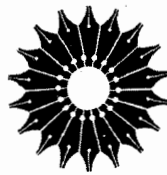


# دینامیک کلاسیک

ذرات و سیستمها

جرى بی . ماریون، استیون تی . تورنتون

ترجمه جلال الدین پاشایی راد، بهرام معلمی



# دینامیک کلاسیک

ذرات و سیستمها

جری بی. ماریون، استیون تی. تورنتون

ترجمه جلال الدین پاشایی راد، بهرام معلمی

مرکز نشر دانشگاهی

## بسم الله الرحمن الرحيم

### فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار ویرایش سوم
۳	نکته‌هایی از پیشگفتار ویرایش نخست
۵	۱. ماتریس، بردار و حساب برداری
۵	۱.۱ مقدمه
۶	۲.۱ مفهوم کمیت اسکالر
۷	۳.۱ تبدیل مختصات
۱۱	۴.۱ خواص ماتریسهای دوران
۱۵	۵.۱ عملیات ماتریسی
۱۸	۶.۱ سایر تعاریفها
۲۰	۷.۱ مفهوم هندسی ماتریسهای تبدیل
۲۸	۸.۱ تعریف اسکالر و بردار برحسب خواص تبدیلی
۲۸	۹.۱ اسکالر بنیادی و عملیات برداری
۲۹	۱۰.۱ ضرب داخلی دو بردار
۳۲	۱۱.۱ بردارهای یکه
۳۳	۱۲.۱ ضرب برداری دو بردار
۳۹	۱۳.۱ مشتق بردار نسبت به اسکالر

۴۰	۱۴.۱ مثالهایی از مشتقها-سرعت و شتاب
۴۳	۱۵.۱ سرعت زاویه‌ای
۴۷	۱۶.۱ عملگر گرادیان
۵۱	۱۷.۱ انتگرالگیری از بردارها
۵۳	مسائل
۵۷	۲. مکانیک نیوتونی-تک‌ذره
۵۷	۱.۲ مقدمه
۵۸	۲.۲ قوانین نیوتون
۶۳	۳.۲ چارچوبهای مرجع
۶۶	۴.۲ معادله حرکت یک ذره
۹۰	۵.۲ قضایای پایستگی (بقا)
۹۷	۶.۲ انرژی
۱۰۴	۷.۲ حرکت موشک
۱۱۵	۸.۲ محدودیتهای مکانیک نیوتونی
۱۱۸	مسائل
۱۲۷	۳. نوسانها
۱۲۷	۱.۳ مقدمه
۱۲۸	۲.۳ نوسانگر هماهنگ ساده
۱۳۰	۳.۳ نمودارهای فاز
۱۳۲	۴.۳ نوسانهای هماهنگ در دو بعد
۱۳۶	۵.۳ نوسانهای میرا
۱۴۶	۶.۳ نیروهای محرک سینوسی
۱۵۲	۷.۳ سیستمهای فیزیکی
۱۵۳	۸.۳ نوسانهای الکتریکی
۱۵۸	۹.۳ اصل برهم‌نهی-سری فوریه
۱۶۲	۱۰.۳ پاسخ نوسانگرهای خطی به تابع وادارنده ضربه‌ای (اختیاری)

۱۷۱	۱۱.۳ نوسانهای غیرخطی
۱۷۷	۱۲.۳ نمودارهای فاز برای سیستمهای غیرخطی
۱۸۱	۱۳.۳ آونگ ساده (اختیاری)
۱۸۷	۱۴.۳ جهش، پسماند و تأخیر فاز (اختیاری)
۱۹۱	مسائل
۱۹۹	۴. گرانش
۱۹۹	۱.۴ مقدمه
۲۰۱	۲.۴ بتانسیل گرانشی
۲۱۰	۳.۴ خطوط نیرو و سطوح هم‌بتانسیل
۲۱۱	۴.۴ مفهوم بتانسیل در کجا مفید است؟
۲۱۴	مسائل
۲۱۶	۵. برخی روشهای حساب وردشی (حساب تغییرها)
۲۱۶	۱.۵ مقدمه
۲۱۷	۲.۵ طرح مسئله
۲۲۰	۳.۵ معادله اویلر
۲۲۶	۴.۵ «صورت دوم» معادله اویلر
۲۲۸	۵.۵ توابع با چند متغیر وابسته
۲۲۹	۶.۵ معادلات اویلر هرگاه شرایط کمکی اعمال شوند
۲۳۲	۷.۵ نمادگذاری $\delta$
۲۳۴	مسائل
۲۳۶	۶. اصل هامیلتون؛ دینامیک لاگرانژی و هامیلتونی
۲۳۶	۱.۶ مقدمه
۲۳۸	۲.۶ اصل هامیلتون
۲۴۲	۳.۶ مختصات تعمیم‌یافته
۲۴۵	۴.۶ معادلات حرکت لاگرانژ در مختصات تعمیم‌یافته

۲۵۷	۵.۶ معادلات لاگرانژ با ضرایب نامعین
۲۶۴	۶.۶ هم‌ارزی معادلات لاگرانژ و نیوتون
۲۶۸	۷.۶ سرشت دینامیک لاگرانژی
۲۶۹	۸.۶ قضیه‌ای در ارتباط با انرژی جنبشی
۲۷۱	۹.۶ نگاهی دوباره به قضایای پایستگی
۲۷۷	۱۰.۶ معادلات بندادی حرکت-دینامیک هامیلتونی
۲۸۵	۱۱.۶ نظرهای پیرامون متغیرهای دینامیکی و محاسبات وردشی در فیزیک
۲۸۸	۱۲.۶ فضای فاز و قضیه لیوویل (اختیاری)
۲۹۳	۱۳.۶ قضیه ویرنال
۲۹۶	مسائل
۳۰۴	۷. حرکت نیروی مرکزی
۳۰۴	۱.۷ مقدمه
۳۰۴	۲.۷ جرم کاهش‌یافته
۳۰۶	۳.۷ قضایای پایستگی-انتگرالهای اول حرکت
۳۰۸	۴.۷ معادلات حرکت
۳۱۳	۵.۷ مدارها در یک میدان مرکزی
۳۱۵	۶.۷ انرژی مرکزگریزی و پتانسیل مؤثر
۳۱۸	۷.۷ حرکت سیاره‌ای-مسئله کیپلر
۳۲۴	۸.۷ معادله کیپلر (اختیاری)
۳۳۱	۹.۷ زوایای اوج و حضیض و حرکت تقدیمی (اختیاری)
۳۳۶	۱۰.۷ پایداری مدارهای دایره‌ای
۳۴۵	۱۱.۷ دینامیک مداری
۳۵۳	مسائل
۳۶۰	۸. دینامیک سیستم ذرات
۳۶۰	۱.۸ مقدمه
۳۶۲	۲.۸ مرکز جرم

۳۶۴	۳.۸ تکانه خطی سیستم
۳۶۸	۴.۸ تکانه زاویه‌ای سیستم
۳۷۲	۵.۸ انرژی سیستم
۳۷۹	۶.۸ برخوردهای کشسان دو ذره
۳۸۸	۷.۸ سینماتیک برخوردهای کشسان
۳۹۵	۸.۸ برخوردهای ناکشسان
۴۰۰	۹.۸ سطح مقطع
۴۰۵	۱۰.۸ فرمول پراکندگی رادرفورد
۴۰۸	مسائل
۴۱۶	۹. حرکت در چارچوب مرجع نالخت
۴۱۶	۱.۹ مقدمه
۴۱۷	۲.۹ دستگاههای مختصات چرخان
۴۲۱	۳.۹ نیروهای مرکز‌گریز و کوریولیس
۴۲۵	۴.۹ حرکت نسبت به زمین
۴۳۸	مسائل
۴۴۰	۱۰. دینامیک اجسام صلب
۴۴۰	۱.۱۰ مقدمه
۴۴۲	۲.۱۰ تانسور لختی
۴۴۷	۳.۱۰ تکانه زاویه‌ای
۴۵۳	۴.۱۰ محورهای اصلی لختی
۴۵۷	۵.۱۰ گشتاورهای لختی در دستگاههای مختصات جسمی متفاوت
۴۶۲	۶.۱۰ سایر خواص تانسور لختی
۴۷۲	۷.۱۰ زاویه‌های اویلر
۴۷۸	۸.۱۰ معادلات اویلر برای جسم صلب
۴۸۲	۹.۱۰ حرکت بدون نیروی فرقه متقارن
۴۸۹	۱۰.۱۰ حرکت فرقه متقارن با یک نقطه ثابت

۴۹۶	۱۱.۱۰ پایداری چرخشهای جسم صلب
۴۹۹	مسائل
۵۰۵	۱۱. نوسانهای جفت شده
۵۰۵	۱.۱۱ مقدمه
۵۰۶	۲.۱۱ دو نوسانگر هماهنگ جفت شده
۵۱۱	۳.۱۱ جفت شدگی ضعیف
۵۱۴	۴.۱۱ مسئله کلی نوسانهای جفت شده
۵۲۱	۵.۱۱ تعامل ویژه بردارها (اختیاری)
۵۲۳	۶.۱۱ مختصات بهنجار
۵۳۳	۷.۱۱ ارتعاشهای مولکولی
۵۳۸	۸.۱۱ سه آونگ ساده (تخت) به طور خطی جفت شده-مثالی برای واگنی
۵۴۲	۹.۱۱ ریسمان بارگذاری شده
۵۵۳	مسائل
۵۵۸	۱۲. سیستمهای پیوسته: ریسمانهای مرتعش
۵۵۸	۱.۱۲ مقدمه
۵۵۹	۲.۱۲ ریسمان پیوسته به صورت حالت حدی
۵۶۳	۳.۱۲ انرژی ریسمان مرتعش
۵۶۷	۴.۱۲ اصلی ریلی
۵۷۲	۵.۱۲ معادله موج
۵۷۵	۶.۱۲ حرکت واداشته و میرا
۵۷۸	مسائل
۵۸۰	۱۳. معادله موج در یک بعد
۵۸۰	۱.۱۳ مقدمه
۵۸۱	۲.۱۳ جوابهای عمومی معادله موج
۵۸۴	۳.۱۳ جداسازی معادله موج



۵۸۹	۴.۱۳ سرعت فاز، پاشندگی و تضعیف
۵۹۵	۵.۱۳ سرعت گروه و بسته‌های موج
۶۰۰	۶.۱۳ انتشار انرژی در ریسمانی بارگذاری شده
۶۰۵	۷.۱۳ امواج بازتابی و عبوری
۶۰۷	۸.۱۳ سری فوریه تعمیم یافته (اختیاری)
۶۱۲	۹.۱۳ نمایش انتگرالی فوریه بسته‌های موج (اختیاری)
۶۱۹	مسائل
۶۲۵	۱۴. نظریه نسبیت خاص
۶۲۵	۱.۱۴ مقدمه
۶۲۷	۲.۱۴ ناوردایی گالیله
۶۲۸	۳.۱۴ تبدیلات لورنتس
۶۳۶	۴.۱۴ تحقیق تجربی نظریه خاص
۶۴۰	۵.۱۴ اثر دوپلر نسبیتی
۶۴۳	۶.۱۴ پارادوکس دوقلوها
۶۴۵	۷.۱۴ تکانه نسبیتی
۶۵۰	۸.۱۴ انرژی
۶۵۴	۹.۱۴ فضا زمان و چار-بردارها
۶۶۵	۱۰.۱۴ تابع لاگرانژی در نسبیت خاص
۶۶۶	۱۱.۱۴ حرکت‌شناسی نسبیتی
۶۷۱	مسائل
۶۷۹	پیوست الف: قضیه تایلور
۶۸۵	پیوست ب: انتگرالهای بیضوی
۶۹۱	پیوست ج: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم
۷۰۲	پیوست د: فرمولهای مفید
۷۰۸	پیوست ه: انتگرالهای مفید

۷۱۲	پیوست و: روابط دیفرانسیلی در دستگاههای مختصات متفاوت
۷۱۶	پیوست ز: «اثبات» رابطه $\sum_{\mu} x_{\mu}^2 = \sum_{\mu} x'_{\mu}^2$
۷۱۸	پاسخ بعضی مسائل با شماره زوج
۷۲۸	فهرست راهنما

## پیشگفتار ویرایش سوم

جامعه فیزیک در سال ۱۹۸۱ با مرگ ناپهنگام جری ماریون، یکی از اعضای سرآمد خود را از دست داد. او به اعتبار سلیس نویسی خود در چندین کتاب درسی، در آموزش فیزیک سهم عمده‌ای ایفا کرد. دینامیک کلاسیک سالهاست که یکی از کتابهای درسی مهم فیزیک به شمار می‌آید.

تجدید نظر در کتاب بسیار خوب شخصی دیگر، کاری دشوار است. از این رو، وقتی مؤسسه انتشاراتی هارکورت بریس یونویچ از من خواست که در ویرایش دوم دینامیک کلاسیک تجدید نظر کنم، این کار را با فرستادن پرسشنامه‌ای برای چند صد تن از مدرسین مکانیک کلاسیک در سطح متوسط، آغاز کردم. پاسخهای آنان با این عقیده من که کتاب استاد ماریون بسیار عالی نوشته شده و فوق‌العاده چالش‌انگیز است، منطبق بود. با همه اینها احساس می‌شد که آوردن مثالهای بیشتر درباره‌ی موارد و مسائل بیشتر در یک سطح آسانتر، ضروری است. لازم بود که بر مفاهیم نیوتونی تأکید بیشتری شود و شاید به نوسانها کمتر پرداخته شود. با وجود این منظور اولیه کتاب به همان طریقی که در پیشگفتار ویرایش اول آمده، همچنان معتبر باقی می‌ماند ولی حس کردم که لازم است کاربرد آن را هم آسانتر کنم.

حالا، این کتاب حاوی مثالها و مسائل آخر فصل خیلی بیشتری است. محتوای فصل مربوط به مکانیک نیوتونی (فصل ۲) با افزوده شدن چند مفهوم همراه با مثالهای جدید، غنیر شده است. گرانس و سیستمهای ذرات را از فصل ۲ در چاپ اول به فصلهای جداگانه (به ترتیب، ۴ و ۸) منتقل کرده‌ام. سه فصلی که در چاپ اول به مبحث نوسانها اختصاص یافته بود، اکنون در یک فصل (فصل ۳) ادغام شده است.

در سرتاسر این کتاب، برخی از مباحثی را که تصور می‌شد خیلی تخصصی یا خیلی پیشرفته‌اند، حذف کرده‌ام. به جای آنها، مباحث جدیدی چون حرکت موشک، دینامیک مداری، نوسانهای

غیرخطی، ارتعاشهای مولکولی، و پارادوکس دوقلوها را افزوده‌ایم. فصل مربوط به نسبیت (فصل ۱۴) در پایان کتاب آمده و کلاً در قالب جدید تدوین شده است. پاسخ به مسائل با شماره‌های زوج را به کتاب افزوده‌ایم، و کتابشناسی انتخابی و عمومی آن را روزآمد کرده‌ایم.

دینامیک کلاسیک همچنان برای یک دورهٔ یکسالهٔ مکانیک کلاسیک، بسیار مناسب است. این کتاب برای دانشجویان کارشناسی فیزیک و مهندسی در سالهای بالاتر تحصیلشان تدوین شده است. اما، من تلاش زیادی کرده‌ام تا کتاب را چنان بازسازی کنم که بتواند برای دورهٔ یک ترمی یا دورهٔ دو ترمی هم مناسب باشد. درس یک ترمی خودم در دانشگاه ویرجینیا یازده فصل اول این کتاب را در برمی‌گیرد، البته از برخی مباحث این فصول چشمپوشی می‌کنم. بخشهایی که می‌توان آنها را بدون لطمه بر تداوم مطلب، حذف کرد (و بخشهایی که می‌شود آنها را به نحوی پیشرفته دانست) با واژهٔ «اختیاری» به دنبال عنوان بخش مشخص شده‌اند و پیشنهادهای دیگر برای گذشتن از کنار برخی مطالب را می‌توان در پانوشتها یافت.

استیون تی. تورتون

## نکته‌هایی از پیشگفتار ویرایش نخست

در این کتاب بیان جدید و تا حد معقول کاملی از مکانیک کلاسیک ذرات، سیستم‌های ذرات، و اجسام صلب برای دانشجویان رشته فیزیک در سطح پیشرفته دوره کارشناسی ارائه می‌شود. این کتاب به‌عنوان یک کتاب درسی برای درس مکانیک که هر هفته سه ساعت و به مدت یکسال ارائه می‌شود، تنظیم شده است. اما، با برنامه‌ریزی دقیق و حذف بعضی مطالب<sup>۱</sup> می‌شود مباحث اساسی آن را در یک نیمسال (چهار واحدی) درس داد. مباحثی چون نوسانهای غیرخطی، قضیه لیوویل، مسئله سه جسم، برخوردهای نسبی، و برخی مطالب دیگر را در صورتی که زمان برای تدریس آنها کافی نباشد، می‌توان به راحتی حذف کرد. اما امیدواریم که این مطالب به‌طور کلی حذف نشوند، چرا که این مباحث عمده‌تاً مباحث «سرگرم‌کننده» فیزیک کلاسیک به‌شمار می‌آیند. از سوی دیگر، از این کتاب می‌توان در قسمت مکانیک درسهای ریاضی فیزیک یا فیزیک نظری، بهره گرفت. دانشجویانی که این درس را می‌گیرند باید درسهای فیزیک پایه، و حساب دیفرانسیل و انتگرال را گذرانده باشند.

از تألیف این کتاب سه‌منظور داشته‌ایم: الف) ارائه بررسی جدیدی از سیستم‌های مکانیک کلاسیک به‌طریقی که گذر به نظریه کوانتومی فیزیک با کمترین دشواری ممکن صورت پذیرد. به این خاطر، در سراسر این کتاب از نمادگذاری و اصطلاحات جدید بهره برده‌ایم. همچنین، به‌مفاهیمی که در فیزیک نوین مهم‌اند توجه خاص مبذول شده است. ب) آشنا کردن دانشجو با روشهای جدید ریاضی در هر فرصتی، و ورزیده کردن او در حل مسائل به‌طوری که در بهره‌گیری از آنها مهارت معقولی به‌دست آورد. ج) تجهیز نسبتاً خوب دانشجو در یک دوره بسیار مهم تحصیلی، بین فیزیک «مقدماتی» و فیزیک «پیشرفته»، و آماده‌سازی او برای رویارویی با صورتبندی نظری و همچنین بهره‌گیری از روشهای عملی حل مسئله.

۱. به‌عنوان بخشهایی که می‌شود آنها را بدون لطمه به‌بیوستگی مطالب حذف کرد، واژه «اختیاری» افزوده شده است.

به‌فراخور موقعیتهایی که پیش می‌آید، در این کتاب شیوه‌های ریاضی جدید هم مطرح می‌شوند. اما، انتظار می‌رود دانشجویانی که از این کتاب برای واحد درسی خود استفاده می‌کنند، یک درس ریاضی پیشرفته هم، همزمان با آن، بگیرند. دانشجویان رشته فیزیک باید دقت ریاضی را فراگیرند و ارزش آن را بدانند، اما هر جا که انسجام فیزیک بر اثر پافشاری در اعمال و دقت ریاضی در معرض آسیب باشد، حق تقدم با فیزیک خواهد بود.

در فصل اول روشهای برداری را عنوان کرده و در سرتاسر کتاب از آنها بهره‌گرفته‌ایم. فرض شده است که دانشجو با رهیافت «پاره‌خط جهت‌دار» برای بردارها آشنایی دارد. بنابراین، در اینجا دیدگ بنیادپتری پذیرفته شده و تحلیل برداری با در نظر گرفتن خواص تبدیلیهای مختصات مطرح شده است. امتیاز اتخاذ این دیدگاه این است که شالوده مستحکمی برای گذار بعدی به روشهای تانسوری [فصلهای ۱۰ و ۱۱ در ویرایش حاضر] بنا نهاده می‌شود. برای استفاده آن دسته از دانشجویانی که زمینه ریاضی آنان ناکافی است، و نیز برای مرور دانشجویان پیشرفته‌تر، کاربرد اعداد مختلط و حل معادلات دیفرانسیل معمولی و روشهای ریاضی دیگر در پیوستهای کتاب آمده‌اند.

مثالهای فراوانی را در سرتاسر این کتاب درج کرده‌ایم. خواننده پی خواهد برد که در این مثالها، و نیز به‌همین ترتیب در استنتاجها، جزئیات فراوانی مطرح شده است و عباراتی از قبیل «می‌توان نشان داد که» را در این کتاب به حداقل رسانده‌ایم. اما، برخی از عملیات جبری طولانی و کسل‌کننده را به‌هنگام ضرورت حذف کرده‌ایم، تا مطمئن شویم که دانشجو چگونگی شکل‌گیری مفاهیم در دست بررسی را دنبال می‌کند. مسائل نیز بخش تکمیلی این کتاب را تشکیل می‌دهند و دانشجویی که می‌خواهد تسلط کافی بر موضوع پیدا کند، باید تعداد قابل ملاحظه‌ای از آنها را حل کند.

یکی از جنبه‌های این کتاب که تهیه آنها برای مؤلف بسیار لذت‌بخش بوده، پانوشتهای تاریخی است. امروزه تاریخچه فیزیک از دوره‌های تحصیلی فیزیک تقریباً حذف شده است، و در نتیجه، دانشجو غالباً از زمینه تاریخی یک مبحث خاص، تا حد ناآشنایی با نام بزرگان ریاضی و فیزیک که در تکامل موضوع کوشیده‌اند، بی‌خبر است. از این رو، این پانوشتها را آورده‌ایم تا اشتیاق دانشجوی را برانگیزیم و او را به گشت و گذار در تاریخچه حوزه مورد علاقه‌اش تشویق کنیم. به‌طور کلی، در این کتاب به‌نوشتارهای اصلی قدیمی ارجاع نداده‌ایم مگر به مقاله‌های نسبتاً جدیدی که انتظار می‌رود دانشجو به آنها دسترسی داشته باشد...

## ماتریس، بردار، و حساب برداری

### ۱.۱ مقدمه

پدیده‌های فیزیکی را می‌توان با بهره‌گیری از روشهای برداری هرچه مختصرتر و ظریفتر تشریح کرد.<sup>۱</sup> وقتی «قوانین» فیزیکی را در وضعیتهای خاصی به‌کار می‌بریم، نتایج به‌دست آمده باید مستقل از دستگاه مختصات دوقطبی استوانه‌ای یا متعامدی که انتخاب می‌کنیم، باشند. این نتایج به‌انتخاب دقیق مبدأ مختصات نیز نباید بستگی داشته باشند. با بهره‌گیری از بردارها این استقلال حاصل می‌شود. بدون توجه به‌اینکه حکم کنیم مناسبترین دستگاه مختصات برای توصیف مسئله‌ای خاص کدام است، می‌توانیم هر قانون فیزیکی مشخص را به‌دقت نمایش دهیم. به‌علاوه بهره‌گیری از نمادگذاری برداری روش دقیق و در عین حال ظریفی را، حتی برای بیان پیچیده‌ترین نتایج، به‌دست می‌دهد.

در بررسیهای مقدماتی بردارها، می‌توان بحث را با این حکم آغاز کرد: «بردار کمیتی است که می‌توان آن را به‌صورت پاره‌خطی جهتدار نمایش داد.» مطمئناً، این نوع نگرش نتایج دقیقی

---

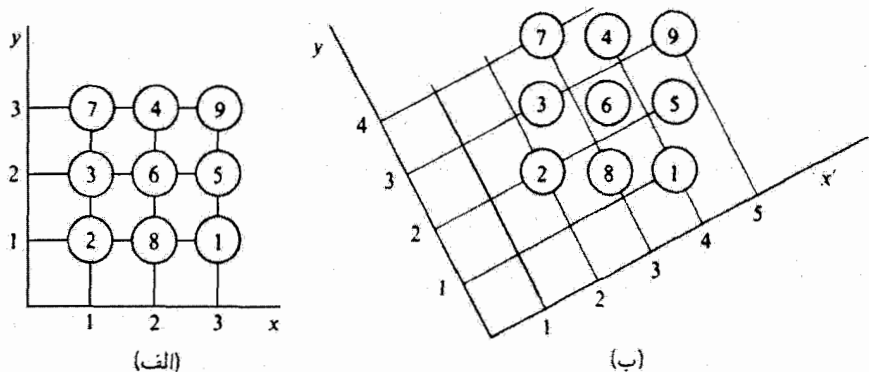
۱. قسمت اعظم پیشرفت آنالیز برداری در سالهای ۱۸۸۰ تا ۱۸۸۲ مدیون یوسیا ویلارد گیسیس (۱۸۳۹-۱۹۰۳) است. بیشتر نمادگذاری امروزی بردارها کار اولیور هومساید (۱۹۲۵-۱۸۵۰)، مهندس برق انگلیسی، است، و سابقه آن از حدود ۱۸۹۳ شروع می‌شود.

به بار خواهد آورد، و حتی برای دستیابی به درک مشخصی از ماهیت فیزیکی بردار مفید فایده هم خواهد بود. فرض می‌کنیم که خواننده با این نوع بررسی آشناست، اما در اینجا این روش را در پیش نخواهیم گرفت زیرا می‌خواهیم بر رابطه‌ای تأکید ورزیم که بردار با تبدیل مختصات از آن متأثر می‌شود. بنابراین نه تنها برای تشریح تبدیلات، بلکه به خاطر توصیف خود بردار هم با ماتریسها و نمادگذاری ماتریسی آشنا می‌شویم. با نوعی نمادگذاری نیز آشنا می‌شویم که با بهره‌گیری از تانسورها به آسانی سازگار است، هر چند که تا وقتی روال عادی رویدادها بهره‌گیری از آنها را طلب نکند (فصل ۱۰ را ببینید) با این مباحث برخورد نخواهیم کرد.

مراد این نیست که روشهای برداری را به طور کامل ارائه کنیم؛ بلکه، فقط به آن مباحثی توجه خواهیم کرد که برای مطالعه سیستمهای مکانیکی ضروری‌اند. بدینسان، در این فصل به مبانی جبر ماتریسی و برداری و حساب برداری می‌پردازیم.<sup>۱</sup> در این فصل بسیاری از جزئیات و اثباتهای پیچیده‌تر را حذف کرده‌ایم. خواننده برای دستیابی به مطالب بیشتر می‌تواند به همان کتاب پیش‌گفته مراجعه کند.

### ۲.۱ مفهوم کمیت اسکالر

به آرایه ذرات در شکل ۱.۱ (الف) توجه کنید. هر ذره را در این آرایه مطابق جرمش، مثلاً به گرم، برچسب می‌زنیم. محورهای مختصات طوری نمایش یافته‌اند که می‌توانیم ذره خاصی را با یک جفت عدد  $(x, y)$  مشخص کنیم. جرم،  $M$ ، ذره واقع در  $(x, y)$  را می‌توان به صورت  $M(x, y)$  بیان



شکل ۱.۱

۱. برای دستیابی به بحث کاملتری در خصوص آنالیز برداری از دیدگاه کاربرد آنها در وضعیتهای فیزیکی، رجوع کنید به:



کرد؛ بدینسان جرم ذره واقع در  $x = 2$  و  $y = 3$  را می‌توان به صورت  $M(x = 2, y = 3) = 4$  نوشت. حال به محورهایی که به شیوه نمایش یافته در شکل ۱.۱ (ب) چرخیده و انتقال یافته‌اند، توجه کنید. اینک جرم  $4g$  در  $x' = 4$  و  $y' = 3.5$  واقع است؛ یعنی، این جرم به صورت  $M(x' = 4, y' = 3.5) = 4$  مشخص می‌شود. و به‌طور کلی

$$M(x, y) = M(x', y') \quad (1.1)$$

زیرا که تغییر محورهای مختصات بر جرم هیچ ذره‌ای تأثیری ندارد. کمیت‌هایی که تحت تبدیل مختصات بدون تغییرند — یعنی کمیت‌هایی که از معادله‌ای از نوع بالا پیروی می‌کنند — کمیت اسکالر خوانده می‌شوند.

هر چند که می‌توانیم جرم ذره (یا دما، یا اندازه سرعت، و مانند آنها) را نسبت به دستگاه مختصات با عدد واحدی بیان کنیم، اما برخی خواص فیزیکی وابسته به ذره (چون جهت حرکت ذره یا جهت نیرویی که ممکن است بر ذره وارد آید) را نمی‌توان با این شیوه ساده مشخص کرد. بیان این کمیت‌های پیچیده‌تر مستلزم بهره‌گیری از بردارهاست. درست به همان ترتیب که اسکالر بنا بر تعریف عبارت است از کمیتی که تحت تبدیل مختصات ناوردا باقی می‌ماند، بردار را نیز می‌توان برحسب خواص تبدیلی‌اش تعریف کرد. ابتدا این مطلب را بررسی می‌کنیم که وقتی دستگاه مختصات حول مبدأ خود می‌چرخد، مختصات یک نقطه چگونه تغییر می‌کنند.

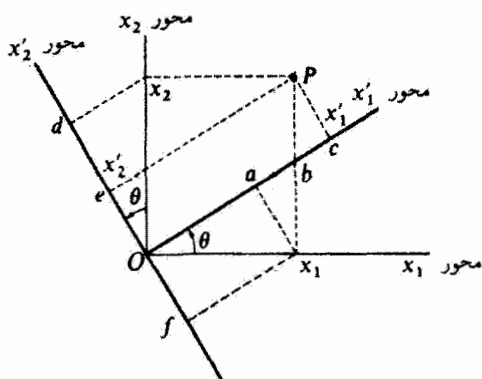
### ۳.۱ تبدیل مختصات

نقطه  $P$  با مختصات  $(x_1, x_2, x_3)$  را نسبت به یک دستگاه مختصات معین در نظر بگیرید.<sup>۱</sup> سپس به دستگاه مختصات دیگری توجه کنید، که آن را می‌توان با یک چرخش ساده از دستگاه اصلی به دست آورد؛ مختصات نقطه  $P$  نسبت به دستگاه مختصات جدید را با  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  مشخص می‌کنیم. وضعیت برای یک حالت دوبعدی در شکل ۲.۱ نشان داده شده است.

مختصه جدید  $x'_1$  عبارت است از مجموع تصویر  $x_1$  بر محور  $x'_1$  (خط  $\overline{Oa}$ ) و تصویر  $x_2$  بر محور  $x'_1$ . (خط  $\overline{ab} + \overline{bc}$ )؛ یعنی

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ &= x_1 \cos \theta + x_2 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \end{aligned} \quad (2.1 \text{ الف})$$

۱. محورها را به جای  $x, y, z$  و  $x_1, x_2, x_3$  و  $x'_1, x'_2, x'_3$  مشخص می‌کنیم تا در هنگام انجام عمل مجموع‌یابی، نماندگاری ساده شود. فعلاً بحث خود را به دستگاه‌های مختصات قائم (دکارتی) محدود می‌کنیم.



شکل ۲.۱

مختصه  $x'_1$  عبارت است از مجموع تصویرهای مشابه:  $x'_1 = \overline{Od} - \overline{de}$ ، اما خط  $\overline{de}$  با خط  $\overline{Of}$  نیز برابر است. بنابراین

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\ &= x_1 \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) + x_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (۲.۱)$$

با نمادگذاری زیر آشنا می‌شویم: زاویه بین محور  $x'_1$  و محور  $x_1$  را به صورت  $(x'_1, x_1)$  می‌نویسیم، و به‌طور کلی، زاویه بین محور  $x'_i$  و محور  $x_j$  را با  $(x'_i, x_j)$  مشخص می‌کنیم. به‌علاوه، کسینوس زاویه  $(x'_i, x_j)$  را به صورت  $\lambda_{ij}$  تعریف می‌کنیم

$$\lambda_{ij} \equiv \cos (x'_i, x_j) \quad (۳.۱)$$

$$\begin{cases} \lambda_{11} = \cos (x'_1, x_1) = \cos \theta \\ \lambda_{12} = \cos (x'_1, x_2) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta \\ \lambda_{21} = \cos (x'_2, x_1) = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\sin \theta \\ \lambda_{22} = \cos (x'_2, x_2) = \cos \theta \end{cases} \quad (۴.۱)$$

اینک معادلات تبدیل [معادله (۲.۱)] چنین می‌شوند

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 \cos(x'_1, x_1) + x_2 \cos(x'_1, x_2) \\ &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2\end{aligned}\quad (5.1 \text{ الف})$$

$$\begin{aligned}x'_2 &= x_1 \cos(x'_2, x_1) + x_2 \cos(x'_2, x_2) \\ &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2\end{aligned}\quad (5.1 \text{ ب})$$

از این رو به طور کلی، در سه بعد داریم

$$\begin{cases}x'_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 \\ x'_2 = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3 \\ x'_3 = \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3\end{cases}\quad (6.1)$$

یا، به بیان نمادگذاری مجموع‌یابی

$$x'_i = \sum_{j=1}^r \lambda_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.1)$$

تبدیل وارون این رابطه عبارت است از

$$\begin{aligned}x_1 &= x'_1 \cos(x'_1, x_1) + x'_2 \cos(x'_2, x_1) + x'_3 \cos(x'_3, x_1) \\ &= \lambda_{11}x'_1 + \lambda_{21}x'_2 + \lambda_{31}x'_3\end{aligned}$$

یا، به طور کلی

$$x_i = \sum_{j=1}^r \lambda_{ji}x'_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.1)$$

کمیت  $\lambda_{ij}$  همان کسینوس هادی محور  $x'_i$  نسبت به محور  $x_j$  است. بهتر است که  $\lambda_{ij}$  را به صورت آرایه‌ای به نام ماتریس آرایش دهم. نماد  $\lambda$  به صورت حرف سیاه بر تمامیت عناصر منفرد  $\lambda_{ij}$  دلالت می‌کند، وقتی به صورت زیر آرایش یافته باشند:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

همین‌که کسینوسهای هادی مربوط به دو مجموعه محورهای مختصات را بیابیم، برای مشخص کردن مختصات یک نقطه در هر دستگاه، معادلات (۷.۱) و (۸.۱) قواعدی کلی در اختیار ما می‌گذارند. هرگاه  $\lambda$  به این طریق تعریف شود، و خواص تبدیل مختصات یک نقطه را مشخص کند، آن را ماتریس تبدیل یا ماتریس دوران می‌گوییم.

### مثال ۱.۱

نقطه  $P$  در دستگاه مختصات  $(x_1, x_2, x_3)$  به وسیله نقطه  $P(2, 1, 3)$  نشان داده می‌شود. دستگاه مختصات دیگری همان نقطه را به صورت  $P(x'_1, x'_2, x'_3)$  نشان می‌دهد؛ در این دستگاه  $x_2$  به اندازه زاویه  $30^\circ$  به سوی  $x_3$  حول محور  $x_1$  چرخیده است (شکل ۳.۱). ماتریس دوران را بیابید و  $P(x'_1, x'_2, x'_3)$  را تعیین کنید.

حل: کسینوسهای هادی  $\lambda_{ij}$  را می‌توان از روی شکل ۳.۱ و با استفاده از تعریف (۳.۱) تعیین کرد.

$$\lambda_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos(0^\circ) = 1$$

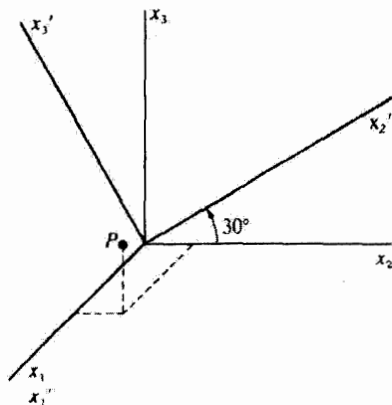
$$\lambda_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos(90^\circ) = 0$$

$$\lambda_{13} = \cos(x'_1, x_3) = \cos(90^\circ) = 0$$

$$\lambda_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos(90^\circ) = 0$$

$$\lambda_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos(30^\circ) = 0.866$$

$$\lambda_{23} = \cos(x'_2, x_3) = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos(60^\circ) = 0.5$$



شکل ۳.۱

$$\lambda_{r1} = \cos(x'_r, x_1) = \cos(90^\circ) = 0$$

$$\lambda_{rr} = \cos(x'_r, x_r) = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -0.5$$

$$\lambda_{rr} = \cos(x'_r, x_r) = \cos(30^\circ) = 0.866$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.866 \end{pmatrix}$$

و با بهره‌گیری از معادله (۷.۱)،  $P(x'_1, x'_r, x'_r)$  چنین می‌شود

$$x'_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{1r}x_r + \lambda_{1r}x_r = x_1 = 2$$

$$x'_r = \lambda_{r1}x_1 + \lambda_{rr}x_r + \lambda_{rr}x_r = 0.866x_r + 0.5x_r = 2.37$$

$$x'_r = \lambda_{r1}x_1 + \lambda_{rr}x_r + \lambda_{rr}x_r = -0.5x_r + 0.866x_r = 2.10$$

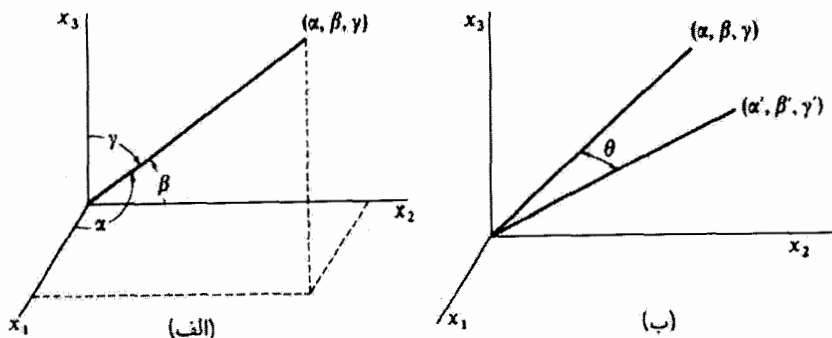
توجه داشته باشید که عملگر دوران طول بردار مکان را حفظ می‌کند

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_r^2 + x_r^2} = \sqrt{x_1'^2 + x_r'^2 + x_r'^2} = 3.74$$

#### ۴.۱ خواص ماتریسهای دوران ۱

برای شروع بحث در باب ماتریسهای دوران، باید دو نتیجهٔ مثلثاتی را یادآوری کنیم. مطابق شکل ۴.۱ (الف)، پاره‌خطی را در نظر بگیرید که در راستای معینی در فضا کشیده شده است. برای دستگاه مختصات خود میدانی را انتخاب می‌کنیم که بر نقطه‌ای روی این خط واقع باشد. این خط زاویه‌های مشخصی را با هر یک از محورهای مختصات می‌سازد؛ زاویه‌هایی را که با محورهای  $x_1$ ،  $x_2$ ، و  $x_3$  تشکیل می‌دهد، به ترتیب  $\alpha$ ،  $\beta$ ، و  $\gamma$  می‌نامیم. کمیت‌های مورد نظر ما کسینوس این زاویه‌ها هستند:  $\cos \alpha$ ،  $\cos \beta$ ، و  $\cos \gamma$ ، این کمیت‌ها را کسینوسهای هادی آن خط می‌گویند. اتحاد زیر، نخستین نتیجهٔ مورد نیاز ماست (مسئلهٔ ۲.۱ را ببینید)

۱. در قسمت عمدهٔ بخشهای ۴.۱ تا ۱۳.۱ با روشهای ماتریسی و خواص تبدیل سروکار داریم و خواننده تا فصل ۱۰ به آنها نیازی نخواهد داشت. از اینرو، وی می‌تواند تا هنگام ضرورت، فعلاً آنها را نادیده انگارد و با رابطه‌های مطلقاً ضروری — مثلاً حاصلضرب اسکالر و برداری — باید از قبل، در طی درسهای مقدماتی، آشنا باشد.



شکل ۴.۱

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (۱۰.۱)$$

ثانیاً، اگر دو خط با کسینوسهای هادی  $\cos \alpha$ ،  $\cos \beta$ ،  $\cos \gamma$  و  $\cos \alpha'$ ،  $\cos \beta'$ ،  $\cos \gamma'$  داشته باشیم، در این صورت کسینوس زاویه بین این خطوط،  $\theta$ ، [شکل ۴.۱ (ب)] از رابطه زیر به دست می‌آید (مسئله ۲.۱ را ببینید)

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' \quad (۱۱.۱)$$

اینک فرض کنیم مجموعه محورهای  $x_1$ ،  $x_2$ ، و  $x_3$  حول محوری که از مبدأ مختصات می‌گذرد، چرخشی انجام دهند. این محورها را در وضعیت جدید به  $x'_1$ ،  $x'_2$ ، و  $x'_3$  نشان می‌دهیم. چرخش مختصات را می‌توان با معلوم کردن کسینوس همه زوایای بین محورهای مختلف، یا به بیان دیگر، به کمک  $\lambda_{ij}$ ، مشخص کرد.

تمام نه کمیت  $\lambda_{ij}$  از یکدیگر مستقل نیستند؛ در واقع، بین  $\lambda_{ij}$ ها شش رابطه موجود است، و از این رو فقط سه تا از آنها مستقل‌اند. با بهره‌گیری از نتایج مثلثاتی که در معادلات (۱۰.۱) و (۱۱.۱) بیان شد، این شش رابطه را پیدا می‌کنیم.

اولاً، محور  $x'_1$  را می‌توان به‌تنهایی خطی در دستگاه مختصات  $(x_1, x_2, x_3)$  پنداشت؛ کسینوسهای هادی این خط عبارت‌اند از  $(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13})$ . به همین ترتیب، کسینوسهای هادی محور  $x'_2$  در دستگاه مختصات  $(x_1, x_2, x_3)$  به کمک  $(\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23})$  به دست می‌آیند. از آنجا که زاویه بین محور  $x'_1$  و محور  $x'_2$  برابر  $\pi/2$  است، از معادله (۱۱.۱) داریم

$$\lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} + \lambda_{13}\lambda_{23} = \cos \theta = \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\sum_j \lambda_{1j} \lambda_{2j} = 0$$

و، به طور کلی

$$\sum_j \lambda_{ij} \lambda_{kj} = 0, \quad i \neq k \quad (۱۲.۱ \text{ الف})$$

معادله (۱۲.۱ الف) سه تا (یکی به ازای هر مقدار  $i$  یا  $k$ ) از شش رابطه بین  $\lambda_{ij}$  را می دهد. از آنجا که مجموع مربعات کسینوسهای هادی یک خط برابر است با واحد [معادله (۱۰.۱)], در دستگاه  $(x_1, x_2, x_3)$  برای محور  $x'_1$  داریم

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 = 1$$

یا

$$\sum_j \lambda_{1j}^2 = \sum_j \lambda_{1j} \lambda_{1j} = 1$$

و، به طور کلی

$$\sum_j \lambda_{ij} \lambda_{kj} = 1, \quad i = k \quad (۱۲.۱ \text{ ب})$$

که سه رابطه باقیمانده بین  $\lambda_{ij}$  ها هستند. می توانیم نتایجی را که از معادلات (۱۲.۱ الف) و (۱۲.۱ ب) به دست آمد، به صورت زیر با هم ترکیب کنیم

$$\boxed{\sum_j \lambda_{ij} \lambda_{kj} = \delta_{ik}} \quad (۱۳.۱)$$

که در آن  $\delta_{ik}$  عبارت است از نماد دلتای کرونکر<sup>۲</sup>

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{به ازای } i \neq k \\ 1 & \text{به ازای } i = k \end{cases} \quad (۱۴.۱)$$

۱. در اینجا همه مجموعیابها از ۱ تا ۳ را القا می کنند.  
 ۲. این نماد را لثویولد کرونکر (۱۸۹۱-۱۸۲۳) معرفی کرده است.

درستی معادله (۱۳.۱) به محورهای مختصات متقابلاً متعامد در هر یک از دستگاهها بستگی دارد. این نوع دستگاهها را متعامد و معادله (۱۳.۱) را شرط تعامد می‌گویند. در این صورت ماتریس تبدیل  $\lambda$  که چرخش یک دستگاه مختصات متعامد را مشخص می‌کند باید از معادله (۱۳.۱) پیروی کند.

اگر محور  $x_i$  را خطی در دستگاه مختصات  $x'_i$  بدانیم و محاسبه‌ای شبیه به محاسبات قبلی خود انجام دهیم، به رابطه زیر خواهیم رسید

$$\sum_i \lambda_{ij} \lambda_{ik} = \delta_{jk} \quad (15.1)$$

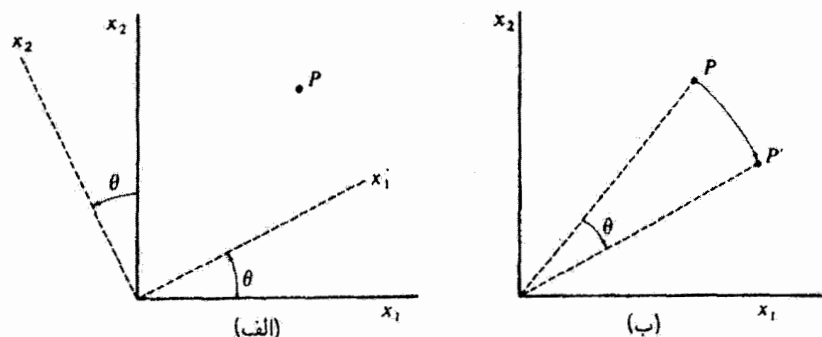
این دو رابطه تعامدی که به دست آوردیم [معادلات (۱۳.۱) و (۱۵.۱)] ظاهراً متفاوت‌اند. [توجه کنید که در معادله (۱۳.۱) مجموع‌یابی روی دومین شاخص پایین  $\lambda_{ij}$  انجام می‌شود، حال آنکه در معادله (۱۵.۱) مجموع‌یابی روی اولین شاخص پایین انجام شده است.] بدینسان معلوم می‌شود که یک دستگاه فرامعین داریم: یعنی دوازده معادله و نه مجهول<sup>۱</sup> (تعداد معادلات از تعداد مجهولها بیشتر است). اما، قضیه از این قرار نیست، زیرا معادلات (۱۳.۱) و (۱۵.۱) عملاً باهم تفاوتی ندارند. در واقع، درستی هر یک از این معادلات بر درستی معادله دیگر دلالت می‌کند. این امر در زمینه‌های فیزیکی واضح است (زیرا تبدیلهای میان دو دستگاه مختصات در هر راستایی که صورت گیرند، هم‌ارزند، و در اینجا از ارائه اثبات رسمی آن چشم می‌پوشیم.<sup>۲</sup> هر یک از معادلات (۱۳.۱) یا (۱۵.۱) را به عنوان تأمین‌کننده روابط تعامد برای دستگاههای مختصاتمان در نظر می‌گیریم.

در بحث قبلی مربوط به تبدیل مختصات و خواص ماتریسهای دوران، نقطه  $P$  را ثابت گرفتیم و اجازه دادیم محورهای مختصات بچرخند. این تعبیر منحصر به فرد نیست؛ درست به همین ترتیب می‌توانستیم محورها را ثابت نگه داریم و بگذاریم نقطه بچرخد (فاصله تا مبدأ مختصات را همواره ثابت نگه می‌داریم). در هر دو حالت، ماتریس تبدیل یکی است. مثلاً دو حالتی را که در شکلهای ۵.۱ (الف) و (ب) نشان داده‌ایم، در نظر بگیرید. در شکل ۵.۱ (الف) محورهای  $x_1$  و  $x_2$  محورهای مرجع‌اند، و محورهای  $x'_1$  و  $x'_2$  با چرخشی به اندازه زاویه  $\theta$  به دست آمده‌اند. بنابراین، مختصات نقطه  $P$  نسبت به محورهای چرخیده را می‌توان از معادلات زیر یافت [معادلات ۲.۱ (الف) و ۲.۱ (ب)]

۱. به خاطر داشته باشید که هر یک از شرایط تعامد نمایانگر شش معادله است.

۲. این اثبات در کتاب ماریون ارائه شده است: (Ma 65a, Section 1.16)





شکل ۵.۱

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x_2' = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{cases} \quad (۱۶.۱)$$

از سوی دیگر، اگر محورها ثابت باشند و نقطه  $P$  به اندازه زاویه  $\theta$  حول مبدأ (اما در سوی مخالف چرخش محورها) دوران کند [مانند شکل ۵.۱ (ب)]، در این صورت مختصات  $P'$  دقیقاً مختصاتی اند که از معادلات (۱۶.۱) به دست می آیند. بنابراین یا می توانیم بگوییم که تبدیل روی نقطه عمل می کند که حالت جدیدی از نقطه را به دست می دهد که نسبت به دستگاه مختصات ثابت بیان شده است [شکل ۵.۱ (ب)]، یا اینکه، مطابق شکل ۵.۱ (الف)، روی چارچوب مرجع (دستگاه مختصات) عمل می کند. از لحاظ ریاضی، این تعبیرها کاملاً هم ارزند.

### ۵.۱ عملیات ماتریسی<sup>۱</sup>

در ماتریس  $\lambda$  که در معادله (۹.۱) آمد تعداد ستونها و سطرها برابرند، و بنابراین به آن ماتریس مربعی می گویند. ضرورتی ندارد که ماتریس حتماً مربعی باشد. در واقع، مختصات هر نقطه را می توان به صورت یک ماتریس ستونی نوشت.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (۱۷.۱ \text{ الف})$$

۱. نظریه ماتریسها را نخستین بار ا.کابلی در ۱۸۵۵ به طور وسیعی بسط داد، اما بسیاری از این ایده ها حاصل کارهای سیر ویلیام روان هامیلتون (۱۸۶۵-۱۸۰۵) بود. شخص اخیر در سال ۱۸۵۲ در خصوص «عملگرهای برداری خطی» بحث کرده بود. اصطلاح «ماتریس» را نخستین بار جی.جی سیلوستر در سال ۱۸۵۰ به کار برد.

یا به صورت یک ماتریس سطری:

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \quad (۱۷.۱ \text{ ب})$$

اینک باید دستوره‌های ضرب دو ماتریس را برقرار کنیم. وقتی می‌خواهیم  $x_i$  و  $x'_i$  را به شکل ماتریسی بیان کنیم، این دستورها باید با معادلات (۷.۱) و (۸.۱) سازگار باشند. ماتریس ستونی را برای این مختصات در نظر می‌گیریم؛ در این صورت عبارتهای معادل زیر را داریم

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j \quad (۱۸.۱ \text{ الف})$$

$$\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x} \quad (۱۸.۱ \text{ ب})$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (۱۸.۱ \text{ ج})$$

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 \\ x'_2 = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3 \\ x'_3 = \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3 \end{cases} \quad (۱۸.۱ \text{ د})$$

معادلات (۱۸.۱) عمل ضرب ماتریسی را برای ماتریسی سه‌سطری و سه‌ستونی که روی ماتریسی سه‌سطری و یک‌ستونی عمل می‌کند، مشخص می‌کنند. (برای همگامی با قرارداد استاندارد ماتریسها،  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{x}'$  را ماتریسهای ستونی اختیار می‌کنیم؛ در صورتی که  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{x}'$  ماتریسهای سطری باشند، ضرب ماتریسها، از نوعی که در معادله (۱۸.۱ ج) نشان داده شده است، تعریف نشده‌اند.)<sup>۱</sup> اکنون باید تعریف خود را از ضرب چنان بسط دهیم که ماتریسهایی را با هر تعداد سطر و ستون در بگیرد.

ضرب ماتریس  $\mathbf{A}$  و ماتریس  $\mathbf{B}$  فقط در صورتی امکانپذیر است که تعداد ستونهای  $\mathbf{A}$  با تعداد سطرهای  $\mathbf{B}$  برابر باشد. (تعداد سطرهای  $\mathbf{A}$  و تعداد ستونهای  $\mathbf{B}$  اختیاری است؛ اما، وضعیتهایی پیش خواهد آمد که فقط حالتی را در نظر می‌گیریم که  $\mathbf{A}$  ماتریسی مربعی باشد.) بنابراین، در

۱. گرچه هر موقع ماتریس  $\lambda$  را بر  $\mathbf{x}$  اثر می‌دهیم ماتریس مختصاتی  $\mathbf{x}$  باید به صورت یک ماتریس ستونی بیان شود، برای سایر کاربردها  $\mathbf{x}$  را به صورت ماتریس سطری  $(x_1, x_2, x_3)$  نیز می‌توان نوشت.

قیاس با معادله (۱۸.۱) الف)، حاصلضرب  $AB$  به ترتیب زیر به دست می‌آید

$$\boxed{C = AB}$$

$$C_{ij} = [AB]_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \quad (19.1)$$

از معادلات (۱۹.۱) آشکار است که ضرب ماتریسی جابه‌جاپذیر نیست. بنابراین، اگر  $A$  و  $B$  هر دو ماتریس مربعی باشند، در این صورت مجموعهای

$$\sum_k B_{ik} A_{kj} \quad \text{و} \quad \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

هر دو تعریف شده‌اند، اما به‌طور کلی، باهم برابر نخواهند بود.

### مثال ۲.۱

نشان دهید که ضرب ماتریسهای  $A$  و  $B$  در این مثال جابه‌جا نپذیرند.

حل: اگر  $A$  و  $B$  ماتریسهای به شرح زیر باشند

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

در این صورت

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$$

ولی

$$BA = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

بدینسان

$$AB \neq BA$$

## ۶.۱ سایر تعریفها

ماتریس ترانژاده. ماتریسی است که با تعویض سطرها و ستونهای ماتریس اصلی با یکدیگر به دست می‌آید. ترانژاده ماتریس  $\mathbf{A}$  را با  $\mathbf{A}^t$  نشان می‌دهیم. بنا بر تعریف، داریم

$$\boxed{\lambda_{ij}^t = \lambda_{ji}} \quad (20.1)$$

واضح است که

$$(\lambda^t)^t = \lambda \quad (21.1)$$

بنابراین، می‌توان معادله (۸.۱) را به صورت هر یک از عبارتهای معادل زیر نوشت

$$x_i = \sum_j \lambda_{ji} x'_j \quad (22.1 \text{ الف})$$

$$x_i = \sum_j \lambda_{ij}^t x'_j \quad (22.1 \text{ ب})$$

$$\mathbf{x} = \lambda^t \mathbf{x}' \quad (22.1 \text{ ج})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (22.1 \text{ د})$$

ماتریس همانی عبارت است از ماتریسی که، وقتی در ماتریس دیگری ضرب شود، برآن هیچگونه تأثیری نگذارد. بدینسان

$$\mathbf{1A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B1} = \mathbf{B} \quad (23.1)$$

یعنی،

$$\mathbf{1A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

ماتریس دوران متعامد  $\lambda$  را در حالت دوبعدی در نظر می‌گیریم

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda \lambda^t &= \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 & \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} \\ \lambda_{21}\lambda_{11} + \lambda_{22}\lambda_{12} & \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

با بهره‌گیری از رابطهٔ متعامد [معادله (۱۳.۱)]، خواهیم یافت

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 = \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 = 1$$

$$\lambda_{21}\lambda_{11} + \lambda_{22}\lambda_{12} = \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22} = 0$$

به طوری که برای حالت خاص ماتریس دوران متعامد  $\lambda$  داریم<sup>۱</sup>

$$\lambda \lambda^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (24.1)$$

وارون هر ماتریس، بنا بر تعریف، عبارت است از ماتریسی که، پس از ضرب آن در ماتریس اصلی، ماتریس همانی را به وجود آورد. وارون ماتریس  $\lambda$  را با  $\lambda^{-1}$  نشان می‌دهیم

$$\lambda \lambda^{-1} = 1 \quad (25.1)$$

از مقایسهٔ معادلات (۲۴.۱) و (۲۵.۱) داریم

$$\boxed{\lambda^t = \lambda^{-1}} \quad \text{برای ماتریسهای متعامد} \quad (26.1)$$

بنابراین، ترانزپوز و وارون ماتریس دوران  $\lambda$  یکی‌اند. در واقع، ترانزپوز هر ماتریس متعامد با وارون آن برابر است.

برخی از قواعد جبر ماتریسی را خلاصه می‌کنیم:

(الف) ضرب ماتریسی به طور کلی جابه‌جاپذیر نیست

$$AB \neq BA \quad (\text{الف } 27.1)$$

۱. این نتیجه، به طور کلی، در مورد ماتریسها صادق نیست. فقط در مورد ماتریسهای متعامد صدق می‌کند.

حالت خاص ضرب ماتریسی و وارون آن جابه‌جاپذیر است

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (\text{ب } 27.1)$$

ماتریس همانی همواره جابه‌جاپذیر است

$$IA = AI = A$$

(ب) ضرب ماتریسی شرکت‌پذیر است

$$[AB]C = A[BC] \quad (28.1)$$

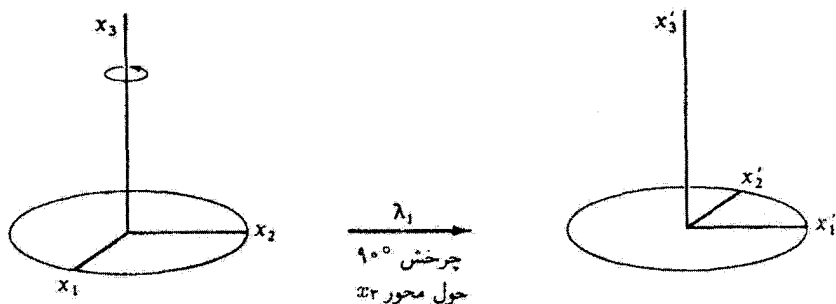
(ج) با جمع کردن عناصر متناظر دو ماتریس، عمل جمع ماتریسها را انجام می‌دهیم. مؤلفه‌های  $C$  حاصل از جمع  $C = A + B$  عبارت‌اند از

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad (29.1)$$

جمع فقط در صورتی تعریف شده است که ابعاد  $A$  و  $B$  یکسان باشد.

### ۷.۱ مفهوم هندسی ماتریسهای تبدیل

محورهای مختصات را در نظر بگیرید که، مطابق شکل ۶.۱، به اندازه زاویه  $90^\circ$  حول محور  $x_3$  در سوی پاد ساعتگرد چرخیده باشند<sup>۱</sup>. در این چرخش،  $x'_1 = x_2$ ،  $x'_2 = -x_1$ ، و  $x'_3 = x_3$ .



شکل ۶.۱

۱. با نگرستن در امتداد بخش مثبت محور چرخش در صفحه‌ای که در حال چرخش است، سوی چرخش را تعیین می‌کنیم. بدینسان این تعریف با «قاعده دست راست» سازگار است؛ بنابراین قاعده جهت مثبت عبارت است از جهت پیشروی پیچ دست راست وقتی در همان سو بگردد.

تنها کسینوسهای غیرصفر عبارت‌اند از

$$\cos(x'_1, x_2) = 1 = \lambda_{12}$$

$$\cos(x'_2, x_1) = -1 = \lambda_{21}$$

$$\cos(x'_3, x_3) = 1 = \lambda_{33}$$

از این رو ماتریس  $\lambda$  برای این حالت عبارت است از

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (30.1)$$

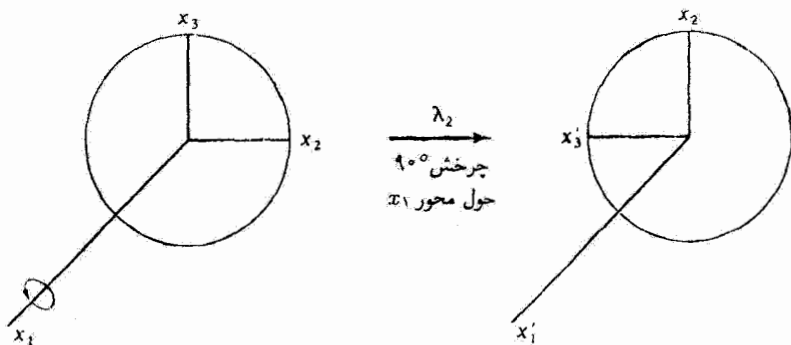
سپس به چرخش پادساعتگرد  $90^\circ$  درجه‌ای حول محور  $x_1$ ، مطابق شکل ۷.۱، توجه کنید.

داریم:  $x'_1 = x_1$ ،  $x'_2 = x_3$  و  $x'_3 = -x_2$ ، و ماتریس تبدیل چنین خواهد بود

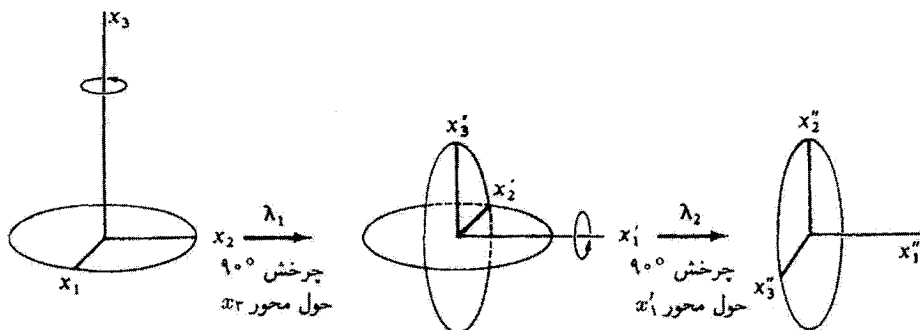
$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (31.1)$$

برای یافتن ماتریس تبدیل، برای تبدیل مرکب مربوط به چرخش حول محور  $x_2$ ، و به دنبال آن

چرخش حول محور جدید  $x'_1$  (شکل ۸.۱)، داریم



شکل ۷.۱



شکل ۸.۱

$$x' = \lambda_1 x \quad (\text{الف } ۳۲.۱)$$

و

$$x'' = \lambda_2 x' \quad (\text{ب } ۳۲.۱)$$

یا

$$x'' = \lambda_2 \lambda_1 x \quad (\text{الف } ۳۳.۱)$$

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

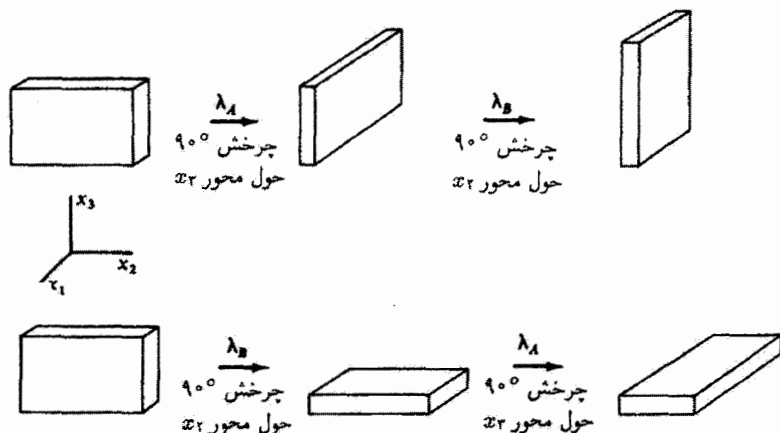
(ب ۳۳.۱)

بنابراین دو چرخشی را که هم‌اکنون توصیف کردیم، می‌توان با یک تک ماتریس تبدیل نشان داد

$$\lambda_2 = \lambda_2 \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۳۴.۱)$$

و سمتگیری نهایی به صورت  $x''_1 = x_2, x''_2 = x_3, x''_3 = x_1$  مشخص می‌شود. توجه کنید که





شکل ۹.۱

ترتیب تأثیر ماتریسهای تبدیل بر  $x$  اهمیت دارد زیرا ضرب جابه‌جاپذیر نیست. به عبارت دیگر

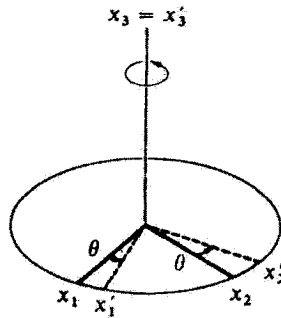
$$\begin{aligned} \lambda_B \lambda_A &= \lambda_B \lambda_A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \lambda_A \lambda_B \end{aligned} \quad (۳۵.۱)$$

و حاصل، سمتگیری کلاً متفاوتی است. در شکل ۹.۱ سمتگیریهایی نهایی متفاوت یک متوازی‌السطوح را می‌بینیم که دستخوش چرخشهای متناظر با دو ماتریس دوران  $\lambda_B$  و  $\lambda_A$  هنگامی که چرخشهای پیاپی در نظم متفاوتی انجام می‌گیرند، شده است. قسمت بالایی شکل حاصلضرب ماتریسی  $\lambda_B \lambda_A$  و قسمت پایین حاصلضرب  $\lambda_A \lambda_B$  را نشان می‌دهد.

به عنوان مثالی دیگر، چرخش مختصات تصویر شده در شکل ۱۰.۱ را (که مشابه شکل ۲.۱ است). در نظر بگیرید. عناصر ماتریس تبدیل در دو بعد از کسینوسهای زیر به دست می‌آیند

$$\cos(x'_1, x_1) = \cos \theta = \lambda_{11}$$

$$\cos(x'_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta = \lambda_{12}$$



شکل ۱۰.۱

$$\cos(x'_1, x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta = \lambda_{11}$$

$$\cos(x'_1, x_2) = \cos\theta = \lambda_{12}$$

بنابراین، ماتریس مربوط عبارت است از

$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (\text{الف } ۳۶.۱)$$

اگر این چرخش یک چرخش سه‌بعدی با  $x'_3 = x_3$  بود، در این صورت کسینوسهای زیر را هم داشتیم

$$\cos(x'_1, x_2) = 0 = \lambda_{12}$$

$$\cos(x'_2, x_2) = 0 = \lambda_{22}$$

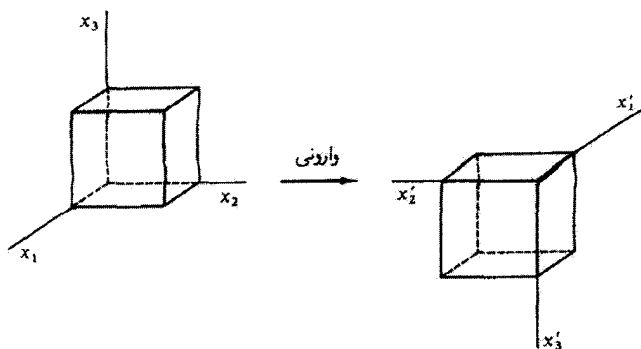
$$\cos(x'_3, x_3) = 1 = \lambda_{33}$$

$$\cos(x'_3, x_1) = 0 = \lambda_{31}$$

$$\cos(x'_3, x_2) = 0 = \lambda_{32}$$

و ماتریس تبدیل سه‌بعدی به این ترتیب است

$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ب } ۳۶.۱)$$



شکل ۱۱.۱

به‌عنوان مثال آخر، به‌تبدیلی توجه کنید که حاصل آن انعکاس نسبت به مبدأ همهٔ محورها (شکل ۱۱.۱) است. چنین تبدیلی را وارونی می‌گویند. در این حالت،  $x'_1 = -x_1$ ،  $x'_2 = -x_2$  و  $x'_3 = -x_3$

$$\lambda_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۳۷.۱)$$

در مثالهای قبل، ماتریس تبدیل  $\lambda_p$  را به‌صورت حاصل دو چرخش یا دوران متوالی تعریف کردیم، که هر یک از آنها یک تبدیل متعامد به‌شمار می‌آید:  $\lambda_p = \lambda_2 \lambda_1$ . می‌توانیم ثابت کنیم که کاربرد پیاپی تبدیلهای متعامد همواره به یک تبدیل متعامد می‌انجامد. می‌نویسیم

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j, \quad x''_k = \sum_i \mu_{ki} x'_i$$

با ترکیب این عبارتها، داریم

$$\begin{aligned} x''_k &= \sum_j \left( \sum_i \mu_{ki} \lambda_{ij} \right) x_j \\ &= \sum_j [\mu \lambda]_{kj} x_j \end{aligned}$$

بدین ترتیب با اعمال ماتریس  $(\mu \lambda)$  روی  $x_i$  تبدیل  $x_i$  به  $x''_i$  را انجام می‌دهیم. در این صورت اگر  $(\mu \lambda)^{-1} = (\mu \lambda)^t$ ، نشان داده خواهد شد که تبدیل مرکب حاصل، متعامد است. ترانژادهٔ یک ماتریس حاصلضرب عبارت است از حاصلضرب ماتریسهای ترانژاده‌ای که ترتیبشان معکوس

شده باشد (مسئله ۴.۱): یعنی،  $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$ . بنابراین

$$(\mu\lambda)^t = \lambda^t \mu^t \quad (38.1)$$

اما، از آنجا که  $\lambda$  و  $\mu$  متعامدند،  $\lambda^t = \lambda^{-1}$  و  $\mu^t = \mu^{-1}$ . با ضرب کردن معادله بالا در  $\mu\lambda$  از سمت راست، داریم

$$\begin{aligned} (\mu\lambda)^t \mu\lambda &= \lambda^t \mu^t \mu\lambda \\ &= \lambda^t \mathbf{1}\lambda \\ &= \lambda^t \lambda \\ &= \mathbf{1} \\ &= (\mu\lambda)^{-1} \mu\lambda \end{aligned}$$

بدینسان

$$(\mu\lambda)^t = (\mu\lambda)^{-1} \quad (39.1)$$

و ماتریس  $\mu\lambda$  متعامد است.

می‌توان در مثالهای بالا، دترمینانهای تمام ماتریسهای دوران را مطابق دستورهایی استاندارد محاسبه دترمینانهای مرتبه دوم یا سوم، حساب کرد

$$|\lambda| = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21} \quad (40.1)$$

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda_{11} \begin{vmatrix} \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{vmatrix} - \lambda_{12} \begin{vmatrix} \lambda_{21} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{33} \end{vmatrix} + \lambda_{13} \begin{vmatrix} \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (41.1)$$

که دترمینان مرتبه سوم برحسب دترمینانهای کوچکتر سطر اول بسط داده شده است. بنابراین پی می‌بریم که، در مورد ماتریسهای دوران به‌کار رفته در این بخش

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_n| = 1$$

$$|\lambda_6| = -1$$

بنابراین تمام تبدیلهای حاصل از چرخشهایی که از مجموعه محورهای اولیه شروع می‌شوند، دارای دترمینانهایی برابر  $+1$  هستند. اما وارونی را نمی‌توان از طریق هیچ نوع سلسله دورانی به وجود آورد، و دترمینان ماتریس وارونی برابر  $-1$  است. تبدیلهای متعامد را، که دترمینان ماتریس آنها  $+1$  است، دورانهای متعارف می‌گویند؛ و تبدیلهایی که دترمینان ماتریس آنها برابر  $-1$  باشند، دورانهای نامتعارف خوانده می‌شوند. اینکه همه ماتریسهای متعامد باید دترمینانی برابر  $+1$  یا  $-1$  داشته باشند در بخش ۷.۱ کتاب ماریون (Ma 65a) اثبات شده است. در اینجا توجه خود را منحصرأً به اثر دورانهای متعارف معطوف می‌کنیم و به‌خصوص ویژه بردارهایی که در دورانهای نامتعارف ظاهر می‌شوند، نمی‌پردازیم.<sup>۱</sup>

### مثال ۳.۱

نشان دهید  $|\lambda_2| = 1$  و  $|\lambda_6| = -1$ .

حل:

$$|\lambda_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$$

$$|\lambda_6| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1(1 - 0) = -1$$

۱. در خصوص این مبحث در کتابی با مشخصات زیر، به‌تفصیل بحث شده است:

۸.۱ تعریف اسکالر و بردار برحسب خواص تبدیلی  
تبدیل مختصاتی از نوع زیر را در نظر بگیرید

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j \quad (۴۲.۱)$$

یا

$$\sum_j \lambda_{ij} \lambda_{kj} = \delta_{ik} \quad (۴۳.۱)$$

اگر، تحت چنین تبدیلی، یک کمیت  $\varphi$  بدون تغییر باقی بماند، در این صورت  $\varphi$  را اسکالر (یا ناوردای زده‌ای) می‌گویند.

اگر یک مجموعه کمیت  $(A_1, A_2, A_3)$  به وسیله یک ماتریس تبدیل  $\lambda$  از دستگاه  $x_i$  به دستگاه  $x'_i$  با نتیجه زیر، تغییر یابد

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j \quad (۴۴.۱)$$

در این صورت کمیتهای  $A_i$  مانند مختصات یک نقطه [یعنی مطابق معادله (۴۲.۱)] تبدیل می‌شوند، و کمیت  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  را بردار می‌نامند.

### ۹.۱ اسکالر بنیادی و عملیات برداری

در مطالب زیر  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  بردار (با مؤلفه‌ها  $A_i$  و  $B_i$ ) و  $\varphi$ ،  $\psi$  و  $\xi$  اسکالرنند.  
جمع

$$A_i + B_i = B_i + A_i \quad \text{قانون جابه‌جایی} \quad (۴۵.۱)$$

$$A_i + (B_i + C_i) = (A_i + B_i) + C_i \quad \text{قانون شرکت‌پذیری} \quad (۴۶.۱)$$

$$\varphi + \psi = \psi + \varphi \quad \text{قانون جابه‌جایی} \quad (۴۷.۱)$$

$$\varphi + (\psi + \xi) = (\varphi + \psi) + \xi \quad \text{قانون شرکت‌پذیری} \quad (۴۸.۱)$$

ضرب در یک اسکالر  $\xi$ 

$$\xi \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \text{ بردار است} \quad (۴۹.۱)$$

$$\xi \varphi = \psi \quad \psi \text{ اسکالر است} \quad (۵۰.۱)$$

معادله (۴۹.۱) را می‌توان به صورت زیر اثبات کرد

$$\begin{aligned} B'_i &= \sum_j \lambda_{ij} B_j = \sum_j \lambda_{ij} \xi A_j \\ &= \xi \sum_j \lambda_{ij} A_j = \xi A'_i \end{aligned} \quad (51.1)$$

و  $\xi \mathbf{A}$  به صورت یک بردار تبدیل می‌شود. به همین ترتیب،  $\xi \varphi$  به صورت یک اسکالر تبدیل می‌شود.

### ۱۰.۱ ضرب داخلی دو بردار

ضرب دو بردار  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  برای تشکیل ضرب داخلی بنا بر تعریف عبارت است از

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i} \quad (52.1)$$

که در اینجا نقطه بین  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  نمایانگر ضرب داخلی (ضرب اسکالر) است؛ این عمل را گاهی ضرب نقطه‌ای هم می‌گویند.<sup>۱</sup>

مؤلفه‌های بردار  $\mathbf{A}$  عبارت‌اند از  $A_1, A_2, A_3$  و بزرگی (یا طول)  $\mathbf{A}$  چنین به دست می‌آید

$$|\mathbf{A}| = +\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \equiv A \quad (53.1)$$

که بزرگی بردار را با  $|\mathbf{A}|$ ، یا اگر امکان هیچگونه ابهامی در بین نباشد، صرفاً با  $A$  نشان می‌دهند. هرگاه هر دو طرف معادله (۵۲.۱) را بر  $AB$  تقسیم کنیم، داریم

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \sum_i \frac{A_i B_i}{A B} \quad (54.1)$$

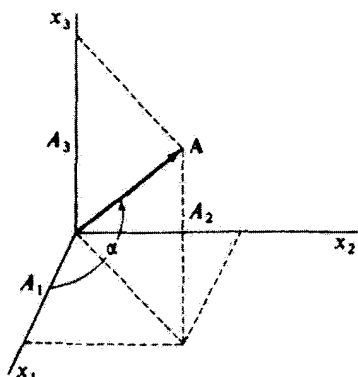
$A_1/A$  عبارت است از کسینوس زاویه  $\alpha$  بین بردار  $\mathbf{A}$  و محور  $x_1$  (شکل ۱۲.۱). به طور کلی،  $A_i/A$  و  $B_i/B$  کسینوسهای هادی  $\Lambda_i^A$  و  $\Lambda_i^B$  بردارهای  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  هستند

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \sum_i \Lambda_i^A \Lambda_i^B \quad (55.1)$$

مجموع  $\sum_i \Lambda_i^A \Lambda_i^B$  دقیقاً کسینوس زاویه بین  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  است [معادله (۱۱.۱)]

$$\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_i \Lambda_i^A \Lambda_i^B$$

۱. نمادگذاریهای قدیمی این نوع ضرب به صورت  $(\mathbf{A}\mathbf{B})$ ،  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ، و  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  بوده است.



شکل ۱۲.۱

یا

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \quad (۵۶.۱)$$

می‌توان اسکالر بودن ضرب  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  را به شرح زیر نشان داد.  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  به عنوان بردار تبدیل می‌یابند

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j, \quad B'_i = \sum_k \lambda_{ik} B_k \quad (۵۷.۱)$$

بنابراین، ضرب  $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}'$  چنین می‌شود

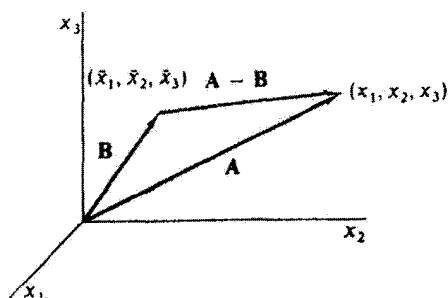
$$\begin{aligned} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' &= \sum_i A'_i B'_i \\ &= \sum_i \left( \sum_j \lambda_{ij} A_j \right) \left( \sum_k \lambda_{ik} B_k \right) \end{aligned}$$

پس از بازآرایی مجموع‌یابیها، می‌توان نوشت

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = \sum_{j,k} \left( \sum_i \lambda_{ij} \lambda_{ik} \right) A_j B_k$$

اما بنابر شرط تعامد، جمله داخل پرانتز فقط برابر است با  $\delta_{jk}$ ، از این رو





شکل ۱۳.۱

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' &= \sum_j \left( \sum_k \delta_{jk} A_j B_k \right) \\ &= \sum_j A_j B_j \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (58.1)$$

از آنجا که مقدار حاصلضرب بر اثر تبدیل مختصات تغییری نمی‌کند، این ضرب باید اسکالر باشد. توجه کنید که فاصله از مبدأ تا نقطه  $(x_1, x_2, x_3)$  بنا بر تعریف عبارت است از بردار  $\mathbf{A}$ ، به نام بردار مکان، که چنین به دست می‌آید

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

به همین ترتیب، فاصله نقطه  $(x_1, x_2, x_3)$  تا نقطه دیگر  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  که نقطه اخیر با بردار  $\mathbf{B}$  تعریف می‌شود، عبارت است از

$$\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2} = \sqrt{(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})} = |\mathbf{A} - \mathbf{B}|$$

یعنی، می‌توانیم بردار رابط بین هر نقطه با هر نقطه دیگر را به عنوان تفاضل بردارهای مکانی تعریف کنیم که هر یک از آنها معرف یکی از آن نقاطند (شکل ۱۳.۱). پس فاصله بین این نقاط عبارت است از بزرگی یا اندازه بردار تفاضل. از آنجا که این بزرگی عبارت است از ریشه دوم یک ضرب اسکالر، نسبت به تبدیل مختصات ناورداست. این نکته بسیار مهم است و می‌توان آن را به این صورت خلاصه کرد که تبدیلهای متعامد تبدیلهایی‌اند که در آنها فاصله ثابت می‌ماند. همچنین، زاویه

بین دو بردار تحت تبدیل متعامد ثابت می‌ماند. اگر بخواهیم نظریه تبدیل را در مسائل فیزیکی با موفقیت اعمال کنیم، این دو نتیجه جنبه اساسی دارند.

ضرب اسکالر از قوانین جابه‌جایی و توزیع‌پذیری پیروی می‌کند

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i = \sum_i B_i A_i = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (59.1)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \sum_i A_i (B_i + C_i) = \sum_i A_i B_i + \sum_i A_i C_i \quad (60.1)$$

$$= \sum_i (A_i B_i + A_i C_i) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$$

### ۱۱.۱ بردارهای یکه

گاهی می‌خواهیم برداری را برحسب مؤلفه‌های واقع در امتداد سه محور مختصات همراه با مشخصات مناسبی از این محورها، توصیف کنیم. به این منظور، بردارهای یکه  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  را در امتداد محورهای متعامد معرفی می‌کنیم.<sup>۱</sup> روشهای بیان بردار  $\mathbf{A}$ ، در زیر، هم‌ارزند

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 A_1 + \mathbf{e}_2 A_2 + \mathbf{e}_3 A_3 = \sum_i \mathbf{e}_i A_i \quad \text{یا} \quad \mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3) \quad (61.1)$$

مؤلفه‌های بردار  $\mathbf{A}$  را از طریق تصویر آنها بر محورها پیدا می‌کنیم

$$A_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \quad (62.1)$$

دیدهایم [معادله (۵۶.۱)] که ضرب اسکالر دو بردار دارای اندازه‌ای است برابر بزرگی هر یک از آنها ضرب در کسینوس زاویه بین آنها

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (63.1)$$

بنابراین، ضرب اسکالر هر دو برداریکه (به‌علت عمود بودنشان بر یکدیگر) عبارت است از

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (64.1)$$

۱. بردارهای یکه را با نمادهای بسیار گوناگونی نشان می‌دهند. شاید متداولترین آنها عبارت‌اند از مجموعه  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  یا  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ ؛ سایر نمادهای آن  $\hat{1}$ ,  $\hat{2}$ ,  $\hat{3}$  و  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  هستند.

## مثال ۴.۱

بردارهای مکان در مختصات دکارتی به صورت  $A = i + 2j - 2k$  و  $B = 4i + 2j - 3k$  بیان می‌شوند. اندازه بردار واصل بین نقطه  $A$  به نقطه  $B$ ، زاویه بین  $A$  و  $B$ ، مؤلفه  $B$  در راستای  $A$  را بیابید.

حل: بردار واصل نقطه  $A$  به نقطه  $B$  عبارت است از  $B - A$  (شکل ۱۳.۱).

$$B - A = 4i + 2j - 3k - (i + 2j - 2k) = 3i - k$$

$$|B - A| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

از معادله (۵۶.۱)

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{AB} = \frac{(i + 2j - 2k) \cdot (4i + 2j - 3k)}{\sqrt{9}\sqrt{29}}$$

$$\cos \theta = \frac{4 + 4 + 6}{3(\sqrt{29})} = 0.867$$

$$\theta = 30^\circ$$

مؤلفه  $B$  در راستای  $A$  عبارت است از  $B \cos \theta$  و از معادله (۵۶.۱)

$$B \cos \theta = \frac{A \cdot B}{A} = \frac{14}{3} = 4.67$$

## ۱۲.۱ ضرب برداری دو بردار

اینک به روش دیگری برای ترکیب کردن دو بردار توجه می‌کنیم. این روش به ضرب برداری (یا ضرب خارجی) مشهور است. اولاً، تأکید کنیم که این عمل، در واقع، یک بردار تولید می‌کند.<sup>۱</sup> ضرب برداری  $A$  و  $B$  با یک علامت ضرب سیاه ( $\times$ ) نشان داده می‌شود<sup>۲</sup>

$$C = A \times B \quad (۶۵.۱)$$

که  $C$  بردار حاصل از این عمل است. مؤلفه‌های  $C$  از رابطه زیر تعریف می‌شوند

۱. این حاصلضرب واقعاً یک بردار محوری تولید می‌کند، اما اصطلاح ضرب برداری به آن خاطر به کار می‌رود که با استفاده عامیانه آن همگام باشد. [ماریون (Ma 65, Section 1.15) را ببینید]  
 ۲. نمادگذاری قدیمتر آن عبارت بود از  $[AB]$ ،  $[A \cdot B]$ ، و  $[A \wedge B]$ .

$$C_i \equiv \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \quad (۶۶.۱)$$

که نماد  $\varepsilon_{ijk}$  نماد جایگشتی (یا چگالی لوی چویتا) و دارای خواص زیر است

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{اگر دو تا از شاخصهای پایین باهم برابر باشند} \\ +1 & \text{اگر } i, j, k \text{ یک جایگشت زوج از } 1, 2, 3 \text{ تشکیل دهند} \\ -1 & \text{اگر } i, j, k \text{ یک جایگشت فرد از } 1, 2, 3 \text{ تشکیل دهند} \end{cases} \quad (۶۷.۱)$$

بدینسان

$$\varepsilon_{122} = \varepsilon_{212} = \varepsilon_{211} = 0, \dots$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{312} = +1$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{311} = -1$$

با بهره‌گیری از این نمادگذاری، می‌توان مؤلفه‌های  $C$  را صریحاً محاسبه کرد. به ازای  $i = 1$  تنها کمیت‌های غیر صفر  $\varepsilon_{ijk}$  عبارت‌اند از  $\varepsilon_{123}$  و  $\varepsilon_{132}$  یعنی، با هر ترتیبی از  $j$  و  $k$ ، به ازای  $j, k = 2, 3$  بنابراین

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{j,k} \varepsilon_{1jk} A_j B_k = \varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 \\ &= A_2 B_3 - A_3 B_2 \end{aligned} \quad (۶۸.۱ \text{ الف})$$

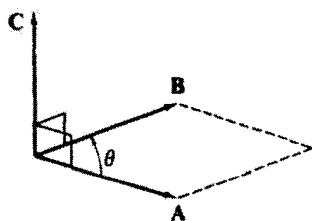
به همین ترتیب

$$C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 \quad (۶۸.۱ \text{ ب})$$

$$C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1 \quad (۶۸.۱ \text{ ج})$$

اینک به بسط کمیت  $[AB \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})]^2 = (AB \sin \theta)^2$  توجه می‌کنیم

$$\begin{aligned} A^t B^t \sin^2 \theta &= A^t B^t - A^t B^t \cos^2 \theta \\ &= \left( \sum_i A_i^t \right) \left( \sum_i B_i^t \right) - \left( \sum_i A_i B_i \right)^2 \\ &= (A_2 B_3 - A_3 B_2)^2 + (A_3 B_1 - A_1 B_3)^2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 \end{aligned} \quad (۶۹.۱)$$



شکل ۱۴.۱

که تساوی آخر مستلزم مقداری عملیات جبری است. با شناسایی مؤلفه‌های  $C$  در عبارت آخری، می‌توان نوشت

$$(AB \sin \theta)^2 = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = |C|^2 = C^2 \quad (۷۰.۱)$$

اگر ریشه دوم مثبت هر دو طرف این معادله را بگیریم

$$C = AB \sin \theta \quad (۷۱.۱)$$

این معادله حاکی از آن است که، اگر  $C = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ، آنگاه اندازه  $C$  با حاصلضرب اندازه‌های  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  در سینوس زاویه بین آنها برابر است. به تعبیر هندسی،  $AB \sin \theta$  عبارت است از مساحت متوازی‌الاضلاعی که بردارهای  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  و زاویه بین آنها، آن را مشخص می‌کنند (شکل ۱۴.۱).

### مثال ۵.۱

با استفاده از معادلات (۵۲.۱) و (۶۶.۱) نشان دهید که

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (۷۲.۱)$$

حل: با بهره‌گیری از معادله (۶۶.۱) داریم

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} B_j C_k$$

با استفاده از معادله (۵۲.۱)، داریم

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k \quad (۷۳.۱)$$

به همین ترتیب، برای سمت راست معادله (۷۲.۱) داریم

$$C \cdot (A \times B) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} C_i A_j B_k$$

بنابر تعریف  $\varepsilon_{ijk}$  [معادله (۶۷.۱)] می‌توانیم جای دو شاخص پایین مجاور در  $\varepsilon_{ijk}$  را باهم عوض کنیم، که منجر به تغییر علامت می‌شود

$$\begin{aligned} C \cdot (A \times B) &= \sum_{i,j,k} -\varepsilon_{jik} C_i A_j B_k \\ &= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{jki} A_j B_k C_i \end{aligned} \quad (۷۴.۱)$$

از آنجا که شاخصهای پایین  $i$ ،  $j$ ، و  $k$  بی‌نقش‌اند و می‌توان نامشان را تغییر داد، سمت راست معادلات (۷۳.۱) و (۷۴.۱) همانند، و درستی معادله (۷۲.۱) اثبات می‌شود. معادله (۷۲.۱) را نیز می‌توان به صورت  $(A \times B) \cdot C = A \cdot (B \times C)$  نوشت، این معادله حاکی از آن است که ضربهای اسکالر و برداری را، تا وقتی که ترتیب بردارها به صورت  $A$ ،  $B$  و  $C$  حفظ شود، می‌توان باهم مبادله کرد. توجه کنید که، اگر  $A = B$ ، داریم

$$A \cdot (A \times C) = C \cdot (A \times A) = 0$$

■ که نشان می‌دهد  $A \times C$  باید بر  $A$  عمود باشد.

$A \times B$  (یعنی،  $C$ ) بر صفحه‌ای که  $A$  و  $B$  آن را تعریف می‌کنند عمود است زیرا  $A \cdot (A \times B) = 0$  و  $B \cdot (A \times B) = 0$ . زیرا یک سطح تخت را می‌توان با برداری عمود بر سطح و با بزرگی مساوی مساحت آن نمایش داد، آشکار است که  $C$  چنین برداری است. جهت مثبت  $C$  را در راستای پیشروی بیچ راستگرد، وقتی که از  $A$  به  $B$  می‌چرخد، انتخاب می‌کنند. اکنون تعریف ضرب برداری را تکمیل کرده‌ایم؛ مؤلفه‌ها، اندازه، و تعبیر هندسی آن را بیان کردیم. از این رو معقول است انتظار داشته باشیم که  $C$  به‌راستی یک بردار باشد. اما، آزمون نهایی بردار بودن  $C$ ، امتحان خواص تبدیل آن است. این کار توسط ماریون (Ma65a, Section 1.14) انجام شده است، و در آنجا نشان داده شده است که  $C$  در واقع تحت یک دوران متعارف به صورت یک بردار تبدیل می‌شود.

باید به‌خواص زیر مربوط به ضرب برداری که از تعریفهای آن نتیجه می‌شوند توجه کنیم

$$A \times B = -B \times A \quad (\text{الف}) \quad (۷۵.۱)$$

اما، به‌طور کلی

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \quad (\text{ب}) \quad (۷۶.۱)$$

نتیجه مهم دیگر عبارت است از (مسئله ۲۲.۱ را ببینید)

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (۷۷.۱)$$

### مثال ۶.۱

حاصلضرب  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$  را بیابید.

حل:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

$$(\mathbf{C} \times \mathbf{D})_i = \sum_{l,m} \varepsilon_{ilm} C_l D_m$$

آنگاه، ضرب اسکالر مطابق معادله (۵۲.۱) محاسبه می‌شود

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \sum_i \left( \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \right) \left( \sum_{l,m} \varepsilon_{ilm} C_l D_m \right)$$

پس از بازنمایی مجموع بایبها، داریم

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \sum_{\substack{l,m \\ j,k}} \left( \sum_i \varepsilon_{jki} \varepsilon_{lmi} \right) A_j B_k C_l D_m$$

که شاخصهای پایین  $\varepsilon$  تحت تأثیر جایگشت قرار گرفته‌اند (هر کدام دوبار، به طریقی که هیچ تغییر علامتی پیش نمی‌آید) تا در محل سوم شاخص پایینی جای گیرد که جمع روی آن بسته می‌شود، حالا می‌توانیم از یک خاصیت مهم  $\varepsilon_{ijk}$  (مسئله ۲۲.۱) استفاده کنیم

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}} \quad (۷۸.۱)$$

بنابراین داریم

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \sum_{\substack{j,k \\ l,m}} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m$$

با انجام مجموع‌هایی روی  $j$  و  $k$ ، دلتاهای کرونگر عبارت بالا را تبدیل می‌کنند به

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \sum_{l,m} (A_l B_m C_l D_m - A_m B_l C_l D_m)$$

این معادله را می‌توان بازاریابی کرد و به‌دست آورد

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \left( \sum_i A_i C_i \right) \left( \sum_m B_m D_m \right) - \left( \sum_i B_i C_i \right) \left( \sum_m A_m D_m \right)$$

از آنجا که هر جمله داخل پرانتز در سمت راست یک ضرب اسکالر است، سرانجام داریم

$$\blacksquare \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$$

شاید تعامد بردارهای یکه  $\mathbf{e}_i$  مستلزم آن است که ضرب برداری زیر برقرار باشد

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k, \quad i, j, k \text{ به ترتیب چرخه‌ای} \quad (۷۹.۱ \text{ الف})$$

اینک می‌توانیم برای بیان این نتیجه، از نماد جایگشت به‌صورت زیر بهره بگیریم

$$\boxed{\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k} \quad (۷۹.۱ \text{ ب})$$

حالا، مثلاً، می‌توانیم ضرب برداری  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  را این‌طور بیان کنیم

$$\boxed{\mathbf{C} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i A_j B_k} \quad (۸۰.۱ \text{ الف})$$

با بسط مستقیم و مقایسه با معادله (۸۰.۱ الف)، می‌توانیم درستی عبارت دترمینانی ضرب

برداری را تحقیق کنیم

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (۸۰.۱ \text{ ب})$$

اتحادهای زیر را بدون اثبات می‌آوریم

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{ABC} \quad (۸۱.۱)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (۸۲.۱)$$



$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] \\ &= \mathbf{A} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}] \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned} \right\} (۸۳.۱)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}]\mathbf{C} - [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}]\mathbf{D} \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C})\mathbf{D} \end{aligned} \right\} (۸۴.۱)$$

### ۱۳.۱ مشتق بردار نسبت به اسکالر

اگر از یک تابع اسکالر  $\varphi(s)$  نسبت به متغیر اسکالر  $s$  مشتق گرفته شود، چون هیچ جزئی از مشتق نمی‌تواند تحت تبدیل مختصات تغییر کند، خود مشتق نمی‌تواند تغییر کند و بنابراین باید یک اسکالر باشد؛ یعنی، در دستگاه‌های مختصات  $x_i$  و  $x'_i$ ،  $\varphi = \varphi'$  و  $s = s'$ ، بنابراین  $d\varphi = d\varphi'$  و  $ds = ds'$  از این رو

$$d\varphi/ds = d\varphi'/ds' = (d\varphi/ds)'$$

به همین ترتیب، می‌توانیم مشتق برداری مانند  $\mathbf{A}$  را نسبت به اسکالر  $s$  به طور صوری تعریف کنیم. مؤلفه‌های  $\mathbf{A}$  مطابق الگوی زیر تبدیل می‌شوند

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j \quad (۸۵.۱)$$

بنابراین، با مشتقگیری، به علت آنکه  $\lambda_{ij}$ ها از  $s'$  مستقل‌اند، به دست می‌آوریم

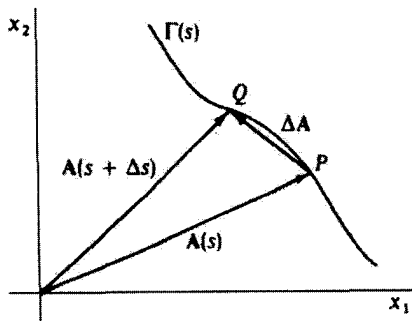
$$\frac{dA'_i}{ds'} = \frac{d}{ds'} \sum_j \lambda_{ij} A_j = \sum_j \lambda_{ij} \frac{dA_j}{ds'}$$

چون  $s$  و  $s'$  یکسان‌اند، داریم

$$\frac{dA'_i}{ds'} = \left( \frac{dA_i}{ds} \right)' = \sum_j \lambda_{ij} \left( \frac{dA_j}{ds} \right)$$

بدینسان کمیت‌های  $dA_j/ds$  مانند مؤلفه‌های بردار تبدیل می‌شوند و بنابراین مؤلفه‌های یک بردار هستند، که می‌توانیم آن بردار را به صورت  $d\mathbf{A}/ds$  بنویسیم.

تعبیر هندسی بردار  $d\mathbf{A}/ds$  را به صورت زیر ارائه می‌دهیم. اولاً، برای اینکه  $d\mathbf{A}/ds$  وجود داشته باشد، باید  $\mathbf{A}$  تابع پیوسته‌ای از متغیر  $s$  باشد:  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(s)$ . فرض کنید این تابع به وسیله منحنی



شکل ۱۵.۱

منحنی پیوسته  $\Gamma$  در شکل ۱۵.۱ نموده شده باشد؛ در نقطه  $P$  مقدار متغیر  $s$  است، و در  $Q$  این متغیر مقدار  $s + \Delta s$  را دارد. در این صورت مشتق  $A$  نسبت به  $s$  را به شیوه متعارف به دست می آوریم

$$\frac{dA}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{A(s + \Delta s) - A(s)}{\Delta s} \quad (۸۶.۱ \text{ الف})$$

مشتق مجموعها و ضربهای برداری از قواعد حساب برداری معمولی پیروی می کنند، مثلاً

$$\frac{d}{ds}(A + B) = \frac{dA}{ds} + \frac{dB}{ds} \quad (۸۶.۱ \text{ ب})$$

$$\frac{d}{ds}(A \cdot B) = A \cdot \frac{dB}{ds} + \frac{dA}{ds} \cdot B \quad (۸۶.۱ \text{ ج})$$

$$\frac{d}{ds}(A \times B) = A \times \frac{dB}{ds} + \frac{dA}{ds} \times B \quad (۸۶.۱ \text{ د})$$

$$\frac{d}{ds}(\varphi A) = \varphi \frac{dA}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} A \quad (۸۶.۱ \text{ ه})$$

در مورد دیفرانسیلهای کامل و مشتقهای جزئی نیز روند محاسبات به همین منوال خواهد بود.

#### ۱۴.۱ مثالهایی از مشتقها-سرعت و شتاب

نمایش حرکت ذرات نقطه‌ای به وسیله بردارها در پیشبرد دینامیک این ذرات (و سیستمهای ذرات)، از اهمیت خاصی برخوردار است. برای چنین رهیافتی به بردارها نیاز داریم تا مکان، سرعت، و شتاب ذره مشخصی را نمایش دهیم. معمول است که مکان ذره را نسبت به چارچوب مرجع معینی به وسیله برداری چون  $\mathbf{r}$ ، که به طور کلی تابعی از زمان است،  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، مشخص می کنند. بردار سرعت،  $\mathbf{v}$ ، و بردار شتاب،  $\mathbf{a}$ ، بنا بر تعریف عبارت اند از

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (۸۷.۱)$$

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (۸۸.۱)$$

که یک نقطه بر بالای نماد نشانگر مشتق اول نسبت به زمان، و دو نقطه نمایانگر مشتق زمانی دوم است. در مختصات قائم دکارتی عبارتهای مربوط به  $\mathbf{r}$ ،  $\mathbf{v}$ ، و  $\mathbf{a}$  عبارت‌اند از

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \sum_i x_i\mathbf{e}_i \quad \text{مکان}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \sum_i \dot{x}_i\mathbf{e}_i = \sum_i \frac{dx_i}{dt}\mathbf{e}_i \quad \text{سرعت} \quad (۸۹.۱)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \ddot{x}_i\mathbf{e}_i = \sum_i \frac{d^2x_i}{dt^2}\mathbf{e}_i \quad \text{شتاب}$$

محاسبه این کمیتها در مختصات قائم آسان است زیرا بردارهای یکه  $\mathbf{e}_i$  نسبت به زمان ثابت‌اند. اما، در دستگاههای مختصات غیرقائم همچنان‌که ذره در فضا حرکت می‌کند، بردارهای یکه در مکان آن ذره نسبت به زمان ضرورتاً ثابت نیستند، و مؤلفه‌های مشتقهای زمانی  $\mathbf{r}$ ، دیگر مانند معادلات (۸۹.۱)، رابطه‌های ساده‌ای نیستند. ما در اینجا در خصوص دستگاههای مختصات خمیده خط عام بحثی نمی‌کنیم، اما مختصات قطبی تخت، مختصات کروی، و مختصات استوانه‌ای آنقدر اهمیت دارند که راجع به سرعت و شتاب در این دستگاهها به بحث بپردازیم.<sup>۱</sup>

برای بیان  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{a}$  در مختصات قطبی تخت، به شکل ۱۶.۱ توجه کنید. نقطه‌ای در امتداد منحنی حرکت  $s(t)$  حرکت می‌کند و در فاصله زمانی  $t_2 - t_1 = dt$  از  $P^{(1)}$  به  $P^{(2)}$  می‌رود. بردارهای یکه  $\mathbf{e}_r$  و  $\mathbf{e}_\theta$ ، که متعامند، از  $\mathbf{e}_r^{(1)}$  به  $\mathbf{e}_r^{(2)}$  و از  $\mathbf{e}_\theta^{(1)}$  به  $\mathbf{e}_\theta^{(2)}$  تغییر می‌کنند، تغییرات  $\mathbf{e}_r$  عبارت است از

$$\mathbf{e}_r^{(2)} - \mathbf{e}_r^{(1)} = d\mathbf{e}_r \quad (۹۰.۱)$$

که برداری است عمود بر  $\mathbf{e}_r$  (و، بنابراین، در راستای  $\mathbf{e}_\theta$ ). به همین ترتیب، تغییرات  $\mathbf{e}_\theta$  چنین است

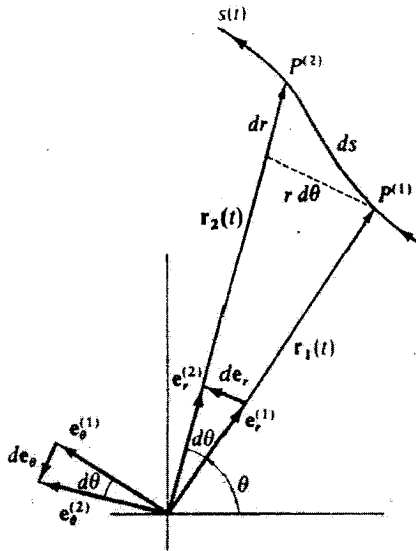
$$\mathbf{e}_\theta^{(2)} - \mathbf{e}_\theta^{(1)} = d\mathbf{e}_\theta \quad (۹۱.۱)$$

که برداری است عمود بر  $\mathbf{e}_\theta$ . در این صورت می‌توان نوشت

$$d\mathbf{e}_r = d\theta\mathbf{e}_\theta \quad (۹۲.۱)$$

و

۱. برای مشاهده شکل هندسی این دستگاههای مختصات به بیوست و مراجعه کنید. برای دستیابی به بحثی عام و کلی پیرامون مختصات خمیده خط به کتاب ماریون (Ma65a, Chapter 4) رجوع کنید.



شکل ۱۶.۱

$$de_{\theta} = -d\theta e_r \quad (۹۳.۱)$$

که علت وارد شدن علامت منفی در رابطه اخیر این است که راستای  $de_{\theta}$  در خلاف راستای  $e_r$  قرار دارد (شکل ۱۶.۱). هر دو طرف معادلات (۹۲.۱) و (۹۳.۱) را بر  $dt$  تقسیم می‌کنیم، داریم

$$\dot{e}_r = \dot{\theta} e_{\theta} \quad (۹۴.۱)$$

$$\dot{e}_{\theta} = -\dot{\theta} e_r \quad (۹۵.۱)$$

اگر  $v$  را به صورت زیر بیان کنیم

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(r e_r) \\ &= \dot{r} e_r + r \dot{e}_r \end{aligned} \quad (۹۶.۱)$$

بلافاصله با استفاده از معادله (۹۴.۱)، داریم

$$\boxed{v = \dot{r} = \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_{\theta}} \quad (۹۷.۱)$$

بنابراین سرعت به یک مؤلفه شعاعی  $\dot{r}$  و یک مؤلفه زاویه‌ای (یا عرضی)  $r\dot{\theta}$  تجزیه می‌شود.

مشتق‌گیری برای بار دوم شتاب را به دست می‌دهد

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (98.1)$$

بنابراین شتاب به یک مؤلفه شعاعی  $(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$  و یک مؤلفه زاویه‌ای (یا عرضی)، یعنی  $(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$  تجزیه می‌شود.

عبارت‌های مربوط به  $ds^2$ ،  $v^2$  و  $\mathbf{v}$  در سه تا از مهمترین دستگاه‌های مختصات عبارت‌اند از (بیوست و را نیز ببینید).

مختصات قائم

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\ v^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \\ \mathbf{v} &= \dot{x}_1\mathbf{e}_1 + \dot{x}_2\mathbf{e}_2 + \dot{x}_3\mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\} \quad (99.1)$$

مختصات کروی

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ v^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \\ \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (100.1)$$

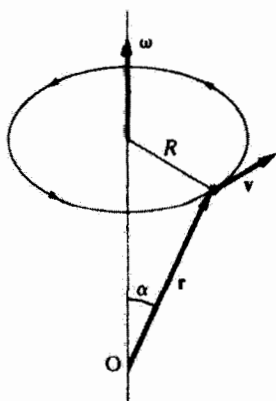
[عبارت‌های مربوط به مختصات قطبی تحت با نشانیدن  $d\varphi = 0$ ، از معادلات (۱۰۰.۱) حاصل می‌شوند.]

مختصات استوانه‌ای

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \\ v^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \\ \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (101.1)$$

## ۱۵.۱ سرعت زاویه‌ای

نقطه یا ذره‌ای را که به دلخواه در فضا حرکت می‌کند می‌توان همواره، در لحظه‌ای معین، در حال حرکت در یک صفحه، در مسیر دایره‌ای حول یک محور معین، در نظر گرفت؛ یعنی، مسیری که



شکل ۱۷.۱

یک ذره در خلال فاصله زمانی بینهایت کوچک  $\delta t$  می‌پیماید می‌تواند به صورت یک کمان بینهایت کوچک از یک دایره نموده شود. خطی که از مرکز این دایره می‌گذرد و بر راستای لحظه‌ای حرکت عمود است محور لحظه‌ای چرخش نام دارد. با حرکت ذره در مسیر دایره‌ای، آهنگ تغییر موضع (مکان) زاویه‌ای را سرعت زاویه‌ای می‌گویند

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (۱۰۲.۱)$$

ذره‌ای را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۱۷.۱، به طور لحظه‌ای مسیری دایره‌ای به شعاع  $R$  را حول محوری عمود بر صفحه حرکت می‌پیماید. فرض کنید بردار مکان ذره،  $\mathbf{r}$ ، از مبدأ واقع در نقطه اختیاری  $O$  روی محور چرخش ترسیم شده باشد. آهنگ زمانی تغییر بردار مکان عبارت است از بردار سرعت خطی ذره، یعنی  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ . در مورد حرکت روی دایره‌ای به شعاع  $R$ ، بزرگی لحظه‌ای سرعت خطی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$v = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad (۱۰۳.۱)$$

البته، راستای سرعت خطی،  $\mathbf{v}$ ، بر  $\mathbf{r}$  عمود و در صفحه دایره واقع است. خیلی خوب بود اگر می‌توانستیم نمایشی برداری از سرعت زاویه‌ای (مثلاً،  $\omega$ ) ابداع کنیم به طوری که تمام کمیت‌های مورد نظر در حرکت ذره را بشود روی یک مبنای مشترک ترسیم کرد. برای سرعت زاویه‌ای می‌توان راستایی به قرار زیر تعریف کرد. اگر ذره به طور لحظه‌ای در صفحه حرکت کند، در این صورت عمود بر آن صفحه یک راستای دقیق — یا حتی — دو راستا را در فضا مشخص می‌کند. می‌توان راستای متناظر با جهت پیشروی پیچ راستگرد را وقتی که همسوی چرخش ذره

می‌گردد، راستای مثبت در نظر گرفت (شکل ۱۷.۱). همچنین می‌توانیم اندازه سرعت خطی را، با توجه به اینکه  $R = r \sin \alpha$ ، بنویسیم. بدینسان

$$v = r\omega \sin \alpha \quad (104.1)$$

به این اعتبار که راستا و اندازه سرعت زاویه‌ای تعریف شده‌اند، در می‌یابیم که اگر بنویسیم

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \quad (105.1)$$

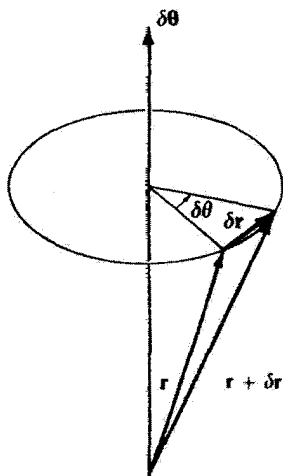
در این صورت این دو تعریف هر دو صادق‌اند، و ما نمایش برداری مطلوب خود از سرعت زاویه‌ای را در اختیار داریم.

در اینجا باید توجه کنیم که میان چرخشهای متناهی و بینهایت کوچک تمایزهای مهمی وجود دارد. چرخش بینهایت کوچک را می‌توان با یک بردار (عملاً یک بردار محوری) نمایش داد، اما در مورد چرخش متناهی نمی‌توان این کار را انجام داد. عدم امکان توصیف چرخش متناهی به وسیله یک بردار ناشی از این واقعیت است که چنین چرخشهایی جابه‌جا نمی‌شوند (مثال شکل ۹.۱ را ببینید)، و بنابراین، به‌طور کلی، بسته به ترتیب چرخشها نتایج مختلفی حاصل می‌شود. برای تجسم عینی این گزاره، به‌عملکرد پی‌درپی دو چرخش متناهی توجه کنید که ماتریسهای دوران  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  آنها را توصیف می‌کنند. فرض کنید بردارهای  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  به‌شیوه‌ای یک‌به‌یک با این چرخشها وابسته باشند. جمع برداری آنها عبارت است از  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ، که با ماتریس  $\lambda_3 = \lambda_2 \lambda_1$  هم‌ارز است. اما چون جمع برداری جابه‌جاپذیر است، همچنین داریم  $\mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ ، که با  $\lambda_2 = \lambda_1 \lambda_2$  متناظر است. اما می‌دانیم که عملیات ماتریسی جابه‌جاپذیر نیستند، و بنابراین به‌طور کلی  $\lambda_2 \neq \lambda_1 \lambda_2$ . بدینسان بردار  $\mathbf{C}$  یگانه نیست، و بنابراین نمی‌توانیم برداری را به‌یک چرخش متناهی وابسته کنیم. چرخشهای بینهایت کوچک دچار این نقیصه نا‌جابه‌جاپذیری نیستند. بنابراین به‌این نتیجه می‌رسیم که انتظار داشته‌باشیم، چرخش بینهایت کوچک را می‌توان به‌وسیله یک بردار نمایش داد. هر چند این انتظار عملاً برآورده می‌شود، آزمون‌هایی ماهیت برداری هر کمیت در خواص تبدیلی آن خلاصه می‌شود. ما در اینجا فقط به‌بحث کیفی موضوع می‌پردازیم.<sup>۱</sup>

به‌شکل ۱۸.۱ توجه کنید. اگر بردار مکان یک نقطه از  $\mathbf{r}$  به  $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$  تغییر کند، در آن صورت وضعیت هندسی را می‌توانیم دقیقاً با عبارت زیر نشان دهیم

$$\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \quad (106.1)$$

۱. برای اثبات کامل این مطلب، به‌کتاب ماریون (Ma65a, Section 2.5)، مراجعه کنید.



شکل ۱۸.۱

که  $\delta\theta$  کمیتی است که اندازه‌اش با زاویهٔ چرخش بینهایت کوچک برابر و راستایش در امتداد محور لحظه‌ای چرخش قرار دارد. صرفاً این واقعیت که معادلهٔ (۱۰۶.۱) دقیقاً وضعیت نمایش یافته در شکل ۱۸.۱ را توصیف می‌کند برای اثبات این نکته که  $\delta\theta$  بردار است، کافی نیست. (باز هم تکرار می‌کنیم که آزمون حقیقی این موضوع باید بر پایهٔ خواص تبدیلی  $\delta\theta$  استوار باشد.) اما اگر نشان دهیم که دو «بردار» چرخش بینهایت کوچک  $\delta\theta_1$  و  $\delta\theta_2$  واقعاً جا به‌جاپذیرند در این صورت تنها مانع بر سر راه نمایش یک چرخش متناهی به وسیلهٔ بردار از میان برداشته شده‌است.

فرض کنید که چرخش  $\delta\theta_1$  بردار  $r$  را به  $r + \delta r_1$  تبدیل می‌کند، که در آن  $\delta r_1 = \delta\theta_1 \times r$ . اگر چرخش دیگری چون  $\delta\theta_2$  حول محوری دیگر نیز بعد از این چرخش صورت گیرد، بردار مکان اولیه برای این چرخش عبارت است از  $r + \delta r_1$ . بدینسان

$$\delta r_2 = \delta\theta_2 \times (r + \delta r_1)$$

و بردار مکان نهایی برای  $\delta\theta_1$  که به دنبال آن  $\delta\theta_2$  می‌آید، عبارت است از

$$r + \delta r_{12} = r + [\delta\theta_1 \times r + \delta\theta_2 \times (r + \delta r_1)]$$

پس، با چشمپوشی از بینهایت کوچکیهای مرتبهٔ دوم

$$\delta r_{12} = \delta\theta_1 \times r + \delta\theta_2 \times r \quad (۱۰۷.۱)$$



به همین ترتیب، اگر  $\delta\theta_1$  به دنبال  $\delta\theta_2$  باشد، داریم

$$\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r} + [\delta\theta_2 \times \mathbf{r} + \delta\theta_1 \times (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}_2)]$$

یا

$$\delta\mathbf{r}_{21} = \delta\theta_2 \times \mathbf{r} + \delta\theta_1 \times \mathbf{r} \quad (10.8.1)$$

بردارهای چرخش  $\delta\mathbf{r}_{21}$  و  $\delta\mathbf{r}_{12}$  برابرند، بنابراین «بردارهای» چرخش  $\delta\theta_1$  و  $\delta\theta_2$  جا به جا پذیرند. پس منطقی به نظر می‌رسد که  $\delta\theta$  در معادله (10.6.1) در حقیقت یک بردار باشد.

واقعیت این است که  $\delta\theta$  برداری است که نمایش سرعت زاویه‌ای به صورت یک بردار را ممکن می‌کند، زیرا سرعت زاویه‌ای عبارت است از نسبت یک زاویه چرخش بینهایت کوچک به یک زمان بینهایت کوچک

$$\omega = \frac{\delta\theta}{\delta t}$$

بنابراین، از تقسیم طرفین معادله (10.6.1) بر  $\delta t$ ، داریم

$$\frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} = \frac{\delta\theta}{\delta t} \times \mathbf{r}$$

یا، با میل کردن به حد  $\delta t \rightarrow 0$

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$$

که قبلاً هم این رابطه را داشتیم.

### ۱۶.۱ عملگر گرادیان

اینک به مهم‌ترین عضو ده‌ای به نام عملگرهای دیفرانسیل برداری، یعنی عملگر گرادیان، برمی‌گردیم. اسکالر  $\varphi$  را در نظر بگیرید که تابع صریحی از مختصات  $x_i$  است و، بعلاوه، در سرتاسر ناحیه

معینی از فضا، تابعی پیوسته و تک مقدار از این مختصات است. تحت تبدیلی مختصه‌ای که  $x_i$  را به  $x'_i$  می‌برد،  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi'(x'_1, x'_2, x'_3)$ ، و به کمک قاعده زنجیره‌ای مشتق‌گیری،

می‌توان نوشت

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (10.9.1)$$

قضیه برای  $\partial\varphi'/\partial x'_i$  و  $\partial\varphi'/\partial x'_j$  نیز به همین منوال است، بنابراین به طور کلی داریم

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (110.1)$$

تبدیل مختصه وارون عبارت است از

$$x_j = \sum_k \lambda_{kj} x'_k \quad (111.1)$$

مشق می‌گیریم

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial}{\partial x'_i} \left( \sum_k \lambda_{kj} x'_k \right) = \sum_k \lambda_{kj} \left( \frac{\partial x'_k}{\partial x'_i} \right) \quad (112.1)$$

اما جمله داخل پرانتز آخر دقیقاً همان  $\delta_{ik}$  است، بنابراین

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_k \lambda_{kj} \delta_{ik} = \lambda_{ij} \quad (113.1)$$

معادله (113.1) را در معادله (110.1) می‌نشانیم، و به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j \lambda_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \quad (114.1)$$

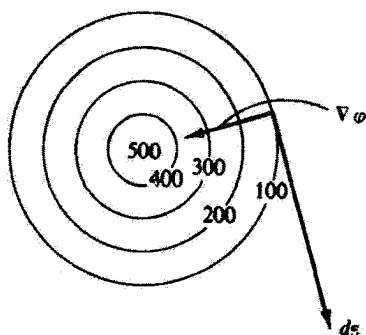
چون این مشتق، معادله تبدیل دقیق یک بردار [معادله (114.1)] را به دست می‌دهد، تابع  $\partial\varphi/\partial x_j$  عبارت است از مؤلفه زام برداری به نام گرادیان تابع  $\varphi$ . توجه کنید که هر چند  $\varphi$  یک اسکالر است، گرادیان  $\varphi$  یک بردار است. گرادیان  $\varphi$  را به شکل  $\text{grad } \varphi$  یا  $\nabla\varphi$  («دل»  $\varphi$ ) می‌نویسند.

از آنجا که تابع  $\varphi$  یک تابع اسکالر اختیاری است، خوب است که عملگر دیفرانسیلی را که قبلاً توصیف کردیم، برحسب عملگر گرادیان تعریف کنیم

$$(\text{grad})_i = \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (115.1)$$

می‌توان عملگر گرادیان برداری کامل را چنین بیان کرد

$$\text{grad} = \nabla = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{گرادیان} \quad (116.1)$$



شکل ۱۹.۱

عملگر گرادیان می‌تواند (الف) مستقیماً بر یک تابع اسکالر عمل کند، مانند  $\nabla\varphi$ ؛ (ب) در ضرب اسکالر با یک تابع برداری، مانند  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  (واگرایی  $\mathbf{A}$ ) به‌کار رود؛ یا (ج) در ضرب برداری با یک تابع برداری، مانند  $\nabla \times \mathbf{A}$  (تاو  $\mathbf{A}$ )، به‌کار رود.

برای ملاحظه تعبیر فیزیکی گرادیان یک تابع اسکالر، به‌نقشه توپوگرافیکی یک تپه مخروطی با سطح مقطع دایره‌ای (شکل ۱۹.۱) توجه کنید. دایره‌ها نمایشگر خطوطی با ارتفاع ثابت‌اند. فرض کنید  $\varphi$  نمایشگر ارتفاع در هر نقطه  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$  باشد. در این صورت

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \sum_i (\nabla \varphi)_i dx_i \quad (117.1)$$

مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی  $ds$  عبارت‌اند از جابه‌جاییهای افزایشی (نموی) در راستای سه‌محور متعامد

$$ds = (dx_1, dx_2, dx_3) \quad (118.1)$$

بنابراین

$$d\varphi = (\nabla \varphi) \cdot ds \quad (119.1)$$

فرض می‌کنیم، مطابق شکل ۱۹.۱، راستای  $ds$  چنان باشد که در امتداد مماس بر یکی از خطوط هم‌ارتفاع واقع باشد (یعنی، در امتداد خطی که به‌ازای آن  $\varphi = \text{const}$ ). از آنجا که  $\varphi = \text{const}$ ، برای این حالت:  $d\varphi = 0$ ، اما، چون نه  $\nabla \varphi$  و نه  $ds$  به‌طور کلی صفر نیستند، از این‌رو باید بر یکدیگر عمود باشند. بدینسان  $\nabla \varphi$  بر خطی (یا در سه‌بعد، بر سطحی) که برای آن  $\varphi = \text{const}$  عمود است.

بیشینه مقدار  $d\varphi$  وقتی حاصل می‌شود که  $\nabla\varphi$  و  $ds$  هم‌راستا باشند؛ در این صورت

$$(d\varphi)_{\max} = |\nabla\varphi| ds, \quad \nabla\varphi \parallel ds$$

یا

$$|\nabla\varphi| = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{\max} \quad (120.1)$$

بنابراین  $\nabla\varphi$  در راستای بیشترین تغییر در  $\varphi$  قرار دارد.

می‌توانیم این نتایج را به شرح زیر خلاصه کنیم:

الف) بردار  $\nabla\varphi$ ، در هر نقطه، بر خطوط یا سطوحی که برای آنها  $\varphi = \text{const.}$  عمود است.

ب) راستای بردار  $\nabla\varphi$  چنان است که تغییرات در  $\varphi$  بیشینه باشد.

ج) از آنجا که هر راستایی در فضا را می‌توان برحسب بردار یکه  $\mathbf{n}$  در آن راستا مشخص کرد،

آهنگ تغییرات  $\varphi$  در راستای  $\mathbf{n}$  (مشتق جهت‌دار  $\varphi$ ) را می‌توان از عبارت  $\mathbf{n} \cdot \nabla\varphi = \partial\varphi/\partial n$

به دست آورد.

تأثیر پیاپی عملگر گرادینان منجر می‌شود به

$$\nabla \cdot \nabla = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (121.1)$$

این عملگر مهم حاصلضرب راه که لاپلاسی<sup>۱</sup> می‌نامند، به صورت زیر نیز می‌نویسند<sup>۲</sup>

$$\nabla^2 = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (122.1)$$

مثلاً، وقتی لاپلاسی بر یک اسکالر عمل می‌کند، داریم

$$\nabla^2 \psi = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \quad (123.1)$$

۱. به نام پیر سیمون لاپلاس (۱۷۴۹-۱۸۲۷): نمادگذاری  $\nabla^2$  به سر ویلیام روان هامیلتون منسوب است.

۲. سایر عملگرهای مهم دیفرانسیلی برداری، واگرایی و تاور، را در این کتاب بیشتر از این دنبال نمی‌کنیم، بجز در بخش ۵.۲ که شامل قضیه‌ای در ارتباط با تاور است. بهیوست و کتاب ماریون (Ma65a, Chapters 2 and 3) مراجعه کنید.

### ۱۷.۱ انتگرالگیری از بردارها

بردار حاصل از انتگرالگیری حجمی یک تابع برداری  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_i)$  در تمام حجم  $V$  از عبارت زیر به دست می‌آید<sup>۱</sup>

$$\int_V \mathbf{A} dv = \left( \int_V A_1 dv, \int_V A_2 dv, \int_V A_3 dv \right) \quad (124.1)$$

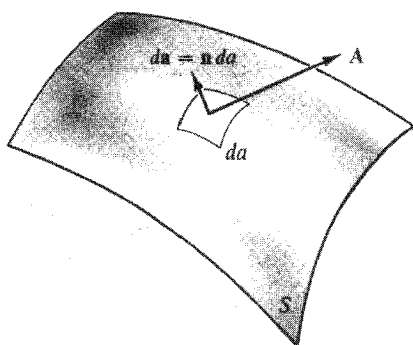
بدینسان، در کل حجم  $V$ ، با انجام سه انتگرالگیری عادی و جداگانه، از بردار  $\mathbf{A}$  انتگرال می‌گیریم. انتگرال روی سطح  $S$  حاصل از تصویر یک تابع برداری  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_i)$  روی عمود بر آن سطح، بنابر تعریف، عبارت است از

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

که  $d\mathbf{a}$  عنصری از مساحت آن سطح (شکل ۲۰.۱) به شمار می‌آید.  $d\mathbf{a}$  را به صورت یک کمیت برداری می‌نویسیم زیرا نه تنها می‌توانیم اندازه  $da$ ، بلکه راستایی نیز متناظر با عمود بر آن سطح در نقطه مورد بحث، به آن نسبت دهیم. اگر بردار عمودی یکه  $\mathbf{n}$  باشد، آنگاه

$$d\mathbf{a} = \mathbf{n} da \quad (125.1)$$

بدینسان مؤلفه‌های  $d\mathbf{a}$  عبارت‌اند از تصویرهای عنصر مساحت بر سه صفحه متقابلاً عمود برهم که به وسیله محورها قائم تعریف شده باشند



شکل ۲۰.۱

۱. نماد  $\int_V$  واقعاً یک انتگرال سه‌گانه روی یک حجم مشخص  $V$  را نشان می‌دهد. به طور مشابه، نماد  $\int_S$  معرف یک انتگرال دوگانه روی یک سطح مشخص است.

$$da_1 = dx_1 dx_2, \dots \quad (126.1)$$

بنابراین داریم

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da \quad (127.1)$$

یا

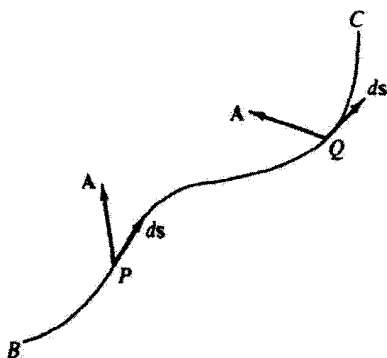
$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \sum_i A_i da_i \quad (128.1)$$

بنابر معادله (۱۲۷.۱)، انتگرال  $\mathbf{A}$  روی سطح  $S$  عبارت است از انتگرال مؤلفه عمودی  $\mathbf{A}$  روی این سطح. می‌توان عمود بر سطح را در امتداد یکی از دو راستای ممکن («بالا» یا «پایین») گرفت؛ از این رو علامت  $\mathbf{n}$  مبهم است. اگر سطح بسته باشد، این قرارداد را می‌پذیریم که عمود به سوی خارج مثبت است.

انتگرال خطی یک تابع برداری  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_i)$  در امتداد مسیر معینی که از نقطه  $B$  تا نقطه  $C$  ادامه دارد به وسیله انتگرال مؤلفه  $\mathbf{A}$  در امتداد این مسیر به دست می‌آید

$$\int_{BC} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{BC} \sum_i A_i dx_i \quad (129.1)$$

کمیت  $d\mathbf{s}$  عبارت است از یک عنصر طول در امتداد مسیر معین (شکل ۲۱.۱). راستای  $d\mathbf{s}$  را در امتداد راستایی که مسیر طی می‌شود مثبت می‌گیرند. در شکل ۲۱.۱ در نقطه  $P$  زاویه بین  $d\mathbf{s}$  و  $\mathbf{A}$  کمتر از  $\pi/2$  است، و از این رو  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$  در این نقطه مثبت است. در نقطه  $Q$  این زاویه از  $\pi/2$  بزرگتر است، و سهم مربوط به انتگرال در این نقطه منفی است.



شکل ۲۱.۱

۱.۱. ماتریس تبدیلی را بیابید که محور  $x_3$  از یک دستگاه مختصات قائم را حول محور  $x_2$  به سوی  $x_1$  به اندازه  $45^\circ$  می چرخاند.

۲.۱. معادلات (۱۰.۱) و (۱۱.۱) را با توجه به ملاحظات مثلثاتی اثبات کنید.

۳.۱. ماتریس تبدیلی را بیابید که یک دستگاه مختصات قائم را به اندازه  $120^\circ$  حول محوری می چرخاند که این محور با سه محور مختصات زاویه‌هایی مساوی می‌سازد.

۴.۱. نشان دهید: الف)  $(AB)^t = B^t A^t$  ب)  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

۵.۱. با بسط مستقیم نشان دهید که  $|\lambda|^2 = 1$ . برای سادگی،  $\lambda$  را ماتریس تبدیل دوبعدی بگیرید.

۶.۱. نشان دهید که معادله (۱۵.۱) را می‌توان با بهره‌گیری از این شرط که تبدیل طول پاره‌خط را تغییر نمی‌دهد به دست آورد.

۷.۱. مکعب واحدی را در نظر بگیرید که یکی از رأسهای آن بر مبدأ دستگاه مختصات قائم و سه یال مجاورش بر سه محور آن واقع باشد. بردارهایی را بیابید که قطرهای مکعب را توصیف کنند. زاویه بین هر زوج قطر را بیابید.

۸.۱. فرض کنید  $A$  برداری باشد از مبدأ به نقطه  $P$  که در فضا ثابت است. فرض کنید  $r$  برداری باشد از مبدأ به نقطه متغیر  $Q(x_1, x_2, x_3)$ . نشان دهید که

$$A \cdot r = A^t$$

معادله صفحه‌ای است عمود بر  $A$  که از نقطه  $P$  می‌گذرد.

۹.۱. برای دو بردار:

$$A = e_1 + 2e_2 - e_3, \quad B = -2e_1 + 3e_2 + e_3$$

کمیت‌های زیر را بیابید: الف)  $A - B$  و  $|A - B|$ ، ب) مؤلفه  $B$  در امتداد  $A$ ، ج) زاویه بین  $A$  و  $B$ ، د)  $A \times B$ ، و ه)  $(A - B) \times (A + B)$ .

۱۰.۱. ذره‌ای در یک مدار بیضوی تخت حرکت می‌کند، که این مدار با بردار مکان زیر توصیف می‌شود

$$r = 2b \sin \omega t e_1 + b \cos \omega t e_2.$$

الف)  $v$ ،  $a$ ، و مقدار سرعت ذره را بیابید.

ب) زاویه بین  $v$  و  $a$  در لحظه  $t = \pi/2\omega$  چقدر است؟

۱۱.۱. نشان دهید که ضرب اسکالر سه‌گانه  $(A \times B) \cdot C$  را می‌توان این‌طور نوشت

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

همچنین نشان دهید که با تعویض عملگرهای ضرب اسکالر و برداری و با تغییر ترتیب  $\mathbf{A}$ ،  $\mathbf{B}$ ،  $\mathbf{C}$  تا مادامی که در یک ترتیب چرخه‌ای قرار داشته باشند، در این ضرب تغییری حاصل نمی‌شود؛ یعنی

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \dots$$

بنابراین می‌توان از نمادگذاری  $\mathbf{ABC}$  برای نمایاندن ضرب سه‌گانه اسکالر بهره گرفت. سرانجام، با محاسبه حجم متوازی‌السطوحی که با بردارهای  $\mathbf{A}$ ،  $\mathbf{B}$ ،  $\mathbf{C}$  مشخص می‌شود، تعبیر هندسی  $\mathbf{ABC}$  را ارائه دهید.

۱۲.۱ فرض کنید  $\mathbf{a}$ ،  $\mathbf{b}$ ، و  $\mathbf{c}$  سه بردار ثابتی باشند که از مبدأ به نقاط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  ترسیم شده‌اند. فاصله مبدأ تا صفحه‌ای که به وسیله نقاط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  معین می‌شود، چقدر است؟ مساحت مثلث  $\mathbf{ABC}$  چقدر است؟

۱۳.۱ اگر  $\mathbf{X}$  بردار مجهولی باشد که در روابط زیرین متضمن بردارهای معلوم  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  و اسکالر  $\varphi$  صدق می‌کند

$$\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \varphi$$

آن را بر حسب  $\mathbf{A}$ ،  $\mathbf{B}$ ،  $\varphi$ ، و اندازه  $\mathbf{A}$  بیان کنید.

۱۴.۱ ماتریسهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

پیدا کنید: الف)  $|\mathbf{AB}|$ ، ب)  $\mathbf{AC}$ ، ج)  $\mathbf{ABC}$ ، و د)  $\mathbf{AB} - \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$

۱۵.۱ مقادیر  $\alpha$  را چنان تعیین کنید که تبدیل زیر را متعامد کند

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

۱۶.۱ چه سطحی به وسیله  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \text{const}$  نمایش داده می‌شود، اگر  $\mathbf{a}$  برداری با طول ثابت



از مبدأ و  $\Gamma$  بردار مکان مربوط به نقطه  $P(x_1, x_2, x_3)$  بر روی آن سطح باشد؟

۱۷.۱ قانون کسینوسی مثلثات مسطحه را از طریق تعبیر ضرب  $(A - B) \cdot (A - B)$  و بسط این ضرب، به دست آورید.

۱۸.۱ قانون سینوسی مثلثات مسطحه را به کمک تعبیر ضرب  $A \times B$  و گونه دیگر نمایش آن  $(A - B) \times B$ ، به دست آورید.

۱۹.۱ با بهره‌گیری از جبر برداری عبارتهای زیر را استخراج کنید:

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad (\text{الف})$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad (\text{ب})$$

۲۰.۱ نشان دهید: الف)  $\sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \delta_{ij} = 0$ ، ب)  $\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 2\delta_{il}$  و ج)  $\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$ .

۲۱.۱ نشان دهید (همچنین مسئله ۱۱.۱ را ببینید) که

$$ABC = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

۲۲.۱ با ملاحظه نتایج حاصل از تمام ترکیبهای ممکن  $i, j, l, m$  مجموع  $\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk}$  را (که شامل ۸۱ جمله است) محاسبه کنید؛ یعنی

الف)  $i = j$ ، ب)  $i = l$ ، ج)  $i = m$ ، د)  $j = l$ ، ه)  $j = m$ ، و)  $l = m$ ، ز)  $i \neq l$  یا  $i \neq m$  و ح)  $j \neq l$  یا  $j \neq m$  نشان دهید که

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

و آنگاه از این نتیجه بهره‌گیرید و ثابت کنید

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

۲۳.۱ از نمادگذاری  $\varepsilon_{ijk}$  استفاده کنید و اتحاد زیر را به دست آورید

$$(A \times B) \times (C \times D) = (ABD)C - (ABC)D$$

۲۴.۱ فرض کنید  $A$  برداری اختیاری، و  $e$  برداریکه در راستای ثابت باشد. نشان دهید

$$A = e(A \cdot e) + e \times (A \times e)$$

مفهوم هندسی هر یک از دو جمله عبارت بالا چیست؟

۲۵.۱ مؤلفه‌های بردار شتاب،  $\mathbf{a}$ ، را در مختصات کروی و استوانه‌ای پیدا کنید.

۲۶.۱ ذره‌ای با سرعت  $v = \text{const}$  در امتداد منحنی  $r = k(1 + \cos \theta)$  [یک کاردیوئید]

حرکت می‌کند. پیدا کنید:  $\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_r$  و  $\dot{\theta}$ .

۲۷.۱ اگر  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$  و  $\mathbf{r}$  نشان دهید که:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})] = r^2 \mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - (v^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r}$$

۲۸.۱ نشان دهید که

$$\nabla(\ln|\mathbf{r}|) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

۲۹.۱ زاویه بین سطوحی را بیابید که با  $r^2 = 9$  و  $x + y + z^2 = 1$  در نقطه  $(2, -2, 1)$

تعریف شده باشند.

۳۰.۱ نشان دهید که:  $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$

۳۱.۱ نشان دهید: الف)  $\nabla r^n = nr^{(n-2)}\mathbf{r}$ ، ب)  $\nabla f(r) = rdf/dr$ ، و ج)

$$\nabla^2(\ln r) = 1/r^2$$

۳۲.۱ نشان دهید که

$$\int (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) dt = r^2 + \dot{r}^2 + \text{const.}$$

که  $\mathbf{r}$  برداری است از مبدأ به نقطه  $(x_1, x_2, x_3)$ . کمیت‌های  $r$  و  $\dot{r}$ ، به ترتیب، عبارت‌اند از اندازه

بردارهای  $\mathbf{r}$  و  $\dot{\mathbf{r}}$ .

۳۳.۱ نشان دهید که

$$\int \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} \right) dt = \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{C}$$

که  $\mathbf{C}$  برداری است ثابت.

۳۴.۱ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int \mathbf{A} \times \ddot{\mathbf{A}} dt$$

۳۵.۱ نشان دهید که حجم مشترک استوانه‌های متقاطع‌ی که با  $x^2 + y^2 = a^2$  و  $x^2 + z^2 = a^2$

تعریف می‌شوند، عبارت است از  $V = 16(a^3/3)$ .

## مکانیک نیوتونی-تک ذره

### ۱.۲ مقدمه

علم مکانیک در پی آن است که توصیف دقیق و سازگاری از دینامیک ذرات و سیستمهای ذرات، یعنی مجموعه‌ای از قوانین فیزیکی که حرکت اجسام و انبوهی از اجسام را به زبان ریاضی بیان می‌کند، ارائه دهد. به این دلیل، به مفاهیم بنیادی معینی نیاز داریم. در نظریه نیوتونی این نکته نهفته است که مفهوم فاصله را می‌توان از دیدگاه هندسی به‌طور شهودی درک کرد. بعلاوه، زمان را کمیتی مطلق می‌دانند، که هر ناظر دلخواهی می‌تواند تعریف دقیقی از آن به عمل آورد. اما، در نظریه نسبیت، باید این ایده‌های نیوتونی را اصلاح کنیم (فصل ۱۴ را ببینید). ترکیب مفاهیم فاصله و زمان به ما امکان می‌دهد که سرعت و شتاب ذره را تعریف کنیم. مفهوم بنیادی سوم، جرم، مستلزم برخی تمهیدات است، که وقتی در خصوص قوانین نیوتون بحث می‌کنیم، به آن خواهیم پرداخت.

قوانین فیزیکی باید بر شالوده حقایق تجربی استوار باشند. هر قانون فیزیکی را می‌توان با این گزاره مشخص کرد که «می‌توانست چیز دیگری باشد». از پیش نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که جاذبه گرانشی میان دو جسم باید دقیقاً به‌صورت عکس مجذور فاصله بین آنها تغییر کند. اما آزمایش نشان می‌دهد که موضوع به این صورت است. همین‌که یک مجموعه از داده‌های

تجربی باهم ربط پیدا می‌کنند و اصل موضوعی بر مبنای پدیده‌هایی که به این داده‌ها ارتباط دارند فرمولبندی می‌شود، آنگاه می‌توان به استنتاجهای گوناگونی رسید. اگر آزمایش درستی همه استنتاجها را تأیید کند، می‌توان متقاعد شد که این اصل موضوع به‌طور کلی درست است. در این صورت است که اصل موضوع وضعیت قانون فیزیکی را به خود می‌گیرد. اگر بعضی از آزمایشها با پیشگوییهای قانون منطبق نباشند، در این صورت نظریه را باید جرح و تعدیل کرد تا با حقایق سازگار شود.

نیوتون ما را با قوانین مکانیک تجهیز کرد. ما در اینجا این قوانین را با کلام امروزی بیان می‌کنیم، در خصوص معنی آنها به بحث می‌پردازیم، و آنگاه در وضعیتهای گوناگون مضامین این قوانین را بیرون می‌کشیم.<sup>۱</sup> اما ساختار منطقی علم مکانیک سر راست و بی‌پیرایه نیست. روند استدلال ما در تفسیر قوانین نیوتون در این کتاب، تنها راه ممکن برای این کار نیست.<sup>۲</sup> ما در این کتاب جزئیات فلسفه مکانیک را پی نمی‌گیریم، بلکه در عوض تنها بسطی کافی از قوانین نیوتون را ارائه می‌دهیم تا امکان ادامه بحث پیرامون دینامیک کلاسیک فراهم آید. در این بخش توجه خود را به حرکت تک ذره معطوف می‌کنیم، و بحث در باب سیستمهای ذرات را به فصلهای ۸ و ۱۰ تا ۱۲ واگذار می‌کنیم.

## ۲.۲ قوانین نیوتون

بحث خود را صرفاً با بیان شکل متداول قوانین مکانیک نیوتون آغاز می‌کنیم:<sup>۳</sup>

۱. هر جسم در حال سکون یا در حالت حرکت یکنواخت باقی می‌ماند مگر اینکه نیرویی بر آن وارد آید.
۲. هر گاه جسمی تحت تأثیر نیرویی قرار گیرد به طریقی حرکت می‌کند که آهنگ تغییر تکانه‌اش نسبت به زمان با نیروی وارد بر آن برابر باشد.

۱. تروسل: Truesdell (Tr68) خاطر نشان می‌کند که لئونارد اویلر (۱۷۸۳-۱۷۰۷) مفاهیم نیوتونی را روشن کرد و آنها را گسترش داد. اویلر «قسمت اعظم مکانیک را به شکل نوین و امروزی آن در آورد» و «مکانیک را ساده و آسان کرد».

۲. ارنست ماخ (۱۹۱۶-۱۸۳۸) نظر خویش را در کتاب مشهورش تحت عنوان علم مکانیک که در سال ۱۸۸۳ برای نخستین بار انتشار یافت، بیان کرده است. ترجمه‌ای از ویرایش بعدی این کتاب به انگلیسی موجود است (Ma60)، در کتابهای ر.ب. لیندسی و ه. مارزنی (Li36) و ن. فیدر (Fe59) نیز بحثهای جالبی در این خصوص ارائه شده است.

۳. سرایزاک نیوتون (۱۷۲۷-۱۶۴۲) در کتابش تحت عنوان اصول ریاضی فلسفه طبیعی که معمولاً پرنکیبیا نامیده می‌شود، این قوانین را اعلام کرد. پیش از او، گالیله (۱۶۴۲-۱۵۶۴) نتایج آزمایشهای ریاضی خود را با گزاره‌هایی هم‌ارز قوانین اول و دوم نیوتون تعمیم داده بود. اما گالیله در تکمیل توصیف دینامیک ناتوان بود زیرا مفهوم آنچه را که به قانون سوم نیوتون تبدیل شد درک نمی‌کرد و در نتیجه به معنی دقیق نیرو دست نیافته بود.

۳. هرگاه دو جسم نیروهایی بر یکدیگر وارد آورند، مقدار این نیروها برابر و جهستان خلاف یکدیگر است.

این قوانین چندان برای ما آشنا نیستند که گاهی می‌خواهیم اهمیت آنها (یا فقدان این اهمیت) را به عنوان قوانین فیزیکی نادیده بگیریم. مثلاً، قانون اول بدون مفهوم «نیرو»، همان کلمه‌ای که نیوتون در هر سه قانون به کار برد، بی‌معناست. در واقع، هرگاه قوانین را به‌طور مجرد در نظر بگیریم، قانون اول فقط معنی دقیق نیروی صفر را می‌رساند؛ یعنی، هر جسمی که ساکن یا در حال حرکت یکنواخت (بدون شتاب، مستقیم‌الخط) باقی می‌ماند تحت تأثیر هیچگونه نیرویی نیست. هر جسمی را که بدینگونه حرکت می‌کند جسم آزاد (یا ذره آزاد) می‌گویند. در بخش بعد درباره مسئله چارچوب مرجعی که «حرکت یکنواخت» نسبت به آن اندازه‌گیری می‌شود، بحث می‌کنیم.

وقتی سرآرتور ادینگتون<sup>۱</sup> می‌خواست فقدان محتوا در قانون اول نیوتون را بیان کند، به نحوی مطایبه‌آمیز، ابراز داشت که کل آنچه را این قانون عملاً بیان می‌کند این است که «حالت سکون یا حرکت یکنواخت هر ذره در امتداد یک خط راست ادامه پیدا می‌کند مگر آنکه چنین نباشد». این قضاوت نسبت به نیوتون، که حکمش مفهوم بسیار مشخصی داشت خیلی غیر منصفانه بود. اما تأکید این حکم در آنجاست که قانون اول به خودی خود ما را فقط با یک مفهوم کیفی مربوط به «نیرو» مجهز می‌کند.

قانون دوم حکم صریحی را مقرر می‌کند: نیرو به آهنگ زمانی تغییر تکانه مربوط است. نیوتون تکانه را به‌طور مناسبی به‌صورت حاصلضرب جرم و سرعت تعریف کرد. گرچه او از اصطلاح «مقدار حرکت» استفاده می‌کرد، به‌طوری که

$$p = mv \quad (1.2)$$

بنابراین قانون دوم نیوتون را می‌توان این‌طور بیان کرد

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) \quad (2.2)$$

تعریف نیرو فقط وقتی کامل و دقیق می‌شود که تعریف «جرم» در دست باشد. بدینسان قانونهای اول و دوم در واقع به مفهوم متداول «قانون» نیستند؛ بلکه، می‌توان آنها را تعریف پنداشت. آنجا که طول، زمان، و جرم که معمولاً مفاهیمی از قبل فهمیده شده‌اند، از قوانین اول و دوم نیوتون به عنوان تعریف عملی نیرو استفاده می‌کنیم. از سوی دیگر، قانون سوم نیوتون برآستی یک قانون

1. Sir Arthur Eddington (Ed30, P.124)

است. این قانون حکمی است مربوط به دنیای فیزیکی واقعی و کل فیزیک مطرح شده در قوانین حرکت نیوتون را در بر می‌گیرد.<sup>۱</sup>

اما، بلافاصله باید اضافه کنیم که قانون سوم یکی از قوانین کلی طبیعت به‌شمار نمی‌آید. این قانون فقط وقتی صادق است که نیروی وارد آمده به‌وسیلهٔ یک شیء (نقطه‌ای) بر شیء دیگر، در امتداد خط واصل بین این دو شیء باشد. چنین نیروهایی را نیروهای مرکزی می‌گویند؛ نیروی مرکزی چه دافعه باشد چه جاذبه، قانون سوم همچنان برقرار است. نیروهای گرانشی و الکتروستاتیکی نیروهای مرکزی‌اند، از این رو قوانین نیوتون را می‌توان در مسائلی به کار گرفت که متضمن این نوع نیروها باشند. گاهی، نیروهای کشسان (که در واقع جلوه‌های ماکروسکوپیکی نیروهای الکتروستاتیکی میکروسکوپیکی به‌شمار می‌آیند) مرکزی هستند. مثلاً، دو شیء نقطه‌ای که به‌وسیلهٔ فنری مستقیم یا ریسمانی کشسان به هم متصل شده‌اند در معرض نیروهایی‌اند که از قانون سوم پیروی می‌کنند. هر نیرویی که وابسته به سرعت اجسام دارای برهم‌کنش باشد، غیر مرکزی است، و قانون سوم در مورد آن صادق نیست. نیروهای وابسته به سرعت مشخصهٔ برهم‌کنشهایی‌اند که با سرعت متناهی (محدود) منتشر می‌شوند. بنابراین نیروی بین بارهای الکتریکی متحرک از قانون سوم پیروی نمی‌کنند، زیرا این نیرو با سرعت نور انتشار می‌یابد. حتی نیروی گرانشی بین اجسام متحرک از نوع وابسته به سرعت است، اما تأثیر آن اندک و آشکارسازیش دشوار است. تنها تأثیر قابل مشاهدهٔ آن حرکت تقدیمی اوج و حضیض سیارات داخلی منظومهٔ شمسی است (بخش ۹.۷ را ببینید). ما در این کتاب منحصراً با نیروهای گرانشی و کشسان سروکار داریم، برای چنین بحثهایی دقت قانون سوم کافی است.

برای نمایاندن اهمیت قانون سوم، آن را به‌صورت عبارت زیر بیان می‌کنیم، که در ضمن حاوی تعریف مناسبی از جرم نیز هست:

۳. اگر دو جسم سیستم منزوی و ایده‌آلی را تشکیل دهند، در این صورت شتاب این اجسام همواره در جهت‌های مخالف، و نسبت اندازهٔ این شتابها ثابت است. این نسبت ثابت عبارت است از نسبت عکس جرم این دو جسم.

با این گزاره می‌توانیم تعریفی عملی از جرم ارائه دهیم و بنابراین معنی دقیق معادلاتی را بیان کنیم که دینامیک نیوتونی را خلاصه می‌کنند. بنا بر قانون سوم برای این دو جسم منزوی، یعنی اجسام ۱ و ۲، داریم

۱. استدلالی که در اینجا ارائه شده (به این معنی که قوانین اول و دوم عملاً تعریف‌اند و فیزیک در قانون سوم می‌گنجد) تنها تفسیر ممکن به‌شمار نمی‌آید. مثلاً، لیندسی و مارزن (Li36) دو قانون نخست را به عنوان قوانین فیزیکی تعبیر و آنگاه قانون سوم را به‌صورت نتیجهٔ آنها استنتاج می‌کنند.

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (۳.۲)$$

با بهره‌گیری از تعریف نیرو که از قانون دوم به دست آمد، خواهیم داشت

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \quad (۴.۲ الف)$$

یا، با جرمهای ثابت

$$m_1 \left( \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \right) = m_2 \left( -\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \right) \quad (۴.۲ ب)$$

و از آنجا که شتاب مشتق زمانی سرعت است

$$m_1 (\mathbf{a}_1) = m_2 (-\mathbf{a}_2) \quad (۴.۲ ج)$$

از این رو

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{a_1}{a_2} \quad (۵.۲)$$

که علامت منفی فقط نشانه آن است که راستای دو بردار شتاب خلاف یکدیگرند.

همواره می‌توان، مثلاً  $m_1$  را، به عنوان جرم واحد انتخاب کرد. آنگاه، وقتی  $m_1$  مجاز به برهم‌کنش با هر جسم دیگری باشد، از مقایسه نسبت شتابها می‌توان جرم جسم دیگر را تعیین کرد. برای اندازه‌گیری این شتابها، باید ساعتها و میله‌های اندازه‌گیری مناسبی در اختیار داشته باشیم؛ بعلاوه، باید دستگاه مختصات یا چارچوب مرجع مناسبی اختیار کنیم. مسئله «چارچوب مرجع مناسب» در بخش بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت.

یکی از چند روش متداول تعیین جرم اشیاء بهره‌گیری از توزین—مثلاً، با مقایسه وزن آن با یک وزنه استاندارد به وسیله ترازوی شاهین‌دار—است. در این طرز کار از این واقعیت سود می‌برند که در هر میدان گرانشی وزن جسم دقیقاً عبارت است از نیروی گرانشی وارد بر آن جسم؛ یعنی، معادله نیوتون  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  تبدیل می‌شود به  $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$ ، که  $\mathbf{g}$  شتاب گرانی است. اعتبار بهره‌گیری از این شیوه بر یک فرض بنیادی استوار است: جرم  $m$  که در معادله نیوتون ظاهر و بنا بر گزاره ۳<sup>۱</sup> تعریف می‌شود برابر است با جرم  $m$  که در معادله نیروی گرانشی نمایان می‌شود. این دو جرم را به ترتیب جرم لختی و جرم گرانشی می‌گویند. می‌توان تعریفهای زیر را ارائه کرد:

جرم لختی: جرمی که شتاب هر جسم را تحت تأثیر نیرویی مشخص تعیین می‌کند.

جرم گرانشی: جرمی که نیروی گرانشی بین یک جسم و سایر اجسام را تعیین می‌کند.

گاليله نخستين كسى بود كه هم ارزي جرم لختى و گرانشى را در آزمایش (شاید مجهول) خود با پايين انداختن وزنه‌هاى از برج پيزا، آزموه. نيوتون نيز به اين مسئله توجه كرد و دورهٔ تناوب آونگه‌هاى هم طول اما با وزنه‌هاى متفاوت را اندازه گرفت. نه نيوتون و نه گاليله، هيچكدام اختلافى بين اين دو جرم نيافتند، اما روشهاى كه به كار گرفتند خيلى ابتدايى بود.<sup>۱</sup> در ۱۸۹۰ اتووش<sup>۲</sup> روش استادانه‌اى را براى آزموه هم‌ارزى جرمهاى لختى و گرانشى طراحى كرد. او با بهره‌گيرى از دو شى با جنسهاى متفاوت، تأثير نيروى گرانشى زمين (يعنى، وزن) را با اثر نيروى لختى ناشى از چرخش زمين مقايسه كرد. اين آزمایش مستلزم يك روش خنثى بود كه طى آن از يك ترازوى پيچشى حساس استفاده مى‌شد و بنا بر اين خيلى دقيق بود. در آزمایشهاى كه همين اواخر انجام گرفت (و مشخصاً آزمایشهاى ديكه<sup>۳</sup>) و اساساً از همان روش استفاده مى‌شد، دقت آزمایش بيشتري شده است، و اكنون مى‌دانيم كه جرم لختى و گرانشى در محدودهٔ چند قسمت در  $10^{12}$  يكسان‌اند. اين نتيجه در نظريهٔ نسبيت عام اهميت خيلى زيادى دارد.<sup>۴</sup> حكم برابرى دقيق جرم لختى با جرم گرانشى را اصل هم‌ارزى مى‌گويند.

قانون سوم نيوتون به كمك دو جسمى كه سيستمي منزوى را تشكيل مى‌دهند، بيان مى‌شود. البته، حصول چنين شرط ايده‌آلى ناممكن است؛ هر جسمى در عالم با هر جسم ديگرى برهم‌كنش دارد، هر چند كه اگر فاصله خيلى زياد باشد نيروى برهم‌كنش عملاً اهميت خود را از دست مى‌دهد. نيوتون از كنار مسئله چگونگى رها كردن اثرات مورد نظر از گيرودار تمامى آثار خارجى، گذشت. اما اين مشكل عملى فقط تأكيد برگستردهگى فوق‌العاده حكم نيوتون در قانون سوم مى‌كند. اين هم نشانه‌اى از عمق درك و بينش فزيكى اوست كه با اتكا به مشاهدات محدود آنچنان نتيجه‌اى مى‌گيرد كه به مدت ۳۰۰ سال از بوتهٔ آزمایش و آزمون كامياب و موفق بيرون آمده است. فقط در همين قرن حاضر بوده است كه اندازه‌گيريهائى با جزئيات بسيار دقيق انحرافهائى نسبت به پيش‌بينيهائى نظريهٔ نيوتونى را نشان داده‌اند. پيگيرى اين جزئيات به تكامل نظريهٔ نسبيت و مكانيك

۱. نيوتون در آزمایش خود، بايد توانسته باشد تفاوتى را در حدود يك قسمت در  $10^3$  آشكارسازى كند.

2. Roland von Eötvös (1848-1919)

اهل مجارستان؛ تحقيقات او در زمينهٔ مسائل گرانشى به تكامل گراني‌سنج انجاميد، كه در مطالعات زمين شناختى به كار گرفته شد.

3. P.G.Roll, R. Krotkov, and R. H. Dicke, *Ann. Phys* (N. Y.) **26**, 442 (1964).

نيز نگاه كنيد به:

Braginsky and Pavov, *Sov. Phys - JETP*, **34**, 463 (1972).

۴. مثلاً نگاه كنيد به بحثهاى كه ب.ج. برگمن (Be46) و جى. وبر (We61) ارائه داده‌اند. در كتاب وبر تحليلى از آزمایش اتووش نيز آمده است.



کوانتومی انجامیده است (همچنین بخش ۲.۸ را ببینید).

تعبیر دیگری از قانون سوم نیوتون متکی بر مفهوم تکانه است. اگر معادله (۴.۲) را بازاریابی

کنیم

$$\frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0$$

یا

$$p_1 + p_2 = \text{const.} \quad (۶.۲)$$

این حکم که تکانه در برهم‌کنش منزوی دو ذره پایسته است، حالت خاصی از حکم کلیتر پایستگی (بقای) تکانه خطی به‌شمار می‌آید. فیزیکدانان به قوانین کلی پایستگی علاقه‌مندند، و به نظر آنها پایستگی تکانه خطی حتی برای نیروهای وابسته به سرعت همواره برقرار است. ما بعداً تعریف خود را از تکانه که متکی بر معادله (۱.۲) بود، برای سرعت‌های نزدیک به سرعت نور اصلاح خواهیم کرد.

### ۳.۲ چارچوبهای مرجع

نیوتون پی‌برد، برای آنکه قوانین حرکت معنی داشته باشند، باید حرکت اجسام را نسبت به چارچوب مرجعی سنجید. اگر قوانین نیوتون واقعاً در یک چارچوب صادق باشند آن را چارچوب لخت می‌خوانند؛ یعنی، اگر جسمی بدون آنکه نیروی خارجی بر آن وارد آید با سرعت ثابت در یک خط مستقیم حرکت کند (یا ساکن باقی بماند)، در این صورت دستگاه مختصاتی که این واقعیت در آن برقرار است یک چارچوب مرجع لخت به‌شمار می‌آید. این یک تعریف عملی روشن است و از نظریه نسبیت عام نیز حاصل می‌شود.

اگر قوانین نیوتون در یک چارچوب مرجع صادق باشند، در این صورت در هر چارچوب مرجعی با حرکت یکنواخت (یعنی، بدون شتاب) نسبت به سیستم اول، صادق خواهند بود.<sup>۱</sup> این حکم ناشی از این واقعیت است که معادله  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$  متضمن مشتق دوم  $\mathbf{r}$  نسبت به زمان است؛ تغییر مختصات که با سرعت ثابت انجام شود، در این معادله تأثیری ندارد. این نتیجه را ناوردایی گالیله‌ای یا اصل نسبیت نیوتونی می‌گویند.

نظریه نسبیت به ما نشان داده‌است که مفاهیم سکون مطلق و چارچوب مرجع لخت مطلق بی‌معنی‌اند. بنابراین، حتی اگر به‌صورت قراردادی چارچوب مرجع ثابتی را نسبت به ستارگان

۱. اگر بخواهیم معادلات نیوتون حرکت جسمی را نسبت به یک چارچوب مرجع نالخت یعنی چارچوبی که نسبت به یک چارچوب مرجع لخت شتاب‌دار باشد، بیان کنیم باید در آنها اصلاحاتی به عمل آید، که در این خصوص در فصل ۹ بحث خواهیم کرد.

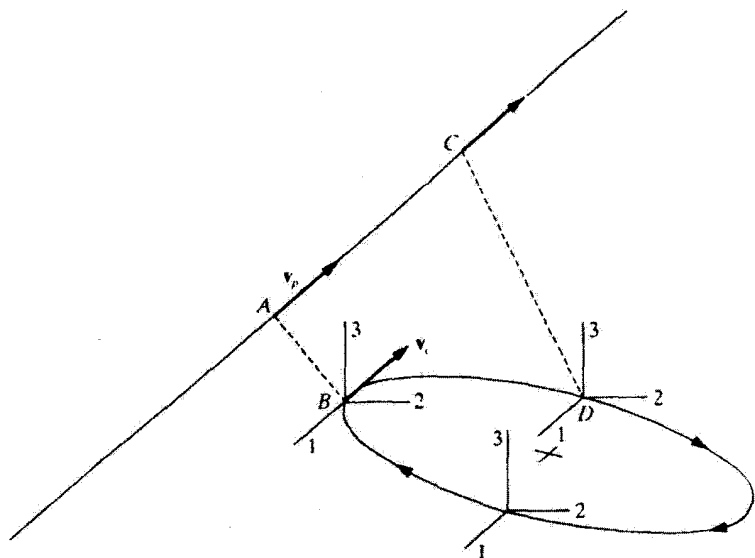
«ثابت» بپذیریم در واقع، در چنین چارچوبی معادلات نیوتونی با دقت بسیار خوبی معتبرند، این چارچوب، در حقیقت، چارچوب لخت مطلق نیست. اما، می‌توانیم ستارگان «ثابت» را چارچوب مرجعی بپنداریم که با تقریب کافی برای مقاصد کنونی چارچوب مرجع لخت «مطلق» را تعیین می‌کنند.

هر چند چارچوب مرجع ستاره ثابت سیستمی است براحتی قابل تعریف و سیستمی است مناسب برای هر منظور، اما باید تأکید کنیم که در تعریف بنیادی یک چارچوب لخت از ستارگان، چه ثابت و چه غیر ثابت ذکر می‌شود به میان نمی‌آید. اگر جسمی بدون آنکه تحت تأثیر نیرویی باشد، در دستگاه مختصات معینی با سرعت ثابت حرکت کند، بنا بر تعریف آن دستگاه چارچوبی لخت به‌شمار می‌آید.

از آنجا که توصیف دقیق حرکت یک شیء فیزیکی واقعی در دنیای فیزیکی واقعی تقریباً ناممکن است، همواره به ایده‌آل‌سازیها و تقریبهایی متوسل می‌شویم که میزان و درجه آنها فرق می‌کند؛ یعنی، اگر نیروهای کوچکتر وارد بر جسم تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر حرکت آن نداشته باشد، معمولاً از آنها چشمپوشی می‌کنیم، ساده‌ترین وضعیت ممکن متضمن انجام آزمایش در «خلأ» کامل است، به طوری که حرکت ذره از جانب هیچ نیروی خارجی مختل نشود. اما، از آنجا که همواره باید علامتهای ثابتی را فرض کنیم که دستگاه مرجع را روی آنها بنیاد بگذاریم (مثلاً، ستارگان «ثابت» دور)، بدین‌وسیله از قبل تقریبی را نسبت به حالت ایده‌آل وارد می‌کنیم؛ یعنی، فرض می‌کنیم که تأثیر اجسام مادی واقع در فواصل دور صفر است. البته، این تقریب بر توصیف حرکت ذره تأثیری جدی ندارد. اما از آنجا که همواره باید تکیه‌گاهی در اختیار داشته باشیم که چارچوب مرجع را بر آن استوار کنیم، در نظر گرفتن اندازه‌گیریهای حرکت یک ذره کاملاً آزاد، از لحاظ مفهومی ناممکن است. با همه اینها، مفهوم ذره آزاد در بسیاری از موارد مفید است.

اگر بخواهیم حرکت، مثلاً یک ذره آزاد را توصیف کنیم، و اگر به این منظور دستگاه مختصاتی را در یک چارچوب لخت اختیار کنیم، در این صورت لازم است که معادله (بردار) حرکت ذره بستگی به موضع مبدأ دستگاه مختصات نداشته و مستقل از سمتگیری آن در فضا باشد؛ یعنی لازم است که در هر چارچوب لخت، فضا دارای خواص همگنی و همسانگردی باشد. همچنین لازم است که زمان همگن باشد؛ یعنی، ذره آزادی که با سرعت ثابت معینی در خلال یک فاصله زمانی معین در این دستگاه مختصات حرکت می‌کند، نباید در خلال فاصله زمانی بعد، سرعتش تغییر کرده باشد.

می‌توانیم اهمیت این خواص را به کمک مثال زیر روشن کنیم. مطابق شکل ۱.۲ ذره آزادی



شکل ۱.۲

را در نظر بگیرید که در مسیر معین  $AC$  حرکت می‌کند. برای توصیف حرکت این ذره، دستگاه مختصات قائمی را اختیار می‌کنیم که مبدأ آن، مطابق شکل، در یک دایره حرکت می‌کند. برای سادگی، فرض می‌کنیم سمتگیری محورها در فضا ثابت باشد. ذره با سرعت  $v_p$  نسبت به یک چارچوب مرجع لخت حرکت می‌کند. اگر دستگاه مختصات وقتی که مبدأ آن در نقطه  $B$  قرار دارد با سرعت خطی  $v_c$  حرکت کند، و اگر  $v_c = v_p$ ، در این صورت برای ناظری در این دستگاه مختصات متحرک ذره (در نقطه  $A$ ) ساکن به نظر خواهد رسید. اما، در لحظه‌ای بعد، وقتی ذره در نقطه  $C$  واقع است و دستگاه مختصات در  $D$  قرار دارد، ذره نسبت به ناظر شتابدار به نظر خواهد رسید. بنابراین، باید نتیجه بگیریم که دستگاه مختصات چرخان شرایط یک چارچوب مرجع لخت را برآورده نمی‌کند.

برای اینکه در بایم زمان همگن است یا خیر، این مشاهدات کافی نیست. برای رسیدن به چنین نتیجه‌ای، باید اندازه‌گیرهای متعددی در وضعیتهای یکسان و زمانهای گوناگون انجام گیرد؛ نتایج یکسان حاکی از همگنی زمان خواهد بود.

معادلات نیوتون حرکت اجسام را در دستگاههای نالخت توصیف نمی‌کنند. می‌توانیم برای توصیف حرکت یک ذره به وسیله یک دستگاه مختصات چرخان روشی را ابداع کنیم، اما، به طوری

که در فصل ۹ خواهیم دید، معادلات حاصل شامل چندین جمله‌اند که در معادله ساده نیوتون،  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ، ظاهر نمی‌شوند. پس، فعلاً، توجه خود را به چارچوبهای مرجع لخت معطوف می‌کنیم تا دینامیک ذرات را توصیف کنیم.

#### ۴.۲ معادله حرکت یک ذره

معادله نیوتون،  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ، را می‌توان به صورتهای معادل زیر نوشت

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (۷.۲)$$

این در صورتی است که فرض کنیم  $m$  با زمان تغییر نمی‌کند. این عبارت معادله دیفرانسیل مرتبه دومی است که با معلوم بودن تابع  $\mathbf{F}$ ، برای یافتن  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  می‌توان از آن انتگرال گرفت. هرگاه مقادیر اولیه  $\mathbf{r}$  و  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$  مشخص باشند، آنگاه امکان می‌یابیم دو ثابت دلخواه انتگرالگیری را محاسبه کنیم. در این صورت به کمک تابع نیروی  $\mathbf{F}$  و مقادیر اولیه مکان  $\mathbf{r}$  و سرعت  $\mathbf{v}$ ، حرکت ذره را تعیین می‌کنیم.

تابع نیروی  $\mathbf{F}$  ممکن است ترکیبی از مکان، سرعت، و زمان باشد و عموماً به صورت  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  نموده می‌شود. در هر سیستم دینامیکی معین معمولاً می‌خواهیم  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{v}$  را به صورت تابعی از زمان بیابیم. حل معادله (۷.۲) به ما کمک می‌کند که این کار را از طریق حل آن برحسب  $\ddot{\mathbf{r}}$  انجام دهیم. کاربرد معادله (۷.۲) در وضعیتهای فیزیکی یکی از بخشهای مهم مکانیک به شمار می‌آید.

در این فصل چندین مثال را بررسی می‌کنیم که در آنها تابع نیرو معلوم است. کار بررسی خود را با ملاحظه توابع نیروی ساده (ثابت یا فقط وابسته به یکی از کمیت‌های  $\mathbf{r}$ ،  $\mathbf{v}$ ، و  $t$ ) تنها در یک بعد فضایی به عنوان یادآوری درسهای قبلی فیزیک، آغاز می‌کنیم. در حل مسائل، برداشتن گامهای مناسب برحسب عادت از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در زیر چند روش مفید حل مسئله را عنوان می‌کنیم.

۱. طرحی کلی از مسئله، شامل نیرو، سرعت، و مانند آنها، تهیه کنید.

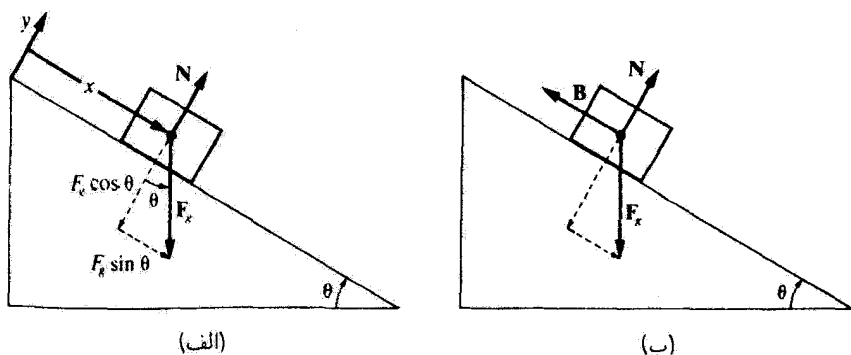
۲. کمیت‌های مفروض را بنویسید.

۳. معادلات مفید و آنچه را که باید تعیین شود، یادداشت کنید.

۴. معمولاً باید معادلات توصیف کننده مسئله را دستکاری کرد تا کمیت مورد نظر پیدا شود. معمولاً

به عملیات جبری چون دیفرانسیل‌گیری و انتگرالگیری نیاز پیدا می‌شود.

۵. سرانجام، برای یافتن کمیت مورد نظر، مقادیر معلوم را در معادلات قرار دهید.



شکل ۲.۲

ابتدا مسئله لغزش قطعه جسمی را که روی یک سطح شیبدار می لغزد بررسی می کنیم. فرض کنیم زاویه سطح شیبدار  $\theta$  و جرم این جسم  $g = 10^\circ$  باشد. نمایش نموداری مسئله در شکل ۲.۲ (الف) ترسیم شده است.

### مثال ۱.۲

اگر قطعه بدون اصطکاکی روی سطح شیبدار به پایین بلغزد با توجه به اینکه  $\theta = 30^\circ$ ، شتاب جسم چقدر است؟

حل: دو نیرو بر این جسم وارد می آید: نیروی گرانشی  $F_g$  و نیروی عمود بر سطح  $N$  که روی جسم به سمت بالا اعمال می شود. جسم ناگزیر بر روی سطح می ماند، و تنها راستایی که می تواند حرکت کند در جهت  $x$ ، یعنی به بالا و پایین سطح شیبدار، است. جهت مثبت  $x$  را به پایین سطح شیبدار می گیریم. نیروی کل  $F$  ثابت است، معادله (۷.۲) چنین می شود

$$F = F_g + N$$

و از آنجا که  $F$  نیروی برابند خالص وارد بر جسم است

$$F = m\ddot{r}$$

یا

$$F_g + N = m\ddot{r} \quad (۸.۲)$$

این بردار باید در دو راستا اعمال شود:  $x$  و  $y$  (عمود بر  $x$ ). مؤلفه نیرو در راستای  $y$  صفر است، زیرا در این راستا هیچگونه شتابی پذیرد نمی‌آید. نیروی  $F_g$  به‌طور برداری به دو مؤلفه‌اش،  $x$  و  $y$ ، تجزیه می‌شود [خط‌چینها در شکل ۲.۲ (الف)]. معادله (۸.۲) چنین می‌شود

راستای  $y$ 

$$-F_g \cos \theta + N = 0 \quad (9.2)$$

راستای  $x$ 

$$F_g \sin \theta = m\ddot{x} \quad (10.2)$$

به نتیجه مطلوب زیر می‌رسیم

$$\ddot{x} = \frac{F_g}{m} \sin \theta = \frac{mg \sin \theta}{m} = g \sin \theta \quad (11.2)$$

$$\ddot{x} = g \sin(30^\circ) = \frac{g}{2} = 4.9 \text{ m/s}^2$$

بنابراین شتاب این جسم ثابت است.

می‌توانیم سرعت جسم را پس از آنکه از حالت سکون مسافت  $x$  را به سوی پایین سطح شیبدار طی کرد، با ضرب کردن  $\ddot{x}$  در معادله (۱۱.۲) و انتگرالگیری از حاصلضرب، به دست آوریم

$$2\dot{x}\ddot{x} = 2\dot{x}g \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = 2g \sin \theta \frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^{v^2} d(\dot{x}^2) = 2g \sin \theta \int_0^x dx$$

که در آن در  $t = 0$ ،  $x = \dot{x} = 0$ ، و وقتی  $x = x$ ، سرعت  $\dot{x} = v$ .

$$v^2 = 2g \sin \theta x.$$

$$v = \sqrt{2g \sin \theta x}.$$

### مثال ۲.۲

اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و سطح شیبدار عبارت باشد از  $\mu_s = 0.4$ ، و اگر جسم در ابتدا ساکن باشد، تحت چه زاویه  $\theta$  شروع به لغزیدن می‌کند؟

حل: به یک نمودار کلی جدید نیاز داریم تا نیروی اضافی اصطکاک،  $f$ ، را نشان دهد [شکل ۲.۲ (ب)]. بیشینه مقدار تقریبی نیروی اصطکاک ایستایی عبارت است از

$$f_{\max} = \mu_s N \quad (۱۲.۲)$$

و معادله (۷.۲)، به صورت مؤلفه‌ای می‌شود

راستای  $y$

$$-F_g \cos \theta + N = 0 \quad (۱۳.۲)$$

راستای  $x$

$$-f + F_g \sin \theta = m\ddot{x} \quad (۱۴.۲)$$

نیروی اصطکاک  $f$  مورد نیاز که  $\ddot{x} = 0$  را تأمین کند یعنی، جسم را در حالت سکون نگه دارد. مقداری در حدود  $f < f_{\max}$  خواهد بود. اما، با زیاد شدن زاویه سطح شیبدار،  $\theta$ ، سرانجام نیروی اصطکاک ایستایی دیگر نمی‌تواند جسم را در حال سکون نگه دارد. در آن زاویه،  $\theta'$ ، مقدار  $f$  می‌شود

$$f(\theta = \theta') = f_{\max} = \mu_s N = \mu_s F_g \cos \theta$$

د

$$m\ddot{x} = F_g \sin \theta - f_{\max}$$

$$m\ddot{x} = F_g \sin \theta - \mu_s F_g \cos \theta$$

$$\ddot{x} = g(\sin \theta - \mu_s \cos \theta) \quad (۱۵.۲)$$

درست پیش از آغاز لغزیدن جسم، شتاب عبارت است از  $\ddot{x} = 0$ ، بنابراین

$$\sin \theta - \mu_s \cos \theta = 0$$

$$\tan \theta = \mu_s = 0.۴$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.۴) = ۲۲^\circ$$

### مثال ۳.۲

در مثال قبل، بعد از اینکه جسم شروع به لغزیدن می‌کند، ضریب اصطکاک جنبشی (لغزشی)  $\mu_k = 0.۳$  می‌شود. شتاب را به ازای زاویه  $\theta = 30^\circ$  بیابید.

حل: به همان ترتیب مثال ۲.۲، اصطکاک جنبشی (تقریباً) می‌شود

$$f_k = \mu_k N = \mu_k F_g \cos \theta \quad (۱۶.۲)$$

$$m\ddot{x} = F_g \sin \theta - f_k = mg(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \quad (۱۷.۲)$$

$$\ddot{x} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) = ۰.۲۴g \quad (۱۸.۲)$$

به طور کلی، نیروی اصطکاک ایستایی ( $f_{\max} = \mu_s N$ ) از نیروی اصطکاک جنبشی ( $f = \mu_k N$ ) بیشتر است. با یک آزمایش ساده می‌توان به این مطلب پی برد. اگر زاویه  $\theta$  را به کمتر از  $۱۶.۷^\circ$  برسانیم، در می‌یابیم که  $\ddot{x} < 0$ ، و جسم ملاً می‌ایستد. پس از ایستادن اگر زاویه سطح شیبدار را از  $۱۶.۷^\circ = \theta$  بیشتر کنیم، پی می‌بریم که جسم تا  $۲۲^\circ \geq \theta$  بار دیگر شروع به لغزیدن نمی‌کند (مثال ۲.۲). اصطکاک ایستایی لحظه آغاز مجدد حرکت را تعیین می‌کند. به علت اختلاف میان  $\mu_s$  و  $\mu_k$ ، با شروع حرکت جسم هیچگونه شتاب ناپیوسته‌ای به وجود نمی‌آید. در سرعت‌های کم، ضریب اصطکاک از  $\mu_s$  تا  $\mu_k$  نسبتاً به سرعت تغییر می‌کند.

موضوع اصطکاک هنوز هم یکی از حوزه‌های جالب و مهم تحقیقات به شمار می‌آید. این مبحث هنوز هم شگفتی‌آفرین است.<sup>۱</sup> مثلاً، گرچه قدرمطلق نیروی اصطکاکی را به صورت  $f = \mu N$  محاسبه می‌کنیم، تحقیقات انجام شده در اوایل سالهای ۱۹۴۰ نشان داد که نیروی اصطکاکی، نه با بار، بلکه با سطح تماس میکروسکوپی بین دو جسم (در برابر مساحت تماس ظاهری) نسبت مستقیم دارد. از  $\mu N$  به عنوان یک تقریب بهره می‌گیریم زیرا، با افزایش  $N$ ، عملاً سطح تماس نیز در تراز میکروسکوپی افزایش می‌یابد. به مدت صدها سال پیش از سالهای ۱۹۴۰، پذیرفته بودند که بار-نه مساحت-به‌طور مستقیم در اصطکاک دخیل است. همچنین عقیده داریم که نیروی اصطکاک ایستایی از نیروی اصطکاک جنبشی بزرگتر است زیرا مدت پیوند اتم‌های بین دو شیء چندان طولانی نیست که به حرکت جنبشی منجر شود. ■

باید تأکید کنیم که نیروی  $F$  در معادله (۷.۲) ضرورتاً ثابت نیست، و در واقع می‌تواند شامل چندین جزء باشد (به طوری که در مثالهای قبل دیدیم). مثلاً اگر ذره‌ای در یک میدان گرانشی ثابت بیفتد، نیروی گرانشی عبارت خواهد بود از  $F_g = mg$ ، که  $g$  شتاب گرانی است. بعلاوه، اگر

1. F. Palmer, *Am. J. Phys.* **17**, 181, 327, 336(1949).



نیروی ترمزی  $F_r$  که تابعی از سرعت لحظه‌ای است، وجود داشته باشد، در این صورت نیروی کل عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_r \\ &= mg + \mathbf{F}_r(v) \end{aligned} \quad (۱۹.۲)$$

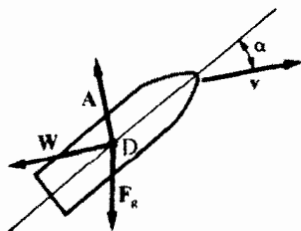
خیلی وقتها کافی است  $F_r(v)$  را صرفاً با توانی از سرعت متناسب بگیریم. به طور کلی، نیروهای ترمزی واقعی پیچیده‌ترند، اما تقریب توانی در بسیاری از موارد که سرعت خیلی زیاد تغییر نمی‌کند، مفید است. (حتی بجاست بگوییم، اگر  $F_r \propto v^n$ ، در این صورت معمولاً می‌توان از معادله حرکت مستقیماً انتگرال گرفت، در حالی که، اگر وابستگی به سرعت واقعی مورد استفاده قرار گیرد، احتمالاً انتگرال‌گیری عددی ضرورت خواهد یافت!) با این نوع تقریب، می‌توان نوشت

$$\mathbf{F} = mg - mkv^n \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (۲۰.۲)$$

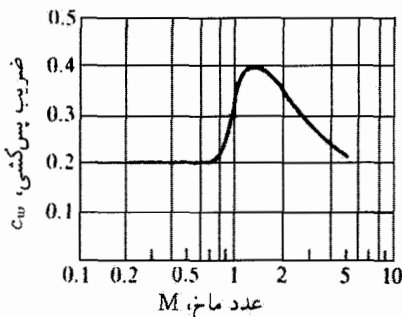
که  $k$  ثابت مثبتی است که شدت نیروی ترمزی را مشخص می‌کند و  $v/v$  برداری یکه در راستای  $v$  است. از دیدگاه تجربی، بی می‌بریم که، برای شیئی نسبتاً کوچککی که در هوا حرکت می‌کند، به‌ازای سرعت‌های کمتر از  $2400 \text{ cm/s}$  ( $80 \text{ ft/s}$ ) داریم:  $n \cong 1$ . برای سرعت‌های بیشتر، اما کمتر از سرعت صوت (تقریباً  $33000 \text{ cm/s}$  یا  $1100 \text{ ft/s}$ )، نیروی ترمزی تقریباً با مجذور سرعت متناسب است.<sup>۱</sup>

اثر مقاومت هوا در حرکت‌های پرتابی مربوط به صنایع نظامی، مثلاً در محاسبه مسیر گلوله توپ، بسیار مهم است. بنابراین جدول‌های جامعی از سرعت برحسب تابعی از زمان پرواز برای پرتابه‌های گوناگون، تنظیم شده است. برای یک پرتابه واقعی در حال پرواز چندین نیرو درکارند. نیروی مقاومت هوا را پس‌کشی،  $W$ ، می‌گویند که مطابق شکل ۳.۲ (الف)، با سرعت پرتابه مخالفت می‌کند. سرعت  $v$  معمولاً در امتداد محور تقارن گلوله واقع نیست. مؤلفه نیرویی که عمود بر پس‌کشی وارد می‌آید نیروی بالابر،  $A$ ، خوانده می‌شود. نیروهای گوناگون دیگر ناشی از اسپین و نوسان پرتابه هم

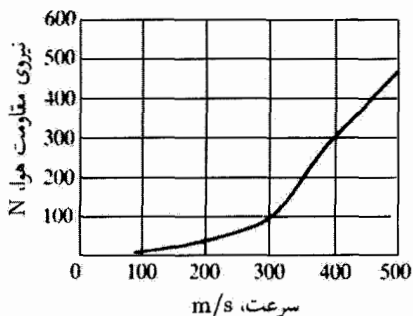
۱. نیوتون در پرینکیپیا (۱۶۸۷) حرکت ذره را در محیطی بررسی کرد که در آنجا نیروی مقاوم با سرعت یا مجذور سرعت (یا ترکیبی خطی از این دو کمیت) متناسب بود. یوهان برنولی در ۱۷۱۱ این بررسی را برای هر توانی از سرعت تعمیم داد. اصطلاح «قانون مقاومت استوکس» گاهی در مورد نیروی مقاوم متناسب با سرعت به کار می‌آید؛ قانون مقاومت نیوتون عبارت است از نیرویی ترمزی متناسب با مجذور سرعت.



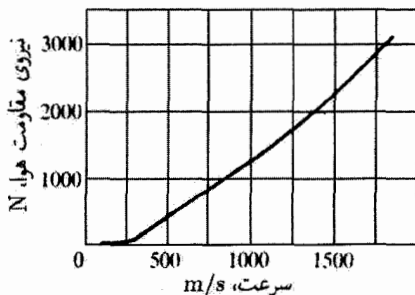
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۳.۲ الف) نیروهای بالابر وارد بر پرتابه.  $W$  نیروی پس‌کشی (نیروی مقاومت هوا) که با سرعت پرتابه،  $v$  مخالف است. توجه کنید که  $v$  ممکن است نسبت به محور تقارن پرتابه زاویه  $\alpha$  داشته باشد. مؤلفهٔ نیروی وارد بر امتداد عمود بر نیروی پس‌کشی را نیروی بالابر  $A$  می‌گویند. نقطهٔ  $D$  مرکز فشار است. سرانجام، نیروی گرانشی  $F_g$  به سوی پایین اثر می‌کند. اگر مرکز فشار در مرکز جرم پرتابه نباشد، گشتاور نیرویی هم حول مرکز جرم به وجود می‌آید. ب) ضریب پس‌کشی  $c_W$ ، از قانون مقاومت راین متال (Rh82)، برحسب عدد ماخ ترسیم شده است. به تغییرات زیاد در نزدیکی سرعت صوت، هنگامی که  $M = 1$ ، توجه کنید. ج) نیروی مقاومت هوا،  $W$ ، (پس‌کشی) برحسب تابعی از سرعت پرتابه‌ای به قطر  $10\text{ cm}$  نشان داده شده است. به نقطهٔ عطف منحنی در نزدیکی سرعت صوت توجه کنید. د) مانند (ج) برای سرعت‌های بالاتر.

وجود دارند، و محاسبهٔ مسیر بالیستیکی پرتابه بسیار دشوار است. فرمول پراندل برای مقاومت هوا عبارت است از

$$W = c_W \frac{\rho}{2} v^2 \frac{\pi}{4} d^2 \quad (21.2)$$

که در آن  $c_w$  ضریب بدون بعد پس‌کشی،  $\rho$  چگالی هوا،  $v$  سرعت، و  $d$  قطر پرتابه است. در شکل ۳.۲ (ب) مقادیری نوعی برای  $c_w$  آورده‌ایم، و در شکل‌های ۳.۲ (ج) و ۳.۲ (د) مقاومت هوای محاسبه شده  $W$ ، را با استفاده از معادله (۲۱.۲) برای پرتابه‌ای به قطر  $1\text{ cm}$  و با بهره‌گیری از مقادیر نشان داده شده  $c_w$ ، نمایش داده‌ایم. مقاومت هوا در نزدیکی سرعت صوت (عدد ماخ  $M$  مساوی است با نسبت سرعت متحرک به سرعت صوت) به شدت افزایش می‌یابد. در سرعت‌های کمتر از حدود  $400\text{ m/s}$  روشن است که معادله‌ای دست کم از درجه دوم لازم است تا نیروی مقاوم را توصیف کند. در سرعت‌های بالاتر، نیروی ترمزی تقریباً به‌طور خطی با سرعت تغییر می‌کند. در زیر چند مثال از حرکت ذره‌ای را ارائه می‌دهیم که نیروهای گوناگونی بر آن وارد می‌آیند.

### مثال ۴.۲

به عنوان ساده‌ترین مثال مربوط به حرکت ذره‌ای تحت تأثیر نیروهای مقاوم، تغییر مکان و سرعت حرکت افقی آن را در محیطی بیابید که در آن نیروی ترمزی با سرعت متناسب است.

حل: طرح کلی این مسئله در شکل ۴.۲ آمده است. به اتکای معادله نیوتونی  $F = ma$ ، معادله حرکت را به شرح زیر می‌نویسیم.

در راستای  $x$

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -kmv \quad (22.2)$$

که  $kmv$  مقدار نیروی مقاوم ( $k$  ثابت) است. در این صورت

$$\int \frac{dv}{v} = -k \int dt$$

$$\ln v = -kt + C_1 \quad (23.2)$$

ثابت انتگرال‌گیری در معادله (۲۳.۲) را می‌توان در صورتی محاسبه کرد که شرط اولیه را



و  $C_1 = \ln v_0$ . پس بگیریم.  $v(t=0) \equiv v_0$

$$v = v_0 e^{-kt} \quad (24.2)$$

برای یافتن تغییر مکان  $x$ ، به صورت تابعی از زمان، می‌توانیم از معادله بالا انتگرال بگیریم

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$$

$$x = v_0 \int e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C_2 \quad (25.2 \text{ الف})$$

شرط اولیه  $x(t=0) \equiv 0$  دلالت می‌کند بر  $C_2 = v_0/k$ . بنابراین

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (25.2 \text{ ب})$$

این نتیجه نشان می‌دهد که به ازای  $t \rightarrow \infty$ ،  $x$  به طور مجانبی به مقدار  $v_0/k$  نزدیک می‌شود. همچنین می‌توانیم سرعت را به صورت تابع تغییر مکان به دست آوریم. برای این کار می‌نویسیم

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{1}{v}$$

بنابراین

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} = -kv$$

یا

$$\frac{dv}{dx} = -k$$

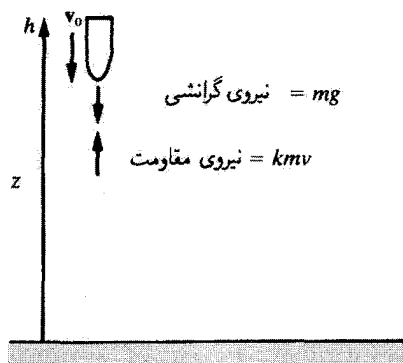
که، با بهره‌گیری از همان شرایط اولیه، می‌یابیم

$$v = v_0 - kx \quad (26.2)$$

بنابراین، سرعت به تناسب تغییر مکان به طور خطی کاهش می‌یابد.

## مثال ۵.۲

تغییر مکان و سرعت ذره‌ای را که به طور قائم در محیطی حرکت می‌کند و نیروی ترمزی در آن با سرعت متناسب است، پیدا کنید.



شکل ۵.۲

حل: فرض کنید ذره با سرعت اولیه  $v_0$  در یک میدان گرانشی ثابت از ارتفاع  $h$  به پایین سقوط می‌کند (شکل ۵.۲). معادله حرکت عبارت است از راستای  $z$

$$F = m \frac{dv}{dt} = -mg - kmv \quad (۲۷.۲)$$

که در آن  $-kmv$  نمایانگر نیروی بالاسوی مثبت است زیرا  $z$  و  $v = \dot{z}$  را به سوی بالا مثبت می‌گیریم، و حرکت پایین سوسته‌یعنی،  $v < 0$ ، به طوری که  $-kmv > 0$ . از معادله (۲۷.۲) داریم

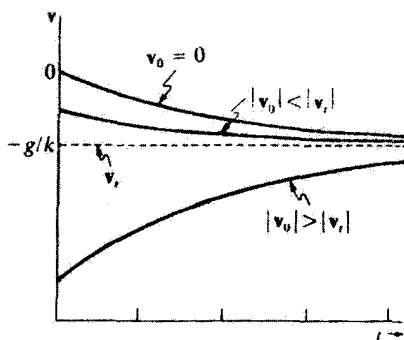
$$\frac{dv}{kv + g} = -dt \quad (۲۸.۲)$$

با انتگرالگیری از معادله (۲۸.۲) و قرار دادن  $v(t=0) \equiv v_0$ ، با توجه به اینکه  $v_0 < 0$ ، داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \ln(kv + g) &= -t + c \\ kv + g &= e^{-kt+kc} \\ v &= \frac{dz}{dt} = -\frac{g}{k} + \frac{kv_0 + g}{k} e^{-kt} \end{aligned} \quad (۲۹.۲)$$

یک بار دیگر از معادله بالا انتگرال می‌گیریم و با قرار دادن  $z(t=0) \equiv h$ ، ثابت انتگرالگیری را محاسبه می‌کنیم، خواهیم داشت

$$z = h - \frac{gt}{k} + \frac{kv_0 + g}{k^2} (1 - e^{-kt}) \quad (۳۰.۲)$$



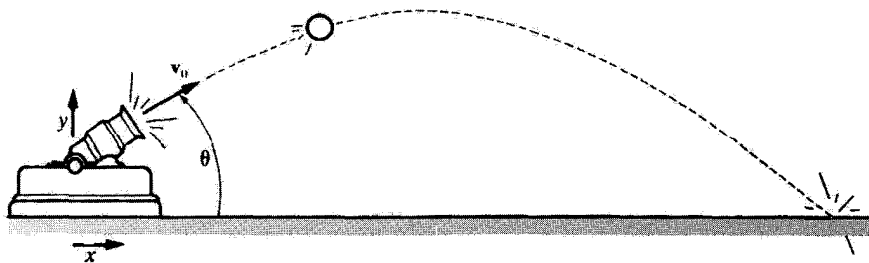
شکل ۶.۲

معادله (۲۹.۲) نشان می‌دهد که وقتی زمان خیلی طولانی شود، سرعت به مقدار حدی  $-g/k$  می‌رسد؛ این سرعت را سرعت حدی،  $v_t$  می‌گویند. معادله (۲۷.۲) نیز همین نتیجه را می‌دهد، زیرا نیرو حذف خواهد شد و بدینسان، وقتی  $v = -g/k$  دیگر هیچگونه شتابی وجود نخواهد داشت. اگر مقدار سرعت اولیه از سرعت نهایی بیشتر شود، در این صورت حرکت جسم فوراً روبه آهستگی می‌گذارد و  $v$  از جهت مخالف به سرعت نهایی می‌رسد. این نتایج در شکل ۶.۲ نمایش یافته‌اند. ■

### مثال ۶.۲

حال به حرکت پرتابه در دو بعد می‌پردازیم، نخست بدون در نظر گرفتن مقاومت هوا. فرض کنیم سرعت در دهانه توپ،  $v_0$  و زاویه لوله آن با افق  $\theta$  باشد (شکل ۷.۲). مسافتی را که پرتابه پیموده، سرعت آن، و برد آن را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ ، مؤلفه‌های نیرو به این قرار خواهند بود



شکل ۷.۲

در راستای  $x$ 

$$0 = m\ddot{x} \quad (۳۱.۲ \text{ الف})$$

در راستای  $y$ 

$$-mg = m\ddot{y} \quad (۳۱.۲ \text{ ب})$$

از ارتفاع خود توپ چشم می‌پوشیم، و فرض می‌کنیم در  $t = 0$  داشته باشیم  $x = y = 0$ . در این صورت

$$\ddot{x} = 0$$

$$\dot{x} = v \cdot \cos \theta$$

$$x = v \cdot t \cos \theta \quad (۳۲.۲)$$

و

$$\ddot{y} = -g$$

$$\dot{y} = -gt + v \cdot \sin \theta$$

$$y = \frac{-gt^2}{2} + v \cdot t \sin \theta \quad (۳۳.۲)$$

کل مسافت طی شده و سرعت به صورت توابعی از زمان عبارت‌اند از

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = (v^2 + g^2 t^2 - 2v \cdot gt \sin \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (۳۴.۲)$$

و

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = (v^2 t^2 + \frac{g^2 t^4}{4} - v \cdot gt^2 \sin \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (۳۵.۲)$$

می‌توان با تعیین مقدار  $x$ ، در هنگامی که پرتابه به زمین بر می‌گردد، برد را بیابیم، یعنی وقتی  $y = 0$

$$y = t \left( \frac{-gt}{2} + v \cdot \sin \theta \right) = 0 \quad (۳۶.۲)$$

یکی از مقادیر  $y = 0$  به ازای  $t = 0$  بیش می‌آید، و مقدار دیگر آن به ازای  $t = T$ .

$$-\frac{gT}{2} + v \cdot \sin \theta = 0$$

$$T = \frac{2v \cdot \sin \theta}{g} \quad (۳۷.۲)$$

برد از رابطه زیر به دست می آید

$$x(t = T) = \text{برد} = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta \quad (38.2)$$

$$R = \text{برد} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \quad (39.2)$$

توجه کنید که به ازای  $\theta = 45^\circ$  برد بیشینه است.

حال چند مقدار مشخص در این فرمولها قرار می دهیم. آلمانها در جنگ جهانی اول برای بمباران پاریس از توپ دوربردی به نام بیگ برتا<sup>۱</sup> بهره بردند. سرعت دهانه آن  $1450 \text{ m/s}$  بود. برد پیش بینی شده آن، بیشینه ارتفاع پرتابه، و زمان پرواز پرتابه را به ازای  $\theta = 55^\circ$  پیدا کنید. داریم:  $v_0 = 1450 \text{ m/s}$  و  $\theta = 55^\circ$ . بنابراین برد [با توجه به معادله (39.2)] می شود

$$R = \frac{(1450 \text{ m/s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2} [\sin(110^\circ)] = 20.2 \text{ km}$$

برد عملی بیگ برتا  $12 \text{ km}$  بود. اختلاف بین مقدار عملی و مقدار محاسبه شده ناشی از تأثیر واقعی مقاومت هواست.

برای یافتن بیشینه ارتفاع پیش بینی شده، باید  $y$  را برای زمان  $T/2$  محاسبه کنیم، که  $T$  زمان کل پرواز پرتابه است

$$T = \frac{(2)(1450 \text{ m/s})(\sin 55^\circ)}{9.8 \text{ m/s}^2} = 242 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} y_{\max} \left( t = \frac{T}{2} \right) &= \frac{-gT^2}{8} + \frac{v_0 T}{2} \sin \theta \\ &= \frac{-(9.8 \text{ m/s}^2)(242 \text{ s})^2}{8} + \frac{(1450 \text{ m/s})(242 \text{ s})(\sin 55^\circ)}{2} \\ &= 72 \text{ km} \end{aligned}$$

## مثال ۷.۲

در اینجا اثر مقاومت هوا بر حرکت پرتابه، در مثال قبل، را اضافه می کنیم. کاهش برد را با این فرض که نیروی ناشی از مقاومت هوا با سرعت پرتابه نسبت مستقیم دارد، محاسبه کنید.



حل: شرایط اولیه همان شرایط اولیه مثال پیش‌اند.

$$\left. \begin{aligned} x(t=0) &= 0 = y(t=0) \\ \dot{x}(t=0) &= v \cos \theta \equiv U \\ \dot{y}(t=0) &= v \sin \theta \equiv V \end{aligned} \right\} \quad (40.2)$$

اما، معادلات حرکت، یعنی معادلات (۳۱.۲)، چنین می‌شوند

$$m\ddot{x} = -km\dot{x} \quad (41.2)$$

$$m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg \quad (42.2)$$

معادله (۴۱.۲) دقیقاً همان است که در مثال ۴.۲ به کار بردیم. بنابراین جواب آن عبارت است از

$$x = \frac{U}{k}(1 - e^{-kt}) \quad (43.2)$$

به همین ترتیب، معادله (۴۲.۲) همان معادله حرکت در مثال ۵.۲ است. می‌توانیم با گرفتن  $h = 0$  از جوابی که در آن مثال یافتیم، بهره‌گیریم. (این نکته که ذره را پرتاب شده به پایین پنداشتیم، در مثال ۵.۲ پیامد خاصی ندارد. این موضوع خودبه‌خود در علامت سرعت اولیه مستتر است.) بنابراین

$$y = -\frac{gt}{k} + \frac{kV + g}{k^2}(1 - e^{-kt}) \quad (44.2)$$

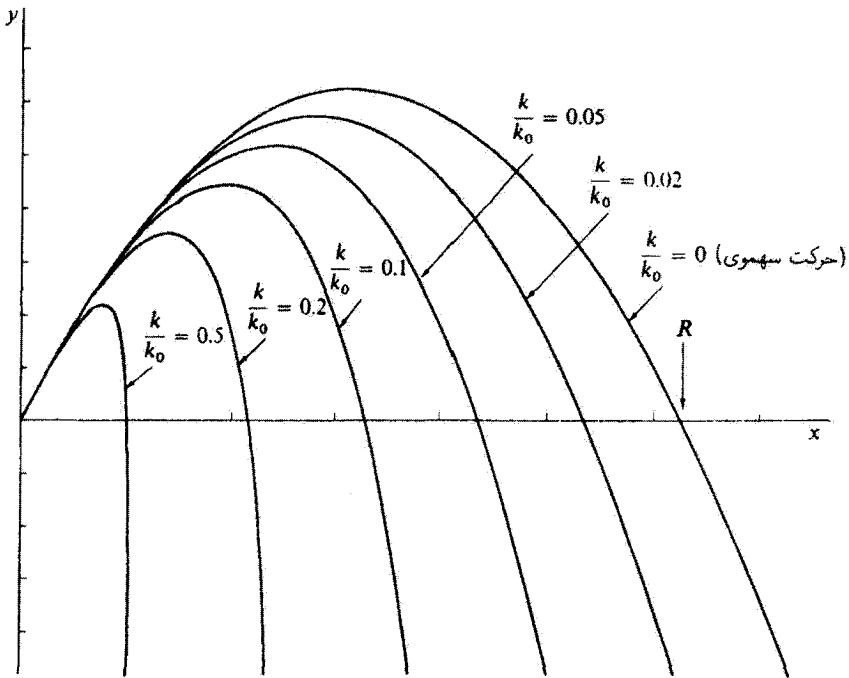
در شکل ۸.۲ مسیر حرکت را به ازای چندین مقدار متفاوت ثابت نیروی ترمزی  $k$  (برحسب یکایی استاندارد، چون  $k$  نشان داده‌ایم.

تغییر برد ناشی از مقاومت هوا عبارت است از  $\Delta R \equiv R - R'$ ، که با در نظر گرفتن مقاومت هوا  $R'$  برد گلوله است. برد  $R'$  را می‌توان مانند قبل از طریق محاسبه زمان مورد نیاز  $T$ ، برای پیمودن کل مسیر و سپس نشانیدن این مقدار در معادله (۴۳.۲) مربوط به  $x$ ، به دست آورد. مانند قبل با یافتن  $t = T$  به ازای  $y = 0$ ، زمان  $T$  یافته می‌شود. از معادله (۴۴.۲) خواهیم داشت

$$T = \frac{kV + g}{gk}(1 - e^{-kT}) \quad (45.2)$$

این یک معادله متعالی است، و بنابراین نمی‌توانیم برای  $T$  یک عبارت تحلیلی به دست آوریم؛ باید به تقریب توسل جویم. ابتدا عبارت نمایی را بسط می‌دهیم [معادله (۳۴.د) را در پیوست د بینید]

$$T = \frac{kV + g}{gk} \left( kT - \frac{1}{2}k^2T^2 + \frac{1}{6}k^3T^3 - \dots \right) \quad (46.2)$$



شکل ۸.۲ مسیرهای محاسبه شده مربوط به حرکت ذره‌ای با وجود مقاومت هوا ( $F_{res} = -kmv$ ) به‌ازای مقادیر مختلف  $k$  (برحسب یکای  $k_0$ ). مقادیر  $y$  [معادله (۴۴.۲)] برحسب  $x$  ترسیم شده‌اند [معادله (۴۳.۲)].

با تقسیم کردن طرفین بر  $T$ ، می‌توان پس از بازاریابی، معادله بالا را چنین نوشت

$$T = \frac{2V/g}{(1 + kV/g)} + \frac{1}{3}kT^2 \quad (47.2)$$

در حد  $k \rightarrow 0$  (بدون هیچگونه مقاومت هوا)، معادله (۴۷.۲) همان نتایج مثال قبل را به‌دست می‌دهد

$$T(k = 0) = T_0 = \frac{2V}{g} = \frac{2v \cdot \sin \theta}{g}$$

بنابراین، اگر  $k$  کوچک باشد (اما نه صفر)، در این صورت زمان پرواز تقریباً برابر  $T_0$  خواهد بود. پس اگر از این مقدار تقریبی برای محاسبه جمله درجه دوم در معادله (۴۷.۲) استفاده کنیم، داریم

$$T \cong \frac{2V}{g} \left(1 - \frac{kV}{g}\right) + \frac{1}{3}k \left(\frac{2V}{g}\right)^2 \quad (48.2)$$

بنابراین

$$T \cong \frac{2V}{g} \left( 1 - \frac{kV}{3g} \right) \quad (49.2)$$

که همان عبارت تقریبی مطلوب برای محاسبه زمان پرواز است. حال معادله مربوط به  $x$  [معادله (43.2)] را به شکل بسط یافته می‌نویسیم

$$x = \frac{U}{k} \left( kt - \frac{1}{4} k^2 t^2 + \frac{1}{6} k^3 t^3 - \dots \right) \quad (50.2)$$

از آنجا که  $x(t = T) \equiv R'$  مقدار تقریبی برد عبارت است از

$$R' \cong U \left( T - \frac{1}{4} k T^2 \right) \quad (51.2)$$

اینک می‌توانیم این عبارت را با استفاده از مقدار  $T$  حاصل از معادله (49.2) محاسبه کنیم. اگر فقط جمله‌هایی را که برحسب  $k$  خطی‌اند نگه داریم، خواهیم داشت

$$R' \cong \frac{2UV}{g} \left( 1 - \frac{4kV}{3g} \right) \quad (52.2)$$

حالا می‌توان کمیت  $2UV/g$  را [با بهره‌گیری از معادله (40.2)] اینطور نوشت

$$\frac{2UV}{g} = \frac{2v^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta = R \quad (53.2)$$

که عبارت است از برد  $R$  هنگامی که از مقاومت هوا چشمپوشی شود. بنابراین

$$R' \cong R \left( 1 - \frac{4kV}{3g} \right) \quad (54.2)$$

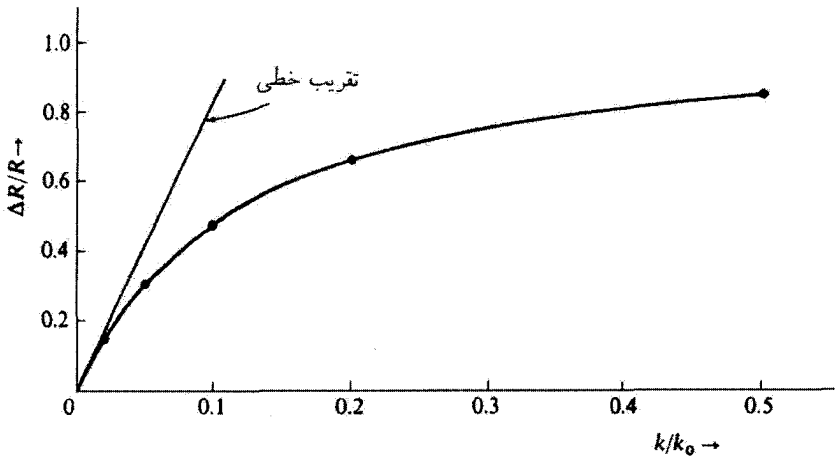
از این رو تغییرات برد، که تا مرتبه اول برحسب  $k$  دقت دارد، عبارت است از

$$\Delta R = R - R' \cong \frac{4kVR}{3g}$$

یا

$$\Delta R \cong \frac{4kv^2}{3g^2} \sin \theta \sin 2\theta \quad (55.2)$$

تغییرات برد  $\Delta R$  به صورت تابعی از  $k/k_0$  در شکل ۹.۲ نموده شده، که بر پایه نتایج نشان



شکل ۹.۲

داده شده در شکل ۸.۲ استوار است. (نقطه‌های واقع بر منحنی به مسیره‌های نمایش یافته در شکل ۸.۲ اشاره دارند.) تقریب خطی برای  $\Delta R$  به ازای  $k/k_0 \lesssim 0.2$  خیلی غیر دقیق می‌شود. ■

مثال قبل حاکی از آن است که دنیای واقعی چه حد می‌تواند پیچیده باشد. در این مثال، ما باز هم ناگزیریم فرضیهایی غیرفیزیکی در نظر بگیریم—مثلاً، این فرض که نیروی مقاوم همواره با سرعت به طور خطی متناسب است. در شکل ۳.۲ می‌بینیم که این فرض درست نیست. معمولاً، به جای پذیرفتن تعداد زیادی فرض؛ کار ساده‌تر آن است که با بهره‌گیری از کامپیوتر محاسباتی عددی انجام دهیم.

### مثال ۸.۲

برای محاسبه مسیر یک پرتابه واقعی از داده‌های نمایش یافته در شکل ۳.۲ بهره‌گیری کنید. فرض کنید سرعت دهانه‌ای  $600 \text{ m/s}$ ، زاویه لوله توپ نسبت به افق  $45^\circ$ ، و جرم پرتابه  $30 \text{ kg}$  باشد. منحنی نمایش تغییرات ارتفاع  $y$  برحسب مسافت افقی  $x$  و نیز  $y$ ،  $x$ ، و  $\dot{y}$  را برحسب زمان، با و بدون مقاومت هوا، ترسیم کنید. فقط مقاومت هوا و گرانی را در نظر بگیرید، و از سایر نیروهای ممکن، مانند نیروی بالابر، چشمپوشی کنید.

حل: ابتدا با خواندن اطلاعات داده شده در شکل ۳.۲ جدولی را از نیروی مقاوم برحسب سرعت تشکیل می‌دهیم. نیرو را در شکل ۳.۲ (ج) هر  $50 \text{ m/s}$  و در شکل ۳.۲ (د) هر  $100 \text{ m/s}$  می‌خوانیم. آنگاه می‌توانیم از درون‌یابی با خط‌راست میان مقادیر درج شده در جدول بهره‌گیری کنیم.

معادلات حرکت چنین می‌شوند

$$\ddot{x} = -\frac{F_x}{m} \quad (56.2)$$

$$\ddot{y} = -\frac{F_y}{m} - g \quad (57.2)$$

که  $F_x$  و  $F_y$  نیروهای مقاوم‌اند. فرض می‌کنیم  $g$  ثابت باشد.  $F_x$  همواره عددی مثبت است. اما وقتی پرتابه به بالا می‌رود  $F_y > 0$ ، و هنگامی که پرتابه به پایین برمی‌گردد،  $F_y < 0$ . فرض می‌کنیم  $\theta$  زاویه مسیر پرتابه در هر لحظه نسبت به افق باشد.

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (58.2)$$

$$\tan \theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad (59.2)$$

$$F_x = F \cos \theta \quad (60.2)$$

$$F_y = F \sin \theta \quad (61.2)$$

می‌توان  $F_x$  و  $F_y$  را با دانستن  $\dot{x}$  و  $\dot{y}$  در هر لحظه محاسبه کرد. در یک فاصله زمانی کوتاه،  $\dot{x}$  و  $\dot{y}$  بعدی را می‌توان محاسبه کرد. از دستگاه مختصات نمایش یافته در شکل ۷.۲ بهره می‌گیریم

$$\dot{x} = \int \ddot{x} dt + v \cos \theta \quad (62.2)$$

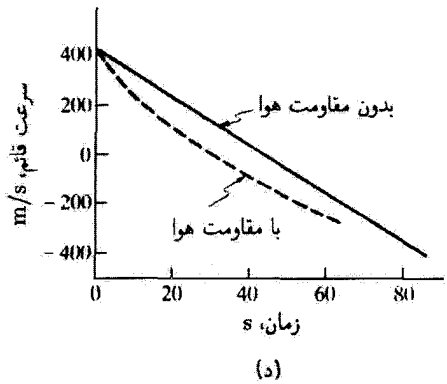
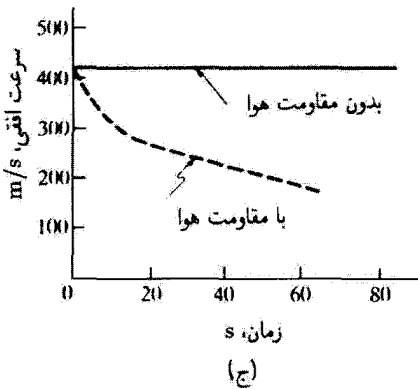
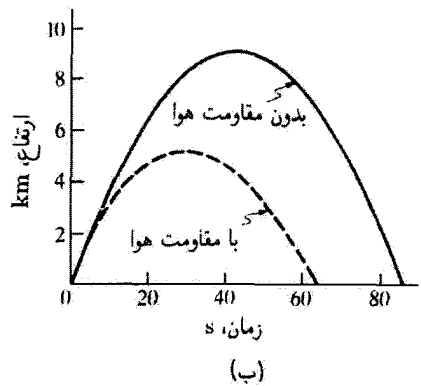
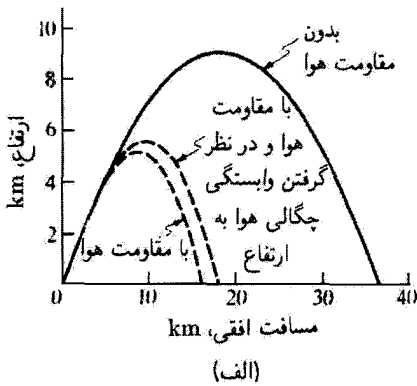
$$\dot{y} = \int \ddot{y} dt + v \sin \theta \quad (63.2)$$

$$x = \int \dot{x} dt \quad (64.2)$$

$$y = \int \dot{y} dt \quad (65.2)$$

می‌توانیم یک برنامه کامپیوتری کوتاه بنویسیم که حاوی مقادیر جدول ما برای نیروهای مقاوم باشد و  $\dot{x}$ ،  $\dot{y}$ ،  $x$ ، و  $y$  را به صورت تابعی از زمان محاسبه کند. باید از طریق مجموع‌باییها در فواصل زمانی کوتاه انتگرالها را محاسبه کنیم، زیرا نیروها وابسته به زمان‌اند. شکل ۱۰.۲ این نتایج را نشان می‌دهد.

به تفاوت زیادی توجه کنید که مقاومت هوا به وجود می‌آورد. در شکل ۱۰.۲ (الف) فاصله‌ای افقی (بردی) که پرتابه می‌پیماید در حدود ۱۶km است در حالی که همین فاصله بدون مقاومت هوا تقریباً ۳۷km است. ما در محاسبات خود از این واقعیت چشم‌پوشیده‌ایم که چگالی هوا به

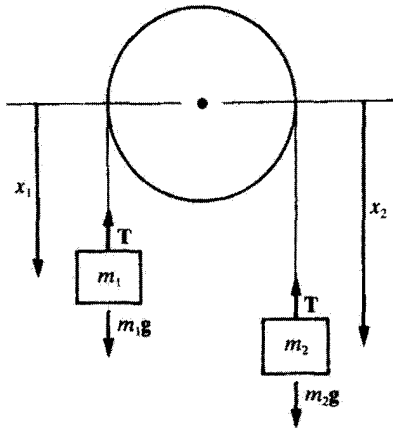


شکل ۱۰.۲ نتیجه مثال ۸.۲. خطهای پرقتی به دست می‌آیند که مقاومت هوا وجود نداشته باشد، در حالی که خط چینها متضمن نتایجی‌اند که نیروی مقاومت هوا را به حساب آوریم. در (الف) اثر وابستگی چگالی هوا را نیز به حساب آوردیم که هر چه پرتابه بالاتر رود، چگالی کمتر می‌شود

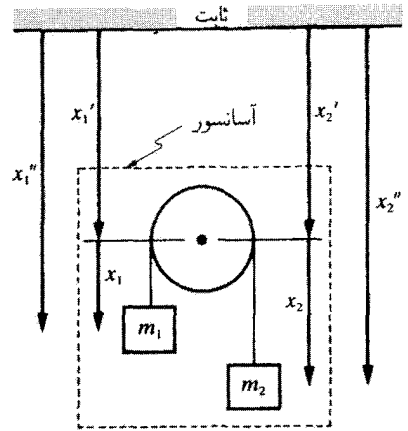
ارتفاع نیز وابسته است. اگر کاهش چگالی هوا بر حسب ارتفاع را به حساب آوریم، منحنی سوم با برد ۱۸ km، نمایش یافته در شکل ۱۰.۲ (الف) را به دست می‌آوریم. اگر نیروی بالا بر راهم حساب کنیم، برد باز هم بیشتر می‌شود. توجه کنید که تغییر سرعت در شکلهای ۱۰.۲ (ج) و ۱۰.۲ (د) تصویرگر نیروی مقاومت هوا در شکل ۳.۲ هستند. سرعتها تا وقتی که سرعت کل به سرعت صوت برسد به تندی کاهش می‌یابند و آنگاه آهنگ تغییر سرعتها تا حدودی یکنواخت می‌شود. ■

### مثال ۹.۲

ماشین آتوود از یک قرقره صاف با دو جرم که از دو سر نخ سبک آویخته‌اند، تشکیل می‌شود



(الف)



(ب)

شکل ۱۱.۲

(شکل ۱۱.۲). شتاب جرمها و کشش نخ را پیدا کنید: (الف) وقتی قرقره در حالت سکون است، و (ب) وقتی قرقره در یک آسانسور با شتاب ثابت  $\alpha$  پایین می‌آید.

حل: از جرم نخ چشم می‌پوشیم و فرض می‌کنیم که قرقره صاف است یعنی، هیچگونه اصطکاکی بین نخ و قرقره وجود ندارد. کشش  $T$  باید در تمام طول نخ یکسان باشد، معادلات حرکت، برای هر یک از جرمها، در حالت (الف) به این صورت خواهند شد

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T \quad (۶۶.۲)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - T \quad (۶۷.۲)$$

یک بار دیگر به مزیت مفهوم نیرو توجه کنید: فقط کافی است که نیروهای وارد بر هر جرم را تشخیص دهیم. کشش  $T$  در هر دو معادله یکی است. اگر نخ انبساط‌ناپذیر باشد، در این صورت  $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$  و می‌توان معادلات (۶۶.۲) و (۶۷.۲) را ترکیب کرد

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 g - (m_2 g - m_2 \ddot{x}_2) \\ &= m_1 g - (m_2 g + m_1 \ddot{x}_1) \end{aligned}$$

با بازاریابی

$$\ddot{x}_1 = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = -\ddot{x}_2 \quad (۶۸.۲)$$

اگر  $m_1 > m_2$  پس  $\ddot{x}_1 > 0$  و  $\ddot{x}_2 < 0$ . کشش نخ را می‌توان از معادلات (۶۶.۲) و (۶۸.۲)

به دست آورد

$$T = m_1 g - m_1 \ddot{x}_1$$

$$T = m_1 g - m_1 g \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \quad (۶۹.۲)$$

در حالت (ب)، که قرقره در داخل یک آسانسور قرار دارد، دستگاه مختصاتی که مبدأ آن بر مرکز قرقره منطبق باشد، دیگر دستگاهی لخت نیست. ما به دستگاه لختی نیاز داریم که مبدأ آن روی محور آسانسور [شکل ۱۱.۲ (ب)] واقع باشد. معادلات حرکت در دستگاه لخت  $x''_1 = x'_1 + x_1$ ،  $x''_2 = x'_2 + x_2$  عبارت‌اند از

$$m_1 \ddot{x}''_1 = m_1 (\ddot{x}'_1 + \ddot{x}_1) = m_1 g - T$$

$$m_2 \ddot{x}''_2 = m_2 (\ddot{x}'_2 + \ddot{x}_2) = m_2 g - T$$

بنابراین

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 g - T - m_1 \ddot{x}'_1 = m_1 (g - \alpha) - T \\ m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g - T - m_2 \ddot{x}'_2 = m_2 (g - \alpha) - T \end{aligned} \right\} \quad (۷۰.۲)$$

که  $\ddot{x}'_1 = \ddot{x}'_2 = \alpha$  داریم  $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$ ، بنابراین، مانند قبل، این دستگاه را برای  $\ddot{x}_1$  حل می‌کنیم

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = (g - \alpha) \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad (۷۱.۲)$$

و

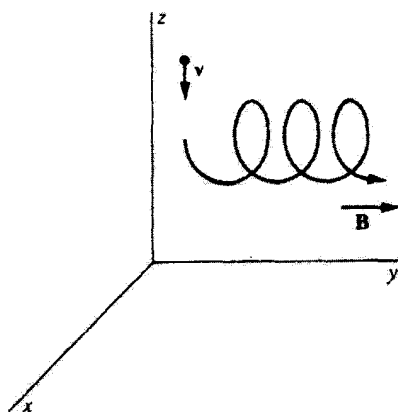
$$T = \frac{2m_1 m_2 (g - \alpha)}{m_1 + m_2} \quad (۷۲.۲)$$

توجه داشته باشید که نتایج مربوط به شتاب و کشش درست طوری‌اند که گویی از شتاب گرانی به اندازه مقدار شتاب آسانسور،  $\alpha$ ، کاسته می‌شود. تفاوت قضیه در موردی که آسانسور بالا می‌رود، آشکار است.

## مثال ۱۰.۲

در آخرین مثالمان در این مرور طولانی معادلات حرکت ذره، حرکت ذره در یک میدان الکترومغناطیسی را بررسی می‌کنیم. ذره باردار را در نظر می‌گیریم که وارد ناحیه‌ای از میدان مغناطیسی یکتواخت





شکل ۱۲.۲

$\mathbf{B}$ —مثلاً، میدان زمین—می‌شود (شکل ۱۲.۲). حرکت حاصل را تعیین کنید.

حل: دستگاه مختصات قائمی را اختیار کنید که محور  $y$  آن با میدان مغناطیسی موازی است. اگر  $q$  بار ذره،  $v$  سرعت آن،  $\mathbf{a}$  شتابش، و  $\mathbf{B}$  شدت میدان مغناطیسی زمین باشد، در این صورت

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B\mathbf{j}$$

نیروی مغناطیسی عبارت است از  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = m\mathbf{a}$ ، بنابراین

$$m(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) = q(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) \times B\mathbf{j} = qB(\dot{x}\mathbf{k} - \dot{z}\mathbf{i})$$

با برابر نهادن مؤلفه‌های برداری مشابه، خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -qB\dot{z} \\ m\ddot{y} &= 0 \\ m\ddot{z} &= qB\dot{x} \end{aligned} \right\} \quad (۷۳.۲)$$

از معادله دوم،  $m\ddot{y} = 0$ ، انتگرال می‌گیریم

$$\dot{y} = \dot{y}_0.$$

که  $\dot{y}$  مقداری است ثابت و همان مقدار اولیه  $\dot{y}$  است. اگر یکبار دیگر انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$y = \dot{y} \cdot t + y_0$$

که  $y_0$  نیز ثابت است.

برای انتگرالگیری از معادله‌های اول و آخر معادله (۷۳.۲)، فرض کنید  $\alpha = qB_0/m$ ، بنابراین

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\alpha \dot{z} \\ \ddot{z} &= \alpha \dot{x} \end{aligned} \right\} \quad (73.2)$$

این دستگاه معادلات دیفرانسیل جفت شده را می‌توان از طریق دیفرانسیل‌گیری یکی از آنها و نشاندهنش در دیگری، به آسانی به معادله‌ای تاجفت تبدیل کرد

$$\ddot{z}' = \alpha \dot{x} = -\alpha^2 z'$$

$$\ddot{x}' = -\alpha \dot{z} = -\alpha^2 x'$$

از این رو

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}' &= -\alpha^2 z' \\ \ddot{x}' &= -\alpha^2 x' \end{aligned} \right\} \quad (75.2)$$

شکل جواب هر دو معادله دیفرانسیل بالا یکی است. با بهره‌گیری از روشهای مثال ج. ۲ در پیوست ج، داریم

$$x = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t + x_0$$

$$z = A' \cos \alpha t + B' \sin \alpha t + z_0$$

که  $A, A', B, B', x_0, z_0$  ثابتهای انتگرالگیری‌اند. می‌توان این جوابها را نوشت

$$\left. \begin{aligned} (x - x_0) &= A \cos \alpha t + B \sin \alpha t \\ (y - y_0) &= \dot{y} \cdot t \\ (z - z_0) &= A' \cos \alpha t + B' \sin \alpha t \end{aligned} \right\} \quad (76.2)$$

مختصه‌های  $x$  و  $z$  از طریق معادله (۷۴.۲) به هم مرتبط‌اند، از این رو با نشانیدن معادلات (۷۶.۲) در معادله اول (۷۴.۲) خواهیم داشت

$$-\alpha^t A \cos \alpha t - \alpha^t B \sin \alpha t = -\alpha(-\alpha A' \sin \alpha t + \alpha B' \cos \alpha t) \quad (۷۷.۲)$$

از آنجا که معادله (۷۷.۲) به ازای همه مقادیر  $t$ ، مخصوصاً به ازای  $t = 0$  و  $t = \pi/2\alpha$ ، برقرار است، از این معادله داریم

$$-\alpha^t A = -\alpha^t B'$$

پس

$$A = B'$$

و

$$-\alpha^t B = \alpha^t A'$$

می‌دهد

$$B = -A'$$

اینک داریم

$$\left. \begin{aligned} (x - x_0) &= A \cos \alpha t + B \sin \alpha t \\ (y - y_0) &= \dot{y} \cdot t \\ (z - z_0) &= -B \cos \alpha t + A \sin \alpha t \end{aligned} \right\} \quad (۷۸.۲)$$

اگر در  $t = 0$ ، داشته باشیم  $\dot{z} = z_0$  و  $\dot{x} = 0$ ، در این صورت اگر از معادله (۷۸.۲) دیفرانسیل بگیریم و قرار دهیم  $t = 0$ ، خواهیم داشت

$$\alpha B = 0$$

و

$$\alpha A = \dot{z}_0$$

از این رو

$$(x - x_0) = \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \cos \alpha t$$

$$(y - y_0) = \dot{y}_0 t$$

$$(z - z_0) = \frac{\dot{z}_0}{\alpha} \sin \alpha t$$

سرانجام

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= \left( \frac{\dot{z}_0 m}{qB} \right) \cos \left( \frac{qB \cdot t}{m} \right) \\ y - y_0 &= \dot{y}_0 t \\ z - z_0 &= \left( \frac{\dot{z}_0 m}{qB} \right) \sin \left( \frac{qB \cdot t}{m} \right) \end{aligned} \right\} \quad (79.2)$$

این عبارتها، معادلات پارامتری مارپیچ دایره‌ای به شعاع  $\dot{z}_0 m / qB$  است. بدینسان، هر چه ذره سریعتر وارد میدان شود یا جرمش بیشتر شود، شعاع مارپیچ بزرگتر خواهد شد. و هرچه بار ذره بیشتر یا میدان الکتریکی شدیدتر باشد، مارپیچ فشرده‌تر می‌شود. همچنین به چگونگی در دام میدان مغناطیسی افتادن ذره باردار توجه کنید. ذره فقط در امتداد راستای میدان رانده می‌شود. در این مثال ذره در امتداد محور  $x$  مؤلفه اولیه سرعت ندارد، اما حتی اگر چنین مؤلفه‌ای را هم داشت، در امتداد این محور رانده نمی‌شد (مسئله ۲۳.۲). سرانجام، توجه کنید که نیروی مغناطیسی وارد بر بار همواره عمود بر سرعت آن عمل می‌کند و از این رو نمی‌تواند سرعت آن را اضافه کند. معادله (۷۹.۲) مؤید این نکته است.

میدان مغناطیسی زمین به سادگی میدان یکنواخت مطرح شده در این مثال نیست. با همه اینها، از این مثال به شناختی پیرامون یکی از مکانیسم‌هایی می‌رسیم که به وسیله آن میدان مغناطیسی زمین پرتوهای کیهانی کم انرژی و باد خورشیدی را به دام می‌اندازد تا کمربندهای وان‌آلن را پدید آورد.

