ریچارد گولدبرگ

روشهای آنالیز حقیقی

ترجمهٔ محمدعلی پورعبدالله‌نژاد، باقرنشوادیان

روشهای آنالیز حقیقی

ریچارد گولدبرگ

ترجمهٔ محمدعلی پورعبدالله‌نژاد، باقر نشوادیان

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

فهرست

عنوان	صفحه
یادداشت مترجمان	نه
پیشگفتار	۱
مقدمه: مفروضات و نمادگذاریها	۳
۰۱ مجموعه‌ها و تابعها	۷
۱۰۱ مجموعه‌ها و عنصرها	۷
۲۰۱ اعمال روی مجموعه‌ها	۹
۳۰۱ تابعها	۱۳
۴۰۱ توابع حقیقی	۲۱
۵۰۱ هم‌ارزی؛ شمارایی	۲۵
۶۰۱ اعداد حقیقی	۳۲
۷۰۱ کوچکترین کران بالا	۳۷
۰۲ دنباله‌های اعداد حقیقی	۴۱
۱۰۲ تعریف دنباله و زیردنباله	۴۱
۲۰۲ حد دنباله	۴۴
۳۰۲ دنباله‌های همگرا	۵۱
۴۰۲ دنباله‌های واگرا	۵۳
۵۰۲ دنباله‌های کراندار	۵۶

عنوان | صفحه

۶.۲ دنباله‌های یکنوا ۵۷
۷.۲ اعمال روی دنباله‌های همگرا ۶۲
۸.۲ اعمال روی دنباله‌های واگرا ۷۰
۹.۲ حد بالا و حد پایین ۷۱
۱۰.۲ دنباله‌های کوشی ۷۹
۱۱.۲ مجموعپذیری دنباله‌ها ۸۴
۱۲.۲ حد بالا و حد پایین در دنباله‌های مجموعه‌ها ۹۵

۳. سریهای اعداد حقیقی ۹۸
۱.۳ همگرایی و واگرایی ۹۸
۲.۳ سریهای با جمله‌های نامنفی ۱۰۲
۳.۳ سریهای متناوب ۱۰۶
۴.۳ همگرایی شرطی و همگرایی مطلق ۱۰۸
۵.۳ تجدید آرایش سریها ۱۱۳
۶.۳ آزمونهای همگرایی مطلق ۱۲۱
۷.۳ سریهایی که جمله‌هایشان دنبالهٔ غیرصعودی تشکیل می‌دهند ۱۳۱
۸.۳ مجموعیابی جزءبه‌جزء ۱۳۵
۹.۳ مجموعپذیری $(C,1)$ سریها ۱۳۹
۱۰.۳ ردهٔ l^2 ۱۴۳
۱۱.۳ اعداد حقیقی و بسطهای دهدهی ۱۴۷
۱۲.۳ ملاحظات و تمرینهای اضافی فصلهای ۱، ۲، و ۳ ۱۴۹

۴. حدود و فضاهای متریك ۱۶۲
۱.۴ حد تابع روی خط حقیقی ۱۶۲
۲.۴ فضاهای متریك ۱۷۶
۳.۴ حدود در فضاهای متریك ۱۸۱

۵. توابع پیوسته در فضاهای متریك ۱۸۷
۱.۵ توابع پیوسته دریك نقطهٔ خط حقیقی ۱۸۷
۲.۵ بیانی دیگر ۱۹۱
۳.۵ توابع پیوسته در فضای متریك ۱۹۵
۴.۵ مجموعه‌های باز ۱۹۹
۵.۵ مجموعه‌های بسته ۲۰۳
۶.۵ توابع ناپیوسته در R^1 ۲۱۰

عنوان	صفحه

۷.۵ فاصلهٔ یك نقطه از یك مجموعه ۲۱۵

۶. همبندی، کمال، و فشردگی ۲۱۷
۱.۶ مطالب بیشتری دربارهٔ مجموعه‌های باز ۲۱۷
۲.۶ مجموعه‌های همبند ۲۱۹
۳.۶ مجموعه‌های کراندار و مجموعه‌های کراندار کلی ۲۲۵
۴.۶ فضاهای متریك کامل ۲۲۹
۵.۶ فضای متریك فشرده ۲۳۴
۶.۶ توابع پیوسته در فضاهای متریك فشرده ۲۳۹
۷.۶ پیوستگی تابع وارون ۲۴۲
۸.۶ پیوستگی یکنواخت ۲۴۴
۹.۶ ملاحظات و تمرینهای اضافی فصلهای ۴، ۵، و ۶ ۲۵۰

۷. حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲۶۰
۱.۷ مجموعه‌های صفراندازه ۲۶۰
۲.۷ تعریف انتگرال ریمان ۲۶۲
۳.۷ وجود انتگرال ریمان ۲۷۰
۴.۷ خواص انتگرال ریمان ۲۷۳
۵.۷ مشتقها ۲۸۰
۶.۷ قضیهٔ رول ۲۹۰
۷.۷ قانون میانگین ۲۹۵
۸.۷ قضیه‌های بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲۹۸
۹.۷ انتگرالهای ناسره ۳۰۷
۱۰.۷ انتگرالهای ناسره (ادامه) ۳۱۶

۸. توابع مقدماتی. سریهای تیلر ۳۲۴
۱.۸ توابع هذلولوی ۳۲۴
۲.۸ تابع نمایی ۳۲۷
۳.۸ تابع لگاریتمی. تعریف x^a ۳۳۰
۴.۸ توابع مثلثاتی ۳۳۳
۵.۸ قضیهٔ تیلر ۳۴۲
۶.۸ قضیهٔ دوجمله‌ای ۳۵۳
۷.۸ قاعدهٔ هوپیتال (لوپیتال) ۳۵۷

عنوان	صفحه

۹. دنباله‌ها و سریهای توابع	۳۶۷
۱.۹ همگرایی نقطه‌ای دنباله‌های توابع	۳۶۷
۲.۹ همگرایی یکنواخت دنباله‌های توابع	۳۷۲
۳.۹ نتایج همگرایی یکنواخت	۳۷۹
۴.۹ همگرایی و همگرایی یکنواخت سریهای توابع	۳۸۶
۵.۹ انتگرالگیری و مشتق گیری سریهای توابع	۳۹۱
۶.۹ مجموعپذیری آبل	۳۹۶
۷.۹ یك تابع پیوستهٔ هیچ‌جا مشتقپذیر	۴۰۵
۱۰. سه قضیهٔ مشهور	۴۱۰
۱.۱۰ فضای متریك $C[a, b]$	۴۱۰
۲.۱۰ قضیهٔ تقریب وایرشتراس	۴۱۴
۳.۱۰ قضیهٔ وجودی پیکار در معادلات دیفرانسیل	۴۲۱
۴.۱۰ قضیهٔ آرزلا و خانواده‌های همپیوسته	۴۲۵
۵.۱۰ تمرینهای اضافی و ملاحظات برای فصلهای ۹ و ۱۰	۴۲۸
۱۱. انتگرال لبگ	۴۳۹
۱.۱۱ طول مجموعه‌های باز و مجموعه‌های بسته	۴۳۹
۲.۱۱ اندازهٔ داخلی و خارجی، مجموعه‌های اندازه‌پذیر	۴۴۴
۳.۱۱ ویژگیهای مجموعه‌های اندازه‌پذیر	۴۴۹
۴.۱۱ توابع اندازه‌پذیر	۴۵۷
۵.۱۱ تعریف و وجود انتگرال لبگ توابع کراندار	۴۶۴
۶.۱۱ ویژگیهای انتگرال لبگ توابع اندازه‌پذیر کراندار	۴۷۱
۷.۱۱ انتگرال لبگ توابع بی‌کران	۴۸۱
۸.۱۱ بعضی از قضیه‌های اساسی	۴۹۳
۹.۱۱ فضای متریك $\mathcal{L}^{2}[a,b]$	۵۰۰
۱۰.۱۱ انتگرال در $(-\infty,\infty)$ و درصفحه	۵۱۰
۱۲. سریهای فوریه	۵۲۱
۱.۱۲ تعریف سریهای فوریهٔ	۵۲۱
۲.۱۲ بیان مسائل همگرایی	۵۲۶
۳.۱۲ مجموعپذیری $(C,1)$ سریهای فوریه	۵۳۲
۴.۱۲ نظریهٔ $\mathcal{L}^{2}$ی سریهای فوریه	۵۳۴

عنوان	صفحه

۵.۱۲ همگرایی سریهای فوریه ۵۴۱

۶.۱۲ بسطهای یکا متعامد در $\mathcal{L}[a, b]$ ۵۴۸

۷.۱۲ ملاحظات و تمرینهای اضافی برای فصلهای ۱۱ و ۱۲ ۵۵۸

پیوست ۵۶۸

فهرست راهنما ۵۷۷

بسم الله الرحمن الرحیم

یادداشت مترجمان

به‌منظور سهولت خواندن ترجمه و رعایت هماهنگی در کاربرد نمادها، تغییرات زیر را ضروری یافتیم:

۱. روش شماره‌گذاری در متن انگلیسی به‌صورت ترکیبی از ارقام و حروف آمده است، مثلا 2.5A مبین بند A از بخش ۵ در فصل ۲ است. ما به جای حروف، اعداد به‌کار برده‌ایم و لذا، به‌جای حروف A، B، C، ... به‌ترتیب از اعداد ۱،۲،۳، ... استفاده کرده‌ایم. این‌کار هم به رسم‌الخط عمومی‌سایر کتابها نزدیکتر است و هم درکاربرد ترجمهٔ فارسی آسانتر.

۲. مجموعهٔ x هایی‌که ویژگی F دارند در متن انگلیسی کتاب به صورت زیر آمده است

$$\{x|F(x)\}$$

ما برای جلوگیری از تداخل علامت | با علامت قدرمطلق از : به‌جای | استفاده‌کرده‌ایم. درنتیجه مجموعهٔ فوق را به‌صورت زیر نمایش داده‌ایم:

$$\{x : F(x)\}$$

لذا به‌نظر ما، مثلا $\{x : |x| = ۱\}$ قابل قبول‌تر از $\{x \,|\, |x| = ۱\}$ است.

۳. علامت زیرمجموعه در متن انگلیسی همه جا به‌صورت $\subset$ آمده است. ولی ما به‌پیروی از اکثرکتابها و بخصوص مقایسه با برابریها، نماد $\subseteq$ را برای حالت کلی و نماد $\subset$ را در موارد زیرمجموعه‌های سره به‌کار برده‌ایم.

۴. تقسیم‌بندی‌کتاب از نظر ما به ترتیب فصل، بخش و بند است. بنابراین در شماره‌گذاری‌کتاب مثلا می‌گوییم فصل ۴، بخش ۶.۴ (یعنی بخش ۶ از فصل ۴)، بند ۲.۶.۴ (یعنی بند ۲ از بخش ۶ از فصل ۴).

پیشگفتار

این کتاب به‌عنوان درسی یکساله برای دانشجویانی که درسهای معمولی حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی را گذرانده‌اند فراهم شده است. مطالب عمدهٔ مربوط به مفاهیم اساسی و ابزارهای آنالیز نظیر توابع، حدها، پیوستگی، مشتقها و انتگرالها، دنباله‌ها، و سریها به طرزی دقیق دراین کتاب عرضه شده‌اند. اکثر نکات دشواری که معمولاً در درسهای مقدماتی به‌طور سرسری از آنها می گذرند، در اینجا به تفصیل مورد بحث قرار گرفته‌اند. به‌علاوه، به‌منظور ایجاد پایه‌ای خوب برای آنالیز جدید و توپولوژی (و با امید کمك به فهم بهتر این رشته‌ها)، بسیاری ازمباحث پیشرفته گنجانده شده‌است. به‌ویژه، مباحثی در بارهٔ فضاهای متریك و انتگرال لبگ ـ مباحثی کـه معمولاً برای دوره‌های پیشرفته‌تر منظور می‌شوند ـ آورده شده است. همچنین، ایـن کتاب شامل مباحث کوتاهتر ولی جالبتر زیادی است که معمولاً در دوره‌هایی در این سطح عرضه نشده‌اند؛ ایـن مباحث عبارت‌اند از رستهٔ بئر و تـوابع ناپیوسته، مجموعپذیری سریها، قضیهٔ وایرشتراس دربـارهٔ تقریب تـوابع پیوسته به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها، و برهانی برای قضیهٔ استانداردِ وجود درمعادلات دیفرانسیل ازدیدگاه نظریهٔ نقطهٔ ثابت.

این کتاب در سطح کتابهای درسی «حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته» متعارف نـوشته شده است، اما مباحث مربوط به «چند متغیرها» را مـورد بررسی قرار نمی‌دهد. به‌نظرما مبحث مربوط به‌دیفرانسیلها وحساب برداری را ازدیدگاه هندسهٔ دیفرانسیل جدید بهترمی‌توان فراگرفت وجای آنها دراینجا نیست.

تذکراتی دربارهٔ ویرایش دوم

تغییرات واضافات بسیار وحذف بعضی ازقسمتهای ویرایش اول بر پایهٔ انتقادات سنجیدهٔ بسیاری از همکاران در مؤسسات آموزشی کوچك و بزرگ انجام گرفته است.

یکی از مشخصات عمدهٔ ویرایش جدید افزودن بخشهایی است به نام «ملاحظات و تمرینهای اضافی» کـه حاوی مطالب متنوعی هستند. در ایـن بخشها قضایای مشهوری در

ارتباط بـا مباحث موجـود درمتن آورده شده‌اند ـ مثل، قضیهٔ شرودر-برنشتاین در نظریهٔ مجموعه‌ها، قضیهٔ توسیع تیتسه در توپولوژی، و تعمیم استون در قضیهٔ تقریب وایرشتراس. فقط طرح کلی برهان این قضایا آورده شده و مقدار زیادی از برهان آنها به‌صورت تمرین به دانشجویان واگذار شده است. دراین بخشهای جدید تمرینهای مختلفی (کـه بسیاری از آنها مسائل مبارزطلب هستند) وگاهی هم یادداشتی تاریخی آورده شده‌است. می‌توانید راهنمای حل مسائل مباحث جدید را ازمؤلف بخواهید.

همچنین، پیوستی شامل یك بحث اصل موضوعی دستگاه اعداد حقیقی نیز به کتاب افزوده‌ام. با این‌کار هم اصول بنیادی، که درچاپ اول نیامده بود، عرضه شده است و هم از بسط طولانی این اصول، که فکرمی‌کنم موجب کندی پیشرفت خواننده درقسمت اصلی کتاب می‌شود، اجتناب شده‌است. کلیهٔ مفروضات دربارهٔ اعداد حقیقی ونتایج ضروریی که ازاین مفروضات به‌دست می‌آیند به‌دقت عرضه شده‌اند.

همچنین، چند مثال مصور و تمرینهای جدید در بسیاری ازفصلها، و برهانهای جدید وجه تمایزاین ویرایش با ویرایش اول است.

ریچارد ر. گولدبرگ

مقدمه : مفروضات و نمادگذاریها

(الف) این کتاب با شرح مبسوط اعداد حقیقی آغاز نمی‌شود. اما، خواننده‌ای که مایل باشد ترتیب منطقی را دقیقاً رعایت کند باید نخست تعریفها و قضیه‌های اساسی دربارهٔ مجموعه‌ها و تابعها را که در بخشهای ۱.۱ تا ۳.۱ آمده‌اند خوب بفهمد و آنگاه اصول موضوعهٔ ترتیب و جبر اعداد حقیقی و قضیه‌های حساب و نابرابریهایی را که از این اصول به‌دست می‌آیند در پیوست (صفحهٔ ۵۶۸) بخواند. خواننده بعد از مطالعهٔ پیوست به بخش ۷.۱ که اصل کوچکترین کران بالا را ارائه می‌دهد بازمی‌گردد. در این مرحله، خواننده برداشت دقیقی از کلیهٔ مفروضات اساسی دربارهٔ اعداد حقیقی خواهد داشت. خواننده‌ای که این راه را انتخاب کرده است می‌تواند پاراگراف (ب) را نادیده گرفته، به پاراگراف (ج) برود.

(ب) به‌هرحال، اشخاصی هستند که فکر می‌کنند بهتر است در ابتدا اعداد حقیقی به اجمال گفته شود تا خواننده بتواند زودتر به بطن کتاب دست یابد. با این دید بهتر است خواندن پیوست را به بعد موکول کنند و به خواندن متن کتاب مشغول شوند. برای کسانی که این روش را در پیش گرفته‌اند به‌ذکر مختصری از اصول اعداد حقیقی می‌پردازیم.

عدد صحیح یعنی یك «عدد درست». مثلا، ۶، ۰، ۳— اعداد صحیح هستند. عدد گویا عددی حقیقی است که بتوان آن را به‌صورت خارج قسمت دوعدد صحیح بیان کرد. مثلا، ۲/۳ و ۲۷۶/۹— اعداد گویا هستند. بنابراین، هر عدد صحیح k عددی گویاست، زیرا می‌توان نوشت $k = k/1$. عدد گنگ عددی است حقیقی که گویا نباشد. مثلا، جواب معادلهٔ $x^2 = 2$ عددی گنگ است.

خواننده باید مهارت متوسطی در استفاده از نابرابریها داشته باشد. باید بداند که اگر x و y دوعدد حقیقی باشند و $x < y$، آنگاه $-x < -y$. همچنین، اگر $0 < x < y$، آنگاه $0 < 1/y < 1/x$.

$|x|$ را به‌ازای $x > 0$ مساوی x تعریف می‌کنیم. اگر $x < 0$، آنگاه $|x|$ را مساوی $-x$ تعریف می‌کنیم. سرانجام، $|0|$ را مساوی 0 می‌گیریم. بنابراین، برای هر عدد حقیقی x، $|x|$ مساوی «مقدار عددی» x است. $|x|$ را قدرمطلق x می‌نامیم. با

ملاحظهٔ حالات مختلف برحسب علامات x و y، خواننده در اثبات نتایج بسیار مهم زیر اشکالی نخواهد داشت.

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \qquad (۱)$$

و

$$|xy| = |x|\ |y|.$$

اگر a و b دوعدد حقیقی باشند، آنگاه تعبیرهندسی $|a-b|$ فاصلهٔ از a تا b (یا از b تا a) است. ایــن تعبیر، در درك مقاصد اصلی بسیاری از برهانها اهمیت خاصی‌دارد. اگر a و b و c اعداد حقیقی باشند، آنگاه معنی هندسی نابرابری

$$|a-b| \leqslant |a-c|+|c-b| \qquad (۲)$$

این است که فاصلهٔ از a تا b ازمجموع فاصله‌های از a تا c واز c تا b نابیشتراست. این تعبیر کاملا معقول به نظر می‌رسد. ببینید آیـا می‌توانید (۲) را ثابت کنید؟ [فـرض کنید $x=a-c$، $y=c-b$ و (۱) را به‌کار برید.]

(ج) اگر $a>0$، آنگاه درستی قانون نماهـا نظیر $a^{x+y}=a^x \cdot a^y$ را بـرای عددهای گویای x و y می‌پذیریم. در فصل ۸، a^x را برای هر عـدد حقیقی x تعریف می‌کنیم و سپس قوانین آشنای نماها را در مورد نماهای دلخواه ثابت می‌کنیم. نمادهای $a^{1/2}$ و $\sqrt{a}$ هردو به‌معنی ریشهٔ دوم مثبت a هستند. (وجود ریشهٔ دوم مثبت برای هرعدد حقیقی مثبت درتمرین ۸ از بخش ۲.۶ آمده است.)

(د) اگر a و b دوعدد حقیقی باشند به‌طوری‌که $a<b$، آنگاه مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی x باشرط $a<x<b$ رابا (a, b) نشان می‌دهیم. منظوراز (a, ∞) مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی x بزرگتراز a است. منظور از $(-\infty, a)$ مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی x کوچکتراز a است. مجموعهٔ (a, b) را بازهٔ باز کراندار می‌نامند، در حالی‌که (a, ∞) و $(-\infty, a)$ را بازه‌های باز بی‌کران می‌نامند. مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی را با $(-\infty, \infty)$ نمایش می‌دهند. توجه داشته باشید که نماد ∞ را تعریف نکرده‌ایم.

اگـر $a \leqslant b$، آنگاه $[a, b]$ معرف مجموعهٔ همـهٔ اعداد حقیقی x است کـه در $a \leqslant x \leqslant b$ صدق می‌کنند. این مجموعه بازهٔ بستهٔ کراندار نامیده می‌شود. پس بازهٔ بسته ممکن است فقط شامل يك نقطه باشد (حالتی‌که $a=b$). گاهی نیاز داریم‌کـه بازه‌های «نیم‌بـاز» را به‌کار بریم. مثلاً، $[0, 1)$ معرف مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x است کـه در $0 \leqslant x < 1$ صدق می‌کنند.

نماد (a, b) را هرگز بـرای نشان دادن يـك نقطه در صفحه به‌کار نخواهیم برد. خواهید دید‌که نقطه‌ای را که مختص x آن a و مختص y آن b است با $\langle a, b\rangle$ نشان خواهیم داد.

اغلب مناسب است‌که در سمت راست گزاره، مقادیر «متغیر» یا «متغیرها»یی را که

گزاره به‌ازای آن مقادیر برقرار است داخل پرانتز بنویسیم، مثلا

$$f(x) < ۷ \qquad (۰ \leqslant x \leqslant ۳)$$

به‌این معنی است که به‌ازای تمام مقادیر x در $[۰, ۳]$ عدد $f(x)$ از ۷ کوچکتر است.

(ه) مطالب این کتاب منطقاً ازدرسهای هندسهٔ مقدماتی، مثلثات، وحساب دیفرانسیل وانتگرال مستقل‌است. به‌این معنی که، هیچ نتیجه‌ای ازاین درسهای مقدماتی را درتعاریف یا اثبات قضایا به‌کار نبرده‌ایم مگر آنکه خودمان نتیجه را قبلا به دست آورده باشیم. با وجود این، مفاهیم درس حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی را آزادانه جهت روشن ساختن تعاریف و قضایا به‌کار می‌بریم. مثلا، تابع سینوس را تا قبل ازفصل ۸ تعریف نمی‌کنیم ولی نتایج شناخته‌شدهٔ این تابع را در مثالها و تمرینهای فصول قبل ازآن به‌کار می‌بریم.

تعدادی توضیحات مصور، اما نه‌چندان زیاد، درکتاب وجود دارد. معتقدیم‌خواننده باید هرچه زودتر بیاموزد که شکلهایش را خود ترسیم‌کند. احتمالا، معلم در تدریس از اشکال کمک خواهد گرفت.

۱

مجموعه‌ها و تابعها

۱.۱ مجموعه‌ها و عنصرها

یك مجموعه عبارت از گردایه‌ای از هرنوع اشیاء است. اشیای یك مجموعه را عنصرها یا نقاط آن مجموعه نامند. توجه داریدکــه ما در واقع واژه‌های مجموعه و عنصررا تعریف نکرده‌ایم (زیرا «گردایه» و «شیئی» را تعریف‌نکرده‌ایم)؛ بلکه، آنها را به‌عنوان مفاهیمی شهودی برای تمام مفاهیم دیگر پایه قرار خواهیم داد. گاهی به‌جای «مجموعه» یکــی از واژه‌های رده، خانواده، یا انبوهه را به‌کار می‌بریم. همهٔ این واژه‌ها (دراین‌کتاب) به یك معنی هستند. در بخش ۱۲.۳ بــه مطالبی‌که در بحث پیشرفته‌تر مجموعه‌ها عنوان می‌شود اشاره‌ای خواهیم کرد.

اغلب برای نشان دادن مجموعه، در دو طرف عنصرهای آن دو ابــرو می‌گذارند. مثلا، $\{a,b,c\}$ مجموعه‌ای دارای سه عنصر a و b و c را نشان می‌دهد. بااستعمال‌صحیح نقطه‌ها حتی می‌توان مجموعه‌هایی راکه تعدادی نامتناهی عنصردارند باهمین روش‌مشخص نمود (معنای مجموعهٔ نامتناهی در ۴.۵.۱ آمده است). مثلا، مجموعهٔ تمــام اعداد صحیح مثبت را می‌توان به‌صورت $\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ نشان داد. نوع دیگرنمایش مجموعه درج ابــرو در اطراف توصیفی از مجموعه است. مثلا، می‌توان ربــع اول صفحهٔ دکارتی را به‌صورت $\{\langle x,y\rangle : x\geqslant ۰ , y\geqslant ۰\}$ نشان داد. مجموعهٔ اخیر به‌معنی مجموعهٔ تمام نقاط $\langle x, y\rangle$ است به گونه‌ای که x نامنفی و y نامنفی است. به‌همین ترتیب،

$$[۰, ۱]=\{x : ۰\leqslant x\leqslant ۱\}.$$

تعریف. اگر b عنصری ازمجموعهٔ A باشد، می‌نویسیم $b \in A$. اگــر b عنصری از A نباشد، می‌نویسیم $b \notin A$.

بنابراین، $a \in \{a, b, c\}$ ولی $d \notin \{a, b, c\}$. به‌عنوان مثالی دیگر، فرض‌کنیم تیم فوتبال هرشهرستان مجموعهٔ اعضای آن تیم تعریف شود و فدراسیون فوتبال ایران را مجموعه‌ای از تیمهای فوتبال درنظر بگیریم. بنابراین داریم:

فدراسیون فوتبال ایران = {تیم تهران, تیم اصفهان, تیم مشهد, . . . , تیم اراك},

تیم تهران = {محمد خانی, عابدزاده, سلطانی, . . . , انصاری‌فر},

تیم مشهد ∈ فدراسیون فوتبال ایران,

محمدخانی ∈ تیم تهران.

ملاحظه‌کنیدکه عنصرهای فدراسیون فوتبال ایران خودشان مجموعه هستند. از آنجا، این حقیقت روشن می‌شودکه یك مجموعه ممکن است خودش عنصر یك مجموعهٔ دیگــر باشد. درضمن توجه‌کنیدکه گرچه محمدخانی درتیم تهران بازی می‌کند ولی یك عنصرفدراسیون فوتبال ایران نیست. لذا،

محمدخانی ∉ فدراسیون فوتبال ایران.

