi^* = \psi/gL \tag{۴-۱}$$

که شاخص پایین صفر مقدار مشخصه، و L بعد مشخصه را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال، اگر جریان خارجی را در پیرامون استوانه درنظر می‌گرفتیم، L قطر و $V_\circ$ سرعتِ جریان آزاد می‌بود. ψ پتانسیل گرانشی است. معادلهٔ حرکت برحسب این متغیرها به شکل برداری زیر نوشته می‌شود

$$\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t^*} + \nabla^*(V^{*۲}/۲) - \mathbf{V}^* \times (\nabla^* \times \mathbf{V}^*) = -\nabla^* p^* + \frac{۱}{\mathrm{Re}}\nabla^{*۲}\mathbf{V}^* - \frac{۱}{F_r}\nabla^*\psi^* \qquad (۲\text{-}۴)$$

و معادلهٔ پیوستگی عبارت است از

$$\nabla^* \cdot \mathbf{V}^* = \circ \qquad (۳\text{-}۴)$$

در این رابطه Re عدد رینولدز $\frac{\rho L V_\circ}{\mu}$ و F_r عدد فرود $\frac{V_\circ^۲}{gL}$ است، که ρ چگالی جرمی و μ گران‌روی مطلق یا دینامیکی است. هر دو عدد بی‌بعد هستند و بیانگر دو پارامتری هستند که باید مساوی هم قرار داده شوند تا تشابه به‌وجود آید. تعداد کل Πهای مربوط برای هر شکل هندسی مفروض دو عدد Re و F_r هستند، که همان دو متغیر مستقل بی‌بعد r^* و t^* (اگر مسئله مستقل از زمان باشد) و یک متغیر غیرمستقل بی‌بعد نظیر p^* یا $\mathbf{V}^*$ خواهند بود. تعداد کل متغیرها و پارامترها ده عدد است (شامل مؤلفه $\mathbf{r}$ و $\mathbf{V}$ و پتانسیل گرانشی و گران‌روی)، بنابراین تعداد کل Πهای مستقل هفت عدد خواهد بود. اینَ حالتی است که معمولاً وجود دارد. Re و F_r همراه با t^* و سه مؤلفهٔ $\mathbf{r}^*$ و یک متغیر بی‌بعد غیرمستقل نظیر p^* یا یک مؤلفه $\mathbf{V}^*$ تشکیل هفت متغیر را می‌دهند. با مشخص شدن این هفت Π. پارامترهای دیگر را می‌توان از معادلات به‌دست آورد، زیرا آنها مستقل نیستند.

اکنون، معادلات (۴-۲) و (۴-۳) کاملاً بی‌بعد هستند، به‌گونه‌ای که جریان موجود بر روی اجسامی که اندازه‌های متفاوت دارند ولی از نظر هندسی متشابه هستند، اگر دو پارامتر مشخصهٔ شاره، یعنی عدد رینولدز Re و عدد فرود F_r یکسان باشند، باید دارای جوابهای یکسان برحسب این متغیرهای بی‌بعد باشند.

این اعداد اهمیت فیزیکی دارند. عدد رینولدز معیار نسبت نیروی لختی به نیروی گران‌روی است. وقتی عدد رینولدز کوچک است ($\mathrm{Re} \ll ۱$)، نیروهای گران‌روی غالب و وقتی که $\mathrm{Re} \gg ۱$ نیروهای لختی غالب خواهند بود. عدد فرود F_r معیار نسبت نیروی لختی به نیروی گرانشی است. با بررسی معادلهٔ (۴-۲) در می‌یابیم که وقتی هر دو عدد Re و F_r بسیار بزرگتر از ۱ هستند، نیروی لختی باید با نیروهای فشاری خنثی شوند.

در بسیاری از جریانها عدد فرود نسبتاً بزرگ، و نیروی گرانشی بی‌اهمیت است و فقط عدد رینولدز است که در مدل‌سازی اهمیت دارد. مدل‌سازی کشتیهای دریایی، با توجه به اهمیتی که موجهای گرانشی در این فرایند دارند، از این قاعده مستثنی است. بدبختانه، در مدلسازی جریان تراکم‌ناپذیر معمولاً فقط یکی از عددهای رینولدز یا فرود را می‌توان برای مدل و نمونهٔ کوچک‌شده یکسان ساخت.

در مدل‌سازی می‌توان نوشت

$$\mathrm{Re_m} = \left(\frac{\rho L V_\circ}{\mu}\right)_{\mathrm{m}} = \left(\frac{\rho L V_\circ}{\mu}\right)_{\mathrm{p}} = \mathrm{Re_p} \qquad (۴\text{-}۴)$$

که m و p به‌ترتیب بیانگر مدل و نمونهٔ کوچک‌شده هستند، همچنین

$$F_{r_\mathrm{m}} = \left(\frac{V_\circ^۲}{gL}\right)_m = \left(\frac{V_\circ^۲}{gL}\right)_{\mathrm{p}} = F_{r_\mathrm{p}} \qquad (۵\text{-}۴)$$

اما این دو شرط را نمی‌توان همزمان برقرار کرد. در آئرودینامیک عدد رینولدز مهم است و شرط (۴-۴) بدون توجه به (۴-۵) برقرار است (زیرا نیروی گرانشی بی‌اهمیت، و F_r بسیار بزرگ است). اما، در مدل‌سازی کشتیها وضعیت پیچیده‌تر است و دو آزمایش باید انجام داد، یکی با عددهای رینولدز مساوی (برای تعیین پسای گران‌روی) و دیگری با عددهای F_r مساوی (برای تعیین پسای موج گرانشی).

با توجه به قضیهٔ P_i بوکینگهام، با داشتن Re و F_r می‌توان این متغیرهای بی‌بعد وابسته را به‌صورت تابعهای Re، F_r، و متغیرهای بی‌بعد مستقل نوشت.

به‌عنوان مثال،

$$p^* = f(\mathrm{Re}, F_r, \mathbf{r}^*, t^*)$$

یا هر تابع پایای p^*، همچون برآ، را می‌توان فقط به‌صورت تابع Re یا F_r محاسبه کرد و متغیر $\mathbf{r}^*$ را از انتگرال خارج ساخت.

بعداً خواهیم دید که برآ و (نیروی بالابر) پسای (پس‌کشی) بی‌بعد موجود برروی جسم فقط تابع عدد رینولدز (البته، برای هر شکل هندسی مفروض) خواهد بود.

نکتهٔ مهم دیگر در اینجا، اثبات هم‌ارزی روش قضیهٔ Pi بوکینگهام و روش بهنجارش معادله است. در روش اخیر، مجموعهٔ پارامترهای مشخصه همچون Re و F_r به‌صورت ضریب در معادلات حاکم ظاهر می‌شوند. برای هر شکل هندسی مفروض می‌توان گفت که هر متغیر وابستهٔ بی‌بعد فقط به این پارامترهای مشخصه و متغیرهای مستقل بی‌بعد بستگی دارد، که قبلاً در خصوص فشار نیز اشاره شد. از سوی دیگر، اگر کار را بدون معادله از صفر آغاز می‌کردیم و بدون اینکه سؤال کنیم برای هر جریان مفروض چه متغیرهایی در تعیین بعضی از ویژگیهای رفتار جریان برروی جسم مهم و مناسب هستند، روشن است که تمام متغیرها و خواص مربوط جریان همچون $V_\circ$، L، μ، p، $\mathbf{r}$، t و جز آن) را انتخاب، و آنها را به‌صورت مجموعهٔ کمیتهای بی‌بعد ترکیب می‌کردیم. حتی اگر بتوانیم تمام متغیرها و خواص مربوط را انتخاب کنیم، هنوز با مشکل ترکیب آنها با ساده‌ترین روش و سپس تفسیر فیزیکی آنها مواجه‌ایم. مثلاً، دوباره سؤال می‌کنیم: توزیع فشار جریان پایا بر روی جسم چگونه است و به چه چیزی بستگی دارد؟ برای هر شکل مفروض، داریم

$$p = f(L, V_\circ, \mathbf{r}, \mu, \rho, g) \tag{۶-۴}$$

در اینجا، نُه متغیر داریم که باید به شش متغیر بی‌بعد تبدیل شوند. این متغیرها عبارت‌اند از p^*، Re، F_r و $\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{r}^*$ بردار است و سه مؤلفهٔ اسکالر-(نرهای) دارد که هر یک از آنها متغیر مستقلی است. F_r می‌تواند پارامتر مهمی در مسئلهٔ موردنظر نباشد. p^* فشار موجود برروی، فشار جریان آزاد است. اگر بخواهیم فشار مطلق را بدانیم، باید پارامتر دیگری را به‌صورت فشار $p_\circ$ در جریان آزاد تعریف کنیم که نتیجهٔ آن پارامتر بی‌بعد دیگری مانند $p_\circ/\rho V_\circ^۲$ است. این معمولاً ضرورتی ندارد، زیرا اصولاً در مسائل آئرودینامیک به دانستن اضافه فشار نیاز است.

۳-۴ پارامترهای جریان تراکم‌پذیر

در جریان تراکم‌پذیر، پارامترهای دیگری وارد می‌شوند. افزون بر معادلهٔ حرکت و پیوستگی، به معادلهٔ انرژی و معادلهٔ حالت نیاز است. متغیرهای بی‌بعد زیر را، افزون بر متغیرهای قبلی، معرفی می‌کنیم

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\circ}, \quad T^* = \frac{T}{T_\circ}, \quad M_\circ = \frac{V_\circ}{a_\circ}, \quad a_\circ = \sqrt{kRT_\circ}, \quad \Phi^* = \frac{L\Phi}{V_\circ^۲ v \rho_\circ} \tag{۷-۴}$$

در اینجا، $a_\circ$ سرعت معمولی صوت، Φ تابع گران‌روی، k نسبت گرماهای ویژه، $\frac{c_p}{c_v}$، R ثابت عمومی گازها، T دمای مطلق، و گران‌روی سینماتیکی $v = \frac{\mu}{\rho}$ است.

بدین‌ترتیب، معادلات بی‌بعد به شکل زیر در می‌آیند

معادلهٔ پیوستگی:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{V}^*) = \circ \tag{۸-۴}$$

معادلهٔ حرکت:

$$\rho^* \left[\frac{\partial V^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla^*)\mathbf{V}^*\right] = -\nabla^* p^* + \frac{۱}{\mathrm{Re}} \nabla^{*۲} \mathbf{V}^* + \left(\frac{۱}{\mathrm{Re}'} + \frac{۱}{۳\mathrm{Re}}\right) \nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{V}^*) - \frac{\rho^*}{F_r} \nabla^* \psi^* \tag{۹-۴}$$

معادلهٔ انرژی:

$$\rho^*\frac{DT^*}{Dt^*}=\frac{k(k-1)M_\circ^2\Phi^*}{\mathrm{Re}}-p^*\nabla^*\cdot\mathbf{V}^*[k(k-1)M_\circ^2]+\frac{k}{\mathrm{Re}P_r}\nabla^{*2}T^* \qquad (۴-۱۰)$$

معادلهٔ حالت:

$$p^*=\frac{1}{kM_\circ^2}\rho^*T^* \qquad (۴-۱۱)$$

افزون بر ضریبهای بی‌بعد Re و F_r، که در تحلیل شاره‌های تراکم ناپذیر وجود دارند، سه گروه بی‌بعد جدید ظاهر می‌شود. این عددهای جدید عبارت‌اند از عدد ماخ. $M_\circ$، که نسبت سرعت مشخصهٔ $V_\circ$ به سرعت صوت $a_\circ$ است، عدد پرنتل P_r، که نسبت گران‌روی سینماتیکی ν به پخشندگی گرمایی α و κ. بنابراین

$$P_r=\frac{\nu}{\alpha}=\frac{\mu c_p}{\kappa} \quad \text{و} \quad M_\circ=\frac{V_\circ}{a_\circ}$$

که μ گران‌روی، c_p گرمای ویژه در فشار ثابت، κ رسانندگی گرمایی و α پخشندگی گرمایی است که به‌صورت $\kappa/\rho c_p$ تعریف می‌شود.

عدد پرنتل نقش مهمی در انتقال گرمایی همرفت دارد، زیرا از نظر فیزیکی حاصل‌ضرب $\mathrm{Re}P_r$ معیار نسبت انتقال گرما با روش همرفت به انتقال گرما به کمک رسانش است. برای بیشتر گازها، P_r از مرتبهٔ واحد و برای مایعات P_r ممکن است از ۱ر۰ تا ۱۰۰۰ر۰ تغییر کند. اگر رسانش گرمایی در شاره اهمیت داشته باشد، مقدار Re باید کوچک باشد. معمولاً در طبیعت Re کاملاً بزرگ است، بسیار بزرگتر از واحد، بنابراین فرایند همرفت غالب است. اما در بعضی از شرایطی که اهمیت مهندسی دارد، Re ممکن است کوچکتر از واحد باشد و هر دو حالت انتقال گرما، یعنی رسانش و همرفت مهم شوند. به‌عنوان مثال، چنین حالتی در لایهٔ نازک روغن در یاتاقان به‌وجود می‌آید.

بسیاری از ترکیبات دیگر متغیرها ممکن است گروههای بی‌بعد تشکیل‌دهند، ولی مستقل از آنهایی نیستند که اشاره شد. در بعضی از مسائل مهندسی بهتر است که گروههای بی‌بعد دیگر را ارائه کنیم. گاهی جملهٔ Φ^* را به‌صورت $\kappa B_r/\mathrm{ReP_r}\Phi^*$ می‌نویسند که B_r عدد برینکمن است و به‌صورت $B_r=\mu V_\circ^2/\kappa T_\circ$ تعریف می‌شود. نسبت $E_c=B_r/p$ را گاهی عدد اکرت می‌گویند. روشن است که شکل Π مستقل نیست و می‌توان فقط یکی از پارامترهای $M_\circ$، B_r یا E_c را، افزون بر Re، P_r و k $(k=\dfrac{c_p}{c_v})$ در معادلهٔ انرژی انتخاب کرد. عدد رینولدز دوم، Re' نیز وجود دارد که مبتنی بر ضریب دوم گران‌روی است، ولی فقط برای مسائل خاصی مانند تضعیف صوت و پاشندگی مهم است.

به‌طور خلاصه، جریان تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر را به‌صورت زیر مدل‌سازی می‌کنیم:

Re مساوی: جریان گران‌رو و آئرودینامیک فروصوتی.

$M_\circ$ و k مساوی: جریان تراکم‌پذیر پرسرعت و فراصوتی.

Re و $M_\circ$ مساوی: لایهٔ مرزی تراکم‌پذیر.

P_r مساوی: رسانش گرمایی.

Re، $M_\circ$، و P_r مساوی: لایهٔ مرزی تراکم‌پذیر با رسانش گرمایی.

Re و F_r مساوی: مدل‌سازی کشتیها.

معمولاً فقط یک عدد را می‌توان در یک زمان برای مدل و نمونهٔ کوچک‌شده یکسان در نظر گرفت، بنابراین برای مدل‌سازی اثرهای مختلف موردنظر باید چندین آزمایش انجام شود؛ این‌گونه مدل‌سازیها ممکن است قدری پیچیده شوند و بیشتر از این در اینجا بحث نخواهند شد. اما غالباً دو پارامتر، مثلاً k و $M_\circ$، را می‌توان همزمان یکسان درنظر گرفت. اگر از هوا هم برای مدل و هم نمونهٔ کوچک‌شده استفاده شود، k یکسان است و با مقیاس‌بندی مناسب $M_\circ$ را نیز می‌توان یکسان کرد.

۴-۴ پارامترهای دیگر مورد استفاده در فرایند انتقال گرما از طریق همرفت آزاد در شاره‌ها

معادلهٔ حرکت به‌علت ورود یک عامل دیگر، یعنی اثرهای شناوری، پیچیده می‌شود. این اثرها، اگر گرادیان گرما و در نتیجه، گرادیان چگالی وجود داشته باشد، به همرفت آزاد می‌انجامد. در اینجا، فرض می‌کنیم که شاره اساساً تراکم‌ناپذیر است و ضریب دمای انبساط حجمی آن β است.

معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$\rho[\partial \mathbf{V}/\partial t + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}] = -\rho\beta g(T - T_{\circ}) + \mu\nabla^{2}\mathbf{V} \tag{۱۲-۴}$$

که از اثرهای تراکم‌پذیری چشم‌پوشی شده است. در چنین مسائلی معمولاً سرعت مرجع وجود ندارد، و سرعت، زمان و دمای بی‌بعد جدیدی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$\mathbf{V}^{\dagger} = \mathbf{V}L\rho/\mu, \qquad t^{\dagger} = t\mu/\rho L^{2}, \qquad \Theta = (T - T_{\circ})/(T_{1} - T_{\circ}) \tag{۱۳-۴}$$

که $T_{1} - T_{\circ}$ اختلاف دمای مشخصهٔ سیستم است، بنابراین معادلهٔ (۴-۱۲) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\partial \mathbf{V}^{\dagger}/\partial t^{\dagger} + (\mathbf{V}^{\dagger}\cdot\nabla^{*})\mathbf{V}^{\dagger} = -\nabla^{*2}\mathbf{V}^{\dagger} + \Theta G_{r} \tag{۱۴-۴}$$

G_r عدد گراشف است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$G_{r} = g\rho_{\circ}^{2}\beta(T_{1} - T_{\circ})L^{3}/\mu^{2}$$

در فرایند همرفت آزاد عدد رینولدز بی‌اهمیت است و وارد معادله نمی‌شود. در معادلهٔ انرژی معمولاً از اتلاف چشم‌پوشی می‌شود و اثرهای تراکم‌پذیری بی‌اهمیت هستند، بنابراین در شکل بی‌بعد، داریم

$$\frac{D\Theta}{Dt^{\dagger}} = \frac{1}{P_{r}}\nabla^{*2}\Theta \tag{۱۵-۴}$$

بنابراین، در همرفت آزاد فقط عددهای گراشف و پرنتل مهم هستند.

مراجع

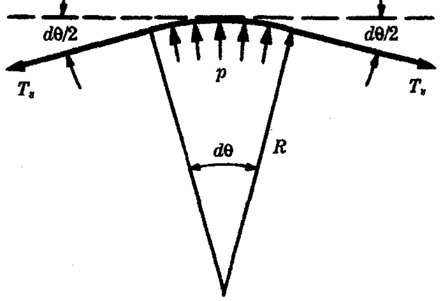
1. Birkhoff, G., *Hydrodynamics*, Dover Publications, 1955.
2. Bridgman, P. W., *Dimensional Analysis*, Yale University Press, 1931.
3. Buckingham, E., On Physically Similar Systems, *Physical Review*, Vol. 4, Ser. 2, p. 345, 1914.
4. Kline, S. J., *Similitude and Approximation Theory*, McGraw-Hill, 1965.
5. Langhoar, H. L., *Dimensional Analysis and the Theory of Modeling*, John Wiley, 1951.
6. Taylor, E. S., *Dimensional Analysis for Engineers*, Oxford, 1974.

مسائل حل‌شده

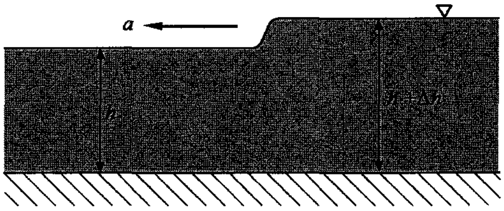
۱-۴ در جریان وابسته به زمان تراکم‌ناپذیری که با دورهٔ تناوب τ ناشی از جسم غوطه‌ور در شاره نوسان می‌کند، پارامترهای مشخصهٔ جریان کدام‌اند؟

در جریان تراکم‌ناپذیر، فقط عدد رینولدز به‌صورت ضریب بی‌بعد ظاهر می‌شود. اگر معادله را برای دورهٔ تناوب بی‌بعد $\tau^{*} = \tau V_{\circ}/L$ حل کنیم می‌توان نوشت

$$\tau^{*} = \frac{\tau V_{\circ}}{L} = f(\mathrm{Re})$$



شکل ۴-۱



شکل ۴-۲

عدد بی‌بعد $\frac{\tau V_\circ}{L}$ را به‌عنوان عدد استردهال می‌شناسند. چنین نوسانهایی درگردابه‌های کارمن در دنباله ایجاد می‌شود و در فصل ۵ بررسی خواهد شد.

۴-۲ چه پارامترهای جدیدی در مسائل شامل کشش سطحی وارد می‌شوند؟

معادلات حرکت برای جریان بدون کشش سطحی همانند معادلات حرکت دارای کشش سطحی است، اما شرایط مرزی متفاوت‌اند. در فصل مشترک مایع‌ـهوا نیروی فشار باید با کشش سطحی خنثی شود و الزاماً همچون در سطح آزاد بدون کشش سطحی صفر نیست. اختلاف فشاری متناهی در طول فصل مشترک وجود دارد (اگر خمیده باشد) و با کشش سطحی خنثی می‌شود. حالتی دوبعدی را مطابق شکل ۴-۱ در نظر بگیرید. با توجه به تعادل، داریم

$$۲T_s\left(\frac{d\theta}{۲}\right) = pRd\theta$$

که R شعاع خمیدگی سطح و $\sin\theta \simeq \theta$ برای θهای کوچک است. بنابراین، با واردکردن فشار و شعاع خمیدگی به‌صورت $p^* = p = /\rho_\circ V_\circ^۲$ و $R^* = \frac{R}{L}$، می‌توان نوشت

$$T_s = p^*R^*(\rho_\circ V_\circ^۲ L)$$

کشش سطحی بی‌بعد T^* را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$T_s^* = \frac{T_s}{\rho_\circ V_\circ^۲ L}$$

به‌گونه‌ای که

$$T_s^* = p^*R^*$$

پارامتر بی‌بعد $\rho_\circ V_\circ^۲ L/T_s$ را عدد وبر می‌گویند.

۴-۳ در مایع کم عمقی اختلالهای سطحی کوچکی همچون شکل ۴-۲ انتشار می‌یابد. سرعت موج سطحی بی‌نهایت کوچک به چه عواملی بستگی دارد؟ گروههای بی‌بعد مربوط کدام‌اند؟

موجی مطابق شکل را درنظر بگیرید. اندازهٔ سرعت a به ضخامت لایهٔ h و مقدار شتاب گرانشی g بستگی دارد. تنها گروه بی‌بعد که می‌تواند تشکیل شود، عبارت است از

$$\Pi = \frac{a^۲}{gh}$$

در اینجا، چون تعداد متغیرها سه‌تاست و تعداد یکاهای اصلی (طول و زمان) دوتاست، فقط یک Π داریم، چون در این مسئله فقط یک Π وجود دارد، باید مقدار ثابتی داشته باشد.

$$\Pi = a^{2}/gh = \text{ثابت}$$

اتفاقاً این عدد ثابت برابر واحد، و مقدار آن $\sqrt{gh}$ است، اما این نتیجه را نمی‌توان از تحلیل ابعادی به‌دست آورد.

نکتهٔ دیگری که باید به یاد داشت این است که در اینجا چگالی شاره وارد نمی‌شود. اما، به این موضوع در ابتدا نمی‌توان پی‌برد و وارد کردن آن به Πهای نامربوط و احتمالاً نتیجه‌های نادرست منجر می‌شود. این نکته همیشه مطرح است که، اگر با معادلات اصلی حاکم شروع نکنیم، چه متغیرهایی را می‌توان مربوط دانست.

مقایسهٔ این نتیجه‌ها با نتیجه‌های مسئلهٔ ۳-۱۵، که به‌طور تحلیلی به‌دست آمدند، جالب خواهد بود.

۴-۴ هنگامی که دریچهٔ لولهٔ آبی را به‌طور ناگهانی می‌بندیم، موج ناشی از ضربهٔ موج به‌وجود می‌آید. این‌گونه موجها فشارهای زیادی را به‌وجود می‌آورند که ممکن است به لوله آسیب برساند. با استفاده از تحلیل ابعادی فشار بیشینهٔ ایجاد شده توسط این پدیده را تعیین کنید.

پارامترهای مربوط عبارت‌اند از: فشار بیشینهٔ $p_{\max}$، چگالی ρ، سرعت جریان اولیه U_0، مدول حجمی β (زیرا این موج باید به‌نوعی موج تراکمی باشد). در اینجا، دو نوع Π مستقل ممکن وجود دارد. با انتخاب آنها به‌صورت

$$\frac{U_0^{2}\rho}{\beta} \quad \text{و} \quad \frac{p_{\max}}{\beta}$$

می‌توان نوشت:

$$p_{\max}/\beta = f(U_0^{2}\rho/\beta)$$

با تحلیل ابعادی می‌توان تا اینجا پیش رفت. درواقع، در می‌یابیم که $\frac{p_{\max}}{\beta} = \sqrt{\frac{U_0^{2}\rho}{\beta}}$ بنابراین

$$p_{\max} = \sqrt{U_0^{2}\rho\beta}$$

اما این رابطه را نمی‌توان بدون حل معادلات دیفرانسیل مربوط به‌دست آورد.

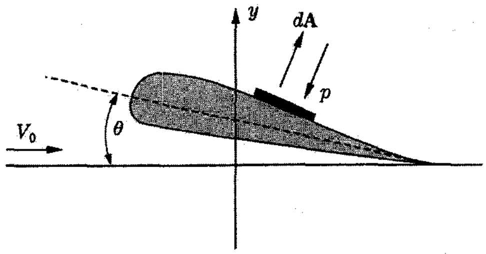
همچون مسئلهٔ قبل، سخنی دربارهٔ سرعت انتشار این موج ضربه قوی می‌توان گفت که سرعت موج a به چگالی ρ و مدول حجمی β بستگی دارد (اگر آن‌قدر خوش‌شانس باشیم که بتوانیم آن را به‌درستی حدس بزنیم)، بنابراین تنها Π که می‌تواند تشکیل شود $a^{2}\rho/\beta$ است و باید مقدار ثابتی داشته باشد. دوباره، اندازهٔ سرعت واقعی $\sqrt{\beta/\rho}$ است.

۴-۵ در آئرودینامیک فروصوتی، چگونه می‌توان برآ را بر روی هوابر مدل کرد؟

برآی (نیروی بالابر) وارد بر جسم را می‌توان با انتگرال‌گیری از مؤلفهٔ فشار عمود بر سطح جسم به‌دست آورد. فشار را می‌توان از معادلهٔ حرکت به‌دست آورد. در جریان پایا، فشار بی‌بعد به مکان جسم $\mathbf{r}^*$ و عدد رینولدز بستگی دارد. اما، معمولاً بستگی آن به عدد رینولدز ضعیف است و اگر جریان آئرودینامیکی باشد، همچون در هوابَر واقعی، از وابستگی به عدد رینولدز می‌توان چشم‌پوشی کرد. برای هر شکل هندسی مفروض، از فشار می‌توان بر روی جسم انتگرال گرفت تا هنگام یافتن برای L، وابستگی $\mathbf{r}^*$ حذف شود. اما حتی برای هر شکل هندسی مفروض، زاویهٔ حملهٔ θ (زاویهٔ نسبی برخورد جریان آزاد به جسم) بر روی برآ اثر می‌گذارد.

با مراجعه به شکل ۴-۳، نتیجه گیریم

$$L = -\int_A p\hat{\mathbf{y}} \cdot d\mathbf{A}$$



شکل ۴-۳

که $\hat{\mathbf{y}}$ بردار واحد در جهت y است، و بنابراین

$$L^* = \frac{L}{\rho V_\circ^۲ A_\circ} = -\int p^* \hat{\mathbf{y}} \cdot d\mathbf{A}^* = f(\theta)$$

که $A_\circ$ سطح مشخصهٔ هوابر است و $A^* = \dfrac{A}{A_\circ}$. بنابراین، برآ عبارت است از

$$L = C_L(\theta) \rho V_\circ^۲ A_\circ / ۲$$

که $C_L(\theta)$ را به‌عنوان ضریب برآ می‌شناسند، ضریب ۲ به‌علت همرفتی وارد می‌شود، به‌گونه‌ای که $\dfrac{\rho V_\circ^۲}{۲}$ را می‌توان به‌عنوان فشار دینامیکی تلقی کرد. معمولاً در آزمایشها، ضریب برآ را به‌صورت تابع θ برای هر هوابر مفروضی به‌دست می‌آورند.

۴-۶ در آئرودینامیک فروصوتی پسا را چگونه مدل می‌کنند؟

معمولاً پسا از طریق اصطکاک پوستی ایجاد می‌شود؛ حتی اگر جسم آئرودینامیکی نباشد، دنباله‌ای به‌وجود می‌آید و فشار پایین در دنباله بر اصطکاک پوستی (پسای گران‌رو ناشی از لایهٔ مرزی) غلبه می‌کند. در جریان موجود بر روی هوابر، به‌علت تغییر زاویهٔ مؤثر حمله که خود ناشی از فرووزش است، پسای القایی نیز وجود دارد. برآ، که باید در زاویه‌های عمود بر جریان آزاد مؤثر موضعی باشد، مؤلفه‌ای در جهت اصلی جریان آزاد خواهد داشت (یعنی، در جهت خلاف حرکت جسم از میان شاره).

پسای القایی D را می‌توان برحسب انتگرال فشار فرمول‌بندی کرد و همچون برآ، می‌توان نوشت

$$D = C_D(\theta) \rho V_\circ^۲ A_\circ / ۲$$

که $C_D(\theta)$ ضریب پساست.

اگر جسمهایی را درنظر بگیریم که آئرودینامیکی نباشند و بخش عمدهٔ پسای آنها ناشی از پسای گران‌رو و دنبالهٔ کم‌فشار باشد، جریان کاملاً تحت تأثیر عدد رینولدز خواهد بود (برخلاف برآ و پسای القایی)، و می‌توان گفت که اصطکاک پوستی انتگرال‌گیری شده و پسای دنباله باید تابع عدد رینولدز باشد (برای هر شکل هندسی مفروض). البته، هنوز وابستگی به زاویهٔ برخورد را داریم، ولی فرض می‌کنیم که زاویهٔ برخورد با تغییر عدد رینولدز ثابت می‌ماند. در واقع، زاویهٔ برخورد متغیر مفیدی نخواهد بود، زیرا جسم آئرودینامیکی نیست و زاویهٔ برخورد اهمیت چندانی ندارد. زاویهٔ برخورد متفاوت ناشی از شکل هندسی متفاوت است. بنابراین، پسا را می‌توان به شکل بی‌بعد زیر نوشت

$$D^* = \frac{D}{\rho V_\circ^۲ A_\circ / ۲} = f(\mathrm{Re}) = C_D(\mathrm{Re})$$

بدین‌ترتیب: مفهوم ضریب پسا را حفظ می‌کنیم، ولی می‌گوییم که مقدار آن برای شکل هندسی مفروض ثابت نیست و به Re بستگی دارد. در حالت عمومی، می‌توان گفت که برای هر هوابری با لایهٔ مرزی جداکننده یا غیر از آن، داریم

$$C_D = f(\mathrm{Re}, \theta)$$

۴-۷ افت فشار در لوله به اصطکاک دیواره بستگی دارد که خود به نوع جریان لایه‌ای یا متلاطم بستگی خواهد داشت. اگر جریان لایه‌ای باشد، اصطکاک دیواره به گران‌روی بستگی دارد. اگر جریان متلاطم باشد، اصطکاک دیواره به عدد رینولدز و زبری دیواره بستگی خواهد داشت. چگونه می‌توان این افت فشار را مدل کرد؟

محاسبهٔ افت فشار Δp در لوله‌ای به‌طول L باید بر اساس معادلهٔ حرکت باشد. بنابراین، افت فشار بی‌بعد در واحد طول لوله به عدد رینولدز و زبری لوله بستگی دارد که می‌توان آن را به‌صورت نسبت ارتفاع میانگین ناصافی سطح به قطر لوله، یعنی $\frac{\epsilon}{D}$، نشان داد، ازاین‌رو

$$\frac{\Delta p^*}{L^*} = h(\mathrm{Re}, \epsilon/D)$$

اگر طول بی‌بعد L^* را با $\frac{L}{D}$ نشان دهیم، که D قطر لوله و h تابع Re و زبری لوله است، برحسب فشار p، داریم

$$\frac{\Delta p^*}{L^*} = \frac{\Delta p}{\rho V^۲ L}\frac{D}{L} = h(\mathrm{Re}, \epsilon/D)$$

اکنون افت هد H_L را از رابطهٔ زیر می‌توان به‌دست آورد

$$H_L = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{\Delta p^*}{L^*}\frac{V^۲ L}{Dg}$$

از نظر فیزیکی H_L ارتفاع هم‌ارز دیفرانسیل جریان شاره‌ای است که افت فشار Δp را تولید می‌کند. یعنی، ستون شاره به ارتفاع H_L فشاری هیدروستاتیکی برابر $\Delta p = \rho g H_L$ به‌وجود می‌آورد. H_L بی‌بعد عبارت است از

$$H_L^* = H_L\frac{Dg}{V^۲ L} = h(\mathrm{Re}, \frac{\epsilon}{D}) = f/۲$$

تابع $h(\mathrm{Re}, \frac{\epsilon}{D})$ را به‌صورت $f/۲$ می‌نویسند که f ضریب اصطکاک و عددی بی‌بعد است که به عدد رینولدز و همچنین زبری لوله، در جریان متلاطم، بستگی دارد. f را می‌توان برحسب تنش برشی دیوارهٔ $\tau_۰$ به‌صورت زیر بیان کرد

$$f = \frac{۸\tau_۰}{\rho V^۲}$$

سرانجام،

$$H_L = \frac{fL}{D}\frac{V^۲}{۲g}$$

داده‌های تجربی برای ضریبهای اصطکاک از اهمیت فراوانی در مسائل جریان لوله‌ها برخوردارند.

۴-۸ مسئلهٔ ۴-۷ را با استفاده از روش تفصیلی Π بوکینگهام حل کنید. جریان شاره‌ای را در لوله درنظر بگیرید. پارامترهای مهم Π را برای، چنین جریانی تعیین کنید.

نخست، باید کمیتهای فیزیکی مهم را حدس بزنیم. فرض می‌کنیم که آنها عبارت‌انداز M، L و T، که به‌ترتیب بیانگر جرم، طول و زمان هستند.

کمیت فیزیک	V	D	ρ	μ	ϵ	dp/dx
بعد	$LT^{-۱}$	L	$ML^{-۳}$	$ML^{-۱}T^{-۱}$	L	$ML^{-۲}T^{-۲}$

که ارتفاع ϵ میانگین زبری دیواره و dp/dx تغییر فشار در واحد طول در جهت جریان است.

شش کمیت فیزیکی شامل سه بعد اصلی داریم و بنابراین حداکثر سه جملهٔ Π وجود خواهد داشت. اکنون، با درنظر گرفتن چهار کمیت فیزیکی در هر زمان، جمله‌های Π را تعیین می‌کنیم.

$$V^{x_۱}D^{y_۱}\rho^{z_۱}\mu = (LT^{-۱})^{x_۱}L^{y_۱}(ML^{-۳})^{z_۱}ML^{-۱}T^{-۱} = M^{\circ}L^{\circ}T^{\circ}$$

آن‌گاه

$$L \to x_۱ + y_۱ - ۳z_۱ - ۱ = ۰, \qquad M \to z_۱ + ۱ = ۰, \qquad T \to -x_۱ - ۱ = ۰$$

که از اینجا به‌دست می‌آید $z_۱ = -۱$، $x_۱ = -۱$، $y_۱ = -۱$، بنابراین

$$\Pi_۱ = \frac{\mu}{\rho V D} \quad \text{یا} \quad \Pi_۱ = \frac{\rho V D}{\mu}$$

با همین روش می‌توان نوشت

$$V^{x_۲}\rho^{y_۲}D^{z_۲}dp/dx = M^{\circ}L^{\circ}T^{\circ} \quad \text{و} \quad D^{x_۳}\rho^{y_۳}\mu^{z_۳}\epsilon = M^{\circ}L^{\circ}T^{\circ}$$

که خواهیم داشت

$$\Pi_۲ = \epsilon/D, \qquad \Pi_۳ = \frac{(dp/dx)D}{\rho V^۲}$$

بدین‌ترتیب، داریم $\Pi_۳ = h(\Pi_۱, \Pi_۲)$ و

$$\frac{(dp/dx)D}{\rho V^۲} = h(\rho V D/\mu, \epsilon/D) = h(\mathrm{Re}, \epsilon/D)$$

که h بیانگر رابطهٔ تابعی است.

رابطهٔ تابعی بین این کمیتها را به‌طور تجربی تعیین می‌کنند. این نتیجه‌ها را به‌طور نموداری در فصل ۵ نشان داده‌ایم، که نمودار مودی یا استانتون نامیده می‌شود.

فایدهٔ کمیتهای بی‌بعد را به‌راحتی می‌توان از این مثال دریافت. اگر بخواهیم هر یک از این پنج کمیت فیزیکی را مستقلاً تغییر دهیم، کار تجربی سنگینی باید انجام گیرد، در حالی که با کاهش آنها به سه کمیت بی‌بعد برنامهٔ تجربی کاملی را در حد معقول می‌توان انجام داد.

معمولاً افت هد را در لوله‌ای به‌طول L به‌صورت $H_L = \dfrac{\Delta p}{\rho g}$ می‌نویسند که Δp افت فشار در لوله است. بنابراین، $\Delta p/L = dp/dx$، و می‌توان با استفاده از نتیجه‌های بالا نوشت

$$H_L^* = H_L\frac{Dg}{V^۲L} = \frac{(dp/dx)D}{\rho V^۲} = (\mathrm{Re} \text{ و } \epsilon/D) \text{ تابعی از } = f/۲$$

که f ضریب اصطکاک است و با معادلهٔ بالا تعریف می‌شود. اکنون، افت هد را می‌توان برحسب f به‌صورت زیر بیان کرد

$$H_L = \left(\frac{fL}{D}\right)\left(\frac{V^۲}{۲g}\right)$$

۴-۹ هوابری به مساحت $۱\mathrm{ft}^۲$ برای تعیین برآی L در تونل بادی آزمایش می‌شود. در زاویهٔ حملهٔ ۵° با چگالی هوای استاندارد $۰٫۰۰۲۴\,\mathrm{slug/ft}^۳$ و سرعت $۱۰۰\,\mathrm{ft/s}$ میزان برآ برابر ۷ پوند است. ضریب برآی C_L چقدر است؟ مقدار برآی L_p نمونهٔ کوچک‌شدهٔ بالی به مساحت $۱۰۰\,\mathrm{ft}^۲$ در سرعت باد $۱۰۰\,\mathrm{m/h}$ با همان زاویهٔ حملهٔ ۵° چقدر است؟

C_L را می‌توان با استفاده از داده‌های مدل محاسبه کرد

$$C_L = \left(\frac{L}{A\rho V_\circ^{۲}/۲}\right)_{\mathrm{m}} = \frac{۷٫۰}{۱(۰٫۰۰۲۴)(۱۰۰)^{۲}/۲} = ۰٫۵۸$$

بنابراین، C_L برای این نمونهٔ کوچک‌شده نیز همین مقدار است و برای L_p را به‌صورت زیر می‌توان یافت

$$L_p = \left(\frac{C_L A\rho V_\circ^{۲}}{۲}\right)_p = ۰٫۵۸(۱۰۰)(۰٫۰۰۲۴)(۱۰۰ \times ۸۸٫۶۰)^{۲}/۲ = ۱۵۰۰\mathrm{lb}$$

۴-۱۰ دربارهٔ مدل‌سازی پمپ یا فن برای شارهٔ تراکم‌ناپذیر بحث کنید. اصولاً مدل‌سازی برای هر ماشینی با جریان مرکزگریز یا محوری یکسان است. پارامترهای مهمی که عملکرد ماشین را بیان می‌کند عبارت‌اند از توان ورودی P، هد H و بازدهٔ η. برای هر طرح هندسی مفروض، عملکرد با متغیرهای مربوط زیر مشخص می‌شود: چگالی شاره ρ، سرعت زاویه‌ای روتور ω، قطر میانگین روتور D، گران‌روی شاره μ و آهنگ جریان شاره Q.

P، gH و η مستقل نیستند، ولی تابع متغیرهای بالا هستند. بهتر است که به‌جای H، از gH استفاده کنیم، زیرا حاصلضرب gH کار محور برای واحد جرم شاره را نشان می‌دهد و مستقل از g است. ازاین‌رو، می‌توان نوشت

$$P = f_۱(\rho, \omega, D, Q, \mu)$$
$$\eta = f_۲(\rho, \omega, D, Q, \mu)$$
$$gH = f_۳(\rho, \omega, D, Q, \mu)$$

با استفاده از قضیهٔ Π بوکینگهام برای هر یک از معادلات، مجموعهٔ Πهای مناسب را به‌صورت زیر می‌توان به‌دست آورد

$$P/\rho\omega^{۳}D^{۵} = f_۴(Q/\omega D^{۳}, \rho\omega D^{۲}/\mu)$$
$$\eta = f_۵(Q/\omega D^{۳}, \rho\omega D^{۲}/\mu)$$
$$gH/\omega^{۲}D^{۲} = f_۶(Q/\omega D^{۳}, \rho\omega D^{۲}/\mu)$$

در اینجا نکتهٔ مهم این است که Πها ($P/\rho\omega^{۳}D^{۵}$، $gH/\omega^{۲}D^{۲}$ و η) مستقل نیستند و با معلوم‌شدن Πهای دیگر، به‌دست می‌آیند.

از داده‌های تجربی معلوم می‌شود که گران‌روی و بنابراین $\Pi\rho\omega D^{۲}/\mu$ در تعیین عملکرد پمپ یا فن بی‌اهمیت است. ازاین‌رو، می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد و سرانجام برای هر آرایهٔ طراحی مفروض، خواهیم داشت

$$gH/\omega^{۲}D^{۲} = f_۷(Q/\omega D^{۳}), \qquad P/\rho\omega^{۳}D^{۵} = f_۸(Q/\omega D^{۳}), \qquad \eta = f_۹(Q/\omega D^{۳})$$

معمولاً داده‌های تجربی را به‌صورت نمودار πها، $gH/\omega^{۲}D^{۲}$، $P/\rho\omega^{۳}D^{۵}$ و η برحسب $Q/\omega D^{۳}$ برای هر ماشین مفروض بیان می‌کنند.

مسائل تکمیلی

۴-۱۱ مدل بالی فروصوتی را در تونل باد آزمایشگاهی می‌آزماییم و داده‌های زیر را به‌دست می‌آوریم

برآ (پوند)	۰	۱۰	۱۲	۱۴	۱۲	۸
زاویهٔ حملهٔ θ	°۰	°۵	°۱۰	°۱۵	°۲۰	°۲۵

این آزمون در هوای استاندارد با سرعت ۱۰۰ft/s انجام می‌گیرد. فشار کل بال مدل ۱ft^{۲} است. ضریب برآی C_L را برحسب θ رسم کنید. برای نمونهٔ بال کوچک‌شده‌ای به مساحت ۱۰۰ft^{۲}، مقدار برآ در سرعت ۱۰۰mi/h و زاویهٔ حملهٔ ۵° چقدر است؟

۴-۱۲ پرداخت‌کاری جدیدی برای داخل لوله‌های نفت به‌وجود آمده است. این پرداخت‌کاری را بر روی نمونه‌ای با قطر درونی ۱۲in. آزمایش می‌کنیم. آزمایش را با لولهٔ ۱۰۰ فوتی و آب (در دمای معمولی) با آهنگ جریانهای متفاوت انجام می‌دهیم. داده‌های زیر به‌دست می‌آید

افت فشار در لوله (فوت آب)	۰٫۰۱۱	۰٫۰۷۸	۰٫۲۸	۱۵٫۳
آهنگ جریان آب (gal/min)	۱۷۲	۴۷۵	۹۵۰	۷۸۶۰

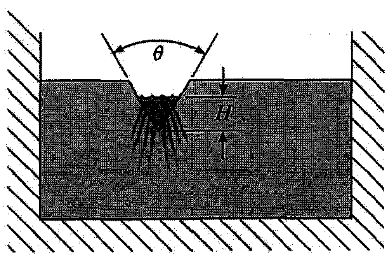
ضریب اصطکاک f (مسئلهٔ ۴-۷) را برحسب عدد رینولدز رسم کنید. برای لوله‌ای واقعی به قطر درونی ۱۲in.، چه افت فشاری برحسب psi در هر مایل لوله با آهنگ جریان نفت خام ۵۰۰۰gal/min رخ می‌دهد؟ افت فشار را برحسب فوت نفت خام و فوت آب تبدیل کنید.

۴-۱۳ مدل گنبدی نیم‌کروی شکلی را در تونل بادی برای تعیین برآ و ضریب برآی C_L آزمایش می‌کنیم. گنبد واقعی در معرض وزش باد شدید ۱۰۰m/h در قطب شمال و در دمای ۴۰°F− قرار دارد. اگر قطر مدل یک فوت و قطر گنبد واقعی ۵۰ فوت باشد و از هوای استاندارد استفاده شود، سرعت باد تونل چقدر خواهد بود؟ آیا سرعت مهم است؟ آیا می‌توان عدد رینولدز را در اینجا مدل کرد؟

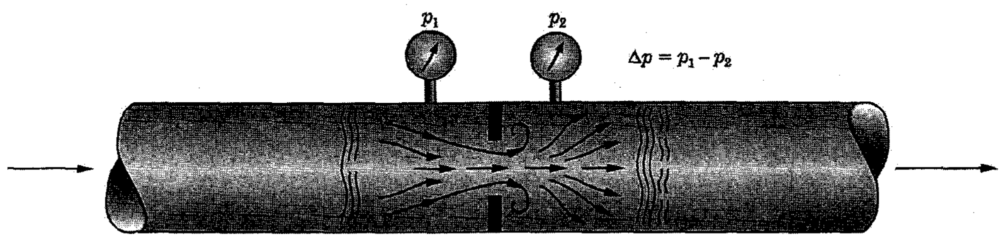
۴-۱۴ مکانیسم فرود آئرودینامیکی هواپیمایی کوچک را با مقیاس $\frac{۱}{۳}$ برای تعیین پسا در تونل باد کوچکی مدل‌سازی کنیم. در این تونل باد از هوای استاندارد استفاده می‌شود. مساحت سطح جلویی مدل طراحی‌شده ۰٫۵ فوت مربع است. اگر بخواهیم پسای وارد بر این نمونهٔ کوچک‌شده را در سرعت پروازی ۱۰۰m/h تعیین کنیم، سرعت هوا در تونل چقدر باید باشد؟ پسای تونل باد، وقتی در سرعت مناسب کار می‌کند، برابر ۲۰ پوند است. پسای وارد بر مکانیسم واقعی در سرعت پروازی چقدر است؟ ضریب C_D چقدر است؟

۴-۱۵ سرریز موجود در شکل ۴-۴ به‌صورت شکاف سد یا دریچهٔ کانال باز برای اندازه‌گیری آهنگ جریان استفاده می‌شود. این شکاف ممکن است شکلهای مختلف داشته باشد. ارتفاع آب H در شکاف معیار آهنگ جریان آب است. برای شکاف مثلثی، همچون شکل، اگر عمق آب زیاد باشد و از اثرهای کشش سطحی و گران‌روی صرف‌نظر شود، نشان دهید که نسبتاً آهنگ جریان آب Q را از رابطهٔ $Q = C\sqrt{g}H^{۵/۲}$ می‌توان تقریب زد که C عددی ثابت است. مقدار تجربی C برابر $C = ۰٫۴۴ \tan\frac{۱}{۲}\theta$ است.

۴-۱۶ جریان مایع از لوله را می‌توان به‌وسیلهٔ مدخل (اریفیس) تختی همچون شکل ۴-۵ اندازه‌گیری کرد. با قراردادن دو فشارسنج در دو طرف مدخل می‌توان افت فشار و از آنجا آهنگ جریان را محاسبه کرد. اگر فرض کنیم که آهنگ جریان، به Δp مدخل، چگالی شارهٔ ρ، قطر لولهٔ D و قطر مدخل $D_۰$ بستگی دارد، نشان دهید که آهنگ جریان را می‌توان از رابطهٔ $Q = CD_۰^{۲}\sqrt{۲\Delta p/\rho}$ به‌دست آورد. آیا C کمیت ثابتی است؟ توضیح دهید.



شکل ۴-۴



شکل ۴-۵

۴-۱۷ در محاسبات اخترشناسی و کیهانشناسی که مساحتها و زمانها در مقایسه با یکاهای معمولی بسیار بزرگ هستند، گاهی ضرورت دارد از سیستم یکاهای مخصوصی استفاده شود.

برای این سیستم یکاها، ثابتهای جهانی زیر را برای سادگی واحد می‌گیرند: سرعت نور $c = ۱$؛ جرم خورشید $M = ۱$؛ ثابت گرانشی نیوتونی $K = ۱$. (K به این‌صورت تعریف می‌شود: دو جرم طبق قانون گرانشی، $F = KM_۱M_۲/r^۲$، یکدیگر را جذب می‌کنند. F معمولاً برحسب دین، جرم برحسب گرم و r برحسب سانتیمتر داده می‌شود.)

می‌خواهیم یکاهای اصلی M، L و T را در این سیستم جدید، که ثابتهای جهانی برابر واحدند و این یکاهای جدید را به یکاهای گرم، سانتیمتر و جز آن مرتبط می‌کنند، به‌دست آوریم. یعنی یک یکای نجومی چند سانتیمتر است و یک یکای اخترشناسی چند ثانیه است. همین کار را برای جرم انجام دهید

$$\text{جرم خورشید} = ۱٫۹۸ \times ۱۰^{۳۳}\text{g}$$
$$\text{سرعت نور} = ۳ \times ۱۰^{۱۰}\text{cm/s}$$
$$\text{ثابت گرانش} = ۶٫۶۷ \times ۱۰^{-۸}\text{g}^{-۱}\text{cm}^{۳}\text{s}^{-۲}$$

توجه: دربارهٔ نیرو چی؟ آیا یکای نیرو هنوز در سیستم جدید دین خواهد بود؟

۴-۱۸ دربارهٔ مدل‌سازی پروانه بحث کنید. فرض کنید که نیروی رانش به قطر D، چگالی شاره ρ و گران‌روی μ، سرعت حرکت پروانه در شاره V، و سرعت زاویه‌ای پروانه ω بستگی دارد.

۴-۱۹ قطر پروانهٔ کشتی‌ای به‌طول ۸۰۰ فوت برابر ۱۰ فوت و سرعت دورانی آن ۱۰۰rpm است. اگر مدل کشتی‌ای به‌طول ۸ فوت را در منبع کشنده‌ای آزمایش کنیم، دربارهٔ شرایط آزمون این پروانه، برای اینکه مدل‌سازی معناداری داشته باشیم، بحث کنید.

۴-۲۰ یک کشتی کوچکی به‌طول ۱۰۰ فوت به‌گونه‌ای طراحی شده است که با سرعت ۲۰m/h در آبهای آزاد حرکت می‌کند. گران‌روی سینماتیکی مایعی مناسب را برای آزمونهای تشابه با مدل ۵ فوتی به‌دست آورید.

۴-۲۱ توربینی را، با استفاده از روش مسئلهٔ ۴-۱۰ تحلیل کنید. نتیجه‌ها یکسان است، بجز اینکه در تفسیر جمله‌های‌عملکرد از توربین به‌جای پمپ، باید استفاده کرد.

۴-۲۲ پمپی با سرعت ۱۰۰۰rpm هر ثانیه ۵ فوت مکعب را به ارتفاع ۲۰۰ فوت می‌رساند. توان لازم برای به کار انداختن پمپ ۲۰۰hp است. کارایی پمپ را تعیین کنید. پمپی دیگر با شکل هندسی مشابه ولی با سه برابر قطر طراحی شده است که با ۵۰۰rpm کار می‌کند. آهنگ جریان شاره، هد و توان را برای همان کارایی به‌دست آورید.

۴-۲۳ کتاب آشپزی نسبتاً معروفی جدول زیر را برای پخت بوقلمون پیشنهاد کرده است.

وزن بوقلمون (پوند)	۶-۱۰	۱۰-۱۶	۱۸-۲۵
زمان پخت برای هر پوند $\frac{\text{min}}{\text{lb}}$	۲۰-۲۵	۱۸-۲۰	۱۵-۱۸

با ملاحظات تحلیل بعدی می‌توانید این اطلاعات را از طریق تجربی به‌دست آورید. یعنی، فقط از این اطلاعات که یک بوقلمون ۶-۱۰ پوندی به ۲۰-۲۵ دقیقه زمان برای هر پوند وزن نیاز دارد تا پخته شود می‌توانید جدولی درست کنید و نتیجه‌ها را با برون‌یابی برای بوقلمونهای سنگین‌تر به‌دست آورید و جدول را کامل کنید.

راهنمایی: دو بوقلمون مشابه را درنظر بگیرید که هر دو در دمای اولیهٔ $T_\circ$ هستند و تا دمای T_c در اجاقی با دمای T_s پخته می‌شوند. دمای بی‌بعدی را به‌صورت $\theta = T - R_\circ / T_s - T_\circ$ و زمان بی‌بعد را به‌صورت $\tau = \alpha t / L^۲$ می‌توان تعریف کرد، که α پخشندگی گرمایی بوقلمونها، L بعد مشخصه، مثلاً طول بوقلمون و t زمان است. نشان دهید که رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\text{ثابت} = (\text{زمان پخت}) \times (\text{وزن بوقلمون})^{-\frac{۲}{۳}}$$

۴-۲۴ در آزمونی برای تعیین نشتی گرما از دیوارهٔ فریزرهای خانگی از جعبهٔ کاملاً عایق‌بندی شده‌ای به ابعاد ۴ × ۳ × ۳ فوت استفاده شده است. این جعبه را در دمای اولیهٔ ۷۰°F در معرض تابش لامپی التهابی با جریان گرمایی ثابت قرار می‌دهیم. دمای‌بدنهٔ خارجی جعبه در ۷۰°F نگه‌داری می‌شود. افزایش دمای درون جعبه نسبت به خارج آن در جدول زیر داده شده است:

زمان (ساعت)	۰	۰٫۵	۱	۲	۳	۵	۱۰
اختلاف دما (°F)	۰	۱۵٫۹	۲۲٫۵	۳۰	۳۵٫۵	۴۲٫۰	۴۸٫۳

(الف) منحنی تغییرات افزایش دما را برحسب زمان در گروههای بی‌بعد رسم کنید تا بتوان در موارد مشابه از آن استفاده کرد. یک گروه باید شامل دما باشد ولی نه زمان و گروه دیگر باید زمان داشته باشد و نه دما.

(ب) اختلاف دمایی را که انتظار دارید در پایان ۱۵ دقیقه دقیقاً تحت همان شرایط قبل از آزمون داشته باشد بجز آنکه ضخامت دیواره ۱٫۵ برابر است، تعیین کنید.

آهنگ جریان گرما از واحد سطح = ۶٫۰۹ BTU/h.ft^۲

ضخامت عایق = ۲″

رسانندگی عایق = ۰٫۰۲۰۹ BTU/ft.h°F

ظرفیت گرمایی عایق = ۴٫۸۵ BTU/ft^۳.°F

نمادگذاریهای فصل ۴

a = سرعت صوت

B_r = عدد برینکمن = $\mu V_\circ^۲ / \kappa T_\circ$

C_D = ضریب پسا

C_L = ضریب برآ

c_p = گرمای ویژه در فشار ثابت

c_v = گرمای ویژه در حجم ثابت

D = نیروی پسا، قطر

$E_c =$ عدد اکرت $= B_r/P_r$

$f =$ ضریب اصطکاک

$F_r =$ عدد فرود $= V_\circ^2/gL$

$G_r =$ عدد گراشهوف $= g\rho_\circ^2\beta(T_1 - T_\circ)L^3/\mu^2$

$g =$ شتاب ناشی از گرانی

$k =$ نسبت گرمای ویژه $= c_p/c_v$

$L =$ طول مشخصه، نیروی برآ

$M =$ عدد ماخ $= V/a$

$P_r =$ عدد پرنتل $= v/\alpha = \mu c_p/\kappa$

$p =$ فشار

$R =$ ثابت گاز

$\mathrm{Re} =$ عدد رینولدز $= LV_\circ/v$

$\mathbf{r} =$ بردار مکان

$T =$ دمای مطلق

$t =$ زمان

$\mathbf{V} =$ بردار سرعت

$(\,)_\circ =$ مقدار جریان آزاد

$(\,)^* =$ متغیر بی‌بعد

$(\,)^\dagger =$ متغیر بی‌بعد

$\alpha =$ پخشندگی گرمایی $= \kappa/\rho c_p$

$\beta =$ ضریب حجمی انبساط گرمایی، مدول حجمی

$\Theta =$ دمای بی‌بعد

$\kappa =$ رسانندگی گرمایی

$\mu =$ گران‌روی مطلق

$\nu =$ گران‌روی سینماتیکی

$\Pi =$ گروه بی‌بعد

$\rho =$ چگالی

$\Phi =$ تابع اتلاف

$\psi =$ پتانسیل گرانشی

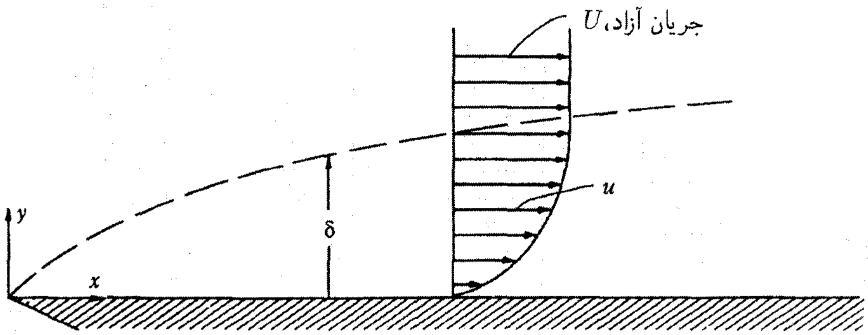
۵

جریان لایهٔ مرزی و جریان در لوله‌ها و مجراها

۵-۱ مقدمه

در این فصل دربارهٔ بعضی از انواع جریانهای تراکم‌ناپذیر مهمی بحث خواهیم کرد که اثرهای گران‌روی آنها مهم‌اند. بعضی از وضعیتهای جریان را می‌توان به آسانی تحلیل کرد، و در حقیقت حل دقیق آنها به‌سادگی امکان‌پذیر است. این حالت برای جریانهای لایه‌ای گران‌رو در لوله و مجرا رخ می‌دهد. در چنین حالتهایی، اثرهای غیرخطی لختی وجود ندارد، و معادلهٔ حرکت به موازنهٔ گرادیان فشار و نیروهای گران‌رو تبدیل می‌شود. اما، جریانهای دیگر شامل اثرهای لختی‌اند که معادلهٔ حرکت را غیرخطی می‌کنند و به‌دست آوردن جوابها معمولاً مستلزم استفاده از تقریب یا روشهای عددی است.

یکی از مهمترین پیشرفتها در مکانیک شاره‌ها مربوط به کارهای پرنتل در سال ۱۹۰۴ است. او پیشنهاد کرد که حرکت شاره در اطراف اجسام به دو ناحیه تقسیم می‌شود. ناحیهٔ نازک در مجاورت جسم که اثرهای اصطکاکی مهم است، و ناحیهٔ خارجی که از اثرهای اصطکاکی می‌توان صرف‌نظر کرد. این فصل عمدتاً شامل ناحیه‌ای می‌شود که اصطکاک مهم است (لایهٔ مرزی)، در حالی که فصل ۶ با جریانهای بی‌اصطکاک (جریان پتانسیل) سروکار دارد. نیروهای اصطکاکی در شاره‌ها ناشی از گران‌روی و یا جریان متلاطم‌اند. جریان در هر آرایهٔ جریانی مفروض با عدد رینولدز نسبتاً پایین معمولاً لایه‌ای است، و گران‌روی باعث ایجاد نیروهای اصطکاکی می‌شود، که این جریان را به‌عنوان جریان گران‌رو می‌شناسند؛ با افزایش عدد رینولدز، جریان از ناحیهٔ گذرا می‌گذرد و سرانجام متلاطم می‌شود. در جریان متلاطم، افت‌وخیزهای تلاطمی باعث ایجاد نیروهای اصطکاکی می‌شوند که معمولاً بر اثرهای گران‌رو غلبه می‌کنند. در این فصل، جریان گران‌رو را بررسی خواهیم کرد و دربارهٔ رابطه‌های نیمه‌تجربی جریان متلاطم به‌ویژه در خصوص جریان لایه‌ای مرزی بحث خواهیم کرد.



شکل ۵-۱ توزیع سرعت در جریان لایهٔ مرزی.

در این فصل به مشخصات اصلی جریان با اصطکاک توجه می‌کنیم و روشهای تعیین (۱) اندازه لایهٔ مرزی، (۲) توزیع سرعت حاصل، (۳) توزیع فشار، و (۴) نیروی شارهٔ وارد بر سطح جامد را بررسی خواهیم کرد.

در اینجا، بهتر است که موضوعهای اصلی را به جریانهای بیرونی و جریانهای درونی تقسیم‌بندی کنیم. جریانهای بیرونی در اطراف اجسام جامد، و جریانهای درونی در درون اجسامی همچون لوله‌ها و کانالها رخ می‌دهند. در حالی که معادلات دیفرانسیل بیان‌کنندهٔ این جریانها اساساً یکسان هستند، ولی شرایط مرزی آنها متفاوت‌اند، بنابراین جریانهای حاصل کاملاً متفاوت خواهند بود. نخست، دربارهٔ جریان لایهٔ مرزی بحث می‌کنیم و سپس به جریان درونی (همچون جریان در لوله‌ها و کانالها) خواهیم پرداخت. بعداً خواهیم دید که معمولاً معادلات بیان‌کنندهٔ جریان لایهٔ مرزی راه‌حلهای تحلیلی دقیقی ندارند و مستلزم روشهای تحلیلی سریهای توان‌دار یا روشهای تحلیل عددی هستند. اما، راه‌حلها را معمولاً می‌توان به‌صورت رابطه‌هایی تقریبی بسته ارائه کرد. از سوی دیگر، جریان درونی گران‌رو را می‌توان برای بسیاری از وضعیتها با رابطه‌هایی تحلیلی ساده دقیقاً بیان کرد.

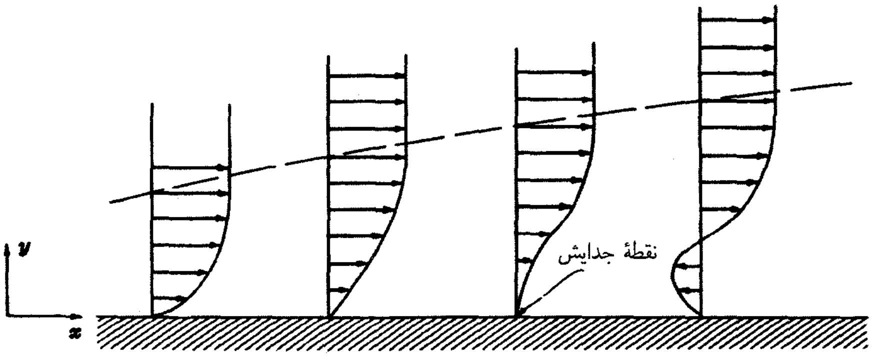
نخست، جریانهایی را که پیچیدگی کمتری دارند، بررسی می‌کنیم. یعنی، مطالعه را با جریانهای لایه‌ای آغاز می‌کنیم و سپس به جریانهای متلاطم می‌پردازیم. بخشی از این فصل به جریانهای متلاطم اختصاص دارد، ولی این موضوع را با عمق بیشتری در فصل ۹ بررسی خواهیم کرد.

قبل از بررسی جزئیات این معادلات و جواب جریانهای لایهٔ مرزی، به بحثی کلی دربارهٔ اهمیت مهندسی ویژگیهای فیزیکی لایهٔ مرزی می‌پردازیم (شکل ۵-۱).

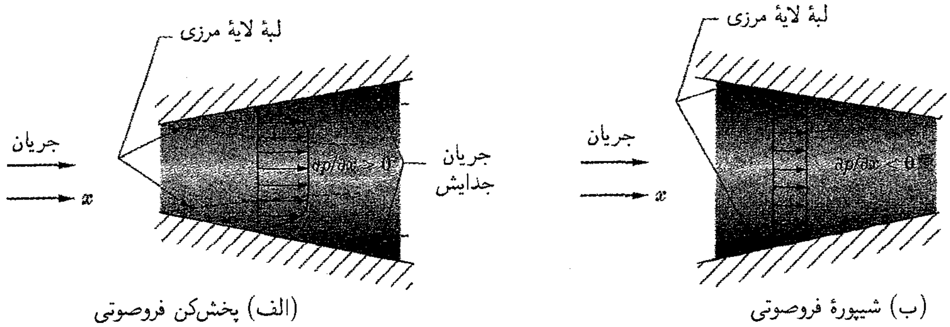
خط جداکنندهٔ دقیقی بین ناحیهٔ جریان پتانسیل با اصطکاک ناچیز و لایهٔ مرزی وجود ندارد، اما معمولاً لایهٔ مرزی به ناحیه‌ای گفته می‌شود که سرعت شاره (موازی با سطح) کمتر از ۹۹٪ سرعت جریان آزادی است که با نظریهٔ جریان پتانسیل بیان می‌شود. ضخامت لایهٔ مرزی δ از لبهٔ حمله و در امتداد سطح (که شاره بر روی آن جریان دارد) افزایش می‌یابد. ضخامت لبهٔ حمله بر روی صفحهٔ تخت صفر است، اما در جلو جسم نوک‌پهنی همچون استوانه، حتی در نقطهٔ سکون، شاره دارای ضخامت متناهی است.

جریان در درون لایهٔ مرزی به‌صورت جریان لایه‌ای شروع می‌شود ولی با رشد لایه در امتداد سطح و در حین عبور از ناحیهٔ گذار، اگر طول سطح به اندازهٔ کافی زیاد باشد، جریان متلاطم خواهد شد. مرحله‌های متوالی لایه‌ای-گذار-متلاطم، اگر طول سطح به اندازهٔ کافی زیاد باشد، در همه جریانها رخ می‌دهد. این واقعیت به لایه‌ای یا متلاطم بودن جریان آزاد بستگی ندارد، ولی با افزایش درجهٔ تلاطم جریان آزاد، گذار از جریان لایه‌ای به متلاطم در لایهٔ مرزی قبل از رسیدن به لبهٔ حمله رخ می‌دهد.

حتی در جریانهایی که فشار در امتداد سطح تغییر می‌کند، همچون جریان موجود بر روی سطح خمیده، می‌توان نشان داد که تغییرات فشار عمود بر سطح در درون لایهٔ مرزی ناچیز است. بنابراین، فرض می‌شود که توزیع فشار در لایهٔ مرزی ناشی از گرادیان فشار جریان آزاد در خارج از لایهٔ مرزی است. در بسیاری از مسائل، لایهٔ مرزی به قدری نازک است که در حل مسئله، جریان پتانسیل را می‌توان بدون در نظرگرفتن لایهٔ مرزی محاسبه کرد و جواب را برای به‌دست آوردن توزیع فشار در محاسبات لایهٔ مرزی به‌کار برد. این راهکار را در آئرودینامیک برای یافتن جریان موجود بر روی جسمهای آئرودینامیکی همچون هوابرها به‌کار می‌برند (فصل ۶ را ببینید).



شکل ۵-۲ نیمرخهای سرعت برای جریان موجود بر روی صفحهٔ تخت، که $\frac{\partial p}{\partial x} > \circ$.



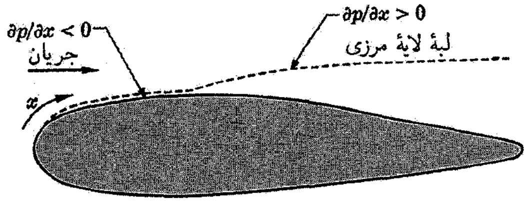
شکل ۵-۳ مقایسهٔ جریانهای پخش‌کن و شیپوره.

شکل نیمرخ سرعت و آهنگ افزایش ضخامت لایهٔ مرزی δ به گرادیان فشار $\partial p/\partial x$ بستگی دارد. به‌عنوان مثال، اگر فشار در جهت جریان افزایش یابد، ضخامت لایهٔ مرزی به سرعت افزایش می‌یابد و نیمرخ سرعت به شکل ۵-۲ ظاهر خواهد شد. اگر این گرادیان فشار ناخواسته به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، آن‌گاه جدایش رخ می‌دهد و پس از آن ناحیهٔ جریان معکوسی خواهیم داشت. (نقطهٔ جدایش به صورت نقطه‌ای تعریف می‌شود که $\partial u/\partial y\,|_{y=\circ} = \circ$.) اگر فشار در جهت جریان کاهش یابد، ضخامت لایهٔ مرزی به آهستگی افزایش خواهد یافت. u سرعت موازی با دیواره (در جهت x) و y مؤلفه عمود بر دیوار است.

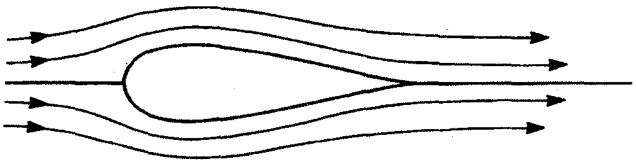
اثر گرادیان فشار در ایجاد جریانها در پخش‌کنها و شیپوره‌ها و پیرامون جسمهای مختلف بسیار مهم است. پخش‌کن موجود در شکل ۵-۳ دارای گرادیان فشار مثبت است. بنابراین، لایهٔ مرزی به سرعت رشد می‌کند و اگر زاویهٔ واگرای پخش‌کن بسیار بزرگ باشد، جدایش رخ خواهد داد. این جدایش موجب تضعیف عملکرد پخش‌کن می‌شود، زیرا بازیابی فشار حاصل به اندازهٔ پخش‌کنی که بدون جدایش کار می‌کند، نخواهد بود. در طراحی پخش‌کنها باید بین دو پارامتر طول و زاویه (برای بهترین عملکرد) مصالحه برقرار کرد. اگر زاویهٔ واگرایی خیلی بزرگ باشد، جدایش رخ می‌دهد، و اگر زاویه خیلی کوچک باشد، برای دست‌یابی به فشاری مفروض به طول بیشتری نیاز است، که این هم به افتهای اصطکاک زیادی خواهد انجامید.

شیپوره برخلاف پخش‌کن، شامل جریانی با فشار کاهنده در جهت جریان است (گرادیان فشار مطلوب). در نتیجه، لایهٔ مرزی، همچون شکل ۵-۳) نسبتاً نازک باقی می‌ماند. جدایش در جریانهای شیپوره مشکلی به‌وجود نمی‌آورد و طراحی شیپوره‌ها قدری ساده‌تر است.

حل جریان پتانسیل برای جریانی که از روی جسم موجود در شکل ۵-۴ می‌گذرد، فشار کاهنده‌ای را در قسمت جلویی جسم و فشار افزاینده‌ای را در نزدیکی عقب جسم پیش‌بینی می‌کند. دوباره، لایهٔ مرزی نسبتاً نازکی در قسمت جلویی، و لایهٔ مرزی ضخیمی همراه با جدایش



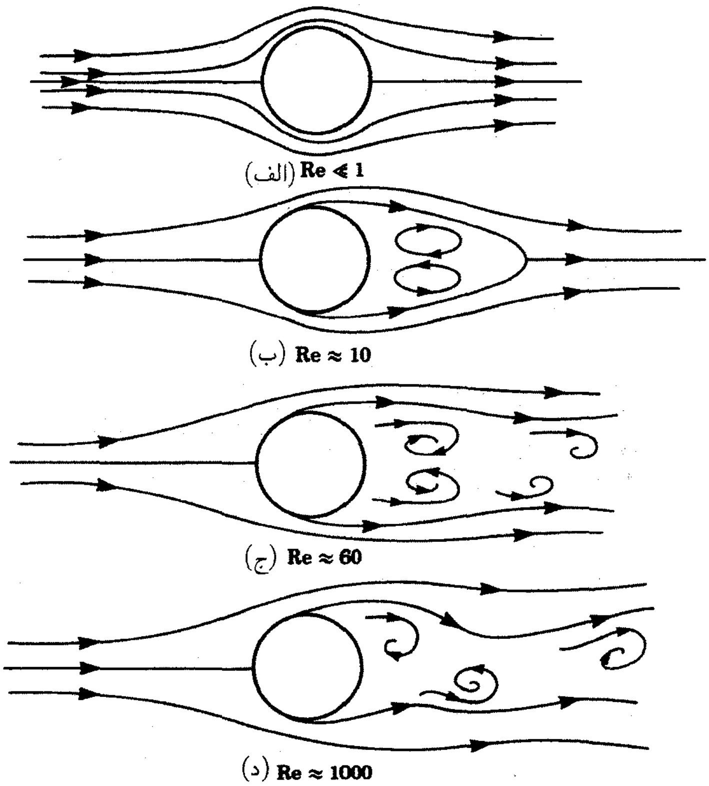
شکل ۵-۴ اثر گرادیان فشار جریان خارجی بر روی رشد لایهٔ مرزی.



شکل ۵-۵ جریان آئرودینامیکی موجود بر روی جسمی به شکل قطرهٔ اشک.

احتمالی در قسمت عقب جسم رخ می‌دهد. اگر قسمت عقب جسم خیلی «نوک‌پهن» باشد، جدایش رخ می‌دهد، زیرا گرادیان فشار $\partial p/\partial x$ بسیار زیاد می‌شود. اگر قسمت عقب جسم را همچون قطرهٔ اشک موجود در شکل ۵-۵ به‌طور ملایم آئرودینامیکی کنیم، می‌توان مانع جدایش شد. در نقطهٔ جدایش، جریان از سطح جدا می‌شود و دنباله‌ای را به‌وجود می‌آورد. پس از نقطهٔ جدایش، در امتداد سطح جهت جریان عکس می‌شود و باعث ایجاد گردابه‌ها یا گردابهایی در دنباله خواهد شد. ساختار دنباله به عدد رینولدز جریان آزاد وارد (براساس بعد مشخصهٔ جسم) کاملاً بستگی دارد. در عددهای رینولدز بسیار پایین ($\text{Re} \ll 1$)، جریان را غالباً بسیار گران‌رو یا جریان خزنده می‌گویند و در واقع، مرز آن‌قدر ضخیم است که اثرهای گران‌روی در فاصلهٔ دور از جریان اصلی مشاهده می‌شود و اساساً ناحیهٔ جریان پتانسیل وجود ندارد. در این شرایط، به‌هیچ‌وجه دنبالهٔ مشخصی ایجاد نمی‌شود [شکل ۵-۶(الف)]. اما، طرح جریان در جلو تا عقب جسم، متقارن نیست. چون پسا (نیروی پس‌کشی) بر روی جسم وارد می‌شود، موازنهٔ تکانهٔ ساده‌ای در حجم معیار پیرامون جسم این موضوع را ثابت می‌کند. با افزایش عدد رینولدز یک زوج گردابهٔ محدود در دنباله ظاهر می‌شود [شکل ۵-۶(ب) و (د)]. سرانجام، با اعداد رینولدز بزرگتر، گردابها تشکیل می‌شوند و با رانده شدن متناوب از یک سو به سویی دیگر، جادهٔ گردابهٔ فون کارمن را به‌وجود می‌آورند. این‌گونه رفتار تناوبی، حتی در صورت وجود جریان اصلی پایا، ممکن است عجیب به نظر برسد، اما پدیدهٔ بسیار مهمی است. چنین حرکت تناوبی باعث ایجاد نیروی تناوبی بر جسم می‌شود، و اگر جفت‌شوندگی با سیستم مکانیکی خود جسم رخ دهد، ممکن است به نوسان خودپایدار بیانجامد. شرایط تشدید ممکن است فاجعه‌بار باشد.

مکان واقعی جدایش را، به علت برهم‌کنش دنباله و ناحیهٔ جریان پتانسیل، به سختی می‌توان به‌طور تحلیلی محاسبه کرد. خود دنباله هر دو پارامتر طرح جریان پتانسیل در بالادست جریان و گرادیان فشار متناظر در امتداد سطح را تغییر می‌دهد. نقطهٔ جدایش به گرادیان فشار در طول سطح و میزان تلاطم در لایهٔ مرزی بستگی دارد. با افزایش میزان تلاطم، مکان نقطهٔ جدایش به سوی عقب (یا لبهٔ فرار) کشیده می‌شود. میزان تلاطم در لایهٔ مرزی تحت تأثیر ناصافی سطح و میزان تلاطم موجود در جریان آزاد در خارج از لایهٔ مرزی است. بعداً دربارهٔ اثر جدایش و لایهٔ مرزی بر روی پسا بحث خواهیم کرد. در بسیاری از جریانها، لایهٔ مرزی در کل جسم به‌قدری کوچک است که، چشم‌پوشی کامل از گران‌روی (یعنی، راه‌حل جریان پتانسیل) نتیجه‌های بسیار دقیقی برای توزیع فشار به‌دست می‌آید، برای مثال، این حالت در جریان موجود بر روی هوابرهای آئرودینامیکی پیش می‌آید. اما، اگر عقب جسم نوک‌پهن باشد و دنباله‌ای قابل‌توجه به علت ضخیم شدن لایهٔ مرزی یا جدایش به‌وجود آید، جواب جریان پتانسیل، بجز در قسمت جلویی جسم که لایهٔ مرزی نازک است، نادرست خواهد بود.

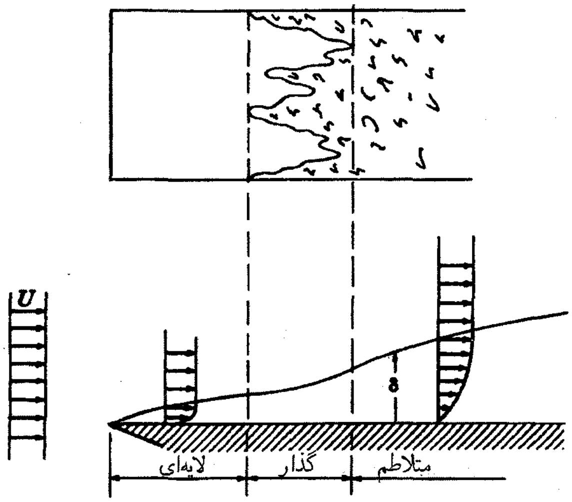


شکل ۵-۶ جریان موجود بر روی استوانه با عددهای رینولدز مختلف.

۵-۲ جریانهای بیرونی-لایه‌های مرزی

۵-۲-۱ جریان موجود بر روی صفحهٔ تخت

به‌طورکلی، جریان موجود بر روی صفحهٔ تخت مشخصهٔ جریانهای بیرونی است. این جریان را در شکل۵-۷ نشان داده‌ایم. ضخامت لایهٔ مرزی



شکل ۵-۷ جریان لایهٔ مرزی بر روی صفحهٔ تخت.

در لبهٔ حمله صفر است و با فاصله گرفتن از سطح صفحه افزایش می‌یابد. بخش آغازین لایهٔ مرزی لایه‌ای است ولی در پی آن ناحیهٔ گذار وجود دارد که جریان از لایه‌ای به متلاطم تبدیل می‌شود. این ناحیهٔ گذار در حقیقت شامل ترکشهای تلاطم است که با پراکنده شدن در شاره سرانجام به ناحیهٔ کاملاً متلاطم، همچون شکل۵-۷ (تصویر از بالا) تبدیل می‌شود. این ترکشهای تلاطمی مکانهای ثابتی ندارند و دائماً در حال حرکت‌اند. بنابراین، در حالی که جریان کاملاً لایه‌ای ممکن است پایا و دوبعدی باشد، ناحیه گذار و ناحیه‌های کاملاً متلاطم ناپایا و سه‌بعدی‌اند.

حل دقیق معادلات مناسب بیان‌کنندهٔ جریان لایه‌ای لایهٔ مرزی آرام بسیار مشکل است و فقط چند مسئلهٔ ساده را به آسانی می‌توان حل کرد. حل معادلهٔ جریان موجود بر روی صفحهٔ تخت را نمی‌توان به شکل بسته بیان کرد، و برای حل آن به سریهایی نامتناهی به‌نام راه‌حل بلاسیوس نیاز است.

چندین روش تقریبی برای حل جریان لایهٔ مرزی آرام ابداع شده است. در ادامه، یکی از روشهای بسیار مهم را که در حل انواع بسیاری از محاسبات لایهٔ مرزی به‌کار می‌رود، یعنی روش انتگرال-تکانه را بررسی خواهیم کرد.

سپس، نتیجه‌های اصلی راه‌حل بلاسیوس و روش انتگرال را برای صفحهٔ تخت بررسی و مقایسه خواهیم کرد.

۵-۲-۲ معادلهٔ تکانه انتگرال فون کارمن

همچون شکل۵-۸، حجم معیاری را برای جریان موجود بر روی صفحه‌ای تخت در نظر بگیرید. معادلهٔ تکانه را برای این حجم معیار در جهت x می‌نویسیم، معادلهٔ (۳-۹) را ببینید. داریم

$$F_{s_x} = \int_{\text{C.S.}} \rho V_x \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$$

نیروهای سطح عبارت‌اند از

$$F_{s_x} = pW\delta - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)(\delta + d\delta)W - \tau_\circ W dx + \left(p + \epsilon\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)d\delta$$

که W پهنای صفحه، δ ضخامت لایهٔ مرزی و $\tau_\circ$ تنش برشی در دیواره است و به‌صورت $\tau_\circ = \mu\frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=\circ}$ تعریف می‌شود. با چشم‌پوشی از جمله‌های مرتبهٔ دوم و ساده‌سازی آن، داریم

$$F_{s_x} = \left[-\delta\frac{\partial p}{\partial x}dx - \tau_\circ dx\right]W$$

قبل از تعیین جمله‌های شار تکانه، شار جرمی را در نظر می‌گیریم. همچون شکل۵-۶(ب)، شاری جرمی را در عرض هر سه وجه خواهیم داشت. بدین ترتیب، شار جرمی $\dot{m}$ در عرض سطح بالا عبارت است از

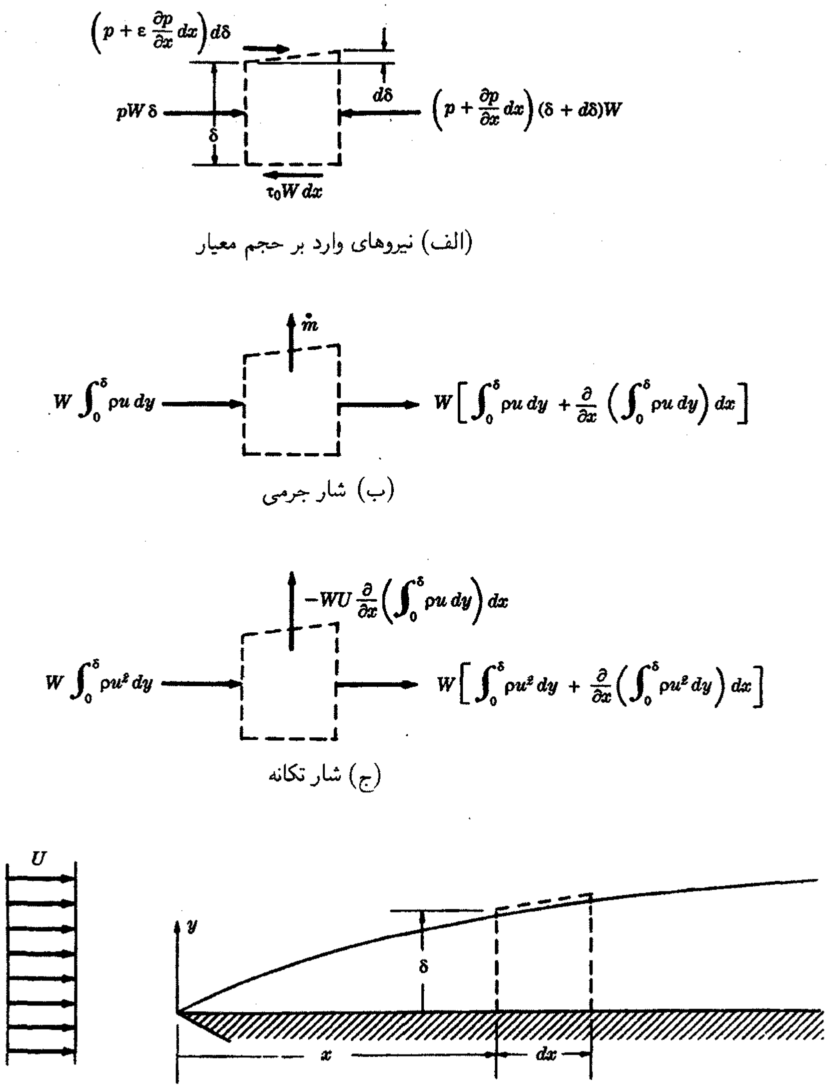
$$\begin{aligned}\dot{m} &= W\int_\circ^\delta \rho u dy - W\left[\int_\circ^\delta \rho u dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_\circ^\delta \rho upd y\right)dx\right]\\ &= -W\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_\circ^\delta \rho u dy\right)dx\end{aligned}$$

که u مؤلفهٔ سرعت در جهت x است. شار تکانهٔ شارهٔ $\dot{M}_x$ که از سطح بالا می‌گذرد، عبارت است از

$$\dot{M}_x = \dot{m}U = -WU\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_\circ^\delta \rho u dy\right)dx$$

که U سرعت جریان آزاد در جهت x است و شار تکانهٔ کلی عبارت است از

$$\begin{aligned}\int_{\text{C.S.}} \rho V_x \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} =& W\left[\int_\circ^\delta \rho u^{۲} dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_\circ^\delta \rho u^{۲} dy\right)dx\right]\\ &- WU\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_\circ^\delta \rho u dy\right)dx - W\int_\circ^\delta \rho u^{۲} dy\end{aligned}$$



شکل ۵-۸ ایجاد معادلات انتگرالی لایهٔ مرزی. W پهنای صفحه در جهت z است.

بعد از ساده‌سازی، خواهیم داشت

$$\int_{\text{C.S.}} \rho V_x \mathbf{V}\cdot d\mathbf{A} = W\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_\circ^\delta \rho u(u-U)dy\right]dx - W\frac{\partial U}{\partial x}\int_\circ^\delta \rho u\,dy$$

به‌گونه‌ای که سرانجام، معادلهٔ کامل تکانه به‌صورت زیر در می‌آید

$$\tau_\circ + \delta\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{\partial x}\int_\circ^\delta \rho u(U-u)dy - \frac{\partial U}{\partial x}\int_\circ^\delta \rho u\,dy \qquad (۵-۱)$$

که برای هردو جریان لایه‌ای متلاطم، تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر به‌کار می‌رود.

استفاده از معادلهٔ برنولی، گرادیان فشار را می‌توان برحسب سرعت جریان آزاد U برای جریان تراکم‌ناپذیر بیان کرد. در امتداد خط جریان و

درست در خارج از لایهٔ مرزی (با نادیده گرفتن اثرهای تغییر ارتفاع)، داریم

$$\frac{U^{۲}}{۲}+\frac{p}{\rho}=\text{const.}$$

بعد از دیفرانسیل‌گیری، خواهیم داشت

$$U\frac{dU}{dx}+\frac{۱}{\rho}\frac{dp}{dx}=۰$$

پس از ترکیب با معادلهٔ (۵-۱)، معادلهٔ تکانه را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$\rho\frac{d}{dx}\int_{۰}^{\delta}(U-u)udy+\rho\frac{dU}{dx}\int_{۰}^{\delta}(U-u)dy=\tau_{۰} \qquad (۵\text{-}۲)$$

خارج‌شدن ρ از مشتقها، تأکید بر این نکته است که این شکل فقط برای جریان تراکم‌ناپذیر معتبر است. اگر گرادیان فشار خارجی صفر باشد (و بنابراین U ثابت باشد)، این معادله به شکل زیر در می‌آید

$$\tau_{۰}=\frac{d}{dx}\int_{۰}^{\delta}\rho u(U-u)dy \qquad (۵\text{-}۳)$$

حل معادلات (۵-۱) یا (۵-۲) مستلزم تعیین نیمرخ سرعت $u(x,y)$ و ضخامت لایهٔ مرزی $\delta(x)$ است. با پیروی از روش فون کارمن عبارتی چندجمله‌ای را برای U در جریان لایه‌ای تراکم‌ناپذیر می‌توان فرض کرد. این فرض ایجاب می‌کند که نسبت $\frac{u}{U}$ فقط تابع $\frac{y}{\delta}$ است که در واقع معتبر خواهد بود. در این حالت، چند جمله‌ایی را از هر مرتبه می‌توان در نظر گرفت و با توجه به شرایط مرزی برای u در $y=۰$، با استفاده از δ می‌توان ضریبها را به‌دست آورد.

به‌عنوان مثال، توزیع سرعت را به‌صورت چندجمله‌ای درجهٔ سه به‌صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$u=a+by+cy^{۲}+dy^{۳}$$

نتیجه عبارت است از

$$\frac{u}{U}=\frac{۳}{۲}(\frac{y}{\delta})=\frac{۱}{۲}(\frac{y}{\delta})^{۳} \qquad (۵\text{-}۴)$$

ضریبهای چندجمله‌ای را با توجه به شرایط مرزی که در $y=۰$، $u=۰$ و در $y=\delta$، $u=U$ و $\partial u/\partial y=۰$، می‌توان تعیین کرد. وانگهی، با استفاده از معادلهٔ حرکت و اینکه در $y=۰$، $\partial^{۲}u/\partial y^{۲}=۰$، می‌توان این ضریبها را به‌طور کامل تعیین کرد. این شرایط تقریبی است، زیرا ضخامت لایهٔ مرزی را، به‌جای $u=۰{,}۹۹U$، به‌صورت $u=U$ تعریف کرده‌ایم، اما این فرض با این تقریب چندجمله‌ای سازگار است. بدین ترتیب، $\tau_{۰}$ را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم

$$\tau_{۰}=\mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=۰}=\frac{۳}{۲}\mu\left(\frac{U}{\delta}\right) \qquad (۵\text{-}۵)$$

که μ گران‌روی شاره است. با نشاندن توزیع سرعت معادلهٔ (۵-۴) در معادلهٔ (۵-۵) و انتگرال‌گیری، داریم

$$\frac{۳}{۲}\mu\left(\frac{U}{\delta}\right)=\frac{۲۹}{۲۸۰}\rho U^{۲}\frac{d\delta}{dx}$$

پس از جداسازی متغیرها و انتگرال‌گیری، خواهیم داشت

$$\delta/x=۴{,}۶۴/\sqrt{Ux/\nu}=۴{,}۶۴/\sqrt{\mathrm{Re}_{x}} \qquad (۵\text{-}۶)$$

که ν گران‌روی سینماتیکی و Re_x عدد رینولدز بر پایهٔ طول x است. اکنون، می‌توان معادلات (۵-۵) و (۵-۶) را ترکیب کرد، که در این صورت

$$\tau_\circ = ۰٫۳۲۳\rho U^۲/\sqrt{\mathrm{Re}_x} \tag{۵-۷}$$

با تعریف ضریب اصطکاک پوستی C_f به‌صورت $C_f = \tau_\circ/(\frac{۱}{۲}\rho U^۲)$ مقدار تقریبی آن را به‌صورت زیر می‌توان تعیین کرد

$$C_f = ۰٫۶۴۶\sqrt{\nu/Ux} = ۰٫۶۴۶/\sqrt{\mathrm{Re}_x} \tag{۵-۸}$$

مقدار میانگین $\tau_\circ$، که با $\bar{\tau}_\circ$ مشخص می‌شود، و $\bar{C}_f$، یعنی مقدار میانگین C_f بر روی صفحه‌ای به طول L را به‌صورت زیر می‌توان تعریف کرد

$$\bar{\tau}_\circ = \frac{\int_\circ^L \tau_\circ\, dx}{L} = \frac{۰٫۶۴۶\rho U^۲}{\sqrt{\mathrm{Re}_l}} = ۲\tau_\circ\bigg|_{x=L} \tag{۵-۹}$$

$$\bar{C}_f = \frac{\bar{\tau}_\circ}{\frac{۱}{۲}\rho U^۲} = \frac{۱٫۲۹۲}{\sqrt{\mathrm{Re}_l}} \tag{۵-۱۰}$$

مقادیر $\tau_\circ$ و C_f مبتنی بر تقریب چندجمله‌ای درجهٔ سه برای این نیمرخ سرعت هستند. در بخش بعد، مقدار دقیقتری برای C_f به‌دست می‌آوریم و این دو را مقایسه خواهیم کرد.

از همین روش می‌توان برای تعیین آهنگ رشد لایهٔ مرزی در جریان متلاطم استفاده کرد. اما، در جریان متلاطم باید از توزیع تجربی سرعت و تنش برشی دیواره استفاده کنیم. بلاسیوس دریافت که برای سطحهای هموار رابطهٔ زیر برقرار است

$$\tau_\circ = ۰٫۰۲۲۵\rho U^۲(\nu/U\delta)^{۱/۴}$$

از قانون توزیع سرعت توان‌دار که در زیر بحث خواهد شد، استفاده می‌کنیم که

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{۱/۷}$$

با نشاندن تنش برشی و توزیع سرعت بالا در معادلهٔ (۵-۳)، داریم

$$\frac{\delta}{x} = ۰٫۳۷۶(\frac{Ux}{\nu})^{-۱/۵} = ۰٫۳۷۶(\mathrm{Re}_x)^{-۱/۵} \tag{۵-۱۱}$$

که در اینجا فرض می‌شود جریان لایهٔ مرزی از لبهٔ حمله متلاطم است. تنش برشی برحسب فاصلهٔ x از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\tau_\circ = ۰٫۰۲۸۶\rho U^۲(\nu/Ux)^{۱/۵} = ۰٫۰۲۸۶\rho U^۲(\mathrm{Re}_x)^{-۱/۵} \tag{۵-۱۲}$$

۵-۲-۳ معادلات لایهٔ مرزی پرنتل و حل بلاسیوس

اگر جریان لایه‌ای تراکم‌ناپذیری را بر روی صفحه‌ای تخت با عدد رینولدز بزرگ در نظر بگیریم، معادلهٔ ناویه‌ـاستوکس به‌صورت سادهٔ زیر در می‌آید

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{۱}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} \tag{۵-۱۳}$$

که

$$\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x} \tag{۵-۱۴}$$

u و v به ترتیب مؤلفه‌های x و y سرعت هستند و فرض می‌شود که جریان تراکم‌ناپذیر با گران‌روی ثابت است. این معادلات را می‌توان با تحلیل مرتبهٔ بزرگی از معادلات ناویه-استوکس کامل به‌دست آورد. خواننده می‌تواند برای جزئیات بیشتر به مرجعهای مورد نظر مراجعه کند.

معمولاً این معادلات در دستگاه مختصات دکارتی حتی برای سطحهای خمیده (یعنی مقطع استوانه در جهت محور z) معتبر است، مانند سطح هوابر در صورتی که ضخامت لایهٔ مرزی δ خیلی کوچکتر از شعاع خمیدگی باشد. غالباً این حالت در شرایط کاربردی پیش می‌آید. در اینجا، دربارهٔ تعمیم آن به جریان لایهٔ مرزی دوبعدی بحث نخواهیم کرد. این موضوع نسبتاً پیچیده است، اما برای بیان جریان روی جسمهای سه‌بعدی ضروری خواهد بود.

گرادیان فشار $\partial p/\partial y$ در جهت عمود بر صفحه در مقایسه با $\partial p/\partial x$ قابل اغماض است و بنابراین فشار در لایهٔ مرزی ناشی از جریان آزاد در خارج از لایهٔ مرزی خواهد بود. معمولاً $p(x)$ را از حل معادلهٔ پتانسیل جریان روی جسم در خارج از لایهٔ مرزی، با این فرض که ضخامت لایهٔ مرزی ناچیز است، و سپس با تعیین فشار حاصل در امتداد جسم، به‌دست می‌آورند. این روش را نمی‌توان در صورت جدایش لایهٔ مرزی به‌کار برد، زیرا در این حالت، جریان پتانسیل تحت تأثیر مکان جدایش و شکل دنباله خواهد بود. بدین ترتیب، جریانها به شکل پیچیده‌ای درهم آمیخته می‌شوند و غالباً برای توصیف کامل آنها به انجام آزمایش نیاز است.

از معادلهٔ پیوستگی، داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۵-۱۵)$$

به این ترتیب، مسئله به دو معادله و دو مجهول u و v تبدیل می‌شود. گرادیان فشار $\partial p/\partial x$ را از طریق جریان پتانسیل موجود در خارج از لایهٔ مرزی، با اثرهای گران‌روی صرف‌نظر کردنی، تعیین می‌کنند. این مسئله را در فصل بعد بازهم بررسی خواهیم کرد.

جریان موجود بر روی صفحه‌ای تخت را با گرادیان فشار صفر در نظر می‌گیریم. معادلات این جریان با شرایط مرزی $u=v=0$ در $y=0$ و $u=U$ در $y=\infty$ عبارت‌اند از

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

فرض می‌شود که شکل منحنیهای سرعت در مکانهای محوری مختلف مشابه هستند و بنابراین می‌توان نوشت

$$u/U=g(y/\delta)$$

که $g(y/\delta)$ نمادگذاریی تابعی است.

وانگهی فرض می‌کنیم

$$\eta=y\sqrt{\frac{U}{\nu x}},\qquad u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \psi=\sqrt{\nu x U}\,f(\eta)$$

که ψ تابع جریان است و در فصل ۳ تعریف شده است، و f تابع مجهولی است که باید آن را به‌دست آورد. بدین ترتیب، معادلهٔ تکانه برحسب تابع جریان ψ عبارت است از

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}$$

و برحسب f، و با شرایط مرزی $f=f'=0$ در $\eta=0$ و $f'=1$ در $\eta=\infty$، تابع دیفرانسیل معمولی زیر به‌دست می‌آید

$$f\frac{d^2 f}{d\eta^2}+2\frac{d^3 f}{d\eta^3}=0 \qquad (۵-۱۶)$$

این معادله را بلاسیوس با روش بسط سریها حل کرد (مرجع ۵ را ببینید). نتیجه عبارت است از

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\frac{\alpha^{n+1}C_n}{(3n+2)!}\eta^{(3n+2)}$$

که $\alpha = ۰٫۳۳۲۰$ و چند مقدار اولیهٔ C_n عبارت‌اند از

$$C_۰ = ۱$$
$$C_۱ = ۱$$
$$C_۲ = ۱۱$$
$$C_۳ = ۳۷۵$$
$$C_۴ = ۲۷۸۹۷$$
$$C_۵ = ۳۸۱۷۱۳۷$$

اخیراً به کمک رایانه‌های رقمی معادلهٔ (۵-۱۶) و تعمیم آن برای شمول گرادیانهای فشار به‌طور گسترده حل شده است. نمودار u/U را در شکل ۵-۹ نشان داده‌ایم.

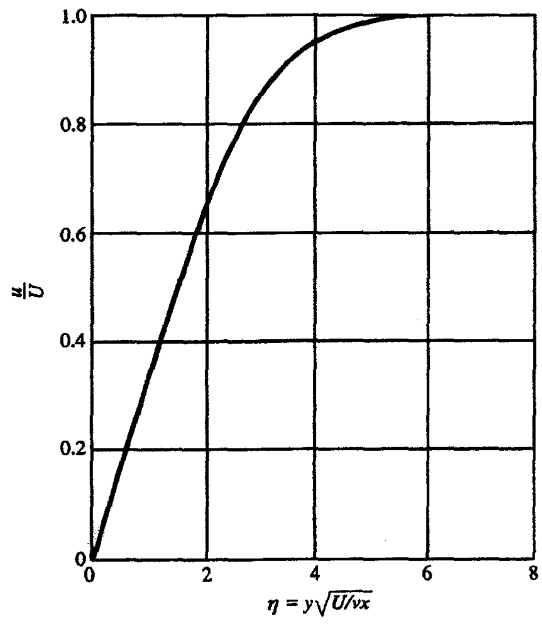
چون ضریب اصطکاک پوستی با $C_f = \frac{\tau_۰}{\frac{۱}{۲}\rho U^۲}$ تعریف می‌شود، که $\tau_۰ = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=۰}$، مقدار C_f را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$C_f = ۲\sqrt{\nu/Ux}\frac{d^۲ f}{d\eta^۲}\bigg|_{\eta=۰}$$

با کمک حل بلاسیوس، $d^۲f/d\eta^۲|_{\eta=۰} = ۰٫۳۳۲$، و داریم

$$C_f = ۰٫۶۶۴\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = ۰٫۶۶۴/\sqrt{\mathrm{Re}_x} \tag{۵-۱۷}$$

از مقایسهٔ این مقدار C_f با مقدار به‌دست آمدهٔ قبلی به‌وسیلهٔ روش انتگرال‌گیری درمی‌یابیم که تقریب چندجمله‌ای درجهٔ سه به خطایی در حدود ۲٫۷٪ بر روی C_f منجر می‌شود که ویژگی روشهای تقریب است.



شکل ۵-۹ توزیع سرعت جریان لایه‌ای در امتداد صفحه‌ای تخت با گرادیان فشار صفر.

۵-۲-۴ معادله‌های انتگرالی

شکل انتگرالی معادلهٔ لایهٔ مرزی (۵-۱) برای جریان تراکم‌ناپذیر را می‌توان با انتگرال‌گیری معادلهٔ پرنتل در عرض ضخامت لایهٔ مرزی به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$\rho \int_0^\delta \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy = -\int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial x} dy + \mu \int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

با استفاده از اصل پیوستگی و تعریف $\tau_0 = \mu(\frac{\partial u}{\partial y})|_{y=0}$، از عملیات جبری سرراست نتیجه می‌شود

$$\rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta u(U-u)dy - \rho\frac{dU}{dx}\int_0^\delta u dy = \delta\frac{\delta p}{\delta x} + \tau_0 \tag{۵-۱۸}$$

که مشابه معادلهٔ (۵-۱) با ρ ثابت است.

۵-۲-۵ ضخامت جابه‌جایی و ضخامت تکانه

در نظریهٔ لایهٔ مرزی ضخامت جابه‌جایی δ^* را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{۵-۱۹}$$

و ضخامت تکانهٔ θ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\theta = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{u}{U} dy \tag{۵-۲۰}$$

در روشهای تقریبی لایهٔ مرزی، که از چندجمله‌ایها برای تقریب نیمرخ سرعت استفاده می‌شود، با انتگرال‌گیری از صفر تا δ، معادلهٔ (۵-۱۸) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d}{dx}(U^2\theta) + \rho U\frac{dU}{dx}\delta^* = \tau_0 \tag{۵-۲۱}$$

ضخامت جابه‌جایی تعبیر فیزیکی ساده‌ای دارد. این ضخامت فاصله‌ای است که دیواره باید از خارج به درون جریان آزاد حرکت کند تا در شرایط کاملاً رقیق بودن شاره و عدم وجود لایهٔ مرزی، میدان جریان بی‌تغییر بماند. به بیان دیگر، کاهش جریان $\delta^* U$ ناشی از جابه‌جایی دیواره به درون جریان رقیق، دقیقاً برابر افت جریان ناشی از لایهٔ مرزی در جریان واقعی است. ضخامت تکانه نیز همین اهمیت را دارد، بجز اینکه برپایهٔ شار تکانه و شار جرمی استوار است.

۵-۲-۶ لایه‌های مرزی متلاطم

حل تحلیل کاملی برای توزیع سرعت متوسط در جریانهای متلاطم، حتی برای وضعیتهای ساده‌ای همچون جریان موجود بر روی صفحهٔ تخت و جریان کاملاً توسعه‌یافته در درون لوله، وجود ندارد. هدف از این قسمت ارائهٔ روشهای نیمه‌تجربی برای بیان توزیع سرعت متوسط و توزیع فشار در جریانهای متلاطم است. نتیجه‌های حاصل از تمام روشهایی که بررسی می‌شوند، منحصر به جریان دوبعدی خواهد بود.

قانونهای توانی

قانونهای توانی از رابطهٔ مقاومت بلاسیوس برای لوله‌های مستقیم و صاف ناشی می‌شود. اما، آنها را برای جریان کانالهای دیگر و لایه‌های مرزی دوبعدی نیز به‌کار می‌برند. فرض می‌کنیم که دیواره‌ها صاف و گرادیان فشار را می‌توان نادیده گرفت.

اگر فرض شود که ضریب اصطکاک پوستی C_f را می‌توان به‌صورت تابع توانی عدد رینولدز بیان کرد (برپایهٔ δ)، داریم

$$C_f = \frac{\text{const.}}{(U\delta/\nu)^m} \tag{۵-۲۲}$$

که U سرعت خط مرکزی برای جریان لوله و سرعت جریان آزاد برای جریان لایهٔ مرزی است. δ شعاع جریان لوله و ضخامت لایهٔ مرزی برای جریان موجود بر روی صفحهٔ تخت است. در این صورت، از تعریف C_f معادلهٔ (۵-۲۲)، خواهیم داشت

$$U/u_\tau = (\text{const.})(u_\tau \frac{\delta}{\nu})^{m/(۲-m)} \tag{۵-۲۳}$$

که سرعت اصطکاکی u_τ به‌صورت $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_\circ}{\rho}}$ تعریف می‌شود. فرض می‌کنیم که سرعت u را در هر فاصله‌ای از دیوارهٔ y می‌توان با معادله‌ای شبیه معادلهٔ (۵-۲۳) بیان کرد، آن‌گاه

$$u/u_\tau = (\text{const.})(u_\tau y/\nu)^{m/(۲-m)} \tag{۵-۲۴}$$

اگر باز هم فرض شود که نیمرخهای سرعت متوسط شبیه‌اند و معادلات (۵-۲۳) و (۵-۲۴) را ترکیب کنیم، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$u/U = (y/\delta)^{m/(۲-m)} \tag{۵-۲۵}$$

با فرض $m = \frac{۱}{۴}$، معادلهٔ (۵-۲۵) تغییر ضریبهای اصطکاک را در لوله‌ها برای $۳۰۰۰ < U\delta/\nu < ۷۰۰۰۰$ به‌دست می‌دهد. بدین‌ترتیب، این مزیت معرفی توزیع قانون توانی است. مطلوب آن است که تغییری در نمای m به‌وجود نیاید. چون m به‌طور خفیفی برحسب عدد رینولدز تغییر می‌کند، انتظار می‌رود برای بسیاری از محاسبات مهندسی سودمند باشد.

برای جریان لوله معادلات به‌صورت زیر در می‌آیند

$$\left.\begin{aligned} C_f &= ۰٫۰۴۶۶(U\delta/\nu)^{-۱/۴} \\ u/u_t &= ۸٫۷۴(u_\tau y/\nu)^{۱/۷} \\ u/U &= (y/\delta)^{۱/۷} \end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered}\text{جریان لوله} \\ ۳۰۰۰ < \text{Re} < ۷۰۰۰۰\end{gathered}$$

با افزایش عدد رینولدز، نمای m در معادلات بالا کاهش می‌یابد.

قانون دیواره

اگر ناحیه‌ای نزدیک به دیواره را که گران‌روی در آن اهمیت دارد، در نظر بگیریم و اگر تنش برشی دیواره قیدی مهم برای جریان باشد (یعنی، از گرادیان فشار بتوان چشم‌پوشی کرد)، آن‌گاه می‌توان رابطهٔ تابعی زیر را برای توزیع سرعت نوشت

$$u = F(\tau_\circ, y, \mu, \rho)$$

با روش تحلیل ابعادی، داریم

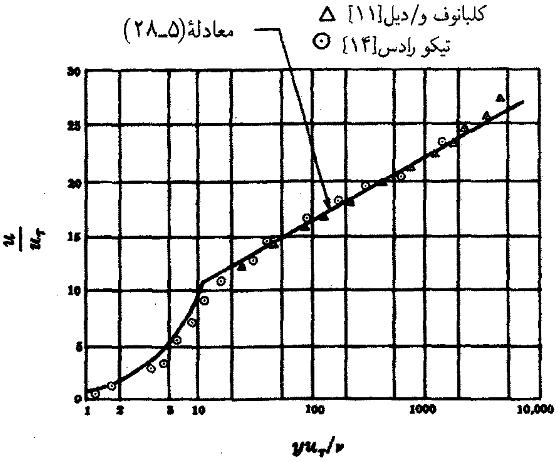
$$u/u_\tau = f(yu_\tau/\nu) \tag{۵-۲۶}$$

معادلهٔ (۵-۲۶) بیان قانون دیواره است. معنای این رابطه این است که اگر u/u_τ برحسب yu_τ/ν برای جریانهای مختلف رسم شود، تنها یک منحنی وجود خواهد داشت. این موضوع به‌طور تجربی برای جریانهای مختلفی به اثبات رسیده است. به عنوان مثال، این نتیجه‌ها برای سطحهای صاف و گرادیانهای فشار متوسط، حتی در فاصله‌های دور از دیواره، صدق می‌کند (اما نه برای دورترین بخش لایهٔ مرزی). اثر گرادیانهای فشار بزرگ معکوس باعث انحراف از قانون دیواره در فاصله‌های کمتر می‌شود. بعضی از نتیجه‌های تجربی را در شکل ۵-۱۰ نشان داده‌ایم.

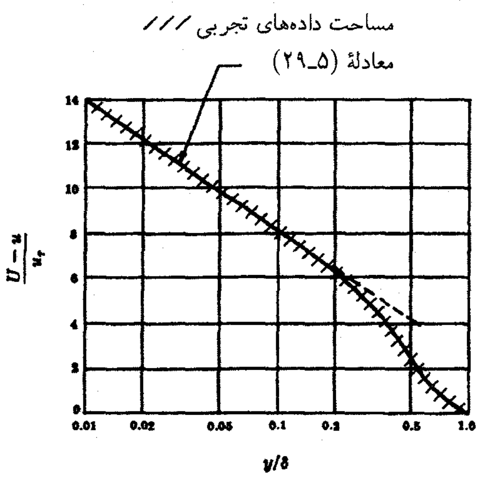
قانون نقص سرعت

اکنون، فرض می‌کنیم که گران‌روی برای بخشهای دوردست لایهٔ مرزی دیگر مهم نیست. فرض می‌کنیم که نقص سرعت $(U-u)$ به تنش برشی دیواره و به فاصلهٔ δ، که این اثر از دیواره تا آن فاصله پخش شده است، بستگی دارد. بنابراین

$$U - u = G(\tau_\circ, y, \delta, \rho)$$



شکل ۵-۱۰ توزیع سرعت برای قانون دیواره. u_τ سرعت اصطکاکی $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_\circ}{\rho}}$ است.



شکل ۵-۱۱ توزیع سرعت برای قانون نقص سرعت.

و به کمک تحلیل ابعادی، داریم

$$(U-u)/u_\tau = g(y/\delta) \qquad (۵\text{-}۲۷)$$

قانون نقص سرعت در جریانهایی با گرادیان فشار صفر برای بخش دوردست لایهٔ مرزی به‌طور تجربی اثبات شده است. این قانون به زبری دیواره بستگی ندارد. نتیجه‌ها را در شکل۵-۱۱ نشان داده‌ایم.

شکلهایی لگاریتمی قانون دیواره و قانون نقص سرعت

در همسایگی دیواره، ناحیهٔ همپوشی وجود دارد که دو قانون نقص سرعت به‌طور همزمان برقرار هستند. در این ناحیهٔ همپوشی که هر دو قانون معتبرند، می‌توان نشان داد که تابعهای f و g در بالا باید لگاریتمی باشند. یعنی، معادلهٔ (۵-۲۶) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$u/u_\tau = C_1 \ln(yu_\tau/\nu) + C_2 \qquad (۵\text{-}۲۸)$$

و معادلهٔ (۵-۲۷) به‌صورت زیر درخواهد آمد

$$(U-u)/u_\tau = C_۳ \ln(y/\delta) + C_۴ \qquad (۵\text{-}۲۹)$$

کمیتهای ثابت $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$ و $C_۴$ را به‌طور تجربی تعیین می‌کنند، و همان‌گونه که در نوشته‌ها آمده است، تغییراتی جزئی در کمیتها وجود دارد. بنابر نظر کلوزر[۶].

$$C_۱ = ۲{,}۴۴, \quad C_۲ = ۴{,}۹, \quad C_۳ = -۲{,}۴۴, \quad C_۴ = ۲{,}۵$$

مقایسهٔ آنها را با مقادیر تجربی در شکلهای۵-۱۰ و۵-۱۱ آورده‌ایم.

۵-۲-۷ لایه مرزی با گرادیان فشار و جدایش

به‌طور کلی در امتداد سطح هر جسمی که در شاره‌ای جاری غوطه‌ور شود، گرادیان فشاری به‌وجود می‌آید. این فشار را می‌توان به‌طور تجربی یافت، یا در حالتهایی که جدایش رخ نمی‌دهد، به‌طور تحلیلی محاسبه کرد. جملهٔ گرادیان فشار را باید در معادلات لایهٔ مرزی وارد کرد، که بدین ترتیب باعث دشواری حل مسئله خواهند شد. روشهای عددی که به خوبی در محاسبات لایهٔ مرزی به‌کار می‌روند، کاربرد گسترده‌ای در آئرودینامیک و دیگر رشته‌های عملی دارند. در اینجا، چند مثال را با استفاده از روش تقریبی، به‌گونه‌ای که رفتار فیزیکی آنها به وسیلهٔ تحلیل مخدوش شود، از نظر می‌گذرانیم.

لایهٔ مرزی جریان لایه‌ای همواره از لبهٔ حمله یا از دماغهٔ جسم فرورفته در جریان آغاز می‌شود. اگر لایهٔ مرزی دارای طول کافی برای رشد باشد، به جریان متلاطم تبدیل می‌شود. به‌طور کلی، با گراییدن Re_x (در جهت x) به‌سوی مقداری بحرانی، در پایین‌دست جریان، جریان از حالت گذار می‌گذرد و متلاطم می‌شود. این مقدار بحرانی به زبری سطح و میزان تلاطم در جریان آزاد بستگی دارد. اگر گرادیان فشار معکوس نسبتاً زیادی وجود داشته باشد، لایهٔ مرزی جدا می‌شود و در نقطهٔ جدایش $\tau_۰ = ۰$ (و در نتیجه، $\frac{\partial u}{\partial y} = ۰$) و جریان در امتداد سطح معکوس خواهد شد که جریان گردابه‌ها را در دنباله تأمین می‌کند. افزایش تلاطم در جریان، جدایش را به تأخیر می‌اندازد، و نقطهٔ جدایش را به‌سوی لبهٔ فرار می‌راند. آئرودینامیکی بودن جسم موجب کاهش گرادیان فشار معکوس می‌شود، و با اثرگذاری مناسب، از جدایش به‌طور کامل جلوگیری خواهد کرد. اثر این پدیده را بر روی پسا در بخش بعد بررسی خواهیم کرد. شکل ۵-۱۲ جدایش لایهٔ مرزی را از سطح استوانهٔ دایره‌ای نشان می‌دهد.

به عنوان مثال، نیمرخ سرعت را با چندجمله‌ای درجهٔ سه تقریب خواهیم زد، اما به علت وجود گرادیان فشار، ضریبهای به‌دست آمده با ضریبهای معادلهٔ (۵-۴) متفاوت‌اند. شرط $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$ در $y = ۰$، دیگر صادق نیست و به‌جای آن از شرط زیر، که همان معادلهٔ حرکت است باید استفاده کرد. در $y = ۰$

$$\mu \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = \frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}$$

با محاسبهٔ ضریبها، نتیجه می‌شود

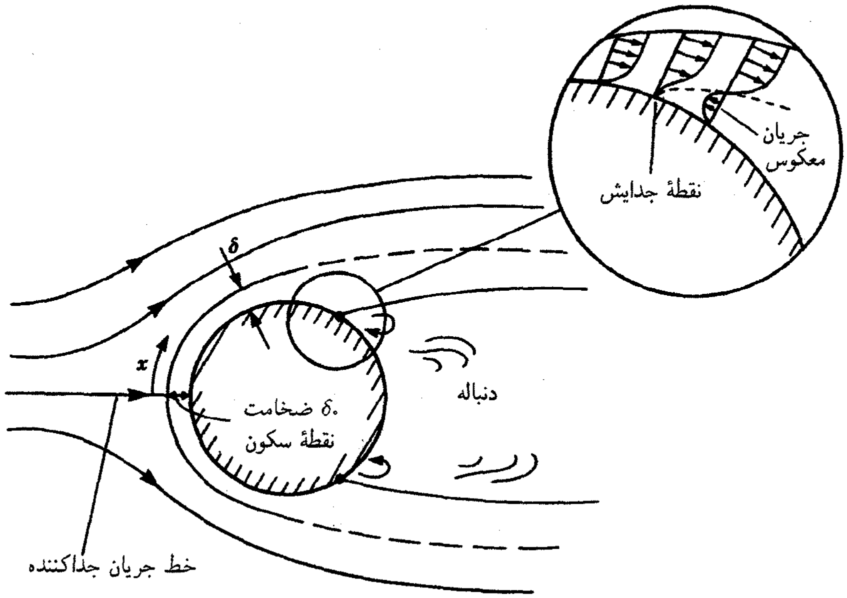
$$\frac{u}{U} = \left(\frac{۳}{۲} + \frac{\lambda}{۲}\right)\frac{y}{\delta} - \lambda\left(\frac{y}{\delta}\right)^۲ - \left(\frac{۱}{۲} - \frac{\lambda}{۲}\right)\left(\frac{y}{\delta}\right)^۳ \qquad (۵\text{-}۳۰)$$

که

$$\lambda = \frac{\delta^۲ \rho}{۲\mu}\frac{dU}{dx}$$

نیروی برشی دیواره در حالت $\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)|_{y=۰}$ عبارت است از

$$\tau_۰ = \mu\left(\frac{۳}{۲} + \frac{\lambda}{۲}\right)\frac{U}{\delta}$$



شکل ۵-۱۲ جدایش از استوانهٔ ساکن.

در نقطهٔ جدایش، $\tau_{\circ}$ صفر است و از رابطهٔ بالا مقدار λ را در نقطهٔ جدایش به‌دست می‌آوریم

$$\lambda = -۳ = \frac{\delta^{۲}\rho}{۲\mu}\frac{dU}{dx} \tag{۵-۳۱}$$

این، مقدار تقریبی λ در نقطهٔ جدایش است. با محاسبات دقیقتر نتیجهٔ متفاوتی به‌دست می‌آید. U را می‌توان از حل معادلهٔ جریان پتانسیل تعیین کرد، ولی δ را باید از محاسبات لایهٔ مرزی به‌دست آورد. در نتیجه، در عمل با مشکل روبه‌رو می‌شویم، زیرا تشکیل دنباله قویاً از طریق لایهٔ مرزی به جریان پتانسیل بستگی دارد. در بیشتر حالتها، از روشهای عددی پیچیدهٔ تکراری باید استفاده کرد و یا داده‌های تجربی به‌شکل $p(x)$ نیاز خواهد بود.

مسئلهٔ قابل توجهٔ دیگر در آئرودینامیک، رفتار لایهٔ مرزی در همسایگی نقطهٔ سکون است (شکل۵-۱۲). لبهٔ حمله یا دماغهٔ جسم، برخلاف صفحهٔ تخت با لبهٔ حملهٔ تیز، دارای سطحی نوک‌پهن و عمود بر جریان آزاد است. جریان درست در نقطه‌ای بر روی دماغه ساکن می‌شود و به دو قسمت جریان سطح زیر و سطح بالا تقسیم خواهد شد. درست در این نقطهٔ سکون، δ صفر نیست و ضخامتی متناهی دارد که می‌توان آن را محاسبه کرد. افزون بر این، برخلاف صفحهٔ تخت که $\tau_{\circ}$ به مقدار نامتناهی لبهٔ حمله می‌گراید، $\tau_{\circ}$ در نقطهٔ سکون صفر است، زیرا $\frac{\partial u}{\partial y} = \circ$.

برای سادگی از تقریب نیمرخ سرعت درجهٔ ۲ استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که

$$\frac{u}{U} = a + bx + cx^{۲}$$

و ضریبهای a، b، و c را با استفاده از شرایط $u = \circ$، $\frac{\partial u}{\partial y} = \circ$ در $y = \delta$ و $u = \circ$ در $y = \circ$ به‌دست می‌آوریم. یادآور می‌شویم که گرادیان فشار دخالتی در تعیین نیمرخ درجهٔ ۲ ندارد و بنابراین نیمرخ درجهٔ ۲ برای تعیین نقطهٔ جدایش کافی نیست. اما، بیان قابل قبولی دربارهٔ لایهٔ مرزی در نزدیکی نقطهٔ سکون ارائه می‌دهد. نتیجه عبارت است از

$$\frac{u}{U} = ۲(y/\delta) - (y/\delta)^{۲} \tag{۵-۳۲}$$

روش راحت‌تر، بسط جریان پتانسیل (که در فصل ۶ بحث خواهد شد) در سطح $U(x)|_{y=0}$ به شکل سری توانی x در فاصله‌ای از نقطهٔ ستون در امتداد سطح است.

$$U(x)|_{y=0} = U_\infty(Ax + Bx^2 + \dots) \tag{۵-۳۳}$$

که U_∞ سرعت جریان بسیار آزاد نسبت به جسم است (مثلاً، سرعت هواپیما)، با حفظ فقط جملهٔ $U_\infty Ax$ (که برای xهای کوچک در نزدیکی نقطهٔ سکون معتبر است) و نشاندن معادلات (۵-۳۲) و (۵-۳۳) در معادلهٔ (۵-۳) و انتگرال‌گیری در لایهٔ مرزی، خواهیم داشت

$$\frac{x}{15}\frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu}{A\rho U_\infty \delta} - \frac{9}{30}\delta \tag{۵-۳۴}$$

این رابطه فقط در نزدیکی نقطهٔ سکون معتبر است. مقدار δ_0 (δ در $x=0$)، یعنی ضخامت لایهٔ مرزی در نقطهٔ سکون را می‌توان فوراً یافت، زیرا $d\delta/dx = 0$ در $x = 0$، و طرف راست معادلهٔ (۵-۳۴) در $x = 0$ باید صفر باشد، بنابراین

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{30\mu}{9A\rho U_\infty}}$$
$$= 1{,}83\sqrt{\frac{\mu}{A\rho U_\infty}} \tag{۵-۳۵}$$

از نیمرخ سرعت درجهٔ ۳، داریم $\delta_0 = 2{,}4\sqrt{\frac{\mu}{A\rho U_\infty}}$ که تا دو رقم بامعنی جواب کاملاً دقیق است.

۵-۳ جریانهای بیرونی-برآ و پسا

هرگاه جسمی را در درون شاره‌ای جاری قرار دهیم (یا در درون شارهٔ ساکنی حرکت دهیم) نیرویی به آن در جهت حرکت شاره نسبت به جسم وارد می‌شود (نیروی پسای، D) و ممکن است در معرض نیروی عمودی بر جهت جریان (نیروی برآی L) قرارگیرد. این نیروها را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

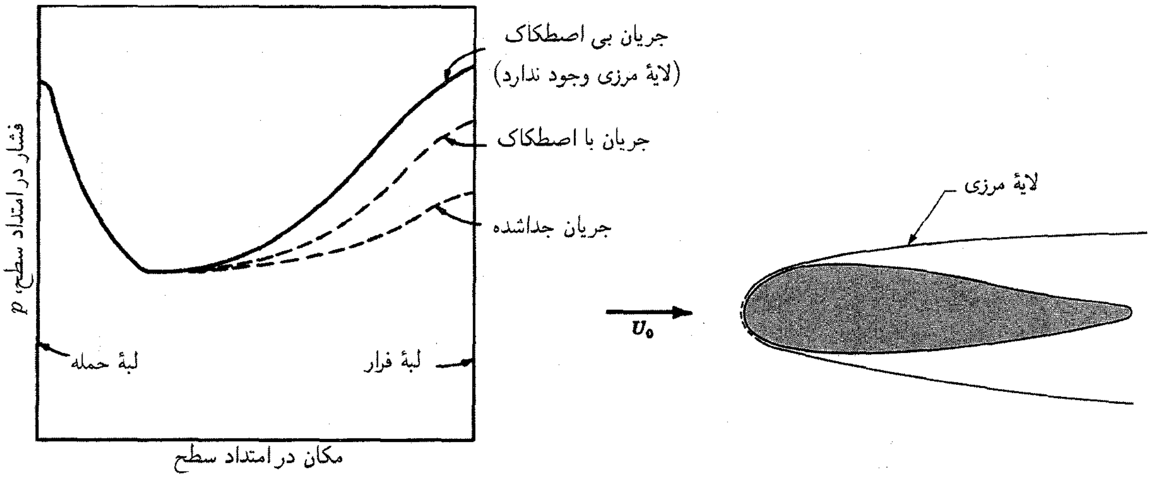
$$D = C_D(\rho V^2/2)A \tag{۵-۳۶}$$

$$L = C_L(\rho V^2/2)A \tag{۵-۳۷}$$

که A سطح مؤثر جسم، و معمولاً مساحت سطح یا مساحت تصویر جسم بر صفحهٔ عمود بر جریان است. معادلات (۵-۳۶) و (۵-۳۷) ضریب پسای C_D و ضریب برآی C_L را تعریف می‌کنند. در تمام حالتها، بجز چند حالت، این ضریبها را باید به‌طور تجربی تعیین کرد و معمولاً به عدد رینولدز بستگی دارند.

نیروهای پسا و برآ از جمع نیروهای مماسی و عمودی بر سطح جسم ناشی می‌شوند. پسای ناشی از تنشهای مماسی را پسای اصطکاکی، پسای اصطکاک پوستی، یا پسای گران‌روی می‌گویند. این نوع پسا، که مساحت سطح موازی با جهت جریان بسیار بزرگی در مقایسه با تصویر مساحت در جهت عمود بر جریان دارد، مهمترین نوع است. به عنوان مثال، پسای اصطکاک پوست عامل تمام پسای موجود بر روی صفحهٔ تخت موازی با جریان است.

پسای ناشی از تنشهای عمودی را پسای فشاری یا پسای شکل می‌گویند. پسای فشاری مهمتر است و غالباً برای اجسام نوک‌تیز به‌کار می‌رود. در فصل ۶ خواهیم دید که اگر شارهٔ گذرنده از روی جسم بی‌اصطکاک باشد و بنابراین لایهٔ مرزی وجود نداشته باشد، پسا صفر خواهد بود. اما، شاره بی‌اصطکاک نیست و لایهٔ مرزی وجود دارد. لایهٔ مرزی در شرایط گرادیان فشار معکوس سریعتر رشد می‌کند و اگرگرادیان فشار به قدر کافی بزرگ باشد، جدایش رخ می‌دهد. لایهٔ مرزی بزرگ یا دنبالهٔ موجود در قسمت عقب جسم به فشار کمتری نسبت به جریان بی‌اصطکاک منجر می‌شود. آنگاه، این افت فشار موجود در قسمت عقب جسم به نیروی خالصی در جهت جریان می‌انجامد که در شکل ۵-۱۳ دیده می‌شود.



شکل ۵-۱۳ اثر لایهٔ مرزی بر توزیع فشار در امتداد سطح جسم.

می‌بینیم که برای کاهش پسای فشاری باید مقدار گرادیان فشار معکوس را بر روی قسمت عقب جسم کاهش داد و در صورت امکان مانع جدایش شد. این بدان معناست که قسمت عقب جنسم باید به‌تدریج مخروطی شود. اما، اگر جسم خیلی دراز باشد، نتیجهٔ حاصل از کاهش پسای فشاری با افزایش پسای اصطکاک پوستی خنثی می‌شود. برای طراحی جسمی با پسای کمینه باید بین پسای اصطکاک پوستی و پسای فشاری مصالحه ایجاد کرد.

ضریبهای پسا برای جسمهایی با شکلهای مفروض عمدتاً به عدد رینولدز بستگی دارد. هرچند معمولاً شدت تلاطم جریان آزاد و زبری سطح فقط اثری جزئی بر روی پسا دارند، در شرایط خاصی (به‌ویژه، برای جسمهای غیرآئرودینامیکی که جدایش لایهٔ مرزی در آنها رخ می‌دهد) ممکن است بسیار مهم باشند. جدول ۵-۱ ضریبهای پسا را برای چند جسم با شکلهایی مختلف نشان می‌دهد. برای فهرست کامل ضریبهای پسا می‌توان به مرجع ۹ مراجعه کرد.

برآ را اساساً با تحلیل جریان بی‌اصطکاک در فصل ۶ توضیح می‌دهیم.

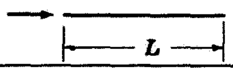
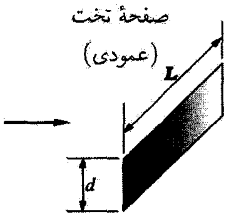
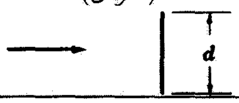
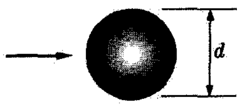
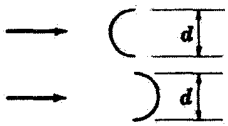
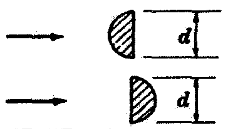
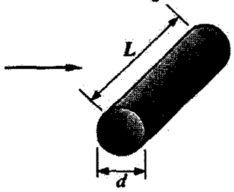
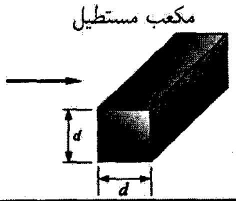
جریان گذرنده از روی استوانهٔ دایره‌ای را برای نمایش بعضی از نظرهایی که قبلاً دربارهٔ علتهای پسا بیان کردیم، در نظر می‌گیریم. ضریب پسا برای استوانهٔ دایره‌ای را در شکل ۵-۱۴ نشان داده‌ایم. این جریان را در شکل ۵-۱۵ می‌بینیم.

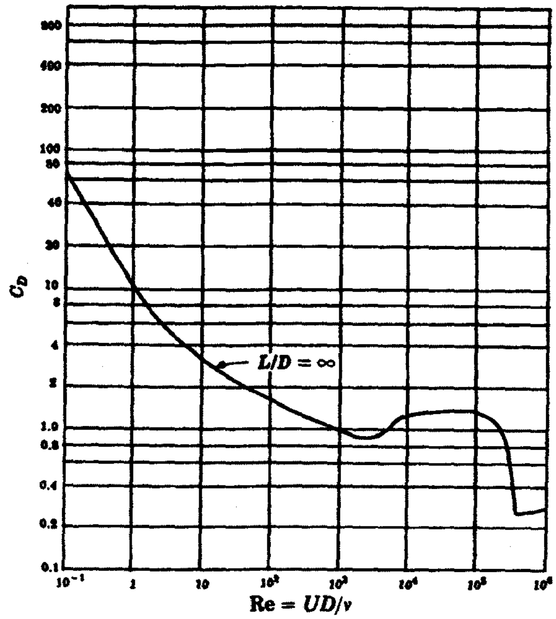
ویژگی جریان با عدد رینولدز تعیین می‌شود. برای مثال، برای عدد رینولدز خیلی کوچک ($\mathrm{Re} < ۱$) جریان از بستر جدا نمی‌شود و اصطکاک پوستی مهم است. برای عدد رینولدز بسیار کوچک، پسا متناسب با سرعت است و ضریب پسا با افزایش عدد رینولدز کاهش می‌یابد. با افزایش عدد رینولدز، جریان میل به جدایش دارد. این جدایش به‌طور تناوبی و به شکل ایجاد گردابه‌های کارمن انجام می‌گیرد. افزایش بیشتر در عدد رینولدز به جدایش کامل جریان می‌انجامد. لایهٔ مرزی لایه‌ای در قسمت جلو استوانه، به علت گرادیان فشار مطلوب نازک است. اما گرادیان فشار معکوسی در قسمت عقب به‌وجود می‌آید که به رشد سریع لایهٔ مرزی و جدایش می‌انجامد. برای لایهٔ مرزی لایه‌ای نقطهٔ جدایش در زاویهٔ ۸۱° از نقطهٔ سکون قرار دارد. پسای فشاری بسیار بیشتر از اصطکاک پوستی است و ضریب پسا برای این حالت نسبتاً ثابت می‌ماند.

لایهٔ مرزی در عدد رینولدز خاصی متلاطم می‌شود. در نتیجه کاهش ناگهانی در ضریب پسا به‌وجود می‌آید، زیرا نقطهٔ جدایش به تأخیر می‌افتد، که به پسای فشاری کمتر و بنابراین پسای کل کمتری می‌انجامد.

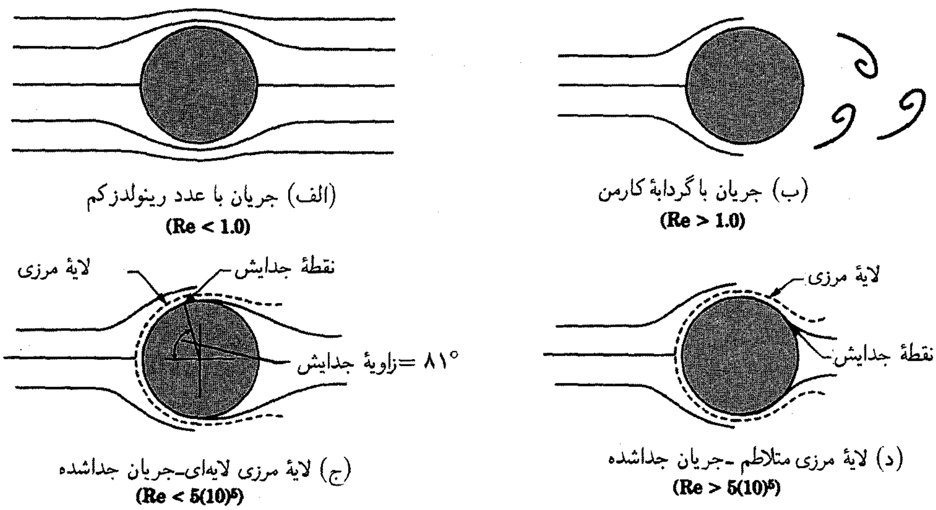
در شرایطی که جدایش اجتناب‌ناپذیر است، برای مثال در جریان موجود بر روی استوانهٔ دایره‌ای یا کره، معمولاً نیمرخ (یا پسای فشاری) در عددهای رینولدز متوسط تا زیاد بر پسای اصطکاکی غلبه می‌کند. برای کمینه‌سازی پسای نیمرخ، با افزایش میزان تلاطم در لایهٔ مرزی، می‌توان جدایش را به تأخیر انداخت (که اندازهٔ دنباله کاهش خواهد یافت). روش مؤثر برای افزایش تلاطم، زبر کردن سطح است. برای مثال، توپهای گلف را برای کاهش پسا و افزایش شدید برد پروازسان، «چاله‌دار» می‌سازند. همین‌گونه، روکش توپهای بیس‌بال را زبر و ناصاف می‌سازند.

جدول ۵-۱ ضریبهای پسا

مساحت مشخصه	طول مشخصه	گسترهٔ عدد رینولدز	C_D	جسم
مسافت سطح تخت	L	آرام	$1.33(\text{Re})^{-1/2}$	صفحهٔ تخت (مماسی) 
		$\text{Re} < 10^7$	$0.074(\text{Re})^{-1/5}$	
مسافت سطح تخت	d	$\text{Re} > 10^3$	L/d 1 1.18 5 1.2 10 1.3 20 1.5 30 1.6 ∞ 1.95	صفحهٔ تخت (عمودی) 
	d	$\text{Re} > 10^3$	1.17	قرص دایره‌ای (عمودی) 
سطح تصویرشده	d	$\text{Re} < 1$	$24(\text{Re})^{1/2}$	کره 
		$10^3 < \text{Re} < 3 \times 10^5$	0.47	
		$\text{Re} > 3 \times 10^5$	0.2	
سطح تصویرشده	d	$10^4 < \text{Re} < 10^6$	0.34	نیمکرهٔ توخالی 
		$10^4 < \text{Re} < 10^6$	1.42	
سطح تصویرشده	d	$10^4 < \text{Re} < 10^6$	0.42	نیمکرهٔ توپر 
		$10^4 < \text{Re} < 10^6$	1.17	
سطح تصویرشده	d	$10^3 < \text{Re} < 10^5$	L/d 1 0.63 5 0.8 10 0.83 20 0.93 30 1.0 ∞ 1.2	استوانهٔ دایره‌ای 
سطح تصویرشده	d	$3.5(10)^4$	2.0	مکعب مستطیل 



شکل ۵-۱۴ ضریبهای پسا برای استوانه‌های دایره‌ای.



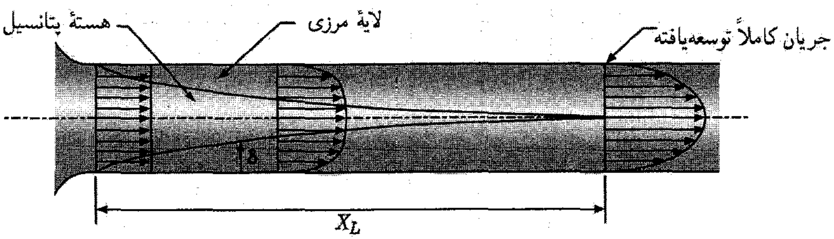
شکل ۵-۱۵ جریان گذرنده از روی استوانهٔ دایره‌ای.

۵-۴ جریان درونی

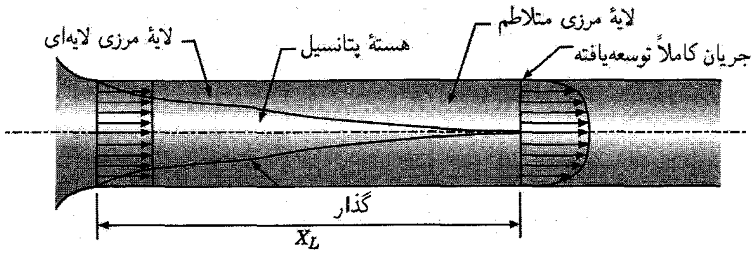
۵-۴-۱ جریانهای ورودی

جریانهای درونی با جریانهای بیرونی متفاوت‌اند، زیرا در ناحیهٔ ورودی آنها لایهٔ مرزی و جریان آزاد یکنواختی به‌وجود می‌آید که متناظر با آهنگ رشد لایهٔ مرزی شتاب می‌گیرد. دومین و مهمترین تفاوت وقتی به‌وجود می‌آید که جریان کاملاً توسعه‌یافته باشد. در اینجا، سرعت در سرتاسر کانال تغییر می‌کند و هیچ جریان آزاد یا لایهٔ مرزی کاملاً تعریف‌شده‌ای وجود نخواهد داشت.

جریانی لایه‌ای را در ناحیهٔ ورودی لوله‌ای همچون شکل ۵-۱۶ در نظر بگیرید. سرعت در ورودی یکنواخت است. لایهٔ مرزی برحسب فاصله



شکل ۵-۱۶ جریان در ناحیهٔ ورودی لوله در جریان لایه‌ای.



شکل ۵-۱۷ جریان در ناحیهٔ ورودی لوله در جریان متلاطم.

از ورودی تا مکانی که جریان کاملاً توسعه‌یافته می‌شود، رشد می‌کند. با توجه به معادلهٔ پیوستگی، هستهٔ مرکزی جریان بی‌اصطکاک باید شتاب بگیرد. بدین ترتیب، با نوشتن معادلهٔ برنولی در امتداد خط جریان در این ناحیهٔ جریان آزاد، می‌بینیم که فشار باید کاهش یابد. طول X_L برای تبدیل جریان به جریان توسعه‌یافتهٔ کامل در رابطهٔ بوسی‌نسک به‌دست می‌آید

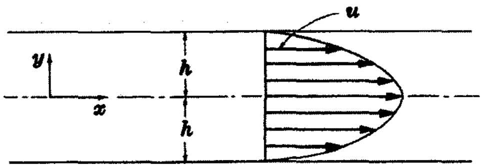
$$X_L = ۰٫۰۳\ \mathrm{Re} D$$

شکل۵-۱۷ جریان موجود در ناحیهٔ ورودی را برای حالتی نشان می‌دهد که عدد رینولدز به‌قدر کافی برای متلاطم‌شدن بزرگ است ($\mathrm{Re} > ۲۳۰۰$). معیارهای متعددی برای ایجاد جریان کاملاً توسعه‌یافته وجود دارد. مثلاً، می‌توان ایجاد جریان کاملاً توسعه‌یافته را مبتنی بر افت فشار، توزیع سرعت میانگین، یا کمیتهای تلاطم تعریف کرد. طولهای واقعی برای این حالتها کاملاً متفاوت‌اند. معمولاً گرادیان فشار در جریان کاملاً توسعه‌یافته به طولی معادل ۳ تا ۴ برابر قطر لوله از ناحیهٔ ورودی نیاز دارد. سرعت میانگین هم برای ایجاد جریان کاملاً توسعه‌یافته به ۳۰ تا ۶۰ برابر قطر ابتدای ورودی نیاز دارد و برای کمیتهای تلاطمی طول بیشتری نیاز است. به‌طور دقیق‌تر، شرط برقراری جریان کاملاً توسعه‌یافته آن است که باید آهنگ تغییر تمام کمیتهای میانگین (بجز فشار) نسبت به آن مختصه در جهت جریان صفر باشد. اما، معیاری که غالباً در نوشته‌ها، به‌کار می‌رود، مبتنی بر نقطه‌ای است که نیمرخهای سرعت میانگین نسبت به فاصله در جهت جریان تغییر نمی‌کنند.

۵-۴-۲ جریانهای کاملاً توسعه‌یافته

گذار

جریان در لوله ممکن است با نظم و هموار (لایه‌ای) یا بی‌نظم و دارای حرکت نوسانی (متلاطم) سوار بر جریان میانگین باشد. مشخصهٔ جریان را زبری دیواره و عدد رینولدز تعیین می‌کنند. این موضوع را می‌توان با آزمایش قدیمی رینولدز نشان داد. مایعی رنگی را به درون لولهٔ شیشه‌ای حاوی شاره می‌ریزیم. وقتی که آهنگ جریان کم است، رنگ به شکل خط صافی در می‌آید. با افزایش آهنگ جریان، به نقطه‌ای می‌رسیم که رنگ از هم پاشیده می‌شود و طرحهای ناهمواری به‌وجود می‌آید که بیانگر جریان متلاطم است. عدد رینولدز برای گذار از حالت جریان لایه‌ای به جریان متلاطم تقریباً ۲۳۰۰ است. اما، در شرایط خاص، گذار ممکن است در عددهای بالاتر از ۴۰۰۰۰ نیز رخ دهد.



شکل ۵-۱۸ جریان لایه‌ای کاملاً توسعه‌یافته بین دیوارهای موازی.

جریان لایه‌ای

جریان لایه‌ای کاملاً توسعه‌یافته‌ای را بین دیواره‌های موازی، همچون شکل ۵-۱۸، در نظر می‌گیریم. سرعت فقط تابع y است. (به گونه‌ای که می‌توان du/dy را به‌جای $\partial u/\partial y$ قرار داد) و مقداری بیشینه در مرکز و مقدار صفر در دیواره‌ها دارد. توزیع سرعت نیز حول محور y متقارن است.

در این حالت، معادلهٔ حرکت در جهت x به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\circ = -dp/dx + \mu(d^{\text{۲}}u/dy^{\text{۲}})$$

با انتگرال‌گیری، داریم

$$\mu(du/dy) = (dp/dx)y + C_{\text{۱}}$$

و با استفاده از این شرط که در $y = \circ$، $du/dy = \circ$، داریم $C_{\text{۱}} = \circ$. چون $dp/dx = \text{const.}$، برای جریان کاملاً توسعه‌یافتهٔ $\tau = \mu(du/dy)$، خواهیم داشت

$$\tau = (dp/dx)y$$

بنابراین، تنش برشی تابع خطی y است. این نتیجه برای جریان متلاطم هم به‌کار می‌رود.

اگر دوباره از این معادله انتگرال بگیریم، با استفاده از این شرط که در $y = h$، $u = \circ$، داریم

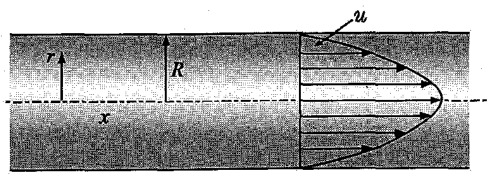
$$u = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\mu}\frac{dp}{dx}(y^{\text{۲}} - h^{\text{۲}}) \qquad \text{(۵-۳۸)}$$

سپس جریان لایه‌ای کاملاً توسعه‌یافته را در لوله‌ای گرد، همچون شکل ۵-۱۹، در نظر می‌گیریم. چنین جریانی را به عنوان جریان پوازوی می‌شناسند. دوباره، با به‌کارگیری معادلهٔ حرکت و شرایط مرزی و انتگرال‌گیری مستقیم، داریم

$$\circ = -\frac{dp}{dx} + \mu\left(\frac{d^{\text{۲}}u}{dr^{\text{۲}}}\right)$$

با رعایت شرایط مرزی $u = \circ$ در $r = R$ و $\partial u/\partial r = \circ$ در $r = \circ$ خواهیم داشت

$$u = \frac{\text{۱}}{\text{۴}\mu}\frac{dp}{dx}(r^{\text{۲}} - R^{\text{۲}}) \qquad \text{(۵-۳۹)}$$



شکل ۵-۱۹ جریان لایه‌ای کاملاً توسعه‌یافته.

آهنگ جریان Q از انتگرال‌گیری سرعت در سطح مقطع لوله به‌دست می‌آید

$$Q = \int_{۰}^{R} ۲\pi r u dr = -\frac{\pi R^{۴}}{۸\mu}\frac{dp}{dx} \tag{۵-۴۰}$$

برای جریان موجود در جهت مثبت x (Q مثبت)، گرادیان فشار باید منفی باشد (یعنی، فشار در جهت x کاهش می‌یابد). گرادیان فشار با نیروی اصطکاکی تأخیری خنثی می‌شود. لوله‌ای به طول Δx را در جهت x در نظر می‌گیریم. به عنوان روش جایگزین، به‌جای شروع از معادلهٔ حرکت، موازنهٔ کلی نیروهای وارد بر شاره را در لوله‌ای به شعاع R به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\left(p\big|_x - p\big|_{x+\Delta x}\right)\pi R^{۲} + ۲\pi R\Delta x\left(\mu\frac{du}{dr}\right)_{r=R} = ۰$$

که نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌دهد

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{R}\frac{du}{dr}\Big|_{r=R}$$

اگر لوله‌ای با شعاع اختیاری r انتخاب کنیم، از موازنهٔ نیروها، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{r}\frac{du}{dr}$$

که همان اولین انتگرال معادلهٔ حرکت است. از انتگرال‌گیری بعدی نیمرخ سرعت (۵-۳۹) به‌دست می‌آید.