## ۵.۲ قضایای پایستگی (بقا)

اینک به بحث جامع مکانیک نیوتونی تک‌ذره باز می‌گردیم و قضایای مهم مربوط به کمیتهای پایسته را استنتاج می‌کنیم. باید تأکید کنیم که در پی اثبات پایستگی کمیتهای گوناگون نیستیم. صرفاً پیامدهای قوانین دینامیک نیوتون را استخراج می‌کنیم. این نتایج را باید به بوته آزمایش سپرد، که

تحقق آنها معیاری برای تأیید قوانین اصلی دینامیک است. این نکته که قضایای پایستگی واقعاً در موارد فراوانی صادق است بخش مهمی از اثبات درستی قوانین نیوتون را، دست کم در فیزیک کلاسیک، تشکیل می‌دهد.

اولین قضیه پایستگی به تکانه خطی ذره ارتباط پیدا می‌کند. اگر ذره آزاد باشد، یعنی، اگر هیچ نیرویی بر آن وارد نیاید، معادله (۲.۲) به سادگی به  $\dot{\mathbf{p}} = 0$  تبدیل می‌شود. بنابراین برداری است نسبت به زمان ثابت، و نخستین قانون پایستگی چنین است

۱. اگر نیروی کل وارد بر یک ذره صفر باشد، تکانه خطی کل آن  $\mathbf{p}$ ، پایسته است.

توجه کنید که این نتیجه از یک معادله برداری،  $\dot{\mathbf{p}} = 0$ ، استنتاج می‌شود و بنابراین در مورد هر مؤلفه تکانه خطی اعمال می‌شود. برای بیان این نتیجه با عبارتی دیگر، فرض می‌کنیم  $\mathbf{s}$  بردار ثابتی باشد به طوری که  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 0$ ، مستقل از زمان باشد. بدینسان

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 0$$

یا، پس از انتگرالگیری نسبت به زمان

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} = \text{const.} \quad (۸۰.۲)$$

که بنابراین، مؤلفه تکانه خطی در راستایی که نیرو صفر می‌شود، نسبت به زمان ثابت است. تکانه زاویه‌ای،  $\mathbf{L}$ ، هر ذره نسبت به مبدائی که بردار مکان  $\mathbf{r}$  از آن اندازه‌گیری می‌شود، بنا بر تعریف عبارت است از

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (۸۱.۲)$$

گشتاور نیرو،  $\mathbf{N}$ ، نسبت به همان مبدأ، بنا بر تعریف، عبارت است از

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (۸۲.۲)$$

که  $\mathbf{r}$  بردار مکان از مبدأ به نقطه اثر نیروی  $\mathbf{F}$  است. از آنجا که برای یک ذره،  $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$ ، گشتاور نیرو چنین می‌شود

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$$

اینک

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}})$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}$$

از این رو

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{N}} \quad (۸۳.۲)$$

اگر هیچ گشتاور نیرویی بر ذره وارد نیاید (یعنی، اگر  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ )، در این صورت  $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$  و  $\mathbf{L}$  نسبت به زمان یک بردار ثابت است. دومین قضیه مهم پایستگی عبارت است از:

۲. تکانه زاویه‌ای ذره‌ای که هیچگونه گشتاور نیرویی بر آن وارد نیاید، پایسته است.

اگر در ضمن انتقال ذره از وضعیت ۱ به وضعیت ۲، نیروی  $\mathbf{F}$  روی آن کار انجام دهد، در این صورت، بنابر تعریف، این کار عبارت است از

$$\boxed{W_{12} \equiv \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}} \quad (۸۴.۲)$$

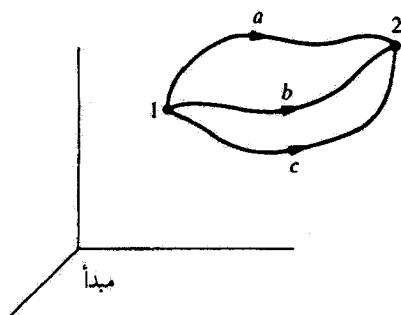
اگر  $\mathbf{F}$  نیروی برابند خالص وارد بر ذره باشد

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v^2) dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \end{aligned} \quad (۸۵.۲)$$

بنابراین در معادله (۸۴.۲) انتگرالده یک دیفرانسیل کامل است، و کاری که نیروی کل  $\mathbf{F}$  روی ذره انجام می‌دهد برابر است با تغییر در انرژی جنبشی آن

$$W_{12} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1 \quad (۸۶.۲)$$

که  $T \equiv mv^2/2$  همان انرژی جنبشی ذره است. اگر  $T_1 > T_2$ ، در آن صورت  $W_{12} < 0$ ، و ذره کاری انجام داده است که حاصل آن کاهش در انرژی جنبشی است. پی بردن به این نکته که نیروی  $\mathbf{F}$  منجر به معادله (۸۵.۲)، عبارت است از نیروی کل (یعنی، برابند) وارد بر ذره، اهمیت زیادی دارد.



شکل ۱۳.۲

حالا از یک دیدگاه دیگر انتگرالی را بررسی کنیم که در معادله (۸۴.۲) ظاهر می‌شود. در اغلب مسائل فیزیکی، نیروی  $\mathbf{F}$  دارای این خاصیت است که کار مورد نیاز برای جابه‌جا کردن ذره‌ای از یک وضعیت به وضعیت دیگر بدون هیچگونه تغییری در انرژی جنبشی، فقط به وضعیتهای ابتدایی و انتهایی بستگی دارد و نه به مسیری که ذره دقیقاً پیموده است. مثلاً کار انجام شده برای جابه‌جا کردن ذره از نقطه ۱ در شکل ۱۳.۲ به نقطه ۲، عملاً از مسیرهای  $a$ ،  $b$ ، یا  $c$  مستقل است. بدینسان، اگر ذره‌ای به جرم  $m$  تا ارتفاع  $h$  (از هر مسیری) بالا برده شود، در این صورت کاری به قدر  $mgh$  روی ذره انجام شده است، و این ذره در هنگام بازگشت به موضع اولیه خود می‌تواند همان مقدار کار انجام دهد. این استعداد انجام کار را انرژی پتانسیل ذره می‌گویند.

می‌توانیم انرژی پتانسیل ذره را بر حسب کار (انجام شده به وسیله نیروی  $\mathbf{F}$ ) مورد نیاز برای انتقال ذره از نقطه ۱ به نقطه ۲ (بدون هیچگونه تغییر خالص در انرژی جنبشی) تعریف کنیم

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U_1 - U_2 \quad (87.2)$$

از این رو کار انجام شده برای جابه‌جا کردن ذره صرفاً عبارت است از تفاوت انرژی پتانسیل  $U$  در دو نقطه. اگر  $\mathbf{F}$  را به صورت گرادیان اسکالر  $U$  بنویسیم، معادله (۸۷.۲) را می‌توان به صورت زیر مجدداً به دست آورد<sup>۱</sup>

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U = -\nabla U \quad (88.2)$$

۱. شرط لازم و کافی برای اینکه یک تابع برداری به وسیله گرادیان یک تابع اسکالر نموده شود، این است که تاو آن تابع برداری عیناً صفر شود. ماریون (3 Chaptetr و Ma 65a) را ببینید.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{\gamma} (\nabla U) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\gamma} \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i \\ &= - \int_{\gamma} dU = U_{\gamma} - U_{\gamma'} \end{aligned} \quad (۸۹.۲)$$

در اکثر سیستمهای مورد نظر، انرژی پتانسیل تابع مکان، و احتمالاً زمان است:  $U = U(\mathbf{r})$  یا  $U = U(\mathbf{r}, t)$ . حالتهایی که در آنها انرژی پتانسیل تابعی از سرعت است، مورد نظر ما نیستند.<sup>۱</sup> پی بردن به این نکته که انرژی پتانسیل فقط در محدوده یک ثابت جمع‌پذیر تعریف می‌شود، اهمیت زیادی دارد؛ یعنی، نیرویی که به وسیله  $-\nabla U$  تعریف شود با نیرویی که با  $-\nabla U + \text{const.}$  تعریف می‌شود، فرقی ندارد. بنابراین، انرژی پتانسیل به طور مطلق معنی ندارد؛ فقط اختلافهای انرژی پتانسیل از معنای فیزیکی برخوردارند [مانند معادله (۸۷.۲)].

اگر چارچوب مرجع لخت معینی را برای توصیف یک فرایند مکانیکی اختیار کنیم، قوانین حرکت در هر چارچوب مرجع دیگری که نسبت به چارچوب اصلی در حرکت یکنواخت باشد، یکسان است. برحسب اینکه کدام چارچوب مرجع لختی را به عنوان پایه جهت توصیف حرکت برگزینیم، سرعت ذره عموماً فرق می‌کند. بنابراین پی می‌بریم که نسبت دادن انرژی جنبشی مطلق به یک ذره درست به همان اندازه غیرممکن است که به انرژی پتانسیل معنای مطلق را نسبت دهیم. این محدودیتها هر دو پیامد این حقیقت‌اند که انتخاب یک مبدأ دستگاه مختصات برای توصیف فرایندهای فیزیکی همواره اختیاری است. جیمز کلارک ماکسول (۱۸۷۹-۱۸۳۱)، فیزیکدان اسکاتلندی قرن نوزدهم، این موضوع را به شرح زیر خلاصه می‌کند:<sup>۲</sup>

بنابراین، باید انرژی هر سیستم مادی را کمیتی بیندازیم که می‌توانیم افزایش یا کاهش آن را در حین گذر از یک وضعیت خاص به وضعیت دیگر تعیین کنیم. مقدار مطلق انرژی در شرایط متعارف (استاندارد) بر ما مجهول است، و اگر هم آن را بدانیم برای ما ارزشی ندارد، چون همه پدیده‌ها وابسته به تغییرات انرژی‌اند و نه وابسته به مقدار مطلق آن.

۱. پتانسیلهای وابسته به سرعت در موقعیتهایی، مثلاً در الکترومغناطیس (پتانسیلهای معروف به لینارد-ویشرت) ضروری‌اند.



حال، انرژی کل یک ذره را به صورت مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل آن تعریف می‌کنیم

$$\boxed{E \equiv T + U} \quad (۹۰.۲)$$

مشق کامل زمانی  $E$  عبارت است از

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \quad (۹۱.۲)$$

برای محاسبه مشتقات زمانی کمیت سمت راست این معادله، ابتدا باید توجه کنیم که معادله (۸۵.۲) را می‌توان چنین نوشت

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dT \quad (۹۲.۲)$$

طرفین را بر  $dt$  تقسیم می‌کنیم

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (۹۳.۲)$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= (\nabla U) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (۹۴.۲)$$

با جایگزینی معادلات (۹۳.۲) و (۹۴.۲) در (۹۱.۲)، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} + (\nabla U) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= (\mathbf{F} + \nabla U) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (۹۵.۲)$$

زیرا، اگر نیروی کل نیرویی پایستار باشد با توجه به تعریف انرژی پتانسیل [معادله (۸۸.۲)]،  $\mathbf{F} = -\nabla U$  جمله  $\mathbf{F} + \nabla U$  صفر می‌شود.

اگر  $U$  تابع صریحی از زمان نباشد (یعنی، اگر  $\partial U / \partial t = 0$ ؛ به یاد داشته باشید که پتانسیلهای وابسته به سرعت مورد نظر ما نیستند)، در این صورت میدان نیروی نموده شده به وسیله  $\mathbf{F}$ ، پایسته است. تحت این شرایط، به سومین قضیه مهم پایستگی می‌رسیم:

۳. انرژی کل،  $E$ ، هر ذره در میدان نیروی پایسته، نسبت به زمان ثابت است.

باید تکرار کنیم که ما قوانین پایستگی تکانه خطی، تکانه زاویه‌ای، و انرژی را اثبات نکرده‌ایم. ما فقط پیامدهای گوناگون قوانین نیوتون را استنتاج کرده‌ایم؛ یعنی، اگر این قوانین در وضعیت خاصی برقرار باشند، در آن صورت تکانه و انرژی نیز پایسته‌اند. اما ما چنان شیفته این قضیه‌های پایستگی شدیم که آنها را تا جایگاه قانون ارتقاء دادیم و اصرار ورزیدیم که در هر نظریه فیزیکی صادق‌اند، حتی در نظریه‌هایی که در شرایطی به کار می‌روند که مکانیک نیوتونی صادق نیست، مثلاً در برهم کنش بارهای متحرک یا سیستمهای کوانتوم مکانیکی. در چنین شرایطی واقعاً قانون بقا نداریم، بلکه اصول موضوع پایستگی داریم که بر نظریه تحمیل می‌کنیم. مثلاً اگر دو بار الکتریکی متحرک منزوی داشته باشیم، در این صورت نیروهای الکترومغناطیسی بین آنها پایسته نیستند. بنابراین، به میدان الکترومغناطیسی مقداری انرژی می‌دهیم به طوری که پایستگی انرژی برقرار بماند. این روال فقط در صورتی قانع کننده است که پیامدهای آن با واقعیت تجربی تناقض نداشته باشد، و این موضوع در مورد بارهای متحرک صادق است. بنابراین مفهوم معمول انرژی را گسترش می‌دهیم تا «انرژی الکترومغناطیسی» را در برگیرد و این عقیده از پیش شکل گرفته را که انرژی باید پایسته باشد، تصدیق کند. این امر ممکن است برداشتن گامی قطعی و مؤثر به نظر آید، اما، به قولی، موفقیت می‌آفریند، و این «قوانین» پایستگی موفقترین مجموعه اصول فیزیک بوده‌اند. امتناع از چشمپوشی از پایستگی انرژی و تکانه، ولفگانگ پاؤلی (۱۹۵۸-۱۹۰۰) را در سال ۱۹۳۰ به اصل موضوع وجود نوترینو هدایت کرد تا انرژی و تکانه «نایافته» در واپاشی پرتوزای  $\beta$  را توجیه کند. این اصل موضوع برای انریکوفرمی (۱۹۵۴-۱۹۰۱) این امکان را فراهم آورد تا در سال ۱۹۳۴ نظریه واپاشی  $\beta$  را با موفقیت وضع کند، اما مشاهده مستقیم نوترینو تا سال ۱۹۵۳ که رانیز و کوان آزمایش مشهور خود را انجام دادند، میسر نشد.<sup>۱</sup> با تمسک به این اعتقاد که انرژی و تکانه باید پایسته باشند، یک ذره بنیادی جدید کشف شد، ذره‌ای که در نظریه‌های نوین فیزیک هسته‌ای از اهمیت زیادی برخوردار است. این کشف تنها یکی از چندین گام مؤثر در فهم خواص ماده به

1. C. L. Cowan, F. Reines, F.B. Harrison, H. W. Kruse, and A. D. McGuire, *Science*, **124**, 103 (1956).

شمار می‌آید که پیامد مستقیم کاربرد قوانین پایستگی است.

ما در بخش‌های بعدی این کتاب قوانین پایستگی را در چندین وضعیت فیزیکی به کار می‌گیریم، که پراکندگی رادرفورد و حرکت سیاره‌ای، از آن جمله است. در اینجا مثال ساده‌ای حاکی از سودمندی قضایای پایستگی ارائه می‌شود.

### مثال ۱۱.۲

موشی به جرم  $m$  بر روی لبهٔ خارجی یک پنکهٔ سقفی می‌پرد که با گشتاور لختی  $I$  و شعاع  $R$  آزادانه می‌گردد. سرعت زاویه‌ای با چه نسبتی تغییر می‌کند؟

حل: تکانهٔ زاویه‌ای در خلال این فرایند باید پایسته باشد. از مفهوم گشتاور لختی که در فیزیک مقدماتی یاد گرفتیم، بهره می‌گیریم، تا تکانهٔ زاویه‌ای،  $L$ ، را به سرعت زاویه‌ای،  $\omega$ ، ربط دهیم:  $L = I\omega$ . تکانهٔ زاویه‌ای اولیه،  $L_0 = I\omega_0$ ، باید با تکانهٔ زاویه‌ای (پنکه به اضافهٔ موش) پس از جهیدن موش بر روی پرهٔ پنکه،  $L$ ، برابر باشد. سرعت لبهٔ خارجی پنکه عبارت است از  $v = \omega R$ .

$$L = I\omega + mvR = \frac{v}{R}(I + mR^2)$$

$$L = L_0 = I\omega_0$$

$$\frac{v}{R}(I + mR^2) = I\frac{v_0}{R}$$

$$\frac{v}{v_0} = \frac{I}{I + mR^2}$$

و

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{I}{I + mR^2}$$

### ۶.۲ انرژی

در زمان نیوتون عامهٔ مردم مانند امروز مفهوم انرژی را نمی‌دانستند. ما بعداً دو فرمولبندی جدید دینامیک یعنی روش‌های لاگرانژی و هامیلتونی را بررسی خواهیم کرد، که برخلاف روش نیوتونی، بر پایهٔ انرژی استوارند.

در اوایل قرن نوزدهم روشن شد که گرما صورت دیگری از انرژی است و نه شکلی از شماره (به نام «کالوریک») که بین اجسام داغ و سرد جریان دارد. عموماً این افتخار را از آن کنت رومفورد<sup>۱</sup>

۱. بنیامین تامپسون (۱۸۱۴-۱۷۵۳) در ماساچوست زاده شده و در ۱۷۷۶ به عنوان پناهندهٔ سلطنت طلب به اروپا

می‌دانند که پی‌برد که مقدار عظیم گرمای تولید شده در خلال سوراخ کردن لولهٔ توپ ناشی از اصطکاک است نه کالوریک. اگر انرژی اصطکاکی همان انرژی گرمایی باشد، که با انرژی مکانیکی قابل تبادل است، در این صورت پایستگی کل انرژی می‌تواند پیش آید.

در طی قرن نوزدهم، دانشمندان در زمینهٔ پایستگی انرژی آزمایشهای زیادی انجام دادند، که پیامد آن اهمیتی است که امروز به انرژی داده می‌شود. هرمان فون هلمهولتز (۱۸۲۱-۱۸۹۴) در سال ۱۸۴۷ قانون کلی پایستگی انرژی را فرمولبندی کرد. او نتیجه‌گیری خود را عمدتاً بر شالودهٔ آزمایشهای گرماسنجی جیمز پریسکات زول (۱۸۸۹-۱۸۱۸) که از سال ۱۸۴۰ آغاز شد، استوار کرد.

یک ذرهٔ نقطه‌ای را در نظر بگیرید که تحت تأثیر نیرویی پاستار با پتانسیل  $U$ ، قرار دارد. پایستگی انرژی (در واقع، به بیان دقیق در این مورد، انرژی مکانیکی) در معادلهٔ (۹۰.۲) منعکس می‌شود

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \quad (۹۶.۲)$$

که فقط حالت یک بعدی را در نظر می‌گیریم. می‌توان معادلهٔ (۹۶.۲) را به صورت زیر نوشت

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \quad (۹۷.۲)$$

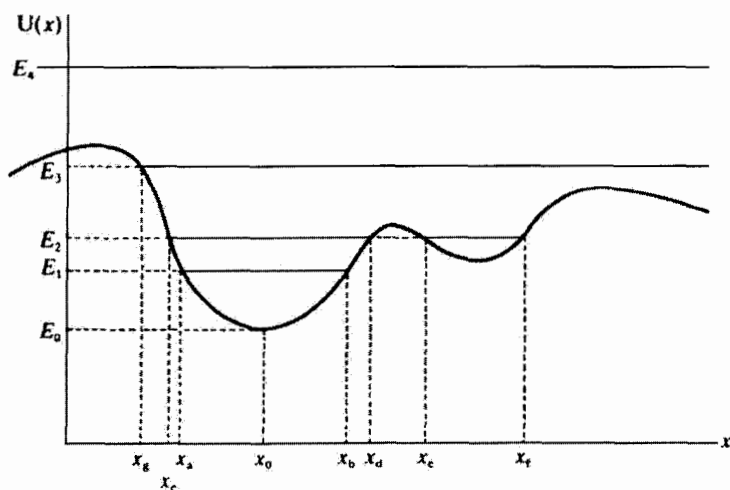
از عبارت بالا انتگرال می‌گیریم

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} \quad (۹۸.۲)$$

که در لحظهٔ  $t = t_0$  داریم:  $x = x_0$ . در معادلهٔ (۹۸.۲) حالت یک بعدی را به صورت صوری حل کرده‌ایم؛ یعنی،  $x(t)$  را یافته‌ایم. حالا تنها کاری که باید بکنیم این است که پتانسیل  $U(x)$  را در معادلهٔ (۹۸.۲) قرار دهیم و، در صورت لزوم، با استفاده از انتگرالگیری عددی، از آن انتگرال بگیریم. ما بعداً پتانسیلهای  $U = \frac{1}{2}kx^2$  را برای نوسانهای هماهنگ و  $U = -k/x$  را برای نیروی گرانشی، با تفصیل بیشتری بررسی خواهیم کرد.

می‌توانیم با بررسی طرحی از یک نمونهٔ  $U(x)$  که در شکل ۱۴.۲ نموده شده‌است، در خصوص حرکت ذره مطالب زیادی بدانیم. اولاً، توجه کنید که، چون  $\frac{1}{2}mv^2 = T \geq 0$ ، در مورد

مهاجرت کرد. در میان فعالیتهای نظامی برجسته، و بعداً، کارهای علمیش به عنوان وزیر جنگ باواریا بر سوراخ کردن لوله توپ نظارت داشت.



شکل ۱۴.۲

هر حرکت فیزیکی واقعی:  $E \geq U(x)$ . در شکل ۱۴.۲ مشاهده می‌کنید که به ازای انرژیهای  $E_1$  و  $E_2$ ، حرکت مقید است. به ازای  $E_3$  حرکت بین نقاط برگشت (عطف)  $x_b$  و  $x_a$  تناوبی است. به همین ترتیب، به ازای  $E_4$  حرکت تناوبی است، اما در اینجا دو ناحیه مجزای قابل دسترس وجود دارد:  $x_c \leq x \leq x_d$  و  $x_e \leq x \leq x_f$ . ذره نمی‌تواند از یک «پایاله» به «پایاله» دیگر «بجهد»؛ همینکه در یک پایاله قرار گرفت، در صورتی که انرژی به همان میزان  $E_4$  باقی بماند باید تا ابد در آنجا باقی بماند. حرکت ذره‌ای با انرژی  $E_0$  فقط یک مقدار،  $x = x_c$ ، دارد. ذره در حال سکون است و برای آن  $T = 0$  [چون  $E_0 = U(x_c)$ ].

حرکت ذره با انرژی  $E_3$  ساده است: ذره از بینهایت می‌آید، متوقف می‌شود و در  $x = x_g$  دور می‌زند، و مجدداً به بینهایت بر می‌گردد؛ این فرایند خیلی به واجهش توپ‌تیس از دیوارهٔ تمرین (مخصوص مبتدیان) شبیه است. به ازای انرژی  $E_2$ ، حرکت نامحدود است و ذره ممکن است در هر موضعی قرار گیرد. سرعت این ذره چون به اختلاف بین  $E_2$  و  $U(x)$  وابسته است تغییر خواهد کرد. اگر به راست حرکت کند، سرعتش کم و زیاد می‌شود اما حرکتش تا بینهایت ادامه پیدا می‌کند. حرکت ذره با انرژی  $E_1$  شبیه حرکت جرمی واقع در انتهای یک فنر است. پتانسیل در ناحیه  $x_a < x < x_b$  را می‌توان تقریباً به میزان  $U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$  برآورد کرد. ذره‌ای که انرژی آن اندکی از  $E_0$  بیشتر باشد حول نقطهٔ  $x = x_0$  نوسان خواهد کرد. چنین نقطه‌ای را نقطهٔ تعادل می‌گوییم، زیرا اگر ذره در  $x = x_0$  قرار گیرد در همانجا باقی می‌ماند. تعادل ممکن است پایدار،

ناپایدار، یا بی تفاوت باشد. تعادلی که هم‌اکنون پیرامون آن بحث کردیم پایدار است، زیرا اگر ذره در هر طرف  $x = x_0$  قرار می‌گرفت سرانجام به همانجا بر می‌گشت. می‌توانیم به عنوان مثالی از این موضوع از یک جام نیم‌کروی و یک ساچمه بهره‌گیریم. وقتی جام درست به سمت بالا قرار گرفته باشد، ساچمه می‌تواند در داخل آن بغلند؛ اما عاقبت در ته آن متوقف خواهد شد. به بیان دیگر، تعادل پایداری پیش می‌آید. اگر جام را وارونه کنیم و ساچمه را دقیقاً در خارج آن و در  $x = x_0$  قرار دهیم، در آنجا در حالت تعادل باقی می‌ماند. اگر ساچمه را در هر طرف  $x = x_0$  روی سطح گرد قرار دهیم، به پایین می‌غلند؛ این وضعیت را تعادل ناپایدار می‌گویند. تعادل خنثی هنگامی پیش می‌آید که ساچمه روی یک سطح تخت، صاف، و افقی بغلند.

به‌طور کلی، می‌توانیم پتانسیل  $U(x)$  را به صورت یک سری تیلور حول یک نقطه تعادل معین بسط دهیم. برای اینکه عملیات ریاضی ساده شوند، فرض می‌کنیم که نقطه تعادل به جای  $x = x_0$  در  $x = 0$  واقع باشد (در غیر این صورت، همواره می‌توانیم دستگاه مختصات را مجدداً تعریف کنیم تا چنین موقعیتی فراهم آید). در این صورت داریم

$$U(x) = U_0 + x \left( \frac{dU}{dx} \right)_0 + \frac{x^2}{2!} \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_0 + \frac{x^3}{3!} \left( \frac{d^3U}{dx^3} \right)_0 + \dots \quad (۹۹.۲)$$

شاخص پایین صفر حاکی از آن است که آن کمیت را می‌خواهیم در  $x = 0$  محاسبه کنیم. انرژی پتانسیل  $U$  در  $x = 0$  صرفاً یک ثابت است که می‌توانیم بدون آنکه به کلیت موضوع لطمه‌ای وارد آید، آن را بنابر تعریف صفر بگیریم. اگر  $x = 0$  نقطه تعادل باشد، در این صورت

$$\left( \frac{dU}{dx} \right)_0 = 0 \quad \text{نقطه تعادل} \quad (۱۰۰.۲)$$

و معادله (۹۹.۲) به صورت زیر در می‌آید

$$U(x) = \frac{x^2}{2!} \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_0 + \frac{x^3}{3!} \left( \frac{d^3U}{dx^3} \right)_0 + \dots \quad (۱۰۱.۲)$$

در نزدیکی نقطه تعادل  $x = 0$ ، مقدار  $x$  کوچک است، و هر جمله در معادله (۱۰۱.۲) به‌طور چشمگیری کوچکتر از جمله قبلی است. بنابراین فقط جمله اول معادله (۱۰۱.۲) را نگه می‌داریم

$$U(x) = \frac{x^2}{2} \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_0 \quad (۱۰۲.۲)$$

با بررسی  $(d^2U/dx^2)$  می‌توانیم تعیین کنیم که آیا تعادل در  $x = 0$  پایدار است یا ناپایدار. اگر  $x = 0$  تعادل پایداری باشد،  $U(x)$  باید در هر دو طرف  $x = 0$  بزرگتر (مثبت‌تر) باشد. از آنجا که

$x^2$  همواره مثبت است، شرایط تعادل عبارت‌اند از

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right) > 0 \quad \text{تعادل پایدار} \quad (103.2)$$

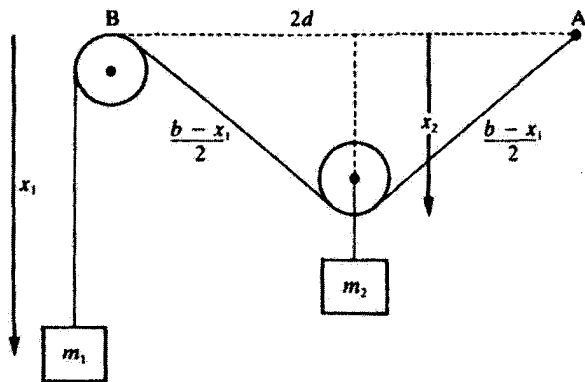
$$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right) < 0 \quad \text{تعادل ناپایدار}$$

اگر  $(d^2U/dx^2)$  صفر باشد، جمله‌های مرتبه بالاتر را باید بررسی کرد (مسائل ۳۴.۲ و ۳۵.۲ را ببینید).

### مثال ۱۲.۲

سیستم قرقره‌ها، وزنه‌ها، و نخ را در شکل ۱۵.۲ در نظر می‌گیریم. نخ سبکی به طول  $b$  در نقطه  $A$  بسته شده است، این نخ در نقطه  $B$  که به فاصله  $2d$  از  $A$  واقع است، از روی یک قرقره رد می‌شود، و سرانجام جرم  $m_1$  از آن آویخته می‌شود. قرقره دیگری که جرم  $m_2$  به آن آویزان است طوری قرار گرفته که نخ از قسمت پایین محیط آن می‌گذرد، و آن را در فاصله بین  $A$  و  $B$  به پایین می‌کشد. وقتی سیستم در حال تعادل است فاصله  $x_1$  را محاسبه، و تعیین کنید که آیا این تعادل پایدار است یا ناپایدار. قرقره‌ها بدون جرم‌اند.

حل: می‌توانیم این مثال را با بهره‌گیری از نیرو (یعنی، وقتی  $\ddot{x}_1 = 0 = \dot{x}_1$ ) حل کنیم و یا با استفاده از انرژی. چون در حالت تعادل انرژی جنبشی صفر است و فقط لازم است انرژی پتانسیل را وقتی که معادله (۱۰۰.۲) برقرار است مورد بررسی قرار دهیم، روش انرژی را اختیار می‌کنیم.



شکل ۱۵.۲

در امتداد خط  $AB$ ،  $U$  را مساوی صفر در نظر می‌گیریم

$$U = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 \quad (10.4.2)$$

فرض می‌کنیم قرقره‌ای که جرم  $m_2$  را نگه می‌دارد کوچک باشد، از این رو می‌توانیم از شعاع قرقره چشم‌پوشیم.

$$x_2 = \sqrt{[(b - x_1)^2/4] - d^2}$$

$$U = -m_1 g x_1 - m_2 g \sqrt{[(b - x_1)^2/4] - d^2}$$

با قرار دادن  $dU/dx_1 = 0$ ، می‌توانیم وضعیت تعادل،  $(x_1)_0 \equiv x_0$ ، را تعیین کنیم

$$\left(\frac{dU}{dx_1}\right)_0 = -m_1 g + \frac{m_2 g (b - x_0)}{4 \sqrt{[(b - x_0)^2/4] - d^2}} = 0$$

$$4m_1 \sqrt{[(b - x_0)^2/4] - d^2} = m_2 (b - x_0)$$

$$(b - x_0)^2 (4m_1^2 - m_2^2) = 16m_1^2 d^2$$

$$x_0 = b - \frac{4m_1 d}{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}} \quad (10.5.2)$$

توجه کنید که فقط به‌ازای  $4m_1^2 > m_2^2$ ، یک جواب حقیقی وجود دارد.

تحت چه شرایطی جرم  $m_2$  جرم  $m_1$  را تا موضع قرقره  $B$  (یعنی،  $x_1 = 0$ ) بالا می‌کشد؟ می‌توانیم از معادله (10.3.2) بهره‌گیریم تا تعیین کنیم آیا تعادل پایدار است یا ناپایدار.

$$\frac{d^2 U}{dx_1^2} = \frac{-m_2 g}{4 \{[(b - x_1)^2/4] - d^2\}^{3/2}} + \frac{m_2 g (b - x_1)^2}{16 \{[(b - x_1)^2/4] - d^2\}^{5/2}}$$

اینک قرار می‌دهیم:  $x_1 = x_0$

$$\left(\frac{d^2 U}{dx_1^2}\right)_0 = \frac{g(4m_1^2 - m_2^2)^{3/2}}{4m_1^2 d}$$

قبلاً شرط تعادل (حرکت واقعی) به‌ازای  $4m_1^2 > m_2^2$  تأمین می‌شد، لذا، وقتی تعادل وجود داشته باشد، چون  $(d^2 U/dx_1^2)_0 > 0$ ، تعادلی پایدار خواهد بود.



پتانسیل یک بعدی زیر را در نظر بگیرید

$$U(x) = \frac{-Wd^{\lambda}(x^{\lambda} + d^{\lambda})}{x^{\lambda} + \lambda d^{\lambda}} \quad (106.2)$$

منحنی تغییرات این پتانسیل را ترسیم و به ازای مقادیر مختلف  $x$  درباره حرکت بحث کنید. آیا حرکت یکنواخت مقید است یا نامقید؟ شرایط تعادل در کجا برقرار است؟ آیا این وضعیتهای تعادل پایدارند یا ناپایدار؟ نقاط برگشت (عطف) را به ازای  $E = -W/\lambda$  بیابید. مقدار  $W$  ثابتی مثبت است.

حل: پتانسیل را به فرار زیر بازنویسی می‌کنیم

$$Z(y) = \frac{U(x)}{W} = \frac{-(y^{\lambda} + 1)}{y^{\lambda} + \lambda}, \quad y = \frac{x}{d} \quad (107.2)$$

ابتدا نقاط تعادل را می‌یابیم، که ما را برای ترسیم منحنی تغییرات پتانسیل راهنمایی می‌کند.

$$\frac{dZ}{dy} = \frac{-\lambda y}{y^{\lambda} + \lambda} + \frac{\lambda y^{\lambda}(y^{\lambda} + 1)}{(y^{\lambda} + \lambda)^2} = 0$$

این عبارت کاهش می‌یابد به

$$y(y^{\lambda} + \lambda y^{\lambda} - \lambda) = 0$$

$$y(y^{\lambda} + \lambda)(y^{\lambda} - \lambda) = 0$$

$$y^{\lambda} = \lambda, 0$$

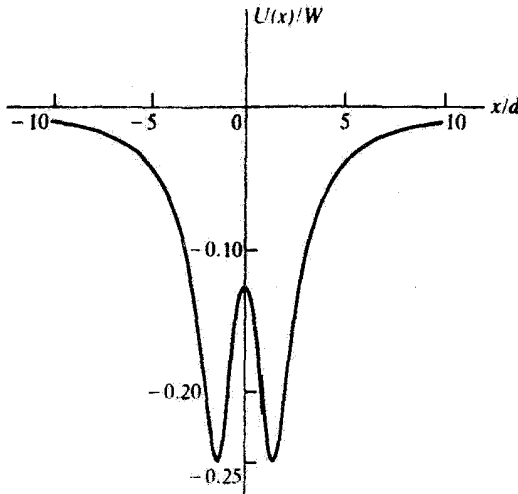
از این رو

$$x_{0.1} = 0$$

$$x_{0.2} = \sqrt{\lambda}d \quad (108.2)$$

$$x_{0.3} = -\sqrt{\lambda}d$$

سه نقطه تعادل وجود دارد. در شکل ۱۶.۲ منحنی تغییرات  $U(x)/W$  را بر حسب  $x/d$  رسم کرده‌ایم. تعادل در  $x_{0.2}$  و  $x_{0.3}$  پایدار اما در  $x_{0.1}$  ناپایدار است. به ازای همه انرژیهای  $E < 0$  حرکت مقید است. می‌توانیم با قرار دادن  $E = U(x)$  نقاط برگشت را برای هر انرژی  $E$  تعیین کنیم.



شکل ۱۶.۲

$$E = -\frac{W}{\lambda} = U(y) = \frac{-W(y^2 + 1)}{y^2 + \lambda} \quad (109.2)$$

$$y^2 + \lambda = \lambda y^2 + \lambda$$

$$y^2 = \lambda y^2$$

$$y = \pm 2\sqrt{\lambda}, 0 \quad (110.2)$$

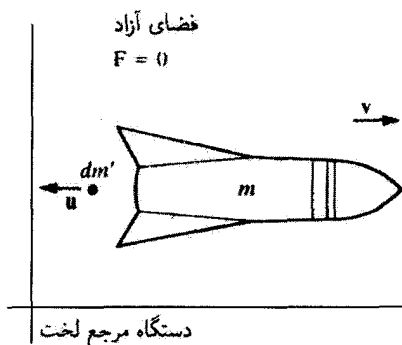
نقاط برگشت (عطف) به ازای  $E = -W/\lambda$  عبارت‌اند از  $x = -2\sqrt{\lambda}d$  و  $x = +2\sqrt{\lambda}d$ ، و نیز  $x = 0$ ، که نقطه تعادل ناپایدار است.

## ۷.۲ حرکت موشک

حرکت موشک یکی از کاربردهای جالب دینامیک نیوتونی مقدماتی به شمار می‌آید. دو حالتی که بررسی می‌کنیم عبارت‌اند از (۱) حرکت موشک در فضای آزاد و (۲) صعود قائم موشک تحت تأثیر گرانی. در حالت اول باید پایداری تکانه خطی را به کار گیریم. حالت دوم مستلزم کاربرد پیچیده‌تری از قانون دوم نیوتون است.

### حرکت موشک در فضای آزاد

در اینجا فرض می‌کنیم که موشک (سفینه فضایی) تحت تأثیر هیچ نیروی خارجی قرار ندارد. در فضای خارجی (بیرون از حوزه گرانش زمین) حرکت سفینه فضایی باید تماماً به انرژی خودش



شکل ۱۷.۲

وابسته باشد. این سفینه می‌تواند با واکنش جرمی که با سرعت زیاد از آن به بیرون پرتاب می‌شود، حرکت کند. برای پایسته بودن تکانه خطی، سفینه فضایی ناگزیر در راستای مخالف حرکت خواهد کرد. نمودار حرکت سفینه فضایی در شکل ۱۷.۲ نموده شده است. جرم کل لحظه‌ای سفینه فضایی  $m$  است. سرعت لحظه‌ای سفینه فضایی نسبت به دستگاه مرجع لخت عبارت است از  $v$ . فرض می‌کنیم که کل حرکت در راستای  $x$  باشد و نمادگذاری برداری از معادلات مربوط به حرکت حذف شود. جرم مثبت  $dm'$  با سرعت  $-u$  نسبت به سفینه فضایی از موتور موشک به بیرون پرتاب می‌شود. بلافاصله پس از آنکه جرم  $dm'$  به بیرون پرتاب می‌شود، جرم سفینه فضایی و سرعت آن به ترتیب عبارت خواهند بود از  $m - dm'$  و  $v + dv$ .

$$mv = \text{تکانه اولیه} \quad (۱۱۱.۲)$$

$$\text{تکانه نهایی} = (m - dm')(v + dv) + dm'(v - u) \quad (۱۱۲.۲)$$

سفینه فضایی بدون  $dm'$       خروجی  $dm'$  از موشک

توجه کنید که سرعت جرم خارج شده،  $dm'$ ، نسبت به دستگاه مرجع عبارت است از  $v - u$ . بنابراین پایستگی تکانه خطی معادلات (۱۱۱.۲) و (۱۱۲.۲) باهم مساویند. هیچگونه نیروی خارجی در کار نیست ( $F_{\text{خارجی}} = 0$ ).

$$p_{\text{نهایی}} = p_{\text{اولیه}}$$

$$p(t) = p(t + dt)$$

$$mv = (m - dm')(v + dv) + dm'(v - u) \quad (۱۱۳.۲)$$

$$mv = mv + mdv - vdm' - dm'dv + vdm' - udm'$$

$$mdv = udm'$$

$$dv = u \frac{dm'}{m} \quad (۱۱۴.۲)$$

که ما از حاصلضرب دو کمیت دیفرانسیلی،  $dm'dv$ ، چشم پوشیده ایم.  $dm'$  را جرم مثبتی گرفتیم که از سفینه فضایی به بیرون پرتاب شده است. تغییر جرم خود سفینه فضایی عبارت است از  $dm$  که

$$dm = -dm' \quad (۱۱۵.۲)$$

و

$$dv = -u \frac{dm}{m} \quad (۱۱۶.۲)$$

زیرا  $dm$  باید منفی باشد. فرض کنیم  $m_0$  و  $v_0$  به ترتیب جرم و سرعت اولیه سفینه فضایی باشند، از معادله (۱۱۶.۲) تا مقادیر نهایی  $m$  و  $v$  آن انتگرال می گیریم

$$\int_{v_0}^v dv = -u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m}$$

$$v - v_0 = u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) \quad (۱۱۷.۲)$$

$$v = v_0 + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) \quad (۱۱۸.۲)$$

سرعت خروجی  $u$  ثابت فرض می شود. بدینسان، برای اینکه سرعت سفینه فضایی به حداکثر برسد، باید سرعت خروجی  $u$  و نسبت  $m_0/m$  را به حداکثر برسانیم.

از آنجا که نسبت  $m_0/m$  سرعت نهایی را محدود می کند، مهندسان موشکهای چند مرحله ای را ساخته اند. حداقل جرم (منهای سوخت) سفینه فضایی را ماده ای که در ساختمان موشک به کار می رود، محدود می کند. اما، اگر خود مخزن سوخت پس از آنکه سوختش تمام شد از موشک جدا شود، جرم سفینه فضایی باقی مانده کمتر می شود. سفینه فضایی می تواند دو یا چند مخزن سوخت داشته باشد، که هر یک از آنها می تواند از موشک جدا و در فضا رها شود.

مثلاً، فرض کنید

جرم کل اولیه سفینه فضایی  $m_0$

$$m_1 = m_a + m_b$$

جرم کلاهک مرحله اول  $m_a$

جرم مخزنهای سوخت مرحله اول، و غیره  $m_b$

سرعت نهایی مرحله اول بعد از اتمام سوخت  $v_1$

$$v_1 = v_0 + u \ln \left( \frac{m_0}{m_1} \right) \quad (119.2)$$

در هنگام اتمام سوخت مرحله اول سفینه به سرعت نهایی  $v_1$  می‌رسد، و جرم  $m_b$  در فضا رها می‌شود. سپس موشک مرحله دوم با همان سرعت تخلیه (گازهای ناشی از سوختن سوخت موشک) روشن می‌شود، و داریم

جرم کل اولیه مرحله دوم سفینه فضایی  $m_a$

$$m_2 = m_c + m_d$$

جرم کلاهک مرحله دوم  $m_c$

جرم مخزن سوخت مرحله دوم، و غیره  $m_d$

سرعت اولیه مرحله دوم  $v_1$

سرعت نهایی مرحله دوم در هنگام اتمام سوخت  $v_2$

$$v_2 = v_1 + u \ln \left( \frac{m_a}{m_2} \right) \quad (120.2)$$

$$v_2 = v_0 + u \ln \left( \frac{m_0 m_a}{m_1 m_2} \right) \quad (121.2)$$

حاصلضرب  $(m_0 m_a / m_1 m_2)$  را می‌توان خیلی از  $m_0 / m_1$  بزرگتر کرد. موشکهای چند مرحله‌ای در حرکت صعودی تحت تأثیر گرانی نسبت به حرکت در فضای آزاد کاربرد بیشتری دارند. ملاحظه کرده‌ایم که پشروی سفینه فضایی نتیجه پایستگی تکانه خطی است. اما مهندسان و دانشمندان دوست دارند که به عبارت مربوط به نیرو، «پیشران» موشک اطلاق کنند. اگر طرفین معادله (۱۱۶.۲) را در  $m$  ضرب و بر  $dt$  تقسیم کنیم، داریم

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} \quad (122.2)$$

از آنجا که سمت چپ این معادله به صورت  $ma$  (نیرو) «ظاهر می‌شود»، سمت راست را پیشران می‌گویند

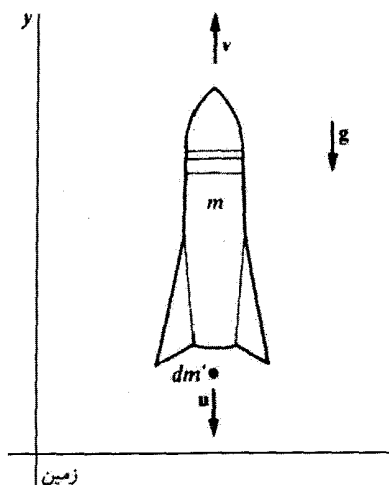
$$\text{پیشران} = -u \frac{dm}{dt} \quad (۱۲۳.۲)$$

چون  $dm/dt$  منفی است، پیشران عملاً مثبت است.

### صعود قائم تحت تأثیر گرانی

حرکت موشکی که می‌خواهد میدان گرانشی زمین را ترک کند، عملاً خیلی پیچیده است. برای مقاصد تحلیلی چندین فرض می‌کنیم. موشک فقط حرکت قائم دارد، بدون هیچگونه مؤلفه افقی. از مقاومت هوا چشم می‌پوشیم و فرض می‌کنیم که شتاب گرانی نسبت به ارتفاع ثابت باقی بماند. همچنین فرض می‌کنیم که آهنگ سوختن سوخت ثابت باشد. تمام این فرضها را می‌توان از طریق یک تحلیل عددی به وسیله کامپیوتر، به طور منطقی از شمول موضوع خارج کرد.

می‌توانیم از نتایج حالت قبل در مورد حرکت موشک در فضای آزاد بهره گیریم، اما دیگر  $F_{\text{خارجی}} = 0$  را در اینجا نداریم. نمایش هندسی این نوع حرکت در شکل ۱۸.۲ نموده شده است. در اینجا نیز  $dm'$  را مثبت می‌گیریم، که  $dm = -dm'$ . نیروی خارجی،  $F_{\text{خارجی}}$ ، در یک محدوده



شکل ۱۸.۲

زمانی دیفرانسیلی کوتاه، عبارت است از

$$F_{\text{خارجی}} = \frac{d}{dt}(mv)$$

یا

$$F_{\text{خارجی}} dt = d(mv) = dp = p(t + dt) - p(t) \quad (124.2)$$

در مورد سیستم سفینه فضایی، در معادلات (۱۱۱.۲) تا (۱۱۶.۲) تکانه‌های ابتدایی و نهایی را یافتیم. اینک از نتایج بهره می‌گیریم که به معادله (۱۱۶.۲) منجر می‌شوند تا به دست آوریم

$$p(t + dt) - p(t) = mdv + udm \quad (125.2)$$

در فضای آزاد،  $F_{\text{خارجی}} = 0$  اما در صعود،  $F_{\text{خارجی}} = -mg$ . از ترکیب معادلات (۱۲۴.۲) و (۱۲۵.۲) داریم

$$\begin{aligned} F_{\text{خارجی}} dt = -mgdt &= mdv + udm \\ -mg &= m\dot{v} + u\dot{m} \end{aligned} \quad (126.2)$$

از آنجا که آهنگ سوختن سوخت ثابت است، فرض می‌کنیم

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\alpha, \quad \alpha > 0 \quad (127.2)$$

و معادله (۱۲۶.۲) چنین می‌شود

$$dv = \left( -g + \frac{\alpha}{m} u \right) dt \quad (128.2)$$

اما، این معادله سه مجهول دارد  $(t, m, v)$ ، از این‌رو از معادله (۱۲۷.۲) بهره می‌گیریم تا پارامتر زمان را حذف کنیم، و می‌رسیم به

$$dv = \left( \frac{g}{\alpha} - \frac{u}{m} \right) dm \quad (129.2)$$

فرض می‌کنیم که مقادیر سرعت و جرم اولیه  $0$  و  $m_0$  و مقادیر سرعت و جرم نهایی  $v$  و  $m$  باشند، بنابراین

$$\begin{aligned} \int_0^v dv &= \int_{m_0}^m \left( \frac{g}{\alpha} - \frac{u}{m} \right) dm \\ v &= -\frac{g}{\alpha}(m_0 - m) + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) \end{aligned} \quad (130.2)$$

برای یافتن زمان می‌توان از معادله (۱۲۷.۲) انتگرال گرفت

$$\int_{m_0}^m dm = -\alpha \int_0^t dt$$

$$m_0 - m = \alpha t \quad (131.2)$$

معادله (۱۳۰.۲) چنین می‌شود

$$v = -gt + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) \quad (132.2)$$

می‌توانیم محاسبات را با معادله (۱۳۰.۲) ادامه دهیم و یک بار دیگر از آن انتگرال بگیریم تا ارتفاع موشک تعیین شود (مسئله ۳۸.۲ را ببینید). این نوع انتگرال‌گیریها خسته کننده‌اند، و مسئله را به کمک روشهای عددی می‌شود به آسانی حل کرد. حتی موشک در هنگام اتمام سوخت هم به صعود خود ادامه می‌دهد، زیرا هنوز هم یک سرعت بالاسو دارد. سرانجام، با فرضهای قبلی، نیروی گرانشی موشک را متوقف خواهد کرد (زیرا فرض ما این بود که  $g$  ثابت است و با زیاد شدن ارتفاع مقدارش کاهش پیدا نمی‌کند).

اگر سرعت خروج (گاز)،  $u$ ، چندان زیاد نباشد که  $v$  در معادله (۱۳۲.۲) مثبت شود، وضعیت جالبی پیش می‌آید. در این حالت موشک بر روی زمین باقی خواهد ماند. این وضعیت به علت حدود انتگرال‌گیری که فرض کرده‌ایم پیش می‌آید، همان حدودی که به معادله (۱۳۰.۲) منجر می‌شود. پیش از آنکه پیشران موشک آن را از زمین بلند کند، باید سوخت کافی بسوزد (مسئله ۴۰.۲ را ببینید). البته، موشکها به این طریق طراحی نمی‌شوند؛ موشکها طوری ساخته می‌شوند که وقتی به آهنگ سوختن کامل برسند، از جا کنده شوند.

#### مثال ۱۴.۲

مرحله اول موشک ساترن پنج را در نظر بگیرید که برای اجرای برنامه فرستادن آپولو به ماه از آن استفاده کردند. جرم اولیه آن عبارت است از  $2.8 \times 10^6 \text{ kg}$ ، و جرم سوخت مرحله اول  $2.1 \times 10^6 \text{ kg}$  است. فرض کنید پیشران متوسط  $37 \times 10^6 \text{ N}$  باشد. سرعت خروج گاز  $2600 \text{ m/s}$  است. سرعت نهایی مرحله اول را در هنگام اتمام سوخت محاسبه کنید. با استفاده از نتیجه مسئله ۳۸.۲ [معادله (۱۳۳.۲)]، ارتفاع قائم در هنگام اتمام سوخت را نیز محاسبه کنید.

حل: به کمک پیشران [معادله (۱۲۳.۲)] می‌توانیم آهنگ سوختن سوخت را محاسبه کنیم



$$\frac{dm}{dt} = \frac{\text{پیشران}}{-u} = \frac{37 \times 10^6 \text{ N}}{-2600 \text{ m/s}} = -1.42 \times 10^4 \text{ kg/s}$$

جرم نهایی موشک عبارت است از  $(2.8 \times 10^6 \text{ kg} - 2.1 \times 10^6 \text{ kg})$  یا  $0.7 \times 10^6 \text{ kg}$  می‌توانیم سرعت موشک را در هنگام اتمام سوخت  $(v_b)$  با استفاده از معادله (۱۳۰.۲) تعیین کنیم

$$v_b = -\frac{9.8 \text{ m/s}^2 (2.1 \times 10^6 \text{ kg})}{1.42 \times 10^4 \text{ kg/s}} + 2600 \text{ m/s} \ln \left[ \frac{2.8 \times 10^6 \text{ kg}}{0.7 \times 10^6 \text{ kg}} \right]$$

$$v_b = 2.16 \times 10^3 \text{ m/s}$$

زمانی که تا اتمام سوخت طول می‌کشد،  $t_b$  از معادله (۱۳۱.۲) به صورت زیر به دست می‌آید

$$t_b = \frac{m_0 - m}{\alpha} = \frac{2.1 \times 10^6 \text{ kg}}{1.42 \times 10^4 \text{ kg/s}} = 148 \text{ s}$$

یا در حدود ۲٫۵ دقیقه.

از نتیجه مسئله ۳۸.۲ بهره می‌گیریم تا ارتفاع در هنگام اتمام سوخت،  $y_b$  را به دست آوریم

$$y_b = ut_b - \frac{1}{2}gt_b^2 - \frac{mu}{\alpha} \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) \quad (133.2)$$

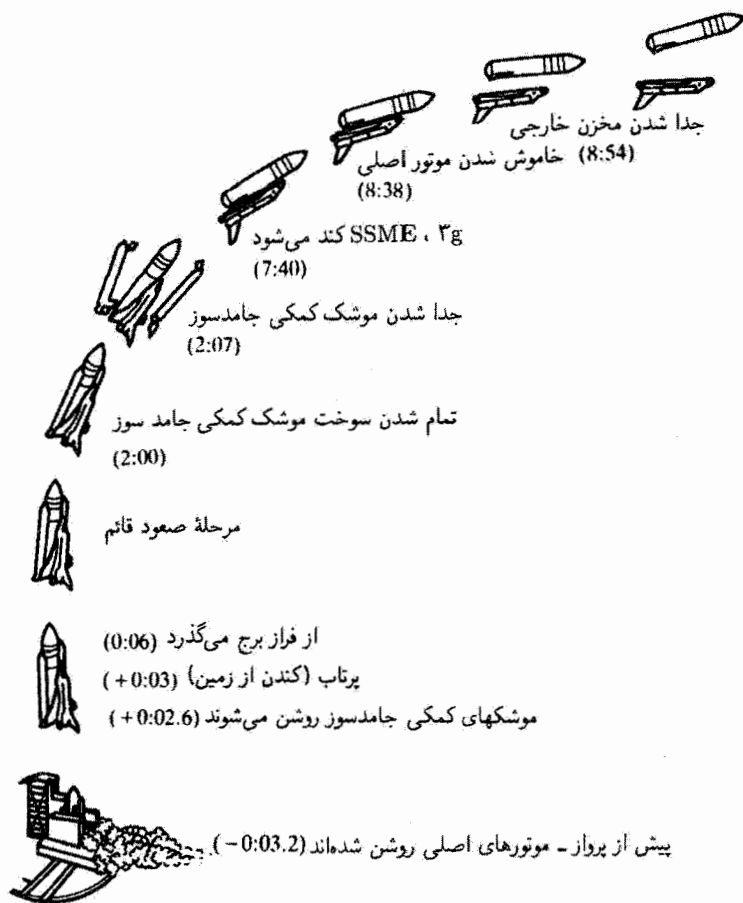
$$y_b = (2600 \text{ m/s})(148 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2) \times (148 \text{ s})^2 - \frac{(0.7 \times 10^6 \text{ kg}) \times (2600 \text{ m/s})}{1.42 \times 10^4 \text{ kg/s}} \ln \left[ \frac{2.8 \times 10^6 \text{ kg}}{0.7 \times 10^6 \text{ kg}} \right]$$

$$y_b = 9.98 \times 10^4 \text{ m} \approx 100 \text{ km}$$

عملاً ارتفاع فقط در حدود دوسوم این مقدار است.

## مثال ۱۵.۲

شاتل فضایی را یک ماشین پرنده شگفت‌انگیز توصیف کرده‌اند. هرچند که این شاتل بسیار پیچیده‌تر از آن است که بتوانیم به‌طور کامل توصیفش کنیم، می‌توانیم پرتاب صعودی آن را به کمک فرضهای گوناگونی بررسی کنیم. دو سیستم اولیه، مدارگرد را از زمین بلند می‌کنند و در مدار قرار می‌دهند. موتورهای اصلی شاتل فضایی (SSME) از سه موتور واقع در داخل مدارگرد تشکیل می‌شود، که هیدروژن مایع و اکسیژن مایع می‌سوزانند، و این سوختها در مخزن بزرگ خارجی انبار شده‌اند که در مرحله کندن از زمین به مدارگرد متصل می‌شود. پیشران اصلی را دو موشک کمکی با



شکل ۱۹.۲ پرتاب و صعود شاتل فضایی، و قرار دادن مدارگرد در مدار. در داخل پراتنز در کنار توضیح مراحل پرتاب، زمان آن مرحله ثبت شده است (به دقیقه و ثانیه).

سوخت جامد (SRB) تأمین می کنند که در دو طرف مخزن خارجی واقع شده اند. هر دو سیستم در خلال دو دقیقه اول پرتاب می سوزند، که پس از این مدت سوخت در SRB مصرف شده است، و جداره های SRB از شاتل جدا می شوند (شکل ۱۹.۲) که بعداً از اقیانوس باز گرفته می شوند. در ۶۵ دقیقه بعدی SSME شاتل فضایی را در حال صعود به بالا نگه می دارد و قسمت اعظم سرعت افقی لازم برای ورود به مدار را تأمین می کند.

گرچه به طور دقیق صحیح نیست، اما فرض می کنیم که موشک در خلال سوختن SRB (۲)

دقیقه) به طور قائم حرکت می‌کند و سرعت و ارتفاع شاتل را محاسبه می‌کنیم. نیز فرض می‌کنیم که در خلال ۶ر۵ دقیقه بعدی پرواز، شاتل نسبت به افق با زاویه  $45^\circ$  حرکت می‌کند، و سرعت مداری آن را محاسبه می‌کنیم.

مشخصه‌های سه قسمت اصلی یک شاتل فضایی برای یک پرواز معمولی عبارت‌اند از<sup>۱</sup> مدارگرد (فضایمای واقعی/هوابیما):

جرم با کلاهک موشک:  $105000 \text{ kg}$

مخزن خارجی (سوخت برای SSME):

مخزن خالی:  $36000 \text{ kg}$

سوخت هیدروژن مایع و اکسیژن مایع:  $7.2 \times 10^5 \text{ kg}$

کل جرم بارگیری شده:  $7.56 \times 10^5 \text{ kg}$

SRB (دو دستگاه):

کل جرم خالی از سوخت:  $1.68 \times 10^5 \text{ kg}$

سوخت جامد:  $1.01 \times 10^6 \text{ kg}$

کل جرم بارگیری شده:  $1.18 \times 10^6 \text{ kg}$

کل جرم شاتل فضایی با سوخت، در هنگام پرتاب  $2.04 \times 10^6 \text{ kg}$

پیشران تمامی SSME:  $5.0 \times 10^6 \text{ N}$

پیشران تمامی SRB:  $23.6 \times 10^6 \text{ N}$

کل پیشران در هنگام پرتاب:  $28.6 \times 10^6 \text{ N}$

هر چند SSME در سطوح مختلف قدرت می‌سوزد تا شتاب را کمتر از  $3g$  نگه دارد (به علت محدودیتهای ساختاری، و نه به علت وجود فضاوردان)، فرض می‌کنیم که SSME در تمام مدت ۸ر۵ دقیقه با آهنگی ثابت می‌سوزد.

حل: در خلال دو دقیقه اول، وقتی هر دو سیستم موتور روشن هستند، اگر پیشران هر دو سیستم را باهم جمع کنیم خیلی به خطا نرفته‌ایم، کل  $dm/dt$  را می‌یابیم، و با بهره‌گیری از معادله (۱۲۳.۲) سرعت میانگین خروجی (گازها)،  $u$ ، را پیدا می‌کنیم.

۱. این مشخصه‌ها از منبع زیر آورده شده‌اند

در ۱۲۰ ثانیه اول:

$$\Delta m(\text{SRB}) = ۱,۰۱ \times ۱۰^۶ \text{kg}$$

$$\Delta m(\text{SSME}) = \left(\frac{۲}{۸,۷۵}\right) ۷,۲ \times ۱۰^۵ \text{kg} = ۱,۷ \times ۱۰^۵ \text{kg}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{۱,۱۸ \times ۱۰^۶ \text{kg}}{۱۲۰ \text{s}} = -۹۸۰۰ \text{kg/s}$$

از معادله (۱۲۷.۲)،  $\alpha = ۹۸۰۰ \text{kg/s}$ .

$$u = \frac{\text{بیشران}}{-dm/dt} = \frac{۲۸,۶ \times ۱۰^۶ \text{N}}{۹۸۰۰ \text{kg/s}} = ۲۹۰۰ \text{m/s}$$

$$m_0 = ۲,۰۴ \times ۱۰^۶ \text{kg}$$

$$\text{سوخت مصرف شده} = ۱,۱۸ \times ۱۰^۶ \text{kg}$$

$$m = ۰,۸۶ \times ۱۰^۶ \text{kg}$$

با استفاده از معادله (۱۳۰.۲) سرعت را در هنگام اتمام سوخت محاسبه می‌کنیم

$$v = -\frac{-۹,۸ \text{m/s}^2 (۱,۱۸ \times ۱۰^۶ \text{kg})}{۹۸۰۰ \text{kg/s}} + ۲۹۰۰ \text{m/s} \ln\left(\frac{۲,۰۴}{۰,۸۶}\right)$$

$$v = ۱۳۲۵ \text{m/s} \approx ۲۹۰۰ \text{MPH}$$

می‌توان ارتفاع را به کمک (۱۳۳.۲) تعیین کرد

$$y = ۲۹۰۰ \text{m/s} (۱۲۰ \text{s}) - \left(\frac{۱}{۲}\right) ۹,۸ \text{m/s}^2 (۱۲۰ \text{s})^2$$

$$- \frac{(۰,۸۶ \times ۱۰^۶ \text{kg}) \times (۲۹۰۰ \text{m/s})}{۹۸۰۰ \text{kg/s}} \ln\left(\frac{۲,۰۴}{۰,۸۶}\right) = ۵۸ \text{km} \approx ۳۶ \text{mile}$$

ارقام واقعی در هنگام اتمام سوخت SRB تقریباً عبارت‌اند از  $v = ۱۳۰۰ \text{m/s}$  و  $y = ۴۵ \text{km}$  در زمانی که جداره‌های SRB جدا و به بیرون پرتاب می‌شوند، شاتل شروع به چرخیدن می‌کند تا برای ورود به مدار آماده شود. در راستای افقی، پرواز چنان صورت می‌گیرد که گویی در فضای آزاد انجام می‌شود (با چشمپوشی از مقاومت هوا، که در ارتفاع  $۵۰ \text{km}$  ناچیز است). بیشران SSME چندان نیست که به شاتل شتاب قائم بدهد، اما این موتورها نمی‌گذارند سرعت شاتل سریعاً کند

شود. اینک میانگین زاویه صعود را  $45^\circ$  می‌گیریم و برای محاسبه سرعت افقی از معادله (۱۱۸.۲) بهره می‌گیریم.

$$m \text{ (بعد از رها شدن جداره‌های SRB)} : 8.6 \times 10^5 \text{ kg}$$

$$\text{تمامی سوخت باقی مانده در مخزن خارجی} : 7.2 \times 10^5 \text{ kg}$$

$$m \text{ (بعد از خاموش شدن SSME)} : 1.4 \times 10^5 \text{ kg}$$

سرعت خروجی (گاز) در SSME با استفاده از معادله (۱۲۳.۲) عبارت است از

$$u = - \frac{\text{بیشران}}{dm/dt}$$

$$\frac{dm}{dt}(\text{SSME}) = - \frac{7.2 \times 10^5 \text{ kg}}{8.5 \text{ min} \frac{60 \text{ s}}{\text{min}}} = -1400 \text{ kg/s}$$

$$u = \frac{-5 \times 10^6 \text{ N}}{-1400 \text{ kg/s}} = 3550 \text{ m/s}$$

$$u_{\text{افقی}} = 3550 \text{ m/s} \cos 45^\circ = 2500 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{افقی}} = 2500 \text{ m/s} \ln \left( \frac{8.6}{1.4} \right)$$

$$= 4500 \text{ m/s} \approx 10000 \text{ MPH}$$

پس از آنکه سوخت مخزن خارجی مصرف شد، SSME خاموش می‌شود و مخزن خارجی جدا و در فضا رها می‌شود. سیستم مانور دهنده مدار، متشکل از دو موتور بیشران  $27000 \text{ N}$ ، سرانجام مدارگرد را در مدار صحیح آن قرار می‌دهد به طوری که سرعتش در حدود  $8000 \text{ m/s}$  و ارتفاعش  $400 \text{ km}$  باشد.

## ۸.۲ محدودیت‌های مکانیک نیوتونی

در این فصل با مفاهیمی چون مکان، زمان، تکانه، و انرژی آشنا شدیم. گفته‌ایم که این کمیتها جملگی قابل اندازه‌گیری هستند و می‌توان با هر دقت مطلوبی، بسته به میزان پیچیدگی ابزار اندازه‌گیری ما، آنها را مشخص کرد. در واقع، تجربه ما با تمامی اشیای بزرگ مقیاس (ماکروسکوپی) این استنباط را تأیید می‌کند. مثلاً، در هر لحظه معین می‌توانیم با دقت بسیار زیادی مکان سیاره‌ای را در مدارش

به دور خورشید تعیین کنیم. یک رشته از این گونه اندازه‌گیریها برای ما این امکان را فراهم می‌آورد که (در اینجا نیز با دقتی بسیار زیاد) سرعت سیاره را در هر مکان معلومی تعیین کنیم.

اما، وقتی می‌خواهیم روی اشیای میکروسکوپی (کوچک مقیاس) اندازه‌گیریهای دقیقی انجام دهیم، شاهد محدودیتی بنیادی در دقت نتایج می‌باشیم. مثلاً، می‌توانیم به‌طور قابل‌تصوری مکان الکترونی را به کمک پراکندگی یک فوتون نور از الکترون، اندازه‌گیری کنیم. سرشت موجی فوتون از اندازه‌گیری دقیق جلوگیری می‌کند، و می‌توانیم مکان الکترون را فقط با عدم قطعیت  $\Delta x$  که به وسعت (یعنی، طول موج) فوتون ارتباط دارد، تعیین کنیم. اما، با همان عمل اندازه‌گیری تغییری را در حالت الکترون به‌وجود آورده‌ایم، زیرا پراکندگی فوتون به الکترون تکانه می‌رساند. مقدار عدم قطعیت این تکانه عبارت است از  $\Delta p$ . حاصلضرب  $\Delta x \Delta p$  معیار دقتی است که با آن می‌توانیم مکان و تکانه الکترون را به‌طور همزمان تعیین کنیم؛  $\Delta x \rightarrow 0$  و  $\Delta p \rightarrow \infty$  بر اندازه‌گیری با همه دقتی که می‌توان تصور کرد، دلالت می‌کند. ورنه‌هایزبرگ (۱۹۲۶-۱۹۰۱)، فیزیکدان آلمانی، در سال ۱۹۲۷ نشان داده‌است که این حاصلضرب همواره باید از یک مقدار کمینه بیشتر باشد.<sup>۱</sup> از این رو، نمی‌توانیم به‌طور همزمان هم مکان و هم تکانه الکترون را با دقتی نامتناهی مشخص کنیم، زیرا اگر  $\Delta x \rightarrow 0$ ، در این صورت برای اینکه اصل عدم قطعیت هایزبرگ برقرار باشد، باید  $\Delta p \rightarrow \infty$ .

کمینه مقدار  $\Delta x \Delta p$  از مرتبه  $10^{-27}$  ergs است. در استانداردهای ماکروسکوپی این مقدار بسیار کوچک است، از این رو در اشیایی با مقیاس آزمایشگاه، انجام اندازه‌گیریهای همزمان مکان و تکانه هیچگونه دشواری عملی در بر ندارد. بنابراین، قوانین نیوتون را چنان می‌توان به کار برد که گویی مکان و تکانه دقیقاً قابل‌تعریف‌اند. اما به اعتبار اصل عدم قطعیت، مکانیک نیوتونی را نمی‌توان در مورد سیستمهای میکروسکوپی اعمال کرد. برای فائق آمدن بر این مشکلات بنیادی در سیستم نیوتونی، برای پرداختن به پدیده‌های میکروسکوپی روش جدیدی ابداع شد، که آغاز آن به سال ۱۹۲۶ بر می‌گردد. بعداً، کارهای اروین شرودینگر (۱۹۶۱-۱۸۸۷)، هایزبرگ، ماکس بورن (۱۹۷۰-۱۸۷۲)، پل دیراک (۱۹۸۴-۱۹۰۲)، و سایرین این رشته علمی نوین را بر شالوده‌ای مستحکم قرار داد. بدینسان، مکانیک نیوتونی کاملاً از عهده توصیف پدیده‌های بزرگ مقیاس بر می‌آید. اما، ما به مکانیکی جدید (مکانیک کوانتومی) نیاز داریم تا فرایندهای حوزه اتمی را به کمک آن تحلیل کنیم. با افزایش ابعاد سیستم، مکانیک کوانتومی به شکل حالت حدی مکانیک نیوتونی تبدیل می‌شود.

۱. این نتیجه در مورد اندازه‌گیری انرژی در طی یک مدت زمان خاص نیز صادق است، در این حالت حاصلضرب عدم قطعیتها عبارت است از  $\Delta E \Delta t$  (که همان ابعاد  $\Delta x \Delta p$  را دارد).

علاوه بر محدودیت‌هایی که مکانیک نیوتونی در هنگام اعمال بر اشیای میکروسکوپی دارد، در طرح نیوتونی مشکل ذاتی دیگری نیز وجود دارد؛ مشکلی که بر مفهوم زمان متکی است. از دیدگاه نیوتونی، زمان مطلق است؛ یعنی، چنین تصور می‌شود که همواره بدون ابهام می‌توان تعیین کرد که آیا دو حادثه همزمان روی داده‌اند و یا یکی پیش از دیگری صورت گرفته است. برای حکم کردن در خصوص توالی زمانی رویدادها، باید دو ناظر این رویدادها در ارتباط همزمان باشند؛ این ارتباط یا باید از طریق سیستمی از سیگنال‌ها فراهم آید یا دو ساعت دقیقاً همزمان در نقاط مشاهده مستقر شود. اما همزمان کردن دقیق دو ساعت مستلزم دانستن زمان انتقال سیگنال در یک راستا از یک ناظر به ناظر دیگر است. (اگر دو ساعت همزمان داشته باشیم می‌توانیم این کار را به انجام برسانیم، اما این یک بحث تئوریک است.) اما، وقتی که واقعاً سرعت سیگنال‌ها را اندازه‌گیری می‌کنیم، همواره سرعت میانگین انتشار را در راستاهای مخالف به دست می‌آوریم. و طرح کردن آزمایشی که سرعت را فقط در یک راستا اندازه‌گیری کند به طور اجتناب‌ناپذیری به وارد کردن فرضیه‌های جدید می‌انجامد که پیش از آزمایش نمی‌توانیم درستی آنها را تحقیق کنیم.

می‌دانیم که ارتباط همزمان به وسیله انتقال سیگنال محال است: بر هم کنش بین اجسام مادی با سرعت محدودی منتشر می‌شود، و باید نوعی بر هم کنش روی دهد تا سیگنالی منتقل شود. حداکثر سرعت انتشار هر سیگنال عبارت است از سرعت نور در فضای آزاد (خلا):  $c \cong 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$ . مشکلات برقراری مقیاسی زمانی بین نقاط جداگانه ما را به آنجا سوق می‌دهد که معتقد شویم زمان، رویهمرفته، مطلق نیست و فضا و زمان به نحوی با هم در یک ارتباط تنگاتنگ‌اند. راه حل این معضل را در سالهای ۱۹۰۴ تا ۱۹۰۵ هنریک لورنتس (۱۸۵۳-۱۹۲۸)، ریمون پوانکاره (۱۸۵۴-۱۹۱۲)، و آلبرت اینشتین (۱۸۷۹-۱۹۵۵) یافتند که در نظریه نسبیت خاص تجسم پیدا کرد (فصل ۱۴ را ببینید).

بنابراین مکانیک نیوتونی در مواجهه با فواصل کوتاه یا سرعت‌های زیاد دستخوش محدودیت‌های بنیادی است. مکانیک نیوتونی ممکن است در بررسی اشیای پرجرم و یا فواصل بسیار طولانی هم دچار مشکل شود. محدودیت عملی نیز وقتی پیش می‌آید که تعداد اجسام تشکیل دهنده

۱. در کنفرانس‌های بین‌المللی اخیر سرعت نور (c) را عملاً  $299,792,458 \text{ m/s}$  تعیین کرده‌اند تا مقایسه سایر اندازه‌گیری‌ها را به صورت استانداردتری در آورند. در حال حاضر متر، بنا بر تعریف، عبارت است از طول مسیری که نور در خلا در مدت زمان  $1/299,792,458$  ثانیه می‌پیماید. نگاه کنید به:

سیستم بسیار زیاد باشد. در فصل ۷ خواهیم دید که برای حرکت سیستمی با بیش از دو جسم برهم‌کنش‌دار حتی در حالت نسبتاً ساده برهم‌کنش گرانشی، نمی‌توان در شکل بسته به راه حلی کلی دست یافت. برای محاسبه حرکت در یک سیستم سه جسمی، باید به عملیات تقریب عددی متوسل شویم. هر چند که علی‌الاصول با این روش می‌توان به هر تقریب مطلوبی دست یافت، اما کاری که باید برای آن انجام شود بسیار زیاد است. حرکت در سیستمهای حتی پیچیده‌تر (مثلاً سیستم متشکل از تمامی اجرام عمده منظومه شمسی) را می‌توان به همین طریق محاسبه کرد، اما این طرز کار چنان به سرعت بیش از اندازه بدقواره می‌شود که نمی‌توان آن را برای هر سیستم بزرگی به کار بست. محاسبه حرکت تک‌تک مولکولها، مثلاً در یک سانتی‌متر مکعب گاز شامل تقریباً  $10^{19}$  مولکول، به وضوح امری محال است. یکی از روشهای موفق محاسبه خواص میانگین چنین سیستمهایی در نیمه دوم قرن نوزدهم به وسیله بولتزمن، ماکسول، گیس، لیوویل، و سایرین، به وجود آمد. این روشها امکان محاسبه دینامیک سیستمها را از نظریه احتمال فراهم آوردند و دانش مکانیک آماری شکل گرفت. در بخش ۱۳.۶ در ارتباط با فرمولبندی مفاهیم آماری در مکانیک مطالبی خواهیم آورد.

### مسائل

- ۱.۲ فرض کنید نیروی وارد بر ذره‌ای به یکی از صورتهای زیر قابل فاکتورگیری باشد: الف)  $F(x_i, \dot{x}_i) = f(x_i)g(\dot{x}_i)$  ب)  $F(x_i, t) = f(x_i)g(t)$  ج)  $F(x_i, \dot{x}_i) = f(x_i)g(\dot{x}_i)$  معادلات حرکت برای کدامیک از این حالتها قابل انتگرالگیری اند؟
- ۲.۲ ذره‌ای به جرم  $m$  تحت تأثیر نیروی  $\mathbf{F}$  بر سطح یک کره به شعاع  $R$  حرکت می‌کند. معادله حرکت را بنویسید.
- ۳.۲ اگر پرتابه‌ای با سرعت اولیه  $v_0$  و در جهتی که با افق زاویه  $\alpha$  می‌سازد، از مبدأ دستگاه مختصات شلیک شود، زمان لازم را برای اینکه پرتابه خطی را قطع کند که از مبدأ می‌گذرد و با افق زاویه  $\alpha < \beta$  می‌سازد محاسبه کنید.
- ۴.۲ پرتابه‌ای با سرعت  $v_0$  چنان شلیک می‌شود که از دو نقطه بگذرد؛ این دو نقطه هر دو به فاصله  $h$  بر فراز افق قرار دارند. نشان دهید که اگر توپ برای بیشینه برد تنظیم شود، فاصله آن دو نقطه باید به قرار زیر باشد:

$$d = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 4gh}$$



۵.۲ فرض کنید پرتابه‌ای در یک میدان گرانشی ثابت به‌طور قائم پرتاب می‌شود. برای سرعت‌های اولیهٔ یکسان، زمان مورد نیاز برای رسیدن به بیشینه ارتفاع را مقایسه کنید: الف) به ازای نیروی مقاومت صفر، ب) به‌ازای نیروی مقاوم متناسب با سرعت لحظه‌ای پرتابه.

۶.۲ ذره‌ای در میدان گرانشی ثابت با سرعت اولیه  $v_0$  به‌طور قائم به بالاسو پرتاب می‌شود. نشان دهید که، اگر نیرویی ترمزی متناسب با مجذور سرعت لحظه‌ای وجود داشته باشد، در این صورت سرعت ذره در هنگام بازگشت به مکان اولیه عبارت است از

$$\frac{v_0 v_1}{\sqrt{v_0^2 + v_1^2}}$$

که  $v_1$  سرعت حدی است.

۷.۲ ذره‌ای به جرم  $m$  را در نظر بگیرید که حرکتش در میدان گرانشی ثابت از حالت سکون شروع می‌شود. اگر با یک نیروی مقاوم متناسب با مجذور سرعت (یعنی،  $kmv^2$ ) مواجه شود، نشان دهید مسافتی را که ذره با شتاب سقوط می‌کند،  $s$ ، تا سرعتش از  $v_0$  به  $v_1$  برسد، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$s(v_0 \rightarrow v_1) = \frac{1}{2k} \ln \left[ \frac{g - kv_1^2}{g - kv_0^2} \right]$$

۸.۲ پرتابه‌ای با سرعت اولیه  $v_0$  که لولهٔ توپ پرتابگر آن با افق زاویهٔ  $\alpha$  می‌سازد، به سوی بالای تپه‌ای با شیب  $\beta$  ( $\alpha > \beta$ ) شلیک می‌شود. الف) پرتابه چقدر بالاتر روی تپه فرود می‌آید؟ ب) با چه زاویهٔ  $\alpha$  برد بیشینه خواهد شد؟ ج) بیشینهٔ برد چقدر است؟

۹.۲ ذره‌ای تحت تأثیر نیرویی ترمزی مساوی با  $mk(v^2 + a^2v)$  در داخل یک محیط حرکت می‌کند، که در آن محیط  $k$  و  $a$  ثابت‌اند. نشان دهید که به‌ازای هر مقدار سرعت اولیه ذره هرگز مسافتی بیشتر از  $\pi/2ka$  را طی نمی‌کند و ذره فقط به‌ازای  $t \rightarrow \infty$  به سکون می‌رسد.

۱۰.۲ قطره آبی که در جو سقوط می‌کند کروی شکل است. همچنان‌که این قطره از داخل ابر می‌گذرد با آهنگی متناسب با مساحت سطح مقطعش به جرمش اضافه می‌شود. فرض کنید قطره با شعاع اولیه  $r_0$  و با سرعت  $v_0$  وارد ابر می‌شود. فرض کنید هیچ نیروی مقاومی وجود ندارد و نشان دهید: الف) شعاع به‌طور خطی با زمان افزایش می‌یابد، و ب) اگر  $r_0$  چشم‌پوشیدنی باشد در این صورت سرعت در داخل ابر به‌طور خطی با زمان افزایش پیدا می‌کند.

۱۱.۲ ذره‌ای به جرم  $m$  از سطح شیبداری تحت تأثیر گرانی به پایین می‌لغزد. اگر نیروی  $f = kmv^2$  در برابر حرکت مقاومت کند، نشان دهید که زمان مورد نیاز برای اینکه پس از شروع

حرکت از سکون مسافت  $d$  را طی کند، عبارت است از

$$t = \frac{\cosh^{-1}(e^{kd})}{\sqrt{kg \sin \theta}}$$

که  $\theta$  زاویه شیب سطح شیبدار است.

۱۲.۲ ذره‌ای به‌سوی بالای یک سطح شیبدار به زاویه  $\alpha$  نسبت به افق، با سرعت اولیه  $v$  پرتاب می‌شود. حرکت را بدون اصطکاک فرض کنید و زمان لازم برای برگشتن ذره به مکان اولیه‌اش را بیابید.

۱۳.۲ اگر پرتابه‌ای طوری حرکت کند که فاصله‌اش از نقطه پرتاب همواره رو به افزایش باشد، بیشینه زاویه‌ای را در بالای افق پیدا کنید که ذره می‌توانست تحت آن پرتاب شده‌باشد. (فرض کنید مقاومت هوا وجود ندارد.)

۱۴.۲ از توپی گلوله‌ای به جرم  $10 \text{ kg}$ ، از نوعی که منحنیهای شکل ۳.۲ در مورد آن صادق‌اند، شلیک می‌شود. سرعت دهانه‌ای  $140 \text{ m/s}$  است. لوله توپ چه زاویه‌ای داشته باشد تا به هدفی اصابت کند که در همان صفحه افق توپ و در فاصله  $1000$  متری آن واقع است؟ نتایج خود را با نتایجی که در حالت بدون بازدارندگی به دست می‌آید، مقایسه کنید.

۱۵.۲ مستقیماً نشان دهید که آهنگ زمانی تغییر تکانه زاویه‌ای حول مبدأ برای پرتابه‌ای که از مبدأ شلیک شود، با گشتاور نیرو حول همان مبدأ برابر است.

۱۶.۲ حرکت ذره باردار در یک میدان الکترومغناطیسی را، برای نیروی وارد بر ذره در چنین میدانی، می‌توان از معادله لورنتس<sup>۱</sup> به دست آورد. اگر بردار میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  و بردار القای مغناطیسی  $\mathbf{B}$  باشد، در این صورت نیروی وارد بر ذره به جرم  $m$  که بار  $e$  را حمل می‌کند و سرعتش  $\mathbf{v}$  است (برحسب یکاهای گاوسی) عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

که  $c$  سرعت نور است و در اینجا فرض می‌کنیم که  $v \ll c$ . الف) اگر هیچ نیروی الکتریکی وجود نداشته باشد و اگر ذره در راستای خطوط شار مغناطیسی

۱. مثلاً نگاه کنید به:

وارد میدان مغناطیسی شود، نشان دهید که مسیر آن دایره‌ای است به شعاع

$$r = \frac{cmv}{eB} = \frac{v}{\omega_c}$$

که  $\omega_c \equiv eB/mc$  بسامد سیکلوترونی است.

ب) محور  $z$  را در راستای  $\mathbf{B}$  بگیرید و فرض کنید صفحه  $y-z$  همان صفحه حاوی  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{E}$  است. در این صورت

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{E} = E_y\mathbf{e}_y + E_z\mathbf{e}_z$$

نشان دهید که مؤلفه  $z$  حرکت از رابطه زیر به دست می‌آید

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m} t^2$$

که

$$z(0) \equiv z_0 \quad \text{و} \quad \dot{z}(0) \equiv \dot{z}_0$$

ج) با ادامه محاسبات خود عبارتهای مربوط به  $\dot{x}(t)$  و  $\dot{y}(t)$  را به دست آورید. نشان دهید که میانگینهای زمانی این مؤلفه‌های سرعت عبارت‌اند از

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{cE_y}{B}, \quad \langle \dot{y} \rangle = 0$$

نشان دهید که حرکت تناوبی است و آنگاه میانگین را در یک دوره تناوب کامل به دست آورید.

د) از معادلات سرعت که در (ج) یافتید انتگرال بگیرید و (با شرایط اولیه  $x(0) = -A/\omega_c$ )

$$\dot{x}(0) = cE_y/B, \quad \dot{y}(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

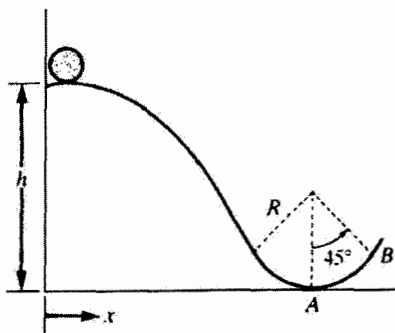
$$x(t) = \frac{-A}{\omega_c} \cos \omega_c t + \frac{cE_y}{B} t, \quad y(t) = \frac{A}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1)$$

این عبارتها معادلات پارامتری یک چرخک‌نا هستند. تصویر مسیر بر صفحه  $x-y$  را برای حالت‌های (۱)  $A > |cE_y/B|$ ، (۲)  $A < |cE_y/B|$  و (۳)  $A = |cE_y/B|$  ترسیم کنید. (حالت آخری یک چرخزاد یا سیکلوئید را می‌دهد.)

۱۷.۲ ذره‌ای به جرم  $m$  تحت تأثیر نیروی یک بعدی  $F(t) = kte^{-\alpha t}$  قرار دارد، که در آن  $k$  ثابت است و  $\alpha = 0.5 \text{ s}^{-1}$ . اگر ذره در ابتدا در حال سکون باشد، به کمک یک کامپیوتر مکان، سرعت، و شتاب ذره را به صورت تابعی از زمان محاسبه و منحنی تغییرات آن را ترسیم کنید.

۱۸.۲ اسکی بازی به وزن  $90\text{ kg}$  از حال سکون از تپه‌ای به شیب  $17^\circ$  شروع به پایین رفتن می‌کند. او  $10^\circ$  متر در طول شیب تپه به پایین اسکی می‌کند و آنگاه به سطح افقی برف می‌رسد و  $70$  متر هم آزادانه حرکت می‌کند تا بایستد. ضریب اصطکاک جنبشی بین اسکیها و برف را بیابید. اسکی باز در پایین تپه چه سرعتی دارد؟

۱۹.۲ گوی صافی به جرم  $m$  از یک شیب بدون اصطکاک به پایین می‌غلند (شکل ۲.الف). این گوی در ارتفاع  $h$  در بالای کف حلقه رها می‌شود.



شکل ۲.الف

(الف) مسیر شیبدار در قسمت کف (نقطه  $A$ ) چه نیرویی بر گوی وارد می‌آورد؟

(ب) نیرو وارد از طرف مسیر در نقطه  $B$  چقدر است؟

(ج) با چه سرعتی گوی مسیر را ترک می‌کند؟

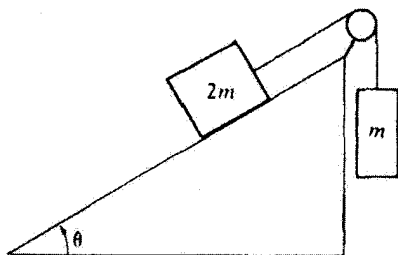
(د) این گوی در چه فاصله‌ای از نقطه  $A$  روی سطح هم‌تراز زمین فرود می‌آید؟

(ه) منحنی انرژی پتانسیل گوی،  $U(x)$ ، را ترسیم کنید. انرژی کل را روی این منحنی مشخص کنید.

۲۰.۲ دانشجویی یک بادکنک پر از آب را از بام بلندترین ساختمان شهر به پایین می‌اندازد و سعی می‌کند به هم اطاقش (که به سرعت حرکت می‌کند) اصابت کند. او فوراً پناه می‌گیرد اما صدای شلپ آب را  $4.21$  ثانیه بعد از انداختن بادکنک می‌شنود. اگر سرعت صوت  $331\text{ m/s}$  باشد، با چشمپوشی از مقاومت هوا ارتفاع ساختمان را بیابید.

۲۱.۲ راننده اتومبیلی که از یک شیب  $8\%$  به پایین در حرکت است پا روی ترمز می‌کوبد و قبل از اینکه با یک اتومبیل متوقف برخورد کند،  $30$  متر سر می‌خورد. یک وکیل از کارشناسی می‌خواهد که ضریب اصطکاک جنبشی بین چرخها و جاده را اندازه بگیرد، که او این کمیت را  $\mu_k = 0.45$  تعیین می‌کند. آیا این وکیل حق دارد راننده را به تجاوز از سرعت مجاز  $25$  مایل بر ساعت متهم کند؟ توضیح دهید.

۲۲.۲ دو قطعه با جرمهای نامساوی به وسیلهٔ ریسمانی که از روی یک قرقره صاف می‌گذرد، به هم وصل شده‌اند (شکل ۲.۲). اگر ضریب اصطکاک جنبشی  $\mu_k$  باشد، زاویهٔ شیب  $\theta$  چقدر باشد تا این جرمها با سرعت ثابت حرکت کنند؟



شکل ۲.۲

۲۳.۲ در مثال ۱۰.۲ سرعت اولیهٔ ذرهٔ باردار ورودی در امتداد محور  $x$  مؤلفه‌ای نداشت. نشان دهید که، حتی اگر مؤلفهٔ  $x$  هم می‌داشت، در حرکت نهایی ذره تأثیری نداشت و فقط شعاع مارپیچ تغییر می‌کرد.

۲۴.۲ ذره‌ای از حالت سکون ( $y = 0$ ) رها می‌شود و تحت تأثیر گرانی و مقاومت هوا سقوط می‌کند. رابطهٔ میان  $v$  و مسافت سقوط،  $y$ ، را پیدا کنید در صورتی که مقاومت هوا: الف) برابر  $\alpha v$  و ب) برابر  $\beta v^2$  باشد.

۲۵.۲ سرعت ذره‌ای به جرم  $m$  عبارت است از  $v = \alpha/x$ ، که  $x$  تغییر مکان ذره است. نیروی عامل این حرکت،  $F(x)$ ، را بیابید.

۲۶.۲ توپی بر فراز پرتگاهی به ارتفاع  $h$  و مشرف بر دره‌ای که از کف آن رودخانه می‌گذرد، مستقر است. اگر سرعت دهانه‌ای  $v$ ، باشد، زاویهٔ لولهٔ توپ را چنان بیابید که بیشینه برد افقی آن از عرض دره درگذرد.

۲۷.۲ قایقی با سرعت اولیهٔ  $v$  در خلاف جهت جریان رودخانه به آب انداخته می‌شود. جریان مخالف رودخانه با وارذ آوردن نیروی  $F = -\alpha e^{\beta v}$  از سرعت آن می‌کاهد. الف) عبارتی برای سرعت  $v(t)$  بیابید. ب) زمان و ج) مسافتی را بیابید که قایق تا هنگام توقف می‌پیماید.

۲۸.۲ سرعت ذره‌ای به جرم  $m$  به صورت  $v(x) = \alpha x^{-n}$  بافاصله تغییر می‌کند. فرض کنید در  $t = 0$ ،  $v(x=0) = 0$ . الف) نیروی عامل حرکت،  $F(x)$ ، را بیابید. ب)  $x(t)$  و ج)  $F(t)$  را تعیین کنید.

۲۹.۲ قطاری با سرعت ثابت  $u$  در امتداد خط آهن حرکت می‌کند. یک مسافر قطار توپی به جرم

$m$  را با سرعت  $v$  نسبت به خودش، به جلو پرتاب می‌کند. الف) انرژی جنبشی که توپ کسب می‌کند و به وسیله شخصی در قطار اندازه‌گیری می‌شود، چقدر است؟ ب) و این انرژی از نظر شخصی که در کنار خط آهن ایستاده است چقدر است؟ ج) این مسافر برای پرتاب توپ چقدر کار انجام می‌دهد؟ د) قطار چقدر کار انجام می‌دهد؟

۳۰.۲ ذره‌ای در مداری دو بعدی با مشخصات زیر حرکت می‌کند

$$x(t) = A(2\alpha t - \sin \alpha t)$$

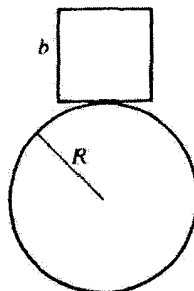
$$y(t) = A(1 - \cos \alpha t)$$

الف) شتاب مماس،  $a_t$  و شتاب قائم،  $a_n$  را به صورت تابعی از زمان بیابید. ب) تعیین کنید در چه زمانهایی  $a_n$  بر روی مدار بیشینه است.

۳۱.۲ ذره‌ای تحت تأثیر نیروی  $F = -kx + kx^2/\alpha^2$  واقع است، که  $k$  و  $\alpha$  مقادیر ثابت‌اند.

$U(x)$  را تعیین و درباره حرکت بحث کنید. وقتی  $E = (1/4)k\alpha^2$ ، چه اتفاقی می‌افتد؟

۳۲.۲ مکعب صلبی با چگالی یکنواخت و به یالهای  $b$  بر بالای یال استوانه‌ای به شعاع  $R$  در حال تعادل است (شکل ۲.ج). سطوح چهاروجه مکعب با محور استوانه موازیند. تماس بین مکعب و استوانه کاملاً ناهموار است. تحت چه شرایطی این تعادل پایدار یا ناپایدار است؟



شکل ۲.ج

۳۳.۲ توضیح دهید که وقتی  $(d^2U/dx^2) = 0$ ، چگونه تعیین می‌کنیم تعادلی پایدار یا ناپایدار است.

۳۴.۲ معیاری بنویسید که به اعتبار آن، وقتی تمام مشتقها تا مرتبه  $n$  صفر است؛ یعنی  $(d^n U/dx^n) = 0$ ، تعیین کنیم یک تعادل پایدار است یا ناپایدار؟

۳۵.۲ ذره‌ای را در نظر بگیرید که در ناحیه  $x > 0$  تحت تأثیر پتانسیل زیر حرکت می‌کند

$$U(x) = \frac{U_0}{x}(1 + ax^2)$$

که  $U_0 > 0$ . نقاط تعادل را بیابید و تعیین کنید آیا این نقاط بیشینه‌اند یا کمینه؟

۳۶.۲ موشکی با بیرون فرستادن جرم در فضای آزاد از سکون به حرکت در می‌آید. تکانه آن در چه کسری از جرم اولیه‌اش بیشینه است؟

۳۷.۲ در موشکی با ساخت بسیار مطلوب نسبت جرم،  $(m_0/m)$ ، برابر است با  $10$ . سوخت جدیدی تولید شده که سرعت خروجی آن  $4500 \text{ m/s}$  است. این سوخت با آهنگی ثابت در مدت  $1000$  ثانیه می‌سوزد. بیشینه سرعت این موشک تک مرحله‌ای را محاسبه کنید؛ شتاب گرانی را ثابت فرض می‌کنیم. اگر سرعت گریز ذره‌ای از زمین  $11.3 \text{ km/s}$  باشد، آیا می‌شود موشک تک مرحله‌ای مشابهی ساخت که بتواند به ماه برسد؟

۳۸.۲ موشکی تک مرحله‌ای را در نظر بگیرید که در حال کنده شدن از زمین است. نشان دهید که ارتفاع آن در هنگام اتمام سوخت از معادله  $(133.2)$  به دست می‌آید. این موشک پس از اتمام سوخت چه مسافتی را طی می‌کند؟

۳۹.۲ جرم اولیه موشکی  $m$  و آهنگ سوختن سوخت آن  $\alpha$  است [معادله  $(127.2)$ ]. کمینه سرعت خروجی (گاز) را که به موشک اجازه می‌دهد بلافاصله بعد از روشن شدن از جا کنده شود، پیدا کنید.

۴۰.۲ جرم اولیه موشکی  $10^4 \text{ kg}$  است و سوختش را با آهنگ  $250 \text{ kg/s}$  می‌سوزاند. سرعت خروجی (گاز) عبارت است از  $2500 \text{ m/s}$ . اگر موشک از حالت سکون روی زمین به صورت قائم صعود کند، چقدر پس از آنکه موتورهایش روشن می‌شوند طول می‌کشد تا از زمین کنده شود؟ در طراحی این موشک چه خطایی صورت گرفته است؟

۴۱.۲ موشکی چند مرحله‌ای را با  $n$  مرحله در نظر بگیرید، سرعت خروجی (گاز) هر یک از این مرحله‌ها  $u$  است. نسبت جرم هر مرحله در هنگام اتمام سوخت یکسان است  $(k = m_i/m_f)$  نشان دهید که سرعت نهایی مرحله  $n$ ام عبارت است از  $n \ln k$ .

۴۲.۲ برای اجرای یک عملیات نجات، یک سفینه ماه‌نشین نیاز دارد که برفراز سطح ماه، با شتاب گرانشی  $g/6$ ، در حال پرواز بایستد. سرعت خروجی (گاز)  $2000 \text{ m/s}$  است، اما میزان سوخت آن فقط  $20\%$  کل سوختی است که باید مصرف شود. این سفینه چه مدتی بر فراز سطح ماه می‌تواند در پرواز ایستاده باشد؟

## نوسانها

## ۱.۳ مقدمه

با مطالعه حرکت نوسانی ذره‌ای که مقید به حرکت در یک بعد است، این فصل را آغاز می‌کنیم. فرض می‌کنیم یک وضعیت تعادل پایدار برای این ذره وجود دارد. و این نقطه را مبدأ می‌گیریم (بخش ۶.۲). اگر ذره از مبدأ جابه‌جا شود (در هر جهتی)، نیرویی می‌خواهد ذره را به مکان اولیه خود بازگرداند. این نیرو به‌طور کلی تابعی پیچیده از جابه‌جایی و شاید از سرعت ذره یا حتی تابعی از مشتق زمانی مرتبه بالاتری از مختصه مکان باشد. در اینجا فقط حالت‌هایی را از نظر می‌گذرانیم که در آنها نیروی بازگرداننده  $F$  فقط تابعی از جابه‌جایی باشد:  $F = F(x)$ .

فرض می‌کنیم تابع  $F(x)$  که نیروی بازگرداننده را توصیف می‌کند دارای مشتقات پیوسته در همه مراتب باشد به طوری که بتوان آن را به صورت سری تایلور بسط داد:

$$F(x) = F_0 + x \left( \frac{dF}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2} x^2 \left( \frac{d^2 F}{dx^2} \right)_0 + \dots \quad (۱.۳)$$

که  $F_0$  مقدار  $F(x)$  در مبدأ ( $x = 0$ )، و  $(d^n F/dx^n)$  مقدار مشتق  $n$ ام در مبدأ است. از آنجا که مبدأ نقطه تعادل اختیار شده است، باید  $F_0$  صفر شود. پس، اگر توجه خود را به جابه‌جایی‌های ذره معطوف کنیم که به اندازه کافی کوچک‌اند، می‌توانیم از همه جمله‌های شامل  $x^2$  و توانهای



بالتر  $x$  چشمپوشی کنیم. بنابراین، رابطه تقریبی زیر را داریم

$$F(x) = -kx \quad (۲.۳)$$

که در آن:  $k \equiv -(dF/dx)$ . از آنجا که راستای نیروی بازگرداننده همواره به سوی وضعیت تعادل (مبدأ) است، مشتق  $(dF/dx)$  منفی، و بنابراین  $k$  ثابتی مثبت است. فقط توان اول جابه‌جایی در  $F(x)$  می‌ماند، بنابراین نیروی بازگرداننده در این تقریب یک نیروی خطی است.

سیستمهای فیزیکی که به کمک معادله (۲.۳) توصیف می‌شوند، از قانون هوک پیروی می‌کنند.<sup>۱</sup> یکی از رده‌های فرایندهای فیزیکی که می‌توان آن را با بهره‌گیری از قانون هوک مورد بحث قرار داد، رده‌ای متضمن تغییر شکلهای کشسان است. مادام که جابه‌جاییها کوچک بوده و از محدوده‌های کشسانی تجاوز نکنند، می‌توان برای مسائل مربوط به فنرهای کشیده، فنرهای کشسان، خمیدگی تیرآنها، و مانند آنها، از یک نیروی بازگرداننده خطی بهره گرفت. اما باید تأکید کنیم که چنین محاسباتی تقریبی‌اند، زیرا اساساً هر نیروی بازگرداننده واقعی در طبیعت نسبت به نیروی ساده‌ای که قانون هوک آن را بیان می‌کند پیچیده‌تر است. نیروهای خطی فقط تقریبهای مفیدی به شمار می‌آیند، و اعتبارشان به حالتی محدود می‌شود که دامنه نوسانها کوچک باشند (مسئله ۸.۳ را ببینید).

نوسانهای میرا، که معمولاً ناشی از اصطکاک‌اند، آن نوعی از نوسانهایند که تقریباً همیشه در طبیعت روی می‌دهند. در این فصل چگونگی طراحی سیستم میرایی را که کارایی داشته باشد، می‌آموزیم. اگر مکانیسمی با آهنگی مساوی آهنگ جذب انرژی به وسیله محیط میراکننده از یک منبع خارجی سیستم را تغذیه کند، می‌توان با میراشدن نوسانها مقابله کرد. حرکتی از این نوع را نوسانهای واداشته می‌گویند. این نوسانها، که غالباً سینوسی‌اند، در ارتعاشات مکانیکی و نیز سیستمهای الکتریکی کاربردهای مهمی دارند.

اهمیت فراوان پدیده‌های نوسانی در بسیاری از حوزه‌های فیزیک و مهندسی، ایجاب می‌کند که درباره سیستمهای نوسانی خطی به بحث جامعی بپردازیم. اغلب اوقات استفاده از تقریب خطی در تحلیل چنین سیستمهایی رواست. سودمندی این تحلیلها تا حد زیادی ناشی از این واقعیت است که معمولاً می‌توانیم روشهای تحلیلی را به‌کارگیریم.

اما، هر گاه بر افشای پدیده‌ها با دقت بیشتری اصرار داشته باشیم، به‌طور کلی طبیعت بر غیرخطی بودن آنها پافشاری می‌کند. ما در گذار از سیستمهای خطی به غیر خطی، باید قدری

۱. معادل این قانون نیرو را اصلاً هوک در سال ۱۶۷۶ به صورت یک رمز نویسی لاتینی CEIINOSSTUV اعلام کرد. هوک بعداً آن را ترجمه کرد: *ut tensio sic vis* (کش آمدگی با نیرو متناسب است).

ملاحظه کاری را مراعات کنیم، زیرا بسیاری از نتایج سودمند تحلیل خطی در حوزه سیستمهای غیر خطی قابل اعمال نیستند. برای بررسی این سیستمهای غیر خطی، چندین روش ابداع شده است، در پایان این فصل در خصوص تعدادی از این روشها بحث خواهیم کرد.

### ۲.۳ نوسانگر هماهنگ ساده

می‌توان معادله حرکت نوسانگر هماهنگ ساده را از طریق جاگذاری نیروی قانون هوک در معادله نیوتونی  $F = ma$  به دست آورد. بدینسان

$$-kx = m\ddot{x} \quad (۳.۳)$$

با تعریفی به شکل زیر

$$\omega_0^2 \equiv k/m \quad (۴.۳)$$

معادله (۳.۳) چنین می‌شود

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad (۵.۳)$$

مطابق نتایج پیوست ج، جواب این معادله را می‌توان به یکی از دو صورت زیر بیان کرد

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t - \delta) \quad (۶.۳ \text{ الف})$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi) \quad (۶.۳ \text{ ب})$$

که، البته، فازهای  $\delta$  و  $\phi$  به اندازه  $\pi/2$  باهم اختلاف دارند. (روایت دیگری از زاویه فاز متناظر است با تغییر مبدأ مقیاس زمان، یعنی لحظه‌ای که آن را با  $t = 0$  می‌نمایانیم.) معادلات (۶.۳) رفتار شناخته شده سیوسی جابه‌جایی نوسانگر هماهنگ ساده را نمایش می‌دهند.

می‌توانیم به طریق زیر به رابطه میان انرژی کل نوسانگر و دامنه حرکت آن دست پیدا کنیم. با بهره‌گیری از معادله (۶.۳ الف) برای  $x(t)$ ، انرژی جنبشی را به طریق زیر پیدا می‌کنیم

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t - \delta) \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t - \delta) \end{aligned} \quad (۷.۳)$$

با محاسبه کار لازم برای جابه‌جا کردن ذره به اندازه مسافت  $x$ ، می‌شود انرژی پتانسیل را به دست آورد. مقدار نمودار  $dW$ ، که برای حرکت دادن ذره به اندازه  $dx$  لازم است تا در برابر نیروی بازگرداننده  $F$  انجام گیرد، عبارت است از

$$dW = -Fdx = kx dx \quad (۸.۳)$$

از  $x = 0$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم و کار انجام شده روی ذره را با انرژی پتانسیل برابر می‌گیریم، خواهیم داشت

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (۹.۳)$$

در این صورت

$$U = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega \cdot t - \delta) \quad (۱۰.۳)$$

عبارت‌های مربوط به  $T$  و  $U$  را ترکیب می‌کنیم تا انرژی کل،  $E$ ، به دست آید

$$E = T + U = \frac{1}{2} kA^2 \quad (۱۱.۳)$$

بنابراین، انرژی کل با مجذور دامنه متناسب است؛ این حکم یکی از نتایج کلی سیستم‌های خطی به شمار می‌آید. همچنین توجه کنید که  $E$  از زمان مستقل است؛ یعنی، انرژی پایسته است. (البته، پایستگی انرژی تضمین شده است، زیرا سیستمی را بدون اتلاف‌های اصطکاکی یا سایر نیروهای خارجی در نظر گرفته‌ایم.)

دوره تناوب حرکت،  $\tau$ ، بنا بر تعریف عبارت است از فاصله زمانی بین تکرارهای پی‌درپی مکان و جهت حرکت ذره. این فاصله زمانی وقتی پیش می‌آید که شناسه سینوس در معادله (۶.۳) الف) به اندازه  $2\pi$  افزایش می‌یابد

$$\omega \cdot \tau = 2\pi \quad (۱۲.۳)$$

یا

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (۱۳.۳)$$

به کمک این عبارت، و نیز معادله (۶.۳ الف)، روشن خواهد شد که  $\omega$  بسامد زاویه‌ای حرکت را می‌نمایاند، که به طریق زیر با بسامد،  $\nu$ ، رابطه دارد<sup>۱</sup>

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۱۴.۳)$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۱۵.۳)$$

توجه داشته باشید که دوره تناوب نوسانگر هماهنگ ساده از دامنه (یا انرژی کل) مستقل است؛ سیستمی را که نمایانگر این خاصیت باشد تک زمان می‌گویند.

### ۳.۳ نمودارهای فاز

در صورتی که دو کمیت — یعنی جابه‌جایی  $x(t)$  و سرعت  $\dot{x}(t)$  — معلوم باشند، حالت حرکت نوسانگر تک بعدی، مانند حالتی که در بخشهای پیشین مورد بحث قرار گرفت، به‌طور کامل به صورت تابعی از زمان مشخص خواهد شد. (به این دو کمیت به آن علت نیاز داریم که معادله دیفرانسیل حرکت از مرتبه دوم است.) می‌توانیم کمیت‌های  $x(t)$  و  $\dot{x}(t)$  را مختصات نقطه‌ای در فضایی دو بعدی، به نام فضای فاز، بدانیم. (در دو بعد، فضای فاز یک صفحه فاز است. اما در مورد یک نوسانگر کلی با  $n$  درجه آزادی، فضای فاز فضایی،  $2n$  بعدی است.) با تغییر زمان، نقطه  $(x, \dot{x})$  در حالت ذره نوسانی را ترسیم می‌کند در امتداد مسیر فاز یعنی در صفحه فاز حرکت می‌کند. به‌ازای شرایط اولیه دیگری برای نوسانگر، حرکت با مسیرهای فاز متفاوتی توصیف خواهد شد. هر مسیر مشخصی سابقه زمانی کامل نوسانگر را برای مجموعه شرایط اولیه معینی نشان می‌دهد. تمامیت تمام مسیرهای فاز ممکن رخساره فاز یا نمودار فاز نوسانگر را تشکیل می‌دهد.<sup>۲</sup>

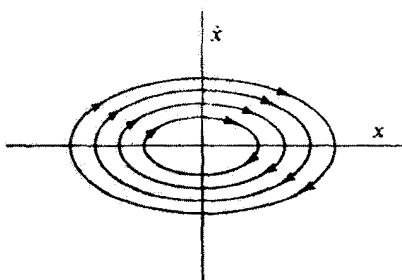
بنابر نتایج بخش پیش، در مورد نوسانگر هماهنگ ساده داریم

$$x(t) = A \sin(\omega \cdot t - \delta) \quad (۱۶.۳ \text{ الف})$$

$$\dot{x}(t) = A\omega \cdot \cos(\omega \cdot t - \delta) \quad (۱۶.۳ \text{ ب})$$

۱. از این پس بسامدهای زاویه‌ای را به  $\omega$  (یکا: رادیان بر واحد زمان) و بسامد را به  $\nu$  (یکا: ارتعاشها بر واحد زمان یا هرتز، Hz) نشان می‌دهیم، معمولاً  $\omega$  را به‌طور خلاصه «بسامد» می‌گویند، اگر چه «بسامد زاویه‌ای» مورد نظر است.

۲. این ملاحظات منحصر به ذرات نوسانی یا سیستمهای نوسانی نیست. مفهوم فضای فاز در زمینه‌های گوناگون فیزیک، به‌ویژه در مکانیک آماری، کاربرد وسیعی دارد.



شکل ۱.۳

اگر  $t$  را بین این دو معادله حذف کنیم، برای معادله مسیر می‌یابیم

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = 1 \quad (17.3)$$

این معادله نمایشگر خانواده‌ای از بیضهاست<sup>۱</sup>، چند تا از آنها در شکل ۱.۳ نمایش یافته‌اند. می‌دانیم که انرژی کل،  $E$ ، نوسانگر عبارت است از  $\frac{1}{2}kA^2$  [معادله (۱۱.۳)]، و از آنجا که  $\omega^2 = k/m$  معادله (۱۷.۳) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1 \quad (18.3)$$

در این صورت، هر مسیر فاز، با یک انرژی کل معین نوسانگر متناظر است. چون سیستم پایسته است (یعنی،  $E = \text{const.}$ ) انتظار چنین نتیجه‌ای را هم داریم.

هیچ دو مسیر فاز نوسانگری نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند. اگر همدیگر را قطع کنند، به آن معنی است که به‌ازای یک دسته شرایط اولیه  $x(t_0)$ ،  $\dot{x}(t_0)$  (یعنی، مختصات نقاط تقاطع)، حرکت باید در امتداد مسیرهای فاز متفاوتی صورت گیرد. اما این امر ناممکن است زیرا جواب معادله دیفرانسیل منحصر به فرد است.

اگر محورهای مختصات صفحه فاز به صورت شکل ۱.۳ اختیار شوند، حرکت نقطه نماینده  $p(x, \dot{x})$  همواره در راستای ساعتگرد خواهد بود، زیرا به‌ازای  $x > 0$  سرعت همواره کاهش یابنده و به‌ازای  $x < 0$  سرعت همیشه افزایش یابنده است.

برای دستیابی به معادلات (۱۶.۳) برای  $x(t)$  و  $\dot{x}(t)$ ، باید از معادله (۵.۳)، که معادله

۱. عرض صفحه فاز را گاهی به جای  $\dot{x}$  کمیت  $\dot{x}/\omega$  را می‌گیرند؛ در این صورت مسیرهای فاز دایره‌اند.

دیفرانسیلی مرتبه دوم است، انتگرال بگیریم

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (19.3)$$

اما، می‌توانیم به یاری شیوه‌ای ساده‌تر معادله مربوط به مسیر فاز را به دست آوریم، زیرا به جای معادله (۱۹.۳) می‌شود یک جفت معادله زیر را قرار داد

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega^2 x \quad (20.3)$$

اگر معادله دوم را بر معادله اول تقسیم کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{\dot{x}} \quad (21.3)$$

این معادله به ازای  $\dot{x} = \dot{x}(x)$  یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است، و جواب آن همان معادله (۱۷.۳) است. در مورد نوسانگر هماهنگ ساده، برای دستیابی به جواب کلی مربوط به حرکت، از طریق حل معادله مرتبه دوم، به مشکلی بر نمی‌خوریم. اما در وضعیت‌های پیچیده‌تر، یافتن معادله مسیر فاز،  $\dot{x} = \dot{x}(x)$ ، از طریق مستقیم، بدون دست یازیدن به محاسبه  $x(t)$ ، به طور چشمگیری آسانتر است.

#### ۴.۳ نوسانهای هماهنگ در دو بعد

اکنون حرکت ذره‌ای را از نظر می‌گذرانیم که مجاز به داشتن دو درجه آزادی است. نیروی بازگرداننده را متناسب با فاصله ذره از مرکز نیرویی واقع در مبدأ و در راستای به سوی مبدأ می‌گیریم

$$\mathbf{F} = -kr \quad (22.3)$$

که می‌توان آن را در مختصات قطبی به مؤلفه‌های زیر تجزیه کرد

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -kr \cos \theta = -kx \\ F_y &= -kr \sin \theta = -ky \end{aligned} \right\} \quad (23.3)$$

معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24.3)$$

که، مانند قبل،  $\omega^2 = k/m$ . جوابها عبارتاند از

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega.t - \alpha) \\ y(t) &= B \cos(\omega.t - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (25.3)$$

بدینسان این حرکت عبارت است از حرکت نوسانی هماهنگ ساده در هر یک از دو راستا، هر دو نوسان بسامد یکسانی دارند اما احتمالاً دامنه و فازشان باهم فرق می‌کند. می‌توان یا حذف زمان بین این دو معادله [معادله (25.3)] معادله مسیر ذره را به دست آورد. ابتدا می‌نویسیم

$$\begin{aligned} y(t) &= B \cos[\omega.t - \alpha + (\alpha - \beta)] \\ &= B \cos(\omega.t - \alpha) \cos(\alpha - \beta) - B \sin(\omega.t - \alpha) \sin(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (26.3)$$

با تعریف  $\delta \equiv \alpha - \beta$  و توجه به این نکته که  $\cos(\omega.t - \alpha) = x/A$  داریم

$$y = \frac{B}{A} x \cos \delta - B \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} \sin \delta$$

یا

$$Ay - Bx \cos \delta = -B \sqrt{A^2 - x^2} \sin \delta \quad (27.3)$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم، در نتیجه

$$A^2 y^2 - 2ABxy \cos \delta + B^2 x^2 \cos^2 \delta = A^2 B^2 \sin^2 \delta - B^2 x^2 \sin^2 \delta$$

به این ترتیب

$$B^2 x^2 - 2ABxy \cos \delta + A^2 y^2 = A^2 B^2 \sin^2 \delta \quad (28.3)$$

اگر  $\delta$  را برابر  $\pm\pi/2$  قرار دهیم، این معادله به آسانی به معادله آشنای بیضی تبدیل می‌شود

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad \delta = \pm \frac{\pi}{2} \quad (29.3)$$

اگر دامنه‌ها مساوی باشند،  $A = B$ ، و اگر  $\delta = \pm\pi/2$ ، به حالت خاص حرکت دایره‌ای می‌رسیم

$$x^2 + y^2 = A^2, \quad A = B, \quad \delta = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{به‌ازای} \quad (30.3)$$

اگر فاز  $\delta$  صفر شود یک حالت خاص دیگر حاصل می‌شود؛ در این صورت داریم

$$B^2 x^2 - 2ABxy + A^2 y^2 = 0, \quad \delta = 0$$

این عبارت را می‌شود به صورت زیر نوشت

$$(Bx - Ay)^2 = 0$$

که معادله خط راست است

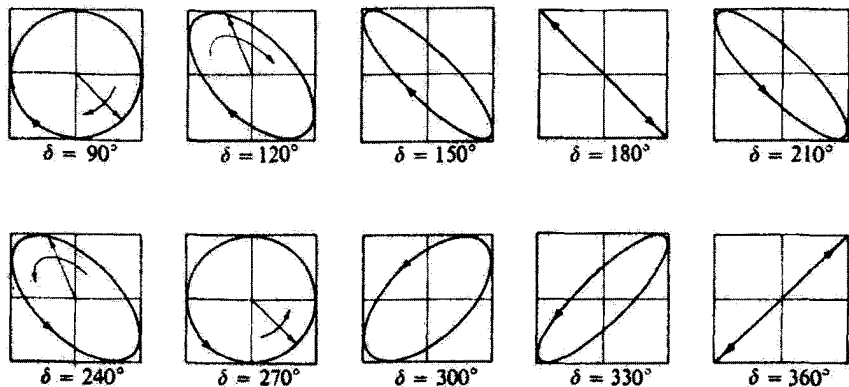
$$y = \frac{B}{A}x, \quad \delta = 0 \quad (31.3)$$

به همین ترتیب، فاز  $\delta = \pm\pi$  خط راستی با شیب مخالف را به دست می‌دهد

$$y = -\frac{B}{A}x, \quad \delta = \pm\pi \quad (32.3)$$

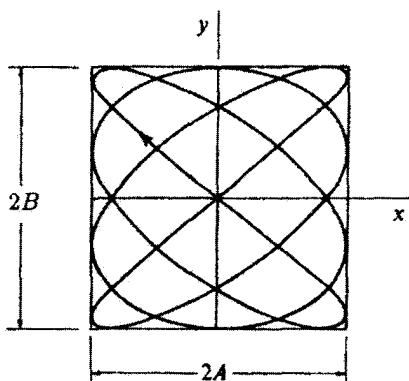
منحنیهای شکل ۲.۳ نمایش هندسی معادله (۲۸.۳) برای حالت  $A = B$  به شمار می‌آیند؛ به ازای  $\delta = 270^\circ$  یا  $\delta = 90^\circ$  یک دایره، و به ازای  $\delta = 180^\circ$  یا  $\delta = 360^\circ$  (یا  $\delta = 0^\circ$ ) خط راست حاصل می‌شود. به ازای تمام مقادیر دیگر  $\delta$ ، بیضی به دست می‌آید. در حالت کلی نوسانهای دو بعدی، بسامدهای مربوط به حرکت در جهتهای  $x$  و  $y$  لزومی ندارد مساوی باشند، از این رو معادله (۲۵.۳) چنین می‌شود

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_x t - \alpha) \\ y(t) &= B \cos(\omega_y t - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (33.3)$$



شکل ۲.۳





شکل ۳.۳

مسیر حرکت دیگر بیضی نیست بلکه منحنی لیسازوست.<sup>۱</sup> اگر حرکت در فواصل زمانی منظم تکرار شود، این منحنی بسته خواهد بود. این موضوع فقط در صورتی امکان دارد که بسامدهای  $\omega_x$ ،  $\omega_y$  متناسب، یعنی،  $\omega_x/\omega_y$  کسری گویا باشد، این حالت در شکل ۳.۳ نشان داده شده است؛ در این شکل  $\omega_x = \frac{2}{3}\omega_y$  (و نیز  $A = B$  و  $\alpha = \beta$ ). اگر نسبت بسامدها یک کسر گویا نباشد، منحنی باز خواهد بود؛ یعنی، ذره متحرک هرگز دوبار از یک نقطه و با سرعت یکسان عبور نمی‌کند. در چنین حالتی، پس از گذشت زمانی به قدر کافی طولانی، منحنی از نزدیکی (اختیاری) هر نقطه معین در داخل مستطیل  $2A \times 2B$  می‌گذرد و بنابراین مستطیل را «پُر» خواهد کرد.<sup>۲</sup>

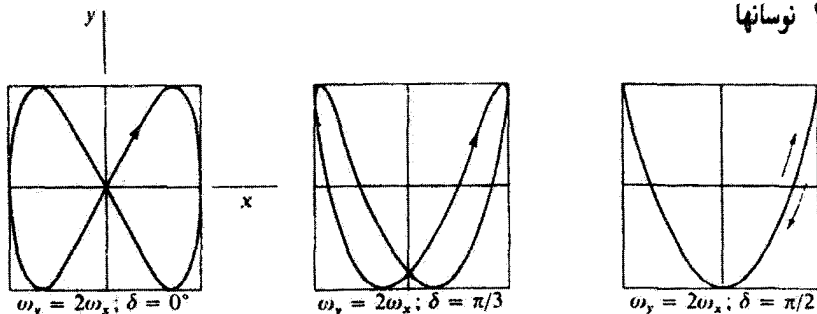
نوسانگر دو بعدی مثالی از سیستمی است که در آن تغییری بینهایت کوچک می‌تواند به نوعی حرکت کیفیتاً متفاوت بیانجامد. اگر دو بسامد متناسب باشند، حرکت در امتداد مسیری بسته صورت خواهد گرفت. اما اگر نسبت بسامدی حتی به مقداری بینهایت کوچک از یک کسر گویا تخطی کند، در این صورت مسیر دیگر بسته نخواهد بود و مستطیل را «پُر» خواهد کرد. برای اینکه مسیر بسته باشد، نسبت بسامدها باید با دقت بینهایت یک کسر گویا باشد.

اگر بسامد حرکت در راستاهای  $x$  و  $y$  متفاوت باشند، در آن صورت شکل منحنی لیسازوی حاصل<sup>۳</sup> قویا به اختلاف فاز،  $\delta \equiv \alpha - \beta$ ، بستگی دارد. در شکل ۴.۳ نتایج حالت  $\omega_y = 2\omega_x$  را به ازای اختلافهای فاز  $0^\circ$ ،  $\pi/3$ ، و  $\pi/2$  مشاهده می‌کنید.

۱. نخستین بار در ۱۸۵۷ ژول لیسازو (۱۸۸۰-۱۸۲۲)، فیزیکدان فرانسوی آن را نمایش داد.

۲. اثباتی برای این موضوع را، مثلاً، در کتاب هاگ (Ha 62, p. 36) خواهید یافت.

۳. طرح منحنیهای لیسازوی چندین نسبت بسامدی و اختلافهای فاز متفاوت را می‌توان، مثلاً، در کتاب سیرز (Se 58, p. 313) یافت.



شکل ۴.۳

## ۵.۳ نوسانهای میرا

به حرکتی که نوسانگر هماهنگ ساده آن را نمایش می‌دهد نوسان آزاد می‌گویند؛ همین‌که جسم به نوسان درآمد، هرگز از حرکت باز نمی‌ایستد. این نگرش حالت فیزیکی واقعی را، که در آن نیروهای اتلافی یا اصطکاک مآلاً حرکت را تا نقطه‌ای میرا می‌کنند که دیگر نوسانی روی نمی‌دهد، بیش از حد ساده می‌کند. می‌توانیم با منظور کردن جمله‌ای که نمایشگر نیروی میران است در معادله دیفرانسیل، حرکت را در چنین حالتی تحلیل کنیم. منطقی به نظر نمی‌رسد که نیروی میران به‌طور کلی به جابه‌جایی وابسته باشد، بلکه می‌تواند تابعی از سرعت یا احتمالاً تابعی از مشتق مرتبه بالاتری از جابه‌جایی نسبت به زمان باشد. غالباً فرض می‌کنند که نیروی میران تابعی خطی از سرعت<sup>۱</sup>  $F_d = \alpha v$  است. در اینجا فقط نوسانهای میرای یک بعدی را در نظر می‌گیریم و از این رو می‌توانیم جمله میران را با  $-b\dot{x}$  نمایش دهیم. برای اینکه نیرو واقعاً یک نیروی مقاوم باشد ضریب  $b$  باید مثبت باشد. (اگر  $b < 0$  اعمال نیروی  $-b\dot{x}$  به جای آنکه مانند هر نیروی مقاومتی سرعت را بکاهد، سرعت را افزایش می‌دهد.) بدینسان، اگر ذره‌ای به جرم  $m$  تحت تأثیر ترکیبی از نیروی بازگرداننده خطی  $-kx$  و نیروی مقاومتی  $-b\dot{x}$  قرار گیرد، معادله دیفرانسیل بیان‌کننده حرکت، عبارت است از

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (۳۴.۳)$$

که می‌توان آن را به این صورت نوشت

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (۳۵.۳)$$

۱. برای دستیابی به بحثی پیرامون وابستگی نیروی مقاوم به سرعت، به بخش ۴.۲ رجوع کنید.

در اینجا  $\beta \equiv b/2m$  ضریب میرایی و  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  بسامد مشخصه در غیاب میرایی است. ریشه‌های معادله کمکی عبارت‌اند از [پیوست ج، معادله (۸.ج) را ببینید]

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 &= -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (36.3)$$

بنابراین، جواب عمومی معادله (۳۵.۳) عبارت خواهد بود از

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 \exp(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t) + A_2 \exp(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t)] \quad (37.3)$$

سه حالت کلی مورد نظر است:

کند میرایی  $\omega_0^2 > \beta^2$

میرایی بحرانی  $\omega_0^2 = \beta^2$

تند میرایی  $\omega_0^2 < \beta^2$

خواهیم دید که فقط حالت کند میرایی به حرکت نوسانی منجر می‌شود. این سه حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

حرکت کند میرا

برای حالت حرکت کند میرا اراقة تعريف زیر مناسب است

$$\omega_1^2 \equiv \omega_0^2 - \beta^2 \quad (38.3)$$

که در آن  $\omega_1^2 > 0$ ؛ در این صورت نماهای داخل پرانتزهای معادله (۳۷.۳) موهومی‌اند، و جواب به صورت زیر درمی‌آید

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}] \quad (39.3)$$

که معادله (۳۹.۳) را فقط با گنجاندن جزء حقیقی می‌شود به صورت زیر بازنویسی کرد<sup>۱</sup>

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta) \quad (40.3)$$

کمیت  $\omega_1$  را بسامد نوسانگر میرا می‌نامیم. به بیان دقیق، وقتی میرایی وجود داشته باشد نمی‌توانیم بسامد را تعریف کنیم، زیرا حرکت دوره‌ای (تناوبی) نیست. یعنی، نوسانگر هیچگاه با

سرعتی یکسان دوبار از یک نقطه عبور نمی‌کند. اگر میرایی کوچک باشد، در این صورت

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cong \omega_0.$$

از این رو می‌توان واژه «بسامد» را به‌کار برد. اما معنی آن دقیق نیست مگر آنکه  $\beta = 0$ . با همه اینها برای سادگی،  $\omega_1$  را «بسامد» نوسانگر میرا می‌خوانیم، و توجه داریم که این بسامد کمتر از بسامد نوسانگر در غیاب میرایی است (یعنی،  $\omega_1 < \omega_0$ ).

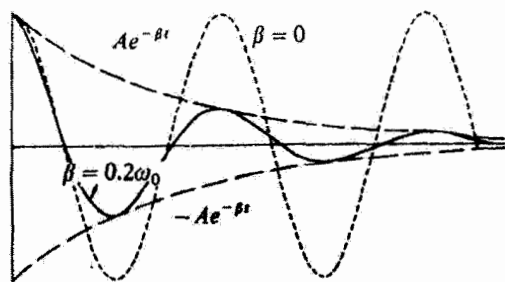
بیشینه دامنه حرکت نوسانگر میرا با زمان کاهش می‌یابد و علت آن هم ضریب  $\exp(-\beta t)$ ، با  $\beta > 0$  است. و پوش منحنی جابه‌جایی برحسب زمان از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$x_{\text{پوش}} = \pm Ae^{-\beta t} \quad (41.3)$$

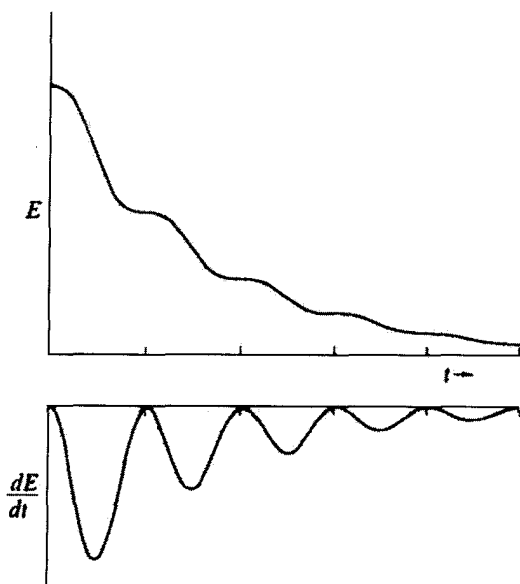
این پوش و منحنی جابه‌جایی برای حالت  $\delta = 0$  در شکل ۵.۳ نموده شده‌اند. منحنی سینوسی مربوط به حرکت نامیرا ( $\beta = 0$ ) را نیز در همین شکل مشاهده می‌کنید. مقایسه دقیق این دو منحنی نشان می‌دهد که بسامد برای حالت میرا کمتر (یعنی، دوره تناوب طولانیتر) است از حالت نامیرا. نسبت دامنه‌های نوسان در دو بیشینه (ماکزیموم) پی‌درپی عبارت است از

$$\frac{Ae^{-\beta T}}{Ae^{-\beta(T+\tau_1)}} = e^{\beta\tau_1} \quad (42.3)$$

که در آن نخستین بیشینه از هر جفت در  $t = T$  و  $\tau_1 = 2\pi/\omega_1$  روی می‌دهد. کمیت  $\exp(\beta\tau_1)$  را نزول حرکت می‌گویند؛ لگاریتم  $\exp(\beta\tau_1)$ ، یعنی  $\beta\tau_1$ ، را نزول لگاریتمی حرکت می‌خوانند. برخلاف نوسانگر هماهنگ ساده که قبلاً در خصوص آن بحث کردیم، انرژی نوسانگر میرا در طی زمان ثابت نیست؛ بلکه، انرژی به‌طور پیوسته به محیط میران داده و به‌صورت گرما، (یا، احتمالاً،



شکل ۵.۳



شکل ۶.۳

تابش به شکل امواج شاره تلف می‌شود. آهنگ اتلاف انرژی با مجذور سرعت متناسب است (مسئله ۱۱.۳)، از این رو کاهش انرژی به‌طور یکنواخت صورت نمی‌گیرد. وقتی ذره در نزدیکی وضعیت تعادل (اما نه دقیقاً در آن وضعیت) حداکثر سرعت را کسب می‌کند، آهنگ اتلاف [انرژی] بیشینه است، و وقتی ذره در بیشینه دامنه و سرعت صفر باشد، این اتلاف به‌طور لحظه‌ای صفر می‌شود. در شکل ۶.۳ انرژی کل و آهنگ اتلاف انرژی نوسانگر میرا را مشاهده می‌کنید.

### مثال ۱.۳

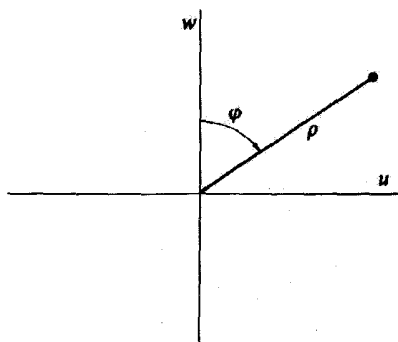
نمودار فاز نوسانگر میرا را ترسیم کنید.

حل: ابتدا عبارتهای مربوط به جابه‌جایی و سرعت را می‌نویسیم

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

$$\dot{x}(t) = -Ae^{-\beta t} [\beta \cos(\omega_1 t - \delta) + \omega_1 \sin(\omega_1 t - \delta)]$$

این معادلات را می‌توان با وارد کردن تغییر متغیرهایی مطابق با تبدیلهای خطی زیر، به صورتی برگرداند که بازشناسی آنها آسانتر است



شکل ۷.۳

$$u = \omega_1 x, w = \beta x + \dot{x}$$

در این صورت

$$u = \omega_1 A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

$$w = -\omega_1 A e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t - \delta)$$

اگر  $u$  و  $w$  را در مختصات قطبی نشان دهیم (شکل ۷.۳)، آنگاه

$$\rho = \sqrt{u^2 + w^2}, \quad \varphi = \omega_1 t$$

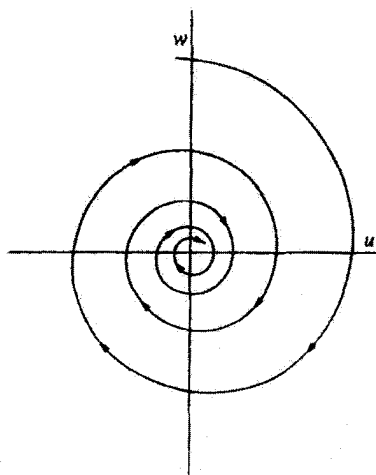
بدینسان

$$\rho = \omega_1 A e^{(-\beta/\omega_1)\varphi}$$

که معادله ماریپیج لگاریتمی است. از آنجا که تبدیل  $x$  و  $\dot{x}$  به  $u$  و  $w$  خطی است، مسیر فاز اساساً در صفحه فاز همان شکلی را دارد که در صفحه  $u-w$  خواهد داشت. در شکل ۸.۳ مسیر فاز ماریپیچی نوسانگر کندمیرا را مشاهده می‌کنید. کاهش پیوسته اندازه بردار شعاعی مربوط به یک نقطه نماینده در صفحه فاز همواره بر حرکت میرای نوسانگر دلالت دارد. ■

حرکت میرای بحرانی

اگر نیروی میران به اندازه کافی بزرگ باشد (یعنی، اگر  $\omega^2 > \beta^2$ )، سیستم از حرکت نوسانی باز می‌ماند. اگر سرعت اولیه صفر باشد، جابه‌جایی به‌طور یکنوا از مقدار اولیه خود به وضعیت تعادل

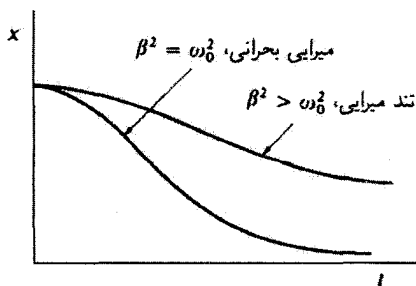


شکل ۸.۳

$(x = 0)$  کاهش پیدا می‌کند. حالت میرایی بحرانی هنگامی پیش می‌آید که  $\beta^2$  دقیقاً با  $\omega_0^2$  مساوی باشد. در این صورت ریشه‌های معادله کمکی برابرند، و تابع  $\alpha$  باید به صورت زیر نوشته شود [معادله (ج.۱۱)، پیوست ج را نگاه کنید]

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} \quad (۴۳.۳)$$

منحنی جابه‌جایی میرایی بحرانی را برای حالتی که سرعت اولیه صفر است، در شکل ۹.۳ مشاهده می‌کنید. به ازای یک سلسله شرایط اولیه معین، نوسانگر میرای بحرانی با آهنگی سریعتر از آهنگ مربوط به نوسانگر تندمیرا یا کندمیرا، به تعادل می‌رسد. در طراحی برخی سیستمهای نوسانی عملی (مثلاً گالوانومتر) که سیستم باید هر چه سریعتر به وضعیت تعادل برگردد، این امر اهمیت زیادی



شکل ۹.۳

دارد. دستگاه بستن در با لوله بادی مثال خوبی از وسیله‌ای است که باید به‌طور بحرانی میرا شود. اگر این دستگاه کندمیرا می‌بود، این در مانند سایر درهایی که با فنر باز و بسته می‌شوند، به‌سرعت به‌هم می‌خورد و بسته می‌شد. اگر تندمیرا می‌بود، بسته شدن در، مدت زمانی بسیار طولانی و غیر معقول طول می‌کشید.

### حرکت تندمیرا

اگر ضریب میرایی  $\beta$  حتی از  $\omega$  هم بیشتر شود، حاصل آن تندمیرایی است. از آنجا که  $\beta^2 > \omega^2$ ، ماها در پیرانتهای معادله (۳۷.۳) کمیت‌هایی حقیقی می‌شوند

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 e^{\omega_2 t} + A_2 e^{-\omega_2 t}] \quad (44.3)$$

که

$$\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \quad (45.3)$$

توجه کنید که  $\omega_2$  بسامد را نمایش نمی‌دهد، زیرا حرکت تناوبی نیست. جابه‌جایی به‌طور مجانبی به وضعیت تعادل نزدیک می‌شود (شکل ۹.۳).

تند میرایی حاصل کاهش مجانبی غیر نوسانی است که دامنه آن به صفر میل می‌کند. اما، بسته به مقدار اولیه سرعت، تغییر علامت  $x$  ممکن است پیش از آنی اتفاق بیفتد که جابه‌جاییها به صفر نزدیک شوند. اگر بررسیهای خود را به جابه‌جاییهای مثبت اولیه،  $x(0) \equiv x_0 > 0$  محدود کنیم سه حالت جالب را برای سرعت اولیه،  $\dot{x}(0) \equiv \dot{x}_0$ ، می‌یابیم:

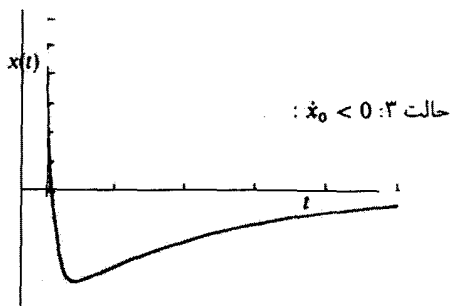
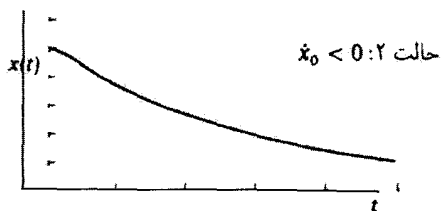
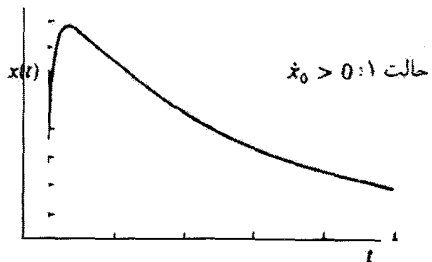
۱.  $\dot{x}_0 > 0$ ، به‌طوری که  $x(t)$  در لحظه‌ای چون  $t > 0$  پیش از رسیدن به صفر، به یک بیشینه می‌رسد.

۲.  $\dot{x}_0 < 0$ ، که  $x(t)$  به‌طور یکنوا به صفر نزدیک می‌شود.

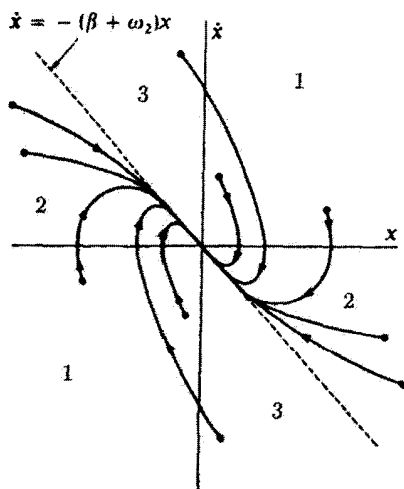
۳.  $\dot{x}_0 < 0$ ، اما به اندازه کافی بزرگ به‌طوری که  $x(t)$  تغییر علامت می‌دهد، به یک مقدار کمینه می‌رسد، و سپس به صفر نزدیک می‌شود.

در شکل ۱۰.۳ این سه حالت را مشاهده می‌کنید. بسته به اینکه کدامیک از سه شرط اولیه بالا در مورد سرعت برقرار باشد، صفحه فاز به شش ناحیه تقسیم می‌شود (سه ناحیه به‌ازای  $x_0 > 0$  و سه ناحیه به‌ازای  $x_0 < 0$ ). در شکل ۱۱.۳ مسیره‌های فاز را برای هر یک از این نواحی مشاهده می‌کنید. می‌توانیم نشان دهیم (مسئله ۱۵.۳ را ببینید) که خط  $\dot{x} = -(\beta + \omega_2)x$  و نواحی ۲ و





شکل ۱۰.۳



شکل ۱۱.۳

۳ را از هم جدا می‌کند. مسیر فاز برای حالتی که سرعت اولیه صفر است بر روی محور  $x$  در مقدار مناسب  $x$  آغاز می‌شود آنگاه از طریق ناحیه ۲ به مبدأ می‌رسد. میرایی بحرانی، به جای پیوند با مسیر ماریچ شکل ۸.۳، باید با منحنیهای شکل ۱۱.۳ پیوند یابد، زیرا حرکت سیستمی که به طور بحرانی میرا باشد، نوسانی نیست.

### مثال ۲.۳

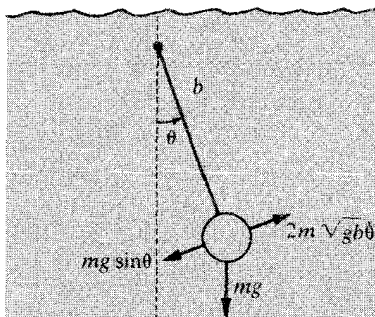
آونگی را به طول  $b$  در نظر بگیرید که گلوله‌ای به جرم  $m$  در انتهای آن آویخته (شکل ۱۲.۳) و با زاویه کاهش یافته  $\theta$  در داخل روغن حرکت می‌کند. گلوله سنگین نوسانهای کوچک انجام می‌دهد، اما روغن با نیروی مقاومی متناسب با سرعت،  $F_{res} = 2m\sqrt{g/b}(b\dot{\theta})$ ، حرکت گلوله را کند می‌کند. گلوله در ابتدا در لحظه  $t = 0$  با  $\theta = \alpha$  و  $\dot{\theta} = 0$  به عقب کشیده شده است. جابه‌جایی زاویه‌ای،  $\theta$ ، و سرعت،  $\dot{\theta}$ ، را به صورت تابعی از زمان بیابید. در صورتی که  $\sqrt{g/b} = 10\text{ s}^{-1}$  و  $\alpha = 10^{-2}\text{ rad}$  باشد نمودار فاز را ترسیم کنید.

حل: گرانی موجب نیروی بازگرداننده است، و مؤلفه‌ای که گلوله را تا وضعیت تعادل به عقب می‌کشد عبارت است از  $mg \sin \theta$ . قانون دوم نیوتون این طور می‌شود

$$\begin{aligned} \text{نیروی مقاوم} + \text{نیروی بازگرداننده} &= m(b\ddot{\theta}) = \text{نیروی} \\ mb\ddot{\theta} &= -mg \sin \theta - 2m\sqrt{g/b} b\dot{\theta} \end{aligned} \quad (46.3)$$

برحسب علامتهای  $\theta$  و  $\dot{\theta}$ ، درستی راستای نیرو را تحقیق کنید. در نوسانهای کوچک  $\sin \theta \approx \theta$  و معادله (۴۶.۳) به این صورت درمی‌آید

$$\ddot{\theta} + 2\sqrt{g/b} \dot{\theta} + \frac{g}{b} \theta = 0 \quad (47.3)$$



شکل ۱۲.۳

از مقایسه این معادله با معادله (۳۵.۳) آشکار می‌شود که  $\omega^2 = g/b$  و  $\beta^2 = g/b$ . بنابراین،  $\omega^2 = \beta^2$  و آونگ به صورت بحرانی میراست. پس از آنکه به عقب کشیده و رها می‌شود، شتاب پیدا می‌کند آنگاه با میل کردن  $\theta$  به صفر شتابش کند می‌شود. این آونگ در بازگشت به وضعیت تعادلش فقط در یک جهت حرکت می‌کند.

جواب معادله (۴۷.۳). عبارت است از معادله (۴۳.۳). می‌توانیم مقادیر  $A$  و  $B$  را از طریق نشانیدن معادله (۴۳.۳) در معادله (۴۷.۳) و با بهره‌گیری از شرایط اولیه، تعیین کنیم.

$$\theta(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$$

$$\theta(t=0) = \alpha = A \quad [۴۳.۳]$$

$$\dot{\theta}(t) = Be^{-\beta t} - \beta(A + Bt)e^{-\beta t}$$

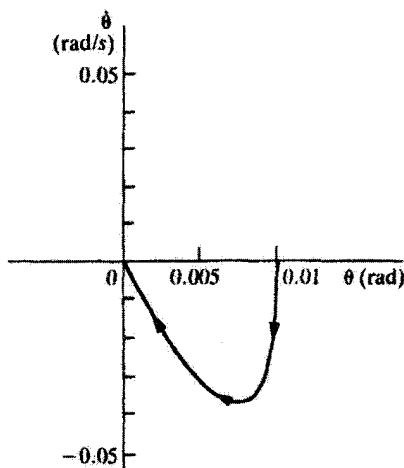
$$\dot{\theta}(t=0) = 0 = B - \beta A$$

$$B = \beta A = \beta \alpha \quad (۴۸.۳)$$

$$\theta(t) = \alpha(1 + \sqrt{g/b} t)e^{-\sqrt{g/b} t} \quad (۴۹.۳)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{-\alpha g}{b} t e^{-\sqrt{g/b} t} \quad (۵۰.۳)$$

اگر  $\theta(t)$  و  $\dot{\theta}(t)$  را به‌ازای چندین مقدار زمانی تا حدود ۰.۵s محاسبه کنیم، می‌توانیم نمودار فاز شکل ۱۳.۳ را ترسیم کنیم. توجه داشته باشید که شکل ۱۳.۳ با مسیره‌های نوعی نمایش یافته در شکل ۱۱.۳ سازگار است. پس از آغاز حرکت گلوله تا بازگشت آن به وضعیت تعادل، سرعت زاویه‌ای همواره منفی است. گلوله سریعاً سرعت می‌گیرد و آنگاه حرکتش کند می‌شود.



شکل ۱۳.۳

## ۶.۳ نیروهای محرک سینوسی

ساده‌ترین حالت نوسان واداشته حالتی است که در آن یک نیروی محرک خارجی که به‌طور هماهنگ با زمان تغییر می‌کند، بر نوسانگر وارد آید. در این صورت نیروی کل وارد بر ذره عبارت است از

$$F = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t \quad (۵۱.۳)$$

یک نیروی بازگرداننده خطی و یک نیروی میران چسبیده را به‌اضافه نیروی محرک در نظر می‌گیریم. معادله حرکت عبارت است از

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (۵۲.۳)$$

یا، با بهره‌گیری از نمادگذاری قبلی خود

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t} \quad (۵۳.۳)$$

که در آن  $A = F_0/m$  و  $\omega$  بسامد نیروی محرک است. جواب معادله (۵۳.۳) از دو جزء تشکیل می‌شود، یکی تابع متمم  $x_c(t)$ ، که جواب معادله (۵۳.۳) است وقتی که سمت راست آن صفر شود، و دیگری عبارت است از جواب خصوصی  $x_p(t)$ ، که سمت راست را به‌وجود می‌آورد. جواب متمم مشابه همان جوابی است که از معادله (۳۷.۳) به‌دست آمد (پیوست ج را ببینید)

$$x_c(t) = e^{-\beta t} [A_1 \exp(\sqrt{\beta^2 - \omega^2} t) + A_2 \exp(-\sqrt{\beta^2 - \omega^2} t)] \quad (۵۴.۳)$$

برای جواب خصوصی تابع زیر را امتحان می‌کنیم

$$x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta) \quad (۵۵.۳)$$

$x_p(t)$  را در معادله (۵۳.۳) می‌نشانیم و  $\cos(\omega t - \delta)$  و  $\sin(\omega t - \delta)$  را بسط می‌دهیم، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} & \{A - D[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\omega\beta \sin \delta]\} \cos \omega t \\ & - \{D[(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta - 2\omega\beta \cos \delta]\} \sin \omega t = 0 \end{aligned} \quad (۵۶.۳)$$

از آنجا که  $\sin \omega t$  و  $\cos \omega t$  توابع مستقل خطی هستند، این معادله به‌طور کلی فقط در صورتی برقرار است که ضریب هر جمله عیناً صفر شود. از جمله  $\sin \omega t$  داریم

$$\tan \delta = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (۵۷.۳)$$

در این صورت می‌توان نوشت

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= \frac{2\omega\beta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \\ \cos \delta &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (58.3)$$

و از ضرب جمله  $\cos \omega t$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D &= \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\omega\beta \sin \delta} \\ &= \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \end{aligned} \quad (59.3)$$

بدینسان انتگرال خصوصی عبارت است از

$$x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (60.3)$$

که در آن

$$\delta = \tan^{-1} \left( \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (61.3)$$

جواب عمومی به این شرح است

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (62.3)$$

اما در اینجا  $x_c(t)$  آثار گذرا (یعنی، آناری که به شرایط اولیه وابسته‌اند) را نشان می‌دهد، و جمله‌هایی که در این جواب گنجدهند با گذشت زمان از بین می‌روند و علت آن هم ضرب  $\exp(-\beta t)$  است. جمله  $x_p(t)$  آثار حالت پایا را نشان می‌دهند و همه اطلاعاتی را در بر می‌گیرند که مربوط به مقادیری از  $t$  هستند که نسبت به  $1/\beta$  بزرگ است. در این صورت

$$x(t \gg \frac{1}{\beta}) = x_p(t)$$

جواب حالت پایا در بسیاری از کاربردها و مسئله‌ها اهمیت زیادی دارد.

کمیت  $\delta$  [معادله (۶۱.۳)] اختلاف فاز بین نیروی محرک و حرکت برآیند را نشان می‌دهد؛ بین عمل نیروی محرک و پاسخ سیستم یک تأخیر واقعی روی می‌دهد. به‌ازای یک مقدار ثابت  $\omega$ ، با افزایش  $\omega$  از صفر، فاز از  $\delta = 0^\circ$  در  $\omega = 0$  به  $\delta = \pi/2$  در  $\omega = \omega_0$  می‌رسد و به‌ازای  $\omega \rightarrow \infty$  به  $\pi$  افزایش پیدا می‌کند. تغییرات  $\delta$  را بر حسب  $\omega$  در شکل ۱۴.۳ مشاهده می‌کنید. برای یافتن بسامد  $\omega_R$  که در آن دامنه  $D$  بیشینه (یعنی، بسامد تشدید دامنه) است، باید داشته باشیم

$$\left. \frac{dD}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_R} = 0$$

پس از انجام مشتق‌گیری، خواهیم داشت

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (۶۳.۳)$$

بدینسان بسامد تشدید،  $\omega_R$ ، با افزایش ضریب میرایی،  $\beta$ ، کم می‌شود. اگر  $\beta^2 > \omega_0^2/2$  هیچ تشدید ایجاد نمی‌شود، زیرا در این صورت  $\omega_R$  موهومی است و با افزایش  $\omega$  مقدار  $D$  به‌طور یکنوا کاهش پیدا می‌کند.

حالا می‌توانیم بسامدهای نوسان مربوط به حالت‌های گوناگونی را که از نظر گذرانندیم باهم مقایسه کنیم:

الف) نوسانهای آزاد، بدون میرایی [معادله (۴.۳)]،

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

ب) نوسانهای آزاد، میران [معادله (۳۸.۳)]

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

ج) نوسانهای واداشته، میران [معادله (۶۳.۳)]

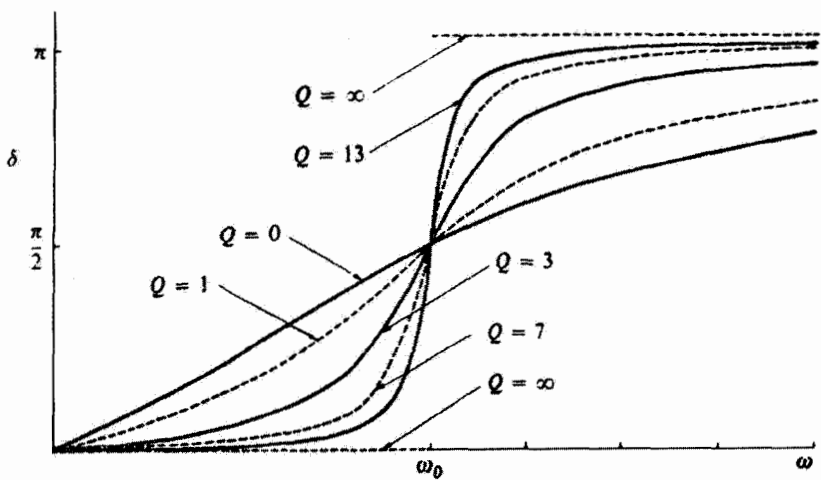
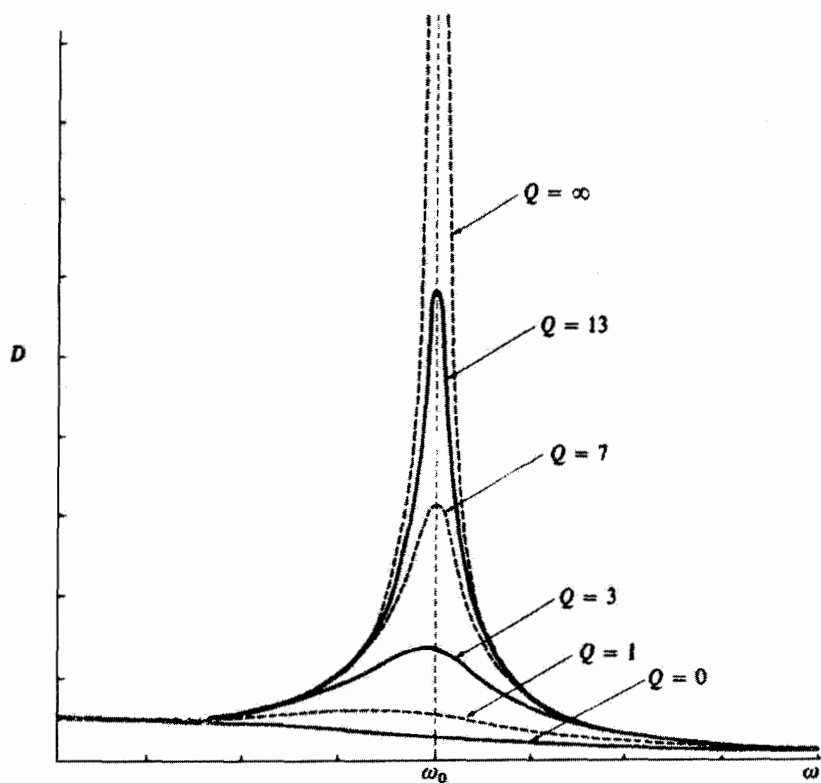
$$\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

و به این نکته توجه داریم که  $\omega_0 > \omega_1 > \omega_R$ .

درجه میرایی در سیستم نوسانی را عادتاً بر حسب «ضریب کیفیت»،  $Q$ ، سیستم توصیف می‌کنند

$$Q = \frac{\omega_R}{2\beta} \quad (۶۴.۳)$$

اگر میرایی اندکی اتفاق بیفتد، در این صورت  $Q$  خیلی بزرگ می‌شود و شکل منحنی تشدید به



شکل ۱۴.۳

شکل مربوط به نوسانگر نامیرا نزدیک می‌شود. اما اگر میرایی بزرگ و  $Q$  خیلی کوچک باشد تشدید ممکن است به‌طور کامل از بین برود. در شکل ۱۴.۳ منحنیهای تشدید و فاز را به‌ازای چند مقدار مختلف  $Q$  مشاهده می‌کنید. این منحنیها بر این امر دلالت می‌کنند که با کاهش  $Q$  (یعنی، با افزایش ضریب میرایی  $\beta$ ) بسامد تشدید پایین می‌آید. اما، این اثر بزرگ نیست؛ حتی به‌ازای مقادیر اندک  $Q$  مانند ۳ تغییر مکان بسامدی کمتر از ۰.۳٪ و به‌ازای  $Q = ۱$  در حدود ۱.۸٪ است. برای نوسانگری که اندکی میراست، می‌توانیم نشان دهیم که (مسئله ۱۹.۳ را ببینید)

$$Q \cong \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (۶۵.۳)$$

که در اینجا  $\Delta\omega$  نمایشگر بازه بسامدی بین دو نقطه روی منحنی تشدید دامنه است که دامنه آنها  $۰.۷۰۷ = ۱/\sqrt{۲}$  دامنه بیشینه است.

مقادیر  $Q$  که در وضعیتهای فیزیکی واقعی یافت می‌شوند بسیار متفاوت‌اند. در سیستمهای مکانیکی نسبتاً معمولی (مثلاً، بلندگوها) گستره این مقادیر می‌تواند از چند تا حدود  $۱۰^۰$ ، تغییر کند. در نوسانگرهای بلور کوارتز یا دیپازونها مقدار  $Q$  ممکن است تا  $۱۰^۴$  هم برسد. در مدارهای الکتریکی بسیار دقیق کوچک شده، مانند کاواکهای تشدید، مقادیر  $Q$  می‌تواند از  $۱۰^۴$  تا  $۱۰^۵$  باشد. می‌توانیم  $Q$  را برای برخی سیستمهای اتمی هم تعریف کنیم. مطابق تصویر کلاسیکی، نوسان الکترونها در داخل اتم به تابش ابتیکی می‌انجامد. تیزی خطوط طیفی را میرایی ناشی از اتلاف انرژی به‌وسیله تابش (میرایی تابشی) محدود می‌کند. کمینه پهنای هر خط را می‌توان به‌طریق کلاسیکی محاسبه کرد که عبارت است از  $\Delta\omega \cong 2 \times 10^{-8} \omega$ . بنابراین  $Q$  در چنین نوسانگری تقریباً  $۱۰^۲ \times ۵$  است. تشدیدهایی با بزرگترین مقدار شناخته شده  $Q$  در تابش لیزر (تقویت نور از طریق گسیل القایی تابش‌های گازی رخ می‌دهند. اندازه‌گیری با چنین وسیله‌هایی مقادیر  $Q$  را تقریباً  $۱۰^{۱۲}$  به‌دست داده است.<sup>۲</sup>

از معادله (۶۳.۳) بسامد تشدید دامنه به‌دست می‌آید. حالا می‌توانیم بسامد مربوط به تشدید انرژی جنبشی را—یعنی مقداری از  $\omega$  که به‌ازای آن  $T$  بیشینه است—محاسبه کنیم. انرژی جنبشی از عبارت  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  به‌دست می‌آید، و با محاسبه  $\dot{x}$  از معادله (۶۰.۳) داریم

۱. نگاه کنید به:

Marion and Heald (Ma 80)

۲. مثلاً، نگاه کنید به



$$\dot{x} = \frac{-A\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \sin(\omega t - \delta) \quad (۶۶.۳)$$

بنابراین انرژی جنبشی تبدیل می‌شود به

$$T = \frac{mA^2}{2} \times \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \sin^2(\omega t - \delta) \quad (۶۷.۳)$$

برای دستیابی به مقداری از  $T$  که مستقل از زمان باشد، میانگین  $T$  را در یک دوره تناوب کامل نوسان محاسبه می‌کنیم

$$\langle T \rangle = \frac{mA^2}{2} \times \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \langle \sin^2(\omega t - \delta) \rangle \quad (۶۸.۳)$$

مقدار میانگین مجذور تابع سینوسی در یک دوره تناوب عبارت است از<sup>۱</sup>

$$\langle \sin^2(\omega t - \delta) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t - \delta) dt = \frac{1}{2} \quad (۶۹.۳)$$

بنابراین

$$\langle T \rangle = \frac{mA^2}{4} \times \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \quad (۷۰.۳)$$

مقدار  $\omega$  که به‌ازای آن  $\langle T \rangle$  بیشینه است با  $\omega_E$  نشان داده می‌شود و از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\left. \frac{d\langle T \rangle}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_E} = 0 \quad (۷۱.۳)$$

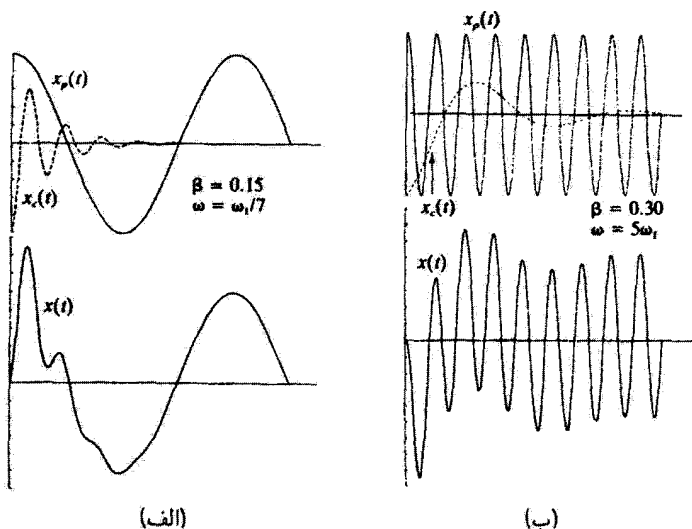
با دیفرانسیل‌گیری از معادله (۷۰.۳) و برابر نهادن نتیجه با صفر، می‌یابیم

$$\omega_E = \omega_0 \quad (۷۲.۳)$$

از این رو تشدید انرژی جنبشی برای نوسانهای نامیرا در بسامد طبیعی سیستم اتفاق می‌افتد.

بنابراین ملاحظه می‌کنیم که تشدید دامنه در بسامد  $\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$  اتفاق می‌افتد، در حالی که تشدید انرژی جنبشی در  $\omega_0$  پیش می‌آید. از آنجا که انرژی پتانسیل با مجذور دامنه متناسب است، تشدید انرژی پتانسیل نیز باید در  $\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$  اتفاق بیفتد. اینکه انرژیهای پتانسیل و جنبشی در

۱. خواننده باید این نتیجه مهم را اثبات کند که میانگین در یک دوره تناوب کامل  $\sin^2 \omega t$  یا  $\cos^2 \omega t$  برابر است با  $1/2$ . یعنی:  $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$



شکل ۱۵.۳

بسامدهای مختلف به تشدید درمی آید، حاصل این حقیقت است که نوسانگر میرا سیستمی پایستار نیست. انرژی پیوسته با مکانیسم محرک مبادله می شود، و انرژی به محیط میران انتقال می یابد. هر چند که در این بحث بر حرکت پایای نوسانگر واداشته تأکید ورزیده ایم، اغلب اوقات آثار گذرا، به ویژه در برخی انواع مدارهای الکتریکی، به نحو چشمگیری اهمیت پیدا می کند.

جزئیات حرکت پیش از آنکه آثار گذرا از بین بروند (یعنی،  $t \leq 1/\beta$ ) قویاً به شرایط نوسانگر در زمانی که نیروی محرک نخستین بار اعمال می شود و نیز به مقادیر نسبی بسامد محرک،  $\omega$ ، و بسامد میران،  $\sqrt{\omega_1^2 - \beta^2}$  بستگی دارد. شکل ۱۵.۳ گذرای نوسانگری را در صورت اعمال بسامدهای محرکی کمتر و بیشتر از  $\omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \beta^2}$  به آن، نشان می دهد. اگر  $\omega < \omega_1$  [شکل ۱۵.۳ (الف)] پاسخ گذرای نوسانگر شکل سینوسی تابع نیروی وادارنده را در خلال مدت زمان بلافاصله پس از اعمال نیروی محرک به شدت و امی بیچاند، و در حالی که اگر  $\omega > \omega_1$  [شکل ۱۵.۳ (ب)] حاصل آن مدوله سازی تابع وادارنده با جزئی و ایبچش نوسانهای سینوسی بالا بسامد خواهد بود.

### ۷.۳ سیستمهای فیزیکی

در مقدمه این فصل گفتیم که نوسانهای خطی غیر از نوسانهای کوچک جسم-فتر و آونگ ساده در مورد بسیاری از سیستمهای دیگر هم به کار می روند. بر تمامی این گروه سیستمهای فیزیکی

فرمولبندی ریاضی مشابهی حاکم است. سیستمهای مکانیکی آونگ پیمچی، ریسمان یا غشای مرتعش، و ارتعاشهای کشسان تیغهها و صفحات را در برمیگیرند. این سیستمها ممکن است فزایندهایی داشته باشند، و هر کدام را بتوان درست به همان صورت بحث پیشین بررسی کرد.

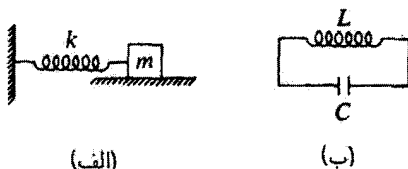
می‌توانیم سیستم مکانیکی خود را مشابه سیستمهای آکوستیکی به‌کار بندیم. در این مورد، مولکولهای هوا ارتعاش می‌کنند. می‌توانیم تشدیدهایی داشته باشیم که به خواص و ابعاد محیط بستگی دارند. چندین عامل، از جمله اصطکاک و تابش موج صوتی، به میرایی منجر می‌شوند. از میان بسیاری از منبعهای تولید صوت، نیروی محرک می‌تواند یک دیپازون یا ریسمان مرتعش باشد. سیستمهای اتمی را نیز می‌توان به تعبیر کلاسیکی به‌عنوان نوسانگرهای خطی نمایش داد. وقتی نور (متشکل از تابش الکترومغناطیسی بسامد بالا) بر ماده فرود می‌آید، اتمها و مولکولهای آن را به ارتعاش درمی‌آورد. بسامد تشدید در یکی از بسامدهای طیفی این سیستم اتفاق می‌افتد. وقتی نور با یکی از بسامدهای تشدید سیستم اتمی یا مولکولی بر ماده بتابد، انرژی الکترومغناطیسی جذب و سبب می‌شود که اتمها یا مولکولها با دامنه‌ی زیادی به نوسان درآیند. بارهای الکتریکی نوسان‌کننده میدانهای الکترومغناطیسی قوی با بسامد همسان تولید می‌کنند. در مکابیک موجی (یا مکانیک کوانتومی) برای توضیح بسیاری از پدیده‌های وابسته به جذب، پاشندگی، و تابش نور از نظریه‌ی نوسانگر خطی بهره می‌گیرند.

حتی برای توصیف هسته‌ها، از نظریه‌ی نوسانگر خطی استفاده می‌شود. یکی از مدهای برانگیزش هسته‌ها عبارت است از برانگیزش جمعی. نوترونها و پروتونها به‌صورت حرکت‌های جمعی گوناگون ارتعاش می‌کنند. در این حرکت‌های جمعی هم تشدید روی می‌دهد و هم میرایی وجود دارد. مشابه مکانیک کلاسیکی آن برای توصیف این نوع حرکت بسیار مفید است.

اما، مدارهای الکتریکی جالبترین نمونه‌های نوسانهای غیر مکانیکی به‌شمار می‌آیند. در واقع، نمونه‌ی الکتریکی به‌سبب اهمیت عملی عظیم آن با چنان وسعتی مورد پژوهش واقع شده است که در اکثر مواقع وضعیت برعکس می‌شود، و ارتعاشات مکانیکی را به‌کمک «مدار الکتریکی معادل» تحلیل می‌کنند. مدارهای الکتریکی چندان مهم‌اند که ما یک بخش کامل را به مقایسه آنها با مشابه مکانیکشان اختصاص می‌دهیم.

### ۸.۳ نوسانهای الکتریکی

در شکل ۱۶.۳ (الف) نوسانگر مکانیکی ساده‌ای را که در آن یک جرم  $m$  بر سطح بدون اصطکاک می‌لغزد، مشاهده می‌کنید. می‌دانیم که معادله‌ی حرکت از این قرار است



شکل ۱۶.۳

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (۷۳.۳)$$

و بسامد نوسان از رابطه زیر به دست می آید

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (۷۴.۳)$$

حالا به مدار الکتریکی نمایش یافته در شکل ۱۶.۳ (ب) توجه کنید. در یک لحظه  $t$  بار روی خازن  $C$  عبارت است از  $q(t)$ ، و جریانی که از القاگر  $L$  می گذرد  $I(t) = \dot{q}$  است. با اعمال معادله کیرشهوف در این مدار، برای افت ولتاژ، داریم

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0 \quad (۷۵.۳)$$

یا، برحسب  $q$

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (۷۶.۳)$$

این معادله دقیقاً همان شکل معادله (۷۳.۳) را دارد؛ بنابراین جواب آن چنین می شود

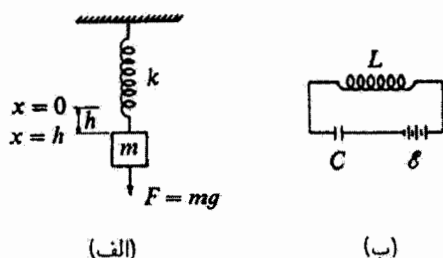
$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t \quad (۷۷.۳)$$

که در آن بسامد چنین می شود

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (۷۸.۳)$$

و با قید این شرط که  $q(t=0) = q_0$  و  $I(t=0) = 0$ ، فاز را مساوی صفر گرفته ایم.

با مقایسه جمله های معادلات (۷۳.۳) و (۷۶.۳)، می بینیم که شبیه الکتریکی جرم (یا لختی) القایدگی است، و تندهی فیزی، که وارون ثابت فنر  $k$  آن را نمایش می دهد، مشابه ظرفیت  $C$  است. رویهمرفته، داریم



شکل ۱۷.۳

$$m \rightarrow L, \quad x \rightarrow q$$

$$\frac{1}{k} \rightarrow C, \quad \dot{x} \rightarrow I$$

با دیفرانسیل‌گیری عبارت مربوط به  $q(t)$ ، خواهیم یافت

$$\ddot{q} = I(t) = -\omega \cdot q \cdot \sin \omega \cdot t \quad (۷۹.۳)$$

$q(t)$  و  $I(t)$  را مجذور می‌کنیم آنگاه می‌توانیم بنویسیم

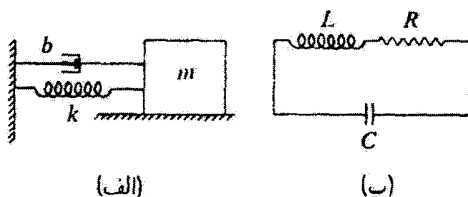
$$\frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \text{const.} \quad (۸۰.۳)$$

جمله  $\frac{1}{2} LI^2$  انرژی ذخیره شده در القاگر را نشان می‌دهد (و با انرژی جنبشی مکانیکی متناظر است)، در حالی که جمله  $\frac{1}{2} (q^2/C)$  انرژی ذخیره شده در خازن را باز می‌نمایاند (و متناظر انرژی پتانسیل مکانیکی است). مجموع این دو انرژی ثابت است، که بر پایستگی سیستم دلالت می‌کند. بعداً خواهیم دید که مدار الکتریکی فقط در صورتی پایسته است که مقاومت نداشته باشد (که وضعیتی ایده‌آل است و از دیدگاه عملی، غیر واقعی).

ترکیب جرم-فتر نمایش یافته در شکل ۱۷.۳ (الف) با ترکیب جرم-فتر در شکل ۱۶.۳ (الف) فرق می‌کند؛ در شکل ۱۷.۳ (الف) نیروی ثابتی ناشی از وزن جرم اضافه شده است:  $F_1 = mg$ . بدون این نیروی گرانشی، وضعیت تعادل در  $x = 0$  برقرار خواهد بود؛ افزودن این نیرو فتر را به اندازه  $h = mg/k$  باز می‌کند و وضعیت تعادل را به  $x = h$  منتقل می‌کند. بنابراین معادله حرکت همان معادله (۷۳.۳) است، با این تفاوت که به جای  $x$  کمیت  $x - h$  می‌نشیند

$$m\ddot{x} + kx = kh \quad (۸۱.۳)$$

و جواب آن می‌شود



شکل ۱۸.۳

$$x(t) = h + A \cos \omega.t \quad (۸۲.۳)$$

که در اینجا شرایط اولیه را  $x(t=0) = h + A$  و  $\dot{x}(t=0) = 0$  انتخاب کرده‌ایم. در شکل ۱۷.۳ (ب) یک باتری (با نیروی محرکه الکتریکی  $\mathcal{E}$ ) به مدار شکل ۱۶.۳ (ب) افزوده‌ایم. حالا معادله کیرشهوف چنین می‌شود

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = \mathcal{E} = \frac{q_1}{C} \quad (۸۳.۳)$$

که در آن  $q_1$  نمایشگر باری است که باید بر  $C$  قرار گیرد تا ولتاژ  $\mathcal{E}$  را تولید کند. با بهره‌گیری از  $I = \dot{q}$  داریم

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = \frac{q_1}{C} \quad (۸۴.۳)$$

اگر در  $t=0$ ،  $q = q_0$  و  $I = 0$  باشد، جواب این معادله عبارت است از

$$q(t) = q_1 + (q_0 - q_1) \cos \omega.t \quad (۸۵.۳)$$

که دقیقاً مشابه الکتریکی معادله (۸۲.۳) به‌شمار می‌آید.

افزودن میرایی به نوسانگر مکانیکی شکل ۱۶.۳ (الف) را می‌توان با یک «ظرف تراوا» حاوی مقداری شاره چسبنده، مطابق شکل ۱۸.۳ (الف) نشان داد. معادله حرکت عبارت است از

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (۸۶.۳)$$

معادله کیرشهوف برای مدار الکتریکی مشابه در شکل ۱۸.۳ (ب) عبارت است از

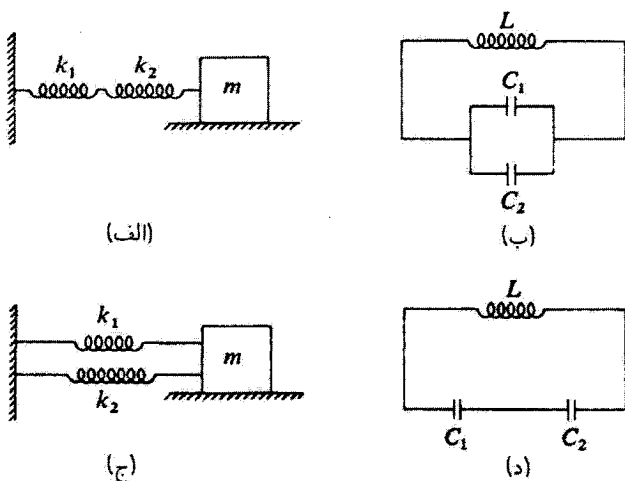
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (۸۷.۳)$$

جدول ۱.۳

مکانیکی	الکتریکی
$x$	جابه‌جایی $q$ بار
$\dot{x}$	سرعت $\dot{q} = I$ جریان
$m$	جرم $L$ القایدگی
$b$	مقاومت میران $R$ مقاومت
$1/k$	تندهی مکانیکی $C$ ظرفیت
$F$	دامنه نیرو مؤثر $\mathcal{E}$ دامنه نیروی محرکه الکتریکی مؤثر

بنابراین مقاومت الکتریکی  $R$ ، متناظر با مقاومت میران مکانیکی  $b$  است. شباهت میان کمیت‌های الکتریکی و مکانیکی را می‌توان در جدول ۱.۳ خلاصه کرد.

به علت ماهیت وارونگی تناظر بین تندهی مکانیکی و ظرفیت الکتریکی، افزودن فنرها و خازنها به سیستمها باید به روشهای متفاوتی صورت گیرد تا آثار مشابهی به وجود آورد. مثلاً جرم شکل ۱۹.۳ (الف) را، که در آن دو فنر به صورت پشت سرهم به یکدیگر متصل شده‌اند، در نظر



شکل ۱۹.۳

بگیرید. اگر نیرویی چون  $F$  بر جرم وارد آید، فنر ۱ به اندازه  $x_1 = F/k_1$  کشیده می‌شود، در حالی که فنر ۲ به اندازه  $x_2 = F/k_2$  کش می‌آید. کل مقدار باز شدن فنرها عبارت است از

$$x = x_1 + x_2 = F \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (۸۸.۳)$$

شبهه الکتریکی این معادله [مطابق شکل ۱۹.۳ (ب)] عبارت خواهد بود از

$$q = \mathcal{E}(C_1 + C_2) \quad (۸۹.۳)$$

بدینسان فنرهای متوالی با خازنهای موازی معادل‌اند.

به همین ترتیب، فنرهای موازی به صورت خازنهای متوالی عمل می‌کنند [شکل‌های ۱۹.۳ (ج)

و ۱۹.۳ (د)].

اگر در شکل ۱۷.۳ (ب) به جای باتری یک مولد جریان متناوب (AC) قرار دهیم، حالت نوسانهای الکتریکی واداشته پیش می‌آید. این موضوع بسیار مهم از محدوده این کتاب که در حوزه دینامیک کلاسیک است، فراتر می‌رود. بسیاری از اصطلاحات به‌کار رفته برای تشریح مدارهای AC (امپدانس، راکتانس، القایدگی، زوایای فاز، اتلاف توان، پهنای نوار، و جز اینها) را می‌توان در مورد سایر سیستمهای نوسانگر خطی اعمال کرد. اهمیت مشابهت با مدارهای الکتریکی در این است که می‌توان مدارهای الکتریکی را برای آزمودن مشابه‌های مکانیکی (و سایر مشابه‌ها) به‌کار برد.

### ۹.۳ اصل برهم‌نهی-سری فوریه

نوسانهایی که تا اینجا درباره آنها بحث کردیم از معادله دیفرانسیلی به شکل زیر پیروی می‌کنند

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + b \right) x(t) = A \cos \omega t \quad (۹۰.۳)$$

عبارت داخل پرانتز سمت چپ یک عملگر خطی است، که می‌توانیم آن را با  $L$  نشان دهیم. اگر تابع وادارنده وابسته به زمان سمت راست را تعمیم دهیم، می‌توانیم معادله حرکت را به صورت زیر بنویسیم

$$Lx(t) = F(t) \quad (۹۱.۳)$$

یکی از خاصیت‌های مهم عملگرهای خطی این است که این عملگرها از اصل برهم‌نهی پیروی می‌کنند. این خاصیت ناشی از این واقعیت است که عملگرهای خطی توزیع پذیرند؛ یعنی

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) \quad (۹۲.۳)$$



بنابراین، اگر دو جواب،  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$ ، را برای دو تابع وادارندهٔ مختلف،  $F_1(t)$  و  $F_2(t)$ ، داشته باشیم

$$\mathbf{L}x_1 = F_1(t), \quad \mathbf{L}x_2 = F_2(t) \quad (۹۳.۳)$$

می‌توانیم این معادلات (که ثابتهای اختیاری  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  در آنها ضرب شده‌اند) را جمع کنیم و به دست آوریم

$$\mathbf{L}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t) \quad (۹۴.۳)$$

می‌توان این بحث را به مجموعه‌ای از جوابها،  $x_n(t)$ ، که هر یک از آنها مناسب یک  $F_n(t)$  معین است، بسط داد

$$\mathbf{L}\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t)\right) = \sum_{n=1}^N \alpha_n F_n(t) \quad (۹۵.۳)$$

اگر ترکیبهای خطی را به صورت زیر بگیریم، این معادله همان معادله (۹۱.۳) است

$$x(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t) \quad (۹۶.۳)$$

$$F(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n F_n(t)$$

اگر هر یک از توابع منفرد  $F_n(t)$  وابستگی هماهنگ ساده‌ای به زمان داشته باشد، مانند  $\cos \omega_n t$ ، می‌دانیم که جواب متناظر  $x_n(t)$  از معادله (۹۰.۳) به دست می‌آید. بدینسان، اگر  $F(t)$  به شکل زیر باشد

$$F(t) = \sum_n \alpha_n \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad (۹۷.۳)$$

جواب حالت پایا عبارت است از

$$x(t) = \frac{1}{m} \sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_n^2 \beta^2}} \cos(\omega_n t - \phi_n - \delta_n) \quad (۹۸.۳)$$

که در آن

$$\delta_n = \tan^{-1} \left( \frac{2\omega_n \beta}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \quad (۹۹.۳)$$

هرگاه  $F(t)$  با یک سری از جمله‌ها،  $\sin(\omega_n t - \phi_n)$ ، نمایش داده شود می‌توانیم جوابهایی مشابه همین جوابها را بنویسیم. بنابراین به نتیجهٔ مهمی می‌رسیم و آن عبارت از این است که، اگر

تابع وادارندهٔ اختیاری چون  $F(t)$  را بتوان به صورت یک سری (متناهی یا نامتناهی) از جمله‌های هماهنگ بیان کرد، جواب کامل را نیز می‌توان به صورت یک سری مشابه از جمله‌های هماهنگ نوشت. این نتیجه بسیار سودمند است، زیرا، بنا بر قضیهٔ فوریه، هر تابع تناوبی دلخواه را (تحت شرایط خاصی که خیلی محدودکننده نیست) می‌توان با یک سری از جمله‌های هماهنگ نمایش داد.<sup>۱</sup> بدینسان، در حالت فیزیکی معمولی که  $F(t)$  تابعی تناوبی با دورهٔ تناوب  $\tau = 2\pi/\omega$  است، یعنی

$$F(t + \tau) = F(t) \quad (۱۰۰.۳)$$

داریم

$$F(t) = \frac{1}{\tau} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (۱۰۱.۳)$$

که در آن

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t') \cos n\omega t' dt' \\ b_n &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t') \sin n\omega t' dt' \end{aligned} \right\} \quad (۱۰۲.۳ \text{ الف})$$

یا، از آنجا که دورهٔ تناوب  $F(t)$  عبارت است از  $\tau$ ، می‌توانیم به جای حدود انتگرال  $0$  و  $\tau$ ، حدود  $-\frac{1}{2}\tau = -\pi/\omega$  و  $+\frac{1}{2}\tau = +\pi/\omega$  جایگزین کنیم:

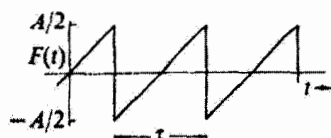
$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} F(t') \cos n\omega t' dt' \\ b_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} F(t') \sin n\omega t' dt' \end{aligned} \right\} \quad (۱۰۲.۳ \text{ ب})$$

پیش از آنکه در خصوص پاسخ سیستمهای میرا به توابع وادارندهٔ دلخواه (در بخش بعد) به بحث بپردازیم، مثالی در باب نمایش فوریهٔ توابع تناوبی ارائه می‌دهیم.

### مثال ۳.۳

یک تابع نیروی محرک دندانه اره‌ای را در شکل ۲۰.۳ مشاهده می‌کنید. ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  را بیابید، و  $F(t)$  را به صورت سری فوریه بیان کنید.

۱. در بخش ۸.۱۳ در خصوص سری فوریه به تفصیل بحث خواهد شد.



شکل ۲۰.۳

حل: در این حالت،  $F(t)$  یک تابع فرد،  $F(-t) = -F(t)$  است و به صورت زیر بیان می‌شود

$$F(t) = A \times \frac{t}{\tau} = \frac{\omega A}{\gamma \pi} t, \quad -\tau/2 < t < \tau/2 \quad (103.3)$$

چون  $F(t)$  فرد است، ضرایب  $a_n$  همگی متحداً صفر می‌شوند.  $b_n$  به طریق زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\omega^2 A}{\gamma \pi^2} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} t' \sin n\omega t' dt' \\ &= \frac{\omega^2 A}{\gamma \pi^2} \left[ -\frac{t' \cos n\omega t'}{n\omega} + \frac{\sin n\omega t'}{n^2 \omega^2} \right]_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} \end{aligned}$$

(۱۰۴.۳) ۱. در بخش ۸.۱۳ در خصوص سری فوریه به تفصیل بحث خواهد شد.

که جمله  $(-1)^{n+1}$  از این واقعیت حاصل می‌شود که

$$-\cos n\pi = \begin{cases} +1 & \text{فرد } n \\ -1, & \text{زوج } n \end{cases} \quad (105.3)$$

بنابراین داریم

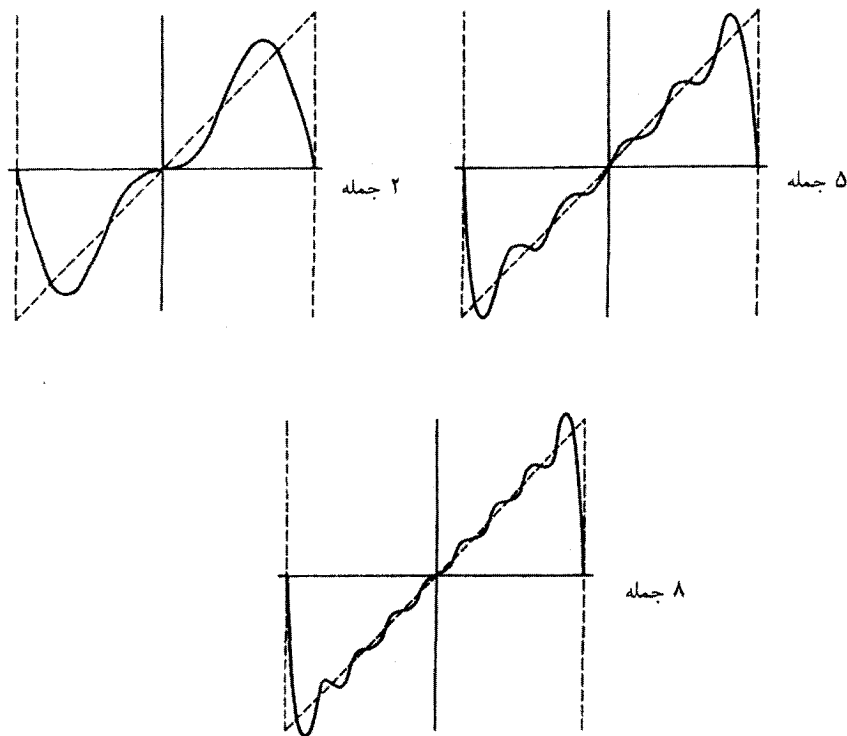
$$F(t) = \frac{A}{\pi} \left[ \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t + \frac{1}{9} \sin 5\omega t - \dots \right] \quad (106.3)$$

در شکل ۲۱.۳ نتایج را برای دو جمله، پنج جمله، و هشت جمله این بسط مشاهده می‌کنید.

همگرایی به سوی تابع دنداناره‌ای به هیچ‌وجه خیلی سریع نیست.

باید دو جنبه از این بسط را در نظر بگیریم. در نقاط ناپوستگی ( $t = \pm\tau/2$ ) سری مقدار میانگین (صفر) را به دست می‌دهد، و بسط در ناحیه مجاور نقاط نسبت به تابع اصلی «خیزش تند» دارد. این اثر آخری، مشهور به پدیده گیبس<sup>۱</sup>، در تمام مرتبه‌های تقریب اتفاق می‌افتد. تندخیزی گیبس در هر طرف هر ناپوستگی، حتی در حد یک سری نامتناهی، به حدود ۹٪ می‌رسد. ■

۱. ژوسیا ویلارد گیبس (۱۸۳۹-۱۹۰۳) در سال ۱۸۹۸ این اثر را به طور تجربی کشف کرد. بحث مفصل در این مورد در، مثلاً، کتاب دیویس (Da63, pp. 113-118) آمده است. مقدار تندخیزی واقعاً ۰.۰۰۹۴۹۰٪ است.



شکل ۲۱.۳

### ۱۰.۳ پاسخ نوسانگرهای خطی به تابع وادارندهٔ ضربه‌ای (اختیاری)

در بحثهای پیشین عمدتاً به نوسانهای حالت پایا توجه کرده‌ایم. در مورد انواع بسیاری از مسائل فیزیکی (به‌ویژه مسئله‌هایی که متضمن مدارهای الکتریکی نوسانی‌اند)، آثارگذرا خیلی مهمند. در واقع، در چنین مواردی ممکن است جواب‌گذرا بیشتر مورد توجه باشد. در این بخش رفتارگذرای یک نوسانگر خطی را تحت تأثیر نیروی محرکی که به‌طور ناپیوسته وارد می‌آید، بررسی می‌کنیم. البته، نیروی «ناپیوسته» حالت ایده‌آل است، چرا که همواره زمان محدودی طول می‌کشد تا یک نیرو عمل کند. اما اگر زمان اعمال نیرو در مقایسه با دورهٔ تناوب طبیعی نوسانگر کوتاه باشد، نتیجهٔ حالت ایده‌آل به وضعیت فیزیکی واقعی یک تقریب نزدیک است.

معادلهٔ دیفرانسیلی که حرکت نوسانگر میرا را توصیف می‌کند عبارت است از

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (10.7.3)$$

جواب عمومی این معادله ترکیبی است از جوابهای متمم و خصوصی

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (۱۰۸.۳)$$

می‌توان جواب متمم را به این صورت نوشت

$$x_c(t) = e^{-\beta t}(A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t) \quad (۱۰۹.۳)$$

که در آن

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (۱۱۰.۳)$$

جواب خصوصی،  $x_p(t)$ ، به ماهیت تابع وادارنده  $F(t)$  بستگی دارد.

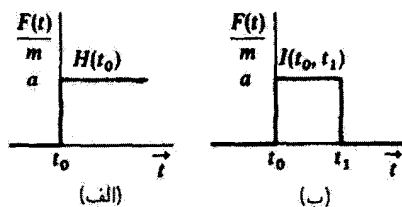
دو نوع تابع وادارنده ناپیوسته ایده‌آل از توجه خاصی برخوردارند. این دو نوع عبارت‌اند از تابع پله‌ای (یا تابع هویساید) و تابع ضربه، که آنها را، به ترتیب، در شکل‌های ۲۲.۳ (الف) و ۲۲.۳ (ب) مشاهده می‌کنید. تابع پله‌ای  $H$  این‌طور بیان می‌شود

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a, & t > t_0 \end{cases} \quad (۱۱۱.۳)$$

که  $a$  ثابتی است با ابعاد شتاب، و شناسه  $t_0$  حاکی از آن است که زمان عملکرد نیرو عبارت است از  $t = t_0$ .

تابع ضربه  $I$ ، عبارت است از یک تابع پله‌ای مثبت که در  $t = t_0$  اعمال شده و به دنبال آن یک تابع پله‌ای منفی که در زمان بعدتر،  $t_1$ ، وارد می‌شود. بدینسان

$$I(t_0, t_1) = H(t_0) - H(t_1)$$



شکل ۲۲.۳

$$I(t_0, t_1) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a, & t_0 < t < t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \quad (112.3)$$

هر چند که توابع پله‌ای و ضربه را برای سادگی به صورت  $H(t_0)$  و  $I(t_0, t_1)$  می‌نویسیم، این توابع به زمان  $t$  بستگی دارند و درست‌تر آن است که به شکل  $H(t; t_0)$  و  $I(t; t_0, t_1)$  نوشته شوند.

پاسخ به تابع پله‌ای

در مورد توابع پله‌ای، معادله دیفرانسیلی که به ازای  $t > t_0$  حرکت را توصیف کند عبارت است از

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_1^2 x = a, \quad t > t_0 \quad (113.3)$$

شرایط اولیه را  $x(t_0) = 0$  و  $\dot{x}(t_0) = 0$  می‌گیریم. جواب خصوصی یک مقدار ثابت است، و بررسی معادله (113.3) نشان می‌دهد که این جواب باید  $a/\omega_1^2$  باشد. به این ترتیب حل عمومی این معادله به ازای  $t > t_0$  عبارت خواهد بود از

$$x(t) = e^{-\beta(t-t_0)} [A_1 \cos \omega_1(t-t_0) + A_2 \sin \omega_1(t-t_0)] + \frac{a}{\omega_1^2} \quad (114.3)$$

با اعمال شرایط اولیه، خواهیم داشت

$$A_1 = -\frac{a}{\omega_1^2}, \quad A_2 = \frac{\beta a}{\omega_1 \omega_1^2} \quad (115.3)$$

بنابراین، به ازای  $t > t_0$  داریم

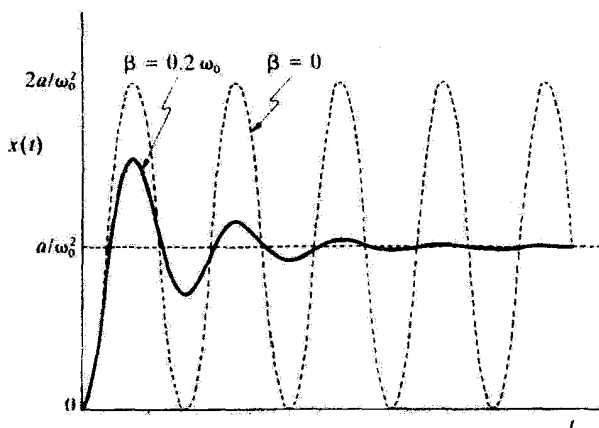
$$x(t) = \frac{a}{\omega_1^2} \left[ 1 - e^{-\beta(t-t_0)} \cos \omega_1(t-t_0) - \frac{\beta e^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0) \right] \quad (الف) \quad (116.3)$$

و به ازای  $t < t_0$ ،  $x(t) = 0$ .

اگر، برای سادگی،  $t_0$  را مساوی صفر در نظر بگیریم، جواب را می‌توان چنین بیان کرد

$$x(t) = \frac{H(0)}{\omega_1^2} \left[ 1 - e^{-\beta t} \cos \omega_1 t - \frac{\beta e^{-\beta t}}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] \quad (ب) \quad (116.3)$$

تابع پاسخ را برای حالت  $\beta = 0$  و  $\omega_1 = \omega$  در شکل ۲۳.۳ مشاهده می‌کنید. واضح است که وضعیت



شکل ۲۳.۳

نهایی نوسانگر (یعنی، وضعیت حالت پایا) صرفاً یک جابه‌جایی به اندازه  $a/\omega_0^2$  است. اگر هیچگونه میرایی پیش‌نیاید،  $\beta = 0$  و  $\omega_1 = \omega_0$ . در این صورت، به‌ازای  $t_0 = 0$  داریم

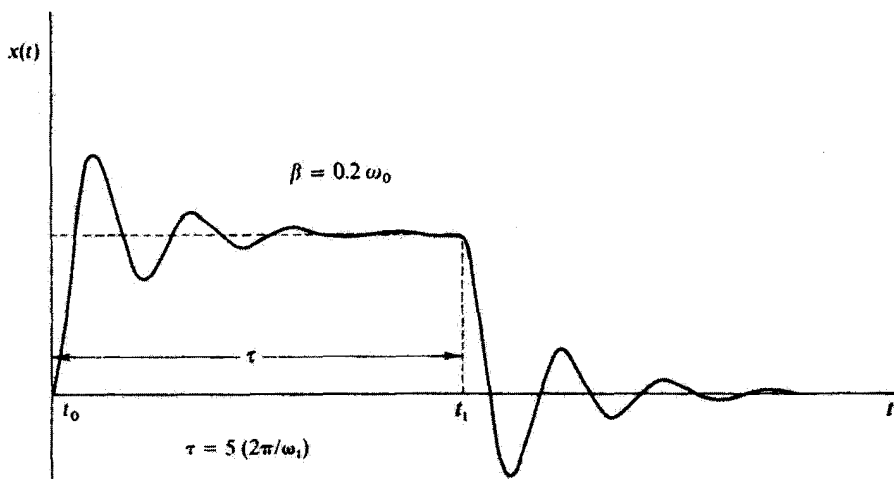
$$x(t) = \frac{H(0)}{\omega_0^2} [1 - \cos \omega_0 t], \quad \beta = 0 \quad (117.3)$$

بدینسان نوسان یک نوسان سینوسی با فرینهای دامنه  $x = 0$  و  $x = 2a/\omega_0^2$  است (شکل ۲۳.۳).

پاسخ به تابع ضربه

اگر تابع ضربه را اختلاف بین دو تابع پله‌ای به فاصله زمانی  $\tau$  به‌اندازه  $t_1 - t_0 = \tau$  در این صورت، از آنجا که سیستم خطی است، جواب عمومی به‌ازای  $t > t_1$  از طریق برهم‌نهی جوابها [معادله ۱۱۶.۳ (الف)] دو تابع پله‌ای که تک‌تک داده شده باشند، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a}{\omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\beta(t-t_0)} \cos \omega_1(t-t_0) - \frac{\beta e^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0) \right] \\ &\quad - \frac{a}{\omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\beta(t-t_0-\tau)} \cos \omega_1(t-t_0-\tau) - \frac{\beta e^{-\beta(t-t_0-\tau)}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0-\tau) \right] \\ &= \frac{ae^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_0^2} \left[ e^{\beta\tau} \cos \omega_1(t-t_0-\tau) - \cos \omega_1(t-t_0) + \frac{\beta e^{\beta\tau}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0-\tau) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0) \right], \quad t > t_1 \end{aligned} \quad (118.3)$$



شکل ۲۴.۳

پاسخ کل [یعنی، معادله‌های (۱۱۶.۳) الف) و (۱۱۸.۳)] به یک تابع ضربه با مدت دوام می‌کنید. اگر اجازه دهیم که مدت دوام تابع ضربه،  $\tau$ ، به صفر میل کند، در این صورت تابع پاسخ بسیار کوچک خواهد شد. اما اگر وقتی  $\tau \rightarrow 0$  آنگاه  $a \rightarrow \infty$  به طوری که حاصلضرب  $a\tau$  ثابت بماند پاسخ متناهی خواهد بود. این حالت حدی خاص بسیار مهم است، زیرا عملکرد یک نیروی محرک را که در  $t = t_0$  به شکل «خار» است (یعنی،  $\tau \ll 2\pi/\omega_1$ )، با تقریب ارائه می‌دهد.<sup>۱</sup> می‌خواهیم با شرط  $\tau \rightarrow 0$ ، اما با فرض  $b = a\tau = \text{const.}$  معادله (۱۱۸.۳) را بسط دهیم. فرض می‌کنیم  $A = t - t_0$  و  $B = \tau$ ؛ آنگاه با بهره‌گیری از معادلات (۱۱.د) و (۱۲.د) در

۱. «خاری» از این نوع را معمولاً تابع دلتا می‌گویند و به صورت  $\delta(t - t_0)$  نوشته می‌شود. خاصیت تابع دلتا به این صورت است که به ازای  $t \neq t_0$ ،  $\delta(t) = 0$  و  $\delta(t_0) = \infty$ ، اما

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

بنابراین، عبارت بالا به معنی ریاضی یک تابع حقیقی نیست، اما می‌توان آن را حد تابعی خوشرفتار و بسیار متمرکز تعریف کرد (مانند تابع گاوسی) در حالی که پارامتر پهنای آن به صفر میل می‌کند. همچنین نگاه کنید به



پیوست (د) خواهیم داشت

$$x(t) = \frac{ae^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_1^2} \{ e^{\beta\tau} [\cos \omega_1(t-t_0) \cos \omega_1\tau + \sin \omega_1(t-t_0) \sin \omega_1\tau] - \cos \omega_1(t-t_0) + \frac{\beta e^{\beta\tau}}{\omega_1} [\sin \omega_1(t-t_0) \cos \omega_1\tau - \cos \omega_1(t-t_0) \sin \omega_1\tau] - \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0) \}, \quad t > t_0.$$

از آنجا که  $\tau$  کوچک است، می‌توانیم  $e^{\beta\tau}$ ،  $\cos \omega_1\tau$  و  $\sin \omega_1\tau$  را با استفاده از معادلات (د.۳۴)، (د.۲۹) و (د.۲۸) و بانگه داشتن تنها دو جمله اول هر کدام، بسط دهیم. پس از انجام عملیات ضرب مربوط به جمله‌های شامل  $\tau$  و نگه داشتن تنها جملات شامل پایینترین مرتبه  $\tau$ ، داریم

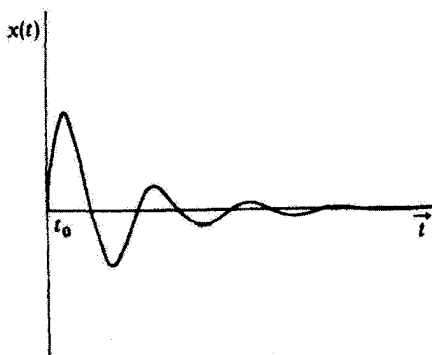
$$x(t) = \frac{ae^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_1^2} \sin \omega_1(t-t_0) \left[ \omega_1\tau + \frac{\beta^2\tau}{\omega_1} \right], \quad t > t_0.$$

با استفاده از معادله (۳.۱۱۰)، برای  $\omega_1^2$  و  $\tau = b/a$ ، سرانجام، به دست می‌آوریم

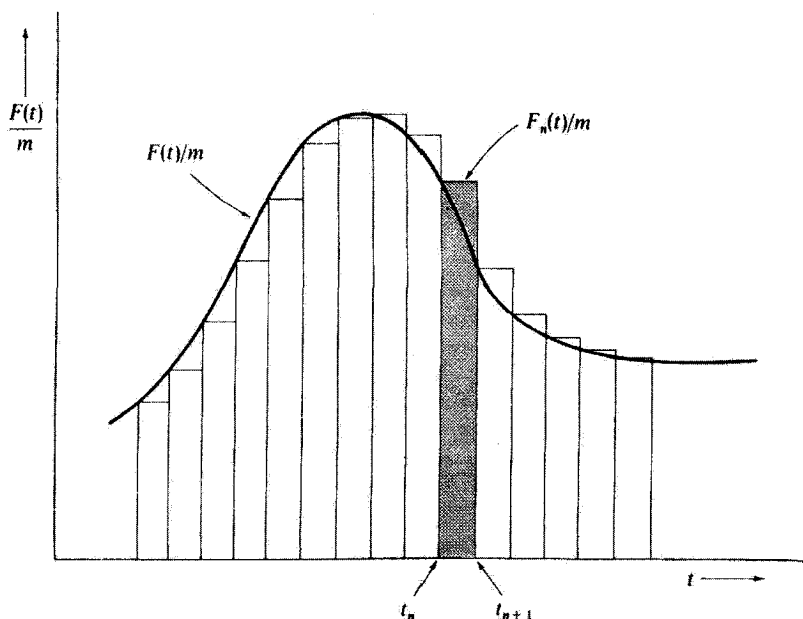
$$x(t) = \frac{b}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_0)} \sin \omega_1(t-t_0), \quad t > t_0. \quad (۱۱۹.۳)$$

این تابع پاسخ را برای حالت  $\beta = 0.2\omega_1$  در شکل ۲۵.۳ مشاهده می‌کنید. توجه داشته باشید که، با بزرگتر شدن  $t$ ، نوسانگر به وضعیت تعادل اولیه خود برمی‌گردد.

این واقعیت که پاسخ یک نوسانگر خطی به نیروی محرک ضربه‌ای را می‌توان به شیوه ساده معادله (۱۱۹.۳) نشان داد به شگرد توانایی برای برخورد با توابع وادارنده عمومی، که به وسیله



شکل ۲۵.۳



شکل ۲۶.۳

گرین<sup>۱</sup> تکامل یافت، می‌انجامد. روش گرین بر مبنای نمایش تابع وادارنده دلخواهی به صورت یک سری، مطابق طرحواره شکل ۲۶.۳، استوار است. اگر سیستم واداشته خطی باشد، اصل برهم‌نهی معتبر است، و ما می‌توانیم جزء ناهمگن معادله دیفرانسیل را به صورت مجموع توابع وادارنده منفرد  $F_n(t)/m$ ، که در روش گرین توابع ضربه به شمار می‌آیند، بیان کنیم:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_n(t)}{m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(t) \quad (120.3)$$

که در آن

$$I_n(t) = I(t_n, t_{n+1}) = \begin{cases} a_n(t_n), & t_n < t < t_{n+1} \\ 0, & \text{سایر مقادیر} \end{cases} \quad (121.3)$$

بازه زمانی که  $I_n$  در طی آن عمل می‌کند عبارت است از  $t_{n+1} - t_n = \tau$  و  $\tau \ll 2\pi/\omega_0$

۱. جورج گرین (۱۸۴۱-۱۷۹۳) یک ریاضیدان خودآموخته انگلیسی بود.

جواب ضربه  $n$ ام، مطابق معادله (۱۱۹.۳)، عبارت است از

$$x_n(t) = \frac{a_n(t_n)\tau}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_n)} \sin \omega_1(t-t_n), \quad t > t_n + \tau \quad (122.3)$$

و جواب مربوط به همه ضربه‌ها تا ضربه  $N$ ام و خود ضربه  $N$ ام عبارت است از

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^N \frac{a_n(t_n)\tau}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_n)} \sin \omega_1(t-t_n), \quad t_N < t < t_{N+1} \quad (123.3)$$

اگر اجازه دهیم بازه زمانی  $\tau$  به صفر میل کند و  $t_n$  را به صورت  $t'$  بنویسیم، آنگاه مجموع به انتگرال تبدیل می‌شود

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{a(t')}{\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt' \quad (124.3)$$

تعریف می‌کنیم

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{m\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t'), & t \geq t' \\ 0, & t < t' \end{cases} \quad (125.3)$$

در این صورت، از آنجا که

$$ma(t') = F(t') \quad (126.3)$$

پس داریم

$$x(t) = \int_{-\infty}^t F(t') G(t, t') dt' \quad (127.3)$$

تابع  $G(t, t')$  را تابع گرین مربوط به معادله نوسانگر خطی [معادله (۱۰۷.۳)] می‌گویند. جوابی که به وسیله معادله (۱۲۷.۳) بیان شود فقط برای نوسانگری صادق است که در ابتدا در وضعیت تعادلش در حال سکون باشد، زیرا جوابی که ما برای تک ضربه به کار بردیم [معادله (۱۱۹.۳)] دقیقاً برای چنین شرط اولیه‌ای به دست آمد. در مورد سایر شرایط اولیه، جواب عمومی را می‌توان به شیوه‌ای مشابه به دست آورد.

روش گرین عموماً برای حل معادلات دیفرانسیل خطی، و ناهمگن مفید است. امتیاز عمده این روش در این واقعیت نهفته است که تابع گرین  $G(t, t')$ ، که جواب معادله برای یک عنصر

بینهایت کوچک از بخش ناهمگن است، از قبل شامل شرایط اولیه است—بنابراین جواب عمومی، بیان شده به وسیله انتگرال  $F(t)G(t, t')$ ، به طور خودبه خود نیز شامل شرایط اولیه است.

## مثال ۴.۳

$x(t)$  را برای تابع وادارنده‌ای که به طور نمایی نزول می‌کند و در  $t = 0$  آغاز می‌شود و به ازای  $t > 0$  به شکل زیر است، بیابید

$$F(t) = F_0 e^{-\gamma t}, \quad t > 0 \quad (128.3)$$

حل: جواب مربوط به  $x(t)$  مطابق روش گزین عبارت است از

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1} \int_0^t e^{-\gamma t'} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt' \quad (129.3)$$

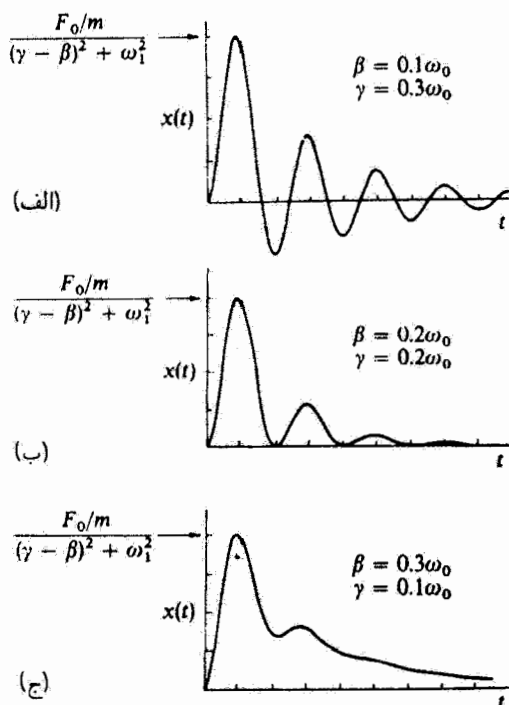
با تغییر متغیری به صورت  $z = \omega_1(t-t')$  می‌یابیم

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{F_0}{m\omega_1^2} \int_0^{\omega_1 t} e^{-\gamma t} e^{[(\gamma-\beta)/\omega_1]z} \sin z dz \\ &= \frac{F_0/m}{(\gamma-\beta)^2 + \omega_1^2} \left[ e^{-\gamma t} - e^{-\beta t} \left( \cos \omega_1 t - \frac{\gamma-\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \quad (130.3) \end{aligned}$$

این تابع پاسخ به ازای سه ترکیب از ضرایب میرایی  $\beta$  و  $\gamma$  در شکل ۲۷.۳ نمایش داده شده است. وقتی  $\gamma$  در مقایسه با  $\beta$  بزرگ باشد، و اگر هر دو در مقایسه با  $\omega$  کوچک باشند، در این صورت پاسخ به پاسخ مربوط به «خار» نزدیک می‌شود؛ شکل ۲۵.۳ را با منحنی شکل ۲۷.۳ (الف) مقایسه کنید. وقتی  $\gamma$  در مقایسه با  $\beta$  کوچک باشد، پاسخ به شکل خود تابع وادارنده نزدیک می‌شود—یعنی، به دنبال یک افزایش اولیه یک نزول نمایی پیش می‌آید. منحنی شکل ۲۷.۳ (ج) دامنه کاهش‌یابنده‌ای را نشان می‌دهد که یک نوسان باقیمانده با آن برهم نهاده شده است. وقتی  $\beta$  و  $\gamma$  برابر شوند، معادله (۱۳۰.۳) این طور می‌شود

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1^2} e^{-\beta t} (1 - \cos \omega_1 t), \quad \beta = \gamma \quad (131.3)$$

بنابراین پاسخ نوسانی با «دوره تناوب»  $2\pi/\omega_1$  است، اما با دامنه‌ای که به طور نمایی کاهش می‌یابد [مانند منحنی شکل ۲۷.۳ (ب)].



شکل ۲۷.۳

مثلاً، در صورتی که یک مدار الکترونیکی خاموش اما ذاتاً نوسانی ناگهان با ولتاژ در حال کاهش دو سربیک خازن، تحریک شود، ممکن است پاسخی از نوعی که به وسیله معادله (۱۳۰.۳) داده شده است به دست آید.

### ۱۱.۳ نوسانهای غیر خطی

در مقدمه این فصل اشاره کردیم که اکثر سیستمهای فیزیکی غیر خطی اند. معادله حرکت یک بعدی از نوع زیر را در نظر می‌گیریم

$$m\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = h(t) \quad (۱۳۲.۳)$$

اگر  $f(\dot{x})$  یا  $g(x)$ ، به ترتیب شامل توانهای  $\dot{x}$  یا  $x$  بالاتر از توان خطی باشند، در این صورت سیستم فیزیکی غیر خطی است. جوابهای کامل مربوط به معادله (۱۳۲.۳) برای توابع کلی  $f(\dot{x})$  و  $g(x)$  امکان‌پذیر نیستند. در اینجا پیرامون برخی عملیات خاص که برای حل معادلات غیر خطی

لازم‌اند، به بحث می‌پردازیم. نمودارهای فاز برای فهم حرکت سیستم مفیدند. اگر انرژی پتانسیل به شکل زیر باشد

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (۱۳۳.۳)$$

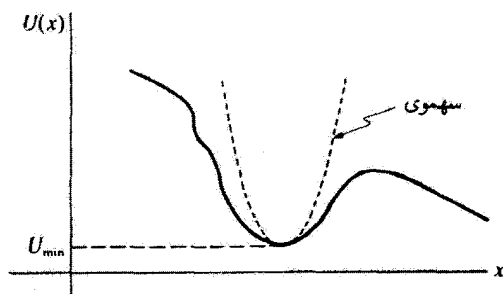
نیروی مربوطه عبارت است از

$$F(x) = -kx \quad (۱۳۴.۳)$$

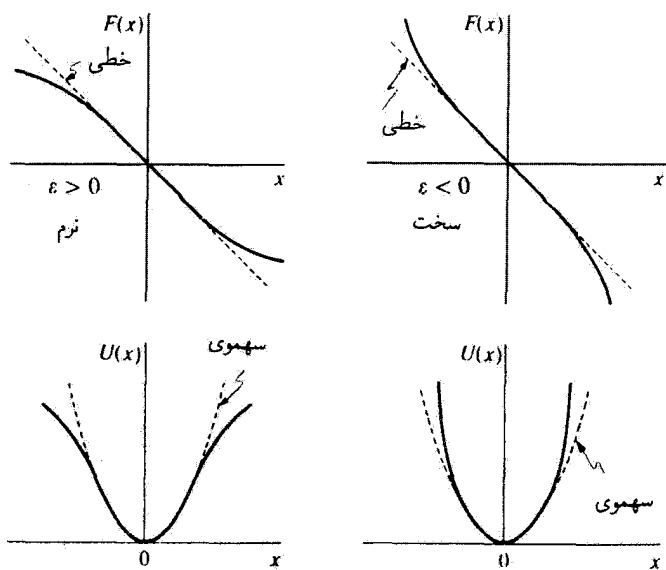
این عبارت همان حالت حرکت هماهنگ ساده است که در بخش ۲.۳ درباره‌اش بحث شد. حالا فرض کنید که ذره‌ای در یک چاه پتانسیل حرکت می‌کند، که یک تابع دلخواه از فاصله است (مطابق شکل ۲۸.۳). در این صورت، در مجاورت کمینه چاه، می‌توانیم پتانسیل را با یک سهموی تقریب بزنیم. بنابراین، اگر انرژی ذره فقط اندکی بیشتر از  $U_{\min}$  باشد، فقط دامنه‌های کوچک امکان وجود دارند و حرکت تقریباً هماهنگ ساده است. اگر انرژی به‌طور محسوسی بیشتر از  $U_{\min}$  باشد، به‌طوری که دامنه حرکت را بتوان کوچک پنداشت، در این صورت ممکن است این مقدار دیگر به اندازه کافی دقیق نباشد تا تقریب  $U(x) \approx \frac{1}{2}kx^2$  را تأمین کند و ما باید با یک نیروی غیرخطی سروکار داشته باشیم.

در بسیاری از وضعیتهای فیزیکی انحراف نیرو از شکل خطی بودن حول وضعیت تعادل (که ما آن را در  $x = 0$  می‌گیریم) متقارن است. در چنین مواردی، مقدار نیروی وارد بر ذره در  $-x$  و در  $x$  یکی است؛ راستای این نیرو در این دو حالت مخالف یکدیگرند. بنابراین، در یک وضعیت متقارن، نخستین تصحیح به یک نیروی خطی باید جمله‌ای متناسب با  $x^3$  باشد؛ از این‌رو

$$F(x) \cong -kx + \varepsilon x^3 \quad (۱۳۵.۳)$$



شکل ۲۸.۳



شکل ۲۹.۳

$\epsilon$  معمولاً کمیتی کوچک است. پتانسیل متناظر با چنین نیرویی عبارت است از

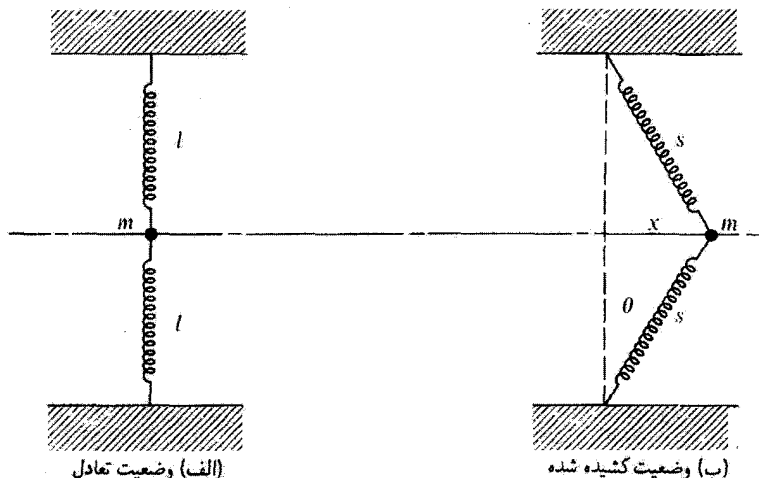
$$U(x) = \frac{1}{4}kx^2 - \frac{1}{4}\epsilon x^4 \quad (۱۳۶.۳)$$

بسته به علامت کمیت  $\epsilon$ ، این نیرو ممکن است بزرگتر یا کوچکتر از تقریب خطی باشد. اگر  $\epsilon > 0$ ، در این صورت نیرو از جمله خطی به تنهایی کوچکتر است و سیستم را نرم می‌گویند؛ اگر  $\epsilon < 0$ ، آنگاه نیرو بزرگتر و سیستم را سخت می‌نامند. در شکل ۲۹.۳ شکل نیرو و پتانسیل را برای یک سیستم نرم و یک سیستم سخت مشاهده می‌کنید.

### مثال ۵.۳

ذره‌ای به جرم  $m$  را در نظر بگیرید که بین دو فنر یکسان آویخته شده است (شکل ۳۰.۳). نشان دهید که سیستم غیر خطی است. جواب حالت پایدار را برای نیروی محرک  $F \cos \omega t$  بیابید.

حل: اگر وقتی ذره در موقعیت تعادل خود است هر دو فنر در شرایط غیر کشیدگی خود باشند (یعنی، هیچگونه کششی، و بنابراین هیچگونه انرژی پتانسیلی، در هیچیک از آنها وجود نداشته باشد) — و اگر از نیروهای گرانشی چشم‌پوشیم — در آن صورت هرگاه ذره از وضعیت تعادل



۳۰۳۱۳۰

جابه‌جا شود [شکل ۳۰.۳ (ب)] هر فنر نیروی  $-k(s-l)$  بر ذره وارد می‌آورد ( $k$  عبارت است از ثابت نیروی هر فنر). نیروی (افقی) خالص وارد بر ذره عبارت است از

$$F = -2k(s-l) \sin \theta \quad (۱۳۷.۳)$$

حالا

$$s = \sqrt{l^2 + x^2} \quad (۱۳۸.۳)$$

بنابراین

$$\sin \theta = \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \quad (۱۳۹.۳)$$

از این رو

$$F = -\frac{2kx}{\sqrt{l^2 + x^2}} \times (\sqrt{l^2 + x^2} - l) = -2kx \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (x/l)^2}} \right) \quad (۱۴۰.۳)$$

اگر  $x/l$  راکمیت کوچکی بگیریم و رادیکال را بسط دهیم، خواهیم یافت

$$F = -kl \left( \frac{x}{l} \right)^2 \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{x}{l} \right)^2 + \dots \right] \quad (۱۴۱.۳)$$

هرگاه از همه جمله‌ها مگر جمله پیشرو چشم‌پوشیم، به‌طور تقریب خواهیم داشت



$$F(x) \cong -(k/l^2)x^2 \quad (۱۴۲.۳)$$

بنابراین، حتی اگر دامنه حرکت به اندازه کافی محدود باشد به طوری که  $x/l$  کمیت کوچکی شود، این نیرو هنوز هم با  $x^2$  متناسب است. از این رو سیستم ذاتاً غیر خطی است. از سوی دیگر، اگر لازم باشد که هر فنر به اندازه  $d$  کشیده شود تا در وضعیت تعادل به جرم متصل شوند، در این صورت برای نیرو خواهیم داشت (مسئله ۳.۴۰ را ببینید)

$$F(x) \cong -2(kd/l)x - [k(l-d)/l^2]x^2 \quad (۱۴۳.۳)$$

و یک جمله خطی در عبارت وارد می شود.

از معادله (۱۴۳.۳) مشخص می شود که

$$\varepsilon = -k(l-d)/l^2 < 0 \quad (۱۴۴.۳)$$

از این رو سیستم سخت است، و در نوسانهای کم دامنه حرکت تقریباً هماهنگ ساده است. اگر نیروی محرک  $F_0 \cos \omega t$  را داشته باشیم، معادله حرکت برای فنر کشیده [نیروی معادله (۱۴۳.۳)] به این صورت می شود

$$m\ddot{x} = -\frac{2kd}{l}x - \frac{k(l-d)}{l^2}x^2 + F_0 \cos \omega t \quad (۱۴۵.۳)$$

می گیریم

$$a = \frac{2kd}{ml}, \quad G = \frac{F_0}{m} \quad (۱۴۶.۳)$$

از این رو

$$\ddot{x} = -ax + \varepsilon x^2 + G \cos \omega t \quad (۱۴۷.۳)$$

حل معادله دیفرانسیل (۱۴۷.۳) دشوار است. می توانیم برای یافتن یک جواب حالت پایای مناسب از یک روش اختلال بهره گیریم. ابتدا، یک جواب  $x_1 = A \cos \omega t$  را فرض می کنیم، و  $x_1$  را در سمت راست معادله (۱۴۷.۳) قرار می دهیم که می شود

$$\ddot{x}_2 = -aA \cos \omega t + \varepsilon A^2 \cos^2 \omega t + G \cos \omega t \quad (۱۴۸.۳)$$

که جواب معادله (۱۴۸.۳) عبارت است از  $x = x_2$ . این معادله را می توان برحسب  $x_2$  و با استفاده از اتحاد زیر حل کرد

$$\cos^2 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \quad (149.3)$$

با سودجستن از معادله (۱۴۹.۳) در معادله (۱۴۸.۳) خواهیم داشت

$$\ddot{x}_r = -(aA - \frac{3}{4}\varepsilon A - G) \cos \omega t + \frac{1}{4}\varepsilon A^2 \cos 3\omega t \quad (150.3)$$

پس از دوبار انتگرالگیری (و صفر قرار دادن ثابتهای انتگرالگیری) خواهیم داشت

$$x_r = \frac{1}{\omega^2} (aA - \frac{3}{4}\varepsilon A^2 - G) \cos \omega t - \frac{\varepsilon A^2}{36\omega^2} \cos 3\omega t \quad (151.3)$$

این عبارت به همین صورت یک جواب پیچیده است. کمیتهای  $\varepsilon$ ،  $a$ ، و  $x$  باید از چه شرایطی پیروی کنند تا کمیت  $x_r$  یک جواب مناسب باشد؟ روشهای عددی با کامپیوتر می‌توانند با استفاده از نظریه اختلال جوابی کاملاً دقیق را به دست دهند. دریافتیم که دامنه به بسامد محرک بستگی دارد، اما در بسامد طبیعی سیستم هیچگونه تشدید ریج نمی‌دهد.

اگر بخواهیم در خصوص جوابهای حاصل از نظریه اختلال معادله (۱۴۷.۳) بحث کنیم، از بحث کنونی خود بسیار دور خواهیم افتاد. نتیجه این است که به ازای برخی مقادیر بسامد محرک  $\omega$ ، سه دامنه مختلف با «جهشهایی» بین این دامنه‌ها، ممکن است به وجود آید. این دامنه به ازای مقدار معینی از  $\omega$  می‌تواند مقادیر متفاوتی داشته باشد؛ این مقدار بستگی به این دارد که آیا  $\omega$  افزایش یافته است یا کاهش یافته (پسماند). در بخش ۱۴.۳ حالت ساده‌ای از این اثر را ارائه خواهیم داد. ■

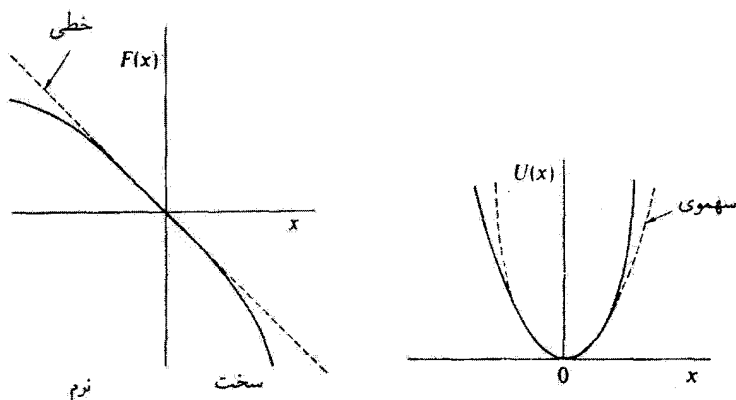
در وضعیتهای فیزیکی واقعی غالباً به نیروها و پتانسیلهای متقارن برمی‌خوریم. اما بعضی موردها هم شکل نامتقارن دارند. مثلاً

$$F(x) = -kx + \lambda x^2 \quad (152.3)$$

پتانسیل برای آن عبارت است از

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}\lambda x^3 \quad (153.3)$$

نمایش این حالت را در شکل ۳۱.۳ مشاهده می‌کنید؛ سیستم به ازای  $x > 0$  سخت و به ازای  $x < 0$  نرم است.