تمرینهای ۱.۱

۱. مجموعه‌های اعداد حقیقی زیررا به‌صورتی هندسی توصیف‌کنید:

$$A=\{x : x < ۷\},$$
$$B=\{x : |x| \geqslant ۲\},$$
$$C=\{x : |x| = ۱\}.$$

۲. مجموعهٔ نقاط زیررا درصفحهٔ مختصات به‌صورت هندسی نمایش دهید:

$$A=\{\langle x, y\rangle : x^۲+y^۲=۱\},$$
$$B=\{\langle x, y\rangle : x \leqslant y\},$$
$$C=\{\langle x, y\rangle : x+y=۲\}.$$

۳. فرض‌کنیم P مجموعهٔ اعداد اول باشد. کدام‌یك ازگزاره‌های زیرراست هستند؟

(الف) $۷ \in P$, (ب) $۹ \in P$,

(ج) $۱۱ \notin P$, (د) $۷,۵۴۷,۱۹۳ \times ۶۶,۳۱۷ \in P$.

۴. فرض‌کنیم $A=\{۱, ۲, \{۳\}, \{۴, ۵\}\}$. کدام‌یك ازگزاره‌های زیرراست وکدام‌یك

ازآنها دروغ است؟

$$(\text{الف})\ \ 1 \in A, \qquad (\text{ب})\ \ 3 \in A.$$

مجموعهٔ A چند عنصر دارد؟

۲.۱ اعمال روی مجموعه‌ها

به‌وسیلهٔ «اعمال مقدماتی» جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم در حساب دبستانی، می‌توان از اعداد مفروض اعداد جدید به دست آورد. یعنی، از ترکیب دو عدد، عدد سومی ساخت. در نظریهٔ مجموعه‌ها نیز اعمال مقدماتی ــ اجتماع، اشتراك، متممگیری ــ وجود دارد که کم‌وبیش با اعمال حسابی جمع، ضرب و تفریق متناظرهستند.

۱.۲.۱. تعریف. اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه $A \bigcup B$ (بخوانید «A اجتماع B» یا «اجتماع A و B») مجموعهٔ جمیع عنصرهایی است که عنصر A یا عنصر B (یا عنصر هر دو) هستند. به‌صورت نمادی،

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \ \ \text{یا} \ \ x \in B\}.$$

مثلاً، اگر

$$A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{3, 4, 5\} \tag{1}$$

آنگاه $A \bigcup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

۲.۲.۱. تعریف. اگر A و B دومجموعه باشند، آنگاه $A \bigcap B$ (بخوانید «A اشتراك B» یا «اشتراك A و B») عبارت‌است از مجموعهٔ جمیع عنصرهای مشترك بین A و B. به‌صورت نمادی،

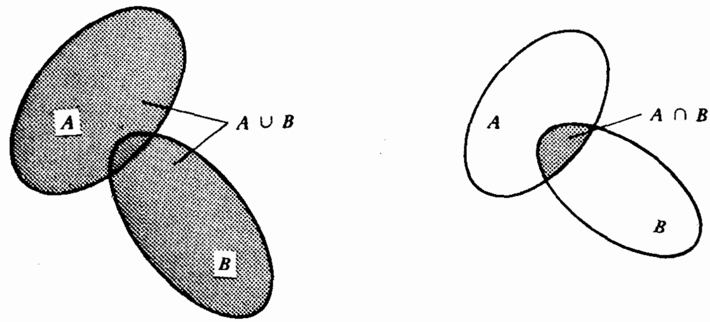
$$A \bigcap B = \{x : x \in A \ \&\ x \in B\}.$$

از این‌رو، اگر A و B همان مجموعه‌های (۱) در ۱.۲.۱ باشند، آنگاه $A \bigcap B = \{3\}$. (به‌تفاوت بین $\{3\}$ و ۳ توجه کنید. چون $A \bigcap B$ مجموعه‌ای‌است که تنها عنصرش ۳ است، منطقاً باید بنویسیم $A \bigcap B = \{3\}$. این تمایز به‌ندرت حائز اهمیت است و غالباً از آن چشم‌پوشی می‌کنیم.) به‌شکل ۱ مراجعه شود.

درصورتی که مجموعه‌های A و B عنصرمشترك نداشته باشند، آنگاه $A \bigcap B$ عنصری نخواهد داشت. با وجود این، هنوز می‌خواهیم که $A \bigcap B$ را یك‌مجموعه بنامیم. بنابراین تعریف زیر را می‌آوریم.

۳.۲.۱. تعریف. مجموعه‌ای راکه هیچ‌عنصری‌ندارد مجموعهٔ تهی تعریف می‌کنیم و آن را با $\varnothing$ نشان می‌دهیم.

بنابراین $\{1, 2\} \bigcap \{3, 4\} = \varnothing$. علاوه‌براین، برای هرمجموعهٔ A، $A \bigcup \varnothing = A$ و



شکل ۱

$A\bigcap\varnothing=\varnothing$ (تحقیق کنید!).

۴.۲.۱. تعریف. اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه، $B-A$ (بخوانید «B منهای A») عبارت است از مجموعهٔ جمیع عنصرهای B که به A تعلق ندارند. به‌صورت نمادی،

$$B-A=\{x : x\in B,\ x\notin A\}.$$

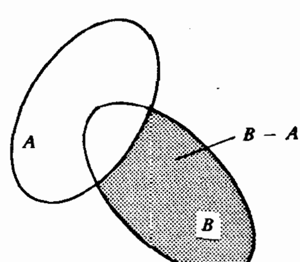
مثلاً، اگر مجموعه‌های A و B همان مجموعه‌های (۱) بند ۱.۲.۱ باشند داریم $B-A=\{۴,۵\}$. شکل ۲ را ببینید.

درمجموعه‌ها رابطه‌هایی‌وجود دارند که نظیر رابطه‌های $\geqslant$ و $\leqslant$ درحساب‌هستند. اکنون به‌تعریف آنها می‌پردازیم.

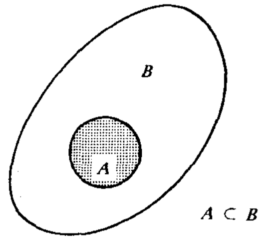
۵.۲.۱. تعریف. اگر هرعنصر مجموعهٔ A عنصر مجموعهٔ B باشد می‌نویسیم $A\subseteq B$ (بخوانید «A مشمول B است») یا می‌نویسیم $B\supseteq A$ (بخوانید «B شامل A است»). اگر $A\subseteq B$، گوییم A یک زیرمجموعهٔ B است. A را یك زیرمجموعهٔ سرهٔ B خوانیم اگر $A\subseteq B$ و $A\neq B$ (و می‌نویسیم $A\subset B$) (شکل ۳).

مثلاً، اگر

$$A=\{۱,۶,۷\},\quad B=\{۱,۳,۶,۷,۸\},\quad C=\{۲,۳,۴,۵,\dots,۱۰۰\},\quad (۱)$$



شکل ۲



شکل ۳

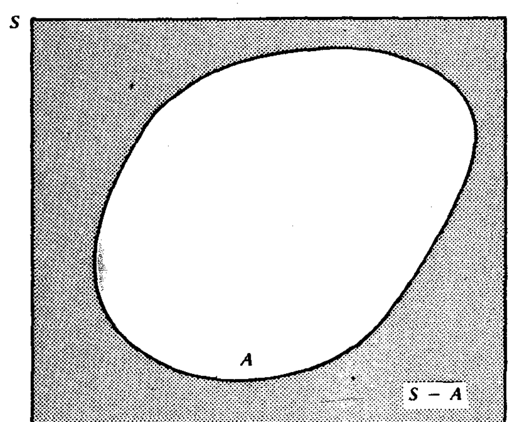
آنگاه $A \subseteq B$ اما $B \nsubseteq C$ (با اینکه C، ۹۹ عنصر و B تنها ۵ عنصر دارد). همچنین، D هرمجموعه‌ای باشد، $D \subseteq D$ و $\varnothing \subseteq D$.

۶.۲.۱ تعریف. دو مجموعه را برابر یا مساوی خوانیم هرگاه عنصرهای دومجموعه یکی باشند.

بنابراین، $A = B$ اگر و تنها اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ (تحقیق کنید!).

ملاحظه کنید که اگر B و C مجموعه‌های (۱) بند ۵.۲.۱ باشند، آنگاه هیچکدام از روابط $B \subseteq C$، $C \subseteq B$، و $B = C$ برقرار نیستند.

۷.۲.۱. غالباً حالتی پیش می‌آید که جمیع مجموعه‌های A، B، C و... در یك بحث معین، زیرمجموعه‌های یك مجموعهٔ «بزرگ» مانند S هستند. در این‌صورت $S - A$ را متمم A (نسبت به S) خوانیم، جملهٔ داخل پرانتز گاهی حذف می‌شود. مثلا، مجموعهٔ اعداد گویا متمم مجموعهٔ اعداد گنگ (نسبت به‌مجموعهٔ اعداد حقیقی) است. هرجا بیم ابهام نرود که S چیست، می‌نویسیم $S - A = A'$. از این‌رو، A'' [به‌معنی $(A')'$] مساوی A است. به علاوه، $S = A \cup A'$ (شکل ۴).



شکل ۴

حال، به‌اثبات اولین قضیه می‌پردازیم:

۸.۲.۱ قضیه. اگر A و B زیرمجموعه‌های S باشند، آنگاه

$$(A\bigcup B)'=A'\bigcap B' \qquad (۱) \qquad\qquad (A\bigcap B)'=A'\bigcup B', \qquad (۲)$$

گاهی این معادلات را قوانین دمورگن[1] می‌نامند.

برهان: برای اثبات (۱) گوییم اگر $x\in(A\bigcup B)'$، آنگاه $x\notin A\bigcup B$. لذا، x نه‌عنصر A و نه‌عنصر B است، بنابراین، $x\in A'$ و $x\in B'$. پس، $x\in A'\bigcap B'$. بنابراین، $(A\bigcup B)'\subseteq A'\bigcap B'$. برعکس، اگر $y\in A'\bigcap B'$، آنگاه $y\in A'$ و $y\in B'$، لـذا، $y\notin A$ و $y\notin B$. پس، $y\notin A\bigcup B$ و بنابراین، $y\in(A\bigcup B)'$. ازاین‌رو، $A'\bigcap B'\subseteq(A\bigcup B)'$. رابطهٔ (۱) را ثابت کردیم.

با همین روش می‌توان رابطهٔ (۲) را ثابت کرد یا به‌ترتیب زیر آن‌را از (۱) نتیجه گرفت:

در رابطهٔ (۱)، A و B را به‌ترتیب با A' و B' و درنتیجه A' و B' را با $A''=A$ و $B''=B$ جایگزین می‌کنیم. رابطهٔ $(A'\bigcup B')'=A\bigcap B$ به دست می‌آید. حال، اگر از طرفین رابطهٔ اخیر متمم بگیریم (۲) نتیجه می‌شود.

تمرینهای ۲.۱

۱. فرض کنیم A مجموعهٔ حروف کلمهٔ «استقلال» باشد، یعنی $A=\{$ل, ق, س, ت, ا$\}$. مجموعهٔ حروف کلمهٔ «استبداد» را نیز با B نشان می‌دهیم. مطلوب است $A\bigcap B$، $A\bigcup B$، $A-B$، و $B-A$. اگـر S مجموعهٔ حروف الفبا باشد، آنگاه A' و B' و $A'\bigcap B'$ را به‌دست آورید. سپس، برقراری $A'\bigcap B'=(A\bigcup B)'$ را تحقیق کنید.

۲. اگر A و B و C همان مجموعه‌های مذکور در تمرین ۱ از بخش ۱.۱ باشند، آنگاه $A\bigcap B$، $B\bigcap C$، و $A\bigcap C$ را به‌روش هندسی توصیف کنید.

۳. خواستهٔ تمرین ۲ را درمورد مجموعه‌های A و B و C از تمرین ۲ در بخش ۱.۱ انجام دهید.

۴. ثابت کنید که رابطهٔ زیر برای مجموعه‌های دلخواه A و B و C برقرار است.

$$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C).$$

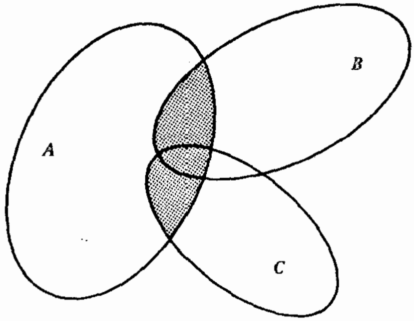
این قانون شرکتپذیری در اجتماع مجموعه‌هاست و نشان می‌دهد کـه مجموعه‌های طرفین تساوی را می‌توان بدون پرانتز به‌صورت $A\bigcup B\bigcup C$ نوشت.

۵. رابطهٔ $(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$ را بـرای مجموعه‌هـای دلخواه A، B، C ثابت کنید.

۶. قانون زیر را که موسوم به‌قانون توزیعپذیری است ثابت کنید.

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C).$$

1. DeMorgan



شکل ۵ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

شکل ۵ را ببینید.

۷. ثابت کنید $(A\bigcup B)-(A\bigcap B)=(A-B)\bigcup(B-A)$.

۸. از احکام زیر بعضی برای هر مجموعهٔ A و B و C راست هستند آنها را ثابت کنید و بقیه را که همیشه راست نیستند با ارائهٔ مثالی باطل کنید.

(الف) $(A\bigcup B)-C=A\bigcup(B-C)$.

(ب) $(A\bigcup B)-A=B$.

(ج) $(A\bigcap B)\bigcup(B\bigcap C)\bigcup(A\bigcap C)=A\bigcap B\bigcap C$.

(د) $(A\bigcup B)\bigcap C=A\bigcup(B\bigcap C)$.

۹. کدام‌یك از احکام زیر راست و کدام‌یك دروغ‌اند؟

(الف) اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$، آنگاه $A\subseteq C$.

(ب) اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$، آنگاه $A\bigcup B\subseteq C$.

(ج) $(0, 1)\supseteq[0, 1]$.

(د) $\{x:|x|\geqslant 4\}\bigcap\{y:|y|\geqslant 4\}=\{z:|z|\geqslant 4\}$.

۳.۱ تابعها

۱.۳.۱. مقدمه. در متون سطحی‌تر حساب دیفرانسیل و انتگرال به تعریف ذیل برمی‌خوریم: «اگر به‌هر x (از مجموعه‌ای مانند S) یك و تنها یك مقدار مانند y متناظر باشد، آنگاه y را تابعی از x می‌خوانیم.» با اینکه این «تعریف» مقصود اساسی مفهوم تابع را مجسم می‌کند، ولی با مقصود ما مبتنی بر به حداقل رساندن اصطلاحهای تعریف‌نشده مطابقت ندارد. («متناظر» به‌چه‌معنی است؟)

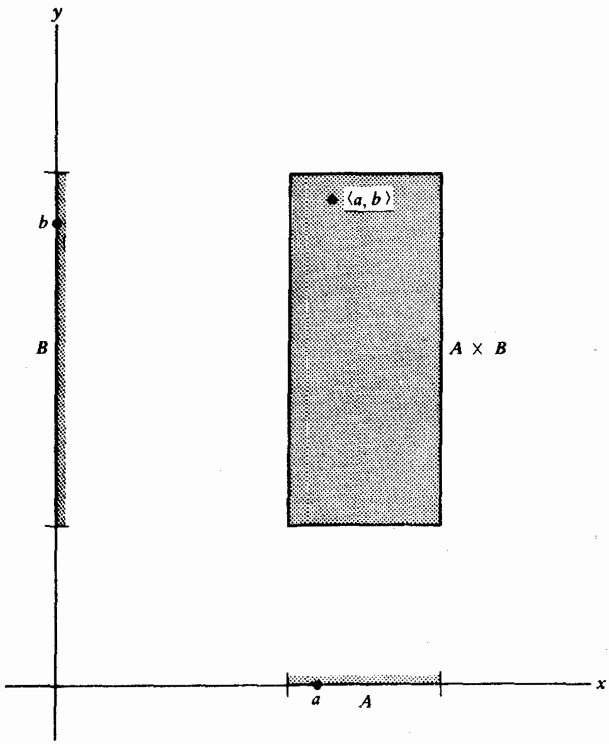
درجاهای دیگر می‌بینیم که تابع را به‌عنوان یك‌نمودار (گراف) تعریف کرده‌اند. این تعریف‌هم برای‌ما مناسب‌نیست. زیرا تاکنون «نمودار» تعریف نشده‌است. باوجوداین، چون یك نمودار مسطح (به طور شهودی) نوع معینی از مجموعهٔ نقاط است، و می‌توان

گفت هر نقطه یك جفت از اعداد است، این مطلب ما را به تعریف قابل‌قبولی از تابع در ۳.۳.۱ هدایت خواهد کرد.

۲.۳.۱ تعریف. اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه حاصلضرب دکارتی A و B (که با $A\times B$ نشان داده می‌شود) مجموعهٔ جمیع جفتهای مرتب* $\langle a, b\rangle$ است که در آن $a\in A$ و $b\in B$.

بنابراین، حاصلضرب دکارتی مجموعهٔ اعداد حقیقی در خودش مجموعهٔ جمیع جفتهای مرتب اعداد حقیقی است. مجموعهٔ اخیر را معمولاً صفحه می‌خوانیم (بعدازآنکه فاصلهٔ بین دو جفت را تعریف کردیم) شکل ۶ را ببینید.

به‌عنوان مثالی دیگر، سطح جانبی استوانهٔ دوار را می‌توان حاصلضرب دکارتی یك



شکل ۶ حاصلضرب دکارتی دو بازه.

---

* برای اینکه مطلب روشن باشد، بهتر است «جفت مرتب» را تعریف کنیم. آنچه موردلزوم است مجموعه‌ای است از a و b که در آن a و b به‌طریقه‌ای نامتقارن آورده شوند. چطور است که $\langle a, b\rangle$ را به‌صورت $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ تعریف کنیم؟

قطعه خط و یك دایره درنظر گرفت. (چرا؟)

حال، در وضعی هستیم که تابع را تعریف کنیم.

۳۰۳۰۱. تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند. تابع f از (یا در) A به‌توی B یك زیرمجموعهٔ $A\times B$ است (و بنابراین، مجموعه‌ای از جفتهای مرتب $\langle a, b\rangle$ است) با این خاصیت که هرعنصر A مانند a دقیقاً به‌یك جفت $\langle a, b\rangle$ تعلق دارد. معمولاً به‌جای $\langle x, y\rangle\in f$ می‌نویسیم $y=f(x)$. سپس y را نگارهٔ x تحت f می‌خوانیم. مجموعهٔ A را حوزهٔ تعریف f می‌نامیم. برد یا حوزهٔ مقادیر f مجموعهٔ

$$\{b\in B: b=f(a)\text{ ،}a\text{ به‌ازای یك }\}$$

است. یعنی برد f زیرمجموعه‌ای از B است که از تمام نگاره‌های اعضای A تشکیل شده است. تابع با مشخصات فوق را نگاشت از A به‌توی B نیز می‌نامند.

اگر $C\subseteq B$، آنگاه $f^{-1}(C)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1}(C)=\{a\in A: f(a)\in C\}.$$

به‌عبارت دیگر، $f^{-1}(C)$ مجموعهٔ نقاطی از حوزهٔ تعریف f است که نگارهٔ آنها در C باشد. اگرمجموعهٔ C تنها شامل یك‌عضو باشد، مثلاً $C=\{y\}$، آنگاه به‌جای $f^{-1}(\{y\})$ می‌نویسیم $f^{-1}(y)$. مجموعهٔ $f^{-1}(C)$ را نگارهٔ وارون C تحت f می‌خوانیم. (ملاحظه کنید که هیچ تعریفی برای f^{-1} ارائه نشده است.)

فرض کنیم $D\subseteq A$، آنگاه $f(D)$، که نگارهٔ D تحت f نام دارد، چنین تعریف‌می‌شود

$$f(D)=\{f(x): x\in D\}.$$

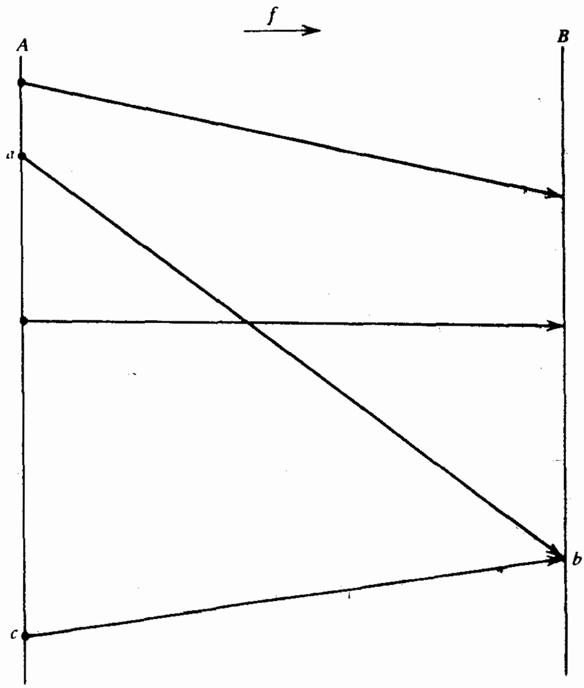
شکل ۷ را ملاحظه کنید. نقاط مبدأ پیکانها نقاط حوزهٔ تعریف تابع را مشخص می‌کنند. در نتیجه گزارهٔ $f(a)=b$ به‌وسیلهٔ پیکانی که از a شروع و به b ختم شده نشان داده شده است. برطبق تعریف تابع، هیچ دو پیکان متمایز نمی‌توانند در یك نقطهٔ $a\in A$ مبدأ مشترك داشته باشند، اما دو پیکان (یا بیشتر) ممکن‌است به‌یك نقطهٔ $b\in B$ ختم شوند. می‌توانیم چنین تصور کنیم که f نقاط A را به‌نقاط B می‌فرستد. ملاحظه کنید که $f(a)=f(c)=b$، پس $f^{-1}(b)=\{a, c\}$.

اگر حوزهٔ تعریف و حوزهٔ مقادیر یك تابع اعداد حقیقی باشند، آنگاه می‌توانیم روش معمول را درمورد نمایش نمودار تابع در صفحهٔ xy به‌کار بریم. اغلب امکان دارد که مقدار زیادی اطلاعات ازاین‌نمودارها استنباط کنیم. اما، برای فهمیدن مفاهیم اساسی دربارهٔ توابع مانند حد و پیوستگی، یك نمودار نظیر آنچه در شکل ۷ آمده است‌غالباً مفیدتر از نمودار در صفحهٔ xy است.

مثلاً؛ مجموعهٔ $f=\{\langle x, x^{2}\rangle: -\infty<x<\infty\}$ تابعی است که معمولاً با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$f(x)=x^{2}\qquad(-\infty<x<\infty)$$

حوزهٔ تعریف این تابع تمام خط حقیقی و حوزهٔ مقادیر آن $[0, \infty)$ است. به‌علاوه



شکل ۷ نمودار تابع f از A به‌توی B.

$$f(۲)=۴,\qquad f^{-۱}(۴)=\{-۲,۲\},\qquad f^{-۱}(-۷)=\varnothing,$$

$$f(\{x: x^{۲}=۹\})=\{۹\},\qquad f([۰,۳))=[۰,۹).$$

نمودار f را در صفحهٔ xy و نمودار آن‌را نظیر آنچه در شکل ۷ آمده است رسم کنید.

در تعریف تابع لازم نیست که A و B مجموعه‌هایی از اعداد باشند. برای مثال، فرض کنیم که A مجموعهٔ اعضای تیم ملی فوتبال ایران و B مجموعهٔ شهرهای ایران باشند. اگر f را با ضابطهٔ

$f(a)$ یعنی شهر محل تولد a

تعریف کنیم، آنگاه f تابعی است از A به‌توی B که از ۱۱ جفت مرتب تشکیل می‌شود.

گرچه تعریف مقبول تابع باید بر مفهوم مجموعه بنا شود، ولی نمایش مجموعه‌ای آشکارا پرزحمت‌تر از نمایش کلاسیک است. به‌هرحال، توجه‌داشته باشید که بین f (تابع) و $f(x)$ (نگارهٔ x تحت f) تمایز قائل می‌شویم.

براین نکته نیز باید تأکید شود که با معادله‌ای نظیر $f(x)=۱+x^{۳}$ تابعی تعریف نمی‌شود مگر آنکه حوزهٔ تعریف آن صریحاً مشخص شود. بنابراین، برطبق تعریف ما

گزاره‌های زیر توابع متفاوتی را تعریف می‌کنند

$$f(x)=۱+x^{۳} \qquad (۱\leqslant x\leqslant ۳),$$

و

$$g(x)=۱+x^{۳} \qquad (۱\leqslant x\leqslant ۴).$$

به‌هر حال، ارائهٔ اصطلاحاتی به‌منظور توصیف دو تابع که همانند f و g به‌هم مربوط هستند مفید است. به‌طور کلی، فرض کنیم f و g به‌ترتیب دو تابع با حوزه‌های تعریف X و Y باشند. اگر $X\subseteq Y$، و اگر

$$f(x)=g(x) \qquad (x\in X),$$

آنگاه g را یك توسیع f به Y یا f را یك تحدید g به X خوانیم. یعنی، اگر حوزهٔ تعریف g شامل حوزهٔ تعریف f باشد و در حوزهٔ تعریف f نگاره‌های هر نقطه تحت f و g برهم منطبق باشند، آنگاه g یك توسیع f است.

۴.۳.۱. تعریف. اگر f تابعی از A به‌توی B باشد، می‌نویسیم

$$f:A\rightarrow B$$

چنانچه، حوزهٔ مقادیر f تمام B باشد، f را تابعی از A به روی B خوانیم. دراین‌حالت گاهی می‌نویسیم $f:A\Rightarrow B$. مثلا، اگر f و g با ضوابط زیر تعریف شوند:

$$f(x)=x^{۲} \ (-\infty<x<\infty), \qquad g(x)=x^{۳} \ (-\infty<x<\infty),$$

آنگاه

$$f:(-\infty,\infty)\rightarrow(-\infty,\infty), \qquad g:(-\infty,\infty)\Rightarrow(-\infty,\infty).$$

اینك، سه قضیه دربارهٔ نگاره‌ها و نگاره‌های وارون می‌آوریم:

۵.۳.۱. قضیه. اگر $f:A\rightarrow B$، و اگر $X\subseteq B$، $Y\subseteq B$، آنگاه

$$f^{-۱}(X\bigcup Y)=f^{-۱}(X)\bigcup f^{-۱}(Y). \qquad (۱)$$

به‌بیان توصیفی، نگارهٔ وارون اجتماع دومجموعه برابر است با اجتماع نگاره‌های وارون آنها.