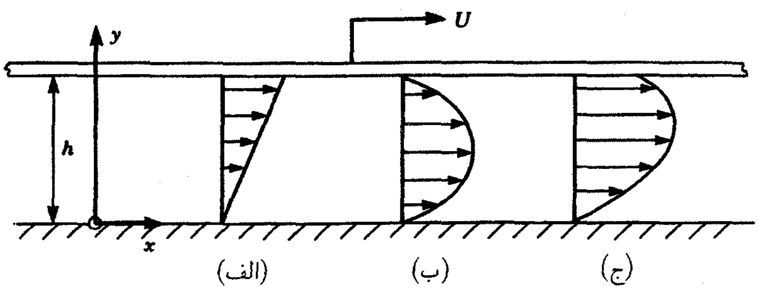
جریان کوته

جریان کوته جریان موجود بین دو سطح موازی (یا تقریباً موازی) است که یکی از آنها در صفحهٔ خود حرکت می‌کند. اگر هر دو سطح ساکن باشند، جریان به‌صورت سادهٔ جریان پوازوی در می‌آید، که در بخش قبل بحث شد. با توجه به شکل۵-۲۰، بهتر است دستگاه مختصاتی متصل به کف صفحهٔ ساکن را در نظر بگیریم. (هر دو صفحه را در جهت خارج از صفحه، بزرگ فرض می‌کنیم.) دو صفحه به فاصلهٔ h از یکدیگرند. همان‌گونه که در بحث جریان پوازوی گفته شد، معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$۰ = -\frac{dp}{dx} + \mu\frac{d^{۲}u}{dy^{۲}}$$

ولی اکنون شرایط مرزی عبارت‌اند از $u = ۰$، $y = ۰$ و $u = U$، $y = h$. با دوبار انتگرال‌گیری و اعمال شرایط مرزی، داریم

$$u = \frac{۱}{۲\mu}\frac{dp}{dx}(y^{۲} - hy) + \frac{Uy}{h}$$



شکل ۵-۲۰ جریان کوته (الف) نیمرخی خطی را در صورت نبودن گرادیان فشار نشان می‌دهد، (ب) جریان پوازوی را در شرایط $U = ۰$ و وجود گرادیان فشار نشان می‌دهد، $dp/dx < ۰$ و (ج) جریان کلی کوته را نشان می‌دهد که برهم‌نهش دو جریان (الف) و (ب) است.

که به‌صورت برهم‌نهش نیمرخی خطی (ناشی از حرکت سطح بالا) و نیمرخ درجهٔ ۲ ناشی از گرادیان فشار دیده می‌شود. این نیمرخ درجهٔ ۲ اندکی متفاوت از معادلهٔ (۵-۳۸) است، زیرا در اینجا h را متفاوت تعریف کرده‌ایم و مبدأ را برای y در صفحهٔ زیر، به‌جای خط مرکزی، فرض کرده‌ایم. خواننده باید ثابت کند که هر دو رابطه هم‌ارزند.

با انتگرال‌گیری از نیمرخ سرعت در پهنای شاره، آهنگ جریان در واحد عمق (به سوی صفحهٔ کتاب) به‌دست می‌آید

$$Q = \int_{\circ}^{h} u dy = -\frac{h^{۳}}{۱۲\mu}\frac{dp}{dx} + \frac{Uh}{۲} \qquad (۵\text{-}۴۱)$$

ضریب اصطکاک و افت هد

افتهای فشار در جریانهای درونی در نتیجهٔ اصطکاک رخ می‌دهند. این افتها، که از نظر مهندسی اهمیت دارند، ممکن است در لوله‌ها یا مجراهای صاف (افتهای اصلی) یا در انبساطهای ناگهانی، شیرها، زانوییها، و غیره (افتهای جزئی) رخ دهند.

معادلهٔ انرژی برای حجم معیار موجود بین دو نقطه در کانال جریان به‌صورت زیر است

$$V_{۱}^{۲}/۲ + p_{۱}/\rho + gz_{۱} = V_{۲}^{۲}/۲ + p_{۲}/\rho + gz_{۲} + u_{۲} - u_{۱} - q$$

یا

$$V_{۱}^{۲}/۲g + p_{۱}/\rho g + z_{۱} = V_{۲}^{۲}/۲g + p_{۲}/\rho g + z_{۲} + H_L \qquad (۵\text{-}۴۲)$$

که $H_L = (u_{۲} - u_{۱} - q)/g$ افت هد، و u انرژی درونی ویژه است. جملهٔ H_L، در واقع، کاهش (افت) انرژی مکانیکی را بین نقطه‌های ۱ و ۲ نشان می‌دهد و به‌طور کلی شامل هر دو افت اصلی و جزئی است.

اکنون، روشهای تعیین افتها را بررسی می‌کنیم. برای تعیین افتهای جریان متلاطم روش تحلیلی محضی وجود ندارد. بنابراین، ماهیت نتیجه‌ها قویاً تجربی است.

نخست، روش تعیین افتهای اصلی را بررسی می‌کنیم. تحلیل ما به جریان متلاطم تراکم‌ناپذیر کاملاً توسعه‌یافته در لوله‌ای با قطر ثابت محدود می‌شود.

با مشاهدهٔ معادلهٔ (۵-۴۲)، درمی‌یابیم که تغییرات فشار از تغییرات سرعت، تغییرات ارتفاع، و افتهای اصطکاکی ناشی می‌شود. برای مساحت ثابت و حالت تراکم‌ناپذیری، داریم $V_{۱} = V_{۲}$ و $z_{۲} = z_{۱}$. بنابراین، معادلهٔ (۵-۴۲) به‌صورت $H_L = (p_{۱} - p_{۲})/\rho g$ در می‌آید.

معلوم شده است که تغییر فشار به (۱) قطر لولهٔ D، (۲) سرعت متوسط V، (۳) طول L، (۴) گران‌روی μ، (۵) چگالی ρ، و (۶) زبری دیوارهٔ ϵ بستگی دارد. بنابراین

$$\Delta p = F(D, V, L, \mu, \rho, \epsilon)$$

از تحلیل ابعادی چهار پارامتر بی‌بعد را به‌دست می‌آوریم، یا

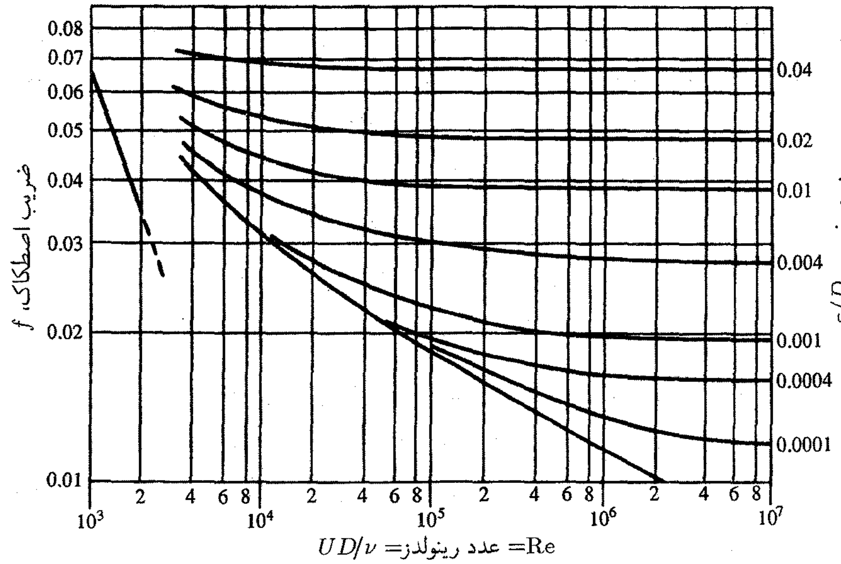
$$\frac{\Delta p}{\rho V^{۲}} = G\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{L}{D}\right)$$

آزمایشها نشان می‌دهند که از ترکیب دو پارامتر، داریم

$$\frac{\Delta p}{\frac{۱}{۲}\rho V^{۲}}\left(\frac{D}{L}\right) = f\left(\rho V\frac{D}{\mu}, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

یا

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = H_L = \left(\frac{L}{D}\right)\frac{V^{۲}}{۲g}f \qquad (۵\text{-}۴۳)$$



شکل ۵-۲۱ ضریبهای اصطکاک برای جریان در لوله‌ها.

که f ضریب اصطکاک است. ضریب اصطکاک به‌طور تجربی تعیین شده است و نتیجه‌ها را در شکل ۵-۲۱ نشان داده‌ایم. توجه کنید که برای عددهای رینولدز زیر ۲۰۰۰ فقط یک منحنی وجود دارد، زیرا جریان لایه‌ای است. ضریب اصطکاک برای جریان لایه‌ای از روش تحلیلی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید (مسئلهٔ ۵-۶) را ببینید

$$f = ۶۴/\mathrm{Re} \tag{۵-۴۴}$$

ضریب اصطکاک f را به‌عنوان ضریب اصطکاک دارسی می‌شناسند و آن را برحسب تنش برشی دیوارهٔ $\tau_۰$ به‌صورت $f = ۸\tau_۰/\rho V^۲$ تعریف می‌کنند. این رابطه را می‌توان با در نظرگرفتن تعادل ایستای حجم معیار شاره با موازنهٔ نیروهای فشار و نیروهای برشی اثبات کرد.

گام بعد، بررسی افتهای جزئی است. برای محاسبهٔ افت زانوییها، شیرها و انبساطها باید از آزمایش کمک گرفت. معمولاً این‌گونه افتها را به‌صورت زیر می‌نویسند

$$H_L = KV^۲/۲g \tag{۵-۴۵}$$

که K ضریب افت اصطکاکی برای انواع مختلف افتهای جزئی است و مقدار آن را برای اتصالات لوله‌های تجاری در دست‌نامه‌ها آورده‌اند. جدول ۵-۲ شامل مقدارهای تقریبی K است.

توزیعهای سرعت برای جریان متلاطم

توزیعهای سرعت نمونه‌وار را برای جریان کاملاً توسعه‌یافته درون لوله در شکل ۵-۲۲ نشان داده‌ایم. سرعت را به‌وسیلهٔ سرعت قانون توانی، همان‌گونه که قبلاً برای صفحهٔ تخت به‌کار رفت، به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم

$$u/u_{\max} = (y/R)^{۱/n} \tag{۵-۴۶}$$

که y فاصلهٔ مرکزی از دیوارهٔ لوله است.

نمای $۱/n$ برحسب عدد رینولدز دارای تغییرات خفیفی از $\frac{۱}{۶}$ تا $\frac{۱}{۱۰}$ برای عددهای رینولدز بین ۴×۱۰^۳ تا ۳×۱۰^۶ است.

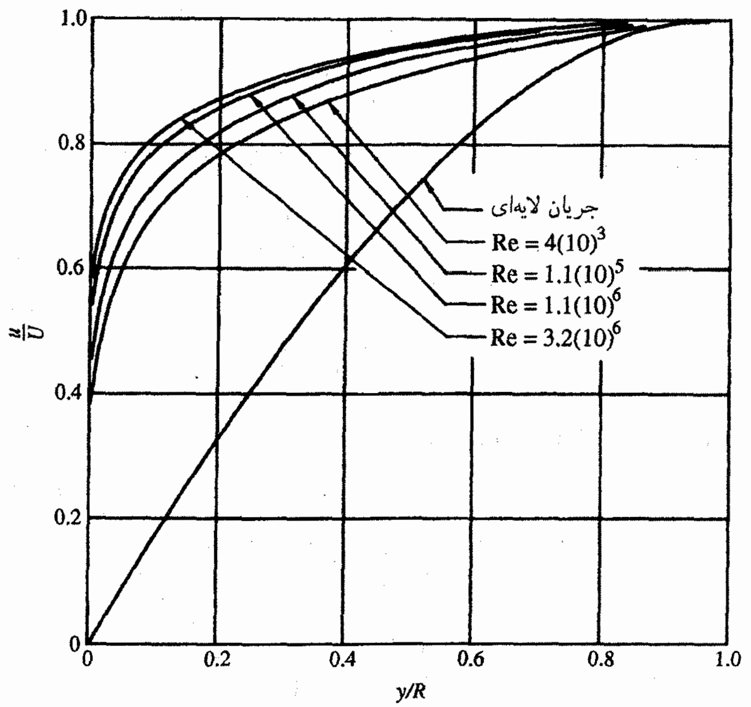
شکل لگاریتمی قانون دیواره را می‌توان برای تقریب توزیع سرعت، بجز برای ناحیهٔ دور از خط مرکزی، به‌کار برد. در این حالت، داریم

$$\frac{u}{u_\tau} = ۲{,}۴۴\ln(yu_\tau/\nu) + ۴{,}۹ \tag{۵-۴۷}$$

جدول ۵-۲ ضریبهای افت هد برای افتهای جزئی، K

شیرها، اتصالات و لوله‌ها	K
شیرفلکهٔ بشقابی (با دهانهٔ باز)	۰ر۱۰
شیرفلکه کشویی (با دهانهٔ باز)	۰ر۱۹
زانویی ۹۰°	۰ر۹۰
زانویی ۴۵°	۰ر۴۲
دهانهٔ لبهٔ تیز به طرف لولهٔ مدور	۰ر۵۰
دهانهٔ گردشده به طرف لوله مدور	۰ر۲۵
انبساط ناگهانی	$(1 - A_1/A_2)^{2*}$

* مساحت بالادست جریان A_1 و مساحت پایین‌دست جریان A_2 است



شکل ۵-۲۲ توزیع سرعت برای جریان کاملاً توسعه‌یافته در لوله‌های صاف (مرجع ۱۴).

۵-۵ ویژگیهای گرمایی جریان گران‌رو

در بخشهای پیشین بحث خود را روی جریان تراکم‌ناپذیر متمرکز کردیم. اگر جریان تراکم‌پذیر می‌بود، چگالی به فشار و دما بستگی می‌داشت و معادلهٔ انرژی باید همراه با معادلات حرکت و پیوستگی برآورده می‌شد، که محاسبات را بسیار پیچیده می‌کرد. غالباً جریان تراکم‌پذیر را به‌صورت فرایند تک‌دما یا تک‌آنتروپی تقریب می‌زنند، که ساده‌سازی خوبی است. این تقریبها را در فصلهای آینده بررسی خواهیم کرد. وانگهی، حتی اگر جریان تراکم‌ناپذیر باشد، در صورت مهم بودن تغییرات گران‌روی برحسب دما، دما را می‌توان در معادلات توصیفی وارد کرد.

در حال حاضر، دربارهٔ چنین مسئله‌هایی که دارای یک جفت پارامتر انرژی و حرکت هستند و باید آنها را به‌طور همزمان حل کرد، بیشتر بحث نمی‌کنیم. اما، توزیع دما را در جریان تراکم‌ناپذیر با گران‌روی ثابت می‌توان مستقیماً پس از یافتن نیمرخ سرعت به‌دست آورد، زیرا سرعت و فشار به دما و انرژی بستگی ندارند. غالباً به این توزیع دما در شاره، به‌ویژه برای یافتن مشخصه‌های انتقال گرما در شارهٔ جاری، نیاز است. ضریبهای لایهٔ فیلم نازک همرفت را می‌توان با تعیین نیمرخ دما در لایهٔ مرزی روی سطح، که سطح و جریان آزاد موجود دماهای متفاوتی دارند، به‌دست آورد.

به عنوان مثالی ساده، نیمرخ دما را در جریان کاملاً توسعه‌یافته کوته (جریان لایه‌ای)، جایی که دو صفحه را در دماهای متفاوت نگه داشته‌اند، به‌دست می‌آوریم. گرمای ایجاد شده به‌وسیلهٔ نیروی برشی گران‌رو (اتلاف گران‌رو) را، هرچند در بسیاری از شرایط کاربردی ناچیز است، به‌حساب می‌آوریم. شرایط نمونه‌واری که اتلاف آنها اهمیت دارد، عبارت‌اند از جریانهای برشی قوی (همچون لایه‌های نازک روغن)، لایهٔ مرزی در پروازهای با سرعت بالا (فراصوتی) و در جریانهای با آهنگ جریان زیاد در لوله‌ها. در لوله‌های نفت آلاسکا (که عایق‌بندی شده است) دمای نفت را به‌طور چشمگیری بالاتر از دمای محیط، در نتیجهٔ اتلاف اصطکاکی، نگه می‌دارند.

جریان پایای کاملاً توسعه‌یافتهٔ کوته (بدون گرادیان فشار) را در شکل ۵-۲۳ نشان داده‌ایم. نیمرخ خطی سرعت به‌طور ساده عبارت است از

$$\frac{u}{U}=\frac{y}{h}$$

معادلهٔ کلی انرژی (۳-۶۷) به‌شکل سادهٔ زیر در می‌آید

$$\circ=\kappa\frac{\partial^{2}T}{\partial y^{2}}+\Phi$$

تابع اتلاف به‌صورت سادهٔ $\mu(\partial u/\partial y)^{2}$ تبدیل می‌شود و u فقط تابع y است، بنابراین معادلهٔ انرژی مناسب عبارت است از

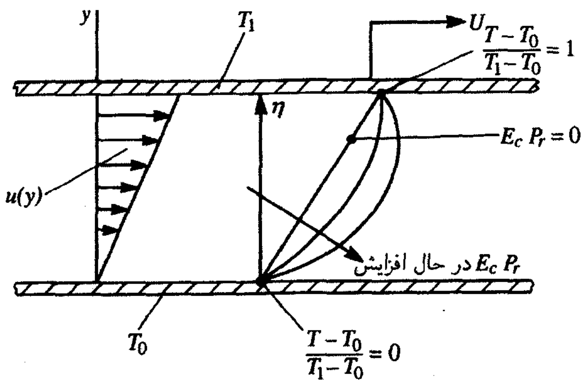
$$\circ=\kappa\frac{d^{2}T}{dy^{2}}+\mu\left(\frac{du}{dy}\right)^{2}$$

و با استفاده از نیمرخ خطی سرعت، داریم

$$\frac{d^{2}T}{dy^{2}}=-\frac{\mu}{\kappa}\left(\frac{U}{h}\right)^{2} \qquad (۵\text{-}۴۸)$$

شرایط مرزی عبارت‌اند از $T=T_\circ$ در $y=\circ$ و $T=T_1$ در $y=h$. جواب معادله با انتگرال‌گیری مستقیم نسبت به T به‌دست می‌آید و برای سادگی به شکل بی‌بعد زیر بیان می‌شود

$$\frac{T-T_\circ}{T_1-T_\circ}=\frac{y}{h}+\frac{\mu U^{2}}{2\kappa(T_1-T_\circ)}\left(\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{y}{h}\right) \qquad (۵\text{-}۴۹)$$



شکل ۵-۲۳ نیمرخ دما در جریان کوته.

نیمرخ دما را، با استفاده از پارامترهای بی‌بعد عدد پرنتل و عدد اکرت، می‌توان بیشتر ساده کرد. عدد پرنتل P_r را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند

$$P_r = \frac{\mu c_p}{\kappa} = \frac{\nu}{\alpha} \approx \frac{\mu c_v}{\kappa}$$

که α پخشندگی گرمایی و برابر $\kappa/\rho c_p$ است (با توجه به این موضوع که برای مایعات $c_p \approx c_v$ است). عدد اکرت E_c به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_c = \frac{U^۲}{c_p(\Delta T)} \approx \frac{U^۲}{c_v(\Delta T)}$$

که ΔT اختلاف دمای مشخصه $(T_۱ - T_۰)$ است. معادلهٔ (۵-۴۸) را می‌توان به شکل بی‌بعد زیر نوشت

$$\frac{T - T_۰}{T_۱ - T_۰} = \eta - \frac{۱}{۲} E_c P_r \eta(۱ - \eta) \tag{۵-۵۰}$$

که $\eta = y/h$، این نیمرخ را در شکل ۵-۲۳ رسم کرده‌ایم.

حاصل‌ضرب $E_c P_r$ معیار بی‌بعد اتلاف است، و اگر مقدار این جمله ناچیز باشد، نیمرخ دما خطی مستقیم است.

ویژگی جالب دیگر این مسئله بی‌دررو بودن دمای دیواره است. اگر صفحهٔ بالا را عایق‌بندی کنیم و صفحهٔ پایین را در دمای $T_۰$ نگه داریم، دمای صفحهٔ بالا از نظر گرمایی «شناوری» خواهد بود و (از نظر ترمودینامیکی) دمای آن برابر دمای دیوارهٔ بی‌دررو T_{ad} است. T_{ad} را می‌توان با صفر کردن شار گرمایی ورودی به صفحهٔ بالا و حل معادله برای دمای دیواره یا صفحه به‌طور مستقیم به‌دست آورد. از معادلهٔ (۵-۴۹)، $dT/dy|_{y=h} = ۰$ و حل آن برای $T_۱$ که در حقیقت T_{ad} است نتیجه می‌شود

$$T_{ad} - T_۰ = \frac{\mu U^۲}{۲\kappa} \tag{۵-۵۱}$$

یا برحسب عدد اکرت E_{ad}، که برحسب $(T_{ad} - T_۰)$ بیان می‌شود، با کمال تعجب به نتیجهٔ سادهٔ زیر می‌رسیم

$$E_{ad} P_r = ۲ \tag{۵-۵۲}$$

ویژگیهای گرمایی جریان شاره را در این زمان دیگر پی نمی‌گیریم، ولی باید توجه داشت که مفهوم تولید گرما توسط اتلاف گرمایی از دید مکانیک شاره‌ها بسیار مهم است.

۵-۶ خلاصه

در این فصل جریان با اصطکاک را بررسی کردیم. برای سادگی، این بحث را به جریانهای درونی و بیرونی تقسیم کردیم. نوع اول با جریان موجود در پیرامون جسمها و نوع دوم با جریانهای درون لوله‌ها و مجراها سر و کار دارد.

برای جریانهای بیرونی رابطه‌هایی برای رشد لایهٔ مرزی بر روی صفحهٔ تخت، معادلهٔ (۵-۶)، و برای تنش برشی، معادلهٔ (۵-۷)، به‌دست آوردیم. این معادلات از معادلهٔ انتگرال تکانهٔ حجم معیار، با فرض توزیع سرعت موردنظر، به‌دست آمدند.

توزیع سرعت بلاسیوس برای جریان لایه‌ای روی صفحهٔ تخت با گرادیان فشار صفر ارائه شد. همچنین، دربارهٔ روشهای توصیف توزیع سرعت جریانهای متلاطم بحث شد، که عبارت‌اند از

[۵-۲۵] قانون توانی $\quad u/U = (y/\delta)^{m/(۲-m)}$

[۵-۲۸] شکل لگاریتمی قانون دیواره $\quad u/u_\tau = ۲٫۴۴ \ln(yu_\tau/\nu) + ۴٫۹$

[۵-۲۹] شکل لگاریتمی قانون نقص سرعت $\quad (U - u)/u_\tau = -۲٫۴۴ \ln(y/\delta) + ۲٫۵$

روشهای بیان پسا و برآ ارائه شد. دو نوع پسا وجود دارد: یکی پسای *اصطکاک پوستی*، که به تنشهای مماسی بستگی دارد، و دیگری پسای شکل، که به توزیع فشار بستگی خواهد داشت.

پسای فشاری به‌شدت تحت تأثیر جدایش است که در نقطه‌ای بر روی قسمت عقب جسم رخ می‌دهد. مکان نقطهٔ جدایش را به کمک آهنگ رشد لایهٔ مرزی تعیین می‌کنند، که خود به‌وسیلهٔ گرادیان فشار خارجی تعیین می‌شود. جریان متلاطم باعث به تأخیر افتادن جدایش و کاهش پسای فشاری خواهد شد.

جریانهای درونی را برحسب جریانهای ورودی و جریانهای کاملاً توسعه‌یافته در نظر گرفتیم. توزیع سرعتها را برای جریان لایه‌ای کاملاً توسعه‌یافتهٔ موجود بین دیواره‌های موازی و در لوله‌های گرد به‌دست آوردیم.

گذار از جریان لایه‌ای به جریان متلاطم لولهٔ گرد وقتی اتفاق می‌افتد که عدد رینولدز ۲۳۰۰ باشد، هرچند مقدارهای بسیار بزرگتری در شرایط خاص اندازه‌گیری شده است. تنش برشی برای هر دو جریان لایه‌ای و متلاطم کاملاً توسعه‌یافته را به‌دست آوردیم، که تابع خطی فاصله از خط مرکزی است.

تغییرات فشار را در جریان درونی به روشی کاملاً تجربی برحسب «هد» یا «افت اصطکاک» ارائه کردیم. نتیجه‌ها را برای جریان موجود در لوله‌های با قطر ثابت برحسب ضریب اصطکاک، که به عدد رینولدز و زبری دیواره بستگی دارد، ارائه کردیم. برای انواع دیگر افتها (زانوییها، شیرها، و جز آن) افتها را برحسب ضریب افت تجربی به‌دست آوردیم.

مراجع

1. Anderson, D. A. Tannehill, J. C., and Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corp., 1984.
2. Baker, A. J., *Finite Element Computational Fluid Mechanics*, Hemisphere Publishing Corp., 1983.
3. Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
4. Bird, R. B., Stewart, W. E., and Lightfoot, E. N., *Transport Phenomena*, John Wiley, 1960.
5. Blasius, H., "Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung," *Z. Math. u. Phys.*, 56, 1, 1908, English translation NACA TM, No. 1256.
6. Clauser, F. H., *The Turbulent Boundary Layer, Advances in Applied Mechanics*, Vol. 4, pp. 1–51, Academic Press, 1956.
7. Fletcher, C. A. J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Vols. I and II, Springer-Verlag, 1988.
8. Goldstein, S., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Vols. I and II, Oxford University Press, 1938; also Dover Publications.
9. Hoerner, S. F., *Fluid Dynamic Drag*, published by author, Midland Park, New Jersey, 1958.
10. Hughes, W. F., *An Introduction of Viscous Flow*, Hemisphere Publishing Corp., 1979.
11. Klebanoff, P. S., and Diehl, F. W., *Some Features of Artificially Thickened Fully Developed Turbulent Boundary Layers with Zero Pressure Gradient*, NACA Report 1110, 1952.
12. Lai, W. M., Rubin, D., and Krempl, E., *Introduction to Continuum Mechanics*, Pergamon Press, 1974.
13. Li, W. H., and Lam, S. H. *Principles of Fluid Mechanics*, Addison-Wesley, 1964.
14. Nikuradse, J., *Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren, Forshungs-Arb. Ing.-Wesen*, 356, 1932.
15. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed., McGraw-Hill, 1986.
16. Shames, I. H., *Mechanics of Fluids*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1992.
17. Shapiro, A. H., *Shape and Flow*, Anchor Books, Doubleday, 1961.
18. Sherman, F. S., *Viscous Flow*, McGraw-Hill, 1990.
19. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1974.

مسائل حل‌شده

۵-۱ هوای ۷۰°F با فشار ۱۴٫۷psi و با سرعت جریان آزاد ۵۰ fps بر روی صفحه‌ای تخت جریان دارد. ضخامت لایهٔ مرزی را در نقطهٔ 5ft از لبهٔ حمله تعیین کنید.

گران‌روی سینماتیکی برای هوا در این شرایط عبارت است از $\nu = ۱٫۸ \times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{ft}^{۲}/\mathrm{s}$. عدد رینولدز بر اساس طول صفحه برابر است با

$$R_{e_x} = Ux/\nu = ۵۰(۵)/(۱٫۸ \times ۱۰^{-۴}) = ۱٫۳۹ \times ۱۰^{۶}$$

اکنون، ضخامت لایهٔ مرزی را با فرض اینکه جریان لایهٔ مرزی لایه‌ای است، تعیین می‌کنیم. با استفاده از معادلهٔ (۵-۵)، داریم

$$\delta/x = ۴٫۶۴/\sqrt{R_{e_x}}, \qquad \delta/۵ = ۴٫۶۴/(۱٫۳۹ \times ۱۰^{۶})^{۱/۲}, \qquad \delta = ۰٫۰۱۹۷\ \mathrm{ft} = ۰٫۲۳۶\ \mathrm{in.}$$

اگر فرض کنیم که جریان لایهٔ مرزی از لبهٔ حمله متلاطم است، آن‌گاه

$$\delta/x = ۰٫۳۷۶/(R_{e_x})^{۱/۵}, \qquad \delta/۵ = ۰٫۳۷۶/(۱۳٫۹ \times ۱۰^{۵})^{۱/۵}, \qquad \delta = ۰٫۱۱۱\ \mathrm{ft} = ۱٫۳۳\ \mathrm{in.}$$

می‌بینیم که اختلاف زیادی در جواب، بسته به اینکه جریان لایه‌ای است یا متلاطم، وجود دارد. هیچ‌یک از جوابها درست نیست، زیرا لایهٔ مرزی در سرتاسر طول صفحه، نه کاملاً لایه‌ای است و نه متلاطم. طول گذار (از لایه‌ای به متلاطم)، با $R_{e_x} = ۳٫۲ \times ۱۰^{۵}$ به‌طور تجربی به‌دست آمده و تقریبی است. بنابراین طول گذار X_T در این مسئله عبارت است از

$$X_T = (\nu/U)R_{e_x} = [(۱٫۸ \times ۱۰^{-۴})/۵۰](۳٫۲ \times ۱۰^{۵}) = ۱٫۱۵\ \mathrm{ft}$$

از این‌رو، می‌بینیم که لایهٔ مرزی متلاطم به جواب صحیح نزدیکتر است.

۵-۲ مسئلهٔ ۵-۱ را با این فرض که بخشی از لایهٔ مرزی لایه‌ای و بقیه متلاطم است، حل کنید.

ضخامت لایهٔ مرزی در نقطهٔ گذار برابر است با

$$\delta_{\text{گذار}} = \frac{۱٫۱۵(۴٫۶۴)}{[۳٫۲ \times ۱۰^{۵}]^{۱/۲}} = ۰٫۰۰۹۴۴\ \mathrm{ft} = ۰٫۱۱۳\ \mathrm{in.}$$

از این نقطه لایهٔ مرزی متلاطم شروع می‌شود. اگر لایهٔ مرزی لبهٔ حمله تا این نقطه متلاطم می‌بود، طول لازم X از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آمد

$$X^{۴/۵} = \frac{\delta(U/\nu)^{۱/۵}}{۰٫۳۷۶} \qquad \text{یا} \qquad \frac{\delta}{X} = \frac{۰٫۳۷۶}{(UX/\nu)^{۱/۵}}$$

بنابراین

$$X = \left(\frac{\delta}{۰٫۳۷۶}\right)^{۵/۴}\left(\frac{U}{\nu}\right)^{۱/۴} = \left(\frac{۰٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۲}}{۰٫۳۷۶}\right)^{۵/۴}\left(\frac{۵۰}{۱٫۸ \times ۱۰^{-۴}}\right)^{۱/۴} = ۰٫۲۳۰\,\mathrm{ft}$$

یعنی، طول کل لایهٔ مرزی متلاطم هم‌ارز عبارت است از

$$X = (۵٫۰ - ۱٫۱۵) + ۰٫۲۳ = ۴٫۰۸\ \mathrm{ft}$$

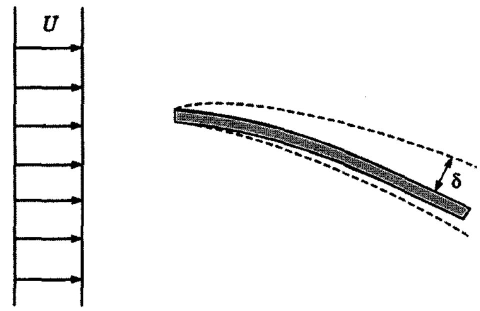
و

$$\delta = \frac{۴٫۰۸(۰٫۳۷۶)}{[۵۰(۴٫۰۸)/(۱٫۸ \times ۱۰^{-۴})]^{۱/۵}} = \frac{۱٫۵۳}{[۱۱٫۳ \times ۱۰^{۵}]^{۱/۵}} = ۰٫۰۹۴۲\ \mathrm{ft} = ۱٫۱۳\ \mathrm{in.}$$

۵-۳ پسای کل را برای مسئلهٔ ۵-۱ به‌دست آورید.

فرض می‌کنیم که لایهٔ مرزی لایه‌ای است. از معادلهٔ (۵-۶)، داریم

$$\tau_{\circ} = \frac{۰٫۳۲۳\rho U^{۲}}{(U/\nu)^{۱/۲}x^{۱/۲}} = \frac{۰٫۳۲۳(۰٫۰۰۲۳۷)(۵۰)^{۲}x^{-۱/۲}}{[۵۰/(۱٫۸ \times ۱۰^{-۴})]^{۱/۲}} = (۳٫۶۲ \times ۱۰^{-۳})x^{-۱/۲}$$



شکل ۵-۲۴

پسا برابر است با

$$D = \int_A \tau_\circ dA = W \int_\circ^{۵} \tau_\circ dx$$

بنابراین
$$\frac{D}{W} = ۳٫۶۲ \times ۱۰^{-۳} \int_\circ^{۵} x^{-۱/۲} dx = ۰٫۰۱۶۳ \text{ lb}_\text{f}/\text{ft}$$

فرض می‌کنیم که شاره متلاطم است،

$$\tau_\circ = \frac{۰٫۰۲۸۶ \rho U^۲}{(U/\nu)^{۱/۵} x^{۱/۵}} = \frac{۰٫۰۲۸۶(۰٫۰۰۲۳۷)(۵۰)^۲ x^{-۱/۵}}{[۵۰/(۱٫۸ \times ۱۰^{-۴})]^{۱/۵}} = ۰٫۰۱۳۹ x^{-۱/۵}$$

و
$$\frac{D}{W} = ۰٫۰۱۳۹ \int_\circ^{۵} x^{-۱/۵} dx = ۰٫۰۶۲۷ \text{ lb}_\text{f}/\text{ft}$$

۵-۴ چگونگی تغییرات ضخامت لایهٔ مرزی موجود در مسئلهٔ ۵-۱ را، اگر صفحه مطابق شکل ۵-۲۴ خمیده می‌بود، بررسی کنید.

در این صورت، در امتداد سطح بالا گرادیان فشار معکوس وجود می‌داشت. یعنی، لایهٔ مرزی سریعتر از حالت صفحهٔ تخت، که گرادیان فشار صفر است، رشد می‌کند. عکس این حالت نیز برای سطح پایین درست است، در اینجا، گرادیان فشار مطلوبی همراه با رشد آهسته‌تر لایهٔ مرزی وجود دارد. بنابراین

$$\delta_{\text{بالا}} > \delta_{\text{صفحهٔ تخت}} = ۱٫۱۳ \text{ in.}$$
$$\delta_{\text{پایین}} < \delta_{\text{صفحهٔ تخت}} = ۱٫۱۳ \text{ in.}$$

۵-۵ نیروی کلی را که باد با سرعت ۸۰ mph به تابلو تبلیغاتی به مساحت ۱۰ ft × ۴۰ ft وارد می‌کند، تعیین کنید. باد عمود بر این تابلو تبلیغاتی می‌وزد.

هوای استاندارد را با شرایط زیر در نظر می‌گیریم $\nu = ۱٫۸ \times ۱۰^{-۴} \text{ft}^۲/\text{s}$ و $\rho = ۰٫۰۰۲۳۷ \text{slug}/\text{ft}^۳$ بنابراین

$$\text{Re} = UW/\nu = ۱۱۷(۱۰)/(۱٫۸ \times ۱۰^{-۴}) = ۶٫۵۰ \times ۱۰^۶$$

که پهنای W برابر ۱۰ فوت و سرعت باد $۸۰ \text{ mi/h} = ۱۱۷ \text{ ft/s}$ است. از جدول ۵-۱، $C_D = ۱٫۲$، و از معادلهٔ (۵-۳۶)، داریم

$$D = C_D(\frac{۱}{۲}\rho U^۲)A = ۱٫۲(\frac{۱}{۲})(۰٫۰۰۲۳۷)(۱۱۷)^۲(۴۰۰) = ۷۸۵۰ \text{ lb}_\text{f}$$

۵-۶ رابطه‌ای برای ضریب اصطکاک جریان کاملاً توسعه‌یافته در لوله‌ای گرد به‌طول L، که عدد رینولدز آن کمتر از ۲۰۰۰ است، به‌دست آورید.

توزیع سرعت، بنابر معادلهٔ (۵-۳۹)، برای جریان لایه‌ای عبارت است از

$$u = \frac{۱}{۴\mu}\frac{dp}{dx}(r^۲ - R^۲)$$

آهنگ جریان حجمی برابر است با

$$Q = \int u dA = \int_{۰}^{R} ۲\pi u r dr$$

پس از انتگرال‌گیری، داریم

$$Q = -\frac{\pi R^۴}{۸\mu}\frac{dp}{dx}$$

و اگر V_{av} سرعت متوسط باشد

$$V_{\text{av}} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^۲} = -\frac{R^۲}{۸\mu}\frac{dp}{dx}$$

در این صورت

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{L} = -\frac{۸\mu V_{\text{av}}}{R^۲}$$

از معادلهٔ (۵-۴۳)، داریم

$$f = \frac{\Delta p}{L}\frac{۴R}{\rho V_{\text{av}}^۲}$$

و در نتیجه

$$f = \frac{۸\mu V_{\text{av}}}{R^۲}\frac{۴R}{\rho R V_{\text{av}}^۲} = \frac{۳۲\mu}{\rho R V_{\text{av}}} = \frac{۶۴}{(\rho V_{\text{av}} D/\mu)} = \frac{۶۴}{\text{Re}}$$

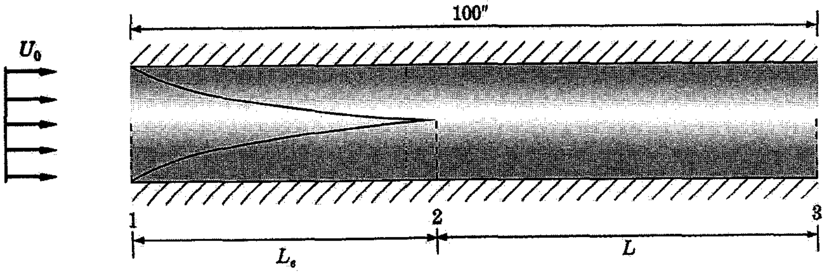
۵-۷ هوای $۷۰°\text{F}$ با فشار ۱۴٫۷psi و سرعت یکنواخت وارد لوله‌ای به قطر یک اینچ می‌شود (شکل۵-۲۵) و عدد رینولدز ۱۰۰ است. افت فشار هوا را در فاصلهٔ ۱۰۰ اینچ از ورودی لوله تعیین کنید. طول ورودی L_e از رابطهٔ $L_e/D = ۰٫۰۲۸۸R_e$ تعیین می‌شود.

برای هوا تحت شرایط مفروض داریم $\nu = ۱٫۸ \times ۱۰^{-۴}\text{ft}^۲/\text{s}$، $\rho = ۰٫۰۰۲۳۷\text{slug/ft}^۳$. طول ورودی L_e برابر است با

$$L_e = ۰٫۰۳۰(۱۰۰۰)(۱٫۰) = ۳۰ \text{ in.}$$

سرعت یکنواخت در ورودی عبارت است از

$$U_۰ = ۱۰۰۰\nu/D = ۱۰۰۰(۱٫۸ \times ۱۰^{-۴})(۱٫۰/۱۲) = ۲٫۱۶ \text{ ft/s}$$



شکل ۵-۲۵

از مسئلهٔ ۵-۶ برای سرعت متوسط، داریم

$$U_\circ = V_{\text{av}} = -\frac{R^۲}{۸\mu}\frac{dp}{dx}$$

و سرعت بیشینه برای جریان کاملاً توسعه‌یافته $(r = \circ)$، عبارت است از

$$U_{\max} = -\frac{R^۲}{۴\mu}\frac{dp}{dx}$$

بنابراین

$$U_{\max} = ۲U_\circ = ۲(۲٫۱۶) = ۴٫۳۲ \text{ ft/s}$$

یادآور می‌شویم که در حرکت از قسمت ۱ به قسمت ۲ در امتداد خط مرکزی، جریان بی‌اصطکاک است. بنابراین، می‌توان از معادلهٔ برنولی برای تعیین اختلاف فشار بین این دو نقطه استفاده کرد.

$$p_۱ - p_۲ = \frac{۱}{۲}\rho(U_{\max}^۲ - U_۱^۲) = \frac{۱}{۲}(\circ٫\circ\circ۲۳۷)[(۴٫۳۲)^۲ - (۲٫۱۶)^۲] = \circ٫\circ۱۶۶ \text{ lb}_\text{f}/\text{ft}^۲$$

از مسئله ۵-۶ (بین نقاط ۲ و ۳)، داریم

$$p_۲ - p_۳ = \Delta p = \frac{۸\mu U_۱ L}{R^۲} = \frac{۸(۱٫۸ \times ۱\circ^{-۴})(\circ٫\circ\circ۲۳۷)(۲٫۱۶)(۷\circ/۱۲)}{(\circ٫۵/۱۲)^۲} = \circ٫\circ۲۵\circ \text{ lb}_\text{f}/\text{ft}^۲$$

بدین ترتیب، افت فشار کلی برابر است با

$$p_۱ - p_۳ = (p_۱ - p_۲) + (p_۲ - p_۳) = \circ٫\circ۱۶۶ + \circ٫\circ۲۵\circ = \circ٫\circ۴۱۶ \text{ lb}_\text{f}/\text{ft}^۲$$

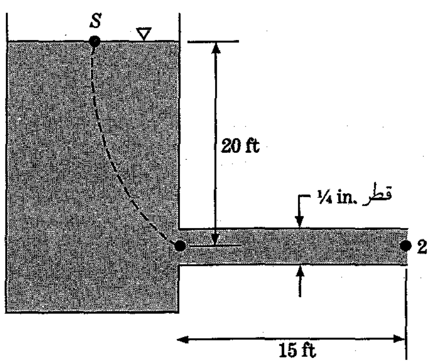
۵-۸ آهنگ جریان شاره را در سیستم شکل ۵-۲۶ تعیین کنید. شاره آب، و لوله از نظر هیدرودینامیکی صاف است. از تمام افتهای لوله صرف‌نظر می‌کنیم.

نخست، معادلهٔ انرژی (۵-۴۲) را بین نقاط ۱ و ۲ می‌نویسیم.

$$V_۱^۲/۲g + p_۱/\rho g + z_۱ = V_۲^۲/۲g + p_۲/\rho g + z_۲ + H_L$$

که

$$H_L = f(L/D)(V^۲/۲g)$$



شکل ۵-۲۶

چون $V_۱ = V_۲$ و $z_۲ = z_۱$، داریم

$$(p_۱ - p_۲)/\rho g = f(L/D)(V^۲/۲g) = H_L$$

گام بعدی نوشتن معادلهٔ برنولی بین سطح آزاد و نقطهٔ ۱ در امتداد خط‌چین است،

$$p_s/\rho g + V_s^۲/۲g + z_s = p_۱/\rho g + V_۱^۲/۲g + z_۱$$

یادآوری می‌کنیم که $p_۲ = p_{\mathrm{atm}} = p_s$. آن‌گاه از ترکیب دو معادله، خواهیم داشت

$$f(L/D)(V_۱^۲/۲g) = H_l = (z_s - z_۱) - V_۱^۲/۲g$$

$$V_۱^۲ = \frac{۲g(z_s - z_۱)}{f(L/D) + ۱} = \frac{۶۴{,}۴(۲۰)}{f[۱۵(۱/۴۸)] + ۱} = \frac{۱۲۹۰}{f(۷۲۰) + ۱}$$

ضریب اصطکاک به عدد رینولدز بستگی دارد، که خود به سرعت بستگی خواهد داشت. از این رو، باید مسئله را با روش آزمون و خطا حل کنیم. عدد رینولدز Re از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

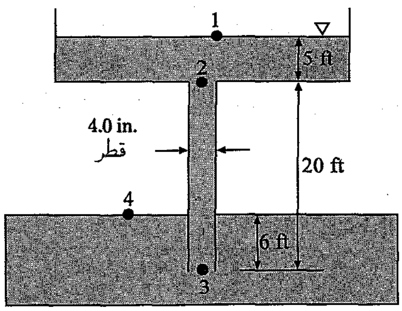
$$\mathrm{Re} = V_۱D/\nu = V_۱(۱/۴۸)/(۱ \times ۱۰^{-۵}) = ۲۰۸۰V_۱$$

جدول زیر راه‌حل آزمون و خطا را نشان می‌دهد. نخست، مقداری برای $V_۱$ فرض می‌کنیم و سپس $V_۱$ را محاسبه می‌کنیم.

$V_۱$ (فرض شده)	Re	f	$V_۱$ (محاسبه‌شده)
۱۰	$۲{,}۰۸(۱۰)^۴$	۰٫۰۲۶	۸٫۱۰
۷	$۱{,}۴۶(۱۰)^۴$	۰٫۰۲۸	۷٫۷۰
۷٫۹	$۱{,}۶۴(۱۰)^۴$	۰٫۰۲۷۲	۷٫۹۲

بنابراین، $V_۱ = ۷{,}۹۲\ \mathrm{ft/s}$ و $Q = AV = AV_۱ = \frac{۱}{۴}\pi D^۲V_۱ = \frac{۱}{۴}\pi(۱/۴۸)^۲(۷{,}۹۲) = ۰{,}۰۰۲۷۰\ \mathrm{ft^۳/s}$.

۵-۹ آهنگ جریان را در سیستم شکل ۵-۲۷ تعیین کنید. شاره آب، و لوله از نظر هیدرودینامیکی صاف است. نخست، آهنگ جریان را با چشم‌پوشی از افتهای جزئی به‌دست آورید و سپس آهنگ جریان را، با در نظر گرفتن افتهای جزئی بیابید.



شکل ۵-۲۷

نخست، معادلهٔ برنولی را بین نقاط ۱ و ۲ می‌نویسیم

$$\frac{p_۱}{\rho g}+\frac{V_۱^۲}{۲g}+z_۱=\frac{p_۲}{\rho g}+\frac{V_۲^۲}{\rho g}+z_۲$$

یا

$$\frac{p_۲-p_۱}{\rho g}=(z_۱-z_۲)-\frac{V_۲^۲}{۲g} \qquad \text{(الف)}$$

با توجه به معادلهٔ برنولی بین نقاط ۳ و ۴، داریم

$$\frac{p_۳}{\rho g}+\frac{V_۳^۲}{۲g}+z_۳=\frac{p_۴}{\rho g}+\frac{V_۴^۳}{۲g}+z_۴$$

یا

$$\frac{p_۳-p_۴}{\rho g}=(z_۴-z_۳)-\frac{V_۳^۲}{۲g} \qquad \text{(ب)}$$

سپس، معادلهٔ انرژی را بین نقاط ۲ و ۳، که افتهای هد رخ می‌دهد، می‌نویسیم

$$\frac{p_۲}{\rho g}+\frac{V_۲^۲}{۲g}+z_۲=\frac{p_۳}{\rho g}+\frac{V_۳^۲}{۲g}+z_۳+H_L$$

که به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{p_۲-p_۳}{\rho g}=(z_۳-z_۲)+\frac{fL}{D}\frac{V^۲}{۲g} \qquad \text{(ج)}$$

که $V_۲=V_۳=V$ و $p_۱=p_۴=p_{\text{atm}}$. از ترکیب معادلات (الف) و (ب)، داریم

$$\frac{p_۲-p_۳}{\rho g}=(z_۱-z_۲)-(z_۴-z_۳)$$

اکنون، از ترکیب این معادله و معادلهٔ (ج)، خواهیم داشت

$$(z_۳-z_۲)+\frac{fL}{D}\frac{V^۲}{۲g}=(z_۱-z_۲)-(z_۴-z_۳)$$

بنابراین

$$V^۲=\frac{۲g(z_۱-z_۴)}{fL/D}=\frac{۶۴٫۴(۱۹)}{f(۲۰/\frac{۱}{۳})}=\frac{۲۰٫۴}{f}$$

چون هر دو پارامتر f و V مجهول هستند، باید برای تعیین جواب به‌طور همزمان با نمودار ضریب اصطکاک کار کنیم. $\text{Re}=VD/\nu=۳٫۳۳(۱۰)^۴\,V$.
روش مسئلهٔ قبل را به‌کار می‌بریم

V (فرض شده)	Re	f	V (محاسبه‌شده)
۱۰	$۳٫۳۳(۱۰)^۵$	۰٫۰۱۴۳	۳۷٫۹
۴۰	$۱٫۳۳(۱۰)^۶$	۰٫۰۱۱۴	۴۲٫۳
۴۳	$۱٫۴۳(۱۰)^۶$	۰٫۰۱۱۲	۴۳٫۰

و به جواب $V = ۴۳٫۰ \text{ft/s}$، و $Q = \frac{۱}{۴}\pi D^۲ V = ۳٫۷۵ \text{ ft}^۳/\text{s}$ دست می‌یابیم، که از افتهای جزئی چشم‌پوشی شده است. افتهای جزئی در ورودی و خروجی لوله‌های راست رخ می‌دهند. همان‌گونه که در محاسبات قبل با معادلهٔ برنولی نشان دادیم، این افتها باعث تغییر فشار می‌شوند. با اصلاح معادلهٔ (ج) به‌صورت زیر می‌توان افتها را به حساب گرفت.

$$\frac{p_۲ - p_۳}{\rho g} = (z_۳ - z_۲) + \frac{fL}{D}\frac{V^۲}{۲g} + K_۱\frac{V^۲}{۲g} + K_۲\frac{V^۲}{۲g}$$

و از ترکیب با معادلات (الف) و (ب)، همچون قبل داریم

$$\frac{fL}{D}\frac{V^۲}{۲g} + K_۱\frac{V^۲}{۲g} + K_۲\frac{V^۲}{۲g} = z_۱ - z_۴$$

یا

$$V^۲ = \frac{۲g(z_۱ - z_۴)}{fL/D + K_۱ + K_۲} = \frac{۶۴٫۴(۱۹)}{f(۲۰/\frac{۱}{۳}) + ۰٫۵ + ۱٫۰} = \frac{۱۲۲۰}{f(۶۰) + ۱٫۵}$$

که $K_۱$ ضریب افت در ورودی برابر ۰٫۵ است (جدول ۵-۲) و $K_۲$ ضریب افت در خروجی برابر ۱ است (جدول ۵-۲). سپس، با روش آزمون و خطا f و V را، همچون قبل، به‌دست می‌آوریم.

V (محاسبه‌شده)	f	Re	V (فرض شده)
۲۲٫۸	۰٫۰۱۴۳	$۳٫۳۳(۱۰)^۵$	۱۰
۲۳٫۴	۰٫۰۱۲۲	$۸٫۰(۱۰)^۵$	۲۴
۲۳٫۴	۰٫۰۱۲۲	$۷٫۷۶(۱۰)^۵$	۲۳٫۳

از اینجا مقدارهای زیر را به‌دست می‌آوریم $V = ۲۳٫۴ \text{ft/s}$ و $Q = \frac{۱}{۴}\pi D^۲ V = \frac{۱}{۴}\pi(۴/۱۲)^۲(۲۳٫۴) = ۲٫۰۴ \text{ ft/s}$.

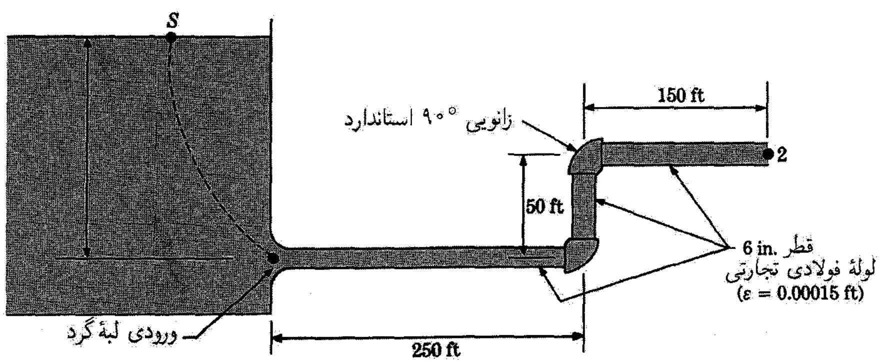
۵-۱۰ آب از منبع بزرگی جریان می‌یابد و در محیط آزاد (جو) مطابق شکل ۵-۲۸ تخلیه می‌شود. آهنگ جریان حجمی را تعیین کنید.

نخست، معادلهٔ برنولی را بین سطح جلو و ورودی می‌نویسیم. بنابر قانون پیوستگی، $V_۱ = V_۲ = V$.

$$\frac{p_۱ - p_s}{\rho g} = (z_s - z_۱) - \frac{V_۱^۲}{۲g}$$

سپس، معادلهٔ انرژی را بین قسمتهای ۱ و ۲ می‌نویسیم

$$\frac{p_۱ - p_۲}{\rho g} = (z_۲ - z_۱) + \frac{fL}{D}\frac{V^۲}{۲g} + K_۱\frac{V^۲}{۲g} + ۲K_۲\frac{V^۲}{۲g}$$



شکل ۵-۲۸

که $K_۱ = ۰٫۲۵$ ضریب افت در ورودی لبهٔ گرد، و $K_۲ = ۰٫۹۰$ ضریب افت زانویی است. از ترکیب این دو معادله، داریم

$$(fL/D + K_۱ + ۲K_۲ + ۱)\frac{V^۲}{۲g} = (z_s - z_۲)$$

یا
$$V^۲ = \frac{۲g(z_s - z_۲)}{fL/D + K_۱ + ۲K_۲ + ۱} = \frac{۶۴٫۴(۱۰۰)}{f(۴۵۰/\frac{۱}{۲}) + ۰٫۲۵ + ۲(۰٫۹۰) + ۱} = \frac{۶۴۴۰}{f(۹۰۰) + ۳٫۰۵}$$

چون f و V مجهول هستند، برای تعیین جواب، باید به‌طور همزمان با نمودار ضریب اصطکاک کار کنیم. Re از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathrm{Re} = VD/\nu = V(\tfrac{۱}{۲})/(۱ \times ۱۰^{-۵}) = (۵ \times ۱۰^۴)V \qquad \text{و} \qquad \epsilon/D = ۰٫۰۰۰۱۵/\frac{۱}{۲} = ۰٫۰۰۰۳۰$$

سرانجام، مقدارهای زیر برای V و Q به‌دست می‌آیند: $V = ۳۹۰\,\mathrm{ft/s}$ و $Q = AV = \frac{۱}{۴}\pi D^۲ V = \frac{۱}{۴}\pi(\frac{۱}{۲})^۲(۳۹۰) = ۷۶٫۶\ \mathrm{ft^۳/s}$.

۵-۱۱ دربارهٔ جریان لایه‌ای گران‌رو کاملاً توسعه‌یافته بین دو صفحهٔ موازی‌ای بحث کنید که یکی از آنها، همچون شکل ۵-۲۹، حرکت می‌کند. چنین جریانی را به عنوان جریان کوته می‌شناسند. صفحهٔ بالا نسبت به صفحهٔ پایین با سرعت U حرکت می‌کند. فشار در ورودی جریان $p_۲$ و در خروجی $p_۱$ است.

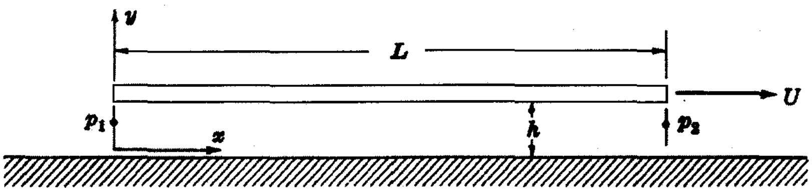
فرض می‌کنیم که طول L بسیار بزرگتر از فاصلهٔ دو صفحهٔ h است، به‌گونه‌ای که می‌توان اثرهای ورودی یا رشد جریان را نادیده گرفت. بدین ترتیب، جریان اساساً یک بعدی است و تغییرات سرعت در طول کانال فقط در جهت y صورت می‌گیرد. دستگاه مختصاتی را که متصل به صفحهٔ بالا حرکت می‌کند، در نظر می‌گیریم. این صفحه‌ها را در جهت z بسیار طویل در نظر می‌گیریم، به‌گونه‌ای که جریان موجود در آن جهت را می‌توان نادیده گرفت. با فرض جریان تراکم‌ناپذیر، معادلات حرکت را می‌توان مستقیماً از معادلهٔ عمومی حرکت (یعنی معادلهٔ ناویه ـ استوکس) به‌دست آورد. البته، می‌توان جزء کوچکی از شاره را انتخاب کرد و موازنهٔ تکانه را برای آن نوشت. معادلات حرکت به‌صورت زیرند

$$۰ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}, \qquad ۰ = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

که μ گران‌روی شاره، u و v به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در جهت x و y هستند، که نسبت به صفحهٔ بالا اندازه‌گیری شده‌اند. دستگاه مختصات به صفحهٔ بالا متصل است و با آن حرکت می‌کند، اما مبدأ مختصات را برای سادگی منطبق بر صفحه پایین گرفته‌ایم. در این صورت، سرعت صفحهٔ پایین نسبت به صفحهٔ بالا و دستگاه مختصات $-U$ است.

چون تغییری در جهت x وجود ندارد، بنابر معادلهٔ پیوستگی $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = ۰$، مؤلفهٔ سرعت v در جهت y باید صفر باشد، از این‌رو $\partial p/\partial y$ نیز باید صفر باشد و فشار تابع فقط x باشد. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ حرکت همراه با شرایط مرزی $u = -U$ در $y = ۰$ و $u = ۰$ در $y = h$، نتیجه می‌شود

$$u = \frac{۱}{۲\mu}\frac{dp}{dx}(y^۲ - hy) + U[(y/h) - ۱]$$



شکل ۵-۲۹

چون فشار p تابع فقط x، و u فقط تابع y است. آهنگ کل جریان $Q = \int_{\circ}^{h} u dy$ را می‌توان تعیین کرد و افت فشار را به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$Q = -\frac{h^{۳}}{۱۲\mu}\frac{dp}{dx} - \frac{Uh}{۲} \qquad p_{۲} - p_{۱} = \frac{۱۲L\mu}{h^{۳}}\left(\frac{Uh}{۲} + Q\right)$$

معادلات بالا نشان می‌دهند که گرادیان فشار مقدار ثابتی است و افت فشار را به آهنگ Q جریان مرتبط می‌کند؛ آهنگ جریان نسبت به صفحهٔ بالاست، زیرا دستگاه مختصات را متصل به آن صفحه فرض کرده‌ایم. جریان مثبت جریانی است که در جهت مثبت محور x است. اگر گرادیان فشار صفر باشد، نیمرخ سرعت خطی است و جریان برشی ساده‌ای وجود دارد.

مبدأ را بر روی صفحهٔ متحرک و جهت محور y را روبه پایین نیز می‌توانستیم فرض کنیم. آن‌گاه، معادلات دیفرانسیل به همان شکل قبلی می‌ماندند و فقط شرایط مرزی به‌صورت $U = \circ$ در $y = \circ$ و $u = -U$ در $y = h$ تغییر می‌کردند. دوباره، سرعتها نسبت به صفحهٔ بالا اندازه‌گیری می‌شوند و Q نیز شبیه بالا به‌دست می‌آید.

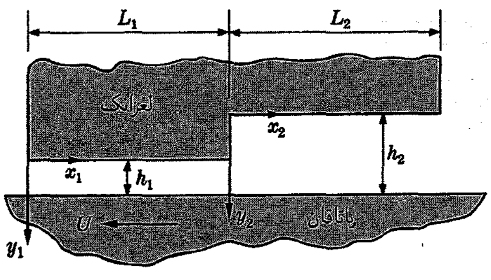
۵-۱۲ روغنکاری یاتاقانها یکی از مسائل مهم در مکانیک شاره‌هاست. روغن یا روان‌ساز موجود در یاتاقانها شارهٔ گران‌رویی است و تعیین توزیع فشار، ظرفیت بار و اصطکاک، و جز آن را می‌توان با مطالعهٔ جریان لایه‌ای گران‌روی روان‌ساز انجام داد. بیشتر یاتاقانها در گسترهٔ جریان لایه‌ای با عدد رینولدز خیلی کوچک کار می‌کنند. فضای بین یاتاقان و لغزانک (گاف جریان) بسیار کوچکتر از طول لغزانک است. به‌گونه‌ای که جریان در سرتاسر گاف کاملاً توسعه‌یافته می‌شود. چون عدد رینولدز بسیار کوچک است، لختی شاره در مقایسه با فشار و نیروهای گران‌رو نادیده گرفته می‌شود. بررسی مسئلهٔ روغنکاری شبیه مسئلهٔ جریان کوته است (مسئلهٔ ۵-۱۱).

یاتاقانی پله‌ای، همچون شکل ۵-۳۰، را در نظر بگیرید. فضاهای $h_{۱}$ و $h_{۲}$ بسیار کوچکتر از $L_{۱}$ و $L_{۲}$ هستند و فرض می‌شود پهنای یاتاقان در جهت z خیلی بزرگ باشد، به‌گونه‌ای که نشت در جهت z را می‌توان نادیده گرفت. برای لغزانکی با سرعت U و شاره‌ای با گران‌روی μ، توزیع فشار را در یاتاقان به‌دست آورید.

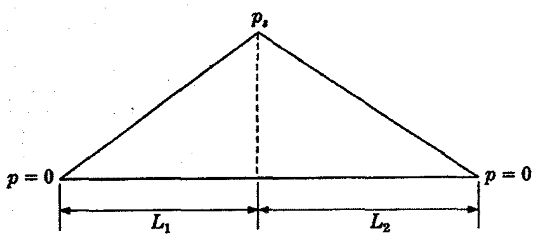
هریک از قسمتهای $L_{۱}$ و $L_{۲}$ را درست مانند مسئلهٔ کوته می‌توان بررسی کرد. دستگاه مختصات را به لغزانک متصل می‌کنیم و می‌گذاریم تا یاتاقان ساکن با سرعت U در جهت منفی x نسبت به لغزانک حرکت کند. آن‌گاه، در هریک از قسمتها، داریم $u = \circ$ در $y = \circ$ و $u = U$ در $y = h$. فشار نسبی در ورودی، که $x_{۲} = L_{۲}$، و در خروجی که $x_{۱} = \circ$، صفر است. فشار در پله، که $x_{۱} = L_{۱}$ یا $x_{۲} = \circ$ مجهول است و آن را باید با استفاده از شرط پیوستگی، که $Q_{۱} = Q_{۲}$، به‌دست آورد. از رابطه‌های به‌دست آمده در مسئلهٔ قبل، داریم

$$Q_{۱} = -\frac{h_{۱}^{۳}}{۱۲\mu}\frac{p_s}{L_{۱}} - \frac{Uh_{۱}}{۲} = Q_{۲} = \frac{h_{۲}^{۳}}{۱۲\mu}\frac{p_s}{L_{۲}} - \frac{Uh_{۲}}{۲}$$

فشار در هر یک از قسمتها به‌طور خطی برحسب x تغییر می‌کند و توزیع فشار، همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود، مثلثی است. فشار قلهٔ p_s از



(الف) یاتاقان



(ب) توزیع فشار

شکل ۵-۳۰

تساوی $Q_۱$ و $Q_۲$ به‌دست می‌آید. نتیجه عبارت است از

$$p_s = \frac{۶\mu U(h_۲ - h_۱)}{(h_۱^۳/L_۱) + (h_۲^۳/L_۲)}$$

که فشار را به‌طور کامل برحسب x مشخص می‌کند. ظرفیت حمل بار کلی همان مساحت زیر منحنی توزیع فشار است. ظرفیت بار W برای واحد پهنای z عبارت است از

$$W = (p_s/۲)(L_۱ + L_۲)$$

از نظر فیزیکی، اگر بار تغییر می‌کرد فضاهای $h_۱$ و $h_۲$ تغییر می‌کردند و لغزانک با کاهش یا افزایش بار بالا یا پایین می‌رفت.

با دانستن سرعت جریان در سرتاسر لایهٔ نازک جریان، اصطکاک را می‌توان با انتگرال‌گیری تنش برشی در امتداد لغزانک یا یاتاقان به‌دست آورد. این محاسبات را به عنوان تمرین انجام دهید. درمی‌یابید که تنشهای برشی در امتداد سطحهای بالا و پایین کاملاً برابر نیستند، اما اگر نیروی فشار در مقابل پله در محاسبهٔ اصطکاک صفحهٔ بالا یا لغزانک شامل شود، هر دو محاسبهٔ نتیجهٔ یکسانی به‌دست خواهند داد.

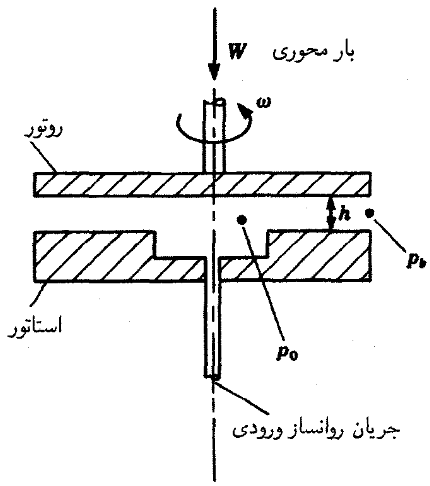
۵-۱۳ یاتاقان محوری هیدروستاتیکی‌ای را در شکل ۵-۳۱ نشان داده‌ایم. دو قرص دایره‌ای (به شعاع b) به فاصلهٔ h از یکدیگر قرار گرفته‌اند (در عمل، h حدود ۰٫۰۰۱ تا ۰٫۰۱ اینچ است) و قطر هریک ممکن است تا چندین اینچ برسد. مایع روانساز تحت فشار را از طریق فنجانک یا خزینه‌ای به شعاع a، که در فشار زیاد $p_۰$ نگه داشته می‌شود، به استاتور وارد می‌کنیم. قرص بالا با سرعت ω می‌چرخد و بار W را نگه می‌دارد. روانساز به‌طور شعاعی به شکاف بین قرصها نفوذ می‌کند تا به فشار p_b برسد. توزیع فشار را در روانساز و ظرفیت حمل بار W را به‌دست آورید.

چون $b \gg h$، فرض می‌کنیم که عدد رینولدز $\text{Re} \ll ۱$ است و جمله‌های لختی در معادلهٔ حرکت را نادیده می‌گیریم. معادله حرکت شعاعی به‌صورت زیر در می‌آید

$$۰ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}$$

معادلهٔ حرکت مماسی به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial^۲ v}{\partial z^۲} = ۰$$



شکل ۵-۳۱

شرایط مرزی عبارت‌اند از $u = \circ$ در $y = \circ$، $y = h$ و $v = \circ$ در $y = \circ$؛ $v = r\omega$ در $y = h$. از انتگرال‌گیری مستقیم نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$v = r\omega\left(\frac{z}{h}\right)$$
$$u = \frac{۱}{۲\mu}\frac{dp}{dr}(z^۲ - hz)$$

آهنگ جریان Q از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود

$$Q = \int_\circ^k ۲\pi r u dz = -\frac{\pi r h^۳}{۶\mu}\frac{dp}{dr}$$

که معادله‌ای رتبه اول است که می‌توان آن را روی $p(r)$ و Q، با دو شرط مرزی $p = p_\circ$ در $r = a$ و $p = p_b$ در $r = b$، انتگرال‌گیری کرد.

$$Q = \frac{\pi h^۳(p_\circ - p_b)}{۶\mu \ln(b/a)}, \qquad \frac{p_\circ - p}{p_\circ - p_b} = \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$$

و بار کل W برابر است با

$$W = (p_\circ - p_b)\pi a^۲ + \int_a^b (p - p_b)۲\pi r dr = \frac{\pi(b^۲ - a^۲)(p_\circ - p_b)}{۲\ln(b/a)}$$

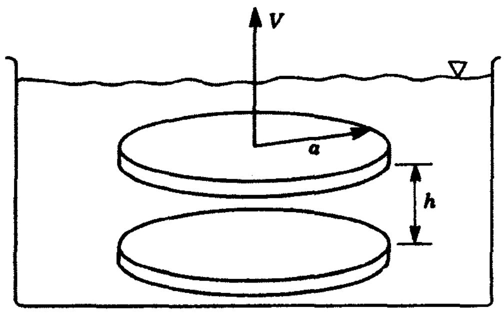
۵-۱۴ دو قرص دایره‌ای تخت موازی به شعاع a را وارد حمام روغن کم‌عمقی می‌کنیم (شکل ۵-۳۲). فاصلهٔ دو قرص h است که $h \ll a$. ناگهان این دو قرص با سرعت ثابت V از هم دور می‌شوند. زمان شتاب در مقایسه با زمانهای مورد نظر بسیار کوتاه است و می‌توان فرض کرد که قرصها در زمان کوتاهی به سرعت V می‌رسند. فرض می‌کنیم که سرعت آن‌قدر آهسته، و h آن‌قدر کوچک است که از اثرهای لختی می‌توان صرف‌نظر کرد و جریان شعاعی بین قرصها را مشابه مسئلهٔ ۵-۱۳ می‌توان در نظر گرفت. سرعت بحرانی V را به‌گونه‌ای تعیین کنید که در سرعتهای بیشتر از آن کاویتاسیون رخ دهد.

با مراجعه به مسئله ۵-۱۳، نیمرخ شعاعی سرعت به‌صورت زیر است

$$u = \frac{۱}{۲\mu}\frac{dp}{dr}(z^۲ - hz)$$

حجم ثابت استوانه‌ایی به شعاع r را بین این قرصها در نظر بگیرید. با اعمال اصل پیوستگی برای این استوانه، و با شرایط مرزی $P = P_\circ$ در $r = a$ که $P_\circ$ فشار هیدروستاتیکی اسمی در لبهٔ قرص است، داریم

$$\int_\circ^h ۲\pi r u dz = -\pi r^۲ V - \frac{\pi r h^۳}{۶\mu}\frac{dp}{dr} = \pi r^۲ V$$



شکل ۵-۳۲

با انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$p = p_۰ - \frac{۳\mu V}{h^۳}(a^۲ - r^۲)$$

فشار کمینه در $r = ۰$ رخ می‌دهد.

$$p = p_۰ - \frac{۳\mu V a^۲}{h^۳}$$

و اگر کاویتاسیون در نزدیکی صفر مطلق رخ دهد (یا به‌طور دقیقتر در فشار بخار مایع که در مقایسه با فشار جو کم است) مقدار بحرانی V، یعنی $V_{\rm cr}$ برابر است با

$$V_{\rm cr} = \frac{p_۰ h^۳}{۳\mu a^۲}$$

اگر $V_{\rm cr}$ افزایش یابد، کاویتاسیون در شاره رخ خواهد داد.

مسائل تکمیلی

۵-۱۵ ضخامت لایهٔ مرزی را در فاصلهٔ ۱۰ فوت از لبهٔ حملهٔ صفحهٔ تختی با جریان هوا (۷۰°F و ۱۴٫۷psi) و سرعت جریان آزاد ۶۰fts تعیین کنید. جریان را لایه‌ای فرض کنید.

۵-۱۶ در مسئلهٔ ۵-۱۵، تنش برشی را در فاصلهٔ ۱۰ فوت از لبهٔ حمله با همان شرایط تعیین کنید.

۵-۱۷ اگر پهنای صفحه در مسئلهٔ ۵-۱۵، ۳ فوت باشد، نیروی پسای کلی و ضریب پسا را تعیین کنید.

۵-۱۸ با فرض اینکه جریان لایهٔ مرزی در مسئلهٔ ۵-۱۵ متلاطم است، مسئله را دوباره حل کنید.

۵-۱۹ با فرض اینکه جریان لایهٔ مرزی در مسئلهٔ ۵-۱۶ متلاطم است، مسئله را دوباره حل کنید.

۵-۲۰ با فرض اینکه جریان لایهٔ مرزی در مسئلهٔ ۵-۱۷ متلاطم است، مسئله را دوباره حل کنید.

۵-۲۱ رابطه‌ای برای ضریب پسا برای جریان روی صفحهٔ تخت به‌دست آورید. نتیجه‌ها را برحسب عدد رینولدز براساس طول صفحه بیان کنید.

۵-۲۲ کامیونی در حال حمل لولهٔ جدار نازکی به طول ۳۰ فوت و قطر ۵ فوت با سرعت ۶۰mph است. توان ناشی از پسای لازم برای تک‌لوله‌ای که بالای اتاقک راننده است، را تعیین کنید.

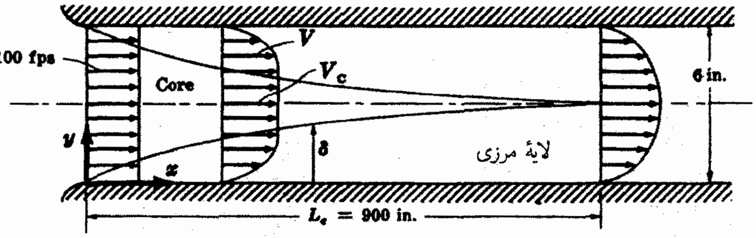
۵-۲۳ ضخامت لایهٔ مرزی در نقطه‌ای که هوا از لولهٔ مسئلهٔ ۵-۲۲ خارج می‌شود، چقدر است؟

۵-۲۴ هوا در بین دو دیوارهٔ موازی مطابق شکل۵-۳۳ جریان دارد. سرعت $V_۱$ یکنواخت است و در ورودی (قسمت ۱) و در ناحیهٔ مرکزی برابر ۱۰۰ft/s است. سرعت در فاصلهٔ ۹۰۰in پایین است. جریان برحسب پهنای کل تغییر می‌کند. سرعت در ناحیهٔ لایهٔ مرزی طبق رابطهٔ $V = V_c(y/\delta)^{۱/۷}$ تغییر می‌کند، که $\delta = ۰٫۱\sqrt{x}$، و δ و x برحسب اینچ اندازه‌گیری می‌شوند. شتاب موجود بر روی محور تقارن را برای $۰ \le x \le ۹۰۰{\rm in}$ تعیین کنید. شتاب را در $x = ۱۰۰{\rm in}$ محاسبه کنید.

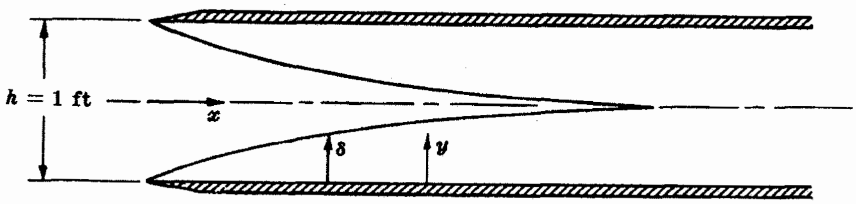
۵-۲۵ فرض کنید که جریان لایه‌ای روی صفحه‌ای تخت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$u = Uy/\delta \qquad \text{به‌ازای } ۰ \le y \le \delta$$

$$u = U \qquad \text{به‌ازای } y > \delta$$



شکل ۵-۳۳



شکل ۵-۳۴

که $\delta = ۰/۰۱\sqrt{x}$ و x فاصله از لبهٔ حملهٔ صفحه، و y فاصلهٔ اندازه‌گیری شده عمود بر صفحه است. تمام ابعاد برحسب فوت است. اگر صفحه دارای پهنای یک فوت و طول ۲۵ فوت باشد نیروی پسا را تعیین کنید.

۵-۲۶ هوا در فاصلهٔ بین دو صفحهٔ تخت همچون شکل ۵-۳۴ جریان دارد. در ورودی سرعت جریان هوا یکنواخت و برابر ۱۰ft/s است. ضخامت لایهٔ مرزی $\delta = ۱/۱۰\sqrt{x}$ است. پهنای صفحه W بسیار بزرگتر از فاصلهٔ بین دو صفحهٔ h است و بنابراین از اثرهای انتهایی چشم‌پوشی می‌کنیم. توزیع سرعت در لایهٔ مرزی از رابطهٔ $u/U = (y/\delta)^۲$ به‌دست می‌آید، که U سرعت هستهٔ مرکزی جریان و y مختصهٔ اندازه‌گیری شده از دیوارهٔ هریک از صفحه‌هاست. فشار را در نقطهٔ ۲۵ فوت از ورودی تعیین کنید. δ و x برحسب فوت هستند.

۵-۲۷ در مسئلهٔ ۵-۲۶ فشار را در مکانی در پایین‌دست جریان، که فاصله‌اش دو برابر فاصلهٔ لازم برای تبدیل جریان به جریان کاملاً توسعه‌یافته است، به‌دست آورید.

۵-۲۸ در مسئلهٔ ۵-۲۶ نیروی کل وارد از سوی شاره به دیواره‌ها را بین ورودی و مکانی که جریان کاملاً توسعه‌یافته می‌شود، تعیین کنید.

۵-۲۹ در مسئلهٔ ۵-۲۶، مسئله را برای لوله، به‌جای صفحه‌های موازی، حل کنید.

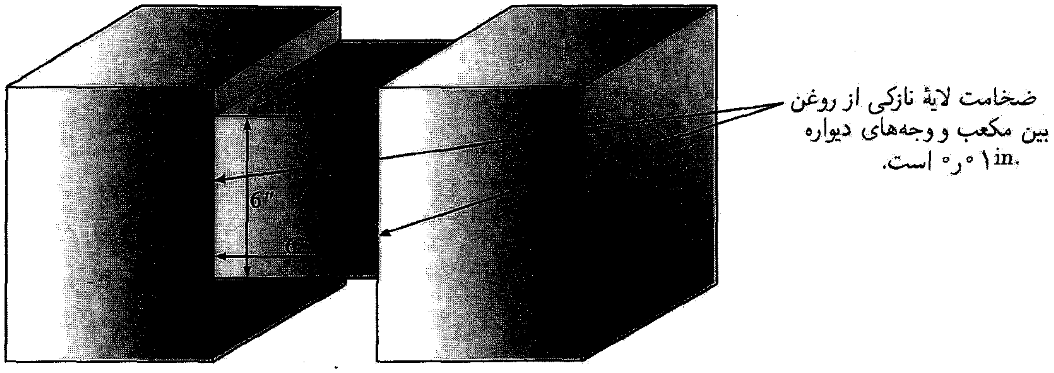
۵-۳۰ در مسئلهٔ ۵-۲۸، مسئله را برای لوله، به‌جای صفحه‌های موازی حل کنید.

۵-۳۱ توپی که سطحی زبر دارد، در مقایسه با توپی با سطح صاف، مسافت بیشتری با سرعت اولیهٔ یکسان، می‌پیماید. توضیح دهید.

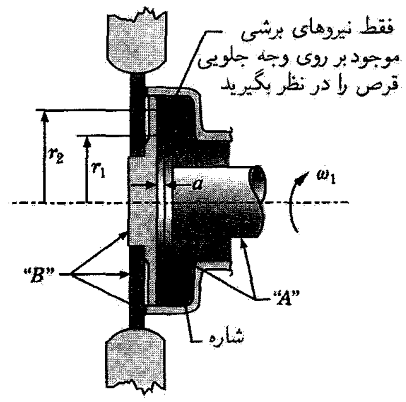
۵-۳۲ سرعت اولیه توپ گلفی را تعیین کنید که مسافت ۲۵۰ یارد را در هوا طی می‌کند. فرض می‌کنیم که توپ در موقع برخورد به زمین دارای سرعت ۲۰ft/s است.

۵-۳۳ نیروی کل وارد بر آنتن خودرویی به قطر $\frac{۱}{۸}$ اینچ و ارتفاع ۴ft در سرعت (خودرو) ۶۰m/h تعیین کنید.

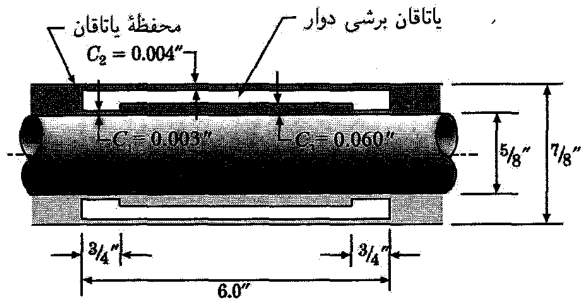
۵-۳۴ توان لازم در نتیجهٔ نیروی وارد بر آنتن را در مسئله ۵-۳۳ تعیین کنید.



شکل ۵-۳۵



شکل ۵-۳۷



شکل ۵-۳۶

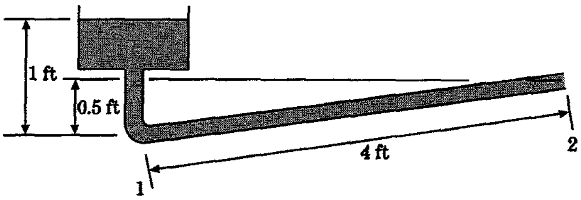
۵-۳۵ وزنه‌ای مکعبی به وزن ۵ پوند بین دو دیوارهٔ موازی با سرعت $\frac{1}{2}$ft/s همچون شکل ۵-۳۵، سقوط می‌کند. گران‌روی روغن را تعیین کنید.

۵-۳۶ یاتاقان برشی دواری بین محور و محفظه یاتاقان در سوپر شارژر (ابرپرکن) توربینی برای کمینه کردن سرعت نسبی بین قطعات متحرک به‌کار رفته است.

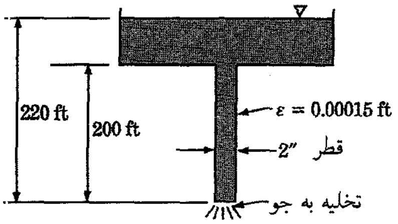
ابعاد یاتاقان سوپر شارژر توربینی را در شکل ۵-۳۶ نشان داده‌ایم. محور با سرعت ۶۰۰۰۰rpm می‌چرخد. گران‌روی روغن استفاده شده در این یاتاقان $\mu = ۱ \times ۱۰^{-۴}$ lbs/ft^۲ است. سرعت زاویه‌ای یاتاقان را تعیین کنید. لقی‌های مختلف $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ بین یاتاقان برشی و محفظه و محور را در شکل مشخص کرده‌ایم.

۵-۳۷ محرکهٔ فن موجود در شکل ۵-۳۷ به‌گونه‌ای طراحی شده است که حرکت نسبی‌ای بین محور محرک و مجموعهٔ مونتاژی قرص «A»، و محفظه و مجموعهٔ مونتاژی «B» وجود دارد. سرعتهای زاویه‌ای به‌ترتیب $\omega_۱$ و $\omega_۲$ ($\omega_۱ > \omega_۲$) هستند. گشتاور چرخشی T بین این دو قطعه به‌وسیلهٔ شاره‌ای با گران‌روی μ انتقال می‌یابد. در این شرایط، لقی لازم a را تعیین کنید. a را برحسب $\omega_۱$، $\omega_۲$، μ، $r_۱$، $r_۲$ و T بیان کنید.

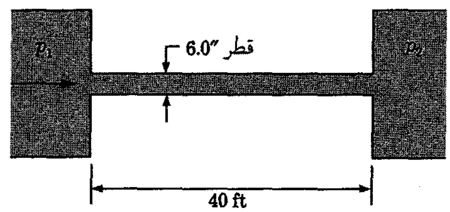
۵-۳۸ جریان آب ۶۰°F ($\nu = ۱٫۲۱۷ \times ۱۰^{-۵}$ ft^۲/s) را از میان لولهٔ صافی به قطر درونی $\frac{1}{8}$ اینچ مطابق شکل ۵-۳۸ عبور می‌کند. با در نظر گرفتن افتهای اصطکاکی فقط بین قسمتهای ۱ و ۲ سرعت شاره را در خروجی (قسمت ۲) به‌دست آورید.



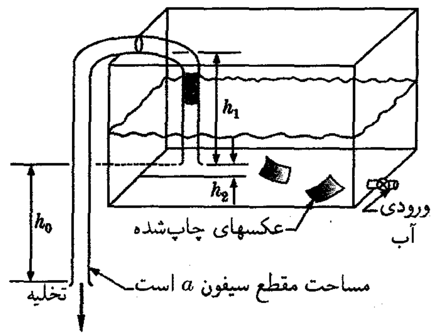
شکل ۵-۳۸



شکل ۵-۳۹



شکل ۵-۴۰



شکل ۵-۴۱

۵-۳۹ هوا در لولهٔ گالوانیزهٔ آهنی‌ای ($\varepsilon = ۰٫۰۰۰۵$ ft) به قطر ۳٫۵ ft با آهنگ ۱۲۰۰۰ $\mathrm{ft^3/min}$ جریان دارد. طول لوله ۸۰۰ ft است. اختلاف ارتفاع بین ورودی و خروجی چقدر است، اگر تغییر فشار صفر باشد؟

۵-۴۰ سرعت متوسط جریان آب ۷۰°F از میان لولهٔ شکل ۵-۳۹ را تعیین کنید.

۵-۴۱ طول لولهٔ مسئله ۵-۴۰ چقدر باید باشد تا آهنگ جریان بیشینهٔ آب برابر مسئلهٔ ۵-۴۰ شود.

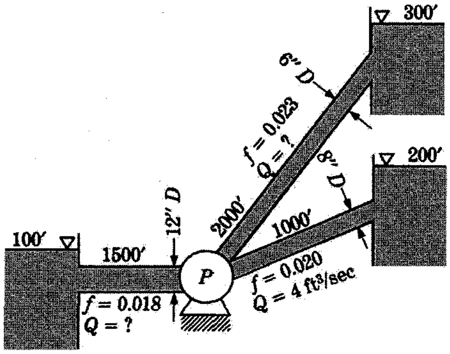
۵-۴۲ دو منبع آب را به‌وسیلهٔ لولهٔ صافی به‌طول ۱۰۰ فوت و قطر ۲ اینچ متصل کرده‌ایم. آهنگ جریان آب را، وقتی اختلاف ارتفاع ۲۵ فوت است، به‌دست آورید.

۵-۴۳ هوا با سرعت متوسط ۱۰۰fts در لولهٔ صافی به قطر ۶ اینچ مطابق شکل ۵-۴۰ بین دو اتاقک محفظه تهویهٔ اجباری جریان دارد. اختلاف فشار $p_1 - p_2$ را با این فرض که افتهای جزئی وجود دارد، تعیین کنید. دمای هوا ۷۰°F است.

۵-۴۴ اگر در مسئلهٔ ۵-۴۳ افتهای جزئی را در نظر بگیریم، اختلاف فشار را تعیین کنید.

۵-۴۵ مخزن مکعب‌مستطیلی شیشه‌ای روبازی، که برای شستشوی عکسهای چاپ شده به‌کار می‌رود، دارای لولهٔ سیفونی است که آب ظرف را خالی می‌کند. عملیات به‌صورت زیر انجام می‌گیرد. با مراجعه به شکل ۵-۴۱ جریان آبی به درون ظرف برقرار است تا اینکه آب به بالای لولهٔ سیفون برسد، در این لحظه آب ورودی قطع می‌شود. آب درون ظرف از طریق لولهٔ سیفونی بیرون می‌رود تا اینکه سطح آب ظرف به زیر لولهٔ سیفونی درون ظرف برسد. دوباره، چرخهٔ ورود آب با آب تازه شروع می‌شود. چه مدت زمان طول می‌کشد تا آب ظرف خالی شود؟

۵-۴۶ آب در سیستم لوله‌کشی شکل ۵-۴۲ جریان دارد. آهنگ جریان آب در لولهٔ ۸ اینچی $۴\mathrm{ft^3/s}$ به مخزن است. آهنگ جریان را در لوله‌های دیگر تعیین کنید و توان پمپ را برحسب اسب بخار به‌دست آورید. ضریبهای اصطکاک f، طول لوله‌ها و ارتفاع مخزنها معلوم‌اند.



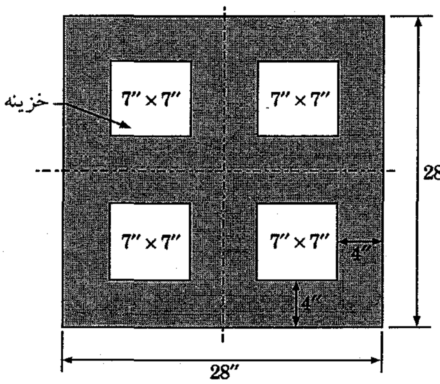
شکل ۵-۴۲

۵-۴۷ تلسکوپ مونت پالومار بر روی گیرهٔ نعلی شکلی نصب شده است و به کمک آن می‌توان عدسی لولهٔ تلسکوپ را بر روی ستاره یا سحاب مورد نظر متمرکز کرد. گیرهٔ نعلی شکل را می‌توان آن‌گونه تنظیم کرد که خود ستاره را، با داشتن مسیر حرکت آن تعقیب کند.

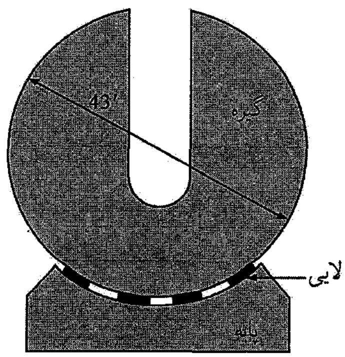
به‌علت ساختمان بسیار سنگین پایه و گیره، طراحی یاتاقان بسیار اهمیت دارد. وزن کل تلسکوپ بیش از ۱۰۰۰۰۰۰ پوند است. این وزن را دو مجموعه یاتاقان واقع در دو انتهای شمالی و جنوبی قاب دوار اصلی نگه‌می‌دارند. گیره نعل‌اسبی را چهار یاتاقان هیدروستاتیکی از نوع لایی‌دار نگه‌می‌دارند. هریک از لاییها باید بتوانند ۱۶۴۰۰۰ پوند بار را در شرایط سرعت صفر تحمل کنند. بنابراین، روغن را باید تحت فشار به درون این لاییها تزریق کرد.

شکل۵-۴۳ و ۵-۴۴ گیرهٔ نعلی شکل و جزئیات لایی یاتاقان را نشان می‌دهد. هر یک از لاییها ۲۸ اینچ مربع‌اند و چهار ناحیهٔ تورفتگی (خزینه) به مساحت ۷ اینچ مربع دارند. روغن به‌وسیلهٔ لوله‌های کوچکی به مرکز این ناحیه‌های تورفته (خزینه) تزریق می‌شود، و فشار در هر یک از خزینه‌ها، در دریچهٔ ورودی، ثابت است. روغن به آرامی‌به درون گاف بین سطح لایی و سطح گیره نعلی‌شکل جریان می‌یابد و از مخزن در فشار جو خارج می‌شود، که دوباره از طریق پمپ باز می‌گردد. فرض کنید که ضخامت لایهٔ نازک روغن درگاف جریان in ۰٫۰۰۵ است. کمیتهای زیر را به‌دست آورید:

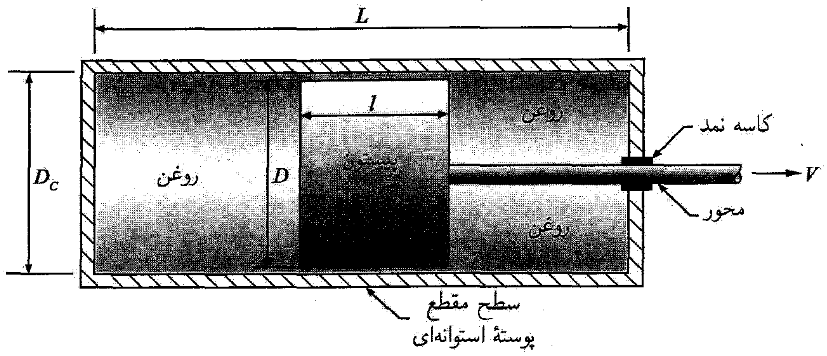
۱. آهنگ جریان روغن لازم
۲. فشار ورودی روغن
۳. ظرفیت پمپ روغن



شکل ۵-۴۴



شکل ۵-۴۳



شکل ۵-۴۵

۴. ضریب اصطکاک بین گیرهٔ نعلی‌شکل و یاتاقان

۵. ظرفیت لازم موتور برای چرخاندن گیرهٔ نعلی‌شکل با آهنگ یک دور در ۲۴ ساعت برای هدفهای ردیابی.

برای محاسبهٔ این کمیتها فرض کنید که روغن از نوع SAE ۲۰، با وزن مخصوص ۰٫۸، و گران‌روی حدود $3{,}85 \times 10^{-6}\ \mathrm{lbs/in^2}$ است.

۵-۴۸ کمک‌فنر یا ضربه‌گیر هیدرولیکی موجود در شکل۵-۴۵ شامل استوانه‌ای خارجی با قطر درونی D_c است که درون آن استوانه‌ای توپر به قطر D، تقریباً برابر D_c، قرار دارد. دو سر پوستهٔ خارجی استوانه بسته است و فقط سوراخ کوچکی وجود دارد که محور را به استوانهٔ توپر درونی یا پیستون متصل می‌کند. پوسته پر از روغن است و محور کاملاً آب‌بندی شده است، به گونه‌ای که روغن نمی‌تواند به بیرون نشت کند. پوستهٔ خارجی به پایه‌ای بسته شده است و محور را به عضو ماشینی متصل کرده‌ایم که باید میرا شود. کمک فنر خودروها طبق این اصل کار می‌کنند.

لقی باریک بین این دو استوانه مانع عبور سریع روغن از جلو پیستون به عقب آن و بالعکس می‌شود. در نتیجه، حرکت پیستون به کندی رخ می‌دهد. با حرکت پیستون، روغن باید از شکاف ایجاد شده به‌وسیلهٔ لقی به اطراف جریان یابد.

نیروی مقاوم کمک فنر را برحسب پارامترهای مربوط و سرعت پیستون V به‌دست آورید.

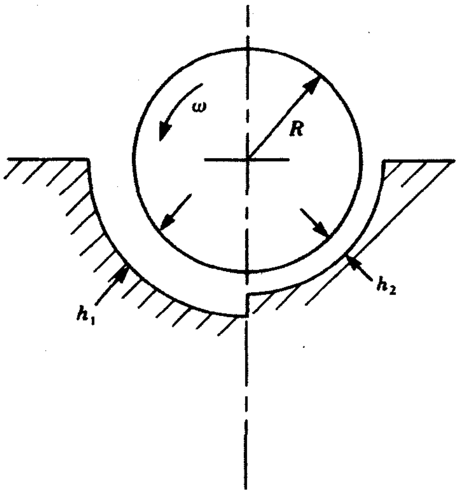
راهنمایی: از لختی شاره در فضای لقی صرف‌نظر کنید. جریان موجود در این ناحیه را شبیه لایهٔ نازک روغن‌کاری در نظر بگیرید. اختلاف فشار موجود بین جلو و عقب پیستون بیانگر آهنگ جریان روغن در این دو ناحیه است. نیروی کل وارد بر پیستون برابر مجموع نیروهای فشار و نیروی برشی گران‌رو است.

۵-۴۹ مسئلهٔ ۵-۱۳ را برای هوا به‌عنوان روانساز تکرار کنید. فرض کنید که دما ثابت (جریان تکدما) است و هوا گازی کامل با $p = \rho RT$، که R ثابت گازها و T دمای مطلق است.

جواب: $\frac{p_0^2-p^2}{p_0^2-p_b^2} = \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$

۵-۵۰ شکل۵-۴۶ یاتاقان محوری پله‌ایی را نشان می‌دهد که در عمل به‌عنوان نگه‌دارندهٔ بار به‌کار می‌رود. این یاتاقان بسیار بلند و دارای قوسی ۱۸۰° است، که پلهٔ آن در مرکز یا زاویهٔ ۹۰° قرار دارد. در حین کار، یاتاقان گرد به‌گونه‌ای تنظیم می‌شود که مرکز آن منطبق بر مرکز دو قوس یاتاقانها شود. اگر فشار در ورودی و خروجی فشار جو باشد، مقدار بار W و جهت آن را به‌دست آورید. جریان لایه‌ای و کاملاً توسعه‌یافته، بدون هیچ‌گونه افت ورودی یا خروجی فرض می‌شود.

۵-۵۱ در مسئلهٔ قبل، گشتاور اصطکاکی را بر روی یاتاقان گرد، به‌دست آورید. آیا بزرگی گشتاور اصطکاکی وارد بر استاتور پله‌ای برابر و در جهت مخالف گشتاور وارد بر یاتاقان گرد است؟ اگر نیست، چرا؟ راهنمایی: فشار وارد بر پله را در نظر بگیرید.



شکل ۵-۴۶

۵-۵۲ مسئلهٔ ۳-۱۶ را با منظور کردن اصطکاک در لوله دوباره حل کنید. فرض می‌کنیم که $D = ۶$ in ، $h = ۱۲۰$ft، و طول لوله ۱۰۰ فوت و لوله صاف است. (عمق دریاچه به صورتی است که $L < h$) راهنمایی: مقداری را برای آهنگ جریان در نظر بگیرید و توان خروجی توربین را به‌دست آورید و سپس توان را برحسب آهنگ جریان Q رسم کنید. اگر $Q = ۰$، مقدار گشتاور بیشینه است ولی سرعت و توان توربین صفر نیستند. در سرعت بیشینه گشتاور صفر است و شاره به‌طور آزاد جریان می‌یابد، اما توان صفر است. منحنی تغییرات توان خروجی را برحسب آهنگ شاره رسم کنید و مقداری برای توان بیشینه به‌دست آورید.

جواب: ۵۱hp

۵-۵۳ پمپ شناوری با توان نیم اسب‌بخار و بازدهٔ ۸۰٪ برای پمپ کردن آب چاه به منبع ذخیره‌ای مطابق شکل۵-۴۷ به‌کار می‌رود. سطح آب در چاه به‌طور ثابت ۱۰۰ فوت از لبه چاه است و پمپ در عمق ۲۰۰ فوتی از لبهٔ چاه قرار دارد. لوله‌ای به قطر درونی یک اینچ (با ضریب اصطکاک $f = ۰٫۰۱$) پمپ را به منبع آب متصل می‌کند. منبع ذخیره در فاصلهٔ ۱۰۰ فوتی از سر چاه قرار گرفته است. منبع آب به اتاقک هوایی وصل شده است که براثر آن فشار منبع برابر ۶۰psig ثابت می‌ماند.

پمپ با چه آهنگی آب را بر منبع می‌رساند (برحسب گالن در دقیقه)؟

۵-۵۴ رفتار لایهٔ مرزی را در نزدیکی نقطهٔ سکون با فرض نیمرخ سرعت مکعبی، تعیین کنید. و نتیجه‌ها را با حالت نیمرخ سرعت درجه دو، که در متن آمده است، مقایسه کنید.

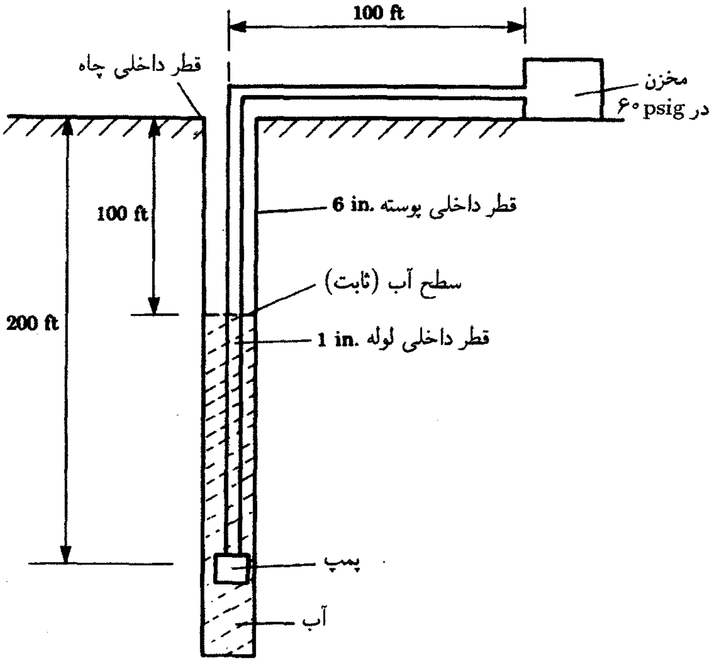
جواب: $\delta_۰ = ۲٫۴\sqrt{\mu/A\rho U_\infty}$ که A در رابطهٔ (۵-۳۳) داده شده است.

۵-۵۵ صفحهٔ تخت متخلخلی از یک طرف تحت مکش قرار گرفته است که در نتیجه، جریان شاره با سرعت ثابتی ($v_۰$) از روی آن می‌گذرد. سرعت مکش در مقایسه با سرعت جریان آزاد، $U_۰$ کم است.

در فاصلهٔ کاملاً دور از لبهٔ حمله مکش باعث تثبیت رشد لایهٔ مرزی خواهد شد. ضخامت لایهٔ مرزی و توزیع سرعت در درون لایهٔ مرزی مستقل از مکان محوری x است.

توزیع سرعت و تنش برشی وارد شده بر روی صفحه را در این ناحیهٔ پایدار لایهٔ مرزی به‌دست آورید.

۵-۵۶ دو استوانهٔ هم‌محور دایره‌ای دارای شعاع درونی $r_۱$ و شعاع خارجی $r_۲$ هستند و به‌ترتیب حول محور خود با سرعت زاویه‌ای $\omega_۱$ و $\omega_۲$



شکل ۵-۴۷

می‌چرخند. نشان دهید که نیمرخ سرعت مایع گران‌روی موجود بین دو استوانه عبارت است از

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r}$$

که

$$A = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \qquad B = \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

راهنمایی: معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0$$

با توجه به شرایط مرزی $v_\theta = r_1\omega_1$ در r_1، $v_\theta = r_2\omega_2$ در r_2، معادلهٔ حرکت را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r}\right) = 0$$

با انتگرال‌گیری، داریم

$$\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} = C$$

که C مقدار ثابتی است. این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$d(rv_\theta) = Crdr$$

و مستقیماً از آن انتگرال گرفت.

نمادگذاریهای فصل ۵

$A =$ مساحت

$C_D =$ ضریب پسا (پس‌کشی)

$C_f =$ ضریب اصطکاک پوستی

$C_L =$ ضریب برآ (بالابر)

$c_p =$ گرمای ویژه در فشار ثابت

$c_v =$ گرمای ویژه در حجم ثابت

$D =$ نیروی پسا و قطر

$E_c =$ عدد اکِرت

$f =$ ضریب اصطکاک، نماد تابعی

$F_s =$ نیروی سطحی

$F_{s_x} =$ نیروی سطحی در جهت x

$h =$ فاصله یا نصف فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی

$H_L =$ افت هد

$K =$ ضریب افت برای افتهای جزئی

$L =$ طول

$m =$ نما برای قانون توانی توزیع سرعت، جرم

$\dot{m} =$ شار جرمی

$\dot{M} =$ شار تکانه

$n =$ نما برای قانون توانی توزیع سرعت

$P_r =$ عدد پرنتل

$p =$ فشار

$q =$ انتقال گرما در واحد جرم شارهٔ جاری

$Q =$ آهنگ جریان حجمی

$r =$ مختصهٔ شعاعی

$R =$ شعاع لوله

$\mathrm{Re} =$ عدد رینولدز

$\mathrm{Re}_x =$ عدد رینولدز طول$= U_x/\nu$

$T =$ دما

$u =$ سرعت در جهت x، انتگرال انرژی بر واحد جرم (انرژی درونی ویژه)

$u_\tau =$ سرعت اصطکاکی دیواره، $\sqrt{\tau_\circ/\rho}$

$U =$ سرعت جریان آزاد یا بیشینه

$v =$ سرعت در جهت r یا جهت y

$V =$ سرعت

$\mathbf{V} =$ بردار سرعت

$V_x =$ سرعت در جهت x

$W =$ پهنا

$x =$ مختصه

$X_L =$ طول ورودی جریان برای

$y =$ مختصه

$z =$ ارتفاع

$\delta =$ ضخامت لایهٔ مرزی

$\delta^* =$ ضخامت جابه‌جایی

$\varepsilon =$ ارتفاع زبری متوسط

$\eta =$ پارامتر همانندی

$\theta =$ ضخامت تکانه

$\mu =$ گران‌روی

$\nu =$ گران‌روی سینماتیکی

$\rho =$ چگالی

$\tau =$ تنش برشی

$\tau_0 =$ تنش برشی در دیواره

$\Phi =$ تابع اتلاف

$\psi -$ تابع جریان

۶

جریان پتانسیل شارهٔ تراکم‌ناپذیر

۶-۱ نظریهٔ جریان پتانسیل

در فصل ۱ خواندیم که جریان در خارج از لایهٔ مرزی بی‌اصطکاک و غیرچرخشی است و بنابراین به‌عنوان جریان پتانسیل شناخته می‌شود. منظور از جریان پتانسیل این است که سرعت را می‌توان از پتانسیل اسکالر (نرده‌ای) سرعت ϕ به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$\mathbf{V} = -\nabla\phi \qquad (۶\text{-}۱)$$

از نظر ریاضی، شرط لازم و کافی برای اینکه میدان برداری تک مقداری (در این حالت $\mathbf{V}$) را بتوان از تابع پتانسیل اسکالر ϕ به‌دست آورد این است که تاو بردار صفر باشد (بجز در نقاط تکین). اهمیت تاو بردار سرعت (که گردشاری ω نامیده می‌شود) را در فصل ۳ بحث کردیم. اگر گردشاری صفر باشد، جریان را «غیرچرخشی» می‌گویند، زیرا چرخش یا سرعت زاویه‌ای هر جزء بی‌نهایت کوچک شاره صفر است.

در این فصل، دربارهٔ نظریهٔ جریان پتانسیل دوبعدی تراکم‌ناپذیر، که برای جریان فروصوتی با عدد ماخ M کمتر از ۳ر۰ صادق است بحث خواهیم کرد. در فصل ۸، جریان پتانسیل تراکم‌پذیر را که عدد ماخ آنها برای جریان فراصوتی مساوی یا بزرگتر از واحد است، بررسی خواهیم کرد. اگر جریان دوبعدی و تراکم‌ناپذیر باشد، با ساده‌سازی می‌توان با استفاده از نظریهٔ متغیر مختلط جریان را به‌وسیلهٔ تبدیلهای همدیس «رسم کرد».

پرسشی که مطرح می‌شود این است که اگر شاره‌ای واقعی دارای گران‌روی باشد، چگونه می‌تواند غیرچرخشی یا پتانسیلی باشد؟ پاسخ این است که خارج از لایهٔ مرزی، که نزدیک سطح تشکیل می‌شود، اثرهای گران‌روی (یا اصطکاک)، در مقایسه با اثرهای لختی و فشار کاملاً کوچک است (برای اعداد رینولدز بزرگتر از واحد). بجز برای جریان لوله‌ها و کانالها که لایهٔ مرزی تا پرشدن کامل لوله رشد می‌کند، یا جریان بیرونیٔ «خزنده» ($\mathrm{Re} \ll ۱$) که لایهٔ مرزی تا فاصله‌های دور از جسم امتداد می‌یابد، معمولاً ناحیه‌های جریانی وجود دارند که اساساً غیرچرخشی‌اند. در عمل،

لایهٔ مرزی موجود بر روی جسمهای آئرودینامیکی (که جدایش وجود ندارد) تا ضخامتی که معمولاً بسیار کوچکتر از خود جسم است و می‌توان آن را برای تعیین جریان پتانسیل در خارج از لایهٔ مرزی نادیده گرفت، رشد می‌کند. یعنی، تا آنجا که به جریان پتانسیل مربوط می‌شود، لایهٔ مرزی فقط در افزایش اندازهٔ مؤثر جسم، آن هم به‌اندازهٔ قابل اغماض نقش دارد. به‌عنوان مثال، جریان هوای موجود بر روی هواپیما خود مسئله‌ای در جریان پتانسیل است. پس از دست‌یابی به جواب جریان پتانسیلی، سرعت و فشار موجود بر روی «سطح» جسم را می‌توان یافت. این مقدار سرعت «سطح» را شرط مرزی در لبهٔ خارجی جریان لایهٔ مرزی درنظر می‌گیرند و فشار را به‌صورت پارامتر تحمیل‌شده بر لایهٔ مرزی تلقی می‌کنند.

یکی از کاربردهای مهم نظریهٔ جریان پتانسیل در آئرودینامیک است. بحث خود را در این فصل به جریان دوبعدی محدود می‌کنیم. اصولاً تقسیم بحث به سه‌بعدی مشکل نیست، اما روشهای ریاضی، مانند ورود تابع جریان، بسیار پیچیده‌تر خواهد شد.

همان‌گونه که در فصل ۳ گفته شد، چرخش ω (که آن را غالباً گردشاری می‌گویند) در شاره به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\omega = \nabla \times \mathbf{V} \qquad (۶-۲)$$

و سرعت زاویه‌ای جزء بی‌نهایت کوچک شارهٔ $\mathbf{\Omega}$ با رابطهٔ زیر به گردشاری مربوط می‌شود

$$\omega = ۲\Omega \qquad (۶-۳)$$

این مفهوم را می‌توان با نگاهی به شکل ۶-۱ توضیح داد. برای سادگی، تحلیل خود را به یک مؤلفهٔ دکارتی محدود می‌کنیم، آنگاه برای مؤلفهٔ z جملهٔ $\nabla \times \mathbf{V}$، داریم

$$\omega_z = (\nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

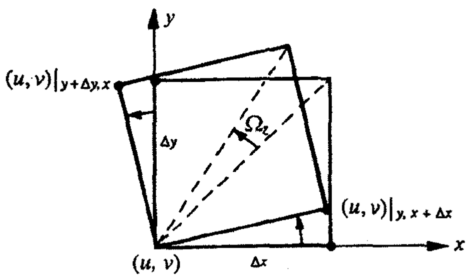
و از شکل ۶-۱ درمی‌یابیم که ω_z دو برابر مقدار متوسط مؤلفهٔ z سرعت زاویه‌ای برای جزء $\Delta_x \Delta_y$ است. سرعت زاویه‌ای خط Δx برابر $(v|_{x+\Delta x} - v|_x)/\Delta x$ و سرعت زاویه‌ای خط Δy برابر $-(u|_{y+\Delta y} - u|_y)/\Delta y$ است که با میانگین‌گیری به‌صورت $\frac{۱}{۲}(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$ درمی‌آید که سرعت زاویه‌ای متوسط مربع $\Delta x \Delta y$ است.

اکنون، اگر هر جریان دوبعدی (در صفحهٔ xy به‌گونه‌ای که فقط ω_z وجود داشته باشد) را درنظر بگیریم، با استفاده از قضیهٔ استوکس، چرخش را می‌توان به‌صورت انتگرال خطی زیر نوشت (شکل ۶-۲)

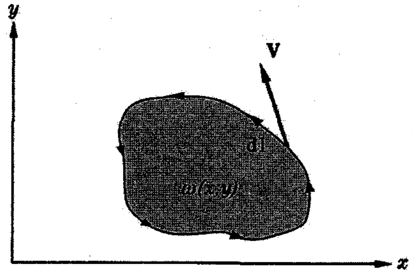
$$\int_A \omega \cdot d\mathbf{A} = \int \nabla \times V \cdot d\mathbf{A} = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \qquad (۶-۴)$$

یعنی، حاصل‌جمع مساحتهای چرخش بر روی هر سطح مفروض برابر است با انتگرال سرعت (در امتداد منحنی) در حالی که انتگرال حول منحنی اطراف سطح انجام شده باشد. این انتگرال خطی را گردش می‌گویند و با Γ نشان می‌دهند. برای هر منحنی بسته گردش برابر است با

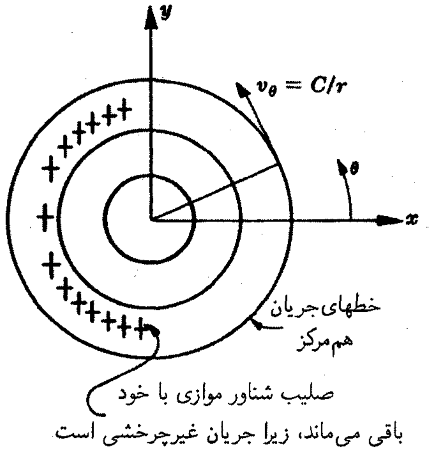
$$\Gamma = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \int \omega \cdot d\mathbf{A} \qquad (۶-۵)$$



شکل ۶-۱ چرخش جزء شاره.



شکل ۶-۲ چرخش و گردش؛ $\omega(x,y)$ ممکن است در سرتاسر سطح وجود داشته باشد و با انتگرال خطی $\oint \mathbf{V}\cdot d\mathbf{l}$.



شکل ۶-۳ گردابهٔ پتانسیل.

اکنون، می‌توان تصویر فیزیکی چرخش را در شاره به‌صورت زیر به‌دست آورد. صلیب کوچکی را به‌صورت شناور بر روی سطح شاره‌ای در نظر بگیرید (شکل ۶-۳). اگر شاره غیرچرخشی باشد، صلیب همواره به‌طور موازی با خودش حرکت می‌کند؛ زیرا شاره در هیچ‌جا سرعت زاویه‌ای ندارد. البته در دنیای واقعی، صلیب طولی متناهی دارد و، با وجودی که شاره غیرچرخشی است، می‌تواند شروع به چرخش کند. اما در حد، هنگامی که طول صلیب آزمون بی‌نهایت کوچک می‌شود، این صلیب در جریان غیرچرخشی حول خود چرخش نخواهد داشت. در مقابل با این رفتار، صلیب شناوری را در جریان برشی گران‌رویی که چرخش دارد، در نظر بگیرید. روشن است که صلیب در حین حرکت در امتداد شاره، دارای چرخش نیز خواهد بود، زیرا رفتار برشی شاره دو انتهای صلیب را با سرعتهای مختلفی به حرکت در می‌آورد.

مثال سادهٔ جریان غیرچرخشی، گردابهٔ پتانسیل است، که گردابهای معمولی یا دیوبادها تقریب نزدیکی برای این جریان‌اند. در گردابهٔ پتانسیل، سرعت v_θ (که فقط دارای مؤلفهٔ زاویه‌ای v_θ است) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$v_\theta = \frac{C}{r} \tag{۶-۶}$$

و بنابراین، پتانسیل سرعت ϕ عبارت است از

$$\phi = -C\theta \tag{۶-۷}$$

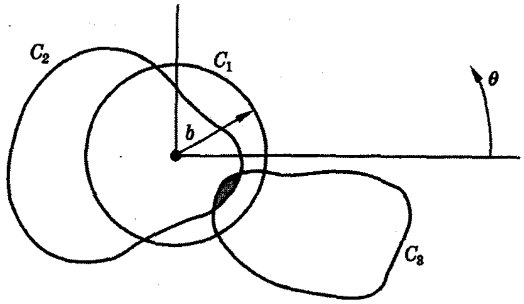
به گونه‌ای که $-\nabla\phi = (C/r)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. که C عدد ثابت و $\hat{\theta}$ بردار یکه در جهت θ است. این جریان غیرچرخشی است، زیرا

$$\nabla\times\mathbf{V} = \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{C}{r}\right)\hat{\mathbf{z}} = ۰$$

که $\hat{\mathbf{z}}$ بردار یکه در جهت z است. اما، در $r = ۰$ تکینگی‌ای وجود دارد. گردش Γ پیرامون هر پربندی که شامل مبدأ نباشد، صفر است، اما اگر پربند شامل مبدأ باشد، مقداری متناهی برای Γ وجود دارد که ناشی از چرخش در مبدأ خواهد بود. اکنون، با توجه به شکل ۶-۴، شکل $\Gamma_۱$ را پیرامون پربند $C_۱$ به‌دست می‌آوریم.

$$\Gamma_۱ = \int_۰^{۲\pi} v_\theta\Big|_{r=b}\, b\, d\theta = ۲\pi C$$

در هر پربند دیگری همچون $C_۲$ که شامل مبدأ باشد، مقدار $۲\pi C$ برای گردش به‌دست می‌آید. بدین‌ترتیب، پتانسیل سرعت را می‌توان به‌صورت $\phi = -\Gamma\theta/۲\pi$ نوشت. هر پربندی همچون $C_۳$ دارای گردش صفر است. مقدار ثابت $C = \Gamma/۲\pi$ را به‌عنوان قدرت گردابه می‌شناسند. در دنیای واقعی، گردابه نمی‌تواند در مرکز خود دارای سرعت نامتناهی باشد و هستهٔ مرکزی گردابه به‌صورت جسم صلبی به قطر a و سرعت زاویه‌ای



شکل ۶-۴ پربندهای انتگرال‌گیری پیرامون گردابهٔ پتانسیل.

Ω دوران می‌کند. بدین‌ترتیب، از قضیهٔ استوکس، داریم $-\frac{1}{2}a\Omega^2 = 2\pi C$. در طبیعت، طوفانهای شدید و تندبادهای حاره‌ای مثالهایی دربارهٔ گردابه هستند. چشم تندباد در ناحیهٔ مرکزی نسبتاً آرام است، در حالی که شاره به‌صورت جسمی صلب دوران می‌کند.

۶-۲ قضیهٔ برنولی

در فصل ۳، معادلهٔ برنولی را با انتگرال‌گیری از معادلهٔ حرکت شارهٔ ناگران‌رو در امتداد خط جریان به‌دست آوردیم. همچنین، همین رابطه را با انتگرال‌گیری از معادلهٔ انرژی برای جریان بی‌اصطکاک به‌دست آوردیم. اکنون، چون فقط با جریان تراکم‌ناپذیر سروکار داریم، به معادلهٔ انرژی نیاز نیست و اطلاعات کامل را می‌توان از معادلهٔ حرکت و معادلهٔ پیوستگی به‌دست آورد.

در جریان غیرچرخشی با شرط پایستگی نیروهای حجمی که از پتانسیل ($\mathbf{B} = -\nabla\psi$) به دست می‌آید، معادلهٔ برنولی بین هر دو نقطهٔ جریان (نه الزاماً بر روی یک خط جریان) صدق می‌کند. $d\mathbf{r}$ را به‌صورت جزء فاصله در میدان جریان (نه الزاماً در امتداد خط جریان) درنظر می‌گیریم. بنابراین، برای جریان غیرچرخشی تراکم‌ناپذیر پایا یا ناپایا، داریم

$$\rho\int\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\cdot d\mathbf{r} + \rho\int\nabla\left(\frac{V^2}{z}\right)\cdot d\mathbf{r} - \rho\int\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})\cdot d\mathbf{r} = -\int\nabla p\cdot d\mathbf{r} - \rho\int\nabla\psi\cdot d\mathbf{r}$$

که از معادلهٔ (۳-۳۶) به‌دست می‌آید. در جریان غیرچرخشی داریم $\nabla\times\mathbf{V} = 0$، به‌گونه‌ای که معادلهٔ بالا به‌صورت زیر در می‌آید.

$$\rho\int\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\cdot d\mathbf{r} + \rho\int\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)\cdot d\mathbf{r} = -\int\nabla p\cdot d\mathbf{r} - \rho\int\nabla\psi\cdot d\mathbf{r} \qquad (۶\text{-}۸)$$

چون جریان غیرچرخشی است، سرعت $\mathbf{V}$ را می‌توان از تابع پتانسیل سرعت $\mathbf{V} = -\nabla\phi$ به‌دست آورد، که در بخش ۶-۴ بحث خواهد شد. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۶-۸) معادلهٔ برنولی ناپایا را برای جریان غیرچرخشی تراکم‌ناپذیر به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \psi = \text{const.} \qquad (۶\text{-}۹)$$

که در سرتاسر جریان صادق است، نه فقط در امتداد خط جریان. اگر جریان پایا باشد، معادلهٔ (۶-۹) به‌صورت سادهٔ زیر در می‌آید

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \psi = \text{const.}$$

باز هم می‌توان نشان داد که اگر شاره بی‌اصطکاک ناگران‌رو باشد و نیروهای حجمی نیز غیرچرخشی (پایستار) باشند، آن‌گاه جریان الزاماً غیرچرخشی است (شاید بجز در نقاط تکینی همچون مرکز گردابهٔ پتانسیل).

از معادلهٔ برنولی (۶-۹) برای محاسبهٔ فشار در سرتاسر میدان جریان، با تعیین سرعت $\mathbf{V}$، می‌توان استفاده کرد. تعیین سرعت $\mathbf{V}$ مسئلهٔ مهمی در جریان پتانسیل و آئرودینامیک فروصوتی است و در بخشهای آتی بررسی خواهد شد.

۶-۳ قضیهٔ گردابهٔ کلوین و حرکت گردابه

گردش Γ در پیرامون هر پربند همیشه از ذرات شارهٔ یکسان (خط شاره) تشکیل می‌شود و در شارهٔ گران‌رو، که فقط دارای نیروهای حجمی پایستارند، ثابت است. هر چند گردشاری در چنین شرایطی معمولاً صفر است، ولی گردش، به علت وجود ناحیهٔ گردشاری موضعی یا نقاط تکین گردشاری می‌تواند وجود داشته باشد.

با ضرب معادلهٔ حرکت در $d\mathbf{I}$ (جزء خط شاره) و انتگرال‌گیری بر روی پربند، داریم

$$\left(\frac{D}{Dt}(\mathbf{V}\cdot d\mathbf{I}) = \mathbf{V}\cdot\frac{D}{Dt}(d\mathbf{I}) + d\mathbf{I}\cdot\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \quad \text{به‌خاطر بیاورید که}\right)$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \frac{D}{Dt}(\mathbf{V}\cdot d\mathbf{I}) = -\oint\left(\frac{\nabla p}{\rho}+\nabla\psi\right)\cdot d\mathbf{I} + \oint \mathbf{V}\cdot\frac{D}{Dt}(d\mathbf{I}) \tag{۶-۱۰}$$

اما چون $d\mathbf{I} = d\mathbf{r}$ و $\mathbf{V}D/Dt(d\mathbf{r}) = \mathbf{V}\cdot d\mathbf{V} = d(V^{۲}/۲)$ (که $\mathbf{r}$ بردار مکان لاگرانژی ذرهٔ شاره است)، و چون جمله‌های انتگرالده تک‌مقدار هستند، خواهیم داشت

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint[-d_p/\rho - d\psi - d(V^{۲}/۲)] = ۰$$

بنابراین

$$\frac{DT}{Dt} = ۰ \tag{۶-۱۱}$$

که مفهوم فیزیکی آن این است که Γ در پیرامون پربند خط شاره، در حین حرکت با شاره در هر زمان ثابت می‌ماند؛ این نتیجهٔ بسیار مهمی است. توجه کنید که معادلهٔ (۶-۱۱) برای هر دو شارهٔ تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر صادق است.

در اینجا، فقط اثبات طرحوارهٔ قضیهٔ کلوین را ارائه کردیم و خواننده می‌تواند برای جزئیات بیشتر به مرجعها مراجعه کند. در اینجا، باید تأکید کرد که $d\mathbf{I}$ جزء خط شاره (همیشه متشکل از مولکولهای شارهٔ یکسان) است و همراه شاره حرکت می‌کند و ممکن است در حین حرکت جهت آن تغییر کند. مدار بسته‌ای که در پیرامون آن $d\mathbf{I}$ انتگرال‌گیری می‌شود همیشه متشکل از ذرات شارهٔ یکسان است و همیشه حلقهٔ بستهٔ کاملی را در دو یا سه بعد تشکیل می‌دهد. قضیهٔ کلوین را می‌توان با انتگرال‌گیری گردشاری $\boldsymbol{\omega}$ روی سطح تشکیل‌شده به‌وسیلهٔ این حلقه نیز به‌دست آورد و با استفاده از قضیهٔ استوکس می‌توان آن را به انتگرال خطی تبدیل کرد. جزء $d\mathbf{I}$ را نباید با جزء dr (که در فضای مختصه تثبیت شده است و می‌توان آن را برحسب دیفرانسیلهای مختصات اویلری نوشت) اشتباه گرفت.

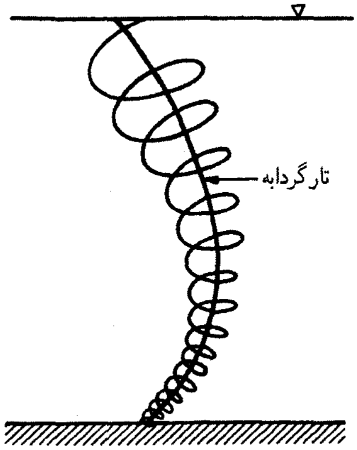
گردابه‌ای سه‌بعدی همچون دیوباد را که مرکز آن خط نامنظمی را تشکیل می‌دهد، در نظر می‌گیریم. این خط را که مکان هندسی مرکز گردابه‌های دوبعدی است، خط گردابه می‌گویند. به بیان دقیق‌تر، خط گردابه خطی است در شاره که مماس بر آن در هر نقطه در جهت بردار گردشاری در آن نقطه است. هر شارهٔ چرخشی، تعداد مجموعهٔ خطهای گردابه نامتناهی است. اما، اگر گردشاری ناشی از حرکت گردابهٔ پتانسیل باشد، فقط تک خطی وجود دارد که مرکز گردابهٔ پتانسیل را به‌هم وصل می‌کند.

لوله گردابه، لوله‌ای است که مکان هندسی خطهای گردابهٔ کشیده شده از روی تمام نقطه‌های منحنی بسته است.

تار گردابه، لولهٔ گردابه‌ای با سطح مقطع بی‌نهایت کوچک است. هستهٔ جامد هر دیوباد را می‌توان به‌صورت لولهٔ گردابه تصور کرد، که با کوچکتر شدن این هسته، سطح مقطع لوله بی‌نهایت کوچک می‌شود و به‌صورت خط گردابه در می‌آید. (شکل ۶-۵ را ببینید).

تار گردابه و خط گردابه همسان هستند، جز اینکه قدرت را منتسب به تار می‌دانند. لولهٔ گردابه یا تارگردابه را می‌توان با تعریف انتگرال $\int \boldsymbol{\omega}\cdot d\mathbf{A}$ روی مقطع به‌قدرت مرتبط کرد. این قدرت باید در امتداد لولهٔ گردابه ثابت باشد. ازاین‌رو، $\boldsymbol{\omega}\cdot d\mathbf{A}$ را شدت تار، یعنی گردشاری بر واحد سطح تعریف می‌کنند و در امتداد تار باید ثابت بماند. بنابراین، تارها باید حلقه‌های بسته (حلقه‌های گردابه)ای شبیه حلقه‌های دود سیگار تشکیل دهند که به مرزهای شاره منتهی می‌شوند. تارگردابه نمی‌تواند فقط منتهی به شاره شود، مگر اینکه گران‌روی موجود باعث از بین رفتن گردشاری بشود.

این بحث به حالت پایا محدود نیست و باید به‌خاطر داشت که همهٔ این خطها و تارها همراه با شاره حرکت می‌کنند.



شکل ۶-۵ تارگردابهٔ مربوط به گردابهٔ پتانسیل در شاره. در هر دیوباد، هستهٔ مرکزی که ابعادی متناهی دارد، در لولهٔ گردابه محصور است.

۶-۴ پتانسیل سرعت و تابع جریان

شرط غیرچرخشی شرط لازم و کافی برای دست‌یابی به‌سرعت از طریق پتانسیل سرعت اسکالر ϕ به‌صورت زیر است

$$\mathbf{V} = -\nabla\phi \qquad (۶\text{-}۱۲)$$

که در مختصات دکارتی عبارت است از

$$u = -\partial\phi/\partial x, \quad v = -\partial\phi/\partial y, \quad w = -\partial\phi/\partial z$$

پتانسیل سرعت را می‌توان برای جریان عمومی سه‌بعدی شارهٔ تراکم‌ناپذیر تعریف کرد. اما، این بحث را به فصل ۸ موکول می‌کنیم و در اینجا مطالعهٔ خود را به جریان تراکم‌ناپذیر پایای دوبعدی محدود خواهیم کرد. فرض تراکم‌ناپذیری جریان برای آئرودینامیک فروصوتی (عدد ماخ حدود $M < ۰٫۳$) معتبر است و محدودیت آن به دو بعد امکان تحلیل ریاضی راحتی را فراهم می‌آورد، هر چند امکان بحث اثرهای سه‌بعدی، دست‌کم به‌طور کیفی، در اینجا وجود دارد. هر چند پتانسیل سرعت را می توان برای هر جریان غیرچرخشی تعریف کرد، عبارت جریان پتانسیل غالباً به‌معنی جریان تراکم‌ناپذیر دوبعدی است، مگر اینکه به‌صورت دیگری مشخص شده باشد.

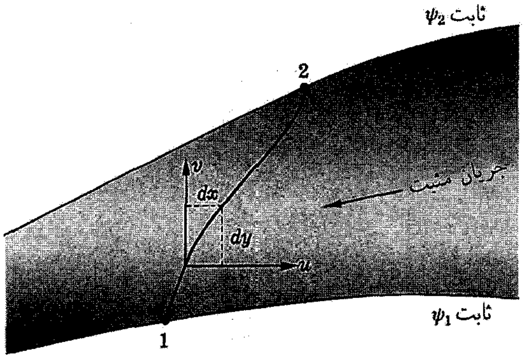
در شرایط تراکم‌ناپذیری، سرعت برحسب پتانسیل ϕ را می‌توان در معادلهٔ پیوستگی $\nabla \cdot \mathbf{V} = ۰$ نشاند تا شرط اینکه ϕ تابعی هماهنگ است (در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند)، به‌دست آید:

$$\nabla^۲\phi = ۰ \qquad (۶\text{-}۱۳)$$

که در مختصات دکارتی به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial^۲\phi}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲\phi}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲\phi}{\partial z^۲} = ۰$$

تابع مهم دیگر، تابع جریان ψ را می‌توان برای هر میدان جریان دوبعدی، صرف‌نظر از غیرچرخشی بودن یا نبودن جریان و تراکم‌پذیری یا تراکم‌ناپذیری شاره، تعریف کرد، هر چند در اینجا خود را به جریان تراکم‌ناپذیر پایا محدود می‌کنیم. در هر جریان دوبعدی، خطهای ψ ثابت همان خطهای جریان هستند و اختلاف بین مقادیر عددی دو خط جریان برابر با آهنگ جریان شار بین آن دو خط جریان است. اهمیت فیزیکی تابع جریان را می‌توان با مراجعه به شکل ۶-۶ دریافت. با عبور از $\psi_۱$ به $\psi_۲$، جریان را از راست به چپ مثبت درنظر می‌گیریم، و ψ را برحسب $\mathbf{V}$



شکل ۶-۶ خطهای جریان و تابع جریان ψ.

در مختصات دکارتی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{۶-۱۴}$$

آهنگ جریان بین ψ_1 و ψ_2 (که از راست به چپ مثبت است). عبارت است از

$$Q_{12} = \int_1^2 (vdx - udy) = \int_1^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy\right) = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \tag{۶-۱۵}$$

این انتگرال تا وقتی که دو خط جریان را به‌هم وصل می‌کند، مستقل از مسیر است. از نظر فیزیکی، تأکید بر تک‌مقداره بودن ψ است، به‌گونه‌ای که در حول هر پربند بسته، داریم $\oint d\psi = 0$؛ این موضوع پربندی که دارای تکینگی‌ای همچون چشمه یا چاه است، نخواهد بود؛ در آن حالت، ψ ممکن است تک مقداره نباشد، مگر آنکه خود را به حوزه آن، مثلاً $0 < \theta < 2\pi$ محدود کنیم.

بدین‌ترتیب، در جریان دوبعدی، با توجه به شرط غیرچرخشی شاره، داریم $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ یا $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y = 0$ که همراه با تعریف ψ برای هر جریان پتانسیل تراکم‌ناپذیر پایای دوبعدی نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

بنابراین، ψ هماهنگ است (یعنی در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند) و در هر دستگاه مختصات، داریم

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{۶-۱۶}$$

وانگهی

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{۶-۱۷}$$

که به شرایط کوشی-ریمن معروف است.

در مختصات قطبی r و θ، رابطه‌های اصلی عبارت‌اند از

$$v_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{۶-۱۸}$$

و البته، خواهیم داشت $\nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0$

پیامد مهم این حقیقت که ϕ و ψ تابعهای هماهنگ‌اند و شرایط کوشی-ریمن را برآورده می‌کنند، این است که خطهای ϕ و ψ ثابت متعامد هستند. به‌آسانی می‌توان این حقیقت را به‌صورت زیر نشان داد

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\phi=\text{const.}} = -\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_{\psi=\text{const.}}$$

و در امتداد خط ϕ ثابت

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = 0 \\ &= -u\ dx - v\ dy \end{aligned}$$

و در امتداد خط ψ ثابت

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0 \\ &= v\ dx - u\ dy \end{aligned}$$

بنابراین، از $d\phi = 0$، داریم $dy/dx = \mathbf{u}/y$ و از $d\psi = 0$، خواهیم داشت $dy/dx = v/u$، و بنابراین

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi=\text{const.}} = -\left.\frac{dx}{dy}\right|_{\psi=\text{const.}}$$

که بیان ریاضی تشکیل شبکهٔ متعامد توسط خطهای ϕ ثابت و خطهای ψ ثابت است. چون این خطها متعامدند و در یک نوع معادلات دیفرانسیل صدق می‌کنند، نقش ϕ و ψ برای معرفی جریانهای مختلف قابل تعویض است.

خطهای ϕ و ψ ثابت شبکه‌ای به‌نام مربعهای خمیده خط تشکیل می‌دهند. در جریان یکنواخت، همهٔ این خطها مستقیم‌اند، اما به‌طور کلی خطهای جریان و خطهای پتانسیل خمیده هستند. چون هیچ شاره‌ای از خطوط ψ ثابت نمی‌گذرد، آنها را می‌توان به‌عنوان مرزهای جامد تلقی کرد. یعنی، مرز جامد را می‌توان جایگزین خط جریان (خط ψ)، بدون تغییر طرح کلی جریان، کرد.

چون معادلات $\nabla^2\phi = \nabla^2\psi = 0$ خطی هستند، می‌توان جوابهای جریانهای مختلف را برهم‌نهش کرد و مقدار ϕ و ψ را در هر نقطه از فضا مستقیماً با هم جمع کرد تا مقدارهای جدیدی برای ϕ و ψ به‌دست آید، که از نظر فیزیکی به‌معنی برهم‌نهش مستقیم جریانهای مختلف است.

به‌عنوان مثال، جریانهای ایجادشده با چشمه یا چاه، یا گردابهٔ پتانسیل را می‌توان بر روی جریان یکنواخت برهم‌نهش کرد. در بخش بعد دربارهٔ طرحهای جریان دوبعدی ساده و بعضی از روشهای برهم‌نهش این جریانهای ساده برای ایجاد میدانهای جریان پیچیده‌تر بحث خواهیم کرد.

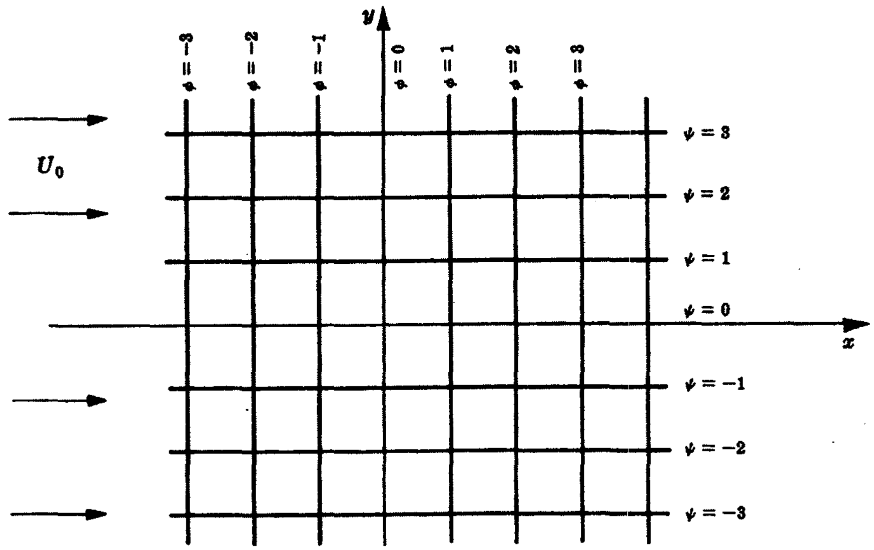
پس از تعیین خطهای ϕ و ψ برای جریانی مفروض، مؤلفه‌های سرعت مشخص می‌شوند و فشار را می‌توان به کمک معادلهٔ برنولی به‌دست آورد.

۶-۵ طرحهای سادهٔ جریان

در این بخش، بعضی از جریانهای ساده و تابعهای ϕ و ψ آنها را بررسی خواهیم کرد. در بخش بعد، به بعضی از روشهای حل معادلات خواهیم پرداخت. اما، با درک مسائل جریانهای ساده، بسیاری از جریانهای پیچیده را می‌توان صرفاً با برهم‌نهش این جوابهای ساده به‌دست آورد.

۶-۵-۱ جریان یکنواخت

فرض کنید که جریان تمام فضا را پر کرده، و یکنواخت است؛ سرعت $U_0\hat{\mathbf{x}}$ موازی با محور x است، که $\hat{\mathbf{x}}$ برداری یکه در جهت x است. تنها مؤلفهٔ سرعت u است، بنابراین $-\partial\phi/\partial x = U_0 = \text{const.}$ در نتیجه، داریم $\phi = -\int U_0\, dx + f(y) = -U_0 x + C_1$ زیرا v صفر است و ϕ



شکل ۶-۷ جریان یکنواخت موازی با محور x.

باید مستقل از y باشد. ثابت $C_۱$ اختیاری است و آن را برابر صفر می‌گیریم. تابع جریان از رابطهٔ $U_\circ = -\partial\psi/\partial y$ به‌دست می‌آید و با استدلال مشابه، داریم

$$\psi = -U_\circ y + C_۲ = -U_\circ y$$

آهنگ جریان بین هر دو خط ψ ثابت (y ثابت) و از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\psi_۲ - \psi_۱ = \psi\Big|_{y=y_۲} - \psi\Big|_{y=y_۱} = Q_{۱۲} = -U_\circ(y_۲ - y_۱)$$

که عددی منفی برای جریان مثبت از راست به چپ است، زیرا در اینجا، البته جریان از چپ به راست خواهد بود. در نتیجه، برای جریان یکنواخت $U_\circ\hat{\mathbf{x}}$ موازی با محور x، داریم

$$\phi = -U_\circ x, \qquad \psi = -U_\circ y \tag{۶-۱۹}$$

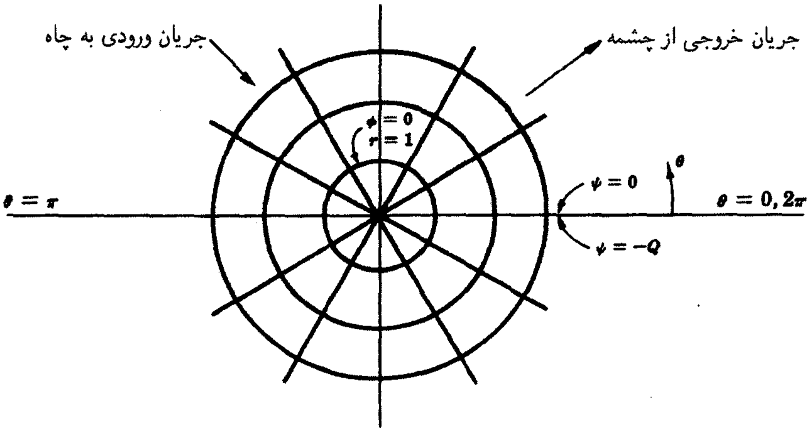
خطهای ϕ و ψ را در شکل ۶-۷ نشان داده‌ایم.

۶-۵-۲ چشمه‌ها و چاهها

چشمه یا چاه نقطه‌ای تکینگی‌ای است که خطهای ψ از آن منشعب می‌شوند و خطهای ϕ به‌صورت دایره‌های هم‌مرکز در حول آن تشکیل خواهند شد. برای چشمه‌ای با آهنگ جریان Q، سرعت شعاعی v_r برابر $Q/۲\pi r$ است و سرعت زاویه‌ای v_θ صفر خواهد بود. Q قدرت چشمه است و به بیان فیزیکی آهنگ کل جریان در واحد عمق شاره است. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{۱}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \\ \psi &= -\frac{Q}{۲\pi}\theta, \qquad \phi = -\frac{Q}{۲\pi}\ln r \end{aligned} \tag{۶-۲۰}$$

معادلهٔ (۶-۲۰) برای چاه نیز معتبر است، ولی Q منفی خواهد بود؛ بنابراین، v_r منفی است و جریان به طرف داخل خواهد بود. البته، هر ثابت دلخواهی را، بدون تغییر سرعتها، می‌توان به ϕ یا ψ افزود.



شکل ۶-۸ چشمه و چاه اگر در $\theta = 2\pi$، $\psi = -Q$ باشد، آنگاه Q عددی مثبت برای چشمه و عددی منفی برای چاه است.

طرح جریان را در شکل ۶-۸ نشان داده‌ایم. البته، در مبدأ وقتی $r \to 0$، $\phi \to \infty$، که تعجب ندارد، زیرا در واقع باید همیشه سطحی متناهی وجود داشته باشد نه نقطه‌ای که شاره درون آن جریان یابد.

۶-۵-۳ گردابهٔ پتانسیل

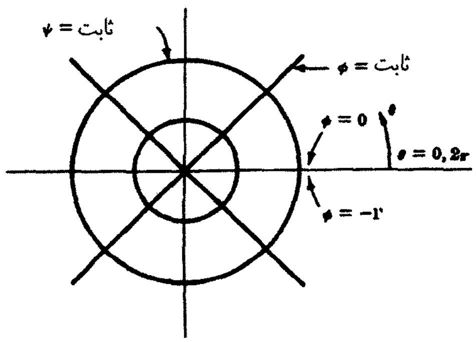
قبلاً گردابهٔ پتانسیلی را بررسی کرده‌ایم؛ اکنون، آن را برحسب ϕ و ψ بررسی می‌کنیم. برای گردابه، از تابع $v_\theta = C/r = \Gamma/2\pi r$، برای یافتن ϕ و ψ انتگرال می‌گیریم.

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \qquad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{۶-۲۱}$$

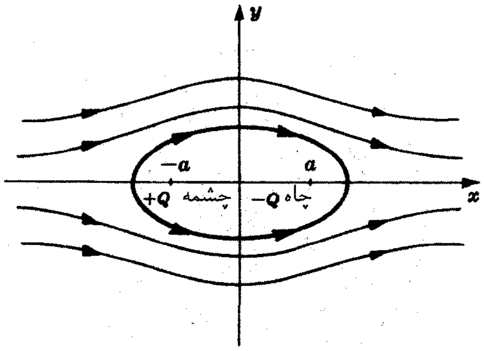
یادآور می‌شویم که نقش ϕ و ψ در اینجا، از چشمه به چاه و برعکس، تعویض‌پذیرند. در واقع، در شکل ۶-۹ می‌بینیم که خطهای ϕ و ψ ثابت طرحی مشابه با خطهای شعاعی، و دایره‌های هم‌مرکز تشکیل می‌دهند. جملهٔ $\Gamma/2\pi$ را قدرت گردابه می‌گویند.

۶-۵-۴ برهم‌نهش

به‌عنوان مثال دربارهٔ برهم‌نهش دو یا چند جریان پتانسیل، جریان موجود در شکل ۶-۱۰، یعنی بیضی رانکین را بررسی می‌کنیم. چشمه و چاهی را با قدرت مساوی به فاصلهٔ یکسان از مبدأ بر روی محور x در جریان یکنواخت $U_0\hat{\mathbf{x}}$ قرار می‌دهیم. همهٔ جریان ناشی از چشمه توسط چاه جذب می‌شود و خط جریان مشخصی وجود دارد که شارهٔ حاوی جریان یکنواخت را از شارهٔ جاری از چشمه به چاه جدا می‌سازد. این خط



شکل ۶-۹ گردابهٔ پتانسیل و خطهای ϕ و ψ.



شکل ۶-۱۰ جریان موجود بر روی بیضی‌گون رانکین. این بیضی‌گون خط جریان تقسیم‌کننده بین شارهٔ جاری از چشمه به چاه و شارهٔ موجود در جریان آزاد است.

جریان جداکننده را می‌توان به‌عنوان سطح مقطع استوانه‌ای بیضی‌گون درنظر گرفت. بدین‌ترتیب، از برهم‌نهش این جریانها، جریانی خارجی در پیرامون استوانهٔ بیضی‌گون به‌وجود می‌آید. از ترکیب چند چشمه و چاه می‌توان جریان تقریبی در حول استوانه‌ای به شکل دلخواه را به‌وجود آورد که حول محور x متقارن است. با استفاده از چشمهٔ توزیع یافته در امتداد محور x می‌توان جریان دقیق حول چنین جسمی را یافت؛ اما به‌طور کلی، محاسبهٔ تابع توزیع قدرت مشکل است و به حل معادلهٔ انتگرالی نیاز دارد. این‌گونه روشها در آئرودینامیک مفیدند.

با توجه به بیضی‌گون رانکین، داریم

$$\begin{aligned}\phi &= -U_\circ x - \left(\frac{Q}{2\pi}\right)\ln r_1 + \left(\frac{Q}{2\pi}\right)\ln r_2 \\ \psi &= -U_\circ y - \left(\frac{Q}{2\pi}\right)\theta_1 + \left(\frac{Q}{2\pi}\right)\theta_2\end{aligned} \tag{۶-۲۲}$$

که به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\phi &= -U_\circ x - \frac{Q}{4\pi}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} \\ \psi &= -U_\circ y - \frac{Q}{2\pi}\left(\tan^{-1}\frac{y}{x+a} - \tan^{-1}\frac{y}{x-a}\right)\end{aligned} \tag{۶-۲۳}$$

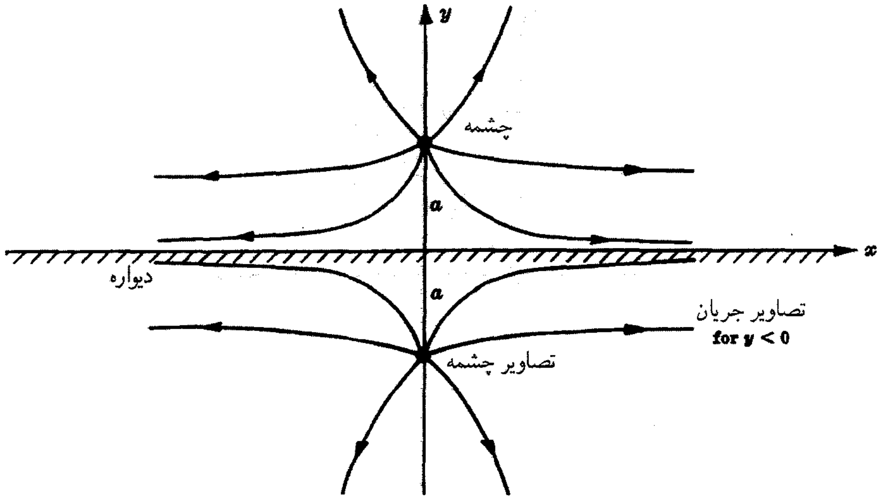
۶-۵-۵ روش تصاویر

همان‌گونه که گفته شد، خط جریان را می‌توان به‌صورت مرزی جامد درنظر گرفت. اگر جریانی را بتوان یافت که خط ψ ثابت منطبق با مرز باشد، آن‌گاه می‌توان این جریان را در امتداد آن مرز مشخص کرد. برای جریان موجود بر روی جسم، سطح جسم به مثابه خطی ψ ثابت است.