شکل ۳۱.۳

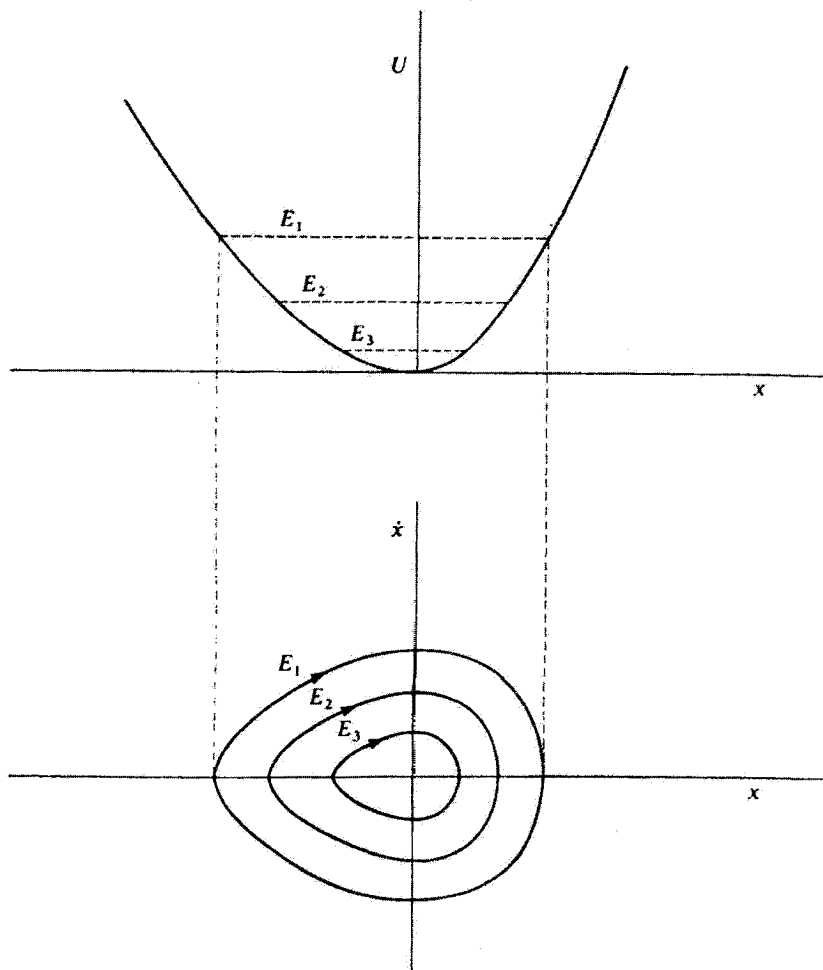
### ۱۲.۳ نمودارهای فاز برای سیستمهای غیر خطی

ترسیم نمودار فاز برای سیستم غیر خطی را می‌توان با بهره‌گیری از معادله (۹۷.۲) انجام داد

$$\dot{x}(x) \propto \sqrt{E - U(x)} \quad (۱۵۴.۳)$$

از آنجا که  $U(x)$  به‌طور کلی تابعی پیچیده است، فقط در مواردی نادر می‌توانیم یک عبارت تحلیلی برای  $\dot{x}(x)$  به‌دست آوریم. معمولاً، باید به شگردهای تقریبی گوناگون متوسل شویم. از سوی دیگر، دستیابی به یک تصویر کیفی از نمودار فاز برای حرکت ذره‌ای در یک پتانسیل اختیاری نسبتاً آسانتر است. مثلاً، پتانسیل نامتقارن نموده شده در بخش بالایی شکل ۳۲.۳ را در نظر می‌گیریم؛ این شکل سیستمی را نشان می‌دهد که به‌ازای  $x < 0$  نرم و به‌ازای  $x > 0$  سخت است. اگر هیچگونه میرایی پیش نیاید، در این صورت چون  $\dot{x}$  با  $\sqrt{E - U(x)}$  متناسب است، نمودار فاز باید به شکل نمایش یافته در قسمت پایینی شکل ۳۲.۳ باشد. سه مسیر فاز بیضی‌سان (تخم مرغی) ترسیم شده‌اند، که با سه مقدار انرژی کلی متناظرند که در نمودار پتانسیل با نقطه چین ترسیم شده‌اند. به‌ازای انرژی کلی که اندکی از انرژی حداقل پتانسیل بزرگتر باشد، مسیرهای فاز تخم مرغی به بیضی می‌گیرند. اگر سیستم میرا باشد، در این صورت ذره نوسانی «با حرکت مارپیچی به ته چاه پتانسیل می‌رود» و سرانجام در وضعیت تعادل،  $x = 0$ ، به سکون می‌رسد.

در مورد حالت نموده شده در شکل ۳۲.۳، اگر انرژی کل ذره،  $E$ ، کمتر از ارتفاعی باشد که پتانسیل در دو طرف  $x = 0$  تا این ارتفاع بالا می‌آید، در این صورت ذره در چاه پتانسیل «به دام» می‌افتد (ناحیه  $x_a < x < x_b$  در شکل ۱۴.۲ را ببینید). نقطه  $x = 0$  وضعیت تعادل پایدار است، زیرا  $> 0$ ،  $(d^2U(x)/dx^2)$  [معادله (۱۰۳.۲)]، و در حرکتی که به‌طور موضعی

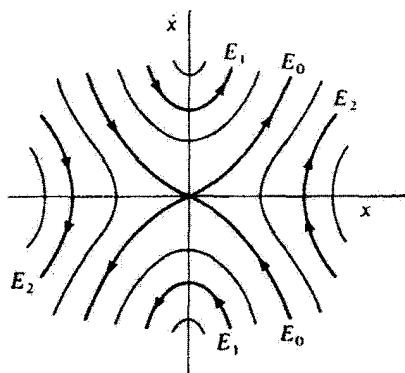
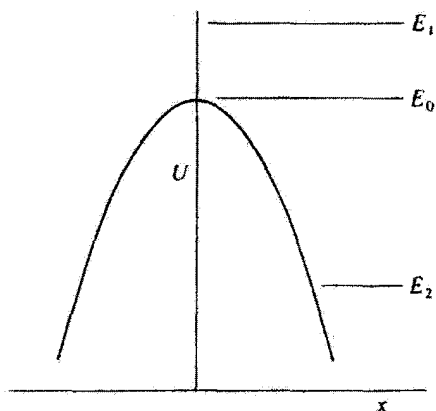


شکل ۳۲.۳

مقید است، آشفته‌گی اندکی پیش می‌آید.

در مجاورت بیشینه پتانسیل، نوعی حرکت به وجود می‌آید که به طور کیفی متفاوت است (شکل ۳۳.۳). در اینجا نقطه  $x = 0$  یک وضعیت تعادل ناپایدار است، زیرا اگر ذره در این نقطه در حال سکون باشد، در آن صورت اندک آشفته‌گی سبب حرکتی می‌شود که به طور موضعی نامقید است.<sup>۱</sup> به همین ترتیب،  $\frac{d^2U(x)}{dx^2} < 0$  به تعادل ناپایدار می‌انجامد.

۱. ناپایداری باید برحسب حرکت موضعاً نامقید تعریف شود، چرا که اگر بیشینه‌های دیگری از پتانسیل بزرگتر از آن که در  $x = 0$  است، وجود داشته باشند، این سدهای پتانسیل دیگر، حرکت را مقید خواهند کرد.

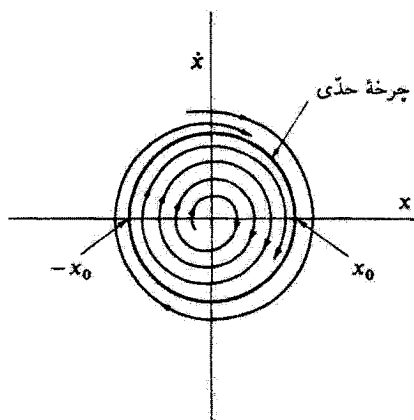


شکل ۳۳.۳

اگر پتانسیل در شکل ۳۳.۳ سهموی می‌بود، یعنی اگر  $U(x) = -\frac{1}{2}kx^2$ ، در این صورت مسیره‌های فاز متناظر با انرژی  $E_0$  خطوطی مستقیم بوده و آنها که با انرژی‌های  $E_1$  و  $E_2$  متناظرند هذلولی هستند. بنابراین، حالت اخیر حدی است که، اگر اندازه جمله غیر خطی در عبارت مربوط به نیرو کاهش یابد، مسیره‌های فاز شکل ۳۳.۳ به آن میل می‌کنند.

با مراجعه به مسیره‌های فاز مربوط به پتانسیلهای نموده شده در شکل‌های ۳۲.۳ و ۳۳.۳، به‌ازای هر پتانسیل دلخواه به سرعت می‌توانیم یک نمودار فاز ترسیم کنیم (مانند نمودار فاز ترسیم شده در شکل ۱۳.۲).

یکی از انواع مهم معادله غیر خطی را وان‌در‌پول در پژوهشهایش پیرامون مدارهای لامپ خلأ



شکل ۳۴.۳

به تفصیل مورد مطالعه قرار داده است.<sup>۱</sup> شکل این معادله به این قرار است

$$\ddot{x} - \mu(x_0^2 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (۱۵۵.۳)$$

که در آن  $\mu$  پارامتری کوچک و مثبت است. سیستمی را که معادله وان در پول توصیف می‌کند دارای خواص جالب زیر است. اگر دامنه  $|x|$  از مقدار بحرانی  $|x_0|$  درگذرد، در این صورت ضریب  $\dot{x}$  مثبت بوده و سیستم میراست. اما اگر  $|x| < |x_0|$  در این صورت میرایی منفی رخ می‌دهد؛ یعنی، دامنه حرکت افزایش می‌یابد. نتیجه می‌شود که باید دامنه‌ای وجود داشته باشد که به‌ازای آن، با گذشت زمان، حرکت نه افزایش یابد و نه کاهش پذیرد. این نوع منحنی را در صفحه فاز چرخه حدی می‌گویند (شکل ۳۴.۳).<sup>۲</sup> مسیرهای فاز خارج از چرخه حدی مسیر مارپیچی به سمت داخل را می‌پیمایند، و مسیرهای داخل چرخه حدی، حرکتی مارپیچی به سمت خارج را طی می‌کنند. تا جایی که چرخه حدی یک حرکت موضعاً مقید را تعریف می‌کند، می‌توانیم این وضعیت را پایدار تلقی کنیم.

1. B. van der Pol, *Phil. Mag.* 2, 978(1929)

بررسیهای جامع معادله وان در پول را می‌توان، مثلاً در:

Andronow & Chaikin (An49) ; Minorsky(Mi 47)

یافت؛ بحثهای مختصری را در این باب

Pipes(Pi46, pp. 606-610) ; Lindsay(Li51, pp. 64-66)

ارائه داده‌اند.

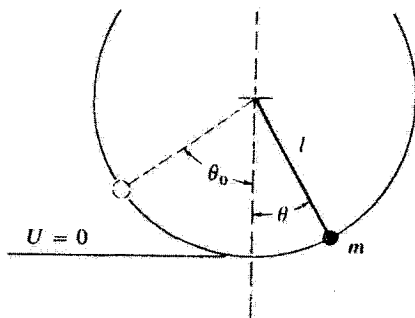
۲. این عبارت توسط پوانکاره معرفی شد و اغلب چرخه حدی پوانکاره نامیده می‌شود.

سیستمی را که معادلهٔ وان در پول توصیف می‌کند، خود محدودکن می‌گویند؛ یعنی، همین‌که تحت شرایطی که به افزایش دامنه منجر می‌شود به حرکت در آید، این معادله خودبه‌خود از زیاد شدن بدون حد و مرز دامنه جلوگیری می‌کند. خاصیت این سیستم آن است که چه دامنهٔ اولیه از دامنهٔ (محدود کن) بحرانی،  $x_0$ ، بزرگتر باشد و چه کوچکتر، قضیه فرق نمی‌کند.

### ۱۳.۳ آونگ ساده (اختیاری)

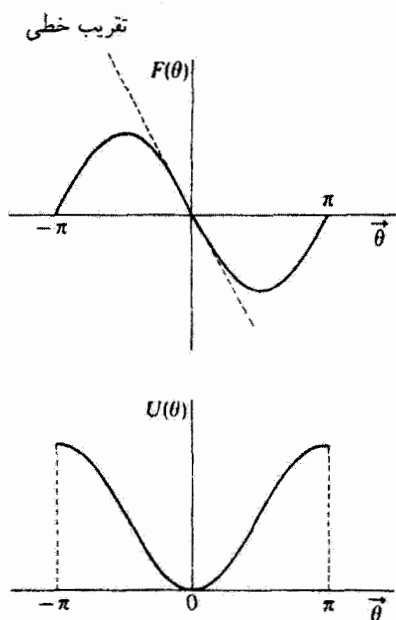
جواب برخی انواع مسائل نوسان غیرخطی را می‌توان به‌کمک انتگرالهای بیضوی<sup>۱</sup> به‌صورت بسته بیان کرد. مثالی از این نوع عبارت است از آونگ ساده. ذره‌ای به جرم  $m$  را در نظر بگیرید که به یک میلهٔ بدون وزن، و غیر قابل انبساط بسته شده است و در دایره‌ای قائم به شعاع  $l$  حرکت می‌کند (شکل ۳۵.۳). نیروی گرانشی در پایین‌سو عمل می‌کند، اما مؤلفهٔ این نیرو که بر حرکت تأثیر می‌گذارد بر میلهٔ حامل عمود است. این مؤلفهٔ نیرو، نمایش یافته در شکل ۳۶.۳، صرفاً عبارت است از  $F(\theta) = -mg \sin \theta$ . آونگ ساده (تخت) سیستمی غیرخطی با نیروی بازگردانندهٔ متقارن است. فقط برای انحرافهای زاویه‌ای کوچک است که می‌توان از تقریبی خطی بهره گرفت. معادلهٔ حرکت مربوط به آونگ ساده را با برابر نهادن گشتاور نیروی حول محور تکیه‌گاه با حاصلضرب شتاب زاویه‌ای و گشتاور لختی حول همان محور، به‌دست می‌آوریم

$$I\ddot{\theta} = lF$$



شکل ۳۵.۳

۱. برای دستیابی به فهرست برخی از انتگرالهای بیضوی به پیوست ب مراجعه کنید.



شکل ۳۶.۳

یا، از آنجا که  $I = ml^2$

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \quad (156.3)$$

که در آن

$$\omega^2 \equiv \frac{g}{l} \quad (157.3)$$

اگر دامنه حرکت کوچک باشد، می‌توانیم تقریب  $\sin \theta \cong \theta$  را اختیار کنیم، و معادله حرکت با معادله مربوط به نوسانگر هماهنگ ساده یکی می‌شود

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (158.3)$$

در این تقریب، دوره تناوب از عبارت آشنای زیر به دست می‌آید

$$\tau \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (159.3)$$



اگر بخواهیم نتیجه کلی مربوط به دوره تناوب را در حالتی که دامنه محدود است به دست آوریم، باید کار خود را با معادله (۱۵۶.۳) آغاز کنیم. اما از آنجا که سیستم پایستار است، می‌توانیم از این نکته سود ببریم

$$T + U = E = \text{const.} \quad (۱۶۰.۳)$$

و جواب را با توجه به انرژی سیستم به دست آوریم تا اینکه معادله حرکت را حل کنیم. اگر صفر انرژی پتانسیل را در پایینترین نقطه مسیر دایره‌ای بگیریم که وزنه آونگ آن را طی می‌کند (یعنی،  $\theta = 0$ ؛ شکل ۳۶.۳ را ببینید)، انرژیهای جنبشی و پتانسیل را می‌توان این طور بیان کرد

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \\ U &= m g l (1 - \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (۱۶۱.۳)$$

اگر در بالاترین نقطه حرکت  $\theta$  را مساوی  $\theta_0$  بگیریم، در این صورت

$$\left. \begin{aligned} T(\theta = \theta_0) &= 0 \\ U(\theta = \theta_0) &= E = m g l (1 - \cos \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (۱۶۲.۳)$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی زیر

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

داریم

$$E = 2 m g l \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (۱۶۳.۳)$$

و

$$U = 2 m g l \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad (۱۶۴.۳)$$

هرگاه انرژی جنبشی را به صورت تفاوت انرژی کل و انرژی پتانسیل بیان کنیم، داریم

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 = 2 m g l \left[ \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

یا

$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} \left[ \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۱۶۵.۳)$$

و از اینجا

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\theta \quad (۱۶۶.۳)$$

از این معادله می‌توان انتگرال گرفت تا دوره تناوب،  $\tau$ ، به دست آید. از آنجا که حرکت متقارن است، انتگرال روی  $\theta$  از  $\theta = 0$  تا  $\theta = \theta_0$  زمان  $\tau/4$  را نتیجه می‌دهد؛ از این رو

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \left[ \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\theta \quad (۱۶۷.۳)$$

این موضوع را که عبارت بالا عملاً یک انتگرال بیضوی نوع اول<sup>۱</sup> است می‌توان با جایگذاریهای زیر به روشنی ملاحظه کرد

$$z = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}, \quad k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad (۱۶۸.۳)$$

آنگاه

$$dz = \frac{\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta_0/2)} d\theta = \frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{2k} d\theta \quad (۱۶۹.۳)$$

که از آنجا

$$\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 [(1-z^2)(1-k^2z^2)]^{-\frac{1}{2}} dz \quad (۱۷۰.۳)$$

مقادیر عددی انتگرالهایی از این نوع را می‌توان در جدولهای گوناگون پیدا کرد.

برای اینکه حرکت نوسانی حاصل شود باید،  $\theta_0 < \pi$ ، یا معادل آن،  $\sin(\theta_0/2) = k < 1$ . برای این حالت، می‌توانیم انتگرال معادله (۱۷۰.۳) را با بسط  $(1-k^2z^2)^{-\frac{1}{2}}$  به صورت سری توانی، محاسبه کنیم

$$(1-k^2z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{k^2z^2}{2} + \frac{3k^4z^4}{8} + \dots \quad (۱۷۱.۳)$$

۱. رجوع کنید به: بیوست ب، معادله (ب.۲).

در این صورت عبارت مربوط به زمان تناوب چنین می‌شود

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{(1-z^2)^{1/2}} \left[ 1 + \frac{k^2 z^2}{2} + \frac{3k^4 z^4}{8} + \dots \right] \\ &= 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{3k^4}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{\pi}{2} + \dots \right] \\ &= 2\pi \sqrt{l/g} \left[ 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right] \quad (172.3) \end{aligned}$$

اگر  $k$  بزرگ باشد (یعنی، نزدیک ۱)، در این صورت برای رسیدن به نتیجه‌ای که به‌طور منطقی درست باشد، به تعداد زیادی جمله نیاز داریم. اما به‌ازای مقادیر کوچک  $k$ ، این بسط به سرعت همگرا می‌شود. و از آنجا که  $k = \sin(\theta_0/2)$ ، در این صورت  $k \cong (\theta_0/2) - (\theta_0^3/48)$ ؛ و نتیجه، که تا مرتبه چهارم صحیح است، عبارت است از

$$\tau \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 \right] \quad (173.3)$$

بنابراین، هرچند که آونگ ساده تک زمان نیست، به‌ازای دامنه‌های کوچک نوسان<sup>۱</sup> خیلی به این حالت نزدیک است.

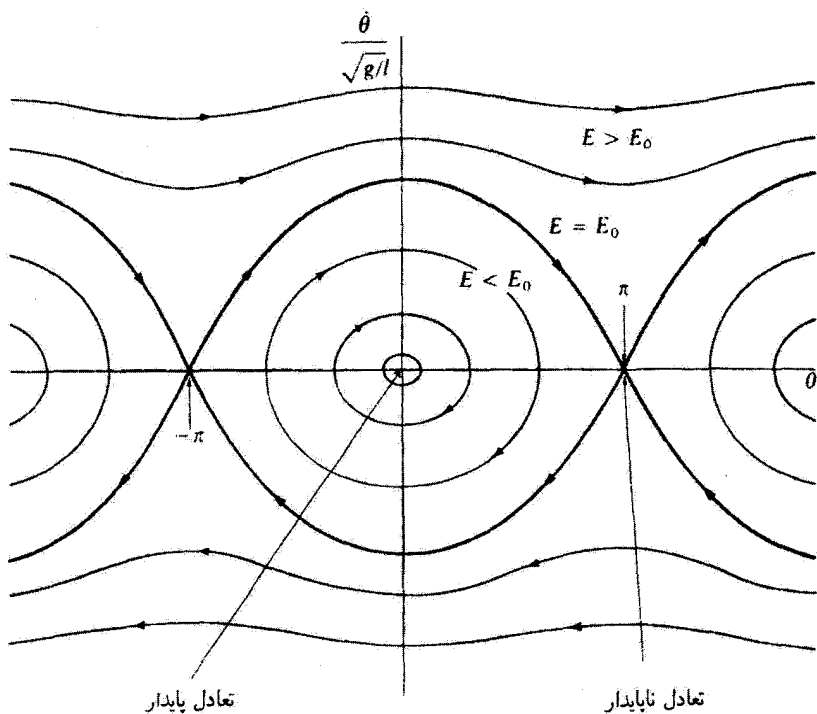
می‌توان نمودار فاز را برای آونگ ساده در شکل ۳۷.۳ ترسیم کرد، زیرا معادله (۱۶۵.۳) رابطه ضروری  $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$  را به دست می‌دهد. پارامتر  $\theta_0$  انرژی کل را از طریق معادله (۱۶۳.۳) مشخص می‌کند. اگر  $\theta$  و  $\theta_0$  زاویه‌های کوچکی باشند، پس معادله (۱۶۵.۳) را می‌توان اینطور نوشت

$$\left( \sqrt{\frac{l}{g}} \dot{\theta} \right)^2 + \theta^2 \cong \theta_0^2 \quad (174.3)$$

اگر مختصات صفحه فاز  $\theta$  و  $\dot{\theta}/\sqrt{l/g}$  باشند، در این صورت مسیره‌های فاز در نزدیکی  $\theta = 0$  تقریباً دایره‌اند. انتظار چنین نتیجه‌ای را می‌توان داشت، چرا که به‌ازای مقادیر کوچک  $\theta$  حرکت تقریباً هماهنگ ساده است.

به‌ازای  $-\pi < \theta < \pi$  و  $E < 2mgl \equiv E_0$ ، وضعیت معادل است با مقید بودن ذره‌ای در چاه پتانسیل  $U(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$  (شکل ۳۶.۳). بنابراین مسیره‌های فاز برای این ناحیه

۱. این نتیجه را گالیله در کلیسای جامع پیزا، در سال ۱۵۸۱، کشف کرد. عبارت مربوط به دوره تناوب نوسانهای کوچک را کریستیان هویگنس (۱۶۹۵-۱۶۲۹) در سال ۱۶۷۳ به دست آورد. نوسانهای منتهای (محدود) را نخستین بار در سال ۱۷۳۶ اویلر مورد بررسی قرار داد.



شکل ۳۷.۳

منحنیهای بسته‌اند و معادله (۱۶۵.۳) آنها را به دست می‌دهد. از آنجا که پتانسیل در  $\theta$  دوره‌ای است، دقیقاً همین مسیرهای فاز برای نواحی  $\pi < \theta < 3\pi$ ،  $-3\pi < \theta < -\pi$ ، و مانند آنها، وجود دارد. نقاط  $\theta = \dots, -2\pi, 0, 2\pi, \dots$  در امتداد محور  $\theta$  وضعیتهای تعادل پایدار به شمار می‌آیند.

به‌ازای مقادیری از انرژی کل که از  $E_0$  بیشتر است، حرکت دیگر نوسانی نیست. هر چند که هنوز هم تناوبی است. این وضعیت با آونگی که حول محور تکیه‌گاهش چرخشهای کامل اجرا می‌کند، متناظر است.

اگر انرژی کل برابر  $E_0$  باشد، پس معادله (۱۶۳.۳) نشان می‌دهد که  $\theta_0 = \pi$ . در این حالت معادله (۱۶۵.۳) تبدیل می‌شود به

$$\dot{\theta} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (175.3)$$

از این رو مسیرهای فاز به‌ازای  $E = E_0$  دقیقاً توابع کسینوسی‌اند (منحنیهای پررنگ در شکل ۳۷.۳).

بسته به جهت حرکت، دو شاخه وجود دارد.

مسیرهای فاز به ازای  $E = E_0$  عملاً حرکت‌های پیوسته ممکن آونگ را نمی‌نمایانند. اگر آونگ در، مثلاً،  $\theta = \pi$  (که نقطه‌ای است روی مسیرهای فاز  $E = E_0$ ) در حال سکون باشد، در این صورت هر آشفتگی اندکی سبب خواهد شد که حرکت تقریباً اما نه دقیقاً بر روی مسیرهای فازی که از  $\theta = \pi$  واگرا می‌شوند، انجام گیرد، زیرا انرژی کل عبارت است از  $E = E_0 + \delta$ ، که در آن  $\delta$  کمیتی کوچک اما غیر صفر است. اگر حرکت در امتداد یکی از مسیرهای فاز  $E = E_0$  انجام می‌گرفت، آونگ با سرعت دقیقاً صفر به یکی از نقاط  $\theta = n\pi$  می‌رسید، اما فقط پس از یک زمان نامتناهی! (می‌توان با محاسبه معادله (۱۶۷.۳) به ازای  $\theta = \pi$  درستی این موضوع را تحقیق کرد؛ نتیجه عبارت است از  $\infty \rightarrow \tau$ ).

مسیر فازی که حرکت موضعاً مقید را از حرکت موضعاً نامقید جدا می‌کند (مانند مسیر مربوط به  $E = E_0$  در شکل ۳۷.۳) جداگر نامیده می‌شود. جداگر همواره از نقطه تعادل ناپایدار می‌گذرد.

### ۱۴.۳ جهش، پسماند، و تأخیر فاز (اختیاری)

در مثال ۵.۳ ذره‌ای را با جرم  $m$  از نظر گذرانندیم که بین دو فنر آویخته بود. نشان دادیم که آن سیستم غیر خطی است و از پدیده‌های جهش در دامنه و آثار پسماند یاد کردیم. حالا می‌خواهیم این پدیده‌ها را با دقت بیشتری بررسی کنیم. توصیفی را که جانسن و همکاران<sup>۱</sup> در مورد روش ساده‌ای برای واری چنین آثاری مطرح کرده‌اند، به دقت دنبال می‌کنیم.

نوسانگر هماهنگی را در نظر بگیرید که تحت تأثیر نیروی خارجی  $F(t) = F \cos \omega t$  و یک نیروی چسبنده  $-r\dot{x}$ ، که  $r$  ثابت است، قرار دارد. معادله حرکت ذره‌ای به جرم  $m$  متصل به فنری با ثابت نیروی  $k$  عبارت است از

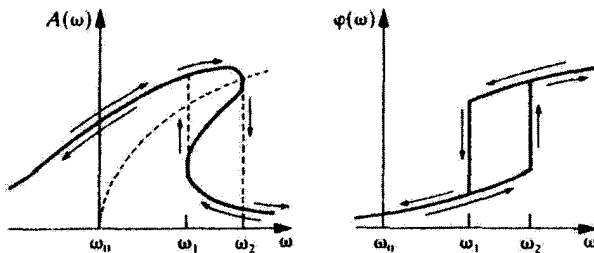
$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx + F \cos \omega t \quad (176.3)$$

یکی از جوابهای معادله (۱۷۶.۳) عبارت است از

$$x(t) = A(\omega) \cos[\omega t - \phi(\omega)] \quad (177.3)$$

که در آن

$$A(\omega) = \frac{F}{[(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (178.3)$$



شکل ۳۸.۳

و

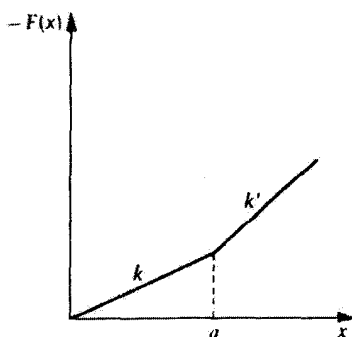
$$\tan[\phi(\omega)] = \frac{r\omega}{(k - m\omega^2)} \quad (179.3)$$

خواننده خود می‌تواند تحقیق کند که معادله (۱۷۷.۳) یکی از جوابهای خصوصی است که با جانشانی در معادله (۱۷۶.۳) به دست می‌آید.

اگر ثابت فنر  $k$  به صورت  $k(x)$  به  $x$  وابسته باشد، در این صورت یک نوسانگر غیر خطی در اختیار داریم. وابستگی که غالباً استفاده می‌کنیم عبارت است از

$$k(x) = 1 + \beta x^2 \quad (180.3)$$

و معادله حرکت حاصل در معادله (۱۷۶.۳) را معادله دوفینگ می‌گویند. این معادله را از طریق روشهای اختلال، با جوابهایی مشابه معادله (۱۷۷.۳) اما با نتایج پیچیده برای  $A(\omega)$  و  $\phi(\omega)$  (مطابق شکل ۳۸.۳)، به طور وسیعی مورد مطالعه قرار داده‌اند، با افزایش  $\omega$ ، مقدار  $A(\omega)$  تا قله‌اش افزایش می‌یابد تا اینکه به  $\omega = \omega_2$  می‌رسد، که در اینجا دامنه ناگهان با ضریب بزرگی کاهش می‌یابد. همچنانکه  $\omega$  از مقادیر بزرگ کاهش یابد، دامنه به آهستگی تا  $\omega = \omega_1$  افزایش پیدا می‌کند، که در اینجا دامنه ناگهان تقریباً دو برابر می‌شود. اینها را «جهش» می‌گویند که قبلاً هم به آنها اشاره کردیم. دامنه بین  $\omega_1$  و  $\omega_2$  به این بستگی دارد که آیا  $\omega$  افزایش یافته است یا کاهش یافته (اثر پسماند). به همین ترتیب برای فاز  $\phi(\omega)$  در شکل ۳۸.۳ پدیده‌های عجیبی اتفاق می‌افتد. توضیح فیزیکی شکل ۳۸.۳ خیلی روشن نیست، از این رو وابستگی ساده‌تری از  $k$  را مطابق شکل ۳۹.۳ در نظر می‌گیریم



شکل ۳۹.۳

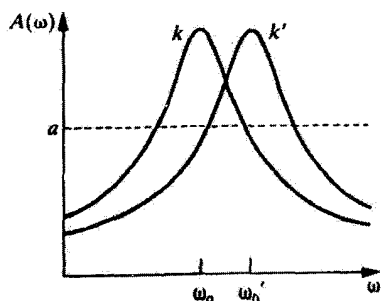
$$F(x) = -kx \quad x \leq a$$

$$\simeq -k'x \quad x \geq a \quad (181.3)$$

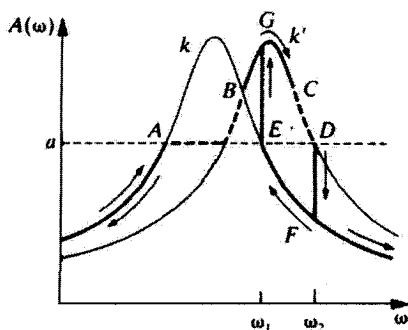
معادلهٔ دوفینگ وضعیتی را با چندین مقدار  $a$  نشان می‌دهد، زیرا  $k(x)$  در معادلهٔ (۱۸۰.۳) به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. مثال ما در مورد نوسانگر ناهماهنگ به محاسبات ریاضی ساده‌تری میدان می‌دهد.

شکل ۴۰.۳ منحنیهای پاسخ هماهنگ  $A(\omega)$  را به‌ازای  $k$  و  $k'$  (با  $k < k'$ ) نشان می‌دهد به‌ازای مقادیر بسیار بزرگ  $a$  ( $a \approx \infty$ ), یک نوسانگر خطی با ثابت نیروی  $k$  (زیرا  $x < a$ ) شکل ۳۹.۳ را ببینید) و یک بسامد تشدید  $\omega_0 = (k/m)^{\frac{1}{2}}$  داریم. به‌ازای مقادیر خیلی کوچک  $a$  ( $a \approx 0$ ), ثابت نیرو  $k'$  است و  $\omega'_0 = (k'/m)^{\frac{1}{2}}$ .

می‌خواهیم مقادیر میانی  $a$  را، که در آنجا هم  $k$  و هم  $k'$  مؤثرند، بررسی کنیم. وضعیتی را د



شکل ۴۰.۳



شکل ۴۱.۳

نظر می‌گیریم که  $a$  خیلی از بیشینه دامنه  $A(\omega)$  کوچکتر است. اگر از مقادیر کوچک  $\omega$  شروع کنیم، سیستم ارتعاشهای کوچکی دارد که منحنی دامنه را به‌ازای  $k$  دنبال می‌کند. دامنه روی دنباله منحنی  $A(\omega)$  به‌ازای  $k$  (مطابق شکل ۴۱.۳)، بالا می‌رود.

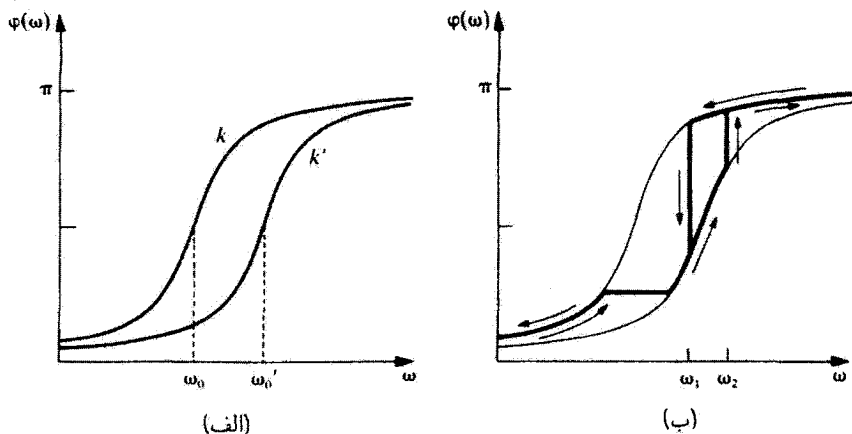
به هر حال، وقتی دامنه ارتعاش،  $A(\omega)$ ، از دامنه بحرانی،  $a$ ، بزرگتر باشد، ثابت نیروی  $k'$  مؤثر است. برای دامنه‌های بزرگتر سیستم منحنی  $A'(\omega)$ ، مربوط به ثابت نیروی  $k'$ ، را دنبال می‌کند. این حالت در شکل ۴۱.۳ با خط سیاه  $B$  تا  $C$  نموده شده است.

بین  $A$  و  $B$ ، با افزایش بسامد، سیستم افزایش دامنه ساده‌شده‌ای را تعقیب می‌کند که در شکل ۴۱.۳ به وسیله خط چین نشان داده شده است. با ادامه افزایش بسامد محرک  $\omega$  در  $C$ ، بار دیگر در نقطه  $D$  به دامنه بحرانی  $a$  می‌رسیم. اگر  $\omega$  فقط اندکی افزایش یابد، سیستم باید به‌ازای  $k$  مقدار  $A(\omega)$  را دنبال کند، و دامنه ناگهان در نقطه  $D$  از  $A'(\omega)$  به  $A(\omega)$  در نقطه  $F$  به‌ازای  $\omega = \omega_2$ ، به پایین می‌جهد. همچنانکه زیاد شدن  $\omega$  از  $\omega_2$  ادامه پیدا می‌کند، سیستم نیز منحنی  $A(\omega)$  را پی می‌گیرد.

حالا ببینیم که اگر  $\omega$  را از مقادیر بزرگ کاهش دهیم، چه پیش می‌آید. سیستم  $A(\omega)$  را تعقیب می‌کند تا  $\omega = \omega_1$ ، که در آنجا  $A(\omega) = a$ . اگر  $\omega$  اندکی کاهش یابد، دامنه به بالای  $a$  افزایش پیدا می‌کند، و سیستم باید  $A'(\omega)$  را تعقیب کند. بنابراین دامنه از  $E$  به  $G$  می‌جهد. با ادامه کاهش  $\omega$ ، سیستم مانند پیش مسیر مشابهی را تعقیب می‌کند.

اثر پسماند به این علت اتفاق می‌افتد که برحسب اینکه  $\omega$  افزایشده یا کاهشده، سیستم رفتار متفاوتی خواهد داشت. دو پرش دامنه اتفاق می‌افتد، یکی به‌ازای مقدار فزاینده  $\omega$  و یکی هم به‌ازای مقدار کاهشده  $\omega$ . مسیرهای سیستم عبارت‌اند از  $ABGCDF$  (مقدار فزاینده  $\omega$ ) و





شکل ۴۲.۳

*FEGBA* (مقدار کاهنده  $\omega$ ).

پدیده مشابهی برای تأخیر فاز  $\phi(\omega)$  نیز اتفاق می‌افتد. در شکل ۴۲.۳ (الف) منحنیهای فاز  $\phi(\omega)$  و  $\phi'(\omega)$  را برای نوسانگرهای هماهنگ خطی مشاهده می‌کنید. با بهره‌گیری از همان استدلالهایی که در مورد  $A(\omega)$  به‌کار بردیم، مسیرهای سیستم را با خطوط سیاه و پیکان در شکل ۴۲.۳ (ب) ترسیم می‌کنیم. برای دستیابی به نمایشی از این پدیده‌ها که برای آزمایش مناسب باشد، به مقاله جانسن و همکاران مراجعه کنید.

### مسائل

۱.۳ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای از یک جرم  $10^0$  گرمی متصل به فنری تشکیل یافته است؛ ثابت نیروی این فنر عبارت است از  $10^4 \text{ dyn/cm}$ . جرم  $3 \text{ cm}$  جابه‌جا و از حالت سکون رها می‌شود. پیدا کنید: (الف) بسامد طبیعی  $\nu$ ، و زمان تناوب  $T$ ، (ب) انرژی کل، و (ج) سرعت بیشینه.

۲.۳ فرض کنید حرکت مسئله قبل در محیطی مقاوم صورت پذیرد. بیشینه دامنه، پس از  $10^8$  نوسان به نصف مقدار اولیه‌اش می‌رسد. (الف) ضریب میرایی  $\beta$ ، (ب) بسامد  $\nu_1$  در مقایسه با بسامد نامیرایی  $\nu$ ، و (ج) کاهش حرکت، را محاسبه کنید.

۳.۳ با دادن سرعت اولیه  $1 \text{ cm/s}$  به نوسانگر مسئله ۱.۳ آن را از وضعیت تعادلش به حرکت در می‌آوریم. (الف) بیشینه جابه‌جایی و (ب) بیشینه انرژی پتانسیل آن را محاسبه کنید.

۴.۳ یک نوسانگر هماهنگ ساده را در نظر بگیرید. میانگین زمانی انرژیهای جنبشی و پتانسیل را در طی یک چرخه محاسبه کنید، و نشان دهید که این کمیتها برابرند. چرا این نتیجه منطقی است؟

سپس میانگین مکانی انرژیهای پتانسیل و جنبشی را محاسبه کنید. در خصوص این نتیجه‌ها بحث کنید.

۵.۳ عبارتی برای گسری از یک دوره تناوب کامل به دست آورید که یک نوسانگر هماهنگ ساده در محدوده یک فاصله کوچک  $\Delta x$  در یک موضع  $x$  سپری می‌کند. منحنیهای این تابع را بر حسب  $x$  به ازای چند دامنه مختلف ترسیم کنید. درباره اهمیت فیزیکی این نتایج به بحث بپردازید. در باب مساحت زیر منحنیهای مختلف نظر دهید.

۶.۳ دو جرم  $m_1$  و  $m_2$  آزادانه بر یک سطح بدون اصطکاک افقی می‌لغزند و به وسیله فنری که ثابت نیروی آن  $k$  است، به هم بسته شده‌اند. بسامد حرکت نوسانی برای این سیستم را محاسبه کنید.

۷.۳ جسمی با مساحت سطح مقطع یکنواخت  $A$  و چگالی جرمی  $\rho$  در سیالی شناور است و در حالت تعادل حجم  $V$  را جابه‌جا می‌کند. نشان دهید که زمان تناوب نوسانهای کوچک حول وضعیت تعادل عبارت است از

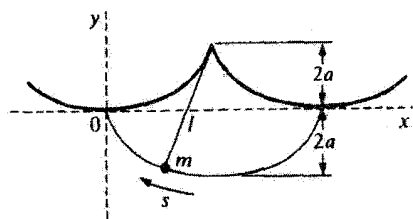
$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{V}{gA}}$$

که  $g$  شتاب ناشی از گرانی است.

۸.۳ آونگی از نوک تیز یک سیکلوئید<sup>۱</sup> که از تکیه‌گاه صلبی بریده شده است، آویخته است (شکل ۳.الف). مسیری که وزنه آونگ می‌پیماید سیکلوئیدی است و با رابطه‌های زیر بیان می‌شود

$$x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(\cos \varphi - 1)$$

که طول آونگ عبارت است از  $l = 4a$ ، و  $\varphi$  زاویه چرخش دایره مولد سیکلوئید است. نشان دهید که نوسانها با بسامد  $\omega = \sqrt{g/l}$ ، مستقل از دامنه، دقیقاً تک زمان‌اند.



شکل ۳.الف

۱. کسانی که با خواص سیکلوئیدها ناآشناوند باید به کتابی درباره هندسه تحلیلی رجوع کنند.

۹.۳ ذره‌ای به جرم  $m$  در انتهای یک فنر (با ثابت نیروی  $k$ ) که از تکیه‌گاه ثابتی آویخته شده، در حال سکون است. در  $t = 0$  یک نیروی ثابت پایین سوی  $F$  بر جرم وارد می‌آید و به مدت  $t$  عمل می‌کند. نشان دهید که، بعد از آنکه نیرو برداشته می‌شود، جابه‌جایی جرم از وضعیت تعادلش ( $x = x_0$ ) عبارت است از

$$x - x_0 = \frac{F}{k} [\cos \omega(t - t_0) - \cos \omega t]$$

که در آن  $\omega^2 = k/m$ .

۱۰.۳ اگر دامنه نوسانگر میرایی پس از  $n$  دوره تناوب به  $1/e$  مقدار اولیه‌اش کاهش یابد، نشان دهید که بسامد نوسانگر باید تقریباً  $[\frac{1}{2} - (\frac{1}{2} \pi^2 n^2)^{-1}]$  برابر بسامد نوسانگر نامیرای متناظر آن باشد.

۱۱.۳ عبارتهایی را برای منحنیهای انرژی و اتلاف انرژی نمایشیافته در شکل ۶.۳ برای نوسانگر میرا، استخراج کنید. آهنگ میانگینی را محاسبه کنید که نوسانگر میرا با آن انرژی از دست می‌دهد (یعنی، میانگین زمانی را در طی یک چرخه محاسبه کنید).

۱۲.۳ آونگ ساده‌ای از جرم  $m$  تشکیل یافته که به وسیله یک میله بدون وزن، غیر قابل انبساط به طول  $l$ ، از نقطه ثابتی آویخته شده است. معادله حرکت را به دست آورید، و در تقریب  $\sin \theta \cong \theta$ ، نشان دهید که بسامد طبیعی عبارت است از  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ ، که در آن  $g$  شتاب گرانی است. در صورتی که حرکت در محیطی چسبنده با نیروی ترمزی  $2m\sqrt{g/l}\theta$  صورت پذیرد، درباره حرکت بحث کنید.

۱۳.۳ نشان دهید که معادله (۴۳.۳) واقعاً جوابی برای میرایی بحرانی است، برای این منظور فرض کنید که جواب به صورت  $x(t) = y(t) \exp(-\beta t)$  باشد و  $y(t)$  را تعیین کنید.

۱۴.۳ جابه‌جایی  $x(t)$  و سرعت  $\dot{x}(t)$  برای نوسانهای تدمیرا را بر حسب توابع هذلولوی بیان کنید.

۱۵.۳ به شکل ۱۱.۳ مراجعه کنید؛ نشان دهید که معادله خط جداساز ناحیه ۲ از ناحیه ۳ صفحه فاز عبارت است از  $\dot{x} = -(\beta + \omega_0)x$ . به طریق زیر عمل کنید. برای روشن بودن موضوع، فرض کنید  $x_0 > 0$ . نشان دهید که، اگر  $x(t)$  به ازای زمان مثبتی چون  $t_1$  صفر شود، در این صورت  $t_1$  ریشه معادله زیر است

$$e^{(q_2 - q_1)t_1} = 1 - \frac{x_0(q_2 - q_1)}{\dot{x}_0 + q_2 x_0}$$

که در آن  $q_1 \equiv \beta - \omega_2$  و  $q_2 \equiv \beta + \omega_2$ . نشان دهید که شرط مثبت بودن ریشه  $t_1$  عبارت است از

$$\frac{x_0}{\dot{x}_0 + q_2 x_0} \leq 0$$

که به معادله مورد نظر خط می‌انجامد. نقطه نماینده‌ای که دارای شرط اولیه  $\dot{x}_0 = -(\beta + \omega_2)x_0$  است، چه مسیری را می‌پیماید؟ منحنی تغییرات  $x(t)$  را برای این حالت ترسیم کنید.

۱۶.۳ درباره حرکت ذره‌ای که معادله (۳۴.۳) آن را توصیف می‌کند، در صورتی که  $b < 0$  (یعنی، مقاومت میرایی منفی است)، بحث کنید.

۱۷.۳ برای یک نوسانگر میرای واداشته، نشان دهید که میانگین انرژی جنبشی در بسامدی با تعداد معینی اکتاوا بالاتر از تشدید همان مقدار است که در بسامد با همان تعداد اکتاوا پایینتر از حالت تشدید.

۱۸.۳ نشان دهید که، اگر نوسانگر واداشته‌ای فقط اندکی میرا باشد،  $Q$  سیستم تقریباً عبارت است از

$$Q \cong 2\pi \times \left( \frac{\text{انرژی کل}}{\text{اتلاف انرژی در خلال یک زمان تناوب}} \right)$$

۱۹.۳ در مورد نوسانگری اندک میرا، نشان دهید که  $Q \cong \omega_0 / \Delta\omega$  [معادله (۶۵.۳)].

۲۰.۳ منحنی تشدید سرعت را برای یک نوسانگر واداشته میرا با  $Q = 6$  ترسیم کنید، و نشان دهید که پهنای کامل منحنی بین نقاط متناظر با  $\sqrt{2} x_{\max}$  تقریباً برابر است با  $\omega_0/6$ .

۲۱.۳ در صورتی که در مدار شکل ۱۸.۳ (ب)  $L = 0.1 \text{ H}$ ،  $C = 10 \mu\text{F}$ ،  $R = 100 \Omega$ ، بسامد نوسان آن را محاسبه کنید.

۲۲.۳ نشان دهید که در مورد یک مدار  $R-L-C$  که در آن مقاومت کوچک است، نزول لگاریتمی نوسانها تقریباً عبارت است از  $\pi R \sqrt{C/L}$ .

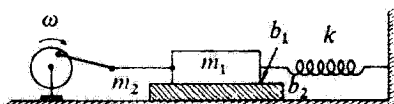
۲۳.۳ یک مدار  $R-L-C$  [شکل ۱۸.۳ (ب)] حاوی یک القاگر  $0.1 \text{ H}$  و یک مقاومت  $100 \Omega$  است. بسامد نوسان عبارت است از  $1 \text{ kHz}$ . اگر در  $t = 0$  ولتاژ دو سر خازن  $10 \text{ V}$  و جریان صفر باشد، جریان را در  $2$  میلی ثانیه بعد بیابید.

۲۴.۳ مداری الکتریکی حاوی مقاومت  $R$  و خازن  $C$  است که به‌طور متوالی به یک منبع نیروی محرکه متناوب بسته شده‌اند. جریان را به‌صورت تابعی از زمان بیابید، و نشان دهید که وقتی بسامد نیروی محرکه القایی متناوب به صفر میل می‌کند، این جریان به صفر کاهش می‌یابد.

۱. اکتاوا عبارت است از یک فاصله بسامدی که در آن بالاترین بسامد دقیقاً دو برابر پایینترین بسامد است.

۲۵.۳ در یک مدار  $R-L-C$  متوالی، نشان دهید که دامنه ولتاژ دو سر القاگر، به عنوان تابع بسامد نیروی محرکه القایی به کار رفته، در بسامدی غیر از بسامد شدید،  $1/\sqrt{LC}$ ، به بیشینه خود می‌رسد. برای این بسامد فرمول صریحی به دست آورید.

۲۶.۳ در شکل ۳. ب جرم  $m_1$  را مشاهده می‌کنید که یک نیروی سینوسی با بسامد  $\omega$  آن را به حرکت در می‌آورد. جرم  $m_1$  به وسیله فنری با ثابت نیروی  $k$  به تکیه‌گاه صلبی متصل است و روی جرم دیگری،  $m_2$ ، می‌لغزد. نیروی اصطکاکی میان  $m_1$  و  $m_2$  به وسیله ضریب میرایی  $b_1$  و نیروی اصطکاک بین  $m_2$  و تکیه‌گاه به وسیله  $b_2$  نشان داده می‌شود. مشابه الکتریکی این سیستم را ترسیم، و امیدانس آن را محاسبه کنید.



شکل ۳. ب

۲۷.۳ نشان دهید که سری فوریه معادله (۱۰.۱.۳) را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$F(t) = \frac{1}{\gamma} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t - \phi_n)$$

ضریب  $c_n$  را با ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  معادلات (۱۰.۲.۳) الف) ربط دهید.

۲۸.۳ بسط فوریه تابع زیر را درباره  $-\pi/\omega < t < \pi/\omega$  به دست آورید:

$$F(t) = \begin{cases} -1, & -\pi/\omega < t < 0 \\ +1, & 0 < t < \pi/\omega \end{cases}$$

مجموع دو جمله اول، سه جمله اول، و چهار جمله اول را محاسبه و ترسیم کنید، تا نشان دهید که این سری همگراست.

۲۹.۳ سری فوریه‌ای را که نمایشگر تابع زیر باشد، به دست آورید

$$F(t) = \begin{cases} 0, & -2\pi/\omega < t < 0 \\ \sin \omega t, & 0 < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

۳۰.۳ سری فوریه‌ای را به دست آورید که خروجی یک یکسوساز تمام موج را نشان دهد. سه جمله بسط آن را ترسیم و با تابع کامل مقایسه کنید.

۳۱.۳ بر یک نوسانگر خطی میرا که در وضعیت تعادل در حال سکون است، تابع وادارنده‌ای وارد می‌آید که رابطه زیر بیانگر آن است:

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a \times (t/\tau), & 0 < t < \tau \\ a, & t > \tau \end{cases}$$

تابع پاسخ را بیابید. در نظر بگیرید  $t \rightarrow 0$  و نشان دهید که جواب آن به جواب تابع پله‌ای تبدیل می‌شود.

۳۲.۳ پاسخ یک نوسانگر خطی به یک تابع پله‌ای و یک تابع ضربه‌ای (در حد  $t \rightarrow 0$ ) را برای حالت تند میرایی به دست آورید. نمایش تغییرات توابع پاسخ را ترسیم کنید.

۳۳.۳ بیشینه مقادیر دامنه‌های توابع پاسخ نمایش یافته در شکل‌های ۲۳.۳ و ۲۵.۳ را محاسبه کنید. مقادیر عددی را (برحسب یگاهای  $a/\omega$ ) به ازای  $\beta = 0.2$  به دست آورید.

۳۴.۳ نوسانگر خطی نامیرایی را با بسامد طبیعی  $\omega$  در نظر بگیرید. تابع پاسخ را برای یک تابع وادارنده ضربه‌ای که به مدت  $\tau = 2\pi/\omega$  وارد می‌آید، محاسبه و ترسیم کنید. برای جوابها تعبیری فیزیکی ارائه دهید.

۳۵.۳ پاسخ یک نوسانگر خطی را به تابع وادارنده زیر به دست آورید

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a \sin \omega t, & 0 < t < \pi/\omega \\ 0, & t > \pi/\omega \end{cases}$$

۳۶.۳ برای جابه‌جایی یک نوسانگر خطی مشابه با معادله (۱۱۹.۳) اما برای شرایط اولیه  $x(t_0) = x_0$  و  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$  استخراج کنید.

۳۷.۳ جواب به روش گرین را برای پاسخ ناشی از یک تابع وادارنده اختیاری، استخراج کنید. فرض کنید این تابع از یک سری از توابع پله‌ای تشکیل یافته است. یعنی، به جای معادله (۱۱۹.۳) از معادله (۱۱۶.۳) الف شروع کنید.

۳۸.۳ از روش گرین بهره بگیرید و پاسخ یک نوسانگر میرا به یک تابع وادارنده به شکل زیر را

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ F \cdot e^{-\gamma t} \sin \omega t, & t > 0 \end{cases}$$

۳۹.۳ تابع دوره‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$F(t) = \begin{cases} \sin \omega t & 0 < t < \pi/\omega \\ 0, & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

این تابع بخشهای مثبت یک تابع سینوسی را نشان می‌دهد. (چنین تابعی، مثلاً، خروجی یک مدار یکسوساز نیم-موج را نشان می‌دهد.) نمایش فوری آن را بیابید، و مجموع چهار جمله اول را ترسیم کنید.

۴۰.۳ به مثال ۵.۳ رجوع کنید. اگر هر یک از فنرها باید به اندازه  $d$  کشیده شوند تا به ذره در وضعیت تعادل متصل شوند (یعنی، ذره در وضعیت تعادل خود دستخوش دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت به اندازه  $kd$  باشد)، در این صورت نشان دهید که پتانسیلی که ذره در آن حرکت می‌کند تقریباً عبارت است از

$$U(x) \cong \left(\frac{kd}{l}\right) x^2 + [k(l-d)/4l^2] x^4$$

۴۱.۳ یک نمودار فاز برای پتانسیل شکل ۲۸.۳ ترسیم کنید.

۴۲.۳ نمودار فازی برای پتانسیل  $U(x) = -(\lambda/3)x^3$  ترسیم کنید.

۴۳.۳ آرد ریلی در بحث خود پیرامون آثار غیر خطی در پدیده‌های آکوستیکی از معادله زیر بهره گرفت:

$$\ddot{x} - (a - b\dot{x}^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

نشان دهید که مشتق‌گیری از این معادله نسبت به زمان و نشانیدن  $y = y_0 \sqrt{3b/a} \dot{x}$  به معادله وان‌درپول منجر می‌شود

$$\ddot{y} - \frac{a}{y_0^2} (y_0^2 - y^2) \dot{y} + \omega^2 y = 0$$

I. J. W. S. Rayleigh, *Phil. Mag.*, 15 (April 1883);

۴۴.۳ در صورتی که انرژی کل عبارت باشد از  $E > 2mgl$  عبارتی برای مسیره‌های فاز آونگ ساده به دست آورید. توجه کنید که این عبارت دقیقاً همان حالت ذره متحرک در یک پتانسیل دوره‌ای  $U(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$  را بیان می‌کند.

۴۵.۳ با روش تقریبهای متوالی معادلات زیر را حل کنید، و نتیجه دقیق تا چهار رقم اعشار را به دست آورید:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad x + x^2 + 1 = \tan x \quad (\text{الف})$$

$$x > 0, \quad x(x + 3) = 1 \sin x \quad (\text{ب})$$

$$x > 0, \quad 1 + x + \cos x = e^x \quad (\text{ج})$$

(ترسیم یک نمودار نه چندان دقیق برای انتخاب یک تقریب اولیه معقول خالی از فایده نیست.)  
۴۶.۳ حرکت آزاد آونگ ساده‌ای را در نظر بگیرید که دامنه آن کوچک نیست. نشان دهید که مولفه افقی این حرکت را می‌توان با عبارت تقریبی زیر نشان داد

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon x^3 = 0$$

که در آن  $\omega_0 = g/l$  و  $\varepsilon = g/2l^3$ ، که  $l$  برابر است با طول آونگ.  
۴۷.۳ حرکت ذره نامیرایی را بررسی کنید که نیرویی به شکل زیر بر آن وارد آید:

$$F(x) = \begin{cases} -kx, & |x| < a \\ -(k + \delta)x + \delta a, & |x| > a \end{cases}$$

که  $k$  و  $\delta$  ثابتهای مثبت‌اند.

۴۸.۳ جرم  $m$  در یک بعد حرکت می‌کند و وقتی  $x < 0$  یک نیروی ثابت  $+F$  و هنگامی که  $x > 0$  یک نیروی ثابت  $-F$  بر آن وارد می‌آید. با ترسیم یک نمودار فاز این حرکت را تشریح کنید. دوره تناوب حرکت را بر حسب  $m$ ،  $F$ ، و دامنه  $A$  (از میرایی چشم پوشید) محاسبه کنید.



## گرانش

## ۱.۴ مقدمه

نیوتون، قانون گرانش را که مآلاً در کتابش، پرنکیپیا، در سال ۱۶۸۷ منتشر کرد، قبلاً در سال ۱۶۶۶ فرمولبندی و از لحاظ عددی واری کرده بود. نیوتون تقریباً بیست سال منتظر ماند تا نتایج بررسیهایش منتشر شود زیرا نمیتوانست روش محاسبات عددی خود را، که در آن زمین و ماه اجرام نقطه‌ای پنداشته می‌شوند، توجیه و اثبات کند. حل این مسئله با محاسبات ریاضی فرمولبندی شده در قالب حساب دیفرانسیل و انتگرال (که نیوتون بعداً خود آن را ابداع کرد) نسبت به آنچه که نیوتون در قرن هفدهم با آن مواجه بود بسیار آسانتر شده است.

بنابر قانون گرانش عمومی نیوتون، هر ذره جرم دار هر ذره دیگری در عالم را با نیرویی جذب می‌کند که با حاصلضرب دو جرم نسبت مستقیم و با مجذور فاصله آنها نسبت عکس دارد. این قانون را به زبان ریاضی به این طریق می‌نویسیم

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (1.4)$$

که در اینجا در فاصله  $r$  از ذره‌ای به جرم  $M$  ذره دومی به جرم  $m$  تحت تأثیر یک نیروی جاذبه قرار می‌گیرد (شکل ۱.۴). جهت بردار یکه  $\mathbf{e}_r$  از  $M$  به  $m$  است، و علامت منفی جاذبه‌ای بودن



شکل ۱.۴ ذره  $m$  تحت تأثیر نیروی گرانشی به سوی  $M$  جذب می‌شود.

نیرو را تضمین می‌کنند یعنی،  $m$  به سوی  $M$  جذب می‌شود.

تحقیق درستی این قانون در آزمایشگاه و تعیین مقدار  $G$  در ۱۷۹۸ به وسیله هنری کاوندیش (۱۸۱۰-۱۷۳۱)، فیزیکدان انگلیسی، صورت پذیرفت. در آزمایش کاوندیش، که در اکثر کتابهای درسی فیزیک مقدماتی توصیف می‌شود، از یک ترازوی پیچشی با دو کره کوچک که در دو سر میله‌ای محکم شده‌اند، استفاده می‌شود. این دو کره به طرف دو کره بزرگ دیگر جذب می‌شد که می‌توانستند در طرفین کره‌های کوچک قرار گیرند. بهترین مقداری که تا حالا برای  $G$  به دست آمده عبارت است از  $6.6726 \pm 0.0005 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ . جالب اینجاست که، هرچند  $G$  شاید قدیمیترین ثابت بنیادی شناخته شده باشد، آن را نسبت به بیشتر ثابتهای بنیادی که جدیداً شناخته‌ایم، مانند  $c$  و  $\hbar$  با دقت کمتری می‌شناسیم.

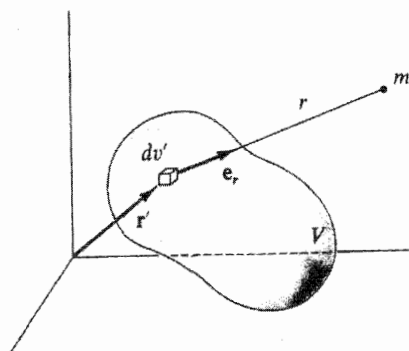
این قانون، به صورت معادله (۱.۴) دقیقاً فقط در مورد ذرات نقطه‌ای به کار می‌آید. اگر جسمی با یک گستردگی معین جایگزین یکی از ذرات یا هر دو شود، باید پیش از اینکه بتوانیم نیرو را محاسبه کنیم فرضیه دیگری را بپذیریم. باید فرض کنیم که میدان نیروی گرانشی میدانی خطی است. به بیان دیگر، فرض می‌کنیم که محاسبه نیروی گرانشی خالص وارد بر یک ذره از طرف تعداد زیادی ذره دیگر، صرفاً با در نظر گرفتن جمع برداری نیروهای منفرد، امکان پذیر است. در مورد جسمی متشکل از یک توزیع پیوسته ماده، این مجموع به انتگرال تبدیل می‌شود (شکل ۲.۴)

$$\mathbf{F} = -Gm \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_r}{r^2} dv' \quad (2.4)$$

که در آن  $\rho(\mathbf{r}')$  چگالی جرمی و  $dv'$  عنصر حجم در موضعی است که به وسیله بردار  $\mathbf{r}'$  تعریف شده است.

اگر گستردگی جسم با جرم  $M$  و نیز جسم با جرم  $m$  محدود باشد، در این صورت انتگرالگیری دیگری روی حجم  $m$  ضروری خواهد بود تا نیروی گرانشی کل محاسبه شود.

بردار میدان گرانشی  $\mathbf{g}$  عبارت است از برداری که نیروی وارد بر واحد جرم یک جسم که در



شکل ۲.۴

میدان جسمی به جرم \$M\$ قرار گرفته است را، نمایش می‌دهد. از این رو

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (۲.۴)$$

یا

$$\mathbf{g} = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_r}{r^2} dv' \quad (۲.۴)$$

توجه کنید که جهت \$\mathbf{e}\_r\$ با \$\mathbf{r}'\$ تغییر می‌کند (شکل ۲.۴).

ابعاد کمیت \$\mathbf{g}\$ از جنس نیرو بر واحد جرم یا شتاب است. در واقع، در نزدیکی سطح زمین، مقدار \$\mathbf{g}\$ همان کمیتی است که آن را ثابت شتاب گرانشی می‌نامیم. اندازه‌گیری با یک آونگ ساده (یا وسایل قدری پیچیده‌تر) برای نشان دادن اینکه در سطح زمین \$|\mathbf{g}|\$ تقریباً \$9.8 \text{ m/s}^2\$ است کافی است.

### ۲.۴ پتانسیل گرانشی

بردار میدان گرانشی \$\mathbf{g}\$ به صورت \$1/r^2\$ تغییر می‌کند و بنابراین در شرطی<sup>۱</sup> که نمایش \$\mathbf{g}\$ را به صورت گرادیان یک تابع اسکالر مجاز می‌دارد صدق می‌کند. از این رو می‌توان نوشت

$$\mathbf{g} \equiv -\nabla \Phi \quad (۵.۴)$$

که در آن \$\Phi\$ را پتانسیل گرانشی می‌گویند و ابعاد آن عبارت است از (نیرو بر واحد جرم) \$\times\$ (فاصله)، یا انرژی بر واحد جرم.

۱. یعنی، \$\nabla \times \mathbf{g} \equiv 0\$. [بنگرید به (Ma65a, Section 3.7)].

از آنجا که  $\mathbf{g}$  فقط به طور شعاعی تغییر می‌کند، پتانسیل  $\Phi$  می‌تواند حداکثر با  $r$  تغییر کند. بنابراین، با بهره‌گیری از معادله (۳.۴) برای  $\mathbf{g}$ ، داریم

$$\nabla\Phi = \frac{d\Phi}{dr}\mathbf{e}_r = G\frac{M}{r^2}\mathbf{e}_r$$

با انتگرالگیری، به دست می‌آوریم

$$\boxed{\Phi = -G\frac{M}{r}} \quad (۶.۴)$$

ثابت احتمالی انتگرالگیری حذف شده است، چرا که پتانسیل در محدوده یک ثابت جمع پذیر نامعین است؛ یعنی، فقط اختلاف پتانسیل با معنی است، نه مقادیر خاص. ما معمولاً اِبهام در مقدار پتانسیل را از طریق الزام اختیاری  $\Phi \rightarrow 0$  وقتی که  $r \rightarrow \infty$  رفع می‌کنیم؛ در این صورت معادله (۶.۴) دقیقاً پتانسیل مربوط به این شرط را به دست می‌دهد.

پتانسیل ناشی از توزیع پیوسته ماده عبارت است از

$$\Phi = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} dv' \quad (۷.۴)$$

به گونه‌ای مشابه، اگر جرم فقط روی یک پوسته نازک توزیع شود (یعنی، توزیع سطحی)، آنگاه

$$\Phi = -G \int_S \frac{\rho_s}{r} da' \quad (۸.۴)$$

که در آن  $\rho_s$  چگالی سطحی جرم (یا چگالی جرم سطحی) است.

سرانجام، اگر یک منبع خطی با چگالی جرم خطی  $\rho_l$  وجود داشته باشد، در آن صورت

$$\Phi = -G \int_r \frac{\rho_l}{r} ds' \quad (۹.۴)$$

مفهوم فیزیکی تابع پتانسیل گرانشی وقتی روشن می‌شود که کاربرد واحد جرم  $dW$  را، که باید به وسیله یک عامل خارجی بر روی جسمی واقع در میدان گرانشی انجام شود تا جسم را به اندازه  $dr$  جابه‌جا کند، مورد بررسی قرار دهیم. در این حالت، کار برابر است با حاصلضرب اسکالر نیرو در تغییر مکان. بدینسان، در مورد کار انجام شده بر واحد جرم روی جسم، داریم

$$\begin{aligned} dW &= -\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = (\nabla\Phi) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} dx_i = d\Phi \end{aligned} \quad (۱۰.۴)$$

زیرا  $\Phi$  تابعی است از مختصات نقطه‌ای که اندازه‌گیری در آن صورت می‌گیرد:  $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x_i)$ . بنابراین مقدار کار بر واحد جرم که باید روی جسم انجام شود تا آن را در میدان گرانشی از موضعی به موضع دیگر حرکت دهد برابر است با اختلاف پتانسیل در آن دو نقطه.

اگر موضع نهایی نسبت به منبع جرم  $M$  از موضع اولیه دورتر باشد، کار روی واحد جرم انجام شده است. موضع این دو نقطه اختیاری است، و می‌توانیم یکی از آنها را در بینهایت بگیریم، اگر پتانسیل را برابر تعریف در بینهایت صفر بگیریم، در این صورت می‌توانیم  $\Phi$  را در هر نقطه کار بر واحد جرم تعبیر کنیم که لازم است تا جسم را از بینهایت به آن نقطه بیاوریم. البته، انرژی پتانسیل برابر است با حاصلضرب جرم جسم در پتانسیل  $\Phi$ . اگر  $U$  انرژی پتانسیل باشد، در این صورت

$$U = m\Phi \quad (۱۱.۴)$$

و نیروی وارد بر جسم از منفی گرادیان انرژی پتانسیل آن جسم حاصل می‌شود.

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (۱۲.۴)$$

که همان عبارتی است که قبلاً به کار بردیم [معادله (۸۸.۲)].

توجه داریم که هم انرژی پتانسیل و هم پتانسیل در هنگامی که کار روی جسم انجام می‌گیرد افزایش می‌یابند. (بنابر تعریف ما، پتانسیل همواره منفی است و با میل کردن  $r$  به بینهایت، فقط به بیشینه خود، یعنی صفر، نزدیک می‌شود.)

هرجا که جسم در میدان گرانشی یک منبع جرم واقع باشد، مقداری انرژی پتانسیل وجود دارد. این انرژی پتانسیل در میدان مسکن گزیده است،<sup>۱</sup> اما معمول آن است که در چنین شرایطی از انرژی پتانسیل «جسم» صحبت می‌کنند. ما نیز در این کتاب همین رفتار را پیش خواهیم گرفت. همچنین می‌توانیم خود منبع جرم را چنان تلقی کنیم که ذاتاً دارای انرژی پتانسیل است. این انرژی پتانسیل برابر است با انرژی گرانشی رهاشده در هنگامی که جسم تشکیل شد، یا، برعکس، برابر است با انرژی که باید تأمین شود (یعنی، کاری که باید انجام شود) تا جرم را بر کره‌ای واقع در بینهایت بپراکند. مثلاً وقتی گاز میان ستاره‌ای چگالیده می‌شود و ستاره‌ای را تشکیل می‌دهد، انرژی گرانشی رها شده به میزان زیادی صرف گرمایش اولیه ستاره می‌شود. با افزایش دما، انرژی به صورت تابش الکترومغناطیسی تابیده می‌شود. در تمام مسائلی که با آنها مواجهیم، ساختار اجسام در خلال فرایند مورد مطالعه ما بدون تغییر تلقی می‌شود. از این رو در انرژی پتانسیل ذاتی

۱. به ملاحظات انتهای بخش ۵.۸ مربوط به انرژی در میدان، بنگرید.

هیچگونه تغییری صورت نمی‌گیرد، و در محاسباتی که به هر منظور انجام می‌دهیم می‌توانیم از آن چشم‌پوشیم.

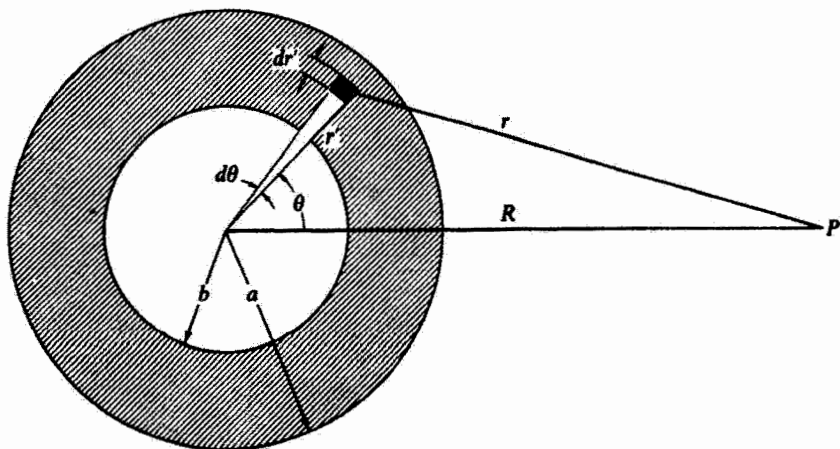
#### مثال ۱.۴

پتانسیل گرانشی بیرون و درون پوسته‌ای کروی به شعاع داخلی  $b$  و شعاع خارجی  $a$  چقدر است؟

حل: یکی از مهمترین مسائل نظریه گرانشی به محاسبه نیروی گرانشی ناشی از کره‌ای همگن مربوط می‌شود. این مسئله حالت خاصی از محاسبه مربوط به پوسته کروی همگن به شمار می‌آید. یک جواب مربوط به مسئله پوسته را می‌توان از طریق محاسبه مستقیم نیرو به دست آورد مسئله (۶.۴)، اما استفاده از روش پتانسیل آسانتر است.

پوسته نمایش یافته در شکل ۳.۴ را در نظر می‌گیریم و پتانسیل را در نقطه  $P$  به فاصله  $R$  از مرکز پوسته محاسبه می‌کنیم. از آنجا که مسئله در اطراف خط واصل بین مرکز کره و نقطه میدان  $P$  تقارن دارد، زاویه سمتی  $\varphi$  در شکل ۳.۴ نموده نشده است و مافوراً می‌توانیم از عبارت مربوط به پتانسیل روی  $d\Phi$  انتگرال بگیریم. از این رو

$$\begin{aligned}\Phi &= -G \int_v \frac{\rho(r')}{r} dv' \\ &= -2\pi\rho G \int_b^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r} d\theta\end{aligned}\quad (13.4)$$



شکل ۳.۴

که در اینجا فرض کرده‌ایم توزیع جرم به صورت متقارن کروی،  $\rho(r') = \rho$  صورت گرفته است. بنا بر قانون کسینوسها

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \theta \quad (۱۴.۴)$$

از آنجا که  $R$  مقداری است ثابت، به ازای مقدار معین  $r'$  می‌توانیم از این معادله دیفرانسیل بگیریم و به

$$2r dr = 2r'R \sin \theta d\theta$$

یا برسیم،

$$\frac{\sin \theta}{r} d\theta = \frac{dr}{r'R} \quad (۱۵.۴)$$

این عبارت را در معادله (۱۳.۴) می‌نشانیم، داریم

$$\Phi = -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \quad (۱۶.۴)$$

حدود انتگرالی که روی  $dr$  گرفته شده به مکان نقطه  $P$  بستگی دارند. اگر  $P$  خارج از پوسته باشد، در این صورت

$$\begin{aligned} \Phi(R > a) &= -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{R-r'}^{R+r'} dr \\ &= -\frac{4\pi\rho G}{R} \int_b^a r'^2 dr' \\ &= -\frac{4}{3} \frac{\pi\rho G}{R} (a^3 - b^3) \end{aligned} \quad (۱۷.۴)$$

اما جرم پوسته،  $M$ ، عبارت است از

$$M = \frac{4}{3} \pi\rho (a^3 - b^3) \quad (۱۸.۴)$$

از این رو پتانسیل به این قرار می‌شود

$$\Phi(R > a) = -\frac{GM}{R} \quad (۱۹.۴)$$

اگر نقطه میدانی در داخل پوسته واقع باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}\Phi(R < b) &= -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r'-R}^{r'+R} dr \\ &= -4\pi\rho G \int_b^a r' dr' \\ &= -2\pi\rho G(a^2 - b^2)\end{aligned}\quad (20.4)$$

بنابراین پتانسیل ثابت است و به موضع داخل پوسته بستگی ندارد.

سرانجام، اگر بخواهیم پتانسیل را برای نقاط واقع در خود پوسته محاسبه کنیم، فقط باید حد پایینی انتگرالگیری در عبارت مربوط به  $\Phi(R < b)$  را با متغیر  $R$  جایگزین کنیم و حد بالایی انتگرالگیری در عبارت مربوط به  $\Phi(R > a)$  را با  $R$  جایگزین کنیم، و نتایج را به یکدیگر بیفزاییم. خواهیم یافت

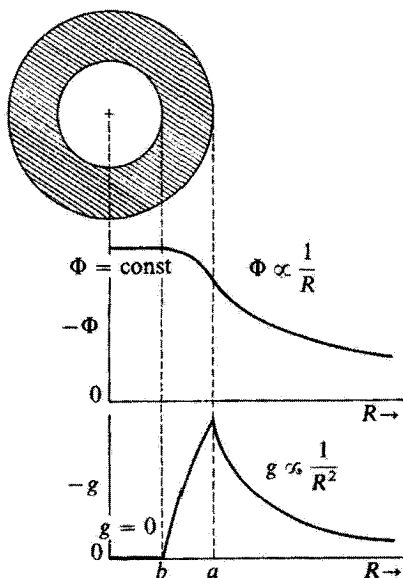
$$\begin{aligned}\Phi(b < R < a) &= -\frac{4\pi\rho G}{3R}(R^3 - b^3) - 2\pi\rho G(a^2 - R^2) \\ &= -4\pi\rho G \left( \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{3R} - \frac{R^2}{6} \right)\end{aligned}\quad (21.4)$$

می‌بینیم که اگر  $R \rightarrow a$ ، آنگاه معادله (21.4) همان نتیجه معادله (19.4) را برای همان حد، به دست می‌دهد. به همین ترتیب، معادلات (21.4) و (20.4) به ازای حد  $R \rightarrow b$  نتیجه مشابهی را به وجود می‌آورند. از این رو پتانسیل پوسته است. اگر پتانسیل در نقطه‌ای پوسته نباشد، گرادیان پتانسیل — و از آن رو نیرو — در آن نقطه نامتناهی خواهد بود. از آنجا که نیروهای نامتناهی واقعیت فیزیکی را باز نمی‌نمایانند، نتیجه می‌گیریم که توابع پتانسیل واقعی همواره باید پوسته باشند. ■

نتایج مثال ۱.۴ بسیار مفیدند. بنابر معادله (19.4) پتانسیل در هر نقطه خارج از توزیع متقارن کروی (پوسته یا توپر، زیرا کره‌های توپر از تعداد زیادی پوسته تشکیل می‌شوند) ماده از ابعاد این توزیع مستقل است. بنابراین، برای محاسبه پتانسیل خارجی (یا نیرو)، تمام جرم را متمرکز در مرکز می‌گیریم. معادله (20.4) حاکی از آن است که پتانسیل در هر جایی درون یک پوسته جرمی متقارن کروی ثابت (و نیرو صفر) است. و سرانجام، در نقاطی در داخل پوسته جرمی، پتانسیلی که از معادله (21.4) به دست می‌آید با هر دو نتیجه قبلی سازگار است.

اندازه بردار میدان  $\mathbf{g}$  را می‌توان برای هر یک از این سه ناحیه از عبارت  $g = -d\Phi/dR$





شکل ۴.۴

محاسبه کرد. این نتایج عبارت‌اند از

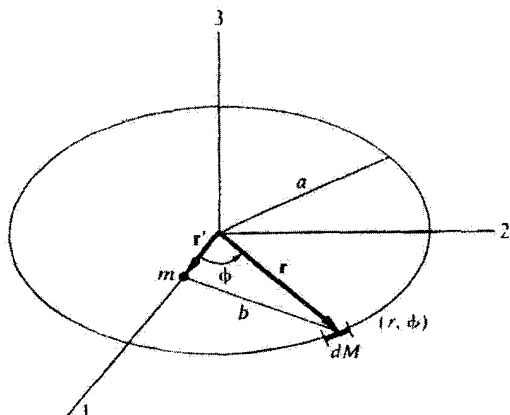
$$\left. \begin{aligned} g(R < b) &= 0 \\ g(b < R < a) &= \frac{4\pi\rho G}{3} \left( \frac{b^2}{R} - R \right) \\ g(R > a) &= -\frac{GM}{R^2} \end{aligned} \right\} \quad (22.4)$$

می‌بینیم که نه تنها پتانسیل بلکه بردار میدان نیز (و به این ترتیب نیرو) پیوسته‌اند. اما، مشتق بردار میدان، روی مرز سطوح برونی و درونی پوسته پیوسته نیست. تمام این نتایج مربوط به پتانسیل و بردار میدان را می‌توان در شکل ۴.۴ خلاصه کرد.

#### مثال ۲.۴

حلقه دایره‌ای یکنواخت نازکی به جرم  $M$  و شعاع  $a$  را در نظر بگیرید. جرم  $m$  در صفحه حلقه قرار داده می‌شود. یکی از وضعیت‌های تعادل را بیابید و تعیین کنید که آیا این وضعیت پایدار است یا خیر؟

حل: به اعتبار تقارن، شاید معتقد باشیم که جرم  $m$  واقع در مرکز حلقه (شکل ۵.۴) باید در حال



شکل ۵.۴

تبادل باشد زیرا جرم به طور یکنواختی آن را احاطه می‌کند. جرم  $m$  را در فاصله  $r'$  از مرکز حلقه قرار دهید، محور  $x_1$  را در امتداد این راستا بگیرید.

پتانسیل به وسیله معادله ۷.۴ معین شده است، که در آن  $\rho = M/2\pi a$ :

$$d\Phi = -G \frac{dM}{b} = -\frac{G\rho a}{b} d\phi \quad (23.4)$$

که  $b$  عبارت است از فاصله میان  $dM$  و  $m$ ،  $dM = \rho a d\phi$ ،  $r$  و  $r'$  را، به ترتیب، بردارهای مربوط به  $dM$  و  $m$  بگیرید

$$b = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |a \cos \phi \mathbf{e}_1 + a \sin \phi \mathbf{e}_2 - r' \mathbf{e}_1|$$

$$= |(a \cos \phi - r') \mathbf{e}_1 + a \sin \phi \mathbf{e}_2| = [(a \cos \phi - r')^2 + a^2 \sin^2 \phi]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (a^2 + r'^2 - 2ar' \cos \phi)^{\frac{1}{2}} = a \left[ 1 + \left(\frac{r'}{a}\right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^{\frac{1}{2}} \quad (24.4)$$

از معادله (۲۳.۴) انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned} \Phi(r') &= -G \int \frac{dM}{b} = -\rho a G \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{b} \\ &= -\rho G \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{\left[ 1 + \left(\frac{r'}{a}\right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (25.4)$$

انتگرالگیری از معادله (۲۵.۴) دشوار است، از این رو وضعیتهای نزدیک به نقطه تعادل،  $r' = 0$  را در نظر می‌گیریم. اگر  $r' \ll a$  می‌توانیم مخارج معادله (۲۵.۴) را بسط دهیم

$$\begin{aligned} \left[ 1 + \left( \frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right] \\ &+ \frac{3}{8} \left[ \left( \frac{r'}{a} \right)^2 - \frac{2r'}{a} \cos \phi \right]^2 \dots \\ &= 1 + \frac{r'}{a} \cos \phi + \frac{1}{2} \left( \frac{r'}{a} \right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) + \dots \end{aligned} \quad (26.4)$$

معادله (۲۵.۴) چنین می‌شود

$$\Phi(r') = -\rho G \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \frac{r'}{a} \cos \phi + \frac{1}{2} \left( \frac{r'}{a} \right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) + \dots \right\} d\phi \quad (27.4)$$

که انتگرالگیری آن به آسانی منجر می‌شود به

$$\Phi(r') = -\frac{MG}{a} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{r'}{a} \right)^2 + \dots \right] \quad (28.4)$$

انرژی پتانسیل  $U(r')$  از معادله (۱۱.۴) حاصل می‌شود

$$U(r') = m\Phi(r') = -\frac{mMG}{a} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{r'}{a} \right)^2 + \dots \right] \quad (29.4)$$

وضعیت تعادل [از معادله (۱۰۰.۲)] به طریق زیر یافته می‌شود

$$\frac{dU(r')}{dr'} = 0 = -\frac{mMG}{a} \frac{1}{2} \frac{r'}{a^2} + \dots \quad (30.4)$$

از این رو  $r' = 0$  یکی از نقاط تعادل است. برای تعیین پایداری از معادله (۱۰۳.۲) بهره می‌گیریم

$$\frac{d^2U(r')}{dr'^2} = -\frac{mMG}{2a^3} + \dots < 0 \quad (31.4)$$

در این صورت نقطه تعادل ناپایدار است.

این نتیجه آخری بدیهی نیست، زیرا ممکن است چنین باور داشته باشیم که یک جابه‌جایی کوچک از  $r' = 0$  شاید به وسیله نیروهای گرانشی ناشی از تمامی جرم واقع در حلقه‌ای که آن را احاطه می‌کند، باز هم به  $r' = 0$  برگردد.

## ۳.۴ خطوط نیرو و سطوح هم پتانسیل

جرمی را در نظر می‌گیریم که باعث میدانی گرانشی می‌شود که می‌توان آن را با بردار میدان  $g$  نشان داد. فرض کنید خطی را از سطح جرم به بیرون ترسیم کنیم به طوری که راستای این خط در هر نقطه با راستای  $g$  در آن نقطه یکی است. این خط از سطح جرم تا بینهایت امتداد می‌یابد. چنین خطی را خط نیرو می‌گویند.

با ترسیم خطوط مشابهی از هر عنصر کوچک مساحت سطح جرم می‌توانیم راستای میدان نیرو در هر نقطه دلخواه در فضا را مشخص کنیم. خطوط نیرو برای هر جرم نقطه‌ای منفرد جملگی خطوط مستقیمی‌اند که از جرم به بینهایت امتداد می‌یابند. خطوط نیرو، که به این نحو مشخص شده‌اند، در هر نقطه فقط به راستای میدان نیرو مرتبط‌اند. اما، می‌توان در نظر گرفت که چگالی چنین خطوطی—یعنی، تعداد خطوطی که از یک واحد حجم در فضا می‌گذرند—با بزرگی نیرو در آن حجم متناسب باشد. بدینسان تصویر خطوط نیرو، شیوه مناسبی برای تجسم مقدار و نیز راستای (یعنی، خاصیت برداری) میدان به شمار می‌آید.

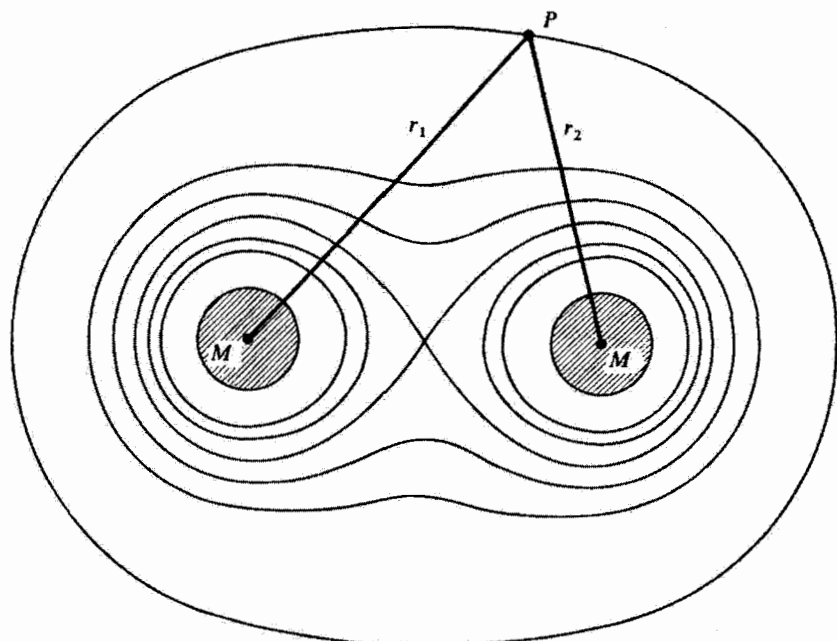
تابع پتانسیل در هر نقطه فضا (به استثنای موضع جرم نقطه‌ای) تعریف می‌شود. بنابراین معادله

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3) = \text{const.} \quad (۳۲.۴)$$

سطحی را معین می‌کند که پتانسیل بر روی آن ثابت است. چنین سطحی را سطح هم پتانسیل می‌گویند. بردار میدان  $g$  با گرادیان  $\Phi$  برابر است؛ از این رو  $g$  نمی‌تواند در امتداد سطح هم پتانسیل مؤلفه‌ای داشته باشد. بنابراین نتیجه می‌شود که هر خط نیرو باید به هر سطح هم پتانسیل عمود باشد. از این رو میدان روی جسمی که در امتداد یک سطح هم پتانسیل حرکت می‌کند، کاری انجام نمی‌دهد. از آنجا که تابع پتانسیل تک مقدار است، هیچ دو سطح هم پتانسیلی نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند. سطوح پتانسیل برابری که پیرامون یک جرم نقطه‌ای منفرد و منزوی (یا هر جرم با تقارن کروی) را فرا گرفته‌اند، جملگی کره‌اند. دو جرم نقطه‌ای  $M$  را در نظر بگیرید که به فاصله معینی از یکدیگر واقع‌اند. اگر  $r_1$  فاصله یکی از آن جرمها از نقطه‌ای در فضا باشد، و اگر  $r_2$  فاصله جرم نقطه‌ای دیگر تا همان نقطه باشد، در این صورت

$$\Phi = -GM \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \text{const.} \quad (۳۳.۴)$$

معادله بالا، سطوح هم پتانسیل را تعریف می‌کند. تعدادی از این سطوح، برای این سیستم دو ذره‌ای، در شکل ۶.۴ نموده شده‌اند. این سطوح، در سه بعد از طریق چرخش این نمودار گرد خطوط واصل میان این دو نقطه تولید می‌شوند.



شکل ۶.۴

#### ۴.۴ مفهوم پتانسیل در کجا مفید است؟

استفاده از پتانسیلها برای توصیف اثر نیروهای «کنش از دور» روش بسیار مهم و کارآمدی است. اما، این نکته را از نظر دور نخواهیم داشت که توجیه نهایی استفاده از پتانسیل همانا فراهم آوردن وسایلی مناسب برای محاسبه نیروی وارد بر جسم است. سزیرانبروست که از نظر فیزیکی، یک کمیت با معناست و نه پتانسیل. بدینسان در برخی مسائل محاسبه مستقیم نیرو آسانتر است، تا محاسبه پتانسیل و سپس گرادیان گرفتن از آن. مزیت بهره‌گیری از روش پتانسیلی این است که پتانسیل کمیتی اسکالر است؛ الزومی ندارد تا وقتی که عمل گرادیان انجام می‌گیرد با عملیات پیچیده اضافی مرتب کردن مؤلفه‌های یک بردار سروکار داشته باشیم. در محاسبات مستقیم نیرو، باید مؤلفه‌ها را در سرتاسر عملیات محاسبه بدنبال بکشیم. در این صورت، برای انتخاب رهیافت خاصی که به کار می‌بریم، قدری مهارت لازم است. مثلاً، اگر مسئله تقارن معینی داشته باشد که، از نقطه نظر ملاحظات فیزیکی، به ما اجازه دهد که تعیین کنیم نیرو دارای جهت معینی است، در آن صورت برگزیدن آن جهت به عنوان یکی از جهت‌های مختصه‌ای محاسبات برداری را تا حد یک محاسبه ساده اسکالری تقلیل می‌دهد.

۱. در فصل ۶ مثال دیگری از تابع اسکالری را ملاحظه خواهیم کرد که می‌توان از آن نتایج برداری استخراج کرد. این تابع عبارت است از تابع لاگرانژی، که، برای تأکید بر شباهت، آن را گاهی (و اکثراً در کاربردهای قدیمتر)، پتانسیل جنبشی می‌نامند.

در چنین برداری، محاسبه مستقیم نیرو می‌تواند به اندازه کافی سراسر باشد تا لزوم استفاده از روش پتانسیلی را متفی کند. در هر مسئله متضمن نیرو باید پس از بررسی به آسانترین روش محاسبه پی برد.

### مثال ۳.۴

قرص یکنواخت نازکی به جرم  $M$  و شعاع  $a$  را در نظر بگیرید. نیروی وارد بر جرم  $m$  واقع در امتداد محور این قرص را بیابید.

حل: این مسئله را هم با روش پتانسیلی و هم با روش مستقیم نیرو حل می‌کنیم. به شکل ۷.۴ توجه کنید. پتانسیل دیفرانسیلی،  $d\Phi$ ، در فاصله  $z$  از رابطه زیر به دست می‌آید

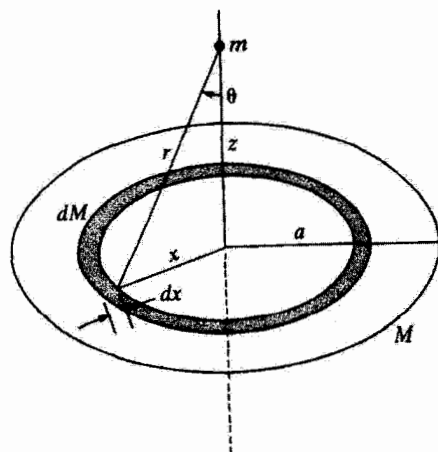
$$d\Phi = -G \frac{dM}{r} \quad (۳۴.۴)$$

جرم دیفرانسیلی  $dM$  عبارت است از حلقه نازکی به پهنای  $dx$ ، چرا که در اینجا تقارن سمتی داریم

$$dM = \rho dA = \rho 2\pi x dx \quad (۳۵.۴)$$

$$d\Phi = -2\pi\rho G \frac{x dx}{r} = -2\pi\rho G \frac{x dx}{(x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\pi\rho G \int_0^a \frac{2x dx}{(x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = -2\pi\rho G (x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^a \\ &= -2\pi\rho G [(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - z] \end{aligned} \quad (۳۶.۴)$$



شکل ۷.۴

نیرو را از این رابطه پیدا می‌کنیم

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -m\nabla\Phi \quad (۳۷.۴)$$

به اعتبار تقارن، تنها یک نیرو در راستای  $z$  داریم

$$F_z = -m \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} = +2\pi m \rho G \left[ \frac{z}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right] \quad (۳۸.۴)$$

در روش دوم خود، نیرو را با استفاده از معادله (۲.۴)، مستقیماً محاسبه می‌کنیم

$$d\mathbf{F} = -Gm \frac{dM}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (۳۹.۴)$$

بردارها موضوع را پیچیده می‌کنند. تقارن چه کمکی به ما می‌کند؟ به ازای هر  $dM$  کوچک روی هر طرف حلقه نازک به پهنای  $dx$ ،  $dM$  دیگری روی طرف دیگر آن وجود دارد که مؤلفه افقی  $d\mathbf{F}$  روی  $m$  را دقیقاً خنثی می‌کند. به همین ترتیب، تمام مؤلفه‌های افقی حذف می‌شوند، و ما فقط باید مؤلفه قائم  $d\mathbf{F}$  در امتداد  $z$  را در نظر بگیریم

$$dF_z = \cos\theta |d\mathbf{F}| = -mG \frac{\cos\theta dM}{r^2}$$

و از آنجا که  $\cos\theta = z/r$

$$dF_z = -mG\rho \frac{2\pi xz dx}{r^3}$$

و

$$\begin{aligned} F_z &= -\pi m \rho G z \int_{-a}^a \frac{2x dx}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\pi m \rho G z \left[ \frac{-2}{(z^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \Big|_{-a}^a \\ &= 2\pi m \rho G \left[ \frac{z}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right] \end{aligned}$$

که با معادله (۳۸.۴) یکسان است. توجه کنید که مقدار  $F_z$  منفی است، و دلالت بر این امر دارد که نیرو در شکل ۷.۴ پایین سو و جاذبه است.

## مسائل

۱.۴ سطوح هم پتانسیل و خطوط نیرو را برای دو جرم نقطه‌ای که به فاصله معینی از هم واقع شده‌اند، ترسیم کنید. آنگاه، یکی از جرمها را دارای جرم منفی،  $-M$ ، تصور کنید. سطوح هم پتانسیل و خطوط نیرو برای این حالت را ترسیم کنید. این مجموعه هم پتانسیل و خطوط میدان بر چه نوع وضعیت فیزیکی اعمال می‌شوند؟ (توجه کنید که خطوط نیرو دارای راستایند؛ این راستا را با پیکانهای مناسب نشان دهید.)

۲.۴ اگر بردار میدان از فاصله شعاعی درون کره مستقل باشد، تابعی را بیابید که چگالی کره،  $\rho = \rho(r)$ ، را توصیف می‌کند.

۳.۴ فرض کنید مقاومت هوا ناچیز باشد، کمترین سرعتی را که باید ذره در سطح زمین داشته باشد تا از میدان گرانشی زمین بگریزد محاسبه کنید. برای این نتیجه مقداری عددی به دست آورید. (این سرعت را سرعت گریز می‌گویند.)

۴.۴ ذره‌ای مطابق نیروی  $F = -mk^2/x^2$  به یک مرکز نیرو جذب می‌شود. نشان دهید که زمان لازم برای اینکه ذره از یک فاصله  $d$  به مرکز نیرو برسد عبارت است از  $d^3/k$ .

۵.۴ ذره‌ای از یک ارتفاع زیاد از حال سکون به زمین سقوط می‌کند. از مقاومت هوا چشم پوشید و نشان دهید که ذره برای پیمودن نیمه اول این مساحت تقریباً به  $9/11$  کل زمان نیاز دارد.

۶.۴ نیروی گرانشی وارد بر جرم واحدی را که در یک نقطه خارج از کره همگنی از ماده واقع شده است، مستقیماً محاسبه کنید.

۷.۴ پتانسیل گرانشی ناشی از میله نازکی به طول  $l$  و جرم  $M$  در فاصله  $R$  از مرکز میله و در راستای عمود بر این میله را، محاسبه کنید.

۸.۴ بردار میدان گرانشی ناشی از استوانه همگنی را در نقاط خارجی روی محور این استوانه محاسبه کنید. این محاسبه را: الف) از طریق محاسبه مستقیم نیرو و ب) از طریق محاسبه پتانسیل، انجام دهید.

۹.۴ پتانسیل ناشی از حلقه دایره‌ای نازکی به شعاع  $a$  و جرم  $M$  را برای نقاط واقع بر صفحه این حلقه و خارج از آن محاسبه کنید. نتیجه را می‌توان به صورت یک انتگرال بیضوی بیان کرد.<sup>۱</sup> فرض کنید فاصله از مرکز حلقه تا نقطه میدان در مقایسه با شعاع حلقه زیاد است. عبارت مربوط به پتانسیل را بسط دهید و نخستین جمله اصلاحی را بیابید.

۱۰.۴ پتانسیل مربوط به یک حلقه دایره‌ای نازک به شعاع  $a$  و جرم  $M$  را در نقاط خارج از

۱. برای دستیابی به فهرست برخی از انتگرالهای بیضوی به پیوست ب مراجعه کنید.



محور بیابید. فرض کنید  $R$  فاصله مرکز حلقه از نقطه میدانی، و  $\theta$  زاویه بین خط واصل بین مرکز حلقه و نقطه میدانی با محور حلقه باشد. فرض کنید  $a \gg R$  به طوری که از جمله‌های از مرتبه  $(a/R)^2$  و بالاتر می‌توان چشم پوشید.

۱۱.۴ جسم پر جرمی با شکل دلخواه و یک سطح کروی در خارج از جسم را در نظر بگیرید. نشان دهید که مقدار متوسط پتانسیل ناشی از جسم که روی سطح کروی محاسبه شده با مقدار پتانسیل در مرکز کره برابر است.

۱۲.۴ نشان دهید که خود - انرژی گرانشی یک کره یکنواخت به جرم  $M$  و شعاع  $R$  عبارت است از

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

۱۳.۴ سیاره‌ای به چگالی  $\rho_1$  (هسته کروی، به شعاع  $R_1$ ) با یک ابر غبار کروی ضخیم (به چگالی  $\rho_2$ ، و شعاع  $R_2$ ) کشف می‌شود. نیروی وارد بر ذره‌ای به جرم  $m$  واقع در میان ابر غبار چقدر است؟

۱۴.۴ کره توپر یکنواختی به جرم  $M$  و شعاع  $R$  در فاصله  $h$  بر فراز یک ورقه نامحدود نازک به چگالی (مساحت/جرم)  $\rho_s$ ، قرار می‌گیرد. کره آن ورقه را با چه نیرویی جذب می‌کند؟

۱۵.۴ ذره‌ای به داخل حفره انداخته می‌شود. این حفره چنان حفر شده که مستقیماً از مرکز زمین می‌گذرد. با چشمپوشی از آثار چرخشی، نشان دهید که حرکت ذره هماهنگ ساده است.

## برخی روشهای حساب وردشی (حساب تغییرها)

### ۱.۵ مقدمه

در فصل بعد معادلات حرکت نیوتون را در شکلی کلیتر، به نام معادلات لاگرانژ، مجدداً بیان خواهیم کرد. همچنین نشان خواهیم داد که این معادلات را می‌توان از یک اصل وردشی، به نام اصل هامیلتون<sup>۱</sup> استخراج کرد. نیازی نداریم که برای به دست آوردن معادلات لاگرانژ از اصل وردشی هامیلتون بهره‌گیریم، اما بیان دینامیک در چارچوب این اصطلاحات وحدت زیبایی برای مکانیک را ممکن می‌کند و برای بسط نظریه تا جایی که پدیده‌های میدانی را در برگیرد، روش بر قدرتی را فراهم می‌آورد. این مبحث اخیر از دامنهٔ بحث کتاب حاضر خارج است، اما به نظر می‌رسد که برای بررسیهای کلیتر دینامیک مناسب است در این مرحله شالودهٔ آن را مطرح کنیم. بنابراین، هر چند که فقط در بخش کوچکی از مطالب بعدی از روشهای وردشی بهره خواهیم گرفت، اما این روشها در فیزیک چندان اهمیت دارند که بحث مختصری در باب این اصول لازم به نظر می‌رسد.

---

۱. حساب وردشها را نیوتون پایه‌گذاری کرد (۱۶۸۶) و یوهان و ژاکوب برنولی (۱۶۹۶) و اوایل (۱۷۴۴) آن را گسترش دادند. آدرین لژاندر (۱۷۸۶)، جوزف لاگرانژ (۱۷۸۸)، هامیلتون (۱۸۳۳)، و ژاکوبی (۱۸۳۷) جملگی در این مبحث سهم بسزایی داشته‌اند. نام پیتر دیریکله (۱۸۰۵-۱۸۵۹) و کارل وایرشتراس (۱۸۱۵-۱۸۷۹) بخصوص با پایه‌گذاری شالودهٔ ریاضی دقیق و مستحکمی برای این مبحث وابسته است.

در بخشهای بعدی فقط به شرایط لازم برای پرداختن به مسائل وردشی نظر می‌کنیم؛ شرایط کافی خیلی پیچیده‌اند، و برای دستیابی به جزئیات موضوع خواننده باید به کتابهای خاص حساب وردشی مراجعه کند. بحثی که در این فصل ارائه می‌دهیم محدود است به جنبه‌هایی از نظریه وردشی که با سیستمهای کلاسیکی ارتباط مستقیم دارد. در اینجا منظور اصلی تعیین مسیری است که جوابهای فرین، مثلاً کوتاهترین فاصله (یا زمان) بین دو نقطه، را به دست می‌دهد. یکی از مثالهای مشهور استفاده از نظریه وردشی عبارت است از اصل فرما: نور از مسیری می‌گذرد که در آن کمترین زمان صرف می‌شود (مسئله ۷.۵ را ببینید).

## ۲.۵ طرح مسئله

مسئله اساسی حساب وردشی عبارت است از تعیین تابع  $y(x)$  به طوری که انتگرال زیر یک مقدار فرین (یعنی، یا بیشینه و یا کمینه) باشد:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x); x\} dx \quad (۱.۵)$$

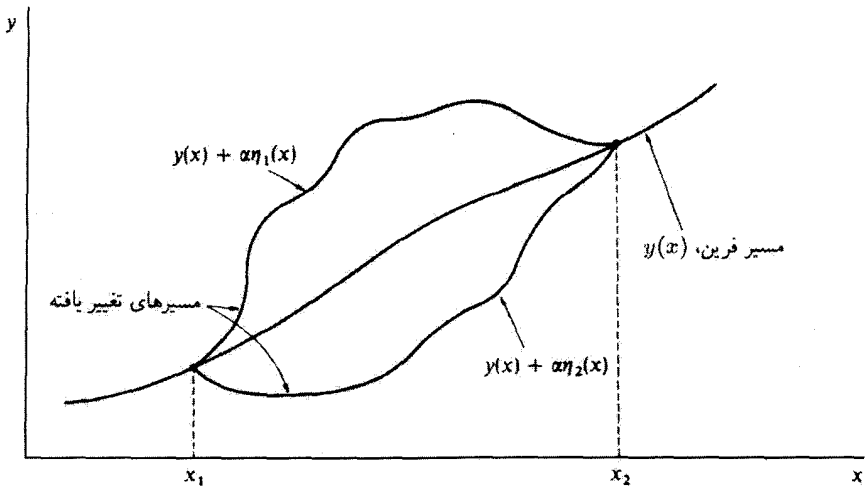
در معادله (۱.۵) داریم:  $y'(x) \equiv dy/dx$  و سیمیکولون ( $\cdot$ ) در تابعی  $f$ ، متغیر مستقل  $x$  را از متغیر وابسته  $y(x)$  و مشتق آن،  $y'(x)$ ، جدا می‌کند. تابعی  $f$  را معلوم در نظر می‌گیرند، و حدود انتگرال ثابت است.<sup>۱</sup> در این صورت باید تابع  $y'(x)$  را تغییر داد تا یک مقدار فرین برای  $J$  یافته شود. منظورمان از این نکته آن است که یک تابع  $y = y(x)$  به انتگرال  $J$  یک مقدار کمینه می‌دهد، در این صورت هر تابع همسایه‌ای، که مهم نیست چقدر به  $y(x)$  نزدیک باشد، باید  $J$  را افزایش دهد. می‌توان تابع همسایه را به ترتیب زیر تعریف کرد. به تمام توابع ممکن  $y$  یک نمایش پارامتری  $y = y(\alpha, x)$  می‌دهیم به طوری که، به ازای  $\alpha = 0$ ،  $y = y(0, x) = y(x)$  عبارت باشد از تابعی که برای  $J$ ، یک فرین به دست می‌دهد. در این صورت می‌شود نوشت

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha \eta(x) \quad (۲.۵)$$

که  $\eta(x)$  تابعی است از  $x$  که دارای مشتق اول پیوسته است و در  $x_1$  و  $x_2$  صفر می‌شود، چرا که تابع تغییر یافته  $y(\alpha, x)$  باید در نقاط انتهایی مسیری با  $y(x)$  همسان باشد: یعنی  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . نمایش نموداری این وضعیت در شکل ۱.۵ آمده است.

۱. کمیت  $f$  به شکل تابعی به متغیر وابسته  $y(x)$  وابسته است و به آن تابعی می‌گویند.

۲. لزومی ندارد که حدود انتگرالگیری ثابت فرض شود. اگر این حدود امکان تغییر پیدا کنند، در این صورت مسئله چنان گسترده می‌شود که نه تنها  $y(x)$  بلکه  $x_1$  و  $x_2$  را هم باید چنان یافت که  $J$  فرینه باشد.



شکل ۱.۵

اگر توابعی را در نظر بگیریم که معادله (۲.۵) آنها را بیان می‌کند، انتگرال  $J$  به تابعی از پارامتر  $\alpha$  تبدیل می‌شود

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x\} dx \quad (۳.۵)$$

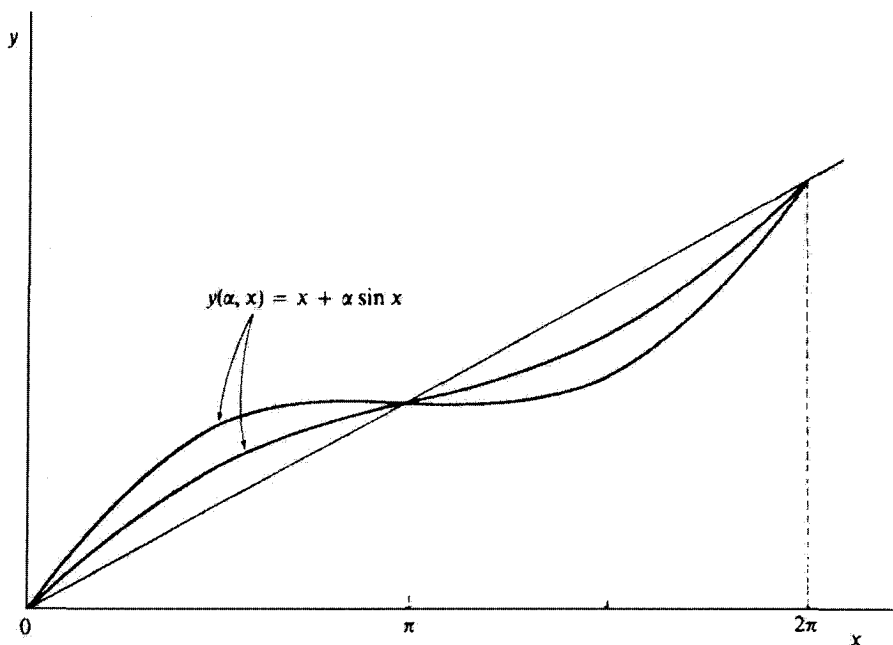
شرط اینکه انتگرال یک مقدار مانا داشته باشد (یعنی، شرط داشتن نتایج فرین)، این است که  $J$  در مرتبه اول مستقل از  $\alpha$  باشد؛ بیان معادل آن، به‌ازای تمام توابع  $\eta(x)$  عبارت است از

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (۴.۵)$$

این فقط یک شرط لازم است؛ کافی نیست. اما، همانطور که قبلاً گفتیم، ما در این کتاب جزئیات شرایط کافی را پیگیری نمی‌کنیم.

### مثال ۱.۵

تابع  $f = (dy/dx)^2$  را، که در آن  $y(x) = x$ ، در نظر بگیرید. به  $y(x) = \sin x$  تابع  $\eta(x)$  را اضافه کنید، و  $J(\alpha)$  را بین حدود  $x = 2\pi$  و  $x = 0$  بیابید. نشان دهید که مقدار مانای  $J(\alpha)$  به‌ازای  $\alpha = 0$  پیش می‌آید.



شکل ۲.۵

حل: می‌توانیم مسیرهای تغییر یافته همسایه را با افزودن وردش سینوسی به  $y(x)$  مشخص کنیم

$$y(x) = x \quad (۵.۵)$$

$$y(\alpha, x) = x + \alpha \sin x \quad (۶.۵)$$

این مسیرها به ازای  $\alpha = 0$  و دو مقدار غیر صفر متفاوت  $\alpha$ ، در شکل ۲.۵ نمایش یافته‌اند. آشکار است که تابع  $\eta(x) = \sin x$  از شرایط نقطه انتهایی پیروی می‌کند، یعنی:  $\eta(0) = 0 = \eta(2\pi)$ . برای تعیین کردن  $f(y, y'; x)$  ابتدا کمیت زیر را تعیین می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \alpha \cos x \quad (۷.۵)$$

در این صورت

$$f = \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2 \cos^2 x \quad (۸.۵)$$

حالا معادله (۳.۵) چنین می شود

$$J(\alpha) = \int_0^{2\pi} (1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2 \cos^2 x) dx \quad (9.5)$$

$$= 2\pi + \alpha^2 \pi \quad (10.5)$$

بدینسان می بینیم که مقدار  $J(\alpha)$  همواره، و مستقل از اینکه چه مقداری (مثبت یا منفی) برای  $\alpha$  اختیار کنیم، از  $J(0)$  بزرگتر است. شرط معادله (۴.۵) نیز برآورده می شود. ■

### ۳.۵ معادله اویلر

برای تعیین نتیجه شرط بیان شده به وسیله معادله (۴.۵)، مشتق گیری را که در معادله (۳.۵) بیان شد، انجام می دهیم

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x) dx \quad (11.5)$$

از آنجا که حدود انتگرالگیری ثابت است، عمل مشتق گیری فقط انتگرالده را در برمی گیرد. از این رو

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \quad (12.5)$$

از معادله (۲.۵) داریم

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x); \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dx} \quad (13.5)$$

معادله (۱۲.۵) می شود

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx \quad (14.5)$$

از جمله دوم در انتگرالده می توان انتگرال جزء به جزء گرفت

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (15.5)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx \quad (16.5)$$

جمله‌ای که از آن انتگرال گرفته شده است حذف می‌شود زیرا  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . بنابراین، معادلهٔ (۱۲.۵) این طور می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx \end{aligned} \quad (17.5)$$

حالا انتگرال معادلهٔ (۱۷.۵) مستقل از  $\alpha$  بنظر می‌رسد، اما توابع  $y$  و  $y'$  که مشتقات  $f$  نسبت به آنها گرفته می‌شوند هنوز هم توابع  $\alpha$  هستند. اما، هرگاه  $\alpha = 0$ ، آنگاه  $y(\alpha, x) = y(0, x) = y(x)$  و وابستگی به  $\alpha$  از میان می‌رود. از آنجا که  $\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$  باید به‌ازای مقدار فرین صفر شود، و از آنجا که  $\eta(x)$  تابعی دلخواه است (بنابر شرایطی که قبلاً بیان شد)، انتگرالده در معادلهٔ (۱۷.۵) باید خود به‌ازای  $\alpha = 0$  صفر شود

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \quad \text{معادلهٔ اوایلر} \quad (18.5)$$

اکنون  $y$  و  $y'$  همان توابع اصلی، مستقل از  $\alpha$  هستند. این نتیجه را معادلهٔ اوایلر<sup>۱</sup> می‌گویند، و عبارت است از شرط لازم برای اینکه  $J$  مقداری فرین داشته باشد.

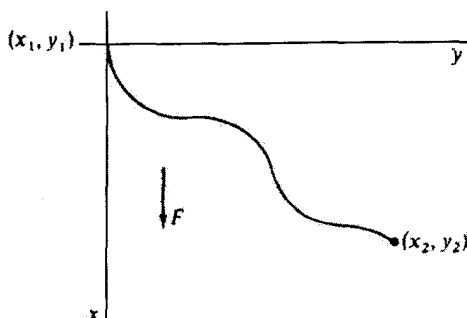
## مثال ۲.۵

می‌توانیم برای حل یک مسئله کلاسیک در تاریخ فیزیک، یعنی کوتاهترین زمان<sup>۲</sup>، از حساب وردشی بهره‌گیریم. ذره‌ای را در نظر بگیرید که در یک میدان نیروی ثابت از نقطه‌ای چون  $(x_1, y_1)$  از حال سکون به‌سوی نقطهٔ پایتتر  $(x_2, y_2)$  شروع، به حرکت می‌کند، مسیری را بیابید که از طریق آن، این ذره در کوتاهترین زمان ممکن جابه‌جایی را انجام می‌دهد.

حل: می‌شود دستگاه مختصاتی را اختیار کرد که نقطهٔ  $(x_1, y_1)$  در مبدأ آن باشد. بعلاوه، فرض کنیم میدان نیرو در امتداد مثبت محور  $x$ ، مطابق شکل ۳.۵، واقع باشد. از آنجا که نیروی وارد بر ذره ثابت است و اگر از وجود اصطکاک چشم‌پوشیم — میدان پایستار است، و انرژی کل ذره عبارت است از:  $T + U = \text{const.}$  اگر پتانسیل را از نقطهٔ  $x = 0$  اندازه بگیریم [یعنی،

۱. این معادله را اوایلر نخستین بار در سال ۱۷۴۴ به‌دست آورد. این معادله هرگاه در مورد سیستمهای مکانیکی به‌کار رود، معادلهٔ اوایلر-لاگرانژ خوانده می‌شود.

۲. نخستین بار در سال ۱۶۹۶ به‌وسیلهٔ یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) حل شد.



شکل ۲.۵

$\{U(x=0) = 0\}$ ، آنگاه چون ذره از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، پس  $T + U = 0$ . انرژی جنبشی عبارت است از  $T = \frac{1}{2}mv^2$ ، و انرژی پتانسیل  $U = -Fx = -mgx$  است، که در آن  $g$  شتاب ناشی از نیرو به‌شمار می‌آید. از این رو

$$v = \sqrt{2gx} \quad (19.5)$$

زمان لازم برای اینکه ذره از مبدأ به  $(x_2, y_2)$  برود عبارت است از

$$\begin{aligned} t &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{v} = \int \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{2gx})^{\frac{1}{2}}} \\ &= \int_{x_1=0}^{x_2} \left( \frac{1 + y'^2}{2gx} \right)^{\frac{1}{2}} dx \end{aligned} \quad (20.5)$$

زمان عبور ذره کمیتی است که برای آن باید یک کمینه وجود داشته باشد. از آنجا که ثابت  $(2g)^{-\frac{1}{2}}$  بر معادله نهایی تأثیر نمی‌گذارد، تابع  $f$  را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$f = \left( \frac{1 + y'^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (21.5)$$

و چون  $\partial f / \partial y = 0$ ، [معادله (۱۸.۵)] می‌شود

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

یا

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const.} \equiv (2a)^{-\frac{1}{2}}$$



با انجام مشتق‌گیری  $\partial f / \partial y'$  از معادلهٔ (۲۱.۵) و مجذور کردن نتیجه، خواهیم داشت

$$\frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2a} \quad (22.5)$$

عبارت بالا را می‌توان چنین نوشت

$$y = \int \frac{x dx}{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (23.5)$$

حالا به تغییر متغیر زیر دست می‌زنیم

$$x = a(1 - \cos \theta) \quad (24.5)$$

$$dx = a \sin \theta d\theta$$

آنگاه انتگرال معادلهٔ (۲۳.۵) می‌شود

$$y = \int a(1 - \cos \theta) d\theta$$

و

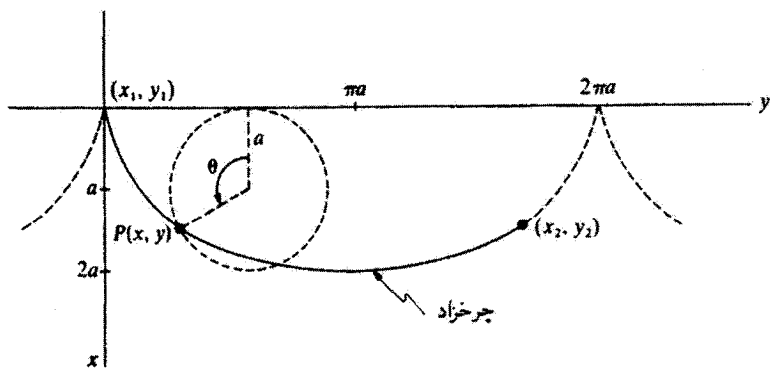
$$y = a(\theta - \sin \theta) + \text{const.} \quad (25.5)$$

معادلات پارامتری مربوط به چرخزاد<sup>۱</sup> (سیکلوئید) که از مبدأ می‌گذرد عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} x &= a(1 - \cos \theta) \\ y &= a(\theta - \sin \theta) \end{aligned} \right\} \quad (26.5)$$

که همان جواب به دست آمده است؛ بنابراین ثابت انتگرال‌گیری حذف می‌شود. پس مسیر به صورتی است که در شکل ۴.۵ نموده شده، و ثابت  $a$  باید چنان تنظیم شود که اجازه دهد چرخزاد از نقطهٔ مشخص  $(x_2, y_2)$  بگذرد. حل مسئلهٔ کوتاهترین زمان در واقع مسیری را به دست می‌دهد که ذره در کمترین زمان آن را می‌پیماید. اما شگردهای حساب بردشی فقط به این خاطر طراحی شده‌اند که یک فرین، بیشینه و یا کمینه، را ایجاد کنند. در دینامیک تقریباً همیشه این وضع پیش می‌آید که ما در پی کمینه‌ای برای مسئله هستیم (و آن را می‌یابیم).

۱. چرخزاد عبارت است از یک منحنی که رد نقطه‌ای واقع بر محیط دایره‌ای غلتان را روی صفحه‌ای در امتداد یک خط واقع در آن صفحه، بر جای گذاشته باشد. در شکل ۴.۵ به دایرهٔ نقطه چین که در امتداد  $x = 0$  می‌غلتد، توجه کنید.

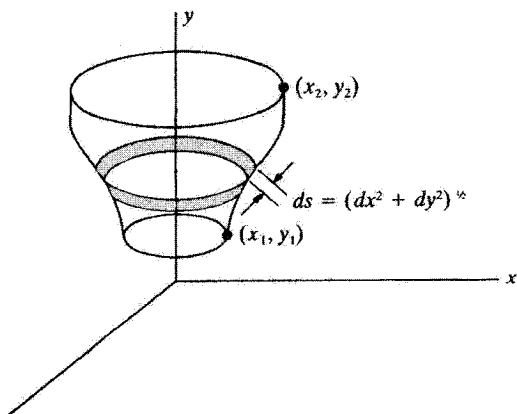


شکل ۴.۵

### مثال ۳.۵

سطحی را در نظر بگیرید که خط واصل بین دو نقطه ثابت  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  با گردیدن حول محوری هم صفحه با آن دو نقطه، ایجاد می‌کند. معادله خط واصل بین این دو نقطه را بیابید به طوری که مساحت سطح تولیدشده به وسیله گردش (یعنی، مساحت سطح گردش) کمینه باشد.

حل: فرض می‌کنیم منحنی عبوری از  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  حول محور  $y$ ، که با آن دو نقطه هم صفحه است، بگردد. برای محاسبه مساحت کل سطح گردش، ابتدا مساحت یک نوار،  $dA$ ، را پیدا می‌کنیم. با توجه به شکل ۵.۵



شکل ۵.۵

$$dA = 2\pi x ds = 2\pi x(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \quad (27.5)$$

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (28.5)$$

که در آن  $y' = dy/dx$  برای یافتن مقدار فرین فرض می‌کنیم

$$f = x(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (29.5)$$

و آن را در معادله (۱۸.۵) قرار می‌دهیم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (30.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (31.5)$$

بنابراین

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0$$

$$\frac{xy'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{const.} \equiv a \quad (32.5)$$

از معادله (۳۲.۵) تعیین می‌کنیم

$$y' = \frac{a}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (33.5)$$

$$y = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (34.5)$$

جواب این انتگرال عبارت است از

$$y = a \cosh^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + b \quad (35.5)$$

که در آن  $a$  و  $b$  ثابتهای انتگرالگیری‌اند که با این شرط تعیین شده‌اند که منحنی از نقاط  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  بگذرد. معادله (۳۵.۵) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$x = a \cosh \left( \frac{y - b}{a} \right) \quad (36.5)$$

که معادلهٔ یک منحنی زنجیری است؛ یعنی منحنی رشتهٔ خم‌پذیری که آزادانه بین دو نقطهٔ اتکا آویخته شده باشد.

## ۴.۵ «صورت دوم» معادلهٔ اویلر

می‌دانیم که

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} f(y, y'; x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \times \frac{dy'}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} \end{aligned} \quad (۳۷.۵)$$

همچنین

$$\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

یا، پس از نشان دادن مقدار معادل  $(\partial f / \partial y')$  از معادلهٔ (۳۷.۵)، داریم

$$\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} - y' \frac{\partial f}{\partial y} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \quad (۳۸.۵)$$

دو جملهٔ آخر معادلهٔ (۳۸.۵) را می‌توان به این صورت نوشت

$$y' \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

که با توجه به [معادلهٔ (۱۸.۵)] صفر می‌شود. بنابراین

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left( f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0} \quad (۳۹.۵)$$

می‌توانیم از این به اصطلاح «صورت دوم» معادلهٔ اویلر در مواردی استفاده کنیم که  $f$  بستگیصریح به  $x$  ندارد، و  $\partial f / \partial x = 0$ . در این صورت

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const.} \quad \left( \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ به‌ارای } \right) \quad (۴۰.۵)$$

## مثال ۴.۵

خط ژئودزیک عبارت است از خطی که کوتاهترین مسیر بین هر دو نقطه را نشان می‌دهد، در صورتی که این مسیر در سطح مشخصی مقید باشد. خط ژئودزیک را روی یک کره بیابید.

حل: عنصر طول بر روی سطح یک کره به شعاع  $\rho$  از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [معادلهٔ (و.۱۵)] وقتی که  $dr = 0$  را ملاحظه کنید.

$$ds = \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)^{\frac{1}{2}} \quad (۴۱.۵)$$

بنابراین فاصله  $s$  میان نقاط ۱ و ۲ عبارت است از

$$s = \rho \int_1^2 \left[ \left( \frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} d\varphi \quad (42.5)$$

و اگر قرار است که  $s$  یک کمینه باشد،  $f$  به صورت زیر مشخص می‌شود

$$f = (\theta'^2 + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (43.5)$$

که در آن  $\theta' \equiv d\theta/d\varphi$ . از آنجا که  $\partial f/\partial\varphi = 0$  می‌توان از صورت دوم معادله اوپلر [معادله (۴۰.۵)] بهره گرفت و رسید به

$$(\theta'^2 + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} - \theta' \times \frac{\partial}{\partial\theta'} (\theta'^2 + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} = \text{const.} \equiv a \quad (44.5)$$

با انجام مشتق‌گیری و ضرب کردن طرفین در  $f$ ، داریم

$$\sin^2 \theta = a(\theta'^2 + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (45.5)$$

این معادله را می‌توان برای  $d\varphi/d\theta = \theta'^{-1}$  حل کرد و به این نتیجه رسید

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{a \operatorname{cosec}^2 \theta}{(1 - a^2 \operatorname{cosec}^2 \theta)^{1/2}} \quad (46.5)$$

معادله اخیر را برای  $\varphi$  حل می‌کنیم و می‌رسیم به

$$\varphi = \sin^{-1} \left( \frac{\cot \theta}{\beta} \right) + \alpha \quad (47.5)$$

که  $\alpha$  ثابت انتگرالگیری است  $\beta^2 \equiv (1 - a^2)/a^2$ . معادله (۴۷.۵) را بازنویسی می‌کنیم

$$\cot \theta = \beta \sin(\varphi - \alpha) \quad (48.5)$$

برای تعبیر این نتیجه، با ضرب کردن طرفین در  $\rho \sin \theta$ ، معادله را به مختصات دکارتی می‌بریم و با بسط  $\sin(\varphi - \alpha)$ ، می‌رسیم به

$$(\beta \cos \alpha) \rho \sin \theta \sin \varphi - (\beta \sin \alpha) \rho \sin \theta \cos \varphi = \rho \cos \theta \quad (49.5)$$

از آنجا که  $\alpha$  و  $\beta$  ثابت‌اند، می‌توانیم آنها را چنین بنویسیم

$$\beta \cos \alpha \equiv A, \beta \sin \alpha \equiv B \quad (50.5)$$

در این صورت معادله (۴۹.۵) چنین می شود

$$A(\rho \sin \theta \sin \varphi) - B(\rho \sin \theta \cos \varphi) = (\rho \cos \theta) \quad (51.5)$$

مقادیر داخل پرانتزها، به ترتیب، همان عبارتهای مربوط به  $x, y$  و  $z$  در مختصات کروی هستند (شکل و ۳ در پیوست و را بنگرید)؛ از این رو، معادله (۵۱.۵) را می توان چنین نوشت

$$Ay - Bx = z \quad (52.5)$$

که عبارت است از معادله صفحه ای که از مرکز کره می گذرد. از این رو خط ژئودزیک واقع بر کره مسیری است که آن صفحه در تقاطع با سطح جانبی کره تشکیل می دهد؛ این مسیر یک دایره عظیمه است. توجه داشته باشید که دایره عظیمه هم فاصله «خط راست» کمینه و هم بیشینه بین دو نقطه روی سطح کره است. ■

### ۵.۵ توابع با چند متغیر وابسته

معادله اولبری که در بخش پیش به دست آوردیم عبارت است از جواب مسئله ای بردشی که در آن می خواهیم یک تابع  $y(x)$  را چنان بیابیم که انتگرال کمیت تابعی  $f$  فرینه شود. حالتی که غالباً در مکانیک با آن برمی خوریم این است که  $f$  یک کمیت تابعی از چند متغیر وابسته باشد

$$f = f\{y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \dots; x\} \quad (53.5)$$

یا، به بیان ساده

$$f = f\{y_i(x), y_i'(x); x\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (54.5)$$

در قیاس با معادله (۲.۵)، می نویسیم

$$y_i(\alpha, x) = y_i(0, x) + \alpha \eta_i(x) \quad (55.5)$$

به طور مشابه با عملیات قبل [معادله (۱۷.۵)]، به این نتیجه می رسیم

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \eta_i(x) dx \quad (56.5)$$

از آنجا که تک تک وردشها، یعنی  $\eta_i(x)$ ، مستقل اند، صفر شدن معادله (۵۶.۵) در هنگامی که در  $\alpha = 0$  محاسبه می شود مستلزم آن است که هر کدام از عبارتهای داخل پرانتز، جداگانه صفر شود:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (57.5)$$

### ۶.۵ معادلات اویلر هرگاه شرایط کمکی اعمال شوند

فرض کنید می خواهیم، مثلاً کوتاهترین مسیر بین دو نقطه واقع بر یک سطح را پیدا کنیم. پس، علاوه بر شرایطی که قبلاً مورد بحث واقع شد، شرطی دیگر هم مطرح است مبنی بر اینکه این مسیر باید در معادله سطح صدق کند، یعنی:  $g = \{y_i; x\} = 0$ . چنین معادله ای در حل مثال ۴.۵، مربوط به ژئودزیک روی یک کره، به طور ضمنی منظور شده بود. در این مثال شرط کمکی چنین بود

$$g = \sum_i x_i^2 - \rho^2 = 0 \quad (58.5)$$

یعنی

$$r = \rho = \text{const.} \quad (59.5)$$

اما در حالت کلی، باید از معادله یا معادلات کمکی استفاده صریح به عمل آوریم. این معادلات را معادلات قید نیز می گویند. حالتی را در نظر بگیرید که در آن

$$f = f\{y_i, y_i'; x\} = f\{y, y', z, z'; x\} \quad (60.5)$$

معادله متناظر با معادله (۱۷.۵) برای حالت دو متغیر عبارت است از

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right] dx \quad (61.5)$$

اما اکنون یک معادله قیدی به شکل زیر هم وجود دارد

$$g\{y_i; x\} = g\{y, z; x\} = 0 \quad (62.5)$$

و وردشهای  $\partial y / \partial \alpha$  و  $\partial z / \partial \alpha$  دیگر مستقل نیستند، از این رو عبارتهای داخل پرانتزها در معادله (۶۱.۵) در  $\alpha = 0$  جداگانه صفر نمی شوند.

با مشتق‌گیری از  $g$  در معادله (۶۲.۵)، داریم

$$dg = \left( \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) d\alpha = 0 \quad (63.5)$$

که در آن هیچ جمله‌ای برحسب  $x$  ظاهر نمی‌شود زیرا  $\partial x / \partial \alpha = 0$ . حالا داریم

$$\left. \begin{aligned} y(\alpha, x) &= y(x) + \alpha \eta_1(x) \\ z(\alpha, x) &= z(x) + \alpha \eta_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (64.5)$$

بنابراین، با تعیین  $\partial y / \partial \alpha$  و  $\partial z / \partial \alpha$  از معادله (۶۴.۵) و قرار دادن آن در جمله داخل پرانتزهای معادله (۶۳.۵)، که به‌طور کلی باید صفر باشد، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial g}{\partial y} \eta_1(x) = -\frac{\partial g}{\partial z} \eta_2(x) \quad (65.5)$$

معادله (۶۱.۵) چنین می‌شود

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta_1(x) + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \eta_2(x) \right] dx$$

با فاکتورگیری از  $\eta_1(x)$  و نوشتن معادله (۶۵.۵) به‌صورت

$$\frac{\eta_2(x)}{\eta_1(x)} = -\frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z}$$

داریم

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \left( \frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z} \right) \right] \eta_1(x) dx \quad (66.5)$$

حالا این معادله اخیر حاوی تک تابع دلخواه  $\eta_1(x)$  است، که به هر حال به معادلات (۶۴.۵) محدود نمی‌شود، و با اعمال شرط معادله (۴.۵)، عبارت داخل کروشه‌ها باید صفر شود. بدینسان داریم

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} = \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial z} \right)^{-1} \quad (67.5)$$

سمت چپ این معادله فقط شامل مشتقهای  $f$  و  $g$  برحسب  $y$  و  $y'$  است، و درست راست فقط مشتقهای آن کمیتها برحسب  $z$  و  $z'$  گنجانیده شده‌اند. چون  $y$  و  $z$  هر دو تابع  $x$  اند، دو



طرف معادله (۶۷.۵) را می‌توان با تابعی از  $x$ ، که آن را به صورت  $-\lambda(x)$  می‌نویسیم، برابر گرفت

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (۶۸.۵)$$

حالا جواب کامل این مسئله به یافتن سه تابع:  $y(x)$ ،  $z(x)$ ، و  $\lambda(x)$  بستگی دارد. اما سه رابطه وجود دارد که از آنها می‌شود استفاده کرد. دو معادله (۶۸.۵) و معادله قیدی [معادله (۶۲.۵)]، به این ترتیب تعداد کافی رابطه وجود دارد که دستیابی به جواب کامل را امکان‌پذیر می‌کند. توجه داشته باشید که در اینجا  $\lambda(x)$  را نامعین<sup>۱</sup> می‌پنداریم و به عنوان جزئی از جواب به دست می‌آید. تابع  $\lambda(x)$  را ضریب نامعین لاگرانژ می‌گویند.

برای حالت کلی چند متغیر وابسته و چند شرط معین، مجموعه معادلات زیر را داریم

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_j \lambda_j(x) \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0 \quad (۶۹.۵)$$

$$g_j\{y_i; x\} = 0 \quad (۷۰.۵)$$

اگر  $i = 1, 2, \dots, m$  و  $j = 1, 2, \dots, n$ ، معادله (۶۹.۵) نمایشگر  $m$  معادله با  $m + n$  مجهول است، اما  $n$  معادله قیدی [معادله (۷۰.۵)] هم وجود دارد. به این ترتیب  $m + n$  معادله با  $m + n$  مجهول داریم، و دستگاه معادلات بالا قابل حل است. معادله (۷۰.۵) با مجموعه  $n$  معادله دیفرانسیل معادل است

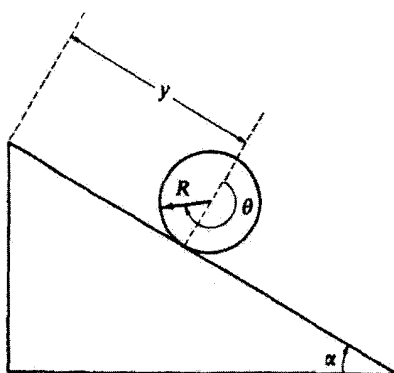
$$\sum_i \frac{\partial g_j}{\partial y_i} dy_i = 0, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (۷۱.۵)$$

در مسائل مکانیک، معادلات قیدی عموماً معادلات دیفرانسیل‌اند تا معادلات جبری. بنابراین معادلاتی چون معادلات (۷۱.۵) گاهی از معادلاتی که به وسیله (۷۰.۵) نموده شده‌اند، مفیدترند (برای دستیابی به مطالب بیشتری در این مورد، بخش ۵.۶ را ببینید).

## ۵.۵ مثال

قرصی را در نظر بگیرید که بدون لغزش روی یک سطح شیبدار می‌غلتد (شکل ۶.۵). معادله قید

۱. تابع  $\lambda(x)$  در کتاب مکانیک تحلیلی (*Me'canique Analytique*) تألیف لاگرانژ (پاریس، ۱۷۸۸) معرفی



شکل ۶.۵

را بر حسب «مختصات»  $y$  و  $\theta$  تعیین کنید.

حل: رابطه میان این دو مختصه (که مستقل نیستند) عبارت است از

$$y = R\theta \quad (۷۲.۵)$$

که در آن  $R$  شعاع قرص است. از این رو معادله قید عبارت است از

$$g(y, \theta) = y - R\theta = 0 \quad (۷۳.۵)$$

و

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -R \quad (۷۴.۵)$$

کمیت‌های وابسته به  $\lambda$ ، تک ضریب نامعین برای این حالت، به شمار می‌آیند.

### ۷.۵ نمادگذاری $\delta$

در آنالیزی که حساب وردشی در آن به‌کار می‌رود، عادتاً از نمادگذاری کوتاه‌نویسی بهره می‌گیریم تا وردش را نمایش دهیم. بدینسان، معادله (۱۷.۵) را که می‌توان چنین نوشت

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx \quad (۷۵.۵)$$

۱. اینها عملاً مختصات تعمیم یافته‌اند که در بخش ۳.۶ در باب آنها بحث می‌کنیم؛ مثال ۸.۶ را هم ببینید.

ممکن است این طور هم بیان شود

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (۷۶.۵)$$

که در آن

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha &\equiv \delta J \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha &\equiv \delta y \end{aligned} \right\} \quad (۷۷.۵)$$

در این صورت شرط مربوط به فرین چنین می شود

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f\{y, y'; x\} dx = 0 \quad (۷۸.۵)$$

با بردن نماد وردش،  $\delta$ ، به داخل انتگرال (چرا که، بنا بر فرض، حدود انتگرالگیری بر وردش تأثیری نمی گذارند)، داریم

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx \end{aligned} \quad (۷۹.۵)$$

اما

$$\delta y' = \delta \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y) \quad (۸۰.۵)$$

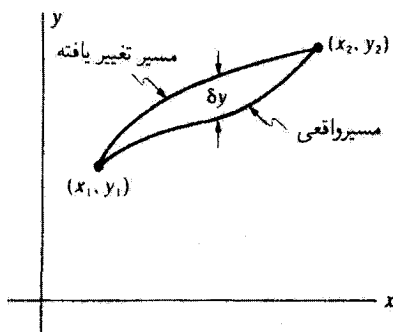
به این ترتیب

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right) dx \quad (۸۱.۵)$$

از جمله دوم، مانند قبل، انتگرال جزء به جزء می گیریم

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (۸۲.۵)$$

از آنجا که  $\delta y$  اختیاری است، شرط فرین  $\delta J = 0$  ایجاب می کند که انتگرالده صفر شود، و به این وسیله معادله اوایلر [معادله (۱۸.۵)] به دست می آید.



شکل ۷.۵

هر چند نمادگذاری  $\delta$  را غالباً به کار می‌برند، باید دانست که این نمادگذاری فقط کوتاه‌نوشتی از کمیت‌های دیفرانسیلی دقیقتری به شمار می‌آید. مسیر تغییر یافته  $\delta y$  را می‌توان به تعبیر فیزیکی به صورت یک جابه‌جایی مجازی از مسیر واقعی پنداشت که با تمام نیروها و قیدها سازگار است (شکل ۷.۵). این بردش  $\delta y$  به وسیله شرط  $dt = 0$ ، یعنی، شرطی که بر مبنای آن زمان ثابت است، از جابه‌جایی دیفرانسیلی واقعی  $dy$  قابل تشخیص است. در واقع، نیازی نیست که مسیر تغییر یافته  $\delta y$  حتی با یک مسیر ممکن برای حرکت متناظر باشد. البته، بردش باید در نقاط انتهایی صفر شود.

## مسائل

۱.۵ خط واصل بین  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  و  $(x_2, y_2) = (1, 1)$  را در نظر بگیرید. با استفاده از تابع تغییر یافته  $y(\alpha, x) = x + \alpha \sin \pi(1 - x)$ ، به طور صریح نشان دهید که تابع  $y(x) = x$  یک طول مسیر کمینه را ایجاد می‌کند. در بسط انتگرال بیضوی حاصل از چند جمله اول بهره‌گیری تا معادل معادله (۴.۵) را نشان دهید.

۲.۵ نشان دهید که کوتاهترین فاصله بین دو نقطه واقع بر یک صفحه، خط راست است.

۳.۵ نشان دهید که کوتاهترین فاصله بین دو نقطه در فضا (ی سه بعدی) خطی است راست.

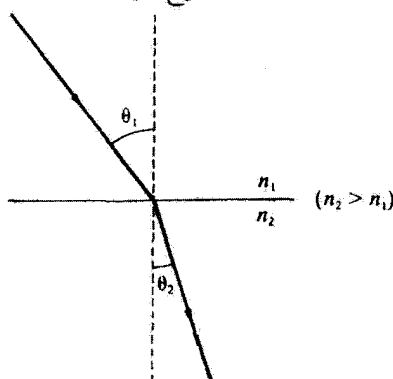
۴.۵ نشان دهید که ژئودزیک روی سطح یک استوانه دوار قائم یک مارپیچ است.

۵.۵ سطحی را در نظر بگیرید که از گردش خط واصل بین نقاط  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  حول محوری هم صفحه با آن دو نقطه، تولید شده باشد. معادله خط واصل این نقاط را بیابید به طوری که مساحت سطح تولید شده به وسیله گردش (یعنی، مساحت سطح دوار) کمینه باشد. با بهره‌گیری

از معادله (۳۹.۵) جواب آن معادله را به دست آورید.

۶.۵ مسئله کوتاهترین زمان (مثال ۲.۵) را بار دیگر بررسی کنید و نشان دهید که زمان لازم برای اینکه ذره‌ای (بدون اصطکاک) تا نقطه کمینه چرخزاد برسد، عبارت است از  $\pi\sqrt{a/g}$ ، که از نقطه آغاز حرکت مستقل است.

۷.۵ نوری را در نظر بگیرید که از محیطی با ضریب شکست  $n_1$  به داخل محیط دیگری با ضریب شکست  $n_2$  وارد می‌شود [شکل ۵ (الف)]. با بهره‌گیری از اصل فرما زمان را کمینه، و قانون شکست،  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ ، را استخراج کنید.



شکل ۵. الف

۸.۵ ابعاد متوازی‌السطوح با حجم بیشینه را بیابید که: الف) کره‌ای به شعاع  $R$  و ب) بیضیواری با نیم محوره‌های  $a, b$ ، و  $c$  آن را احاطه کرده باشد.

۹.۵ عبارتی متضمن تابع  $\phi(x_1, x_2, x_3)$  بیابید که دارای یک مقدار میانگین کمینه برای مربع گرادیان آن در حجم معین  $V$  از فضا باشد.

۱۰.۵ نسبت شعاع  $R$  به ارتفاع،  $H$ ، استوانه دوار قائمی با حجم  $V$  را بیابید که مساحت سطح،  $A$ ، را کمینه کند.

۱۱.۵ قرصی به شعاع  $R$  بدون لغزش در داخل سهمی  $y = ax^2$  می‌غلتد. معادله قیدی را بیابید. شرطی را بیان کنید که به قرص اجازه می‌دهد چنان بغلتد که با سهمی در یک و فقط یک نقطه، مستقل از موضع قرص، تماس داشته باشد.

## اصل هامیلتون؛ دینامیک لاگرانژی و هامیلتونی

### ۱.۶ مقدمه

تجربه نشان داده است که، هرگاه بتوان از آثار نسبیستی چشم پوشید، حرکت ذره در چارچوب مرجع لخت دقیقاً به وسیله معادله نیوتونی  $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$  توصیف می‌شود. اگر ضرورتی نداشته باشد که ذره به طریق پیچیده‌ای حرکت کند و اگر برای توصیف حرکت از مختصات قائم استفاده شود، در این صورت معمولاً معادلات حرکت نسبتاً ساده‌اند. اما اگر هر یک از این محدودیتها برداشته شود، ممکن است این معادلات خیلی پیچیده شوند و اقدام به حلشان نیز دشوار خواهد بود. مثلاً اگر ذره‌ای به حرکت روی سطح یک کره مقید شود، معادلات حرکت از تصویر معادله برداری نیوتونی روی آن سطح به دست می‌آیند. نمایش بردار شتاب در مختصات کروی یک عبارت دشوار است، به طوری که خواننده‌ای که مسئله ۱.۲۵ را حل کرده است به آسانی می‌تواند این ادعا را گواهی کند. علاوه، اگر ذره‌ای به حرکت روی سطح معینی مقید باشد، باید نیروهای معینی (به نام نیروهای قیدی) وجود داشته باشند که ذره را با سطح مشخص شده در تماس نگه دارند. در مورد ذره‌ای که روی یک سطح افقی هموار حرکت می‌کند، نیروی قیدی صرفاً عبارت است از  $\mathbf{F}_c = -mg$ . اما، اگر ذره، مثلاً مهره‌ای باشد که روی یک سیم خمیده به پایین می‌لغزد، نیروی قیدی می‌تواند خیلی پیچیده باشد. در واقع، در وضعیتهای خاص ممکن است دستیابی به عبارتهای صریح برای

نیروهای قیدی دشوار و حتی ناممکن باشد. اما برای حل یک مسئله با استفاده از شگرذ نیوتونی، باید تمام نیروها را بشناسیم، زیرا کمیت  $F$  که در معادله بنیادی ظاهر می‌شود عبارت است از کل نیروی وارد بر یک جسم.

برای غلبه بر برخی مشکلات عملی که بر سر راه به کار بردن معادلات نیوتون در مورد مسائلی خاص پیش می‌آید، می‌توان شگرذهای دیگری را ابداع کرد. تمامی این نوع رهیافتها اساساً استقرایی استنتاجی (مبتنی بر تجربه) هستند، زیرا از قبل می‌دانیم که باید نتیجه‌ای معادل با معادلات نیوتونی به دست آید. بدینسان برای انجام یک ساده‌سازی ضرورتی ندارد که نظریه نوینی را در مکانیک فرمولبندی کنیم — نظریه نیوتونی که کاملاً درست است — فقط روش دیگری را ابداع می‌کنیم تا به شیوه‌ای کلی با مسائل پیچیده مواجه شویم. اصل هامیلتون چنین روشی را در بر می‌گیرد، و معادلات حرکت حاصل از به‌کارگیری این اصل را معادلات لاگرانژ می‌گویند.

اگر قرار است معادلات لاگرانژ توصیف درخور و شایسته‌ای از دینامیک ذرات را تشکیل دهند، در آن صورت باید هم‌ارز معادلات نیوتون باشند. از طرف دیگر اصل هامیلتون را می‌توان در طیف وسیعی از پدیده‌های فیزیکی (بخصوص پدیده‌های در برگیرنده میدانها) که معمولاً با معادلات نیوتون ارتباط ندارند، به کار گرفت. مطمئناً، هر نتیجه‌ای که بشود از اصل هامیلتون به دست آورد، مانند معادلات نیوتون، ابتدا از طریق همبستگی یافته‌های تجربی حاصل شده است. اصل هامیلتون هیچ نظریه فیزیکی جدیدی برای ما به ارمغان نیاورده است. بلکه وحدت رضایتبخشی از چند نظریه منفرد را با یک اصل موضوع اساسی واحد، امکانپذیر کرده است. این عمل کار بیهوده‌ای در مورد ادراک امور نیست، زیرا نه‌تنها رسیدن به فرمولبندی ریاضی دقیق برای پدیده‌های مشاهده شده بلکه توصیف این آثار با صرفه‌جویی در اصول موضوع بنیادی و در وحدت یافته‌ترین شیوه ممکن، هدف نظریه فیزیکی است. در واقع، اصل هامیلتون یکی از ظریفترین و پرثمرترین اصول فیزیک نظری به حساب می‌آید.

نظر به طیف وسیع کاربردپذیری اصل هامیلتون (هرچند که این موضوع بعداً معلوم شده است)، غیرمنطقی نیست که تأکید کنیم این اصل نسبت به معادلات نیوتون «بنیادی» تر است. بنابراین ابتدا اصل هامیلتون را به‌عنوان اصل موضوع اختیار می‌کنیم؛ آنگاه معادلات لاگرانژ را به‌دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که این معادلات با معادلات نیوتون هم‌ارزند.

چون قبلاً درباره پدیده‌های اتلافی نسبتاً به تفصیل بحث کرده‌ایم (فصلهای ۲ و ۳)، از این پس توجه خود را روی سیستمهای پایستار متمرکز می‌کنیم. در نتیجه، درخصوص مجموعه عامتر معادلات لاگرانژ، که آثار نیروهای ناپایستار را نیز منظور می‌کند، بحثی به میان نمی‌آوریم. خواننده

علاقه‌مند خود می‌تواند به نوشتارهایی که در این مورد به تفصیل بحث کرده‌اند، مراجعه کند.<sup>۱</sup>

## ۲.۶ اصل هامیلتون

اصول مربوط به کمیت‌های کمین (یا حداقل) در فیزیک پیشینه‌ای طولانی و جالب دارند. جستجو در پی چنین اصولی متکی بر این عقیده است که وقتی یک فرایند فیزیکی اتفاق می‌افتد طبیعت همواره برخی کمیت‌های مهم را کمینه می‌کند. نخستین اصل مربوط به کمینه‌سازی در حوزه نور شناخت وضع شد. هرو اسکندرانی، در قرن دوم پیش از میلاد، دریافت که قانون حاکم بر بازتابش نور را می‌شود با بیان این نکته به‌دست آورد که پرتو نور، وقتی از طریق بازتابش از آینه تخت از یک نقطه به نقطه دیگر می‌رود، همواره کوتاهترین راه ممکن را می‌پیماید. به اتکای شکل هندسی ساده محقق می‌شود که این اصل کمترین در واقع به تساوی زوایای فرودی و بازتابش پرتو نوری می‌انجامد که از آینه تخت بازتابیده شده باشد. اما از اصل کوتاهترین مسیر هرو نمی‌توان به قانون صحیحی برای شکست دست یافت. در سال ۱۶۵۷، فرما با اصل قراردادن این موضوع که پرتو نور در یک محیط همواره برای عبور از نقطه‌ای به نقطه دیگر مسیر را در کمترین زمان می‌پیماید، اصل هرو را مجدداً فرمولبندی کرد.<sup>۲</sup> اصل کمترین زمان فرما بلافاصله، نه‌تنها قانون صحیح بازتاب، بلکه قانون شکست اسنل را هم نتیجه می‌دهد (مسئله ۷.۵).<sup>۳</sup>

پژوهش درخصوص اصول مربوط به کمترین کمیت‌ها ادامه یافت، و در نیمه دوم قرن هفدهم نیوتون، لایب‌نیتس، و برنولیا مقدمات حساب بردشی را پایه‌ریزی کردند و در همان هنگام مسائلی چون کمترین زمان (مثال ۲.۵) و شکل زنجیر آویخته حل شدند.

نخستین کاربرد یک اصل حداقل کلی در مکانیک در ۱۷۴۷ به‌وسیله مایرتوس تحقق یافت؛ وی اعلام کرد که حرکت دینامیکی با کمترین کنش صورت می‌پذیرد.<sup>۴</sup> اصل کمترین کنش مایرتوس بر زمینه‌های الهیات (از طریق «خرد خداوندی» کنش به حداقل می‌رسد) مبتنی بود، و درکی که او از «کنش» داشت تا حدودی مبهم بود. (به یاد بیاورید که کنش کمیتی است با ابعاد طول  $\times$  تکانه یا انرژی  $\times$  زمان.) بعدها لاگرانژ شالوده ریاضی مستحکمی برای این اصل ارائه داد (۱۷۶۰).

۱. مثلاً نگاه کنید به: Goldstein (Go80, Chapter 2), یا برای بحثی جامع‌تر رجوع کنید به: Whittaker (Wh 37, Chapter 8).

۲. بیردو فرما (۱۶۶۵-۱۶۰۱)، حقوقدان، زیان‌شناس، و ریاضیدان آماتور فرانسوی.

۳. در سال ۱۶۶۱، فرما قانون شکست را، که در سال ۱۶۲۱ به‌طور تجربی به‌وسیله ویلبرود اسنل (۱۶۲۶-۱۵۹۱)، اعجوبه ریاضی هلندی، کشف شده بود، به‌درستی استنتاج کرد.

۴. بیر لویی مورو دو مایرتوس (۱۷۵۹-۱۶۹۸)، ریاضیدان و ستاره‌شناس فرانسوی، نخستین استفاده‌ای که مایرتوس از اصل کمترین کنش به عمل آورد، این بود که قانون شکستی را که فرما استنتاج کرده بود (۱۷۴۴)، مجدداً بیان کرد.



هرچند که اصل کمترین کنش شکل مفیدی برای گذر از مکانیک کلاسیک به نور شناخت و مکانیک کوانتومی به شمار می‌آید، اما نسبت به اصل هامیلتون از کلیت کمتری برخوردار است و، در واقع، می‌تواند از اصل اخیر مشتق شود. ما در اینجا از بحث تفصیلی در این خصوص چشم می‌پوشیم.<sup>۱</sup> در سال ۱۸۲۸ گاوس به اتکاء اصل کمترین قید خود روشی برای مطالعه مکانیک پیش کشید؛ بعداً هرتز آن را اصلاح کرد و آن را در اصل کمترین انحنای خودش گنجانید. این اصول<sup>۲</sup> با اصل هامیلتون رابطه تنگاتنگی دارند و به مضمون فرمولبندی کلیتر هامیلتون چیزی اضافه نمی‌کنند؛ در اینجا به آن جهت از آنها یاد می‌کنیم که فقط بر توجه مداوم به اصول مربوط به کمیتهای کمینه در فیزیک تأکید کرده باشیم.

هامیلتون<sup>۳</sup> در دو مقاله خود که در ۱۸۳۴ و ۱۸۳۵ منتشر شدند، اصل دینامیکی را اعلام کرد که تمام مکانیک، و در واقع قسمت اعظم فیزیک کلاسیک، را می‌توان بر شالوده آن استوار کرد. بنابر اصل هامیلتون<sup>۴</sup>:

از تمام مسیره‌های ممکنه که سیستم دینامیکی می‌تواند در امتداد آنها در فاصله زمانی خاصی (سازگار با هر قیدی) از نقطه‌ای به نقطه دیگر برود، مسیر واقعی که طی می‌شود عبارت است از مسیری که انتگرال زمانی اختلاف بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل را کمینه کند.

اصل هامیلتون، به زبان حساب وردشی، چنین می‌شود

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (1.6)$$

که نماد  $\delta$  کوتاه‌نوشتی برای توصیف تغییر بحث‌شده در بخشهای ۳.۵ و ۷.۵ به‌شمار می‌آید. این

۱. مثلاً، نگاه کنید به:

Goldstein (Go80, pp. 365-371),

یا

Sommerfeld (So50, pp. 204-209).

۲. مثلاً، نگاه کنید به:

Lindsay and Margenau (Li36, pp. 112-120),

یا

Sommerfeld (So 50, pp. 210-214).

۳. سِر ویلیام روان هامیلتون (۱۸۰۵-۱۸۶۵)، ریاضیدان و ستاره‌شناس اسکاتلندی، و بعداً منجم سلطنتی ایرلند.

۴. معنی کلی «مسیر سیستم» در بخش ۳.۶ روشن می‌شود.

گذرارة وردشی این اصل را ایجاب می‌کند که  $T - U$  یک فرینه باشد، و نه الزاماً یک کمینه. اما تقریباً در تمام کاربردهای مهم دینامیک به شرط کمینه دست پیدا می‌کنیم. انرژی جنبشی ذره‌ای که در مختصات ثابت و قائمی بیان شده باشد تابعی است فقط از  $\dot{x}_i$ ، و اگر ذره در یک میدان نیروی پایستار حرکت کند، انرژی پتانسیل تابعی است فقط از  $x_i$

$$T = T(\dot{x}_i), \quad U = U(x_i)$$

اگر تفاضل این کمیتها را چنین بیان کنیم

$$L \equiv T - U = L(x_i, \dot{x}_i) \quad (۲.۶)$$

در این صورت معادله (۱.۶) خواهد شد

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0 \quad (۳.۶)$$

تابع  $L$  را که در این عبارت ظاهر می‌شود می‌توان با تابعی  $f$  انتگرال وردشی متناظر قرار داد (بخش ۵.۵)

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f\{y_i(x), y'_i(x); x\} dx$$

اگر این تبدیلات را انجام دهیم

$$x \rightarrow t$$

$$y_i(x) \rightarrow x_i(t)$$

$$y'_i(x) \rightarrow \dot{x}_i(t)$$

$$f\{y_i(x_i), y'_i(x); x\} \rightarrow L(x_i, \dot{x}_i)$$

بنابراین معادلات لاگرانژ-اوایلر [معادلات (۵۷.۵)] متناظر با معادله (۳.۶) عبارت‌اند از

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (۴.۶) \quad \text{معادلات حرکت لاگرانژ}$$

این معادلات، معادلات حرکت لاگرانژ برای ذره هستند، و کمیت  $L$  را تابع لاگرانژ یا لاگرانژی ذره می‌گویند.

به عنوان مثال، فرض کنید معادله حرکت لاگرانژ برای نوسانگر هماهنگ یک بعدی را به دست آورده باشیم. با توجه به عبارتهای معمول برای انرژیهای جنبشی و پتانسیل، داریم

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$$

نشان دادن این نتایج در معادله (۴.۶) عبارت زیر را به دست می دهد

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

که با معادله حرکتی که با بهره گیری از مکانیک نیوتونی به دست آمد، یکسان است. اگر شگرد لاگرانژی فقط بتواند نتایج ساده نظریه نیوتونی را نسخه برداری کند، نسبتاً پیچیده به نظر می رسد. اما، بیایید این روش را با در نظر گرفتن آونگ ساده (بخش ۱۳.۳) نمایش دهیم. با بهره گیری از معادلات (۱۶۱.۳) برای  $T$  و  $U$ ، تابع لاگرانژی به صورت زیر درمی آید

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

حالا  $\theta$  را چنان بررسی می کنیم که گویی مختصه ای قائم است و عملیات مشخص شده در معادله (۴.۶) را به کار می گیریم؛ خواهیم داشت

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

که باز هم با نتیجه نیوتونی [معادله (۱۵۶.۳)] یکسان است. این نتیجه ای قابل توجه است؛ این نتیجه از طریق محاسبه انرژیهای جنبشی و پتانسیل برحسب  $\theta$  به دست آمده است نه برحسب  $x$

و آنگاه از یک سلسله عملیات که برای مختصات قائم طراحی شده و نه برای مختصات زاویه‌ای بهره می‌گیریم. بنابراین مpton می‌شویم که معادلات لاگرانژ از شکل نمایش‌یافته در معادله (۴.۶) کلیتر است. این موضوع را در بخش ۴.۶ پی می‌گیریم.

مشخصه دیگر مهم روش به کار رفته در دو مثال ساده قبلی این است که در هیچ‌کجای محاسبات گزاره‌ای که با نیرو مرتبط باشد وارد نشد. معادلات حرکت فقط از طریق مشخص کردن خواص معینی که به ذره وابسته است (انرژیهای جنبشی و پتانسیل) به دست آمدند، و نیازی به تصریح این نکته که یک عامل خارجی بر ذره اثر می‌کند (نیرو) نبود. بنابراین، تا آنجا که بشود انرژی را مستقل از مفاهیم نیوتونی تعریف کرد، اصل هامیلتون این امکان را برای ما فراهم می‌آورد که معادلات حرکت هر جسم را به‌طور کامل و بدون توسل به نظریه نیوتونی محاسبه کنیم. در بخشهای ۵.۶ و ۷.۶ به این نکته مهم باز خواهیم گشت.

### ۳.۶ مختصات تعمیم‌یافته

ما اکنون درصددیم که از انعطاف‌پذیری در تعیین مختصاتی بهره‌گیریم که بنا بر دو مثال بخش قبلی در ذات معادلات لاگرانژ نهفته است.

یک سیستم مکانیکی کلی را در نظر می‌گیریم که از مجموعه  $n$  ذره نقطه‌ای مجزا تشکیل می‌شود، که بعضی از آنها ممکن است به یکدیگر پیوندند و اجسام صلبی را تشکیل دهند. درخصوص این سیستمهای ذرات در فصل ۸ و درباره اجسام صلب در فصل ۱۰ بحث خواهیم کرد. برای تعیین حالت این نوع سیستم در یک زمان معین، لازم است که از  $n$  بردار شعاعی بهره‌گیریم. از آنجا که هر بردار شعاعی از یک سه‌تایی از اعداد (مثلاً، مختصات قائم) تشکیل می‌شود، باید  $3n$  کمیت مشخص شود تا موضع تمام ذرات را توصیف کند. اگر معادلات قیدی داشته باشیم که برخی از این مختصات را به برخی دیگر مرتبط کند (مثلاً، هرگاه بعضی از ذرات به هم پیوندند و اجسام صلبی را تشکیل دهند یا اگر حرکت مقید به مسیری یا سطح خاصی باشد، چنین موردی پیش می‌آید)، در این صورت همه  $3n$  مختصه مستقل نیستند. در واقع، اگر  $m$  معادله قیدی داشته باشیم، در این صورت  $3n - m$  مختصه مستقل اند، و می‌گوییم سیستم دارای  $3n - m$  درجه آزادی است. توجه به این نکته مهم است که اگر در حالت خاص  $s = 3n - m$  مختصه مورد نیاز باشد، لازم نیست که  $s$  مختصه قائم دکارتی یا  $s$  مختصه خمیده خط (کروی، استوانه‌ای، و مانند آنها) را انتخاب کنیم. می‌توانیم هر  $s$  پارامتر مستقلی که به‌طور کامل حالت سیستم را مشخص می‌کنند اختیار کنیم. لازم نیست که این  $s$  کمیت حتی ابعاد طول را داشته باشند. بسته به مسئله تحت بررسی، انتخاب برخی

پارامترها با ابعاد انرژی، بعضی با ابعاد<sup>۲</sup> (طول)، بعضی که بدون بعدند، و به همین ترتیب تا آخر، ممکن است مناسبتر باشد. در مثال ۵.۵، قرصی غلتان بر سطح شیبدار را برحسب یک مختصه طول و مختصه‌ای که زاویه بود، توصیف کردیم. هر مجموعه از کمیت‌هایی را که حالت یک سیستم را به طور کامل مشخص می‌کند، مختصات تعمیم یافته می‌نامیم. مختصات تعمیم یافته را معمولاً به صورت  $q_1, q_2, \dots$  یا فقط به صورت  $q_j$  می‌نویسند. مجموعه‌ای از مختصات تعمیم یافته مستقل که تعداد آنها برابر تعداد درجه آزادی سیستم،  $s$ ، باشد و قیدهایی هم آن را محدود نکند، مجموعه مختصات تعمیم یافته مناسب نامیده می‌شود. در موارد معینی بهتر است که از مختصات تعمیم یافته‌ای بهره‌گیریم که تعداد آنها از تعداد درجات آزادی بیشتر باشد و روابط قیدی را صراحتاً با استفاده از ضرایب نامعین لاگرانژ به حساب آوریم. مثلاً اگر بخواهیم نیروهای قیدی را محاسبه کنیم، این مورد پیش می‌آید (مثال ۷.۶). انتخاب یک مجموعه مختصات تعمیم یافته برای توصیف یک سیستم منحصر به فرد نیست؛ به طور کلی چند مجموعه از کمیت‌ها (در واقع تعدادی نامتناهی!) وجود دارند که حالت سیستم معینی را به طور کامل مشخص می‌کنند. مثلاً در مسئله قرص غلتان بر سطح شیبدار می‌توانیم ارتفاع مرکز جرم قرص در بالای یک تراز مرجع و مسافتی که نقطه‌ای بر طوقه قرص از آغاز حرکت پیموده است، به عنوان مختصات انتخاب کنیم. آزمون نهایی «مناسب بودن» مجموعه‌ای خاص از مختصات تعمیم یافته عبارت است از اینکه آیا معادلات حرکت حاصل به اندازه کافی ساده‌اند که تعبیر سراسری را امکان‌پذیر کنند یا خیر. متأسفانه، نمی‌توانیم هیچگونه قاعده کلی برای گزینش «مناسبترین» مجموعه مختصات تعمیم یافته در مورد یک مسئله مشخص، بیان کنیم. باید در تجربه به چنین مهارتی دست یافت. علاوه بر مختصات تعمیم یافته، ممکن است مجموعه‌ای از کمیت‌ها که مشتق‌های زمانی  $\dot{q}_j$  هستند، یعنی  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ ، یا به بیان ساده  $\dot{q}_j$ ، را تعریف کنیم. در شباهت با اصطلاحات مربوط به مختصات قائم،  $\dot{q}_j$  را سرعت‌های تعمیم یافته می‌نامیم.

اگر این امکان را که معادلات پیونددهنده<sup>۱</sup>  $x_{\alpha,i}$  و  $q_j$  صریحاً شامل زمان‌اند مجاز بدانیم، آنگاه مجموعه معادلات تبدیل به صورت زیر می‌باشند<sup>۱</sup>

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad \begin{cases} \alpha = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$= x_{\alpha,i}(q_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (5.6)$$

۱. در این فصل می‌کشیم با تخصیص شاخص پایین  $i$  برای نمایاندن محورهای قائم، نمادگذاری را ساده کنیم؛ همواره داریم:  $i = 1, 2, 3$ .

به طور کلی، مؤلفه های قائم سرعتها به مختصات تعمیم یافته، سرعتهای تعمیم یافته، و زمان وابسته اند:

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \dot{x}_{\alpha,i}(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (۹.۶)$$

همچنین می توانیم تبدیلهای وارون را این طور بنویسیم

$$q_j = q_j(x_{\alpha,i}, t) \quad (۷.۶)$$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) \quad (۸.۶)$$

بعلاوه،  $m = 3n - s$  معادله قیدی به شکل زیر هم وجود دارد

$$f_k = f_k(x_{\alpha,i}, t), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (۹.۶)$$

### مثال ۱.۶

مجموعه مختصات تعمیم یافته مناسبی را برای ذره ای نقطه ای بیابید که روی سطح نیم کره ای به شعاع  $R$  و به مرکز مبدأ مختصات، حرکت می کند.

حل: از آنجا که حرکت همواره روی سطح صورت می گیرد، داریم

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \quad z \geq 0 \quad (۱۰.۶)$$

به عنوان مختصات تعمیم یافته، کسینوس زوایای بین محورهای  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  با خط واصل میان ذر و مبدأ را در نظر می گیریم. بنابراین

$$q_1 = \frac{x}{R}, \quad q_2 = \frac{y}{R}, \quad q_3 = \frac{z}{R} \quad (۱۱.۶)$$

اما مجموع مربعات کسینوسهای هادی هر خط برابر است با واحد. بدینسان

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (۱۲.۶)$$

این مجموعه  $q_j$  ها یک مجموعه مناسب از مختصات تعمیم یافته را تشکیل نمی دهد، چرا که می توان  $q_3$  را به صورت تابعی از  $q_1$  و  $q_2$  نوشت

$$q_3 = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2} \quad (۱۳.۶)$$

اما، می‌توان  $q_1 = x/R$  و  $q_2 = y/R$  را به عنوان مختصات تعمیم یافته مناسب انتخاب کرد، و این کمیتهای، همراه با معادله قیدی [معادله (۱۳.۶)]

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (۱۴.۶)$$

برای آنکه موضع ذره را به طور منحصر به فردی مشخص کنند، کافی‌اند. این نتیجه‌ای روشن است، زیرا تنها دو مختصه (مثلاً طول و عرض) لازم‌اند تا نقطه‌ای روی سطح کره را مشخص کنند. اما این مثال نمایشگر این نکته است که معادلات قیدی را همواره می‌توان به کار برد تا مجموعه مختصات آزمایشی را به مجموعه مختصات تعمیم یافته مناسب تبدیل کرد. ■

حالت سیستمی متشکل از  $n$  ذره و دستخوش  $m$  قید که برخی از  $3n$  مختصه قائم را به هم پیوند می‌دهد به کمک  $s = 3n - m$  مختصه تعمیم یافته به طور کامل مشخص می‌شود. از این رو می‌توانیم حالت چنین سیستمی را با نقطه‌ای در یک فضای  $s$  بعدی به نام فضای پیکربندی نمایش دهیم. هر بعد این فضا با یکی از مختصات  $q_j$  متناظر است. می‌توانیم پیشینه زمانی سیستم را به وسیله یک منحنی در فضای پیکربندی نشان دهیم، که هر نقطه آن پیکربندی سیستم در یک لحظه خاص را مشخص می‌کند. از هر یک از چنین نقاطی بینهایت منحنی می‌گذرد که حرکت‌های ممکن این سیستم را نشان می‌دهد؛ هر منحنی با مجموعه خاصی از شرایط اولیه متناظر است. بنابراین می‌توان از «مسیر» یک سیستم در حالتی صحبت کرد که در فضای پیکربندی «حرکت» می‌کند. اما باید دقت کنیم که این اصطلاح را با اصطلاحی که در مورد حرکت ذره‌ای در امتداد مسیری در فضای سه بعدی معمولی به کار رفت اشتباه نگیریم.

همچنین باید توجه داشته باشیم که مسیر دینامیکی در یک فضای پیکربندی متشکل از مختصات تعمیم یافته مناسب خودبه‌خود با قیدهایی که بر سیستم اعمال می‌شوند سازگار است، زیرا این مختصات فقط برای تطابق با حرکت‌های قابل تحقق سیستم انتخاب می‌شوند.

#### ۴.۶ معادلات حرکت لاگرانژ در مختصات تعمیم یافته

نظر به تعریفهایی که در بخشهای پیشین ارائه کردیم، اکنون می‌توانیم اصل هامیلتون را مجدداً به قرار زیر بیان کنیم:

از تمام مسیرهای ممکن که یک سیستم دینامیکی می‌تواند در فضای پیکربندی در فاصله زمانی مشخصی در امتداد آنها از یک نقطه به نقطه دیگر حرکت کند، مسیری که واقعاً پیموده

می شود عبارت است از مسیری که انتگرال زمانی تابع لاگرانژی سیستم را کمینه می کند.

برای اینکه شکل وردشی اصل هامیلتون را در مختصات تعمیم یافته بیان کنیم، از یک خاصیت مهم لاگرانژی استفاده می کنیم که تاکنون بر آن تأکیدی نکرده ایم. لاگرانژی مربوط به هر سیستم بنا بر تعریف عبارت است از اختلاف بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل. اما انرژی یک کمیت اسکالر است و از این رو لاگرانژی نیز یک تابع اسکالر است. لذا لاگرانژی باید نسبت به تبدیلات مختصات ناورد باشد. ولی، بعضی تبدیلات که لاگرانژی را تغییر می دهند، اما معادلات حرکت را بدون تغییر باقی می گذارند، مجاز هستند. مثلاً اگر به جای  $L$  کمیت  $L + d/dt[f(q_i, t)]$  را بنشانیم، که در آن تابع  $f(q_i, t)$  تابعی است با مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته، معادلات حرکت بدون تغییر باقی می ماند. مادامی که لاگرانژی را به صورت اختلاف بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل تعریف می کنیم، می توانیم از مختصات تعمیم یافته مختلفی استفاده کنیم. (اما، لاگرانژی نسبت به یک ثابت جمع پذیر در انرژی پتانسیل  $U$  نامعین است.) بنابراین اهمیتی ندارد که لاگرانژی را بر حسب  $x_{\alpha,i}$  و  $\dot{x}_{\alpha,i}$  بیان کنیم یا بر حسب  $q_j$  و  $\dot{q}_j$

$$\begin{aligned} L &= T(\dot{x}_{\alpha,i}) - U(x_{\alpha,i}) \\ &= T(q_j, \dot{q}_j, t) - U(q_j, t) \end{aligned} \quad (15.6)$$

یعنی،

$$\begin{aligned} L &= L(q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s; t) \\ &= L(q_j, \dot{q}_j, t) \end{aligned} \quad (16.6)$$

بدین ترتیب اصل هامیلتون به صورت زیر در می آید

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0 \quad \text{اصل هامیلتون} \quad (17.6)$$

اگر به تعریف این کمیتها در بخش ۵.۵ مراجعه کنیم و همانندسازیهایی زیر را به کار بندیم

$$x \rightarrow t$$

$$y_i(x) \rightarrow q_j(t)$$

$$y'_i(x) \rightarrow \dot{q}_j(t)$$

$$f\{y_i, y'_i, x\} \rightarrow L(q_j, \dot{q}_j, t)$$



در این صورت معادلات اولر (معادلات (۵۷.۵)) متناظر با مسئله وردشی بیان شده در معادله (۱۷.۶) به این قرار می شود

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (18.6)$$

این عبارتها معادلات حرکت اولر-لاگرانژ برای سیستم به شمار می آید (که معمولاً آنها را معادلات لاگرانژ می نامند<sup>۱</sup>). تعداد این معادلات  $s$  تاست و همراه با  $m$  معادله قیدی و شرایط اولیه ای که اعمال می شوند، حرکت سیستم را به طور کامل توصیف می کنند.<sup>۲</sup>

بی بردن به این موضوع که اعتبار معادلات لاگرانژ مستلزم برآورده شدن شرط زیر است اهمیت دارد:

۱. نیروهای وارد بر سیستم (به غیر از نیروهای قیدی) باید از یک پتانسیل (یا چند پتانسیل) حاصل شوند.

۲. معادلات قیدی باید رابطه هایی باشند که مختصات ذرات را به هم دیگر ارتباط می دهند و ممکن است توابعی از زمان باشند یعنی، باید روابطی قیدی به شکل معادله (۹.۶) داشته باشیم.

اگر بشود قیدها را مانند شرط ۲ بیان کرد، آنها را قیدهای هولونوم (وابسته به تمامیت) می گویند. اگر این معادلات صریحاً شامل زمان نباشند، قیدها را ثابت یا اسکالرونوم می خوانند؛ قیدهای متحرک رنومومی (وابسته به جریان) هستند.

ما در اینجا فقط حرکت سیستمهایی را از نظر می گذرانیم که در معرض نیروهای پایستارند. چنین نیروهایی را همواره می توان از توابع پتانسیل استخراج کرد، بنابراین شرط ۱ برآورده می شود. این شرط محدودیتی لازم برای اصل هامیلتون یا معادلات لاگرانژ به شمار نمی آید؛ این نظریه را می توان به آسانی بسط داد تا نیروهای ناپایستار را هم در برگیرد. به گونه ای مشابه، می توانیم اصل هامیلتون را فرمولبندی کنیم تا برخی از قیدهای ناهولونوم را در برگیرد، ولی بحث ما در اینجا منحصر است به سیستمهای هولونوم.

حالا می خواهیم با استفاده از معادلات لاگرانژ چند مثال را بررسی کنیم. تجربه بهترین راه

۱. این معادلات اولین بار به وسیله لاگرانژ برای یک سیستم مکانیکی (البته، هر چند که نه با بهره گیری از اصل هامیلتون) به دست آمد و در سال ۱۷۸۸ در رساله مشهورش، مکانیک تحلیلی، ارائه شد. لاگرانژ در این اثر به یادماندنی، که تمام فازهای مکانیک (استاتیک، دینامیک، هیدروستاتیک، و هیدرودینامیک) را در بر می گیرد، موضوع را بر پایه ریاضی وحدت یافته و مستحکمی بنا نهاد. این رساله بیشتر ریاضی است تا فیزیکی؛ لاگرانژ از این نکته که در تمامی اثر حتی یک نمودار وجود ندارد، بسیار به خود می بالید.

۲. از آنجا که معادله دیفرانسیل مرتبه دوم داریم، برای تعیین حرکت به طور منحصر به فرد، باید ۲s شرط اولیه اعمال شود.

تعیین مجموعه مختصات تعمیم یافته، شناخت قیدها، و برقراری لاگرانژی به شمار می آید. همین که این کار انجام شد، بقیه مسئله عمدتاً عملیات ریاضی است.

### مثال ۲.۶

حرکت پرتابه تحت تأثیر گرانی در دو بعد را، که در مثال ۶.۲ مورد بحث قرار گرفت، در نظر بگیرید. معادلات حرکت را هم در مختصات دکارتی و هم قطبی بیابید.

حل: با استفاده از شکل ۷.۲ سیستم را توصیف می کنیم. در مختصات قائم (دکارتی) از  $x$  (افقی) و  $y$  (قائم) بهره می گیریم. در مختصات قطبی از  $r$  (در راستای شعاعی) و  $\theta$  (زاویه فراز نسبت به افق) استفاده می کنیم. اولاً، در مختصات قائم داریم

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \\ V &= mgy \end{aligned} \right\} \quad (۱۹.۶)$$

که در آن به ازای  $y = 0$ ، داریم  $V = 0$ .

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy \quad (۲۰.۶)$$

با بهره گیری از معادله (۱۸.۶) معادلات حرکت را می یابیم

$x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ 0 - \frac{d}{dt} m\dot{x} &= 0 \\ \ddot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (۲۱.۶)$$

$y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= 0 \\ -mg - \frac{d}{dt} (m\dot{y}) &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned} \quad (۲۲.۶)$$

با سودجستن از شرایط اولیه، می توان از معادلات (۲۱.۶) و (۲۲.۶) انتگرال گرفت تا معادلات حرکت مناسب تعیین شوند.  
در مختصات قطبی داریم

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2$$

$$V = mgr \sin \theta$$

که در آن به ازای  $\theta = 0$ ، داریم  $V = 0$ .

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - mgr \sin \theta \quad (23.6)$$

$r$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= 0 \\ mr \dot{\theta}^2 - mg \sin \theta - \frac{d}{dt}(m \dot{r}) &= 0 \\ r \dot{\theta}^2 - g \sin \theta - \ddot{r} &= 0 \end{aligned} \quad (24.6)$$

$\theta$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 0 \\ -mgr \cos \theta - \frac{d}{dt}(mr^2 \dot{\theta}) &= 0 \\ -gr \cos \theta - 2r \dot{r} \dot{\theta} - r^2 \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (25.6)$$

معادلات حرکت بیان شده به وسیله معادلات (۲۱.۶) و (۲۲.۶) آشکارا از معادلات حرکت بیان شده به وسیله معادلات (۲۴.۶) و (۲۵.۶) ساده ترند. بنابراین مختصات دکارتی را به عنوان مختصات تعمیم یافته برای حل این مسئله برخواهیم گزید. کلید تشخیص این مطلب این بود که انرژی پتانسیل سیستم فقط به مختصه  $y$  بستگی داشت. در مختصات قطبی، انرژی پتانسیل هم به  $r$  وابسته بود و هم به  $\theta$ .

## مثال ۳.۶

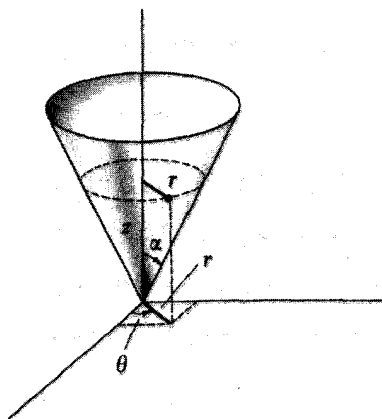
ذره‌ای به جرم  $m$  مقید است که روی سطح داخلی مخروط صافی با نیم‌زاویه  $\alpha$  حرکت کند (شکل ۱.۶). این ذره تحت تأثیر نیروی گرانش قرار دارد. مجموعه‌ای از مختصات تعمیم‌یافته و قیدها را تعیین کنید. معادلات حرکت لاگرانژ، معادله (۱۸.۶)، را بیابید.

حل: محور مخروط را منطبق بر محور  $z$  می‌گیریم و فرض می‌کنیم که رأس مخروط در مبدأ مختصات قرار گرفته باشد. از آنجا که این مسئله دارای تقارن استوانه‌ای است،  $r$ ،  $\theta$ ، و  $z$  را به‌عنوان مختصات تعمیم‌یافته انتخاب می‌کنیم. اما، معادله قید را به‌صورت زیر داریم

$$z = r \cot \alpha \quad (۲۶.۶)$$

از این رو فقط دو درجه آزادی، و بنابراین فقط دو مختصه تعمیم‌یافته مناسب، برای سیستم وجود دارد. می‌توان از معادله (۲۶.۶) برای حذف مختصه  $z$  یا بهره‌گرفت؛ حذف  $z$  را انتخاب می‌کنیم. در این صورت مجذور سرعت عبارت است از

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \cot^2 \alpha \\ &= \dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (۲۷.۶)$$



شکل ۱.۶

(اگر به ازای  $z = 0$ ،  $U$  را برابر صفر انتخاب کنیم) انرژی پتانسیل عبارت است از

$$U = mgz = mgr \cot \alpha$$

از این رو لاگرانژی چنین است

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \cot \alpha \quad (28.6)$$

ابتدا متوجه می‌شویم که  $L$  صریحاً شامل  $\theta$  نیست. بنابراین  $\partial L / \partial \theta = 0$ ، و معادله لاگرانژ مربوط به مختصه  $\theta$  عبارت است از

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

از این رو

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = \text{const.} \quad (29.6)$$

اما  $mr^2 \dot{\theta} = mr^2 \omega$  همان تکانه زاویه‌ای حول محور  $z$  است. بنابراین معادله (۲۹.۶) پایستگی تکانه زاویه‌ای حول محور تقارن سیستم را بیان می‌کند. معادله لاگرانژ مربوط به  $r$  به این قرار است

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \quad (30.6)$$

پس از محاسبه مشتقها، داریم

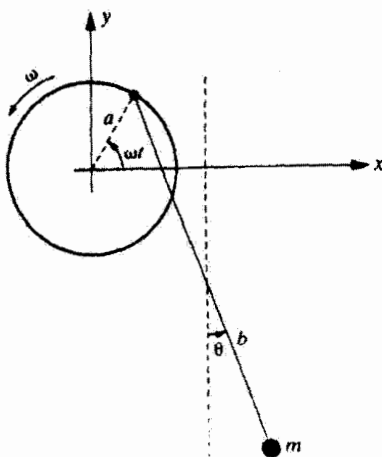
$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad (31.6)$$

که عبارت است از معادله حرکت مربوط به مختصه  $r$ .

در بخش ۱۰.۷ بار دیگر به این مثال باز خواهیم گشت و حرکت را با تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم.

## مثال ۴.۶

نقطه آویز آونگ ساده‌ای به طول  $b$  روی طوقه بی‌جرمی به شعاع  $a$  حرکت می‌کند؛ این طوقه خود با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega$  می‌چرخد. عبارت مربوط به مؤلفه‌های دکارتی سرعت و شتاب جرم  $m$  را به دست آورید. شتاب زاویه‌ای مربوط به زاویه  $\theta$ ، نموده شده در شکل ۲.۶، را به دست آورید.



شکل ۲.۶

حل: مبدأ دستگاه مختصات را در مرکز طوقه چرخان اختیار می‌کنیم. مؤلفه‌های دکارتی جرم  $m$  عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t + b \sin \theta \\ y &= a \sin \omega t - b \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (۳۲.۶)$$

سرعتها عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega \sin \omega t + b\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} &= a\omega \cos \omega t + b\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (۳۳.۶)$$

با یک‌بار دیگر مشتق‌گیری نسبت به زمان، شتاب به دست می‌آید

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -a\omega^2 \cos \omega t + b(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ \ddot{y} &= -a\omega^2 \sin \omega t + b(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (۳۴.۶)$$

حال روشن است که تنها مختصهٔ تعمیم‌یافته  $\theta$  است. انرژی‌های جنبشی و پتانسیل عبارت‌اند از

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$U = mgy$$

که در آن به‌ازای  $y = 0$  داریم  $U = 0$ . لاگرانژی عبارت است از

$$L = T - U = \frac{m}{2} [a^2 \omega^2 + b^2 \dot{\theta}^2 + 2b\dot{\theta}a\omega \sin(\theta - \omega t)] - mg(a \sin \omega t - b \cos \theta) \quad (۳۵.۶)$$

مشتق‌های مربوط به معادله حرکت لاگرانژ نسبت به  $\theta$  عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb^2 \ddot{\theta} + mb\omega (\dot{\theta} - \omega) \cos(\theta - \omega t) \quad (۳۶.۶)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mb\dot{\theta}a\omega \cos(\theta - \omega t) - mgb \sin \theta \quad (۳۷.۶)$$

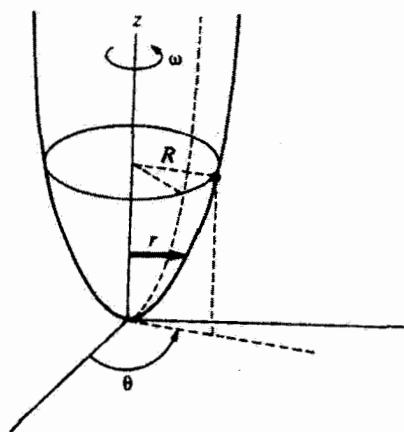
که بعد از حل این معادله برحسب  $\ddot{\theta}$  به معادله حرکت می‌انجامد

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2 a}{b} \cos(\theta - \omega t) - \frac{g}{b} \sin \theta \quad (۳۸.۶)$$

توجه کنید که این نتیجه به‌ازای  $\omega = 0$ ، به معادله حرکت آشنای مربوط آونگ ساده منجر می‌شود. ■

### مثال ۵.۶

مهره‌ای در امتداد سیم صافی که به شکل سهمی  $z = cr^2$  خم شده است، می‌لغزد (شکل ۳.۶). هرگاه سیم حول محور تقارن قائمش با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  بچرخد، مهره در دایره‌ای به شعاع  $R$  می‌چرخد. مقدار  $c$  را بیابید.



شکل ۳.۶

حل: از آنجا که مسئله تقارن استوانه‌ای دارد،  $r$ ،  $\theta$ ، و  $z$  را به‌عنوان مختصات تعمیم‌یافته اختیار می‌کنیم. انرژی جنبشی مهره عبارت است از

$$T = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + (r\dot{\theta})^2] \quad (۳۹.۶)$$

اگر به‌ازای  $z = 0$ ،  $U$  را برابر صفر انتخاب کنیم، جمله انرژی پتانسیل عبارت است از

$$U = mgz \quad (۴۰.۶)$$

اما  $r$ ،  $z$ ، و  $\theta$  مستقل نیستند. معادله قیدی مربوط به سهمی عبارت است از

$$z = cr^2 \quad (۴۱.۶)$$

$$\dot{z} = 2cr\dot{r} \quad (۴۲.۶)$$

وابستگی زمانی صریح گردش زاویه‌ای را نیز داریم

$$\theta = \omega t$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (۴۳.۶)$$

حالا می‌توانیم لاگرانژی را به‌طریقی بنویسیم که فقط به  $r$  وابسته باشد، زیرا هیچگونه وابستگی مستقیمی به  $\theta$  وجود ندارد.

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + 4c^2 r^2 \dot{r}^2 + r^2 \omega^2) - mgr^2 \end{aligned} \quad (۴۴.۶)$$

در صورت مسئله گفته شد که مهره در دایره‌ای به شعاع  $R$  حرکت می‌کند. خواننده ممکن است در این مرحله وسوسه شود که بپذیرد  $r = R = \text{const}$  و  $\dot{r} = 0$ . این جایگذاری در لاگرانژی در این مرحله اشتباه است. اول باید معادله حرکت را به‌ازای متغیر  $r$  پیدا کنیم و آنگاه  $r = R$  را به‌عنوان شرط مربوط به یک حرکت خاص در نظر بگیریم. از اینجا مقدار خاص  $c$  را که مورد نیاز  $r = R$  است، می‌یابیم.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m}{2} (2\dot{r} + 4c^2 r^2 \dot{r}) \quad (۴۵.۶)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m}{2} (2\ddot{r} + 16c^2 r\dot{r}^2 + 4c^2 r^2 \ddot{r}) \quad (۴۶.۶)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m(4c^2 r\dot{r}^2 + r\omega^2 - 2gr) \quad (۴۷.۶)$$



معادله حرکت لاگرانژ چنین می شود

$$\ddot{r}(1 + 4c^2 r^2) + \dot{r}^2(4c^2 r) + r(2gc - \omega^2) = 0 \quad (48.6)$$

که نتیجه ای پیچیده است. اما، اگر مهره در  $r = R = \text{const.}$  بچرخد، در این صورت  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$  و معادله (48.6) به صورت زیر درمی آید

$$R(2gc - \omega^2) = 0 \quad (49.6)$$

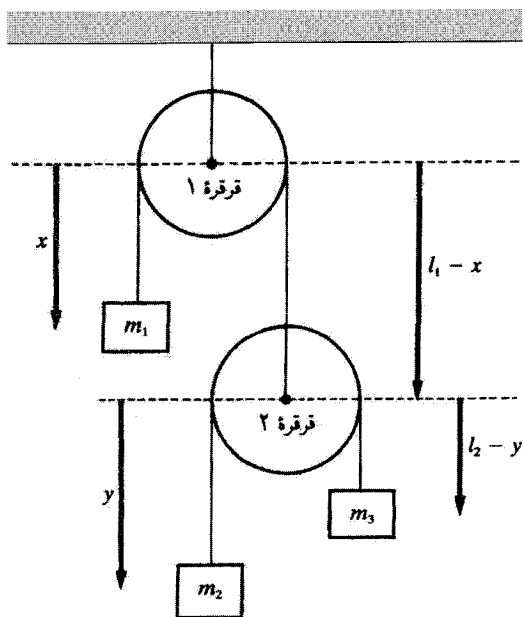
و

$$c = \frac{\omega^2}{2g} \quad (50.6)$$

همان نتیجه ای است که می خواستیم.

### مثال ۶.۶

دستگاه دو قرقره ای، مطابق شکل ۴.۶ را در نظر بگیرید. با استفاده از مختصات نمایش یافته،



شکل ۴.۶

معادلات حرکت را تعیین کنید.

حل: فرض کنید قرقره‌ها بی‌جرم باشند، و فرض کنید  $l_1$  و  $l_2$  طول طناب‌هایی باشد که آزادانه از هر یک از دو قرقره آویخته شده‌اند. فواصل  $x$  و  $y$  از مرکز دو قرقره اندازه گرفته می‌شوند

$m_1$ :

$$v_1 = \dot{x} \quad (51.6)$$

$m_2$ :

$$v_2 = \frac{d}{dt}(l_1 - x + y) = -\dot{x} + \dot{y} \quad (52.6)$$

$m_3$ :

$$v_3 = \frac{d}{dt}(l_1 - x + l_2 - y) = -\dot{x} - \dot{y} \quad (53.6)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{y})^2 \quad (54.6) \end{aligned}$$

انرژی پتانسیل را در  $x = 0$  می‌گیریم؛  $U = 0$ .

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_3 \\ &= -m_1gx - m_2g(l_1 - x + y) - m_3g(l_1 - x + l_2 - y) \quad (55.6) \end{aligned}$$

چون  $T$  و  $U$  تعیین شده‌اند، معادلات حرکت را می‌توان با استفاده از معادله (۱۸.۶) به‌دست آورد. نتایج از این قرارند

$$m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3(\ddot{x} + \ddot{y}) = (m_1 - m_2 - m_3)g \quad (56.6)$$

$$-m_2(\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3(\ddot{x} + \ddot{y}) = (m_2 - m_3)g \quad (57.6)$$

معادلات (۵۶.۵) و (۵۷.۵) را می‌شود برحسب  $\ddot{x}$  و  $\ddot{y}$  حل کرد. ■

مثالهای ۲.۶ تا ۶.۶ جملگی حاکی از آسانی به کارگیری معادلات لاگرانژند. شاید به طور غیرمنصفانه گفته شده است که روشهای لاگرانژ صرفاً دستور کاری است که باید از آن پیروی کرد. دلیل پیدایش چنین نظری این است که با استفاده از این روشها رد «فیزیک» مسئله را گم می‌کنیم. برعکس، روشهای لاگرانژی بسیار قدرتمندند و امکان حل مسائلی را برای ما فراهم می‌آورند که در غیر این صورت حل آنها با بهره‌گیری از روشهای نیوتونی به مشکلات بسیار جدی می‌انجامد. شاید بتوان مسائل ساده را با استفاده از روشهای نیوتونی حل کرد، اما شگرد لاگرانژی را می‌شود در گستره وسیعی از موقعیتهای پیچیده فیزیکی (از جمله وضعیتهایی که در مکانیک کوانتومی پیش می‌آیند)<sup>۱</sup> به کار بست.

### ۵.۶ معادلات لاگرانژ با ضرایب نامعین

قیدهایی را که بتوان به عنوان روابط جبری مابین مختصه‌ها بیان کرد، قیدهای هولونوم هستند. اگر در مورد سیستمی فقط این نوع قیدها اعمال شوند، همواره می‌توانیم مجموعه مختصات تعمیم‌یافته مناسبی را بیابیم که معادلات حرکت برحسب آنها هیچ ارتباط صریحی با قیدها نداشته باشند. هرگونه قیدی که لازم باشد برحسب سرعت ذرات موجود در سیستم بیان شود، به صورت زیر است

$$f(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) = 0 \quad (58.6)$$

و قیدهای ناهولونوم را تشکیل می‌دهند مگر آنکه بتوان از این معادلات انتگرال گرفت تا روابط بین مختصه‌ها حاصل شوند.<sup>۲</sup>

رابطه‌ای قیدی به شکل زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_i A_i \dot{x}_i + B = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (59.6)$$

به طور کلی، این معادله غیرقابل انتگرالگیری، و بنابراین قید ناهولونوم است. اما اگر  $A_i$  و  $B$  به این شکل باشند

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f = f(x_i, t) \quad (60.6)$$

1. Feynman and Hibbs (Fe 65).

۲. گاهی چنین قیدهایی را «نیمه هولونوم» می‌گویند.

در این صورت معادله (۵۹.۶) را می‌توان این‌طور نوشت

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (۶۱.۶)$$

اما این کمیت عبارت است از

$$\frac{df}{dt} = 0$$

که می‌توان از آن انتگرال گرفت و رسید به

$$f(x_i, t) - \text{const.} = 0 \quad (۶۲.۶)$$

بنابراین قید عملاً هولونوم است.

با توجه به بحث قبلی، نتیجه می‌گیریم که قیدهایی را که بشود به شکل دیفرانسیلی زیر، بیان

کرد

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0 \quad (۶۳.۶)$$

با روابطی به صورت معادله (۹.۶) هم‌ارزند.

اگر روابط قیدی برای یک مسئله به شکل دیفرانسیلی داده شود و نه به صورت عبارتهای جبری، می‌توان آنها را مستقیماً با استفاده از ضرایب نامعین لاگرانژ در معادلات لاگرانژ ادغام کرد (بخش ۶.۵) بدون آنکه در ابتدای امر اقدام به انتگرال‌گیری کنیم؛ یعنی، برای قیدهایی که می‌توان آنها را به صورت معادله (۷۱.۵) بیان کرد

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j = 0 \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, s \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (۶۴.۶)$$

معادلات لاگرانژ [معادله (۶۹.۵)] عبارت‌اند از

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0} \quad (۶۵.۶)$$

درواقع، چون فرایند وردشی که در اصل هامیلتون گنجدیده است، در نقاط پایانی زمان را ثابت نگه می‌دارد، می‌توانیم به معادله (۶۵.۶) جمله  $(\partial f_k / \partial t) dt$ ، را بیفزاییم بدون اینکه بر معادلات حرکت تأثیری داشته باشد. از این رو قیدهایی که به وسیله معادله (۶۳.۶) بیان شده‌اند نیز به معادلات

لاگرانژی می‌انجامند که در معادله (۶۵.۶) داده شده‌اند.

مزیت عمده فرمولبندی لاگرانژی مکانیک این است که گنجاندن صریح نیروهای قیدی در آنها ضروری نیست؛ یعنی، تأکید بر دینامیک سیستم است تا محاسبه نیروهای وارد بر هر یک از مؤلفه‌های سیستم. اما، در مواردی شاید شناسایی نیروهای قیدی مورد نظر باشد. بنابراین لازم است خاطر نشان کنیم که در معادلات لاگرانژی که به صورت معادله (۶۵.۶) بیان می‌شوند، ضرایب نامعین  $\lambda_E(t)$  دقیقاً همین نیروهای قیدی‌اند.<sup>۱</sup>

### مثال ۷.۶

بار دیگر مسئله قرص غلطان روی سطح شیبدار (مثال ۵.۵ و شکل ۶.۵) را در نظر بگیرید. معادلات حرکت، نیروی قیدی، و شتاب زاویه‌ای را پیدا کنید.

حل: انرژی جنبشی را می‌شود به صورت جمله‌های انتقالی و چرخشی جدا کرد<sup>۲</sup>

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (66.6)$$

که در آن  $M$  جرم قرص و  $R$  شعاع آن است،  $I = MR^2/2$  گشتاور لختی قرص حول محوری است که از مرکز آن می‌گذرد. انرژی پتانسیل عبارت است از

$$U = Mg(l - y) \sin \alpha \quad (67.6)$$

که  $l$  طول سطح شیبدار است و فرض می‌شود که در انتهای سطح شیبدار انرژی پتانسیل صفر باشد. از این رو لاگرانژی عبارت است از

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2 + Mg(y - l) \sin \alpha \end{aligned} \quad (68.6)$$

۱. مثلاً، بنگرید به Goldstein (Go80, p.47). محاسبات صریح نیروهای قیدی در برخی مسائل خاص به وسیله بکر (Be54, Chapters 11 and 13)، و سایمون (Sy71, p.372 ff) انجام شده‌است.  
 ۲. در اینجا یک نتیجه معروف از دینامیک جسم صلب را پیش‌بینی می‌کنیم که در فصل ۱۰ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

معادله قیدی به این قرار است

$$f(y, \theta) = y - R\theta = 0 \quad (۶۹.۶)$$

اگر واقعاً معتقد باشیم که غلتش بدون لغزش صورت می‌گیرد، این سیستم فقط یک درجه آزادی دارد. از این رو می‌توان  $y$  یا  $\theta$  را به‌عنوان مختصه مناسب اختیار کرد و برای حذف مختصه دیگر معادله (۶۹.۶) را به کار برد. به طریق دیگر، می‌توانیم هر دو  $y$  و  $\theta$  را مختصات تعمیم‌یافته بگیریم و از روش ضرایب نامعین سود جوییم. در این حالت معادلات لاگرانژ عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (۷۰.۶)$$

با انجام عملیات دیفرانسیل‌گیری، برای معادلات حرکت به‌دست می‌آوریم

$$Mg \sin \alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0 \quad (۷۱.۶ \text{ الف})$$

$$-\frac{1}{4}MR^2\ddot{\theta} - \lambda R = 0 \quad (۷۱.۶ \text{ ب})$$

همچنین، از معادله قیدی، داریم

$$y = R\theta \quad (۷۲.۶)$$

این معادلات [معادلات (۷۱.۶) و (۷۲.۶)] دستگاه معادلات سه مجهولی قابل حلی برحسب  $y$ ،  $\theta$ ، و  $\lambda$  تشکیل می‌دهند. از دیفرانسیل‌گیری معادله قیدی [معادله (۷۲.۶)] خواهیم داشت

$$\ddot{\theta} = \ddot{y}/R \quad (۷۳.۶)$$

با ترکیب کردن معادلات (۷۱.۶ ب) و (۷۳.۶)، می‌رسیم به

$$\lambda = -\frac{1}{4}M\ddot{y} \quad (۷۴.۶)$$

حاصل استفاده از این عبارت در معادله (۷۱.۶ الف) به این قرار است

$$\ddot{y} = \frac{4g \sin \alpha}{3} \quad (۷۵.۶)$$

و نیز

$$\lambda = -\frac{Mg \sin \alpha}{3} \quad (۷۶.۶)$$

به طوری که معادله (۷۱.۶) ب نتیجه می دهد

$$\ddot{\theta} = \frac{2g \sin \alpha}{3R} \quad (۷۷.۶)$$

بدینسان برای کمیت‌های  $\dot{y}$ ،  $\dot{\theta}$ ، و  $\lambda$  سه معادله در اختیار داریم که می شود بلافاصله از آنها انتگرال گرفت.

توجه داریم که اگر این قرص قرار بود بدون اصطکاک به پایین سطح شیبدار بلغزد، در این صورت باید داشته باشیم:  $\ddot{y} = g \sin \alpha$ . از این رو قید غلتش شتاب را به  $2/3$  مقدار شتاب لغزش بدون اصطکاک کاهش می دهد. بزرگی نیروی اصطکاک که قید را ایجاد می کند همان  $\lambda$ ، یعنی،  $(Mg/3) \sin \alpha$  است.

توجه کنید که می توانیم  $\dot{\theta}$  را از لاگرانژی، از طریق جانشانی  $\dot{\theta} = \dot{y}/R$  از معادله قیدی، حذف کنیم

$$L = \frac{3}{4} M \dot{y}^2 + Mg(y - l) \sin \alpha \quad (۷۸.۶)$$

در این صورت لاگرانژی فقط برحسب یک مختصه مناسب بیان می شود، و تک معادله حرکت فوراً از معادله (۱۸.۶) به دست می آید

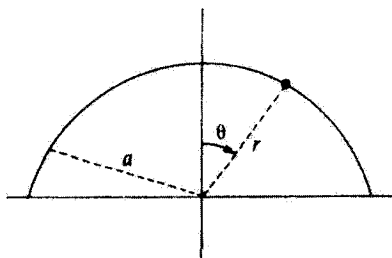
$$Mg \sin \alpha - \frac{3}{4} M \ddot{y} = 0 \quad (۷۹.۶)$$

که شبیه معادله (۷۵.۶) است. هرچند این شگرد ساده تر است، نمی توان برای رسیدن به نیروی قیدی از آن سود جست.

### مثال ۸.۶

ذره ای به جرم  $m$  واقع بر قله نیم کره ثابت صافی به شعاع  $a$  از حال سکون شروع به حرکت می کند. نیروی قیدی را بیابید، و تعیین کنید که این ذره در چه زاویه ای نیم کره را ترک می کند.

حل: به شکل ۵.۶ نگاه کنید. چون امکان جدا شدن ذره از نیم کره را از نظر می گذرانیم، مختصات



شکل ۵.۶

تعمیم یافته را  $r$  و  $\theta$  اختیار می‌کنیم. معادله قیدی عبارت است از

$$f(r, \theta) = r - a = 0 \quad (۸۰.۶)$$

لاگرانژی از انرژیهای جنبشی و پتانسیل تعیین می‌شود

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$U = mgr \cos \theta$$

$$L = T - U$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta \quad (۸۱.۶)$$

که انرژی پتانسیل در پایینترین نقطه نیمکره صفر است. معادلات لاگرانژ، معادله (۶۵.۶) عبارت‌اند از

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad (۸۲.۶)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad (۸۳.۶)$$

با انجام دیفرانسیل‌گیری از معادله (۸۰.۶)، داریم

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad (۸۴.۶)$$

معادلات (۸۲.۶) و (۸۳.۶) به صورت زیر درمی‌آیند

$$mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta - m\ddot{r} + \lambda = 0 \quad (۸۵.۶)$$

$$mgr \sin \theta - mr^2\ddot{\theta} - 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (۸۶.۶)$$



آنگاه قید  $r = a$  را به این معادلات حرکت اعمال می‌کنیم

$$r = a, \quad \dot{r} = 0 = \ddot{r}$$

در این صورت معادلات (۸۵.۶) و (۸۶.۶) چنین می‌شوند

$$ma\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + \lambda = 0 \quad (۸۷.۶)$$

$$mga \sin \theta - ma^2 \ddot{\theta} = 0 \quad (۸۸.۶)$$

از معادله (۸۸.۶) می‌رسیم به

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a} \sin \theta \quad (۸۹.۶)$$

برای تعیین  $\dot{\theta}^2$  می‌توانیم از معادله (۸۹.۶) انتگرال بگیریم

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \quad (۹۰.۶)$$

از معادله (۸۹.۶) انتگرال می‌گیریم

$$\int \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{g}{a} \int \sin \theta d\theta \quad (۹۱.۶)$$

که نتیجه آن به این قرار است

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{a} \cos \theta + \frac{g}{a} \quad (۹۲.۶)$$

که ثابت انتگرالگیری برابر است با  $g/a$ ، زیرا در  $t = 0$ ، وقتی که  $\theta = 0$ ، داریم  $\dot{\theta} = 0$ ،  $\dot{\theta}^2$  را از معادله (۹۲.۶) در معادله (۸۷.۶) می‌نشانیم، پس از حل آن برحسب  $\lambda$ ، خواهیم داشت

$$\lambda = mg(3 \cos \theta - 2) \quad (۹۳.۶)$$

که همان نیروی قیدی است. ذره نیمکره را در زاویه  $\theta$  ترک می‌کند که در این حالت  $\lambda = 0$ .

$$\lambda = 0 = mg(3 \cos \theta - 2) \quad (۹۴.۶)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} \right) \quad (۹۵.۶)$$

به عنوان یک کنترل سریع، توجه کنید که نیروی قیدی در  $\theta = 0$ ، وقتی ذره در قله نیمکره قرار دارد، عبارت است از  $\lambda = mg$ .

روش ضرایب نامعین متضمن دو فایده است:

۱. ضرایب لاگرانژ همان نیروهای قیدی هستند که اغلب مورد نیازند.
۲. وقتی مجموعه مناسبی از مختصات تعمیم یافته مورد نیاز نباشد یا دستیابی به آن دشوار باشد، این روش را می توان برای افزایش تعداد مختصات تعمیم یافته با گنجانیدن روابط قیدی مابین مختصدها به کار گرفت.

### ۶.۶ هم ارزی معادلات لاگرانژ و نیوتون

همانطور که از اول تأکید کرده ایم، فرمولبندیهای لاگرانژی و نیوتونی مکانیک هم ارزند: دیدگاه ناظر بر آنها متفاوت است، اما مضمونشان یکی است. ما حالا این هم ارزی را از طریق نشان دادن این موضوع که دو مجموعه معادلات حرکت در واقع یکی هستند، به روشنی نمایش می دهیم.

فرض کنید، در معادله (۱۸.۶)، مختصات تعمیم یافته ای که اختیار می کنید مختصات قائم (دکارتی) باشد. پس معادلات لاگرانژ (برای یک تک ذره) به این صورت درمی آیند

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (96.6)$$

یا

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_i} = 0.$$

اما در مختصات قائم و برای یک سیستم پایستار داریم  $T = T(\dot{x}_i)$  و  $U = U(x_i)$ ، از این رو

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = 0.$$

بنابراین معادلات لاگرانژ می شوند

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \quad (97.6)$$

همچنین (برای سیستم پایستار) داریم

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( \sum_{j=1}^r \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{x}_i) = \dot{p}_i$$

به این ترتیب معادله (۹۷.۶) معادلات نیوتون را، همان‌طور که می‌خواستیم، به دست می‌دهد

$$F_i = \dot{p}_i \quad (۹۸.۶)$$

بدینسان، در صورتی که مختصات تعمیم‌یافته مختصات قائم باشند، معادلات لاگرانژی و نیوتونی یکسان‌اند.

حالا معادلات حرکت لاگرانژ را با استفاده از مفاهیم نیوتونی استخراج می‌کنیم. به خاطر سادگی فقط یک تک‌ذره را در نظر می‌گیریم. لازم است که مختصات  $x_i$  را به مختصات تعمیم‌یافته  $q_j$  تبدیل کنیم. از معادله (۵.۶) داریم

$$x_i = x_i(q_j, t) \quad (۹۹.۶)$$

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (۱۰۰.۶)$$

و

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \quad (۱۰۱.۶)$$

تکانه تعمیم‌یافته  $p_j$  وابسته به  $q_j$  به آسانی تعیین می‌شود

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (۱۰۲.۶)$$

مثلاً در مورد ذره‌ای که در مختصات قطبی تخت،  $T = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)m/2$  حرکت می‌کند، برای مختصه  $r$  داریم:  $p_r = m\dot{r}$  و برای مختصه  $\theta$  داریم:  $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ . آشکار است که  $p_\theta$  تکانه‌ای خطی و  $p_r$  تکانه زاویه‌ای است، از این رو به نظر می‌رسد که تعریف تکانه تعمیم‌یافته ما با مفاهیم نیوتونی سازگار است.

می‌توانیم یک نیروی تعمیم‌یافته را با در نظر گرفتن کار مجازی انجام شده  $\delta W$  به وسیله مسیر

تغییر یافته  $\delta x_i$ ، که در بخش ۷.۵ توصیف شد، تعیین کنیم.

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_{i,j} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (103.6)$$

$$\equiv \sum_j Q_j \delta q_j \quad (104.6)$$

به طوری که نیروی تعمیم یافته  $Q_j$  وابسته به  $q_j$  عبارت است از

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (105.6)$$

همانطور که کار همواره همان انرژی است، حاصلضرب  $Qq$  نیز برابر انرژی است. اگر  $q$  طول باشد،  $Q$  نیروست؛ اگر  $q$  زاویه باشد،  $Q$  گشتاور نیروست. برای یک سیستم پایستار،  $Q_j$  از انرژی پتانسیل قابل استنتاج است

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (106.6)$$

حال آماده‌ایم که معادلات لاگرانژ را به دست آوریم

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) \\ &= \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ p_j &= \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (107.6)$$

که در واپسین مرحله از معادله (۱۰۷.۶) سود بردیم. از معادله (۱۰۷.۶) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$\dot{p}_j = \sum_i \left( m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \quad (108.6)$$

جمله آخر را بسط می‌دهیم

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k$$

و معادله (۱۰۸.۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$\dot{p}_j = \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i,k} m_i \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \quad (109.6)$$

جمله اول سمت راست معادله (۱۰۹.۶) همان  $Q_j$  همان  $F_i = m_i \ddot{x}_i$  و معادله (۱۰۵.۶) است. جمله دوم عبارت است از  $\partial T / \partial q_j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (110.6)$$

که در اینجا از  $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$  و معادله (۱۰۰.۶) استفاده کرده‌ایم. معادله (۱۰۰.۶) چنین می‌شود

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i,k} m_i \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k$$

که در اینجا جمله دوم سمت راست معادله (۱۱۰.۶) را صفر گرفته‌ایم زیرا امکان یک وابستگی زمانی صریح در معادلات تبدیل را حذف کرده‌ایم. حالا می‌توان معادله (۱۰۹.۶) را این طور نوشت

$$\dot{p}_j = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (111.6)$$

یا، با استفاده از معادلات (۱۰۲.۶) و (۱۰۶.۶)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (112.6)$$

چون  $U$  به سرعت‌های تعمیم‌یافته،  $\dot{q}_j$ ، وابسته نیست، معادله (۱۱۲.۶) را می‌توان به این صورت نوشت

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = 0 \quad (113.6)$$

و با بهره‌گیری از  $L = T - U$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (114.6)$$

که عبارت‌اند از معادلات حرکت لاگرانژ.

## ۷.۶ سرشت دینامیک لاگرانژی

در بخشهای قبلی، چندین گزاره کلی و مهم مربوط به فرمولبندی لاگرانژی مکانیک ابراز داشتیم. قبل از آنکه جلوتر برویم، باید این نکات را خلاصه کنیم تا بر تفاوت میان دیدگاههای لاگرانژی و نیوتونی تأکید کرده باشیم.

از لحاظ تاریخی، معادلات حرکت لاگرانژ که در قالب مختصات تعمیم یافته بیان شد، نسبت به گزاره یا حکم اصل هامیلتون تقدم داشت.<sup>۱</sup> ما استنتاج معادلات لاگرانژ را از طریق اصل موضوع قرارداد اصل هامیلتون انتخاب کردیم زیرا این سراسرترین رهیافت است و برای وحدت بخشیدن به دینامیک کلاسیکی نیز روشی رسمی و صوری به شمار می آید.

اولاً، باید تکرار کنیم که دینامیک لاگرانژی به هیچ عنوان یک نظریه جدید نیست. نتایج تحلیل لاگرانژی یا تحلیل نیوتونی برای هر سیستم مکانیکی باید یکسان باشند. تنها تفاوت در اینجا عبارت است از روشی که برای دستیابی به این نتایج به کار گرفته شده است.

در حالی که رهیافت نیوتونی بر عامل خارجی وارد بر جسم (یعنی نیرو) تأکید می کند، در روش لاگرانژی فقط با کمیت‌های همراه با جسم (انرژیهای جنبشی و پتانسیل) سروکار داریم. در واقع، مفهوم نیرو در هیچ کجای فرمولبندی لاگرانژی وارد نمی شود. این موضوع، به دلایل گوناگون، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اولاً، از آنجا که انرژی کمیته اسکالر است، تابع لاگرانژی مربوط به یک سیستم نسبت به تبدیلهای مختصه ناورد است. در واقع، چنین تبدیلهایی به تبدیلهای بین دستگاههای مختصات متعامد گوناگون در فضای معمولی محدود نمی شوند؛ این تبدیلهای می توانند تبدیلهای بین مختصات معمولی و مختصات تعمیم یافته نیز باشند. بدینسان ممکن است گذر از فضای معمولی (که شاید در آن معادلات حرکت خیلی پیچیده باشند) به فضای پیکربندی چنان اختیار شود که مسئله خاصی را تا سرحد امکان ساده کند. عادت داریم که در مورد سیستمهای مکانیکی به کمک کمیت‌های برداری مانند نیرو، سرعت، تکانه زاویه‌ای، گشتاور نیرو، و مانند اینها فکر کنیم. اما در فرمولبندی لاگرانژی، معادلات حرکت در فضای پیکربندی کلاً برحسب عملیات اسکالری به دست می آیند.

جنبه مهم دیگر دیدگاه انرژی در برابر نیرو این است که در برخی موقعیتهای حتی بیان روشن تمام نیروهای وارد بر جسم (همان طور که گاهی در مورد نیروهای قبدی پیش می آید) ممکن نیست، در حالی که هنوز هم ارائه عبارتهایی برای انرژیهای جنبشی و پتانسیل میسر است. دقیقاً همین نکته است که اصل هامیلتون را برای سیستمهای کوانتوم مکانیکی، که در آنجا معمولاً انرژیها را

۱. معادلات لاگرانژ، ۱۷۸۸؛ اصل هامیلتون، ۱۸۳۴.

می‌شناسیم اما نیروها را نمی‌شناسیم، سودمند می‌سازد.

نشان داده شده است که بیان دیفرانسیلی مکانیک در قالب معادلات نیوتون یا بیان انتگرالی آن به طور کامل هم‌ارز است؛ بیان اخیر در اصل هامیلتون (و معادلات لاگرانژی حاصل از آن) گنجیده است. از این رو بین این دیدگاهها، که بر پایهٔ توصیف آثار فیزیکی استوارند، هیچگونه وجه تمایزی وجود ندارد. اما از دیدگاه فلسفی، می‌توان تمایزی بین آنها قائل شد. در فرمولبندی نیوتونی، نیروی معین وارد بر یک جسم حرکت مشخصی را پدید می‌آورد یعنی، همواره معلولی معین را با علتی معین مربوط می‌کنیم. اما، بنابر اصل هامیلتون، حرکت جسم ناشی از تلاش طبیعت برای دستیابی به هدفی معین؛ یعنی، به حداقل رساندن انتگرال زمانی تفاضل بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل، است. عملیات حل مسائل مکانیک به پذیرفتن این دیدگاه یا دیدگاه دیگر، بستگی ندارد. اما از لحاظ تاریخی چنین ملاحظاتی بر تکامل دینامیک تأثیر ژرفی داشته است (مثلاً، در مورد اصل ماویرتوس، که در بخش ۲.۶ از آن یاد کردیم). برای دستیابی به بخشی پیرامون این موضوع، خوانندهٔ علاقه‌مند را به کتاب بسیار خوب مارزنا<sup>۱</sup> ارجاع می‌دهیم.

### ۸.۶ قضیه‌ای در ارتباط با انرژی جنبشی

اگر انرژی جنبشی در مختصات ثابت و قائم بیان شود، نتیجه عبارت است از تابع درجهٔ دوم همگنی از  $\dot{x}_{\alpha,i}$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^r m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^2 \quad (115.6)$$

اکنون می‌خواهیم بستگی  $T$  به مختصات و سرعتهای تعمیم‌یافته را به تفصیل بیشتری از نظر بگذرانیم. معادلات (۹۹.۶) و (۱۰۰.۶) به این صورت درمی‌آیند.

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (116.6)$$

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \quad (117.6)$$

مجذور  $\dot{x}_{\alpha,i}$  را به دست می‌آوریم

$$\dot{x}_{\alpha,i}^2 = \sum_{j,k} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_j \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \dot{q}_j + \left( \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2 \quad (118.6)$$

1. Margenau (Ma77, Chapter 19).

و انرژی جنبشی به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \\
 &+ \sum_{\alpha} \sum_{i,j} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \dot{q}_j \\
 &+ \sum_{\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_{\alpha} \left( \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2 \quad (119.6)
 \end{aligned}$$

بدینسان حاصل از این قرار است

$$T = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j b_j \dot{q}_j + c \quad (120.6)$$

یکی از حالت‌هایی که از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است وقتی پیش می‌آید که سیستم اسکالرنوم<sup>۱</sup> باشد، به طوری که زمان به صراحت در معادلات تبدیل [معادله (۱۱۶.۶)] ظاهر نشود؛ در این صورت مشتقات جزئی نسبت به زمان، حذف می‌شوند

$$\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} = 0, \quad b_j = 0, \quad c = 0$$

بنابراین، تحت چنین شرایطی، انرژی جنبشی تابع درجه دوم همگنی از سرعت‌های تعمیم یافته است

$$T = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (121.6)$$

حال، از معادله (۱۲۱.۶) نسبت به  $\dot{q}_l$  دیفرانسیل می‌گیریم

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_k a_{lk} \dot{q}_k + \sum_j a_{jl} \dot{q}_j$$

طرفین این معادله را در  $\dot{q}_l$  ضرب و روی  $l$  جمع می‌کنیم، داریم

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k,l} a_{lk} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{j,l} a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l$$



در این حالت تمام شاخصهای زیرین کاذبند، بنابراین هر دو جمله سمت راست یکسان‌اند

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2 \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T \quad (۱۲۲.۶)$$

این نتیجه مهم حالت خاصی از قضیهٔ اوپلر به‌شمار می‌آید، که بنابر آن اگر تابع همگنی از  $y_k$  با درجهٔ  $n$  باشد، در این صورت

$$\sum_k y_k \frac{\partial f}{\partial y_k} = n f \quad (۱۲۳.۶)$$

## ۹.۶ نگاهی دوباره به قضایای پایستگی

### پایستگی انرژی

در بحثهای پیشین (بخش ۳.۲) خود دیدیم که زمان در داخل یک چارچوب مرجع لخت همگن است. از این‌رو لاگرانژی که سیستم بسته‌ای (یعنی، سیستمی که با هیچ چیزی خارج از سیستم برهم‌کنش ندارد) را توصیف می‌کند نمی‌تواند صریحاً وابسته به زمان باشد، یعنی،<sup>۱</sup>

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (۱۲۴.۶)$$

بنابراین مشتق کامل لاگرانژی می‌شود

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \quad (۱۲۵.۶)$$

که اکنون دیگر جملهٔ معمول،  $\partial L / \partial t$  ظاهر نمی‌شود. اما معادلات لاگرانژ عبارت‌اند از

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (۱۲۶.۶)$$

با استفاده از معادله (۱۲۶.۶) مقدار  $\partial L / \partial q_j$  را در معادله (۱۲۵.۶) می‌نشانیم، داریم

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

یا

$$\frac{dL}{dt} - \sum_j \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

۱. اگر سیستم در میدان نیروی یکنواختی باشد، لاگرانژی نیز به همان ترتیب مستقل از زمان است.

به طوری که

$$\frac{d}{dt} \left( L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad (۱۲۷.۶)$$

بنابراین کمیت داخل پرانتز نسبت به زمان ثابت است؛ این ثابت را با  $-H$  می‌نمایانیم

$$L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -H = \text{const.} \quad (۱۲۸.۶)$$

اگر انرژی پتانسیل  $U$  به سرعت‌های  $\dot{x}_{\alpha,i}$  یا زمان  $t$  وابستگی صریحی نداشته باشد، در این صورت  $U = U(x_{\alpha,i})$ . روابطی که مختصات قائم و مختصات تعمیم‌یافته را پیوند می‌دهند به شکل  $x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j)$  یا  $q_j = q_j(x_{\alpha,i})$  هستند، که در اینجا امکان یک وابستگی زمانی صریح در معادلات تبدیل را منتفی کرده‌ایم. بنابراین  $U = U(q_j)$ ، و  $\partial U / \partial \dot{q}_j = 0$ . بدینسان

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

پس معادله (۱۲۸.۶) را می‌توان به این قرار نوشت

$$(T - U) - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = -H \quad (۱۲۹.۶)$$

و با استفاده از معادله (۱۲۲.۶)، داریم

$$(T - U) - 2T = -H$$

یا

$$T + U = E = H = \text{const.} \quad (۱۳۰.۶)$$

انرژی کل  $E$  برای این حالت ثابت حرکت به‌شمار می‌آید.

تابع  $H$ ، که هامیلتونی سیستم نامیده می‌شود، را می‌توان مطابق با معادله (۱۲۸.۶) تعریف کرد (با این حال بخش ۱۰.۶ را بنگرید). توجه به این نکته مهم است که فقط اگر شرایط زیر برآورده شوند، هامیلتونی  $H$  با انرژی کل برابر است:

۱. معادلات تبدیل رابط بین مختصات قائم و تعمیم‌یافته (معادله ۱۱۶.۶) باید مستقل از زمان باشند، بدینسان تضمین می‌شود که انرژی جنبشی تابع درجه دوم همگنی از  $\dot{q}_j$  است.

۲. انرژی پتانسیل باید مستقل از سرعت باشد، که بدینسان امکان حذف جمله‌های  $\partial U / \partial \dot{q}_j$  از معادلهٔ مربوط به  $H$  [معادلهٔ (۱۲۹.۶)] فراهم می‌آید.

در این صورت سؤالهایی از این دست که «آیا برای سیستم  $H = E$ ؟» و «آیا انرژی سیستم پایسته است؟»، به دو جنبهٔ مختلف مسئله مربوط می‌شوند، و هر سؤال را باید جداگانه بررسی کرد. مثلاً ممکن است با حالتی برخورد داشته باشیم که در آنها هامیلتونی با انرژی کل برابر نیست، اما با همهٔ اینها، انرژی پایسته است. بدینسان، یک سیستم پایستار در نظر بگیرید، و فرض کنید توصیف آن برحسب مختصات تعمیم‌یافته‌ای که نسبت به محورها ثابت، و قائم در حرکت‌اند انجام شود. در این صورت معادلات تبدیل شامل زمان بوده، و انرژی جنبشی تابع درجهٔ دوم همگنی از سرعت‌های تعمیم‌یافته نیست. انتخاب مجموعه مختصات تعمیم‌یافته‌ای که از لحاظ ریاضی مناسب باشد نمی‌تواند این واقعیت فیزیکی که انرژی پایسته است را تغییر دهد. اما در دستگاه مختصات متحرک، هامیلتونی دیگر با انرژی کل برابر نیست.

### پایستگی تکانهٔ خطی

از آنجا که فضا در هر چارچوب مرجع لخت همگن است، لاگرانژی یک سیستم بسته بر اثر انتقال کل سیستم در فضا تغییر نمی‌کند. انتقال بینهایت کوچک هر بردار شعاعی مانند  $\mathbf{r}_\alpha$ ، به صورت  $\mathbf{r}_\alpha \rightarrow \mathbf{r}_\alpha + \delta \mathbf{r}$  در نظر بگیرید؛ این عمل به انتقال کل سیستم به اندازهٔ  $\delta \mathbf{r}$  می‌انجامد. برای سادگی، سیستمی را در نظر می‌گیریم که فقط از یک تک‌ذره تشکیل شده باشد (با گنجانیدن یک مجموع‌یابی روی  $\alpha$  می‌توانیم یک سیستم  $n$  ذره‌ای را کاملاً به همین طریق بررسی کنیم) و لاگرانژی را برحسب مختصات قائم  $L = L(x_i, \dot{x}_i)$  بنویسیم. تغییر در لاگرانژی  $L$  به علت جابه‌جایی بینهایت کوچک  $\delta \mathbf{r} = \sum_i \delta x_i \mathbf{e}_i$  عبارت است از

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0 \quad (131.6)$$

فقط یک جابه‌جایی متغیر (گوناگون) را در نظر می‌گیریم، به طوری که  $\delta x_i$  توابع صریح یا ضمنی از زمان نیستند. بدینسان

$$\delta \dot{x}_i = \delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x_i \equiv 0 \quad (132.6)$$

بنابراین  $\delta L$  می‌شود

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (۱۳۳.۶)$$

چون هر  $\delta x_i$  یک جابه‌جایی مستقل است، فقط در صورتی که هر یک از مشتقات جزئی  $L$  صفر شوند  $\delta L$  متحد با صفر می‌شود

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (۱۳۴.۶)$$

پس، مطابق معادلات لاگرانژ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (۱۳۵.۶)$$

و

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{const.} \quad (۱۳۶.۶)$$

یا

$$\begin{aligned} \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( \frac{1}{2} m \sum_j \dot{x}_j^2 \right) \\ &= m \dot{x}_i = p_i = \text{const.} \end{aligned} \quad (۱۳۷.۶)$$

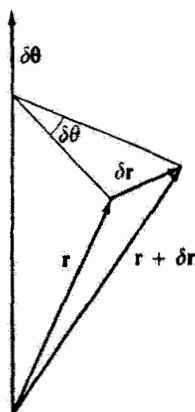
پس همگنی فضا حکم می‌کند که تکانه خطی یک سیستم بسته،  $\mathbf{p}$ ، نسبت به زمان ثابت باشد. این نتیجه را مطابق حکم زیر نیز می‌توان تعبیر کرد: اگر لاگرانژی یک سیستم (نه الزاماً بسته) نسبت به انتقال در جهتی معین ناوردا باشد، در آن صورت تکانه خطی سیستم در آن جهت نسبت به زمان ثابت است.

### پایستگی تکانه زاویه‌ای

در بخش ۳.۲ گفتیم که یکی از مشخصه‌های چارچوب مرجع لخت همسانگردی فضاست-یعنی، سمتگیری یک سیستم بسته تأثیری بر خواص مکانیکی آن سیستم نمی‌گذارد. در حالت خاص، اگر سیستم به اندازه زاویه‌ای بینهایت کوچک بچرخد لاگرانژی سیستم بسته تغییر نمی‌کند.<sup>۱</sup>

اگر سیستمی به اندازه زاویه بینهایت کوچک  $\delta\theta$  حول محور معینی بچرخد (شکل ۶.۶)، بردار

۱. ما از این جهت چرخش را به زاویه‌ای بینهایت کوچک محدود می‌کنیم که مایلیم بتوانیم چرخش را با یک بردار نمایش دهیم (بخش ۱۵.۱).