برهان: اگر $a\in f^{-۱}(X\bigcup Y)$، آنگاه $f(a)\in X\bigcup Y$. بنابراین، یا $f(a)\in X$ یا $f(a)\in Y$، درنتیجه یا $a\in f^{-۱}(X)$ یا $a\in f^{-۱}(Y)$، پس، $a\in f^{-۱}(X)\bigcup f^{-۱}(Y)$ لذا، $f^{-۱}(X\bigcup Y)\subseteq f^{-۱}(X)\bigcup f^{-۱}(Y)$. برعکس، اگر $b\in f^{-۱}(X)\bigcup f^{-۱}(Y)$، آنگاه یا $b\in f^{-۱}(X)$ یا $b\in f^{-۱}(Y)$. پس، یا $f(b)\in X$ یا $f(b)\in Y$، وبنابراین، $f(b)\in X\bigcup Y$. از این‌رو، $b\in f^{-۱}(X\bigcup Y)$، و لذا،

$$f^{-۱}(X)\bigcup f^{-۱}(Y)\subseteq f^{-۱}(X\bigcup Y).$$

در اینجا اثبات (۱) تمام است.
قضیهٔ بعدی از همین راه اثبات می‌شود.

۶.۳.۱ قضیه. اگر $f: A \to B$ و اگر $X, Y \subseteq B$، آنگاه
$$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y).$$
به بیان توصیفی، نگارهٔ وارون اشتراک دو مجموعه برابر است با اشتراک نگاره‌های وارون آن دو.

برهان: به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.
دو قضیهٔ قبلی به‌نگاره‌های وارون مربوط است. قضیهٔ بعدی دربارهٔ نگاره‌هاست.

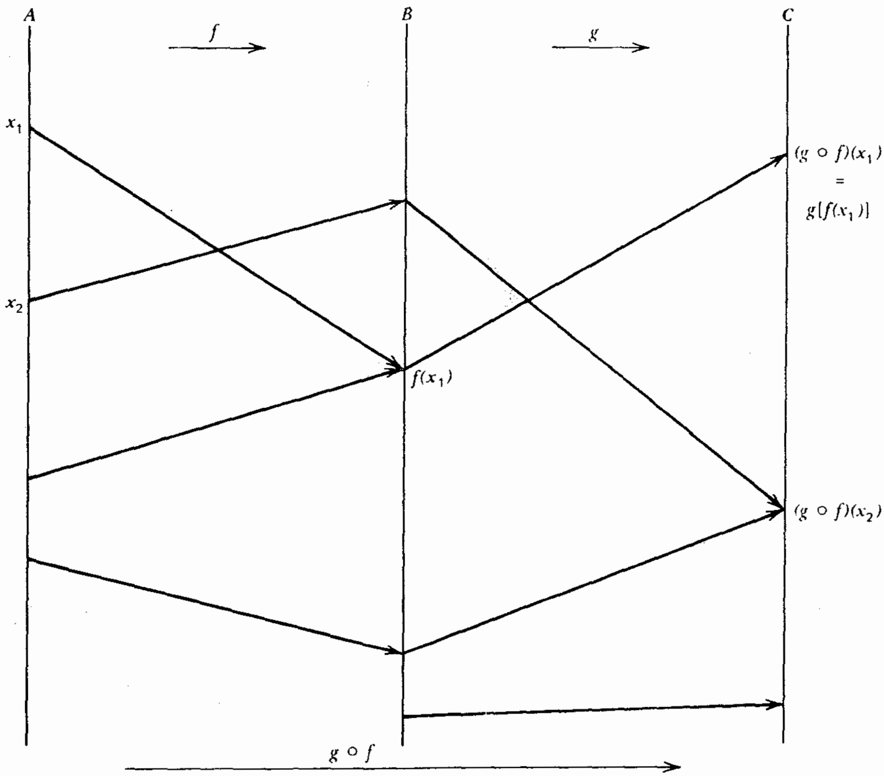
۷.۳.۱ قضیه. اگر $f: A \to B$ و $X, Y \subseteq A$، آنگاه
$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y).$$
به بیان توصیفی، نگارهٔ اجتماع دو مجموعه برابر است با اجتماع نگاره‌های آنها.

برهان: اگر $b \in f(X \cup Y)$، آنگاه aای هست که $a \in X \cup Y$ و $f(a) = b$. پس، یا $a \in X$ یا $a \in Y$. بنابراین، یا $b \in f(X)$ یا $b \in f(Y)$. پس، $b \in f(X) \cup f(Y)$، وازاین‌رو، $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$. برعکس، اگر $c \in f(X) \cup f(Y)$، آنگاه یا $c \in f(X)$ یا $c \in f(Y)$. بنابراین، c نگارهٔ نقطه‌ای در X یا نگارهٔ نقطه‌ای در Y است. پس، درهرحالت c نگارهٔ نقطه‌ای در $X \cup Y$ است، یعنی، $c \in f(X \cup Y)$. بنابراین، $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$ و اثبات قضیه تمام است.

۸.۳.۱ توجه. رابطهٔ زیر آشکارا در لیست قضایا نیامده است
$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) \qquad (X, Y \subseteq A).$$
ثابت کنید که رابطهٔ فوق لزوماً برقرار نیست.

۹.۳.۱ تعریف (ترکیب توابع). اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$، آنگاه تابع $g \circ f$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم
$$g \circ f(x) = g[f(x)] \qquad (x \in A).$$
یعنی، نگارهٔ x تحت $g \circ f$ برابر است با نگارهٔ $f(x)$ تحت g. تابع $g \circ f$ ترکیب f با g نامیده‌می‌شود. [بعضی، به‌جای $g \circ f$ می‌نویسند $g(f)$.] بنابراین، $g \circ f : A \to C$.

مثال: اگر f و g با ضوابط زیر تعریف شوند
$$f(x) = ۱ + \sin x \quad (-\infty < x < \infty), \qquad g(x) = x^{۲} \quad (۰ \leqslant x < \infty),$$
آنگاه
$$g \circ f(x) = ۱ + ۲\sin x + \sin^{۲} x \qquad (-\infty < x < \infty).$$



شکل ۸ نمودار $g \circ f$.

شکل ۸ را ببینید. توجه کنید که حوزهٔ مقادیر f باید زیرمجموعهٔ حوزهٔ تعریف g باشد، اما لازم نیست که با آن برابر باشد.

تمرینهای ۳.۱

۱. تابع را نوعی مجموعه تعریف کردیم. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای آنکه دو تابع f و g (به‌عنوان مجموعه) باهم مساوی باشند آن است که f و g یك حوزهٔ تعریف A داشته باشند و

$$f(x)=g(x) \qquad (x \in A).$$

به عبارت دیگر، شرط لازم و کافی برای آنکه $f=g$ آن است که به مفهوم توابع، f «همواره برابر با g» باشد.

۲. تابع $f: X \to Y$ مفروض است. اگر $A, B \subseteq X$، نشان دهید که

$\cdot f(A)-f(B)\subseteq f(A-B)$

۳. فرض کنیم

$$f(x)=\log x \qquad (0<x<\infty).$$

(الف) حوزهٔ مقادیر f را تعیین کنید.

(ب) اگر $A=[0,1]$ و $B=[1,2]$، آنگاه $f^{-1}(A)$، $f^{-1}(B)$، $f^{-1}(A\bigcup B)$، $f^{-1}(A\bigcap B)$، $f^{-1}(A)\bigcup f^{-1}(B)$، و $f^{-1}(A)\bigcap f^{-1}(B)$ را پیدا کنید. آیا نتایج شما با بندهای ۵.۳.۱ و ۶.۳.۱ مطابقت دارد؟

۴. تابع سینوس با ضابطهٔ زیر تعریف شده است

$$f(x)=\sin x \qquad (-\infty<x<\infty).$$

(الف) نگارهٔ $\pi/2$ تحت f چیست؟

(ب) $f^{-1}(1)$ را به‌دست آورید.

(ج) $f([0,\pi/2])$، $f([\pi/6,\pi/2])$، و $f([0,\pi/6])$ را پیدا کنید.

(د) با استفاده از بند ۷.۳.۱، نتیجهٔ (ج) را تعبیر کنید.

(هـ) اگر $A=[0,\pi/6]$ و $B=[5\pi/6,\pi]$، آیا $f(A\bigcap B)=f(A)\bigcap f(B)$؟

۵. تابع f با ضابطهٔ زیر تعریف شده است

$$f(x)=\tan x \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(الف) حوزهٔ تعریف f را تعیین کنید.

(ب) حوزهٔ مقادیر f را به‌دست آورید.

(ج) فرض کنید $A=(-\pi/2,\ -\pi/4)$ و $B=(\pi/4,\ \pi/2)$. آیا $f(A\bigcap B)=f(A)\bigcap f(B)$؟

۶. آیا می‌توانید تعبیری هندسی برای حاصلضربهای دکارتی زیر ارائه دهید؟

(الف) یك پاره‌خط و یك مثلث.

(ب) یك دایرهٔ بزرگ و یك دایرهٔ کوچك.

۷. فرض کنید $A=(-\infty,\infty)$ و B یك صفحه باشد. فرض کنید تابع $f:A\to B$ با ضابطهٔ زیر تعریف شده باشد

$$f(x)=\langle\cos x,\ \sin x\rangle \qquad (-\infty<x<\infty).$$

(الف) حوزهٔ تعریف f چیست؟

(ب) $f^{-1}(\langle 0,1\rangle)$ را به‌دست آورید.

۸. فرض کنید $A=B=(-\infty,\infty)$. کدام یك از توابع زیر A را به‌روی B می‌نگارند.

(الف) $f(x)=3 \qquad (-\infty<x<\infty)$,

(ب) $f(x)=[x] \qquad (-\infty<x<\infty)$,

($[x]$ یعنی بزرگترین عدد صحیحی که از x بیشتر نیست.)

(ج) $f(x)=x^6+7x+1 \qquad (-\infty<x<\infty)$,

(د) $f(x)=e^x \qquad (-\infty<x<\infty)$,

(ه) $f(x)=\sinh x \qquad (-\infty<x<\infty)$,

۹. فرض کنید $A=\{1, 2, \dots, n\}$ و $B=\{0, 1\}$. چند تابع وجود دارد که A را به‌توی B می‌نگارد؟ چه‌تعداد از این توابع A را به‌روی B می‌نگارند؟

۱۰. اگر

$$f(x)=\arcsin x \quad (-1<x<1), \qquad g(x)=\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

و $h=g\circ f$، آنگاه فرمول ساده‌ای برای h بنویسید. حوزهٔ تعریف و حوزهٔ مقادیر h چه هستند؟

۱۱. فرض کنید I مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشند، یعنی، $I=\{1, 2, 3, \dots\}$. اگر

$$f(n)=n+7 \quad (n\in I), \qquad g(n)=2n \quad (n\in I),$$

حوزهٔ مقادیر $g\circ f$ چیست؟ حوزهٔ مقادیر $f\circ g$ چیست؟

۱۲. اگر $f: A\to B$، $g: B\to C$، $h: C\to D$، ثابت کنید که $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

۱۳. برای کدام‌یك از جفتهای توابع f و g در زیر، g یك توسیع f است؟

(الف)
$$\begin{cases} f(x)=x & (0\leqslant x<\infty), \\ g(x)=|x| & (-\infty<x<\infty). \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} f(x)=1 & (-1\leqslant x\leqslant 1), \\ g(x)=1 & (0\leqslant x<\infty). \end{cases}$$

(ج)
$$\begin{cases} f(x)=\sin x & (0\leqslant x\leqslant 2\pi), \\ g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x} & (-\infty<x<\infty). \end{cases}$$

۴.۱ توابع حقیقی

۱.۴.۱. در فصول بعد غالباً حوزه‌های مقادیر توابع موردبحث زیرمجموعه‌هایی از

همهٔ اعداد حقیقی اند. (از این پس، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی را با R نشان می‌دهیم.) اگر $f:A\to R$، آنگاه f را تابع حقیقی خوانیم. اگر $x\in A$، آنگاه $f(x)$ (که از این به‌بعد، نگارهٔ x تحت f خوانده می‌شود) مقدار f در x نیز نامیده می‌شود.
حال، به‌تعریف‌مجموع، تفاضل، حاصلضرب، وخارج‌قسمت توابع‌حقیقی‌می‌پردازیم.

۲.۴.۱ تعریف. اگر $f:A\to R$ و $g:A\to R$، آنگاه $f+g$ را تابعی تعریف می‌کنیم که مقدارش در $x\in A$ برابر $f(x)+g(x)$ است. یعنی،

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\qquad (x\in A).$$

یا با نماد مجموعه

$$f+g=\{\langle x, f(x)+g(x)\rangle : x\in A\}.$$

بدیهی است که $f+g:A\to R$.
به‌همین ترتیب، $f-g$ و fg را با ضوابط زیر تعریف می‌کنیم

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\qquad (x\in A),$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x)\qquad (x\in A).$$

سرانجام، اگر برای هر x در A، $g(x)\neq 0$، آنگاه f/g راچنین تعریف‌می‌کنیم

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\qquad (x\in A).$$

مجموع، تفاضل، حاصلضرب، و خارج‌قسمت دو تابع حقیقی با حوزهٔ تعریف‌مشترك بازهم توابع حقیقی هستند. آنچه که ما را مجاز به‌تعریف مجموع دو تابع حقیقی می‌سازد این‌حقیقت است‌که جمع دراعداد حقیقی تعریف شده‌است. به‌طور کلی، اگر $f:A\to B$ و $g:A\to B$، راهی برای تعریف $f+g$ وجود ندارد مگرآنکه یك عمل «جمع» در B وجود داشته باشد.

۳.۴.۱ تعریف. اگر $f:A\to B$ و c عددی حقیقی باشد، تابع cf با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$(cf)(x)=c[f(x)]\qquad (x\in A).$$

بنابراین، مقدار تابع $3f$ در x عبارت است از ۳ برابر مقدار f در x.

۴.۴.۱ برای دوعدد حقیقی a و b فرض‌می‌کنیم $\max(a, b)$ نمایش عددبزرگتر و $\min(a,b)$ نمایش عددکوچکتر بین a و b باشد. [اگر $a=b$، آنگاه $\max(a, b)=\min(a, b)=a=b$.] ازاین‌رو، می‌توانیم برای توابع حقیقی f و g، $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$ را تعریف‌کنیم.

تعریف. اگر $f:A\to R$، $g:A\to R$، آنگاه $\max(f,g)$ تابعی است که با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\max(f,g)(x)=\max[f(x),g(x)] \qquad (x\in A).$$

و $\min(f,g)$ تابعی است که با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\min(f,g)(x)=\min[f(x),g(x)] \qquad (x\in A).$$

مثلاً، اگر

$$f(x)=\sin x \quad \left(\circ\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}\right), \qquad g(x)=\cos x \quad \left(\circ\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}\right),$$

و $h=\max(f,g)$، آنگاه

$$h(x)=\begin{cases}\cos x & \left(\circ\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۴}\right),\\ \sin x & \left(\frac{\pi}{۴}<x\leqslant\frac{\pi}{۲}\right).\end{cases}$$

تعریف. اگر $f:A\to R$، آنگاه $|f|$ تابعی است که با ضابطهٔ زیر تعریف‌می‌شود

$$|f|(x)=|f(x)| \qquad (x\in A).$$

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آنگاه درستی فرمولهای زیر به سادگی تحقیق می‌شود: (ثابت کنید.)

$$\max(a,b)=\frac{|a-b|+a+b}{۲}, \qquad \min(a,b)=\frac{-|a-b|+a+b}{۲}.$$

از این، برای توابع حقیقی f و g فرمولهای زیر نتیجه می‌شوند

$$\max(f,g)=\frac{|f-g|+f+g}{۲}, \quad \min(f,g)=\frac{-|f-g|+f+g}{۲}.$$

۵.۴.۱ در این بند مجموعه‌هایی را درنظر می‌گیریم که همهٔ آنها زیرمجموعهٔ یك مجموعهٔ «بزرگ» مانند S هستند. اگر $A\subseteq S$، آنگاه $A'=S-A$ (بند ۷.۲.۱ را ببینید). برای هر $A\subseteq S$ تابع χ_A را در زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف. اگر $A\subseteq S$، آنگاه χ_A (که تابع مشخصهٔ A نامیده می‌شود) با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A),\\ 0 & (x\in A').\end{cases}$$

دلیل نامگذاری «تابع مشخصه» بدیهی است ـ مجموعهٔ A بـه وسیلهٔ χ_A مشخص (کاملا بیان) می‌شود. یعنی، $A=B$ اگر وتنها اگر $\chi_A=\chi_B$. برخواننده است که معادلات مفید زیر دربارهٔ تابع مشخصه را بررسی کند، در این معادلات A و B زیرمجموعه‌های S هستند

$$\chi_{A\cup B}=\max(\chi_A,\chi_B), \tag{1}$$

$$\chi_{A\cap B}=\min(\chi_A,\chi_B)=\chi_A\chi_B,$$

$$\chi_{A-B}=\chi_A-\chi_B \qquad (B\subseteq A \text{ به‌شرط آنکه}),$$

$$\chi_{A'}=1-\chi_A,^{*}$$

$$\chi_S=1,$$

$$\chi_\phi=0.^{**}$$

برای نمونه (۱) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $x\in A\bigcup B$. پس، $\chi_{A\cup B}(x)=1$. اما، یا $x\in A$ یا $x\in B$ (یا عنصر هردو است)، و درنتیجه یا $\chi_A(x)=1$ یا $\chi_B(x)=1$. پس، $\max(\chi_A,\chi_B)(x)=1$. بنابراین،

$$1=\chi_{A\cup B}(x)=\max(\chi_A,\chi_B)(x) \qquad (x\in A\bigcup B). \tag{2}$$

اگر $x\notin A\bigcup B$، آنگاه $\chi_{A\cup B}(x)=0$. امـا بنابر (۱) از بند ۱.۲.۸، $x\in A'\bigcap B'$ و درنتیجه $x\in A'$ و $x\in B'$ پس $\chi_B(x)=0=\chi_A(x)$. بنابراین، $\max(\chi_B,\chi_B)(x)=0$. پس

$$0=\chi_{A\cup B}(x)=\max(\chi_A,\chi_B)(x) \qquad (x\notin A\bigcup B). \tag{3}$$

حال، رابطهٔ (۱) از (۲) و (۳) به‌دست می‌آید.

---

* در اینجا، ۱ نمایش تابعی حقیقی است که مقدارش برای هرعنصر S مانند x برابر ۱ است (به‌عبارت دیگر، دراینجا، ۱ عبارت‌است از «تابع همواره ۱»). درنتیجه نماد ۱ دومعنی‌مختلف دارد ـ یکی به‌عنوان یك‌عدد، و دیگری به‌عنوان یك‌تابع. خواننده قادرخواهد بود ازمحتوای مطلب معنی مناسب را دریابد.

** ۰ تابع همواره ۰ را نشان می‌دهد.

تمرینهای ۴.۱

۱. فرض کنید

$$f(x)=2x \qquad (-\infty<x<\infty).$$

آیا می‌توانید دو تابع g و h بیابید که در دو معادلهٔ زیر صدق کنند؟

$$g\circ f=2gh, \qquad h\circ f=h^2-g^2.$$

۲. اگر $f(x)=x^2$ $(-\infty<x<\infty)$ و χ تابع مشخصهٔ $[0,9]$ باشد، آنگاه $\chi\circ f$ تابع مشخصهٔ کدام زیرمجموعهٔ R است؟

۳. اگر $f:A\to B$ و χ_E تابع مشخصهٔ $E\subseteq B$ باشد، آنگاه $\chi_E\circ f$ تابع مشخصهٔ کدام زیرمجموعهٔ A است؟

۴. با معلوماتی که از پیوستگی دارید به این سؤال و سؤال بعدی پاسخ دهید.
آیا تابع مشخصه‌ای در R وجود دارد که پیوسته باشد؟
آیا سه تابع با این ویژگی وجود دارد؟

۵. نمودار دو تابع پیوسته را که یك حوزهٔ تعریف دارند ترسیم کنید. آیا حدس می‌زنید که $\max(f,g)$ و $\min(f,g)$ پیوسته باشند؟

۵.۱ هم‌ارزی؛ شمارایی

برطبق تعریف تابع، اگر $f:A\to B$، آنگاه هر عنصر A مانند a دقیقاً یك نگارهٔ $f(a)\in B$ دارد. اما، غالباً حالتی پیش می‌آید که عنصری از حوزهٔ مقادیر f مانند b نگارهٔ چند عنصر A است. مثلاً، اگر

$$f(x)=x^2 \qquad (-\infty x<\infty),$$

آنگاه عدد ۴ نگارهٔ ۲ و ۲ــ است. در این قسمت بحث ما در مورد توابعی مانند f است که هرعنصر حوزهٔ مقادیر f مانند b دقیقاً نگارهٔ یك عنصر حوزهٔ تعریف f مانند a است.

۱.۵.۱ تعریف. اگر $f:A\to B$، آنگاه f را یك به یك (یا ۱ــ۱) خوانیم اگر برای هردو عنصر A، مانند a_1 و a_2، اگر $f(a_1)=f(a_2)$، آنگاه $a_1=a_2$.

بنابراین، اگر f تابعی ۱ــ۱ باشد و $b=f(a_1)$، آنگاه $b\neq f(a_2)$ به‌ازای هر a_2 از A که $a_2\neq a_1$. پس، تابع f در $(-\infty,\infty)$ با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ یك به یك نیست اما تابع g در $[0,\infty)$ با ضابطهٔ $g(x)=x^2$ یك به یك است.

به بیانی دیگر، f را یك به یك خوانیم اگر برای هر b از حوزهٔ مقادیر f، مجموعهٔ $f^{-1}(b)$ فقط شامل یك عنصر باشد. در این حالت، f^{-1} خود یك تابع است. به عبارت دقیقتر:

۲.۵.۱. تعریف. اگـر $f: A \to B$ و f تابعی ۱ـ۱ بـاشد، آنگاه f^{-1} (موسوم به تابع وارون f) چنین تعریف می‌شود:

(۱) برای هر b از حوزهٔ مقادیر f، اگر $f(a)=b$، آنگاه $f^{-1}(b)=a$.

درنتیجه، حوزهٔ تعریف f^{-1} عبارت است از حـوزهٔ مقادیـر f و حوزهٔ مقادیـر f^{-1} عبارت است از A (حوزهٔ تعریف f). تعریف تابع f^{-1} با تعریف نگارهٔ وارون کـه در ۳.۳.۱ آمد سازگار است. زیرا اگـر f تابعی ۱ـ۱ باشد و $b=f(a)$، آنگاه نگارهٔ وارون $\{b\}$ برابر $\{a\}$ است. یعنی، $f^{-1}(\{b\})=\{a\}$. اگر ابروهـا را حذف کنیم (۱) به‌دست می‌آید.

مثلا، اگر

$$g(x)=x^{2} \qquad (0 \leqslant x < \infty),$$

آنگاه

$$g^{-1}(x)=\sqrt{x} \qquad (0 \leqslant x < \infty).$$

زیرا، اگر $b=g(a)=a^{2}$، آنگاه $a=\sqrt{b}=g^{-1}(b)$. همچنین، اگر

$$h(x)=e^{x} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

آنگاه

$$h^{-1}(x)=\log x \qquad (0 < x < \infty),$$

زیرا، اگر $b=h(a)=e^{a}$، آنگاه $a=\log b=h^{-1}(b)$.

از تعریف تابع وارون نتیجه می‌شود که

$$f^{-1}[f(a)]=a \qquad (a \in A),$$
$$f[f^{-1}(b)]=b \qquad (b \in \text{حوزهٔ مقادیر } f)$$

۳.۵.۱. تابعی که هم ۱ـ۱ و هم به‌روی باشد اسم به‌خصوصی دارد:

تعریف. اگـر $f: A \Rightarrow B$ و f تابعی ۱ـ۱ باشد، آنگاه f یك تناظر یك‌بـه‌یك (بین A و B) نامیده می‌شود. اگـر تناظری ۱ـ۱ بین A و B برقرار باشد، A و B را هم‌ارز می‌نامیم.

مثلا، هردو مجموعه که هر کدام دقیقاً هفت عنصر داشته باشند، هم‌ارزند.

برای خواننده اثبات مطالب زیر مشکل نخواهد بود:

۱. هرمجموعهٔ A با خودش هم‌ارز است.
۲. اگر A با B هم‌ارز باشد، آنگاه B با A هم‌ارز است.
۳. اگر A با B هم‌ارز و B با C هم‌ارز باشد، آنگاه A با C هم‌ارز است.

به زودی خواهیم دید که مجموعهٔ اعداد صحیح با مجموعهٔ اعدادگویا هم‌ارز است، اما مجموعهٔ اعـداد صحیح بـا مجموعهٔ اعـداد حقیقی هم‌ارز نیست. ابتدا کمی دربارهٔ

«مجموعه‌های نامتناهی» صحبت می‌کنیم.

۴.۵.۱. تعریف. مجموعهٔ A را نامتناهی خوانیم. اگر برای هرعدد صحیح مثبت n، A دارای زیرمجموعه‌ای باشدکه دقیقاً n عنصر دارد.*

مجموعهٔ جمیع اعـداد صحیح مثبت را بـا I نشان می‌دهیم $I=\{۱,۲,۳,\dots\}$. واضح است که I مجموعه‌ای نامتناهی‌است. مجموعهٔ جمیع اعداد حقیقی R نیزمجموعه‌ای نامتناهی‌است. خواننده باید خود را متقاعد سازدکه اگر مجموعه‌ای نامتناهی نباشد، آنگاه دارای n عنصر است، n عددی صحیح و نامنفی است. مجموعه‌ای را کـه نامتناهی نباشد متناهی خوانیم.

خواهیم دیدکه مجموعه‌های نامتناهی همه یك «اندازه» نیستند، بلکه مجموعه‌هـای نامتناهی مختلف، فراوان هستند. کوچکترین اندازهٔ مجموعهٔ نامتناهی را شمارا[۱] می‌نامیم.

۵.۵.۱. تعریف. مجموعهٔ A را شمارا[۱] خوانیم اگر A با I، مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، هم‌ارز باشد. یك مجموعهٔ ناشمارا مجموعه‌ای است نامتناهی که شمارا نباشد.