غالباً می‌توان با برهم‌نهش طرحهای جریان، خطی ψ ثابت منطبق با دیواره یا مرز به‌وجود آورد. مثالی مفید برای این روش، روش تصاویر است. دو جریان مشابهی را درنظر می‌گیریم که با صفحه‌ای میانی از هم جدا شده‌اند؛ هیچ جریانی نباید از این صفحهٔ میانی عبور کند و بنابراین می‌توان آن را به‌صورت مرزی جامد تصور کرد.

در روش تصاویر با استفاده از روش برهم‌نهش، جریانها را با بازتاب آنها در حول مرزی جامد، که هیچ جریانی از میان آن نمی‌گذرد، بر روی هم قرار می‌دهند. بسیاری از جریانهای نسبتاً پیچیده را می‌توان با این روش به‌وجود آورد.

برای مثال، جریان ناشی از چشمه (یا چاهی را در نزدیک دیواره (محور x) مطابق شکل ۶-۱۱ درنظر می‌گیریم. جریان ناشی از چشمه را در $y = a$ و تصویر چشمه را در $y = -a$ تشکیل می‌دهیم. این دو جریان در امتداد محور x، که خط جریان تقسیم‌کننده یا دیواره است با یکدیگر



شکل ۶-۱۱ روش تصاویر به‌کار رفته برای ایجاد جریان چشمه در نزدیکی دیواره.

مخالفت می‌کنند. تابعهای ϕ و ψ عبارت‌اند از

$$\phi = -\frac{Q}{۴\pi}\ln\{[(y-a)^۲ + x^۲][(y+a)^۲ + x^۲]\}$$

$$\psi = -\frac{Q}{۲\pi}\left(\tan^{-۱}\frac{y-a}{x} + \tan^{-۱}\frac{y+a}{x}\right) \qquad (۲۴\text{-}۶)$$

به‌گونه‌ای که در $y = ۰$ مؤلفهٔ سرعت عمود بر دیواره $(v(y = ۰)$ صفر است.

۶-۶ پتانسیل مختلط

به‌طور کلی، مسئله‌های جریان پتانسیل شامل حل معادلات لاپلاس $\nabla^۲\phi = ۰$ و $\nabla^۲\psi = ۰$ تحت شرایط مرزی مناسبی است که معمولاً عبارت‌اند از یکنواخت یا صفر بودن جریان در بی‌نهایت و عبور نکردن شاره از میان جسمهای توپری که شاره بر روی آنها جریان می‌یابد. اما، بجز برای شکلهای هندسی سادهٔ خاص که ϕ و ψ را برای آنها با حل معادله یا با انتگرال‌گیری مستقیم $\mathbf{V} = -\nabla\phi$، به‌شرطی که سرعت مانند مثالهای بخش قبل معلوم باشد، می‌توان به‌دست آورد، تعیین ϕ و ψ با استفاده از نظریهٔ متغیرهای مختلط و تبدیلهای همدیس به‌خوبی صورت می‌گیرد.

۶-۶-۱ تابع مختلط $F(z)$

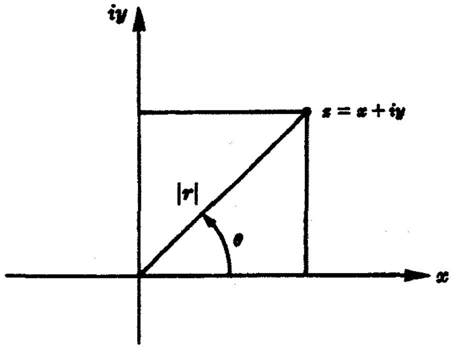
در دو بعد، این حقیقت که ϕ و ψ هماهنگ هستند و در معادلات کوشی-ریمن صدق می‌کنند، شرط لازم و کافی برای تعریف تابع مختلط F (پتانسیل مختلط) به‌صورت زیر است

$$F = \phi + i\psi = F(z) \qquad (۲۵\text{-}۶)$$

که $i = \sqrt{-۱}$ و $z = x + iy$. در صفحهٔ مختلط $(\phi + i\psi)$، ϕ و ψ شبکهٔ مختصات قائمی را تشکیل می‌دهند. دو تابع ϕ و ψ را به‌صورت تابع‌های متغیر مختلط z، به‌جای x و y، درنظر می‌گیریم صفحهٔ xy بیانگر صفحهٔ جریان فیزیکی است. به‌طور کلی

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

شکل ۶-۱۲ را ببینید. z عدد مختلط با جزء حقیقی x و جزء انگاری y است. F را می‌توان به‌صورت تابع z نوشت. بنابراین، $\phi(x, y)$ جزء حقیقی F و $\psi(x, y)$ جزء انگاری F است.



شکل ۶-۱۲ صفحهٔ مختلط z.

شرایط کوشی-ریمن همراه با شرایط تک‌مقدار بودن ϕ و ψ و پیوسته بودن تمام مشتقهای جزئی ϕ و ψ ایجاب می‌کند که F تحلیلی (یا تمام‌ریخت) باشد. تابع تحلیلی $F(z)$ تابعی است که (۱) در درون پربند بستهٔ C متناهی و تک‌مقدار است، و (۲) تمام مشتقهای آن وجود دارند و تک‌مقدارند. جزءهای حقیقی و انگاری تابع تحلیلی z را تابعهای مزدوج می‌گویند و هماهنگ هستند. ϕ و ψ تابعهای مزدوج‌اند و می‌دانیم که $\nabla^۲\phi = \nabla^۲\psi = ۰$.

با مراجعه به شکل ۶-۱۲، $\dfrac{dF}{dz}$ را می‌توان برای کمیت اختیاری Δz محاسبه کرد. اگر Δz را موازی با محور x درنظر بگیریم، داریم $\Delta z = \Delta x$ و

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

و اگر Δz را موازی محور y بگیریم، داریم $\Delta z = i\Delta y$ و

$$\frac{dF}{dz} = -i\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

بنابراین، هر یک از این رابطه‌ها مناسب‌اند و هر دو باید برابر باشند، به‌گونه‌ای که با تساوی جزءهای حقیقی و انگاری، شرایط کوشی-ریمن به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

۶-۶-۲ سرعت مختلط

با مشتق‌گیری از تابع پتانسیل مختلط F، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

یا

$$-\frac{dF}{dz} = u - iv \tag{۶-۲۶}$$

و $-dF/dz = u - iv$ را سرعت مختلط می‌گویند. پتانسیل مزدوج $(\bar{F} = \phi - i\psi)$ را نیز می‌توان نسبت به $\bar{z}$، متغیر مزدوج مختلط، $x - iy$ مشتق گرفت و رابطهٔ $-d\bar{F}/d\bar{z} = u + iv$ را به‌دست آورد. بنابراین

$$\frac{dF}{dz} \cdot \frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} = u^۲ + v^۲ = V^۲ \tag{۶-۲۷ الف}$$

که مربع سرعت در شاره است. غالباً یافتن V^{2} وقتی که $F(z)$ معلوم باشد، بدون نیاز به محاسبات بیشتر، مفید است. برای تشریح معنی $\bar{F}$ فرض می‌کنیم که $F = z + iz^{2}$، آن‌گاه $\bar{F} = \bar{z} - iz^{-2}$. اگر $F = z + a^{2}/z$ باشد، آن‌گاه $\bar{F} = \bar{z} + a^{2}/\bar{z}$. $\bar{F}(\bar{z})$ یعنی تمام iهای صریح تغییر علامت می‌دهند و تمام zها به $\bar{z}$ تبدیل می‌شوند. به‌گونهٔ دیگر، چون $|V|$ قدرمطلق $(u - iv)$ است

$$V^{2} = \left|\frac{dF}{dz}\right|^{2} \tag{۶-۲۷ب}$$

با داشتن V^{2} معادلهٔ برنولی را برای یافتن فشار در شاره می‌توان به‌کار برد.

نقطهٔ سکون، $u = v = 0$ با قراردادن $dF/dz = 0$ به‌دست می‌آید.

۶-۶-۳ نگاشت همدیس

صفحهٔ فیزیکی که حرکت بر روی آن انجام می‌گیرد، صفحهٔ z یا (x, y) است که خطهای $\psi = \text{const.}$ خمیده، و نشانگر خطهای جریان‌اند. در صفحهٔ F، ϕ و ψ شبکه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند. اکنون، می‌توان از صفحهٔ z به صفحهٔ دیگر، مثلاً صفحهٔ $\zeta = \eta + i\xi$ با تبدیلی که ماهیت تعامد ϕ و ψ را حفظ می‌کند، گذر کرد. چنین تبدیلی را به‌عنوان تابع نگاشت به شکل زیر می‌شناسند.

$$\zeta = f(z) \tag{۶-۲۸}$$

می‌توان نشان داد که مثلث بی‌نهایت کوچک در صفحهٔ z را، با حفظ زاویه‌ها و همانندی آن، به‌درون مثلث بی‌نهایت کوچک مشابهی در صفحهٔ ζ بازنمایی کرد. این‌گونه تبدیلها در نگاشت‌سازی به‌کار می‌رود؛ تصویر مرکاتور نگاشت همدیس کرهٔ زمین روی سطحی تخت است. با انتخاب تابعهای مناسب برای شکل معادلهٔ (۶-۲۸) می‌توان طرح جریانهای موجود در پیرامون شکلهای پیچیده را، با دانستن طرح جریان $F(z)$ برای شکل ساده، رسم کرد. سپس، به کمک معادلهٔ (۶-۲۸) به معادلهٔ $F(\zeta)$ رسید که بیان جریان پیچیده‌تری را در صفحهٔ ζ ممکن می‌سازد.

مثلاً نگاشت شکل ۶-۱۳ را درنظر بگیرید. نیمهٔ بالایی صفحهٔ ζ را می‌توان با تبدیل زیر، که مبدأ $0 \to 0'$ را شامل نمی‌شود، به‌درون قطاع موجود در دو صفحهٔ z بازنمایی کرد،

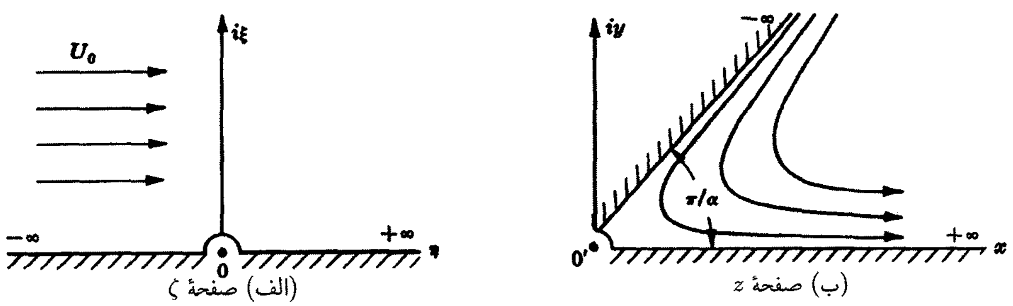
$$\zeta = z^{\alpha} \tag{۶-۲۹}$$

اگر ناگزیر به بررسی جریان یکنواختی در صفحهٔ ζ از چپ به راست آن گاه

$$F = -U_{\circ}\zeta = -U_{\circ}\eta - iU_{\circ}\xi = \phi + i\psi \tag{۶-۳۰}$$

بنابراین، این جریان به‌صورت زیر در صفحهٔ z و به شکل ۶-۱۳(ب)، بیانگر جریان موجود در گوشه بود

$$F = -U_{\circ}\zeta = -U_{\circ}z^{\alpha} \tag{۶-۳۱}$$



شکل ۶-۱۳ نگاشت همدیس نیمهٔ بالایی صفحهٔ ζ به‌درون قطاع π/α در صفحهٔ z.

۶-۷ پتانسیل مختلط برای تعدادی از جریانهای ساده

روش متغیرهای مختلط یکی از مؤثرترین ابزار در نظریهٔ جریان پتانسیل است و اساس آئرودینامیک فروصوتی را تشکیل می‌دهد. با تبدیلهای متوالی از طرح جریان ساده به طرح جریان پیچیده‌تر می‌توان جریان اطراف جسمهایی همچون استوانه‌ها، هوابرها و جز آن را بازسازی کرد. در این بخش، تعدادی از پتانسیلهای مختلط مهم را نام می‌بریم و طرحهای جریان آنها را شرح می‌دهیم. افزون بر آن، با برهم‌نهش پتانسیلهای مختلط، درست مثل ϕ و ψ، می‌توان طرحهای مختلف ایجاد کرد.

۶-۷-۱ میدان جریان یکنواخت

همان‌گونه که قبلاً بیان کردیم، معادلهٔ زیر پتانسیل مختلط برای جریان یکنواخت $U_\circ$ موازی با محور x است.

$$F = -U_\circ z = -U_\circ(x+iy) = \phi + i\psi \qquad (۶\text{-}۳۲)$$

با تساوی دو جزء حقیقی و انگاری، داریم $\phi = -U_\circ x$ و $\psi = -U_\circ y$ که از قبل می‌دانستیم و در شکل ۶-۷ نشان دادیم.

۶-۷-۲ چشمه‌ها و چاهها

پتانسیل مختلط برای چشمه‌ای با قدرت Q عبارت است از

$$F = -\left(\frac{Q}{۲\pi}\right)\ln z = -\left(\frac{Q}{۲\pi}\right)\ln re^{i\theta} \qquad (۶\text{-}۳۳)$$

در اینجا، برای امکان تقسیم F به جزءهای حقیقی و انگاری، بهتر است z را به‌صورت $re^{i\theta}$ ارائه کنیم، بنابراین $F = -Q/۲\pi(\ln r + i\theta)$. از این‌رو، همچون شکل ۶-۸، داریم $\psi = -(Q/۲\pi)\theta$ و $\phi = -(Q/۲\pi)\ln r$. چاه با چشمه مشابه است، با این تفاوت که Q منفی است؛ اگر Q را به‌صورت قدرت چاه تعریف کنیم، خواهیم داشت

$$F = \left(\frac{Q}{۲\pi}\right)\ln z \qquad (۶\text{-}۳۴)$$

۶-۷-۳ گردابهٔ پتانسیل

برای گردابهٔ پتانسیل، مطابق شکل ۶-۹، داریم

$$F = i\frac{\Gamma}{۲\pi}\ln z = i\frac{\Gamma}{۲\pi}\ln re^{i\theta} \qquad (۶\text{-}۳۵)$$

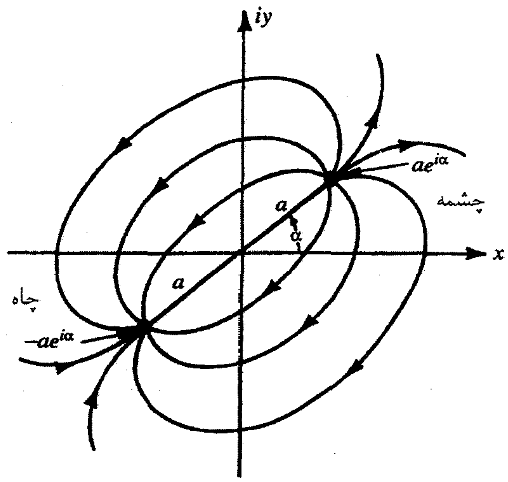
بنابراین، $\phi = -\left(\frac{\Gamma}{۲\pi}\right)\theta$ و $\psi = \left(\frac{\Gamma}{۲\pi}\right)\ln r$ که $\left(\frac{\Gamma}{۲\pi}\right)$ قدرت گردابه و Γ گردش است.

۶-۷-۴ دوقطبی یا دوقلو

چشمه‌ای با قدرت Q در نقطهٔ A و چاهی به‌قدرت $-Q$ در نقطهٔ B درنظر بگیرید. نقطهٔ A را در $z = ae^{i\alpha}$ و B را در $z = -ae^{i\alpha}$، مطابق شکل ۶-۱۴، فرض کنید. تابع پتانسیلی مختلط برای جریان برهم‌نهیده عبارت است از

$$F = -\frac{Q}{۲\pi}\ln(z - ae^{i\alpha}) + \frac{Q}{۲\pi}\ln(z + ae^{i\alpha}) \qquad (۶\text{-}۳۶)$$

خطهای جریان دایره‌هایی هستند که از A و B می‌گذرند.

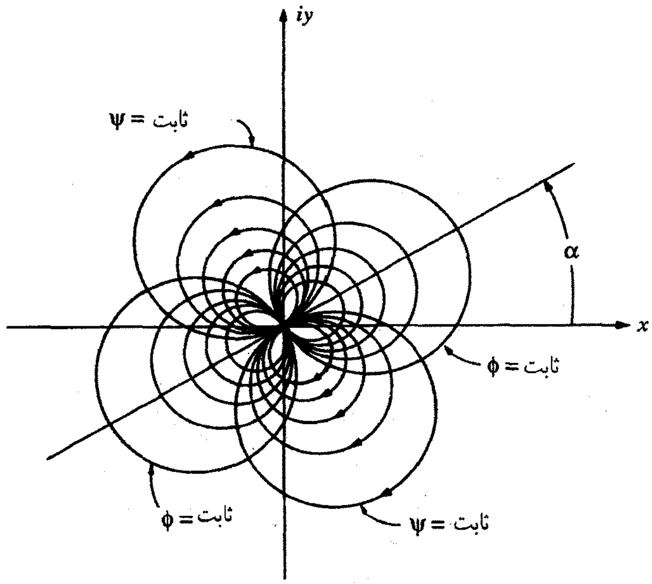


شکل ۶-۱۴ چشمه و چاه.

اکنون با نزدیک شدن A و B به‌هم، جریان حدی $A \to B(a \to 0)$ را به عنوان دوقطبی یا دوقلو می‌شناسند. پتانسیل مختلط برای این جریان (هنگامی که $a \to 0$، A و B برهم منطبق می‌شوند) عبارت است از

$$F = \frac{me^{i\alpha}}{z} \tag{۶-۳۷}$$

که $m = Qa/\pi = \text{const.}$ حتی درحالی که $a \to 0$. با $a \to 0$، $Q \to \infty$ و $\lim \frac{Qa}{\pi} = m$ قدرت دوقطبی است. همچون شکل ۶-۱۵، طرحهای جریان به‌صورت دایره‌هایی تار عنکبوتی هستند که برای خطهای جریان و پتانسیل سرعت به‌کار می‌روند. این طرحها شبیه آرایش میدان دوقطبی الکتروستاتیکی برای بارهای مثبت و منفی و طرح موجهای تابشی از آنتن رادیو دوقطبی‌اند.



شکل ۶-۱۵ جریان دوقطبی.

با تقسیم معادلهٔ (۶-۳۷) به ϕ و ψ، داریم

$$\phi = \frac{m(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}{(x^{۲}+y^{۲})}, \qquad \psi = \frac{m(x\sin\alpha - y\cos\alpha)}{(x^{۲}+y^{۲})} \tag{۶-۳۸الف}$$

که دایره‌های مماس بر مبدأ را نشان می‌دهند. اگر $\alpha = ۰$، داریم

$$\phi = \frac{mx}{x^{۲}+y^{۲}}, \qquad \psi = -\frac{my}{x^{۲}+y^{۲}} \tag{۶-۳۸ب}$$

۶-۷-۵ حرکت جریان از روی استوانهٔ دایره‌ای

با توجه به شکل ۶-۱۶، جریان یکنواخت $U_{۰}$ در جهت مثبت x حرکت می‌کند. استوانه‌ای به شعاع a در مبدأ قرار دارد. پتانسیل مختلط برای جریان حول این استوانه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$F = -U_{۰}\left(z + \frac{a^{۲}}{z}\right) \tag{۶-۳۹}$$

تابع جریان به کمک رابطهٔ (۶-۳۹) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\psi = -U_{۰}\left(r\sin\theta - \frac{a^{۲}}{r}\sin\theta\right) = -U_{۰}y\left(۱ - \frac{a^{۲}}{r^{۲}}\right) = -U_{۰}y + \frac{a^{۲}U_{۰}y}{x^{۲}+y^{۲}} \tag{۶-۴۰}$$

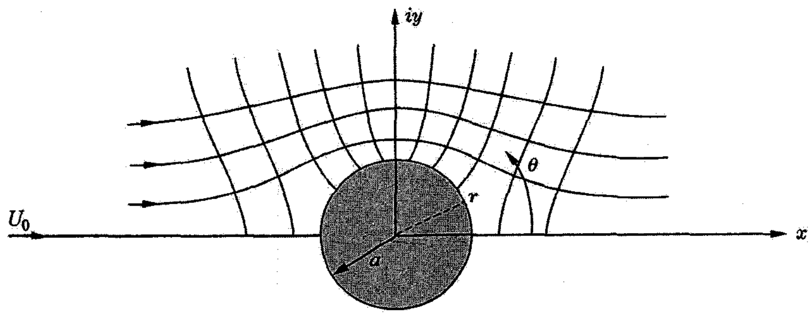
که نشان می‌دهد جریان حول استوانه به‌صورت برهم‌نهش جریانی یکنواخت بر روی دوقطبی‌ای به قدرت $-a^{۲}U_{۰}$ است. (علامت منفی فقط نقش چشمه یا چاه را در شکل ۶-۱۵ نشان می‌دهد.)

پتانسیل سرعت ϕ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\phi = -U_{۰}x\left(۱ + \frac{a^{۲}}{r^{۲}}\right) \tag{۶-۴۱}$$

در $r = a$، پربند استوانه باید منطبق بر خط جریان باشد. در حقیقت، در $r = a$، $\psi = ۰$. میدان سرعت را می‌توان از $-dF/dz = u - iv$ به‌دست آورد که در مختصات قطبی به شکل زیر است

$$\frac{dF}{dz} = -U_{۰} + \frac{U_{۰}a^{۲}}{z^{۲}} = -U_{۰} + \frac{U_{۰}a^{۲}e^{-۲i\theta}}{r^{۲}}$$
$$= U_{۰}\left(\frac{a^{۲}}{r^{۲}}\cos ۲\theta - ۱\right) + iU_{۰}\frac{a^{۲}}{r^{۲}}\sin ۲\theta$$



شکل ۶-۱۶ جریان حول استوانه دایره‌ای، این شکل حول محور x تقارن دارد.

بنابراین، مؤلفه‌های سرعت در دستگاه دکارتی، عبارت‌اند از

$$u = -U_\circ \left(\frac{a^۲}{r^۲}\cos ۲\theta - ۱\right), \qquad v = -U_\circ \frac{a^۲}{r^۲}\sin ۲\theta \tag{۶-۴۲}$$

و برای مؤلفه‌های سرعت در مختصات قطبی، داریم

$$v_r = U_\circ \left(۱ - \frac{a^۲}{r^۲}\right)\cos\theta, \qquad v_\theta = -U_\circ \left(۱ + \frac{a^۲}{r^۲}\right)\sin\theta \tag{۶-۴۳}$$

در نتیجه،

$$V^۲ = u^۲ + v^۲ = v_r^۲ + v_\theta^۲ = \frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}} = U_\circ^۲\left[۱ + \frac{a^۴}{r^۴} + \frac{۲a^۲}{r^۲}\left(\sin^۲\theta - \cos^۲\theta\right)\right]$$

اکنون، فشار پیرامون استوانه را می‌توان از معادلهٔ برنولی به‌دست آورد

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^۲}{۲} = \text{const.} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U_\circ^۲}{۲} = \frac{p_\circ}{\rho}$$

که $p_\circ$ فشار سکون در هر نقطه از جریان است که V صفر باشد و p_∞ فشار جریان آزاد در مکانی است که سرعت $U_\circ$ است. در سطح استوانه، در $r = a$، داریم

$$p\Big|_{r=a} = \frac{p_\circ}{\rho} - ۲U_\circ^۲\left(۱ + \sin^۲\theta - \cos^۲\theta\right)$$

سرعت بیشینه $۲U_\circ$ است و در بالا و پایین استوانه $(\theta = \pi/۲, ۳\pi/۲)$ رخ می‌دهد و در آنجا فشار کمینه است. چون فشار در حول محورهای x و y تقارن دارد، هیچ نیروی خالصی بر استوانه وارد نمی‌شود. البته در واقع، جدایش در پشت استوانه رخ می‌دهد و نیروی پسا وجود دارد. اما، اگر استوانه تغییر شکل دهد، به‌گونه‌ای که عقب استوانه به بیرون کشیده شود، از جدایش جلوگیری خواهد شد. در این حالت، جواب جریان پتانسیل، بجز برای لایهٔ مرزی که به اصطکاک پوستی منجر می‌شود، نسبتاً خوب است. در بخش بعد، دربارهٔ نظریهٔ هوابر مبتنی بر نتیجه‌های خوب ناشی از نظریهٔ جریان پتانسیل برای تعیین توزیع سرعت و فشار بر روی جسم آئرودینامیکی بحث خواهیم کرد.

۶-۸ گردش و قضیهٔ جوکفسکی

در این بخش دربارهٔ برهم‌نهش جریان گردابهٔ پتانسیل (با گردش متناهی و جریان یکنواخت موجود بر روی استوانه بحث می‌کنیم. توزیع فشار برایند به واردشدن برآب روی استوانه می‌انجامد. اساس نظریهٔ آئرودینامیک را به‌وجود می‌آورد.

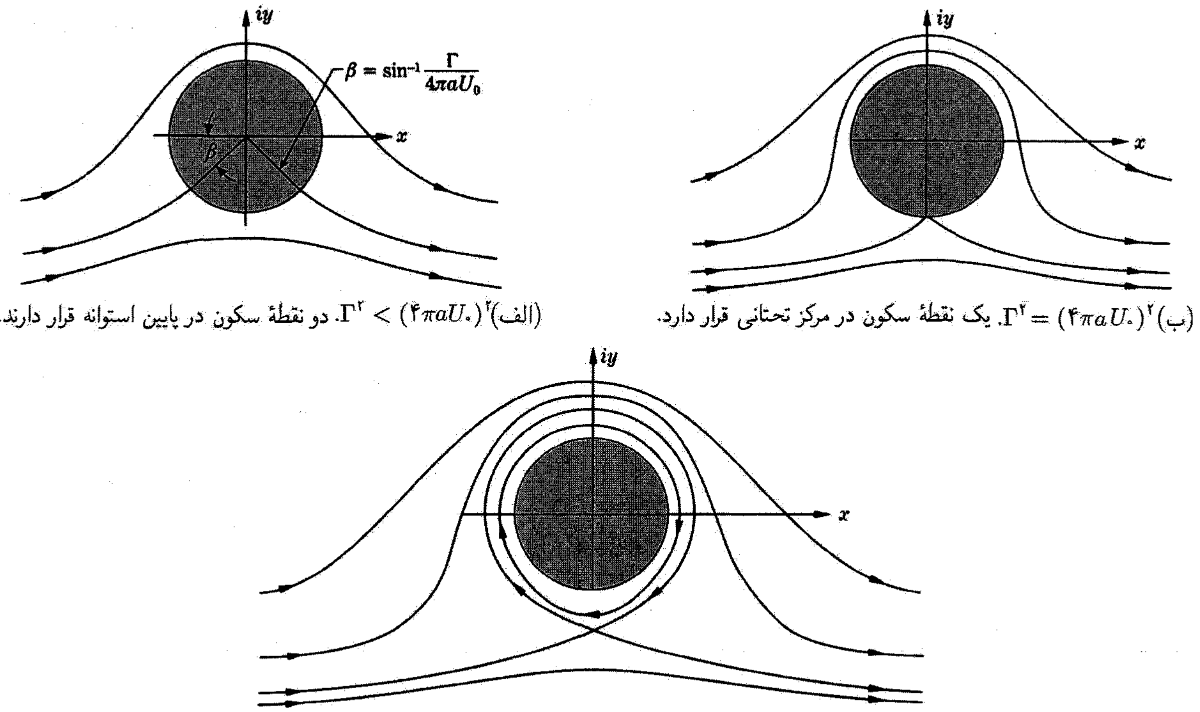
۶-۸-۱ گردش حول استوانهٔ دایره‌ای

جریان یکنواخت موجود بر روی استوانه‌ای دایره‌ای همراه با گردش را درنظر بگیرید. گردش از دوران این استوانه به وجود می‌آید، به‌گونه‌ای که اگر جریان یکنواخت وجود نمی‌داشت، سرعت محیطی استوانه‌ای به شعاع a متناظر با سرعت مماسی گردابهٔ پتانسیل در شعاع a می‌برد. در این‌صورت، تابع پتانسیل مختلط کل عبارت است از

$$F = -U_\circ(z + a^۲/z) + i\frac{\Gamma}{۲\pi}\ln z/a \tag{۶-۴۴}$$

بنابراین، این استوانه بخشی از خط $\psi = \circ$ است. برای تعیین شکل خطهای جریان $(\psi = \text{const.})$، سرعت مختلط $-dF/dz$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dF}{dz} = U_\circ(a^۲/z - ۱) + i\frac{\Gamma}{۲\pi z}$$



(الف) $(۴\pi a U_\circ)^۲ > \Gamma^۲$. دو نقطهٔ سکون در پایین استوانه قرار دارند.

(ب) $(۴\pi a U_\circ)^۲ = \Gamma^۲$. یک نقطهٔ سکون در مرکز تحتانی قرار دارد.

(ج) $(۴\pi a U_\circ)^۲ < \Gamma^۲$. تک نقطهٔ سکون رو به پایین حرکت می‌کند.

شکل ۶-۱۷ خطهای جریان همراه با گردش بر روی استوانهٔ دایره‌ای.

نقطه‌های سکون را از حل این معادله برحسب z می‌یابیم

$$U_\circ(a^۲/z - ۱) + i\frac{\Gamma}{۲\pi z} = \circ$$

بنابراین،

$$z\Big|_{V=\circ} = a\left(i\frac{\Gamma}{۴\pi a U_\circ} \pm \sqrt{۱ - \frac{\Gamma^۲}{۱۶\pi^۲ a^۲ U_\circ^۲}}\right) \qquad (۶-۴۵)$$

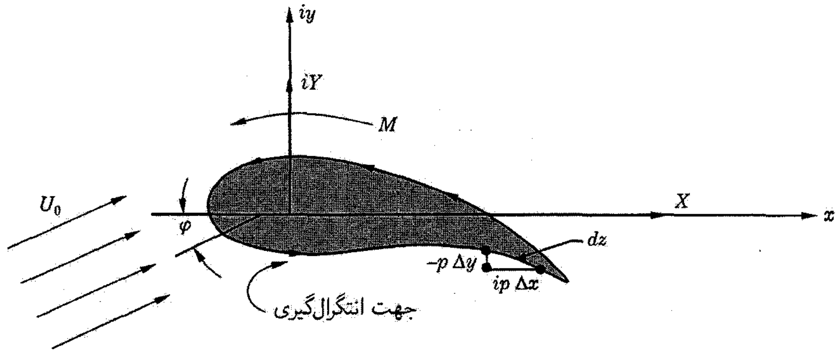
سه حالت وجود دارد: $\Gamma^۲ < (۴\pi a U_\circ)^۲$، $\Gamma^۲ > (۴\pi a U_\circ)^۲$ و $\Gamma^۲ = (۴\pi a U_\circ)^۲$. در شکل ۶-۱۷ جریان را برای هر یک از این سه حالت رسم کرده‌ایم.

البته، نیروی برآی L نیز بر روی این استوانه وارد می‌شود و در زیر رابطه‌ای کلی برای این نیروی برآ به‌دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که برابر $L = -i\rho U_\circ \Gamma$ است؛ یعنی نیروی $-\rho U_\circ \Gamma$ است که در جهت y به استوانه وارد می‌شود.

در اینجا مقدار Γ به سرعت دورانی استوانه بستگی دارد و به‌همین دلیل است که مسیر حرکت توپ بیسبال، و گلف یا پینگ‌پونگ، وقتی که چرخش دارد، خمیده است. برای جریان موجود در شکل ۶-۱۷ مقدار Γ منفی است و برآ در جهت $+y$ است.

۶-۸-۲ قضیهٔ بلاسیوس و قضیهٔ کوتا-جوکفسکی

اکنون، نیروهای کلی و گشتاورهای وارد بر استوانه را در جریان پتانسیل به‌دست می‌آوریم و نتیجه‌ها را در محاسبات برآی وارد بر هوابر به‌کار می‌بریم. با مراجعه به شکل ۶-۱۸، از فشار اطراف استوانه برای یافتن نیروی مختلط کلی $(X + iY)$ و گشتاور M وارد بر استوانه (بر واحد طول) انتگرال



شکل ۶-۱۸ جریان روی استوانه همراه برآ و گشتاور.

می‌گیریم. از معادلهٔ برنولی، داریم $p = p_\circ - \frac{۱}{۲}\rho V^۲$ که $p_\circ$ ثابت است. آن‌گاه،

$$p = p_\circ - \frac{۱}{۲}\rho V^۲ - p_\circ - \frac{۱}{۲}\rho \frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}$$

و انتگرال $p_\circ$ حول استوانه سهمی در فشار ندارد. ψ روی استوانه ثابت است ($d\psi = \circ$)، بنابراین $d\bar{F} = dF$. با مراجعه به شکل ۶-۱۸، داریم

$$X - iY = -\oint_C (pdy + ipdx) = -\oint_C ipd\bar{z}$$
$$= \oint_C \frac{۱}{۲} ip \frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}\cdot d\bar{z} = \frac{۱}{۲} ip \oint_C \left(\frac{dF}{dz}\right)^۲ dz \qquad (۶\text{-}۴۶)$$

که بجای $d\bar{F}$، dF را قرار داده‌ایم و جمله‌های $d\bar{z}$ را حذف کرده، و در dz ضرب و تقسیم کرده‌ایم. گشتاور M از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$M = \oint_C p(x\ dx + y\ dy) = \mathrm{Re}\oint_C pz\ d\bar{z}$$
$$= \mathrm{Re}\oint_C -\frac{۱}{۲}\rho\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}\cdot z\ d\bar{z} = \mathrm{Re}\left\{-\frac{۱}{۲}\rho\oint_C z\left(\frac{dF}{dz}\right)^۲ dz\right\} \qquad (۶\text{-}۴۷)$$

Re جزء حقیقی را نشان می‌دهد.

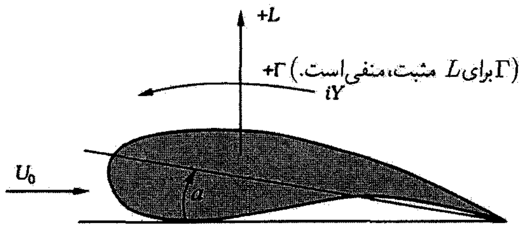
به محض دانستن $F(z)$ برآ و گشتاور به‌دست می‌آیند. وانگهی با بسط $F(z)$ رابطه‌های صریح برای X، Y و M می‌توان یافت. اینها را به کمک قضیهٔ کوتا-جوکفسکی برای جریان شارهٔ یکنواخت موجود بر روی استوانه‌ای به شکل دلخواه به‌دست می‌آورند.

تابع مختلط dF/dz را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد (برای $|z|$ نسبتاً بزرگ)

$$-\frac{dF}{dz} = U_\circ e^{i\varphi} + A/z + B/z^۲ + \ldots \qquad (۶\text{-}۴۸)$$

زیرا به روشنی، هنگامی که $z \to \infty$، سرعت مختلط $-dF/dz$ به مقدار جریان آزاد $U_\circ$ می‌رسد، که به‌طور کلی، همچون شکل ۶-۱۸، زاویهٔ ϕ با محور x می‌سازد. آن‌گاه می‌توان F را به‌صورت زیر تعیین کرد

$$F = -U_\circ e^{-i\varphi} z - A\ln z + B/z + \ldots \qquad (۶\text{-}۴۹)$$



شکل ۶-۱۹ برآی L وارد شده بر استوانه. زاویهٔ حمله α است. بنابر تعریف، وقتی $\alpha = \circ$، $L = \circ$.

می‌بینیم که جملهٔ دوم دقیقاً پتانسیل مختلط ناشی ازگردش است. در نتیجه، $A = \dfrac{i\Gamma}{۲\pi}$. بنابراین

$$\left(\frac{dF}{dz}\right)^{۲} = U_\circ^{۲} e^{-۲i\varphi} - i\frac{\Gamma U_\circ e^{-i\varphi}}{\pi z} - \frac{\Gamma^{۲} - ۸\pi^{۲} B U_\circ e^{-i\varphi}}{۴\pi^{۲} z^{۲}} + \dots$$

و به کمک قضیهٔ بلاسیوس و نظریهٔ انتگرال‌گیری مختلط رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$X - iY = \frac{۱}{۲} i\rho \left[۲\pi i \left(-i \frac{\Gamma U_\circ e^{-i\varphi}}{\pi z} \right) \right] = i\rho \Gamma U_\circ e^{-i\varphi} \qquad (۶\text{-}۵\circ)$$

که قضیهٔ کوتاـجوکفسکی است. این رابطه نشان می‌دهد که نیروی خالص (برآ)ی وارد بر استوانه عمود بر سرعت جریان آزاد و برابر $-\rho U_\circ \Gamma$ است. به‌طور کلی، می‌توان نتیجه گرفت:

۱. این نیرو همیشه عمود بر سرعت جریان آزاد است (و بنابراین به‌صورت نیروی برآ مشخص می‌شود).

۲. اگر Γ منفی باشد (برای $U_\circ$ مثبت در جهت x) برآ مثبت است. هیچ برآیی بدون گردش وجود ندارد. برآ فقط به Γ بستگی دارد (که ممکن است به نیمرخ بستگی داشته باشد).

۳. هیچ نیروی موازی با جهت $U_\circ$ (نیروی پسا) وجود ندارد. نیروی پسا فقط به‌وسیله نیروی اصطکاک پوستی در لایهٔ مرزی ایجاد می‌شود، اگر جریان حول جسم پتانسیل باشد و جدایش وجود نداشته باشد.

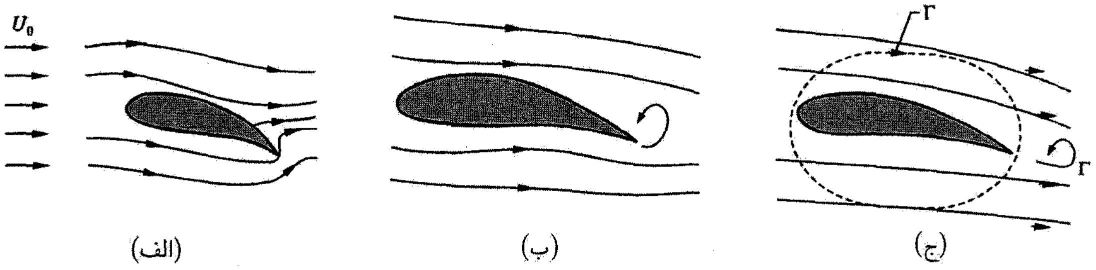
۴. نتیجه‌های بالا در جریانهای واقعی دقیق‌اند و مادامی که استوانهٔ آئرودینامیکی است، زیربنای آئرودینامیک فروصوتی را تشکیل می‌دهند. اگر جدایش رخ دهد، پسای ناشی از افت فشار در دنباله به‌وجود می‌آید، اما قابل پیش‌بینی با جریان پتانسیل نیست. جریان روی استوانهٔ مستدیر همیشه جدا می‌شود (مگر در جریان گران‌رو خیلی آهسته و جریان پتانسیل در آنجا خیلی دقیق نیست.

به‌طور خلاصه، نیروی برآ برابر است با $-\rho U_\circ \Gamma$، و آنچه می‌ماند تعیین Γ برای هر استوانهٔ مفروضی همچون هوابر شکل ۶-۱۹ است.

زاویهٔ حملهٔ α همان زاویهٔ بین سرعت جریان آزاد و خط وتر ثابت بر روی نیمرخ است. بنابر تعریف، برای $\alpha = \circ$، L و بنابراین Γ صفرند. مقدار Γ با افزایش α برای شکلهای خاصی افزایش می‌یابد و سرانجام واماندگی و جدایش رخ می‌دهد. سپس، با کاهش Γ افت شدیدی در برآ رخ خواهد داد.

۶-۹ نظریهٔ هوابر

اکنون با استفاده از نتیجه‌های بخش قبل نیروی برآ را برای چند شکل ساده محاسبه می‌کنیم. در اینجا، توجه خود را به شکل هوابر و علت فیزیکی گردش متمرکز می‌کنیم. همان‌گونه که اشاره شد، هر استوانه دایره‌ای چرخان ایجاد گردش می‌کند؛ اما دربارهٔ هوابر که مطمئناً نمی‌چرخد، چگونه است؟ علت گردش را در آنجا به کمک فرضیهٔ جوکفسکی مبتنی بر غیرمجاز بودن سرعتهای نامتناهی در جریانهای واقعی به‌سادگی می‌توان توضیح داد.



شکل ۶-۲۰ گردش و شکل‌گیری آن حول هوابر. با پیشرفت جریان، نقطهٔ سکون به پشت جسم انتقال می‌یابد و این انتقال مقدار Γ را تعیین می‌کند. (الف)، (ب) و (ج) مرحله‌های پیاپی را در شروع کار هوابر نشان می‌دهد.

۶-۹-۱ هوابر

همان‌گونه که دیدیم، برآ ناشی از گردش است و در واقع، در اطراف هوابر گردش وجود دارد. با مراجعه به شکل ۶-۲۰، بنابر نظریهٔ کوتا-جوکفسکی، وجود نقطهٔ تکین در لبهٔ فرار که سرعت باید طبق نظریهٔ جریان پتانسیل نامتناهی باشد، در جریان واقعی غیرممکن است و جریان به‌گونه‌ای شکل می‌گیرد که نقطهٔ سکون به لبهٔ فرار منتقل می‌شود و بنابراین نقطهٔ تکین ناپدید خواهد شد. مقدار گردش Γ حول هوابر همان مقداری است که برای جابه‌جایی نقطهٔ سکون به‌سوی لبهٔ فرار لازم است. روشن است که برای تحقق این انتقال Γ باید منفی باشد و بنابراین برآی $L = -\rho U_\circ \Gamma$ مثبت است.

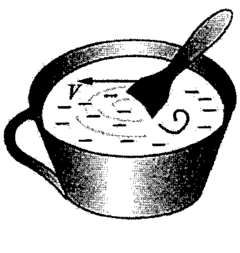
با شروع جریان، جریان پتانسیل مطابق شکل ۶-۲۰ (الف) است. نقطهٔ سکون به پشت هوابر انتقال می‌یابد و گردابهٔ کوچکی به‌وجود می‌آید که پخشیده و در پایین‌دست جریان ناپدید می‌شود. بنابر قضیهٔ کلوین، گردش کلی در شاره نسبت به زمان باید ثابت بماند و بنابراین Γای برابر و مخالف با علامت گردابهٔ پخشیده حول هوابر به‌وجود می‌آید. گردش کل شاره صفر باقی می‌ماند، اما مقدار آن حول هوابر عددی منفی است. گردابهٔ پخشیده در فاصله‌ای دوردست در میدان پرواز رها می‌شود. (پربند معیار بزرگی شامل هوابر و میدان پرواز دارای گردش صفر است.)

تشکیل این گردابهٔ دنباله‌دار را به آسانی می‌توان با حرکت دادن آهستهٔ قاشقی در فنجان قهوه دید. قاشق را به‌طور مایل با زاویهٔ حمله در درون قهوه حرکت دهید، می‌بینید که گردابهٔ دنباله‌دار تشکیل، و سپس ناپدید می‌شود (شکل ۶-۲۱).

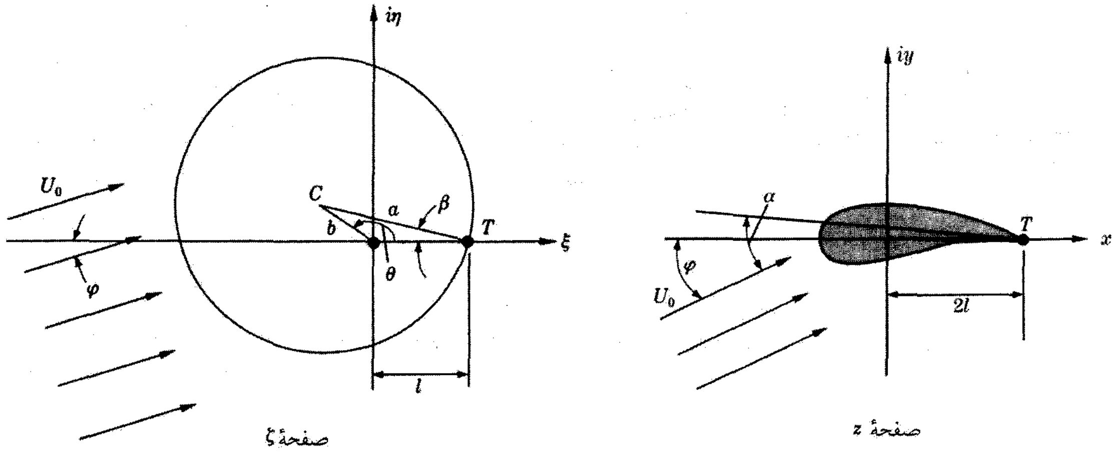
۶-۹-۲ محاسبهٔ جریان پتانسیل و برآ

جریان حول هر هوابر مفروضی را می‌توان با تابع پتانسیل مختلط مناسب F بیان کرد. هوابر جوکفسکی ساده‌ترین هوابر است که از جریان حول استوانه‌ای دایره‌ای با تک تبدیل همدیسی به‌دست می‌آید. مطابق شکل ۶-۲۲، به کمک تبدیل جوکفسکی می‌توان جریان حول استوانهٔ موجود در صفحهٔ ζ را در صفحهٔ z بازنمایی کرد. در اینجا، تبدیل جوکفسکی از ζ به z عبارت است از

$$z = \zeta + l^2/\zeta \qquad (۶-۵۱)$$



شکل ۶-۲۱ حرکت قاشق در فنجان قهوه گردابهٔ دنباله‌دار به‌وجود می‌آورد. قاشق خمیده را می‌توان به‌صورت هوابر پشت خمیده تقریب زد.



شکل ۶-۲۲ تبدیل جوکفسکی. زاویهٔ حملهٔ ظاهری ϕ، و L عمود بر $U_\circ$ است. زاویهٔ حملهٔ مطلق (که باید تعیین شود) برابر α است. بنابر تعریف، وقتی $\alpha = 0$، $L = 0$.

و تابع پتانسیل برای جریان حول استوانهٔ جابه‌جا شده (با مرکز C) در زاویهٔ حملهٔ ظاهری φ به‌صورت زیر است

$$F = -U_\circ\left[(\zeta - be^{i\theta})e^{-i\varphi} + \frac{a^2}{(\zeta - be^{i\theta})e^{-i\varphi}}\right] \qquad (۶\text{-}۵۲)$$

اگر $b = 0$ (c در مبدأ)، تبدیل جوکفسکی این استوانه را به‌صورت بیضی‌ای با مرکز مبدأ که محور اصلی‌اش در جهت x است، بازنمایی می‌کند. نقطهٔ $\zeta = l$ به $z = 2l$ انتقال می‌یابد و لبهٔ فراری است که dF/dz در آنجا دارای تکینگی‌ای خواهد بود که باید به کمک برهم‌نهش مقدار مناسب گردش از بین برود.

برای متناهی ساختن مقدار سرعت در لبهٔ فرار، پتانسیلی مختلط ناشی از گردش را باید به معادلهٔ (۶-۵۲) افزود.

در این‌صورت $F(\zeta)$ کلی حول استوانه به‌صورت زیر در می‌آید.

$$F(\zeta) = -U_\circ\left[e^{-\varphi}(\zeta - be^{i\theta}) + \frac{a^2e^{i\varphi}}{(\zeta - be^{i\theta})}\right] + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{\zeta - be^{i\theta}}{a}\right) \qquad (۶\text{-}۵۳)$$

سرعت مختلط در صفحهٔ z و در نقطهٔ T واقع در لبهٔ فرار (که $z = 2l$ و $\zeta = l$)، برابر است با

$$\left.\frac{dF}{dz}\right|_T = \frac{dF}{d\zeta}\cdot\left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{T\ \text{نقطهٔ}}$$

و در لبهٔ فرار، $dz/d\zeta = 1 - l^2/\zeta^2 = 0$ به‌گونه‌ای که $d\zeta/dz$ در لبهٔ فرار تکین است (یعنی به‌سوی بی‌نهایت می‌گراید). بنابراین، مقدار $dF/d\zeta$ در $z = -2l$، برای اینکه dF/dz در آنجا متناهی باشد، باید صفر شود و با این شرط مقدار Γ و بنابراین نیروی برآی وارد بر هوابر تعیین می‌شود.

از معادلهٔ (۶-۵۳) در می‌یابیم که $dF/d\zeta = 0$، به‌گونه‌ای که

$$\frac{dF}{d\zeta} = -U_\circ\left(e^{i\varphi} - \frac{a^2e^{i\varphi}}{(\zeta - be^{i\theta})^2}\right) + i\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(\zeta - be^{i\theta})} = 0 \qquad (۶\text{-}۵۴)$$

و از معادلهٔ (۶-۲۲)، داریم، $(\zeta - be^{i\theta}) = [\zeta - l + ae^{i(-\beta)}]$ به‌گونه‌ای که در $\zeta = 1$، معادلهٔ (۶-۵۴) به‌صورت زیر در می‌آید

$$-U_\circ(1 - e^{-2i(-\beta)+2i\varphi}) + i\frac{\Gamma}{2\pi a}e^{-i(-\beta)+i\varphi} = 0 \qquad (۶\text{-}۵۵)$$

که می‌توان Γ را از آن به‌دست آورد. با تساوی جزء‌های حقیقی و انگاری معادلهٔ (۶-۵۵) می‌توان همان مقدار Γ را به‌دست آورد.

$$\Gamma = -۴\pi a U_۰ \sin(\beta + \varphi) \qquad (۶\text{-}۵۶)$$

می‌بینیم که Γ عددی منفی است که به‌سرعت جریان آزاد، زاویهٔ ظاهری جملهٔ φ و پارامترهای α و β، که اندازه و خمیدگی هوابر را تعیین می‌کنند، بستگی دارد. چون $L = -\rho U_۰ \Gamma$ عمود بر جریان آزاد است، L برای مقدارهای مثبت $(\beta + \varphi)$ مثبت است. زاویهٔ $(\beta + \varphi)$ را زاویهٔ حملهٔ مطلق α می‌گویند. بنابر تعریف، وقتی $\alpha = ۰$ برآی L نیز صفر است.

در آئرودینامیک، منظور از زاویهٔ حمله معمولاً همان زاویهٔ α است و نه φ.

ضریب برآی C_L را با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنند

$$C_L = \frac{L}{c\rho U_۰^۲/۲} \qquad (۶\text{-}۵۷)$$

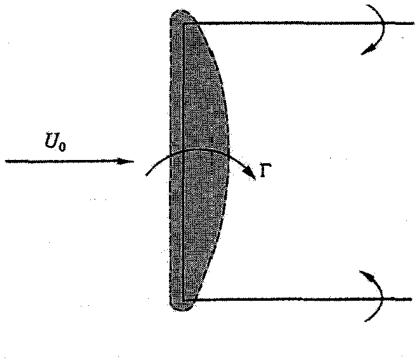
که L برآی واحد طول هوابر و C طول وتر یا پهنای هوابر است. برای هوابر جوکفسکی $c \simeq ۴a$ است و بنابراین برای C_L، داریم

$$C_L = \frac{\rho U_۰ (۴\pi a U_۰) \sin\alpha}{۴a\rho U_۰^۲/۲} \cong ۲\pi\alpha \qquad (۶\text{-}۵۸)$$

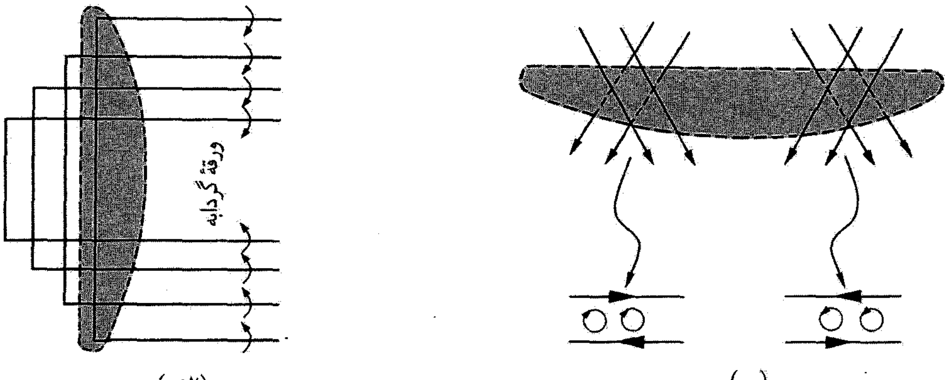
همان‌گونه که از معادلهٔ (۶-۵۸) برای αهای کوچک پیداست، با افزایش α مقدار C_L به‌طور خطی افزایش می‌یابد و سپس، با رسیدن به زاویهٔ واماندگی α_S، کاهش خواهد یافت، زیرا جدایش لایهٔ مرزی رخ می‌دهد و گردش از بین می‌رود. زاویهٔ واماندگی و تغییرات دقیق C_L را برحسب α به‌خوبی به‌طور تجربی می‌توان تعیین کرد.

۶-۹-۳ اثرهای سه‌بعدی

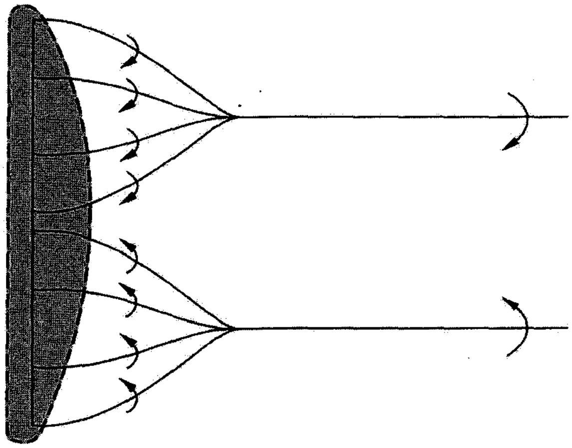
برآی وارد بر هوابر ناشی از گردابهٔ خطی است که با هوابر حرکت می‌کند (گردابه‌های محدود). همان‌گونه که قبلاً نشان دادیم، این گردابه‌های خطی درست کاملاً به نوک بال نمی‌رسند، بلکه حرکت خود را در درون شارهٔ آزاد ادامه می‌دهند (تا اینکه به‌علت گران‌روی از بین بروند). اگر گردش در طول بال یکنواخت می‌بود، همچون شکل ۶-۲۳، گردابه‌ها در لبه‌های بال پخش می‌شدند و به‌صورت گردابه‌های دنباله‌دار به پایین‌دست جریان می‌رسیدند. اما، این سیستم سادهٔ گردابهٔ «نعل اسبی» کاملاً درست نیست، زیرا معمولاً مقدار Γ در طول بال تغییر می‌کند. در نتیجه، گردشاری در سرتاسر لبهٔ فرار بال پخش می‌شود و ورقهٔ گردابه‌ای متشکل از برهم‌نهش گردابه‌های، «نعل اسبی» با قدرتهای مختلف، همچون شکل ۶-۲۴، به‌وجود می‌آورد. از سوی دیگر، تصویر فیزیکی ورقهٔ گردابه را می‌توان با تصور رها شدن بلبرینگ از درون هواپیما در پایین‌دست جریان پشت بال نشان داد؛ هوای روی بال می‌خواهد به‌سوی داخل، و هوای زیربال می‌خواهد به‌سوی بیرون جریان یابد. این اختلاف موجود در جهت جریان باد



شکل ۶-۲۳ طرح گردابهٔ سادهٔ نعل اسبی بر روی بالی سه‌بعدی. نمای بالای بال دیده می‌شود.



شکل ۶-۲۴ ورقهٔ گردابهٔ پشت بال.



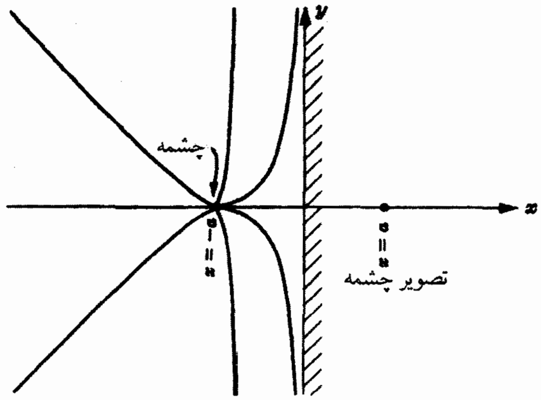
شکل ۶-۲۵ ورقهٔ گردابه به‌صورت دو گردابهٔ جداگانه با فاصله‌ای کمتر از دهانهٔ بال در می‌آید.

ناشی از لبهٔ فرار لایه یا ورقهٔ گردابه به‌وجود می‌آورد. دلیل پیچش جریان را با توجه به وجود اختلاف فشار بین بالا و پایین بال و از مرکز تا نوکها می‌توان به آسانی فهمید.

سرانجام، همچون شکل ۶-۲۵، ورقهٔ گردابه در فاصله‌ای به‌طول پهنای بال یا کمتر از آن دو خط گردابهٔ مجزا ایجاد می‌کند. این پدیده را می‌توان در هواپیمای جت چند موتوره که جایگاه موتورها در زیربال قرار دارد مشاهده کرده. دنبالهٔ بخار جتها درهم می‌آمیزند و دو دنبالهٔ مجزا، یکی از چپ و دیگری از راست بال، به‌وجود می‌آورند.

آخرین نکته‌ای که باید اشاره کرد پسای القایی است. به‌علت ورقهٔ گردابه، «فرو وزش» القایی‌ای وجود دارد که زاویهٔ حملهٔ بال را تغییر می‌دهد و باعث می‌شود که بردار برآ دارای زاویهٔ اندکی نسبت به (عقب) سرعت جریان آزاد باشد. در نتیجه، بردار برآ مؤلفه‌ای موازی با جهت پرواز دارد. این مؤلفه همان نیروی پساست، که پسای القایی نام دارد. بقیهٔ نیروی پسا، یعنی پسای نیمرخ از پسای اصطکاک پوستی لایهٔ مرزی و پسای شکل ناشی از پخش‌شدگی گردابه‌های کارمن در ورقهٔ گردابه (یعنی، دنباله) تشکیل شده است.

این موضوع را در اینجا بیش از این پی نمی‌گیریم. اما نظریهٔ جریان پتانسیل و نظریهٔ لایهٔ مرزی هر دو زیربنای آئرودینامیک فروصوتی را تشکیل می‌دهند.



شکل ۶-۲۶

مراجع

1. Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
2. Glauert, H., *The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1948.
3. Karamchetti, K., *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*, John Wiley, 1966.
4. Kuethe, A. M., and Chow, C., *Foundations of Aerodynamics*, 4th ed., John Wiley, 1986.
5. Lamb, Sir Horace, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge University Press, 1932 (also Dover).
6. Milne-Thompson, L. M., *Theoretical Hydrodynamics*, 3rd ed., Macmillan, 1957.
7. Prandtl, L., and Tietjens, O. G., *Applied Hydro- and Aero-mechanics*, Dover, 1957.
8. Robertson, J. M., *Hydrodynamics in Theory and Application*, Prentice-Hall, 1965.
9. Shevell, R. S., *Fundamentals of Flight*, Prentice-Hall, 1983.

مسائل حل‌شده

۶-۱ دیوباد را می‌توان به‌صورت گردابهٔ پتانسیلی تصور کرد که «چشم» یا هستهٔ چرخان آن رفتاری تقریباً شبیه جسمی توپر دارد. بنابر قاعدهٔ سرانگشتی، شعاع چشم از مرتبهٔ ۱۰۰ فوت است. فشار حول «چشم» در سطح زمین چگونه تغییر می‌کند؟ برای دیوبادی با سرعت بیشینهٔ $۱۰۰\,\mathrm{mi/h}$، افت فشار بیشینه چقدر است؟ این کاهش فشار تا اندازه‌ای باعث کندن سقفها و بسیاری از خسارتها در گردباد می‌شود.

سرعت v_θ برابر $\Gamma/۲\pi r$ است و در نتیجه

$$\Gamma = ۲\pi r v_\theta = ۲\pi(۱۰۰\mathrm{ft})(۱۰۰ \times ۵۲۸۰/۳۶۰۰\mathrm{ft/s}) = ۹{,}۲ \times ۱۰^{۴}\mathrm{ft}^{۲}/\mathrm{s}$$

از معادلهٔ برنولی (و با فرض هوای استاندارد در فشار $p_\circ$)، داریم

$$p - p_\circ = -\frac{۱}{۲}V^{۲}\rho = -\frac{\Gamma^{۲}\rho}{۸\pi^{۲}r^{۲}} - \frac{(۹{,}۲ \times ۱۰^{۴})^{۲}(۰{,}۰۰۲۳)}{۸\pi^{۲}r^{۲}} = -\frac{۲{,}۴ \times ۱۰^{۵}}{r^{۲}}\mathrm{psf}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که فشار در فاصلهٔ خیلی دور از دیوباد کمتر از فشار جو است. در فاصلهٔ $r = ۱۰۰\mathrm{ft}$ (که کوچکترین شعاع ممکن برای کاربرد نظریهٔ جریان پتانسیل است) فشار به مقدار $۲۴{,}۶\mathrm{psf}$ (حدود $۱{,}۷\mathrm{psi}$) زیر فشار جو است.

۶-۲ در شکل ۶-۲۶ چشمه‌ای در فاصلهٔ a از دیواره‌ای قرار دارد. نیروی فشار کلی وارد بر دیواره چقدر است؟ در پشت دیواره $(x > ۰)$ فشار برابر فشار سکون $p_\circ$ است.

مطابق شکل، چشمهٔ واقعی را در $x=-a$ درنظر بگیرید و فرض کنید که تصویر چشمه در $x=a$ قرار دارد. پتانسیل مختلط برای جریان کل عبارت است از

$$F=-\frac{Q}{۲\pi}[\ln(z+a)+\ln(z-a)]$$

و

$$\bar{F}=-\frac{Q}{۲\pi}[\ln(\bar{z}+a)+\ln(\bar{z}-a)]$$

خواهیم داشت

$$V^{۲}=\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}}=\frac{Q^{۲}}{۴\pi^{۲}}\left[\frac{۱}{(z+a)}+\frac{۱}{(z-a)}\right]\left[\frac{۱}{(\bar{z}+a)}+\frac{۱}{(\bar{z}-a)}\right]$$

که به‌صورت زیر ساده می‌شود (زیرا $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$):

$$V^{۲}=\frac{Q^{۲}(x^{۲}+y^{۲})}{\pi^{۲}[(x^{۲}+y^{۲})^{۲}-۲a^{۲}(x^{۲}-y^{۲})+a^{۴}]}$$

با استفاده از معادلهٔ برنولی $p/\rho+۱/۲V^{۲}=p_{\circ}/\rho$ درمی‌یابیم که اختلاف فشار در عرض دیواره برابر است با $p-p_{\circ}=-\frac{۱}{۲}V^{۲}\rho$ و نیروی کل وارد بر واحد طول دیواره (به‌طرف خارج از کاغذ و مثبت به‌طرف راست) برابر است با

$$\text{نیرو}=\int_{-\infty}^{+\infty}(p-p_{\circ})\Big|_{x=\circ}dy=-\frac{۱}{۲}\rho\int_{-\infty}^{+\infty}V^{۲}\Big|_{x=\circ}dy=-\frac{\rho Q^{۲}}{۲\pi^{۲}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{۲}dy}{(y^{۲}+a^{۲})^{۲}}=-\frac{\rho Q^{۲}}{۴\pi a}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که نیروی خالص به‌طرف چپ است و دیواره به‌سوی چشمه کشیده می‌شود.

۶-۳ مسئلهٔ ۶-۲ را دوباره، با این تفاوت که چاه را به‌جای چشمه جایگزین کرده‌ایم حل کنید.

پتانسیل مختلط مشابه حالت قبل، ولی این بار عددی منفی است. اما، برای یافتن نیروی وارد بر دیواره Q به‌صورت مربع ظاهر می‌شود، بنابراین این علامت دخالتی ندارد. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که نیروی خالص وارد بر دیواره برای چشمه یا چاه یکسان است. دیواره تمایل دارد که به‌سوی چشمه یا چاه کشیده شود.

نتیجه تعجب‌آور به‌نظر می‌رسد، اما در هر یک از این حالتها سرعت در نزدیکی دیواره افزایش می‌یابد و باعث کسر فشار می‌شود، که نتیجه یکسان است.

۶-۴ باد به پایین تپه‌ای می‌وزد و از روی بلندی‌ای به شکل قطاع دایره‌ای به شعاع b می‌گذرد و به‌سوی دشت سرازیر می‌شود. جریان را بازنمایی کنید. ϕ و ψ را به‌طور صریح به‌دست آورید. این جریان را در شکل ۶-۲۷ نشان داده‌ایم.

با جریان موجود بر روی استوانهٔ دایره‌ای شروع می‌کنیم و سپس آن را به درون زاویه‌ای با معادلهٔ (۶-۲۹) بازنمایی خواهیم کرد.

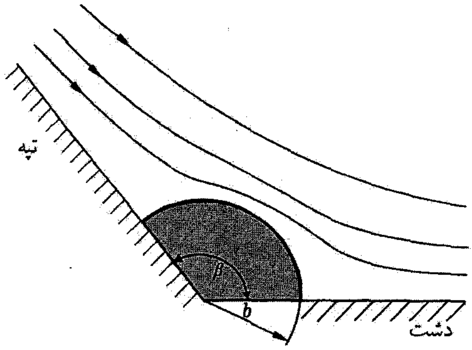
در صفحهٔ ζ، با توجه به شکل ۶-۲۸، می‌توان نوشت

$$F(\zeta)=-U_{\circ}(\zeta+a^{۲}/\zeta)$$

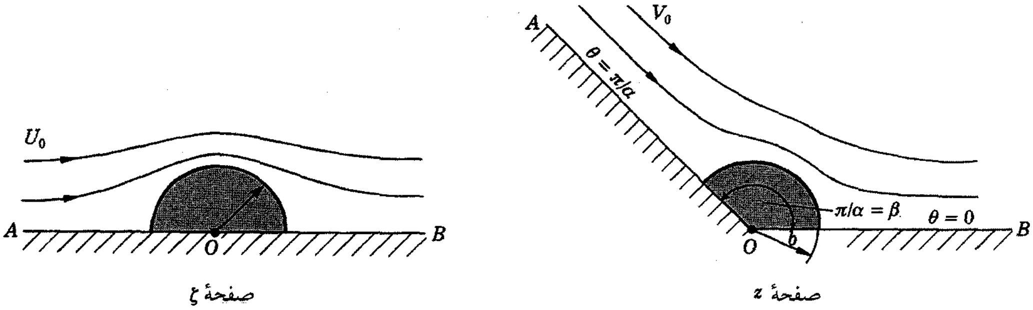
به‌گونه‌ای که از $\zeta=z^{۲}$، داریم

$$F(z)=-U_{\circ}(z^{\alpha}+a^{۲}/z^{\alpha})$$

α، به‌عنوان مانع پتانسیل مختلط در صفحهٔ فیزیکی z، از رابطهٔ $\beta=\pi/\alpha$ به‌دست می‌آید. یادآوری این نکته مهم است که سرعت جریان آزاد $V_{\circ}$، در صفحهٔ z یکنواخت نیست، بلکه برحسب r و θ تغییر می‌کند. $U_{\circ}$ را نمی‌توان مستقیماً از صفحهٔ ζ، همچون در تبدیل هوابر جوکفسکی،



شکل ۶-۲۷



شکل ۶-۲۸

بازنمایی کرد. وانگهی، شعاع a دایره در صفحهٔ ζ با شعاع b در قطاع صفحهٔ z یکسان نیست. داریم

$$z^\alpha = r^\alpha e^{\alpha i\theta} = r^\alpha(\cos\alpha\theta + i\sin\alpha\theta)$$

و

$$F = -U_\circ[r^\alpha(\cos\alpha\theta + i\sin\alpha\theta) + (a^\text{۲}/r^\alpha)(\cos\alpha\theta - i\sin\alpha\theta)]$$

به‌گونه‌ای که

$$\phi = \mathrm{Re}F = -U_\circ r^\alpha[\cos\alpha\theta + a^\text{۲}r^{-\text{۲}\alpha}\cos\alpha\theta]$$

$$\psi = \mathrm{Im}F = -U_\circ r^\alpha[\sin\alpha\theta - a^\text{۲}r^{-\text{۲}\alpha}\sin\alpha\theta]$$

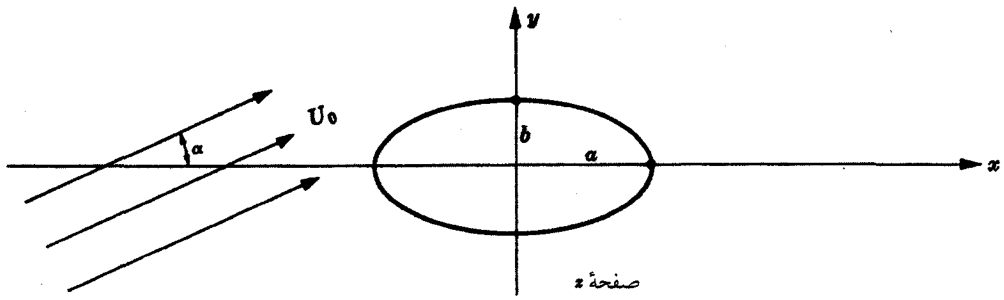
رفتار سرعت جریان آزاد را می‌توان با یافتن سرعت شعاعی v_r از رابطهٔ $-\partial\phi/\partial r$ به‌دست آورد.

$$v_r = \alpha U_\circ r^{\alpha-\text{۱}}[\cos\alpha\theta - a^\text{۲}r^{-\text{۲}\alpha}\cos\alpha\theta]$$

بنابراین برای $\theta = \pi/\alpha$ (در طول دیواره)، داریم

$$v_r\Big|_{\theta=\pi/\alpha} = -\alpha U_\circ[r^{\alpha-\text{۱}} - a^\text{۲}r^{-(\text{۱}+\alpha)}]$$

برای r بزرگ و $\alpha > \text{۱}$، $v_r\Big|_{\theta=\pi/\alpha}$ بسیار بزرگ می‌شود و تقریباً برابر $-\alpha U_\circ r^{\alpha-\text{۱}}$ خواهد شد. علامت منفی نشان می‌دهد که جریان از بی‌نهایت به‌طرف داخل است.



شکل ۶-۲۹

شعاع b را می‌توان با شعاع a مرتبط کرد. شعاع b را می‌توان با قراردادن $v_r = ۰$ به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$۱ - a^{۲} r^{-۲\alpha}\Big|_{r=b} = ۰ \rightarrow b = a^{۱/\alpha}$$

۶-۵ تبدیل

$$z = C(\zeta + \lambda\zeta^{-۱}), \quad ۰ \leq \lambda \leq ۱, \quad ۰ \leq C$$

دایره‌ای به شعاع واحد در صفحهٔ ζ را به بیضی‌ای در صفحهٔ z مطابق شکل ۶-۲۹ تبدیل می‌کند

(الف) با استفاده از این تبدیل، پتانسیل مختلط $F(z)$ را برای جریان پایایی به‌دست آورید که، همچون شکل ۶-۲۹، با نیم‌قطرهای a و b می‌گذرد. مقدار سرعت اختلال‌نیافته در بی‌نهایت برابر $U_۰$ است و زاویهٔ α با محور x می‌سازد.

(ب) z را برابر $z = k \cosh \gamma$ قرار دهید، که k ثابتی حقیقی است و $\gamma = \xi + i\eta$. بدین‌ترتیب، خطهای ξ ثابت عبارت‌اند از گروه بیضیهای موجود در صفحهٔ z و خطهای η ثابت عبارت‌اند از گروه هذلولیهای هم کانون عمود بر این بیضیها. شبکه حاصل از خطهای ξ و η ثابت را در صفحهٔ z مختصات بیضوی می‌گویند. با استفاده از این مختصات بیضوی و با یادآوری اینکه سرعت شاره گذرنده از روی سطح استوانه بیضوی مذکور در قسمت (الف) V است. V را برحسب η وقتی $\alpha = ۰$، بیان کنید.

(الف) نخست، تبدیل ζ به z، $z = c(\zeta + \lambda/\zeta)$ را بررسی می‌کنیم. برای دایره‌ای به شعاع واحد، فرض می‌کنیم که $\zeta = e^{i\theta}$ و $z = x + iy$. آن‌گاه

$$z = C(e^{i\theta} + \lambda e^{-i\theta}) = C(۱ + \lambda)\cos\theta + iC(۱ - \lambda)\sin\theta$$

$x = C(۱ + \lambda)\cos\theta$ و $y = C(۱ - \lambda)\sin\theta$، به‌گونه‌ای که $\frac{x^{۲}}{C^{۲}(۱+\lambda)^{۲}} + \frac{y^{۲}}{C^{۲}(۱-\lambda)^{۲}} = ۱$ در نتیجه

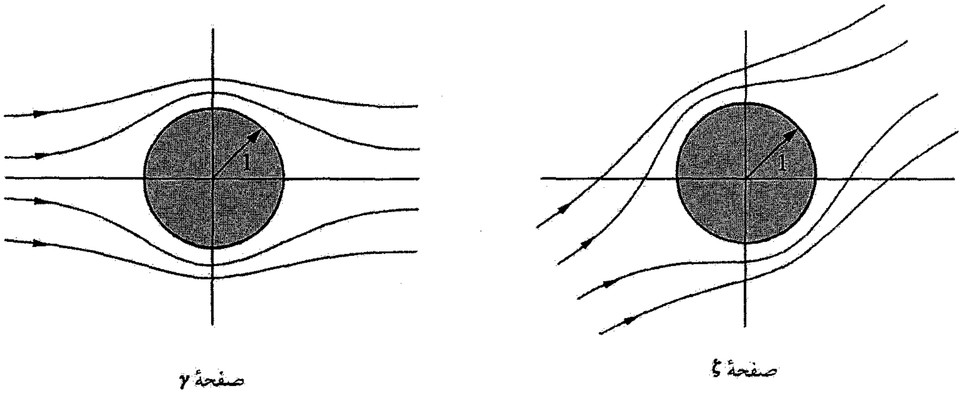
$$a = C(۱ + \lambda), \quad b = C(۱ - \lambda), \quad C = (a + b)/۲, \quad ۴C^{۲}\lambda = a^{۲} - b^{۲} \qquad (۱)$$

اکنون، مطابق شکل ۶-۳۰ برای عبور شاره از روی دایرهٔ واحد در صفحهٔ γ، داریم

$$F(\gamma) = A(\gamma + \gamma^{-۱})$$

به‌گونه‌ای که $\zeta = \gamma e^{i\alpha}$

$$F(\zeta) = A(\zeta e^{-i\alpha} + \zeta^{-۱} e^{i\alpha})$$



شکل ۶-۳۰

با استفاده از تبدیل $z = C(\zeta + \lambda\zeta^{-1})$، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\zeta = \frac{1}{2C}(z \pm \sqrt{z^2 - 4C^2\lambda})$$

در اینجا، علامت $(+)$ را انتخاب می‌کنیم به‌گونه‌ای که حوزهٔ خارج از دایره در صفحهٔ ζ، شکل ۶-۳۰، به حوزهٔ خارج از بیضی صفحهٔ z تبدیل شود.

$$F(z) = A\left[\frac{e^{-i\alpha}}{2C}(z + \sqrt{z^2 - 4C^2\lambda}) + \frac{2Ce^{i\alpha}}{z + \sqrt{z^2 - 4C^2\lambda}}\right] \qquad (2)$$

اکنون

$$-\frac{dF}{dz}\bigg|_{z\to\infty} = (u - iv)\bigg|_{z\to\infty} = U_0 e^{i\alpha} \quad \text{اما} \quad \frac{dF}{dz}\bigg|_{z\to\infty} = \frac{A}{C}e^{-i\alpha}$$

در نتیجه

$$A/C = -U_0 \qquad (3)$$

با استفاده از مقدارهای C، λ و A که از معادلات (۱) و (۳) به‌دست می‌آیند، معادلهٔ (۲) به شکل زیر در می‌آید

$$F(z) = -\frac{1}{2}U_0(a+b)\left\{\frac{[z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}]e^{-i\alpha}}{a+b} + \frac{[z - \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}]e^{i\alpha}}{a-b}\right\} \qquad (4)$$

(ب) با دانستن $z = k\cosh\gamma$ و $\gamma = \xi + i\eta$ می‌توان نوشت

$$x + iy = k\cosh(\xi + i\eta) = k(\cosh\xi\cos\eta + i\sinh\xi\sin\eta)$$

در نتیجه

$$\frac{x^2}{k^2\cosh^2\xi} + \frac{y^2}{k^2\sinh^2\xi} = 1, \qquad \frac{x^2}{k^2\cos^2\eta} - \frac{y^2}{k^2\sin^2\eta} = 1$$

فرض می‌کنیم که $\xi = \xi_0$ بیضی‌ای با نیم‌قطرهای a و b در صفحهٔ z است، آن‌گاه $k\cosh\xi_0 = a$ و $k\sinh\xi_0 = b$، یا

$$\left.\begin{array}{l} k^2 = a^2 - b^2, \qquad \tanh\xi_0 = b/a \\ \dfrac{e^{2\xi_0}}{(a+b)^2} = \dfrac{e^{-2\xi_0}}{(a-b)^2} = \dfrac{1}{k^2} \end{array}\right\} \qquad (5)$$

معادلهٔ (۴) (با $\alpha = ۰$) به‌صورت زیر در می‌آید

$$F(\gamma) = -\frac{۱}{۲}U_{۰}(a+b)\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}\left(\frac{e^{\gamma}}{a+b}+\frac{e^{-\gamma}}{a-b}\right)$$

$$\bar{F}(\bar{\gamma}) = -\frac{۱}{۲}U_{۰}(a+b)\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}\left(\frac{e^{\bar{\gamma}}}{a+b}+\frac{e^{-\bar{\gamma}}}{a-b}\right)$$

$$(V_{\gamma}^{۲})_{\xi=\xi_{۰}} = \frac{dF}{d\gamma}\cdot\frac{d\bar{F}}{d\bar{\gamma}} = \frac{U_{۰}^{۲}}{۴}(a+b)^{۲}(a^{۲}-b^{۲})\left\{\frac{e^{۲\xi}}{(a+b)^{۲}}+\frac{e^{-۲\xi}}{(a-b)^{۲}}-\frac{e^{۲i\eta}}{(a^{۲}-b^{۲})}-\frac{e^{-۲i\eta}}{(a^{۲}-b^{۲})}\right\}$$

به کمک معادلهٔ (۵)، داریم

$$V_{\gamma}^{۲}\Big|_{\xi=\xi_{۰}} = \frac{۱}{۴}U_{۰}^{۲}(a+b)^{۲}\{۲-۲\cos ۲\eta\} = U^{۲}(a+b)^{۲}\sin^{۲}\eta$$

$$V^{۲} = V_{z}^{۲}\Big|_{\xi=\xi_{۰}} = \frac{V_{\gamma}^{۲}|_{\xi=\xi_{۰}}}{|dz/d\gamma|_{\xi^{۲}=\xi_{۰}}^{۲}} = U_{۰}^{۲}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{\sin^{۲}\eta}{\sin^{۲}\eta+\sinh^{۲}\xi_{۰}}\right)$$

که در آن $\xi_{۰} = \tanh^{-۱} b/a$.

۶-۶ پتانسیل مختلط را برای چشمه‌ای واقع در نیم‌صفحهٔ کانالی دوبعدی همچون شکل ۶-۳۱ به‌دست آورید.

با روش تصاویر، آرایه‌ای نامتناهی مطابق شکل ۶-۳۲ ایجاد می‌کنیم.

پتانسیل مختط از حاصل‌جمع همه تصویرها به‌دست می‌آید.

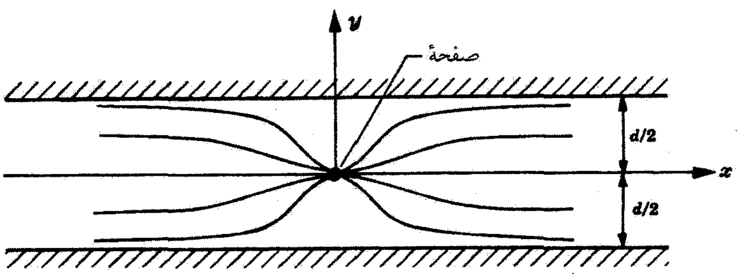
$$F = \sum_{n=۰}^{\infty} -\frac{Q}{۲\pi}\ln(z+ind) + \sum_{n=۱}^{\infty} -\frac{Q}{۲\pi}\ln(z-ind) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\frac{Q}{۲\pi}\ln(z+ind) = -\frac{Q}{۲\pi}\ln\left(\sinh\frac{\pi z}{d}\right)$$

با محاسبهٔ F در فاصلهٔ $-d/۲ < y < d/۲$ جریان بین دیواره‌ها در $\pm d/۲$ به‌دست می‌آید.

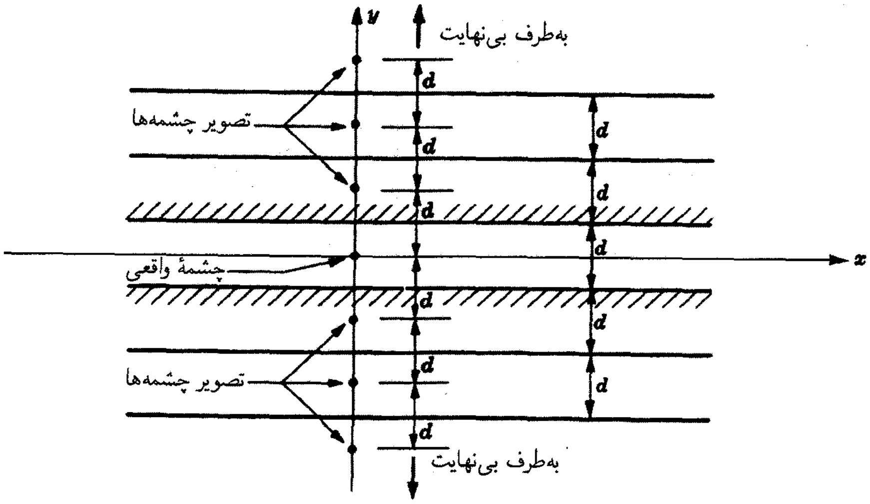
ϕ و ψ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\phi = -\frac{Q}{۲\pi}\ln\left(\sin\mathrm{h}\frac{\pi x}{d}\cos\frac{\pi y}{d}\right), \qquad \psi = -\frac{Q}{۲\pi}\ln\left(\cos\mathrm{h}\frac{\pi x}{d}\sin\frac{\pi y}{d}\right)$$

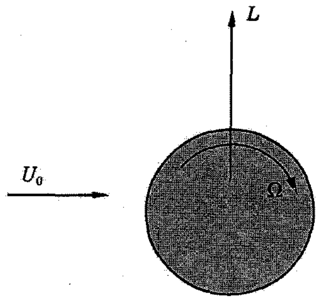
۶-۷ استوانه‌ای به‌قطر ۱ اینچ، همچون شکل ۶-۳۳، با سرعت $۳۶۰۰\,\mathrm{rpm}$ در جهت مشخص شده در هوای استاندارد می‌چرخد. هوا از روی استوانه با سرعت $۱۰۰\,\mathrm{ft/s}$ می‌گذرد. نیروی برآی وارد بر استوانه (در واحد طول) را برآورد کنید.



شکل ۶-۳۱



شکل ۶-۳۲



شکل ۶-۳۳

از $L = -\rho U_\circ \Gamma$ استفاده می‌کنیم که Γ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

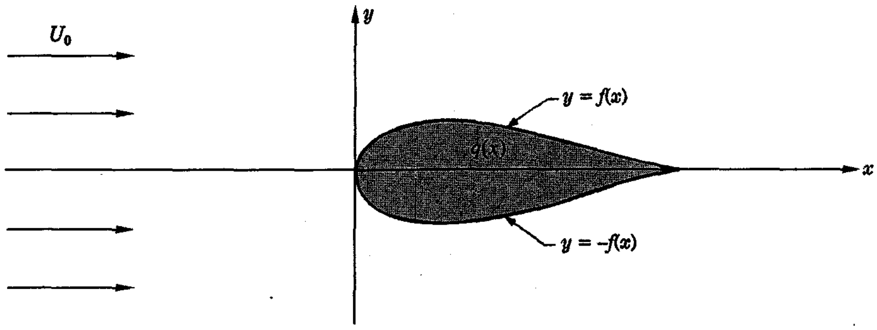
$$\Gamma = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \int_\circ^{۲\pi} -(r\Omega)(r\ d\theta) = -۲\pi r^۲ \Omega$$
$$= -۲\pi(۱/۲۴\text{ft})^۲(۳۶۰۰ \times ۲\pi/۶۰\text{rad/s}) = -۴٫۱\ \text{ft}^۲/\text{s}$$

بنابراین

$$L = -\rho U_\circ \Gamma = -(۰٫۰۰۲۳\text{slug/ft}^۳)(۱۰۰\text{ft/s})(-۴٫۱\text{ft}^۲/\text{s}) = ۰٫۹۴\ \text{lb/ft}$$

۶-۸ جریان موجود بر روی استوانه‌ای دوبعدی (متقارن نسبت به محور x) را می‌توان برای هر شکل اختیاری $f(x)$ به‌وسیلهٔ تابع تعمیم‌یافتهٔ مناسب $q(x)$ برای چشمه‌های موجود در امتداد محور x، همچون شکل ۶-۳۴، به‌دست آورد. برای هر شکل مفروض $y = f(x)$، چشمه $q(x)$ را تعیین کنید. فرض می‌کنیم که نوک جسم در مبدأ مختصات قرار دارد.

سطح جسم $\pm f(x)$ یک خط جریان است و به روشنی تابع تعمیم‌یافتهٔ $g(x)$ باید در طول محور x تغییر علامت دهد، و هیچ شاره‌ای از مرز جسم $\pm f(x)$ نمی‌گذرد.



شکل ۶-۳۴

برای هر جزء چشمهٔ $q(x)dx$، پتانسیل مختلط عبارت است از

$$dF = -\frac{q(x')dx'}{۲\pi}\ln(z-x')$$

که علت استفاده از «پریم» برای x، معرفی متغیر انتگرال‌گیری مخالف x در $z = x + iy$، یعنی مکانی است که F محاسبه می‌شود، است.

$$F = \int_{\circ}^{L} -\frac{q(x')}{۲\pi}\ln(z-x')dx'$$

اما جزء انگاری F عبارت است از ψ و $\circ$ = ثابت اختیاری = $\psi(x,y)$ دارای همان مقدار $y = f(x)$ است. جزءانگاری F عبارت است از

$$\text{Im}F = \psi = \int_{\circ}^{L} -\frac{q(x')}{۲\pi}\tan^{-۱}\frac{y}{x-x'}dx'$$

و در روی سطح، داریم $y = F(x)$ و $\psi = \circ$، به‌گونه‌ای که

$$\circ = \int_{\circ}^{L} -\frac{q(x')}{۲\pi}\tan^{-۱}\frac{f(x)}{x-x'}dx'$$

که معادله‌ای انتگرالی است و از حل آن $q(x)$ به‌دست می‌آید. به‌طور کلی حل آن ساده نیست. جریان موجود بر روی بیضی رانکین (شکل ۶-۱۰) مثالی ساده و مخصوص برای این روش بود.

این روش برای محاسبات جریان موجود بر روی کشتیهای هوایی و بدنهٔ کشتیها سودمند است.

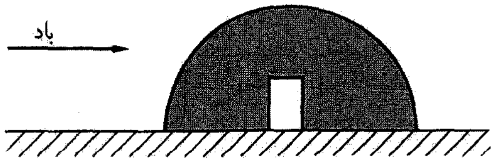
مسائل تکمیلی

۶-۹ آیا لولهٔ گردابه در درون شاره پایان می‌یابد یا باید به‌صورت حلقه در آید؟

۶-۱۰ آیا در دیوباد می‌توان تارگردابه تعریف کرد و یا فقط لولهٔ گردابه وجود دارد؟ سطح مقطع هستهٔ دیوباد را یکنواخت فرض کنید.

۶-۱۱ آیا می‌توان در جریان برشی گران‌رو، تارگردابه تعریف کرد؟ آیا می‌توان لولهٔ گردابه تعریف کرد؟ خطهای گردابه در جریان پوازوی به چه شکلی هستند؟

۶-۱۲ چرا هوای موجود بر بال روبه داخل و به‌طرف مرکز بال جریان دارد و هوای موجود در زیربال روبه خارج و به‌طرف نوک بال؟



شکل ۶-۳۵

۶-۱۳ در موقع وزش باد در قطب شمال نیروی برآیی بر کلبه‌ای قطبی به شکل نیم‌دایره وارد می‌شود. اگر سرعت باد $80\,\mathrm{m/h}$ و هوای صفر درجه فارنهایت باشد، نیروی برآی وارد بر واحد طول کلبه‌ای به قطر ۱۰ فوت چقدر است (شکل ۶-۳۵)؟

۶-۱۴ در مسئلهٔ قبل، آیا امکان استقرار در (هنگامی که باز است) در تعیین نیروی برآ اهمیت دارد؟ فشار درون کلبه به چه عاملی بستگی دارد؟

۶-۱۵ دربارهٔ جریان $z = C\cosh F$ بحث کنید و نشان دهید که

$$x = C\cosh\phi\cos\psi, \qquad y = C\sinh\phi\sin\psi$$

و خطهای جریان (ψ ثابت) هذلولیهای هم‌کانون هستند و این طرح بیانگر جریان گذرنده از میان سوارخ است.

۶-۱۶ نیروی وارد بر دیواره‌ای را حساب کنید که در فاصلهٔ a از دوقطبی‌ای به‌قدرت m قرار گرفته است. فرض کنید که دیواره و دوقطبی موازی با محور xاند.

۶-۱۷ در مسئلهٔ قبل، اگر دوقطبی نسبت به دیواره زاویهٔ α داشته باشد چه نیرویی به دیواره وارد می‌شود؟

۶-۱۸ اگر قدرت دوقطبی $-m$ باشد جوابهای مسائل ۶-۱۶ و ۶-۱۷ چگونه است؟ آیا نیروی وارد بر دیواره تغییر علامت می‌دهد؟

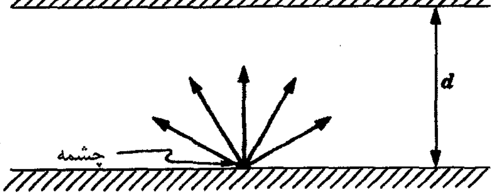
۶-۱۹ دربارهٔ حرکت $F = z^2 - 1$ بحث کنید.

۶-۲۰ پارامترهای F، ψ و ϕ را به‌دست آورید و خطهای جریان ناشی از چشمهٔ موجود در دیوارهٔ کانالی به پهنای d را، همچون شکل ۶-۳۶، رسم کنید. (راهنمایی: آرایه‌ای نامتناهی از تصاویر بسازید و با هم جمع کنید.)

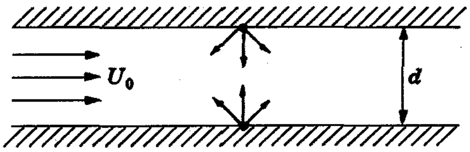
۶-۲۱ دربارهٔ جریان $F = Az^2$ بحث کنید.

۶-۲۲ دربارهٔ جریان $z^2 = F^3$ بحث کنید.

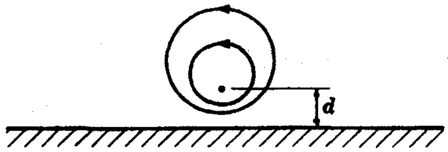
۶-۲۳ F را بیابید و خطهای جریان را برای جریان گذرنده از میان کانالی که دارای دوچشمهٔ مقابل هم‌اند، همچون شکل ۶-۳۷، رسم کنید.



شکل ۶-۳۶



شکل ۶-۳۷



شکل ۶-۳۸

۶-۲۴ گردابهٔ پتانسیلی در فاصلهٔ d از دیواره قرار دارد. با توجه به شکل ۶-۳۸، دربارهٔ جریان بحث کنید.

۶-۲۵ دربارهٔ جریان موجود بر روی استوانهٔ دایره‌ای نزدیک دیواره در شکل ۶-۳۹، با این فرض که $D \ll d$، بحث کنید.

۶-۲۶ در مسئلهٔ، ۶-۲۵ استوانه حول محورش با سرعت زاویه‌ای Ω دوران می‌کند. دربارهٔ جریان بحث کنید.

۶-۲۷ در مسئلهٔ ۶-۲۶، دربارهٔ نیروی وارد بر استوانه بحث کنید.

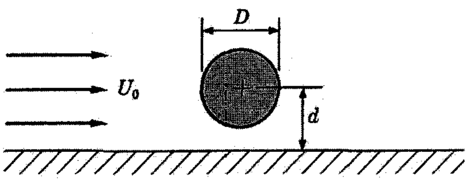
۶-۲۸ صفحهٔ مقوای نازکی را که سوزنی از آن عبور کرده است و قرقره‌ای بر روی سوزن قرارگرفته است در شکل ۶-۴۰ نشان داده‌ایم. اگر هوا را به‌آرامی به درون سوراخ قرقره بدمیم، مقوا به بالا کشیده می‌شود و نمی‌افتد. چرا؟ در واقع، هوا در برخورد به مقوا به‌طور شعاعی منحرف می‌شود و جریان موجود بین قرقره و مقوا شبیه جریان پتانسیل چشمه است. توزیع فشار در سرتاسر سطح صفحه چگونه است؟ آیا این موضوع برآ را توضیح می‌دهد؟

اگر دمیدن باد خیلی شدید باشد، صفحه می‌افتد. چرا؟ تکانهٔ هوای خروجی از سوراخ قرقره چقدر است؟ اگر جریان شعاعی باشد، باید حتماً منحرف شود. آیا این موضوع در تشریح آن به شما کمک می‌کند؟

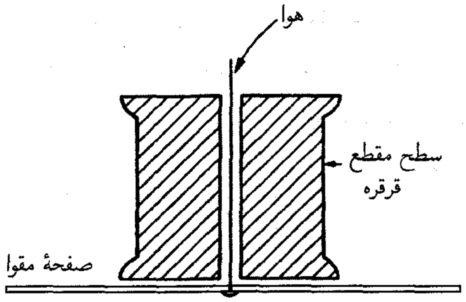
۶-۲۹ چشمه‌ای در مکان z_1 و چاهی در مکان z_2 قرار دارد. برای قدرتهای معمولی F، ϕ و ψ را تعیین کنید.

۶-۳۰ چشمه و چاهی هم‌قدرت در امتداد خط $z = e^{i\alpha}$ و به فاصلهٔ a از مبدأ قرار دارند و در جریان یکنواختی در امتداد محور x غوطه‌ورند. خطهای جریان را رسم کنید.

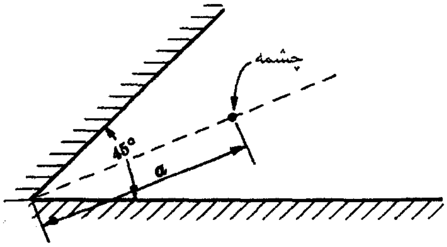
۶-۳۱ چشمه‌ای مطابق شکل ۶-۴۱ در داخل زاویهٔ 90° قرارگرفته است. پتانسیل مختلط را تعیین کنید. سرعت مختلط را بیابید.



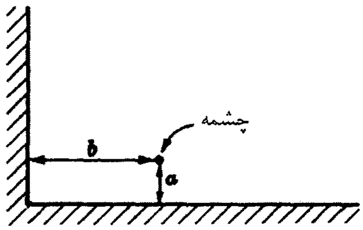
شکل ۶-۳۹



شکل ۶-۴۰



شکل ۶-۴۲



شکل ۶-۴۱

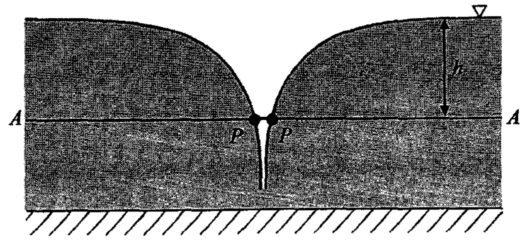
۶-۳۲ چشمه‌ای روی نیمساز زاویهٔ $45°$ قرار دارد. فاصلهٔ چشمه از مبدأ α است. F را به‌دست آورید و دربارهٔ جریان بحث کنید (شکل ۶-۴۲).

۶-۳۳ دیوبادی با گردش Γ دارای هستهٔ توپری به‌قطر a است. توزیع فشار را در دیوباد محاسبه کنید. آیا این فشار کم کمکی به اثر ویرانگر دیوباد خواهد کرد؟

۶-۳۴ گردابی اقیانوسی را در شکل ۶-۴۳ نشان داده‌ایم. فشار در امتداد هر خط A-A از مقدار هیدروستاتیکی ρgh در شعاعهای بزرگ به مقدار (نسبی) در نقطهٔ P می‌رسد. با استفاده از نظریهٔ گردابهٔ پتانسیل معادلهٔ سطح آزاد گرداب را به‌دست آورید.

در عمقهای زیاد در مرکز گرداب چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ آیا گرداب دقیقاً متوقف می‌شود یا باید تا کف اقیانوس ادامه یابد؟ آیا می‌توانید توضیح دهید چرا هر جسمی که در گرداب می‌افتد به پایین کشیده می‌شود.

۶-۳۵ در فصل ۳ دربارهٔ حرکت آب‌پاش و گشتاور واکنشی آن بحث کردیم (مسئلهٔ ۳-۱۴). چرخش آب‌پاش به علت نیروی پس‌زنی آب در موقع خروج از شیپوره است. مسئلهٔ زیر را درنظر بگیرید. همین آب‌پاش را در استخر شنای بزرگ یا دریاچه‌ای کاملاً غوطه‌ور می‌کنیم. آب استخر از میان شیپوره مکیده می‌شود و از میان شلنگی که شیپوره را تغذیه می‌کند، بر می‌گردد. هنگامی که آب از طریق شیپوره‌ها به بیرون پمپ می‌شود،



شکل ۶-۴۳

آیا آب‌پاش در جهت عکس می‌چرخد؟ آیا اصلاً می‌چرخد؟ راهنمایی: کارکرد آب‌پاش مبتنی بر خروج آب از شیپوره‌ها به‌صورت فورانی است. اما موقعی که آب به درون شیپوره‌ها مکیده می‌شود، آیا به‌صورت فورانی است یا اینکه شیپوره‌ها مانند چاه در جریان پتانسیل عمل می‌کنند؟ [۱]
جواب: چرخش وجود ندارد. شیپوره‌ها مانند چاه عمل می‌کنند.

۶-۳۶ معادلهٔ ناپایای برنولی (۶-۹) را به‌طور کامل به‌دست آورید.

نمادگذاریهای فصل ۶

$F =$ پتانسیل مختلط
$\mathrm{Im} =$ جزء انگاری
$L =$ برآ
$M =$ گشتاور
$p =$ فشار
$p_0 =$ فشار سکون
$p_\infty =$ فشار جریان آزاد، که $V = U_0$
$Q =$ آهنگ جریان حجمی
$\mathrm{Re} =$ جزء حقیقی
$U_0 =$ سرعت جریان آزاد
$u =$ مؤلفهٔ x سرعت
$\mathbf{V} =$ بردار سرعت
$v =$ مؤلفهٔ y سرعت
$v_r =$ مؤلفهٔ r سرعت
$v_\theta =$ مؤلفهٔ θ سرعت
$w =$ مؤلفهٔ z سرعت
$X =$ مؤلفهٔ x نیرو
$Y =$ مؤلفهٔ y نیرو
$z = (x + iy) =$ متغیر مختلط
$\Gamma =$ گردش
$\rho =$ چگالی
$\phi =$ پتانسیل سرعت
$\psi =$ تابع جریان، پتانسیل گرانشی
$\mathbf{\Omega} =$ بردار سرعت زاویه‌ای
$\boldsymbol{\omega} =$ گردشاری یا بردار چرخش
$(\tilde{\ }) =$ مزدوج مختلط.

۱. این مسئله را فیزیکدان معاصر، ریچارد فاینمن، درکتاب معروفش پیشنهاد کرده است. *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* (Norton, 1985) جواب این داستان بامزه در مجلهٔ زیر توسط جان ویلر داده شده است John Wheeler, *Physics Today*, 1989, p. 24.

۷

جریان تراکم‌پذیر یک‌بعدی

۷-۱ مقدمه

در بسیاری از جریانهای فیزیکی، فرض «بی‌اصطکاک» و «تراکم‌ناپذیر» بودن به ارائهٔ مدل معقول و دقیقی منجر می‌شود (فصل ۶). در جریانهای دیگر، دیدیم که گران‌روی اهمیت دارد (فصل ۵). در این فصل، جریانهای یک‌بعدی‌ای را در نظر می‌گیریم که تغییرات چگالی آنها اهمیت زیادی در تعیین مشخصهٔ جریان دارد. هر چند محدودیت یک‌بعدی جریان می‌تواند محدودیتی جدی باشد، این مدل فیزیکی برای بسیاری از جریانهای واقعی تقریب خوبی است.

در این فصل فقط جریانهای درونی را بررسی می‌کنیم. در محیط یک‌بعدی، فرض می‌شود که کمیتهایی همچون فشار، دما، سرعت، و جز آن در هر مقطع کانال یکنواخت است.[۱]

جریانهای درونی (جریان در لوله‌ها، کانالها، و مجراها) ممکن است به علت تغییر مقطع جریان، گرمایش، و اصطکاک، خواص متفاوتی در امتداد کانال پیدا کنند. در جریانهای واقعی همهٔ این پدیده‌ها رخ می‌دهند. اما، اثر هر یک از این تغییرات را یک‌به‌یک بررسی می‌کنیم. این کار دو دلیل دارد: نخست جریانهای زیادی وجود دارند که فقط یکی از این تغییرات در آنها مهم است؛ دوم این‌که به درک بهتر از نقش این اثرها در جریانهای کلی می‌انجامد.

---

۱. به بیان دقیق‌تر، جریان یک‌بعدی به صورت جریانی تعریف می‌شود که فقط یک مؤلفهٔ مکانی برای توصیف دارد. این موضوع را به وسیلهٔ جریان کاملاً توسعه‌یافته در لوله می‌توان درک کرد. اما در اینجا، فقط جریانهایی را در نظر می‌گیریم که دارای شرایط یکنواخت در هر مقطع هستند.

۷-۱-۱ تقریب گاز کامل

تقریب گاز کامل فقط برای گازهایی با چگالی کم و متوسط معتبر است. از این تقریب رابطه‌های مربوط به خواص گازها را برای ساختن مدل ریاضی کلی می‌توان به‌دست آورد. مثلاً اگر فرض کنیم که شاره گاز کامل است، آن‌گاه، داریم

$$pv = RT \qquad (۷\text{-}۱)$$

که p فشار مطلق، v حجم ویژه، R ثابت عمومی گازها و T دمای مطلق است. وانگهی، اگر فرض کنیم که گرماهای ویژه در حجم ثابت و فشار ثابت برحسب دما تغییر نمی‌کنند. آن‌گاه، بین حالتهای ۱ و ۲ می‌توان رابطه‌های خواص دیگری را به صورت زیر نوشت

$$u_۲ - u_۱ = c_v(T_۲ - T_۱) \qquad (۷\text{-}۲)$$

$$h_۲ - h_۱ = c_p(T_۲ - T_۱) \qquad (۷\text{-}۳)$$

که u انرژی درونی ویژه، h آنتالپی ویژه، c_v و c_p گرماهای ویژه در حجم و فشار ثابت‌اند. افزون بر آن، اگر فرض کنیم که جریان بی‌اصطکاک و بی‌دررو (و بنابراین تک‌آنتروپی) باشد و از معادلهٔ حالت گاز کامل پیروی کند، آن گاه معادلهٔ زیر بیانگر این فرایند خواهد بود

$$p\left(\frac{۱}{\rho}\right)^k = pv^k = \text{const.} \qquad (۷\text{-}۴)$$

که k نسبت گرماهای ویژه است، $k = \frac{c_p}{c_v}$.

۷-۱-۲ انتشار اختلال بی‌نهایت کوچک

اختلال در دیوارهٔ شاره با سرعت کاملاً مشخصی در شاره انتشار می‌یابد که به خواص شاره بستگی دارد. سرعت انتشار به بزرگی اختلال بستگی خواهد داشت. اگر اختلال بسیار کوچک باشد، سرعت انتشار اختلال را سرعت صوت یا سرعت آکوستیک می‌گویند. این سرعت خود خاصیتی از شاره است، که خاصیت بسیار مهمی در جریان تراکم‌پذیر به شمار می‌رود.

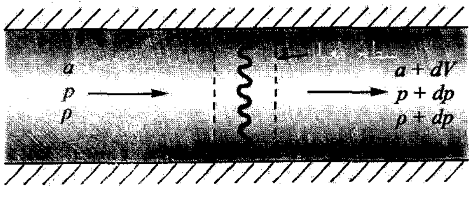
سرعت صوت را می‌توان با استفاده از شارهٔ موجود در لولهٔ درازی همچون شکل ۷-۱ تعیین کرد. با ایجاد اختلالی بی‌نهایت کوچک در شاره، جبههٔ موجی با سرعت a به حرکت در می‌آید. اکنون دستگاه مختصات را بر روی موج به گونه‌ای ثابت می‌کنیم که شارهٔ اختلال‌نیافته با سرعت a نسبت به موج حرکت کند.

معادلهٔ تکانه برای حجم معیاری با سطح مقطع A عبارت است از

$$A[p - (p + dp)] = \rho A a[(a + dV) - a]$$

که به دست می‌دهد

$$-dp = \rho a\, dV$$



شکل ۷-۱ انتشار امواج صوت.

که ρ چگالی شاره و a سرعت موج صوتی است که به عنوان تندی صوت شناخته می‌شود. معادلهٔ پیوستگی برای حجم معیار عبارت است از

$$\rho A a = (\rho + d\rho)(a + dV)A$$

با ساده کردن و حذف عبارتهای مرتبهٔ بالاتر، داریم

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{a}$$

از ترکیب معادلات تکانه و پیوستگی، رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\frac{dp}{d\rho} = a^{۲}$$

غالباً این رابطه را به صورت زیر می‌نویسند

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = a^{۲} \qquad (۷\text{-}۵)$$

چون این اختلال بی‌نهایت کوچک است و از این رو، فرایند برگشت‌پذیر و بی‌دررو، و بنابراین تک‌آنتروپی خواهد بود، از شاخص پایین s در مشتقها استفاده شده است.

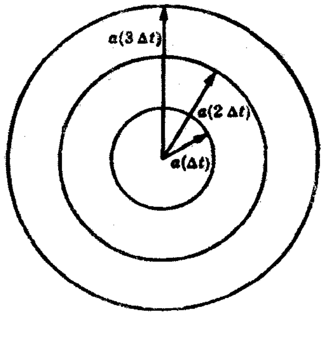
با استفاده از معادلهٔ (۷-۴) برای گاز کامل، داریم

$$a^{۲} = kRT \qquad (۷\text{-}۶)$$

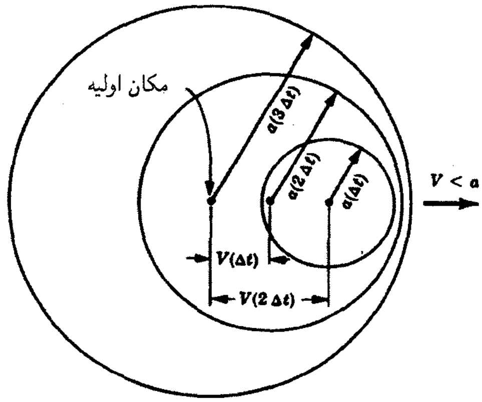
۷-۱-۳ مخروط ماخ

اختلالی کوچک در نقطه‌ای از شارهٔ ساکن، به طور شعاعی در تمام جهتها انتشار می‌یابد، و جبههٔ موجها در زمانهای مختلف به شکل کره‌های هم‌مرکز مطابق شکل ۷-۲ در خواهند آمد. اگر چشمهٔ اختلال با سرعت V، که کوچکتر از a است، حرکت کند، باز هم جبههٔ موجهایی کروی‌ای خواهیم داشت که این بار به صورت هم‌مرکز نیستند. این پدیده را در شکل ۷-۳ نشان داده‌ایم. در حالت $V > a$، (یعنی سرعت اختلال بزرگتر از سرعت آکوستیکی است، سطحی مخروطی ایجاد می‌شود که جریان در یک طرف آن اختلال‌نیافته خواهد بود و در طرف دیگر، اثر موج اختلال کاملاً احساس می‌شود. نیم‌زاویهٔ رأس مخروط برابر است با $\alpha = \sin^{-۱}(a/V) = \sin^{-۱}(۱/M)$ که در شکل ۷-۴ دیده می‌شود. در اینجا، M عدد ماخ V/a است.

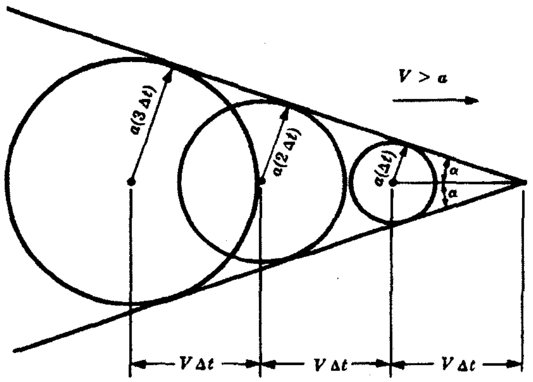
با این فرض که اختلالهای موجود در شکلهای ۷-۳ و ۷-۴ ساکن هستند و شاره دارای سرعت V از راست به چپ است، به شکلهای یکسانی دست خواهیم یافت. این شکلها اختلاف اساسی بین جریانهای فروصوتی و فراصوتی را نشان می‌دهند. در جریان فروصوتی، $M < ۱$، اختلالی بی‌نهایت کوچک در تمام جریان دیده می‌شود. در جریان فراصوتی، $M > ۱$، اختلال فقط در قسمتی از جریان به وجود می‌آید. این موضوع به اختلافهای مهم و جالبی در رفتار جریانهای فروصوتی و فراصوتی منجر می‌شود.



شکل ۷-۲ اختلال بی‌نهایت کوچک ساکن.



شکل ۷-۳ اختلال بی‌نهایت کوچک با $V < a$.



شکل ۷-۴ اختلال بی‌نهایت کوچک با $V > a$. $\alpha = \sin^{-1}(1/M)$.

۷-۲ جریان تک‌آنتروپی

بسیاری از جریانها را می‌توان با دقت قابل قبولی به صورت تک‌آنتروپی بیان کرد. این فرض به معنای بی‌اصطکاک و بی‌دررو بودن آنها، بدون وجود ناپیوستگی در خواص جریان است. نمونهٔ این نوع شاره‌ها عبارت‌اند از (۱) جریانهای بیرونی در ناحیه‌هایی با سرعت پایین و گرادیان دمای کم و (۲) جریانهای درونی همچون شیپورها و پخش‌کنها، که تغییر سطح مقطع شاره عامل اصلی تغییر در شرایط جریان است:

۷-۲-۱ اثر تغییر سطح مقطع

معادلهٔ انرژی برای جریان پایای یک‌بعدی و بی‌دررو گاز کامل بدون انجام کار محوری به صورت زیر است

$$\frac{1}{2}V^2 + c_pT = \text{const.}$$

با استفاده از معادلهٔ (۷-۶) برای سرعت آکوستیکی، داریم

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

پس از دیفرانسیل‌گیری، رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$V\,dV + a^2\frac{d\rho}{\rho} = 0 \tag{۷-۷}$$

پس از دیفرانسیل‌گیری از معادلهٔ پیوستگی برای جریان یک‌بعدی پایا، خواهیم داشت

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \tag{۷-۸}$$

از ترکیب معادلات (۷-۷) و (۷-۸)، معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}(M^2 - 1) \tag{۷-۹}$$

به همین گونه، برای dM می‌توان نوشت

$$\frac{dM}{M} = \frac{1 + [k-1)/2]M^2}{M^2 - 1}dA \tag{۷-۹الف}$$

جدول ۷-۱ اثر تغییر سطح مقطع بر روی V و M

	$M < 1$	$M > 1$
$dA < 0$	V افزایش M افزایش	V کاهش M کاهش
$dA > 0$	V کاهش M کاهش	V افزایش M افزایش

معادلات (۷-۹) و (۷-۹الف) نتیجه‌های جالب و مهمی به دست می‌دهند. مشاهده می‌کنیم که برای $M < 1$، با افزایش سطح مقطع سرعت کاهش می‌یابد. اما، برای $M > 1$، عکس این موضوع صادق است. از معادلهٔ (۷-۹الف) در می‌یابیم که برای عدد ماخ واحد ($M = 1$)، dA باید صفر شود. نتیجهٔ معادلات (۷-۹) و (۷-۹الف) را در جدول ۷-۱ خلاصه کرده‌ایم

۷-۲-۲ جریان شیپورهٔ همگرا

اکنون، جریان موجود در گذرگاهی همگرا را همچون شکل ۷-۵ بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم که شاره گازی کامل با جریان یک‌بعدی بی‌دررو و بی‌اصطکاک است. معادلهٔ پیوستگی عبارت است از

$$\dot{m} = \frac{A_2 V_2}{v_2} \tag{۷-۱۰}$$

که $\dot{m}$ آهنگ جریان جرمی و v حجم ویژه شاره ($1/\rho$) است. معادلهٔ انرژی برحسب آنتالپی عبارت است از

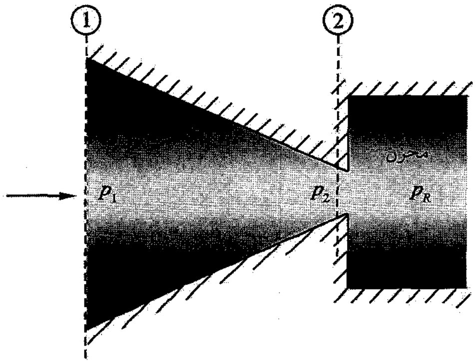
$$\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = h_1 - h_2 \tag{۷-۱۱}$$

اگر فرض کنیم که $V_1 \ll V_2$، معادلهٔ (۷-۱۱) را می‌توان (با استفاده از رابطه‌های خواص و تک‌آنتروپی بودن) به صورت زیر نوشت

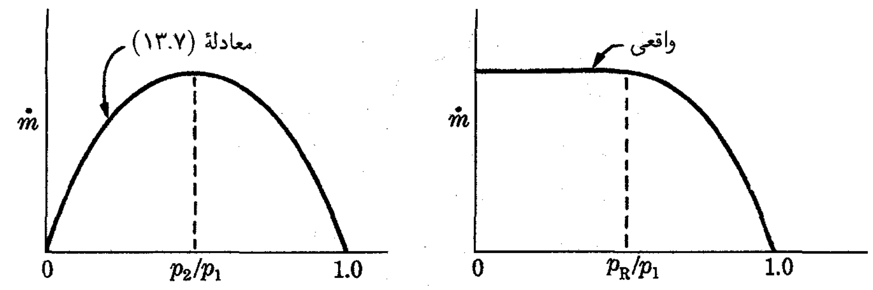
$$V_2 = \left\{ \frac{2k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right] \right\}^{1/2} \tag{۷-۱۲}$$

از ترکیب معادلات (۷-۱۰) و (۷-۱۲) با رابطهٔ تک‌آنتروپی $p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$، خواهیم داشت

$$\dot{m}/A_2 = \left\{ \frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left[(p_2/p_1)^{2/k} - (p_2/p_1)^{(k+1)/k} \right] \right\}^{1/2} \tag{۷-۱۳}$$



شکل ۷-۵ شیپورهٔ همگرا.



شکل ۷-۶ جریان جرم در شیپورهٔ همگرا.

اگر شرایط ورودی را ثابت فرض کنیم، آن‌گاه تغییر در جریان جرم فقط در نتیجهٔ تغییر در $p_۲$ خواهد بود. این نتیجه را در شکل ۷-۶ به صورت نمودار معادلهٔ (۷-۱۳) نشان داده‌ایم. همچنین، آهنگ جریان جرمی واقعی را به صورت نمودار $\dot{m}$ برحسب $\frac{p_R}{p_۱}$، که p_R فشار مخزن است، در این شکل نشان داده‌ایم.

روشن است که اختلافی بین نتیجه‌های واقعی و پیش‌بینی شده وجود دارد. نتیجه‌های واقعی و پیش‌بینی شده با معادلهٔ (۷-۱۳) در فاصلهٔ $\frac{p_R}{p_۱} = ۱$ را تا مقدار فشار مخزن که آهنگ جریان جرمی به مقدار بیشینه می‌رسد، کاملاً مطابقت دارد. در جریان واقعی کاهش بیشتر در فشار مخزن تأثیری بر آهنگ جریان جرمی ندارد. همچنین، مشاهده می‌کنیم که به‌طور تجربی فشار گلوگاه $p_۲$ هرگز کمتر از مقدار آهنگ جریان جرمی بیشینه نخواهد بود. این فشار کمینهٔ گلوگاه را فشار بحرانی p_c می‌گویند و با دیفرانسیل‌گیری از معادلهٔ (۷-۱۳) و صفر کردن نتیجه به دست می‌آید. از اینجا رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{p_۲}{p_۱}\right)_{\text{جریان بیشینه}} = \frac{p_c}{p_۱} = [۲/(k+۱)]^{k/(k-۱)} \qquad (۷\text{-}۱۴)$$

از ترکیب معادلات (۷-۱۲) و (۷-۱۴) عدد ماخ برابر با واحد، در مکانی که دارای فشار بحرانی است، به دست می‌آید. این نتیجه‌ها، با توجه به نتیجه‌های قسمت قبل، جای تعجب ندارد. برای افزایش عدد ماخ به بیشتر از واحد، باید قسمت الحاقی واگرایی را به لولهٔ قدیمی بیفزائیم.

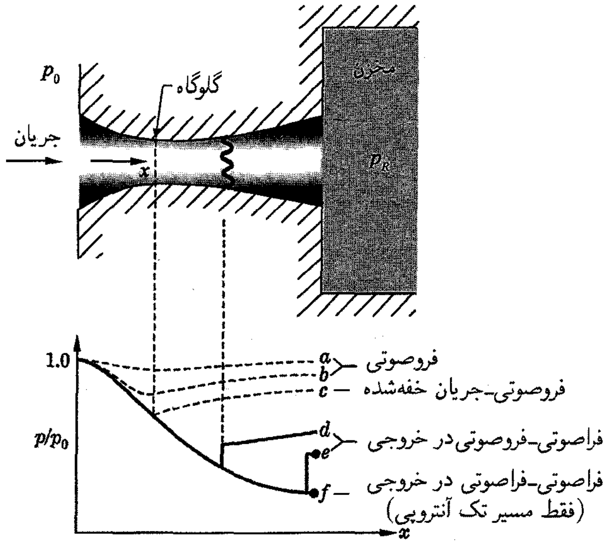
۷-۲-۳ شیپورهٔ همگرا-واگرا

در بخش قبل دیدیم که در شیپورهٔ همگرا عدد ماخ بیشینه برابر واحد بود. از معادلهٔ (۷-۹) نیز دریافتیم که برای افزایش عدد ماخ به بیشتر از واحد، باید سطح مقطع افزایش یابد. بنابراین، برای امکان دست‌یابی به جریان فراصوتی، باید گذرگاه جریان دارای مقطعهایی متوالی کاهنده و افزاینده، همچون شکل ۷-۷، باشد.

اگر فشار مخزن اندکی کاهش یابد (a, b)، جریان از چپ به راست خواهد بود. جریان در سرتاسر مجرا فروصوتی است، به گونه‌ای که قسمت همگرا به صورت شیپوره و قسمت واگرا به صورت پخش‌کن عمل می‌کنند. اگر فشار مخزن را بیشتر کاهش دهیم (c) فشار در گلوگاه به مقدار کمینه (بحرانی) نزدیک می‌شود و سرعت شاره برابر سرعت صوت خواهد شد. جریان در قسمت واگرا فروصوتی است.

اگر فشار مخزن را باز هم کاهش دهیم (d, e)، آن گاه جریان گذرنده از گلوگاه در فاصله‌ای کوتاه فراصوتی خواهد شد؛ سپس، ناپیوستگی‌ای در فشار (ضربه‌ای قائم) رخ می‌دهد و جریان در فاصلهٔ باقیمانده تا مقطع خروجی فروصوتی خواهد بود. حالت e وقتی رخ می‌دهد که موج ضربه‌ای به خروجی شیپوره انتقال می‌یابد.

در مخزن فقط یک فشار (f) وجود دارد که جریان فراصوتی آن تک‌آنتروپی است. اگر فشار مخزن بین e و f باشد، آن گاه شیپوره را فراانبساطی می‌گویند. در این حالت، موج ضربه‌ای در خارج از شیپوره، که فشار آن از مقدار کمتر به مقداری بیشتر می‌رسد، تشکیل خواهد شد. اگر فشار مخزن کمتر از f باشد، شیپوره را فروانبساطی می‌گویند. در این حالت، مجموعه‌ای از موجهای انبساطی و موجهای ضربه‌ای مایل در خارج از شیپوره، با تغییر فشار از مقدار زیاد به مقدار کم به وجود می‌آید.



شکل ۷-۷ وضعیت جریان در شیپورهٔ همگرا-واگرا.

فرضهای مهم این بخش شامل یک‌بعدی بودن، پایایی و بی‌دررو بودن جریان گاز کامل است. در بیشتر جریانهای واقعی، این فرضها کاملاً صدق نمی‌کنند. اما، این مدل نتیجه‌هایی را پیش‌بینی می‌کند (مثلاً، سرعت خروجی یا نیروی رانش) که تا چند درصد با نتیجه‌های تجربی بسیاری از جریانها اختلاف دارد.

در بعضی از مسائل، طراح دوست ندارد حتی تا چند درصد با پیش‌بینی اختلاف داشته باشد. بنابراین، این حقیقت را که جریان واقعاً یک‌بعدی نیست ، لایهٔ مرزی وجود دارد، یا انتقال گرما رخ می‌دهد، و یا شاره گازی کامل نیست باید در نظر گرفت.

۷-۲-۴ معادلات تک‌آنتروپی

اگر جریان یک‌بعدی، پایا، بی‌دررو، و شاره گاز کامل باشد، معادلهٔ انرژی بین دو مکان ۱ و ۲ عبارت است از

$$c_pT_1 + \frac{V_1^2}{2} = c_pT_2 + \frac{V_2^2}{2} = c_pT_0 = h_0 \qquad (۷\text{-}۱۵)$$

در اینجا، T_0 دمای سکون یا دمای منبع است که شاره پس از رسیدن به حالت سکون به طور بی‌دررو، به آن دست می‌یابد. h_0 آنتالپی ویژه در حالت سکون است. باید متذکر شد که اگر جریان بی‌دررو باشد، دمای سکون T_0 در امتداد خط جریان ثابت خواهد ماند. لازم نیست جریان تک‌آنتروپی باشد. با نوشتن سرعت برحسب عدد ماخ و استفاده از رابطهٔ $c_p - c_v = R$، معادلهٔ انرژی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2} \qquad (۷\text{-}۱۶)$$

اگر از رابطهٔ تک‌آنتروپی بین فشار و دما برای گاز کامل استفاده شود، داریم

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[\frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(k-1)M_2^2}\right]^{k/(k-1)} \qquad (۷\text{-}۱۷)$$

آهنگ جریان جرمی را می‌توان از رابطهٔ زیر تعیین کرد

$$\dot{m} = \rho A V$$

یا برحسب عدد ماخ، خواهیم داشت

$$\dot{m}/A = \sqrt{k/RT}pM \qquad (۷-۱۸)$$

فشار سکون p_0 فشاری است که شاره را با فرایند تک‌آنتروپی به حالت سکون در می‌آورد. برای جریان تک‌آنتروپی در شیپوره که از منبعی با فشار p_0 تغذیه می‌شود، این فشار همان فشار منبع است. برای هر حالت شاره می‌توان شیپوره‌ای تک‌آنتروپی و خیالی در نظر گرفت که از طریق منبعی در فشار p_0 تغذیه می‌شود.

فشار سکون در سرتاسر خط جریان در جریان تک‌آنتروپی ثابت است، به گونه‌ای که $p_{01} = p_{02}$. اما، اگر جریان بی‌دررو باشد ولی تک‌آنتروپی نباشد، آن‌گاه دمای سکون T_0 همچنان در سرتاسر جریان ثابت است ولی p_0 ثابت نخواهد ماند.

نتیجه‌های دیگری را از جریان تک‌آنتروپی گاز کامل، با استفاده از رابطهٔ $a^2 = kRT$، همراه با معادلهٔ انرژی برای جریان بی‌دررو (اما نه لزوماً تک‌آنتروپی) می‌توان به دست آورد

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1} \qquad (۷-۱۹)$$

$$\frac{a_0^2}{a^2} = \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2 \qquad (۷-۲۰)$$

سپس، با استفاده از معادلهٔ (۷-۴) برای جریان تک‌آنتروپی، داریم

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)} \qquad (۷-۲۱)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)} \qquad (۷-۲۲)$$

در مجرا، به ویژه شیپوره مساحت A پارامتر مهمی است. در اینجا از کمیت ستاره‌دار $()^*$ برای معرفی شرط یا خاصیت عدد ماخ واحد (دقیقاً صوتی) استفاده شده است. با استفاده از اصل پیوستگی، داریم

$$\dot{m} = \rho A V = \rho^* A^* a^* \qquad (۷-۲۳)$$

A^* مساحت گلوگاه خیالی است که برای دست‌یابی به شرایط صوتی از طریق مسیری تک‌آنتروپی لازم است. A^* ممکن است واقعاً در مجرا وجود داشته باشد یا نداشته باشد، که به ایجاد شرایط صوتی بستگی دارد. اگر شرایط صوتی دست‌یافتنی باشد، آن گاه $A_1 = A^*$، که A_1 مساحت گلوگاه واقعی است. البته، تندی صوتی a در درون جریان تغییر می‌کند و a^* مقدار a درست در حالت $M = 1$ است.

با استفاده از رابطه‌های شیپوره، نسبت A/A^* را می‌توان برحسب مقدار عدد ماخ موضعی M (با مساحت A) به دست آورد

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2}\left[\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{(k+1)/(k-1)} \qquad (۷-۲۴)$$

یادآور می‌شویم فشار بحرانی p_c، که از معادلهٔ (۷-۱۴) به دست می‌آید، همان p^* است.

برای هر جریان تک‌آنتروپی مفروض با p_0 و T_0 ثابت، از معادلات (۷-۲۰)، (۷-۲۱)، (۷-۲۲) و (۷-۲۴) نسبتهای T/T_0، p/p_0، ρ/ρ_0 و A/A^* را برحسب عدد ماخ موضعی M می‌توان به دست آورد. چون نسبتهای T/T_0، p/p_0، ρ/ρ_0 و A/A^* فقط تابع M هستند، این نسبتها را می‌توان به صورت عددی جدول‌بندی کرد و در محاسبات به طور مؤثر به کار برد. در این ارتباط، جدول فشرده‌ای را در پیوست د می‌توان دید.

۳-۷ موجهای ضربه‌ای قائم

در شیپورهٔ همگرا-واگرا یا هنگامی که مقدار فشار خروجی در گسترهٔ خاصی است، ناپیوستگی‌ای در فشار (چگالی و دما) به وجود می‌آید. این ناپیوستگی را موج ضربه‌ای قائم می‌گویند. در این بخش، می‌خواهیم (۱) نشان دهیم که این ناپیوستگی ممکن است رخ دهد و (۲) معادلاتی به دست آوریم که تغییر شرایط را در عرض موج ضربه‌ای بیان کند.

فرض می‌کنیم که موج ضربه‌ای قائم موجود در شکل ۷-۸ را می‌توان با مدل زیر مشخص کرد:

۱. مساحت در عرض موج ضربه‌ای ثابت است (تغییر سطح مقطع کانال در عرض ضخامت موج ضربه‌ای چندان نیست)

۲. گاز کامل است.

۳. جریان پایاست.

۴. جریان یک‌بعدی است.

۵. جریان بی‌درروست.

حجم معیار بین خطهای ۱ و ۲ بسیار نازک و نسبت به موج ضربه‌ای ساکن است (که ممکن است نسبت به ناظری ساکن متحرک باشد یا نباشد). مهم است بدانیم که جریان در میان موج ضربه‌ای برگشت‌ناپذیر است، و بنابراین نمی‌توان از معادلات تک‌آنتروپی استفاده کرد. شکلهای حجم معیار برای انرژی، تکانه و پیوستگی به صورت زیرند (بخش قبل را ببینید)

انرژی:

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \frac{۱ + \frac{۱}{۲}(k-۱)M_۱^۲}{۱ + \frac{۱}{۲}(k-۱)M_۲^۲} \qquad [۱۶-۷]$$

تکانه:

$$\frac{p_۲}{p_۱} = \sqrt{\frac{T_۲}{T_۱}}\frac{M_۱}{M_۲} \qquad (۲۵-۷)$$

پیوستگی:

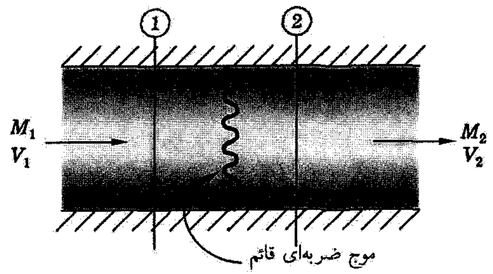
$$(p_۱ - p_۲)A = \dot{m}(V_۲ - V_۱)$$

که به شکل زیر در می‌آیند

$$\frac{p_۲}{p_۱} = \frac{۱ + kM_۱^۲}{۱ + kM_۲^۲} \qquad (۲۶-۷)$$

از ترکیب معادلهٔ حالت با رابطهٔ ترمودینامیکی تغییر آنتروپی، خواهیم داشت

$$s_۲ - s_۱ = c_p \ln(T_۲/T_۱) - R\ln(p_۲/p_۱) \qquad (۲۷-۷)$$



شکل ۷-۸ مدل جریان برای موج ضربه‌ای قائم.

معادلات (۷-۱۶)، (۷-۲۵) و (۷-۲۶) دارای سه مجهول T_2، p_2، M_2 هستند و از ترکیب آنها، داریم

$$M_2 = \left[\frac{M_1^2(k-1)+2}{2kM_1^2-k+1}\right]^{1/2} \tag{۷-۲۸}$$

معادلات (۷-۱۶)، (۷-۲۶) و (۷-۲۸) به طور کامل شرایط موجود در پشت موج ضربه‌ای را برحسب شرایط بالادست جریان بیان می‌کنند.[1]

هر چند برای محاسبات عددی معمولاً از جدولهای موج ضربه‌ای استفاده می‌شود، با عملیات جبری مختصر می‌توان رابطه‌های بسیاری را بین خواص بالادست و پایین‌دست جریان به دست آورد. رابطه‌های رانکین‌ـهوگونیو عبارت‌اند از

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1+\dfrac{k+1}{k-1}\dfrac{p_2}{p_1}}{\dfrac{k+1}{k-1}+\dfrac{p_2}{p_1}} = \frac{u_1}{u_2} \tag{۷-۲۹}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\,\frac{\frac{k+1}{k-1}+\dfrac{p_2}{p_1}}{1+\dfrac{k+1}{k-1}\dfrac{p_2}{p_1}} \tag{۷-۳۰}$$

رابطه‌های مفید دیگر عبارت‌اند از

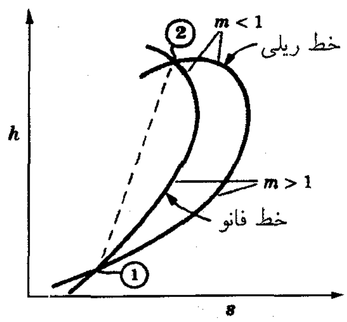
$$\frac{p_2}{p_1} = 1+\frac{2k}{k+1}(M_1^2-1) \tag{۷-۳۱}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(k+1)M_1^2}{(k-1)M_1^2+2} \tag{۷-۳۲}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2} \tag{۷-۳۳}$$

نسبتهای خواص پایین‌دست جریان به بالادست جریان فقط تابع M_1 است و این نسبتها در جدولهای موج ضربه‌ای به صورت تابع متغیر مستقل M_1 جدول‌بندی شده‌اند.

سؤالی را که پاسخ نداده‌ایم عبارت است از: چه موقع موج ضربه‌ای قائم رخ می‌دهد؟ فرض می‌کنیم که تمام شرایط مدل، به جز معادلهٔ تکانه، برآورده شده است. بدین ترتیب، معادلات (۷-۱۶)، (۷-۲۵) و (۷-۲۷) (یعنی، انرژی، پیوستگی و معادلهٔ حالت) بیانگر منحنی‌ای در نمودار آنتالپی‌ـآنتروپی هستند که از حالت اولیهٔ ۱، همچون شکل ۷-۹ می‌گذرد. این منحنی را خط فانو می‌گویند.



شکل ۷-۹ خط فانو و خط ریلی.

۱. تغییرات خواص در عرض موج ضربه‌ای قائم به‌صورت عددی و به‌شکل راحت جدول‌بندی شده است، و دیگر به محاسبه با استفاده از معادلات بالا نیاز نخواهد بود. جدولهای موج ضربه‌ای در مرجعهای مختلف یافت می‌شوند و به‌صورت مختصر در پیوست آمده است.

اکنون، اگر تمام شرایط مدل، به جز معادلهٔ انرژی، برآورده شوند منحنی دیگری در نمودار آنتالپی-آنتروپی داریم. این منحنی را خط ریلی می‌گویند.

برای تأمین تمام شرایط مدل، حالتهای تعادل خط فانو و خط ریلی باید همزمان برقرار باشند. چون دو نقطهٔ تقاطع در منحنی‌ها وجود دارد، بنابراین دو حالت در این شرایط صدق می‌کنند و تمام حالتهای دیگر مجاز نیستند. یادآور می‌شویم که تمام حالتهای مجاز دارای تفاوتهای معینی در خواص هستند.

بنابراین اگر جریان دارای شرایط حالت ۱ باشد، ممکن است ناپیوستگی رخ دهد و جریان، شرایط حالت ۲ را بگیرد. آیا امکان دارد شرایط جریان از حالت ۲ به حالت ۱ تغییر یابد؟ جواب منفی است زیرا این موضوع شامل کاهش آنتروپی است و این به معنی نقض اصل دوم ترمودینامیک خواهد بود. جریان در تقاطع قسمت پایین منحنیها فراصوتی است، در حالی که در تقاطع قسمت بالای جریان فروصوتی خواهد بود. از این رو، نشان دادیم که ناپیوستگی در صورتی رخ می‌دهد که جریان شاره فراصوتی باشد، اما اگر فروصوتی باشد رخ نمی‌دهد.

۷-۴ جریان بی‌دررو با سطح مقطع ثابت (خط فانو)

جریان بی دررو، یک‌بعدی، و پایای یک گاز کاملی را در مجرایی با سطح مقطع ثابت در نظر بگیرید. معادلاتی که این جریان را بیان می‌کنند (که شاخص پایین ۱ در آنها حالت مرجع را در بالادست جریان مشخص می‌کند) عبارت‌اند از:

انرژی:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h + \frac{V^2}{2} = h_0 \qquad (۷-۳۴)$$

که h_0 آنتالپی سکون است و با معادلهٔ (۷-۳۴) تعریف می‌شود.

تکانه:

$$(p_1 - p)A - \tau_0 LC = A(\rho V^2 - \rho_1 V_1^2) \qquad (۷-۳۵)$$

که τ_0 تنش برشی دیواره، L طول و C طول محیط خیس شده است.

پیوستگی:

$$V_1\rho_1 = V\rho \qquad \text{یا} \qquad \frac{V_1}{v_1} = \frac{V}{v} \qquad (۷-۳۶)$$

معادلهٔ حالت:

$$\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{pv}{T} \qquad (۷-۳۷)$$

رابطهٔ خاصیت:

$$s - s_1 = c_v \ln\left(\frac{h}{h_1}\right) + R\ln\left(\frac{v}{v_1}\right) \qquad (۷-۳۸)$$

از ترکیب معادلات انرژی و پیوستگی، داریم

$$h = h_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{v_1}\right)^2 v^2 \qquad (۷-۳۹)$$

وانگهی با ترکیب این معادله با رابطهٔ خاصیت، خط فانو به صورت منحنی شکل ۷-۹ به‌دست می‌آید. این منحنی شرایط ممکن را برای شرایط ثابت در بالادست جریان که با ۱ مشخص شده است، نشان می‌دهد. همان گونه که مشاهده می‌شود، آنتروپی بیشینه‌ای برای این منحنی وجود دارد. این موضوع، معنای مهمی دارد. مثلاً، اگر شرایط بالادست جریان، همچون شکل ۷-۹، در قسمت زیر منحنی باشد، آن گاه مقدار آنتالپی افزایش خواهد یافت. یادآور می‌شویم که آنتروپی، بنابر قانون دوم ترمودینامیک، باید افزایش یابد. یعنی، اگر شرایط جریان به حد متناظر با آنتروپی

بیشینه برسد، آن گاه شرایط جریان دیگر تغییر نمی‌کند. شرط آنتروپی بیشینه نشان می‌دهد که جریان در خروجی کانالی با سطح مقطع ثابت «خفه شده» است.

از ترکیب معادلهٔ $T\,ds$ (یعنی، رابطهٔ خواص $T\,ds = dh - v\,dp$) با شکل دیفرانسیلی معادلات انرژی و پیوستگی خواهیم داشت

$$\frac{ds}{dh} = \frac{۱}{T}\left(۱ - \frac{۱}{V^{۲}}\frac{dp}{d\rho}\right) \tag{۷-۴۰}$$

از تساوی این معادله با صفر، شرایط جریان خفه شده در خروجی لوله به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$V^{۲} = \frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = a^{۲} \tag{۷-۴۱}$$

یا

$$M = ۱٫۰$$

بنابراین، می‌بینیم که اثرهای اصطکاک باعث می‌شود جریان شاره به عدد ماخ واحد برای هر دو حالت فروصوتی (منحنی بالا) و فراصوتی (منحنی پایین) سوق کند.

تغییرات خاصیت را برای جریان گاز بی‌دررو یک‌بعدی در مجرایی با سطح مقطع ثابت می‌توان با استفاده از این معادلات تعیین کرد. خلاصهٔ نتیجه‌ها به صورت زیر است

خاصیت	جریان فروصوتی	جریان فراصوتی
s	افزایش	افزایش
h	کاهش	افزایش
T	کاهش	افزایش
M	افزایش	کاهش
V	افزایش	کاهش
p	کاهش	افزایش
$p_{۰}$	کاهش	افزایش
ρ	کاهش	افزایش

جریان درون مجرا را وقتی خفه‌شده می‌گویند که عدد ماخ در خروجی یک باشد و کاهش بیشتر در مخزن یا پس‌فشار (فشار محیطی که لوله تخلیه می‌شود) باعث افزایش آهنگ جریان یا تغییر خواص جریان در لوله نخواهد شد. به طور کلی، با کاهش کامل پس‌فشار یا افزایش کامل طول مجرا (یا لوله) جریان را می‌توان خفه کرد. جریان فروصوتی ($M < ۱$) هیچ گاه در درون مجرا فراصوتی نمی‌شود و فقط ممکن است به شرایط صوتی ($M = ۱$) در خروجی برسد. همین گونه، جریان فراصوتی ($M > ۱$) هرگز با عبور ملایم از $M = ۱$ نمی‌تواند فروصوتی شود و فقط امکان دارد در خروجی $M = ۱$ شود.

اما، در صورت وجود شرایط خاص، موجهای ضربه‌ای ممکن است در جریان فراصوتی در مجراها تشکیل شوند. البته امکان دارد جریان فراصوتی، اما نه به شکل ملایم پیوسته، به جریان فروصوتی تبدیل شود. اگر اصطکاک وجود نمی‌داشت، خواص و عدد ماخ جریان در سرتاسر مجرا یکنواخت می‌بود. تغییرات جریان در طول مجرا و تشکیل موجهای ضربه‌ای، ناشی از اصطکاک دیواره است.

رابطه‌های کاربردی را در جریان بی‌دررو بااصطکاک به صورت زیر می‌توان به‌دست آورد: معادلهٔ (۷-۳۵) را می‌توان به شکل دیفرانسیلی زیر

نوشت

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} + \frac{2kfM^2}{D} + \frac{kM^2}{2V^2}\frac{d}{dx}(V^2) = 0 \qquad (۴۲-۷)$$

که f ضریب اصطکاک است و به‌صورت $f = \tau_0 / \left(\frac{\rho V^2}{2}\right)$ تعریف می‌شود (که در مقایسه با ضریب اصطکاک دارسی به‌کار رفته در هیدرولیک تعریف شده در فصلهای ۳، ۴ و ۵ در ضریب ۴ تفاوت دارد). این ضریب f را، که معمولاً در جریان تراکم‌پذیر به‌کار می‌رود، ضریب اصطکاک فانینگ می‌گویند، و همان ضریب اصطکاکی است که در نظریهٔ لایهٔ مرزی استفاده می‌شود. D قطر هیدرولیکی مجراست و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D = \frac{4A}{C}$$

و عدد ماخ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{kRT} = \frac{\rho V^2}{kp}$$

معادلات دیگر (۷-۳۴) تا (۷-۳۹) را می‌توان به شکل دیفرانسیلی نوشت و از ترکیب آنها تغییرات خواص را برحسب M و مکان x به دست آورد. یکی از رابطه‌های مهم، رابطهٔ M برحسب مکان x در امتداد مجراست،

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{kM^2[1 + M^2(k-1)/2]4f}{(1 - M^2)D}dx \qquad (۴۳-۷)$$

با انتگرال‌گیری از این معادله بین عدد ماخ اولیه M_1 در $x = 0$ و مقدار M در مکانی دلخواه در امتداد مجرا، می‌توان M را به صورت تابع عدد ماخ اولیه و مکان پایین‌دست جریان به دست آورد. با انتگرال‌گیری بین M_1 در $x = 0$ و $M_2 = 1$، مقدار x متناظر با عدد ماخ واحد به دست می‌آید. این مقدار x طول بحرانی $L_{\max}$ است که خفگی در آن رخ می‌دهد. نتیجه عبارت است از

$$4\bar{f}\frac{L_{\max}}{D} = \frac{1 - M_1^2}{kM_1^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\left(\frac{(k+1)M_1^2}{2\{1 + [(k-1)/2]M_1^2\}}\right) \qquad (۴۴-۷)$$

که $\bar{f}$ ضریب اصطکاک متوسط در طول مسیر است. با استفاده از مقدارهای $4\bar{f}\frac{L_{\max}}{D}$ برحسب M، طول L لازم مجرا را برای رسیدن عدد ماخ اولیهٔ M_1 به عدد ماخ دیگر M_2 می‌توان به صورت زیر تعیین کرد

$$4\bar{f}\frac{L}{D} = \left(\frac{4\bar{f}L_{\max}}{D}\right)_{M_1} - \left(4\bar{f}\frac{L_{\max}}{D}\right)_{M_2} \qquad (۴۵-۷)$$

مقدارهای $4\bar{f}\frac{L}{D}$ را برحسب M جدول‌بندی کرده‌اند، که به عنوان ابزاری سریع در محاسبه به کار می‌رود. جدولهای مناسب را در چندین مرجع می‌توان یافت.