شکل ۶.۶

شعاعی  $r$  مربوط به یک نقطه معین به  $r + \delta r$  تغییر می‌کند، که در اینجا داریم [معادله (۱۰۶.۱)]

$$\delta r = \delta \theta \times r \quad (۱۳۸.۶)$$

بردارهای سرعت نیز بر اثر چرخش سیستم تغییر می‌کنند، و چون معادله تبدیل برای تمام بردارها یکی است، داریم

$$\delta \dot{r} = \delta \theta \times \dot{r} \quad (۱۳۹.۶)$$

فقط یک تک‌ذره را در نظر می‌گیریم و لاگرانژی را در مختصات قائم بیان می‌کنیم. تغییر  $L$  ناشی از چرخش بینهایت کوچک عبارت است از

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0 \quad (۱۴۰.۶)$$

معادلات (۱۳۶.۶) و (۱۳۷.۶) نشان می‌دهند که مؤلفه‌های قائم بردار تکانه از عبارت زیر به دست می‌آیند

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (۱۴۱.۶)$$

و معادلات لاگرانژ را ممکن است به صورت زیر بیان کرد

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (۱۴۲.۶)$$

از این رو معادله (۱۴۰.۶) می‌شود

$$\delta L = \sum_i \dot{p}_i \delta x_i + \sum_i p_i \delta \dot{x}_i = 0 \quad (143.6)$$

یا

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (144.6)$$

با استفاده از معادلات (۱۳۸.۶) و (۱۳۹.۶)، این معادله را می‌توان اینطور نوشت

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot (\delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) + \mathbf{p} \cdot (\delta \boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (145.6)$$

می‌توانیم عوامل ضرب عددی سه‌گانه را به ترتیب چرخه‌ای جایگشت دهیم بدون اینکه مقدار حاصل ضرب تغییر کند. بدینسان

$$\delta \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) + \delta \boldsymbol{\theta} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) = 0$$

یا

$$\delta \boldsymbol{\theta} \cdot [(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p})] = 0 \quad (146.6)$$

جملات داخل کروشه همان عواملی‌اند که از دیفرانسیل‌گیری  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  نسبت به زمان حاصل می‌شوند

$$\delta \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0 \quad (147.6)$$

چون  $\delta \boldsymbol{\theta}$  اختیاری است، باید داشته باشیم

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0 \quad (148.6)$$

و یا

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const.} \quad (149.6)$$

اما  $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}$ ؛ بنابراین تکانه زاویه‌ای ذره در یک سیستم بسته بر حسب زمان ثابت است. یکی از نتایج مهم این قضیه را در زیر می‌آوریم. سیستمی را در یک میدان نیروی خارجی در نظر بگیرد. اگر این میدان دارای یک محور تقارن باشد، در آن صورت لاگرانژی سیستم نسبت به

کمیت پایسته	خاصیت لاگرانژی	مشخصه چارچوب لخت
انرژی کل	تابع صریحی از زمان نیست	زمان همگن
تکانه خطی	ناوردا نسبت به انتقال	فضای همگن
تکانه زاویه‌ای	ناوردا نسبت به چرخش	فضای همسانگرد

چرخشهای حول محور تقارن ناورداست. از این رو تکانه زاویه‌ای سیستم حول محور تقارن نسبت به زمان ثابت است. این مورد دقیقاً در مثال ۳.۶ مورد بحث قرار گرفت؛ در آنجا راستای قائم یکی از محورهای تقارن سیستم، و تکانه زاویه‌ای حول آن محور پایسته بود.

اهمیت ارتباط میان خواص تقارنی و ناوردایی کمیتهای فیزیکی را نمی‌توان مورد تأکید فراوان قرار نداد. این ارتباط از پایستگی تکانه، و در واقع از سیستمهای کلاسیکی، فراتر می‌رود و در نظریه‌های نوین پدیده‌های میدان و ذرات بنیادی کاربردهای فراوانی پیدا می‌کند. قضایای پایستگی برای یک سیستم بسته را صرفاً از طریق توجه به خواص چارچوب مرجع لخت استنتاج کرده‌ایم. این نتایج را می‌توان به صورت جدول ۱.۶ خلاصه کرد.

پس هفت ثابت (یا انتگرال) حرکت برای یک سیستم بسته وجود دارد: انرژی کل، تکانه خطی (سه مؤلفه)، و تکانه زاویه‌ای (سه مؤلفه). این و فقط همین هفت انتگرال برای ذرات تشکیل دهنده سیستم دارای خاصیت جمع‌پذیری هستند؛ چه در میان ذرات برهم‌کنشی وجود داشته باشد و چه نباشد، آنها این خاصیت را دارند.

### ۱.۶ معادلات بنیادی حرکت-دینامیک هامیلتونی

در بخش قبل پی بردیم که اگر انرژی پتانسیل سیستمی مستقل از سرعت باشد، در این صورت مؤلفه‌های تکانه خطی در مختصات قائم با رابطه زیر داده می‌شود

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (150.6)$$

این نتیجه را با قیاس به حالتی بسط می‌دهیم که در آن لاگرانژی در مختصات تعمیم‌یافته بیان

می‌شود و تکانه‌های تعمیم‌یافته<sup>۱</sup> را مطابق رابطه زیر تعریف کنیم

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (۱۵۱.۶)$$

(متأسفانه، نمادگذارهای مرسوم برای تکانه معمولی و تکانه تعمیم‌یافته یکسان‌اند، هرچند که این دو کمیت ممکن است کاملاً متفاوت باشند.) در این صورت معادلات حرکت لاگرانژ چنین بیان می‌شوند

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (۱۵۲.۶)$$

با استفاده از تعریف تکانه‌های تعمیم‌یافته، معادله (۱۲۸.۶) برای هامیلتونی را می‌شود این طور

نوشت

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad (۱۵۳.۶)$$

لاگرانژی را تابع مختصات تعمیم‌یافته، سرعت‌های تعمیم‌یافته، و احتمالاً زمان می‌دانند. وابستگی  $L$  به زمان ممکن است ناشی از وابستگی زمانی قیدها باشد یا اینکه معادلات تبدیل ارتباط‌دهنده مختصات قائم و تعمیم‌یافته صریحاً شامل زمان باشند. (به یاد داشته باشید که پتانسیل‌های وابسته به زمان را بررسی نمی‌کنیم.) می‌توانیم معادله (۱۵۱.۶) را برحسب سرعت‌های تعمیم‌یافته حل کنیم و آنها را به این صورت بیان داریم

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_k, p_k, t) \quad (۱۵۴.۶)$$

بدینسان در معادله (۱۵۳.۶) می‌شود متغیرها را از مجموعه  $(q_j, \dot{q}_j, t)$  به مجموعه  $(q_j, p_j, t)$  تغییر داد<sup>۲</sup> و هامیلتونی را به صورت زیر بیان کرد

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (۱۵۵.۶)$$

۱. اصطلاحهای «مختصات تعمیم‌یافته»، «سرعت‌های تعمیم‌یافته»، و «تکانه‌های تعمیم‌یافته» را در سال ۱۸۶۷ سرویلیام

تامسون (لرد کلونین بعدی) و پ. ج. تایت در رساله مشهورشان با عنوان فلسفه طبیعی معرفی کردند.

۲. این تغییر متغیرها شبیه تغییر متغیرهایی است که در ترمودینامیک فراوان به آنها برمی‌خوریم و در رده کلی به اصطلاح تبدیلات لژاندر (که اولین بار به وسیله اولیور و شاید هم حتی لایبنیتس به‌کار رفت) قرار می‌گیرند. بحث کلی درخصوص تبدیلات لژاندر با تأکید بر اهمیت آنها در مکانیک در مرجع زیر آمده‌است:



این معادله به شیوه‌ای نوشته شده است که بر این نکته که هامیلتونی همواره تابع مجموعه  $(q_k, p_k, t)$  در نظر گرفته می‌شود، تأکید ورزد، در حالی که لاگرانژی تابع مجموعه  $(q_k, \dot{q}_k, t)$  است

$$\boxed{H = H(q_k, p_k, t), \quad L = L(q_k, \dot{q}_k, t)} \quad (156.6)$$

از این رو دیفرانسیل کامل  $H$  عبارت است از

$$dH = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (157.6)$$

بنابر معادله (۱۵۵.۶)، همچنین می‌توانیم بنویسیم

$$dH = \sum_k \left( \dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (158.6)$$

با بهره‌گیری از معادلات (۱۵۱.۶) و (۱۵۲.۶) در جانشانی به جای  $\partial L / \partial \dot{q}_k$  و  $\partial L / \partial q_k$  جمله‌های

دوم و چهارم داخل پرانتز معادله (۱۵۸.۶) حذف می‌شوند، و باقی می‌ماند

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (159.6)$$

اگر ضرایب  $dq_k$ ،  $dp_k$  و  $dt$  را در معادلات (۱۵۷.۶) و (۱۵۹.۶) برابر بگیریم، داریم<sup>۱</sup>

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ -\dot{p}_k &= \frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}} \quad (160.6)$$

معادلات هامیلتونی حرکت

$$(161.6)$$

و

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (162.6)$$

بعلاوه، با بهره‌گیری از معادلات (۱۶۰.۶) و (۱۶۱.۶) در معادله (۱۵۷.۶)، هر جمله داخل پرانتز صفر می‌شود، و نتیجه به این قرار خواهد بود

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (163.6)$$

۱. فرضیهایی که به‌طور ضمنی در این عملیات گنجانده‌اند، در بخش بعد مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

معادلات (۱۶۰.۶) و (۱۶۱.۶) معادلات هامیلتونی حرکت به شمار می‌آیند.<sup>۱</sup> این معادلات را به خاطر ظاهر متقارنشان، معادلات بتدادی حرکت نیز می‌گویند. توصیف حرکت به وسیله این معادلات دینامیک هامیلتونی نامیده می‌شود.

معادله (۱۶۳.۶) این نکته را بیان می‌کند که اگر  $H$  به طور صریح حاوی زمان نباشد، پس هامیلتونی یک کمیت پایستار است. قبلاً (بخش ۹.۶) دیده‌ایم که اگر انرژی پتانسیل مستقل از سرعت باشد و معادلات تبدیل بین  $x_\alpha$  و  $q_j$  صریحاً شامل زمان نباشد، هامیلتونی برابر است با انرژی کل  $T + U$ . تحت این شرایط، و اگر  $\partial H / \partial t = 0$ ، در این صورت  $H = E = \text{const}$ . تعداد  $2s$  معادله بتدادی وجود دارد و اینها جانشین  $s$  معادله لاگرانژی می‌شوند. (به یاد بیاورید که  $s = 3n - m$  عبارت است از تعداد درجات آزادی سیستم.) اما معادلات بتدادی معادلات دینامیک مرتبه اول‌اند، در حالی که معادلات لاگرانژی معادلات دینامیک مرتبه دوم‌اند.<sup>۲</sup> برای به‌کارگیری معادلات بتدادی در حل یک مسئله، نخست باید هامیلتونی را به عنوان تابعی از مختصات و تکانه‌های تعمیم‌یافته تشکیل دهیم. در مواردی انجام این کار به طور مستقیم، امکانپذیر است. در موارد پیچیده‌تر شاید لازم باشد که نخست لاگرانژی را تشکیل دهیم و آنگاه مطابق معادله (۱۵۱.۶) تکانه‌های تعمیم‌یافته را محاسبه کنیم. در این صورت معادلات حرکت از معادلات بتدادی به دست می‌آیند.

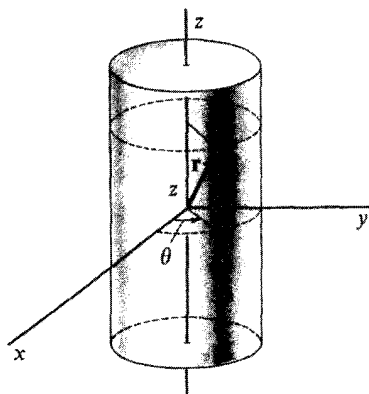
### مثال ۹.۶

برای یافتن معادلات حرکت ذره‌ای به جرم  $m$  که مقید است روی سطح استوانه‌ای به معادله  $x^2 + y^2 = R^2$  حرکت کند، از روش هامیلتونی بهره گیرید. این ذره تحت تأثیر نیرویی است که راستای آن به سوی مبدأ و متناسب است با فاصله ذره از مبدأ:  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ .

حل: این وضعیت در شکل ۷.۶ نموده شده است. پتانسیل متناظر با نیروی  $\mathbf{F}$  عبارت است از

۱. این مجموعه معادلات نخستین‌بار در سال ۱۸۰۹ به وسیله لاگرانژ به دست آمد، و بواسون نیز در همان سال معادلات مشابهی را به دست آورد. اما هیچیک از آنها این معادلات را به عنوان مجموعه بنیادی معادلات حرکت نشناختند؛ کوشی بود که در سال ۱۸۳۱ برای نخستین‌بار این نکته را دریافت. هامیلتون نخست این معادلات را در سال ۱۸۳۴ از یک اصل وردشی بنیادی استخراج کرد و آنها را مبنایی برای یک نظریه فراگیر دینامیک قرار داد. بدینسان نام‌گذاری معادلات «هامیلتون» کاملاً سزاوار است.

۲. این یک نتیجه خاص نیست؛ همواره می‌توان به جای هر مجموعه از  $s$  معادله مرتبه دوم یک مجموعه از  $2s$  معادله مرتبه اول قرار داد.



شکل ۷.۶

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2 + z^2) \\
 &= \frac{1}{2} k (R^2 + z^2) \quad (۱۶۴.۶)
 \end{aligned}$$

در مختصات استوانه‌ای، مجذور سرعت عبارت است از [معادله (۱۰۱.۱)]

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \quad (۱۶۵.۶)$$

اما در اینجا  $r = R$  ثابت است، از این رو انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \quad (۱۶۶.۶)$$

اکنون می‌توان لاگرانژی را چنین نوشت

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} k (R^2 + z^2) \quad (۱۶۷.۶)$$

مختصات تعمیم‌یافته عبارت‌اند از  $z$  و  $\theta$  و تکانه‌های تعمیم‌یافته عبارت‌اند از

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \dot{\theta} \quad (۱۶۸.۶)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \quad (۱۶۹.۶)$$

از آنجا که سیستم پایستار است و معادلات تبدیل بین مختصات قائم و استوانه‌ای صریحاً شامل زمان نیستند، هامیلتونی  $H$  عبارت است از همان انرژی کل که برحسب متغیرهای  $\theta$ ،  $p_\theta$ ،  $z$ ، و

$p_z$  بیان شده باشد. اما  $\theta$  به طور صریح ظاهر نمی شود، از این رو

$$H(z, p_\theta, p_z) = T + U \\ = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2 \quad (170.6)$$

که جمله ثابت  $\frac{1}{2}kR^2$  حذف شده است. بنابراین معادلات حرکت از معادلات بندادی به دست می آیند

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (171.6)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz \quad (172.6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \quad (173.6)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \quad (174.6)$$

معادلات (۱۷۳.۶) و (۱۷۴.۶) همان المثنی معادلات (۱۶۸.۶) و (۱۶۹.۶) هستند. از معادلات (۱۶۸.۶) و (۱۷۱.۶) می رسمیم به

$$p_\theta = mR^2\dot{\theta} = \text{const.} \quad (175.6)$$

بدینسان تکانه زاویه ای حول محور  $z$  یکی از ثابتهای حرکت است. این نتیجه قطعی است، زیرا محور  $z$  محور تقارن مسئله است. از ترکیب معادلات (۱۶۹.۶) و (۱۷۲.۶) به دست می آوریم

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad (176.6)$$

که در آن

$$\omega^2 \equiv k/m \quad (177.6)$$

بنابراین حرکت در راستای  $z$  هماهنگ ساده است.

معادلات حرکت مربوط به مسئله پیشین را با روش لاگرانژی و با بهره گیری از تابع  $L$  که به وسیله معادله (۱۶۷.۶) تعریف شده باشد، نیز می توان یافت. در این حالت، دستیابی به معادلات حرکت لاگرانژ نسبت به دستیابی به معادلات بندادی آسانتر است. در واقع، این موضوع اغلب اوقات صادق

است که روش لاگرانژی آسانتر به معادلات حرکت می‌انجامد تا روش هامیلتونی. اما چون ما در انتخاب متغیر در فرمولبندی هامیلتونی یک مسئله، آزادی عمل بیشتری داریم ( $q_k$  و  $p_k$  مستقل اند، در حالی که  $q_k$  و  $\dot{q}_k$  چنین نیستند)، غالباً در استفاده از روش هامیلتونی به امتیاز عملی خاصی دست پیدا می‌کنیم. مثلاً، در مکانیک سماوی — به‌ویژه در موردی که حرکتها تحت تأثیر اختلالات ناشی از اثر سایر اجسام قرار دارند — فرمولبندی مسئله به کمک دینامیک هامیلتونی قطعاً مناسب است. اما به‌طور کلی، توانایی شایان توجه رهیافت هامیلتونی در دینامیک، در ساده‌سازی جوابهای مسائل مکانیک جلوه نمی‌کند؛ بلکه، شالوده‌ای را فراهم می‌آورد که می‌توان آن را به سایر حوزه‌ها بسط داد. مختصه‌تعمیم‌یافته  $q_k$  و تکانه‌تعمیم‌یافته  $p_k$  کمیت‌های مزدوج بنیادی هستند. بنابر معادلات (۱۶۰.۶) و (۱۶۱.۶)، اگر  $q_k$  در هامیلتونی ظاهر نشود، در این صورت  $\dot{p}_k = 0$ ، و تکانه‌تعمیم‌یافته  $p_k$  یک ثابت حرکت به‌شمار می‌آید. مختصه‌هایی را که صریحاً در عبارتهای مربوط به  $T$  و  $U$  ظاهر نمی‌شوند چرخه‌ای می‌گویند. مختصه‌ای که در  $H$  چرخه‌ای باشد در  $L$  نیز چرخه‌ای است. اما، حتی اگر  $q_k$  در  $L$  ظاهر نشود، سرعت‌تعمیم‌یافته  $\dot{q}_k$  وابسته به این مختصه به‌طور کلی در  $L$  حضور دارد. بدینسان

$$L = L(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$

گرچه یک مختصه چرخه‌ای است، ولی به هیچ‌گونه کاهش در تعداد درجه‌های آزادی این سیستم دست نمی‌یابیم؛ و هنوز هم باید  $s$  معادله مرتبه دوم را حل کرد. از سوی دیگر، در فرمولبندی بنیادی، اگر  $q_k$  چرخه‌ای باشد،  $p_k$  ثابت است،  $p_k = \alpha_k$ ، و

$$H = H(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, p_1, \dots, p_{k-1}, \alpha_k, p_{k+1}, \dots, p_s, t)$$

از این رو باید  $2s - 2$  معادله مرتبه اول را حل کنیم، و در واقع پیچیدگی مسئله کاهش یافته است؛ عملاً  $s - 1$  درجه آزادی باقی می‌ماند. مختصه  $q_k$  کاملاً جدا می‌شود، و تا آنجا که به بقیه مسئله ارتباط پیدا می‌کند می‌توان از آن چشم پوشید. ثابت  $\alpha_k$  را با به‌کارگیری شرایط اولیه محاسبه می‌کنیم، و معادله حرکت برای مختصه چرخه‌ای عبارت است از

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k} \equiv \omega_k \quad (178.6)$$

که بلافاصله می‌توان از آن انتگرال گرفت و رسید به

$$q_k(t) = \int \omega_k dt \quad (179.6)$$

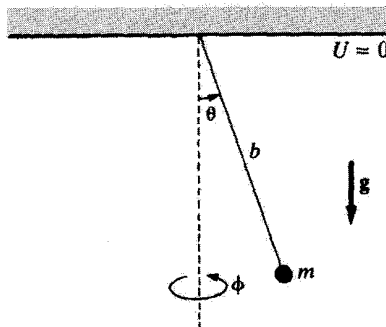
به این ترتیب، بدیهی است که جواب مربوط به مختصه چرخه‌ای به محاسبه انتگرال معین می‌انجامد. در نتیجه، فرمولبندی بنیادی هامیلتون مخصوصاً برای بررسی مسائلی که در آنها یک یا چند مختصه چرخه‌ای اند کاملاً مناسب است. ساده‌ترین جواب ممکن برای یک مسئله در صورتی به دست می‌آید که بشود آن را به طریقی فرمولبندی کرد که تمام مختصه‌ها چرخه‌ای باشند. در این صورت همه مختصه‌ها به شکلی بدیهی مانند مورد معادله (۱۷۹.۶) توصیف می‌شوند. در واقع یافتن تبدیلهایی که تمام مختصه‌ها را چرخه‌ای کنند، امکانپذیر است<sup>۱</sup>، و این روشها طبیعتاً به یک فرمولبندی دینامیکی می‌انجامد که مخصوصاً برای بنیاد نهادن نظریه‌های نوین ماده مفیدند. اما، بحث کلی در خصوص این مباحث از حوصله این کتاب خارج است.<sup>۲</sup>

### مثال ۱۰.۶

با بهره‌گیری از روش هامیلتونی، معادلات حرکت آونگی کروی به جرم  $m$  و طول  $b$  را بیابید (شکل ۸.۶).

حل: مختصات تعمیم‌یافته عبارت‌اند از  $\theta$  و  $\phi$ . انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mb^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2$$



شکل ۸.۶

۱. تبدیلهایی از این نوع را کارل گوستاو ژاکوبی (۱۸۵۱-۱۸۰۴) ابداع کرد. پژوهشهای ژاکوبی دامنه بهره‌وری روشهای هامیلتون را به‌طور وسیعی بسط داد و این ابداعات را نظریه هامیلتون-ژاکوبی می‌گویند.
۲. مثلاً نگاه کنید به

تنها نیروی وارد بر آونگ گرانی است، و پتانسیل صفر را در نقطهٔ آویز آونگ تعریف می‌کنیم.

$$U = -mgb \cos \theta$$

پس تکانه‌های تعمیم‌یافته عبارت‌اند از

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb^2 \dot{\theta} \quad (۱۸۰.۶)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mb^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (۱۸۱.۶)$$

می‌توانیم معادلات (۱۸۰.۶) و (۱۸۱.۶) را به‌ازای  $\theta$  و  $\phi$  برحسب  $p_\theta$  و  $p_\phi$  حل کنیم. هامیلتونی را از معادلهٔ (۱۵۵.۶) یا از  $H = T + U$  تعیین می‌کنیم [ازیرا شرایط مربوط به معادلهٔ (۱۳۰.۶) برقرار است].

$$H = T + U$$

$$= \frac{1}{2} mb^2 \frac{p_\theta^2}{(mb^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{mb^2 \sin^2 \theta p_\phi^2}{(mb^2 \sin^2 \theta)^2} - mgb \cos \theta$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2mb^2} + \frac{p_\phi^2}{2mb^2 \sin^2 \theta} - mgb \cos \theta$$

معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mb^2}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mb^2 \sin^2 \theta}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{mb^2 \sin^4 \theta} - mgb \sin \theta$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

چون  $\phi$  چرخه‌ای است، تکانهٔ  $p_\phi$  حول محور تقارن ثابت است.

۱۱.۶ نظریه‌های پیرامون متغیرهای دینامیکی و محاسبات وردشی در فیزیک ما ابتدا معادلات حرکت لاگرانژ را با بیان اصل هامیلتون به‌صورت یک انتگرال وردشی و آنگاه با استفاده از نتایج فصل پیشین برای حساب وردشی، به‌دست آوردیم. چون این روش و کاربرد آن

به این ترتیب از هم جدا شده بودند، شاید بیان مجدد استدلال مربوط به آن به طریقی منظم اما مختصر، ارزشمند باشد.

اصل هامیلتون با عبارت زیر بیان می شود

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0 \quad (182.6)$$

با به کارگیری شگرد وردشی که در بخش ۷.۵ مشخص شد، داریم

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = 0$$

آنگاه ادعا می کنیم که  $\delta q_j$  و  $\delta \dot{q}_j$  مستقل نیستند، از این رو نظم عمل وردش و دیفرانسیل گیری زمانی را می توان معاوضه کرد

$$\delta \dot{q}_j = \delta \left( \frac{dq_j}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta q_j \quad (183.6)$$

انتگرال تغییر یافته (بعد از انتگرال گیری جزء به جزء که در آن  $\delta q_j$  ها در نقاط انتهایی برابر صفر گرفته می شوند) چنین خواهد شد

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0 \quad (184.6)$$

این شرط که  $\delta q_j$  ها وردشهای مستقل باشند فوراً به معادلات لاگرانژ منجر می شود.

در اصل هامیلتون، که در معادله (۱۸۲.۶) به کمک انتگرال وردشی بیان شد، لاگرانژی تابعی است از مختصات تعمیم یافته و سرعتهای تعمیم یافته. اما فقط  $q_j$  ها متغیرهای مستقل دانسته می شوند؛ سرعتهای تعمیم یافته صرفاً مشتقهای زمانی  $q_j$  به شمار می آیند. وقتی این انتگرال به شکل معادله (۱۸۴.۶) کاهش پیدا می کند، می گوئیم که  $\delta q_j$  ها وردشهای مستقل اند؛ بدینسان انتگرالده باید عیناً صفر شود، و معادلات لاگرانژ به دست می آید. بنابراین ممکن است این پرسش را مطرح کنیم: از آنجا که شرایط اولیه حرکت دینامیکی سیستم را به طور کامل تعیین می کنند، معنی وردشهای  $\delta q_j$  چیست؟ شاید یک پاسخ کافی این باشد که متغیرها را باید در محدوده قیدهای معینی که از لحاظ هندسی شدنی است در نظر گرفت-گرچه از لحاظ دینامیکی امکانپذیر نباشند؛ یعنی، وقتی از یک روش وردشی بهره می گیریم تا معادلات لاگرانژ را به دست آوریم، خوب است موقتاً از این نکته که با سیستمی فیزیکی سروکار داریم که حرکتش به طور کامل تعیین می شود و دستخوش هیچگونه وردشی نیست چشم پوشیم، و به جای آن فقط یک مسئله ریاضی مجرد را



بررسی کنیم. در واقع، هرگونه محاسبهٔ وردشی مربوط به فرایندی فیزیکی باید در قالب همین روح انجام پذیرد. در روند پذیرش این دیدگاه، نباید خیلی هم نگران این نکته باشیم که شگرد وردشی ممکن است مغایر برخی خواص فیزیکی شناخته شدهٔ سیستم باشد. (مثلاً در گذر از مسیر واقعی به مسیر تغییر یافته انرژی عموماً پایسته نیست.) محاسبات وردشی فقط راه‌حلهای ممکن گوناگون مسئله را می‌آزماید و روشی را برای گزینش جواب صحیح پیش پای ما می‌نهد.

معادلات بنیادی حرکت را نیز می‌توان مستقیماً از یک محاسبهٔ وردشی به دست آورد که بر شالودهٔ اصل هامیلتون به اصطلاح اصلاح شده استوار است. تابع لاگرانژی را می‌توان این‌طور بیان کرد [معادله (۱۵۳.۶)]

$$L = \sum_j p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t) \quad (153.6)$$

و گزارهٔ اصل هامیلتون که در بطن معادله (۱۸۲.۶) قرار دارد را می‌توان به صورت زیر اصلاح کرد

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_j p_j \dot{q}_j - H \right) dt = 0 \quad (182.6)$$

با انجام عملیات وردشی طبق روش استاندارد، به دست می‌آوریم

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left( p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) dt = 0 \quad (187.6)$$

در فرمولبندی هامیلتونی  $q_j$  و  $p_j$  را مستقل می‌دانیم.  $\dot{q}_j$ ‌ها در اینجا نیز از  $q_j$ ‌ها مستقل نیستند، از این رو معادله (۱۸۳.۶) را می‌توان برای بیان جملهٔ اول در معادله (۱۸۷.۶)، به صورت زیر، به کار گرفت

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \delta \dot{q}_j dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \frac{d}{dt} \delta q_j dt$$

جزء به جزء انتگرال می‌گیریم، جملهٔ انتگرال گرفته شده صفر می‌شود، و داریم

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \delta q_j dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \dot{p}_j \delta q_j dt \quad (188.6)$$

پس معادله (۱۸۷.۶) چنین می‌شود

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left\{ \left( \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left( \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right\} dt = 0 \quad (189.6)$$

اگر  $\delta q_j$  و  $\delta p_j$  وردشهای مستقلی را نمایش دهند، در این صورت جمله‌های داخل پراتز باید جداگانه صفر شوند و معادلات بنیادی هامیلتون به دست می‌آید.

در بخش قبل با نوشتن دو عبارت مختلف برای دیفرانسیل کامل هامیلتونی [معادلات (۱۵۷.۶) و (۱۵۹.۶)] و آنگاه برابرقاردادن ضرایب  $dq_j$  و  $dp_j$ ، معادلات بنیادی را به دست آوردیم. اگر  $q_j$  و  $p_j$  متغیرهای مستقل باشند، این روش معتبر و صادق است. بنابراین، هم در استنتاجهای قبلی و هم در حساب وردشی که اکنون ارائه شد، با جستجو کردن در ماهیت مستقل مختصات تعمیم‌یافته و تکانه‌های تعمیم‌یافته، معادلات بنیادی را به دست آوردیم.

مختصات و تکانه‌ها به معنی واقعی کلمه، عملاً «مستقل» نیستند. زیرا اگر وابستگی زمانی هر یک از مختصات معلوم باشد،  $q_j = q_j(t)$ ، در این صورت مسئله به طور کامل حل می‌شود. سرعتهای تعمیم‌یافته را می‌توان از عبارت زیر محاسبه کرد

$$\dot{q}_j(t) = \frac{d}{dt} q_j(t)$$

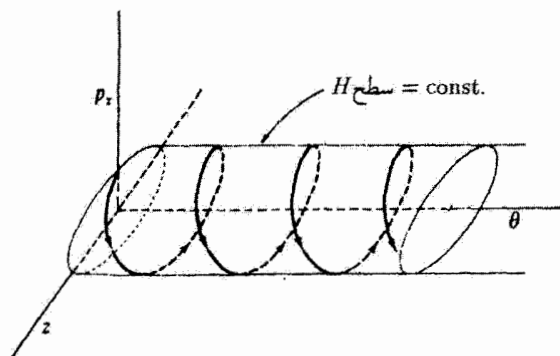
و تکانه‌های تعمیم‌یافته عبارت‌اند از

$$p_j = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

نکته اساسی این است که، در حالی که  $q_j$  و  $\dot{q}_j$  از طریق یک مشتق زمانی ساده مستقل از شیوه رفتار سیستم به هم ربط پیدا می‌کنند، روابط بین  $q_j$  و  $p_j$  عبارت‌اند از خود معادلات حرکت. بنابراین، یافتن روابطی که  $q_j$  و  $p_j$ ها را به هم مربوط می‌کنند (و به آن وسیله استقلال فرض شده بین این کمیتها را از بین می‌برند) در حکم حل مسئله است.

## ۱۲.۶ فضای فاز و قضیه لیوویل (اختیاری)

قبلاً خاطر نشان کردیم که می‌توان مختصات تعمیم‌یافته را برای مشخص کردن یک فضای پیکربندی  $s$  بعدی که هر نقطه آن حالت معینی از سیستم را نمایش می‌دهد، به کار برد. به همین ترتیب، تکانه‌های تعمیم‌یافته  $p_j$  فضای تکانه  $s$  بعدی را که هر نقطه آن نشان‌دهنده وضعیت معینی از حرکت سیستم است، مشخص می‌کنند. نقطه معینی در فضای پیکربندی فقط موضع هر یک از ذرات سیستم را مشخص می‌کند؛ و در ارتباط با حرکت ذرات هیچ چیزی را نمی‌توان از آن استنباط کرد. در مورد فضای تکانه عکس این مطلب صادق است. در فصل ۳، به سودمند بودن نمایش هندسی دینامیک سیستمهای نوسانی ساده به وسیله نمودارهای فاز، پی بردیم. اگر در سیستمهای



شکل ۹.۶

دینامیکی پیچیده‌تر از این مفهوم سود جوییم، در این صورت یک فضای ۲s بعدی متشکل از  $q_j$  و  $p_j$  به ما امکان می‌دهد که هم مواضع و هم تکانه‌های تمامی ذرات را نمایش دهیم. این تعمیم را فضای فاز هامیلتونی یا، به زبان ساده فضای فاز، می‌گویند.<sup>۱</sup>

### مثال ۱۱.۶

نمودار فاز را برای ذره مثال ۹.۶ ترسیم کنید.

حل: این ذره دو درجه آزادی  $(\theta, z)$  دارد. بنابراین فضای فاز مربوط به این مثال عملاً چهار بعدی است:  $\theta, z, p_\theta, p_z$ . اما  $p_\theta$  ثابت است و بنابراین می‌توان آن را حذف کرد. در راستای  $z$ ، حرکت هماهنگ ساده است، و از این رو تصویر مسیر فاز بر صفحه  $z-p_z$  به ازای هر انرژی کل  $H$  دقیقاً یک بیضی است. چون  $\dot{\theta} = \text{const.}$ ، مسیر فاز باید نمایشگر حرکتی باشد که به طور یکنواخت بر حسب  $\theta$  افزایش پیدا می‌کند. بدینسان مسیر فاز بر روی هر سطح ثابت  $H$  عبارت است از یک مارپیچ بیضی یکنواخت (شکل ۹.۶). ■

اگر، در زمان معینی، مواضع و تکانه‌های تمام ذرات در یک سیستم معلوم باشند، در این صورت با انتخاب این کمیتها به عنوان شرایط اولیه حرکت بعدی سیستم به طور کامل معین می‌شود؛ یعنی، با شروع از نقطه  $(q_j(0), p_j(0))$  در فضای فاز، نقطه نماینده‌ای که سیستم را توصیف می‌کند

۱. قبلاً در نمودارهای فاز موضع را بر حسب کمیتی متناسب با سرعت ترسیم کردیم. در فضای فاز هامیلتونی، کمیت اخیر به تکانه تعمیم یافته تبدیل می‌شود.

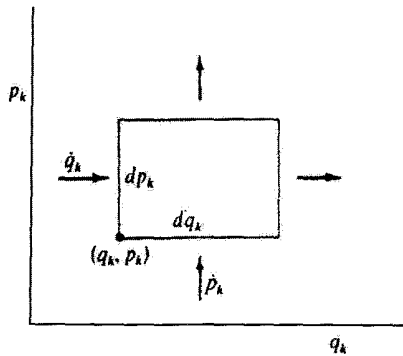
در امتداد مسیر فاز منحصر به فردی حرکت می‌کند. علی‌الاصول، همواره می‌توان این روش را دنبال کرد و به جواب رسید. اما اگر تعداد درجات آزادی سیستم زیاد باشد، در این صورت ممکن است مجموعه معادلات حرکت خیلی پیچیده‌تر از آن باشد که بتوان آنها را در مدت زمانی معقول حل کرد. به علاوه، در مورد سیستمهای پیچیده، مانند مقداری گاز، تعیین شرایط اولیه برای هر مولکول تشکیل‌دهنده آن عملاً ناممکن است. از آنجا که نمی‌توانیم نقطه‌ای خاص در فضای فاز را مشخص کنیم که در هر زمان معین نمایشگر شرایط واقعی باشد، باید رهیافت دیگری را برای مطالعه دینامیک چنین سیستمهایی طراحی کنیم. بنابراین به نقطه آغاز مکانیک آماری می‌رسیم. فرمولبندی هامیلتونی دینامیک برای مطالعه آماری سیستمهای پیچیده ایده‌آل است. این موضوع را اکنون تا اندازه‌ای با اثبات قضیه‌ای که برای چنین پژوهشهایی نقش بنیادی دارد نشان می‌دهیم. در مورد مجموعه بزرگی از ذرات — مثلاً مولکولهای گاز — نمی‌توانیم نقطه خاصی را در فضای فاز مشخص کنیم که دقیقاً سیستم را تعریف کند. اما می‌توانیم فضای فاز را با مجموعه‌ای از نقاط پر کنیم، که هر یک از آنها نشانگر یک وضعیت ممکن برای سیستم باشد؛ یعنی، تعداد زیادی سیستم فرض می‌کنیم (همه سازگار با قیدهایی معلوم)، که هر یک از آنها به طور قابل‌نصوری بتواند یک سیستم واقعی باشد. چون نمی‌توانیم در خصوص جزئیات حرکت ذرات در سیستم واقعی بحث کنیم، در عوض پیرامون مجتمعی از سیستمهای معادل به بحث می‌پردازیم. هر نقطه نماینده در فضای فاز با تک سیستمی از این مجتمع متناظر است، و حرکت یک نقطه خاص حرکت مستقل آن سیستم را نمایش می‌دهد. از این رو هیچ دو مسیر فازی هرگز نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند. می‌توانیم نقاط نماینده را به قدر کافی متعدد در نظر بگیریم که بشود یک چگالی در فاز،  $\rho$ ، تعریف کنیم. عناصر حجم فضای فاز که این چگالی را تعریف می‌کنند باید چندان بزرگ باشند که تعداد زیادی نقطه نماینده در آنها بگنجد، اما به اندازه کافی هم کوچک باشند که چگالی به طور پیوسته تغییر کند. تعداد سیستمهایی که نقاط نماینده آنها،  $N$ ، در داخل حجم  $dv$  از فضای فاز قرار می‌گیرد عبارت است از

$$N = \rho dv \quad (۱۹۰.۶)$$

که در آن

$$dv = dq_1 dq_2 \dots dq_s dp_1 dp_2 \dots dp_s \quad (۱۹۱.۶)$$

مانند قبل،  $s$  عبارت است از تعداد درجات آزادی هر سیستم واقع در مجتمع.



شکل ۱۰.۶

عنصر مساحتی را در صفحه  $q_k-p_k$  در فضای فاز در نظر بگیرید (شکل ۱۰.۶). تعداد نقاط نماینده که در امتداد ضلع سمت چپ این مساحت در واحد زمان حرکت می‌کنند عبارت است از

$$\rho \frac{dq_k}{dt} dp_k = \rho \dot{q}_k dp_k$$

و تعدادی که در واحد زمان در امتداد ضلع پایینی حرکت می‌کنند، عبارت است از

$$\rho \frac{dp_k}{dt} dq_k = \rho \dot{p}_k dq_k$$

به طوری که تعداد کل نقاط نماینده‌ای که در واحد زمان به داخل مساحت  $dq_k dp_k$  وارد می‌شوند چنین است

$$\rho(\dot{q}_k dp_k + \dot{p}_k dq_k) \quad (۱۹۲.۶)$$

بنابر بسط سری تیلور، تعداد نقاط نماینده‌ای که در واحد زمان از این مساحت خارج می‌شوند (تقریباً) عبارت است از

$$\left( \rho \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) dq_k \right) dp_k + \left( \rho \dot{p}_k + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) dp_k \right) dq_k \quad (۱۹۳.۶)$$

بنابراین افزایش کل چگالی در  $dq_k dp_k$  در واحد زمان عبارت است از تفاوت بین معادلات (۱۹۲.۶) و (۱۹۳.۶).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dq_k dp_k = - \left( \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) \right) dq_k dp_k \quad (۱۹۴.۶)$$

طرفین را بر  $dq_k dp_k$  تقسیم می‌کنیم و این عبارت را روی تمام مقادیر ممکن  $k$  جمع می‌بندیم، می‌رسیم به

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \rho \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k + \rho \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) = 0 \quad (۱۹۵.۶)$$

از معادلات هامیلتون [معادلات (۱۶۰.۶) و (۱۶۱.۶)]، داریم (در صورتی که مشتقات جزئی دوم  $H$  پیوسته باشند)

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = 0 \quad (۱۹۶.۶)$$

به طوری که معادله (۱۹۵.۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) = 0 \quad (۱۹۷.۶)$$

اما این عبارت همان مشتق زمانی کامل  $\rho$  است، از این رو نتیجه می‌گیریم که

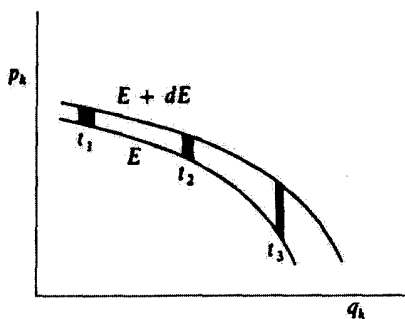
$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 0} \quad (۱۹۸.۶)$$

بنابراین نتیجه مهم، که آن را قضیه لیوویل<sup>۱</sup> می‌گویند، چگالی نقاط نماینده در فضای فاز که متناظر با حرکت سیستمی از ذرات است در خلال حرکت ثابت باقی می‌ماند. باید تأکید شود که تنها به این علت توانسته‌ایم ناوردایی چگالی  $\rho$  را برقرار کنیم که مسئله در فضای فاز فرمولبندی شد؛ قضیه معادلی برای فضای پیکربندی وجود ندارد. پدیشان باید از دینامیک هامیلتونی (و نه دینامیک لاگرانژی) بهره‌گیریم تا دربارهٔ هنگردهای موجود در مکانیک آماری بحث کنیم.

مطابق قضیه لیوویل، هرگاه دو سطح (عملاً فوق سطحهای فضای  $2s$  بعدی) متناظر با انرژیهای  $E$  و  $E + dE$  را تصور کنیم و چگالی نقاط نماینده در ناحیه کوچکی بین این سطوح را در نظر بگیریم،<sup>۲</sup> در این صورت همراه با حرکت سیستم، این چگالی نسبت به زمان ثابت باقی می‌ماند. در شکل ۱۱.۶ این دو سطح و ناحیه‌ای به وسعت  $\Delta q_k \Delta p_k$  را در یک زمان معین،  $t_1$ ، مشاهده می‌کنید. در زمانهای بعد،  $t_2$  و  $t_3$ ، باید مقادیر نسبی  $\Delta q_k$  و  $\Delta p_k$  مطابق شکل تغییر کنند تا

۱. در سال ۱۸۳۸ به وسیله ژوزف لیوویل (۱۸۸۲-۱۸۰۹) منتشر شد.

۲. هنگردی که برای آن چگالی فاز جز در ناحیه بین  $E$  و  $E + dE$  برابر صفر است، توسط گیبس به نام هنگرد میکروبتدای نامیده شد.



شکل ۱۱.۶

چگالی فاز را ثابت نگه دارند. فوراً می‌توان از این نکته برای، مثلاً کانونی‌کردن باریکه‌های الکترونها یا سایر ذرات باردار بهره گرفت (مسئله ۳۶.۶).

قضیه لیوویل نه‌تنها برای دانه‌های تشکیل‌دهنده ذرات میکروسکوپی، مثلاً در مکانیک آماری سیستم‌های گازی و خواص کانونی‌کنندگی شتاب‌دهنده‌های ذره باردار مهم است، بلکه در برخی سیستم‌های ماکروسکوپی نیز دارای اهمیت است. مثلاً در دینامیک ستاره‌ای این مسئله وارونه می‌شود و از طریق بررسی تابع توزیع ستارگان در کهکشان،  $\rho$ ، پتانسیل میدان گرانشی کهکشانی،  $U$ ، را می‌توان استنتاج کرد.

### ۱۳.۶ قضیه ویریا

خوب است از نتیجه مهم دیگری که ماهیت آماری دارد یاد کنیم. مجموعه ذراتی را در نظر بگیرید که بردارهای مکانشان  $\mathbf{r}_\alpha$  و تکانه آنها  $\mathbf{p}_\alpha$  هر دو کراندار باشند (یعنی، در همه زمانها متناهی باشند). کمیت زیر را تعریف می‌کنیم.

$$S \equiv \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \quad (۱۹۹.۶)$$

مشق زمانی  $S$  عبارت است از

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{\alpha} (\mathbf{p}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} + \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha}) \quad (۲۰۰.۶)$$

اگر مقدار میانگین  $dS/dt$  را در بازه زمانی  $\tau$  محاسبه کنیم، می‌یابیم

$$\left\langle \frac{dS}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{dS}{dt} dt = \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau} \quad (۲۰۱.۶)$$

اگر حرکت سیستم دوره‌ای (تناوبی) باشد — او اگر  $\tau$  مضرب صحیحی از دوره تناوب باشد — در این صورت  $S(\tau) = S(0)$ ، و  $\langle \dot{S} \rangle < 0$  صفر می‌شود. اما حتی اگر سیستم هیچگونه آثار دوره‌ای بودن را نشان ندهد، باز هم — چون  $S$  بنا بر فرض یک تابع کراندار است — با اختیار کردن به قدر کافی طولانی زمان  $\tau$ ، می‌توانیم  $\langle \dot{S} \rangle$  را هر قدر که خواهیم کوچک کنیم. بنابراین میانگین زمانی سمت راست معادله (۲۰۰.۶) را همواره می‌توان صفر کرد (یا دست‌کم به صفر نزدیک کرد). از این رو، در این حد، داریم

$$\left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \right\rangle = - \left\langle \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \right\rangle \quad (202.6)$$

در سمت چپ این معادله، عبارت  $\mathbf{p}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}$  دویبار انرژی جنبشی است. در سمت راست،  $\dot{\mathbf{p}}_{\alpha}$  همان نیروی  $\mathbf{F}_{\alpha}$  وارد بر ذره  $\alpha$  است. از این رو

$$\left\langle 2 \sum_{\alpha} T_{\alpha} \right\rangle = - \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \right\rangle \quad (203.6)$$

جمع روی  $T_{\alpha}$  عبارت است از انرژی جنبشی کل سیستم،  $T$ ، از این رو به نتیجه کلی زیر می‌رسیم

$$\boxed{\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \right\rangle} \quad (204.6)$$

سمت راست این معادله را کلاؤسیوس<sup>۱</sup> ویريال سیستم نامیده، و بنا بر قضیه ویريال: میانگین انرژی جنبشی سیستمی از ذرات با ویريال آن برابر است.

### مثال ۱۲.۶

گاز کاملی شامل  $N$  اتم را در ظرفی به حجم  $V$ ، فشار  $P$ ، و دمای مطلق  $T_1$  (برای اینکه با انرژی جنبشی  $T$  اشتباه نشود) در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه ویريال معادله حالت را برای یک گاز کامل استخراج کنید.

حل: بنا بر قضیه بسیم مساوی، میانگین انرژی جنبشی هر اتم در گاز کامل عبارت است از  $\frac{3}{2}kT_1$ ، که در آن  $k$  ثابت بولتزمن است. میانگین انرژی جنبشی کل چنین است

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} N k T_1 \quad (205.6)$$

۱. رودلف زولیوس امانوئل کلاؤسیوس (۱۸۲۲-۱۸۸۸)، فیزیکدان آلمانی و یکی از بنیانگذاران ترمودینامیک.



سمت راست قضیه ویریال [معادله (۲۰۴.۶)] شامل نیرو،  $\mathbf{F}_\alpha$ ، است. در مورد یک گاز کامل ایده‌آل، هیچ نیروی برهم‌کنشی بین اتمها پیش نمی‌آید. تنها نیروی وارد بر سیستم به‌وسیله نیروی قیدی دیواره‌ها نمایش داده می‌شود. اتمها به‌طورکشسان از دیواره‌ها، که بر اتمها فشار وارد می‌آورند، وامی‌جهند.

از آنجا که فشار عبارت است از نیروی وارد بر واحد سطح، نیروی دیفرانسیلی لحظه‌ای در یک مساحت دیفرانسیلی را به‌طریق زیر پیدا می‌کنیم

$$d\mathbf{F}_\alpha = -nPdA \quad (206.6)$$

که  $n$  عبارت است از بردار یکه عمود بر سطح  $dA$  و در راستای بیرون سو. سمت راست قضیه ویریال به‌این صورت درمی‌آید

$$-\frac{1}{\gamma} \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha \right\rangle = \frac{P}{\gamma} \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dA \quad (207.6)$$

برای ربط‌دادن انتگرال سطحی به انتگرال حجمی از قضیه واگرایی بهره می‌گیریم

$$\int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dA = \int \nabla \cdot \mathbf{r} dV = 3 \int dV = 3V \quad (208.6)$$

نتیجه قضیه ویریال عبارت است از

$$\frac{3}{\gamma} NkT_1 = \frac{3PV}{\gamma}$$

$$NkT_1 = PV \quad (209.6)$$

■ که همان قانون گاز ایده‌آل (کامل) است.

اگر بتوان نیروهای  $\mathbf{F}_\alpha$  را از پتانسیلهای  $U_\alpha$  استخراج کرد، دراین صورت معادله (۲۰۴.۶) را می‌توان این‌طور بازنویسی کرد

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\gamma} \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha \cdot \nabla U_\alpha \right\rangle \quad (210.6)$$

از موارد جالب توجه، مورد دو ذره‌ای است که طبق یک نیروی مرکزی با قانون توانی،  $F \propto r^n$ ، برهم‌کنش دارند. در این صورت پتانسیل به این شکل خواهد بود

$$U = kr^{n+1} \quad (211.6)$$

بنابراین

$$\mathbf{r} \cdot \nabla U = r \frac{dU}{dr} = k(n+1)r^{n+1} = (n+1)U \quad (212.6)$$

و قضیهٔ ویریال به صورت زیر درمی‌آید

$$\langle T \rangle = \frac{(n+1)}{2} \langle U \rangle \quad (213.6)$$

اگر ذره برهم‌کنش گرانشی داشته باشد، پس  $n = -2$ ، و

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle, \quad n = -2$$

این رابطه برای محاسبهٔ، مثلاً، مسائل مربوط به انرژی در حرکت سیاره‌ای، مفید است.

### مسائل

۱.۶ قرصی بدون لغزش در یک صفحهٔ افقی می‌غلتد. صفحهٔ قرص قائم باقی می‌ماند، اما آزاد است که حول یک محور قائم بچرخد. برای توصیف حرکت این قرص چه مختصات تعمیم‌یافته‌ای می‌توان به‌کار برد؟ معادلهٔ دیفرانسیلی بنویسید که قید غلتش را توصیف کند. آیا این معادله انتگرال‌پذیر است؟ پاسخ خود را به‌کمک یک استدلال فیزیکی توجیه کنید. آیا این قید هولونوم است؟

۲.۶ جسمی از ارتفاع  $19.6\text{m}$  رها می‌شود و ۲ ثانیه بعد به زمین برخورد می‌کند. معادلهٔ مسافت سقوط  $s$  در طی زمان  $t$  می‌تواند احتمالاً یکی از شکل‌های زیر را داشته باشد ( $g$  در این سه عبارت یکاهای مختلفی دارد)،

$$s = gt, \quad s = \frac{1}{4}gt^2, \quad s = \frac{1}{4}gt^3$$

از تمام آنها به‌ازای  $t = 2\text{s}$  مقدار  $s = 19.6\text{m}$  به‌دست می‌آید. نشان دهید که شکل صحیح معادله به کمینه‌ای برای انتگرال در اصل هامیلتون می‌انجامد.

۳.۶ کره‌ای به شعاع  $\rho$  مقید است که بدون لغزش بر روی نیمه پایینی سطح داخلی یک استوانه توخالی، به شعاع داخلی  $R$ ، بلغند. تابع لاگرانژی، معادله قید، و معادلات حرکت لاگرانژ را تعیین کنید. بسامد نوسانهای کوچک را بیابید.

۴.۶ ذره‌ای تحت تأثیر نیروی  $f = -Ar^{\alpha-1}$  که راستای آن به سوی مبدأ است، در صفحه‌ای حرکت می‌کند؛  $A$  و  $\alpha$  (مخالف  $0$  یا  $1$ ) ثابت‌اند. مختصات تعمیم یافته مناسبی اختیار کنید، و انرژی پتانسیل را در مبدأ صفر بگیرید. معادلات لاگرانژی حرکت را بیابید. آیا تکانه زاویه‌ای حول مبدأ پایسته است؟ آیا انرژی کل پایسته است؟

۵.۶ صفحه‌ای قائم در یک میدان گرانشی در نظر بگیرید. فرض کنید مبدأ یک دستگاه مختصات در نقطه‌ای در این صفحه واقع باشد. ذره‌ای به جرم  $m$  تحت تأثیر گرانی و تحت تأثیر یک نیروی اضافی  $f = -Ar^{\alpha-1}$ ، در راستای روبه مبدأ در این صفحه حرکت می‌کند ( $r$  فاصله از مبدأ است؛  $A$  و  $\alpha$  [مخالف  $0$  یا  $1$ ] ثابت‌اند). مختصات تعمیم یافته مناسبی اختیار کنید، و فرض کنید انرژی پتانسیل گرانشی در امتداد خطی افقی که از مبدأ می‌گذرد، صفر است. معادلات لاگرانژی حرکت را بیابید. آیا تکانه زاویه‌ای حول مبدأ پایسته است؟ توضیح دهید.

۶.۶ حلقه‌ای به جرم  $m$  و شعاع  $R$  بدون لغزش بر سطح شیب‌داری به جرم  $M$  به پایین می‌غلند؛ زاویه این سطح با افق  $\alpha$  است. اگر سطح شیب‌دار بتواند بدون اصطکاک در امتداد یک سطح افقی بلغزد، معادلات لاگرانژ و انتگرالهای حرکت را پیدا کنید.

۷.۶ آونگ مضاعفی از دو آونگ ساده تشکیل می‌شود؛ یکی از آونگها از وزنه دیگری آویخته شده است. اگر طول این دو آونگ و جرم وزنه‌های آنها با هم برابر باشد و اگر هر دو مقید باشند که در صفحه واحدی حرکت کنند، معادلات حرکت لاگرانژ این سیستم را بیابید.

۸.۶ ناحیه‌ای از فضا را در نظر بگیرید که یک صفحه آن را تقسیم کرده است. انرژی پتانسیل ذره‌ای در ناحیه ۱ برابر  $U_1$  و در ناحیه ۲ برابر  $U_2$  است. اگر ذره‌ای به جرم  $m$  و سرعت  $v_1$  در ناحیه ۱، از ناحیه ۱ به داخل ناحیه ۲ برود به طوری که مسیر آن وقتی در ناحیه ۱ واقع است با عمود بر صفحه جدایی زاویه  $\theta_1$  و وقتی در ناحیه ۲ واقع است با عمود بر صفحه زاویه  $\theta_2$  را بسازد، نشان دهید که

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \left( 1 + \frac{U_1 - U_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

که  $T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$  مشابه اپتیکی این مسئله کدامست؟

۹.۶ قرصی به جرم  $M$  و شعاع  $R$  بدون لغزش بر سطح شیب‌داری که با افق زاویه  $\alpha$  می‌سازد،

به پایین می‌غلتد. این قرص دارای محوری بی‌وزن با شعاعی قابل چشمپوشی است. از این محور آونگ ساده‌ای به طول  $l < R$  و به جرم و وزن  $m$ ، آویخته می‌شود. فرض کنید حرکت آونگ در صفحه قرص صورت می‌گیرد، در این صورت معادلات لاگرانژ سیستم را بیابید.

۱۰.۶ دو آجر، هر یک به جرم  $M$ ، به وسیلهٔ ریسمان غیرقابل انبساطی به طول  $l$  به هم بسته شده‌اند. یکی از آجرها روی سطح افقی صافی قرار داده شده، و دیگری از طرف دیگر آویزان شده است، نخ از روی یک قرقرهٔ بدون اصطکاک عبور می‌کند. حرکت این سیستم را: الف) وقتی جرم نخ قابل چشمپوشی باشد و ب) هرگاه جرم نخ  $m$  باشد، پیدا کنید.

۱۱.۶ ذره‌ای به جرم  $m$  مقید است که روی دایره‌ای به شعاع  $R$  حرکت کند. این دایره در فضا حول یکی از نقاط واقع بر دایره می‌چرخد؛ این نقطه ثابت است. چرخش در صفحهٔ دایره و با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega$  صورت می‌گیرد. نشان دهید که در غیاب نیروی گرانشی حرکت ذره حول یک انتهای قطری که از نقطهٔ آویز و مرکز دایره می‌گذرد شبیه حرکت آونگ تختی در یک میدان گرانشی یکنواخت است. توضیح دهید که چرا این نتیجه معقول است.

۱۲.۶ ذره‌ای به جرم  $m$  روی صفحهٔ صافی در حالت سکون است. این صفحه تا یک زاویهٔ میل  $\theta$  و با آهنگ  $\alpha$  (در  $t = 0$ ،  $\theta = 0$ ) بالا برده می‌شود، که سبب می‌شود ذره به سوی پایین صفحه به حرکت درآید. حرکت ذره را تعیین کنید.

۱۳.۶ آونگ ساده‌ای به طول  $b$  و وزنه‌ای به جرم  $m$  به تکیه‌گاهی بی‌جرمی متصل است که با شتاب ثابت  $a$  به‌طور افقی حرکت می‌کند. تعیین کنید: الف) معادلات حرکت و ب) دورهٔ تناوب نوسانهای کوچک را.

۱۴.۶ آونگ ساده‌ای به طول  $b$  و وزنه‌ای به جرم  $m$  به تکیه‌گاهی متصل است که با شتاب ثابت  $a$  به‌طور قائم به بالاسو حرکت می‌کند. تعیین کنید: الف) معادلات حرکت و ب) دورهٔ تناوب نوسانهای کوچک را.

۱۵.۶ آونگی تشکیل شده است از جرم  $m$  که به وسیلهٔ یک فنر بدون جرم که طول آن در حالت عادی (بدون کشش)  $b$  و ثابت فنرش  $k$  است، آویخته شده است. معادلات حرکت لاگرانژ را بیابید.

۱۶.۶ نقطهٔ آویز آونگ ساده‌ای به جرم  $m$  و طول  $b$  به‌طور افقی به‌صورت  $x = a \sin \omega t$  به حرکت واداشته شده است. معادلهٔ حرکت آونگ را بیابید.

۱۷.۶ ذره‌ای به جرم  $m$  می‌تواند در امتداد سیم  $AB$  که فاصلهٔ قائمش از مبدأ  $O$  برابر  $h$  است، آزادانه بلغزد (شکل ۶.الف). خط  $OC$  با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\theta = \omega$  حول مبدأ می‌چرخد. موضع ذره را می‌توان برحسب زاویهٔ  $\theta$  و فاصلهٔ  $q$  تا نقطهٔ  $C$  توصیف کرد. اگر ذره تحت تأثیر

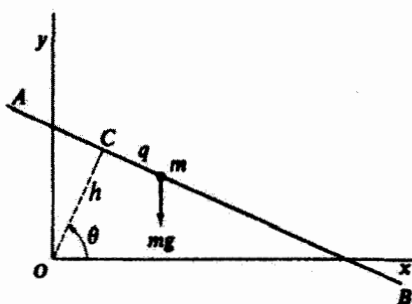
نیروی گرانشی باشد، و اگر شرایط اولیه عبارت باشند از

$$\theta(0) = 0, q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0$$

نشان دهید که وابستگی زمانی مختصه  $q$  عبارت است از

$$q(t) = \frac{g}{2\omega^2}(\cosh \omega t - \cos \omega t)$$

نتیجه را ترسیم کنید. هامیلتونی سیستم را محاسبه، و آن را با انرژی کل مقایسه کنید. آیا انرژی کل پایسته است؟

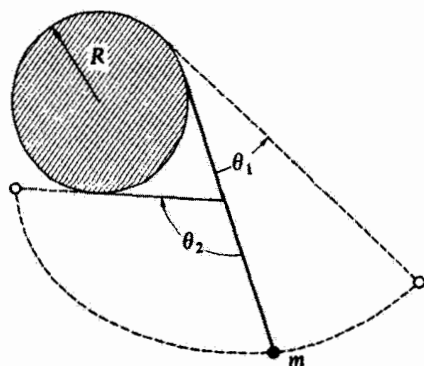


شکل ۶. الف

۱۸.۶ آونگی با اتصال جرم  $m$  به نخ غیرقابل انبساطی به طول  $l$  ساخته می‌شود. سر بالایی این نخ به بالاترین نقطه واقع بر قرصی قائم به شعاع  $R$  ( $R < l/\pi$ ) در شکل ۶. ب، متصل شده است. معادله حرکت این آونگ را به دست آورید، و بسامد نوسانهای کوچک را بیابید. خطی را پیدا کنید که حرکت زاویه‌ای حول آن در هر دو سمت به یک اندازه انجام می‌شود (یعنی،  $\theta_1 = \theta_2$ ).

۱۹.۶ دو جرم  $m_1$  و  $m_2$  ( $m_1 \neq m_2$ ) به وسیله میله صلبی به طول  $d$  و جرم قابل چشمپوشی به هم متصل شده‌اند. نخ غیرقابل انبساطی به طول  $l_1$  به  $m_1$  متصل و به نقطه آویز ثابت  $P$  بسته شده است. به همین ترتیب نیز، نخ به طول  $l_2$  ( $l_2 \neq l_1$ ) به  $m_2$  و  $P$  را به هم وصل می‌کند. معادله‌ای را به دست آورید که حرکت در صفحه  $m_1, m_2$  و  $P$  را توصیف می‌کند، و بسامد نوسانهای کوچک حول وضعیت تعادل را بیابید.

۲۰.۶ یک حلقه دایره‌ای به وسیله سه نخ، هر یک به طول  $l$ ، در یک صفحه افقی آویخته شده است؛ نخها به‌طور متقارن به حلقه متصل‌اند و به نقاط ثابتی بسته می‌شوند که در صفحه‌ای بر فراز



شکل ۶. ب

حلقه قرار دارند. در حالت تعادل هر یک از نخها قائم‌اند. نشان دهید که بسامد نوسانهای چرخشی کوچک حول محور قائمی که از مرکز حلقه می‌گذرد برابر بسامد آونگ ساده‌ای به طول  $l$  است.

۲۱.۶ ذره‌ای مقید است که (بدون اصطکاک) بر روی سیمی دایره‌ای حرکت کند؛ این سیم با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  حول قطر قائمش می‌چرخد. وضعیت تعادل ذره را بیابید، و بسامد نوسانهای کوچک حول این وضعیت را محاسبه کنید. سرعت زاویه‌ای بحرانی  $\omega = \omega_c$  را که حرکت ذره را به دو نوع مجزا تقسیم می‌کند بیابید، و آن را از دیدگاه فیزیکی تفسیر کنید.

۲۲.۶ ذره‌ای به جرم  $m$  تحت تأثیر نیروی زیر در یک بعد حرکت می‌کند:

$$F(x, t) = \frac{k}{x^2} e^{-(t/\tau)}$$

که در آن  $k$  و  $\tau$  ثابتهای مثبت‌اند. توابع لاگرانژی و هامیلتونی را محاسبه کنید. هامیلتونی و انرژی کل را مقایسه، و درخصوص پایستگی انرژی برای این سیستم بحث کنید.

۲۳.۶ ذره‌ای به جرم  $m$  را در نظر بگیرید که در یک میدان نیروی پایستار، که تابع پتانسیل آن  $U$  است، آزادانه حرکت می‌کند. تابع هامیلتونی را بیابید، و نشان دهید که معادلات بندادی حرکت به معادلات نیوتون تبدیل می‌شوند. (از مختصات قائم بهره بگیرید.)

۲۴.۶ آونگ تخت ساده‌ای را در نظر بگیرید که از جرم  $m$  تشکیل می‌شود و این جرم به نخ به طول  $l$  متصل است. پس از آنکه این آونگ به حرکت درمی‌آید، طول نخ با آهنگ ثابت زیر کوتاه می‌شود

$$\frac{dl}{dt} = -\alpha = \text{const.}$$

نقطهٔ اویز ثابت باقی می‌ماند. توابع هامیلتونی و لاگرانژی را محاسبه کنید. هامیلتونی و انرژی کل را مقایسه، و درخصوص پایستگی انرژی سیستم بحث کنید.

۲۵.۶ ذره‌ای به جرم  $m$  تحت تأثیر گرانی در امتداد ماریچ  $z = k\theta$ ,  $r = \text{const.}$  حرکت می‌کند، که  $k$  ثابت و  $z$  قائم است. معادلات هامیلتونی حرکت را به دست آورید.

۲۶.۶ هامیلتونی و معادلات هامیلتون حرکت را برای: الف) یک آونگ ساده و ب) یک ماشین آتوود ساده (تک‌قرقره) تعیین کنید.

۲۷.۶ فیزی جرمی به طول  $b$  و ثابت فنر  $k$  دو ذره به جرمهای  $m_1$  و  $m_2$  را به هم وصل می‌کند. سیستم بر روی یک میز صاف در حالت سکون قرار دارد و می‌تواند نوسان کند و بچرخد. الف) معادلات حرکت لاگرانژ را تعیین کنید.

ب) تکانه‌های تعمیم‌یافتهٔ مربوط به هر کدام از مختصه‌های چرخه‌ای کدام‌اند؟

ج) معادلات حرکت هامیلتون را تعیین کنید.

۲۸.۶ ذره‌ای به جرم  $m$  با نیرویی به مقدار  $k/r^2$  جذب یک مرکز نیرو می‌شود. با استفاده از مختصات قطبی نخت معادلات حرکت هامیلتون را بیابید.

۲۹.۶ آونگ توصیف‌شده در مسئله ۱۵.۶ را در نظر بگیرید. نقطهٔ اویز آونگ با شتاب ثابت  $a$  به‌طور قائم به بالا می‌رود.

الف) با استفاده از روش لاگرانژی معادلات حرکت را بیابید.

ب) هامیلتونی و معادلات حرکت هامیلتون را تعیین کنید.

ج) دورهٔ تناوب نوسانهای کوچک چقدر است؟

۳۰.۶ هر دو تابع پیوسته‌ای از مختصات و تکانه‌های تعمیم‌یافته مانند  $g(q_k, p_k)$  و  $h(q_k, p_k)$  را در نظر بگیرید. براکتهای پواسون بنابراین تعریف عبارت‌اند از

$$[g, h] \equiv \sum_k \left( \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right)$$

درستی خواص زیر مربوط به براکتهای پواسون را تحقیق کنید

$$\dot{q}_j = [q_j, H], \dot{p}_j = [p_j, H] \quad \text{ب) } \frac{dg}{dt} = [g, H] + \frac{\partial g}{\partial t} \quad \text{الف)}$$

$$[q_k, p_j] = \delta_{kj} \quad \text{د) } [p_k, p_j] = 0, [q_k, q_j] = 0 \quad \text{ج)}$$

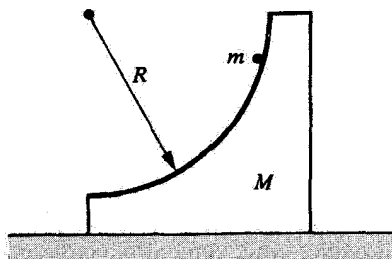
که در اینجا  $H$  هامیلتونی است. اگر براکت پواسون دو کمیت صفر شود، می‌گویند این کمیتها جابه‌جا می‌شوند. اگر براکت پواسون دو کمیت برابر واحد باشد، این کمیتها را مزدوج بندادی می‌گویند. نشان دهید

هر کمیتی که وابستگی صریح به زمان نداشته باشد و با هامیلتونی جابه‌جا شود یک ثابت حرکت سیستم به‌شمار می‌آید. صورتبندی براکت پواسون در مکانیک کوانتومی از اهمیت شایانی برخوردار است. ۳۱.۶ آونگی کروی از یک گوی به جرم  $m$  که به میله بی‌وزن و غیرقابل انعطافی به طول  $l$  متصل است، تشکیل می‌شود. سر دیگر میله آزادانه (در همه راستاها) حول نقطه ثابتی حرکت می‌کند. تابع هامیلتونی را در مختصات کروی تشکیل دهید. (اگر  $p_\varphi = 0$ ، در این صورت نتیجه مانند همان نتیجه‌ای است که برای آونگ تخت به‌دست آمد.) جمله وابسته به  $p_\varphi$  را با جمله انرژی پتانسیل معمولی ترکیب می‌کنیم تا یک پتانسیل موثر،  $V(\theta, p_\varphi)$ ، را مشخص کرده باشیم. منحنی تغییرات  $V$  را به‌صورت تابعی از  $\theta$  به‌ازای چند مقدار  $p_\varphi$ ، از جمله  $p_\varphi = 0$ ، ترسیم کنید. درباره جنبه‌های حرکت، با نشان دادن اختلاف بین  $p_\varphi = 0$  و  $p_\varphi \neq 0$ ، بحث کنید. در باب حالت حدی آونگ مخروطی ( $\theta = \text{const.}$ ) با مراجعه به نمودار  $V-\theta$  بحث کنید.

۳۲.۶ ذره‌ای در یک میدان نیروی با تقارن کروی، با انرژی پتانسیل  $U(r) = -k/r$  حرکت می‌کند. تابع هامیلتونی در مختصات کروی را محاسبه کنید، و معادلات حرکت بندادی را به‌دست آورید. مسیری را که نقطه نماینده سیستم روی سطح  $H = \text{const.}$  در فضای فاز طی می‌کند، ترسیم کنید. کار خود را با نشان دادن این مطلب آغاز کنید که حرکت باید در یک صفحه صورت گیرد، بنابراین فضای فاز چهاربعدی است  $(r, \theta, p_r, p_\theta)$ ، اما فقط سه‌تای اولی غیر بدهی‌اند. تصویر مسیر فاز روی صفحه  $r-p_r$  را محاسبه کنید، آنگاه وردش را با  $\theta$  منظور کنید.

۳۳.۶ هامیلتونی و معادلات حرکت هامیلتون را برای ماشین آتوود مضاعف مثال ۶.۶ تعیین کنید.

۳۴.۶ ذره‌ای به جرم  $m$  روی گوه دایره‌ای صافی به جرم  $M$ ، مطابق شکل ۶.۶ ج، به پایین می‌لغزد. گوه روی یک میز افقی صاف قرار دارد. پیدا کنید: الف) معادله حرکت  $m$  و  $M$  و ب) عکس‌العمل گوه را روی  $m$ .



شکل ۶.۶ ج



۳۵.۶ چهار ذره در یک میدان گرانشی یکنواخت، با شرایط اولیه، به شرح زیر، به سوی بالا جهت‌گیری شده‌اند:

$$1. \quad p_z(\circ) = p_0; z(\circ) = z_0$$

$$2. \quad p_z(\circ) = p_0; z(\circ) = z_0 + \Delta z_0$$

$$3. \quad p_z(\circ) = p_0 + \Delta p_0; z(\circ) = z_0$$

$$4. \quad p_z(\circ) = p_0 + \Delta p_0; z(\circ) = z_0 + \Delta z_0$$

با محاسبات مستقیم نشان دهید که نقاط نمایندهٔ متناظر با این ذرات همواره مساحتی را در فضای فاز، مساوی با  $\Delta z_0 \Delta p_0$ ، مشخص می‌کنند. مسیرهای فاز را ترسیم کنید، و به‌ازای چند مقدار زمانی  $t > 0$ ، شکل ناحیه‌ای را که مساحت آن ثابت می‌ماند، نشان دهید.

۳۶.۶ در خصوص پیامدهای کاربرد قضیهٔ لیوویل بر کانونی‌کردن باریکه‌های ذرات باردار با در نظرگرفتن حالت سادهٔ زیر بحث کنید. جهت باریکهٔ الکترونی با سطح مقطع دایره‌ای (به شعاع  $R_0$ ) در امتداد محور  $z$  واقع است. چگالی الکترونها در سرتاسر باریکه ثابت است، اما مؤلفه‌های تکانه عمود بر باریکه ( $p_x$  و  $p_y$ ) به‌طور یکنواخت روی دایره‌ای به شعاع  $p_0$  در فضای تکانه توزیع می‌شوند. اگر سیستمی کانونی‌کننده شعاع باریکه را از  $R_0$  به  $R_1$  کاهش دهد، توزیع به‌دست آمدهٔ مربوط به مؤلفه‌های عرضی تکانه را بیابید. معنی فیزیکی این نتیجه چیست؟ (واگرایی زاویه‌ای باریکه را در نظر بگیرید.)



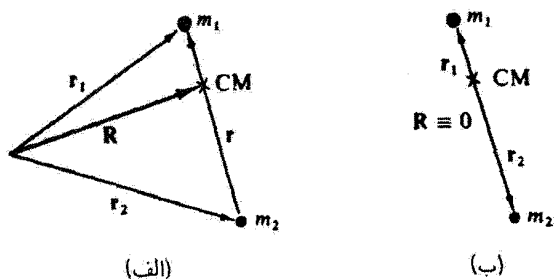
## حرکت نیروی مرکزی

### ۱.۷ مقدمه

حرکت سیستمی متشکل از دو جسم تحت تأثیر نیرویی در امتداد خط واصل بین مراکز این دو جسم (یعنی، نیرویی مرکزی) مسئله فیزیکی بسیار مهمی به شمار می‌آید؛ این مسئله را به طور کامل می‌توانیم حل کنیم. اهمیت چنین مسئله‌ای در مقیاس بزرگ در دو قلمرو کاملاً متفاوت فیزیک قرار دارد: حرکت اجسام آسمانی — سیارات، قمرها، دنباله‌دارها، ستارگان دوتایی، و مانند آنها — و برخی برهم‌کنشهای هسته‌ای دوجسمی، مانند پراکندگی ذرات  $\alpha$  به وسیله هسته‌ها. در دوران پیش از مکانیک کوانتومی، فیزیکدانان اتم هیدروژن را نیز به کمک یک نیروی مرکزی دوجسمی کلاسیکی توصیف می‌کردند. هر چند چنین توصیفی هنوز هم به مفهوم کیفی مفید است، اما برای توصیفی جامع باید رهیافت نظریه کوانتومی را به کار برد. علاوه بر بعضی ملاحظات کلی مربوط به حرکت در میدانهای نیروی مرکزی، در این فصل و فصل بعد در خصوص چندین مسئله دوجسمی که در مکانیک سماوی و فیزیک هسته‌ای به آنها برخورد می‌کنیم، بحث خواهیم کرد.

### ۲.۷ جرم کاهش یافته

توصیف سیستمی متشکل از دو ذره مستلزم تشخیص شش کمیت است؛ مثلاً سه مؤلفه هر یک



شکل ۱.۷

از دو بردار  $r_1$  و  $r_2$  مرتبط به این دو ذره<sup>۱</sup> به گونه‌ای معادل، می‌توانیم سه مؤلفه بردار مرکز جرم،  $R$  و سه مؤلفه  $r \equiv r_1 - r_2$  [شکل ۱.۷ (الف)] را اختیار کنیم. در اینجا توجه خود را به سیستم‌های بدون اتلاف اصطکاکی و سیستم‌هایی که برای آنها انرژی پتانسیل فقط تابعی از  $r = |r_1 - r_2|$  است، معطوف می‌کنیم. لاگرانژی چنین سیستمی را می‌توان این‌طور نوشت

$$L = \frac{1}{2} m_1 |\dot{r}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{r}_2|^2 - U(r) \quad (1.7)$$

از آنجا که حرکت انتقالی سیستم کلاً از دیدگاه مدار ذرات نسبت به یکدیگر مهم نیست، می‌توانیم مبدأ دستگاه مختصات را مرکز جرم ذرات اختیار کنیم، یعنی،  $R \equiv 0$  [شکل ۱.۷ (ب)]. در این صورت (بخش ۲.۸ را ببینید)

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0 \quad (2.7)$$

این معادله، پس از ترکیب با  $r = r_1 - r_2$ ، نتیجه می‌دهد

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \\ r_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

معادلات (۳.۷) را در عبارت لاگرانژی می‌نشانیم، و داریم

$$L = \frac{1}{2} \mu |\dot{r}|^2 - U(r) \quad (4.7)$$

۱. فرض می‌شود سنگبری ذرات مهم نیست؛ یعنی، متقارن کروی هستند (یا اینکه ذرات نقطه‌ای‌اند).

که در آن  $\mu$  عبارت است از جرم کاهش یافته

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (5.7)$$

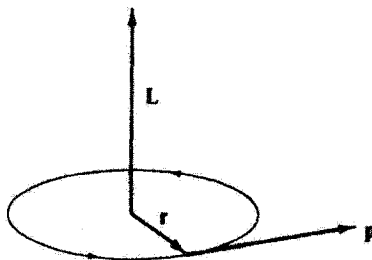
بنابراین مسئله حرکت دو جسم را به طور صوری به یک مسئله یک جسمی معادل تبدیل کرده‌ایم که در آن فقط باید حرکت یک «ذره»، به جرم  $\mu$  را در میدان مرکزی توصیف شده به وسیله تابع پتانسیل  $U(r)$  تعیین کنیم. همین‌که با کاربرد معادلات لاگرانژ در معادله (۴.۷) جواب  $\mathbf{r}(t)$  را به دست آوریم، می‌توانیم حرکت هر یک از ذرات،  $\mathbf{r}_1(t)$  و  $\mathbf{r}_2(t)$  را با بهره‌گیری از معادلات (۳.۷) بیابیم. اگر فقط مدارها نسبت به یکدیگر مورد نیاز باشند، انجام عملیات مرحله آخر ضرورتی ندارد.

### ۳.۷ قضایای پایستگی-انتگرالهای اول حرکت

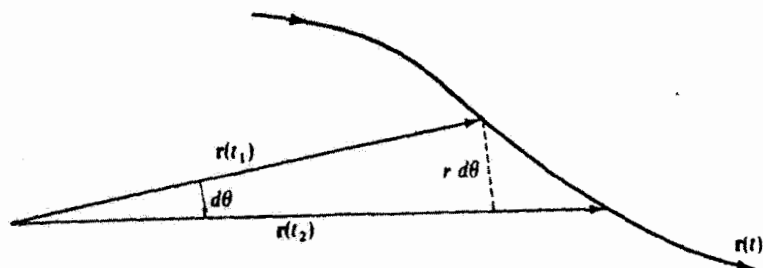
سیستمی که می‌خواهیم در خصوص آن بحث کنیم عبارت است از ذره‌ای به جرم  $\mu$  که در یک میدان نیروی مرکزی، که با تابع پتانسیل  $U(r)$  توصیف می‌شود، حرکت می‌کند. از آنجا که انرژی پتانسیل فقط به فاصله ذره از مرکز نیرو بستگی دارد و مستقل از سمتگیری آن است، سیستم دارای تقارن کروی است؛ یعنی، چرخش سیستم حول هر محور ثابتی که از مرکز نیرو می‌گذرد نمی‌تواند بر معادلات حرکت تأثیر بگذارد. قبلاً (بخش ۹.۶) نشان داده‌ایم که تحت این شرایط تکانه زاویه‌ای سیستم پایسته است:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const.} \quad (6.7)$$

از این رابطه، روشن است که هم بردار شعاعی و هم بردار تکانه خطی ذره همواره در صفحه‌ای عمود بر بردار تکانه زاویه‌ای،  $\mathbf{L}$ ، که در فضا ثابت است، قرار دارند (شکل ۲.۷). بنابراین فقط یک



شکل ۲.۷



شکل ۳.۷

مسئله دو بعدی داریم، و در این صورت لاگرانژی را می‌توان به‌طور مناسبی در مختصات قطبی تخت بیان کرد

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r) \quad (7.7)$$

از آنجا که لاگرانژی بر حسب  $\theta$  چرخه‌ای است، تکانه زاویه‌ای مزدوج با مختصه  $\theta$  پایسته است

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \quad (8.7)$$

یا

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.} \quad (9.7)$$

بنابراین تقارن سیستم به ما اجازه داده است که از یکی از معادلات حرکت فوراً انتگرال بگیریم. کمیت  $p_\theta$  یک انتگرال اول حرکت است، و مقدار ثابت آن را با نماد  $l$  مشخص می‌کنیم

$$l \equiv \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.} \quad (10.7)$$

ثابت بودن  $l$  یک تعبیر هندسی ساده دارد. با مراجعه به شکل ۳.۷، می‌بینیم که بردار شعاعی در خلال پیمودن مسیر  $r(t)$ ، در بازه زمانی  $dt$  مساحت  $1/2 r^2 d\theta$  را جاروب می‌کند

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (11.7)$$

طرفین را بر بازه زمانی  $dt$  تقسیم می‌کنیم، سرعت سطحی چنین به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \\ &= \frac{l}{2\mu} = \text{const.} \end{aligned} \quad (12.7)$$

بدینسان سرعت سطحی نسبت به زمان ثابت است. کپلر در مورد حرکت سیارات به طور تجربی به این نتیجه رسید. این نتیجه را قانون دوم کپلر می‌گویند.<sup>۱</sup> توجه به این نکته مهم است که پایستگی سرعت سطحی به نیروی عکس مجذور (مورد مربوط به حرکت سیاره‌ای) محدود نمی‌شود بلکه نتیجه‌ای کلی مربوط به حرکت در اثر نیروی مرکزی است.

از آنجا که از بررسی حرکت یکنواخت مرکز جرم سیستم چشم پوشیدیم، پایستگی تکانه خطی هیچ چیز جدیدی به توصیف حرکت نمی‌افزاید. از این رو پایستگی انرژی تنها انتگرال اول باقیمانده مسئله به شمار می‌آید. پایستگی انرژی کل،  $E$ ، به طور خودکار تضمین می‌شود چرا که ما بحث خود را به سیستم‌های بی‌اتلاف محدود کرده‌ایم. از این رو

$$T + U = E = \text{const.} \quad (13.7)$$

و

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r)$$

یا

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \quad (14.7)$$

#### ۴.۷ معادلات حرکت

وقتی  $U(r)$  مشخص شود، معادله (۱۴.۷) سیستم را به طور کامل توصیف می‌کند، و انتگرال‌گیری از این معادله جواب کلی مسئله را بر حسب پارامترهای  $E$  و  $l$  به دست می‌دهد. از حل معادله (۱۴.۷) بر حسب  $\dot{r}$  داریم

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \quad (15.7)$$

۱. این قانون را یوهانس کپلر (۱۵۷۱-۱۶۳۰) در سال ۱۶۰۹ پس از بررسی جامع گردآورده‌های تیکو براهه (۱۵۴۶-۱۶۰۱) در مورد مواضع سیاره مریخ بیان کرد. قانون اول کپلر با شکل مدارهای سیاره‌ای سروکار دارد (بخش ۷.۷).

این معادله را می‌توان به‌ازای  $dt$  حل کرد و از آن انتگرال گرفت تا جواب  $t = t(r)$  را به‌دست دهد. در این صورت عکس این نتیجه معادله حرکت در شکل استاندارد  $r = r(t)$  را به‌دست می‌دهد. اما، در حال حاضر، معادله مسیر بر حسب  $r$  و  $\theta$  مورد نظر ماست. می‌توان نوشت

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr \quad (۱۶.۷)$$

می‌توانیم  $\dot{\theta} = l/\mu r^2$  [معادله (۱۰.۷)] و عبارت مربوط به  $\dot{r}$  را از معادله (۱۵.۷) در این رابطه بنشانیم. پس از انتگرالگیری داریم

$$\theta(r) = \int \frac{(l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu(E - U - l^2/2\mu r^2)}} \quad (۱۷.۷)$$

بعلاوه، چون  $l$  نسبت به زمان ثابت است، علامت  $\dot{\theta}$  نمی‌تواند تغییر کند و بنابراین  $\theta(t)$  باید نسبت به زمان به‌طور یکنوا افزایش یابد.

هر چند که مسئله را به محاسبه صوری یک انتگرال کاهش داده‌ایم، جواب واقعی را فقط می‌توان برای برخی اشکال معین قانون نیرو به‌دست آورد. اگر نیرو با توانی از فاصله شعاعی متناسب باشد،  $F(r) \propto r^n$ ، در این صورت جواب را می‌توان به‌ازای برخی مقادیر صحیح و کسری  $n$  بر حسب انتگرالهای بیضوی بیان کرد. این جوابها را فقط به‌ازای  $n = ۱, -۲, -۳$  می‌توان بر حسب توابع دایره‌ای بیان کرد<sup>۱</sup>. حالت  $n = ۱$  همان مورد نوسانگر هماهنگ (فصل ۳)، و حالت  $n = -۲$  عبارت است از قانون مهم نیروی عکس مجذور که در بخشهای ۶.۷ و ۷.۷ مورد بحث قرار می‌گیرند. این دو حالت،  $n = ۱, -۲$ ، در وضعیتهای فیزیکی از اهمیت درجه اول برخوردارند. جزئیات برخی از حالت‌های جالب دیگر را در مسائل آخر این فصل ملاحظه خواهید کرد.

به این ترتیب مسئله را از طریق ترکیب کردن معادلاتی که مبین پایستگی انرژی و تکانه زاویه‌ای بودند، به‌صورت یک نتیجه واحد به‌طور رسمی حل کردیم، که معادله مداری  $\theta = \theta(r)$  را به‌دست می‌دهد. همچنین می‌توانیم با بهره‌گیری از معادله لاگرانژ مربوط به مختصه  $r$  به حل این مسئله مبادرت ورزیم

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$

با استفاده از معادله (۷.۷) برای  $L$ ، می‌رسیم به

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r} = F(r) \quad (۱۸.۷)$$

معادله (۱۸.۷) را می‌توان با تغییر متغیر ساده زیر به شکل مناسبتری برای محاسبات معینی

در آورد

$$u \equiv \frac{1}{r}$$

ابتدا محاسبه می‌کنیم

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \dot{r} \dot{\theta}$$

اما از معادله (۱۰.۷) داریم  $\dot{\theta} = l/\mu r^2$  از این رو

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\mu}{l} \dot{r}$$

سپس می‌نویسیم

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{\mu}{l} \dot{r} \right) = \frac{dt}{d\theta} \frac{d}{dt} \left( -\frac{\mu}{l} \dot{r} \right) = -\frac{\mu}{l\theta} \ddot{r}$$

و با جانشانی مشابهی برای  $\dot{\theta}$  داریم

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu^2}{l^2} r^2 \ddot{r}$$

بنابراین، با حل این معادله به‌ازای  $\ddot{r}$  و  $r\dot{\theta}^2$  بر حسب  $u$ ، می‌رسیم به

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{l^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \\ r\dot{\theta}^2 &= \frac{l^2}{\mu^2} u^3 \end{aligned} \right\} \quad (۱۹.۷)$$

با نشان دادن معادلات (۱۹.۷) در معادله (۱۸.۷)، معادله حرکت تبدیل یافته را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2} \frac{1}{u^2} F(u) \quad (۲۰.۷)$$



که می‌توان آن را به صورت زیر هم نوشت

$$\boxed{\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2} F(r)} \quad (21.7)$$

معادله حرکت به این شکل مخصوصاً در صورتی مفید است که بخواهیم قانون نیروی را بیابیم که مدار معلوم خاصی،  $r = r(\theta)$ ، را به دست دهد.

### مثال ۱.۷

قانون نیرو را برای یک میدان نیروی مرکزی که اجازه می‌دهد ذره‌ای در یک مدار مارپیج لگاریتمی به معادله  $r = k e^{\alpha\theta}$  حرکت کند، بیابید؛  $k$  و  $\alpha$  ثابت‌اند.

حل: برای تعیین کردن قانون نیروی  $F(r)$  از معادله (۲۱.۷) بهره می‌گیریم. ابتدا کمیت زیر را تعیین می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{e^{-\alpha\theta}}{k} \right) = \frac{-\alpha e^{-\alpha\theta}}{k} \\ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{\alpha^2 e^{-\alpha\theta}}{k} = \frac{\alpha^2}{r} \end{aligned}$$

حالا، با استفاده از معادله (۲۱.۷)،  $F(r)$  را تعیین می‌کنیم

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{-l^2}{\mu r^2} \left( \frac{\alpha^2}{r} + \frac{1}{r} \right) \\ F(r) &= \frac{-l^2}{\mu r^3} (\alpha^2 + 1) \end{aligned} \quad (22.7)$$

بدینسان قانون نیرو، از نوع جاذبه عکس مکعبی است.

### مثال ۲.۷

$r(t)$  و  $\theta(t)$  را برای مسئله مطرح شده در مثال ۱.۷ تعیین کنید.

حل: از معادله (۱۰.۷)، می‌یابیم

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} = \frac{l}{\mu k^2 e^{2\alpha\theta}} \quad (23.7)$$

معادله (۲۳.۷) را بازاری می‌کنیم، می‌رسیم به

$$e^{\gamma\alpha\theta} d\theta = \frac{l}{\mu k^{\gamma}} dt$$

پس از انتگرالگیری داریم

$$\frac{e^{\gamma\alpha\theta}}{\gamma\alpha} = \frac{lt}{\mu k^{\gamma}} + C'$$

که  $C'$  یک ثابت انتگرالگیری است. طرفین را در  $\gamma\alpha$  ضرب می‌کنیم و می‌گیریم  $C = \gamma\alpha C'$  داریم

$$e^{\gamma\alpha\theta} = \frac{\gamma\alpha lt}{\mu k^{\gamma}} + C \quad (24.7)$$

با گرفتن لگاریتم طبیعی از معادله (۲۴.۷) آن را بر حسب  $\theta(t)$  حل می‌کنیم

$$\theta(t) = \frac{1}{\gamma\alpha} \ln \left( \frac{\gamma\alpha lt}{\mu k^{\gamma}} + C \right) \quad (25.7)$$

می‌توانیم به‌طور مشابهی معادله را برای  $r(t)$  با بررسی معادلات (۲۳.۷) و (۲۴.۷) حل کنیم

$$\frac{r^{\gamma}}{k^{\gamma}} = e^{\gamma\alpha\theta} = \frac{\gamma\alpha lt}{\mu k^{\gamma}} + C$$

$$r(t) = \left[ \frac{\gamma\alpha l}{\mu} t + k^{\gamma} C \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (26.7)$$

ثابت انتگرالگیری  $C$  و تکانه زاویه‌ای  $l$  مورد نیاز در معادلات (۲۵.۷) و (۲۶.۷) از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

### مثال ۳.۷

انرژی کل مدار در دو مثال قبل چقدر است؟

حل: انرژی از معادله (۱۴.۷) تعیین می‌شود. مخصوصاً، ما به  $\dot{r}$  و  $U(r)$  نیاز داریم

$$U(r) = - \int F dr = \frac{+l^{\gamma}}{\mu} (\alpha^{\gamma} + 1) \int r^{-\gamma} dr$$

$$U(r) = - \frac{l^{\gamma} (\alpha^{\gamma} + 1)}{\gamma\mu} \times \frac{1}{r^{\gamma}} \quad (27.7)$$

که در آن فرض کرده‌ایم  $U(\infty) = 0$ .

برای تعیین  $\dot{r}$  معادله (۱۰.۷) را بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dr} \times \frac{dr}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \\ \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} \times \frac{l}{\mu r^2} = \alpha k e^{\alpha\theta} \frac{l}{\mu r^2} = \frac{\alpha l}{\mu r}\end{aligned}\quad (28.7)$$

با نشان دادن معادلات (۷.۷) و (۲۸.۷) در معادله (۱۴.۷) می‌رسیم به

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\alpha l}{\mu r} \right)^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{l^2(\alpha^2 + 1)}{2\mu r^2} \\ E &= 0\end{aligned}\quad (29.7)$$

اگر  $U(r = \infty) = 0$  انرژی کل مدار صفر است.

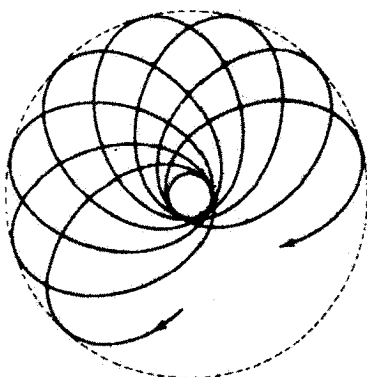
## ۵.۷ مدارها در یک میدان مرکزی

سرعت شعاعی ذره متحرکی در یک میدان مرکزی به کمک معادله (۱۵.۷) بیان می‌شود. این معادله حاکی از آن است که  $\dot{r}$  در ریشه‌های رادیکال، یعنی، در نقاطی که به‌ازای آنها رابطه زیر برقرار است، صفر می‌شود.

$$E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} = 0 \quad (30.7)$$

معنای صفر شدن  $\dot{r}$  این است که به یک نقطه برگشت در حرکت رسیده‌ایم (بخش ۶.۲). به‌طور کلی، معادله (۳۰.۷) دو ریشه دارد:  $r_{\min}$  و  $r_{\max}$ . بنابراین حرکت ذره به ناحیه‌ای طوقی محدود می‌شود که توسط:  $r_{\max} \geq r \geq r_{\min}$  مشخص می‌شود. ترکیبهای معینی از تابع پتانسیل  $U(r)$  و پارامترهای  $E$  و  $l$  فقط یک تک ریشه برای معادله (۳۰.۷) به‌دست می‌دهند. در چنین حالتی، به‌ازای همه مقادیر زمان  $\dot{r} = 0$ ؛ بنابراین،  $r = \text{const.}$  و مدار دایره‌ای است.

اگر حرکت ذره‌ای در پتانسیل  $U(r)$  تناوبی باشد، در این صورت مدار بسته است؛ یعنی، پس از تعداد معدودی سفر بین حدود شعاعی  $r_{\max}$  و  $r_{\min}$ ، حرکت دقیقاً تکرار می‌شود. اما اگر مدار بعد از تعداد محدودی نوسان روی خودش بسته نشود، آن را باز می‌گویند (شکل ۴.۷). از معادله (۱۷.۷) می‌توانیم تغییر زاویه  $\theta$  را محاسبه کنیم که ناشی از یک گذر کامل  $r$  از  $r_{\min}$  تا



شکل ۴.۷

$r_{\max}$  و برگشت به  $r_{\min}$  است. چون حرکت نسبت به زمان متقارن است، این تغییر زاویه‌ای دو برابر تغییری است که در نتیجه گذر از  $r_{\min}$  به  $r_{\max}$  حاصل می‌شود؛ بدینسان

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu \left( E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} \quad (31.7)$$

فقط در صورتی که  $\Delta\theta$  کسرگوییایی از  $2\pi$  باشد یعنی، اگر  $\Delta\theta = 2\pi(a/b)$  که  $a$  و  $b$  اعداد صحیح‌اند مسیر بسته است. تحت این شرایط، پس از  $b$  دوره تناوب بردار شعاعی ذره  $a$  دور کامل خواهد زد و به موضع اولیه خود باز خواهد گشت. می‌توانیم نشان دهیم (مسئله ۳۷.۷) که اگر پتانسیل با توان صحیحی از فاصله شعاعی تغییر کند، یعنی  $U \propto r^{n+1}$ ، در این صورت فقط وقتی یک مسیر بسته غیر دایره‌ای می‌تواند حاصل شود<sup>۱</sup> که  $n = +1$  یا  $n = -2$ . حالت  $n = -2$  با نیرویی، تابع قانون عکس مجذوری، مثلاً نیروی گرانشی یا الکتروستاتیکی، متناظر است. حالت  $n = +1$  با پتانسیل نوسانگر هماهنگ متناظر است. در مورد حالت دو بعدی که در بخش ۴.۳ مورد بحث قرار گرفت، دریافتیم که مسیر بسته برای حرکت در صورتی حاصل می‌شود که نسبت بسامدهای زاویه‌ای برای حرکت  $x$  و  $y$  گویا باشد.

۱. برخی مقادیر کسری  $n$  نیز به مسیرهای بسته می‌انجامند، اما به‌طور کلی این حالتها از دیدگاه فیزیکی حائز اهمیت نیستند.

## ۶.۷ انرژی مرکز‌گریزی و پتانسیل مؤثر

در عبارتهای قبلی مربوط به  $\dot{r}$ ،  $\Delta\theta$ ، و جز اینها، یک جمله رادیکالی در همه مشترک است

$$\sqrt{E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2}}$$

جمله آخر زیر رادیکال دارای ابعاد انرژی است و، بنابر معادله (۱۰.۷)، می‌توان آن را چنین نوشت

$$\frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\theta}^2$$

اگر این کمیت را «انرژی پتانسیل» تعبیر کنیم

$$U_c \equiv \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (۳۲.۷)$$

در این صورت «نیروی» وابسته به  $U_c$  عبارت است از

$$F_c = -\frac{\partial U_c}{\partial r} = \frac{l^2}{\mu r^3} = \mu r \dot{\theta}^2 \quad (۳۳.۷)$$

این کمیت را به‌طور سنتی نیروی مرکز‌گریز می‌گویند،<sup>۱</sup> هر چند که به معنی متعارف کلمه نیرو نیست،<sup>۲</sup> اما، از این اصطلاح نامناسب استفاده می‌کنیم، چرا که متداول و آسان است.

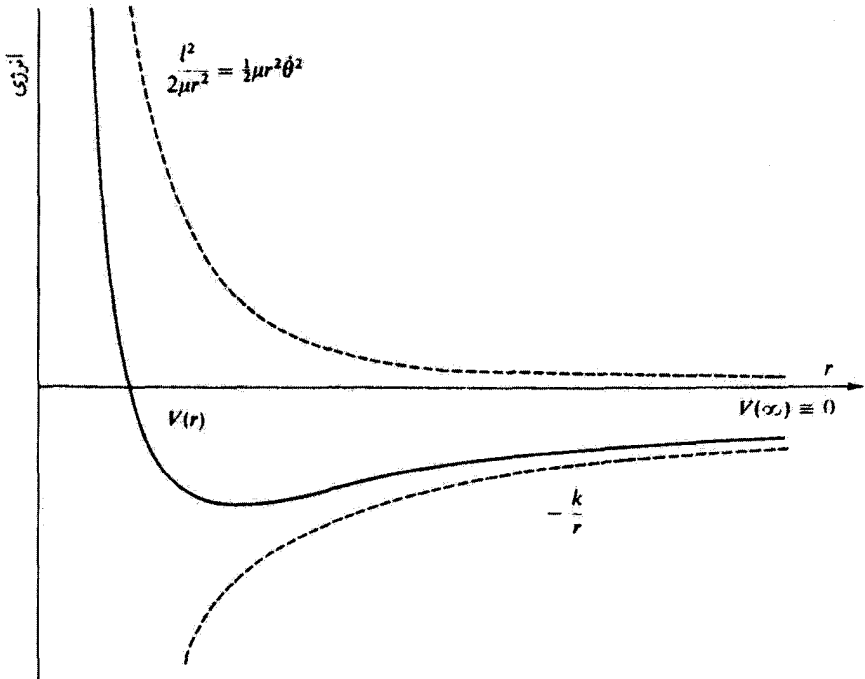
می‌بینیم که جمله  $l^2/2\mu r^2$  را می‌توان به‌صورت انرژی پتانسیل مرکز‌نیرو‌گریزی ذره تعبیر کرد و، بدین ترتیب، می‌توان آن را همراه با  $U(r)$  در یک انرژی پتانسیل مؤثر که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، گنجانند

$$V(r) \equiv U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (۳۴.۷)$$

بنابراین  $V(r)$  پتانسیلی موهومی است که تابع پتانسیل واقعی،  $U(r)$ ، را با جمله انرژی مربوط به حرکت زاویه‌ای حول مرکز نیرو ترکیب می‌کند. در مورد حرکت نیروی مرکزی که از قانون عکس

۱. این عبارت را به شکل  $F_c = m r \omega^2$  آسانتر می‌توان شناخت. نخستین آشنایی واقعی نیروی مرکز‌گریز از هویگنس بود، که در مطالعاتش پیرامون آونگ مخروطی در ۱۶۵۹ بررسی جامعی در این خصوص به عمل آورد.

۲. برای دستیابی به بحثی انتقادیتر از نیروی مرکز‌گریز به بخش ۳.۹ مراجعه کنید.



شکل ۵.۷

مجدور پیروی می‌کند. نیرو چنین به دست می‌آید

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} \quad (۳۵.۷)$$

از این رابطه

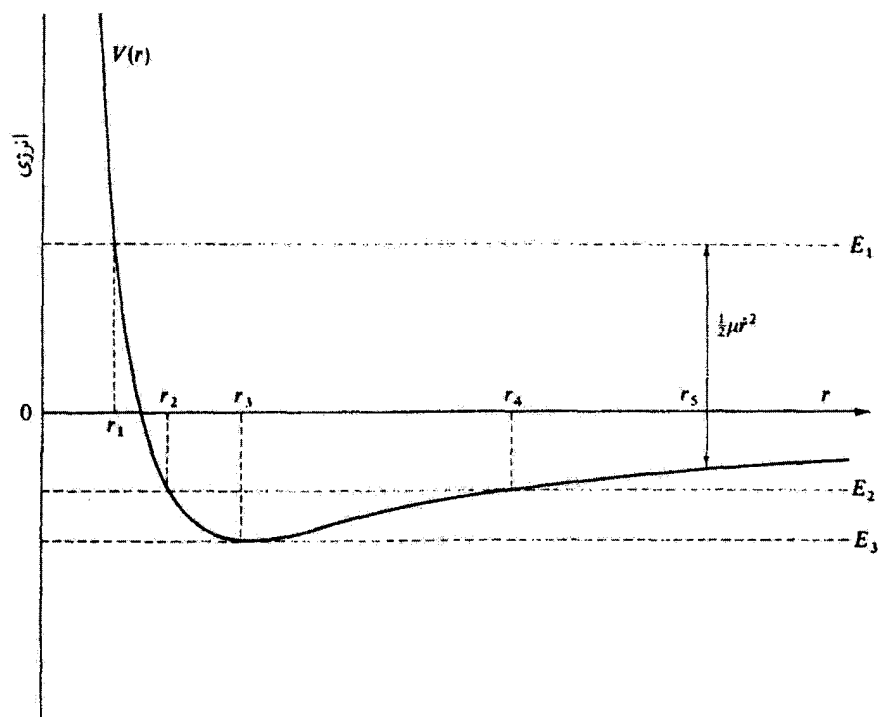
$$U(r) = -\int F(r) dr = -\frac{k}{r} \quad (۳۶.۷)$$

بنابراین تابع پتانسیل مؤثر برای جاذبه گرانشی عبارت است از

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (۳۷.۷)$$

این پتانسیل مؤثر و مؤلفه‌هایش را در شکل ۵.۷ مشاهده می‌کنید. مقدار پتانسیل به طور اختیاری در  $r = \infty$  صفر گرفته شده است. [این امر در معادله (۳۶.۷) به صراحت آشکار است، که در آنجا ثابت انتگرالگیری را حذف کرده‌ایم.]

اکنون می‌توانیم نتایج مشابه با نتایج به دست آمده در بخش ۶.۲ درباره حرکت ذره در یک

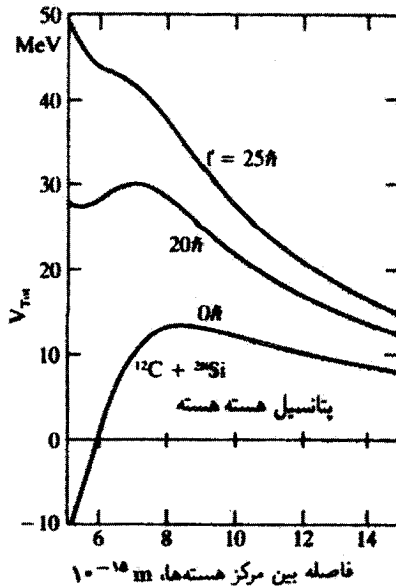


شکل ۶.۷

چاه پتانسیل اختیاری، استخراج کنیم. اگر انرژی کل،  $E$ ، ذره را روی نموداری مشابه با شکل ۵.۷ ترسیم کنیم، سه ناحیه از نظر فیزیکی جالب را می‌توانیم شناسایی کنیم (شکل ۶.۷). اگر انرژی کل مثبت یا صفر باشد (یعنی،  $E_1 \geq 0$ )، در این صورت حرکت نامقید است؛ ذره از بینهایت به سوی مرکز نیرو (واقع در  $r = 0$ ) حرکت می‌کند تا به سد پتانسیل در نقطه برگشت  $r = r_1$  «برخورد کند» و به سوی  $r$  بینهایت بزرگ بازگردد. توجه کنید که ارتفاع خط انرژی کل برابر ثابت بالاتر از  $V(r)$  در هر  $r$ ، مانند  $r_5$  در شکل ۶.۷، برابر است با  $\frac{1}{2}\mu v^2$ . بدینسان سرعت شعاعی  $\dot{r}$  در نقطه (یا نقاط) برگشت صفر می‌شود و علامتش تغییر می‌کند.

اگر انرژی کل منفی و بین صفر و مقدار کمینه  $V(r)$  واقع باشد، مانند  $E_2$ ، در این صورت حرکت، با  $r_2 \leq r \leq r_3$ ، مقید است. <sup>۱</sup> مقادیر  $r_2$  و  $r_3$  نقاط برگشت، یا فواصل اوج و حضیض، مدار هستند. اگر  $E$  با مقدار کمینه انرژی پتانسیل مؤثر برابر باشد (در شکل ۶.۷)، در این

۱. توجه کنید که مقادیر منفی انرژی کل فقط به اعتبار انتخاب دلخواه  $V(r) = 0$  در  $r = \infty$  پیش می‌آید.



شکل ۷.۷

صورت شعاع مسیر ذره به تک مقدار  $l = 25 \hbar$  محدود می‌شود، و در این صورت به‌ازای تمام مقادیر زمانی،  $\dot{r} = 0$ ؛ بدینسان حرکت دایره‌ای است.

مقادیر کمتر از  $V_{\min} = -(\mu k^2 / 2l^2)$  به حرکتی از نظر فیزیکی واقعی نمی‌انجامند؛ زیرا در چنین حالتی،  $\dot{r} < 0$  و سرعت موهومی است.

روشنایی که در این بخش مورد بحث واقع شدند غالباً در تحقیقات امروزی در حوزه‌های عمومی، مخصوصاً در فیزیک اتمی، مولکولی، و هسته‌ای به کار می‌آیند. مثلاً در شکل ۷.۷ پتانسیل‌های مؤثر کل هسته‌هاست مربوط به پراکندگی  $^{12}\text{C}$  و  $^{28}\text{Si}$  را مشاهده می‌کنید. پتانسیل کل شامل پتانسیل‌های کولنی، هسته‌ای، و مرکزگریزی است. پتانسیل مربوط به  $l = 0 \hbar$  بر پتانسیلی بدون جمله مرکزگریزی دلالت می‌کند. به‌ازای مقدار تکانه زاویه‌ای نسبی  $l = 20 \hbar$  «بسته‌ای» وجود دارد که دو هسته درگیر در پراکندگی ممکن است (هر چند برای زمانی کوتاه) در آن به یکدیگر مقید باشند. به‌ازای  $l = 25 \hbar$ ، «سد» مرکزگریزی غالب است، و هسته‌ها به سوی یکدیگر جذب نمی‌شوند.

### ۷.۷ حرکت سیاره‌ای-مسئلهٔ کپلر

معادلهٔ مربوط به مسیر ذره‌ای که تحت تأثیر یک نیروی مرکزی که مقدار آن با عکس مجذور فاصلهٔ بین ذره و مرکز نیرو متناسب است، حرکت می‌کند را می‌توان از عبارت زیر به‌دست آورد



$$\theta(r) = \int \frac{(l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu \left( E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} + \text{const.} \quad (38.7)$$

اگر متغیر انتگرال‌گیری به  $u \equiv l/r$  تغییر داده شود، می‌توان این انتگرال را محاسبه کرد (مسئله ۲.۷). اگر مبدأ را چنان تعریف کنیم که ثابت انتگرال‌گیری صفر شود، می‌رسیم به

$$\cos \theta = \frac{\frac{l^2}{\mu k} \times \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}} \quad (39.7)$$

حال ثابتهای زیر را تعریف می‌کنیم

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{l^2}{\mu k} \\ \varepsilon &\equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \end{aligned} \right\} \quad (40.7)$$

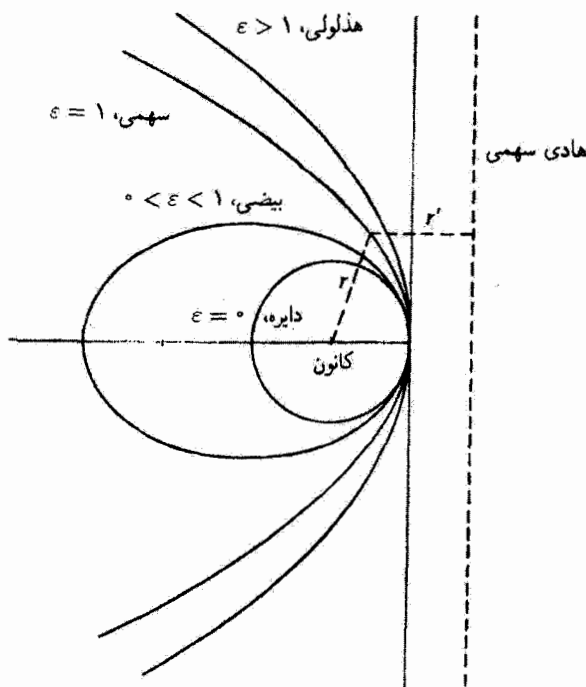
بدینسان می‌توان معادله (۳۹.۷) را این طور نوشت

$$\boxed{\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (41.7)$$

این معادله عبارت است از معادلهٔ یک مقطع مخروطی که یکی از کانونهای آن در مبدأ مختصات واقع است.  $\varepsilon$  کمیت  $\varepsilon$  را خروج از مرکز می‌گویند، و  $2\alpha$  را پارامتر سهمی (وتر کانونی) مدار می‌نامند. مقاطع مخروطی از تقاطع صفحه و مخروط تشکیل می‌شوند. هر مقطع مخروطی به وسیلهٔ مکان هندسی نقاط (تشکیل شده در یک صفحه) ایجاد می‌شود که در آنها نسبت فاصله از یک نقطهٔ ثابت (کانون) به خطی ثابت (به نام خط هادی) مقدار ثابتی است. خط هادی سهمی را در شکل ۸.۷ به صورت خط چین قائم مشاهده می‌کنید؛ این خط چنان ترسیم شده است که  $r/r' = 1$ .

کمینه مقدار  $r$  در معادله (۴۱.۷) وقتی بیش می‌آید که  $\cos \theta$  بیشینه باشد، یعنی وقتی که  $\theta = 0$ . بدینسان انتخاب صفر برای ثابت انتگرال‌گیری در معادله (۳۸.۷) با اندازه‌گیری  $\theta$  از  $r_{\min}$

۱. یوهان برنولی (۱۷۴۸-۱۶۶۷) ظاهراً اولین کسی بوده که ثابت کرده است تمام مدارهای ممکن برای جسمی که در پتانسیلی متناسب با  $1/r$  حرکت می‌کند، مقاطع مخروطی اند (۱۷۱۰).



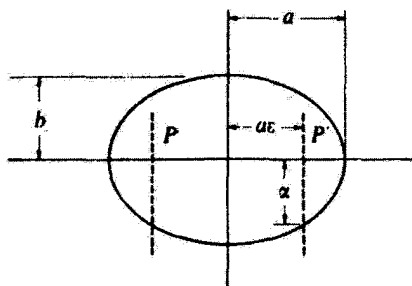
شکل ۸.۷

که موضعی است به نام حضیض؛ و  $r_{max}$  که موضعی است به نام اوج، متناظر است.<sup>۱</sup> اصطلاح عام برای نقاط برگشت، اوج و حضیض است.

مقادیر گوناگون خروج از مرکز (و از آنرو مقادیر مختلف انرژی  $E$ ) مدارها را مطابق مقاطع مخروطی مختلف رده بندی می کنند (شکل ۸.۷)

$\epsilon > 1,$	$E > 0$	هذلولی
$\epsilon = 1,$	$E = 0$	سهمی
$0 < \epsilon < 1,$	$V_{min} < E < 0$	بیضی
$\epsilon = 0$	$E = V_{min}$	دایره
$\epsilon < 0,$	$E < V_{min}$	غیر مجاز

۱. اصطلاحات متناظر در حرکت به گرد خورشید عبارتند از حضیض خورشیدی و اوج خورشیدی، و برای حرکت به گرد زمین، نقطه حضیض و نقطه اوج (حضیض زمینی و اوج زمینی).



شکل ۹.۷

در مورد حرکت سیاره‌ای، مدارها بیضیهایی‌اند که قطرهای بزرگتر و کوچکتر آنها (به ترتیب، برابر با  $2a$  و  $2b$ ) با روابط زیر مشخص می‌شوند.

$$a = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|} \quad (42.7)$$

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \quad (43.7)$$

بدینسان قطر بزرگتر فقط به انرژی ذره وابسته است، در حالی که قطر کوچکتر تابعی است از هر دو انتگرال اول حرکت، یعنی  $E$  و  $l$ . شکل هندسی مدارهای بیضوی برحسب پارامترهای  $\varepsilon$ ،  $\alpha$  و  $b$  را در شکل ۹.۷ مشاهده می‌کنید؛  $P$  و  $P'$  کانونها هستند. از این نمودار ملاحظه می‌کنیم که فواصل حضیض و اوج ( $r_{\min}$  و  $r_{\max}$  که از کانونها تا مدار اندازه‌گیری شده‌اند) چنین به دست می‌آیند

$$\left. \begin{aligned} r_{\min} &= a(1 - \varepsilon) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} \\ r_{\max} &= a(1 + \varepsilon) = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (44.7)$$

برای یافتن دوره تناوب مربوط به حرکت بیضوی، معادله (۱۲.۷) را برای سرعت سطحی بازنویسی می‌کنیم

$$dt = \frac{2\mu}{l} dA$$

از آنجا که مساحت کل بیضی،  $A$ ، در یک دوره کامل،  $\tau$ ، جاروب می‌شود

$$\int_0^{\tau} dt = \frac{\gamma\mu}{l} \int_0^A dA$$

$$\tau = \frac{\gamma\mu}{l} A \quad (45.7)$$

مساحت بیضی عبارت است از  $A = \pi ab$  و با استفاده از مقادیر  $a$  و  $b$  از معادلات (۴۲.۷) و (۴۳.۷) می‌رسیم به

$$\tau = \frac{\gamma\mu}{l} \times \pi ab = \frac{\gamma\mu}{l} \times \pi \times \frac{k}{\gamma|E|} \times \frac{l}{\sqrt{\gamma\mu|E|}}$$

$$= \pi k \sqrt{\mu/\gamma} \times |E|^{-\frac{1}{2}} \quad (46.7)$$

از معادلات (۴۲.۷) و (۴۳.۷) نیز متوجه می‌شویم که نصف قطر کوچکتر را می‌شود چنین نوشت:

$$b = \sqrt{\alpha a} \quad (47.7)$$

بنابراین، از آنجا که  $\alpha = l^2/\mu k$ ، دوره تناوب  $\tau$  را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k} a^3 \quad (48.7)$$

این نتیجه را، که بر مبنای آن مجذور دوره تناوب با مکعب نصف قطر بزرگتر مدار بیضوی متناسب است، قانون سوم کپلر می‌گویند.<sup>۱</sup> توجه کنید که این نتیجه به مسئله یک جسمی معادل مربوط می‌شود، از این رو باید این نکته در نظر گرفته شود که این جرم کاهش یافته  $\mu$  است که در معادله (۴۸.۷) ظاهر می‌شود. کپلر عملاً به این نتیجه رسید که مجذور دوره‌های تناوب سیارات با مکعب نصف قطر بزرگتر مدارها، با ثابت تناسبی یکسان برای همه سیارات، متناسب است. به این معنی، این حکم فقط به طور تقریبی درست است، زیرا جرم کاهش یافته برای هر سیاره‌ای متفاوت است. به خصوص، از آنجا که نیروی گرانشی از عبارت زیر به دست می‌آید

$$F(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} = -\frac{k}{r^2}$$

۱. کمیت‌های  $a$  و  $b$  را به ترتیب نیم قطر کوچکتر و نیم قطر بزرگتر می‌گویند.

۲. کپلر این قانون را در سال ۱۶۱۹ منتشر کرد. قانون دوم کپلر در بخش ۳.۷ آمده است. بنابر قانون اول کپلر (۱۶۰۹) سیارات در مدارهایی بیضوی حرکت می‌کنند که خورشید در یکی از کانونهای آن واقع است. باید توجه داشت که کار کپلر نسبت به اعلام قوانین کلی حرکت از سوی نیوتون، حدود ۸۰ سال پیشتر بود. در واقع استثناهای نیوتون تا حدود زیادی بر شالوده مطالعات پیشاهنگ کپلر (و نیز بر پایه مطالعات گالیله و هویگنس) استوار بود.

$k = Gm_1m_2$  را اختیار می‌کنیم. بنابراین عبارت مربوط به مجذور دورهٔ تناوب به صورت زیر در می‌آید

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} \cong \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_2}, \quad m_1 \ll m_2 \quad (49.7)$$

و حکم کپلر فقط در صورتی صحیح است که بشود از جرم سیاره،  $m_1$ ، نسبت به جرم خورشید،  $m_2$ ، چشم پوشید. (اما، مثلاً، توجه کنید که جرم مشتری در حدود  $1/1000$  جرم خورشید است، بنابراین مشاهدهٔ تخطی از قانون تقریبی در این مورد دشوار نیست.)  
حال می‌توان قوانین کپلر را خلاصه کرد:

۱. سیارات در مدارهایی بیضوی خورشید را دور می‌زنند که خورشید در یکی از کانونهای آن بیضیها واقع است.
۲. سطحی که در واحد زمان به‌وسیلهٔ بردار شعاعی واصل بین خورشید و سیاره جاروب می‌شود، ثابت است.
۳. مجذور دورهٔ تناوب گردش هر سیاره با مکعب قطر بزرگتر مدار آن سیاره متناسب است.

### مثال ۴.۷

دنباله‌دار هالی، که اخیراً در ۱۹۸۶ از کنار خورشید گذر کرد، در مدار بیضوی بزرگی با خروج از مرکز  $0.967$  و دورهٔ تناوب ۷۶ سال حرکت می‌کند. بیشینه و کمینه فواصل آن را از خورشید محاسبه کنید.

حل: دورهٔ تناوب حرکت و نصف قطر بزرگتر توسط معادلهٔ (۴۹.۷) به هم مربوط می‌شوند. از آنجا که  $m$  (دنباله‌دار هالی) خیلی از خورشید  $m$  (جرم خورشید) کوچکتر است

$$a = \left( \frac{Gm_{\text{خورشید}}\tau^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[ \frac{\left( 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \right) (1.99 \times 10^{30} \text{kg}) \left( 76y \frac{365d}{y} \frac{24h}{d} \frac{3600s}{h} \right)^2}{4\pi^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$a = 2.68 \times 10^{12} \text{m}$$

باهره‌گیری از معادلات (۴۴.۷) می‌توانیم  $r_{\min}$  و  $r_{\max}$  را تعیین کنیم.

$$r_{\min} = ۲٫۶۸ \times ۱۰^{۱۲} \text{ m} (۱ - ۰٫۹۶۷) = ۸٫۸ \times ۱۰^{۱۰} \text{ m}$$

$$r_{\max} = ۲٫۶۸ \times ۱۰^{۱۲} \text{ m} (۱ + ۰٫۹۶۷) = ۵٫۲۷ \times ۱۰^{۱۲} \text{ m}$$

این مدار دنباله‌دار را به داخل مدار زهره می‌کشاند، و تا نزدیکی عطارد می‌برد، و در بازگشت حتی از مدار نپتون می‌گذرد و گاهی حتی تا نزدیکی مدار نسبتاً خارج از مرکز پلوتون می‌رسد. معمولاً، آدموند هالی را صاحب این افتخار می‌دانند که توجه جهانیان را به کارهای نیوتون در خصوص نیروهای گرانشی و مرکزی جلب کرده‌است. هالی پس از اینکه شخصاً این دنباله‌دار را در سال ۱۶۸۲ مشاهده کرد، به آن علاقه‌مند شد. هالی، بعضاً به خاطر شرطی که بین کریستوفرین و رابرت هوک بسته شده بود، در سال ۱۶۸۴ از نیوتون پرسید که اگر خورشید سیارات را با نیرویی که با مجذور فاصله آنها نسبت معکوس دارد بکشد، این اجرام چه مسیری را باید تعقیب کنند. نیوتون، در میان حیرت هالی، پاسخ داد: «البته، در مسیرهای بیضی». نیوتون قبلاً بیست سال در این مورد کار کرده بود اما نتایج خود را انتشار نداده بود. هالی، با تلاشی توانفرسا، در سال ۱۷۰۵ توانست ظهور بعدی دنباله‌داری را، که امروزه به نام او دنباله‌دار هالی نامیده می‌شود، برای سال ۱۷۵۸ پیشگویی کند.

## ۸.۷ معادلهٔ کپلر (اختیاری)

از معادلهٔ (۴۱.۷) رابطهٔ بین مختصات،  $r$  و  $\theta$  را، که حرکت ذره‌ای را توصیف می‌کنند که با نیرویی متناسب با عکس  $r^2$  کشیده می‌شود، به دست می‌آوریم. اما در مورد محاسبات نجومی،  $r(\theta)$  مورد نظر نیست بلکه تابع مطلوب،  $\theta(t)$  است، به طوری که راستای جسم (سیاره، دنباله‌دار، و مانند آنها) را بتوان در هر لحظه یافت. بعلاوه، می‌خواهیم عبارتی داشته باشیم که  $\theta$  را (که بی‌هنجاری حقیقی<sup>۱</sup> نامیده می‌شود) به صورت تابعی از زمان بدهد که به عنوان پارامتر تنها شامل دو ثابت مشاهده‌پذیر بنیادی مدار، یعنی، دورهٔ تناوب  $T$  و خروج از مرکز  $e$ ، باشد. این محاسبات را می‌توان به ترتیب زیر انجام داد. از آنجا که زمان  $T$  لازم است تا بردار شعاعی جسم کُل مساحت  $\pi ab$  مداری بیضوی را جاروب کند، و چون سرعت سطحی یکی از ثابتهای حرکت به شمار می‌آید، در زمان  $t$  مساحت  $(\pi ab/T)t$  جاروب می‌شود. می‌توان این عبارت را با انتگرال سطح برابر قرار داد، یعنی

۱. واژهٔ تاریخی «بی‌هنجاری» نه به معنی «عجیب» بلکه «انحراف» به کار رفته است، زیرا  $\theta$  انحراف زاویه‌ای را از نقطه‌ای ثابت اندازه می‌گیرد، که در محاسبات نجومی معمولاً حضيض خورشیدی است.

$$\frac{\pi ab}{\tau} t = \int dA \quad (50.7)$$

بنابر معادله (۱۱.۷)، اگر در  $t = 0$  بگیریم  $\theta = 0$ ، داریم

$$\frac{\pi ab}{\tau} t = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\theta \quad (51.7)$$

معادله (۴۱.۷) را می‌شود به این صورت نوشت

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (52.7)$$

بنابراین [به معادله (۱۶.ه)، پیوست ه مراجعه کنید]

$$\begin{aligned} \frac{\pi ab}{\tau} t &= \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{2(1 - \varepsilon^2)} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \tan^{-1} \left( \frac{(1 - \varepsilon) \tan(\theta/2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) - \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right] \end{aligned}$$

با توجه به اینکه  $ab = \alpha^2(1 - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$ ، می‌توانیم عبارت بالا را به صورت زیر ساده کنیم

$$\frac{2\pi t}{\tau} = 2 \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (53.7)$$

حل این معادله بسی دشوار است و معادله‌ای است که مطمئناً به آسانی نمی‌توان آن را به‌کار برد. بدتر از آن این است که،  $t(\theta)$  مورد نیاز نیست بلکه  $\theta(t)$  را لازم داریم؛ یعنی، این معادله باید معکوس شود. آشکار است که، این کار را نمی‌توان به روشی ساده انجام داد؛ تنها یک بسط رشته‌ای امکانپذیر است

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{2\pi t}{\tau} + 2\varepsilon \sin \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{5}{4}\varepsilon^2 \sin \frac{4\pi t}{\tau} \\ &+ \frac{1}{12}\varepsilon^3 \left( 13 \sin \frac{6\pi t}{\tau} - 3 \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) + \dots \quad (54.7) \end{aligned}$$

اگر  $\varepsilon$  به اندازه کافی کوچک باشد، در این صورت از جمله‌های حاوی  $\varepsilon^2$  و توانهای بالاتر می‌توان چشم پوشید و به عبارتی دست یافت که به کارگیری آن آسان است. اما در مورد مطالعات سیاره‌ای، چنین تقریبی مجاز نیست، چرا که خروج از مرکز اکثر سیارات از  $0.4^\circ$  به بزرگتر است. (در جدول ۱.۷ برخی از اطلاعات مناسب مربوط به اجرام بزرگ منظومه شمسی داده شده است). البته، خروج

جدول ۱.۷ برخی خواص اجرام اصلی منظومه شمسی

نام	نصف قطر بزرگتر مدار (برحسب یکاهای نجومی) <sup>۱</sup>	دوره تناوب (سال)	خروج از مرکز	جرم (بر حسب یکاهای جرم زمین) <sup>۲</sup>
خورشید	-	-	-	۳۳۳۴۸۰
عطارد	۰٫۳۸۷۱	۰٫۲۴۰۸	۰٫۲۰۵۶	۰٫۰۵۴۳
زهره	۰٫۷۲۳۳	۰٫۶۱۵۲	۰٫۰۰۶۸	۰٫۸۱۳۷
زمین	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۰٫۰۱۶۷	۱٫۰۰۰
اُروس (سیارک)	۱٫۴۵۸۳	۱٫۷۶۱۰	۰٫۲۲۳۰	$2 \times 10^{-4} (?)$
مریخ	۱٫۵۲۳۷	۱٫۸۸۰۹	۰٫۰۹۳۴	۰٫۱۰۷۱
سیریس (سیارک)	*	۴٫۶۰۳۵	۰٫۰۷۶۵	$\frac{1}{8000} (?)$
مشتری	۵٫۲۰۲۸	*	۰٫۰۴۸۴	۳۱۸٫۳۵
زحل	۹٫۵۳۸۸	۲۹٫۴۵۸	۰٫۰۵۵۷	*
اورانوس	۱۹٫۱۸۲	۸۴٫۰۱۳	۰٫۰۴۷۲	۱۴٫۵۸
نپتون	۳۰٫۰۵۸	۱۶۴٫۷۹۴	۰٫۰۰۸۶	۱۷٫۲۶
پلوتون	۳۹٫۵۱۸	۲۴۸٫۴۳۰	۰٫۲۴۸۶	< ۰٫۱
هالی (دنباله‌دار)	۱۸	۷۶	۰٫۹۶۷	

۱. یک یکای نجومی (AU) عبارت است از طول نصف قطر بزرگتر مدار زمین

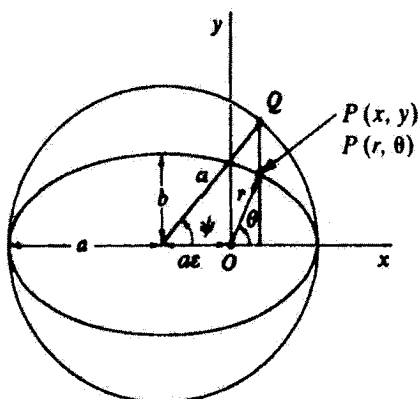
$$1 \text{ AU} \cong 1.496 \times 10^{11} \text{ m} \cong 93 \times 10^6 \text{ mile}$$

۲. جرم زمین تقریباً  $5.976 \times 10^{24} \text{ kg}$  است.

\* نگاه کنید به مسئله ۱۹.۷.

از مرکز دنباله‌دارها به واحد نزدیک است. بنابراین، اگر از معادله (۵۴.۷) بهره گرفته شود، معمولاً لازم است که چندین جمله را در سری در نظر بگیریم تا به دقتی قابل مقایسه با دقت رصدهای نجومی (که فوق العاده بالاست!) دست یابیم. این در بهترین حالت کاری خسته کننده است، و از این رو می‌خواهیم برای محاسبه  $\theta(t)$  روش کم زحمت‌تری را بیابیم. کیلر به جستجوی حل این





شکل ۱۰.۷

مسئله برخاست (البته، او روابط ریاضی ارائه شده توسط معادلات پیشین را نمی‌شناخت)، و روش هندسی زیرکانه‌ای را برای محاسبه بی‌هنجاری به عنوان تابع زمان، ابداع کرد. ما در اینجا این راه حل هندسی را نمی‌آوریم اما در عوض همان نتیجه را با ابزار جبری به دست می‌آوریم.

در شکل ۱۰.۷ نموداری را که کپلر ترسیم کرده است مشاهده می‌کنید. حرکت در مدار بیضوی اتفاق می‌افتد که مرکز نیرو در کانون  $O$  واقع شده، و در عین حال مبدأ دستگاه مختصات قائم نیز هست. در این دستگاه معادله مدار، نقطه  $P(x, y)$ ، عبارت است از

$$\frac{(x + a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (55.7)$$

سپس این بیضی را در داخل دایره‌ای به شعاع  $a$  محاط می‌کنیم و نقطه  $P$  (که با  $r$  و  $\theta$  مشخص شده) را روی دایره، در نقطه  $Q$ ، تصویر می‌کنیم. زاویه بین محور  $x$  و خط واصل بین مرکز دایره و نقطه  $Q$  را بی‌هنجاری خارج از مرکز  $\psi$  می‌گویند و بنابر تعریف عبارت است از

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi &= \frac{x + a\epsilon}{a} \\ \sin \psi &= \frac{y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (56.7)$$

که مقدار  $\sin \psi$  از معادله (55.7) نتیجه می‌شود، که اکنون به صورت اتحاد  $\cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1$  جلوه می‌کند.

از این روابط می‌توانیم بنویسیم

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\cos \psi - \varepsilon) \\ y &= b \sin \psi \\ &= a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (57.7)$$

طرفین این معادلات را به توان دو می‌رسانیم و باهم جمع می‌کنیم، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= a^2(1 - \varepsilon \cos \psi)^2 \end{aligned}$$

و کمیت  $r$ ، بر حسب بی‌هنجاری خارج از مرکز، عبارت است از

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \psi) \quad (58.7)$$

حالا می‌خواهیم رابطه صریحی بین  $\psi$  و  $\theta$  به دست آوریم. ابتدا معادله (52.7) را به این صورت بازنویسی می‌کنیم

$$\varepsilon r \cos \theta = a(1 - \varepsilon^2) - r \quad (59.7)$$

اگر  $\varepsilon r$  را به هر دو طرف این معادله بیفزاییم، داریم

$$\varepsilon r(1 + \cos \theta) = (1 - \varepsilon)[a(1 + \varepsilon) - r]$$

از معادله (58.7) مقدار  $r$  را در سمت راست این عبارت می‌نشانیم

$$\varepsilon r(1 + \cos \theta) = (1 - \varepsilon)[a(1 + \varepsilon) - a(1 - \varepsilon \cos \psi)]$$

یا

$$r(1 + \cos \theta) = a(1 - \varepsilon)(1 + \cos \psi) \quad (60.7 \text{ الف})$$

اگر  $\varepsilon r$  را از دو طرف معادله (59.7) کم و عبارت را ساده کنیم، می‌رسیم به

$$r(1 - \cos \theta) = a(1 + \varepsilon)(1 - \cos \psi) \quad (60.7 \text{ ب})$$

معادله (۶۰.۷ ب) را بر معادله (۶۰.۷ الف) تقسیم می‌کنیم، داریم

$$\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \times \frac{1 - \cos \psi}{1 + \cos \psi}$$

می‌توانیم از فرمول تانژانت نصف زاویه بهره‌گیریم و معادله بالا را به این قرار بنویسیم

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \tan \frac{\psi}{2} \quad (۶۱.۷)$$

که  $\psi$  را به‌طور منحصر به فردی بر حسب  $\theta$  می‌دهد (در صورتی‌که بررسی خود را به مقادیر اصلی توابع تانژانتی محدود کنیم). بنابراین، همین‌که  $\psi(t)$  پیدا شود، می‌توان  $\theta(t)$  را به‌دست آورد. برای محاسبه  $\psi(t)$ ، از طریق محاسبه انتگرالده بر حسب  $\psi$  می‌توانیم معادله (۵۱.۷) را به معادله‌ای به‌ازای  $\psi$  تبدیل کنیم. با دیفرانسیل‌گیری از معادله (۶۱.۷) می‌رسیم به

$$d\theta = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \times \frac{\cos^2(\theta/2)}{\cos^2(\psi/2)} d\psi \quad (۶۲.۷)$$

از معادله (۶۰.۷ الف) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} r &= a(1 - \varepsilon) \frac{1 + \cos \psi}{1 + \cos \theta} \\ &= a(1 - \varepsilon) \frac{\cos^2(\psi/2)}{\cos^2(\theta/2)} \end{aligned} \quad (۶۳.۷)$$

که در اینجا از فرمول نصف زاویه در مورد توابع کسینوسی سود جستیم.

برای بیان  $r^2 d\theta$  بر حسب  $\psi$ ، یک عامل  $r$  را از معادله (۵۸.۷)، عامل دیگر را از معادله (۶۳.۷)، و  $d\theta$  را از معادله (۶۲.۷) می‌گیریم. بدینسان

$$\begin{aligned} r^2 d\theta &= [a(1 - \varepsilon \cos \psi)] \left[ a(1 - \varepsilon) \frac{\cos^2(\psi/2)}{\cos^2(\theta/2)} \right] \\ &\quad \times \left[ \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \times \frac{\cos^2(\theta/2)}{\cos^2(\psi/2)} d\psi \right] \\ &= a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} (1 - \varepsilon \cos \psi) d\psi \end{aligned} \quad (۶۴.۷)$$

با توجه به این نتیجه، اکنون می‌توان معادله (۵۱.۷) را به این قرار نوشت

$$\frac{\pi ab}{\tau} t = \frac{a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2} \int_0^\psi (1 - \varepsilon \cos \psi) d\psi$$

با انتگرالگیری، و بار دیگر استفاده از  $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ ، به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\frac{2\pi t}{\tau} = \psi - \varepsilon \sin \psi \quad (۶۵.۷)$$

کمیت  $2\pi t/\tau$  را بی‌هنجاری میانگین می‌گویند، زیرا انحراف زاویه‌ای جسمی را اندازه‌گیری می‌کند که در مداری دایره‌ای با دوره تناوب  $\tau$  حرکت می‌کند. به پیروی از کارهای ستاره‌شناسان، بی‌هنجاری میانگین را با  $M$  نشان می‌دهیم<sup>۱</sup>

$$M = \psi - \varepsilon \sin \psi \quad (۶۶.۷)$$

این معادله، معادله کپلر است. برای یافتن  $\psi(t)$ ، باید این نتیجه را با روشی تقریبی معکوس کرد. در این صورت، چون معادله (۶۱.۷) کمیت‌های  $\psi$  و  $\theta$  را به هم مرتبط می‌کند، وابستگی زمانی بی‌هنجاری حقیقی را می‌توان یافت.

در به‌دست آوردن عبارت ساده‌ای برای سرعت جسمی واقع در مدارش بر حسب مقدار بردار شعاعی، می‌توانیم از معادله کپلر بهره‌گیریم. می‌توان با مراجعه به شکل ۱۰.۷، چنین نوشت

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (۶۷.۷)$$

با بهره‌گیری از معادلات (۵۷.۷) به‌ازای  $x$  و  $y$ ، مجذور سرعت چنین می‌شود

$$\begin{aligned} v &= a^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \psi + a^2 (1 - \varepsilon^2) \dot{\psi}^2 \cos^2 \psi \\ &= a^2 \dot{\psi}^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \psi) \end{aligned} \quad (۶۸.۷)$$

از معادله کپلر [معادله (۶۵.۷)] بر حسب زمان مشتق می‌گیریم، داریم

$$\frac{2\pi}{\tau} = \dot{\psi} (1 - \varepsilon \cos \psi) \quad (۶۹.۷)$$

با حل این معادله بر حسب  $\dot{\psi}$  و نشان دادن آن در معادله (۶۸.۷)، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 a^2 \frac{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \psi}{(1 - \varepsilon \cos \psi)^2} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 a^2 \frac{1 + \varepsilon \cos \psi}{1 - \varepsilon \cos \psi} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 a^2 \frac{1 - \varepsilon^2 - (1 - \varepsilon \cos \psi)}{1 - \varepsilon \cos \psi} \end{aligned} \quad (۷۰.۷)$$

۱. نمایش بی‌هنجاری خارج از مرکز با  $E$  و بی‌هنجاری حقیقی با  $v$  یا  $f$  هم متداول است.

با نشانند  $r/a = 1 - \varepsilon \cos \psi$  از معادله (۵۸.۷)، این نتیجه به دست می آید

$$v^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 a^2 \left(\frac{r}{a} - \frac{1}{a}\right) \quad (71.7)$$

سرانجام، قانون سوم کپلر [معادله (۴۸.۷)] را می توان به کاربرد تا این عبارت را تبدیل کند به

$$v^2 = \frac{k}{\mu} \left(\frac{r}{a} - \frac{1}{a}\right) \quad (72.7)$$

اگر بخواهیم  $\theta(t)$  را برای حرکت جسمی محاسبه کنیم که خروج از مرکزش خیلی بزرگ نباشد (مثلاً،  $\varepsilon \approx 0$ )، و اگر بخواهیم به دقتی، مثلاً یک قسمت در  $10^\circ$ ، برسیم، در این صورت خیلی از جمله های معادله (۵۴.۷) ضروری اند. بهره گیری از معادله کپلر در چنین وضعیتی تا حدودی آسانتر است. محاسبات نجومی مدارها تقریباً همیشه بر شالوده معادله کپلر استوارند. جزئیات کاربرد شگردهای تقریبی در معادله کپلر را می توان در کتابهای گوناگون مکانیک سماوی یافت.<sup>۱</sup>

## ۹.۷ زویای اوج و حضیض و حرکت تقدیمی (اختیاری)

اگر ذره ای در یک میدان نیروی مرکزی مقید و غیر دایره ای انجام دهد، در این صورت فاصله شعاعی ذره از مرکز نیرو همواره باید در گستره  $r_{\max} \geq r \geq r_{\min}$  واقع باشد، یعنی  $r$  باید به وسیله فواصل اوج و حضیض محدود و مقید شود. در شکل ۶.۷ مشاهده می کنید که فقط دو فاصله اوج و حضیض برای حرکت غیر دایره ای، و مقید وجود دارد. اما ذره با انجام یک گردش کامل بر حسب  $\theta$ ، نمی تواند به موضع اولیه خود برگردد (شکل ۴.۷). فاصله زاویه ای بین دو مقدار بی دربی  $r = r_{\max}$  به ماهیت دقیق نیرو بستگی دارد. زاویه بین هر اوج و حضیض متوالی را زاویه اوج و حضیض می گویند، و از آنجا که هر مدار بسته ای باید حول هر اوج و حضیضی متقارن باشد، نتیجه گرفته می شود که تمام زویای اوج و حضیض، برای چنین حرکتی باید مساوی باشند. مثلاً، زاویه اوج و حضیض برای حرکت بیضوی، همان  $\pi$  است. اگر مدار بسته نباشد، ذره در هر گردش در نقاط مختلف به فواصل اوج و حضیض می رسد؛ در این صورت زاویه اوج و حضیض، آن طور که مستلزم وجود مدار بسته است، کسرگویایی از  $2\pi$  نیست. اگر مدار تقریباً بسته باشد،

۱. بیش از  $120^\circ$  روش دستیابی به جوابهای تقریبی معادله کپلر در نوشتارهای مربوط به این زمینه ارائه شده است. مثلاً برای دستیابی به جزئیات موضوع، بنگرید به:

اوج و حضیضها حرکت تقدیمی اجرا می‌کنند، یا اینکه در صفحه حرکت به آرامی می‌چرخند. این عمل دقیقاً مشابه با چرخش آهسته حرکت بیضوی نوسانگر هماهنگ دوعدی است که بسامدهای طبیعی آن برای حرکت در امتداد  $x$  و  $y$  تقریباً مساویند (بخش ۴.۳).

چون نیروی قانون عکس مجذوری ایجاب می‌کند که تمام مدارهای بیضوی دقیقاً بسته باشند، اوجها و حضیضها باید همواره در فضا ثابت بمانند. اگر اوجها و حضیضها نسبت به زمان حرکت کنند، هر چند به آهستگی، این امر دلالت به این می‌کند که قانون نیرویی که جسم مطابق با آن حرکت می‌کند دقیقاً به صورت عکس مجذور فاصله تغییر نمی‌کند و نیوتون به این نکته مهم پی برد، و خاطر نشان کرد که هر پیشرفت یا عقبگرد حضیض خورشیدی یک سیاره مستلزم آن است که وابستگی شعاعی قانون نیرو نسبت به  $1/r^2$  اندکی تفاوت داشته باشد. بدینسان، بنابر استدلال نیوتون، رصد وابستگی زمانی حضیض خورشیدی سیارات باید آزمون حساسی از اعتبار شکل قانون گرانش عمومی به شمار آید.

در حقیقت، در مورد حرکت سیاره‌ای در داخل منظومه شمسی، انتظار داریم که، به علت اختلالاتی که بر اثر وجود همه سیارات دیگر پیش آمده است، در صورتی که  $r$  از خورشید اندازه‌گیری شود، نیروی وارد بر هر سیاره‌ای دقیقاً به صورت  $1/r^2$  تغییر نکند. اما، این اثر کوچک است و تنها تغییرات ناچیز حضیضهای خورشیدی سیاره‌ای مشاهده شده است. مثلاً، حضیض خورشیدی عطارد که بیشترین اثر را نشان می‌دهد، در هر قرن فقط در حدود  $574$  ثانیه قوس پیشرفت می‌کند.<sup>۱</sup> محاسبات تفصیلی مربوط به تأثیر سایر سیارات بر حرکت عطارد پیش‌بینی می‌کنند که آهنگ پیشرفت حضیض تقریباً در هر قرن  $531''$  خواهد بود. عدم قطعیتها در این محاسبه به طور چشمگیری کمتر از تفاوت  $43''$  بین مشاهده و محاسبه‌اند،<sup>۲</sup> و به مدت چشمگیری این اختلاف

۱. این حرکت تقدیمی علاوه بر حرکت تقدیمی کلی نقطه اعتدال نسبت به ستارگان «ثابت» است، که مقدار آن هم در هر قرن عبارت است از  $50^{\circ}50' \pm 50,645''$ .

۲. اوربن ژان ژوزف لوریه (۱۸۷۷-۱۸۱۱)، ستاره‌شناس فرانسوی، در سال ۱۸۴۵ برای اولین بار متوجه بی‌نظمی در حرکت عطارد شد. مطالعات مشابهی که از سوی لوریه و جان کوچ آدامز، ستاره‌شناس انگلیسی، در خصوص بی‌نظمیهای حرکت اورانوس صورت گرفت به کشف سیاره نپتون در سال ۱۸۴۶ انجامید. ترنز در کتاب خود توضیح جالبی از این رویداد را ارائه داده است (Turner, Tu04 chapter 2). در این مورد، باید توجه داشته باشیم که اختلالها ممکن است دوره‌ای باشند یا مداوم (یعنی بی‌پایان با زمان افزایش یابند). لاپلاس، در ۱۷۷۳ (انتشار یافته در ۱۷۷۶) نشان داد که هر اختلالی در حرکت میانگین یک سیاره که ناشی از جاذبه سیاره دیگر است باید دوره‌ای باشد، هر چند که ممکن است دوره تناوبش بسیار طولانی باشد. همین امر در مورد عطارد صادق است؛ حرکت تقدیمی  $531''$  در هر قرن دوره‌ای است، اما این دوره تناوب چندان طولانی است که تغییر از قرنی به قرنی دیگر در مقایسه با اثر باقیمانده  $43''$ ، ناچیز است.

مشکل بارز و حل نشده نظریه نیوتون به شمار می‌رفت. حالا می‌دانیم اصلاحاتی که از سوی نظریه نسبیت عام به معادله حرکت سیاره راه یافته است این اختلاف ۴۳'' را به طور نسبتاً دقیقی توجیه می‌کند. این نتیجه، یکی از پیروزیهای چشمگیر نظریه نسبیت به شمار می‌آید.

حال شیوه محاسبه پیشروی حضیض را از روی معادله اصلاح شده حرکت نشان خواهیم داد. برای انجام این محاسبه، خوب است که از معادله حرکت به شکل معادله (۲۰.۷) بهره گیریم، اگر از قانون گرانش عمومی در مورد  $F(r)$  استفاده کنیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{1}{u^2} F(u) = \frac{Gm^2 M}{l^2} \quad (۷۳.۷)$$

که در آن حرکت جسمی به جرم  $m$  را در میدان گرانشی جسمی به جرم  $M$  در نظر داریم. بنابراین کمیت  $u$  عکس فاصله بین  $m$  و  $M$  است.

اصلاحی که بنابر نظریه نسبیت عام باید در قانون نیروی گرانشی انجام شود مؤلفه کوچکی را در این نیرو به وجود می‌آورد که به صورت  $1/r^2 (= u^2)$  تغییر می‌کند. بدینسان داریم

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm^2 M}{l^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2 \quad (۷۴.۷)$$

که در اینجا  $c$  سرعت انتشار برهم‌کنش گرانشی و با سرعت نور یکسان است.<sup>۱</sup> برای ساده کردن نماد گذاری، تعریف می‌کنیم

$$\frac{1}{\alpha} \equiv \frac{Gm^2 M}{l^2} \quad \delta \equiv \frac{3GM}{c^2} \quad (۷۵.۷)$$

و می‌توانیم معادله (۷۴.۷) را به این صورت بنویسیم

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{\alpha} + \delta u^2 \quad (۷۶.۷)$$

۱. نصف جمله نسبیتی ناشی از آثاری است که به کمک نسبیت خاص قابل فهمند، یعنی اتساع زمان ( $1/3$ ) و اثر نکانه نسبیتی ( $1/6$ )؛ سرعت در حضیض بیشترین مقدار و در اوج کمترین مقدار است (به فصل ۱۴ رجوع کنید). نیم دیگر این جمله از آثار نسبیت عام نتیجه می‌شود و مربوط است به متناهی بودن زمان انتشار برهم‌کنشهای گرانشی. بدینسان توافق میان نظریه و آزمایش، این پیشگویی را که بنابر آن سرعت انتشار گرانشی و سرعت نور یکی است، تأیید می‌کند.

این معادله غیر خطی است، و ما برای حصول جواب از شگرد تقریبهای متوالی بهره می‌گیریم. نخستین جواب آزمایش را جوابی از معادله (۷۶.۷) اختیار می‌کنیم که در آن جمله  $\delta u^2$  چشم پوشیدنی باشد<sup>۱</sup>

$$u_1 = \frac{1}{\alpha}(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (77.7)$$

این عبارت همان نتیجه آشنای مربوط به نیروی قاتون عکس مجذور خالص است [معادله (۴۱.۷)]. توجه کنید که  $\alpha$  در اینجا همان است که در (۴۰.۷) تعریف شد با این تفاوت که به جای  $\mu$  کمیت  $m$  گذاشته شده است. اگر این عبارت را در سمت راست معادله (۷۶.۷) بنشانیم، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2} [1 + 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta] \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2} \left[ 1 + 2\varepsilon \cos \theta + \frac{\varepsilon^2}{4}(1 + \cos 2\theta) \right] \end{aligned} \quad (78.7)$$

که در آن  $\cos^2 \theta$  بر حسب  $\cos 2\theta$  بسط داده شده است. نخستین تابع آزمونی  $u_1$ ، هنگامی که در سمت چپ معادله (۷۶.۷) گذاشته شود، فقط نخستین جمله سمت راست،  $1/\alpha$ ، را بازسازی می‌کند. بنابراین با اضافه کردن جمله‌ای که بقیه سمت راست را بازسازی کند به  $u_1$ ، می‌توانیم یک تابع آزمونی دیگر را تشکیل دهیم. می‌شود تحقیق کرد که چنین جوابی خصوصی عبارت است از

$$u_p = \frac{\delta}{\alpha^2} \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) + \varepsilon \theta \sin \theta - \frac{\varepsilon^2}{6} \cos 2\theta \right] \quad (79.7)$$

بنابراین تابع آزمونی دوم عبارت است از

$$u_2 = u_1 + u_p$$

اگر در همین جا روند تقریب را متوقف کنیم، داریم

$$\begin{aligned} u &\cong u_2 = u_1 + u_p \\ &= \left[ \frac{1}{\alpha}(1 + \varepsilon \cos \theta) + \frac{\delta \varepsilon}{\alpha^2} \theta \sin \theta \right] \\ &\quad + \left[ \frac{\delta}{\alpha^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) - \frac{\delta \varepsilon^2}{6\alpha^2} \cos 2\theta \right] \end{aligned} \quad (80.7)$$

۱. ضرورت وارد کردن یک فاز دلخواه به داخل شناسه جمله کسینوسی را با انتخاب اندازه‌گیری  $\theta$  از موضع حضیض حذف می‌کنیم؛ یعنی،  $u_1$  در  $\theta = 0$  بیشینه (و بنابراین  $31$  کمینه) است.



که در اینجا جمله‌های موجود در  $u_1$  و  $u_p$  را مجدداً دسته‌بندی کرده‌ایم.

جمله‌های واقع در کروشهٔ دوم در معادلهٔ (۸۰.۷) را در نظر بگیرید: جملهٔ اول ثابت است، جملهٔ دوم فقط یک اختلال کوچک و دوره‌ای برای حرکت کپلری معمولی به شمار می‌آید. از این رو، در یک مقیاس دراز مدّت هیچیک از این جمله‌ها، به‌طور متوسط، در هیچگونه تغییری در مواضع اوج و حسیضها مشارکت ندارد. اما در نخستین کروشه جملهٔ متناسب با  $\theta$  آثار مداوم و بنابراین قابل مشاهده ایجاد می‌کند. جملات کروشهٔ نخستین را به ترتیب زیر در نظر می‌گیریم

$$u_{\text{مداوم}} = \frac{1}{\alpha} \left[ 1 + \varepsilon \cos \theta + \frac{\delta \varepsilon}{\alpha} \theta \sin \theta \right] \quad (۸۱.۷)$$

حال کمیت زیر را بسط می‌دهیم

$$1 + \varepsilon \cos \left( \theta - \frac{\delta}{\alpha} \theta \right) = 1 + \varepsilon \left( \cos \theta \cos \frac{\delta}{\alpha} \theta + \sin \theta \sin \frac{\delta}{\alpha} \theta \right) \\ \cong 1 + \varepsilon \cos \theta + \frac{\delta \varepsilon}{\alpha} \theta \sin \theta \quad (۸۲.۷)$$

که در اینجا از این واقعیت بهره برده‌ایم که  $\delta$  آنقدر کوچک است که تقریبهای زیر معتبرند

$$\cos \frac{\delta}{\alpha} \theta \cong 1, \quad \sin \frac{\delta}{\alpha} \theta \cong \frac{\delta}{\alpha} \theta$$

از این رو می‌توانیم  $u_{\text{مداوم}}$  را به‌صورت زیر بنویسیم

$$u_{\text{مداوم}} \cong \frac{1}{\alpha} \left[ 1 + \varepsilon \cos \left( \theta - \frac{\delta}{\alpha} \theta \right) \right] \quad (۸۳.۷)$$

اندازه‌گیری  $\theta$  را از موضع حسیض در  $t = 0$  اختیار کرده‌ایم. ظهورهای بی‌دری در حسیض وقتی حاصل می‌شود که شناسهٔ جملهٔ کسینوسی در  $u_{\text{مداوم}}$  به  $2\pi, 4\pi, \dots$  و الی آخر، افزایش یابد. اما افزایش به اندازهٔ  $2\pi$  در شناسه مستلزم آن است که

$$\theta - \frac{\delta}{\alpha} \theta = 2\pi$$

یا

$$\theta = \frac{2\pi}{1 - (\delta/\alpha)} \cong 2\pi \left( 1 + \frac{\delta}{\alpha} \right)$$

بنابراین، اثر جملهٔ نسبیتی در قانون نیرو همانا جابه‌جا کردن حسیض در هر گردش به اندازهٔ زیر است

$$\Delta \cong \frac{2\pi\delta}{\alpha} \quad (۸۴.۷ \text{ الف})$$

یعنی، اوج و حضیضها به آهستگی در فضا می چرخند. اگر به تعاریف  $\alpha$  و  $\delta$  مراجعه کنیم [معادلات (۷۵.۷)]، می‌رسیم به

$$\Delta \cong \epsilon \pi \left( \frac{GmM}{cl} \right)^2 \quad (\text{ب } ۸۴.۷)$$

از معادلات (۴۰.۷) و (۴۲.۷) می‌توان نوشت  $l^2 = \mu ka(1 - \epsilon^2)$ ؛ آنگاه، چون  $k = GmM$  و  $\mu \cong m$ ، داریم

$$\Delta \cong \frac{\epsilon \pi GM}{ac^2(1 - \epsilon^2)} \quad (\text{ج } ۸۴.۷)$$

بنابراین می‌بینیم که اگر نصف قطر بزرگتر،  $a$ ، کوچک و یا اگر خروج از مرکز بزرگ باشد، این اثر بیشتر جلوه می‌کند. و عطارد که نزدیکترین سیاره به خورشید است و نسبت به هر سیاره‌ای (جز پلوتون) خروج از مرکزش بیشتر است، حساسترین آزمون را برای این نظریه فراهم می‌آورد. مقدار محاسبه شده آهنگ حرکت تقدیمی برای عطارد  $3'' \pm 0.3''$  قوس در هر قرن است. مقدار مشاهده شده (که به خاطر تأثیر سیارات دیگر تصحیح شده است) عبارت است از:  $2.43'' \pm 0.11''$  از این رو پیشگویی نظریه نسبیت به نحوی دقیق تأیید می‌شود. آهنگ حرکت تقدیمی برای برخی سیارات در جدول ۲.۷ داده شده است.

### ۱۰.۷ پایداری مدارهای دایره‌ای

در بخش ۶.۷ خاطر نشان کردیم که اگر انرژی کل با کمینه مقدار انرژی پتانسیل مؤثر برابر باشد، یعنی  $E = V_{\min}$ ، مدار دایره‌ای است. اما، در حالت کلیتر مدار دایره‌ای برای هر پتانسیل جاذبه‌ای مجاز است، زیرا نیروی جاذبه را همواره می‌توان با انتخاب سرعت خطی مناسب با نیروی مرکزگرای دقیقاً موازنه کرد. بنابراین گرچه مدارهای دایره‌ای در میدان نیروی مرکزی، و جاذبه‌ای همواره امکانپذیرند، اما چنین مدارهایی الزاماً پایدار نیستند. اگر به ازای همه مقادیر  $t$  داشته باشیم  $\dot{r}|_{r=r_0} = 0$ ، مدار

۱. به بیان دیگر، می‌توان گفت که پیشروی نسبیتی حضیض خورشیدی برای عطارد بیشینه است زیرا سرعت مداری برای عطارد بیشترین مقدار و پارامتر نسبیتی  $v/c$  نیز بیشترین مقدار است (به فصل ۱۴ و مسئله ۳۵.۱۴ مراجعه کنید).

2. R. L. Duncombe, *Astron. J.* **61**,174(1956); G. M. Clemence, *Rev. Mod. Phys.* **19**,361 (1947).

جدول ۲.۷ آهنگ حرکت تقدیمی حسیض خورشیدی برخی از سیاره‌ها.

آهنگ حرکت تقدیمی (ثانیه قوس در هر قرن)		
سیاره	محاسبه شده	مشاهده شده
عطارد	$43,03 \pm 0,03$	$43,11 \pm 0,45$
زهره	۸۶۳	$84 \pm 48$
زمین	۳۸۴	$50 \pm 12$
مریخ	۱۳۵	-
مشتری	۰,۰۶	-

دایره‌ای در  $r = \rho$  وجود دارد؛ این امر در صورتی که  $(\partial V / \partial r)|_{r=\rho} = 0$ ، امکانپذیر است. اما فقط اگر پتانسیل مؤثر یک کمینه حقیقی داشته باشد پایداری حاصل می‌شود. تمام مدارهای دایره‌ای ترازمند دیگر ناپایدارند.

یک نیروی مرکزی جاذبه‌ای را به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$F(r) = -\frac{k}{r^n} \quad (85.7)$$

تابع پتانسیل برای چنین نیرویی عبارت است از

$$U(r) = -\frac{k}{n-1} \times \frac{1}{r^{(n-1)}} \quad (86.7)$$

و تابع پتانسیل مؤثر به این قرار است

$$V(r) = -\frac{k}{n-1} \times \frac{1}{r^{(n-1)}} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (87.7)$$

شرایط مربوط به کمینه  $V(r)$  و از آنجا شرایط مربوط به یک مدار دایره‌ای پایدار با شعاع  $\rho$  عبارت‌اند از

$$\frac{\partial V}{\partial r}|_{r=\rho} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}|_{r=\rho} > 0 \quad (88.7)$$

این معیار را در مورد پتانسیل مؤثر معادله (۸۷.۷) اعمال می‌کنیم، داریم

$$\frac{\partial V}{\partial r}|_{r=\rho} = \frac{k}{\rho^n} - \frac{l^2}{\mu \rho^3} = 0$$

یا

$$\rho^{(n-2)} = \frac{\mu k}{l^2} \quad (۸۹.۷)$$

و

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \Big|_{r=\rho} = -\frac{nk}{\rho^{(n+1)}} + \frac{3l^2}{\mu\rho^3} > 0$$

از این رو

$$-\frac{nk}{\rho^{(n-2)}} + \frac{3l^2}{\mu} > 0 \quad (۹۰.۷)$$

با جانشانی  $\rho^{(n-2)}$  از معادله (۸۹.۷) در معادله (۹۰.۷)، داریم

$$(3-n) \frac{l^2}{\mu} > 0 \quad (۹۱.۷)$$

بدینسان شرط وجود مدار دایره‌ای پایدار عبارت است از  $n < 3$ .

حالا روش کلیتری را به کار می‌بریم و در خصوص بسامد نوسان در یک مدار دایره‌ای در یک میدان نیروی عمومی تحقیق می‌کنیم. نیرو را به این قرار می‌نویسیم

$$F(r) = -\mu g(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad (۹۲.۷)$$

اکنون می‌شود معادله (۱۸.۷) را این‌طور نوشت

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -g(r) \quad (۹۳.۷)$$

با نشانیدن به جای  $\theta$  از معادله (۱۰.۷)

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu^2 r^3} = -g(r) \quad (۹۴.۷)$$

اکنون فرض می‌کنیم ذره در ابتدا در مداری دایره‌ای با شعاع  $\rho$  واقع باشد و اختلالی به شکل  $r \rightarrow \rho + x$  اعمال شود، که  $x$  کوچک است. چون  $\rho$  ثابت است، همچنین داریم  $\dot{x} \rightarrow \dot{r}$ . از این رو

$$\ddot{x} - \frac{l^2}{\mu^2 \rho^3 [1 + (x/\rho)]^3} = -g(\rho + x) \quad (۹۵.۷)$$

اما بنا بر فرض  $x \ll \rho$ ، بنابراین می‌توان این کمیّت را بسط داد

$$[1 + (x/\rho)]^{-2} = 1 - 2(x/\rho) + \dots \quad (۹۶.۷)$$

همچنین فرض می‌کنیم که  $g(r) = g(\rho + x)$  را بشود به صورت سری تیلور حول نقطه  $r = \rho$  بسط داد

$$g(\rho + x) = g(\rho) + xg'(\rho) + \dots \quad (۹۷.۷)$$

که در آن

$$g'(\rho) \equiv \left. \frac{dg}{dr} \right|_{r=\rho}$$

اگر از تمام جمله‌های  $x^2$  و بالاتر چشم‌پوشیم، در این صورت از نشانیدن معادلات (۹۶.۷) و (۹۷.۷) در معادله (۹۵.۷) می‌رسیم به

$$\ddot{x} - \frac{l^2}{\mu^2 \rho^3} [1 - 2(x/\rho)] \cong -[g(\rho) + xg'(\rho)] \quad (۹۸.۷)$$

به یاد بیاورید که فرض کرده‌ایم ذره در ابتدا واقع در مدار دایره‌ای با  $r = \rho$  است. تحت چنین شرایطی، هیچ حرکت شعاعی صورت نمی‌گیرد یعنی،  $\dot{r}|_{r=\rho} = 0$ . در این صورت، همچنین،  $\ddot{r}|_{r=\rho} = 0$ . بنابراین، با محاسبه معادله (۹۴.۷) در  $r = \rho$ ، داریم

$$g(\rho) = \frac{l^2}{\mu^2 \rho^3} \quad (۹۹.۷)$$

اگر این رابطه را در معادله (۹۸.۷) بنشانیم، به‌طور تقریبی داریم

$$\ddot{x} - g(\rho) \left[ 1 - 2\left(\frac{x}{\rho}\right) \right] \cong -[g(\rho) + xg'(\rho)]$$

یا

$$\ddot{x} + \left[ \frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho) \right] x \cong 0 \quad (۱۰۰.۷)$$

تعریف می‌کنیم

$$\omega^2 \equiv \frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho) \quad (۱۰۱.۷)$$

در این صورت معادله (۱۰۰.۷) به همان معادله آشنای مربوط به نوسانگر هماهنگ ساده تبدیل می شود

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (102.7)$$

جواب این معادله عبارت است از

$$x(t) = Ae^{+i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (103.7)$$

اگر  $\omega^2 < 0$ ، به طوری که  $\omega$  موهومی شود، آنگاه جمله دوم تبدیل می شود به  $B \exp(|\omega \cdot t|)$ ، که آشکارا با افزایش زمان، بدون محدودیت افزایش می یابد. از این رو شرط اجرای نوسان عبارت است از  $\omega^2 > 0$  یا

$$\frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho) > 0 \quad (104.7 \text{ الف})$$

از آنجا که  $g(\rho) > 0$  [معادله (۹۹.۷)]، می توانیم طرفین را بر  $g(\rho)$  تقسیم کنیم و این نامساوی را چنین بنویسیم

$$\frac{g'(\rho)}{g(\rho)} + \frac{3}{\rho} > 0 \quad (104.7 \text{ ب})$$

یا، چون  $g(r)$  و  $F(r)$  با یک ضریب ثابت به هم مربوط می شوند، پایداری در صورتی حاصل می شود که

$$\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} + \frac{3}{\rho} > 0 \quad (105.7)$$

حالا شرط حاکم بر قانون نیرو را که معادله (۱۰۵.۷) آن را به نمایش گذاشته است، با شرطی که قبلاً برای نیروی قانون توانی به دست آمد، مقایسه می کنیم

$$F(r) = -\frac{k}{r^n} \quad (106.7)$$

معادله (۱۰۵.۷) می شود

$$\frac{nk\rho^{-(n+1)}}{-k\rho^{-n}} + \frac{3}{\rho} > 0$$

یا

$$(3-n) \times \frac{11}{\rho\rho} > 0 \quad (107.7)$$

و به همان شرط قبلی، یعنی  $n < 3$ ، می رسمیم. (اما، باید توجه کنیم که حالت  $n = 3$  به بررسی بیشتری نیاز دارد؛ به مسئله ۲۴.۷ مراجعه کنید.)

مثال ۵.۷

پایداری مدارهای دایره‌ای را در میدان نیرویی که با تابع پتانسیل زیر توصیف می‌شود، تحقیق کنید

$$U(r) = \frac{-k}{r} e^{-(r/a)} \quad (۱۰۸.۷)$$

حل: این پتانسیل را پتانسیل استتار شده کولنی می‌گویند (هرگاه  $k = Ze^2$ ، که  $Z$  عدد اتمی و  $e$  بار الکترون است) زیرا این پتانسیل سریعتر از  $1/r$  با فاصله سقوط می‌کند و از این رو به‌طور تقریبی پتانسیل الکتروستاتیکی هسته اتمی را، همراه با احتساب «حذف» یا «استتار» جزئی پتانسیل بار هسته‌ای به‌وسیله الکترونهای اتمی، در مجاورت هسته به‌دست می‌دهد. نیرو به این طریق به‌دست می‌آید

$$F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} = -k \left[ \frac{1}{ar} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-(r/a)}$$

و

$$\frac{\partial F}{\partial r} = k \left[ \frac{1}{a^2 r} + \frac{2}{ar^2} + \frac{2}{r^3} \right] e^{-(r/a)}$$

شرط پایداری [معادله (۱۰۵.۷)] عبارت است از

$$3 + \rho \frac{F'(\rho)}{F(\rho)} > 0$$

بنابراین

$$3 + \frac{\rho k \left[ \frac{1}{a^2 \rho} + \frac{2}{a \rho^2} + \frac{2}{\rho^3} \right]}{-k \left[ \frac{1}{a \rho} + \frac{1}{\rho^2} \right]} > 0$$

که ساده می‌شود به

$$a^2 + a\rho - \rho^2 > 0$$

می‌توانیم این عبارت را چنین بنویسیم

$$\frac{a^2}{\rho^2} + \frac{a}{\rho} - 1 > 0$$

بدینسان پایداری به‌ازای همه مقادیر  $q \equiv a/\rho$  که از جواب معادله زیر بیشتر باشد، حاصل می‌شود

$$q^2 + q - 1 = 0$$

جواب مثبت این معادله (و بنابراین تنها جوابی که از لحاظ فیزیکی معنی دارد) عبارت است از

$$q = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \cong 0.62$$

پس، اگر تکانه زاویه‌ای و انرژی یک مدار دایره‌ای را در  $\rho = 3$  مجاز دارند، حرکت در صورتی پایدار است که

$$\frac{a}{\rho} \gtrsim 0.62$$

یا

$$\rho \gtrsim 1.62a \quad (109.7)$$

شرط پایداری مدارها در پتانسیل استتار شده را به صورت نموداری در شکل ۱۱.۷ مشاهده می‌کنید؛ در این شکل پتانسیل  $V(r)$  به‌ازای مقادیر مختلف  $\rho/a$  نمایش یافته است. ثابت نیروی  $k$  به‌ازای همهٔ منحنیها یکی است، اما  $l^2/2\mu$  چنان تنظیم شده است که کمینهٔ پتانسیل را به‌ازای تغییرات  $a$  در مقدار یکسانی از شعاع نگه دارد. به‌ازای  $\rho/a < 1.62$  یک کمینهٔ حقیقی برای پتانسیل وجود دارد، که حاکی از آن است که مدار دایره‌ای نسبت به نوسانهای کوچک پایدار است. به‌ازای  $\rho/a > 1.62$  هیچ کمینه‌ای وجود ندارد، از این رو مدارهای دایره‌ای نمی‌توانند وجود داشته باشند. به‌ازای  $\rho/a = 1.62$  شیب پتانسیل در وضعیتی که یک مدار دایره‌ای اشغال کند، صفر است. در این وضعیت مدار ناپایدار است، چرا که  $\omega^2$  در معادلهٔ (۱۰۲.۷) صفر است و جابه‌جایی  $x$  با زمان به‌طور خطی افزایش می‌یابد.

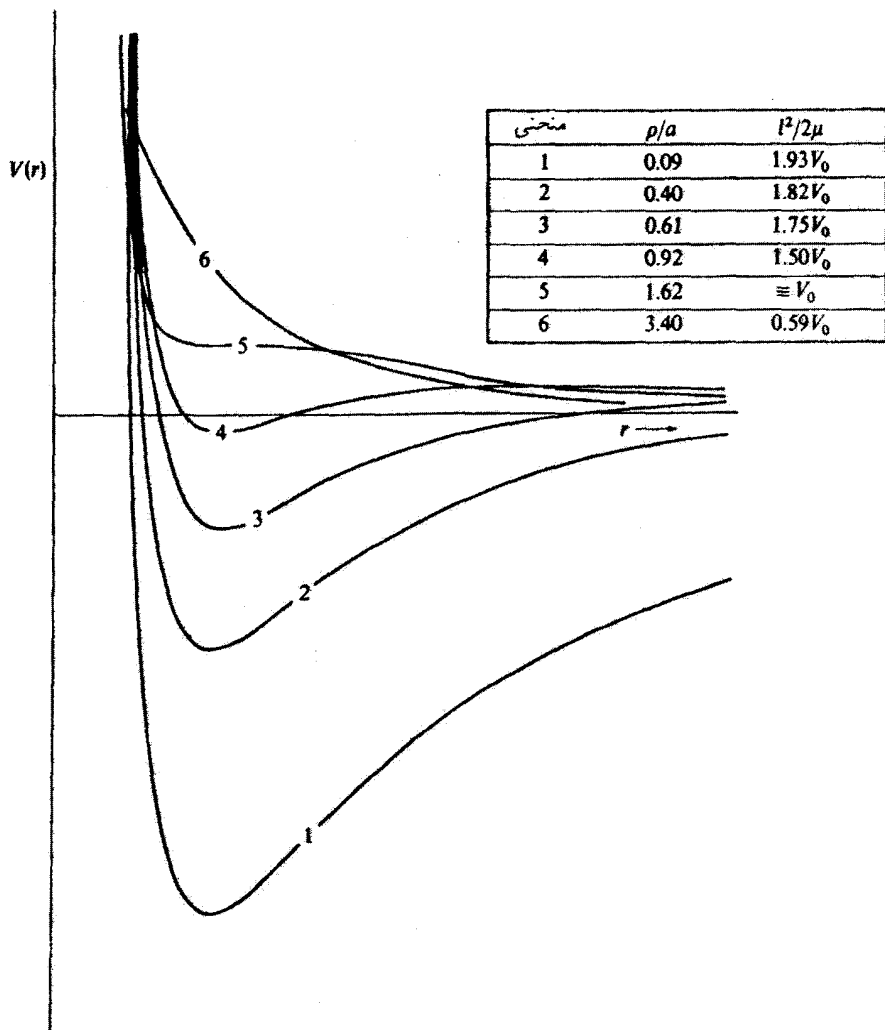
یکی از جنبه‌های جالب این تابع پتانسیل این است که تحت شرایطی معین ممکن است مدارهای مقیدی داشته باشند که انرژی کل برای آنها مثبت است (مثلاً، منحنی ۴ از شکل ۱۱.۷ را نگاه کنید).

### مثال ۶.۷

تعیین کنید که آیا ذره‌ای که بر سطح مخروطی حرکت می‌کند (مثال ۳.۶) می‌تواند مدار دایره‌ای پایدار داشته باشد یا خیر.

حل: در مثال ۳.۶ به این نتیجه رسیدیم که تکانه زاویه‌ای حول محور  $z$  یکی از ثابتهای حرکت است





شکل ۱۱.۷

$$l = mr^2\dot{\theta} = \text{const.}$$

همچنین می‌برسیم که معادله حرکت برای مختصه  $r$  عبارت است از

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad (11.7)$$

اگر شرایط اولیه به طور مناسب اختیار شوند، ذره می‌تواند در مداری دایره‌ای حول محور قائم حرکت کند و صفحه مدار در ارتفاع ثابت  $z$  بالاتر از صفحه افق، که از رأس مخروط می‌گذرد، قرار می‌گیرد. هر چند که این مسئله متضمن نیروی مرکزی نیست، برخی از جنبه‌های حرکت شبیه جنبه‌های مربوط به مورد نیروی مرکزی‌اند. بدینسان، مثلاً ممکن است درباره پایداری مدارهای دایره‌ای برای این ذره بحث کنیم. برای این کار، به یک محاسبه اختلال دست می‌زنیم.

اول فرض می‌کنیم که مدار دایره‌ای به‌ازای  $r = \rho$  وجود دارد. آنگاه اختلال  $r \rightarrow \rho + x$  را اعمال می‌کنیم. کمیت  $r\dot{\theta}^2$  در معادله (۱۱۰.۷) را می‌توان این طور بیان کرد

$$\begin{aligned} r\dot{\theta}^2 &= r \times \frac{l^2}{m^2 r^3} = \frac{l^2}{m^2 r^2} \\ &= \frac{l^2}{m^2} (\rho + x)^{-2} = \frac{l^2}{m^2 \rho^2} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^{-2} \\ &\cong \frac{l^2}{m^2 \rho^2} \left(1 - 2\frac{x}{\rho}\right) \end{aligned}$$

که در اینجا فقط جمله اول بسط را نگه داشته‌ایم، زیرا بنا بر فرض  $x/\rho$  کمیت کوچکی است. حال، چون  $\dot{\rho} = 0$ ، معادله (۱۱۰.۷)، به‌طور تقریبی، چنین می‌شود

$$\ddot{x} - \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{m^2 \rho^3} \left(1 - 2\frac{x}{\rho}\right) + g \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

یا

$$\ddot{x} + \left( \frac{2l^2 \sin^2 \alpha}{m^2 \rho^3} \right) x - \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{m^2 \rho^3} + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad (111.7)$$

اگر معادله (۱۱۰.۷) را در  $r = \rho$  محاسبه کنیم، سپس  $\ddot{r} = 0$  داریم

$$\begin{aligned} g \sin \alpha \cos \alpha &= \rho \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha \\ &= \frac{l^2}{m^2 \rho^3} \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

با توجه به این نتیجه، دو جمله آخر معادله (۱۱۱.۷) حذف می‌شوند، و باقی می‌ماند

$$\ddot{x} + \left( \frac{2l^2 \sin^2 \alpha}{m^2 \rho^3} \right) x = 0 \quad (112.7)$$

جواب این معادله همان جواب مربوط به نوسان هماهنگ با بسامد  $\omega$  است، که

$$\omega = \frac{\sqrt{3l}}{m\rho^2} \sin \alpha \quad (۱۱۳.۷)$$

بدینسان مدار دایره‌ای پایدار است.

## ۱۱.۷ دینامیک مداری

استفاده از حرکت نیروی مرکزی در هیچ کجا مفیدتر، مهمتر و جالبتر از بهره‌گیری آن در دینامیک فضایی نیست. هر چند دینامیک فضایی به علت جاذبه گرانشی سفینه فضایی به سوی اجسام گوناگون و حرکت مداری واقعاً پیچیده است، دو جنبه نسبتاً ساده را بررسی می‌کنیم: سفر طراحی شده‌ای به مریخ و پرواز از نزدیکی دنباله‌دارها و سیارات.

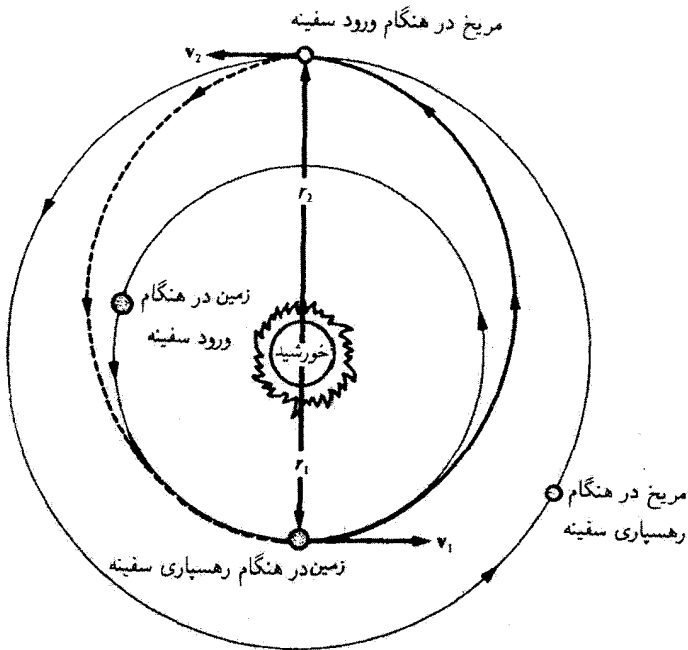
با یک یا چند پیشرانۀ موتورهای موشک مدارهای سفینه تغییر می‌کند. ساده‌ترین مانور عبارت است از اعمال تک پیشرانۀ در صفحه مدار که جهت تکانۀ زاویه‌ای را تغییر ندهد اما به‌طور همزمان خروج از مرکز و انرژی را تغییر دهد. اقتصادی‌ترین روش نقل و انتقال بین سیاره‌ای عبارت است از رفتن از یک مدار دایره‌ای خورشید مرکز (حرکت به سوی خورشید) به مدار دیگر در همان صفحه. زمین و مریخ با تقریب خوبی چنین سیستمی را نمایش می‌دهند، و یک انتقال هومن (شکل ۱۲.۷)، مسیری را با کمترین هزینه در انرژی کل نمایش می‌دهد.<sup>۱</sup> دو سوخت موتور مورد نیاز است: (۱) سوخت اول سفینه فضایی را از یک مدار دایره‌ای به دور زمین به یک مدار انتقالی بیضوی می‌اندازد که مدار مریخ را قطع می‌کند؛ (۲) سوخت دوم سفینه فضایی را از مدار بیضوی به مدار مریخ منتقل می‌کند.

می‌توانیم تغییرات سرعت مورد نیاز برای انتقال هومن را از طریق محاسبه سرعت سفینه‌ای که در مدار زمین به دور خورشید حرکت می‌کند (۲۱ در شکل ۱۲.۷) و سرعت مورد نیاز برای «پرتاب» آن در یک مدار انتقالی بیضوی که بتواند به مریخ برسد، محاسبه کنیم. فقط جاذبه گرانشی خورشید را در نظر می‌گیریم و جاذبه گرانشی زمین و مریخ را در محاسبات خود وارد نمی‌کنیم.

۱. برای اثبات این موضوع نگاه کنید به:

Kaplan (Ka76, Chapter 3).

والتر هومن (Hohmann) یک آلمانی پیشگام در تحقیقات سفرهای فضایی، در سال ۱۹۲۵ مؤثرترین روش از نظر انرژی را برای انتقال بین مدارهای بیضوی (سیاره‌ای) در یک صفحه واحد، با بهره‌گیری از تنها دو تغییر سرعت پیشنهاد کرد.



شکل ۱۲.۷

در مورد دایره و بیضی، از معادله (۴۲.۷)، داریم

$$E = \frac{-k}{2a} \quad (114.7)$$

این رابطه در مورد مسیری دایره‌ای برگرد خورشید، می‌شود

$$E = \frac{-k}{2r_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{k}{r_1} \quad (115.7)$$

که در اینجا داریم  $E = T + U$ . معادله (۱۱۵.۷) را برحسب  $v_1$  حل می‌کنیم

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}} \quad (116.7)$$

نصف قطر بزرگتر بیضی انتقال را با  $a_e$  نشان می‌دهیم

$$2a_e = r_1 + r_2 \quad (117.7)$$

اگر انرژی را در حوضیض خورشیدی مربوط به بیضی انتقال محاسبه کنیم، داریم

$$E_t = \frac{-k}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} m v_{t1}^2 - \frac{k}{r_1} \quad (118.7)$$

که در آن  $v_{t1}$  سرعت انتقال در حوضیض خورشیدی است. راستای  $v_{t1}$  در امتداد  $v_1$  در شکل ۱۲.۷ است. حل معادله (۱۱۸.۷) برحسب  $v_{t1}$  می‌دهد

$$v_{t1} = \sqrt{\frac{2k}{mr_1} \left( \frac{r_2}{r_1 + r_2} \right)} \quad (119.7)$$

انتقال سرعت،  $\Delta v_1$ ، مورد نیاز عبارت است از

$$\Delta v_1 = v_{t1} - v_1 \quad (120.7)$$

به همین ترتیب، در مورد انتقال از بیضی به مدار دایره‌ای به شعاع  $r_2$ ، داریم

$$\Delta v_2 = v_2 - v_{t2} \quad (121.7)$$

که در آن

$$v_2 = \sqrt{\frac{k}{mr_2}} \quad (122.7)$$

و

$$v_{t2} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E_t + \frac{k}{r_2} \right)}$$

$$v_{t2} = \sqrt{\frac{2k}{mr_2} \left( \frac{r_1}{r_1 + r_2} \right)} \quad (123.7)$$

در شکل ۱۲.۷ راستای  $v_{t2}$  در امتداد  $v_2$  است. نمونگی سرعت را می‌توان با اضافه کردن تغییرات سرعت،  $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2$ ، تعیین کرد.

زمان کل مورد نیاز برای انجام انتقال  $T_t$  عبارت است از یک نیم دوره تناوب مدار انتقال. از معادله (۴۸.۷)، داریم

$$T_t = \frac{\tau_t}{2}$$

$$T_t = \pi \sqrt{\frac{m}{k} a_t^3} \quad (124.7)$$

## مثال ۷.۷

زمان لازم برای اینکه سفینه‌ای طی یک انتقال هوهمن از زمین به مریخ برود و سرعت انتقال خورشید مرکزی لازم را با فرض اینکه هر دو سیاره در مدارهای هم صفحه واقع‌اند، محاسبه کنید.

حل: باید ثابتهای مناسب را در معادله (۱۲۴.۷) قرار دهیم

$$\begin{aligned} \frac{m}{k} &= \frac{m}{GmM_{\text{خورشید}}} = \frac{1}{GM_{\text{خورشید}}} \\ &= \frac{1}{(6,67 \times 10^{-11} \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{kg})(1,99 \times 10^{30} \text{kg})} \\ &= 7,53 \times 10^{-21} \text{s}^2/\text{m}^2 \end{aligned} \quad (125.7)$$

از آنجا که  $k/m$  غالباً در محاسبات مربوط به منظومه شمسی پیش می‌آید، آن را نیز می‌نویسیم

$$\frac{k}{m} = 1,33 \times 10^{20} \text{m}^2/\text{s}^2 \quad (126.7)$$

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{1}{4}(r_{\text{زمین-خورشید}} + r_{\text{مریخ-خورشید}}) \\ &= \frac{1}{4}(1,50 \times 10^{11} \text{m} + 2,28 \times 10^{11} \text{m}) \\ &= 1,89 \times 10^{11} \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_t &= \pi(7,53 \times 10^{-21} \text{s}^2/\text{m}^2)^{\frac{1}{2}}(1,89 \times 10^{11} \text{m})^{\frac{3}{2}} \\ &= 2,24 \times 10^7 \text{s} \\ &= 259 \text{d} \end{aligned}$$

سرعت خورشید مرکزی لازم برای انتقال از معادله (۱۱۹.۷) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} v_{t1} &= \left[ \frac{2(1,33 \times 10^{20} \text{m}^2/\text{s}^2)(2,28 \times 10^{11} \text{m})}{(1,50 \times 10^{11} \text{m})(3,78 \times 10^{11} \text{m})} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 3,27 \times 10^4 \text{m/s} = 32,7 \text{km/s} \end{aligned}$$

می‌توان  $v_{t1}$  را با سرعت مداری زمین مقایسه کرد [معادله (۱۱۶.۷)].

$$v_1 = \left[ \frac{1,33 \times 10^{20} \text{m}^2/\text{s}^2}{1,50 \times 10^{11} \text{m}} \right]^{\frac{1}{2}} = 29,8 \text{km/s}$$

توجه به این نکته مهم است که برای انتقال به سیارات بیرونی، سفینه فضایی باید در راستای مدار زمین پرتاب شود تا از سرعت مداری زمین بهره گیرد. برای انتقال به سیارات درونی (مثلاً زهره)، سفینه فضایی باید بر عکس حرکت زمین پرتاب شود. در هر دو حالت این سرعت نسبی،  $\Delta v$ ، (یعنی، نسبت به زمین) است که برای سفینه فضایی اهمیت دارد.

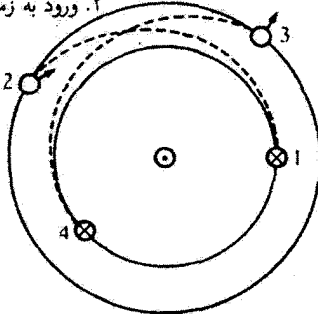
هر چند که مسیر انتقال هوهمن نمایشگر کمترین مصرف انرژی است، اما نشان دهنده کوتاهترین زمان نیست. برای انجام یک سفر رفت و برگشت از زمین به مریخ، سفینه فضایی باید  $46^\circ$  روز روی مریخ بماند تا زمین و مریخ برای سفر برگشت در وضعیت درستی قرار بگیرند [شکل ۱۳.۷ (الف)]. کل زمان سفر ( $d = 277 + 259 = 978$ ) شاید بیش از حد طولانی است. سایر طرحها برای سرعت گرفتن از طریق اثر منجنیقی پروازهای از نزدیک، سوخت بیشتری مصرف می کنند. چنین مأموریتی را که مسیر آن از کنار زهره می گذرد [شکل ۱۳.۷ (ج)] می توان با گذراندن فقط چند هفته ای در نزدیکی (یا روی) مریخ در کمتر از دو سال انجام داد.

در سالهای اخیر سفینه های فضایی متعددی از جاذبه گرانشی زمین گریخته اند تا منظومه شمسی ما را بکاوند. این نوع انتقال میان سیاره ای را می توان به سه مرحله تقسیم کرد: (۱) گریز از زمین، (۲) یک انتقال خورشید مرکزی به ناحیه مورد نظر، و (۳) مواجه شدن با جسمی دیگر (که تا حالا یا سیاره و یا دنباله دار بوده است). سوخت سفینه ای مورد نیاز برای چنین مأموریت هایی ممکن است بسیار زیاد باشد، اما تمهیدی هوشمندانه اندیشیده اند تا انرژی را از سایر اجرام منظومه شمسی «بربایند». از آنجا که جرم سفینه از جرم سیارات (یا قمرهای آنها) بسیار کوچکتر است، اتلاف انرژی اجسام آسمانی ناچیز خواهد بود.

یک مورد ساده از این نوع پرواز از نزدیک یا اثر منجنیقی (یا فلاخن) را بررسی می کنیم. سفینه ای که از بینهایت می آید به جسمی نزدیک می شود (که این جسم را  $B$  می نامیم)، با  $B$  برهم کنش می کند، و از آن دور می شود. در این صورت مسیر هذلولی است (شکل ۱۴.۷). سرعت های اولیه و نهایی، نسبت به  $B$ ، را به ترتیب با  $v_1'$  و  $v_2'$  نشان می دهیم. تأثیر کلی وارد بر سفینه عبارت است از زاویه انحراف  $\delta$  نسبت به  $B$ .

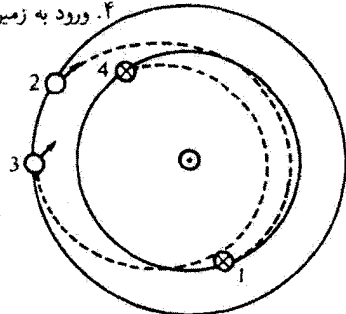
اگر سیستم را در چارچوب لختی بررسی کنیم که حرکت  $B$  در آن چارچوب صورت می گیرد، به اعتبار حرکت  $B$  سرعت های سفینه ممکن است کاملاً متفاوت باشند. سرعت اولیه  $v_1$  در شکل ۱۵.۷ (الف)، و هر دو سرعت  $v_2$  و  $v_f$  در شکل ۱۵.۷ (ب) نموده شده اند. توجه کنید که سرعت سفینه فضایی هم راستایش تغییر کرده و هم، افزایش یافته است. سرعت وقتی افزایش می یابد که سفینه فضایی از عقب راستای حرکت  $B$  بگذرد (از  $B$  دور شود در جهت حرکت  $B$ ).

۱. خروج از زمین
۲. ورود به مریخ
۳. خروج از مریخ
۴. ورود به زمین



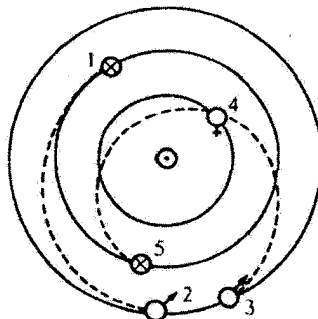
(الف) مأموریتی با حداقل مصرف انرژی مستلزم این است که توقف بر روی مریخ، پیش از بازگشت به زمین، طولانی باشد.

۱. خروج از زمین
۲. ورود به مریخ
۳. خروج از مریخ
۴. ورود به زمین



(ب) مأموریت کوتاه مدت تر مستلزم این است که سوخت بیشتری مصرف شود و مدار به خورشید نزدیکتر باشد.

۱. خروج از زمین
۲. ورود به مریخ
۳. خروج از مریخ
۴. گذر از زهره
۵. ورود به زمین



(ج) مأموریت کوتاه مدت تر (ب) را می توان بهتر کرد اگر زهره در خلال پرواز از نزدیک در موضعی قرار گیرد که به گرانی کمک کند.

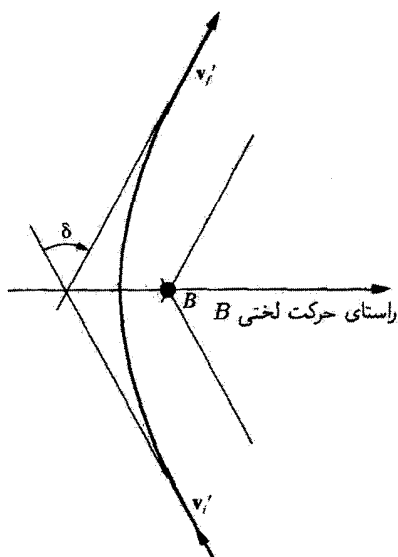
شکل ۱۳.۷

به همین ترتیب، سرعت وقتی کاهش پیدا می کند که سفینه فضایی از جلو حرکت  $B$  عبور کند. (به  $B$  نزدیک شود در خلاف جهت حرکت  $B$ ).

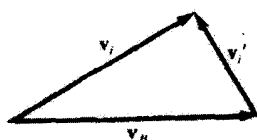
در خلال دهه ۱۹۷۰ دانشمندان آزمایشگاه پیشرفته جت در سازمان ملی هوانوردی و فضاوردی آمریکا (ناسا)<sup>۱</sup> پی بردند که چهار سیاره بزرگتر منظومه شمسی در موقعیتی تصادفی قرار خواهند

1. National Aeronautics and Space Administration.

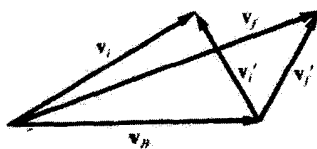




شکل ۱۴.۷



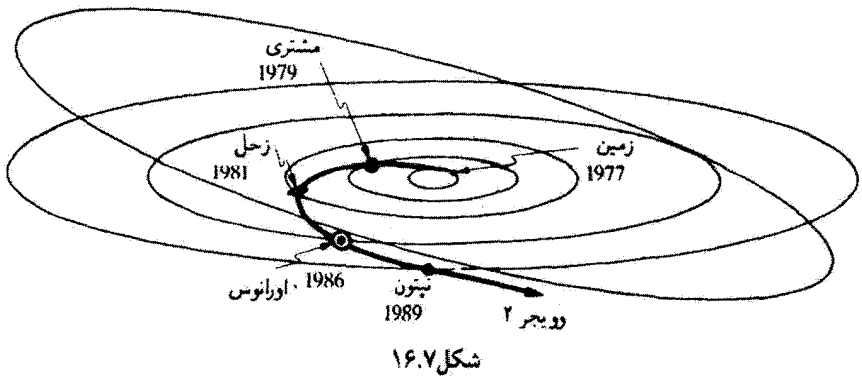
(الف)



(ب)

شکل ۱۵.۷

گرفت که سفینه‌ای بتواند از نزدیکی آنها و بسیاری از ۳۲ قمر شناخته شده‌اشان در طی یک مأموریت «سفر بزرگ» و با روش گرانی‌کمک شده که در بالا پیرامون آن بحث کردیم، عبور کند. این فرصت هم خطی سیارات تا ۱۷۵ سال بعد تکرار نخواهد شد. به سبب محدودیتهای بودجه، فرصت برای پیشبرد تکنولوژی جدید مورد نیاز نبود، و مأموریتی برای دیدار از مشتری و زحل که چهار سال طول می‌کشید، تصویب و طراحی شد. برای سفر به اورانوس و نپتون هیچگونه تجهیزات

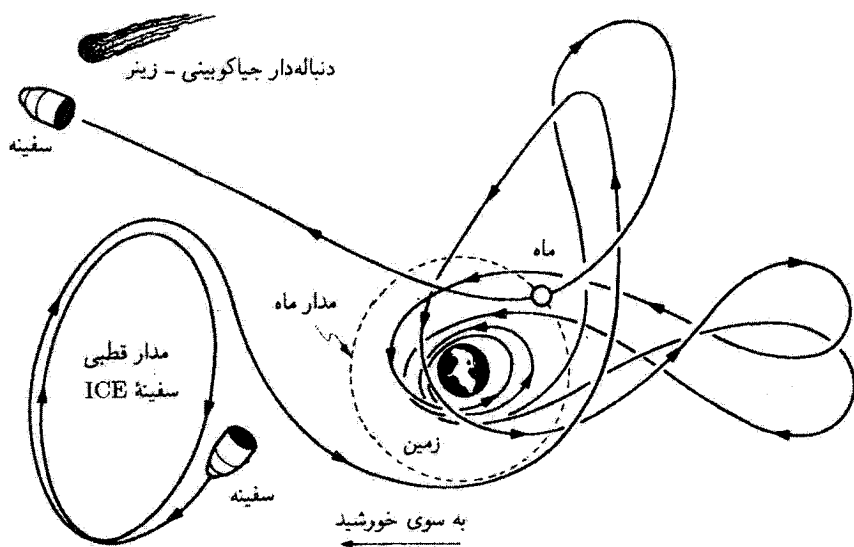


شکل ۱۶.۷

خاصی روی جفت سفینه‌های وویجر نصب نشد. وویجرهای ۱ و ۲ در سال ۱۹۷۷ پرتاب شدند تا در ۱۹۷۹ به مشتری و در سال ۱۹۸۰ (وویجر ۱) و در سال ۱۹۸۱ (وویجر ۲) به زحل برسند. به علت توفیق این مأموریتها به مشتری و زحل، بودجه لازم برای توسعه مأموریت وویجر ۲ که اورانوس و نیپتون را هم در برگیرد، بعداً تصویب شد. وویجر ۱ هم اکنون در راه خروج از منظومه شمسی است.

مسیر وویجر ۲ در شکل ۱۶.۷ نموده شده است. اثر منجنیقی گرانی این امکان را فراهم آورد که مسیر وویجر ۲ را، مثلاً، وقتی که از کنار زحل می‌گذشت با روش نموده شده در شکل ۱۴.۷ به سوی اورانوس تغییر دهند. جاذبه گرانشی ناشی از زحل برای انحراف سفینه از مسیر مستقیمش و هدایت مجدد آن با زاویه‌ای متفاوت، به کار رفت. اثر حرکت مداری زحل افزایشی در سرعت سفینه را ممکن می‌کند. فقط با بهره‌گیری از این شیوه گرانی-کمک شده بود که حرکت حیرت‌انگیز وویجر ۲ در زمان کوتاه ۱۲ سال ممکن شد. وویجر ۲ در اوایل سال ۱۹۸۶ از اورانوس گذشت و در ۱۹۸۹ پیش از وارد شدن به فضای میان ستاره‌ای، طی یکی از موفقترین مأموریت‌های فضایی که تاکنون انجام شده است، به نیپتون رسید.

نمایش جالبی از پرواز از نزدیک در سالهای ۱۹۸۲ تا ۱۹۸۵ به وسیله سفینه‌ای اتفاق افتاد که اصلاً آن را کاوشگر خورشید-زمین بین‌المللی ۳ (ISEE - 3) نامیدند. مأموریت این سفینه که در سال ۱۹۷۸ پرتاب شد کاوش باد خورشیدی میان خورشید و زمین بود. این سفینه به مدت چهار سال در صفحه دایره البروج در حدود دو میلیون مایلی زمین گردش کرد. در ۱۹۸۲-چون ایالات متحده تصمیم گرفت در تحقیقات مشترک اروپایی-ژاپنی-شوروی سابق، در خصوص دنباله‌دارهایی در ۱۹۸۶ مشارکت نکند-ناسا بر آن شد برنامه‌مجددی برای ISEE - 3 طراحی کند، و آن را به



شکل ۱۷.۷

نام کاوشگر دنباله‌دار بین‌المللی (ICE) مجدداً نام‌گذاری کرد و در سپتامبر ۱۹۸۵، حدود شش ماه پیش از آنکه سفینه دیگر در ۱۹۸۶ از میان دنباله‌دار هالی بگذرد، آن را از نزدیکی دنباله‌دار جیاکوبینی-زینر عبور داد. سفر سه ساله ICE بسیار جالب بود (شکل ۱۷.۷). مسیر ICE دو سفر از نزدیکی زمین و پنج پرواز از نزدیکی ماه را در طی سفر میلیارد مایلی‌اش به دنباله‌دار، در بر می‌گرفت. این ماهواره در خلال یکی از پروازهای نزدیکش به ۷۵ مایلی سطح ماه رسید، گل مسیر را می‌شد به دقت برنامه‌ریزی کرد زیرا قانون نیرو به خوبی شناخته شده است. برهم‌کنش نهایی با دنباله‌دار، در فاصله حدوداً ۴۴ میلیون مایلی زمین، شامل یک سفر ۲۰ دقیقه‌ای از میان دنباله‌دار، در فاصله تقریباً ۵۰۰۰ مایلی عقب هسته دنباله‌دار، بود.

### مسائل

۱.۷ در بخش ۲.۷ نشان دادیم که حرکت دو جسم را که با یکدیگر فقط به وسیله نیروهای مرکزی برهم‌کنش دارند، می‌توان به مسئله یک جسم معادل تبدیل کرد. به وسیله محاسبه‌ای صریح نشان دهید که چنین تبدیلی برای اجسامی که در یک میدان گرانشی یکنواخت خارجی حرکت می‌کنند، نیز امکان‌پذیر است.

۲.۷ برای به دست آوردن معادله (۳۹.۷) انتگرالگیری معادله (۳۸.۷) را انجام دهید.

۳.۷ ذره‌ای در یک مدار دایره‌ای در یک میدان نیرو که با عبارت زیر بیان می‌شود، حرکت می‌کند،

$$F(r) = -\frac{k}{r^2}$$

نشان دهید که، اگر  $k$  به نصف مقدار اولیه‌اش کاهش یابد، مدار ذره سهموی خواهد بود.

۴.۷ میانگین زمانی (یعنی، میانگین در یک دور کامل) انرژی پتانسیل ذره‌ای را که در یک میدان نیروی قانون عکس مجذوری مرکزی در مداری بیضوی حرکت می‌کند، به طور صریح محاسبه کنید. نتیجه را بر حسب ثابت نیروی میدان و نصف قطر بزرگتر بیضی بیان کنید. محاسبه مشابهی را برای انرژی جنبشی انجام دهید. نتایج را مقایسه و از آنجا درستی قضیه ویرال را برای این حالت تحقیق کنید.

۵.۷ دو ذره تحت تأثیر نیروی گرانشی متقابلشان حرکت و مسیریابی دایره‌ای را با دوره تناوب  $\tau$  به دور یکدیگر طی می‌کنند. اگر ناگهان در مدارهایشان متوقف شوند و امکان یابند که با جاذبه گرانشی به سوی یکدیگر کشیده شوند، نشان دهید که پس از مدت  $\tau/4\sqrt{2}$  به یکدیگر برخورد خواهند کرد.

۶.۷ دو جرم  $m_1$  و  $m_2$  که جاذبه گرانشی دارند ( $m_1 + m_2 = M$ ) به فاصله  $r_0$  از یکدیگر قرار گرفته‌اند و از حالت سکون رها می‌شوند. نشان دهید که در فاصله ( $r < r_0$ ) سرعتشان عبارت است از

$$v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{M} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}, \quad v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{M} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$$

۷.۷ نشان دهید که سرعت سطحی برای ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی جاذبه‌ای به معادله  $F(r) = -kr$  حرکت می‌کند، ثابت است. میانگینهای زمانی انرژیهای جنبشی و پتانسیل را محاسبه و با نتایج قضیه ویرال مقایسه کنید.

۸.۷ درباره حرکت ذره‌ای که به وسیله یک مرکز نیرو و طبق قانون  $F(r) = kr$  رانده می‌شود تحقیق کنید. نشان دهید که مدار فقط می‌تواند هذلولوی باشد.

۹.۷ ماهواره‌ای مخابراتی در مداری دایره‌ای به شعاع  $R$ ، با سرعت  $v$  زمین را دور می‌زند. موشکی تصادفاً و کاملاً ناگهانی شلیک می‌شود، این موشک سرعت شعاعی بیرون سوی  $v$  را علاوه بر سرعت اولیه‌اش پیدا می‌کند.

الف) نسبت انرژی و تکانه زاویه‌ای جدید را به مقدار قبلی محاسبه کنید.

ب) حرکت ماهواره را پس از شلیک موشک توصیف و نمایش تغییرات  $U(r)$ ،  $V(r)$ ،  $T(r)$  و  $E(r)$  را ترسیم کنید.

۱۰.۷ فرض کنید مدار زمین دایره‌ای است و جرم خورشید ناگهان به نصف کاهش پیدا می‌کند.

در این صورت زمین چه مداری خواهد داشت؟ آیا زمین از منظومه شمسی خواهد گریخت؟

۱۱.۷ ذره‌ای تحت تأثیر یک نیروی مرکزی به معادله  $F(r) = -k/r^n$  حرکت می‌کند. اگر مدار ذره دایره‌ای باشد و از مرکز نیرو بگذرد، نشان دهید که  $n = 5$ .

۱۲.۷ دنباله‌داری را در نظر بگیرید که در مسیری سهموی در صفحه مدار زمین حرکت می‌کند. اگر فاصله نزدیکترین موضع دنباله‌دار به خورشید  $\beta r_e$  باشد، که  $r_e$  شعاع مدار دایره‌ای (فرض شده) زمین است و  $\beta < 1$ ، نشان دهید مدت زمانی را که دنباله‌دار در مدار زمین می‌گذراند از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\sqrt{2(1-\beta)} \times (1+\beta) / 3\pi \times 1y$$

اگر دنباله‌دار تا فاصله حضیض خورشیدی عطارد به خورشید نزدیک شود، چند روز در داخل مدار زمین خواهد ماند؟

۱۳.۷ درباره حرکت ذره‌ای در یک میدان مرکزی قانون عکس مجذوری، که یک میدان از نظر مقداری متناسب با مکعب عکس فاصله ذره تا مرکز نیرو بر آن نهاده شده، مطابق رابطه زیر بحث کنید

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3} \quad k, \lambda > 0$$

نشان دهید که این حرکت به وسیله یک بیضی که حرکت تقدیمی دارد، توصیف می‌شود. حالت‌های  $\lambda < l^2/\mu$ ،  $\lambda = l^2/\mu$  و  $\lambda > l^2/\mu$  را در نظر بگیرید.

۱۴.۷ قانون نیرو را برای یک میدان نیروی مرکزی بیابید که حرکت یک ذره را در مسیری مارپیچی به معادله  $r = k\theta^2$  مجاز می‌دارد؛ در این عبارت  $k$  ثابت است.

۱۵.۷ ذره‌ای به جرم واحد در امتداد خط راستی از بینهایت حرکت می‌کند، به طوری که اگر این خط راست امتداد یابد، از فاصله  $b\sqrt{2}$  نسبت به نقطه  $P$  می‌گذرد. اگر ذره با نیرویی که به صورت  $k/r^5$  تغییر می‌کند به سوی  $P$  جذب شود، و اگر تکانه زاویه‌ای حول نقطه  $P$  برابر باشد با  $\sqrt{k/b}$ ، نشان دهید که مسیر ذره با معادله زیر داده می‌شود

$$r = b \operatorname{coth}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$$

۱۶.۷ ذره‌ای حرکتی بیضوی (اما خیلی نزدیک به دایره‌ای) حول یک مرکز نیرو اجرا می‌کند. در نقطه‌ای از مدار یک ضربهٔ مماسی بر ذره وارد می‌آید، و سرعت آن را از  $v$  به  $v + \delta v$  تغییر می‌دهد. نشان دهید که تغییر نسبی ایجاد شده در قطرهای بزرگتر و کوچکتر مدار دو برابر تغییر نسبی در سرعت است و اگر  $\delta v < 0$ ، این قطرها بزرگتر می‌شوند.

۱۷.۷ ذره‌ای در میدان نیروی مرکزی قانون عکس مجذوری در یک مدار بیضوی حرکت می‌کند. اگر نسبت بیشینه سرعت زاویه‌ای به کمینه سرعت زاویه‌ای ذره در مدارش برابر  $n$  باشد، در این صورت نشان دهید که خروج از مرکز مدار عبارت است از

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}$$

۱۸.۷ با استفاده از نتایج کپلر (یعنی، قوانین اول و دوم او) نشان دهید که نیروی گرانشی باید مرکزی باشد و وابستگی شعاعی باید به صورت  $1/r^2$  باشد، به این ترتیب، قانون نیروی گرانشی را از طریق استقرا استخراج کنید.

۱۹.۷ کمیته‌ای جا افتاده‌ای را که در جدول ۱.۷ با  $c$  مشخص شده‌اند، محاسبه کنید.

۲۰.۷ نشان دهید حاصلضرب سرعت‌های (خطی) کمینه و بیشینه جسمی که در مداری بیضوی حرکت می‌کند عبارت است از  $(2\pi a/r)^2$ .

۲۱.۷ اگر  $\eta$  بنا بر تعریف عبارت باشد از زاویهٔ بین جهت حرکت سیاره (در مداری بیضوی) و راستای عمود بر بردار شعاعی سیاره، نشان دهید که

$$\tan \eta = \frac{\varepsilon \sin \psi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

که  $\psi$  عبارت است از بی‌هنجاری خارج از مرکزی.

۲۲.۷ برای ذره‌ای که در یک مدار بیضوی با نصف قطر بزرگتر  $a$  و خروج از مرکز  $\varepsilon$  حرکت می‌کند، نشان دهید که

$$\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos \theta \right\rangle = \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

که علامت  $\langle \dots \rangle$  میانگین زمانی در یک دورهٔ کامل را نشان می‌دهد.

۲۳.۷ دسته‌ای از مدارها را در یک پتانسیل مرکزی در نظر بگیرید که انرژی کل برای آن ثابت است. نشان دهید که اگر یک مدار دایره‌ای پایدار وجود داشته باشد، تکانهٔ زاویه‌ای مربوط به این مدار از تکانهٔ زاویه‌ای مربوط به هر مدار دیگری از همین دسته بزرگتر است.

۲۴.۷ درباره حرکت ذره متحرکی در یک میدان نیروی مرکزی جاذبه‌ای که با معادله  $F(r) = -k/r^2$  بیان می‌شود، بحث کنید.<sup>۱</sup> برخی از این مدارها را به‌ازای مقادیر مختلف انرژی گل ترسیم کنید. آیا یک مدار دایره‌ای در چنین میدان نیرویی می‌تواند پایدار باشد؟

۲۵.۷ ماهواره‌ای زمینی در مداری بیضوی با دوره تناوب  $\tau$ ، خروج از مرکز  $\epsilon$ ، و نصف قطر بزرگتر  $a$  حرکت می‌کند. نشان دهید که بیشینه سرعت شعاعی این ماهواره عبارت است از  $2\pi a \epsilon / (\tau \sqrt{1 - \epsilon^2})$ .

۲۶.۷ اوج یک ماهواره زمینی  $3500 \text{ km}$  و حضیض آن  $300 \text{ km}$  بر فراز سطح زمین است. وقتی: الف) این ماهواره نسبت به حضیض زمینی  $90^\circ$  حول زمین چرخیده باشد و ب) نیمی از مسیر حضیض به اوج را پیموده باشد، چقدر بالاتر از سطح زمین واقع است؟

۲۷.۷ سرعت ماهواره‌ای زمینی هنگامی که در حضیض خود در  $220 \text{ km}$  بر فراز سطح زمین واقع باشد،  $25000 \text{ km/h}$  است. فاصله اوج آن، سرعتش در اوج، و دوره تناوب گردش آن را بیابید.

۲۸.۷ نشان دهید که کارآمدترین روش تغییر انرژی برای یک مدار بیضوی یک تک موتور کوتاه پیشرفته این است که در حضیض، موشک در راستای حرکت شلیک شود.

۲۹.۷ سرعت سفینه‌ای در یک مدار به دور زمین در حضیض  $6680 \text{ km}$  بر فراز سطح زمین  $10160 \text{ m/s}$  است. سرعت این سفینه در اوج  $42200 \text{ km}$  چقدر خواهد بود؟  
۳۰.۷ کمینه سرعت گریز یک سفینه از ماه چقدر است؟

۳۱.۷ کمینه و بیشینه سرعت قمری که اورانوس را دور می‌زند عبارت است از:  $v_{\min} = v - v_0$  و  $v_{\max} = v + v_0$ .

الف) خروج از مرکز را بر حسب  $v$  و  $v_0$  بیابید.

ب) نشان دهید که  $v_{\min} v_{\max} = (2\pi a / \tau)^2$ .

۳۲.۷ سفینه‌ای در یک مدار  $200 \text{ km}$  بر فراز سطح زمین در یک مدار دایره‌ای قرار داده شده است. کمینه سرعت گریز از زمین را پیدا کنید. با نشان دادن زمین و مدار دایره‌ای، مسیر گریز را ترسیم کنید. مسیر سفینه نسبت به زمین چیست؟

۳۳.۷ قانون نیرویی به این شکل را در نظر بگیرید

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{k'}{r^3}$$

۱. راجر کوتز (۱۷۱۶-۱۶۸۲) این قانون نیروی خاص را به‌طور جامعی مورد پژوهش قرار داد، و مدارهای این نیرو مارپیچهای کوتز نامیده می‌شوند.

نشان دهید که اگر  $k' > \rho^2 k$ ، در این صورت یک ذره می‌تواند در یک مدار دایره‌ای پایدار در  $r = \rho$  حرکت کند.

۳۴.۷ قانون نیرویی به شکل  $F(r) = -(k/r^2)\exp(-r/a)$  را در نظر بگیرید. در خصوص پایداری مدارهای دایره‌ای در این میدان نیرو تحقیق کنید.

۳۵.۷ ذره‌ای به جرم  $m$  را در نظر بگیرید که مقید است روی سطح یک سهمیوار به معادله (در مختصات استوانه‌ای)  $r^2 = 4az$  حرکت کند. اگر ذره در معرض یک نیروی گرانشی باشد، نشان دهید که بسامد نوسانهای کوچک در حول مداری دایره‌ای به شعاع  $\rho = \sqrt{4az_0}$  عبارت است از

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{a+z_0}}$$

۳۶.۷ مسئله ذره‌ای را که بر سطح یک مخروط حرکت می‌کند، آن طور که در مثالهای ۳.۶ و ۶.۷ بحث شد، در نظر بگیرید. نشان دهید که پتانسیل مؤثر عبارت است از

$$V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + mgr \cot \alpha$$

(توجه کنید که در اینجا  $r$  عبارت است از فاصله شعاعی در مختصات استوانه‌ای، و نه مختصات کروی؛ شکل ۱.۶). نشان دهید که نقاط برگشت حرکت را می‌توان از روی جواب یک معادله درجه سوم بر حسب  $r$  یافت. همچنین نشان دهید که فقط دو تا از ریشه‌های این معادله از لحاظ فیزیکی با معنی‌اند، به طوری که حرکت در حد فاصل دو صفحه افقی که مخروط را می‌پزند، محدود می‌شود.

۳۷.۷ یک مدار تقریباً دایره‌ای (یعنی  $\epsilon \ll 1$ ) را می‌توان مداری دایره‌ای گرفت که اختلال کوچکی بر آن اعمال شده است. در این صورت بسامد حرکت شعاعی از معادله (۱۰۱.۷) به دست می‌آید حالتی را در نظر بگیرید که قانون نیرو به صورت  $F(r) = -k/r^n$  است (که در آن  $n$  عددی درست است)، و نشان دهید که زاویه اوج و حضیض عبارت است از  $n - \pi/\sqrt{3}$ . از این رو، نشان دهید که به طور کلی یک مدار بسته فقط برای نیروی نوسانگر هماهنگ و نیروی قانون عکس مجذوری حاصل می‌شود (اگر مقادیر  $n$  مساوی یا کوچکتر از ۶ - مستثنی شوند).

۳۸.۷ ذره‌ای در یک مدار تقریباً دایره‌ای در میدان نیرویی به معادله

$$F(r) = -(k/r^2)\exp(-r/a)$$

حرکت می‌کند. نشان دهید که محور اوج و حضیض در هر گردش به اندازه تعدادی تقریباً مساوی  $\pi\rho/a$  پیشی می‌گیرد، که در آن  $\rho$  شعاع مدار دایره‌ای است و  $\rho \ll a$ .



۳۹.۷ یک ماهوارهٔ مخابراتی در مداری دایره‌ای بر فراز زمین و در فاصله‌ای برابر شعاع زمین قرار گرفته است. کمینه سرعت  $\Delta v$  لازم را برای اینکه ارتفاع ماهواره دو برابر شود و در مدار دایره‌ای دیگری قرار گیرد، پیدا کنید.

۴۰.۷ کمینه  $\Delta v$  مورد نیاز را برای قرار دادن ماهواره‌ای در مدار زهره (که دایره‌ای و هم‌صفحه با زمین فرض شده) محاسبه کنید؛ این ماهواره هم اکنون در مدار خورشید مرکزی زمین (که آن نیز دایره‌ای فرض می‌شود) قرار دارد. فقط جاذبهٔ گرانشی خورشید را در نظر بگیرید. چنین سفری چه مدتی طول می‌کشد؟

۴۱.۷ فرض کنید موتور موشکی بتواند فقط یکبار در یک مدار پایین به دور زمین روشن شود، آیا سفر به مریخ یا سفر به زهره مقدار  $\Delta v$  بزرگتری را می‌طلبد؟ توضیح دهید.

۴۲.۷ سفینه‌ای چنان طراحی شده‌است که فضولات هسته‌ای را یا با حمل آن به بیرون از منظومهٔ شمسی یا خرد کردن و پرتابش به داخل خورشید، دفع کند. فرض کنید هیچگونه سفر به سیارات مجاز نیست و پیشرانها فقط در صفحه مداری اتفاق می‌افتند. کدام مأموریت به انرژی کمتری نیاز دارد؟ توضیح دهید.

۴۳.۷ سفینه‌ای در یک مدار دایره‌ای در فاصلهٔ  $200$  کیلومتری بالای سطح زمین متوقف شده‌است. می‌خواهیم از انتقال هومن بهره‌گیریم و این سفینه را به مدار ماه بفرستیم. مقدار کل  $\Delta v$  و زمان انتقال مورد نیاز چقدرند؟

۴۴.۷ سفینه‌ای به جرم  $10000 \text{ kg}$  در یک مدار دایره‌ای در  $200$  کیلومتری بالای سطح زمین متوقف شده‌است. کمینه انرژی مورد نیاز (با چشمپوشی از جرم سوخت مصرف شده) برای قرار دادن این ماهواره در یک مدار هم‌زمان (یعنی،  $\tau = 24 \text{ h}$ ) چقدر است؟



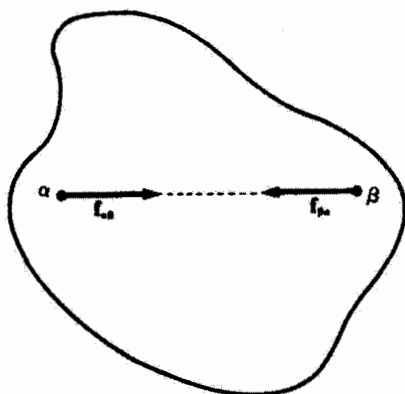
## دینامیک سیستم ذرات

### ۱.۸ مقدمه

تأینجا در خصوص مسائل دینامیکی به طور عمده بر حسب ذرات منفرد بحث کرده‌ایم. هر چند به اجسام گسترده مانند پرتابه‌ها، موشکها، و سیارات نظر داشته‌ایم، همواره می‌توانستیم آنها را به صورت تک ذره در نظر بگیریم. به طور کلی، منظور کردن برهم‌کنشهای داخلی بین تعداد زیادی از ذرات که اجسام گسترده را تشکیل می‌دهند ضرورتی نداشته است.

بعداً، در هنگام بررسی دینامیک اجسام صلب، باید علاوه بر حرکت انتقالی، حرکت چرخشی آنها را نیز توصیف کنیم. انجام این کار فراهم آوردن روشهای مناسبی را می‌طلبد.

ابتدا بحث خود را به توصیف سیستمی متشکل از  $n$  ذره تعمیم می‌دهیم. این ذرات ممکن است به صورت توده‌ای از اجزای جدا از یکدیگر—مانند توده‌ای از سنگهای رویهم انباشته یا جمعی از مولکولهای گاز—باشند، یا جسم صلبی را تشکیل دهند که در آن ذرات نسبت به هم حرکتی ندارند. آخرین بخش این فصل را به مطالعه برهم‌کنش دو ذره اختصاص خواهیم داد ( $n = 2$ ). حل مسئله مربوط به سه جسم ( $n = 3$ )، بسیار دشوار می‌شود. گر چه در این مورد در بهره‌گیری از روشهای عددی با کامپیوترهای سریع به پیشرفتهای شایانی نائل آمده‌اند، اغلب اوقات روشهای مبتنی بر اختلال را به کار می‌برند.



شکل ۱.۸ مثال مربوط به صورت قوی قانون سوم نیوتون، که در آن نیروهای مساوی و مختلف‌الجهت بین دو ذره باید در امتداد خط واصل بین این دو ذره قرار گیرند. این نیرو، مانند جاذبه مولکولی در جامدات، از نوع جاذبه است.

قانون سوم نیوتون، به اعتبار وجود نیروهای داخلی بین ذرات سیستم، در دینامیک سیستم ذرات نقشی اساسی بازی می‌کند. در ارتباط با نیروهای داخلی به جا آوردن دو فرض ضروری است:

۱. اندازه نیروهایی که دو ذره  $\alpha$  و  $\beta$  بر هم وارد می‌آورند با هم برابر و جهت آنها عکس یکدیگر است. فرض کنید  $f_{\alpha\beta}$  نیرویی باشد که ذره  $\beta$  بر ذره  $\alpha$  وارد می‌آورد. صورت به اصطلاح «ضعیف» قانون سوم نیوتون چنین است

$$f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha} \quad (1.8)$$

۲. نیروهایی که دو ذره  $\alpha$  و  $\beta$  به یکدیگر وارد می‌آورند، علاوه بر مساوی و مختلف‌الجهت بودن، بایستی روی خط راستی که آنها را به هم متصل می‌کند نیز واقع باشند. این صورت محدودتر قانون سوم نیوتون را غالباً صورت «قوی» آن می‌نامند، و در شکل ۱.۸ نمایش یافته است.

باید به دقت به خاطر سپرد که چه وقت کدام صورت قانون سوم نیوتون به کار می‌آید. از بخش ۲.۲ به خاطر می‌آوریم که قانون سوم همواره در مورد ذرات باردار متحرک صادق نیست؛ نیروهای الکترومغناطیسی وابسته به سرعت‌اند. مثلاً، نیروهای مغناطیسی، همان نیروهای وارد بر بار متحرک  $q$  در میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ) از صورت ضعیف قانون سوم پیروی می‌کنند نه از صورت قوی آن.

## ۲.۸ مرکز جرم

سیستمی متشکل از  $n$  ذره را در نظر بگیرید، جرم هر ذره با  $m_\alpha$  نشان داده می‌شود، که شاخص زیرین  $\alpha$  از  $1$  تا  $\alpha = n$  تغییر می‌کند. جرم کل سیستم،  $M$ ، عبارت است از

$$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \quad (2.8)$$

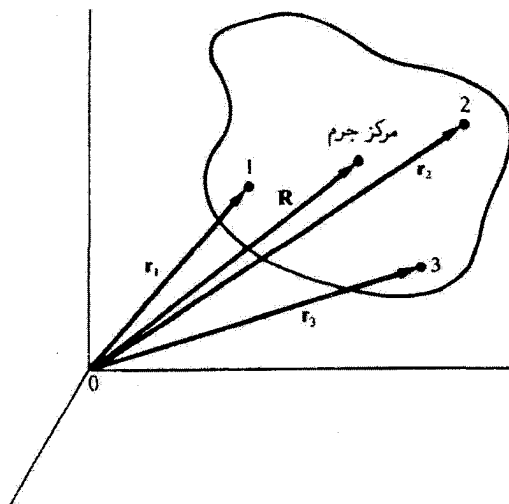
که در اینجا مجموعیابی روی  $\alpha$  (همانطور که تمام مجموعیابیها روی شاخصهای زیرین یونانی صورت می‌گیرد) از  $1$  تا  $\alpha = n$  انجام می‌شود. نمایش چنین سیستمی را در شکل ۲.۸ مشاهده می‌کنید.

اگر  $\mathbf{r}_\alpha$  عبارت باشد از برداری که مبدأ مختصات را به ذره  $\alpha$  متصل می‌کند، در آن صورت برداری که مکان مرکز جرم سیستم را تعریف می‌کند، عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \quad (3.8)$$

در مورد توزیع پیوسته جرم، علامت انتگرال به جای مجموعیابی می‌نشیند

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm \quad (4.8)$$



شکل ۲.۸ بردارهای مکان مربوط به ذرات ۱، ۲ و ۳، همراه با بردار مکان مرکز جرم  $\mathbf{R}$ ، در جسم نشان داده شده‌اند.

تعریف موضع مرکز جرم هر جسم منحصر به فرد است، اما بردار مکان  $R$  به دستگاه مختصات انتخابی بستگی دارد. اگر در شکل ۲.۸ مبدأ را در جای دیگری انتخاب می‌کردیم، بردار  $R$  بردار متفاوتی بود.

### مثال ۱.۸

مرکز جرم نیمکره‌ای جامد با چگالی ثابت را بیابید.

حل: فرض کنید که چگالی نیمکره  $\rho$ ، جرم آن  $M$ ، و شعاعش  $a$  باشد.

$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi a^3} \quad (5.8)$$

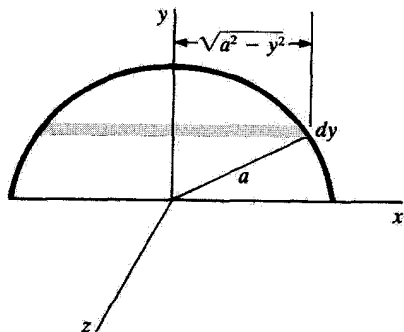
برای اینکه مسئله را تا سر حد امکان ساده کنیم مبدأ مختصات را با دقت انتخاب می‌کنیم (شکل ۳.۸). مختصات مکان  $R$  عبارت‌اند از  $(X, Y, Z)$ . با توجه به تقارن داریم:  $X = 0$  و  $Z = 0$ . از معادله (۴.۸) نتیجه می‌گیریم که

$$X = \frac{1}{M} \int_{-a}^a x dm \quad (6.8)$$

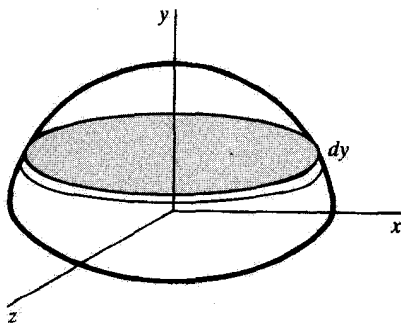
$$Z = \frac{1}{M} \int_{-a}^a z dm \quad (7.8)$$

زیرا، روی توان فرد متغیر با حدود متقارن، انتگرال می‌گیریم. ولی، این حدود در مورد  $Y$  نامتقارن است.

$$Y = \frac{1}{M} \int_{-a}^a y dm \quad (8.8)$$



(الف)



(ب)

$dm$  را چنان اختیار کنید که در مقدار ثابتی از  $y$  قرار گیرد. برای این کار برش گردی عمود بر محور  $y$  کفایت می‌کند (شکل ۳.۸).

$$dm = \rho dV = \rho \pi (a^2 - y^2) dy$$

$$Y = \frac{1}{M} \int_0^a \rho \pi y (a^2 - y^2) dy$$

$$Y = \frac{\pi \rho a^3}{4M} = \frac{3a}{8}$$

مکان مرکز جرم عبارت است از  $(0, 3a/8, 0)$ .