بنابراین، A مجموعه‌ای‌است شمارا اگر تابعی ۱-۱ مانند f از I به‌روی A وجود داشته باشد. دراین‌صورت عنصرهای A نگاره‌های اعدادصحیح‌مثبت، یعنی $f(۱)$، $f(۲)$، ... هستند، پس

$$A=\{f(۱),\ f(۲),\ \cdots\},$$

که در آن $f(i)$ها دوبه‌دو متمایزند.

در نتیجه، وقتی می‌گوییم A شماراست به‌این معنی است‌که عنصرهای آن‌را می‌توان «شمرد» (و آنها را با برچسبهای ۱، ۲، ... مرتب کرد). معمولا به‌جای $f(۱)$، $f(۲)$ و... می‌نویسیم $a_۱$، $a_۲$، ... .

مثلا، مجموعهٔ همهٔ‌اعدادصحیح شماراست. زیرا بامرتب‌کردن‌اعدادصحیح به‌صورت

$$۰,\ -۱,\ +۱,\ -۲,\ +۲,\ \cdots,$$

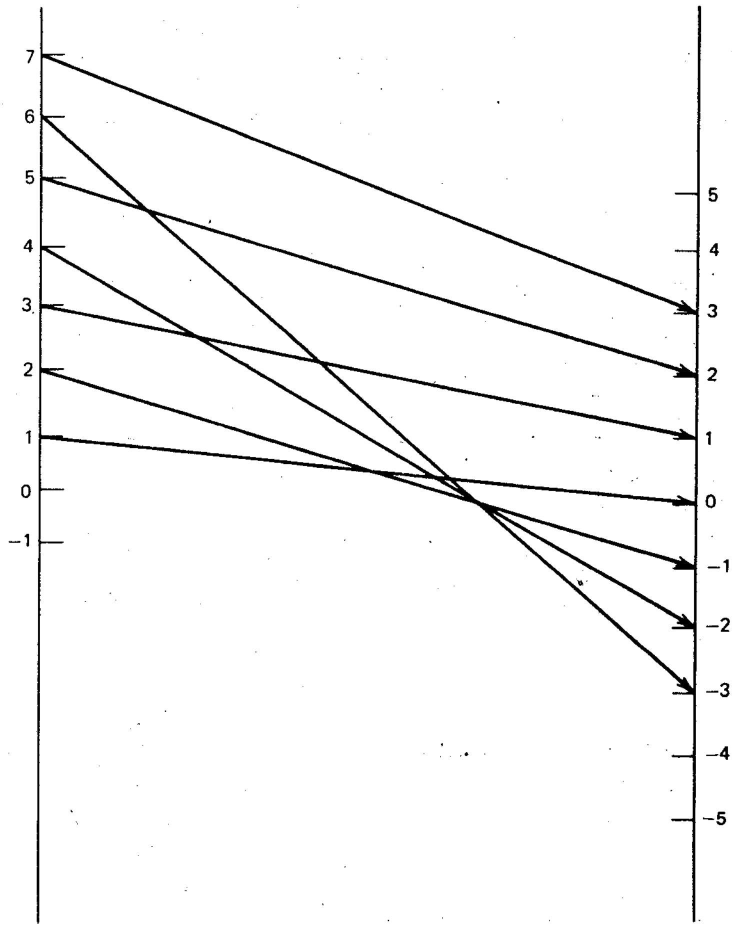
طرحی برای شمردن آنها ارائه می‌دهیم. [جملهٔ آخر مبهم است اما طریقه‌ای است بسیار شهودی برای بیان اینکه تابع f با ضابطهٔ

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n-۱}{۲} & (n=۱,۳,۵,\cdots),\\[2ex] \dfrac{-n}{۲} & (n=۲,۴,۶,\cdots),\end{cases}$$

---

* اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه گزارهٔ «B دارای n عنصر است» به این معنی است‌که B با مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,n\}$ هم‌ارز است».

۱. توجه‌کنید که دربعضی ازکتابها مجموعه‌ای‌را شمارا می‌گویندکه یانامتناهی‌باشد یا با مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت هم‌ارز باشد. ــ م.



شکل ۹ نمودار یک تناظر ۱ـ۱ بین مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت و مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح.

تناظری است ۱ـ۱ بین I و مجموعهٔ جمیع اعداد صحیح. زیرا $f(۱)$، $f(۲)$، ... همان ۰، ۱—، ۱، ۲—، ۲، ... هستند.] شکل ۹ را ببینید.

این مثال نشان می‌دهد که مجموعه ممکن است با یک زیرمجموعهٔ سرهٔ خود هم‌ارز باشد.

با این استدلال دیده می‌شود که اگر A و B شمارا باشند، آنگاه $A\bigcup B$ نیز شمارا است. زیرا می‌توان A و B را به صورتهای $A=\{a_۱, a_۲, \dots\}$ و $B=\{b_۱, b_۲, \dots\}$ بیان کرد. بنابراین،

$$a_۱, b_۱, a_۲, b_۲, a_۳, b_۳, \dots$$

طرحی برای «شمارش» اعضای $A \bigcup B$ است. (البته، باید هر b_i را که عنصر A هم‌هست حذف کنیم تا یك عنصر $A \bigcup B$ دوبار شمرده نشود.)

قضیهٔ زیر نتیجهٔ بسیار قویتری را عرضه می کند.

۶.۵۰۱.قضیه. اگر A_1، A_2، ... مجموعه‌های‌شمارا باشند، آنگاه* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ شمارا است. به‌عبارت دیگر، اجتماع شمارای مجموعه‌های شمارا، شمارا است.

برهان: می نویسیم

$$A_1 = \{a^1_1, a^1_2, a^1_3, \cdots\}، A_2 = \{a^2_1, a^2_2, a^2_3, \cdots\}، \ldots، A_n = \{a^n_1, a^n_2, a^n_3, \cdots\}، \ldots$$

به‌طوری که a^j_k عنصر kام مجموعهٔ A_j است. مجموع $j+k$ را ارتفاع a^j_k تعریف‌می کنیم. پس، a^1_1 تنها عنصر به‌ارتفاع ۲ است؛ a^1_2 و a^2_1 نیز تنها عناصر به‌ارتفاع ۳ هستند؛ وغیره. چون برای هر عدد صحیح مثبت m، $m \geqslant 2$، تنها $m-1$ عنصر به‌ارتفاع m وجود دارد، می‌توانیم عناصر $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ را برحسب ارتفاعشان مرتب کنیم (و بشماریم):

$$a^1_1, a^2_1, a^1_2, a^1_3, a^2_2, a^3_1, a^4_1, \cdots .$$

البته هر a^j_k را که قبلا شمارش شده باشد حذف می کنیم.

برای این کار می‌توانیم اعضای $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ را به‌صورت آرایهٔ زیر بنویسیم و آنهارا درجهتی که پیکانها نشان می‌دهند بشماریم

$$\begin{tikzcd}
a^1_1 \arrow[d] & a^1_2 \arrow[r] & a^1_3 \arrow[dl] & a^1_4 \cdots \\
a^2_1 \arrow[ur] & a^2_2 \arrow[dl] & a^2_3 \arrow[ur] & a^2_4 \cdots \\
a^3_1 \arrow[d] & a^3_2 \arrow[ur] & a^3_3 & a^3_4 \cdots \\
a^4_1 \arrow[ur] & a^4_2 \cdots & & \\
\vdots & \vdots & &
\end{tikzcd}$$

از این راه سرانجام هر a^j_k در شمارش می آید و بدین ترتیب ثابت می‌شود که $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ شمارا است.

---

* قبلا نماد $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ را به‌کار نبرده‌ایم. البته، این به‌معنی مجموعهٔ کلیهٔ عناصری است که لااقل به‌یك A_n تعلق دارند.

از قضیهٔ فوق نتیجهٔ مهم زیر به‌دست می‌آید.

۷.۵.۱. نتیجه. مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا شماراست.

برهان: مجموعهٔ جمیع اعداد گویا اجتماع $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ است که در آن E_n مجموعهٔ اعداد گویا با مخرج n است. یعنی،

$$E_n=\left\{\frac{0}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{-2}{n}, \frac{2}{n}, \dots\right\}.$$

حال، آشکار است که هر E_n با مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت هم‌ارز است و بنابراین شماراست. (چرا؟) لذا، مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا عبارت است از اجتماع شمارای مجموعه‌های شمارا و بنابر ۶.۵.۱ شماراست.

اگر بتوانیم عنصرهای یك مجموعه را بشماریم بدیهی به‌نظر می‌رسد که بتوانیم عنصرهای هر زیرمجموعهٔ آن‌را نیز بشماریم. درقضیهٔ بعدی این‌مطلب را روشن‌می‌سازیم.

۸.۵.۱. قضیه. اگر B زیرمجموعه‌ای نامتناهی از مجموعهٔ شمارای A باشد، آنگاه B شماراست.

برهان: فرض‌کنیم $A=\{a_1, a_2, \dots\}$. چون $B\subseteq A$ پس، عنصر B به صورت a_i است. فرض می‌کنیم n_1 کوچکترین اندیس باشد به‌طوری که $a_{n_1}\in B$، از میان اندیسهای بزرگتر از n_1 فرض‌کنیم n_2 کوچکترین اندیسی باشد که $a_{n_2}\in B$، و به‌همین ترتیب اندیسهای n_3 و... به‌دست می‌آیند. پس $B=\{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots\}$. بنابراین، تمام عنصرهای B به‌وسیلهٔ اعداد ۱، ۲، ۳، ... شماره‌گذاری شده‌اند و لذا B شماراست.

۹.۵.۱. نتیجه. مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای $[0, 1]$ شماراست.

برهان: برهان نتیجهٔ مستقیم ۷.۵.۱ و ۸.۵.۱ است.

تمرینهای ۵.۱

۱. کدام‌یك از ضوابط زیر توابع ۱ـ۱ تعریف می‌کنند؟

(الف) $f(x)=e^x \qquad (-\infty<x<\infty)$,

(ب) $f(x)=e^{x^2} \qquad (-\infty<x<\infty)$,

(ج) $f(x)=\cos x \qquad (0\leqslant x\leqslant \pi)$,

(د) $f(x)=ax+b \qquad (-\infty<x<\infty),\ a, b\in R$.

۲. (الف) اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ و f و g هر دو ۱ـ۱ باشند، آیا $g \circ f$ نیز ۱ـ۱ است؟

(ب) اگر f تابعی ۱ـ۱ نباشد، آیا بازهم امکان دارد که $g \circ f$ تابعی ۱ـ۱ باشد؟

(ج) مثالی بیاورید به طوری که f یک‌به‌یک باشد و g یک‌به‌یک نباشد، اما $g \circ f$ یک‌به‌یک باشد.

۳. فرض کنیم P_n مجموعهٔ توابع چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد،

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

که در آن، n یك عدد صحیح مثبت ثابت است و ضرایب a_0، a_1، ...، a_n اعداد صحیح هستند. ثابت کنید که P_n شماراست. (راهنمایی: اثبات به‌استقرا.)

۴. ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ توابع چندجمله‌ای با ضرایب صحیح شماراست.

۵. ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ توابع چندجمله‌ای با ضرایب گویا شماراست. (راهنمایی: با روشهای به‌کار رفته در دو مسألهٔ قبل می‌توان این مسأله را حل کرد.) به هر حال، این روش را نیز امتحان کنید: هر چندجمله‌ای g با ضرایب گویا را می‌توان به صورت $g = (1/N)f$ نوشت که در آن f یك چندجمله‌ای با ضرایب صحیح و N عدد صحیح مثبت مناسبی است؛ (ثابت کنید.) مجموعهٔ همهٔ gهای متناظر با یك عدد صحیح مفروض N شماراست (بنابر تمرین ۴ همین بخش). بقیهٔ برهان را کامل کنید.

۶. می‌پذیریم که هر بازهٔ باز (ناتهی) (a, b) شامل یك عدد گویاست. با این فرض، ثابت کنید که هر بازهٔ باز (ناتهی) شامل تعدادی نامتناهی (و در نتیجه تعدادی شمارا) عدد گویاست.

۷. نشان دهید که بازه‌های $(0, 1)$ و $[0, 1]$ هم‌ارز هستند. (راهنمایی: اعداد گویا و اعداد گنگ بازه‌ها را جداگانه بررسی کنید.)

۸. ثابت کنید که هر مجموعهٔ نامتناهی زیرمجموعه‌ای شمارا دارد.

۹. اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد و $x \in A$، ثابت کنید که A و $A - \{x\}$ هم‌ارز هستند. (این مطلب نشان می‌دهد که هر مجموعهٔ نامتناهی با یك زیرمجموعهٔ سرهٔ خودهم‌ارز است. ویژگی اخیر غالباً به‌عنوان تعریف مجموعه‌های نامتناهی به‌کار می‌رود.)

۱۰. ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ جفتهای مرتب اعداد صحیح شماراست.

۱۱. اگر A و B مجموعه‌های شمارا باشند، ثابت کنید که $A \times B$، حاصلضرب دکارتی آنها، شماراست.

۱۲. ثابت کنید که خانوادهٔ جمیع زیرمجموعه‌های متناهی یك مجموعهٔ شمارا نیز شماراست.

۱۳. (الف) اگر f تابعی ۱ـ۱ از A به‌روی B باشد، نشان دهید که

$$f^{-1} \circ f(x) = x \qquad (x \in A), \qquad\qquad f \circ f^{-1}(y) = y \qquad (y \in B),$$

(ب) اگر $g: C \to A$ و $h = f \circ g$، ثابت کنید که $g = f^{-1} \circ h$.

۶.۱ اعداد حقیقی

ایـن بخش خارج از ترتیب منطقی کتاب است. در اینجا عباراتـی نظیر «بسط دهدهی»، «بسط دودویی»، و غیره را تعریف نخواهیم کـرد؛ بلکه، بر تجربه و شهود خواننده متکی می‌شویم. این اصطلاحات و مفروضات مربوط بدانها در فصل ۳ به‌طور دقیق مورد بحث واقع می‌شوند. تا آنجا کـه به روند منطقی کتاب مربوط می‌شود، از این بخش می‌توان صرفنظر کرد. اما درارتباط با مثالها و فهمیدن‌مطالب، قطعاً این‌بخش را نبایدنادیده‌گرفت.

تاکنون مثالی از یك مجموعهٔ نامتناهی کـه شمارا نباشد ارائه نکرده‌ایـم. بزودی خواهیم دیدکه R (مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی) نامتناهی ناشمارا است.

قبول خواهیم کرد که هر عدد حقیقی x را می‌توان به‌صورت بسط دهدهی نوشت:

$$x=b/a_۱a_۲a_۳\dots=b+\frac{a_۱}{۱۰}+\frac{a_۲}{۱۰^۲}+\frac{a_۳}{۱۰^۳}+\dots,$$

که در آن a_iها اعداد صحیحی هستند و $۰\leqslant a_i\leqslant ۹$. ایـن بسط یکتاست مگر درحالاتی نظیر $x=۱/۲$ که دو بسط دهدهی دارند:

$$\frac{۱}{۲}=۰/۵۰۰۰۰۰۰\dots \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۲}=۰/۴۹۹۹۹\dots .$$

پس هرعدد $x\in[۰,۱]$، را می‌توان بـه‌صورت $x=۰/a_۱a_۲a_۳\dots$، بسط داد. برعکس، قبول می‌کنیم کـه هر کسر دهدهی به صورت $b/a_۱a_۲a_۳\dots$ بسط دهدهی یك عدد حقیقی است. (چون عدد حقیقی را تعریف نکرده‌ایم، این‌روابط بین بسط دهدهی و اعدادحقیقی را بـه‌عنوان مفروضات می‌پذیریم. اما، بـه‌زودی نشان خواهیم دادکـه اینها نتایج اصل اساسیتر ۴.۷.۱ هستند.)

۱.۶.۱ قضیه. مجموعهٔ $\{x:۰\leqslant x\leqslant ۱\}=[۰,۱]$ ناشمارا است.

برهان: فرض کنیم $[۰,۱]$ شمارا باشد. آنگاه $\{x_۱,x_۲,\dots\}=[۰,۱]$ به‌طوری که هر عدد مجموعهٔ $[۰,۱]$ یکی از x_iهاست. اگـر هر x_i را به صورت دهدهی بسط دهیم داریم

$$x_۱=۰/a_۱^۱a_۲^۱a_۳^۱\dots$$

$$x_۲=۰/a_۱^۲a_۲^۲a_۳^۲\dots$$

$$\vdots$$

$$x_n=۰/a_۱^na_۲^na_۳^n\dots$$

$$\vdots$$

فرض کنیم $b_۱$ عددی صحیح از ۱ تا ۸ باشد به‌گونه‌ای که $b_۱\neq a_۱^۱$. سپس، فرض‌می‌کنیم

b_2 عددی صحیح از ۱ تا ۸ باشد که $b_2 \neq a_2^2$. به‌طور کلی، به‌ازای هر n، $n = 1, 2, \ldots$، فرض می‌کنیم b_n عددی صحیح از ۱ تا ۸ باشد به‌گونه‌ای که $b_n \neq a_n^n$. اگر $y = 0/b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$، آنگاه به‌ازای هر n، بسط دهدهی x_n با y متفاوت است زیرا $b_n \neq a_n^n$. به‌علاوه، بسط دهدهی y یکتاست زیرا هیچیك از b_nها مساوی ۰ یا ۹ نیست. بنابراین، برای هر n، $y \neq x_n$ و $0 \leqslant y \leqslant 1$، و این با فرض اینکه هرعنصر $[0, 1]$ یکی از x_iهاست، متناقض است. با کشف این تناقض قضیه ثابت می‌شود.

۲.۶.۱ نتیجه. R، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی ناشماراست.

برهان: اگر R شمارا باشد، آنگاه بنا بر ۸.۵.۱، $[0, 1]$ نیز شماراست و این با ۱.۶.۱ متناقض است. بنابراین، R ناشماراست.

اینك اثبات دیگری برای ۲.۶.۱، ارائه می‌دهیم. فرض کنیم R شمارا باشد، مثلاً، $R = \{x_1, x_2, \ldots\}$. فرض کنیم

$$I_2 = \left(x_2 - \frac{1}{8}, x_2 + \frac{1}{8}\right) \quad \text{و} \quad I_1 = \left(x_1 - \frac{1}{4}, x_1 + \frac{1}{4}\right)$$

به‌طور کلی، برای‌هر $n \in I$، فرض می‌کنیم I_n بازهٔ $I_n = (x_n - 2^{-n-1}, x_n + 2^{-n-1})$ باشد. طول بازهٔ I_n برابر 2^{-n} است پس، مجموع طول همهٔ I_nها برابر است با

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots = 1 .$$

اما هر $x_n \in I_n$، پس $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$، و خط نمایش اعداد حقیقی (که طولش بینهایت است) با اجتماع بازه‌هایی که مجموع طولشان ۱ است پوشیده می‌شود. این یك تناقض است. آیا چنین نیست؟

۳.۶.۱ علاوه بر بسط دهدهی، به بسطهای دودویی و سه‌سه‌یی اعداد حقیقی نیاز خواهیم داشت.

در بسط دودویی یك عدد حقیقی x فقط ارقام ۰ و ۱ به‌کار می‌روند. مثلاً، $0/a_1 a_2 a_3 \ldots$ به‌معنای $a_1/2 + a_2/2^2 + a_3/2^3 + \ldots$ است به‌طوری که

$$\frac{1}{2} = 0/10000\ldots \quad (2),$$

$$\frac{1}{4} = 0/01000\ldots \quad (2),$$

$$\frac{1}{16} = 0/00010\ldots \quad (2),$$

$$\frac{13}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 0/1101000\ldots \quad (2),$$

که در آن (۲) معرف بسط دودویی است.

به همین ترتیب، در بسط سه‌سه‌یی عدد حقیقی x ارقام ۰، ۱، ۲ بـه کار می‌روند. بنا براین

$$x = \text{۰٫}b_{\text{۱}}b_{\text{۲}}b_{\text{۳}}\cdots \qquad (\text{۳})$$

به‌معنی $x = b_{\text{۱}}/\text{۳} + b_{\text{۲}}/\text{۳}^{\text{۲}} + b_{\text{۳}}/\text{۳}^{\text{۳}} + \cdots$ است. مثلاً،

$$\frac{\text{۱}}{\text{۳}} = \text{۰٫۱۰۰۰}\cdots \qquad (\text{۳}),$$

$$\frac{\text{۱}}{\text{۳}} = \text{۰٫۰۲۲۲}\cdots \qquad (\text{۳}),$$

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}} = \text{۰٫۱۱۱۱۱۱}\cdots \qquad (\text{۳}),$$

$$\frac{\text{۵}}{\text{۶}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}} = \text{۰٫۲۱۱۱۱}\cdots \qquad (\text{۳}).$$

بسط سه‌سه‌یی عدد حقیقی x یکتاست مگر برای اعدادی نظیر ۱/۳ کـه دارای دو بسط هستند. یکی به‌دنبالهٔ ۲ها ختم می‌شود و دیگری به‌دنبالهٔ ۰ها.

۴۰۶۰۱ مجموعهٔ زیر به‌عنوان یك مثال مفید بعداً به‌کار می‌آید.

تعریف. **مجموعهٔ کانتور[1] که آن‌را به K نشان می‌دهیم مجموعهٔ همهٔ xهای متعلق به $[\text{۰}, \text{۱}]$** است که در بسط سه‌سه‌یی آنها رقم ۱ وجود ندارد.

مثلاً، اعداد $\text{۰٫۰۲۲۲}\cdots (\text{۳}) = \text{۱}/\text{۳}$ و $\text{۲}/\text{۳} = \text{۰٫۲۰۰۰۰}\cdots (\text{۳})$ عضو K هستند، ولی هرعدد x کـه در $\text{۱}/\text{۳} < x < \text{۲}/\text{۳}$ صدق کند عضو K نیست. [زیـرا آن‌را فقط به‌صورت $x = \text{۰٫۱}b_{\text{۲}}b_{\text{۳}}\cdots (\text{۳})$ می‌توان بسط داد.]

برای هر عنصر K مانند $x = \text{۰٫}b_{\text{۱}}b_{\text{۲}}b_{\text{۳}}\cdots (\text{۳})$ (که در آن b_iها ۰ یا ۲ هستند)، فرض می‌کنیم $f(x) = y = \text{۰٫}a_{\text{۱}}a_{\text{۲}}a_{\text{۳}}\cdots (\text{۲})$ به طوری کـه $a_i = b_i/\text{۲}$. مثلاً، اگـر $x = \text{۱}/\text{۳} = \text{۰٫۰۲۲۲}\cdots (\text{۳})$، آنگاه $f(x) = y = \text{۰٫۰۱۱۱}\cdots (\text{۲}) = \text{۱}/\text{۲}$. بنا براین، $\text{۰} \leqslant y \leqslant \text{۱}$، و f تابعی است از K به‌توی $[\text{۰}, \text{۱}]$. در واقع، به‌آسانی می‌توان دید که f تابعی است از K به‌روی $[\text{۰}, \text{۱}]$، و بی‌درنگ نتیجه می‌شود که K شمارا نیست. (تمرین ۱ بخش ۶۰۱ را ببینید.)

ازطرف‌دیگر، قبلا دیدیم که $(\text{۱}/\text{۳}, \text{۲}/\text{۳}) \subseteq K' = [\text{۰}, \text{۱}] - K$. به‌همین‌ترتیب، بـازهٔ $I_{\text{۱}} = (\text{۱}/\text{۹}, \text{۲}/\text{۹})$ (کـه بـازهٔ بـاز ثلث میـانـی $[\text{۰}, \text{۱}/\text{۳}]$ است) و بـازهٔ

---

1. Cantor

$I_2 = (7/9, 8/9)$ (که بازهٔ باز ثلث میانی $[2/3, 1]$ است) زیرمجموعه‌های K' هستند. زیرا رقم دوم در بسط سه‌سه‌یی هرعدد I_1 یا I_2 برابر ۱ است. درنتیجه مجموعهٔ کانتور K را به‌روش زیر می‌توان به‌دست آورد.

۱. از $[0, 1]$ بازهٔ باز ثلث میانی‌آن‌را حذف می‌کنیم و $[0, 1/3]$ و $[2/3, 1]$ را باقی می‌گذاریم.

۲. در هر یك از $[0, 1/3]$ و $[2/3, 1]$ بازهٔ باز ثلث میانی را حذف می‌کنیم و $[0, 1/9]$، $[2/9, 3/9]$، $[6/9, 7/9]$، و $[8/9, 9/9]$ را باقی می‌گذاریم.

۳. به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم، یعنی درمرحلهٔ nام ازهریك از 2^{n-1} بازه به‌طول 3^{-n+1}، بازهٔ باز ثلث میانی آنها را حذف می‌کنیم. درنتیجه در مرحلهٔ nام مجموع طول بازه‌های حذف شده عبارت است از $2^{n-1} \times 1/3 \times 3^{-n+1} = 2^{n-1}/3^n$. بنابراین، در این مرحله، 2^n بازهٔ بسته هرکدام به‌طول 3^{-n} باقی می‌ماند. ضمناً، در این مرحلهٔ nام اعداد حذف‌شده آنهایی هستند که در بسط سه‌سه‌یی‌شان رقم nام ۱ است.

روشن است که پس از ادامهٔ این مراحل به‌طور نامحدود آنچه که از $[0, 1]$ باقی می‌ماند دقیقاً همان مجموعهٔ K است. توجه‌کنیدکه مجموع طول بازه‌های K' برابر است با $1/3 + 2 \cdot (1/9) + \ldots + 2^{n-1}/3^n + \ldots = 1$. بنابراین، $K \subseteq [0, 1]$ و K متمم اجتماع بازه‌های بازی است‌که مجموع طول آنها برابر ۱ است. (پس به‌نظرمی‌رسد که K «کوچك» باشد و حال آنکه ناشمارا بودن K آن‌را «بزرگ» جلوه می‌دهد. این است دلیل جالب بودن K.)

۱۰۶۰۵۰. دیدیم که R «بزرگتر» از مجموعهٔ I است به‌این مفهوم که I با زیرمجموعه‌ای از R هم‌ارز است. اما I با خود R هم‌ارز نیست. طبیعی است که بپرسیم آیا مجموعه‌ای «بزرگتر» از R وجود دارد؟ حال، نشان خواهیم دادکه ردهٔ کلیهٔ زیرمجموعه‌های R که آن‌را S می‌نامیم «بزرگتر» از R است.