برای محاسبهٔ خواص، بهتر است خواص متناظر با $M = 1$ را به صورت $()^*$ مشخص کنیم. این پدیده فقط در خروجی جریان بی‌دررو مجرای با اصطکاک و تحت شرایط خفه‌شدگی رخ می‌دهد و برای مجراهای بلندتر واقعی ممکن است بیانگر مکانی انگاری باشد. نسبت خواص در هر عدد ماخ M به مقدار آن در $M = 1$ (مقدار ستاره‌دار)، همچون p/p^*، فقط به عدد ماخ بستگی دارد. بنابراین، نسبتهای خاصیت بین دو مکان موجود در لوله (مثلاً p_2/p_1) را می‌توان از نسبت زیر به دست آورد

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(p/p^*)_{M_2}}{(p/p^*)_{M_1}} \qquad (۴۶-۷)$$

نسبتهای خاصیت $()/()^*$ را به صورت جدول‌بندی‌شده در مرجعهای ۱، ۴، ۶، ۸ می‌توان یافت. رابطه‌های تحلیلی را برای این نسبتهای خواص در زیر ارائه می‌دهیم

$$\frac{p}{p^*} = \frac{۱}{M} \frac{k+۱}{۲\{۱+[(k-۱)/۲]M^۲\}} \tag{۴۷-۷}$$

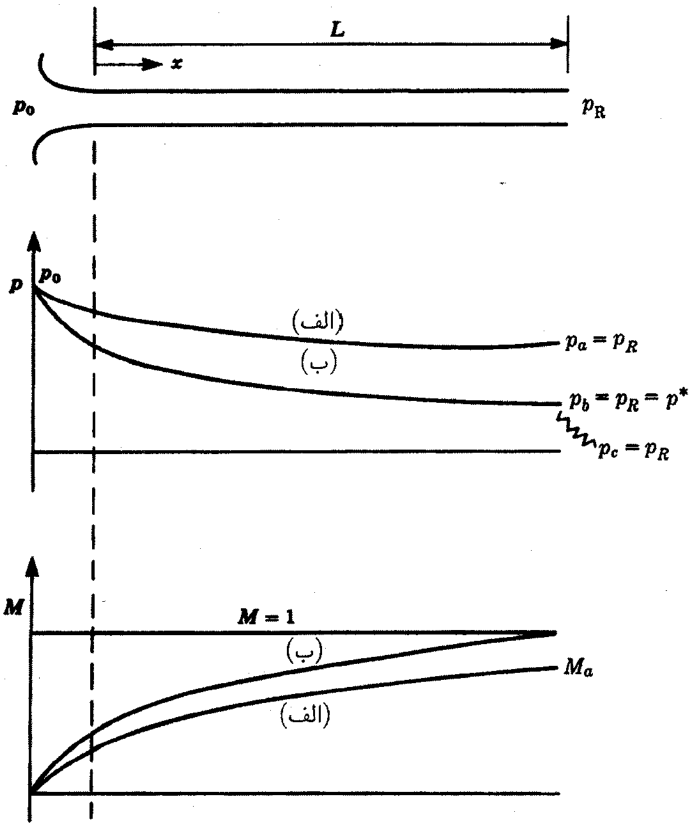
$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V}{V^*} = M \frac{k+۱}{۲\{۱+[(k-۱)/۲]M^۲\}} \tag{۴۸-۷}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+۱}{۲\{۱+[(k-۱)/۲]M^۲\}} \tag{۴۹-۷}$$

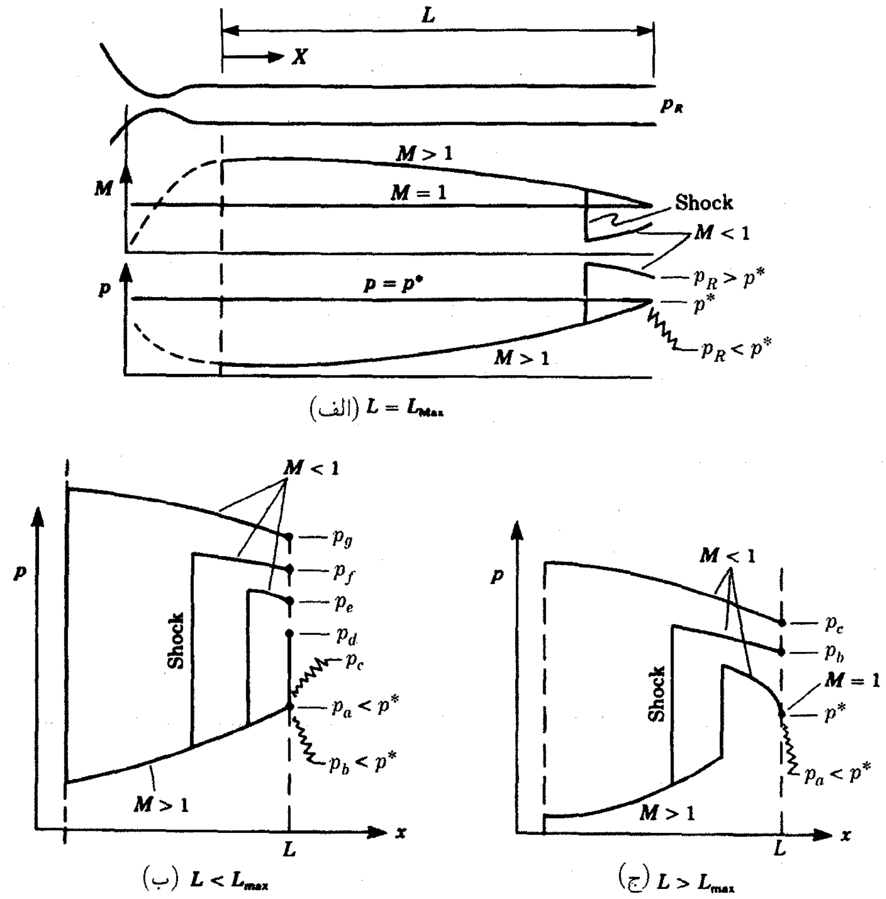
$$\frac{p_۰}{p_۰^*} = \frac{۱}{M} \left(\frac{۲\{۱+[(k-۱)/۲]M^۲\}}{k+۱}\right)^{(k+۱)/۲(k-۱)} \tag{۵۰-۷}$$

۷-۴-۱ اثرهای خفه‌شدگی

قبلاً اشاره کردیم که تحت شرایطی جریان خفه می‌شود. دو راه برای تغذیهٔ مجرا وجود دارد: یا با شیپورهٔ همگرا؛ و یا با شیپورهٔ همگرا‌ـواگرا. در تغذیهٔ شیپورهٔ همگرا، جریان باید در طول مجرا فروصوتی باقی بماند (شکل ۷-۱۰). در طول مجرا، عدد ماخ افزایش، و فشارکاهش می‌یابد. برای هر پس‌فشار مفروض، با افزایش طول مجرا عدد ماخ در خروجی نیز افزایش می‌یابد تا اینکه مقدار آن یک می‌شود و خفگی رخ می‌دهد. اگر پس‌فشار را بیشتر کاهش دهیم، فشار خروجی ثابت می‌ماند، اما انبساط خارجی در خارج از مجرا برای تطبیق با پس‌فشار رخ می‌دهد و جریان در درون مجرا بدون تغییر باقی می‌ماند. از سوی دیگر (با مراجعه به شکل ۷-۱۰) برای مجرایی کوتاه‌تر با پس‌فشاری مفروض بدون خفگی (P_a)، کاهش کافی در پس‌فشار تا P_b، سرانجام باعث خفگی مجرا در آن طول خواهد شد. افت بیشتر در پس‌فشار (P_c) به انبساطهای خارجی، بدون تغییر در درون مجرا، می‌انجامد.



شکل ۷-۱۰ مجرا فروصوتی که با شیپورهٔ همگرا تغذیه شده است. (الف) جریان فروصوتی خفه‌نشده و (ب) جریان فروصوتی خفه‌شده را نشان می‌دهد.



شکل ۷-۱۱ جریان فراصوتی با موج ضربه‌ای در مجرایی که با شیپورهٔ همگرا-واگرا تغذیه می‌شود.

اگر مجرا را با شیپورهٔ همگرا-واگرا تغذیه کنیم، بسته به پس‌فشار و طول مجرا، جریان ممکن است فروصوتی یا فراصوتی باشد و موجهای ضربه‌ای در درون مجرا متوقف شوند. اثر پس‌فشار پیچیده است و در اینجا فقط به طور ساده بیان خواهد شد. برای بحث کامل‌تر به مرجع۶ (شاپیرو) می‌توان مراجعه کرد.

برای حالت مخزن مفروض و جریان فراصوتی در مجرا، همچون شکل ۷-۱۱، عدد ماخ در گلوگاه واحد، و در ورودی مجرا یکتا ($M_۱$) است. در پایین‌دست، جریان عدد ماخ کاهش و فشار افزایش می‌یابد. برای هر طول مفروض، پس‌فشار یکتایی برای جریان ملایم باید وجود داشته باشد. با افزایش طول مجرا (با این فرض که پس‌فشار به طور پیوسته برای تأمین جریان ملایم تنظیم می‌شود) عدد ماخ، تا رسیدن به مقدار $L_{\max}$، در خروجی کاهش می‌یابد و در این حالت عدد ماخ برابر واحد خواهد شد (شکل ۷-۱۱الف). با افزایش بیشتر طول مجرا، موجی ضربه‌ای در مجرا ایجاد می‌شود. موج ضربه‌ای با افزایش طول به سوی بالادست جریان حرکت می‌کند، تا اینکه سرانجام به وسیلهٔ شیپوره بلعیده می‌شود و جریان در سرتاسر مجرا فروصوتی خواهد شد. اگر L برابر $L_{\max}$ (برای جریان فراصوتی) شود و پس‌فشار p_R از مقدار جور شدهٔ تطبیقی (p^*) کمتر شود، جریان در طول مجرا بدون تغییر باقی می‌ماند، اما موجهای انبساطی در خارج از مجرا، برای تطبیق با فشار، رخ می‌دهد. اگر پس‌فشار بیشتر از p^* شود، موج ضربه‌ای ضعیفی در خروجی مجرا تشکیل خواهد شد و، با افزایش پس‌فشار، به سوی بالادست جریان حرکت می‌کند. سرانجام، موج ضربه‌ای از میان شیپوره حرکت می‌کند و بلعیده می‌شود و جریان در سرتاسر مجرا فروصوتی خواهد شد. افزایش بیشتر در پس‌فشار جریان فروصوتی را کاهش می‌دهد.

در جریان فراصوتی ملایم برای هر مقدار $L < L_{\max}$ (شکل ۷-۱۱ب)، مقدار یکتای M در خروجی مجرا و پس‌فشار یکتای p_a ($p_a < p^*$) وجود دارد. اگر پس‌فشار کاهش یابد انبساط خارجی رخ می‌دهد، ولی جریان در مجرا بدون تغییر باقی می‌ماند. اگر پس‌فشار افزایش یابد، موجهای ضربه‌ای در خروجی مجرا ظاهر می‌شوند (p_c). با افزایش بیشتر پس‌فشار، موج ضربه‌ای وارد مجرا می‌شود (p_d) و به سوی بالادست جریان حرکت می‌کند (p_f, p_e). سرانجام، پس‌فشار به مقداری می‌رسد که موج ضربه‌ای در درون شیپوره تشکیل می‌شود (p_g). افزایش بیشتر در پس‌فشار باعث می‌شود که موج ضربه‌ایی به سوی گلوگاه شیپوره حرکت کند و با فروصوتی شدن جریان در سرتاسر مجرا، ناپدید شود. موج ضربه‌ای را که از میان گلوگاه شیپوره عبور می‌کند، اصطلاحاً بلعیده می‌گویند.

با مراجعه به شکل ۷-۱۱(ج) برای $L > L_{\max}$، اگر پس‌فشار p_a کمتر از فشار بحرانی p^* باشد، موجی ضربه‌ای در مکانی یکتا در درون مجرا تشکیل می‌شود که به $M = ۱$ در خروجی می‌انجامد. جریان پس از موج ضربه‌ای فروصوتی می‌شود. انبساط آزاد، برای تطبیق با پس‌فشار (p_a)، در خروجی مجرا رخ می‌دهد. با بالا رفتن پس‌فشار، موج ضربه‌ای در محل خود باقی می‌ماند، اما انبساط آزاد ضعیف‌تر می‌شود تا اینکه پس‌فشار درست برابر فشار یکتای (p^*) متناظر با شرط $M = ۱$ در خروجی شود. افزایش بیشتر پس‌فشار (p_b) باعث حرکت موج ضربه‌ای به سوی بالادست جریان خواهد شد، و تناسب فشار خروجی (p_b) با پس‌فشار و با مقدار مناسب عدد ماخ خروجی (که فروصوتی است) مکان موج ضربه‌ای را مشخص می‌کند. سرانجام، با افزایش بیشتر پس‌فشار (p_c)، موج ضربه‌ای در شیپوره متوقف، و با افزایش پس‌فشار بلعیده می‌شود و جریان در سرتاسر مجرا فروصوتی خواهد شد.

۷-۵ جریان بی‌اصطکاک و با سطح مقطع ثابت همراه با گرمایش و سرمایش

معادلات جریان بی‌اصطکاک، یک‌بعدی و پایا در مجرایی با سطح مقطع ثابت همراه با گرمایش و سرمایش عبارت‌اند از (q حرارت انتقال‌یافته به واحد جرم جریان است)

انرژی:

$$h_۱ + V_۱^۲/۲ + q = h + V^۲/۲$$

تکانه:

$$p_۱ - p = \rho V^۲ - \rho_۱ V_۱^۲$$

پیوستگی:

$$\rho_۱ V_۱ = \rho V$$

معادلهٔ حالت:

$$\frac{p_۱}{\rho_۱} T_۱ = p/\rho T$$

از ترکیب معادلات تکانه و پیوستگی با آنتروپی بیشینه به شکل دیفرانسیلی داریم

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = a^۲ = V^۲$$

بنابراین، برای این جریان نیز عدد ماخ در خروجی برای شرایط خفگی برابر یک است. گرمایش جریان گاز باعث افزایش آنتروپی می‌شود. بنابراین، برای هر دو جریان فروصوتی و فراصوتی، اثر گرمایش موجب گرایش عدد ماخ به سوی واحد خواهد شد.

نکتهٔ جالب در بررسی جریان خط ریلی، وجود قسمتی در این منحنی است که وقتی به گاز گرما داده می شود، دما کاهش می‌یابد.

۷-۶ جریان تکدما با اصطکاک

جریانهایی وجود دارند که تقریباً تکدما هستند (مثلاً، جریان گاز طبیعی در طول لوله‌های بلند). حال، رابطه‌ای برای بیان افت فشار در این جریان به دست می‌آوریم.

حجم معیارگازی را برای این جریان مطابق شکل ۷-۱۲ در نظر می‌گیریم. معادلهٔ تکانه یک‌بعدی پایا برای این حجم معیار عبارت است از

$$\sum F_x = \dot{m}(V + dV - V) \qquad [p - (p + dp)]\left(\frac{۱}{۴}\pi D^۲\right) - \tau_\circ \pi D\, dx = \left(\frac{۱}{۴}\pi D^۲\right)\rho V\, dV$$

از ترکیب رابطهٔ ضریب اصطکاک زیر

$$f = \tau_\circ / \left(\frac{۱}{۲}\rho V^۲\right)$$

با معادلهٔ تکانه، پس از ساده‌سازی، داریم

$$\frac{v}{V^۲}dp + \frac{۲f}{D}dx + \frac{dV}{V} = \circ$$

اگر معادلهٔ پیوستگی را با معادلهٔ گازکامل در دمای ثابت ترکیب کنیم، داریم

$$\frac{v}{V^۲} = \frac{v_۱}{V_۱^۲ p_۱}p$$

از ترکیب این معادله با معادلهٔ تکانه خواهیم داشت

$$\frac{v_۱}{V_۱^۲ p_۱}d\,dp + \frac{۲f}{D}dx + \frac{dV}{V} = \circ$$

فرض می‌کنیم که ضریب اصطکاک فقط به عدد رینولدز (برای هر لوله مفروض) بستگی دارد. در این صورت عدد رینولدز برای جریان تکدما ثابت است و ضریب اصطکاک نیز ثابت خواهد بود. (توجه کنید که $\rho V = \text{const.}$ و $\mu = f(T) = \text{const.}$).

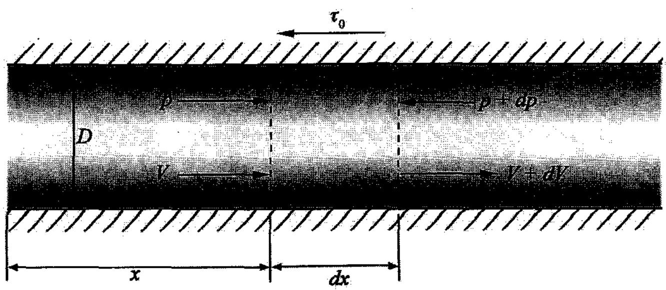
اکنون، با انتگرال‌گیری از معادلهٔ تکانه، داریم

$$\left(\frac{p}{p_۱}\right)^۲ = ۱ - kM_۱^۲\left(۲\ln\frac{V}{V_۱} + ۴f\frac{L}{D}\right) \tag{۷-۵۱}$$

که L طول بین ایستگاههاست، که با شاخص پایین «۱» و کمیتهای بدون شاخص پایین مشخص شده‌اند. معادلهٔ (۷-۵۱) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$f\frac{L}{D} = \frac{۱}{۴kM_۱^۲}\left[۱ - \left(\frac{p}{p_۱}\right)^۲\right] + \frac{۱}{۲}\ln\frac{p}{p_۱} \tag{۷-۵۲}$$

بنابراین، فشار تابع غیرخطی طول است، در حالی که در جریان تراکم‌ناپذیر فشار تابع خطی طول است.



شکل ۷-۱۲ جزء حجم برای جریان تکدما در مجرایی با سطح مقطع ثابت.

با ترکیب معادلات تکانه و پیوستگی می‌توان نشان داد که عدد ماخ در خروجی لوله برای جریان خفه شده $M^* = \frac{۱}{\sqrt{k}}$ است. فشار متناظر عبارت است از $\frac{p^*}{p_۱} = M_۱\sqrt{k}$.

۷-۷ جریان تراکم‌ناپذیر برای عددهای ماخ پایین

با شروع از معادلهٔ انرژی، داریم

$$\frac{۱}{۲}(V_۱^۲ - V^۲) = h - h_۱$$

و با نوشتن آن برحسب گاز کامل برای فرایند تک‌آنتروپی، خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲}(V_۱^۲ - V^۲) = \frac{kRT}{k-۱}\left[۱ - \left(\frac{p_۱}{p}\right)^{(k-۱)/k}\right]$$

با گراییدن $V_۱$ به سوی صفر، رابطهٔ فشار سکون را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\frac{p_۰}{p} = \left[۱ + \frac{۱}{۲}(k-۱)M^۲\right]^{k/(k-۱)}$$

اگر این معادله را برحسب بسط دو جمله‌ای برای عدد ماخ بنویسیم، داریم

$$p_۰ = p + \frac{۱}{۲}\rho V^۲\left[۱ + \frac{۱}{۴}M^۲ + \frac{۱}{۲۴}(۲-k)M^۴ + \ldots\right] \qquad (۵۳\text{-}۷)$$

این معادله برای عددهای ماخ پایین به صورت زیر در می‌آید

$$p_۰ = p + \frac{۱}{۲}\rho V^۲ \qquad (۵۴\text{-}۷)$$

که همان رابطهٔ فشار سکون برای جریان تراکم‌ناپذیر است.

اهمیت این نتیجه این است که جریان تک‌آنتروپی گازها را حول جسمها و درون مجراها، مادامی که عدد ماخ کوچک باشد (مثلاً، برای $M < ۰٫۳$)، می‌توان تراکم‌ناپذیر تلقی کرد و همان‌گونه که دیدیم ساده‌سازی عمده‌ای را در مدل برای چگالی ثابت می‌توان انجام داد.

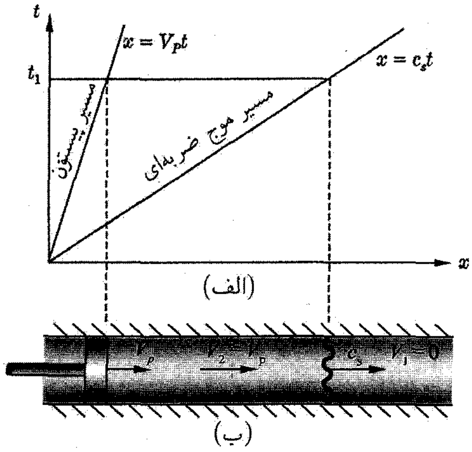
۸-۷ لولهٔ موج ضربه‌ای

لولهٔ موج ضربه‌ای وسیله‌ای است که برای ایجاد گازی با سرعت زیاد و دمای بالا در بازهٔ زمانی کوتاه به کار می‌رود. این لوله با دیافراگمی که آن را به دو قسمت پرفشار و کم‌فشار تقسیم می کند، آب‌بندی شده است. این دیافراگم ناگهان می‌ترکد و موجی ضربه‌ای در گاز ساکن طرف کم‌فشار، و موجی انبساطی در گاز ساکن طرف پر فشار انتشار می‌یابد. گاز اختلال‌یافته (بین موجهای ضربه‌ای و انبساطی) با سرعت خیلی زیاد، و احتمالاً فراصوتی، (نسبت به گاز اختلال نیافته و لوله)، حرکت می‌کند. لوله‌های موج ضربه‌ای به عنوان تونلهای باد کوتاه‌مدت نظیر تونلهای تخلیه به کار می‌روند.

۷-۸-۱ موج ضربه‌ای پیستونی

قبل از بررسی لولهٔ موج ضربه‌ای، انواع موجهای تولید شده در لوله را مطالعه می‌کنیم. موج ضربه‌ای تولید شده در لوله‌ای را با حرکت دادن پیستون، همچون شکل ۷-۱۳ در نظر بگیرید. این موج ضربه‌ای از نوع موج ضربه‌ای قائمی است که شرایط جهش آن را قبلاً محاسبه کردیم. سرعت گاز بین پیستون و موج ضربه‌ای برابر سرعت پیستون است.

منحنی x-t پیشروی یا حرکت پیستون و موج ضربه‌ای را نشان می‌دهد. شیب خطها عکس تندیهاست.



شکل ۷-۱۳ موج ضربه‌ای تولید شده با حرکت پیستون. (الف) منحنی x-t، (ب) لوله در زمان t_1. V سرعت مطلق گاز.

۷-۸-۲ موجهای انبساطی مرکزی

اگر پیستون بالا را، به جای راندن به درون لوله، از لوله بیرون بکشیم، موجی انبساطی شکل می‌گیرد و به خارج از پیستون انتشار می‌یابد. این موج انبساطی، تک‌آنتروپی است.

بیرون کشیدن ناگهانی پیستون تابع پله‌ای متغیری در سرعت ذرات (ذرات چسبیده به پیستون که با آن حرکت می‌کنند) و فشار به وجود می‌آورد. این تابع پله‌ای، با شروع به انتشار موج، تخت می‌شود؛ و اختلالها به طور موضعی در درون موج با سرعت صوت انتشار می‌یابند. چون فشار (و دما) در میان موج تغییر می‌کنند (به صورت متغیرهای پله‌ای) سرعت موضعی انتشار اختلال نیز در میان موج تغییر خواهد کرد. درکنارهٔ موج مجاورگاز اختلال‌نیافته (ناحیهٔ ۴) دما و سرعت صوت دارای بیشترین مقدار هستند. در طرف مقابل (ناحیهٔ ۳) دما و بنابراین سرعت صوت دارای کمترین مقدارند. در نتیجه، همچون شکل ۷-۱۴، موج انبساطی در حین انتشار منبسط می‌شود یا به صورت «چتری» در می‌آید. نمودار $x - t$ چتری متشکل از خطهای سرعت صوتی ثابت است که پیشروی موج را نشان می‌دهد. این خطها را خطهای مشخصه می‌گویند، که مسیر اختلالهای موضعی تک‌آنتروپی را دنبال می‌کنند. روشن است که سرعت مطلق اختلالهای حاصل‌جمع سرعت صوتی موضعی و سرعت مطلق موضعی گاز است. مشخصهٔ پایانی در طرف راست (ناحیهٔ ۴) شیبی برابر $\frac{dx}{dt} = a_4$ و مشخصهٔ پایانی در طرف چپ شیبی برابر $\frac{dx}{dt} = a_3 + V_3$ دارد. V_3 را در جهت راست مثبت تعریف می‌کنند و در اینجا منفی است (زیرا V_3 باید برابر $-V_P$ باشد). بنابراین dx/dt ممکن است مثبت یا منفی، بسته به اینکه به ترتیب $a_3 > V_3$ یا $a_3 < V_3$، باشد.

اکنون، صریحاً می‌توان a_3 و ساختار چتری را به صورت زیر محاسبه کرد. سرعت صوتی موضعی چتری را می‌توان برحسب a_4 به صورت زیر نوشت (با استفاده از رابطه‌های تک‌آنتروپی)

$$a = a_4 \left(\frac{\rho}{\rho_4}\right)^{(k-1)/2}$$

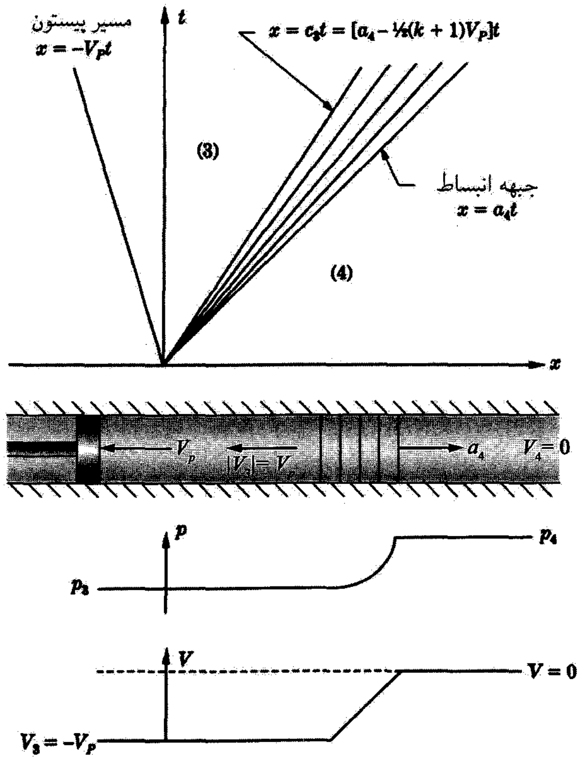
و سرعت ذره در موج عبارت است از

$$dV = a\frac{d\rho}{\rho}$$

که پس از انتگرال‌گیری، خواهیم داشت

$$a = a_4 + \frac{1}{2}(k-1)V$$

سرعت مطلق موج c (قسمتی از موج که پشت جبهه است) برابر جمع سرعت صوتی موضعی و سرعت شاره است



شکل ۷-۱۴ چتری انبساط مرکزی ناشی از بیرون کشیدن پیستون از لوله.

$$c = a + V = a_۴ + \frac{۱}{۲}(k+۱)V$$

اکنون، V منفی است، بنابراین c در داخل موج از ناحیهٔ ۴ به ۳ کاهش می‌یابد. شیب مشخصهٔ پایانی موجود در طرف چپ عبارت است از

$$c_۳ = a_۴ + \frac{۱}{۲}(k+۱)V_۳ = a_۴ - \frac{۱}{۲}(k+۱)V_P \tag{۷-۵۵}$$

(که ممکن است مثبت یا منفی، و شیب آن به راست یا چپ باشد) از رابطه‌های تک‌آنتروپی، تغییر چگالی و فشار را در طول چتری به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\frac{\rho_۳}{\rho_۴} = [۱ - \frac{۱}{۲}(k-۱)\frac{V_P}{a_۴})]^{۲/(k-۱)} \tag{۷-۵۶}$$

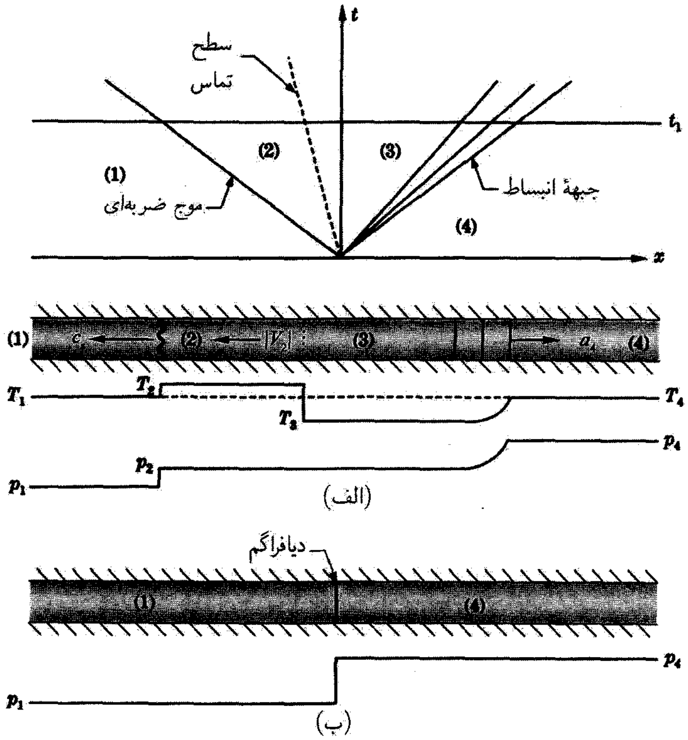
$$\frac{p_۳}{p_۴} = [۱ - \frac{۱}{۲}(k-۱)\left(\frac{V_P}{a_۴}\right)]^{۲k/(k-۱)} \tag{۷-۵۷}$$

که V_P عددی مثبت است.

۷-۸-۳ جریان لولهٔ موج ضربه‌ای

اکنون، موج ضربه‌ای ناشی از بیرون کشیدن پیستون و چتری انبساط مرکزی را برای توصیف لولهٔ موج ضربه‌ای ترکیب می‌کنیم. با مراجعه به شکل ۷-۱۵، وقتی دیافراگم می‌ترکد، موجهای ضربه‌ای و انبساطی تولید می‌شوند. سطح تماسی تشکیل می‌شود که در عرض آن فشار و سرعت ثابت هستند، اما دما و چگالی و بنابراین عدد ماخ متفاوت‌اند. این دو شرط زیر

$$V_۲ = V_۳, \qquad p_۲ = p_۳$$



شکل ۷-۱۵ لولهٔ موج ضربه‌ای (الف) در زمان $t = t_۱$، (ب) در $t = ۰$.

برای تعیین شرایط در ناحیه‌های ۲ و ۳، و بنابراین جهشهای موجود در عرض موج ضربه‌ای کافی هستند. ($V_۲ = V_۳$ عددی منفی است، زیرا گاز به طرف چپ جریان می‌یابد.) برحسب شرایط معلوم در ناحیه‌های ۱ و ۴، مقدار $V_۳$ را برحسب $p_۳$ و $p_۴$ از معادلهٔ (۷-۵۷)، و $V_۲$ را برحسب $p_۱$ و $p_۲$ از رابطه‌های موج ضربه‌ای قائم به دست می‌آوریم. با قرار دادن $V_۲ = V_۳$ (و چون $p_۲ = p_۳$) می‌توان رابطه‌ای برای $p_۲$ به دست آورد. نتیجه عبارت است از

$$\frac{p_۴}{p_۱} = \frac{p_۳}{p_۱}\left[۱ - \frac{(k-۱)\left(\frac{a_۱}{a_۴}\right)\left(\frac{p_۲}{p_۱}-۱\right)}{\sqrt{۲k}\sqrt{۲k+(k+۱)\left(\frac{p_۲}{p_۱}-۱\right)}}\right]^{-۲k/(k-۱)} \qquad (۷\text{-}۵۸)$$

که نسبت $p_۲/p_۱$ را به طور ضمنی به دست می‌دهد. با معلوم شدن $p_۲$ تمام پارامترهای دیگر مسئله را به آسانی می‌توان یافت.

مراجع

1. John, J. E. A., *Gas Dynamics*, 2nd ed., Allyn and Bacon, 1984.
2. Liepmann, H. W., and Roshko, A., *Elements of Gasdynamics*, John Wiley, 1957.
3. Owczarek, J. A., *Fundamentals of Gas Dynamics*, International Textbook, 1964.
4. Saad, M. A., *Compressible Fluid Flow*, Prentice-Hall, 1985.
5. Shames, I. H., *Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, 1962.
6. Shapiro, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Ronald Press, 1953.
7. Thompson, P. A., *Compressible-Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, 1972.
8. Zucrow, M. J., and Hoffman, J. D., *Gas Dynamics*, Vol. 1, John Wiley, 1976.

مسائل حل شده

۱-۷ هواپیمایی در ارتفاع ۱۰٫۰۰۰ فوت پرواز می‌کند. دمای هوا در آنجا ۲۰°F و فشار ۲۱ اینچ جیوه است. در نقطهٔ خاصی بر روی بال (شکل ۷-۱۶) فشار استاتیکی ۹۸۰lb/ft^۲ و عدد ماخ موضعی ۰٫۹۵ است. با فرض جریان بی‌اصطکاک بی‌دررو، سرعت هواپیما را نسبت به هوای اختلال نیافته به دست آورید؟

همچون شکل، هواپیما را ساکن، و هوا را متحرک در نظر بگیرید. برای جریان تک‌آنتروپی گاز کامل می‌توان نوشت

$$T_۲ = T_۱ \left(\frac{p_۲}{p_۱}\right)^{(k-۱)/k} = (۴۶۰ + ۲۰) \left[\frac{۹۸۰}{۲۱(۰٫۴۹۱)(۱۴۴)}\right]^{۰٫۲۸۶} = ۴۲۷°\mathrm{R}$$

و

$$V_۲ = M_۲ a_۲ = M_۲\sqrt{kRT_۲} = ۰٫۹۵\sqrt{۱٫۴(۳۲٫۲)(۵۳٫۳)(۴۲۷)} = ۹۵۵ \text{ ft/s}$$

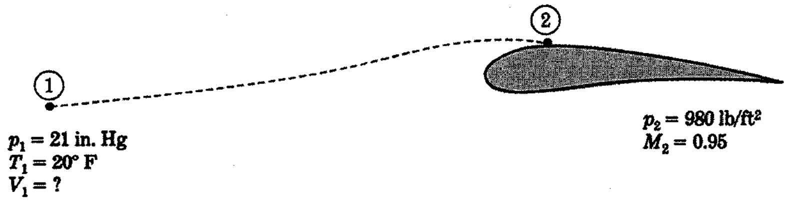
از معادلهٔ انرژی، داریم

$$\frac{V_۱^۲}{۲} + h_۱ = \frac{V_۲^۲}{۲} + h_۲$$

و

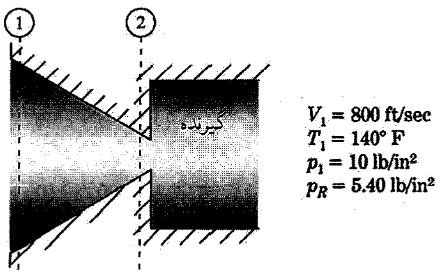
$$V_۱^۲ = V_۲^۲ + ۲c_p(T_۲ - T_۱) = (۹۵۵)^۲ + ۲(۳۲٫۲)(۷۷۸)(۰٫۲۴)(۴۲۷ - ۴۸۰)$$
$$= ۲۷۵۰۰۰\text{ft}^۲/\text{s}$$

بنابراین $V_۱ = ۵۲۴\text{ft/s}$.



شکل ۷-۱۶

۲-۷ هوا از درون مجرایی همگرا، همچون شکل ۷-۱۷، با شرایط مشخص شده جریان می‌یابد. فشار، دما، سرعت و عدد ماخ را در گلوگاه ۲ تعیین کنید.



شکل ۷-۱۷

جریان را بی‌در رو و بی‌اصطکاک فرض کنید. سپس شرایط جریان بالا را در مکانی که سرعت ناچیز است، تعیین کنید. از معادلهٔ انرژی، داریم

$$T_\circ = T_۱ + \frac{V_۱^۲}{۲c_p} = (۱۴۰ + ۴۶۰) + \frac{(۸۰۰)^۲}{۲(۳۲٫۲)(۷۷۸)(۰٫۲۴)} = ۶۵۳°\mathrm{R}$$

و

$$p_\circ = p_۱\left(\frac{T_\circ}{T_۱}\right)^{k/(k-۱)} = ۱۰[۶۵۳/(۱۴۰ + ۴۶۰)]^{۳٫۵} = ۱۳٫۵۲\ \mathrm{lb/in.}^۲$$

بنابراین

$$\frac{p_R}{p_\circ} = \frac{۵٫۴۰}{۱۳٫۵۲} = ۰٫۴۰۷$$

که $T_\circ$ و $p_\circ$ به ترتیب دما و فشار سکون هستند.

نسبت فشار بحرانی برابر است با

$$\frac{p_c}{p_\circ} = \left(\frac{۲}{(k+۱)}\right)^{k/(k-۱)} = ۰٫۵۲۸$$

بنابراین، فشار مخزن کمتر از فشار بحرانی است و شیپوره در شرایط خفه‌شدگی عمل می‌کند. از این رو، $p_۲ = p_c$ که p_c فشار بحرانی و برابر $۰٫۵۲۸\ p_\circ$ است.

بنابراین خواهیم داشت

$$p_۲ = ۰٫۵۲۸(۱۳٫۵۲) = ۷٫۱۴\ \mathrm{lb/in.}^۲$$

$$T_۲ = T_۱\left(\frac{p_۲}{p_۱}\right)^{(k-۱)/k} = (۱۴۰ + ۴۶۰)(۷٫۱۴/۱۰)^{۰٫۲۸۶} = ۵۴۶°\mathrm{R}$$

$$M_۲ = ۱٫۰ \quad \text{جریان خفه‌شده}$$

$$V_۲ = a_۲ = \sqrt{kRT_۲} = \sqrt{۱٫۴(۳۲٫۲)(۵۳٫۳)(۵۴۶)} = ۱۱۴۰\,\mathrm{ft/s}$$

۷-۳ فشار و دمای هوای ورودی به شیپوره‌ای همگرا-واگرا عبارت‌اند از $۱۴٫۷$ psi و $۷۰°\mathrm{F}$. در مکانی از بخش واگرای شیپوره فشار $۱٫۳۷$ psi است. مساحت مقطع را در این مکان تعیین کنید. سطح مقطع در گلوگاه یک اینچ مربع است.

فرض می‌کنیم که جریان بی‌دررو و بی‌اصطکاک است. یادآور می‌شویم که فشار در بخش واگرای شیپوره کمتر از فشار بحرانی است. بنابراین، شیپوره در شرایط خفه‌شدگی عمل می‌کند و فشار در گلوگاه p_t است.

$$p_t = p_c = ۱۴٫۷\left[\frac{۲}{(k+۱)}\right]^{k/(k-۱)} = ۱۴٫۷(۰٫۵۲۸) = ۷٫۷۹\ \mathrm{lb/in.}^۲$$

$$T_t = T_\circ\left(\frac{p_t}{p_\circ}\right)^{(k-۱)/k} = (۶۴۰ + ۷۰)\left(\frac{۷٫۷۹}{۱۴٫۷}\right)^{۰٫۲۸۶} = ۴۴۲°\mathrm{R}$$

بنابراین

$$T_۳ = T_\circ\left(\frac{p_۳}{p_\circ}\right)^{(k-۱)/k} = (۴۶۰ + ۷۰)(۱٫۳۷/۱۴٫۷)^{۰٫۲۸۶} = ۲۶۹°\mathrm{R}$$

و

$$V_t = \sqrt{kRT_t} = \sqrt{۱٫۴(۳۲٫۲)(۵۳٫۳)(۴۴۲)} = ۱۰۳۰\,\mathrm{ft/s}$$

معادلهٔ انرژی عبارت است از

$$\frac{V_۳^۲}{۲} + h_۳ = h_۰$$

به‌گونه‌ای که

$$V_۳ = \sqrt{۲c_p(T_۰ - T_۳)} = \sqrt{۲(۳۲٫۲)(۷۷۸)(۰٫۲۴)(۵۳۰ - ۲۶۹)} = ۱۷۷۰\,\mathrm{ft/s}$$

معادلهٔ پیوستگی عبارت است از

$$\rho_t A_t V_t = \rho_۳ A_۳ V_۳$$

و بنابراین، داریم

$$A_۳ = A_t \frac{\rho_t}{\rho_۳}\frac{V_t}{V_۳} = A_t \frac{p_t}{p_۳}\frac{T_۳}{T_۱}\frac{V_t}{V_۳} = ۱٫۰\,\frac{۷٫۷۹}{۱٫۳۷}\,\frac{۲۶۹}{۴۴۲}\,\frac{۱۰۳۰}{۱۷۷۰} = ۲٫۰۰\,\mathrm{in.}^۲$$

۷-۴ هوا از درون مجرای افقی عایق‌بندی شده‌ای، با قطر ثابت، همچون شکل ۷-۱۸، جریان دارد. شرایط ورودی عبارت‌اند از $p_۱ = ۱۰۰\,\mathrm{lb/in.}^۲$، $T_۱ = ۱۰۰۰°\mathrm{F}$ و $V_۱ = ۵۰۰\,\mathrm{ft/s}$. قطر لوله ۶ اینچ و جریان ”خفه‌شده“ است. نیروی خالص شارهٔ وارد بر لوله را تعیین کنید.

معادلهٔ تکانهٔ حجم معیار را می‌توان برای حجم معیار شارهٔ محصور بین ورودی و خروجی به کار برد.

$$\sum F_x = \dot{m}(V_۲ - V_۱)$$

که

$$(p_۱ - p_۲)\left(\frac{\pi D^۲}{۴}\right) - F_{\text{برشی}} = \rho_۱ A_۱ V_۱ (V_۲ - V_۱)$$

اکنون باید شرایط را در خروجی تعیین کنیم. داریم

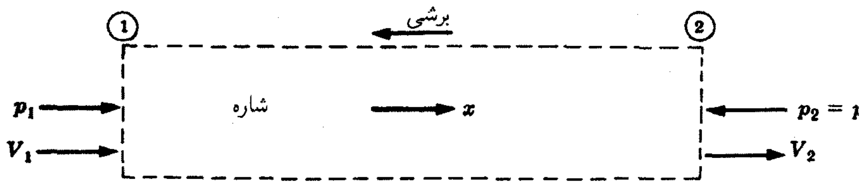
$$M_۲ = M^* = ۱٫۰ \qquad (\text{جریان خفه شده})$$

به گونه‌ای که

$$V_۲ = \sqrt{kRT_۲}$$

از معادلهٔ انرژی، داریم

$$V_۲^۲ = V_۱^۲ + ۲c_p(T_۱ - T_۲) = V_۱^۲ + ۲c_p\left(T_۱ - \frac{V_۲^۲}{kR}\right)$$



شکل ۷-۱۸

آن‌گاه

$$V_۲^۲ = \frac{V_۱^۲ + ۲c_pT_۱}{۱ + ۲c_p/kR} = \frac{V_۱^۲ + ۲c_pT_۱}{۱ + ۲/(k-۱)}$$

$$V_۲ = \left[\frac{(۵۰۰)^۲ + ۲(۳۲٫۲)(۷۷۸)(۰٫۲۴)(۴۶۰ + ۱۰۰)}{۱ + ۲/(۱٫۴ - ۱)}\right]^{۱/۲} = ۱۰۳۰ \text{ft/s}$$

دما در خروجی برابر است با

$$T_۲ = \frac{V_۲^۲}{kR} = \frac{(۱۰۳۰)^۲}{۱٫۴(۳۲٫۲)(۵۳٫۳)} = ۴۴۲°\text{R}$$

از معادلهٔ پیوستگی، داریم

$$\rho_۲V_۲ = \rho_۱V_۱$$

از این‌رو

$$(p_۲/T_۲)V_۲ = \left(\frac{p_۱}{T_۱}\right)V_۱$$

و

$$p_۲ = p_۱\frac{T_۲V_۱}{T_۱V_۲} = ۱۰۰\left(\frac{۴۴۲}{۴۶۰ + ۱۰۰}\right)\left(\frac{۵۰۰}{۱۰۳۰}\right) = ۳۸٫۲ \text{ lb/in.}^۲$$

سپس

$$(p_۱ - p_۲)\left(\frac{\pi D^۲}{۴}\right) = (۱۰۰ - ۳۸٫۲)\left(\frac{۳۶\pi}{۴}\right) = ۱۷۵۰ \text{ lb}_\text{f}$$

و

$$\rho_۱A_۱V_۱(V_۲ - V_۱) = \frac{۱۰۰}{۵۳٫۳(۳۲٫۲)(۴۶۰ + ۱۰۰)}\left(\frac{۳۶\pi}{۴}\right)(۵۰۰)(۱۰۳۰ - ۵۰۰) = ۷۸۰ \text{ lb}_\text{f}$$

بنابراین، نیروی لولهٔ وارد بر شاره عبارت است از

$$F_{\text{برشی}} = ۱۷۵۰ - ۷۸۰ = ۹۷۰ \text{lb}_\text{f}$$

و جهت مطابق شکل ۷-۱۸ است.

۷-۵ ثابت کنید که در شارهٔ تراکم‌پذیر در جریان تکدما و بدون کار خارجی رابطهٔ زیر صحیح است.

$$\frac{dM^۲}{M^۲} = ۲\frac{dV}{V}$$

از تعریف عدد ماخ داریم $M^۲ = V^۲/a^۲$. اگر فرض کنیم که شاره از معادلهٔ حالت گازهای کامل پیروی می‌کند، آن‌گاه $a = \sqrt{kRT}$. بنابراین، برای جریان تکدما a ثابت است. با گرفتن لگاریتم از طرفین معادلهٔ عدد ماخ، داریم

$$\ln M^۲ = \ln V^۲ - \ln a^۲$$

یا

$$\ln M^۲ = ۲\ln V - \ln a^۲$$

با دیفرانسیل‌گیری، خواهیم داشت

$$\frac{dM^۲}{M^۲} = ۲\frac{dV}{V}$$

۷-۶ ثابت کنید که برای گاز کامل جاری در مجرایی با سطح مقطع ثابت و در شرایط دمای ثابت، داریم

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V} = -\frac{۱}{۲}\frac{dM^۲}{M^۲}$$

با فرض جریان یک‌بعدی و پایا، معادلهٔ پیوستگی به صورت $\rho VA = \text{const.}$ است و چون سطح مقطع ثابت است، داریم. $\rho V = \text{const.}$ با استفاده از معادلهٔ حالت گاز کامل، چگالی را می‌توان حذف کرد و در نتیجه خواهیم داشت $pV = \text{const.}$ با دیفرانسیل‌گیری رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$p\,dV + V\,dp = ۰$$

و پس از تقسیم بر pV، داریم

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V}$$

با استفاده از نتیجه‌های مسئلهٔ ۷-۵، خواهیم داشت

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dM^۲}{M^۲}$$

۷-۷ نشان دهید که در جریان بی‌درروی گاز کامل، داریم

$$\frac{T}{T_۰} = ۱ - \frac{۱}{۲}(k-۱)\left(\frac{V}{a_۰}\right)^۲$$

که $T_۰$ دمای حالت سکون شاره و $a_۰$ سرعت صوت در شرایط سکون ($a_۰ = \sqrt{kRT_۰}$) است.

از معادلهٔ انرژی برای جریان پایای یک‌بعدی برای کار صفر و جریان بی‌دررو داریم

$$h - h_۰ = -\frac{V^۲}{۲}$$

برای گاز کامل با c_p ثابت، داریم

$$c_p(T - T_۰) = -\frac{V^۲}{۲}$$

از تقسیم این رابطه بر $T_۰$ و c_p، خواهیم داشت

$$\frac{T}{T_۰} = ۱ - \frac{V^۲}{۲c_p T_۰}$$

اما $c_p = Rk/(k-۱)$ و $T_۰ = a_۰^۲/Rk$. با نشاندن آنها در معادلهٔ بالا، داریم

$$\frac{T}{T_۰} = ۱ - \frac{۱}{۲}(k-۱)\left(\frac{V}{a_۰}\right)^۲$$

۸-۷ هوا در شیپورهٔ همگرا-واگرایی با نسبت مساحت خروجی $A^*/A_e = ۰٫۲۳۶۳$ جریان دارد، که A_e مساحت خروجی شیپوره و A^* مساحت گلوگاه است. اگر موجی ضربه‌ای در محلی که $A^*/A_e = ۰٫۵۹۲۶$ است، رخ دهد، پس‌فشار، عدد ماخ خروجی M_e، و خواص مهم جریان را در بالادست و پایین‌دست موج ضربه‌ای برحسب فشار منبع $p_۰$ به دست آورید.

نسبت A^*/A در عرض موج ضربه‌ای تغییر می‌کند، زیرا جریان تک‌آنتروپی نیست. هر چند A در عرض موج ضربه‌ای تغییر نمی‌کند، A^* تغییر می‌کند، زیرا حالتهای گاز دارای فشارهای سکون متفاوت در عرض موج ضربه‌ای هستند. اگر موج ضربه‌ای وجود نداشته باشد، با استفاده از جدول تک‌آنتروپی عدد ماخ را در خروجی برابر ۳ به‌دست می‌آوریم. در ناحیهٔ ۱، درست در بالادست موج ضربه‌ای که $A^*/A = ۰٫۵۹۲۶$، مقدار $M_۱ = ۲$ به دست می‌آید.

با استفاده از جدولهای موج ضربه‌ای برای $M_۱ = ۲$، در پایین‌دست موج ضربه‌ای داریم $M_۲ = ۰٫۵۷۷۳$. وانگهی، با استفاده از جدولهای تک‌آنتروپی، خواهیم داشت

$$\frac{p_۱}{p_{۰۱}}(M_۱ = ۲) = ۰٫۱۲۲۸$$

از جدولهای موج ضربه‌ای نتیجه می‌شود

$$\frac{p_۲}{p_۱} = ۴٫۵ \qquad \text{و} \qquad \frac{p_{۰۲}}{p_{۰۱}} = ۰٫۷۲۰۹$$

به گونه‌ای که

$$p_۲ = ۴٫۵p_۱ = ۴٫۵ \times ۱۲۷۸p_{۰۱} = ۰٫۵۷۵۱p_{۰۱}$$

جریان پایین‌دست موج ضربه‌ای تک‌آنتروپی است که از عدد ماخ $M_۲ = ۰٫۵۷۷۳$ و فشار $p_۲ = ۰٫۵۷۵۷۱p_{۰۱}$ تا مقدارهای خروجی ادامه می‌یابد.

اکنون سطح واقعی خروجی A_e را برحسب سطح واقعی گلوگاه $A_۱^*$ می‌دانیم. در عرض موج ضربه‌ای، داریم $A_۱ = A_۲ = A_۱^*/۰٫۵۹۲۶$.

با استفاده از جدولهای تک‌آنتروپی در می‌یابیم که برای $M_۲ = ۰٫۵۷۷۳$، که $A_۲^*/A_۲ = ۰٫۸۲$. در واقع، می‌خواهیم نسبت $A_۲^*/A_e$ را برای یافتن مقدار واقعی M_e به دست آوریم.

می‌توان نوشت

$$\frac{A_۲^*}{A_e} = \frac{A_۱^*}{A_e} \cdot \frac{A_۱}{A_۱^*} \cdot \frac{A_۲^*}{A_۲} = (۰٫۲۳۶۲)\left(\frac{۱}{۰٫۵۹۲۶}\right)(۰٫۸۲) = ۰٫۳۲۷$$

به کمک جدولهای تک‌آنتروپی نسبت A^*/A_e متناظر با $M_e = ۰٫۲$ است. از این جدولها نسبت $p_e/p_{۰۲} = ۰٫۹۷۳$ به دست می‌آید. در نتیجه

$$\frac{p_e}{p_{۰۱}} = \left(\frac{p_e}{p_{۰۲}}\right)\left(\frac{p_{۰۲}}{p_{۰۱}}\right) = ۰٫۹۷۳ \times ۰٫۷۲۰۹ = ۰٫۷۰$$

بنابراین اگر فشار معکوس را برابر $۰٫۷۰p_{۰۱}$ قرار دهیم، یا موج ضربه‌ای در محل مشخص شده رخ خواهد داد و عدد ماخ خروجی برابر $M_e = ۰٫۲۰$ خواهد بود.

۹-۷ در لوله‌ای بلند و اصطکاک‌دار که توسط شیپوره‌ای همگرا به مخزنی با فشار و دمای سکون ۳۰۰psia و ۵۲۰°R متصل است، هوا به طور بی‌دررو جریان می‌یابد. اگر قطر لوله یک اینچ، ضریب اصطکاک میانگین ۰٫۰۰۲ و پس‌فشار ۱۰۰psia باشد $L_{\max}$ را به دست آورید. آهنگ جریان در این شرایط، اگر طول لوله $L_{\max}$ باشد، چقدر است؟

برای حل معادله از روش سعی و خطا استفاده می‌کنیم. فشار و عدد ماخ در گلوگاه (ایستگاه ۱ یا مقطع ورودی به مجرا) نامعلوم‌اند. روش محاسبه به شرح زیر است: مقداری برای $M_۱$ فرض می‌کنیم و مقدار $p_۱$ متناظر آن را از جدولهای تک‌آنتروپی (برای جریان موجود در شیپوره) به‌دست می‌آوریم. با استفاده از مقدار $M_۱$، $L_{\max}$ را از مقدار $۴\bar{f}(L_{\max}/D)$ از طریق جدولهای جریان فانو به دست می‌آوریم؛

نسبت $p_۱/p^*$ نیز از این جدولها به دست می‌آید (که فقط به $M_۱$ بستگی دارد). p^* دقیقاً فشار خروجی ۱۰۰pisa است. البته، عدد ماخ خروجی برابر واحد است. سپس فشار $p_۱$ در ورودی مجرا را، که از جدولهای فانو به دست آمده است، با مقدار $p_۱$ به دست آمده از جریان تک‌آنتروپی شیپوره مقایسه می‌کنیم. مقدار صحیح $M_۱$ را از تساوی مقدارهای $p_۱$ به دست آمده از این دو روش به دست می‌آوریم.

پس از چند بار تکرار، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود

$$M_۱ = ۰٫۴$$

$$\frac{۴\bar{f}L_{\max}}{D} = ۲٫۳۱$$

و با دانستن $\bar{f} = ۰٫۰۰۲$ و $D = ۱\text{in}$، خواهیم داشت

$$L_{\max} = ۲۸۹ \text{ in.}$$

با استفاده از جدولهای تک‌آنتروپی، $\frac{p_۱}{p_۰} = ۰٫۸۹۶$ به دست می‌آید که از آن $p_۱ = ۰٫۸۹۶ \times ۳۰۰ = ۲۶۹\text{psia}$ نتیجه می‌شود. با استفاده از $M_۱ = ۰٫۴$ در جدولهای فانو، داریم $p_۱/p^* = ۲٫۶۹۶$، چون $p^* = ۱۰۰\text{psia}$، آن‌گاه $p_۱ = ۲٫۶۹۶ \times ۱۰۰ = ۲۶۷\text{psia}$. نتیجه‌ها بسیار نزدیک‌اند و محاسبات را در اینجا متوقف می‌کنیم.

خواص دیگر مجرا را می‌توان با روش مشابهی با دانستن $M_۱$ تعیین کرد. آهنگ جرم جریان ورودی را می‌توان با بررسی خواص دیگر و تعیین سرعت در هر محل به دست آورد. ورودی (با $M_۱ = ۰٫۴$) یا خروجی (با $M_۲ = ۱$) را به عنوان مقایسه می‌توان تعیین کرد، زیرا هر دو جواب یکسان به دست می‌دهند. با استفاده از مقدارهای ورودی مجرا که قابل دستیابی از جدولهای تک‌آنتروپی‌اند، مقدارهای زیر به دست می‌آیند.

$$\rho_۱ = ۰٫۹۲۴۳\rho_۰$$

$$a_۱ = ۰٫۹۸۴۴a_۰$$

$$V_۱ = M_۱a_۱$$

و با استفاده از

$$k = ۱٫۴$$

$$T_۰ = ۵۲۰^\circ\text{R}$$

$$R = ۱۷۱۸\frac{\text{ft}^۲}{^\circ\text{R}\,\text{s}^۲}$$

$$p_۰ = ۳۰۰\,\text{psia}$$

مقدارهای زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\rho_۰ = \frac{p_۰}{RT_۰} = \frac{۳۰۰ \times ۱۴۴}{۱۷۱۸ \times ۵۲۰} = ۰٫۰۴۸ \text{ slug/ft}^۳ = ۰٫۰۰۰۰۲۸ \text{ slug/in}^۳.$$

$$a_۰ = \sqrt{kRT_۰} = \sqrt{۱٫۴ \times ۱۷۱۸ \times ۵۲۰} = ۱۱۲۲ \text{ ft/s} = ۱۳۴۶۰ \text{ in./s}$$

$$\dot{m} = \rho_۱A_۱V_۱ = (۰٫۹۲۴۳)(۰٫۰۰۰۰۲۸)\left(\frac{\pi(۱)^۲}{۴}\right)(۰٫۴)(۰٫۹۸۴۴)(۱۳۴۶۰)$$

$$= ۰٫۱۰۸ \text{ slug/s}$$

باید به‌خاطر داشت که یکای جرم اسلاگ است، بنابراین ρ برحسب $\mathrm{slug/ft^۳}$ یا $\mathrm{slug/in.^۳}$ خواهد بود. اگر از $\mathrm{lb_m}$ استفاده می‌شد، آن‌گاه ضریب g_c را باید در معادلات تکانه به کار می‌بردیم، همان‌گونه که برای محاسبهٔ تندی صوت استفاده شد. افزون بر این، یکاهای R باید هماهنگ با یکاهای به‌کار رفته در ρ و معادلهٔ حالت باشد. مقدار $R = ۵۳٫۳\mathrm{ft/°R}$ در بیشتر محاسبات مهندسی به‌کار می‌رود ولی در تعیین تندی صوت باید جرم برحسب $\mathrm{lb_m}$ و ضریب g_c به کار رود. یکای اسلاگ یا کیلوگرم را برای جرم در سرتاسر کتاب به کار می‌بریم و در نتیجه هیچ گاه از ضریب تبدیل g_c استفاده نمی‌کنیم.

مسائل تکمیلی

عبارتهای درست و غلط را در مسائل ۷-۱۰ تا ۷-۲۷ مشخص کنید.

۷-۱۰ موجهای صوتی و موجهای ضربه‌ای

(الف) شباهتی ندارند.

(ب) یکی هستند، به‌جز برای مقدار تغییرات خاصیت در پهنای آن.

(ج) هر دو فرایند برگشت‌ناپذیرند.

(د) هر دو برگشت‌پذیرند.

(ه) در هوای ساکن با سرعتهای متفاوت عبور می‌کنند.

۷-۱۱ برای جریان گاز کامل تک‌آنتروپی

(الف) دمای سکون ثابت است.

(ب) فشار سکون ثابت است.

(ج) آنتروپی ثابت است.

(د) عدد ماخ بیشینه یک است.

(ه) با افزایش فشار دما کاهش می‌یابد.

۷-۱۲ در جریان گاز کامل از کانالی همگرا

(الف) دما در جهت جریان افزایش می‌یابد.

(ب) در شرایط ورودی ثابت و قطر گلوگاه ثابت جریان بیشینه‌ای وجود دارد.

(ج) ممکن است در آن موج ضربه‌ای قائم رخ دهد.

(د) سرعت همیشه در جهت جریان افزایش می‌یابد.

(ه) عدد ماخ ممکن است بزرگتر از یک باشد.

۷-۱۳ برای گاز کامل جاری در کانالی همگرا

(الف) در شرایط ورودی ثابت و سطح خروجی ثابت آهنگ جریان بیشینه‌ای وجود دارد.

(ب) عدد ماخ در گلوگاه همیشه یک است.

(ج) دمای بیشینه در گلوگاه خواهد بود.

(د) سرعت گاز در گلوگاه برابر سرعت صوت در ورودی برای شرایط خفه‌شدگی است.

(ه) در شرایط بحرانی موج ضربه‌ای قائم در گلوگاه رخ می‌دهد.

۷-۱۴ در شیپوره‌ای فراصوتی با جریان تک‌آنتروپی
(الف) ممکن است موج ضربه‌ای قائمی در قسمت همگرای آن رخ دهد.
(ب) ممکن است موج ضربه‌ای قائمی در قسمت واگرای آن رخ دهد.
(ج) بدون ضربه خواهد بود.

۷-۱۵ برای کانال جریان همگرا-واگرا
(الف) وقتی عدد ماخ در خروجی بزرگتر از یک است، موج ضربه‌ای رخ نمی‌دهد.
(ب) وقتی نسبت فشار بحرانی افزایش می‌یابد، عدد ماخ در گلوگاه بزرگتر از یک می‌شود.
(ج) برای سرعت صوت در گلوگاه، فقط یک مقدار فشار در هر مکان مفروض در پایین‌دست جریان امکان دارد.
(د) عدد ماخ در گلوگاه همیشه یک است.

۷-۱۶ برای جریان شاره‌ای تراکم‌پذیر در کانال همگرا-واگرایی که در شرایط خفگی کار می‌کند،
(الف) جریان در تمام قسمت واگرا فراصوتی است.
(ب) در قسمت واگرا ممکن است موج ضربه‌ای قائم رخ دهد.
(ج) در قسمت همگرا ممکن است موج ضربه‌ای قائم رخ دهد.
(د) عدد ماخ در گلوگاه همیشه برابر یک است.
(ه) نسبت فشار گلوگاه به فشار ورودی به هر سه جریان بستگی ندارد.

۷-۱۷ در موج ضربه‌ای قائم در جریان یک‌بعدی
(الف) سرعت، فشار و چگالی افزایش می‌یابد.
(ب) فشار، چگالی و دما افزایش می‌یابد.
(ج) سرعت، دما و چگالی افزایش می‌یابد.
(د) آنتالپی سکون بدون تغییر است.

۷-۱۸ موج ضربه‌ای قائم
(الف) وقتی رخ می‌دهد که جریان فراصوتی باشد.
(ب) همیشه همراه با افزایش دماست.
(ج) همیشه همراه با کاهش فشار است.
(د) همیشه با سرعت صوت حرکت می‌کند (نسبت به شاره).
(ه) ممکن است برای جریان فروصوتی رخ دهد.

۷-۱۹ موج ضربه‌ای قائم
(الف) در جلو جسم نوک‌پهنی تشکیل می‌شود که با سرعت فراصوتی از میان شاره‌ای تراکم‌پذیر حرکت می‌کند.
(ب) فقط وقتی رخ می‌دهد که جریان فراصوتی باشد.
(ج) باعث افزایش آنتروپی شاره می‌شود.
(د) فرایندی بی‌دررو و بی‌اصطکاک است.
(ه) غیرممکن است.

۲۰-۷ در جریان بی‌دررو فراصوتی با اصطکاک در مجرایی با سطح مقطع ثابت

(الف) دما در جهت جریان افزایش می‌یابد.

(ب) دمای سکون کاهش می‌یابد.

(ج) فشار سکون کاهش می‌یابد.

(د) سرعت افزایش می‌یابد.

(ه) عدد ماخ حدی برابر یک است.

۲۱-۷ خط فانو

(الف) مجموعهٔ حالتهای تعادلی در نمودار h-s برای جریان بی‌درروست.

(ب) بیانگر مجموعهٔ حالتهای تعادلی در نمودار h-s برای جریان با اصطکاک است.

(ج) از معادلات انرژی، پیوستگی و حالت نتیجه شده است.

(د) بیانگر جریان فروصوتی است.

(ه) بیانگر جریان تکدما در مجرای با سطح مقطع ثابت است.

۲۲-۷ برای جریان بی‌دررو فراصوتی با اصطکاک در مجرایی با سطح مقطع ثابت،

(الف) دما در جهت جریان افزایش می‌یابد.

(ب) دمای سکون افزایش می‌یابد.

(ج) فشار سکون کاهش می‌یابد.

(د) سرعت افزایش می‌یابد.

(ه) عدد ماخ حدی یک است.

۲۳-۷ برای جریان تکدمای گاز کامل در مجرایی با سطح مقطع ثابت

(الف) فشار در جهت جریان کاهش می‌یابد،

(ب) گرما از شاره گرفته می‌شود.

(ج) ذرات شاره شتاب می‌گیرند.

(د) چگالی شاره کاهش می‌یابد.

(ه) عدد ماخ بیشینه برابر یک است.

۲۴-۷ برای جریان گاز کامل در مجرایی با سطح مقطع ثابت عایق‌بندی شده که عدد ماخ اولیهٔ آن کمتر از یک است،

(الف) سرعت در جهت جریان کاهش می‌یابد.

(ب) دما در جهت جریان کاهش می‌یابد.

(ج) عدد ماخ می‌تواند افزایش یابد و بیشتر از یک شود.

(د) آنتروپی همیشه در جهت جریان افزایش می‌یابد.

(ه) فشار ثابت است.

۲۵-۷ بعضی از نتیجه‌های گرمایش و سرمایش شارهٔ ایده‌ال جاری در مجرایی بی‌اصطکاک با سطح مقطع ثابت عبارت‌اند از:

(الف) گرمایش همیشه باعث افزایش آنتروپی است.

(ب) گرمایش همیشه باعث افزایش سرعت است.

(ج) گرمایش همیشه باعث افزایش دماست.

(د) گرمایش همیشه باعث کاهش سرعت است.

(ه) عدد ماخ حدی برای جریان فروصوتی یک است.

۷-۲۶ برای جریان بی‌دررو گاز کامل در مجرایی با سطح مقطع ثابت بی‌اصطکاک

(الف) با افزایش آنتروپی دمای سکون افزایش می‌یابد.

(ب) دمای بیشینه در $M = ۱$ رخ می‌دهد.

(ج) نمودار حالتهای تعادلی را بر روی نمودار A-s خط ریلی می‌گویند.

(د) معادلات تک‌آنتروپی را به کار می‌برند.

(ه) عدد ماخ حدی برای جریان فراصوتی یک است.

۷-۲۷ برای جریان بی‌دررو گاز کامل در مجرایی با سطح مقطع ثابت

(الف) فشار باید در جهت جریان کاهش یابد.

(ب) دما ثابت خواهد ماند.

(ج) سرعت ثابت خواهد ماند.

(د) آنتروپی افزایش می‌یابد.

(ه) عدد ماخ ثابت می‌ماند.

۷-۲۸ سرعت صوت در گاز کربن دیوکسید در دمای ۳۰۰°F چقدر است؟ سرعت آکوستیکی در آب ۶۰°F چقدر است؟

۷-۲۹ در نقطهٔ A در ناحیهٔ اختلال نیافتهٔ جریان هوایی که از اطراف جسمی می‌گذرد، چگالی ۰٫۰۰۲۳۷۸ اسلاگ بر فوت مکعب، فشار ۱۴٫۷ psi و سرعت ۳۵۰ ft/s است. فشار در نقطهٔ B روی جسم ۷٫۳۵ psi است و عدد ماخ را در هر یک از این نقطه‌ها برای جریان بی‌دررو بی‌اصطکاک تعیین کنید.

۷-۳۰ هواپیمایی از میان هوای استاندارد با سرعت ۶۰۰ ft/s پرواز می‌کند. عدد ماخ موضعی را در نقطه‌ای بر روی هواپیما که سرعت هوا نسبت به هواپیما ۲۰۰ ft/s است، تعیین کنید.

۷-۳۱ جسمی از میان هوای استاندارد با سرعت ۴۰۰ ft/s حرکت می‌کنند. فشار را در نقطه‌ای بر روی جسم که سرعت هوا نسبت به جسم صفر است، تعیین کنید.

۷-۳۲ پرتابه‌ای نوک‌پهن با سرعت ۱۹۰۰ ft/s از میان هوای ساکنی با فشار ۱۴٫۷ psia و دمای ۶۰°F حرکت می‌کند. فشار سکون، آنتالپی سکون و دمای سکون را به دست آورید.

۷-۳۳ شیپوره‌ای برای انبساط هوا به طور تک‌آنتروپی از فشار ۵۰ psia و دمای ۲۰۰°F به ۱۸ psia با آهنگ ۳٫۰ lb/s طراحی شده است. (الف) عدد ماخ را در خروجی شیپوره و (ب) سطح مقطع خروجی را (برحسب فوت مربع) محاسبه کنید.

۷-۳۴ هوا به‌طور تک‌آنتروپی از میان شیپوره‌ای همگرا که سطح مقطع گلوگاه آن $۰٫۱\ \mathrm{ft}^۲$ است، جریان دارد. هوا با سرعت ناچیز در فشار ۶۰ psia و دمای ۲۰۰°F وارد شیپوره می‌شود. فشار مخزن ۱۵ psia است. آهنگ جریان جرمی گاز برحسب lb/s چقدر است؟

۷-۳۵ هوا با عبور از میان شیپوره‌ای واگرا_همگرا در فرایندی بی‌دررو و بی‌اصطکاک از فشار ۱۶۰psia و دمای ۲۴°F به فشار ۲۰psia انبساط می‌یابد. مطلوب است محاسبهٔ (الف) سطح مقطع گلوگاه و خروجی برای شیپوره‌ای بدون موج ضربه‌ای، در صورتی که آهنگ جریان هوا ۴٫۵ lb/s باشد و (ب) عدد ماخ در خروجی شیپوره.

۷-۳۶ هوا با فشار اولیهٔ ۵۰psia و دمای ۲۵۰°F به طور تک‌آنتروپی از میان شیپوره همگرا_واگرایی با سطح مقطع گلوگاه ۰٫۴in^2 می‌گذرد. فشار در پایین‌دست جریان ۱۴٫۷psia، و دمای ۴۰°F است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) آهنگ و جریان برحسب lb/s (ب) سرعت جریان در خروجی شیپوره.

۷-۳۷ هوا با فشار ۱۰۰psia و دمای ۱۴۰°F از میان لولهٔ همگرایی به درون مخزنی با فشار ۲۰psia جریان می‌یابد. با فرض اینکه جریان هوا بی‌دررو و بی‌اصطکاک، و سرعت در بالادست جریان ناچیز است، سرعت را در گلوگاه محاسبه کنید.

۷-۳۸ هوا با فشار ۱۰۰psia و دمای ۱۴۰°F از میان لولهٔ همگرایی به درون مخزنی با فشار ۲۰psia جریان می‌یابد. با فرض اینکه جریان بی‌دررو و بی‌اصطکاک، و سرعت در بالادست جریان ناچیز است، سرعت جریان را در گلوگاه محاسبه کنید.

۷-۳۹ نمودارهای h-s و T-s را برای گازی کامل رسم کنید، که به طور بی‌دررو از میان (۱) خط لولهٔ بلند، (۲) شیپوره و (۳) پخش‌کن می‌گذرد.

۷-۴۰ برای انتقال گازی (با وزن مولکولی ۱۸ و ۱٫۳ = k) از لوله‌ای به طول ۴۰ مایل و قطر داخلی ۳۶ اینچ، که دو ایستگاه کمپرسور را به یکدیگر متصل می‌کند، استفاده می‌کنیم. فشار در ایستگاه بالادست کمتر از ۹۰psig، و در ایستگاه پایین‌دست باید دست‌کم ۱۰psig باشد. آهنگ جریان مجاز بیشینه را محاسبه کنید (فوت مکعب در روز در دمای ۷۰°F و فشار یک اتمسفر) با فرض اینکه انتقال گرمای کافی از لوله برای حفظ دمای ۷۰°F وجود دارد. گران‌روی سینماتیکی 4×10^{-4} ft^2/s است.

۷-۴۱ هوا با فشار ۲۰۰psia، دمای ۶۰°F و با سرعت ۱۹۰ft/s به لوله‌ای به قطر ۶ اینچ وارد می‌شود. ضریب اصطکاک f برابر ۰٫۱۶ است. عدد ماخ و فاصله از ورودی، که فشار آن ۷۵psia است، برای جریان تکدما چقدر است؟

۷-۴۲ هوا با فشار ۶۰۰psia، دمای ۲۰۰°F و سرعت ۳۰۰ft/s به لوله‌ای افقی وارد می‌شود. فشار حدی برای جریان تک‌دما چقدر است؟ فشار حدی برای جریان بی‌دررو چقدر است؟

۷-۴۳ هوا با فشار ۱۲۰psia و دمای ۸۰°F به لولهٔ فولادی تمیزی وارد می‌شود که طول آن ۹۵۰ft و قطر آن ۵اینچ است. سرعت ورودی جریان هوا ۸۰ft/s است. فرض می‌کنیم که جریان تکدماست، مطلوب است (الف) تعیین افت فشار (psi)، اگر شاره تراکم‌پذیر فرض شود. (ب) تعیین افت فشار (psi)، اگر شاره تراکم‌ناپذیر فرض شود.

۷-۴۴ گاز هیدروژن با فشار اولیهٔ ۶۰psia و دمای ۱۴۰°F از میان لولهٔ عایق‌بندی شده‌ای به طول ۹۰۰ فوت و قطر ۰٫۲ فوت جریان می‌یابد. ضریب اصطکاک ۰٫۰۱۵ است. آهنگ جریان بیشینهٔ گاز چقدر است؟ و افت فشار چقدر باید باشد تا این جریان حفظ شود؟

۷-۴۵ مخزنی بزرگ را در آزمایشگاه با فشار ۲۰۰psia و در دمای اتاق با هوا پُر می‌کنند. شیپوره‌ای فراصوتی طراحی کنید که به دیوارهٔ این مخزن پیچ شود و هوا را با سرعتهای فراصوتی به بیرون تخلیه کند. با قرار دادن هوابری کوچک یا جسمی آزمونی در مسیر جریان این شیپوره، عملاً تونل باد تخلیهٔ فراصوتی‌ای خواهیم داشت. فرض کنید هوای مخزن در فشار ۲۰۰psia برای مدت کوتاهی که مورد نظر ماست، ثابت می‌ماند. مساحت گلوگاه باید ۰٫۵in^2 باشد.

۷-۴۶ اگر پس‌فشار را در مسئلهٔ ۷-۹ افزایش یا کاهش دهیم، چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ بحث کنید.

۷-۴۷ مجرای بی‌دررو بلندی به قطر ۰٫۱ متر از مخزنی با فشار ۲MPa از طریق شیپوره‌ای همگرا_واگرا با نسبت مساحت گلوگاهی ۰٫۲۳۶۲ = $\frac{A^*}{A_1}$

تغذیه می‌شود، که $A_۱$ سطح مقطع مجراست. ضریب اصطکاک میانگین ۰٫۰۰۱ است. $L_{\max}$ را به دست آورید. پس‌فشار لازم برای ایجاد جریان بدون موج ضربه‌ای در سرتاسر مجرا چقدر است؟ اگر این پس‌فشار حفظ شود ولی طول مجرا به $۲L_{\max}$ افزایش یابد، مکان موج ضربه‌ای را در مجرا تعیین کنید. اگر طول مجرا به $۱/۲L_{\max}$ برسد (با همان پس‌فشار) مکان موج ضربه‌ای کجا خواهد بود؟ و هر یک از این حالتها دربارهٔ آنچه که با افزایش یا کاهش پس‌فشار رخ می‌دهد به تفصیل بحث کنید.

نمادگذاریهای فصل ۷

$A =$ سطح مقطع

$a =$ سرعت صوت

$C =$ محیط خیس شده

$c_p =$ گرمای ویژه در فشار ثابت

$c_s =$ سرعت موج ضربه‌ای

$c_v =$ گرمای ویژه در حجم ثابت

$D =$ قطر هیدرولیکی مجرا

$f =$ ضریب اصطکاک فانینگ

$h =$ آنتالپی در واحد جرم

$k =$ نسبت گرمای ویژه $\frac{c_p}{c_v}$

$K =$ درجهٔ کلوین

$L =$ طول مجرا

$M =$ عدد ماخ، $\frac{V}{a}$

$\dot{m} =$ آهنگ جریان جرمی

$p =$ فشار

$^\circ\mathrm{R} =$ درجهٔ رانکین

$R =$ ثابت گاز

$s =$ آنتروپی بر واحد جرم (آنتروپی ویژه)

$T =$ دمای مطلق

$t =$ زمان

$u =$ انرژی درونی بر واحد جرم (انرژی درونی ویژه)

$V =$ سرعت

$v =$ حجم ویژه$= \frac{۱}{\rho}$

$x =$ مختصهٔ محوری

$\rho =$ چگالی

$\tau_۰ =$ تنش برشی دیواره

$()_c =$ شرط بحرانی

$()_R =$ شرط مخزن (پس‌فشار)

$()_۰ =$ شرط سکون

$()_t =$ شرط گلوگاه

$()^* =$ شرطی که جریان خفه می‌شود یا $M = ۱$

۸

دینامیک گازی جریان تراکم‌پذیر دوبعدی

۱-۸ معادلات جریان تراکم‌پذیر بی‌اصطکاک

جریان پتانسیل تراکم‌ناپذیر دوبعدی را در فصل ۶، و جریان تراکم‌پذیر یک‌بعدی را در فصل ۷ بررسی کردیم. اکنون، با گسترش این دو موضوع، روش عمومیتری را برای جریان (کامل) بی‌اصطکاک تراکم‌پذیر به دست می‌آوریم. چون این جریان کامل است، دوباره می‌توان نشان داد که جریان غیرچرخشی (اگر جریان آزاد شاره غیرچرخشی باشد) و بنابراین پتانسیلی است. سپس به جریان پتانسیل تراکم‌پذیر سه‌بعدی عمومی می‌پردازیم، هر چند برای محاسبات مستقیم معمولاً به جریانهای دوبعدی محدود می‌شویم.

مانند قبل، دربارهٔ جریان خارج از لایهٔ مرزی (که جریان غیرچرخشی است) بحث خواهیم کرد و بیشتر به مسائل آئرودینامیک ــ جریان روی بالها و بدنهٔ هواپیماها ــ توجه می‌کنیم.

شاره در سرعتهای کم (عدد ماخ M کمتر از ۳ر۰) کم‌وبیش رفتار تراکم‌ناپذیر دارد، و تحلیل موضوع با جریان پتانسیل تراکم‌ناپذیر (فصل ۶) کفایت می‌کند. با افزایش سرعت جریان اثرهای تراکم‌پذیری به تدریج مهمتر می‌شوند و با گذشتن عدد ماخ از واحد، موج ضربه‌ای بر روی جسم تحت مطالعه تشکیل می‌شود. اگر عدد ماخ جریان آزاد بزرگتر از یک باشد ($M > ۱$)، جریان فراصوتی است و بسیار متفاوت از جریان فروصوتی ($M < ۱$) خواهد بود. جریان گذرصوتی بر روی جسم وقتی رخ می‌دهد که جریان موجود در قسمتی از جسم فروصوتی و در قسمت دیگر جسم فراصوتی باشد. در جریان گذرصوتی پایا روی جسم، ناحیه‌هایی را می‌توان یافت که $M < ۱$، $M = ۱$ و $M > ۱$. جریان گذرصوتی از نظر ریاضی پیچیده‌تر از هر دو جریان فروصوتی و فراصوتی است. هنگامی که هواپیمایی از جریان فروصوتی به فراصوتی شتاب می‌گیرد، الزاماً باید از شرایط گذرصوتی بگذرد.

در این فصل، به مطالعهٔ گسترهٔ کامل عددهای ماخ می‌پردازیم که از ناحیهٔ فروصوتی آغاز می‌شود و تا عددهای ماخ بسیار بزرگ ادامه می‌یابد. برای Mهای بزرگتر از ۶ جریان را ابرصوتی می‌گویند، که بسیاری از پیش‌فرضهای جریان فراصوتی معمولی معتبر نیستند و تحلیل آن بسیار پیچیده‌تر می‌شود. با افزایش M و رسیدن آن به ناحیهٔ ابرصوتی، اصطکاک لایهٔ مرزی افزایش می‌یابد و دمای سکون آن‌قدر زیاد می‌شود (برای $M > 6$) که دمای لایهٔ مرزی را نیز بالا می‌برد و سطح هواپیما آنچنان داغ می‌شود که استفاده از مواد نسوز خاص یا فرسودنی برای جلوگیری از آسیب‌دیدگی بدنه نیاز خواهد داشت. بازگشت ماهواره به جو همراه با عبور از عددهای ماخ بالاست. در فصل ۱۰ دربارهٔ ساختار لایهٔ مرزی ابرصوتی بحث خواهیم کرد. اکنون، به حل جریان پتانسیل در خارج از لایهٔ مرزی توجه می‌کنیم. قانونهای حاکم بر رفتار جریان اساساً برای جریان فروصوتی و فراصوتی یکسان است، اما جمله‌های مختلف در معادلات اصلی، با تغییر M، کم‌وبیش مهم می‌شوند. در واقع، مشخصهٔ معادلات دیفرانسیل با بزرگتر یا کوچکتر شدن M از مقدار واحد، کاملاً تغییر می‌کند. در نتیجه، طرح جریان از فروصوتی به فراصوتی به شدت تغییر می‌کند.

در بیشتر مسائل جریان تراکم‌پذیر آئرودینامیکی فرض جریان بی‌اصطکاک، غیرچرخشی و تک‌آنتروپی کاملاً دقیق است. اما، هرگاه در جریان ابرصوتی موجهای ضربه‌ای ایجاد شود، جریان در عرض موجهای ضربه‌ای تک‌آنتروپی نیست.

اکنون، معادلات اساسی جریان بی‌اصطکاک تک‌آنتروپی را که، بجز در محاسبات موج ضربه‌ای به کار می‌روند، مرور می‌کنیم. این معادلات عموماً غیرخطی‌اند و جوابهای تقریبی متعددی باید برای آنها به دست آورد. در بعضی از حالتها، جوابهای دقیق را می‌توان حتی در شرایط وقوع موج ضربه‌ای به دست آورد.

معادلات اصلی همانهایی هستند که در فصل ۵ به دست آوردیم. بجز اینکه باید اثرهای تراکم‌پذیری منظور شوند و در نتیجه معادلهٔ انرژی یا هم‌ارز آن را باید در نظر گرفت. معادلات اصلی عبارت‌اند از پیوستگی، حرکت و انرژی. اگر معادلهٔ انرژی برحسب دما نوشته شود، به معادلهٔ حالت نیز نیاز است. اگر جریان کلاً تک‌آنتروپی باشد، رابطهٔ تک‌آنتروپی بین فشار و چگالی را می‌توان به کار برد و روشن است که به معادلهٔ انرژی نیز نیاز خواهد بود.

همان گونه که در فصل ۵ نشان دادیم، جریان بی‌اصطکاک بی‌دررو در امتداد خط جریان، به شرطی که غیرچرخشی باشد، تک‌آنتروپی است. وانگهی، اگر جریان دارای مقداری یکنواخت از آنتالپی کل (یا سکون) باشد، یعنی $h_0 + h + v^2/2$ در سرتاسر جریان افزون بر غیرچرخشی بودن، جریان در کل تک‌آنتروپی خواهد بود. چنین جریانی را گاهی هم‌آنتروپی می‌گویند.[۱]

در جریان هم‌آنتروپی (که نیروهای حجمی را می‌توان نادیده گرفت) برای گاز کامل در جریان دوبعدی، رابطه‌های اصلی عبارت‌اند از

پیوستگی:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \qquad (۸\text{-}۱)$$

تکانه:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (۸\text{-}۲)$$

رابطهٔ تک‌آنتروپی:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \qquad (۸\text{-}۳)$$

که $k = c_p/c_r$ نسبت گرماهای ویژه است، و p_0 و ρ_0 فشار و چگالی در حالتهای مرجع اختیاری هستند که معمولاً همان مقدارهای جریان آزاد یا مقدارهای سکون‌اند.

---

۱. این عبارت ناشی از قضیهٔ کروکو است که

$$T\nabla_s + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla h_0 + a\mathbf{V}/\partial t$$

که s آنتروپی ویژه است. در جریان پایا $\nabla_s = 0$ اگر $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ و $\nabla h_0 = 0$. این قضیه را اینجا ثابت نمی‌کنیم، اما از معادلهٔ حرکت و رابطهٔ ترمودینامیکی $T\,ds = dh - \left(\frac{1}{\rho}\right) dp$ به دست می‌آید. در بیشتر جریانهای آئرودینامیک شاره از همان «منبعی» سرچشمه می گیرد که جریان آزاد نشأت می‌گیرد و بنابراین h_0 ثابت است.

معادلات (۸-۱) تا (۸-۳) مستقل‌اند اما یکتا نیستند. به جای معادلهٔ (۸-۳)، می‌توانستیم از معادلهٔ کامل انرژی همراه با معادلهٔ حالت استفاده کنیم. اگر جریان بی‌دررو نباشد، چنین روشی ضروری است.

چون جریان غیرچرخشی است، پتانسیل سرعت $\mathbf{V} = -\nabla\phi$ را می‌توان وارد کرد. در این صورت جملهٔ ∇p را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \nabla\rho = a^۲\nabla\rho \tag{۸-۴}$$

که a تندی صوتی است. سپس ضرب اسکالر $\mathbf{V}$ و معادلهٔ برداری حرکت تشکیل می‌شود و به کمک معادلات (۸-۴) و (۸-۱) می‌توان p و ρ را حذف کرد. نتیجه در جریان دوبعدی به صورت زیر در می‌آید

$$(u^۲ - a^۲)\frac{\partial u}{\partial x} + (v^۲ - a^۲)\frac{\partial v}{\partial y} + uv\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = ۰ \tag{۸-۵}$$

با توجه به شرط $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = ۰$، معادلهٔ بالا برحسب ϕ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{۱}{a^۲}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^۲\frac{\partial^۲\phi}{\partial x^۲} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^۲\frac{\partial^۲\phi}{\partial y^۲} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(۲\frac{\partial^۲\phi}{\partial x\,\partial y}\right)\right] = \frac{\partial^۲\phi}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲\phi}{\partial y^۲} \tag{۸-۶}$$

که وقتی $a \to \infty$، $\nabla^۲\phi = ۰$، که حد مطلوبی برای جریان تراکم‌ناپذیر است. معادلهٔ (۸-۶) تک معادلهٔ ϕ است و این جریان را بیان می‌کند، اما تندی صوتی a را باید به مؤلفه‌های سرعت از طریق معادلهٔ انرژی مرتبط کرد، که وضعیت را پیچیده می‌کند. در بخش ۸-۳، وقتی نظریهٔ اختلال جزئی را بحث می‌کنیم، این محاسبات را صریحاً انجام می‌دهیم. روش اختلال جزئی، خطی کردن معادلهٔ (۸-۶) و جوابهای تقریبی به دست آمده را برای جسمهای نازکی همچون هوابرها و جسمهای باریک دورانی ممکن می‌سازد.

در بخش ۸-۲ جوابهای دقیق موج ضربه‌ای-انبساط ۸-۴ و در بخش ۸-۴ روشهای حل معادلهٔ (۸-۵) بحث خواهند شد.

۸-۲ نظریهٔ موج ضربه‌ای-انبساط

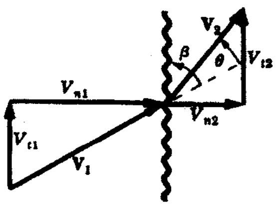
جوابهای دقیق جریان را در شکلهای هندسی سادهٔ خاص، در صورتی که جریان کلاً شامل موجهای ضربه‌ای و یا موجهای انبساطی باشد، می‌توان به دست آورد. نخست، موج ضربه‌ای مایل و موج انبساطی ساده را بحث خواهیم کرد و سپس نشان خواهیم داد که چگونه با ترکیب این جوابها می‌توان جریان موجود بر روی شکلهای سادهٔ خاص را بیان کرد.

۸-۲-۱ موج ضربه‌ای مایل

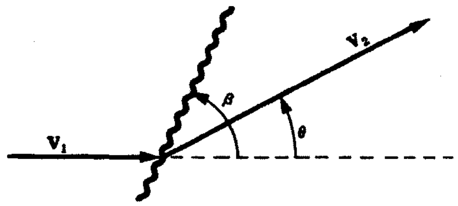
شکل ۸-۱ موج ضربه‌ای مایل را نشان می‌دهد. بنابر اصل پایستگی تکانه، مؤلفهٔ مماسی سرعت V_t در عرض موج ضربه‌ای پیوسته است، بنابراین $V_{t۱} = V_{t۲}$. در این صورت، $V_{n۱}$ و $V_{n۲}$ با رابطه‌های موج ضربه‌ای قائم، در فصل ۷ به هم مرتبط می‌شوند. بنابراین، موج ضربه‌ای مایل برحسب سرعتهای قائم شبیه موج ضربه‌ای قائم است و عددهای ماخ (برحسب V_n و $M_۱ = \frac{V_{n۱}}{a_۱}$)، فشار، چگالی و جز آن، همچون موج ضربه‌ای قائم به هم مربوط می‌شوند. چون $V_{t۱} = V_{t۲}$ اما $V_{n۱} \neq V_{n۲}$، بردار سرعت واقعی V چرخیده است و مقدار آن، همچون شکل ۸-۲، در حین گذشتن از میان موج ضربه‌ای تغییر می‌کند. $V_{n۱}$ بزرگتر از تندی صوتی $a_۱$، و $V_{n۲}$ باید کمتر از تندی صوتی $a_۲$ باشد. اما، هر چند $V_۱ > a_۱$، $V_۲$ نیز ممکن است بزرگتر از $a_۲$ باشد. مقدار سرعت در موج ضربه‌ای مایل الزاماً به مقدار فروصوتی افت پیدا نمی‌کند، هر چند مؤلفهٔ عمودی تغییر می‌کند.

اکنون، $M_۱$ را به صورت $M_۱ = V_۱/a_۱$، $V_{n۱}$ را به صورت $V_{n۱} = V_۱ \sin\beta$ تعریف می‌کنیم، بنابراین $V_{n۱}/a_۱ = M_۱ \sin\beta$.
با استفاده از رابطه‌های موج ضربه‌ای قائم در فصل ۷ و قرار دادن $M_۱ \sin\beta$ به جای $M_۱$ رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود.[۱]

۱. جدولهای موج ضربه‌ای قائم را می‌توان با در نظر گرفتن $M_۱ \sin\beta$ به جای $M_۱$ به کار برد.



شکل ۸-۱ موج ضربه‌ای مایل.



شکل ۸-۲ دوران بردار سرعت از میان موج ضربه‌ای.

$$\frac{V_{n۱}}{V_{n۲}} = \frac{\rho_۲}{\rho_۱} = \frac{(k+۱)(M_۱^۲ \sin^۲ \beta)}{(k-۱)M_۱^۲ \sin^۲ \beta + ۲}$$

$$\frac{p_۲ - p_۱}{p_۱} = \frac{۲k}{k+۱}(M_۱^۲ \sin^۲ \beta - ۱)$$

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \frac{a_۲^۲}{a_۱^۲} = ۱ + \frac{۲(k-۱)}{(k+۱)^۲}\frac{M_۱^۲ \sin^۲ \beta - ۱}{M_۱^۲ \sin^۲ \beta}(kM_۱^۲ \sin^۲ \beta + ۱) \tag{۷-۸}$$

$$\frac{s_۲ - s_۱}{R} = \ln\left\{\left[۱ + \frac{۲k}{k+۱}(M_۱^۲ \sin^۲ \beta - ۱)\right]^{۱/(k-۱)} \left[\frac{(k+۱)M_۱^۲ \sin^۲ \beta}{(k-۱)M_۱^۲ \sin^۲ \beta + ۲}\right]^{-k/(k-۱)}\right\}$$

$$M_۲^۲ \sin^۲(\beta - \theta) = \frac{۱ + \frac{۱}{۲}(k-۱)M_۱^۲ \sin^۲ \beta}{kM_۱^۲ \sin^۲ \beta - \frac{۱}{۲}(k-۱)}$$

با توجه به اینکه $۰ < \beta < \frac{\pi}{۲}$ و $M_۱ \sin \beta = V_{n۱}a_۱ \geq ۱$، بنابراین β مقداری کمینه برای هر $M_۱$ مفروض دارد. از این رو

$$\frac{\sin^{-۱} ۱}{M_۱} \leq \beta \leq \frac{\pi}{۲} \tag{۸-۸}$$

در موج ضربه‌ای قائم، $\beta = \frac{\pi}{۲}$. در موج ضربه‌ای ضعیف، زمانی که موج ضربه‌ای به شکل موج صوتی در می‌آید، $\beta = \sin^{-۱} \frac{۱}{M}$.
مقدار $M_۲$ را، با توجه به اینکه $V_{n۲}/a_۲ = M_۲ \sin(\beta - \theta), M_۲ = V_۲/a_۲$، می‌توان به دست آورد. از رابطهٔ موج ضربه‌ای قائم، داریم

$$M_۲^۲ = \frac{۱ + \frac{۱}{۲}(k-۱)M_۱^۲}{kM_۱^۲ - \frac{۱}{۲}(k-۱)}$$

با نشاندن $M_۱ \sin \beta$ و $M_۲ \sin(\beta - \theta)$ به جای $M_۱$ و $M_۲$، خواهیم داشت

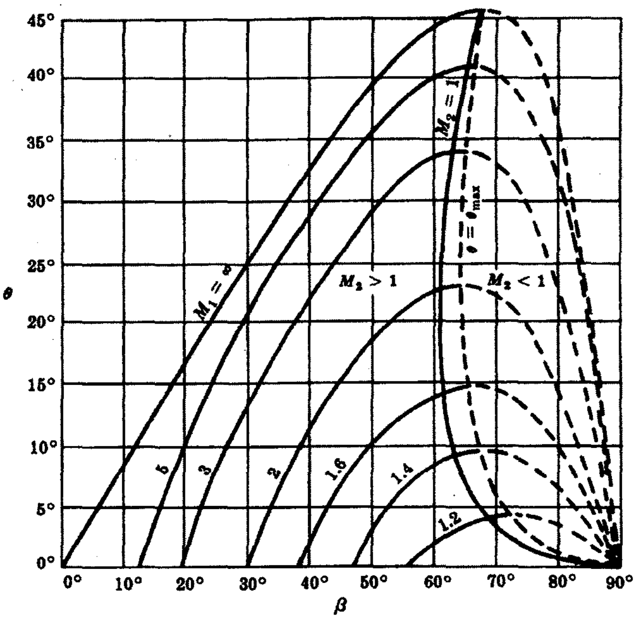
$$M_۲^۲ \sin^۲(\beta - \theta) = \frac{۱ + \frac{۱}{۲}(k-۱)M_۱^۲ \sin^۲ \beta}{kM_۱^۲ \sin^۲ \beta - \frac{۱}{۲}(k-۱)} \tag{۹-۸}$$

با استفاده از قسمت اول معادلهٔ (۸-۷) می‌توان β به θ، و همچنین $V_{۲n}$ به $V_{۱n}$ از طریق شکل هندسی مرتبط ساخت یعنی

$$\tan \beta = \frac{V_{n_۱}}{V_{t_۱}}, \tan(\beta - \Theta) = V_{n_۲}/V_{n_۱}$$

بنابراین

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{(k-۱)M_۱^۲ \sin^۲ \beta + ۲}{(k+۱)M_۱^۲ \sin^۲ \beta}$$



شکل ۸-۳ β برحسب θ در موج ضربه‌ای مایل.

که می‌توان به صورت زیر نوشت

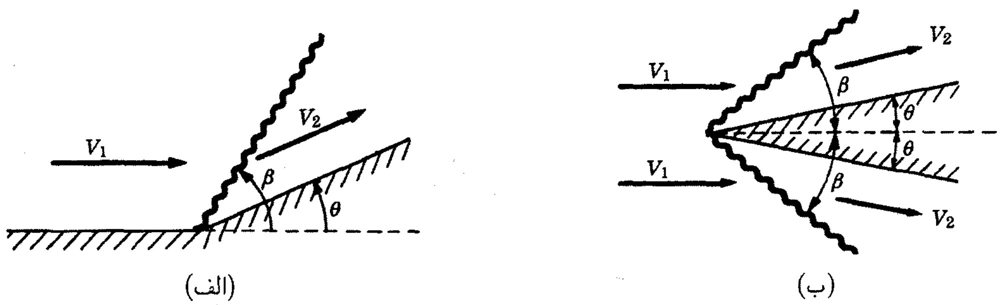
$$\tan\theta = ۲\cot\beta\frac{M_۱^۲\sin^۲\beta - ۱}{M_۱^۲(k+\cos ۲\beta)+۲} \qquad (۸\text{-}۱۰)$$

برای هر مقدار مفروض $M_۱$، دو مقدار برای β در مقابل هر مقدار θ خواهیم داشت. شکل ۸-۳ نمودار این معادله را نشان می‌دهد.

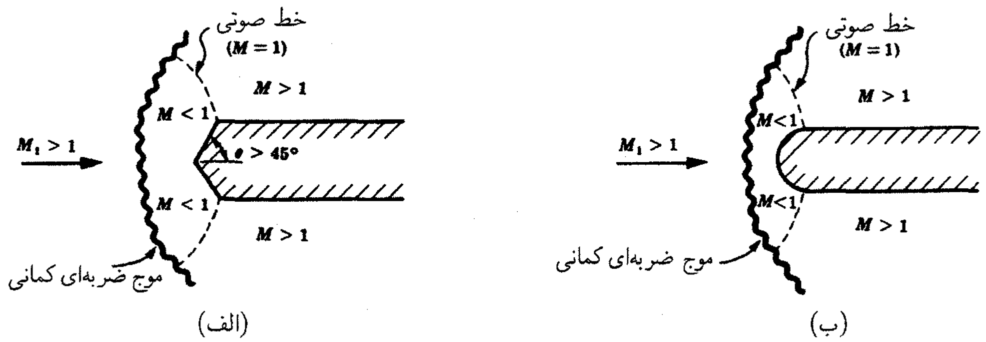
برای هر مقدار θ (کمتر از $\theta_{\max}$) دو جواب وجود دارد. در عمل، جواب ضعیفتر (β کوچکتر) به دست می‌آید (اگر $\theta < ۴۵°$). اینها متناظر با $M_۲ > ۱$ هستند، بجز برای ناحیهٔ کوچک بین خطهای $M_۲ = ۱$ و $\theta = \theta_{\max}$.

در عمل، چه چیزی β و θ را تعیین می‌کند؟ به بیان دیگر، موجهای ضربه‌ای مایل چگونه ایجاد می‌شوند؟ جریان موجود از میان گوشه مطابق شکل ۸-۴ مثالی ساده از آن است. گوهٔ متقارن، همان طرح جریان متقارن را حول خط مرکزی افقی به وجود می‌آورد [شکل ۸-۴(ب)]. بردار $\mathbf{V}_۲$ موازی سطح گوه (یا گوشه) با زاویهٔ θ است. بدین‌ترتیب، در صورت مشخص شدن $M_۱$ باید β نیز مشخص شود.

برای هر عدد ماخ مفروض، مقدار θ بیشینه‌ای وجود دارد که عملاً امکان‌پذیر است. اگر زاویهٔ گوهٔ واقعی بزرگتر از این مقدار بیشینه باشد، چه



شکل ۸-۴ موج ضربه‌ای مایل ایجاد شده به وسیلهٔ جریان (الف) از میان گوشه و (ب) از روی گوهٔ متقارن.



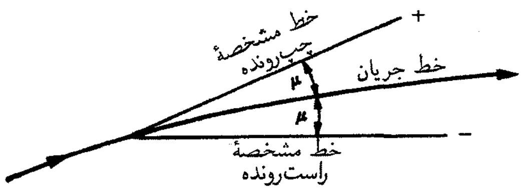
شکل ۸-۵ موج ضربه‌ای گسسته. (الف) گوه، (ب) جسم نوک‌پهن.

اتفاقی رخ می‌دهد؟ جواب این است که موج ضربه‌ای از بدنهٔ گوه جدا می‌شود و در جلو می‌ایستد. موج ضربه‌ای جدا شده به صورت خمیده پیرامون جسم را می‌گیرد و به عنوان موج ضربه‌ای کمانی شناخته می‌شود. مکان موج ضربه‌ای کمانی توسط جریان پایین‌دستی تعیین می‌شود که همیشه دارای ناحیهٔ فروصوتی است. (موج ضربه‌ای کمانی، درست مثل رأس با $M_۲ < ۱$، همیشه به صورت موج ضربه‌ای قائم ظاهر می‌شود و شرایط جهش به طور پیوسته در امتداد موج ضربه‌ای خمیده تغییر می‌کند). بیان کامل موج ضربه‌ای کمانی بسیار پیچیده است، زیرا مکان آن را نمی‌توان به طور دقیق تعیین کرد (به علت نفوذ جریان بالادست فروصوتی)، و میدان جریان کلی را باید با هم در نظر گرفت. مقدار حدی مطلقی بزرگتر از $۴۵°$ برای θ وجود دارد که موج ضربه‌ای، صرف‌نظر از مقدار عدد ماخ، در آنجا همیشه گسسته می‌شود. بنابراین، اگر جسم نوک‌پهن باشد، موج ضربه‌ای همیشه گسسته می‌شود (زیرا θ در دماغه $۹۰°$ است). منحنی خط‌چینی را که در آن $M = ۱$ (شکل ۸-۵)، خط صوتی می‌گویند؛ این خط ناحیه‌های فروصوتی و فراصوتی را از یکدیگر جدا می‌کند.

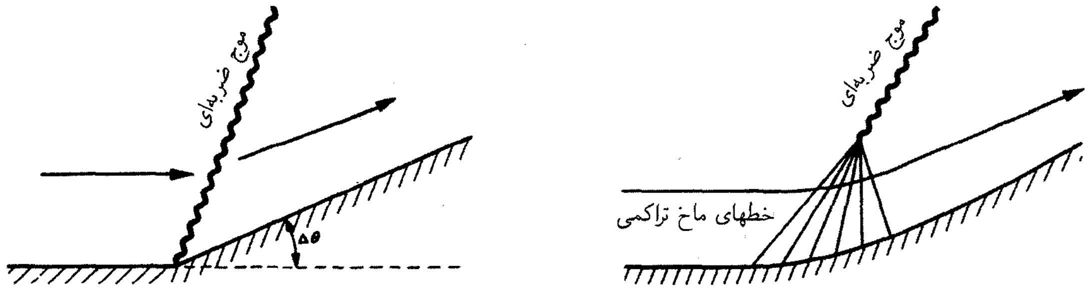
با گراییدن زاویهٔ گوه به سوی صفر، داریم $\beta = \sin^{-۱} \frac{۱}{M}$. و این موج را خط ماخ می‌گویند. در واقع، این خط مکان هندسی آشفتگیهای صوتی است، زیرا قدرت موج ضربه‌ای بی‌نهایت کم می‌شود و هر آشفتگی بی‌نهایت کوچک یا صوتی در امتداد این خط انتشار می‌یابد. زاویهٔ $\sin^{-۱} \frac{۱}{M}$ را که با μ مشخص می‌شود، زاویهٔ ماخ می‌گویند. خطهای ماخ در سه بعد (از نقطهٔ آشفتگی، که در فصل ۷ بحث شد) به شکل مخروط در می‌آیند.

در فضای دوبعدی، در هر نقطهٔ جریان، دو خط ماخ وجود دارد (در زاویه‌های $\pm\beta = \sin^{-۱} \frac{۱}{M}$ به طرف خطهای جریان). این خطها را خطهای مشخصه می‌گویند و باید به سوی پایین‌دست جریان باشند، زیرا جریان بالادست تأثیری بر جریان فراصوتی ندارد (شکل ۸-۶).

در فضای سه‌بعدی، مکان هندسی خطهای ماخ، مخروطی را به وجود می‌آورند که به عنوان مخروط ماخ شناخته می‌شود. مخروط ماخ تشکیل شده در جلو هواپیما یا موشک، منطقهٔ نفوذ را همان گونه که بخش ۷-۱ بحث شد مشخص می‌کند. خط ماخ طرف راست بردار سرعت را به عنوان خط مشخصهٔ راست‌رونده (یا خط ماخ) و خط ماخ طرف چپ را به عنوان خط مشخصه چپ‌رونده می‌شناسند. گاهی این خطها را به ترتیب با علامت $(-)$ یا $(+)$، یا برعکس مشخص می‌کنند، که کاملاً اختیاری است.



شکل ۸-۶ مشخصه‌ها در جریان فراصوتی $\theta \to ۰$ و $\mu = \sin^{-۱} ۱/M \to \beta$). یک خط در طرف راست خط جریان و یک خط در طرف چپ خط جریان عبور می‌کند.



شکل ۸-۷ تراکم جریان فراصوتی در محل خمیدگی.

با کوچک شدن زاویهٔ θ (اما همچنان متناهی)، موج ضربه‌ای ضعیف می‌شود و به ساده شدن رابطه‌های موج ضربه‌ای می‌انجامد. در عرض موج ضربه‌ای می‌توان نشان داد که $\Delta p \sim \theta$ و $\Delta s \sim \theta^{۳}$، بنابراین برای موجهای ضربه‌ای بسیار ضعیف جریان تقریباً تک‌آنتروپی می‌شود. تغییر سرعت ΔV در عرض موج ضربه‌ای ضعیف (برای انحراف جریان $\Delta\theta$) تقریباً از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta\theta}{\sqrt{M_۱^۲ - ۱}} \qquad (۸\text{-}۱۱)$$

که برای جریان تک‌آنتروپی دقیق است. اگر تراکم در خم پیوسته‌ای صورت گیرد (شکل ۸-۷)، آنگاه مجموعهٔ خطهای ماخ پیوسته به وجود می‌آید و معادلهٔ (۸-۱۱) را می‌توان به شکل دیفرانسیلی زیر نوشت

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\theta}{\sqrt{M_۱^۲ - ۱}} \qquad (۸\text{-}۱۲)$$

از ترکیب خطهای ماخ موجی ضربه‌ای تشکیل می‌شود، اما جریان در مجاورت جسم و درون چتری تراکمی عددهای ماخ تقریباً تک‌آنتروپی است.

یک موج ضربه‌ای مایل به گونه‌ای از دیواره بازتابیده می‌شود که جریان پایین‌دست موج ضربه‌ای بازتابیدهٔ موازی، با دیواره باشد. شکل ۸-۸ این گونه بازتاب را نشان می‌دهد. به طور کلی، برهم‌کنش موجهای ضربه‌ای با تلاقیها (ب)، و جز آن را می‌توان با استفاده از این شرط بیان کرد که جهت جریان باید به طور مناسب با مرزهای جامد تنظیم شود و شرط پیوستگی را نیز براورده کند.

اگر موجهای ضربه‌ای بازتابیده به زاویهٔ خم بزرگتر از زاویهٔ ممکن برای عدد ماخ بالادست نیاز داشته باشد، گسستگی از دیواره رخ می‌دهد (ج).

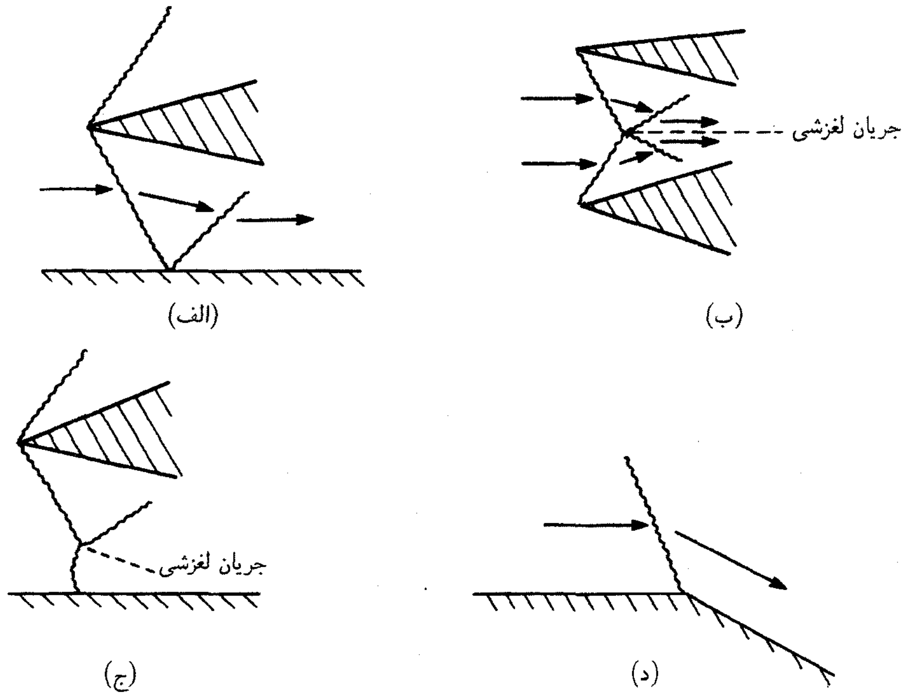
اگر موج ضربه‌ای به گوشه‌ای از دیواره برخورد کند و جریان پایین‌دست دیواره همراستا با جریان پایین‌دست باشد هیچ گونه بازتابی رخ نمی‌دهد و موج ضربه‌ای «حذف» می‌شود (د).

۸-۲-۲ انبساط فراصوتی و تابع پرنتل-مایر

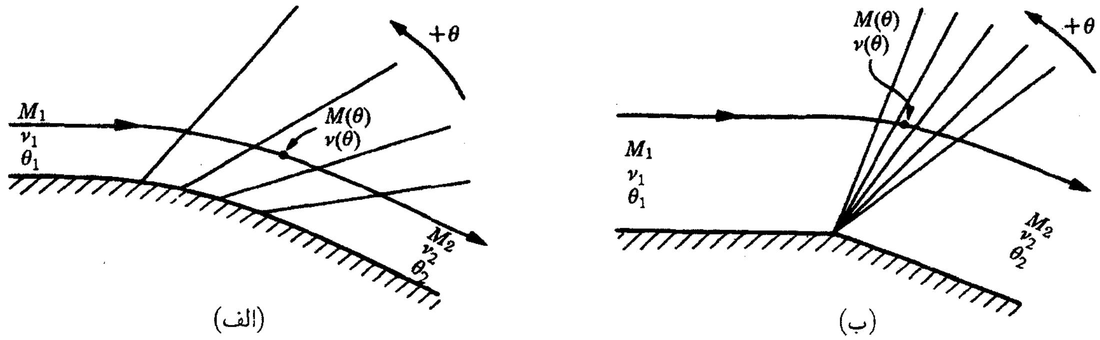
در جریان موجود بر روی گوشهٔ محدب یا سطح خمیدهٔ محدب، موج ضربه‌ای تولید نمی‌شود و جریان به طور تک‌آنتروپی منبسط خواهد شد (شکل ۸-۹). تک موج نمی‌تواند خود را با این تغییر وفق دهد (و به کاهش آنتروپی منجر می‌شود) و چتری موجی باید به وجود آید. خطهای موجود در شکل ۸-۹ واقعاً خطهای ماخ یا مشخصه هستند. آنها در هر نقطهٔ جریان با زاویهٔ $\sin^{-۱}\frac{۱}{M}$ نسبت به خطهای جریان قرار می‌گیرند. همهٔ خواص شاره در امتداد خط ماخ، مانند بردار سرعت، ثابت‌اند.

معادلهٔ (۸-۱۲) در سرتاسر انبساط اعتبار دارد و شیب خط جریان نسبت به مبنایی دلخواه است. معمولاً فرض می‌شود که $\theta_۱ = ۰$، و θ را در جهت پادساعتگرد مثبت در نظر می‌گیرند (در شکل ۸-۹، اگر $\theta_۱ = ۰$، $\theta_۲$ منفی است). از معادلهٔ (۸-۱۲) می‌توان انتگرال گرفت:

$$-\theta + \text{const.} = \int_{V_۱}^{V} \sqrt{M^۲ - ۱}\,\frac{dV}{V} = \nu(M) \qquad (۸\text{-}۱۳)$$



شکل ۸-۸ برهم‌کنش موجهای ضربه‌ای. (الف) بازتاب از دیواره، (ب) تلاقی دو موج ضربه‌ای، (ج) گسستگی از دیوار، (د) حذف‌شدگی.



شکل ۸-۹ انبساط فراصوتی بر روی سطح محدب. (الف) انبساط پیوسته در اطراف خم و (ب) چتری انبساطی با مرکزیت گوشهٔ تیز.

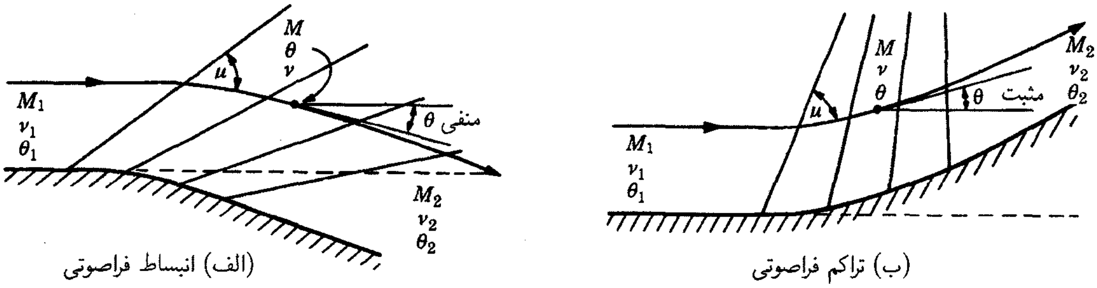
تابع $\nu(M)$ را تابع پرنتل-مایر می‌گویند و به صورت زیر به دست می‌آید

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{k+۱}{k-۱}} \tan^{-۱} \sqrt{\frac{k-۱}{k+۱}(M^{۲}-۱)} - \tan^{-۱} \sqrt{M^{۲}-۱} \qquad (۱۴\text{-}۸)$$

که ν برحسب رادیان است . مقدار ثابت را در معادلهٔ (۸-۱۳) به طور دلخواه انتخاب می‌کنیم، بنابراین زمانی که $M = ۱$، $\nu = ۰$، و سرانجام خواهیم داشت

$$-(\theta - \theta_۱) = \nu(M) - \nu_۱(M_۱) \qquad (۱۵\text{-}۸)$$

برای هر مقدار مفروض $\theta_۱$ (که معمولاً صفر در نظر می‌گیرند) و $M_۱$، می‌توان $\nu(M)$ و بنابراین M را برای هر مقدار θ یافت. $\nu(M)$ تابع یکنوای M است که از صفر برای $M = ۱$ تا $\nu_{\max}$ برای $M \to \infty$ تغییر می‌کند و مقدار $\nu_{\max}$ از رابطهٔ $\nu_{\max} = \frac{۱}{۲}\pi = (\sqrt{(k+۱)/(k-۱)} - ۱)$



شکل ۸-۱۰ انبساط و تراکم فراصوتی. زاویهٔ موضعی بین خط ماخ و خط جریان μ است.

جدول ۸-۱ تابع پرنتل-مایر

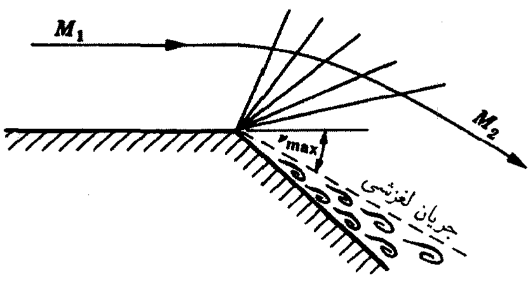
ν (درجه)	۰	۲۶٫۵	۴۹٫۸	۶۵٫۷	۷۷٫۰	۸۵٫۰	۹۱٫۰	۹۵٫۶	۹۹٫۳
M	۱٫۰۰	۲٫۰۰	۳٫۰۰	۴٫۰۰	۵٫۰۰	۶٫۰۰	۷٫۰۰	۸٫۰۰	۹٫۰۰

به دست می‌آید. برای انبساط فراصوتی، θ منفی و برای تراکم، θ مثبت است (شکل ۸-۱۰ را ببینید). برای هوا $\nu_{\max}$ برابر ۲٫۷۷ رادیان یا ۱۳۰° است.

مقدارهای $\nu(M)$ را برحسب درجه در جدول ۸-۱ به اختصار گنجانده‌ایم.[۱]

به عنوان مثال، جریان موجود بر روی سطح محدبی، همچون شکل ۸-۹(الف)، را در نظر بگیرید که از زاویهٔ کامل ۱۰ درجه با ۲ $= M_۱$ رسم شده است. طبق جدول ۸-۱، $۲۶٫۵^\circ = \nu_۱$ و $-۱۰^\circ = \theta_۲$، بنابراین از معادلهٔ (۸-۱۵) نتیجه می‌شود که $۳۶٫۵^\circ = ۱۰^\circ + ۲۶٫۵^\circ = \nu_۲$ و بنابراین $M_۲$ تقریباً برابر ۲٫۳۹ به دست می‌آید. توجه کنید که آهنگ خمیدگی در تعیین حالت پایانی دخالت ندارد. گوشهٔ تیز و خمیدگی ملایم نتیجهٔ یکسانی را برای موجهای انبساطی به دست می‌دهند. در حالت تراکم، فقط خمیدگی ملایم تک‌آنتروپی است و گوشهٔ مقعر تیز به موج ضربه‌ای می‌انجامد.

هنگامی که در اطراف گوشه‌ای با $\nu_{\max} < |\theta|$ انبساط رخ می‌دهد چه اتفاقی می‌افتد؟ در آن موقع، رفتار خطها به‌گونه‌ای‌است که گویا جریان بر روی انبساط $\nu_{\max}$ رخ داده است و ناحیهٔ شارهٔ ساکن بین «جریان لغزشی» یا ناپیوستگی مماسی و جسم قرار دارد. در طول جریان لغزشی فشار پیوسته، ولی سرعت ناپیوسته است، شکل ۸-۱۱ را ببینید. (در عمل، با تشکیل ورقهٔ گردابه، جریان لغزشی و شارهٔ زیر آن ممکن است متلاطم باشد و نه ساکن.



شکل ۸-۱۱ انبساط در گوشه $\nu_{\max} < |\theta|$ با تشکیل جریان لغزشی.

۱. جدول کاملتری را می‌توان در مراجع و پیوست د یافت.

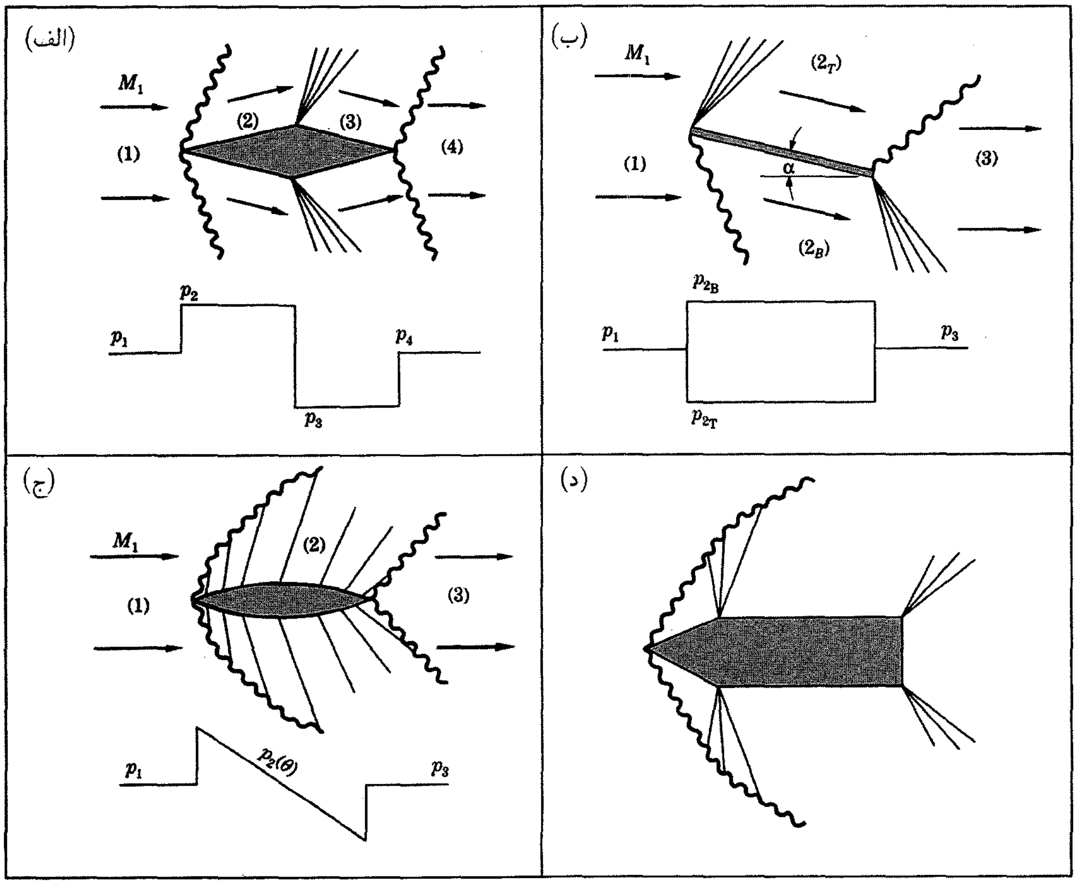
۸-۲-۳ ترکیب موجهای ضربه‌ای مایل و انبساطی

در جریان فراصوتی، با برهم‌نهش جوابهای معادلهٔ جریان انبساطی تک‌آنتروپی و موج ضربه‌ای مایل می‌توان طرح جریان را بر روی شکلهای نسبتاً پیچیده به دست آورد. چون جریان فراصوتی است، اثری از جریان بالادست موجود نیست و ممکن است با «رژه رفتن» از روی جسم، جریان را در امتداد مسیر محاسبه کرد. جریانهای موجود بر روی چند جسم ساده را در شکل ۸-۱۲(ب) نشان داده‌ایم. نمودار فشار نیز در این شکل دیده می‌شود.

در شکل ۸-۱۲(ب)، شارهٔ جاری از بالا و پایین صفحهٔ تخت مایل باید در پشت جسم در فشار آزاد جریان تمام شود. اما، سرعت، دما و چگالی در طول «سطح تماس» اندکی تغییر می‌کند. در این شکل، فشار زیر جسم در میان موج ضربه‌ای افزایش می‌یابد و فشار بالا در میان موج انبساطی کاهش خواهد یافت و به وارد شدن برآ بر روی صفحه می‌انجامد. برخلاف هوابر برآی فروصوتی، هوابر فراصوتی دارای مؤلفه‌ای از این نیروی فشاری در جهت جریان است. این نیرو را، که نیروی پساست، به عنوان پسای موجی می‌شناسند.

در عمل، هواپیماهای فراصوتی بالهایی دارند که از بعضی ملاحظات شبیه بالهای فروصوتی عمل می‌کنند، بنابراین پسای موجی را کاهش می‌دهند. بالهای فروصوتی را می‌توان در هواپیماهای فراصوتی به کار برد، زیرا پسگرایی در بال به ایجاد مؤلفهٔ سرعت عمود بر لبهٔ حملهٔ بال می‌انجامد، که فروصوتی است.

در پروازهای فراصوتی اولیه، بالها نازک و مستقیم (یعنی عمود بر بدنهٔ هواپیما) بودند، و طرح جریان شبیه شکل ۸-۱۲(ب) بود. در نخستین



شکل ۸-۱۲ جریان موج ضربه‌ای- انبساطی در پیرامون جسمهای دوبعدی.

آزمایشها، هواپیماها در ناحیهٔ گذرصوتی بین سرعتهای فروصوتی و فراصوتی قابل کنترل نبودند. در این ناحیه موجی ضربه‌ای عمود بر بال روی سطح رویی بال تشکیل می‌شود. لایهٔ مرزی در موج ضربه‌ای جدا می‌شود، برآ را کاهش می‌دهد و تأثیر سطحهای کنترل را از بین می‌برد. دم هواپیما (سکان افقی) دچار همین افت انرژی می‌شود. در آن زمان راه‌حل این بود که دم را بالا بیاورند تا جریان هوای روی بال از زیر دم بگذرد و از تک هوابری چرخش‌پذیر به عنوان سکان افقی استفاده کنند. این مشکل در طراحی هواپیماهای ابرصوتی جدید با استفاده از بالهای پسگرا حل شده است.

۸-۲-۴ ناحیه‌های ساده و غیرساده

تاکنون دربارهٔ موجهای ضربه‌ای مایل ساده و موجهای تک‌آنتروپی انبساطی یا تراکمی بحث کرده‌ایم. در ناحیه‌هایی که این موجها برهم‌کنش می‌کنند و خمیده می‌شوند (خطهای مشخصهٔ آنها دیگر خط راست نیست)، این راه‌حلهای ساده دیگر اعتبار ندارد و از حل معادلات کامل باید استفاده شود. این معادلات به طور کلی غیرخطی هستند، اما در بعضی از حالتهای ساده همچون جریان حول جسمهای نازک، این معادلات را می‌توان خطی کرد. دربارهٔ این راه‌حلها در بخش ۸-۳ بحث خواهیم کرد. مثالی دربارهٔ جریان غیر ساده در شیپوره را در شکل ۸-۱۳ می‌بینیم.

۸-۲-۵ نظریهٔ هوابر نازک

جریان روی هوابرهای نازک را با زاویه‌های حملهٔ کوچک، در صورتی که موجهای ضربه‌ای کاملاً ضعیف باشند، می‌توان تک‌آنتروپی پنداشت، و در این حالت نظریهٔ موجهای ضربه‌ای-انبساطی بسیار ساده می‌شود. (بعداً همان نتیجه‌ها را از نظریهٔ اختلال خطی شده به دست خواهیم آورد).
برای موجهای ضربه‌ای ضعیف یا موجهای انبساطی، تغییر فشار تقریبی با توجه به معادلهٔ (۸-۷) و (۸-۹) عبارت است از

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{kM^{۲}}{\sqrt{M^{۲}-۱}}\Delta\theta$$

و با فرض اینکه M بسیار نزدیک به $M_۱$ و p نزدیک به $p_۱$ است، داریم

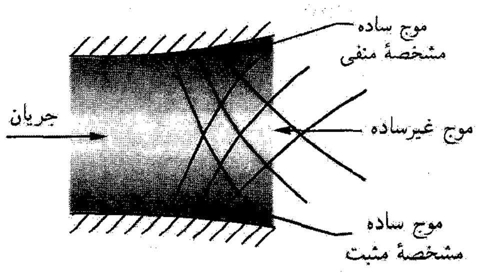
$$\frac{p-p_۱}{p_۱} \approx \frac{kM_۱^{۲}}{\sqrt{M_۱^{۲}-۱}}\theta \tag{۸-۱۶}$$

ضریب فشار C_p به صورت زیر تعریف می‌شود

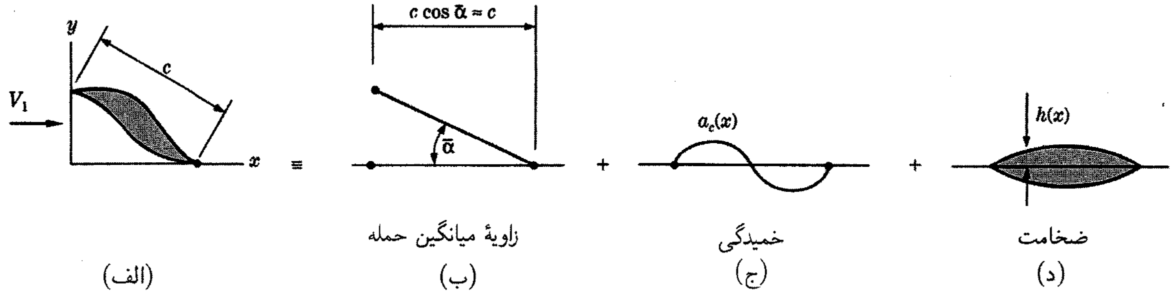
$$C_p = \frac{p-p_۱}{\frac{۱}{۲}\rho_۱ V_۱^{۲}} = \frac{p-p_۱}{\frac{۱}{۲}kp_۱ M_۱^{۲}} = \frac{۲}{kM_۱^{۲}}(p/p_۱ - ۱) \tag{۸-۱۷}$$

که شاخص پایین «۱» بیانگر مقدار جریان آزاد است. بنابراین از معادلات (۸-۱۶) و (۸-۱۷)، خواهیم داشت

$$C_p = \frac{۲\theta}{\sqrt{M_۱^{۲}-۱}} \tag{۸-۱۸}$$



شکل ۸-۱۳ جریان غیرساده در شیپوره. موجهای انبساطی برهم‌کنش می‌کنند و خطهای مشخصه دیگر مستقیم نیستند.



شکل ۸-۱۴ هوابر نازک با زاویهٔ حملهٔ کوچک. هوابر موجود در (الف) را می‌توان به (ب) و (ج) و (د) تجزیه کرد.

برای صفحهٔ تختی با زاویهٔ برخورد α، همچون شکل ۸-۱۲(ب)، C_p همان $C_{pB} = +۲\alpha/\sqrt{M_۱^۲ - ۱}$ برای پایین، و $C_{pT} = -۲\alpha/\sqrt{M_۱^۲ - ۱}$ برای بالاست. در این صورت، ضریبهای برآ و پسا عبارت‌اند از

$$C_L = \frac{\text{برآی واحد طول}}{\frac{۱}{۲}\rho_۱ V_۱^۲ c} = \frac{(p_B - p_T)c\cos x}{\frac{۱}{۲}\rho_۱ V_۱^۲ c} = (C_{pB} - C_{pT})\cos\alpha$$

$$C_D = \frac{\text{پسای واحد طول}}{\frac{۱}{۲}\rho_۱ V_۱^۲ c} = \frac{(p_B - p_T)c\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}\rho_۱ V_۱^۲ c} = (C_{pB} - C_{pT})\sin\alpha$$

که c طول وتر (پهنای هوابر) است. چون α کوچک است، $\cos\alpha \approx ۱$ و $\sin\alpha \approx \alpha$، و سرانجام برای صفحهٔ تخت با زاویهٔ حملهٔ α، خواهیم داشت

$$C_L = \frac{۴\alpha}{\sqrt{M_۱^۲ - ۱}}, \qquad C_D = \frac{۴\alpha^۲}{\sqrt{M_۱^۲ - ۱}} \tag{۸-۱۹}$$

به طور کلی، می‌توان نشان داد که ضریبهای فشار برای هوابرهای نازک از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$C_{pT} = \frac{۲}{\sqrt{M_۱^۲ - ۱}}\left(\frac{df_T}{dx}\right), \qquad C_{pB} = \frac{۲}{\sqrt{M_۱^۲ - ۱}}\left(-\frac{df_B}{dx}\right) \tag{۸-۲۰}$$

که $F_T(x)$ و $F_B(x)$ به‌ترتیب معادلات سطحهای بالا و پایین هوابر هستند (شکل ۸-۱۴ را ببینید). از معادلهٔ (۸-۲۰)، C_D, C_L را می‌توان به صورت زیر یافت

$$C_L = \frac{۴\bar{\alpha}}{\sqrt{M_۱^۲ - ۱}}, \qquad C_D = \frac{۴}{\sqrt{M_۱^۲ - ۱}}\left[\overline{\left(\frac{dh}{dx}\right)^۲} + (\bar{\alpha})^۲ + \overline{\alpha_c^۲(x)}\right] \tag{۸-۲۱}$$

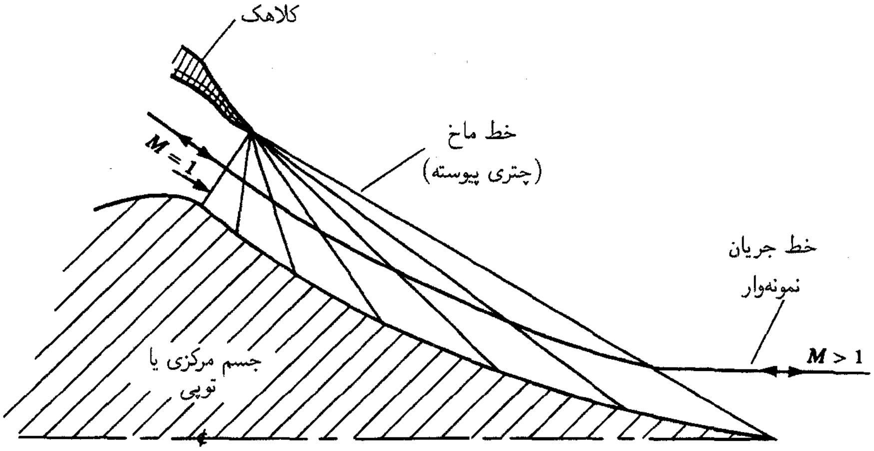
که $h(x)$ نیم‌ضخامت هوابر، $\bar{\alpha}$ زاویهٔ میانگین حمله، و $\alpha_c(x)$ زاویهٔ موضعی حملهٔ خط خمیدگی نسبت به زاویهٔ میانگین حمله با شیب $\bar{\alpha}$، همچون شکل ۸-۱۴، است.

همین نتیجه‌ها را بعداً از نظریهٔ اختلال به دست خواهیم آورد.

۸-۲-۶ شیپورهٔ توپی‌وار

شیپوره‌های واگرا-همگرا را در فصل ۷ بررسی کردیم. به دنبال آن در بخش ۸-۴ دربارهٔ ویژگیهای دوبعدی این شیپوره‌ها بحث خواهیم کرد.

نوع دیگر شیپوره که کاربرد وسیعی در طراحی موتورهای جت فراصوتی دارد، شیپورهٔ توپی‌وار است. جریان در این شیپوره، خارجی است و انبساط از طریق چتریِ انبساط پرنتل-مایر انجام می‌گیرد. شکل ۸-۱۵ نصف مقطع شیپورهٔ توپی‌وار دوبعدی را نشان می‌دهد. جسم مرکزی



شکل ۸-۱۵ شیپورهٔ توپی‌وار. شیپورهٔ تک‌آنتروپی خوش‌طرح در جهت جریان برای شتاب‌دهی یا پخش جریان برگشت‌پذیر است. مقطع (نیمهٔ بالایی) در شکل دیده می‌شود. طراحی مشابهی را می‌توان برای جسم دورانی (با جریان متقارن محوری) انجام داد.

انبساط پیوسته (یا در صورتی که جریان معکوس شود تراکم) به وجود می‌آورد. خطهای مشخصه (خطهای ماخ) را می‌توان با طراحی مناسب در یک نقطه متمرکز کرد. در امتداد هر یک از خطهای ماخ بردار سرعت موازی، و تمام خواص ثابت است. شکل سطح جسم مرکزی را می‌توان به آسانی از خواص تابع پرنتل-مایر و معادلهٔ پیوستگی به دست آورد.

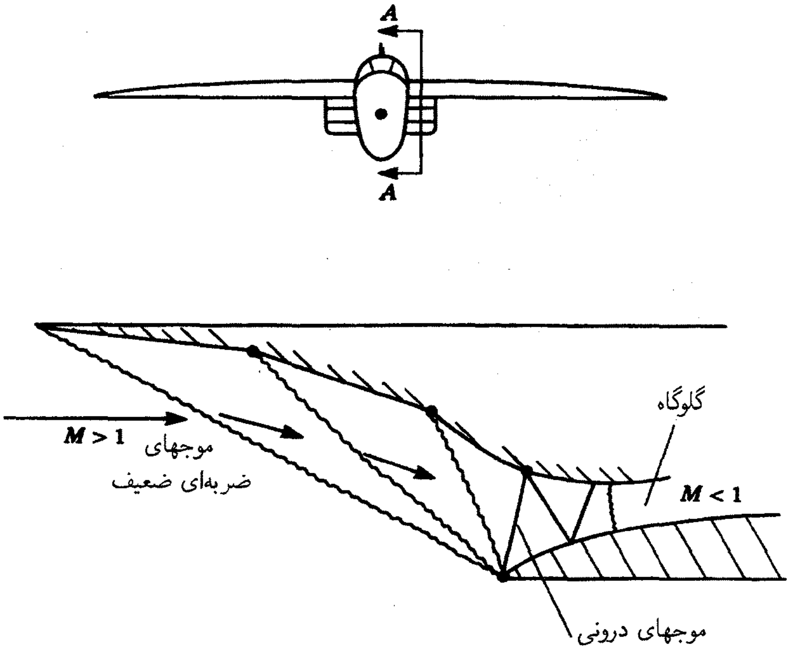
۸-۲-۷ ورودیهای موتور جت در سرعتهای فراصوتی

از شیپوره‌ها برای تولید جریان فراصوتی در موشکها و برعکس برای پخش جریان به فراصوتی و تبدیل آن جریان فروصوتی پرفشار استفاده می‌شود. کاربرد اخیر آن در طراحی ورودی موتورهای جت فراصوتی مورد توجه بسیار است. در این حالت هوا پخش می‌شود و فشار آن قبل از ورود به کمپرسور موتور تا حد امکان بالا می‌رود. با استفاده از شیپورهٔ همگرا-واگرای معمولی (که در فصل ۷ بحث شد) در جهت عکس، جریانی که به خروجی شیپوره وارد می‌شود و از طریق گلوگاه به کمپرسور موتور بر می‌گردد، به طور ایده‌آل به فشار سکون تک‌آنتروپی خود می‌رسد.

عیب شیپورهٔ همگرا-واگرای معمولی آن است که با شتاب‌گیری هواپیما تا سرعت لازم برای ایجاد موج ضربه‌ای کمانی در جلوی موتور، نیروی پسای بزرگی به وجود می‌آید و باعث کاهش فشار سکون در پشت موج ضربه‌ای می‌شود. سرانجام، شیپورهٔ موتور موج ضربه‌ای را می‌بلعد و به کارکردی بدون موج ضربه‌ای همراه با بازیافت عالی فشار دست می‌یابیم. اما، برای بلعیده شدن موج ضربه‌ای، سرعت هواپیما باید فراتر از سرعت بهینه‌اش باشد و سپس به حالت کم‌سرعت برگردد. این عمل نامناسب، و سوخت ناکافی است. وانگهی، هر شیپورهٔ مفروض فقط درگسترهٔ عدد ماخ محدودی به طور مؤثر کار می‌کند.

روشی مؤثرتر برای پخش هوای ورودی بدون افت زیاد فشار سکون، استفاده از شیپورهٔ توپی‌وار است که در بخش قبلی بررسی شد. مزیت این شیپوره‌ها کاری است که به فراسرعت شدن نیاز ندارند و در گسترهٔ عدد ماخ گسترده‌ای به طور آرامتر کار می‌کنند.

نوع استوانه‌ای شیپورهٔ توپی‌وار در هواپیمای شناسایی «پرندهٔ سیاه»، SR-71 که در ارتفاع بالا باید پرواز کند، به کار رفته است. برای هواپیماهایی که باید در گسترهٔ سرعتی گسترده‌تری پرواز کنند، بهتر است از شیپورهٔ (پروازی) متغیر استفاده شود. در عمل، این کار فقط در پیکربندیهایی دوبعدی که یک طرف مجرای مستطیلی را می‌توان تنظیم کرد، انجام‌پذیر است. برای تأمین شکل خمیدهٔ شیپورهٔ توپی‌وار از دو یا سه صفحه یا شیب‌راههٔ کوچک کنترل‌پذیر استفاده می‌کنند. به جای تراکم تک‌آنتروپی پیوسته، مجموعهٔ موجهای ضربه‌ای گسسته، اما ضعیف، به وجود می‌آید. هر چند موجهای ضربه‌ای ضعیف به اندازهٔ سطح خمیدهٔ هموار در بازیابی فشار سکون مؤثر نیستند، بهبودسازی تک‌موج ضربه‌ای قائم اهمیت دارد. شکل ۸-۱۶ مقطع چنین ورودی‌ای را نشان می‌دهد

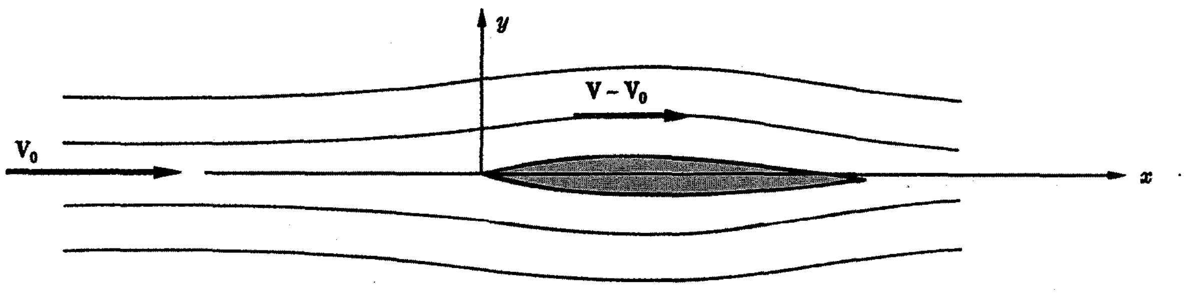


شکل ۸-۱۶ ورودی شیب‌دار تنظیم‌پذیر فراصوتی در جتهای جنگندهٔ جدید. مقطع A-A را نشان داده‌ایم.

۸-۳ اختلالهای کوچک و نظریهٔ خطی شده

۸-۳-۱ نظریهٔ اختلال

اگر جریان را هم آنتروپی (سرتاسر تک‌آنتروپی) در نظر بگیریم، یعنی جریانی غیرچرخشی و بی‌اصطکاک به گونه‌ای که h_0 در سرتاسر آن یکسان باشد، آن‌گاه معادلهٔ (۸-۶) را به عنوان معادلهٔ اصلی حاکم می‌توان به کار برد. موج ضربه‌ای نباید به وجود آید، بنابراین خود را به موجهای ضربه‌ای و انبساطی ضعیف و تقریباً تک‌آنتروپی محدود کنیم. مفهوم فیزیکی آن استفاده از هوابرهای دوبعدی نازک یا بدنه‌های استوانه‌ای نازک برای محدود کردن قدرت موج ضربه‌ای است. به بیان ریاضی، سرعت در همه جا نزدیک به سرعت جریان آزاد $\mathbf{V}_0$ یا $\mathbf{V}_1$، همچون در بخش قبل است. با توجه به شکل ۸-۱۷، سرعت را در هر نقطهٔ جریان به صورت سرعت جریان آزاد $\mathbf{V}_0$ به اضافهٔ سرعت کوچک اختلال $\mathbf{v}'$ تعریف می‌کنیم. بنابراین



شکل ۸-۱۷ اختلال جریان یکنواخت $\mathbf{V}_0$ توسط جسم نازک.

$$
\begin{aligned}
u &= V_\circ + u' \quad & \frac{u'}{V_\circ} &\ll ۱ \\
v &= v' & \frac{v'}{V_\circ} &\ll ۱ \\
w &= w' & \frac{w'}{V_\circ} &\ll ۱
\end{aligned}
\tag{۸-۲۲}
$$

با نشاندن آنها در شکل سه‌بعدی معادلهٔ (۸-۵) و حذف $a^۲$ با استفاده از معادلهٔ انرژی گازهای کامل به شکل زیر

$$
\frac{(V_\circ + u')^۲ + v'^۲ + w'^۲}{۲} + \frac{a^۲}{k-۱} = \frac{V_\circ^۲}{۲} + \frac{a_\circ^۲}{k-۱}
\tag{۸-۲۳}
$$

معادلهٔ اختلال را برای سرعتها به شکل زیر به دست می‌آوریم

$$
\begin{aligned}
(۱ - M_\circ^۲)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = M_\circ^۲ &\left[(k+۱)\frac{u'}{V_\circ} + \frac{k+۱}{۲}\frac{u'^۲}{V_\circ^۲} + \frac{k-۱}{۲}\frac{v'^۲ + w'^۲}{V_\circ^۲}\right]\frac{\partial u'}{\partial x} \\
+ M_\circ^۲ &\left[(k-۱)\frac{u'}{V_\circ} + \frac{k+۱}{۲}\frac{v'^۲}{V_\circ^۲} + \frac{k-۱}{۲}\frac{w'^۲ + u'^۲}{V_\circ^۲}\right]\frac{\partial v'}{\partial y} \\
+ M_\circ^۲ &\left[(k-۱)\frac{u'}{V_\circ} + \frac{k+۱}{۲}\frac{w'^۲}{V_\circ^۲} + \frac{k-۱}{۲}\frac{u'^۲ + v'^۲}{V_\circ^۲}\right]\frac{\partial w'}{\partial z} \\
+ M_\circ^۲ &\left[\frac{v'}{V_\circ}\left(۱ + \frac{u'}{V_\circ}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) + \frac{w'}{V_\circ}\left(۱ + \frac{u'}{V_\circ}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right) + \frac{v'w'}{V_\circ^۲}\left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{۸-۲۴}
$$

که معادلهٔ کاملی است. اگر فرض کنیم که u'، v' و w' خیلی کوچکتر از $V_\circ$ هستند، آن‌گاه معادلهٔ مرتبهٔ دوم سادهٔ زیر به دست می‌آید

$$
\begin{aligned}
(۱ - M_\circ^۲)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} =& M_\circ^۲(k+۱)\frac{u'}{V_\circ}\frac{\partial u'}{\partial x} + M_\circ^۲(k-۱)\frac{u'}{V_\circ}\left(\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) \\
&+ M_\circ^۲\frac{v'}{V_\circ}\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) + M_\circ^۲\frac{w'}{V_\circ}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right)
\end{aligned}
\tag{۸-۲۵}
$$

که برای گسترهٔ کامل عددهای ماخ از فروصوتی و گذرصوتی تا فراصوتی و ابرصوتی مناسب است. اما، شکل خطی ساده‌تری را که برای جریان فروصوتی و فراصوتی، اما نه برای جریان گذر صوتی که $M \approx ۱$ و نه برای جریان ابرصوتی که $M > ۶$، مناسب است، با حفظ فقط جمله‌های مرتبهٔ اول به صورت زیر می‌توان به دست آورد

$$
(۱ - M_\circ^۲)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \circ
\tag{۸-۲۶}
$$

معادلهٔ (۸-۲۵) را می‌توان برای جریان گذرصوتی به صورت سادهٔ زیر در آورد

$$
(۱ - M_\circ^۲)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = M_\circ^۲(k+۱)\frac{u'}{V_\circ}\frac{\partial u'}{\partial x}
\tag{۸-۲۷}
$$

که هنوز معتبر، و در واقع بهتر از معادلهٔ (۸-۲۶) برای جریانهای فروصوتی و فراصوتی است، ولی غیرخطی است. غالباً بهتر است که معادلات اختلال را برحسب پتانسیل اختلال سرعت $\mathbf{v}' = -\nabla\phi$ نوشت، که در این صورت برای معادلهٔ (۸-۲۶) داریم

$$(\text{۱} - M_\circ^\text{۲})\frac{\partial^\text{۲}\phi}{\partial x^\text{۲}} + \frac{\partial^\text{۲}\phi}{\partial y^\text{۲}} + \frac{\partial^\text{۲}\phi}{\partial z^\text{۲}} = \circ \qquad (\text{۸-۲۸})$$

و برای معادلهٔ (۸-۲۷) خواهیم داشت

$$(\text{۱} - M_\circ^\text{۲})\frac{\partial^\text{۲}\phi}{\partial x^\text{۲}} + \frac{\partial^\text{۲}\phi}{\partial y^\text{۲}} + \frac{\partial^\text{۲}\phi}{\partial z^\text{۲}} = \frac{M_\circ^\text{۲}(k+\text{۱})}{V_\circ}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^\text{۲}\phi}{\partial x^\text{۲}} \qquad (\text{۸-۲۹})$$

معادلهٔ (۸-۲۸) خطی است و برای هوابرهای نازک در جریان فروصوتی و فراصوتی به آسانی حل می‌شود. برای عددای ماخ کم، $(\text{۱} - M_\circ^\text{۲}) \approx \text{۱}$ و $\nabla^\text{۲}\phi = \circ$، که دقیقاً همان معادله‌ای است که در فصل ۶ با فرض تراکم‌ناپذیر بودن جریان (و در نتیجه $M \ll \text{۱}$) به کار رفت. اکنون، دربارهٔ جریان فروصوتی تراکم‌پذیر با استفاده از معادلهٔ (۸-۲۸) می‌توان بحث کرد. شکل معادلهٔ (۸-۲۸) از بیضوی برای جریان فروصوتی که $M < \text{۱}$ (و اثر جسم در سرتاسر میدان جریان به جا می‌ماند) تا هذلولوی برای جریان فراصوتی که $M > \text{۱}$ (و جسم هیچ گونه اثری بر جریان بالادست ندارد و جوابها اختلالهایی موج‌گونه‌اند که در امتداد خطهای مشخصه انتشار می‌یابند) تغییر می‌کند.