### ۳.۸ تکانه خطی سیستم

اگر گروه مشخصی از ذرات یک سیستم را تشکیل دهند، در آن صورت نیروی برآیند وارد بر هر ذره در داخل این سیستم (مثلاً ذره  $\alpha$ ) به‌طور کلی از دو جزء تشکیل می‌شود. یک جزء، برآیند تمام نیروهایی است که منشأ آن خارج از سیستم قرار دارد؛ این جزء را نیروی خارجی،  $F_\alpha^{(e)}$  می‌نامیم. جزء دیگر، برآیند تمام نیروهایی است که از برهم‌کنش تمام  $n-1$  ذره دیگر با ذره  $\alpha$  حاصل می‌شود؛ این جزء را نیروی داخلی  $f_\alpha$ ، می‌گوییم. نیروی  $f_\alpha$  از جمع برداری روی تمام نیروهای منفرد  $f_{\alpha\beta}$  به‌دست می‌آید

$$\sum_{\beta} f_{\alpha\beta} = f_\alpha \quad (9.8)$$

در اینجا  $f_{\alpha\beta}$  عبارت است از نیروی وارد بر ذره  $\alpha$  از جانب ذره  $\beta$ . بنابراین، نیروی کل وارد بر ذره  $\alpha$  عبارت خواهد بود از

$$F_\alpha = F_\alpha^{(e)} + f_\alpha \quad (10.8)$$

بعلاوه، مطابق صورت «ضعیف» قانون سوم نیوتون، داریم

$$f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha} \quad (11.8)$$

قانون دوم نیوتون مربوط به ذره  $\alpha$  را می‌توان به‌صورت

$$\dot{p}_\alpha = m_\alpha \ddot{r}_\alpha = F_\alpha^{(e)} + f_\alpha \quad (12.8)$$

یا

$$\frac{d^2 r_\alpha}{dt^2} (m_\alpha r_\alpha) = F_\alpha^{(e)} + \sum_{\beta} f_{\alpha\beta} \quad (13.8)$$

نوشت. از جمع این عبارت روی  $\alpha$ ، داریم

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \neq \beta}} \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta} \quad (14.8)$$

در اینجا در مجموع‌یابی جمله دوم سمت راست، جمله  $\alpha = \beta$  وارد نمی‌شود، چون  $\mathbf{f}_{\alpha\alpha} \equiv 0$ . از مجموع‌یابی سمت چپ معادله فقط  $M\ddot{\mathbf{R}}$  بدست می‌آید [معادله (۳.۸)]، و مشتق دوم آن نسبت به زمان عبارت است از  $M\ddot{\mathbf{R}}$ . جمله اول سمت راست، جمع تمام نیروهای خارجی است و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} \equiv \mathbf{F} \quad (15.8)$$

جمله دوم سمت راست معادله (۱۴.۸) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد<sup>۱</sup>

$$\sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \neq \beta}} \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \mathbf{f}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{f}_{\alpha\beta} + \mathbf{f}_{\beta\alpha})$$

که طبق معادله (۱۱.۸) صفر می‌شود.<sup>۲</sup> به این ترتیب، به اولین نتیجه مهم دست پیدا می‌کنیم

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} \quad (16.8)$$

۱. درستی این معادله را می‌توان با محاسبه صریح هر دو طرف برای یک حالت، مثلاً  $n = 3$ ، تحقیق کرد. آخرین نماد مجموع‌یابی به این معنی است که مجموع روی همه  $\alpha$  و  $\beta$ ها مشروط به این است که  $\alpha < \beta$  باشد.
۲. توجه کنید که صفر شدن عبارت

$$\sum_{\alpha} \sum_{\substack{\beta \\ \alpha \neq \beta}} \mathbf{f}_{\alpha\beta}$$

را می‌توانیم با توسل به بحث زیر اثبات کنیم. چون مجموع‌یابیها هم روی  $\alpha$  و هم روی  $\beta$  انجام می‌شوند، شاخصهای زیرین بی‌اهمیت اند؛ در حالت خاص، بدون اینکه در حاصل جمع تغییری حاصل شود، می‌توانیم جای  $\alpha$  و  $\beta$  را با هم عوض کنیم. با بهره‌گیری از نمادگذاری فشرده‌تری، داریم

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \mathbf{f}_{\alpha\beta} = \sum_{\beta, \alpha \neq \beta} \mathbf{f}_{\beta\alpha}$$

اما، بنا بر فرض  $\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha}$ ، بنابراین

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \mathbf{f}_{\alpha\beta} = - \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \mathbf{f}_{\alpha\beta}$$

و اگر یک کمیت با منفی خودش برابر شد، باید متحد با صفر شود.

که می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

۱. مرکز جرم هر سیستم چنان حرکت می‌کند که گویی تک ذره‌ای است با جرمی برابر جرم کل سیستم، و نیرویی برابر با کل نیروی خارجی بر آن اثر می‌کند، و حرکتش مستقل از ماهیت نیروهای داخلی است (البته این تعبیر تا زمانی معتبر است که این نیروها از صورت ضعیف قانون سوم نیوتون،  $f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha}$  پیروی می‌کنند).  
تکانه خطی کل سیستم عبارت است از

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \frac{d}{dt} (M\mathbf{R}) = M\dot{\mathbf{R}} \quad (17.8)$$

و

$$\dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} \quad (18.8)$$

به این ترتیب، اگر نیروی خارجی وجود نداشته باشد تکانه خطی کل پایسته است. با تکیه بر معادلات (۱۷.۸) و (۱۸.۸)، به نتایج مهم دوم و سوم خود پی می‌بریم:

۲. تکانه خطی سیستم چنان است که گویی تک ذره‌ای به جرم  $M$  در موقعیت مرکز جرم قرار گرفته و به همان ترتیبی حرکت می‌کند که مرکز جرم حرکت می‌کند.

۳. تکانه خطی کل هر سیستم فارغ از تأثیر نیروهای خارجی ثابت، و برابر است با تکانه خطی مرکز جرم (قانون پایستگی تکانه خطی سیستم).

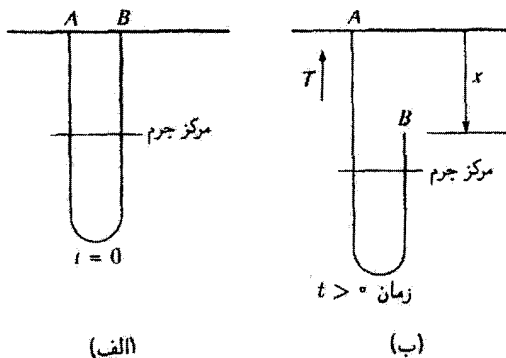
البته، تمام اندازه‌گیریها را باید در یک چارچوب مرجع لخت انجام داد. یک مصداق عملی تکانه خطی سیستم انفجار گلوله توپ در بالاتر از سطح زمین است. از آنجا که انفجار پدیده‌ای داخلی است، تنها نیروی خارجی مؤثر بر سرعت مرکز جرم، عبارت است از نیروی گرانش. مرکز جرم ترکشهای گلوله توپ بلافاصله پس از انفجار باید با همان سرعت گلوله، قبل از انفجار، به حرکت خود ادامه دهند.

## مثال ۲.۸

طنابی با چگالی یکنواخت به طول  $b$  و جرم  $M$ ، مطابق شکل ۴.۸، آویخته شده است. در لحظه  $t = 0$ ، دو سر  $A$  و  $B$  در کنار همدیگر قرار می‌گیرند، اما سر  $B$  رها می‌شود. بعد از اینکه سر  $B$  به اندازه  $x$  سقوط کرده است، کشش طناب در نقطه  $A$  را پیدا کنید.

حل: تنها نیروهای وارد بر سیستم در لحظه  $t$  عبارت‌اند از کشش،  $T$ ، که به بالا سو و در امتداد





شکل ۴.۸

قائم بر نقطه  $A$  وارد می‌آید، و نیروی گرانشی  $Mg$  که طناب را به پایین می‌کشد. تکانه مرکز جرم نسبت به این نیروها به صورت زیر عکس‌العمل نشان می‌دهد

$$\dot{P} = Mg - T$$

سمت راست طناب، به جرم  $(M/b)(b-x)/2$ ، با سرعت  $\dot{x}$  حرکت می‌کند، و سمت چپ طناب بی‌حرکت است. بنابراین، تکانه کل سیستم عبارت است از

$$P = \left(\frac{M}{b}\right) \left(\frac{b-x}{2}\right) \dot{x}$$

و

$$\dot{P} = \frac{M}{2b} [-\dot{x}^2 + \ddot{x}(b-x)]$$

چون  $x = \frac{1}{2}gt^2$  داریم

$$\dot{x} = gt = \sqrt{2gx}$$

$$\ddot{x} = g$$

و

$$\dot{P} = \frac{M}{2b}(gb - 2gx) = Mg - T$$

و سرانجام

$$T = \frac{Mg}{2} \left( \frac{2x}{b} + 1 \right)$$

## ۴.۸ تکانه زاویه‌ای سیستم

اغلب اوقات بهتر است که سیستم را به کمک یک بردار مکان نسبت به مرکز جرم توصیف کنیم. بردار مکان  $r_\alpha$  در چارچوب مرجع لخت (شکل ۵.۸) چنین می‌شود

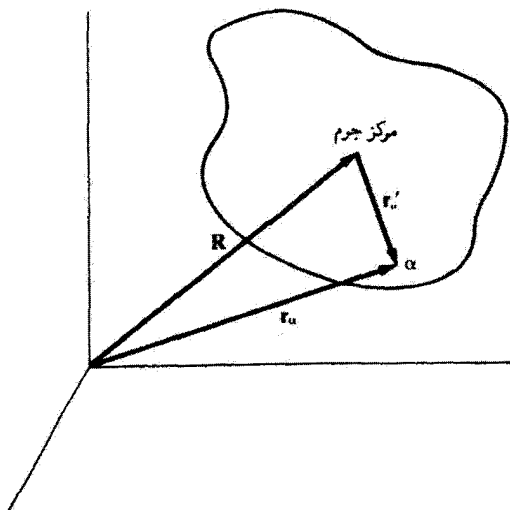
$$r_\alpha = R + r'_\alpha \quad (۱۹.۸)$$

که در اینجا  $r'_\alpha$  بردار مکان ذره  $\alpha$  نسبت به مرکز جرم است. تکانه زاویه‌ای ذره  $\alpha$  ام حول مبدأ طبق معادله (۸۱.۲)، عبارت است از

$$L_\alpha = r_\alpha \times p_\alpha \quad (۲۰.۸)$$

با جمع کردن این عبارت روی  $\alpha$ ، و بهره‌گیری از معادله (۱۹.۸)، داریم

$$\begin{aligned} L &= \sum_\alpha L_\alpha = \sum_\alpha (r_\alpha \times p_\alpha) = \sum_\alpha (r_\alpha \times m_\alpha \dot{r}_\alpha) \\ &= \sum_\alpha (r'_\alpha + R) \times m_\alpha (\dot{r}'_\alpha + \dot{R}) \\ &= \sum_\alpha m_\alpha [(r'_\alpha \times \dot{r}'_\alpha) + (r'_\alpha \times \dot{R}) + (R \times \dot{r}'_\alpha) + (R \times \dot{R})] \end{aligned} \quad (۲۱.۸)$$



شکل ۵.۸

دو جمله میانی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \right) \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \right)$$

این دو جمله صفر می‌شوند، زیرا

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \\ \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} &= M\mathbf{R} - M\mathbf{R} \equiv 0 \end{aligned} \quad (22.8)$$

این نتیجه بر این نکته دلالت می‌کند که  $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha}$  موقعیت مرکز جرم را در دستگاه مختصات مرکز جرم تعیین می‌کند، و بنابراین یک بردار صفر است. از این رو، معادله (۲۱.۸) چنین می‌شود

$$\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{p}'_{\alpha} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{p}'_{\alpha} \quad (23.8)$$

به چهارمین نتیجه مهم خود می‌رسیم

۴. تکانه زاویه‌ای کل حول مبدأ برابر است با مجموع تکانه زاویه‌ای مرکز جرم حول مبدأ و تکانه زاویه‌ای سیستم حول موقعیت مرکز جرم.

با تکیه بر معادله (۸۳.۲)، مشتق زمانی تکانه زاویه‌ای ذره  $\alpha$  ام برابر است با

$$\dot{\mathbf{L}}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \quad (24.8)$$

و با استفاده از معادله (۱۳.۸)، داریم

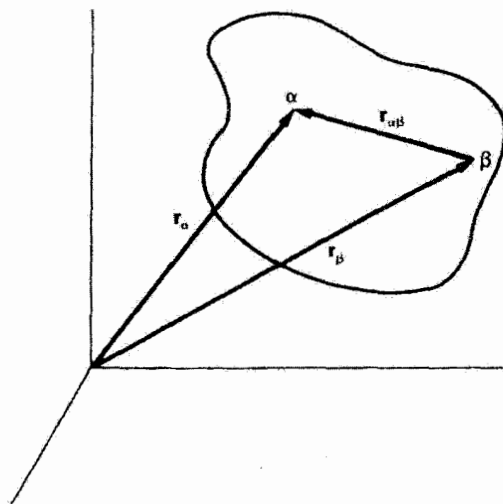
$$\dot{\mathbf{L}}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} \times \left( \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\beta} \mathbf{f}_{\alpha\beta} \right) \quad (25.8)$$

از مجموع‌یابی عبارت بالا روی  $\alpha$ ، داریم

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{L}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}) + \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) \quad (26.8)$$

جمله آخر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) = \sum_{\alpha < \beta} [(\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) + (\mathbf{r}_{\beta} \times \mathbf{f}_{\beta\alpha})]$$



شکل ۶.۸

برداری که ذره  $\alpha$  ام را به ذره  $\beta$  ام وصل می‌کند (شکل ۶.۸)، بنابر تعریف، عبارت است از:

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta} \quad (۲۷.۸)$$

و از آنجا، چون  $\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha}$  داریم

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) &= \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) \times \mathbf{f}_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \mathbf{r}_{\alpha\beta} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (۲۸.۸)$$

اکنون می‌خواهیم دامنه بحث را به نیروهای داخلی مرکزی محدود کنیم و صورت «قوی» قانون سوم نیوتون را به کارگیریم. از آنجا که  $\mathbf{f}_{\alpha\beta}$  در همان راستای  $\pm \mathbf{r}_{\alpha\beta}$  است و

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{0} \quad (۲۹.۸)$$

و

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\alpha} [\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}] \quad (۳۰.۸)$$

سمت راست این عبارت همان مجموع تمام گشتاورهای خارجی است

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\alpha} \mathbf{N}_{\alpha}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \quad (31.8)$$

این معادله به نتیجه مهم بعدی می‌انجامد.

۵. اگر برآیند خالص گشتاور نیروهای خارجی حول محور مفروضی صفر شود، در آن صورت تکانه زاویه‌ای کل سیستم حول آن محور نسبت به زمان ثابت می‌ماند.

همچنین توجه داشته باشید که جمله

$$\sum_{\beta} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta} \quad (32.8)$$

عبارت است از گشتاور نیروی وارد بر ذره  $\alpha$  از سوی تمام نیروهای داخلی، یعنی، گشتاور نیروی داخلی. چون جمع این کمیت روی تمام ذرات  $\alpha$  صفر می‌شود [معادله (28.8)]،

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) = \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{r}_{\alpha\beta} \times \mathbf{f}_{\alpha\beta}) = 0 \quad (33.8)$$

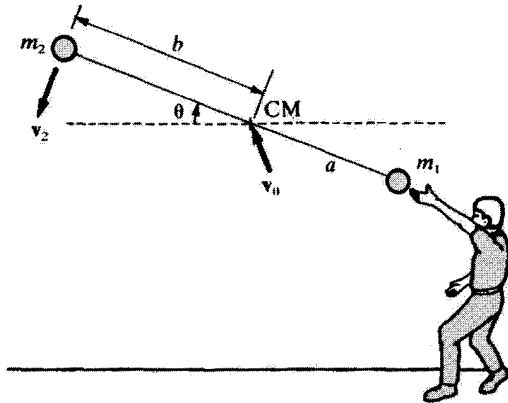
گشتاور نیروی داخلی کل باید صفر شود، که می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد

۶. اگر نیروهای داخلی مرکزی باشند، یعنی  $\mathbf{f}_{\alpha\beta} = -\mathbf{f}_{\beta\alpha}$ ، گشتاور نیروی داخلی کل باید صفر شود و تکانه زاویه‌ای سیستم منزوی را نمی‌توان بدون اعمال نیروهای خارجی تغییر داد.

### مثال ۳.۸

به دو سر ریسمان سبکی به طول  $a$ ، دو گوی به جرمهای  $m_1$  و  $m_2$  ( $m_2 > m_1$ ) متصل است. سر متصل به گوی  $m_1$  را در دست می‌گیریم و به سرعت به دور سر خود می‌چرخانیم و سپس رهاش می‌کنیم. حرکت این گوی را پس از رها کردن تشریح، و کشش ریسمان را پس از رها شدن پیدا کنید.

حل: این سیستم در شکل ۷.۸ نشان داده شده است. مرکز جرم آن در فاصله  $b = [m_1 / (m_1 + m_2)]a$  از جرم  $m_2$  واقع است. پس از رها شدن، تنها نیروهای وارد بر سیستم همان نیروهای گرانشی مؤثر بر  $m_1$  و  $m_2$  هستند. فرض کنید  $v$  سرعت اولیه مرکز جرم  $CM_1$ ، باشد  $CM_2$ ، تحت تأثیر گرانی چنان مسیر سهموی را می‌پیماید که گویی تمامی



شکل ۷.۸

جرم  $(m_1 + m_2)$  در CM متمرکز است. اما وقتی رها می‌شود، جرم  $m_2$  به سرعت حول جرم  $m_1$  به چرخش در می‌آید. چون هیچ گشتاور نیروی خارجی در کار نیست، سیستم به چرخش خود ادامه می‌دهد. اما اکنون هم  $m_1$  و هم  $m_2$  حول CM می‌چرخند، و تکانه زاویه‌ای پایسته است. اگر جرم  $m_2$  در هنگام رها شدن با سرعت خطی  $v_2$  در حرکت باشد، در آن صورت باید  $v_2 = b\dot{\theta}$  [و به همین ترتیب،  $v_1 = (a - b)\dot{\theta}$ ]. اما، کشش ریسمان، از عکس‌العمل مرکز‌گریزی جرمهای چرخان ناشی می‌شود، که در این حالت عبارت است از

$$\text{کشش} = \frac{m_2(b\dot{\theta})^2}{b} = \text{نیروی مرکز‌گریز}$$

$$\text{کشش} = m_2 b \dot{\theta}^2 = m_2 \left( \frac{m_1 a}{m_1 + m_2} \right) \dot{\theta}^2 = \frac{m_1 m_2 a \dot{\theta}^2}{m_1 + m_2}$$

### ۵.۸ انرژی سیستم

آخرین قضیه پایستگی، یعنی پایستگی انرژی، را می‌توان برای سیستمی از ذرات به صورت زیر استخراج کرد. کاری را که روی یک سیستم انجام می‌شود تا آن را از بیکربندی ۱، که در آن تمام مختصات  $r_\alpha$  مشخص شده‌اند، به بیکربندی ۲، که در آن مختصات  $r_\alpha$  مشخصات دیگری دارند، حرکت دهد، در نظر بگیرید. (توجه داشته باشید که در چنین فرایندی ممکن است تک ذرات تغییر آرایش دهند، و مثلاً موقعیت مرکز جرم ساکن باقی بماند.) به تشابه با معادله (۸۴.۲)، می‌نویسیم

$$W_{12} = \sum_{\alpha} \int_1^2 \mathbf{F}_{\alpha} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} \quad (34.8)$$

که در اینجا  $F_\alpha$  برآیند نیروی خالص وارد بر ذره  $\alpha$  است. با استفاده از فرایندی شبیه آنچه برای رسیدن به معادله (۸۶.۲) به کار گرفتیم، داریم

$$W_{12} = \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2\right) = T_2 - T_1 \quad (35.8)$$

که در اینجا

$$T = \sum_{\alpha} T_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \quad (36.8)$$

با استفاده از رابطه زیر [معادله (۱۹.۸)]

$$\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} + \dot{\mathbf{R}} \quad (37.8)$$

داریم

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} &= v_{\alpha}^2 = (\dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} + \dot{\mathbf{R}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} + \dot{\mathbf{R}}) \\ &= (\dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha}) + 2(\dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{R}}) + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}) \\ &= v_{\alpha}'^2 + 2(\dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{R}}) + V^2 \end{aligned}$$

که در اینجا  $\mathbf{v}' \equiv \dot{\mathbf{r}}'$  و  $V$  سرعت مرکز جرم است. آنگاه

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}'^2 + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} V^2 + \dot{\mathbf{R}} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \end{aligned} \quad (38.8)$$

اما، به اتکای یکی از استدلال‌های پیشین،  $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} = 0$ ، و جمله آخری صفر می‌شود. بدین ترتیب

$$\boxed{T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}'^2 + \frac{1}{2} M V^2} \quad (39.8)$$

که می‌توان آن را چنین بیان کرد:

۷. انرژی جنبشی کل سیستم برابر است با مجموع انرژی جنبشی یک ذره به جرم  $M$  که با سرعت مرکز جرم حرکت می‌کند و انرژی جنبشی حرکت تک تک ذرات نسبت به مرکز جرم.

در مرحله بعد، نیروی کل در معادله (۳۴.۸) را می‌توان مانند معادله (۱۲.۸)، از هم جدا کرد:

$$W_{12} = \sum_{\alpha} \int_1^2 \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} \quad (40.8)$$

اگر نیروهای  $\mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}$  و  $\mathbf{f}_{\alpha\beta}$  پایستار باشند، در این صورت می‌توان آنها را از توابع پتانسیلی استخراج کرد، و نوشت

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} &= -\nabla_{\alpha} U_{\alpha} \\ \mathbf{f}_{\alpha\beta} &= -\nabla_{\alpha} \bar{U}_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (41.8)$$

که  $U_{\alpha}$  و  $\bar{U}_{\alpha\beta}$  توابع پتانسیل هستند، اما لزوماً هم شکل نیستند. نماد گذاری  $\nabla_{\alpha}$  یعنی اینکه عمل گرادیان نسبت به مختصات ذره  $\alpha$  ام انجام می‌گیرد.

جمله اول معادله (۴۰.۸) چنین می‌شود

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \int_1^2 \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} &= -\sum_{\alpha} \int_1^2 (\nabla_{\alpha} U_{\alpha}) \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} \\ &= -\sum_{\alpha} U_{\alpha} \Big|_1^2 \end{aligned} \quad (42.8)$$

و جمله دوم عبارت است از<sup>۱</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} &= \sum_{\alpha < \beta} \int_1^2 (\mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{f}_{\beta\alpha} \cdot d\mathbf{r}_{\beta}) \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot (d\mathbf{r}_{\alpha} - d\mathbf{r}_{\beta}) = \sum_{\alpha < \beta} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (43.8)$$

که در اینجا، بنابر تعریفی که در معادله (۲۷.۸) آمد،  $d\mathbf{r}_{\alpha\beta} = d\mathbf{r}_{\alpha} - d\mathbf{r}_{\beta}$

چون  $\bar{U}_{\alpha\beta}$  فقط تابعی از فاصله بین  $m_{\alpha}$  و  $m_{\beta}$  است، بنابراین به شش کمیت بستگی دارد یعنی، سه مختصه  $(x_{\alpha,i})m_{\alpha}$  و سه مختصه  $(x_{\beta,i})m_{\beta}$ . بنابراین مشتق کامل  $\bar{U}_{\alpha\beta}$  برابر

۱. به این نکته توجه کنید: بر عکس جمله  $\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \mathbf{f}_{\alpha\beta}$  که در معادله (۱۴.۸) ظاهر می‌شود، جمله:

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \int_1^2 \mathbf{f}_{\alpha\beta} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha}$$

بر حسب شاخصهای زیرین  $\alpha$  و  $\beta$  یاد متقارن نیست و بنابراین، در حالت کلی، صفر نمی‌شود.



مجموع شش مشتق جزئی است و از رابطه زیر به دست می آید

$$d\bar{U}_{\alpha\beta} = \sum_i \left( \frac{\partial \bar{U}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha,i}} dx_{\alpha,i} + \frac{\partial \bar{U}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta,i}} dx_{\beta,i} \right) \quad (44.8)$$

که در اینجا در جمله اول متغیرهای  $x_{\beta,i}$  و در جمله دوم  $x_{\alpha,i}$  را ثابت می گیریم. بنابراین

$$d\bar{U}_{\alpha\beta} = (\nabla_{\alpha} \bar{U}_{\alpha\beta}) \cdot dr_{\alpha} + (\nabla_{\beta} \bar{U}_{\alpha\beta}) \cdot dr_{\beta} \quad (45.8)$$

حال می دانیم،

$$\nabla_{\alpha} \bar{U}_{\alpha\beta} = -f_{\alpha\beta} \quad (46.8)$$

اما  $\bar{U}_{\alpha\beta} = \bar{U}_{\beta\alpha}$ ، به طوری که

$$\nabla_{\beta} \bar{U}_{\alpha\beta} = \nabla_{\beta} \bar{U}_{\beta\alpha} = -f_{\beta\alpha} = f_{\alpha\beta} \quad (47.8)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d\bar{U}_{\alpha\beta} &= -f_{\alpha\beta} \cdot (dr_{\alpha} - dr_{\beta}) \\ &= -f_{\alpha\beta} \cdot dr_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (48.8)$$

با استفاده از این نتیجه در معادله (۴۳.۸)، داریم

$$\sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \int_1^2 f_{\alpha\beta} \cdot dr_{\alpha} = - \sum_{\alpha < \beta} \int_1^2 d\bar{U}_{\alpha\beta} = - \sum_{\alpha < \beta} \bar{U}_{\alpha\beta} \Big|_1^2 \quad (49.8)$$

از ترکیب معادلات (۴۲.۸) و (۴۹.۸) برای محاسبه  $W_{12}$  در معادله (۴۰.۸)، خواهیم یافت

$$W_{12} = - \sum_{\alpha} U_{\alpha} \Big|_1^2 - \sum_{\alpha < \beta} \bar{U}_{\alpha\beta} \Big|_1^2 \quad (50.8)$$

ما با اتکا به این فرض که هم نیروهای خارجی و هم نیروهای داخلی را می توان از پتانسیلها به دست آورد، به این معادله رسیدیم. در این حالت، انرژی پتانسیل کل سیستم (هم داخلی و هم خارجی) را می توان به صورت زیر نوشت

$$U = \sum_{\alpha} U_{\alpha} + \sum_{\alpha < \beta} \bar{U}_{\alpha\beta} \quad (51.8)$$

و از آنجا

$$W_{12} = -U \Big|_1^2 = U_1 - U_2 \quad (52.8)$$

این نتیجه را با معادله (۳۵.۸) ترکیب می‌کنیم، و خواهیم داشت

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

یا

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

به طوری که

$$\boxed{E_1 = E_2} \quad (53.8)$$

که مبین پایستگی انرژی سیستم است. این نتیجه برای سیستمی صادق است که در آن تمام نیروها را بتوان از پتانسیلهایی استخراج کرد که بستگی صریحی به زمان ندارند؛ چنین سیستمی را پایستار می‌گوییم.

۸. انرژی کل هر سیستم پایستار ثابت است.

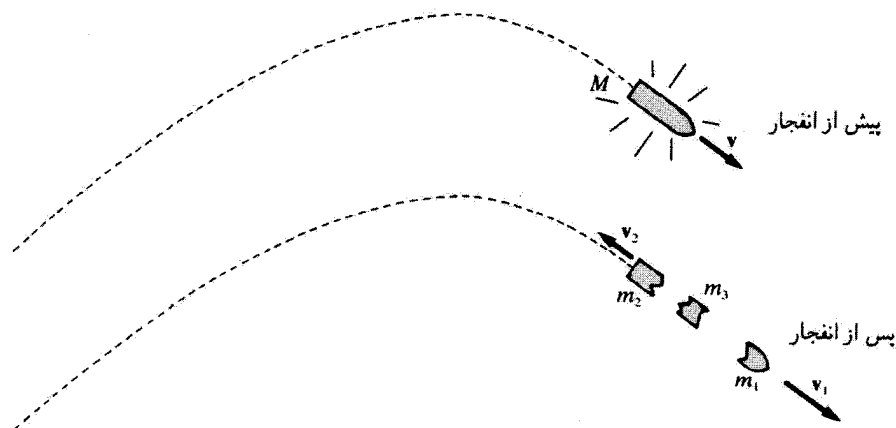
در معادله (۵۱.۸)، جمله

$$\sum_{\alpha < \beta} \bar{U}_{\alpha\beta}$$

نمایانگر انرژی پتانسیل داخلی سیستم است. اگر سیستم جسم صلبی باشد که ذرات تشکیل دهنده آن مقید به حفظ موقعیت نسبی خود باشند در آن صورت، در هر فرایندی که این جسم درگیر آن باشد، انرژی پتانسیل داخلی ثابت می‌ماند. در این حالت، وقتی انرژی پتانسیل کل سیستم را محاسبه می‌کنیم، می‌توانیم از انرژی پتانسیل داخلی چشم‌پوشیم. در اینجا صرفاً به تعریف مجدد موقعیت انرژی پتانسیل صفر می‌پردازیم، اما انتخاب این موقعیت به هر حال اختیاری است؛ یعنی، فقط اختلاف انرژی پتانسیل از لحاظ فیزیکی مهم است. مقدار مطلق انرژی پتانسیل کمیتهی اختیاری است.

#### مثال ۴.۸

پرتابه‌ای به جرم  $M$  در خلال پرواز منفجر و به سه پاره تقسیم می‌شود (شکل ۸.۸). یکی از این



شکل ۸.۸

پاره‌ها به جرم  $m_1 (= M/2)$ ، در راستای اولیه حرکت پرتابه به حرکت در می‌آید، دیگری به جرم  $m_2 (= M/6)$ ، در راستای عکس حرکت می‌کند، و سومی هم به جرم  $m_3 (= M/3)$  به حال سکون در می‌آید. انرژی آزاد شده در انفجار  $E$ ، پنج برابر انرژی جنبشی پرتابه در هنگام انفجار است. سرعت هر یک از این پاره‌ها چقدر است؟

حل: فرض کنید سرعت پرتابه به جرم  $M$  برابر  $v$  باشد. جرم و سرعت هر یک از سه پاره‌ها عبارت‌اند از:

$$m_1 = \frac{M}{2}, v_1 = k_1 v \quad \text{چون } k_1 > 0 \text{ به سمت جلو}$$

$$m_2 = \frac{M}{6}, v_2 = -k_2 v \quad \text{چون } k_2 > 0 \text{ به سمت عقب}$$

$$m_3 = \frac{M}{3}, v_3 = 0 \quad \text{در حالت سکون}$$

بنابر پایستگی تکانه خطی و انرژی خواهیم داشت

$$Mv = \frac{M}{2}k_1v - \frac{M}{6}k_2v \quad (54.8)$$

$$E + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{2}(k_1v)^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{6}(k_2v)^2 \quad (55.8)$$

از معادله (54.8) داریم:  $k_2 = 3k_1 - 6$  که می‌توان آن را در معادله (55.8) قرار داد

$$5 \left( \frac{1}{2} M v^2 \right) + \frac{1}{2} M v^2 = \frac{M v^2}{4} k_1^2 + \frac{M v^2}{12} (3k_1 - 6)^2$$

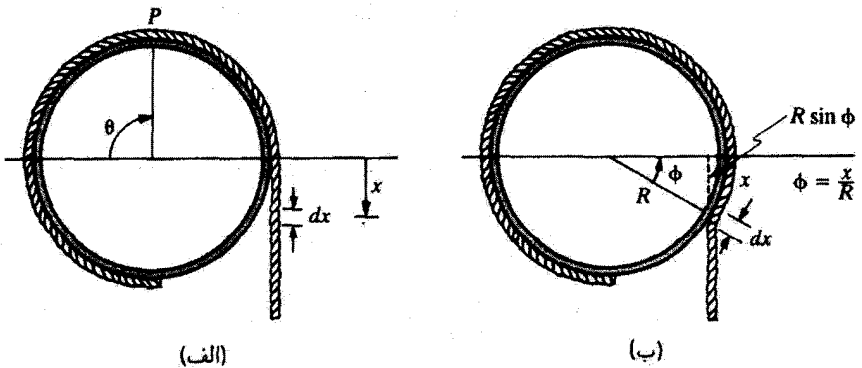
عبارت بالا به  $3k_1 - k_1^2 = 0$  تبدیل می‌شود که جوابهای این معادله عبارت‌اند از:  $k_1 = 0$  و  $k_1 = 3$ . به ازای  $k_1 = 0$  داریم:  $k_2 = -6$ ، که با فرض  $k_2 > 0$  ناسازگار است. به ازای  $k_1 = 3$  داریم:  $k_2 = 3$ . سرعت هر یک از پاره‌ها عبارت خواهند بود از

$$\begin{aligned} v_1 &= 3v \\ v_2 &= -3v \\ v_3 &= 0 \end{aligned}$$

### مثال ۵.۸

طنابی به چگالی طولی (خطی) یکنواخت  $\rho$  و جرم  $m$  یک دور کامل به دور استوانه‌ای توخالی به جرم  $M$  و شعاع  $R$  پیچیده شده است. همراه با باز شدن طناب، استوانه آزادانه حول محور خودش می‌چرخد (شکل ۹.۸). وقتی نقطه  $P$  در  $\theta = 0$  واقع است و سیستم قدری از تعادل در حال سکون خود خارج شده است، هر دو انتهای طناب در  $x = 0$  قرار دارند (یکی ثابت و دیگری آزاد است). سرعت زاویه‌ای استوانه را پیدا کنید.

حل: برای باز کردن طناب، گرانی روی سیستم کار انجام داده است. یک قسمت  $dx$  از طناب را در نظر بگیرید که درست در فاصله  $x$  از جایی قرار دارد که طناب از روی استوانه باز می‌شود. جرم این قسمت  $\rho dx$  است. اگر می‌خواستیم با کشیدن و پیچیدن انتهای آزاد طناب روی استوانه



شکل ۹.۸

کار انجام دهیم، قسمت  $dx$  واقعاً چقدر بالا می‌رود؟ مسافت  $x$  باید روی محیط استوانه جدا شده باشد (شکل ۹.۸)، و  $dx$  به اندازه  $R \sin(x/R)$  پایینتر از  $x = 0$  واقع باشد. مسافت کلی که قسمت  $dx$  به بالا طی می‌کند، چنین است

$$\begin{aligned} \text{مسافت طی شده توسط } dx &= x - R \sin\left(\frac{x}{R}\right) \\ \text{کار انجام شده} &= (\rho dx) g \left[ x - R \sin\left(\frac{x}{R}\right) \right] \end{aligned} \quad (56.8)$$

بنابراین، کل کار انجام شده توسط گرانث در باز کردن طناب برابر است با

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{R\theta} \rho g \left[ x - R \sin\left(\frac{x}{R}\right) \right] dx \\ &= \rho g R^2 \left( \frac{\theta^2}{2} + \cos\theta - 1 \right) \end{aligned} \quad (57.8)$$

کار انجام شده توسط گرانث باید با انرژی جنبشی که طناب و استوانه به دست می‌آورند، برابر باشد

$$T = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} M (R\dot{\theta})^2 \quad (58.8)$$

چون  $W = T$  و  $\rho = m/(2\pi R)$

$$\frac{mgR}{2\pi} \left[ \frac{\theta^2}{2} + \cos^2\theta - 1 \right] = \frac{1}{2} (m + M) R^2 \dot{\theta}^2$$

و یا

$$\dot{\theta}^2 = \frac{mg(\theta^2 + 2\cos^2\theta - 2)}{2\pi R(m + M)} \quad (59.8)$$

## ۶.۸ برخوردهای کشسان دو ذره

در بقیه مطالب این فصل، قوانین پایستگی را در برهم‌کنش دو ذره به کار خواهیم گرفت. وقتی دو ذره برهم‌کنش داشته باشند، حرکت یکی از ذرات نسبت به دیگری تابع قانون نیرویی است که برهم‌کنش را توصیف می‌کند. این برهم‌کنش ممکن است حاصل یک تماس واقعی باشد، مانند برخورد دو گوی بیلیارد، یا ممکن است از طریق یک میدان نیروی میانجی انجام شود. مثلاً یک جسم آزاد (یعنی، جسمی که به یکی از مدارهای خورشیدی مقید نباشد) ممکن است توسط یک

برهم‌کنش گرانشی از خورشید «پراکنده شود»، یا یک ذره  $\alpha$  ممکن است از طریق میدان الکتریکی یک هسته اتمی پراکنده شود. در فصل پیشین نشان دادیم که با شناسایی قانون نیرو، می‌توان مسئله دو جسم را به‌طور کامل حل کرد. اما حتی اگر نیروی برهم‌کنش بین دو ذره نامعلوم باشد، هنوز هم فقط با استفاده از نتایج پایستگی تکانه و انرژی، می‌توان اطلاعات مفصلی درباره حرکت نسبی آنها به‌دست آورد. از این‌رو، اگر حالت اولیه یک سیستم معلوم باشد (یعنی، اگر بردار سرعت هر یک از ذرات مشخص باشد)، به کمک قوانین پایستگی این امکان فراهم می‌آید که اطلاعاتی درباره بردارهای سرعت در حالت نهایی به‌دست آوریم.<sup>۱</sup>

پیش بینی اندازه، مثلاً زاویه بین بردارهای سرعت اولیه و نهایی یکی از ذرات، به تنهایی بر اساس قضایای پایستگی ناممکن است؛ برای پی بردن به اینگونه جزئیات، شناخت قانون نیرو الزامی است. در این بخش و بخش بعدی روابطی را استنتاج می‌کنیم که فقط به پایستگی تکانه و انرژی نیاز دارند. در مرحله بعد، جنبه‌هایی از فرایند برخورد را بررسی می‌کنیم، که مستلزم مشخص بودن قانون نیرو هستند. ابتدا دامنه بحث خود را به برخوردهای کشسان محدود می‌کنیم، زیرا جنبه‌های اساسی سینماتیک دو جسم به کمک برخوردهای کشسان به قدر کفایت به نمایش گذاشته می‌شود. باید توجه داشت که نتایج به‌دست آمده از فرض پایستگی تکانه و انرژی (در ناحیه سرعت‌های غیر نسبیتی) حتی در سیستم‌های کوانتوم مکانیکی صادق‌اند، زیرا این قضایای پایستگی علاوه بر سیستم‌های کلاسیکی در سیستم‌های کوانتومی نیز قابل اعمال‌اند.

در چندین مورد نشان داده‌ایم که توصیف بسیاری از فرایندهای فیزیکی در صورت انتخاب دستگاه مختصات ساکن نسبت به مرکز جرم سیستم، دستگاه مختصات مرکز جرم (CM)، به‌طور چشمگیری ساده می‌شود. در مسئله‌ای که هم اکنون مورد بحث قرار می‌دهیم — برخورد کشسان دو ذره — وضعیت متعارف (همان وضعیتی که توجه خود را به آن معطوف می‌کنیم) عبارت است از وضعیتی که در برخورد بین یک ذره در حال حرکت و یک ذره ساکن صورت می‌گیرد.<sup>۲</sup> هر

۱. «حالت اولیه» سیستم شرایطی است که ذرات هنوز به قدر کافی به هم نزدیک نیستند تا برهم‌کنش چشمگیری داشته باشند؛ «حالت نهایی»، عبارت است از وضعیت ذرات پس از انجام برهم‌کنش. در مورد برهم‌کنشی که حاصل تماس باشد، این شرایط بدیهی‌اند. اما اگر برهم‌کنش از طریق یک میدان نیرو صورت پذیرد، در این صورت برای مشخص کردن حالت‌های اولیه و نهایی باید آهنگ کاهش نیرو به تناسب فاصله را در نظر گرفت.

۲. یک برخورد وقتی کشسان است که در انرژی داخلی ذرات تغییری ایجاد نشود؛ به این ترتیب، قانون پایستگی انرژی را می‌توان بدون در نظر گرفتن انرژی داخلی به کار بست. توجه داشته باشید که وقتی دو جسم مکانیکی برخورد ناکشسان انجام می‌دهند ممکن است گرما تولید شود. گرما نشانه آشفتنگی ذرات تشکیل‌دهنده جسم است و بنابراین می‌توان آن را قسمتی از انرژی داخلی جسم دانست. قوانین حاکم بر برخورد کشسان دو جسم را اولین بار جان والیس (۱۶۶۸)، ورن (۱۶۶۸)، و هویگنس (۱۶۶۹) مورد مطالعه قرار دادند.

چند توصیف آثار برخورد در دستگاه مختصاتی که مرکز جرم در آن ساکن است، واقعاً ساده‌تر است، اندازه‌گیریهای حقیقی در دستگاه مختصاتی انجام می‌شود که یکی از ذرات در حال حرکت است و ذره‌ای که مورد اصابت واقع می‌شود، ساکن است. این دستگاه مختصات دومی را دستگاه مختصات آزمایشگاه (LAB) می‌نامیم. از این پس این دو دستگاه مختصات را فقط دستگاههای CM و LAB می‌نامیم.

می‌خواهیم از تسهیلات حاصل از توصیف یک برخورد کشسان در دستگاه CM بهره بگیریم. بنابراین، دستیابی به معادلاتی که دستگاههای مرکز جرم و آزمایشگاه را به هم مربوط می‌کند، الزامی است.

از نماد گذاری زیر بهره می‌گیریم

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{متحرک} \\ \text{مورد برخورد} \end{array} \right\} \text{جرم ذره} = m_1 = m_2$$

به‌طور کلی، کمیت‌های پریم دار به دستگاه مرکز جرم متعلق‌اند:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = \text{اولیه} \\ v_1 = \text{نهایی} \end{array} \right\} \text{سرعت } m_1 \text{ در دستگاه LAB}$$

$$\left. \begin{array}{l} u'_1 = \text{اولیه} \\ v'_1 = \text{نهایی} \end{array} \right\} \text{سرعت } m_1 \text{ در دستگاه CM}$$

و به همین ترتیب:  $u_2, v_2, u'_2, v'_2$  تعریف شده‌اند (ولی  $u_2 = 0$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{LAB} \\ \text{CM} \end{array} \right\} \text{انرژی جنبشی اولیه کل در دستگاه} = T = T'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{LAB} \\ \text{CM} \end{array} \right\} \text{انرژی جنبشی نهایی } m_1 \text{ در دستگاه} = T_1 = T'_1$$

و به همین ترتیب برای  $T_2$  و  $T'_2$ .

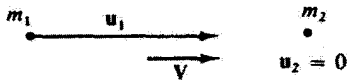
$V$  = سرعت مرکز جرم در دستگاه LAB.

$\psi$  = زاویه انحراف جسم  $m_1$  در دستگاه LAB.

$\zeta$  = زاویه انحراف جسم  $m_2$  در دستگاه LAB.

$\theta$  = زاویه انحراف اجسام  $m_1$  و  $m_2$  در دستگاه CM.

دستگاه آزمایشگاه (LAB)

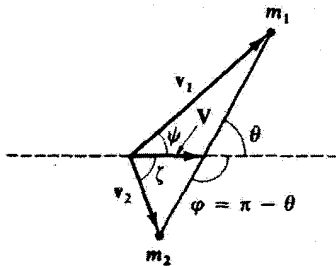


(الف) شرط اولیه

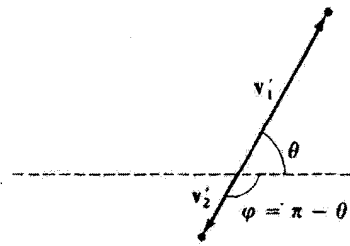
دستگاه مرکز جرم (CM)



(ب) شرط اولیه



(ج) شرط نهایی



(د) شرط نهایی

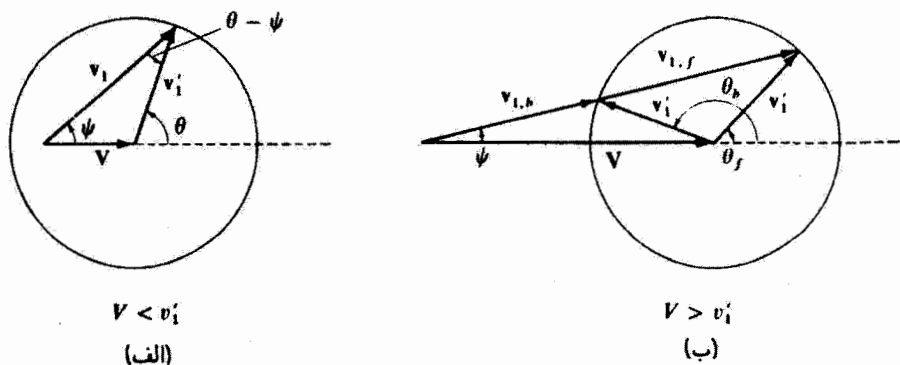
شکل ۱۰.۸

در شکل ۱۰.۸ تعبیر هندسی بر خورد کشسان<sup>۱</sup> را در دستگاه مختصات آزمایشگاه (LAB) و نیز در دستگاه مختصات مرکز جرم (CM) مشاهده می‌کنیم. حالت نهایی ذره پراکنده  $m_1$  در دستگاههای LAB و CM را می‌توان برای سهولت در نمودارهای شکل ۱۱.۸ خلاصه کرد. می‌توانیم این نمودارها را به صورت زیر تعبیر کنیم. به سرعت  $V$  مرکز جرم می‌توانیم سرعت نهایی ذره پراکنده در CM، یعنی  $v'_1$ ، را اضافه کنیم. بر حسب اینکه پراکندگی تحت چه زاویه‌ای،  $\theta$  انجام شود، بردارهای سرعت  $v'_1$  روی دایره‌ای به شعاع  $v'_1$  و به مرکز انتهای بردار  $V$  قرار خواهند گرفت. در این صورت سرعت  $v_1$  و زاویه پراکندگی  $\psi$  در سیستم LAB از طریق اتصال مبدأ بردار  $V$  به انتهای بردار  $v'_1$  به دست می‌آید.

اگر  $V < v'_1$ ، تنها یک رابطه بین  $v_1$ ،  $v'_1$  و  $\theta$  می‌تواند وجود داشته باشد [شکل ۱۱.۸ (الف)]. اما اگر  $V > v'_1$ ، در آن صورت به ازای هر مجموعه  $V$  و  $v'_1$  دو دسته جواب برای زاویه‌های پراکندگی و سرعتهای آزمایشگاهی وجود دارد:  $\theta_f$  و  $v_{1,f}$  و  $\theta_b$  و  $v_{1,b}$  [شکل ۱۱.۸ (ب)]. که در اینجا نشانه‌های  $f$  و  $b$ ، به ترتیب، معرف به سمت جلو و به سمت عقب هستند. این وضعیت از آنجا

۱. در تمامی مبحث پراکندگی فرض می‌کنیم تقارن محوری وجود دارد به طوری که دیگر معرفی زاویه سمتی غیر ضروری است. گر چه، باید توجه داشت که تقارن محوری را همواره نمی‌توان در مسائل پراکندگی مشاهده کرد؛ این مطلب مخصوصاً در برخی سیستمهای کوانتومکانیکی صادق است.





شکل ۱۱.۸

ناشی می‌شود که اگر سرعت نهایی  $v_f$  در سیستم CM برای غلبه بر سرعت  $V$  مرکز جرم کافی نباشد، در آن صورت، حتی اگر  $m_1$  در سیستم CM به سمت عقب پراکنده شود ( $\theta > \pi/2$ )، در سیستم LAB ذره با زاویه‌ای به سمت جلو به نظر خواهد رسید ( $\psi < \pi/2$ ). به این ترتیب، به ازای  $V > v_i$ ، سرعت  $v_1$  در سیستم LAB تابعی دو مقداری از  $v_i$  است. در عمل، معمولاً  $\psi$  را اندازه‌گیری می‌کنیم، نه بردار سرعت  $v_1$  را، به طوری که ممکن است یک تک مقدار  $\psi$  با دو مقدار  $\theta$  متناظر باشد. ولی، باید توجه داشت، که مشخص کردن بردارهای  $V$  و  $v_i$  همواره به ترکیب منحصر به فردی برای  $v_1$  و  $\theta$  منجر می‌شود؛ اما، اگر  $V > v_i$ ، با مشخص کردن  $V$  و فقط جهت  $v_1$  (یعنی،  $\psi$ ) دو بردار نهایی  $v_{1,f}$  و  $v_{1,b}$  وجود دارد.

اکنون که توصیفی کمی از فرایند پراکندگی ارائه دادیم، سعی می‌کنیم برخی معادلات را به دست آوریم که کمیت‌های گوناگون را به هم مربوط می‌کنند. بنابراین تعریف مرکز جرم [معادله (۳.۸)]، داریم

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = M \mathbf{R} \quad (۶۰.۸)$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان از این رابطه، خواهیم داشت

$$m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = M \mathbf{V} \quad (۶۱.۸)$$

اما  $M = m_1 + m_2$  و  $\mathbf{u}_2 = 0$ ؛ بنابراین (در سیستم LAB) مرکز جرم باید با سرعت

$$\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{u}_1}{m_1 + m_2} \quad (۶۲.۸)$$

به سوی  $m_2$  حرکت کند. با همین استدلال، چون  $m_2$  در ابتدا ساکن است، سرعت اولیه  $m_2$  در سیستم CM باید دقیقاً برابر  $V$  باشد

$$u'_2 = V = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad (۶۳.۸)$$

ولی، توجه داشته باشید که از لحاظ برداری:  $u'_2 = -V$ ، زیرا حرکتها در خلاف جهت یکدیگر انجام می‌شوند.

مزیت عمده بهره‌گیری از دستگاه مختصات CM در صفر بودن تکانه خطی کل چنین سیستمی نهفته است، به طوری که ذرات قبل از برخورد مستقیماً به سوی یکدیگر حرکت می‌کنند، و بعد از برخورد در جهتهایی دقیقاً بر عکس یکدیگر به حرکت خود ادامه می‌دهند. اگر، همانطور که مشخص کردیم، برخورد کشسان باشد، در آن صورت جرمها تغییر نمی‌کنند و پایداری تکانه خطی و انرژی جنبشی برای تأمین این نتیجه که سرعتهای قبل و بعد از برخورد در سیستم CM برابرند، کافی است

$$u'_1 = v'_1, \quad u'_2 = v'_2 \quad (۶۴.۸)$$

جمله  $u_1$  سرعت نسبی دو ذره در هریک از دو دستگاه CM و LAB است، بنابراین، برای سرعتهای نهایی در سیستم CM داریم

$$v'_2 = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad (۶۵.۸ \text{ الف})$$

$$v'_1 = u_1 - u'_2 = \frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2} \quad (۶۵.۸ \text{ ب})$$

می‌دانیم [شکل ۱۱.۸ الف]

$$v'_1 \sin \theta = v_1 \sin \psi \quad (۶۶.۸ \text{ الف})$$

و

$$v'_1 \cos \theta + V = v_1 \cos \psi \quad (۶۶.۸ \text{ ب})$$

از تقسیم معادله (۶۶.۸ الف) به (۶۶.۸ ب)، داریم

$$\tan \psi = \frac{v'_1 \sin \theta}{v'_1 \cos \theta + V} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + (V/v'_1)} \quad (۶۷.۸)$$

و بر طبق معادلات (۶۲.۸) و (۶۵.۸) ب، نسبت  $V/v'_1$  چنین به دست می آید

$$\frac{V}{v'_1} = \frac{m_1 u_1 / (m_1 + m_2)}{m_2 u_1 / (m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{m_2} \quad (۶۸.۸)$$

به این ترتیب، نسبت  $m_1/m_2$  تعیین کننده این نکته است که آیا شکل ۱۱.۸ (الف) فرایند پراکندگی را توصیف می کند یا شکل ۱۱.۸ (ب):

$$V < v'_1, \quad m_1 < m_2 \quad \text{شکل ۱۱.۸ (الف):}$$

$$V > v'_1, \quad m_1 > m_2 \quad \text{شکل ۱۱.۸ (ب):}$$

اگر معادلات (۶۷.۸) و (۶۸.۸) را ترکیب کنیم و بنویسیم

$$\tan \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + (m_1/m_2)} \quad (۶۹.۸)$$

مشاهده می کنیم که در حالت  $m_1 \ll m_2$ ، زوایای پراکندگی در سیستمهای آزمایشگاه و مرکز جرم تقریباً باهم برابرند؛ یعنی، ذره  $m_2$  در برخورد با  $m_1$  فقط اندکی تحت تأثیر قرار می گیرد و اساساً به صورت یک مرکز پراکندگی ثابت عمل می کند. به این ترتیب

$$\psi \cong \theta, \quad m_1 \ll m_2 \quad (۷۰.۸)$$

از سوی دیگر، اگر  $m_1 = m_2$ ، آنگاه

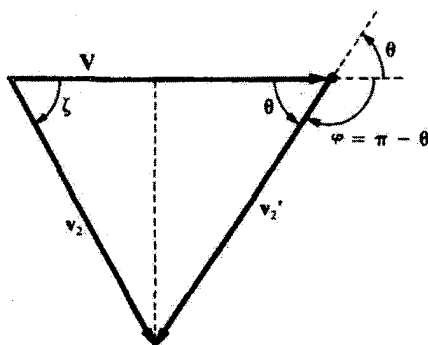
$$\tan \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} = \tan \theta / 2$$

به طوری که

$$\psi = \frac{\theta}{2}, \quad m_1 = m_2 \quad (۷۱.۸)$$

و زاویه پراکندگی در سیستم LAB نصف زاویه پراکندگی در سیستم CM است. چون بیشینه مقدار  $\theta$  برابر  $۱۸۰^\circ$  است، معادله (۷۱.۸) حاکی از آن است که به ازای  $m_1 = m_2$  در سیستم LAB در زاویه های بزرگتر از  $۹۰^\circ$  هیچگونه پراکندگی نمی تواند صورت پذیرد.

حال باز می گردیم به شکل ۱۰.۸ (ج) و نموداری شبیه شکل ۱۱.۸ (الف) را مربوط به پس زنی ذره  $m_2$  ترسیم می کنیم. این وضعیت را در شکل ۱۲.۸ مشاهده می کنید. که با توجه به آن داریم



شکل ۱۲.۸

$$v_1 \sin \zeta = v'_2 \sin \theta \quad (۷۲.۸ \text{ الف})$$

$$v_1 \cos \zeta = V - v'_2 \cos \theta \quad (۷۲.۸ \text{ ب})$$

از تقسیم معادله (۷۲.۸ الف) بر (۷۲.۸ ب)، می‌رسیم به

$$\tan \zeta = \frac{v'_2 \sin \theta}{V - v'_2 \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{(V/v'_2) - \cos \theta}$$

اما، بنا بر معادلات (۶۳.۸) و (۶۵.۸ الف)،  $V$  و  $v'_2$  با هم برابرند. بنابراین

$$\tan \zeta = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \cot \theta / 2 \quad (۷۳.۸)$$

که می‌توانیم آنرا به صورت زیر بنویسیم

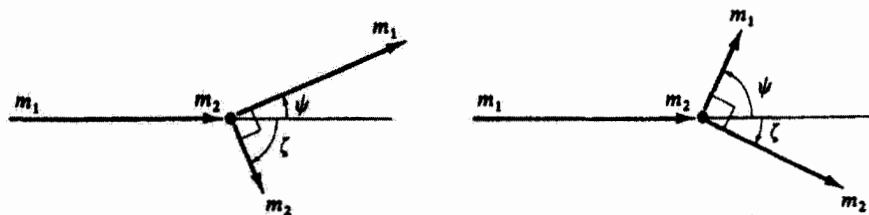
$$\tan \zeta = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right)$$

از آنجا

$$2\zeta = \pi - \theta = \varphi \quad (۷۴.۸)$$

در مورد ذرات با جرم مساوی،  $m_1 = m_2$  داریم:  $\theta = 2\psi$ . از ترکیب این نتیجه با معادله (۷۴.۸)، داریم

$$\boxed{\zeta + \psi = \frac{\pi}{2}, \quad m_1 = m_2} \quad (۷۵.۸)$$



شکل ۱۳.۸

به این ترتیب، پراکندگی ذرات با جرمهای مساوی که یکی از آنها در ابتدا ساکن است، همواره حالتی نهایی پدید می‌آورد که در این حالت بردارهای سرعت بر هم عمودند (شکل ۱۳.۸).

### مثال ۶.۸

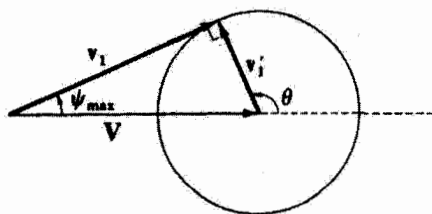
به ازای  $v_1 > V$ ، بیشینه زاویه‌ای که  $\psi$  می‌تواند کسب کند، چقدر است؟ به ازای  $m_1 \gg m_2$  و  $m_1 = m_2$  مقدار  $\psi_{\max}$  چقدر است؟

حل: برای حالت  $\psi_{\max}$ ، شکل ۱۱.۸ (ب) به صورت نمایش یافته در شکل ۱۴.۸ در می‌آید. برای اینکه  $\psi$  بیشینه شود، زاویه بین  $v_1$  و  $v_1'$  باید  $90^\circ$  باشد.

$$\sin \psi_{\max} = \frac{v_1'}{V} \quad (۶.۸)$$

بنابر معادله (۶.۸)، این مقدار عبارت است از

$$\sin \psi_{\max} = \frac{m_2}{m_1}$$



شکل ۱۴.۸

۱. این نتیجه فقط در حدود نانسیتی معتبر است. برای عبارت نسیتی حاکم بر این حالت، معادله (۱۳۱.۱۴) را ببینید.

که از اینجا

$$\psi_{\max} = \sin^{-1} \left( \frac{m_2}{m_1} \right) \quad (۷۷.۸)$$

به‌ازای  $m_1 \gg m_2$ ، داریم:  $\psi_{\max} = 0$  (پراکندگی در کار نیست) و به‌ازای  $m_1 = m_2$  داریم:  $\psi_{\max} = 90^\circ$ . به‌طور کلی، به‌ازای  $m_1 > m_2$  هیچ پراکندگی  $m_1$  به سمت عقب زاویه  $90^\circ$  نمی‌تواند انجام شود. ■

### ۷.۸ سینماتیک برخورد‌های کشسان

روابط مشتمل بر انرژی ذرات را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد. اولاً، داریم

$$T = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \quad (۷۸.۸)$$

و در سیستم CM

$$T' = \frac{1}{2} (m_1 u_1'^2 + m_2 u_2'^2)$$

که، با استفاده معادلات (۶۵.۸ الف) و (۶۵.۸ ب)، این عبارت به صورت زیر در می‌آید

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} u_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T. \quad (۷۹.۸)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که انرژی جنبشی اولیه در سیستم CM، یعنی  $T'$ ، همواره کسری،  $m_2 / (m_1 + m_2) < 1$ ، از انرژی جنبشی اولیه در سیستم LAB است. در مورد انرژی‌های نهایی در سیستم CM، خواهیم داشت

$$T_1' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 T. \quad (۸۰.۸)$$

و

$$T_2' = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T. \quad (۸۱.۸)$$

برای اینکه  $T_1$  را بر حسب  $T$  به‌دست آوریم، می‌نویسیم

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2} m_1 u_1^2} = \frac{v_1'^2}{u_1^2} \quad (۸۲.۸)$$

با مراجعه به شکل ۱۱.۸ (الف) و استفاده از قاعده کسینوسی، می‌توان نوشت

$$v_1'^2 = v_1^2 + V^2 - 2v_1V \cos \psi$$

یا

$$\frac{T_1}{T} = \frac{v_1^2}{u_1^2} = \frac{v_1'^2}{u_1^2} - \frac{V^2}{u_1^2} + 2 \frac{v_1V}{u_1^2} \cos \psi \quad (۸۳.۸)$$

با تکیه بر تعریفهای قبل، داریم

$$\frac{v_1'}{u_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \frac{V}{u_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (۸۴.۸)$$

مجذور این دو کمیت عبارتهای مطلوب برای دو جمله اول سمت راست معادله (۸۳.۸) را به دست می‌دهند. برای محاسبه جمله سوم، با استفاده از معادله (۶۶.۸) (الف) می‌نویسیم

$$2 \frac{v_1V}{u_1^2} \cos \psi = 2 \left( v_1' \frac{\sin \theta}{\sin \psi} \right) \times \frac{V}{u_1^2} \cos \psi \quad (۸۵.۸)$$

کمیت  $v_1'V/u_1^2$  را می‌توان از حاصلضرب معادله‌های موجود در معادله (۸۴.۸) به دست آورد، و با استفاده از معادله (۶۹.۸)، داریم

$$\frac{\sin \theta \cos \psi}{\sin \psi} = \frac{\sin \theta}{\tan \psi} = \cos \theta + \frac{m_1}{m_2}$$

بنابراین

$$2 \frac{v_1V}{u_1^2} \cos \psi = \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left( \cos \theta + \frac{m_1}{m_2} \right) \quad (۸۶.۸)$$

معادلات (۸۴.۸) و (۸۶.۸) را در معادله (۸۳.۸) می‌نشانیم

$$\frac{T_1}{T} = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 - \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left( \cos \theta + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

که به صورت زیر ساده می‌شود

$$\frac{T_1}{T} = 1 - \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \theta) \quad (الف) \quad (۸۷.۸)$$

به همین ترتیب، همچنین می‌توانیم نسبت  $T_1/T_2$  را برحسب زاویهٔ پراکندگی در سیستم LAB، یعنی  $\psi$ ، به‌دست آوریم

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \left[ \cos \psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2 \psi} \right]^2 \quad (87.A)$$

که باید علامت مثبت را برای رادیکال انتخاب کرد مگر اینکه  $m_1 > m_2$ ، که در این حالت حاصل دو مقداری است، و معادلهٔ (۷۷.۸) بیشینه مقدار مجاز برای  $\psi$  را تعیین می‌کند.

انرژی ذرهٔ پس‌زده شده،  $m_2$ ، در سیستم LAB، را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \zeta, \quad \zeta \leq \pi/2 \quad (88.A)$$

به‌ازای  $m_1 = m_2$ ، رابطهٔ سادهٔ زیر حاصل می‌شود

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \cos^2 \psi, \quad m_1 = m_2} \quad (89.A \text{ الف})$$

رابطهٔ بالا بر محدودیتی متوجه است که به دنبال معادلهٔ (۷۱.۸) ذکر شد و بر مبنای آن  $\psi \leq 90^\circ$  همچنین

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \sin^2 \psi, \quad m_1 = m_2} \quad (89.A \text{ ب})$$

چند رابطهٔ دیگر نیز عبارت‌اند از

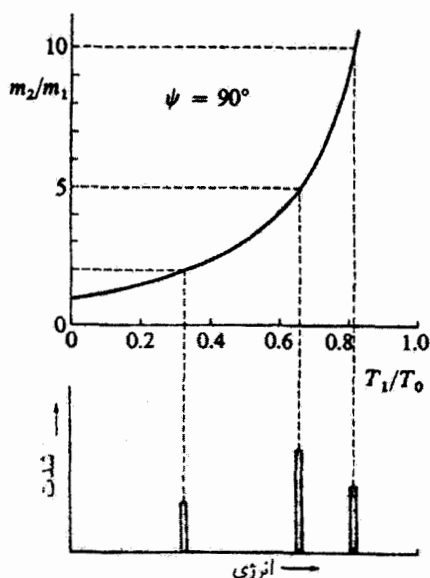
$$\sin \zeta = \sqrt{\frac{m_1 T_1}{m_2 T_2}} \sin \psi \quad (90.A)$$

$$\tan \psi = \frac{\sin 2\zeta}{(m_1/m_2) - \cos 2\zeta} \quad (91.A)$$

$$\tan \psi = \frac{\sin \varphi}{(m_1/m_2) - \cos \varphi} \quad (92.A)$$

به عنوان مثالی از کاربرد روابط سینماتیک که به‌دست آوردیم، وضعیت زیر را در نظر بگیرید. باریکه‌ای از ذرات پرتابه را در نظر بگیرید، جرم هر یک  $m_1$  و انرژی هر کدام  $T$  است. این باریکه را به سوی هدفی مشتمل بر گروهی از ذرات به جرم  $m_2$ ، که ممکن است همهٔ آنها باهم برابر نباشند، نشانه می‌رویم. برخی از ذرات فرودی با ذرات هدف برهم‌کنش می‌کنند و پراکنده می‌شوند. تمام





شکل ۱۵.۸

ذرات فرودی به صورت باریکه‌ای با سطح مقطع کوچکی در یک جهت واحد حرکت می‌کنند، و فرض می‌کنیم که ذرات هدف در فضا جایگزیده شده باشند، به طوری که ذرات پراکنده از ناحیه کوچکی از فضا خارج می‌شوند. اگر آشکارسازی را، مثلاً در راستای  $90^\circ$  نسبت به باریکه فرودی قرار دهیم، و به وسیله آن انرژی ذرات پراکنده را اندازه‌گیری کنیم، آنگاه می‌توانیم نتایج را به صورت قسمت پایینی شکل ۱۵.۸ نمایش دهیم. این نگاره یک نمودار ستونی است که تعداد ذرات آشکار شده در گستره انرژی  $\Delta T$  را بر حسب انرژی  $T$  ترسیم می‌کند. این نمودار ستونی ذره نشان می‌دهد که سه گروه انرژی برای ذرات پراکنده آشکارسازی شده در  $\psi = 90^\circ$  مشاهده می‌شود. در قسمت بالایی شکل یک منحنی را می‌بینیم که انرژی ذره پراکنده،  $T_1$ ، را بر حسب  $T$  به صورت تابعی از خارج قسمت جرم  $m_2/m_1$  ارائه می‌دهد [معادله (۸۷.۸) ب]. از این منحنی می‌توان برای تعیین جرم ذره‌ای،  $m_2$ ، که یکی از ذرات فرودی از آن پراکنده شده است تا در یکی از سه گروه انرژی قرار گیرد، استفاده کرد. به این ترتیب، گروه انرژی با  $T_1 \cong 0.8T$ ، از پراکندگی از ذرات هدفی که جرم آنها عبارت است از  $m_2 = 10m_1$  حاصل می‌شود، دو گروه دیگر، از هدفهایی با جرمهای  $5m_1$  و  $2m_1$  به دست می‌آیند.

بنابراین، اندازه‌گیری انرژی ذرات پراکنده، روشی برای تجزیه کیفی ماده تشکیل دهنده هدف به

شمار می‌آید. در واقع، این روش عملاً وقتی مفید است که باریکه ذرات فرودی از ذراتی تشکیل شده باشد (مثل، پروتون) که در نوعی شتابدهنده به سرعت‌های بالایی رسیده باشند. اگر آشکارساز بتواند اندازه‌گیریهای دقیق انرژی را انجام دهد، در این صورت با این روش اطلاعات دقیقی درباره اجزای تشکیل دهنده هدف به دست می‌آوریم. اگر سطح مقطع معلوم باشد، به کمک شدت مربوط به گروههای انرژی می‌توان تجزیه کمی را انجام داد (بخش ۸.۸). کاربرد این روش در تعیین اجزای آلودگی هوا مفید واقع شده است.

### مثال ۷.۸

در برخورد کشسان دو ذره به جرمهای  $m_1$  و  $m_2$ ، سرعت‌های اولیه عبارت‌اند از:  $u_1$  و  $u_2 = \alpha u_1$  ( $\alpha > 0$ ). اگر انرژی جنبشی اولیه دو ذره در سیستم LAB یکی باشد، شرایط حاکم بر  $u_1/u_2$  و  $m_1/m_2$  را پیدا کنید، به طوری که پس از برخورد در سیستم LAB، ذره  $m_1$  به حالت سکون درآید.

حل: چون انرژی جنبشی اولیه دو ذره یکسان است، داریم

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}\alpha^2m_2u_1^2$$

یا

$$\frac{m_1}{m_2} = \alpha^2 \quad (۹۳.۸)$$

اگر  $m_1$  پس از برخورد به حالت سکون درآید، پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

یا

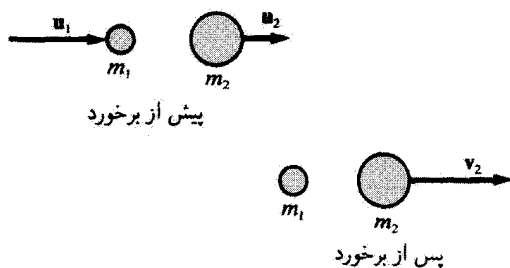
$$m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (۹۴.۸)$$

بنابر پایستگی تکانه خطی

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + \alpha m_2)u_1 = m_2v_2 \quad (۹۵.۸)$$

با نشان دادن  $v_2$  از معادله (۹۵.۸) در معادله (۹۴.۸)، خواهیم داشت

$$m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_2 \left( \frac{m_1 + \alpha m_2}{m_2} \right)^2 u_1^2$$



شکل ۱۶.۸

یا

$$m_1 = \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{m_1}{m_2} + \alpha \right)^2 \quad (۹۶.۸)$$

با جانشانی  $m_1/m_2 = \alpha^2$  از معادله (۹۳.۸)، خواهیم داشت

$$2\alpha^2 = (\alpha^2 + \alpha)^2$$

و از اینجا

$$\alpha = \sqrt{2} - 1 = ۰.۴۱۴$$

$$\alpha^2 = ۰.۱۷۲$$

به طوری که

$$\frac{m_1}{m_2} = \alpha^2 = ۰.۱۷۲$$

و

$$\frac{u_1}{u_2} = \alpha = ۰.۴۱۴$$

چون  $\alpha > 0$ ، هر دو ذره در یک جهت حرکت می‌کنند؛ شکل این برخورد را در شکل ۱۶.۸ مشاهده می‌کنید.

### مثال ۸.۸

ذراتی به جرم  $m_1$  از ذرات ساکنی به جرم  $m_2$  به طور کشسان پراکنده می‌شوند. (الف) طیف سنج مغناطیسی را باید در چه زاویه‌ای در سیستم LAB قرار داد تا ذراتی را آشکار کند که یک سوم

تکانه خود را از دست داده‌اند؟ (ب) در چه گستره‌ای از  $m_1/m_2$  چنین برخوردهایی امکانپذیر است؟ (ج) زاویه پراکندگی را به‌ازای  $m_1/m_2 = 1$  محاسبه کنید.

حل: داریم

$$m_1 v_1 = \frac{2}{3} m_1 u_1, \quad v_1 = \frac{2}{3} u_1$$

با استفاده از معادلات (۸۲.۸) و (۸۷.۸ الف)، خواهیم داشت

$$\frac{T_1}{T} = \frac{v_1^2}{u_1^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \theta) \quad (97.8)$$

این معادله را برحسب  $\cos \theta$  حل می‌کنیم، به این نتیجه می‌رسیم

$$\cos \theta = 1 - \frac{5(m_1 + m_2)^2}{18m_1 m_2} = 1 - y \quad (98.8)$$

که در اینجا

$$y = \frac{5(m_1 + m_2)^2}{18m_1 m_2} \quad (99.8)$$

اما باید مقدار  $\psi$  را بدانیم، که می‌توانیم آن‌را از معادله (۶۹.۸) به‌دست آوریم

$$\tan \psi = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_1/m_2} = \frac{\sqrt{2y - y^2}}{1 - y + m_1/m_2} \quad (100.8)$$

که در اینجا ما  $\cos \theta$  را از معادله (۹۸.۸) جانشانی کردیم و رسیدیم به:  $\sin \theta = \sqrt{2y - y^2}$ .

چون  $\tan \psi$  باید عددی حقیقی باشد، مقادیری از  $m_1/m_2$  مجاز است که داشته‌باشیم

$$2 - y \geq 0$$

بنابراین

$$2 - \frac{5(m_1 + m_2)^2}{18m_1 m_2} \geq 0 \quad (101.8)$$

که می‌توان آن‌را به‌صورت زیر نوشت

$$-5 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 26 \left(\frac{m_1}{m_2}\right) - 5 \geq 0$$

یا

$$-5x^2 + 26x - 5 \geq 0 \quad (102.8)$$

که در اینجا  $x = m_1/m_2$ . وقتی معادله (۱۰۲.۸) برابر صفر شود، جوابهای آن عبارتاند از:  $x = 1/5$  و  $x = 5$ . جانشانی نشان می‌دهد که عبارت

$$\frac{1}{5} \leq \frac{m_1}{m_2} \leq 5$$

در معادله (۱۰۱.۸) صدق می‌کند، اما مقادیر  $m_1/m_2$  خارج از این گستره صدق نمی‌کنند. با نشاندن  $m_1/m_2 = 1$  در معادله (۹۹.۸)، می‌رسیم به

$$y = \frac{5(m_1 + m_2)^2}{18m_1m_2} = \frac{5\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)^2}{18m_1/m_2}$$

$$= \frac{5(1+1)^2}{18} = \frac{10}{9}$$

و بانشاندن این مقدار به جای  $y$  در معادله (۱۰۰.۸)، خواهیم داشت:  $\psi = 48^\circ$ .

## ۸.۸ برخوردهای ناکشسان

در هنگام برهم‌کنش دو ذره، بسته به نیروهایی که درگیر برهم‌کنش‌اند، چندین پیامد امکانپذیر است. بررسیهای ما در دو بخش پیش به برخوردهای کشسان محدود بود. اما، به‌طور کلی، اگر انرژی دستخوش تغییرات زیادی شود ممکن است چندین ذره پدید آیند. مثلاً اگر پروتون با هسته‌ای برخورد کند، ممکن است انرژی آزاد شود. به‌علاوه، ممکن است پروتون جذب، و در برخورد به‌جای آن یک نوترون یا یک ذره آلفا تولید شود. تمام این امکانها را با همان روش پیشین مورد بررسی قرار می‌دهند: پایستگی انرژی و تکانه خطی. ما بررسی خود را مقید به وضعیتی می‌کنیم که ذرات در سیستم نهایی، همان ذرات سیستم اولیه باشند. به‌طور کلی، پایستگی انرژی عبارت است از

$$Q + \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (103.8)$$

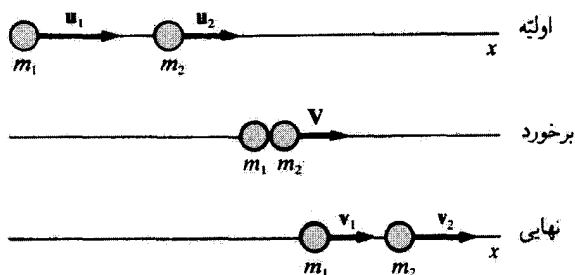
که در اینجا  $Q$  را مقدار  $Q$  می‌نامیم که نمایانگر اتلاف یا دریافت انرژی در حین برخورد است.

$Q = 0$ : برخورد کشسان، انرژی جنبشی پایسته است

$Q > 0$ : برخورد انرژی‌زا، انرژی جنبشی به‌دست آمده است

$Q < 0$ : برخورد انرژی‌گیر، انرژی جنبشی از دست رفته است

برخورد ناکشسان از نوع برخوردهای انرژی‌گیر است. مثلاً، در یک برخورد هسته‌ای، ممکن است انرژی جنبشی به جرم‌انرژی تبدیل شود. یا ممکن است، در یک برخورد مثلاً، از طریق نیروهای



شکل ۱۷.۸

اصطکاک، به صورت گرما تلف شود. برخورد تمام اجسام بزرگ مقیاس (ماکروسکوپی) تا حدودی انرژی گیر (ناکشسان) هستند. دو گلوله خمیری هم جرم و هم سرعت که رودررو برخورد می‌کنند ممکن است کاملاً متوقف شوند، که این نمونه‌ای از برخورد کاملاً ناکشسان به شمار می‌آید. حتی در برخورد دو گوی بیلبارد انرژی جنبشی به‌طور کامل پایسته نیست؛ کسر اندکی از انرژی جنبشی اولیه به گرما تبدیل می‌شود.

یکی از معیارهای ناکشسانی برخورد دو جسم را می‌توان با توجه به برخورد مستقیم رودرویی (شکل ۱۷.۸) که در آن هیچ‌گونه چرخشی وجود ندارد (و فقط متضمن انرژی جنبشی انتقالی است) مورد بررسی قرار داد. نیوتون از طریق آزمایش پی‌برد که نسبت سرعت‌های نسبی اولیه به سرعت‌های نسبی نهایی در نزد هر سیستم دو جسمی تقریباً ثابت است. این نسبت، که آن را ضریب بازگشت ( $\epsilon$ ) می‌گویند، بنا بر تعریف عبارت است از

$$\epsilon = \frac{|v_2 - v_1|}{|u_2 - u_1|} \quad (۱۰۴.۸)$$

این نسبت را گاهی قاعده نیوتون هم نامیده‌اند. در مورد برخوردی کاملاً کشسان:  $\epsilon = ۱$ ؛ در حالت برخوردی کاملاً ناکشسان:  $\epsilon = ۰$ . حدود مقادیر  $\epsilon$  عبارت‌اند از  $۰$  و  $۱$ . در هنگام به کارگیری معادله (۱۰۴.۸) برای برخوردهای مایل باید دقت کافی مبذول داریم، زیرا قاعده نیوتون فقط در مورد مؤلفه‌های سرعت در امتداد خط واصل بین دو جسم صادق است. برای سطوح صاف، مؤلفه‌های قائم سرعت بر اثر برخورد عملاً تغییری نمی‌کنند.

### مثال ۹.۸

در مورد برخورد کشسان رودرویی که در بخش‌های ۶.۸ و ۷.۸ آن را تشریح کردیم نشان دهید که  $\epsilon = ۱$ . جرم  $m_2$  در ابتدا ساکن است.

حل: چون سرعتهای نهایی در همان جهت  $u_1$  هستند، پایستگی تکانه خطی و انرژی را به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (۱۰۵.۸)$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (۱۰۶.۸)$$

معادله (۱۰۵.۸) را برحسب  $v_2$  حل می‌کنیم و آن را در معادله مربوط به  $\varepsilon$  [معادله (۱۰۴.۸)] می‌نشانیم

$$\varepsilon = \frac{v_2 - v_1}{u_1} = \frac{\frac{m_1 u_1 - m_1 v_1}{m_2} - v_1}{u_1} = \frac{m_1}{m_2} - \frac{m_1 v_1}{m_2 u_1} - \frac{v_1}{u_1} \quad (۱۰۷.۸)$$

می‌توانیم نسبت  $v_1/u_1$  را پس از جانشانی  $v_2$  از معادله (۱۰۵.۸) در معادله (۱۰۶.۸)، پیدا کنیم

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{m_1 u_1 - m_1 v_1}{m_2} \right)^2$$

$$m_1 u_1^2 = m_1 v_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2} (u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1)$$

از تقسیم طرفین این رابطه بر  $m_1 u_1^2$  و قرار دادن  $x = v_1/u_1$  داریم

$$1 = x^2 + \frac{m_1}{m_2} (1 + x^2 - 2x)$$

پس از بازنویسی جملات

$$\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) x^2 - \frac{2m_1}{m_2} x + \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) = 0$$

از حل این معادله درجه دوم بر حسب  $x$ ، خواهیم داشت

$$x = 1$$

$$x = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$

جواب  $x = 1$  یک جواب بدیهی است ( $v_1 = u_1, v_2 = 0$ )، بنابراین جواب دیگر  $x$  را در معادله (۱۰۷.۸) قرار می‌دهیم

$$\varepsilon = \frac{m_1}{m_2} - \frac{\frac{m_1 m_1}{m_2 m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} + \frac{1 + \frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{m_1^2}{m_2^2} + \frac{m_1}{m_2} - \frac{m_1^2}{m_2^2} + \frac{m_1}{m_2} + 1 - \frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = 1$$

در خلال یک برخورد (کشسان یا ناکشسان)، ممکن است نیروهای درگیر در یک فاصله زمانی بسیار کوتاه عمل کنند. به آنها نیروهای ضربه‌ای می‌گویند. چکشی که بر میخی فرود می‌آید و دو گوی بیلیارد که باهم برخورد می‌کنند، نمونه‌هایی از نیروهای ضربه‌ای به شمار می‌آیند. قانون دوم نیوتون در مدت زمان  $\Delta t$  که برخورد در طی آن انجام می‌گیرد، صادق است

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (108.8)$$

پس از ضرب کردن طرفین این معادله در  $dt$  و سپس انتگرالگیری از آن، داریم

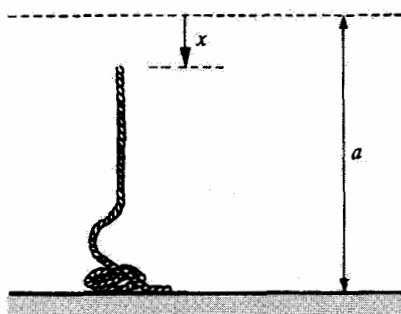
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = (m\mathbf{v} - m\mathbf{u}) \equiv \mathbf{P} \quad (109.8)$$

که در اینجا  $\Delta t = t_2 - t_1$  و نیز  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  به ترتیب نمایانگر سرعت‌های قبل و بعد از برخورد هستند. معادله (۱۰۹.۸)، معرف اصطلاح ضربه،  $\mathbf{P}$ ، به شمار می‌آید. ضربه را می‌توان به کمک آزمایش و از طریق تغییر تکانه اندازه‌گیری کرد. ضربه ایده‌آلی که بدون جابه‌جایی در خلال برخورد، نمایانده می‌شود، ناشی از نیرویی نامتناهی خواهد بود که در خلال یک مدت زمان بینهایت کوچک عمل می‌کند

### مثال ۱۰.۸

جرم واحد طول طنابی  $\rho$  و طول آن  $a$  است؛ این طناب درست بر فراز میزی آویخته شده است (شکل ۱۸.۸). اگر طناب از حالت سکون در بالا رها شود، نیروی وارد بر میز را در هنگامی محاسبه کنید که طول  $x$  از طناب بر روی میز افتاده است.





شکل ۱۸.۸

حل: چون طناب بر روی میز قرار گرفته است، یک نیروی گرانشی  $mg = \rho xg$  داریم، اما باید نیروی ضربه‌ای را نیز برای آن به حساب آوریم

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (۱۱۰.۸)$$

در طی فاصله زمانی  $dt$  جرمی از طناب مساوی با  $\rho(vdt)$  روی میز فرو می‌افتد. تغییر تکانه وارد بر میز عبارت است از

$$dp = (\rho v dt)v = \rho v^2 dt$$

و

$$\frac{dp}{dt} = \rho v^2 = F_{\text{ضربه‌ای}} \quad (۱۱۱.۸)$$

سرعت  $v$  در زمان  $t$  از طریق رابطه  $v^2 = 2gx$  با  $x$  مربوط می‌شود، زیرا هر جزء از باقیمانده طناب تحت شتاب ثابت  $g$  واقع است.

$$F_{\text{ضربه‌ای}} = \rho v^2 = 2\rho gx \quad (۱۱۲.۸)$$

نیروی کل برابر است با مجموع نیروهای گرانشی و ضربه‌ای

$$F = F_g + F_{\text{ضربه‌ای}} = 3\rho xg \quad (۱۱۳.۸)$$

که معادل وزن طول  $3x$  طناب است.

## ۹.۸ سطح مقطع

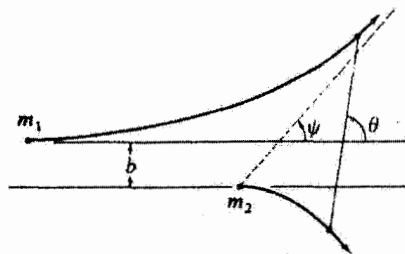
در بخشهای پیشین روابط گوناگونی را به دست آوردیم که حالت اولیه ذره متحرک را به حالت‌های نهایی ذره اصلی و ذره‌ای که مورد برخورد قرار گرفته است، مربوط می‌کند. در اینجا فقط روابط سینماتیک در کار بودند؛ یعنی، در جهت پیش‌بینی زاویه پراکندگی یا سرعت نهایی تلاشی به عمل نمی‌آمد فقط معادلاتی به دست می‌آمد که این کمیتها را بهم ربط می‌داد. اکنون به فرایند برخورد دقیقتر نگاه می‌کنیم و پراکندگی را در حالی بررسی می‌کنیم که ذرات با میدان نیروی مشخصی بهم‌کنش دارند. وضعیت نموده شده در شکل ۱۹.۸ را در نظر بگیرید، در این شکل چنین برخوردی را در دستگاه مختصات LAB مشاهده می‌کنیم که نیرویی دافعه بین  $m_1$  و  $m_2$  عمل می‌کند. ذره  $m_1$  چنان به مجاورت ذره  $m_2$  می‌آید که اگر بین آنها نیرویی عمل نمی‌کرد،  $m_1$  از کنار ذره  $m_2$  با نزدیکترین فاصله،  $b$ ، می‌گذشت. به کمیت  $b$  پارامتر برخورد می‌گویند. اگر سرعت  $m_1$  برابر  $u_1$  باشد، در آن صورت پارامتر برخورد،  $b$ ، تکانه زاویه‌ای،  $l$ ، ذره  $m_1$  را حول  $m_2$  به روشنی مشخص می‌کند

$$l = m_1 u_1 b \quad (114.8)$$

می‌توانیم  $u_1$  را، با استفاده از معادله (۷۸.۸)، بر حسب انرژی فرودی  $T$  بیان کنیم

$$l = b \sqrt{2m_1 T} \quad (115.8)$$

واضح است که اگر قانون نیرو معلوم باشد، تکانه زاویه‌ای و از آن رو زاویه پراکندگی  $\theta$  (یا  $\psi$ )، به‌ازای انرژی معلوم  $T$  از طریق پارامتر برخورد به‌طور منحصر به فردی تعیین می‌شود.<sup>۱</sup>



شکل ۱۹.۸

۱. در پراکندگی ذرات اتمی و هسته‌ای، نه می‌توانیم پارامتر برخورد را انتخاب کنیم و نه آن را مستقیماً اندازه‌گیری کنیم. بنابراین، در این‌گونه موارد، فقط می‌توانیم از احتمال پراکندگی در زاویه‌های گوناگون صحبت کنیم.

اکنون توزیع زاویه‌های پراکندگی ناشی از برخورد با پارامترهای برخورد گوناگون را در نظر می‌گیریم. برای انجام این کار، فرض کنید باریکهٔ یاریکی از ذرات در اختیار داریم که، جرم هر کدام  $m_1$  و انرژی هر یک نیز  $T$  است. این باریکه را به سوی ناحیهٔ کوچکی از فضا شامل مجموعه‌ای از ذرات ساکن، هر یک به جرم  $m_2$  (در سیستم IAB)، نشانه می‌رویم. شدت یا چگالی شار،  $I$ ، ذرات فرودی را به عنوان تعداد ذراتی که در واحد زمان از واحد سطح عمود بر راستای باریکه می‌گذرند، تعریف می‌کنیم. اگر فرض کنیم که قانون نیروی بین  $m_1$  و  $m_2$  به تناسب فاصله با سرعت کافی تنزل می‌کند، در آن صورت پس از یک برخورد، ذرهٔ پراکنده به‌طور مجانبی به خط راستی با زاویهٔ مشخص  $\theta$  بین راستاهای اولیه و نهایی حرکت نزدیک می‌شود. حال مقطع پراکندگی دیفرانسیلی  $\sigma(\theta)$  را در سیستم CM برای پراکندگی در داخل عنصر زاویهٔ فضایی  $d\Omega'$  در زاویهٔ مشخص  $\theta$  در سیستم CM تعریف می‌کنیم

$$\sigma(\theta) = \frac{\left( \begin{array}{l} \text{تعداد برهم‌کنشها به‌ازای هر ذرهٔ هدف که منجر به پراکندگی} \\ \text{در داخل } d\Omega' \text{ در زاویهٔ } \theta \text{ شود} \end{array} \right)}{\text{تعداد ذرات فرودی بر واحد سطح}} \quad (116.8)$$

اگر  $dN$  تعداد ذرات پراکنده در واحد زمان در داخل  $d\Omega'$  باشد، در این صورت

$$\sigma(\theta)d\Omega' = \frac{dN}{I} \quad (\text{الف } 117.8)$$

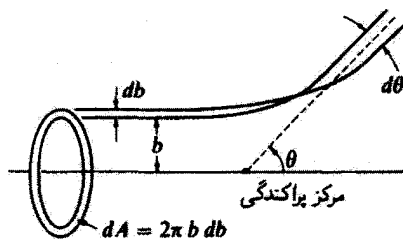
که گاهی آن را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega'} \quad (\text{ب } 117.8)$$

(این نکته که ابعاد  $\sigma(\theta)$  از جنس مساحت است منجر به اصطلاح «سطح مقطع» شده است.) اگر پراکندگی دارای تقارن محوری باشد (همانگونه که برای نیروهای مرکزی نیز چنین است)، فوراً می‌توانیم روی زاویهٔ سمتی انتگرال بگیریم و  $2\pi$  را به دست آوریم، و در این صورت زاویهٔ فضایی  $d\Omega'$  چنین می‌شود

$$d\Omega' = 2\pi \sin \theta d\theta \quad (118.8)$$

حال اگر، لحظه‌ای، به مسئلهٔ یک جسم معادل که در فصل پیشین مورد بحث قرار گرفت بازگردیم، می‌توانیم پراکندگی ذره‌ای به جرم  $\mu$  را به وسیلهٔ یک مرکز نیرو بررسی کنیم. در این حالت،



شکل ۲۰.۸

شکل ۲۰.۸ نشان می‌دهد تعداد ذراتی که با پارامتر برخوردی به گستردگی  $db$  در فاصله  $b$  قرار دارند، باید با تعداد ذرات پراکنده شده در گستره زاویه‌ای  $d\theta$  در اطراف زاویه  $\theta$  متناظر باشند. بنابراین

$$I \times 2\pi b db = -I \times \sigma(\theta) \times 2\pi \sin \theta d\theta \quad (119.A)$$

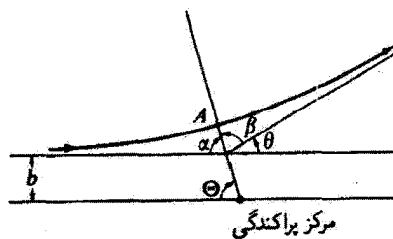
که در اینجا  $db/d\theta$  منفی است، زیرا فرض می‌کنیم قانون نیرو چنان است که مقدار انحراف زاویه‌ای (به‌طور یکنوا) با افزایش پارامتر برخورد کاهش پیدا می‌کند. از آنجا داریم

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (120.A)$$

با استفاده از شکل ۲۱.۸ می‌توانیم بین پارامتر برخورد،  $b$ ، و زاویه پراکندگی،  $\theta$ ، به رابطه‌ای دست پیدا کنیم. در فصل پیش [در معادله (۳۱.۷)] پی بردیم که تغییر زاویه برای ذره‌ای به جرم  $\mu$  که در یک میدان نیروی مرکزی حرکت می‌کند، از عبارت زیر به دست می‌آید

$$\Delta\theta = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(l/r^2) dr}{\sqrt{2\mu[E - U - (l^2/2\mu r^2)]}} \quad (121.A)$$

حرکت ذره در میدان نیروی مرکزی، حول نزدیکترین نقطه به مرکز نیرو، متقارن است (نقطه  $A$  در شکل ۲۱.۸ را ببینید). بنابراین زاویه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  برابرند و در واقع، برابر زاویه  $\theta$  هستند. به



شکل ۲۱.۸

این ترتیب

$$\theta = \pi - 2\Theta \quad (122.8)$$

در حالت:  $r_{\max} = \infty$ , زاویه  $\Theta$  از رابطه زیر به دست می آید

$$\Theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(b/r^2) dr}{\sqrt{1 - (b^2/r^2) - (U/T')^2}} \quad (123.8)$$

در اینجا، از معادل یک جسم معادله (۱۱۵.۸)، بهره گرفته ایم

$$l = b\sqrt{2\mu T'}$$

که در اینجا، مانند معادله (۷۹.۸)، داریم:  $T' = 1/2\mu u_1^2$ . همچنین، از رابطه  $E = T'$  استفاده کردیم، زیرا انرژی کل  $E$  در  $r = \infty$ ، جایی که  $U = 0$ ، باید برابر انرژی جنبشی  $T'$  باشد. مقدار  $r_{\min}$  یکی از ریشه های رادیکالی است که در مخرج معادلات (۱۲۱.۸) یا (۱۲۳.۸) ظاهر می شود؛ یعنی، نقطه عطف حرکت است و با نزدیکترین فاصله ذره از مرکز نیرو متناظر است. به این ترتیب، معادلات (۱۲۲.۸) و (۱۲۳.۸)، بستگی زاویه پراکندگی  $\theta$  را به پارامتر برخورد به دست می دهند. وقتی  $b = b(\theta)$  را برای پتانسیل معلوم  $U(r)$  و مقدار معلوم  $T'$  بدانیم، می توانیم مقطع پراکندگی را از معادله (۱۲۰.۸) محاسبه کنیم. این فرایند به محاسبه مقطع پراکندگی در سیستم CM می انجامد، زیرا ما  $m_2$  را به عنوان یک مرکز نیروی ثابت در نظر گرفته بودیم. اگر  $m_2 \gg m_1$  آنگاه مقطعی که به این ترتیب به دست می آید خیلی به مقطع در سیستم LAB نزدیک است؛ اما اگر بتوان از  $m_1$  در مقایسه با  $m_2$  چشم پوشید، تبدیل مناسب زاویه فضایی باید صورت گیرد. اکنون روابط کلی را به دست می آوریم.

چون تعداد ذرات پراکنده در زاویه فضایی واحد باید در سیستم LAB و سیستم CM یکی باشد، داریم

$$\sigma(\theta)d\Omega' = \sigma(\psi)d\Omega$$

$$\sigma(\theta) \times 2\pi \sin \theta d\theta = \sigma(\psi) \times 2\pi \sin \psi d\psi \quad (124.8)$$

که در اینجا  $\theta$  و  $\psi$  نمایشگر زاویه پراکندگی یکسانی هستند که به ترتیب در سیستم CM یا LAB اندازه گیری شده اند و  $d\Omega$  و  $d\Omega'$  به ترتیب نمایانگر عنصر زاویه فضایی اندازه گیری شده در سیستم CM و یا LAB به شمار می آیند. بنابراین،  $\sigma(\theta)$  و  $\sigma(\psi)$ ، به ترتیب، مقطع پراکندگی دیفرانسیلی

در سیستم CM و یا LAB هستند. بدینسان

$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta) \times \frac{\sin \theta d\theta}{\sin \psi d\psi} \quad (۱۲۵.۸)$$

مشتق  $d\theta/d\psi$  را می‌توان با مراجعه به شکل ۱۱.۸ (الف) و قانون سینوسها، که به صورت زیر نوشته می‌شود، محاسبه کرد

$$\frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin \psi} = \frac{m_1}{m_2} \equiv x \quad (۱۲۶.۸)$$

مشتق‌گیری از این معادله منجر می‌شود به

$$\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{\sin(\theta - \psi) \cos \psi}{\cos(\theta - \psi) \sin \psi} + 1$$

با بسط  $\sin(\theta - \psi)$  و ساده کردن معادله، داریم

$$\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \psi) \sin \psi}$$

و بنابراین

$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta) \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos(\theta - \psi) \sin^2 \psi} \quad (۱۲۷.۸)$$

با ضرب  $\cos \psi$  در هر دو طرف معادله (۱۲۶.۸)، و سپس افزودن  $\cos(\theta - \psi)$  به هر دو طرف، داریم

$$\frac{\sin(\theta - \psi) \cos \psi}{\sin \psi} + \cos(\theta - \psi) = x \cos \psi + \cos(\theta - \psi)$$

از بسط  $\sin(\theta - \psi)$  و  $\cos(\theta - \psi)$  در سمت چپ این معادله، می‌رسیم به

$$\frac{\sin \theta}{\sin \psi} = x \cos \psi + \cos(\theta - \psi)$$

این نتیجه را در معادله (۱۲۷.۸) می‌نشانیم

$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta) \times \frac{[x \cos \psi + \cos(\theta - \psi)]^2}{\cos(\theta - \psi)}, \quad (x < 1) \quad (۱۲۸.۸)$$

و از معادله (۱۲۶.۸)، داریم

$$\cos(\theta - \psi) = \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}$$

$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta) \times \frac{[x \cos \psi + \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}]^2}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}} \quad (129.8)$$

می‌توان از معادله (۱۲۶.۸) بهره گرفت و نوشت

$$\theta = \sin^{-1}(x \sin \psi) + \psi \quad (130.8)$$

بنابراین، معادلات (۱۲۹.۸) و (۱۳۰.۸) سطح مقطع را به طور کامل بر حسب زاویه  $\psi$  مشخص می‌کند.<sup>۱</sup> برای حالت کلی (یعنی، به ازای یک مقدار دلخواه  $x$ )، محاسبه  $\sigma(\psi)$  دشوار است. اما، جدولهایی در اختیار داریم که به وسیله آنها می‌توان موارد خاص را با سهولت نسبی محاسبه کرد.<sup>۲</sup> تبدیل نموده شده به وسیله معادلات (۱۲۹.۸) و (۱۳۰.۸) در دو حالت شکل ساده‌ای پیدا می‌کند. به ازای  $x = m_1/m_2 = 1$ ، از معادله (۷۱.۸)، داریم:  $\theta = 2\psi$ ، و معادله (۱۲۹.۸) چنین می‌شود

$$\sigma(\psi) = \sigma(\theta)|_{\theta=2\psi} \times 4 \cos^2 \psi, \quad m_1 = m_2 \quad (131.8)$$

و به ازای  $m_1 \ll m_2$ ،  $x \cong 0$  و  $\theta \cong \psi$ ، به طوری که

$$\sigma(\psi) \cong \sigma(\theta)|_{\theta=\psi}, \quad m_1 \ll m_2 \quad (132.8)$$

### ۱۰.۸ فرمول پراکندگی رادرفورد<sup>۳</sup>

یکی از مهمترین مسائلی که در آنها از فرمولهای به دست آمده در بخش پیش بهره می‌گیرند، پراکندگی ذرات باردار در میدان کولنی یا الکتروستاتیک است. در این حالت، پتانسیل عبارت است از

$$U(r) = \frac{k}{r} \quad (133.8)$$

۱. اگر پارامتر  $x$  را به جای  $m_1/m_2$  به صورت  $V/v_1'$  بنویسیم {معادله (۶۸.۸)}؛ این معادلات نه تنها برای برخوردهای کشسان به کار می‌روند، بلکه برای برخوردهای ناکشسان هم (که در آنها انرژی پتانسیل داخلی یک یا هر دو ذره به علت برهم‌کنش تغییر می‌کند) مورد استفاده قرار می‌گیرند. توجه داشته باشید که معادلات پیشین فقط به حالت معمولی  $x < 1$  مربوط می‌شوند.

۲. مثلاً، جدولهای ماریون و همکاران (Ma 59) را ببینید.

که در اینجا  $k = q_1 q_2$  و  $q_1$  و  $q_2$  مقدار باری است که دو ذره حمل می‌کنند (بسته به اینکه بارها هم علامت یا مختلف‌العلامت باشند،  $k$  می‌تواند مثبت یا منفی باشد؛  $k > 0$  با نیروی دافعه و  $k < 0$  با نیروی جاذبه متناظر است). حال معادله (۱۲۳.۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$\Theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(b/r) dr}{\sqrt{r^2 - (k/T^2)r - b^2}} \quad (134.8)$$

که می‌توان از آن انتگرال گرفت و رسید به [انتگرالگیری معادله (۳۸.۷) را ببینید]:

$$\cos \Theta = \frac{(\kappa/b)}{\sqrt{1 + (\kappa/b)^2}} \quad (135.8)$$

که در اینجا

$$\kappa \equiv \frac{k}{2T^2} \quad (136.8)$$

معادله (۱۳۵.۸) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$b^2 = \kappa^2 \tan^2 \Theta \quad (137.8)$$

اما بنا بر معادله (۱۲۲.۸)، داریم:  $\Theta = \pi/2 - \theta/2$ ، بنابراین

$$b = \kappa \cot(\theta/2) \quad (138.8)$$

بدینسان

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{\kappa}{2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \quad (139.8)$$

از اینجا، معادله (۱۲۰.۸) چنین می‌شود

$$\sigma(\theta) = \frac{\kappa^2}{2} \times \frac{\cot(\theta/2)}{\sin \theta \sin^2(\theta/2)}$$

و می‌دانیم

$$\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$$

به این ترتیب

$$\sigma(\theta) = \frac{\kappa^2}{4} \times \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}$$



$$\sigma(\theta) = \frac{k^2}{(4T')^2} \times \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \quad (140.8)$$

که فرمول پراکندگی رادرفورد<sup>۱</sup> است و بستگی مقطع پراکندگی در سیستم CM را به عکس توان چهارم  $\sin(\theta/2)$  نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که  $\sigma(\theta)$  از علامت  $k$  مستقل است، به طوری که شکل توزیع پراکندگی برای نیروی جاذبه و دافعه یکسان است. نکتهٔ جالب این است که بررسی کوانتوم مکانیکی پراکندگی کولنی دقیقاً به همان نتایج حاصل از مکانیک کلاسیک می‌انجامد.<sup>۲</sup> این امر واقعاً وضعیت مطلوبی است زیرا، در غیر این صورت، عدم توافق بین نظریهٔ کلاسیک و آزمایش در این مراحل اولیه ممکن بود پیشرفت فیزیک هسته‌ای را به‌طور جدی به تأخیر اندازد.

در حالت  $m_1 = m_2$ ، بنابر معادلهٔ (۷۹.۸)  $T' = \frac{1}{2}T$ ، به طوری که

$$\sigma(\theta) = \frac{k^2}{4T'^2} \times \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}, \quad m_1 = m_2 \quad (141.8)$$

یا از معادله (۱۳۱.۸)

$$\sigma(\psi) = \frac{k^2 \cos \psi}{T'^2 \sin^2 \psi}, \quad m_1 = m_2 \quad (142.8)$$

تمام این بحثها در محاسبهٔ سطح مقطعی پراکندگی دیفرانسیلی به‌کار می‌آیند. اگر بخواهیم احتمال وقوع هر نوع برهم‌کنشی را بدانیم، در آن صورت لازم است از  $\sigma(\theta)$  یا  $\sigma(\psi)$  روی تمام زوایای پراکندگی ممکن انتگرال بگیریم. کمیت حاصل را سطح مقطع پراکندگی کل ( $\sigma_t$ ) می‌گویند و برابر است با مساحت مؤثر ذرهٔ هدف برای ایجاد یک رویداد پراکندگی

$$\sigma_t = \int_{\pi} \sigma(\theta) d\Omega' = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta \quad (143.8)$$

که انتگرالگیری روی  $\theta$  از  $0^\circ$  تا  $\pi$  انجام می‌شود. البته، سطح مقطع کل در سیستمهای LAB و CM یکسان است. اگر بخواهیم سطح مقطع کل را بر حسب انتگرالگیری روی کمیت‌های LAB

۱. این نوع قانون پراکندگی در برهم‌کنش ذرات  $\alpha$  و هسته‌های سنگین، به وسیلهٔ آزمایشهای گایگر و مارسدن محقق شد:

H. Geiger and E. Marsden, *Phil. Mag.*, 25, 605(1913).

۲. نیلس بور نشان داد که یکسانی نتایج پیامد ماهیت  $1/r^2$  نیرو است؛ برای هیچ قانون نیروی دیگری نمی‌توان چنین انتظاری داشت.

بیان کنیم

$$\sigma_{\pm} = \int \sigma(\psi) d\Omega$$

در این صورت اگر  $m_1 < m_2$ ،  $\psi$  هم از  $0$  تا  $\pi$  تغییر می‌کند. اگر  $m_1 \geq m_2$ ،  $\psi$  فقط تا  $\psi_{\max}$  (که از معادله (۷۷.۸) به دست آمد) تغییر می‌کند، و داریم

$$\sigma_{\pm} = 2\pi \int_0^{\psi_{\max}} \sigma(\psi) \sin \psi d\psi \quad (۱۴۴.۸)$$

اگر بخواهیم  $\sigma_{\pm}$  را برای پراکندگی رادرفورد محاسبه کنیم، پی می‌بریم که حاصل نامتناهی است. این رویداد ناشی از آن است که پتانسیل کولنی، که به صورت  $1/r$  تغییر می‌کند، چنان به کندی نزول می‌کند که، وقتی پارامتر برخورد  $b$  به طور نامحدودی بزرگ می‌شود، کاهش زاویه پراکندگی خیلی کندتر از آن است که بتواند از واگرا شدن انتگرال جلوگیری کند. ولی، در مثال ۵.۷ خاطر نشان کردیم که میدان کولنی یک هسته اتمی حقیقی به وسیله الکترو نهایی که آن را احاطه می‌کند، پوشیده می‌شود، به طوری که در فواصل زیاد، پتانسیل عملاً قطع می‌شود. منظور کردن جمله ناشی از این استتار،  $\exp(-r/a)$ ، در پتانسیل سبب می‌شود که برای  $\sigma_{\pm}$  مقداری متناهی به دست آید. محاسبه مقطع پراکندگی برای یک پتانسیل کولنی در حالت استتار، بر اساس نظریه کلاسیک خیلی دشوار است و در اینجا به بحث در خصوص آن وارد نمی‌شویم؛ مطالعه کوانتوم مکانیکی این حالت، عملاً آسانتر است.

## مسائل

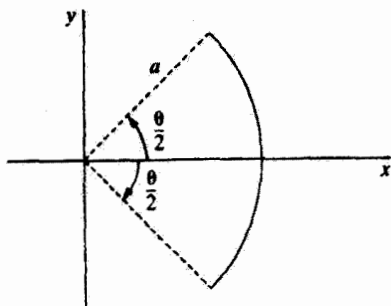
۱.۸ مرکز جرم یک پوسته نیمکره‌ای با چگالی ثابت و شعاع داخلی  $r_1$  و شعاع خارجی  $r_2$  را پیدا کنید.

۲.۸ مرکز جرم مخروط توپر یکنواختی، که قطر قاعده آن  $2a$  است، و ارتفاع  $h$  را پیدا کنید.

۳.۸ مرکز جرم مخروط توپر یکنواختی که قطر قاعده آن  $2a$  و ارتفاع آن  $h$  است؛ و نیمکره توپری را به شعاع  $a$  که قاعده‌هایشان باهم در تماس است، پیدا کنید.

۴.۸ مرکز جرم سیم یکنواختی که کمان  $\theta$  را در بر می‌گیرد پیدا کنید، در صورتی که شعاع کمان دایره‌ای برابر  $a$  باشد (شکل ۸.الف)

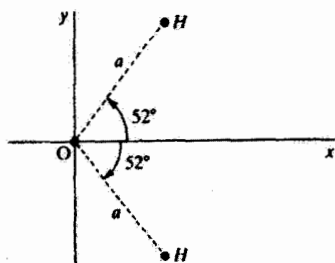
۵.۸ گرانیگاه سیستمی از ذرات عبارت است از نقطه‌ای که نیروهای گرانشی خارجی هیچ گشتاور نیروی خالصی حول آن نقطه وارد نمی‌آورند. برای یک نیروی گرانشی یکنواخت، نشان دهید که گرانیگاه بر مرکز جرم این ذرات منطبق است.



شکل ۸.الف

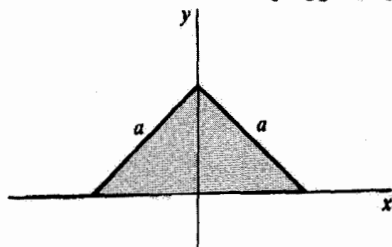
۶.۸ دو ذره با جرم مساوی  $m$ ، را در نظر بگیرید. نیروهای وارد بر این ذرات عبارت‌اند از  $F_1 = 0$  و  $F_2 = F$ . اگر این ذرات در ابتدا در مبدأ در حال سکون باشند، مکان، سرعت و شتاب مرکز جرم را پیدا کنید.

۷.۸ در شکل ۸.ب یک مدل مولکول آب،  $H_2O$ ، را مشاهده می‌کنید. مرکز جرم آن در کجا قرار دارد؟



شکل ۸.ب

۸.۸ مرکز جرم مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه‌ای، که در شکل ۸.ج نشان داده شده است، با چگالی سطحی یکنواخت در کجا قرار دارد؟

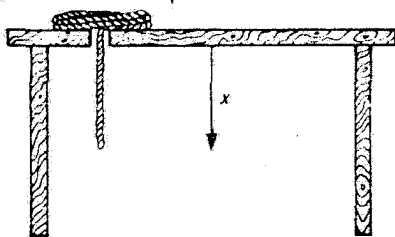


شکل ۸.ج

۹.۸ پرتابه‌ای با انرژی جنبشی اولیه  $E$  در امتداد زاویه  $45^\circ$  شلیک می‌شود. این پرتابه در قله

مسیر خود با یک انرژی اضافی دیگر،  $E_0$ ، منفجر و دو پاره می‌شود. یکی از دو پاره در امتداد خطی راست به پایین سقوط می‌کند. سرعت (مقدار و جهت) پاره دوم، و سرعت پاره اول چقدر است؟ ۱۰.۸ توبی در یک قلعه مشرف بر اقیانوس گلوله‌ای به جرم  $M$  را با سرعت دهانه‌ای  $v_0$  تحت زاویه  $45^\circ$  شلیک می‌کند. این گلوله در بالاترین نقطه مسیر منفجر و دو پاره می‌شود (جرمشان عبارت است از:  $m_1 + m_2 = M$ ). بر اثر انفجار انرژی اضافی  $E$  به دو پاره داده می‌شود، و آنها در راستای افقی اولیه به حرکت خود ادامه می‌دهند. این دو پاره در هنگام فرود در اقیانوس از یکدیگر چه فاصله‌ای دارند؟

۱۱.۸ طناب صافی بر فراز سوراخی که در یک میز تعبیه شده قرار گرفته است (شکل ۸.د). یک سر طناب در  $t = 0$  از سوراخ سقوط می‌کند، و باقیمانده طناب را به‌طور یکنواختی می‌کشد. سرعت طناب را به‌صورت تابعی از فاصله سر طناب از سطح میز،  $x$ ، پیدا کنید. از اصطکاک طناب در هنگام باز شدن چشم‌پوشید. آنگاه شتاب طناب در حال سقوط و انرژی تلف شده سیستم را، وقتی که سر دیگر طناب به طول  $L$  و جرم  $m$  میز را ترک می‌کند، پیدا کنید.



شکل ۸.د

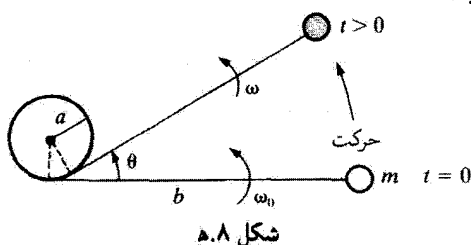
۱۲.۸ فضاوردی برای تعمیر یک ماهوارهٔ مخابراتی خراب، از شاتل فضایی دوار خیلی دور می‌شود. او می‌فهمد که شاتل با سرعت  $3 \text{ m/s}$  از او دور می‌شود. جرم این فضاورد و واحد مانور دهندهٔ او شامل یک کپسول تحت فشار به جرم  $1 \text{ kg}$ ، برابر است با  $10 \text{ kg}$ . کپسول فقط محتوی  $2 \text{ kg}$  گاز است که صرف پیش‌راندن او در فضا می‌شود. گاز با سرعت ثابت  $10 \text{ m/s}$  خارج می‌شود. الف) آیا گاز قبل از رسیدن فضاورد به شاتل تمام می‌شود؟

ب) فضاورد برای رسیدن به شاتل، کپسول خالی را باید با چه سرعتی از خود دور کند؟ ۱۳.۸ تحقیق کنید که جملهٔ دوم سمت راست معادلهٔ (۱۴.۸) برای حالت  $n = 3$  واقعاً صفر می‌شود.

۱۴.۸ سیستمی از ذرات را در نظر بگیرید که به‌وسیلهٔ نیروهای مغناطیسی برهم‌کنش انجام می‌دهند. آیا معادلات (۱۶.۸) و (۳۱.۸) صادق‌اند؟ توضیح دهید.

۱۵.۸ گرچه نیروی کل وارد بر سیستمی از ذرات صفر است، [معادله (۱۴.۸)]، ولی ممکن است گشتاور نیروی خالص صفر نباشد. نشان دهید که گشتاور نیرو در تمام دستگاه‌های مختصات مقدار یکسانی دارد.

۱۶.۸ جسمی به جرم  $m$  که به سربیک ریسمان سبک متصل است، حول یک استوانه قائم ثابت به شعاع  $a$  می‌پیچد (شکل ۵.۸). حرکت در یک صفحه افقی انجام می‌شود (از گرانی چشم بیوشید). سرعت زاویه‌ای ریسمان وقتی که فاصله جسم از محل تماس ریسمان با استوانه  $b$  است، عبارت است از  $\omega$ . سرعت زاویه‌ای و کشش ریسمان را، پس از اینکه جسم به اندازه زاویه  $\theta$  چرخیده است، پیدا کنید.



۱۷.۸ ذره‌ای به جرم  $m_1$  و سرعت  $v$  با ذره ساکنی به جرم  $m_2$  برخورد می‌کند. این دو ذره به هم می‌چسبند. در این برخورد چه کسری از انرژی جنبشی اولیه تلف می‌شود؟

۱۸.۸ نیروی جاذبه بین دو ذره از رابطه زیر به دست می‌آید

$$f_{12} = k \left[ (r_2 - r_1) - \frac{r}{v_0} (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) \right]$$

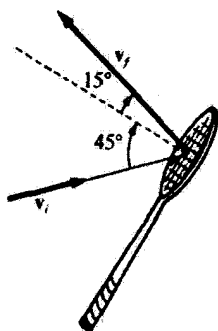
که در اینجا  $k$  عددی ثابت،  $v_0$  سرعت ثابت و  $r = |r_2 - r_1|$  گشتاور نیروی داخلی سیستم را محاسبه کنید؛ چرا این کمیت صفر نمی‌شود؟ آیا این سیستم پایسته است؟

۱۹.۸ آهنگ جذب نوترونهاى کند در مواد، نسبت به نوترونهاى تندى که در فرایند شکافت در رآکتور هسته‌ای تولید شده‌اند، خیلی بیشتر است. به همین دلیل رآکتورها کندسازهایی دارند که نوترونها را از طریق برخوردهای کشسان کند کنند. بهترین عناصری که می‌توان از آنها به عنوان کندساز بهره برد کدام‌اند؟ توضیح دهید.

۲۰.۸ ذره‌ای به جرم  $m_1$  با ذره ساکنی به جرم  $m_2$  برخوردی کشسان می‌کند. بیشترین کسر از انرژی جنبشی تلف شده برای  $m_1$  چقدر است؟ این واکنش را توصیف کنید.

۲۱.۸ معادله (۹۰.۸) را به دست آورید.

۲۲.۸ تنیس بازی به توپ تنیسی به جرم ۶۰ گرم که به سویش می‌آید، مطابق شکل ۵.۸، ضربه



شکل ۸.و

می‌زند. سرعت توپ تنیس قبل از برخورد  $v_i = 8 \text{ m/s}$  و پس از برخورد  $v_r = 16 \text{ m/s}$  است. الف) ضربه وارد به توپ تنیس چقدر است؟ ب) اگر زمان برخورد  $10^{-3}$  ثانیه باشد، متوسط نیروی وارد از سوی راکت تنیس چقدر است؟

۲۳.۸ معادله (۹۱.۸) را به دست آورید.

۲۴.۸ ذره‌ای به جرم  $m$  و سرعت  $v$  با ذره ساکن دیگری به جرم  $2m$  برخوردی رودررو می‌کند. اگر ضریب بازگشت چنان باشد که اتلاف انرژی جنبشی کل را بیشینه کند، سرعت‌های  $v_1$  و  $v_2$  پس از برخورد چقدرند؟

۲۵.۸ معادله (۹۲.۸) را به دست آورید.

۲۶.۸ یک توپ بیلیارد با سرعت اولیه  $v$  با توپ بیلیارد دیگری (به همان جرم)، که در ابتدا ساکن است، برخورد می‌کند. توپ اولی در امتداد  $\psi = 45^\circ$  حرکت می‌کند. در یک برخورد کشسان سرعت توپها پس از برخورد چقدر است؟ توپ دومی در سیستم LAB از چه زاویه‌ای خارج می‌شود؟

۲۷.۸ نشان دهید که نسبت  $T_1/T_2$  را بر حسب  $\alpha \equiv m_2/m_1$  و  $y \equiv \cos \psi$  می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\frac{T_1}{T_2} = (1 + \alpha)^{-2} (2y^2 + \alpha^2 - 1 + 2y\sqrt{\alpha^2 + y^2 - 1})$$

به ازای  $\alpha = 1, 2, 4, 12$  منحنی نمایش  $T_1/T_2$  را به صورت تابعی از  $\psi$  ترسیم کنید. این نمودارها متناظر با انرژی پروتون و یا نوترون پس از پراکندگی از هیدروژن ( $\alpha = 1$ )، دوتریوم ( $\alpha = 2$ )، هلیوم ( $\alpha = 4$ )، و کربن ( $\alpha = 12$ )، یا ذره آلفای پراکنده شده از هلیوم ( $\alpha = 1$ )، اکسیژن ( $\alpha = 4$ ) و والی آخر است.

۲۸.۸ در برخورد کشسان دو ذره به جرمهای  $m_1$  و  $m_2$ ، سرعتهای اولیه عبارت‌اند از  $u_1$  و  $u_2 = \alpha u_1$  ( $\alpha < 0$ ). اگر انرژی جنبشی اولیه دو ذره باهم برابر باشند، شرایط حاکم بر  $u_1/u_2$  و  $m_1/m_2$  را بیابید، به طوری که پس از برخورد  $m_1$  به حال سکون در آید.

۲۹.۸ ذره‌ای به جرم  $m_1$  با سرعت اولیه  $u_1$  در سیستم LAB با ذره‌ای به جرم  $m_2$  که در سیستم LAB ساکن است برخورد می‌کند. ذره  $m_1$  تحت زاویه  $\psi$  در سیستم LAB پراکنده می‌شود و سرعت نهایی آن  $v_1$  است، که در اینجا  $v_1 = v_1(\psi)$ . سطحی را پیدا کنید که زمان سفر ذره پراکنده از محل برخورد تا سطح، از زاویه پراکندگی مستقل باشد. موارد زیر را در نظر بگیرید. الف)  $m_2 = m_1$ ، ب)  $m_2 = 2m_1$ ، و ج)  $m_2 = \infty$ . کاربردی از این نتیجه را به صورت یک آشکارساز برای ذرات هسته پیشنهاد کنید.

۳۰.۸ نشان دهید

$$\frac{T_1}{T} = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \times S^2$$

که در اینجا

$$S \equiv \cos \psi + \frac{\cos(\theta - \psi)}{(m_1/m_2)}$$

۳۱.۸ وقتی که گلوله در یک تفنگ شلیک می‌شود، انفجار به سرعت فروکش می‌کند. فرض کنید نیروی وارد بر گلوله تا وقتی که این نیرو صفر شود (و از آن پس صفر باقی بماند) عبارت است از:  $F = (360 - 10^7 t^2)N$ . جرم گلوله ۳ گرم است.

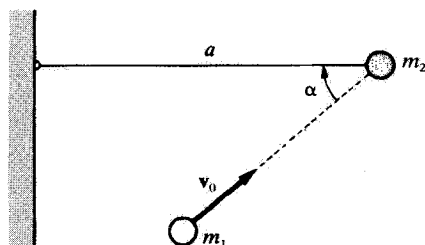
الف) چه ضربه‌ای به گلوله وارد می‌شود؟

ب) سرعت گلوله در دهانه تفنگ چقدر است؟

۳۲.۸ طناب یکنواختی به طول کل  $2a$  در حال تعادل از میخ صافی آویزان شده است. ضربه بسیار کوچکی سبب می‌شود که طناب به آرامی از روی میخ بلغزد. سرعت طناب را وقتی که از میخ جدا می‌شود پیدا کنید.

۳۳.۸ ذره‌ای به جرم  $m$  با زاویه  $\theta$  نسبت به قائم، به دیوار صافی برخورد می‌کند. ضریب بازگشت  $\epsilon$  است. سرعت و زاویه بازتاب ذره را پس از ترک دیوار پیدا کنید.

۳۴.۸ ذره‌ای به جرم  $m_1$  و سرعت  $v$  با ذره ساکنی به جرم  $m_2$  برخوردی رودررو می‌کند. ضریب بازگشت  $\epsilon$  است. ذره  $m_2$  مطابق شکل ۸.۸، در نقطه‌ای به فاصله  $a$  متصل شده است. سرعت (اندازه و جهت) ذرات  $m_1$  و  $m_2$  را پس از برخورد پیدا کنید.



شکل ۸.ز

۳۵.۸ یک توپ لاستیکی از ارتفاع  $h_1$  از حال سکون بر روی یک سطح لینولتوم می افتد. توپ پس از برخورد با زمین، تا ارتفاع  $h_2$  به بالا می جهد. ضریب بازگشت چقدر است؟ چه کسری از انرژی جنبشی اولیه، بر حسب  $\varepsilon$ ، تلف می شود؟

۳۶.۸ یک گلوله فولادی با سرعت  $5\text{ m/s}$ ، با زاویه  $30^\circ$  نسبت به قائم به یک ورق فولادی سنگین برخورد می کند. اگر ضریب بازگشت  $0.8$  باشد، گلوله تحت چه زاویه ای و با چه سرعتی از ورق فولادی باز می گردد؟

۳۷.۸ پروتونی (به جرم  $m$ ) با انرژی جنبشی  $T$ ، به یک هسته هلیوم ساکن (به جرم  $4m$ ) برخورد می کند. زاویه پس زنی هلیوم را به ازای  $\psi = 45^\circ$  پیدا کنید در صورتی که برخورد ناکشسان باشد و  $Q = -T/6$ .

۳۸.۸ طنابی با چگالی یکنواخت به طول  $b$  و چگالی جرمی  $\mu$  روی میز صافی حلقه شده است. با دست یک سر طناب را با سرعت ثابت  $v$  بلند می کنیم. نیروی وارد بر طناب را که به وسیله دست نگه داشته شده است، وقتی که سر طناب در فاصله  $a$  بالای سطح میز است، پیدا کنید ( $b > a$ ).

۳۹.۸ نشان دهید که هم ارز معادله (۱۲۹.۸)، وقتی که به جای  $\psi$  بر حسب  $\theta$  بیان شود، به صورت زیر است

$$\sigma(\theta) = \sigma(\psi) \times \frac{1 + x \cos \theta}{(1 + 2x \cos \theta + x^2)^{3/2}}$$

۴۰.۸ سطح مقطع دیرانسیلی  $\sigma(\theta)$  و سطح مقطع کل  $\sigma_t$  را برای پراکندگی کشسان یک ذره از یک کره نفوذ ناپذیر محاسبه کنید، پتانسیل به صورت زیر است

$$U(r) = \begin{cases} 0 & r > a \\ \infty & r < a \end{cases}$$



۴۱.۸ نشان دهید که سطح مقطع پراکندگی رادرفورد (به‌ازای  $m_1 = m_2$ ) را می‌توان بر حسب زاویهٔ پس‌زنی به‌صورت زیر بیان کرد

$$\sigma_{\text{LAB}}(\zeta) = \frac{k^2}{T^2} \frac{1}{\cos^2 \zeta}$$

۴۲.۸ پراکندگی رادرفورد را به‌ازای  $m_1 \gg m_2$  در نظر بگیرید. یک عبارت تقریبی برای مقطع دیفرانسیلی در دستگاه مختصات LAB به‌دست‌آورید.

۴۳.۸ پراکندگی رادرفورد را به‌ازای  $m_2 \gg m_1$  در نظر بگیرید. عبارتی برای سطح مقطع دیفرانسیلی در سیستم CM به‌دست‌آورید که تا مرتبهٔ اول کمیت  $m_1/m_2$  صحیح باشد. این نتیجه را با معادلهٔ (۱۴۰.۸) مقایسه کنید.

۴۴.۸ یک مرکز نیروی ثابت ذره‌ای به جرم  $m$  را طبق قانون نیروی  $F = k/r^2$  پراکنده می‌کند. اگر سرعت اولیهٔ ذره برابر  $u_0$  باشد، نشان دهید که سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی به‌صورت زیر است

$$\sigma(\theta) = \frac{k\pi^2(\pi - \theta)}{m u_0^2 \theta^2 (2\pi - \theta)^2 \sin \theta}$$

انتگرال این عبارت برای سطح مقطع کل نتیجه‌ای نامتناهی به‌دست می‌دهد. ولی، اگر نیرو به‌ازای  $r > r_0$  صفر شود، نشان دهید که در آن صورت یک زاویهٔ پراکندگی کمینه  $\theta_0$  وجود دارد؛ این نتیجه را بر حسب  $m$ ،  $u_0$ ،  $r_0$  و  $k$  بیان کنید. آنگاه نشان دهید که سطح مقطع کل عبارت است از

$$\sigma_t = 2\pi \int_{\theta_0}^{\pi} \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = \pi r_0^2$$

۴۵.۸ به‌طور تجربی معلوم شده است که در پراکندگی کشسان نوترون‌ها توسط پروتون‌ها ( $m_n \cong m_p$ ) در انرژی‌های نسبتاً پایین، توزیع انرژی پروتون‌های پس‌زده در سیستم LAB تا یک بیشینهٔ انرژی ثابت است، که همان انرژی نوترون‌های فرودی است. توزیع زاویه‌ای پراکندگی در سیستم CM کدام است؟

۴۶.۸ نشان دهید که توزیع انرژی ذرات پس‌زده از یک برخورد کشسان همواره با سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی در سیستم CM تناسب مستقیم دارد.<sup>۱</sup>

۱. این نتیجه اولین بار توسط بارشال و کانر به‌دست آمد:

## حرکت در چارچوب مرجع نالخت

### ۱.۹ مقدمه

مزیت انتخاب چارچوب مرجع لخت برای توصیف فرایندهای دینامیکی در بحثهایی که در فصلهای ۲ و ۶ مطرح کردیم، روشن شد. البته، بیان معادلات حرکت هر سیستم در یک چارچوب لخت همواره میسر است. اما، در مورد برخی مسائل، این معادلات بغایت پیچیده می‌شوند، در این حالت مطالعه سیستم در چارچوب مرجع نالخت آسانتر خواهد بود.

مثلاً، برای توصیف حرکت یک ذره بر روی زمین و یا در نزدیکی سطح آن، و انتخاب دستگاه مختصاتی که نسبت به زمین ثابت باشد، اغواکننده به نظر می‌رسد. اما، می‌دانیم زمین نسبت به چارچوب مرجع لختی که به کمک ثوابت مشخص شده باشد، حرکت پیچیده‌ای انجام می‌دهد، که شامل چندین چرخش (و در نتیجه شتابهای) گوناگون است. بنابراین، دستگاه مختصات زمین، یک چارچوب مرجع نالخت است؛ و با آنکه جواب بسیاری از مسائل را می‌توان با دقت مطلوب و با چشمپوشی از این تمایز به دست آورد، بسیاری از آثار مهم از ماهیت نالختی دستگاه مختصات زمین ناشی می‌شود.

در تحلیل حرکت اجسام صلب در فصل بعد، نیز خواهیم دید که بهره‌گیری از چارچوبهای مرجع نالخت مناسب است و بنابراین از قسمت اعظم مطالبی که در اینجا ارائه می‌شود، بهره خواهیم گرفت.

## ۲.۹ دستگاههای مختصات چرخان

دو مجموعه محور مختصات در نظر بگیرید و فرض کنید یک مجموعه «ثابت» یا محورهای لخت باشد، و مجموعه دوم مجموعه‌ای اختیاری است که نسبت به دستگاه لخت در حال حرکت است. این محورها را به ترتیب محورهای «ثابت» و «چرخان» می‌نامیم. مختصات دستگاه ثابت را با نماد  $x_i$  و مختصات دستگاه چرخان را با نماد  $x'_i$  نشان می‌دهیم. اگر نقطه‌ای مانند  $P$ ، شکل ۱.۹، اختیار کنیم، داریم

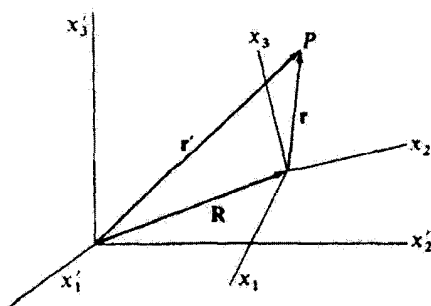
$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r} \quad (1.9)$$

در اینجا  $\mathbf{r}'$  بردار شعاعی نقطه  $P$  در دستگاه ثابت و  $\mathbf{r}$  بردار شعاعی  $P$  در دستگاه چرخان است. بردار  $\mathbf{R}$  موقعیت مبدأ دستگاه چرخان را در دستگاه ثابت معین می‌کند.

همواره می‌توانیم هر جابه‌جایی بینهایت کوچک دلخواهی را با یک چرخش محض حول محوری که آن را محور لحظه‌ای چرخش می‌نامیم، نمایش دهیم. مثلاً حرکت لحظه‌ای قرصی را که روی یک سطح شیبدار به پایین می‌غلتد، می‌توان به صورت چرخش حول نقطه تماس قرص و سطح شیبدار توصیف کرد. بنابراین، اگر دستگاه  $x_i$  چرخش بینهایت کوچک  $\delta\theta$  را انجام دهد، که متناظر با جابه‌جایی بینهایت کوچک دلخواهی است، حرکت نقطه  $P$  را (که می‌توان فرض کرد در دستگاه  $x_i$  موقتاً در حال سکون باشد) می‌شود به کمک معادله (۱.۹)، به صورت زیر نوشت

$$(d\mathbf{r})_{\text{ثابت}} = d\theta \times \mathbf{r} \quad (2.9)$$

شاخص زیرین «ثابت»، صراحتاً منظور شده‌است تا حاکی از آن باشد که کمیت  $d\mathbf{r}$  در  $x'_i$ ، یا دستگاه مختصات ثابت، اندازه‌گیری شده‌است. از تقسیم طرفین این معادله بر  $dt$ ، یعنی گستره



شکل ۱.۹

زمانی که در طی آن این چرخش بینهایت کوچک صورت گرفته است، آهنگ زمانی تغییر  $\mathbf{r}$  را آن طور که در دستگاه مختصات ثابت اندازه‌گیری می‌شود، به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \frac{d\theta}{dt} \times \mathbf{r} \quad (3.9)$$

یا، چون سرعت زاویه‌ای چرخش عبارت است از

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} \quad (4.9)$$

داریم

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \omega \times \mathbf{r} \quad (\text{برای نقطه ثابت } P \text{ در دستگاه } x_i) \quad (5.9)$$

در بخش ۱۵.۱ نیز به همین نتیجه رسیده‌ایم.

اگر فرض کنیم سرعت نقطه  $P$  در دستگاه مختصات  $x_i$  عبارت باشد از چرخان  $(d\mathbf{r}/dt)$ ،

این سرعت را باید به  $\omega \times \mathbf{r}$  افزود تا آهنگ زمانی تغییر  $\mathbf{r}$  در دستگاه ثابت به دست آید

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{چرخان}} + \omega \times \mathbf{r} \quad (6.9)$$

### مثال ۱.۹

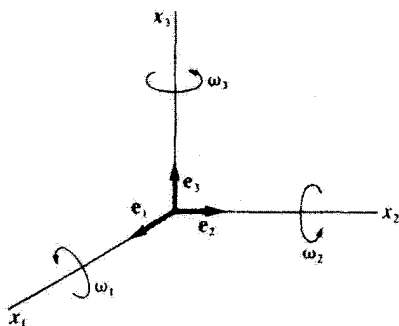
بردار  $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$  را در دستگاه چرخان در نظر بگیرید. فرض کنید دستگاه‌های ثابت و چرخان مبدأ مشترکی داشته باشند. اگر سرعت زاویه‌ای دستگاه چرخان در دستگاه ثابت  $\omega$  باشد، از طریق مشتق‌گیری مستقیم،  $\mathbf{r}$  را در دستگاه ثابت پیدا کنید.

حل: ابتدا مستقیماً نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i x_i \mathbf{e}_i \right) \\ &= \sum_i (\dot{x}_i \mathbf{e}_i + x_i \dot{\mathbf{e}}_i) \end{aligned} \quad (7.9)$$

جمله اول همان  $\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{r}}$  در دستگاه چرخان است، اما  $\dot{\mathbf{e}}_i$ ‌ها چه موجوداتی‌اند؟

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{r}} &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{چرخان}} \\ \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} &= \dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{r}} + \sum_i x_i \dot{\mathbf{e}}_i \end{aligned} \quad (8.9)$$



شکل ۲.۹

به شکل ۲.۹ نگاه کنید و ببینید که کدام مؤلفه  $\omega_i$  گرایش به چرخاندن  $e_1$  دارد. می‌بینیم که  $\omega_2$  می‌خواهد  $e_1$  را به سوی  $-e_2$  بچرخاند و  $\omega_3$  تمایل به چرخاندن  $e_1$  را به سوی  $+e_2$  دارد. بنابراین، داریم

$$\frac{de_1}{dt} = \omega_2 e_2 - \omega_3 e_3 \quad (۹.۹ \text{ الف})$$

و به همین ترتیب، داریم

$$\frac{de_2}{dt} = -\omega_3 e_1 + \omega_1 e_3 \quad (۹.۹ \text{ ب})$$

$$\frac{de_3}{dt} = \omega_2 e_1 - \omega_1 e_2 \quad (۹.۹ \text{ ج})$$

در هر یک از موارد بالا، برای اینکه مقدار مشتق زمانی برداری که تغییر نکند، باید راستایش بر بردار یکه عمود باشد.

معادلات (۹.۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\dot{e}_i = \omega \times e_i \quad (۱۰.۹)$$

و معادله (۸.۹) چنین می‌شود

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)_{\text{ثابت}} &= \dot{r}_r + \sum_i \omega \times x_i e_i \\ &= \dot{r}_r + \omega \times r \end{aligned} \quad (۱۱.۹)$$

که همان نتایجی است که در معادله (۶.۹) آمد.

گرچه برای دستیابی به معادله (۶.۹) بردار جابه‌جایی  $\mathbf{r}$  را انتخاب کردیم، ولی اعتبار این عبارت به بردار  $\mathbf{r}$  محدود نمی‌شود. در واقع، برای هر بردار دلخواه  $\mathbf{Q}$  داریم

$$\left( \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_{\text{ثابت}} = \left( \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q} \quad (۱۲.۹)$$

معادله (۱۲.۹) یکی از نتایج مهم به شمار می‌آید.

مثلاً، متوجه می‌شویم که شتاب زاویه‌ای  $\boldsymbol{\omega}$  در هر دو دستگاه ثابت و چرخان یکسان است.

$$\left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_{\text{ثابت}} = \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \equiv \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (۱۳.۹)$$

چون  $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}$  صفر می‌شود و  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  معرف مقدار مشترک در هر دو دستگاه است.

حال می‌توان برای رسیدن به عبارتی مربوط به سرعت نقطه  $P$ ، آنچنان که در دستگاه مختصات

ثابت اندازه‌گیری می‌شود، از معادله (۱۲.۹) بهره گرفت. از معادله (۱.۹) داریم

$$\left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{\text{ثابت}} = \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{\text{ثابت}} + \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{ثابت}} \quad (۱۴.۹)$$

به طوری که

$$\left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{\text{ثابت}} = \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{\text{ثابت}} + \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (۱۵.۹)$$

اگر کمیت‌های زیر را تعریف کنیم

$$\mathbf{v}_f \equiv \dot{\mathbf{r}}_f \equiv \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{\text{ثابت}} \quad (۱۶.۹ \text{ الف})$$

$$\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}} \equiv \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{\text{ثابت}} \quad (۱۶.۹ \text{ ب})$$

$$\mathbf{v}_r \equiv \dot{\mathbf{r}}_r \equiv \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{چرخان}} \quad (۱۶.۹ \text{ ج})$$

آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{V} + \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (۱۷.۹)$$

که در اینجا

$$v_f = \text{سرعت نسبت به محورهای ثابت}$$

$$V = \text{سرعت خطی مبدأ متحرک}$$

$$v_r = \text{سرعت نسبت به محورهای چرخان}$$

$$\omega = \text{سرعت زاویه‌ای محورهای چرخان}$$

$$\omega \times r = \text{سرعت ناشی از چرخش محورهای متحرک}$$

### ۳.۹ نیروهای مرکز گریز و کوریولیس

دیدیم که معادله نیوتن،  $F = ma$ ، فقط در چارچوب مرجع لخت صادق است. بنابراین، عبارت مربوط به نیروی وارد بر ذره را می‌توان از معادله زیر به دست آورد

$$F = ma_f = m \left( \frac{dv_f}{dt} \right)_{\text{ثابت}} \quad (18.9)$$

که در اینجا مشتق‌گیری باید نسبت به دستگاه ثابت انجام شود. از طرفین معادله (۱۷.۹) مشتق می‌گیریم

$$\left( \frac{dv_f}{dt} \right)_{\text{ثابت}} = \left( \frac{dV}{dt} \right)_{\text{ثابت}} + \left( \frac{dv_r}{dt} \right)_{\text{ثابت}} + \omega \times r + \omega \times \left( \frac{dr}{dt} \right)_{\text{ثابت}} \quad (19.9)$$

جمله اول سمت راست معادله بالا را با  $\ddot{R}_f$  نشان می‌دهیم

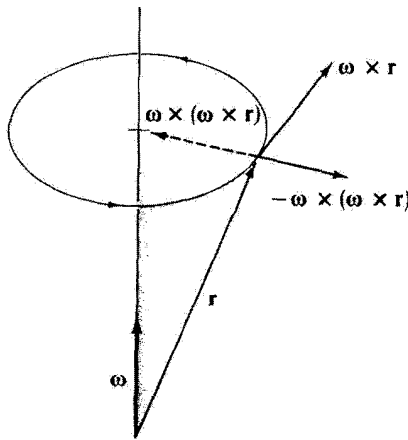
$$\ddot{R}_f \equiv \left( \frac{dV}{dt} \right)_{\text{ثابت}} \quad (20.9)$$

جمله دوم را می‌توان با نشان دادن  $v_r$  به جای  $Q$  در معادله (۱۲.۹) محاسبه کرد

$$\begin{aligned} \left( \frac{dv_r}{dt} \right)_{\text{ثابت}} &= \left( \frac{dv_r}{dt} \right)_{\text{چرخان}} + \omega \times v_r \\ &= a_r + \omega \times v_r \end{aligned} \quad (21.9)$$

در اینجا  $a_r$  عبارت است از شتاب در دستگاه مختصات چرخان. آخرین جمله سمت راست معادله (۱۹.۹) را می‌توان مستقیماً از معادله (۶.۹) به دست آورد

$$\begin{aligned} \omega \times \left( \frac{dr}{dt} \right)_{\text{ثابت}} &= \omega \times \left( \frac{dr}{dt} \right)_{\text{چرخان}} + \omega \times (\omega \times r) \\ &= \omega \times v_r + \omega \times (\omega \times r) \end{aligned} \quad (22.9)$$



شکل ۳.۹

از ترکیب معادلات (۱۸.۹) تا (۲۲.۹) خواهیم داشت

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_f = m\ddot{\mathbf{R}}_f + m\mathbf{a}_r + m\dot{\omega} \times \mathbf{r} + m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2m\omega \times \mathbf{v}_r \quad (23.9)$$

اما، در نزد ناظری در دستگاه مختصات چرخان، نیروی مؤثر وارد بر ذره از رابطه زیر به دست می‌آید<sup>۱</sup>

$$\mathbf{F}_{\text{مؤثر}} \equiv m\mathbf{a}_r \quad (24.9)$$

$$= \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}}_f - m\dot{\omega} \times \mathbf{r} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - 2m\omega \times \mathbf{v}_r \quad (25.9)$$

جمله اول،  $\mathbf{F}$ ، جمع نیروهای وارد بر ذره است که در دستگاه ثابت لخت اندازه‌گیری می‌شود. جمله دوم ( $-m\ddot{\mathbf{R}}_f$ ) و جمله سوم ( $-m\dot{\omega} \times \mathbf{r}$ ) به ترتیب، از شتاب خطی و زاویه‌ای دستگاه مختصات متحرک نسبت به دستگاه ثابت ناشی می‌شوند.

کمیت  $-m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$  همان عبارت مربوط به نیروی مرکز‌گریز است که اگر  $\omega$  عمود بر بردار شعاعی باشد، به صورت  $-m\omega^2 r$  در می‌آید. توجه داشته باشید که علامت منفی بیانگر این نکته است که راستای نیروی مرکز‌گریز از مرکز چرخش به سمت خارج است (شکل ۳.۹).

جمله آخر در معادله (۲۵.۹) کمیت کاملاً جدیدی است که از حرکت ذره در دستگاه مختصات چرخان سرچشمه می‌گیرد. این جمله نیروی کوریولیس نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که نیروی

۱. این نتیجه در ۱۸۳۵ توسط کوریولیس منتشر شد. نظریه ترکیب شتابها حاصل مطالعه او در زمینه چرخاباست.



کوریولیس واقعاً از حرکت ذره سرچشمه می‌گیرد، چون نیرو متناسب با  $v_r$  است، و به این ترتیب وقتی حرکتی وجود نداشته باشد، نیرو صفر است.

چون اصطلاح «نیروی مرکز‌گریز» را (چندین بار) به‌کار برده‌ایم و حالا هم با نیروی کوریولیس آشنا شدیم، اینک باید در جستجوی مفهوم فیزیکی این کمیتها باشیم. درک این مطلب که نیروهای مرکز‌گریز و کوریولیس به معنی متعارف کلمه نیرو نیستند، اهمیت خاصی دارد؛ اینها را به شیوه‌ای مصنوعی وارد کرده‌اند و پیامد عنوان شدن این شرط بوده است که بتوانیم معادله‌ای مشابه معادله نیوتون بنویسیم که به‌طور همزمان در یک چارچوب مرجع نالخت صادق باشد؛ یعنی، معادله

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_F$$

فقط در یک چارچوب لخت صادق است. اگر بخواهیم در یک چارچوب مرجع چرخان بنویسیم (برای سادگی فرض می‌کنیم که  $\mathbf{R}_F$  و  $\mathbf{n}$  صفر باشند)

$$\mathbf{F}_{مژز} = m\mathbf{a}_F$$

آنگاه می‌توانیم این معادله را برحسب نیروی حقیقی  $m\mathbf{a}_F$  به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{F}_{مژز} = m\mathbf{a}_F + (\text{جمله‌های نالخت})$$

که در اینجا جزء «جمله‌های نالخت» با «نیروهای» مرکز‌گریز و کوریولیس یکی پنداشته شده است. به این ترتیب، مثلاً، اگر جسمی حول یک مرکز نیروی ثابت بچرخد، تنها نیروی واقعی وارد بر جسم همان نیروی جاذبه به سمت مرکز نیروست (که شتاب مرکزگرا را ایجاد می‌کند). ولی، ناظری که همراه با جسم چرخان حرکت می‌کند، این نیروی مرکزی را اندازه‌گیری می‌کند، و علاوه بر آن متوجه می‌شود که جسم به سوی مرکز سقوط نمی‌کند. برای سازگار کردن این نتیجه با این شرط که نیروی وارد بر این جسم صفر است، ناظر باید وجود نیروی دیگری را — نیروی مرکز‌گریز — به عنوان اصل بپذیرد. اما این «شرط» ساختگی است؛ زیرا صرفاً از تلاش در راه تعمیم شکل معادله نیوتون به سیستمی نالخت سرچشمه می‌گیرد، و این کار را فقط با وارد کردن یک «نیروی تصحیح‌کننده» مجازی می‌توان انجام داد. همین مطلب را می‌توان در مورد نیروی کوریولیس عنوان کرد؛ این «نیرو» وقتی به وجود می‌آید که بکشیم حرکت را نسبت به یک جسم چرخان توصیف کنیم.

مفاهیم مربوط به نیروهای مرکز‌گریز و کوریولیس، علیرغم اینکه ساختگی‌اند، سودمندند. توصیف حرکت ذره‌ای نسبت به یک جسم چرخان در یک چارچوب مرجع لخت، کار دشواری

است. اما این مسئله را می‌توان تنها با وارد کردن «نیروهای نالخت» نسبتاً آسان کرد، که در آن صورت استفاده از معادله حرکتی شبیه معادله نیوتون مجاز خواهد بود.

### مثال ۲.۹

دانشجویی با یک توپ هاکی محکم روی یک چرخ فلک بزرگ با سطح افقی صاف اندازه‌گیری‌هایی را انجام می‌دهد. چرخ فلک با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega$  می‌چرخد. الف) نیروی مؤثر وارد بر توپ را پس از آنکه یک نیروی دافعه شعاعی بر آن وارد می‌آید، پیدا کنید. ب) اگر توپ را در راستای عمود بر شعاع برانیم، نیروی مؤثر بر آن را پیدا کنید.

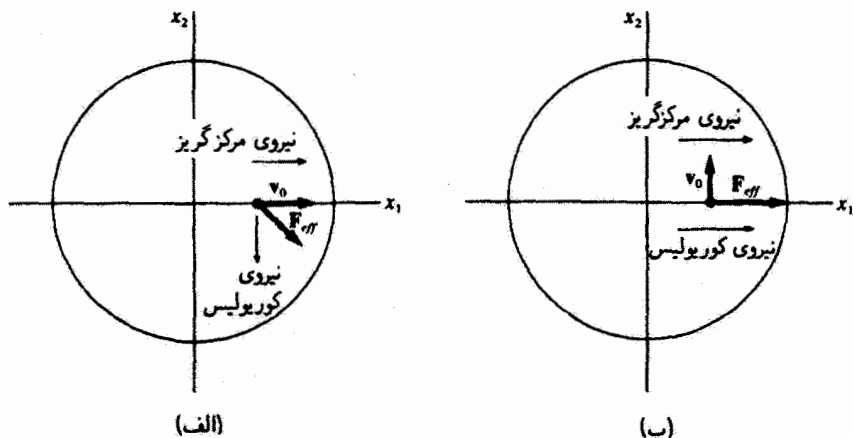
حل: به شکل ۴.۹، مراجعه کنید که در آن دستگاه‌های مختصات ثابت و متحرک هر دو در مرکز ثابت شده‌اند. با توجه به معادله (۲۵.۹)، نیروی مؤثر عبارت است از

$$\mathbf{F}_{\text{مؤثر}} = -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - 2m\omega \times \mathbf{v}_r \quad (26.9)$$

که در آن معادله نیروی  $\mathbf{F}$  و جمله‌های مربوط به شتاب، در دو دستگاه صفر است. همچنین فرض می‌شود که نیروی اصطکاک نیز صفر باشد. در شکل ۴.۹ الف) فرض کنید:  $\mathbf{v}_r = v \cdot \mathbf{e}_1$

$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{e}_1, \quad \omega = \omega \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{F}_{\text{مؤثر}} = m\omega^2 x \cdot \mathbf{e}_1 - 2m\omega v \cdot \mathbf{e}_2 \quad (27.9)$$



شکل ۴.۹

جهت نیروهای مرکزگریز، کوریولیس، و مؤثر در شکل ۴.۹ (الف) نشان داده شده است. اگر سرعت اولیهٔ توپ هاکی، برابر با  $v_r = v \cdot e_r$ ، در همان محل قبلی روی چرخ فلک باشد، نیروی مؤثر چنین می‌شود

$$\begin{aligned} F_{\text{مؤثر}} &= m\omega^2 x \cdot e_1 + 2m\omega v \cdot e_1 \\ &= (m\omega^2 x + 2m\omega v) \cdot e_1 \end{aligned} \quad (28.9)$$

جملهٔ مربوط به نیروی مرکزگریز مانند قبل باقی می‌ماند، اما جملهٔ مربوط به نیروی کوریولیس، مطابق شکل ۴.۹ (ب) توپ را نسبت به جهت اولیهٔ سرعتش به سمت راست می‌راند. خواننده برای مقایسهٔ نتایج تجربی در دستگاههای مختصات ثابت و متحرک خود باید چنین آزمایشهایی را انجام دهد. شبیه‌سازی کامپیوتری این دو دستگاه نیز به روشن شدن موضوع خیلی کمک می‌کند. ■

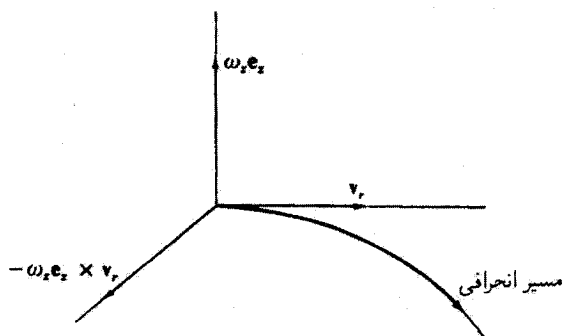
#### ۴.۹ حرکت نسبت به زمین

حرکت زمین نسبت به چارچوب مرجع لخت تحت تأثیر چرخش زمین حول محورش قرار می‌گیرد، و در مقایسه، آثار سایر حرکتها (چرخش حول خورشید، حرکت منظومهٔ شمسی نسبت به کهکشان محلی و مانند آنها) اندک‌اند. بنابراین، با تقریب خوبی (مسئلهٔ ۱.۹) می‌توانیم دستگاه مختصاتی ثابت نسبت به زمین را در نظر بگیریم که نسبت به یک چارچوب مرجع لخت در چرخش محض باشد، و بنابراین می‌توانیم معادلهٔ (۲۵.۹) را در مورد مسائل مربوط به حرکت بر روی زمین و یا نزدیک به سطح آن، به‌کار بگیریم.

بردار سرعت زاویه‌ای  $\omega$  که چرخش زمین حول محورش را نشان می‌دهد، در راستایی شمالی قرار گرفته است. بنابراین، در نیمکرهٔ شمالی،  $\omega$  دارای یک مؤلفهٔ  $\omega_z$  در امتداد قائم محلی و بیرونسوست. اگر ذره‌ای در یک صفحهٔ افقی (در دستگاه مختصات محلی روی سطح زمین) با سرعت  $v_r$  پرتاب شود، در آن صورت مؤلفهٔ نیروی کوریولیس،  $-2m\omega \times v_r$ ، در صفحهٔ عبارت است از  $2m\omega_z v_r$ ، که به سمت راست حرکت ذره متمایل است (شکل ۵.۹)، و انحرافی از راستای اولیهٔ حرکت حاصل می‌شود.<sup>۱</sup>

چون اندازهٔ مؤلفهٔ افقی نیروی کوریولیس با مؤلفهٔ قائم  $\omega$  متناسب است، قسمتی از نیروی کوریولیس که انحراف را به‌وجود می‌آورد به عرض جغرافیایی بستگی دارد، در قطب شمال بیشینه

۱. یواسون در سال ۱۸۲۷ در خصوص انحراف حرکت پرتابه بحث کرده است.



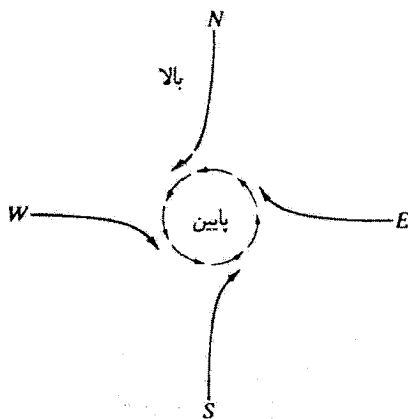
شکل ۵.۹

و در استوا صفر است. در نیمکره جنوبی، مؤلفه  $\omega_z$  در امتداد قائم محلی درونسوست، و به این ترتیب همه انحرافها در خلاف جهت نیمکره شمالی است.<sup>۱</sup>

توجه به این نکته نیز جالب است که جریان شعاعی ذرات هوا از نواحی با فشار زیاد به نواحی کم فشار، چون همواره به علت نیروی کوریولیس به سمت راست منحرف می‌شوند (در نیمکره شمالی)، حرکت چرخندی را پدید می‌آورند (شکل ۶.۹). حرکت واقعی ذرات هوا بسیار پیچیده است، اما نمودهای کیفی حرکت چرخندی با در نظر گرفتن آثار نیروی کوریولیس به درستی و دقت ارائه می‌شود. وضعیت حرکت آب در گردابها (دستکم در اصول) به همین ترتیب است؛ اما عملاً عوامل دیگری (اختلالهای گوناگون و تکانه زاویه‌ای باقیمانده) بر نیروی کوریولیس غلبه می‌کنند و گردابها با هر دو جهت جریان پدیدار می‌شوند. (حتی تحت شرایط آزمایشگاهی منزوی کردن اثر کوریولیس بسیار دشوار است.)

توجه داریم که اگر حرکت در میدان گرانشی زمین را مورد بررسی قرار دهیم، کمیتی را که شتاب ناشی از گرانی می‌نامیم (یعنی،  $g$  و یا بردار  $g$ ) عملاً ترکیبی است از شتاب گرانشی متعارف (مطابق آنچه که در قانون گرانش عمومی تعریف شده است) و شتاب برونسوی ظاهری (یعنی، شتاب مرکز گریز) که از ثابت بودن دستگاه مختصات انتخابی ما نسبت به زمین چرخان سرچشمه

۱. در خلال درگیریهای دریایی در اوایل جنگ جهانی اول در نزدیکی جزایر فالکلند، نیروهای نظامی بریتانیایی از این امر در شگفت بودند که چرا گلوله توبه‌های آنان که به دقت هدف‌گیری شده‌اند در ۱۰۰ یاردی سمت چپ کشتیهای آلمانی سقوط می‌کنند. طراحان ابزارهای نشانروی به‌خوبی از انحراف کوریولیس آگاه بودند و آنرا به دقت منظور کرده بودند، اما ظاهراً چنین تصور می‌کردند که جنگهای دریایی همیشه در عرض جغرافیایی نزدیک به ۵۰° شمالی رخ می‌دهد و نه در ۵۰° جنوبی. بنابراین، گلوله‌های بریتانیایی در فاصله‌ای معادل دو برابر انحراف کوریولیس از هدف سقوط می‌کردند.



شکل ۶.۹

می‌گیرد؛ یعنی، بردار مؤثر  $g$  فقط بر حسب کمیت‌هایی که اندازه‌گیری می‌کنیم تعریف می‌شود: مقدار آن به کمک دوره تناوب آونگ تعیین می‌شود و راستایش همان جهت یک شاقول در حال تعادل است. به این ترتیب،  $g$  شامل جمله  $(\omega \times r) - \omega$  است. به همین سبب، جهت  $g$  در هر نقطه به‌طور کلی کمی با قائم واقعی آن نقطه [که به‌وسیله جهت خط واصل بین آن نقطه و مرکز زمین تعریف شده است (مسئله ۹.۹)] تفاوت دارد.

### مثال ۳.۹

انحراف افقی حاصل از نیروی کوریولیس ذره‌ای را بیابید که در میدان گرانشی زمین سقوط آزاد انجام می‌دهد.

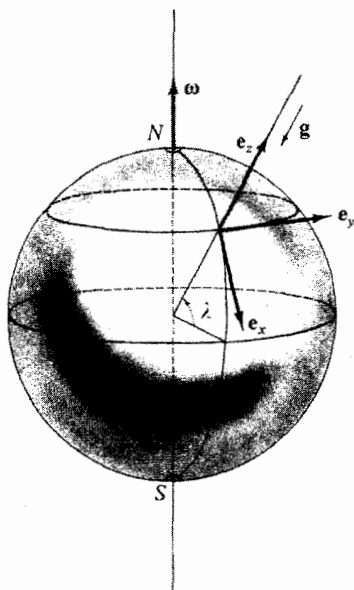
حل: مقدار  $\omega$  که در معادله نیرو [معادله (۲۵.۹)] ظاهر می‌شود، همان سرعت زاویه‌ای چرخش زمین است

$$\omega = \frac{2\pi \text{rad/d}}{86400 \text{s/d}} \cong 7.29 \times 10^{-5} \text{rad/s}.$$

شتاب ذره از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$a_r = g - 2\omega \times v_r$$

که در اینجا  $g$  شتاب ناشی از گرانی است (یعنی، بردار مؤثر  $g$  که شامل شتاب مرکز‌گریز نیز هست). محور  $z$  را برونسوی عمود بر سطح زمین انتخاب می‌کنیم. با این تعریف  $e_z$ ، ساختن یک



شکل ۷.۹

دستگاه مختصات راستگرد را با مشخص کردن اینکه  $e_x$  به سمت جنوب و  $e_y$  به سمت شرق باشد تکمیل می‌کنیم (شکل ۷.۹). فرض می‌کنیم که فاصله سقوط چندان کوتاه باشد که  $g$  در طی فرایند سقوط ثابت باقی بماند.

چون مبدأ دستگاه مختصات چرخان،  $O$ ، را در نیمکره شمالی اختیار کرده‌ایم،<sup>۱</sup> داریم

$$\omega_x = -\omega \cos \lambda$$

$$\omega_y = 0$$

$$\omega_z = \omega \sin \lambda$$

گرچه نیروی کوریولیس مؤلفه‌های سرعت کوچکی را در راستاهای  $e_x$  و  $e_y$  به وجود می‌آورد، بی‌گمان می‌توانیم از  $\hat{x}$  و  $\hat{y}$  در مقایسه با مؤلفه قائم سرعت،  $\hat{z}$ ، چشم‌پوشیم. در آن صورت، به‌طور تقریب داریم

۱. نقطه  $O$  نسبت به یک چارچوب مرجع لخت دقیقاً حرکت یکنواختی نمی‌کند. اما، در مورد حرکت در نزدیکی سطح زمین، جملات متناسب با  $\mathbf{R}_E \times \mathbf{r}$  و سهمی جزئی در حرکت دارند و می‌توان از آنها چشم‌پوشید.

$$\dot{x} \cong 0$$

$$\dot{y} \cong 0$$

$$\dot{z} \cong -gt$$

در اینجا  $\dot{z}$  را با فرض اینکه سقوط از حالت سکون روی داده است، به دست آوردیم. بنابراین داریم

$$\omega \times \mathbf{v}_r \cong \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \\ 0 & 0 & -gt \end{vmatrix}$$

$$\cong -(\omega gt \cos \lambda) \mathbf{e}_y$$

مؤلفه های  $\mathbf{g}$  عبارت اند از

$$g_x = 0$$

$$g_y = 0$$

$$g_z = -g$$

به طوری که معادلات مربوط به مؤلفه های  $\mathbf{a}_r$  [با چشمپوشی از جمله های شامل  $\omega^2$  (مسئله ۱۰.۹)] چنین می شوند

$$(\mathbf{a}_r)_x = \ddot{x} \cong 0$$

$$(\mathbf{a}_r)_y = \ddot{y} \cong 2\omega gt \cos \lambda$$

$$(\mathbf{a}_r)_z = \ddot{z} \cong -g$$

به این ترتیب، اثر نیروی کوریولیس عبارت است از ایجاد شتابی در راستای  $\mathbf{e}_y$  یا شرق. با دو بار انتگرالگیری از  $\ddot{y}$ ، داریم

$$y(t) \cong \frac{1}{3} \omega gt^3 \cos \lambda$$

که در لحظه  $t = 0$  داریم:  $y = 0$  و  $\dot{y} = 0$ . انتگرالگیری از  $\dot{z}$  همان نتیجه آشنای مسافت سقوط را به دست می دهد

$$z(t) \cong z(0) - \frac{1}{2} gt^2$$

و زمان سقوط از ارتفاع  $h = z(0)$  از رابطه زیر به دست می آید

$$t \cong \sqrt{2h/g}$$

بنابراین، نتیجهٔ مربوط به انحراف به سمت شرق،  $d$ ، برای ذره‌ای که از حال سکون از ارتفاع  $h$  و در عرض جغرافیایی شمالی  $\lambda$  سقوط می‌کند برابر است با<sup>۱</sup>

$$d \cong \frac{1}{3}\omega \cos \lambda \sqrt{8h^3/g} \quad (29.9)$$

جسمی که از ارتفاع  $100$  متر در عرض جغرافیایی  $45^\circ$  سقوط می‌کند، تقریباً به اندازه  $1.55$  سانتیمتر منحرف می‌شود (از آثار ناشی از مقاومت هوا چشم پوشیده‌ایم). ■

### مثال ۴.۹

برای اینکه نشان دهید روش کوریولیس در دستیابی به معادلات حرکت در چارچوب مرجع نالخت تا چه حد تواناست، مثال قبلی را دوباره حل کنید اما فقط از فرمولبندی که قبلاً تکامل یافته است — نظریهٔ حرکت نیروی مرکزی — بهره‌گیری کنید.

حل: اگر ذره‌ای با جرم اندک را از ارتفاع  $h$  بالاتر از سطح زمین رها کنیم، مسیری را که می‌پیماید یک مقطع مخروطی است. یک بیضی با  $\varepsilon \cong 1$  که یکی از کانونهایش به مرکز زمین خیلی نزدیک است. اگر  $r_0$  شعاع زمین و  $\lambda$  عرض جغرافیایی (شمالی) محل باشد، در این صورت در لحظهٔ رها شدن، ذره سرعتی افقی به سوی شرق دارد

$$v_{\text{افقی}} = r\omega \cos \lambda = (r_0 + h)\omega \cos \lambda$$

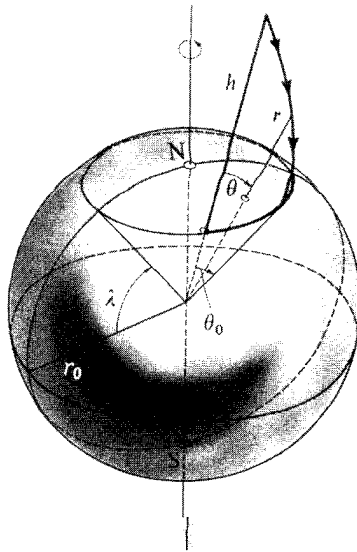
و تکانهٔ زاویه‌ای حول محور قطبی عبارت است از

$$l = mrv_{\text{افقی}} = m(r_0 + h)^2 \omega \cos \lambda \quad (30.9)$$

اگر زاویهٔ  $\theta$  را از وضعیت اولیهٔ ذره اندازه‌گیری کنیم (شکل ۸.۹)، معادلهٔ مسیر چنین خواهد

۱. انحراف به سوی شرق به وسیلهٔ نیوتون پیش بینی شد (۱۶۷۹)، و چندین آزمایش (بخصوص آزمایشهای رابرت هوک) این نتایج را تأیید کردند. احتمالاً دقیقترین اندازه‌گیریها مربوط به رایش (۱۸۳۱)؛ که در ۱۸۳۳ منتشر شد) بوده است، که وی ساچمه‌ای را به داخل معدنی به عمق ۱۸۸ متر رها و انحراف متوسط ۲۸ میلیمتر را مشاهده کرد. این نتیجه کمتر از مقداری است که از معادلهٔ (۲۹.۹) محاسبه می‌شود؛ این کمبود ناشی از آثار مقاومت هواست. در تمام آزمایشها، یک مؤلفهٔ کوچک انحراف به سوی جنوب مشاهده می‌شد که تا شناخت دقیق قضیهٔ کوریولیس منشأ آن نامعلوم بود (مسئلهٔ ۱۰.۹).





شکل ۸.۹

شد<sup>۱</sup>

$$\frac{\alpha}{r} = 1 - \varepsilon \cos \theta \quad (۳۱.۹)$$

در لحظه  $t = 0$ ، داریم

$$\frac{\alpha}{r_0 + h} = 1 - \varepsilon$$

به طوری که معادله (۳۱.۹) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$r = \frac{(1 - \varepsilon)(r_0 + h)}{1 - \varepsilon \cos \theta} \quad (۳۲.۹)$$

از معادله (۱۲.۷) برای سرعت سطحی می توان نوشت

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{2m}$$

به این ترتیب، زمان لازم،  $t$ ، برای پیمودن زاویه  $\theta$  عبارت است از

$$t = \frac{m}{l} \int_0^\theta r^2 d\theta$$

۱. توجه کنید که بین معادله (۳۱.۹) و معادله (۴۱.۷) تغییر علامتی ناشی از مبداهای مختلف به ازای مقادیر  $\theta$  در دو حالت، پیش می آید.

با نشانیدن مقدار  $l$  از معادله (۳۰.۹)، و  $r$  از معادله (۳۲.۹) در این عبارت، خواهیم داشت

$$t = \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta} \left( \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \theta} \right)^2 d\theta \quad (۳۳.۹)$$

حال اگر فرض کنیم که وقتی ذره به سطح زمین می‌رسد ( $r = r_0$ )؛ آنگاه  $\theta = \theta_0$  در این صورت معادله (۳۲.۹) چنین می‌شود

$$\frac{r_0}{r_0 + h} = \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \theta_0}$$

یا، با وارونه کردن طرفین

$$\begin{aligned} 1 + \frac{h}{r_0} &= \frac{1 - \varepsilon \cos \theta_0}{1 - \varepsilon} \\ &= \frac{1 - \varepsilon [1 - 2 \sin^2(\theta_0/2)]}{1 - \varepsilon} \\ &= 1 + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \end{aligned} \quad (۳۴.۹)$$

که از اینجا داریم

$$\frac{h}{r_0} = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$$

چون مسیری که ذره پیموده تقریباً قائم است، بین وضعیتی که ذره رها می‌شود و نقطه‌ای که ذره به سطح زمین می‌رسد، زاویه  $\theta$  اندکی تغییر می‌کند؛ بنابراین  $\theta_0$  کوچک است و می‌توان  $\sin(\theta_0/2)$  را با شناسه آن تقریباً برابر گرفت

$$\frac{h}{r_0} \cong \frac{\varepsilon \theta_0^2}{2(1 - \varepsilon)} \quad (۳۵.۹)$$

اگر با همان روشی که هنگام دستیابی به معادله (۳۴.۹) به کار گرفتیم، انتگرالده در معادله (۳۳.۹) را بسط دهیم، می‌رسیم به

$$t = \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\{1 + [2\varepsilon/(1 - \varepsilon)] \sin^2(\theta/2)\}^2}$$

و چون  $\theta$  کوچک است، داریم

$$t \cong \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{[1 + \varepsilon \theta^2/2(1 - \varepsilon)]^2}$$

با جانشانی مقدار  $\varepsilon/2(1 - \varepsilon)$  از معادله (۳۵.۹)، و نوشتن  $t(\theta = \theta_0) = T$  برای کل زمان سقوط، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} T &\cong \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{[1 + (h\theta^2/r \cdot \theta_0^2)]^2} \\ &\cong \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta_0} \left(1 - \frac{2h}{r \cdot \theta_0^2} \theta^2\right) d\theta \\ &= \frac{1}{\omega \cos \lambda} \left(1 - \frac{2h}{3r}\right) \theta_0. \end{aligned}$$

از حل این معادله بر حسب  $\theta_0$  داریم

$$\theta_0 \cong \frac{\omega T \cos \lambda}{1 - 2h/3r} \cong \omega T \cos \lambda \left(1 + \frac{2h}{3r}\right)$$

در خلال زمان سقوط،  $T$ ، زمین به اندازه زاویه  $\omega T$  چرخیده است، بنابراین نقطه‌ای که مستقیماً زیر وضعیت اولیه ذره روی زمین قرار داشته، به اندازه  $r \cdot \omega T \cos \lambda$  به سمت شرق جابه‌جا شده است. در خلال همین مدت، ذره به اندازه  $r \cdot \theta_0$  به سمت شرق منحرف شده است. انحراف خالص ذره به سمت شرق،  $d$ ، عبارت است از

$$\begin{aligned} d &= r \cdot \theta_0 - r \cdot \omega T \cos \lambda \\ &= \frac{2}{3} h \omega T \cos \lambda \end{aligned}$$

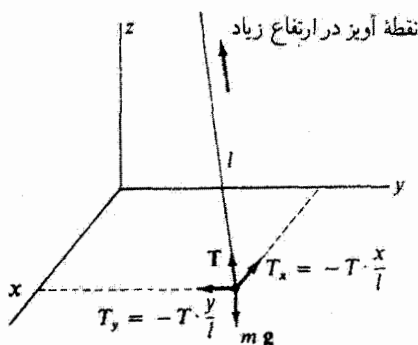
و با استفاده از  $T \cong \sqrt{2h/g}$  مانند مثال پیش، سرانجام خواهیم داشت

$$d \cong \frac{1}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g}}$$

که این همان نتیجه‌ای است که قبلاً به آن رسیدیم [معادله (۲۹.۹)].

### مثال ۵.۹

اثر نیروی کوریولیس بر حرکت آونگ، حرکت تقدیمی، یا چرخش وابسته به زمان صفحه نوسان، را پدید می‌آورد. حرکت این دستگاه را، که به آن آونگ فوکو می‌گویند، توصیف کنید.



شکل ۹.۹

حل: برای توصیف این اثر، دستگاه مختصاتی را اختیار می‌کنیم که مبدأ آن در نقطه تعادل آونگ و محور  $z$  اش در امتداد خط قائم محل واقع باشد. فقط چرخش صفحه نوسان مورد نظر ماست—یعنی، می‌خواهیم حرکت گلوله آونگ را در صفحه  $x - y$  (صفحه افق) بررسی کنیم. بنابراین، بررسی خود را به حرکتهای کم دامنه محدود می‌کنیم، که در آنها گردش افقی در مقایسه با طول آونگ کوچک باشد. تحت چنین شرایطی،  $z$  در مقایسه با  $\dot{x}$  و  $\dot{y}$  کوچک است، و می‌توان از آن چشم پوشید.

معادله حرکت را به این ترتیب می‌نویسیم

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{T}}{m} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \quad (۳۶.۹)$$

در اینجا،  $\mathbf{T}/m$ ، عبارت است از شتابی که نیروی کشش،  $\mathbf{T}$ ، در سیستم آویز آونگ ایجاد می‌کند (شکل ۹.۹). بنابراین، به‌طور تقریب داریم

$$\left. \begin{aligned} T_x &= -T \times \frac{x}{l} \\ T_y &= -T \times \frac{y}{l} \\ T_z &\cong T \end{aligned} \right\} \quad (۳۷.۹)$$

$$\begin{aligned} g_x &= 0 \\ g_y &= 0 \\ g_z &= -g \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\omega \cos \lambda \\ \omega_y &= 0 \\ \omega_z &= \omega \sin \lambda \end{aligned}$$

و نیز

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_r)_x &= \dot{x} \\ (\mathbf{v}_r)_y &= \dot{y} \\ (\mathbf{v}_r)_z &= \dot{z} \cong 0 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \cong \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix}$$

به طوری که

$$\left. \begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)_x &\cong -\dot{y}\omega \sin \lambda \\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)_y &\cong \dot{x}\omega \sin \lambda \\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)_z &\cong -\dot{y}\omega \cos \lambda \end{aligned} \right\} \quad (38.9)$$

به این ترتیب، معادلات مورد نظر ما عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{a}_r)_x &= \ddot{x} \cong -\frac{T}{m} \times \frac{x}{l} + 2\dot{y}\omega \sin \lambda \\ (\mathbf{a}_r)_y &\cong \ddot{y} \cong -\frac{T}{m} \times \frac{y}{l} - 2\dot{x}\omega \sin \lambda \end{aligned} \right\} \quad (39.9)$$

به‌ازای جابه‌جاییهای کوچک،  $T \cong mg$  می‌گیریم؛  $\alpha^2 \equiv T/ml \cong g/l$  و قرار می‌دهیم:

$\omega_z = \omega \sin \lambda$ ، در این صورت داریم

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \alpha^2 x &\cong 2\omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} + \alpha^2 y &\cong -2\omega_z \dot{x} \end{aligned} \right\} \quad (40.9)$$

توجه داریم که معادله مربوط به  $\ddot{x}$  دارای جمله‌ای شامل  $\dot{y}$  است، و معادله مربوط به  $\ddot{y}$  یک جمله شامل  $\dot{x}$  دارد. چنین معادلاتی را معادلات جفت شده می‌گوییم. یکی از جوابهای این زوج معادلات جفت شده را می‌توان از طریق اضافه کردن معادله اولی به  $i$  برابر معادله دومی پیدا کرد:

$$(\ddot{x} + i\dot{y}) + \alpha^2(x + iy) \cong -2\omega_z(i\dot{x} - \dot{y}) = -2i\omega_z(\dot{x} + iy)$$

اگر بنویسیم

$$q \equiv x + iy$$

در این صورت داریم

$$\ddot{q} + 2i\omega_z \dot{q} + \alpha^2 q \cong 0$$

این معادله با معادله‌ای که نوسانهای میرا را توصیف می‌کند [معادله (۳۵.۳)] یکسان است، جز اینکه جمله متناظر با عامل میرایی، موهومی محض است. جواب این معادله عبارت است از (معادله ۳۷.۳)

$$q(t) \cong \exp[-i\omega_z t] [A \exp(\sqrt{-\omega_z^2 - \alpha^2} t) + B \exp(-\sqrt{-\omega_z^2 - \alpha^2} t)] \quad (41.9)$$

اگر زمین نمی‌چرخید، به‌طوری که  $\omega_z = 0$ ، آنگاه معادله مربوط به  $q$  به صورت زیر در می‌آمد

$$\ddot{q} + \alpha^2 q \cong 0, \quad \omega_z = 0$$

که از این معادله مشاهده می‌شود،  $\alpha$  با بسامد نوسان آونگ متناظر است. این بسامد آشکارا خیلی بزرگتر از بسامد زاویه‌ای مربوط به چرخش زمین است. بنابراین  $\alpha \gg \omega_z$ ، و معادله مربوط به  $q(t)$  را می‌توان به صورت زیر درآورد

$$q(t) \cong e^{-i\omega_z t} [Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t}] \quad (42.9)$$

با توجه به اینکه معادلهٔ مربوط به  $q'$  دارای جوابی به صورت زیر است

$$q'(t) = x'(t) + iy'(t) = Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t}$$

می‌توانیم تعبیر ساده‌تری از معادلهٔ مربوط به  $q$  ارائه دهیم. به این ترتیب

$$q(t) = q'(t) \times e^{-i\omega_z t}$$

یا

$$\begin{aligned} x(t) + iy(t) &= [x'(t) + iy'(t)] \times e^{-i\omega_z t} \\ &= [x' + iy'] [\cos \omega_z t - i \sin \omega_z t] \\ &= [x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t] \\ &\quad + i[-x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t] \end{aligned}$$

از برابر قراردادن اجزای حقیقی و موهومی معادلهٔ بالا، داریم

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t \\ y(t) &= -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t \end{aligned} \right\}$$

که می‌توانیم آن‌را به شکل ماتریسی زیر بنویسیم

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_z t & \sin \omega_z t \\ -\sin \omega_z t & \cos \omega_z t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad (۴۳.۹)$$

با به کارگیری یک ماتریس دوران به شکل آشنای زیر

$$\lambda = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (۴۴.۹)$$

می‌توان  $(x, y)$  را در معادلهٔ (۴۳.۹) از  $(x', y')$  به دست آورد. بدینسان، زاویهٔ چرخش عبارت است از  $\theta = \omega_z t$ ، بنابراین صفحهٔ نوسان آونگ با بسامد  $\omega_z = \omega \sin \lambda$  می‌چرخد. مشاهدهٔ این چرخش جلوهٔ روشنی از چرخش زمین به شمار می‌آید.<sup>۱</sup>

۱. وینچنزو ویوانی (۱۷۰۳-۱۶۲۲)، یکی از شاگردان گالیله، در حدود سال ۱۶۵۰ متوجه شد که آونگ یک چرخش کند انجام می‌دهد، اما هیچ دلیلی وجود ندارد که او این پدیده را به درستی تعبیر کرده باشد. اختراع ژيروسکوپ توسط فوکو، در سال بعد از نمایش مربوط به آونگش، دلیل حتی عینی‌تری برای چرخش زمین ارائه داد.

## مسائل

۱.۹ شتاب مرکزگرنی ناشی از چرخش زمین را، روی ذره‌ای واقع در سطح زمین، در استوا محاسبه کنید. این نتیجه را با شتاب گرانشی مقایسه کنید. شتاب مرکزگرنی ناشی از حرکت زمین را حول خورشید محاسبه و درستی نکات مطرح شده در متن درس، مبتنی بر چشمپوشی از این شتاب در مقایسه با شتاب چرخش محوری، را تحقیق کنید.

۲.۹ راننده یک اتومبیل مسابقه (از لحاظ شتاب) اتومبیلش را با شتاب  $a$  و سرعت لحظه‌ای  $v$  می‌راند. چرخهای اتومبیل (به شعاع ۳۰) نمی‌لغزند. پیدا کنید که چه نقطه‌ای روی چرخ نسبت به زمین دارای بیشترین شتاب است. این شتاب چقدر است؟

۳.۹ در مثال ۲.۹، فرض کنید که ضریب اصطکاک استاتیک بین توپ‌هاکی و سطح زبر افقی (روی چرخ فلک)  $\mu_s$  باشد.

الف) توپ‌هاکی را حداکثر در چه فاصله‌ای از مرکز چرخ فلک می‌توان قرار داد، بدون اینکه بلغزد؟  
ب) اگر ضریب اصطکاک جنبشی برابر  $\mu_k$  باشد و توپ‌هاکی به‌طور شعاعی با سرعت  $v$  روی چرخ فلک به سوی خارج حرکت کند، حداکثر تا چه فاصله‌ای از مرکز می‌تواند بدون لغزش برود؟  
۴.۹ یک سطل آب را حول محور تقارنش به چرخش وامی‌داریم. شکل آب را در سطل معین کنید.

۵.۹ برای انحراف زاویه‌ای ذره‌ای که از قطب شمال در امتداد مسیری نزدیک به سطح زمین پرتاب شده است، عبارتی به‌دست آورید. آیا این انحراف برای موشکی که  $4800$  کیلومتر را در  $10$  دقیقه می‌پیماید، اهمیت دارد؟ اگر موشک مستقیماً به سوی هدف نشانه رود، "فاصله خطا" چقدر است؟ آیا فاصله خطا برای یک پرواز  $19300$  کیلومتری با همان سرعت بیشتر است؟

۶.۹ نشان دهید که، اگر ذره‌ای در امتداد قائم به بالاسو پرتاب شود تا به ارتفاع  $h$  بالای یک نقطه روی سطح زمین، در عرض جغرافیایی شمالی  $\lambda$ ، برسد، پس از بازگشت در نقطه‌ای به فاصله  $(4/3)\omega \cos \lambda \sqrt{h^3/g}$ ، در غرب نقطه اولیه با زمین برخورد می‌کند. (از مقاومت هوا چشم‌پوشید، و ارتفاعهای قائم کوچک را در نظر بگیرید.)

۷.۹ از نقطه‌ای واقع بر سطح زمین در عرض جغرافیایی شمالی  $\lambda$ ، پرتابه‌ای با سرعت  $V$  و با زاویه شیب  $\alpha$  نسبت به افق، شلیک می‌شود، نشان دهید انحراف جانبی پرتابه در هنگام برخورد با زمین عبارت است از

$$d = \frac{4V^2}{g^2} \times \omega \sin \lambda \times \sin^2 \alpha \cos \alpha$$



که در اینجا  $\omega$  بسامد چرخش زمین است.

۸.۹ در مسئله قبل، اگر به ازای  $\omega = 0$  برد پرتابه  $R$  باشد، نشان دهید که تغییر برد ناشی از چرخش زمین عبارت است از

$$\Delta R = \sqrt{\frac{2R^2}{g}} \times \omega \cos \lambda \left( \cot^2 \alpha - \frac{1}{3} \tan^2 \alpha \right)$$

۹.۹ نشان دهید که انحراف زاویه‌ای  $\varepsilon$  مربوط به خط شاقولی از راستای قائم واقعی در یک نقطه در سطح زمین، در عرض جغرافیایی  $\lambda$ ، عبارت است از

$$\varepsilon = \frac{r \cdot \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda}{g - r \cdot \omega^2 \cos^2 \lambda}$$

در اینجا  $r$  شعاع زمین است. بیشینه انحراف (برحسب ثانیه قوسی) چقدر است؟  
 ۱۰.۹ در ارتباط با انحراف ذره‌ای که در میدان گرانشی زمین سقوط می‌کند، به مثال ۳.۹ مراجعه کنید. محاسبه‌ای را تا تقریب مرتبه دوم انجام دهید (یعنی، جملات شامل  $\omega^2$  را در محاسبات وارد کنید) و نشان دهید که یک انحراف به سوی جنوب به شرح زیر به وجود می‌آید:

$$d_s \cong \frac{2}{3} \frac{h^2 \omega^2}{g} \sin \lambda \cos \lambda$$

۱۱.۹ توصیف حرکت یک ذره را در دستگاه مختصاتی که نسبت به چارچوب مرجع لخت حرکت چرخشی یکنواخت دارد، در نظر بگیرید. لاگرانژی ذره را به دست آورید. آنگاه هامیلتونی را محاسبه و سعی کنید این کمیت را با انرژی کل ارتباط دهید. (آیا همه شرایط مربوط به این ارتباط برقرار است؟) عبارت مربوط به انرژی کل که به این ترتیب به دست می‌آید، عبارت است از فرمول استاندارد  $1/2 mv^2 + U$  به علاوه یک جمله اضافی. نشان دهید که این جمله اضافی انرژی پتانسیل مرکز گریزی است. سرانجام، نشان دهید که می‌توان یک پتانسیل موثر برای این مسئله تعریف کرد که دقیقاً همان پتانسیلی است که در مورد مسئله نیروی مرکزی مورد استفاده قرار گرفت [معادله (۳۴.۷)].

## دینامیک اجسام صلب

### ۱.۱۰ مقدمه

جسم صلب، بنا بر تعریف عبارت است از مجموعه‌ای از ذرات که فاصله نسبی آنها مطلقاً ثابت باقی می‌ماند. البته، چنین اجسامی در طبیعت وجود ندارند، زیرا ذرات تشکیل دهنده غایی هر جسم (اتمها) همواره نوعی حرکت نسبی انجام می‌دهند. اما، این حرکات میکروسکوپی اند و بنابراین در توصیف حرکت ماکروسکوپی جسم می‌توان آنها را نادیده انگاشت. از سوی دیگر، ممکن است در داخل جسم نیز جابه‌جایی ماکروسکوپی صورت گیرد (مانند تغییر شکل‌های کشسان). در مورد تعداد زیادی جسم مورد بررسی، می‌توانیم با آرامش خاطر از تغییرات اندازه و شکل ناشی از اینگونه تغییر شکلها چشم‌پوشیم و معادلات حرکت را که از دقت بالایی برخوردارند، به‌دست آوریم.

همچنین باید این نکته را روشن کنیم که در برابر مفهوم جسم مطلقاً صلب محدودیتی نسبی وجود دارد. مثلاً، میله طویلی از یک ماده را در نظر بگیرید. اگر به یک سر این میله ضربه‌ای وارد آوریم، و چنانچه میله مطلقاً صلب باشد، اثر ضربه باید آنجا در سر دیگر احساس شود. اما این رویداد متناظر با انتقال یک سیگنال با سرعت نامتناهی است — وضعیتی که، بنا بر نظریه نسبیت، می‌دانیم ناممکن است. (در واقع، سرعت انتقال چنین سیگنالی در یک میله فلزی در مقایسه با سرعت نور — تقریباً  $10^8 \text{ m/s}$  — نسبتاً کم است، و به‌خواص کشسانی ماده بستگی دارد.)

در اینجا از مفهوم ایده آل جسم صلب، به عنوان مجموعه‌ای از ذرات گسسته و یا توزیع پیوسته‌ای از ماده به گونه‌ای تعویض‌پذیر بهره می‌گیریم. تنها تغییری که باید انجام گیرد عبارت است از جایگزینی انتگرالگیری روی توزیع چگالی به جای مجموع‌یابی روی تمام ذرات. معادلات حرکت به‌طور یکسان از هر دو دیدگاه صادق‌اند.

برای توصیف حرکت یک جسم صلب، از دو دستگاه مختصات — یک چارچوب لخت و یک دستگاه مختصات ثابت نسبت به جسم — بهره می‌گیریم. برای تعیین موضع جسم، باید شش کمیت را مشخص کنیم. این کمیتها را می‌توان مختصات مرکز جرم (که غالباً برای سهولت آن را منطبق بر مبدأ دستگاه مختصات جسمی اختیار می‌کنیم)، و سه زاویه مستقل که آرایش دستگاه مختصات جسمی را نسبت به دستگاه مختصات ثابت (یا لخت) تعیین می‌کند، اختیار کرد.<sup>۱</sup> این سه زاویه مستقل را می‌توان به راحتی زوایای اوایلر اختیار کرد، که این زاویه‌ها در بخش ۷.۱۰ توصیف شده‌اند.

به‌طور شهودی واضح است که بتوان هر حرکت محدود دلخواه هر جسم صلب را مجموع دو حرکت مستقل دانست — انتقال خطی نقطه‌ای از جسم به علاوه چرخش حول آن نقطه.<sup>۲</sup> اگر این نقطه انتخابی مرکز جرم جسم باشد، آنگاه اینگونه جداسازی حرکت به دو جزء، بهره‌گیری از مطالب فصل ۸ را مسیر می‌کند؛ بنابراین مطالب آن فصل می‌توان تکانه زاویه‌ای [معادله (۲۳.۸)] و انرژی جنبشی [معادله (۳۹.۸)] را به قسمتهایی در ارتباط با حرکت مربوط به مرکز جرم و حرکت حول مرکز جرم تفکیک کرد.

اگر انرژی پتانسیل را نیز بتوان جدا کرد (که همواره هم می‌شود، مثلاً در مورد انرژی پتانسیل در میدان نیروی یکنواخت)، آنگاه لاگرانژی جدا، و مسئله به‌طور کامل به دو جزء تقسیم می‌شود، یک جزء فقط شامل حرکت انتقالی و جزء دیگر فقط شامل حرکت چرخشی است. در آن صورت هر جزء از مسئله را می‌توان به‌طور مستقل از دیگری حل کرد.<sup>۳</sup> این نوع جداسازی برای توصیفی از حرکت جسم صلب که خیلی هم پیچیده نیست، جنبه اساسی دارد.

۱. در این فصل ما به جای اصطلاح «دستگاه چرخان» که در فصل قبل به‌کار بردیم، از عبارت «دستگاه جسمی» استفاده کرده‌ایم. اصطلاح «دستگاه ثابت» را همچنان حفظ می‌کنیم.

۲. قضیه شال را، که حتی کلی‌تر از این حکم است (بنابراین قضیه، خط انتقال و محور چرخش را می‌توان برهم منطبق کرد)، میشل شال (۱۷۹۳-۱۸۸۰)، ریاضیدان فرانسوی، در ۱۸۳۰ اثبات کرده‌است. اثبات آن برای نمونه، به وسیله ویناکر ارائه شده‌است (Wh 37, p. 4).

۳. اوایلر اولین کسی بود که در سال ۱۷۴۹ به این نکته مهم پی برد.

## ۲.۱۰ تانسور لختی

اکنون نظر خود را متوجه جسم صلبی می‌کنیم که از  $n$  ذره به جرمهای  $m_\alpha$  و  $\alpha = 1, 2, 3, \dots, n$  تشکیل یافته‌است. اگر این جسم با سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای  $\omega$  حول نقطه‌ای بچرخد که در دستگاه مختصات جسمی ثابت است، و اگر این نقطه در دستگاه مختصات ثابت با سرعت خطی لحظه‌ای  $\mathbf{V}$  حرکت کند، آنگاه سرعت لحظه‌ای ذره  $\alpha$ م در دستگاه ثابت را می‌توان با استفاده از معادله (۱۷.۹) به دست آورد. اما اکنون ما یک جسم صلب را بررسی می‌کنیم، به طوری که

$$\mathbf{v}_r = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{چرخشی}} \equiv 0$$

بنابراین

$$\boxed{\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{V} + \omega \times \mathbf{r}_\alpha} \quad (۱.۱۰)$$

در اینجا شاخص پایین ثابت که معرف دستگاه مختصات ثابت است، از سرعت  $\mathbf{v}_\alpha$  حذف شده است، و اکنون می‌دانیم که تمام سرعتها در دستگاه ثابت اندازه‌گیری می‌شوند. حالا تمام سرعتها نسبت به دستگاه چرخان یا دستگاه جسمی صفر می‌شوند زیرا که جسم صلب است. از آنجا که انرژی جنبشی ذره  $\alpha$ م از رابطه زیر به دست می‌آید

$$T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \quad (۲.۱۰)$$

درمورد انرژی جنبشی کل، داریم

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{V} + \omega \times \mathbf{r}_\alpha)^2 \quad (۳.۱۰)$$

با بسط جمله مجذور، می‌رسیم به

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha V^2 + \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{V} \cdot \omega \times \mathbf{r}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\omega \times \mathbf{r}_\alpha)^2 \quad (۴.۱۰)$$

که عبارتی کلی برای انرژی جنبشی است، و برای هر نوع انتخاب مبدأ که بردارهای  $\mathbf{r}_\alpha$  از آنجا اندازه‌گیری می‌شوند، صادق است. اما اگر ما مبدأ دستگاه مختصات جسمی را چنان اختیار کنیم که بر مرکز جرم جسم منطبق باشد، در این صورت محاسبات به طور چشمگیری ساده می‌شوند. اولین نکته‌ای که توجه ما را به خود جلب می‌کند، آن است که در جمله دوم سمت راست این معادله، نه  $\mathbf{V}$

و نه  $\omega$  هیچکدام مشخصه ذره  $\alpha$  ام نیستند و بنابراین می توان این کمیتها را از مجموع یابی خارج کرد

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V} \cdot \omega \times \mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{V} \cdot \omega \times \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \right) \quad (5.10)$$

اما، اینک جمله

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = M \mathbf{R}$$

بردار مرکز جرم است [معادله (۳.۸)]، که در دستگاه جسمی صفر می شود، زیرا بردارهای  $\mathbf{r}_{\alpha}$  از مرکز جرم اندازه گیری می شوند. در این صورت می توان انرژی جنبشی را به صورت زیر نوشت

$$T = T_{\text{انتقالی}} + T_{\text{چرخشی}}$$

که در اینجا

$$\begin{aligned} T_{\text{انتقالی}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} V^2 = \frac{1}{2} M V^2 & (6.10 \text{ الف}) \\ T_{\text{چرخشی}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\omega \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 & (6.10 \text{ ب}) \end{aligned}$$

انتقالی  $T$  و چرخشی  $T$ ، به ترتیب، معرف انرژی جنبشی انتقالی و چرخشی هستند. به این ترتیب، انرژی جنبشی به دو جزء مستقل تقسیم می شود.

جمله مربوط به انرژی جنبشی چرخشی را می توان با استفاده از حاصلضرب زیر محاسبه کرد

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\omega^2 r_{\alpha}^2 - (\omega \cdot \mathbf{r}_{\alpha})^2] \quad (7.10)$$

اکنون چرخشی  $T$  را با استفاده از مؤلفه های  $\omega_i$  و  $r_{\alpha,i}$  متعلق به بردارهای  $\omega$  و  $\mathbf{r}_{\alpha}$  بیان می کنیم. همچنین می دانیم که در دستگاه جسمی:  $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, x_{\alpha,3})$ ، به طوری که می توان نوشت

به این ترتیب  $r_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}$

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{\gamma} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \left( \sum_i \omega_i^y \right) \left( \sum_k x_{\alpha,k}^y \right) - \left( \sum_i \omega_i x_{\alpha,i} \right) \left( \sum_j \omega_j x_{\alpha,j} \right) \right] \quad (۸.۱۰)$$

حال می‌توان نوشت  $\omega_i = \sum_j \omega_j \delta_{ij}$ ، به طوری که

$$\begin{aligned} T_{\text{چرخشی}} &= \frac{1}{\gamma} \sum_{\alpha} \sum_{i,j} m_{\alpha} \left[ \omega_i \omega_j \delta_{ij} \left( \sum_k x_{\alpha,k}^y \right) - \omega_i \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^y - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \quad (۹.۱۰) \end{aligned}$$

اگر جزء  $I_{ij}$  جمع روی  $\alpha$  را به صورت  $I_{ij}$  تعریف کنیم

$$I_{ij} \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^y - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \quad (۱۰.۱۰)$$

در این صورت داریم

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{\gamma} \sum_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad (۱۱.۱۰)$$

شکل بسیار محدود این معادله به صورت زیر در می‌آید

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{\gamma} I \omega^2 \quad (۱۲.۱۰)$$

در اینجا  $I$  گشتاور لختی (اسکالر) حول محور چرخش است. این معادله را به صورت همان عبارت آشنای مربوط به انرژی جنبشی چرخشی باز می‌شناسیم که در بررسی‌های مقدماتی مطرح می‌شود.  $I$  جمله  $I_{ij}$  اجزای کمیتی را تشکیل می‌دهند که آن را با  $\{I\}$  نشان می‌دهیم. از لحاظ شکل،  $\{I\}$  مشابه یک ماتریس  $3 \times 3$  است. این کمیت عبارت است از ضریب تناسب بین انرژی جنبشی چرخشی و سرعت زاویه‌ای که دارای ابعاد  $(\text{طول})^2 \times (\text{جرم})$  است. چون  $\{I\}$  دو کمیت کاملاً متفاوت فیزیکی را به هم مربوط می‌کند، انتظار می‌رود که عضوی از توابعی بامرتبه بالاتر از آنچه که تا به حال به آن برخورد داریم، باشد. در واقع  $\{I\}$  یک تانسور است، و به آن تانسور لختی می‌گویند.<sup>۱</sup> ولی، توجه داشته باشید که  $T$  چرخشی را می‌توان، بدون در نظر گرفتن هیچیک از خواص مشخص تانسور، به کمک معادله (۹.۱۰)، که عملیات لازم را کاملاً مشخص می‌کند، محاسبه کرد.

۱. آزمون صحیح هر تانسور در رفتار آن تحت تبدیل دستگاه مختصات نهفته است (بخش ۶.۱۰).

اجزای  $\{I\}$  را می‌توان مستقیماً از معادله (۱۰.۱۰) به دست آورد. برای روشن شدن موضوع، این عناصر را به صورت یک آرایه  $3 \times 3$  می‌نویسیم

$$\{I\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,2}^y + x_{\alpha,3}^y) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,2} & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,3} & \\ - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,1} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^y + x_{\alpha,3}^y) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,3} & \\ - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,3} x_{\alpha,1} & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,3} x_{\alpha,2} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,1}^y + x_{\alpha,2}^y) \end{array} \right\} \quad (الف \ ۱۳.۱۰)$$

معادله (۱۰.۱۰) یکی از روشهایی به شمار می‌آید که برای فشرده‌نویسی مؤلفه‌های تانسور لختی به کار می‌رود، اما معادله (الف ۱۳.۱۰) مفصل است. با استفاده از مؤلفه‌های  $(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha})$  به جای  $(x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, x_{\alpha,3})$  و قرار دادن  $r_{\alpha}^y = x_{\alpha}^y + y_{\alpha}^y + z_{\alpha}^y$  معادله (۱۳.۱۰) الف) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\{I\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^y - x_{\alpha}^y) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} & \\ - \sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} x_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^y - y_{\alpha}^y) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} & \\ - \sum_{\alpha} m_{\alpha} z_{\alpha} x_{\alpha} & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} z_{\alpha} y_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^y - z_{\alpha}^y) \end{array} \right\} \quad (ب \ ۱۳.۱۰)$$

که مختصرتر و قابل درکتر است. ولی، ما به خاطر کاربردهای بعدی به کمک نمادگذاری  $x_{\alpha,i}$  مطلب را ادامه می‌دهیم.

عناصر قطری،  $I_{11}, I_{22}$  و  $I_{33}$  را، به ترتیب، گشتاور لختی حول محورهای  $x_1, x_2, x_3$  می‌نامیم، و به منفی عناصر غیر قطری  $I_{12}, I_{13}$ ، والی آخر، حاصلضربهای لختی می‌گوییم.<sup>۱</sup> روشن است که تانسور لختی متقارن است؛ یعنی

$$I_{ij} = I_{ji} \quad (۱۴.۱۰)$$

و بنابراین، فقط شش عنصر مستقل در  $\{I\}$  وجود دارد. بعلاوه، تانسور لختی از عناصر جمع‌پذیر تشکیل شده است؛ یعنی، تانسور لختی یک جسم را می‌توان به صورت مجموع تانسورهای قسمتهای گوناگون آن در نظر گرفت. بنابراین، اگر ما جسمی را به صورت توزیع پیوسته‌ای از ماده با چگالی

۱. این مبحث را هویگنس در ۱۶۷۳ معرفی کرد؛ نامگذاری آن از اوایلر است.

جرمی  $\rho = \rho(\mathbf{r})$  در نظر بگیریم، آنگاه

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \left[ \delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right] dv \quad (15.10)$$

که در اینجا  $dv \equiv dx_1 dx_2 dx_3$ ، عنصر حجمی در وضعیتی است که با بردار  $\mathbf{r}$  تعریف می‌شود، و  $V$  حجم جسم است.

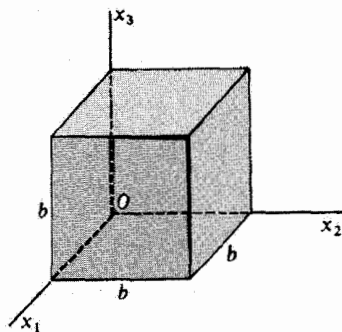
## مثال ۱.۱۰

تانسور لختی یک مکعب همگن به چگالی  $\rho$ ، جرم  $M$ ، و ضلع  $b$  را محاسبه کنید. فرض کنید که یک گوشه مکعب در مبدأ و سه یال مجاور آن در امتداد محورهای مختصات قرار گرفته باشند (شکل ۱.۱۰). (روشن است که برای دستگاه مختصاتی که به این ترتیب انتخاب شده‌است، مبدأ مختصات دیگر در مرکز جرم قرار ندارد؛ ما بعداً به این نکته باز خواهیم گشت.)

حل: طبق معادله (۱۵.۱۰)، داریم

$$\begin{aligned} I_{11} &= \rho \int_{-b}^b dx_3 \int_{-b}^b dx_2 (x_1^2 + x_2^2) \int_{-b}^b dx_1 \\ &= \frac{2}{3} \rho b^5 = \frac{2}{3} M b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= -\rho \int_{-b}^b x_1 dx_1 \int_{-b}^b x_2 dx_2 \int_{-b}^b dx_3 \\ &= -\frac{1}{4} \rho b^5 = -\frac{1}{4} M b^2 \end{aligned}$$



شکل ۱.۱۰



به سهولت می‌توان پی برد که تمام عناصر قطری باهم برابرند و بعلاوه، تمام عناصر غیر قطری نیز با یکدیگر مساوی‌اند. اگر کمیتی مثل  $\beta$  را به صورت  $\beta = Mb^2$  تعریف کنیم، داریم

$$\left. \begin{aligned} I_{11} = I_{22} = I_{33} &= \frac{2}{3}\beta \\ I_{12} = I_{13} = I_{23} &= -\frac{1}{3}\beta \end{aligned} \right\}$$

و تانسور گشتاور لختی چنین می‌شود

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{3}\beta & -\frac{1}{3}\beta \\ -\frac{1}{3}\beta & \frac{2}{3}\beta & -\frac{1}{3}\beta \\ -\frac{1}{3}\beta & -\frac{1}{3}\beta & \frac{2}{3}\beta \end{Bmatrix}$$

ما بررسی تانسور گشتاور لختی مربوط به مکعب را در بخشهای بعدی دنبال خواهیم کرد. ■

### ۳.۱۰ تکانه زاویه‌ای

تکانه زاویه‌ای هر جسم، نسبت به یک نقطه ثابت  $O$  در دستگاه مختصات جسمی، عبارت است از

$$L = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} \quad (۱۶.۱۰)$$

مناسبتین انتخاب برای مکان نقطه  $O$  به مسئله خاص تحت بررسی بستگی دارد. فقط دو نوع گزینش مهم است: الف) اگر (در دستگاه مختصات ثابت) یک یا چند نقطه ثابت باشند،  $O$  چنان اختیار می‌شود که بر یکی از این نوع نقاط منطبق شود (مانند مورد فرفره چرخان در بخش ۱۰.۱۰)؛

ب) اگر هیچ نقطه‌ای از جسم ثابت نباشد،  $O$  را به عنوان مرکز جرم انتخاب می‌کنیم.

تکانه خطی،  $\mathbf{p}_{\alpha}$ ، نسبت به دستگاه مختصات جسمی عبارت است از

$$\mathbf{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = m_{\alpha} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}$$

از اینجا، تکانه زاویه‌ای جسم برابر است با

$$L = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) \quad (۱۷.۱۰)$$

با استفاده از اتحاد برداری

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = A^T \mathbf{B} - \mathbf{A}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

می‌توان  $\mathbf{L}$  را به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ r_{\alpha}^y \omega - r_{\alpha} (r_{\alpha} \cdot \omega) \right] \quad (۱۸.۱۰)$$

در اینجا نیز می‌توانیم از همان روشی بهره‌گیریم که برای نوشتن چرخشی  $T$  به صورت تانسوری استفاده کردیم. اما تکانه زاویه‌ای کمیتی برداری است، بنابراین مؤلفه  $i$ ام آن را به این صورت می‌نویسیم

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \omega_i \sum_k x_{\alpha,k}^y - x_{\alpha,i} \sum_j x_{\alpha,j} \omega_j \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_j \left[ \omega_j \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^y - \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \quad (۱۹.۱۰) \\ &= \sum_j \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^y - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \end{aligned}$$

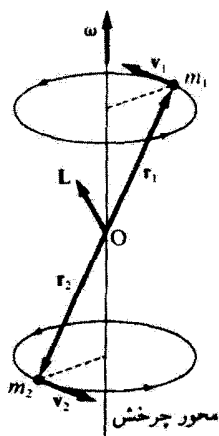
جمع روی  $\alpha$  را می‌توانیم به صورت عنصر  $i$ ام تانسور لختی تلقی کنیم [معادله (۱۰.۱۰)]. بنابراین

$$\mathbf{L}_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \quad (۲۰.۱۰ \text{ الف})$$

یا، به صورت نماد تانسوری

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{I}\} \cdot \omega \quad (۲۰.۱۰ \text{ ب})$$

به این ترتیب، تانسور لختی جمع روی مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای را به مؤلفه  $i$ ام بردار تکانه زاویه‌ای مربوط می‌کند. این نتیجه ممکن است در نگاه اول نتیجه‌ای غیر منتظره به نظر آید؛ زیرا، اگر یک جسم صلب را در نظر بگیریم که در مورد آن عناصر غیرقطری تانسور لختی غیر صفرند، در این صورت حتی اگر  $\omega$ ، مثلاً، در راستای  $x_1$  قرار گرفته باشد،  $\omega = (\omega_1, 0, 0)$ ، مؤلفه‌های بردار تکانه زاویه‌ای به‌طور کلی در هر سه راستا غیر صفر است:  $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$ ؛ یعنی، به‌طور کلی بردار تکانه زاویه‌ای هم‌راستای بردار سرعت زاویه‌ای نیست. (باید تأکید کرد که این حکم به‌ازای  $j \neq i$  به  $I_{ij} \neq 0$  بستگی دارد؛ در بخش بعدی باز هم به این مسئله باز می‌گردیم.)



شکل ۲.۱۰

به‌عنوان مثالی از همخط نبودن  $\omega$  و  $L$ ، دمبل چرخان شکل ۲.۱۰ را در نظر بگیرید. (فرض می‌کنیم میله‌ای که  $m_1$  و  $m_2$  را به هم متصل می‌کند، بدون وزن و غیرقابل انبساط باشد.) رابطه زیر کمیت‌های  $v_\alpha$ ،  $r_\alpha$  و  $\omega$  را به هم مربوط می‌کند

$$v_\alpha = \omega \times r_\alpha$$

و رابطه‌ای که کمیت‌های  $r_\alpha$ ،  $v_\alpha$  و  $L$  را به هم ارتباط می‌دهد عبارت است از

$$L = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha} \times v_{\alpha}$$

روشن است که  $\omega$  در امتداد محور چرخش قرار گرفته و  $L$  بر خطی که  $m_1$  را به  $m_2$  وصل می‌کند، عمود است.

در مورد این مثال، توجه داریم که بردار تکانه زاویه‌ای،  $L$ ، نسبت به زمان ثابت باقی نمی‌ماند بلکه با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  به‌گونه‌ای می‌چرخد که یک مخروط را ترسیم می‌کند؛ محور این مخروط همان محور چرخش است. بنابراین  $\dot{L} \neq 0$ . اما بنا بر معادله (۳۱.۸)

$$\dot{L} = N \quad (21.10)$$

که در اینجا  $N$  گشتاور نیروی خارجی وارد بر جسم است. بدینسان، برای اینکه دمبل شکل ۲.۱۰ به چرخش خود ادامه دهد، همواره باید گشتاور نیرویی بر آن وارد آید.

با استفاده از معادله (۲۰.۱۰ الف) و با ضرب  $L_i$  در  $\omega_i/2$  و آنگاه جمع روی  $i$  می‌توانیم به نتیجه دیگری برسیم

$$\frac{1}{2} \sum_i \omega_i L_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j = T_{\text{چرخشی}} \quad (۲۲.۱۰ الف)$$

که تساوی دوم دقیقاً همان معادله (۱۱.۱۰) است. به این ترتیب

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{L} \quad (۲۲.۱۰ ب)$$

معادلات (۲۰.۱۰ ب) و (۲۲.۱۰ ب) نمایشگر دو تا از خاصیت‌های مهم تانسورها هستند. حاصلضرب یک تانسور و یک بردار، عبارت است از یک بردار، چنانکه

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{I}\} \cdot \omega$$

و از ضرب یک تانسور و دو بردار یک اسکالر به دست می‌آید، مانند

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \omega \cdot \{\mathbf{I}\} \cdot \omega$$

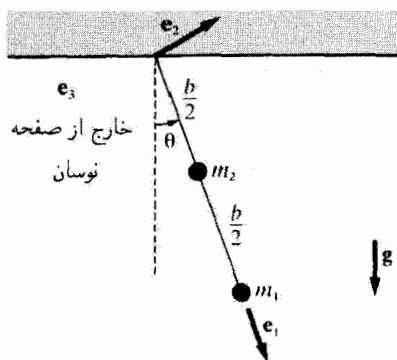
اما، ما در اینجا مجالی پیدا نمی‌کنیم که این صورت از معادلات تانسوری را مورد استفاده قرار دهیم. تنها از عبارتهای مربوط به مجموع‌یابیها (یا انتگرالها)، مانند معادلات (۱۱.۱۰)، (۱۵.۱۰)، و (۲۰.۱۰ الف)، بهره خواهیم برد.

### مثال ۲.۱۰

آونگ نمایشیافته در شکل ۳.۱۰ را در نظر بگیرید که از یک میله صلب به طول  $b$  و یک جرم  $m_1$  در انتهای آن تشکیل شده است. جرم دیگری ( $m_2$ ) را در وسط میله قرار می‌دهیم. اگر آونگ در صفحه تاب بخورد، بسامد نوسانهای کوچک آن را پیدا کنید.

حل: برای تحلیل این سیستم از روشهای ارائه شده در این فصل استفاده می‌کنیم. فرض کنید مبدأ دستگاه مختصات ثابت و دستگاه مختصات جسمی در نقطه آویز آونگ واقع باشد. فرض کنید که  $e_1$  در امتداد میله،  $e_2$  در صفحه، و  $e_3$  خارج از صفحه قرار دارد (شکل ۳.۱۰). سرعت زاویه‌ای عبارت است از

$$\omega = \omega_2 e_2 = \dot{\theta} e_2 \quad (۲۳.۱۰)$$



شکل ۳.۱۰

برای پیدا کردن تانسور لختی از معادله (۱۰.۱۰) سود می‌جویم. همهٔ جرمها در امتداد  $e_1$  و با مختصات  $x_{1,1} = b$  و  $x_{2,1} = b/2$  قرار دارند. سایر مؤلفه‌های  $x_{\alpha,k}$  جملگی صفرند.

$$I_{ij} = m_1(\delta_{ij}x_{1,1}^2 - x_{1,i}x_{1,j}) + m_2(\delta_{ij}x_{2,1}^2 - x_{2,i}x_{2,j}) \quad (24.10)$$

تانسور لختی، معادله (۱۳.۱۰ الف)، چنین می‌شود

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4} & \circ \\ \circ & \circ & m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4} \end{Bmatrix} \quad (25.10)$$

تکانه زاویه‌ای را از معادله (۲۰.۱۰ الف) تعیین می‌کنیم

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \circ \\ L_2 &= \circ \\ L_3 &= I_{33}\omega_3 = \left(m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4}\right) \dot{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (26.10)$$

تنها نیروی خارجی عبارت است از نیروی گرانش، که سبب می‌شود گشتاور نیروی  $N$  بر سیستم اعمال شود. چون  $\vec{L} = N$  داریم

$$\left(m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{4}\right) \ddot{\theta} e_3 = \sum_{\alpha} r_{\alpha} \times F_{\alpha} \quad (27.10)$$

از آنجا که راستای نیروی گرانش به پایین است

$$g = g \cos \theta e_1 - g \sin \theta e_r$$

بنابراین

$$r_1 \times F_1 = b e_1 \times (\cos \theta e_1 - \sin \theta e_r) m_1 g = -m_1 g b \sin \theta e_r$$

$$r_2 \times F_2 = \frac{b}{\gamma} e_1 \times (\cos \theta e_1 - \sin \theta e_r) m_2 g = -m_2 g \frac{b}{\gamma} \sin \theta e_r$$

و معادله (۲۷.۱۰) چنین می‌شود

$$b^2 \left( m_1 + \frac{m_2}{\gamma} \right) \ddot{\theta} = -bg \sin \theta \left( m_1 + \frac{m_2}{\gamma} \right) \quad (28.10)$$

بدینسان بسامد نوسانهای کم دامنه آن عبارت خواهد بود از

$$\omega^2 = \frac{m_1 + \frac{m_2}{\gamma} g}{m_1 + \frac{m_2}{\gamma} b} \quad (29.10)$$

معادله (۲۹.۱۰) را با توجه به اینکه به ازای  $m_1 \gg m_2$  داریم:  $\omega^2 \approx g/b$  و به ازای  $m_2 \gg m_1$

داریم:  $\omega^2 \approx 2g/b$ ، (که باید هم چنین باشد) می‌توان آزمود.

این مثال را می‌شد به همین آسانی، ولی از طریق پیدا کردن انرژی جنبشی آن از معادله

(۲۲.۱۰ الف)، و به کارگیری معادلات حرکت لاگرانژ، حل کرد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} T_{\text{جنبشی}} &= \frac{1}{\gamma} \omega^2 L^2 = \frac{1}{\gamma} \omega^2 I_{\text{ر}} \\ &= \frac{1}{\gamma} \left( m_1 b^2 + m_2 \frac{b^2}{\gamma} \right) \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (30.10)$$

$$U = -m_1 g b \sin \theta - m_2 g \frac{b}{\gamma} \sin \theta \quad (31.10)$$

که در اینجا  $U = 0$  در مبدأ اختیار شده است. به کارگیری بی‌واسطه روش لاگرانژ مستقیماً به معادله

حرکت [معادله (۲۸.۱۰)] می‌انجامد.

### ۴.۱۰ محورهای اصلی لختی<sup>۱</sup>

واضح است که اگر تانسور لختی فقط از عناصر قطری تشکیل یافته بود، عبارتهای مربوط به  $T$  و  $L$  به نحو چشمگیری ساده می شدند. اگر بتوان نوشت:

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij} \quad (۳۲.۱۰)$$

از اینجا ماتریس لختی عبارت خواهد بود از

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{Bmatrix} \quad (۳۳.۱۰)$$

در این صورت خواهیم داشت

$$L_i = \sum_j I_i \delta_{ij} \omega_j = I_i \omega_i \quad (۳۴.۱۰)$$

و

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i \delta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad (۳۵.۱۰)$$

بدینسان، به اعتبار این شرط که  $\{I\}$  فقط شامل عناصر قطری باشد، به عبارتهای کاملاً ساده‌ای برای تکانه زاویه‌ای و انرژی جنبشی چرخشی دست پیدا می‌کنیم. حال شرایطی را تعیین می‌کنیم که معادله (۳۲.۱۰) تحت آن شرایط تانسور لختی را توصیف می‌کند. این کار مستلزم یافتن یک مجموعه از محورهای مختصات جسمی است که حاصلضربهای لختی (یعنی، عناصر غیرقطری  $\{I\}$ )، برای آنها صفر است. چنین محورهایی را محورهای اصلی لختی می‌نامیم.

اگر جسمی حول یک محور اصلی بچرخد، هم سرعت زاویه‌ای و هم تکانه زاویه‌ای آن، طبق معادله (۳۴.۱۰)، در راستای این محور قرار می‌گیرند. در این صورت، اگر  $I$  گشتاور لختی حول این محور باشد، می‌توان نوشت

$$L = I\omega \quad (۳۶.۱۰)$$

از برابر قرار دادن مؤلفه‌های  $L$  در معادلات (۲۰.۱۰) ب) و (۳۶.۱۰)، داریم

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= I\omega_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \\ L_2 &= I\omega_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \\ L_3 &= I\omega_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (37.10)$$

که پس از آوردن همهٔ جمله‌ها به یک طرف تساوی، خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} (I_{11} - I)\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 &= 0 \\ I_{21}\omega_1 + (I_{22} - I)\omega_2 + I_{23}\omega_3 &= 0 \\ I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + (I_{33} - I)\omega_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (38.10)$$

شرط اینکه این دستگاه معادلات جواب غیر بدیهی داشته باشد، آن است که دترمینان

ضرایبشان صفر شود

$$\begin{vmatrix} (I_{11} - I) & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & (I_{22} - I) & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & (I_{33} - I) \end{vmatrix} = 0 \quad (39.10)$$

بسط این دترمینان به معادلهٔ مشخصه<sup>۱</sup> برحسب  $I$  می‌انجامد، که معادله‌ای است درجهٔ سوم. هر کدام از سه ریشه متناظر با گشتاور لختی حول یکی از محورهای اصلی است. مقادیر  $I_1$ ،  $I_2$ ، و  $I_3$  را گشتاورهای لختی اصلی می‌نامند. اگر جسم حول محور متناظر با گشتاور اصلی  $I_1$  بچرخد، در این صورت معادلهٔ (۳۶.۱۰) به  $I_1\omega = \mathbf{L}$  تبدیل می‌شود. یعنی، هم  $\omega$  و هم  $\mathbf{L}$  در امتداد این محور واقع‌اند. در آن صورت جهت  $\omega$  نسبت به دستگاه مختصات جسمی همان جهت محور اصلی متناظر با  $I_1$  است. بنابراین، اگر در معادلهٔ (۳۸.۱۰) به جای  $I$  کمیت  $I_1$  را بنشانیم، می‌توانیم این محور اصلی را تعیین کنیم و نسبت مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای:  $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3$  را به دست آوریم. بدین وسیله کسینوسهای هادی محوری را تعیین می‌کنیم که گشتاور لختی حول آن برابر  $I_1$  است. می‌توان جهت‌های متناظر با  $I_2$  و  $I_3$  را با همین روش پیدا کرد. این نکته را که محورهای اصلی تعیین شده باین روش واقعاً حقیقی و متعامدند، در بخش ۶.۱۰ اثبات می‌کنیم؛ این نتایج از بررسیهای کلی‌تری که در بخش ۴.۱۱ ارائه خواهد شد، نیز حاصل می‌شوند.

این واقعیت که روش قطری کردن ذکر شده در بالا تنها نسبت مؤلفه‌های  $\omega$  را به دست می‌دهد، هیچ مانعی در کارها ایجاد نمی‌کند، زیرا این نسبتها راستای هر کدام از محورهای اصلی را کاملاً

۱. چون معادله‌ای مشابه همین معادله اختلالهای مشخصه در مکانیک سماوی را توصیف می‌کند، این معادله را نیز معادلهٔ مشخصه می‌گویند. در اصطلاح ریاضی به آن چند جمله‌ای مشخصه می‌گویند.



تعیین می‌کنند، و تنها راستای این محورها مورد نیاز است. درواقع، ما انتظار هم نداریم که مقدار  $\omega$  تعیین شود، زیرا آهنگ حقیقی حرکت زاویه‌ای جسم را نمی‌توان فقط به کمک شکل هندسی آن مشخص کرد. مختاریم هر مقدار سرعت زاویه‌ای که بخواهیم به جسم بدهیم.

در اغلب مسائلی که در دینامیک جسم صلب با آنها برمی‌خوریم، اجسام دارای نوعی شکل منظم هستند، به طوری که ما فقط با بررسی تقارن جسم می‌توانیم محورهای اصلی را تعیین کنیم. مثلاً، هر جسم دوار (مثل میله استوانه‌ای) یک محور اصلی دارد که در امتداد محور تقارن قرار می‌گیرد (مانند خط مرکزی میله استوانه‌ای)، و دو محور دیگر در صفحه عمود بر محور تقارن قرار می‌گیرند. واضح است که چون جسم متقارن است، انتخاب وضعیت زاویه‌ای این دو محور دیگر اختیاری است. اگر گشتاور لختی در امتداد محور تقارن برابر  $I_1$  باشد، در آن صورت برای یک جسم دوار:  $I_1 = I_2 = I_3$ ؛ یعنی، معادله مشخصه یک ریشه مضاعف دارد.

اگر در جسمی  $I_1 = I_2 = I_3$ ، این جسم را فرفره کروی می‌گویند؛ اگر  $I_1 = I_2 \neq I_3$ ، آن را فرفره نامتقارن می‌نامند؛ اگر گشتاورهای لختی اصلی همگی باهم فرق داشته باشند، آن را فرفره نامتقارن می‌گوییم. اگر در جسمی  $I_1 = 0$  و  $I_2 = I_3$ ، مانند گشتاورهای مربوط به دو جرم نقطه‌ای که با میله بدون وزنی به هم متصل می‌شوند، یا مولکولهای دواتمی، به آن چرخانه می‌گوییم.

### مثال ۳.۱۰

گشتاورهای لختی اصلی و محورهای اصلی مربوط به مکعب مثال ۱.۱۰ را پیدا کنید.

حل: در مثال ۱.۱۰ یافتیم که تانسور گشتاور لختی مربوط به یک مکعب (که مبدأ در یکی از رأسهای آن واقع است) عناصر غیر قطری غیر صفر داشت. روشن است که محورهای مختصات انتخاب شده در آن محاسبه، محورهای اصلی نبودند. اگر، مثلاً، مکعب حول محور  $x_2$  بچرخد، آنگاه  $\omega = \omega_2 e_2$  و مؤلفه‌های بردار تکانه زاویه‌ای  $L$  [معادله (۳۷.۱۰)] عبارت‌اند از

$$L_1 = -\frac{1}{4}\beta\omega_2$$

$$L_2 = -\frac{1}{4}\beta\omega_2$$

$$L_3 = \frac{2}{3}\beta\omega_2$$

بدینسان

$$L = Mb^2\omega_2\left(-\frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right)$$

که با  $\omega$  همراستا نیست.

برای پیدا کردن گشتاورهای لختی اصلی، باید معادله مشخصه زیر را حل کنیم

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{1}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{1}{3}\beta - I \end{vmatrix} = 0 \quad (40.10)$$

مقدار دترمینان با افزودن (یا کم کردن) هر سطر (یا ستون) به هر سطر (یا ستون) دیگر تغییر نخواهد کرد. معادله (40.10) را می‌توان با کم کردن سطر اول از سطر دوم، آسانتر حل کرد

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{11}{12}\beta + I & \frac{11}{12}\beta - I & 0 \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{1}{3}\beta - I \end{vmatrix} = 0$$

می‌توانیم از  $(\frac{11}{12}\beta - I)$  در سطر دوم فاکتورگیری کنیم

$$\left(\frac{11}{12}\beta - I\right) \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\beta - I & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{1}{3}\beta - I \end{vmatrix} = 0$$

از بسط دترمینان، داریم

$$\left(\frac{11}{12}\beta - I\right) \left[ \left(\frac{1}{3}\beta - I\right)^2 - \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta \left(\frac{1}{3}\beta - I\right) \right] = 0$$

که می‌توان آن را به صورت حاصلضرب عوامل نوشت

$$\left(\frac{1}{6}\beta - I\right) \left(\frac{11}{12}\beta - I\right) \left(\frac{11}{12}\beta - I\right) = 0$$

به این ترتیب، ریشه‌هایی به شرح زیر داریم، که گشتاورهای لختی اصلی را به دست می‌دهند

$$I_1 = \frac{1}{6}\beta, \quad I_2 = \frac{11}{12}\beta, \quad I_3 = \frac{11}{12}\beta$$

تانسور قطری شده گشتاور لختی عبارت خواهد بود از

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{6}\beta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12}\beta \end{Bmatrix} \quad (41.10)$$

چون دو تا از ریشه‌ها باهم یکسان‌اند،  $I_2 = I_3$ ، محور اصلی وابسته به  $I_1$  باید یکی از محورهای تقارن جسم باشد.