اعضای S عبارت‌اند از زیرمجموعه‌های R ــ یعنی، $A \in S$ اگر وتنها اگر $A \subseteq R$. به‌خصوص، اگر $r \in R$ آنگاه $\{r\} \in S$ و درنتیجه S شامل ردهٔ $\{\{r\} : r \in R\}$ است. به‌عبارت دیگر ردهٔ زیرمجموعه‌های یك عنصری R یك زیرردهٔ S است. آشکار است که R با این زیررده هم‌ارز است.

ازطرف دیگر، R با S هم‌ارز نیست. زیرا اگر هم‌ارز باشد، تابعی ۱ــ۱ از R به‌روی S مانند f وجود خواهد داشت. بنابراین، به‌ازای هرعنصر R مانند x، $f(x)$ یك زیرمجموعهٔ R است و هر زیرمجموعهٔ R به‌ازای یك عنصر R مانند x برابر $f(x)$ است. حال گوییم، یك عنصر R مانند x ممکن است به $f(x)$ متعلق باشد و همچنین ممکن است به $f(x)$ متعلق نباشد. فرض کنیم

$$A = \{x \in R : x \notin f(x)\}.$$

آنگاه، $A \subseteq R$ و بنابراین $A \in S$. پس یك عنصر R مانند x_0 هست‌که $A = f(x_0)$. حال

به‌یك تناقض می‌رسیم. زیرا یا $x_0 \in A$ یا $x_0 \notin A$.

حالت‌اول: اگر $x_0 \in A$، آنگاه (طبق‌تعریف A) $x_0 \notin f(x_0)$، و بنا بر این، $x_0 \notin A$ [چون $A = f(x_0)$]؛

حالت دوم: اگر $x_0 \notin A$، پس $x_0 \notin f(x_0)$ [زیرا $A = f(x_0)$]، و لذا، $x_0 \in A$ (طبق تعریف A).

پس هردو حالت $x_0 \in A$ و $x_0 \notin A$ محال هستند. از این تناقض معلوم می‌شود که R با S هم‌ارز نیست.

در استدلال فوق از هیچ‌ویژگی به‌خصوص R استفاده نکردیم. بنا بر این، می‌توان همین استدلال را درمورد مجموعهٔ دلخواه B به‌کار برد. پس نشان داده‌ایم که B با ردهٔ زیرمجموعه‌هایش هم‌ارز نیست. به‌خصوص، «بزرگترین مجموعه» وجود ندارد.

تمرینهای ۶.۱

۱. اگر $f: A \to B$ و حوزهٔ مقادیر f ناشمارا باشد، ثابت‌کنید‌که حوزهٔ تعریف f نیز ناشمارا است.

۲. اگر B زیرمجموعه‌ای شمارا از مجموعهٔ ناشمارای A باشد، ثابت کنید که $A - B$ ناشمارا است.

۳. ثابت‌کنید‌که مجموعهٔ اعداد گنگ ناشمارا است.

۴. اگر $a, b \in R$ و $a < b$، نشان دهید که $[a, b]$ با $[0, 1]$ هم‌ارز است.

۵. ثابت‌کنید‌که بین هردو عدد حقیقی متمایز عددگنگی وجود دارد.

۶. ثابت‌کنید‌که مجموعهٔ همه توابع مشخصه در I ناشمارا است.

۷. عدد حقیقی x را یك‌عدد جبری خوانیم اگر x ریشهٔ یك‌چندجمله‌ای مانند f باضرایب گویا باشد [یعنی، $f(x) = 0$]. عدد متعالی عددی حقیقی است‌که جبری نیست.
قبول‌کنید که یك چندجمله‌ای از درجهٔ n حداکثر دارای n ریشه است. ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ اعداد متعالی ناشمارا است. (تمرین ۵ بخش ۵.۱ را ببینید.)

۸. برای تابع f در ۴.۶.۱ نشان دهید که $f(1/3) = f(2/3)$. به‌طورکلی، اگر (a, b) از بازه‌های بازی باشد که در ساختمان K حذف شده است، نشان دهید که $f(a) = f(b)$. (راهنمایی: نشان دهید که a و b را می‌توان به صورت $a = 0.a_1a_2 \cdots a_n 1$، $b = 0.a_1a_2a_3 \cdots a_n 2$ که در آنها هر a_i مساوی ۰ یا ۲ است نوشت. سپس‌بسط a را به‌گونه‌ای بنویسید‌که در آن تنها ارقام ۰ و ۲ به‌کار روند.)

۹. اگر $x, y \in K$، $x < y$، و $f(x) = f(y)$ (f همان تابعی است‌که در ۴.۶.۱ آمده است)، نشان دهید‌که (x, y) یکی از همان بازه‌های (a, b) در تمرین قبل است. (این مطلب نشان می‌دهد که اگر نظیر چنین bهایی را از مجموعهٔ کانتور حذف‌کنیم، آنگاه f تابعی می‌شود ۱—۱ از مجموعه‌ای‌که از K می‌ماند به‌روی $[0, 1]$.)

۱۰. ثابت کنید که مجموعهٔ کانتور با $[۰, ۱]$ هم‌ارز است.
۱۱. برای هر $t \in R$، فرض کنید E_t زیرمجموعه‌ای از R باشد. فرض کنید اگر $s < t$، آنگاه E_s زیرمجموعهٔ سرهٔ E_t باشد. (یعنی $E_s \subset E_t$) آیا $\bigcup_{t \in R} E_t$ ناشماراست؟ (جواب: خیر).

۷.۱ کوچکترین کران بالا

اثباتهای بسیاری از قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی ــ نظیر وجود ماکسیمم و مینیمم، قضیهٔ مقدار میانی، قضیهٔ رل، قضیهٔ مقدار میانگین، وغیره ــ بستگی زیادی دارند به آنچه که به‌ویژگی کمال اعداد حقیقی معروف است. روشهای بسیاری برای بیان این ویژگی وجود دارند. ما این ویژگی را در ۴.۷.۱ به‌صورت «اصل موضوع کوچکترین کران بالا» بیان می‌کنیم. ابتدا ناگزیر به تعریف مجموعهٔ کراندار و کران بالا هستیم.

۱.۷.۱ تعریف. مجموعهٔ $A \subseteq R$ را از بالا کراندار خوانیم اگر عددی مانند $N \in R$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که برای هر $x \in A$، $x \leqslant N$. مجموعهٔ $A \subseteq R$ را از پایین کراندار خوانیم هرگاه عددی مانند $M \in R$ باشد به گونه‌ای که برای هر $x \in A$، $M \leqslant x$. اگر A از بالا و از پایین کراندار باشد آن را کراندار گوییم.

بنابراین، شرط لازم و کافی برای آنکه A کراندار باشد آن است که بازه‌ای مانند $[M, N]$ با طول متناهی وجود داشته باشد، به گونه‌ای که $A \subseteq [M, N]$. مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت I از پایین کراندار است ولی از بالا کراندار نیست. بنابراین، I کراندار نیست. بازهٔ $[۰, ۱]$ کراندار است. این مثال نشان می‌دهد که کراندار بودن ربطی به‌شمارا بودن مجموعه ندارد.

۲.۷.۱ تعریف. اگر $A \subseteq R$ از بالا کراندار باشد، آنگاه N را یک کران بالای A خوانیم اگر برای هر $x \in A$، $x \leqslant N$. اگر $A \subseteq R$ از پایین کراندار باشد، آنگاه M را یک کران پایین A نامیم اگر برای هر $x \in A$، $M \leqslant x$.

غالباً، به‌جای کران بالا و کران پایین به ترتیب u.b. و l.b. می‌نویسیم.[۱] بنابراین، -۷ یک l.b. برای I است. عدد ۱ یک u.b. برای مجموعهٔ

$$B = \left\{ \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, \frac{۷}{۸}, \ldots, \frac{(۲^n - ۱)}{۲^n}, \ldots \right\}.$$

است. ملاحظه کنید که تعدادی نامتناهی عدد بزرگتر از -۷ وجود دارند که همگی کرانهای پایین I هستند ولی، هیچ عددی کوچکتر از ۱ وجود ندارد که کران بالای B باشد. این مطلب ما را به‌مفهوم کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین هدایت می‌کند.

---

۱. u.b و l.b به‌ترتیب حروف اول upper bound و lower bound هستند.ــ م.

۳.۷.۱. تعریف. فرض کنیم A زیرمجموعهٔ R و از بالا کراندار باشد. عدد L را کوچکترین کران بالای A خوانیم اگر (۱) L کران بالای A باشد، و (۲) هیچ عدد کوچکتر از L کران بالای A نباشد. به‌شکل ۱۰ نگاه کنید.

همچنین، l را بزرگترین کران پایین A خوانیم اگر l کران پایین A باشد و هیچ عدد بزرگتر از l کران پایین A نباشد.

ما اغلب به‌جای کوچکترین کران بالا می‌نویسیم l.u.b.[1] (یا $\underset{x\in A}{\mathrm{l.u.b.}}\,x$)، و به‌جای بزرگترین کران پایین می‌نویسیم g.l.b.[2] فوراً نتیجه می‌شود که یك مجموعهٔ A بیش از یك l.u.b. ندارد. زیرا، اگر $L=\underset{x\in A}{\mathrm{l.u.b.}}\,x$ و $M<L$، آنگاه بنابر (۲)، M کران بالای A نخواهد بود. به علاوه، اگر $M>L$، آنگاه، M کوچکترین کران بالای A نمی‌تواند باشد چون که L یك کران بالای A است و $L<M$. به‌همین ترتیب، هیچ مجموعه‌ای بیش از یك g.l.b. ندارد.

ابداً بدیهی نیست که مجموعهٔ ناتهی A که از بالا کراندار است لزوماً l.u.b. دارد. این موضوع اصل کوچکترین کران بالاست که بزودی خواهد آمد. ابتدا چند مثال ارائه می‌شود.

اگر $B=\{۱/۲, ۳/۴, \dots, (۲^n-۱)/۲^n, \dots\}$، آنگاه $\underset{x\in B}{\mathrm{g.l.b.}}\,x=۱/۲$ و $\underset{x\in B}{\mathrm{l.u.b.}}\,x=۱$. (تحقیق کنید!) ملاحظه کنید که در این مثال، g.l.b. عنصر B است ولی l.u.b. عنصر B نیست. بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالای بازهٔ $(۳, ۴)$، یعنی ۳ و ۴، هیچیك عنصر بازه نیستند.

چون I از بالا کراندار نیست l.u.b. ندارد ولی g.l.b. $I=۱$. بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالای مجموعهٔ $\{۰\}$ هردو مساوی ۰ هستند.

بنابر تعریفهای ما، مجموعهٔ $\varnothing$ کراندار است زیرا برای هر بازهٔ $[M, N]$ داریم $\varnothing\subseteq[M, N]$. درنتیجه هرعدد $N\in R$ یك کران بالای $\varnothing$ است و بنابراین، $\varnothing$ کوچکترین کران بالا ندارد.

اگر در مقام بسط نظریهٔ مجموعه‌ها به‌طور دقیق برمی‌آمدیم و اعداد حقیقی را از روی تعریف بنا می‌کردیم، اصل موضوع زیر یك قضیه می‌شد، چون به‌این‌کار مبادرت نخواهیم کرد آن‌را اصل موضوع می‌خوانیم.

۴.۷.۱. اصل موضوع کوچکترین کران بالا. اگر A زیرمجموعه‌ای ناتهی از R و

شکل ۱۰ اگر $A=(a, b)$، آنگاه c یك کران بالای A و b کوچکترین کران بالای A است.

---

۱. حروف اول least upper bound.   ۲. حروف اول greatest lower bound.

از بالا کراندار باشد، آنگاه A در R کوچکترین کران بالا دارد.

به‌اجمال می‌توان گفت که R (به‌صورت مجموعهٔ نقاط یك‌خط) دارای هیچ رخنه‌ای نیست. مجموعهٔ اعداد گویا دارای رخنه است. (یعنی، اگر به‌جای R مجموعهٔ اعداد گویا را بگذاریم، اصل موضوع کوچکترین کران بالا برقرار نخواهد بود.) مثلاً، اگر $A=\{۱, ۱٫۴, ۱٫۴۱, ۱٫۴۱۴, ...\}$، آنگاه l.u.b. A (در R) برابر $\sqrt{۲}$ است که در مجموعهٔ اعداد گویا نیست. بنابراین، اگر از وجود اعداد گنگ اطلاعی نداشته باشیم، خواهیم گفت که A دارای l.u.b. نیست.

مفروضات ما درمورد رابطهٔ بین اعداد حقیقی و بسط دهدهی آنها نتیجه‌های اصل موضوع l.u.b. بند ۴.۷.۱ هستند. در فصل بعد این رابطه‌ها را به‌دست خواهیم آورد. نیازی نیست‌وجود g.l.b. را اصل‌موضوع بگیریم، زیرا از ۴.۷.۱ نتیجه‌می‌شود.

۵.۷.۱. قضیه. اگر A یك زیرمجموعهٔ ناتهی R و از پایین‌کراندار باشد، آنگاه A در R بزرگترین کران پایین دارد.

برهان: فرض کنیم $B=\{x\in R: -x\in A\}$ (یعنی، عناصر B قرینه‌های عناصر A هستند.) اگر M یك کران پایین A باشد، آنگاه $M-$ یك کران بالای B است. زیرا اگر x یك عنصر دلخواه B باشد، $-x\in A$ و بنابراین، $M\leqslant -x$، پس $x\leqslant -M$. از این‌رو، B از بالا کراندار است و درنتیجه بنابر ۴.۷.۱ دارای l.u.b. است. اگر Q کوچکترین کران بالای B باشد، $Q-$ بزرگترین کران پایین A خواهد بود. (تحقیق کنید.)

یکی از نتایج جالب اصل موضوع l.u.b. نتیجهٔ زیر است که به‌ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی موسوم است.

۶.۷.۱. قضیه. برای هر دوعدد حقیقی ومثبت a و b، عدد $n\in I$ هست که $na>b$. (درنتیجه هرقدر a کوچك و یا هرقدر b بزرگ باشد، همواره یك مضرب صحیح a که از b بزرگتر باشد وجود دارد.)

برهان: فرض کنیم

$$A=\{na: n\in I\}.$$

اگر قضیه غلط باشد، آنگاه b کران بالای A است. پس، بنابر ۴.۷.۱، کوچکترین کران بالا دارد. فرض کنیم c کوچکترین کران بالای A باشد. چون c کوچکترین کران بالای A است، $c-a$ کران بالای A نیست و درنتیجه عددی مانند $n\in I$ هست به‌گونه‌ای که $c-a<na$. پس، $c<(n+۱)a$، اما $(n+۱)a\in A$ پس c کران بالای A نیست. این یك تناقض است، و بنابراین قضیه ثابت شده است.

تمرینهای ۷.۱

۱. g.l.b. مجموعه‌های زیر را پیدا کنید.

(الف) $(۷, ۸)$،

(ب) $\{\pi+۱, \pi+۲, \pi+۳, \cdots\}$،

(ج) $\left\{\pi+۱, \pi+\frac{۱}{۲}, \pi+\frac{۱}{۳}, \pi+\frac{۱}{۴}, \cdots\right\}$.

۲. l.u.b. مجموعه‌های زیر را به‌دست آورید.

(الف) $(۷, ۸)$،

(ب) $\left\{\pi+۱, \pi+\frac{۱}{۲}, \pi+\frac{۱}{۳}, \cdots\right\}$.

(ج) متمم مجموعهٔ کانتور در $[۰, ۱]$.

۳. مثالی از یك زیرمجموعهٔ شمارا وکراندار R مانند A بیاورید به‌گونه‌ای که l.u.b. و g.l.b. هردو عضو $R-A$ باشند.

۴. اگر A یك‌زیرمجموعهٔ ناتهی وکراندار R، و B مجموعهٔ همهٔ کرانهای‌بالای A باشد، ثابت‌کنید که

$$\underset{y\in B}{\mathrm{g.l.b.}}\, y = \underset{x\in A}{\mathrm{l.u.b.}}\, x \,.$$

۵. اگر A یك مجموعهٔ ناتهی و کراندار اعداد حقیقی باشد و کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین A باهم برابر باشند، درمورد A چه‌می‌توانید بگویید؟

۲

دنباله‌های اعداد حقیقی

۱.۲ تعریف دنباله و زیردنباله

ازعبارت «دنبالهٔ اعداد» در ذهن ما یک‌مجموعهٔ اعداد با ترتیبی معین خطور می‌کند ــ اولین عدد، دومین عدد، وغیره وجود دارد. یعنی، به‌هرعدد صحیح مثبت ۱، ۲، ۳، ...، عددی‌از دنباله «مربوط» است. این مطلب را در تعریف زیر روشن می‌سازیم.

۱.۱.۲ تعریف. دنبالهٔ $S = \{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی تابعی است از I (مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت) به‌توی R (مجموعهٔ اعداد حقیقی).

نماد* $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک نماد کلاسیک است. عددحقیقی s_i (بنا به‌تعریف) همان $S(i)$ است.

* حرفی که به‌عنوان اندیس به‌کار می‌بریم حرف خاصی نیست. گاهی j، k، l، m، یا n به‌کار می‌بریم. یعنی،

$$\{s_i\}_{i=1}^{\infty} = \{s_j\}_{j=1}^{\infty} = \{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \cdots .$$

به‌علاوه، دنبالهٔ $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ را با مجموعهٔ $\{s_1, s_2, \ldots\}$ خلط نکنید. مثلاً، اگر برای هر $n \in I$، $s_n = 2$، آنگاه مجموعهٔ $A = \{s_1, s_2, \ldots\}$ تنها شامل یک عنصر است. یعنی، $A = \{2\}$؛ اما دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ که مجموعه‌ای از جفتهای مرتب است (چونکه یک تابع است)، دارای بینهایت عنصر است. با نمایش مجموعه‌ای

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\langle n, 2\rangle : n \in I\}.$$

به جای S یا $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ گاهی می‌نویسیم

$$s_1, s_2, s_3, \cdots.$$

عدد $s_i (i=1, 2, \ldots)$، جملهٔ iام دنباله خوانده می‌شود.

دنباله‌هایی نظیر $\{s_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ یا $\{s_i\}_{i=1}^{M}$ (M عددصحیح مثبت) را نیز می‌توان تعریف کرد. این‌کار را به‌خواننده محول می‌کنیم. اما دنباله را به‌معنی $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$، تابعی با حوزهٔ تعریف I به‌کار می‌بریم مگر آنکه خلافش تصریح شود.

البته، دلیلی‌وجود ندارد که تعریف دنباله‌را به‌دنباله‌های اعدادحقیقی محدودسازیم. در بخشهای بعد، دنباله‌هـای مجموعه‌ها ودنباله‌های توابع‌را به‌کار خواهیم برد. مثلا اگر X مجموعهٔ دلخواهی باشد، آنگاه‌دنبالهٔ $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های X تابعی است از I به‌توی ردهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X.

۲.۱.۲. تعریف. اکنون، پس‌ازتعریف دنباله‌می‌خواهیم به‌مفهوم زیردنباله بپردازیم. گـرچه معنی زیردنباله به‌تصور آسان می‌نماید، اما چگونه زیردنباله را تعریف‌کنیم کـه مطمئن باشیم زیردنباله هم یك دنباله است، کاملا روشن نیست. (امتحان کنید.) در مطالعهٔ پاراگراف بعدی، هر نوع تصور شهودی‌که از «زیردنباله» دارید به‌کار برید.

اگر

$$s_1, s_2, s_3, \cdots.$$

یك دنباله باشد، معمولا یك زیردنباله را به صورت زیر می‌نویسند

$$s_{n_1}, s_{n_2}, s_{n_3}, \cdots.$$

بدین‌معنی که‌ازدنبالهٔ اصلی، آن جمله‌هایی را «نگه»می‌داریم که دارای اندیسهای $n_1, n_2, \ldots$ هستند. اما اعداد n_1، n_2، ...، خود زیردنباله‌ای از دنبالهٔ اعداد صحیح مثبت

$$1, 2, 3, \cdots.$$

است. از این‌رو، ابتدا به‌تعریف «زیردنبالهٔ دنبالهٔ اعداد صحیح مثبت» می‌پردازیم وسپس زیردنبالهٔ یك دنبالهٔ دلخواه را تعریف می‌کنیم.

۳.۱.۲. تعریف. یك زیردنبالهٔ N از $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ (دنبالهٔ اعداد صحیح مثبت) تـابعی است از I به‌توی I به‌گونه‌ای که

برای هر $i, j \in I$، اگر $i<j$ آنگاه $N(i)<N(j)$.

از $N: I \to I$، نتیجه می‌شودکه $N: I \to R$. بنابراین، N یـك دنباله است. پس، به‌اجمال‌می‌توان گفت که‌زیردنبالهٔ $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای‌است ازاعدادصحیح‌مثبت که جملاتش رفته‌رفته بزرگتر و بزرگتر می‌شوند. مثلا دنبالهٔ اعداد اول

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots.$$

زیردنباله‌ای از $\{n\}$ است. دو مثال دیگر عبارت‌اند از

$$1, 3, 5, 7, 9, \cdots \qquad 2, 4, 6, 8, \cdots$$

۴.۱.۲. تعریف. اگر $S=\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و $N=\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای از دنبالهٔ اعداد صحیح مثبت باشد، آنگاه تابع مرکب $S\circ N$ یك زیردنبالهٔ S نامیده می‌شود.

ملاحظه کنید که برای $i\in I$ داریم

$$N(i)=n_i,$$
$$S\circ N(i)=S[N(i)]=S(n_i)=S_{n_i},$$

و بنابراین،

$$S\circ N=\{s_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}.$$

پس، تعریف ۴.۱.۲ با نمادگذاری رایج

$$s_{n_1}, s_{n_2}, \cdots$$

برای زیردنباله‌ها مطابقت دارد. در واقع، N به ما می‌گوید که چه جملاتی از S را باید نگه‌داشت.

مثال: فرض کنیم دنبالهٔ

$$1, 0, 1, 0, \cdots,$$

را با B نشان دهیم، و $N=\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ را با ضابطهٔ زیر تعریف کنیم

$$n_i=2i-1 \qquad (i\in I),$$

آنگاه $B\circ N$ عبارت است از دنبالهٔ

$$1, 1, 1, \cdots,$$

که زیردنبالهٔ B است.

به‌عنوان مثال دیگر، اگر $C=\{c_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ و $N=\{n_i\}_{i=1}^{\infty}=\{i^4\}_{i=1}^{\infty}$، آنگاه

$$C\circ N=\{c_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}=\{\sqrt{i^4}\}_{i=1}^{\infty}=\{i^2\}_{i=1}^{\infty}.$$

تمرینهای ۱.۲

۱. فرض کنیم دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ با ضابطهٔ زیر تعریف شود

$$s_۱ = ۱, \qquad s_۲ = ۱, \qquad s_{n+۱} = s_n + s_{n-۱} \qquad (n = ۲, ۳, \ldots),$$

مقدار $s_۸$ را بیابید. [اعداد s_n را اعداد فیبوناتچی[1] نامند.]

۲. برای هر یك از دنباله‌های زیر، ضابطه یا ضوابط تعریف s_n را بنویسید. [مثلاً، دنبالهٔ ... ,۷ ,۸ ,۵ ,۶ ,۳ ,۴ ,۱ ,۲ را می‌توان با ضوابط زیر تعریف کرد

$$s_n = n + ۱ \qquad (n = ۱, ۳, ۵, \ldots),$$
$$s_n = n - ۱ \qquad (n = ۲, ۴, ۶, ۸, \ldots).]$$

(الف) $۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, \ldots.$

(ب) $۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, \ldots.$

(ج) $۱, -۴, ۹, -۱۶, ۲۵, -۳۶, \ldots.$

(د) $۱, ۱, ۱, ۲, ۱, ۳, ۱, ۴, ۱, ۵, ۱, ۶, \ldots.$

۳. کدام یك از دنباله‌های تمرین قبل زیردنباله‌ای از $\{n\}_{n=۱}^{\infty}$ هستند؟

۴. اگر $S = \{s_n\}_{n=۱}^{\infty} = \{۲n-۱\}_{n=۱}^{\infty}$ و $N = \{n_i\}_{i=۱}^{\infty} = \{i^۲\}_{i=۱}^{\infty}$، آنگاه $s_۵$، $s_۹$، $n_۲$ و $s_{n_۲}$ را به‌دست آورید. آیا N زیردنباله‌ای از $\{k\}_{k=۱}^{\infty}$ است؟

۵. فرض کنیم کـه S یك دنباله باشد. ثابت کنید که هر زیردنباله از یك زیردنبالهٔ S خود زیردنباله‌ای از S است.

۶. اگر $\{s_{n_k}\}_{k=۱}^{\infty}$ زیردنباله‌ای از $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ باشد، ثابت کنید که $n_k \geqslant k \ (k \in I)$.

۲.۲ حد دنباله

مفهوم حد یکی از مهمترین (و از نظر درك، مشکلترین) مفاهیم آنالیز است. در این بخش به‌تعریف حد دنباله (تابع در I) می‌پردازیـم. حدهای تـوابع دیگر را در فصل چهارم خواهیم دید.

به‌اجمال، عدد L حد دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ است اگر به‌ازای همهٔ nهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ، $s_n - L$ «کوچك» باشد. با این توصیف مبهم، انتظار داریم که دنبالهٔ ... ,۱ ,۱ ,۱ دارای حد ۱، دنبالهٔ ... ,۱/۳ ,۱/۲ ,۱ دارای حد ۰ باشد، و دنبالهٔ ... ,۴− ,۳ ,۲− ,۱ حدی نداشته باشد. خواهیم دید که حدس ما در این حالات درست است.

درحالتهای دیگر، مثلا درمورد $\{n\sin(\pi/n)\}_{n=۱}^{\infty}$، دید ما به‌اندازهٔ کافی نافذ نیست که بگوییم دنباله «حد» دارد یا در صورت وجود «مقدار حـد» را محاسبه کنیم. درنتیجه به‌تعریفی دقیق از «حد دنباله» و قضایایی دربارهٔ این تعریف که محاسبات را آسان سازد احتیاج داریم

1. Fibonacci

۱.۲.۲. تعریف. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. گوییم s_n به L میل می‌کند (وقتی n به بینهایت میل کند)*، اگر برای هر عدد مثبت ε عدد صحیح مثبتی مانند N باشد به‌گونه‌ای که

$$|s_n - L| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N). \tag{1}$$

اگر s_n به L میل کند می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} s_n = L$$

یا

$$s_n \to L \qquad (n \to \infty).$$

به جای «s_n به L میل می‌کند» گاهی گوییم که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای حد L است (یا L حد $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ است).