۸-۳-۲ ضریب فشار در نظریهٔ خطی شده

ضریب فشار تعریف شده با معادلهٔ (۸-۱۷) و فشار p را می‌توان برحسب مؤلفه‌های $\mathbf{V}$ (با استفاده از معادلهٔ انرژی) به صورت زیر نوشت

$$C_p = \frac{\text{۲}}{kM_\text{۱}^\text{۲}}\{[\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(k-\text{۱})M_\text{۱}^\text{۲}(\text{۱} - V^\text{۲}/V_\circ^\text{۲})]^{k/(k-\text{۱})} - \text{۱}\} \qquad (\text{۸-۳۰})$$

با وارد کردن سرعتهای اختلال، بسط معادله و حفظ جمله‌های مرتبهٔ دوم، داریم

$$C_p = -\left[\frac{\text{۲}u'}{V_\circ} + (\text{۱} - M_\circ^\text{۲})\frac{u'^\text{۲}}{V_\circ^\text{۲}} + \frac{v'^\text{۲} + w'^\text{۲}}{V_\circ^\text{۲}}\right] \qquad (\text{۸-۳۱})$$

برای جریانهای صفحه‌ای دوبعدی کافی است که فقط جمله‌های مرتبهٔ اول را نگه داریم، و در این صورت

$$C_p = -\frac{\text{۲}u'}{V_\circ} \qquad (\text{۸-۳۲})$$

برای جریان روی بدنه‌های استوانه‌ای نازک، جملهٔ مرتبهٔ دوم را باید حفظ کرد، و

$$C_p = -\frac{\text{۲}u'}{V_\circ} - \frac{v'^\text{۲} + w'^\text{۲}}{V_\circ^\text{۲}} \qquad (\text{۸-۳۳})$$

۸-۳-۳ شرایط مرزی

مفهوم فیزیکی شرط مرزی این است که بردار سرعت باید مماس بر سطح جسم باشد. اگر سطح جسم را با معادلهٔ زیر تعریف کنیم

$$f(x,y,z) = \circ$$

این شرط مرزی به صورت زیر است

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{\nabla} f = \circ \qquad (\text{۸-۳۴})$$

با نوشتن صریح معادلهٔ (۸-۳۴) برحسب u'، v' و w' به شرط لازم برای جریان دوبعدی در صفحهٔ xy (با y کوچک)، که تا مرتبهٔ سازگاری دقیق است، می‌رسیم

$$v'(x, y=\circ) = V_\circ\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{جسم}} \qquad (\text{۸-۳۵})$$

در جریان صفحه‌ای (برای جسمهای نازک و اساساً سه‌بعدی تخت همچون بالها) جریان شبه‌دوبعدی است و شرط مرزی روی سطح به صورت زیر در می‌آید

$$v'(x, \circ z) = V_\circ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\text{جسم}} \tag{۸-۳۶}$$

که جسم در صفحهٔ xz قرار دارد و تقریباً در صفحهٔ xy دوبعدی است.

برای جریان حول جسمهای استوانه‌ای نازک، وضعیت قدری پیچیده‌تر است و در اینجا بررسی نمی‌شود. خواننده می‌تواند به مرجعها مراجعه کند.

یادآور می‌شویم که سرعت $v'(x)$ در $y = \circ$، و نه واقعاً روی سطح جسم، محاسبه می‌شود. این تقریب با تقریب جسم نازک همخوانی دارد.

۸-۳-۴ نظریهٔ هوابر نازک فراصوتی

نظریهٔ اختلال را می‌توان برای هوابرهای نازک دوبعدی نیز به کار برد. نتیجه‌ها مشابه جوابهای موج ضربه‌ای ضعیف‌اند که قبلاً در بخش ۲.۸ بررسی کردیم

۸-۴ روش مشخصه‌ها

در جریانهای پیچیده که نه نظریهٔ سادهٔ موج ضربه‌ای-انبساطی بسنده می‌کند و نه نظریهٔ خطی شده، معادلات غیرخطی اولیه را باید با روشهای عددی حل کرد. روش مشخصه‌ها امکان ساده‌سازی این معادلات را در گسترهٔ فراصوتی فراهم می‌کند و شیوهٔ ریاضی تثبیت‌شده‌ای را که سازگاری خوبی با تحلیل عددی دارد، در اختیار می‌گذارد.

۸-۴-۱ معادلات بیضوی و هذلولوی

معادلاتی که جریان فروصوتی را بیان می‌کنند بیضوی، و معادلاتی که جریان فراصوتی را بیان می‌کنند هذلولوی‌اند و روشهای تحلیل عددی به کار رفته برای این دو کاملاً متفاوت‌اند. در جریان فروصوتی، هر اختلالی را در سرتاسر میدان جریان کلی می‌توان احساس کرد، و از روش واهلش برای حل این معادلات بیضوی باید استفاده کرد. در اینجا، شرایط مرزی را باید در امتداد مرزی که کاملاً ناحیهٔ مورد نظر را در بر می‌گیرد، تعیین کرد و میدان جریان کلی را به طور همزمان در نظر گرفت. اما، در جریان فراصوتی (با معادلات هذلولوی)، اختلالها و اطلاعات فقط در جهت جریان پایین‌دست، انتشار می‌یابد و شرایط مرزی را باید فقط در امتداد جسم واقع در بالادست جریان مشخص کرد. اکنون، با «قدم زدن» به سوی پایین‌دست جریان می‌توان محاسبات را، بدون نیاز به تکرار آنها در میدان جریان برای احتساب شرط جریان پایین‌دست همچون در جریان فروصوتی، انجام داد.

معادلهٔ هذلولوی معادله‌ایست که به مشخصه‌ها منجر می‌شود، اما تعریف دقیق ریاضی آن را در اینجا ارائه نمی‌دهیم. تفاوتهای عمدهٔ بین معادلات دیفرانسیل بیضوی و هذلولوی را، با فرض کردن ϕ به عنوان متغیر وابسته، در جدول زیر آورده‌ایم.

معادلهٔ بیضوی	معادلهٔ هذلولوی
۱. برای جلوگیری از تکینگی، ϕ یا $\partial\phi/\partial n$ را باید از قبل روی مرزی بسته تعریف کرد.	۱. ϕ یا $\partial\phi/\partial n$ را می‌توان روی مرزی باز مشخص کرد. تکینگیها به علت شرایط مرزی مقرر روی مرز بسته به وجود می‌آیند.
۲. تغییر در شرایط مرزی بر روی ناحیهٔ کلی جریان اثر می‌گذارد.	۲. تغییر در شرط مرزی فقط بر روی ناحیهٔ محدودی از جریان اثر می‌گذارد.
۳.حل معادله باید تحلیلی باشد.	۳. راه حل نباید حتماً تحلیلی باشد (موجهای ضربه‌ای همان تکینگیها هستند).

۸-۴-۲ مشخصه‌ها

در اینجا، نظریهٔ عمومی ریاضی معادلات مشخصه و معادلات دیفرانسیل هذلولولی را بحث نخواهیم کرد. به جای آن، به بحث فیزیکی ساده‌ای دربارهٔ مشخصه‌ها، به همان صورتی که در دینامیک گازی دوبعدی ظاهر می‌شوند، می‌پردازیم و سپس روش محاسبهٔ عددی را به اختصار بیان می‌کنیم.

نخست، جریان هم‌آنتروپی دوبعدی پایایی را در نظر می‌گیریم. ساختار موجهای ضربه‌ای را با معادلات این جریان نمی‌توان بیان کرد، زیرا موجهای ضربه‌ای شامل فرایندهای برگشت‌ناپذیرند. اما، موجهای ضربه‌ای می‌توانند جوابهای مجاز باشند (اگر شرایط مرزی از نوع خاصی باشد)، زیرا موجهای ضربه‌ای متناظر با تکینگیهای جواب دستگاه معادلات هذلولوی‌اند. از این رو، جریان در ناحیه‌هایی که شامل موجهای ضربه‌ای نیستند و یا توسط موجهای ضربه‌ای محصور می‌شوند، هم‌آنتروپی خواهد بود. اگر موج ضربه‌ای رخ دهد، برای تعیین مکان آن به محاسبات آزمون و خطا نیاز است. به‌عنوان مثال، در شیپوره‌ای همگرا-واگرا با کارکرد بحرانی، اگر هر دو فشار ورودی و خروجی مشخص باشند، موجی ضربه‌ای در پایین‌دست جریان گلوگاه رخ می‌دهد. جریان در این قسمت پایین‌دست گلوگاه، فراصوتی است و با استفاده از روش مشخصه‌ها می‌توان آن را بازنمایی کرد. اما، با پیشروی به سوی مقطع خروجی در پایین‌دست جریان، فشارنهایی ممکن است فشاری نباشد که قبلاً مشخص شده بود. فقط با واردشدن موج ضربه‌ای در شیپوره، فشار خروجی متناظر با مقدار فشار قبلی خواهد بود. بنابراین، هرگاه تعداد شرایط مرزی در دستگاه معادلات هذلولوی زیاد باشد، به تکینگی (موج ضربه‌ای) خواهد انجامید. البته، (این فراتعیین‌شدگی ممکن است مشخصه‌ای فیزیکی، و نه صرفاً ریاضی، باشد.) معمولاً روش مشخصه‌ها مفیدترین روش در حالتی است که موج ضربه‌ای رخ نمی‌دهد و فقط شرایط مرزی روی جسم واقع در بالادست جریان مشخص شده‌اند. در این صورت، با پیشروی به سوی پایین‌دست جریان و بدون نیاز به تکرار یا آزمون و خطا، محاسبات را در امتداد مسیر می‌توان انجام داد.

معادلهٔ (۸-۲۸) برحسب ϕ به شکل زیر است

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

اگر $M_0 < 1$، این معادله بیضوی و اگر $1 < M_0$، هذلولوی است. اما به طور کلی، به استفاده از روش مشخصه‌ها برای حل این معادلهٔ سادهٔ خطی شده نیاز نیست. به جای آن، معادلات غیرخطی کامل مورد نظر است. معادلات عمومی (۸-۵) را در نظر می‌گیریم

$$(u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x}+(v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y}+uv\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

پرسش این است: با چه شرطی این معادلات به معادلات ساده‌ای تبدیل می‌شوند که متغیری یک‌بعدی (در هر نقطه در فضا) دارند؟ یعنی، تغییرات فقط عمود بر خط مشخصه، و نه در امتداد آن، است. اکنون، در جستجوی شرطی هستیم که با ترکیب معادلات بالا به شکل کلی زیر به دست آید

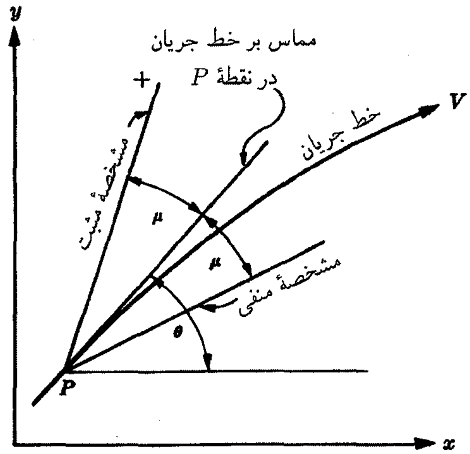
$$A\frac{\partial u}{\partial \alpha}+B\frac{\partial v}{\partial x}=0 \qquad (۸\text{-}۳۷)$$

که $\partial/\partial\alpha=\cos\chi\partial/\partial x+\sin\chi\partial/\partial y$. با فرض $\tan\chi=\zeta$، و ضرب نخستین معادلهٔ (۸-۵) در λ_1 و دومین معادله در λ_2 و جمع آنها، در صورتی که λ_1 و λ_2 در شرایط خاص صدق کنند، شکل معادلهٔ (۸-۳۷) را به صورت زیر می‌توان یافت

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1 uv}{\lambda_1(a^2-u^2)}=\zeta,\qquad \frac{\lambda_1(v^2-a^2)}{(\lambda_2-\lambda_1 uv)}=\zeta$$

با حذف λ_1 و λ_2 رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$(a^2-u^2)\zeta^2-2uv\zeta+(a^2-v^2)=0 \qquad (۸\text{-}۳۸)$$



شکل ۸-۱۸ دستگاه مختصات قطبی و مشخصه‌ها.

ζ جهت α را تعیین می‌کند؛ ζ فقط در صورتی وجود دارد که

$$(u^۲ + v^۲) > a^۲; \qquad M > ۱$$

یعنی، جریان فراصوتی است ($M > ۱$). جهتهای α، که با دو ریشه معادلهٔ (۸-۳۸) تعریف می‌شوند، مشخصه‌های مثبت و منفی‌ای هستند که با ζ_- و ζ_+ مشخص می‌شوند. می‌توان نشان داد که

$$\zeta_+\zeta_- = (a^۲ - v^۲)/(a^۲ - u^۲)$$

با دستیابی به $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$، می‌توان نشان داد که اگر $dy = \zeta_+ dx$ و سپس $du = -\zeta - dv$ در نظر بگیریم و اگر رابطه $dy = -\zeta_- dx$ سپس $du = -\zeta_+ dv$ را باید در نظر گرفت. بنابراین به رابطه‌های زیر می‌رسیم که هم‌ارز معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۸-۵) است،

$$\begin{aligned} &\text{روی} \quad dy = \zeta_+ dx: \quad du = -\zeta_- dv، \\ &\text{روی} \quad dy = -\zeta_- dx: \quad du = -\zeta_+ dv، \end{aligned} \tag{۸-۳۹}$$

اما، کار در مختصات قطبی مناسبتر است. فرض می‌کنیم که در شکل ۸-۱۸، $u = V\cos\theta$ و $v = V\sin\theta$، بنابراین

$$du = \cos\theta dV - V\sin\theta d\theta \quad \text{و} \quad dv = \sin\theta dV + V\cos\theta d\theta$$

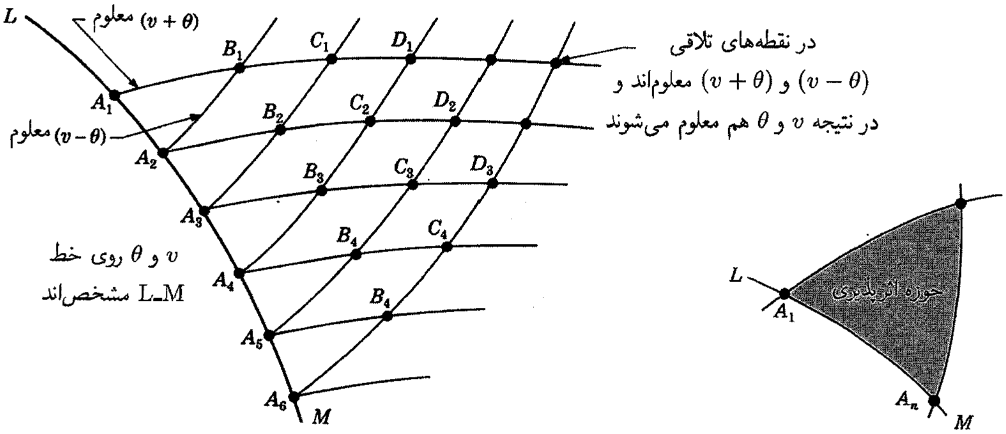
با نشاندن آنها در معادلهٔ (۸-۳۹)، مشخصه‌های (+) و (−) به ترتیب عبارت‌اند از

$$\frac{\cot\mu}{V} dV = +d\theta, \qquad \frac{\cot\mu}{V} dV = -d\theta \tag{۸-۴۰}$$

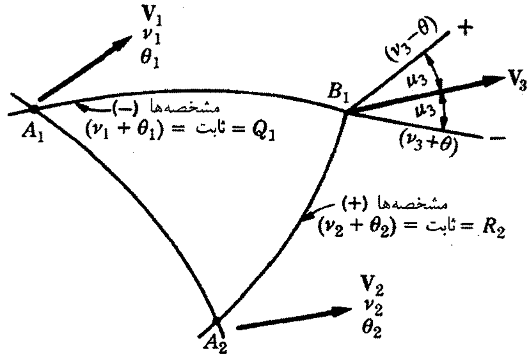
و $\zeta_+ = \tan(\theta + \mu)$ و $\zeta_- = \tan(\theta - \mu)$. سپس از معادلهٔ انرژی برای بیان V برحسب M می‌توان استفاده کرد و

$$\pm d\theta = \frac{\sqrt{M^۲ - ۱}\, dM}{M[۱ + \frac{۱}{۲}(k - ۱)M^۲]} = dv(M)$$

که پس از انتگرال‌گیری $v(M)$ به دست می‌آید. بنابراین چون، $\pm d\theta - dv = ۰$، $(v - \theta)$ با مشخصهٔ (+) ثابت است و $(v + \theta)$ با مشخصهٔ (−) ثابت خواهد بود. اگر هر دو پارامتر v و θ روی خط L-M مشخص شده باشند، با کار روی جریان پایین‌دست و تعیین نقطه‌های تلاقی θ و



شکل ۸-۱۹ (الف) ساختار مشخصه‌ها در مختصات قطبی.



شکل ۱۹.۸(ب) جزئیات روش محاسباتی.

v می‌توان شبکه‌ای را ساخت. با معلوم بودن v و θ، عدد ماخ، جهت جریان، و سرعت را می‌توان یافت. با توجه به شکل ۸-۱۹(الف)، v و θ را در امتداد پاره‌خط L-M مشخص می‌کنیم. آنگاه جهت مشخصه‌ها معلوم می‌شوند، که روی مجموعهٔ نقطه‌های دلخواه $A_۱$، $A_۲$ ... A_n قرار دارند. مشخصه‌های $(+)$ و $(-)$ را به نخستین مجموعهٔ تلاقیهای $B_۱ \ldots B_{n-۱}$ متصل می‌کنیم. در هر یک از این نقطه‌ها $(v-\theta)$ و $(v+\theta)$ معلوم‌اند و بنابراین v و θ را می‌توان صریحاً یافت و سپس μ، M و V و جهت جدید مشخصه‌های $\pm$ را کشید. این مجموعهٔ خطهای جدید در نقطه‌های $C_۱$، $C_۲$، ... $C_{n-۲}$ تلاقی می‌کنند. این فرایند در سرتاسر گسترهٔ اثرپذیری که با مشخصه‌های $A_۱$ تا A_n محصور شده‌اند، ادامه می‌یابد. به طور کلی، در ناحیه‌های جریان غیرساده مشخصه‌ها خمیده‌اند، اما پاره‌خطهایی بین تلاقیها با خطهای راست کشیده شده‌اند. هر چه شبکه ظریف‌تر باشد، جواب دقیق‌تر خواهد بود.

برای تشریح کامل‌تر، نمودار بزرگ شدهٔ ۸-۱۹(ب) را در نظر می‌گیریم. در نقطهٔ $B_۱$، داریم

$$v_۳ = \frac{۱}{۲}(v_۱ + v_۲) + \frac{۱}{۲}(\theta_۱ - \theta_۲)$$

و

$$\theta_۳ = \frac{۱}{۲}(v_۱ - v_۲) + \frac{۱}{۲}(\theta_۱ + \theta_۲)$$

خطهای مشخصه در فاصلهٔ بین نقطه‌های شبکه را راست فرض می‌کنیم.

نظریهٔ کامل مشخصه‌ها برای جریان تراکم‌پذیر خارج از بحث ماست و علاقمندان می‌توانند به مرجعها مراجعه کنند.

۸-۴-۳ روش موجهای ضعیف یا روش ناحیه به ناحیه

روش محاسباتی ساده‌ای را در جریان دوبعدی می‌توان به کار برد که اساساً هم‌ارز روش مشخصه‌هاست، اما قدری ساده‌تر و از نظر فیزیکی قابل درک‌تر است. در هر نقطهٔ جریان فراصوتی خط مشخصه‌ای را می‌توان رسم کرد و پیوستاری حاوی خطهای مشخصه در جریان وجود دارد. از سوی دیگر، روش موجهای ضعیف مبتنی بر انبساط یا تراکم واقعی موجهاست. در جریان گذرنده از روی دیواره یا سطح جامد، خطهای مشخصه را می‌توان از هر نقطه‌ای کشید. اما، موجهای متناهی در نقطه‌های مجزایی ایجاد می‌شوند که محل برخورد (رأس) پاره‌خطهای راست‌اند. اگر دیواره محدب باشد و آن را با مجموعهٔ پاره‌خطهای راست بتوان تقریب زد، در هر یک از این نقطه‌های برخورد (رأس) چتری انبساطی تشکیل می‌شود. اگر دیواره مقعر (با زاویه‌های کوچک) باشد، موجهای ضربه‌ای ضعیف در هر یک از گوشه‌های درونی تشکیل می‌شود (شکل ۸-۲۰).

در روش موجهای ضعیف هر یک از چتریهای انبساطی یا موجهای ضربه‌ای ضعیف با یک موج تک‌آنتروپی‌ای جایگزین می‌شود که هم‌ارز چتری یا موج ضربه‌ای ضعیف (برحسب بردار سرعت و تغییرات خاصیت) است.

روش محاسباتی برای جریان دوبعدی مطابق شکل ۸-۲۱ به ترتیب زیر است:

۱. سطح خمیدهٔ (الف) با پاره‌خطهای راست (ب) جایگزین می‌شود.

۲. چتریهای انبساطی و موجهای ضربه‌ای واقعی (ب) با موجهای تکی (ج) جایگزین می‌شوند.

۳. موجهای تکی چتریهایی را که با خطهای ماخ تحت زاویهٔ μ نسبت به بردارهای سرعت ترسیم شده‌اند، «دو نیم» می‌کنند.

۴. رابطهٔ تغییر جهت جریان $\Delta\theta$ در میان موج با تغییر تابع پرنتل‌-مایر در عرض موج به صورت زیر است

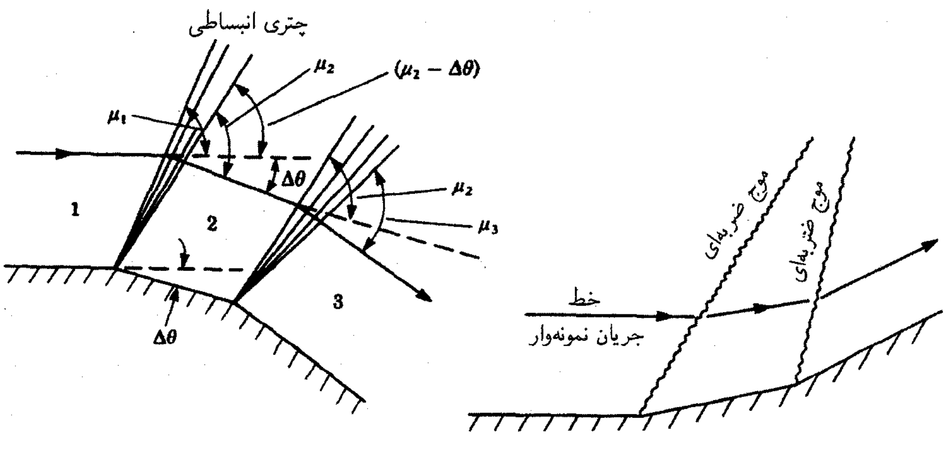
$$\Delta\nu = \pm|\Delta\theta|$$

علامت مثبت برای انبساط و علامت منفی برای تراکم به کار می‌رود. $\Delta\theta$ میزان انحراف جهت جریان است، یعنی

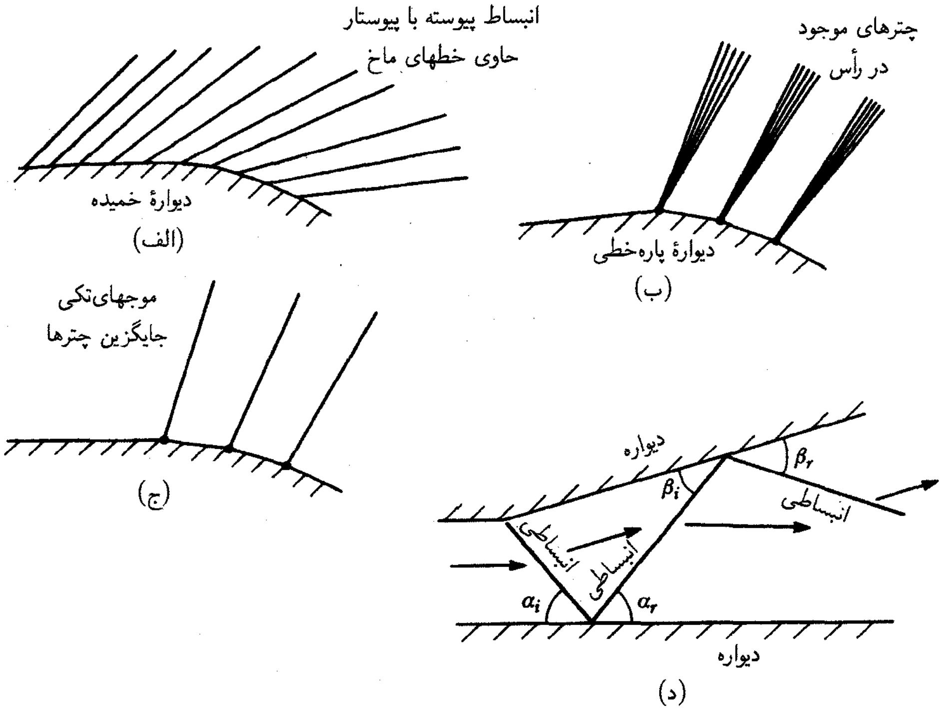
$$\Delta\nu = \nu(\text{بالادست جریان}) - \nu(\text{پایین‌دست جریان})$$

موجی که از گوشهٔ محدب سرچشمه می‌گیرد همیشه انبساطی، و موجی که از گوشهٔ مقعر سرچشمه می‌گیرد، تراکمی است.

۵. قدرت موج $\Delta\theta$ در طول هر موج مفروض، حتی وقتی که این موج با موج دیگر برخورد می‌کند و از میان آن می‌گذرد، بدون تغییر باقی می‌ماند. اما، موج ممکن است تغییر جهت دهد. بنابراین، $\Delta\theta$ و $\Delta\nu$ در طول موج ثابت خواهند ماند. البته، مقدارهای واقعی ν در دو طرف موج ممکن است در نقطه‌های تلاقی تغییر کنند اما $\Delta\nu$ و $\Delta\theta$ در طول موج ثابت‌اند.



شکل ۸-۲۰ تشکیل موجهای انبساطی و موجهای ضربه‌ای ضعیف در گوشه‌ها.



شکل ۸-۲۱ تقریب موجهای ضعیف برای سطحهای خمیده.

۶. موج بازتابیده از دیواره به صورت موج انبساطی یا موج تراکمی (با همان قدرت) باقی می‌ماند. بنابراین زاویهٔ برخورد α_i باید برابر زاویهٔ بازتاب α_r باشد [شکل ۸-۲۱د]. همین گونه، $\beta_i = \beta_r$.

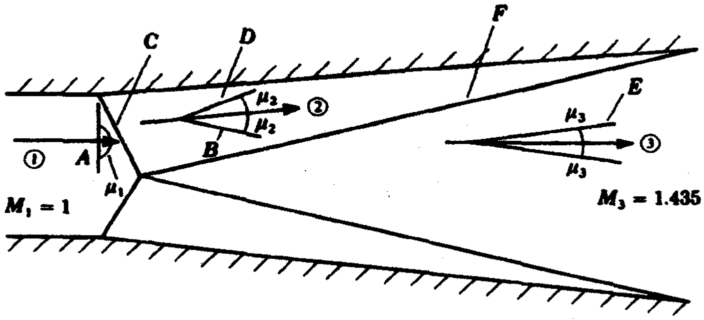
۷. موج بازتابیده از سطح تماس یا جریان لغزشی از موج انبساطی به موج تراکمی، و برعکس، تبدیل می‌شود. در این حالت نیز قدرت موج ثابت باقی می‌ماند و زاویهٔ برخورد باید با زاویهٔ بازتاب برابر باشد.

اگر نقطهٔ برخورد موج با دیواره، نقطهٔ رأسی باشد که انحراف $\Delta\theta$ جریان را هماهنگ می‌کند، امکان حذف موج و عدد بازتاب آن وجود دارد، زیرا اکنون جریان موازی با دیواره است [شکل ۸-۸(د)].

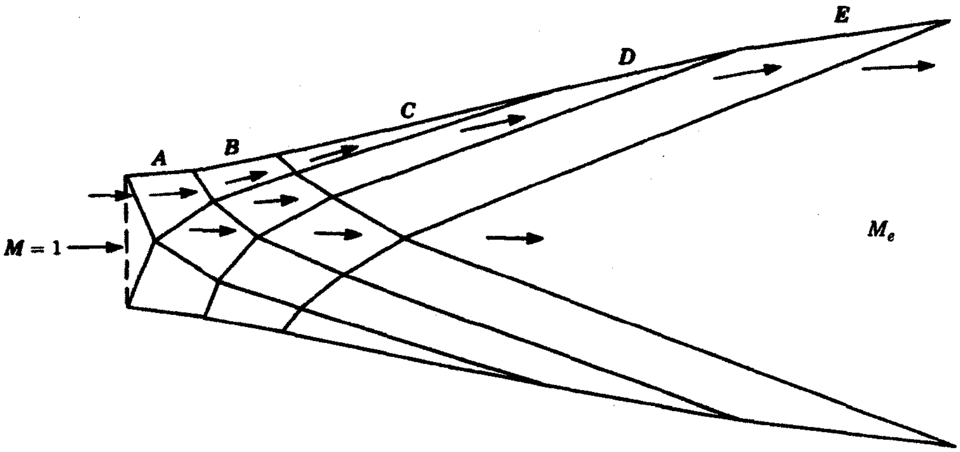
برای توصیف این روش شیپورهٔ سادهٔ دوبعدی فراصوتی‌ای طراحی خواهیم کرد. در فصل ۷ دربارهٔ جریان شیپوره بحث کردیم، که تنها پارامتر فیزیکی مهم را نسبت مساحت بدون توجه به طول در نظر گرفتیم. اکنون، خواهیم دید که شکل واقعی شیپوره برای ایجاد جریان یکنواخت و هموار در خروجی شیپوره بسیار مهم است و در واقع شیپوره را در دو بعد باید طراحی کرد. در اینجا، بحث خود را به جریان دوبعدی مانند جریان بین دو سطح خمیدهٔ موازی، نه جریان متقارن محوری محدود می‌کنیم. جریان موجود در شیپوره‌های دایره‌ای را می‌توان با روشهای همانندی بررسی کرد، ولی خارج از بحث فعلی ماست. ویژگی دوبعدی طرح شیپوره در طراحی شیپوره‌های موشک برای رانش بیشینه، و در طراحی تونلهای باد برای جریان آرام بسیار مهم است.

به طور کلی، شیپوره‌ها را باید با دیواره‌های خمیدهٔ هموار طراحی کرد. دیوارهٔ خمیده را با پاره‌خطهای راست کوتاه می‌توان تقریب زد. وانگهی، شیپوره نباید آن قدر بلند باشد که ضخامت لایهٔ مرزی خیلی زیاد شود، و سرعت واگرا شدن دیواره‌ها نباید آن قدر زیاد باشد که لایهٔ مرزی جدا شود. بنابراین، برای هر عدد ماخ خروجی مفروض M_e و نسبت مساحت خروجی به مساحت گلوگاه متناظر (A_e/A^*)، گستره‌ای از طرحهای قابل قبول برای شیپوره‌ها با طولهای مختلف وجود دارد. هر چه پاره‌خطهای به کار رفته راست‌تر باشد (و $\Delta\theta$ برای هر یک از گامها کوچکتر باشد)، این روش دقیق‌تر خواهد بود.

شیپوره تک دیوارهٔ مستقیم واگرا در شکل ۸-۲۲ ساده‌ترین شیپوره است. فقط به یک مجموعهٔ موجهای تلاقی‌کننده (انبساطی) نیاز است.



شکل ۸-۲۲ شیپورهٔ سادهٔ دوبعدی نمایانگر روش موجهای ضعیف. سمت‌گیری C در بین راه A و B است. سمت‌گیری F در بین راه D و E است.

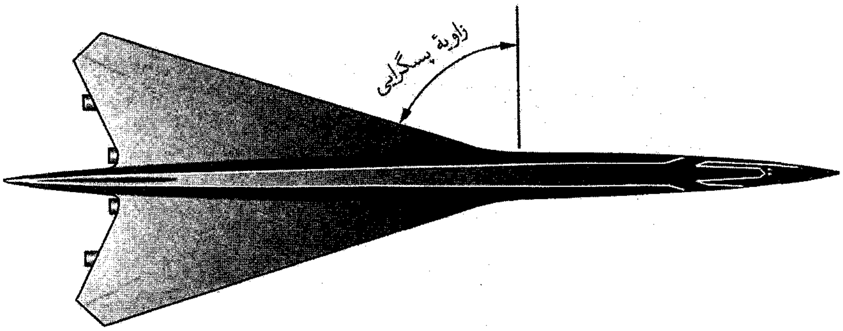


شکل ۸-۲۳ طرح شیپوره با استفاده از شیوهٔ موج ضعیف.

برای $M_e = ۱٫۴۳۵$، می‌بینیم که $\nu_e = ۱۰°$ و در ورودی $\nu_1 = ۰$. $\Delta\theta$ در طول هر یک از موجها یکسان است و شاره دو موج را قطع می‌کند. بنابراین، $|\Delta\theta|$ در طول هر یک از موجها ۵° است و $\mu_1 = ۹۰°$، $\nu_2 = ۵°$، $M_2 = ۱٫۲۵۶$، $\mu_2 = ۵۲٫۷۳۸°$، $\nu_3 = ۱۰°$، $M_3 = ۱٫۴۳۵$ و $\mu_3 = ۵۱٫۶۴۲°$. با بررسی شکل ۸-۲۲ و توجه به هندسهٔ آن، مشخصهٔ کامل شیپوره با استفاده از روش نموداری یا محاسبهٔ تحلیل ساده به دست می‌آید. نسبت $\frac{A_e}{A^*}$ را می‌توان از این راه به دست آورد و آن را با مقدار ۰٫۸۸۱ در جدولهای فراصوتی مقایسه کرد. هر چه زاویهٔ $\Delta\theta$ کوچکتر باشد، نتیجه‌ها دقیق‌ترند.

طرحهای بهتر برای عددهای ماخ بالاتر مستلزم استفاده از تعداد دلخواهی پاره‌خطهای راست، مطابق شکل ۸-۲۳، است. طراحی خود را برای عدد ماخ خروجی M_e با زاویهٔ کل $\Delta\theta$ متناظر انجام می‌دهیم. $\Delta\theta$ همان $\nu_e - \nu_1$ است (ν_1 صفر است، زیرا $M = ۱$). در این مثال، ناحیهٔ انبساط اولیه‌ای حول دو پاره‌خط کوتاه A و B با طول دلخواه به وجود می‌آید، سپس انبساط نهایی از طریق موجهای گروه مقابل شکل می‌گیرد. توجه کنید که در این طرح، دو پاره‌خط A و B را انتخاب کردیم و شش انبساط هر یک برابر $\Delta\frac{\theta}{۶}$ وجود دارند که سرانجام خود را با جریان ورودی همراستا می‌کنند. یادآور می‌شویم که طول پاره‌خطهای C، D و E و جهتهای آنها دلخواه نیستند، اما آنها را با انتخاب A، B و $\Delta\theta$ می‌توان تعیین کرد. با انتخاب جهت صحیح پاره‌خطهای C، D و E، که هر یک به اندازهٔ $\Delta\frac{\theta}{۶}$ نسبت به پاره‌خط قبلی می‌چرخند، این موجها حذف می‌شوند.

به طور کلی، برای هر عدد ماخ خروجی مفروض M_e، انحراف کلی $\Delta\theta$ متناظری وجود دارد که از طریق بسط n موج انجام می‌گیرد؛ اگر همهٔ موجها توسط دیواره حذف شوند n باید عددی زوج باشد. تعداد پاره‌خطهای اولیهٔ دلخواه که باید انتخاب شود، $(n/۲ - ۱)$ است و هر یک باید به طور متوالی به اندازهٔ $\Delta\theta/n$ بچرخند. طول آنها دلخواه است، اما باید آن قدر کوتاه باشد که از بازتاب گروه موجهای مقابل جلوگیری شود. با گراییدن طول به سوی صفر، این طراحی به صورت سادهٔ شکل ۸-۲۲ در می‌آید.



شکل ۸-۲۴ هواپیمای فراصوتی جدید. زاویهٔ پسگرایی بزرگتر از زاویهٔ ماخ است، بنابراین مؤلفه عمودی سرعت روی لبهٔ حملهٔ بال، فروصوتی است.

همچنین، امکان افزایش طول شیپوره از طریق بازتاب موجها از دیواره وجود دارد (با کاهش زاویهٔ دوران پاره‌خطها). در این حالت، موجها بازتابیده می‌شوند و با ناحیهٔ غیرسادهٔ دیگر برهم‌کنش می‌کنند و سرانجام، با برخورد به دیواره در آن سوی پایین‌دست جریان حذف می‌شوند.

هر یک از ناحیه‌های ذوزنقه‌ای محصور با این موجها دارای خواص مختلف شاره‌ای است. موجها در حین عبور از تقاطعها تغییر جهت می‌دهند و مکان آنها را می‌توان با استفاده از این قاعده که خطهای ماخ در هر طرف موج نصف می‌شوند، تعیین کرد.

۸-۵ هواپیماهای فراصوتی

در تمرینهای واقعی، پسای موجی موجود بر روی بالها در پروازهای فراصوتی، با تشکیل موج ضربه‌ای-انبساطی، بسیار بیشتر از پسای بال فروصوتی است. در نتیجه، هواپیماهای فراصوتی به گونه‌ای طراحی شده‌اند که بالها عملاً به طور فروصوتی عمل می‌کنند. این کارکرد با بزرگترکردن زاویهٔ پسگرایی نسبت به زاویهٔ ماخ انجام می‌شود (شکل ۸-۲۴). در این حالت، مؤلفهٔ سرعت عمود بر لبهٔ حمله فروصوتی است و رفتار بال اساساً شبیه هوابر فروصوتی خواهد بود. اما، بدنهٔ هواپیما موج ضربه‌ای دماغه را تولید می‌کند. البته، با مخروطی کردن دماغه به حد نوک سوزن برای ضعیف کردن موج و با تغییر دادن درست سطح مقطع بدنهٔ هواپیما از طریق به اصطلاح قاعدهٔ مساحت (به گونه‌ای که شبیه بطری نوشابه شود)، پسای موجی را می‌توان کمینه ساخت.

بالها جسمهایی سه‌بعدی هستند و بنابراین در محاسبهٔ جریان باید سه‌بعدی در نظر گرفته شوند. جزئیات آن فراتر از حیطهٔ این بحث است، اما باید به یاد داشت که پسگرایی باعث رفتار بال به صورت هوابر فروصوتی از نظر مشخصه‌های برآ خواهد شد. یکی از اثرهای افزایش پسگرایی ایجاد پایداری در هواپیما به روشی مشابه اثر زاویهٔ دووجهی مثبت است. در حقیقت، زاویهٔ دووجهی در بالهای پسگرایی شدید ممکن است منفی باشد (که به ظاهری افتاده می‌انجامد).

مراجع

1. Anderson, John D., Jr., *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill, 1984.
2. Anderson, John D., Jr., *Introduction to Flight*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1985.
3. Anderson, John D., Jr., *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*, McGraw-Hill, 1982.
4. Howarth, L. (Editor), *Modern Developments in Fluid Dynamics, High Speed Flow*, Vols. 1 and 2, Oxford University Press, 1956.
5. Jones, R. T., and Cohen, D., *High Speed Wing Theory*, Princeton University Press, 1960.
6. Kuethe, A. M., and Chow, C., *Foundations of Aerodynamics*, 4th ed., John Wiley, 1986.
7. Liepmann, H. W., and Roshko, A., *Elements of Gasdynamics*, John Wiley, 1957.
8. Owczarek, J. A., *Fundamentals of Gas Dynamics*, International Textbook, 1964.
9. Shapiro, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Vols. 1 and 2, Ronald Press, 1952.
10. Zucrow, M. J., and Hoffman, J. D., *Gas Dynamics*, Vols. I and II, John Wiley, 1976.

مسائل حل شده

۸-۱ جریان هوا در ۵۲۰°R و فشار جو از میان موج ضربه‌ای مایلی با زاویهٔ °۵۰ نسبت به جریان می‌گذرد (شکل ۸-۲۵). عدد ماخ اولیه ۲ است. شرایط را در پایین‌دست جریان و زاویهٔ انحراف جریان را تعیین کنید.

با توجه به شکل ۸-۳، θ تقریباً °۱۸ است. از معادلهٔ (۸-۷) شرایط پایین‌دست جریان (نقطهٔ ۲) را برحسب شرایط بالادست جریان (نقطهٔ ۱) می‌توان به دست آورد. به جای آن، از جدولهای موج ضربه‌ای قائم می‌توانستیم استفاده کنیم. در این حالت، مقدار عددی $M_۱$ در جدول به صورت $M_۱ \sin\beta$ و مقدار $M_۲$ در جدول به صورت $M_۲ \sin(\beta-\theta)$ تلقی می‌شود. آن‌گاه، داریم

$$\frac{p_۲}{p_۱} = ۲{,}۵۷; \qquad p_۲ = ۳۷{,}۸\text{psia}$$
$$\frac{T_۲}{T_۱} = ۱{,}۳۴; \qquad T_۲ = ۶۹۷°\text{R}$$
$$M_۲ \sin(\beta-\theta) = ۰{,}۶۹; \qquad M_۲ = ۱{,}۳$$

۸-۲ هوابر تخت نازک موجود در شکل ۸-۲۶ با زاویهٔ حملهٔ °۱۰ قرارگرفته است. خواص شاره را در تمام ناحیه‌های جریان به دست آورید. $M_۱ = ۳$ و جریان آزاد هوا در $T_۱ = ۵۰۰°\text{R}$ و $p_۱ = ۱۵\text{psia}$ است.

با استفاده از معادلات (۸-۷) و شکل ۸-۳ می‌توان شرایط را در ناحیهٔ ۳ یافت. به $\beta_{۱۳}$ را مساوی °۲۷٫۵ به دست می‌آوریم. با استفاده از $\frac{k=c_p}{c_v=۱{,}۴}$ برای هوا، داریم

$$\frac{p_۳}{p_۱} = ۲{,}۰۷, \quad p_۳ = ۳۱{,}۰\,\text{psia}, \quad M_۳ = ۲{,}۴۹, \quad T_۳ = ۱{,}۲۵\, T_۱ = ۶۲۵°\text{R}$$

برای یافتن شرایط در ناحیهٔ ۴ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم

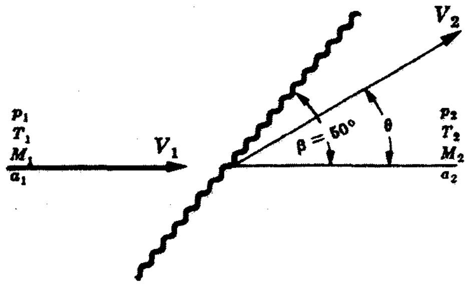
$$\nu_۴ = \nu_۳ + |\theta_۴ - \theta_۳| = \nu_۳ + ۱۰° = ۳۹{,}۱° + ۱۰° = ۴۹{,}۱°$$

و از جدول ۸-۱ $M_۴ = ۲{,}۹۷$. چون انبساط تک‌آنتروپی است، می‌توان نوشت

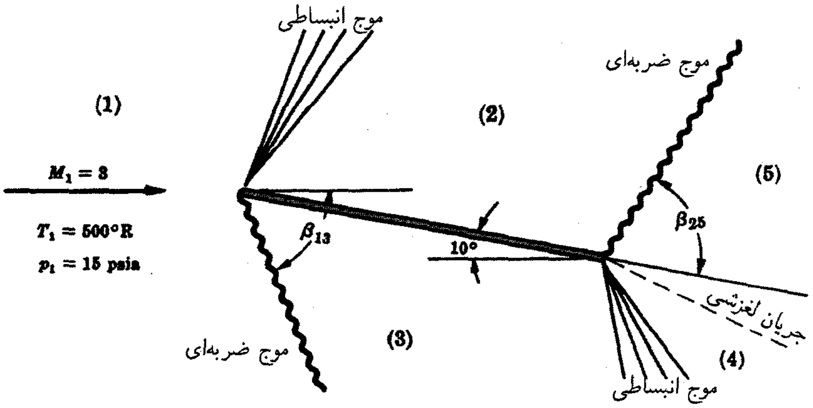
$$\frac{p_۴}{p_۳} = \left[\frac{۲+(k-۱)M_۳^۲}{۲+(k-۱)M_۴^۲}\right]^{k/(k-۱)}$$

از این رابطه $p_۴/p_۳ = ۰{,}۴۸$ و $p_۴ = ۱۴{,}۹\text{psia}$ به دست می‌آید. $T_۴$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود

$$\frac{T_۴}{T_۳} = \left(\frac{p_۴}{p_۳}\right)^{(k-۱)/k}$$



شکل ۸-۲۵



شکل ۸-۲۶

و بنابراین

$$T_۴ = ۰٫۸۱(T_۳) = ۰٫۸۱(۱٫۲۵T_۱) = ۱٫۰۱T_۱$$

اکنون، با حرکت در سطح بالای صفحه، شرایط ناحیهٔ ۲ را به دست می‌آوریم

$$\nu = \nu_۱ + ۱۰^\circ = ۴۹٫۸^\circ + ۱۰^\circ = ۵۹٫۸^\circ$$

و بنابراین $M_۲ = ۳٫۵۷$. با استفاده از رابطه‌های تک‌آنتروپی، داریم

$$p_۲ = ۰٫۴۴p_۱ = ۶٫۶۰\,\text{psia}, \qquad T_۲ = ۰٫۷۹T_۱$$

سپس، با گذشتن از میان موج ضربه‌ای و ورود به ناحیهٔ ۵، خواهیم داشت

$$\beta_{۲۵} = ۲۴^\circ, \qquad M_۵ = ۲٫۹۸, \qquad p_۵ = ۲٫۲۹ \quad p_۲ = ۱٫۰۱p_۱, \qquad T_۵ = ۱٫۲۹T_۲ = ۱٫۰۲T_۱$$

می‌بینیم $p_۵$ و $p_۴$ تقریباً، اما نه دقیقاً برابرند و دماهای $T_۵$ و $T_۴$ تقریباً برابرند. در واقع، جریان لغزشی یا جریان سطح تماس باید از پشت هوابر ادامه یابد و ناحیه‌هایی را که دما و چگالی متفاوت دارند، جدا سازد؛ اما، فشار $p_۴$ و $p_۵$ باید برابر باشند. وانگهی، سرعتها در طول جریان لغزشی متفاوت‌اند و لایه‌ای برشی وجود دارد. برای تعیین محل دقیق شیب جریان لغزشی برای اینکه $p_۴ = p_۵ = p_۱$ باشد، از فرایند آزمون و خطا استفاده می‌کنیم.

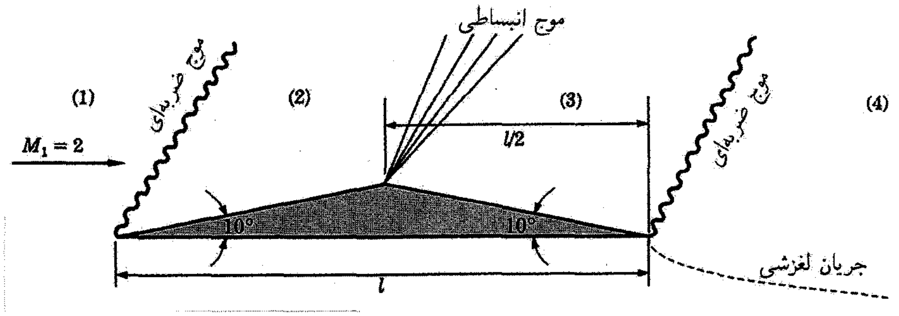
برآ و پسا بر واحد مساحت بال عبارت‌اند از

$$L = (p_۳ - p_۲)\cos ۱۰^\circ = ۲۴٫۰\,\text{psia}, \qquad D = (p_۳ - p_۲)\sin ۱۰^\circ = ۴٫۲۳\,\text{psia}$$

یادآور می‌شویم که چون $p_۵$ و $p_۱$ تقریباً برابرند، سطح تماس به طور موازی با جریان آزاد از هوابر جدا می‌شود. به طور کلی، برای اطمینان از اینکه $p_۵ = p_۱$، همان گونه که در واقعیت رخ می‌دهد، سطح تماس را باید نسبت به جریان آزاد اندکی منحرف کنیم.

۸-۳ برآ و پسای وارد بر هوابر مسئلهٔ قبل را، با استفاده از نظریهٔ بال نازک محاسبه، و با جواب دقیق موج ضربه‌ای-انبساطی مقایسه کنید.

از معادلهٔ (۸-۱۹)، $C_L = ۰٫۲۴۷$ و $C_D = ۰٫۰۴۳$ به دست می‌آید. (به خاطر داشته باشید که $M_۱ = ۳$ و α برحسب رادیان و برابر $۱۰^\circ = ۰٫۱۷۴۵۳\text{rad}$ است) برآ برای واحد سطح $\frac{۱}{۲}\rho_۱ V_۱^۲ C_L$ یا $\frac{۱}{۲}kM_۱^۲ p_۱ C_L$ است. با دانستن $T_۱$ و $p_۱$ مقدار $\rho_۱ = ۰٫۰۰۲۳۵\text{slug/ft}^۳$ و از قانون گازهای کامل و $V_۱ = a_۱M_۱ = (۱۰۹۰\,\text{ft/s})(۳) = ۳۲۷۰\,\text{ft/s}$ به دست می‌آید



شکل ۸-۲۷

$$L = \frac{۱}{۲}\rho_۱ V_۱^۲ C_L = \frac{۱}{۲}(۰٫۰۰۲۵۳)(۳۲۷۰)^۲(۰٫۲۴۷) = ۳۳۴۰\,\mathrm{psf} = ۲۳٫۲\mathrm{psi}$$

و

$$D = \frac{۱}{۲}\rho_۱ V_۱^۲ C_D = ۴٫۰۴\mathrm{psi}$$

از مقایسهٔ آنها با نتیجه‌های مسئلهٔ قبل اختلاف ۵٪ به دست می‌آید.

۸-۴ با استفاده از نظریهٔ موج ضربه‌ای-انبساطی، جریان روی نیمرخ گوهٔ دوگانهٔ دو بعدی موجود در شکل ۸-۲۷ را تعیین کنید. عدد ماخ جریان آزاد ۲ است.

سطح تماس از لبهٔ فرار ادامه خواهد یافت. زاویهٔ دقیق این سطح تماس با جریان آزاد را با اعمال این شرط باید تعیین کرد که فشار در (۴) و (۱) برابرند. این به معنای چرخش جزئی جریان آزاد سطح زیرین در لبهٔ فرار است. در اینجا فعلاً این اثر را نادیده می‌گیریم و فرض می‌کنیم که جریان زیرین ناآشفته است.

برای جریان گذرنده از میان موج ضربه‌ای حمله ۱ به ۲، $\theta = ۱۰^\circ$ و با توجه به شکل ۸-۳، داریم $\beta = ۳۹٫۰۵^\circ$. با توجه به جدولهای موج ضربه‌ای یا معادلهٔ (۸-۷) خواهیم داشت

$$\frac{p_۲}{p_۱} = ۱٫۷۲, \qquad \frac{T_۲}{T_۱} = ۱٫۱۷, \qquad M_۲ = ۱٫۶۳$$

سپس، با توجه به چتری انبساطی ۲-۳ مقدارهای زیر را به دست می‌آوریم

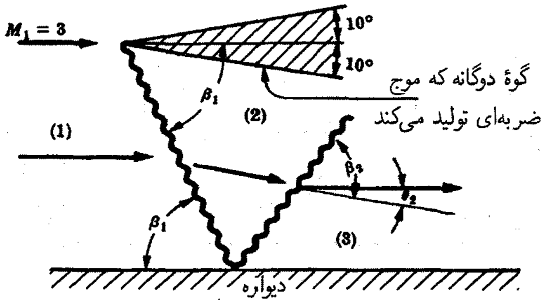
$$\nu_۲ = ۱۵٫۹^\circ, \qquad \nu_۳ = \nu_۲ + ۲۰^\circ = ۳۵٫۹^\circ, \qquad M_۳ = ۲٫۳۷$$

$$\frac{p_۳}{p_۲} = \left[\frac{۲ + (k-۱)M_۲^۲}{۲ + (k-۱)M_۳^۲}\right]^{k/(k-۱)} = ۰٫۳۲, \qquad \frac{T_۳}{T_۲} = \left(\frac{p_۳}{p_۲}\right)^{(k-۱)/k} = ۰٫۷۲$$

در میان موج ضربه‌ای ۳-۴، $\theta = ۱۰^\circ$ و $\beta = ۳۴^\circ$، و

$$\frac{p_۴}{p_۳} = ۱٫۸۸, \qquad \frac{T_۴}{T_۳} = ۱٫۲۱, \qquad M_۴ = ۱٫۹۰$$

روشن است که $p_۴ = ۱٫۰۳p_۱$ و جریان نمی‌تواند به طور موازی با جریان آزاد هوابر را ترک کند، زیرا $p_۴$ برابر $p_۱$ نیست. بنابراین، موج ضربه‌ای ۳-۴ باید با انحراف جزئی کمتر از ۱۰° رخ دهد. جریان زیرین قدری در میان موج ضربه‌ای فشرده می‌شود. زاویهٔ دقیق سطح تماس را می‌توان با آزمون و خطا تعیین کرد، به گونه‌ای که $p_۴ = p_۱$. جزئیات را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.



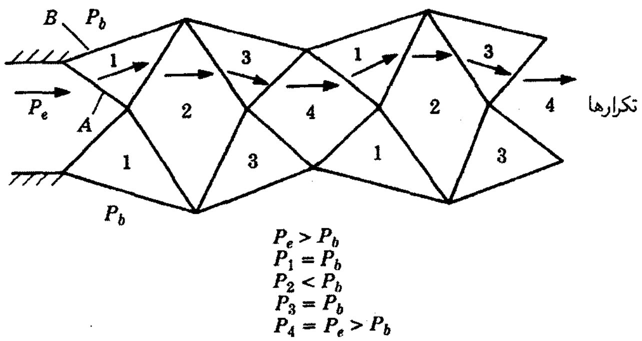
شکل ۸-۲۸

۸-۵ موج ضربه‌ای برخوردکننده با دیوارهٔ شکل ۸-۲۸ به گونه‌ای بازتابیده می‌شود که جریان نهایی موازی دیواره خواهد بود. موج ضربه‌ای را در نظر بگیرید که، همچون شکل، از دیواره بازتابیده شده است.

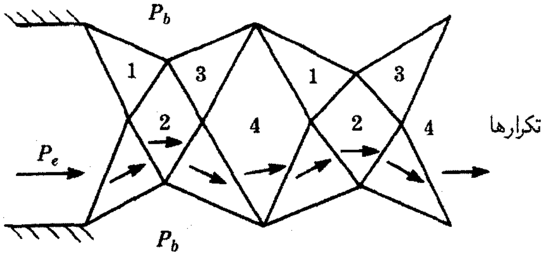
برای $\theta = 10^\circ$ و $M_1 = 3$، با توجه به معادلهٔ (۸-۷) با جدولهای مناسب، داریم $\beta_1 = 28^\circ$ و $M_2 = 2.5$. سپس برای $\theta_2 = 10^\circ$ و $M_2 = 2.5$، خواهیم داشت $\beta_2 = 32^\circ$. به خاطر داریم که اگر از جدولهای موج ضربه‌ای قائم استاندارد استفاده کنیم، باید در این جدولها $M_1 \sin \beta_1, M_2 \sin(\beta_1 - \theta)$ را به‌ترتیب به جای M_1 و M_2 قرار دهیم.

۸-۶ شیپورهٔ خوش‌طرح دوبعدی‌ای با عدد ماخ خروجی $M_e = 2$ برای دست یافتن به جریانی آرام و بدون موج ضربه‌ای تا پس‌فشار $p_b = p_e = 0.1278 p_0$ (از جدولهای فراصوتی) تخلیه می‌شود. p_0 فشار سکون مخزنی است که شیپوره را تغذیه می‌کند. بدین ترتیب، فشار خروجی p_e برابر پس‌فشار p_e است. اگر پس‌فشار کمتر از p_e شود، موجهای انبساطی در خارج از شیپوره رخ می‌دهد. نمودار این موجهای انبساطی را رسم، و زاویه‌های بحرانی را برای پس‌فشار $0.055 p_0$ مشخص کنید.

با توجه به شکل ۸-۲۹، جریان پس از ترک شیپوره و در حین عبور از چتری انبساطی، برای مقابله با پس‌فشار p_b، بر می‌گردد. در اینجا، چتری را به صورت تک‌موج نشان می‌دهیم و از روش موجهای ضعیف استفاده می‌کنیم. موجهای انبساطی دو موج لغزشی (یا سطح تماس) به صورت موج تراکمی و برعکس بازتابیده می‌شوند. جریان با گذشتن از میان موج انبساطی به فشار p_b (ناحیهٔ ۱) می‌رسد و با عبور از موج انبساطی دیگر تغییر مسیر می‌دهد و فشار آن در اثر انبساط به مقداری کمتر از p_b (ناحیهٔ ۲) خواهد رسید. فشار جریان پس از عبور از موجی تراکمی به p_b (ناحیهٔ ۳) برمی‌گردد و سپس جریان تغییر مسیر می‌دهد و با تراکم دوباره به فشار p_e (ناحیهٔ ۴) خواهد رسید. این طرح کلی آن قدر تکرار می‌شود تا در پایین‌دست جریان شیپوره طرحی الماسی به وجود آید. تکرار طرحها ادامه می‌یابد تا اینکه موجها پخش، و سرانجام به‌علت اصطکاک محو شوند، که ممکن است بعد از تکرارهای زیاد رخ دهد.



شکل ۸-۲۹



$P_e < P_b$
$P_1 = P_b$
$P_2 > P_b$
$P_3 = P_b$
$P_4 = P_e < P_b$

شکل ۸-۳۰

زاویه‌های بحرانی را با استفاده از روش موجهای ضعیف در شکل ۸-۲۹ نشان داده‌ایم. مقدار، ν در خروجی $۲۶٫۵^\circ$ است. عدد ماخ در ناحیهٔ ۱ برای موجی انبساطی با افت فشار $۰٫۵۵۰p_۰$، برابر ۲٫۵۴ است. بدین ترتیب، برای $M_۱ = ۲٫۵۴$، $\nu_۱$ متناظر ۴۰° است. بنابراین، زاویهٔ برگشت جریان در گوشهٔ خروجی $۱۳٫۵^\circ = (۲۶٫۵^\circ - ۴۰^\circ)$ است. در ناحیهٔ ۲ به زاویهٔ برگشت $۱۳٫۵^\circ$ دیگری نیاز است که در این حالت، $\nu_۲ = ۵۳٫۵^\circ$ و $M_۲ = ۳٫۲۰۲$، و از جدولهای تک‌آنتروپی، داریم $\frac{p_۲}{p_۰} = ۰٫۰۲$. سپس تراکم در گذر از ناحیهٔ ۲ به ۳ در زاویهٔ $۱۳٫۵^\circ$ رخ می‌دهد. در آنجا، داریم $\nu_۳ = ۴۰^\circ$ و $M_۳ = M_۱ = ۲٫۵۴$. با تراکم دیگر، دوران تکمیل می‌شود و به ناحیهٔ ۴ برمی‌گردیم، که $\nu_۴ = ۲۶٫۵^\circ$ و $M_۴ = M_e = ۲$ و $p_۴ = p_e = ۰٫۱۲۷۸\, p_۰$.

این چرخهٔ کلی تکرار می‌شود تا اینکه موجها پهن، ضعیف یا پخش، و سرانجام محو خواهند شد. همهٔ زاویه‌های ماخ را می‌توان به آسانی از جدول (زاویهٔ ماخ) پرنتل‌ـمایر به دست آورد و با استفاده از قاعدهٔ نیمساز جهت واقعی هر یک از موج‌ها را می‌توان یافت و طرح کلی را ایجاد کرد. به عنوان مثال، در ناحیهٔ خروجی، $M_e = ۲$ و $\mu = ۲۹٫۹^\circ$. در ناحیهٔ ۱، $M_۱ = ۲٫۵۴$ و $\mu_۱ = ۲۳٫۲^\circ$. جهتگیری موج بین ناحیهٔ e و ۱ (خط A) مطابق شکل است و خطهای ماخ را دو نیم می‌کند. (یادآور می‌شود که زاویهٔ ماخ زاویه بین خط ماخ و بردار سرعت است). پوش ناحیهٔ ۱ (که خط B، سطح تماس جریان لغزشی است) موازی با سرعت ناحیهٔ ۱ خواهد بود.

۸-۷ شیپورهٔ دوبعدی مسئلهٔ ۸-۶ را در نظر بگیرید. عدد ماخ طراحی ۲، و پس فشار طراحی $p_e = ۰٫۱۲۷۸p_۰$ است. اکنون، فرض می‌کنیم که پس‌فشار واقعی کمی بیشتر از مقدار طراحی است (اما نه آن قدر زیاد که باعث ورود موجهای ضربه‌ای به درون شیپوره شود). اکنون، طرحی مشابه با مسئلهٔ ۸-۶، با این استثناء که نخستین موج ساطع شده از گوشه تراکمی است، رخ می‌دهد. اگر پس‌فشار $۰٫۲۰p_۰$ باشد، طرح موج را در خارج از شیپوره، زاویه‌های بحرانی و خواص جریان را تعیین کنید.

با توجه به شکل ۸-۳۰، موج اولیه (با p_e و $\nu_e = ۲۶٫۵^\circ$) تا ناحیهٔ ۱، که $p_۱ = p_B = ۰٫۲۰P_۰$، $M_۱ = ۱٫۷۴$ و $\nu_۱ = ۱۹^\circ$، تراکمی است. زاویهٔ برگشت جریان $۷٫۵^\circ = (۲۶٫۵^\circ - ۱۹^\circ)$ است. در ناحیهٔ ۲، تراکم دیگری در حین گردش $۷٫۵^\circ$ رخ می‌دهد، که $M_۲ = ۱٫۴۹$، $\nu_۲ = ۱۱٫۵^\circ$ و $p_۲ = ۰٫۲۷۶p_۰$. سپس موجی انبساطی با گردش $۷٫۵^\circ$ در ناحیهٔ ۳ رخ می‌دهد که $\nu_۳ = ۱۹^\circ$، $M_۳ = ۱٫۷۴$ و $p_۳ = ۰٫۲۰p_۰$. سرانجام، انبساط دیگری در ناحیهٔ ۴ با گردش $۷٫۵^\circ$ به وقوع می‌پیوندد که دقیقاً شرایط خروجی را دارد، $M_e = M_۴ = ۲$، $\nu_e = \nu_۴ = ۲۶٫۵^\circ$ و $p_e = ۰٫۱۲۷۸p_۰$. دوباره، طرح مانند مسئلهٔ ۸-۶ بارها و بارها تکرار می‌شود.

مسائل تکمیلی

۸-۸ مطابق شکل ۸-۳۱، هوا از روی گوشه‌ای جریان می‌یابد. خواص هوا و عدد ماخ را در پایین‌دست جریان بیابید. شکل چتری انبساطی را رسم کنید وقتی بزرگتر و بزرگتر می‌شود، چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

۸-۹ مطابق شکل ۸-۳۲، هوا از روی گوشه‌ای جریان می‌یابد. خواص و عدد ماخ را در پایین‌دست جریان به دست آورید. با بزرگتر شدن θ چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

۸-۱۰ طرح موج ضربه‌ای گوهٔ شکل ۸-۳۳ را با هوای استاندارد جاری با عدد ماخ ۵ به دست آورید.

۸-۱۱ خواص پایین‌دست جریان را بیابید و زاویهٔ ماخ μ را برحسب تابع θ برای جریان شکل ۸-۳۴ رسم کنید.

۸-۱۲ جریانی دوبعدی از میان زانوی موجود در شکل ۸-۳۵ می‌گذرد. محلی را در پایین‌دست زانو بیابید که هیچ بازتاب موج ضربه‌ای رخ ندهد. پهنای $D_۲$ چقدر است؟

۸-۱۳ مانند مسئلهٔ ۸-۱۲، خم واگرایی را مطابق شکل ۸-۳۶ در نظر می‌گیریم. شکل دیوارهٔ بالایی را به گونه‌ای طراحی کنید که موج انبساطی بازتابیده نشود. (راهنمایی: این شکل از خط جریان خم تبعیت می‌کند). مقدار $D_۲$ برحسب پارامترهای مرتبط چقدر است؟

۸-۱۴ چه اتفاقی در مسئلهٔ ۸-۵ رخ می‌دهد اگر موج ضربه‌ای بازتابیده شود و زاویهٔ نخستین موج ضربه‌ای $\beta_۱$ بزرگتر و بزرگتر شود؟ آیا می‌توان با بازتاب ساده‌ای جریان را موازی دیواره کرد. یا یک اتفاق عجیب رخ خواهد داد؟

۸-۱۵ جریانی بر روی سطحی مثلثی مطابق شکل ۸-۳۷ برقرار است. طرح جریان را روی دیواره برای $M_۱ > ۱$ به کمک نظریهٔ خطی‌سازی اختلالهای جزئی به دست آورید. (فرض می‌کنیم که $\lambda \gg \epsilon$).

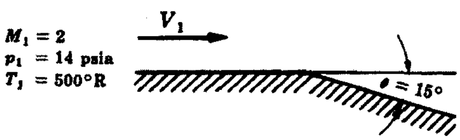
۸-۱۶ هوابر الماسی شکل منظمی، همچون شکل ۸-۳۸، با زاویهٔ ۱۰° در جریانی فراصوتی با عدد ماخ ۲ قرار دارد. زاویهٔ گوهٔ هوابر ۲۰° است، به گونه‌ای که سطحهای بالا و پایین افقی هستند.

نیروی برآی وارد بر هوابر را به کمک نظریهٔ موج ضربه‌ای انبساطی محاسبه، و موجهای ضربه‌ای و دیگر موجها را ترسیم کنید. پسای موجی چقدر است؟

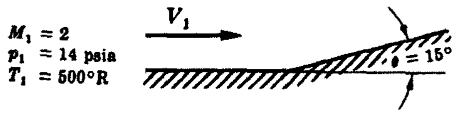
نیروی برآ را به کمک نظریهٔ خطی شدهٔ هوابر نازک مجاسبه، و نتیجه‌ها را با نتیجه‌های به دست آمده از نظریهٔ دقیق‌تر مقایسه کنید.

طرح جریان بر طبق نظریهٔ خطی شده چگونه است؟

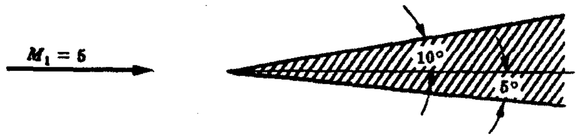
۸-۱۷ هواپیمای دو بالهٔ بوزمن مطابق شکل ۸-۳۹، دو هوابر موازی دارد که هر یک به شکل نیم الماس است. در زاویهٔ حملهٔ صفر، پسای موجی را عملاً می‌توان با تنظیم فاصلهٔ بین هوابرها برای هر عدد ماخ مفروض $M_۱$ به صفر رساند. با فرض نظریهٔ خطی دوبعدی $(t \ll c)$، فاصلهٔ بیشینهٔ G (به عنوان تابع $M_۱$) را برای حذف پسا در زاویهٔ حملهٔ صفر بیابید. (در زیرمضربهای خاصی از فاصلهٔ بحرانی بیشینهٔ G، نیز «حذف» انجام می‌شود.)



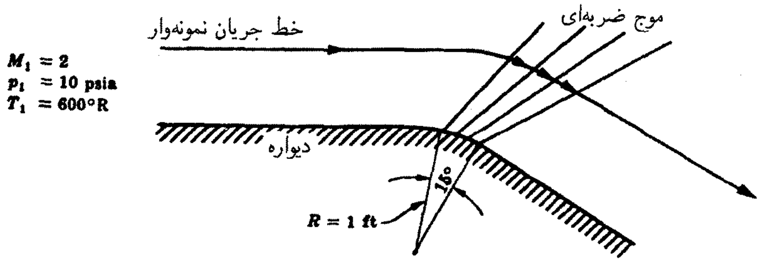
شکل ۸-۳۱



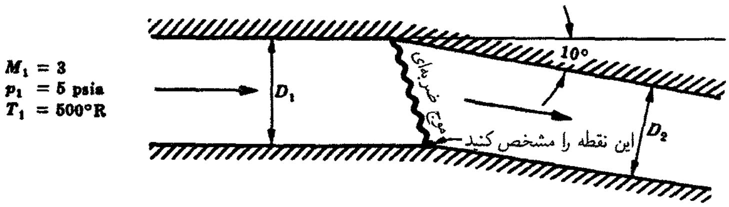
شکل ۸-۳۲



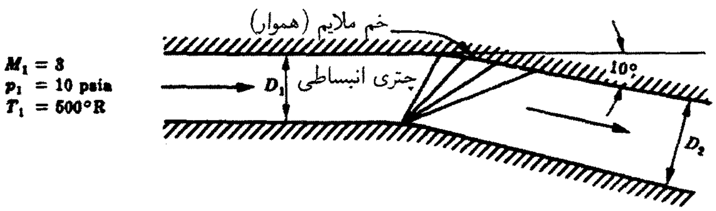
شکل ۸-۳۳



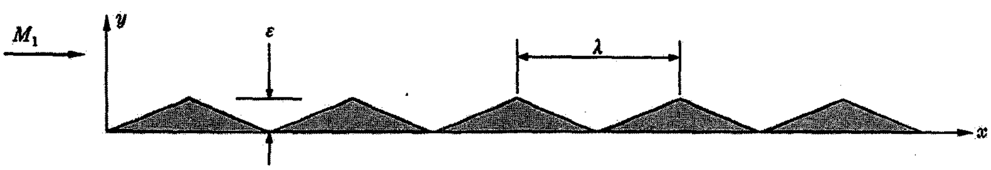
شکل ۸-۳۴



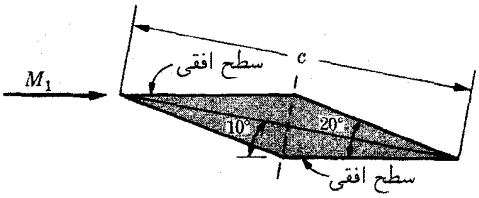
شکل ۸-۳۵



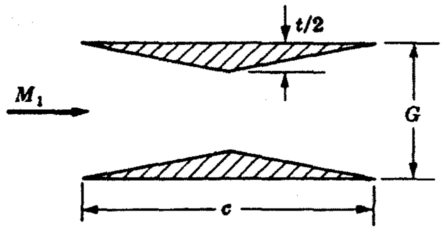
شکل ۸-۳۶



شکل ۸-۳۷



شکل ۸-۳۸



شکل ۸-۳۹

آیا در زاویهٔ حملهٔ صفر برآ وجود دارد؟

آیا با ثابت نگه داشتن M_1 و G، و تغییر زاویهٔ حمله می‌توان پسای موجی را حذف کرد؟

۸-۱۸ در مسئلهٔ ۸-۴، ضریبهای برآ و پسا را برای هوابر نیم الماسی‌شکل (مقطع) به دست آورید. دربارهٔ مشخصهٔ سطح تماس در نظریهٔ هوابر نازک بحث کنید.

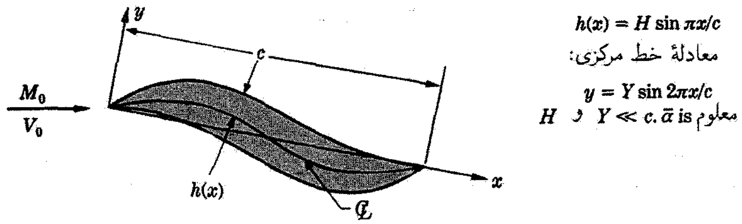
۸-۱۹ با استفاده از نظریهٔ هوابرهای نازک، طرح جریان و ضریبهای برآ و پسا را بر روی هوابر دوبعدی موجود در شکل ۸-۴۰ به دست آورید.

۸-۲۰ با استفاده از نظریهٔ هوابر نازک نمودار C_L و C_D را برحسب M برای هوابر نازک تخت دوبعدی‌ای با زاویهٔ حملهٔ $5°$ رسم کنید.

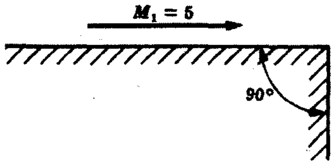
۸-۲۱ نمودار مسئلهٔ ۸-۲۰ را با فرض $M = ۲$ رسم کنید و C_L و C_D را برحسب زاویهٔ حمله به دست آورید.

۸-۲۲ جریان در اطراف گوشه‌ای تیز همچون شکل ۸-۴۱، گسترش می‌یابد. محل جریان لغزشی را مشخص کنید.

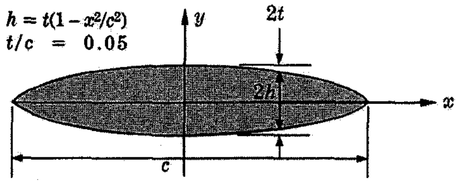
۸-۲۳ نمودار C_L برحسب C_D را برای‌هوابر نازک شکل۸-۴۲ رسم کنید. ($\bar{\alpha}$ را متغیری مستقل و M را ثابت در نظر بگیرید). t نیم ضخامت بیشینه و بالا و پایین هوابر متقارن است.



شکل ۸-۴۰



شکل ۸-۴۱



شکل ۸-۴۲

۸-۲۴ همچون شکل ۸-۴۳، پیستون در درون استوانه‌ای قرار دارد که انتهای آن بسته است. پیستون ناگهان با سرعت ثابت به طرف انتهای مسدود لوله به حرکت در می‌آید. آن‌گاه، موجی ضربه‌ای ایجاد می‌شود و به سوی انتهای لوله می‌رود به‌طرف پیستون بازتابیده می‌شود.

سرعت موج ضربه‌ای را قبل و بعد از بازتاب و فشارها را در تمام ناحیه‌های جریان در تمام زمانها تعیین کنید. به طور کیفی توضیح دهید که بعد از بازتاب موج ضربه‌ای از پیشانی پیستون چه اتفاقی رخ می‌دهد.

در ابتدا هوای درون استوانه در فشار جو و دمای ۵۲۰°R است. پیستون با سرعت ثابت ۱۰۰ft/s حرکت می‌کند. راهنمایی: فصل ۷ را ببینید.

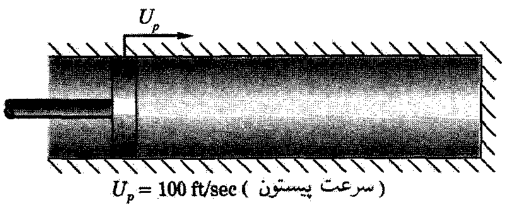
۸-۲۵ در مسئله‌های ۸-۲ و ۸-۱ سرعت هوا را در ناحیه‌های مختلف جریان به دست آورید.

۸-۲۶ شیپورهٔ دوبعدی خوش‌طرحی دارای عدد ماخ ۳ است. پس‌فشار لازم (برحسب فشار سکون) چقدر است؟ اگر پس‌فشار را ۱۰٪ کاهش دهیم چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ طرح کامل موجهای تولید شده را نشان دهید و خواص مربوطه را در هر یک از ناحیه‌های جریان مشخص کنید.

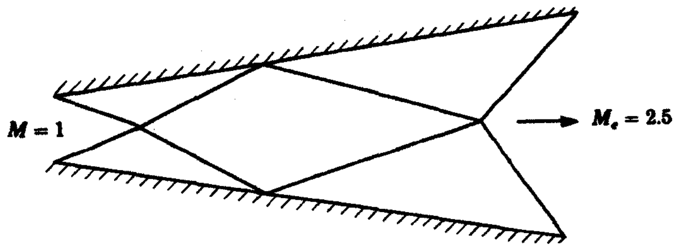
۸-۲۷ شیپوره‌ای دوبعدی با دیوارهٔ مستقیم، همچون شکل ۸-۴۴، برای عدد ماخ خروجی ۲٫۵ طراحی شده است. با استفاده از نظریهٔ موج ضعیف، زاویهٔ واگرایی شیپوره و طول آن را به دست آورید. مقدار $\frac{A^*}{A_e}$ را با مقدارهای جدول مقایسه کنید.

منابع خطا را توضیح دهید. فرض می‌کنیم که بازتاب یکی از دیواره‌ها مطابق شکل است.

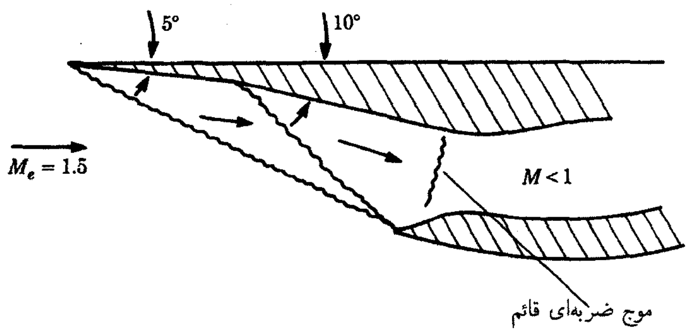
۸-۲۸ طراحی تفصیلی را برای شیپوره شکل ۸-۲۳ با عدد ماخ خروجی $M_e = 1{,}5$ انجام دهید. از دو پاره‌خط راست A و B دیواره استفاده کنید. این طراحی سه موج انبساطی اولیه را به دست می‌دهد (و سه موج انبساطی دیگر حول سه از موج خانوادهٔ دیگر). طولهای A و B، که



شکل ۸-۴۳



شکل ۸-۴۴



شکل ۸-۴۵

ممکن است یکسان فرض شود، دلخواه‌اند. طولهای مختلف A و B را آزمایش کنید و اثرهای آن را بر طول کلی مشاهده کنید. نسبت $\frac{A^*}{A_e}$ را برای $M_e = ۱٫۵$ با مقدارهای جدول مقایسه کنید.

۸-۲۹ ورودی شیبدار دوبعدی‌ای را برای موتور جت فراصوتی در شکل ۸-۴۵ نشان داده‌ایم. عدد ماخ پرواز ۱٫۵ است. فشار بازیافتی (یعنی فشار سکون) را پس از دو موج ضربه‌ای مایل به دست آورید. افزون بر آن، فرض کنید که موج ضربه‌ای قائم پس از دو موج ضربه‌ای مایل در درون شیپوره قرار می‌گیرد. اکنون فشار سکون را وقتی هوا به کمپرسور وارد می‌شود، به دست آورید. فرض می‌کنیم که موج ضربه‌ای قائم در بالادست جریان با عدد ماخی برابر عدد ماخ جریان پس از دومین موج ضربه‌ای مایل، رخ می‌دهد. این نتیجه‌ها را با فشارهای سکونی که پس از یک موج ضربه‌ای قائم با عدد ماخ پرواز رخ می‌دهد، مقایسه کنید.

نمادگذاری فصل ۸

$a =$ سرعت صوتی

$c =$ طول وتر (پهنای صوتی هوابر)

$c_p =$ گرمای ویژه در فشار ثابت

$c_v =$ گرمای ویژه در حجم ثابت

$C_D =$ ضریب پسا

$C_L =$ ضریب برآ

$C_P =$ ضریب فشار

$D =$ نیروی پسا

$h =$ آنتالپی ویژه

$h_\circ =$ آنتالپی ویژه کل (یا سکون)

$k =$ نسبت گرماهای ویژه، $\frac{c_p}{c_v}$

$L =$ نیروی برآ

$M =$ عدد ماخ

$M_\circ =$ عدد ماخ جریان آزاد

$p =$ فشار

$s =$ آنتروپی ویژه

$u =$ مؤلفهٔ x سرعت

$u' =$ مؤلفهٔ x سرعت اختلال

$v =$ مؤلفهٔ y سرعت

$v' =$ مؤلفهٔ y سرعت اختلال

$\mathbf{V} =$ بردار سرعت

$V_\circ =$ سرعت جریان آزاد

$w =$ مؤلفهٔ z سرعت

$w' =$ مؤلفهٔ z سرعت اختلال

$\alpha =$ زاویهٔ حمله

$\beta =$ زاویهٔ موج ضربه‌ای

$\theta =$ زاویهٔ انحراف

$\mu =$ زاویهٔ ماخ

$\nu =$ تابع پرنتل-مایر

$\rho =$ چگالی

$\phi =$ پتانسیل سرعت

۹

جریان متلاطم تراکم‌ناپذیر

۹-۱ مقدمه

هرچند قبلاً جریانهای متلاطم را بررسی کردیم (بیشتر مطالب فصل ۵ به جریانهای متلاطم تخصیص دارد و بسیاری از نتیجه‌های فصلهای ۷ و ۸ برای جریان متلاطم معتبرند)، در این فصل به مسئلهٔ مهم حرکت شارهٔ متلاطم با عمق بیشتری می‌پردازیم.

مسائل حرکت شاره را می‌توان از ساده‌ترین تا مشکل‌ترین حالت به‌صورت زیر بررسی کرد: جریان پتانسیل←جریان لایه‌ای گران‌رو ← جریان متلاطم. تاریخچهٔ بررسیهای اولیهٔ این رشته در درجهٔ اول به جریان پتانسیل و جریان لایه‌ای مربوط می‌شود و تلاش پژوهشی بسیارکمی درخصوص مسائل مشکل جریان متلاطم انجام شده است. این تأسف‌آور است، زیرا بیشتر جریانهای مهم در مهندسی متلاطم‌اند. اما در سالهای اخیر، تلاش پژوهشی در زمینهٔ جریان متلاطم به‌طور چشمگیری افزایش یافته است. با وجود این، برای حل این مسائل هنوز راه درازی در پیش است و سالهای طولانی این مشکلات با ما خواهند بود.

قبل از اینکه جلوتر برویم، باید به دو پرسش پاسخ بدهیم: جریان متلاطم چیست؟ کجا رخ می‌دهد؟ هینز [8] حرکت شارهٔ متلاطم را به‌صورت «جریان نامنظمی تعریف کرده است که کمیتهای مختلف آن (مثلاً سرعت و فشار) تغییرات تصادفی نسبت به زمان و مکان دارند، به گونه‌ای که مقدارهای میانگین آماری مجزا را می‌توان تشخیص داد.» این نوع حرکت را که در بیشتر جریانها در طبیعت رخ می‌دهد، می‌توان دید. وقتی جسمهایی همچون کشتیها، خودروها، هواپیماها و پیمایه‌های بازگشتی از میان شاره‌ها حرکت می‌کنند، جریان تقریباً همیشه متلاطم است. در این جریانها حرکتی نوسانی سوار بر جریان میانگین یا اصلی وجود دارد.

همچنین، هنگامی‌که شاره از میان محیطهای محصوری همچون فنها، پمپها، مجراها و لوله‌ها می‌گذرد، تلاطم رخ می‌دهد. متلاطم بودن جریان را می‌توان از روی عدد رینولدز جریان که در فصل ۵ به آن اشاره شد، تشخیص داد.

چرا جریان متلاطم رخ می‌دهد؟ چه عواملی باعث متلاطم شدن جریان لایه‌ای می‌شود؟ پاسخ کامل به این پرسشها ساده نیست، ولی درک فیزیکی مسئله مشکل نخواهد بود. اساساً آشفتگیهای کوچک و حتی بی‌نهایت کوچک، همیشه در شاره وجود دارد. آنها ممکن است ناشی از تغییرات جزئی در خواص، زبری دیوار، تغییر در اثرهای سطح آزاد، و هر اختلال کوچک دیگر باشد. در شرایط خاص (معمولاً در عدد رینولدز پایین) این آشفتگیها میرا هستند و جریان لایه‌ای باقی می‌ماند. با افزایش عدد رینولدز، آشفتگیهای بی‌نهایت کوچک به‌تدریج بزرگتر می‌شوند و در این حالت، جریان را ناپایدار می‌گویند. به‌علت غیرخطی بودن، غالباً تعیین حالت پایانی شاره، به‌ویژه با رشد آشفتگیها دشوار است و به پیکربندی جریان کاملاً بستگی دارد. در بعضی از پیکربندیها جریان لایه‌ای باقی خواهد ماند، اما در جریانهای پیچیده‌تر که جریانهای ثانویه و یا گردش وجود دارد، پایدار می‌شود. برای بعضی پیکربندیها (و ناگزیر برای همهٔ پیکربندیهایی که عدد رینولدز بالا دارند) جریان متلاطم می‌شود. ساختار ریز تلاطم به شکل هندسی و عدد رینولدز بستگی دارد.

بررسی پاسخ شاره به آشفتگیها یا اختلالها را به‌عنوان «نظریهٔ پایداری» می‌شناسند، و بخش مهم مکانیک شاره‌هاست که در فصل ۱۳ معرفی خواهد شد.

در اینجا، به (۱) درک فیزیکی و (۲) بیان کمّی حرکت شارهٔ متلاطم می‌پردازیم. اولی کاملاً (البته، نه به‌طور کامل) به تجربه متکی است، در حالی‌که دومی کاملاً به مدلهای ریاضی تکیه دارد. هر دو از نظر مهندسی مهم‌اند.

اصولاً دو روش کاملاً متفاوت برای بیان و درک حرکت متلاطم وجود دارد، که عبارت‌اند از (۱) پدیده‌شناسی و (۲) آماری. در اولی رابطه‌ای برای تنش برشی برحسب ضریب تبادلی تجربی‌ای به‌دست می‌آورند و در دومی معادلات حرکت را برحسب کمیتهای متوسط زمانی مطالعه می‌کنند.

۹-۲ معادلات سرعت میانگین

معادلات تابع تعمیم‌یافتهٔ سرعت میانگین را برای جریانهای متلاطم در بخش ۵-۲ به‌دست آوردیم. برای راحتی، آنها را در اینجا خلاصه کرده‌ایم. خواننده می‌تواند برای تعریف نمادهای استفاده شده به فصل ۵ مراجعه کند.

۹-۲-۱ قانون توان:

$$u/U = (y/\delta)^{m/(۲-m)} = (y/\delta)^{۱/n} \qquad [۲۵\text{-}۵]$$

در اینجا، y فاصله از دیواره، δ ضخامت لایهٔ مرزی، U سرعت جریان آزاد و u سرعت در لایهٔ مرزی است. قانون توان برای جریانی با گرادیان فشار ناچیز روی سطح تخت به‌کار می‌رود. آن را برای جریان کاملاً توسعه‌یافته در لوله نیز می‌توان به‌کار برد. نمای معادله برحسب عدد رینولدز چندان تغییر نمی‌کند.

۹-۲-۲ شکل لگاریتمی قانون دیواره:

$$u/u_\tau = ۲{,}۴۴\ \ln(yu_\tau/\nu) + ۴{,}۹ \qquad [۲۸\text{-}۵]$$

که u_τ سرعت اصطکاکی ($\sqrt{\tau_۰/\rho}$) و $\tau_۰$ تنش برش دیواره است. این معادله برای ناحیهٔ وسیعی از لایهٔ مرزی به‌کار می‌رود. برای ناحیه‌ای کوچک در طرف راست دیواره ($۵۰ > yu_\tau/\nu > ۰$) و در بخشهای دوردست لایهٔ مرزی از این معادله نمی‌توان استفاده کرد. این معادله برای گرادیان فشار غیرصفر قطعاً به‌کار می‌رود. ولی هرچه گرادیان فشار بیشتر می‌شود ناحیهٔ شامل‌شده محدودتر خواهد شد.

۹-۲-۳ شکل لگاریتمی قانون نقص سرعت:

$$(U-u)/u_\tau = -۲٫۴۴ \ln(y/\delta) + ۲٫۵ \qquad [۵-۲۹]$$

این معادله برای بخش میانی لایهٔ مرزی با گرادیانهای فشار صفر یا میانه به‌کار می‌رود. در معادلات (۵-۲۵)، (۵-۲۸) و (۵-۲۹) u، همچون فصل۵، سرعت متوسط زمانی در جریان متلاطم پایاست، هرچند در بقیهٔ این فصل مقدارهای میانگین را با خط میله (یعنی $\bar{u}$) مشخص می‌کنیم.

۹-۳ راهکار آماری

۹-۳-۱ سرعتهای جریان متلاطم و متوسط‌گیری شده

جریان متلاطمی را درون لوله‌ای در نظر بگیرید. اگر نقطهٔ خاصی را در جریان انتخاب، و سرعت را در آن نقطه برحسب تابع زمان مطالعه کنیم، منحنی تصادفی‌ای همچون شکل۹-۱ به‌دست می‌آوریم. سرعت متوسط زمانی $\bar{u}$ عبارت است از

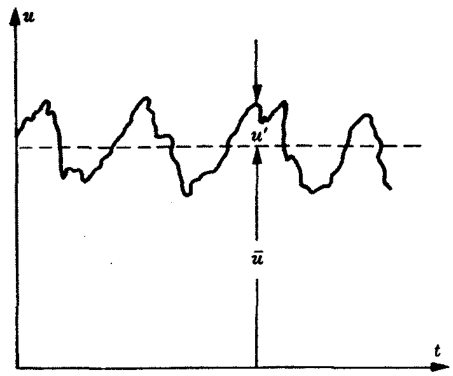
$$\bar{u} \equiv \frac{۱}{T_۱}\int_۰^{T_۱} u\, dt \qquad (۹-۱)$$

که زمان $T_۱$ آن‌قدر طولانی است که $\bar{u}$ برای هر زمان طولانیتری برای جریان پایا دارای همین عدد است. خط بالای این کمیت متوسط زمانی کمیت مشخص شده با معادلهٔ(۹-۱) را نشان می‌دهد. سرعت لحظه‌ای u را می‌توان برحسب سرعت متوسط زمانی $\bar{u}$، به‌نام سرعت میانگین، و سرعت نوسانی u' نوشت ($u = u' + \bar{u}$).

در بخش بعد، باید کمیتهای نوسانی را به روشهای مختلف ترکیب کنیم. از مجموعهٔ قواعد زیر برای این عملیات استفاده می‌کنیم. اگر a و b کمیتهای نوسانی، و c مقداری ثابت باشند، مجموعهٔ قواعد زیر (قواعد متوسط‌گیری رینولدز) را خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\overline{a+b} &= \bar{a} + \bar{b}\\
\overline{ca} &= c\bar{a}\\
\overline{ab} &= \bar{a}\bar{b} + \overline{a'b'}\\
\overline{\frac{\partial a}{\partial x}} &= \frac{\partial \bar{a}}{\partial x}
\end{aligned}$$

که $a = \bar{a} + a'$ و $b = \bar{b} + b'$. (مقدار میانگین نوسان صفر است، یعنی $\bar{a'} = \bar{b'} = ۰$).



شکل ۹-۱ تغییرات سرعت برحسب زمان در نقطهٔ ثابتی در جریان متلاطم. u' کمیتی تصادفی است که بر روی سرعت میانگین $\bar{u}$ قرارگرفته است.

۹-۳-۲ معادلات حرکت جریان متلاطم

اکنون، معادلات حرکت جریان متلاطم را به‌دست می‌آوریم. روش کار برای هر حالت اساساً یکسان است. نخست، این معادلات را برای کمیتهای لحظه‌ای می‌نویسیم. سپس متوسط زمانی هر دو طرف معادله را محاسبه می‌کنیم، با توجه به اینکه اگر این تساوی به‌طور لحظه‌ای برقرار باشد آن‌گاه برای متوسط دورهٔ زمانی نیز معتبر خواهد بود. سرانجام، معادلات را به‌گونه‌ای ساده می‌کنیم که فقط کمیتهای متوسط زمانی ظاهر شوند.

معادلهٔ پیوستگی برای جریان متلاطم

شکل دیفرانسیلی معادلهٔ پیوستگی، مانند فصل ۳، (به شکل تانسور دکارتی) عبارت است از

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=0 \qquad [۳-۳۰]$$

که ρ چگالی و u_i، iامین مؤلفهٔ سرعت است. این معادله برای جریان متلاطم متغیر است و متغیرهای وابستهٔ (ρ و u_i) کمیتهای نوسانی لحظه‌ای هستند. اگر متوسط زمانی این معادله را بگیریم، داریم

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)}=0$$

با قرار دادن مقدارهای متوسط زمانی به‌علاوهٔ بخش نوسانی به جای کمیتهای لحظه‌ای، و استفاده از قواعد متوسط‌گیری رینولدز، خواهیم داشت

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\bar{u}_i)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho' u'})=0 \qquad (۹-۲)$$

برای جریان تراکم‌ناپذیر معادلهٔ (۹-۲) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}=0 \qquad (۹-۳)$$

معادلهٔ تکانه برای جریان متلاطم

شکل دیفرانسیلی معادلهٔ تکانه را در فصل ۳ [معادلهٔ (۳-۵۴)] به‌دست آوردیم. فرض می‌کنیم که شاره تراکم‌ناپذیر و گران‌روی ثابت است. بدین‌ترتیب، معادلهٔ (۳-۵۴) با استفاده از نمادگذاری تانسور دکارتی و قرارداد جمع به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}+B_i \qquad (۹-۴)$$

که B_i نیروی حجمی و μ گران‌روی است. این معادله برای جریان متلاطم و لایه‌ای معتبر است. اما در جریان متلاطم، متغیرهای وابسته هم نسبت به زمان تغییر می‌کنند. این متغیرها مانند آنهایی که با لولهٔ پیتو اندازه‌گیری می‌شوند، متوسط‌گیری شده نیستند. اکنون، این معادلات را برحسب کمیتهای متوسط‌گیری شدهٔ زمانی به‌دست می‌آوریم.

با نشاندن $u_i=\bar{u}_i+\bar{u}_i$ و $p=\bar{p}+p'$ در معادلهٔ (۹-۴)، داریم

$$\rho\left[\frac{\partial(\bar{u}_i+u'_i)}{\partial t}+(\bar{u}_j+u'_j)\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i+u'_i)\right]=B_i-\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2(\bar{u}_i+u'_i)}{\partial x_j \partial x_j}$$

پس از ساده‌سازی و متوسط‌گیری برحسب زمان از هر دو طرف، داریم

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+u'_j\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}+\bar{B}_i \qquad (۹-۵)$$

جملهٔ سوم در طرف چپ معادلهٔ (۹-۵) معمولاً به شکل دیفرانسیلی نوشته می‌شود. از معادلهٔ پیوستگی برای جریان تراکم‌ناپذیر، داریم $\partial \bar{u}'_j/\partial x_j = \circ$. از این‌رو

$$u'_i \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} = \circ \quad \text{و} \quad u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = \circ$$

سپس با افزودن $\overline{\partial u'}/\partial x_j$ (یعنی، صفر) به هر دو طرف معادلهٔ (۹-۵)، خواهیم داشت

$$\overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u_{j'}}$$

و معادلهٔ (۹-۵) به‌صورت زیر درمی‌آید (با جملهٔ تلاطمی در طرف راست)

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) + \bar{B}_i \tag{۹-۶}$$

معادلهٔ (۹-۶) معادلهٔ تکانه برای جریان متلاطم است که برحسب کمیتهای متوسط‌گیری شدهٔ زمانی نوشته شده است. این معادله با معادلهٔ (۹-۴) برای کمیتهای لحظه‌ای تنها در جملهٔ اضافی آخر تفاوت می‌کند. غالباً این جمله را به‌عنوان تنشهای رینولدز یا تنشهای متلاطم می‌شناسند. وقتی معادلهٔ جریان متلاطم به این شکل نوشته می‌شود، بجز در جملهٔ افزوده‌شده به جملهٔ تنش لایه‌ای، ظاهری شبیه معادلهٔ جریان لایه‌ای دارد. به بیان دقیق‌تر این جمله تنش نیست. بلکه اثر لختی (یا تبادل تکانه) است (یادآوری می‌کنیم که از طرف چپ معادله آمده است) و علت نامیدن آن به‌عنوان تنش، روشی است که معادلهٔ جریان لایه‌ای را اصلاح می‌کنند.

معادلهٔ انرژی جریان متلاطم

معادلهٔ تکانهٔ (۹-۴) را با گران‌روی ثابت و چگالی ثابت شاره در نظر می‌گیریم. دو طرف این معادله را در u_i ضرب می‌کنیم، پس از ساده‌سازی، داریم

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_i u_i}{۲}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_i\left(\frac{p}{\rho} + \frac{u_j u_j}{۲}\right)\right] + \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] - \nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{۹-۷}$$

معادلهٔ (۹-۷) دارای یکای انرژی است و آن را معمولاً معادلهٔ انرژی می‌گویند. اما این معادله را نباید با معادلهٔ اول ترمودینامیک اشتباه گرفت. قانون اول ترمودینامیک بیان پایستگی انرژی برای همهٔ شکلهاست. معادلهٔ انرژی تلاطم از اصل پایستگی تکانه سرچشمه می‌گیرد و هیچ نوع انرژی گرمایی در آن دخیل نیست.

اکنون، معادلهٔ (۹-۷) را برحسب متوسط زمانی و کمیتهای نوسانی زیر می‌نویسیم و از هر دو طرف متوسط زمانی می‌گیریم

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i$$

$$p = \bar{p} + p'$$

$$u_i u_i = \bar{u}_i \bar{u}_i + ۲\bar{u}_i u'_i + u'_i u'_i$$

پس از ضرب هر دو طرف معادلهٔ (۹-۶) در $\bar{u}_i$ و ترکیب (کم‌کردن) این معادلات، خواهیم داشت

$$\overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{u'_i u'_i}}{۲}\right)}^{۱} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{u}_i \frac{\overline{u'_j u'_j}}{۲}\right)}^{۲} = \overbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u'_i\left(\frac{p'}{\rho} + \frac{u'_j u'_j}{۲}\right)}}^{۳}$$

$$\underbrace{-\overline{u'_i j'_j}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}}_{۴} + \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u'_j\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)}}_{۵} - \underbrace{\nu\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}}}_{۶} \tag{۹-۸}$$

معادلهٔ (۹-۸) را معادلهٔ انرژی تلاطمی می‌گویند و هریک از جمله‌ها انرژی نوع خاصی را مشخص می‌کنند:

۱. آهنگ زمانی افزایش انرژی جنبشی تلاطمی

۲. پخش همرفتی انرژی جنبشی تلاطمی به‌وسیلهٔ جریان میانگین

۳. پخش همرفتی انرژی تلاطمی کل به‌وسیلهٔ تلاطم

۴. تولید تلاطم (انرژی گرفته شده از جریان میانگین)

۵. کار انجام‌شده به‌وسیله تنشهای برشی گران‌رو حرکت متلاطم

۶. محو تلاطم به‌وسیلهٔ حرکت متلاطم

بعداً در این فصل به این معادله برمی‌گردیم. به‌ویژه، روی جمله‌های مختلف در جریانهای ساده دقت می‌کنیم تا درک بهتری از سازوکار تلاطم به‌دست آوریم.

۹-۴ نظریه‌های پدیده‌شناسی

در بخش قبل، معادلات جریان متلاطم را به‌دست آوردیم. سودمندی این معادلات از دیدگاه مهندسی قدری محدود شده است. حل این معادلات حتی برای جریانهای ساده تقریباً غیرممکن است. بنابراین باید به راهکارهای مستقیم‌تری متوسل شد که شامل مدلهای جریان تقریباً غیردقیق از نظر فیزیکی هستند، اما جوابهایی برای جریانهای موردنظر مهندسی به‌دست می‌دهند.

تانسور تنش برشی τ_{ij} (لایه‌ای τ_{ijl} به‌علاوه تلاطمی τ_{ijT}) عبارت است از

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) - \rho\overline{u_i'u_j'} = \tau_{ij_l} + \tau_{ij_T} \tag{۹-۹}$$

$$\tau_{ij_l} = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right), \qquad \tau_{ij_T} = -\rho\overline{u_i'u_j'}, \quad i \neq j \text{ برای}$$

امید اندکی برای دستیابی به راه‌حلی برای تنشهای رینولدرز وجود دارد. بنابراین، باید تنشهای متلاطم را به نحوی با سرعت میانگین مرتبط ساخت. این راهکار در بیان جریانهای متلاطم آزاد همچون جتها و دنباله‌ها موفق بوده است. تمام این مدلها به جریان دوبعدی محدوداند.

۹-۴-۱ گران‌روی گردابی یا گران‌روی تلاطمی

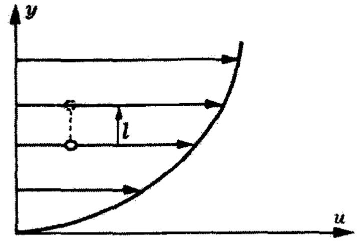
با نوشتن تنش برشی برحسب گران‌روی لایه‌ای به‌علاوهٔ جملهٔ دیگری که بیانگر حرکت تلاطمی یا حرکت ماکروسکوپیکی است، برای جریان دوبعدی داریم

$$\tau_{ij} = (\mu + \rho\varepsilon)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \tag{۹-۱۰}$$

که ε را گران‌روی تلاطمی می‌گویند و به‌صورت زیر به تنشهای رینولدز مربوط می‌شود

$$\varepsilon = \frac{-۱}{\partial \bar{u}_i/\partial x_j}\overline{u_i'u_j'}$$

مزیت تعریف گران‌روی تلاطمی به‌صورت معادلهٔ (۹-۱۰) این است که اگر ε کمیتی باشد که بتوان آن را به‌طور عددی تعیین کرد (یا برحسب سرعت میانگین)، آن‌گاه این شکل تنش برشی را می‌توان در معادلهٔ تکانه نشاند و از آن طریق تعداد متغیرهای وابسته را کاهش داد. این روش باعث ساده‌شدن زیاد مسئله می‌شود. اما مشکل این است که در بیشتر حالتها ε برای هریک از شرایط مختلف جریان فرق می‌کند و برای جریان مفروض، ثابت مکانی نیست. گران‌روی تلاطمی را برای بعضی از جریانهای واقعی بعداً در این فصل بررسی می‌کنیم.



شکل ۹-۲ نمودار طول آمیختگی تکانهٔ پرنتل.

۹-۴-۲ طول آمیختگی تکانهٔ پرنتل

پرنتل طولی را برای انتقال تکانه بین لایه‌های دارای سرعتهای میانگین مختلف تعیین کرد. این فرایند انتقال را در شکل ۹-۲ نشان داده‌ایم و از معادلهٔ (۹-۱۱) به‌دست می‌آید

$$\tau = \rho l^{2} \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \qquad (۹\text{-}۱۱)$$

که l فاصله‌ای است که ذره باید برای ایجاد تنش برشی تلاطمی ظاهری برای گرادیان سرعت مفروض بپیماید. مدل طول آمیختگی تکانهٔ تلاطمی شبیه نظریهٔ جنبشی (گازها) است که گران‌روی میکروسکوپی یا مولکولی آنها برابر سرعت (میانگین مولکول) ضرب‌در طول (مسافت آزاد میانگین) است. درکاربرد شباهت نظریهٔ جنبشی با تلاطم ناسازگاریهایی وجود دارد، به‌گونه‌ای که در جریان متلاطم اتلاف رخ می‌دهد و اجزای شاره ماهیت خود را حفظ نمی‌کنند. طول آمیختگی را می‌توان برای جریانهای دوبعدی همچون جریان درون لوله، جریان روی صفحهٔ تخت، جت آزاد و جریان دنباله به‌کار برد.

راهکار طول آمیختگی نیز همان مشکلات راهکار گران‌روی تلاطمی را برای بیشتر جریانها دارد (یعنی برای شرایط جریانی گوناگون فرق می‌کند و برای هر جریان مفروض متغیر مکانی است). وانگهی، هنگام به‌دست آوردن معادلات طول آمیختگی فرض می‌شود که مقدار آن کوچک است. اما، اندازه‌گیریها نشان داده‌اند که برای بسیاری از جریانها طول آمیختگی کاملاً بزرگ است.

۹-۴-۳ نظریه‌های پدیده‌شناسی دیگر

مدلهای جریان متلاطم دیگری شبیه دو مدل قبلی وجود دارند. یکی از این مدلها نظریهٔ انتقال گردشاری تایلور است که گردشاری هریک از ذرات را ثابت فرض می‌کند. در این حالت، طول آمیختگی گردشاری را می‌توان با روشی مشابه طول آمیختگی تکانه در مدل پرنتل به‌دست آورد.

۹-۵ همبستگیهای تلاطم

فعلاً حل معادلات را کنار می‌گذاریم و این پرسش را می‌پرسیم: برای بیان کامل میدان جریان به چه اطلاعاتی نیاز است؟ مؤلفهٔ سرعت لحظه‌ای در هر نقطهٔ جریان [مثلاً $u_i(x,y,z,t)$] اطلاعات زیادی به‌دست می‌دهد. اما، همچون قبل، u_i تابع تصادفی زمان است و خود کاربرد عملی محدودی دارد. همچنین،

$\bar{u}_i$ میدان سرعت میانگین را بیان می‌کند.

$\overline{u_i}$ کمک زیادی نمی‌کند، چون صفر ا ست.

$\overline{u_u'^{2}}$ اطلاعاتی دربارهٔ شدت نوسانها به‌دست می‌دهد.

$\overline{u_i'u_j'}$ اطلاعات بیشتری دربارهٔ جریان در هر نقطه به‌دست می‌دهد. (۹ کمیت که شامل ۳ کمیت $\overline{u_i'^{2}}$ است).

این کمیتها در معادلات حرکت ظاهر می‌شوند و آنها را همبستگیهای دوگانهٔ سرعت یک‌نقطه‌ای می‌گویند.

اگر تمام این کمیتها معلوم باشند، آنگاه هنوز شاره به‌طورکامل تعریف نشده است. این درست مثل آن است که بگوییم اگر معادلهٔ تکانه به‌طور کامل حل شده باشد ولی هنوز جریان به‌طورکامل تشریح نشده است. دلیل آن این است که همبستگیهای سرعت یک‌نقطه‌ای اطلاعاتی دربارهٔ اندازهٔ گردابهای تلاطمی و روش انتقال انرژی بین دو گرداب با اندازه‌های متفاوت را نمی‌دهد.

همبستگیهای سرعت دونقطه‌ای اطلاعاتی دربارهٔ اندازهٔ گردابهای متلاطم می‌دهند. در اینجا، می‌خواهیم وابستگی سرعت $(u'_i)_A$ را در یک نقطهٔ A نسبت به سرعت $(u'_j)_B$ در نقطهٔ دیگر B برقرار کنیم، یعنی

$$\overline{(u'_i)_A(u'_j)_B}$$

اگر همبستگی، یعنی وابستگی یک سرعت به سرعت دیگر وجود نداشته باشد، آنگاه این کمیت صفر است.

۹-۶ تلاطم همسانگرد

زمانی تلاطم همسانگرد است که کمیتهای مختلف تلاطم درنتیجهٔ دوران دستگاه مختصات بدون تغییر باقی بمانند، (یعنی کمیتهای مفروض در هر نقطه، صرف‌نظر از جهت اندازه‌گیری، یکسان باشند). شرط همسانگردی این است که جریان همگن (یعنی یکسان در تمام نقطه‌ها) باشد.

جریان متلاطم همسانگرد جریان ایده‌آلی است که فقط با جریانهای واقعی تقریب زده می‌شود. مثالی نزدیک به جریان متلاطم همسانگرد، جریان موجود در پایین دست صافی با سرعت یکنواخت است. هر جریانی که سرعت میانگین آن تغییر می‌کند، جریانی ناهمسانگرد است. بیشتر جریانهای واقعی فاصلهٔ زیادی با جریان همسانگرد دارند و تنها دلیل مطالعهٔ جریان همسانگرد این است که از نظر ریاضی حل آن قدری راحت است و به درک جریان ناهمسانگرد پیچیده‌تر کمک می‌کند. بیشتر پژوهشهای اخیر در زمینهٔ جریان متلاطم همسانگرد بوده است. مرجعهای ۳ و ۸ این موضوع را به‌طور عمیق بررسی کرده‌اند.

۹-۷ تلاطم دیواره

تلاطم دیواره جریان متلاطمی است که در اثر برهم‌تنش دیواره با مرز جامد ایجاد می‌شود. سرعت جریان در تماس با مرز جامد کند می‌شود، گویی که تغییر سرعت میانگینی بین این سطح و جریان آزاد وجود دارد.

تلاطم دیواره دو نوع است (۱) بیرونی (لایهٔ مرزی) و (۲) درونی (جریان درون لوله‌ها و مجراها). در این فصل مثالی ساده از هرکدام را بررسی می‌کنیم. نخست، جریان روی صفحهٔ تخت باگرادیان فشار صفر، و سپس جریان کاملاً توسعه‌یافتهٔ درون لوله را در نظر می‌گیریم. در حالی که بیشتر جریانها، پیچیده‌تر از این مثالها هستند، اما همهٔ آنها ویژگیهای اساسی یکسانی دارند و به درک فیزیکی جریانهای پیچیده‌تر در لایه‌های مرزی و مجراها کمک می‌کنند.

۹-۷-۱ جریان لایهٔ مرزی در امتداد صفحهٔ تخت

ناحیه‌های لایهٔ مرزی متلاطم

در فصل ۵ روشهای بیان توزیع سرعت میانگین را بررسی کردیم. نتیجه‌های قانون دیواره به‌خوبی برای مسئلهٔ صفحهٔ تخت به‌کار می‌روند. به‌عنوان مثال، بر پایهٔ این نتیجه‌ها، که در شکل ۵-۱۰ دیده می‌شوند، سه ناحیهٔ کاملاً مجزا در عرض لایهٔ مرزی وجود دارد، که عبارت‌اند از

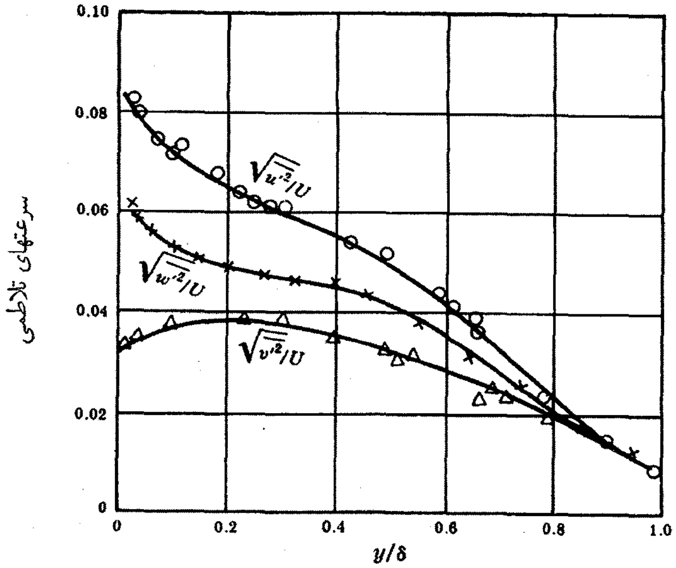
۱. لایهٔ دیوارهٔ موجود بر روی زیرلایهٔ گران‌رو

این ناحیه بسیار نازک است ($۵ > yu_\tau/\nu > ۰$). این ناحیه در نزدیکی دیواره و در مکانی قرار دارد که تنشهای گران‌رو بسیار بزرگتر از تنشهای تلاطمی‌اند. توزیع سرعت در این ناحیه تابع خطی فاصله از دیواره است، $u/u_\tau = yu_\tau/\nu$.

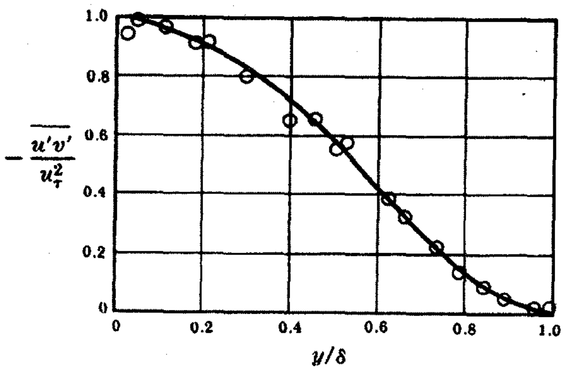
۲. تلاطم دیواره یا ناحیهٔ گذار

این ناحیه، ناحیهٔ میانه‌ای ($۳۰ > yu_\tau/\nu > ۵$) است که مقدار تنشهای گران‌رو و متلاطم آن تقریباً یکسان است.

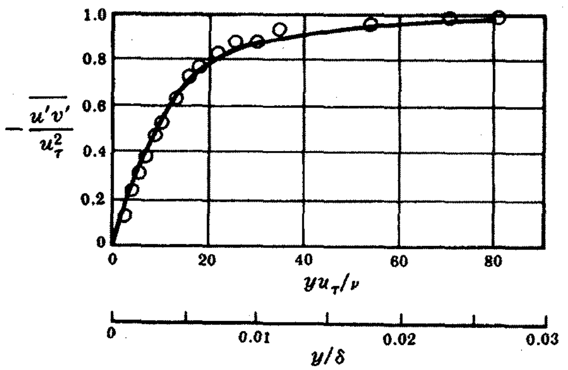
۳. ناحیهٔ متلاطم آزاد



شکل ۹-۳ سرعتهای تلاطمی برای جریان موجود در امتداد دیواره با گرادیان فشار صفر (در مرجع ۹).



(الف) توزیع تنش برشی متلاطم در عرض لایهٔ مرزی.



(ب) توزیع تنش برشی متلاطم نزدیک دیواره.

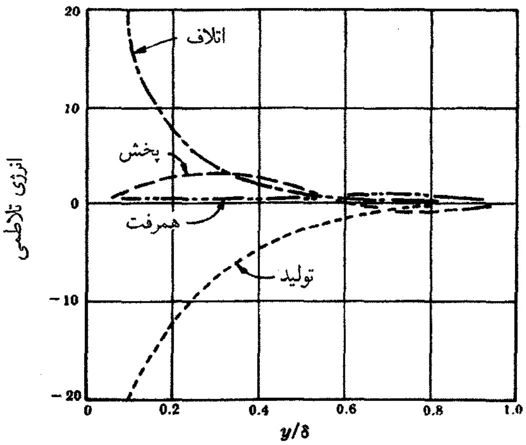
شکل ۹-۴ تنش متلاطم برای جریان روی صفحهٔ تخت با گرادیان فشار صفر (در مرجع ۹).

این ناحیه به مراتب از دو ناحیهٔ دیگر بزرگتر است ($yu_\tau/\nu > ۳۰$). تنشهای متلاطم بسیار بیشتر از تنشهای گران‌رو است و توزیع سرعت میانگین، بجز برای بخش دوردست لایهٔ مرزی، به شکل لگاریتمی قانون دیواره بیان می‌شود [معادلهٔ (۵-۲۸)].

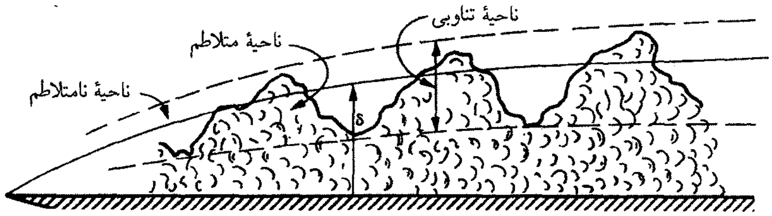
اندازه‌گیری کمیتهای تلاطمی در لایهٔ مرزی

سرعتهای تلاطمی را با بادسنج سیمی داغ اندازه می‌گیرند. همچون شکل ۹-۳، آنها از صفر در دیواره تا مقدار بیشینه در نزدیکی سطح صفحه به سرعت تغییر می‌کنند. همچنین شکل ۹-۳ نشان می‌دهد که میزان ناهمسانگردی در حرکت از لبهٔ لایهٔ مرزی به سوی دیواره افزایش می‌یابد. مؤلفهٔ عمود بر دیواره، v'، کمترین مقدار را دارد. این، نتیجه محدودیت تأثیر دیواره بر جریان لایهٔ مرزی است.

شکل ۹-۴ توزیع تنش رینولدز را در لایهٔ مرزی نشان می‌دهد. در اینجا، یادآوری می‌کنیم که ناحیه‌ای در مجاورت دیواره قرار دارد که تنش رینولدز آن اساساً ثابت است. همچنین، تنشهای گران‌رو فقط برای حدود ۲٪ لایهٔ مرزی مهم است.



شکل ۹-۵ توزیع انرژی تلاطم در لایهٔ مرزی (در مرجع ۸).



شکل ۹-۶ تصویر لحظه‌ای لایهٔ مرزی متلاطم که تقسیم‌بندی مشخص بین ناحیه‌های متلاطم و نامتلاطم و تناوبی را نشان می‌دهد.

معادلهٔ انرژی برای جریان روی صفحهٔ تخت (بجز نزدیک دیواره که تنشهای گران‌رو مهم‌اند) عبارت است از

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\frac{q^{۲}}{۲}}\right)+\bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{q^{۲}/۲}\right)+\overline{u'v'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{v'\left(\frac{p'}{\rho}+\frac{q^{۲}}{۲}\right)}\right]-$$
$$-\nu\left[\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}\left(\overline{\frac{q^{۲}}{۲}}\right)-\overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}\right]=۰ \qquad (۹-۱۲)$$

که $q^{۲}$ انرژی جنبشی تلاطمی $u'_iu'_i$ است. شکل ۹-۵ نتیجه‌های تجربی را برای جمله‌های مختلف معادلهٔ (۹-۱۲) نشان می‌دهد. در اینجا، جمله‌های تولید و اتلاف جمله‌های مهمی در بیشتر قسمتهای لایهٔ مرزی‌اند. این جمله‌ها بزرگترین سهم را در مجاورت دیواره دارند.

نتیجهٔ آزمایشهای قبل برحسب کمیتهای متوسط زمانی داده شده‌اند. اما، براساس اندازه‌گیریهای بادسنج سیمی داغ لحظه‌ای، این مدل را برای لایهٔ مرزی در نظر گرفتیم، که در شکل ۹-۶ دیده می‌شود. مرز نامنظم مشخصی بین ناحیه‌های جریان متلاطم و نامتلاطم وجود دارد. این شکل تصویری لحظه‌ای را نشان می‌دهد و مرزی به‌طور نامنظم بین دو حد ۱٫۲ $> y/\delta >$ ۰٫۴ حرکت می‌کند. بنابراین، سه ناحیهٔ متمایز وجود دارند؛ ناحیهٔ نزدیک به سطح که کاملاً متلاطم است، ۰٫۴ $> y/\delta$، ناحیه‌ای که متناوباً متلاطم و نامتلاطم است، ۱٫۲ $> y/\delta >$ ۰٫۴، و ناحیهٔ نامتلاطم، ۱٫۲ $< y/\delta$.

۹-۷-۲ جریان متلاطم کاملاً توسعه‌یافته در لوله

مفهوم یا تعریف طول لازم و عوامل مؤثر دیگر برای رسیدن به جریان کاملاً توسعه‌یافته را در فصل ۵ بررسی کردیم. معادلات این جریان کاملاً ساده شده است، زیرا تمام جمله‌هایی که به شکل $\partial/\partial x$ هستند (بجز فشار) صفرند. طول ورودی لازم برای رسیدن به جریان کاملاً توسعه‌یافته برحسب سرعت میانگین بین ۲۰ و ۱۰۰ برابر قطر است که به شرایط ورودی، عدد رینولدز، زبری دیواره، و تلاطم ورودی بستگی دارد. طول ورودی برای صادق بودن تعریف جریان کاملاً توسعه‌یافته برحسب کمیتهای تلاطمی اساساً بلندتر است.

جریان کاملاً توسعه‌یافته در لوله از بعضی جنبه‌ها شبیه جریان صفحهٔ تخت است. به‌عنوان مثال، هر دو جریان دوبعدی هستند، هر دو دارای سه ناحیهٔ اصلی (گران‌رو، متلاطم دیواره و متلاطم آزاد) هستند که در گسترهٔ فاصله‌ای یکسان y/δ از دیواره قرار دارند.

اختلافهای اصلی در جریان لوله عبارت‌اند از: (۱) سرعت میانگین عرضی (شعاعی) $\bar{v}$ وجود ندارد، (۲) سرعت میانگین در جهت جریان اصلی $\bar{u}$ به مختصهٔ آن جهت بستگی ندارد، (۳) جریان آزاد، و بنابراین ناحیهٔ تناوبی وجود ندارد، و (۴) تنش برشی به‌طور خطی برحسب فاصله از دیواره تغییر می‌کند. بنابراین، جریان توسعه‌یافته در لوله یکی از ساده‌ترین جریانهای متلاطم است و به همین علت بررسیهای تجربی گسترده روی این نوع جریان انجام گرفته است.

معادلات تکانه برای این حالت (در مختصات استوانه‌ای) عبارت‌اند از

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\overline{ru'v'})-\nu\left(\frac{d^2\bar{u}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar{u}}{dr}\right)=0 \qquad (۱۳\text{-}۹)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\overline{rv'^2})-\frac{\overline{w'^2}}{r}=0 \qquad (۱۴\text{-}۹)$$

که u، v و w به‌ترتیب سرعت در جهت محوری x، جهت شعاعی r و جهت سمتی θ و r متغیر شعاعی است که از محور استوانه اندازه‌گیری می‌شود.

معادلهٔ انرژی عبارت است از

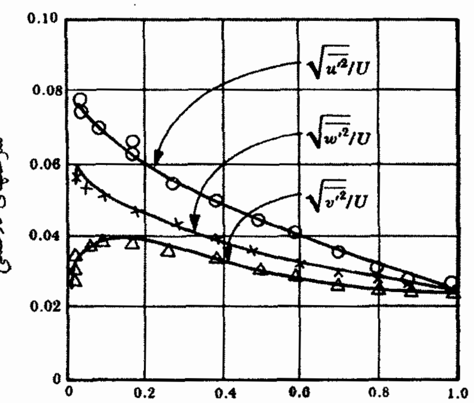
$$\overline{u'v'}\frac{d\bar{u}}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\overline{rv'\left(\frac{p'}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right)}\right]-\frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{\overline{q^2}}{2}\right)+\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial xj}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right]=0 \qquad (۱۵\text{-}۹)$$

که q^2 انرژی جنبشی تلاطم برابر است با $q^2=(u'u'+v'v'+w'w')$.

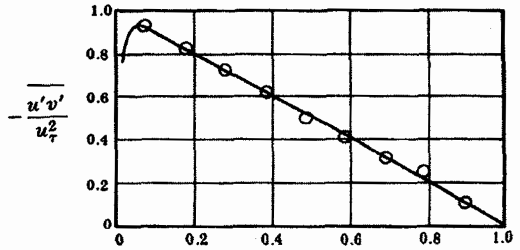
شکل ۹-۷ سرعتهای تلاطم، و شکل ۹-۸ توزیع تنش رینولدز برای جریان کاملاً توسعه‌یافته در لوله‌ای به شعاع R را نشان می‌دهد. شکل ۹-۹ توزیع انرژی تلاطمی را نشان می‌دهد. y فاصله از دیوارهٔ لوله و U سرعت میانگین خط مرکزی است. به کمک این نتیجه‌ها می‌توان مدلی برای جریان متلاطم درون لوله ارائه کرد. بسیاری از نتیجه‌های این مدل را برای جریان لایهٔ مرزی نیز می‌توان به‌کار برد. میزان شباهت بین این دو جریان با دورشدن از دیواره کاهش می‌یابد که عمدتاً ناشی از مشخصهٔ تناوبی لایه مرزی است.

مشخصه‌های مهم جریان درون لوله را در شکل ۹-۱۰ نشان داده‌ایم.

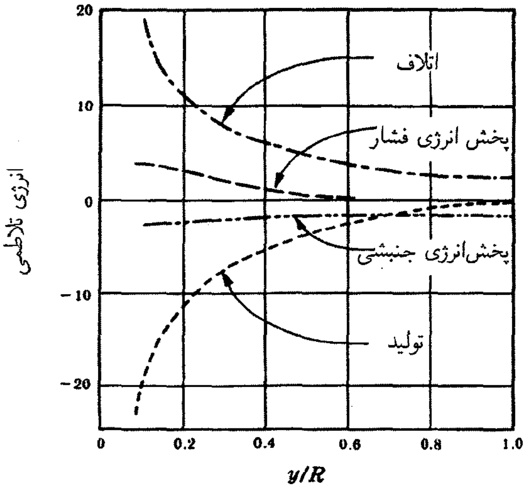
تولید و اتلاف بیشترین سهم را در بیشتر طول لایهٔ مرزی دارند. انرژی جنبشی متلاطم، تولید و اتلاف همگی در جریان متلاطم دیواره یا ناحیهٔ گذار، مقدار بیشینهٔ مشخصی را نشان می‌دهند.



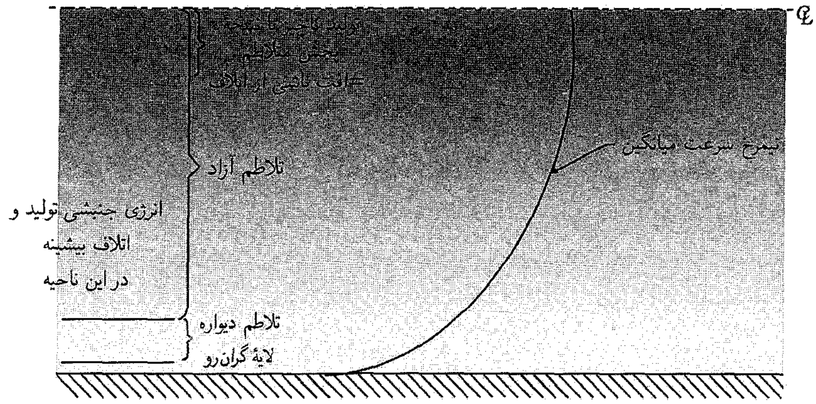
شکل ۹-۷ سرعتهای تلاطمی برای جریان کاملاً توسعه‌یافته در لوله (در مرجع ۱۰). R شعاع لوله، y فاصله از دیواره است. U سرعت (سرعت میانگین خط مرکزی) است.



شکل ۹-۸ توزیع تنش برشی تلاطمی برای جریان کاملاً توسعه‌یافته در لوله (در مرجع ۱۰).



شکل ۹-۹ توزیع انرژی تلاطمی برای جریان کاملاً توسعه‌یافته در لوله (در مرجع ۱۰).



شکل ۹-۱۰ بیان جریان متلاطم کاملاً توسعه‌یافتهٔ درون لوله.

انتقال انرژی جنبشی تلاطمی به‌طرف مرکز لوله با گرادیان کمتری ادامه می‌یابد و در مرکز لوله انرژی جنبشی مقداری کمینه دارد و این انرژی با اتلاف خط مرکزی خنثی می‌شود.

۹-۸ تلاطم آزاد

حرکت تلاطمی شاره را که تحت‌تأثیر مستقیم مرز جامد نیست، تلاطم آزاد می‌گویند. دنبالهٔ پشت جسم موجود در شارهٔ متحرک و جت خارج شده از شیپوره که به درون شارهٔ ساکن یا شاره‌ای با حرکت آهسته وارد می‌شود، نمونه‌های جریان متلاطم آزادند.

مسائل موردنظر مهندسی عبارت‌اند از تعیین آهنگ پراکندگی نسبت به فاصله در جهت جریان، سرعت میانگین، انتقال تکانه و انرژی در حین آمیختگی با شارهٔ پیرامونی.

مشخصهٔ جریانهای آزاد متلاطم این است که اثرهای گران‌روی هیچ تأثیر کنترل‌کننده‌ای روی حرکت میانگین شاره ندارد. حرکت میانگین شاره کاملاً به‌وسیلهٔ گردابهای تلاطمی تحمیل می‌شود. به این معنا، جریانهای دنباله و جت مشابه بخش بیرونی لایهٔ مرزی متلاطم هستند. تنها نقشی که گران‌روی در جریانهای آزاد متلاطم دارد، اتلاف انرژی تلاطمی از طریق گردابهای کوچک در مرحلهٔ نهایی است.

۹-۸-۱ جریانهای دنباله

جریان متلاطم موجود در دنبالهٔ استوانه‌ای دایره‌ای به قطر d، همچون شکل ۹-۱۱، را در نظر بگیرید. مسئله این است: برای استوانه‌ای با قطر، شاره، و سرعت شارهٔ مفروض، $u = u(x,y)$ و نیم‌پهنای دنبالهٔ $b = b(x)$ و کمیتهای تلاطمی را تعیین کنید. تعیین راه‌حل کاملاً تحلیلی امکان ندارد، اما با نتیجه‌های تجربی می‌توان تعمیم‌سازیهای سودمندی ایجاد کرد.

معادلات تکانه در نقطه‌ای دور از استوانه عبارت است از

$$U\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) \tag{۹-۱۶}$$

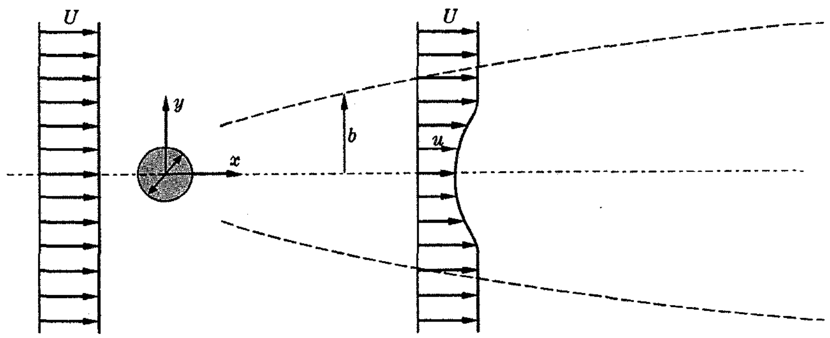
$$0 = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \rho\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'^{2}}) \tag{۹-۱۷}$$

که فرض شده است $\tau_T \gg \tau_l$، $\bar{u} \gg \bar{v}$، $\partial/\partial y \gg \partial/\partial z$ و $\nabla\bar{p} = 0$. τ_T تنش برشی جریان تلاطمی است که با معادلهٔ(۹-۹) تعریف می‌شود و τ_l تنش برشی جریان لایه‌ای است.

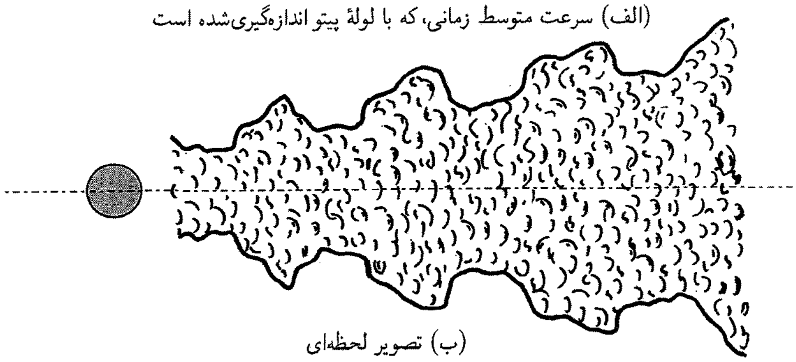
حتی معادلات ساده‌ای چون (۹-۱۶) و (۹-۱۷)، در مقایسه با معادلات اصلی، برای دست‌یابی به جواب کافی نیستند. بنابراین، رهیافت کلی دریافتن جوابهایی برای مسائل جریان جت و دنباله این است که فرض کنیم هر دو نیمرخهای سرعت مشابهی دارند و ضمناً به‌جای تنش رینولدز یکی از مدلهای پدیده‌شناسی همچون گرانروی تلاطمی طول آمیختگی پرنتل را جایگزین کنیم.

منظور ما از نیمرخ مشابه سرعت این است که توزیع سرعت به شکل زیر باشد

$$\bar{u}/U = f(y/b) \tag{۹-۱۸}$$



(الف) سرعت متوسط زمانی، که با لولهٔ پیتو اندازه‌گیری‌شده است



(ب) تصویر لحظه‌ای

شکل ۹-۱۱ دنبالهٔ متلاطم استوانهٔ دایره‌ای.

اشلیشتینگ [۱۴]، در ارتباط با طولهای آمیختگی تکانهٔ پرنتل از بحث همانندی، استفاده کرد. او معادلهٔ دیفرانسیل را با این فرض که طول آمیختگی متناسب با عرض دنباله است، حل کرد و با استفاده از معادلهٔ انتگرالی تکانه رابطه‌های زیر را به‌دست آورد

$$b = \sqrt{10}\,\beta(xC_Dd)^{1/2} \tag{۹-۱۹}$$

$$\frac{U-\bar{u}}{U} = \frac{\sqrt{10}}{18\beta}[x/C_Dd]^{\frac{-1}{2}}[1-(y/b)^{\frac{3}{2}}]^2 \tag{۹-۲۰}$$

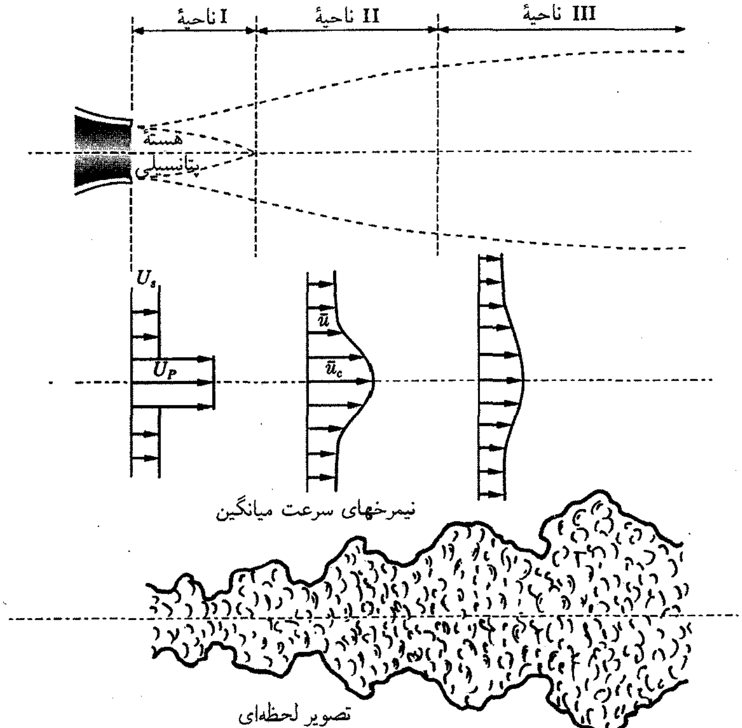
که $\beta = 0{,}18$، مقداری ثابت است که با اندازه‌گیری تجربی به‌دست می‌آید. C_D ضریب پساست.

معادلهٔ (۹-۱۹) سازگاری خوبی با نتیجه‌های تجربی برای $\frac{x}{d} > 10$، و معادلهٔ (۹-۲۰) برای $\frac{x}{d} > 50$ دارد.

۹-۸-۲ جریانهای جت

اکنون، جریان دایره‌ای متلاطم جت، مطابق در شکل ۹-۱۲ را در نظر می‌گیریم. این جریان را می‌توان به سه ناحیه تقسیم کرد که هریک دارای مشخصهٔ خاصی است: ناحیهٔ ۱ شامل هسته پتانسیلی با سرعت یکنواخت میانگین U_p است که به‌وسیلهٔ لایهٔ برشی محصور شده است. توسط شاره‌ای با سرعت یکنواخت میانگین U_s، احاطه شده است. این ناحیه از خروجی شیپوره شروع می‌شود و طول آن ۴ تا ۵ برابر قطر شیپوره است. مشخصهٔ ناحیهٔ ۲ نبود و هستهٔ پتانسیلی و نبود همانندی در توزیع سرعت میانگین است. سپس، به ناحیهٔ ۳ می‌رسیم که از فاصلهٔ حدود ۸ برابر قطر شیپوره شروع می‌شود و مشخصهٔ آن همانندی در توزیع سرعت است.

بررسیهای زیادی دربارهٔ جریانهای متلاطم جت انجام گرفته است که بیشتر به‌علت اهمیت مهندسی، سادگی، و ارتباط آن با جریانهای متلاطم دیگر است. کتابهای زیادی دربارهٔ این موضوع به چاپ رسیده است [۱ و ۱۲].



شکل ۹-۱۲ ناحیه‌های مختلف و نیمرخهای سرعت برای جریان جت متلاطم.

جدول ۹-۱ عرض دنباله و سرعت خط مرکزی

	عرض متناسب با	نقص سرعت خط مرکزی $(\overline{u}_c - U_s)$، متناسب با
جت دوبعدی تخت	x	$x^{-۱/۲}$
جت دایره‌ای	x	$x^{-۱}$
دنبالهٔ دوبعدی تخت	$x^{۱/۲}$	$x^{-۱/۲}$
دنبالهٔ دایره‌ای	$x^{۱/۳}$	$x^{-۱/۳}$

هینز [۸]، با استفاده از روش همانندی وگران‌روی تلاطمی، جوابی برای توزیع سرعت میانگین به‌دست آورد. او، با استفاده از (شکل دیفرانسیلی) معادلهٔ تکانه و معادلهٔ انتگرالی تکانه، دریافت که برای $(U_p - \bar{u})/U_s \gg ۱{,}۰$، b متناسب با $(x+a)$ است و

$$\frac{U_p - \bar{u}}{U_p - \bar{u}_c} = \left[۱ + \frac{(U_p - \bar{u}_c) r^۲}{۸\varepsilon (x+a)}\right]^{-۲}$$

$$(U_p - \bar{u})/U_s \gg ۱, b \equiv (x+a)$$

برای $(U_p - \bar{u})/U_s \ll ۱{,}۰$، b متناسب با $(x+a)^{۱/۲}$ است، در اینجا، فرض می‌شود که ε مقداری ثابت، و a مقداری تجربی است؛ U_p و U_s را در شکل ۹-۱۲ نشان داده‌ایم و $\bar{u}_c$ سرعت خط مرکزی است.

نتیجه‌های آهنگ رشد جریان دنباله و جت و سرعتهای خط مرکزی را به اختصار در جدول ۹-۱ آورده‌ایم. البته، این نتیجه‌ها در نزدیکی دنباله و در مجاورت شیپوره معتبر نیستند.

۹-۹ پیشرفتهای اخیر

بیان نظری کامل جریان متلاطم هنوز یکی از مسائل حل‌نشدهٔ فیزیک جدید است. از روشهای زیادی برای کمک به درک فیزیکی تلاطم استفاده شده است، اما با بیان کامل ریاضی آن هنوز بسیار فاصله داریم. در این میان، روش بازبهنجارش دارای اهمیت خاصی است که مدیون فیزیک انرژیهای بالا و مفهوم نظریهٔ «آشوب» مبتنی بر برهم‌تنش چندین سیستم نوسان‌ساز برهم‌کنشگر است.

مشکل بیان نظری تلاطم را می‌توان با بررسی تلاطم از دیدگاه سیستم «آشوبناک» بهتر درک کرد. نوسانگر سادهٔ خطی‌ای را با دو درجهٔ آزادی در نظر بگیرید. حرکت یکی از درجه‌های آزادی به شرایط اولیه بستگی دارد و پیچیده‌تر از دستگاه نوسانگری با یک درجهٔ آزادی می‌شود، که درواقع برهم‌نهش دو مد است. با افزایش درجهٔ آزادی، حرکت هر نوسان پیچیده‌تر می‌شود و ممکن است پس از مدتی طولانی تکرار شود. وانگهی، مکان (یا مختصات هر درجهٔ آزادی در هر زمان خاص) به شرایط اولیه، به‌ویژه پس از سپری شدن زمانی طولانی، حساس‌تر خواهد شد.

اگر سیستمی را با تعداد درجهٔ آزادی بسیار زیاد (عملاً شمارش‌ناپذیر) درنظر بگیریم، مقدار هریک از مختصات متناظر با هر درجهٔ آزادی در هر زمان (پس از سپری شدن زمانی طولانی) به‌طور جدی به مقدار دقیق شرایط اولیه بستگی دارد که عملاً پیش‌بینی عملکرد چنین سیستم پیچیده‌ای را، صرف‌نظر از میزان دقت به‌کار رفته در تعیین شرایط اولیه غیرممکن می‌سازد. به‌عنوان مثال، در بعضی از سیستمهای با درجهٔ آزادی زیاد اما هنوز شمارش‌پذیر، به‌ویژه اگر غیرخطی باشند، اختلاف فقط یک رقم مثلاً در ۱۶امین شرط اولیه می‌تواند حالت سیستم را در زمانهای بعدی کاملاً تغییر دهد. بنابراین، حتی با رایانه‌های رقمی جدید نیز تعقیب چنین سیستمی غیرممکن است؛ چنین رفتاری را به این علت آشوبناک می‌گویند که عملاً حتی اگر از مکانیک نیوتونی جبری پیروی کند، پیش‌بینی‌ناپذیر است. نظریهٔ «آشوب» به‌کاررفته برای تلاطم به بینشهای جدیدی در مکانیک تلاطمی منجر شده است.

نظریه‌های پدیده‌شناسی جدیدی به‌وجود آمده‌اند که، به‌ویژه، برای تحلیل رایانه‌ای مناسب‌اند. در این میان، مدل به اصطلاح K-ε اهمیتی خاص دارد که در بیان جریانهای متلاطم، به‌ویژه در ناحیه‌های دور از جریانهای برشی قوی که در نزدیکی دیواره‌ها رخ می‌دهند، بسیار موفق بوده است.

علاقه‌مندان می‌توانند برای دست‌یابی به جزئیات بیشتر دربارهٔ جریانهای متلاطم به مرجعها و مجله‌های رایج مراجعه کنند.

۹-۱۰ خلاصه

در این فصل موضوع جریان تراکم‌ناپذیر متلاطم را تحت عنوان «تلاطم همسانگرد» و «تلاطم برشی» بررسی کردیم. تلاطم همسانگرد جریانی بسیار ایده‌آل است که مستلزم نداشتن تغییر سرعت میانگین است. در حالی که تلاطم همسانگرد را به‌ندرت با جریانهای واقعی مهندسی تقریب می‌زنند، اما قطعاً به درد برخی از راه‌حلهای ریاضی می‌خورد و درنتیجه، با مطالعهٔ گستردهٔ آن می‌توان به درک مفاهیم پیچیده‌تر جریانهای ناهمسانگرد دست یافت.

تلاطم برشی را می‌توان به اجزای تلاطم دیواره، مانند جریانهای لایهٔ مرزی و تلاطم آزاد مانند دنباله‌ها و جتها نیز تقسیم کرد. مسائل موردنظر تعیین سرعت میانگین، تنش برشی و کمیتهای تلاطمی هستند. معمولاً دو راهکار وجود دارد: (۱) راهکار پدیده شناختی تعریف ضریبهای تبادل همچون گران‌روی تلاطمی و طول آمیختگی برای مرتبط کردن تنش تلاطمی به میدان سرعت میانگین و (۲) راهکار آماری ثبت معادلات دیفرانسیل اصلی برحسب کمیتهای متوسط زمانی. هر دو راهکار از دیدگاه مهندسی سودمندند.

مراجع

1. Abramovich, G. N., *The Theory of Turbulent Jets* (USSR), MIT Press, 1963.
2. Anderson, D. A., Tannehill, J. C., and Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corp., 1984.
3. Batchelor, G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, 1956.
4. Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford, 1961.
5. Drazin, P. G., and Reid, W. H., *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, 1981.
6. Essers, J. A., *Computational Methods for Turbulent, Transonic, and Viscous Flows*, Hemisphere Publishing Corp., 1983.
7. Frisch, U., *Turbulence*, Cambridge University Press, 1995.
8. Hinze, J. O., *Turbulence*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1975.
9. Klebanoff, P. S., "Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient," NACA TN 3178, 1954.
10. Laufer, J., "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow," NACA R. 1174, 1954.
11. Moon, F. C., *Chaotic Vibrations*, John Wiley, 1987.
12. Pai, S. I., *Fluid Dynamics of Jets*, Van Nostrand, 1954.
13. Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1980.
14. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed., McGraw-Hill, 1986.
15. Schubauer, G. B., and Tchen, C. M., *Turbulent Flow*, Princeton University Press, 1961.
16. Tennekes, H., and Lumley, J. L., *A First Course in Turbulence*, MIT Press, 1972.
17. Townsend, A. A., *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press, 1956.

For recent and current developments the reader is referred to journals; in particular the following are recommended: *Journal of Fluid Mechanics* and *Physics of Fluids*.

مسائل تکمیلی

۹-۱ معادلات حرکت را برای جریان کاملاً توسعه‌یافته با چگالی و گران‌روی ثابت در طوقهای هم‌مرکز به‌دست آورید. جریان محوری است.

۹-۲ ثابت کنید که معادلهٔ پیوستگی تراکم‌ناپذیر تنها با انحرافات لحظه‌ای صادق‌اند.

۳-۹ جریان دوبعدی کاملاً توسعه‌یافته‌ای را بین دو دیوارهٔ موازی، که یکی ثابت است و دیگری با سرعت ثابت U حرکت می‌کند، در نظر بگیرید. فرض کنید $\frac{\partial p}{\partial x} = ۰$، که x در جهت جریان اندازه‌گیری می‌شود.

(الف) شکل کلی منحنی سرعت میانگین را تعیین کنید.

(ب) توزیع تنش برشی را تعیین کنید.

(ج) توزیع تقریبی گران‌روی تلاطمی ε و طول آمیختگی l را تعیین کنید.

(د) توزیع فشار را به‌طور تقریبی تعیین کنید.

۴-۹ جریان هوا ($p = ۱۴٫۷\text{psi}$ و $T = ۵۹°\text{F}$ و $\rho = ۰٫۰۰۲۳۸\ \text{slug/ft}^۳$ و $\mu = ۰٫۰۳۷۳(۱۰)^{-۵}\ \text{slug/ft-s}$ و $\nu = ۱٫۵۷ \times ۱۰^{-۴}\text{ft}^۲/\text{s}$) با سرعت جریان آزاد ۵۰ft/s را روی صفحه‌ای تخت در نظر بگیرید. در یک قسمت $\delta = ۲٫۸\text{in.}$ و تنش برشی دیواره $\tau_۰ = ۰٫۰۰۰۸۱۳\text{lb/ft}^۲$ است. فرض کنید که توزیع سرعت در گسترهٔ $۲۰ < yu_\tau/\nu < ۱۰۰۰$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\bar{u}/u_\tau = ۲٫۴۴\ln \text{yu}_\tau/\nu + ۴٫۹$$

با این فرض که تنش برشی ثابت است، مطلوب است محاسبهٔ (الف) طول آمیختگی پرنتل و (ب) نسبت ε/ν در $y = ۰٫۰۵\text{in.}$ و $y = ۰٫۱۰\text{in.}$.