برای یافتن جهت محور اصلی وابسته به  $I_1$ ، در معادله (۳۸.۱۰) به جای  $I$  مقدار  $\frac{1}{6}\beta$  را قرار می‌دهیم:

$$\left. \begin{aligned} (\frac{1}{6}\beta - \frac{1}{6}\beta)\omega_{11} - \frac{1}{6}\beta\omega_{21} - \frac{1}{6}\beta\omega_{31} &= 0 \\ -\frac{1}{6}\beta\omega_{11} + (\frac{1}{6}\beta - \frac{1}{6}\beta)\omega_{21} - \frac{1}{6}\beta\omega_{31} &= 0 \\ -\frac{1}{6}\beta\omega_{11} - \frac{1}{6}\beta\omega_{21} + (\frac{1}{6}\beta - \frac{1}{6}\beta)\omega_{31} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

که در اینجا شاخص زیرین دومی ۱ روی  $\omega_i$  حاکی از این نکته است که محور اصلی وابسته به  $I_1$  را مدنظر قرار داده‌ایم. از تقسیم دو معادله اول این دستگاه بر  $\beta/4$ ، داریم

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_{11} - \omega_{21} - \omega_{31} &= 0 \\ -\omega_{11} + 2\omega_{21} - \omega_{31} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (42.10)$$

با کم کردن معادله دوم از معادله اول، می‌یابیم:  $\omega_{11} = \omega_{21}$ . با استفاده از این نتیجه در هر یک از دو معادله (۴۲.۱۰)، می‌رسیم به:  $\omega_{11} = \omega_{21} = \omega_{31}$  و نسبتهای موردنظر، عبارت‌اند از

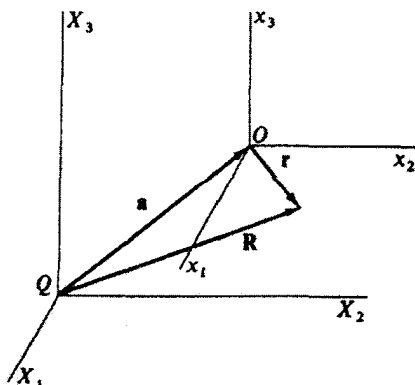
$$\omega_{11} : \omega_{21} : \omega_{31} = 1 : 1 : 1$$

بنابراین، وقتی مکعب حول محوری می‌چرخد که گشتاور لختی  $I_1 = \frac{1}{6}\beta = \frac{1}{6}Mb^2$  به آن وابسته‌است، تصویرهای  $\omega$  روی هر یک از سه محور مختصات باهم برابرند. از این رو، این محور اصلی با قطر مکعب متناظر است.

چون گشتاورهای  $I_2$  و  $I_3$  برابرند، سمتگیری محورهای اصلی وابسته به این گشتاورها اختیاری است؛ این گشتاورها فقط باید در صفحه عمود بر قطر مکعب قرار گیرند. ■

### ۵.۱۰ گشتاورهای لختی در دستگاههای مختصات جسمی متفاوت

برای اینکه انرژی جنبشی به قسمتهای انتقالی و چرخشی قابل تفکیک باشد [معادله (۶.۱۰)]، به‌طور کلی، لازم‌است دستگاه مختصاتی انتخاب شود که مبدأ آن در مرکز جرم جسم واقع باشد. در مورد برخی اشکال هندسی، ممکن است محاسبه عناصر تانسور لختی در چنین دستگاهی همیشه آسان نباشد. بنابراین، یک دسته محور مختصات دیگر، مانند  $X_i$ ، را در نظر می‌گیریم، که آنها هم‌نسبت به جسم ثابت‌اند و سمتگیریشان همان سمتگیری محورهای  $x_i$  است؛ ولی مبدأ



شکل ۴.۱۰

آنها در  $Q$  قرار دارد که بر مبدأ  $O$  (واقع در مرکز جرم دستگاه مختصات جسمی) منطبق نیست. مبدأ  $Q$  ممکن است در داخل یا خارج جسم مورد بررسی قرار داشته باشد. عناصر تانسور لختی نسبت به محورهای  $X_i$  عبارت خواهند بود از

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k X_{\alpha,k}^2 - X_{\alpha,i} X_{\alpha,j} \right] \quad (۴۳.۱۰)$$

اگر برداری که  $Q$  را به  $O$  وصل می‌کند  $a$  باشد، در این صورت بردار کلی  $R$  (شکل ۴.۱۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$R = a + r \quad (۴۴.۱۰)$$

که مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از

$$X_i = a_i + x_i \quad (۴۵.۱۰)$$

با استفاده از معادله (۴۵.۱۰)، عنصر تانسور  $J_{ij}$ ، چنین می‌شود

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k (x_{\alpha,k} + a_k)^2 - (x_{\alpha,i} + a_i)(x_{\alpha,j} + a_j) \right]$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^y - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k (2x_{\alpha,k} a_k + a_k^y) - (a_i x_{\alpha,j} + a_j x_{\alpha,i} + a_i a_j) \right] \quad (۴۶.۱۰)$$

پس از برابر نهادن مجموعیابی اول با  $I_{ij}$ ، و دسته‌بندی مجدد، داریم

$$J_{ij} = I_{ij} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k a_k^y - a_i a_j \right] + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ 2\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k} a_k - a_i x_{\alpha,j} - a_j x_{\alpha,i} \right] \quad (۴۷.۱۰)$$

اما هر یک از جملات مجموعیابی آخری شامل جمعی به شکل زیر است

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,k}$$

اما، می‌دانیم که چون  $O$  در مرکز جرم قرار گرفته است، داریم

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = 0$$

و یا، برای مؤلفه  $k$ ام آن، خواهیم داشت

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,k} = 0$$

بنابراین، تمام جملاتی از این دست، در معادله (۴۷.۱۰) صفر می‌شوند، و داریم

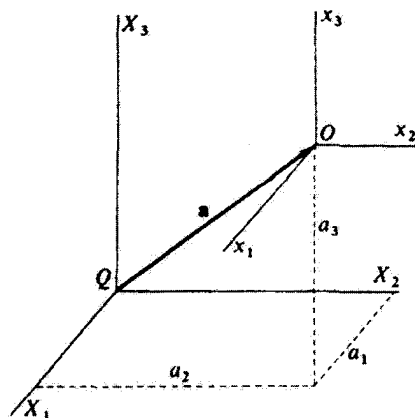
$$J_{ij} = I_{ij} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \delta_{ij} \sum_k a_k^y - a_i a_j \right] \quad (۴۸.۱۰)$$

اما

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} = M \quad , \quad \sum_k a_k^y \equiv a^y$$

از حل معادله (۴۸.۱۰) برحسب  $I_{ij}$ ، خواهیم داشت

$$\boxed{I_{ij} = J_{ij} - M[a^y \delta_{ij} - a_i a_j]} \quad (۴۹.۱۰)$$



شکل ۵.۱۰

همین که عناصر  $I_{ij}$  متعلق به تانسور لختی مطلوب (که مبدأ آن در مرکز جرم واقع است) نسبت به محورهای  $X_i$  معلوم شوند، معادله بالا محاسبه این عناصر را مجاز می‌دارد. جمله دوم سمت راست معادله (۴۹.۱۰)، تانسور لختی مربوط به یک جرم نقطه‌ای  $M$  نسبت به مبدأ  $Q$  است. معادله (۴۹.۱۰) شکل کلی قضیه محوره‌های موازی اشتاینر است<sup>۱</sup>، که شکل ساده آن در بررسیهای مقدماتی ارائه شده است. مثلاً، شکل ۵.۱۰ را در نظر بگیرید. عناصر  $I_{11}$  آن عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} I_{11} &= J_{11} - M[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2]\delta_{11} - a_1^2 \\ &= J_{11} - M(a_2^2 + a_3^2) \end{aligned}$$

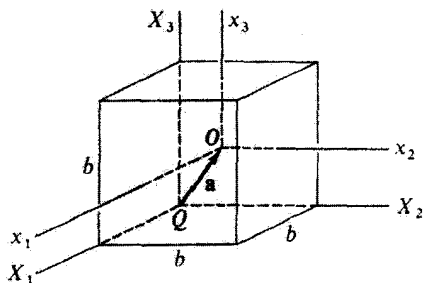
که بنا بر آن، اختلاف بین عناصر برابر است با حاصلضرب جرم در مجذور فاصله بین دو محور موازی (در این حالت، فاصله بین محورهای  $X_1$  و  $x_1$ ).

### مثال ۴.۱۰

تانسور لختی مکعب مثال ۱.۱۰ را در دستگاه مختصاتی بیابید که مبدأ آن در مرکز جرم واقع است.

حل: در مثال ۱.۱۰، دیدیم که وقتی مبدأ در رأس مکعب قرار گرفته باشد، تانسور لختی به صورت زیر خواهد بود

1. Jacob Steiner (1796-1863)



شکل ۶.۱۰

$$\{J\} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{3}Mb^2 \\ -\frac{1}{3}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 & -\frac{1}{3}Mb^2 \\ -\frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{3}Mb^2 & \frac{2}{3}Mb^2 \end{Bmatrix} \quad (50.10)$$

حال می‌توان برای به دست آوردن تانسور لختی  $\{I\}$ ، وابسته به دستگاه مختصاتی که مبدأ آن در مرکز جرم واقع است، از معادله (۴۹.۱۰) بهره گرفت. برای حفظ نمادگذاری این بخش، محورها را جدید با مبدأ  $O$  را  $x_i$  و محورها را سابق با مبدأ  $Q$  واقع در یکی از راسهای مکعب را  $X_i$  می‌نامیم. (شکل ۶.۱۰). مرکز جرم مکعب در دستگاه مختصات  $X_i$  در نقطه  $(b/2, b/2, b/2)$  واقع است، و بنابراین مؤلفه‌های بردار  $a$  عبارت‌اند از

$$a_1 = a_2 = a_3 = b/2$$

از معادله (۵۰.۱۰) داریم

$$\left. \begin{aligned} J_{11} &= J_{22} = J_{33} = \frac{2}{3}Mb^2 \\ J_{12} &= J_{13} = J_{23} = -\frac{1}{3}Mb^2 \end{aligned} \right\}$$

و پس از به‌کارگیری معادله (۴۹.۱۰)، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} I_{11} &= J_{11} - M[a_1^2 - a_1^2] \\ &= J_{11} - M[a_1^2 + a_1^2] \\ &= \frac{2}{3}Mb^2 - \frac{1}{2}Mb^2 = \frac{1}{6}Mb^2 \end{aligned}$$

$$I_{12} = J_{12} - M[-a_1 a_2]$$

$$= -\frac{1}{4}Mb^2 + \frac{1}{4}Mb^2 = 0$$

رویه‌مرفته، داریم

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{1}{6}Mb^2$$

$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$$

بنابراین تانسور لختی قطری است

$$\{I\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{6}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}Mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}Mb^2 \end{array} \right\} \quad (51.10)$$

اگر از جمله مشترک  $\frac{1}{6}Mb^2$  در این عبارت فاکتور بگیریم، می‌توانیم بنویسیم

$$\{I\} = \frac{1}{6}Mb^2 \{1\} \quad (52.10)$$

که در اینجا  $\{1\}$  تانسور یکه است

$$\{1\} \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \quad (53.10)$$

بدینسان پی می‌بریم که، اگر مرکز جرم مکعب را مبدأ اختیار کنیم، محورهای اصلی بر وجوه مکعب عمودند. زیرا از دیدگاه فیزیکی هیچ چیز این بردارها را از همدیگر متمایز نمی‌کند، در این حالت، گشتاورهای لختی اصلی نیز جملگی باهم برابرند. علاوه بر آن، متوجه می‌شویم که تا وقتی مبدأ را در مرکز جرم نگاه داریم، تانسور لختی به‌ازای هر سمتگیری محورهای مختصات یکسان است و این محورها به‌همان ترتیب محورهای اصلی معتبرند.<sup>۱</sup>

### ۶.۱۰ سایر خواص تانسور لختی

قبل از اینکه از طریق دستیابی به معادلات کلی حرکت به مسئله دینامیک جسم صلب بپردازیم، باید اهمیت اساسی برخی از عملیاتی را بررسی کنیم که مورد بحث قرار دادیم. این کار را با مطالعه

۱. در این زمینه، تا وقتی که تانسور لختی را در نظر داریم، مکعب به‌کره شبیه است؛ یعنی، اگر مبدأ در مرکز جرم قرار گیرد، ساختار تانسور لختی به قدر کافی شامل جزئیات نمی‌شود که بین یک مکعب و یک کره تفاوت بگذارد.



خواص تانسور لختی تحت تبدیلات مختصات شروع می‌کنیم.<sup>۱</sup> ما هم‌اکنون به رابطه‌ای بنیادی دست‌یافته‌ایم که تانسور لختی و بردارهای تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای را به یکدیگر ربط می‌دهد [معادله (۲۰.۱۰)]، که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$L_k = \sum_l I_{kl} \omega_l \quad (\text{الف } ۵۴.۱۰)$$

از آنجا که این رابطه یک معادله برداری است، در یک دستگاه مختصات چرخیده نسبت به دستگاه مختصاتی که در آن معادله (۵۴.۱۰) صادق است، باید رابطه کلاً مشابهی داشته باشیم

$$L'_i = \sum_j I'_{ij} \omega'_j \quad (\text{ب } ۵۴.۱۰)$$

که در اینجا کمیت‌های پریم‌دار جملگی به دستگاه مختصات چرخیده برمی‌گردند. هم  $L$  و هم  $\omega$  از معادله تبدیل متعارف بردارها پیروی می‌کنند [معادله (۸.۱)]

$$x_i = \sum_j \lambda_{ij}^t x'_j = \sum_j \lambda_{ji} x'_j$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$L_k = \sum_m \lambda_{mk} L'_m \quad (\text{الف } ۵۵.۱۰)$$

و

$$\omega_l = \sum_j \lambda_{jl} \omega'_j \quad (\text{ب } ۵۵.۱۰)$$

اگر معادلات (۵۵.۱۰) را در معادله (۵۴.۱۰) بنشانیم، خواهیم داشت

$$\sum_m \lambda_{mk} L'_m = \sum_l I_{kl} \sum_j \lambda_{jl} \omega'_j \quad (۵۶.۱۰)$$

سپس دو طرف این معادله را در  $\lambda_{ik}$  ضرب و روی  $k$  جمع می‌کنیم

$$\sum_m \left( \sum_k \lambda_{ik} \lambda_{mk} \right) L'_m = \sum_j \left( \sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \right) \omega'_j \quad (۵۷.۱۰)$$

۱. ما توجه خود را به دستگاه‌های مختصات راست‌خط محدود می‌کنیم به طوری که می‌توانیم از برخی خواص بیچیده‌تر تانسورها، که در دستگاه کلی خمیده خط پدیدار می‌شوند، چشم‌پوشیم.

جمله داخل پراتز سمت چپ همان  $\delta_{im}$  است، به طوری که پس از مجموعیابی روی  $m$  به دست می‌آوریم

$$L'_i = \sum_j \left( \sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \right) \omega'_j \quad (58.10)$$

برای اینکه این معادله با معادله (54.10) همانند باشد، باید داشته باشیم

$$I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \quad (59.10)$$

بنابراین، این رابطه قاعده‌ای است که تانسور لختی تحت تبدیل مختصات باید از آن پیروی کند. در واقع، معادله (59.10) قاعده کلی است که رفتار هر تانسور مرتبه دوم را تحت تبدیل مشخص می‌کند. در مورد تانسوری چون  $\{T\}$  با مرتبه دلخواه، قاعده چنین است<sup>۱</sup>

$$T'_{abcd\dots} = \sum_{i,j,k,l,\dots} \lambda_{ai} \lambda_{bj} \lambda_{ck} \lambda_{dl} \dots T_{ijkl\dots} \quad (60.10)$$

توجه داشته باشید که می‌توانیم معادله (59.10) را به صورت زیر بنویسیم

$$I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} I_{kl} \lambda_{lj} \quad (61.10)$$

گرچه ماتریسها و تانسورها موجودات ریاضی متمایزی‌اند، ولی دستکاری تانسورها در بسیاری از جهات به ماتریسها شبیه است. به این ترتیب، معادله (61.10) را می‌توان به صورت یک معادله ماتریسی نوشت

$$I' = \lambda I \lambda^t \quad (62.10)$$

می‌توان فهمید که  $I$  باید ماتریسی مشتمل بر عناصر تانسور  $\{I\}$  باشد. چون فقط ماتریسهای تبدیل متعامد مورد نظر ماست، ترانهادة  $\lambda$  برابر معکوس آن است، به طوری که معادله (62.10) را می‌توانیم

۱. توجه کنید که تانسور مرتبه اول به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$T'_a = \sum_i \lambda_{ai} T_i$$

چنین تانسوری در واقع یک بردار است. تانسور مرتبه صفر طلب می‌کند که  $T' = T$ ، یا اینکه چنین تانسوری یک اسکالر است. خواص کمیتهایی که بدین صورت تبدیل می‌شوند، اولین بار به وسیله نیون در ۱۸۷۴ مورد بحث قرار گرفت. سابقه به‌کارگیری اصطلاح «تانسور» برای این کمیتهها به ویلارد گیسیس برمی‌گردد.

$$\boxed{I' = \lambda I \lambda^{-1}} \quad (۶۳.۱۰)$$

هر تبدیلی از این نوع تبدیل کلی را تبدیل تشابه می‌نامیم ( $I'$  شبیه  $I$  است).

## مثال ۵.۱۰

ادعای عنوان شده در مثال ۴.۱۰ مبنی بر اینکه تانسور لختی برای یک مکعب (که مبدأ مختصات در مرکز جرم آن قرار دارد)، مستقل از سمتگیری محورهاست، را ثابت کنید.

حل: تغییر ناشی از چرخش دستگاه مختصات در تانسور لختی را می‌توان با انجام یک تبدیل تشابه محاسبه کرد. به این ترتیب، اگر چرخش به کمک ماتریس  $\lambda$  تعریف شده باشد، داریم

$$I' = \lambda I \lambda^{-1} \quad (۶۴.۱۰)$$

اما ماتریس  $I$ ، که از عناصر تانسور  $\{I\}$  استخراج شده است [معادله (۵۲.۱۰)]، دقیقاً عبارت است از حاصلضرب ماتریس همانی  $I$  ضرب در یک کمیت ثابت

$$I = \frac{1}{6} M b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} M b^2 I \quad (۶۵.۱۰)$$

بنابراین عملیات انجام شده در معادله (۶۴.۱۰) بدیهی‌اند

$$I' = \frac{1}{6} M b^2 \lambda I \lambda^{-1} = \frac{1}{6} M b^2 \lambda \lambda^{-1} I = \frac{1}{6} M b^2 I = I \quad (۶۶.۱۰)$$

از این رو تانسور لختی تبدیل یافته، مستقل از جزئیات چرخش، با تانسور اصلی همسان است. ■

می‌خواهیم تعیین کنیم چه شرایطی باید برقرار باشد که اگر یک تانسور لختی دلخواه را انتخاب کردیم و یک چرخش دستگاه مختصات روی آن انجام دادیم، تانسور لختی تبدیل یافته قطری باشد. چنین عملی حاکی از آن است که کمیت  $I'_{ij}$  در معادله (۵۹.۱۰) باید در رابطه زیر صدق کند [معادله (۳۲.۱۰)]

$$I'_{ij} = I_i \delta_{ij} \quad (۶۷.۱۰)$$

بدینسان

$$I_i \delta_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \quad (۶۸.۱۰)$$

اگر طرفین این معادله را در  $\lambda_{im}$  ضرب و روی  $i$  جمع کنیم، خواهیم داشت

$$\sum_i I_i \lambda_{im} \delta_{ij} = \sum_{k,l} \left( \sum_i \lambda_{im} \lambda_{ik} \right) \lambda_{jl} I_{kl} \quad (۶۹.۱۰)$$

عبارت داخل پرانتز همان  $\delta_{mk}$  است، به طوری که حاصل کار مجموعیابی روی  $i$  در سمت چپ معادله و روی  $k$  در سمت راست معادله برابر است با

$$I_j \lambda_{jm} = \sum_l \lambda_{jl} I_{ml} \quad (۷۰.۱۰)$$

می‌توان سمت چپ این معادله را به این صورت نوشت

$$I_j \lambda_{jm} = \sum_l I_j \lambda_{jl} \delta_{ml} \quad (۷۱.۱۰)$$

به طوری که معادله (۷۰.۱۰) چنین خواهد شد

$$\sum_l I_j \lambda_{jl} \delta_{ml} = \sum_l \lambda_{jl} I_{ml} \quad (\text{الف } ۷۲.۱۰)$$

و یا

$$\sum_l (I_{ml} - I_j \delta_{ml}) \lambda_{jl} = 0 \quad (\text{ب } ۷۲.۱۰)$$

این عبارت یک دستگاه معادلات جبری خطی چند مجهولی است؛ به ازای هر مقدار  $z$  یک دستگاه سه معادله‌ای داریم، یک معادله به ازای هر یک از سه مقدار ممکن برای  $m$ . برای اینکه جواب غیربدهی، وجود داشته باشد، باید دترمینان ضرایب صفر شود، به طوری که گشتاورهای لختی اصلی  $I_1, I_2, I_3$  و به صورت ریشه‌های معادله مشخصه دترمینان مربوط به  $I$  به دست می‌آیند

$$\boxed{|I_{ml} - I \delta_{ml}| = 0} \quad (۷۳.۱۰)$$

این معادله همان معادله (۳۹.۱۰) است؛ معادله نامبرده عبارت است از معادله درجه سومی که جوابهای آن گشتاورهای لختی اصلی هستند.

به این ترتیب، برای هر تانسور لختی، که عناصر آن برای مبدأ مختصات معینی محاسبه شده‌اند، می‌توان محورهای مختصات را چنان حول مبدأ چرخاند که تانسور لختی قطری شود. در این صورت، این محورهای مختصات جدید همان محورهای اصلی جسم هستند، و گشتاورهای جدید هم همان گشتاورهای لختی اصلی به‌شمار می‌آیند. به این ترتیب، برای هر جسمی و برای هر مبدأ، همواره یک مجموعه محور اصلی وجود دارد.

### مثال ۶.۱۰

تانسور لختی مربوط به مکعب مثال ۱.۱۰ را با چرخاندن محورهای مختصات قطری کنید.

حل: مبدأ مختصات را منطبق بر یکی از رأسهای مکعب اختیار می‌کنیم و دستگاه را چنان می‌چرخانیم که محور  $x_1$  بر قطر مکعب منطبق شود. چنین چرخشی را می‌توان به راحتی در دو مرحله انجام داد: در مرحله اول، دستگاه را به اندازه  $45^\circ$  حول محور  $x_2$  می‌چرخانیم؛ در مرحله دوم، آن را به اندازه زاویه  $\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$  حول محور  $x'_2$  دوران می‌دهیم. ماتریس دوران اول چنین است

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (74.10)$$

و ماتریس دوران دوم عبارت خواهد بود از

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix} \quad (75.10)$$

ماتریس دوران کامل به صورت زیر درمی‌آید

$$\lambda = \lambda_2 \lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (76.10)$$

شکل ماتریسی تانسور لختی تبدیل یافته [معادله (۶۲.۱۰)] عبارت است از

$$I' = \lambda I \lambda^t \quad (77.10)$$

یا، اگر از  $\beta$  در تانسور  $I$  فاکتور بگیریم

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\beta}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\beta}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{11}{12}\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{11}{12}\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{12}\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{11}{12}\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{11}{12}\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\beta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12}\beta \end{pmatrix} \quad (78.10)
 \end{aligned}$$

معادله (78.10) همان شکل ماتریسی تانسور لختی است که با روش قطری کردن و با بهره‌گیری از درمیان مشخصه به دست آمده است [معادله (41.10)].

دو روش کلی قطری کردن تانسور لختی را نشان دادیم. قبلاً خاطر نشان کرده‌ایم که این روشها منحصر به تانسور لختی نیستند بلکه به‌طور کلی برقرارند. هر یک از این دو روش ممکن است خیلی پیچیده باشد. مثلاً، اگر بخواهیم در کلیترین حالت، از روش چرخش استفاده کنیم، باید ابتدا ماتریسی را تشکیل دهیم که چرخشی اختیاری را توصیف کند. این کار مستلزم سه چرخش جداگانه است، یعنی حول هر کدام از محورهای مختصات یک چرخش. آنگاه باید این ماتریس چرخش را در یک تبدیل تشابه در مورد تانسور اعمال کرد. عناصر غیرقطری ماتریس حاصل را باید بررسی و مقدار زاویه‌های چرخش را چنان تعیین کرد که این عناصر غیرقطری صفر شوند. بهره‌گیری عملی از چنین روشی ممکن است خارج از دامنه حوصله آدمی باشد، اما در برخی موارد ساده می‌توان از این روش قطری کردن بهره گرفت. اگر شرایط هندسی مسئله مبین آن باشد که تنها یک چرخش ساده حول یکی از محورهای مختصات ضروری است، این مطلب کاملاً صادق است؛ در آن صورت زاویه چرخش را می‌توان بدون گرفتاری محاسبه کرد (مسئله‌های 16.10، 18.10، و 19.10 را ببینید).

مثال مربوط به مکعب نمایانگر این نکته مهم است که عناصر تانسور لختی، مقدارگشتاورهای لختی اصلی، و سمتگیری محورهای اصلی یک جسم صلب، به انتخاب مبدأ دستگاه مختصات بستگی دارد. ولی، به‌یاد داشته‌باشید، برای اینکه انرژی جنبشی به دو قسمت انتقالی و چرخشی

قابل تفکیک باشد، مبدأ دستگاه مختصات جسمی، به طور کلی، باید منطبق بر مرکز جرم جسم اختیار شود. از سوی دیگر، برای هر مبدأ و برای هر جسمی همواره یک سمتگیری از محورها وجود دارد که تانسور لختی را قطری می‌کند. به این ترتیب، این محورها به محورهای اصلی وابسته به آن مبدأ خاص تبدیل می‌شوند.

حال می‌خواهیم ثابت کنیم که محورهای اصلی واقعاً یک مجموعه متعامد را تشکیل می‌دهند. فرض کنید معادله مشخصه را حل و گشتاورهای لختی اصلی را، که جملگی از یکدیگر متمایزند، تعیین کرده باشیم. می‌دانیم که به ازای هر گشتاور اصلی یک محور اصلی متناظر وجود دارد؛ خاصیت این محور اصلی به این ترتیب است که، اگر بردار سرعت زاویه‌ای،  $\omega$ ، در امتداد این محور قرار گیرد، در آن صورت بردار تکانه زاویه‌ای،  $L$ ، نیز در همان راستاست؛ یعنی، به هر  $I_i$  یک سرعت زاویه‌ای  $\omega_i$ ، با مؤلفه‌های  $\omega_1$ ،  $\omega_2$ ، و  $\omega_3$ ، وابسته است. (از یک شاخص زیرین برای بردار  $\omega$  و از شاخص زیرین دومی برای مؤلفه‌های  $\omega$  بهره گرفتیم، که گشتاور اصلی مورد نظر را مشخص کنیم.) برای گشتاور اصلی  $m$  داریم

$$L_{im} = I_m \omega_{im} \quad (۷۹.۱۰)$$

برحسب عناصر تانسور گشتاور لختی نیز داریم

$$L_{im} = \sum_k I_{ik} \omega_{km} \quad (۸۰.۱۰)$$

از ترکیب این دو رابطه، خواهیم داشت

$$\sum_k I_{ik} \omega_{km} = I_m \omega_{im} \quad (۸۱.۱۰ الف)$$

به همین ترتیب، در مورد گشتاور اصلی  $n$  می‌توان نوشت

$$\sum_i I_{ki} \omega_{in} = I_n \omega_{kn} \quad (۸۱.۱۰ ب)$$

اگر معادله (۸۱.۱۰ الف) را در  $\omega_{in}$  ضرب و روی  $i$  جمع کنیم، آنگاه معادله (۸۱.۱۰ ب) را در  $\omega_{km}$  ضرب و روی  $k$  جمع می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i,k} I_{ik} \omega_{km} \omega_{in} &= \sum_i I_m \omega_{im} \omega_{in} \\ \sum_{i,k} I_{ki} \omega_{in} \omega_{km} &= \sum_k I_n \omega_{kn} \omega_{km} \end{aligned} \right\} \quad (۸۲.۱۰)$$

سمت چپ این معادلات یکسان است، زیرا تانسور لختی متقارن است ( $I_{ik} = I_{ki}$ ). بنابراین، پس از کم کردن معادله دوم از معادله اول، داریم

$$I_m \sum_i \omega_{im} \omega_{in} - I_n \sum_k \omega_{km} \omega_{kn} = 0 \quad (۸۳.۱۰)$$

چون  $i$  و  $k$  هر دو شاخصهای زیرین بی نقش اند، می توانیم آنها را، مثلاً با  $l$  جایگزین کنیم و برسیم به

$$(I_m - I_n) \sum_l \omega_{lm} \omega_{ln} = 0 \quad (۸۴.۱۰)$$

اما بنابر فرض گشتاورهای اصلی متمایزند، به طوری که  $I_m \neq I_n$ . بنابراین معادله (۸۴.۱۰) تنها در صورتی برقرار است که

$$\sum_l \omega_{lm} \omega_{ln} = 0 \quad (۸۵.۱۰)$$

اما این مجموعیابی همان تعریف حاصلضرب اسکالر بردارهای  $\omega_m$  و  $\omega_n$  است. از اینجا

$$\omega_m \cdot \omega_n = 0 \quad (۸۶.۱۰)$$

چون گشتاورهای اصلی  $I_m$  و  $I_n$  از مجموعه سه گشتاوری به دلخواه انتخاب شده بودند، نتیجه می گیریم که هر زوج از محورهای اصلی بر هم عمودند؛ بنابراین سه محور اصلی یک مجموعه متعامد تشکیل می دهند.

اگر ریشه مضاعف برای معادله مشخصه وجود داشته باشد، به طوری که گشتاورهای اصلی عبارت باشند از  $I_1$  و  $I_2 = I_3$ ، در این صورت تحلیل قبل نشان می دهد که بردارهای سرعت زاویه ای در روابط زیر صدق می کنند

$$\omega_1 \perp \omega_2, \quad \omega_1 \perp \omega_3$$

اما درباره زاویه بین  $\omega_2$  و  $\omega_3$  نمی توان مطلبی را عنوان کرد. ولی این واقعیت که  $I_2 = I_3$ ، بر این نکته دلالت می کند که جسم دارای یک محور تقارن است. بنابراین،  $\omega_1$  در امتداد محور تقارن قرار می گیرد، و تنها لازمست که  $\omega_2$  و  $\omega_3$  در صفحه عمود بر  $\omega_1$  واقع شوند. در نتیجه با انتخاب  $\omega_2 \perp \omega_3$  از کلیت مسئله کاسته نمی شود. به این ترتیب، محورهای اصلی هر جسم صلب بایک محور تقارن را نیز می توان به صورت یک مجموعه متعامد انتخاب کرد.



قبلاً نشان داده‌ایم که گشتاورهای لختی اصلی به صورت ریشه‌های معادله مشخصه — معادله‌ای درجه سوم — به دست آمده‌اند. از نظر ریاضی، دست‌کم یکی از ریشه‌های معادله درجه سوم باید حقیقی باشد، اما ممکن است دو ریشه موهومی هم وجود داشته باشد. اگر قرار است که فرایند قطری کردن تانسور لختی از نظر فیزیکی معنا پیدا کند، در آن صورت باید همواره برای گشتاورهای اصلی مقادیر حقیقی به دست آوریم. به طریق زیر می‌توانیم نشان دهیم که این یک نتیجه کلی است. ابتدا فرض می‌کنیم که ریشه‌ها مختلط باشند و از روشی مشابه آنچه در اثبات قبلی به کار رفت استفاده می‌کنیم. ولی حالا باید در نظر بگیریم که کمیت‌های  $\omega_{km}$  هم ممکن است مختلط باشند. هیچ دلیل ریاضی برخلاف این مطلب وجود ندارد، و ما هم نسبت به تعبیر فیزیکی برای این کمیت‌ها هیچگونه نگرانی نداریم. بنابراین، معادله (۸۱.۱۰) را مانند قبل می‌نویسیم، ولی در مورد معادله (۸۱.۱۰) ب) مزدوج مختلط آن را اختیار می‌کنیم

$$\left. \begin{aligned} \sum_k I_{ik} \omega_{km} &= I_m \omega_{im} \\ \sum_i I_{ki}^* \omega_{in}^* &= I_n^* \omega_{kn}^* \end{aligned} \right\} \quad (87.10)$$

حال معادله اول را در  $\omega_{in}^*$  ضرب می‌کنیم و روی  $i$  جمع می‌بندیم و معادله دوم را در  $\omega_{km}$  ضرب می‌کنیم و روی  $k$  جمع می‌بندیم. تانسور لختی متقارن است، و عناصر آن حقیقی‌اند، به طوری که  $I_{ik} = I_{ki}^*$ . بنابراین، باکم کردن معادله دومی از معادله اولی، خواهیم یافت

$$(I_m - I_n^*) \sum_i \omega_{im} \omega_{in}^* = 0 \quad (88.10)$$

برای حالت  $m = n$  داریم

$$(I_m - I_m^*) \sum_i \omega_{im} \omega_{im}^* = 0 \quad (89.10)$$

حاصل جمع همان تعریف حاصلضرب اسکالر  $\omega_m$  و  $\omega_m^*$  است

$$\omega_m \cdot \omega_m^* = |\omega_m|^2 \geq 0 \quad (90.10)$$

بنابراین، از آنجا که مجذور مقدار  $\omega_m$  به طور کلی مثبت است، برای اینکه معادله (۸۹.۱۰) برقرار باشد باید داشته باشیم:  $I_m = I_m^*$ . اگر یک کمیت و مزدوج مختلط آن باهم برابر باشند، در آن صورت جزء موهومی آنها باید برابر صفر باشد. به این ترتیب گشتاورهای لختی اصلی جملگی حقیقی‌اند. چون  $\{I\}$  حقیقی است، بردارهای  $\omega_m$  هم باید حقیقی باشند.

در معادله (۸۸.۱۰) اگر  $m \neq n$  و اگر  $I_m \neq I_n$ ، پس معادله فقط وقتی می‌تواند برقرار باشد که  $\omega_m \cdot \omega_n = 0$ ، یعنی، مانند قبل، بردارها متعامدند.

در تمام استدلالهای عنوان شده در این بخش، به تانسور لختی رجوع کرده‌ایم. ولی واریسی این استدلالها روشن می‌کند که تنها خواصی از تانسور لختی که واقعاً مورد استفاده قرار گرفته‌اند عبارت‌اند از این واقعیت که تانسور متقارن است و عناصر آن حقیقی‌اند. بنابراین، می‌توانیم نتیجه بگیریم که هر تانسور حقیقی، متقارن دارای خواص زیر است:<sup>۱</sup>

۱. قطری کردن را می‌توان با چرخش مناسب محورها، یعنی، یک تبدیل تشابه، انجام داد.
۲. ویژه‌مقدارها<sup>۲</sup> به صورت ریشه‌های دترمینان مشخصه به دست می‌آیند، و حقیقی‌اند.
۳. ویژه بردارها<sup>۲</sup> حقیقی و متعامدند.

### ۷.۱۰ زاویه‌های اویلر

تبدیل از یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگر را می‌توان به کمک یک معادله ماتریسی به شکل زیر نمایش داد

$$x = \lambda x'$$

اگر دستگاه ثابت را با  $x'$  و دستگاه جسمی را با  $x$  مشخص کنیم، در آن صورت ماتریس چرخش  $\lambda$  سمتگیری دو دستگاه را نسبت به هم به طور کامل توصیف می‌کند. ماتریس چرخش  $\lambda$  شامل سه زاویه مستقل است. انتخاب این زاویه‌ها از راههای گوناگون میسر است؛ پی می‌بریم که استفاده از زاویه‌های اویلر  $\varphi$ ،  $\theta$ ، و  $\psi$  مناسب است.<sup>۳</sup>

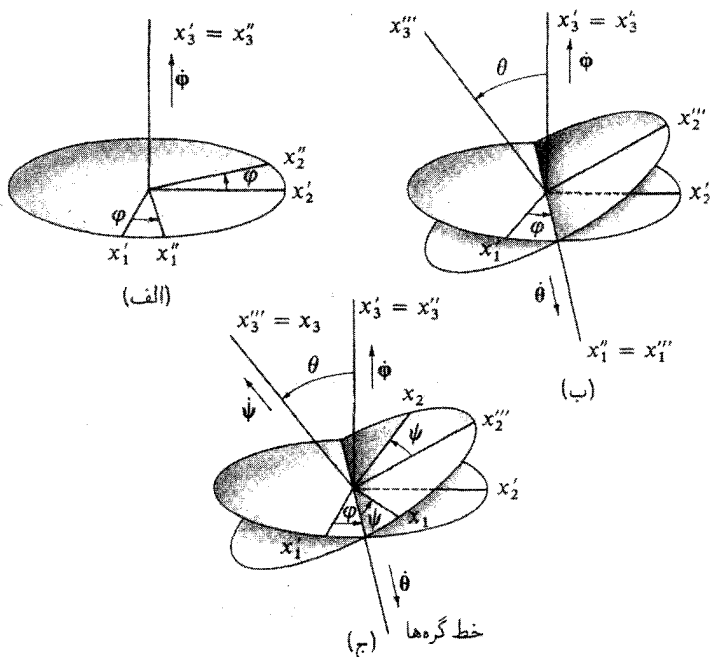
زاویه‌های اویلر در سلسله چرخشهای زیر، که دستگاه  $x'_i$  را به دستگاه  $x_i$  می‌برد، به وجود می‌آیند:<sup>۴</sup>

۱. با بیان دقیقتر، فقط ضروری است که عناصر تانسور از رابطه  $I_{ik} = I_{ki}^*$  پیروی کنند؛ به این ترتیب، وجود کمیت‌های مختلط رانیز مجاز می‌کنیم. به تانسورها (و ماتریسها)یی که چنین خاصیتی دارند هرمیتی می‌گوییم.

۲. «ویژه‌مقدارها» و «ویژه‌بردارها» نام عام (یا کلی) این کمیتها هستند، که در مورد تانسور لختی، به ترتیب، همان گشتاورهای اصلی و محورهای اصلی به شمار می‌آیند. ما مجدداً با این اصطلاحها در مبحث نوسانهای کم دامنه، فصل ۱۱، برخورد خواهیم کرد.

۳. طرح کلی چرخش اویلر اولین بار در ۱۷۷۶ منتشر شد.

۴. در خصوص نشانه‌گذاری زاویه‌های اویلر و حتی در مورد چگونگی به وجود آمدن آنها یک توافق همگانی وجود ندارد. بنابراین، در مقایسه نتایج به دست آمده از منابع گوناگون، باید دقت بیشتری مبذول داشت. نمادگذاری مورد استفاده در اینجا همان نمادگذاری متعارف موجود در کتابهای جدید است.



شکل ۷.۱۰

۱. چرخش اول یک چرخش پادساعتگرد به اندازه زاویه  $\varphi$  حول محور  $x_1'$  است [شکل ۷.۱۰ (الف)] که  $x_1'$  را به  $x_1''$  تبدیل می‌کند. چون چرخش در صفحه  $x_1'x_2'$  صورت می‌گیرد، ماتریس تبدیل چنین است

$$\lambda_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (91.10)$$

و

$$x'' = \lambda_\varphi x' \quad (92.10)$$

۲. چرخش دوم یک چرخش پادساعتگرد به اندازه زاویه  $\theta$  حول محور  $x_2''$  است [شکل ۷.۱۰ (ب)] که  $x_2''$  را به  $x_2'$  تبدیل می‌کند. حال چون چرخش در صفحه  $x_2''x_3''$  انجام می‌شود،

$$\lambda_{\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (93.10)$$

و

$$\mathbf{x}''' = \lambda_{\theta} \mathbf{x}'' \quad (94.10)$$

۳. چرخش سوم به اندازه زاویه  $\psi$  حول محور  $x_3'''$  پادساعتگرد است [شکل ۷.۱۰ (ج)] که  $x_3''$  را به  $x_3'$  تبدیل می‌کند. ماتریس تبدیل عبارت است از

$$\lambda_{\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (95.10)$$

و

$$\mathbf{x} = \lambda_{\psi} \mathbf{x}''' \quad (96.10)$$

فصل مشترک صفحاتی را که شامل محورهای  $x_1$  و  $x_2$  و محورهای  $x_1'$  و  $x_2'$  اند، خط گره‌ها می‌نامیم. تبدیل کامل از سیستم  $x_3'$  به سیستم  $x_3$  با رابطه زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lambda_{\psi} \mathbf{x}''' = \lambda_{\psi} \lambda_{\theta} \mathbf{x}'' \\ &= \lambda_{\psi} \lambda_{\theta} \lambda_{\varphi} \mathbf{x}' \end{aligned} \quad (97.10)$$

و ماتریس چرخش  $\lambda$  به این قرار است

$$\lambda = \lambda_{\psi} \lambda_{\theta} \lambda_{\varphi} \quad (98.10)$$

مؤلفه‌های این ماتریس عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi \\
 \lambda_{21} &= -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi \\
 \lambda_{31} &= \sin \theta \sin \varphi \\
 \lambda_{12} &= \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi \\
 \lambda_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi \\
 \lambda_{32} &= -\sin \theta \cos \varphi \\
 \lambda_{13} &= \sin \psi \sin \theta \\
 \lambda_{23} &= \cos \psi \sin \theta \\
 \lambda_{33} &= \cos \theta
 \end{aligned} \right\} (99.10)$$

(در معادله پیشین مؤلفه‌های  $\lambda_{ij}$  نوشته شدند تا بر تجسم ماتریس کامل  $\lambda$  تأکید کرده باشیم.) چون می‌توانیم به هر چرخش بینهایت کوچک یک بردار نسبت دهیم می‌توانیم مشتق زمانی این زاویه‌های چرخش را به مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای  $\omega$  مربوط کنیم. به این ترتیب

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_\varphi &= \dot{\varphi} \\
 \omega_\theta &= \dot{\theta} \\
 \omega_\psi &= \dot{\psi}
 \end{aligned} \right\} (100.10)$$

بیان معادلات حرکت جسم صلب در دستگاه مختصات جسمی (یعنی، در دستگاه  $x_i$ ) بسیار مناسب است، و بنابراین باید مؤلفه‌های  $\omega$  را در این دستگاه بیان کنیم. توجه داریم که در شکل ۷.۱۰ سرعت‌های زاویه‌ای  $\dot{\varphi}$ ،  $\dot{\theta}$ ،  $\dot{\psi}$  در امتداد محورهای زیر قرار می‌گیرند

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi} & \text{ در امتداد محور } x_1 \text{ (ثابت)} \\
 \dot{\theta} & \text{ در امتداد خط گره‌ها} \\
 \dot{\psi} & \text{ در امتداد محور } x_3 \text{ (جسم)}
 \end{aligned}$$

مؤلفه‌های این سرعت‌های زاویه‌ای در امتداد محورهای مختصات جسمی عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\varphi}_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\
 \dot{\varphi}_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\
 \dot{\varphi}_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta
 \end{aligned} \right\} (101.10 \text{ الف})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\theta}_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\theta}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (ب \ ۱۰۱.۱۰)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0 \\ \dot{\psi}_2 &= 0 \\ \dot{\psi}_3 &= \dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (ج \ ۱۰۱.۱۰)$$

سرانجام، با جمع‌آوری تک‌تک مؤلفه‌های  $\omega$ ، به‌این نتیجه می‌رسیم:

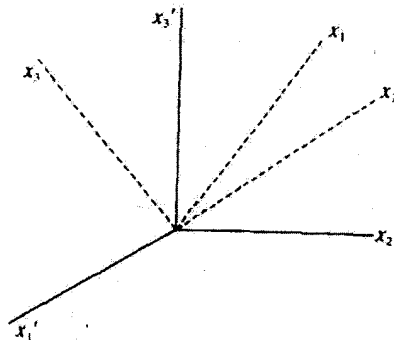
$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (۱۰۲.۱۰)$$

از این روابط بعداً در بیان مؤلفه‌های تکانه زاویه‌ای در دستگاه مختصات جسمی بهره خواهیم برد.

### مثال ۷.۱۰

با استفاده از زاویه‌های اولر، تبدیلی را پیدا کنید که محور اصلی  $x'_1$  را به صفحه  $x'_2-x'_3$  و وسط  $x'_2$  و  $x'_3$  ببرد و  $x'_1$  را عمود بر صفحه  $x'_2-x'_3$  قرار دهد (شکل ۸.۱۰).

حل: کلید مربوط به تبدیلات با استفاده از زوایای اولر عبارت است از همان چرخش دوم حول خط گره‌ها، زیرا این چرخش به تنهایی باید  $x'_1$  را به  $x'_3$  منتقل کند. با توجه به صورت مسئله،  $x_3$



شکل ۸.۱۰

باید در صفحه  $x'_1-x'_2$  واقع باشد، که نسبت به  $x'_2$  به اندازه  $45^\circ$  چرخیده است. چرخش اول باید  $x'_1$  را به  $x''_1$  منتقل کند که برای چرخاندن  $x'_2 = x''_2$  به  $x_2 = x''_2$  موضع صحیح را داشته باشد. در این حالت،  $x'_2 = x''_2$  به اندازه  $\theta = 45^\circ$  حول محور  $x'_1 = x''_1$  اصلی چرخیده است، به طوری که  $\varphi = 0^\circ$  و

$$\lambda_\varphi = 1 \quad (103.10)$$

$$\lambda_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (104.10)$$

چرخش آخری،  $\psi = 90^\circ$ ،  $x'_1 = x''_1 = x'''_1$  را به  $x_1$  به وضعیت مطلوب در صفحه  $x'_1-x'_2$  اصلی منتقل می‌کند

$$\lambda_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (105.10)$$

ماتریس تبدیل  $\lambda$  عبارت است از،  $\lambda = \lambda_\psi \lambda_\theta \lambda_\varphi = \lambda_\psi \lambda_\theta$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (106.10)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

مقایسه مستقیم بین محورهای  $x_i$  و  $x'_i$  نشان می‌دهد که  $\lambda$  نمایشگر تک چرخشی است که تبدیل را توصیف می‌کند.

## ۸.۱۰ معادلات اویلر برای جسم صلب

ابتدا حرکت جسم صلب را در حالتی بررسی می‌کنیم که نیرویی بر آن وارد نیاید. در این مورد، انرژی پتانسیل  $U$  صفر می‌شود و لاگرانژی  $L$  با انرژی جنبشی چرخشی  $T$  یکسان می‌شود. اگر محورهای  $x_i$  را چنان اختیار کنیم که بامحورهای اصلی جسم متناظر باشند، در آن صورت از معادله (۳۵.۱۰) داریم

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad (۱۰۷.۱۰)$$

اگر زوایه‌های اویلر را به‌عنوان مختصات تعمیم‌یافته اختیار کنیم، در آن صورت معادله لاگرانژ برای مختصه  $\psi$  عبارت خواهد بود از

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad (۱۰۸.۱۰)$$

که می‌توان آن را به‌صورت زیر بیان کرد

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad (۱۰۹.۱۰)$$

اگر از مؤلفه‌های بردار  $\omega$  [معادله (۱۰۲.۱۰)] نسبت به  $\psi$  و  $\dot{\psi}$  مشتق بگیریم، داریم

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi = \omega_2 \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} &= -\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi = -\omega_1 \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (۱۱۰.۱۰)$$

و

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial \psi} = 0 \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \psi} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (۱۱۱.۱۰)$$

همچنین از معادله (۱۰۷.۱۰) داریم

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = I_i \omega_i \quad (۱۱۲.۱۰)$$

۱. چون در این حرکت نیرویی درکار نیست، انرژی جنبشی انتقالی برای منظور ما در اینجا بی‌اهمیت است. (همواره می‌توانیم به دستگاه مختصاتی برویم که در آن مرکز جرم جسم ثابت است.)



بنابراین، معادله (۱۰۹.۱۰) چنین می‌شود

$$I_1 \omega_1 \omega_2 + I_2 \omega_2 (-\omega_1) - \frac{d}{dt}(I_2 \omega_2) = 0$$

یا

$$(I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 - I_2 \dot{\omega}_2 = 0 \quad (113.10)$$

چون نشانگذاری هر محور اصلی خاص به‌عنوان محور  $x_2$  کلاً اختیاری است، با جایگشت شاخصهای زیرین در معادله (۱۱۳.۱۰)، می‌توان روابط مربوط به  $\omega_1$  و  $\omega_2$  را به‌دست آورد

$$\left. \begin{aligned} (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 - I_1 \dot{\omega}_1 &= 0 \\ (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 - I_2 \dot{\omega}_2 &= 0 \\ (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 - I_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (114.10)$$

معادلات (۱۱۴.۱۰) را معادلات اویلر برای حرکت بدون نیرو می‌نامند.<sup>۱</sup> باید توجه داشت که هر چند معادله (۱۱۳.۱۰) برای  $\omega_2$  واقعاً معادله لاگرانژ برحسب مختصه  $\varphi$  است، معادلات اویلر مربوط به  $\omega_1$  و  $\omega_2$  معادلات لاگرانژ برای  $\theta$  و  $\varphi$  به‌شمار نمی‌آیند.

برای به‌دست آوردن معادلات اویلر مربوط به حرکت در یک میدان نیرو، می‌توانیم بررسی خود را از معادله اساسی مربوط به گشتاور نیروی  $\mathbf{N}$  شروع کنیم [معادله (۸۳.۲)]

$$\left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{\text{ثابت}} = \mathbf{N} \quad (115.10)$$

در اینجا اندیس «ثابت» به‌این علت صراحتاً به  $\dot{\mathbf{L}}$  ضمیمه شده‌است که این رابطه از معادله نیوتون استخراج شده است و بنابراین فقط در یک چارچوب مرجع لخت برقرار است. از معادله (۱۲.۹) داریم

$$\left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{\text{ثابت}} = \left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{\text{جسم}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad (116.10)$$

یا

$$\left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{\text{جسم}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N} \quad (117.10)$$

مؤلفه این معادله در امتداد محور  $x_3$  (توجه داشته باشید که این یک محور مربوط به جسم است) عبارت خواهد بود از

$$\dot{L}_3 + \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 = N_3 \quad (118.10)$$

اما چون محورهای  $x_i$  را منطبق بر محورهای اصلی جسم اختیار کرده‌ایم، از معادله (۳۴.۱۰)، داریم

$$L_i = I_i \omega_i$$

به طوری که

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = N_3 \quad (119.10)$$

با جایگشت شاخصهای زیرین، می‌توانیم همه مؤلفه‌های  $N$  را بنویسیم

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= N_3 \end{aligned} \right\} \quad (120.10)$$

با استفاده از نماد مربوط به جایگشتها، به طور کلی می‌توانیم بنویسیم

$$(I_i - I_j) \omega_i \omega_j - \sum_k (I_k \dot{\omega}_k - N_k) \varepsilon_{ijk} = 0 \quad (121.10)$$

معادلات (۱۲۰.۱۰) و (۱۲۱.۱۰) عبارت‌اند از معادلات اویلر مطلوب برای حرکت یک جسم صلب در یک میدان نیرو.

حرکت هر جسم صلب فقط از طریق سه عدد  $I_1$ ،  $I_2$ ، و  $I_3$ ، یعنی گشتاورهای لختی اصلی، به ساختار جسم بستگی دارد. به این ترتیب، هر دو جسمی که گشتاورهای اصلی یکسانی دارند، بدون توجه به این واقعیت که ممکن است دارای شکلهای کاملاً متفاوتی باشند، دقیقاً به طور یکسان حرکت می‌کنند. (البته، ممکن است آثاری چون پس‌افت اصطکاکی به شکل جسم بستگی داشته باشد). ساده‌ترین شکل هندسی که هر جسم ممکن است با سه گشتاور اصلی معلوم داشته باشد، یک بیضیوار همگن است. بنابراین، حرکت هر جسم صلب را می‌توان با حرکت بیضیوار معادل نمایش داد.<sup>۱</sup> بررسی دینامیک جسم صلب از این دیدگاه در سال ۱۸۳۴ توسط پوانسو ابداع شد.

۱. بیضیوار گشتاوری را بارون آگوستین لویی کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) ریاضیدان فرانسوی در ۱۸۲۷ به این مبحث مکانیک وارد کرد.

ترسیم پوانسو گاهگاهی برای نمایش شکل هندسی حرکت جسم صلب مناسب است.<sup>۱</sup>

### مثال ۸.۱۰

دمبلی را که در بخش ۳.۱۰ مطرح شد، در نظر بگیرید. تکانه زاویه‌ای سیستم و گشتاور نیروی لازم برای برقراری حرکت نموده شده در شکل‌های ۲.۱۰ و ۹.۱۰ را پیدا کنید.

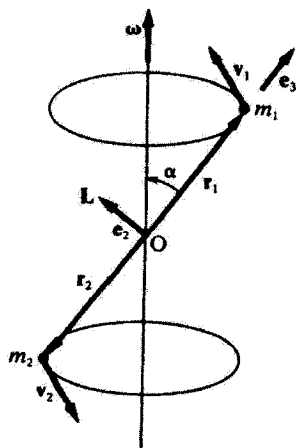
حل: فرض کنید  $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| = b$ . نیز فرض کنید مبدأ دستگاه مختصات ثابت جسمی در  $O$  قرار داشته باشد، و محور تقارن  $x_3$  در امتداد میله بی‌وزن دمبرل به سوی  $m_1$  باشد.

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha} \quad (۱۲۲.۱۰)$$

چون  $\mathbf{L}$  عمود بر میله است و با چرخش میله  $\mathbf{L}$  حول  $\omega$  می‌چرخد، فرض کنید که  $\mathbf{e}_2$  در امتداد  $\mathbf{L}$  واقع باشد

$$\mathbf{L} = L_2 \mathbf{e}_2 \quad (۱۲۳.۱۰)$$

اگر زاویه بین  $\omega$  و میله  $\alpha$  باشد، مؤلفه‌های  $\omega$  عبارت‌اند از



شکل ۹.۱۰

۱. مثلاً گلداشتاین (Go80, p 205) را ببینید.

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 0 \\ \omega_2 &= \omega \sin \alpha \\ \omega_3 &= \omega \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (124.10)$$

محورهای اصلی عبارت‌اند از  $x_1, x_2, x_3$  و گشتاورهای لختی اصلی، از معادله (۱۳.۱۰ الف)، عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (m_1 + m_2)b^2 \\ I_2 &= (m_1 + m_2)b^2 \\ I_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (125.10)$$

از ترکیب معادلات (۱۲۴.۱۰) و (۱۲۵.۱۰) داریم

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= I_1 \omega_1 = 0 \\ L_2 &= I_2 \omega_2 = (m_1 + m_2)b^2 \omega \sin \alpha \\ L_3 &= I_3 \omega_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (126.10)$$

که با معادله (۱۲۳.۱۰) سازگار است.

با استفاده از معادلات اوپلر [معادله (۱۲۰.۱۰)] و  $\dot{\omega} = 0$ ، مؤلفه‌های گشتاور نیرو عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -(m_1 + m_2)b^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ N_2 &= 0 \\ N_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (127.10)$$

■ اگر  $\dot{\omega} = 0$ ، گشتاور نیروی لازم برای حفظ حرکت، در امتداد محور  $x_1$  واقع است.

### ۹.۱۰ حرکت بدون نیروی فرفره متقارن

اگر فرفره متقارنی، یعنی، جسم صلبی را در نظر بگیریم که در آن  $I_1 = I_2 \neq I_3$ ، آنگاه معادلات اوپلر بدون نیرو [معادلات (۱۱۴.۱۰)] چنین می‌شوند

$$\left. \begin{aligned} (I_{12} - I_3)\omega_2\omega_3 - I_{11}\dot{\omega}_1 &= 0 \\ (I_3 - I_{12})\omega_3\omega_1 - I_{11}\dot{\omega}_2 &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (128.10)$$

$I_{12}$  جایگزین  $I_1$  و  $I_2$  شده است. چون در مورد حرکت بدون نیرو مرکز جرم جسم یا در حال سکون است و یا حرکتش نسبت به چارچوب مرجع ثابت یا لخت یکنواخت، می‌توانیم، بدون آنکه بر کلیت مسئله لطمه‌ای وارد آید، مشخص کنیم که مرکز جرم جسم در حال سکون است و در مبدأ دستگاه مختصات ثابت قرار دارد. البته، حالتی را بررسی می‌کنیم که در آن بردار سرعت زاویه‌ای  $\omega$  در امتداد محور اصلی جسم قرار ندارد؛ در غیر این صورت حرکت بدیهی است.

اولین نتیجهٔ مربوط به حرکت، از سومین معادله از معادلات (۱۲۸.۱۰)،  $\dot{\omega}_3 = 0$ ، حاصل می‌شود، که آن را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$\omega_3(t) = \text{const.} \quad (129.10)$$

دو معادلهٔ اول از معادلات (۱۲۸.۱۰) را می‌توان این طور نوشت

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= - \left[ \frac{I_2 - I_{12}}{I_{12}} \omega_3 \right] \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \left[ \frac{I_2 - I_{12}}{I_{12}} \omega_3 \right] \omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (130.10)$$

چون جمله‌های داخل کروشه یکسان‌اند و از کمیت‌های ثابتی تشکیل یافته‌اند، می‌توان آن‌را به صورت یک ثابت دیگر تعریف کرد

$$\Omega = \frac{I_2 - I_{12}}{I_{12}} \omega_3 \quad (131.10)$$

به طوری که

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (132.10)$$

این معادلات از نوع معادلات جفت شده هستند که با آنها آشناییم، و می‌توانیم از طریق ضرب کردن معادلهٔ دوم در  $i$  و جمع کردن آن با معادلهٔ اول، یک جواب به دست آوریم

$$(\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2) - i\Omega(\omega_1 + i\omega_2) = 0 \quad (133.10)$$

چنانچه  $\eta$  را به شکل زیر تعریف کنیم

$$\eta \equiv \omega_1 + i\omega_2 \quad (134.10)$$

در این صورت داریم

$$\dot{\eta} - i\Omega\eta = 0 \quad (۱۳۵.۱۰)$$

که جواب آن به شرح زیر است<sup>۱</sup>

$$\eta(t) = Ae^{i\Omega t} \quad (۱۳۶.۱۰)$$

پس

$$\omega_1 + i\omega_2 = A \cos \Omega t + iA \sin \Omega t \quad (۱۳۷.۱۰)$$

و بنابراین

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(t) &= A \cos \Omega t \\ \omega_2(t) &= A \sin \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (۱۳۸.۱۰)$$

از ثابت بودن  $\omega_3$  پی می‌بریم که اندازه  $\omega$  نیز ثابت است

$$|\omega| = \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{const.} \quad (۱۳۹.۱۰)$$

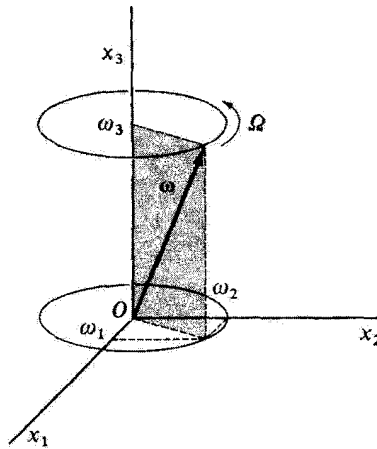
معادلات (۱۳۸.۱۰) عبارت‌اند از معادلات پارامتری دایره، بنابراین تصویر بردار  $\omega$  (که اندازه آن ثابت است) در صفحه  $x_1-x_2$  در طی زمان یک دایره ترسیم می‌کند (شکل ۱۰.۱۰).

محور  $x_3$  محور تقارن جسم است، از این رو پی می‌بریم که بردار سرعت زاویه‌ای  $\omega$  حول محور  $x_3$  جسم با بسامد زاویه‌ای ثابت  $\Omega$  گردش می‌کند یا حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. به این ترتیب، از نظر ناظری در دستگاه مختصات جسمی،  $\omega$  مخروطی حول محور تقارن جسم رسم می‌کند، که به آن مخروط جسمی می‌گوییم.

چون حرکت بدون نیرو را بررسی می‌کنیم، بردار تکانه زاویه‌ای  $L$  در دستگاه مختصات ثابت ساکن است و برحسب زمان تغییر نمی‌کند. یک ثابت دیگر در حرکت بدون نیرو، انرژی جنبشی است، یا در حالت خاص، چون مرکز جرم جسم ثابت است، انرژی جنبشی چرخشی ثابت است:

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2}\omega \cdot L = \text{const.} \quad (۱۴۰.۱۰)$$

۱. معمولاً ضریب ثابت کمیتی مختلط است، به طوری که می‌توانیم آن را به صورت  $A \exp(i\delta)$  بنویسیم. هرچند که برای سهولت، فاز  $\delta$  را برابر صفر می‌گیریم؛ انجام این کار همواره با انتخاب یک زمان مناسب به عنوان  $t = 0$  میسر است.



شکل ۱۰.۱۰

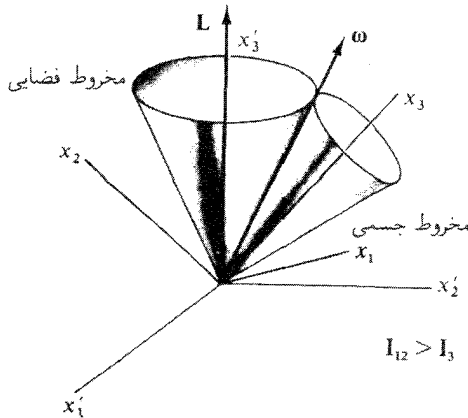
اما می‌دانیم  $\mathbf{L}$  ثابت است، بنابراین  $\omega$  باید چنان حرکت کند که تصویر آن روی بردار تکانه زاویه‌ای ساکن، ثابت باشد. به این ترتیب،  $\omega$  حول بردار  $\mathbf{L}$  یک حرکت تقدیمی اجرا می‌کند و با آن زاویه ثابتی می‌سازد. در چنین حالتی  $\mathbf{L}$ ،  $\omega$ ، و محور  $x_3$  (جسم، یعنی، بردار  $e_3$ ) جملگی در یک صفحه قرار می‌گیرند (مسئله ۲۹.۱۰ را ببینید). بنابراین، اگر محور  $x_3$  در دستگاه مختصات ثابت  $\mathbf{L}$  بر منطبق بگیریم، در این صورت نسبت به ناظری که در دستگاه مختصات ثابت قرار دارد،  $\omega$  مخروطی را حول محور ثابت  $x_3$  ترسیم می‌کند، که به آن مخروط فضایی می‌گوییم. بدینسان غلتیدن یک مخروط بر روی مخروط دیگر این وضعیت را توصیف می‌کند (شکل ۱۱.۱۰)، به طوری که  $\omega$  در دستگاه مختصات جسمی حول محور  $x_3$  و در دستگاه مختصات ثابت حول محور  $x_3$  (یا  $\mathbf{L}$ ) یک حرکت تقدیمی انجام می‌دهد.

آهنگ حرکت تقدیمی  $\omega$  حول محور تقارن جسم به کمک معادله (۱۳۱.۱۰) بیان می‌شود

$$\Omega = \frac{I_2 - I_1}{I_1} \omega_3$$

اگر  $I_1 \cong I_2$ ، در آن صورت  $\Omega$  در مقایسه با  $\omega_3$  خیلی کوچک می‌شود. زمین در نزدیکی قطبها کمی تخت است،<sup>۱</sup> به طوری که شکل آن را می‌توان تقریباً یک کرهوار پخت با  $I_1 \cong I_2$ ، ولی  $I_2 > I_1$  دانست. اگر زمین را یک جسم صلب ببنداریم، در این صورت گشتاورهای  $I_1$  و  $I_2$

۱. نیوتون نشان داد که تخت‌شدگی در قطبها ناشی از چرخش زمین است؛ اوایل اولین کسی بود که حرکت تقدیمی حاصل را محاسبه کرد.



شکل ۱۱.۱۰

به گونه‌ای اند که  $\Omega = \omega_2 / 30^\circ$ . چون دوره تناوب چرخش زمین عبارت است از:  $1/\omega = 1d$ ، و چون  $\omega \cong \omega_2$ ، دوره تناوب پیش‌بینی شده برای حرکت تقدیمی مربوط به محور چرخش برابر خواهد بود با:  $1/\Omega \cong 30^\circ d$ . حرکت تقدیمی مشاهده شده دارای دوره تناوب نامنظمی حدود  $50\%$  بیش از مقدار پیش‌بینی شده براساس این نظریه ساده است؛ این اختلاف را به واقعیتهای زیر نسبت می‌دهند: (۱) زمین یک جسم صلب نیست؛ و (۲) شکل زمین دقیقاً یک کره‌وار پخت نیست، بلکه تغییر شکلی از مرتبه بالاتر دارد و واقعاً به یک گلابی تخت شده می‌ماند.

«برآمدگی» استوایی زمین در کنار این واقعیت که محور چرخش زمین نسبت به خط عمود بر صفحه مدار زمین حول خورشید (صفحه دایره البروج) تقریباً  $23.5^\circ$  مایل است، یک گشتاور گرانشی به وجود می‌آورد (که عامل آن هم خورشید است و هم ماه)؛ این گشتاور عامل ایجاد حرکت تقدیمی‌کننده برای محور زمین به شمار می‌آید. دوره تناوب این حرکت تقدیمی تقریباً  $26000$  سال است. به این ترتیب، در دوره‌های متفاوت، ستارگان متفاوتی به صورت «ستاره قطبی» درمی‌آیند.<sup>۱</sup>

### مثال ۹.۱۰

نشان دهید که حرکت نمایش یافته در شکل ۱۱.۱۰، عملاً حرکت جسمی کشیده مانند یک میله کشیده ( $I_{12} > I_3$ ) را مجسم می‌کند، در حالی که در مورد یک قرص تخت ( $I_2 > I_3$ ) مخروط فضایی در داخل مخروط جسمی قرار می‌گیرد و نه در خارج آن.

۱. ظاهراً این تقدم اعتدالین توسط سیدناس ستاره‌شناس بابلی در حدود ۳۴۳ قبل از میلاد کشف شده است.



حل: اگر  $L$  در امتداد  $x_1$  واقع باشد، در این صورت، زاویه  $\theta$  اویلر (بین محورهاى  $x_2$  و  $x_3$ )، عبارت است از زاویه بین  $L$  و محور  $x_3$ . در یک لحظه مشخص،  $e_2$  را چنان تنظیم می‌کنیم تا در صفحه‌ای قرار گیرد که  $L$ ،  $\omega$  و  $e_2$  آن را تعریف کرده‌اند. آنگاه، در همان لحظه داریم

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= 0 \\ L_2 &= L \sin \theta \\ L_3 &= L \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (141.10)$$

فرض کنید  $\alpha$  زاویه بین  $\omega$  و محور  $x_3$  باشد. باز هم در همین لحظه داریم

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 0 \\ \omega_2 &= \omega \sin \alpha \\ \omega_3 &= \omega \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (142.10)$$

مؤلفه‌های  $L$  را همچنین می‌توانیم از معادله (۳۴.۱۰) تعیین کنیم

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= I_{12} \omega_1 = 0 \\ L_2 &= I_{12} \omega_2 = I_{12} \omega \sin \alpha \\ L_3 &= I_2 \omega_3 = I_2 \omega \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (143.10)$$

از معادلات (۱۴۱.۱۰) و (۱۴۳.۱۰) می‌توانیم نسبت  $L_2/L_3$  را به دست آوریم

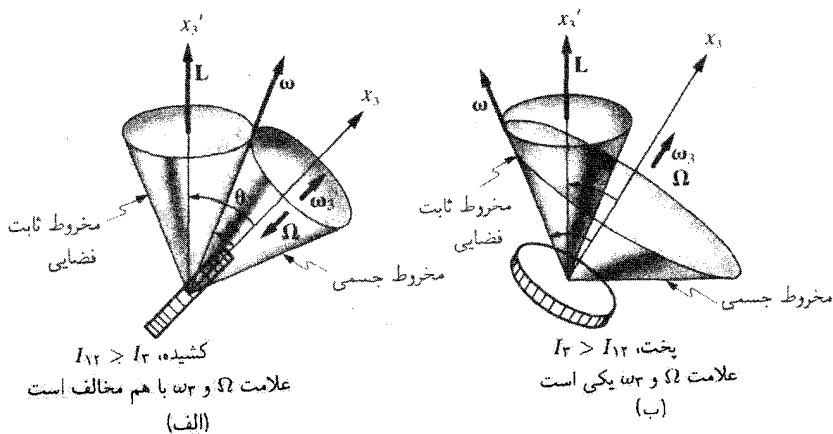
$$\frac{L_2}{L_3} = \tan \theta = \frac{I_{12}}{I_2} \tan \alpha \quad (144.10)$$

بنابراین داریم  
کره وار کشیده

$$I_{12} > I_2, \quad \theta > \alpha \quad (الف \ 145.10)$$

کره وار پخت

$$I_2 > I_{12}, \quad \alpha > \theta \quad (ب \ 145.10)$$



شکل ۱۲.۱۰

هر دو حالت را در شکل ۱۲.۱۰ مشاهده می‌کنید. از معادله (۱۳۱.۱۰)، تعیین می‌کنیم که اگر  $I_2 > I_{12}$ ،  $\Omega$  و  $\omega_3$  هم‌علامت و اگر  $I_{12} > I_3$ ،  $\Omega$  و  $\omega_3$  مختلف‌العلامت‌اند. به این ترتیب، جهت حرکت تقدیمی در این دو حالت، مخالف همدیگرند. این واقعیت و معادلات (۱۴۵.۱۰) فقط در صورتی باهم سازگارند که مخروط فضایی برای جسم کشیده خارج از مخروط جسمی و برای جسم پخت در داخل مخروط جسمی واقع باشد. سرعت زاویه‌ای  $\omega$  با چرخش حول  $L$  (مخروط فضایی) و حول محور تقارن  $x_3$  (مخروط جسمی) هر دو مخروط را ترسیم می‌کند. خط تماس بین مخروطهای فضایی و جسمی، عبارت است از محور لحظه‌ای چرخش (در امتداد  $\omega$ ). در هر لحظه، این محور ساکن است، به طوری که مخروط جسمی بدون لغزیدن به دور مخروط فضایی می‌غلتد. در هر دو حالت، به علت ثابت بودن  $L$ ، مخروط فضایی ثابت است. ■

### مثال ۱۰.۱۰

محور تقارن  $(x_2)$  و  $\omega$  با چه سرعت زاویه‌ای حول تکانه زاویه‌ای ثابت  $L$  می‌چرخند؟

حل: چون  $e_2$ ،  $\omega$  و  $L$  در یک صفحه قرار دارند،  $e_2$  و  $\omega$  با سرعت زاویه‌ای یکسانی حول  $L$  حرکت تقدیمی انجام می‌دهند. در بخش ۷.۱۰ پی بردیم که  $\dot{\psi}$  سرعت زاویه‌ای در امتداد محور  $x_2$  است. اگر از همان لحظه موردنظر در مثال پیشین بهره بگیریم (وقتی که  $e_2$  در صفحه  $e_1, \omega$  و  $L$  واقع است)، در این صورت زاویه اولیه،  $\psi$ ، صفر می‌شود و از معادله (۱۰۲.۱۰) داریم

$$\omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_2}{\sin \theta} \quad (۱۴۶.۱۰)$$

با جانشانی  $\omega_2$  از معادله (۱۴۲.۱۰) داریم

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega \sin \alpha}{\sin \theta} \quad (۱۴۷.۱۰)$$

می‌توانیم با جانشانی  $\sin \alpha$  از معادله (۱۴۳.۱۰) و  $\sin \theta$  از معادله (۱۴۱.۱۰)، رابطه مربوط به  $\dot{\varphi}$  را بازنویسی کنیم

$$\dot{\varphi} = \omega \frac{L_2}{I_{12}\omega} \frac{L}{L_2} = \frac{L}{I_{12}} \quad (۱۴۸.۱۰)$$

### ۱۰.۱۰ حرکت فرفره متقارن با یک نقطه ثابت

فرفره متقارن چرخنده‌ای در یک میدان گرانشی را در نظر بگیرید که نوک آن ثابت نگه‌داشته شده است.<sup>۱</sup> در بررسی‌های قبلی می‌توانستیم انرژی جنبشی سیستم را با انتخاب مرکز جرم جسم به عنوان مبدأ دستگاه مختصات چرخان یا دستگاه جسمی، به دو جزء انتقالی و چرخشی تفکیک کنیم. از سوی دیگر، اگر بتوانیم مبدأ دستگاه‌های مختصات ثابت و جسمی را منطبق برهم اختیار کنیم، آنگاه انرژی جنبشی انتقالی صفر می‌شود، زیرا  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ . چنین انتخابی برای بحث حرکت فرفره کاملاً مناسب است، زیرا در اینجا می‌توان نوک ثابت فرفره را به عنوان مبدأ هر دو دستگاه مختصات انتخاب کرد. در شکل ۱۳.۱۰ زاویه‌های اولیور را برای این وضعیت مشاهده می‌کنید. محور  $x_2$  (ثابت) متناظر با محور قائم محل است، و محور  $x_3$  (جسم) را محور تقارن جسم انتخاب می‌کنیم. فاصله نوک ثابت از مرکز جرم برابر  $h$ ، و جرم فرفره  $M$  است.

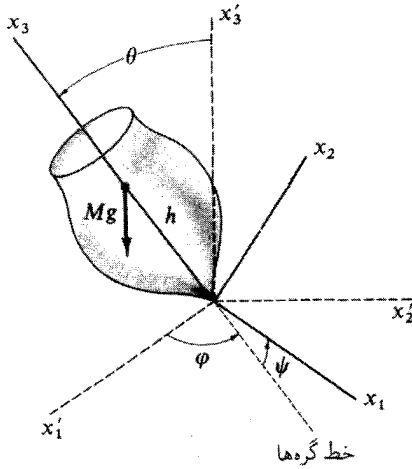
چون یک فرفره متقارن را در نظر گرفته‌ایم، گشتاورهای لختی اصلی حول محورهای  $x_1$  و  $x_2$  باهم برابرند:  $I_{12} = I_2 \equiv I_3$ . فرض می‌کنیم  $I_2 \neq I_3$ . در این صورت انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} I_{12} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad (۱۴۹.۱۰)$$

طبق معادلات (۱۰۲.۱۰) داریم

$$\omega_1^2 = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2$$

۱. این مسئله اولین بار توسط لاگراژ به‌طور مفصل در کتابش تحت عنوان مکانیک تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت.



شکل ۱۳.۱۰

$$\begin{aligned}
 &= \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \psi \\
 \omega_y^2 &= (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 \\
 &= \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi
 \end{aligned}$$

به طوری که

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \quad (الف \ ۱۵۰.۱۰)$$

و

$$\omega_z^2 = (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (ب \ ۱۵۰.۱۰)$$

بنابراین

$$T = \frac{1}{2} I_{1r} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_r (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (۱۵۱.۱۰)$$

چون انرژی پتانسیل سیستم  $Mgh \cos \theta$  است، لاگرانژی عبارت خواهد بود از

$$L = \frac{1}{2} I_{1r} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_r (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgh \cos \theta \quad (۱۵۲.۱۰)$$

لاگرانژی برحسب هر دو مختصه  $\varphi$  و  $\psi$  چرخه‌ای است. بنابراین تکانه‌های مزدوج این دو مختصه ثابتهای حرکت به‌شمار می‌آیند

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_{12} \sin^2 \theta + I_2 \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + I_2 \dot{\psi} \cos \theta = \text{const.} \quad (153.10)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_2 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{const.} \quad (154.10)$$

چون مختصات چرخه‌ای زاویه هستند، تکانه‌های مزدوج هم تکانه‌های زاویه‌ای هستند. این تکانه‌های زاویه‌ای، به‌ترتیب در امتداد محور  $x_1$  (یا قائم) و محور  $x_2$  (یا تقارن جسم) قرار دارند که برای آنها  $\varphi$  و  $\psi$  زاویه‌های چرخش‌اند. توجه داشته‌باشید که به اعتبار ترسیم هندسی شکل ۱۳.۱۰ از این نتیجه مطمئن می‌شویم، زیرا گشتاور گرانشی در امتداد خط گره‌ها واقع است. بنابراین، گشتاور نیرو نمی‌تواند هیچ مؤلفه‌ای در امتداد هیچ‌کدام از محورهای  $x_1$  و  $x_2$ ، که هر دو بر خط گره‌ها عمودند، داشته باشد. بنابراین، تکانه‌های زاویه‌ای در امتداد این محورها ثابتهای حرکت‌اند. معادلات (۱۵۳.۱۰) و (۱۵۴.۱۰) را می‌توان برای  $\dot{\varphi}$  و  $\dot{\psi}$  برحسب  $\theta$  حل کرد. از معادله (۱۵۴.۱۰)

می‌توان نوشت

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi - I_2 \dot{\varphi} \cos \theta}{I_2} \quad (155.10)$$

با نشان دادن این نتیجه در معادله (۱۵۳.۱۰)، می‌یابیم

$$(I_{12} \sin^2 \theta + I_2 \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + (p_\psi - I_2 \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta = p_\varphi$$

یا

$$(I_{12} \sin^2 \theta) \dot{\varphi} + p_\psi \cos \theta = p_\varphi$$

به‌طوری که

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_{12} \sin^2 \theta} \quad (156.10)$$

با قرار دادن این عبارت به‌جای  $\dot{\varphi}$  در معادله (۱۵۵.۱۰)، داریم

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_2} - \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta) \cos \theta}{I_{12} \sin^2 \theta} \quad (157.10)$$

بنابه فرض، سیستم مورد نظر ما پایستار است؛ بنابراین یک خاصیت دیگر سیستم آن است انرژی کل نیز یکی از ثابتهای حرکت باشد

$$E = \frac{1}{2} I_{12} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + Mgh \cos \theta = \text{const.} \quad (158.10)$$

با استفاده از عبارت مربوط به  $\omega_3$  [مثلاً، معادله (102.10) را ببینید]، متوجه می‌شویم که معادله (154.10) را می‌توان به یکی از دو صورت زیر نوشت

$$p_\psi = I_3 \omega_3 = \text{const.} \quad (159.10 \text{ الف})$$

یا

$$I_3 \omega_3^2 = \frac{p_\psi^2}{I_3} = \text{const.} \quad (159.10 \text{ ب})$$

بنابراین، نه تنها  $E$  یک ثابت حرکت است، بلکه  $E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$  نیز یک ثابت است؛ ما این کمیت را  $E'$  می‌نامیم

$$E' \equiv E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} I_{12} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + Mgh \cos \theta = \text{const.} \quad (160.10)$$

با نشان دادن عبارت مربوط به  $\dot{\varphi}$  [معادله (156.10)] در این معادله، داریم

$$E' = \frac{1}{2} I_{12} \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I_{12} \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta \quad (161.10)$$

که می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

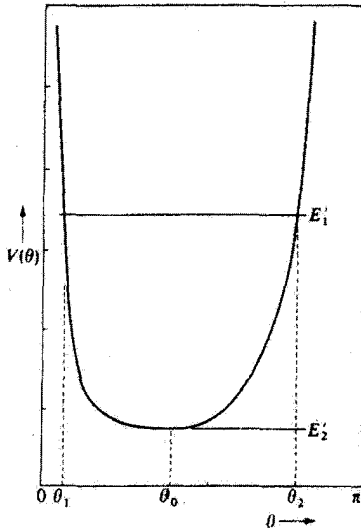
$$E' = \frac{1}{2} I_{12} \dot{\theta}^2 + V(\theta) \quad (162.10)$$

که در اینجا  $V(\theta)$  یک «پتانسیل مؤثر» است که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$V(\theta) \equiv \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2 I_{12} \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta \quad (163.10)$$

معادله (162.10) را می‌توان حل کرد تا به  $t(\theta)$  منجر شود

$$t(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(2/I_{12}) [E' - V(\theta)]}} \quad (164.10)$$



شکل ۱۴.۱۰

این انتگرال را می‌توان (دست‌کم، به‌طور صوری) معکوس کرد تا  $\theta(t)$  را به‌دست دهد، که آن را هم به‌نوبه خود در معادلات (۱۵۶.۱۰) و (۱۵۷.۱۰) می‌نشانیم تا  $\varphi(t)$  و  $\psi(t)$  به‌دست آید. چون زاویه‌های اوپلر  $\theta$ ،  $\varphi$ ،  $\psi$  سمت‌گیری فرفره را به‌طور کامل مشخص می‌کنند، نتایج مربوط به  $\theta(t)$ ،  $\varphi(t)$ ، و  $\psi(t)$  جواب کامل مسئله را به‌دست می‌دهند. واضح است که چنین روشی دشوار بوده و خیلی روشنگر نیست. اما، می‌توانیم برخی از جلوه‌های کیفی حرکت را با بررسی معادلات پیشین، با روشی شبیه روش به‌کار رفته در بررسی حرکت یک ذره در میدان نیروی مرکزی (بخش ۶.۷) به‌دست آوریم.

در شکل ۱۴.۱۰، صورت پتانسیل مؤثر  $V(\theta)$  را در گستره  $0 \leq \theta \leq \pi$  مشاهده می‌کنیم، که از لحاظ فیزیکی محدوده مربوط به متغیر  $\theta$  است. این نمودار انرژی مبین آن است که به‌ازای هر مقدار معین  $E'$  (مثلاً، مقدار نمایش یافته با  $E'_1$ ) حرکت بین دو مقدار نهایی  $\theta_1$  و  $\theta_2$ ، محدود می‌شود، که این دو نقطه با نقاط عطف مربوط به مسئله نیروی مرکزی متناظرند و ریشه‌های مخرج کسر در معادله (۱۶۴.۱۰) به‌شمار می‌آیند. به‌این ترتیب، پی می‌بریم که گرایش فرفره چرخان، به‌طور کلی، به‌محصور شدن به ناحیه  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  است. در حالت:  $E' = E'_1 = V_{\min}$ ،  $\theta$  به تک مقدار  $\theta_0$  محدود است، و حرکت یک حرکت تقدیمی پایدار با زاویه میل ثابت است. این حرکت شبیه ظهور مدارهای دایره‌ای در مسئله نیروی مرکزی است.

مقدار  $\theta_0$  را می‌توان از برابر قرار دادن مشتق  $V(\theta)$  با صفر به‌دست آورد. به این ترتیب

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta} = \frac{-\cos \theta \cdot (p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta)^2 + p_{\psi} \sin^2 \theta \cdot (p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta)}{I_{12} \sin^2 \theta} - Mgh \sin \theta = 0 \quad (۱۶۵.۱۰)$$

با اراثة تعریفی به این صورت

$$\beta \equiv p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta. \quad (۱۶۶.۱۰)$$

معادله (۱۶۵.۱۰) به صورت زیر در می آید

$$(\cos \theta) \beta^2 - (p_{\psi} \sin^2 \theta) \beta + Mgh I_{12} \sin^2 \theta = 0 \quad (۱۶۷.۱۰)$$

عبارت بالا معادله درجه دومی است بر حسب  $\beta$  که جوابهایش عبارت است از

$$\beta = \frac{p_{\psi} \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Mgh I_{12} \cos \theta}{p_{\psi}^2}} \right) \quad (۱۶۸.۱۰)$$

چون  $\beta$  باید کمیتی حقیقی باشد، عبارت زیر رادیکال در معادله (۱۶۸.۱۰) باید مثبت باشد. به ازای  $\theta < \pi/2$  داریم

$$p_{\psi}^2 \geq 4Mgh I_{12} \cos \theta. \quad (۱۶۹.۱۰)$$

اما از معادله (۱۵۹.۱۰ الف) داریم:  $p_{\psi} = I_2 \omega_2$  بدینسان

$$\omega_2 \geq \frac{2}{I_2} \sqrt{Mgh I_{12} \cos \theta}. \quad (۱۷۰.۱۰)$$

بنابراین نتیجه می گیریم که یک حرکت تقدیمی پایدار با زاویه میل ثابت  $\theta$  فقط در صورتی می تواند پیش بیاید که سرعت زاویه ای اسپین بیشتر از مقدار حدی داده شده از معادله (۱۷۰.۱۰) باشد.

از معادله (۱۵۶.۱۰) پی می بریم که (به ازای  $\theta = \theta$ ) می توان نوشت

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{\beta}{I_{12} \sin^2 \theta}. \quad (۱۷۱.۱۰)$$

بنابراین، برای سرعت زاویه ای تقدیمی،  $\dot{\varphi}$ ، دو امکان وجود دارد؛ یک مقدار به ازای هر یک از جوابهای  $\beta$  که از معادله (۱۶۸.۱۰) به دست آمد

$\dot{\varphi}_0(+)$  → حرکت تقدیمی تند

$\dot{\varphi}_0(-)$  → حرکت تقدیمی کند



اگر  $\omega_2$  (یا  $p_\psi$ ) بزرگ باشد (فرفره تند)، در آن صورت جمله دوم زیر رادیکال معادله (۱۶۸.۱۰) کوچک است، و می‌توانیم رادیکال را بسط دهیم. چنانچه در هر حالت اولین جمله غیر صفر را نگاه داریم، خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_{0(+)} &\cong \frac{I_r \omega_2}{I_{1r} \cos \theta_0} \\ \dot{\varphi}_{0(-)} &\cong \frac{Mgh}{I_r \omega_2} \end{aligned} \right\} \quad (172.10)$$

معمولاً از دو سرعت زاویه‌ای تقدیمی ممکن، سرعت کمتر،  $\dot{\varphi}_{0(-)}$  مشاهده می‌شود.

نتایج بالا تا وقتی نافذند که  $\theta_0 < \pi/2$ ؛ اما اگر  $\theta_0 > \pi/2$ ، عبارت زیر رادیکال معادله (۱۶۸.۱۰) همواره مثبت است و هیچ شرط محدود کننده‌ای روی  $\omega_2$  وجود ندارد. در چنین حالتی، چون رادیکال بزرگتر از یک است، مقادیر  $\dot{\varphi}$  برای حرکت تقدیمی تند و کند مختلف‌العلامت‌اند؛ یعنی، به‌ازای  $\theta_0 > \pi/2$ ، حرکت تقدیمی تند با حرکت تقدیمی تند مربوط به  $\theta_0 < \pi/2$  همسوسست. اما حرکت تقدیمی کند در جهت مخالف صورت می‌گیرد.

در حالت کلی، وقتی  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ ، معادله (۱۵۶.۱۰) مبین آن است که، بسته به مقادیر  $p_\psi$  و  $p_\varphi$ ، ممکن است  $\dot{\varphi}$  با تغییر  $\theta$  بین این دو حد تغییر علامت دهد. اگر  $\dot{\varphi}$  تغییر علامت ندهد، فرفره به‌طور یکنواحول  $x_1$  (شکل ۱۳.۱۰) حرکت تقدیمی انجام می‌دهد، و محور  $x_2$  (محور تقارن جسم) بین  $\theta = \theta_1$  و  $\theta = \theta_2$  نوسان می‌کند. به این پدیده رقص محوری می‌گویند؛ در شکل ۱۵.۱۰ (الف)، مسیری را مشاهده می‌کنید که تصویر محور تقارن جسم بر یک کره به شعاع واحد در دستگاه ثابت ترسیم کرده‌است.

اگر  $\dot{\varphi}$  بین مقادیر حدی مربوط به  $\theta$  تغییر علامت دهد، سرعت زاویه‌ای تقدیمی در  $\theta = \theta_1$  و  $\theta = \theta_2$  باید مختلف‌الجهت باشند. بدینسان حرکت تقدیمی-رقص محوری یک حرکت حلقوی برای محور تقارن به‌وجود می‌آورند که در شکل ۱۵.۱۰ (ب) مشاهده می‌کنید.

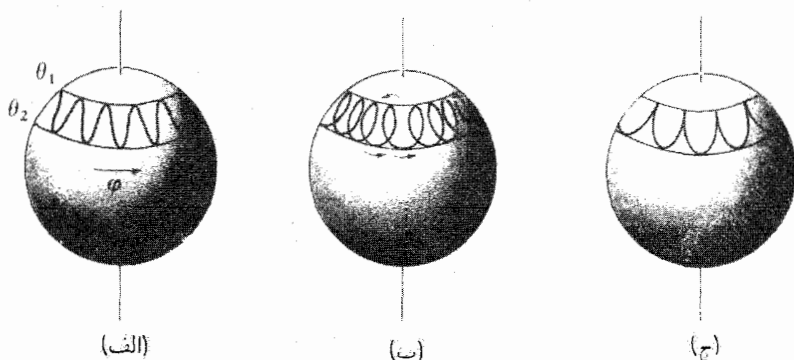
سرانجام، اگر مقادیر  $p_\psi$  و  $p_\varphi$  چنان باشند که

$$(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)_{\theta=\theta_1} = 0 \quad (173.10)$$

آنگاه

$$\dot{\varphi}|_{\theta=\theta_1} = 0, \quad \dot{\theta}|_{\theta=\theta_1} = 0 \quad (174.10)$$

۱. اگر  $\theta_0 > \pi/2$ ، نوک ثابت فرفره در وضعیتی بالاتر از مرکز جرم قرار می‌گیرد. این نوع حرکت، مثلاً به کمک یک فرفره زیروسکوپی میسر است، که نوک آن عملاً یک ساچمه است که بر جایگاهی زوی پایه‌ای ثابت تکیه دارد.



شکل ۱۵.۱۰

شکل ۱۵.۱۰ (ج) حرکت نیزه مانند حاصل را نشان می‌دهد. همین حالت با روش معمول چرخاندن یک فرفره متناظر است. اول فرفره را حول محورش می‌چرخانیم، سپس زاویهٔ میل اولیهٔ معینی به آن می‌دهیم و رهاش می‌کنیم. به این ترتیب، شرایط اولیه عبارت خواهند بود از  $\theta = \theta_0$  و  $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$ . چون اولین وهلهٔ حرکت فرفره همانا آغاز به سقوط آن در میدان گرانشی است، شرایط دقیقاً همان شرایط شکل ۱۵.۱۰ (ج)، و حرکت نیزه مانند پیامد آن است. شکل‌های ۱۵.۱۰ (الف) و ۱۵.۱۰ (ب) با وضعیتی متناظرند که یک سرعت زاویه‌ای اولیهٔ  $\dot{\varphi}$  هم‌جهت با و یا در خلاف جهت حرکت تقدیمی وجود داشته‌باشد.

### ۱۱.۱۰ پایداری چرخشهای جسم صلب<sup>۱</sup>

اکنون جسم صلبی را در نظر می‌گیریم که یک چرخش بدون نیرو حول یکی از محورهای اصلی‌اش انجام می‌دهد؛ می‌خواهیم بدانیم آیا چنین حرکتی پایدار است یا خیر. «پایداری» در اینجا، مانند قبل (بخش ۱۰.۷) به این معنی است که اگر اختلال کوچکی بر سیستم اعمال شود، حرکت یا به وضعیت قبلی باز می‌گردد و یا نوسانهای کوچکی در اطراف آن انجام می‌دهد.

در این بحث، یک جسم صلب معمولی انتخاب می‌کنیم که همهٔ گشتاورهای لختی اصلی در آن متمایزند، و این کمیته‌ها را چنان نشانه‌گذاری می‌کنیم که  $I_3 > I_2 > I_1$ . فرض می‌کنیم محورهای جسمی بر محورهای اصلی منطبق باشند، و نیز فرض می‌کنیم که جسم حول محور  $x_1$  — یعنی، حول محور اصلی وابسته به گشتاور لختی  $I_1$  — می‌چرخد. در این صورت

$$\omega = \omega_1 e_1 \quad (۱۷۵.۱۰)$$

۱. این مسئله را اولین بار اولیور در سال ۱۷۴۹ مورد مطالعه قرار داد.

اگر اختلال کوچکی به آن اعمال کنیم، بردار سرعت زاویه‌ای به شکل زیر درمی‌آید

$$\omega = \omega_1 e_1 + \lambda e_2 + \mu e_3 \quad (176.10)$$

که در اینجا  $\lambda$  و  $\mu$  کمیت‌هایی کوچک، و با پارامترهایی که قبلاً برای سایر بسط‌های اختلالی به‌کار رفته‌اند، متناظرند. ( $\lambda$  و  $\mu$  چندان کوچک هستند که بتوان از حاصلضرب آنها در مقایسه با سایر کمیت‌های مورد نظر در این بحث چشم پوشید.)

معادلات اوپلر [معادلات (114.10)] به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\left. \begin{aligned} (I_2 - I_3)\lambda\mu - I_1\dot{\omega}_1 &= 0 \\ (I_3 - I_1)\mu\omega_1 - I_2\dot{\lambda} &= 0 \\ (I_1 - I_2)\lambda\omega_1 - I_3\dot{\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (177.10)$$

چون  $\lambda\mu \approx 0$ ، معادله اول ایجاب می‌کند که  $\dot{\omega}_1 = 0$ ، یا  $\omega_1 = \text{const.}$  از حل دو معادله دیگر برحسب  $\lambda$  و  $\mu$ ، می‌رسیم به

$$\dot{\lambda} = \left( \frac{I_2 - I_1}{I_2} \omega_1 \right) \mu \quad (178.10)$$

$$\dot{\mu} = \left( \frac{I_1 - I_2}{I_2} \omega_1 \right) \lambda \quad (179.10)$$

که جملات داخل پرانتز هر دو ثابت‌اند. این معادلات، معادلات جفت شده هستند، ولی آنها را نمی‌توان با روش به‌کارگرفته شده در بخش ۹.۱۰ حل کرد، زیرا ضرایب ثابت دو معادله متفاوت است. جواب این معادلات را می‌توان ابتدا به‌کمک مشتقگیری معادله مربوط به  $\lambda$  به‌دست آورد

$$\ddot{\lambda} = \left( \frac{I_2 - I_1}{I_2} \omega_1 \right) \dot{\mu} \quad (180.10)$$

حال می‌توانیم عبارت مربوط به  $\dot{\mu}$  را در این معادله بنشانیم

$$\ddot{\lambda} + \left( \frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 \right) \lambda = 0 \quad (181.10)$$

اب این معادله عبارت است از

$$\lambda(t) = Ae^{i\Omega_{12}t} + Be^{-i\Omega_{12}t} \quad (182.1)$$

که در اینجا

$$\Omega_{1\lambda} \equiv \omega_1 \sqrt{\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_2)}{I_2 I_2}} \quad (۱۸۳.۱۰)$$

در عبارت بالا شاخصهای زیرین ۱ و  $\lambda$  دلالت بر این نکته دارند که ما جواب مربوط به  $\lambda$  را وقتی در نظر گرفته‌ایم که چرخش حول محور  $x_1$  صورت می‌گیرد.

بناباه فرض،  $I_1 < I_2$  و  $I_1 < I_3$ ، به طوری که  $\Omega_{1\lambda}$  حقیقی است. بنابراین جواب مربوط به  $\lambda(t)$  یک حرکت نوسانی با بسامد  $\Omega_{1\lambda}$  را نشان می‌دهد. به همین ترتیب، می‌توانیم جواب مربوط به  $\mu(t)$  را بررسی کنیم، و به این نتیجه برسیم که  $\Omega_{1\mu} = \Omega_{1\lambda} \equiv \Omega_1$ . بدینسان، اختلاهای کوچک اعمال شده توسط مؤلفه‌های کوچک  $x_2$  و  $x_3$  روی  $\omega$  با زمان افزایش نمی‌یابد، بلکه حول مقادیر تعادل  $\lambda = 0$  و  $\mu = 0$  نوسان می‌کند. در نتیجه، چرخش حول محور  $x_1$  پایدار است. اگر چرخش حول محورهای  $x_2$  و  $x_3$  را در نظر بگیریم، می‌توانیم عبارتهای مربوط به  $\Omega_2$  و  $\Omega_3$  را با جابه‌جایی چرخه‌ای از معادله (۱۸۳.۱۰) به دست آوریم

$$\Omega_1 = \omega_1 \sqrt{\frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_2)}{I_2 I_2}} \quad (الف ۱۸۴.۱۰)$$

$$\Omega_2 = \omega_2 \sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(I_2 - I_2)}{I_1 I_2}} \quad (ب ۱۸۴.۱۰)$$

$$\Omega_3 = \omega_3 \sqrt{\frac{(I_2 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_2}} \quad (ج ۱۸۴.۱۰)$$

اما چون  $I_1 < I_2 < I_3$  داریم

$\Omega_1, \Omega_2$  حقیقی و  $\Omega_3$  موهومی

به این ترتیب، هرگاه چرخش حول محورهای  $x_1$  یا  $x_2$  صورت گیرد، اختلال حرکتی نوسانی پدید می‌آورد و حرکت پایدار است. ولی اگر چرخش حول محور  $x_3$  صورت گیرد، به اعتبار موهومی بودن  $\Omega_3$ ، اختلال بدون محدودیت بازمان افزایش پیدا می‌کند؛ چنین حرکتی ناپایدار است.

چون در این بحث جسم صلب را کاملاً دلخواه اختیار کرده‌بودیم، نتیجه می‌گیریم که چرخش حول محور اصلی متناظر با بزرگترین یا کوچکترین گشتاور لختی پایدار، و چرخش حول محور اصلی متناظر با گشتاور میانی ناپایدار است. این پدیده را می‌توانیم، مثلاً، با یک کتاب (که بانوارچسب یا

کش بسته نگه داشته شده است) به نمایش بگذاریم. اگر کتاب را با یک سرعت زاویه‌ای حول یکی از محورهای اصلی آن در هوا پرتاب کنیم، حرکت برای چرخش حول محور میانی ناپایدار و برای دو محور دیگر پایدار است.

اگر دو گشتاور لختی باهم برابر باشند (مثلاً  $I_1 = I_2$ )، آنگاه ضریب  $\lambda$  در معادله (۱۷۹.۱۰) صفر می‌شود، و داریم:  $\dot{\mu} = 0$  یا  $\mu(t) = \text{const.}$  بنابراین، از معادله (۱۷۸.۱۰) مربوط به  $\lambda$  می‌توان انتگرال گرفت و رسید به

$$\lambda(t) = C + Dt \quad (185.10)$$

و اختلال به‌طور خطی با زمان افزایش می‌یابد؛ بنابراین، حرکت حول محور  $x_1$  ناپایدار است. برای حرکت حول محور  $x_2$  نتیجه مشابهی به دست می‌آید. تنها پایداری برای محور  $x_3$  برقرار است، اعم از اینکه  $I_2$  بزرگتر یا کوچکتر از  $I_1 = I_2$  باشد.

### مسائل

۱.۱۰ گشتاورهای لختی  $I_1$ ،  $I_2$ ، و  $I_3$  را برای یک کره همگن به شعاع  $R$  و جرم  $M$  محاسبه کنید (مبدأ را در مرکز کره بگیرید).

۲.۱۰ گشتاورهای لختی  $I_1$ ،  $I_2$ ، و  $I_3$  را برای یک مخروط همگن به جرم  $M$  و ارتفاع  $h$  و شعاع قاعده  $R$ ، محاسبه کنید. محور  $x_3$  را در امتداد محور تقارن مخروط بگیرید. مبدأ را در رأس مخروط اختیار و عناصر تانسور لختی را محاسبه کنید. سپس تبدیلی انجام دهید که با آن تبدیل مرکز جرم مخروط با مبدأ مختصات منطبق شود؛ گشتاورهای لختی اصلی را پیدا کنید.

۳.۱۰ گشتاورهای لختی  $I_1$ ،  $I_2$ ، و  $I_3$  را برای یک بیضیوار همگن به جرم  $M$  و قطرهای  $2a > 2b > 2c$  محاسبه کنید.

۴.۱۰ میله باریکی به طول  $l$  و جرم  $m$  را که از یک سر لولا شده باشد، در نظر بگیرید. گشتاور لختی آن را محاسبه کنید. نقطه‌ای را پیدا کنید که، اگر تمام جرم جسم در آن متمرکز می‌شد، گشتاور لختی حول محور لولا برابر همان گشتاور لختی واقعی می‌شد. فاصله این نقطه تا لولا را شعاع چرخش می‌گویند.

۵.۱۰ الف) از چه ارتفاعی باید بر توپ بیلیارد ضربه وارد آید تا بدون هیچگونه لغزش اولیه شروع به غلتیدن کند؟ ب) ارتفاع بهینه لبه میز بیلیارد را محاسبه کنید. این محاسبه بر چه مبنایی انجام می‌شود؟

۶.۱۰ دو کره هم قطر و هم جرم در اختیار داریم؛ یکی از آنها توپر و دیگری یک پوسته توخالی است. آزمایش غیر ویرانگری را به تفصیل توصیف کنید تا تعیین کند کدام کره توپر و کدام توخالی است.

۷.۱۰ یک قرص همگن به شعاع  $R$  و جرم  $M$  بدون لغزش روی یک سطح افقی می‌غلتد و به نقطه‌ای در فاصله  $l$  پایتتر از سطح جذب می‌شود. اگر نیروی جاذبه با فاصله مرکز جرم قرص از مرکز نیرو متناسب باشد، بسامد نوسانهای کم دامنه را حول وضعیت تعادل پیدا کنید.

۸.۱۰ دری از ورق همگن نازکی ساخته شده است؛ عرض این دری یک متر است. اگر دری به اندازه  $90^\circ$  درجه باز شود، پی می‌بریم که پس از رها شدن، طی دو ثانیه خود به خود بسته می‌شود. فرض کنید که لولاها بدون اصطکاک‌اند، در این صورت نشان دهید که خط لولاها باید زاویه‌ای تقریباً  $3^\circ$  با محور قائم بسازد.

۹.۱۰ یک ورق همگن به ضخامت  $a$  روی استوانه‌ای به شعاع  $R$ ، با محور افقی، قرار گرفته است. نشان دهید که شرط تعادل پایدار برای ورق، با فرض نبودن لغزش، عبارت است از  $R > a/2$ . بسامد نوسانهای کم دامنه چقدر است؟ انرژی پتانسیل  $U$  را برحسب تابعی از جابه‌جایی زاویه‌ای  $\theta$  رسم کنید. نشان دهید که تابع پتانسیل در  $\theta = 0^\circ$  به‌ازای  $R > a/2$  دارای یک کمینه است ولی به‌ازای  $R < a/2$  چنین نیست.

۱۰.۱۰ کره توپری به جرم  $M$  و شعاع  $R$  آزادانه حول قطر ثابتی با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  در فضا می‌چرخد. ذره‌ای به جرم  $m$ ، که ابتدا در یک قطب آن قرار دارد، با سرعت ثابت  $v$  در امتداد دایره عظیمه‌ای از این کره حرکت می‌کند. نشان دهید که، وقتی ذره به قطب دیگر می‌رسد، چرخش کره به اندازه زاویه

$$\alpha = \omega T \left( 1 - \sqrt{\frac{2M}{2M + 5m}} \right)$$

عقب افتاده است، که در اینجا  $T$  کل زمان لازم، برای رفتن ذره از یک قطب به قطب دیگر است. ۱۱.۱۰ مکعب همگنی، به ضلع  $l$ ، ابتدا در وضعیت تعادل ناپایدار روی یک لبه که با صفحه‌ای افقی در تماس است قرار دارد. سپس به مکعب یک جابه‌جایی کوچک می‌دهیم می‌گذاریم تا سقوط کند. نشان دهید که سرعت زاویه‌ای مکعب هنگام برخورد یک وجه آن به صفحه، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\omega^2 = A \frac{g}{l} (\sqrt{2} - 1)$$

که در اینجا اگر لبه بتواند روی صفحه بلغزد،  $A = 3/2$ ، و اگر لغزش بدون اصطکاک انجام شود:  $A = 12/5$ .

۱۲.۱۰ نشان دهید که هیچکدام از گشتاورهای لختی اصلی از مجموع دو گشتاور اصلی دیگر بزرگتر نمی‌شود.

۱۳.۱۰ یک سیستم سه ذره‌ای از جرمهای  $m_i$ ، با مختصات  $(x_1, x_2, x_3)$  زیر تشکیل یافته است

$$m_1 = 3m, \quad (b, 0, b)$$

$$m_2 = 4m, \quad (b, b, -b)$$

$$m_3 = 2m, \quad (-b, b, 0)$$

تانسور لختی، محورهای اصلی، و گشتاورهای لختی اصلی را پیدا کنید.

۱۴.۱۰ محورهای اصلی و گشتاورهای لختی اصلی یک نیمکره توپر یکنواخت به شعاع  $b$  و جرم  $m$  را حول مرکز جرم آن تعیین کنید.

۱۵.۱۰ آونگی فیزیکی از هر یک از دو نقطه غیر همفاصله از مرکز جرم و در دو طرف این نقطه آویخته می‌شود؛ هرگاه دوره تناوب حول این دو نقطه آویزی یکی باشد نشان دهید که طول آونگ ساده باهمان دوره تناوب، برابر است بافاصله بین دو نقطه آویز. چنین آونگ فیزیکی، که آونگ دوطرفه کاتر نامیده می‌شود، زمانی دقیقترین روش اندازه‌گیری (در حدود ۱ قسمت در  $10^5$  قسمت) شتاب گرانی به شمار می‌رفت.<sup>۱</sup> در خصوص مزایای آونگ کاتر نسبت به آونگ ساده برای چنین منظوری بحث کنید.

۱۶.۱۰ تانسور لختی زیر را در نظر بگیرید:

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}(A+B) & \frac{1}{4}(A-B) & 0 \\ \frac{1}{4}(A-B) & \frac{1}{4}(A+B) & 0 \\ 0 & 0 & C \end{Bmatrix}$$

دستگاه مختصات را به اندازه زاویه  $\theta$  حول محور  $x_3$  بچرخانید. عناصر تانسور تبدیل یافته را محاسبه کنید، و نشان دهید که به ازای  $\theta = \pi/4$  تانسور لختی قطری می‌شود و عناصر آن عبارت‌اند از:  $A, B, C$ .

۱۷.۱۰ یک ورق همگن نازک را که در صفحه  $x_1-x_2$  قرار گرفته است در نظر بگیرید. نشان دهید که تانسور لختی آن عبارت است از

۱. این آونگ اولین بار در ۱۸۱۸ توسط کاپیتان هنری کاتر (۱۷۷۷-۱۸۲۵) مورد استفاده قرار گرفت، اما این روش ظاهراً قبل از آن به وسیله بوهنربرگر پیشنهاد شده بود. نظریه آونگ کاتر را فردریش ویلهلم بسل (۱۷۸۴-۱۸۴۶) در سال ۱۸۲۶ به تفصیل مورد بررسی قرار داد.

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} A & -C & \circ \\ -C & B & \circ \\ \circ & \circ & A+B \end{Bmatrix}$$

۱۸.۱۰ اگر در مسئله قبلی، محورهای مختصات به اندازه زاویه  $\theta$  حول محور  $x_3$  بچرخند، نشان دهید تانسور لختی جدید عبارت خواهد بود از

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} A' & -C' & \circ \\ -C' & B' & \circ \\ \circ & \circ & A'+B' \end{Bmatrix}$$

که در اینجا

$$A' = A \cos^2 \theta - C \sin 2\theta + B \sin^2 \theta$$

$$B' = A \sin^2 \theta + C \sin 2\theta + B \cos^2 \theta$$

$$C' = C \cos 2\theta - \frac{1}{2}(B-A) \sin 2\theta$$

بدینسان، نشان دهید در صورتی که زاویه چرخش برابر باشد با

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2C}{B-A} \right)$$

محورهای  $x_2$  و  $x_1$  به محورهای اصلی تبدیل خواهند شد.

۱۹.۱۰ یک ورق تخت همگن به چگالی  $\rho$  را در نظر بگیرید که یک حلزون لگاریتمی  $r = ke^{\alpha\theta}$  و شعاعهای  $\theta = 0$  و  $\theta = \pi$  آن را محدود کرده‌اند. تانسور لختی را برای حالتی که مبدأ در  $r = 0$  و ورق در صفحه  $x_1-x_2$  قرار دارد به دست آورید. دستگاه مختصات را بچرخانید تا به گشتاورهای لختی اصلی برسید؛ و نتایج مسئله قبلی را به کار بگیرید تا نشان دهید که گشتاورها عبارت‌اند از

$$I'_1 = \rho k^2 P(Q - R), \quad I'_2 = \rho k^2 P(Q + R), \quad I'_3 = I'_1 + I'_2$$

در اینجا

$$P = \frac{e^{2\pi\alpha} - 1}{16(1 + 4\alpha^2)}, \quad Q = \frac{1 + 4\alpha^2}{2\alpha}, \quad R = \sqrt{1 + 4\alpha^2}$$



۲۰.۱۰ میله‌ای بکخواخت به طول  $b$  به‌طور قائم روی زمین ناهمواری ایستاده است و سپس می‌افتد. سرعت زاویه‌ای میله هنگام برخورد با زمین چقدر است؟

۲۱.۱۰ برهانی که به کمک معادلات (۵۴.۱۰) تا (۶۱.۱۰) ارائه شد کلاً بر پایهٔ قرارداد مجموعیابی استوار بود. این برهان را برحسب نمادگذاری ماتریسی بازنویسی کنید.

۲۲.۱۰ رد یک تانسور، بنابر تعریف، عبارت است از مجموع عناصر قطری آن تانسور:

$$\text{tr}\{\mathbf{I}\} \equiv \sum_k I_{kk}$$

با انجام یک تبدیل تشابه، نشان دهید که رد کمیتی ناورد است. به عبارت دیگر، نشان دهید

$$\text{tr}\{\mathbf{I}\} = \text{tr}\{\mathbf{I}'\}$$

که در اینجا  $\{\mathbf{I}\}$  تانسور در یک دستگاه مختصات مفروض است و  $\{\mathbf{I}'\}$  تانسور در دستگاه مختصاتی است که نسبت به اولی چرخیده است. این نتیجه را در مورد صورتهای مختلف تانسور لختی مربوط به مکعب که در چندین مثال در متن درس ارائه شده است، تحقیق کنید.

۲۳.۱۰ باروش به‌کار رفته در مسئلهٔ قبل نشان دهید که دترمینان عناصر تانسور تحت تبدیل تشابه کمیتی ناورد است. این نتیجه را نیز برای مورد مکعب تحقیق کنید.

۲۴.۱۰ بسامد نوسانهای کم‌دامنهٔ یک ورق همگن نازک را در صورتی که حرکت در صفحهٔ ورق انجام شود؛ و در صورتی که ورق به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع باشد و الف) از وسط یک ضلع، و ب) از یک رأس آویخته شده باشد، پیدا کنید.

۲۵.۱۰ یک قرص نازک از دو نیمهٔ همگن تشکیل شده است که در امتداد یک قطر قرص به هم متصل شده‌اند. اگر چگالی یک نیمه  $\rho$  و چگالی نیمهٔ دیگر  $2\rho$  باشد، عبارت مربوط به لاگرانژی این قرص را در حالتی که روی یک سطح افقی بدون لغزش می‌غلتد، پیدا کنید. (چرخش در صفحهٔ قرص انجام می‌شود.)

۲۶.۱۰ مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای  $\omega$  [معادلات (۱۰۲.۱۰)] را مستقیماً از ماتریس تبدیل  $\lambda$  [معادلهٔ (۹۹.۱۰)] به‌دست آورید.

۲۷.۱۰ یک جسم متقارن بدون اثر نیرو یا گشتاور نیرویی در حال حرکت است. فرض کنید  $x_2$  محور تقارن جسم، و  $\mathbf{I}$  در امتداد  $x_2$  باشد. زاویهٔ بین  $\omega$  و  $x_2$  برابر  $\alpha$  است. فرض کنید که ابتدا  $\omega$  و  $\mathbf{I}$  در صفحهٔ  $x_2-x_3$  واقع باشند. سرعت زاویه‌ای محور تقارن حول  $\mathbf{I}$  برحسب  $I_1, I_2, \omega$  و  $\alpha$  چقدر است؟

۲۸.۱۰ با تکیه بر شکل ۷.۱۰ (ج) نشان دهید که مؤلفه‌های  $\omega$  در امتداد محورهای ثابت  $(x'_i)$

عبارت‌اند از

$$\omega'_1 = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi$$

$$\omega'_2 = \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi$$

$$\omega'_3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}$$

۲۹.۱۰ نشان دهید که در مورد حرکت بدون نیروی یک فرفره متقارن:  $L$ ،  $\omega$ ، و  $e_3$  هم‌صفحه‌اند (شکل ۱۱.۱۰).

۳۰.۱۰ به بحث مربوط به فرفره متقارن در بخش ۱۰.۱۰ مراجعه کنید. باقرار دادن  $\dot{\theta} = 0$  در معادله (۱۶۲.۱۰)، صحت معادله مربوط به نقاط عطف حرکت رقص محوری را تحقیق کنید. نشان دهید که معادله حاصل معادله‌ای درجه سوم برحسب  $\cos \theta$  و دارای دو ریشه حقیقی و یک ریشه موهومی برحسب  $\theta$  است.

۳۱.۱۰ حرکت فرفره متقارن مورد بحث در بخش ۱۰.۱۰ را در حالتی که محور چرخش قائم است (یعنی، محورهای  $x'_1$  و  $x'_2$  برهم منطبق‌اند)، بررسی کنید. نشان دهید که حرکت برحسب اینکه کمیت  $4I_{12}Mhg/I_1^2\omega_1^2$  بزرگتر یا کوچکتر از واحد باشد، ناپایدار یا پایدار است. در هر دو حالت نمایش تغییرات پتانسیل مؤثر  $V(\theta)$  را ترسیم کنید، و نمودهایی از این منحنیها را که پایدار بودن حرکت را تعیین می‌کنند، نشان دهید. اگر فرفره را در پیکربندی پایدار به چرخش درآوریم، با کاهش تدریجی مقدار  $\omega_3$  به‌واسطه اصطکاک، چه اثری به‌وجود می‌آید؟ (این مورد همان حالت «فرفره خواب» است.)

۳۲.۱۰ یک ورق همگن باگشتاورهای لختی اصلی:

$$I_1 \quad \text{در امتداد محور اصلی } x_1$$

$$I_2 > I_1 \quad \text{در امتداد محور اصلی } x_2$$

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad \text{در امتداد محور اصلی } x_3$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید که مبدأ دستگاههای  $x_i$  و  $x'_i$  برهم منطبق و بر مرکز جرم ورق،  $O$ ، واقع باشند. در لحظه  $t = 0$ ، ورق را به‌گونه‌ای بدون اثر نیرو حول محوری که با صفحه ورق زاویه  $\alpha$  می‌سازد و عمود بر محور  $x_2$  است، با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  به چرخش وامی‌داریم. اگر  $I_1/I_2 \equiv \cos^2 \alpha$ ، نشان دهید که در زمان  $t$  سرعت زاویه‌ای حول محور  $x_2$  عبارت است از

$$\omega_2(t) = \Omega \cos \alpha \tanh(\Omega t \sin \alpha)$$

## نوسانهای جفت شده

### ۱.۱۱ مقدمه

در فصل ۳ حرکت نوسانگری را که تحت تأثیر یک نیروی محرک خارجی قرار گرفته بود بررسی کردیم. در آنجا بحث به موردی محدود می شد که نیروی محرک خودش نیرویی تناوبی است، یعنی، محرک، خود نوسانگر هماهنگ بود. ما کنش محرک را بر نوسانگر بررسی کردیم، اما اثر فیدبک نوسانگر را بر محرک منظور نکردیم. در بسیاری از موارد، چشمپوشی از این پدیده بی اهمیت است، اما اگر دو (یا چند) نوسانگر به گونه ای به هم متصل شوند که انرژی بتواند به طور تناوبی بین آنها مبادله شود، وضعیت به حالت پیچیده تر نوسانهای جفت شده<sup>۱</sup> می انجامد. این گونه حرکتها ممکن است خیلی پیچیده باشد (حتی ممکن است حرکت تناوبی نباشد)، اما همواره می توانیم حرکت هر سیستم نوسانی را بر حسب مختصات بهنجار توصیف کنیم، خاصیت این مختصات عبارت از این است که هر مختصه در یک تک بسامد کاملاً معین نوسان می کند؛ یعنی، مختصات بهنجار چنان تشکیل می شوند که بین آنها هیچگونه جفت شدگی پیش نمی آید، حتی اگر در مختصات معمولی

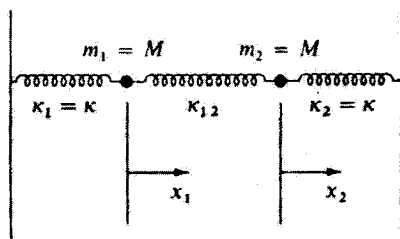
۱. نظریه کلی حرکت نوسانی سیستم ذرات با تعداد محدودی درجه آزادی را، در سالهای ۱۷۶۵-۱۷۶۲ لاگرانژ فرمولبندی کرد، اما در این زمینه دانیل برنولی (۱۷۸۲-۱۷۵۰) پیشاهنگ بوده است که در ۱۷۵۳ این کار را انجام داده است.

که وضعیت ذرات را توصیف می‌کند، جفت‌شدگی وجود داشته باشد. شرایط اولیه را همواره می‌توان چنان اختیار کرد که در حرکت حاصل تنها یکی از مختصه‌های بهنجار با زمان تغییر کند. در چنین شرایطی می‌گوییم که یکی از مدهای بهنجار سیستم برانگیخته شده است. اگر سیستم  $n$  درجه آزادی داشته باشد (مثلاً،  $n$  نوسانگر یک بعدی جفت شده یا  $n/3$  نوسانگر جفت شده سه بعدی)، معمولاً  $n$  مد بهنجار دارد، که ممکن است بعضی از آنها یکسان باشند. حرکت کلی سیستم عبارت است از برهم‌نهی پیچیده‌ای از تمامی مدهای بهنجار نوسان، اما همواره می‌توانیم شرایط اولیه‌ای را بیابیم که هر مد بهنجار معینی به‌طور مستقل برانگیخته شود. شناسایی تمام مدهای بهنجار هر سیستم برای ما این امکان را فراهم می‌آورد که تصویر روشنی از حرکت به‌دست دهیم، حتی اگر حرکت کلی سیستم ترکیب پیچیده‌ای از تمامی مدهای بهنجار باشد.

در فصل بعد کاری را که در اینجا شروع کردیم پی می‌گیریم و در خصوص حرکت ریسمانهای مرتعش به بحث می‌پردازیم. سودمندی رهیافت مدهای بهنجار برای توصیف سیستمهای نوسانی به هیچوجه به این مثال ختم نمی‌شود؛ در واقع، کاربردهای این رهیافت را می‌توان در بسیاری از حوزه‌های فیزیک ریاضی پیدا کرد، مثل حرکت میکروسکوپی در جامدات بلورین و نوسانهای میدان الکترومغناطیسی.

### ۲.۱۱ دو نوسانگر هماهنگ جفت شده

یکی از نمونه‌های فیزیکی سیستمهای جفت شده جامدی است که در آن آنها از طریق نیروهای کشسان بین یکدیگر، برهم‌کنش دارند و حول وضعیت تعادل خود نوسان می‌کنند. فنرهای بین آنها نیروهای کشسان را نشان می‌دهند. مولکولی متشکل از چند تا از این نوع آنها حتی مدل ساده‌تری را ارائه می‌دهد. این بحث را با بررسی سیستم مشابهی با حرکت جفت شده در یک بعد شروع می‌کنیم: دو جسم به‌وسیله فنری به یکدیگر متصل و با فنرهایی به نقاط ثابتی وصل شده‌اند (شکل ۱.۱۱). در طی این فصل در توصیف جنبه‌های مختلف حرکت جفت شده به این مثال باز خواهیم گشت.



شکل ۱.۱۱

فرض می‌کنیم هر کدام از فنرهای نوسانگر دارای ثابت نیروی  $\kappa$  باشند؛ ثابت نیروی فنر جفت شده عبارت است از  $\kappa_{۱۲}$ .<sup>۱</sup> حرکت را به خط واصل بین جرمها محدود می‌کنیم، به طوری که سیستم فقط شامل دو درجه آزادی، نمایش یافته با مختصه‌های  $x_1$  و  $x_2$ ، باشد. هر مختصه از وضعیت تعادل اندازه‌گیری می‌شود.

اگر  $m_1$  و  $m_2$  نسبت به وضعیت تعادلشان به ترتیب به اندازه  $x_1$  و  $x_2$  جابه‌جا شوند، نیروی وارد بر  $m_1$  برابر  $-\kappa x_1 - \kappa_{۱۲}(x_1 - x_2)$  و نیروی وارد بر  $m_2$  برابر  $-\kappa x_2 - \kappa_{۱۲}(x_2 - x_1)$  است. بنابراین معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_1 + (\kappa + \kappa_{۱۲})x_1 - \kappa_{۱۲}x_2 &= 0 \\ M\ddot{x}_2 + (\kappa + \kappa_{۱۲})x_2 - \kappa_{۱۲}x_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (۱.۱۱)$$

چون انتظار داریم که حرکت نوسانی باشد، جوابی به شکل زیر را در معادلات امتحان می‌کنیم

$$\left\{ \begin{aligned} x_1(t) &= B_1 e^{i\omega t} \\ x_2(t) &= B_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (۲.۱۱)$$

که در اینجا باید بسامد  $\omega$  تعیین شود و دامنه‌های  $B_1$  و  $B_2$  ممکن است مختلط باشند.<sup>۲</sup> این جوابهای آزمایشی توابع مختلط‌اند. به این ترتیب در مرحله نهایی جواب اجزای حقیقی  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  را برمی‌گزینیم، زیرا تنها قسمت حقیقی است که از نظر فیزیکی اهمیت دارد. ما به خاطر کارایی زیاد این روش حل معادله، از آن استفاده می‌کنیم، و بارها از آن بهره خواهیم گرفت، اما قسمت اعظم جزئیات را کنار می‌گذاریم. این عبارتها را در عوض جابه‌جایی، در معادلات حرکت می‌نشانیم، و می‌یابیم

$$\left\{ \begin{aligned} -M\omega^2 B_1 e^{i\omega t} + (\kappa + \kappa_{۱۲})B_1 e^{i\omega t} - \kappa_{۱۲}B_2 e^{i\omega t} &= 0 \\ -M\omega^2 B_2 e^{i\omega t} + (\kappa + \kappa_{۱۲})B_2 e^{i\omega t} - \kappa_{۱۲}B_1 e^{i\omega t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (۳.۱۱)$$

۱. بدین ترتیب از این پس ثابت نیرو را به جای  $k$  که تاکنون به کار برده‌ایم، با  $\kappa$  (کاپا) نشان می‌دهیم. نماد  $k$  را برای مبحث کلاً متفاوتی (که در فصل ۱۳ آغاز می‌شود) نگه می‌داریم.
۲. چون دامنه مختلط دارای مقدار و فاز است، دو ثابت اختیاری لازم، برای جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را داریم؛ یعنی، مانند معادله (۶.۳) ب) می‌توانستیم بنویسیم  $x(t) = |B| \exp[i(\omega t - \delta)]$  یا  $x(t) = |B| \cos(\omega t - \delta)$ . بعداً معادلات (۱.۱۱)، خواهیم دید که بهتر است دو دامنه حقیقی مجزا و ضرایب متغیر با زمان  $\exp(i\omega t)$  و  $\exp(-i\omega t)$  را به کار بگیریم. این صورتهای مختلف جواب جملگی به تمامی هم‌ارزند.

با مرتب کردن جملات و حذف عامل نمایی مشترک، می‌رسیم به

$$\left. \begin{aligned} (\kappa + \kappa_{12} - M\omega^2)B_1 - \kappa_{12}B_2 &= 0 \\ -\kappa_{12}B_1 + (\kappa + \kappa_{12} - M\omega^2)B_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

برای وجود جواب غیر بدیهی در مورد این دستگاه دو معادله و دو مجهول، باید دترمینان ضرایب  $B_1$  و  $B_2$  صفر شود

$$\begin{vmatrix} \kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 & -\kappa_{12} \\ -\kappa_{12} & \kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.11)$$

از بسط این دترمینان مشخصه به دست می‌آوریم

$$(\kappa + \kappa_{12} - M\omega^2)^2 - \kappa_{12}^2 = 0 \quad (6.11)$$

از این رو

$$\kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 = \pm \kappa_{12}$$

از حل این معادله بر حسب  $\omega$  خواهیم داشت

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa + \kappa_{12} \pm \kappa_{12}}{M}} \quad (7.11)$$

بنابراین، برای این سیستم دو بسامد مشخصه (یا ویژه بسامد) داریم

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa + 2\kappa_{12}}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{M}} \quad (8.11)$$

به این ترتیب جواب کلی مسئله عبارت است از

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= B_{11}^+ e^{i\omega_1 t} + B_{11}^- e^{-i\omega_1 t} + B_{12}^+ e^{i\omega_2 t} + B_{12}^- e^{-i\omega_2 t} \\ x_2(t) &= B_{21}^+ e^{i\omega_1 t} + B_{21}^- e^{-i\omega_1 t} + B_{22}^+ e^{i\omega_2 t} + B_{22}^- e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

که در اینجا بسامدهای منفی و مثبت را صراحتاً منظور کرده‌ایم، زیرا رادیکالهای (۷.۱۱) و (۸.۱۱) می‌توانند حامل هر یک از دو علامت باشند.

در معادلات (۹.۱۱) همه دامنه‌ها مستقل نیستند، که می‌توان این مطلب را با نشان دادن  $\omega_1$  و  $\omega_2$  در معادلات (۴.۱۱) تحقیق کرد، بی‌خواهیم برد که

$$B_{11} = -B_{21} \quad \text{به‌ازای } \omega = \omega_1 \text{ داریم:}$$

$$B_{12} = B_{22} \quad \text{و به‌ازای } \omega = \omega_2 \text{ داریم:}$$

تنها شاخصهای زیرین لازم برای  $B$ ها همان شاخصهای زیرین مبین ویژه‌سامد (یعنی، شاخصهای زیرین دوم) هستند. بنابراین، جواب کلی را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= B_1^+ e^{i\omega_1 t} + B_1^- e^{-i\omega_1 t} + B_2^+ e^{i\omega_2 t} + B_2^- e^{-i\omega_2 t} \\ x_2(t) &= -B_1^+ e^{i\omega_1 t} - B_1^- e^{-i\omega_1 t} + B_2^+ e^{i\omega_2 t} + B_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

بدین ترتیب، در اینجا، درست مطابق انتظارمان، چهار ثابت اختیاری در جواب کلی داریم، چون دو معادله حرکت داریم که از مرتبه دوم‌اند.

قبلاً گفته‌ایم که همواره می‌توانیم یک مجموعه مختصات تعریف کنیم که بستگی زمانی ساده‌ای داشته و با برانگیختگی مدهای نوسانی متفاوت سیستم متناظر باشند. زوج مختصات تعریف شده در زیر را بررسی می‌کنیم

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &\equiv x_1 - x_2 \\ \eta_2 &\equiv x_1 + x_2 \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

یا

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1) \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

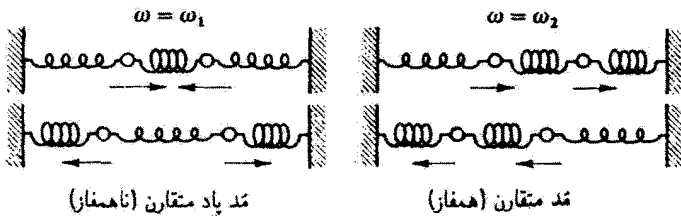
با نشان دادن این عبارتها به جای  $x_1$  و  $x_2$  در معادلات (۱.۱۱)، داریم

$$\left. \begin{aligned} M(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + (\kappa + 2\kappa_{12})\eta_1 + \kappa\eta_2 &= 0 \\ M(\ddot{\eta}_1 - \ddot{\eta}_2) + (\kappa + 2\kappa_{12})\eta_1 - \kappa\eta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

که می‌توان آنها را (با جمع و تفریق کردن) حل کرد و رسید به

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{\eta}_1 + (\kappa + 2\kappa_{12})\eta_1 &= 0 \\ M\ddot{\eta}_2 + \kappa\eta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

حال مختصات  $\eta_1$  و  $\eta_2$  جفت نشده و بنابراین مستقل‌اند. جوابهای این معادلات عبارت‌اند از



شکل ۲.۱۱

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(t) &= C_1^+ e^{i\omega_1 t} + C_1^- e^{-i\omega_1 t} \\ \eta_2(t) &= C_2^+ e^{i\omega_2 t} + C_2^- e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (15.11)$$

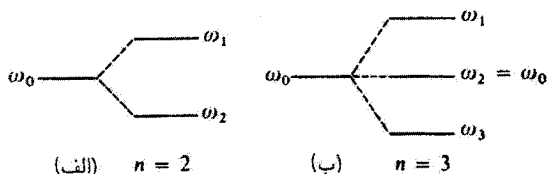
که بسامدهای  $\omega_1$  و  $\omega_2$  به کمک معادلات (۸.۱۱) به دست آمده‌اند. بدین ترتیب،  $\eta_1$  و  $\eta_2$  مختصات بهنجار مسئله هستند. در یکی از بخشهای بعدی روشی کلی برای به دست آوردن مختصات بهنجار معرفی می‌کنیم.

اگر شرایط اولیه خاص  $x_1(0) = -x_2(0)$  و  $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$  را اعمال کنیم، در می‌یابیم که  $\eta_2(0) = 0$  و  $\dot{\eta}_2(0) = 0$  که به  $C_2^+ = C_2^- = 0$  می‌انجامد؛ یعنی، به ازای تمام مقادیر  $t$  داریم  $\eta_2(t) \equiv 0$ . بدین ترتیب ذرات همواره ناهمگاز و با بسامد  $\omega_1$  نوسان می‌کنند؛ این مد یاد متقارن نوسان است. از سوی دیگر، اگر با شرایط اولیه  $x_1(0) = x_2(0)$  و  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$  شروع می‌کردیم، داشتیم:  $\eta_1(t) \equiv 0$  و ذرات همگاز با هم با بسامد  $\omega_2$  نوسان می‌کردند؛ این مد متقارن نوسان است. این نتایج به صورت طرحواره در شکل ۲.۱۱ ترسیم شده‌اند. حرکت کلی سیستم ترکیبی خطی از مدهای متقارن و یاد متقارن است.

این نکته که بسامد مد یاد متقارن بالاتر و بسامد مد متقارن پایینتر است، در واقع یک نتیجه کلی است. در سیستم پیچیده‌ای از نوسانگرهای جفت شده خطی، مدی که درجه تقارنش از همه بالاتر است، کمترین بسامد را دارد. اگر تقارن از بین برود، آنگاه فرها باید در مدهای یاد متقارن «جدیدتر کار کنند» و بسامد زیاد می‌شود.

توجه داشته باشید که اگر می‌خواستیم  $m_2$  را ثابت نگه‌داریم و به  $m_1$  امکان نوسان بدهیم، در آن صورت بسامد سیستم عبارت می‌شود از  $\sqrt{(\kappa + \kappa_{12})/M}$ . در مورد بسامد نوسان  $m_2$  نیز وقتی که  $m_1$  ثابت نگه‌داشته شود همین نتیجه به دست می‌آید. اگر جفت‌شدگی وجود نداشته باشد، نوسانگرها یکسان‌اند و بسامد نوسان یکسانی نیز خواهند داشت. اثر جفت‌شدگی همانا جداسازی بسامد مشترک است، که یکی از بسامدهای مشخصه بیشتر و بسامد دیگر کمتر از بسامد





شکل ۳.۱۱

مربوط به حرکت جفت‌نشده است. اگر بسامد حرکت جفت‌نشده را به  $\omega$  نشان دهیم، آنگاه  $\omega_1 > \omega > \omega_2$ ؛ می‌توان اثر جفت‌شدگی را، مطابق شکل ۳.۱۱ (الف)، به‌طور طرحواره نشان داد. جواب مربوط به بسامدهای مشخصه در مسئله سه جرم یکسان جفت‌شده در شکل ۳.۱۱ (ب) ترسیم شده است. در اینجا هم شکافتگی بسامدهای مشخصه وجود دارد، که یکی بیشتر و یکی کمتر از  $\omega$  است. این نتیجه کلی است: به‌ازای  $n$  (عدد زوج) نوسانگر جفت‌شده یکسان،  $n/2$  بسامدهای مشخصه بیشتر از  $\omega$ ، و  $n/2$  بسامدهای مشخصه کمتر از  $\omega$  است. اگر  $n$  فرد باشد، یکی از بسامدهای مشخصه برابر  $\omega$  است، و  $n - 1$  بسامد مشخصه باقی مانده به‌طور متقارن در بالا و پایین  $\omega$  توزیع شده‌اند. در نزد خواننده آشنا با پدیده اثر زیمان در طیفهای اتمی، شباهت با این نتیجه محرز خواهد بود: در هر مورد یک شکافت متقارن بسامد با اعمال نوعی برهم‌کنش (در یک مورد با به‌کارگیری میدان مغناطیسی و در مورد دیگر از طریق جفت‌شدگی ذرات توسط فترهای واسط) به‌وجود می‌آید.

### ۳.۱۱ جفت‌شدگی ضعیف

برخی موارد جالبتر نوسانهای جفت‌شده وقتی پیش می‌آیند که جفت‌شدگی ضعیف باشد؛ یعنی، وقتی که ثابت نیروی فنر جفت‌شدگی در مقایسه با فترهای نوسانگر کوچک باشد:  $k_{12} \ll k$ . طبق معادلات (۸.۱۱) بسامدهای  $\omega_1$  و  $\omega_2$  عبارت‌اند از

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۱۶.۱۱)$$

اگر جفت‌شدگی ضعیف باشد، می‌توانیم عبارت مربوط به  $\omega_1$  را بسط دهیم

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \sqrt{1 + \frac{2k_{12}}{k}} \cong \sqrt{\frac{k}{M}} (1 + 2\varepsilon) \quad (۱۷.۱۱)$$

که در اینجا

$$\varepsilon \cong \frac{\kappa_{12}}{2\kappa} \ll 1 \quad (18.11)$$

بسامد طبیعی هر یک از نوسانگرها، وقتی نوسانگر دیگر ثابت باشد، عبارت خواهد بود از

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\kappa + \kappa_{12}}}{M} \cong \sqrt{\frac{\kappa}{M}}(1 + \varepsilon) \quad (19.11)$$

یا

$$\sqrt{\frac{\kappa}{M}} \cong \omega_0(1 - \varepsilon) \quad (20.11)$$

بنابراین دو بسامد مشخصه تقریباً از روابط زیر به دست می آید

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &\cong \sqrt{\frac{\kappa}{M}}(1 + 2\varepsilon), & \omega_2 &\cong \sqrt{\frac{\kappa}{M}} \\ &\cong \omega_0(1 - \varepsilon)(1 + 2\varepsilon) & &\cong \omega_0(1 - \varepsilon) \\ &\cong \omega_0(1 + \varepsilon) & & \end{aligned} \right\} \quad (21.11)$$

اکنون می توانیم چگونگی رفتار سیستم ضعیف جفت شده‌ای را بررسی کنیم. اگر نوسانگر ۱

را به اندازه  $D$  جابه‌جا و از حال سکون رها کنیم، شرایط اولیه برای سیستم عبارت‌اند از

$$x_1(0) = D, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0 \quad (22.11)$$

اگر این شرایط اولیه را به‌ازای  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  در معادلات (۱۰.۱۱) بنشانیم دامنه‌ها را به این ترتیب به دست خواهیم آورد

$$B_1^+ = B_1^- = B_2^+ = B_2^- = \frac{D}{4} \quad (23.11)$$

در آن صورت  $x_1(t)$  چنین می‌شود

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{D}{4} [(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) + (e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t})] \\ &= \frac{D}{4} [\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t] \\ &= D \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \end{aligned} \quad (24.11)$$

ولی، طبق معادلات (۲۱.۱۱)

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0; \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \varepsilon \omega_0. \quad (25.11)$$

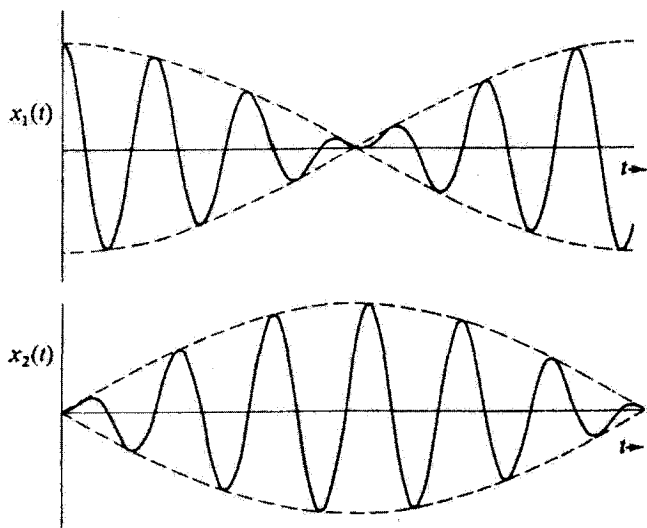
بنابراین<sup>۱</sup>

$$x_1(t) = (D \cos \varepsilon \omega \cdot t) \cos \omega \cdot t \quad (\text{الف } ۲۶.۱۱)$$

و به همین ترتیب

$$x_2(t) = (D \sin \varepsilon \omega \cdot t) \sin \omega \cdot t \quad (\text{ب } ۲۶.۱۱)$$

چون  $\varepsilon$  کوچک است، کمیت‌های  $D \cos \varepsilon \omega \cdot t$  و  $D \sin \varepsilon \omega \cdot t$  نسبت به زمان به کندی تغییر می‌کنند. بنابراین  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  اساساً تابعی سینوسی با دامنه‌های کند متغیر به شمار می‌آیند. گرچه، در ابتدا فقط  $x_1$  غیر صفر بود، با افزایش زمان دامنه  $x_1$  نسبت به زمان به کندی کاهش می‌یابد، و دامنه  $x_2$  نیز به کندی از صفر افزایش پیدا می‌کند. از این رو انرژی از نوسانگر اول به نوسانگر دوم منتقل می‌شود. به ازای  $t = \pi / 2\varepsilon\omega$ ، داریم:  $D \cos \varepsilon \omega \cdot t = 0$ ، و تمامی انرژی منتقل شده است. با افزایش بیشتر زمان، انرژی به نوسانگر اول بازمی‌گردد. این همان پدیده آشنای زنش است و نمایش آن را در شکل ۴.۱۱ مشاهده می‌کنید. (در حالت ترسیم شده،  $\varepsilon = 8^\circ$ ).



شکل ۴.۱۱

۱. توجه داشته باشید که در این مورد برحسب تصادف،  $x_1$  و  $x_2$  همواره حقیقی بودند، به طوری که لازم نیست، به همان طریقی که در بی معادله (۲.۱۱) به اجمال بیان شد، جزء حقیقی را در مرحله پایانی برگزینیم.

## ۴.۱۱ مسئله کلی نوسانهای جفت‌شده

در بخشهای پیش به آنجا رسیدیم که جفت‌شدگی در هر سیستم ساده با دو درجه آزادی، دو بسامد مشخصه و دو مد نوسان ایجاد می‌کند. حال مسئله کلی نوسانهای جفت‌شده را مورد توجه قرار می‌دهیم. سیستم پایستاری را در نظر بگیرید که برحسب مختصات تعمیم یافته  $q_k$  و زمان  $t$  توصیف شده است. اگر سیستم دارای  $n$  درجه آزادی باشد، آنگاه  $k = 1, 2, \dots, n$ . تصریح می‌کنیم که یک پیکربندی تعادل پایدار برای سیستم وجود دارد و مقادیر مختصات تعمیم یافته در حالت تعادل برابر  $q_k$  است. در این نوع پیکربندیها، معادلات لاگرانژ از شرایط زیر پیروی می‌کنند

$$q_k = q_{k_0}, \quad \dot{q}_k = 0, \quad \ddot{q}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

هر جمله غیر صفر از نوع  $\partial L / \partial \dot{q}_k$ ، باید دست کم شامل  $\dot{q}_k$  یا  $\ddot{q}_k$  باشد، به طوری که تمامی این نوع جمله‌ها در وضعیت تعادل صفر می‌شوند. بنابراین، از معادلات لاگرانژ داریم

$$\left. \frac{\partial L}{\partial q_k} \right|_0 = \left. \frac{\partial T}{\partial q_k} \right|_0 - \left. \frac{\partial U}{\partial q_k} \right|_0 = 0 \quad (27.11)$$

که در اینجا شاخص زیرین  $0$  نشانگر آن است که کمیت مورد نظر در وضعیت تعادل محاسبه شده است.

فرض می‌کنیم معادلاتی که مختصات تعمیم یافته را به مختصات قائم مربوط می‌کند به طور صریح شامل زمان نباشد؛ یعنی، داریم

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j) \quad \text{یا} \quad q_j = q_j(x_{\alpha,i})$$

بنابراین انرژی جنبشی تابع درجه دوم همگنی از سرعتهای تعمیم یافته است [معادله (۱۲.۶)]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (28.11)$$

از این رو به طور کلی

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (29.11)$$

و بنابراین از معادله (۲۷.۱۱) داریم

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_k} \right|_0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (30.11)$$

همچنین می توانیم بیشتر تصریح کنیم که مختصات تعمیم یافته  $q_k$  را از وضعیت تعادل اندازه گیری می کنیم؛ یعنی،  $q_k = 0$  را انتخاب می کنیم. (اگر در ابتدا یک مجموعه مختصات  $q'_k$  را انتخاب کرده بودیم به طوری که  $q'_k \neq 0$  همواره می توانستیم یک تبدیل خطی ساده از نوع  $q_k = q'_k + \alpha_k$  انجام دهیم، به طوری که  $q_k = 0$ .)

بسط انرژی پتانسیل بر حسب سری تایلور حول پیکربندی تعادل منجر به عبارت زیر می شود:

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = U_0 + \sum_k \left. \frac{\partial U}{\partial q_k} \right|_0 q_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0 q_j q_k + \dots \quad (31.11)$$

جمله دوم این بسط با در نظر گرفتن معادله (۳۰.۱۱) صفر می شود، و بدون آنکه کلیت مسئله از دست برود می توانیم اندازه گیری  $U$  را چنان اختیار کنیم که داشته باشیم  $U_0 \equiv 0$ . در این صورت، اگر حرکت را محدود کنیم، به طوری که مختصات تعمیم یافته کوچک باشند، می توانیم از تمامی جملات بسط که شامل حاصلضربهای بیشتر از درجه دوم  $q_k$  باشند، چشم پوشیم. این کار با محدود کردن حوزه مطالعه به نوسانهای هماهنگ ساده متناظر است، که در آن حالت فقط جملات مرتبه دوم بر حسب مختصات شرکت دارند. بدین ترتیب

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k \quad (32.11)$$

که در اینجا  $A_{jk}$  را تعریف می کنیم

$$A_{jk} \equiv \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0 \quad (33.11)$$

چون ترتیب مشتق گیری اهمیت ندارد (اگر  $U$  مشتق جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشد)، کمیت  $A_{jk}$  متقارن است؛ یعنی،  $A_{jk} = A_{kj}$ .

تصریح کرده ایم که حرکت سیستم باید در نزدیکی پیکربندی تعادل انجام شود، و نشان دادیم (معادله (۳۰.۱۱)) که وقتی سیستم در این پیکربندی است، باید مقدار  $U$  کمینه باشد. چون در حالت تعادل  $U = 0$  را اختیار کرده ایم، به طور کلی باید داشته باشیم  $U \geq 0$ . همچنین روشن است که باید داشته باشیم  $T \geq 0$ .

---

۱. یعنی،  $U$  و  $T$  هر دو کمیت های مثبت معین هستند. این کمیتها همواره مثبت اند مگر اینکه مختصات (در مورد  $U$ ) یا سرعتها (در مورد  $T$ ) صفر باشند، که در آن صورت صفر می شوند.

معادلات (۲۸.۱۱) و (۳۲.۱۱) از لحاظ شکل مشابهاند

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\gamma} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ U &= \frac{1}{\gamma} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k \end{aligned} \quad (34.11)$$

کمیت‌های  $A_{jk}$  فقط عددند [معادله (۳۳.۱۱)]; ولی  $m_{jk}$  ممکن است تابعی بر حسب مختصات باشد [معادله (۱۱۹.۶)]

$$m_{jk} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_i \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k}$$

می‌توانیم  $m_{jk}$  را حول وضعیت تعادل بسط دهیم و داریم

$$m_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_n) = m_{jk}(q_{l0}) + \sum_l \left. \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_l} \right|_{q_l} q_l + \dots \quad (35.11)$$

می‌خواهیم فقط اولین جمله غیر صفر این بسط را نگاه داریم؛ اما، بر خلاف بسط انرژی پتانسیل [معادله (۳۱.۱۱)]، نمی‌توانیم جمله ثابت  $m_{jk}(q_{l0})$  را صفر اختیار کنیم، بنابراین جمله پیشرو در بسط، در این تقریب، به صورت همان مقدار ثابت  $m_{jk}$  در می‌آید. این همان مرتبه تقریبی است که در مورد  $U$  به‌کار بردیم، زیرا جمله مرتبه بالاتر بعدی در  $T$  شامل کمیت مکعبی  $\dot{q}_j \dot{q}_k \dot{q}_l$  و جمله مرتبه بالاتر بعدی در  $U$  شامل  $q_j q_k q_l$  است. بدین ترتیب، در معادلات (۳۴.۱۱)،  $m_{jk}$  و  $A_{jk}$  آرایه‌های  $n \times n$  از اعدادی‌اند که چگونگی جفت‌شدگی حرکت مختصات مختلف را معین می‌کند. مثلاً، اگر به‌ازای  $s \neq r$  داشته باشیم:  $m_{rs} \neq 0$ ، در آن صورت انرژی جنبشی شامل جملاتی متناسب با  $\dot{q}_r \dot{q}_s$  است، و یک جفت‌شدگی بین مختصه  $r$ ام و مختصه  $s$ ام وجود دارد. از سوی دیگر، اگر  $m_{jk}$  قطری باشد، به طوری که  $^1$  به‌ازای  $k = j$  مقدار  $m_{jk}$  مخالف صفر و در غیر این صورت برابر صفر باشد، آنگاه انرژی جنبشی به این صورت در می‌آید

$$T = \frac{1}{\gamma} \sum m_r \dot{q}_r^2$$

که در اینجا ما  $m_{rr}$  را به  $m_r$  خلاصه کردیم. بدین ترتیب انرژی جنبشی مجموع ساده‌ای از انرژی جنبشیهای وابسته به مختصات متفاوت است. همان طوری که در زیر مشاهده می‌کنیم، اگر  $A_{jk}$  نیز

۱. اگر یک عنصر قطری  $m_{jk}$  (مثلاً،  $m_{rr}$ ) صفر شود، آنگاه مسئله را می‌توان به  $n-1$  درجه آزادی کاهش داد.

قطری باشد، به طوری که  $U$  نیز مجموع ساده‌ای از تک انرژیهای پتانسیل باشد، آنگاه هر مختصه به‌نحو ساده و سراسری رفتار، و نوسانهایی با یک تک بسامد معین انجام می‌دهد. بنابراین، مسئله به این صورت در می‌آید که تبدیل مختصاتی پیدا کنیم که به‌طور همزمان هم  $m_{jk}$  و هم  $A_{jk}$  را قطری کند و در این صورت سیستم را قابل توصیف به ساده‌ترین صورت درآورد. این مختصات همان مختصات بهنجار هستند.

معادلات حرکت سیستم با انرژیهای جنبشی و پتانسیلی که حاصل معادلات (۳۴.۱۱) هستند، از معادله لاگرانژ به‌دست می‌آیند

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

اما چون  $T$  فقط تابع سرعتهای تعمیم‌یافته و  $U$  فقط تابع مختصات تعمیم‌یافته است، معادله لاگرانژ مربوط به مؤلفه  $k$ ام چنین می‌شود

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (36.11)$$

از معادلات (۳۴.۱۱) مشتقها را محاسبه می‌کنیم

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_k} &= \sum_j A_{jk} q_j \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_j m_{jk} \dot{q}_j \end{aligned} \right\} \quad (37.11)$$

معادلات حرکت چنین می‌شوند

$$\sum_j (A_{jk} q_j + m_{jk} \ddot{q}_j) = 0 \quad (38.11)$$

این معادله مجموعه‌ای از  $n$  معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت است. چون سیستمی نوسانی را مورد بررسی قرار داده‌ایم، انتظار جوابهایی از نوع زیر را داریم

$$q_j(t) = a_j e^{i(\omega t - \delta)} \quad (39.11)$$

که در اینجا  $a_j$  دامنه‌های حقیقی‌اند و فاز  $\delta$  را هم در اینجا منظور کرده‌ایم تا دو ثابت اختیاری ( $a_j$  و  $\delta$ ) مورد نیاز برای ماهیت مرتبه دوم هر یک از معادلات دیفرانسیل را به‌دست دهد.<sup>۱</sup> (تنها جزء

۱. این روش، کلاً هم‌ارز شگرد قبلی است که در آنجا نوشتیم:  $x(t) = B \exp(i\omega t)$  [معادلات (۲.۱۱)] و  $B$  را مختلط اختیار کردیم. در معادلات (۹.۱۱) با استفاده از  $\exp(i\omega t)$  و  $\exp(-i\omega t)$  ثابتهای اختیاری لازم را به صورت دامنه‌های حقیقی نشان دادیم و نه با منظور کردن یک عامل فاز مثل معادله (۳۹.۱۱).

حقیقی عبارت سمت راست را باید منظور کنیم). بسامد  $\omega$  و فاز  $\delta$  باید به کمک معادلات حرکت معین شوند. اگر  $\omega$  کمیتی حقیقی باشد، آنگاه جواب [معادله (۳۹.۱۱)] یک حرکت نوسانی را می‌نماید. این نکته را که  $\omega$  واقعاً حقیقی است، شاید بتوان از بحث فیزیکی زیر استنباط کرد. فرض کنید  $\omega$  شامل یک جزء موهومی  $i\omega_i$  باشد ( $\omega_i$  در اینجا حقیقی است). این جزء، جملاتی به صورت  $e^{\omega_i t}$  و  $e^{-\omega_i t}$  در عبارت مربوط به  $q_j$  ایجاد می‌کند. به این ترتیب، وقتی انرژی کل سیستم را محاسبه کنیم،  $T + U$  شامل عواملی است که به‌طور یکنوا با زمان افزایش یا کاهش می‌یابند. اما این تغییر در انرژی کل، ناقض این فرض است که بر مبنای آن با یک سیستم پایدار سروکار داریم؛ بنابراین بسامد  $\omega$  باید کمیتی حقیقی باشد.

با جوابی، از نوعی که با معادله (۳۹.۱۱) داده شده است، معادلات حرکت چنین می‌شوند

$$\sum_j (A_{jk} - \omega^2 m_{jk}) a_j = 0 \quad (40.11)$$

که از این معادلات عامل مشترک  $\exp[i(\omega t - \delta)]$  حذف شده است. این معادله در واقع مجموعه‌ای از  $n$  معادله خطی، همگن و جبری است که  $a_j$  باید در آن صدق کند. برای اینکه یک جواب غیر بدیهی وجود داشته باشد، دترمینان ضرایب آن باید صفر شود

$$|A_{jk} - \omega^2 m_{jk}| = 0 \quad (41.11)$$

به بیان صریحتر، این رابطه یک دترمینان  $n \times n$  به صورت زیر است

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \omega^2 m_{11} & A_{12} - \omega^2 m_{12} & A_{13} - \omega^2 m_{13} & \dots \\ A_{12} - \omega^2 m_{12} & A_{22} - \omega^2 m_{22} & A_{23} - \omega^2 m_{23} & \dots \\ A_{13} - \omega^2 m_{13} & A_{23} - \omega^2 m_{23} & A_{33} - \omega^2 m_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (42.11)$$

که در اینجا تقارن  $A_{jk}$  و  $m_{jk}$  صریحاً منظور شده است.

معادله‌ای که به وسیله این دترمینان نمایش یافته است معادله مشخصه یا ویژه معادله سیستم نامیده می‌شود و معادله‌ای از مرتبه  $n$  بر حسب  $\omega^2$  است. معمولاً، این معادله  $n$  ریشه دارد که آنها را با  $\omega_r^2$  نشانه‌گذاری می‌کنیم.  $\omega_r$  بسامد مشخصه یا ویژه بسامد سیستم نامیده می‌شود. (در



مواردی، ممکن است دو یا چند  $\omega_r$  مساوی شوند، این همان پدیده واگنی است و بعداً مورد بحث قرار می‌گیرد. درست مانند روش تعیین راستای محورهای اصلی یک جسم صلب، هر کدام از ریشه‌های معادله مشخصه را می‌توان برای تعیین نسبت‌های  $a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n$  مربوط به هر مقدار  $\omega_r$  در معادله (۴۰.۱۱) جایگزین کرد. هر کدام از این مجموعه‌ها مؤلفه‌های یک بردار  $n$  بعدی  $a_r$  را تعریف می‌کند، که ویژه بردار سیستم نامیده می‌شود. به این ترتیب،  $a_r$  ویژه بردار وابسته به ویژه بسامد  $\omega_r$  است. مؤلفه  $\lambda_m$  ویژه بردار  $m$  را با  $a_{jr}$  نشان می‌دهیم.

چون اصل برهم‌نهی در مورد معادله دیفرانسیل [معادله (۳۸.۱۱)] به کار می‌رود، جواب عمومی مربوط به  $q_j$  را باید به صورت یک ترکیب خطی از جوابهای مربوط به هر کدام از  $n$  مقدار  $r$  نوشت

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)} \quad (۴۳.۱۱)$$

چون فقط جزء حقیقی  $q_j(t)$  از نظر فیزیکی با معنی است، در حقیقت داریم<sup>۱</sup>

$$q_j(t) = \text{Re} \sum_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)} = \sum_r a_{jr} \cos(\omega_r t - \delta_r) \quad (۴۴.۱۱)$$

بنابراین، حرکت مؤلفه  $q_j$  متشکل است از حرکت‌هایی با هر کدام از  $n$  مقدار بسامد  $\omega_r$ . واضح است که  $q_j$  مختصات بهنجار نیستند که مسئله را به صورت ساده درآورند. جستجو برای مختصات بهنجار را در بخش ۶.۱۱ پی می‌گیریم.

### مثال ۱.۱۱

بسامدهای مشخصه مربوط به مورد دو جسم، بخش ۲.۱۱، را که توسط فرم‌هایی بهم متصل شده‌اند، از طریق فرمولبندی کلی‌ای بیابید که هم اکنون تکوین یافت.

حل: وضعیت همان است که در شکل ۱.۱۱ نشان داده شده است. انرژی پتانسیل سیستم عبارت است از

۱. توجه داشته باشید که در اینجا، بر عکس مثال جفت‌شدگی ضعیف، که در بخش ۳.۱۱ [معادله (۲۶.۱۱)] توصیف آن آمد، جزء حقیقی  $q_j(t)$  را باید ضریباً برگزید به طوری که  $q_j(t)$  در معادله (۴۴.۱۱)، همان  $q_j(t)$  در معادله (۴۳.۱۱) نیست. ولی به علت ارتباط نزدیک آنها، برای سهولت، در همه جا، همان علامت [مثلاً  $q_j(t)$ ] را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{\gamma} \kappa x_1^2 + \frac{1}{\gamma} \kappa_{12} (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{\gamma} \kappa x_2^2 \\
 &= \frac{1}{\gamma} (\kappa + \kappa_{12}) x_1^2 + \frac{1}{\gamma} (\kappa + \kappa_{12}) x_2^2 - \kappa_{12} x_1 x_2 \quad (۴۵.۱۱)
 \end{aligned}$$

جمله متناسب با  $x_1 x_2$  عاملی است که جفت‌شدگی سیستم را نشان می‌دهد. با محاسبه

$A_{jk}$ ، بی می‌بریم که

$$\left. \begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = \kappa + \kappa_{12} \\
 A_{12} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = -\kappa_{12} = A_{21} \\
 A_{22} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = \kappa + \kappa_{12}
 \end{aligned} \right\} \quad (۴۶.۱۱)$$

انرژی جنبشی سیستم برابر است با

$$T = \frac{1}{\gamma} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{\gamma} M \dot{x}_2^2 \quad (۴۷.۱۱)$$

طبق معادله (۲۸.۱۱)

$$T = \frac{1}{\gamma} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{x}_j \dot{x}_k \quad (۴۸.۱۱)$$

از برابر نهادن جملات متناظر در دو صورت  $T$ ، می‌رسیم به

$$\left. \begin{aligned}
 m_{11} &= m_{22} = M \\
 m_{12} &= m_{21} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (۴۹.۱۱)$$

به این ترتیب دترمینان مشخصه [معادله (۴۲.۱۱)] چنین می‌شود

$$\begin{vmatrix}
 \kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 & -\kappa_{12} \\
 -\kappa_{12} & \kappa + \kappa_{12} - M\omega^2
 \end{vmatrix} = 0 \quad (۵۰.۱۱)$$

این دقیقاً همان معادله (۵.۱۱) است، بنابراین جوابها همان جوابهای قبلی هستند [معادلات (۷.۱۱) و

(۸.۱۱)] و

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa + \kappa_{12} \pm \kappa_{12}}{M}}$$

ویژه‌سآمدها عبارت‌اند از

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa + 2\kappa_{12}}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{M}}$$

در هر دو روش جوابهای یکسانی به دست می آید.

### ۵.۱۱. تعامد ویژه بردارها (اختیاری)<sup>۱</sup>

می خواهیم نشان دهیم که ویژه بردارهای  $a_r$  یک مجموعه متعامد بهنجار تشکیل می دهند. معادله (۴۰.۱۱) را برای ریشه  $s$  ام معادله مشخصه بازنویسی می کنیم

$$\omega_s^2 \sum_k m_{jk} a_{ks} = \sum_k A_{jk} a_{ks} \quad (۵۱.۱۱)$$

سپس با جایگزینی  $s$  با  $r$  و مبادله  $j$  و  $k$ ، برای ریشه  $r$  ام معادله ای می نویسیم

$$\omega_r^2 \sum_j m_{jk} a_{jr} = \sum_j A_{jk} a_{jr} \quad (۵۲.۱۱)$$

که در اینجا از تقارن  $m_{jk}$  و  $A_{jk}$  بهره گرفته ایم. حال معادله (۵۱.۱۱) را در  $a_{jr}$  ضرب می کنیم و روی  $j$  جمع می بندیم، و نیز معادله (۵۲.۱۱) را در  $a_{ks}$  ضرب می کنیم و روی  $k$  جمع می بندیم

$$\left. \begin{aligned} \omega_s^2 \sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} &= \sum_{j,k} A_{jk} a_{jr} a_{ks} \\ \omega_r^2 \sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} &= \sum_{j,k} A_{jk} a_{jr} a_{ks} \end{aligned} \right\} \quad (۵۳.۱۱)$$

اکنون سمت راست معادلات (۵۳.۱۱) باهم برابر است. بنابراین با تفریق معادله اول از معادله دوم، داریم

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} = 0 \quad (۵۴.۱۱)$$

در این هنگام دو امکان متفاوت،  $r = s$  و  $r \neq s$  را بررسی می کنیم. به ازای  $r \neq s$  جمله  $(\omega_r^2 - \omega_s^2)$ ، به طور کلی غیر صفر است. (درخصوص واگنی، یا ریشه های چندگانه، بعداً بحث خواهیم کرد.) بنابراین مجموع باید با صفر متحد باشد

$$\sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} = 0, \quad r \neq s \quad (۵۵.۱۱)$$

۱. بخش ۵.۱۱ را می توان بدون اینکه به استنباط فیزیکی موضوع لطمه ای وارد آید، حذف کرد. این بخش صرفاً ریاضی به منظور کامل بودن مطلب ارائه شده است. روش مورد استفاده در اینجا همانا تعمیم مرحله ای است که در بخش ۶.۱۰ برای تانسور لختی طی کردیم.

به ازای  $r = s$ ، جمله  $(\omega_r^y - \omega_s^y)$  صفر می شود و مجموع نامعین است. اما، مجموع نمی تواند با صفر متحد باشد. برای نشان دادن این مطلب، انرژی جنبشی سیستم را می نویسیم و از معادله (۴۴.۱۱) عبارتهای مربوط به  $\dot{q}_k$  و  $\dot{q}_j$  را جایگزین می کنیم

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \left[ \sum_r \omega_r a_{jr} \sin(\omega_r t - \delta_r) \right] \left[ \sum_s \omega_s a_{ks} \sin(\omega_s t - \delta_s) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} \omega_r \omega_s \sin(\omega_r t - \delta_r) \sin(\omega_s t - \delta_s) \sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} \end{aligned}$$

به این ترتیب، به ازای  $r = s$ ، انرژی جنبشی برابر است با

$$T = \frac{1}{2} \sum_r \omega_r^y \sin^2(\omega_r t - \delta_r) \sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{kr} \quad (56.11)$$

البته متوجه هستیم که

$$\omega_r^y \sin^2(\omega_r t - \delta_r) \geq 0$$

همچنین می دانیم که  $T$  مثبت است و فقط در صورتی صفر می شود که تمامی سرعتها با صفر متحد شوند. بنابراین

$$\sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{kr} \geq 0$$

بدین ترتیب، مجموع کلاً مثبت است و فقط در حالت بدیهی که سیستم حرکت نمی کند — یعنی، وقتی سرعتها متحد با صفر شوند و  $T \equiv 0$  — می تواند صفر شود.

قبلاً خاطر نشان کرده ایم که وقتی  $\omega_r$  را در معادله (۴۰.۱۱) جایگزین می کنیم، فقط نسبت  $a_{jr}$  ها را تعیین می کنیم. اکنون با اعمال یک شرط اضافی روی  $a_{jr}$  این ابهام را از بین می بریم. می خواهیم رابطه زیر برقرار باشد

$$\sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{kr} = 1 \quad (57.11)$$

در این صورت می گوئیم که  $a_{jr}$  ها بهنجار شده اند. از ترکیب معادلات (۵۵.۱۱) و (۵۷.۱۱)، می توان

$$\sum_{j,k} m_{kj} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs} \quad (58.11)$$

چون  $a_{jr}$  مؤلفهٔ زام ویژه بردار  $r$ ام است،  $\mathbf{a}_r$  را به صورت

$$\mathbf{a}_r = \sum_j a_{jr} \mathbf{e}_j \quad (59.11)$$

می‌نویسیم. بردارهای  $\mathbf{a}_r$  که بدین صورت تعریف شده‌اند یک مجموعه متعامد بهنجار را تشکیل می‌دهند؛ یعنی، طبق نتیجهٔ ارائه شده در معادلهٔ (55.11) متعامدند، و با برابر واحد قرار دادن عبارت مجموع در معادلهٔ (57.11)، آنها را بهنجار کرده‌ایم.

تمامی بحث، تا اینجا به شگرد ارائه شده در فصل ۱۰ برای تعیین گشتاورهای لختی اصلی و محورهای اصلی جسم صلب شباهت زیادی دارد. در واقع، از نظر ریاضی این مسائل یکسان‌اند، جز اینکه در حال حاضر با سیستمی با  $n$  درجهٔ آزادی سروکار داریم. باید توجه کرد که کمیت‌های  $m_{jk}$  و  $A_{jk}$  واقعاً عناصر تانسوری هستند، زیرا  $m$  و  $A$  آرایه‌هایی دو بعدی‌اند که کمیت‌های فیزیکی متفاوت را به یکدیگر مربوط می‌کنند، و از آن‌رو آنها را به صورت  $\{\mathbf{m}\}$  و  $\{\mathbf{A}\}$  می‌نویسیم.<sup>۱</sup> معادلهٔ مشخصه برای تعیین ویژه‌سامدها همان معادلهٔ تعیین گشتاورهای لختی اصلی است، و ویژه بردارهای  $\mathbf{a}_r$  با محورهای اصلی متناظرند. در واقع، اثبات تعامد ویژه‌بردارها صرفاً تعمیم اثبات ارائه شده در بخش ۶.۱۰ برای تعامد محورهای اصلی است. هر چند که در ارتباط با حقیقی بودن ویژه‌سامدها استدلالی فیزیکی ارائه دادیم، می‌توانستیم با استفاده از همان روشی که برای نمایاندن حقیقی بودن گشتاورهای لختی اصلی به کار گرفتیم، اثباتی ریاضی نیز ارائه دهیم.

## ۶.۱۱ مختصات بهنجار

همانطور که دیدیم [معادلهٔ (43.11)]، جواب عمومی مربوط به حرکت مختصهٔ  $q_j$  باید برابر مجموع روی جملاتی باشد که هر کدام از آنها به‌ویژه بسامدهای منفردی بستگی دارند. در بخش قبلی نشان دادیم که بردارهای  $\mathbf{a}_r$  متعامدند [معادلهٔ (55.11)]، و به خاطر سادگی موضوع، حتی مؤلفه‌های  $a_{jr}$  آنها را بهنجار کردیم [معادلهٔ (57.11)] تا به معادلهٔ (58.11) رسیدیم؛ یعنی، تمام ابهام موجود در جواب مربوط به  $q_j$  را رفع کردیم، به طوری که دیگر تعیین جابه‌جایی دلخواهی برای یک ذره ممکن نیست. چون چنین محدودیتی از نظر فیزیکی بی‌معنی است، باید یک ضریب مقیاس ثابت  $\alpha$  (که به شرایط اولیهٔ مسئله بستگی دارد) معرفی کنیم تا از دست رفتن کلیتی را که ناشی

۱. بحث ارائه شده در بخش ۶.۱۰، مربوط به تعریف ریاضی یک تانسور، را ببینید.

از وارد شدن بهنجارش اختیاری بود، منظور کرده باشیم. به این ترتیب

$$q_j(t) = \sum_r \alpha a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)} \quad (۶۰.۱۱)$$

برای ساده کردن نمادگذاری، می‌نویسیم

$$q_j(t) = \sum_r \beta_r a_{jr} e^{i\omega_r t} \quad (۶۱.۱۱)$$

که در اینجا کمیت‌های  $\beta_r$  ضرایب مقیاس جدید هستند (اکنون مختلط‌اند) که فازهای  $\delta_r$  را شامل می‌شوند.<sup>۱</sup>

اکنون کمیت  $\eta_r$  را تعریف می‌کنیم

$$\boxed{\eta_r(t) \equiv \beta_r e^{i\omega_r t}} \quad (۶۲.۱۱)$$

به طوری که

$$\boxed{q_j(t) = \sum_r a_{jr} \eta_r(t)} \quad (۶۳.۱۱)$$

طبق تعریف،  $\eta_r$  ها کمیت‌هایی‌اند که فقط در یک بسامد نوسان انجام می‌دهند. آنها را می‌توان به صورت مختصاتی جدید، به نام مختصات بهنجار، برای سیستم در نظر گرفت.  $\eta_r$  ها در معادلاتی به شکل زیر صدق می‌کنند

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0 \quad (۶۴.۱۱)$$

$n$  معادله مستقل از این نوع وجود دارد، به طوری که معادلات حرکتی که به صورت مختصات بهنجار بیان شده‌اند، به طور کامل جداسازی می‌شوند.

### مثال ۲.۱۱

معادله (۶۳.۱۱) را مستقیماً با استفاده از معادلات حرکت لاگرانژ به دست آورید.

حل: از معادلات (۶۱.۱۱) و (۶۲.۱۱) داریم

۱. در بهنجارش  $\omega_r$  به واحد وارد کردن ضرایب مقیاس  $\alpha$  و  $\beta_r$  نسبت به اینکه بهنجارش را نامشخص بگذاریم، مزیت‌هایی وجود دارد. در این صورت  $\omega_r$  ها از شرایط اولیه مستقل‌اند، و یک معادله تعامد بهنجار ساده حاصل می‌شود.

$$\dot{q}_j = \sum a_{jr} \dot{\eta}_r$$

و از معادله (۳۴.۱۱)، مربوط به انرژی جنبشی می‌رسیم به

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \left( \sum_r a_{jr} \dot{\eta}_r \right) \left( \sum_s a_{ks} \dot{\eta}_s \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} \left( \sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} \right) \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \end{aligned}$$

مجموع داخل پرانتز بنا بر شرایط تعامد بهنجار [معادله (۵۸.۱۱)] همانا  $\delta_{rs}$  است، بنابراین

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \delta_{rs} = \frac{1}{2} \sum_r \dot{\eta}_r^2 \quad (۶۵.۱۱)$$

به همین ترتیب، از معادله (۳۴.۱۱) مربوط به انرژی پتانسیل داریم

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} \left( \sum_{j,k} A_{jk} a_{jr} a_{ks} \right) \eta_r \eta_s \end{aligned}$$

معادله اول از معادلات (۵۳.۱۱) چنین است

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} A_{jk} a_{jr} a_{ks} &= \omega_s^2 \sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} \\ &= \omega_s^2 \delta_{rs} \end{aligned}$$

بنابراین، انرژی پتانسیل به این صورت خواهد بود

$$U = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \omega_s^2 \eta_r \eta_s \delta_{rs} = \frac{1}{2} \sum_r \omega_r^2 \eta_r^2 \quad (۶۶.۱۱)$$

با استفاده از معادلات (۶۵.۱۱) و (۶۶.۱۱)، لاگرانژی چنین می‌شود

$$L = \frac{1}{2} \sum_r (\dot{\eta}_r^2 - \omega_r^2 \eta_r^2) \quad (۶۷.۱۱)$$

و معادلات لاگرانژ عبارت‌اند از

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_r} = 0$$

یا

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$$

که همان معادله به دست آمده در (۶۴.۱۱) است.

به این ترتیب، وقتی پیکربندی سیستمی در مختصات بهنجار بیان شود، هم انرژی پتانسیل و هم انرژی جنبشی به طور همزمان قطری می‌شوند. چون عناصر غیر قطری  $\{m\}$  و  $\{A\}$  است که جفت شدگی حرکت ذرات از آن ناشی می‌شود، بدیهی است که انتخاب مختصاتی که این تانسورها را قطری می‌کند، مختصات را غیر جفت می‌کند و مسئله را کاملاً به حرکت‌های مستقل مختصات بهنجار، که هر کدام بسامد بهنجار مخصوص به خود را دارد، جدا می‌کند. ■

بحث قبل، توصیف ریاضی روشهایی است که برای تعیین بسامدهای مشخصه  $\omega_r$  و توصیف مؤلفه‌های مُد بهنجار حرکت،  $\eta_r$ ، به کار می‌رود. کاربرد واقعی این روش را می‌توان در چند عبارت خلاصه کرد:

۱. مختصات تعمیم یافته را انتخاب و  $T$  و  $U$  را با روش لاگرانژی متعارف پیدا می‌کنیم. این کار متناظر با بهره‌گیری از معادلات (۳۴.۱۱) است.
۲.  $A_{jk}$  و  $m_{jk}$  را به صورت تانسور در آرایه‌های  $n \times n$  نمایش می‌دهیم، و از معادله (۴۲.۱۱) برای تعیین  $n$  مقدار ویژه بسامد  $\omega_r$  بهره می‌گیریم.
۳. به ازای هر یک از مقادیر  $\omega_r$ ، نسبت‌های  $a_{1r} : a_{2r} : a_{3r} : \dots : a_{nr}$  را از طریق نشانیدن در معادله (۴۰.۱۱) تعیین می‌کنیم:

$$\sum_j (A_{jk} - \omega_r^2 m_{jk}) a_{jr} = 0 \quad (۶۸.۱۱)$$

۴. در صورت لزوم، ضرایب مقیاس  $\beta_r$  [معادله (۶۰.۱۱)] را از شرایط اولیه تعیین می‌کنیم.
۵. مختصات بهنجار  $\eta_r$  را با ترکیب خطی مناسبی از مختصات  $q_j$  تعیین می‌کنیم که نوسان در تک ویژه بسامد  $\omega_r$  را به معرض نمایش می‌گذارند. توصیف حرکت مربوط به این تک مختصه

۱. کارل وایراستراس (۱۸۹۷-۱۸۱۵)، ریاضیدان آلمانی، در ۱۸۵۸ نشان داد که حرکت هر سیستم دینامیکی را همواره می‌توان بر حسب مختصات بهنجار بیان کرد.



بهنجار  $\eta_r$  را مد بهنجار می‌نامیم. حرکت کلی [معادله (۶۳.۱۱)] سیستم برهم‌نهی پیچیده‌ای از مدهای بهنجار است.

اکنون این دستورالعمل را در مورد چند مثال به‌کار می‌بندیم.

### مثال ۳.۱۱

ویژه‌بسامدها، ویژه‌بردارها، و مختصات بهنجار سیستم جرم-فنر، مثال بخش ۲.۱۱، را با استفاده از روشی که هم اکنون توصیف کردیم، تعیین کنید.

حل: ویژه‌بسامدها را در مثال ۱.۱۱ تعیین کردیم؛ در آنجا  $T$  و  $U$  را پیدا کردیم (مرحله ۱). مؤلفه‌های مربوط به  $A_{jk}$  را می‌توانیم مستقیماً از معادله (۴۶.۱۱)، یا از طریق بازبینی از معادله (۴۵.۱۱) و اطمینان از اینکه  $A_{jk}$  متقارن است، پیدا کنیم

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{Bmatrix} \kappa + \kappa_{12} & -\kappa_{12} \\ -\kappa_{12} & \kappa + \kappa_{12} \end{Bmatrix} \quad (۶۹.۱۱)$$

آرایه  $m_{jk}$  را می‌توان به‌سادگی از معادله (۴۷.۱۱) تعیین کرد

$$\{\mathbf{m}\} = \begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{Bmatrix} \quad (۷۰.۱۱)$$

برای تعیین ویژه‌بسامدهای  $\omega_r$  از معادله (۴۲.۱۱) بهره می‌گیریم

$$\begin{vmatrix} \kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 & -\kappa_{12} \\ -\kappa_{12} & \kappa + \kappa_{12} - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

که با معادله (۵۰.۱۱) یکسان است و نتیجه عبارت است از همان معادله (۸.۱۱) برای  $\omega_1$  و  $\omega_2$ .

از معادله (۶۸.۱۱) برای تعیین مؤلفه‌های ویژه‌بردار  $a_{jr}$  استفاده می‌کنیم. به‌ازای هر مقدار

$r$  دو معادله داریم، اما، چون فقط می‌توانیم نسبت‌های  $a_{1r}/a_{2r}$  را تعیین کنیم، به‌ازای هر مقدار

یک معادله کفایت می‌کند. به‌ازای  $r = 1$  و  $k = 1$  داریم

$$(A_{11} - \omega_1^2 m_{11})a_{11} + (A_{21} - \omega_1^2 m_{21})a_{21} = 0 \quad (۷۱.۱۱)$$

یا، با قرار دادن مقادیر مربوط به  $A_{21}$ ،  $A_{11}$ ،  $\omega_1^2$  و  $m_{11}$ ، و استفاده از ساده‌سازی  $\kappa = \kappa_{12}$

$$\left(2\kappa - \frac{3\kappa}{M} \times M\right)a_{11} - \kappa a_{21} = 0$$

نتیجه آن به این ترتیب است

$$a_{11} = -a_{21} \quad (۷۲.۱۱)$$

به ازای  $k = ۱$ ،  $r = ۲$  داریم

$$\left( ۲\kappa - \frac{\kappa}{M} \times M \right) a_{12} - \kappa a_{22} = 0$$

و از آن به این نتیجه می‌رسیم

$$a_{12} = a_{22} \quad (۷۳.۱۱)$$

حرکت کلی چنین می‌شود [معادله (۶۳.۱۱)]

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 \\ x_2 &= a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \end{aligned} \right\} \quad (۷۴.۱۱)$$

این معادله با استفاده از معادلات (۷۲.۱۱) و (۷۳.۱۱) به صورت زیر در می‌آید

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \\ x_2 &= -a_{11}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \end{aligned} \right\} \quad (۷۵.۱۱)$$

از جمع  $x_1$  و  $x_2$  داریم

$$\eta_2 = \frac{1}{2a_{22}}(x_1 + x_2) \quad (۷۶.۱۱)$$

با کم کردن  $x_2$  از  $x_1$  خواهیم داشت

$$\eta_1 = \frac{1}{2a_{11}}(x_1 - x_2) \quad (۷۷.۱۱)$$

مختصه بهنجار  $\eta_2$  را می‌توان با یافتن شرایطی تعیین کرد که مختصه بهنجار دیگر،  $\eta_1$  برابر صفر می‌شود. از معادله (۷۷.۱۱)، به ازای  $x_1 = x_2$  داریم  $\eta_1 = 0$ . به این ترتیب، در مد بهنجار  $۲(\eta_2)$ ، دو جسم به طور همفاز نوسان می‌کنند (مد متقارن). فاصله بین ذرات همواره ثابت است، و آنها چنان نوسان می‌کنند که گویی فیزی که به هم متصلشان می‌کند یک میله صلب و بی وزن است.

مد بهنجار	ویژه‌سامد	نوسان ذره	سرعت ذرات
۱	$\omega_1 = \sqrt{3\kappa/M}$	ناهمفاز	برابر ولی مختلف‌الجهت
۲	$\omega_2 = \sqrt{\kappa/M}$	همفاز	برابر

به همین ترتیب، می‌توانیم شرایط لازم برای مختصهٔ بهنجار  $\eta_1$  را با تعیین شرط:  $\eta_2 = 0$  ( $x_2 = -x_1$ ) پیدا کنیم. در مد بهنجار  $\eta_1$ ، ذرات ناهمفاز نوسان می‌کنند (مد یاد متقارن).

این تجزیه و تحلیل (که آن را در جدول ۱.۱۱ جمع‌بندی کرده‌ایم) نتایج قبلی (بخش ۲.۱۱) را تأیید می‌کند، که حرکت ذره در شکل ۲.۱۱ نمایش یافته است. چنین حرکت‌هایی برای اتم‌های موجود در مولکول‌ها عادی است. به یاد داشته باشید که در طی این مثال فرض کرده‌ایم:  $\kappa = \kappa_{12}$ . می‌توانیم مؤلفه‌های ویژه‌دارها را تعیین کنیم [معادلهٔ (۵۹.۱۱)].

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 : \quad \mathbf{a}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 \\ \omega_2 : \quad \mathbf{a}_2 &= a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{aligned} \right\} \quad (۷۸.۱۱)$$

با استفاده از معادلات (۷۲.۱۱) و (۷۳.۱۱)، داریم

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= a_{11}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{a}_2 &= a_{22}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \end{aligned} \right\} \quad (۷۹.۱۱)$$

می‌توان مقادیر  $a_{11}$  و  $a_{22}$  را از شرط تعامد بهنجار معادلهٔ (۵۸.۱۱) تعیین کرد و رسید به

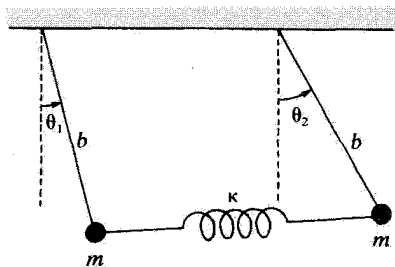
$$\left. \begin{aligned} a_{11} = -a_{21} &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \\ a_{12} = a_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \end{aligned} \right\} \quad (۸۰.۱۱)$$

هرچند که معمولاً به این کار نیازی نیست.

در این مثال نه لازم بود که ضرایب مقیاس  $\beta_r$  را تعیین کنیم و نه اینکه جواب کامل را بنویسیم، زیرا شرایط اولیه معلوم نبود.

### مثال ۴.۱۱

دو آونگ، هر کدام به طول  $b$  و جرم  $m$ ، توسط فنری با ثابت نیروی  $\kappa$ ، مطابق شکل ۵.۱۱، به هم



شکل ۵.۱۱

متصل شده‌اند. ویژه‌سامدهای این سیستم را تعیین و حرکت مد بهنجار را توصیف کنید. فنر در حالت تعادل ناکشیده است.

حل:  $\theta_1$  و  $\theta_2$  را به عنوان مختصات تعمیم‌یافته در نظر می‌گیریم (شکل ۵.۱۱). انرژی پتانسیل وضعیت تعادل برابر صفر اختیار می‌شود. انرژیهای جنبشی و پتانسیل سیستم عبارت‌اند از

$$T = \frac{1}{2}m(b\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(b\dot{\theta}_2)^2 \quad (۸۱.۱۱)$$

$$U = mgb(1 - \cos \theta_1) + mgb(1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}\kappa(b \sin \theta_1 - b \sin \theta_2)^2 \quad (۸۲.۱۱)$$

با بهره‌گیری از فرض نوسان کم دامنه  $\sin \theta \approx \theta$  و  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$  می‌توان نوشت

$$U = \frac{mgb}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{\kappa b^2}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2 \quad (۸۳.۱۱)$$

مؤلفه‌های  $\{\mathbf{m}\}$  و  $\{\mathbf{A}\}$  عبارت‌اند از

$$\{\mathbf{m}\} = \begin{Bmatrix} mb^2 & 0 \\ 0 & mb^2 \end{Bmatrix} \quad (۸۴.۱۱)$$

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{Bmatrix} mgb + \kappa b^2 & -\kappa b^2 \\ -\kappa b^2 & mgb + \kappa b^2 \end{Bmatrix} \quad (۸۵.۱۱)$$

درمیان لازم برای پیدا کردن ویژه‌سامدهای  $\omega$  چنین است

$$\begin{vmatrix} mgb + \kappa b^2 - \omega^2 mb^2 & -\kappa b^2 \\ -\kappa b^2 & mgb + \kappa b^2 - \omega^2 mb^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (۸۶.۱۱)$$

که معادله مشخصه زیر را به دست می دهد

$$b^2 (mg + \kappa b - \omega^2 mb)^2 - (\kappa b^2)^2 = 0$$

$$(mg + \kappa b - \omega^2 mb)^2 = (\kappa b)^2$$

یا

$$mg + \kappa b - \omega^2 mb = \pm \kappa b \quad (۸۷.۱۱)$$

با انتخاب علامت مثبت، یعنی  $\omega = \omega_1$

$$mg + \kappa b - \omega_1^2 mb = \kappa b \quad (۸۸.۱۱)$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{b}$$

با انتخاب علامت منفی در معادله (۸۷.۱۱)، یعنی  $\omega = \omega_2$

$$mg + \kappa b - \omega_2^2 mb = -\kappa b \quad (۸۹.۱۱)$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{b} + \frac{2\kappa}{m}$$

از قرار دادن مقادیر  $\omega_1$  و  $\omega_2$  در معادله (۴۰.۱۱)، به ازای  $k = ۱$  خواهیم داشت

$$(mgb + \kappa b^2 - \omega_r^2 mb^2) a_{1r} - \kappa b^2 a_{2r} = 0 \quad (۹۰.۱۱)$$

به ازای  $r = ۱$  داریم

$$(mgb + \kappa b^2 - \frac{g}{b} mb^2) a_{11} - \kappa b^2 a_{21} = 0$$

و

$$a_{11} = a_{21} \quad (۹۱.۱۱)$$

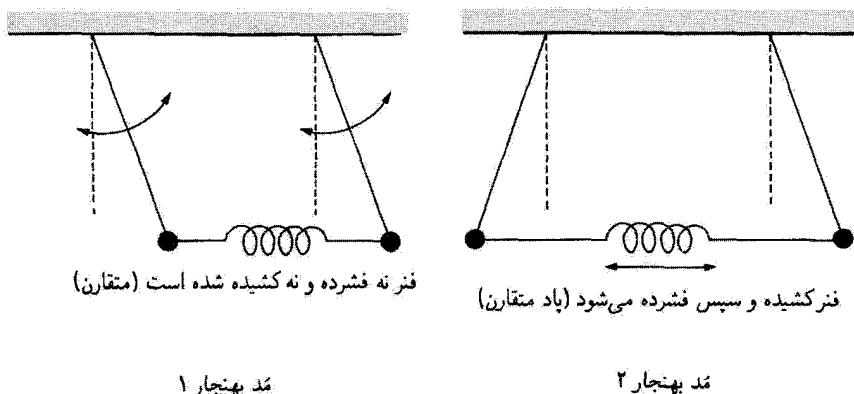
اگر  $r = ۲$  در این صورت

$$(mgb + \kappa b^2 - \frac{g}{b} mb^2 - \frac{2\kappa}{m} mb^2) a_{12} - \kappa b^2 a_{22} = 0$$

و

$$a_{12} = -a_{22} \quad (۹۲.۱۱)$$

مختصات  $\theta_1$  و  $\theta_2$  را بر حسب مختصات بهنجار می نویسیم



شکل ۶.۱۱

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 \\ \theta_2 &= a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \end{aligned} \right\} \quad (۹۳.۱۱)$$

با استفاده از معادلات (۹۱.۱۱) و (۹۲.۱۱)، معادلات (۹۳.۱۱) به این صورت در می آیند

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= a_{11}\eta_1 - a_{22}\eta_2 \\ \theta_2 &= a_{11}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \end{aligned} \right\} \quad (۹۴.۱۱)$$

از جمع و تفریق کردن  $\theta_1$  و  $\theta_2$ ، مدهای بهنجار را به آسانی تعیین می کنیم

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2a_{11}}(\theta_1 + \theta_2) \\ \eta_2 &= \frac{1}{2a_{22}}(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \right\} \quad (۹۵.۱۱)$$

چون مختصه بهنجار  $\eta_1$  به ازای  $\eta_2 = 0$  وجود می آید، در آن صورت برای مُد بهنجار ۱ (مقارن) داریم:  $\theta_2 = \theta_1$ . به همین ترتیب، مختصه بهنجار  $\eta_2$  وقتی پیش می آید که  $\theta_1 = -\theta_2$ ، و مُد بهنجار ۲ پاد مقارن است. حرکت‌های مُد بهنجار را در شکل ۶.۱۱ مشاهده می کنید. توجه داشته باشید که برای مُد ۱ فتر نه فشرده و نه کشیده شده است. دو آونگ صرفاً به طور هماهنگ با بسامدهای طبیعی خود ( $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{g/b}$ ) نوسان می کنند. این حرکتها را می توان به آسانی در کلاس یا آزمایشگاه نشان داد. بسامد بالاتر مُد بهنجار ۲ را صرفاً برای یک فتر سخت می توان به نمایش گذاشت.

## ۷.۱۱ ارتعاشهای مولکولی

قبلاً گفته‌ایم که ارتعاشهای مولکولی مثالهای خوبی از کاربرد نوسانهای کم دامنه مورد بحث در این فصل به شمار می‌آیند. مولکولی که از  $n$  اتم تشکیل شده باشد معمولاً  $3n$  درجه آزادی دارد. سه درجه آزادی برای توصیف حرکت انتقالی مورد نیاز است، و معمولاً سه درجه برای توصیف چرخش ضروری است. به این ترتیب،  $6 - 3n$  درجه آزادی ارتعاشی وجود دارد. در مولکولهای که اتمهایشان همخط‌اند، تنها دو درجه آزادی چرخشی ممکن است وجود داشته باشد، زیرا چرخش حول محوری که از میان اتمها می‌گذرد بی‌اهمیت است. در این مورد،  $5 - 3n$  درجه آزادی ارتعاشی وجود دارد.

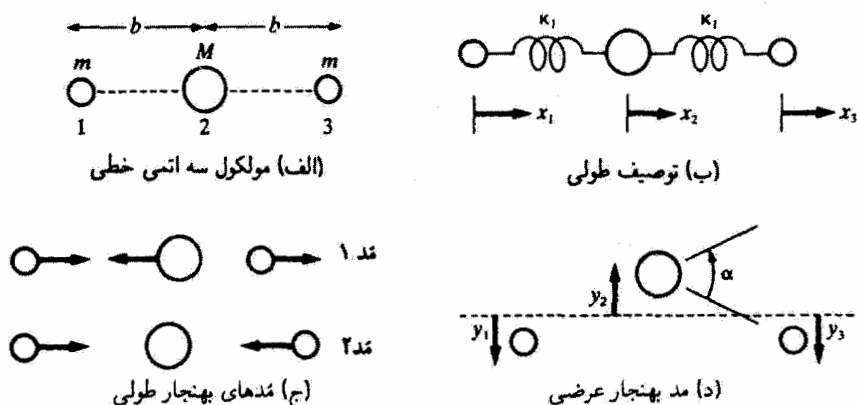
در اینجا فقط می‌خواهیم ارتعاشهایی را بررسی کنیم که در یک صفحه رخ می‌دهند. درجه‌های آزادی انتقالی و چرخشی را با تبدیلهای و انتخاب مناسب دستگاههای مختصات حذف می‌کنیم. برای حرکت در یک صفحه،  $2n$  درجه آزادی وجود دارد. چون دو درجه مربوط به انتقال و یکی مربوط به چرخش است، معمولاً  $3 - 2n$  ارتعاش به‌نجار در صفحه روی می‌دهد (و برای ارتعاش اتمهای خارج از صفحه  $n - 3 = (2n - 3) - (3n - 6)$  درجه آزادی باقی می‌ماند).

مولکولهای خطی می‌توانند هم ارتعاش طولی داشته باشند و هم ارتعاش عرضی ارتعاش طولی در امتداد خط اتمها انجام می‌شود. به‌ازای  $n$  اتم،  $n$  درجه آزادی وجود دارد، ولی یکی از این درجه‌ها با انتقال متناظر است. به این ترتیب، به‌ازای  $n$  اتم یک مولکول خطی  $n - 1$  ارتعاش در راستای طول امکانپذیر است. اگر کلاً  $5 - 3n$  درجه آزادی ارتعاشی برای یک مولکول خطی وجود داشته باشد، باید  $4 - 2n = (n - 1) - (3n - 5)$  ارتعاش عرضی داشته باشد که سبب شود ارتعاش اتمها بر خط آنها عمود شود. اما از نقطه نظر تقارن، هر دو راستای متقابلاً متعامد کفایت می‌کند؛ بنابراین، در واقع فقط نصف این تعداد، یعنی  $n - 2$ ، بسامد عرضی وجود دارد.

### مثال ۵.۱۱

حرکت مد به‌نجار یک مولکول خطی سه اتمی متقارن (شکل ۷.۱۱) را توصیف و ویژه بسامدهای آن را تعیین کنید. جرم اتم مرکزی  $M$  و جرم اتمهای متقارن  $m$  است. ارتعاشات طولی و عرضی هر دو امکانپذیرند.

حل: تجزیه و تحلیل بخش بیشین مبین آن است که اگر درجه‌های آزادی انتقالی و چرخشی را حذف کنیم، برای سه اتم، دو درجه آزادی ارتعاشی طولی و یک درجه آزادی عرضی داریم. چون حرکت‌های طولی و عرضی مستقل از یکدیگرند، می‌توانیم آنها را جداگانه حل کنیم. در



شکل ۷.۱۱

شکل ۷.۱۱ (ب) جابه‌جایی اتمها از وضعیت تعادل را با  $x_1, x_2, x_3$  نمایش می‌دهیم. نیروهای کشسان بین اتمها به‌وسیله فنرهایی با ثابت نیروی  $k_1$  نمایش یافته‌اند. در اینجا سه متغیر طولی داریم ولی تنها دو درجه آزادی. باید امکان انتقال را با این شرط حذف کنیم که در طی ارتعاشات، مرکز جرم ثابت باقی می‌ماند. این شرط برقرار است اگر

$$m(x_1 + x_3) + M(x_2) = 0 \quad (۹۶.۱۱)$$

بنابراین می‌توانیم متغیر  $x_2$  را حذف کنیم

$$x_2 = -\frac{m}{M}(x_1 + x_3) \quad (۹۷.۱۱)$$

انرژی جنبشی سیستم عبارت است از

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_3^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}(\dot{x}_2^2 + \dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_2\dot{x}_1) \end{aligned} \quad (۹۸.۱۱)$$

ممکن است حضور جمله جفت‌شدگی  $\dot{x}_2\dot{x}_1$  در انرژی جنبشی (که آن را «جفت‌شدگی دینامیکی» می‌نامند) در هنگام حل معادله (۹۷.۱۱)، برای ویژه‌سامدها اسباب زحمت شود. برای حذف جفت‌شدگی دینامیکی از یک تبدیل بهره می‌گیریم. فرض کنید

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= x_3 + x_1 \\ q_2 &= x_3 - x_1 \end{aligned} \right\} \quad (۹۹.۱۱ \text{ الف})$$



$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{\gamma}(q_1 + q_2) \\ x_1 &= \frac{1}{\gamma}(q_1 - q_2) \\ &\text{و} \\ x_2 &= -\frac{m}{M}q_1 \end{aligned} \right\} \quad (۹۹.۱۱ \text{ ب})$$

و انرژی جنبشی [معادله (۹۸.۱۱)] عبارت خواهد بود از

$$T = \frac{m}{\gamma} \dot{q}_2^2 + \frac{(mM + 2m^2)}{2M} \dot{q}_1^2 \quad (۱۰۰.۱۱)$$

انرژی پتانسیل عبارت است از

$$U = \frac{1}{\gamma} \kappa_1 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{\gamma} \kappa_1 (x_2 - x_1)^2 \quad (۱۰۱.۱۱)$$

به اعتبار تبدیلهای بالا، معادلات (۹۹.۱۱)، انرژی پتانسیل (پس از انجام مقداری عملیات ریاضی) به صورت زیر درمی‌آید

$$U = \left( \frac{2m + M}{2M} \right)^2 \kappa_1 q_1^2 + \frac{1}{\gamma} \kappa_1 q_2^2 \quad (۱۰۲.۱۱)$$

ویژه‌بسامدها با بررسی و استفاده از معادله (۴۲.۹۱) تعیین می‌شوند

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{\gamma} \left( \frac{2m + M}{M} \right)^2 \kappa_1 - \omega^2 & \left( \frac{mM + 2m^2}{2M} \right) \\ \left( \frac{mM + 2m^2}{2M} \right) & \frac{\kappa_1}{\gamma} - \omega^2 \frac{m}{\gamma} \end{array} \right| = 0 \quad (۱۰۳.۱۱)$$

که با عبارتهای زیر برابر است

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{2m + M}{mM} \kappa_1 \\ \omega_2^2 &= \frac{\kappa_1}{m} \end{aligned} \right\} \quad (۱۰۴.۱۱)$$

چون تانسور تشکیل یافته از ضرایب معادله (۴۰.۱۱) هم‌اکنون قطری است، متغیرهای  $q_1$  و  $q_2$  مختصات قائم (ناهنجار) را نمایش می‌دهند

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 \\ q_2 &= a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \end{aligned} \right\} \quad (۱۰۵.۱۱)$$

جدول ۲.۱۱

مُد	ویژه بسامدها	متغیر	حرکت
۱	$\frac{2m + M}{mM} \kappa_1$	$q_1 = x_2 + x_1$	$x_2 = x_1$ $x_2 = \frac{-2m}{M} x_1$
۲	$\frac{\kappa_1}{m}$	$q_2 = x_2 - x_1$	$x_2 = -x_1$ $x_2 = 0$

ولی

$$a_{12} = 0 \quad \text{و} \quad a_{21} = 0$$

$$q_1 = a_{11} \eta_1$$

$$q_2 = a_{22} \eta_2$$

طبق معمول، حرکت یکی از مُدهای بهنجار را وقتی تعیین می‌کنیم که مُد بهنجار دیگر صفر باشد. توصیف حرکت مُد بهنجار طولی در جدول ۲.۱۱ آمده است. در مُد بهنجار ۱ اتمهای انتهایی حرکتی متقارن دارند، اما اتم مرکزی (از معادله (۹۷.۱۱)) بر خلاف  $x_1$  و  $x_2$  حرکت می‌کند. در مُد بهنجار ۲ اتمهای انتهایی به طور یاد متقارن ارتعاش می‌کنند. (ولی اتم مرکزی در حال سکون است. نمایش این حرکت را در شکل ۷.۱۱ (ج) مشاهده می‌کنید.

چون چرخشها را از سیستم مورد مطالعه حذف کرده‌ایم، ارتعاشات عرضی باید چنان باشند که در شکل ۷.۱۱ (د) نشان داده شده است، که در اینجا اتمهای انتهایی ارتعاش متقارن ( $y_1 = y_2$ ) و خلاف جهت  $y_2$  دارند. معادله‌ای مشابه معادله (۹۷.۱۱)، برای ثابت نگه داشتن مرکز جرم،  $y_2$  را به  $y_1$  و  $y_2$  مربوط می‌کند.

$$m(y_1 + y_2) + M(y_2) = 0 \quad (۱۰۶.۱۱)$$

$$y_2 = \frac{-m}{M}(y_1 + y_2) \quad (۱۰۷.۱۱)$$

تنها درجه آزادی مربوط به ارتعاش عرضی را به کمک زاویه  $\alpha$  نشان می‌دهیم که نمایش دهنده خمیدگی خط اتمهاست.

$$\alpha = \frac{(y_1 - y_2) + (y_2 - y_2)}{b}$$

انرژی جنبشی مُد عرضی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} M \dot{y}_r^2$$

به اعتبار  $y_1 = y_2 = y$  و نیز با استفاده از معادله (۱۰۷.۱۱)  $\alpha$  و  $T$  به صورت زیر در می‌آیند

$$\alpha = \frac{2y}{bM} (2m + M) \quad (108.11)$$

$$T = \frac{m}{M} (M + 2m) \dot{y}^2$$

$$T = \frac{mMb^2}{2(2m + M)} \dot{\alpha}^2 \quad (109.11)$$

انرژی پتانسیل پیوستگی خط آنها را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم نیروی بازگرداننده با انحراف کل از خط راست ( $b\alpha$ ) متناسب باشد، بنابراین انرژی پتانسیل چنین خواهد بود

$$U = \frac{1}{2} \kappa_r (b\alpha)^2 \quad (110.11)$$

معادلات (۱۰۹.۱۱) و (۱۱۰.۱۱) مشابه معادلات مربوط به سیستم جرم-فنر هستند، که بسامد ارتعاش آنها به قرار زیر به دست می‌آید

$$\omega_r^2 = \frac{2(M + 2m)}{mM} \kappa_r \quad (111.11)$$

مُد بهنجار عرضی را با این روابط نمایش می‌دهیم

$$y_1 = y_2 \quad (112.11)$$

$$y_2 = \frac{-m}{M} (y_1 + y_2) \quad (113.11)$$

در این باره قبلاً هم بحث شده و در شکل ۷.۱۱ (د) هم نشان داده شده است.

مولکول  $\text{CO}_2$  نمونه‌ای از مولکول متقارن خطی است که هم اکنون در باب آن بحث کردیم. تابش حاصل از مُدهای بهنجار اول و سوم مشاهده شده است، چون مرکز الکتریکی مولکول با مرکز جرم ( $m : \text{O}^- ; M : \text{C}^{++}$ ) آن تفاوت دارد. اما از مُد بهنجار ۲ هیچگونه تابشی گسیل نمی‌شود، زیرا مرکز الکتریکی منطبق بر مرکز جرم است و از این رو سیستم دارای گشتاور دو قطبی نیست. ■

۱. برای دستیابی به بحثی جالب در مورد مولکولهای چند اتمی، بنگرید به

## ۸.۱۱ سه آونگ ساده (تخت) به‌طور خطی جفت‌شده-مثالی برای واگنی

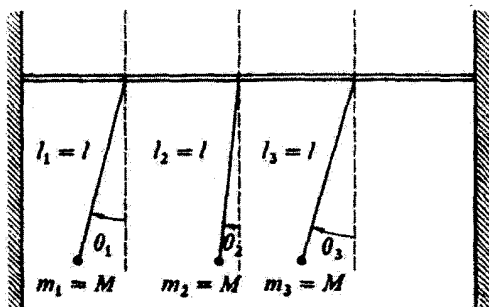
## مثال ۶.۱۱

سه آونگ تخت یکسان را در نظر بگیرید که از تکیه‌گاهی اندکی تأثیرپذیر آویخته شده‌اند. چون تکیه‌گاه صلب نیست، بین آونگها یک جفت‌شدگی پیش می‌آید، و انرژی می‌تواند از یک آونگ به آونگ دیگر منتقل شود. ویژه‌سامدها و ویژه‌بردارها را بیابید و حرکت مد به‌نچار را توصیف کنید. آرایش هندسی این مسئله را در شکل ۸.۱۱ مشاهده می‌کنید.

حل: برای ساده کردن نمادگذاری، دستگاهی از یک‌ها اختیار می‌کنیم (گاهی به آن یک‌های طبیعی می‌گویند) که در آن همه طولها بر حسب یکای طول آونگها،  $l$ ، همه جرمها بر حسب جرم آونگها،  $M$ ، و شتابها بر حسب  $g$  اندازه‌گیری می‌شوند. بنابراین در معادلات مربوطه مقدار کمیت‌های  $M$ ،  $l$ ، و  $g$  از نظر عددی برابر واحد است. اگر جفت‌شدگی بین هر زوج از آونگها یکسان باشد، داریم

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{4}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \\ U &= \frac{1}{4}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\varepsilon\theta_1\theta_2 - 2\varepsilon\theta_1\theta_3 - 2\varepsilon\theta_2\theta_3) \end{aligned} \right\} (114.11)$$

به این ترتیب، تانسور  $\{m\}$  قطری است



شکل ۸.۱۱

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (115.11)$$

ولی تانسور  $\{A\}$  به صورت زیر است

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} 1 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 1 \end{Bmatrix} \quad (116.11)$$

دترمینان مشخصه عبارت است از

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 - \omega^2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 1 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (117.11)$$

از بسط دترمینان، داریم

$$(1 - \omega^2)^3 - 2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2(1 - \omega^2) = 0$$

که آن را می‌توان به صورت حاصلضرب عوامل نوشت

$$(\omega^2 - 1 - \varepsilon)^2 (\omega^2 - 1 + 2\varepsilon) = 0$$

و از اینجا ریشه‌ها عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{1 + \varepsilon} \\ \omega_2 &= \sqrt{1 + \varepsilon} \\ \omega_3 &= \sqrt{1 - 2\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (118.11)$$

توجه کنید که در اینجا یک ریشه مضاعف داریم:  $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{1 + \varepsilon}$ . بنابراین مدهای بهنجار متناظر با این بسامدها واگن‌اند؛ یعنی، این دو مد تمیز ناپذیرند.

اکنون کمیت‌های  $a_{zr}$  را محاسبه می‌کنیم؛ این کار را از  $a_{z3}$  شروع می‌کنیم. باز هم توجه داریم که چون معادلات حرکت فقط نسبتها را تعیین می‌کند، فقط لازم است که دو معادله از سه معادله

موجود را در نظر بگیریم؛ معادله سوم خودبه خود برقرار می شود. با استفاده از معادله

$$\sum_j (A_{jk} - \omega_j^2 m_{jk}) a_{jz} = 0$$

می رسمیم به

$$\begin{aligned} 2\epsilon a_{1z} - \epsilon a_{zz} - \epsilon a_{zz} &= 0 \\ -\epsilon a_{1z} + 2\epsilon a_{zz} - \epsilon a_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (119.11)$$

از معادلات (119.11) نتیجه می گیریم

$$a_{1z} = a_{zz} = a_{zz} \quad (120.11)$$

و از شرط بهنجارش داریم

$$a_{1z}^2 + a_{zz}^2 + a_{zz}^2 = 1$$

یا

$$a_{1z} = a_{zz} = a_{zz} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (121.11)$$

به این ترتیب، پی بردیم که به ازای  $r = 3$  در محاسبه مؤلفه های ویژه بردار  $a_r$  هیچ مشکلی وجود ندارد. (این قاعده کلی است: در محاسبه مؤلفه های ویژه بردار مربوط به یک مُد ناواکن هیچ ابهامی وجود ندارد.) چون همه مؤلفه های  $a_r$  باهم برابرند، این حالت متناظر با مُدی است که هر سه آونگ به طور همفاز نوسان می کنند.

اکنون می خواهیم  $a_{z1}$  و  $a_{z2}$  را محاسبه کنیم. از شش معادله حرکت ممکن (سه مقدار برای  $z$  و دو مقدار برای  $r$ )، فقط دو رابطه متفاوت به دست می آوریم

$$\epsilon(a_{11} + a_{r1} + a_{r1}) = 0 \quad * (122.11)$$

$$\epsilon(a_{1z} + a_{rz} + a_{rz}) = 0 \quad * (123.11)$$

معادله تعامد چنین است

$$\sum_{j,k} m_{jk} a_{jr} a_{ks} = 0, \quad r \neq s$$

اما، از آنجا که  $m_{jk} = \delta_{jk}$ ، معادله بالا چنین خواهد بود

$$\sum_j a_{jr} a_{js} = 0, \quad r \neq s \quad (124.11)$$

که فقط منجر به یک معادله جدید می شود

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0 \quad * (125.11)$$

[دو معادله ممکن دیگر با معادلات (۱۲۲.۱۱) و (۱۲۳.۱۱) در بالا، یکسان است.] سرانجام، از شرط بهنجارش به این نتیجه می رسیم

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 \quad * (126.11)$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 \quad * (127.11)$$

به این ترتیب به طور کلی فقط پنج معادله (ستاره دار، \*) برای شش مجهول  $a_{j2}$  و  $a_{j1}$  داریم. این ابهام در ویژه بردارهای متناظر با یک ریشه مضاعف دقیقاً همان است که در ساخت محورهای اصلی مربوط به یک جسم صلب با یک محور تقارن با آن مواجه شدیم؛ دو محور اصلی هم ارز را می توان در هر راستایی قرارداد مشروط بر آنکه مجموعه سه محور متعامد باشند. بنابراین آزادیم که ویژه بردارهای  $a_1$  و  $a_2$  را به نحو دلخواه تعیین کنیم، مشروط بر اینکه روابط تعامد و بهنجارش برقرار باشند. برای سیستم ساده ای مانند سیستم مورد بحث، تشکیل چنین بردارهایی دشوار نیست، بنابراین در اینجا دستورالعملی کلی برای این کار ارائه نمی دهیم.

اگر به طور دلخواه بگیریم:  $a_{31} = 0$ ، ابهام از بین می رود. در این صورت خواهیم داشت

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \quad (128.11)$$

به اتکای آنها می توانیم برقرار بودن همه روابط ستاره دار را تحقیق کنیم. به یاد داشته باشید که مُد ناواگن با نوسان همفاز هر سه آونگ متناظر است

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \quad (129.11)$$

اکنون می بینیم که مُدهای واگن هر کدام با یک نوسان ناهمفاز متناظر است. مثلاً  $a_2$  در معادله (۱۲۸.۱۱) نشان می دهد که دو آونگ توأم با هم با دامنه معین نوسان می کنند، در حالی که سومی با آنها ناهمفاز و دامنه اش دو برابر است. به همین ترتیب،  $a_1$  در معادله (۱۲۸.۱۱) نشان

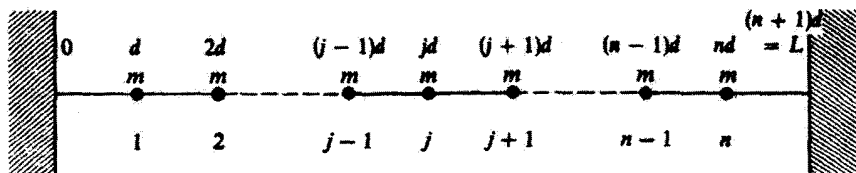
می‌دهد که یک آونگ ساکن است و دو آونگ دیگر نوسان ناهمگاز دارند. باید توجه داشت که ویژه بردارهای  $a_1$  و  $a_2$  که هم اکنون ارائه شدند، فقط یک مجموعه از بینهایت مجموعه‌ای است که در شرایط مسئله صدق می‌کنند. اما این گونه ویژه بردارها، جملگی یک نوع نوسان ناهمگاز را نمایش می‌دهند. (جزئیات بیشتر این مثال در مسئله‌های ۱۹.۱۱ و ۲۰.۱۱ مورد بررسی قرار می‌گیرند.) ■

### ۹.۱۱ ریسمان بارگذاری شده<sup>۱</sup>

اکنون سیستم پیچیده‌تری مشتمل بر یک ریسمان کشسان (یا فنر) را در نظر می‌گیریم که تعدادی ذره یکسان در فواصل منظم روی آن قرار داده شده‌اند. دو انتهای ریسمان چنان محکم شده‌اند که ثابت بمانند. فرض کنید جرم هر یک از  $n$  ذره برابر  $m$  باشد، و فاصله بین ذرات در حال تعادل را  $d$  بگیریم. به این ترتیب، طول ریسمان برابر است با  $L = (n + 1)d$ . وضعیت تعادل در شکل ۹.۱۱ نموده شده است.

می‌خواهیم حالت نوسانهای کم دامنه عرضی ذرات را حول وضعیت تعادلشان بررسی کنیم. ابتدا جابه‌جاییهای قائم جرمهایی را در نظر می‌گیریم که با  $z_j - 1$  و  $z_j + 1$  شماره‌گذاری شده‌اند (شکل ۱۰.۱۱). اگر جابه‌جاییهای قائم  $q_{j-1}$ ،  $q_j$ ،  $q_{j+1}$  کوچک باشند، در آن صورت کشش ریسمان تقریباً ثابت و برابر مقدار آن در حالت تعادل است. در مورد جابه‌جاییهای کوچک قسمت بین دو ذره مجاور ریسمان زاویه کوچکی با خط تعادل می‌سازد. چنانچه سینوس این زاویه‌ها را با تانژانت آنها تقریباً برابر بگیریم، عبارت مربوط به نیرویی که مایل به بازگرداندن ذره  $j$ ام به وضعیت تعادل است، به صورت زیر درمی‌آید

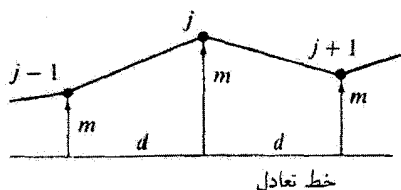
$$F_j = -\frac{T}{d}(q_j - q_{j-1}) - \frac{T}{d}(q_j - q_{j+1}) \quad (۱۳۰.۱۱)$$



شکل ۹.۱۱

۱. مسئله ریسمان بارگذاری شده (یا شبکه یک بعدی) را اولین بار نیوتون (در پرینکیپیا، ۱۶۸۷) مورد مطالعه قرار داد. یوهان برنولی و پسرش دانیل در ۱۷۲۷ این بررسیها را پی گرفتند که به فرمولبندی اصل برهم‌نهی توسط دانیل در ۱۷۵۳ انجامید. از همین جاست که مطالعه نظری فیزیک سیستمها (متمایز از ذرات) آغاز می‌شود.





شکل ۱۰.۱۱

نیروی  $F_j$ ، طبق قانون نیوتون، برابر  $m\ddot{q}_j$  است، بنابراین معادله (۱۳۰.۱۱) را می‌توان چنین نوشت

$$\ddot{q}_j = \frac{\tau}{md}(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) \quad (۱۳۱.۱۱)$$

که معادله حرکت مربوط به ذره  $j$ ام به شمار می‌آید. سیستم جفت‌شده است، زیرا نیروی وارد بر ذره  $j$ ام به موضع ذرات  $(j-1)$ ام و  $(j+1)$ ام بستگی دارد؛ از این رو، این سیستم نمونه‌ای از برهم‌کنش نزدیکترین همسایه است، که در آن جفت‌شدگی فقط بین ذرات مجاور برقرار است. لازم نیست که برهم‌کنش به نزدیکترین همسایه‌ها محدود شود. مثلاً اگر نیروی بین زوج ذرات نیروی الکتروستاتیکی بود، در این صورت هر ذره با همه ذرات دیگر جفت می‌شد. در آن صورت ممکن بود مسئله خیلی دشوار شود. ولی حتی اگر نیرو الکتروستاتیکی باشد، بستگی  $1/r^2$  به فاصله غالباً ما را مجاز می‌دارد که از برهم‌کنشهایی در فواصل بیشتر از یک فاصله بین ذره‌ای چشم‌پوشیم، به طوری که عبارت ساده داده شده در معادله (۱۳۰.۱۱) برای نیرو تقریباً صحیح است. ما فقط حرکت عمود بر خط ریسمان، یعنی نوسانهای عرضی، را بررسی کردیم. به آسانی می‌توان نشان داد چنانچه ارتعاشات طولی، یعنی حرکت در امتداد خط ریسمان، را در نظر بگیریم معادلات حرکتی دقیقاً از همان نوع حاصل می‌شود. در این مورد  $\kappa$ ، نیروی ثابت ریسمان، به جای ضریب  $\tau/d$  می‌نشیند (مسئله ۲۴.۱۱ را ببینید).

هر چند که برای به‌دست آوردن معادلات حرکت [معادله (۱۳۱.۱۱)] از معادله نیوتون استفاده کردیم، می‌توانستیم به همان ترتیب از روش لاگرانژی بهره بگیریم. انرژی پتانسیل از کار انجام شده برای کشیدن  $(n+1)$  قسمت ریسمان حاصل شده است.<sup>۱</sup>

$$U = \frac{\tau}{2d} \sum_{j=1}^{n+1} (q_{j-1} - q_j)^2 \quad (۱۳۲.۱۱)$$

۱. فرض می‌کنیم که انرژی پتانسیل فقط انرژی کشسانی ریسمان باشد؛ یعنی، در نظر نمی‌گیریم که هر کدام از جرمها می‌توانند انرژی پتانسیل گرانشی (یا هر نوع دیگری) داشته باشند.

که در اینجا  $q_0$  و  $q_{n+1}$  متحد با صفرند، زیرا این مواضع با دو انتهای ثابت ریسمان متناظر است. توجه داریم که معادله (۱۳۲.۱۱) عبارتی برای نیروی وارد بر ذره  $j$ ام به دست می دهد که برابر همان نتیجه قبلی [معادله (۱۳۰.۱۱)] است

$$\begin{aligned} F_j &= -\frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{\tau}{2d} \frac{\partial}{\partial q_j} [(q_{j-1} - q_j)^2 + (q_j - q_{j+1})^2] \\ &= \frac{\tau}{d} (q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) \end{aligned} \quad (133.11)$$

انرژی جنبشی سیستم از جمع انرژی جنبشی مربوط به هر کدام از  $n$  ذره منفرد حاصل می شود

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^n \dot{q}_j^2 \quad (134.11)$$

چون  $\dot{q}_{n+1} \equiv 0$  می توانیم جمع ارائه شده در معادله (۱۳۴.۱۱) را تا  $j = n + 1$  ادامه دهیم به طوری که گستره  $j$  همان گستره داده شده در عبارت مربوط به انرژی پتانسیل شود. آنگاه لاگرانژی به صورت زیر در می آید

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \left[ m \dot{q}_j^2 - \frac{\tau}{d} (q_{j-1} - q_j)^2 \right] \quad (135.11)$$

واضح است که معادله حرکت مربوط به ذره  $j$ ام باید فقط از آن جمله هایی از لاگرانژی ناشی شود که شامل  $q_j$  و  $\dot{q}_j$  هستند. اگر مجموع مربوط به  $L$  را بسط دهیم، می رسیم به

$$L = \dots + \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 - \frac{1}{2} \frac{\tau}{d} (q_{j-1} - q_j)^2 - \frac{1}{2} \frac{\tau}{d} (q_j - q_{j+1})^2 - \dots \quad (136.11)$$

که در اینجا فقط جمله هایی را نوشته ایم که شامل  $q_j$  یا  $\dot{q}_j$  هستند. از به کارگیری معادله لاگرانژ در مورد مختصه  $q_j$ ، داریم

$$m \ddot{q}_j - \frac{\tau}{d} (q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) = 0 \quad (137.11)$$

به این ترتیب، نتیجه همان است که با استفاده از روش نیوتونی به دست آمده بود. برای اینکه معادلات حرکت را حل کنیم، طبق معمول، از جایگزینی زیر استفاده می کنیم

$$q_j(t) = a_j e^{i\omega t} \quad (138.11)$$

که در اینجا  $a_j$  ممکن است مختلط باشد. از نشانیدن این عبارت به جای  $q_j(t)$  در معادله (۱۳۷.۱۱)، خواهیم داشت

$$-\frac{\tau}{d}a_{j-1} + \left(2\frac{\tau}{d} - m\omega^2\right)a_j - \frac{\tau}{d}a_{j+1} = 0 \quad (139.11)$$

که در اینجا  $j = 1, 2, \dots, n$ ، ولی چون دو انتهای ریسمان ثابت است، باید داشته باشیم:

$$a_0 = a_{n+1} = 0$$

معادله (۱۳۹.۱۱) یک معادله تفاضلی خطی را نشان می‌دهد که می‌توان آن را برای ویژه‌سادهای  $\omega_r$ ، از طریق برابر با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب، حل کرد. بنابراین، به دترمینان مشخصه زیر می‌رسیم

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{\tau}{d} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{\tau}{d} & \lambda & -\frac{\tau}{d} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\tau}{d} & \lambda & -\frac{\tau}{d} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{\tau}{d} & \lambda & -\frac{\tau}{d} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0 \quad (140.11)$$

که در اینجا از جایگزینی زیر استفاده کردیم

$$\lambda \equiv \frac{2\tau}{d} - m\omega^2 \quad (141.11)$$

این دترمینان مشخصه حالت خاصی از دترمینان کلی [معادله (۴۲.۱۱)] است و وقتی حاصل می‌شود که تانسور  $m$  قطری و تانسور  $A$  شامل جفت‌شدگی بین ذرات مجاور باشد. بدینسان، معادله (۱۴۰.۱۱) فقط شامل عناصری قطری است به اضافه عناصری که فقط مجاور قطرانند. در حالت  $n = 1$  (یعنی، یک تک جسم معلق به وسیله دو فنر)، داریم  $\lambda = 0$  یا

$$\omega = \sqrt{\frac{2\tau}{md}}$$

که این نتیجه را می‌توان در مورد حرکت طولی از طریق نشانیدن  $\tau/d$  به جای  $k$ ، بپذیریم، که در آن صورت به عبارت آشنای زیر می‌رسیم

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

در حالت  $n = 2$ ، که در آن  $\tau/d$  به جای  $\kappa$  نشسته است، داریم  $\lambda^2 = \kappa^2$ ، یا

$$\omega = \sqrt{\frac{2\kappa \pm \kappa}{m}}$$

که همان بسامدهایی است که در بخش ۲.۱۳ برای دو جسم جفت شده به دست می آوریم [معادله (۸.۱۱)].

حل معادله مشخصه به طور مستقیم به ازای مقادیر کوچک  $n$  باید نسبتاً آسان باشد، اما به ازای  $n$ های بزرگ حل این معادله خیلی دشوار خواهد بود. در این گونه موارد، استفاده از روش زیر ساده تر است. جوابی از نوع

$$a_j = ae^{i(j\gamma - \delta)} \quad (۱۴۲.۱۱)$$

را پیشنهاد می کنیم که در آن  $a$  حقیقی است. اگر بتوانیم کمیت  $\gamma$  و فاز  $\delta$  را پیدا کنیم، به طوری که تمامی شرایط مسئله برقرار باشد، استفاده از این ابزار موجه است. با نشان دادن  $a_j$  به این صورت در معادله (۱۳۹.۱۱)، و حذف ضریب فاز، می رسمیم به

$$-\frac{\tau}{d}e^{-i\gamma} + \left(2\frac{\tau}{d} - m\omega^2\right) - \frac{\tau}{d}e^{i\gamma} = 0$$

از حل این معادله بر حسب  $\omega^2$ ، به دست می آوریم

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{2\tau}{md} - \frac{\tau}{md}(e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}) \\ &= \frac{2\tau}{md}(1 - \cos \gamma) \\ &= \frac{4\tau}{md} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (۱۴۳.۱۱)$$

چون می دانیم که درمیان مشخصه از مرتبه  $n$  است، و بنابراین دقیقاً  $n$  مقدار برای  $\omega^2$  به دست می دهد، می توانیم بنویسیم

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin \frac{\gamma_r}{2}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (۱۴۴.۱۱)$$

اکنون کمیت  $\gamma_r$  و فاز  $\delta_r$  را با به کارگیری این شرط مرزی محاسبه می کنیم که دو انتهای ریسمان ثابت باقی می ماند. از این رو داریم

$$a_{jr} = a_r e^{i(j\gamma_r - \delta_r)} \quad (۱۴۵.۱۱)$$

یا، چون فقط جزء حقیقی از نظر فیزیکی با معنی است

$$a_{jr} = a_r \cos(j\gamma_r - \delta_r) \quad (۱۴۶.۱۱)$$

شرط مرزی عبارت است از

$$a_{(n+1)r} = 0 \quad (۱۴۷.۱۱)$$

برای اینکه معادله (۱۴۶.۱۱) به ازای  $j = 0$  منجر به  $a_{jr} = 0$  شود، روشن است که  $\delta_r$  باید  $\pi/2$  (یا مضرب فرد صحیحی از آن) باشد. از اینجا

$$\begin{aligned} a_{jr} &= a_r \cos(j\gamma_r - \pi/2) \\ &= a_r \sin j\gamma_r \end{aligned} \quad (۱۴۸.۱۱)$$

به ازای  $j = n + 1$  داریم

$$a_{(n+1)r} = 0 = a_r \sin(n+1)\gamma_r$$

بنابراین

$$(n+1)\gamma_r = s\pi, \quad s = 1, 2, \dots$$

یا

$$\gamma_r = \frac{s\pi}{n+1}, \quad s = 1, 2, \dots$$

اما، دقیقاً  $n$  مقدار متمایز  $\gamma_r$  وجود دارد زیرا در معادله (۱۴۴.۱۱) به  $n$  مقدار متمایز  $\omega_r$  نیاز داریم. بنابراین، شاخص زیرین  $s$  از ۱ تا  $n$  تغییر می‌کند. چون بین مقادیر  $s$  و مقادیر  $r$  تناظر یک به یکی وجود دارد، می‌توانیم  $r$  را به آسانی در عبارت آخری به جای  $s$  بنشانیم

$$\gamma_r = \frac{r\pi}{n+1}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (۱۴۹.۱۱)$$

در این صورت  $a_{jr}$  [معادله (۱۴۸.۱۱)] چنین می‌شود

$$a_{jr} = a_r \sin \left( j \frac{r\pi}{n+1} \right) \quad (۱۵۰.۱۱)$$

جواب عمومی بر حسب  $q_j$  [معادله (۶۱.۱۱)] عبارت است از

$$\begin{aligned}
 q_j &= \sum \beta'_r a_{jr} e^{i\omega_r t} \\
 &= \sum_r \beta'_r a_r \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) e^{i\omega_r t} \\
 &= \sum_r \beta_r \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) e^{i\omega_r t} \quad (151.11)
 \end{aligned}$$

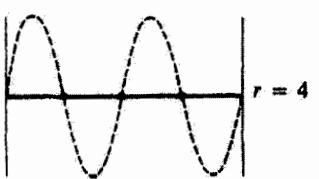
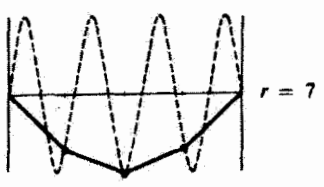
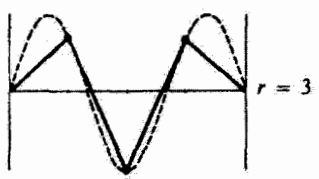
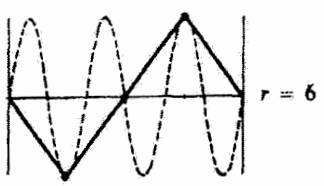
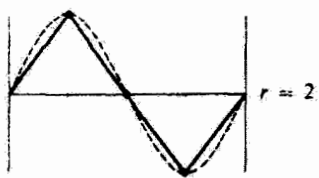
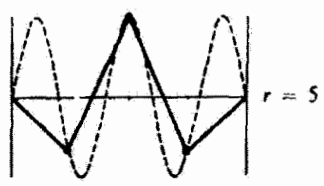
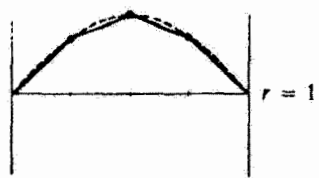
که در اینجا نوشته‌ایم:  $\beta_r \equiv \beta'_r a_r$ . به علاوه، در مورد بسامد داریم

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right) \quad (152.11)$$

پی می‌بریم که این عبارت — همان نتیجه‌ای را به دست می‌دهد که در حالت دو نوسانگر جفت شده به دست آمد [معادلات (۸.۱۱)] — در صورتی که در آن  $n = 2$  و  $\tau = 1, 2$  قرار دهیم و به جای  $\tau/d$  کمیت  $\kappa (= \kappa_{12})$  را بنشانیم.