تأکید می‌کنیم که تعریف ما ایجاب می‌کند که L عددی حقیقی باشد.

بنا براین، $\lim_{n \to \infty} s_n = L$ به‌این‌معنی‌است که‌برای‌هر $\varepsilon > 0$، نامساوی $|s_n - L| < \varepsilon$ برای همهٔ‌مقادیر n بجز حداکثر تعدادی متناهی، یعنی بجز ۱، ۲، ...، $N-1$ برقراراست. درحالت کلی، مقدار N به ε بستگی دارد. بنا بر این، درمورد دنبالهٔ مفروض $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$، اثبات اینکه $\lim_{n \to \infty} s_n = L$ این است که برای هر عدد مثبت ε، Nای بیابیم که

$$|s_n - L| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N).$$

لزومی ندارد که کوچکترین مقدار N را که (۱) را برقرار می‌کند بیابیم. اگر برای هر $\varepsilon > 0$، یك N یافت شود[1] که (۱) را برقرار کند، ثابت می‌شود که

$$\lim_{n \to \infty} s_n = L.$$

به‌شکل ۱۱ توجه‌کنید، همهٔ s_nها، بجز حداکثر تعدادی متناهی n، باید در داخل پرانتز باشند.

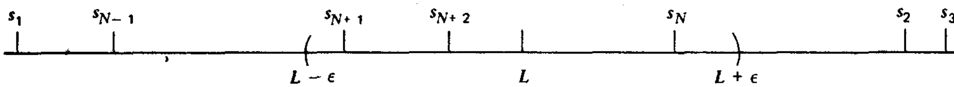
مثلاً دنبالهٔ ... ,۱/۳ ,۱/۲ ,۱، یعنی دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ با ضابطهٔ

$$s_n = \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

---

* عبارت «وقتی‌که n به بینهایت میل کند» جزئی از تعریف است. ما نمی‌خواهیم «بینهایت» را تعریف کنیم.

۱. درحقیقت لازم نیست عملا N را بیابیم، اثبات وجود آن کافی است.ـم.



شکل ۱۱ نمودار $\lim_{n\to\infty} s_n = L$.

را در نظر می‌گیریم. طبیعی‌است حدس بزنیم که $\lim s_n = 0$. حال، این را ثابت می‌کنیم. برای عدد مفروض $\varepsilon > 0$، باید Nای بیابیم که (۱) برقرار باشد. در این حالت، (۱) هم‌ارز است با

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N),$$

یا

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \qquad (n \geqslant N). \qquad (۲)$$

از این‌رو، اگر N را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $1/N < \varepsilon$، آنگاه (۲)، و از آنجا (۱) برقرار است. زیرا اگر $n \geqslant N$، آنگاه $1/n \leqslant 1/N$. حال $1/N < \varepsilon$ اگر و تنها اگر $N > 1/\varepsilon$. بنابراین، به‌ازای هر $N \in I$ به گونه‌ای که $N > 1/\varepsilon$، (۱) درحالت $s_n = 1/n$ و $L = 0$ برقرار خواهد بود. پس ثابت شد که $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. ضمناً ملاحظه کنید که ۰، حد دنباله، مساوی با هیچیك از جمله‌های دنباله نیست.

حال، دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ با ضابطهٔ

$$s_n = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

را امتحان می‌کنیم. قبلا حدس زده بودیم که $L = 1$. برای اثبات این مطلب توجه داریم که $s_n - L = 1 - 1 = 0$. پس، برای هر $\varepsilon > 0$

$$|s_n - L| < \varepsilon \qquad (n \geqslant 1).$$

بنابراین، در این حالت، برای هر $\varepsilon > 0$، اگر N را مساوی ۱ اختیار کنیم (۱) برقرار است. (این از حالات نادری است که N به ε بستگی ندارد.) ثابت شد که

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

به‌عنوان مثال سوم، دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ با ضابطهٔ

$$s_n = n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

یعنی، دنبالهٔ $1, 2, 3, \ldots$ را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که این دنباله حد ندارد. فرض کنیم چنین نباشد. پس، عددی حقیقی مانند L هست که $\lim_{n\to\infty} s_n = L$. پس، برای هر $\varepsilon > 0$، Nای هست که برای آن (۱) برقرار است. به ویژه، برای $\varepsilon = 1$، Nای هست که (۱) برقرار است، یعنی

$$|s_n-L|<۱ \qquad (n\geqslant N).$$

این نابرابری هم‌ارز است با

$$-۱<s_n-L<۱ \qquad (n\geqslant N),$$

یا

$$-۱<n-L<۱ \qquad (n\geqslant N),$$

یا

$$L-۱<n<L+۱ \qquad (n\geqslant N).$$

گـزارهٔ اخیر می گوید که همهٔ nهای بزرگتر از N، بین $L-۱$ و $L+۱$ قـرار دارند. آشکار است که درست نیست. این تناقض نشان می‌دهد که $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}=\{n\}_{n=۱}^{\infty}$ حد ندارد.

مثال اخیر نشان‌می‌دهد که دنباله‌هایی که‌جملاتشان «بسیار بزرگ» می‌شوند نمی‌توانند حد داشته باشند. البته تنها این‌دنباله‌ها نیستندکه حد ندارند. دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ راکه در آن $s_n=(-۱)^n$ ملاحظه کنید. جمله‌های این دنباله عبارت‌اند از

$$-۱,\ ۱,\ -۱,\ ۱,\ \ldots.$$

فرض کنیم عددی حقیقی مانند L باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=L$. آنگاه برای $\varepsilon=۱/۲$ یك عنصر I مانند N هست که برای آن (۱) برقرار است. یعنی،

$$|(-۱)^n-L|<\frac{۱}{۲} \qquad (n\geqslant N). \tag{۳}$$

اگر n زوج باشد بنابر (۳) داریم

$$|۱-L|<\frac{۱}{۲} \tag{۴}$$

و اگر n فرد باشد از (۳) نتیجه می‌شود که

$$|-۱-L|<\frac{۱}{۲} \tag{۵}$$

چون $|a-b|$ فاصلهٔ a تا b است (۴) نتیجه می‌دهد که فاصلهٔ L از ۱ کمتر از ۱/۲ واحد است، درحالی که بنابر (۵)، فاصلهٔ L از ۱ ــ کمتر از ۱/۲ واحد است. این یك تناقض است. [برای یـافتن یك تناقض از (۴) و (۵) بدون استفاده از هندسه به‌این ترتیب عمل می‌کنیم: نامساوی (۵) هم‌ارز است با $|۱+L|<۱/۲$. اما

$$۲=|۲|=|۱+۱|=|(۱+L)+(۱-L)|\leqslant|۱+L|+|۱-L|<\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

که این یك تناقض است.]

بنابراین، حدی برای دنبالهٔ $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود ندارد (هرچند که قدرمطلق تمام جمله‌های دنباله ۱ است و درنتیجه «بسیار بزرگ» نیستند).

تذکر این نکته در این مرحلهٔ مقدماتی مبحث حد ضروری است: اگر بخواهیم نشان‌دهیم که یك‌دنبالهٔمفروض حد دارد، ابتدا باید مقدارحد را حدس بزنیم‌ازیرا تاکنون هیچ قاعدهٔ کلی برای وجود حد یك‌دنباله به‌دست‌نیاورده‌ایم. این مثالی است که چگونگی مراحل حدس‌زدن را در مجموعه‌ای از حالات مشخص می‌کند. فرض کنیم

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{2n}{n+4n^{1/2}}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

اگر n «بزرگ» باشد، آنگاه n «خیلی بزرگتر» از $n^{1/2}$ است. از این‌رو، به‌منظور تعیین حد (اگر موجود باشد) حدس می‌زنیم که از جملهٔ $4n^{1/2}$ می‌توان صرفنظر کرد. یعنی، داریم $s_n=2n/(n+\theta)$ که درآن هرچه n بزرگتر می‌شود θ در مقایسه با سایر مقادیر، ناچیزتر و ناچیزتر می‌گردد (هرچند که $\theta=4n^{1/2}$ وقتی n «بزرگ» باشد «بزرگ» است). بنابراین، برای‌مقدار«بزرگ» n، s_n باید نزدیك ۲ باشد. ازاین‌رو، حدس‌می‌زنیم که حد $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ برابر ۲ است.

ازیك دیدگاه کمی‌متفاوت و جبری‌تر، ملاحظه می‌کنیم که $s_n=2/(1+4/n^{1/2})$. وقتی n «بزرگ» می‌شود ۲ و ۱ ثابت‌اند ولی $4/n^{1/2}$ «کوچك» می‌شود. n که «خیلی بزرگ» شود s_n تقریباً مساوی $2/(1+0)$ خواهدشد. بنابراین، دوباره حدس‌می‌زنیم که $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=2$.

حال، ثابت می‌کنیم که $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=2$. برای $\varepsilon>0$ مفروض، باید $N\in I$ را به‌دست آوریم به‌گونه‌ای که

$$\left|\frac{2n}{n+4n^{1/2}}-2\right|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N). \tag{6}$$

نامساوی (۶) هم‌ارز است با

$$\left|\frac{2n-2n-8n^{1/2}}{n+4n^{1/2}}\right|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N).$$

یا

$$\frac{8n^{1/2}}{n+4n^{1/2}}<\varepsilon \qquad (n\geqslant N). \tag{7}$$

حال سمت‌چپ نامساوی (۷) کوچکتر از $8n^{1/2}/n=8/n^{1/2}$ است. (چرا؟) بنابراین، اگر

$$\frac{\text{۸}}{n^{\text{۱/۲}}}<\varepsilon \qquad (n\geqslant N). \qquad (\text{۸})$$

برقرار باشد، (۷) برقرار است. اگر N را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که $\varepsilon \geqslant \text{۸}/N^{\text{۱/۲}}$، یعنی $N > \text{۶۴}/\varepsilon^{\text{۲}}$، آنگاه مسلماً (۸) برقرار است. (زیرا، اگر $n\geqslant N$، آنگاه $\text{۸}/n^{\text{۱/۲}} \leqslant \text{۸}/N^{\text{۱/۲}}$.) بنابراین، نشان داده‌ایم که اگر N عدد صحیح مثبتی بزرگتر از $\text{۶۴}/\varepsilon^{\text{۲}}$ باشد، آنگاه (۸) و بنابراین (۷) و سرانجام (۶) برقرار است. پس، ثابت شد که $\lim_{n\to\infty} s_n = \text{۲}$.

استنباط شهودی ما این است که دنبالهٔ اعداد نامنفی حد منفی ندارد، حال، به‌اثبات این مطلب می‌پردازیم.

۲.۲.۲ قضیه. اگر $\{s_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی باشد و اگر $\lim_{n\to\infty} s_n = L$، آنگاه $L \geqslant \text{۰}$.

برهان: اثبات به‌برهان‌خلف است. پس فرض می‌کنیم $L<\text{۰}$. آنگاه برای $\varepsilon = -L/\text{۲}$ عدد صحیح مثبتی مانند N هست که

$$|s_n - L| < -\frac{L}{\text{۲}} \qquad (n\geqslant N).$$

به‌خصوص،

$$|s_N - L| < -\frac{L}{\text{۲}}$$

از آنجا،

$$s_N - L < -\frac{L}{\text{۲}}$$

یا

$$s_N < \frac{L}{\text{۲}}$$

ولی، طبق فرض $s_N \geqslant \text{۰}$، پس بنابر نامساوی آخر، $L > \text{۰}$، و این با فرض متناقض است. بنابراین $L \geqslant \text{۰}$.

اثبات فوق بیان دقیق مطلب زیر است: اگر وقتی n «بزرگ» است s_n «به‌دلخواه نزدیک» به L باشد و $L<\text{۰}$، آنگاه به‌ازای nهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ، $s_n<\text{۰}$.

تمرینهای ۲.۲

۰۱ فرض کنید $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای‌ازاعداد حقیقی‌باشد. اگرهمواره $s_n \leqslant M$ ($n \in I$) و اگر $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = L$، ثابت کنید که $L \leqslant M$.

۰۲ اگر $M \in R$، $L \in R$، و برای هر $\varepsilon > 0$، $L \leqslant M + \varepsilon$، ثابت کنید که $L \leqslant M$.

۰۳ فرض کنید $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر برای هرعدد مثبت ε،

$$|s_n - L| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N).$$

که درآن N به ε بستگی ندارد، ثابت کنید که همهٔ جمله‌های دنباله بجز حداکثر تعدادی متناهی، با L برابرند.

۰۴ (الف) عدد $N \in I$ را بیابید به‌گونه‌ای که

$$\left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| < \frac{1}{5} \qquad (n \geqslant N).$$

(ب) ثابت کنید که $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n}{n+3} = 2$

۰۵ (الف) عدد $N \in I$ را بیابید به‌گونه‌ای که

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 0.03 \quad (n \geqslant N).$$

(ب) ثابت کنید که $\lim\limits_{n \to \infty} 1/\sqrt{n+1} = 0$

۰۶ اگر θ عددی‌گویا باشد، ثابت کنید که دنبالهٔ $\{\sin n!\theta\pi\}_{n=1}^{\infty}$ دارای حد است.

۰۷ برای هر یك از دنباله‌های زیر وجود یا عدم وجود حد را ثابت کنید.

(الف) $\left\{\dfrac{n^2}{n+5}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ب) $\left\{\dfrac{3n}{n+7n^{1/2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ج) $\left\{\dfrac{3n}{n+7n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

۰۸ (الف) ثابت کنید که حد دنبالهٔ $\{10^7/n\}_{n=1}^{\infty}$ برابر صفر است.

(ب) ثابت کنید که دنبالهٔ $\{n/10^7\}_{n=1}^{\infty}$ دارای حد نیست.

(ج) ملاحظه کنید که 10^7 جملهٔ اول دنبالهٔ (الف) از جمله‌های نظیر دنبالهٔ (ب) بزرگترند. این‌مطلب روشن می‌سازد که وجود حد یك‌دنباله به «چند» («چند» = «هر تعداد متناهی») جملهٔ ابتدای دنباله بستگی ندارد.

۰۹ ثابت کنید که $\{n - 1/n\}_{n=1}^{\infty}$ حد ندارد.

۰۱۰ اگر $s_n = 5^n/n!$ ثابت کنید که $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 0$. (راهنمایی: ثابت کنید که اگر $n > 5$، آنگاه $s_n \leqslant (5^5/5!) \times (5/n)$.)

۱۱. اگر P یك تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ باشد،

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d \qquad (a,\, b,\, c,\, d,\ x\in R),$$

ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n+1)}{P(n)}=1$$

۳.۲ دنباله‌های همگرا

۱.۳.۲. تعریف. اگر دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای حد L باشد، گوییم که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L همگراست. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ حد نداشته باشد گوییم که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ واگراست.

از مثالهای بخش پیش می‌بینیم که دنباله‌های $\dots ,1 ,1 ,1$ و $\dots ,1/3 ,1/2 ,1$ به‌ترتیب به ۱ و ۰ همگرایند و دنباله‌های $\dots ,3 ,2 ,1$ و $\dots ,1+ ,1- ,1+ ,1-$ واگرایند.

حال، ثابت می‌کنیم که حد دنباله (درصورت وجود) یکتاست.

۲.۳.۲. قضیه. اگر دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L همگرا باشد، آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نمی‌تواند به‌حد دیگری متمایز از L همگرا باشد. یعنی، اگر $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=L$، $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=M$، آنگاه $L=M$.

برهان: اگر حکم برقرار نباشد، $L\neq M$ و لذا، $|M-L|>0$. فرض کنیم $\varepsilon=1/2|M-L|$. چون بنا به‌فرض $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=L$، عددصحیح مثبتی مانند N_1 هست که

$$|s_n-L|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N_1).$$

به‌همین‌ترتیب، چون $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=M$، عدد صحیح مثبتی مانند N_2 هست به‌گونه‌ای که

$$|s_n-M|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N_2).$$

فرض کنیم $N=\max(N_1,N_2)$. پس، $N\geqslant N_1$ و $N\geqslant N_2$، از این‌رو،

$$|s_N-L|<\varepsilon \text{ و } |s_N-M|<\varepsilon$$

بنابراین،

$$|M-L|=|(s_N-L)-(s_N-M)|\leqslant|s_N-L|+$$
$$|s_N-M|<2\varepsilon=|M-L|.$$

از آنجا، $|M-L|<|M-L|$ که ممتنع است. پس‌حکم برقرار است. یعنی $L=M$.

اثبات قضیهٔ بعدی آسان است و به‌خواننده واگذار می‌شود.

۳.۳.۲. قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L همگرا باشد، هر زیردنبالهٔ آن نیز به L همگراست.

قضیهٔ فوق نتیجهٔ مفیدی دارد:

۴.۳.۲. نتیجه. همهٔ زیردنباله‌های یك دنبالهٔ همگرا از اعداد حقیقی به‌یك حد همگرایند.

برهان: اگر دنبالهٔ S به L همگرا باشد، آنگاه بنابر ۲.۳.۲، S به‌حد دیگری همگرا نیست. پس، بنابر ۳.۳.۲، همهٔ زیردنباله‌های S نیز به L همگرایند (نه به‌حد دیگری).

از نتیجهٔ فوق اثبات ساده‌ای برای واگرابودن $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ حاصل می‌شود. زیرا دو زیردنبالهٔ این دنباله یعنی $\ldots, 1, 1, 1$ و $\ldots, -1, -1, -1$ به دو حد متمایز همگرایند.

مثال $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ نشان می‌دهد که یك دنبالهٔ واگرا ممکن است زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد. ازطرفی، $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ مثالی است از یك دنبالهٔ واگرا که هیچ زیردنبالهٔ همگرا ندارد.

چند مثال دیگر. اگر θ عددی گویا باشد، $0<\theta<1$، و $S=\{\sin n\theta\pi\}_{n=1}^{\infty}$، آنگاه S واگراست. زیرا می‌توانیم فرض کنیم $\theta=a/b$ که در آن a و b اعداد صحیح‌اند و $b\geqslant 2$. جمله‌های دنباله برای $n=b, 2b, 3b, \ldots$ عبارت‌اند از

$$\sin a\pi, \sin 2a\pi, \sin 3a\pi, \cdots .$$

از این‌رو، S دارای زیردنبالهٔ $\ldots, 0, 0, 0$ خواهد بود. ولی جمله‌های دنباله برای $n=b+1, 2b+1, 3b+1, \ldots$ برابرند با

$$\sin\left(a\pi+\frac{a\pi}{b}\right), \sin\left(2a\pi+\frac{a\pi}{b}\right), \sin\left(3a\pi+\frac{a\pi}{b}\right), \ldots$$

یا

$$(-1)^a\sin\frac{a\pi}{b}, (-1)^{2a}\sin\frac{a\pi}{b}, (-1)^{3a}\sin\frac{a\pi}{b}, \cdots .$$

قدرمطلق هرجملهٔ دنبالهٔ فوق برابر $\sin(a\pi/b)$ است و بنابراین، دنبالهٔ فوق به‌صفر میل نمی‌کند. ازاین‌رو، S یك زیردنبالهٔ همگرا به‌صفر دارد و نیز دارای یك زیردنباله است که (شاید همگرا باشد یا شاید نباشد ولی مسلماً) حدش صفر نیست. درنتیجه بنابر ۴.۳.۲، دنبالهٔ S واگراست.

برای $\theta=0$ یا $\theta=1$ دنبالهٔ $\{\sin n\theta\pi\}_{n=1}^{\infty}$ به‌صفر همگراست.

اگر θ عددی گنگ باشد، می‌توان نشان داد که دنبالهٔ $\{\sin n\theta\pi\}$ واگراست. اما، اثبات این مطلب قدری مشکلتر است.

تمرینهای ۳.۲

۱. برای هر دو عدد حقیقی a و b، نشان دهید که $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$. سپس، اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L همگرا باشد ثابت کنید که $\{|s_n|\}_{n=1}^{\infty}$ به $|L|$ همگرا است.

۲. مثالی از یك دنبالهٔ اعداد حقیقی $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بیاورید به‌گونه‌ای که $\{|s_n|\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا ولی $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ واگرا باشد.

۳. اگر $\{|s_n|\}_{n=1}^{\infty}$ به صفر همگرا باشد، ثابت کنید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نیز به‌صفر همگرا است.

۴. آیا می‌توانید دنباله‌ای از اعداد حقیقی مانند $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بیابید به‌گونه‌ای که‌هیچ زیردنبالهٔ همگرا نداشته باشد، اما $\{|s_n|\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد؟

۵. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m}=L$، $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m-1}=L$، ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=L$. (یعنی، اگر زیردنباله‌ای از $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ که از جمله‌های با اندیس زوج این دنباله تشکیل شده به L همگرا باشد و همچنین، زیردنباله‌ای که اندیس جمله هایش همه فرد هستند نیز به L همگرا باشد، آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L همگرا است.)

۴.۲ دنباله‌های واگرا

ازمثالهای بخش ۳.۲ می‌بینیم که دنباله‌های $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ هردو واگرا هستند. لیکن، همان گونه که قبلا ملاحظه کرده‌ایم رفتار این دو دنباله خیلی متفاوت است. زیرا دنبالهٔ $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌خاطر اینکه جمله‌هایش «بسیار بزرگ» می‌شوند واگراست، درحالی که $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌دلیل اینکه جمله‌هایش «بسیار نوسان می کنند» واگراست. دراین بخش دنباله‌های واگرا را رده‌بندی می کنیم.

۱.۴.۲. تعریف. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. گوییم s_n به بینهایت میل می‌کند وقتی n به‌بینهایت میل کند اگر برای هر عدد حقیقی $M>0$، عدد صحیح مثبتی مانند N باشد به‌گونه‌ای که

$$s_n \geqslant M \qquad (n \geqslant N).$$

دراین‌حالت می‌نویسیم $s_n \to \infty$ وقتی $n\to\infty$. گاهی به‌جای «s_n به‌بینهایت میل می کند» گوییم که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌بینهایت واگراست.

همان‌گونه که در تعریف ۱.۲.۲، ε را عدد «کوچکی» تصور می کنیم، دراین‌تعریف M را عدد «بزرگی» در نظر می گیریم. بنابراین، اگر $s_n \to \infty$ وقتی $n\to\infty$، آنگاه جمله‌های دنباله، بجز تعداد «کمی» از جمله‌های ابتدای دنباله، «بزرگ» هستند.

آشکار است که‌دنبالهٔ $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌بینهایت واگراست. زیرا، فرض کنیم M عددحقیقی مثبت دلخواهی باشد، کافی‌است N را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که $N\geqslant M$. آنگاه مسلماً خواهیم داشت

$$n \geqslant M \qquad (n \geqslant N).$$

خواننده باید اطمینان حاصل کند که اگر $s_n \to \infty$ وقتی $n \to \infty$، آنگـاه محققاً، s_n به‌حدی‌میل نخواهد کرد. (این‌مطلب، استفاده‌ازعبارت «به بینهایت واگرا» است را توجیه می‌کند.) هرگز بینهایت را حد دنباله نمی‌نامیم. حد دنباله باید عددی حقیقی باشد.

۲.۴.۲.تعریف. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. گوییم s_n به منهای بینهایت میل‌می‌کندوقتی n به بینهایت‌میل کنداگر برای هرعدد حقیقی مثبت M، عددی صحیح ومثبت مانند N باشد به‌گونه‌ای که

$$s_n < -M \qquad (n \geqslant N).$$

دراین‌صورت می‌نویسیم $s_n \to -\infty$ وقتی $n \to \infty$، و گوییم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌منهای بینهایت واگراست.

مجدداً M را عددی «بزرگ» و درنتیجه $-M$ را یك عدد «منفی بزرگ» تصور می‌کنیم.

برای‌مثال، دنبالۀ $\{\log(1/n)\}_{n=1}^{\infty}$ به‌منهای‌بینهایت واگراست. برای اثبات‌فرض کنیم $M > 0$ عدد حقیقی دلخواهی باشد، باید عدد $N \in I$ را به‌گونه‌ای بیابیم که

$$\log \frac{1}{n} < -M \qquad (n \geqslant N). \tag{۱}$$

نامساوی (۱) هم‌ارز است با

$$\log n > M \qquad (n \geqslant N),$$

یا

$$n > e^M \qquad (n \geqslant M). \tag{۲}$$

درنتیجه، اگر $N \geqslant e^M$، آنگاه (۲) وبنابراین (۱) برقرار است.

دنبالۀ ... ,۴− ,۳ ,۲− ,۱ نه به بینهایت میل می‌کند و نه به‌منهای بینهایت. اما دنبالۀ مذکور دارای زیردنبالۀ ... ,۵ ,۳ ,۱ است که به بینهایت میل می‌کند و همچنین دارای زیردنبالۀ ... ,۶− ,۴− ,۲− است که به‌منهای بینهایت میل می‌کند.

به‌سادگی ثابت‌می‌شودکه‌اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌بینهایت واگرا باشد، آنگاه هرزیردنبالۀ آن نیز به بینهایت واگراست. (این مطلب نظیر نتیجۀ ۳.۳.۲ است.)

بعضی از دنباله‌هـای واگرا نه به بینهایت واگرایند و نه به‌منهای بینهایت، آنهـا «نوسانی» هستند.

۳.۴.۲.تعریف. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای واگرا ازاعداد حقیقی‌باشد ولی‌نه‌به‌بینهایت ونه به‌منهای بینهایت واگرا باشد، می‌گوییم که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نوسانی است.

$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ مثالی از یك دنبالۀ نوسانی است. مثال دیگر دنبالۀ زیر است

$$1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ \ldots$$

زیرا، این دنباله دارای زیردنبالهٔ واگرای ... ,۳ ,۲ ,۱ است پس بنابر ۴.۳.۲ واگراست. به‌علاوه، دنباله به‌بینهایت واگرا نیست چون‌که عدد $N \in I$ وجود ندارد که در گزارهٔ زیر صدق کند

$$s_n > ۲ \qquad (n \geqslant N).$$

بدیهی است که دنباله به‌منهای بینهایت واگرا نیست. پس دنباله نوسانی است.