نمادگذاری فصل ۹

$a =$ ثابت

$b =$ نیم‌پهنای دنباله یا جت

$B_i =$ نیروی حجمی در واحد حجم

$C_D =$ ضریب پسا

$d =$ قطر استوانه

$f =$ مفهوم تابعی

$l =$ طول آمیختگی تکانهٔ پرنتل

$m =$ نما برای قانون توان توزیع سرعت

$n =$ نما برای قانون توان توزیع سرعت

$p =$ فشار

$q^۲ =$ انرژی جنبشی تلاطم، $u'_iu'_i$

$r =$ مختصهٔ شعاعی

$R =$ شعاع لوله

$t =$ زمان

$T_۱ =$ طول زمان برای متوسط‌گیری

$U =$ سرعت جریان آزاد، سرعت خط مرکزی میانگین در لوله

$U_p =$ سرعت جت

$U_s =$ سرعت جریان ثانویه

$\bar{u}_c =$ سرعت خط مرکزی متوسط

$u_i =$ $u_۱$، $u_۲$، $u_۳ = u$، ν، w مؤلفه‌های سرعت

$u_\tau =$ سرعت اصطکاکی $= \sqrt{\tau_\circ/\rho}$

$x_i =$ $x_۱$، $x_۲$، $x_۳ = x$، y، z مختصات دکارتی

$y =$ فاصله از دیواره

$\overline{u_i' u_j'} =$ همبستگی سرعت دوگانهٔ یک‌نقطه‌ای

$(u_i')_A (u_j')_B =$ همبستگی سرعت دوگانهٔ دونقطه‌ای

$\delta =$ ضخامت لایهٔ مرزی

$\varepsilon =$ گران‌روی تلاطمی

$\mu =$ گران‌روی

$\nu =$ گران‌روی جنبشی، μ/ρ

$\rho =$ چگالی

$\tau_{ij} =$ تانسور تنش برشی

$\tau_{ij_T} =$ تانسور تنش برشی تلاطمی $= -\rho\overline{u_i' . u_j'}$

$\tau_{ij_l} =$ تانسور تنش برشی لایه‌ای $\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$

$\tau =$ مؤلفهٔ اول تنش برشی مربوط به مسئله‌ای خاص

$\tau_\circ =$ تنش برشی در دیواره

$\overline{(\ )} =$ نشانگر مقدار میانگین

$(\ )' =$ نشانگر مؤلفهٔ نوسانی

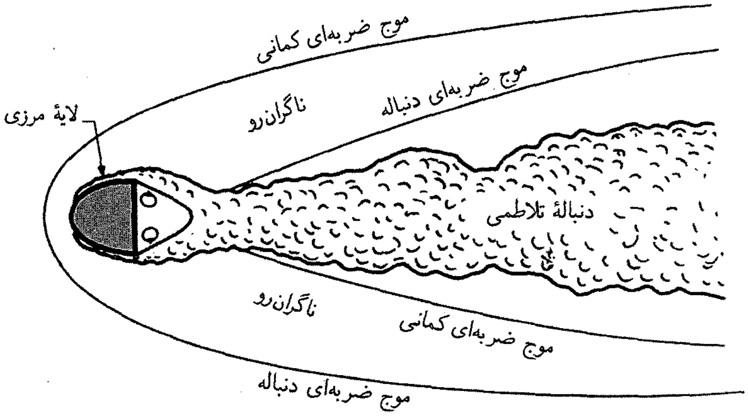
۱۰

جریان لایهٔ مرزی ابرصوتی

۱۰-۱ مقدمه

جریان ابرصوتی به علت استفاده در موشکها و سفینه‌های فضایی بسیار مهم است. وقتی جسمی وارد جو زمین می‌شود و یا با عددهای ماخ بسیار بالا در جو پرواز می‌کند، درنتیجهٔ دمای بسیار بالای گاز اطراف جسم تفکیک مولکولی رخ می‌دهد. جریان ابرصوتی به‌صورت جریانی با سرعت زیاد و با عدد ماخ بالا، به‌گونه‌ای که تفکیک رخ دهد، تعریف می‌شود (برای جو زمین $M > ۶$).

اکنون، با ذکر مثالی مطالعهٔ جریان ابرصوتی را با بررسی رفتار جریانهای مختلف در پیرامون پیمایه‌ای که با سرعت بسیار زیاد، همچون شکل ۱۰-۱، به جو زمین وارد می‌شود، شروع می‌کنیم. موج ضربه‌ای کمانی‌ای در جلوی جسم تشکیل می‌شود و اطراف جسم را می‌پوشاند. جریان در جلوی این موج ضربه‌ای نا‌آشفته است. این موج ضربه‌ای بر روی محور تقارن قوی‌ترین حالت را دارد، زیرا در آنجا عمود بر جریان است. در پشت موج ضربه‌ای ناحیه‌ای وجود دارد که تفکیک رخ می‌دهد. درست در پشت موج ضربه‌ای ناحیه‌ای است که اثرهای گران‌روی مهم نیستند، اما نزدیک به سطح جسم لایهٔ مرزی وجود دارد که تنشهای گران‌رو در آنجا مهم‌اند و جریان آنجا ممکن است لایه‌ای یا متلاطم باشد. با عبور شاره از پشت جسم، همچون در انبساط پرنتل-مایر، شاره به طرف محور برمی‌گردد. سپس، جریان در جهت عکس برمی‌گردد (راست‌شدن جریان)، که ناشی از حرکت شاره از طرف مقابل است. راست شدن جریان به موج ضربه‌ای مایلی منجر می‌شود که موج ضربه‌ای دنباله نام دارد. جریان پس از موج ضربه‌ای دنباله شامل دنباله‌ای با هستهٔ متلاطمی است که دور آن را ناحیهٔ جریان غیرمتلاطم گرفته است. در دنباله، سرعت کاهش می‌یابد (روی محور به مقدار کمینه می‌رسد)، اما با افزایش فاصله در پشت جسم افزایش می‌یابد و سرانجام، تقریباً یکنواخت و برابر سرعت جریان آزاد می‌شود. اما، هستهٔ متلاطم تا فاصلهٔ زیادی در پشت جسم (هزاران برابر قطر جسم) برجا می‌ماند.



شکل ۱۰-۱ رژیمهای جریان ابرصوتی.

در این فصل، لایهٔ مرزی و جریانهای دنباله را بررسی می‌کنیم، اما دربارهٔ تعیین شکل موج ضربه‌ای و ناحیه‌های جریان ناگران‌رو بحث نخواهیم کرد، زیرا حل آنها (اساساً) به روشهای عددی نیاز دارد. در فصل ۸ به مفهوم اصلی جریان فراصوتی، که به ایدهٔ روشهای به‌کاررفته در محاسبات خواهد انجامید، اشاره کردیم.

مسئلهٔ لایهٔ مرزی متلاطم ابرصوتی یکی از پیچیده‌ترین مسائل در مکانیک شاره‌هاست. این مسئله، افزون بر تمام مشکلات جریان تراکم‌ناپذیر متلاطم (که در فصل ۹ اشاره شد)، پیچیدگیهای دیگری همچون تغییرات چگالی و دمای زیاد، تفکیک و بازترکیب مولکولها و پخش را نیز دارد.

با نوشتن معادلات مهم، بررسی روش استفاده از نتیجهٔ جریانهای ساده‌تر و بحث کوتاه دربارهٔ روشهای حل معادلات، به‌تدریج به حل مسئله نزدیک می‌شویم.

۱۰-۲ معادلات لایهٔ مرزی

تنها تفاوت معادلات لایهٔ مرزی با معادلات فصل ۵ این است که در اینجا اثر واکنشهای شیمیایی و پخش را نیز باید در نظر بگیریم. معادلات سادهٔ فصل ۵ برای شاره‌هایی که غلظت ذرات مختلف آنها همگن نیست، کافی نخواهد بود. در جریان ابرصوتی گرادیانهای دمایی و پخش بزرگی وجود دارد و بنابراین انتقال جرم، تکانه، و انرژی از طریق پخش انجام می‌گیرد.

همچون قبل، دو راهکار برای ایجاد معادلات مکانیک شاره‌ها وجود دارد. راهکار نخست که کاربرد بیشتری دارد، راهکار پیوستاری است. به‌عنوان مثال، معادلات تکانه و انرژی با فرض اینکه شاره پیوستار است، به‌دست می‌آیند. سپس، از طریق معادلات پدیده‌شناسی[1] این رابطه‌ها (از مرتبهٔ اول) برای جریان دوبعدی صفحه‌ای (xy) با سرعت u در جهت x به‌کار می‌روند.

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{قانون استوکس} \tag{۱۰-۱}$$

$$q_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{قانون فوریه} \tag{۱۰-۲}$$

$$V_{iy} = -D_{ij} \frac{1}{C_i} \frac{\partial C_i}{\partial y} \quad \text{قانون فیک} \tag{۱۰-۳}$$

ضریبهای گران‌روی μ، رسانندگی گرمایی κ، و ضریب پخش دوتایی D_{ij} (برای پخش گونهٔ i به درون آمیزهٔ گونه‌های i، j) را به‌عنوان ضریبهای انتقال می‌شناسند، و

τ_{yx}= تنش برشی

۱. نیروی برشی و آهنگ کرنش، شار گرمایی و گرادیان دما، و پخش جرم و گرادیان غلظت به هم مرتبط می‌شوند ـ م.

g_y =آهنگ شار گرمایی در جهت y

V_{iy} =سرعت پخش در جهت y برای گونهٔ i که به درون آمیزهٔ گونه‌های i و j پخش شده است [معادلهٔ (۱۰-۴) را ببینید].

C_i = کسر جرم گونهٔ i =نسبت جرم‌گونهٔ i در واحد حجم به چگالی جرمی کل.

راهکار دوم، برخورد با شاره به‌صورت ذره است. در این حالت، با دینامیک ذرات برخوردکننده سروکار داریم. چپمن و کولینگ [۲] و هرشفلدر، کرتیس و برد [۶] این راهکار را به تفصیل درکتابهای خود بیان کرده‌اند. در اینجا، این راهکار را بررسی نخواهیم کرد، و فقط به پایستگی معادلهٔ گونه [۱] می‌پردازیم:

$$\rho\frac{DC_i}{Dt} = \dot{w}_i - \nabla\cdot(\rho C_i \mathbf{v}_i) \tag{۱۰-۴}$$

که $\mathbf{V}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$ =سرعت پخش گونهٔ i

$\mathbf{v}_i$ =سرعت متوسط گونهٔ i

$$\mathbf{V} = \text{سرعت جرمی متوسط همهٔ گونه‌ها} = \frac{\sum_i \rho_i \mathbf{v}_i}{\sum_i \rho_i} = \frac{\sum_i \rho C_i \mathbf{v}_i}{\sum_i \rho C_i} = V$$

که ρ_i چگالی جرمی گونهٔ i است. u و v مؤلفه‌های $\mathbf{V}$ هستند،

$\dot{w}_i$ = آهنگ جرمی تولید گونهٔ i در واحد حجم توسط واکنشهای شیمیایی،

ρ, =چگالی جرمی کل $\sum_i \rho_i$ است.

با فرض جریان لایهٔ مرزی پایای دوبعدی صفحه‌ای و نادیده گرفتن جمله‌های پخش در جهت x و با استفاده از قانون فیک، پایستگی معادلهٔ گونه به صورت زیر درمی‌آید

$$\rho\left[u\frac{\partial C_i}{\partial x} + v\frac{\partial C_i}{\partial y}\right] = \dot{w}_i + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{۱۲}\frac{\partial C_i}{\partial y}\right) \tag{۱۰-۵}$$

که u و v مؤلفه‌های x و y سرعت جرمی متوسط $\mathbf{V}$ هستند و به‌جای D_{ij}، از ضریب پخش دوتایی $D_{۱۲}$ استفاده شده است. می‌توان نشان داد که $D_{۱۲} = D_{۲۱}$، و ضریب دوتایی برای بیشتر سیستمهای گازی موردنظر کفایت می‌کند. معمولاً دو نوع گونه وجود دارد: گونه‌های سنگین و گونه‌های سبک. به‌عنوان مثال، در هوا ذرات سنگین $O_۲$ و $N_۲$ و ذرات سبک O و N وجود دارند. $D_{۱۲}$ پخش ذرات N یا O را از طریق $N_۲$ و $O_۲$ کاملاً بیان می‌کند. معادلهٔ پیوستگی کلی عبارت است از

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = ۰ \tag{۱۰-۶}$$

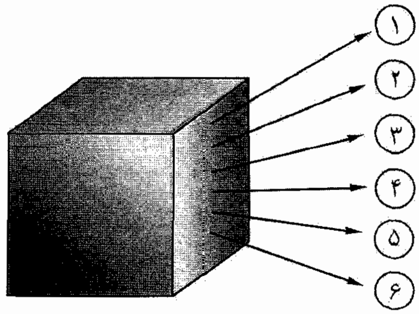
و معادلهٔ تکانه برای شارهٔ کلی عبارت است از

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{۱۰-۷}$$

معادلهٔ انرژی کلی برای شارهٔ کلی (با نادیده گرفتن سهم انرژی جنبشی $v^۲/۲$ در مقایسه با $u^۲/۲$) عبارت است از

$$\begin{aligned}&\rho\left[u\frac{\partial}{\partial x}(h+u^۲/۲) + v\frac{\partial}{\partial y}(h+u^۲/۲)\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{P_r}\frac{\partial}{\partial y}(h+u^۲/۲) + \mu\left(۱-\frac{۱}{P_r}\right)\frac{۱}{۲}\frac{\partial u^۲}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{۱}{L}-۱\right)\rho D_{۱۲}\sum_i h_i\frac{\partial C_i}{\partial y}\right]\end{aligned} \tag{۱۰-۸}$$

که $h = \sum_i C_i h_i$



شکل ۱۰-۲ حجم معیار بی‌نهایت کوچک برای معادلهٔ انرژی.

$h_i = \int_0^T c_{pi} dT + h_i^o$

$h_i^o =$گرمای تشکیل گونهٔ i

$P_r = \frac{\mu c_{pf}}{\kappa}$، عدد پرنتل

$L = \frac{\rho D_{12} c_{pf}}{\kappa}$، عدد لوئیس

$c_{pf} = \sum_i C_i c_{pi}$، گرمای ویژه انجماد در فشار ثابت

برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ معادلهٔ انرژی به مرجع ۴ مراجعه کنید. چون معادلهٔ انرژی در جریان ابرصوتی بسیار مهم است، کلیات به‌دست آوردن آن را در زیر آورده‌ایم.

حجم معیار بی‌نهایت کوچکی را در نقطه‌ای از جریان مطابق شکل ۱۰-۲ در نظر بگیرید. با توجه به شارهای زیر، داریم

۱. شار خروجی انرژی‌های درونی و جنبشی خالص از حجم معیار:

$$\nabla \cdot \left[(\rho \mathbf{V}) (\sum_i C_i e_i + u^2/2) \right]$$

که $e_i = \int_0^T c_{vi} dT$ انرژی درونی ویژه برای گونهٔ i، با فرض کامل بودن گاز، است.

۲. انتقال انرژی مولکولی خالص ناشی از گرادیان دما:

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

۳. آهنگ کار انجام‌شده به‌وسیلهٔ شاره در واحد حجم توسط نیروهای فشار:

$$\nabla \cdot (p \mathbf{V})$$

۴. آهنگ کار انجام شده توسط شاره در واحد حجم به‌وسیلهٔ نیروهای گران‌رو:

$$\nabla \cdot [\tau \cdot \mathbf{V}] = \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_j)$$

۵. انرژی حاصل از پخش جرمی گونهٔ i:

$$\nabla\cdot\left(\sum_i \rho \mathbf{V}_i C_i h_i\right)$$

که در آن

$$\mathbf{V}_i=\frac{D_{۱۲}}{C_i}\nabla C_i$$

۶. انرژی اضافه‌شدهٔ ناشی از تشکیل گونهٔ i:

$$-\sum_i \dot{w}_i h_i^\circ$$

که h_i° برای مولکولها صفر، و برای اتمها مقداری مثبت است.

بنابراین معادلهٔ انرژی، پس از جمع ۶ اثر بالا، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\rho\mathbf{V}\cdot\nabla\left(\sum_i C_i e_i+u^۲/۲\right)+\left(\sum_i C_i e_i+u^۲/۲\right)\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})-\nabla\cdot(\kappa\nabla T)$$
$$+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})+\nabla\cdot(\tau\cdot\mathbf{V})+\nabla\cdot\left(\sum_i \rho\mathbf{V}_i C_i h_i\right)+\sum_i \dot{w}_i h_i=۰ \qquad (۹\text{-}۱۰)$$

افزون بر معادلهٔ (۱۰-۹)، معادلات دیگری که در به‌دست آوردن معادلهٔ انرژی به‌کار می‌روند، معادلات حالت‌اند

$$p_i=\rho_i R_i T \qquad (۱۰\text{-}۱۰)$$

که فرض می‌شود دمای همه گونه‌ها یکسان است و $p=\sum_i p_i=\rho\bar{R}T$ و $\bar{R}=\sum_i C_i R_i$،

$$h_i=e_i+R_iT \qquad (۱۱\text{-}۱۰)$$

و معادهٔ پیوستگی

$$\nabla\cdot\rho\mathbf{V}=۰ \qquad (۱۲\text{-}۱۰)$$

با استفاده از معادلات (۱۰-۴)، (۱۰-۹)، (۱۰-۱۰)، (۱۰-۱۱) و (۱۰-۱۲) و فرض اینکه $h_i=f(T)$، معادلهٔ انرژی به شکل معادلهٔ (۱۰-۸) به‌دست می‌آید.

معادلهٔ انرژی کلی برای جریان لایهٔ مرزی برحسب دما به صورت زیر است

$$c_{pf}\left[\rho u\frac{\partial T}{\partial x}+\rho v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)+u\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^۲-\sum_i \dot{w}_i h_i^\circ$$
$$+\sum_i c_{pi}\left(D_{ij}\rho\frac{vC_i}{\partial y}\right) \qquad (۱۳\text{-}۱۰)$$

معادلات (۱۰-۴) تا (۱۰-۸) معادلات اصلی جریان لایهٔ مرزی (لایه‌ای) ابرصوتی‌اند.

۱۰-۳ لایهٔ مرزی لایه‌ای ابرصوتی

هرچند احتمالاً گذار در نقطه‌ای از جسم رخ می‌دهد و جریان را از لایه‌ای به متلاطم تبدیل می‌کند، در اینجا فقط جریان لایه‌ای را در نظر می‌گیریم و جریان متلاطم را در بخش بعد بررسی خواهیم کرد.

تفکیک گازی کامل را در نظر بگیرید. مولکول $A_۲$ به اتم A تفکیک می‌شود

$$A_۲ \leftrightharpoons ۲A$$

که $\alpha = \rho_A/\rho$ کسر جرمی اتمها

$\rho_M/\rho = (۱-\alpha)$ کسر جرمی مولکولها

شاخصهای پایین A و M به‌ترتیب به اتم و مولکول اشاره می‌کنند. شکل دیگر معادلهٔ انرژی (۱۰-۸) به‌صورت زیر است

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x}+\rho v\frac{\partial h}{\partial y}=u\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{۱۲}\sum_i h_i\frac{\partial C_i}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^۲ \tag{۱۰-۱۴}$$

بدین‌ترتیب برای گاز کامل تفکیک‌پذیر، داریم

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x}+\rho v\frac{\partial h}{\partial y}=u\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho D_{۱۲}h_A\frac{\partial \alpha}{\partial y}-\rho D_{۱۲}h_M\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right]+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^۲ \tag{۱۰-۱۵}$$

معادلهٔ پایستگی گونه‌ها به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\rho u\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\rho v\frac{\partial \alpha}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{۱۲}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)+\dot{w}_A \tag{۱۰-۱۶}$$

معادلات پایستگی گونه‌ها، پیوستگی، تکانه و انرژی (۱۰-۱۶)، (۱۰-۶)، (۱۰-۷) و (۱۰-۱۵) همراه با رابطه‌های خواص، اگر شرایط مرزی ویژه معلوم باشد مسئله را تعریف می‌کنند. همچنین، باید مقدارهای مناسبی برای ضریبهای انتقال تعیین کرد.

حل این معادلات مشکلات فراوانی دارد. بنابراین اکنون، مسئله‌ای مرتبط ولی قدری آسان‌تر را در نظر می‌گیریم. جریان گازی واکنش‌ناپذیر را روی صفحه‌ای تخت با گرادیان فشار صفر و خواص ثابت [8] در نظر می‌گیریم. معادلات به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned}
\rho u\frac{\partial h}{\partial x}+\rho v\frac{\partial h}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^۲\\
\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}&=\mu\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}\\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=۰
\end{aligned}$$

شرایط مرزی عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}
&y=۰,\quad u=v=۰,\quad T=T_w\\
&y=\infty,\quad u=U_\infty,\quad T=T_\infty
\end{aligned}$$

نتیجه برای انتقال گرما در دیواره عبارت است از

$$q=-\kappa\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{C_f}{۲}(P_r)^{-۲/۳}\rho_\infty U_\infty\left[h_\infty+(P_r)^{۱/۲}\frac{U_\infty^۲}{۲}-h_w\right]$$

که $C_f=۱٫۳۲۸\sqrt{\nu/U_\infty x}$ و $P_r=\mu c_p/\kappa$.

پیچیدگیهای دیگر شامل خواص متغیرها، تفکیک و پخش، مسئله را بسیار مشکل‌تر می‌کند. هرچند نمی‌توان به جواب رسید، ولی بعضی از مشخصه‌های فیزیکی جریان ابرصوتی را می‌توان تعیین کرد.

شارگرمایی بدون تفکیک عبارت است از $q = -\kappa \partial T/\partial y$. شارگرمایی کلی با تفکیک [معادلهٔ (۱۰-۱۵) را ببینید] عبارت است از

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} - \rho D_{12}(h_A - h_M)\frac{\partial \alpha}{\partial y} \tag{۱۰-۱۷}$$

اما

$$h_A - h_M = h_A^\circ + \int_0^T (c_{pA} - c_{pM})\, dT$$

که تقریباً برابر h_A° است، و

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} - \rho D_{12} h_A^\circ \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

اکنون، دیوارهٔ بی‌درروییی را که $q = 0$، در نظر می‌گیریم

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\rho D_{12} h_A^\circ}{\kappa}\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

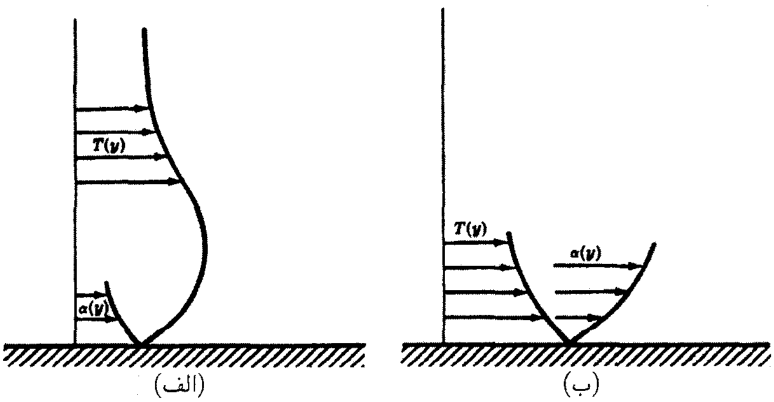
بنابراین، وقتی شارگرمایی مطابق شکل ۱۰-۳ صفر است، گرادیان دمای غیرصفری باید در دیواره وجود داشته باشد.

دورانس [۳] نشان داده است که انتقال گرمای دیواره برای گاز تفکیک‌پذیر روی صفحهٔ تخت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

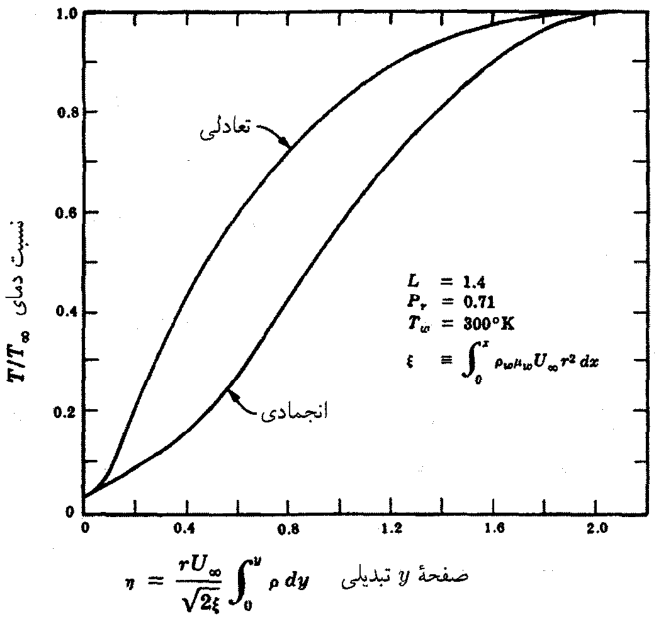
$$q = -\frac{C_f}{2}\rho_\infty U_\infty P_r^{-2/3}\left(h_\infty - h_w + P_r^{1/2}\frac{U_\infty^2}{2}\right)\left[1 + \frac{(L-1)(\alpha_\infty - \alpha_w)h_A^\circ}{h_\infty - h_w + P_r^{1/2}U_\infty^2/2}\right]^{2/3} \tag{۱۰-۱۸}$$

یادآور می‌شود که اگر در معادلهٔ (۱۰-۱۸)، $L = 1$، $\alpha_\infty = \alpha_w$، این معادله دقیقاً همان است که برای شارهٔ تفکیک‌ناپذیر به‌کار می‌رود. شاخصهای ∞ و w به‌ترتیب به شرایط جریان آزاد و دیواره اشاره می‌کنند. L عدد لوئیس است.

بحث قبلی دربارهٔ جریان روی صفحهٔ تخت بود. انتقال گرما برای جریانهای روی جسمهای نوک‌پهن، به‌ویژه در ناحیهٔ نقطهٔ سکون که فشار گرمایی زیاد است، از نظر مهندسی بسیار مورد توجه است، دورانس، لیز، فی، وریدل و دیگران این نوع مسئله‌ها را به تفصیل در مرجعهای ۱، ۴ و ۷ بررسی کرده‌اند. در اینجا، دربارهٔ این مسئله بیشتر از این بحث نمی‌کنیم.



شکل ۱۰-۳ توزیعهای سرعت و غلظت برای دیوارهٔ بی‌دررو. (الف) دیوارهٔ سرد (ب) دیوارهٔ داغ.



شکل ۱۰-۴ توزیع دما در لایهٔ مرزی برای جریان ابرصوتی [۴]. فرض می‌شود که جریان روی جسم استوانه‌ای نوک‌پهنی رخ می‌دهد و r شعاع استوانه است. y فاصله از سطح یا دیواره است.

در اینجا، از روش تبدیل مختصه‌ها استفاده می‌شود، که به تغییر مسئله از معادلات دیفرانسیل جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی منجر می‌شود. سپس معادلات را با شیوه‌های عددی برای (۱) جریان انجمادی (یعنی، برای آهنگ بازترکیب بسیار پایین، که غلظت اتمها کلاً با جریان پخشی تعیین می‌شود) و (۲) جریان تعادلی (یعنی، برای آهنگ بازترکیب بسیار بالا، که دما غلظت را در سرتاسر شاره تعیین می‌کند) حل می‌کنیم. نتیجه‌ها را برای عددهای لوئیس و پرنتل خاص و دمای دیوارهٔ ۳۰۰°K در شکل ۱۰-۴ نشان داده‌ایم.

برای دماهای دیواره و جریان آزاد یکسان، دمای میانهٔ جریان تعادلی بیشتر از جریان انجمادی است. این موضوع از بازترکیب اتمها در حین حرکت به درون ناحیه‌ای با دمای پایین‌تر نتیجه می‌شود.

۱۰-۴ لایهٔ مرزی متلاطم ابرصوتی

وقتی جسمی به درون جو زمین وارد می‌شود، میدان جریان اطراف جسم فازهای مختلفی پیدا می‌کند. مرحلهٔ اولیه، عبور پیمایهٔ بازگشتی از میان جریانی با چگالی کم است، که فرضهای پیوستاری معتبر نیستند. سپس پیمایه از محیط چگالتری می‌گذارد که جریان به‌صورت پیوستار عمل می‌کند و لایه‌ای است. با نفوذ بیشتر پیمایه در درون جو، نوسانهای تصادفی در سرعت به شکل تلاطم در دنبالهٔ پایین‌دست جریان ظاهر می‌شود. با افزایش بیشتر چگالی، مرزی بین جریان لایه‌ای و متلاطم ایجاد می‌شود که به‌سوی بالادست جریان می‌رود و سرانجام به نقطه‌ای می‌رسد که بیشتر لایهٔ مرزی متلاطم است. وقتی چنین اتفاقی رخ می‌دهد جریان مطابق شکل ۱۰-۱ می‌شود.

در اینجا، مسئلهٔ گذار را بررسی نخواهیم کرد. به‌جای آن فرض خواهیم کرد که لایهٔ مرزی متلاطمی وجود دارد و سپس جریان را بیان خواهیم کرد. روش کار کاملاً شبیه مبحث تلاطم در فصل ۹ است.

معادلات پیوستگی، گونه، تکانه و انرژی را در بخشهای قبل در نظر بگیرید. اگر C_i را در معادلهٔ پیوستگی (۱۰-۶) ضرب، و با معادلهٔ گونهٔ (۱۰-۵) جمع کنیم، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u C_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v C_i) = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho C_i V_{iy}) + \dot{w}_i \qquad (۱۰\text{-}۱۹)$$

از ترکیب معادلهٔ پیوستگی و تکانهٔ (۱۰-۷)، داریم

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^{۲}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{۱۰-۲۰}$$

با ضرب معادلهٔ پیوستگی در I، آنتالپی سکون $(h + u^{۲}/۲)$، و جمع آن با معادلهٔ انرژی، خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u I) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v I) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{P_r}\frac{\partial I}{\partial y} + \mu\left(۱ - \frac{۱}{P_r}\right)\frac{۱}{۲}\frac{\partial (u^{۲})}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{۱}{L} - ۱\right)\sum_i V_{iy} h_i\right] \tag{۱۰-۲۱}$$

معادلات (۱۰-۹)، (۱۰-۲۰) و (۱۰-۲۱) برای جریان لایه‌ای معتبرند. فرض می‌کنیم که این معادلات برای جریان متلاطم نیز، مادامی که از کمیتهای لحظه‌ای برای متغیرهای وابسته در آنها استفاده می‌شود، معتبرند.

اما در شکل فعلی، امید چندانی برای حل این معادلات به‌عنوان تابع مکان و زمان حتی در جریانهای ساده نیست. بنابراین، از روش فصل ۹ برای به‌دست آوردن معادلات مربوط، که دارای کمیتهای متوسط زمانی هستند، استفاده خواهیم کرد.

اکنون، کمیتهای لحظه‌ای را برحسب کمیتهای متوسط زمانی و کمیتهای نوسان‌دار به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
u &= \bar{u} + u' & C_i &= \bar{C}_i + C_i' \\
\rho u &= \overline{\rho u} + (\rho u)' & hi &= \bar{h}_i + h_i' \\
\rho v &= \overline{\rho v} + (\rho v)' & \rho V_{iy} &= \overline{\rho V_{iy}} + (\rho V_{iy})' \\
h &= \bar{h} + h'
\end{aligned}$$

که خطهای بار مقدارهای متوسط زمانی و پریمها کمیت‌های نوسان‌دار را نشان می‌دهند. اکنون، رابطه‌های بالا را در معادلهٔ پیوستگی و معادلات (۱۰-۱۹)، (۱۰-۲۰) و (۱۰-۲۱) می‌نشانیم و متوسط زمانی هریک را می‌گیریم. درنتیجه روابط زیر به‌دست می‌آیند

پیوستگی کل:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho v}) = ۰ \tag{۱۰-۲۲}$$

پیوستگی گونه:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\bar{\rho} D_{۱۲}\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} - \overline{(\rho v)' C_i'}\right] + \dot{w}_i \tag{۱۰-۲۳}$$

که فرض می‌شود $\overline{[\rho V_{iy} C_i]} \gg \overline{[(\rho V_{iy})' C_i']}$ و $\frac{\partial}{\partial y}\overline{[(\rho v)' C_i']} \gg \frac{\partial}{\partial x}\overline{[(\rho u)' C_i']}$

تکانه:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{(\rho v)' u'}\right] \tag{۱۰-۲۴}$$

که فرض می‌شود $\frac{\partial}{\partial y}\overline{[(\rho v)' u']} \gg \frac{\partial}{\partial x}[(\rho u]' u']$

انرژی:

$$\begin{aligned}
\overline{\rho u}\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} &= \mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^{۲} - \overline{(\rho v)' u'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \sum_i \bar{h}_i \overline{\rho_i V_{iy}} - \sum_i \bar{C}_i \overline{h_i' (\rho v)'} - \sum_i \overline{(\rho v)' C_i'} \bar{h}_i\right]
\end{aligned} \tag{۱۰-۲۵}$$

یادآور می‌شویم که جمله‌های دیگری در این معادلات وجود دارند که ناشی از جریان نوسان‌دار متلاطم است. این جمله‌ها دارای مفهوم فیزیکی معینی هستند. به‌عنوان مثال،

$-\overline{(\rho v)'C_i'}$ انتقال جرم متلاطم است،

$-\overline{(\rho v)'u'}$ انتقال تکانهٔ متلاطم است و

$-\overline{(\rho v)'h_i'}$ انتقال انرژی متلاطم است.

با چند عملیات جبری و پس از معرفی جمله‌های جدیدی همچون

$$\epsilon = -\frac{\overline{(\rho v)'u'}}{\partial\bar{u}/\partial y}, \qquad \epsilon_T = -\frac{\overline{(\rho v)'h_i'}}{\partial\bar{T}/\partial y} \quad \bar{\rho}D_T = \frac{\overline{(\rho v)'C_i'}}{\partial\bar{C}_i/\partial y},$$
$$P_{rT} = \frac{c_{pf}\epsilon}{\epsilon_T}, \qquad L_T = \frac{c_{pf}\bar{\rho}D_T}{\epsilon_T}$$

داریم

معادلهٔ پیوستگی گونه:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial\bar{C}_i}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial\bar{C}_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\rho D_{۱۲} + \rho D_T\frac{\partial\bar{C}_i}{\partial y}\right] + \dot{w}_i \qquad (۱۰\text{-}۲۶)$$

معادلهٔ تکانه:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu + \epsilon)\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right] \qquad (۱۰\text{-}۲۷)$$

معادلهٔ انرژی:

$$\overline{\rho u}\frac{\partial\bar{h}}{\partial x} + \overline{\rho v}\frac{\partial\bar{h}}{\partial y} = (\mu + \epsilon)\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)^{۲} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu}{P_r} + \frac{\epsilon}{P_{rT}}\right)\frac{\partial h}{\partial y}\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\frac{\kappa}{c_{pf}}(L - ۱) + \frac{\epsilon_T}{c_{pf}}(L_T - ۱)\right]\sum_i h_i\frac{\partial\bar{C}_i}{\partial y}\right\} \qquad (۱۰\text{-}۲۸)$$

اکنون، این معادلات برحسب ضریبهای میکروسکوپی و ماکروسکوپی انتقال هستند. حل این معادلات را در مرجع ۳ آورده‌ایم. روش کلی کار بررسی حالت ساده‌ای است که

$$P_r = P_{rT} = L = L_T = ۱{,}۰$$

سپس نتیجه‌ها را برای حالت کلی‌تر تعمیم می‌دهیم.

۱۰-۵ گرمایش آئرودینامیکی

این فصل را با بحث کوتاهی دربارهٔ مسئله‌ای که نقش اساسی در فرایند شکل‌گیری برنامهٔ فضایی هدایت‌شونده داشته است به پایان می‌رسانیم. پیمایه‌هایی که با سرعت بسیار زیاد از میان جو می‌گذارند، به علت اصطکاک گران‌رو و دمای سطح، کاملاً داغ می‌شوند؛ در عمل، دمای دیوارهٔ بی‌دررو آنچنان افزایش می‌یابد که خارج از تحمل انسان است.

در سرعتهای ابرصوتی، مثلاً با عدد ماخ ۱ تا ۲، از روی دمای دیوارهٔ بی‌دررو T_a می‌توان دمای بدنهٔ هواپیما را در پرواز پایا تصور کرد. مثلاً در $M = ۲$، $T_a/T_\circ \approx ۱{,}۸$ (برای هوا در دمای ۰°F، $T_a \approx ۳۷۰^\circ$F). این دماهای بالا به مشکل حفظ دمای درونی هواپیما در سطح قابل‌قبول

در هواپیماهای جت ابرصوتی بازرگانی می‌انجامد؛ دمای زیاد سطح خارجی بدنهٔ هواپیما، حتی اگر هوای خارج کاملاً سرد باشد، این مشکل را تشدید می‌کند. درنتیجه، عایق‌بندی و تهویهٔ مناسب ضروری است.

پیمایهٔ بازگشتی با سرعت ابرصوتی و عدد ماخ حدود ۱۰ تا ۳۰ به لایه‌های بالای جو وارد می‌شود. در این سرعتها، دمای لایهٔ مرزی به قدری بالاست که تفکیک مولکولهای هوا و حتی یونش رخ می‌دهد. در تشریح کامل لایهٔ مرزی باید این فرایندهای شیمیایی و اتمی را به حساب آورد.

اما، بعضی از نتیجه‌های این فصل را می‌توان برای مسئلهٔ گرمایشی ابرصوتی به‌کار برد و دست‌کم اطلاعات کیفی جالبی دربارهٔ چگونگی طراحی پیمایه‌های بازگشتی، برای جلوگیری از سوختن آنها در حین عبور از جو، به دست آورد. نتیجه‌هایی که به‌دست می‌آیند کاملاً متفاوت با نتیجه‌های به‌دست آمده از هواپیماست. برای هواپیما، پسا باید کمینه باشد و دماهای پایا در حد معقولی حفظ شود. مسئلهٔ پیمایهٔ بازگشتی اساساً مسئله‌ای گذراست و پسا را باید آنچنان تنظیم کرد که گرمایش، و نه توان، کمینه شود، زیرا بازگشت پیمایه اساساً به‌صورت سقوط آزاد است.

برای مطالعهٔ این موضوع حائز اهمیت، می‌توان قانون و کمیت نیوتون را برای پیمایه به‌صورت زیر نوشت

$$M\frac{dV}{dt} = -D = -C_D\left(\frac{۱}{۲}\rho V^۲ A\right)$$

یا

$$M\frac{d(V^۲/۲)}{dt} = -DV$$

که M جرم پیمایه، V سرعت آن، D پسای مخالف حرکت و A مساحت سطح مشخصه است. (فرض می‌کنیم که نیروی گرانش در مقابل پسا کوچک است).

اکنون، آهنگ انتقال گرمای کلی dQ/dT به پیمایه را در دمای کلی T_w تقریباً برحسب دمای دیوارهٔ بی‌دررو و T_w می‌نویسیم

$$\frac{dQ}{dt} \approx \bar{h}A(T_a - T_w) \approx \frac{\bar{h}AV_\infty^۲}{۲c_p}$$

برای هوا، $T_a \approx T_\infty + (rV_\infty^۲/۲c_p)$، که T_∞ و V_∞ مقدارهای جریان آزاد هستند، r «ضریب بازیابی» و $\bar{h}$ ضریب لایهٔ نازک متوسط است. فرض می‌کنیم که $r \approx ۱$ و به‌طور محافظه‌کارانه، $T_w \approx T_\infty$. وانگهی، نتیجه می‌شود که

$$\bar{h} \propto \frac{۱}{۲}\rho c_p C_{Df} V_\infty$$

و پسای ناشی از اصطکاک D_f عبارت است از

$$D_f = C_{Df}\frac{\rho V_\infty^۲}{۲}A$$

که C_{Df} را به‌عنوان ضریب اصطکاک تعریف می‌کنند. پسای کلی D را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$D = C_D\frac{\rho V_\infty^۲}{۲}$$

$$C_D = C_{Df} + C_{Dp}$$

که C_{Dp} ضریب پسای فشاری یا ضریب پسای شکل است. با ترکیب این رابطه‌ها، داریم

$$\frac{dQ}{dt} \approx -\frac{۱}{۲}\frac{C_{Df}}{C_D}M\frac{d(V_\infty^۲/۲)}{dt}$$

و درنتیجه Q، گرمای کلی انتقال‌یافته به جسم در حین شتاب منفی، انتگرال معادلهٔ قبل است و می‌توان آن را برحسب سرعت اولیهٔ $V_{\infty i}$ نوشت

$$Q \approx \frac{۱}{۲}\frac{C_{Df}}{C_D}\left(\frac{MV_{\infty i}^۲}{۲}\right) \tag{۱۰-۲۹}$$

که از سرعت نهایی صرف‌نظر شده است. می‌بینیم که برای کمینه‌کردن گرمای انتقال‌یافته به جسم یا فضاپیما، نسبت C_{Df}/C_D باید کوچک شود. به بیان دیگر، جسم باید نوک‌پهن باشد، به گونه‌ای که پسای شکل بیشترین سهم را در پسای کل داشته باشد. حتی در آن موقع، برای کمک به جذب گرما و جلوگیری از افزایش شدید دمای درونی، از مواد فرسودنی در سطح پیمایه‌های بازگشتی استفاده می‌شود. در شوروی سابق، پیمایه‌های بازگشتی نوعاً کروی بودند، در حالی‌که سفینه‌های امریکایی عموماً نوک‌پهن و به شکل مخروطی هستند. شکل کروی C_{Df}/C_D کوچکتری دارد، اما شکل مخروطی دارای پایداری جهتی بهتری در حین پرواز بازگشتی است.

۱۰-۶ خلاصه و بحث

لایهٔ مرزی واکنش‌پذیر متلاطم یکی از پیچیده‌ترین مسائل در مکانیک شاره‌هاست، که احتمالاً در عصر پیشرفت فضایی مورد توجه زیادی است.

در معادلات دو نوع ضریب انتقال وجود دارد. ضریبهای انتقال μ، κ و D_{12} ناشی از اثرهای میکروسکوپی و خواص شاره‌اند، که به شرایط جریان بستگی ندارند. اما، ضریبهای انتقال ϵ، ϵ_T و D_T نتیجهٔ اثرهای ماکروسکوپیکی هستند و جزو خواص شاره به‌شمار نمی‌آیند. و این ضریبها به شرایط جریان بستگی دارند و باید به‌عنوان مجهولهای معادلات نظیر سرعت و آنتروپی و جزآن تلقی شوند. تعیین ضریبهای انتقال (میکروسکوپی، ماکروسکوپی) یکی از مسائل مهم در جریان لایهٔ مرزی ابرصوتی تلاطمی است. آئرودینامیک ابرصوتی و تحلیل مسائل بازگشتی به‌خوبی در شاخه‌های مکانیک شاره‌ها درک شده است.

طراحی آئرودینامیکی شاتل فضایی مبتنی بر نظریهٔ جریان ابرصوتی و جریان لایهٔ مرزی واکنش‌پذیر است. این حقیقت که شاتلها عملکرد آئرودینامیکی خوبی داشته‌اند، گواه بر تکامل این حوزهٔ مکانیک شاره‌هاست. در حال حاضر، کوشش زیادی صرف برنامهٔ حمل و نقل ابرصوتی شده است که شامل توسعهٔ هواپیماهای حمل و نقل سرعت، بلندپرواز با موتور جت است.

مراجع

1. Anderson, J. D., *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*, McGraw-Hill, 1989. (A useful bibliography of journal articles is provided.)
2. Chapman, S., and Cowling, T. G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, 1958.
3. Dorrance, W. H., *Viscous Hypersonic Flow*, McGraw-Hill, 1962.
4. Fay, J. A., and Riddell, F. R., "Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air," *J. Aero. Sci.*, 25, No. 2, pp. 73–85, 1958.
5. Hall, J. G., Editor, *Fundamental Phenomena in Hypersonic Flow*, Cornell University Press, 1996.
6. Hirschfelder, J. O., Curtiss, C. F., and Bird, R. B., *Molecular Theory of Gases and Liquids*, John Wiley, 1954.
7. Lees, L., "Laminar Heat Transfer over Blunt Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds," *Jet Propulsion*, April 1956.
8. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed., McGraw-Hill, 1986.
9. Vincenti, W. G., and Kruger, C. H., Jr., *Introduction to Physical Gas Dynamics*, John Wiley, 1965. (Reprinted by Krieger Publishing Co.)

The reader who desires further study in hypersonic flow will find that references 1 and 3 will provide an excellent introduction and discussion of the problems. Both of these books list many of the important publications in hypersonic flow.

The following journals are particularly useful for the reader interested in following current research in the area of hypersonic flow: *Physics of Fluids* and *Transactions of the A.I.A.A.*

نمادگذاری فصل ۱۰

$C_f =$ ضریب اصطکاک پوستی

$C_i =$ کسر جرمی گونه

$c_p =$ گرمای ویژه در فشار ثابت

$c_{pi} =$ گرمای ویژه در فشار ثابت برای گونهٔ i

$c_{pA} =$ گرمای ویژه در فشار ثابت برای اتمها

$c_{pf} =$ گرمای ویژهٔ انجمادی، $\sum_i C_i c_{pi}$، در فشار ثابت

$c_{pM} =$ گرمای ویژه در فشار ثابت برای مولکولها

$c_{vi} =$ گرمای ویژه در حجم ثابت برای گونهٔ i

$D_{12} =$ ضریب پخش دوتایی

$D_T =$ ضریب پخش متلاطم

$e_i =$ انرژی درونی ویژهٔ i

$h =$ آنتالپی ویژه، ضریب لایهٔ نازک

$h_i =$ آنتالپی ویژه گونهٔ i

$h_i^\circ =$ آنتالپی ویژه تشکیل گونهٔ i

$h_w =$ آنتالپی ویژه در دیواره

$h_\infty =$ آنتالپی ویژهٔ جریان آزاد

$u^2/2rh = I$ ، آنتالپی ویژهٔ سکون یا کل

$L =$ عدد لوئیس

$L_T =$ عدد لوئیس متلاطم

$M =$ عدد ماخ

$p =$ فشار

$p_i =$ فشار جزئی گونهٔ i

$P_r =$ عدد پرنتل $= \mu c_{pf}/\kappa$

$P_T =$ عدد پرنتل متلاطم

$q =$ شار گرمایی در جهت y

$\bar{R} =$ ثابت گاز برای گاز کلی $= \sum C_i R_i$

$R_i =$ ثابت گاز برای گونهٔ i

$t =$ زمان

$T =$ دما

$T_\infty =$ دمای جریان آزاد

$u =$ سرعت متوسط جرمی در جهت x

$U_\infty =$ سرعت جریان آزاد

$v =$ سرعت متوسط جرمی در جهت y

$V =$ سرعت متوسط جرمی $= \dfrac{\sum_i C_i \rho_i \mathbf{v}_i}{\sum_i C_i \rho_i}$

$V_{iy} =$ سرعت پخش گونهٔ i در جهت y

$\mathbf{V}_i =$ سرعت پخش گونهٔ i

$\mathbf{v}_i =$ سرعت متوسط گونهٔ i

$= w$ سرعت متوسط جرمی در جهت z

$= \dot{w}_i$ آهنگ جرمی تولید گونهٔ i در واحد حجم، توسط واکنش شیمیایی

$= x, y, z$ مختصات

$= \alpha$ کسر جرمی اتمها

$= \alpha_\infty$ کسر جرمی اتمها برای جریان آزاد

$= \alpha_\omega$ کسر جرمی اتمهای دیواره

$= \epsilon$ گرانروی متلاطم

$= \epsilon_T$ ضریب انتقال انرژی متلاطم

$= \kappa$ رسانندگی گرمایی

$= \mu$ گرانروی

$= \rho$ چگالی

$= \rho_A$ چگالی اتمها

$= \rho_M$ چگالی مولکولها

$= \tau_{yx}$ تنش برشی

$= (\,)_A$ نشانهٔ خاصیت اتم

$= (\,)_M$ نشانهٔ خاصیت مولکول

$= (\,)_w$ نشانهٔ خاصیت در دیواره

$= (\,)_\infty$ نشانهٔ خاصیت در جریان آزاد

۱۱

مغناطوهیدرودینامیک

۱۱-۱ مقدمه

مغناطوهیدرودینامیک (MHD) شاخه نسبتاً جدید و مهم در دینامیک شاره است. این شاخه از دینامیک شاره‌ها به برهم‌کنش شارهٔ رسانای الکتریکی و میدانهای الکترومغناطیسی مربوط می‌شود. وقتی شاره‌ای رسانا در میدان مغناطیسی حرکت می‌کند، میدان الکتریکی و در نتیجه جریانی القاء می‌شود و جریان به نوبهٔ خود با میدان مغناطیسی برهم‌کنش می‌کند و نیرویی حجمی بر شاره وارد خواهد شد.

این برهم‌کنشها هم در طبیعت و هم در وسایل ساخت بشر به وقوع می‌پیوندد. جریان مغناطوهیدرودینامیک در خورشید، درون زمین، یون سپهر، ستارگان و جو آنها رخ می‌دهد. در آزمایشگاه وسایل فراوانی ساخته شده‌اند که مستقیماً از برهم‌کنشهای مغناطوهیدرودینامیک بهره می‌گیرند، مانند واحدهای پیش‌رانش و مولدهای قدرت؛ یا دستگاههایی که شامل برهم‌کنشهای میدان الکترومغناطیسی و شاره‌اند، نظیر دینامیک باریکهٔ الکترونی، لوله‌های موجهای پیشرونده، تخلیه‌های الکتریکی، و بسیاری دیگر.

دو راهکار اصلی برای این مسئله وجود دارد: مدل ماکروسکوپیکی شار پیوسته، معروف به MHD و مدل میکروسکوپی آماری معروف به دینامیک پلاسما. در این فصل فقط به MHD، یعنی شاره‌های رسانای الکتریکی و گازهای یونیدهٔ نسبتاً چگال می‌پردازیم.

۱۱-۲ الکترودینامیک محیطهای متحرک

قبل از مطالعهٔ MHD به درک کامل نظریهٔ میدان الکترومغناطیس کلاسیک نیاز است. در اینجا، با این فرض که خواننده با معادلات ماکسول آشنایی دارد، موضوع را به اختصار بررسی می‌کنیم.

قانونهای اصلی نظریهٔ الکترومغناطیسی را می‌توان به شکلی ریاضی، یعنی معادلات ماکسول ارائه کرد. این معادلات کمیتهای اصلی میدان را به‌هم مرتبط می‌کنند و نشان می‌دهند که چگونه به‌وجود می‌آیند. برای تشریح کامل سیستم الکترومغناطیسی، افزون بر معادلات ماکسول، باید کمیتهای میدان نظاره شده در حرکت نسبی را به یکدیگر مرتبط کرد. نظریهٔ نسبیت خاص شامل همهٔ این قانونهاست، ولی در اینجا خود را به مسائل نانسبیتی محدود می‌کنیم؛ یعنی همیشه فرض خواهیم کرد که تمام سرعتها در مقایسه با سرعت نور c کوچک‌اند (به بیان ریاضی $1 \gg \beta^2 = V^2/c^2$). از یکاهای RMKS کلاً استفاده خواهیم کرد.

۱۱-۲-۱ معادلات ماکسول

چهار معادلهٔ اصلی ماکسول عبارت‌اند از

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_e d\mathcal{V} = \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} \qquad \text{(۱۱-۱الف)}$$

میدان جابه‌جایی $\mathbf{D}$ از معادلهٔ چشمه به‌دست می‌آید، که طبق آن، چگالی واقعی بار فضایی ρ_e میدان کلی $\mathbf{D}$ را به‌وجود می‌آورد. خطهای $\mathbf{D}$ همیشه باید روی بارها ختم شوند و نمی‌توانند فقط در فضا پایان یابند. شکل دیفرانسیلی آن عبارت است از

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \qquad \text{(۱۱-۱ب)}$$

معادلهٔ چشمه برای میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ که به قانون آمپر معروف است، عبارت است از

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \qquad \text{(۱۱-۲الف)}$$

که $\mathbf{J}$ چگالی واقعی جریان و $\partial \mathbf{D}/\partial t$ جریان جابه‌جایی است. شکل دیفرانسیلی آن به‌صورت زیر است

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{(۱۱-۲ب)}$$

بنابر قانون فاراده

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \qquad \text{(۱۱-۳الف)}$$

یا

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(۱۱-۳ب)}$$

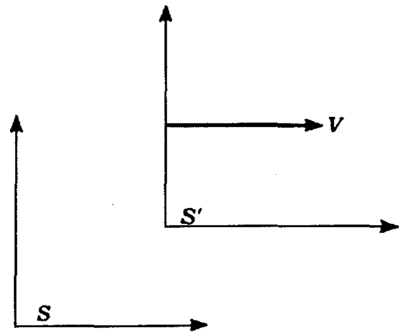
سرانجام، برای میدان مغناطیسی القایی $\mathbf{B}$، داریم

$$\int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \qquad \text{(۱۱-۴الف)}$$

که طبق آن، تمام خطهای $\mathbf{B}$ باید حلقه‌های بسته تشکیل دهند. شکل دیفرانسیلی آن به‌صورت زیر است

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(۱۱-۴ب)}$$

این معادلات ماکسول برای هر ناظری، صرف‌نظر از حرکت او، تا وقتی که تمام کمیتها را در دستگاه مختصات خود اندازه می‌گیرد معتبر است. چنین معادلاتی را که برای تمام ناظرها، بدون توجه به حرکت نسبی آنها، شکل یکسان دارند، هموردا می‌گویند. کمیتهای میدان را که توسط ناظرهای مختلف اندازه‌گیری می‌شوند، می‌توان از طریق تبدیلهای لورنتس به‌هم مربوط ساخت. افزون بر این، کمیتهای جرم، طول و زمان و مشتقات آنها (که توسط ناظرهای مختلف اندازه‌گیری می‌شوند) باید توسط تبدیلهای لورنتس به‌هم مربوط شوند. در سرعتهای کم (در مقایسه با سرعت نور) از تبدیلهای گالیله‌ای برای مرتبط ساختن طول استفاده می‌شود (بنابراین، زمان و جرم یکسان‌اند)، اما حتی در آن موقع نیز، کمیتهای میدان



شکل ۱۱-۱ ناظرها حرکت نسبی دارند. چارچوب S' با سرعت $\mathbf{V}$ نسبت به چارچوب S حرکت می‌کند.

الکترومغناطیسی را باید با حد پایین سرعت تبدیلهای لورنتس مرتبط ساخت. این تبدیلها را می‌توان از اصول نسبیت خاص به دست آورد. با فرض ناوردایی سرعت نور و هموردایی قانونهای طبیعت، تمام تبدیلات مناسب از این قاعده پیروی می‌کنند، اما آنها را در اینجا به‌دست نخواهیم آورد.

دو چارچوب مرجع S و S' را مطابق شکل۱۱-۱ در نظر بگیرید. چارچوب S' با سرعت $\mathbf{V}$ نسبت به چارچوب S حرکت می‌کند. در اینجا، چارچوب مرجع S' را برای مشخص کردن چارچوب ساکن محیطهای مادی به‌کار خواهیم برد، به‌گونه‌ای که ناظر موجود در S' نسبت به محیط (شاره موجود در MHD) حرکت می‌کند. در چارچوب ساکن (و به‌طورکلی فقط در چارچوب ساکن) می‌توان معادلات ساختمندی لازم را نوشت. این معادلات $\mathbf{D}'$ را به $\mathbf{E}'$، $\mathbf{B}'$ را به $\mathbf{H}'$ مرتبط می‌کنند و معمولاً برای شمول قانون اهم، که $\mathbf{J}'$ را به $\mathbf{E}'$ مرتبط می‌کند، بررسی می‌شوند. در سرتاسر این فصل از $(')$ برای نمایش کمیتهای اندازه‌گیری شده در چارچوب ساکن استفاده خواهیم کرد. بنابراین، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}' &= \epsilon\mathbf{E}' = \epsilon_\circ\kappa\mathbf{E}' = \mathbf{P}' + \epsilon_\circ\mathbf{E}' \\
\mathbf{B}' &= \mu\mathbf{H}' = \mu_\circ\kappa_m\mathbf{H}' = \mu_\circ(\mathbf{H}' + \mathbf{M}') \\
\mathbf{J}' &= \sigma\mathbf{E}'
\end{aligned} \tag{۵-۱۱}$$

که ϵ گذردهی، $\epsilon_\circ$ گذردهی فضای آزاد و κ گذردهی نسبی است. همین‌گونه، μ تراوایی، $\mu_\circ$ تراوایی[1] فضای آزاد و κ_m تراوایی نسبی است. σ رسانندگی الکتریکی اسکالر است. $\mathbf{P}$ قطبش و $\mathbf{M}$ مغناطش است. اگر ϵ و μ فقط تابع دما و فشار برای محیطهای خطی و همچنین تابع میدانها برای مادهٔ غیرخطی باشند، آن‌گاه دو معادلهٔ اول (۱۱-۵) معمولاً صادق‌اند. قانون اهم معادله‌ای پدیده‌شناختی است و عموماً صادق نیست. شکل ارائه‌شده در اینجا برای σ اسکالر در مایعات و گازهای چگال مناسب است، اما رسانندگی در گازهای رقیق به تانسور تبدیل می‌شود.

از هر چارچوب مرجع می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \mathbf{P} + \epsilon_\circ\mathbf{E} \\
\mathbf{B} &= \mu_\circ(\mathbf{M} + \mathbf{H})
\end{aligned} \tag{۶-۱۱}$$

اما معادله (۵.۱۱) فقط در چارچوب ساکن صادق است. در فضای آزاد یا محیطهایی که $\kappa = \kappa_m = ۱$ است، می‌بینیم که $\mathbf{P} = \mathbf{M} = \circ$، و بنابراین در هر چارچوب مرجع، داریم

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon_\circ\mathbf{E} \\
\mathbf{B} &= \mu_\circ\mathbf{H}
\end{aligned} \tag{۷-۱۱}$$

در هر مسئلهٔ MHD، معمولاً به همهٔ چهار معادلهٔ ماکسول و معادلات ساختمندی نیاز است. اما، غالباً بهتر است که از معادلهٔ $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_e$

۱. در این فصل گران‌روی را با μ_f نشان داده‌ایم تا با تراوایی اشتباه گرفته نشود.

استفاده نشود، و به جای آن، معادلهٔ زیر را به‌کار بریم

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad (۸-۱۱)$$

(در حالت پایا یا در حالتهایی که ρ_e در این معادله ناچیز است، داریم $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$، که مشابه حالت MHD است). معادلهٔ (۱۱-۸) مستقیماً از معادلات ماکسول نتیجه می‌شود و مستقل نیست.

۱۱-۲-۲ تبدیلهای لورنتس

اکنون، تبدیلهای لورنتس را صورت‌برداری می‌کنیم. $\mathbf{V}$ سرعت چارچوب ساکن S نسبت به S' است و $\perp$ و $||$ به ترتیب مؤلفهٔ کمیتهای عمود و موازی بردار $\mathbf{V}$ را نشان می‌دهند.

$$\begin{array}{ll}
E'_\perp = \beta(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})_\perp & \mathbf{E}'_{||} = \mathbf{E}_{||} \\
\mathbf{D}'_\perp = \beta(\mathbf{D} + \mathbf{V} \times \mathbf{H}/c^2)_\perp & \mathbf{D}'_{||} = \mathbf{D}_{||} \\
\mathbf{H}'_\perp = \beta(\mathbf{H} - \mathbf{V} \times \mathbf{D})_\perp & \mathbf{H}'_{||} = \mathbf{H}_{||} \\
\mathbf{B}'_\perp = \beta(\mathbf{B} - \mathbf{V} \times \mathbf{E}/c^2)_\perp & \mathbf{B}'_{||} = \mathbf{B}_{||} \\
\mathbf{J}'_\perp = \mathbf{J}_\perp & \mathbf{J}'_{||} = \beta(\mathbf{J} - \rho_e \mathbf{V})|| \\
\rho'_e = \beta(\rho_e - \mathbf{V} \cdot \mathbf{J}/c^2) & \\
\mathbf{P}'_\perp = \beta(\mathbf{P} - \mathbf{V} \times \mathbf{M}/c^2)_\perp & \mathbf{P}'_{||} = \mathbf{P}_{||} \\
\mathbf{M}'_\perp = \beta(\mathbf{M} + \mathbf{V} \times \mathbf{P})_\perp & \mathbf{M}'_\perp = \mathbf{M}_{||}
\end{array} \qquad (۹-۱۱)$$

که $\beta = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

در حد نانسبیتی که حالت مورد توجه در MHD است، این تبدیلها به‌صورت سادهٔ زیر درمی‌آیند:

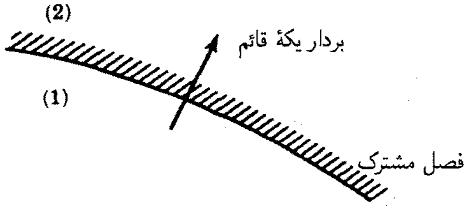
$$\begin{array}{ll}
\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} & \mathbf{J}' = \mathbf{J} - \rho_e \mathbf{V} \\
\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \mathbf{V} \times \mathbf{H}/c^2 & \rho'_e = \rho_e - \mathbf{V} \cdot \mathbf{J}/c^2 \\
\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{V} \times \mathbf{D} & \mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{V} \times \mathbf{M}/c^2 \\
\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mathbf{V} \times \mathbf{E}/c^2 & \mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{V} \times \mathbf{P}
\end{array} \qquad (۱۰-۱۱)$$

۱۱-۲-۳ شرایط مرزی

شرایط مرزی کمیتهای میدان در فصل مشترکها، همچون محیطهای ساکن، یکسان هستند. درگذر از فصل مشترک شرایط زیر در هر چارچوب مرجع برقرار است. فقط باید شرایط را با تمام کمیتهای میدان اندازه‌گیری شده در هر چارچوب مرجع نوشت (شکل۱۱-۲ را ببینید)

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 & \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \\
\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_1) = \rho_s & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0
\end{array} \qquad (۱۱-۱۱)$$

که ρ_s چگالی بار سطحی در فصل مشترک و $\mathbf{J}_s$ جریان سطحی در فصل مشترک است. به بیان فیزیکی، مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{E}$ و مؤلفهٔ قائم $\mathbf{B}$ در عرض فصل مشترک پیوسته‌اند. مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{H}$، اگر جریان سطحی وجود داشته باشد، جهش دارد، و مؤلفهٔ قائم $\mathbf{D}$ نیز، اگر بار سطحی وجود داشته باشد، جهش خواهد داشت.



شکل ۱۱-۲ فصل مشترک بین دو محیط ۱ و ۲.

۱۱-۳ نیروی محرکهٔ الکتریکی (EMF) القایی و ولتاژ نهایی

غالباً در مسائل MHD به پتانسیل نهایی یا ولتاژ بین دو الکترود نیاز است. سؤال این است: اگر شارهٔ رسانای الکتریکی‌ای بین دو الکترود مفروض جریان یابد، ولتاژ نهایی بین آنها چقدر است؟

به‌طور کلی، emf حول حلقه‌ای بسته را (در چارچوب مرجع آزمایشگاه که سرسیمها در آن قرار دارند) به‌صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \tag{۱۱-۱۲}$$

که $\mathbf{E}'$ میدان الکتریکی موضعی نظاره شده توسط ناظر متحرک است، اما $d\mathbf{l}$ در چارچوب مرجع آزمایشگاه ثابت خواهد بود. با استفاده از معادلات ماکسول و تبدیلهای نانسبیتی لورنتس، داریم

$$\text{emf} = \oint (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \tag{۱۱-۱۳}$$

که $\partial\mathbf{B}/\partial t$ را نباید خارج از انتگرال در نظر گرفت. $\mathbf{V}$ سرعت رساناست که به‌طور لحظه‌ای منطبق بر $d\mathbf{l}$ است.

بدین ترتیب، پتانسیل نهایی V_{AB} برابر است با emf منهای افت IR بین الکترودهای A و B:

$$V_{AB} = \text{emf} - \int_A^B \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \tag{۱۱-۱۴}$$

که V_{AB} ولتاژ B نسبت به A است و بین الکترودهای درون شاره انتگرال خطی گرفته شده است. باید توجه داشت که مقدار emf به مسیر انتگرال‌گیری به‌کار رفته برای تعیین آن بستگی دارد (اگر جریانهای تلاطمی در سیستمهای AC وجود داشته باشد)، اما پتانسیل نهایی همیشه مستقل از مسیر انتگرال‌گیری است.

در مسائل MHD پایا همچون مولدها، پمپها و جز آن، شکل ساده‌شدهٔ معادلهٔ (۱۱-۱۴) را به‌دست می‌آوریم که حاصل استفادهٔ مستقیم از حقیقت $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ و تبدیلهای لورنتس است. بنابراین

$$V_{AB} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{۱۱-۱۵}$$

یادآور می‌شویم که $\mathbf{E}$ را در معادلهٔ (۱۱-۵) در چارچوب مرجع آزمایشگاه اندازه‌گیری کرده‌ایم و معادلهٔ (۱۱-۱۵) نیز از $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ تبعیت می‌کند (زیرا در حالت پایا، $\nabla \times \mathbf{E} = 0$) و بنابراین

$$\phi_{AB} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

و ϕ پتانسیل مشابه با V_{AB} است.

۱۱-۴ نیروی حجمی الکترومغناطیسی

نیروی حجمی الکترومغناطیسی از قانون نیروی کولن به‌دست می‌آید، زیرا اساساً این تنها برهم‌کنش است که رخ می‌دهد.

نیروی الکترومغناطیسی وارد بر ذره‌ای با بار الکتریکی q در چارچوب ساکن موضعی ذره عبارت است از $\mathbf{F} = q\mathbf{E}'$. اکنون، با تبدیل به چارچوب آزمایشگاه، داریم (نانسبیتی) $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}$، بنابراین $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$ که قانون آشنای نیروی لورنتس است. $\mathbf{V}$ سرعت ذره نسبت به چارچوب آزمایشگاه است.

۱۱-۴-۱ نیروی حجمی در شاره‌ها

نیروی حجمی الکترومغناطیسی کامل در هر شارهٔ رسانا، به‌طور میکروسکوپی از قانون کولن، یا از طریق کار مجازی و روش انرژی به‌دست می‌آید. در اینجا، فقط نتیجه‌ها را ذکر خواهیم کرد. چگالی نیروی حجمی $\mathbf{f}'_e$ در چارچوب ساکن (زیرا از معادلات ساختمندی استفاده شده است) عبارت است از

$$\begin{aligned}\mathbf{f}'_e =& \rho'_e\mathbf{E}' + \mathbf{J}' \times \mathbf{B}' - \frac{1}{2}\epsilon_\circ E'^2 \nabla'\kappa - \frac{1}{2}\mu_\circ H'^2 \nabla'\kappa_m \\ &+ \frac{1}{2}\epsilon_\circ \nabla'\left(E'^2 \frac{\partial \kappa}{\partial \rho}\rho\right) + \frac{1}{2}\mu_\circ \nabla'\left(H'^2 \frac{\partial \kappa_m}{\partial \rho}\rho\right)\end{aligned} \tag{۱۱-۱۶}$$

اما، در MHD فقط دو جملهٔ اول مهم هستند. این دو جمله هموردایند و این عبارت در هر چارچوب مرجع صدق می‌کند. در MHD،

$$\mathbf{f}_e = \rho_e\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{۱۱-۱۷}$$

و به‌طور نانسبیتی $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}'_e$، بنابراین می‌توان $\rho'_e\mathbf{E}' + \mathbf{J}' \times \mathbf{B}'$ یا $\rho_e\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ را محاسبه کرد و همان نتیجهٔ عددی را به‌دست آورد. همان‌گونه که خواهیم دید، $\rho_e\mathbf{E}$ را در مقایسه با $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ می‌توان نادیده گرفت.

۱۱-۴-۲ تانسور تنش

بیان جایگزین، ولی هم‌ارز نیروی حجمی، تانسور تنش الکترومغناطیسی T_{ij} است. بدین ترتیب، نیروی حجمی برابر است با $f_j = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_i}{\partial t}$، که g_i بردار شار تکانهٔ الکترومغناطیسی است. رابطهٔ هموردا برای T_{ij} (با نادیده گرفتن اثرهای جمع‌شدگی) عبارت است از

$$T_{ij} = -\frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\delta_{ij} + D_iE_j + B_iH_j \tag{۱۱-۱۸}$$

برای تمام هدفهای کاربردی، جملهٔ $\frac{\partial g_i}{\partial t}$ ناچیز است و در MHD اهمیتی ندارد. مهمترین کاربرد تانسور تنش در تفسیر فیزیکی نیروی حجمی‌ای است که مجاز می‌داند. اگر تانسور تنش را قطری کنیم (تنشهای اصلی تعیین شوند) نتیجهٔ جالبی به‌دست می‌آوریم. اگر فرضهایی کنیم که در MHD معتبرند، مثلاً جمله‌های الکتریکی در تانسور تنش ناچیزند و B و H همخط هستند (آنها در چارچوب ساکن یا هر چارچوب دیگری در MHD همخط‌اند، زیرا در آنجا برای سرعتهای نانسبیتی $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ و $\mathbf{H} = \mathbf{H}'$.)، این نتیجه به‌دست می‌آید که سه تنش اصلی λ_i عبارت‌اند از

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \tag{۱۱-۱۹}$$

و جهت‌گیری محورهای اصلی به‌گونه‌ای است که λ_1 کشش در امتداد خطهای نیروی مغناطیسی است و λ_2 و λ_3 تراکم عمود بر خطهای میدان را نشان می‌دهند. به جای آن، می‌توان گفت که تراکم هیدروستاتیکی $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/2$ با کشش $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ (در امتداد خطهای میدان) برروی تراکم هیدروستاتیکی برهم نهیده شده‌اند.

مفهوم فشار مغناطیسی مبتنی بر این نتیجه‌هاست. اما، باید به‌خاطر داشت که این نیروی حجمی کشش یا فشار فیزیکی‌ای در شاره نیست، بلکه به‌صورت نیروی حجمی به درون معادلهٔ تکانه وارد می‌شود و در نتیجه تنشهای مکانیکی ایجاد می‌کند. در تعادل ایستا، گرادیان فشار باید با

دیورژانس تانسور تنش الکترومغناطیسی (که به بیان فیزیکی نیروی حجمی است) خنثی شود. این حالت شبیه فشار ایجاد شده در شارهٔ ایستا به‌علت وجود میدان گرانشی است.

روشی دیگر درک فشار مغناطیسی نوشتن نیروی حجمی $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ به‌صورت $(\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{B}$ است (که از معادلهٔ ماکسول $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\dot{\mathbf{D}}$ استفاده کرده‌ایم و $\dot{\mathbf{D}}$ همان‌گونه که نشان خواهیم داد، ناچیز است). $\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{H})$ را می‌توان (با استفاده از $\mathbf{b}=\mu\mathbf{H}$) به‌صورت زیر نوشت

$$(\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{B}=-\nabla\left(\frac{B^{2}}{2\mu}\right)+\frac{1}{\mu}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} \tag{۱۱-۲۰}$$

بنابراین، نخستین جملهٔ طرف راست بخش غیرچرخشی نیروی حجمی است و مستقیماً با فشار در معادلهٔ تکانه جمع می‌شود و جملهٔ دوم بخش چرخشی (متناظر با کشش در امتداد خطهای میدان مغناطیسی) است و عموماً در MHD صفر نیست.

۱۱-۵ مفاهیم اصلی جریان MHD

اکنون، فرضهای اصلی MHD و اصول و معادلات مربوط را مرور می‌کنیم.

۱۱-۵-۱ فرضها

فرضهایی که در MHD معمولاً مطرح می‌شوند، عبارت‌اند از:

۱. تمام سرعتها در مقایسه با سرعت نور کوچک‌اند، بنابراین $\frac{V^{2}}{c^{2}}\ll 1$.

۲. میدان الکتریکی از مرتبهٔ $\mathbf{V}\times\mathbf{B}$ است. همهٔ میدانهای $\mathbf{E}$ القا می‌شوند و یا از مرتبهٔ میدان القایی هستند. همیشه باید نوشت که $\mathbf{E}'=\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}$ و تفاوت بین $\mathbf{E}'$ و $\mathbf{E}$ را تشخیص داد.

۳. $\mathbf{H}\cong\mathbf{H}'$ و $\mathbf{B}\cong\mathbf{B}'$، زیرا

$$\mathbf{B}'=\mathbf{B}-\frac{\mathbf{V}\times\mathbf{E}}{c^{2}}\cong\mathbf{B}-0\left[\frac{V^{2}}{c^{2}}\mathbf{B}\right]$$

ضریب تراوایی فلزات مایع و گازهای یونیده μ_0 است، بنابراین می‌توان در هر چارچوب مرجع نوشت که $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$.

۴. از جریان جابه‌جایی $\dot{\mathbf{D}}$ نسبت به $\mathbf{J}$ می‌توان چشم‌پوشی کرد.

۵. قانون اهم عبارت است از $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}'=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})$ و $\mathbf{J}'\cong\mathbf{J}$، زیرا $\rho_e\mathbf{V}$ را در مقایسه با $\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})$ می‌توان نادیده گرفت.

۶. بار فضایی ρ_e' صفر است، اما $\rho_e\neq 0$. باید نوشت $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_e$ و نباید فرض کرد که $\nabla\cdot\mathbf{D}=0$. چون معمولاً ρ_e معلوم نیست، معادلهٔ $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_e$ معادلهٔ سودمند نخواهد بود. بهتر و مناسبتر است که از $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$ استفاده کنیم (حتی در مسئله‌های ناپایا)، زیرا انتقال بار فضایی در مقایسه با $\mathbf{J}$ ناچیز است).

۷. نیروی $\rho_e\mathbf{E}$ در مقایسه با $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ صرف‌نظرکردنی است. انرژی و تنش الکتریکی را که متناسب با $\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$ است، در مقایسه با $\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$ می‌توان نادیده گرفت.

۸. برای رسانندگی بالا، که $\sigma\to\infty$، قانون اهم نشان می‌دهد که برای $\mathbf{J}$ متناهی $\mathbf{E}'=0$ و $\mathbf{E}=-\mathbf{V}\times\mathbf{B}$. آن‌گاه جریان از $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$، و نه قانون اهم، به‌دست می‌آید.

۱۱-۵-۲ معادلات

معادلات اصلی MHD را می‌توان به‌صورت معادلات ماکسول، قانون اهم، معادلهٔ پیوستگی، معادلهٔ حرکت با نیروی حجمی $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ و معادلهٔ انرژی با گرمایش ژول نوشت. وانگهی، باید از تبدیلهای نانسبیتی لورنتس استفاده کرد. معادلهٔ حالت برای گاز کامل را هنوز می‌توان با تقریبهای

MHD به کاربرد. این معادلات عبارت‌اند از:

معادلات ماکسول:

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0 \\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\partial\mathbf{B}/\partial t \\ \nabla\cdot\mathbf{J} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (۱۱\text{-}۲۱)$$

قانون اهم:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}) \qquad (۱۱\text{-}۲۲)$$

معادلهٔ حرکت:

$$\begin{aligned} \rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}\right] &= -\nabla p+\nabla\cdot\tau+\mathbf{J}\times\mathbf{B}-\rho\nabla\psi \\ &= -\nabla(p+B^2/2\mu)+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}/\mu+\nabla\cdot\tau-\rho\nabla\psi \end{aligned} \qquad (۱۱\text{-}۲۳)$$

که τ تانسور تنش مکانیکی، و ψ پتانسیل گرانشی است.

انرژی:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{V}+\kappa_T\nabla^2T+\Phi+\mathbf{E}'\cdot\mathbf{J}' \qquad (۱۱\text{-}۲۴)$$

در اینجا، κ_T را برای رسانندگی گرمایی به‌کار می‌بریم تا با گذردهی نسبی اشتباه نشود. u انرژی درونی ویژه است. اگر ماده خطی باشد، یعنی ϵ و μ تابع دما نباشند، گرمای ژول $(\mathbf{E}'\cdot\mathbf{J}' \cong \mathbf{E}'\cdot\mathbf{J} = J^2/\sigma)$ تنها برهم‌کنش است. خواننده می‌تواند برای بحث مفصلتر این معادله به مرجع ۵ مراجعه کند.

معادله حالت:

$$p = \rho RT \qquad (۱۱\text{-}۲۵)$$

۱۱-۵-۳ پارامترها

این معادلات را، همان‌گونه که در فصل ۴ بحث شد می‌توان به شکل بی‌بعد نوشت و پارامترهای بی‌بعد مربوط به‌دست آمد، در اینجا، محاسبات را انجام نخواهیم داد، اما فهرست پارامترها را خواهیم آورد. افزون بر تمام پارامترهای جریان معمولی (فصل ۴) دو پارامتر مستقل دیگر داریم. فهرست چند پارامتر (غیرمستقل) را در زیر آورده‌ایم.

R_m، عدد رینولدز مغناطیسی $= V_0L\sigma\mu$، که معیار نسبت همرفت مغناطیسی به پخش مغناطیسی است. اگر $R_m \ll 1$، می‌توان نشان داد که میدان مغناطیسی القا شده در مقایسه با میدان مغناطیسی اعمال شده کوچک است.

M_m، عدد ماخ مغناطیسی $= V_0/A$، که A سرعت آلفن است و به‌صورت $A = \sqrt{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}/\rho}$ تعریف می‌شود و در زیر بحث خواهد شد.

M، عدد هارتمن $= \sqrt{\sigma B_0^2L^2/\mu_f} = \sqrt{R_eR_m/M_m}$، که معیار نسبت نیروی حجمی مغناطیسی به نیروی گران‌روی است.

P_m، عدد پرنتل مغناطیسی $= R_m/R_e = \nu/\eta$ معیار نسبت پخش گردشاری به پخش مغناطیسی است.

N، پارامتر برهم‌کنش، که معیار نسبت نیروی حجمی مغناطیسی به نیروی لختی است. برای رسانندگی متناهی N برابر است با $N = \sigma B_0^2L/\rho V_0 = R_m/M_m^2$ و برای رسانندگی خیلی بالا یا نامتناهی، داریم $N = N_m^{-2}$.

۱۱-۵-۴ انتقال مغناطیسی

از ترکیب معادلات ماکسول و قانون اهم به معادله‌ای بسیار مهم می‌رسیم $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$ و $\mathbf{E}$ را می‌توان با گرفتن تاو معادلهٔ بالا و استفاده از $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ حذف کرد. سپس، با استفاده از چند تساوی برداری و رابطهٔ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$، خواهیم داشت

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \tag{۱۱-۲۶}$$

که معادلهٔ انتقال، پخش و همرفت میدان مغناطیسی است. η ضریب پخش مغناطیسی $1/\sigma\mu$ است. این معادله را می‌توان همزمان با معادلهٔ حرکت [با نیروی حجمی $(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B}$] در مسئله‌های خاصی به‌کار برد که برای معرفی میدان الکتریکی راحت نیست.

با وارد کردن متغیرهای بی‌بعد زیر

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B}/\mathbf{B}_\circ \qquad t^* = tV_\circ/L \qquad \mathbf{r}^* = \mathbf{r}/L$$

معادلهٔ انتقال به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{R_m} \nabla^* \times (\nabla^* \times \mathbf{B}^*) + \nabla^* \times (\mathbf{V}^* \times \mathbf{B}^*) \tag{۱۱-۲۷'}$$

که اهمیت R_m را نشان می‌دهد. نخستین جملهٔ طرف راست جملهٔ پخش، و دومین جمله همرفت است. اگر حرکت وجود نداشته باشد، $\mathbf{V} = 0$ و معادلهٔ (۱۱-۲۶) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} \tag{۱۱-۲۸}$$

که معادلهٔ پخش، و η ضریب پخش است. در مقیاس آزمایشگاهی، معمولاً پخش حاکم است ($R_m \ll 1$)، اما در مقیاس اخترشناختی (مثلاً در خورشید) همرفت حاکم خواهد بود ($\sigma \to \infty$ و $R_m \gg 1$). در حقیقت، وقتی $\sigma \to \infty$، میدان مغناطیسی به‌طور کامل به‌وسیلهٔ همرفت جابه‌جا می‌شود و پخش خطهای میدان از طریق محیطهای رسانا وجود ندارد. بنابراین، می‌گویند که خطهای میدان مغناطیسی در شاره «منجمد» شده‌اند و همراه آن حرکت می‌کنند.

شباهت دقیقی بین انتقال میدان مغناطیسی در اینجا و انتقال گردشاری در مکانیک شاره‌های معمولی وجود دارد. قضیه‌های کلاسیکی کلوین و جز آن را می‌توان دربارهٔ میدان مغناطیسی به‌کار برد.

خطهای میدان را می‌توان کشسان تصور کرد، به‌گونه‌ای که شاره‌های جاری آنها را آن‌قدر می‌کشانند تا در تعادل ایستا واقع شوند. این حالت در موقع القاشدن میدان مغناطیسی رخ می‌دهد (که به میدان مغناطیسی اعمال‌شدهٔ اولیه افزوده می‌شود). میدان القاشده با واپیچش خطهای میدان اعمال شده، به‌علت جابه‌جایی آنها توسط شاره، به‌وجود می‌آید. وقتی $\sigma \to \infty$ این خطها توانایی مقاومت خود را در مقابل کشیده‌شدن در امتداد شاره از دست می‌دهند.

۱۱-۵-۵ موجهای آلفن

همچون حالت قبلی، بررسیهای تانسور تنش نشان می‌دهند که نیروی حجمی هم‌ارز فشار هیدروستاتیکی به‌اضافهٔ کشش $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ در امتداد خطهای میدان است. بعداً نشان خواهیم داد که این خطها مانند نخهای کشیده شده رفتار می‌کنند و موجهای عرضی با سرعت $\sqrt{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/\rho}$، که «سرعت آلفن» نامیده می‌شود، در امتداد آنها انتشار می‌یابند. موج سرعت عرضی‌ای با اختلاف فاز 90° نسبت به موج مغناطیسی همراه این اختلال میدان عرضی باید وجود داشته باشد. این موجها، که موجهای آلفن یا مغناطوهیدرودینامیک نامیده می‌شوند، بدون پراکندگی یا تضعیف، به‌شرطی که $\sigma \to \infty$ و گران‌روی ناچیز باشد، حرکت می‌کنند.

۱۱-۵-۶ قضیه‌های برنولی و کلوین

معادلهٔ حرکت (۱۱-۲۳) را می‌توان برای شاره‌ای ناگران‌رو نوشت و در امتداد خط جریان انتگرال‌گیری کرد (برای شارهٔ تراکم‌پذیر در جریان پایا)،

$$\frac{V_۲^۲ - V_۱^۲}{۲} + \psi_۲ - \psi_۱ + \int_۱^۲ \frac{d(p + B^۲/۲\mu)}{\rho} = \frac{۱}{\mu}\int_۱^۲ \frac{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}}{\rho} \qquad (۱۱\text{-}۲۹)$$

اگر $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} = ۰$، با جایگزین کردن $(p + B^۲/۲\mu)$ به‌جای فشار که برابر فشار کل (مکانیکی به‌علاوهٔ مغناطیسی) است قضیهٔ کلاسیکی برنولی صدق می‌کند.

با ایجاد گردش، در شکل MHD قضیهٔ کلوین به کمک معادلهٔ حرکت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_A (\nabla\times\mathbf{V})\cdot d\mathbf{A} = \int_A \nabla\times\left[\frac{۱}{\mu}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}\right]\cdot d\mathbf{A} \qquad (۱۱\text{-}۳۰)$$

که نیروی $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ چرخشی است و باعث گردشاری حتی در شارهٔ ناگران‌رو خواهد شد.

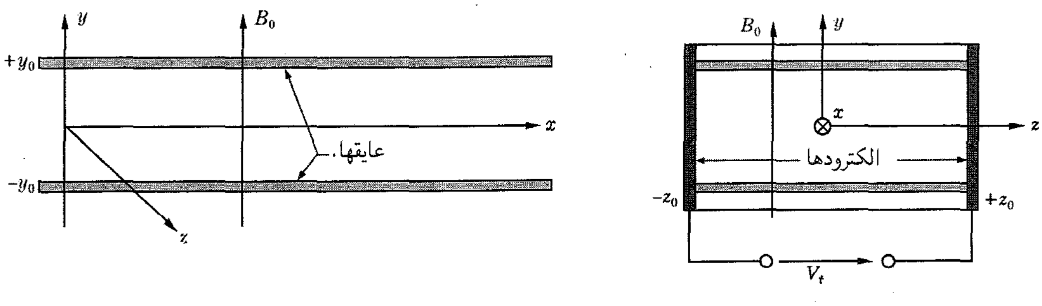
۱۱-۶ جریان تراکم‌ناپذیر گران‌رو MHD

اکنون، یکی از ساده‌ترین مثالهای جریان MHD، یعنی جریان پایای شارهٔ تراکم‌پذیر گران‌رو و رسانای الکتریکی موجود بین دو صفحهٔ موازی را همراه با میدان مغناطیسی عرضی اعمال شده بررسی خواهیم کرد (شکل۱۱-۳). جزئیات این مسئله، نمایانگر عالی روش به‌کار رفته و به‌ویژه ساختمان مدار الکتریکی هم‌ارز است. فرض می‌کنیم که جریان کاملاً توسعه‌یافته است، به‌گونه‌ای که فقط فشار در جهت x تغییر می‌کند. گستردگی کانال در جهت z بسیار بزرگتر از جهت y است، به‌گونه‌ای که هیچ تغییری برحسب z رخ نمی‌دهد. الکترودها را به‌صورت رسانای کامل و شاره را با رسانندگی σ فرض می‌کنیم. میدان مغناطیسی اعمال شدهٔ $\mathbf{B}_۰$ پایا و یکنواخت است. این مسئله مشهور به "مسئلهٔ هارتمن"، فیزیکدان دانمارکی است.

برای چنین مسئله‌ای عدد رینولدز مغناطیسی در مقیاس آزمایشگاه خیلی کوچک است و میدان مغناطسی القا شده نیزکم است و می‌توان چنین پنداشت که در اثرکشاندن جزئی خطهای $\mathbf{B}_۰$ به‌وسیلهٔ شارهٔ جاری ایجاد شده است. اما، خواهیم دید که برای این مسئله میدان القاشده (که تماماً در جهت x است) وارد معادلات حرکت اصلاً نمی‌شود و آن‌را باید به‌عنوان گام آخر در مسئله در نظرگرفت. در بسیاری از مسئله‌ها (که یک بعدی نیستند) میدان القاشده ممکن است با معادلات اصلی همراه شود و حل مسئله را مشکل کند. حتی در این صورت، اگر $R_m \ll ۱$ غالباً فرض می‌شود که میدان القاشده در مقایسه با $\mathbf{B}_۰$ بسیارکوچک است.

مسئلهٔ هارتمن را با نوشتن معادلات ماکسول، قانون اهم و معادلات حرکت شروع می‌کنیم. بنابر اصل پیوستگی، $v = w = ۰$. از $\nabla\cdot\mathbf{J} = ۰$ نتیجه می‌گیریم که J_z باید فقط به y بستگی داشته باشد و (به‌کمک قانون اهم) برابر است با

$$J_z = \sigma(E_z + uB_۰)$$



شکل ۱۱-۳ جریان بین دو صفحهٔ موازی مسئلهٔ هارتمن.

از رابطهٔ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ نتیجه می‌شود که E_x ثابت است و آن را به‌طور دلخواه صفر در نظر می‌گیریم، زیرا هیچ میدان الکتریکی در جهت x وارد نمی‌شود. چون الکترودها رسانندگی بالایی دارند، E_y در الکترودها و بنابراین همه‌جا صفر است. این نتیجه می‌دهد که E_z فقط تابع y است.

گرادیان فشار $\partial p/\partial x$ ثابت است، اما گرادیان $\partial p/\partial y$ نیز، به علت اثر «تنگش»، به‌وجود می‌آید.

معادلهٔ حرکت در جهت x به‌صورت زیر است

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_f \frac{d^2 u}{dy^2} - \sigma(E_z + uB_0)B_0 \qquad (۳۱\text{-}۱۱)$$

که این معادله را می‌توان بلافاصله با توجه به شرایط مرزی زیر، انتگرال‌گیری کرد

$$u = 0, \qquad y = \pm y_0$$

در این صورت، نیمرخ سرعت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$u = \frac{y_0^2}{M^2}\left(\frac{1}{\mu_f}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{M}{y_0}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}E_z\right)\left(\frac{\cosh My/y_0}{\cosh M} - 1\right) \qquad (۳۲\text{-}۱۱)$$

که M عدد هارتمن $\sqrt{B_0^2 y_0^2 \sigma/\mu_f}$ است.

معادلهٔ حرکت در جهت y برابر است با

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + J_z B_x$$

و با دانستن میدان مغناطیسی القاشدهٔ B_x، مقدار $\frac{\partial p}{\partial y}$ به راحتی تعیین می‌شود. از معادلهٔ (۱۱-۳۲) و قانون اهم J_z را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$J_z = \sigma E_z \frac{\cosh My/y_0}{\cosh M} + \frac{y_0}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\cosh My/y_0}{\cosh M} - 1\right) \qquad (۳۳\text{-}۱۱)$$

جریان کلی (برای واحد طول کانال در جهت x) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathscr{I} = \int_{-y_0}^{+y_0} J_z dy = 2\sigma y_0 E_z \frac{\tanh M}{M} + \frac{2y_0^2}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\tanh M}{M} - 1\right) \qquad (۳۴\text{-}۱۱)$$

ولتاژ سرقطب V_t (ولتاژ الکترود در $+z_0$ نسبت به ولتاژ در $-z_0$) به‌صورت زیر تعریف می‌شود

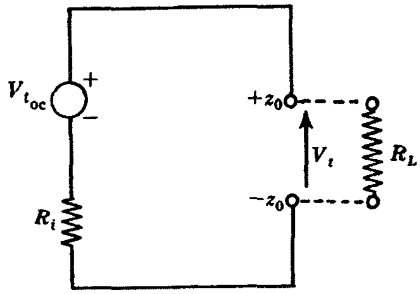
$$V_t = -\int_{-z_0}^{+z_0} E_z dz = -2z_0 E_z$$

و با استفاده از معادلهٔ (۱۱-۳۴)، برای یافتن E_z برحسب $\mathscr{I}$، داریم

$$V_t = -\frac{z_0 M \mathscr{I}}{\sigma y_0 \tanh M} + \frac{2y_0 z_0}{M\sqrt{\sigma\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(1 - \frac{M}{\tanh M}\right) \qquad (۳۵\text{-}۱۱)$$

اکنون، مدار هم‌ارز قطعه را با افزودن ولتاژ مدار باز به‌صورت سری با مقاومت درونی مؤثر R_i می‌توان ساخت، که R_i نسبت ولتاژ مدار باز $V_{t_{oc}}$ به جریان اتصال کوتاه I_{sc} است. از معادلهٔ (۱۱-۳۵) $V_{t_{oc}}$ را با قرار دادن $\mathscr{L} = 0$ به‌دست می‌آوریم

$$V_{t_{oc}} = \frac{2y_0 z_0}{M\sqrt{\sigma\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(1 - \frac{M}{\tanh M}\right) \qquad (۳۶\text{-}۱۱)$$



شکل ۱۱-۴ مدار هم‌ارز جریان MHD با علائم قراردادی. در مسئلهٔ هارتمن $V_{t_{oc}}$ منفی است و بنابراین قطبیت $V_{t_{oc}}$ عکس شکل موجود خواهد بود.

(که عددی منفی است) و I_{sc} با قرار دادن $E_z = ۰$ در معادلهٔ (۱۱-۳۴) به‌دست می‌آید

$$\mathscr{I}_{sc} = \frac{۲y_۰^۲}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\tan\mathrm{h}M}{M} - ۱\right) \qquad (۱۱\text{-}۳۷)$$

که عددی منفی است و بیانگر عبور جریان از سرقطب $+z_۰$ به $-z_۰$ در میان کانال است. بنابراین برای قطعه‌ای به‌طول L، I_{sc} (جریان اتصال کوتاه برای قطعهٔ کامل) برابر $L\mathscr{I}_{sc}$ است، بنابراین

$$R_i = \frac{V_{t_{oc}}}{I_{sc}} = \frac{z_۰}{L\sigma y_۰}\frac{M}{\tan\mathrm{h}M} \qquad (۱۱\text{-}۳۸)$$

بنابر قضیهٔ تِوِنِن مدار هم‌ارز همچون شکل۱۱-۴ است. مقاومت بار R_L را می‌توان به سرقطبها وصل کرد و با استفاده از قانون کیرشهوف، داریم

$$V_{t_{oc}} + I(R_L + R_i) = ۰ \qquad (۱۱\text{-}۳۹)$$

یادآور می‌شویم که R_L را می‌توان با مولد خارجی جایگزین کرد. علامت V_t و I بستگی به اتصال بار R_L و یا مولد خارجی دارد.

روش مدار بالا را می‌توان برای تحلیل مولدهای برق، پمپها، و سنجه‌ها در جریان تراکم‌ناپذیر یا تراکم‌پذیر برای هر شکل کانال به‌کار برد. این روش زمینهٔ تحلیل مولد برق MHD خواهد بود.

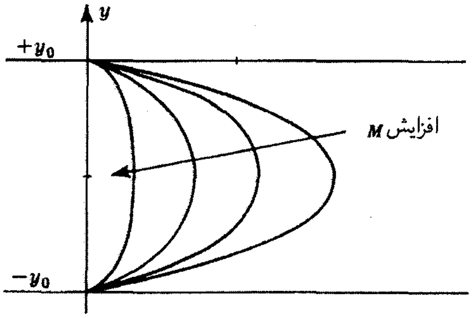
اکنون، میدان مغناطیسی القاشدهٔ H_x را می‌توان از $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ یافت، زیرا $\mathbf{J}$ معلوم است. از معادلهٔ (۱۱-۳۳)، داریم

$$\frac{dH_x}{dy} = -J_z = -\sigma E_z\frac{\cos\mathrm{h}My/y_۰}{\cos\mathrm{h}M} - \frac{y_۰}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\cos\mathrm{h}My/y_۰}{\cos\mathrm{h}M} - ۱\right)$$

که $H_x(y)$ را با انتگرال‌گیری می‌توان یافت. شرط مرزی به پیکربندی هندسی مدار برگشت بستگی دارد، و با استفاده از قانون مدار آمپر تعیین می‌شود. اگر مدار برگشت برحسب y متقارن باشد (شامل دو صفحه همچون شکل۱۱-۳)، آنگاه $H_x(y = ۰) = ۰$ و H_x برحسب y نامتقارن خواهد بود. H_x مقدار ثابتی بین دیواره‌های عایق و صفحه‌های مسیر برگشت دارد و سپس در میان صفحه‌ها به صفر می‌رسد. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ بالا، داریم

$$H_x = \frac{y_۰^۲}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{y}{y_۰} - \left(\frac{y^۲}{M}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_f}}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{I}{۲L}\right)\frac{\sin\mathrm{h}My/y_۰}{\sin\mathrm{h}M} \qquad (۱۱\text{-}۴۰)$$

در جریان هارتمن، با افزایش بار خارجی R_L، آهنگ جریان کاهش می‌یابد (برای هر عدد هارتمن مفروض). اگر ولتاژی خارجی اعمال شود، آهنگ جریان ممکن است بسته به قطبیت ولتاژ اعمال‌شده کاهش (و حتی جریانی مخالف گرادیان فشار به‌وجود آورد)، یا افزایش یابد. برای هر مقدار ثابت R_L، با افزایش عدد هارتمن نیمرخ تخت‌تر می‌شود (شکل۱۱-۵). اما، اگر ولتاژی خارجی اعمال شود، این منحنی نه‌تنها تخت نمی‌شود بلکه تیزتر خواهد شد. به‌طور کلی، افزایش عدد هارتمن به‌معنی افزایش برهم‌کنش است.



شکل ۱۱-۵ نیمرخ سرعت در جریان هارتمن برای مقاومت بار R_L و گرادیان فشار ثابت.

این نوع تحلیل مسئلهٔ هارتمن را برای مولدهای برق و پمپها، که کارکرد آنها به هر دو پارامتر شرایط سرقطبها و گرادیان فشار بستگی دارد، می‌توان به‌کار برد. این روشها را برای جریان تراکم‌پذیر در کانال مولد MHD در بخش ۱۱-۷ به‌کار خواهیم برد. تعمیم آن به لوله‌ها و کانالهایی با سطح مقطع متناهی در اینجا بحث نخواهد شد، اما خوانندگان می‌توانند به مرجع ۵ مراجعه کنند.

۱۱-۷ انواع موجها در MHD

قبلاً به نوعی موج جدید به‌نام موج آلفن که در MHD رخ می‌دهد، اشاره کردیم. اکنون با بررسی حرکت موج تخت معمولی متوجه می‌شویم که موج آلفن یکی از چند پدیدهٔ جدیدی است که به‌علت برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی میدان شاره رخ می‌دهد. در اینجا، توجهٔ خود را به موجهای تخت محدود می‌کنیم، زیرا آنها تنها نوعی هستند که با بیان ساده بررسی می‌شوند و نتیجه‌های حاصل از تحلیل آنها برای دست‌یابی به تصویر مطلوب موجهایی که در MHD انتشار می‌یابند، کفایت می‌کند.

مشخصهٔ موج تخت، که در جهت x منتشر می‌شود، این است که هیچ‌یک از متغیرها در جهتهای y و z تغییر نمی‌کنند. موجهای تخت واقعی در طبیعت وجود ندارند، اما دست‌کم در ناحیه‌های کوچکی از فضا، موجها دارای رفتار موجهای تخت هستند. در هر حال، موجهایی را که شکل هندسی پیچیده‌تری دارند، می‌توان برهم‌نهش موجهایی دانست که شبیه موجهای تخت رفتار می‌کنند.

دو نوع موج وجود دارند: عرضی و طولی. موجهای عرضی همچون موجهای برشی و TEM (موجهای الکترومغناطیسی) شامل فقط مؤلفه‌های y و z متغیرهای بردار در موج است (انتشار را در جهت x فرض می‌کنیم). تغییرات فشار و چگالی در موجهای عرضی وجود ندارد. موجهای طولی فقط دارای مؤلفه‌های x متغیرها یا اسکالرهای خالص‌اند که در حرکت آنها وارد می‌شوند. مثال متداول، موج آکوستیکی یا صوتی است که تغییرات فشار و چگالی را همراه دارند. در MHD درمی‌یابیم که موجهای برشی عرضی همراه با کمیتهای میدانی موج جدید دیگری ایجاد می‌کنند (موج آلفن) و موج آکوستیکی معمولی به سه نوع موج مغناطوآکوستیکی سریع، کند و میانی تقسیم می‌شوند.

در بررسیهای خود فرض می‌کنیم که شاره پیوستار، و قانون اهم برقرار است. در گازهای رقیق از مدل شارهٔ پیچیده‌تری باید استفاده شود و نتیجه‌های آن، به‌ویژه در بسامدهای بالا، متفاوت‌اند. بررسی موجهای رادیویی در یون‌سپهر مبتنی بر نوسانهای این گازهای یونیدهٔ رقیق (یا پلاسما) است، اما در اینجا دربارهٔ آنها نمی‌توان بحث کرد. فرض دیگری که برای گازهای چگال و مایعها صادق است، این است که جریان جابه‌جایی در مقایسه با جریان رسانش ناچیز است. این فرض به این معناست که $\sigma/\omega\epsilon \gg ۱$، که ω بسامد زاویه‌ای و ϵ ثابت دی‌الکتریک است. برای جیوه (در یکاهای RMKS)، $\sigma \cong ۱۰^{۶}$ و $\epsilon \cong ۱۰^{-۱۲}$، بنابراین برای بسامدهایی حتی در ناحیهٔ میکروموج این فرض کاملاً مناسب است. حتی برای گازهای کم‌یونیده در $\sigma \cong ۱$، برای زیادشدن جریان جابه‌جایی، این بسامد باید از مرتبهٔ $۱۰^{۱۲}$ هرتز باشد.

برای این کار فرض می‌شود که موجها شامل آشفتگیها یا اختلالهای جزئی در متغیرهایند. معادلات حاکم را برهم می‌زنیم، آنها را خطی می‌کنیم و حلهای فازوری برایشان در نظر می‌گیریم. آن‌گاه، مسئله‌ای ویژه‌مقدار طرح می‌کنیم و معادلهٔ پاشندگی را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم که تمام آشفتگیها را برای انتشار در جهت x به شکل $e^{j(\omega t-kx)}$ می‌توان بیان کرد و $j=\sqrt{-۱}$.

۱۱-۷-۱ موجهای تخت در گازها

با نادیده گرفتن جریان جابه‌جایی و فرض ساکن بودن شاره در ابتدا، می‌توان معادلهٔ پاشندگی مناسب را به‌شرح زیر به‌دست آورد. با توجه به شکل۱۱-۶، فرض می‌شود که میدان مغناطیسی وارد شده دارای مؤلفه‌های $H_{\circ x}$ و $H_{\circ y}$ است، که در جهت x منتشر می‌شوند. با حذف $H_{\circ z}$ از عمومیت موضوع کاسته نمی‌شود، زیرا همیشه می‌توان دستگاه مختصات را حول محور x آنچنان دوران داد تا $H_{\circ z}$ صفر شود.

در فصل ۱۳ بحث کاملی دربارهٔ موجهای تخت، نمایش فازوری و معادلات پاشندگی شده است.

معادلات مربوط شامل سه معادلهٔ حرکت، سه معادلهٔ انتقال مغناطیسی، معادلهٔ پیوستگی، معادلهٔ انرژی و معادلهٔ حالت است که مجموعاً ۹ معادله می‌شود. کمیتهای اختلال مغناطیسی را با حرفهای کوچک و اختلال در فشار، چگالی و دما را با حرفهای پریم‌دار نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} &\mathbf{H} = \mathbf{H}_\circ + \mathbf{h} && \rho = \rho_\circ + \rho' \\ &\mathbf{V} = \mathbf{v}, (\mathbf{V}_\circ = \circ) && T = T_\circ + T' \\ &p = p_\circ + p' \end{aligned}$$

مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ عبارت‌اند از u، v و w.

معادلهٔ پیوستگی عبارت است از

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{V}) = \circ$$

که به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\circ + \rho') + \boldsymbol{\nabla}\cdot[(\rho_\circ + \rho')\mathbf{v}] = \circ$$

معادلهٔ مرتبهٔ اول خطی شده عبارت است از

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_\circ\frac{\partial u}{\partial x} = \circ$$

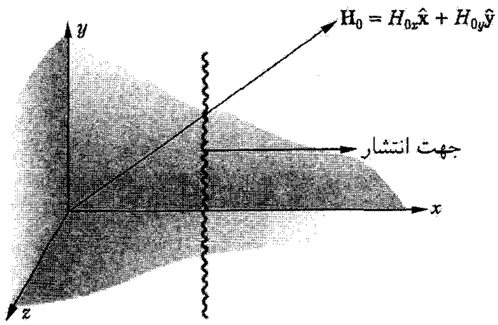
بدین ترتیب، شکل جبری معادله (با فرض حل فازوری $\rho' = \rho'^* e^{j(\omega t - kx)}$ و $u = u^* e^{j(\omega t-kx)}$، که ρ'^* و u^* فازورها هستند) به‌صورت زیر است

$$u^*\rho k - \rho'^*\omega - u^*\rho_\circ k = \circ \qquad (۱۱\text{-}۴۱)$$

همین‌گونه، می‌توان بقیهٔ معادلات خطی شده را به شکل جبری نوشت. معادلات مرتبهٔ اول عبارت‌اند از

معادلهٔ حالت:

$$\frac{\rho'}{\rho_\circ} = \frac{T'}{T_\circ} + \frac{\rho'}{\rho_\circ} \qquad (۱۱\text{-}۴۲)$$



شکل ۱۱-۶ انتشار موج تخت در میدان مغناطیسی وارد شده.

معادلهٔ حرکت:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p'}{\partial x}+(\zeta+\frac{4}{3}\nu\rho_\circ)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\mu H_{\circ y}\frac{\partial h_y}{dx} \qquad \text{(الف)}$$

$$\rho_\circ\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\rho_\circ\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\mu H_{\circ x}\frac{\partial h_y}{\partial x} \qquad \text{(ب)} \qquad (۱۱\text{-}۴۳)$$

$$\rho_\circ\frac{\partial w}{\partial t}=\nu\rho_\circ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu H_{\circ x}\frac{\partial h_z}{\partial x} \qquad \text{(ج)}$$

معادلهٔ انرژی (اتلاف از مرتبهٔ دوم است):

$$\rho_\circ c_p\frac{\partial T'}{\partial t}=\frac{\partial p'}{\partial t}+\kappa_T\nabla^2 T' \qquad (۱۱\text{-}۴۴)$$

معادلهٔ انتقال مغناطیسی:

$$\frac{\partial h_x}{\partial t}=\eta\frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} \qquad \text{(الف)}$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial t}=\eta\frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2}+H_{\circ x}\frac{\partial v}{\partial x}-H_{\circ x}\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{(ب)} \qquad (۱۱\text{-}۴۵)$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t}=\eta\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2}+H_{\circ x}\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{(ج)}$$

اکنون می‌توان شکل جبری را به‌دست آورد. نتیجهٔ عملیات، نُه معادلهٔ جبری برای نُه کمیت فازوری است. اما، این معادلات مستقل خطی نیستند و مقدار ضریب فازورها باید صفر باشد. بدین ترتیب، این معادله همان معادلهٔ پاشندگی است. شکل دترمینانی آن به‌صورت زیر است. در این دترمینان سه جملهٔ نامزدوج وجود دارد. جملهٔ اول مهم نیست و فقط نشان می‌دهد که $h_x=\circ$. دترمینان ۲ × ۲ بیانگر دو موج عرضی است و ۶ × ۶ مجموعهٔ موجهای جفت‌شدهٔ طولی و عرضی را نشان می‌دهد. در اینجا، به جزئیات این موجهای کلی نمی‌پردازیم، ولی بعضی از حالتهای خاص آنها را بررسی می‌کنیم.

	h_x^*	h_z^*	w^*	u^*	v^*	h_y^*	p'^*	ρ'^*	T'^*	
(۱۲-۴۵الف)										
(۱۲-۴۳ ج)						۰				
(۱۲-۴۵ ج)		۲×۲								
(۱۲-۴۱)										
(۱۲-۴۳الف)	۰									=۰
(۱۲-۴۳ ب)						۶×۶				
(۱۲-۴۵ ب)										
(۱۲-۴۲)										
(۱۲-۴۴)										

(۱۱-۴۶)

۱۱-۷-۲ موجهای عرضی

دترمینان ۲ × ۲ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\nu\eta k^4+[A_x^2+j(\nu+\eta)\omega]k^2-\omega^2=\circ \qquad (۱۱\text{-}۴۷)$$

که بیانگر دو مد عرضی‌اند، زیرا از مرتبهٔ درجهٔ دو $k^{۲}$ است. این مدها ناشی از جفت‌شوندگی بین پخش گران‌رو و پخش مغناطیسی و موج آلفن است. (علامتهای A_+ و A_- موج پیش‌رونده یا پس‌رونده را مشخص می‌کند). A_x مؤلفهٔ x سرعت آلفن، یعنی $A_x = \sqrt{B_{\circ x}H_{\circ x}/\rho_\circ}$ است.
اگر $A_x = \circ$، آن‌گاه دو موج جفت نشده داریم که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$(\eta k^{۲} + j\omega)(\nu k^{۲} + j\omega) = \circ \tag{۱۱-۴۸}$$

که پخش گران‌رو خالص پخش مغناطیسی خالص را نشان می‌دهد (زیرا $k^{۲}$ انگاری است).

اگر $\nu = \eta = \circ$ (بدون اتلاف)، آن‌گاه $A_x^{۲}k_{۲}^{۲} - \omega^{۲} = \circ$، بنابراین سرعت فاز $v_p = \omega/(\mathrm{Re}k)$ تندی آلفن است، یعنی $v_p = \pm A_x$. در نتیجه k کمیتی حقیقی است و هیچ‌گونه تضعیفی رخ نمی‌دهد.

موجهای عرضی برای گاز و مایعات یکسان‌اند.

۱۱-۷-۳ موجهای جفت‌شدهٔ طولی

دترمینان ۶×۶ معادلهٔ (۱۱-۴۶) به‌طور صریح عبارت است از

$$\left[\kappa_T\left\{\frac{۱}{\rho_\circ} + j\frac{\omega}{\rho_\circ p_\circ}(\tfrac{۴}{۳}\nu\rho_\circ + \zeta)\right\}k^{۴} - \left\{\frac{\omega^{۲}\kappa_T}{p_\circ} - j\omega c_p + \frac{\omega^{۲}c_p}{a_\circ^{۲}\rho_\circ}(\tfrac{۴}{۳}\nu\rho_\circ + \zeta)\right\}k^{۲} - j\frac{\omega^{۳}c_p}{a_\circ^{۲}}\right]$$
$$\cdot\,[\nu\eta k^{۴} + \{A_x^{۲} + j(\nu+\eta)\omega\}k^{۲} - \omega^{۲}] - k^{۲}A_y^{۲}(j\omega + \nu k^{۲})\left(\frac{\omega^{۲}c_p}{a_\circ^{۲}} - \frac{j\omega\kappa_T k^{۲}}{p_\circ}\right) = \circ \tag{۱۱-۴۹}$$

که $A_x = \sqrt{B_{\circ x}H_{\circ x}/\rho_\circ}$، $A_y = \sqrt{B_{\circ y}H_{\circ y}/\rho_\circ}$ و $a_\circ$ تندی صوتی $a_\circ = \sqrt{kRT_\circ}$ است.

در اینجا حالت کلی را بررسی نخواهیم کرد، بلکه حالتهای خاص قابل توجه را در نظر خواهیم گرفت.

اگر میدان را $\mathbf{H}_\circ = \circ$ ($A_x = A_y = \circ$) قرار دهیم، آن‌گاه به موجهای آکوستیکی معمولی در شارهٔ گران‌رو با رسانش گرمایی دست می‌یابیم.

همچنین اگر $\nu = \zeta = \kappa_T = \circ$، به موجهای آکوستیکی سادهٔ معمولی دست می‌یابیم و معادلهٔ (۱۱-۴۹) به‌صورت ساده زیر درمی‌آید

$$a_\circ^{۲}k^{۲} - \omega^{۲} = \circ$$

بنابراین $v_p = \pm a_\circ$ سرعت صوتی معمولی است.

اگر $\nu = \eta = \kappa_T = \zeta = \circ$، هیچ اتلافی نداریم و به موجهای مغناطوآکوستیکی «ایده‌ال» دست خواهیم یافت. این موجها را می‌توان به طور کامل بررسی کرد و از اهمیت ویژه‌ای در MHD برخوردارند. یادآور می‌شویم که معادلهٔ (۱۱-۴۹) به دو عامل تبدیل می‌شود: یکی مشابه موج آلفن در بخش قبل و دیگری از مرتبهٔ درجهٔ دو $k^{۲}$:

$$[(a_\circ^{۲}k^{۲} - \omega^{۲})(A_x^{۲}k^{۲} - \omega^{۲}) - k^{۲}A_y^{۲}\omega^{۲}](A_x^{۲}k^{۲} - \omega^{۲}) = \circ \tag{۱۱-۵۰}$$

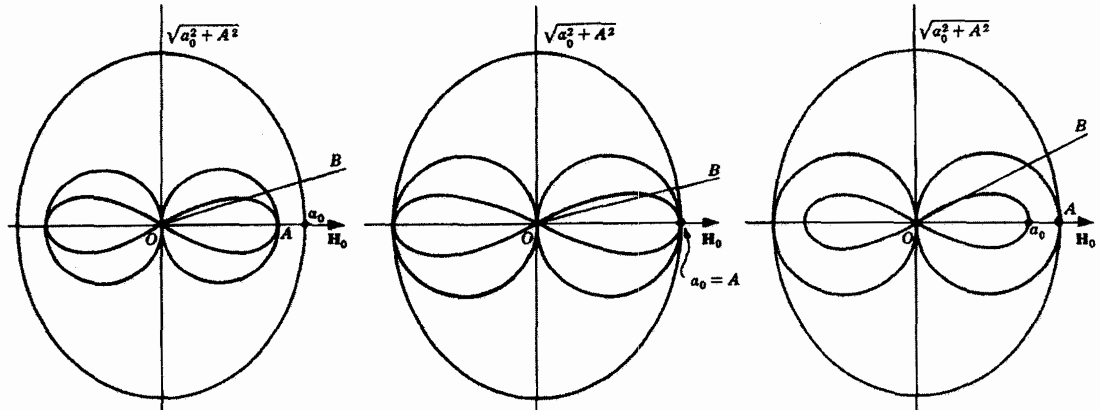
دو ریشه رابطهٔ درجهٔ دو بیانگر دو موج طولی‌اند (موجهای مغناطوآکوستیکی): موج سریع و موج آهسته. سرعتهای فاز عبارت‌اند از

موج طولی:

$$v_{\text{سریع}} = \pm\left[\frac{۱}{۲}(A_x^{۲} + A_y^{۲} + a_\circ^{۲}) + \sqrt{\frac{۱}{۴}(A_x^{۲} + A_y^{۲} + a_\circ^{۲})^{۲} - a_\circ^{۲}A_x^{۲}}\right]^{۱/۲}$$
$$v_{\text{آهسته}} = \pm\left[\frac{۱}{۲}(A_x^{۲} + A_y^{۲} + a_\circ^{۲}) - \sqrt{\frac{۱}{۴}(A_x^{۲} + A_y^{۲} + a_\circ^{۲})^{۲} - a_\circ^{۲}A_x^{۲}}\right]^{۱/۲} \tag{۱۱-۵۱}$$

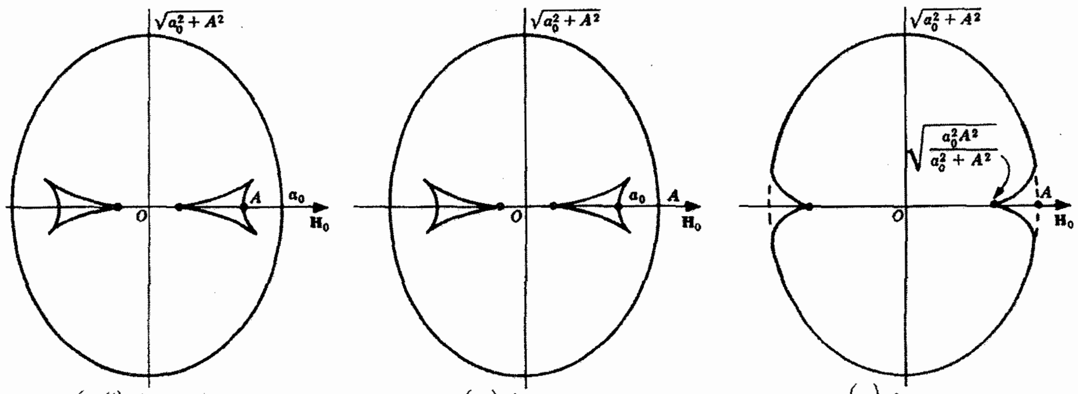
موج عرضی:

$$v_p = \pm A_x$$



(الف) $A < a_0$ (ب) $A = a_0$ (ج) $A > a_0$

شکل ۱۱-۷ سرعت فاز موجهای مغناطوآکوستیکی ایده‌ال. بردار شعاعی OB بیانگر سرعت فاز انتشار موج تخت در آن جهت نسبت به میدان مغناطیسی واردِ شدهٔ $\mathbf{H}_\circ$ است. باید تصور کرد که این نمودار حول $\mathbf{H}_\circ$ برای تشکیل سطحهای سه‌بعدی $A^۲ = A_x^۲ + A_y^۲$ چرخیده است.



(الف) $A < a_0$ (ب) $A > a_0$ (ج) $A = a_0$

شکل ۱۱-۸ نمودارهای قائم ـ پرتو یا فردریکس برای موجهای مغناطوآکوستیکی ایده‌ال. تپ صدای موجود در مبدأ در واحد زمان به درون این سطحها گسترش می‌یابد. آنها را باید حول $\mathbf{H}_\circ$ برای تشکیل سطحهای سه‌بعدی بچرخانیم.

مشخصهٔ این موجها را با رسم سرعت فاز به عنوان تابع جهت انتشار برحسب میدان مغناطیسی به‌خوبی از نظر فیزیکی می‌توان دید. در شکل۱۱-۷ منحنی سرعت فاز را در نمودار سه‌بعدی قطبی نشان داده‌ایم. در این شکل می‌بینیم که به‌طور کلی سه موج وجود دارند و برای انتشار در زاویه‌های قائم نسبت به $\mathbf{H}_\circ$ (پس، $H_{\circ x} = \circ$) فقط یک موج وجود دارد که آن هم موج آکوستیکی اصلاح شده است.

از دیدگاه کاربردی، در جعبهٔ فلزات مایع، معمولاً A بسیار کوچکتر از $a_\circ$ است و بنابراین اندازه‌گیری اثر آن برروی رفتار آکوستیکی در آزمایشگاه دشوار است. اما، در مقیاس نجومی و اخترشناسی، چنین چیزی صحیح نیست و این موجها مهم می‌شوند.

نمودار مورد توجه دیگر، نمودار قائم ـ پرتو برای موجهای مغناطوآکوستیکی ایده‌آل است. آنها را نمودارهای فردریکس می‌گویند و در شکل۱۱-۸ دیده می‌شوند. این نمودارها پوش موجهای تختی‌اند که از مبدأ به‌خارج حرکت می‌کنند و بنابراین بیانگر شکل‌گیری واحد زمان در فضای تپ در مبدأ هستند. در صوت‌شناسی معمولی، این‌گونه نمودارها به‌صورت کره‌ای به‌شعاع $a_\circ$ خواهند بود. (مخروط ماخ شکل‌گیری تپ صدای ناشی از چشمهٔ متحرک صوتی را نشان می‌دهد.) این نمودارها را می‌توان با استفاده از شکل۱۱-۷ به‌طور هندسی ترسیم کرد. خطهای عمود بر پرتوها (همچون OB) منحنی مکان هندسی سرعت فاز را قطع می‌کنند. اکنون، مجموعهٔ پیوسته‌ای از این صفحه‌های متعامد را تشکیل می‌دهیم که مانند OB همهٔ زاویه‌ها را پوشش می‌دهد. آن‌گاه، پوش این صفحه‌ها سطحهای آشفتگی صدایی را تشکیل می‌دهند که به‌وسیلهٔ تپ موجود در مبدأ تولید شده‌اند.

سطح آشفتگی ایجاد شده به‌وسیلهٔ چشمهٔ متحرک (مانند هواپیما) قدری پیچیده می‌شود و بیشتر از دو حالت مشخص (مانند فراصوتی و فروصوتی در شارهٔ معمولی) وجود خواهد داشت. اکنون چهار ناحیهٔ جریان، بسته به بزرگی سرعت جسمهای متحرک نسبت به تندی این سه موج و جهت‌گیری آنها نسبت به میدان مغناطیسی، وجود دارد. در اینجا، دربارهٔ مغناطوآئرودینامیک بحث نخواهیم کرد و علاقمندان می‌توانند به مرجعها مراجعه کنند.

۱۱-۷-۴ موجهای ضربه‌ای MHD

در اینجا، فقط دربارهٔ حالت خاصی از موج ضربه‌ای MHD بحث می‌کنیم که موج ضربه‌ای قائم MHD نامیده می‌شود. فرض می‌کنیم که میدان مغناطیسی وارد شده در دو طرف موج ضربه‌ای موازی با جبههٔ موج ضربه‌ای است. سرعت ممکن است نسبت به جبههٔ موج ضربه‌ای مایل باشد، بنابراین فقط به مؤلفه‌های سرعت عمود بر جبههٔ موج ضربه‌ای می‌پردازیم. موج ضربه‌ای قائم MHD تعمیم موج ضربه‌ای مایل معمولی است. در اینجا، حالت کلیتر میدان مغناطیسی اختیاری را بحث نخواهیم کرد.

اکنون، تحلیل خود را در چارچوب مرجع موج ضربه‌ای انجام می‌دهیم و فرض می‌کنیم که B در تمام دستگاهها یکسان است. با مراجعه به شکل۱۱-۹، می‌توان معادلات پایستگی را در عرض موج ضربه‌ای نوشت.

معادله پیوستگی:
$$[\rho u]_۱^۲ = ۰$$

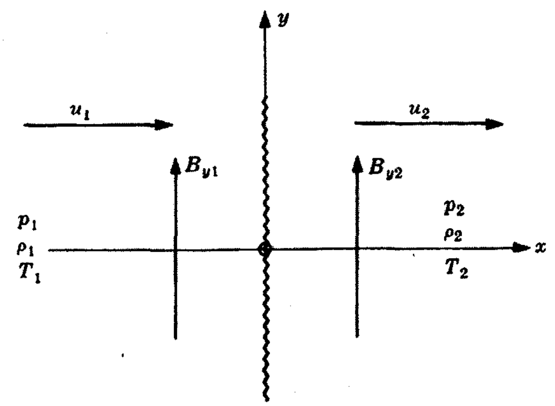
معادلهٔ تکانه:
$$\left[\rho u^۲ + p + \frac{۱}{۲\mu} B_y^۲\right]_۱^۲ = ۰$$

معادلهٔ انتقال مغناطیسی:
$$[uB_y]_۱^۲ = ۰ \qquad B_{z۱} = B_{z۲} = ۰$$

همچنین، v و w، که مؤلفه‌های y و z سرعت‌اند، باید پیوسته باشند.

معادلهٔ انرژی:
$$\left[\frac{p}{\rho}\left(\frac{k}{k-۱}\right) + \frac{u^۲}{۲} + \frac{B_y^۲}{\rho\mu}\right]_۱^۲ = ۰$$

علامت $[\ ]_۱^۲$ بیانگر شرط جهش است. یعنی، $[A]_۱^۲ = A_۲ - A_۱$، که A کمیتی اختیاری است. این چهار معادلهٔ بالا بیانگر کامل موج ضربه‌ای، و شبیه معادلات رانکین ـ هوگونیو هستند.



شکل ۱۱-۹ موج ضربه‌ای قائم MHD. دستگاه مختصات را در جهتی قرار داده‌ایم که، با حفظ عمومیت موضوع، $B_{z۱} = ۰$. $B_{z۲}$ نیز برای تأمین انتقال مغناطیسی باید صفر شود.

ورقهٔ جریانی در موج ضربه‌ای وجود دارد که باعث تغییر B_y می‌شود.

با حل آن، سرعت موج ضربه‌ای a_s در هوای ساکن (مانند $u_۱$ در شکل۱۱-۹) نتیجه می‌شود

$$a_s = \frac{۲}{k+۱} \cdot \frac{a_۱^۲ + A_۱^۲[۱ + (۱ - k/۲)(\rho_۲/\rho_۱ - ۱)]}{\rho_۱/\rho_۲ - (k-۱)/(k+۱)} \tag{۱۱-۵۲}$$

که $a_۱$ سرعت صوتی در بالادست جریان، و $A_۱$ سرعت آلفن $\sqrt{B_{y۱}^۲/\mu\rho_۱}$ در جریان بالادست است. با گراییدن $A_۱$ به‌سوی صفر، سرعت موج ضربه‌ای در دینامیک گازی معمولی به‌دست می‌آید. سرعت موج ضربه‌ای با حضور میدان مغناطیسی افزایش می‌یابد. (با نزدیک کردن میدان مغناطیسی سرعت موج ضربه‌ای افزایش می‌یابد.) با کاهش شدت میدان مغناطیسی $\rho_۲/\rho_۱ \to ۱$، $a_s^۲ = a_۱^۲ + A_۱^۲$، که سرعت مغناطوصوتی عمود بر میدان را به‌دست می‌دهد.

جهش فشار $[p]_۱^۲ = p_۲ - p_۱$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$p_۲ - p_۱ = a_s^۲\rho_۱(۱ - \rho_۱/\rho_۲) + \frac{B_{y۱}^۲}{۲\mu}(۱ - \rho_۲^۲/\rho_۱^۲) \tag{۱۱-۵۳}$$

و عدد ماخ مغناطوصوتی $M_۱^۲ = a_s^۲/(a_۱^۲ + A_۱^۲)$ را، وقتی $\rho_۲/\rho_۱ \to ۱$ و $M_{t۱} \to ۱$، به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد

$$M_t^۲ = \frac{۲}{k+۱} \cdot \frac{۱ + [A_۱^۲/(a_۱^۲ + A_۱^۲)](۱ - k/۲)(\rho_۲/\rho_۱ - ۱)}{\rho_۱/\rho_۲ - (k-۱)/(k+۱)} \tag{۱۱-۵۴}$$

برای $M_{t۱} < ۱$، هیچ موج ضربه‌ای رخ نمی‌دهد و برای $M_{t۱} > ۱$ و $a_s^۲ > a_۱^۲$ موجی ضربه‌ای وجود دارد. برای $a_s^۲ < a_۱^۲$، هیچ موج ضربه‌ای برای هر مقدار $A_۱$ نمی‌تواند به‌وجود آید. در نتیجه، با افزایش میدان و گذر از مقدار بحرانی، هیچ موج ضربه‌ای نمی‌تواند رخ دهد.

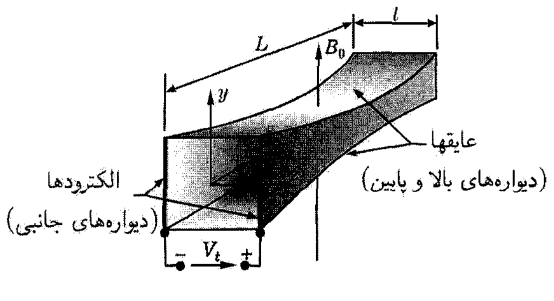
برای میدان مغناطیسی مایل کلی وضعیت پیچیده‌تر است و چندتایگی موجهای ضربه‌ای و ناپیوستگیها به‌وجود می‌آید.

۱۱-۸ جریان تراکم‌پذیر-جریان کانال مغناطوگازدینامیکی

در این بخش دربارهٔ جریان کانال شبه یک‌بعدی تراکم‌پذیر، که در بررسی مولد برق و سیستم پیشرانش MHD مهم است، بحث خواهیم کرد. همچون شکل۱۱-۱۰، فرض می‌کنیم که سطح مقطع کانال در جهت x متغیر است و الکترودها به‌صورت رساناهای کامل موازی، دو دیوارهٔ مقابل هم را درکانال تشکیل می‌دهند. دیواره‌های دیگر عایق هستند. مؤلفه‌های سرعت v و w بسیار کوچکتر از u فرض می‌شوند و اثرهای میدان القاشده را نادیده می‌گیریم.

پتانسیل سرقطب V_t و میدان الکتریکی E_z (E_x و E_y صفرند) با رابطهٔ زیر به‌هم مربوط می‌شوند

$$E_z = -V_t/l$$



شکل ۱۱-۱۰ کانال یک‌بعدی با جریان تراکم‌پذیر.

بنابراین E_z در سرتاسر کانال ثابت است و $J_z = \sigma(E_z + uB_\circ)$ فقط تابع x است (زیرا u تابع x است). اگر l را نسبت به x متغیر می‌گرفتیم، آن‌گاه E_z تابع x می‌شد، اما در اینجا بحث خود را به الکترودهای موازی محدود می‌کنیم.

با شرایط مدار باز، جریان کل خارجی I صفر است، اما $\mathscr{I}(x)$ (چگالی جریان در واحد طول) الزاماً صفر نیست و جریانها می‌توانند درکانال گردش داشته باشند. $V_{t_{oc}}$ را نمی‌توان بدون داشتن تابع $u(x)$ تعیین کرد. اما، براساس مقیاس موضعی (برای هر مقدار مفروض x) شرایط مدار باز موضعی ($J_z = \circ$) از رابطهٔ $E_z = -uB_\circ$ به‌دست می‌آید. در مدارکوتاه موضعی، $E_z = \circ$. در نتیجه، اگر $-uB_\circ < E_z < \circ$، هر قسمت موضعی مفروض درکانال به‌عنوان مولد عمل می‌کند. درکانال کامل، این شرط باید برای هر مقدار x صدق کند. با در نظر گرفتن علامت E_z، می‌توان نشان داد که اگر E_z منفی باشد، کانال به‌صورت پمپ یا جریان‌سنج به‌کار می‌رود. بررسیهای خود را به مقدارهای منفی E_z محدود می‌کنیم.

۱۱-۸-۱ جریان یک‌بعدی اصلی

معادلات اصلی جریان کانال را می‌توان با متوسط‌گیری معادلات دیفرانسیل در طول کانال به‌دست آورد. فرض می‌کنیم جریان پایا، σ اسکالر ثابت، گاز کامل. جریان بی‌دررو، و بدون هیچ تغییراتی در طول کانال است

معادلهٔ پیوستگی:

$$\rho u A = m(\text{ثابت}) \qquad (۱۱\text{-}۵۵)$$

معادلهٔ حرکت:

$$\rho u\frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \sigma(E_z + uB_\circ)B_\circ \qquad (۱۱\text{-}۵۶)$$

معادلهٔ انرژی:

$$\rho u\left[c_p\frac{dT}{dx} + u\frac{du}{dx}\right] = \sigma(E_z + uB_\circ)E_z \qquad (۱۱\text{-}۵۷)$$

معادلهٔ حالت:

$$p = \rho RT \qquad (۱۱\text{-}۵۸)$$

در اینجا A مساحت مقطع کانال است.

این معادلات را نمی‌توان به‌طور صریح برای تغییرات سطح کلی $A(x)$ حل کرد، اما می‌توان انتگرال مفید اول را به‌دست آورد. از ترکیب مناسب معادلات بالا رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u/A)(dA/dx) - (\sigma B_\circ^۲/p)(u-u_۳)(u-u_۱)}{M^۲ - ۱} \qquad (۱۱\text{-}۵۹)$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{۱}{(M^۲-۱)}\left\{\left(۱+\frac{k-۱}{۲}M^۲\right)\frac{M}{A}\frac{dA}{dx} - \left(۱+\frac{k-۱}{۲}M^۲\right)\frac{\sigma B_\circ^۲}{ap}(u-u_۳)(u-u_۲)\right\} \qquad (۱۱\text{-}۶۰)$$

که سرعتهای بحرانی $u_۱$، $u_۲$ و $u_۳$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

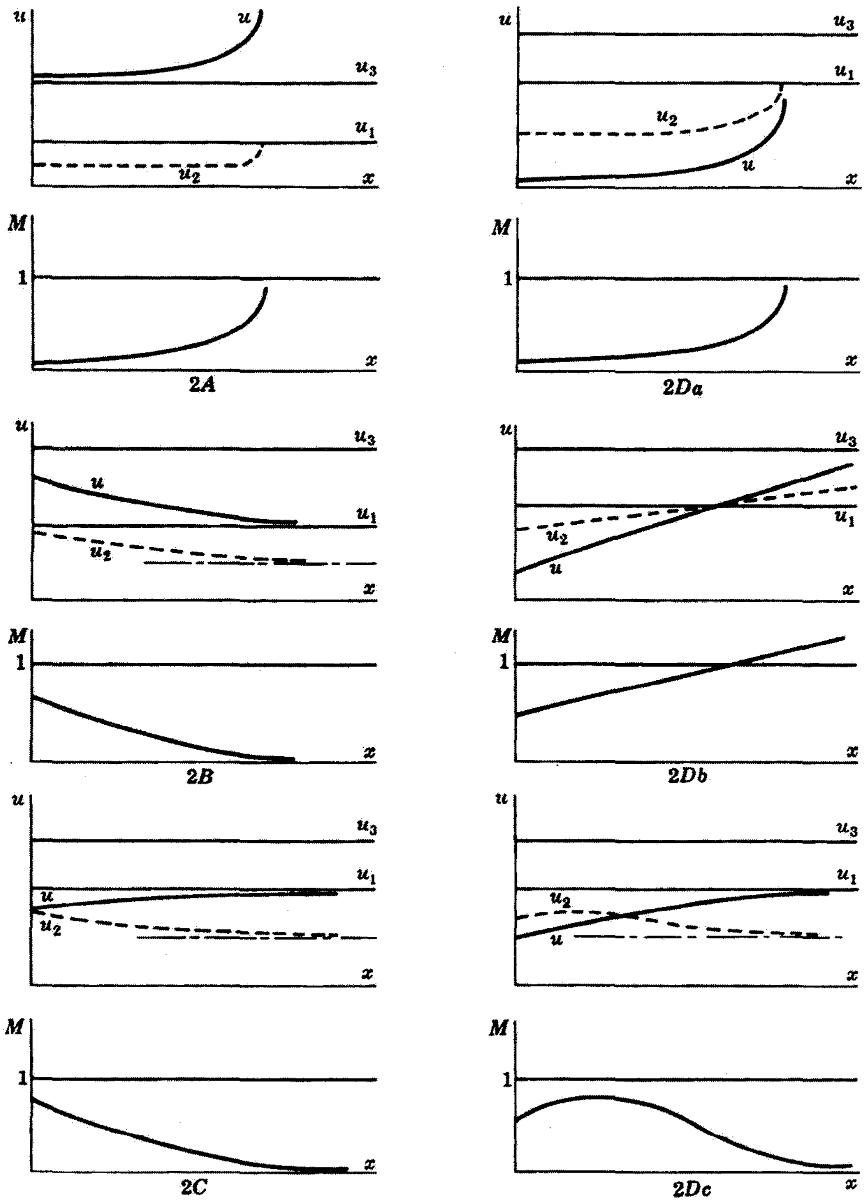
$$u_۱ = -\frac{k-۱}{k}\cdot\frac{E_z}{B_\circ} = \frac{k-۱}{k}u_۳, \qquad u_۲ = \frac{۱+kM^۲}{۲+(k-۱)M^۲}u_۱, \qquad u_۳ = -\frac{E_z}{B_\circ} = \frac{V_t}{B_\circ l} \qquad (۱۱\text{-}۶۱)$$

و M عدد ماخ موضعی است.

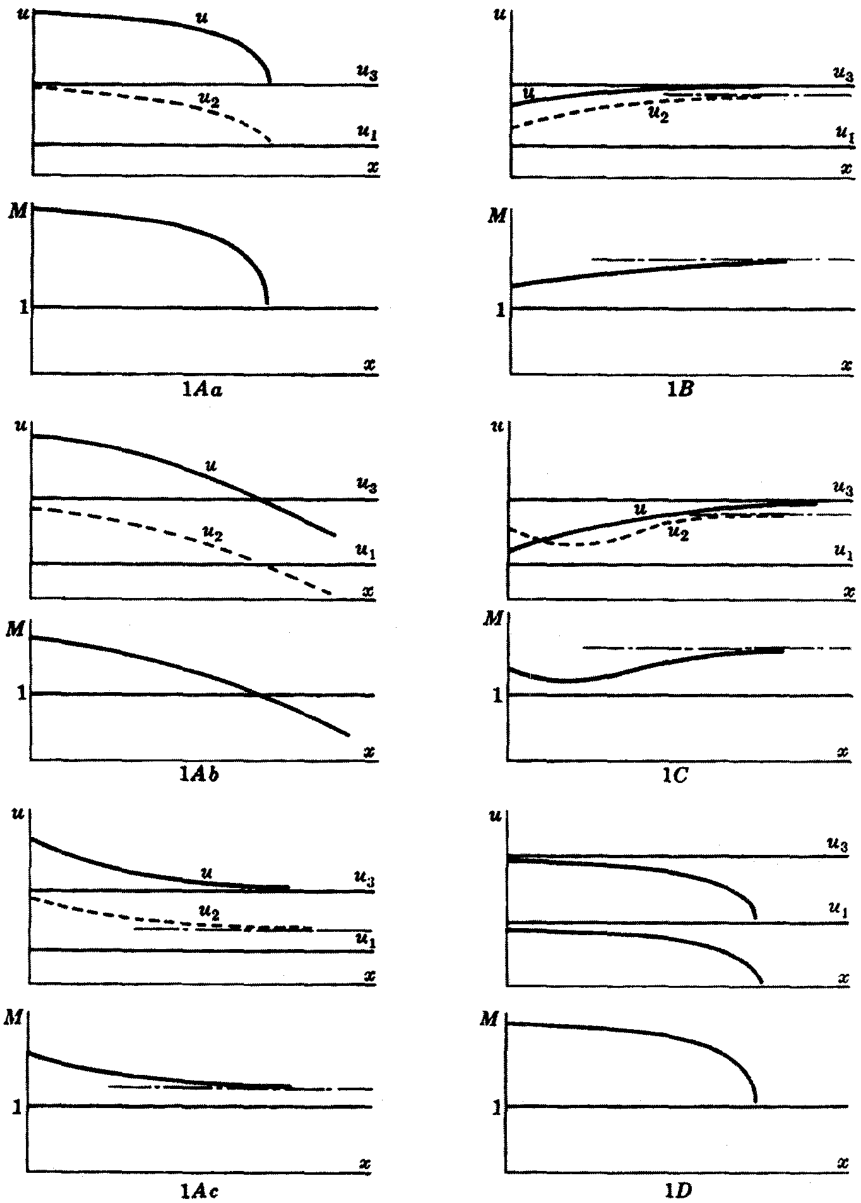
اکنون اثر نهایی برهم‌کنش الکترومغناطیسی با شاره منحصراً نیروی $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ نیست، بلکه گرمای ژول نیز وارد برهم‌کنش می‌شود. در این‌صورت، اثر نهایی را می‌توان از معادلات (۱۱-۵۹) و (۱۱-۶۰) تعیین کرد. وقتی $u < u_۳$، نیروی حجمی به‌تنهایی جریان را شتاب می‌دهد و وقتی

$u > u_3$، نیروی حجمی به‌تنهایی جریان را کند می‌کند. سرعت u_1 سرعتی است که نیروی حجمی و گرمای ژول یکدیگر را خنثی می‌کنند. آن‌گاه اثر نهایی به این شکل است: اگر $M < 1$، به‌شرطی که $u_3 > u > u_1$، جریان شتاب می‌گیرد و اگر $u < u_1$ و $u > u_3$، جریان کند می‌شود. اگر $M > 1$، جریان رفتاری عکس دارد. اثر نهایی روی M را می‌توان از معادلهٔ (۱۱-۶۰) متوجه شد. اگر $M < 1$ و $u_3 > u > u_2$، مقدار M برحسب x افزایش می‌یابد و اگر M خارج از این ناحیه باشد، M برحسب x کاهش خواهد یافت. برای $M > 1$ این عمل عکس می‌شود.

برای عمل در $E_z < 0$ و برای مقدارهای مختلف u_0 (سرعت ورودی در $x = 0$) می‌توان رفتار u و M را در طول کانال به‌طور کیفی رسم کرد. این رفتار را در شکلهای ۱۱-۱۱ و ۱۱-۱۲ نشان داده‌ایم. برای کارکرد مولد، داریم $u < u_3$ و با توجه به شکلها متوجه می‌شویم که منحصراً در حالتهای $1A$ و $2A$، $u > u_3$ است. در حالت $2A$ در همه‌جا $u > u_3$ است و در $1A$ این امکان وجود دارد که کانال فقط به‌صورت مولد



شکل ۱۱-۱۱ رفتار کیفی u و M در طول کانال با سطح مقطع ثابت برای شرایط اولیهٔ فروصوتی. $2A$: $u_0 > u_3 > u_1 > u_2$، $2B$: $u_3 > u_0 > u_1 > u_2$، $2C$: $u_3 > u_1 > u_0 > u_2$، $2Da$، $2Db$، $2Dc$: $u_3 > u_1 > u_2 > u_0$.



شکل ۱۱-۱۲ رفتار کیفی u و M در طول کانال با سطح مقطع ثابت برای شرایط اولیهٔ فروصوتی. $1Aa$، $1Ab$، $1Ac$: سه امکان وقتی $u_1 < u_2 < u_3 < u_0$، $1B$: $u_1 < u_2 < u_0 < u_3$، $1C$: $u_1 < u_0 < u_2 < u_3$، $1D$: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$.

در قسمتی از طول خود عمل کند (حالت $1Ab$). اما، باید به‌خاطر داشت که $u > u_3$ شرط لازم موضعی برای کارکرد مولد است و رفتار کلی کانال (R_i، I_{sc}، $V_{t_{oc}}$) را می‌توان فقط پس از دانستن $u(x)$ محاسبه کرد.

۱۱-۸-۲ کارکرد مولد

در اینجا، دربارهٔ حل معادلات اصلی بحث نخواهیم کرد، اما فقط یک مسئلهٔ خاص کاربردی، یعنی مولد سرعت ـ ثابت را بررسی می‌کنیم. $A(x)$ باید به شکل خاصی تغییر کند تا به ثابت ماندن $u(x)$ منجر شود.

با اعمال سرعت ثابت $u_\circ$ برروی معادلات اصلی رابطه‌های زیر را می‌توان به‌دست آورد

$$p_\circ - p = xB_\circ^{\text{۲}}\sigma(u_\circ - u_{\text{۳}}), \qquad T/T_\circ = (p/p_\circ)^{(k-\text{۱})u_{\text{۳}}/ku_\circ}, \qquad A/A_\circ = (p_\circ/p)^{\text{۱}-(k-\text{۱})u_{\text{۳}}/ku_\circ} \tag{۱۱-۶۲}$$

در این صورت، جریان کلی I برابر است با

$$I = \int_\circ^L \sigma(-V_t + u_\circ B_\circ)\frac{A}{l}dx \tag{۱۱-۶۳}$$

بنابراین برای هر V_t (یا $u_{\text{۳}}$) مفروض، توان خروجی کل P برابر IV_t است که پس از انتگرال‌گیری به‌صورت زیر درمی‌آید

$$P = \frac{A_\circ p_\circ k u_\circ}{(k-\text{۱})}\left[\text{۱} - \left\{\text{۱} - \frac{B_\circ \sigma}{p_\circ}(u_\circ - u_{\text{۳}})L\right\}^{(k-\text{۱})u_{\text{۳}}/ku_\circ}\right] \tag{۱۱-۶۴}$$

معادلهٔ (۱۱-۶۲) را می‌توان مستقیماً برای $u_{\text{۳}}$ (برای مقدار ثابت $u_\circ$) بهینه کرد.

دربارهٔ این موضوع بیش از این در اینجا بحث نخواهیم کرد، زیرا انتگرال‌گیری معادلات جریان با شرایط اختیاری نسبتاً پیچیده می‌شود.

از دیدگاه کاربردی، تحلیل مولد MHD قدری پیچیده‌تر است. رسانندگی آن، تانسوری است که به جریان هال منجر می‌شود و برحسب دما تغییر می‌کند. اما، اصول جریان کانال یک‌بعدی که در اینجا معرفی شده است، حتی برای دستگاههای پیچیده‌تر یکسان است.

مراجع

1. Chen, F. F., *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2nd ed., Vol. I, Plenum Press, 1984.
2. Cowling, T. G., *Magnetohydrodynamics*, Interscience, 1957.
3. Delcroix, J. L., *Plasma Physics*, John Wiley, 1965.
4. Delcroix, J. L., *Plasma Waves*, Interscience Publisher, 1963.
5. Hughes, W. F., and Young, F. J., *The Electromagnetodynamics of Fluids*, John Wiley, 1966. (Reprinted by Krieger Publishing Co., 1989.)
6. Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 2nd ed., John Wiley, 1975.
7. Jeffrey, A., *Magnetohydrodynamics*, Interscience (John Wiley), Oliver and Boyd, 1966.
8. Kulikovskiy, A. G., and Lyubimov, G. A., *Magnetohydrodynamics* (translated from the Russian), Addison-Wesley, 1965.
9. Landau, L. D., and Lifschitz, E. M., *Electrodynamics of Continuous Media*, Addison-Wesley, 1960.
10. Shercliff, A., *A Text of Magnetohydrodynamics*, Pergamon Press, 1965.
11. Sutton, G. W., and Sherman, A., *Engineering Magnetohydrodynamics*, McGraw-Hill, 1965.

For current research the reader is referred to the following journals: *Journals of Fluid Mechanics* and *Physics of Fluids*.

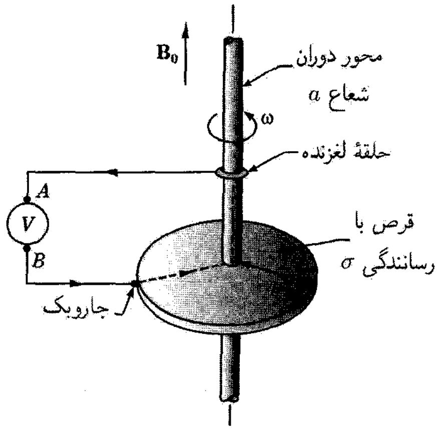
The following publications are also of interest: *The Proceedings of Engineering Aspects of MHD*, published annually, jointly by ASME, IEEE, and AIAA. *The Proceedings of the Beer-Sheva International Seminar on MHD Flows and Turbulence*. Published periodically by AIAA in the series *Progress in Astronautics and Aeronautics*.

مسائل حل‌شده

۱۱-۱ مولد قرصی فاراده را در شکل ۱۱-۱۳ نشان داده‌ایم. قرص نازک رسانایی را در نظر بگیرید که با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω در میدان مغناطیسی یکنواخت و پایای $\mathbf{B}_\circ$ در جهت محوری می‌چرخد. محور کاملاً رسانا (به شعاع a) و محیط قرص با تماسهای حلقهٔ لغزنده به ولتمتری متصل شده است. ولتاژ مدار باز چقدر است؟

چون حرکت پایاست، هیچ جریان تلاطمی وجود ندارد و emf برابر ولتاژ دو سر قطب است. بنابراین

$$V_{AB} = -\int_a^b E_r \cdot dr$$



شکل ۱۱-۱۳

در شرایط مدار باز، $J_r = \circ = \sigma(E_r + r\omega B_\circ)$. از این‌رو

$$V_{AB} = \int_a^b r\omega B_\circ \, dr = \frac{۱}{۲}(b^۲ - a^۲)\omega B_\circ$$

به بیان دیگر،

$$\text{emf} = V_{BA} = \oint \mathbf{V} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

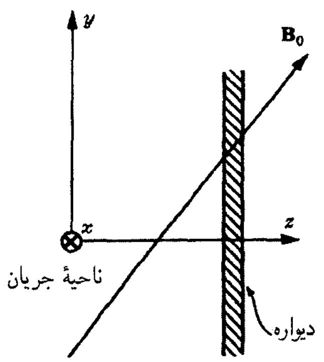
و با انتخاب مسیری از میان انتهاهای ثابت، قرص و محور فقط به سهم $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ در قرص دست می‌یابیم، که در نتیجه

$$V_{AB} = -V_{BA} = \int_a^b (r\omega) B_\circ \, dr = \frac{۱}{۲}(b^۲ - a^۲)\omega B_\circ$$

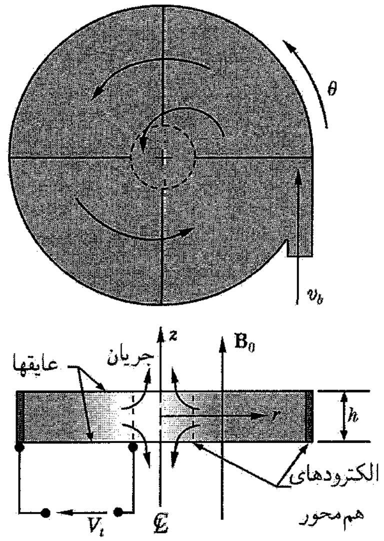
که با نتیجهٔ به‌دست آمده در بالا مطابقت دارد.