همچنین توجه داشته باشید که اگر در معادله (۱۵۰.۱۱)  $r = 0$ ، یا  $r = n+1$  را بنشانیم، در این صورت تمامی ضرایب دامنه  $a_{jr}$  عیناً صفر می‌شوند. از این رو، این مقادیر  $r$  را مدهای صفر می‌نامیم. به علاوه، اگر  $r$  مقادیر  $2, n+3, n+4, \dots, 2n+1$  را اختیار کند، در آن صورت  $a_{jr}$ ها عبارت‌اند از همان  $a_{jr}$ های مربوط به  $r = 1, 2, \dots, n$  (جز یک تغییر علامت بدیهی و وارونگی در ترتیب)؛ همچنین  $r = 2n+2$ ، مد صفر بعدی را به دست می‌دهد. از اینجا نتیجه می‌گیریم که واقعاً فقط  $n$  مد متمایز وجود دارد و افزایش  $r$  به فراتر از  $n$  فقط مدهای مربوط به  $r$ های کوچکتر از  $n$  را تکرار می‌کنند. (همین استدلال در حالت  $r < 0$  نیز صادق است.) نمایش این نتایج را به ازای  $n = 3$  در شکل ۱۱.۱۱ مشاهده می‌کنید. مدهای متمایز به ازای  $r = 1, 2, 3$  مشخص شده‌اند؛  $r = 4$  یک مد صفر است (طرح جابه‌جایی به ازای  $8, 5, 6, 7$  تکرار شده است، ولی با یک تغییر در علامت. در شکل ۱۱.۱۱ منحنیهای خط چین فقط رفتار سینوسی ضرایب دامنه  $a_{jr}$  را به ازای مقادیر متفاوت  $r$  نمایش می‌دهند؛ تنها جنبه‌ای از این منحنیها که از لحاظ فیزیکی با معنی‌اند، همانا مقدار آن در وضعیت اشغال شده توسط ذرات است ( $j = 1, 2, 3$ ). به این ترتیب «بسامد بالای» منحنیهای سینوسی به ازای  $r = 5, 6, 7, 8$  به هیچوجه به بسامد حرکتیهای ذرات مربوط نمی‌شوند؛ بسامدهای حرکتیهای ذرات همان بسامدهای مربوط به  $r = 1, 2, 3, 4$  هستند. مختصه‌های بهنجار سیستم [معادله (۶۲.۱۱)] عبارت‌اند از

$$\eta_r(t) \equiv \beta_r e^{i\omega_r t} \quad (153.11)$$



شکل ۱۱.۱۱

به طوری که

$$q_j(t) = \sum_r \eta_r \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \quad (۱۵۴.۱۱)$$

این معادله  $q_j$  با عبارت پیشین [معادله (۱۵۳.۱۱)] مشابه است به استثنای اینکه اکنون به جای کمیت‌های  $a_{jr}$  کمیت‌های  $\sin[j(r\pi)/(n+1)]$  نشسته است.

چون ممکن است  $\beta_r$  مختلط باشد، ما جزء حقیقی  $q_j$  را به صورت زیر می‌نویسیم

$$q_j(t) = \sum_r \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) (\mu_r \cos \omega_r t - \nu_r \sin \omega_r t) \quad \text{حقیقی:} \quad (۱۵۵.۱۱)$$

که در آن

$$\beta_r = \mu_r + i\nu_r \quad (۱۵۶.۱۱)$$

مقدار اولیه  $q_j(t)$  را می‌توان از معادله (۱۵۵.۱۱) به دست آورد

$$q_j(0) = \sum_r \mu_r \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \quad (۱۵۷.۱۱)$$

$$\dot{q}_j(0) = -\sum_r \omega_r \nu_r \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \quad (۱۵۸.۱۱)$$

اگر معادله (۱۵۷.۱۱) را در  $\sin[j(s\pi)/(n+1)]$  ضرب و سپس روی  $j$  جمع ببندیم، داریم

$$\sum_j q_j(0) \sin\left(j \frac{s\pi}{n+1}\right) = \sum_{j,r} \mu_r \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \left(\sin j \frac{s\pi}{n+1}\right) \quad (۱۵۹.۱۱)$$

ارتباطی از نوع یک اتحاد مثلثاتی برای جملات سینوسی برقرار است

$$\sum_{j=1}^n \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \sin\left(j \frac{s\pi}{n+1}\right) = \frac{n+1}{2} \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots, n \quad (۱۶۰.۱۱)$$

به طوری که معادله (۱۵۹.۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \sum_j q_j(0) \sin\left(j \frac{s\pi}{n+1}\right) &= \sum_r \mu_r \frac{n+1}{2} \delta_{rs} \\ &= \frac{n+1}{2} \mu_s \end{aligned}$$



$$\mu_s = \frac{2}{n+1} \sum_j q_j(\circ) \sin\left(j \frac{s\pi}{n+1}\right) \quad (الف \ ۱۶۱.۱۱)$$

به کمک روش مشابهی برای  $\nu_s$  خواهیم داشت

$$\nu_s = -\frac{2}{\omega_s(n+1)} \sum_j \dot{q}_j(\circ) \sin\left(j \frac{s\pi}{n+1}\right) \quad (ب \ ۱۶۱.۱۱)$$

به این ترتیب، تمامی کمیت‌های مورد نیاز را محاسبه کردیم، و بنابراین توصیف ارتعاشات یک ریسمان بارگذاری شده کامل است.

در ارتباط با روش بهنجارش به کار رفته در اینجا باید به نکات زیر توجه کنیم. ابتدا، در معادله (۵۷.۱۱)،  $a_{j\pi}$  را به دلخواه به واحد بهنجار کردیم. بدینسان لازم است که  $a_{j\pi}$  از شرایط اولیه اعمال شده بر سیستم مستقل باشد. در این صورت ضرایب مقیاس  $\alpha$  و  $\beta$  امکان تغییر مقدار نوسان را با انتخاب شرایط اولیه فراهم آوردند. سپس، در مسئله ریسمان بارگذاری شده، یافتیم که در آنجا به جای کمیت‌های  $a_{j\pi}$ ، توابع سینوسی  $\sin[j(r\pi)/(n+1)]$  ظاهر می‌شوند، و این توابع خاصیت بهنجارشی دارند [معادله (۱۶۰.۱۱)] که به وسیله اتحادهای مثلثاتی مشخص می‌شوند. بنابراین، در این مورد امکان اعمال یک شرط بهنجارش دلخواه وجود ندارد؛ در اینجا این شرط به‌طور خودکار به ما عرضه شده است. اما این شرط هیچ محدودیتی به وجود نمی‌آورد؛ تنها به این معنی است که در این حالت شکل ضرایب مقیاس  $\beta$  کم‌وبیش متفاوت‌اند. به این ترتیب، ثابت‌های معینی هستند که در هر دو مسئله پیش می‌آیند، و برای راحتی، در دو حالت به طرق متفاوتی تفکیک شدند.

### مثال ۷.۱۱

یک ریسمان بارگذاری شده شامل سه ذره، با فواصل منظم را در نظر بگیرید. در لحظه  $t = 0$ ، ذره وسطی (فقط) به اندازه  $a$  جابه‌جا و از حال سکون رها شده است. حرکت بعدی را توصیف کنید.

حل: شرایط اولیه عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} q_2(\circ) = a, \quad q_1(\circ) = q_3(\circ) = 0 \\ \dot{q}_1(\circ) = \dot{q}_2(\circ) = \dot{q}_3(\circ) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (۱۶۲.۱۱)$$

چون سرعت‌های اولیه صفرند،  $v_r$  ها صفر می‌شوند.  $\mu_r$  ها از معادله زیر به دست می‌آیند [معادله (۱۶۱.۱۱) الف]

$$\begin{aligned} \mu_r &= \frac{2}{n+1} \sum_j q_j(\circ) \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} a \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (163.11)$$

زیرا فقط جمله  $j = 2$  در جمع باقی می‌ماند. بدینسان

$$\mu_1 = \frac{1}{2} a, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = -\frac{1}{2} a \quad (164.11)$$

کمیت‌های  $[\sin[j(r\pi)/(n+1)]]$  که در عبارتهای مربوط به  $q_j(t)$  ظاهر می‌شوند [معادله (۱۵۵.۱۱)]. عبارت‌اند از

	$r=1$	$2$	$3$	
$j=1$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$2$	$1$	$0$	$-1$	$(165.11)$
$3$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	

بنابراین جابه‌جایی سه ذره عبارت است از

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2} a (\cos \omega_1 t - \cos \omega_3 t) \\ q_2(t) &= \frac{1}{2} a (\cos \omega_1 t - \cos \omega_3 t) \\ q_3(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2} a (\cos \omega_1 t - \cos \omega_3 t) = q_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (166.11)$$

در اینجا ویژه‌بسامدها از طریق معادله (۱۵۲.۱۱) تعیین می‌شوند

$$\omega_r = 2 \sqrt{\frac{T}{md}} \sin\left(\frac{r\pi}{8}\right), \quad r = 1, 2, 3 \quad (167.11)$$

توجه داشته باشید که چون در ابتدا ذره وسطی جابه‌جا شده بود، هیچ مد ارتعاشی روی نمی‌دهد که در آن این ذره در حال سکون باشد؛ یعنی، مد ۲ با بسامد  $\omega_2$  (شکل (۱۱.۱۱) غایب است. ■

مسائل

۱.۱۱ مسئله دو نوسانگر جفت شده، مورد بحث در بخش ۲.۱۱، را در حالتی که ثابت نیروی هر سه فنر جملگی باهم متفاوت باشند، مجدداً در نظر بگیرید. دو بسامد مشخصه را بیابید و از نظر مقداری با بسامدهای طبیعی دو نوسانگر در غیاب جفت شدگی مقایسه کنید.

۲.۱۱ مسئله ۱.۱۱ را ادامه دهید، و حالت جفت شدگی ضعیف  $\kappa_1, \kappa_2 \ll \kappa_{12}$  را بررسی کنید. نشان دهید که پدیده زنش روی می دهد و فرایند انتقال انرژی ناقص است.

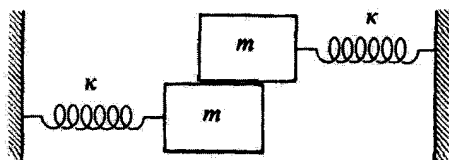
۳.۱۱ دو نوسانگر هماهنگ یکسان (به جرم  $M$  و بسامد طبیعی  $(\omega_0)$  جفت شده اند به طوری که با افزودن یک جرم،  $m$ ، مشترک بین هر دو نوسانگر به سیستم، معادلات حرکت به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{m}{M} \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{m}{M} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

این زوج معادلات جفت شده را حل کنید، و بسامدها و مدهای بهنجار سیستم را به دست آورید. ۴.۱۱ به مسئله دو نوسانگر جفت شده ای که در بخش ۲.۱۱ در خصوص آنها بحث کردیم، رجوع کنید. نشان دهید که انرژی کل سیستم ثابت است. (انرژی جنبشی هر یک از ذرات و انرژی ذخیره شده در هر یک از سه فنر را محاسبه، و با هم جمع کنید.) توجه کنید جملاتی از انرژی جنبشی و پتانسیل که ضریب آنها  $\kappa_{12}$  است به  $C_1$  و  $\omega_1$  بستگی دارند و نه به  $C_2$  و  $\omega_2$ . چرا باید انتظار چنین جوابی داشت؟

۵.۱۱ مختصات بهنجار مربوط به مسئله مورد بحث در بخش ۲.۱۱ و مثال ۲.۱۱ را وقتی که جرمها متفاوت اند،  $m_1 \neq m_2$ ، پیدا کنید. باز هم می توانید فرض کنید که  $\kappa$  ها برابرند.

۶.۱۱ دو نوسانگر هماهنگ یکسان را، مطابق شکل ۱.۱ الف، چنان قرار داده ایم که در کنار هم می لغزند. نیروی اصطکاکی، یک جفت شدگی بین حرکتها ایجاد می کند که متناسب با سرعت نسبی لحظه ای است. نوسانهای جفت شده سیستم را مورد بحث قرار دهید.



شکل ۱.۱ الف

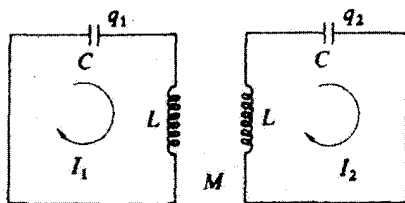
۷.۱۱ ذره‌ای به جرم  $m$  توسط فنری با ثابت نیروی  $k$  به تکیه‌گاه صلبی متصل شده است. در حالت تعادل فنر به‌طور قائم در راستای پایین‌سو آویخته شده است. به این مجموعه جرم-فنر نوسانگر مشابهی متصل شده است، فنر نوسانگر دوم به وزنه نوسانگر اول وصل شده است. بسامدهای مشخصه نوسانهای قائم یک بعدی را محاسبه و با بسامدهای حالتی مقایسه کنید که یکی از دو جسم ثابت نگه داشته شده و دیگری نوسان می‌کند. مدهای بهنجار حرکت سیستم را توصیف کنید.

۸.۱۱ آونگ ساده‌ای متشکل از یک مهره به جرم  $m$  از ریسمانی ناکشایند (و بدون جرم) به طول  $l$  آویخته شده است. از مهره این آونگ، آونگ دیگری یکسان با آن آویخته شده است. حالت نوسانهای کم دامنه را در نظر بگیرید (به‌طوری که  $\sin \theta \cong \theta$ ) و بسامدهای مشخصه را محاسبه کنید. همچنین مدهای بهنجار سیستم را توصیف کنید (مسئله ۷.۶).

۹.۱۱ حرکت یک زوج نوسانگر جفت شده را می‌توان با استفاده از روشی شبیه آنچه در ترسیم نمودار فاز یک تک نوسانگر به‌کار گرفته شد (بخش ۳.۳) توصیف کرد. در مورد نوسانگرهای جفت شده، دو وضعیت  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  را می‌توان با یک نقطه (نقطه سیستمی) در فضای پیکربندی دو بعدی،  $x_1$ - $x_2$  نشان داد. با افزایش  $t$ ، مکان هندسی این گونه نقاط منحنی معینی را تعریف می‌کنند. تصاویر نقطه سیستمی بر محورهای  $x_1$  و  $x_2$  به ترتیب حرکت‌های مربوط به  $m_1$  و  $m_2$  را نشان می‌دهند. در حالت کلی،  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  توابع پیچیده‌ای‌اند، و به همین ترتیب منحنی هم پیچیده است. اما همواره چرخاندن محورهای  $x_1$ - $x_2$  به مجموعه جدید  $x'_1$ - $x'_2$  میسر است به‌گونه‌ای که تصویر نقطه سیستمی روی هر یک از محورهای جدید یک هماهنگ ساده باشد. حرکت‌های تصویر شده روی محورهای جدید با بسامدهای مشخصه انجام می‌شود و با مدهای بهنجار سیستم متناظرند. محورهای جدید را محورهای بهنجار می‌نامیم. محورهای بهنجار مسئله مورد بحث در بخش ۲.۱۱ را بیابید و درستی عبارتهای پیشین در ارتباط با حرکت نسبت به این دستگاه مختصات را تحقیق کنید.

۱۰.۱۱ دو نوسانگر یکسان جفت شده (مانند شکل ۱.۱۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید هر یک از نوسانگرها میرا هستند و فرض کنید که پارامترهای میرایی هر دو برابر باشد. نیروی  $F \cdot \cos \omega t$  بر  $m_1$  وارد می‌آید. زوج معادله دیفرانسیل جفت شده‌ای بنویسید که حرکت را توصیف کند. با بیان معادلات دیفرانسیل بر حسب مختصات بهنجار، ارائه شده توسط معادلات (۱۱.۱۱)، و با مقایسه این معادلات با معادلات (۵۳.۳)، جواب مسئله را به‌دست آورید. نشان دهید که مختصات بهنجار  $\eta_1$  و  $\eta_2$ ، به ترتیب، در بسامدهای مشخصه  $\omega_1$  و  $\omega_2$  قله‌های تشدید را می‌نمایانند.

۱۱.۱۱ مدار الکتریکی شکل ۱۱.۱۱ ب را در نظر بگیرید. با بهره‌گیری از مباحث مطرح شده در



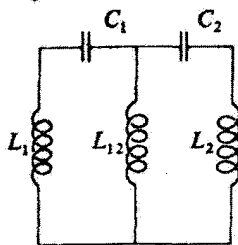
شکل ۱۱.ب

بخش ۲.۱۱، بسامدهای مشخصه را بر حسب ظرفیت  $C$ ، القایدگی  $L$ ، و القای متقابل  $M$  پیدا کنید. معادلات مداری کیرشهوف عبارت‌اند از

$$L\dot{I}_1 + \frac{q_1}{C} + M\dot{I}_2 = 0$$

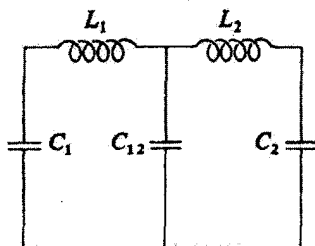
$$L\dot{I}_2 + \frac{q_2}{C} + M\dot{I}_1 = 0$$

۱۲.۱۱ نشان دهید که معادلات مسئله ۱۱.۱۱ را می‌توان با حل معادله دوم در بالا بر حسب  $\dot{I}_2$  و نشان دادن نتیجه در معادله اول به همان صورت معادلات (۱.۱۱) در آورد. به همین ترتیب  $\dot{I}_1$  را در معادله دوم بنشانید. در آن صورت بسامدهای مشخصه را فوراً می‌توان از شباهت با معادلات (۸.۱۱) نوشت. ۱۳.۱۱ بسامدهای مشخصه مدارهای جفت‌شده در شکل ۱۱.ج را پیدا کنید.



شکل ۱۱.ج

۱۴.۱۱ در خصوص مدهای بهنجار سیستم نموده شده در شکل ۱۱.د بحث کنید.



شکل ۱۱.د

۱۵.۱۱ در شکل ۱۱ ج، به جای  $L_{12}$  یک مقاومت بنشانید و نوسانها را بررسی کنید.

۱۶.۱۱ حلقه نازکی به شعاع  $R$  و جرم  $M$  در صفحه خودش حول یک نقطه ثابت زوی حلقه، نوسان می‌کند. جرم کوچک  $m$  به حلقه متصل است که مقید است در امتداد حلقه (و بدون اصطکاک) حرکت کند. فقط نوسانهای کم دامنه را در نظر بگیرید، و نشان دهید که ویژه بسامدها عبارتند از

$$\omega_1 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{g}{R}}$$

دو مجموعه شرایط اولیه‌ای را بیابید که اجازه می‌دهد سیستم در هر یک از مدهای بهنجارش نوسان کند. وضعیت فیزیکی هر یک از مدها را تشریح کنید.

۱۷.۱۱ ویژه بسامدهای مربوط به سیستمی مانند آنچه در بخش ۲.۱۱ مورد بحث قرار گرفت، ولی با سه جرم مساوی  $m$  و چهار فنر (جملگی با ثابتهای نیروی برابر) را بیابید، به طوری که دو سر سیستم فنرها ثابت شده باشد. مدهای بهنجار آن را تشریح کنید.

۱۸.۱۱ جرم  $M$  روی یک مسیر صاف افقی حرکت می‌کند، آونگی از  $M$  آویخته شده است. این آونگ از میله بی‌وزنی تشکیل شده که به انتهای آن جرم  $m$  متصل است. ویژه بسامدها را بیابید و مدهای بهنجار را تشریح کنید.

۱۹.۱۱ در مسئله سه آونگ جفت شده، سه ثابت جفت‌شدگی را متمایز از یکدیگر در نظر بگیرید، به طوری که انرژی پتانسیل را بتوان به صورت زیر نوشت

$$U = \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\epsilon_{12}\theta_1\theta_2 - 2\epsilon_{13}\theta_1\theta_3 - 2\epsilon_{23}\theta_2\theta_3)$$

که در اینجا  $\epsilon_{12}$ ،  $\epsilon_{13}$  و  $\epsilon_{23}$  جملگی باهم متفاوت‌اند. نشان دهید که در چنین سیستمی هیچگونه واکنشی پیش نمی‌آید. همچنین نشان دهید که واکنشی فقط در صورتی روی می‌دهد که  $\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23}$ .

۲۰.۱۱ ویژه بردارهای ممکن برای مدهای واکن مربوط به مسئله سه آونگ جفت شده را به شرط  $a_{11} = 2a_{21}$  پیدا کنید. این وضعیت را از نظر فیزیکی تعبیر کنید.

۲۱.۱۱ سه نوسانگر با جرمهای مساوی  $m$  چنان جفت شده‌اند که انرژی پتانسیل سیستم از رابطه زیر به دست می‌آید

$$U = \frac{1}{2} [\kappa_1(x_1^2 + x_2^2) + \kappa_2 x_1^2 + \kappa_3(x_1 x_2 + x_2 x_3)]$$

که در اینجا  $\kappa_2 = \sqrt{2\kappa_1\kappa_2}$  با حل معادله مشخصه ویژه بسامدها را پیدا کنید. تغییر فیزیکی مد صفر چیست؟

۲۲.۱۱ یک ورق نازک همگن به جرم  $M$  را در نظر بگیرید که در صفحه  $x_1-x_2$  قرار گرفته و مرکزش در مبدأ مختصات واقع است. فرض کنید که طول ورق برابر  $2A$  (در راستای محور  $x_2$ ) و عرض آن برابر  $2B$  (در راستای محور  $x_1$ ) باشد. ورق از تکیه‌گاه ثابتی توسط چهار فنر با ثابت نیروی مساوی  $\kappa$  از چهار گوشه ورق آویخته شده است. ورق می‌تواند نوسان کند، اما با این قید که مرکز آن روی محور  $x_2$  باقی بماند. به این ترتیب، سه درجه آزادی داریم: (۱) حرکت قائم، که مرکز ورق در امتداد محور  $x_2$  حرکت می‌کند؛ (۲) حرکت یک بر شدن طولی، که محور  $x_1$  نقش محور چرخش را ایفا می‌کند (برای توصیف این حرکت زاویه  $\theta$  را انتخاب می‌کنیم)؛ و (۳) یک حرکت یک بر شدن جانبی، که محور  $x_2$  محور این چرخش را تشکیل می‌دهد (برای توصیف این حرکت زاویه  $\varphi$  را اختیار می‌کنیم). فقط نوسانهای کم دامنه را در نظر بگیرید و نشان دهید که معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف است، و بنابراین سیستم واگن است. مدهای بهنجار سیستم را مورد بحث قرار دهید. (در محاسبه  $a_{jk}$ ها برای مدهای واگن به‌طور اختیاری یکی از  $a_{jk}$ ها را برابر صفر قرار داده و ابهام را بر طرف کنید.) نشان دهید که با افزودن یک تسمه نازک به جرم  $m$  و طول  $2A$  در امتداد محور  $x_2$  (در حال تعادل) به ورق، می‌توان واگنی را از بین برد. ویژه بسامدهای جدید سیستم را پیدا کنید.

۲۳.۱۱ انرژی کل وابسته به یک مد بهنجار را محاسبه کنید، و نشان دهید که نسبت به زمان ثابت است. این محاسبه را صریحاً در مورد مثال ۳.۱۱ نشان دهید.

۲۴.۱۱ نشان دهید که معادلات حرکت مربوط به ارتعاشات طولی یک ریسمان بارگذاری شده دقیقاً همان معادلات مربوط به حرکت عرضی هستند [معادله (۱۳.۱۱)]، جز اینکه باید به جای ضریب  $\tau/d$ ، کمیت  $\kappa$ ، ثابت نیروی ریسمان، را نشانند.

۲۵.۱۱ مثال ۷.۱۱ را، با فرض اینکه هر سه ذره به اندازه  $a$  جابه‌جا و از حال سکون رها شوند، مجدداً حل کنید.

## سیستمهای پیوسته: ریسمانهای مرتعش

### ۱.۱۲ مقدمه

تا اینجا ذرات، سیستمهایی از ذرات، و یا اجسام صلب را مورد بررسی قرار داده‌ایم. اکنون می‌خواهیم اجسامی (گازها، مایعات، یا جامدات) را مورد مطالعه قرار دهیم که صلب نیستند، یعنی، اجسامی که ذراتشان نسبت به یکدیگر (هر چند جزئی) حرکت می‌کنند. مطالعه کلی این گونه اجسام خیلی دشوار است. اما، یکی از جنبه‌های این اجسام پیوسته، یعنی توانایی انتقال حرکت موجی، در تمامی حوزه‌های فیزیک از اهمیت فراوانی برخوردار است. اختلال وارد بر یک جزء از جسم از طریق انتشار موج می‌تواند به همه جای جسم منتقل شود.

ساده‌ترین نمونه چنین پدیده‌ای همانا ریسمان مرتعش است که تحت کشش یکنواخت بین دو تکیه‌گاه ثابت کشیده شده باشد. طبق معمول، این مثال ساده، بسیاری از نتایج مهم لازم برای فهم سایر مثالهای فیزیکی، مانند غشاهای تحت کشش و امواج در جامدات، را جلوه‌گر می‌کند. امواج ممکن است عرضی و یا طولی باشند. نمونه امواج طولی همان ارتعاش مولکولها در امتداد راستای انتشار موج متحرک در میله جامد است. امواج طولی در شاره‌ها و جامدات پیش می‌آیند و در آکوستیک اهمیت زیادی دارند.

در حالی که در جامدات امواج عرضی و طولی هر دو پیش می‌آیند، در شاره‌ها که اعمال



نیروهای برشی امکانپذیر نیست، فقط امواج طولی به وجود می آیند. قبلاً (فصل ۱۱) هر دو نوع ارتعاش را برای سیستمی از ذرات مطالعه کرده ایم. مطالعه مفصل ریسمان مرتعش عرضی به چند دلیل مهم است. مطالعه مدلی یک بعدی از چنین ارتعاشاتی یک جواب ریاضی را مجاز می دارد که می توان از نتایج آن در مسائل پیچیده تر دو و سه بعدی بهره گرفت. و مدهای نوسان مشابه اند. به خصوص، کاربرد شرایط مرزی (دو سر ثابت)، که در بسیاری از شاخه های فیزیک اهمیت فوق العاده دارد، ساده ترین وجه را در مسائل یک بعدی دارد. نقشی که شرایط مرزی در استفاده از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ایفا می کند مشابه همان نقشی است که شرایط اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل از روشهای نیوتونی یا لاگرانژی بازی می کند.

در این فصل دامنه بحث مربوط به ارتعاشات ریسمان بارگذاری شده را که در فصل ۱۱ ارائه شد، با بررسی نتایج حاصل از بینهایت شدن تعداد ذرات واقع بر ریسمان (در حالی که چگالی طولی جرم را ثابت نگه می داریم)، تعمیم می دهیم. از این طریق به حالت ریسمان پیوسته می رسم. تمام نتایج مورد نظر، از جمله تعیین معادله موج، در مورد چنین ریسمانی را می توان از این فرایند حدی به دست آورد. در این بحث با حل صریح معادله حرکت به نتایج گوناگونی می رسم. یکی از مفیدترین نتایج از این گونه - بسامد مد اصلی نوسان - را می توانیم با دقت شگفت انگیزی از ملاحظات صرفاً مربوط به انرژی به دست آوریم، بدون اینکه نیاز به حل معادله حرکت داشته باشیم. هر گاه حل دقیق معادله حرکت دشوار (یا ناممکن) باشد، این روش، که به آن روش ریلی می گویند، از کارایی قابل ملاحظه ای برخوردار است. این روش به کمک چندین مثال در مورد ریسمانهای مرتعش تشریح شده است، که در این موارد می توان دقت روش نامبرده را با جواب دقیق آزمود.

## ۲.۱۲ ریسمان پیوسته به صورت حالت حدی

### ریسمان بارگذاری شده

در فصل پیش یک مجموعه از جرمهای نقطه ای متساوی الفاصله آویخته از ریسمانی را مطالعه کردیم. اکنون می خواهیم تعداد این جرمها را بینهایت اختیار کنیم به طوری که ریسمانی پیوسته داشته باشیم. برای انجام این کار، لازم است وقتی  $n \rightarrow \infty$ ، به طور همزمان فرض کنیم که جرم هر یک از ذرات و فاصله بین آنها به صفر نزدیک می شود ( $m \rightarrow 0, d \rightarrow 0$ ) به نحوی که نسبت  $m/d$  ثابت باقی بماند. توجه داریم که  $m/d \equiv \rho$  همان چگالی طولی جرم ریسمان است. به این ترتیب داریم

$$\left. \begin{aligned} (n+1)d &= L && \text{به طوری که } n \rightarrow \infty, d \rightarrow 0 \\ m/d &= \rho = \text{const.} && \text{به طوری که } m \rightarrow 0, d \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

از معادله (۱۱.۱۵۴)، داریم

$$q_j(t) = \sum \eta_r(t) \sin\left(j \frac{r\pi}{n+1}\right) \quad (۲.۱۲)$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$j \frac{r\pi}{n+1} = r\pi \frac{jd}{(n+1)d} = r\pi \frac{x}{L} \quad (۳.۱۲)$$

که در اینجا  $x = jd$  فاصله را روی ریسمان پیوسته تعیین می‌کند. به این ترتیب، تابع  $q_j(t)$  تابع پیوسته‌ای از متغیرهای  $x$  و  $t$  خواهد بود

$$q(x, t) = \sum_r \eta_r(t) \sin \frac{r\pi x}{L} \quad (۴.۱۲)$$

یا

$$q(x, t) = \sum_r \beta_r e^{i\omega_r t} \sin \frac{r\pi x}{L} \quad (۵.۱۲)$$

در مورد ریسمان بارگذاری شده شامل  $n$  ذره، حرکت  $n$  درجه آزادی و بنابراین  $n$  مد بهنجار و بسامد مشخصه دارد. از این رو، در معادله (۱۱.۱۵۴) [یا معادله (۲.۱۲)] جمع روی گستره  $r = 1$  تا  $r = n$  صورت می‌گیرد. اما اکنون تعداد ذرات بینهایت است، بنابراین یک مجموعه نامتناهی از مدهای بهنجار وجود دارد و جمع در معادلات (۴.۱۲) و (۵.۱۲) از  $r = 1$  تا  $r = \infty$  انجام می‌شود. برای مشخص شدن کامل حرکت ریسمان پیوسته باید بینهایت ثابت (اجزای حقیقی و موهومی  $\beta_r$ ) محاسبه شود. این شرایط دقیقاً همان وضعیتی است که در نمایش برخی توابع به صورت سری فوریه با آن مواجه بودیم—این بینهایت ثابت توسط انتگرالهای معینی که شامل تابع اصلی هم هستند مشخص می‌شوند [معادلات (۳.۲۰۱)]. می‌توانیم به این وضعیت از زاویه دیگری هم نظر کنیم: در جواب معادله حرکت بینهایت ثابت اختیاری وجود دارد اما در عین حال بینهایت شرط اولیه، مثلاً توابع پیوسته  $q(x, 0)$  و  $\dot{q}(x, 0)$ ، برای محاسبه آنها در اختیار داریم. به این ترتیب، اجزای حقیقی و موهومی  $\beta_r$  را می‌توانیم بر حسب شرایط اولیه به دست آوریم. این کار را با روشی شبیه آنچه در بخش ۹.۱۱ به کار گرفته شد انجام می‌دهیم. اگر بنویسیم  $\beta_r = \mu_r + i\nu_r$ ، از معادله (۵.۱۲) داریم

$$q(x, 0) = \sum_r \mu_r \sin \frac{r\pi x}{L} \quad (۶.۱۲ \text{ الف})$$

$$\dot{q}(x, 0) = - \sum_r \omega_r \nu_r \sin \frac{r\pi x}{L} \quad (۶.۱۲ \text{ ب})$$

حال هر کدام از این معادلات را در  $\sin(s\pi x/L)$  ضرب و از  $x = 0$  تا  $x = L$  انتگرال می‌گیریم. سپس از رابطه مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم

$$\int_0^L \sin \frac{r\pi x}{L} \sin \frac{s\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{r,s} \quad (7.12)$$

که از آن به دست می‌آوریم

$$\mu_r = \frac{2}{L} \int_0^L q(x, 0) \sin \frac{r\pi x}{L} dx \quad (8.12 \text{ الف})$$

$$\nu_r = -\frac{2}{\omega_r L} \int_0^L \dot{q}(x, 0) \sin \frac{r\pi x}{L} dx \quad (8.12 \text{ ب})$$

بسامد مشخصه  $\omega_r$  را هم می‌توان به صورت مقدار حدی نتیجه مربوط به ریسمان بارگذاری شده به دست آورد. از معادله (۱۵۲.۱۱) داریم

$$\omega_r = 2 \sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin \left[ \frac{r\pi}{2(n+1)} \right] \quad (9.12)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\omega_r = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \sin \frac{r\pi d}{2L} \quad (10.12)$$

وقتی که  $d \rightarrow 0$ ، می‌شود به جای عبارت سینوسی، شناسه آن را نشانید؛ حاصل آن عبارت خواهد بود از

$$\omega_r = \frac{r\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (11.12)$$

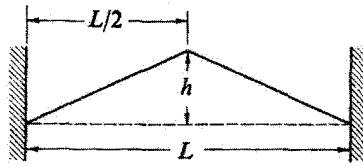
### مثال ۱.۱۲

جابه‌جایی یک «ریسمان کشیده»  $q(x, t)$ ، را که یک نقطه آن جابه‌جا شده (به طوری که ریسمان به شکل مثلث در می‌آید) و از حال سکون رها می‌شود، پیدا کنید. حالت نموده شده در شکل ۱.۱۲ را، که در آن مرکز ریسمان به اندازه  $h$  جابه‌جا شده است، در نظر بگیرید.

حل: شرایط اولیه عبارت‌اند از

$$q(x, 0) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{2h}{L}(L-x), & L/2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (12.12)$$

$$\dot{q}(x, 0) = 0$$



شکل ۱.۱۲

چون ریسمان از حال سکون رها شده است، تمامی  $v_r$  ها صفر می‌شوند.  $\mu_r$  ها از رابطه زیر تعیین می‌شوند

$$\mu_r = \frac{4h}{L^2} \int_0^{L/2} x \sin \frac{r\pi x}{L} dx + \frac{4h}{L^2} \int_{L/2}^L (L-x) \sin \frac{r\pi x}{L} dx$$

پس از انتگرالگیری

$$\mu_r = \frac{8h}{r^2 \pi^2} \sin \frac{r\pi}{2}$$

به طوری که

$$\mu_r = \begin{cases} 0, & \text{زوج } r \\ \frac{8h}{r^2 \pi^2} (-1)^{\frac{1}{2}(r-1)}, & \text{فرد } r \end{cases}$$

بنابراین

$$q(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \left[ \sin \frac{\pi x}{L} \cos \omega_1 t - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{L} \cos \omega_2 t + \dots \right] \quad (۱۳.۱۲)$$

که  $\omega_r$  با  $r$  متناسب است و از معادله (۱۱.۱۲) به دست می‌آید.

از معادله (۱۳.۱۲) مشاهده می‌کنیم که مد اصلی (با بسامد  $\omega_1$ ) و تمام هماهنگهای فرد (با بسامدهای  $\omega_3$  و  $\omega_5$  و ...) آخر برانگیخته شده‌اند ولی هیچیک از هماهنگهای زوج در حرکت مشارکتی ندارند. چون جابه‌جایی اولیه متقارن بود، حرکت بعدی هم باید متقارن باشد، بنابراین هیچکدام از مدهای زوج (که برای آنها موضع وسط ریسمان یک گره را تشکیل می‌دهد) برانگیخته نمی‌شوند. به طور کلی، اگر ریسمان در یک نقطه اختیاری کشیده شود، هیچیک از هماهنگهایی که در آن نقطه گره دارند برانگیخته نمی‌شوند.

به طوری که در بخش بعدی اثبات خواهیم کرد، انرژی هر کدام از مدهای برانگیخته با مجذور ضریب جمله متناظر در معادله (۱۳.۱۲)، متناسب است. به این ترتیب، نسبت انرژیهای مربوط به

هماهنگ اصلی، هماهنگ سوم، هماهنگ پنجم، والی آخر، عبارت است از  $\frac{1}{81} : \frac{1}{675} : \dots$ . بنابراین انرژی سیستم (یا شدت صوت گسیل شده) قویاً تحت تأثیر هماهنگ اصلی است. هماهنگ سوم ۱۹dB و هماهنگ پنجم ۲۸dB پایتتر از هماهنگ اصلی است. ■

### ۳.۱۲ انرژی ریسمان مرتعش

چون فرض کرده‌ایم که نیروهای اصطکاکی در کار نیستند، روشن است که انرژی کل ریسمان مرتعش باید ثابت باقی بماند. حال این مطلب را به صراحت نشان می‌دهیم؛ بعلاوه، نشان می‌دهیم که انرژی ریسمان صرفاً به صورت جمع میزان مشارکت هر یک از مدهای بهنجار است. طبق معادله (۴.۱۲) جابه‌جایی ریسمان، از عبارت زیر به دست می‌آید

$$q(x, t) = \sum_r \eta_r(t) \sin \frac{r\pi x}{L} \quad (۱۴.۱۲)$$

که در اینجا مختصات بهنجار عبارت‌اند از

$$\eta_r(t) = \beta_r e^{iw_r t} \quad (۱۵.۱۲)$$

که مثل همیشه،  $\beta_r$  کمیت‌های مختلط‌اند و مختصات بهنجاری که از نظر فیزیکی با معنی باشند با انتخاب جزء حقیقی معادله (۱۵.۱۲) به دست می‌آیند.

انرژی جنبشی ریسمان با محاسبه انرژی جنبشی برای یک جزء ریسمان،  $\frac{1}{2}(\rho dx) \dot{q}^2$ ، و سپس انتگرالگیری روی همه طول ریسمان، به دست می‌آید بدینسان

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 dx \quad (۱۶.۱۲)$$

یا، با استفاده از معادله (۱۴.۱۲)

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left[ \sum_r \dot{\eta}_r \sin \frac{r\pi x}{L} \right]^2 dx \quad (۱۷.۱۲)$$

مجدور این سری را می‌توانیم به صورت حاصلضرب دو جمع نمایش دهیم، این شگرد شمول دقیق همه جملات متقارب را تضمین می‌کند

۱. دسی بل (dB) یکای نسبی شدت صوت (یا توان آکوستیکی) است. نسبت شدت صوتی با شدت  $I$  به صوتی با شدت  $I_0$  از رابطه  $10 \log(I/I_0)$  dB به دست می‌آید. به این ترتیب، برای هماهنگ اصلی ( $I_0$ ) و هماهنگ سوم ( $I$ ) داریم  $10 \log(1/81) = -19.1$  dB یا «۱۹dB از نظر شدت پایتتر». نسبت ۳dB تقریباً متناظر با یک مضرب دو در شدت نسبی است.

$$T = \frac{1}{\tau} \rho \sum_{r,s} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \int_0^L \sin \frac{r\pi x}{L} \sin \frac{s\pi x}{L} dx \quad (18.12)$$

حال این انتگرال عیناً همان انتگرال معادله (۷.۱۲) است، بنابراین

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho L}{\tau} \sum_{r,s} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \delta_{rs} \\ &= \frac{\rho L}{\tau} \sum_r \dot{\eta}_r^2 \end{aligned} \quad (19.12)$$

در محاسبه مربوط به انرژی جنبشی باید مواظب باشیم که حاصلضرب کمیتهای حقیقی را اختیار کنیم. بنابراین باید مجذور جزء حقیقی  $\dot{\eta}_r$  را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} (\text{Re} \dot{\eta}_r)^2 &= \left( \text{Re} \frac{d}{dt} [(\mu_r + i\nu_r)(\cos \omega_r t + i \sin \omega_r t)] \right)^2 \\ &= (-\omega_r \mu_r \sin \omega_r t - \omega_r \nu_r \cos \omega_r t)^2 \end{aligned}$$

بنابراین، انرژی جنبشی ریسمان عبارت است از

$$T = \frac{\rho L}{\tau} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r \sin \omega_r t + \nu_r \cos \omega_r t)^2 \quad (20.12)$$

انرژی پتانسیل ریسمان را می‌توان بسهولت با نوشتن عبارت مربوط به ریسمان بارگذاری شده، و سپس گذار به حد ریسمان پیوسته محاسبه کرد. (به خاطر داشته باشید که فرض می‌کنیم انرژی پتانسیل همان انرژی کشسانی ریسمان است.) در مورد ریسمان بارگذاری شده

$$U = \frac{1}{\tau} \frac{\tau}{d} \sum_j (q_{j-1} - q_j)^2$$

از ضرب و تقسیم این عبارت در  $d$  داریم

$$U = \frac{1}{\tau} \tau \sum_j \left( \frac{q_{j-1} - q_j}{d} \right)^2 d$$

در فرایند حدگیری،  $d \rightarrow 0$ ، جمله داخل پرانتز همان مشتق جزئی  $q(x, t)$  نسبت به  $x$  است و مجموع (شامل عامل  $d$ ) به انتگرال تبدیل می‌شود

$$U = \frac{1}{\tau} \tau \int_0^L \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 dx \quad (21.12)$$

با استفاده از معادله (۱۴.۱۲)، داریم

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \sum_r \frac{r\pi}{L} \eta_r \cos \frac{r\pi x}{L} \quad (۲۲.۱۲)$$

به طوری که

$$U = \frac{1}{4} \tau \int_0^L \left[ \sum_r \frac{r\pi}{L} \eta_r \cos \frac{r\pi x}{L} \right]^2 dx \quad (۲۳.۱۲)$$

باز هم، می‌توان جمله مجذور را به صورت حاصلضرب دو جمع نمایش داد، و از آنجا که رابطه مثلثاتی [معادله (۷.۱۲)] علاوه بر سینوسها در مورد کسینوسها نیز برقرار است، داریم

$$\begin{aligned} U &= \frac{\tau}{4} \sum_{r,s} \frac{r\pi}{L} \frac{s\pi}{L} \eta_r \eta_s \int_0^L \cos \frac{r\pi x}{L} \cos \frac{s\pi x}{L} dx \\ &= \frac{\tau}{4} \sum_{r,s} \frac{r\pi}{L} \frac{s\pi}{L} \eta_r \eta_s \frac{L}{4} \delta_{rs} \\ &= \frac{\tau}{4} \sum_r \frac{r^2 \pi^2}{L^2} \frac{L}{4} \eta_r^2 \\ &= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \eta_r^2 \end{aligned} \quad (۲۴.۱۲)$$

که در این عبارت آخری برای بیان نتیجه بر حسب  $\omega_r^2$ ، از معادله (۱۱.۱۲) بهره گرفته‌ایم. سرانجام، از محاسبه مربع جزء حقیقی  $\eta_r$ ، داریم

$$U = \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r \cos \omega_r t - \nu_r \sin \omega_r t)^2 \quad (۲۵.۱۲)$$

حال انرژی کل از جمع کردن معادلات (۲۵.۱۲) و (۲۰.۱۲) به دست می‌آید که در آن جملات متقارب حذف می‌شوند و مجموع جملات مجذور شده، برابر واحد خواهد شد

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ &= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r^2 + \nu_r^2) \end{aligned} \quad (الف ۲۶.۱۲)$$

یا

$$E = \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 |\beta_r|^2 \quad (ب ۲۶.۱۲)$$

بنابراین انرژی کل نسبت به زمان ثابت است، علاوه بر آن، انرژی کل به صورت جمع میزان مشارکتهای حاصل از هر یک از مدهای پهنجار به دست آمده است.

انرژیهای جنبشی و پتانسیل هر کدام نسبت به زمان تغییر می‌کنند، به طوری که گاهی محاسبه میانگین-زمانی انرژیهای جنبشی و پتانسیل مفید است-یعنی، میانگینهای مربوطه در یک دوره تناوب کامل ارتعاش اصلی،  $r = 1$ :

$$\langle T \rangle = \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \langle (\mu_r \sin \omega_r t + \nu_r \cos \omega_r t)^2 \rangle \quad (27.12)$$

که در اینجا عبارتهای بین دو گوشه ( $\langle \rangle$ ) میانگین در بازه زمانی  $2\pi/\omega_1$  را نشان می‌دهند. میانگین  $\sin^2 \omega_r t$  یا  $\cos^2 \omega_r t$  روی این بازه هر کدام برابر  $1/2$  است. به همین ترتیب، میانگینهای  $\sin^2 \omega_r t$  یا  $\cos^2 \omega_r t$  به ازای  $r \geq 2$  نیز برابر  $1/2$  اند، زیرا دوره تناوب ارتعاش اصلی همواره مضرب صحیحی از دوره تناوب هماهنگهای بالاتر است. میانگینهای جملات متقارب،  $\cos \omega_r t \sin \omega_r t$ ، جملگی صفرند. بنابراین

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r^2 + \nu_r^2) \\ &= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 |\beta_r|^2 \end{aligned} \quad (28.12)$$

برای میانگین زمانی انرژی پتانسیل به همین نتیجه می‌رسیم

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \langle (\mu_r \cos \omega_r t - \nu_r \sin \omega_r t)^2 \rangle \\ &= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 (\mu_r^2 + \nu_r^2) \\ &= \frac{\rho L}{8} \sum_r \omega_r^2 |\beta_r|^2 \end{aligned} \quad (29.12)$$

بنابراین، به نتیجه مهمی دست پیدا می‌کنیم مبنی بر اینکه: میانگین انرژی جنبشی یک ریسمان مرتعش برابر میانگین انرژی پتانسیل آن است!

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle \quad (30.12)$$

این نتیجه برای بخش بعدی نیز مهم است. به ساده‌سازی حاصل از کاربرد مختصات بهنجار نیز توجه کنید: هم  $\langle T \rangle$  و هم  $\langle U \rangle$  جمعهای ساده‌ای از میزان مشارکتهای مربوط به هر یک از مدهای بهنجارند



## ۴.۱۲ اصل ریلی

در رده بزرگی از سیستمهای ارتعاشی توجه عمده بر مد اصلی نوسان معطوف است. این عبارت به این معنی نیست که هماهنگهای بالاتر بی اهمیت‌اند (مثلاً، اکثر ابزار آلات موسیقی برای ایجاد اصوات مشخصه خود به هماهنگها وابسته‌اند)، بلکه معمولاً فقط بالاترین شدت به مد اصلی وابسته است. در روش قبلی خود برای تعیین بسامد اصلی سیستم مرتعش به حل معادله حرکت نیاز داشتیم. در برخی موارد دستیابی به جواب دقیق مسئله دشوار (یا حتی ناممکن) است. لرد ریلی برای فائق آمدن بر چنین دشواریهایی روشی را ابداع کرد، که بر مبنای آن برای به دست آوردن مقدار نسبتاً دقیق بسامد اصلی لازم است تقریب خامی از جواب در اختیار داشته باشیم.

بنابر اصل ریلی: در مد اصلی نوسان هر سیستم ارتعاشی، انرژیهای جنبشی و پتانسیل چنان توزیع می‌شوند که بسامد (و بنابراین انرژی کل) کمینه باشد.<sup>۱</sup> به اعتبار نتایج بخش پیش، می‌دانیم که هرگاه در طی محاسبه از جوابهای دقیق  $q(x, t)$  استفاده کنیم، میانگین انرژی جنبشی برابر میانگین انرژی پتانسیل است. بنابراین، اگر برای مد اصلی یک جواب تقریبی حدس بزنیم (یا این جواب را از طریق شیوه‌ای سیستماتیک به دست آوریم) و سپس انرژیهای جنبشی و پتانسیل میانگین محاسبه شده را برابر قرار دهیم، برای بسامد اصلی نتیجه‌ای به دست می‌آوریم که از بسامد واقعی کمتر نیست. در واقع، برای اینکه تا حد مطلوب به جواب واقعی نزدیک شویم، می‌توانیم از روش تقریبهای پیاپی استفاده کنیم.<sup>۲</sup>

برای بهره‌گیری از روش ریلی، ابتدا باید عبارتهای مناسبی برای انرژیهای جنبشی و پتانسیل به دست آوریم. جواب دقیق برای مد اصلی ریسمان مرتعش عبارت است از

$$q(x, t) = \eta_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} \quad (۳۱.۱۲)$$

اکنون به جای تابع فضایی  $\sin(\pi x/L)$ ، تابع دلخواه  $g(x)$  را می‌نشانیم که کار ما عبارت از این است که در شرایط خاص این تابع را حدس بزنیم و یا به‌طور مناسب آن را انتخاب کنیم. به این ترتیب

$$q(x, t) = \eta_1(t)g(x) \quad (۳۲.۱۲)$$

۱. اثبات این عبارت را در اینجا نمی‌آوریم؛ برای این امر، مثلاً رجوع کنید به:

Temple and Bickley (Te 56, Chapter 3).

۲. این روش ارتباط نزدیکی با روش وردشی دارد که در مکانیک کوانتومی برای تعیین انرژی حالت پایه سیستم با استفاده از تابع موجهای آزمایشی، به‌کار می‌رود.

طبق معادله (۱۶.۱۲) انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \rho \int_0^L \dot{\eta}_1^2 g^2 dx \quad (۳۳.۱۲)$$

برای دستیابی به  $\langle T \rangle$  فقط به میانگین  $\dot{\eta}_1^2$  نیاز داریم

$$\langle T \rangle = \langle \dot{\eta}_1^2 \rangle \times \frac{1}{2} \rho \int_0^L g^2 dx \quad (۳۴.۱۲)$$

با به کارگیری همان روش میانگین گیری بخش قبل، می رسیم به

$$\langle \dot{\eta}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega_1^2 |\beta_1|^2 \quad (۳۵.۱۲)$$

یا، هرگاه به جای ضریب دامنه،  $|\beta_1|^2$  ثابت  $A^2$  را بنشانیم

$$\langle T \rangle = \frac{1}{4} \rho A^2 \omega_1^2 \int_0^L g^2 dx \quad (۳۶.۱۲)$$

به همین ترتیب، در مورد انرژی پتانسیل، که باز هم فرض می کنیم فقط انرژی کشسانی در ریسمان باشد، داریم

$$U = \frac{1}{2} \tau \int_0^L \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \tau \int_0^L \eta_1^2 g'^2 dx \quad (۳۷.۱۲)$$

که در اینجا  $g' \equiv dg/dx$ . پس از میانگین گیری، داریم

$$\langle U \rangle = \langle \eta_1^2 \rangle \times \frac{1}{2} \tau \int_0^L g'^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \tau A^2 \int_0^L g'^2 dx \quad (۳۸.۱۲)$$

از برابر قرار دادن  $\langle U \rangle$  و  $\langle T \rangle$ ، بسامد مد اصلی را پیدا می کنیم

$$\omega_1^2 = \frac{\tau \int_0^L g'^2 dx}{\rho \int_0^L g^2 dx} \quad (۳۹.۱۲)$$

اگر  $g(x)$  چنان اختیار شود که با جواب واقعی تفاوت داشته باشد، بسامدی که از معادله (۳۹.۱۲) به دست می آید، در واقع از بسامد اصلی واقعی بزرگتر است. ولی اگر از هر تابعی بهره گیریم که به قدر کافی به  $g(x)$  واقعی نزدیک است،  $\omega_1$  فقط جزئی اختلافی با بسامد واقعی خواهد داشت.

مثال ۲.۱۲

اگر از قبل جواب مربوط به ریسمان مرتعش را نمی‌دانستیم، ممکن بود که برای حل آن از روش زیر استفاده کنیم. دو سر ریسمان ثابت است و وقتی این ریسمان با پایینترین بسامد ممکن ارتعاش می‌کند، مشاهده می‌شود که بیشینه جابه‌جایی در وسط آن پیش می‌آید. بنابراین یک سهمی را به عنوان حدسی منطقی برای تابع جابه‌جایی اختیار می‌کنیم

$$g(x) = x(L - x)/L^2 \quad (۴۰.۱۲)$$

با مجذور کردن  $g$  و  $g'$  و نشانیدن آنها در معادله (۳۹.۱۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{\tau \int_0^L (L^2 - 4Lx + 4x^2) dx}{\rho \int_0^L (x^2 L^2 - 2x^2 L + x^2) dx} \\ &= \frac{\tau \times \frac{1}{3} L^3}{\rho \times \frac{1}{30} L^5} \\ &= 10 \frac{\tau}{\rho L^2} \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\omega_1 = ۳,۱۶۲۳ \sqrt{\frac{\tau}{\rho L^2}} \quad (۴۱.۱۲)$$

در حالی که جواب دقیق آن عبارت است از

$$\omega_1 = \pi \sqrt{\frac{\tau}{\rho L^2}} = ۳,۱۴۱۶ \sqrt{\frac{\tau}{\rho L^2}}$$

مقدار تقریبی در حدود ۰٫۶٪ در صد بزرگتر از این مقدار است.

اگر برای  $g(x)$  تابعی مثلثی اختیار می‌کردیم که بیشینه‌اش در وسط قرار داشت (شکل (۱.۱۲))، تقریب بدتری به دست می‌آوریم (دلیل این مطلب روشن است، زیرا تابع مثلثی جزئی شباهتی با سهمی دارد):

$$\omega_1 = \sqrt{12} \sqrt{\frac{\tau}{\rho L^2}} = ۳,۴۶۴۱ \sqrt{\frac{\tau}{\rho L^2}} \quad (۴۲.۱۲)$$

یا خطایی برابر ۱۰ درصد.

از آنجا که انتخاب تابع جابه‌جایی تقریبی نامناسب، از دقت محاسبه بسامد می‌کاهد، ریلی برای بهتر شدن جوابها روش ساده‌ای ابداع کرد. در تابع جابه‌جایی یک ثابت قابل تنظیم وارد می‌کنیم و این ثابت را تغییر می‌دهیم تا  $\omega_1$  را کمینه و در نتیجه به بسامد اصلی واقعی نزدیکتر کند. در این مثال ریلی با نوشتن تابع جابه‌جایی به صورت<sup>۱</sup>

$$g(x) = 1 - \left( \frac{2|x|}{L} \right)^n, n > 1$$

چنین ثابتی را، که همان  $n$  باشد، وارد کرده است.  $x$  از وسط ریسمان اندازه‌گیری می‌شود. (به‌ازای  $n = 2$ ، این عبارت مربوط به  $g(x)$  همان عبارت ارائه شده در معادله (۴۰.۱۲) است. نتیجه محاسبه بسامد بر طبق دستورالعمل، عبارت است از

$$\omega_1^2 = \frac{2(n+1)(2n+1)}{2n-1} \times \frac{\tau}{\rho L^2}$$

کمینه مقدار  $\omega_1$  وقتی است که

$$n = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + 1) = 1,7247$$

به‌طوری که بسامد برابر خواهد شد با

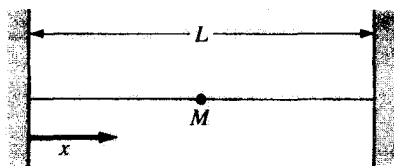
$$\omega_1 = 3,1464 \sqrt{\frac{\tau}{\rho L^2}} \quad (43.12)$$

که از مقدار واقعی به اندازه ۱۵ درصد بیشتر است، که نسبت به جواب به‌دست آمده در معادله (۴۱.۱۲) افزایش دقتی با ضرب ۴ را نشان می‌دهد. ■

### مثال ۳.۱۲

بسامد اصلی ریسمان مرتعشی را که جرم  $M$  به وسط آن متصل شده است، محاسبه کنید (شکل ۲.۱۲).

۱. رجوع کنید به:



شکل ۲.۱۲

حل: فرض کنید جرم ریسمان  $m$ ، طول آن  $L$ ، و چگالیش  $\rho = m/L$  باشد. اگر  $M$  در مقایسه با  $m$  کوچک باشد، تابع جابه‌جایی تقریباً همان تابع مربوط به  $M = 0$  است، که می‌دانیم عبارت است از

$$g(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$$

با استفاده از این عبارت می‌توانیم انرژی جنبشی میانگین ریسمان را از معادله (۳۶.۱۲) محاسبه کنیم، که به آن باید انرژی جنبشی میانگین جرم افزوده شود

$$\begin{aligned} \langle T_{\text{ریسمان}} \rangle &= \frac{1}{4} \rho A^2 \omega_1^2 \int_0^L \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} L \rho A^2 \omega_1^2 \end{aligned}$$

این جرم طبق معادله زیر حرکت می‌کند

$$q_M(t) = A \cos \omega_1 t$$

بنابراین انرژی جنبشی میانگین آن عبارت است از

$$\langle T_{\text{جرم}} \rangle = \frac{1}{4} M \langle \dot{q}_M^2 \rangle = \frac{1}{4} M A^2 \omega_1^2$$

بنابراین انرژی جنبشی میانگین کل برابر خواهد بود با

$$\langle T \rangle = \langle T_{\text{ریسمان}} \rangle + \langle T_{\text{جرم}} \rangle = \frac{1}{4} A^2 \omega_1^2 \left( \frac{1}{4} L \rho + M \right)$$

طبق معمول، باز هم فرض می‌شود که انرژی پتانسیل همان انرژی کشسانی ریسمان باشد. بنابراین، با استفاده از معادله (۳۸.۱۲)

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{1}{4} \tau A^2 \int_0^L \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{\pi^2 \tau A^2}{8 L} \end{aligned}$$

جدول ۱.۱۲

درصد خطا	دقیق	$\omega_1/\sqrt{\tau/\rho L^2}$	$M/m$
۰	۳٫۱۴۱۶	۳٫۱۴۱۶	۰
۰٫۳۶	۲٫۸۵۷۷	۲٫۸۶۷۹	۰٫۱
۱٫۰۵	۲٫۶۲۷۷	۲٫۶۵۵۲	۰٫۲
۳٫۱۲	۲٫۱۵۴۲	۲٫۲۲۱۵	۰٫۵
۵٫۴۷	۱٫۷۱۹۸	۱٫۸۱۳۸	۱
۸٫۲۹	۰٫۸۶۵۷	۰٫۹۳۷۵	۵

از برابر قرار دادن  $\langle T \rangle$  و  $\langle U \rangle$ ، داریم

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{\pi^2}{2} \frac{\tau}{L(\frac{1}{2}\rho L + M)} \\ &= \pi^2 \frac{\tau}{\rho L^2} \times \frac{1}{(1 + 2M/m)} \end{aligned} \quad (۴۴.۱۲)$$

این فرمول در حد  $M = 0$  جواب دقیق را به دست می‌دهد؛ چون  $g(x)$  را جواب دقیق مربوط به این حالت انتخاب کردیم. به‌ازای مقادیر مختلف  $M/m$ ، فهرست بسامدها را در جدول ۱.۱۲ آورده‌ایم، که در این جدول نتایج با جوابهای دقیق مقایسه شده‌اند. جواب تقریبی فقط به‌ازای مقادیر کوچک  $M/m$  صحیح است، زیرا همراه با افزایش  $M$  ریسمان، از تابع سینوسی مربوط به  $M = 0$ ، تغییر شکلی جدی پیدا می‌کند. ■

## ۵.۱۲ معادله موج

تا اینجا روش ما عبارت بود از توصیف حرکت ریسمانی پیوسته به صورت حالت حدی یک ریسمان بارگذاری شده که به‌ازای آن یک جواب کامل داریم؛ ولی تاکنون معادله اصلی حرکت مربوط به حالت پیوسته را نوشته‌ایم. می‌توانیم این کار را با بازگشت به ریسمان بارگذاری شده و کار برد مجدد روش حدی به انجام برسانیم—البته حالا این کار را روی معادله حرکت انجام می‌دهیم و نه روی جواب. می‌توانیم معادله (۱۳۱.۱۱) را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{m}{d} \ddot{q}_j = \frac{\tau}{d} \left( \frac{q_{j-1} - q_j}{d} \right) - \frac{\tau}{d} \left( \frac{q_j - q_{j+1}}{d} \right) \quad (۴۵.۱۲)$$

وقتی که  $d$  به صفر نزدیک می‌شود، داریم

$$\frac{q_j - q_{j+1}}{d} \rightarrow \frac{q(x) - q(x+d)}{d} \rightarrow -\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x+d/2}$$

که همان مشتق در  $x + d/2$  است. برای جمله دیگر معادله (۴۵.۱۲) داریم

$$\frac{q_{j-1} - q_j}{d} \rightarrow \frac{q(x-d) - q(x)}{d} \rightarrow -\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x-d/2}$$

که همان مشتق در  $x - d/2$  است. بنابراین مقدار حدی سمت راست معادله (۴۵.۱۲) عبارت است از

$$\lim_{d \rightarrow 0} \tau \left( \frac{\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x+d/2} - \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x-d/2}}{d} \right) = \tau \left. \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right|_x = \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

همچنین در حد،  $m/d$  به  $\rho$  تبدیل می‌شود، بنابراین معادله حرکت چنین است

$$\rho \ddot{q} = \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (۴۶.۱۲)$$

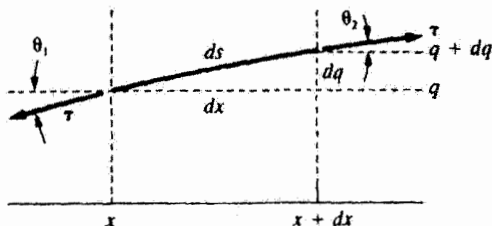
یا

$$\boxed{\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}} \quad (۴۷.۱۲)$$

این تساوی عبارت است از معادله موج در یک بعد. در فصل بعد در خصوص جوابهای این معادله بحث خواهیم کرد.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که معادله (۴۷.۱۲) را نیز می‌توان به آسانی از طریق بررسی نیروهای وارد بر ریسمانی پیوسته به دست آورد. فقط امواج عرضی را در نظر می‌گیریم. یک قسمت از ریسمانی را که دو سرش ثابت است و در این فصل تا اینجا مورد بحث قرار گرفته، در شکل ۳.۱۲ مشاهده می‌کنید.

فرض می‌کنیم چگالی جرمی ثابت ریسمان (طول/جرم) عبارت باشد از  $\rho$ . طول  $ds$  از ریسمان را در نظر می‌گیریم و با  $s(x, t)$  آن را بیان می‌کنیم. کشش  $\tau$  در دو سر ریسمان از لحاظ مقدار، اما نه از نظر راستا، برابر است. این عدم موازنه به نیرو و از آنجا به شتابی در سیستم منجر



شکل ۳.۱۲

می‌شود. فرض می‌کنیم که جابه‌جایی  $q$  (عمود بر  $x$ ) ناچیز باشد. جرم  $dm$  از طول  $ds$  ریسمان برابر است با  $\rho ds$ . مؤلفه‌های افقی کشش تقریباً مساوی و مختلف‌الجهت‌اند؛ بنابراین از حرکت ریسمان در راستای  $x$  چشم می‌پوشیم. نیرو در راستای  $q$  عبارت است از

$$\Delta F = \rho ds \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \quad (۴۸.۱۲)$$

که در اینجا  $\Delta F$  اختلاف کشش در  $x$  و  $x + dx$  را نشان می‌دهد. برای توصیف شتاب از مشتق جزئی،  $\partial^2 q / \partial t^2$  بهره می‌گیریم زیرا وابستگی به  $x$  جابه‌جایی  $q(x, t)$  را در نظر نمی‌گیریم. نیرو را می‌توان از اختلاف مؤلفه‌های  $y$  کشش پیدا کرد

$$\begin{aligned} (\Delta F)_y &= -\tau \sin \theta_1 + \tau \sin \theta_2 \\ &= -\tau \tan \theta_1 + \tau \tan \theta_2 \\ &= -\tau \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right) \Big|_x + \tau \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right) \Big|_{x+dx} \\ &= \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} dx \end{aligned} \quad (۴۹.۱۲)$$

چون زوایای  $\theta$  به‌آزای جابه‌جاییهای ناچیز، اندک‌اند، تقریب  $\sin \theta \approx \tan \theta$  را اختیار کردیم. اکنون معادلات (۴۸.۱۲) و (۴۹.۱۲) را برابر قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم:  $ds \approx dx$

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} dx &= \rho dx \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} &= \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (۵۰.۱۲)$$



معادله (۵۰.۱۲) مانند معادله (۴۷.۱۲) است ولی اصلاً اطلاعاتی را که قبلاً از روش مختصه بهنجار به دست آمده بود، به دست نمی دهد.

### ۶.۱۲ حرکت واداشته و میرا

به آسانی می توانیم معادلات حرکت لاگرانژ مربوط به ریسمان مرتعش را با استفاده از انرژی جنبشی، معادله (۱۹.۱۲)، و انرژی پتانسیل، معادله (۲۴.۱۲)، تعیین کنیم

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{\rho b}{4} \sum_r \dot{\eta}_r^2 - \frac{\rho b}{4} \sum_r \omega_r^2 \eta_r^2 \\ &= \frac{\rho b}{4} \sum_r (\dot{\eta}_r^2 - \omega_r^2 \eta_r^2) \end{aligned} \quad (۵۱.۱۲)$$

که در اینجا طول ریسمان را برای اجتناب از سردرگمی بین  $L$  ها برابر  $b$  اختیار کردیم. سهولت توصیف توسط مختصه بهنجار آشکار است. معادلات حرکت از معادله (۵۱.۱۲) به دست می آیند

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0 \quad (۵۲.۱۲)$$

حال نیرویی وارد بر واحد طول،  $F(x, t)$ ، را که در امتداد ریسمان اثر می کند اضافه می کنیم. همچنین یک نیروی میران متناسب با سرعت اضافه می کنیم. اکنون معادله موج [معادله (۴۷.۱۲)] چنین می شود

$$\rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + D \frac{\partial q}{\partial t} - \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = F(x, t) \quad (۵۳.۱۲)$$

که در اینجا هر جمله نماینده یک نیروی وارد بر واحد طول، و  $D$  یک جمله میران (مقاوم) است. معادله (۵۳.۱۲) را با استفاده از مختصات بهنجار حل می کنیم. همانگونه که در بخش ۲.۱۲ عمل کردیم، از جوابی به صورت زیر استفاده می کنیم

$$q(x, t) = \sum_r \eta_r(t) \sin \frac{r\pi x}{b} \quad (۵۴.۱۲)$$

از نشان دادن معادله (۵۴.۱۲) در معادله (۵۳.۱۲) به معادلات حرکت لاگرانژ می رسیم، که مانند معادله (۵۲.۱۲) است ولی به آن جملات میران و واداشته افزوده شده اند

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[ \left( \rho \dot{\eta}_r + D \eta_r + \frac{r^2 \pi^2 \tau}{b^2} \eta_r \right) \sin \frac{r\pi x}{b} \right] = F(x, t) \quad (۵۵.۱۲)$$

باز هم جمع روی  $\tau$  از ۱ تا  $\infty$  تغییر می‌کند زیرا یک ریسمان پیوسته را در نظر گرفته‌ایم. حل معادله (۵۵.۱۲) با مقایسه اجزای حقیقی و موهومی موازی راه حل ارائه شده در بخش ۲.۱۲ است (که در اینجا جزئیات را تکرار نمی‌کنیم). طرفین معادله (۵۵.۱۲) را در  $\sin s\pi x/b$  ضرب و روی  $dx$  از صفر تا  $b$  انتگرال می‌گیریم (توجه داشته باشید که  $L = b =$  طول ریسمان). با استفاده از معادله (۷.۱۲)، داریم

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left( \rho \ddot{\eta}_r + D \dot{\eta}_r + \frac{s^2 \pi^2 \tau}{b} \eta_r \right) \frac{b}{4} \delta_{rs} = \int_0^b F(x, t) \sin \frac{s\pi x}{b} dx \quad (56.12)$$

که این عبارت به صورت زیر در می‌آید

$$\ddot{\eta}_s + \frac{D}{\rho} \dot{\eta}_s + \frac{s^2 \pi^2 \tau}{\rho b} \eta_s = \frac{2}{\rho b} \int_0^b F(x, t) \sin \frac{s\pi x}{b} dx \quad (57.12)$$

حال فرض می‌کنیم که  $f_s(t)$  ضریب فوریه مربوط به بسط فوریه  $F(x, t)$  باشد که همان سمت راست معادله (۵۷.۱۲) است

$$f_s(t) = \int_0^b F(x, t) \sin \frac{s\pi x}{b} dx \quad (58.12)$$

معادله (۵۷.۱۲) بر حسب مختصات بهنجار چنین می‌شود

$$\ddot{\eta}_s + \frac{D}{\rho} \dot{\eta}_s + \frac{s^2 \pi^2 \tau}{\rho b} \eta_s = \frac{2}{\rho b} f_s(t) \quad (59.12)$$

اکنون  $f_s(t)$  آشکارا مؤلفه‌ای از  $F(x, t)$  است که در روند دستیابی به مختصه بهنجار  $s$  مؤثر است.

### مثال ۴.۱۲

مثال ۱.۱۲ را مجدداً در نظر بگیرید. یک نیروی محرک سینوسی با بسامد  $\omega$  ریسمان را در  $x = b/2$  به حرکت وا می‌دارد؛ جابه‌جایی را پیدا کنید.

حل: نیروی محرک عبارت است از

$$\left. \begin{aligned} F(x, t) &= F \cos \omega t, & x &= b/2 \\ &= 0, & x &\neq b/2 \end{aligned} \right\} \quad (60.12)$$

ضرایب فوریه محرک به این صورت خواهند بود

$$f_s(t) = F \cdot \cos \omega t \sin \frac{s\pi}{\gamma} \quad (۶۱.۱۲)$$

توجه داشته باشید که به ازای تمام مقادیر زوج  $s$  داریم:  $f_s(t) = 0$ . فقط جملات فرد باقی می ماند.

اگر یک عبارت میران کوچک وارد کنیم، معادله (۵۹.۱۲) به صورت زیر در می آید

$$\ddot{\eta}_s + \frac{D}{\rho} \dot{\eta}_s + \frac{s^2 \pi^2 \tau}{\rho b} \eta_s = \frac{\gamma}{\rho b} F \cdot \cos \omega t \sin \frac{s\pi}{\gamma} \quad (۶۲.۱۲)$$

اگر جمله میران مؤثر باشد، نیازی به تعیین جواب متمم نداریم، که حذف خواهد شد. فقط لازم است، مانند عملیاتی که در بخش ۶.۳ انجام دادیم، یک جواب خصوصی (حالت پایا) را پیدا کنیم. معادله (۶۲.۱۲) را می توان با معادله (۵۳.۳) مقایسه کرد، که در اینجا

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{\rho} &= 2\beta \\ \frac{s^2 \pi^2 \tau}{\rho b} &= \omega^2 \\ \frac{\gamma F \cdot \sin s\pi/\gamma}{\rho b} &= A \end{aligned} \right\} \quad (۶۳.۱۲)$$

جواب مربوط به  $\eta(t)$  به قرار زیر است [معادله (۶۰.۳)]

$$\eta_s(t) = \frac{\gamma F \cdot \sin(s\pi/\gamma) \cos(\omega t - \delta)}{\rho b \sqrt{\left(\frac{s^2 \pi^2 \tau}{\rho b} - \omega^2\right) + \frac{D}{\rho} \omega^2}} \quad (۶۴.۱۲)$$

که در اینجا

$$\delta = \tan^{-1} \left[ \frac{D\omega}{\rho \left(\frac{s^2 \pi^2 \tau}{\rho b} - \omega^2\right)} \right] \quad (۶۵.۱۲)$$

و جابه جایی  $q(x, t)$  عبارت است از

$$q(x, t) = \sum_r \frac{\gamma F \cdot \sin \frac{r\pi}{\gamma} \cos(\omega t - \delta) \sin \frac{r\pi x}{b}}{\rho b \sqrt{\left(\frac{r^2 \pi^2 \tau}{\rho b} - \omega^2\right) + \frac{D}{\rho} \omega^2}} \quad (۶۶.۱۲)$$

که در اینجا از بخشی از جواب که حذف می‌شود چشم پوشیدیم. معادله (۶۶.۱۲) اغلب جنبه‌هایی را که قبلاً مورد بحث قرار داده‌ایم به نمایش می‌گذارد. بر حسب آنکه بسامد محرک چقدر باشد، فقط چندتایی از مختصات بهنجار ممکن است به علت آثار تشدید نهمفته در مخرج کسر جنبه غالب پیدا کنند. اگر جمله میران چشم پوشیدنی باشد، جمله‌های مربوط به مختصه بهنجار غالب عبارت‌اند از

$$r^2 = \frac{\omega^2 \rho b}{\pi^2 \tau} \quad (۶۷.۱۲)$$

و به علت وجود جمله  $\sin r\pi/2$  در معادله (۶۶.۱۲)، فقط مقادیر فرد  $r$  مؤثرند. ■

### مسائل

۱.۱۲ در خصوص حرکت ریسمان پیوسته‌ای با شرایط اولیه  $q(x, 0) = A \sin(3\pi x/L)$  و  $\dot{q}(x, 0) = 0$  بحث کنید. جواب را به مدهای بهنجار تجزیه کنید.

۲.۱۲ مسئله مطرح شده در مثال ۱.۱۲ را برای وقتی که نقطه کشیدگی به اندازه  $L/3$  از یک سر ریسمان فاصله پیدا کند، مجدداً حل کنید. در مورد ماهیت مدهای مجاز نظر دهید.

۳.۱۲ با مراجعه به مثال ۱.۱۲، به کمک محاسبات عددی نشان دهید که جابه‌جایی اولیه ریسمان توسط سه جمله اول سری ارائه شده در معادله (۱۳.۱۲) به نحو مطلوبی نموده شده است. شکل ریسمان را برای فواصل زمانی  $1/8$  دوره تناوب ترسیم کنید.

۴.۱۲ در خصوص حرکت ریسمانی با شرایط اولیه  $q(x, 0) = 4x(L-x)/L^2$  و  $\dot{q}(x, 0) = 0$  بحث کنید. بسامدهای مشخصه را بیابید و دامنه مد  $n$ ام را محاسبه کنید.

۵.۱۲ ریسمانی بدون جابه‌جایی اولیه از طریق وارد آمدن ضربه در فاصله  $2s$  در اطراف وسط آن، به حرکت در می‌آید. به این قسمت میانی سرعت اولیه  $v$  داده می‌شود. حرکت آن را توصیف کنید.

۶.۱۲ با یک چکش مثلثی در نقطه‌ای به فاصله  $L/4$  از یک سر ریسمانی، به آن ضربه وارد می‌آوریم و به این ترتیب به حرکت در می‌آید. سرعت اولیه در  $x = L/4$  بیشینه است و به‌طور خطی کاهش می‌یابد تا در  $x = 0$  و  $x = L/2$  به صفر می‌رسد. ناحیه  $L/2 \leq x \leq L$  در ابتدا نامختل باقی می‌ماند. حرکت بعدی ریسمان را تعیین کنید. چرا هماهنگهای چهارم، هشتم و هماهنگهای وابسته به آنها حضور ندارند؟ هماهنگهای دوم و سوم چند دسی بل پایبتر از بسامد اصلی هستند؟

۷.۱۲ ریسمانی را در فاصله  $3L/7$  از یک سر آن به اندازه  $h$  به یک سو کشیده‌ایم. آن را در فاصله  $3L/7$  از سر دیگر به اندازه  $h$  به سوی مخالف کشیده‌ایم. ارتعاش را بر حسب مدهای بهنجار توصیف کنید.

۸.۱۲ بسامدهای مشخصه  $\omega_n$  را به صورت تابعی از شماره مد  $n$  برای یک ریسمان بارگذاری شده شامل ۳، ۵، و ۱۰ ذره و یک ریسمان پیوسته با همان مقادیر  $\tau$  و  $m/d = \rho$ ، از طریق ترسیم یک نمودار، مقایسه کنید. درباره نتایج به دست آمده نظر خود را ابراز کنید.

۹.۱۲ محاسبات لازم برای به دست آوردن معادلات (۴۲.۱۲) از معادله (۴۳.۱۲) را با انتخاب یک تابع مثلثی برای  $g(x)$  انجام دهید.

۱۰.۱۲ در مثال ۳.۱۲ تابع جابه‌جایی را یک مثلث بگیرید و آن را حل کنید. نشان دهید که این تقریب نتایج دقیقی را برای مقادیر بزرگ  $M/m$  به دست می‌دهد و به ازای  $M/m > 4$  از نتایج به دست آمده در مثال ۳.۱۲ بهتر می‌شود. توضیح دهید که چرا این رفتار منطقی است. بدون انجام محاسبه، در مورد مزیت انتخاب یک تابع جابه‌جایی سهمی در مقایسه با توابع سینوسی یا مثلثی بحث کنید.

۱۱.۱۲ سه ذره، هر کدام به جرم  $M$ ، در فاصله‌های منظم بر ریسمان بدون جرمی به طول  $L$  که کشش در آن عبارت است از  $\tau$ ، متصل شده‌اند (مثل شکل ۱۱.۱۱). با استفاده از روش ریلی یک جواب تقریبی برای بسامد اصلی به دست آورید. تابع جابه‌جایی را سهمی بگیرید و مسئله را با محاسبه  $\langle T \rangle$  برای هر یک از ذرات و  $\langle U \rangle$  برای ریسمان دنبال کنید. جواب تقریبی را با مقدار واقعی مقایسه کنید.

۱۲.۱۲ ریسمان مثال ۱.۱۲ را در نظر بگیرید. نشان دهید که اگر ریسمان در یک نقطه اختیاری تحریک شود، هیچ‌کدام از مدهای بهنجاری که در نقطه تحریک شده گره دارند برانگیخته نمی‌شوند. در مثال ۴.۱۲ جواب متمم (قسمت گذرا) حذف شده است. اگر آثار گذرا را در نظر بگیریم، شرایط مناسب برای تند میرایی، میرایی بحرانی، و کند میرایی حرکت کدام‌اند؟ هر گاه در مثال ۴.۱۲ حرکت کند میرایی منظور شود، جابه‌جایی  $q(x, t)$  حاصل را پیدا کنید (فرض کنید که حرکت برای تمام مدهای بهنجار کند میرا باشد).

۱۴.۱۲ جواب متمم مربوط به مثال ۴.۱۲ را تعیین کنید.

۱۵.۱۲ وقتی که نیروی محرک خاصی به یک ریسمان اعمال می‌شود، مشاهده می‌کنیم که ارتعاش ریسمان منحصراً در هماهنگ  $m$  صورت می‌گیرد. نیروی محرک را پیدا کنید.

## معادله موج در یک بعد

## ۱.۱۳ مقدمه

در فصل پیش با معادله موج، که بهراستی یکی از اساسیترین معادلات در ریاضی فیزیک است، آشنا شدیم. جوابهای این معادله بهطور کلی از محدودیتهای گوناگونی متأثر است که برخی فیدهای فیزیکی خاص را بر هر مسئله اعمال می‌کنند. این محدودیتهای اغلب اوقات شکل شرایطی را به خود می‌گیرند که باید در نقاط انتهایی بازه‌های مکانی و زمانی مورد نظر از لحاظ فیزیکی، در جواب صدق کنند. بنابراین باید یک مسئله مقدار-مرزی را حل کنیم که شامل یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی است. در واقع، چنین توصیفی اساساً همه آن چیزی را مشخص می‌کند که ما ریاضی فیزیک می‌نامیم. پیش از این برخی از نشانه‌های مربوط به جوابهای این نوع معادله را دیده‌ایم، و در این فصل جوابهای معادله موج را به تفصیل بررسی خواهیم کرد. اما، دامنه بحث خود را به توصیف امواج یک بعدی محدود می‌کنیم.<sup>۱</sup> مثلاً، امواج یک بعدی حرکت ریسمان مرتعش را توصیف می‌کنند. امواجی تراکمی (یا صوتی) را که ممکن است از یک محیط کشسان، مانند گاز، عبور کنند،

۱. بررسی امواج سه‌بعدی را، مثلاً، می‌توان در مرجع زیر یافت:

نیز می‌توان با امواج یک بعدی تقریب گرفت، مشروط بر آنکه محیط چندان گسترده باشد که آثار لبه‌ای مهم نباشند. در چنین حالتی، شرایط محیط برای تمام نقاط روی یک صفحه تقریباً یکسان است، در آن صورت خواص حرکت موجی فقط توابعی از فاصله در امتداد خط قائم بر صفحه است. چنین موجی در یک محیط گسترده، به نام موج تخت، از نظر ریاضی با امواجی یک بعدی که در اینجا مطالعه می‌کنیم، همسان است. در این فصل ما فقط امواج مکانیکی را از نظر می‌گذرانیم؛ بحث مفصل مربوط به امواج الکترومغناطیسی در کتاب ماریون و هیلد (Ma80) ارائه شده است.

### ۲.۱۳ جوابهای عمومی معادله موج

معادله موج یک بعدی مربوط به ریسمان مرتعش [معادله (۴۷.۱۲)] عبارت است از<sup>۱</sup>

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (۱.۱۳)$$

که در اینجا  $\rho$  چگالی طولی جرم ریسمان و  $\tau$  کشش آن است. ابعاد  $\rho$  عبارت است از  $[ML^{-1}]$  و ابعاد  $\tau$  همان ابعاد نیرو، یعنی  $[MLT^{-2}]$ ، است. بنابراین، ابعاد  $\rho/\tau$  عبارت است از  $[T^2L^{-2}]$ ، یعنی ابعاد وارونه مجذور سرعت. اگر بنویسیم:  $v = \sqrt{\tau/\rho}$ ، آنگاه معادله موج به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (۲.۱۳)$$

یکی از کارهایی که باید انجام دهیم ارائه تعبیری فیزیکی از سرعت  $v$  است؛ کافی نیست که بگوییم «سرعت انتشار» موج است.

برای اینکه نشان بدهیم معادله (۲.۱۳) واقعاً یک حرکت موجی کلی را نمایش می‌دهد، دو متغیر جدید معرفی می‌کنیم

$$\left. \begin{aligned} \xi &\equiv x + vt \\ \eta &\equiv x - vt \end{aligned} \right\} \quad (۳.۱۳)$$

از محاسبه مشتقات  $\Psi = \Psi(x, t)$  که در معادله (۲.۱۳) دخالت دارند، داریم

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (۴.۱۳)$$

و سپس

۱. از نماد  $\Psi = \Psi(x, t)$  برای نشان دادن تابع موج وابسته به زمان و از نماد  $\psi = \psi(x)$  برای نمایاندن تابع موج مستقل از زمان بهره می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

به همین ترتیب، داریم

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (6.13)$$

و

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (7.13)$$

ولی بنابر معادله (۲.۱۳)، سمت راست معادلات (۵.۱۳) و (۷.۱۳) باید باهم برابر باشند. این عبارت فقط به شرطی برقرار است که

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} \equiv 0 \quad (8.13)$$

کلیترین عبارتی که می‌تواند در این معادله صدق کند عبارت است جمع دو جمله، که یکی از آنها فقط به  $\xi$  بستگی دارد و دیگری فقط به  $\eta$ ؛ هیچ تابع پیچیده‌تری از  $\xi$  و  $\eta$  در معادله (۸.۱۳) صدق نمی‌کند. به این ترتیب

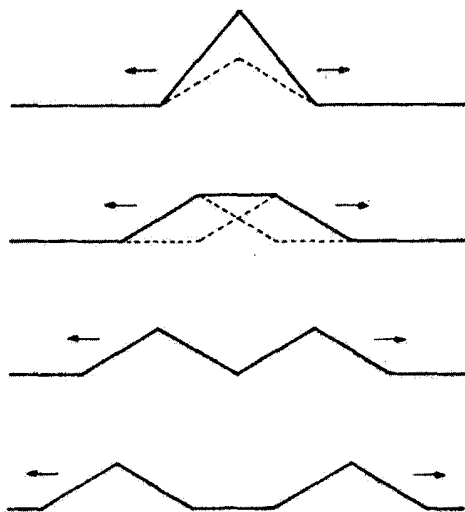
$$\Psi = f(\xi) + g(\eta) \quad (9.13 \text{ الف})$$

یا، پس از نشانیدن به جای  $\xi$  و  $\eta$

$$\Psi = f(x + vt) + g(x - vt) \quad (9.13 \text{ ب})$$

که  $f$  و  $g$ ، به ترتیب توابع دلخواهی از متغیرهای  $x + vt$  و  $x - vt$  هستند، که الزاماً ماهیت تناوبی ندارند، ولی ممکن است چنین باشند.





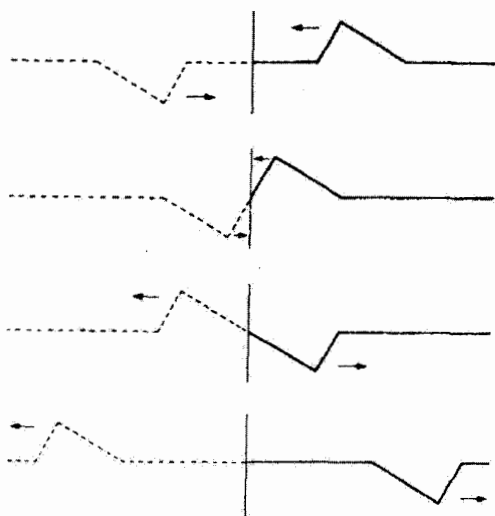
شکل ۱.۱۳

با پیشرفت (یا اضافه شدن) زمان، مقدار  $x$  نیز باید افزایش یابد تا مقدار  $x - vt$  ثابت بماند. بنابراین، اگر نقطه دیدمان را در امتداد محور  $x$  (به سوی مثبت) با سرعت  $v$  تغییر دهیم، تابع  $g$  با پیشروی زمان شکل اصلی خود را حفظ می‌کند. به این ترتیب، تابع  $g$  باید نمودار اختلالی باشد که با سرعت  $v$  به سمت راست (یعنی، به سمت مقادیر بزرگ  $x$ ) حرکت می‌کند، در حالی که  $f$  انتشار اختلالی به سمت چپ را نمایش می‌دهد. از این رو نتیجه می‌گیریم که معادله (۲.۱۳) واقعاً حرکت موجی و، به طور کلی، یک موج پیشرونده (یا انتشاری) را توصیف می‌کند.

حال می‌کشیم معادله (۱.۱۳) ب) را بر حسب حرکت یک ریسمان کشیده تعبیر کنیم، در لحظه  $t = 0$ ، جابه‌جایی ریسمان به کمک معادله زیر توصیف می‌شود

$$q(x, 0) = f(x) + g(x)$$

اگر برای  $f(x)$  و  $g(x)$  شکلهای مثلثی یکسانی اختیار کنیم، شکل ریسمان در لحظه  $t = 0$  در بالای شکل ۱.۱۳ نشان داده شده است. با گذشت زمان، آشفته‌گی که تابع  $f(x + vt)$  آن را نمایش می‌دهد به سمت چپ منتشر می‌شود، در حالی که آشفته‌گی نمایشیافته با تابع  $g(x - vt)$  به سمت راست انتشار می‌یابد. انتشار هر یک از آشفته‌گیها به چپ و راست را در شکل ۱.۱۳ مشاهده می‌کنید. حال آشفته‌گی چپ‌رونده را به تنهایی در نظر می‌گیریم. اگر نقطه انتهایی ریسمان را (در  $x = 0$ )



شکل ۲.۱۳

با بستن آن به یک تکیه‌گاه صلب ثابت کنیم، به پدیده بازتاب برمی‌خوریم. چون تکیه‌گاه صلب است، باید به‌ازای همه مقادیر زمانی داشته باشیم:  $f(vt) \equiv 0$ . این شرط نمی‌تواند به‌تنهایی در تابع  $f$  صدق کند (مگر اینکه به‌طور بدیهی صفر باشد). اگر علاوه بر  $f(x+vt)$ ، یک آشفستگی موهومی،  $-f(-x+vt)$  را در نظر بگیریم، مطابق شکل ۲.۱۳، که از سمت چپ به‌نقطه مرزی وارد می‌شود، می‌توان این شرط را در  $x=0$  برآورده کرد. انتشار آشفستگی  $f(x+vt)$  به سمت چپ ادامه پیدا می‌کند، و حتی به‌جزء موهومی ریسمان هم وارد می‌شود ( $x < 0$ )، در حالی که آشفستگی  $-f(-x+vt)$  از مرز می‌گذرد و در امتداد ریسمان حقیقی منتشر می‌شود. نتیجه نهایی عبارت از آن است که آشفستگی اصلی از تکیه‌گاه بازتابیده می‌شود، و از آن پس به سمت راست انتشار می‌یابد.

اگر ریسمان به تکیه‌گاه‌های صلبی در  $x=0$  و  $x=L$  ختم شود، آشفستگی به‌طور متناوب با دوره تناوب  $2L/v$  بین دو نقطه انتشار پیدا می‌کند.

### ۳.۱۳ جداسازی معادله موج

اگر به جواب عمومی معادله موجی که هماهنگ است (مانند معادله موج ریسمان مرتعش یا، به‌اعتبار آن، تعداد زیادی مسائلی که از نظر فیزیکی جالب‌اند) نیاز داشته باشیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{i\omega t} \quad (10.13)$$

به طوری که معادله موج یک بعدی [معادله (۲.۱۳)] چنین می شود

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi = 0 \quad (۱۱.۱۳)$$

که اکنون  $\psi$  فقط تابعی از  $x$  است.

حرکت موجی کلی سیستم به یک تک بسامد  $\omega$  محدود نیست. در مورد سیستمی با  $n$  درجه آزادی،  $n$  بسامد مشخصه و برای ریسمانی پیوسته یک مجموعه نامتناهی از بسامدها وجود دارد.<sup>۱</sup> اگر بسامد  $m$  را با  $\omega_r$  نشان دهیم، تابع موج متناظر با این بسامد عبارت خواهد بود با

$$\Psi_r(x, t) = \psi_r(x) e^{i\omega_r t} \quad (۱۲.۱۳)$$

تابع موج کامل (به خاطر داشته باشید که ما مشغول مطالعه یک سیستم خطی هستیم) برهم نهشی از تمام تابع موجهای خاص (یا مدها) است. از اینجا

$$\Psi(x, t) = \sum_r \Psi_r(x, t) = \sum_r \psi_r(x) e^{i\omega_r t} \quad (۱۳.۱۳)$$

در معادله (۱۰.۱۳) فرض کردیم که تابع موج برحسب زمان تناوبی باشد. ولی اکنون مشاهده می کنیم که این فرض به هیچوجه به محدودیتی نمی انجامد (جز فرضهای معمول مربوط به پیوستگی توابع و همگرایی سری)، زیرا جمع مطرح شده در معادله (۱۳.۱۳) واقعاً یک نمایش فوریه از تابع موج را ارائه می دهد و بنابراین کلیترین عبارت برای تابع موج واقعی است.<sup>۲</sup>

اکنون می خواهیم نشان دهیم که معادله (۱۲.۱۳) به طور طبیعی حاصل روش توانایی، یعنی روش جداسازی متغیرها، است که اغلب برای به دست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار می رود. ابتدا جواب را به صورت زیر می نویسیم

$$\Psi(x, t) \equiv \psi(x) \cdot \chi(t) \quad (۱۴.۱۳)$$

۱. در مورد ریسمانی حقیقتاً پیوسته، یک مجموعه نامتناهی از بسامدها وجود دارد، اما، چون ریسمان اساساً از آنها تشکیل شده است، در مورد  $\omega$  یک حد بالا وجود دارد (بخش ۴.۱۳ را ببینید).
۲. اوایلر در ۱۷۴۸ ثابت کرد که تابع دلخواهی از  $x \pm vt$  در معادله موج مربوط به ریسمان پیوسته صدق می کند و دانیل برنولی در ۱۷۵۳ نشان داد که حرکت ریسمان برهم نهشی از بسامدهای مشخصه آن است. در نظر گرفتن این دو نتیجه باهم، مبین آن است که هر تابع دلخواهی را می توان به صورت برهم نهشی از توابع مثلثاتی توصیف کرد. اوایلر نمی توانست چنین چیزی را باور کند، بنابراین او (و نیز لاگرانژ) اصل برهم نهی برنولی را رد کردند. آکس کلود کلاوت (۱۷۶۵-۱۷۱۳) ریاضیدان فرانسوی در مقاله ای پرباهم در ۱۷۵۴ اثباتی بر سازگاری واقعی نتایج اوایلر و برنولی ارائه کرد، ولی سرانجام مسئله با ارائه اثبات مشهور فوریه در ۱۸۰۷ به سامان رسید.

یعنی، فرض می‌کنیم که متغیرها قابل جداسازی‌اند، و بنابراین تابع موج کامل را می‌توان برحسب حاصلضرب دو تابع بیان کرد؛ یکی فقط تابع مکانی، و دیگری فقط تابع زمانی. تضمینی وجود ندارد که همواره بتوانیم چنین توابعی را پیدا کنیم، ولی بیشتر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که در مسائل فیزیکی با آنها مواجه‌ایم، دست کم در یک دستگاه مختصات قابل جداسازی هستند؛ برخی از این معادلات (مانند معادلات شامل عملگر لاپلاسی) در دستگاه‌های متعددی قابل جداسازی‌اند. به‌طور خلاصه، درستی روش جداسازی متغیرها، همان‌طور که در مورد بسیاری از فرض‌های پذیرفته شده در فیزیک صادق است، در گرو موفقیت آن در ارائه جواب‌های قابل قبول برای مسئله است («قابل قبول» معادل است با «قابل تحقیق از طریق آزمایش»).

از نشاندن  $\Psi = \psi\chi$  در معادله (۲.۱۳)، داریم

$$\chi \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \frac{\psi}{v^2} \frac{d^2 \chi}{dt^2} = 0$$

یا

$$\frac{v^2}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{1}{\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} \quad (۱۵.۱۳)$$

ولی، نظر به تعریف‌های  $\psi(x)$  و  $\chi(t)$ ، سمت چپ معادله (۱۵.۱۳) فقط تابع  $x$  است، در صورتی که سمت راست فقط تابع  $t$  است. چنین وضعیتی فقط در صورتی امکان‌پذیر است که هر دو جزء این معادله با یک ثابت برابر باشند. برای اینکه با نمادگذاری پیشین سازگاری داشته باشیم، این ثابت را  $-\omega^2$  - اختیار می‌کنیم. به این ترتیب داریم

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi = 0 \quad (الف ۱۶.۱۳)$$

$$\frac{d^2 \chi}{dt^2} + \omega^2 \chi = 0 \quad (ب ۱۶.۱۳)$$

با شکل این معادلات آشنا می‌شویم، و می‌دانیم جواب‌های آنها عبارت‌اند از

$$\psi(x) = Ae^{i(\frac{\omega}{v})x} + Be^{-i(\frac{\omega}{v})x} \quad (الف ۱۷.۱۳)$$

$$\chi(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t} \quad (ب ۱۷.۱۳)$$

که ثابت‌های  $A, B, C, D$  و از شرایط مرزی تعیین می‌شوند. جواب  $\Psi(x, t)$  را به روش تندنویسی

می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \psi(x)\chi(t) \sim \exp[\pm i(\omega/v)x] \exp[\pm i\omega t] \\ &\sim \exp[\pm i(\omega/v)(x \pm vt)]\end{aligned}\quad (18.13)$$

معنی این نمادگذاری آن است که تابع موج  $\Psi$  به صورت یک ترکیب خطی از جملات زیر تغییر می‌کند

$$\begin{aligned}\exp[i(\omega/v)(x + vt)] \\ \exp[i(\omega/v)(x - vt)] \\ \exp[-i(\omega/v)(x + vt)] \\ \exp[-i(\omega/v)(x - vt)]\end{aligned}$$

ثابت جداسازی معادله (۱۵.۱۳) را  $-\omega^2$  اختیار کردیم. از دیدگاه ریاضی در این مسئله هیچ دلیلی وجود ندارد که مبین یکتایی مقدار  $\omega$  باشد، به این ترتیب باید یک مجموعه از بسامدهای قابل قبول،  $\omega$  وجود داشته باشد.<sup>۱</sup> به ازای هر یک از چنین بسامدهایی یک تابع موج متناظر وجود دارد

$$\Psi_r(x, t) \sim \exp[\pm i(\omega_r/v)(x \pm vt)]$$

بنابراین جواب عمومی نه تنها ترکیبی خطی از جملات هم‌هنگ است بلکه شامل یک جمع روی تمام بسامدهای ممکن نیز هست

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &\sim \sum_r a_r \Psi_r \\ &\sim \sum_r a_r \exp[\pm i(\omega_r/v)(x \pm vt)]\end{aligned}\quad (19.13)$$

بنابراین جواب عمومی معادله موج به تابع موج بسیار پیچیده‌ای منجر می‌شود. در حقیقت تعداد بی‌نهایت ثابت اختیاری  $a_r$  وجود دارد. این جواب یک نتیجه کلی برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به شمار می‌آید؛ اما این بینهایت ثابت باید در شرایط فیزیکی مسئله (شرایط مرزی) صدق کنند، و بنابراین آنها را می‌توان به همان روشی محاسبه کرد که ضرایب یک بسط نامتناهی فوریه را محاسبه می‌کنیم.

در قسمت اعظم بحثمان یکی از چهار ترکیب ممکن بیان شده در معادله (۸.۱۳) کفایت می‌کند؛ یعنی، موجی را که در راستای معینی و با فاز معینی منتشر می‌شود انتخاب می‌کنیم. در

۱. در این مرحله، مجموعه واقعاً نامتناهی است: زیرا هنوز هیچ بسامدی توسط شرایط مرزی حذف نشده است.

آن صورت، مثلاً می‌توانیم بنویسیم

$$\Psi_r(x, t) \sim \exp[-i(\omega_r/v)(x - vt)]$$

این تابع مؤلفه  $\Psi$  ام فوریه تابع موج است، و جواب عمومی عبارت است از یک مجموع‌یابی روی تمامی مؤلفه‌هایی از این دست. شکل تابعی مؤلفه‌ها چمگگی با هم یکی است و می‌توان هر کدام از آنها را جداگانه مورد بحث قرار داد. به‌این ترتیب، برای سهولت، معمولاً جواب را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\Psi(x, t) \sim \exp[-i(\omega/v)(x - vt)] \quad (۲۰.۱۳)$$

جواب عمومی را معمولاً باید با مجموع‌یابی روی تمام بسامدهای مجاز یک وضعیت فیزیکی مشخص به دست آورد.

معمولاً معادله دیفرانسیل مربوط به  $\psi(x)$  را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0} \quad (۲۱.۱۳)$$

که صورت مستقل از زمان معادله موج یک بعدی است، و به آن معادله هلمهولتز<sup>۱</sup> هم می‌گویند و در اینجا

$$k^2 \equiv \frac{\omega^2}{v^2} \quad (۲۲.۱۳)$$

کمیت  $k$ ، که ثابت انتشار یا عدد موج (یعنی، تعداد طول موجهای موجود در یکای طول) نامیده می‌شود، دارای ابعاد  $[L^{-1}]$  است. طول موج  $\lambda$  مسافت لازم برای یک ارتعاش کامل موج است

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega}$$

و از آن رو رابطه بین  $k$  و  $\lambda$  چنین است

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

و بنابراین، به طور کلی، می‌توانیم بنویسیم

$$\Psi_r(x, t) \sim e^{\pm ik_r(x \pm vt)}$$

۱. هرمان فون هلمهولتز (۱۸۱۴-۱۸۲۱) در بررسیهایش در زمینه امواج آکوستیکی از این صورت معادله موج بهره گرفت.

یا، در مورد تابع موج ساده شده، داریم

$$\Psi(x, t) \sim e^{-ik(x-vt)} = e^{i(\omega t - kx)} \quad (23.13)$$

اگر دو موج پیشرونده از نوعی که معادله (۲۳.۱۳) به دست می‌دهد را بر هم نهمیم و اگر این امواج از نظر مقدار (دامنه) باهم برابر ولی در جهتهای مخالف در حرکت باشند، آنگاه

$$\Psi = \Psi_+ + \Psi_- = Ae^{-ik(x+vt)} + Ae^{-ik(x-vt)} \quad (24.13)$$

یا

$$\begin{aligned} \Psi &= Ae^{-ikx} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ &= 2Ae^{-ikx} \cos \omega t \end{aligned}$$

و جزء حقیقی آن عبارت است از

$$\Psi = 2A \cos kx \cos \omega t. \quad (25.13)$$

چنین موجی دیگر خاصیت انتشار ندارد؛ صورت موج دیگر نسبت به زمان به پیش نمی‌رود. در واقع در برخی مواضع اصلاً حرکتی صورت نمی‌گیرد. این مواضع، گره‌ها، از حذف کامل یک موج توسط موج دیگر حاصل می‌شوند. گره‌های تابع موجی که به کمک معادله (۲۵.۱۳) به دست داده می‌شوند، به‌ازای مقادیر صحیح  $n$ ، در  $x = (2n + 1)\pi/2k$  ایجاد می‌شوند. چون در این گونه امواج مواضع ثابتی وجود دارد، به‌آنها امواج ایستاده می‌گویند. جوابهای مسئله ریسمان مرتعش از این نوع‌اند (ولی با یک عامل فاز وابسته به جمله  $kx$ ، به طوری که کسینوس تبدیل به یک تابع سینوسی می‌شود تا در شرایط مرزی صدق کند).

### ۴.۱۳ سرعت فاز، پاشندگی و تضعیف

در معادلات (۱۸.۱۳) دیدیم که حتی در حالت یک بعدی هم، جواب عمومی معادله موج، سیستم پیچیده‌ای از ضرایب نمایی را پدید می‌آورد. برای اینکه دامنه بحث را گسترده کنیم، توجه خود را به ترکیب خاص زیر معطوف می‌کنیم

$$\boxed{\Psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}} \quad (26.13)$$

این معادله، انتشار به سمت راست ( $x$ های بزرگتر) موجی با بسامد مشخص  $\omega$  را توصیف می‌کند. برخی وضعیتهای فیزیکی را می‌توان با تقریب کاملاً مناسبی با تابع موجی از این نوع بیان کرد. مثلاً انتشار موج نوری تکفام در فضا، یا انتشار یک موج سینوسی بر ریسمانی بلند (قطعاً، بینهایت بلند). اگر شناسه تابع نمایی در معادله (۲۶.۱۳) ثابت باقی بماند، در این صورت تابع موج نیز ثابت می‌ماند. شناسه تابع نمایی فاز  $\varphi$  موج نامیده می‌شود

$$\varphi = \omega t - kx \quad (27.13)$$

اگر نقطه دیدمان را در امتداد محور  $x$  با چنان سرعتی حرکت دهیم که فاز در همه نقاط ثابت بماند، همواره شاهد موج ایستایی با شکل یکسانی خواهیم بود. سرعتی،  $v$ ، که باید با آن حرکت کنیم سرعت فاز موج نامیده می‌شود، و متناظر است با سرعت انتشار شکل موج. برای اطمینان از ثابت بودن  $\varphi$ ، قرار می‌دهیم

$$d\varphi = 0 \quad (28.13)$$

یا

$$\omega dt = k dx$$

که از اینجا

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v \quad (29.13)$$

به طوری که در این حالت سرعت فاز برابر همان کمیتی است که در ابتدا به عنوان سرعت معرفی کردیم. فقط تا وقتی که تابع موج در سرتاسر طولش یکسان باقی بماند، می‌توان راجع به سرعت فاز صحبت کرد. برقراری این شرط برای اندازه‌گیری طول موج، یعنی تعیین فاصله بین هر دو قله موج متوالی (یا بین هر دو نقطه متناظر متوالی بر روی موج) ضروری است. اگر شکل موج می‌توانست به صورت تابعی از زمان یا فاصله در امتداد موج تغییر کند، در آن صورت نتیجه این اندازه‌گیریها همواره یکسان نبودند. همان طور که در بخش ۶.۱۳ خواهیم دید، اطمینان پیدا می‌کنیم که فقط اگر طول قطار موج نامتناهی باشد، طول موج تابع زمان یا مکان نیست (یعنی،  $\omega$  خالص است). اگر طول قطار موج متناهی باشد، در موج باید طیفی از بسامدها حضور داشته باشد و سرعت فاز به معنی دقیق کلمه بی‌معنی است. ولی، ما گاهی راجع به «سرعت فاز» موجی که واقعاً تا بینهایت امتداد نمی‌یابد صحبت می‌کنیم. این اصطلاح مفید است، گرچه به مفهوم دقیق صحیح نیست.



حال به مثال ریسمان بارگذاری شده برمی‌گردیم و خواص سرعت فاز را در مورد آن بررسی می‌کنیم. قبلاً [معادله (۱۵۲.۱۱)] پی بردیم که بسامد مد  $n$ ام ریسمان بارگذاری شده وقتی دو سرش بسته باشد برابر است با

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right) \quad (30.13)$$

که در اینجا نمادگذاری همان نمادگذاری فصل ۱۱ است. به‌خاطر داشته باشید که ما فقط مقادیر مثبت بسامدها را اختیار می‌کنیم. هرگاه  $r = 1$ ، در دو سر دو‌گره داریم و بین دو سر هیچ گره‌ی وجود ندارد؛ به‌این جهت طول ریسمان برابر نصف طول موج است. به‌همین ترتیب، هرگاه  $r = 2$ ، آنگاه  $L = \lambda$  و، به‌طور کلی،  $\lambda_r = 2L/r$ . بنابراین

$$\frac{r\pi}{2(n+1)} = \frac{r\pi d}{2d(n+1)} = \frac{r\pi d}{2L} = \frac{\pi d}{\lambda_r} = \frac{k_r d}{2} \quad (31.13)$$

و

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin\left(\frac{k_r d}{2}\right) \quad (32.13)$$

چون این عبارت دیگر شامل  $n$  و یا  $L$  نیست، به‌همان خوبی که در مورد ریسمان بارگذاری شده متناهی به‌کار می‌رود در مورد ریسمان بارگذاری شده نامتناهی نیز صادق است. برای مطالعه انتشار موج در یک ریسمان بارگذاری شده، با وارد آوردن نیرو بر یکی از ذرات، مثلاً ذره صفرم، آشفتگی را ایجاد می‌کنیم که طبق رابطه زیر حرکت می‌کند

$$q_0(t) = Ae^{i\omega t} \quad (33.13)$$

اگر ریسمان از تعداد زیادی ذره تشکیل یافته باشد،<sup>۱</sup> در این صورت هر بسامدی کمتر از  $2\sqrt{\tau/md}$ ، مخصوصاً بسامد  $\omega$  در معادله (۳۳.۱۳)، یک بسامد مجاز است؛ یعنی، یک ویژه‌بسامد به‌شمار می‌آید. پس از اینکه آثار گذرا فروکش کردند و شرایط حالت پایدار حاصل شد، سرعت فاز موج از

۱. به‌بیان دقیق، برای تحلیلی از این نوع باید تعداد ذرات نامتناهی باشد، اما با افزایش تعداد متناهی ذرات، می‌توانیم تا حد مطلوب به‌شرایط ایده‌آل نزدیک شویم.

رابطه زیر به دست می آید<sup>۱</sup>

$$V = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\tau d}{m} \frac{|\sin(kd/2)|}{kd/2}} = V(k) \quad (۳۴.۱۳)$$

به این ترتیب سرعت فاز تابعی از عدد موج است؛ یعنی،  $V$  به بسامد وابسته است. وقتی برای محیط معینی  $V = V(k)$  می‌گوییم محیط پاشنده است، و موج پاشندگی را نمایش می‌دهد. شناخته شده‌ترین مثال این پدیده همانا منشور ساده است. ضریب شکست منشور به طول موج نور فرودی وابسته است (یعنی، منشور نسبت به نور اپتیکی محیطی پاشنده است)؛ نور، در ضمن عبور از منشور، به صورت طیف طول موجها از هم جدا می‌شود (یعنی، موج نوری پاشیده می‌شود). در مورد موجی طولی که در امتداد یک میله باریک بلند منتشر می‌شود، قسمت اعظم انرژی وابسته به جهت انتشار موج طولی است. گرچه، مقدار کمی انرژی در موج عرضی که در راستای عمود بر انتشار حرکت می‌کند، تلف می‌شود. این آشفتگی عرضی سبب می‌شود که سرعت فاز موج طولی کاهش یابد، و اثر آن بستگی به طول موج دارد. برای طول موجهای بزرگ این اثر ناچیز است؛ در طول موجهای کوتاه، به خصوص طول موجهایی که به شعاع میله نزدیک باشند، پاشندگی سرعت چشمگیر است.

از معادله (۳۴.۱۳) می‌بینیم که، وقتی طول موج خیلی بلند می‌شود ( $\lambda \rightarrow \infty$  یا  $k \rightarrow 0$ )، سرعت فاز به مقدار ثابتی میل می‌کند

$$V(\lambda \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{\tau d}{m}} \quad (۳۵.۱۳)$$

در غیر این صورت  $V = V(k)$ ، و موج پاشنده است. متوجه می‌شویم که در ریسمان پیوسته [معادله (۲.۱۳)] سرعت فاز عبارت است از

$$V_{\text{پیوسته}} = v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (۳۶.۱۳)$$

و چون در مورد ریسمان بارگذاری شده،  $m/d$  متناظر با  $\rho$  برای ریسمان پیوسته است، سرعت فاز در حد طول موجهای بلند برای هر دو حالت (اما فقط در همین حد) برابر است. این نتیجه‌ای

۱. در معادله (۳۵.۱۳) لازم است که  $r \leq n$  [معادله (۱۴۴.۱۱)]، بنابراین خود به خود  $\omega_r \geq 0$ ، زیرا به ازای  $0 \leq r \leq n$  داریم:  $\sin[r\pi/(2(n+1))] \geq 0$ . چنین محدودیتی برای  $kd$  نداریم، بنابراین  $\sin(kd/2)$  می‌تواند منفی شود. فقط به بررسی بسامدهای مثبت ادامه می‌دهیم، البته همواره مقدار  $\sin(kd/2)$  را در نظر می‌گیریم. این نتیجه در ۱۸۴۱ توسط بادن-پاژل به دست آمد، اما ویلیام تامسون (لرد کلونین) (۱۹۰۷-۱۸۲۴) در ۱۸۸۱ به ارزش واقعی آن پی برد.

منطقی است؛ زیرا، وقتی  $\lambda$  در مقایسه با  $d$  بزرگ می‌شود، خواص موج نسبت به فاصله بین ذرات کمتر حساس است، و در حد، ممکن است  $d$  بدون اینکه تأثیری بر سرعت فاز بگذارد صفر شود. در معادله (۳۲.۱۳) محدودیت روی  $r$  عبارت است از  $1 \leq r \leq n$ . در آن صورت، چون  $k_r = r\pi/L$ ، مشاهده می‌کنیم که بیشینه مقدار  $k$  برابر است با

$$k_{\text{بیشینه}} = \pi/d \quad (۳۷.۱۳)$$

از معادله (۳۴.۱۳)، بسامد متناظر با آن عبارت است از:  $2\sqrt{\tau/md}$ . اگر ریسمان را با بسامدی بزرگتر از  $2\sqrt{\tau/md}$  به ارتعاش واداریم چه می‌شود؟ برای این منظور  $k$  را مختلط می‌گیریم و نتایج را بررسی می‌کنیم

$$k \equiv \kappa - i\beta, \quad \kappa, \beta > 0 \quad (۳۸.۱۳)$$

عبارت مربوط به  $\omega$  [معادله (۳۲.۱۳)] چنین می‌شود

$$\begin{aligned} \omega &= 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin \frac{d}{2} (\kappa - i\beta) \\ &= 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \left[ \sin \frac{d\kappa}{2} \cos \frac{i\beta d}{2} - \cos \frac{d\kappa}{2} \sin \frac{i\beta d}{2} \right] \\ &= 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \left[ \sin \frac{\kappa d}{2} \cosh \frac{\beta d}{2} - i \cos \frac{\kappa d}{2} \sinh \frac{\beta d}{2} \right] \end{aligned} \quad (۳۹.۱۳)$$

اگر قرار است که بسامد یک کمیت حقیقی باشد، جزء موهومی این عبارت باید صفر شود. بنابراین یا باید  $\cos(\kappa d/2) = 0$  و یا  $\sinh(\beta d/2) = 0$ . ولی برای برقراری شرط دوم لازم است  $\beta = 0$ ، که این خلاف فرض مختلط بودن  $k$  است. بنابراین داریم

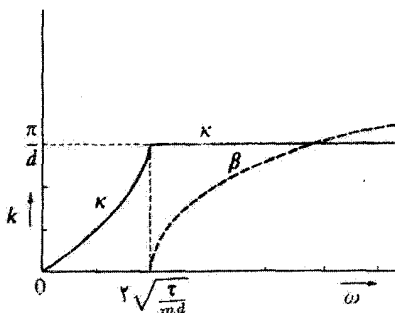
$$\cos \frac{\kappa d}{2} = 0 \quad (۴۰.۱۳)$$

برای این حالت همچنین باید داشته باشیم

$$\sin \frac{\kappa d}{2} = 1 \quad (۴۱.۱۳)$$

و عبارت مربوط به بسامد چنین می‌شود

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \cosh \frac{\beta d}{2} \quad (۴۲.۱۳)$$



شکل ۳.۱۳

بدینسان چنین نتیجه می‌گیریم که، به ازای  $\omega \leq 2\sqrt{\tau/md}$  عدد موج  $k$  حقیقی است و رابطه بین  $\omega$  و  $k$  به کمک معادله (۳۲.۱۳) به دست آمده است؛ در حالی که، به ازای  $\omega > 2\sqrt{\tau/md}$   $k$  مختلط است و جزء حقیقی آن،  $\kappa$ ، با معادله (۴۰.۱۳) در مقدار  $\kappa = \pi/d$  تثبیت می‌شود و جزء موهومی،  $\beta$ ، از معادله (۴۲.۱۳) مشخص می‌شود. این وضعیت در شکل ۳.۱۳ نشان داده شده است.

ارزش فیزیکی عدد موج مختلط کدام است؟ تابع موج اصلی ما به صورت زیر بود

$$\Psi = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

اما، اگر  $k = \kappa - i\beta$ ، در آن صورت  $\Psi$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Psi = Ae^{-\beta x} e^{i(\omega t - \kappa x)} \quad (۴۳.۱۳)$$

و ضریب  $\exp(-\beta x)$  میرایی، یا تضعیف، موج با افزایش فاصله  $x$  را نشان می‌دهد. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که موج به ازای  $\omega \leq 2\sqrt{\tau/md}$  بدون تضعیف منتشر می‌شود (این ناحیه را نوار بسامدهای گذرنده می‌نامیم)، و تضعیف از  $\omega_c = 2\sqrt{\tau/md}$  (که به آن بسامد بحرانی یا قطع<sup>۱</sup> می‌گویند) آغاز می‌شود و با افزایش بسامد نیز زیاد می‌شود.

اهمیت فیزیکی اجزای حقیقی و موهومی  $k$  اکنون روشن است:  $\beta$  ضریب تضعیف است (و فقط به ازای  $\omega > \omega_c$  وجود دارد)<sup>۲</sup>، در حالی که  $\kappa$  به این مفهوم عدد موج است که سرعت فاز،  $V'$ ، به کمک رابطه

۱. وجود بسامد قطع در سال ۱۸۸۱ توسط لرد کلونین کشف شد.

۲. اکنون دلیل اینکه در معادله (۳۸.۱۳) نوشتیم:  $k = \kappa - i\beta$  و نوشتیم  $k = \kappa + i\beta$  روشن است؛ اگر در صورت دوم  $\beta > 0$ ، آنگاه دامنه موج به جای اینکه به سمت صفر کاهش یابد تا نامتناهی افزایش می‌یابد.

$$V' = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\text{Re}k} \quad (۴۴.۱۳)$$

داده شده است نه با  $V = \omega/k$ . اگر  $k$  حقیقی باشد عبارتهای مربوط به  $V$  و  $V'$  یکی می‌شوند. این مثال بر این واقعیت تأکید می‌کند که تعریف اصلی سرعت فاز بر شرط ثابت بودن فاز استوار است و نه بر نسبت  $\omega/k$ . از آن رو، به‌طور کلی، سرعت فاز  $V$  و آنچه که به آن سرعت موج گفته می‌شود، کمیت‌های متمایزی هستند. همچنین متوجه می‌شویم که، اگر  $\omega$  حقیقی و عدد موج مختلط باشد، در آن صورت سرعت موج  $v$  نیز باید کمیتی مختلط باشد به طوری که حاصلضرب  $k v$  یک کمیت حقیقی برای بسامد از طریق رابطه  $\omega = k v$  به دست دهد. از سوی دیگر، سرعت فاز، که از شرط  $\varphi = \text{const.}$  ناشی می‌شود، الزاماً همواره یک کمیت حقیقی است.

در بحث قبل فرض کردیم که سیستم پایستار است و استدلال کردیم که پایستار بودن سیستم ایجاب می‌کند که  $\omega$  کمیتی حقیقی باشد.<sup>۱</sup> پی بردیم که اگر  $\omega$  از بسامد بحرانی  $\omega_c$  فزونی گیرد، تضعیف حاصل می‌شود و عدد موج مختلط می‌شود. اگر شرط پایستار بودن سیستم را حذف کنیم در آن صورت ممکن است بسامد مختلط و عدد موج حقیقی باشد. در این حالت موج به جای فضا در زمان میرا می‌شود (مسئله ۱.۱۳). تضعیف فضایی ( $\omega$  حقیقی،  $k$  مختلط) برای امواج پیشرونده اهمیت خاص دارند در حالی که تضعیف زمانی ( $\omega$  مختلط،  $k$  حقیقی) در مورد امواج ساکن اهمیت دارند. هر چند تضعیف در ریسمان بارگذاری شده وقتی پیش می‌آید که  $\omega > \omega_c$ ، با این حال سیستم هنوز پایستار است و هیچ انرژی تلف نمی‌شود. این وضعیت ظاهراً غیرعادی به این علت به وجود می‌آید که نیروی وارد بر ذره برای ایجاد یک موج پیشرونده (پس از آنکه شرط حالت پایدار مربوط به موج تضعیف شده برقرار شد) نسبت به سرعت ذره دقیقاً  $90^\circ$  اختلاف فاز دارد، به طوری که توان انتقال یافته،  $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ ، صفر است.

در این نحوه بررسی ریسمان بارگذاری شده، به طور ضمنی حالت ایده‌آلی را در نظر گرفتیم، یعنی فرض کردیم که سیستم بدون اتلاف باشد. در نتیجه به آنجا رسیدیم که به ازای  $\omega_c > \omega$ ، تضعیف وجود دارد و نه به ازای  $\omega_c < \omega$ . ولی هر سیستم واقعی دستخوش اتلاف است، به طوری که در واقع حتی به ازای  $\omega_c < \omega$  قدری تضعیف وجود دارد.

### ۵.۱۳ سرعت گروه و بسته‌های موج

در بخش ۱۰.۳ نشان داده شد که برهم‌نهی جوابهای گوناگون یک معادله دیفرانسیل خطی باز هم جوابی برای معادله به‌شمار می‌آید. در واقع، جواب کلی مربوط به مسئله نوسانهای کوچک

۱. به بحثی که در بخش ۴.۱۱ به دنبال معادله (۳۹.۱۱) آمده است، توجه کنید.

[معادله (۴۳.۱۱)] را از طریق جمع کردن تمام جوابهای خصوصی تشکیل دادیم. بنابراین، فرض می‌کنیم که دو جواب تقریباً برابر برای معادله موج داریم که به وسیله تابع موجهای  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  نمایش یافته‌اند و دامنه هر دو یکسان است

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(x, t) &= Ae^{i(\omega t - kx)} \\ \Psi_2(x, t) &= Ae^{i(\Omega t - Kx)} \end{aligned} \right\} \quad (۴۵.۱۳)$$

ولی بسامدها و عدد موجهای آنها اندک اختلافی باهم دارند

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \omega + \Delta\omega \\ K &= k + \Delta k \end{aligned} \right\} \quad (۴۶.۱۳)$$

از تشکیل جوابی که شامل مجموع  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  باشد، داریم

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \Psi_1 + \Psi_2 = A [\exp \{i\omega t\} \exp \{-ikx\} \\ &\quad + \exp \{i(\omega + \Delta\omega)t\} \exp \{-i(k + \Delta k)x\}] \\ &= A \left[ \exp \left\{ i \left( \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \right\} \exp \left\{ -i \left( k + \frac{\Delta k}{2} \right) x \right\} \right] \\ &\quad \times \left[ \exp \left\{ -i \left( \frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2} \right) \right\} + \exp \left\{ i \left( \frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

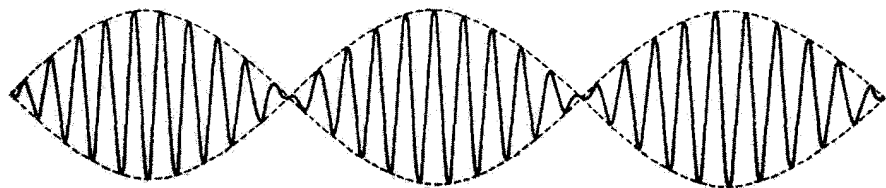
که در اینجا گروه دوم همانا دو برابر کسینوس شناسه تابع نمایی است، و جزء حقیقی گروه اول نیز یک کسینوس است. به این ترتیب جزء حقیقی تابع موج عبارت است از

$$\Psi(x, t) = 2A \cos \left[ \frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2} \right] \cos \left[ \left( \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left( k + \frac{\Delta k}{2} \right) x \right] \quad (۴۷.۱۳)$$

این عبارت شبیه جواب به دست آمده در مسئله نوسانگرهای ضعیف جفت شده (بخش ۳.۱۱) است، که در آنها دامنه‌ای را که به کندی تغییر می‌کند، متناظر با جمله زیر، یافتیم

$$2A \cos \left[ \frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2} \right]$$

که تابع موج را مدوله می‌کند. نوسان اولیه با بسامد  $\omega + (\Delta\omega/2)$  اجرا می‌شود که، بنا بر فرض کوچک بودن  $\Delta\omega$ ، با  $\omega$  اندک اختلافی دارد. دامنه متغیر به زنش منجر می‌شود (شکل ۴.۱۳).



شکل ۴.۱۳

سرعت  $U$  (به نام سرعت گروه)<sup>۱</sup> که مدوله‌ها (یا گروهها) با آن منتشر می‌شوند، با این شرط به دست می‌آیند که فاز جمله مربوط به دامنه ثابت باشد. به این ترتیب

$$U = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (۴۸.۱۳)$$

در محیطی ناپاشنده:  $\Delta\omega/\Delta k = V$ ، به طوری که سرعت گروه و فاز یکی می‌شوند.<sup>۲</sup> اما، اگر پاشندگی داشته باشیم  $U$  و  $V$  متمایزند.

تا اینجا فقط برهم‌نهی دو موج را در نظر گرفتیم. اگر بخواهیم یک سیستم  $n$  موجی را بر هم نهمیم، باید بنویسیم

$$\Psi(x, t) = \sum_{r=1}^n A_r \exp [i(\omega_r t - k_r x)] \quad (\text{الف } ۴۹.۱۳)$$

که  $A_r$  دامنه هر یک از موجها را نشان می‌دهد. هرگاه  $n$  خیلی زیاد شود (مطلقاً، بینهایت)، بسامدها توزیعی پیوسته دارند، و می‌توان به جای مجموع‌یابی انتگرالگیری را جانشین کرد و رسید به<sup>۳</sup>

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(\omega t - kx)} dk \quad (\text{ب } ۴۹.۱۳)$$

که ضریب  $A(k)$  توزیع دامنه‌های مؤلفه موجها با بسامدهای مختلف را نشان می‌دهد، یعنی، توزیع طیفی امواج است. جالبترین حالت وقتی پیش می‌آید که  $A(k)$  فقط در همسایگی عدد موج خاصی

۱. مفهوم سرعت گروه را در سال ۱۸۳۹ هاملتون بیان کرد؛ تمایز بین سرعت فاز و سرعت گروه را لرد ریلی روشن کرد (Theory of Sound, 1st edition, 1877; Ra 94).

۲. یکی بودن سرعتها صراحتاً در معادله (۵۵.۱۳) نشان داده شده است.

۳. قبلاً، به طور ضمنی فرض کرده‌ایم که  $k \geq 0$ . ولی  $k$  بنا بر تعریف از رابطه  $k^2 = \omega^2/v^2$  به دست می‌آید [معادله (۲۲.۱۳)]، بنابراین، هیچ دلیل ریاضی وجود ندارد که ما نتوانیم  $k < 0$  را اختیار کنیم. بنابراین بدون هیچ دردسری در عملیات ریاضی می‌توانیم حوزه انتگرالگیری را گسترش دهیم تا  $-\infty < k < \infty$  را در برگیرد. این روش بازنسائی نمایش انتگرالی  $\Psi(x, t)$  را به صورت یک انتگرال فوریه مجاز می‌دارد (بخش ۹.۱۳).

(مثلاً  $k_0$ ) مقدار قابل ملاحظه‌ای داشته باشد و به‌ازای  $k$  در خارج گستره کوچکی، که با  $k_0 \pm \Delta k$  نشان داده می‌شود، بسیار بسیار کوچک شود. در چنین حالتی تابع موج را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(\omega t - kx)} dk \quad (50.13)$$

تابعی از این دست را بسته موج<sup>۱</sup> می‌نامیم. مفهوم سرعت گروه را فقط می‌توان درباره آن مواردی به‌کار برد که بتوان آنها را توسط یک بسته موج نمایش داد؛ یعنی، تابع موجهای گستره کوچک (یا نوار)ی از بسامدها را شامل می‌شود.

در حالتی که بسته موج توسط معادله (۵۰.۱۳) نمایش داده شده است، بسامدهایی که مشارکت دارند به‌آنجایی محدود می‌شوند که در نزدیکی  $\omega(k_0)$  قرار دارند. بنابراین، می‌توانیم  $\omega(k)$  را حول  $k = k_0$  بسط دهیم

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \times (k - k_0) + \dots \quad (51.13 \text{ الف})$$

که می‌توانیم آن را به صورت زیر خلاصه کنیم

$$\omega = \omega_0 + \omega'_0 (k - k_0) + \dots \quad (51.13 \text{ ب})$$

شناسه تابع نمایی در انتگرال بسته موج، تقریباً، چنین است

$$\omega t - kx = (\omega_0 t - k_0 x) + \omega'_0 (k - k_0) t - (k - k_0) x$$

که در اینجا جمله  $k_0 x$  را جمع و تفریق کردیم، به این ترتیب

$$\omega t - kx = (\omega_0 t - k_0 x) + (k - k_0)(\omega'_0 t - x) \quad (52.13)$$

و معادله (۵۰.۱۳) به صورت زیر در می‌آید

$$\Psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) \exp[i(k - k_0)(\omega'_0 t - x)] \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] dk \quad (53.13)$$

بسته موجی، که به این صورت بیان شده است، می‌تواند به صورت زیر تعبیر شود. کمیت

$$A(k) \exp[i(k - k_0)(\omega'_0 t - x)]$$

۱. واژه بسته موج را اروین شرودینگر ابداع کرده است.



دامنه مؤثری را تشکیل می‌دهد که، به علت کوچک بودن کمیت  $k - k_0$  در نما، به آرامی بر حسب زمان تغییر می‌کند و حرکت بسته موجی (یا پوش یک گروه از امواج) را به همان گونه‌ای توصیف می‌کند که عبارت

$$2A \cos \left[ \frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2} \right]$$

انتشار بسته موج حاصل از دو موج برهم نهاده را وصف می‌کند. شرط ثابت بودن فاز برای عبارت مربوط به دامنه، منجر به عبارت زیر برای سرعت گروه، می‌شود

$$U = \omega' = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \quad (54.13)$$

همان طور که قبلاً گفتیم، فقط اگر محیط پاشنده باشد،  $U$  با سرعت فاز  $V$  تفاوت دارد. برای نشان دادن این عبارت به طور صریح، معادله (54.13) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{U} = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)$$

که شاخص پایین صفر به این معنی است که: «به ازای  $k = k_0$ ، به طور معادل، به ازای  $\omega = \omega_0$  محاسبه شده است.» چون  $k = \omega/v$

$$\frac{1}{U} = \left[ \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\omega}{v} \right) \right] = \frac{v - (\omega dv/d\omega)}{v^2}$$

به این ترتیب

$$U = \frac{v_0}{1 - \frac{\omega_0}{v_0} \left( \frac{dv}{d\omega} \right)} \quad (55.13)$$

اگر محیط ناپاشنده باشد، آنگاه:  $v = V = \text{const.}$  و از این رو  $dv/d\omega = 0$  [معادله (55.13)]:  
از آنجا داریم:  $U = v_0 = V$ .

کمیت باقی‌مانده در معادله (53.13)،  $\exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]$ ، نسبت به زمان سریعاً تغییر می‌کند؛ اگر این تنها عامل حاضر در  $\Psi$  بود، قطار موج نامتناهی را نشان می‌داد که با بسامد  $\omega_0$  نوسان و با سرعت فاز  $V = \omega_0/k_0$  حرکت می‌کرد.

باید توجه داشته باشیم که یک قطار نامتناهی از امواج با بسامدی معین نمی‌تواند سیگنالی را گسیل و یا اطلاعاتی را از یک نقطه به نقطه دیگر حمل کند. فقط از طریق شروع کردن و توقف

قطار موج، و به آن وسیله حک سیگنالی بر روی موج، یا به عبارت دیگر، با ایجاد یک بسته موج، می‌توان به چنین تراگسبلی دست یافت. به عنوان نتیجه‌ای از این واقعیت، این سرعت گروه است، و نه سرعت فاز، که متناظر با سرعت عبور سیگنال است.<sup>۱</sup> این نکته را در بخش ۶.۱۳ با بررسی چگونگی انتشار انرژی در امتداد یک شبکه یا ریسمان بارگذاری شده روشن می‌کنیم.

### ۶.۱۳ انتشار انرژی در ریسمانی بارگذاری شده

حال به مورد ریسمان بارگذاری شده نامتناهی برمی‌گردیم تا ارتباط بین سرعت گروه و آهنگ انتشار انرژی را در امتداد ریسمان بررسی کنیم. می‌توانیم انرژیهای جنبشی و پتانسیل وابسته به ذره  $j$ ام ریسمان را به صورت زیر بنویسیم [معادلات (۶.۱۱) و (۶.۱۲)]:

$$T_j = \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 \quad (الف \ ۵۶.۱۳)$$

$$W_j = \frac{1}{2} \frac{\tau}{a} (q_j - q_{j+1})^2 \quad (ب \ ۵۶.۱۳)$$

۱. سرعت گروه فقط در محیطهایی که در زیر شرح می‌دهیم، با سرعت سیگنال متناظر است: محیط ناپاشنده (که در این مورد سرعتهای فاز، گروه، و سیگنال جملگی باهم برابرند) و محیطی با پاشندگی متعارف (که در این مورد سرعت فاز بیش از سرعت گروه و سیگنال است). در محیطهای با پاشندگی نامتعارف، سرعت گروه ممکن است از سرعت سیگنال بیشتر شود (و در واقع، ممکن است منفی و یا نامتناهی شود). باید توجه داشت در محیطی که عدد موج  $k$  مختلط است تضعیف مشاهده می‌شود، و می‌گوییم پاشندگی نامتعارف است. اگر  $k$  حقیقی باشد، تضعیف وجود ندارد، و می‌گوییم پاشندگی متعارف است. آنچه را که پاشندگی غیرمتعارف می‌نامیم (به علت تصور نادرست تاریخی) در حقیقت متعارف (یعنی، مکرر) و آنچه را که متعارف می‌نامیم، نامتعارف (یعنی، نادر) است. آثار پاشندگی در پدیده‌های اپتیکی و الکترومغناطیسی از اهمیت زیادی برخوردارند.

روابط بین سرعتهای فاز، گروه، و سیگنال را آرنولد زومرفلد و لئون بریلون در سال ۱۹۱۴ به تفصیل بررسی کردند. ترجمه این مقالات در کتاب بریلون (Br 60) ارائه شده است.

۲. در این فصل برای جلوگیری از اشتباه با سرعت گروه  $U$ ، از نشانه  $W$  برای انرژی پتانسیل استفاده می‌کنیم. در اینجا از روشی بهره می‌گیریم که با روش ارائه شده در فصل ۱۱ اندک تفاوتی دارد و آن عبارت است از اینکه اکنون برای تک ذره انرژی پتانسیل را تعریف می‌کنیم، در صورتی که قبلاً انرژی پتانسیل کل را مورد توجه قرار می‌دادیم. دیگر نمی‌توانیم از انرژی پتانسیل کل استفاده کنیم زیرا برای یک ریسمان بارگذاری شده نامتناهی این کمیت نامتناهی است. به این اعتبار انرژی پتانسیل موجود در ریسمان بین ذرات  $j$ ام و  $(j+1)$ ام را به ذره  $j$ ام وابسته می‌کنیم. این انتخاب اختیاری است؛ می‌توانستیم از مقدار مربوط به جزء ریسمان بین ذرات  $(j-1)$ ام و  $j$ ام بهره بگیریم، و یا ترکیبی از این دو را به کار ببریم. فقط لازم است تعریفی که برای  $W_j$  ارائه می‌دهیم منطقی باشد و اینکه به ازای انرژی پتانسیل کل داشته باشیم:  $W = \sum_j W_j$ . معادله (۶.۱۳) ب) در این شرایط صدق می‌کند.

ولی حال می‌خواهیم میانگین زمانی چگالیهای انرژی جنبشی و پتانسیل  $T$  و  $\mathcal{W}$  را مورد بررسی قرار دهیم، که در اینجا  $T$  انرژی جنبشی یکای طول ریسمان است و  $\mathcal{W}$  نیز به همان ترتیب تعریف شده است. چون یکای اصلی طول برای ریسمان بارگذاری شده همان فاصله بین ذرات،  $d$ ، است، داریم

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \frac{m}{d} \langle \dot{q}_j^2 \rangle \quad (۵۷.۱۳ \text{ الف})$$

$$\langle \mathcal{W} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\tau}{d^2} \langle (q_j - q_{j+1})^2 \rangle \quad (۵۷.۱۳ \text{ ب})$$

اگر ریسمانی پیوسته به طول نامتناهی را بررسی می‌کنیم، تابع موج آن را می‌توانیم به صورت استاندارد بنویسیم

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

در مورد ریسمان بارگذاری شده، متغیر  $x$  همان  $jd$  است، که شاخص  $j$ ، ذره را مشخص می‌کند و  $d$  فاصله بین ذرات است. به این ترتیب برای نوسان در بسامد مشخص  $\omega$ ، به ازای جابه‌جایی ذره  $j$ ام داریم

$$q_j(t) = Ae^{i(\omega t - jkd)} \quad (۵۸.۱۳)$$

که در اینجا  $A$  دامنه ارتعاش است. [این عبارت را با نتیجه‌ای مقایسه کنید که قبلاً برای ریسمان بارگذاری شده (بخش ۹.۱۱) به دست آمده است.] پس از مشتق‌گیری، داریم

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= i\omega Ae^{i(\omega t - jkd)} \\ &= -\omega A \sin(\omega t - jkd) \end{aligned} \quad (۵۹.۱۳)$$

که در اینجا عبارت خط آخر، جزء حقیقی عبارت قبلی است. بنابراین

$$\langle T \rangle = \frac{m\omega^2 A^2}{2d} \langle \sin^2(\omega t - jkd) \rangle \quad (۶۰.۱۳)$$

چون فقط یک تک بسامد  $\omega$  را در نظر می‌گیریم، می‌توانیم میانگین زمانی این معادله را از طریق میانگین‌گیری روی یک دوره تناوب کامل نوسان محاسبه کنیم. (اگر گستره‌ای از بسامدها حضور داشته باشند، آن طور که در بسته موج اتفاق می‌افتد، در آن صورت میانگین باید روی یک

دوره زمانی بسیار طولانی، دقیقاً یک زمان بینهایت، انجام شود.) میانگین مجذور یک تابع سینوسی روی یک دوره تناوب برابر  $1/2$  است؛ بنابراین

$$\langle T \rangle = \frac{m\omega^2 A^2}{4d} \quad (۶۱.۱۳)$$

همچنین داریم [معادله (۳۲.۱۳)]

$$\omega^2 = 4 \frac{\tau}{md} \sin^2 \frac{kd}{2} \quad (۶۲.۱۳)$$

بنابراین، میانگین چگالی انرژی جنبشی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\langle T \rangle = \frac{\tau A^2}{d^2} \sin^2 \frac{kd}{2} \quad (۶۳.۱۳)$$

برای محاسبه میانگین چگالی انرژی پتانسیل باید کمیت زیر را در نظر بگیریم

$$\begin{aligned} q_j - q_{j+1} &= Ae^{i\omega t} [e^{-ijkd} - e^{-i(j+1)kd}] \\ &= Ae^{i\omega t} e^{-ijkd} [1 - e^{-ikd}] \\ &= Ae^{i(\omega t - jkd)} e^{-i(kd/2)} \left( 2i \sin \frac{kd}{2} \right) \\ &= -2A \sin \frac{kd}{2} \sin \left( \omega t - jkd - \frac{kd}{2} \right) \end{aligned} \quad (۶۴.۱۳)$$

که در اینجا باز هم جزء حقیقی عبارت را منظور کردیم. از محاسبه میانگین این کمیت، خواهیم داشت

$$\langle (q_j - q_{j+1})^2 \rangle = 2A^2 \sin^2 \frac{kd}{2} \quad (۶۵.۱۳)$$

و سپس

$$\langle W \rangle = \frac{\tau A^2}{d^2} \sin^2 \frac{kd}{2} = \langle T \rangle \quad (۶۶.۱۳)$$

بنابراین میانگین چگالیهای انرژی پتانسیل و جنبشی با هم برابرند، درست به همان ترتیب که در بخش ۳.۱۲ در مورد ریسمان پیوسته به دست آوردیم. بنابراین میانگین چگالی انرژی کل عبارت است از

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle T \rangle + \langle W \rangle = \frac{2\tau A^2}{d^2} \sin^2 \frac{kd}{2} \quad (۶۷.۱۳)$$

حال فرض کنید که ریسمان ابتدا در وضعیت تعادل در حال سکون باشد. در آن صورت اگر ذره  $r$ ام را انتخاب کرده و آن را با بسامد  $\omega$  و دامنه  $A$  به نوسان وادار کنیم، جابه جایی این ذره به صورت زیر است

$$q_r(t) = Ae^{i\omega t} \quad (۶۸.۱۳)$$

حرکت ذره  $r$ ام نیرویی بر ذره  $(r+1)$ ام وارد می آورد و به نوسان کردن آن با بسامد  $\omega$  منجر می شود. به این ترتیب از ذره ای به ذره دیگر تا انتهای ریسمان منتشر می شود. می خواهیم میانگین توان داده شده به ذره  $r$ ام را محاسبه کنیم یعنی توانی که سبب انتشار انرژی به ذراتی می شود که با شاخه های زیرین  $r+1$ ،  $r+2$ ، ... نشان گذاری شده اند. (همان مقدار توان برای انتشار به  $r-1$ ،  $r-2$ ، ... لازم است، اما فقط جاری شدن انرژی به سمت راست را در نظر می گیریم.) توان داده شده به ذره  $r$ ام را می توان به صورت حاصل ضرب سرعت ذره  $r$ ام در نیروی عکس العمل ذره  $(r+1)$ ام بیان کرد

$$\langle P \rangle = \langle F_{r+1} \dot{q}_r \rangle \quad (۶۹.۱۳)$$

در قیاس با جمله اول معادله (۱۳۰.۱۱)، می نویسیم

$$F_{r+1} = -\frac{\tau}{d}(q_{r+1} - q_r) \quad (۷۰.۱۳)$$

با استفاده از معادله (۶۴.۱۳)، این نیرو به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned} F_{r+1} &= -\frac{\tau A}{d} \sin \frac{kd}{\psi} \sin \left( \omega t - rkd - \frac{kd}{\psi} \right) \\ &= \frac{-\tau A}{d} \sin \frac{kd}{\psi} \left[ \sin(\omega t - rkd) \cos \frac{kd}{\psi} - \cos(\omega t - rkd) \sin \frac{kd}{\psi} \right] \end{aligned} \quad (۷۱.۱۳)$$

معادله (۵۹.۱۳) عبارت مربوط به  $\dot{q}_r$  را به دست می دهد، و در آن صورت میانگین توان داده شده عبارت است از

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{\tau \omega A^2}{d} \sin \frac{kd}{\psi} \left[ \langle \sin^2(\omega t - rkd) \rangle \cos \frac{kd}{\psi} \right. \\ &\quad \left. - \langle \sin(\omega t - rkd) \cos(\omega t - rkd) \rangle \sin \frac{kd}{\psi} \right] \end{aligned} \quad (۷۲.۱۳)$$

میانگین مقدار  $\sin \theta \cos \theta$  در یک دوره تناوب صفر می‌شود، بنابراین جمله دوم داخل کروشه معادله (۷۲.۱۳) هیچ نوع مشارکتی در این میانگین‌گیری ندارد. از محاسبه میانگین زمانی جمله اول، خواهیم داشت

$$\langle P \rangle = \frac{\tau \omega A^2}{d} \sin \frac{kd}{2} \cos \frac{kd}{2} \quad (۷۳.۱۳)$$

با نشانیدن مقدار معادل  $\omega$  از معادله (۶۲.۱۳)، داریم

$$\langle P \rangle = 2 \sqrt{\frac{\tau}{md}} \times \frac{\tau A^2}{d} \sin^2 \frac{kd}{2} \cos \frac{kd}{2} \quad (۷۴.۱۳)$$

ابعاد نسبت  $\langle P \rangle / \langle \mathcal{E} \rangle$  از نوع سرعت است و می‌توان آن را میانگین سرعت جاری شدن انرژی در طول ریسمان تعبیر کرد. بنابراین، با استفاده از معادلات (۶۷.۱۳) و (۷۴.۱۳)، می‌رسیم به

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} = \sqrt{\frac{\tau d}{m}} \cos \frac{kd}{2} \quad (۷۵.۱۳)$$

از معادله (۶۲.۱۳) می‌توانیم مشتق  $\omega$  را نسبت به  $k$  محاسبه کنیم

$$\frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{\tau d}{m}} \cos \frac{kd}{2} \quad (۷۶.۱۳)$$

ولی  $dw/dk$  همان سرعت گروه،  $U$ ، است [معادله (۵۲.۱۳)]، بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$U = \frac{\langle P \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} \quad (۷۷.۱۳)$$

این معادله حاکی از آن است که انرژی با سرعت گروه  $U$  در امتداد ریسمان بارگذاری شده منتشر می‌شود.

باید یادآوری کنیم که اگر بسامد اعمال شده روی ریسمان از بسامد بحرانی  $\omega_c$  بیشتر باشد، در آن صورت تضعیف آغاز می‌شود و عدد موج را دیگر نمی‌توان به کمک سرعت انتشار انرژی بازشناخت. در واقع، در این مورد به خصوص انرژی به هیچوجه انتشار پیدا نمی‌کند (نقطه نظرهایی که در پایان بخش ۴.۱۳ ارائه شده است ببینید).

### ۷.۱۳ امواج بازتابی و عبوری

یکی از مسائل مهم در مطالعه پدیده‌های موجی رفتار امواج در برخورد به مرز بین دو محیط است. این پدیده‌ها در مورد امواج الکترومغناطیسی بسیار مهم‌اند<sup>۱</sup>. مثال ریسمان مرتعش وسیله مناسبی را برای بحث مربوط به امواج بازتابی و عبوری در اختیار ما قرار می‌دهد و ارائه روشهای محاسباتی به شکل ساده را نیز مجاز می‌دارد.

«مرز» بین دو «محیط» را به صورت یک نقطه ناپوسته در چگالی جرم طولی ریسمان در نظر می‌گیریم؛ یعنی، به ازای  $x < 0$  چگالی  $\rho_1$  و به ازای  $x > 0$  چگالی  $\rho_2$  را داریم. اگر قطار موج پیوسته‌ای از سمت چپ فرود آید (یعنی، از سمت مقادیر منفی  $x$ )، در آن صورت در ناپوستگی انتظار داریم که بخشی از موج عبور کند و بخش دیگر بازتابد. به این ترتیب در ناحیه ۱ ( $x < 0$ ) با برهم‌نهی از امواج فرودی و بازتابی مواجه‌ایم، و در ناحیه ۲ ( $x > 0$ ) فقط موج عبوری داریم

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(x, t) &= \Psi_{\text{فرودی}} + \Psi_{\text{بازتابی}} = Ae^{i(\omega t - k_1 x)} + Be^{i(\omega t + k_1 x)} \\ \Psi_2(x, t) &= \Psi_{\text{عبوری}} = Ce^{i(\omega t - k_2 x)} \end{aligned} \right\} \quad (78.13)$$

در معادلات (۷۸.۱۳) این واقعیت را به صراحت در نظر گرفته‌ایم که امواج در هر دو ناحیه بسامد یکسانی دارند. اما چون سرعت موج در ریسمان با رابطه زیر بیان می‌شود

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (79.13)$$

داریم:  $v_1 \neq v_2$ ، و بنابراین  $k_1 \neq k_2$ . نیز داریم

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{T}} \quad (80.13)$$

بنابراین، برحسب عدد موج فرودی، خواهیم داشت

$$k_2 = k_1 \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (81.13)$$

دامنه،  $A$ ، موج فرودی [معادلات (۷۸.۱۳)] معلوم و حقیقی است. در این صورت باید دامنه‌های  $B$  و  $C$  مربوط به امواج بازتابی و عبوری را برای تکمیل حل مسئله تعیین کنیم. هنوز هیچ محدودیتی روی  $B$  و  $C$  وارد نیست و ممکن است کمیتهای مختلفی باشند.

می‌توان شرایط فیزیکی مسئله را برحسب شرایط مرزی بیان کرد. این شرایط عبارت‌اند از اینکه تابع موج کل یعنی  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$  و مشتق آن در مرز پیوسته باشند. پیوستگی  $\Psi$  از این

۱. بحث مربوطه را در کتاب ماریون و هیلد (Ma 80, Chapter 6) ببینید.

واقعیت ناشی می‌شود که ریسمان پیوسته است. شرط مربوط به مشتق از «تاب» خوردن ریسمان جلوگیری می‌کند، زیرا اگر  $\partial\Psi/\partial x_{+} \neq \partial\Psi/\partial x_{-}$  در آن صورت  $\partial^2\Psi/\partial x^2$  در  $x = 0$  نامتناهی است؛ اما تابع موج کمیتهای  $\partial^2\Psi/\partial x^2$  و  $\partial^2\Psi/\partial t^2$  را به هم مربوط می‌کند؛ و اگر اولی نامتناهی باشد، حاکی از شتاب نامتناهی است، که از نظر فیزیکی مجاز نیست. بنابراین، به‌ازای تمام مقادیر  $t$ ، داریم

$$\boxed{\begin{aligned} \Psi_1|_{x=0} &= \Psi_2|_{x=0} & (\text{الف } ۸۲.۱۳) \\ \frac{\partial\Psi_1}{\partial x}|_{x=0} &= \frac{\partial\Psi_2}{\partial x}|_{x=0} & (\text{ب } ۸۲.۱۳) \end{aligned}}$$

از معادلات (۷۸.۱۳) و (۸۲.۱۳ الف) داریم

$$A + B = C \quad (\text{الف } ۸۳.۱۳)$$

و از معادلات (۷۸.۱۳) و (۸۲.۱۳ ب) به‌دست می‌آوریم

$$-k_1 A + k_1 B = -k_2 C \quad (\text{ب } ۸۳.۱۳)$$

از حل این دو معادله نتیجه می‌گیریم که

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A \quad (\text{الف } ۸۴.۱۳)$$

و

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A \quad (\text{ب } ۸۴.۱۳)$$

هر دو عدد موج  $k_1$  و  $k_2$  و نیز دامنه‌های  $B$  و  $C$  حقیقی‌اند. علاوه،  $k_1$ ،  $k_2$  و  $A$  جمله‌گی مثبت‌اند، همچنین  $C$  نیز همواره مثبت است. به‌این ترتیب، موج عبوری همواره با موج فرودی همفاز است. به‌همین ترتیب، اگر  $k_1 > k_2$ ، در آن صورت امواج فرودی و بازتابی همفازند، اما به‌ازای  $k_1 > k_2$ ، یعنی  $\rho_2 > \rho_1$ ، ناهمفازند.

ضریب بازتاب  $R$  بنا بر تعریف عبارت است از نسبت مجذور مقادیر دامنه‌های امواج بازتابی

به‌فرودی

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad (۸۵.۱۳)$$



چون انرژی موجود در موج با مجذور دامنه تابع موج متناسب است،  $R$  عبارت است از نسبت انرژی بازتابی به انرژی فرودی. کمیت  $|B|^2$  نماینده شدت موج بازتابیده است.

در محل اتصال دو ریسمان نمی‌توان انرژی را ذخیره کرد، بنابراین انرژی فرودی باید برابر مجموع انرژیهای بازتابی و عبوری باشد؛ یعنی،  $R + T = 1$ . به این ترتیب

$$T = 1 - R = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (۸۶.۱۳)$$

یا

$$T = \frac{k_2}{k_1} \frac{|C|^2}{|A|^2} \quad (۸۷.۱۳)$$

در مطالعه امواج بازتابی و عبوری الکترومغناطیسی، عبارتهای کاملاً مشابهی برای  $R$  و  $T$  به دست می‌آوریم.

### ۸.۱۳ سری فوریه تعمیم یافته (اختیاری)

در باره سری مثلثاتی فوریه در بخش ۹.۳ در ارتباط با نوسانگرهای هماهنگ واداشته به اجمال بحث کردیم. همواره می‌توان آنالیز فوریه هر مسئله خاصی را برحسب هر مجموعه کاملی از توابع متعامد انجام داد.

ابتدا لازم است که برخی از جزئیات خواص توابع متعامد را اثبات کنیم. از بحث مربوط به بردارها (بخش ۱۱.۱) می‌دانیم که هر بردار سه بعدی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 = \sum_j A_j \mathbf{e}_j \quad (۸۸.۱۳)$$

که در اینجا  $A_j$  عبارت‌اند از تصویرهای بردار در امتداد سه راستای متعامد، که بردارهای یکه در امتداد آنها  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  است. نمایش برداری که تنها یک مؤلفه در راستای  $x_2$  داشته باشد، بر حسب  $\mathbf{e}_1$  و  $\mathbf{e}_2$  ناممکن است؛ مجموعه پایه از بردارهای یکه باید شامل  $\mathbf{e}_3$  نیز باشد. پس برای نمایش هر بردار دلخواه، لازم است که مجموعه پایه یک مجموعه کامل باشد؛ یعنی، مجموعه باید شامل بردارهای یکه در تمام راستاهای ممکن باشد.

روش کلی برای تعیین تصویر  $\mathbf{A}$  روی محور  $x_j$  همانا محاسبه حاصلضرب داخلی  $\mathbf{A}$  و بردار یکه  $\mathbf{e}_j$  است:  $A_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j$ . بردارهای یکه از رابطه تعامد پیروی می‌کنند

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk} \quad (۸۹.۱۳)$$

حال می‌خواهیم نتایج مربوط به بردارهای فضای سه‌بعدی را به‌مورد توابع در فضای  $n$  بعدی تعمیم دهیم.<sup>۱</sup> یک مجموعه از توابع متعامد داریم

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \dots$$

که در داخل بازه اصلی معینی،  $-L < x < L$ ، تعریف شده‌اند. اگر تابع متعامد دیگری به‌همه  $\varphi_j(x)$ ها وجود نداشته باشد، آنگاه توابع  $\varphi_j(x)$  تشکیل یک مجموعه کامل متعامد می‌دهند، و هر تابع دلخواهی را می‌توان برحسب این مجموعه بسط داد. مانند مورد معادله (۸۸.۱۳)، داریم<sup>۲</sup>

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots \\ &= \sum_j a_j\varphi_j(x), \quad -L < x < L \quad (90.13) \end{aligned}$$

این سری را سری فوریه تعمیم یافته می‌گوییم.

نتیجه این حکم که  $\varphi_j(x)$ ها متعامدند آن است که هیچ یک از این توابع را نمی‌توان برحسب توابع دیگر بیان کرد؛ از این رو سری ارائه شده در معادله (۹۰.۱۳) یک ترکیب به‌طور خطی مستقل از  $\varphi_j(x)$  است. به این ترتیب اگر  $f(x)$  صفر شود، جملگی ضریبهای  $a_j$  نیز باید صفر شوند. شرط تعامد را می‌توان در تشابه با شرط تعامد مربوط به بردار یکه  $e_j$  بیان کرد

$$\int_{-L}^{+L} \varphi_j(x)\varphi_k(x)dx = \delta_{jk} \quad (91.13)$$

که در اینجا انتگرالگیری ضروری است زیرا «بردارهای یکه» ما اکنون توابع  $x$  هستند و نیز به‌طور دلخواهی، بهنجارش را طلب کرده‌ایم

$$\int_{-L}^{+L} [\varphi_j(x)]^2 dx = 1$$

می‌توانیم ضرایب  $a_j$  در بسط مربوط به  $f(x)$  [معادله (۹۰.۱۳)] را با ضرب این معادله در  $\varphi_k(x)$  و انتگرالگیری از آن، تعیین کنیم

$$\int_{-L}^{+L} f(x)\varphi_k(x)dx = \int_{-L}^{+L} \sum_j a_j\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx \quad (92.13)$$

۱. درجه فضای تابع (یعنی،  $n$ ) باید به‌طور نامتناهی شمارش‌پذیر باشد تا بتوانیم شرط تعامد را دقیقاً مشخص کنیم [معادله (۹۱.۱۳)]، زیرا در این معادله باید شاخصهای پایین  $j$  و  $k$  اعداد تعریف‌شدنی باشند.
۲. در انجام چنین بسطی باید همواره همگرایی سری را مورد بررسی قرار دهیم. فرض می‌کنیم که تمام مواردی را که در اینجا مورد توجه قرار می‌دهیم، همگرا هستند.

با تعویض جای انتگرالگیری و مجموع‌یابی و به‌کارگیری شرط تعامد، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{+L} f(x)\varphi_k(x)dx &= \sum_j a_j \int_{-L}^{+L} \varphi_j(x)\varphi_k(x)dx \\ &= \sum_j a_j \delta_{jk} \\ &= a_k \end{aligned} \quad (۹۳.۱۳)$$

به این ترتیب، داریم

$$f(x) = \sum_j \varphi_j(x) \int_{-L}^{+L} f(x')\varphi_j(x')dx' \quad (۹۴.۱۳)$$

توابع  $\varphi_j(x)$  هر مجموعه کامل از توابع متعامد هستند. چنین توابعی علاوه بر توابع مثلثاتی، بس جمله‌ایهای لژاندر، توابع بسل، بس جمله‌ایهای هرمیت را نیز در برمی‌گیرد.

اکنون نمایش تابع  $f(x)$  را در بازه  $-\pi < x < \pi$  برحسب یک سری مثلثاتی متشکل از توابع متعامد  $\cos rx$  و  $\sin rx$  در نظر بگیرید

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos rx + b_r \sin rx) \quad (۹۵.۱۳)$$

این عبارت آشناترین مثال مربوط به سری فوریه به‌شمار می‌آید و عبارتی است که در معادله (۱۰۱.۳) به‌دست آوردیم. متوجه می‌شویم که لازم نیست  $f(x)$  تابع پیوسته‌ای از  $x$  باشد؛  $f(x)$  ممکن است تعداد معدودی گسستگی محدود در گستره  $-\pi < x < \pi$  داشته باشد. توابع گسسته را می‌توان با تقسیم بازه به زیر بازه‌هایی بررسی کرد که  $f(x)$  در هر یک از این زیر بازه‌ها پیوسته باشد. در نقطه گسستگی  $x = x_0$  می‌توان نشان داد که سری فوریه به مقدار میانگین می‌گراید، یعنی، به

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0} [f(x_0 + \delta) + f(x_0 - \delta)] \quad (۹۶.۱۳)$$

برای محاسبه ضرایب  $a_r$  و  $b_r$  از برخی نتایج شناخته شده مثلثاتی بهره می‌گیریم. می‌دانیم

۱. دانیل برنولی نخستین کسی بود که از سریهای مثلثاتی بهره گرفت، و عبارتهای انتگرالی برای ضرایب اولین بار توسط اولر ارائه شد. اما این کارها برای بررسی موارد خاص بود؛ بارون ژان بابتیست ژوزف فوریه (۱۷۶۸-۱۸۳۰) در ۱۸۰۷ نشان داد که هر تابع دلخواهی، و در واقع، حتی تابع گسسته، را می‌توان به صورت یک سری مثلثاتی نمایش داد. ولی مقاله‌ای که فوریه در سال ۱۸۰۷ منتشر کرد، خیلی دقیق نبود (در واقع آکادمی علوم پاریس این مقاله را رد کرد)؛ دریخه اولین بار در ۱۸۲۹ اثبات بسیار دقیقی از آن ارائه داد.

که

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin rx \cos sxdx = 0 \quad (الف \ ۹۷.۱۳)$$

بازای مقادیر صحیح و یا صفر  $r$  و  $s$ . همچنین اتحادهای زیر را داریم [معادله (۷.۱۲)]

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin rx \sin sxdx = \pi \delta_{rs} \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (ب \ ۹۷.۱۳)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos rx \cos sxdx = \pi \delta_{rs} \quad r, s = 1, 2, \dots \quad (ج \ ۹۷.۱۳)$$

به این ترتیب، توابع  $\sin rx$  و  $\cos rx$ .  $r = 1, 2, 3, \dots$  همراه با یک جمله ثابت، که در معادله (۹۵.۱۳) به صورت  $a_0/2$  نموده شده است، مجموعه متعامد کاملی تشکیل می دهند که می توان هر تابع دلخواهی از  $x$  را به کمک آنها بسط داد (البته، فرض می کنیم همگرا باشد). بنابراین می توانیم ضرایب  $a_s$  را از طریق ضرب کردن معادله (۹۵.۱۳) در  $\cos sx$  و انتگرالگیری از  $-\pi$  تا  $+\pi$  از حاصلضرب، محاسبه کنیم

$$a_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos sxdx \quad (الف \ ۹۸.۱۳)$$

و به همین ترتیب برای  $b_s$ :

$$b_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin sxdx \quad (ب \ ۹۸.۱۳)$$

اگر مقدار میانگین  $f(x)$  را در بازه  $-\pi \leq x \leq \pi$  محاسبه کنیم، داریم

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx \quad (۹۹.۱۳)$$

با قرار دادن بسط سری به جای  $f(x)$  [معادله (۹۵.۱۳)]، می بینیم که انتگرال هر یک از جملات سینوسی و کسینوسی صفر می شود زیرا مقدار میانگین  $\cos rx$  و یا  $\sin rx$  در فاصله  $-\pi$  تا  $\pi$ ، اگر  $r$  عدد درست باشد صفر می شود. تنها جمله مربوط به  $a_0$  غیر صفر است

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2}$$

از این رو

$$\overline{f(x)} = \frac{a_0}{2} \quad (۱۰۰.۱۳)$$

و جمله پیشرو در سری نمایشگر مقدار میانگین تابع در داخل بازه مورد بررسی است.  
نتیجه مربوط به سری کامل چنین است

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x') dx' + \frac{1}{\pi} \sum_r \left[ \cos rx \int_{-\pi}^{+\pi} f(x') \cos rx' dx' + \sin rx \int_{-\pi}^{+\pi} f(x') \sin rx' dx' \right] \quad (101.13)$$

توجه داریم که  $\cos rx$  تابعی زوج است، در حالی که  $\sin rx$  یک تابع فرد است؛ یعنی،

$$\left. \begin{aligned} \cos rx &= \cos r(-x) \\ \sin rx &= -\sin r(-x) \end{aligned} \right\} \quad (102.13)$$

به این ترتیب، اگر  $f(x)$  یک تابع زوج باشد، انتگرال زیر صفر می‌شود

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x') \sin rx' dx'$$

و  $f(x)$  از طریق یک سری کسینوسی (به اضافه جمله پیشرو، یا ثابت) نمایانده می‌شود. به همین ترتیب، اگر  $f(x)$  تابعی فرد باشد، فقط جزء سینوسی سری باقی می‌ماند (و جمله پیشرو صفر می‌شود).

تا اینجا ما فقط نمایش تابع  $f(x)$  را در بازه  $-\pi < x < \pi$  در نظر گرفتیم؛ زیرا دوره تناوب توابع  $\sin rx$  و  $\cos rx$  عبارت است از  $2\pi$ ؛ بسط سری تابع  $f(x)$  [معادله (101.13)] نیز در هر بازه  $2\pi$  تکرار می‌شود. ولی، می‌توانیم گستره بسط را با یک تغییر متغیر ساده تغییر دهیم. به این ترتیب در ناحیه  $-L < x < L$ ، می‌نشانیم:  $x' \rightarrow \pi x'/L$  و می‌رسیم به

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(x') dx' + \frac{1}{L} \sum_r \left[ \cos \frac{r\pi x}{L} \int_{-L}^{+L} f(x') \cos \frac{r\pi x'}{L} dx' + \sin \frac{r\pi x}{L} \int_{-L}^{+L} f(x') \sin \frac{r\pi x'}{L} dx' \right] \quad (103.13)$$

بعلاوه، اگر  $f(x)$  در بازه  $-L < x < L$ ، یک تابع فرد باشد، یک سری سینوسی داریم<sup>۱</sup>

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_r \sin \frac{r\pi x}{L} \int_{-L}^L f(x') \sin \frac{r\pi x'}{L} dx' \quad (۱۰۴.۱۳)$$

به همین ترتیب، اگر  $f(x)$  در بازه  $-L < x < L$  یک تابع زوج باشد، یک سری کسینوسی داریم

$$f(x) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x') dx' + \frac{1}{L} \sum_r \cos \frac{r\pi x}{L} \int_{-L}^L f(x') \cos \frac{r\pi x'}{L} dx' \quad (۱۰۵.۱۳)$$

اگر تابع  $f(x)$  فقط در بازه  $0 < x < L$  تعریف شده باشد، و اگر مهم نباشد سری فوریه‌ای که این تابع را در بازه  $-L < x < L$  نمایش می‌دهد زوج باشد یا فرد، در آن صورت بسط را می‌توان برحسب یک سری سینوسی یا کسینوسی انجام داد. برحسب مورد، هر یک از دو انتخاب می‌تواند مناسب باشد.

### ۹.۱۳ نمایش انتگرالی فوریه بسته‌های موج (اختیاری)

بحث بخش ۵.۱۳ به‌طور ضمنی حاکی از آن بود که ما توصیف تابع موج را برای بسته موجی در نظر گرفته‌ایم که در مورد آن توزیع دامنه  $A(k)$  معلوم بود. از سوی دیگر، شاید بخواهیم تابع توزیع  $A(k)$  را به‌دست آوریم که تابع موج معلومی را توصیف کند. این مسئله مشابه مسئله محاسبه سری فوریه‌ای است که تابع معلومی را، همانگونه که در بخش پیشین مورد بحث قرار گرفت، نمایش می‌دهد. برای منظور فعلی خوب است که  $f(x)$  را به‌صورت سری نمایی مختلط بیان کنیم

$$f(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{-irx}, \quad -\pi < x < \pi \quad (۱۰۶.۱۳)$$

اگر این معادله را در  $\exp(isx)$  ضرب و روی بازه  $-\pi \leq x \leq \pi$  انتگرال بگیریم (مسئله ۱۴.۱۳)، داریم

$$c_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{isx} dx, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۱۰۷.۱۳)$$

اکنون گسترش بازه اصلی را از  $\pm \pi$  به  $\pm L$  انجام می‌دهیم که در این راه از روشی بهره می‌گیریم که در معادله (۱۰۳.۱۳) به‌کار رفت. در معادله (۱۰۷.۱۳)، متغیر را از  $x$  به  $\pi u/L$

۱. چون انتگرال به‌ازای  $0 < x < L$  برابر انتگرال در بازه  $-L < x < L$  است، فقط کافی است که انتگرال یک قسمت را در نظر بگیریم و حاصل را دو برابر کنیم.

تغییر می‌دهیم، و در معادله (۱۰۶.۱۳) می‌نشانیم:  $x \rightarrow \pi x/L$ . به این ترتیب

$$c_r = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^{+L} f(u) \exp\left(i \frac{r\pi u}{L}\right) du \quad (108.13)$$

و

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-L}^{+L} f(u) \exp\left[-i \frac{r\pi}{L}(x-u)\right] du \quad (109.13)$$

حال موجه به نظر می‌آید که با حدگیری مناسبی باز هم بازه را گسترده‌تر کنیم و آن را از  $\pm L$  به  $\pm \infty$  برسانیم. برای اینکه چنین حدگیری میسر باشد، مانند قبل، لازم است که  $f(x)$  در گستره  $-\infty < x < \infty$  تک مقدار باشد و تعداد معدودی گسستگی محدود داشته باشد، و علاوه بر آن لازم است که  $f(x)$  مطلقاً همگرا باشد (یعنی انتگرال  $|f(x)|$  بین  $-\infty$  تا  $\infty$  وجود داشته باشد). در چنین شرایطی، اگر بنویسیم:  $\Delta k \equiv \pi/L$ ، آنگاه

$$f(x) = \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ \Delta k \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-ir(\Delta k)x} \Delta k \int_{-L}^{+L} f(u) e^{ir(\Delta k)u} du \quad (110.13)$$

در حد داریم،  $\Delta k \rightarrow dk$  و  $r\Delta k \rightarrow k$ . طبق تعریف انتگرال بر حسب حد یک مجموع یعنی،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(k) dk \equiv \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} g(r\Delta k) \Delta k$$

مجموع‌یابی روی  $r$  در معادله (۱۱۰.۱۳) تبدیل به انتگرال می‌شود

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iku} du \quad (111.13)$$

بنابراین، تابع  $f(x)$  به صورت انتگرال فوریه بیان شده است، که یک انتگرال دوگانه نامتناهی روی متغیرهای بی‌اثر  $k$  و  $u$  است. باید توجه کنید که اثباتی مبنی بر این امر ارائه نکردیم که نمایش انتگرالی ارائه شده در معادله (۱۱۱.۱۳) واقعاً تابع  $f(x)$  را توصیف می‌کند؛ فقط نشان دادیم که چنین نمایشی موجه به نظر می‌آید.<sup>۱</sup>

۱. برای اثبات قضیه انتگرال فوریه مراجعه کنید به، مثلاً:

از مقایسه معادله (۴۹.۱۳) ب (در  $t = 0$ ) و معادله (۱۱۱.۱۳) می بینیم که انتگرال

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iku} du \quad (112.13)$$

نشان دهنده توزیع طیفی تابع  $f(x)$  است [در صورتی که به آن یک ضریب ثابت  $(2\pi)^{-1/2}$  بدهیم].  $A(k)$  تبدیل فوریه  $f(u)$  نامیده می شود و گاهی آن را  $F(k)$  می نویسند. یک رابطه معکوس بین  $f(u)$  و  $A(k)$  وجود دارد، زیرا

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{-ikx} dk \quad (113.13)$$

قبلاً دیدیم [معادلات (۱۰۱.۱۳) و (۱۰۲.۱۳)] که، اگر  $f(x)$  تابع زوجی از  $x$  باشد، در این صورت سری فوریه فقط از یک سری کسینوسی تشکیل می شود، و اگر  $f(x)$  فرد باشد، فقط سری سینوسی باقی می ماند. ما در نمایش انتگرالی وضعیت مشابهی داریم؛ به علاوه، اگر  $f(x)$  یک تابع حقیقی باشد، با اختیار کردن اجزای حقیقی انتگرالهای ارائه شده در معادله (۱۱۱.۱۳)، می رسیم به

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kx dk \int_0^{\infty} f(u) \cos kudu, \text{ زوج } f(x) \text{ (الف ۱۱۴.۱۳)}$$

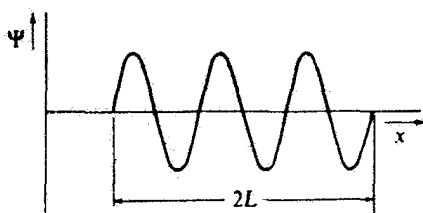
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin kx dk \int_0^{\infty} f(u) \sin kudu, \text{ فرد } f(x) \text{ (ب ۱۱۴.۱۳)}$$

باید توجه داشت که در تمامی این بحثها، عدد موج  $k$  را به دلخواه به عنوان یک کمیت اصلی اختیار کردیم. این گزینش، به خصوص در مباحث مربوط به تغییرات فضایی تابع موج مفید است. انتخاب دیگری که به همین میزان معتبر باشد، و مخصوصاً برای بحث در مورد تغییر زمانی تابع موج مناسب است، همانا بیان کمیتهای مختلف برحسب بسامد  $\omega$  است. تابع توزیع  $A(\omega)$  توزیع طیفی نامیده می شود. حتی وقتی نوشتن  $A$  را به صورت تابعی از عدد موج،  $A(k)$  اختیار می کنیم، باز هم از اصطلاح «طیفی» بهره می گیریم.

اگر بخواهیم تغییر زمانی تابع  $f(x, t)$  را در وضعیتی بررسی کنیم که در آن  $x$  ثابت است، در آن صورت معادلات متناظر با معادلات (۱۱۲.۱۳) و (۱۱۳.۱۳) عبارت اند از

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{الف } 115.13)$$





شکل ۵.۱۳

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (ب) \quad (۱۱۵.۱۳)$$

بنابراین، اگر  $A(\omega)$  معلوم باشد،  $f(t)$  را همواره می‌توان با یک تبدیل وارون فوریه به دست آورد، به همین ترتیب،  $A(\omega)$  را همواره می‌توان به کمک  $f(t)$  محاسبه کرد.

### مثال ۱.۱۳

توزیع طیفی را محاسبه کنید که بخشی متناهی از یک قطار موج نوسان‌کننده با تک بسامد  $\omega = kv$  را نشان می‌دهد. (نوسانها را در یک لحظه شروع می‌کنیم و سپس در لحظه‌ای بعد به آنها خاتمه می‌دهیم.)

حل: تابع موج عبارت است از

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) = \cos k \cdot (x - vt), & |x - vt| < L \\ 0, & |x - vt| > L \end{cases} \quad (۱۱۶.۱۳)$$

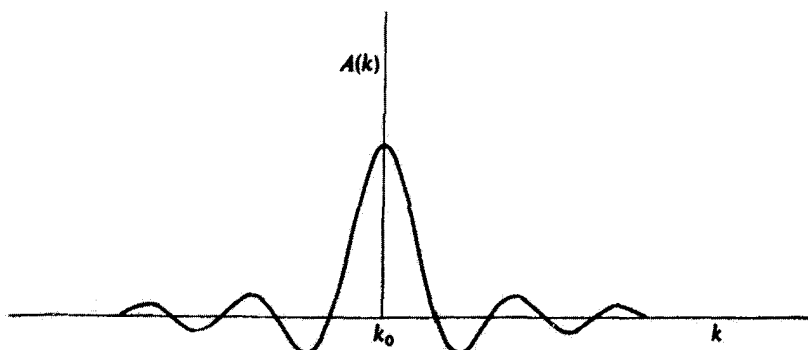
که در اینجا کل زمان نوسان وسیله آغازگر اختلال عبارت است از  $2L/v$ . چنین تپ نوسانی را در شکل ۵.۱۳ مشاهده می‌کنید.

چون تابع موج حقیقی است، تابع توزیع نیز باید حقیقی باشد، و می‌توانیم معادله (۱۱۲.۱۳) را به صورت زیر بنویسیم

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos kudu \quad (۱۱۷.۱۳)$$

حال داریم

$$\Psi(x, t) = \cos k \cdot (x - vt) = f(x - vt) = f(u) \quad (۱۱۸.۱۳)$$



شکل ۶.۱۳

یا

$$f(u) = \cos k \cdot u, \quad u \equiv x - vt \quad (۱۱۹.۱۳)$$

و چون  $f(u)$  تابعی زوج است، می‌توانیم بنویسیم

$$A(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^L \cos k \cdot u \cos k u \, du \quad (۱۲۰.۱۳)$$

با بهره‌گیری از اتحاد

$$\cos k \cdot u \cos k u = \frac{1}{2} [\cos(k \cdot + k)u + \cos(k \cdot - k)u]$$

داریم

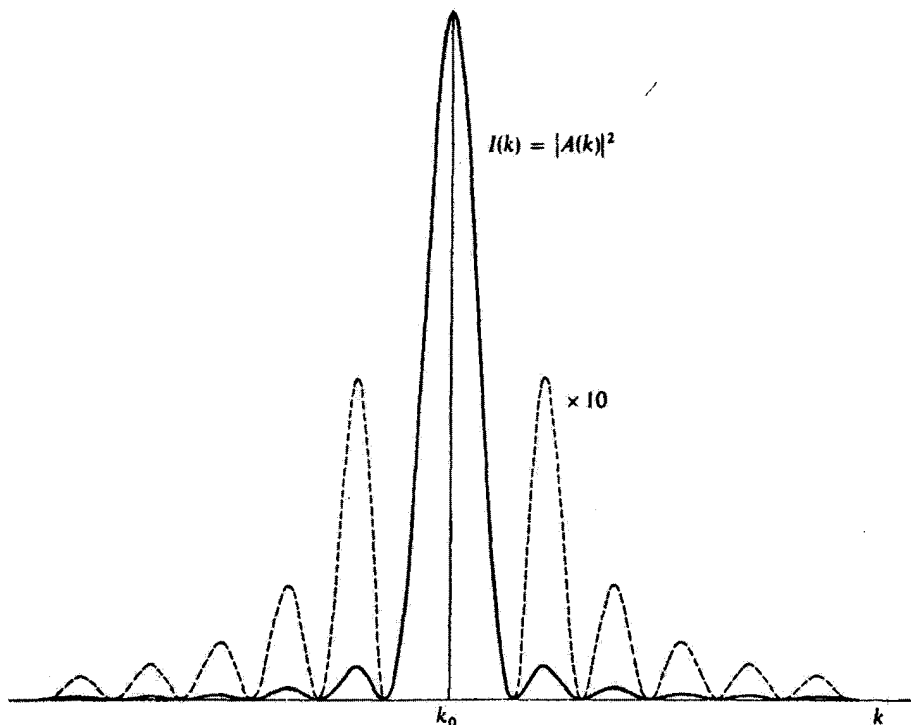
$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sin(k \cdot + k)L}{k \cdot + k} + \frac{\sin(k \cdot - k)L}{k \cdot - k} \right] \quad (۱۲۱.۱۳)$$

به‌ازای اعداد موج  $k$  در حوالی  $k \cdot$ ، جمله دوم غالب می‌شود، بنابراین به‌طور تقریبی، داریم

$$A(k) \propto \frac{\sin(k \cdot - k)L}{k \cdot - k}, \quad k \cong k \cdot \quad (۱۲۲.۱۳)$$

این تابع در شکل ۶.۱۳ نشان داده شده است. دارای یک بیشینه بزرگ در  $k = k \cdot$  و بیشینه‌های فرعی است که مقدارشان با افزایش  $|k \cdot - k|$  کاسته می‌شود. ■

معادله (۱۲۲.۱۳) و شکل ۶.۱۳ دامنه‌های امواج با عدد موج  $k$  را ارائه می‌دهند که برای ایجاد تپ محدود نموده شده در شکل ۵.۱۳ باید آنها را برهم نهد. توجه کنید که دامنه‌های منفی صرفاً حاکی



شکل ۷.۱۳

از آن است که این امواج ناهمافزند. شدت  $I(k)$  این امواج به کمک مجذور  $A(k)$  به دست می‌آید

$$I(k) = |A(k)|^2 \propto \left| \frac{\sin(k_0 - k)L}{k_0 - k} \right|^2, \quad k \cong k_0 \quad (۱۲۳.۱۳)$$

این تابع در شکل ۷.۱۳ نشان داده شده است؛ در اینجا بیشینه‌های فرعی (منحنی خط‌چین) در ده ضرب شده‌اند تا این قسمت‌های توابع را واضح‌تر نشان دهند.

از معادله (۱۲۲.۱۳) واضح است  $A(k)$  به‌ازای مقادیری از  $k$  که در شرایط زیر صدق می‌کنند، صفر می‌شود

$$k_0 - k = \frac{r\pi}{L}, \quad r = \pm 1, \pm 2, \dots$$

به این ترتیب، جزء اصلی  $A(k)$  از ناحیه نزدیک  $k = k_0$  حاصل می‌شود، یعنی به‌ازای

$$k = k_0 \pm \Delta k$$

که در اینجا

$$\Delta k \cong \frac{\pi}{L}$$

$2L$  عبارت است از طول تپ؛ اگر این طول را با  $\Delta x$  نشان دهیم، داریم

$$\Delta k \Delta x \cong 2\pi \quad (۱۲۴.۱۳)$$

این نتیجه جالب و مهم است، زیرا حکایت از آن دارد که با کوتاه کردن طول تپ (یعنی، با کاهش  $\Delta x$ ) باید بسامدهای بیشتری را در نظر بگیریم (یعنی،  $\Delta k$  افزایش پیدا کند) تا نمایش فوریهای از تابع موج را به دست دهد. از سوی دیگر، اگر طول تپ را خیلی طولانی بگیریم، در آن صورت توزیع طیفی خیلی خالص می شود (یعنی، گستره باریکی از بسامدها برای نمایش تپ لازم است). می توان این نتیجه را با این عبارت نیز بیان کرد که اگر بسامد تپ دقیقاً معلوم باشد ( $\Delta k$  کوچک)، در آن صورت جایگزیده کردن تپ در فضا ناممکن است (یعنی،  $\Delta x$  بزرگ). اگر جایگزیدگی مورد نظر باشد، آنگاه بسامد نامعین است. بنابراین، موجی که شامل یک تک بسامد است (یعنی، موج تکرنگ)، باید به طور نامتناهی گسترده باشد. در نتیجه، یک نور واقعاً تکرنگ کمال مطلوب است و هرگز از نظر فیزیکی قابل حصول نیست.<sup>۱</sup>

در فیزیک نوین رابطه بین  $\Delta k$  و  $\Delta x$  را اصل عدم قطعیت هایزنبرگ بیان می کند که بنا بر آن، به ازای دو متغیر دینامیکی مزدوج  $P$  و  $Q$  داریم

$$\Delta P \Delta Q \cong h \quad (۱۲۵.۱۳)$$

که  $h$  ثابت پلانک است. مکان ( $x$ ) و تکانه ( $p$ ) متغیرهای مزدوج اند. به این ترتیب

$$\Delta p \Delta x \cong h \quad (۱۲۶.۱۳)$$

اما، طبق فرضیه دوبروی، تکانه وابسته به عدد موج  $k$  برابر است با:  $h k / 2\pi$ ، به طوری که

$$\Delta(h k / 2\pi) \Delta x \cong h$$

یا

$$\Delta k \Delta x \cong 2\pi \quad (۱۲۷.۱۳)$$

۱. برای دستیابی به بحث مفصلتر رجوع کنید به: Marion and Heald (Ma 80, Section 11.3 ff).  
 ۲. دو کمیت مزدوج اند، اگر ابعاد حاصلضربشان از جنس کنش باشد، یعنی: (زمان)  $\times$  (انرژی) (بخش ۱۰.۶).

۱.۱۳ تابع موج ساده شده زیر را در نظر بگیرید

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

فرض کنید که  $\omega$  و  $v$  کمیت‌هایی مختلط و  $k$  حقیقی باشد

$$\omega = \alpha + i\beta$$

$$v = u + iw$$

نشان دهید که این موج نسبت به زمان میراست. با بهره‌گیری از این واقعیت که  $k^2 = \omega^2/v^2$ ، عبارتهایی برای  $\alpha$  و  $\beta$  برحسب  $u$  و  $w$  به دست آورید. سرعت فاز را در این مورد پیدا کنید.

۲.۱۳ یک خط انتقال نیروی برق را در نظر بگیرید که دارای القایدگی یکنواخت بر یکای طول،  $L$ ، و ظرفیت یکنواخت بر یکای طول،  $C$ ، باشد. نشان دهید که جریان متناوب در چنین خطی از معادله موج پیروی می‌کند<sup>۱</sup>

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0$$

به طوری که سرعت موج عبارت است از  $v = 1/\sqrt{LC}$ .

۳.۱۳ برهم نهی دو قطار موج بینهایت بلند با بسامدهای تقریباً یکسان اما دامنه‌های متفاوت را در نظر بگیرید. نشان دهید که پدیده زنش رخ می‌دهد، اما این امواج هرگز زنش با دامنه صفر ندارند.

۴.۱۳ موج  $g(x - vt)$  را در نظر بگیرید که با سرعت  $v$  در راستای  $x$  منتشر می‌شود. دیواره صلبی در  $x = x_0$  قرار داده‌ایم. حرکت موج را به ازای  $x < x_0$  توصیف کنید.

۵.۱۳ مسئله انتشار موج در طول ریسمانی را بررسی کنید که ذراتی به جرمهای متفاوت  $m'$  و  $m''$  به طور متناوب روی آن قرار گرفته‌اند، یعنی

$$m_j = \begin{cases} m', & \text{به ازای } j \text{ زوج} \\ m'', & \text{به ازای } j \text{ فرد} \end{cases}$$

۱. این معادله، بنام معادله تلگرافی، اولین بار در سال ۱۸۷۶ توسط اولیور هویساید به دست آمد: لرد کلونین در ۱۸۵۴ تحقیقاتی درباره خطوط انتقال بدون القایدگی انجام داده بود.

نشان دهید که منحنی  $\omega-k$  در این حالت دو شاخه است، و نشان دهید که تضعیف علاوه بر بسامدهای بالاتر از شاخه بالایی بهازای بسامدهای بین دو شاخه نیز وجود دارد.

۶.۱۳ سرعت فاز  $V(k)$  و سرعت گروه  $U(k)$  را برای انتشار امواج در امتداد یک ریسمان بارگذاری شده در گستره اعداد موجی  $0 \leq k \leq \pi/d$  ترسیم کنید. نشان دهید:  $U(\pi/d) = 0$ ، در حالی که  $V(\pi/d)$  صفر نمی‌شود. تعبیر این نتیجه بر حسب چگونگی رفتار امواج چیست؟

۷.۱۳ ریسمان بینهایت بلند پیوسته‌ای را با چگالی طولی جرم  $\rho_1$  بهازای  $x < 0$  و بهازای  $x > L$  و چگالی  $\rho_2 > \rho_1$  بهازای  $0 < x < L$  در نظر بگیرید. اگر یک قطار موج نوسانی با بسامد  $\omega$  از سمت چپ بر قسمتی از ریسمان فرود آید که چگالی بیشتری دارد، شدتهای بازتابی و عبوری را در قسمتهای مختلف ریسمان پیدا کنید.  $L$  را چنان تعیین کنید که بخش اعظم عبور از قسمت چگالتر را مجاز می‌دارد. در خصوص ارتباط این مسئله با کاربرد اندود غیر بازتابی در عدسیهای اپتیکی بحث کنید.

۸.۱۳ ریسمان پیوسته بینهایت بلندی را با کاشش  $\tau$  در نظر بگیرید. جرم  $M$  در  $x = 0$  به ریسمان متصل شده است. اگر قطار موجی با سرعت  $\omega/k$  از سمت چپ فرود آید، نشان دهید که در  $x = 0$  بازتاب و عبور روی می‌دهد و ضرایب  $R$  و  $T$  از عبارتهای زیر به دست می‌آیند

$$R = \sin^2 \theta, \quad T = \cos^2 \theta$$

در اینجا

$$\tan \theta = \frac{M\omega^2}{2k\tau}$$

شرایط مرزی مربوط به مشتق تابع موجها را در  $x = 0$  دقیقاً بررسی کنید. تغییر فاز مربوط به امواج بازتابی و عبوری چقدر است؟

۹.۱۳ سری سینوسی فوریه و سری کسینوسی فوریه نماینده تابع

$$f(x) = e^x, \quad 0 < x < \pi$$

را پیدا کنید.

۱۰.۱۳ سری فوریه‌ای را بیابید که تابع زیر را نمایش دهد

$$f(x) = x^2, \quad -L < x < L$$

۱۱.۱۳ سری فوریهای را که نشان دهنده تابع زیر باشد، پیدا کنید

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 3 \end{cases}$$

به ازای تمام  $x$  ها  $f(x+3) = f(x)$

۱۲.۱۳ تابع  $f(x) = 1$  ( $0 < x < \pi$ ) را به صورت یک سری سینوسی بسط دهید و در حاصل بسط  $x = \pi/2$  را بنشانید تا نتیجه‌ای به این صورت به دست آید

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

۱۳.۱۳ تابع  $f(x)$  را که در بازه  $-\pi \leq x \leq \pi$  تعریف شده است در نظر بگیرید. چنین تابعی را می‌توان به صورت یک سری فوری که در معادله (۹۵.۱۳) داده شده است، نمایش داد. مشتق  $f(x)$  را نیز می‌توان به صورت زیر بسط داد.

$$f'(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} (A_r \cos rx + B_r \sin rx)$$

نشان دهید

$$A_0 = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)]$$

$$A_r = r b_r + \frac{\cos r\pi}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)]$$

$$B_r = -r a_r$$

که در اینجا  $a_r$  و  $b_r$  از معادلات (۹۸.۱۳) به دست آمده‌اند. از آنجا نشان دهید که  $f'(x)$  را می‌توان به کمک مشتق‌گیری جمله به جمله سری مربوط به  $f(x)$  به دست آورد، فقط در صورتی که داشته باشیم

$$f(\pi) = f(-\pi)$$

این نتیجه را با در نظر گرفتن توابع  $f_1(x) = x$  و  $f_2(x) = x^2$  نمایش دهید.

۱۴.۱۳ معادله (۱۰۷.۱۳) را به دست آورید، آنگاه  $c_s$  را به  $a_s$  و  $b_s$ ، متعلق به معادلات (۹۸.۱۳)، ربط دهید.

۱۵.۱۳ تبدیل فوریه تابع زیر را محاسبه و ترسیم کنید

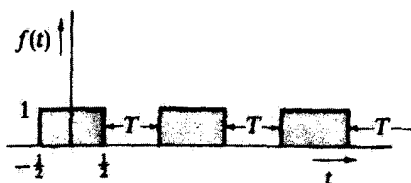
$$\Psi(x, t) = \begin{cases} 1 + \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) & \left| x - \frac{\omega}{k} t \right| < L \\ 0 & \left| x - \frac{\omega}{k} t \right| > L \end{cases}$$

نتیجه را با شکل ۶.۱۳ مقایسه کنید.

۱۶.۱۳ موج مربعی مطلوب نموده شده در شکل ۱۳.الف را در نظر بگیرید. اندازه و مدت دوام هر تپ واحد است؛ تپهای متوالی بافاصله زمانی  $T$  از هم جدا شده‌اند. یک سری مختلط فوریه به صورت زیر بنویسید

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{-i\omega_r t}$$

$T$  را واحد اختیار کنید و ضرایب فوریه را به دست آورید. نتایج را به کمک ترسیم مقادیر  $c_r$  به صورت خطوط قائم برحسب بسامد به صورت نموداری نمایش دهید. چنین نموداری عبارت است از طیف بسامد موج مربعی. حال، فرض کنید  $T \rightarrow \infty$ ، و مجدداً طیف بسامد را به دست آورید. گذر به حد یک عبارت انتگرالی برای ضرایب فوریه ضروری است. این نتایج را با یکدیگر و با شکل ۶.۱۳ مقایسه کنید.



شکل ۱۳.الف

۱۷.۱۳ بسته موجی را در نظر بگیرید که در مورد آن توزیع دامنه به صورت زیر است

$$A(k) = \begin{cases} 1 & |k - k_0| < \Delta k \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نشان دهید که تابع موج عبارت است از

$$\Psi(x, t) = \frac{\Upsilon \sin[(\omega' t - x)\Delta k]}{\omega' t - x} e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)}$$



شکل بسته موج را ترسیم کنید (برای سهولت فرض کنید:  $t = 0$ ).  
 ۱۸.۱۴ یک بسته موج با توزیع دامنه گاوسی در نظر بگیرید

$$A(k) = B \exp[-\sigma(k - k_0)^2]$$

که  $2/\sqrt{\sigma}$  برابر پهنا  $1/e$  بسته است.<sup>۱</sup> با استفاده از این تابع در مورد  $A(k)$ ، نشان دهید

$$\begin{aligned} \Psi(x, 0) &= B \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\sigma(k - k_0)^2] \exp[-ikx] dk \\ &= B \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \exp[-x^2/4\sigma] \exp[-ik_0 x] \end{aligned}$$

شکل چنین بسته موجی را ترسیم کنید. سپس،  $\omega(k)$  را به صورت سری تیلور بسط دهید؛ دو جمله اول را نگاه دارید، و از معادله بسته موج انتگرال بگیرید تا نتیجه کلی زیر را به دست آورید

$$\Psi(x, t) = B \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \exp[-(\omega'_0 t - x)^2/4\sigma] \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]$$

سرانجام، یک جمله دیگر از بسط سری تیلور مربوط به  $\omega(k)$  را اضافه کنید و نشان دهید که به جای  $\sigma$  یک کمیت مختلط نشسته است. در این حالت عبارت مربوط به پهنا  $1/e$  بسته موج را به صورت تابعی از زمان بیابید و نشان دهید که بسته با همان سرعت گروه قبلی حرکت می‌کند ولی پهناي آن در خلال حرکت گسترده می‌شود. این نتیجه را به کمک یک نمودار نشان دهید.

۱۹.۱۴ تابع توزیع طیفی لازم برای نمایش تابع موج گاوسی

$$\Psi(x, 0) = B \exp[-a^2 x^2/2]$$

را پیدا کنید.

۲۰.۱۴ تابع  $A(k)$  را که به صورت زیر تعریف شده است، در نظر بگیرید

$$A(k) = \begin{cases} 0 & k < -a \\ 1 & -a < k < a \\ 0 & k > a \end{cases}$$

۱. در نقاط  $k = k_0 \pm 1/\sqrt{\sigma}$ ، توزیع دامنه برابر  $1/e$  مقدار بیشینه  $A(k_0)$  است. به این ترتیب  $2/\sqrt{\sigma}$  همان عرض پهناي منحنی در ارتفاع  $1/e$  است.

نشان دهید که تبدیل فوریه این تابع عبارت است از

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}$$

از این نتیجه استفاده کنید و نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \pi/2 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -\pi/2 & a < 0 \end{cases}$$

(راهنمایی: فرض کنید  $k = 0$ .)

۲۱.۱۳ توابع توزیع طیفی  $A(\omega)$  مربوط به دو تابع موج زیر را به همکام نمودار مقایسه کنید

$$\Psi_a(x, t) = \begin{cases} 1 & |t| < t_1 \\ 0 & |t| > t_1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\Psi_b(x, t) = \begin{cases} 2 \left(1 - \frac{|t|}{t_1}\right) & |t| < t_1 \\ 0 & |t| > t_1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

(دو تابع موج بهنجار شده‌اند تا انتگرال زمانی یکسان داشته باشند.)

## نظریه نسبیت خاص

## ۱.۱۴ مقدمه

در بخش ۸.۲ خاطر نشان کردیم که هرگاه به ایده نیوتونی دال بر جداپذیری کامل فضا و زمان و مفهوم مطلق بودن زمان به دیده تحلیل انتقادی بنگریم، از درجه اعتبار ساقط می‌شود. شکست نهایی سیستم نیوتونی به عنوان توصیف‌کننده نهایی دینامیک ناشی از انجام چند آزمایش قاطع بود، که با کار مایکلسون و مورلی در سالهای ۱۸۸۱ تا ۱۸۸۷ به اوج خود رسید. حاصل این آزمایشها حاکی از آن بود که سرعت نور از هرگونه حرکت یکنواخت نسبی بین منبع و ناظر مستقل است. این واقعیت، توأم با متناهی بودن سرعت نور، سازماندهی بنیادی مجددی در ساختار دینامیک را طلب می‌کرد. این سازماندهی بنیادی در خلال سالهای ۱۹۰۴-۱۹۰۵ توسط هانری پوانکاره، هندریک آنتون لورنتس، و آلبرت اینشتین<sup>۱</sup> تدارک دیده شد که، به منظور ارائه توصیف سازگاری

۱. گرچه معمولاً افتخار فرمولبندی نظریه نسبیت نصیب آلبرت اینشتین (۱۸۷۹-۱۹۵۵) شده است (به هر حال، به Wh 53, Chapter 2 مراجعه کنید)، اما رسم‌الخط مقدماتی آن را قبل از ۱۹۰۴ پوانکاره و لورنتس کشف کرده بودند. اینشتین از برخی کارهای انجام شده قبلی در زمان انتشار اولین مقاله‌اش در خصوص نسبیت (۱۹۰۵) بی‌خبر بود. (دوستان اینشتین غالباً می‌گفتند: «او کم می‌خواند، ولی زیاد فکر می‌کرد.») سهم به‌سزای اینشتین در پرداختن نظریه نسبیت خاص عبارت بود از جانشین‌سازی بسیاری از فرضهای خلق‌الساعه پذیرفته شده توسط لورنتس و سایرین با دو اصل موضوع بنیادی که همه نتایج را می‌شد از آنها استنتاج کرد. [مسئله تقدم در نظریه نسبیت توسط

از واقعیتهای تجربی، نظریه نسبیت را فرمولبندی کردند. مبنای نظریه نسبیت بر دو اصل موضوع استوار است:

۱. قوانین پدیده‌های فیزیکی در تمام چارچوبهای مرجع لخت یکسان‌اند (یعنی، تنها حرکت نسبی چارچوبهای لخت را می‌توان اندازه‌گیری کرد؛ مفهوم حرکت نسبت به «سکون مطلق» بی‌معنی است).
۲. سرعت نور (در فضای آزاد)، مستقل از هر نوع حرکت نسبی منبع و ناظر، و ثابتی عمومی است.

اینستین، که از این اصول موضوع به عنوان شالوده بهره‌گرفت، موفق شد نظریه‌ای زیبا بردارد، که از لحاظ منطقی هم دقیق باشد. نظریه نسبیت پدیده‌های بسیار متنوعی را توصیف می‌کند که در سرعت‌های زیاد تحقق پیدا می‌کنند و تعبیر و تفسیر آنها در طرح نیوتونی ناممکن است. اصل موضوع ۱، که اینستین آن را اصل نسبیت نامید، اصل اساسی نظریه نسبیت به شمار می‌آید. اگر، به پیروی از اینستین، بپذیریم که معادلات ماکسول قوانین بنیادی فیزیک را تشکیل می‌دهند، آنگاه اصل موضوع ۲ یعنی قانون انتشار نور، از اصل موضوع ۱ نتیجه می‌شود. بنابر پیش‌بینی معادلات ماکسول، سرعت نور در خلاء برابر  $c$  است، و اینستین معتقد بود که در تمام چارچوبهای مرجع لخت این امر صادق است.

در اینجا به سوابق تجربی مربوط به نظریه نسبیت نمی‌پردازیم؛ چنین اطلاعاتی را اصولاً در هر کتاب درسی فیزیک جدید و در بسیاری از کتابهای مربوط به مبحث الکترودینامیک می‌توان یافت.<sup>۱</sup> اما، صحت دو اصل موضوع فوق را می‌پذیریم و برخی از پیامدهای آنها را در حوزه مکانیک مورد بررسی قرار می‌دهیم.<sup>۲</sup> در اینجا بحث خود را به نسبیت خاص محدود می‌کنیم، که در آن فقط با چارچوبهای مرجع لخت، یعنی چارچوبهایی که حرکتشان نسبت به یکدیگر یکنواخت است، سروکار داریم. بررسی کلیتر چارچوب مرجعهای شتابدار موضوع نظریه نسبیت عام است.

→ جی هولتون، 28, 627 (1960) در *Am. J. Phys.* بررسی شده است؛ نیز بنگرید به: [Am 63]. علاوه بر آن، اینستین بعداً در فرمولبندی نظریه نسبیت عام در ۱۹۱۶ سهمی اساسی داشت. نخستین مقاله او در مبحثی که برای نسبیت عام اهمیت دارد، یعنی، تأملاتی درباره اثر گرانی بر نور، در ۱۹۰۷ منتشر شد. نکته جالب این است که در سال ۱۹۲۱ جایزه نوبل را نه به خاطر سهمی که اینستین در نظریه نسبیت داشته است، بلکه به جهت کارهایش در خصوص اثر فوتوالکتریک به او اعطا کردند.

۱. می‌توان یکی از بحث‌های بسیار خوب در مورد ضرورت تجربی نظریه نسبیت را در کتاب پائوفسکی و فیلیس (Pa 62, Chapter 15) یافت.

۲. آثار نسبیتی در الکترودینامیک را می‌توان در کتاب ماریون و هیلد (Ma 80, Chapter 13) یافت.

### ۲.۱۴ ناوردایی گالیه

در مکانیک نیوتونی، مفاهیم فضا و زمان به طور کامل از یکدیگر قابل تفکیک اند؛ علاوه بر آن، زمان بنابر فرض کمیتی مطلق است که می توان آن را مستقل از چارچوب مرجع به دقت تعریف کرد. این فرضها، به ناوردایی قوانین مکانیک تحت تبدیل مختصات از نوعی می انجامند که در زیر توضیح می دهیم. دو چارچوب مرجع لخت  $K$  و  $K'$  را در نظر بگیرید که در امتداد محورهای  $x_1$  و  $x'_1$  با سرعت نسبی یکتاخذ  $v$  حرکت می کنند (شکل ۱.۱۴). تبدیل مختصات نقطه ای از یک دستگاه به دستگاه دیگر آشکارا عبارت است از

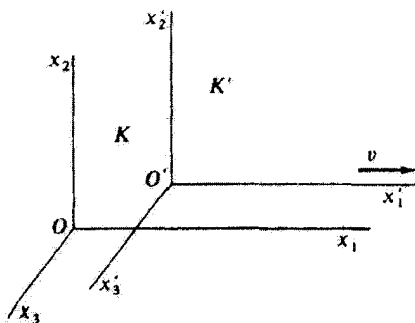
$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 - vt \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned} \right\} \quad (۱.۱۴ \text{ الف})$$

بعلاوه داریم

$$t' = t \quad (۱.۱۴ \text{ ب})$$

معادلات (۱.۱۴)، بنابر تعریف، عبارت اند از تبدیل گالیه. بعلاوه، جزء طول در دو دستگاه یکسان است و از رابطه زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} ds^{\nu} &= \sum_j dx_j^{\nu} \\ &= \sum_j dx_j^{\nu} = ds'^{\nu} \end{aligned} \quad (۲.۱۴)$$



شکل ۱.۱۴

این واقعیت که قوانین نیوتون نسبت به تبدیل گالیله ناوردایند، به اصل نسبیت نیوتونی یا ناوردایی گالیله مشهور است. معادلات حرکت نیوتونی در دو دستگاه عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} F_j &= m\ddot{x}_j \\ &= m\ddot{x}'_j = F'_j \end{aligned} \quad (۳.۱۴)$$

در این صورت شکل قانون حرکت نسبت به تبدیل گالیله‌ای ناورداست. هر چند که جمله‌ها تک‌تک ناوردا نیستند، ولی طبق طرح یکسانی تبدیل می‌شوند و به آنها هموردا می‌گویند.

به آسانی می‌توان پی برد که تبدیل گالیله با اصل موضوع ۲ ناسازگار است. یک تپ نوری ناشی از یک چراغ چشمک‌زن را در نظر بگیرید که در چارچوب  $K'$  قرار دارد. تبدیل سرعت را از معادله (۱.۱۴ الف) به دست می‌آوریم و تپ نوری را فقط در امتداد  $x_1$  در نظر می‌گیریم

$$\dot{x}'_1 = \dot{x}_1 - v \quad (۴.۱۴)$$

در دستگاه  $K'$  سرعت را  $\dot{x}'_1 = c$  اندازه‌گیری می‌کنیم؛ بنابراین معادله (۴.۱۴) حاکی از آن است که سرعت تپ نوری عبارت است از  $\dot{x}_1 = c + v$ ، که آشکارا با اصل موضوع ۲ تناقض دارد.

### ۳.۱۴ تبدیلات لورنتس

بنابر پیش‌بینی اصل ناوردایی گالیله، سرعت نور در دو چارچوب مرجع لخت، که نسبت به یکدیگر حرکت کنند، متفاوت است. این نتیجه با اصل موضوع دوم نسبیت تناقض دارد. بنابراین، باید قوانین تبدیل جدیدی پیدا کنیم که قوانین فیزیکی را از لحاظ نسبیتی به صورت هموردا در آورد. چنین قانون تبدیلی عبارت است از همان تبدیل لورنتس. کاربرد اولیه تبدیل لورنتس بر تکوین نظریه نسبیت اینشتینی مقدم بوده است،<sup>۱</sup> اما این تبدیل از اصل اساسی نسبیت نیز حاصل می‌شود؛ بر این مینا در بحث زیر آن را استنتاج می‌کنیم.

هنگامی که دستگاه‌های  $K$  و  $K'$  منطبق‌اند، اگر یک تپ نوری از یک چراغ چشمک‌زن از مبدأ مشترک آنها (شکل ۱.۱۴) گسیل شود، در آن صورت بر طبق اصل موضوع ۲ جبهه‌های

۱. این تبدیل اولین بار در سال ۱۹۰۴، توسط هندریک آنتون لورنتس (۱۸۵۳-۱۹۲۸) برای توضیح برخی پدیده‌های الکترومغناطیسی به عنوان اصل پذیرفته شد، اما فرمولهای مربوط به آن را لازموور قبل از سال ۱۹۰۰ به دست آورده بود. تعمیم کامل تبدیل تا وقتی که اینشتین نتیجه را استخراج نکرد، تحقق نیافت. در واقع ر. فویگت اولین کسی بود که در ۱۸۸۷ در بحثی مربوط به پدیده‌های نوسانی این معادلات را به کار برد.

موج مشاهده شده در دو دستگاه را باید معادلات زیر توصیف کنند<sup>۱</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^2 x_j^2 - c^2 t^2 &= 0 \\ \sum_{j=1}^2 x_j'^2 - c^2 t'^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

مشاهده می‌کنیم که معادلات (۵.۱۴) را، که با دو اصل موضوع نظریه نسبیت سازگارند، نمی‌شود با تبدیلات گالیله، معادلات (۱.۱۴)، وفق داد. بنابر تبدیل گالیله تشکیل جبهه موج نور کروی در یک دستگاه مجاز است، اما ایجاب می‌کند که مرکز جبهه موج کروی در دستگاه دیگر نسبت به دستگاه اول با سرعت  $v$  حرکت کند. تعبیر معادلات (۵.۱۴)، برطبق اصل موضوع ۲، عبارت است از اینکه به نظر هر ناظر مرکز جبهه موج کروی او به هنگام گسترش ثابت و در مبدأ مختصات مربوط به خودش واقع است.

در اینجا با یک معما روبرویم. یا باید دو اصل موضوع نسبیت را کنار بگذاریم، و یا تبدیل گالیله را. شواهد تجربی فراوانی، از جمله آزمایش مایکلسون-مورلی و ابیراهی نور ستاره‌ای، مستلزم این دو اصل موضوع هستند. از سوی دیگر، اعتقاد به تبدیل گالیله از طریق تجربیات روزمره قویاً در ذهن ما جا افتاده است. در طی قرن‌ها تبدیل گالیله نتایج رضایت‌بخشی را، از جمله نتایجی که در فصل‌های قبلی این کتاب آمده‌اند، ارائه داده‌است. سهم بسزای اینشتین این بود که پی برد تبدیل گالیله تقریباً صحیح است، ولی ما باید مفاهیم مکان و زمان را مجدداً بررسی کنیم.

به این نکته توجه کنید که در معادلات (۵.۱۴) فرض نمی‌کنیم:  $t = t'$ . هر یک از دو دستگاه  $K$  و  $K'$ ، ساعت متعلق به خودش را دارد، و فرض می‌کنیم که ساعت را بتوان در هر نقطه‌ای از فضا مستقر کرد. این ساعت‌ها همگی یکسان‌اند، به‌طور یکسان کار می‌کنند، و همزمان‌اند. از آنجا که چراغ چشمک‌زن وقتی خاموش می‌شود که دو مبدأ برهم منطبق باشند، و دستگاه‌ها نسبت به یکدیگر فقط در راستای  $x_1$  حرکت می‌کنند، از طریق مشاهده مستقیم داریم

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

در لحظه  $t = t' = 0$ ، وقتی که چراغ خاموش می‌شود، حرکت مبدأ  $O'$  دستگاه  $K'$  توسط دستگاه  $K$  به این ترتیب اندازه‌گیری می‌شود

$$x_1 - vt = 0 \quad (7.14)$$

و در دستگاه  $K'$ ، حرکت  $O'$  عبارت است از

$$x'_1 = 0 \quad (8.14)$$

در لحظه  $t = t' = 0$  داریم:  $x'_1 = x_1 - vt$ ، اما می‌دانیم که معادله (۱.۱۴ الف) نادرست است. حال ساده‌ترین تبدیل بعدی را در نظر بگیرید، یعنی

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \quad (9.14)$$

که در اینجا  $\gamma$  ثابتی است که ممکن است به  $v$  یا ثابتهای دیگری بستگی داشته باشد، ولی نه به مختصات  $x_1$ ،  $x'_1$ ،  $t$  یا  $t'$ . معادله (۹.۱۴) معادله‌ای خطی است و به اعتبار آن اطمینان پیدا می‌کنیم که هر رویدادی در  $K$  متناظر است با یک و فقط یک رویداد در  $K'$ . اگر بتوانیم به تبدیلی دست پیدا کنیم که با تمامی نتایج تجربی سازگار باشد، در آن صورت از این فرض اضافی آخری دفاع خواهیم کرد. توجه داشته باشید که برای سازگاری با نتایج کلاسیکی که در فصلهای پیشین مورد بحث قرار گرفتند،  $\gamma$  باید معمولاً خیلی به ۱ نزدیک باشد.

برای توصیف حرکت مبدأ  $O$  دستگاه  $K$  در هر دو دستگاه  $K$  و  $K'$ ، می‌توانیم از استدلالهای قبلی بهره‌گیریم و برسیم به

$$x_1 = \gamma'(x'_1 + vt') \quad (10.14)$$

که در اینجا ناگزیر فقط سرعتهای نسبی دو دستگاه را تغییر دادیم.

اصل موضوع ۱ ایجاب می‌کند که قوانین فیزیک در هر دو دستگاه مختصات یکسان باشند، به طوری که  $\gamma' = \gamma$ .  $x'_1$  را از معادله (۹.۱۴) در معادله (۱۰.۱۴) می‌نشانیم و می‌توانیم معادله باقیمانده را بر حسب  $t'$  حل کنیم

$$t' = \gamma t + \frac{x_1}{\gamma v} (1 - \gamma^2) \quad (11.14)$$

اصل موضوع ۲ ایجاب می‌کند که سرعت نور اندازه‌گیری شده در هر دو دستگاه یکسان باشد. بنابراین در هر دو دستگاه معادلات مشابهی برای مکان تپ نوری چراغ چشمک‌زن داریم

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= ct \\ x'_1 &= ct' \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$



پس از انجام عملیات جبری در معادلات (۹.۱۴) تا (۱۲.۱۴) می‌رسیم به (مسئله ۱.۱۴ را ببینید):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (13.14)$$

اکنون می‌توانیم معادلات تبدیل کامل را به صورت زیر بنویسیم

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ t' &= \frac{t - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (14.14)$$

این معادلات را به افتخار فیزیکدان هلندی ه.آ. لورنتس تبدیل لورنتس (یا لورنتس-اینشتین) می‌گویند. لورنتس برای اولین بار نشان داد که به منظور یکسان بودن قوانین الکترومغناطیس در تمام چارچوبهای مرجع لخت، این معادلات ضروری‌اند. اینشتین نشان داد که این معادلات برای تمام قوانین فیزیک مورد نیازند.

می‌توان تبدیل وارونه را از طریق نشان دادن  $-v$  به جای  $v$  و تعویض تمام کمیت‌های پریم‌دار و بدون پریم در معادلات (۱۴.۱۴) به دست آورد.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x_2 &= x'_2 \\ x_3 &= x'_3 \\ t &= \frac{t' + \frac{vx'_1}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (15.14)$$

در صورت لزوم، هرگاه  $v \rightarrow 0$  (یا  $c \rightarrow \infty$ )، این معادلات به معادلات گالیله [معادلات (۱.۱۴)] تبدیل می‌شوند.

در الکترودینامیک، میدانها با سرعت نور منتشر می‌شوند، از این رو تبدیلهای گالیله هرگز مجاز نیستند. در واقع، این نکته که معادلات میدان الکترومغناطیسی (معادلات ماکسول) نسبت به تبدیلات گالیله هموردا نبودند یکی از عوامل عمده‌ای بود که به ضرورت نظریه‌ای جدید پی ببرند. موضوع خارق‌العاده این است که معادلات ماکسول، که مجموعه‌ی کاملی از معادلات مربوط به میدان

الکترومغناطیسی به شمار می‌آیند و نسبت به تبدیلات لورنتس هموردانند، خیلی بیشتر از مطرح شدن نظریه نسبیت، از طریق تجربی استنتاج شده بودند.

سرعت‌های اندازه‌گیری شده در هر یک از دستگاه‌ها را با  $u$  نشان می‌دهیم.

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \frac{dx_i}{dt} \\ u'_i &= \frac{dx'_i}{dt'} \end{aligned} \right\} \quad (۱۶.۱۴)$$

با استفاده از معادلات (۱۴.۱۴)، می‌رسیم به

$$u'_1 = \frac{dx'_1}{dt'} = \frac{dx_1 - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx_1}$$

$$u'_1 = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}} \quad (الف \ ۱۷.۱۴)$$

به همین ترتیب، داریم

$$u'_2 = \frac{u_2}{\gamma \left(1 - \frac{u_1 v}{c^2}\right)} \quad (ب \ ۱۷.۱۴)$$

$$u'_3 = \frac{u_3}{\gamma \left(1 - \frac{u_1 v}{c^2}\right)} \quad (ج \ ۱۷.۱۴)$$

اکنون می‌توانیم مستقیماً تعیین کنیم که آیا اصل موضوع ۲ صادق است یا خیر. ناظری در دستگاه  $K$  سرعت تب نوری ناشی از چراغ چشمک‌زن را در راستای  $x_1$  برابر  $u_1 = c$  اندازه‌گیری می‌کند.

به اتکای معادله (الف ۱۷.۱۴) ناظری در دستگاه  $K'$  سرعت را چنین اندازه‌گیری می‌کند

$$u'_1 = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c \left( \frac{c - v}{c - v} \right) = c$$

که بنابر الزام اصل موضوع ۲، از سرعت نسبی دستگاه  $v$ ، مستقل است.

### مثال ۱.۱۴

با استفاده از تبدیل لورنتس، انقباض نسبیتی طول را محاسبه کنید.<sup>۱</sup>

۱. انقباض طول در راستای حرکت را در سال ۱۸۹۲ ج.ف. فیتزجرالد (۱۸۵۱-۱۹۰۱) به عنوان توضیح ممکن برای آزمایش باد آتری مایکلسون-مورلی پیشنهاد کرد. لورنتس تقریباً بی‌درنگ این فرضیه را پذیرفت و از آن در نظریه الکترودینامیک خود بهره گرفت.

حل: میله‌ای به طول  $l$  در امتداد محور  $x_1$  در چارچوب لخت  $K$  قرار گرفته است. ناظر دیگری (مطابق شکل ۱۸.۱۴) در دستگاه  $K'$  که با سرعت یکنواخت  $v$  در امتداد محور  $x_1$  حرکت می‌کند، با تعیین اختلاف بین مختصه‌های دو سر میله در یک زمان معلوم  $t'$ ، یعنی  $x'_1(2) - x'_1(1)$ ، طول میله را در دستگاه مختصات خود اندازه‌گیری می‌کند. برطبق معادلات تبدیل [معادلات (۱۴.۱۴)] داریم

$$x'_1(2) - x'_1(1) = \frac{[x_1(2) - x_1(1)] - v[t(2) - t(1)]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (18.14)$$

که در اینجا  $l = x_1(2) - x_1(1)$  توجه داشته باشید که زمانهای  $t(1)$  و  $t(2)$  مربوط به مشاهده در سیستم  $K$  هستند؛ این زمانها با زمانهایی که ناظر  $K'$  میله را اندازه‌گیری می‌کند، متناظر نیستند. در واقع، چون  $t'(2) = t'(1)$ ، از معادلات (۱۴.۱۴) نتیجه می‌گیریم

$$t(2) - t(1) = [x_1(2) - x_1(1)] \frac{v}{c^2}$$

بنابراین طولی را که ناظر در دستگاه  $K'$  اندازه‌گیری می‌کند، یعنی  $l'$ ، عبارت است از

$$l' = x'_1(2) - x'_1(1)$$

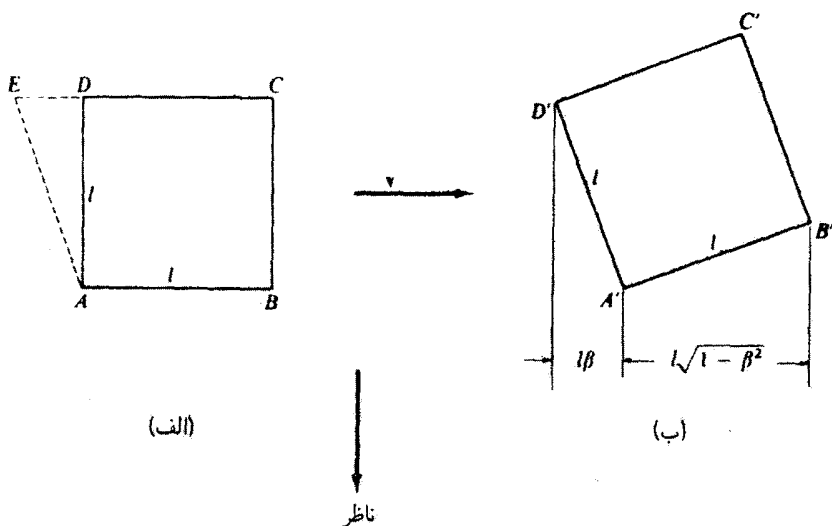
حال معادله (۱۸.۱۴) می‌انجامد به

$$l' = l \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \text{انقباض طول} \quad (19.14)$$

بدینسان، از نظر ناظری که نسبت به جسمی در حرکت است، ابعاد جسم متحرک در راستای حرکت با ضریب  $\sqrt{1 - \beta^2}$  منقبض می‌شود، که در اینجا،  $\beta \equiv v/c$ .

یکی از پیامدهای جالب انقباض طول فیتز جرال-لورنتس را در ۱۹۵۹ جیمز ترل گزارش داده است.<sup>۱</sup> مکعبی به ضلع  $l$  را در نظر بگیرید که نسبت به ناظری که در فاصله دوری قرار گرفته با سرعت یکنواخت  $v$  حرکت می‌کند. شکل ۲۰.۱۴ (الف) تصویر مکعب را بر صفحه حاوی بردار سرعت  $v$  و ناظر نشان می‌دهد. مکعب چنان حرکت می‌کند که ضلع  $AB$  آن بر خط دید ناظر عمود است. می‌خواهیم تعیین کنیم که ناظر چه «می‌بیند»؛ یعنی، در یک زمان معین در چارچوب

۱. مقاله زیر را ببینید



شکل ۲.۱۴

مرجع در حال سکون ناظر، می‌خواهیم آرایش نسبی رأسهای  $A, B, C, D$  را مشخص کنیم. بنابر دیدگاه سنتی (که بیش از ۵۰ سال بدون منازع بر اذهان حاکم بود!) تنها اثر حرکت عبارت است از کوتاه شدن اضلاع  $AB$  و  $CD$  به طوری که ناظر مکعب تغییر شکل یافته‌ای را به ارتفاع  $l$  و طول  $l\sqrt{1-\beta^2}$  می‌بیند. ترل به این نکته اشاره می‌کند که در این تعبیر برخی از واقعیتها نادیده گرفته می‌شود: برای اینکه نور ناشی از رأسهای  $A$  و  $D$  در یک لحظه به ناظر برسد، نور ناشی از  $D$ ، که مسافتی به اندازه  $l$  را بیشتر از نور ناشی از  $A$  طی می‌کند، باید وقتی گسیل شده باشد که رأس  $D$  در مکان  $E$  بوده است. طول  $DE$  عبارت است از:  $l\beta = v(l/c)$ . بنابراین، ناظر نتهها ضلع  $AB$ ، که عمود بر خط دید است، بلکه ضلع  $AD$  را نیز، که با خط دید موازی است، می‌بیند. بعلاوه، طول ضلع  $AB$  به همان روال عادل به  $l\sqrt{1-\beta^2}$  کوتاه می‌شود. نتیجه نهایی [شکل ۲.۱۴ (ب)] دقیقاً متناظر است با نمایی که ناظر می‌داشت اگر مکعب تحت زاویه‌ای به اندازه  $\beta^{-1} \sin^{-1}$  چرخیده بود. بنابراین، مکعب تغییر شکل نمی‌دهد؛ بلکه دستخوش یک چرخش ظاهری می‌شود. به همین ترتیب، این حکم متداول<sup>۱</sup>، که کره متحرک بیضیوار به نظر می‌آید نادرست

۱. مثلاً رجوع کنید به:

است، بلکه باز هم کره به نظر می‌رسد.<sup>۱</sup>

### مثال ۲.۱۴

با بهره‌گیری از تبدیل لورنتس اثر اتساع زمان را تعیین کنید.

حل: ساعت ثابتی را در مکان معین ( $x_1$ ) در دستگاه  $K$  در نظر بگیرید که سیگنالهایی را با فاصله زمانی زیر می‌فرستد

$$\Delta t = t(2) - t(1)$$

طبق تبدیل لورنتس [معادلات (۱۴.۱۴)], ناظری در دستگاه متحرک  $K'$  یک فاصله زمانی  $\Delta t'$  را (با همان ساعت) اندازه‌گیری می‌کند

$$\begin{aligned} \Delta t' &= t'(2) - t'(1) \\ &= \frac{\left[ t(2) - \frac{vx_1(2)}{c^2} \right] - \left[ t(1) - \frac{vx_1(1)}{c^2} \right]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

چون  $x_1(2) = x_1(1)$  زیرا ساعت در دستگاه  $K$  ثابت است، داریم

$$\Delta t' = \frac{t(2) - t(1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \quad (20.14)$$

به این ترتیب، به‌نظر ناظری که نسبت به ساعت در حرکت است، فاصله زمانی طولانی‌تر می‌آید. این حکم شالوده عبارت «ساعت‌های متحرک کندتر کار می‌کنند» به‌شمار می‌آید. چون فاصله زمانی اندازه‌گیری شده روی ساعت متحرک طولانی‌تر می‌شود، ساعت واقعاً کندتر کار می‌کند. توجه داشته باشید که ساعت در دستگاه  $K$  ثابت است،  $x_1(1) = x_1(2)$ ، ولی نه در دستگاه  $K'$ ، یعنی:

$$x'_1(1) \neq x'_1(2)$$

۱. بحث جالبی دربارهٔ چرخشهای ظاهری در سرعت‌های بالا توسط وایسکوف در مقاله زیر ارائه شده است:

استدلال ارائه شده در مثال قبل را می‌توان معکوس و ساعت را در دستگاه  $K'$  ثابت کرد. به همین نتیجه می‌رسیم؛ ساعت متحرک کندتر کار می‌کند. به این اثر اتساع زمان گفته می‌شود. توجه به این مطلب که سیستم فیزیکی تأثیری در نتیجه ندارد، حائز اهمیت است. این اثر به طور مشابه برای دیپازن، ساعت شنی، بلور کوارتز، و ضربان قلب پیش می‌آید. موضوع عبارت است از مسئله همزمانی. رویدادهای همزمان در یک دستگاه ممکن است در دستگاه دیگری که نسبت به دستگاه اولی در حرکت است، همزمان نباشند. فضا و زمان به طور پیچیده‌ای درهم بافته شده‌اند. بعداً به این مطلب باز می‌گردیم.

زمان اندازه‌گیری شده روی یک ساعت ثابت در یک دستگاه که هنگام وقوع دو رویداد را نشان می‌دهد، زمان عادی می‌نامیم و آن را با نماد  $\tau$  نشان می‌دهیم. مثلاً وقتی یک ساعت که در دستگاه  $K$  ثابت است در هر دو رویداد،  $x(1)$  و  $x(2)$ ، حضور داشته باشد آن وقت:

$$\Delta t = \Delta \tau \quad \text{معادله (۲۰.۱۴) به صورت زیر در می‌آید}$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta \tau \quad (21.14)$$

توجه کنید که زمان عادی همواره کمترین اختلاف زمانی قابل اندازه‌گیری بین دو حادثه است. ساعت‌های متحرک همواره فاصله زمانی طولانیتری را اندازه‌گیری می‌کنند.

#### ۴.۱۴ تحقیق تجربی نظریه خاص

نظریه نسبیت خاص مشکلات موجود در نورشناخت و الکترومغناطیس در سالهای پیش از ۱۹۰۰ را توضیح می‌دهد. مثلاً دشواریهای مربوط به ابیراهی ستاره‌ای و آزمایش مایکلسون-مورلی، با فرض عدم وجود اتر و الزام تبدیل لورنتس حل می‌شود.

ولی درباره این پیش‌بینیهای جدید و تکان دهنده نظریه خاص انقباض طول و اتساع زمان چه می‌توان گفت؟ در آزمایشگاههای شتابدهنده مربوط به فیزیک هسته‌ای و ذرات، باید ملاحظات نسبیتی را منظور کنند؛ در این آزمایشگاهها که ذرات را تا سرعتهایی نزدیک به سرعت نور شتاب می‌دهند، هر روزه این مباحث را عنوان می‌کنند. آزمایشهای دیگری را می‌توان با پدیده‌های طبیعی انجام داد. دو آزمایش از این نوع را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

وقتی پرتوهای کیهانی وارد جو خارجی (بیرونیترین لایه جوی زمین) می‌شوند، با ذرات برهم‌کنش پیدا می‌کنند و رگبار کیهانی را به وجود می‌آورند. تعداد زیادی از ذرات موجود در این رگبارها مزونهای  $\pi$  هستند، که به ذرات دیگری به نام میون وامی‌باشند. میونها نیز ناپایدارند و بنا بر قانون واپاشی پرتوزا،  $N = N_0 \exp(-0.693t/t_{1/2})$ ، وامی‌باشند، که در اینجا  $N_0$  و  $N$  به ترتیب تعداد میونها

در لحظه‌های  $t = 0$  و  $t$  و  $t_1/2$  نیمه عمر میون است. به هر حال، چندان میون به سطح زمین می‌رسد که بتوانیم آنها را به آسانی آشکارسازی کنیم.