تأکید می‌کنیم که «نوسانی» بدین‌معنی نیست که «جمله‌ها بالا و پایین می‌روند». دنبالهٔ

$$۱, -\frac{۱}{۲}, +\frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۴}, \ldots,$$

به‌صفر همگراست. پس، بنابر تعریف، نوسانی نیست هرچند که جمله‌هایش «بالا و پایین می‌روند». نوسان اصطلاحی است که فقط درمورد نوعی از دنباله‌های واگرا به‌کارمی‌رود. به‌اجمال می‌توان گفت که یك دنباله وقتی نوسانی است که جمله‌هایش « بسیار زیاد بالا و پایین روند».

تمرینهای ۴.۲

۱. تعیین کنید هر یك از دنباله‌های زیر در کدام‌یك از مجموعه‌های زیر هستند: (الف) دنباله‌های همگرا، (ب) دنباله‌های واگرا به‌بینهایت، (ج) دنباله‌های واگرا به‌منهای بینهایت، و (د) دنباله‌های نوسانی. (برای این‌کار تنها از معرفت ذهنی خود یا از آنچه از درس حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانید استفاده نمایید، سعی نکنید چیزی را ثابت کنید.)

(۱) $\left\{\sin \frac{n\pi}{۲}\right\}_{n=۱}^{\infty}$ (۲) $\{\sin n\pi\}_{n=۱}^{\infty}$

(۳) $\{e^n\}_{n=۱}^{\infty}$ (۴) $\{e^{۱/n}\}_{n=۱}^{\infty}$

(۵) $\left\{n \sin \frac{\pi}{n}\right\}_{n=۱}^{\infty}$ (۶) $\left\{(-۱)^n \tan\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{۱}{n}\right)\right\}_{n=۱}^{\infty}$

(۷) $\left\{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n}\right\}_{n=۱}^{\infty}$ (۸) $\{-n^۲\}_{n=۱}^{\infty}.$

۲. ثابت کنید که $\{\sqrt{n}\}_{n=۱}^{\infty}$ به بینهایت واگراست.

۳. ثابت کنید که $\{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}\}_{n=۱}^{\infty}$ همگراست. (راهنمایی: به‌خاطر بیاورید وقتی $y=\sqrt{x}$، dy/dx را از راه Δx چگونه پیدا می‌کنید.)

۴. اگر دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از اعداد حقیقی به‌بینهایت واگرا باشد، ثابت کنید که $\{-s_n\}_{n=۱}^{\infty}$

به منهای بینهایت واگراست.

۵. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به ۰ همگرا باشد، ثابت کنید که $\{(-1)^n s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نیز به‌صفر همگراست.

۶. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به $L \neq 0$ همگرا باشد، ثابت کنید که $\{(-1)^n s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نوسانی است.

۷. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌بینهایت واگرا باشد، ثابت کنید که $\{(-1)^n s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نوسانی است.

۵.۲ دنباله‌های کراندار

یادآوری می‌کنیم که دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ تابعی است از I به‌توی R. بنابراین مجموعهٔ جمله‌های $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (یعنی، $\{s_1, s_2, \dots\}$) زیرمجموعه‌ای از R است.

۱.۵.۲ تعریف. دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ را از بالا کراندار خوانیم اگر مجموعهٔ مقادیر جمله‌های $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کراندار باشد (۱.۷.۱ را ببینید). همچنین، دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ را از پایین‌کراندار یا کراندار گوییم اگر مجموعهٔ مقادیر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌ترتیب از پایین‌کراندار یا کراندار باشد.

بنابراین، شرط لازم و کافی برای آنکه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار باشد آن است که عددی حقیقی مانند M وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که

$$|s_n| \leqslant M \qquad (n \in I).$$

اگر دنباله‌ای به‌بینهایت (یا منهای بینهایت) واگرا باشد، دنباله کراندار نیست. (تحقیق کنید.) به‌هرحال، دنباله‌ای که به‌بینهایت واگراست باید از پایین‌کراندار باشد. (زیرا، اگر این دنباله جمله‌های منفی داشته باشد، تعداد آنها متناهی است.)

دنبالهٔ نوسانی ممکن است کراندار باشد و ممکن است کراندار نباشد. مثلاً، دنبالهٔ نوسانی $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$ نه از بالاکراندار است و نه از پایین. اما دنبالهٔ نوسانی $1, -1, 1, -1, 1, \dots$ کراندار است. دنبالهٔ نوسانی $1, 2, 1, 3, 1, 4, \dots$، از پایین‌کراندار است ولی از بالاکراندار نیست.

۲.۵.۲ قضیه. اگر دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی همگرا باشد، آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

برهان: فرض کنیم $L = \lim_{n\to\infty} s_n$. پس، برای $\varepsilon = 1$، عدد $N \in I$ هست به‌گونه‌ای که

$$|s_n - L| < 1 \qquad (n \geqslant N).$$

از این نتیجه می‌شود

$$|s_n| < |L| + 1 \qquad (n \geqslant N). \tag{1}$$

(زیرا، $|s_n| = |L + (s_n - L)| \leqslant |L| + |s_n - L|$.)

اگر فرض کنیم $M=\max\{|s_1|,|s_2|,\dots,|s_{N-1}|\}$، آنگاه خواهیم داشت

$$|s_n|<M+|L|+1 \qquad (n\in I).$$

پس، ثابت شد که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

بنابراین، به‌طور خلاصه، همهٔ دنباله‌های همگرا کراندار هستند؛ هیچیك از دنباله‌های واگرا به‌بینهایت (یا منهای بینهایت) کراندار نیستند؛ بعضی از دنباله‌های نوسانی کراندار هستند و بعضی دیگر کراندار نیستند.

تمرینهای ۵.۲

۱. گزارهٔ زیر راست است یا دروغ؟ اگر دنباله‌ای از اعداد مثبت کراندار نباشد، آنگاه آن دنباله به‌بینهایت واگراست.

۲. مثالی از دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بیاورید به گونه‌ای که دنبالهٔ کراندار نباشد ولی $\lim\limits_{n\to\infty} s_n/n=0$.

۳. اگر $\lim\limits_{n\to\infty} s_n/n=L\neq 0$، آنگاه ثابت کنید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار نیست.

۴. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد، و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌صفر همگرا باشد، آنگاه ثابت کنید که $\{s_nt_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌صفر همگراست.

۵. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کراندار باشد، ثابت کنید که برای هر $\varepsilon>0$، بازهٔ بسته‌ای مانند $J\subseteq R$ به‌طول ε هست به‌گونه‌ای که تعدادی نامتناهی از s_n ها در J باشند.

۶.۲ دنباله‌های یکنوا

در بخش پیش دیدیم که دنباله ممکن است کراندار باشد و با وجود این همگرا نباشد. در این بخش، شرطی را بررسی می‌کنیم که اگر با کرانداری همراه باشد، همگرایی دنباله تضمین می‌شود.

۱.۶.۲. تعریف. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر

$$s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant s_{n+1}\leqslant\cdots,$$

آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ را غیر نزولی خوانیم. همچنین، اگر

$$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n\geqslant s_{n+1}\geqslant\cdots,$$

آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ را غیرصعودی نامیم. دنبالهٔ یکنوا دنباله‌ای است که یا غیر صعودی یا غیر نزولی (یا هردو) باشد. دنبالهٔ

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{3}{4},\ 1\frac{7}{8},\ \dots,$$

یا $\{2-1/2^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ غیر نزولی (وکراندار) است. دنبالهٔ $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ غیر نزولی است (وکراندار نیست). این‌دو دنباله مثالهایی برای دوقضیهٔ بعد خواهند بود. قضیهٔ اول (یعنی ۲.۶.۲) از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

۲.۶.۲ قضیه. هر دنبالهٔ غیر نزولی‌که از بالا* کراندار باشد همگر است.

برهان: فرض‌کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای‌غیرنزولی وازبالاکراندارباشد. پس، مجموعهٔ $A=\{s_1, s_2, \ldots\}$ زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی است‌که از بالاکراندار است. بنابر ۴.۷.۱، مجموعهٔ A دارای $\mathrm{l.u.b.}$ است. فرض‌کنیم $M=\mathrm{l.u.b.}\ \{s_1, s_2, \ldots\}$. ثابت می‌کنیم که $s_n \to M$ وقتی $n\to\infty$. فرض‌کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. عدد $M-\varepsilon$ یك‌کران بالای A نیست. پس به ازای یك $N\in I$، $s_N > M-\varepsilon$. اما، $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ غیر نزولی است، پس،

$$s_n \geqslant M-\varepsilon \qquad (n\geqslant N). \tag{1}$$

از طرفی، چون M یك‌کران بالای A است داریم

$$M\geqslant s_n \qquad (n\in I). \tag{2}$$

بنابر (۱) و (۲) داریم

$$|s_n - M| < \varepsilon \qquad (n\geqslant N).$$

پس، ثابت شدکه $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = M$، و این مطلوب ماست.

مثلاً، دنبالهٔ $\{2-1/2^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ به ۲ همگراست.

قضیهٔ ۲.۶.۲ نخستین کاربرد مهم اصل موضوع کوچکترین‌کران بالاست.

قضیهٔ ۲.۶.۲ نخستین‌معیاراست که به‌کمك آن‌می‌توانیم، بدون آنکه‌محتاج به‌حدس‌زدن مقدار حد باشیم، همگرایی دنباله را ثابت‌کنیم. حال، به‌یك‌کاربرد جالب‌قضیه‌توجه‌کنید.

۳.۶.۲ نتیجه. دنبالهٔ $\{(1+1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست.

برهان: فرض‌کنیم $s_n=(1+1/n)^n$. بنابرقضیهٔ دوجمله‌ای

$$s_n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\frac{1}{n^n},$$

برای $k=1, 2, \ldots, n$، جملهٔ $(k+1)$ام سمت راست عبارت است از

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\cdot\frac{1}{n^k}$$

که برابر است با

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \tag{1}$$

* دنبالهٔ غیر نزولی همواره از پایین‌کراندار است (s_1 یك‌کران پایین آن است).

اگر s_{n+1} را بسط دهیم، $n+2$ جمله (یك جمله بیشتر از بسط s_n) به دست می‌آوریم و برای $k=1, 2, \dots, n$، جملهٔ $(k+1)$ام عبارت است از

$$\frac{1}{1\cdot 2 \dots k}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right),$$

که ناکمتر از مقدار (۱) است. از این نتیجه می‌شود که $s_n \leqslant s_{n+1}$ (یعنی، $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ غیر نزولی است). اما،

$$\begin{aligned} s_n &\leqslant 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\dots n} \\ &\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1+\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} < 1+\frac{1}{1-1/2} = 3. \end{aligned}$$

بنابراین، $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا (باکران ۳) کراندار است. در نتیجه، بنابر ۲.۶.۲، $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست.

حد دنبالهٔ فوق را معمولاً با e نشان می‌دهند. یعنی

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (2)$$

از برهان قضیهٔ ۳.۶.۲ نتیجه می‌شود که $2 < e \leqslant 3$. (در واقع، عدد e همان عدد آشنای حساب دیفرانسیل و انتگرال است که عددی متعالی است و بسط دهدهی آن ...۷۱۸ر۲ است.)

می‌دانیم که یك دنبالهٔ همگرا کراندار است (۲.۵.۲). بنابراین، یك دنبالهٔ بی‌کران واگراست. به‌طور شهودی، بدیهی است که دنبالهٔ غیر نزولی نوسان ندارد. از این نتیجه می‌شود که دنبالهٔ غیر نزولی و بی‌کران باید به بینهایت واگرا باشد. حال، این مطلب را اثبات می‌کنیم.

۴.۶.۲ قضیه. دنبالهٔ غیر نزولی که از بالا کراندار نیست به بینهایت واگراست.

برهان: فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای غیر نزولی است که از بالا کراندار نیست. برای هر عدد مثبت M، مقصود یافتن عنصری از I مانند N است به‌گونه‌ای که

$$s_n > M \qquad (n \geqslant N). \qquad (1)$$

حال، چون M کران بالای $\{s_1, s_2, \dots\}$ نیست، عنصری از I مانند N هست که $s_N > M$. با این N، (۱) برقرار است زیرا $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ غیر نزولی است. پس قضیه ثابت شده است.

قضیهٔ زیر عیناً مانند قضایای ۲.۶.۲ و ۴.۶.۲ اثبات می‌شود، کافی است کران بالاها و l.u.b.ها را به ترتیب به‌کران پایینها و g.l.b.ها تبدیل کنیم. تفصیل مطلب را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۵.۶.۲ قضیه. دنبالهٔ غیرصعودی که از پایین کراندار باشد همگرا است و هر دنبالهٔ غیر صعودی که از پایین کراندار نباشد به‌منهای بینهایت واگراست.

۶.۶.۲ این بخش را با نشان‌دادن این مطلب که هر دنباله، زیر دنباله‌های یکنوا دارد، خاتمه می‌دهیم.

قضیه. اگر $S=\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، آنگاه S زیردنباله‌ای یکنوا دارد.

برهان: فرض کنیم T_1 دنبالهٔ S، T_2 دنبالهٔ $s_2, s_3, s_4, \ldots$ و به‌طور کلی برای هر $n\in I$، T_n دنبالهٔ

$$s_n,\ s_{n+1},\ s_{n+2},\ \cdots$$

باشد. برای اثبات قضیه دوحالت تشخیص می‌دهیم.

حالت اول: فرض می‌کنیم هردنبالهٔ T_n دارای بزرگترین‌جمله باشد. فرض‌می‌کنیم s_{n_1} بزرگترین جملهٔ T_1 باشد. (اگر بیش از یك بزرگترین جمله وجود داشته باشد، یکی را به‌دلخواه s_{n_1} می‌نامیم.) سپس، فرض‌می‌کنیم s_{n_2} بزرگترین جملهٔ T_{n_1+1} باشد. بنابراین، $n_2>n_1$ و $s_{n_2}\leqslant s_{n_1}$. همچنین، فرض می‌کنیم s_{n_3} بزرگترین‌جملهٔ T_{n_2+1} باشد. آنگاه، $n_3>n_2$ و $s_{n_3}\leqslant s_{n_2}$. اگر به‌همین‌ترتیب ادامه دهیم می‌توان دنبالهٔ $\{s_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ را ساخت این یك زیردنبالهٔ غیرصعودی S است.

حالت دوم: اگرحالت اول برقرار نباشد، یك $n_1\in I$ هست به‌گونه‌ای که دنبالهٔ T_{n_1} بزرگترین جمله ندارد. چون s_{n_1} یك جملهٔ T_{n_1} است، در T_{n_1} جمله‌ای مانند s_{n_2} وجود دارد که $s_{n_2}\geqslant s_{n_1}$ همچنین، در T_{n_1} جمله‌ای مانند s_{n_3} هست که $s_{n_3}\geqslant s_{n_2}$. به‌علاوه، می‌توانیم s_{n_3} را طوری انتخاب کنیم که $n_3>n_2$ (چرا؟). اگر عمل را به‌همین‌ترتیب ادامه دهیم دنبالهٔ غیر نزولی $\{s_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ که زیردنبالهٔ S است به‌دست می‌آید.

بنابراین؛ در هر دو حالت S دارای زیردنباله‌ای یکنواست، و اثبات کامل است.

تمرینهای ۶.۲

۱. کدام‌یك از دنباله‌های زیر یکنوا هستند؟

(الف) $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ (ب) $\{\tan n\}_{n=1}^{\infty}$

(ج) $\left\{\dfrac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (د) $\{2n+(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

۲. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ غیرنزولی‌واز بالا کراندار باشد، و $L=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$، ثابت کنید که $s_n\leqslant L$.

نظیر تمرین بالا را برای دنبالهٔ غیر صعودی بیان و حل کنید.

۳. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ دو دنبالهٔ غیرنزولی وکراندار باشند، و اگر برای هر $(n\in I)$، $s_n \leqslant t_n$، ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} t_n$.

۴. حد دنبالهٔ $\{n^{-n}(n+1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ را به‌دست آورید.

۵. اگر $s_n = 10^n/n!$، مطلوب است تعیین $n\in I$ به گونه‌ای که $s_{n+1} < s_n (n \geqslant N)$.

۶. اگر $s_n = 1.3.5 \dots (2n-1)/2.4.6\dots 2n$، آنگاه ثابت کنید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست و $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \leqslant 1/2$.

۷. اگر

$$s_n = \frac{2.4.6 \dots 2n}{1.3.5 \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

آنگاه تحقیق کنید که $s_1 > s_2 > s_3$ و ثابت کنید $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ غیرصعودی است.

۸. اگر $s_n = (1+2+\dots+n)/n^2$، ثابت کنید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یکنوا وکراندار است و $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1/2$.

۹. فرض کنید $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، وفرض کنید

$$t_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} \quad (n\in I).$$

اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یکنوا وکراندار باشد، ثابت کنید که $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ نیز یکنوا وکراندار است.

۱۰. فرض کنید

$$t_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (n\in I).$$

(الف) ثابت کنید که $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ غیر نزولی است.

(ب) فقط با به‌کاربردن نتایج به‌دست‌آمده در اثبات ۳.۶.۲، ثابت کنید که $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کراندار است وسپس ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} (1+1/n)^n$.

۱۱. فرض می‌کنیم $\mathscr{L}$ ردهٔ همهٔ دنباله‌های اعداد حقیقی باشد. فرض می‌کنیم $\mathscr{C}$ ردهٔ همهٔ دنباله‌های همگرا و $\mathscr{D}$ ردهٔ همهٔ دنباله‌های واگرا باشد. به‌علاوه، فرض می‌کنیم $\mathscr{D}_P$ و $\mathscr{D}_M$ به‌ترتیب ردهٔ همهٔ دنباله‌هایی باشند که به‌بینهایت ومنهای بینهایت واگرایند. همچنین، فرض می‌کنیم $\mathscr{O}$ ردهٔ دنباله‌های نوسانی باشد. سرانجام، فرض می‌کنیم $\mathscr{B}$ ردهٔ همهٔ دنباله‌های کراندار و $\mathscr{M}$ ردهٔ همهٔ دنباله‌های یکنوا باشند.

با ذکر تعاریف یا قضایای مربوط، گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

(الف) $\mathscr{L} = \mathscr{C} \cup \mathscr{D}$ (ب) $\mathscr{D} = \mathscr{D}_P \cup \mathscr{D}_M \cup \mathscr{O}$ (ج) $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}$

(د) $\mathscr{M} \cap \mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$ (ه) $\mathscr{M} \cap \mathscr{B}' \subseteq \mathscr{D}_P \cup \mathscr{D}_M$ (و) $\mathscr{B} \cap \mathscr{D}_P = \varnothing$.

۷.۲ اعمال روی دنباله‌های همگرا

چون دنباله‌های اعداد حقیقی توابع حقیقی هستند، تعریف مجموع، تفاضل، حاصلضرب، و خارج‌قسمت دنباله‌ها از تعریف ۲.۴.۱ نتیجه‌می‌شود. بنابراین، اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌های اعداد حقیقی باشند، آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}+\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالهٔ $\{s_n+t_n\}_{n=1}^{\infty}$ است، و $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}\cdot\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالهٔ $\{s_n\cdot t_n\}_{n=1}^{\infty}$ است، وغیره. همچنین، اگر $c\in R$، آنگاه $c\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یعنی دنبالهٔ $\{c\,s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

بنابرقضیهٔ زیر، مجموع دو دنبالهٔ همگرا، همگراست.

۱.۷.۲. قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌های اعداد حقیقی باشند. اگر $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=L$، و اگر $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=M$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n+t_n)=L+M$. به‌عبارت دیگر، حد مجموع (دو دنبالهٔ همگرا) برابر است با مجموع حدود.

برهان: برای هر $\varepsilon>0$ مفروض باید عنصری از I مانند N به‌دست آوریم به‌گونه‌ای که

$$|(s_n+t_n)-(L+M)|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N). \tag{۱}$$

اما

$$|(s_n+t_n)-(L+M)|=|(s_n-L)+(t_n-M)|\leqslant|s_n-L|+|t_n-M|.$$

پس، برای برقراری (۱) کافی است

$$|s_n-L|+|t_n-M|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N). \tag{۲}$$

برقرار باشد. سعی می‌کنیم n را به‌قدری بزرگ بگیریم که $|s_n-L|$ و $|t_n-M|$ هریک از $\varepsilon/2$ کوچکتر شوند. چون $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=L$، $N_1\in I$ وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$|s_n-L|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (n\geqslant N_1).$$

همچنین، چون $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=M$، $N_2\in I$ وجود دارد که

$$|t_n-M|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (n\geqslant N_2).$$

پس، اگر فرض کنیم $N=\max(N_1, N_2)$، آنگاه

$$|s_n-L|<\frac{\varepsilon}{2},\ |t_n-M|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (n\geqslant N).$$

پس، با انتخاب این N، (۲) و درنتیجه (۱) برقرار است وبرهان کامل است.

اثبات قضیهٔ بعدی آسانتر است.

۲.۷.۲.قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر $c\in R$، و اگر $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} cs_n = cL$.

برهان: اگر $c=0$ اثبات بدیهی است. پس فرض می‌کنیم $c\neq 0$. اگر ε عددمثبت دلخواهی باشد، باید $N\in I$ را به‌گونه‌ای بیابیم که

$$|cs_n - cL| < \varepsilon \qquad (n\geqslant N). \tag{1}$$

حال، چون $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$، Nی هست که

$$|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{|c|} \qquad (n\geqslant N).$$

یا

$$|c|\cdot|s_n - L| < \varepsilon \qquad (n\geqslant N),$$

که هم‌ارز با (۱) است.

قضیهٔ ۲.۷.۲ درقضیهٔ مفید زیر به‌کار می‌رود.

۳.۷.۲.قضیه. (الف) اگر $0<x<1$، آنگاه $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌صفر همگراست.
(ب) اگر $1<x<\infty$، آنگاه $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌بینهایت واگراست.

برهان: (الف) چون $0<x<1$، $x^{n+1}=x\cdot x^n < x^n$. پس، $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ غیرصعودی است، وچون همواره $0<x^n$، $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ از پایین کراندار است. لذا، بنا بر ۵.۶.۲، $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست. فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = L$. بنا بر ۲.۷.۲ (با $c=x$) داریم $\lim\limits_{n\to\infty} x\cdot x^n = xL$. یعنی، $\{x^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ به xL همگراست. اما $\{x^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ زیردنبالهٔ $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ است: پس، بنا بر ۴.۳.۲، $L=xL$ و بنابراین $L(1-x)=0$، چون $x\neq 1$، $L=0$، و اثبات (الف) تمام است.

(ب) اگر $x>1$، آنگاه $x^{n+1}=x\cdot x^n > x^n$، پس $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ غیرنزولی است. نشان می‌دهیم که $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کراندار نیست. زیرا اگر $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کراندار باشد، آنگاه بنا بر ۲.۶.۲، $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ به عددی مانند $L\in R$ همگرا می‌شود. اما با همان استدلال که در (الف) ارائه‌شد، دیده می‌شود که $L=Lx$؛ و از آنجا $L=0=\lim\limits_{n\to\infty} x^n$. اما، همواره $x^n\geqslant 1$ و آشکار است که $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ نمی‌تواند به 0 همگرا باشد. از این تناقض نتیجه می‌شود که $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کراندار نیست. حال از ۴.۶.۲، نتیجهٔ (ب) حاصل می‌شود.

حال، به‌بررسی حد تفاضل دو دنباله می‌پردازیم.

۴.۷.۲.قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌های اعداد حقیقی باشند. اگر $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ و $\lim_{n\to\infty} t_n = M$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = L - M$.

برهان: چون $\lim_{n\to\infty} t_n = M$، از ۲.۷.۲ (با $c = -1$) نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty}(-t_n) = -M$. اما بنا بر ۱.۷.۲،

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = \lim_{n\to\infty}[s_n + (-t_n)] = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty}(-t_n) =$$
$$L + (-M) = L - M,$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

مطلب زیر یك نتیجهٔ مهم ۴.۷.۲ و ۲.۲.۲ است.

۵.۷.۲.نتیجه. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌های همگرای اعداد حقیقی باشند. اگر $s_n \leqslant t_n \ (n\in I)$، و اگر $\lim_{n\to\infty} s_n = L$، $\lim_{n\to\infty} t_n = M$ آنگاه $L \leqslant M$.

برهان: بنا بر ۴.۷.۲، $M - L = \lim_{n\to\infty}(t_n - s_n)$. اما $t_n - s_n \geqslant 0 \ (n\in I)$. پس، بنا بر ۲.۲.۲، $M - L \geqslant 0$، و از این نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

البته، حتی اگر برای تعدادی متناهی n، $s_n > t_n$، باز هم نتیجهٔ فوق برقرار است. حال، نشان می‌دهیم که حد حاصلضرب دو دنبالهٔ همگرا برابر است با حاصلضرب حدهای آنها. دو دلیل برای این نتیجه می‌آوریم. در هریك از این برهانها روشی به‌کار می‌رود که در بسیاری از موارد دیگر مفید است. اثبات اول به‌یك لم احتیاج دارد.

۶.۷.۲.لم. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که به L همگراست، آنگاه $\{s_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ به L^2 همگراست.

برهان: باید ثابت کنیم که $\lim_{n\to\infty} s_n^2 = L^2$. یعنی، برای $\varepsilon > 0$ مفروض، عددی مانند $N\in I$ بیابیم به‌گونه‌ای که

$$|s_n^2 - L^2| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N),$$

یا هم‌ارز آن

$$|s_n - L|\cdot|s_n + L| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N). \tag{1}$$

حال، بنا بر ۲.۵.۲، $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است. بنابراین، یك M مثبت هست که

$$|s_n| \leqslant M \qquad (n\in I),$$

و از آنجا،

$$|s_n + L| \leqslant |s_n| + |L| \leqslant M + |L| \qquad (n\in I). \tag{2}$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$، عدد $N\in I$ هست که

$$|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{M+|L|} \qquad (n \geqslant N). \tag{۳}$$

سپس، بنا بر (۲) و (۳)،

$$|s_n - L|\cdot|s_n + L| < \frac{\varepsilon}{M+|L|}\cdot(M+|L|) = \varepsilon \qquad (n\geqslant N).$$

پس، برای این N، (۱) برقرار است و برهان کامل است.

۷.۷.۲. قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند. اگر $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$ و اگر $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = M$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} s_n t_n = LM$.