۱۱-۲ شرایط مرزی میدان مغناطیسی القاشده در دیوارهٔ کانال جریان چیست؟

جریانی کاملاً توسعه‌یافته را درکانالی مستطیلی با سطح مقطع ثابت در نظر بگیرید. جریان در نزدیکی دیواره مطابق شکل۱۱-۱۴ است. در دیواره که رسانایی کامل است $\sigma = \infty$، میدان الکتریکی مماسی E_y صفر است. همچنین، سرعت شاره در دیواره صفر است. بنابراین در دیواره،



شکل ۱۱-۱۴



شکل ۱۱-۱۵

$J_y = \sigma(E_y + \mathbf{V}\times\mathbf{B}) = \circ$. اما از $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ نتیجه می‌گیریم که $\partial H_x/\partial z = \circ$، که z مؤلفهٔ عمود بر دیواره، و جریان در جهت x است. برای دیوارهٔ عایق، در دیواره $J_z = \circ$، بنابراین $\partial H_x/\partial y = \circ$. از این‌رو، نتیجه می‌گیریم که در دیوارهٔ رسانای کامل

$$\partial H_x/\partial n = \circ$$

و در دیوارهٔ عایق

$$\partial H_x/\partial t = \circ$$

که t و n جهتهای مماسی و عمودی بر دیواره‌اند. هر دو عمود بر جهت x جریان‌اند.

برای هر دیواره با رسانندگی متناهی، رابطه‌های پیچیده‌تری می‌توان به‌دست آورد. برای جزئیات بیشتر به مرجع ۵ مراجعه کنید.

۱۱-۳ مشخصه‌های سر قطب مولد گردابهٔ تراکم‌پذیر موجود در شکل۱۱-۱۵ را محاسبه کنید.

m آهنگ جریان، و v_b سرعت مماسی ورودی است. $B_\circ$ میدان پایای یکنواختی است که در امتداد محور z وارد شده است. از الکترودهای استوانه‌ای حفاظ‌دار استفاده شده است. فرض می‌کنیم که $u \ll v$ (که v مؤلفهٔ θ سرعت و u مؤلفهٔ شعاعی است) و هیچ تغییراتی نسبت به z نداریم و $R_m \ll ۱$ (میدان القاشده ناچیز است). معادلهٔ حرکت به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned}\rho u(\partial v/\partial r + v/r) &= -J_r B_\circ \\ &= -\sigma(E_r + vB_\circ)B_\circ\end{aligned}$$

از رابطهٔ $\nabla \cdot \mathbf{J} = \circ$، داریم $J_r = I/۲\pi rh$ و $m = ۲\pi u\rho rh$، بنابراین معادلهٔ بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{m}{۲\pi rh}\left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r}\right) = -\frac{IB_\circ}{۲\pi rh}$$

پس از انتگرال‌گیری، داریم

$$\frac{v}{v_b} = \frac{b}{r} + \frac{IB_\circ r}{۲mv_b}\left(\frac{b^۲}{r^۲} - ۱\right)$$

V_t از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$V_t = -\int_a^b E_r dr$$

که E_r برحسب I است

$$I = J_r \cdot ۲\pi r h = \sigma(E_r + vB_\circ)۲\pi r h$$

پس از انتگرال‌گیری و قراردادن $I = \circ$، خواهیم داشت

$$V_{t_{oc}} = v_b b B_\circ \ln(b/a)$$

و با قراردادن $V_t = \circ$، به‌دست می‌آوریم

$$I_{sc} = ۲\pi h \sigma v_b b B_\circ \left[۱ - \frac{N}{۲}\left(۱ - \frac{b^۲/a^۲ - ۱}{۲(b/a)^۲ \ln(b/a)}\right)\right]^{-۱}$$

که N پارامتر برهم‌کنش است.

$$N = ۲\pi\sigma B_\circ^۲ b^۲ h/m$$

m عددی منفی است، زیرا جریان به‌طرف داخل است (u منفی است) و r به‌طرف خارج مثبت است.

مسائل تکمیلی

۱۱-۴ در چه شرایطی نیروی حجمی $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ غیرچرخشی است؟

۱۱-۵ اگر $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ غیرچرخشی باشد، دربارهٔ طرح جریان چه می‌توان گفت؟ در جریان تراکم‌ناپذیر دوبعدی، وقتی $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ غیرچرخشی است، نشان دهید که توزیع سرعت دقیقاً با توزیع جریان پتانسیل یکسان است.

۱۱-۶ در مسئلهٔ قبل، برای اینکه جریان پتانسیل باشد محدودیتهای روی $\mathbf{B}_\circ$ کدام‌اند؟ جهت $\mathbf{B}_\circ$ را تعیین کنید.

۱۱-۷ در مسئلهٔ هارتمن، دربارهٔ علامت E_z و I بحث کنید. در شرایط مدار باز آیا $V_{t_{oc}}$ عددی مثبت است یا منفی؟

۱۱-۸ نشان دهید که مسئلهٔ $\partial p/\partial x$ در سرتاسر کانال ثابت است.

۱۱-۹ در مسئلهٔ هارتمن تغییرات فشار را در طول کانال به‌دست آورید ($\partial p/\partial y$ صفر نیست).

۱۱-۱۰ نشان دهید که در جریان دوبعدی، که سرعت و $\mathbf{B}_\circ$ هم‌صفحه‌اند، $\nabla^۲\phi$ متناسب با تنها مؤلفهٔ بردار گردشاری $\nabla \times \mathbf{V}$ است. ϕ پتانسیل الکتریکی است.

۱۱-۱۱ حرکت موشکی را در یون‌سپهر با سرعت $\mathbf{V}_\circ$ در حضور میدانی مغناطیسی در نظر بگیرید. شرط مرزی روی $\mathbf{E}$ نسبت به موشک در بی‌نهایت چیست؟

۱۱-۱۲ نشان دهید اگر برای مایع رسانایی $\epsilon = \epsilon_\circ$ و $\mu = \mu_\circ$، آن‌گاه در هر چارچوب مرجع می‌توان معادلات ساختمندی را به‌صورت $\mathbf{D} = \epsilon_\circ \mathbf{E}$ و $\mathbf{B} = \mu_\circ \mathbf{H}$ نوشت.

۱۱-۱۳ نشان دهید که معادلات پیشین را، تنها اگر به‌جای ϵ و μ به‌ترتیب $\epsilon_\circ$ و $\mu_\circ$ را قرار دهیم، می‌توان در هر چارچوبی نوشت. (اما، در تقریب MHD در هر چارچوبی $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ معتبر است.)

۱۱-۱۴ معادلهٔ پاشندگی را برای موجهای عرضی در شاره‌ای متحرک در جهت انتشار با سرعت $V_\circ$ به‌دست آورید. شاره رساناست و میدانی مغناطیسی وارد شده است.

۱۱-۱۵ چرا در مسئلهٔ هارتمن به معادلهٔ انتقال مغناطیسی نیاز نیست؟ آیا می‌توان با به‌کار بردن آن مسئله را به روش دیگری حل کنید؟

۱۱-۱۶ اگر به‌جای معادلات ماکسول و قانون اهم از معادلهٔ انتقال استفاده می‌شود، مدار الکتریکی خارجی چگونه وارد فرمولبندی می‌شود؟ راهنمایی: چگونگی وابستگی شرایط مرزی میدان القاشده را به مدار الکتریکی خارجی نشان دهید.

۱۱-۱۷ مسئلهٔ MHD را حل کنید (که همان مسئلهٔ هارتمن با صفحهٔ بالایی متحرک است که با سرعت $V_\circ$ در جهت شاره حرکت می‌کند).

۱۱-۱۸ فرض کنید که دیواره‌های عایق بالا و پایین مسئلهٔ هارتمن دارای رسانندگی متناهی است. نشان دهید که این دیواره‌ها درست مثل مقاومتهای خارجی موازی عمل می‌کنند و تغییری در حل مسئله به‌وجود نمی‌آورند.

۱۱-۱۹ چگونه میدان مغناطیسی القاشده در مسئلهٔ بالا تحت‌تأثیر قرار می‌گیرد؟

۱۱-۲۰ آیا چیزی به‌عنوان میدان متحرک وجود دارد؟

۱۱-۲۱ I_{sc} و R_i را برای مولد فارادهٔ مسئلهٔ ۱۱-۱ محاسبه کنید.

۱۱-۲۲ در مسئلهٔ ۱۱-۲، در چه شرایطی H_x در دیوارهٔ کانال صفر است؟

۱۱-۲۳ مولد گردابه را برای میدانی شعاعی به شکل $B_r = B_\circ/r$ حل کنید (مسئلهٔ ۱۱-۳ را ببینید).

۱۱-۲۴ معادلهٔ انرژی مناسب برای مسئلهٔ ۱۱-۲۳ چیست؟ آیا ممکن است با انتگرال‌گیری $T(r)$ به‌دست آید. دربارهٔ $p(r)$ چطور؟ فرض کنید که $V^۲/۲ \gg u^۲/۲$.

نمادگذاری فصل ۱۱

$a =$ سرعت صوتی

$a_s =$ سرعت موج ضربه‌ای

$A =$ سرعت آلفن، مساحت

$\mathbf{B} =$ میدان مغناطیسی آلقاشده

$\mathbf{B}_\circ =$ میدان مغناطیسی واردشده

$c =$ سرعت نور

$c_p =$ گرمای ویژه در فشار ثابت

$\mathbf{D} =$ میدان جابه‌جایی

$\mathbf{E} =$ میدان الکتریکی

$\mathbf{H} =$ میدان مغناطیسی

$\mathscr{I} =$ جریان در واحد طول کانال

$I =$ جریان کل قطعه

$I_{sc} =$ جریان اتصال کوتاه

$\mathbf{J} =$ شار جریان

$k =$ نسبت گرماهای ویژه c_p/c_v؛ ثابت انتشار

$L =$ طول مشخصه

$m =$ آهنگ جریان جرمی

$\mathbf{M} =$ بردار مغناطش

$M =$ عدد هارتمن

$M_m =$ عدد ماخ مغناطیسی

$R_e =$ عدد رینولدز

$N =$ پاراکتر برهم‌کنش

$p =$ فشار

$P =$ توان

$\mathbf{P} =$ بردار قطبش

$P_m =$ عدد پرنتل مغناطیسی

$R_m =$ عدد رینولدز مغناطیسی

$T_{ij} =$ تانسور تنش الکترومغناطیسی

$u =$ مؤلفهٔ x سرعت، انرژی درونی

$v =$ مؤلفهٔ y سرعت

$v_p =$ سرعت فاز

$\mathscr{V} =$ حجم

$\mathbf{V} =$ بردار سرعت

$V_t =$ پتانسیل سرقطب

$V_{t_{oc}} =$ پتانسیل سر قطب مدار باز

$w =$ مؤلفهٔ z سرعت

$\beta =$ $۱/\sqrt{۱ - V^۲/c^۲}$

$\epsilon =$ گذردهی

$\epsilon_۰ =$ گذردهی فضای آزاد

$\zeta =$ ضریب گران‌روی دوم

$\eta =$ پخشیدگی مغناطیسی

$\kappa =$ گذردهی نسبی

$\kappa_m =$ تراوایی مغناطیسی نسبی

$\kappa_T =$ رسانندگی گرمایی

$\mu =$ تراوایی مغناطیسی

$\mu_\circ =$ تراوایی مغناطیسی فضای آزاد

$\mu_f =$ گران‌روی شاره

$\nu =$ گران‌روی جنبشی

$\rho =$ چگالی‌شده

$\rho_e =$ چگالی بار

$\sigma =$ رسانندگی الکتریکی

$\tau =$ تانسور تنش مکانیکی

$\Phi =$ تابع اتلاف

$\phi =$ پتانسیل الکتریکی

$\psi =$ پتانسیل گرانشی

$\omega =$ بسامد

۱۲

شاره‌های نانیوتونی

۱-۱۲ مقدمه

شاره‌هایی وجود دارند که از رابطهٔ سادهٔ بین آهنگ تنش برشی و آهنگ کرنش برشی معادلهٔ (۳-۵۲) برای شارهٔ نیوتونی پیروی نمی‌کنند. این نوع شاره‌ها را به‌طورکلی شاره‌های نانیوتونی می‌نامند. بسیاری از شاره‌های معمولی نانیوتونی هستند. مثالهای این نوع شاره‌ها عبارت‌اند از: رنگها محلول پلیمرهای مختلف، فرآورده‌های غذایی همچون سس سیب و گوجه‌فرنگی، امولسیونهای آب در روغن یا روغن در آب، و تعلیق جامدها و الیاف مختلف در خمیر مایع کاغذ یا دوغاب زغال‌سنگ و گل حفاری که برای حفاری چاه به‌کار می‌رود. علت عدم بررسی شاره‌های نانیوتونی در کتابها و دوره‌های درسی، کاربردی نبودن آنها نیست. هر چند خواص شاره‌های نانیوتونی به‌درد تحلیل عالی و دقیق مربوط به شاره‌های نیوتونی نمی‌خورد، جریان شاره‌های نانیوتونی قطعاً دارای مشخصه‌های جالب، سودمند، و حتی هیجان‌انگیز است. به‌عنوان مثال، در عملیات ترکاندن چاههای نفت، موادی به‌کار می‌رود که، با افزودن آب به آن، شاره‌ای آنچنان غلیظ به‌وجود می‌آید که ماسه، شیشه یا ساچمه‌های فلزی را به‌صورت معلق در می‌آورد. با وجود این، همین شاره را می‌توان با آهنگ فوق‌العاده زیاد از طریق لوله با کمتر از نصف افت اصطکاک مربوط به آب، به‌درون چاه پمپ کرد. در فرایند ترکاندن نمونه‌وار، بیش از ۱۰۰ بشکه (حدود ۱۶۰۰۰ لیتر) را در هر دقیقه از طریق هزاران فوت لولهٔ سه اینچی می‌توان پمپ کرد. (ترکاندن چاههای نفت و گاز فرایندی است که برای افزایش تولید چاه به‌کار می‌رود. برای این کار، ترکی افقی در ناحیهٔ بهره‌برداری ایجاد می‌شود. با پمپ کردن شاره به‌درون چاه با فشار زیاد، این ترک گسترش می‌یابد. ماسه یا ساچمه‌ها به‌عنوان نگه‌دارنده باعث بازماندن شکستگی پس از عملیات می‌شوند. شاره را باید با آهنگی سریع پمپ کرد تا اتلاف ناشی از پخش شاره را در خلل و فرج سنگ شکسته‌شده جبران کند.)

دوغابهای زغال‌سنگ با غلظت حجمی ۸۰٪ زغال‌سنگ خردشده یا گردشده در آب دارای خواص نانیوتونی است و می‌توان آن را تا مسافتهای طولانی، با توانی بسیار کمتر از آب خالص، پمپ کرد.

۱۲-۲ مشخصه‌ها و طبقه‌بندی شاره‌های نانیوتونی

۱۲-۲-۱ کلیات

همان‌گونه که در بخش ۳-۳ بیان شد، تنش برشی τ برای شارهٔ نیوتونی رابطه‌ای خطی با آهنگ برش $\dot{\gamma}$ و گران‌روی μ دارد،

$$\tau = \mu\dot{\gamma} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۱۲\text{-}۱)$$

(که $\dot{\gamma}$ آهنگ کرنش برشی است)[1] ؛ یا برعکس، آهنگ برشی با تنش برشی رابطهٔ خطی دارد،

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu}\tau \qquad (۱۲\text{-}۲)$$

در زیر، شاره‌های نانیوتونی را که در این رابطهٔ خطی صدق نمی‌کنند، در سه گروه کلی بررسی خواهیم کرد:

۱. ساده‌ترین آنها، شارهٔ نانیوتونی مستقل از زمان است که آهنگ برش آن یکتا، اما تابع غیرخطی تنش برشی است.

۲. شاره‌های نانیوتونی تابع زمان رابطه‌های آهنگ کرنش تنش برشی پیچیده‌تری دارند. در این شاره‌ها، آهنگ برش تابع تک مقداری تنش برشی نیست. آهنگ برش به زمان برش یا تاریخچهٔ قبلی آهنگ تنش برشی آن شاره بستگی دارد.

۳. در شاره‌های کشسان گران‌رو، کرنش برشی و همچنین آهنگ کرنش به نحوی با تنش برشی مربوط می‌شوند. برخلاف شارهٔ گران‌روی واقعی که تمام انرژی تغییر شکل آن تلف می‌شود، مقداری از انرژی تغییر شکل شارهٔ کشسان گران‌رو را، همچون در تغییر شکل جامد کشسان، می‌توان بازیابی کرد.

۱۲-۲-۲ شاره‌های مستقل از زمان

برای شارهٔ نانیوتونی مستقل از زمان، داریم

$$\dot{\gamma} = f(\tau) \qquad (۱۲\text{-}۳)$$

شارهٔ نیوتونی حالتی ویژه از شارهٔ بالاست که تابع $f(\tau)$ خطی است و بنابراین در زمرهٔ شارهٔ نانیوتونی کاملاً گران‌رو به‌شمار می‌آید. بیشتر شاره‌های نانیوتونی که با آنها سروکار داریم، احتمالاً در این گروه هستند؛ و در بعضی از حالتها جریان شاره‌ها در این گروه قرار نمی‌گیرند، همچون شاره‌های تابع زمان، که فقط برای حالتهای ساده‌ای مثل جریان پایای درون لوله یا جریانهای کوئت می‌توان آنها را در این گروه تقریب زد.

معمولاً شاره‌های نانیوتونی مستقل از زمان را با سه نوع متمایز، همچون شکل ۱۲-۱، معرفی می‌کنند، که عبارت‌اند از:

۱. پلاستیک بینگهام، منحنی (الف).

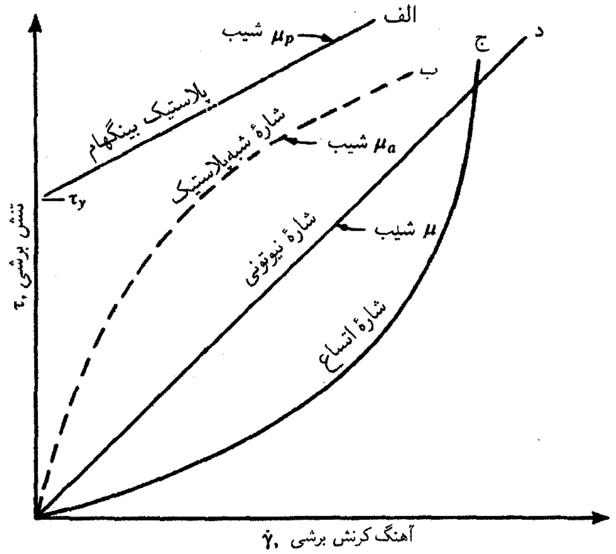
۲. شاره‌های شبه‌پلاستیک، منحنی (ب).

۳. شاره‌های اتساعی، منحنی (ج).

شاره‌های نیوتونی را با خطهای راست، همچون خط (د)، نشان می‌دهند.

---

۱. در فصل ۳ از γ_{ij} برای آهنگ کرنش برشی استفاده کردیم در اینجا γ را برای کرنش برشی و $\dot{\gamma}$ را برای آهنگ کرنش برشی به‌کار می‌بریم، زیرا هر دو جمله را می‌توان در شارهٔ نانیوتونی درنظر گرفت.



شکل ۱۲-۱ رابطه‌های نمونه‌وار بین آهنگ کرنش تنش برشی برای شارهٔ نانیوتونی.

پلاستیکهای بینگهام

پلاستیکهای بینگهام در آهنگ برشی صفر از خود تنش تسلیم نشان می‌دهند، و به‌دنبال آن، رابطهٔ خطی مستقیم بین تنش برشی و آهنگ برشی به وجود می‌آید. مشخصه‌های این شاره‌ها با دو کمیت ثابت تعریف می‌شوند: تنش تسلیم τ_y، که برای شروع جریان به تنشی بیشتر از آن نیاز است، و گران‌روی پلاستیکی μ_p، که شیب قسمت خطی منحنی (الف) در شکل ۱۲-۱ است. معادلهٔ پلاستیک بینگهام به‌صورت زیر است

$$\tau = \tau_y + \mu_p \dot{\gamma} \qquad (۱۲-۴)$$

مفهوم پلاستیک بینگهام با تقریب خوبی شبیه رفتار بسیاری از شاره‌های واقعی همچون دوغابها، پلاستیکها، امولسیونها مثل رنگ و ذرات ریز معلق در مایع هستند. مثال مهمی برای این نوع اخیر گل حفاری است که عمدتاً حاوی خاک رس معلق در آب است.

به‌علت رابطهٔ خطی سادهٔ بین تنش برشی و آهنگ برشی مفهوم پلاستیک بینگهام ابزار بسیار مناسبی برای تحلیل این نوع شاره است.

شاره‌های شبه‌پلاستیک

شاره‌های شبه‌پلاستیک [منحنی (ب) در شکل ۱۲-۱] و همچنین شاره‌های اتساعی [منحنی (ج)] تنش تسلیم ندارند. شارهٔ شبه‌پلاستیک را نیز می‌توان با شیب مستمراً کاهندهٔ منحنی تنش برشی برحسب آهنگ برش مشخص کرد. این شیب به‌صورت گران‌روی ظاهری تعریف می‌شود.

$$\mu_a = \tau / \dot{\gamma} \qquad (۱۲-۵)$$

برای آهنگهای برشی خیلی بالا در شاره‌های واقعی، گران‌روی ظاهری ثابت و برابر μ_∞ می‌شود و نمودار تنش برشی برحسب آهنگ برش خطی خواهد شد.

از رابطه‌های تجربی زیادی برای بیان شاره‌های شبه‌پلاستیک استفاده شده است. ساده‌ترین آنها قانون توانی اسوالد است، که به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\tau = k\dot{\gamma}^n, \qquad n < ۱ \qquad (۱۲-۶)$$

k و n کمیتهای ثابت برای هر شارهٔ خاص‌اند. k معیار غلظت شاره است و نمای n معیار میزان انحراف شاره از شارهٔ نیوتونی است. یادآور می‌شویم که برای شارهٔ نیوتونی $n = ۱$ و $k = \mu$ (گران‌روی شاره).

با تعریف گران‌روی ظاهری به‌صورت زیر

$$\mu_a = \tau/\dot{\gamma} \qquad (۱۲-۷)$$

معادلهٔ (۱۲-۶) به‌شکل زیر در می‌آید

$$\mu_a = k\dot{\gamma}^{(n-1)} \qquad (۱۲-۸)$$

توجه کنید که وقتی آهنگ برش صفر است، گران‌روی ظاهری بی‌نهایت می‌شود. این یکی از چندین اعتراض صورت‌گرفته برعلیه کار برد مدل قانون توانی است. اعتراض دیگر این است که در شاره‌های واقعی در گسترهٔ کلی جریان n ثابت نیست و مشکل دیگر مدل آن است که ثابت k ابعادی دارد که به n بستگی دارند. همان‌گونه که اشاره شد، در آهنگهای خیلی زیاد برشی n به‌سوی ۱ می‌گراید (یعنی، شارهٔ نیوتونی). با وجود این، مدل قانون توانی، به‌علت سادگی و کفایت آن برای تحلیل جریانهایی چون جریان کوئت و جریان درون لوله‌ها و مجراها، کاملاً مناسب است.

معادلات تجربی دیگر که پیشنهاد شده‌اند و جوابگوی بعضی از اعتراضهای مدل قانون توانی هستند، عبارت‌اند از

$$\tau = A\sin^{-1}(\dot{\gamma}/C) \qquad \text{پرنتل} \qquad (۱۲-۹)$$

$$\tau = \dot{\gamma}/B + C\sin(\tau/A) \qquad \text{آیرینگ} \qquad (۱۲-۱۰)$$

$$\tau = A\dot{\gamma} + B\sinh^{-1}C\dot{y} \qquad \text{پاول-آیرینگ} \qquad (۱۲-۱۱)$$

$$\tau = A\dot{\gamma}/(B+\dot{\gamma}) + \mu_\infty\dot{\gamma} \qquad \text{ویلیامسون} \qquad (۱۲-۱۲)$$

که A، B و C بیانگر عددهای ثابت هستند (برای مدلهای مختلف متفاوت‌اند).

چون تحلیل چهار معادلهٔ اخیر بسیار پیچیده‌تر از مدل قانون توانی با قابلیت کاربرد فراوان در مسائل مهندسی است، بررسی بیشتر شاره‌های شبه‌پلاستیک به مدل قانون توانی محدود می‌شود. برای حالتهایی که از مدل قانون توانی برای نمایش شاره کاملاً نمی‌توان استفاده کرد، کاربرد برنامهٔ رایانه‌ای منبعث از خواص واقعی اندازه‌گیری شدهٔ شاره، بسیار مؤثرتر از توسل به رابطه‌های تجربی دیگر خواهد بود.

شاره‌های اتساعی

شاره‌های اتساعی به‌علت نداشتن تنش تسلیم شبیه شاره‌های شبه‌پلاستیک‌اند. تفاوت آنها با شاره‌های شبه‌پلاستیک این است که گران‌روی ظاهری آنها با افزایش آهنگ برش افزایش می‌یابد. این نوع شاره‌ها بسیار نامتداول‌تر از شاره‌های شبه‌پلاستیک‌اند. در مقایسه با شاره‌های شبه‌پلاستیک، آنها را می‌توان با مدل قانون توانی نشان داد، با این تفاوت که نمای n بزرگتر از یک است.

شاره‌های قانون توانی را می‌توان به‌سادگی با نمودار لگاریتم تنش برشی برحسب لگاریتم آهنگ برش، مطابق شکل ۱۲-۲، نشان داد. با لگاریتم گرفتن از هر دو طرف معادلهٔ (۱۲-۶)، داریم

$$\log\tau = \log k + n\log\dot{\gamma} \qquad (۱۲-۱۳)$$

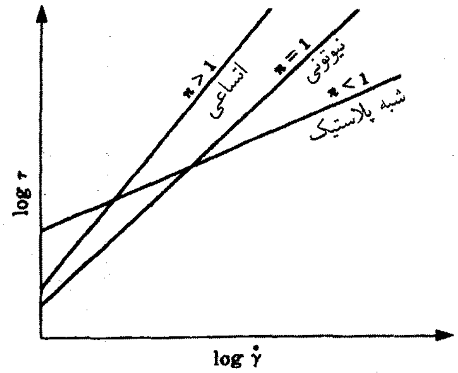
که معادلهٔ خط مستقیمی است که شیب آن n و محل تقاطع آن تا محور xها $\log\dot{\gamma} = 0$ یا $\dot{\gamma} = 1$ مقدار ثابت سازگاری $\log k$ را به‌دست می‌دهد. شارهٔ نیوتونی، $n = 1$، حالت خاص شارهٔ قانون توانی است.

۱۲-۲-۳ شاره‌های تابع زمان

بعضی از شاره‌ها بسیار پیچیده‌تر از شاره‌های بالا هستند و گران‌روی ظاهری آنها نه تنها به آهنگ برش، بلکه به زمان اعمال نیروی برش بستگی دارد. این شاره‌ها به دو گروه کلی تقسیم می‌شوند:

۱. شاره‌های روانش‌گرا

۲. شاره‌های چالش‌گرا



شکل ۱۲-۲ نمودار لگاریتمی شاره‌های قانون توانی.

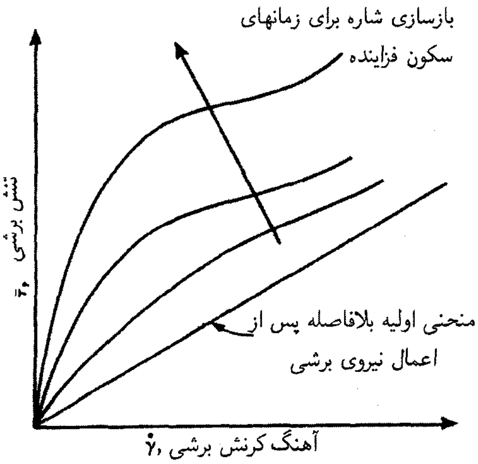
با اعمال نیروی برشی به‌شاره، تنش برشی برحسب زمان در شاره‌های روانش‌گرا کاهش، و در شاره‌های چگالش‌گرا افزایش می‌یابد. مثال معمولی شارهٔ روانش‌گرا جوهر چاپ است که قبل از اینکه روی صفحهٔ اصلی به‌کار رود می‌توان روی چندصفحهٔ نمونه آن را امتحان کرد.

شاره‌های روانش‌گرا

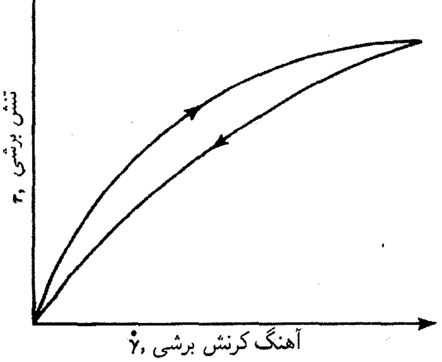
غلظت یا گران‌روی ظاهری شاره‌های روانش‌گرا به‌طول زمان اعمال نیروی برشی و همچنین آهنگ نیروی برشی بستگی دارد. با اعمال نیروی برشی به شارهٔ ساکن، شاره (در مقیاس مولکولی) فرو می‌ریزد، اما سپس بازسازی ساختاری آن برحسب زمان افزایش می‌یابد. شاره، سرانجام، زمانی به حالت تعادلی خود می‌رسد که آهنگ فروریزش برابر آهنگ بازسازی بشود. اگر شاره به‌حال خود رها شود، شاره به آهستگی حالت قبلی خود را باز می‌یابد و سرانجام غلظت اولیهٔ خود را به‌دست خواهد آورد. بنابراین، روانش‌گرایی فرایندی برگشت‌پذیر است.

شکل ۱۲-۳ نمودار تنش برحسب آهنگ کرنش را برای شاره‌ای روانش گرا بلافاصله پس‌از اعمال نیروی برشی و پس از ساکن شدن شاره در زمانهای گوناگون نشان می‌دهد. منحنی اولیه را در شکل ۱۲-۳ به‌صورت نیوتونی نشان داده‌ایم، اما می‌تواند کاملاً نانیوتونی باشد.

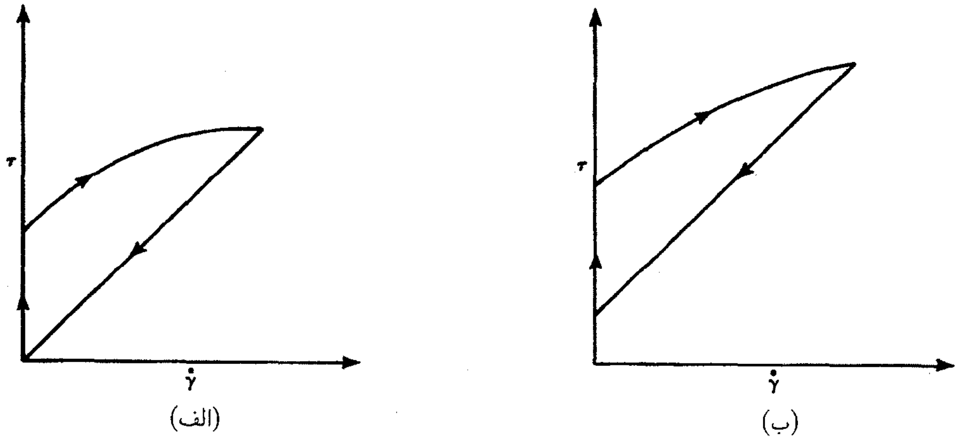
اگر شاره روانش‌گرایی را با آهنگی دائماً فزاینده و سپس با آهنگی دائماً کاهنده تحت نیروی برشی قرار دهیم، منحنی‌ای شبیه حلقهٔ پسماند به‌وجود می‌آید. شکل ۱۲-۴ چنین منحنی‌ای را برای نوعی شبه‌پلاستیک شارهٔ روانش‌گرا نشان می‌دهد. با کاهش نیروی برشی، گران‌روی ظاهری کمتر از حالت افزایش نیروی برشی می‌شود.



شکل ۱۲-۳ شاره روانش‌گرا که در زمانهای متفاوت تحت نیروی برشی قرار گرفته است.



شکل ۱۲-۴ حلقه‌های پسماند برای شارهٔ روانش‌گرا.



شکل ۱۲-۵ (الف) پلاستیک. بینگهام روانش‌گرای واقعی، (ب) رفتار جسم کاذب.

بعضی از مواد پلاستیکی بینگهام رفتار روانش‌گرا دارند، اما اگر تنش کاملاً زیاد باشد، فرو می‌ریزند، و قبل از بازیابی ساختار خود، شبیه مایعات واقعی رفتار خواهند کرد. این رفتار را در شکل ۱۲-۵ (الف) نشان داده‌ایم. اما، بعضی از مواد معروف به جسمهای کاذب حتی پس از اعمال نیروی برشی از خود تنش تسلیم نشان می‌دهند، هرچند مقدار تنش تسلیم مطابق شکل ۱۲-۵ (ب) کم باشد. معمولاً به زمانی طولانی برای دست‌یابی دوبارهٔ جسم کاذب به استحکام تسلیم اولیهٔ خود نیاز است.

شاره‌های چگالش‌گرا

ساختار مولکولی شاره‌های چگالش‌گرا با نیروی برشی تشکیل می‌شود و رفتار آنها مخالف رفتار شاره‌های روانش‌گراست. مثال سادهٔ تشکیل ساختار از طریق نیروی برشی، به‌هم‌زدن و سفت‌شدن سفیدهٔ تخم‌مرغ است. هرچند سفیدهٔ تخم‌مرغ احتمالاً شارهٔ چگالش‌گرای واقعی‌ای نیست. بسیاری از مواد خاصیت چگالش‌گرایی خود را با آهنگهای برشی فوق‌العاده زیاد از دست می‌دهند و ممکن است حتی رفتار شارهٔ روانش‌گرا را پیدا کنند.

۱۲-۲-۴ شاره‌های کشسان گران‌رو

مادهٔ کشسان گران‌رو دارای هر دو خاصیت کشسانی و گران‌روی است. ساده‌ترین نوع چنین ماده‌ای دارای گران‌روی نیوتونی و کشسانی قانون هوک است. می‌توان نوشت،

$$\dot{\gamma} = \tau/\mu_\circ + \dot{\tau}/\lambda \qquad (۱۲\text{-}۱۴)$$

که λ ضریب سخت‌یابی است. در شرایط پایا، $\dot{\gamma} = \dfrac{\tau}{\mu_\circ}$ و شاره شبیه شارهٔ نیوتونی ساده‌ای رفتار می‌کند. اما، اگر تنش برشی تغییر کند، اثر کشسانی ظاهر می‌شود.

ماکسول اولین بار معادلهٔ (۱۲-۱۴) را به‌صورت زیر بیان کرد

$$\tau + (\mu_\circ/\lambda)\dot{\tau} = \mu_\circ \dot{\gamma} \qquad (۱۲\text{-}۱۵)$$

مایعاتی را که در این قانون صدق می‌کنند، مایعات ماکسول می‌گویند. ثابت $(\mu_\circ/\lambda)^{-1}$ را زمان واهش می‌نامند و به‌بیان فیزیکی ثابت زمانی برای فروافت نمایی تنش در کرنش ثابت است. اگر حرکت متوقف شود، تنش به‌صورت $e^{-t\lambda/\mu_\circ}$ واهلیده می‌شود.

مدلهای نسبتاً پیچیده‌تر مواد کشسان گران‌رو به‌وجود آمده‌اند که دارای مشتقهای زمانی مرتبهٔ بالاتر τ و γ هستند. برای فرایندهای متغیر زمانی، ممکن است تابعهای مختلط بسامد باشند. و یلکینسون [۱۰] مقدمه‌ای بسیار خواندنی دربارهٔ این مدلها ارائه کرده است.

۱۲-۳ جریان لایه‌ای درون لوله‌ها

۱۲-۳-۱ شاره‌های قانون توانی

برای بیان کامل کاربرد مدل قانون توانی، معادلات نیمرخ سرعت و افت فشار را برحسب آهنگ جریان برای جریان لایه‌ای کاملاً توسعه‌یافته، که تابع مدل قانون توانی است، در لوله به‌دست می‌آوریم.

معادلهٔ تنش برشی برای جریان یک‌بعدی پایا در مختصات استوانه‌ای (که صرفاً معادلهٔ حرکت پایا برای جریان کاملاً توسعه‌یافته است) عبارت است از

$$\frac{d}{dr}(r\tau) = r\left(\frac{dp}{dz}\right) \tag{۱۲-۱۶}$$

که پس از انتگرال‌گیری در لوله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\tau = \frac{r}{۲}\left(\frac{dp}{dz}\right) \tag{۱۲-۱۷}$$

که تنش برشی τ وقتی مثبت تعریف می‌شود که در جهت پایین‌دست جریان برروی سطح جزء استوانه‌ای عمل کند و $\frac{dp}{dz}$، همچون شکل ۱۲-۶، گرادیان فشار پایین‌دست جریان است.

برای هر شارهٔ قانون توانی، معادلهٔ چگالش‌گرا به‌صورت زیر است.

$$\tau = -k\left(-\frac{du}{dr}\right)^n \tag{۱۲-۱۸ الف}$$

معادلهٔ (۱۲-۱۸ الف) قدری ناجور است و به‌طورکلی τ را می‌توان برای شارهٔ قانون توانی (با نیمرخ سرعت یک‌بعدی) به‌صورت زیر بیان کرد

$$\tau = k\epsilon\left|\frac{du}{dy}\right|^n$$

که ϵ ضریب علامت است و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

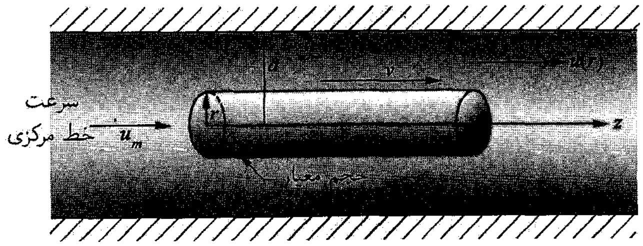
$$\epsilon = \frac{du/dy}{|du/dy|}$$

بنابراین

$$\tau = k\left|\frac{du}{dy}\right|^{(n-۱)}\frac{du}{dy} \tag{۱۲-۱۸ب}$$

در نتیجه، جملهٔ $k\left|\frac{du}{dy}\right|^{(n-۱)}$ نقش گران‌روی ظاهری را بازی می‌کند. اکنون، معادلهٔ (۱۲-۱۷) را می‌توان به‌طور صریح به شکل زیر نوشت (اگر فرض کنیم که $\frac{du}{dy}$ منفی است، متناظر با بودن جریان در جهت مثبت z خواهد بود).

$$k\left(-\frac{du}{dr}\right)^n = -\frac{r}{۲}\left(\frac{dp}{dz}\right) \tag{۱۲-۱۹}$$



شکل ۱۲-۶ جریان یک‌بعدی درون لوله.

یا با استفاده از نماد $G=-\dfrac{dp}{dz}$ و ترانش معادلهٔ (۱۲-۱۹)، داریم[1]

$$-\frac{du}{dr}=\left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n} r^{1/n} \tag{۱۲-۲۰}$$

پس از انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۱۲-۲۰)، داریم

$$\int_u^0 -du=\int_r^a \left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n} r^{1/n}dr \tag{۱۲-۲۱}$$

و

$$u=\frac{n}{n+1}\left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n}(a^{(n+1)/n}-r^{(n+1)/n}) \tag{۱۲-۲۲}$$

جریان کلی عبارت است از

$$Q=\int_0^a 2\pi ur\ dr \tag{۱۲-۲۳}$$

با نشاندن معادلهٔ (۱۲-۲۲) در معادلهٔ (۱۲-۲۳) و انتگرال‌گیری، خواهیم داشت

$$Q=\frac{n\pi}{(3n+1)}\left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n} a^{(3n+1)/n} \tag{۱۲-۲۴}$$

سرعت میانگین عبارت است از $V=\dfrac{Q}{\pi a^2}$ که نتیجه می‌دهد

$$V=\frac{n}{(3n+1)}\left(\frac{G}{2k}\right)^{1/n} a^{(n+1)/n} \tag{۱۲-۲۵}$$

با شرط $G=\dfrac{(\Delta p)}{L}$ برای جریان لوله (L طول لوله، Δp افت فشار و $D=2a$ قطر لوله است) معادلهٔ (۱۲-۲۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{2(3n+1)}{n}\frac{V}{D}=k^{-1}\left(\frac{D\Delta p}{4L}\right)^{1/n} \tag{۱۲-۲۶}$$

در شارهٔ نیوتونی ($k=\mu, n=1$)، معادلهٔ (۱۲-۲۶) به معادلهٔ آشنای جریان پوازوی تبدیل می‌شود

$$\frac{8V}{D}=\frac{D\Delta p}{4\mu L} \tag{۱۲-۲۷}$$

با نشاندن $(G/2k)^{1/n}$ از معادلهٔ (۱۲-۲۵) در معادلهٔ (۱۲-۲۲)، نیمرخ سرعت برحسب سرعت میانگین زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{u}{V}=\left(\frac{3n+1}{n+1}\right)\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^{(n+1)/n}\right] \tag{۱۲-۲۸}$$

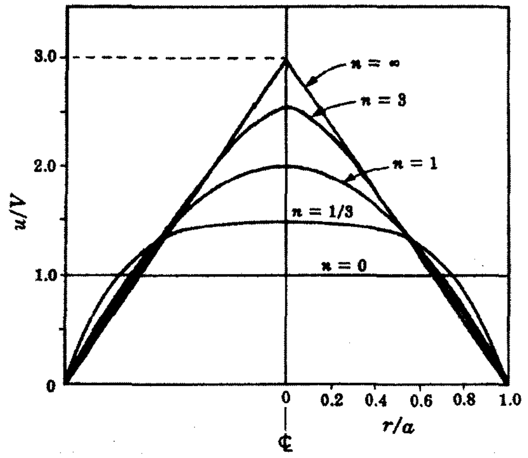
شکل ۱۲-۷ نیمرخهای سرعت به‌دست آمده از معادلهٔ (۱۲-۲۸) را برای مقدارهای مختلف n نشان می‌دهد.

هر چه مقدار n کمتر باشد، نیمرخ سرعت پهن‌تر می‌شود و سرانجام جریان در مقدارهای بسیار کم n به شکل درپوش در می‌آید و فقط شارهٔ مجاور دیواره‌های لوله تحت برش قرار می‌گیرد، به‌گونه‌ای که نیمرخ سرعت تقریباً غیرقابل تمایز از نیمرخ پلاستیک بینگهام خواهد شد (شکل ۱۲-۸ را ببینید).

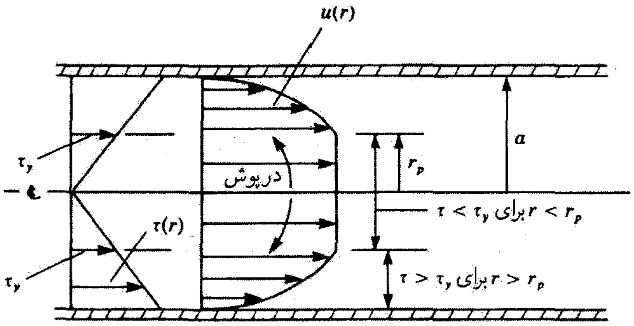
در بعضی از حالتها شاره را می‌توان به‌صورت پلاستیک بینگهام یا شارهٔ قانون توانی تلقی کرد. این حالت دربارهٔ گِلهای حفاری خاص صدق می‌کند.

---

۱. G را در زیر عددی مثبت درنظر می‌گیرند. جریان در جهت مثبت z مثبت، و مقدار $\dfrac{dp}{dz}$ در جهت جریان مثبت منفی (و G مثبت) خواهد بود.



شکل ۱۲-۷ نیمرخهای سرعت در لولهٔ گرد برای شارهٔ قانون توانی و مقدارهای مختلف n.



شکل ۱۲-۸ جریان شارهٔ بینگهام در لولهٔ گرد.

۱۲-۳-۲ پلاستیکهای بینگهام

برای جریان لایه‌ای پلاستیک بینگهام باید، معادلهٔ تنش برشی را در معادلهٔ (۱۲-۷) نشاند

$$\tau = \tau_y + \mu_p \dot{\gamma} \tag{۱۲-۲۹}$$

که $\tau_y < \tau$. اگر τ کمتر از τ_y باشد، آن‌گاه $\dot{\gamma} = ۰$ و شاره مطابق شکل ۱۲-۸ مانند درپوشی به شعاع r_p حرکت می‌کند. برای جریان درون لوله‌ای به شعاع a، برای $r_p < r < a$؛ داریم

$$\tau = \frac{۱}{۲} rG = \tau_y - \mu_p \frac{du}{dr} \tag{۱۲-۳۰}$$

و برای $r < r_p$، $\dfrac{du}{dr} = ۰$. در $r = r_p$، $du/dr = ۰$ و خواهیم داشت

$$r_p = ۲\tau_y / G \tag{۱۲-۳۱}$$

با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۱۲-۳۰) برای سرعت، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\int_۰^u du = \frac{۱}{\mu_p} \int_a^r \left(\tau_y - \frac{۱}{۲} rG\right) dr \tag{۱۲-۳۲}$$

برای $r_p < r < a$، داریم

$$u = \frac{G}{4\mu_p}(a^2 - r^2) - \frac{\tau_y}{\mu_p}(a - r) \tag{۳۳-۱۲}$$

با فرض $r = r_p = \frac{2\tau_y}{G}$، معادلهٔ (۱۲-۳۳) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$u_p = \frac{\tau_y^2}{\mu_p G}(a/r_p - 1)^2, \qquad r_p > r > 0 \tag{۳۴-۱۲}$$

آهنگ جریان حاصل از انتگرال‌گیری سرعت در سطح مقطع کل لوله عبارت است از

$$Q = \frac{\pi a^4 G}{8\mu_p}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{2\tau_y}{aG}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2\tau_y}{aG}\right)^4\right] \tag{۳۵-۱۲}$$

که با $\tau_y = 0$ به رابطهٔ سادهٔ پوازوی تبدیل می‌شود. معادلهٔ بالا مشهور به معادلهٔ بوکینگهام است، که گرادیان فشار $G = \left(\frac{\Delta p}{L}\right)$ را به‌صورت تابع ضمنی به‌دست می‌دهد.

۱۲-۴ روش تعمیم‌یافته برای جریان درون لوله

۱۲-۴-۱ عدد رینولدز و ضریب اصطکاک تعمیم‌یافته برای شاره‌های شبه‌پلاستیک

متزنر و رید [۵] روشی را پیشنهاد کرده‌اند که عدد رینولدز تعمیم‌یافته‌ای را تعریف می‌کند. به کمک این عدد رینولدز تعمیم‌یافته می‌توان ضریبهای اصطکاک را برای هر دو جریان لایه‌ای و متلاطم مستقل از زمان به‌دست آورد.

همچون حالت شارهٔ نیوتونی، عدد رینولدز تعمیم‌یافته را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد

$$Re' = \frac{8\rho V^2}{\tau_{\circ L}} \tag{۳۶-۱۲}$$

که $\tau_{\circ L}$ تنش برشی دیوارهٔ متناظر با جریان لایه‌ای، و V سرعت میانگین است.

با تعریف ضریب اصطکاک فنینگ [۱] در جریان لایه‌ای به‌صورت زیر

$$f = \frac{2\tau_\circ}{\rho V^2} \tag{۳۷-۱۲}$$

رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$f = \frac{16}{Re'} \tag{۳۸-۱۲}$$

که رابطه‌ای بین ضریب اصطکاک و عدد رینولدز در شاره‌های نیوتونی است.

گام بعدی در این روش، استفاده از اندازه‌گیریهای انجام‌شده در لوله‌های موئین یا وسایل دیگر برای تعیین ثابتهای چگالش‌گرایی است که می‌توان از آنها در محاسبهٔ عدد رینولدز تعمیم‌یافته استفاده کرد.

پس از اندازه‌گیری افت فشار Δp و سرعت میانگین V، دو ثابت را برای شاره با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنند

$$\frac{\Delta p}{4L} = \tau_\circ = K'(8V/D)^{n'} \tag{۳۹-۱۲}$$

۱. ضریب اصطکاک فَنینگ با ضریب اصطکاک دارسی (در فصلهای ۴ و ۵) که قبلاً به‌کار رفت، در ضریب ۴ تفاوت دارد. (f فَنینگ)$\times 4 = $ (f دارسی).

که k' شاخص غلظت و n' شاخص رفتار جریان است. $۸V/D$ آهنگ برش دیواره برای جریان پوازوی شارهٔ نیوتونی است. n' را می‌توان از روی شیب تانژانت منحنی $\log \tau_۰$ نسبت به $\log\left(\frac{۸V}{D}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$n' = \frac{d(\log \tau_۰)}{d(\log ۸V/D)} \tag{۱۲-۴۰}$$

معادلهٔ (۱۲-۳۹) بر پایهٔ رابطهٔ مونی برای آهنگ برش دیواره در دیوارهٔ لوله استوار است

$$-\left(\frac{du}{dr}\right)_w = \left(\frac{۳n'+۱}{۴n'}\right)\left(\frac{۸V}{D}\right) \tag{۱۲-۴۱}$$

معادلات (۱۲-۳۹)، (۱۲-۴۰) و (۱۲-۴۱) را می‌توان در شاره‌های دیگر، افزون بر شاره‌های قانون توانی استفاده کرد (یعنی، n' و k' الزاماً ثابت نیستند). برای حالت خاص شاره‌های قانون توانی، $n = n'$ و داریم

$$K' = k\left(\frac{۳n+۱}{n}\right)^n \tag{۱۲-۴۲}$$

با نشاندن $\tau_۰$ از معادلهٔ (۱۲-۳۹) در معادلهٔ (۱۲-۳۶) رابطهٔ زیر برای محاسبهٔ عدد رینولدز تعمیم‌یافته به‌دست می‌آید

$$Re' = \frac{D^{n'}V^{(۲-n')}\rho}{K'(۸)^{(n'-۱)}} \tag{۱۲-۴۳}$$

در شارهٔ نیوتونی $n' = ۱$ و $Re' = \rho VD/K'$، بنابراین $K' = \mu$ گران‌روی است.

۱۲-۴-۲ جریان متلاطم

دوج و متزنر [۲] رابطه‌ای مبتنی بر فرمول مقاومت لگاریتمی فون‌کارمن برای شاره‌های نیوتونی به‌وجود آوردند که ضریب اصطکاک را به عدد رینولدز تعمیم‌یافته Re' مرتبط می‌کرد. دوج و متزنر معادله‌ای شبیهٔ این معادله برای شارهٔ قانون توانی که در لوله‌های صاف جریان دارد، به‌صورت زیر ارائه کردند.

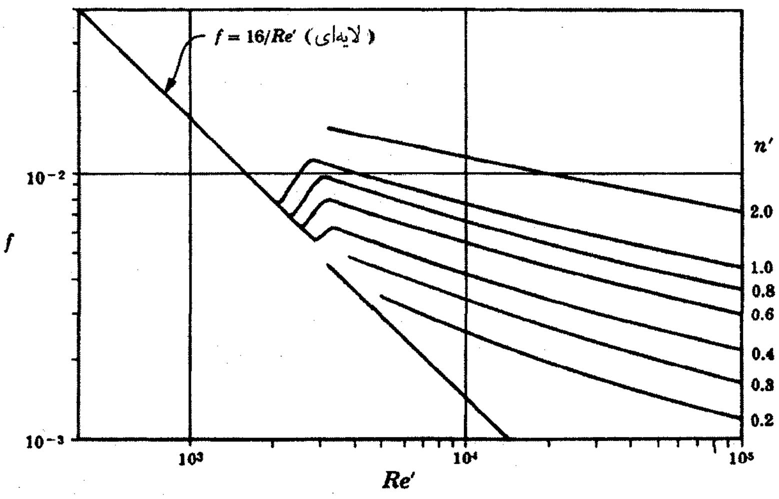
$$\frac{۱}{f} = \frac{۴٫۰}{(n')^{۰٫۷۵}}\log_{۱۰}[Re' f^{۱-n'/۲}] - \frac{۰٫۴}{(n')^{۱٫۲}} \tag{۱۲-۴۴}$$

شکل ۱۲-۹ نمودار این معادله است که مقدار ضریب اصطکاک f را به‌طور صریح به‌دست نمی‌دهد.

داده‌های دوج و متزنر نشان می‌دهد که عدد رینولدز تعمیم‌یافتهٔ بحرانی متناظر با شروع تلاطم با کاهش مقدار شاخصهای رفتار جریان n' افزایش می‌یابد و عدد رینولدز تعمیم‌یافتهٔ بحرانی Re' از ۲۱۰۰ در $n' = ۱$ به ۳۱۰۰ در $n' = ۰٫۳۸$ افزایش خواهد یافت اما، هیچ معیار دقیقی برای عدد رینولدز بحرانی تعریف نشده است.

۱۲-۴-۳ جریان بی‌هنجار (متلاطم) شاره‌های نانیوتونی

هر چند تعداد زیادی از شاره‌های نانیوتونی وجود دارند که ملاکهای شارهٔ متلاطم تعمیم‌یافتهٔ متزنر در آنها صدق می‌کند، اما محلولهای حاوی ترکیبات آلی خاص با وزن مولکولی بالا یافت می‌شوند که ضریب اصطکاک آنها بسیار کمتر از مقدار پیش‌بینی‌شده توسط معادلهٔ (۱۲-۴۴) برای جریان متلاطم است. به‌جای افقی‌شدن ضریب اصطکاک پس از رسیدن به عدد رینولدز تعمیم‌یافتهٔ بحرانی، ضریب اصطکاک تقریباً با همان شدت منحنی جریان لایه‌ای به کاهش خود ادامه می‌دهد و بیانگر این نکته است که یا تلاطم فرو نشسته است یا شروع تلاطم به تأخیر افتاده است. این روند برای شاره‌های خاص تا آنجا ادامه می‌یابد که ضریبهای اصطکاک به‌مقداری می‌رسند که از مرتبهٔ بزرگی کمتری نسبت به آب خالص برخوردارند.



شکل ۱۲-۹ ضریب اصطکاک فنینگ f برحسب عدد رینولدز Re'، معادلهٔ (۱۲-۴۴).

شیرهٔ گیاه مجرایی و پلیمرهای (خاصی) که برای کاهش اصطکاک در شاره‌های پمپ‌کننده به‌کار می‌روند، دارای این مشخصه‌هایند. یکی از کاربردهای این شاره‌ها در عملیات چاههای نفت است که مقدار بسیار زیادی شاره در مدت زمان خیلی کوتاهی به درون چاه پمپ می‌شود. متأسفانه، یکی از عیبهای این ترکیبات با وزن مولکولی بالا، پذیرفتاری آنها نسبت به افت انرژی فیزیکی است (یعنی شکستن مولکولهای خیلی بزرگ به علت آهنگهای برشی زیاد شاره)، به‌گونه‌ای که وقتی دوباره از شاره استفاده می‌کنیم، خواص کاهندهٔ اصطکاک مطلوب آنها از بین می‌رود.

دوغاب جامدات در آب نیز، که فاز جامد آنها به‌خوبی در آب پخش نمی‌شود، ضریب اصطکاک کمتری در جریان متلاطم در مقایسه با ضریب اصطکاک آب درون لوله‌ها ایجاد می‌کنند. در دیوارهٔ لوله‌ها، آب یا فاز مایع از فاز جامد جدا می‌شود و لایه‌ای با گران‌روی پایین به‌وجود می‌آورد. هستهٔ صلب‌تر دوغاب به شکل درپوش در لوله حرکت می‌کند. به‌علت کاهش انتقال نکانهٔ متلاطم از لایهٔ مرزی به این هسته، لایهٔ مرزی لایه‌ای در حقیقت ضخیمتر است و ضریب اصطکاک آن کمتر از ضریب اصطکاک آب خالص است. ضریب اصطکاک دوغاب بسیار غلیظ زغال‌سنگ بسیارکمتر از آب است، ضریب اصطکاک جریان متلاطم خمیرکاغذ در آب نیز، با افزایش غلظت خمیر، کمتر از ضریب اصطکاک آب می‌شود.

مراجع

1. Coleman, B. D., Markovitz, H., and Noll, W., *Viscometric Flow of Non-Newtonian Fluids*, Springer-Verlag, 1966.
2. Dodge, D. W., and Metzner, A. B., "Turbulent Flow of Non-Newtonian Systems," *A.I.Ch.E Journal*, 5, pp. 189–204, 1959.
3. Fredricson, A. G., and Bird, R. Byron, "Non-Newtonian Flow in Annuli," *Industrial and Engineering Chemistry*, 50, No. 3, pp. 347–352, March 1958.
4. Larson, R. G., *Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions*, Butterworth, 1987.
5. Metzner, A. B., and Reed, J. C., "Flow of Non-Newtonian Fluids—Correlation of the Laminar Transition and Turbulent-flow Regions," *A.I.Ch.E. Journal*, 1, pp. 434–440, 1955.
6. Savins, J. G., "Generalized Newtonian (Pseudoplastic) Flow in Stationary Pipes and Annuli," *Petroleum Transactions, A.I.M.E.*, 213, pp. 325–332, 1958.
7. Showalter, W. R., *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*, Pergamon Press, 1978.
8. Streeter, V. L. (Editor), *Handbook of Fluid Dynamics*, Chapter 7, by A. B. Metzner, McGraw-Hill, 1961.
9. Vaughn, R. D., and Bergman, D., "Laminar Flow of Non-Newtonian Fluids in Concentric Annuli," *Industrial and Engineering Chemistry—Process Design and Development*, 5, No. 1, pp. 44–47, 1966.
10. Wilkinson, W. L., *Non-Newtonian Fluids*, Pergamon Press, 1960.

مسائل حل‌شده

۱-۱۲ دوغاب گِل با $K' = ۱٫۶۹۳$ (یکاهای K' عبارت‌اند از lb، ft، s، توان به n' بستگی دارد) و $n' = ۵۸۱$ باید به آهنگ ۱۱۵۰ گالن در دقیقه از درون لولهٔ ۳٫۸۲۶ اینچی پمپ شود. افت فشار را در لوله به‌دست آورید.

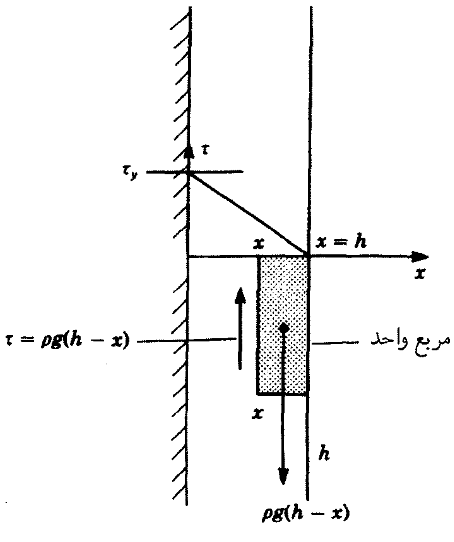
۱۱۵۰ گالن در دقیقه معادل $۲٫۵۶\text{ft}^۳/\text{s}$ است. سطح لوله $۰٫۰۷۹۸\ \text{ft}^۲$ است و در نتیجه سرعت شاره‌ها ۳۲ft/s می‌شود. از معادلهٔ (۱۲-۴۳) عدد رینولدز اصلاح شده برابر $R'_e = ۱۹۹۰۰$ است که در ناحیهٔ متلاطم قرار دارد. از معادلهٔ (۱۲-۴۴) ضریب اصطکاک فنینگ برابر ۰٫۰۰۴۴۲ به‌دست می‌آید. این مقدار f را نمی‌توان به‌طور مستقیم از معادلهٔ (۱۲-۴۴) به‌دست آورد اما آن را می‌توان به‌آسانی با فرض مقدار آزمونی برای f در جملهٔ $\log_{۱۰}(R'_e f^{۱-n'/۲})$ یافت. سپس معادلهٔ (۱۲-۴۴) را برای مقدار جدید f حل می‌کنیم و همین مقدار را دوباره در معادلهٔ (۱۲-۴۴) قرار می‌دهیم. این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا اختلاف دو f متوالی در حد قابل‌قبول بشود. f را از شکل ۱۲-۹ نیز می‌توان یافت. گرادیان فشار $\Delta p/L$ را از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم

$$\tau_۰ = \frac{D\Delta p}{۴L} = \frac{f\rho V^۲}{۲}$$

که نتیجه عبارت است از $(\Delta p)/L = ۰٫۳۹۶\ \text{psi/ft}$.

۲-۱۲ رنگ را می‌توان با پلاستیک بینگهام تقریب زد. رنگی را با تنش تسلیم τ_y و گران‌روی پلاستیکی μ_p برای دیواره به‌کار می‌بریم. ضخامت بیشینهٔ h رنگ چقدر باید باشد تا رنگ به دیوارهٔ لوله بچسبد و جاری نشود؟

با توجه به شکل ۱۲-۱۰، لایه‌های رنگ آن‌قدر روی هم قرار می‌گیرند که وزن آنها تنش برشی‌ای بیشتر از $\tau_۰$ در دیواره به‌وجود آورد. این نقطه‌ای است که رنگ، با گذشتن از ضخامت بحرانی خود، شروع به جاری شدن می‌کند. با درنظرگرفتن تعادل مربع واحد ضخامت رنگ $(h-x)$، وزن با نیروی برشی خنثی می‌شود. در نتیجه τ به‌طور خطی از صفر در روی سطح تا ρgh در دیواره تغییر می‌کند. ضخامت بیشینه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید $(\rho g h_{\max}) = \tau_y$ و در نتیجه $h_{\max} = \tau_y/\rho g$.



شکل ۱۲-۱۰

مسائل تکمیلی

۱۲-۳ اندازه‌گیریهای شاره با لولهٔ موئین رئومتر نشان داده است که تغییرات $\log \tau_\circ$ برحسب $\log\left(\frac{\lambda V}{D}\right)$ بین $\frac{\lambda V}{D} = \lambda\lambda \mathrm{s}^{-1}$ و $\Delta\mathfrak{F}\circ\circ \mathrm{s}^{-1}$ متناظر با تغییر $\tau_\circ$ از ۱٫۲ = $\tau_\circ$ تا ۲٫۵۰ = $\tau_\circ$ به‌صورت خط مستقیم است. افت فشار جریان برای شارهٔ جاری از میان لوله‌ای ۳٫۸۲۰ اینچی با آهنگ جریان حجمی $\mathfrak{F}\circ\circ \mathrm{gal/min}$ چقدر است؟ جریان لایه‌ای است یا متلاطم؟

۱۲-۴ نشان دهید که نیمرخ سرعت شارهٔ قانون توانی که بین دوصفحهٔ موازی جریان دارد، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$u = \frac{n}{1+n}\left(\frac{G}{k}\right)^{1/n}\left[h^{(n+1)/n} - y^{(n+1)/n}\right]$$

که h نیم پهنای کانال و y فاصلهٔ مختصاتی از خط مرکزی است.

۱۲-۵ نیمرخ سرعت جریان پلاستیک بینگهام را بین دو صفحهٔ موازی ساکن به‌دست آورید.

۱۲-۶ از یاتاقان کشویی پله‌ای (مسئلهٔ ۵-۱۱ را ببینید) همراه با پلاستیک بینگهام استفاده می‌شود. حرکت شاره را، هنگامی که سرعت یاتاقان افزایش می‌یابد، بیان کنید.

۱۲-۷ در یاتاقان محوری هیدروستاتیکی مسئلهٔ ۵-۱۳ از پلاستیک بینگهام به‌عنوان روان‌ساز استفاده می‌شود. جریان درون یاتاقان از مخزنی سرچشمه می‌گیرد که فشار آن از صفر تا حد بالایی افزایش می‌یابد. فرایند جریان را تشریح کنید.

نمادگذاری فصل ۱۲

$a =$ شعاع لوله

A، B، $C =$ ثابتهای به‌کار رفته در رابطه‌های آهنگ تنش-کرنش مختلف

$D =$ قطر

$f =$ ضریب اصطکاک (فَنینگ)

$G =$ $-dp/dz$، گرادیان فشار در لوله

$k =$ ثابت تناسب برای شارهٔ قانون توانی

$K' =$ شاخص غلظت

$L =$ طول

$n =$ نمای شارهٔ قانون توانی

$n' =$ شاخص رفتار جریان

$p =$ فشار

$Q =$ آهنگ جریان حجمی

$R'e =$ عدد رینولدز تعمیم‌یافته $\lambda\rho V^{2}/\tau_{\circ L}$

$r =$ مختصهٔ شعاعی

$r_p =$ شعاع درپوش مرکزی درون لوله

$u =$ سرعت

$u_m =$ سرعت بیشینه

$u_p =$ سرعت درپوش مرکزی درون لوله

$V =$ سرعت متوسط

$\gamma =$ کرنش برشی

$\dot{\gamma} =$ آهنگ کرنش برشی

$\lambda =$ ضریب سخت‌پایی

$\mu =$ گران‌روی

$\mu_a =$ گران‌روی ظاهری

$\mu_0 =$ گران‌روی در آهنگ برش صفر

$\mu_p =$ گران‌روی پلاستیکی

$\mu_\infty =$ مقدار مجانبی گران‌روی ظاهری برای آهنگهای برشی بالا

$\tau =$ تنش برشی

$\dot{\tau} =$ آهنگ تنش برشی

$\tau_{0L} =$ تنش برشی دیواره متناظر با جریان لایه‌ای

$\tau_y =$ تنش تسلیم

۱۳

موجها و پایداری

۱۳-۱ مقدمه

مطالعهٔ حرکت موج برای بسیاری از جنبه‌های مکانیک شاره‌ها مهم است. حرکت موج زیربنای صوت‌شناسی، رفتار موجها روی سطح مایعات و درک پایداری شاره است. موجها منتشر می‌شوند و رفتاری نوسانی دارند؛ این رفتار به‌علت نیروهای بازگرداننده‌ای است که وقتی شاره آشفته می‌شود برانگیخته می‌شوند و می‌کوشند که شاره را به حالت ناآشفتهٔ خود برگردانند. موج ممکن است به انتشار ادامه دهد تا اینکه به‌علت اثرهای اتلافی، میرا شود. موجها ممکن است ضعیف (که گاهی آنها را بینهایت کوچک می‌گویند) یا قوی باشند، موج صوتی معمولی نمونه‌ای از موجهای ضعیف است که تغییرات خواص شاره مربوط به موج در آنها، در مقایسه با مقدارهای حالت زمینهٔ پایا بسیار جزئی است. موج ضربه‌ای و جهش هیدرولیکی مثالهایی از موجهای قوی‌اند.

رفتار موجهای ضعیف و قوی، مانند روشهای ریاضی به‌کار رفته در توصیف آنها، کاملاً متفاوت است. به‌طور کلی، معادلات توصیف‌کنندهٔ موجهای ضعیف را، با نادیده گرفتن جمله‌های مرتبهٔ دوم مربوط به برخی از کمیتهای کوچک، می‌توان «خطی‌شده» در نظر گرفت. این ساده‌سازی باعث حل معادله با روش ساده‌ای خواهد شد. در این فصل، بررسی خود را به موجهای خطی محدود می‌کنیم. این محدودیت خیلی جدی نیست، زیرا موجهای صوتی را، همچون بیشتر مسئله‌های نظریهٔ پایداری می‌توان به دقت با این روش حل کرد. درحقیقت، بعضی از موجهای قوی، همچون جهش هیدرولیکی را می‌توان با روش خطی حل کرد.

مطالعهٔ پایداری چیست؟ اگر شارهٔ ساکن یا دارای حرکت پایای خاص، حتی توسط آشفتگیهای بینهایت کوچک مختل شود، ممکن است ناپایدار شود. به‌طور کلی، هر شارهٔ پایدار با گستره‌ای از پارامترها مشخص می‌شود، اما اگر پارامترهای خاصی وجود داشته باشند یا باعث شوند که از مقدار بحرانی خود تجاوز کنند شاره ناپایدار می‌شود. اگر مقدار پارامترهای بحرانی، به علت آشفتگیهای بینهایت کوچکی که همیشه وجود دارند،

از حد مجاز تجاوز کند ناپایداری همیشه رخ خواهد داد. به‌عنوان مثال، جریان لایه‌ای به‌علت افزایش عدد رینولدز و تجاوز از مقداری بحرانی که به پیکربندی جریان بستگی دارد، ممکن است ناپایدار، و متلاطم شود. اگر سرعت باد از حد بحرانی تجاوز کند، موجهای سپیدنوک روی اقیانوس تشکیل می‌شود. بعضی از پیکربندیهای جریان، صرف‌نظر از مقدار پارامترهای مرتبط، ذاتاً ناپایدارند. نمونهٔ آن، جت لایه‌ای نازک آب است، که همیشه در پایین‌دست جریان از هم پاشیده می‌شود و به‌صورت قطره درمی‌آید.

وقتی ناپایداری ایجاد می‌شود، همیشه بدان معنی نیست که تغییر شدیدی همچون تبدیل جریان از لایه‌ای به متلاطم یا شکستن موجهای سطحی رخ می‌دهد. جریان شاره از پیکربندی خاصی به پیکربندی دیگر تغییر خواهد کرد. دو مایع اختلاط‌ناپذیر که به‌صورت لایه‌لایه بر روی هم قرار گرفته‌اند و مایع چگالتر در بالا قرار دارد، ناپایدارند و این دو مایع به درون یکدیگر نفوذ می‌کنند و لایه‌بندی عکس می‌شود، به گونه‌ای که مایع چگالتر در زیر قرار خواهد گرفت.

ناپایداری را چگونه می‌توان پیش‌بینی کرد؟ آشفتگی‌ای به شکل موج به یک یا چند پارامتر در شاره وارد می‌کنیم، پاسخ شاره معیار پایداری را تعیین می‌کند. اگر موج میرا شود، شاره پایدار است. اگر موج رشد کند، شاره ناپایدار است. معمولاً به کمک آشفتگیهای بینهایت کوچک می‌توان معیارهای پایداری را پیش‌بینی کرد. اما، در بعضی از حالتها، هرچند در پاسخ به آشفتگیهای جزئی ممکن است شاره پایدار به‌نظر آید، لیکن آشفتگیهای خیلی قوی به ناپایداری منجر می‌شوند. معمولاً آشفتگیهای قوی اثرهای غیرخطی دارند، که خارج از این بحث است. بیشتر مسئله‌های فیزیکی را می‌توان با تحلیل خطی حل کرد، اما باید به‌خاطر داشت که ناپایداریهای بعضی از جریانها را فقط با استفاده از تحلیل غیرخطی می‌توان پیش‌بینی کرد. گذار به جریان متلاطم در بعضی از پیکربندیهای ساده از این نوع است.

موجها را به دو دستهٔ طولی و عرضی تقسیم می‌کنند. موج طولی موجی است که هر کمیت برداری وابسته به آن، همچون سرعت، همراستا با جهت انتشار موج است. موجهای صوتی از نوع موجهای طولی هستند. موج عرضی موجی است که هر کمیت برداری وابسته به آن عمود بر جهت انتشار موج است. موجهای برشی گران‌رو، مانند بیشتر موجهای سطحی، از این نوع‌اند. در فضای بی‌کران، این نوع موجها جفت‌نشده هستند و می‌توانند مستقل از هم انتشار یابند، اما با وجود مرز یا سطح آزاد این دو به‌هم جفت می‌شوند.

طبقه‌بندی دیگر مربوط به شکل جبههٔ موج است. موج تخت موجی است که جبههٔ آن تخت است و تمام پارامترهای موجود بر روی صفحهٔ عمود بر جهت انتشار آن یکنواخت است. موجهای استوانه‌ای یا موجهای کروی به‌ترتیب پارامترهای یکنواخت بر روی سطح استوانه‌ای یا کروی دارند و در جهت شعاعی منتشر می‌شوند. در این فصل، فقط دربارهٔ موجهای تخت به تفصیل بحث خواهیم کرد. اما رفتار آنها مشخصهٔ موجهای عمومی است و موجهای استوانه‌ای و کروی را می‌توان با روشی مشابه بررسی کرد.

۱۳-۲ نمایش موجهای رونده و فازور

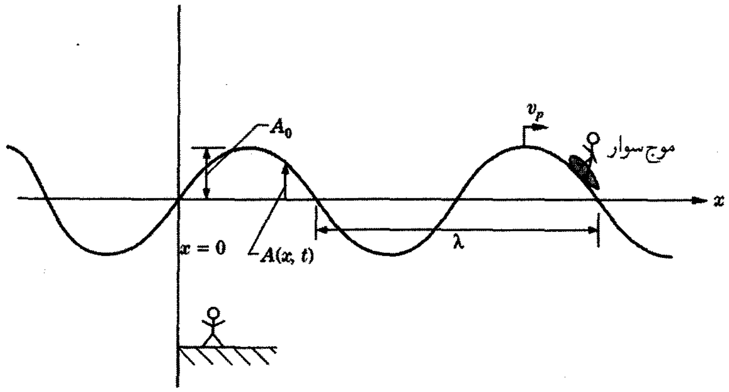
دربارهٔ موجهای روندهٔ تک بسامد (تکفام) به تفصیل بحث خواهیم کرد. شکل موجهای پیچیده‌تر را با برهم‌نهش موجهای تکفام می‌توان ایجاد کرد. هر شکل موجهای تناوبی را با سری فوریه و موجهای غیرتناوبی را با انتگرال فوریه می‌توان نشان داد.

موج روندهٔ تکفام را با تابع سینوسی نمایش می‌دهند. در سرتاسر این فصل از نمادگذاری فازور استفاده خواهیم کرد. این نمادگذاری برای بیان جابه‌جاییهای فاز و رشد یا تضعیف موج مناسب است. شکل ۱۳-۱ موج رونده‌ای را در جهت x نشان می‌دهد.

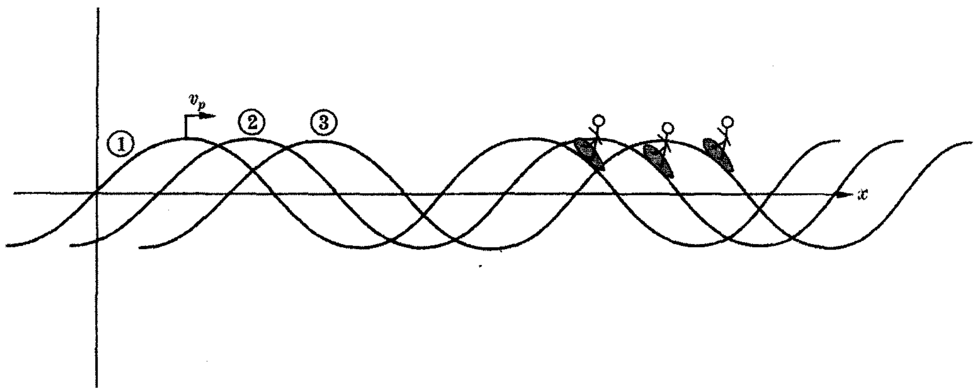
بزرگی موج را در هر x و t با $A(x,t)$ نشان می‌دهند که بیانگر هر متغیری همچون فشار، چگالی، مؤلفهٔ سرعت و خواص دیگر است. دامنهٔ موج A_0 است و موج می‌تواند در جهت مثبت x (موج پیش‌رونده) یا در جهت منفی x (موج پس‌رونده) حرکت کند. شکل ۱۳-۱ موج پیش‌رونده‌ای را نشان می‌دهد. شکل ۱۳-۲ گامهای زمانی ترتیبی موج را نشان می‌دهد.

از دید ناظر ساکن مستقر در چارچوب مرجع (در مقدار مشخص x) موج نسبت به زمان تغییر می‌کند و عکس لحظه‌ای موج در هر زمان مفروض نشان می‌دهد که موج برحسب x تغییر می‌کند فرض می‌شود که موج در هر دو جهت $x+$ و $x-$ تا فاصله‌های دور امتداد دارد. اما، مبدأ ($x = 0$) را می‌توان به‌صورت مولد یا مبدل تصور کرد و بدین‌ترتیب موج فقط در جهت $x+$ امتداد خواهد داشت.

موج پیش‌روندهٔ شکل ۱۳-۱ با سرعت v_p در جهت $x+$ حرکت می‌کند. v_p سرعت فاز یا سرعت موج است. موج‌سوار موجود در شکل



شکل ۱۳-۱ موج رونده در جهت x.



شکل ۱۳-۲ گامهایی زمانی ترتیبی موج پیش‌رونده در مکانهای ۱، ۲، و۳. موج‌سوار با سرعت v_p به طرف جلو حرکت می‌کند.

روی جبههٔ‌موج سوار شده است و با سرعت v_p پیش می‌رود. این موج‌سوار قدرت موج A را در حین حرکت همیشه یکسان می‌بیند. باید تأکید کرد که سرعت موج v_p برابر سرعت شاره نیست. ذرات شاره در حین عبور موج تکان‌تکان می‌خورند، اما شاره همراه با جبههٔ موج حرکت نمی‌کند. معمولاً موجهایی موردنظر ماست که از میان شارهٔ ساکن حرکت می‌کنند (نسبت به محور x دستگاه مختصات). حرکت موج بیانگر آشفتگی‌ای است که در میان شاره انتشار می‌یابد و درحقیقت شاره ممکن است در حین عبور موج تکان‌تکان بخورد، که فقط حرکتی نوسانی است و شاره هیچ حرکت خالصی نخواهد داشت. ستیغ موج و موج‌سوار، هر دو همراه با موج، و نه همراه با شاره، حرکت می‌کنند.

موج تخت، را به بیان ریاضی به‌صورت زیر می‌نویسیم

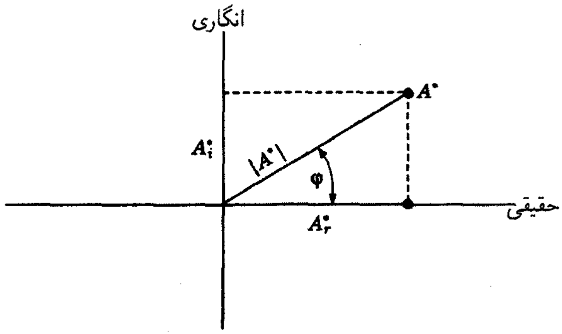
$$A(x,t) = \mathscr{R}\{A^* e^{i(\omega t - kx)}\} \tag{۱۳-۱}$$

که A^* عددی مختلط است و فازور نامیده می‌شود. A^* را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$A^* = |A^*|e^{i\varphi} = A_\circ e^{i\varphi} = A_r^* + iA_i^* \tag{۱۳-۲}$$

که $|A^*|$ بزرگی A^* و برابر $A_\circ$ است (شکل۱۳-۳)، و A_r^* و A_i^* به‌ترتیب جزء حقیقی و انگاری‌اند. دامنه را می‌توان به‌صورت $|A^*| = \sqrt{A_r^{*۲} + A_i^{*۲}}$ نوشت. همچنین، $|A^*| = A^*\bar{A}^*$ که $\bar{A^*}$ مزدوج مختلط A^* است.

نماد $\mathscr{R}$ جزء حقیقی این رابطه را نشان می‌دهد. بعداً ابروها را حذف می‌کنیم و چنین برداشت می‌شود که جزء حقیقی همیشه به کل رابطه برمی‌گردد. جزء حقیقی هر حاصلضرب همیشه با حاصلضرب جزءهای حقیقی یکسان نیست. بنابراین، تمام عملیات جبری را باید قبل از محاسبهٔ



شکل ۱۳-۳ صفحهٔ مختلط نمایانگر A^*.

جزء حقیقی انجام داد؛ در غیر این صورت، جمله‌هایی که شامل حاصلضرب جزء‌های انگاری (و درنتیجه، حقیقی) است، از دست می‌روند. نوشتن نماد $\mathscr{R}$ ضرورتی ندارد، زیرا همیشه برداشت می‌شود که جزء حقیقی و فقط جزء حقیقی هر رابطهٔ نهایی برای $A(x,t)$ دارای ارزش فیزیکی است، اما باید تأکید کرد که تمام تحلیلهای میانی را باید برحسب متغیرهای مختلط کامل انجام داد.

ω بسامد زاویه‌ای (برحسب رادیان بر ثانیه) است و در اینجا به‌عنوان عدد مثبت حقیقی در نظر گرفته می‌شود. k ثابت انتشار، و به‌طور کلی عددی مختلط با جزء حقیقی k_r و جزء انگاری k_i است. غالباً جزء حقیقی k_r را عدد موج و k_i را ثابت تضعیف می‌نامند. بسامد f (دور در ثانیه) را برحسب هرتز اندازه می‌گیرند، و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\omega = ۲\pi f$$

رابطهٔ طول موج λ با عدد موج k_r عبارت است از $k_r = ۲\pi/\lambda$. با توجه به اینکه $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$، معادلهٔ (۱۳-۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

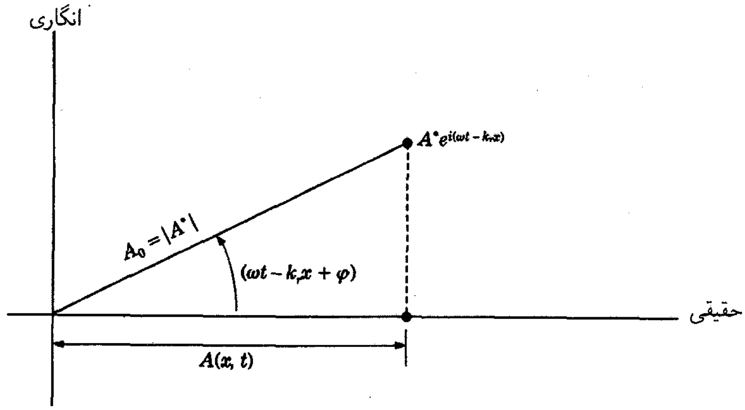
$$A(x,t) = \mathscr{R}\{|A^*|e^{i\varphi}e^{i(\omega t - kr_x)} \cdot e^{k_r x}\} = |A^*|e^{k_i x}\cos(\omega t - k_r x + \varphi) \qquad (۱۳\text{-}۳)$$

جملهٔ کسینوسی بیانگر موج رونده با جابه‌جایی فاز φ از مبدأ $x = ۰$ و $t = ۰$ است. اگر جزء انگاری k، یعنی k_i مثبت باشد، موج پیش‌رونده در حین انتشار در جهت $+x$ رشد می‌کند و اگر k_i منفی باشد، این موج در حین انتشار تضعیف می‌شود (فرو می‌پاشد). برای موجی که در جهت $-x$ حرکت می‌کند، عکس آن صادق است. k_r برای موج پیشرونده مثبت، و برای موج پس‌رونده منفی است.

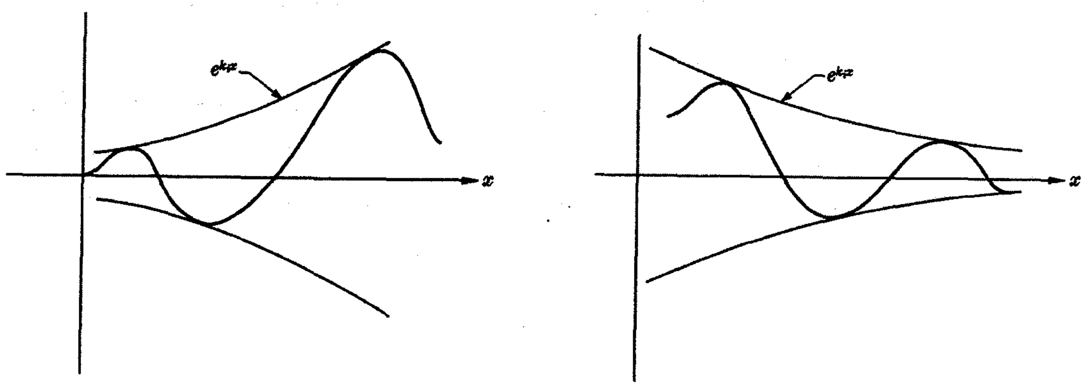
بنابراین می‌بینیم که معادلهٔ (۱۳-۱) شامل اطلاعات فراوانی دربارهٔ موج است. اکنون این پرسش مطرح می‌شود که برای هر ω مفروض (ناشی از مبدل)، چگونه می‌توان مقدار عدد مختلط k را یافت؟ گاهی ممکن است دامنهٔ $|A^*|$ اعمال شود، اما اگر چندین پارامتر در موج به‌هم جفت شوند، به‌طور همزمان برانگیخته خواهند شد و سپس دامنه‌های فازور، که دامنه‌های نسبی و فازهای نسبی پارامترهای مختلف را به‌دست می‌دهند، از معادلات حاکم شاره به‌دست می‌آیند. معمولاً فقط امکان تعیین دامنهٔ یک متغیر در مبدل وجود دارد، که معمولاً با زاویهٔ فاز صفر تعیین می‌شود و فاز متغیرهای دیگر نسبت به آن سنجیده خواهد شد.

پس مسئلهٔ اصلی در حرکت موج یافتن k (با ω مفروض) و تعیین مقدار دامنه‌های فازور برای هر یک از پارامترها برای هر سیگنال ورودی مفروض است. معادلهٔ ارتباط‌دهندهٔ k و ω را به‌عنوان معادلهٔ پاشندگی $k = k(\omega)$ می‌شناسند.

قبل از محاسبه معادلهٔ پاشندگی مفهوم فازور را به‌طور کامل‌تر بررسی می‌کنیم. معادلهٔ (۱۳-۳) را می‌توان در صفحهٔ مختلط نشان داد. رابطهٔ مختلط موج را می‌توان به‌صورت برداری چرخان در صفحهٔ مختلط تصور کرد و $A(x,t)$ را به‌صورت جزء حقیقی این بردار چرخان، همچون شکل ۱۳-۴، می‌توان درنظر گرفت.



شکل ۱۳-۴ $A(x,t)$ به‌عنوان جزء حقیقی بردار چرخان.



شکل ۱۳-۵ رشد یا تضعیف موج حاصل از پوش $e^{k_i x}$: (الف) رشد موج پیش‌رونده که می‌توان آن را به‌صورت تضعیف موج پس‌رونده تعبیر کرد و عکس آن برای (ب) صادق است.

اکنون، موج روندهٔ حاصل از معادلهٔ (۱۳-۳) را می‌توان با پوش حاصل از $e^{k_i x}$ نشان داد. در شکل ۱۳-۵ پوش موج پیش‌رونده را برای هر دو مقدار مثبت و منفی k_i نشان داده‌ایم.

۱۳-۳ سرعت فاز و سرعت گروه

اکنون این پرسش مطرح می‌شود که سرعت موج‌سوار یا ستیغ موج چقدر است؟ این سرعت را سرعت فاز یا سرعت موج می‌گویند. موج‌سوار طوری حرکت می‌کند که موج را همیشه، بجز در موقع رشد یا تضعیف، به یک اندازه می‌بیند. او همیشه در نقطهٔ یکسانی نسبت به ستیغ موج، موج‌سواری می‌کند. بنابراین، جملهٔ متغیر مستقل کسینوس در محل موج‌سوار باید ثابت باشد، درنتیجه

$$(\omega t - k_r x + \varphi) = \text{const.} \qquad (۱۳\text{-}۴)$$

این رابطه x و t را برای موج‌سوار به‌هم مرتبط می‌کند. سرعت او باید dx/dt باشد که همان، ω/k_r است.

$$v_p = \omega/k_r \qquad (۱۳\text{-}۵)$$

همیشه ω را عدد حقیقی مثبت در نظر می‌گیرند، به‌گونه‌ای که k_r مثبت یا منفی به‌ترتیب v_p مثبت یا منفی را به‌دست می‌دهند که نمایانگر موج پیش‌رونده یا پس‌رونده است. بسته به رابطهٔ تابعی k برحسب ω، مقدار v_p ممکن است ثابت باشد یا برحسب ω تغییر کند، اگر v_p برحسب ω تغییر کند، موج را پاشنده می‌گویند. موج تکفام نمی‌توانند پاشنده باشد، اما اگر چندین موج با wهای متفاوت برهم نهاده شده باشند (به‌صورت موجی تناوبی با شکلی اختیاری یا به‌صورت تپ) و اگر v_p به بسامد بستگی داشته باشد، آنگاه این شکل موج در حین انتشار گرایش به محوشدن (پاشیدگی) دارد. رابطهٔ تابعی بین ω و ثابت انتشار مختلط k را به‌عنوان معادلهٔ پاشندگی می‌شناسند.

از این رابطهٔ تابعی مشتق $\partial\omega/\partial k_r$ را می‌توان یافت که مفهوم فیزیکی مهمی دارد و به‌عنوان سرعت گروه موج‌رونده شناخته می‌شود. اگر و تنها اگر موج از مؤلفهٔ بسامدهای متمرکز در نزدیکی بسامد میانگین $\omega_\circ$ تشکیل شده باشد، این سرعت را به‌آسانی می‌توان تفسیر کرد. سرعت گروه v_g را به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد

$$v_g = \frac{\partial w}{\partial k_r}\bigg|_{\omega_\circ} \tag{۶-۱۳}$$

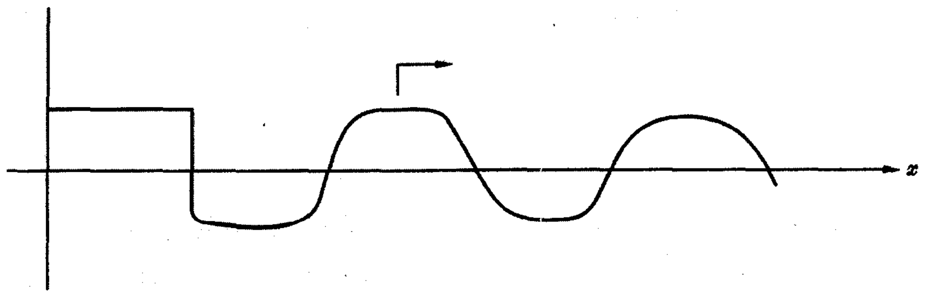
به بیان فیزیکی، v_g بیانگر سرعت انتشار اطلاعات یا انرژی به‌وسیلهٔ موج است. اگر موج اصلی متمرکز در $\omega_\circ$ (موج حامل) در بسامد بسیار پایین‌تری مدوله شده باشد، این سیگنال مدوله‌سازی با سرعت گروه حرکت می‌کند. پوشی به‌وسیلهٔ این مدوله‌سازی به‌وجود می‌آید که خود موجی با طول‌موج بسیار بلند در مقایسه با طول‌موج حامل است. سرعت پوش همان سرعت گروه و سرعت حامل همان سرعت فاز است. اگر پاشندگی وجود نداشته باشد، سرعت گروه و سرعت فاز یکسان می‌شوند. برای بحث کامل‌تر، مسئلهٔ ۱۳-۱ را ببینید.

۱۳-۴ پاشندگی و تضعیف

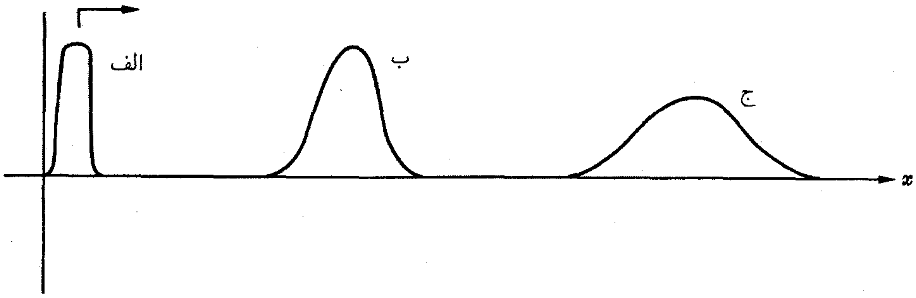
پاشندگی را به‌صورت پراکنده شدن یا (پهن‌شدگی) محو شدن ساختار موج در فضا به علت تغییر سرعت فاز برحسب بسامد تعریف کرده‌اند. پاشندگی می‌تواند بدون توجه به مقدار k_i رخ دهد و حتی می‌تواند وقتی k عدد حقیقی محض و k_i صفر است، بدون رشد یا تضعیف موج، رخ دهد. اتلاف یا اخذ انرژی در موج به علت پاشندگی وجود ندارد. اتلاف یا اخذ انرژی در حین تضعیف و رشد صورت می‌گیرد و k_i نمایانگر این اثر است. پاشندگی فقط به k_r بستگی دارد. شکل ۱۳-۶ انتشار موج مربعی را در جهت $x+$ نشان می‌دهد. اکنون فرض می‌کنیم که k عدد حقیقی محض است و v_p برحسب بسامد تغییر می‌کند که به پاشندگی منجر می‌شود. با انتشار موج شکل مربعی آن تغییر می‌کند. زیرا مؤلفه‌های بسامد بالاتر سریعتر از مؤلفه‌های بسامد پایین‌تر حرکت می‌کنند. در آن سوی پایین‌دست جریان، موج به شکل سینوسی می‌گراید و فقط به‌صورت بسامد اصلی باقی می‌ماند.

یک مربعی (که با انتگرال فوریه) بیان می‌شود، مثال صحیح‌تری برای پاشندگی است. شکل ۱۳-۷ این تپ را در نقطه‌های پیاپی (الف)، (ب) و (ج) نشان می‌دهد. اگر k عدد حقیقی محض باشد، تپ در حین انتشار پراکنده می‌شود، اما انرژی کل‌آن ثابت می‌ماند.

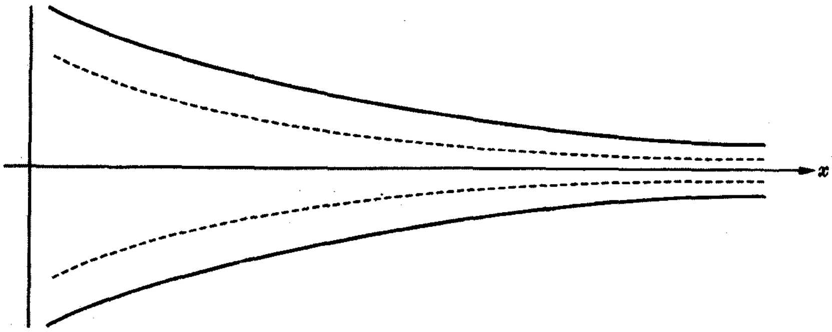
موج ممکن است همزمان با پاشندگی رشد کند یا تضعیف شود، که در این صورت انرژی را در حین انتشار از میان شاره به‌دست می‌آورد و



شکل ۱۳-۶ موج مربعی پاشنده.



شکل ۱۳-۷ تپ پاشنده.



شکل ۱۳-۸ موج ناپایدار غیرانتشاری فراسوی «قطع». نوسان در بین خطهای پر رخ می‌دهد. خطهای نقطه‌چین حالتهای میانی را نشان می‌دهند.

یا از طریق فرایندهای اتلافی همچون نیروی برشی گران‌رو یا انتقال گرما از دست می‌دهد. در چنین حالتی موجهای پاشندهٔ موجود در شکلهای ۱۳-۶ و ۱۳-۷ شبیه به‌هم می‌شوند، اما دامنهٔ آنها در پایین‌دست جریان تغییر خواهد کرد.

بدین‌ترتیب، تعیین k بازای ω مفروض کار اصلی در فرایند تعیین رفتار موج است. برای خلاصه کردن و ادامهٔ بحث خود، انواع موجهای متمایز را برحسب k معرفی می‌کنیم.

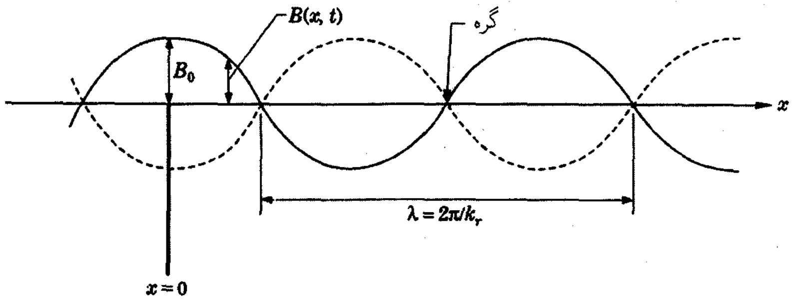
۱. اگر k مختلط باشد، آنگاه میرایی (تضعیف) یا رشد، بدون توجه به فرایند پاشندگی، رخ می‌دهد.

۲. اگر k^2 انگاری منفی محض باشد (k مختلط خواهد بود)، موجهایی خواهیم داشت که همچون موج انتقال گرما و موجهای برشی گران‌رو در معادلهٔ پخش صدق می‌کنند.

۳. اگر k انگاری محض باشد، هرگز انتشار موج وجود نخواهد داشت و $v_p \to \infty$، زیرا k_r صفر است، که متناظر با طول موج بینهایت خواهد بود. اگر این اتفاق در بسامد بحرانی رخ دهد (k انگاری محض می‌شود) بسامد را بسامد قطع می‌گویند. در این حالت، شکل موج همان تابع نمایی‌ای است که تا $x \to \infty$ ادامه می‌یابد و نسبت به زمان نوسان می‌کند. موج کلی به‌طور فازی حرکت می‌کند و شبیه نی لرزان است.چنین موجهایی را موجهای ناپایدار می‌گویند (شکل ۱۳-۸ را ببینید).

۱۳-۵ موجهای ساکن

موجی سینوسی را در نظر بگیرید که هیچگونه پاشندگی و تضعیف یا رشد ندارد. در این صورت، k حقیقی و v_p ثابت است، بنابراین ($k_r = \pm(\omega/|v_p|)$ و $k_i = 0$.اگر موج پیش‌رونده‌ای با ($k_r = +(\omega/|v_p|)$) با موج پس‌رونده‌ای (با ($k_r = -(\omega/|v_p|)$) برهم نهاده شده باشند و هر دو هم‌دامنه باشند، نتیجهٔ آن موجی ساکن است. موج ساکن در فضا حرکت نمی‌کند.) گره‌ها (مکانهایی که دامنهٔ آنها همیشه صفر است)، همچون موج موجود در شکل۱۳-۹ با دامنهٔ BO، در فضا ثابت می‌مانند. این موج بین خطهای پر و نقطه‌چین برحسب زمان نوسان می‌کند.



شکل ۱۳-۹ موج ساکن. گره‌ها نقطه‌های ثابتی هستند و موج بین خطهای پر و نقطه‌چین نوسان می‌کند.

موج ساکن را می‌توان به‌صورت حاصل جمع دو موج رونده به شکل $|A|\cos(\omega t - k_r x)$ نوشت، که k_r برای موجی که در جهت مثبت x حرکت می‌کند، مثبت و برای موجی که در جهت منفی x حرکت می‌کند، منفی است.

$$B(x,t) = |A|\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{|v_p|}\right) + |A|\cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{|v_p|}\right) \tag{۱۳-۷}$$

به‌خاطر داریم که

$$۲\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

با استفاده از آن در معادلهٔ (۱۳-۷)، داریم

$$B(x,t) = ۲|A|\cos\omega t \cdot \cos\frac{\omega x}{|v_p|} = B_\circ \cos\omega t \cdot \cos\frac{\omega x}{|v_p|} \tag{۱۳-۸}$$

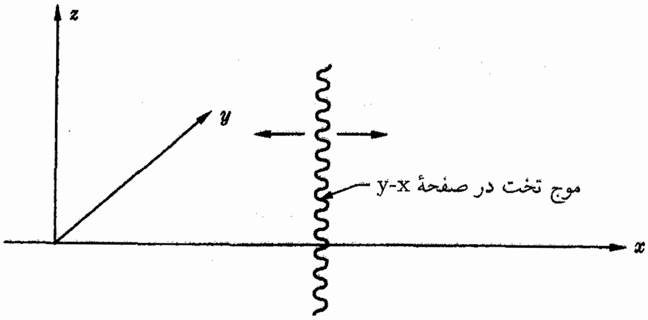
می‌بینیم که $B_\circ = ۲|A|$ و معادلهٔ (۱۳-۸) دقیقاً رابطهٔ موج ساکن در شکل۱۳-۹ است. چنین موجی را می‌توان با لمس‌کردن نقطه‌های گرهی بر روی سیم گیتار ایجاد کرد.

۱۳-۶ محاسبهٔ معادلهٔ پاشندگی برای موج صوتی

به‌عنوان مثالی ساده و روشن‌کننده دربارهٔ محاسبات پاشندگی، موجی صوتی را در نظر بگیرید که در میان هوای ساکن منتشر می‌شود. این روش نسبتاً کلی است و ممکن است برای انواع دیگر موجها به‌کار رود. تحلیل خود را به موجهای خطی محدود می‌کنیم. این روش آن‌قدر که به‌نظر می‌رسد محدودکننده نیست، زیرا موجهای صوتی خطی هستند و معمولاً تحلیل خطی برای بررسیهای پایداری کفایت می‌کند.

روشی را که به‌کار می‌بریم، عبارت است از: معادلات بیان‌کنندهٔ سیستم را، با این فرض که اختلالهای خارج از شرایط زمینهٔ پایا در مقایسه با این پارامترهای زمینهٔ پایا کوچک‌اند، خطی می‌کنیم. فرض می‌کنیم که جوابهای به‌صورت سینوسی فازور هستند، که در این صورت معادلات دیفرانسیل توصیفی به صورت سادهٔ دستگاه معادلات جبری برای ضریبهای فازور پارامترهای مختلف وابسته به موج درمی‌آید. اما، این معادلات مستقل نیستند و قاعدهٔ کرامر را می‌توان برای به‌دست آوردن معادلهٔ پاشندگی به‌کار برد.

نخستین مثال، موج صوتی تخت معمولی در هوای ساکن است. این موج در جهت مثبت یا منفی x، همچون شکل۱۳-۱۰، حرکت می‌کند. این موج طولی و تخت، بدون هیچگونه تغییراتی در جهت y و z، است. از تمام اثرهای اتلاف، نیروی برشی گران‌رو و رسانش گرمایی، که به پاشندگی و میرایی منجر می‌شود، چشم‌پوشی می‌کنیم. این اثرها کاملاً کوچک‌اند و می‌توان آنها را با دقت خیلی زیادی نادیده گرفت. بنابراین، تمام تغییرات



شکل ۱۳-۱۰ موج صوتی تخت در جهت مثبت یا منفی x.

خواص در موج تک‌آنتروپی هستند. معادلات حاکم عبارت‌اند از

معادلهٔ حرکت:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (۱۳\text{-}۹)$$

معادلهٔ پیوستگی:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0 \qquad (۱۳\text{-}۱۰)$$

رابطه‌های تک‌آنتروپی:

$$p\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma}=p_0\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^{\gamma} \qquad (۱۳\text{-}۱۱)$$

که γ نسبت گرماهای ویژه c_p/c_v است. پارامترهای حالت پایا را با p_0، ρ_0 و $u_0=0$ نشان می‌دهیم. با انتشار موج، آشفتگیهای کوچک یا اخلالهای ایجاد شده را با p'، ρ' و u' مشخص می‌کنیم، بنابراین مقدار واقعی پارامترها در هر لحظه عبارت‌اند از (p_0+p')، $(\rho_0+\rho')$ و u'، و فرض می‌شود که $p'\ll p_0$ و $\rho'\ll\rho_0$. وانگهی، از توانهای درجهٔ دو یا بالاتر همهٔ کمیتهای پریم‌دار یا حاصلضرب دو یا چند کمیت پریم‌دار، در مقایسه با خود کمیتهای پریم‌دار، صرف‌نظر می‌کنیم. u' را کمیت اختلالی در نظر می‌گیریم، هرچند در اینجا سرعت پایا وجود ندارد. برای نمایش کوچکی u' به بهنجارکردن معادلات نیاز است، که در اینجا این‌کار را نمی‌کنیم. با وارد کردن متغیرها برحسب کمیتهای پایا به‌علاوهٔ پریم‌دار، معادلات (۱۳-۹) تا (۱۳-۱۱) به‌صورت زیر در می‌آیند

$$(\rho_0+\rho')\left\{\frac{\partial u'}{\partial t}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}\right\}=-\frac{\partial(p_0+p')}{\partial x}$$
$$\frac{\partial(\rho_0+\rho')}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\{(\rho_0+\rho')u'\}=0$$
$$(p_0+p')(\rho_0+\rho')^{-\gamma}=p_0\rho_0^{-\gamma}$$

با بسط و حفظ فقط جمله‌های مرتبهٔ اول درکمیتهای پریم‌دار (و استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای برای رابطهٔ تک‌آنتروپی) معادلات خطی شدهٔ زیر

به‌دست می‌آیند. تمام مشتقهای مربوط به جمله‌های حالت پایا صفرند

$$\rho_\circ \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \quad (۱۲\text{-}۱۳)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_\circ \frac{\partial u'}{\partial x} = \circ \quad (۱۳\text{-}۱۳)$$

$$p' = \frac{\gamma p_\circ \rho'}{\rho_\circ} \quad (۱۴\text{-}۱۳)$$

اکنون، جوابهای فازور برای همهٔ کمیتهای اختلالی عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} p' &= p^* e^{i(\omega t - kx)} \\ \rho' &= \rho^* e^{i(\omega t - kx)} \\ u' &= u^* e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (۱۵\text{-}۱۳)$$

که درمی‌یابیم وقتی فازورهای مختلط در نماها ضرب می‌شوند، جزء حقیقی رابطهٔ کلی را باید در نظر گرفت. اگر جزءهای انگاری را خیلی زود حذف کنیم، بخشی از جواب از دست می‌رود. باید به‌خاطر داشت که حاصلضرب دو عدد انگاری عددی حقیقی است. از کمیتهای پریم‌دار بالا می‌توان نسبت به x یا t مشتق گرفت. مثلاً

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = i\omega p^* e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -ikp^* e^{i(\omega t - kx)}$$

با نشاندن این جوابها در معادلات (۱۳-۱۲) تا (۱۳-۱۴) معادلات جبری زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{aligned} i\omega\rho_\circ u^* - ikp^* &= \circ \\ i\omega\rho^* - ik\rho_\circ u^* &= \circ \\ \rho_\circ p^* - \gamma p_\circ \rho^* &= \circ \end{aligned} \quad (۱۶\text{-}۱۳)$$

با معلوم بودن ω و k، فکر می‌کنیم که می‌توانیم p^*، ρ^* و u^* را به‌طور مستقیم به‌دست آوریم؛ ولی چنین نیست. این معادلات مستقل نیستند. این موضوع از نظر فیزیکی کاملاً روشن است، زیرا قدرت موج باید توسط چشمه‌ای اعمال شود که آن موج را تولید می‌کند. اگر کمیتی همچون متغیر u^* را (بر روی مبدل یا بلندگو) اعمال کنیم، آنگاه پارامترهای دیگر از مجموعهٔ معادلات قبلی پیروی می‌کنند. چون p^*، ρ^* و u^* به‌طور کلی کمیتهای مختلط هستند، آنها دامنه و فاز را نسبت به متغیر اعمال‌شده (در این حالت، u^*) به‌دست می‌دهند (اما می‌تواند هریک از آنها باشد). معمولاً متغیر اعمال‌شده را در فاز صفر در نظر می‌گیرند، بنابراین فازور آن عددی حقیقی است.

اکنون گام بسیار مهم درک این نکته است که برای هر مجموعهٔ معادلات خطی غیرمستقل، دترمینان ضریب متغیرها (در این حالت p^*، ρ^* و u^*) باید صفر شود. این قاعدهٔ کرامر است و معادلهٔ حاصل معادلهٔ پاشندگی است که k را برحسب ω به‌دست می‌دهد.

کمیتهای فازور در معادلهٔ پاشندگی ظاهر نمی‌شوند. دترمینان را می‌توان مستقیماً از معادلهٔ (۱۳-۱۶) تشکیل داد

$$\begin{array}{ccc} u^* & p^* & \rho^* \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} i\omega\rho_\circ & -ik & \circ \\ -ik\rho_\circ & \circ & i\omega \\ \circ & \rho_\circ & -\gamma p_\circ \end{vmatrix} = \circ$$

فازورها را در بالای ستونها نوشته‌ایم تا نشان دهیم که ضریبها متعلق به کدام فازور است. بسط دترمینان به‌صورت زیر است

$$k^{۲}\gamma p_{\circ} = \omega^{۲}\rho_{\circ} \tag{۱۳-۱۷}$$

k کمیت حقیقی محض است و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$k = \pm\sqrt{\frac{\omega^{۲}\rho_{\circ}}{\gamma p_{\circ}}}$$

بنابراین، سرعت فاز v_p، یعنی سرعت صوت عبارت است از

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \pm\sqrt{\frac{\gamma p_{\circ}}{\rho_{\circ}}} = \pm a \tag{۱۳-۱۸}$$

برای سادگی، سرعت معمولی صوت $\sqrt{\gamma p_{\circ}/\beta}$ را با a نشان می‌دهیم. علامتهای $+$ و $-$ به‌ترتیب بیانگر موجهای پیش‌رونده و پس‌رونده هستند. پاشندگی وجود ندارد، زیرا v_p ثابت است؛ و چون k کمیتی حقیقی است، تضعیف یا رشد موج نیز وجود ندارد. با استفاده از قانون گازهای کامل

$$p_{\circ} = \rho_{\circ} RT_{\circ}$$

v_p را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$v_p = \pm\sqrt{\gamma RT_{\circ}}$$

با توجه به معادلهٔ (۱۳-۱۶) می‌توان فازور پارامترهای دیگر موج را برحسب بسامد ω (ω به‌وسیلهٔ مبدل یا چشمه موج تعیین می‌شود)، مثلاً برای فازور u^* به‌دست آورد. اگر به‌طور دلخواه u^* را عددی حقیقی در نظر بگیریم، آن‌گاه برای $u_{\circ}$ (زاویهٔ فاز صفر) داریم

$$\begin{aligned} p^* &= \left(\frac{\omega}{k}\right)\rho_{\circ}u_{\circ} = \pm a\rho_{\circ}u_{\circ} \\ \rho^* &= \pm\frac{\rho_{\circ}u_{\circ}}{a} \end{aligned} \tag{۱۳-۱۹}$$

یادآور می‌شویم که دستگاه معادلات (۱۳-۱۶) برای فازور اضافی است و می‌توان آن را با معلوم شدن معادلهٔ پاشندگی از دو کمیت دیگر به‌دست آورد. در مسئلهٔ فعلی p^* و ρ^* درحقیقت عددهای واقعی‌اند، به گونه‌ای که نوسانهای فشار و چگالی در موج یا با سرعت همفاز و یا ۱۸۰° خارج از فاز هستند، اما، اگر اثرهای گران‌روی و رسانش گرمایی در به‌دست آوردن معادلات وارد می‌شدند، k عددی مختلط می‌شد.

رابطه‌های نهایی u'، p' و ρ' [از معادلهٔ (۱۳-۱۵)] عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} u' &= \mathscr{R} u_{\circ} e^{i[\omega t \mp (\frac{\omega x}{a})]} = u_{\circ}\cos\omega(t \mp x/a) \\ p' &= \mathscr{R} a\rho_{\circ}u_{\circ} e^{i[\omega t \mp (\omega x/a)]} = \pm a\rho_{\circ}u_{\circ}\cos\omega(t \mp x/a) \\ \rho' &= \mathscr{R}\frac{\rho_{\circ}u_{\circ}}{a} e^{i[\omega t \mp (\omega x/a)]} = \pm\frac{\rho_{\circ}u_{\circ}}{a}\cos\omega(t \mp x/a) \end{aligned} \tag{۱۳-۲۰}$$

علامت بالا ($-$ در متغیر مستقل کسینوس و $+$ در جلوی رابطه‌ها) برای موج پیش‌رونده است. u' را در جهت $+x$ مثبت ذر نظر می‌گیرند. علامت پایین موج پس‌رونده را نشان می‌دهد. برای پی‌بردن به اهمیت این موضوع بلندگویی را در نظر بگیرید که در $x = \circ$ قرار دارد و جلو و عقب آن آزاد است. جلوی آن (در طرف $+x$) موجهایی تولید می‌کند که در جهت $+x$ انتشار می‌یابند. در این طرف، سرعت مثبت باعث فشردگی هوا و افزایش فشار آن می‌شود، و u' همفاز با p' خواهد بود. در پشت، موجی تولید می‌شود که در جهت $-x$ حرکت می‌کند، و u' مثبت در پشت

بلندگو موجی انبساطی تولید می‌کند که فشار را کاهش می‌دهد، به گونه‌ای u' و p' در پشت بلندگو دارای 180° اختلاف فاز خواهند بود. همین استدلال دربارهٔ p' نیز صادق است.

راهکار دیگر (ولی مشکلتر) برای امواج صوتی ترکیب معادلات دیفرانسیل حاکم و ایجاد تک معادله‌ای برای هریک از متغیرهاست. نتیجه همان معادلهٔ موج آشناست،

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix} u' \\ p' \\ \rho' \end{Bmatrix} = \frac{\gamma p_\circ}{\rho_\circ}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{Bmatrix} u' \\ p' \\ \rho' \end{Bmatrix} \tag{۱۳-۲۱}$$

و $\gamma p_\circ/\rho_\circ$ مربع سرعت صوتی است. اما، این راهکار برای وضعیتهای پیچیده‌تر، که حل معادلات موج خسته‌کننده می‌شود، خیلی راحت نیست.

هر دو موج پیش‌رونده و پس‌رونده جوابهای معادلهٔ پاشندگی هستند. هریک از این دو موج یا هر دو موج، بسته به وضعیت فیزیکی، ممکن است وجود داشته باشند. اگر گسترهٔ شاره در جهت $+x$ نامتناهی باشد، فقط موجی پیش‌رونده در شرایط حالت پایا، که مثلاً در $x = \circ$ تولید شده است، وجود دارد. اما، اگر شاره در مکانی در پایین‌دست جریان واقع شده باشد، موج بازتابیده و جذب می‌شود؛ البته بسته به جنس دیواره، ممکن است بخشی از موج بازتابیده شود. این شرط مرزی همراه با شرایط موجود در مولد ($x = \circ$) بیانگر ترکیب دو موج متحرک در جهتهای $+x$ و $-x$ است. وانگهی، اگر دیوارهٔ مرزی بازتابنده باشد و در جهت x حرکت کند، آن‌گاه بسامد موج بازتابیده متفاوت از موج ورودی خواهد بود (اندازه‌گیری در چارچوب مرجع ناظر ساکن نسبت به محور x دستگاه مختصات و مبدل انجام می‌گیرد). بسامد موج ورودی و بازتابیده نسبت به نظر ناظر واقع روی دیوارهٔ متحرک یکسان است، اما با بسامد مبدل تفاوت خواهد داشت. این پدیده را جابه‌جایی دوپلر می‌گویند.

۱۳-۷ موج صوتی بازتابیده از دیوارهٔ ساکن

بازتاب و حضور همزمان دو موج پیش‌رونده و پس‌رونده را می‌توان در شکل۱۳-۱۱ مشاهده کرد.

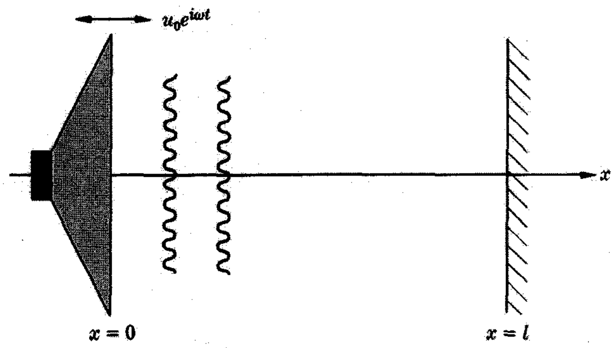
بلندگویی بزرگ با سطح تخت موجهایی صوتی با بسامد ω تولید می‌کند. l را در مقایسه با قطر بلندگو کوچک فرض می‌کنیم، بنابراین موجهای تولیدشده تخت‌اند. دیواره در $x = l$ صلب و بازتابندهٔ کامل است. حرکت بلندگو در $x = \circ$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$u|_{x=\circ} = \mathscr{R} u_\circ e^{i\omega t} = u_\circ \cos\omega t$$

می‌دانیم که

$$k_r = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho_\circ}{\gamma p_\circ}} = \pm\frac{\omega}{a}$$

$$k_i = \circ$$



شکل ۱۳-۱۱ بلندگویی در $x = \circ$ موجهایی صوتی تولید می‌کند که از دیوارهٔ صلب واقع در $x = l$ باز می‌تابد. موجها را تخت فرض می‌کنیم.

بنابراین موج سرعتی را در سرتاسر شاره می‌توان حاصل‌جمع موجهای پیش‌رونده و پس‌رونده دانست.

$$u(x,t) = \mathscr{R}\{u_1^* e^{i\omega(t-x/a)} + u_2^* e^{i\omega(t+x/a)}\} \tag{۱۳-۲۲}$$

که u_1^* و u_2^* به‌ترتیب دامنه‌های فازور موجهای پیش‌روند و پس‌رونده هستند. در $x = l$ دیوارهٔ صلب قرار دارد، درنتیجه شرایط مرزی عبارت‌اند از

$$u(l,t) = 0$$
$$u(0,t) = u_0 e^{i\omega t}$$

u_1^*، u_2^* را با استفاده از این شرایط در معادلهٔ (۱۳-۲۲) می‌توان تعیین کرد و سپس $u(x,t)$ را به‌دست آورد. باید تأکید کرد که به‌طور کلی بخش حقیقی رابطه‌ها را در موقع اعمال شرایط مرزی در نظر نمی‌گیرند. شکلهای مختلط باید حفظ شود تا اینکه شکل نهایی $u(x,t)$ به‌دست آید. برای این مسئله با توجه به اعمال شرایط مرزی، داریم

$$\begin{aligned} u_1^* e^{-il\omega/a} + u_2^* e^{+il\omega/a} &= 0 \\ u_1^* + u_2^* &= u_0 \end{aligned} \tag{۱۳-۲۳}$$

جزئیات محاسبهٔ مقدار اختیاری l را به‌عنوان مسئله در انتهای این فصل آورده‌ایم. اما، در حالت خاص $l = (2n+1)(\lambda/4)$ (که n عددی صحیح و l مضرب فردی از یک‌چهارم طول موج است)، مرز دیواره متناظر با گره طبیعی است و به آسانی می‌توان نشان داد که بزرگی این دو موج (پیش‌رونده و پس‌رونده) مساوی است و موج ساکنی را تشکیل می‌دهند. شرایط مرزی به‌صورت زیرند

$$\begin{aligned} u_1^* e^{-i(2n+1)\pi/2} + u_2^* e^{+i(\partial n+1)\pi/2} &= 0 \\ u_1^* + u_2^* &= u_0 \end{aligned}$$

درنتیجه

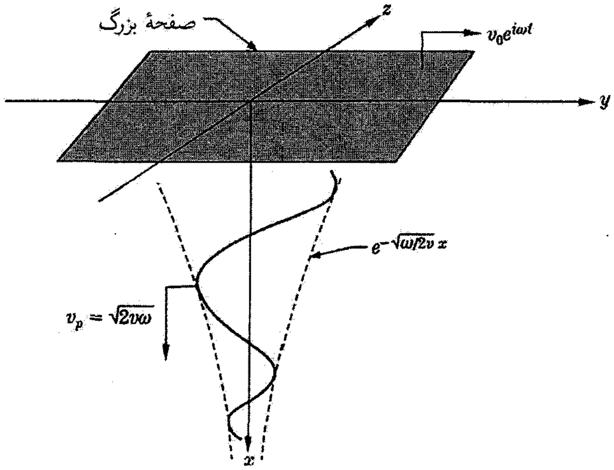
$$u_1^* = u_2^* = u_0/2 \tag{۱۳-۲۴}$$

بزرگی موجهای پیش‌رونده و پس‌رونده مساوی است و وقتی با هم جمع می‌شوند موجی ساکن به‌وجود می‌آورند. در لولهٔ شیشه‌ای که یک انتهای آن بسته است و در انتهای دیگر با موجی صوتی برانگیخته می‌شود، در حالت تشدید با بسامدهای بحرانی که طول لوله مضرب فردی از یک‌چهارم طول موج صوتی است، موجهای ساکن به‌وجود می‌آید. اگر کمی ماسه در ته لوله بریزیم، موقع ایجاد تشدید، ماسه‌ها در محل گره‌ها انباشته می‌شوند. اثر دیواره را برای طول موجهای بسیار بلندتر از قطر لوله می‌توان نادیده گرفت.

۱۳-۸ موجهای برشی در شارهٔ گران‌رو

مثالی دیگر دربارهٔ رفتار موج عرضی، انتشار موجهای تخت برشی در شارهٔ گران‌رو است. جوابهای موج‌گونه برای سرعت، به این معنا که نیروهای بازگرداننده وجود ندارد، بیانگر موجهای واقعی نیست. نیروهای برشی گران‌رو همیشه با حرکت شارهٔ فاقد نیروهای بازگرداننده مخالفت می‌کنند، به‌گونه‌ای که شاره باید مرتباً به‌وسیلهٔ نوسان به حرکت درآید. همهٔ انرژی ورودی توسط اثرهای گران‌روی تلف می‌شود و موج در حین انتشار میرا خواهد شد.

شاره‌ای گران‌رو به وسعت دریایی بزرگ را در نظر بگیرید که از سطح $x = 0$ در جهت x به‌طرف پایین امتداد دارد (شکل ۱۳-۱۲). این شاره با صفحهٔ تخت بزرگی پوشیده شده است که در جهت y در امتداد سطح با بسامد ω و سرعت $v_0 e^{i\omega t}$ نوسان می‌کند. به‌خاطر داشته باشید که



شکل ۱۳-۱۲ دریای نامتناهی شارهٔ گران‌رو که سطح آن با صفحهٔ نوسانگری برانگیخته شده است.

جزء حقیقی همان حرکت واقعی $v_\circ \cos \omega t$ است. فاز را به‌طور اختیاری صفر درنظر گرفته‌ایم. جابه‌جایی صفحه را به‌صورت $y_p = y^* e^{i\omega t}$ بیان می‌کنیم. سرعت از مشتق جابه‌جایی $i\omega y^* e^{i\omega t}$ نسبت به زمان به‌دست می‌آید، بنابراین حرکت صفحه عبارت است از

$$y_p = \mathscr{R}\left\{-\frac{iv_\circ}{\omega}e^{i\omega t}\right\} = \frac{v_\circ}{\omega}\sin\omega t$$

جابه‌جایی و سرعت 90° اختلاف فاز دارند.

وقتی موج برشی ایجادشده به‌وسیلهٔ این صفحه به طرف پایین در جهت x انتشار می‌یابد، شاره در جهت y نوسان می‌کند. این موجی عرضی است و همراه هیچ موج صوتی طولی نخواهد بود. موجهای برشی فقط به علت اینکه شاره گران‌رو است، انتشار می‌یابند. موجی برشی به‌خاطر ماهیتش پاشنده است و در حین انتشار میرا می‌شود.

معادلهٔ حرکت در جهت y به‌صورت سادهٔ زیر درمی‌آید

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \psi\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{۱۳-۲۵}$$

هیچ تغییراتی در جهتهای y یا z مشاهده نمی‌شود و فقط یک مؤلفهٔ سرعت در جهت y وجود دارد.این تنها معادله‌ای است که در اینجا نیاز داریم و به‌عنوان معادلهٔ پخش استاندارد شناخته می‌شود. (این معادله را می‌توان از معادلهٔ انتقال گردشاری فصل۳ به‌دست آورد.) چون ورودی‌ای نوسانگر وجود دارد، به دنبال جوابهایی به شکل زیر هستیم

$$v(x,t) = \mathscr{R}\{v^* e^{i(\omega t - kx)}\} \tag{۱۳-۲۶}$$

که وقتی در معادلهٔ (۱۳-۲۵) نشانده می‌شود، معادلهٔ پاشندگی زیر به‌دست می‌آید

$$i\omega\rho v^* = -\mu v^* k^2 \tag{۱۳-۲۷}$$

به گونه‌ای که

$$k^2 = i\rho\omega/\mu = -i\omega/\nu \tag{۱۳-۲۸}$$

که $\nu = \mu/\rho$ گران‌روی سینماتیکی است و نقش ثابت پخش را بازی می‌کند. عدد انگاری منفی k^{2} که همیشه به معنی آن است که موج در فرایند پخش، تضعیف و پاشیده می‌شود. با حل معادله و جداسازی آن به اجزای حقیقی و انگاری، داریم

$$
\begin{aligned}
k_r &= \pm\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \\
k_i &= \mp\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}
\end{aligned}
\qquad (۱۳-۲۹)
$$

علامت + برای k_r به معنی حرکت رو به پایین موج در جهت $+x$ است، که متناظر با k_i منفی به معنی تضعیف در جهت انتشار خواهد بود. مجموعهٔ علامتهای دیگر نشان می‌دهد که موج ضمن حرکت (رو به بالا) در جهت $-x$ تضعیف می‌شود.

سرعت فاز برابر است با

$$v_p = \frac{\omega}{k_r} = \pm\sqrt{2\nu\omega}$$

یادآور می‌شویم که k_i برحسب بسامد افزایش می‌یابد، به گونه‌ای که موجهای پربسامدتر زودتر از موجهای کم‌بسامدتر میرا می‌شوند. در ساختار موج نموده‌شده به‌وسیلهٔ انتگرال سری فوریه،مؤلفه‌های پربسامد زودتر میرا می‌شوند. نتیجه، تغییرشکل موج خواهد بود، اما نباید با اثرهای پاشندگی که همیشه به تغییرشکل موج منجر می‌شود اشتباه گرفت.

در صفحه، که $x = 0$، شاره و صفحه با هم حرکت می‌کنند، بنابراین

$$v(0, t) = \mathscr{R} v_0 e^{i\omega t} = \mathscr{R} v^* e^{i\omega t}$$

و v^* مساوی v_0 است. با این فرض که فقط موجهای پیش‌رونده وجود دارند و (بدون بازتاب از کف دریا) رابطهٔ $v(x,t)$ به‌صورت زیر است

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \mathscr{R} v_0 e^{i(\omega t - \sqrt{\omega/2\nu}.x + i\sqrt{\omega/2\nu}.x)} \\
&= v_0 e^{-\sqrt{\omega/2\nu}\cdot x}\cos(\omega t - \sqrt{\omega/2\nu}\cdot x)
\end{aligned}
\qquad (۱۳-۳۰)
$$

جملهٔ $e^{-\sqrt{\omega/2\nu}\cdot x}$ منحنی پوش موج میراست. k_i ثابت تضعیف یا میرایی است.

فاصله‌ای را که موج در شاره نفوذ می‌کند تا دامنهٔ آن v_0/e شود، عمق پوسته δ می‌گویند. عمق پوسته از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

که معیار مشخصهٔ پخش موج به‌عنوان تابع بسامد است. دیده می‌شود که موجهای پربسامد کمتر از موجهای کم‌بسامد در شاره نفوذ می‌کنند.

اگر کف دریای شاره، مثلاً، در عمق $x = l$ قرار گیرد، آن‌گاه هر دو موج پیش‌رونده و پس‌رونده در وضعیت پایا خواهند بود و شرایط مرزی، دامنه‌های فازور این دو موج را یا همان‌گونه که در بخش قبل درخصوص موجهای صوتی بحث شد، تعیین می‌کنند.

۱۳-۹ موجهای سطحی روی آب

مطالعهٔ موجهای سطحی شاخهٔ مهم و جالب نظریهٔ موج را تشکیل می‌دهد. موجهای سطحی را به‌آسانی می‌توان به‌صورت موجهای اقیانوس و چینهای روی دریاچه‌ها و رودخانه‌ها مشاهده کرد. معمولاً اثرهای اتلاف جزئی است و تأثیری در ساختار موج در فاصله‌های کوتاه ندارد. اما، موجهای سطحی ماهیتاً پاشنده هستند و هرچه عمق آب زیادتر باشد، این اثر مهمتر می‌شود.

روش مطالعهٔ رفتار موجهای سطحی به روشهای ریاضی نیاز دارد که فراتر از سطح این کتاب است. اما، بعضی از انواع موجهای سطحی را مرور می‌کنیم و دربارهٔ معادلات پاشندگی آنها به‌عنوان مقدمه‌ای کلی بر این موضوع بحث خواهیم کرد. خوانندگان می‌توانند بحث بسیار خوبی دربارهٔ موجهای سطحی را درکتابی از سرجیمز لایت‌هیل، که در فهرست مرجعها موجود است، مشاهده کنند.

معمولاً موجهای سطحی ترکیب موجهای طولی و عرضی‌اند. اثرهای تراکمی آنها ناچیز است. ذرات مایع درون موج حرکت بیضوی دارند (محور اصلی عمودی است). جریان خالص شاره در جهت انتشار وجود ندارد، اما ذرات در حین یک دورهٔ تناوب یک دور کامل بیضی را می‌چرخند. موج‌سوار موجود بر روی سینهٔ موج با سرعت موج حرکت می‌کند، اما باید تأکید کرد که این سرعت با سرعت خود آب یکسان نیست.

به‌طور کلی دو نوع موج سطحی وجود دارد که بر پایهٔ ماهیت نیروهایی طبقه‌بندی شده‌اند که گرایش دارند سطح شاره را پس از آشفتگی به حالت تخت برگردانند. یک نوع، موج گرانشی است که نیروی بازگردانندهٔ غالب نیروی گرانشی است و دیگری موج موئینگی است که نیروی بازگردانندهٔ غالب کشش سطحی خواهد بود. هر دو نیرو همیشه حضور دارند، اما نیروی غالب به طول موج بستگی دارد. موجهای گرانشی موجهایی هستند که طول موج آنها در مقایسه با مقیاس طول، در حالتی که کشش سطحی مهم است (اما نه الزاماً در مقایسه با عمق آب)، بزرگ است. کشش سطحی فقط زمانی مهم است که خمیدگی سطح شعاع بسیار کوچکی داشته باشد (یعنی موجهایی با طول موج کوچک).

در عمل، به‌طور سرانگشتی موجهای با طول موج $\lambda > ۱۰\mathrm{cm}$ از نوع گرانشی، و موجهای با طول موج $\lambda < ۰٫۵\mathrm{cm}$ از نوع کشش سطحی‌اند. روشن است که موجهای اقیانوس از نوع موجهای گرانشی هستند و فقط در شرایطی که سطح اقیانوس آرام و تخت است، موجهای موئینگی را می‌توان مشاهده کرد. موجهای موئینگی را گاهی چین می‌گویند.

در ادامهٔ بحث فرض می‌کنیم که موجها سینوسی و تکفام هستند.

۱۳-۹-۱ موجهای گرانشی

شکل معادلات پاشندگی برای موجهای گرانشی به اندازهٔ نسبی طول‌موج در مقایسه با عمق h بستگی دارد و برای آبهای عمیق $h \gg \lambda$ و آبهای کم‌عمق $\lambda \gg h$ به شکل ساده‌تری درمی‌آیند. در آبهای عمیق که $h \gg \lambda$، طول‌موج λ ممکن است کاملاً بزرگ باشد و اگر عمق آب به اندازهٔ کافی زیاد باشد، ممکن است به ۱۰۰۰ متر یا بیشتر هم برسد. معادلهٔ پاشندگی به‌صورت ساده زیر است

$$\omega^۲ = gk \tag{۱۳-۳۱}$$

به گونه‌ای که k عددی حقیقی و مستقل از عمق h است. سرعت موج برابر است با

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} = \sqrt{g/k} \tag{۱۳-۳۲}$$

موج پاشنده، و سرعت آن مستقل از h است. درواقع، سرعت فاز می‌تواند + یا − باشد. اما در اینجا نباید نگران جهت انتشار آن بود و فقط باید مقدار آن را تعیین کرد. طول موج برحسب بسامد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\lambda = \frac{۲\pi}{h} = \frac{۲\pi g}{\omega^۲} \tag{۱۳-۳۳}$$

در آبهای کم‌عمق، $h \ll \lambda$، داریم

$$\omega^۲ = \delta h k^۲ \tag{۱۳-۳۴}$$

و سرعت موج عبارت است از

$$v_p = \sqrt{gh} \tag{۱۳-۳۵}$$

که ناپاشنده است ولی به h بستگی دارد. شیب ساحل اثر مهمی بر روی موج آبهای کم‌عمق دارد. با نزدیک شدن موج به ساحل اقیانوس و کم‌عمق شدن آب، سرعت موج کاهش می‌یابد. درنتیجه، موجهای نزدیک ساحل موازی و همراستا با جبههٔ ساحل می‌شوند، زیرا سرعت جبههٔ موجی که به‌طور مایل به ساحل نزدیک می‌شود در مقایسه با قسمتهای دورتر که بر روی آبهای عمیق‌تر قرار دارد، دارای سرعت کمتری است و این باعث همراستا شدن موج با ساحل خواهد شد. طول موج برحسب ω عبارت است از

$$\lambda = \frac{۲\pi\sqrt{gh}}{\omega}$$

معادلهٔ پاشندگی کلی برای آب با عمق اختیاری عبارت است از

$$\omega^{2} = gk\tanh(kh) \tag{۱۳-۳۶}$$

و سرعت موج برابر است با

$$v_p = \left[\left(\frac{g}{k}\right)\tanh(kh)\right]^{1/2} \tag{۱۳-۳۷}$$

که در محدودهٔ آبهای عمیق ($kh \gg 1$) به‌صورت $\omega^{2} = g/k$، و برای آبهای کم‌عمق $kh \ll 1$ به‌صورت سادهٔ $\omega^{2} = gh$ درمی‌آید.

۱۳-۹-۲ موجهای موئینگی یا چینها

موجهای موئینگی یا چینها موجهایی با طول موج بسیار کوچک و کمتر از ۰٫۵ سانتیمتر هستند، که نیروهای کشش سطحی بر آنها غالب‌اند. از نیروهای گرانشی می‌توان چشم‌پوشی کرد. معادلهٔ پاشندگی و سرعت موج برای موجهای موئینگی عبارت‌اند از

$$\omega^{2} = \frac{Tk^{3}}{\rho} = \frac{T}{\rho}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{3} \tag{۱۳-۳۸}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{Tk}{\rho}} \tag{۱۳-۳۹}$$

که T کشش سطحی است. چینها پاشنده‌اند، اما رفتار آنها مستقل از عمق است. با پرتاب سنگی کوچک به درون حجم آب آرام چینهایی تولید می‌شود که در حین حرکت پراکنده یا پاشیده خواهد شد.

موجهای سطحی با ایجاد نیروی برشی توسط باد یا جسم جامد متحرک در آب برانگیخته می‌شوند. موجهای اقیانوس توسط نیروهای بادی به‌وجود می‌آیند که انرژی لازم برای بقای آنها را تأمین می‌کنند. کشتیهای متحرک طرح موج پیچیده‌ای را ایجاد می‌کنند. عبور جریان آب از اطراف جسم ساکن طرح موج به‌وجود می‌آورد. چینها با پرتاب جسمی کوچک به سطح آب آرام، یا جاری شدن آب در کف یا اطراف بستر رودخانه یا کانالهای کم‌عمقی که دارای برآمدگیهای کوچک هستند، تشکیل می‌شوند. مطالعهٔ موجهای موئینگی از نقطه‌نظر دیگری نیز مهم‌اند. با توجه به شباهتهای موجود بین موجهای موئینگی روی آب و موجهای تراکمی‌ـانبساطی در جریان گاز تراکم‌پذیر، از موجهای آب می‌توان برای مدل‌سازی و تجسم بعضی از ویژگیهای جریان تراکم‌پذیر استفاده کرد.

در اینجا، فقط به نتیجهٔ محاسبات معادلهٔ پاشندگی موجهای سطحی اشاره کردیم. در بحث کامل‌تر، برهم‌کنش موجها برای تولید پراش، طرحهای ایجادشده به‌وسیلهٔ کشتیها، اثر عمق و تغییرات کف را نیز بررسی می‌کنند. چنین بحثهایی خارج از حوزهٔ این کتاب است.

در اقیانوس، افزون بر موجهای سطحی، موجهای دیگری وجود دارند که باعث آشفتگی آب در سرتاسر عمق آن می‌شوند. جهش هیدرولیکی آب یا مَد (که در فصل ۳ بحث شد) نمونهٔ چنین موجی است که موج جزر و مدی یا سونامی نامیده می‌شود و به علت بالاآمدگی کف اقیانوس، معمولاً در نتیجهٔ کنش آتشفشانی، ایجاد می‌شود. تحلیل پاشندگی به‌کاررفته در اینجا برای تحلیل موجهای «در عمق» نامناسب است و خواننده بهتر است به مرجعها مراجعه کند.

۱۳-۱۰ چند نکتهٔ نهایی دربارهٔ موجها

موجهای خطی بیان شده در این فصل می‌توانند با مرزهای جامد یا جسمها برهم‌کنش، و یا با موجهای مشابه دیگر تداخل کنند، که به اثرهای پراش و تداخل خواهد انجامید. این پدیده‌ها را می‌توان با برهم‌نهش شکلهای پیچیدهٔ جوابهای فازورـسینوسی و برآورده کردن شرایط مرزی تحلیل کرد. موجهای تخت را که در جهتهای مختلف حرکت می‌کنند، می‌توان بر هم نهاد. باید به‌خاطر داشت که شکلهای پیچیدهٔ کامل را در محاسباتی که به برهم‌نهش نیاز دارند، باید حفظ کرد.

برای موجی که در جهتی عمومی پخش می‌شود، بردار $\mathbf{k}$ را جایگزین k می‌کنیم و مختصات مکان را توسط بردار $\mathbf{r}$ به‌دست می‌آوریم. بنابراین، رابطهٔ فازور عبارت است از

$$A^* e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$$

پس از بررسی موجهای تختی که به شکل رابطهٔ بالا هستند، اکنون به بررسی موجهای استوانه‌ای که جبههٔ موج استوانه‌ای دارند، می‌پردازیم؛ این موجها را باید برحسب تابعهای بسل بازای تغییرات فضایی، به‌جای سینوسی، بیان کرد. موجهای استوانه‌ای طول موج مشخصی که در حین انتشار برحسب مکان تغییر کند، ندارند. اما، تابعهای بسل برای فاصله‌های دور رفتاری سینوسی با طول موج مشخصی پیدا می‌کنند. موجهای کروی را می‌توان با همان شکل فازورـسینوسی مانند موجهای تخت، ولی با تغییر دامنهٔ $1/r$، بیان کرد.

$$A^* \left(\frac{1}{r}\right) e^{i(\omega t-kr)}$$

این شکل موج را می‌توان با قرار دادن در معادلات متناظر در مختصات کروی اثبات کرد. این تمرین را به‌صورت یکی از مسئله‌های حل‌شده ارائه خواهیم کرد.

۱۳-۱۱ نظریهٔ پایداری

شارهٔ جاری یا شارهٔ ساکن ممکن است ناپایدار شود و تغییرات شدیدی در مشخصه‌های جریان یا پیکربندی هندسی آن رخ دهد. یکی از مسائل اولیهٔ تحلیل پایداری تعیین گستره یا مقدارهای بحرانی پارامترهای مرتبطی است که به ناپایداری جریان می‌انجامد. پایداری شارهٔ متحرک یا پیکربندیهای ساکن را می‌توان با ایجاد اختلال در شاره توسط آشفتگی سینوسی جزئی در همه یا برخی از پارامترهای شاره آزمایش کرد. سرعت را می‌توان با تغییر یک یا چند مؤلفهٔ آن مختل کرد. درواقع، همیشه اختلالهای جزئی ناشی از علتهای محیطی در شاره وجود دارد.

برخی از مثالهای معمولی اثرهای ناپایداری عبارت‌اند از گذار از جریان لایه‌ای به متلاطم، فروپاشی جت آب، واژگون کردن دو مایع در حالتی که مایع سنگینتر در بالا قرار دارد، تشکیل موجهای سپید نوک بر روی اقیانوس و شکسته شدن موجها در موقع برخورد به ساحل. همان‌گونه که اشاره شد، ناپایداری ممکن است به فروپاشی مایع یا گذار از جریان لایه‌ای به تلاطمی یا گذار از یک پیکربندی به پیکربندی دیگر، حتی اگر هر دو لایه‌ای باشند منجر شود. مثالهای این نوع ناپایداری عبارت‌اند از

۱. ساختار سلولهای شش‌وجهی جریان چنبره‌ای که روی صفحهٔ گرم افقی تخت تشکیل می‌شود. این سلولها به یکدیگر جفت می‌شوند و طرحی سنگ‌فرشی به‌نام سلولهای بنارد تشکیل می‌دهند.

۲. از چرخش دو استوانهٔ دایره‌ای هم‌مرکز حاوی جریان گران‌رو موجود در فضای بین آنها با سرعتهای مختلف حول محور مشترکشان، نیمرخ سرعت لایه‌ای ایجاد می‌شود. گستره‌ای از حرکت نسبی وجود دارد که جریان آن ناپایدار می‌شود و به ساختار سلولی جریان چنبره‌ای می‌انجامد که روی جریان چرخان برهم نهیده شده است.

به‌طور کلی در تحلیل پایداری ، برای خطی شدن معادلات و امکان پیش‌بینی شروع ناپایداری با تعقیب رفتار بَعدی موج، می‌توان آشفتگیهای سینوسی واردشده به شاره را به‌طور دلخواه کوچک گرفت. اگر ناپایداری را پیش‌بینی کنیم، آنگاه نمی‌توان پیکربندی نهایی جریان را با روند شکل‌گیری معادلات خطی بیان کرد. بنابراین باید معادلات کاملاً غیرخطی را در نظر گرفت. در بعضی از حالتها، نظریهٔ خطی با اختلالهای کوچک می‌تواند جریان پایدار را، در موقعی که آشفتگی زیاد به ناپایداری منجر می‌شود، پیش‌بینی کند. خوشبختانه این نوع رفتار به‌ندرت رخ می‌دهد و معمولاً نظریهٔ خطی کفایت می‌کند.

آزمون ناپایداری با بررسی معادلهٔ پاشندگی برای موجهای حاصل از آشفتگی انجام می‌شود. موجها می‌توانند در میان شاره منتشر شوند و مقدار جزء انگاری ثابت انتشار k_i بیانگر رشد یا میرایی آشفتگی خواهد بود. رشد مشخص شده با k_i را ناپایداری فضایی می‌گویند. ناظر مستقر در مکانی ثابت نسبت به دستگاه مختصات وضعیت پایایی را در نظر دارد، اما مشاهده می‌کند که جریان در پایین‌دست ناپایدار می‌شود. فروپاشی

جت مایع و قطره‌ای شدن آن، و همچنین متلاطم شدن لایهٔ مرزی لایه‌ای در پایین‌دست جریان موجود بر روی هوابر مثالهایی از این نوع‌اند. روشن است که آزمون ناپایداری فضایی آزمون مناسبی در این نوع مثالهاست.

اما، اگر ناظر با سرعت موج v_p حرکت می‌کرد (در این صورت، ناظر باید موج‌سوار باشد)، رشد یا تضعیف موج را نسبت به زمان در این مکان می‌توانست ببیند. برای بیان رفتار جریان در پایین‌دست به بررسیهای فضایی نیاز نیست. با گذشت زمان، موج‌سوار پیش می‌رود و سرانجام تمام مکانهای فضایی را مشاهده می‌کند، اما او فقط باید تغییرات زمانی را در نظر بگیرید. بیان ناپایداری‌ای که فقط تغییرات زمانی را در نظر می‌گیرد، به‌عنوان تحلیل ناپایداری زمانی شناخته می‌شود. در این تحلیل ω می‌تواند مختلط باشد، اما k را حقیقی فرض می‌کنند. جزء انگاری ω رشد با فروافت را نشان می‌دهد.

از نظر فیزیکی، ناپایداری فضایی و ناپایداری زمانی بیانگر پدیده‌های یکسان‌اند، و اگر تحلیل به دقت انجام شود نتیجه‌ها یکسان خواهد بود. اما، برای شارهٔ متحرک، می‌توان مطمئن بود که تحلیل زمانی، فقط در صورتی که دستگاه مختصات با سرعت موج حرکت کند (که ممکن است از قبل معلوم باشد یا نباشد)، نتیجه‌های درستی به‌دست می‌دهد.

در کلی‌ترین حالت تحلیل پایداری، هر دو پارامتر ω و k، با امکان رشد در زمان و مکان (نسبت به هر چارچوب مرجع) می‌توانند مختلط باشند. ω می‌تواند مختلط باشد که نمایانگر نوسانهای رشدیابنده یا میراست، یا ممکن است کاملاً انگاری باشد، که نمایانگر رشد یا فروافت انفجاری خواهد بود. وانگهی، آشفتگیها می‌توانند در تمام پارامترهای مربوط و مؤلفه‌های سرعت رخ دهند و موجها می‌توانند در هر جهت دلخواهی منتشر شوند. معمولاً در موقعیتهای فیزیکی ساده‌سازی فراوانی در این ارتباط انجام می‌شود، اما باید در بررسی نتیجه‌ها دقت کافی به‌کار برد.

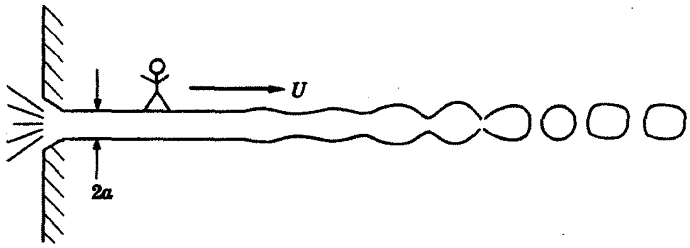
دو نوع ناپایداری وجود دارد: همرفت و مطلق. این دو نوع ناپایداری به رفتار فیزیکی، و نه روش تحلیل، مربوط می‌شوند. ناپایداری همرفت وقتی رخ می‌دهد که آشفتگی‌ای وارد شاره می‌شود و با انتشار موج در پایین‌دست جریان، افزایش می‌یابد. تصویر کلی نسبت به زمان ثابت می‌ماند. فروپاشی جت مایع از این نوع است. ناپایداری مطلق وقتی رخ می‌دهد که حوزهٔ کلی شاره سرانجام ناپایدار می‌شود و با گذشت زمان میدان کلی شاره دستخوش تغییر خواهد شد. مسئلهٔ استوانهٔ چرخان که قبلاً اشاره شد، از این نوع است. اگر هر دو پارامتر ω و k را مختلط فرض کنیم، هر دو نوع ناپایداری را، بدون پیش‌فرض حضور هریک، می‌توان پیش‌بینی کرد. وانگهی، در آشفتگیهای جزئی، با اختیاری بودن ω، هر نوع تپ یا ورودی تناوبی را می‌توان در نظر گرفت.