فرض کنید که آشکارسازی را بر فراز کوهی به ارتفاع  $5000$  متر نصب کنیم و تعداد میونهایی را که با سرعت تقریبی  $v = 0.98c$  در حرکت اند، بشماریم. در مدت زمانی معین،  $10^6$  میون را می‌شماریم. می‌دانیم که نیمه عمر میونها در چارچوب ساکن خودشان (دستگاه  $K'$ )  $10^{-6} \times 3.1$  ثانیه است. آشکارساز را به سطح دریا منتقل و تعداد میونهای آشکارسازی شده (که در مورد آنها:  $v = 0.98c$ ) را در همان مدت زمان قبلی اندازه‌گیری می‌کنیم. چه نتیجه‌ای را از این شمارش انتظار داریم؟ اگر با روند کلاسیک عمل کنیم، میونهایی که با سرعت  $0.98c$  حرکت می‌کنند مسافت  $5000$  متر را در  $10^{-5} \times 1.7$  ثانیه می‌پیمایند، و طبق قانون واپاشی پرتوزا در پرواز از ارتفاع  $5000$  متر به سطح دریا باید  $10^4 \times 2.24$  میون سالم باقی بمانند. اما اندازه‌گیریهای تجربی حاکی از آن است که  $10^5 \times 4.7$  میون باقی می‌مانند، که  $21$  مرتبه بیشتر است.

این پدیده باید از دیدگاه نسبیته مورد بررسی قرار گیرد. میونهای واپاشان نسبت به آزمایشگر ساکن بر زمین با سرعت زیادی در حرکت اند. بنابراین، مشاهده می‌کنیم که ساعت میونها کندتر کار می‌کند. در چارچوب ساکن میونها، مدت پرواز  $10^{-5} \times 1.7 = \Delta t$  ثانیه نیست بلکه  $\Delta t/\gamma$  است. به ازای  $v = 0.98c$ ، داریم:  $\gamma = 5$ ، و بنابراین زمان پرواز را روی ساعتی ثابت در دستگاه میونها برابر  $10^{-6} \times 3.4$  ثانیه اندازه‌گیری می‌کنیم. بنابراین پیش‌بینی قانون واپاشی پرتوزا  $10^5 \times 4.68$  میون دست نخورده باقی می‌مانند، که به مقدار اندازه‌گیری ما خیلی نزدیکتر است. انجام آزمایشی مشابه با این آزمایش، پیش‌بینی اتساع زمان را محقق ساخت.<sup>۱</sup>

### مثال ۳.۱۴

واپاشی میونی را که هم‌اکنون در خصوص آن بحث کردیم، از دیدگاه ناظری بررسی کنید که با میون حرکت می‌کند.

۱. گزارش این آزمایش توسط ب. راسی و د. ب. هال طی مقاله‌ای در

*Phys. Rev.*, **59**, 223(1941).

انتشار یافت. فیلمی به نام «اتساع زمان-آزمایشی با مزونهای  $\mu$ » (میو واقعاً مزون نیست و این نام ریشه تاریخی دارد.) توسط د. ه. فریش و ژ. ه. اسمیت تهیه شده است. همچنین رجوع کنید به مقاله د. ه. فریش و ژ. ه. اسمیت در:

*Am. J. Phys.*, **31**, 342(1963)

حل: نیمه عمر میون بر طبق ساعت خودش  $10^{-6} \times 3.1$  ثانیه است. اما ناظری که همراه با میون در حرکت است، فاصله بین قلّه کوه و سطح دریا را  $5000$  متر اندازه گیری نمی کند. از دیدگاه این ناظر، این فاصله فقط  $1000$  متر است. میون با سرعت  $0.98c$  فاصله  $1000$  متر را فقط در  $10^{-6} \times 3.4$  ثانیه می پیماید. ناظری در دستگاه میون، در توافق با ناظر واقع بر روی زمین، پیش بینی می کند که  $10^5 \times 4.68$  میون دست نخورد باقی می ماند. ■

واپاشی میون یکی از نمونه های بسیار بارز پدیده های طبیعی است که می توان آن را در دو دستگاه متحرک نسبت به یکدیگر توصیف کرد. یکی از ناظرها می بیند که زمان اتساع پیدا می کند و ناظر دیگر شاهد انقباض طول است. هر چند که، هر یک نتیجه ای را پیش بینی می کند که با آزمایش سازگار است.

در سال ۱۹۷۲، دو فیزیکدان امریکایی، ژ. سی. هافلر و ریچارد فی. کیتینگ، تأیید حتی بی واسطه تر نسبیت خاص را گزارش دادند.<sup>۱</sup> آنها از چهار ساعت اتمی سزیم فوق العاده دقیق استفاده کردند. دو ساعت را با هواپیماهای جت تجاری پروازهای عادی به دور دنیا فرستادند، یکی به سمت شرق و دیگری به سمت غرب؛ دو تا ساعت دیگر در یک دستگاه ثابت (زمین) در رصدخانه نیروی دریایی ایالات متحده باقی ماندند. بسامد یکی از گذرهای فوق ریز کاملاً مشخص در حالت پایه  $^{133}\text{Cs}$ ،  $9192631770$  هرتز است و می توان از آن برای اندازه گیری (و حتی تعریف) دقیق یک دوره زمانی بهره برد.

زمان اندازه گیری شده روی دو ساعت متحرک با همان زمان روی دو ساعت مرجع مقایسه شد. سفر به سوی شرق  $654$  ساعت به طول انجامید که شامل  $412$  ساعت پرواز می شد. سفر به غرب، یک هفته بعد،  $803$  ساعت طول کشید که  $486$  ساعت پرواز را شامل می شد. به علت چرخش سریع زمین و به علت اثر گرانشی ناشی از نظریه نسبیت عام، پیش بینیها پیچیده اند.

در صورتی که زمین نمی چرخید، می توانستیم از پدیده مورد انتظار، با چشمپوشی از تصحیهای پیشنهادی و محاسبه اختلاف زمان درکی نسبی به دست آوریم. محیط زمین در حدود  $4 \times 10^7$  متر و سرعت هواپیمای جت معمولی تقریباً  $300$  متر بر ثانیه است. ساعت ثابت روی زمین زمان پرواز،  $T_0$ ، را چنین اندازه گیری می کند

۱. مرجع زیر را ببینید:



$$T = \frac{4 \times 10^4 \text{m}}{300 \text{m/s}} = 1,33 \times 10^5 \text{s} (\approx 37 \text{h}) \quad (22.14)$$

چون ساعت متحرک کندتر کار می‌کند، ناظر زمینی خواهد گفت که ساعت متحرک فقط زمان  $T = T_0 \sqrt{1 - \beta^2}$  را اندازه می‌گیرد. اختلاف زمان عبارت است از

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_0 - T = T_0 (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \\ &\approx \frac{1}{2} \beta^2 T_0. \end{aligned} \quad (23.14)$$

که در اینجا فقط جمله‌های اول و دوم مربوط به بسط سری  $\sqrt{1 - \beta^2}$  را به این علت که  $\beta^2$  خیلی کوچک است، نگه داشته‌ایم

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2} \left( \frac{300 \text{m/s}}{3 \times 10^8 \text{m/s}} \right)^2 (1,33 \times 10^5 \text{s}) \\ &\approx 6,65 \times 10^{-8} \text{s} = 66,5 \text{ns} \end{aligned} \quad (24.14)$$

این اختلاف زمانی بیشتر از عدم قطعیت در اندازه‌گیری است. توجه کنید که در این حالت ساعت ثابت در واقع زمانی را بر حسب ثانیه اندازه می‌گیرد که از زمان اندازه‌گیری شده توسط ساعت متحرک طولانیتر است. به نظر می‌رسد که این عبارت با اظهار نظر قبلی تفاوت دارد [معادله (21.14)] و بحث مربوط را ببینید]. اما فاصله‌ی زمانی که در معادله (21.14) به آن مراجعه می‌کنیم، همانا فاصله‌ی بین دو تیک است، که در این حالت عبارت است از گذری در  $^{133}\text{Cs}$ ، که ما آن را بر حسب ثانیه محاسبه می‌کنیم. باید به‌خاطر داشت که ساعت‌های متحرک کندتر کار می‌کنند، به‌طوری که اختلاف زمانی اندازه‌گیری شده بر حسب ثانیه تعداد کمتری تیک و طبق تعریف ثانیه، تعداد کمتری ثانیه را در بردارد.

پیش‌بینیها و مشاهدات واقعی برای اختلاف زمانی عبارت‌اند از

مشاهده	پیش‌بینی	سفر
$-59 \pm 10 \text{ns}$	$-40 \pm 23 \text{ns}$	به سمت شرق
$273 \pm 7 \text{ns}$	$275 \pm 21 \text{ns}$	به سمت غرب

باز هم نظریه نسبیت خاص در محدوده عدم قطعیت‌های تجربی اثبات می‌شود. علامت منفی حاکی از آن است که زمان روی ساعت متحرک کمتر از ساعت مرجع ثابت است. ساعت‌های متحرک در

سفر به سمت شرق زمان از دست می‌دهند (کنندتر کار می‌کنند) و در سفر به سمت غرب زمان کسب می‌کنند (تندتر کار می‌کنند). این اختلاف ناشی از چرخش زمین است، و برای نکته دلالت دارد که ساعت‌های پرنده واقعاً تندتر و یا کندتر از ساعت‌های مرجع روی زمین کار می‌کنند. اختلاف زمانی رویهمرفته مثبت نتیجه اثر پتانسیل گرانشی است (که در اینجا در این خصوص بحثی به میان نمی‌آوریم).

در اینجا از میان آزمایش‌های بسیاری که درستی نظریه نسبیت خاص را محقق می‌کنند، ما فقط دو آزمایش را به اجمال توصیف کردیم. هیچ اندازه‌گیری تجربی شناخته شده ناسازگاری با نظریه نسبیت خاص وجود ندارد. نظریه اینشتین، از این بابت، تا امروز از بونه آزمایش سربلند بیرون آمده است.

#### ۵.۱۴ اثر دوپلر نسبیتی

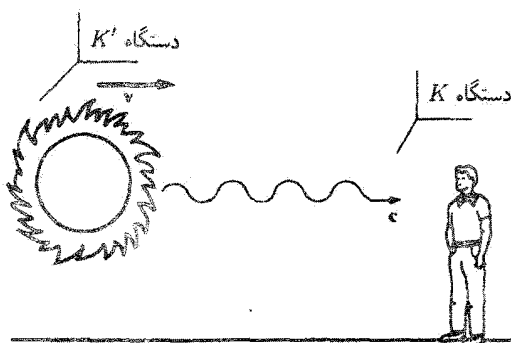
اثر دوپلر در حوزه صوت با افزایش گام صدا در هنگام نزدیکی منبع به گیرنده و کاهش گام صدا هنگام دوری منبع از گیرنده، بروز می‌کند. تغییر در بسامد صوت به این امر بستگی دارد که منبع متحرک باشد یا گیرنده. ظاهراً این اثر از اصل موضوع ۱ نظریه نسبیت تخطی می‌کند، تا اینکه پی می‌بریم به دلیل آنکه برای امواج صوتی محیطی (مثلاً هوا یا آب) وجود دارد که امواج در آن منتشر می‌شوند، چارچوب مخصوصی موجود است. اما، در مورد نور چنین محیطی وجود ندارد. در این زمینه تنها حرکت نسبی منبع و گیرنده بامعنی است، و بنابراین تفاوت‌هایی بین اثر دوپلر نسبیتی برای نور و اثر دوپلر عادی برای صوت انتظار داریم.

یک چشمه نور (مثلاً یک ستاره) و گیرنده‌ای را در نظر بگیرید که با سرعت نسبی  $v$  به هم نزدیک می‌شوند [شکل ۳.۱۴ (الف)]. ابتدا فرض کنید که گیرنده در دستگاه  $K$  ساکن باشد و چشمه نور در دستگاه  $K'$  با سرعت  $v$  به سوی گیرنده حرکت می‌کند. مطابق اندازه‌گیری گیرنده، چشمه در مدت زمان  $\Delta t$  تعداد  $n$  موج گسیل می‌کند. در خلال همان مدت  $\Delta t$ ، مسافت کل بین چشمه و عقب موج عبارت است از

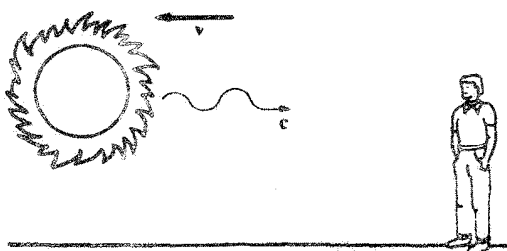
$$c\Delta t - v\Delta t = \text{طول قطار موج} \quad (25.14)$$

پس، طول موج به این قرار خواهد بود

$$\lambda = \frac{c\Delta t - v\Delta t}{n} \quad (26.14)$$



(الف) چشمه و گیرنده به هم نزدیک می‌شوند



(ب) چشمه و گیرنده از هم دور می‌شوند

شکل ۳.۱۴

و بسامد عبارت است از

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{cn}{c\Delta t - v\Delta t} \quad (27.14)$$

از دیدگاه منبع،  $n$  موج با بسامد  $\nu$  در خلال زمان عادی  $\Delta t'$  گسیل می‌شود

$$n = \nu \cdot \Delta t' \quad (28.14)$$

این زمان عادی  $\Delta t'$  که با ساعتی در دستگاه چشمه اندازه‌گیری شده است با زمان اندازه‌گیری شده روی ساعت ثابتی در دستگاه  $K$  گیرنده،  $\Delta t$ ، از طریق رابطه زیر ارتباط پیدا می‌کند

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} \quad (29.14)$$

ساعت متحرک همراه با چشمه، زمان عادی را اندازه‌گیری می‌کند، زیرا این ساعت هم در شروع و هم در پایان موجها حضور دارد.

با نشان دادن معادله (۲۹.۱۴) در معادله (۲۸.۱۴)، که به نوبه خود به جای  $n$  در معادله (۲۷.۱۴)

می نشیند، می رسیم به

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{(1 - v/c)} \frac{v_0}{\gamma} \\ &= \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - v/c)} v_0. \end{aligned} \quad (30.14)$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$v = \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{1 - \beta}} v_0. \quad \text{منبع و گیرنده به هم نزدیک می شوند} \quad (31.14)$$

برای خواننده باقی می ماند (مسئله ۱۴.۱۴ را ببینید) که نشان بدهد وقتی منبع ثابت باشد و گیرنده با سرعت  $v$  به آن نزدیک شود، معادله (۳۱.۱۴) برقرار است.

حال وضعیتی را در نظر می گیریم که در آن منبع و گیرنده با سرعت  $v$  از یکدیگر دور می شوند [شکل ۳.۱۴ (ب)]. استخراج این روابط، با یک استثنای ناچیز، درست مشابه است با آنچه در بالا انجام شد. در معادله (۲۵.۱۴) فاصله بین ابتدا و انتهای موج چنین می شود

$$\text{طول قطار موج} = c\Delta t + v\Delta t \quad (32.14)$$

این تغییر علامت در معادلات (۳۰.۱۴) و (۳۱.۱۴) انتشار می یابد و نتیجه می دهد

$$v = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} v_0.$$

$$v = \frac{\sqrt{1 - \beta}}{\sqrt{1 + \beta}} v_0. \quad \text{چشمه و گیرنده به هم نزدیک می شوند} \quad (33.14)$$

معادلات (۳۱.۱۴) و (۳۳.۱۴) را می توان به صورت یک معادله در هم ادغام کرد

$$v = \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{1 - \beta}} v_0. \quad \text{اثر دو پلر نسبیتی} \quad (34.14)$$

مشروط به اینکه توافق کنیم هرگاه چشمه و گیرنده به هم نزدیک می شوند، برای عبارت  $\beta(+v/c)$  از علامت (+) و وقتی از هم دور می شوند، از علامت (-) بهره گیریم.

اثر دوپلر نسبیتی در اخترشناسی اهمیت زیادی دارد. معادله (۳۴.۱۴) حاکی از آن است که، اگر چشمه با سرعت زیادی از یک ناظر دور شود، در آن صورت برای خطوط طیفی معین و یا بسامدهای مشخصه، بسامد کمتر (یا طول موج بلندتر) مشاهده می‌شود. این تغییر در بسامد چشمه را انتقال به سرخ می‌گویند؛ هرگاه چشمه از ما دور شود، طول موجهای نور مرئی به سوی طول موجهای بلندتر (سرخ) انتقال پیدا می‌کنند. مشاهدات اخترشناسی حاکی از انبساط عالم است. به نظر می‌رسد که هر چه ستارگان از ما دورتر باشند سریعتر هم از ما دور می‌شوند (یا انتقال به سرخ بیشتری دارند). این داده‌ها با پیدایش عالم با «مهبانگ»، که تخمین زده می‌شود حدود ۱۵ میلیارد سال پیش رخ داده باشد، سازگار است.

#### مثال ۴.۱۴

فضانوردی و برادر دوقلویی بر روی زمین، در خلال سفری فضایی به یک ستاره دور دست در فواصلی یک ساله به همدیگر سیگنالهای رادیویی می‌فرستند. اگر فضانورد با سرعت  $v = 0.8c$  حرکت کند، بسامد سیگنالهای رادیویی که هر کدام از دوقلوها در خلال پرواز به ستاره دریافت می‌کنند، چقدر است؟ بسامد در خلال پرواز برگشت با همان سرعت چقدر است؟

حل: برای تعیین بسامد سیگنالهای رادیویی که هر کدام از سوی دیگری دریافت می‌کند، از معادله (۳۴.۱۴) استفاده می‌کنیم. بسامد  $\nu_0$  برابر است با یک سیگنال بر سال. در شاخه پروازی از زمین:  $\beta = -0.8$  و از معادله (۳۴.۱۴) داریم

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - 0.8}}{\sqrt{1 + 0.8}} \nu_0 = \frac{\nu_0}{3}$$

سیگنالهای رادیویی هر سه سال یکبار دریافت می‌شوند.

ولی، در سفر بازگشت،  $\beta = +0.8$  و از معادله (۳۴.۱۴) نتیجه می‌گیریم:  $\nu = 3\nu_0$ ؛ بنابراین سیگنالهای رادیویی هر ۴ ماه یکبار دریافت می‌شوند. به این طریق دوقلوی ساکن در زمین می‌تواند شاهد پیشرفت سفر دوقلوی فضانوردش باشد.

#### ۶.۱۴ بارادوکس دوقلوها

دوقلوهایی را در نظر بگیرید که پیشه‌های متفاوتی را اختیار کرده‌اند. مری فضانورد می‌شود و فرانک تصمیم می‌گیرد کارگزار سهام شود. مری در سن ۳۰ سالگی برای گذراندن مأموریتی به یک سیاره در منظومه ستاره همجوار، زمین را ترک می‌کند. مری برای رسیدن به آن سیاره و بازگشت از آن

ناگزیر است با سرعت زیادی حرکت کند. از نظر فرانک، ساعت بیولوژیکی مری در خلال سفرش کندتر کار می‌کند، و به این ترتیب او خیلی آهسته‌تر پیر می‌شود. او انتظار دارد که مری در بازگشت از او جوانتر به نظر آید. ولی، از نظر مری، فرانک سریعاً نسبت به دستگاه او در حرکت است، و او فکر می‌کند که وقتی بازگردد فرانک از او جوانتر خواهد بود. این همان پارادوکس است. اگر به هنگام بازگشت مری (همزاد متحرک) به زمین که فرانک (همزاد ساکن) در آنجا باقی مانده است، یکی از این دو قلوها جوانتر بماند، آنکه جوانتر مانده کدام است؟ چون دو حالت مورد انتظار به این نحو متضادند، آیا طبیعت راهی ندارد که اثبات کند آنها هم سن و سال خواهند بود؟

این پارادوکس تقریباً از همان وقتی که اینشتین نظریه نسبیت خاص خود را منتشر کرد، پای به عرصه مباحثه نهاده است. بارها مباحثه‌های گوناگونی ارائه شده است. جواب صحیح آن است که مری، فضا نورد، از برادر دوقلویش فرانک، که در وال استریت مشغول است جوانتر باز می‌گردد. مسئله را دقیقتر بررسی می‌کنیم: از نظر فرانک، سفینه فضایی مری با انفجار از جا کنده می‌شود و سریعاً به حرکت آزاد با سرعت  $v = 0.8c$  می‌رسد، او مسافت ۸ سال نوری (یعنی مسافتی که نور در یک سال طی می‌کند) تا سیاره را می‌پیماید، و برای دیداری کوتاه از سیاره سریعاً شتاب منفی می‌گیرد. مدت زمان شتاب و شتاب منفی گرفتن در مقایسه با کل زمان سفر به سیاره، یعنی ۱۰ سال، چشم پوشیدنی است. سفر بازگشت نیز ۱۰ سال طول می‌کشد، به طوری که در بازگشت مری به زمین، فرانک پنجاه (یعنی،  $10 + 10 + 30$ ) ساله خواهد بود. بنابر محاسبه فرانک ساعت مری کندتر کار می‌کند و هر شاخه از سفر او تنها  $6 = 8\sqrt{1 - 0.8^2}$  سال طول می‌کشد. بنابراین مری در هنگام بازگشت فقط ۴۲ ( $= 6 + 6 + 30$ ) ساله است. ساعت فرانک (تقریباً) در یک دستگاه لخت قرار دارد. وقتی که مری با ساعت خودش زمان را اندازه‌گیری می‌کند، ممکن است اندازه‌گیرهای او بر طبق نظریه خاص اعتبار نداشته باشند زیرا دستگاه او چارچوب مرجع لختی نیست که نسبت به زمین با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند. او هم در زمین و هم در سیاره شتاب و شتاب منفی پیدا می‌کند، و برای اینکه اندازه‌گیرهای زمان به وسیله او ارزش مقایسه با ساعت فرانک را داشته باشد، او باید این پیدا کردن شتاب و شتاب منفی را در محاسباتش وارد کند. آهنگ لحظه‌ای ساعت مری باز هم به کمک معادله (۱۴.۲۰) به دست می‌آید، زیرا آهنگ لحظه‌ای با سرعت لحظه‌ای  $v$  مشخص می‌شود.<sup>۱</sup> به این ترتیب، اگر ما از دو اصل موضوع نظریه خاص پیروی کنیم، پارادوکسی در کار نیست. همچنین روشن است که کدام یک از دو قلوها در چارچوب مرجع لخت قرار دارد. مری نیروهای مربوط به شتاب و شتاب منفی را عملاً حس می‌کند. فرانک چنین نیرویی را اصلاً

۱. به فرضیه ساعت. و. ریندلر (p.3 و Ri82) مراجعه کنید.

احساس نمی‌کند. وقتی مری به خانه باز می‌گردد برادر دوقلوش حقوق ۲۰ سال او را سرمایه‌گذاری کرده و او در سن ۴۲ سالگی به خانم ثروتمندی تبدیل شده است. او حقوق ۲۰ سال را بابت کاری دریافت کرده است که در نزد وی فقط ۱۲ سال طول کشیده است!

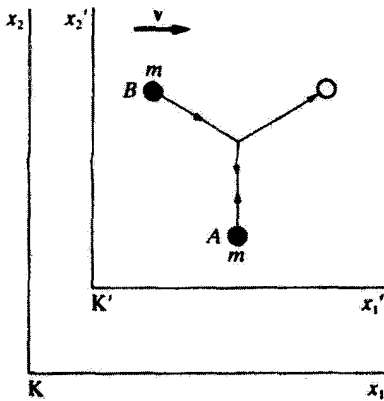
### مثال ۵.۱۴

پس از آنکه مری زمین را ترک می‌کند، وی و فرانک در فواصل زمانی یک ساله برای یکدیگر سیگنالهای رادیویی می‌فرستند. زمان رسیدن پیامهای رادیویی را تجزیه و تحلیل کنید.

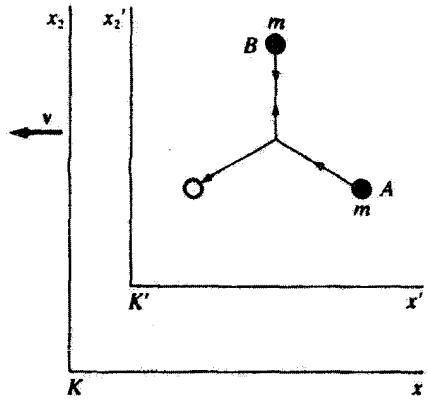
حل: در مثال ۴.۱۴ محاسبه کردیم که چنین سیگنالهای رادیویی در سفر رفت هر سه سال یکبار و در سفر بازگشت هر ۱/۳ سال یکبار دریافت می‌شوند. ابتدا سیگنالهایی را بررسی می‌کنیم که مری از فرانک دریافت کرده است. در طی ۶ سال سفر به سیاره، مری فقط دو پیام رادیویی دریافت می‌دارد، اما در خلال ۶ سال سفر بازگشت از سیاره او هیچده سیگنال دریافت می‌دارد؛ بنابراین او به درستی نتیجه‌گیری می‌کند که برادر دوقلوش فرانک ۲۰ سال عمر کرده و اکنون ۵۰ ساله است. در دستگاه فرانک، سفر مری به سیاره ۱۰ سال طول می‌کشد. وقتی که مری به سیاره می‌رسد، فرانک ۱۰/۳ سیگنال دریافت می‌کند (یعنی، سه سیگنال به اضافه یک سوم زمان لازم برای سیگنال بعدی). گرچه، فرانک به مدت هشت سال دیگر و هر سه سال یک بار به دریافت سیگنالهای مری ادامه می‌دهد، تا وقتی که مری به آن سیاره می‌رسد و آماده بازگشت به سوی فرانک است، آخرین سیگنال را دریافت کند. به این ترتیب، فرانک برای هشت سال دیگر هر سه سال یکبار یک سیگنال (جمعاً ۱۸ سال) و کلاً شش سیگنال رادیویی برای زمان حرکت به سوی سیاره دریافت می‌کند. فرانک به هیچوجه نمی‌داند که آیا مری متوقف شده یا بازگشته است تا اینکه آخرین پیام رادیویی در راه رفت را پس از ۱۸ سال دریافت کند. از ۲ سال باقیمانده سفر مری از نظر فرانک  $(2 = 18 - 2)$ ، فرانک هر ۱/۳ سال یکبار یک سیگنال، یا کلاً شش سیگنال دیگر دریافت می‌کند. فرانک به درستی تعیین می‌کند که مری  $12 = (6 + 6)$  سال در خلال سفرش عمر کرده است زیرا او جمعاً دوازده سیگنال دریافت می‌دارد. بدینسان هر دو دوقلو در خصوص سن خودشان و سن دیگری توافق دارند. مری ۴۲ ساله و فرانک ۵۰ ساله است.

### ۷.۱۴ تکانه نسبیتی

قانون دوم نیوتون،  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ، تحت تبدیل گالیله همورداست. بنابراین انتظار نداریم که تحت تبدیل لورنتس همان صورت سابق خود را حفظ کند. می‌توانیم دشواریهای مربوط به قوانین نیوتونی



(الف) برخورد از نظر دستگاه  $K$



(ب) برخورد از نظر دستگاه  $K'$

شکل ۴.۱۴

و قوانین پایستگی را پیش‌بینی کنیم، مگر اینکه تغییرات لازم را انجام دهیم. مثلاً بنا بر قانون دوم نیوتون شتاب دادن به یک ذره در سرعت‌های زیاد، ممکن است سبب شود سرعت آن از  $c$  فراتر رود، که طبق نظریه نسبیت خاص تحقق این شرط ناممکن است.

این مبحث را با بررسی پایستگی تکانه خطی در یک برخورد بدون نیرو (یعنی، بدون وجود هیچ نیروی خارجی) آغاز می‌کنیم. در اینجا شتابی وجود ندارد. ناظر  $A$  که در دستگاه  $K$  در حال سکون است، تویی به جرم  $m$  را در دست دارد، همچنین ناظر  $B$  در دستگاه  $K'$  که با سرعت نسبی  $v$  نسبت به دستگاه  $K$  به سمت راست در حرکت است، تویی در دست دارد (شکل ۴.۱۴). این دو ناظر تویهای یکسانشان را در امتداد محورهای  $x_2$  خودشان پرتاب می‌کنند، که این عمل به یک برخورد کاملاً کشسان می‌انجامد. برخورد، از نظر ناظرهای دو دستگاه، در شکل ۴.۱۴ نشان داده شده است. هر یک از ناظرها سرعت توپ خودشان را  $u$  اندازه‌گیری می‌کنند.

ابتدا پایستگی تکانه را از نظر دستگاه  $K$  بررسی می‌کنیم. مؤلفه‌های سرعت توپ پرتاب شده توسط ناظر  $A$  عبارت‌اند از

$$\begin{cases} u_{A1} = 0 \\ u_{A2} = u. \end{cases} \quad (۳۵.۱۴)$$

تکانه توپ  $A$  در راستای  $x_2$  برابر است با

$$p_{A2} = mu. \quad (۳۶.۱۴)$$



برخورد کاملاً کشسان است، بنابراین توپ با سرعت  $u$  به پایین باز می‌گردد. تغییر در تکانه، آنگونه که ناظر دستگاه  $K$  مشاهده می‌کند، عبارت است از

$$\Delta p_{Ay} = 2mu. \quad (37.14)$$

آیا معادله (۳۷.۱۴) تغییر در تکانه توپ پرتاب شده توسط ناظر  $B$  را در دستگاه متحرک  $K'$  نیز نشان می‌دهد؟ از تبدیل وارونه سرعت، معادلات (۱۷.۱۴)، استفاده می‌کنیم (یعنی، پریما را با بدون پریما مبادله می‌کنیم و قرار می‌دهیم  $v \rightarrow -v$ ) و خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} u_{B1} &= v \\ u_{B2} &= -u \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \right\} \quad (38.14)$$

که در اینجا  $u'_{B1} = 0$  و  $u'_{B2} = -u$ . تکانه توپ  $B$  و تغییر در تکانه آن در خلال برخورد عبارت است از

$$p_{B2} = -mu \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (39.14)$$

$$\Delta p_{B2} = -2mu \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (40.14)$$

حاصل جمع معادلات (۳۷.۱۴) و (۴۰.۱۴) صفر نمی‌شود. بر اساس نظریه خاص، اگر قراردادهای مربوط به تکانه در فیزیک کلاسیک را به‌کار گیریم، تکانه خطی پایسته نیست. به جای کنار گذاشتن قانون پایستگی تکانه، راه حلی را جستجو می‌کنیم که هم پایستگی انرژی را حفظ کند و هم قانون دوم نیوتون همچنان برقرار بماند.

همان طور که در مورد تبدیل لورنتس عمل کردیم، ساده‌ترین تغییر ممکن را منظور می‌کنیم. فرض می‌کنیم که صورت کلاسیک تکانه،  $mu$ ، در ثابتی که ممکن است به سرعت بستگی داشته باشد،  $k(u)$ ، ضرب شود

$$\mathbf{p} = k(u)mu \quad (41.14)$$

در مثال ۶.۱۴ نشان می‌دهیم که مقدار

$$k(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (42.14)$$

امکان حفظ پایستگی تکانه خطی را فراهم می‌آورد. توجه کنید که شکل معادله (۴۲.۱۴) همان شکلی است که برای تبدیل لورنتس به دست آمد. در واقع، برای ثابت  $k(u)$  همان نشانه،  $\gamma$ ، را انتخاب می‌کنیم. اما، این  $\gamma$  حاوی سرعت ذره،  $u$ ، است؛ در حالی که تبدیل لورنتس،  $v$ ، یعنی سرعت نسبی بین دو چارچوب مرجع لخت را در بر دارد. این تمایز را باید به خاطر بسپاریم؛ تمایزی که اغلب اوقات باعث سردرگمی است.

اگر به جای زمان معمولی  $t$  از زمان عادی  $\tau$  بهره‌گیریم، می‌توانیم محاسبهٔ موجهی برای تکانهٔ نسبیتی انجام دهیم [معادله (۲۱.۱۴)]. در این حالت

$$p = m \frac{dx}{d\tau} = m \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad (۴۳.۱۴)$$

$$= m \frac{dx}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (۴۴.۱۴)$$

$$= \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma m\mathbf{u} \quad \text{تکانهٔ نسبیتی} \quad (۴۵.۱۴)$$

که در اینجا، همانطور که در مکانیک کلاسیک مرسوم است،  $\mathbf{u}$  را به صورت  $\mathbf{u} = dx/dt$  حفظ کردیم. گرچه هیچکدام از ناظرها راجع به  $dx/dt$  باهم توافق ندارند، ولی راجع به  $dx/d\tau$  توافق دارند، که زمان عادی  $d\tau$  توسط جسم متحرک اندازه‌گیری شده است. رابطهٔ  $dt/d\tau$  از معادله (۲۱.۱۴) به دست می‌آید، در این معادله سرعت  $u$  مورد استفاده در  $\gamma$  نشان‌دهندهٔ سرعت چارچوب مرجع ثابت در جسم متحرک نسبت به چارچوب ثابت است.

معادله (۴۵.۱۴) عبارت است از تعریف جدید ما از تکانه، که به آن تکانهٔ نسبیتی می‌گوییم. توجه داشته باشید که این معادله برای مقادیر کوچک  $u/c$  به همان نتیجهٔ کلاسیک منجر می‌شود. در سالهای گذشته این طور رسم بود که جرم ظاهر شده در معادله (۴۵.۱۴) را جرم سکون،  $m_0$ ، می‌نامیدند و به عبارت

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (۴۶.۱۴)$$

جرم نسبیتی می‌گفتند. عبارت جرم سکون به ازای  $u = 0$  از معادله (۴۶.۱۴) نتیجه می‌شود، و به این ترتیب صورت کلاسیکی تکانه حفظ می‌شود:  $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ . دانشمندان از افزایش جرم در سرعت‌های زیاد صحبت می‌کردند. ترجیح می‌دهیم که مفهوم جرم را به عنوان یک خاصیت ذاتی و ناوردای جسم نگه داریم. استفاده از دو عبارت جرم نسبیتی و سکون امروزه دیگر قدیمی محسوب می‌شود.

بنابراین، وقتی به جرم  $m$  اشاره می‌کنیم، همواره منظورمان همان جرم سکون است. اغلب اوقات استفاده از عبارت جرم نسبیتی در به‌کارگیری عبارتهای کلاسیکی به اشتباه و سردرگمی می‌انجامد.

### مثال ۶.۱۴

نشان دهید که اگر برای برخورد نموده شده در شکل ۴.۱۴، از تکانه نسبیتی استفاده کنیم، تکانه خطی در راستای  $x_2$  پایسته است.

حل: می‌توانیم عبارتهای کلاسیکی مربوط به تکانه را که در مورد دو توپ به دست آوردیم، اصلاح کنیم. تکانه مربوط به توپ  $A$  [از معادله (۳۶.۱۴)] عبارت است از

$$p_{A2} = \frac{mu.}{\sqrt{1 - u.^2/c^2}} \quad (۴۷.۱۴)$$

و

$$\Delta p_{A2} = \frac{2mu.}{\sqrt{1 - u.^2/c^2}} \quad (۴۸.۱۴)$$

قبل از اصلاح معادله (۳۹.۱۴) مربوط به تکانه توپ  $B$ ، باید اول سرعت توپ  $B$  را آن‌طور که در دستگاه  $K$  اندازه‌گیری می‌شود پیدا کنیم. از معادله (۳۸.۱۴) بهره می‌گیریم و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u_B &= \sqrt{u_{B1}^2 + u_{B2}^2} \\ &= \sqrt{v^2 + u.^2(1 - v^2/c^2)} \end{aligned} \quad (۴۹.۱۴)$$

تکانه  $p_{B2}$  با اصلاح معادله (۳۹.۱۴) چنین می‌شود

$$p_{B2} = -mu. \gamma \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

که در اینجا

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - u_B^2/c^2}} \\ p_{B2} &= \frac{-mu. \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\sqrt{1 - u_B^2/c^2}} \end{aligned} \quad (۵۰.۱۴)$$

با نشاندن  $u_B$  از معادله (۴۹.۱۴) در معادله (۵۰.۱۴)، نتیجه می‌شود

$$p_{B\gamma} = \frac{-mu \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}} \\ = \frac{-mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (51.14)$$

$$\Delta p_{B\gamma} = \frac{-\gamma mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (52.14)$$

همان‌طور که پایستگی تکانه خطی ایجاب می‌کند، حاصل جمع معادلات (۴۸.۱۴) و (۵۲.۱۴) صفر می‌شود.

## ۸.۱۴ انرژی

با در اختیار داشتن تعریف جدید تکانه خطی [معادله (۴۵.۱۴)]، توجه خود را به انرژی و نیرو معطوف می‌کنیم. همان تعریف قبلی از انرژی جنبشی را [معادله (۸۶.۲)] که عبارت بود از کار انجام شده روی یک ذره، نگه می‌داریم. کار انجام شده در معادله (۸۴.۲) بنا بر تعریف، عبارت است از

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = T_2 - T_1 \quad (53.14)$$

معادله (۲.۲) مربوط به قانون دوم نیوتون اصلاح شده است، تا تعریف جدید تکانه خطی را دربرگیرد

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{u}) \quad (54.14)$$

اگر بررسی خود را از حالت سکون شروع کنیم،  $T_1 = 0$ ، و سرعت  $\mathbf{u}$  در ابتدا در راستای نیرو باشد

$$W = T = \int \frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{u}) \times \mathbf{u} dt \quad (55.14)$$

$$= m \int \frac{d}{dt}(\gamma u) \quad (56.14)$$

از معادله (۵۶.۱۴) انتگرال جزء به جزء می‌گیریم و می‌رسیم به

$$\begin{aligned}
 T &= \gamma mu^2 - m \int \frac{udu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\
 &= \gamma mu^2 + mc^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} \Big|_0^u \\
 &= \gamma mu^2 + mc^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} - mc^2 \quad (57.14)
 \end{aligned}$$

معادله (57.14) با کمی عملیات جبری به صورت زیر در می‌آید

$$\boxed{T = \gamma mc^2 - mc^2} \quad \text{انرژی جنبشی نسبیتی} \quad (58.14)$$

ظاهراً معادله (58.14) به هیچوجه شباهتی به نتیجه قبلی ما در مورد انرژی جنبشی،  $T = \frac{1}{2}mu^2$  ندارد. هر چند که این معادله برای سرعت‌های کم باید به  $\frac{1}{2}mu^2$  کاهش یابد.

### مثال ۷.۱۴

نشان دهید که معادله (58.14) برای سرعت‌های کم،  $u \ll c$ ، به نتیجه کلاسیک می‌انجامد.

حل: جمله اول معادله (58.14) را می‌توان به صورت یک سری توانی بسط داد

$$\begin{aligned}
 T &= mc^2(1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} - mc^2 \\
 &= mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right) - mc^2 \quad (59.14)
 \end{aligned}$$

که به اعتبار  $u \ll c$ ، از تمام جملات با توان  $(u/c)^2$  یا بالاتر چشم پوشیده‌ایم

$$\begin{aligned}
 T &= mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 - mc^2 \\
 &= \frac{1}{2}mu^2 \quad (60.14)
 \end{aligned}$$

که همان نتیجه کلاسیک است.

توجه به این مطلب که نه  $\frac{1}{2}mu^2$  و نه  $\frac{1}{2}\gamma mu^2$  مقدار صحیح انرژی جنبشی را به دست نمی‌دهند، حائز اهمیت است.

جمله  $mc^2$  در معادله (58.14) انرژی سکون نامیده می‌شود و با  $E_0$  نمایش می‌یابد.

$$\boxed{E_0 \equiv mc^2} \quad \text{انرژی سکون} \quad (61.14)$$

معادله (۵۸.۱۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\gamma mc^2 = T + mc^2$$

بدینسان

$$E = T + E. \quad (۶۲.۱۴)$$

که در اینجا

$$\boxed{E \equiv \gamma mc^2 = T + E.} \quad \text{انرژی کل.} \quad (۶۳.۱۴)$$

انرژی کل،  $E = \gamma mc^2$ ، بنا بر تعریف، عبارت است از مجموع انرژی جنبشی و انرژی سکون. معادلات (۵۸.۱۴) تا (۶۳.۱۴) منشأ نتیجه نسبیتی مشهور اینشتین، یعنی، هم ارزی جرم و انرژی (انرژی  $= mc^2$ )، به شمار می‌آید. این معادلات با این تعبیر سازگارند. توجه داشته باشید که وقتی جسمی حرکت نمی‌کند ( $u = 0 = T$ )، معادله (۶۳.۱۴) دلالت بر برابری انرژی کل با انرژی سکون می‌کند.

اگر جرم صرفاً صورت دیگری از انرژی است، در آن صورت باید قوانین پایستگی کلاسیک جرم و انرژی را در هم ادغام کنیم و به صورت قانون پایستگی جرم-انرژی در آوریم که معادله (۶۳.۱۴) بیانگر آن است. این قانون به آسانی در هسته اتمی نشان داده می‌شود؛ در آنجا جرم سکون ذرات تشکیل‌دهنده به انرژی تبدیل می‌شود که تک‌تک ذرات را کنار یکدیگر نگه دارد.

### مثال ۸.۱۴

با استفاده از جرمهای اتمی ذرات تشکیل‌دهنده دوترون انرژی بستگی آن را محاسبه کنید.

حل: دوترون از یک نوترون و یک پروتون تشکیل یافته است. از جرمهای اتمی بهره می‌گیریم، چون جرم الکترون حذف می‌شود.

$$\text{جرم نوترون} = 1.008665u^*$$

$$\text{جرم پروتون} (^1\text{H}) = 1.007825u$$

$$\text{مجموع} = 2.016490u$$

$$\text{جرم دوترون} (^2\text{H}) = 2.014102u$$

$$\text{اختلاف} = 0.002388u$$

\* منظور از  $u$ ، یکای اتمی است.م.

این اختلاف جرم-انرژی برابر است با انرژی بستگی که نوترون و پروتون را به صورت دوترون در کنار یکدیگر نگه می‌دارد. یکاهای جرم همان یکاهای جرم اتمی (u) هستند، که در صورت لزوم می‌توان آنها را به کیلوگرم تبدیل کرد. اما، تبدیل جرم به انرژی با رابطه مشهور بین جرم و انرژی ساده شده است

$$1uc^2 = 931.5MeV \quad (۶۴.۱۴)$$

بنابراین انرژی بستگی دوترون عبارت است از

$$0.02388uc^2 \times 931.5 \frac{MeV}{uc^2} = 22.22MeV$$

آزمایشهای هسته‌ای از نوع  $\gamma + {}^2H \rightarrow n + p$  حاکی از آن است که برای شکستن دوترون به صورت اجزای نوترون و پروتون آن، پرتوهای گامایی با حداقل انرژی ۲۲.۲۲MeV ضروری است. برعکس، هرگاه یک نوترون و یک پروتون در حال سکون به هم ملحق شوند تا دوترونی را تشکیل دهند، ۲۲.۲۲MeV انرژی به صورت انرژی جنبشی دوترون و پرتوگاما آزاد می‌شود. ■

چون فیزیکدانان معتقدند که تکانه مفهومی بنیادتر از انرژی جنبشی است (مثلاً قانون کلی پایستگی انرژی جنبشی وجود ندارد)، می‌خواهیم رابطه بین جرم-انرژی شامل تکانه باشد و نه انرژی جنبشی. با معادله (۴۵.۱۴) برای تکانه مطلب را شروع می‌کنیم

$$p = \gamma mu$$

$$p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 u^2 c^2$$

$$= \gamma^2 m^2 c^4 \left( \frac{u^2}{c^2} \right) \quad (۶۵.۱۴)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\frac{u^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \quad (۶۶.۱۴)$$

بنابراین معادله (۶۵.۱۴) به این صورت در می آید

$$\begin{aligned} p^{\nu} c^{\nu} &= \gamma^{\nu} m^{\nu} c^{\nu} \left(1 - \frac{1}{\gamma^{\nu}}\right) \\ &= \gamma^{\nu} m^{\nu} c^{\nu} - m^{\nu} c^{\nu} \\ &= E^{\nu} - E^{\nu} \end{aligned}$$

$$\boxed{E^{\nu} = p^{\nu} c^{\nu} + E^{\nu}} \quad (۶۷.۱۴)$$

معادله (۶۷.۱۴) رابطه حرکت شناسی بسیار مفیدی به شمار می آید. این رابطه انرژی کل یک ذره را به تکانه و انرژی سکون آن مربوط می کند.

توجه داشته باشید که فوتون جرم سکون ندارد، بنابراین از معادله (۶۷.۱۴) نتیجه می گیریم

$$E = pc \quad \text{فوتون} \quad (۶۸.۱۴)$$

تمام انرژی فوتون ناشی از حرکت است.

### ۹.۱۴ فضا-زمان و چار-بردارها

در بخش ۳.۱۴ [معادله (۵.۱۴)] متوجه شدیم که کمیت‌های زیر ناوردایند

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^r x_j^{\nu} - c^{\nu} t^{\nu} &= 0 \\ \sum_{j=1}^r x_j'^{\nu} - c^{\nu} t'^{\nu} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

زیرا سرعت نور در تمام دستگاه‌های لختی که نسبت به هم در حرکت‌اند، یکسان است. دو حادثه مجزا از نظر فضا و زمان را در نظر بگیرید. در دستگاه  $K$

$$\Delta x_i = x_i(2 \text{ حادثه}) - x_i(1 \text{ حادثه})$$

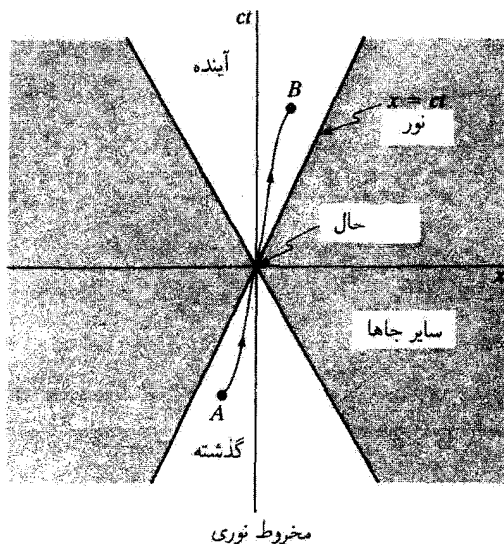
$$\Delta t = t(2 \text{ حادثه}) - t(1 \text{ حادثه})$$

بازه  $\Delta s^{\nu}$  در تمام دستگاه‌های لخت با حرکت نسبی ناورداست (مسئله ۳۴.۱۴ را ببینید)

$$\Delta s^{\nu} = \sum_{j=1}^r (\Delta x_j)^{\nu} - c^{\nu} \Delta t^{\nu} \quad (۶۹.۱۴)$$

$$\Delta s^{\nu} = \Delta s'^{\nu} = \sum_{j=1}^r (\Delta x_j')^{\nu} - c^{\nu} \Delta t'^{\nu} \quad (۷۰.۱۴)$$





شکل ۵.۱۴

معادله (۶۹.۱۴) را می‌توان به صورت یک معادله دیفرانسیل نوشت

$$ds^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 - c^2 dt'^2 \quad (۷۱.۱۴)$$

دستگاه  $K'$  را در نظر بگیرید که در آن ذره به‌طور لحظه‌ای در حال سکون است. چون در این حالت  $dx_1' = dx_2' = dx_3' = 0$  داریم:  $dt' = d\tau$  که همان بازه زمانی عادی است که در بالا مورد بحث قرار گرفت [معادله (۲۱.۱۴)]. معادله (۷۰.۱۴) به صورت زیر در می‌آید

$$-c^2 d\tau^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 - c^2 dt'^2 \quad (۷۲.۱۴)$$

با استفاده از تبدیل لورنتس، از معادله (۷۲.۱۴) نتیجه‌ای مشابه معادله (۲۱.۱۴) به دست می‌آوریم

$$d\tau = \gamma dt \quad (۷۳.۱۴)$$

زمان عادی  $\tau$ ، همانند کمیت طول  $\Delta s^2$ ، یک کمیت ناوردای لورنتسی است.

یکی از مفاهیم مفید در نسبیت خاص همانا مفهوم مخروط نوری است. طول ناوردای  $\Delta s^2$  افزودن  $ct$  را به عنوان بعد چهارم به سه بعد فضایی  $x_1, x_2, x_3$  القا می‌کند. در شکل ۵.۱۴  $ct$  را برحسب یکی از مختصه‌های فضای اقلیدسی ترسیم می‌کنیم. مبدأ دستگاه  $(x, ct)$  همان نقطه  $(0, 0)$  کنونی است. خطوط پررنگ مسیرهایی را نشان می‌دهند که نور در گذشته و آینده

اختیار می‌کند. ذره‌ای که در امتداد مسیر نمایشیافته در شکل از  $A$  به  $B$  می‌رود، می‌گوییم در امتداد جهانخط خود حرکت می‌کند. به‌ازای زمانهای  $t < 0$ ، ذره در مخروط پایینی، گذشته، قرار داشته است. به همین ترتیب، به‌ازای  $t > 0$  ذره به مخروط بالایی، آینده، خواهد رفت. آگاهی به این مطلب که آیا ذره‌ای در خارج از گستره  $x = ct$  قرار دارد یا خیر برای ما ممکن نیست؛ این گستره، که «سایر جاها» نامیده می‌شود، مستلزم آن است که:  $v > c$ .

در ارتباط با مقدار  $\Delta s^2$  دو امکان وجود دارد. اگر  $\Delta s^2 > 0$ ، دو رویداد یک بازه فضاگونه دارند. پیدا کردن یک چارچوب لخت که با سرعت  $v < c$  حرکت کند و در آن چارچوب دو رویداد در مختصات فضایی متفاوت ولی در یک زمان روی دهند، همواره میسر است. هرگاه  $\Delta s^2 < 0$ ، می‌گوییم دو رویداد یک بازه زمان گونه دارند. انتخاب یک چارچوب لخت که در آن چارچوب رویدادها در یک نقطه در فضا ولی در زمانهای متفاوت روی دهند، همواره میسر است. وقتی که  $\Delta s^2 = 0$ ، دو رویداد توسط یک پرتو نوری از هم جدا شده‌اند.

تنها رویدادهایی را که با یک بازه زمان‌گونه از هم جدا شده‌اند می‌توان به‌طور علی به هم ارتباط داد. رویداد حال را در مخروط نوری فقط می‌توان به‌طور علی به رویدادهای واقع در ناحیه گذشته مخروط نوری مربوط کرد. رویدادهای بازه فضاگونه را نمی‌توان به‌طور علی باهم مربوط کرد. فضا و زمان، گرچه متمایزند، ولی به‌طور پیچیده‌ای به هم مربوط‌اند.

بحث قبلی در خصوص فضا و زمان، استفاده از  $ct$  را به عنوان چهارمین پارامتر بعدی القا می‌کند. این خط فکری را با تعریف  $x_4 \equiv ict$  و  $x'_4 \equiv ict'$  دنبال می‌کنیم. به‌کارگیری عدد موهومی  $i(\sqrt{-1})$  به این معنی نیست که این مؤلفه موهومی است. عدد موهومی تنها ما را مجاز می‌دارد که روابط را به صورت فشرده و ریاضی نمایش دهیم. در بقیه این بخش می‌شد به همین نحو و بدون استفاده از  $i$  (مثلاً  $x_4 = ct$ ) به بررسی خود ادامه دهیم، اما محاسبات ریاضی که به آنها بر می‌خوریم دشوارتر و پر دردسترتر می‌شد. نتایج مفید بر حسب کمیتهای فیزیکی حقیقی بیان می‌شوند.

با استفاده از تعریفهای  $x_4 = ict$  و  $x'_4 = ict'$  می‌توانیم معادلات (۵.۱۴) را به صورت زیر

بنویسیم<sup>۱</sup>

۱. طبق قرارداد متعارف در نظریه نسبیت، برای بیان اینکه مجموعیایی از ۱ تا ۴ تغییر می‌کند از شاخصهای زیرین با حرفهای یونانی (معمولاً  $\mu$  یا  $\nu$ ) استفاده می‌کنیم، شاخصهای زیرین لاتین را معمولاً برای مجموعیاییهای از ۱ تا ۳ در نظر گرفته‌ایم.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}^{\prime 2} &= 0 \\ \sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}^{\prime 2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (۷۴.۱۴)$$

از این معادلات بر می‌آید که دو مجموع‌یابی باید متناسب باشند، و به علت متقارن بودن حرکت بین دو دستگاه، ضریب تناسب برابر واحد است.<sup>۱</sup> بدین ترتیب

$$\sum_{\mu} x_{\mu}^{\prime 2} = \sum_{\mu} x_{\mu}^2 \quad (۷۵.۱۴)$$

این رابطه مشابه چرخشهای متعامد، سه بعدی، حفظ کننده فاصله است که قبلاً بررسی کرده‌ایم (بخش ۴.۱) و حاکی از متناظر بودن تبدیل لورنتس با چرخشی در یک فضای چهار بعدی (به نام جهان فضا یا فضای مینکوفسکی) است.<sup>۲</sup> به این ترتیب، تبدیلات لورنتس همان تبدیلات متعامد در فضای مینکوفسکی هستند

$$x'_{\mu} = \sum_{\nu} \lambda_{\mu\nu} x_{\nu} \quad (۷۶.۱۴)$$

در اینجا  $\lambda_{\mu\nu}$  عبارت‌اند از عناصر ماتریس تبدیل لورنتس. با توجه به معادلات (۱۴.۱۴) تبدیل  $\lambda$  عبارت خواهد بود از

$$\lambda = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (۷۷.۱۴)$$

کمیتی را چار-بردار می‌گوییم که شامل چهار مؤلفه باشد و هر کدام از آن مؤلفه‌ها بر طبق رابطه زیر تبدیل شوند<sup>۳</sup>

$$A'_{\mu} = \sum_{\nu} \lambda_{\mu\nu} A_{\nu} \quad (۷۸.۱۴)$$

۱. «اثبات» این مطلب را در پیوست ز ببینید.

۲. هرمن مینکوفسکی (۱۸۶۴-۱۹۰۹) سهم بسزایی در نظریه ریاضی نسبیت دارد و هم او بود که  $ict$  را به عنوان مؤلفه چهارم معرفی کرد.

۳. در اینجا بین مؤلفه‌های بردار هموردا و پادوردا تمایز قایل نمی‌شویم؛ در این مورد رجوع کنید به، مثلاً کتاب برگمان (Be 46, chapter 5).

که در اینجا  $\lambda_{\mu\nu}$  یک تبدیل لورنتس را تداعی می‌کند. چنین چار-برداری عبارت است از<sup>۱</sup>

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, ict) \quad (۷۹.۱۴ \text{ الف})$$

یا

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}, ict) \quad (۷۹.۱۴ \text{ ب})$$

که معنی نمادگذاری در این خط آخری عبارت از این است که سه مؤلفه اولی (فضایی)  $\mathbf{X}$  بردار مکان سه بعدی معمولی،  $\mathbf{x}$ ، را تعریف می‌کند و مؤلفه چهارم آن  $ict$  است. به همین ترتیب، دیفرانسیل  $\mathbf{X}$  یک چار-برداری است

$$d\mathbf{X} = (d\mathbf{x}, icdt) \quad (۸۰.۱۴)$$

در فضای مینکوفسکی عنصر چهار بعدی طول ناورداست. مقدار آن به واسطه تبدیل لورنتس تغییر نمی‌کند، و چنین کمیتی را چار-اسکالر یا جهان اسکالر می‌گوییم. معادله (۷۱.۱۴) را می‌توان به این صورت نوشت

$$ds = \sqrt{\sum_{\mu} dx_{\mu}^2} \quad (۸۱.۱۴)$$

و معادله (۷۲.۱۴) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$d\tau = \frac{i}{c} \sqrt{\sum_{\mu} dx_{\mu}^2} = \frac{i}{c} ds \quad (۸۲.۱۴)$$

زمان عادی  $d\tau$  ناورداست چون این زمان برابر است با حاصلضرب  $i/c$  در عنصر طول  $ds$ . بنابراین، نسبت چار-برداری  $d\mathbf{X}$  به ناوردای  $d\tau$  نیز یک چار-برداری است، که آن را چار-برداری سرعت،  $\mathbf{V}$ ، می‌نامیم

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \left[ \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}, ic \frac{dt}{d\tau} \right] \quad (۸۳.۱۴)$$

مؤلفه‌های سرعت معمولی  $\mathbf{u}$  عبارت‌اند از

$$u_j = \frac{dx_j}{dt}$$

۱. چار-بردارها منحصرأ با حروف بزرگ (هلویتیکا) نشان داده می‌شوند.

بنابراین، با استفاده از معادلات (۷۱.۱۴) و (۸۲.۱۴)،  $d\tau$  را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \sum_j \frac{dx_j^2}{dt^2}}$$

یا

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2} \quad (۸۴.۱۴)$$

به‌همان ترتیبی که در معادله (۷۳.۱۴) به‌دست آوردیم. بنابراین چاربردار سرعت را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (\mathbf{u}, ic) \quad (۸۵.۱۴)$$

که در اینجا  $\mathbf{u}$  سه مؤلفه فضایی سرعت معمولی  $u_1, u_2, u_3$  را نمایش می‌دهد. (به خاطر داشته باشید که سرعت ذره را اکنون با  $\mathbf{u}$  نشان داده‌ایم تا بتوانیم آن را از سرعت چارچوب متحرک،  $\mathbf{v}$ ، تمیز دهیم.) اکنون چاربردار تکانه عبارت است از حاصلضرب جرم (جرم سکون) در چاربردار سرعت، زیرا جرم ناورداست<sup>۱</sup>

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V} \quad (۸۶.۱۴)$$

$$\mathbf{P} = \left[ \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, ip_{\tau} \right] \quad (۸۷.۱۴)$$

که در اینجا

$$p_{\tau} \equiv \frac{mc}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۸۸.۱۴)$$

سه مؤلفه اولی چاربردار تکانه  $\mathbf{P}$  عبارت‌اند از مؤلفه‌های تکانه نسبیته [معادله (۴۵.۱۴)]

$$P_j = p_j = \gamma m u_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (۸۹.۱۴)$$

با بهره‌گیری از معادله (۶۳.۱۴)، مؤلفه چهارم تکانه با انرژی کل  $E$  ارتباط پیدا می‌کند

$$p_{\tau} = \gamma mc = \frac{E}{c} \quad (۹۰.۱۴)$$

۱. حاصلضرب یک چاربردار در یک چاراسکالر نیز یک چاربردار است.

بنابراین چار-بردار تکانه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}, i\frac{E}{c}) \quad (91.14)$$

که در اینجا  $\mathbf{p}$  مؤلفه‌های تکانه در فضای سه بعدی به شمار می‌آید. به این ترتیب در نظریه نسبیت، تکانه و انرژی به همان نحوی به هم مربوط می‌شوند که مفاهیم فضا و زمان باهم ارتباط پیدا می‌کنند. اگر ماتریس تبدیل لورنتس [معادله (۷۷.۱۴)] را در مورد تکانه  $\mathbf{P}$  به کار ببریم، داریم

$$\begin{aligned} p'_1 &= \frac{p_1 - (v/c^2)E}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ p'_2 &= p_2 \\ p'_3 &= p_3 \\ E' &= \frac{E - vp_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (92.14)$$

#### مثال ۹.۱۴

با استفاده از روشهای ارائه شده در این بخش، معادله (۶۷.۱۴) را به دست آورید.

حل: اگر مبدأ دستگاه متحرک  $K'$  را روی ذره ثابت کنیم، داریم:  $u = v$ . مربع چار-بردار سرعت [معادله (۸۵.۱۴)] ناورداست

$$\mathbf{V}^{\tau} = \sum_{\mu} V_{\mu}^{\tau} = \frac{v^{\tau} - c^{\tau}}{1 - \beta^{\tau}} = -c^{\tau} \quad (93.14)$$

بدینسان مربع چار-بردار تکانه نیز ناورداست

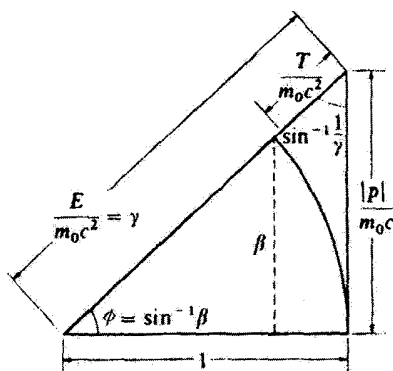
$$\mathbf{P}^{\tau} = \sum_{\mu} P_{\mu}^{\tau} = m^{\tau} \mathbf{V}^{\tau} = -m^{\tau} c^{\tau} \quad (94.14)$$

همچنین از معادله (۹۱.۱۴) با استفاده از  $p^{\tau} = p_1^{\tau} + p_2^{\tau} + p_3^{\tau}$  داریم

$$\mathbf{P}^{\tau} = p^{\tau} - \frac{E^{\tau}}{c^{\tau}} \quad (95.14)$$

از ترکیب دو معادله آخری، معادله (۶۷.۱۴) حاصل می‌شود

$$E^{\tau} = p^{\tau} c^{\tau} + m^{\tau} c^{\tau} = p^{\tau} c^{\tau} + E^{\tau}$$



شکل ۶.۱۴

اگر زاویه  $\phi$  را چنان تعریف کنیم که  $\beta = \sin \phi$ ، روابط نسبیتی بین سرعت، تکانه، و انرژی را می‌توان از روابطی مثلثاتی به‌دست آورد که بین اجزای شکلی به‌نام «مثلث نسبیتی» (شکل ۶.۱۴) برقرارند.

### مثال ۱۰.۱۴

قاعده جمع سرعت را به‌دست آورید.

حل: فرض کنید که سه چارچوب مرجع لخت،  $K$ ،  $K'$ ، و  $K''$ ، وجود داشته باشند که در امتداد محور  $x$  حرکت هم‌مخت دارند. فرض کنید که سرعت  $K'$  نسبت به  $K$  برابر  $v_1$  و سرعت  $K''$  نسبت به  $K'$  برابر  $v_2$  باشد. سرعت  $K''$  نسبت به  $K$  نمی‌تواند برابر  $v_1 + v_2$  باشد، زیرا باید امکان انتشار یک سیگنال بین دو چارچوب لخت وجود داشته باشد؛ و اگر  $v_1$  و  $v_2$  هر دو بزرگتر از  $c/2$  (ولی کوچکتر از  $c$ ) باشند، در آن صورت  $v_1 + v_2 > c$ . بنابراین، قاعده جمع سرعتها در نسبیت باید با قاعده جمع در نظریه گالیله‌ای تفاوت داشته باشد. قاعده جمع سرعت نسبیتی را می‌توان با در نظر گرفتن ماتریس تبدیل لورنتسی که  $K$  و  $K''$  را به هم ربط می‌دهد، به‌دست آورد. ماتریسهای تبدیل منفرد عبارت‌اند از

$$\lambda_{K''-K} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & i\beta_1 \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta_1 \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{K'' \rightarrow K'} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & i\beta_2\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta_2\gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

تبدیل از  $K''$  به  $K$  برابر است با حاصلضرب دو تبدیل

$$\lambda_{K'' \rightarrow K} = \lambda_{K'' \rightarrow K'} \lambda_{K' \rightarrow K} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) & 0 & 0 & i\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) & 0 & 0 & \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \end{pmatrix}$$

برای اینکه عناصر این ماتریس با عناصر ماتریس معمولی لورنتس [معادله (۷۷.۱۴)] متناظر باشد، باید  $\beta$  و  $\gamma$  مربوط به تبدیل  $K'' \rightarrow K$  را به صورت زیر تعیین کنیم

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \\ \beta\gamma &= \gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2) \end{aligned} \right\} \quad (۹۶.۱۴)$$

که از اینجا خواهیم داشت

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \quad (۹۷.۱۴)$$

اگر این عبارت آخر را در  $c$  ضرب کنیم، به شکل معمولی قاعده جمع سرعت می‌رسیم

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \left(\frac{v_1 v_2}{c^2}\right)} \quad (۹۸.۱۴)$$

از این رابطه معلوم است که اگر  $v_1 < c$  و  $v_2 < c$ ، در آن صورت همچنین داریم:  $v < c$ .

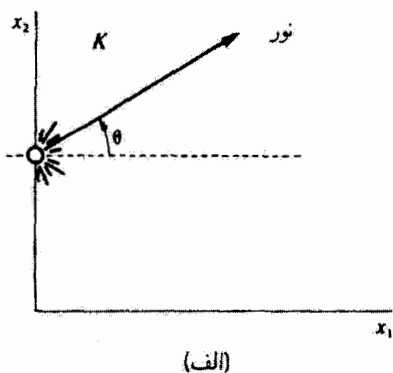
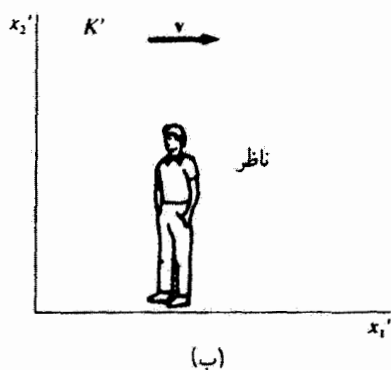
هرچند سرعت سیگنالها هرگز نمی‌تواند از  $c$  تجاوز کند، ولی سرعتهای دیگری هستند که می‌توانند از  $c$  فراتر روند. مثلاً سرعت فاز موج نوری در محیطی که ضریب شکست در آن کمتر از واحد باشد از  $c$  بزرگتر است، اما سرعت فاز در چنین محیطی با سرعت سیگنال متناظر نیست؛ سرعت سیگنال واقعاً کمتر از  $c$  است. می‌توانید تفنگی الکترونی را نیز در نظر بگیرید که باریکه‌ای از الکترونها گسیل



می‌کند. اگر تفنگ بچرخد، در آن صورت باریکه الکترونی مسیر معینی را بر روی پرده‌ای که در فاصله‌ای مناسب قرار گرفته است ترسیم می‌کند. اگر سرعت زاویه‌ای تفنگ و فاصله تا پرده به قدر کافی زیاد باشد، در آن صورت سرعت لکه متحرک بر روی پرده می‌تواند هر سرعتی، تا حد دلخواه بزرگ، باشد. به این ترتیب سرعت نوشتن یک اسیلوسکوپ می‌تواند از  $c$  تجاوز کند، اما باز هم باید بگویم که سرعت نوشتن متناظر با سرعت سیگنال نیست؛ یعنی، اطلاعات را نمی‌توان از طریق باریکه الکترونی از یک نقطه بر روی پرده به نقطه دیگر منتقل کرد. در چنین ابزاری، سیگنال را فقط می‌توان از تفنگ به پرده منتقل کرد، و چنین انتقالی با سرعت الکترونیهای موجود در باریکه (یعنی کمتر از  $c$ ) صورت می‌گیرد.

### مثال ۱۱.۱۴

اگر زاویه بین منبع نور و راستای حرکت نسبی ناظر  $\theta$  باشد (شکل ۷.۱۴) اثر دوپلر نسبیتی را به دست آورید.



حل: این مثال را می‌توان با استفاده از چار-بردار تکانه-انرژی و در نظر گرفتن نور به صورت فوتون با انرژی کل  $E = h\nu$ ، به آسانی حل کرد. منبع نور در دستگاه  $K$  در حال سکون است و سیگنال با بسامد  $\nu$  را گسیل می‌کند.

$$E = h\nu. \quad (۹۹.۱۴)$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (۱۰۰.۱۴)$$

ناظری که در دستگاه  $K'$  به سمت راست در حرکت است، انرژی  $E'$  را برای فوتون با بسامد  $\nu'$  اندازه می‌گیرد. از معادله (۹۲.۱۴)، داریم

$$E' = \gamma(h\nu - vp_1) \quad (۱۰۱.۱۴)$$

$$h\nu' = \gamma \left( h\nu - \frac{vh\nu}{c} \cos\theta \right) \quad (۱۰۲.۱۴)$$

که در اینجا  $p_1 = p \cos\theta$  معادله (۱۰۲.۱۴) تبدیل می‌شود به

$$\nu' = \gamma\nu(1 - \beta \cos\theta) \quad (۱۰۳.۱۴)$$

که با معادله (۳۴.۱۴) هم‌ارز است، و به مقدار  $\theta$  بستگی دارد. در لحظات اولیه، ناظر در فاصله دوری در سمت چپ منبع قرار دارد، و با نزدیک شدن ناظر به منبع ( $\theta = \pi$ )، به طوری که در معادله (۳۱.۱۴) آمد، داریم

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} \quad \text{ناظر به منبع نزدیک می‌شود} \quad (۱۰۴.۱۴)$$

در زمانهای خیلی بعدتر، ناظر از منبع دور می‌شود ( $\theta = 0$ ) و به طوری که در معادله (۳۳.۱۴) به دست آوردیم، خواهیم داشت

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \quad \text{ناظر از منبع دور می‌شود} \quad (۱۰۵.۱۴)$$

زمانی که ناظر دقیقاً از مقابل منبع می‌گذرد ( $\theta = \pi/2$ )

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{ناظر از کنار منبع می‌گذرد} \quad (۱۰۶.۱۴)$$

همچنین می‌توانیم حالتی را بررسی کنیم که در آن ناظر ساکن و منبع متحرک است (مسئله ۱۸.۱۴ را ببینید). ما باز هم معادلات (۱۰۴.۱۴) تا (۱۰۶.۱۴) را به دست می‌آوریم زیرا، طبق اصل نسبیت، تمایز بین حرکت ناظر و حرکت چشمه ناممکن است.

### ۱۰.۱۴ تابع لاگرانژی در نسبیت خاص

دینامیک لاگرانژی و هامیلتونی (بحث شده در فصل ۶) را باید در پرتو مفاهیم جدیدی تنظیم کرد که در اینجا ارائه شده‌اند. به طریق زیر می‌توانیم فرمولبندی لاگرانژی را به قلمرو نسبیت خاص تعمیم دهیم. در مورد تک ذره‌ای (نانسییتی) که در پتانسیلی مستقل از سرعت حرکت می‌کند، می‌توان مؤلفه‌های قائم تکانه [معادله (۱۵۰.۶)] را به صورت زیر نوشت

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u_i} \quad (۱۰۷.۱۴)$$

طبق معادله (۸۷.۱۴)، عبارت نسبیتی برای مؤلفه تکانه معمولی (یعنی، فضا) چنین است

$$p_i = \frac{mu_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۱۰۸.۱۴)$$

اکنون می‌خواهیم لاگرانژی نسبیتی چنان باشد که، وقتی مطابق معادله (۱۰۷.۱۴)، نسبت به  $u_i$  از آن مشتق گرفته شود، مؤلفه‌های تکانه‌ای را به دست دهد که از معادله (۱۰۸.۱۴) حاصل می‌شود

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{mu_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۱۰۹.۱۴)$$

این شرط فقط متضمن سرعت ذره است، بنابراین انتظار داریم که جزء مستقل از سرعت لاگرانژی نسبیتی در مقایسه با حالت نانسییتی بدون تغییر باقی بماند. گرچه، قسمت وابسته به سرعت، ممکن است دیگر با انرژی جنبشی برابر نشود. بنابراین می‌نویسیم

$$L = T^* - U \quad (۱۱۰.۱۴)$$

که در اینجا  $U = U(x_i)$  و  $T^* = T^*(u_i)$ . تابع  $T^*$  باید در شرط زیر صدق کند

$$\frac{\partial T^*}{\partial u_i} = \frac{mu_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۱۱۱.۱۴)$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که عبارت مناسب برای  $T^*$  (جز یک ثابت انتگرالگیری که می‌توان آن را کنار گذاشت) چنین است

$$T^* = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (۱۱۲.۱۴)$$

به این ترتیب لاگرانژی نسبیتی را می‌توان این طور نوشت

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - U \quad (۱۱۳.۱۴)$$

و معادلات حرکت به روش استاندارد از معادلات لاگرانژ به دست می‌آیند.

توجه داشته باشید که لاگرانژی از رابطه  $T - U$  به دست نیامده است، زیرا عبارت نسبیتی مربوط به انرژی جنبشی [معادله (۵۸.۱۴)] عبارت است از

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - mc^2 \quad (114.14)$$

همیلتونی [معادله (۱۵۳.۶)] را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد

$$\begin{aligned} H &= \sum_i u_i p_i - L \\ &= \sum_i \frac{p_i^2 c^2}{\gamma m c^2} + \frac{m c^2}{\gamma} + U \end{aligned}$$

که در اینجا از معادلات (۱۰۸.۱۴) و (۱۱۳.۱۴) بهره بردیم و  $\sqrt{1 - \beta^2}$  را به  $\gamma^{-1}$  تغییر دادیم. به این ترتیب

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2 c^2}{\gamma m c^2} + \frac{m c^2}{\gamma} + U = \frac{1}{\gamma m c^2} (p^2 c^2 + m^2 c^4) + U \\ &= \frac{E^2}{\gamma m c^2} + U \\ &= E + U = T + U + E. \end{aligned} \quad (115.14)$$

همیلتونی نسبیتی برابر است با انرژی کل تعریف شده در بخش ۸.۱۴ بعلاوه انرژی پتانسیل. تفاوت همیلتونی با انرژی کل، که قبلاً در فصل ۶ از آن بهره گرفتیم، در آنجاست که اکنون انرژی سکون را در بر می‌گیرد.

### ۱۱.۱۴ حرکت‌شناسی نسبیتی

هرگاه در یک فرایند برخورد، از سرعتها در مقایسه با سرعت نور نتوان چشم پوشید، لازم می‌آید که از حرکت‌شناسی نسبیتی بهره‌برداری کنیم. در بحثهای فصل ۸ از خواص دستگاه مختصات مرکز جرم در راه دستیابی به بسیاری از روابط حرکت‌شناسی بهره بردیم. چون در نظریه نسبیت جرم و انرژی به همدیگر مرتبطاند، صحبت از دستگاه «مرکز جرم» دیگر بی‌معنی است؛ به جای آن، در حرکت‌شناسی نسبیتی از دستگاه مختصات «مرکز تکانه» استفاده می‌کنیم. چنین دستگاهی

همان خاصیت اساسی دستگاه مورد استفاده قبلی (دستگاه مرکز جرم) یعنی، صفر بودن تکانه خطی کل سیستم، را دارد. بنابراین، اگر ذره‌ای به جرم  $m_1$  با ذره‌ای به جرم  $m_2$  برخورد کند، در آن صورت در دستگاه مرکز تکانه داریم

$$p'_1 = p'_2 \quad (۱۱۶.۱۴)$$

با بهره‌گیری از معادله (۸۷.۱۴)، مؤلفه‌های فضایی چار-بردار تکانه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$m_1 u'_1 \gamma'_1 = m_2 u'_2 \gamma'_2 \quad (۱۱۷.۱۴)$$

که در اینجا، مانند قبل،  $\beta \equiv u/c$  و  $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ .

در مسئله برخورد بهتر است که دستگاه مختصات آزمایشگاه را به دستگاه لخت  $K$  و دستگاه مرکز تکانه را به  $K'$  وابسته کنیم. در آن صورت یک تبدیل ساده لورنتس دو دستگاه را به یکدیگر مربوط می‌کند. شیوه دستیابی به روابط حرکت‌شناسی نسبیتی، عبارت از این است که این روابط را در دستگاه مرکز تکانه به دست آوریم و سپس با انجام یک تبدیل لورنتس به دستگاه آزمایشگاه بازگردیم. محورهای مختصات را چنان اختیار می‌کنیم که  $m_1$  با سرعت  $u_1$  در امتداد محور  $x$  دستگاه  $K$  در حرکت باشد. چون  $m_2$  در دستگاه  $K$  در ابتدا ساکن است، در این صورت:  $u_2 = 0$ . در دستگاه  $K'$ ،  $m_2$  با سرعت  $u'_2$  در حرکت است و بنابراین  $K'$  نیز نسبت به  $K$  با سرعت  $u'_2$  و در همان راستای حرکت اولیه  $m_1$  حرکت می‌کند.

با استفاده از این نکته که:  $\beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}$  داریم

$$\begin{aligned} p'_1 &= m_1 u'_1 \gamma'_1 = m_1 c \beta'_1 \gamma'_1 \\ &= m_1 c \sqrt{\gamma'^2_1 - 1} = m_2 c \sqrt{\gamma'^2_2 - 1} \\ &= p'_2 \end{aligned} \quad (۱۱۸.۱۴)$$

که مبین تساوی تکانه‌ها در دستگاه مرکز تکانه است.

طبق معادله (۹۲.۱۴)، تبدیل تکانه ( $p_1$  از  $K$  به  $K'$ ) عبارت است از

$$p'_1 = \left( p_1 - \frac{u'_2}{c^2} E_1 \right) \gamma'_2 \quad (۱۱۹.۱۴)$$

و نیز داریم

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= m_1 u_1 \gamma_1 \\ E_1 &= m_1 c^2 \gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (۱۲۰.۱۴)$$

به طوری که با استفاده از معادله (۱۱۸.۱۴) می‌رسیم به

$$\begin{aligned} m_1 c \sqrt{\gamma_1'^2 - 1} &= (m_1 c \beta_1 \gamma_1 - \beta_1' m_1 c \gamma_1) \gamma_1' \\ &= m_1 c (\gamma_1' \sqrt{\gamma_1^2 - 1} - \gamma_1 \sqrt{\gamma_1'^2 - 1}) \\ &= m_2 c \sqrt{\gamma_1'^2 - 1} \end{aligned} \quad (۱۲۱.۱۴)$$

این معادلات را می‌توان به‌ازای  $\gamma_1'$  و  $\gamma_1$  برحسب  $\gamma_1$  حل کرد

$$\gamma_1' = \frac{\gamma_1 + \frac{m_1}{m_2}}{\sqrt{1 + 2\gamma_1 \left(\frac{m_1}{m_2}\right) + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}} \quad (الف ۱۲۲.۱۴)$$

$$\gamma_1 = \frac{\gamma_1 + \frac{m_2}{m_1}}{\sqrt{1 + 2\gamma_1 \left(\frac{m_1}{m_2}\right) + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}} \quad (ب ۱۲۲.۱۴)$$

حال معادلات تبدیل مؤلفه‌های تکانه را از  $K'$  به  $K$  پس از پراکندگی می‌نویسیم. در اینجا هم مؤلفه  $x$  داریم و هم مؤلفه  $y$

$$\begin{aligned} p_{1,x} &= \left( p'_{1,x} + \frac{u_1'}{c^2} E_1' \right) \gamma_1' \\ &= (m_1 c \beta_1' \gamma_1' \cos \theta + m_1 c \beta_1' \gamma_1') \gamma_1' \\ &= m_1 c \gamma_1' \gamma_1' (\beta_1' \cos \theta + \beta_1') \end{aligned} \quad (الف ۱۲۳.۱۴)$$

توجه داشته باشید که، چون تبدیل از  $K'$  به  $K$  صورت می‌گیرد، برعکس معادله (۱۱۹.۱۴) قبل از جمله دوم علامت مثبت داریم. همچنین

$$p_{1,y} = m_1 c \beta_1' \gamma_1' \sin \theta \quad (ب ۱۲۳.۱۴)$$

تانژانت زاویه پراکندگی در دستگاه آزمایشگاه،  $\psi$ ، به کمک رابطه  $p_{1,y}/p_{1,x}$  به دست می‌آید؛ بنابراین از تقسیم معادله (ب ۱۲۳.۱۴) به معادله (الف ۱۲۳.۱۴)، می‌رسیم به

$$\tan \psi = \frac{1}{\gamma_1'} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + (\beta_1' / \beta_1')}$$

که با استفاده از معادله (۱۱۷.۱۴) برای بیان  $\beta'_r/\beta'_l$  داریم

$$\tan \psi = \frac{1}{\gamma'_r \cos \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + (m_1 \gamma'_l / m_r \gamma'_r)} \quad (۱۲۴.۱۴)$$

در مورد ذرهٔ پس‌زده، داریم

$$\begin{aligned} p_{r,x} &= \left( p'_{r,x} + \frac{u'_r}{c} E'_r \right) \gamma'_r \\ &= (-m_r c \beta'_r \gamma'_r \cos \theta + m_r c \beta'_r \gamma'_r) \gamma'_r \\ &= m_r c \beta'_r \gamma'^2_r (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (۱۲۵.۱۴ \text{ الف})$$

در اینجا علامت منفی به این خاطر در جملهٔ اول منظور شده است که  $p'_{r,x}$  بر عکس  $p_{r,x}$  است. و نیز داریم

$$p_{r,y} = -m_r c \beta'_r \gamma'_r \sin \theta \quad (۱۲۵.۱۴ \text{ ب})$$

مانند قبل، تنازنت زاویهٔ پس‌زنی،  $\zeta$ ، در دستگاه آزمایشگاه از رابطهٔ  $p_{r,y}/p_{r,x}$  به دست می‌آید

$$\tan \zeta = -\frac{1}{\gamma'_r} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad (۱۲۶.۱۴)$$

علامت منفی در مقابل کسر حاکی از آن است که اگر  $m_1$  به سمت مقدار مثبت  $y$  پراکنده شود، در آن صورت  $m_2$  در جهت مقدار منفی  $y$  پس زده می‌شود.

حالتی که باید توجه خاصی به آن مبذول کنیم عبارت است از  $m_1 = m_2$ . از معادلات (۱۲۲.۱۴)

خواهیم داشت

$$\gamma'_1 = \gamma'_2 = \sqrt{\frac{1 + \gamma_1}{2}}, \quad m_1 = m_2 \quad (۱۲۷.۱۴)$$

تنازنت زاویه‌های پراکنده‌گی عبارت است از

$$\tan \psi = \sqrt{\frac{2}{1 + \gamma_1}} \times \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad (۱۲۸.۱۴)$$

$$\tan \zeta = -\sqrt{\frac{2}{1 + \gamma_1}} \times \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad (۱۲۹.۱۴)$$

و بنابراین حاصلضرب آنها به این قرار است

$$\tan \psi \tan \zeta = -\frac{2}{1 + \gamma_1}, \quad m_1 = m_2 \quad (۱۳۰.۱۴)$$

(در اینجا علامت منفی اهمیت اساسی ندارد؛ فقط حاکی از آن است که  $\psi$  و  $\zeta$  در جهت‌های مخالف اندازه‌گیری می‌شوند.)

قبلاً دیدیم که در حد نانسبیتی زاویه بین بردارهای سرعت نهایی در پراکندگی ذرات با جرمهای مساوی همواره قائمه است. در واقع، در حد  $1 \rightarrow \gamma_1$ ، معادلات (۱۲۸.۱۴) و (۱۲۹.۱۴) به ترتیب با معادلات (۶۹.۸) و (۷۳.۸) برابر می‌شوند، و بنابراین  $\psi + \zeta = \pi/2$ . از سوی دیگر، از معادله (۱۳۰.۱۴) بر می‌آید که در حد نسبیتی باید داشته باشیم  $\psi + \zeta < \pi/2$ . به این ترتیب زاویه در برگرفته شده در پراکندگی همواره کوچکتر از حد نانسبیتی است. به‌ازای زوایای پراکندگی و پس‌زنی مساوی ( $\psi = \zeta$ ) معادله (۱۳۰.۱۴) چنین می‌شود

$$\tan \psi = \left( \frac{2}{1 + \gamma_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad m_1 = m_2$$

و زاویه در برگرفته‌شده بین راستاهای ذرات پراکنده و پس‌زده عبارت خواهد بود از

$$\begin{aligned} \phi &= \psi + \zeta = 2\psi \\ &= 2 \tan^{-1} \left( \frac{2}{1 + \gamma_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m_1 = m_2 \end{aligned} \quad (۱۳۱.۱۴)$$

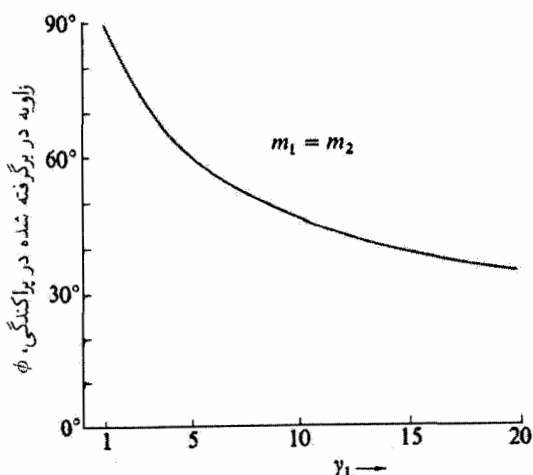
شکل ۸.۱۴ زاویه  $\phi$  را به صورت تابعی از  $\gamma_1$  تا  $\gamma_1 = 20$  نشان می‌دهد. در  $\gamma_1 = 10$ ، زاویه در برگرفته‌شده تقریباً  $46^\circ$  است. این مقدار  $\gamma_1$  با سرعت اولیه‌ای برابر  $99.5$  درصد سرعت نور متناظر است. طبق معادله (۵۸.۱۴)، انرژی جنبشی از رابطه  $T_1 = m_1 c^2 (\gamma_1 - 1)$  به‌دست می‌آید؛ بنابراین انرژی جنبشی پروتونی با  $\gamma_1 = 10$  در حدود  $8.4 \text{ GeV}$  خواهد بود، در حالی‌که انرژی جنبشی الکترونی با همان سرعت عبارت است از:  $T_1 \cong 4.6 \text{ MeV}$ .

با استفاده از خواص تبدیلی مؤلفه چهارم چار-بردار تکانه (یعنی انرژی کل)، امکان دستیابی به مشابه نسبیتی تمامی معادلات انرژی که قبلاً در حد نانسبیتی استخراج کرده بودیم، فراهم است.

۱. این یکاهای انرژی در مسئله ۴۱.۱۴ تعریف شده است:

$$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ MeV} = 10^{10} \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-7} \text{ erg} = 1.602 \times 10^{-10} \text{ J.}$$





شکل ۸.۱۴

مسائل

- ۱.۱۴ با استفاده از معادلات (۹.۱۴) تا (۱۲.۱۴)، معادله (۱۳.۱۴) را اثبات کنید.
- ۲.۱۴ نشان دهید معادلات تبدیل را، که دستگاههای  $K$  و  $K'$  را به هم مربوط می‌کند [معادلات (۱۴.۱۴)]، می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$x'_1 = x_1 \cos h\alpha - ct \sin h\alpha$$

$$x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3$$

$$t' = t \cosh \alpha - \frac{x_1}{c} \sinh \alpha$$

که در اینجا  $\tanh \alpha = v/c$ . نشان دهید که تبدیل لورنتس با چرخشی به اندازه زاویه  $i\alpha$  در فضای چهار بعدی متناظر است.

۳.۱۴ نشان دهید که معادله

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

تحت تبدیل لورنتس ناورد است، ولی تحت تبدیل گالیله‌ای چنین نیست. (این معادله عبارت است از معادله موج که انتشار موج نوری را در فضای آزاد توصیف می‌کند.)

۴.۱۴ نشان دهید که عبارت مربوط به انقباض فیزجرالد-لورنتس [معادله (۱۹.۱۴)] را نیز می‌توان به صورت زیر به دست آورد؛ که ناظر دستگاه  $K'$  زمان لازم برای عبور میله مورد اندازه‌گیری

را از یک نقطه ثابت در آن دستگاه تعیین و سپس آن را در  $v$  ضرب کند.

۵.۱۴ شکل ظاهری مکعب متحرکی که به سوی یک ناظر می‌رود، و یا از او دور می‌شود، چگونه است؟

۶.۱۴ دو رویداد را در نظر بگیرید که در دو نقطه متفاوت در یک لحظه  $t$  در دستگاه  $K$  اتفاق می‌افتند. اگر این دو نقطه به فاصله  $\Delta x$  از یکدیگر قرار گرفته باشند، نشان دهید که این دو رویداد در دستگاه  $K'$  همزمان نیستند بلکه به اندازه فاصله زمانی  $\Delta t' = -v\gamma\Delta x/c^2$  از هم جدا شده‌اند.

۷.۱۴ دو ساعت در مبدأ دستگاه‌های  $K$  و  $K'$  واقع‌اند (سرعت این دو دستگاه نسبت به یکدیگر  $v$  است)؛ در هنگام تطابق دو مبدأ این ساعتها همزمان شده‌اند. پس از گذشت زمان  $t$ ، ناظر واقع در مبدأ دستگاه  $K$  به وسیله یک تلسکوپ ساعت  $K'$  را مشاهده می‌کند. ساعت  $K'$  چه وقتی را نشان می‌دهد؟

۸.۱۴ اینشتین در مقاله ۱۹۰۵ (ترجمه آن را به زبان انگلیسی در مرجع Lo ۲۳ می‌توان یافت) اظهار می‌دارد: «نتیجه می‌گیریم که یک ساعت-موازنه در استوا باید، به مقدار بسیار کمی، کندتر از ساعت مشابه دقیقی کار کند که در یکی از قطبها قرار گرفته است؛ البته فرض می‌کنیم که سایر شرایط یکسان باشند». از این واقعیت که حرکت ساعت استوایی یکنواخت نیست چشم ببوسید و نشان دهید که پس از گذشت یک قرن ساعتها به اندازه تقریباً  $0.38$  ثانیه باهم اختلاف پیدا می‌کنند.

۹.۱۴ موشکی نسبیتی را در نظر بگیرید که سرعتش نسبت به یک چارچوب لخت  $v$  باشد و گازهای خروجی با سرعت ثابت  $V$  نسبت به موشک از آن خارج می‌شوند. نشان دهید که معادله حرکت موشک عبارت است از

$$m \frac{dv}{dt} + V \frac{dm}{dt} (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

که در اینجا  $m = m(t)$  جرم موشک در چارچوب سکون آن است و  $\beta = v/c$ .  
۱۰.۱۴ به کمک روشهای جبری نشان دهید که معادلات (۱۵.۱۴) از معادلات (۱۴.۱۴) نتیجه می‌شوند.

۱۱.۱۴ یک چوب‌دستی به طول  $l$  در امتداد زاویه  $\theta$  نسبت به محور  $x_1$  در دستگاه ساکن خودش،  $K$ ، قرار گرفته است. طول و سوی اندازه‌گیری شده چوب‌دستی توسط ناظری که با سرعت  $v$  در امتداد  $x_1$  حرکت می‌کند، چقدر است؟

۱۲.۱۴ دوندهای که می‌کوشد رکورد سرعت زمینی را بشکند فاصله ۱۰۰ متر بین دو علامت بر روی زمین را از نظر ناظر زمینی در  $4\mu s$  با موشک طی می‌کند. فاصله بین دو علامت از نظر دونده چقدر است؟ زمان اندازه‌گیری توسط او چقدر است؟ دونده و ناظر زمینی چه سرعتی را اندازه‌گیری می‌کنند؟

۱۳.۱۴ میونی با سرعت  $v = 0.999c$  در جو به طور قائم به سمت پایین در حرکت است. اگر نیمه عمر آن در چارچوب سکون خودش  $3.1\mu s$  باشد، نیمه عمر آن از نظر یک ناظر زمینی چقدر است؟

۱۴.۱۴ نشان دهید که اگر گیرنده‌ای با سرعت  $v$  به یک منبع نور ثابت نزدیک شود، معادله (۳۱.۱۴) صادق است.

۱۵.۱۴ می‌دانیم که ستاره‌ای با سرعت  $4 \times 10^4 m/s$  از زمین دور می‌شود. این سرعت با اندازه‌گیری انتقال خط  $H_\alpha$  ( $\lambda = 6563nm$ ) تعیین می‌شود. انتقال در طول موج خط  $H_\alpha$  چقدر و در کدام جهت است؟

۱۶.۱۴ ستاره‌ای (دستگاه  $K'$ ) یک فوتون را تحت زاویه  $\theta'$  گسیل می‌کند و سپس این فوتون تحت زاویه  $\theta$  بر روی زمین (دستگاه  $K$ ) دریافت می‌شود. زاویه را نسبت به خط واصل بین زمین و ستاره اندازه‌گیری می‌کنیم. ستاره با سرعت  $v$  از زمین دور می‌شود. رابطه بین  $\theta$  و  $\theta'$  را به دست آورید؛ این پدیده را ابیراهی نور می‌گویند.

۱۷.۱۴ بی برده‌ایم که طول موج یک خط طیفی،  $\lambda$ ، بر روی زمین در کهکشانی دور دست پنجاه درصد افزایش یافته است. سرعت کهکشان نسبت به زمین چقدر است؟

۱۸.۱۴ معادلات (۱۰۴.۱۴) و (۱۰۵.۱۴) از مثال ۱۱.۱۴ را در حالتی که ناظر ساکن و منبع متحرک است، به دست آورید. نشان دهید که این نتایج با نتایج مثال ۱۱.۱۴ یکسان‌اند.

۱۹.۱۴ بنابر معادله (۳۴.۱۴)، انتقال به سرخ (یا آبی) وقتی روی می‌دهد که منبع و ناظر نسبت به هم در حرکت شعاعی صرف (یعنی،  $\beta = \beta_r$ ) دور (یا نزدیک) می‌شوند. نشان دهید که اگر یک سرعت مماسی نسبی،  $\beta_t$ ، نیز وجود داشته باشد، معادله (۳۴.۱۴) به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{v}{v_0} = \frac{\sqrt{1 - \beta_r^2 - \beta_t^2}}{1 - \beta_r}$$

و شرط اینکه همواره یک انتقال به سرخ داشته باشیم (یعنی، بدون انتقال به آبی):  $\lambda > \lambda_0$  یا

$v < v_0$ ، عبارت است از<sup>۱</sup>

$$\beta_t^2 > 2\beta_r(1 - \beta_r)$$

۲۰.۱۴ فضاوردی به نزدیکترین ستاره، که ۴ سال نوری با ما فاصله دارد، سفر می‌کند و با سرعت  $0.3c$  باز می‌گردد. از عمر این فضاورد نسبت به افرادی که در زمین مانده‌اند چقدر گذشته است؟  
۲۱.۱۴ عبارت مربوط به نیروی معمولی چنین است

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$$

$\mathbf{u}$  را در جهت  $x_1$  بگیرید و مؤلفه‌های نیرو را محاسبه کنید. نشان دهید که

$$F_1 = m_t \dot{u}_1, \quad F_2 = m_t \dot{u}_2, \quad F_3 = m_t \dot{u}_3$$

که در اینجا  $m_t$  و  $m_l$  به ترتیب عبارت‌اند از جرم طولی و جرم عرضی:

$$m_l = \frac{m}{(1 - \beta^2)^{3/2}}, \quad m_t = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

۲۲.۱۴ آهنگ میانگین انرژی تابشی خورشید که به زمین می‌رسد تقریباً  $1.4 \times 10^6 \text{ erg/cm}^2 \text{ s}$  است. فرض کنید که تمامی این انرژی از تبدیل جرم حاصل شده باشد. آهنگ مصرف جرم خورشید را محاسبه کنید. اگر این آهنگ ثابت باقی بماند طول عمر خورشید را حساب کنید. (داده‌های عددی مناسب را می‌توان از جدول ۱.۷ استخراج کرد.)

۲۳.۱۴ نشان دهید که رابطه زیر بستگی تکانه و انرژی جنبشی یک ذره را به یکدیگر بیان می‌کند:

$$p^2 c^2 = 2Tmc^2 + T^2$$

۲۴.۱۴ حداقل انرژی مورد نیاز یک پروتون در شتابدهنده برای تولید یک پادپروتون،  $\bar{p}$ ، در برهم کنش زیر، چقدر است؟

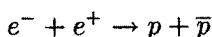
$$p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p})$$

جرم پروتون و پادپروتون عبارت است از:  $m_p$ .

۲۵.۱۴ ذره‌ای به جرم  $m$ ، انرژی جنبشی  $T$ ، و بار  $q$  عمود بر میدان مغناطیسی در یک سیکلوترون در حرکت است. رابطه‌ی مربوط به شعاع مسیر ذره،  $r$  را بر حسب  $T$ ،  $m$ ،  $q$  و  $B$  به دست آورید.

۲۶.۱۴ نشان دهید که فوتون منزوی نمی‌تواند به یک زوج الکترون-پوزیترون،  $\gamma \rightarrow e^- + e^+$  تبدیل شود. (قوانین پایستگی رویداد این واقعه را فقط در نزدیکی جسم دیگری مجاز می‌دارد.)

۲۷.۱۴ الکترونها و پوزیترونها با انرژیهای مساوی از جهت‌های مخالف در یک حلقه‌ی انبارشی رودررو باهم برخورد می‌کنند تا بنابر واکنش زیر پروتون تولید کنند



انرژی سکون پروتون و پادپروتون عبارت است از  $938 \text{ MeV}$ . حداقل انرژی جنبشی هر یک از ذرات چقدر باشد تا این واکنش صورت پذیرد.

۲۸.۱۴ در مورد ذره‌ای به جرم  $m$  گستره‌ی سرعت‌هایی را محاسبه کنید که در آن گستره رابطه‌ی کلاسیک انرژی جنبشی،  $\frac{1}{2}mv^2$ ، در محدوده‌ی یک درصد از مقدار صحیح نسبیتی قرار می‌گیرد. این مقادیر را برای الکترون و برای پروتون به دست آورید.

۲۹.۱۴ شتاب‌دهنده‌ی خطی استانفورد به طول ۲ مایل الکترونها را تا  $50 \text{ GeV}$  ( $50 \times 10^9 \text{ eV}$ ) شتاب می‌دهد. سرعت الکترونها در پایان مسیر چقدر است؟

۳۰.۱۴ نوترون آزاد ناپایدار است و به پروتون و الکترون وامی‌باشد. اگر نوترونی در حال سکون واپاشد علاوه بر انرژیهای سکون پروتون و الکترون، چه مقدار انرژی موجود است؟ (این واپاشی نمونه‌ای از واپاشی بتازای هسته‌ای به‌شمار می‌آید. در این واپاشی ذره‌ی دیگری، به نام نوترینو، واقعاً یک پاد نوترینوی  $\bar{\nu}$  نیز تولید می‌شود.)

۳۱.۱۴ یک پيون خنثی،  $\pi^0$ ، که با سرعت  $v = 0.98c$  در حرکت است به دو فوتون وامی‌باشد. اگر دو فوتون از دو طرف مسیر پيون با زاویه‌ی مساوی  $\theta$  خارج شوند، زاویه‌ی  $\theta$  و انرژی فوتونها را به دست آورید. انرژی سکون پيون برابر است با  $135 \text{ MeV}$ .

۳۲.۱۴ در فیزیک هسته‌ای و ذره‌ای، تکانه را معمولاً برای سهولت در محاسبات بر حسب  $\text{MeV}/c$  بیان می‌کنند. انرژی جنبشی یک الکترون و یک پروتون که تکانه هر کدام از آنها  $1000 \text{ MeV}/c$  است محاسبه کنید.

۳۳.۱۴ یک نوترون در حال سکون ( $m_n = 939.6 \text{ MeV}/c^2$ ) به یک پروتون ( $m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2$ )، یک الکترون ( $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ )، و یک پادنوترینو ( $m_{\bar{\nu}} \approx 0$ ) وامی‌باشد. این سه ذره با زاویه‌های متقارن  $120^\circ$  نسبت به هم در صفحه‌ی واحدی

خارج می‌شوند. تکانه و انرژی جنبشی هر یک از ذرات را به دست آورید.

۳۴.۱۴ نشان دهید که  $\Delta s^2$  در تمام چارچوبهای لخت که با سرعتهای نسبی در حرکت‌اند، ناورد است.

۳۵.۱۴ با استفاده از معادله (۷۲.۷) نشان دهید که آهنگ پیشروی حضیض خورشیدی یک سیاره را می‌توان، به شرط کوچک بودن  $\epsilon$ ، به صورت زیر بیان کرد

$$\Delta \cong \epsilon \pi \left( \frac{v_{\max}}{c} \right)^2$$

اینکه این مقدار برای عطارد بیشتر از هر سیاره دیگری است به این واقعیت نسبت داده می‌شود که سرعت مداری عطارد در میان سیارات از همه بیشتر است. در نتیجه، پارامتر نسبیتی  $v/c$  برای عطارد بیشترین مقدار است.  $v_{\max}/c$  را برای عطارد محاسبه و آن را با نتایج مربوط به سیاره‌های زهره، زمین، و زحل مقایسه کنید. از نتایج این محاسبات بهره‌گیرید و تحقیق کنید که در مورد عطارد این پارامتر  $\Delta \cong 40$  ثانیه فوس در هر قرن است.

۳۶.۱۴ چار-بردار نیروی  $\mathbf{F}$  (به نام نیروی مینکوفسکی) را به صورت مشتق چار-بردار تکانه نسبت به زمان عادی تعریف می‌کنیم.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau}$$

نشان دهید که تبدیل چار-بردار نیرو به صورت زیر است

$$F'_x = \gamma(F_x + i\beta F_t)$$

$$F'_t = F_t$$

$$F'_y = F_y$$

$$F'_z = \gamma(F_z - i\beta F_t)$$

۳۷.۱۴ یک فضاییما با سرعت  $0.9c$  نسبت به زحل از کنار این سیاره می‌گذرد. مشاهده می‌شود که فضاییمای دیگری با سرعت نسبی  $0.2c$  نسبت به اولی (در همان جهت) از کنارش می‌گذرد. سرعت فضاییمای دومی نسبت به زحل چقدر است؟

۳۸.۱۴ نشان دهید که صورت نسبیتی قانون دوم نیوتون عبارت است از

$$F = m \frac{du}{dt} \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

۳۹.۱۴ یک نوسانگر هماهنگ نسبیتی و یک بعدی با لاگرانژی زیر را در نظر بگیرید

$$L = mc^2(1 - \sqrt{1 - \beta^2}) - \frac{1}{4}kx^2$$

معادله حرکت لاگرانژ را برای آن به دست آورید و نشان دهید که می توان از آن انتگرال گرفت و رسید

به

$$E = mc^2 + \frac{1}{4}ka^2$$

که در اینجا  $a$  حداکثر فاصله‌ای است که ذره در حال نوسان می‌تواند از حالت تعادل دور شود. نشان دهید که دوره تناوب

$$\tau = 4 \int_{x=-a}^{x=a} dt$$

را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\tau = \frac{2a}{\kappa c} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + 2\kappa^2 \cos^2 \phi)}{\sqrt{1 + \kappa^2 \cos^2 \phi}} d\phi$$

انتگرالده را بر حسب توانهای  $\kappa \equiv (a/2)\sqrt{k/mc^2}$  بسط و نشان دهید، که تا مرتبه اول  $\kappa$  داریم

$$\tau \cong \tau_0 \left( 1 + \frac{3ka^2}{16mc^2} \right)$$

که در اینجا  $\tau_0$  دوره تناوب نانسبیتی برای نوسانهای کوچک،  $2\pi\sqrt{m/k}$ ، است.

۴۰.۱۴ چارچوب لخت  $K$  را در نظر بگیرید که حاوی تعدادی ذره به جرم  $m_\alpha$  با مؤلفه‌های تکانه معمولی  $p_{\alpha,j}$  و انرژی کل  $E_\alpha$  است. دستگاه مرکز جرم چنین مجموعه‌ای از ذرات، بنا بر تعریف عبارت است از دستگاهی که در آن تکانه معمولی کل صفر باشد. نشان دهید که مؤلفه‌های سرعت دستگاه مرکز جرم نسبت به دستگاه  $K$  عبارت‌اند از

$$\frac{v_j}{c} = \frac{\sum_\alpha p_{\alpha,j} c}{\sum_\alpha E_\alpha}$$

۴۱.۱۴ یکی از یکاهای متعارف انرژی که در فیزیک اتمی و هسته‌ای به کار می‌رود، الکترون ولت (eV) است، که عبارت است از انرژی کسب شده توسط یک الکترون وقتی در یک اختلاف پتانسیل یک ولت سقوط می‌کند:  $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ erg}$  در چنین یکایی

جرم الکترون عبارت است از  $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$  و جرم پروتون  $m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$ . انرژی جنبشی و کمیت‌های  $\beta$  و  $\gamma$  را برای یک الکترون و برای یک پروتون که تکانه هر کدام  $100 \text{ MeV}/c$  باشد، محاسبه کنید. نشان دهید که الکترون «نسبیتی» است در حالی که پروتون «نانبسیتی» است. ۴۲.۱۴ انرژی یک کوانتوم نور (یا فوتون) از رابطه  $E = h\nu$  به دست می‌آید، که در اینجا  $h$  ثابت پلانک و  $\nu$  بسامد فوتون است. تکانه فوتون برابر است با  $h\nu/c$ . نشان دهید که، اگر فوتونی از یک الکترون آزاد (به جرم  $m_e$ ) پراکنده شود، انرژی فوتون پراکنده عبارت خواهد بود از

$$E' = E \left[ 1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \right]^{-1}$$

که در اینجا  $\theta$  زاویه پراکندگی فوتون است. همچنین نشان دهید که انرژی جنبشی کسب شده توسط الکترون برابر است با

$$T = \frac{E'}{m_e c^2} \left[ \frac{1 - \cos \theta}{1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \right]$$

۴۳.۱۴ نشان دهید عبارت نسبیتی مربوط به انرژی جنبشی یک ذره که توسط ذره هدفی با همان جرم تحت زاویه  $\psi$  پراکنده می‌شود، به صورت زیر است

$$\frac{T_1}{T} = \frac{2 \cos^2 \psi}{(\gamma_1 + 1) - (\gamma_1 - 1) \cos^2 \psi}$$

این عبارت به وضوح در حد نانبسیتی  $1 \rightarrow \gamma_1$  به معادله (۸۸.۸) کاهش می‌یابد.  $T_1(\psi)$  را برای پراکندگی نوترون-پروتون و انرژی نوترون فرودی برابر  $100 \text{ MeV}$ ،  $1 \text{ GeV}$ ، و  $10 \text{ GeV}$  ترسیم کنید.

«پایان هر کاری مطلوبتر از آغاز آن است.» انجیل (سلیمان)



# پیوست الف

## قضیه تایلور

قضیه تایلور<sup>۱</sup> در ریاضی فیزیک از اهمیت چشمگیری برخوردار است، و به‌سبب تابعی دلخواه برحسب یک سری توانی مربوط می‌شود. در بسیاری موارد، به‌کارگیری این قضیه برای ساده‌کردن مسئله تا به‌حدّی که به‌صورت قابل‌کنترلی درآید، ضروری است.

تابع  $f(x)$  را در نظر بگیرید که تمام مشتق‌های آن به‌ازای تمام مرتبه‌ها در بازه معینی از متغیر مستقل  $x$  پیوسته است. اگر این بازه شامل  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$  باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$I \equiv \int_{x_0}^{x_0+h} f'(x) dx = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (\text{الف } ۱)$$

که در اینجا  $f'(x)$  مشتق تابع  $f(x)$  نسبت به  $x$  است. اگر تغییر متغیر زیر را اعمال کنیم

$$x = x_0 + h - t \quad (\text{الف } ۲)$$

داریم

$$I = \int_0^h f'(x_0 + h - t) dt \quad (\text{الف } ۳)$$

---

۱. اولین بار توسط ریاضیدان انگلیسی بروک تایلور (۱۷۳۱-۱۶۸۵) در سال ۱۷۱۵ منتشر شد.

پس از انتگرالگیری جزء به جزء

$$I = tf'(x. + h - t) \Big|_0^h + \int_0^h tf''(x. + h - t)dt$$

$$= hf'(x.) + \int_0^h tf''(x. + h - t)dt \quad (\text{الف ۴.})$$

با انتگرالگیری جزء به جزء جمله دوم

$$I = hf'(x.) + \frac{h^2}{2!}f''(x.) + \int_0^h \frac{t^2}{2!}f'''(x. + h - t)dt \quad (\text{الف ۵.})$$

با ادامه این فرایند، یک سری نامتناهی برای  $I$  ایجاد می‌کنیم. در این صورت بنا بر تعریف  $I$  داریم

$$f(x. + h) = f(x.) + hf'(x.) + \frac{h^2}{2!}f''(x.) + \dots \quad (\text{الف ۶.})$$

این عبارت بسط سری تیلور مربوط به تابع  $f(x. + h)$  است.<sup>۱</sup> صورت متداولتر این سری وقتی حاصل می‌شود که  $x. = 0$  و  $h = x$  [یعنی، تابع  $f(x)$  حول مبدأ بسط داده شود]

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots$$

$$+ \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots \quad (\text{الف ۷.})$$

که در اینجا

$$f^{(n)}(0) \equiv \frac{d^n}{dx^n} f(x) \Big|_{x=0} \quad (\text{الف ۸.})$$

معادله (الف ۷.) را معمولاً سری مک لورن تابع  $f(x)$  می‌گویند.<sup>۲</sup>

بسطهای سری ارائه شده در معادلات (الف ۶.) و (الف ۷.) دو خاصیت مهم دارند. تحت شرایطی بسیار کلی می‌توان از آنها جمله به جمله مشتق یا انتگرال گرفت، و سری حاصل به مشتق یا انتگرال تابع اصلی می‌گراید.

۱. عبارت باقیمانده یک سری که پس از تعدادی متناهی جمله پایان می‌یابد، مثلاً توسط کابلان (Ka 84) مورد بحث قرار گرفته است.

۲. این رابطه در سال ۱۷۱۷ توسط جیمز استرلینگ کشف و در ۱۷۴۲ توسط کالین مک لورن منتشر شد.

### مثال الف. ۱.

بسط سری تیلور تابع  $e^x$  را بیابید.

حل: چون مشتق تابع  $\exp x$  تا هر مرتبه‌ای همان  $\exp x$  است، سری نمایی عبارت خواهد بود از

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{الف. ۹.})$$

این نتیجه از اهمیت خاصی برخوردار است و اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

### مثال الف. ۲.

بسط سری تیلور تابع  $\sin x$  را بیابید.

حل: برای بسط دادن تابع  $f(x) = \sin x$ ، به مشتقات زیر نیاز داریم

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$$

بنابراین

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (\text{الف. ۱۰.})$$

به همین ترتیب، خواهیم داشت

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (\text{الف. ۱۱.})$$

### مثال الف. ۳.

در انجام انتگرالگیری زیر از بسط سری تیلور عبارت  $(1+t)^{-1}$  استفاده کنید

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

حل: غالب اوقات در محاسبه انتگرال معین می‌توان از بسط سری به‌طور سودمندی استفاده کرد. (این مطلب بخصوص در مواردی که انتگرال نامعین را نمی‌توان در شکل بسته به‌دست آورد، صادق است.)

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t^1 + t^2 - \dots) dt \quad |t| < 1$$

پس از انتگرالگیری جمله به‌جمله می‌رسیم به

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (\text{الف } 12)$$

به‌علت برقرار بودن رابطه زیر

$$\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} \quad (\text{الف } 13)$$

به این نتیجه می‌رسیم

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (\text{الف } 14)$$

#### مثال الف ۴

علاوه بر اینکه می‌توان از سری تیلور، تقریبی برای یک تابع به‌دست آورد، می‌شود از آن در بازسازی تابع نیز بهره گرفت. در برخی کاربردها، ممکن است استفاده از چنین تابع بازسازی‌شده‌ای خیلی مفیدتر باشد. مثلاً ممکن است بخواهیم چندجمله‌ای  $f(x) = 4 + 6x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$  را به‌جای  $x = 0$  حول  $x = 2$  بسط دهیم. ابتدا مشتقهای متوالی را معین و آنها را در  $x = 2$  محاسبه می‌کنیم

$$f(2) = 60$$

$$f'(2) = (6 + 6x + 6x^2 + 4x^3) \Big|_{x=2} = 74$$

$$f''(2) = (6 + 12x + 12x^2) \Big|_{x=2} = 78$$

$$f'''(2) = (12 + 24x) \Big|_{x=2} = 60$$

$$f^{(۳)}(۲) = ۲۴$$

$$f^{(۵)}(۲) = ۰$$

با استفاده از معادله (الف.۳) به ازای  $h = (x - ۲)$  داریم

$$f(x) = ۶۰ + ۷۴(x - ۲) + ۳۹(x - ۲)^۲ + ۱۰(x - ۲)^۳ + (x - ۲)^۴ \quad (\text{الف. ۱۵})$$

### مثال الف.۵

تعداد زیادی انتگرال مهم در فیزیک مطرح می‌شوند که نمی‌توان از آنها در شکل بسته انتگرال گرفت؛ یعنی، برحسب توابع مقدماتی (شامل چندجمله‌ایها، توابع نمایی، لگاریتمها، توابع مثلثاتی، و معکوس آنها). انتگرالهایی که انتگرالده آنها به صورت توابع زیر باشند، نمونه‌هایی از این گونه به شمار می‌آیند

$$e^{-x^۲}, \frac{e^{-x}}{x}, x \tan x, \sin x^۲, ۱/\ln x, (\sin x)/x, ۱/\sqrt{۱-x^۲}$$

با همه اینها، به مقدار انتگرالها یا تقریبهای خوبی از مقادیر آنها نیاز داریم. به کمک بسط سری تیلور تمام یا قسمتی از انتگرالده و پس از آن انتگرالگیری جمله به جمله از سری حاصل، به جوابی با دقت مطلوب دست می‌یابیم. به عنوان نمونه، انتگرال زیر را حل کنید

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \quad (\text{الف. ۱۶})$$

حل: با استفاده از معادله (الف.۹)

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \int_1^x \left( \frac{1 + t + \frac{t^۲}{۲!} + \frac{t^۳}{۳!} + \dots}{t} \right) dt \quad (\text{الف. ۱۷})$$

$$= \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^x dt + \int_1^x \frac{t}{۲!} dt + \int_1^x \frac{t^۲}{۳!} dt + \dots$$

$$= \ln x + (x-1) + \frac{1}{۴}(x^۲-1) + \frac{1}{۱۸}(x^۳-1) + \dots$$

(الف. ۱۸)

## مسائل

الف. ۱. با عمل تقسیم و بسط مستقیم برحسب سری تیلور نشان دهید که

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

این سری در چه گستره‌ای از  $x$  برقرار است؟

الف. ۲. تابع  $\cos x$  را در مجاورت  $x = \pi/4$  بسط دهید.

الف. ۳. با استفاده از بسط سری نشان دهید که

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{x} dx = 2,1145\dots$$

الف. ۴. با استفاده از سری تیلور تابع  $\sin^{-1} x$  را بسط دهید. صحت این نتیجه را به کمک بسط

انتگرال رابطه زیر تحقیق کنید

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

الف. ۵. انتگرال زیر را تا سه رقم اعشار محاسبه کنید

$$\int_0^1 \exp(-x^2/2) dx$$

نتیجه به دست آمده را با آنچه که از جدولهای انتگرال احتمال تعیین شده است، مقایسه کنید.

الف. ۶. نشان دهید که اگر  $f(x) = (1+x)^n$  (وقتی  $|x| < 1$ ) برحسب یک سری تیلور بسط

داده شود، نتیجه با بسط دو جمله‌ای یکسان است.

## پیوست ب

### انتگرالهای بیضوی

انتگرالهای بیضوی رده مهم و گسترده‌ای از انتگرالها به شمار می‌آیند که نمی‌شود آنها را برحسب توابع مقدماتی و در شکل بسته محاسبه کرد. در فیزیک به انتگرالهای بیضوی فراوان برمی‌خوریم؛ مثلاً، به حل دقیق مربوط به آونگ ساده (تخت) در بخش ۱۳.۳ بنگرید. هر انتگرالی به صورت زیر، انتگرال بیضوی است

$$\int (a \sin \theta + b \cos \theta + c)^{\pm \frac{1}{2}} d\theta, \quad \text{یا} \quad \int R(x, \sqrt{y}) dx \quad (\text{ب. ۱})$$

که در آن  $R$  تابع گویای دو چند جمله‌ای است، و  $y = ax^2 + bx + c$  یا  $y = ax^2 + bx^2 + cx^2 + dx + e$  با ضرایب خطی متمایز است و  $a, b, c, d, e$  ثابت‌اند به طوری که  $a$  و  $b$  هر دو باهم صفر نباشند. به هر حال، روال متعارف به این ترتیب است که تمام انتگرالهای بیضوی را به یک یا چند تا از سه نوع استاندارد آن تبدیل کنیم. این صورتهای استاندارد بیشتر مورد بررسی قرار گرفته‌اند و به صورت جدول در آمده‌اند. کتابهای راهنمای متعددی با جدولهای مربوط به این انتگرالها چاپ و منتشر شده است.<sup>۱</sup>

---

۱. یکی از بهترین کتابهای راهنما از این نوع، کتاب ابراموویتز و استگان (Ab 65) است. به جدولهای عددی مفصل آدامز و هیپسیلی (Ad 22)، و نیز جدولهای کوتاه دوايت (Dw 61) مراجعه کنید.

انتگرالهای بیضوی نوع اول

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k^2 < 1 \quad (۱.۲.ب)$$

یا اگر  $z = \sin \theta$ 

$$\bar{F}(k, x) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \quad k^2 < 1 \quad (۲.۲.ب)$$

انتگرالهای بیضوی نوع دوم

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad k^2 < 1 \quad (۱.۳.ب)$$

یا اگر  $z = \sin \theta$ 

$$\bar{E}(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz, \quad k^2 < 1 \quad (۲.۳.ب)$$

انتگرالهای بیضوی نوع سوم

$$\Pi(n, k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1 + n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (۱.۴.ب)$$

یا اگر  $z = \sin \theta$ 

$$\bar{\Pi}(n, k, x) = \int_0^x \frac{dz}{(1 + nz^2) \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \quad (۲.۴.ب)$$

این صورتهای استاندارد از اتحادهای زیر پیروی می‌کنند، که اغلب مفیدند:

$$\left. \begin{aligned} F(k, \phi) &= F(k, \pi) - F(k, \pi - \phi) \\ E(k, \phi) &= E(k, \pi) - E(k, \pi - \phi) \end{aligned} \right\} \quad (۵. ب)$$

و

$$\left. \begin{aligned} F(k, m\pi + \phi) &= mF(k, \pi) + F(k, \phi) \\ E(k, m\pi + \phi) &= mE(k, \pi) + E(k, \phi) \end{aligned} \right\} \quad (۶. ب)$$



که در اینجا  $m$  عددی است صحیح.

اگر جدول در اختیار نداشته باشیم یا اگر  $\phi$  یا  $x$  به صورت متغیر مورد نیازمان باشد، می‌توان از انتگرالهای استاندارد با بسط انتگرالده به صورت یک سری نامتناهی و انتگرالگیری جمله به جمله آن، تقریب گرفت. مثلاً، فرض کنید

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

با استفاده از قضیه بسط دو جمله‌ای در مورد انتگرالده داریم

$$(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{8} k^4 \sin^4 \theta - \dots$$

به طوری که

$$\begin{aligned} E(k, \phi) &= \int_0^\phi \left[ 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{8} k^4 \sin^4 \theta - \dots \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} k^{2n} \sin^{2n} \theta - \dots \right] d\theta \\ &= \phi - \frac{k^2}{2} \int_0^\phi \sin^2 \theta d\theta - \dots - \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} k^{2n} \\ &\quad \times \int_0^\phi \sin^{2n} \theta d\theta \quad (\text{ب. ۷}) \end{aligned}$$

به همین ترتیب، می‌توان از قضیه دو جمله‌ای برای بسط  $(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$  استفاده کرد و نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} F(k, \phi) &= \phi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^\phi \sin^2 \theta d\theta + \frac{3}{8} k^4 \int_0^\phi \sin^4 \theta d\theta + \dots \\ &\quad + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} k^{2n} \int_0^\phi \sin^{2n} \theta d\theta + \dots \quad (\text{ب. ۸}) \end{aligned}$$

مثال ب. ۱

انتگرال  $\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$  را به صورت استاندارد در آورید.

حل: بنا بر مطالبی که از حساب انتگرال و دیفرانسیل به خاطر داریم، هر انتگرال  $\int_a^b f(x)dx$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

بنابراین

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_{\phi_1}^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta + \int_{\phi}^{\phi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

اما انتگرالها خاصیت دیگری هم دارند

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

بنابراین

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_{\phi}^{\phi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta - \int_{\phi}^{\phi_1} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

یا

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = E(k, \phi_2) - E(k, \phi_1) \quad (9. ب)$$

■ جمله‌های سمت راست را می‌توان در یکی از کتابهای راهنما یافت.

## مثال ۲.ب

انتگرال بیضوی زیر را به صورت استاندارد تبدیل کنید

$$\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}}, \quad n^2 > 1$$

حل: برای تبدیل این انتگرال به صورت استاندارد، باید رادیکال  $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}$  به  $\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}$  تبدیل شود که در آن  $k^2 < 1$ . برای انجام این کار، تبدیل  $n \sin \theta = \sin \beta$  را در نظر بگیرید. پس از دیفرانسیل‌گیری داریم

$$n \cos \theta d\theta = \cos \beta d\beta$$

$$d\theta = \frac{\cos \beta d\beta}{n \cos \theta}$$

از اتحاد  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  بهره می‌گیریم و می‌رسیم به

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \beta}{n}\right)^2}$$

همچنین  $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$  و  $\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$ . از اینجا انتگرال چنین می‌شود

$$\begin{aligned} \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}} &= \int_0^{\sin^{-1}(n \sin \phi)} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \beta} d\beta}{n \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \beta}{n}\right)^2} \sqrt{1 - \sin^2 \beta}} \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{\sin^{-1}(n \sin \phi)} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n^2}\right) \sin^2 \beta}} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{n} \int_0^{\sin^{-1}(n \sin \phi)} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n^2}\right) \sin^2 \beta}} \quad (10. \text{ ب})$$

■ که در اینجا  $1/n^2 < 1$ . اکنون انتگرال سمت راست به صورت استاندارد در آمده است.

### مثال ۳.ب

انتگرال بیضوی زیر را به صورت استاندارد در آورید

$$\int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

حل: فرض کنید  $\mu = \sin \theta$ ؛ در آن صورت  $d\mu = \cos \theta d\theta$ . چون  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ،  $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \mu^2}$ ، بنابراین  $d\theta = d\mu / \sqrt{1 - \mu^2}$ . یک اتحاد مثلثاتی دیگر، بدین قرار است:  $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2\mu^2$ . به این ترتیب،  $\sqrt{\cos 2\theta} = \sqrt{1 - 2\mu^2}$  و

$$\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \int_0^{\sin \phi} \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-2\mu^2}}$$

فرض کنید  $z = \sqrt{2}\mu$ ، در آن صورت  $dz = \sqrt{2}d\mu$ ، بنابراین

$$\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}\sin \phi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{1}{2}z^2)}} \quad (\text{ب. ۱۱})$$

انتگرال سمت راست به صورت استاندارد است.

### مسائل

۱. با استفاده از مجموعه جدولهای مربوطه، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$F(0, 27, 7\pi/4) \quad (\text{ج})$$

$$F(0, 27, \pi/3) \quad (\text{الف})$$

$$E(0, 27, 7\pi/4) \quad (\text{د})$$

$$E(0, 27, \pi/3) \quad (\text{ب})$$

۲. انتگرالهای زیر را به صورت استاندارد درآورید:

$$\int_{-1/4}^{3/4} \sqrt{\frac{25-4z^2}{1-z^2}} dz \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{d\theta}{\sqrt{1-4\sin^2 \theta}} \quad (\text{الف})$$

۳. بسط دو جمله‌ای تابع  $(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2}$  را بیابید و آنگاه معادله (ب. ۸) را به دست آورید.

## پیوست ج

### معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم<sup>۱</sup>

#### ج ۱. معادلات همگن خطی

بدون شک، مهمترین نوع معادله دیفرانسیل معمولی که در مسائل ریاضی فیزیک با آن روبرو می‌شویم، معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت است. این نوع معادلات به صورت زیرند

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x) \quad (\text{ج } 1)$$

یا اگر مشتقها را با نماد پریم نشان دهیم

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (\text{ج } 1.1)$$

رده مهمی از این نوع معادلات عبارت‌اند از معادلاتی که در آنها  $f(x) = 0$ . این معادلات (به نام معادلات همگن) نه تنها خودشان از اهمیت برخوردارند، بلکه به صورت معادلات کاهش یافته در حل معادلاتی از نوع کلیتر [معادله (ج ۱)] نیز حائز اهمیت هستند.

---

۱. یکی از گنجینه‌های استاندارد در خصوص معادلات دیفرانسیل همانا کتاب اینسه (In27) است. فهرستی از نمونه‌های فراوان معادلات و حل آنها توسط مورفی (Mu 6) ارائه شده است. کتاب هوشنات (Ho 64) شامل دیدگاه جدیدی در این زمینه است.

ابتدا معادله همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت را در نظر می‌گیریم<sup>۱</sup>

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\text{ج. } ۲)$$

خواص مهم این معادلات عبارت‌اند از:

الف) اگر  $y_1(x)$  جوابی برای معادله (ج. ۲) باشد، آنگاه  $c_1 y_1(x)$  نیز جوابی برای آن معادله است.  
 ب) اگر  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  جوابهای معادله باشند، آنگاه  $y_1(x) + y_2(x)$  نیز جوابی برای معادله است (اصل برهم‌نهی).

ج) اگر  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  جوابهای مستقل خطی باشند، در آن صورت جواب عمومی معادله از رابطه  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  به دست می‌آید. (جواب عمومی همواره شامل دو ثابت اختیاری است).

توابع  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  مستقل خطی‌اند، اگر و تنها اگر معادله

$$\lambda y_1(x) + \mu y_2(x) \equiv 0 \quad (\text{ج. } ۳)$$

فقط به ازای  $\lambda = \mu = 0$  برقرار باشد. اگر معادله (ج. ۳) به ازای  $\lambda$  و  $\mu$  غیر صفر برقرار باشد، در آن صورت گوئیم که  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  وابسته خطی‌اند.

شرط کلی (یعنی، شرط لازم و کافی) که مجموعه‌ای از توابع  $y_1, y_2, y_3, \dots$  مستقل خطی باشند، آن است که دترمینان ورونسکی این توابع متحد با صفر باشد

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ج. } ۴)$$

که در اینجا  $y^{(n)}$  مشتق  $n$  ام  $y$  نسبت به  $x$  است.

درستی خواص (الف) و (ب) مذکور در بالا را می‌توان از طریق جانشانی مستقیم تحقیق کرد، اما خاصیت (ج) تنها به این خاطر در اینجا گنجد است که جواب عمومی را به دست دهد. باید توجه داشته باشید که این خواص فقط در مورد معادله همگن به کار می‌رود [معادله (ج. ۲)] و نه معادله کلی [معادله (ج. ۱)].

۱. جواب معادله‌ای از این نوع نخستین بار در ۱۷۴۳ از جانب اوایلر انتشار یافت، اما به نظر می‌رسد که دانیل و یوهان برنولی در ۱۷۳۹ بر آن آگاهی داشته‌اند.

معادلات نوع (ج.۲) را با جانشانی زیر می‌توان کاهش داد

$$y = e^{rx} \quad (\text{ج. ۵})$$

اکنون

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx} \quad (\text{ج. ۶})$$

با استفاده از این عبارتها به جای  $y'$  و  $y''$  در معادله (ج.۲) به یک معادله جبری می‌رسیم که به آن معادله کمکی می‌گویند

$$r^2 + ar + b = 0 \quad (\text{ج. ۷})$$

جواب این معادله درجه دوم بر حسب  $r$  چنین است

$$r = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4b} \quad (\text{ج. ۸})$$

اول فرض می‌کنیم دو ریشه، که آنها را با  $r_1$  و  $r_2$  نشان می‌دهیم، یکسان نباشد، و جواب را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y = e^{r_1 x} + e^{r_2 x} \quad (\text{ج. ۹})$$

چون دترمینان ورونسکی  $\exp(r_1 x)$  و  $\exp(r_2 x)$  صفر نمی‌شود، این توابع مستقل خطی‌اند. این ترتیب جواب عمومی عبارت است از

$$\boxed{y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad r_1 \neq r_2} \quad (\text{ج. ۱۰})$$

اما اگر  $r_1 = r_2 = r$  در آن صورت به کمک جانشانی مستقیم  $x \exp(rx)$  می‌شود تحقیق کرد که این تابع نیز یکی از جوابهاست، و چون  $\exp(rx)$  و  $x \exp(rx)$  مستقل خطی‌اند، جواب عمومی مربوط به ریشه‌های مضاعف از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\boxed{y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}, \quad r_1 = r_2 \equiv r} \quad (\text{ج. ۱۱})$$

مثال ج. ۱

معادله زیر را حل کنید

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \quad (\text{ج. ۱۲})$$

حل: معادله کمکی عبارت است از

$$r^2 - 2r - 3 = (r - 3)(r + 1) = 0 \quad (\text{ج. ۱۳})$$

ریشه‌های معادله عبارت‌اند از

$$r_1 = 3, \quad r_2 = -1 \quad (\text{ج. ۱۴})$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر است

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} \quad (\text{ج. ۱۵})$$

مثال ج. ۲۰

معادله زیر را حل کنید

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \quad (\text{ج. ۱۶})$$

حل: معادله کمکی عبارت است از

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0 \quad (\text{ج. ۱۷})$$

ریشه‌ها برابرند، و  $r = -2$ . بنابراین جواب عمومی معادله چنین است

$$y = c_1 e^{-2x} + c^2 x e^{-2x} \quad (\text{ج. ۱۸})$$

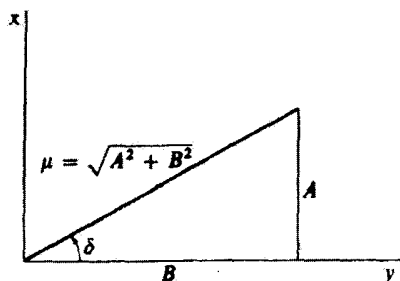
اگر ریشه‌های معادله کمکی،  $r_1$  و  $r_2$ ، موهومی باشند، باز هم جوابهای به دست آمده از  $c_1 \exp(r_1 x)$  و  $c_2 \exp(r_2 x)$  صحیح‌اند.

به منظور ارائه جوابها به طور کامل، بر حسب کمیت‌های حقیقی، از روابط اولر برای بیان توابع نمایی بهره می‌گیریم. در آن صورت

$$\left. \begin{aligned} e^{r_1 x} &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ e^{r_2 x} &= e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{ج. ۱۹})$$

و جواب عمومی به صورت زیر است





شکل ج. ۱.

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\alpha x} = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2) \cos \beta x + i(c_1 - c_2) \sin \beta x] \quad (\text{ج. } ۲۰)$$

اکنون  $c_1$  و  $c_2$  اختیاری‌اند، اما این ثابتها ممکن است مختلط باشند. اما، هر چهار جزء نمی‌توانند مستقل باشند (زیرا در آن صورت چهار ثابت اختیاری داریم و نه دو ثابت). تعداد اجزای مستقل را می‌توان با مزدوج مختلط کردن  $c_1$  و  $c_2$  به دو جزء مورد نیاز کاهش داد. در آن صورت ترکیبهای  $A \equiv c_1 + c_2$  و  $B \equiv i(c_1 - c_2)$  به یک زوج ثابت حقیقی اختیاری تبدیل می‌شوند. با استفاده از این کمیته‌ها در جواب، داریم

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (\text{ج. } ۲۱)$$

معادله (ج. ۲۱) را می‌شود با ضرب و تقسیم آن بر  $\mu = \sqrt{A^2 + B^2}$ ، به صورتی که گاهی هم مناسبتر است، در آورد:

$$y = \mu e^{\alpha x} [(A/\mu) \cos \beta x + (B/\mu) \sin \beta x] \quad (\text{ج. } ۲۲)$$

حال زاویه  $\delta$  را [شکل (ج. ۱)] چنان تعریف می‌کنیم که

$$\sin \delta = A/\mu \quad \cos \delta = B/\mu \quad \tan \delta = A/B \quad (\text{ج. } ۲۳)$$

در این صورت، جواب معادله عبارت خواهد بود از

$$y = \mu e^{\alpha x} (\sin \delta \cos \beta x + \cos \delta \sin \beta x) = \mu e^{\alpha x} \sin(\beta x + \delta)$$

بنابر تعریف دقیق فاز  $\delta$ ، جواب را می‌توان به یکی از دو صورت زیر نوشت

$$y = \mu e^{\alpha x} \sin(\beta x + \delta) \quad (\text{ج. } ۱.۲۴)$$

$$y = \mu e^{\alpha x} \cos(\beta x + \delta) \quad (\text{ج. } ۲.۲۴)$$

مثال ج. ۳

معادله زیر را حل کنید

$$y'' + 2y' + 4y = 0 \quad (\text{ج. } ۲۵)$$

حل: معادله کمکی چنین است

$$r^2 + 2r + 4 = 0 \quad (\text{ج. } ۲۶)$$

که ریشه‌های آن عبارت‌اند از

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3} \quad (\text{ج. } ۲۷)$$

بدینسان

$$\alpha = -1, \quad \beta = \sqrt{3} \quad (\text{ج. } ۲۸)$$

و جواب عمومی برابر است با

$$y = e^{-x}(c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x) \quad (\text{ج. } ۲۹)$$

یا

$$y = \mu e^{-x} \sin[(\sqrt{3}x + \delta)] \quad (\text{ج. } ۳۰)$$

سرتانجام، به بیان مختصر، برای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن، مطابق جدول ج. ۱، ممکن است سه نوع جواب وجود داشته باشد.

ج. ۲. معادلات خطی ناهمگن

برای اینکه معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم کلی (یعنی، ناهمگن) را حل کنیم، باید به چند نکته توجه کنیم. فرض کنید  $y = u$  جواب عمومی معادله

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\text{ج. } ۳۱)$$

جواب عمومی	ریشه‌های معادله کمکی
$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$	حقیقی، نابرابر ( $r_1 \neq r_2$ )
$c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$	حقیقی، برابر ( $r_1 = r_2 \equiv r$ )
$e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$	موهومی ( $\alpha \pm i\beta$ )
یا	
$\mu e^{\alpha x} \sin(\beta x + \delta)$	

باشد و فرض کنید که  $y = v$  هر جوابی از معادله زیر باشد

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (\text{ج. } ۳۲)$$

در این صورت  $y = u + v$  جواب معادله (ج. ۳۲) است، زیرا

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= (u'' + au' + bu) + (v'' + av' + bv) \\ &= 0 + f(x) \end{aligned}$$

چون  $u$  دو ثابت اختیاری  $c_1$  و  $c_2$  را در بر می‌گیرد، ترکیب  $u + v$  در تمام شرایط جواب عمومی معادله (ج. ۳۲) صدق می‌کند. تابع  $u$  تابع متمم و  $v$  انتگرال خصوصی معادله است. چون روش کلی به دست آوردن  $u$  در بالا بیان شده است، فقط باقی می‌ماند که از طریق بازبینی و امتحان، تابعی مانند  $v$  را پیدا کنیم که در معادله زیر صدق کند

$$v'' + av' + bv = f(x) \quad (\text{ج. } ۳۳)$$

مثال ج. ۴.

معادله زیر را حل کنید

$$y'' + 5y' + 6y = x^2 + 2x \quad (\text{ج. } ۳۴)$$

حل: معادله کمکی به این قرار است

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 3)(r + 2) = 0 \quad (\text{ج. } ۳۵)$$

$$r_1 = -3, \quad r_2 = -2 \quad (\text{ج. } 36)$$

تابع متمم عبارت است از

$$u = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} \quad (\text{ج. } 37)$$

چون سمت راست معادله اصلی یک چند جمله‌ای مرتبه دوم است، حدس می‌زنیم که انتگرال خصوصی به صورت زیر باشد

$$v = Ax^2 + Bx + C \quad (\text{ج. } 38)$$

در این صورت

$$v' = 2Ax + B \quad (\text{ج. } 39)$$

$$v'' = 2A \quad (\text{ج. } 40)$$

از نشان دادن این مقادیر در معادله دیفرانسیل، داریم

$$2A + 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 2x \quad (\text{ج. } 41)$$

یا

$$(6A)x^2 + (10A + 6B)x + (2A + 5B + 6C) = x^2 + 2x \quad (\text{ج. } 42)$$

از مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مشابه، داریم

$$\left. \begin{aligned} 6A &= 1 \\ 10A + 6B &= 2 \\ 2A + 5B + 6C &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{ج. } 43)$$

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{18}, \quad C = \frac{-11}{108} \quad (\text{ج. } 44)$$

به این ترتیب

$$v = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x - \frac{11}{108} = \frac{18x^2 + 6x - 11}{108} \quad (\text{ج. } 45)$$

بنابراین، جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است

$$y = u + v = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{18x^2 + 6x - 11}{108} \quad (\text{ج. } 46)$$

راه حل ارائه شده در این مثال را روش ضرایب نامعین می‌گویند.

مثال ج. ۵

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y'' + 4y = 2x \cos x \quad (\text{ج. } 47)$$

حل: معادله کمکی عبارت است از

$$r^2 + 4 = (r + 2i)(r - 2i) = 0 \quad (\text{ج. } 48)$$

که ریشه‌های آن به این قرارند

$$\left. \begin{aligned} r_1 = \alpha + i\beta = 0 + 2i \\ r_2 = \alpha - i\beta = 0 - 2i \end{aligned} \right\} \quad (\text{ج. } 49)$$

به طوری که

$$\alpha = 0, \beta = 2 \quad (\text{ج. } 50)$$

و تابع متمم عبارت خواهد بود

$$\begin{aligned} u &= e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \\ &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \end{aligned} \quad (\text{ج. } 51)$$

توجه داریم که برای پیدا کردن انتگرال خصوصی از  $x \cos x$  و مشتقهای آن فقط می‌توانیم جملاتی را پدید آوریم که شامل توابع زیر باشند

$$x \cos x, \quad x \sin x, \quad \cos x, \quad \sin x$$

بنابراین، از آنجا که همه این توابع مستقل خطی اند، انتگرال خصوصی آزمون به صورت زیر است

$$v = Ax \cos x + Bx \sin x + C \cos x + D \sin x \quad (\text{ج. } 52)$$

$$v' = A(\cos x - x \sin x) + B(\sin x + x \cos x) - C \sin x + D \cos x \quad (\text{ج. } 53)$$

$$v'' = -A(2 \sin x + x \cos x) + B(2 \cos x - x \sin x) - C \cos x - D \sin x \quad (\text{ج. } 54)$$

پس از نشان دادن در معادله دیفرانسیل اصلی می‌رسیم به

$$(3D - 2A) \sin x + (2B + 3C) \cos x + 3(A - 1)x \cos x + (3B)x \sin x = 0 \quad (\text{ج. } 55)$$

ضریب هر یک از جملات باید صفر شود (به علت مستقل خطی بودن جملات)

$$3D = 2A, \quad 2B = -3C, \quad A = 1, \quad 3B = 0 \quad (\text{ج. } 56)$$

که از اینجا داریم

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = \frac{2}{3} \quad (\text{ج. } 57)$$

و بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت خواهد بود از

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + x \cos x + \frac{2}{3} \sin x \quad (\text{ج. } 58)$$

اگر سمت راست معادله دیفرانسیل اصلی،  $f(x)$ ، [معادله (ج. ۱) یا (ج. ۳۲)] چنان باشد که  $f(x)$  و دو مشتق اولیه آن تنها شامل توابع مستقل خطی باشند، (فقط معادلات مرتبه دوم را در نظر گرفته‌ایم)، در آن صورت یک ترکیب خطی از این توابع، انتگرال خصوصی آزمون را تولید می‌کند. هرگاه تابع آزمون شامل جمله‌ای باشد که در تابع متمم ظاهر شده است، از جمله‌ای استفاده می‌کنیم که از ضرب  $x$  در این تابع به دست آمده باشد؛ اگر این ترکیب نیز در تابع متمم ظاهر شود، آن جمله را در  $x^2$  ضرب و از آن استفاده می‌کردیم. چون معادلات مرتبه دوم را بررسی می‌کنیم، هیچ توان بالاتری لازم نیست و فقط  $\exp(rx)$  و  $x \exp(rx)$  به صورت جوابهای معادله کاهش یافته (همگن) ظاهر می‌شوند؛ به  $\exp(rx) x^2$  هرگز برخورد نمی‌کنیم.

مسائل

۱. ج. معادلات همگن مرتبه دوم زیر را حل کنید:

الف)  $y'' + 2y' - 3y = 0$  (ب)  $y'' + y = 0$

ج)  $y'' - 2y' + 2y = 0$  (د)  $y'' - 2y' + 5y = 0$

۲. ج. معادلات ناهمگن زیر را با روش ضرایب نامعین حل کنید:

الف)  $16x = y'' + 2y' - 8y$  (ب)  $2e^{2x} = y'' - 2y' + y$

ج)  $y'' + y = \sin x$  (د)  $3xe^x = y'' - 2y' + y$

ه)  $e^{2x} + 4 \sin x = y'' - 4y' + 5y$

۳. ج. از بسط سری تیلور بهره بگیرید و جواب معادله زیر را به دست آورید

$$y'' + y^2 = x^2$$

این معادله از شرطهای  $y(0) = 1$  و  $y'(0) = 0$  پیروی می‌کند. (برای به دست آوردن مشتق‌هایی

که در سری تیلور ظاهر می‌شوند، از معادله پی‌درپی مشتق بگیرید.)

## پیوست د

### فرمولهای مفید<sup>۱</sup>

#### د ۱. بسط دوجمله‌ای

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{n}{r}x^r + \dots, \quad |x| < 1 \quad (1. د)$$

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + (-1)^r \binom{n}{r}x^r + \dots, \quad |x| < 1 \quad (2. د)$$

که در اینجا ضرایب دوجمله‌ای عبارت‌اند از

$$\binom{n}{r} \equiv \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (3. د)$$

برخی موارد بسیار مفید از بسط ارائه شده در بالا عبارت‌اند از

---

۱. فهرست مفصلی از آنها را، مثلاً می‌توان در دوایت (Dw 61) یافت.



$$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 - \dots \quad (4. د)$$

$$(1 \pm x)^{1/3} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \pm \frac{5}{81}x^3 - \dots \quad (5. د)$$

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 + \dots \quad (6. د)$$

$$(1 \pm x)^{-1/3} = 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 \mp \frac{14}{81}x^3 + \dots \quad (7. د)$$

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots \quad (8. د)$$

$$(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + \dots \quad (9. د)$$

$$(1 \pm x)^{-3} = 1 \mp 3x + 6x^2 \mp 10x^3 + \dots \quad (10. د)$$

برای همگرایی تمام سریهای بالا، باید داشته باشیم  $|x| < 1$ .

### ۲. د روابط مثلثاتی

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \quad (11. د)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \pm \sin A \sin B \quad (12. د)$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \quad (13. د)$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 \quad (14. د)$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos A) \quad (15. د)$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos A) \quad (16. د)$$

$$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) \quad (17. د)$$

$$\sin^3 A = \frac{1}{4}(3 \sin A - \sin 3A) \quad (18. د)$$

$$\sin^4 A = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2A + \cos 4A) \quad (19. د)$$

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A) \quad (20. د)$$

$$\cos^3 A = \frac{1}{4}(3 \cos A + \cos 3A) \quad (21. د)$$

$$\cos^4 A = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2A + \cos 4A) \quad (22. د)$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad (23. د)$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} \quad (24. د)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (25. د)$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (26. د)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (27. د)$$

### د ۳. سریهای مثلثاتی

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (28. د)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (29. د)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots, \quad |x| < \pi/2 \quad (30. د)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots, \quad \begin{cases} |x| < 1 \\ |\sin^{-1} x| < \pi/2 \end{cases} \quad (31. د)$$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \dots, \quad \begin{cases} |x| < 1 \\ 0 < \cos^{-1} x < \pi \end{cases} \quad (32. د)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1 \quad (33. د)$$

د. ۴. سریهای نمایی و لگاریتمی

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (۳۴. د)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1, \quad x=1 \quad (۳۵. د)$$

$$\ln \left[ \sqrt{(x^2/a^2) + 1} + (x/a) \right] = \sinh^{-1} x/a \quad (۳۶. د)$$

$$= -\ln \left[ \sqrt{(x^2/a^2) + 1} - (x/a) \right] \quad (۳۷. د)$$

د. ۵. کمیت‌های مختلط

صورت دکارتی:  $z = x + iy$  مزدوج مختلط:  $z^* = x - iy, i = \sqrt{-1}$  (۳۸. د)

صورت قطبی:  $z = |z|e^{i\theta}$  (۳۹. د)

$z^* = |z|e^{-i\theta}$  (۴۰. د)

$zz^* = |z|^2 = x^2 + y^2$  (۴۱. د)

قسمت حقیقی  $z$ :  $\text{Re}z = \frac{1}{2}(z + z^*) = x$  (۴۲. د)

قسمت موهومی  $z$ :  $\text{Im}z = \frac{-1}{2}(z - z^*) = y$  (۴۳. د)

فرمول اویلر:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  (۴۴. د)

د. ۶. تابعهای هذلولوی

$$\sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (۴۵. د)$$

$$\cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (۴۶. د)$$

$$\tan hx = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (۴۷. د)$$

$$\sin ix = i \sin hx \quad (۴۸. د)$$

$$\cos ix = \cosh x \quad (۴۹. د)$$

$$\sin hix = i \sin x \quad (۵۰. د)$$

$$\cosh ix = \cos x \quad (۵۱. د)$$

$$\sinh^{-1} x = \tanh^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \quad (۵۲. د)$$

$$= \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad (۵۳. د)$$

$$= \cosh^{-1} \left( \sqrt{x^2 + 1} \right), \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases} \quad (۵۴. د)$$

$$\cosh^{-1} x = \pm \tanh^{-1} \left( \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right), \quad x > 1 \quad (۵۵. د)$$

$$= \pm \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad x > 1 \quad (۵۶. د)$$

$$= \pm \sinh^{-1} \left( \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad x > 1 \quad (۵۷. د)$$

$$\frac{d}{dy} \sin hy = \cos hy \quad (۵۸. د)$$

$$\frac{d}{dy} \cosh y = \sinh y \quad (۵۹. د)$$

$$\sinh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \sinh x_2 \quad (۶۰. د)$$

$$\cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_1 \sinh x_2 \quad (۶۱. د)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (۶۲. د)$$

مسائل

۱.د آیا ممکن است که به نامساوی  $z_1 < z_2$  مفهومی نسبت دهیم؟ توضیح دهید. آیا نامساوی

$$|z_1| < |z_2|$$

۲.د معادلات زیر را حل کنید:

الف)  $z^2 + 2z + 2 = 0$  (ب)  $2z^2 + z + 2 = 0$

۳.د نقاط زیر را به صورت قطبی بیان کنید:

الف)  $z_1 = i$  (ب)  $z_2 = -1$

ج)  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$  (د)  $z_2 = 1 + 2i$

ه) حاصلضرب  $z_1 z_2$  را پیدا کنید و حاصلضرب  $z_1 z_2$  را بیابید

ز) حاصلضرب  $z_2 z_2$  را به دست آورید

۴.د عبارت  $(z^2 - 1)^{-1/2}$  را به صورت قطبی بیان کنید.

۵.د اگر تابع  $z = \sin^{-1} w$  به عنوان معکوس  $z = \sin w$  تعریف شده باشد، در این صورت از

رابطهٔ اویلر برای  $\sin w$  بهره گیرید و معادله‌ای برای  $\exp(iw)$  به دست آورید. این معادله را حل

کنید و به نتیجهٔ زیر برسید

$$w = \sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

۶.د نشان دهید که عبارت

$$y = Ae^{ix} + Be^{-ix}$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y = C \cos(x - \delta)$$

که در اینجا  $A$  و  $B$  مختلط ولی  $C$  و  $\delta$  حقیقی‌اند.

۷.د نشان دهید

الف)  $\sin h(x_1 + x_2) = \sin h x_1 \cos h x_2 + \cos h x_1 \sin h x_2$

ب)  $\cos h(x_1 + x_2) = \cos h x_1 \cos h x_2 + \sin h x_1 \sin h x_2$

## پیوست ۵

### انتگرالهای مفید<sup>۱</sup>

#### ۱.۵ توابع جبری

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right), \quad \left| \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \quad (1.5)$$

$$\int \frac{xdx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) \quad (2.5)$$

$$\int \frac{dx}{x(a^2 + x^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left( \frac{x^2}{a^2 + x^2} \right) \quad (3.5)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 x^2 - b^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left( \frac{ax - b}{ax + b} \right) \quad (1.4.5)$$

$$= \frac{1}{ab} \coth^{-1} \left( \frac{ax}{b} \right) \quad (2.4.5)$$

$$= -\frac{1}{ab} \tanh^{-1} \left( \frac{ax}{b} \right), \quad a^2 x^2 < b^2 \quad (3.4.5)$$

---

۱. این فهرست محدود به انتگرالهای (غیر بدیهی) است که در متن و در مسائل مطرح می‌شوند. مجموعه بسیار سودمندی از آنها را، مثلاً، می‌توان در پیرس و فوستر (Pi 57) و دوايت (Dw 61) یافت.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{b} \sqrt{a+bx} \quad (5. \blacktriangle)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^r+a^r}} = \ln(x + \sqrt{x^r+a^r}) \quad (6. \blacktriangle)$$

$$\int \frac{x^r dx}{\sqrt{(a^r-x^r)}} = -\frac{x}{r} \sqrt{a^r-x^r} + \frac{a^r}{r} \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (7. \blacktriangle)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^r+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(r\sqrt{a}\sqrt{ax^r+bx+c} + rax+b), \quad a > 0 \quad (1. \blacktriangle. \blacktriangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \sinh^{-1} \left( \frac{rax+b}{\sqrt{rac-b^r}} \right), \quad \begin{cases} a > 0 \\ rac > b^r \end{cases} \quad (2. \blacktriangle. \blacktriangle)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1} \left( \frac{rax+b}{\sqrt{b^r-rac}} \right), \quad \begin{cases} a < 0 \\ b^r < rac \\ |rax+b| < \sqrt{b^r-rac} \end{cases} \quad (3. \blacktriangle. \blacktriangle)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax^r+bx+c}} = \frac{1}{a} \sqrt{ax^r+bx+c} - \frac{b}{ra} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^r+bx+c}} \quad (9. \blacktriangle)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^r+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \sinh^{-1} \left( \frac{bx+rc}{|x|\sqrt{rac-b^r}} \right), \quad \begin{cases} c > 0 \\ rac > b^r \end{cases} \quad (1.10. \blacktriangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \sin^{-1} \left( \frac{bx+rc}{|x|\sqrt{b^r-rac}} \right), \quad \begin{cases} c < 0 \\ b^r > rac \end{cases} \quad (2.10. \blacktriangle)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left( \frac{r\sqrt{c}}{x} \sqrt{ax^r+bx+c} + \frac{rc}{x} + b \right), \quad c > 0 \quad (3.10. \blacktriangle)$$

$$\int \sqrt{ax^r + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{2a} \sqrt{ax^r + bx + c} + \frac{2ac - b^2}{4a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^r + bx + c}} \quad (۱۱.۵)$$

۲.۵ توابع مثلثاتی

$$\int \sin^r x dx = \frac{x}{r} - \frac{1}{r} \sin 2x \quad (۱۲.۵)$$

$$\int \cos^r x dx = \frac{x}{r} + \frac{1}{r} \sin 2x \quad (۱۳.۵)$$

$$\int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \left[ \frac{a \tan(x/2) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right], \quad a^2 > b^2 \quad (۱۴.۵)$$

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \left[ \frac{(a - b) \tan(x/2)}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right], \quad a^2 > b^2 \quad (۱۵.۵)$$

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^r} = \frac{b \sin x}{(b^2 - a^2)(a + b \cos x)} - \frac{a}{b^2 - a^2} \int \frac{dx}{a + b \cos x} \quad (۱۶.۵)$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| \quad (۱۷.۵)$$

$$\int \tanh x dx = \ln \cosh x \quad (۱.۱۷.۵)$$

$$\int e^{ax} \sin x dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} (a \sin x - \cos x) \quad (۱۸.۵)$$

$$\int e^{ax} \sin^r x dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + r} (a \sin^r x - r \sin x \cos x + \frac{r}{a}) \quad (۱.۱۸.۵)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a} \quad (۲.۱۸.۵)$$



## ۳.۵ توابع گاما

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (1.19.a)$$

$$= \int_0^1 [\ln(1/x)]^{n-1} dx \quad (2.19.a)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \text{به ازای } n = \text{عدد صحیح} \quad (3.19.a)$$

$$n\Gamma(n) = \Gamma(n+1) \quad (20.a)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (21.a)$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad (22.a)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 0,906 \quad (23.a)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 0,919 \quad (24.a)$$

$$\Gamma(2) = 1 \quad (25.a)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)} \quad (26.a)$$

$$\int_0^1 x^m (1-x^r)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{m+1}{r}\right)}{r\Gamma\left(n + \frac{m+1}{r}\right)} \quad (27.a)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{r} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{r} + 1\right)}, \quad n > -1 \quad (1.27.a)$$

## پیوست و

روابط دیفرانسیلی در دستگاههای مختصات متفاوت

۱. مختصات دکارتی (قائم)

$$\text{grad}U = \nabla U = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (۱.و)$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \quad (۲.و)$$

$$\text{curl} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \quad (۳.و)$$

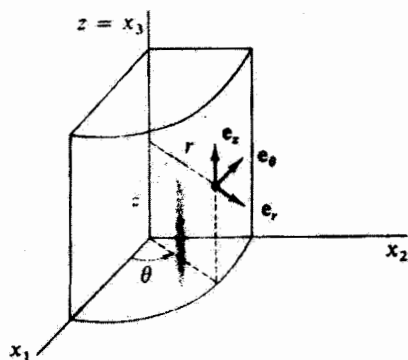
$$\nabla^2 U = \nabla \cdot \nabla U = \sum_i \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \quad (۴.و)$$

۲. مختصات استوانه‌ای

به شکل‌های ۱.و و ۲.و مراجعه کنید.

$$x_\lambda = r \cos \theta, \quad x_r = r \sin \theta, \quad x_z = z \quad (۵.و)$$

$$r = \sqrt{x_\lambda^2 + x_r^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{x_r}{x_\lambda}, \quad z = x_z \quad (۶.و)$$



شکل و ۱

$$ds^r = dr^r + r^r d\theta^r + dz^r \quad (۷. و)$$

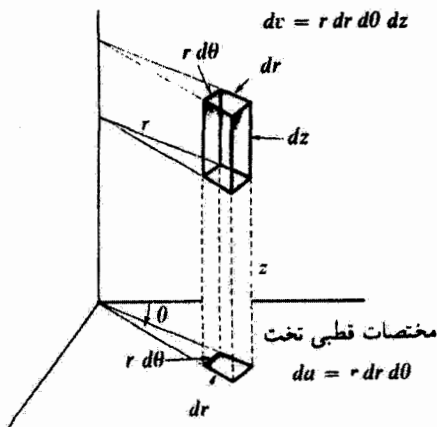
$$dv = r dr d\theta dz \quad (۸. و)$$

$$\text{grad}\psi = \nabla\psi = e_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} + e_z \frac{\partial\psi}{\partial z} \quad (۹. و)$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (۱۰. و)$$

مختصات استوانه‌ای:

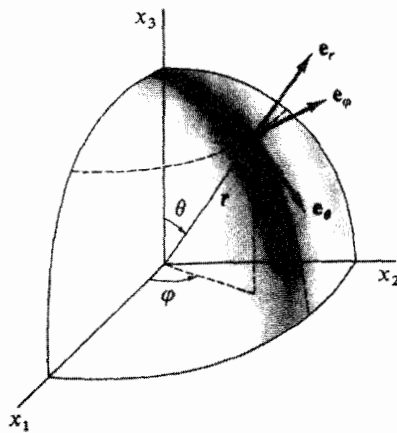
$$dv = r dr d\theta dz$$



مختصات قطبی تخت

$$du = r dr d\theta$$

شکل و ۲



شکل ۳

$$\begin{aligned} \text{curl} \mathbf{A} = & \mathbf{e}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\theta \left( \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \\ & + \mathbf{e}_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (۱۱. و)$$

$$\nabla^r \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (۱۲. و)$$

### ۳. و مختصات کروی

به شکل‌های ۳ و ۴ مراجعه کنید.

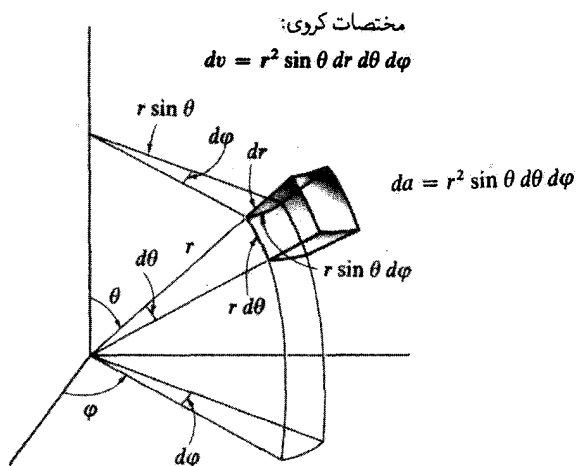
$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta \quad (۱۳. و)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \cos^{-1} \frac{x_3}{r}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} \quad (۱۴. و)$$

$$ds^r = dr^r + r^2 d\theta^r + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^r \quad (۱۵. و)$$

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (۱۶. و)$$

$$\text{grad} \psi = \nabla \psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (۱۷. و)$$



شکل ۴.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (۱۸. و)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ &+ \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \\ &+ \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (۱۹. و)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \quad (۲۰. و)$$

## پیوست ز

$$\sum_{\mu} x_{\mu}^{\prime 2} = \sum_{\mu} x_{\mu}^{\prime\prime 2} \quad \text{«اثبات» رابطه}$$

دو دستگاه لخت  $K$  و  $K'$  را در نظر بگیرید که نسبت به هم با سرعت  $v$  در حرکت‌اند. در لحظه‌ای که دو مبدأ بر هم منطبق‌اند ( $t = 0, t' = 0$ ) فرض کنید که از مبدأ مشترک یک تب نوری گسیل شود. طبق اصل موضوع دوم اینستین، معادلاتی که انتشار جبهه موج را توصیف می‌کنند، در دو دستگاه باید به صورت واحدی باشند

$$\sum_j x_j^{\prime 2} - c^2 t^{\prime 2} = \sum_{\mu} x_{\mu}^{\prime 2} \equiv s^{\prime 2} = 0 \quad \text{دستگاه } K \quad (1.1.z)$$

$$\sum_j x_j^{\prime\prime 2} - c^2 t^{\prime\prime 2} = \sum_{\mu} x_{\mu}^{\prime\prime 2} \equiv s^{\prime\prime 2} = 0 \quad \text{دستگاه } K' \quad (2.1.z)$$

این معادلات حاکی از آنست که صفر شدن فاصله چهار بعدی بین دو رویداد در یک چارچوب مرجع لخت، صفر شدن بازه بین همان دو رویداد را در هر چارچوب مرجع دیگر نتیجه می‌دهد. اما آنچه را که ما انتظار داریم بیش از اینهاست؛ در واقع، باید نشان دهیم، که به طور کلی  $s^{\prime 2} = s^{\prime\prime 2}$ . اگر بخواهیم حرکت ذره مورد مشاهده در دستگاه  $K$  خطی باشد، این حرکت باید در دستگاه  $K'$  نیز خطی باشد، در آن صورت معادلات تبدیلی که  $x_{\mu}$  را به  $x'_{\mu}$  مربوط می‌کنند باید خطی باشند. در چنین حالتی، صورتهای درجه دوم  $s^2$  و  $s'^2$  حداکثر می‌توانند از طریق یک ضریب تناسب به هم مربوط شوند

$$s'^2 = \kappa s^2 \quad (۲. ز)$$

ضریب  $\kappa$  احتمالاً به مختصات، زمان، و سرعت نسبی دو دستگاه بستگی دارد. همانطور که در بخش ۳.۲ خاطر نشان شد، فضا و زمان وابسته به یک چارچوب مرجع لخت همگن هستند، بنابراین رابطه بین  $s'^2$  و  $s^2$  نمی‌تواند نه در نقاط مختلف فضایی و نه در زمانهای متفاوتی فرق کند. بنابراین ضریب  $\kappa$  نمی‌تواند به مختصات و زمان بستگی داشته باشد. اما، وابستگی به  $v$  هنوز مجاز است، اما همسانگردی فضا وابستگی به جهت سرعت  $v$  را ممنوع می‌کند. بنابراین ما بستگی احتمالی  $s'^2$  به  $s^2$  را به ضریبی که حداکثر شامل اندازه سرعت  $v$  است کاهش دادیم؛ یعنی، داریم

$$s'^2 = \kappa(v) s^2 \quad (۱.۲.ز)$$

اگر تبدیل معکوس  $K'$  به  $K$  را انجام دهیم، به نتیجه زیر می‌رسیم

$$s^2 = \kappa(-v) s'^2$$

که در اینجا  $-v$  به این علت ظاهر شده است که سرعت نسبی  $K$  به  $K'$  بر عکس سرعت نسبی  $K'$  به  $K$  است. ولی هم اکنون بحث کردیم که ضریب  $\kappa$  فقط می‌تواند به مقدار  $v$  بستگی داشته باشد. بنابراین دو معادله داریم

$$\left. \begin{aligned} s'^2 &= \kappa(v) s^2 \\ s^2 &= \kappa(v) s'^2 \end{aligned} \right\} \quad (۳. ز)$$

از ترکیب این دو معادله نتیجه می‌گیریم که  $\kappa^2 = ۱$  یا  $\kappa(v) = \pm ۱$ . مقدار  $\kappa(v)$  نباید تابع ناپیوسته‌ای از  $v$  باشد؛ یعنی، اگر سرعت  $v$  را به نحوی تغییر دهیم،  $\kappa$  نمی‌تواند ناگهان از  $+۱$  به  $-۱$  ببرد. در حد سرعت صفر، دستگاههای  $K$  و  $K'$  یکسان می‌شوند، به طوری که  $\kappa(v=۰) = +۱$ . به این ترتیب، به ازای همه سرعتها

$$\kappa = +۱ \quad (۴. ز)$$

و سرانجام، داریم

$$s^2 = s'^2 \quad (۵. ز)$$

این نتیجه مهم حاکی از آن است که بازه چهاربعدی بین دو رویداد در تمام چارچوبهای مرجع لخت یکسان است.

## پاسخ بعضی مسائل با شماره زوج

### فصل ۱

$$\mathbf{v} = 2a\omega \cos \omega t \mathbf{i} - a\omega \sin \omega t \mathbf{j} \quad (۱۰. الف)$$

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

$$|\mathbf{v}| = a\omega [3 \cos^2 \omega t + 1]^{\frac{1}{2}}$$

۹۰۰ (ب)

$$h = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}|} \quad ۱۲$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} |(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{c})|$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ (د)}, \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 3 & -5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix} \text{ (ج)}, \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 13 & 9 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ (ب)} \quad (۱۴. الف - ۱۰۴)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{3}{4} \frac{v^2}{k}; |\mathbf{a}| = \frac{3}{4} \frac{v^2}{k} \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \theta}}; \dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{2}kr} \quad ۲۶$$

$$\int (\mathbf{A} \times \ddot{\mathbf{A}}) dt = (\mathbf{A} \times \dot{\mathbf{A}}) + \mathbf{C} \quad ۳۴$$

بردارای است ثابت.



فصل ۲

$$F_{\theta} = mR(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \quad .۲$$

$$F_{\phi} = mR(2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + \ddot{\phi} \sin \theta)$$

$$d_{\max} = \frac{v^2}{g(1 + \sin \beta)} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \quad \text{ب) } d = \frac{2v^2 \cos \alpha \sin(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta} \quad \text{الف) ۸}$$

$$\frac{2v}{g \sin \alpha} \quad .۱۲$$

$$۱۷,۴^{\circ} \quad .۱۴$$

$$\dot{x}(t) = A \sin \omega_c t + B \cos \omega_c t + \frac{cE_y}{B} \quad \text{ج) ۱۶}$$

$$\dot{y}(t) = C \sin \omega_c t + D \cos \omega_c t$$

$$v_B = ۱۵,۶ \text{ m/s}, \mu_k = ۰,۱۸ \quad .۱۸$$

$$۷۱ \text{ m} \quad .۲۰$$

$$\sin \theta = \frac{1 \pm \mu_k \sqrt{3 + 4\mu_k^2}}{2(1 + \mu_k^2)} \quad .۲۲$$

$$y = -\frac{m}{2\beta} \ln \left( 1 - \frac{\beta v^2}{mg} \right) \quad \text{ب) } y = -\frac{m}{\alpha} \left[ v + \frac{mg}{\alpha} \ln \left( 1 - \frac{\alpha v}{mg} \right) \right] \quad \text{الف) ۲۴}$$

$$\sin^{-1} \left( \frac{v}{\sqrt{2(v^2 + gh)}} \right) \quad .۲۶$$

$$x(t) = [(n+1)at]^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{ب) } F(x) = -mna^{\frac{1}{n+1}} x^{-(n+1)} \quad \text{الف) ۲۸}$$

$$F(t) = -mna^{\frac{1}{n+1}} [(n+1)at]^{-\frac{n+1}{n+1}} \quad \text{ج)$$

$$a_t = A\alpha^{\frac{1}{n}} \cos(\phi + \alpha t) \quad \text{الف) ۳۰}$$

$$a_n = A\alpha^{\frac{1}{n}} \sin(\phi + \alpha t)$$

$$\phi(t) = \tan^{-1} \left( \frac{y(t)}{x(t)} \right) \quad \text{ب) } t = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} - \phi \right] \quad \text{در اینجا } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$.۳۲ \quad \text{پایدار, اگر } R > b/2; \text{ ناپایدار, اگر } R < b/2$$

٣٦.  $e^{-1}$

٣٨.  $\frac{v_B^2}{2g}$

٤٠. تقریباً ٢٥ ثانیه.

٤٢. ٢٧٣ ثانیه.

فصل ٣

٢. الف)  $(6.9 \times 10^{-2} s^{-1})$ ، ب)  $(1 - 2.38 \times 10^{-5}) s^{-1}$ ، ج)  $0.433$  راد.

٤.  $\bar{U} = \frac{1}{\gamma} \bar{T} = \frac{mA^r \omega^r}{\rho}, \langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{mA^r \omega^r}{\rho}$

٦.  $\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} k}$

١٢.  $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$

١٤.

$x(t) = (\cosh \beta t - \sinh \beta t)[(A_1 + A_2) \cosh \omega_r t + (A_1 - A_2) \sinh \omega_r t]$

$\dot{x}(t) = (\cosh \beta t - \sinh \beta t)[(A_1 \omega_r - A_2 \beta)(\cosh \omega_r t + \sinh \omega_r t) - (A_2 \beta + A_1 \omega_r)(\cosh \omega_r t - \sinh \omega_r t)]$

٢٤.  $\omega \rightarrow 0, I(t) \cong \varepsilon \cdot C \omega^r (RC - t)$

٢٦.  $\frac{R_1 [R_2 (R_1 + R_2) + \omega^r L_2^r] + i [R_1 \omega L_1 + (\omega L_1 - 1/\omega C)] ((R_1 + R_2)^r + \omega^r L_1^r)}{(R_1 + R_2)^r + \omega^r L_1^r}$

٢٨.  $F(t) = \frac{f}{\pi} \sin \omega t + \frac{f}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{f}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots$

٣٠.  $F(t) = \frac{f}{\pi} - \frac{f}{3\pi} \cos 3\omega t - \frac{f}{15\pi} \cos 5\omega t - \dots$

٣٢. الف)  $x(t) = \frac{H(0)}{\omega^r} \left( 1 - e^{-\beta t} \cosh \omega_r t - \frac{\beta e^{-\beta t}}{\omega_r} \sinh \omega_r t \right)$

ب)  $x(t) = \frac{b}{\omega_r} e^{-\beta t} \sinh \omega_r t; t > 0$

$$\begin{cases} x(t) = 0, & t < 0 \\ x(t) = \frac{a}{\omega_1^2} [1 - \cos \omega_1 t], & 0 < t < \frac{2\pi}{\omega_1} \\ x(t) = 0, & t > \frac{2\pi}{\omega_1} \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\beta(t-t_0)} \left[ x_0 \cos \omega_1(t-t_0) + \left( \dot{x}_0 + \frac{\beta x_0}{\omega_1} + \frac{b}{\omega_1} \right) \sin \omega_1(t-t_0) \right] \quad .۳۶$$

$t > t_0$

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{\omega}{[(\beta - \gamma)^2 + (\omega + \omega_1)^2][(\beta - \gamma)^2 + (\omega - \omega_1)^2]} \quad .۳۸$$

$$\times \left[ e^{-\gamma t} \left[ 2(\gamma - \beta) \cos \omega t + ([\beta - \gamma]^2 + \omega_1^2 - \omega^2) \frac{\sin \omega t}{\omega} \right] \right.$$

$$\left. + e^{-\beta t} \left[ 2(\beta - \gamma) \cos \omega_1 t + ([\beta - \gamma]^2 + \omega^2 - \omega_1^2) \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right] \right]$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\gamma}{ml}} [E - mgl(1 - \cos \theta)]^{\frac{1}{2}} \quad .۴۴$$

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{\gamma m A}{F}} \quad .۴۸$$

### فصل ۴

$$C = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \text{const. که در اینجا: } \rho = \frac{C}{2\pi r} \quad .۲$$

$$F_z = -\gamma M \frac{1}{z^2} \quad .۶$$

$$F_z = -2\pi\gamma\rho \left( \sqrt{a^2 + (z_0 - l)^2} - \sqrt{a^2 + z_0^2 + l} \right) \quad .۸$$

$$\phi(R) \cong -\frac{\gamma M}{R} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \right] \quad .۱۰$$

$$F_z = 2\pi\rho_s GM \quad .۱۴$$

فصل ۵

۸ الف)  $a_1 = a \frac{r}{\sqrt{3}}; b_1 = b \frac{r}{\sqrt{3}}; c_1 = c \frac{r}{\sqrt{3}}$  (ب)  $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{r}{\sqrt{3}} R$

۱۰.  $R = \frac{1}{2} H$

فصل ۶

۴.  $\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0; m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Ar^{\alpha-1} = 0$  . بله؛ بله.

۶.  $2m\ddot{S} + m\ddot{\xi} \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0$

$(m + M)\ddot{\xi} + m\ddot{S} \cos \alpha = 0$

۱۰ الف)  $y(t) = -\frac{g}{4}t^2$  (ب)  $\gamma = \frac{Ml}{m}(1 - \cosh \gamma t)$

۱۲.  $r(t) = r_0 \cosh \alpha t + \frac{g}{2\alpha^2}(\sin \alpha t - \sinh \alpha t)$

۱۴ الف)  $\ddot{\theta} + \frac{a+g}{b} \sin \theta = 0$  (ب)  $2\pi \sqrt{\frac{b}{a+g}}$

۱۶.  $\ddot{\theta} + \frac{g}{b} \sin \theta - \frac{a}{b} \omega^2 \sin \omega t \cos \theta = 0$

۱۸.  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}; \omega = \sqrt{\frac{g[R \cos \theta_0 + l \sin \theta_0 - R \theta_0 \sin \theta_0]}{l^2 + R^2 \theta_0^2 - 2Rl\theta_0}}$

۲۲.  $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k}{x} e^{-t/\tau}; L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{k}{x} e^{-t/\tau}$

۲۴.  $L = \frac{1}{2} m(\alpha^2 + l^2 \dot{\theta}^2) + mgl \cos \theta$

$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - \frac{1}{2} m \alpha^2 - mgl \cos \theta$

۲۶ الف)  $p_\theta = mgl \sin \theta; p_\theta = ml^2 \dot{\theta}; H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl \cos \theta$

$$H = \frac{p_x^2}{2(m_1 + m_2 + I/a^2)} - m_1 g x - m_2 g(l - x) \quad \text{ب}$$

$$p_x = (m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}) \dot{x}$$

$$\dot{p}_x = g(m_1 - m_2)$$

$$\dot{p}_\theta = 0; p_\theta = m r^2 \dot{\theta}; \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{m r^3} - \frac{k}{r^2}; p_r = m \dot{r} \quad \text{۲۸}$$

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{k}{r} \quad \text{۳۲}$$

$$\dot{p}_\phi = 0; \dot{p}_\theta = \frac{p_\phi^2 \cot \theta}{m r^2 \sin^3 \theta}; \dot{p}_r = -\frac{k}{r^2} + \frac{p_\theta^2}{m r^3} + \frac{p_\phi^2}{m r^2 \sin \theta}$$

$$\lambda = -3mg \sin \theta + 2mg \sin \theta. \quad \text{ب: } x = x_0 + \dot{x}t; \ddot{\theta} = \frac{g}{R} \cos \theta \quad \text{الف ۳۴}$$

### فصل ۷

$$\langle U \rangle = -\frac{k}{a}; \langle T \rangle = \frac{k}{2a} \quad \text{۴}$$

۱۰. سهمی؛ بله.

۱۲. ۷۶ روز

$$F(r) = -\frac{l^2}{\mu} \left( \frac{6k}{r^3} + \frac{1}{r^2} \right) \quad \text{۱۴}$$

۲۴. نه.

۲۶. الف) ۱۵۹۰ کیلومتر، ب) ۱۹۰۰ کیلومتر.

۳۰. ۲۳۸۰ متر بر ثانیه

۳۲.  $\Delta v = 3,23 \text{ km/s}$ ؛ سهمی

۳۴. برای  $r < a$  پایدار.

۴۰. (در خلاف جهت حرکت)  $\Delta v = 5275 \text{ m/s}$ ؛ ۱۴۶ روز.

۴۲. تخلیه پس مانده از منظومه شمسی نیاز به انرژی کمتری دارد تا وارد کردن آن به خورشید.

۴۴.  $2.57 \times 10^{11} \text{ J}$ .

## فصل ۸

۲. روی محور؛ در فاصله  $3/4h$  از رأس.

$$\bar{y} = 0; \bar{x} = \frac{2a}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \quad .۴$$

$$\mathbf{a}_{cm} = \frac{F}{2m} \mathbf{i}; \mathbf{v}_{cm} = \frac{F}{2m} t \mathbf{i}; \mathbf{r}_{cm} = \frac{F}{2m} t^2 \mathbf{i} \quad .۶$$

$$\bar{y} = \frac{a}{3\sqrt{2}}; \bar{x} = 0 \quad .۸$$

$$\frac{v}{g} \sin 45^\circ \sqrt{\frac{2E}{m_1 + m_2}} \left( \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \right) \quad .۱۰$$

۱۲. الف) بله، ب) ۱۱ متر بر ثانیه

۱۴. خیر.

$$T = mb\omega; \omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{a}{b}\theta} \quad .۱۶$$

$$\mathbf{N} = \frac{kr}{v_0} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) \quad .۱۸$$

$$\frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \quad .۲۰$$

۲۲. الف)  $(-0.9\mathbf{i} + 1.27\mathbf{j})N$ ، ب)  $(-9\mathbf{i} + 127\mathbf{j})N$

$$v_1 = v_2 = \frac{v_0}{3} \quad .۲۴$$

$$\theta = 45^\circ; v_1 = v_2 = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \quad .۲۶$$

$$\frac{u_2}{u_1} = 0.414; \frac{m_1}{m_2} = 0.172 \quad .۲۸$$

$$\sqrt{ga} \quad .۳۲$$

$$v_2 = \frac{(\varepsilon + 1)m_1 v_0 \sin \alpha}{m_1 \sin^2 \alpha + m_2} \quad \text{در امتداد } v_0 \quad v_1 = \frac{v_0 (m_1 \sin^2 \alpha - \varepsilon m_2)}{m_1 \sin^2 \alpha + m_2} \quad .۳۴$$

به سمت بالا

۳۶. ۴۳ متر بر ثانیه، ۳۶۰ از قائم.

$$\mu ag \left( 1 + \frac{v^2}{ag} \right) \quad .۳۸$$

$$\sigma_t = \pi a^2 : \sigma(\theta) = \frac{a^2}{r} \quad .۴۰$$

$$\sigma_{LAB}(\psi) \cong \frac{\left( \frac{m_1 k}{2m_2 T} \right)^2}{\left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{m_1}{m_2} \psi \right)^2} \right]^2 \sqrt{1 - \left( \frac{m_1}{m_2} \psi \right)^2}} \quad .۴۲$$

### فصل ۹

۲. موقعیت را زاویه  $\theta$  تعیین می‌کند که برای آن  $\tan \theta = \frac{ar}{v^2}$ ،  $\theta$  زاویه بین شعاع و افق است.

$$|a_f| = a + \sqrt{a^2 + \frac{v^2}{r^2}}$$

$$\left( z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \text{const.} \right) \quad .۴ \text{ سهمیوار}$$

### فصل ۱۰

$$I_r = \frac{r}{10} MR^2 : I_1 = I_r = \frac{r}{r_0} M (R^2 + 2h^2) \quad .۲$$

$$I'_r = I_r : I'_1 = I'_r = \frac{r}{r_0} M \left( R^2 + \frac{1}{4} h^2 \right)$$

$$a = \frac{l}{\sqrt{3}} : I = \frac{1}{3} ml^2 \quad .۴$$

$$I_r = \frac{r}{8} Mb^2 : I_1 = I_r = \frac{1r}{320} Mb^2 \quad .۱۴$$

$$\sqrt{\frac{3g}{b}} \quad .۲۰$$

$$۲۴. الف) \sqrt{\sqrt{3} \frac{g}{a}}, ب) \sqrt{\frac{۱۲}{5\sqrt{3}} \frac{g}{a}}$$

## فصل ۱۱

$$۸. \omega_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}}; \omega_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$۱۰. m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + (\kappa + \kappa_{12})x_1 - \kappa_{12}x_2 = F \cos \omega t$$

$$m\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + (\kappa + \kappa_{12})x_2 - \kappa_{12}x_1 = 0$$

$$۱۶. مد ۱: \theta_1 = -\frac{1}{2}\phi_1; مد ۲: \theta_2 = \phi_2$$

$$۱۸. \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{Mb}}(M+m); \omega_1 = 0$$

$$۲۰. \mathbf{a}_2 = \left( \frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}} \right); \mathbf{a}_1 = \left( \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

$$۲۲. \omega_2 = 2\sqrt{\frac{3\kappa}{M}}; \omega_1 = 2\sqrt{\frac{3\kappa}{M+m}}; \omega_3 = 2\sqrt{\frac{\kappa}{M}}$$

## فصل ۱۲

$$۴. \omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \text{ و دامنه مد } n \text{ مام به صورت زیر است}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0, & \text{به ازای } n \text{ زوج} \\ \frac{32}{n^2 \pi^2}, & \text{به ازای } n \text{ فرد} \end{cases}$$

۶. دومین هماهنگ ۴۴dB پایینتر است؛ سومین هماهنگ، ۱۳۳dB

$$۱۴. \eta_s(t) = e^{-Dt/\tau\rho} \left[ A_1 \exp\left( \sqrt{\frac{D^2}{4\rho^2} - \frac{s^2 \pi^2 \tau}{\rho b}} t \right) + A_2 \exp\left( -\sqrt{\frac{D^2}{4\rho^2} - \frac{s^2 \pi^2 \tau}{\rho b}} t \right) \right]$$

## فصل ۱۳

$$۸. \phi_{B1} - \phi_{A1} = \tan^{-1}(\cot\theta) \text{ و } \phi_{A2} - \phi_{A1} = -\theta$$



$$x' = \frac{L'}{3} + \frac{2L'}{\pi^2} \left( -\cos \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi x}{L} - \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{L} + \dots \right) . 10$$

$$c_s = \frac{1}{4} (a_s + ib_s) . 14$$

$$c_s = \frac{\sin \frac{1}{4} \omega_s}{\frac{1}{4} (T+1) \omega_s} ; A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \frac{1}{4} \omega}{\frac{1}{4} \omega} . 16$$

### فصل ۱۴

$$. 12 \quad 2.5 \times 10^8 \text{ m/s} ; 2.5 \times 10^8 \text{ m/s} ; 0.22 \mu\text{s} ; 55.3 \text{ m}$$

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' - \beta}{1 - \beta \cos \theta'} . 16$$

۲۰. فضاورد ۲۵،۴ ساله است، ساکنین زمین ۲۶،۷ ساله‌اند.

$$. 22 \quad 1.4 \times 10^{12} \text{ y} ; 4.4 \times 10^{12} \text{ g/s}$$

۲۴.  $2m_p c^2$ ، که شامل جرم سکون پروتون است (انرژی جنبشی  $6m_p c^2$  است).

$$. 28 \quad v \leq 0.115c$$

$$. 30 \quad 0.8 \text{ MeV}$$

$$. 32 \quad T_{\text{کتاب}} = 423 \text{ MeV} ; T_{\text{الکترون}} = 999.5 \text{ MeV}$$

## فهرست راهنما

- آثار گذرا ۱۵۲
- آونگ ساده (تخت) ۱۸۷-۱۸۱
- انتگرال بیضوی برای ~ ۱۸۴
- ~ به عنوان یک نوسانگر غیرخطی ۱۸۱
- ~ جفت شده ۵۴۲-۵۳۸
- دوره ~ ۱۸۴
- معادلة حرکت ~ ۲۴۱، ۱۸۱
- نمودار فاز ~ ۱۸۶
- آونگ فوکو ۴۳۳-۴۳۷
- آونگ کاتر ۵۰۱
- اختلال
- ~ در حرکت جسم صلب ۴۹۶-۴۹۹
- ~ در حرکت سیاره‌ای (سیارات) ۳۳۲
- ~ مدارهای دایره‌ای ۳۳۸-۳۴۰
- آروس (سیارک) ۳۲۶
- اصطکاک ۶۷-۷۰
- ~ ایستایی ۶۹
- ~ جنبشی ۶۹
- ~ لغزشی ۶۹
- اصل
- ~ برهم‌نهی ۱۵۸، ۱۶۱، ۱۶۸، ۵۸۵، ۵۱۹
- ~ ریلی ۵۶۷
- ~ عدم قطعیت ۱۱۶
- ~ هایزنبرگ ۱۱۶، ۶۱۸
- ~ فرما ۲۱۷، ۲۲۴
- ~ کمترین انحنای ۳۳۹
- ~ کمترین زمان ۲۳۸
- ~ کمترین قید ۲۳۹
- ~ کمترین کنش ۲۳۸
- ~ کوتاهترین مسیر ۲۳۸
- ~ نسبت ۶۲۶
- ~ نیوتونی ۶۳، ۶۲۸
- ~ هامیلتون ۲۳۶-۲۴۲
- ارتباط ~ با قانون نیوتون ۲۶۴-۲۶۷
- ~ اصلاح شده ۲۸۷-۲۸۸
- گذارة وردشی ~ ۲۸۷-۲۸۸، ۲۴۰
- ~ هم‌ارزی ۶۲
- اعداد مختلط ۷۰۵
- امواج بازتابی ۶۰۵-۶۰۷
- امواج عبوری ۶۰۵-۶۰۷
- انتقال میان سیاره‌ای ۳۴۹
- انتقال هومس ۳۴۵
- انتگرال
- ~ بیضوی ۶۸۵-۶۹۱
- ~ برای آونگ ساده ۱۸۴
- ~ حجمی ۵۱

- روابط زاویه‌ای ~ ۵۲ ۶۷۰-۶۶۷، ۴۸۴-۳۹۰
- روابط مشتعل بر انرژی ~ ۵۱ ۳۹۴-۳۸۸
- ~ سطح مقطع ۳۸۸-۳۷۹ ۶۱۸-۶۱۲
- ~ سیستم مرکز جرم ۳۸۸-۳۷۹ انجیل (سلیمان) ۶۷۸
- ~ کشسان ۳۹۵-۳۷۹ انرژی
- ~ ناکشسان ۳۹۹-۳۹۵ ~ الکترومغناطیسی ۹۶
- ~ نسبیتی ۶۶۶-۶۷۰ ~ برای سیستم ذرات ۲۷۷-۲۷۱
- بردار پایستگی ~ ۲۷۷، ۲۷۵-۲۷۳، ۹۴
- انتگرالگیری از ~ ۵۱ ۳۷۴-۳۷۳، ۹۳ ~ پتانسیل
- بزرگی ~ ۳۱-۲۹ ۴۹۲-۴۹۰-۴۵۰، ۴۴۳-۴۴۲ ~ جسم صلب
- تعریف ~ ۲۸ ۶۵۲-۶۵۰، ۲۷۱-۲۶۹، ۹۵-۹۲ ~ جنبشی
- جمع ~ ۲۸ ۲۷۳، ۴۴-۴۴۳
- خواص تبدیلی ~ ۲۸ ۵۶۹-۵۶۷ ~ در اصل ریلی
- ~ در فضای چهاربعدی ۶۶۴-۶۵۵ ۳۹۲-۳۸۸ ~ در برخوردها
- ضرب برداری ~ ۳۹-۳۲ ۳۱۸، ۳۱۴، ۳۰۸ ~ در حرکت نیروی مرکزی
- ضرب داخلی ~ ۳۲-۲۹ ۶۰۴-۶۰۰-۵۴۴ ~ ریمان بارگذاری شده
- کسینوسهای هادی ~ ۳۱-۲۹، ۱۱، ۱۰ ۵۶۹-۵۶۳ ~ ریمان مرتعش
- ~ محوری ۴۵، ۳۳ ۶۵۱ ~ سکون
- مشتق ~ ۴۴-۳۹ ۲۰۳ ~ گرانشی
- ~ مکان ۳۱ ۹۴ ~ مطلق
- مؤلفه‌های ~ ۲۸ ۶۵۵-۶۵۰ ~ نسبیتی
- ~ یک ۳۳-۳۲ ۵۲۵، ۵۱۷-۵۱۴ ~ نوسانگرهای جفت شده
- بسامد ۱۳۱، ۱۲۸ ~ نوسانگر هماهنگ
- ~ آونگ ساده ۱۸۱ ۶۳۵-۶۳۲ ~ انقباض طول فینزجرالد
- ~ به‌روش ریلی ۵۷۲-۵۶۷ ۳۲۰ ~ اوج
- ~ تشدید ۱۵۱-۱۴۸ ~ خورشیدی ۳۲۳، ۳۲۰
- ~ تقدیم فرقه ۴۹۶-۴۹۴ ~ و حسیض ۳۲۰
- ~ ریمان مرتعش ۵۹۱-۵۹۰، ۵۶۱ ۳۵۴-۳۵۳-۳۲۲، ۳۲۶ ~ اورانوس
- ~ سیکلوترون ۱۲۰ ~ بادن-یاؤل ۵۹۲
- ~ گذرنده ۵۹۴ ~ براکت بیاسون ۳۰۱
- ~ موج ساده (تخت) ۵۸۵ ~ برخورد
- ~ نوسانگر الکتریکی ۱۵۴ ~ بردارهای سرعت در ~ ۳۸۲
- ~ نوسانگر غیرخطی ۱۹۱-۱۸۷ ~ بین جرمهای برابر ۳۸۵-۳۸۹، ۴۰۵، ۴۰۷، ۴۰۳
- ~ نوسانگر میرا ۱۴۰-۱۳۶ ~ پارامتر ~ ۴۰۰
- ~ نوسانگرهای جفت شده ۵۱۰، ۵۰۸، ۵۱۸

- ~ نوسانگر هماهنگ ۱۲۸-۱۳۱  
 ~ بسته‌های موج ۵۹۵-۵۹۹، ۶۱۲-۶۱۸  
 ~ بسط تابلور برای نوسانگر ۱۲۶  
 ~ بیگ‌برتا ۷۸  
 ~ بی‌هنجاری ۳۲۴  
 ~ حقیقی ۳۲۴، ۳۳۰  
 ~ میانگین ۳۳۰  
 ~ پاشندگی ۵۹۲  
 ~ پایداری ۱۰۰-۱۰۱، ۱۷۷-۱۷۸  
 ~ حرکت جسم صلب ۴۹۶-۴۹۹  
 ~ مدارهای دایره‌ای ۳۳۶-۳۴۵  
 ~ پتانسیل  
 ~ ارتباط نیرو و ۹۳-۹۶  
 ~ استتار شده کولنی ۳۴۱  
 ~ سیستم ذرات ۳۷۳-۳۷۵  
 ~ کلی ۱۷۱-۱۷۳  
 ~ کولنی ۳۴۱  
 ~ گرانشی ۲۰۱-۲۰۴  
 ~ پوسته کروی ۲۰۴-۲۰۷  
 ~ حلقه نازک ۲۰۷-۲۰۹  
 ~ متقارن ۱۷۲-۱۷۳  
 ~ مرکز گریز ۳۱۵-۳۱۸  
 ~ مفهوم ۲۱۱-۲۱۳  
 ~ مؤثر برای حرکت نیروی مرکزی ۳۱۵  
 ~ مؤثر حرکت جسم صلب ۴۹۲  
 ~ نامتقارن ۱۷۶  
 ~ پدیده گیبس ۱۶۱  
 ~ پراکندگی رادرفورد ۴۰۵-۴۰۸  
 ~ پس‌کشی ۷۱-۷۳  
 ~ پلوتون ۳۲۶  
 ~ پیشران ۱۰۸  
 ~ تابع  
 ~ اسکالر ۳۹، ۴۸  
 ~ پله‌ای ۱۶۴  
 ~ دلتا ۱۶۶  
 ~ ضربه ۱۶۳  
 ~ گاما ۷۱۱  
 ~ گرین ۱۶۸  
 ~ لاگرانژی ۲۴۱  
 ~ ارتباط ~ با تابع هامیلتونی ۲۷۳-۲۷۸، ۲۸۰  
 ~ برای حرکت نیروی مرکزی ۳۰۶  
 ~ در نسبیت خاص ۶۶۵-۶۶۶  
 ~ ریسمان بارگذاری شده ۵۴۴  
 ~ نوردایی ~ ۲۶۸، ۲۷۷  
 ~ متمم ۱۴۶  
 ~ موج ایستاده ۵۸۸-۵۸۹  
 ~ موج پیشرونده ۵۸۳-۵۸۵  
 ~ هامیلتونی ۲۷۲-۲۷۳، ۲۷۷-۲۸۵  
 ~ ارتباط ~ با انرژی ۲۷۲-۲۷۳  
 ~ نسبیته ۶۶۶  
 ~ هذلولی ۷۰۵-۷۰۶  
 ~ هویساید ۱۶۳  
 ~ تانسور  
 ~ تعامد ویژه بردارهای ~ ۴۷۲  
 ~ تعریف ~ ۴۶۴  
 ~ حقیقی بودن ویژه مقادیرهای ~ ۴۷۱  
 ~ خواص تبدیل ~ ۴۶۲-۴۶۹  
 ~ رد ~ ۵۰۳  
 ~ قطری کردن ~ ۴۶۷، ۴۵۳  
 ~ لختی ۴۴۲-۴۴۶، ۴۶۲-۴۷۲  
 ~ برای دستگاه‌های مختصات متفاوت ۴۵۷-۴۶۲  
 ~ خواص تبدیل ~ ۴۶۲-۴۷۲  
 ~ در ارتباط با تکانه زاویه‌ای ۴۴۷-۴۵۲  
 ~ قطری کردن ~ ۴۶۸-۴۷۲  
 ~ گشتاورهای اصلی ~ ۴۵۴  
 ~ محورهای اصلی ~ ۴۵۳-۴۵۷  
 ~ مربوط به انرژی جنبشی دورانی ۴۴۳  
 ~ معادله مشخصه ~ ۴۵۴

- توان ۶۰۴-۶۰۳  
توزیع طیفی ۶۱۴-۵۹۷
- ثابت انتشار ۵۸۸  
ثابت گرانشی ۲۰۰
- جداسازی مرتعش ۵۸۴  
جداگر ۱۸۷  
جداول انتگرال ۷۱۱-۷۰۸  
جرم ۶۳-۵۷
- ~ خورشید ۳۲۶-۲۲۳  
~ کاهش یافته ۳۰۶-۳۰۴  
~ گرانشی ۶۱  
~ لختی ۶۱  
~ نسبی ۶۴۸  
جهان فضا ۶۵۷
- چارچوب مرجع ۶۳، ۱۵  
~ لخت ۶۳
- ~ تعریف شده توسط ستارگان دور ۶۴  
خواص ~ ۶۷-۶۳  
~ در نسبیت ۶۳، ۶۲۶  
~ مطلق ۶۴  
ناوردایی گالیله‌ای در ~ ۶۳  
همسانگردی ~ ۶۴  
همگنی ~ ۶۴
- ~ نالخت ۴۳۷-۴۱۶، ۴۲۱-۴۱۷، ۶۳  
حرکت در ~ ۴۳۷-۴۱۶  
زمین به عنوان ~ ۴۱۶  
نیروی کوریولیس در ~ ۴۲۵-۴۲۱  
نیروی مرکز گریز در ~ ۴۲۲
- چاه پتانسیل ۱۷۳-۱۷۲  
چرخزاد ۲۲۳  
چرخش متعامد برای ماتریسهای دوران ۱۴  
چرخش بینهایت کوچک ۴۹-۴۵، ۴۱۷  
چرخه حدی ۱۸۰
- ~ مکعب ۴۶۲-۴۶۰، ۴۵۷-۴۵۵، ۴۴۶  
۴۶۸-۴۶۷
- تاو ۹۳  
تبدیل(های)
- ~ تشابه ۴۶۵  
~ گالیله ۶۲۸-۶۲۷  
~ لورنتس ۶۳۶-۶۲۸  
~ متعامد ۷  
ثابت زاویه تحت ~ ۳۲  
چرخش ~ ۱۴-۱۵  
خاصیت حفظ فاصله ~ ۳۱  
روابط مربوط به ~ ۱۴  
نمایش هندسی ~ ۲۷-۲۰  
تشدید نوسانگر هماهنگ ۱۴۸  
تضعیف ۵۹۴  
تبادل
- ~ پایدار ۱۰۵-۱۰۰  
~ ناپایدار ۱۰۵-۱۰۰  
نقطه ~ ۹۹  
تعامد
- ~ ماتریسهای دوران ۲۷-۲۵، ۱۴  
~ ویژه بردارها ۵۲۳-۵۲۱، ۴۷۵-۴۷۲  
تعریف اسکالر ۲۸، ۷  
تکانه(های)
- ~ تعمیم یافته ۲۸۲-۲۷۸  
~ خطی ۶۳-۵۸
- پایستگی ~ ۲۷۵-۲۷۳، ۲۷۷، ۹۱، ۶۳  
~ ذرات سیستم ۳۶۸-۳۶۴  
~ نسبی ۶۶۳-۶۵۹، ۶۵۰-۶۴۴  
~ زاویه‌ای ۳۷۲-۳۶۸، ۹۲-۹۱  
~ اجسام صلب ۴۵۳-۴۴۷  
پایستگی ~ ۲۷۷-۲۷۴، ۹۱  
~ سیستم ذرات ۳۷۲-۳۶۸
- تدمیریایی ۱۴۵-۱۴۲  
تدهی مکانیکی ۱۵۷، ۱۵۴

- حاصلضربهای لختی ۴۴۵  
 حرکت بالیستیکی ۸۳-۷۲  
 حرکت تقدیمی  
 ~ اعتدالین ۴۸۶، ۳۳۲  
 ~ در حرکت جسم صلب ۴۸۹-۴۸۵  
 ~ در حرکت سیاره‌ای ۳۳۶-۳۳۲  
 ~ عطارد ۳۳۶، ۳۳۲  
 حرکت جسم صلب ۴۹۹-۴۴۰  
 ~ بدون نیرو ۴۸۹-۴۸۲  
 پایداری ~ ۴۹۹-۴۹۶  
 تانسور لختی برای ~ ۴۴۶-۴۴۲  
 تقدیم در ~ ۴۹۶-۴۹۴  
 تکانه زاویه‌ای در ~ ۴۵۳-۴۴۷  
 ~ در میدان نیروی یکنواخت ۴۹۶-۴۸۹  
 رقص محور در ~ ۴۹۶-۴۹۵  
 زوایای اوپلر در ~ ۴۷۷-۴۷۲  
 ~ فرفره متقارن ۴۸۹-۴۸۲  
 معادلات اوپلر برای ~ ۴۸۲-۴۷۸  
 معادل بیضیوار برای ~ ۴۸۰  
 حرکت موشک ۱۰۷-۱۰۴  
 ~ پیشران ۱۰۸-۱۰۷  
 ~ شاتل فضایی ۱۱۳-۱۱۱  
 حرکت نیروی مرکزی ۳۵۳-۳۰۴  
 ~ اوج و حضیض ۳۲۰  
 پایداری ~ در مدارهای دایره‌ای ۳۴۵-۳۳۶  
 پتانسیل مؤثر برای ~ ۳۱۸-۳۱۵  
 حرکت تقدیمی در ~ ۳۳۶-۳۳۱  
 دینامیک مداری ~ ۳۵۳-۳۴۵  
 زوایای اوج و حضیض برای ~ ۳۳۶-۳۳۱  
 قانون کیپلر برای ~ ۳۲۴-۳۲۲، ۳۰۸  
 لاگرانژی برای ~ ۳۰۷  
 مدار ~ ۳۱۴-۳۱۳، ۳۲۰  
 معادله کیپلر برای ~ ۳۳۱-۳۲۴  
 معادله مدار برای ~ ۳۱۳-۳۰۹  
 نمودارهای انرژی ~ ۳۱۸-۳۱۵  
 نیروی مرکز گریز در ~ ۳۱۵  
 حساب برداری ۴۱-۳۹  
 روابط ~ به صورت خلاصه ۷۱۵-۷۱۲  
 حساب بردشی ۲۳۶-۲۱۶  
 ~ اصل هامیلتون ۲۴۶، ۲۳۹، ۲۸۵  
 ~ با چند متغیر وابسته ۲۲۸  
 ~ با شرایط کمکی ۲۳۲-۲۲۹  
 ~ در نمادگذاری  $\delta$  ۲۳۴-۲۳۲  
 ~ ژئودزیک ۲۲۷-۲۲۶  
 ~ مسئله کوتاهترین زمان ۲۲۴-۲۲۱  
 معادله اوپلر در ~ ۲۲۱-۲۲۰  
 حضیض ۳۲۰  
 ~ خورشیدی ۳۲۴، ۳۲۰  
 حرکت تقدیمی ~ ۳۳۲  
 حقیقی بودن ویژه مقدار ۴۷۲  
 خرد خداوندی ۲۳۸  
 خروج از مرکز ۳۱۹  
 بی‌هتجاری ~ ۳۲۷  
 خطوط نیرو ۲۱۱-۲۱۰  
 خواص تقارنی ۳۰۶-۲۷۷  
 دترمینان ورونسکی ۶۹۲  
 درجه آزادی ۵۱۴، ۲۸۹، ۲۴۲  
 دستگاه مختصات ۱۰-۷  
 ~ آزمایشگاه ۳۸۱-۳۹۴، ۶۶۷-۶۷۰  
 ~ استوانه‌ای ۴۳  
 تبدیل ~ ۱۱-۷  
 ~ چرخان ۴۲۱-۴۱۷  
 چرخش ~ ۴۸-۴۵، ۱۶-۱۴  
 چرخش بینهایت کوچک ~ ۴۵  
 دورانهای متعارف در ~ ۲۷  
 دورانهای نامتعارف در ~ ۲۷  
 ~ قائم ۴۳، ۱۷-۷  
 ~ قطبی ۴۳  
 ~ کروی ۴۳

- مرکز تکانه ۶۷۰-۶۶۶ ~  
 مرکز جرم ۳۶۴-۳۶۲، ۳۸۱-۳۸۷ ~  
 تکانه خطی در ~ مرکز جرم ۳۶۸-۳۶۹  
 وارونی ~ ۲۵-۲۸  
 دستگاه مرکز تکانه ۶۶۶-۶۷۰  
 دنباله‌دار جیاکوبینی-زینر ۳۵۳  
 دنباله‌دار هالی ۳۲۲-۳۲۶  
 دینامیک هامیلتونی ۲۷۷-۲۸۵  
 معادلات حرکت در ~ ۲۷۹  
 رقص محوری ۴۹۵  
 روابط متعامد  
 ~ تابع تعامد ۶۱۰  
 ~ ویژه بردارها ۵۲۱-۵۲۳  
 روش حل مسئله ۶۶  
 روش ضرایب نامعین ۶۹۹  
 ریسمان مرتعش ۵۴۲-۵۵۲، ۵۵۸-۵۷۸  
 ~ انتشار انرژی در ~ ۶۰۰-۶۰۴  
 انرژی ~ ۵۶۳-۵۶۶  
 ~ در روش ریلی ۵۶۷-۵۷۲  
 لاگرانژی ~ ۵۷۵  
 مد بهنجار در ~ ۵۴۸-۵۵۱  
 معادله مشخصه ~ ۵۴۵  
 معادله موج ~ ۵۷۲-۵۷۵  
 ویژه بسامد ~ ۵۴۶-۵۴۷، ۵۶۰  
 زحل ۳۵۲-۳۵۳، ۳۲۶  
 اتساع ~ ۶۳۵-۶۳۶  
 ~ نسیبیتی ۱۱۷، ۶۳۵-۶۳۶، ۶۵۴  
 همگنی ~ ۲۷۱، ۲۷۷، ۲۱۷  
 ~ در مکانیک نیوتونی ۵۷، ۶۲۸-۶۲۶، ۱۱۷  
 زمین  
 ~ به‌عنوان چارچوب مرجع نالخت ۴۱۶  
 تقدیم اعتدالین ~ ۴۸۶  
 جرم ~ ۳۲۶  
 حرکت نسبت به ~ ۴۲۵-۴۳۷  
 داده‌های مربوط به مدار ~ ۳۲۶  
 قطب ~ ۴۸۶  
 زنش ۵۹۶  
 زوایای اوج ۳۳۱  
 زوایای اوپلر ۴۴۱، ۴۷۲، ۴۷۷  
 زهره ۳۲۶  
 ژئودزیک ۲۲۶، ۲۳۴  
 سد پتانسیل ۹۷-۱۰۴، ۳۱۸-۳۲۰  
 میرس ۳۲۶  
 سرعت ۴۰-۴۷  
 ~ انتشار انرژی ۶۰۰-۶۰۴  
 ~ تصمیم‌یافته ۲۴۳، ۲۷۸-۲۸۲  
 ~ حدی ۷۶، ۱۱۹  
 ~ خروجی ۱۰۵-۱۰۷  
 ~ در مختصات استوانه‌ای ۴۳  
 ~ در مختصات قطبی ۴۳  
 ~ در مختصات کروی ۴۳  
 ~ زاویه‌ای ۴۴، ۴۱۸، ۴۴۱-۴۴۳، ۴۸  
 ~ از چرخش بینهایت کوچک ۴۵-۴۸  
 اندازه ~ ۴۶  
 ~ جسم صلب ۴۴۱-۴۴۲  
 راستای ~ ۴۵  
 ~ مختصات چرخان ۴۱۷-۴۲۱  
 ~ سطحی ۳۰۸  
 ~ سیگنالی ۵۹۹  
 ~ فاز ۵۸۹، ۵۹۵  
 ~ گروه ۵۹۵-۵۹۹  
 ~ گریز ۲۱۴  
 ~ نسیبیتی ۶۳۱-۶۳۲، ۶۵۹-۶۶۴  
 ~ نهایی ۱۰۷  
 سری تاپلور ۶۸۰-۶۸۳  
 ~ برای مدار دایره‌ای ۳۳۹

- ضرب اسکالر  
 ~ بردارهای یکه ۳۳-۳۲  
 ~ سگانه ۵۲، ۳۸، ۳۵  
 ضرب برداری ۳۲  
 ~ بردارهای یکه ۳۸  
 ~ دترمینانی ۳۸  
 مفهوم هندسی ~ ۳۷-۳۵  
 ضرب داخلی ۳۲-۲۹  
 ~ برحسب بزرگی بردار ۳۱۰  
 ناوردایی ~ ۳۱  
 ضربه ۳۹۸  
 ضریب  
 ~ بازگشت ۳۱۷-۳۱۶  
 ~ پس‌کشی ۷۳-۷۱  
 ~ دوجمله‌ای ۷۰۲  
 ~ نامعین لاگرانژ ۲۳۲-۲۳۱  
 طول موج ۵۸۸  
 عدد  
 ~ ماخ ۷۲-۷۱  
 ~ موج ۵۸۸  
 ~ مختلط ۵۹۴  
 عطارد ۳۳۶-۳۳۲، ۳۲۶  
 حرکت تقدیمی حسیض خورشیدی ~ ۳۳۶-۳۳۲  
 عملگر لاپلاس (∇) ۵۰  
 ~ دردستگاههای مختصات متفاوت ۷۱۵-۷۱۲  
 فرفره متقارن  
 ~ با یک نقطه ثابت ۴۹۶-۴۸۹  
 حرکت بدون نیروی ~ ۴۸۹-۴۸۲  
 فرمول براندل ۷۲  
 فرین ۲۱۷  
 فضایی  
 ~ پیکربندی ۲۹۲، ۲۸۸، ۲۴۵  
 ~ در قضیه لیوویل ۲۹۱  
 سری مک‌لورن ۶۸۰  
 سطح مقطع ۴۰۸-۴۰۰  
 ~ پراکندگی رادرفورد ۴۰۸-۴۰۵  
 ~ دیفرانسیلی ۴۰۸-۴۰۱  
 ~ کل ۴۰۷  
 سیارک ۳۲۶  
 سیاره مریخ ۳۰۸، ۳۲۰، ۳۴۰-۳۴۸  
 سیستم مرکز جرم ۴۰۸-۳۶۲  
 برخورد در ~ ۳۹۸-۳۸۰  
 تکانه زاویه‌ای در ~ ۳۷۱-۳۷۰  
 سطح مقطع در ~ ۴۰۸-۴۰۰  
 سیستم(های) نوسانی  
 آونگهای ساده جفت‌شده ~ ۵۲۲-۵۲۹  
 ارتعاشهای مولکولی در ~ ۵۳۷-۵۳۳  
 ~ الکتریکی ۱۵۸-۱۵۴  
 جفت‌شدگی ضعیف ~ ۵۱۳-۵۱۱  
 ~ ریسمان بارگذاری‌شده مرتعش ۵۵۲-۵۴۲  
 مختصات بهنجار ~ ۵۲۲-۵۲۳  
 ~ مدار الکتریکی جفت‌شده ۵۵۵-۵۵۴  
 مسئله کلی ~ ۵۲۱-۵۱۴  
 ~ نوسانگرهای هماهنگ جفت‌شده ۵۱۱-۵۰۶  
 واگنی ~ ۵۲۲-۵۳۸، ۵۱۹  
 شاتل فضایی ۱۱۳-۱۱۱  
 شتاب ۴۳-۴۱  
 ~ چارچوب مرجع نالخت ۴۲۵-۴۲۱  
 ~ در مختصات استوانه‌ای ۴۳  
 ~ در مختصات قائم ۴۳، ۴۱  
 ~ در مختصات قطبی ۴۳  
 ~ در مختصات کروی ۴۳  
 رابطه بین نیرو و ~ ۷۱-۷۰  
 ~ گرانشی ۲۰۱، ۲۰۰، ۶۱  
 ~ مرکزگر ۴۲۳  
 شعاع چرخش ۴۹۹



کار ۹۲-۹۵، ۲۰۲	~ تکانه ۲۸۸
کسینوس هادی ۹	~ مخروطی ۴۸۴
کندمیرایی ۱۳۷-۱۳۹	~ مینکوفسکی ۶۵۷
کنش ۲۳۸	همسانگردی ~ ۶۴، ۲۷۴، ۷۱۷
گرادیان ۴۷-۵۰	فواصل اوج و حضیض ۳۱۷، ۳۲۰، ۳۳۱
گرایش ۲۰۰-۲۱۳	قانون
گشتاور	~ کیلر ۳۰۸، ۳۲۲-۳۲۴
حقیقی بودن ~ ۴۷۱	~ مقاومت استوکس ۷۱
~ خارجی ۳۷۱-۳۷۳	~ مقاومت نیوتون ۷۱
~ داخلی ۳۷۱	~ هوگ ۱۲۸
~ لختی ۴۴۵	قضایای بایستگی (بقا)
مفهوم ~ نیرو ۹۱	~ انرزی ۲۷۱، ۲۷۳
~ مکعب ۴۴۶	~ برای تکانه زاویه‌ای ۹۲، ۲۷۴-۲۷۷
لیزر ۱۵۰	~ برای سیستم ذرات ۲۷۱-۲۷۷
ماتریس ۹-۲۷	~ تکانه خطی ۹۱، ۲۷۳-۲۷۵
تبدیل‌های تشابه ~ ۴۶۴-۴۶۶	~ چگالی فاز ۲۹۲
~ ترانزاده ۱۸، ۲۵	قضیه
جمع کردن ~ ۲۰	~ اشتاینر ۴۶۰
دترمینان ~ ۲۷-۲۸	~ اویلر مربوط به توابع همگن ۲۷۱
~ در ارتباط با تانسور ۴۶۴	~ تایلور ۶۷۹-۶۸۳
~ دوران ۱۰-۲۷، ۴۵	~ لیوویل ۲۸۸-۲۹۳
رابطه تعامد ~ ۱۹	~ ویربال ۲۹۳-۲۹۶، ۵۵۶
~ ستونی ۱۵	قطری کردن ۴۵۳-۴۵۷، ۴۶۷-۴۶۹
~ سطری ۱۶	قوانین نیوتون ۵۷-۶۶
ضرب ~ ۱۶-۱۹	چارچوب‌های مرجع برای ~ ۶۳-۶۶
~ مربعی ۱۵	قانون سوم ~ ۳۶۱-۳۶۲
مفهوم هندسی ~ ۲۰-۲۷	~ به صورت ضعیف ۳۶۱-۳۶۲
وارون ~ ۱۹	~ به صورت قوی ۳۶۱-۳۶۲
~ همانی ۱۸-۱۹	محتوای ~ ۵۸-۷۵
ماریپجهای کوتتر ۳۵۷	ناوردایی گالیله‌ای ~ ۶۳، ۶۲۷-۶۲۸
ماشین آتود ۸۴	قید (ها) ۲۴۷-۲۶۴
مختصات استوانه‌ای ۴۳	~ اسکرونوم ۲۴۷
	~ رتوئومی ۲۴۷
	~ هولونوم ۲۴۷

- مختصات تعیین یافته ۲۴۲، ۲۶۷-۲۷۸  
 ~ چرخه‌ای ۲۸۳  
 ~ خاص ۲۴۳  
 ~ فضای بیکربندی ۲۴۵، ۲۸۸  
 ~ قابل چشمپوشی ۲۸۳  
 معادلات لاگرانژ در ~ ۲۴۵-۲۶۷  
 مختصات چرخه‌ای ۲۸۳-۲۸۵، ۳۰۷  
 مختصات قطبی ۴۱  
 سرعت در ~ ۴۳  
 شتاب در ~ ۴۳  
 مختصات کروی ۴۳  
 روابط برداری در ~ ۷۱۴-۷۱۵  
 سرعت در ~ ۴۳  
 مخروط جسی ۴۸۴  
 مدار (ی)
- انزات نسیبتی ~ ۳۳۲  
 اطلاعات سیاره‌ای مربوط به ~ ۳۲۶  
 انواع ~ ۳۲۰  
 پارامتر ~ ۳۱۹-۳۴۵  
 پایداری ~ ۳۳۶-۳۴۵  
 ~ پراکندگی ۴۰۳  
 حرکت تقدیمی ~ ۳۳۲  
 خروج از مرکز ~ ۲۵۷-۳۲۱  
 ~ در میدان مرکزی ۳۱۳-۳۱۴  
 دوره ~ ۳۲۲  
 زوایای اوج و حضیض ~ ۳۳۱  
 معادله ~ ۳۰۹-۳۱۳  
 معادله کیپلر برای ~ ۳۲۴-۳۳۱  
 نقاط برگشت ~ ۳۱۷  
 مستقل خطی ۶۹۲  
 مسئله کوتاهترین زمان ۲۲۱-۲۲۴  
 مشتری ۳۲۳، ۳۲۶، ۳۵۲  
 مشتق جهت دار ۵۰  
 مشتقگیری  
 ~ تابع اسکالر ۳۹
- ~ تابع برداری ۳۹-۴۱  
 قاعده زنجیره‌ای ~ ۴۷  
 مقاومت هوا ۷۲-۸۳  
 معادلات بنیادی حرکت ۲۷۷-۲۸۵  
 معادلات جفت شده ۴۳۶  
 معادله اویلر  
 ~ برای حرکت جسم صلب ۳۷۸-۴۸۲  
 ~ در حساب وردشمی ۲۲۰-۲۲۸  
 ~ لاگرانژ ۲۲۱، ۲۴۰-۲۴۷  
 معادله حرکت  
 ~ برای مسئله نیروی مرکزی ۳۰۹-۳۱۳  
 ~ برای نوسانگر هماهنگ در دو بعد ۱۳۲  
 ~ بنیادی ۲۷۷-۲۸۵  
 جوابهای تقریبی ~ ۷۹، ۸۱، ۳۲۵، ۳۳۴، ۳۳۶  
 ~ در محیط مقاوم ۷۱-۸۳  
 ~ ذره ۶۶-۹۱  
 ~ جسم صلب ۴۷۸-۴۸۳  
 ~ لاگرانژ ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۷  
 ارتباط ~ با معادله بیوتون ۲۶۴-۲۶۷  
 ~ با ضرایب نامعین ۲۵۷-۲۶۴  
 ~ برای اجسام صلب ۴۷۸  
 ~ برای حرکت نیروی مرکزی ۳۰۹  
 ~ برای ریسمان مرتعش ۵۴۴  
 ~ برای نوسانگرهای جفت شده ۵۱۴-۵۱۷، ۵۲۶  
 ~ در مختصات تعیین یافته ۲۴۷-۲۵۷  
 ~ مربوط به آونگ ساده ۱۸۱  
 ~ موشک ۱۰۴-۱۱۰  
 ~ نوسانگر الکتریکی ۱۵۳-۱۵۸  
 ~ نوسانگرهای جفت شده ۵۰۶-۵۱۱، ۵۱۷-۵۱۹  
 ~ نوسانگر هماهنگ ۱۲۸، ۱۲۴  
 ~ میرا ۱۳۶  
 ~ واداشته ۱۴۶  
 معادله دیفرانسیل ۶۹۱-۷۰۰  
 معادله مشخصه

- نزول ۱۳۸
- ~ لگاریتمی ۱۳۸
- نسبیت (ی) ۶۳، ۱۱۷، ۶۲۵-۶۷۰
- اتساع زمان در ~ ۶۳۵-۶۳۶
- اثر دوپلر در ~ ۶۴۰-۶۴۲-۶۶۲-۶۶۴
- اصول موضوع ~ ۶۲۶
- انرژی در ~ ۶۵۰-۶۵۵
- انقباض طول در ~ ۶۳۲-۶۳۵
- ~ بازه زمان گونه ۶۵۶
- ~ بازه فضا گونه ۶۵۶
- برخورد ~ ۶۶۶-۶۷۰
- ~ پارادوکس دوقلوها ۶۴۳-۶۴۵
- پیشرفت حسیض در ~ ۳۳۲
- تابع لاگرانژی در ~ ۶۶۵-۶۶۶
- تبدیل لورنتس در ~ ۶۲۸-۶۳۷، ۶۶۰
- تحقیق تجربی ~ ۶۳۶-۶۴۰
- تکانه در ~ ۶۴۵-۶۵۰
- جرم ~ ۶۴۸
- جهانخط ~ ۶۵۶
- جهان فضا ~ ۶۵۷
- چار بردار در ~ ۶۵۴-۶۶۴
- حرکت شناسی ~ ۶۶۶-۶۷۰
- جمع سرعت ~ ۶۶۱-۶۶۲
- رابطه نظریه نیوتونی با ~ ۱۱۷
- ~ زمان ویژه ۶۴۱، ۶۳۶، ۶۴۱، ۶۵۸، ۶۵۵
- ~ سرعت ۶۳۱-۶۳۲، ۶۶۲
- ~ فضا زمان ۶۵۴-۶۶۴
- کار در ~ ۶۵۱-۶۵۲
- ~ مثلث نسبیتی ۶۶۱
- ~ مخروط نوری ۶۵۵
- نظریه ~ خاص ۱۱۷، ۶۲۶-۶۷۰
- نظریه ~ عام ۶۳-۶۲۶
- نیروی ~ ۶۵۱-۶۷۶
- ~ نیوتونی ۶۲۶-۶۲۷
- ~ در واپاشی میون ۶۳۶-۶۳۷
- ~ برای گشتاورهای لختی اصلی ۴۵۶-۴۶۶
- ~ ریمان مرتعش ۵۴۵
- ~ مکعب ۴۵۷
- معادله کپلر ۳۲۴-۳۳۱
- حل تقریبی ~ ۳۳۰-۳۳۱
- معادله لورنتس ۱۲۰
- معادله موج ۵۵۹، ۵۸۰، ۵۸۹
- جداسازی ~ ۵۸۴-۵۸۹
- ~ مستقل از زمان ۵۸۱، ۵۸۸
- جوابهای عمومی ~ ۵۸۱-۵۸۴
- معادله وان در پول ۱۸۰
- معادله هلمهولتز ۵۸۸
- مفهوم محاسبات وردشی ۲۸۵-۲۸۸
- مقدار Q نوسانگر ۱۴۸
- مکانیک آماری ۱۱۷-۱۱۸
- مکانیک کوانتومی ۱۱۶-۱۱۸
- مکانیک نیوتونی ۵۷-۵۹
- ارتباط ~ با دینامیک لاگرانژی و هامیلتونی
- ۲۳۶-۲۳۸، ۲۴۴-۲۶۷
- ~ در ارتباط با نسبیت ۶۲۵
- محدودیت‌های ~ ۱۱۵-۱۱۷
- ~ و چارچوب مرجع نالخت ۴۲۱-۴۲۵
- منحنی لیسازو ۱۳۵
- میدان
- انرژی ~ ۲۰۳، ۹۶
- ~ برداری گرانشی ۲۰۰-۲۰۱
- ~ پایسته ۹۶
- ~ گرانشی ۲۰۰
- میرایی ۳۶-۱۴۵
- ~ بحرانی ۱۴۰-۱۴۲
- ~ تابشی ۱۵۰
- ناسا ۳۵۰
- ناوردایی نیوتونی ۶۳، ۶۲۶-۶۲۸
- نیوتون ۳۵۲-۳۵۴

- هموردایی در ~ ۶۳۶-۶۲۸  
 نماد جایگشتی ۳۴  
 خواص ~ ۳۴  
 نمادگذاری δ ۲۳۴-۲۳۲  
 نمودار فاز  
 ~ آونگ ساده ۱۸۶  
 ~ نوسانگر غیرخطی ۱۸۱-۱۷۷  
 ~ نوسانگر هماهنگ ۱۳۳-۱۳۰  
 نوترینو ۹۶  
 نوسانگر غیرخطی ۱۹۱-۱۸۷، ۱۸۱-۱۷۱، ۱۲۸  
 پتانسیل ~ ۱۷۳-۱۷۱  
 پسماند در ~ ۱۹۱-۱۸۷  
 تاخیر فاز در ~ ۱۹۱  
 جواب توسط انتگرالهای بیضوی برای ~ ۱۸۴  
 جهشهای ~ ۱۸۷  
 ~ خودمحدودکن ۱۸۱  
 نمودارهای فاز برای ~ ۱۸۱-۱۷۷  
 نوسانگر هماهنگ ۱۷۱-۱۲۸  
 آثار گذرا ~ ۱۴۷  
 ~ الکتریکی ۱۵۸-۱۵۳  
 انرزی ~ ۱۵۰، ۱۲۸  
 بسامد ~ ۱۳۱-۱۲۸  
 پاسخ ~ به ضربه ۱۷۱-۱۶۲  
 تابع گرین برای ~ ۱۷۱-۱۶۷  
 تشدید ~ ۱۵۳-۱۴۸  
 ~ تک زمان ۱۳۰  
 ~ جفت شده ۵۱۱-۵۰۶  
 ~ در دو بعد ۱۳۶-۱۳۲  
 دوره تناوب ~ ۱۳۰  
 قانون هوک در ~ ۱۲۸-۱۲۷  
 معادله مشخصه ~ جفت شده ۵۱۸، ۵۰۸  
 مقدار Q (ضریب کیفیت) در ~ ۱۴۸  
 ~ میرا ۱۴۵-۱۳۶  
 ~ نسبیتی ۶۷۷  
 نمودارهای فاز ~ ۱۳۳-۱۳۰  
 ~ واداشته ۱۵۲-۱۴۶  
 نوسانهای الکتریکی ۱۵۸-۱۵۳  
 نیروی (ی)  
 ~ اتلافی ۸۵-۷۱  
 ~ اصطکاککی ۷۱-۶۹  
 ~ بالابر ۷۳-۷۱  
 ~ پس کشی ۷۳-۷۱  
 ~ ترمزی ۸۷-۷۳  
 تعریف ~ ۶۳-۵۹  
 ~ خارجی ۳۶۶-۳۶۴  
 خطوط ~ ۲۱۰  
 ~ داخلی ۳۶۵-۳۶۴  
 ~ در قانون هوک ۱۲۸-۱۲۷  
 ~ ضربه‌ای ۳۹۸  
 ~ غیرخطی ۱۹۱-۱۸۷، ۱۲۸  
 ~ قابل استخراج از پتانسیل ۹۳  
 ~ قیدی ۲۶۴-۲۵۷، ۲۳۶  
 ~ کوریولیس ۴۳۷-۴۲۳  
 ~ لورنتس ۱۲۰  
 ~ مرکز گریز ۴۲۵-۴۲۱، ۳۱۵  
 ~ مرکزی ۶۰  
 ~ مقاومت هوا ۸۳-۷۳  
 میدان ~ ۹۶  
 ~ نسبیتی ۶۵۱  
 ~ وابسته به سرعت ۷۱، ۶۰  
 واپاشی β ۹۶  
 واگنی نوسانهای جفت شده ۵۳۸، ۵۱۹  
 وزن ۶۱  
 ویجر ۱ و ۲، ۳۵۳-۳۵۲  
 ویژه بردار  
 تعامد ~ ۵۲۳-۵۲۱، ۴۷۲  
 ~ نوسانگرهای هماهنگ جفت شده ۵۱۹  
 ویژه بسامد  
 ~ ریسمان بارگذاری شده ۵۴۶

یکای نجومی ۳۲۶

~ نوسانگرهای هماهنگ جفت شده ۵۰۸.

۵۲۱،۵۱۸

curl در دستگاههای مختصات متفاوت ۷۱۵-۷۱۲

هادی ۳۱۹

div در دستگاههای مختصات متفاوت ۷۱۵-۷۱۳

همپتانیل ۲۱۰

grad در دستگاههای مختصات متفاوت ۷۱۵-۷۱۲

هموردایی ۶۳۱،۶۲۸