استفاده از تحلیل زمانی به‌جای تحلیل فضایی صرفاً در مقولهٔ پایداری توصیه می‌شود، زیرا معمولاً به معادلهٔ پاشندگی بسیار ساده‌تری منجر می‌شود. دستگاه مختصات را می‌توان طوری انتخاب کرد که تحلیل زمانی دست‌کم نتیجه‌های تقریبی به‌بار آورد، اما اگر و تنها اگر دستگاه مختصات با سرعت موج حرکت کند، نتیجه‌ها کاملاً دقیق خواهد بود. به‌عنوان مثال، تحلیل کلاسیکی جت مایع با اتصال دستگاه مختصات به جت متحرک انجام می‌شود. روشن نیست که سرعت موج با سرعت جت مایع یکسان است؛ موجها نسبت به سرعت میانگین جت در امتداد سطح مایع منتشر می‌شوند. در تحلیل کلاسیکی ریلی در بخش بعد از تحلیل زمانی صرف استفاده شده است و موجهای سطح را به‌صورت موجهای ساکن موجود بر روی جت فرض کرده‌اند. خطاهای ناشی از این فرض کوچک‌اند، زیرا پیش‌بینیهای نظریه تطبیق شگفت‌آوری با نتیجه‌های تجربی دارند.

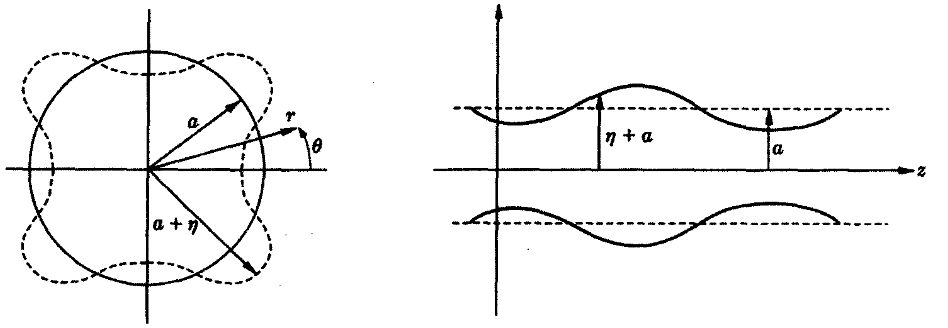
۱۳-۱۲ پایداری جت مایع

جت نازک مایع به شعاع a و سرعت U را در شکل ۱۳-۱۳ نشان داده‌ایم. نیروی بازگردانندهٔ وارد بر موجهای سطحی ناشی از کشش سطحی است. هر جت مایعی به‌صورت قطره‌قطره فرومی‌پاشد. آشفتگیهای موجود روی سطح، که همیشه وجود دارند، رشد می‌کنند و سرانجام از جت جدا می‌شوند و به شکل قطره درمی‌آیند. اندازهٔ این قطره‌ها توزیعی دارد که متوسط آن با نظریه پیش‌بینی می‌شود.

با پیروی از تحلیل اولیهٔ ریلی، چارچوب مرجع را متصل به مایع متحرک انتخاب، و فرض می‌کنیم که آشفتگیها موجهایی ساکن با عدد موج k و بسامد ω هستند. معیار ناپایداری این است که جزء انگاری ω منفی است (با فرض اینکه تابع موج به شکل $e^{i\omega t}$ است). ω را انگاری و منفی برای kهای کمتر از مقدار بحرانی در نظر می‌گیریم (که نمایانگر رشد زمانی موج است)، یعنی طول موج بزرگتر از مقدار بحرانی است که محیط جت $2\pi a$ را نتیجه می‌دهد. گران‌روی اثر ناچیزی روی مقدار بحرانی دارد و منظور نمی‌شود.



شکل ۱۳-۱۳ فروپاشی جت مایع. ناظر با سرعت U همراه با جت حرکت می‌کند.



شکل ۱۳-۱۴ جت اختلال‌یافته. دستگاه مختصات متصل به جت متحرک است.

این جریان غیرچرخشی است و می‌توان تابع پتانسیل سرعت ϕ را در نظرگرفت. از دستگاه مختصات r، θ و z همچون شکل۱۳-۱۴ استفاده می‌شود. سطح جت را در $r = a + \eta$ در نظر می‌گیرند و فرض می‌کنند که η، برای ایجاد آشفتگیهای سه‌بعدی، به θ و z بستگی دارد.

η همان انحراف سطح از استوانهٔ دایره‌ای به شعاع a است، که درمقایسه با a کوچک فرض می‌شود ($\eta \ll a$ و $\eta = \eta(\theta, z)$).

جملهٔ nام مؤلفهٔ فوریه را برحسب θ در نظر نمی‌گیریم. k حقیقی است و موجی ساکن در z داریم

$$\eta = \eta^* e^{i\omega t}\cos(n\theta)\cos(kz)$$
$$\eta^* = \eta_0 \qquad (۱۳\text{-}۴۰)$$

در اینجا، پتانسیل سرعت ϕ را برای سرعت اختلال نسبت به جت متحرک وارد می‌کنیم. از فصل ۶ می‌دانیم که پتانسیل سرعت در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند (هرچند حرکت مایع زمان‌ـ‌ورداست.)

$$\nabla^2\phi = 0 = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \qquad (۱۳\text{-}۴۱)$$

با شرط مرزی

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \frac{\partial\eta}{\partial t}\bigg|_{r=a} = v_r\bigg|_{r=a} \qquad (۱۳\text{-}۴۲)$$

این شرط تا مرتبه یک در $r = a$، به‌جای $r = a + \eta$، محاسبه شده است. جواب معادلهٔ (۱۳-۴۱) به‌صورت زیر است

$$\phi = \Phi(r)\cos(r\theta)\cos(kz)$$

درنتیجه، داریم

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + k^2\right)\Phi = 0 \qquad (۱۳\text{-}۴۳)$$

جواب معادلهٔ (۱۳-۴۳) عبارت است از $\mathrm{I_n}(kr)$، که تابع اصلاح‌شدهٔ بسل از مرتبهٔ n است

$$\Phi(r) = \text{const.}\mathrm{I_n}(kr)$$

با استفاده از شرط مرزی (۱۳-۴۲) مقدار ثابت تعیین می‌شود، بنابراین،

$$\phi = -i\eta_\circ \omega e^{i\omega t} \cdot \frac{\mathrm{I_n}(kr)}{k\mathrm{I'}_n(ka)} \cos(n\theta)\cos(kz) \tag{۱۳-۴۴}$$

اکنون، k و ω را باید با معادلهٔ پاشندگی به هم مرتبط ساخت. نیروهای کشش سطحی باید با اختلاف فشار موجود در عرض سطح مایع خنثی شود. این اختلاف فشار Δp از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta p = T\left(\frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲}\right)$$

که T کشش سطحی و $R_۱$ و $R_۲$ به‌ترتیب شعاعهای خمیدگی درونی در صفحهٔ r_θ و صفحهٔ r_z هستند. برای انحراف کوچک از شکل استوانه دایره‌ای شعاعهای خمیدگی عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\frac{۱}{R_۲} &= -\frac{\partial^۲\eta}{\partial z^۲}\\ \frac{۱}{R_۱} &= \frac{۱}{a+\eta}\left(۱ - \frac{\frac{\partial^۲\eta}{\partial\theta^۲}}{a+\eta}\right) \simeq \frac{۱}{a} - \frac{۱}{a^۲}\left(\eta + \frac{\partial^۲\eta}{\partial\theta^۲}\right)\end{aligned} \tag{۱۳-۴۵}$$

معادلهٔ ناپایای برنولی (۶-۹)، با نادیده گرفتن جملهٔ سرعت که از مرتبهٔ دو است، عبارت است از

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \tag{۱۳-۴۶}$$

فشار درونی سطح جت اختلال‌نیافته بیش از فشار جو است و این اختلاف از T/a به‌دست می‌آید. وقتی در جت اختلال ایجاد می‌شود، تغییر فشار نسبت به مقدار حالت پایا عبارت است از

$$\Delta p = T\left[-\frac{۱}{a^۲}\left(\eta + \frac{\partial^۲\eta}{\partial\theta^۲}\right) - \frac{\partial^۲\eta}{\partial z^۲}\right] = \rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{r=a} \tag{۱۳-۴۷}$$

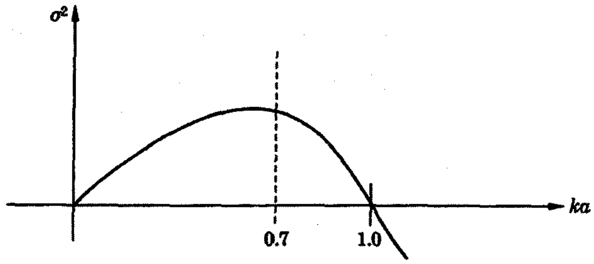
با نشاندن $(\partial\phi/\partial t)|_{r=a}$ از معادلهٔ (۱۳-۴۴) و η از معادلهٔ (۱۳-۴۰) رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$\omega^۲ = -\frac{T}{\rho a^۲}(۱ - n^۲ - k^۲a^۲)\frac{K\mathrm{I}'_n(ka)}{\mathrm{I}_n(ka)} \tag{۱۳-۴۸}$$

که I_n تابع اصلاح‌شده بسل از مرتبهٔ n و I'_n مشتق آن نسبت به متغیر مستقل است. I_n و $\mathrm{I'}_n$ برای متغیرهای مستقل حقیقی همیشه مثبت‌اند. برای تمام مقدارهای $n \geq ۱$ (مدهای نامتقارن محوری)، $\omega^۲ > ۰$ به‌گونه‌ای که ω حقیقی است و رفتار آن نوسانی، و برای تمام kها (تمام عددهای موج یا طول‌موجها) پایدار است. درنتیجه، فقط مد $n = ۰$ (دایره‌ای کامل) و بنابراین فقط برای $ka < ۱$، به ناپایداری منجر می‌شود. برای $ka < ۱$، (یعنی طول‌موج بزرگتر از محیط جت) $\omega^۲$ منفی و ω انگاری است و موجها به‌طور نمایی رشد می‌کنند. فقط ریشهٔ انگاری منفی ω را در نظر می‌گیرند، زیرا سازوکار میرایی وجود ندارد و موج فقط می‌تواند رشد کند. مد ناپایدار $(n = ۰)$ برای $ka < ۱$ با آهنگ $e^{\sigma t} = e^{i\omega t}$ رشد می‌کند، که σ عدد مثبت حقیقی است

$$\sigma = \left[\frac{T}{\rho a^۳}(۱ - k^۲a^۲)\frac{ka\mathrm{I'}_\circ(ka)}{\mathrm{I}_\circ(ka)}\right]^{۱/۲} \tag{۱۳-۴۹}$$

که نمایانگر تقویت انتخابی است و به (ka) با آهنگ رشد بیشینه در $(ka) = ۰٫۷$ بستگی دارد. شکل ۱۳-۱۵ نمودار تغییرات $\sigma^۲$ برحسب (ka) را نشان می‌دهد تقویت جت آب برای قطر یک سانتی‌متر با ضریب ۱۰۰۰ در ۰٫۸ ثانیه، و برای قطر یک میلی‌متر در ۰٫۰۲۵ ثانیه رخ می‌دهد.



شکل ۱۳-۱۵ تقویت انتخابی آشفتگی دایره‌ای روی جت.

۱۳-۱۳ پایداری جریان بین استوانه‌های چرخان

جریان لایه‌ای پایای موجود بین دو استوانه دایره‌ای هم‌محور با دوران نسبی در شرایط خاصی ناپایدار می‌شود. این ناپایداری به جریان لایه‌ای جدید و پیچیده‌تری منجر می‌شود.

جریان لایه‌ای پایای موجود بین دو استوانهٔ دایره‌ای بلند هم‌محور را به شعاع‌های داخلی و خارجی $R_۱$ و $R_۲$، که با سرعتهای زاویه‌ای، به‌ترتیب، $\omega_۱$ و $\omega_۲$ همچون شکل ۱۳-۱۶ می‌چرخند، در نظر می‌گیریم. $\omega_۱$ و $\omega_۲$ ممکن است مثبت یا منفی باشند.

معادلهٔ حرکت برای جریان لایه‌ای بین استوانه‌ها عبارت است از

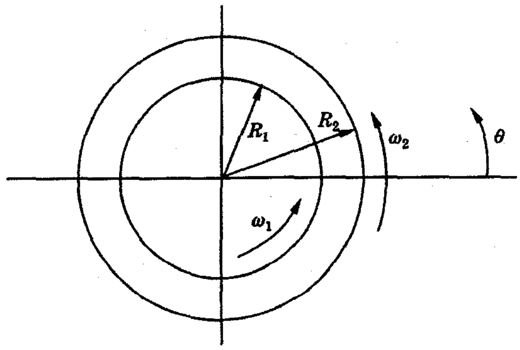
$$\frac{d^۲ v_\theta}{dr^۲} + \frac{۱}{r}\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^۲} = ۰ \qquad (۱۳\text{-}۵۰)$$

با شرایط مرزی

$$v_\theta = R_۱\omega_۱; \quad r = R_۱$$
$$v_\theta = R_۲\omega_۲; \quad r = R_۲$$

حل معادله برای جریان پایا (از مسئلهٔ ۵-۵۶) عبارت است از

$$\begin{aligned} v_\theta &= Ar + \frac{B}{r} \\ A &= \frac{\omega_۲ R_۲^۲ - \omega_۱ R_۱^۲}{R_۲^۲ - R_۱^۲} \\ B &= (\omega_۱ - \omega_۲)\frac{R_۱^۲ R_۲^۲}{R_۲^۲ - R_۱^۲} \end{aligned} \qquad (۱۳\text{-}۵۱)$$



شکل ۱۳-۱۶ دو استوانه دایره‌ای هم‌محور چرخان حاوی شارهٔ گران‌رو.

برای لحظه‌ای شارهٔ چرخانی را، نه الزاماً در بین استوانه‌های چرخان، درنظر بگیرید. تصور کنید که تبادل دو مقدار جزئی از شاره بین شعاع r_1 و شعاع r_2 ($r_2 > r_1$) با حفظ پایستگی تکانه انجام می‌گیرد. سرعت مقدار جزئی واقع در فاصلهٔ r_1، اکنون دارای سرعت $r_1 v_{\theta_1}/r_2$ است. گرادیان فشار موضعی در r_2 از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\left(\frac{dp}{dr}\right)_{r_2} = \frac{\rho v_{\theta_2}^2}{r_2}$$

این مقدار جزئی که اکنون در مکان r_2 قرار دارد، اگر گرادیان فشار بیشتر از مقدار لازم برای خنثی کردن نیروی مرکزگرا باشد، به مکان قبلی خود در r_1 برمی‌گردد (و شاره پایدار است). یعنی اگر،

$$\left(\frac{dp}{dr}\right)_{r_2} > \frac{\rho}{r_2}\left(\frac{r_1 v_{\theta_1}}{r_2}\right)^2 \tag{۱۳-۵۲}$$

اما

$$\frac{v_{\theta_2}^2}{r_2} > \frac{1}{r_2}\left(\frac{r_1 v_{\theta_1}}{r_2}\right)^2$$

درنتیجه، معیار پایداری در شارهٔ چرخان عبارت است از

$$(r_2 v_{\theta_2})^2 > (r_1 v_{\theta_1})^2 \tag{۱۳-۵۳}$$

بهتر است که گردش واحدی را به‌صورت $C = v_{\theta}.r$ برای شاره تعریف کنیم، و بنابراین برحسب C شارهٔ چرخان ناپایدار خواهد بود اگر

$$\frac{d|C|}{dr} < 0 \tag{۱۳-۵۴}$$

با استفاده از این معیار برای استوانه‌های چرخان، داریم

$$\begin{aligned} C &= Ar^2 + B \\ \frac{dC}{dr} &= 2Ar \end{aligned} \tag{۱۳-۵۵}$$

به‌طور اختیاری فرض می‌کنیم که در R_1، $\omega_1 > 0$ و $C > 0$. اکنون، ω_2 ممکن است مثبت یا منفی باشد (استوانه‌ها ممکن است هم‌جهت یا در خلاف جهت هم بچرخند). معیار پایداری عبارت است از

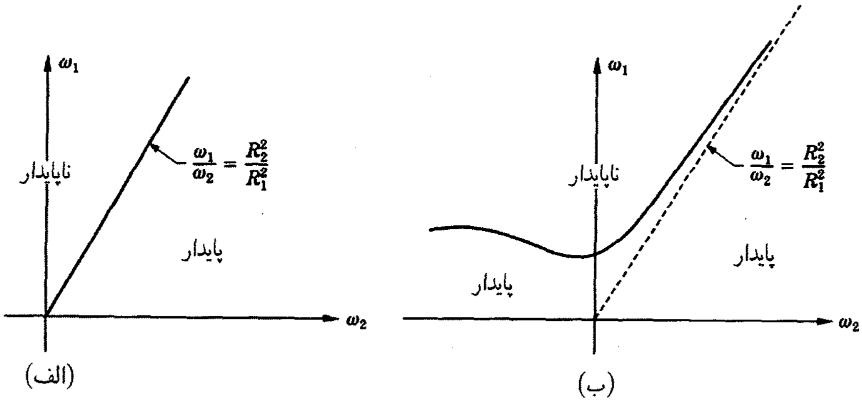
$$\begin{aligned} &\text{پایدار}: \quad \frac{dC}{dr} > 0; \qquad \omega_2 R_2^2 > \omega_1 R_1^2 \\ &\text{ناپایدار}: \quad \frac{dC}{dr} < 0; \qquad \omega_2 R_1^2 < \omega_1 R_1^2 \end{aligned} \tag{۱۳-۵۶}$$

این نتیجه را، که نخست توسط ریلی به‌دست آمد، در شکل ۱۳-۱۷ (الف) به‌صورت نموداری نشان داده‌ایم. ω_2 منفی نشان می‌دهد که استوانه‌ها در خلاف جهت هم می‌چرخند.

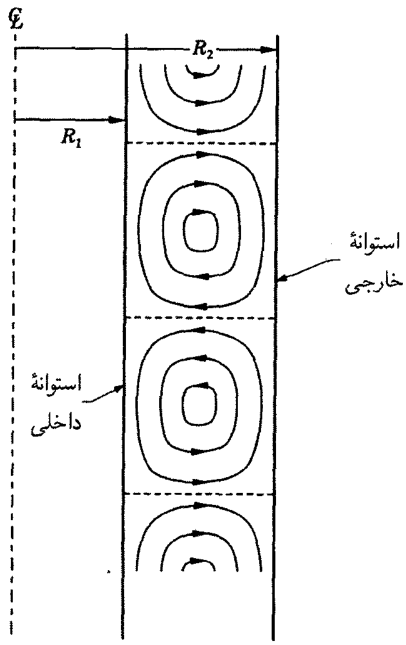
محاسبات پایداری دقیقتر را جی. آی. تایلور (۱۹۲۳) انجام داد. او فرض کرد که آشفتگیهای موج‌گونهٔ متقارن محوری در تمام مؤلفه‌های سرعت وجود دارند. نتیجه‌های او را در شکل ۱۳-۱۷ (ب) نشان داده‌ایم و می‌بینیم که ناحیهٔ پایداری برای $\omega_2 > 0$ در ω_1های کم وجود دارد.

پس از آغاز ناپایداری، جریان پیکربندی پایای دیگری پیدا می‌کند که به مقدار ω_1/ω_2 بستگی دارد. اگر $\omega_1/\omega_2 > 0$ (یعنی استوانه‌ها در جهت یکسان بچرخند) جریان به مجموعهٔ سلولهای چنبره‌ای با گردش در صفحهٔ $r\text{-}z$ تبدیل می‌شود که با سرعت دورانی v_θ برهم نهاده شده است. (شکل ۱۳-۱۸).

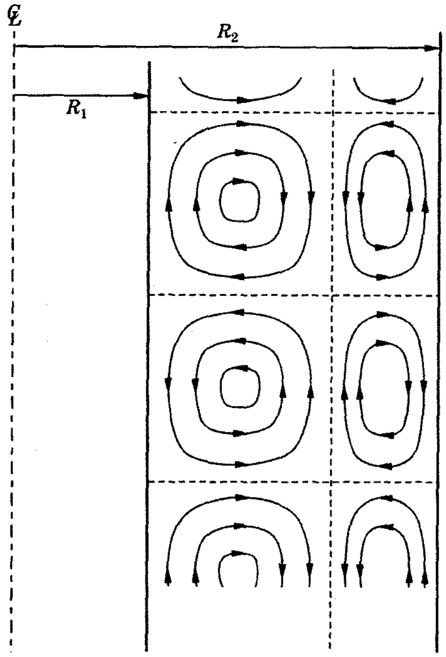
اگر $\omega_1/\omega_2 < 0$، طرح جریان پس از برقرار شدن پیچیده‌تر می‌شود و سلولهای چنبره‌ای دوتایی به‌وجود می‌آید. چنین طرحی را برای $\omega_1/\omega_2 = -1{,}5$ در شکل ۱۳-۱۹ نشان داده‌ایم.



شکل ۱۳-۱۷ نمودار پایداری جریان لایه‌ای بین دو استوانه. (الف) حل ریلی، (ب) تحلیل دقیقتر تایلور.



شکل ۱۳-۱۸ مقطع عمودی استوانه که نمایانگر سلولهای چنبره‌ای برای $\omega_1/\omega_2 > 0$ پس از بروز ناپایداری است. این طرح روی چرخش برهم نهاده شده است.

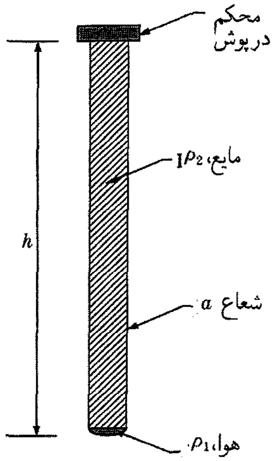


شکل ۱۳-۱۹ سلولهای چنبره‌ای برای $\omega_1/\omega_2 = -1/5$ پس از بروز ناپایداری ° استوانه‌ها در خلاف جهت هم می‌چرخند.

۱۳-۱۴ پایداری فصل مشترک بین شاره‌ها

مرزهای فصل مشترکی بین شاره‌های مختلف ممکن است در شرایط مختلف ناپایدار شوند، که به کاربردهای مهمی منجر می‌شود. اگر شاره‌ها ساکن باشند و شارهٔ سنگین‌تر روی شاره سبک‌تر قرارگیرد؛ ناپایداری به‌وجود می‌آید. سپس، پیکربندی شاره‌ها، با قرارگرفتن شارهٔ سنگین‌تر در زیر، پایدار می‌شود. شاره‌ها ممکن است به‌صورت مایعات اختلاط‌ناپذیر یا گازهایی با چگالیهای متفاوت باشند که همزمان دگرگون و پخش می‌شوند. وقتی دو شاره، که به‌وسیلهٔ فصل مشترک از هم جدا شده‌اند، حرکت نسبی دارند و یا خود فصل مشترک حرکت می‌کند، دو نوع ناپایداری کلی ایجاد می‌شود: (۱) ناپایداری کلوین-هلمهولتز و (۲) ناپایداری ریلی-تایلور.

ناپایداری کلوین-هلمهولتز وقتی رخ می‌دهد که دو مایع متفاوت یا گاز و مایع دارای حرکت نسبی موازی با فصل مشترک دو شاره باشند. در بیشتر مسائل موردنظر، فصل مشترک افقی است، اما لازم نیست این‌طور باشد. موجهای ناشی از نیروهای برشی در فصل مشترک به‌وجود می‌آیند



شکل ۱۳-۲۰ لولهٔ حاوی مایع با چگالی $\rho_۲$ در تعادل استاتیکی. فصل مشترک سطح خمیده‌ای را تشکیل می‌دهد که با کشش سطحی تعیین می‌شود.

و، اگر سرعت نسبی از مقدار بحرانی بیشتر شود، ناپایدار خواهند شد. موجهای سپید نوک اقیانوس نمونه‌ای از ناپایداری موجهای گرانشی سطحی ناشی از وزش باد است.

وقتی نیروهای برشی وجود نداشته یا اهمیت چندانی نداشته باشند، آشفتگیهای فصل مشترک و متعامد به ناپایداری ریلی-تایلور منجر می‌شود. فروپاشی جت مایع از همین نوع ناپایداری است. مثال دیگر، ناپایداری شتاب فصل مشترک است. اگر سیستم مایعات لایه‌ای را عمود بر فصل مشترک در جهت مایع سنگین‌تر شتاب دهیم، به ناپایداری می‌انجامد. اگر فصل مشترک افقی و مایع سنگین‌تر در زیر قرار داشته باشد، با شتاب‌دهی رو به پایین به مقداری بیشتر از شتاب سقوط آزاد g، ناپایداری رخ می‌دهد.

مثال دیگر ناپایداری ریلی-تایلور، فروپاشی سطح آزاد در قسمت زیرین استوانهٔ دایره‌ای صلب قائمی است که با مایع پرشده و قسمت بالای آن مسدود است. نی نوشابه‌ای را به شعاع a که سر آن بسته شده است، یا بطری واژگون‌شده‌ای را که دارای گردن بلندی به شعاع a است، در نظر بگیرید. اگر نی یا بطری با مایعی به چگالی $\rho_۲$ پر شده باشد و ارتفاع قائم آن کمتر از ارتفاع هم‌ارز فشار جو باشد (یعنی، $\rho_۲ gh < p_{\mathrm{atm}}$)، شاره در تعادل استاتیکی خواهد بود و فشار جو بیشتر از فشار هیدروستاتیکی مایع در فصل مشترک می‌شود (شکل ۱۳-۲۰). اما، اگر قطر دهانهٔ لوله بیشتر از مقدار بحرانی‌ای شود که به کشش سطحی مایع بستگی دارد، این فصل مشترک ناپایدار خواهد بود. اگر سطح شاره ناپایدار شود، مایع به بیرون می‌پاشد و یا غلغل می‌کند، زیرا جای آن را هوا می‌گیرد.

کشش سطحی نیروی بازگرداننده در مقابل آشفتگیهایی جزئی در سطح آزاد است که برای طول موجهای کاملاً کوچک میرا می‌شوند. اگر دهانهٔ لوله آن‌قدر بزرگ باشد که طول‌موجها بتوانند بیشتر از مقدار بحرانی شوند، ناپایداری رخ می‌دهد و فصل مشترک گسیخته خواهد شد. در اینجا فقط نتیجهٔ تحلیل را ارائه می‌دهیم. پیکربندی پایدار است، اگر

$$\sigma^۲ g(\rho_۲ - \rho_۱) < T(j'_{۱,۱})^۲ \qquad (۱۳\text{-}۵۷)$$

که a شعاع دهانهٔ لوله، $\rho_۲$ چگالی مایع، $\rho_۱$ چگالی هوا یا گاز دیگر موجود در زیر فصل مشترک و T کشش سطحی فصل مشترکی است. اما $j^{۱}_{۱,۱}$ اولین صفر مثبت مشتق تابع بسل $J'_۱$ از مرتبهٔ یک است. مقدار عددی این اولین صفر مثبت تقریباً ۲٫۰ است. برای لولهٔ آبی که در معرض هوا قرارگرفته است، مقدار T تقریباً $۷۰\,\mathrm{dyn/cm}$ ($۰٫۰۷\mathrm{N/m}$)، و مقدار بحرانی a تقریباً $۰٫۵\mathrm{cm}$ است.

فصل مشترک بین مایع و هوا (یا گاز دیگر) حتماً نباید در لوله باشد، بلکه در هر نقطه‌ای در بالای کف لوله یا استوانه می‌تواند قرارگیرد. شکل فصل مشترک به خیس‌کننده یا غیرخیس‌کننده بودن مایع، و همچنین به مقدارکشش سطحی بستگی دارد. اگر لوله درست تا لبهٔ تیز خود با مایع پر شده باشد، زاویهٔ تماس را می‌توان فقط با مقدار دقیق شارهٔ درون لوله تعیین کرد، و هر مقداری بیشتر از حد بحرانی به‌آسانی بیرون می‌ریزد.

۱۵-۱۳ نکته‌های پایانی

در اینجا فقط به چند مثال دربارهٔ پایداری شاره، عمدتاً مثالهایی که به تجربهٔ روزمرهٔ مربوط می‌شود، پرداخته‌ایم. موضوع کلی از نظر ریاضی پیچیده، و یکی از جالبترین و چالش‌انگیزترین زمینه‌های پژوهشی اخیر است. نتیجهٔ تحلیلهای پایداری کاربردهای مهمی در بسیاری از مسائل مهندسی دارند، که دارای گستره‌ای از جریانهای سادهٔ درون لوله تا طراحی کشتی، طراحی فضاپیما، اثرهای گرمایی و مبادله‌کنهای گرما، تحلیل و پیش‌بینی هوا، بسیاری از مسائل دیگر است.

خوانندگان علاقمند به بررسی بیشتر در این موضوع می‌توانند به مرجعهایی مراجعه کنند که توسط مؤلفان متخصص نوشته شده‌اند و کاملاً خواندنی‌اند.

مراجع

1. Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford, 1961.
2. Drazin, P. G., and Reid, W. H., *Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1981.
3. Lighthill, James, *Waves in Fluids*, Cambridge, 1978.
4. Lin, C. C., *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge, 1955.
5. Morse, P. M., *Vibration and Sound*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1948.
6. Raleigh, Lord, "On the Instability of Jets," *Proc. London Math. Soc.*, 10, p. 4, 1879.
7. Raleigh, Lord, *Theory of Sound*, (2 vols.), 2nd edition, London, Macmillan, 1896 (also Dover, 1945).
8. Sherman, F. S., *Viscous Flow*, McGraw-Hill, 1990.
9. Taylor, G. I., "Stability of a Viscous Liquid Contained Between Two Rotating Cylinders, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A223, p. 289, 1923.

مسائل حل‌شده

۱-۱۳ نشان دهید که سرعت گروه برای موج رونده $\partial\omega/\partial k_r$ است.

دو موج با دامنهٔ مساوی و بسامدهای $\omega_۱$ و $\omega_۲$ را که بسیار نزدیک‌هم‌اند، در نظر بگیرید. می‌توان نوشت که $\omega_\circ = (\omega_۱ + \omega_۲)/۲$، $k_\circ = (\frac{k_۱+k_۲}{۲}) \cdot \Delta\omega = (\omega_۱ - \omega_۲)$ و $\Delta k = k_۱ - k_۲$، $k_\circ$ عدد موج مربوط به $\omega_\circ$، $k_۱$ مربوط به $\omega_۱$ و $k_۲$ مربوط به $\omega_۲$ است. اکنون فرض می‌کنیم که k عددی حقیقی است. جمع موجها به‌صورت زیر است

$$e^{i(\omega_۱ t-k_۱ x)} + e^{i(\omega_۲ t-k_۲ x)}$$

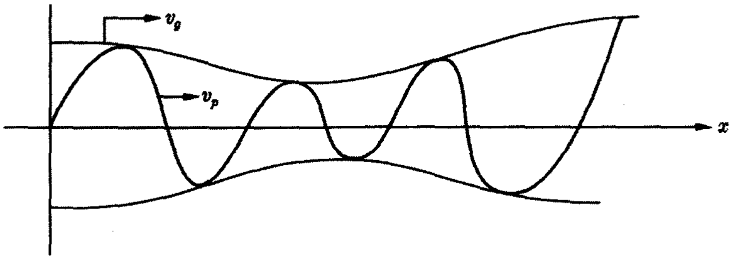
با استفاده از رابطه‌های مثلثاتی زیر

$$\cos A + \cos B = ۲\cos\frac{A+B}{۲}\cdot\cos\frac{A-B}{۲}$$
$$\sin A + \sin B = ۲\sin\frac{A+B}{۲}\cdot\cos\frac{A-B}{۲}$$

جمع این دو موج را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$۲e^{i\{[(\omega_۱+\omega_۲)/۲]t-[(k_۱+k_۲)/۲]x\}}\cdot\cos\left[\frac{(\omega_۱-\omega_۲)t}{۲}-\frac{(k_۱-k_۲)x}{۲}\right]$$

این رابطه، موجی با بسامد $\omega_\circ$ و سرعت فاز $\omega_\circ/k_\circ$ را نشان می‌دهد که از میان موجی پوشی با بسامد $(\omega_۱-\omega_۲)/۲$ حرکت می‌کند و با سرعت گروه $\Delta\omega/\Delta k$ منتشر می‌شود. در حالت حدی، $\Delta\omega$ و بنابراین $\Delta\omega/\Delta k$ کوچک به‌صورت $\partial\omega/\partial k|_{\omega_\circ}$ درمی‌آید که سرعت گروه v_g است. اگر



شکل ۱۳-۲۱ پوش ایجاد شده توسط موج حامل در بسامد $\omega_\circ = (\omega_1 + \omega_2)/2$ با مدوله‌سازی سیگنال در بسامد $(\omega_2 - \omega_1)/2$. اگر پاشندگی رخ دهد، v_g معمولاً کمتر از v_p است اگر پاشندگی وجود نداشته باشد، v_g و v_p مساوی‌اند.

$\Delta\omega$ در مقایسه با $\omega_\circ$ کوچک نباشد، در آن صورت مفهوم سرعت گروه بی‌معنی است. منحنی پوش را می‌توان به‌صورت مدوله‌سازی زنشهای آهسته‌ای پنداشت که باعث لرزش دامنهٔ موج حامل بسامد $\omega_\circ$ می‌شود (شکل۱۳-۲۱ را ببینید.) برای طنین موسیقی ۱۰۰۰Hz که با طنین ۱۰۰۱Hz دیگری برهم نهاده شده است، زنش (یا لرزش دامنه) با بسامد ۰٫۵Hz ایجاد می‌شود (با تناوب ۲ ثانیه)، گام طنین در ۱۰۰۰٫۵ Hz رخ می‌دهد. این پدیده را کوک‌کننده‌های پیانو به‌کار می‌برند تا همه‌سیمهای مربوط به یک نت را تنظیم کنند.

۱۳-۲ معادلهٔ پاشندگی را برای موج صوتی تخت متحرک در هوا به‌دست آورید. هوا با سرعت $U_\circ$ نسبت به ناظر ثابت حرکت می‌کند. هوا در جهت $+x$ حرکت می‌کند.

معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

معادلهٔ پیوستگی عبارت است از

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = \circ$$

و رابطهٔ تک‌آنتروپی عبارت است از

$$P_\gamma^{-\gamma} = p_\circ \rho_\circ^{-\gamma}$$

با خطی کردن، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\rho_\circ\frac{\partial u'}{\partial t} + \rho_\circ U_\circ\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial x}$$
$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_\circ\frac{\partial u'}{\partial x} + U_\circ\frac{\partial \rho'}{\partial x} = \circ$$
$$p' = \frac{\gamma p_\circ \rho'}{\rho_\circ}$$

جوابهای موج تخت را به‌صورت زیر فرض می‌کنیم

$$\rho' = \rho^* e^{i(\omega t - kx)}$$

خواهیم داشت

$$i\omega\rho_\circ u^* - ik\rho_\circ u^* - ikp^* = \circ$$
$$i\omega\rho^* - ik\rho_\circ u^* - ikU_\circ\rho^* = \circ$$
$$p^*\rho_\circ - \gamma p_\circ \rho^* = \circ$$

با بسط دترمینان ضریبها، معادلهٔ پاشندگی به‌دست می‌آید

$$(\omega - kU_\circ)^\text{۲} = \frac{k^\text{۲}\gamma p_\circ}{\rho_\circ}$$

و سرعت فاز برابر است با

$$v_p = \frac{\omega}{k} = U_\circ \pm \sqrt{\frac{\gamma p_\circ}{\rho_\circ}}$$

که نشان می‌دهد این موج با سرعت معمولی صوت نسبت به هوای متحرک انتشار می‌یابد.

۳-۱۳ نشان دهید که موج صوتی کروی متقارن جواب فازور سینوسی به شکل زیر دارد

$$\frac{\text{۱}}{r}e^{i(\omega t - kr)}$$

موجهای صوتی را در هوا در نظر بگیرید. معادلات حاکم عبارت‌اند از

$$\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right] = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\text{۱}}{r^\text{۲}}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^\text{۲} v_r) = \circ$$

$$p\rho^{-\gamma} = p_\circ \rho_\circ^{-\gamma}$$

پس از خطی کردن، داریم

$$\rho_\circ \frac{\partial v_r'}{\partial t} = \frac{-\partial p'}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{p_\circ}{r^\text{۲}}\frac{\partial}{\partial r}(r^\text{۲} v_r') = \circ$$

$$p'\rho_\circ = \gamma p_\circ \rho'$$

با نشاندن جوابهای فازور به شکل بالا، معادلهٔ پاشندگی به‌دست می‌آید

$$\omega^\text{۲} = -\frac{\gamma p_\circ}{\rho_\circ}\left(\frac{\text{۱}}{r} - ik\right)^\text{۲}$$

که k و v_p را به‌دست می‌دهد

$$k = \pm\omega\sqrt{\frac{\rho_\circ}{\gamma p_\circ}} \mp \frac{i}{r}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k_r} = \pm\sqrt{\frac{\gamma p_\circ}{\rho_\circ}}$$

در نتیجه، $k_i = \mp\frac{\text{۱}}{r}$، بنابراین جواب به شکل زیر است

$$\frac{\text{۱}}{r}e^{i(\omega t - k_r r - ik_i r)} = \frac{\text{const.}}{r}e^{i(\omega t - k_r r)}$$

زیرا $k_i r$ مقدار ثابتی دارد. این جواب را می‌توان با نشاندن در معادلهٔ موج در دستگاه مختصات کروی برای هر پارامتر A اثبات کرد:

$$\nabla^{۲}A=\frac{۱}{a^{۲}}\frac{\partial^{۲}A}{\partial t^{۲}},\qquad a=\sqrt{\frac{\gamma p_{۰}}{\rho_{۰}}}$$

۴-۱۳ معادلهٔ پاشندگی را برای موج صوتی تخت در هوا با در نظر گرفتن گران‌روی و رسانش گرما به‌دست آورید.

معادلات حاکم عبارت‌اند از: معادلهٔ حرکت، معادلهٔ پیوستگی، معادلهٔ حالت و معادلهٔ انرژی. رابطهٔ تک‌آنتروپی در اینجا صادق نیست.

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\left(\zeta+\frac{۴}{۳}\mu\right)\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}\\
\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)&=۰\\
p&=\rho RT\\
\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}\right)&=\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\kappa\frac{\partial^{۲}T}{\partial x^{۲}}+\Phi
\end{aligned}$$

در اینجا ζ ضریب دوم گران‌روی است که در بخش ۳-۴ تعریف شد، κ رسانندگی گرمایی و Φ تابع اتلاف است که وقتی تابع را خطی می‌کنیم از مرتبهٔ دو می‌شود و آن را می‌توان نادیده گرفت. با قرار دادن

$$p=p_{۰}+p',\rho=.\rho_{۰}+\rho',T=T_{۰}+T',u=u'$$

معادلات خطی شده به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned}
\rho_{۰}\frac{\partial u'}{\partial t}&=-\frac{\partial p'}{\partial x}+\left(\zeta'+\frac{۴}{۳}\mu\right)\frac{\partial^{۲}u'}{\partial x^{۲}}\\
\rho_{۰}c_p\frac{\partial T'}{\partial t}&=\frac{\partial p'}{\partial t}+\kappa\frac{\partial^{۲}T'}{\partial x^{۲}}\\
\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\rho_{۰}\frac{\partial u'}{\partial x}&=۰\\
\frac{p'}{p_{۰}}&=\frac{T'}{T_{۰}}+\frac{\rho'}{\rho_{۰}}
\end{aligned}$$

با فرض جوابهای فازور سینوسی، داریم

$$\begin{aligned}
i\rho_{۰}\omega u^*-ikp^*+k^{۲}\left(\zeta+\frac{۴}{۳}\mu\right)u^*&=۰\\
i\omega\rho^*-ik\rho_{۰}u^*&=۰\\
\frac{p^*}{p_{۰}}-\frac{T^*}{T_{۰}}-\frac{\rho^*}{\rho_{۰}}&=۰\\
i\omega\rho_{۰}c_pT^*-i\omega p^*+k^{۲}\kappa T^*&=۰
\end{aligned}$$

با تساوی دترمینان ضریب فازورها با صفر معادلهٔ پاشندگی زیر به‌دست می‌آید

$$\left[\frac{\kappa}{\rho_{۰}c_p}+\frac{i\omega\kappa}{p_{۰}\rho_{۰}c_p}\left(\frac{۴}{۳}\mu+\zeta\right)\right]k^{۴}-\left[\frac{\omega^{۲}\kappa}{p_{۰}c_p}-i\omega+\frac{\omega^{۲}}{a^{۲}\rho_{۰}}\left(\frac{۴}{۳}\mu+\zeta\right)\right]k^{۲}-\frac{i\omega^{۳}}{a^{۲}}=۰$$

که برحسب $k^{۲}$، معادلهٔ درجهٔ دو است. k عددی مختلط است و به تضعیف و پاشندگی منجر می‌شود. a سرعت معمولی صوت $\sqrt{\gamma p_\circ/\rho_\circ}$ است. حل صریح معادله را به‌عنوان تمرین به خوانندگان واگذار می‌کنیم.

۱۳-۵ بلندگویی را در نظر بگیرید که با موجهایی سینوسی با دامنهٔ $x_\circ = ۰٫۱۰\,\mathrm{mm}$ کار می‌کند. فرض می‌کنیم که سطح بلندگو تخت است. سرعت موج و دامنهٔ فشار هوا را در صفحهٔ بلندگو محاسبه کنید.

سرعت صفحهٔ u یا جابجایی x را در فاز صفر در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که u در فاز صفر است و بنابراین

$$u = \mathscr{R} u_\circ e^{i\omega t} = u_\circ \cos(\omega t)$$

و

$$x = x^* e^{i\omega t}$$

چون

$$u = \frac{dx}{dt}$$

نتیجه می‌شود که

$$u_\circ = i\omega x^*$$

و

$$x = \frac{u_\circ}{\omega}\sin(\omega t) = x_\circ \sin(\omega t)$$

از معادلهٔ (۱۳-۱۹) نتیجه می‌شود

$$p^* = a\rho_\circ u_\circ$$

فرض می‌کنیم که شرایط محیط استاندارد است و $T_\circ = ۳۰۰\mathrm{K}, p_\circ = ۱۰۱۰۰۰\mathrm{Pa} = ۱۰۱\mathrm{kPa}$. ثابت گازها را $R = ۰٫۲۸۷\ \mathrm{kJ/kg.K}$ فرض می‌کنیم، بنابراین

$$\rho_\circ = p_\circ/RT_\circ = \frac{۱٫۰۱ \times ۱۰^{۵}}{۰٫۲۸۷ \times ۳۰۰} = ۱٫۱۷\ \mathrm{kg/m^۳}$$

بدین ترتیب، سرعت صوت $a = \sqrt{\gamma p_\circ/\rho_\circ} = ۳۴۸\ \mathrm{m/s}$ خواهد بود.

آنگاه دامنهٔ فشار برابر است با

$$p^* = (۳۴۸)\cdot(۱٫۱۷)\cdot(x_\circ\omega) = ۳۴۸ \times ۱۱۷(۲\pi f x_\circ)$$

نتیجه را برای بسامدهای مختلف $\omega = ۲\pi f$ برحسب فشار kPa و psi در جدول زیر آورده‌ایم

f(Hz)	۵۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰٫۰۰۰
p^*(kPa)	۰٫۰۱۲۸	۰٫۰۲۵۶	۰٫۲۵۶	۲٫۵۶
p^*(psi)	۰٫۰۰۱۸۶	۰٫۰۰۳۷	۰٫۰۳۷	۰٫۳۷

می‌بینیم که تغییر فشار برای این دامنهٔ مفروض، مگر در حالتی که بسامد بزرگ می‌شود، ناچیز است. این تغییر فشارهای زیاد غیرواقعی هستند، زیرا تأمین توان لازم برای بلندگو عملی نیست. در بسامدهای بالا دامنهٔ بلندگو در عمل بسیار کوچکتر از مقدار مفروض در بالاست.

۱۳-۶ در مسئلهٔ قبل، توان متوسط لازم برای کارکرد بلندگو با دامنهٔ $۰٫۱\mathrm{mm}$ را به‌دست آورید. آیا دامنهٔ واقعی بلندگو در بسامدهای بالا در عمل خیلی کمتر است؟ مساحت سطح بلندگو را ۰٫۰۱ متر مربع بگیرید.

توان متوسط از متوسط انتگرال حاصلضرب نیروی وارد بر صفحه در سرعت روی بازهٔ زمانی موردنظر به‌دست می‌آید. نیرو دو برابر فشار اختلال ضرب در مساحت سطح بلندگوست، زیرا قسمت عقب بلندگو در معرض رقت یا مکش است، در حالی که قسمت جلو در معرض تراکم خواهد بود، و برعکس. مقدار فشار پایای جو در جلو و عقب یکدیگر را خنثی می‌کنند

$$\text{توان متوسط} = P = \frac{۲}{T}\int_{\circ}^{T} p^*(\cos\omega t)\cdot(u_{\circ}\cos\omega t)A\,dt$$

که T دورهٔ تناوب نوسان است و از رابطهٔ $۲\pi/\omega$ به‌دست می‌آید. مقدار P با توجه به $p^* = a\rho_{\circ}u_{\circ}$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود

$$P = a\rho_{\circ}u_{\circ}^{۲}A = a\rho_{\circ}Ax_{\circ}^{۲}\omega^{۲}$$

نتیجه‌های عددی عبارت‌اند از

$f(z)$	۵۰	۱۰۰	۱۰۰۰
$\mathbf{p}(W)$	۳٫۵	۱۴	۱۴۰۰

می‌بینیم که توان متناسب با مربع بسامد افزایش می‌یابد و هر بلندگوی واقعی با توان چندواتی، دامنه در بسامدهای بالا باید بسیار کم باشد. مشکل بتوان حرکت بلندگوی زیر را با چشم غیرمسلح دید، اما ارتعاش صدای بم به‌آسانی قابل مشاهده است.

۱۳-۷ شعاع احتمالی قطرهٔ آب پس از فروپاشی جت آبی به شعاع a چقدر است؟

با توجه به تحلیل پایداری جت مایع، طول موج آشفتگی‌ای که بیشترین سرعت رشد را دارد، از رابطهٔ $ka = ۰٫۷$ (یعنی $\lambda = ۲\pi a/۰٫۷$) به‌دست می‌آید. حجم جت موجود در یک طول‌موج همزمان با رشد موج معادل مقداری است که برای تشکیل قطره از جت جدا می‌شود. با تساوی این حجم با حجم قطرهٔ کروی به شعاع r، داریم

$$\pi a^{۲}\left(\frac{۲\pi a}{۰٫۷}\right) = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

که $r = ۱٫۹a$ را به‌دست می‌دهد. بنابراین، شعاع قطره تقریباً دو برابر شعاع جت است. این نتیجه را می‌توان به‌آسانی با مشاهدهٔ فروپاشی جت اثبات کرد. مسئلهٔ ۱۳-۱۲ را ببینید.

۱۳-۸ معادلهٔ پاشندگی را برای موجهای تخت صوتی با نادیده گرفتن اثر ضریبهای مرتبهٔ دوم گران‌روی، در شاره‌ای گران‌رو به‌دست آورید.

معادلهٔ ساختمندی مناسبی که فشار و چگالی را در مایع به یکدیگر مرتبط می‌سازد، عبارت است از

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\beta}{\rho}$$

که β مدول حجمی است. با تقریب خوبی تغییرات دما و اثر آنها بر روی چگالی ناچیز است؛ زیرا اتلاف از مرتبهٔ دو، و در تحلیل خطی قابل چشم‌پوشی است (برعکس گاز، که تراکم تک‌آنتروپی دما را تغییر می‌دهد). افزون بر معادلهٔ ساختمندی، معادلهٔ حرکت و معادلهٔ پیوستگی را می‌نویسیم

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = ۰$$

پس از خطی کردن و نشاندن جوابهای فازور، داریم

$$p^* - \frac{\beta}{\rho_\circ}\rho^* = \circ$$
$$i\omega\rho^* - ik\rho_\circ u^* = \circ$$
$$i\omega\rho_\circ u^* - ikp^* + k^۲\mu u^* = \circ$$

با تساوی دترمینان ضریبهای فازور با صفر از طریق قاعدهٔ کرامر، معادلهٔ پاشندگی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\omega(k^۲\mu + i\omega\rho_\circ) - i\beta k^۲ = \circ$$

که در حالت حدی گران‌روی صفر، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$k^۲ = \frac{\omega^۲\rho_\circ}{\beta}$$

و

$$v_p = \pm\sqrt{\beta/\rho_\circ}$$

که $\sqrt{\beta/\rho_\circ}$ سرعت موج صوتی در مایع است.

حل معادله برای $k^۲$ عبارت است از

$$k^۲ = \frac{\omega^۲\rho_\circ}{[\beta + i\omega\mu]}$$

که k از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$k = \pm\sqrt{\frac{\omega^۲\rho_\circ}{\beta^۲ + \omega^۲\mu^۲}} \cdot \sqrt{\beta - i\omega\mu}$$

و می‌توان آن را به دو جزء حقیقی و انگاری تقسیم کرد

$$k_r = \pm\frac{\sqrt{\omega^۲\rho_\circ}}{[\beta^۲ + \omega^۲\mu^۲]^{۱/۴}} \cdot \cos(\frac{\theta}{۲})$$
$$k_i = \mp\frac{\sqrt{\omega^۲\rho_\circ}}{[\beta^۲ + \omega^۲\mu^۲]^{۱/۴}} \cdot \sin(\frac{\theta}{۲})$$
$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{\omega\mu}{\beta}\right)$$

با استفاده از فرمول نیم زاویه، k_r و k_i را به صورت زیر می‌توان بیان کرد

$$k_r = \pm\sqrt{\frac{\omega^۲\rho_\circ}{۲}}\left[\frac{\sqrt{\beta^۲ + \omega^۲\mu^۲} + \beta}{\beta^۲ + \omega^۲\mu^۲}\right]^{۱/۲}$$
$$k_i = \mp\sqrt{\frac{\omega^۲\rho_\circ}{۲}}\left[\frac{\sqrt{\beta^۲ + \omega^۲\mu^۲} - \beta}{\beta^۲ + \omega^۲\mu^۲}\right]^{۱/۲}$$

علامت مثبت k_r و علامت منفی متناظر برای k_i بیانگر موج تضعیف شونده‌ای است که در جهت مثبت x حرکت می‌کند. در حد، وقتی $\mu = 0$، سرعت معمولی صوت $\sqrt{\beta/\rho_0}$. به‌دست می‌آید. با در نظر گرفتن گران‌روی درمی‌یابیم که ω/k_r تابع ω است. برای بحث بیشتر دربارهٔ تأثیر گران‌روی بر روی سرعت صوت مسئلهٔ ۱۳-۱۵ را ببینید.

مقدارهای β و μ برای آب به گونه‌ای است که اثرهای تضعیف را، بجز در فاصله‌های دور، می‌توان نادیده گرفت. اما، اگر ضریب دوم گران‌روی تحلیل منظور شود، می‌توان دید که درواقع میزان تضعیف قدری بیشتر از مقدار پیش‌بینی شده به‌وسیلهٔ معادلات قبلی است. ضریب دوم گران‌روی به بسامد بستگی دارد و به سادگی نمی‌توان نتیجه‌های قبل را برای بیان تأثیر آن اصلاح کرد.

مسائل تکمیلی

۱۳-۹ رابطه‌های مستقیم k_r و k_i را برای موجهای صوتی در گاز گران‌رو به‌دست آورید. چگونه تضعیف برحسب بسامد تغییر می‌کند؟ آیا این نتیجه علت استفاده از صدای کم‌بسامد را در شیپور احتیاط (بوق مه) توضیح می‌دهد؟

۱۳-۱۰ نمودار دامنهٔ جهش صدای بلندگو را برای بلندگوی مسئله‌های ۱۳-۵ و ۱۳-۶ برحسب بسامد برای توان ورودی ثابت رسم کنید. این کار را برای توان ۱ وات و ۵۰ وات انجام دهید. فرض کنید که این بلندگو مخروطی به قطر ۶ اینچ است. بلندگویی واقعی را مشاهده کنید. آیا می‌توان دید که مخروط بلندگو حرکت می‌کند؟ درخصوص بلندگوی بم در بسامد خیلی پایین چطور؟

۱۳-۱۱ مسئلهٔ فروپاشی جت مایع را با استفاده از معیار پایداری فضایی و مختلط بودن k و حقیقی بودن ω در چارچوب مرجع متصل به شیپوره نشان دهید (ولی حل نکنید).

۱۳-۱۲ آزمایشهای ساده زیر را انجام دهید.

(الف) آب بطری را به آهستگی خالی کنید، یا شیر آب را طوری باز کنید که جریان آب لایه‌ای باشد. تشکیل موجک را بر روی سطح در پایین‌دست جریان و فروپاشی جت آب و قطره‌ای شدن آن را مشاهده کنید. (ب) بطری‌ای را تا نیمه با آب پر کنید، سپس بقیهٔ بطری را با روغن آشپزی یا روغن موتور پر کنید. صبر کنید تا مایع به حالت سکون برسد. در بطری را ببندید و بلافاصله آن را وارونه کنید. با عبور ذرات روغن از درون آب، پس از مدتی دوباره آب در زیر و روغن در بالا قرار می‌گیرد. (ج) سنگ‌ریزه‌ای را به درون استخر آب ساکنی پرتاب کنید. به چینهای دایره‌ای تشکیل شده توجه کنید. آیا می‌توانید آثار پاشندگی را ببینید؟ (د) اگر فرصت بازدید از ساحل دریا را یافتید، توجه کنید که موجهای دریا می‌خواهند خود را با لبهٔ ساحل همراستا کنند. وقتی باد شدید است، موجهای سپید نوک روی دریا را مشاهده کنید.

۱۳-۱۳ با استفاده از نتیجه‌های مسئلهٔ ۱۳-۸ اثرهای گران‌روی را روی سرعت صوت، پاشندگی و تضعیف تعیین کنید. سعی کنید با قرار دادن چند عدد حقیقی اهمیت اثرهای گران‌روی را بررسی کنید. سرعت صوت و ضریب تضعیف k_i را برای آب دریا در بسامد کم ۱۰ هرتز و بسامد زیاد 10^4 هرتز به‌دست آورید. نتیجهٔ محاسبات را بیان کنید. چه فاصله‌هایی لازم است تا اثرهای تضعیف مشاهده شود؟ آیا این نتیجه‌ها اطلاعاتی دربارهٔ اطلاع‌رسانی نهنگها در فاصله‌های دور به شما می‌دهد؟

البته در دنیا واقعی، موجهای تولید شده توسط مبدل در آب به‌صورت استوانه‌ای، کروی یا به شکلی پیچیده‌تر است، بنابراین چگالی انرژی حتی بدون عامل تضعیف کاهش می‌یابد. موجهای کروی در فضا به‌صورت سینوسی ظاهر می‌شوند و دامنهٔ آنها برحسب $1/r$ کاهش می‌یابد. موجهای استوانه‌ای در تغییرات فضایی تابع بسل هستند، اما در دوردست رفتار سینوسی دارند. وانگهی، ضریب دوم گران‌روی برحسب اثرهای گران‌روی افزایش می‌یابد.

۱۳-۱۴ مثال بارز ناپایداری شدید ریلی-تایلور را می‌توانید به‌صورت زیر مشاهده کنید. فنجان پلی‌استیرنی قهوه را تقریباً با قهوه یا آب پر کنید (البته نه کاملاً پر). (قهوه با شیر نتیجهٔ بهتری دارد.) فنجان پلی‌استیرنی را روی سطح تخت سختی، ترجیحاً میز فورمیکا یا پیش‌خوان قرار دهید.

در حالی که فنجان بی‌حرکت روی میز قرار دارد، وسط آن را بین انگشتان شست و اشاره نگه دارید. سعی کنید هیچ‌گونه نیروی عمودی به فنجان وارد نشود. فنجان را به آرامی و نرمی روی میز بلغزانید. در سرعتی خاص، چینهایی روی سطح قهوه ظاهر می‌شوند که رشد می‌کنند و به شکل میخ در می‌آیند و سرانجام از سطح قهوه جدا می‌شوند و به‌صورت قطره به هوا می‌روند. فنجان در حین حرکت بر روی میز تق‌تق می‌کند. اگر نتوانستید موجها را برانگیخته کنید، سرعت را تغییر دهید و سعی کنید فنجان را به آرامی نگه‌دارید. همچنین، باید از فنجان پلی‌استیرنی استفاده کنید، نه فنجان کاغذی یا پلاستیکی. آیا می‌توانید توضیح دهید چه مشاهده کرده‌اید؟

نمادگذاریهای فصل ۱۳

$a =$ سرعت صوت، شعاع
$c_p =$ گرمای ویژه در فشار ثابت
$c_v =$ گرمای ویژه در حجم ثابت
$f =$ بسامد در دور بر ثانیه، هرتز (Hz)
$g =$ شتاب ناشی از گرانش
$h =$ ارتفاع شاره
$i =$ $\sqrt{-۱}$
$k =$ ثابت انتشار، عدد موج
$k_r =$ جزء حقیقی ثابت انتشار (عدد موج)
$k_i =$ جزء انگاری ثابت انتشار (ثابت تضعیف)
$p =$ فشار
$P =$ توان
$r =$ مختصهٔ شعاعی، شعاع
$R =$ ثابت گاز، شعاع
$\mathscr{R} =$ جزء حقیقی
$T =$ دورهٔ تناوب، دما، کشش سطحی
$t =$ زمان
$u =$ سرعت در جهت x
$\nu_r =$ سرعت در جهت r در مختصات استوانه‌ای و کروی
$v_\theta =$ سرعت در جهت افقی در مختصات استوانه‌ای و کروی
$v_p =$ سرعت فاز
$v_g =$ سرعت گروه
$\beta =$ مدول کپه‌ای
$\gamma =$ نسبت گرماهای ویژه
$\zeta =$ ضریب گران‌روی دوم
$\eta =$ انحراف از شکل دایره‌ای
$\kappa =$ رسانندگی گرمایی
$\lambda =$ طول موج
$\mu =$ گران‌روی
$\nu =$ گران‌روی جنبشی
$\rho =$ چگالی

$\sigma =$ ثابت رشد

$\phi =$ پتانسیل سرعت

$\varphi =$ زاویهٔ فاز

$\Phi =$ تابع اتلاف، تابع r در معادلهٔ دیفرانسیلی جزئی

$\omega =$ بسامد زاویه‌ای، شعاع در ثانیه

$()_\circ =$ خاصیت پایا یا محیط، دامنه

$()^* =$ دامنهٔ فازور

$()_r =$ جزء حقیقی

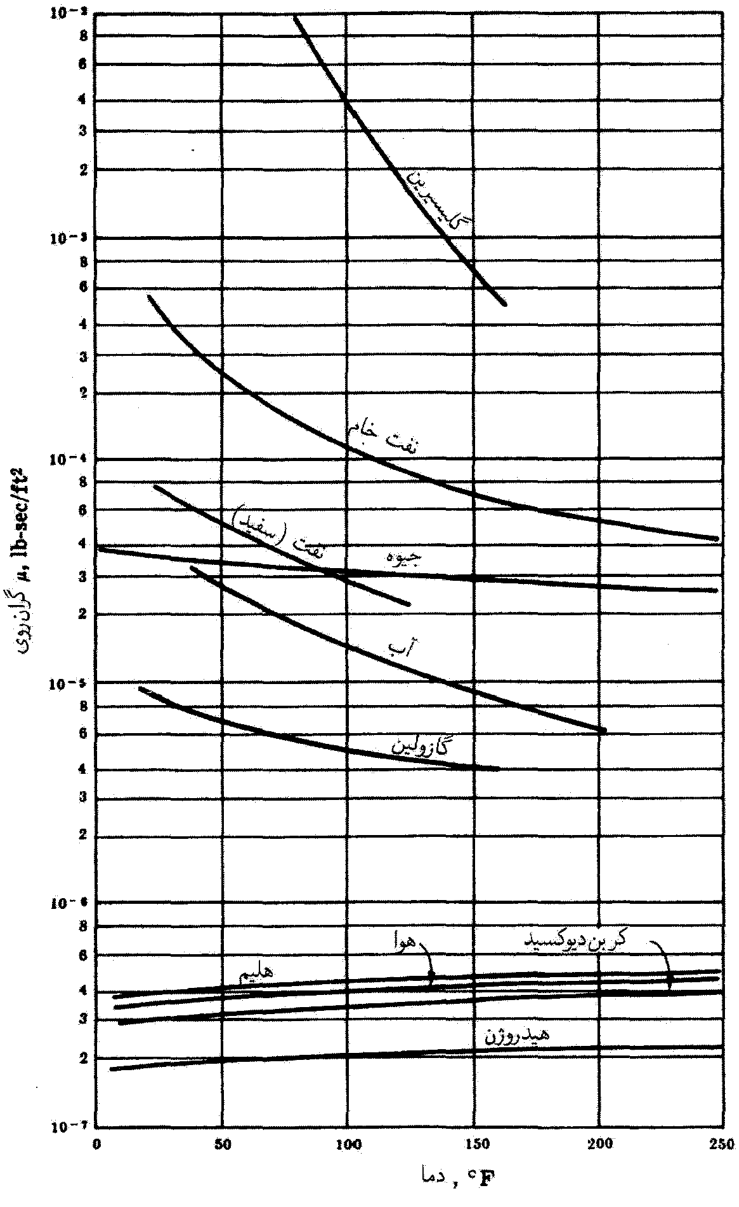
$()_i =$ جزء انگاری

$()' =$ کمیت اختلالی

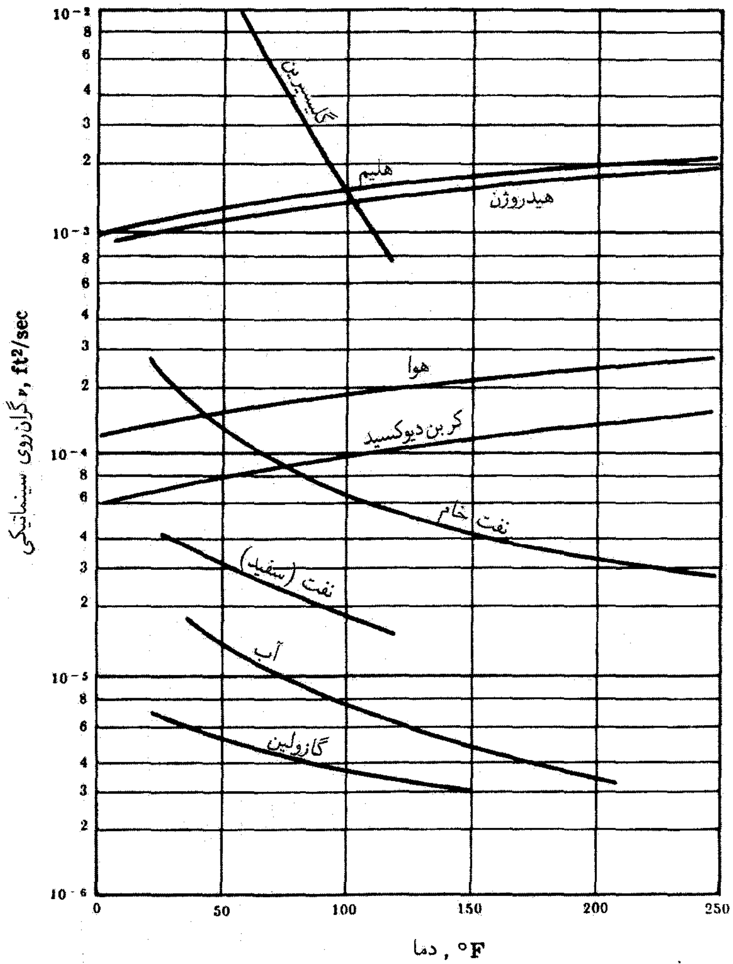
$()_{\mathrm{at}} =$ مقدار جوی

پیوست الف

بعضی از خواص شاره‌ها



شکل الف-۱ گران‌روی مطلق چند شاره.



شکل الف-۲ گران‌روی سینماتیکی چندشاره.

جدول الف-۱ خواص آب در فشار جو

دما		چگالی			گران‌روی			گران‌روی سینماتیکی		
°C	°F	g/cm^3	kg/m^3	$slugs/ft^3$	$dyn \cdot s/cm^2$ (poise)	$Pa \cdot s$ ($N \cdot s/m^2$)	$lb_f \cdot s/ft^2$	cm^2/s (stoke)	m^2/s	ft^2/s
0	32	0.99987	999.87	1.940	1.794×10^{-2}	1.794×10^{-3}	3.746×10^{-5}	1.794×10^{-2}	1.794×10^{-6}	1.930×10^{-5}
4	39	1.00000	1000.00	1.941	1.568	1.568	3.274	1.568	1.568	1.687
5	41	0.99999	999.99	1.941	1.519	1.519	3.172	1.519	1.519	1.634
10	50	0.99973	999.73	1.940	1.310	1.310	2.735	1.310	1.310	1.407
15	59	0.99913	999.13	1.940	1.145	1.145	2.391	1.146	1.146	1.233
20	68	0.998	998.00	1.937	1.009	1.009	2.107	1.011	1.011	1.088
30	86	0.996	996.00	1.932	0.800	0.800	1.670	0.803	0.803	0.864
40	104	0.992	992.00	1.925	0.654	0.654	1.366	0.659	0.659	0.709
50	122	0.988	988.00	1.917	0.549	0.549	1.146	0.556	0.556	0.598
60	140	0.983	983.00	1.907	0.470	0.470	0.981	0.478	0.478	0.514
70	158	0.978	978.00	1.897	0.407	0.407	0.850	0.416	0.416	0.448
80	176	0.972	972.00	1.885	0.357	0.357	0.745	0.367	0.367	0.395
90	194	0.965	965.00	1.872	0.317	0.317	0.662	0.328	0.328	0.353
100	212	0.958	958.00	1.858	0.284	0.284	0.593	0.296	0.296	0.318

جدول الف-۲ خواص هوا در فشار جو

دما		چگالی			گران‌روی			گران‌روی سینماتیکی		
°C	°F	g/cm^3	kg/m^3	$slugs/ft^3$	$dyn \cdot s/cm^2$ (poise)	$Pa \cdot s$ ($N \cdot s/m^2$)	$lb_f \cdot s/ft^2$	cm^2/s (stoke)	m^2/s	ft^2/s
0	32	1.293×10^{-3}	1.293	2.510×10^{-3}	1.709×10^{-4}	1.709×10^{-5}	3.568×10^{-7}	0.1322	1.322×10^{-5}	1.427×10^{-4}
50	122	1.093	1.093	2.122	1.951	1.951	4.074	0.1785	1.785	1.921
100	212	0.946	0.946	1.836	2.175	2.175	4.541	0.2299	2.299	2.474
150	302	0.834	0.834	1.619	2.385	2.385	4.980	0.2860	2.860	3.077
200	392	0.746	0.746	1.448	2.582	2.582	5.391	0.3461	3.461	3.724
250	482	0.675	0.675	1.310	2.770	2.770	5.784	0.4104	4.104	4.416
300	572	0.616	0.616	1.196	2.946	2.946	6.151	0.4782	4.782	5.145
350	662	0.567	0.567	1.101	3.113	3.113	6.500	0.5490	5.490	5.907
400	752	0.525	0.525	1.019	3.277	3.277	6.842	0.6246	6.246	6.721
450	842	0.488	0.488	0.947	3.433	3.433	7.168	0.7035	7.035	7.570
500	932	0.457	0.457	0.887	3.583	3.583	7.481	0.7840	7.840	8.436

جدول الف-۳ خواص هوا در شرایط متعارف[1]

وزن مولکولی	R	c_p	c_v	k
۲۸.۹۷	۵۳٫۳۴ $\frac{\text{ft-lb}_\text{f}}{\text{lb}_\text{m}{}^\circ\text{R}}$	۰٫۲۴۰ $\frac{\text{Btu}}{\text{lb}_\text{m}{}^\circ\text{R}}$	۰٫۱۷۱ $\frac{\text{Btu}}{\text{lb}_\text{m}{}^\circ\text{R}}$	۱٫۴
	۱۷۱۶ $\frac{\text{ft-lb}_\text{f}}{\text{slug}{}^\circ\text{R}}$	۷٫۷۲ $\frac{\text{Btu}}{\text{slug}{}^\circ\text{R}}$	۵٫۵۰ $\frac{\text{Btu}}{\text{slug}{}^\circ\text{R}}$	
	۰٫۲۸۷ $\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$	۱٫۰۰۳۵ $\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$	۰٫۷۱۶۵ $\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$	

۱. مقدار یکاهای SI در دمای ۳۰۰K داده شده‌اند.

جدول الف-۴ خواص آب در شرایط متعارف

کشش سطحی T	مدول کپه‌ای β
۷۰ × ۱۰$^{-۳}$ $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	۲٫۰۶ × ۱۰^{۶}kPa
۳٫۹۸ × ۱۰$^{-۴}$ $\frac{\text{lb}_\text{f}}{\text{in.}}$	۳ × ۱۰^{۵}psi

پیوست ب

یکاها و بُعدها

در مکانیک شاره‌ها، با کمیتهای قابل اندازه‌گیری همچون فشار، سرعت، چگالی و گران‌روی سروکار داریم. این کمیتها را از طریق معادلات به دست‌آمده از تعریف قانونها به هم مرتبط می‌کنند. هر یک از این معادلات شامل چند یا همهٔ بُعدهای اصلی نیرو (F)، جرم (M)، طول (L)، زمان (t)، و دما (θ) هستند. برای هدفهای کمّی باید مجموعهٔ یکاهایی را برای این بُعدهای اصلی تعریف کرد. [در نظریهٔ الکترومغناطیس یک بُعد اصلی دیگری وجود دارد (که اختیاری است)]. برای سادگی، غالباً این بُعد را بار الکتریکی در نظر می‌گیرند که در سیستم یکاهای mks برحسب کولن اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین در مغناطوهیدرودینامیک پنج بُعد اصلی وجود دارد.

معادلات بیان‌کنندهٔ رابطه‌های بین کمیتهای فیزیکی از نظر ابعادی باید همگن باشند. یعنی هر یک از جمله‌های معادله باید بُعدهای یکسانی داشته باشند.

مشکل وقتی به وجود می‌آید که یکاهای جرم و نیرو به طور مستقل تعریف می‌شوند. شیوه‌های متفاوت مرتبط با مکانیک شاره‌ها، همچون آئرودینامیک، ترمودینامیک، و انتقال گرما هرکدام سیستم یکاهای خاص خود را در برخورد با این مسئله دارند ـ بهترین سیستمی که متناسب با کار آنهاست.

با توجه به قانون نیوتون، نیرو و جرم بُعدهای مستقلی نیستند. نیرو متناسب با حاصل‌ضرب جرم در شتاب است، یعنی

$$\mathbf{F} \propto m\mathbf{a}$$

و با توجه به لزوم همگنی ابعادی، داریم

$$(M) = \left(\frac{FT^{2}}{L}\right) \quad \text{یا} \quad (F) = \left(\frac{ML}{T^{2}}\right)$$

انتخاب واقعی بعدهای اصلی قدری اختیاری است. ممکن است از سیستم F، L، T، θ یا سیستم M، L، T، θ استفاده کرد. سپس می‌توان تمام بعدهای دیگر را برحسب بعدهای اصلی مستقل انتخاب شده توسط قانونها و تعریفها بیان کرد.

اکنون می‌توان با استفاده از قانون نیوتون یکای جرم را برحسب نیرو و شتاب تعریف کرد. آنگاه

$$m = \frac{F}{a} \quad \text{یا} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

اگر یکای نیرو $\mathrm{lb_f}$ و یکای شتاب $\mathrm{ft/s^۲}$ باشد، آنگاه یکای جرم عبارت است از

$$\frac{\mathrm{lb_f s^۲}}{\mathrm{ft}}$$

این مقدار جرمی است که وقتی نیروی $\mathrm{۱lb_f}$ به آن وارد شود شتابی برابر $\mathrm{۱ft/s^۲}$ پیدا می‌کند. این یکای جرم را اسلاگ می‌گویند.

در سیستم یکاهای SI (سیستم یکای جهانی) یکای نیرو را نیوتون (N) و شتاب را $\mathrm{m/s^۲}$ می‌گیرند. یکای جرم عبارت است از

$$\frac{\mathrm{Ns^۲}}{\mathrm{m}}$$

این مقدار جرمی است که اگر نیروی ۱ N به آن وارد شود، شتاب $\mathrm{۱m/s^۲}$ پیدا می‌کند. یکای جرم را کیلوگرم (kg) می‌گویند.

یکای دیگری برای جرم مستقل از قانون نیوتون تعریف شده است. جرم پوند ($\mathrm{lb_m}$) مقدار جرمی است که (در نقطه‌ای خاص) با نیروی $\mathrm{۱lb_f}$ به سوی سطح زمین کشیده می‌شود. وقتی یکاهای نیرو و جرم مستقل از قانون نیوتون تعریف می‌شوند، باید این معادله را برای همگن کردن ابعادی با ضریب تبدیل k به کار برد. در این صورت، داریم

$$\mathbf{F} = \frac{۱}{g_c} m\mathbf{a} \quad \text{یا} \quad \mathbf{F} = km\mathbf{a}$$

و

$$g_c = \frac{ma}{F}$$

کمیت g_c مقداری عددی و یکاهایی دارد که به یکاهای خاص انتخاب شده برای نیرو، جرم و شتاب بستگی خواهد داشت. برخی از مجموعه مقدارهای خاص عبارت‌اند از

$$\mathrm{g_c} = \frac{۱\mathrm{(slug)(ft/s^۲)}}{\mathrm{lb_f}} \qquad \mathrm{g_c} = \frac{۱\mathrm{(g)(cm/s^۲)}}{\mathrm{dyn}}$$

$$\mathrm{g_c} = \frac{۳۲٫۲\mathrm{(lb_m)(ft/s^۲)}}{\mathrm{lb_f}} \qquad \mathrm{g_c} = \frac{۱\mathrm{(kg)(m/s^۲)}}{\mathrm{N}}$$

$$\mathrm{g_c} = \frac{۹٫۸\mathrm{(kg_m)(k/s^۲)}}{\mathrm{kg_f}}$$

که

$$۱\mathrm{slug} = ۳۲٫۲\ \mathrm{lb_m}$$

و متذکر می‌شویم که وقتی نیروی ۱ $\mathrm{lb_f}$ به آن اعمال شود شتاب ۳۲٫۲ $\mathrm{ft/s^۲}$ پیدا می‌کند. اسلاگ یا کیلوگرم یکاهای جرم به کار رفته در این کتاب هستند و بنابراین $\mathrm{g_c}$ در معادلات ظاهر نمی‌شود.

چند کمیت فیزیکی و بعدهای آنها را در جدول ب-۱ و برخی از ضریبهای تبدیل را در جدول ب-۲ آورده‌ایم.

روش صحیح تبدیل یکاها را در مثال زیر نشان داده‌ایم. حل عددی $h_\circ$ را برحسب $\mathrm{ft lb_f/lb_m}$ به دست آورید؛ مقدار عددی هر یک از کمیت‌های طرف راست را برحسب یکاهای زیر بیان کرده‌ایم.

$$h_\circ = u + pv + \frac{V^۲}{۲}$$

$$u = A\frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{lb_m}} \qquad p = B\frac{\mathrm{lb_f}}{\mathrm{in}^۲} \qquad v = C\frac{\mathrm{ft}^۳}{\mathrm{lb_m}} \qquad V = D\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}}$$

با نشاندن مقدارهای عددی در این معادله، همراه با یکاها و تبدیلها، داریم

$$\begin{aligned} h_\circ &= A\frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{lb_m}} \times \frac{۷۷۸\mathrm{ft\,lb_f}}{\mathrm{Btu}} + B\frac{\mathrm{lb_f}}{\mathrm{in}^۲}C\frac{\mathrm{ft}^۳}{\mathrm{lb_m}} \times \frac{۱۴۴\mathrm{in}^۲}{\mathrm{ft}^۲} + \frac{D_۲}{۲}\frac{\mathrm{ft}^۲}{\mathrm{s}^۲} \times \frac{\mathrm{s}^۲\ \mathrm{lb_f}}{۳۲٫۲\ \mathrm{lb_m ft}} \\ &= \left(۷۷۸A + ۱۴۴BC + \frac{D^۲}{۲(۳۲٫۲)}\right)\frac{\mathrm{ft\,lb_f}}{\mathrm{lb_m}} \end{aligned}$$

بنابراین می‌بینیم که g_c به عنوان ضریب تبدیل عمل می‌کند.

به طور خلاصه، نوشتن معادلهٔ $F = ma$ در سیستم یکاهای مختلف سودمند است. معادلات زیر رابطهٔ بین بعدها و یکاها را (در حالتی که از g_c استفاده نمی‌شود) نشان می‌دهند.

$$\begin{aligned} \mathrm{CGS} &\Rightarrow F(\mathrm{dyn}) = m(\mathrm{g}) \times a(\mathrm{cm/s}^۲) \\ \mathrm{SI} &\Rightarrow F(\mathrm{N}) = m(\mathrm{kg}) \times a(\mathrm{m/s}^۲) \\ \mathrm{FPS} &\Rightarrow F(\mathrm{pdl}) = m(\mathrm{lb_m}) \times a(\mathrm{ft/s}^۲) \\ \mathrm{FSS} &\Rightarrow F(\mathrm{lb_f}) = m(\mathrm{slug}) \times a(\mathrm{ft/s}^۲) \end{aligned}$$

جدول ب-۱ بعدها و یکاها

کمیت فیزیکی	بعدها		یکاها			
			متریک		انگلیسی	
	سیستم MLT	سیستم FLT	سیستم CGS	سیستم SI	سیستم FPS	سیستم مهندسی
طول	L	L	cm	m	ft	ft
جرم	M	$FL^{-۱}T^{۲}$	gm	kg	lb$_{\mathrm{m}}$	slug
زمان	T	T	s	s	s	s
سرعت	$LT^{-۱}$	$LT^{-۱}$	cm/s	m/s	ft/s	ft/s
شتاب	$LT^{-۲}$	$LT^{-۲}$	cm/s^{۲}	m/s^{۲}	ft/s^{۲}	ft/s^{۲}
نیرو	$MLT^{-۲}$	F	gm cm/s^{۲} = dyn	kg m/s^{۲} = N	lb$_{\mathrm{m}}$ft/s^{۲} = poundal	slug ft/s^{۲} = lb$_{\mathrm{f}}$
تکانه، ضربه	$MLT^{-۱}$	FT	gm cm/s = dyn/s	kg m/s = N s	lb$_{\mathrm{m}}$ft/s = pdl s	slug ft/s = lb$_{\mathrm{f}}$ s
انرژی، کار	$ML^{۲}T^{-۲}$	FL	gm cm^{۲}/s^{۲} = dyn cm = erg	kg m^{۲}/s^{۲} = N m = J	lb$_{\mathrm{m}}$ft^{۲}/s^{۲} = ft pdl	slug ft^{۲}/s^{۲} = ft lb$_{\mathrm{f}}$
توان	$ML^{۲}T^{-۳}$	$FLT^{-۱}$	gm cm^{۲}/s^{۳} = dyn cm/s = erg/s	kg m^{۲}/s^{۳} = J/s = watt	lb$_{\mathrm{m}}$ft^{۲}/s^{۳} = ft pbl/s	slug ft^{۲}/s^{۳} = ft lb$_{\mathrm{f}}$/s
چگالی	$ML^{-۳}$	$FL^{-۴}T^{۲}$	gm/cm^{۳}	kg/m^{۳}	lb$_{\mathrm{m}}$/ft^{۳}	slug/ft^{۳}
سرعت زاویه‌ای	$T^{-۱}$	$T^{-۱}$	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
شتاب زاویه‌ای	$T^{-۲}$	$T^{-۲}$	rad/s^{۲}	rad/s^{۲}	rad/s^{۲}	rad/s^{۲}
گشتاور	$ML^{۲}T^{-۲}$	FL	gm cm^{۲}/ s^{۲} = dyn cm	kgm^{۲}/s^{۲} = Nm	lb$_{\mathrm{m}}$ft^{۲}/s^{۲} = ft pdl	slug ft^{۲}/s = ft lb$_{\mathrm{f}}$
تکانهٔ زاویه‌ای	$ML^{۲}T^{-۱}$	FLT	gm cm^{۲}/s	kg m^{۲}/s	lb$_{\mathrm{m}}$ft^{۲}/s	slug ft^{۲}/s
گشتاور لختی	$ML^{۲}$	$FLT^{۲}$	gm cm^{۲}	kg m^{۲}	lb$_{\mathrm{m}}$ft^{۲}	slug ft^{۲}
فشار، تنش	$\mathrm{ML^{-۱}T^{-۲}}$	$FL^{-۲}$	gm/(cm s^{۲}) = dyn/ cm^{۲}	kg/ (ms^{۲}) = N/m^{۲}	pdl/ft^{۲}	lb$_{\mathrm{f}}$/ft^{۲}
گران‌روی (μ)	$ML^{-۱}T^{-۱}$	$FL^{-۲}T$	gm/(cm s) = dyn s/cm^{۲}	kg/ (ms) = Ns/m^{۲}	lb$_{\mathrm{m}}$/(ft s) = pdl s/ft^{۲}	slug/(ft s) = lb$_{\mathrm{f}}$ s/ft^{۲}
گران‌روی سینماتیکی(ν)	$L^{۲}T^{-۱}$	$L^{۲}T^{-۱}$	cm^{۲}/s	m^{۲}/s	ft^{۲}/s	ft^{۲}/s
کشش سطحی	$MT^{-۲}$	$FL^{-۱}$	gm/s = dyn/cm	kg/s^{۲} = N/m	lb$_{\mathrm{m}}$/s^{۲} = pdl/ft	slug/s^{۲} = lb$_{\mathrm{f}}$/ft

جدول ب-۲ تبدیل یکاها

طول	1 kilometer (km) $=1000$ meters 1 meter (m) $=100$ centimeters 1 centimeter (cm) $= 10^{-2}$ m 1 millimeter (mm) $= 10^{-3}$ m 1 micron (μ) $= 10^{-6}$ m 1 millimicron (mμ) $= 10^{-9}$ m 1 angstrom (A) $= 10^{-10}$ m 1 inch (in.) $= 2.540$ cm 1 foot (ft) $= 30.48$ cm 1 mile (mi) $= 1.609$ km 1 mil $= 10^{-3}$ in. 1 centimeter $= 0.3937$ in. 1 meter $= 39.37$ in. 1 kilometer $= 0.6214$ mile
مساحت	1 square meter (m^2) $= 10.76$ ft^2 1 square foot (ft^2) $= 929$ cm^2
حجم	1 liter (l) $= 1000$ cm^3 $= 1.057$ quart (qt) $= 61.02$ in^3 $= 0.03532$ ft^3 1 cubic meter (m^3) $= 1000$ l $= 35.32$ ft^3 1 cubic foot (ft^3) $= 7.481$ U.S. gal $= 0.02832$ m^3 $= 28.32$ l 1 U.S. gallon (gal) $= 231$ in^3 $= 3.785$ l; 1 British gallon $= 1.201$ U.S. gallon $= 277.4$ in^3
جرم	1 kilogram (kg) $= 2.2046$ lb_m $= 0.06852$ slug; 1 lb_m $= 453.6$ gm $= 0.03108$ slug 1 slug $= 32.174$ lb_m $= 14.59$ kg
سرعت	1 km/h $= 0.2778$ m/s $= 0.6214$ mi/h $= 0.9113$ ft/s 1 mi/h $= 1.467$ ft/s $= 1.609$ km/h $= 0.4470$ m/s
چگالی	1 gm/cm^3 $= 10^3$ kg/m^3 $= 62.43$ lb_m/ft^3 $= 1.940$ $slug/ft^3$ 1 lb_m/ft^3 $= 0.01602$ gm/cm^3; 1 $slug/ft^3$ $= 0.5154$ gm/cm^3
نیرو	1 newton (N) $= 10^5$ dyn $= 0.1020$ kg_f $= 0.2248$ lb_f 1 pound force (lb_f) $= 4.448$ N $= 0.4536$ kg_f $= 32.17$ poundals 1 kilogram force (kg_f) $= 2.205$ lb_f $= 9.807$ N 1 U.S. short ton $= 2000$ lb_f; 1 long ton $= 2240$ lb_f; 1 metric ton $= 2205$ lb_f
انرژی	1 joule (J) $= 1$ N m $= 10^7$ ergs $= 0.7376$ ft lb_f $= 0.2389$ cal $= 9.481 \times 10^{-4}$ Btu 1 ft lb_f $= 1.356$ joules (J) $= 0.3239$ cal $= 1.285 \times 10^{-3}$ Btu 1 calorie (cal) $= 4.186$ joules (J) $= 3.087$ ft lb_f $= 3.968 \times 10^{-3}$ Btu 1 Btu $= 778$ ft lb_f $= 1055$ joules (J) $= 0.293$ watt hr 1 kilowatt hour (kw hr) $= 3.60 \times 10^6$ joules (J) $= 860.0$ kcal $= 3413$ Btu 1 electron volt (ev) $= 1.602 \times 10^{-19}$ joule (J)
توان	1 watt $= 1$ joule (J)/s $= 10^7$ ergs/s $= 0.2389$ cal/s 1 horsepower (hp) $= 550$ ft lb_f/s $= 33{,}000$ ft lb_f/min $= 745.7$ watts 1 kilowatt (kw) $= 1.341$ hp $= 737.6$ ft lb_f/s $= 0.9483$ Btu/s
فشار	1 N/m^2 $= 10$ dyn $/cm^2$ $= 9.869 \times 10^{-6}$ atmosphere $= 2.089 \times 10^{-2}$ lb_f/ft^2 $= 1$ Pascal (Pa) 1 lb_f/in^2 $= 6895$ N/m^2 $= 5.171$ cm mercury $= 27.68$ in. water 1 atmosphere (atm) $= 1.013 \times 10^5$ N/m^2 (Pa) $= 1.013 \times 10^6$ dyn $/cm^2$ $= 14.70$ lb_f/in^2 $= 76$ cm mercury $= 406.8$ in. water
زاویه	1 radian (rad) $= 57.296°$; $1° = 0.017453$ rad

پیوست ج

تعدادی از معادلات اصلی در دستگاههای مختصات متفاوت

ج-۱ معادلات حرکت ناویه-استوکس برای شارهٔ تراکم‌ناپذیر با گران‌روی ثابت

این معادلات را در حالتی که گرادیان گران‌روی خیلی زیاد نیست، می‌توان با دقت بسیار بالا برای مسئله‌هایی که گران‌روی متغیر دارند به‌کار برد. این فرض در بیشتر مسئله‌های فیزیکی کفایت می‌کند و معادلات ناویه-استوکس را می‌توان برای بیشتر مسئله‌های جریان تراکم‌ناپذیر به‌کار برد. از نمادهای زیر استفاده می‌شود:

p =فشار

$\mathbf{F}$ =چگالی نیروی حجمی

μ =گران‌روی

$\frac{D}{Dt}$ =مشتق مادی

بردار

$\mathbf{V}$ بردار سرعت است

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}\right]=-\nabla p+\mathbf{F}+\mu\nabla^{۲}\mathbf{V} \qquad (ج-۱)$$

جملهٔ $\mathbf{V}(\mathbf{V}.\nabla)$ رابطه‌ای شبه‌برداری است و باید در بسط آن، بجز در دستگاه دکارتی، دقت کافی کرد. بهتر است این جملهٔ شتاب را به شکل بردار واقعی بیان کرد و معادلهٔ حرکت را به شکل زیر نوشت:

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^{۲}}{۲}\right)-\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})\right]=-\nabla p+\mathbf{F}+\mu\nabla^{۲}\mathbf{V} \qquad (ج-۲)$$

در بسط $\nabla^۲\mathbf{V}$ و $D\mathbf{V}/Dt$ باید کاملاً دقت کرد، زیرا عملیات روی بردار با عملیات روی کمیت اسکالر تفاوت می‌کند. استفاده از بردار زیر در عملیات بسیار سودمند است.

$$\nabla^۲\mathbf{V} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{V}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{V})$$

تانسور دکارتی

w_i سرعت در جهت x_i است.

$$\rho\left[\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i + \mu\frac{\partial^۲ w_i}{\partial x_j\partial x_j} \qquad \text{(ج-۳)}$$

دکارتی

u، v و w به ترتیب سرعت در جهتهای x، y، و z هستند. در قسمتهای زیر، داریم

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \nabla^۲ = \frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial z^۲}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{Du}{Dt} &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^۲ u\\ \rho\frac{Dv}{Dt} &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\nabla^۲ v\\ \rho\frac{Dw}{Dt} &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla^۲ w\end{aligned} \qquad \text{(ج-۴)}$$

با نوشتن آنها به طور کامل، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \mu\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}\right)\\ \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + F_y + \mu\left(\frac{\partial^۲ v}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ v}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ v}{\partial z^۲}\right)\\ \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z + \mu\left(\frac{\partial^۲ w}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ w}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ w}{\partial z^۲}\right)\end{aligned} \qquad \text{(ج-۵)}$$

استوانه‌ای

v_r، v_θ و v_z به ترتیب سرعت در جهتهای r، θ و z هستند. در قسمتهای زیر، داریم

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\\ \nabla^۲ &= \frac{\partial^۲}{\partial r^۲} + \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲}{\partial\theta^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial z^۲}\\ \rho\left[\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^۲}{r}\right] &= F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\nabla^۲ v_r - \frac{v_r}{r^۲} - \frac{۲}{r^۲}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right]\\ \rho\left[\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right] &= F_\theta - \frac{۱}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \mu\left[\nabla^۲ v_\theta + \frac{۲}{r^۲}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^۲}\right]\\ \rho\frac{Dv_z}{Dt} &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla^۲ v_z\end{aligned} \qquad \text{(ج-۶)}$$

با نوشتن آنها به طور کامل، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^{۲}}{r}\right]\\
&\qquad=F_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial^{۲} v_r}{\partial r^{۲}}+\frac{۱}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲} v_r}{\partial \theta^{۲}}+\frac{\partial^{۲} v_r}{\partial z^{۲}}-\frac{v_r}{r^{۲}}-\frac{۲}{r^{۲}}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right]\\
&\rho\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right]\\
&\qquad=F_\theta-\frac{۱}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\left[\frac{\partial^{۲} v_\theta}{\partial r^{۲}}+\frac{۱}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲} v_\theta}{\partial \theta^{۲}}+\frac{\partial^{۲} v_\theta}{\partial z^{۲}}+\frac{۲}{r^{۲}}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^{۲}}\right]\\
&\rho\left[\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]\\
&\qquad=F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left[\frac{\partial^{۲} v_z}{\partial r^{۲}}+\frac{۱}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲} v_z}{\partial \theta^{۲}}+\frac{\partial^{۲} v_z}{\partial z^{۲}}\right]
\end{aligned}\tag{ج-۷}$$

کروی

v_r، v_θ و v_ϕ به ترتیب سرعت در جهتهای r و θ و ϕ هستند. در قسمتهای زیر، داریم

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\nabla^{۲}=\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{۱}{r^{۲}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{۱}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial^{۲}}{\partial\phi^{۲}}$$

$$\begin{aligned}
&\rho\left[\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^{۲}+v_\phi^{۲}}{r}\right]\\
&\qquad=F_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\nabla^{۲}v_r-\frac{۲v_r}{r^{۲}}-\frac{۲}{r^{۲}}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{۲v_\theta\cot\theta}{r^{۲}}-\frac{۲}{r^{۲}\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right]\\
&\rho\left[\frac{Dv_\theta}{Dt}+\frac{v_r v_\theta-v_\phi^{۲}\cot\theta}{r}\right]\\
&\qquad=F_\theta-\frac{۱}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu\left[\nabla^{۲}v_\theta+\frac{۲}{r^{۲}}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}-\frac{۲\cot\theta}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right]\\
&\rho\left[\frac{Dv_\phi}{Dt}+\frac{v_\phi v_r}{r}+\frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r}\right]\\
&\qquad=F_\phi-\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi}+\mu\left[\nabla^{۲}v_\phi-\frac{v_\phi}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}+\frac{۲}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{۲\cos\theta}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]
\end{aligned}\tag{ج-۸}$$

با نوشتن آنها به طور کامل، خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&\rho\left[\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial_r}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-\frac{v_\theta^۲+v_\phi^۲}{r}\right]\\
&\quad=F_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^۲\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{۱}{r^۲\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{۱}{r^۲\sin^۲\theta}\frac{\partial^۲ v_r}{\partial\phi^۲}-\frac{۲v_r}{r^۲}-\frac{۲}{r^۲}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{۲v_\theta\cot\theta}{r^۲}-\frac{۲}{r^۲\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right]\\
&\rho\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^۲\cot\theta}{r}\right]\\
&\quad=F_\theta-\frac{۱}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu\left[\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^۲\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)+\frac{۱}{r^۲\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{۱}{r^۲\sin^۲\theta}\frac{\partial^۲ v_\theta}{\partial\phi^۲}+\frac{۲}{r^۲}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^۲\sin\theta}-\frac{۲\cos\theta}{r^۲\sin^۲\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right]\\
&\rho\left[\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{v_\phi v_r}{r}+\frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r}\right]\\
&\quad=F_\phi-\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi}+\mu\left[\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^۲\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right)+\frac{۱}{r^۲\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{۱}{r_۲\sin^۲\theta}\frac{\partial^۲ v_\phi}{\partial\phi^۲}-\frac{v_\phi}{r^۲\sin^۲\theta}+\frac{۲}{r^۲\sin^۲\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{۲\cos\theta}{r^۲\sin^۲\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]
\end{aligned}
\qquad (ج-۹)
$$

ج -۲ رابطهٔ بین آهنگ تنش-کرنش

تانسور دکارتی

w_i سرعت در جهت x_i است. ϕ اتساع است، $\nabla\cdot\mathbf{V}$.

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}&=-P\delta_{ij}+\sigma'_{ij}=-P\delta_{ij}+۲\mu e_{ij}+\delta_{ij}\lambda\phi\\
&=-P\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}+\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)+\lambda\delta_{ij}\frac{w_k}{\partial x_k}\\
&=-P\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}+\frac{\partial w_j}{\partial x_i}-\frac{۲}{۳}\delta_{ij}\frac{\partial w_k}{\partial x_k}\right)+\zeta\delta_{ij}\frac{\partial w_k}{\partial x_k}
\end{aligned}
\qquad (ج-۱۰)
$$

دکارتی

u، v و w به ترتیب سرعت در جهتهای x، y و z هستند.

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -P + \sigma'_{xx} = -P + ۲\mu e_{xx} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \\
&= -P + ۲\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\sigma_{yy} &= -P + \sigma'_{yy} = -P + ۲\mu e_{yy} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \\
&= -P + ۲\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\sigma_{zz} &= -P + \sigma'_{zz} = -P + ۲\mu e_{zz} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \\
&= -P + ۲\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = ۲\mu e_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
\sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = ۲\mu e_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
\sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = ۲\mu e_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned}
\tag{ج-۱۱}
$$

استوانه‌ای

v_r، v_θ و v_z به ترتیب سرعت در جهتهای r، θ و z هستند.

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -P + \sigma'_{rr} = -P + ۲\mu e_{rr} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \\
&= -P + ۲\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda \left\{ \frac{۱}{r^۲} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{۱}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} \\
\sigma_{\theta\theta} &= -P + \sigma'_{\theta\theta} = -P + ۲\mu e_{\theta\theta} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \\
&= -P + ۲\mu \left(\frac{۱}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \lambda \left\{ \frac{۱}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{۱}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} \\
\sigma_{zz} &= -P + \sigma'_{zz} = -P + ۲\mu e_{zz} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \\
&= -P + ۲\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \left\{ \frac{۱}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{۱}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} \\
\sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta r} = ۲\mu e_{r\theta} = \mu \left(\frac{۱}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\
\sigma_{rz} &= \sigma_{zr} = ۲\mu e_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\
\sigma_{\theta z} &= \sigma_{z\theta} = ۲\mu e_{\theta z} = \mu \left(\frac{۱}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)
\end{aligned}
\tag{ج-۱۲}
$$

کروی

v_r، v_θ و v_ϕ به ترتیب سرعت در جهتهای r، θ و ϕ هستند.

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -P + \sigma'_{rr} = -P + ۲\mu e_{rr} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \\
&= -P + ۲\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda \left\{ \frac{۱}{r^۲} \frac{\partial}{\partial r}(r^۲ v_r) + \frac{۱}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin\theta) + \frac{۱}{r\sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right\} \\
\sigma_{\theta\theta} &= -P + \sigma'_{\theta\theta} = -P + ۲\mu e_{\theta\theta} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \\
&= -P + ۲\mu \left(\frac{۱}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \lambda \left\{ \frac{۱}{r^۲} \frac{\partial}{\partial r}(r^۲ v_r) + \frac{۱}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin\theta) + \frac{۱}{r\sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right\} \\
\sigma_{\phi\phi} &= -P + \sigma'_{\phi\phi} = -P + ۲\mu e_{\phi\phi} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \\
&= -P + ۲\mu \left(\frac{۱}{r\sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r} \right) \\
&\quad + \lambda \left\{ \frac{۱}{r^۲} \frac{\partial}{\partial r}(r^۲ v_r) + \frac{۱}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin\theta) + \frac{۱}{r\sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right\} \\
\sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta r} = ۲\mu e_{r\theta} = \mu \left\{ r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{۱}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} \\
\sigma_{r\phi} &= \sigma_{\phi r} = ۲\mu e_{r\phi} = \mu \left\{ \frac{۱}{r\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right) \right\} \\
\sigma_{\theta\phi} &= \sigma_{\phi\theta} = ۲\mu e_{\theta\phi} = \mu \left\{ \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right) + \frac{۱}{r\sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right\}
\end{aligned} \qquad (ج-۱۳)$$

ج -۳ چند معادلۀ اصلی در دستگاههای مختصات مختلف

عملیات D/Dt و $\nabla^۲$ مشروحۀ زیر برای عملیات روی اسکالر است. آنها، بجز در مختصات دکارتی، مشابه عملیات روی بردار نیستند.

دکارتی

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \\
\nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\
\nabla^۲ &= \frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial z^۲}
\end{aligned} \qquad (ج-۱۴)$$

استوانه‌ای

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z} \\
\nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{۱}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\nabla^۲ &= \frac{\partial^۲}{\partial r^۲} + \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲}{\partial \theta^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial z^۲}
\end{aligned} \qquad (ج-۱۵)$$

کروی

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
\nabla\cdot\mathbf{V} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} \\
\nabla^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}
\end{aligned}
\qquad \text{(ج-۱۶)}
$$

عملیات ∇^2 و D/Dt که روی بردار انجام می‌شود، در زیر آمده است. علامت (^) نمایانگر بردار یکه است.

دکارتی

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \hat{\mathbf{x}}u + \hat{\mathbf{y}}v + \hat{\mathbf{z}}w \\
(\nabla^2\mathbf{V})_x &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
(\nabla^2\mathbf{V})_y &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
(\nabla^2\mathbf{V})_z &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt}\right)_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\
\left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt}\right)_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\
\left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt}\right)_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}
\qquad \text{(ج-۱۷)}
$$

استوانه‌ای

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \hat{\mathbf{r}}v_r + \hat{\boldsymbol{\Theta}}v_\theta + \hat{\mathbf{z}}v_z \\
(\nabla^2\mathbf{V})_r &= \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right] \\
(\nabla^2\mathbf{V})_\theta &= \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial_\theta} - \frac{v_\theta}{r^2} = \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right] \\
(\nabla^2\mathbf{V})_z &= \nabla^2 v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \\
\left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt}\right)_r &= \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \\
\left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt}\right)_\theta &= \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \\
\left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt}\right)_z &= \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned}
\qquad \text{(ج-۱۸)}
$$

کروی

$$\mathbf{V} = \hat{\mathbf{r}} v_r + \hat{\mathbf{\Theta}} v_\theta + \hat{\phi} v_\phi$$

$$(\nabla^۲ \mathbf{V})_r = \nabla^۲ v_r - \frac{۲ v_r}{r^۲} - \frac{۲}{r^۲} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{۲ v_\theta \cot\theta}{r^۲} - \frac{۲}{r^۲ \sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$(\nabla^۲ \mathbf{V})_\theta = \nabla^۲ v_\theta + \frac{۲}{r^۲} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^۲ \sin^۲\theta} - \frac{۲}{r^۲ \sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$(\nabla^۲ \mathbf{V})_\phi = \nabla^۲ v_\phi - \frac{v_\phi}{r^۲ \sin^۲\theta} + \frac{۲}{r^۲ \sin^۲\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{۲\cos\theta}{r^۲ \sin^۲\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}$$

$$\left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt}\right)_r = \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^۲ + v_\phi^۲}{r} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^۲ + v_\phi^۲}{r} \qquad \text{(ج-۱۹)}$$

$$\left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt}\right)_\theta = \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^۲ \cot\theta}{r}$$

$$= \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^۲\cot\theta}{r}$$

$$\left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt}\right)_\phi = \frac{Dv_\phi}{Dt} + \frac{v_\phi v_r + v_\theta v_\phi \cot\theta}{r}$$

$$= \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r + v_\theta v_\phi \cot\theta}{r}$$

جمله‌های $\nabla^۲ v_r$، $\nabla^۲ v_\theta$ و $\nabla^۲ v_\phi$ در دستگاههای مختصات مختلف با کاربرد عملگر $\nabla^۲$ روی اسکالر از معادلات (ج-۱۴)، (ج-۱۵) و (ج-۱۶) به دست می‌آیند.

ج -۴ تابع اتلاف

تابع اتلاف گران‌رو یا مکانیکی Φ در مختصات عمودی تعمیم یافته (برحسب تانسور آهنگ کرنش e_{ij}) به صورت زیر است

$$\Phi = \mu[۲(e_{۱۱}^۲ + e_{۲۲}^۲ + e_{۳۳}^۲) + (۲e_{۲۳})^۲ + (۲e_{۳۱})^۲ + (۲e_{۱۲})^۲] + \lambda(e_{۱۱} + e_{۲۲} + e_{۳۳})^۲ \qquad \text{(ج-۲۰)}$$

در بعضی از کتابها، تعریف Φ با آنچه که در اینجا تعریف شد، در ضریب ψ فرق می‌کند. λ ضریب دوم گران‌روی است که در فصل ۳ تعریف شده است.

تانسور دکارتی برحسب تانسور تنش

$$\Phi = \sigma'_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \qquad \text{(ج-۲۱)}$$

دکارتی

$$\Phi = ۲\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^۲ + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^۲ + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^۲ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^۲ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^۲ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^۲\right]$$
$$+ \lambda \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]^۲ \qquad \text{(ج-۲۲)}$$

استوانه‌ای

$$\Phi = \mu \left[۲ \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^۲ + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^۲ \right\} + \left(\frac{۱}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^۲ + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)^۲ \right] + \lambda \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{۱}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^۲ \quad (ج\text{-}۲۳)$$

کروی

$$\Phi = \mu \left[۲ \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r}\right)^۲ \right\} + \left\{\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right)\right\}^۲ + \left\{\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right\}^۲ + \left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{۱}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right\}^۲ \right] + \lambda \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{۱}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{۲v_r}{r} + \frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right]^۲ \quad (ج\text{-}۲۴)$$

پیوست د

جداول پارامترها برای جریان تراکم‌پذیر

جدول د-۱ پارامترهای جریان برحسب M برای جریان تک‌آنتروپی (گازکامل ۱٫۴ = k)

M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	a/a_0	A^*/A
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.00000
0.10	0.9930	0.9950	0.9980	0.9990	0.1718
0.20	0.9725	0.9803	0.9921	0.9960	0.3374
0.30	0.9395	0.9564	0.9823	0.9911	0.4914
0.40	0.8956	0.9243	0.9690	0.9844	0.6289
0.50	0.8430	0.8852	0.9524	0.9759	0.7464
0.60	0.7840	0.8405	0.9328	0.9658	0.8416
0.70	0.7209	0.7916	0.9107	0.9543	0.9138
0.80	0.6560	0.7400	0.8865	0.9416	0.9632
0.90	0.5913	0.6870	0.8606	0.9277	0.9912
1.00	0.5283	0.6339	0.8333	0.9129	1.0000
1.10	0.4684	0.5817	0.8052	0.8973	0.9921
1.20	0.4124	0.5311	0.7764	0.8811	0.9705
1.30	0.3609	0.4829	0.7474	0.8645	0.9378
1.40	0.3142	0.4374	0.7184	0.8476	0.8969
1.50	0.2724	0.3950	0.6897	0.8305	0.8502
1.60	0.2353	0.3557	0.6614	0.8133	0.7998
1.70	0.2026	0.3197	0.6337	0.7961	0.7476
1.80	0.1740	0.2868	0.6068	0.7790	0.6949
1.90	0.1492	0.2570	0.5807	0.7620	0.6430
2.00	0.1278	0.2300	0.5556	0.7454	0.5926
2.10	0.1094	0.2058	0.5313	0.7289	0.5444

جدول د-۱ (ادامه)

M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	a/a_0	A^*/A
2.20	0.09352	0.1841	0.5081	0.7128	0.4988
2.30	0.07997	0.1646	0.4859	0.6971	0.4560
2.40	0.06840	0.1472	0.4647	0.6817	0.4161
2.50	0.05853	0.1317	0.4444	0.6667	0.3793
2.60	0.05012	0.1179	0.4252	0.6521	0.3453
2.70	0.04295	0.1056	0.4068	0.6378	0.3142
2.80	0.03685	0.09463	0.3894	0.6240	0.2857
2.90	0.03165	0.08489	0.3729	0.6106	0.2598
3.00	0.02722	0.07623	0.3571	0.5976	0.2362
3.10	0.02345	0.06852	0.3422	0.5850	0.2147
3.20	0.02023	0.06165	0.3281	0.5728	0.1953
3.30	0.01748	0.05554	0.3147	0.5609	0.1777
3.40	0.01513	0.05009	0.3019	0.5495	0.1617
3.50	0.01311	0.04523	0.2899	0.5384	0.1473
3.60	0.01138	0.04089	0.2784	0.5276	0.1342
3.70	9.903×10^{-3}	0.03702	0.2675	0.5172	0.1224
3.80	8.629×10^{-3}	0.03355	0.2572	0.5072	0.1117
3.90	7.532×10^{-3}	0.03044	0.2474	0.4974	0.1021
4.00	6.586×10^{-3}	0.02766	0.2381	0.4880	0.09329
4.10	5.769×10^{-3}	0.02516	0.2293	0.4788	0.08536
4.20	5.062×10^{-3}	0.02292	0.2208	0.4699	0.07818
4.30	4.449×10^{-3}	0.02090	0.2129	0.4614	0.07166
4.40	3.918×10^{-3}	0.01909	0.2053	0.4531	0.06575
4.50	3.455×10^{-3}	0.01745	0.1980	0.4450	0.06038
4.60	3.053×10^{-3}	0.01597	0.1911	0.4372	0.05550
4.70	2.701×10^{-3}	0.01464	0.1846	0.4296	0.05107
4.80	2.394×10^{-3}	0.01344	0.1783	0.4223	0.04703
4.90	2.126×10^{-3}	0.01233	0.1724	0.4152	0.04335
5.00	1.890×10^{-3}	0.01134	0.1667	0.4082	0.04000

جدول د-۱ (ادامه)

M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	a/a_0	A^*/A
6.00	6.334×10^{-4}	5.194×10^{-3}	0.1220	0.3492	0.01880
7.00	2.416×10^{-4}	2.609×10^{-3}	0.09259	0.3043	9.602×10^{-3}
8.00	1.024×10^{-4}	1.414×10^{-3}	0.07246	0.2692	5.260×10^{-3}
9.00	4.739×10^{-5}	8.150×10^{-4}	0.05814	0.2411	3.056×10^{-3}
10.00	2.356×10^{-5}	4.948×10^{-4}	0.04762	0.2182	1.866×10^{-3}
100.00	2.790×10^{-12}	5.583×10^{-9}	4.998×10^{-4}	0.02236	2.157×10^{-8}
∞	0	0	0	0	0

جدول د-۲ عدد ماخ و زاویهٔ ماخ برحسب تابع پرنتل-مایر

ν (deg)	M	μ (deg)	ν (deg)	M	μ (deg)	ν (deg)	M	μ (deg)
0.0	1.000	90.000	10.0	1.435	44.177	20.0	1.775	34.290
0.5	1.051	72.099	10.5	1.452	43.523	20.5	1.792	33.915
1.0	1.082	67.574	11.0	1.469	42.894	21.0	1.810	33.548
1.5	1.108	64.451	11.5	1.486	42.287	21.5	1.827	33.188
2.0	1.133	61.997	12.0	1.503	41.701	22.0	1.844	32.834
2.5	1.155	59.950	12.5	1.520	41.134	22.5	1.862	32.488
3.0	1.177	58.180	13.0	1.537	40.585	23.0	1.879	32.148
3.5	1.198	56.614	13.5	1.554	40.053	23.5	1.897	31.814
4.0	1.218	55.205	14.0	1.571	39.537	24.0	1.915	31.486
4.5	1.237	53.920	14.5	1.588	39.035	24.5	1.932	31.164
5.0	1.256	52.738	15.0	1.605	38.547	25.0	1.950	30.847
5.5	1.275	51.642	15.5	1.622	38.073	25.5	1.968	30.536
6.0	1.294	50.619	16.0	1.639	37.611	26.0	1.986	30.229
6.5	1.312	49.658	16.5	1.655	37.160	26.5	2.004	29.928
7.0	1.330	48.753	17.0	1.672	36.721	27.0	2.023	29.632
7.5	1.348	47.896	17.5	1.689	36.293	27.5	2.041	29.340
8.0	1.366	47.082	18.0	1.706	35.874	28.0	2.059	29.052
8.5	1.383	46.306	18.5	1.724	35.465	28.5	2.078	28.769
9.0	1.400	45.566	19.0	1.741	35.065	29.0	2.096	28.491
9.5	1.418	44.857	19.5	1.758	34.673	29.5	2.115	28.216

جدول د-۲ (ادامه)

ν (deg)	M	μ (deg)	ν (deg)	M	μ (deg)	ν (deg)	M	μ (deg)
30.0	2.134	27.945	50.0	3.013	19.386	70.0	4.339	13.325
30.5	2.153	27.678	50.5	3.309	19.213	70.5	4.382	13.191
31.0	2.172	27.415	51.0	3.065	19.041	71.0	4.426	13.059
31.5	2.191	27.155	51.5	3.092	18.870	71.5	4.470	12.927
32.0	2.210	26.889	52.0	3.119	18.701	72.0	4.515	12.795
32.5	2.230	26.646	52.5	3.146	18.532	72.5	4.561	12.665
33.0	2.249	26.397	53.0	3.174	18.366	73.0	4.608	12.535
33.5	2.269	26.151	53.5	3.202	18.200	73.5	4.655	12.406
34.0	2.289	25.908	54.0	3.230	18.036	74.0	4.703	12.277
34.5	2.309	25.778	54.5	3.258	17.873	74.5	4.752	12.149
35.0	2.329	25.430	55.0	3.287	17.711	75.0	4.801	12.021
35.5	2.349	25.196	55.5	3.316	17.551	75.5	4.852	11.894
36.0	2.369	24.965	56.0	3.346	17.391	76.0	4.903	11.768
36.5	2.390	24.736	56.5	3.375	17.233	76.5	4.955	11.642
37.0	2.410	24.510	57.0	3.406	17.076	77.0	5.009	11.517
37.5	2.431	24.287	57.5	3.436	16.920	77.5	5.063	11.392
38.0	2.452	24.066	58.0	3.467	16.765	78.0	5.118	11.268
38.5	2.473	23.847	58.5	3.498	16.611	78.5	5.174	11.145
39.0	2.495	23.631	59.0	3.530	16.458	79.0	5.231	11.022
39.5	2.516	23.418	59.5	3.562	16.306	79.5	5.289	10.899
40.0	2.538	23.206	60.0	3.594	16.155	80.0	5.348	10.777
40.5	2.560	22.997	60.5	3.627	16.005	80.5	5.408	10.656
41.0	2.582	22.790	61.0	3.660	15.856	81.0	5.470	10.535
41.5	2.604	22.585	61.5	3.694	15.708	81.5	5.532	10.414
42.0	2.626	22.382	62.0	3.728	15.561	82.0	5.596	10.294
42.5	2.649	22.182	62.5	3.762	15.415	82.5	5.661	10.175
43.0	2.671	21.983	63.0	3.797	15.270	83.0	5.727	10.056
43.5	2.694	21.786	63.5	3.832	15.126	83.5	5.795	9.937
44.0	2.718	21.591	64.0	3.868	14.983	84.0	5.864	9.819
44.5	2.741	21.398	64.5	3.904	14.840	84.5	5.935	9.701
45.0	2.764	21.207	65.0	3.941	14.698	85.0	6.006	9.584
45.5	2.788	21.017	65.5	3.979	14.557	85.5	6.080	9.467
46.0	2.812	20.830	66.0	4.016	14.417	86.0	6.155	9.350
46.5	2.836	20.644	66.5	4.055	14.278	86.5	6.232	9.234
47.0	2.861	20.459	67.0	4.094	14.140	87.0	6.310	9.119
47.5	2.886	20.277	67.5	4.133	14.002	87.5	6.390	9.003
48.0	2.910	20.096	68.0	4.173	13.865	88.0	6.472	8.888
48.5	2.936	19.916	68.5	4.214	13.729	88.5	6.556	8.774
49.0	2.961	19.738	69.0	4.255	13.593	89.0	6.642	8.660
49.5	2.987	19.561	69.5	4.297	13.459	89.5	6.729	8.546

جدول د-۲ (ادامه)

ν (deg)	M	μ (deg)	ν (deg)	M	μ (deg)	ν (deg)	M	μ (deg)
90.0	6.819	8.433	95.0	7.851	7.318	100.0	9.210	6.233
90.5	6.911	8.320	95.5	7.970	7.208	100.5	9.371	6.126
91.0	7.005	8.207	96.0	8.092	7.099	101.0	9.536	6.019
91.5	7.102	8.095	96.5	8.218	6.989	101.5	9.708	5.913
92.0	7.201	7.983	97.0	8.347	6.881	102.0	9.885	5.806
92.5	7.302	7.871	97.5	8.480	6.772			
93.0	7.406	7.760	98.0	8.618	6.664			
93.5	7.513	7.649	98.5	8.759	6.556			
94.0	7.623	7.538	99.0	8.905	6.448			
94.5	7.735	7.428	99.5	9.055	6.340			

جدول د-۳ پارامترهای جریان موج ضربه‌ای (گاز کامل $k = ۱٫۴$)

M_{1n}	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	a_2/a_1	p_2^0/p_1^0	M_2 فقط برای موجهای ضربه‌ای قائم
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.0000	1.0000
1.10	1.245	1.169	1.065	1.032	0.9989	0.9118
1.20	1.513	1.342	1.128	1.062	0.9928	0.8422
1.30	1.805	1.516	1.191	1.091	0.9794	0.7860
1.40	2.120	1.690	1.255	1.120	0.9582	0.7397
1.50	2.458	1.862	1.320	1.149	0.9298	0.7011
1.60	2.820	2.032	1.388	1.178	0.8952	0.6684
1.70	3.205	2.198	1.458	1.208	0.8557	0.6405
1.80	3.613	2.359	1.532	1.238	0.8127	0.6165
1.90	4.045	2.516	1.608	1.268	0.7674	0.5956
2.00	4.500	2.667	1.688	1.299	0.7209	0.5773
2.10	4.978	2.812	1.770	1.331	0.6742	0.5613
2.20	5.480	2.951	1.857	1.361	0.6281	0.5471
2.30	6.005	3.085	1.947	1.395	0.5833	0.5344
2.40	6.553	3.212	2.040	1.428	0.5401	0.5231
2.50	7.125	3.333	2.138	1.462	0.4990	0.5130
2.60	7.720	3.449	2.238	1.496	0.4601	0.5039
2.70	8.338	3.559	2.343	1.531	0.4236	0.4956
2.80	8.980	3.664	2.451	1.566	0.3895	0.4882
2.90	9.645	3.763	2.563	1.601	0.3577	0.4814
3.00	10.33	3.857	2.679	1.637	0.3283	0.4752
4.00	18.50	4.571	4.047	2.012	0.1388	0.4350
5.00	29.00	5.000	5.800	2.408	0.06172	0.4152
6.00	41.83	5.268	7.941	2.818	0.02965	0.4042
7.00	57.00	5.444	10.47	3.236	0.01535	0.3974
8.00	74.50	5.565	13.39	3.659	8.488×10^{-3}	0.3929
9.00	94.33	5.651	16.69	4.086	4.964×10^{-3}	0.3898
10.00	116.5	5.714	20.39	4.515	3.045×10^{-3}	0.3876
100.00	11,666.5	5.997	1945.4	44.11	3.593×10^{-8}	0.3781
∞	∞	6	∞	∞	0	0.3780

جدول د-۴ جریان اصطکاکی، بی‌دررو، مساحت ثابت (خط فانو) گاز کامل ۴ر۱ = k

M	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	V/V^* and ρ^*/ρ	$4fL_{max}/D$
0.00	1.200	∞	∞	0.00000	∞
0.20	1.1905	5.4555	2.9635	0.21822	14.533
0.40	1.1628	2.6958	1.5901	0.43133	2.3085
0.60	1.1194	1.7634	1.1882	0.63481	0.49081
0.80	1.06383	1.2892	1.03823	0.82514	0.07229
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0
1.20	0.93168	0.80436	1.03044	1.1583	0.03364
1.40	0.86207	0.66320	1.1149	1.2999	0.09974
1.60	0.79365	0.55679	1.2502	1.4254	0.17236
1.80	0.72816	0.47407	1.4390	1.5360	0.24189
2.00	0.66667	0.40825	1.6875	1.6330	0.30499
2.50	0.53333	0.29212	2.6367	1.8257	0.43197
3.00	0.42857	0.21822	4.2346	1.9640	0.52216
3.50	0.34783	0.16850	6.7896	2.0642	0.58643
4.00	0.28571	0.13363	10.719	2.1381	0.63306
4.50	0.23762	0.10833	16.562	2.1936	0.66764
5.00	0.20000	0.08944	25.000	2.2361	0.69381
6.00	0.14634	0.06376	53.180	2.2953	0.72987
7.00	0.11111	0.04762	104.14	2.3333	0.75281
8.00	0.08696	0.03686	190.11	2.3591	0.76820
9.00	0.06977	0.02935	327.19	2.3772	0.77898
10.00	0.05714	0.02390	535.94	2.3905	0.78683
∞	0	0	∞	2.4495	0.82153

پیوست ه

تانسورهای دکارتی

نمادگذاری تانسور دکارتی روشی اختصاری برای نوشتن معادلات در دستگاه مختصات دکارتی است. باید تأکید کرد که این نمادگذاری در واقع نمادگذاری تانسور نیست و، بجز دستگاه دکارتی، در هیچ دستگاه مختصات دیگری کاربرد ندارد. از معادلهٔ تانسور دکارتی نمی‌توان شکل درست معادله‌ای را در هر دستگاه مختصات اختیاری، مشابه شکل تانسوری یا برداری تعمیم‌یافته، به دست آورد.

برداری همچون سرعت $\mathbf{V}$ را با مؤلفه‌های دکارتی $w_1 = V_x$، $w_2 = V_y$، و $w_3 = V_z$ در نظر بگیرید. مؤلفه‌های این بردار را با شاخصهای پایین i، j، k یا هر شاخص دیگری مشخص می‌کنیم که مقدار ۱، ۲ یا ۳ را اختیار کند. ۱، ۲ و ۳ به ترتیب مؤلفه‌های x، y، و z را نشان می‌دهند.

مؤلفه‌های سرعت را می‌توان با w_i نشان داد، که i مقدار ۱، ۲ یا ۳ متناظر با x، y و z را ختیار می‌کند.

اسکالر را بدون شاخص، مثلاً پتانسیل سرعت ϕ، نشان می‌دهند.

مختصات دکارتی x، y و z را به صورت x_i (یا مثلاً x_j) نشان می‌دهند.

وقتی دو شاخص در جمله‌ای ظاهر می‌شوند. معمولاً به معنی حاصل‌جمع است (بر روی ۳ بعد). به عنوان مثال، عبارت زیر

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$

آرایه‌ای ۹جمله‌ای است که هر دو شاخص i و j می‌توانند مقدارهای ۱، ۲، ۳ را اختیار کنند. عبارت

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i}$$

اسکالر است که (با قرارداد عمل جمع) بیانگر رابطهٔ زیر است

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \frac{\partial w_۱}{\partial x_۱} + \frac{\partial w_۲}{\partial x_۲} + \frac{\partial w_۳}{\partial x_۳} = \nabla \cdot \mathbf{V}$$

همین گونه، σ_{ij} عبارت است از ۹ مؤلفهٔ تانسور تنش (ماتریس ۳ × ۳). شرط تقارن را به صورت $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ بیان می‌کنند.
گاهی از کاما برای نشان دادن مشتق‌گیری نسبت به مختصهٔ فضایی استفاده می‌شود.

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = w_{i,j}$$

بنابراین $w_{i,i} = \nabla \cdot \mathbf{V}$
دلتای کرونکر δ_{ij} عملگری است که مقدارهای زیر را دارد:

$$\delta_{ij} = ۰, \quad i \neq j$$
$$\delta_{ij} = ۱, \quad i = j$$

به عنوا ن مثال،

$$\sigma_{ij}\delta_{ij}$$

نمایانگر جمله‌های قطری تانسور تنش $\sigma_{۱۱}$، $\sigma_{۲۲}$، و $\sigma_{۳۳}$ است. معمولاً کاربرد دلتای کرونکر به معنی حاصل جمع نیست. بعضی از عملیات برداری برحسب نماد تانسور دکارتی (ϕ اسکالر و $\mathbf{V}$ برداری با مؤلفه‌های w_i است) به صورت زیرند. این رابطه‌ها فقط در مختصات دکارتی معتبر هستند.

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \frac{\partial w_۱}{\partial x_۱} + \frac{\partial w_۲}{\partial x_۲} + \frac{\partial w_۳}{\partial x_۳}$$
$$\nabla^۲\phi = \frac{\partial^۲ \phi}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^۲ \phi}{\partial x_۱^۲} + \frac{\partial^۲ \phi}{\partial x_۲^۲} + \frac{\partial^۲ \phi}{\partial x_۳^۲}$$
$$\nabla^۲\mathbf{V} = \frac{\partial^۲ w_j}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^۲ w_j}{\partial x_۱^۲} + \frac{\partial^۲ w_j}{\partial x_۲^۲} + \frac{\partial^۲ w_j}{\partial x_۳^۲}$$

(این برداری است با مؤلفه‌های مشخص شده با j، که عمل جمع روی i انجام گرفته است.)
برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ مفهوم کلی نماد تانسور به مرجعهای زیر مراجعه کنید:

1.Borg, S. F., *Martix-Tensor Methods in Continuum Mechanics*, van Nostrand, 1963.

2. Myklestad, N. O., *Cartesian Tensors*, Van Nostrand, 1967.

3. Synge, J. L and Schild, A., *Tensor Calculus*, University of Toronto. Press, 1949.

پیوست و

اتحادهای برداری

A، B و C بردار هستند؛ ϕ اسکالر است

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C}=(\mathbf{A}\times\mathbf{C})+(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+(\mathbf{A}\times\mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})&=\mathbf{B}[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})]-\mathbf{A}[\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})]\\&=\mathbf{C}[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})]-\mathbf{D}[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\end{aligned}$$

$$\nabla^2\phi=\nabla\cdot\nabla\phi$$

$$\nabla^2\mathbf{A}=(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0$$

$$\nabla\times\nabla\phi=0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{A}=\nabla\left(\frac{|\mathbf{A}|^2}{2}\right)-\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$$

پیوست ز

روشهای اندازه‌گیری جریان

از چندین وسیلهٔ ساده در اندازه‌گیری آهنگ جریان لوله‌ها و مجراها به طور گسترده استفاده می‌شود. استفاده از معادلهٔ تعمیم‌یافتهٔ برنولی رابطهٔ ساده‌ای بین افت فشار اندازه‌گیری شده و آهنگ جریان برقرار می‌کند. چند وسیلهٔ کاربردی را برای اندازه‌گیری جریان در زیر معرفی می‌کنیم.

جریان درون مدخل (اریفیس) لبه‌ـتیز

نخست، جریان مایع تراکم‌ناپذیری را در نظر می‌گیریم که از سوراخ لبه‌ـتیز مخزن موجود در شکل ز-۱ می‌گذرد. اگر سطح مقطع مخزن در مقایسه با سطح مقطع مدخل بزرگ باشد، به گونه‌ای که از سرعت سطح آب در مخزن بتوان چشم پوشید، آن گاه با نوشتن معادلهٔ برنولی بین نقطه‌های ۱ و ۲ (با فشار نسبی $p_۱ = p_۲ = ۰$)، یا داریم

$$V = \sqrt{۲gh}$$

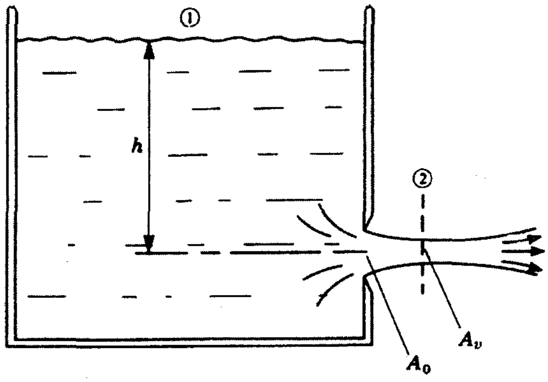
در این حالت، سطح مقطع جت خروجی به علت خمیدگی خطهای جریان باریک می‌شود و عملاً در نقطهٔ ۲ که خطهای جریان موازی می‌شوند، به مقدار کمینهٔ خود می‌رسد.

این مقطع کمینه را انقباض وریدی می‌گویند. آهنگ جریان Q از میان مدخل را می‌توان به صورت زیر نوشت

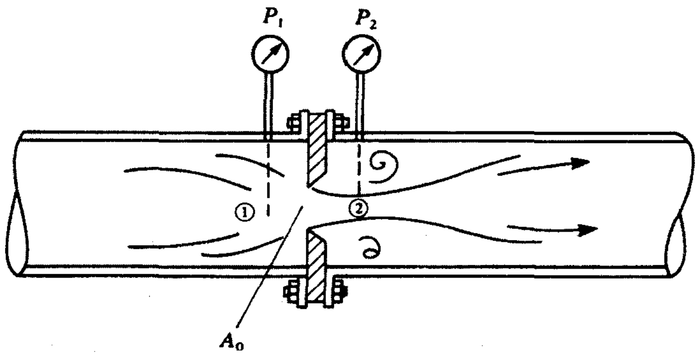
$$Q = C_v V_c A_۰ \sqrt{۲gh} = C_d A_۰ \sqrt{۲gh}$$

که C_c ضریب تصحیح مساحت بین $A_۰$ و A_α^v است.

$$A_v = V_c A_۰$$



شکل ز-۱



شکل ز-۲ مدخل صفحه تخت.

و C_v ضریب تصحیح افتهای اصطکاکی در معادلهٔ برنولی است

$$V = C_v \sqrt{۲gh}$$

حاصل ضرب $C_v C_c$ معروف به ضریب تخلیه (C_d) است که معمولاً برای هر مدخل مفروض به طور تجربی تعیین می‌شود. مقدار C_c بین ۶ر۰ تا ۱ تغییر می‌کند و به میزان گرد بودن مدخل بستگی دارد. C_v معمولاً بین ۸ر۰ تا ۹۹ر۰ تغییر می‌کند.

در عمل، غالباً مدخل لبه‌ـتیزی را در درون لوله قرار می‌دهند و افت فشار دو طرف آن را با فشارسنج یا وسیلهٔ دیگری، همچون شکل ز-۲، اندازه می‌گیرند. با نوشتن معادلهٔ برنولی بین نقطهٔ ۱ (بالادست جریان) و ۲ و با فرض تراکم‌ناپذیر بودن شاره، داریم

$$\frac{p_۱}{\rho} + \frac{V_۱^۲}{۲} = \frac{p_z}{\rho} + \frac{V_۲^۲}{۲}$$

و معادلهٔ پیوستگی عبارت است از

$$Q = A_۱ V_۱ = A_۲ V_۲ = A_۰ V_۰$$

که $A_۲$ سطح مقطع جت جریان پایین‌دست است (که ممکن است در وضعیت انقباض وریدی باشد یا نباشد). در این صورت، می‌توان نوشت

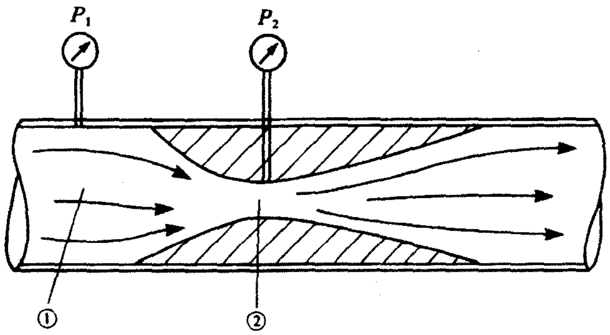
$$Q = \frac{C_v A_۲ \sqrt{(۲/\rho)(p_۱ - p_۲)}}{\sqrt{۱ - (A_۲/A_۱)^۲}} = \frac{C_d A_۰ \sqrt{(۲/\rho)(p_۱ - p_۲)}}{\sqrt{۱ - (A_۰/A_۱)^۲}}$$

ضریب تخلیهٔ کلی C_d به شکل دقیق مدخل و محلهای دقیق فشارسنج در نقطه‌های ۱ و ۲ بستگی دارد و شامل تصحیحهای مربوط به اختلاف سطح مقطع بین $A_\circ$ و $A_۲$ و دیگر اتلافهاست. مقدارهای نمونه‌وار C_d دارای گستره‌ای از ۶ر۰ تا ۸ر۰ است. آنها را برای هر یک از مدخلهای صفحه تخت به طور تجربی تعیین می‌کنند. اگر افت فشار $(p_۱ - p_۲)$، در مقایسه با $p_۱$ کوچک، و بنابراین ρ تقریباً ثابت باشد، معادلهٔ بالا برای جریان تراکم‌پذیر نیز صادق است. در خط لوله‌های گاز مقدار $\Delta p = p_۱ - p_۲$ ممکن است معادل چند اینچ (۱۰-۱۲ سانتیمتر) آب و $p_۱$ صدها psi باشد. اگر اثرهای تراکم‌پذیری مهم باشند. برای دست‌یابی به نتیجه‌های دقیق‌تر، از شکل تراکم‌پذیر معادلهٔ برنولی باید استفاده کرد.

جریان درون سنجهٔ ونتوری

نصب مدخل صفحه تخت بحث شده در بالا در فلانچ لوله آسان است و به طور گسترده به کار می‌رود. ونتوری (شکل ز-۳) سنجهٔ دیگری است که افت فشار کمی دارد ولی نصب آن دشوارتر است. انقباض جریان که با شکل و ضریب اتلاف کلی C_d تعریف می‌شود، معمولاً بین ۹۸ر۰ تا ۹۹ر۰ است.

رابطهٔ آهنگ جریان درست مثل مدخل صفحه تخت است که $A_\circ$ مساحت کمینه‌ای است که فشار در $p_۲$ اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ز-۳ سنجهٔ ونتوری.

پاسخ مسائل انتخابی

فصل ۲

۲ـ۱۵ (الف) ۱۱۱ in؛ (ب) ۸٫۱۴ in

۲ـ۱۶ ۳٫۷۸ psi

۲ـ۱۷ ۰٫۷۴۷ psi

۲ـ۱۸ ۰٫۰۲۰۵ psi

۲ـ۱۹ ۰٫۰۰۴۱۹ psi

۲ـ۲۰ ۵۸۵ $\mathrm{lb_f}$

۲ـ۲۲ ۸٫۴۷(۱۰)^{۴} $\mathrm{lb_f}$؛ $\mathrm{F}_N = ۰$

۲ـ۲۳ درست مثل حالتی است که محفظه در حالت سکون باشد

۲ـ۲۴ ۶٫۹۴ ft

۲ـ۲۵ $p_B - p_A = \gamma$ psf؛ $p_D - p_A = ۱٫۶۱\gamma$ psf؛ $p_C - p_A = ۰٫۶۱\gamma$ psf

۲ـ۲۶ $\frac{\Delta a}{\Delta p} = \frac{D}{۴t\gamma}$ که D قطر میانگین فنجان و t ضخامت دیوارهٔ فنجان است.

۲ـ۳۰ سطح آب موازی با صفحهٔ مایل است.

۲ـ۳۱ عین حالت دوران محفظهٔ باز با عمق کمینهٔ برابر با ارتفاع محفظهٔ درپوش‌دار

۳۲ـ۲ $p = \frac{۱}{۲}pr^۲\omega^۲$، مستقل از موقعیت عمودی

۳۳ـ۲ $p_{\text{top}} + \rho a(H - h)$

۳۴ـ۲ $p - p_\circ = \frac{۱}{۲}\rho_۱\omega^۲r^۲ + \rho_۱g(z_{\circ۱} - z)$، برای $z_{\circ۱} > z - \frac{\omega^۲r^۲}{۲g} > z_{\circ۲}$
$p - p_\circ = \frac{۱}{۲}\rho_۱\omega^۲r^۲ + \rho_۲g(z_{\circ۱} - z) + \rho_۱g(z_{\circ۱} - z_{\circ۲}), z_{\circ۲} > z - \frac{\omega_۲r^۲}{۲g}$
سطح آزاد: $z = z_{\circ۱} + \frac{۱}{۲}\rho\omega^۲r^۲$
فصل مشترک: $z = z_{\circ۲} + \frac{۱}{۲}\rho\omega^۲r^۲$

۳۵-۲ شکل بی‌اهمیت است. L و h پارامترهای مرتبط هستند.

۳۸ـ۲ $\frac{\pi D^۲}{۴NA}(p_c + \rho\omega^۲D^۲/۱۶)$، σ که ρ = چگالی روغن، σ = تنش کششی، N= تعداد پیچ‌ها، A=سطح مقطع پیچ، p_c = فشار پمپ، و ω = برحسب رادیان بر ثانیه است.

فصل ۳

۱۷ـ۳ $۰٫۰۱۱۹\mathrm{ft^۳/s}$

۱۸ـ۳ $F = \frac{۱}{۴}\pi\rho a^۲V_\circ^۲ + \pi a^۲(\rho_۲ - p_۱)$

۱۹ـ۳ $p_۱ = p_۲ + ۲\tau_\circ L/a + \rho V_\circ^۲/۳$

۲۱ـ۳ $۱۰٫۶\mathrm{fps}$

۲۲ـ۳ $۱۶٫۲۱\mathrm{psi}$

۲۳ـ۳ (الف) $Q = \pi a^۲V_c/۲$، (ب) $\frac{۱}{۴}\pi\rho a^۲V_c^۲$، (ج) $\frac{۱}{۸}\pi\rho a^۲V_c^۳$

۲۴ـ۳ ۰٫۴۷ اسب بخار

۲۵ـ۳ $۴۷۶۰\mathrm{lb_f}, ۱۸٫۰\mathrm{ft^۳/s}$

۲۶ـ۳ $۴۳۷\mathrm{ft/s}$

۲۷ـ۳ $۸٫۶۶\mathrm{s}$

۲۹ـ۳ $۲۷٫۴\mathrm{psi/ft}$

۳۳ـ۳ $۲٫۳۲\mathrm{ft/s^۲}$

۳۴ـ۳ $Q = A_۲\sqrt{۲gh_۱}$، اگر $A_۲ \ll A_۱$ و $h_۲ < \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g}$

۳۵ـ۳ $-\rho U_۲h/۶$

۳۶ـ۳ $D = -۰٫۶۳\rho U^۲D$

۳ـ۳۷ $۷۶٫۵\text{rpm}$

۳ـ۳۸ $\omega = \sqrt{p_۰/x_۰\rho H}$، که $p_۰$ فشار جو است.

فصل ۴

۴ـ۱۱ نیروی برآ ۲۱۵۰۱lb است.

۴ـ۱۲ $f = ۰٫۰۲۸$: افت فشار در هر مایل برابر $۱۶۸\text{psi} = ۴۸۴$فوت روغن $= ۳۸۷$ فوت آب، با فرض اینکه چگالی جرمی آب $۰٫۸\text{g/cm}^۳$ باشد

۴ـ۱۴ $C_D = ۰٫۱۸$، $D = ۲۰\text{lb}$ درست برابر حالت مدل آزمون.

۴ـ۱۸ πها برابر $\omega D/V, \rho DV/\mu$ هستند.

۴ـ۱۹ $\omega D/V$ را می‌توان مدل‌سازی کرد اما $\rho DV/\mu$ را که کم‌اهمیت‌تر است، نمی‌توان مدل‌سازی کرد.

۴ـ۲۰ مدل فرود نیاز به سرعت $V_m = \sqrt{۲۰}$ مایل در ساعت دارد و مستقل از گران‌روی است. در اینجا مدل‌سازی عدد رینولدز غیر عملی است زیرا برای چنین شاره‌ای با سرعت $V_m = ۵\text{mph}$ و $\nu = ۱٫۳۶ \times ۱۰^{-۷}$ در دسترس نداریم.

۴ـ۲۲ کارایی ٪۵۷ ، $Q = ۱۳۵\text{ft}^۳/\text{s}$، $H = ۹۰\text{ft}$، توان ۶۰۷۵ اسب بخار.

فصل ۵

۵ـ۱۵ $۰٫۳۰۵\text{in}$

۵ـ۱۶ $۰٫۰۰۱۵۱\text{lb}_\text{f}/\text{ft}^۲$

۵ـ۱۷ $۰٫۰۰۰۷۰۵; ۰٫۱۲۵\text{lb}_\text{f}$

۵ـ۲۱ $۱٫۲۹(UL/\nu)^{-۱/۲}$

۵ـ۲۴ $۳۲٫۵\text{ft/s}^۲; \frac{۰٫۰۷۵h^۲V_۱^۲}{[h-۰٫۱\sqrt{x}/۸]^۲\sqrt{x}}$

۵ـ۲۵ $\rho U^۲/۱۲$

۵ـ۲۶ $p - p_{\text{ورودی}} = -۱٫۰۳(۱۰)^{-۳}\text{psi}$

۵ـ۲۸ $۰٫۳۳۸\text{lb}_\text{f}/\text{ft}$

۵ـ۲۹ $p - p_{\text{ورودی}} = -۶٫۶۷(۱۰)^{-۳}\text{psi}$

۵ـ۳۰ $۳٫۴۳\text{lb}_\text{f}$

۵ـ۳۳ $۰٫۴۶۰\text{lb}_\text{f}$

۳۴ـ۵ ۰٫۷۳۵ اسب بخار

۳۵ـ۵ $\mu = ۱٫۱۶(۱۰)^{-۴} \mathrm{lb_f s/in^۲}$

۳۶ـ۵ $۷۲۷۰\,\mathrm{rpm}$

۳۷ـ۵ $\pi\mu(\omega_۱ - \omega_۲)(R_۲^۴ - R_۱^۴)/۲T_{\mathrm{in.}}$

۳۸ـ۵ $۱٫۱۲\,\mathrm{ft/s}$

۳۹ـ۵ $۲۳٫۰\,\mathrm{ft/s}$

۴۰ـ۵ $۲۳٫۶\,\mathrm{ft/s}$

۴۲ـ۵ $۱۲٫۶\,\mathrm{ft/s}$

۴۳ـ۵ $۰٫۰۹۲۳\,\mathrm{psi}$

۴۴ـ۵ $۰٫۲۱۶\,\mathrm{psi}$

۴۵ـ۵ $T = \dfrac{A}{a}\sqrt{\tfrac{۲}{g}}[\sqrt{h_۰ + h_۱} - \sqrt{h_۰}]$

۴۷ـ۵ $F = \dfrac{\pi D L_\mu V}{h}\left[۱ + \dfrac{۳}{h^۲}\left(\dfrac{d^۲}{۴} - h_۲\right)\right] \approx \dfrac{۳}{۴}(d/h)^۳\pi L\mu V$، که $h = \dfrac{D_c - D}{۲}$

فصل ۶

۱۳ـ۶ $۲۶٫۶\,\mathrm{lb_f/ft}$

۱۶ـ۶ نیرو $= ۲m^۲\rho\displaystyle\int_۰^\infty \tfrac{(x^۲-a^۲)^۲}{(x^۲+a^۲)^۴}dx = \tfrac{۳\pi m^۲\rho}{۱۶a^۳}$

۱۷ـ۶ نیرو $= \tfrac{m^۲\rho}{a^۳}\left(\tfrac{۳\pi}{۱۶}\cos^۲\alpha + \tfrac{\pi}{۴}\sin^۲\alpha - \tfrac{۱}{۴}\sin ۲\alpha\right)$

۱۸ـ۶ بدون اختلاف، زیرا F به $m^۲$ بستگی دارد.

۲۰ـ۶ $F = -m\ln(\sinh \pi z/۲d)$

۲۱ـ۶ $\phi = A(x^۲ - y^۲)$، $\psi = (A)(۲xy)$

۲۳ـ۶ $F = -\frac{Q}{۲\pi}\ln(\sinh \pi z/d) - U_۰ z$

۲۴ـ۶ $F = \frac{i\Gamma}{۲\pi}\mathrm{in}\left(\frac{z-id}{z+id}\right)$، خطهای جریان دایره‌های تودرتو هستند.

۳۱ـ۶ $u - iv = -\frac{Q}{۲\pi}\left[\frac{z-(b+ia)}{z-(b-ia)} + \frac{z+(b-ia)}{z-(b+ia)} + \frac{z+(b+ia)}{z+(b-ia)} + \frac{z+(b-ia)}{z+(b+ia)}\right]$

۳۲ـ۶ $F = -\frac{Q}{۲\pi}\ln\left\{\prod_{n=۰}^{۷}[z - ae^{i(\pi/۴)(۱/۲+n)}]\right\}$.

۳۴ـ۶ $ry = \Gamma^۲/۴\pi^۲ g$، که y از سطح آزاد بی‌نهایت تا سطح آزاد در r اندازه‌گیری می‌شود.

فصل ۷

۲۸ـ۷ ۴۸۸۰ft/s

۲۹ـ۷ ۰٫۳۱۳؛ ۱٫۱۱

۳۰ـ۷ ۰٫۱۸۲

۳۱ـ۷ ۱۶٫۱psi

۳۲ـ۷ ۷۲٫۵psi، ۱۷۹٫۲Btu/lb، ۸۲۲°R

۳۳ـ۷ $۰٫۰۰۲۵۶\text{ft}^۲$

۳۴ـ۷ $۱۸٫۱\text{lb}_\text{m}/\text{s}$

۳۵ـ۷ (الف) $۰٫۰۰۸۰۶\text{ft}^۲$؛ $۰٫۰۱۳۵\text{ft}^۲$ (ب) ۲٫۰۱

۳۶ـ۷ ۰٫۲۲۲lb/s، ۱۵۹۰ft/s

۳۷ـ۷ ۱٫۴۰

۳۸ـ۷ ۱۱۹۸ft/s

فصل ۸

۸ـ۸ $M_۲ = ۲٫۶$؛ $T_۲ = ۳۸۱°\text{R}$؛ $p_۲ = ۵٫۵\text{psia}$

۹ـ۸ $M_۲ = ۱٫۴۵$؛ $T_۲ = ۶۳۸°\text{R}$؛ $p_۲ = ۳۱\text{psia}$

۱۰ـ۸ β(پایین) $= ۱۵°$؛ β(بالا) $= ۱۹٫۵°$

۱۱ـ۸ $M_۲ = ۲٫۶$؛ $T_۲ = ۴۳۷°\text{R}$؛ $p_۲ = ۳٫۹۳\text{psia}$

۱۲ـ۸ $D_۲ = ۰٫۶۸D_۱$

۱۳ـ۸ $D_۲ = ۱٫۷۵D_۱$

۱۵ـ۸ برای nامین طول موج $\dfrac{\Delta p}{p_۱} = \dfrac{(-۱)^n\epsilon}{\lambda\sqrt{M_۱^۲ - ۱}}$

۱۶ـ۸ $L = ۱٫۰۳cp_۱$ در واحد طول (نظریهٔ انبساط موج ضربه‌ای)

۸ـ۱۷ $G = \dfrac{c}{۲\sqrt{M_۱^۲ - ۱}}$

۸ـ۱۹ $C_L = \frac{۴\bar{\alpha}}{\sqrt{M_۱^۲ - ۱}}$، $C_D = \frac{۴}{\sqrt{M_۱^۲ - ۱}}\left[\frac{\pi^۲}{۲}\left(\frac{H}{c}\right)^۲ + \bar{\alpha}^۲ + ۲\pi^۲\left(\frac{Y}{c}\right)^۲\right]$

۸ـ۲۲ $|\theta| = ۵۳^\circ$

۸ـ۲۴ سرعت موج ضربه‌ای قبل از بازتاب ۱۱۶۰ft/s است.

واژه‌نامه

اثرهای خفه‌شدگی	chocking effects
افت هد	nead loss
برآ (بالابر)	lift
بیضی‌گون	oval shape
پخشندگی گران‌رو	viscous diffusivity
پسا (پس‌کشی)	drag
پس‌زنی	recoil
پیوستار	continum
تار گردابه	vortex filament
تنگش	pinch
جریان روان‌ساز	lubricant flow
جریان کاملاً توسعه‌یافته	fully developed flow
خط گردابه	vortex line
دنباله	wake
دیوباد	tornado
روان‌ساز	lubricant
سرریز	weir
سنجهٔ ونتوری	venturi meter
شاره‌های اتساعی	Dilatant fluids
شاره‌های چگالش‌گرا	Rheopetic fluids
شاره‌های روانش‌گرا	thixotropic fluids
شیپوره	nuzzle
طول آمیختگی	mixing lenght
فراصوتی	ultra sonic
فروصوتی	subsonic
فرووزش	downwash
گران‌روی (چسبندگی)	viscosity
گردابه	vortex
گردشاری	vorticity
لبهٔ حمله	leading edge
لبهٔ فرار	trailing edge
مدخل (اریفیس)	orifice
نگاشت همدیس	conformal mapping
نیمرخ سرعت	velocity profile
همدیس	conformal
هوابر	air foil

نمایه