برهان اول: اتحاد زیر را به‌کار می بریم

$$ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2] \qquad (a,b\in R). \tag{۱}$$

حال، وقتی $n\to\infty$،

$$\begin{aligned} s_n + t_n &\to L+M && (\text{بنا بر } ۱.۷.۲), \\ (s_n+t_n)^2 &\to (L+M)^2 && (\text{بنا بر } ۶.۷.۲), \end{aligned} \tag{۲}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} s_n - t_n &\to L-M && (\text{بنا بر } ۴.۷.۲), \\ (s_n-t_n)^2 &\to (L-M)^2 && (\text{بنا بر } ۶.۷.۲). \end{aligned} \tag{۳}$$

از (۲)، (۳)، و ۴.۷.۲،

$$(s_n+t_n)^2 - (s_n-t_n)^2 \to (L+M)^2 - (L-M)^2 = 4LM. \tag{۴}$$

سرانجام، با استفاده از (۱)، (۴)، و ۲.۷.۲،

$$s_n t_n = \frac{1}{4}[(s_n+t_n)^2 - (s_n-t_n)^2] \to \frac{1}{4}(4LM) = LM.$$

ملاحظه کنید که در این اثبات هیچ از ε استفاده نشده است. روش استفاده از (۱) درعمل حاصلضرب را قطبی کردن نامند.

برهان دوم: برای $\varepsilon > 0$ مفروض، باید عدد $N\in I$ را به گونه‌ای بیابیم که

$$|s_n t_n - LM| < \varepsilon \qquad (n\geqslant N). \tag{۱}$$

در اینجا مسأله این است که عملی جبری انجام دهیم [همان‌طوری که برای رفتن از (۱) به (۲) در ۱.۷.۲ انجام دادیم] به‌گونه‌ای که بتوانیم از مفروضات $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ و $\lim_{n\to\infty} t_n = M$ استفاده کنیم. این حیلهٔ افزودن و کم کردن یک مقدار (در اینجا Lt_n) در این کتاب به‌دفعات به‌کار خواهد رفت. داریم

$$s_n t_n - LM = s_n t_n - Lt_n + Lt_n - LM = t_n(s_n - L) + L(t_n - M),$$
$$|s_n t_n - LM| \leqslant |t_n|\ |s_n - L| + |L|\ |t_n - M|.$$

بنابراین، مسلماً (۱) برقرار خواهد بود، اگر

$$|t_n|\ |s_n - L| + |L|\ |t_n - M| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N). \tag{۲}$$

بنابر ۲.۵.۲، $\{t_n\}_{n=۱}^{\infty}$ کراندار است، بنابراین، عددمثبتی مانند Q هست که $|t_n| \leqslant Q (n \in I)$. سپس، به‌طور یقین (۲) برقرار است اگر

$$Q|s_n - L| + |L|\cdot|t_n - M| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N). \tag{۳}$$

بنابراین، اگر $N_۱ \in I$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که

$$Q|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (n \geqslant N_۱),$$

و $N_۲ \in I$ را طوری انتخاب کنیم که

$$|L|\ |t_n - M| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (n \geqslant N_۲),$$

آنگاه برای $N = \max(N_۱, N_۲)$ نامساوی (۳) برقرار خواهد بود. ازاین‌رو، (۲) و سرانجام (۱) برای این N برقرار خواهند بود، وکار اثبات تمام است.

حال، توجه خود را به خارج قسمت دو دنبالهٔ همگرا معطوف می‌کنیم.

۸.۷.۲ لم. فرض می‌کنیم $\{t_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر $\lim_{n\to\infty} t_n = M$ که در آن $M \neq ۰$، آنگاه*، $\lim_{n\to\infty} (۱/t_n) = ۱/M$.

برهان: یا $M > ۰$ یا $M < ۰$. لم را برای حالت $M > ۰$ ثابت می‌کنیم. (برای حالت $M < ۰$ می‌توان دنبالهٔ $\{-t_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را، که حد آن مثبت است، درنظر گرفت.) پس، فرض می‌کنیم $M > ۰$. برای $\varepsilon > ۰$ مفروض باید $N \in I$ را بیابیم به‌گونه‌ای که

---

* از فرض $M \neq ۰$ نتیجه می‌شود که تنها تعدادی متناهی از t_nها می‌توانند برابر صفر باشند. بنابراین، $1/t_n$ برای تمام مقادیر n، بجز تعدادی حداکثر متناهی، تعریف شده است.

$$\left|\frac{۱}{t_n}-\frac{۱}{M}\right|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N),$$

یا

$$\frac{|t_n-M|}{|t_nM|}<\varepsilon \qquad (n\geqslant N). \qquad (۱)$$

حال، عدد $N_۱\in I$ هست که

$$|t_n-M|<\frac{M}{۲} \qquad (n\geqslant N_۱).$$

از نامساوی فوق نتیجه می‌شود که

$$t_n>\frac{M}{۲} \qquad (n\geqslant N_۱).$$

به‌علاوه، عدد $N_۲\in I$ وجود دارد که

$$|t_n-M|<\frac{M^۲\varepsilon}{۲} \qquad (n\geqslant N_۲).$$

بنابراین، اگر $N=\max(N_۱, N_۲)$، برای همهٔ nهای $n\geqslant N$ داریم

$$\frac{|t_n-M|}{|t_nM|}=\frac{۱}{|t_nM|}\cdot|t_n-M|<\frac{۱}{M^۲/۲}\cdot\frac{M^۲\varepsilon}{۲}=\varepsilon.$$

درنتیجه (۱) برای این N برقرار است. پس اثبات کامل است.

۹.۷.۲ قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند. اگر $\lim_{n\to\infty} s_n=L$، اگر $\lim_{n\to\infty} t_n=M$ و $M\neq ۰$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}(s_n/t_n)=L/M$.

برهان: بنابر ۸.۷.۲ و ۷.۷.۲ داریم

$$\lim_{n\to\infty} s_n\cdot\frac{۱}{t_n}=L\cdot\frac{۱}{M},$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۰.۷.۲ در بخش ۹.۱، مستقیماً از روی تعریف حد ثابت کردیم که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲n}{n+۴n^{۱/۲}}=۲.$$

حال، نظیر همین مسأله را با به‌کار بردن نتایج این بخش حل می‌کنیم.

مسأله: ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۳n^۲-۶n}{۵n^۲+۴}=\frac{۳}{۵}.$$

ابتدا می‌نویسیم

$$\frac{۳n^۲-۶n}{۵n^۲+۴}=\frac{۳-۶/n}{۵+۴/n^۲}.$$

در بخش ۹.۱ ثابت کردیم که $\lim_{n\to\infty}(۱/n)=۰$. پس، بنا بر ۲.۷.۲، $\lim_{n\to\infty}۶/n=۶\times ۰=۰$.
همچنین، در ۹.۱ ثابت کردیم که $\lim_{n\to\infty}۱=۱$. پس، بنا بر ۲.۷.۲، $\lim_{n\to\infty}۳=۳$. بنا براین،

$$\lim_{n\to\infty}\left(۳-\frac{۶}{n}\right)=۳-۰=۳ \qquad \text{(بنا بر ۴.۷.۲)} \qquad (۱)$$

چون می‌دانیم که $\lim_{n\to\infty}(۱/n)=۰$، داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۰\times ۰=۰ \qquad \text{(بنا بر ۷.۷.۲)}$$

پس، بنا بر ۲.۷.۲، $\lim_{n\to\infty}۴/n^۲=۰$. با استدلال مشابه، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty}\left(۵+\frac{۴}{n^۲}\right)=۵+۰=۵ \qquad \text{(بنا بر ۱.۷.۲)} \qquad (۲)$$

سپس، بنا بر (۱)، (۲)، و ۹.۷.۲،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۳-۶/n}{۵+۴/n^۲}=\frac{\lim_{n\to\infty}(۳-۶/n)}{\lim_{n\to\infty}(۵+۴/n^۲)}=\frac{۳}{۵}.$$

این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تمرینهای ۷.۲

۱. ثابت کنید که

(الف) $\lim_{n\to\infty}\frac{۲n^۳+۵n}{۴n^۳+n^۲}=\frac{۱}{۲}$ (ب) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{(n-۷)^۲-۶}=۱$

۲. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به ۱ همگرا باشد، ثابت کنید که $\{s_n^{1/2}\}_{n=1}^{\infty}$ به ۱ همگراست.

۳. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ را حساب کنید.

۴. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد و $0<x<1$. اگر $s_{n+1}<xs_n\,(n\in I)$، ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.

۵. اگر

$$\lim_{n\to\infty} (s_n-1)/(s_n+1)=0$$

ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. [راهنمایی: فرض کنید $\varepsilon_n=(s_n-1)/(s_n+1)$، سپس s_n را برحسب ε_n به‌دست آورید.] کدام‌یك از قضایای این بخش را به‌کار برده‌اید؟

۶. ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^{n+1}=e$. همچنین، ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} [1+1/(n+1)]^n=e$. کدام‌یك از قضایای این بخش را به‌کار برده‌اید؟

۷. با استفاده از اتحاد $1+2/n=(1+1/n)[1+1/(n+1)]$، ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} (1+2/n)^n=e^2$.

۸. اگر $c>1$، ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} c^{1/n}=1$. [راهنمایی: بنویسید $c^{1/n}=1+s_n$ وطرفین را به‌توان n برسانید، نشان‌دهید که $\{ns_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است. سپس نتیجه بگیرید $s_n\to 0$ وقتی $n\to\infty$.]

۹. فرض کنید

$$s_1=\sqrt{2},\ s_{n+1}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{s_n}\qquad (n\geqslant 1).$$

(الف) با روش استقرا ثابت کنید که برای هر n، $s_n\leqslant 2$.

(ب) ثابت کنید که برای هر n، $s_{n+1}\geqslant s_n$.

(ج) ثابت کنید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست،

(د) ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} s_n=2$.

۱۰. فرض کنید $s_1>s_2>0$، و

$$s_{n+1}=\frac{1}{2}(s_n+s_{n-1})\qquad (n\geqslant 2).$$

ثابت کنید که

(الف) دنبالهٔ زیر غیر صعودی است

$$s_1,\ s_3,\ s_5,\ \cdots.$$

(ب) دنبالهٔ $s_2, s_4, s_6, \ldots$ غیر نزولی است.

(ج) $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست.

۱۱. اگر برای هر $n\in I$، $r_n\leqslant s_n\leqslant t_n$، و اگر دو دنبالهٔ $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ به s همگرا باشند، ثابت کنید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به s همگرا است.

۸.۲ اعمال روی دنباله‌های واگرا

در بخش پیش دیدیم که مجموع، تفاضل، حاصلضرب، و خارج قسمت (اگر تعریف شده باشد) دنباله‌های همگرا باز هم همگرا هستند. نظیر چنین حکمی درحالت کلی در مورد دنباله‌های واگرا برقرار نیست. در واقع، اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ واگرا باشد، آنگاه $\{-s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نیز واگراست، وآشکارا، مجموع این دو دنباله واگرا نیست. به‌علاوه، حاصلضرب دنبالهٔ واگرای $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ در خودش واگرا نیست.

با وجود این، در مورد دنباله‌های واگرا به بینهایت، چند نتیجهٔ مثبت می‌توان ثابت کرد.

۱.۸.۲. قضیه. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند که به بینهایت واگرایند، آنگاه مجموع و حاصلضرب آنها نیز به بینهایت واگرا هستند. یعنی، $\{s_n+t_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{s_nt_n\}_{n=1}^{\infty}$ به بینهایت واگرا هستند.

برهان: برای $M>0$ مفروض، عدد $N_1\in I$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$s_n>M \qquad (n\geqslant N_1),$$

وعدد $N_2\in I$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$t_n>1 \qquad (n\geqslant N_2).$$

(مطالب بالا امکان دارند زیرا وقتی $n\to\infty$، آنگاه $s_n\to\infty$ و $t_n\to\infty$.) سپس، برای $N=\max(N_1, N_2)$ داریم

$$s_n+t_n>M+1>M \qquad (n\geqslant N),$$

و

$$s_nt_n>M\cdot 1=M \qquad (n\geqslant N).$$

چون M عدد مثبت دلخواهی است قضیه ثابت شده است.

۲.۸.۲. قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌های اعداد حقیقی باشند. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌بینهایت واگرا باشد و اگر $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار باشد، آنگاه $\{s_n+t_n\}_{n=1}^{\infty}$ به بینهایت واگراست.

برهان: بنا به‌فرض، عددی مانند $Q>0$ هست به‌گونه‌ای که

$$|t_n|\leqslant Q \qquad (n\in I).$$

برای $M>0$ مفروض، عدد $N\in I$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$s_n > M+Q \qquad (n \geqslant N).$$

سپس، برای همهٔ nهای $n \geqslant N$ داریم

$$s_n + t_n > s_n - |t_n| > (M+Q) - Q = M.$$

یعنی،

$$s_n + t_n > M \qquad (n \geqslant N),$$

که نشان می‌دهد $s_n + t_n \to \infty$ وقتی $n \to \infty$.

۳.۸.۲. نتیجه. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌بینهایت واگرا باشد و اگر $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد، آنگاه $\{s_n + t_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌بینهایت واگراست.

برهان: برهان نتیجهٔ مستقیم ۲.۵.۲ و ۲.۸.۲ است.

به‌سادگی می‌توان نشان داد که ۱.۸.۲، ۲.۸.۲، ۳.۸.۲ برقرار می‌مانند اگر به‌جای «بینهایت»، «منهای بینهایت» بگذاریم.

۴.۸.۲. تقریباً هر نوع دنباله‌ای را می‌توان از جمع دو دنبالهٔ نوسانی مناسب به‌دست آورد.

مثلاً، مجموع دو دنبالهٔ نوسانی ...,۳,۰ ,۲ ,۰ ,۱ ,۰ و ... ,۰ ,۳ ,۰ ,۲ ,۰ ,۱ دنبالهٔ ... ,۳ ,۳ ,۲ ,۲ ,۱ ,۱ است که به‌بینهایت واگراست. مجموع دنباله‌های نوسانی ...,۰,۱,۰ ,۱ ,۰ ,۱ و ... ,۱ ,۰ ,۱ ,۰,۱,۰ یك دنبالهٔ همگراست. مجموع یك دنبالهٔ نوسانی با خودش دنباله‌ای نوسانی است.

تمرینهای ۸.۲

۱. مثالی از دنباله‌های $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ بیاورید به‌گونه‌ای که وقتی $n \to \infty$،

(الف) $s_n \to \infty,\ t_n \to -\infty,\ s_n + t_n \to \infty,$

(ب) $s_n \to \infty,\ t_n \to \infty,\quad s_n - t_n \to ۷.$

۲. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای واگرا از اعداد حقیقی و c یك عدد حقیقی غیرصفر باشد. ثابت کنید که $\{cs_n\}_{n=1}^{\infty}$ واگراست.

۳. گزارهٔ زیر راست است یا دروغ؟ اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نوسانی باشد وکراندار نباشد، و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار باشد، آنگاه $\{s_n + t_n\}_{n=1}^{\infty}$ نوسانی است وکراندار نیست.

۹.۲ حد بالا و حد پایین

اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای همگرا باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ اندازهٔ تقریبی «مقدار s_n به‌ازای

مقادیر بزرگ n است.» البته، $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ مفهومی است که تنها مربوط به دنباله‌های همگراست. در ارتباط با این موضوع، دراین بخش مفاهیم حد بالا و حد پایین را معرفی می‌کنیم. این مفاهیم‌را می‌توان درمورد تمام دنباله‌ها به‌کار برد. به‌اجمال حد بالای دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌طور تقریب «اندازهٔ بزرگی s_n را وقتی n بزرگ است» نشان می‌دهد و حد پایین $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌طور تقریب «اندازهٔ کوچکی s_n را وقتی n بزرگ است» نشان می‌دهد. اگر $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ وجود داشته باشد، به‌نظر می‌رسد که حد، حدبالا، و حدپایین $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ همه باهم مساوی باشند، خواهیم دید که چنین است. به‌هرحال، کاربرد واقعی حد پایین و حدبالا در مورد دنباله‌هایی است که نمی‌دانیم همگرایند.

۲.۹.۱. ابتدا دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ را که از بالاکراندار است در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم

$$s_n \leqslant M \qquad (n\in I).$$

آنگاه به‌ازای n مفروض، مجموعهٔ $\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots\}$ آشکارا ازبالاکراندار است، وبنابراین، دارای کوچکترین کران بالاست (۱.۷.۴). فرض کنیم

$$M_n = \mathrm{l.u.b.}\ \{s_n,\ s_{n+1},\ s_{n+2},\ \dots\}. \tag{۱}$$

به‌علاوه، به‌آسانی می‌توان دید که $M_n \geqslant M_{n+1}$، زیرا $M_{n+1} = \mathrm{l.u.b.}\{s_{n+1}, s_{n+2}, \dots\}$ کوچکترین کران بالای زیرمجموعه‌ای از $\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots\}$ است. بنابراین، $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ غیرصعودی است و از این‌رو، یا همگراست و یا به منهای بینهایت واگراست.

تعریف. فرض می‌کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که از بالاکراندار است، و فرض می‌کنیم

$$M_n = \mathrm{l.u.b.}\{s_n,\ s_{n+1},\ s_{n+2},\ \dots\}.$$

(الف) اگر $\{M_n\}$ همگرا باشد، آنگاه $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n$ را $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$ تعریف می‌کنیم.

(ب) اگر $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ به منهای بینهایت واگرا باشد می‌نویسیم

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = -\infty.$$

مثلا، اگر $s_n = (-1)^n$، آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کراندار است. در این حالت، برای هر $n\in I$، $M_n = 1$ وازاین‌رو $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 1$. بنابراین، $\limsup\limits_{n\to\infty}(-1)^n = 1$.

حال، دنبالهٔ $1, -1, 1, -2, 1, -3, 1, -4, \dots$ را در نظر می‌گیریم. باز هم برای هر n، $M_n = 1$، وبنابراین حد بالای این دنباله ۱ است.

مثالی دیگر، اگر $s_n = -n$، $n\in I$، آنگاه

$$M_n = \mathrm{l.u.b.}\{-n,\ -n-1,\ -n-2,\ \dots\} = -n.$$

از این‌رو $M_n\to-\infty$ وقتی $n\to\infty$، وبنابراین $\limsup\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$.

۲.۹.۲. تعریف. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که از بالا کراندار نیست، می‌نویسیم $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n=\infty$. آشکار است که $\limsup\limits_{n\to\infty} n=\infty$.

در این مرحله، برخواننده است که گزاره‌های زیر را بررسی واثبات کند. (۱) اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای باشدکه از بالاکراندار است و دارای زیردنباله‌ای باشد که A یك کران پایین آن باشد، آنگاه $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n\geqslant A$؛ (۲) اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای که‌از پایین کراندار باشد نداشته باشد، آنگاه $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n=-\infty$.

توجه داریم که با تغییردادن تعدادی متناهی از جمله‌های دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ مقدار $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n$ تغییر نمی‌کند. بنابراین، حد بالای دنبالهٔ $10^{100}, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ مساوی ۱ است.

۳.۹.۲. قضیه. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای همگرا از اعداد حقیقی باشد، آنگاه

$$\limsup_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} s_n.$$

برهان: فرض کنیم $L=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. آنگاه برای عددمثبت دلخواه ε، عدد $N\in I$ هست که

$$|s_n-L|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N),$$

یا

$$L-\varepsilon<s_n<L+\varepsilon \qquad (n\geqslant N).$$

بنابراین، اگر $n\geqslant N$، آنگاه $L+\varepsilon$ یك کران بالا برای $\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots\}$ است و $L-\varepsilon$ یك کران بالا نیست. از این‌رو،

$$L-\varepsilon<M_n=\text{l.u.b.}\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots\}\leqslant L+\varepsilon,$$

ولذا، بنابر ۵.۷.۲،

$$L-\varepsilon\leqslant \lim_{n\to\infty} M_n\leqslant L+\varepsilon$$

اما، $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=\limsup\limits_{n\to\infty} s_n$. پس،

$$L-\varepsilon\leqslant\limsup_{n\to\infty} s_n\leqslant L+\varepsilon$$

چون ε دلخواه است، از نامساوی فوق نتیجه می‌شود که $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n=L$، و این‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. توجه کنید که از تمرین ۲ در بخش ۲.۲ استفاده

کرده‌ایم.

حال، حد پایین را تعریف می‌کنیم.

۴.۹.۲ اگر دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی از پایین کراندار باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots\}$ دارای بزرگترین کران پایین است. اگر فرض کنیم

$$m_n = \text{g.l.b.}\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots\},$$

آنگاه $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای غیر نزولی است (تحقیق کنید)، و بنابراین یا همگرا و یا به بینهایت واگرا است.

تعریف. فرض می‌کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که از پایین کراندار است، و فرض می‌کنیم $m_n = \text{g.l.b.}\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots\}$.

(الف) اگر $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد، $\lim\limits_{n\to\infty} \inf s_n$ را $\lim\limits_{n\to\infty} m_n$ تعریف می‌کنیم.

(ب) اگر $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ به بینهایت واگرا باشد، می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} \inf s_n = \infty$

۵.۹.۲ تعریف. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که از پایین کراندار نیست، می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} \inf s_n = -\infty$. بنابراین، $\lim\limits_{n\to\infty} \inf (-1)^n = -1$، $\lim\limits_{n\to\infty} \inf n = \infty$، $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(-n) = -\infty$. در دنبالهٔ $1, -1, 1, -2, 1, -3, 1, -4, \ldots$ حد پایین $-\infty$ است.

۶.۹.۲ قضیه. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای همگرا از اعداد حقیقی باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \inf s_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

برهان: اثبات این قضیه خیلی شبیه به اثبات ۳.۹.۲ است و لذا حذف می‌شود.

۷.۹.۲ اگر برای نمادهای $-\infty$, ∞ قرارداد کنیم که

$$\begin{cases} -\infty < x & (x \in R), \\ \quad x < \infty & (x \in R), \\ -\infty < \infty, \end{cases} \tag{1}$$

آنگاه اثبات قضیهٔ زیر آسان است.

قضیه. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \inf s_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup s_n \tag{2}$$

برهان: اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار باشد، آنگاه

$$m_n = \text{g.l.b.}\{s_n,\ s_{n+1},\ s_{n+2},\ \cdots\} \leqslant \text{l.u.b.}\ \{s_n,\ s_{n+1},\ s_{n+2},\ \cdots\} = M_n.$$

ازاین‌رو، $m_n \leqslant M_n$ و لذا، بنابر ۵.۷.۲، نامساوی (۲) برقرار است. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار نباشد، آنگاه یا $\limsup_{n\to\infty} s_n = \infty$ یا $\liminf_{n\to\infty} s_n = -\infty$ و (۲) از (۱) نتیجه می‌شود.

از ۳.۹.۲ و ۶.۹.۲ می‌بینیم که اگر $\lim_{n\to\infty} s_n = L$، آنگاه

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = L.$$

حال، به‌اثبات عکس این گزاره می‌پردازیم.

۸.۹.۲. قضیه. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، و اگر $\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = L$، $L \in R$ آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست و $\lim_{n\to\infty} s_n = L$.

برهان: بنابر فرض داریم

$$L = \limsup_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \text{l.u.b.}\{s_n, s_{n+1},\ s_{n+2},\ \cdots\}.$$

از این‌رو، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، آنگاه عدد $N_1 \in I$ هست به‌گونه‌ای که

$$|\text{l.u.b.}\{s_n,\ s_{n+1},\ s_{n+2},\ \cdots\} - L| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N_1).$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود که

$$s_n < L + \varepsilon \qquad (n \geqslant N_1). \tag{1}$$

به‌همین‌ترتیب، چون $\liminf_{n\to\infty} s_n = L$، عدد $N_2 \in I$ هست به‌گونه‌ای که

$$|\text{g.l.b.}\ \{s_n,\ s_{n+1},\ s_{n+2},\ \cdots\} - L| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N_2),$$

و از این نتیجه می‌شود

$$s_n > L - \varepsilon \qquad (n \geqslant N_2). \tag{2}$$

اگر $N = \max(N_1,\ N_2)$، آنگاه از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$|s_n - L| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N).$$

ازآنجا ثابت‌می‌شود که $\lim_{n\to\infty} s_n = L$.

مشابه نتیجهٔ فوق برای دنباله‌های واگرا به‌بینهایت نیز وجود دارد.

۹.۹.۲. قضیه. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد و اگر $\liminf_{n\to\infty} s_n = \limsup_{n\to\infty} s_n = \infty$، آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌بینهایت واگراست.

برهان: چون $\liminf_{n\to\infty} s_n = \infty$، برای عدد دلخواه $M > 0$، عدد $N \in I$ هست که

$$\text{g.l.b.}\ \{s_n,\ s_{n+1},\ s_{n+2},\ \cdots\} > M \quad (n \geqslant N).$$

از این نتیجه می‌شود که M یك کران پایین (و نه .g.l.b) دنبالهٔ $\{s_n, s_{n+1}, \ldots\}$ است. بنابراین،

$$s_n > M \qquad (n \geqslant N).$$

و این نتیجهٔ مطلوب را به‌دست می‌دهد.

مشابه ۹.۹.۲ درمورد دنباله‌هایی که به‌منهای بینهایت واگرا هستند نیز وجود دارد. برخواننده است که‌آن‌را بیان و اثبات کند. تمرین ۴ در این بخش عکس ۹.۹.۲ است.

حال، به‌اثبات نتیجه‌ای برای حد بالا که نظیر ۵.۷.۲ است می‌پردازیم.

۱۰.۹.۲. قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ دنباله‌هایی کراندار از اعداد حقیقی باشند. اگر $s_n \leqslant t_n (n \in I)$، آنگاه

$$\liminf_{n \to \infty} s_n \leqslant \liminf_{n \to \infty} t_n \quad \text{و} \quad \limsup_{n \to \infty} s_n \leqslant \limsup_{n \to \infty} t_n$$

برهان: از فرض $s_n \leqslant t_n$ آشکار است که

$$\text{l.u.b.}\{s_n, s_{n+1}, \ldots\} \leqslant \text{l.u.b.}\{t_n, t_{n+1}, \ldots\},$$
$$\text{g.l.b.}\{s_n, s_{n+1}, \ldots\} \leqslant \text{g.l.b.}\{t_n, t_{n+1}, \ldots\}.$$

(آیا می‌توانید این را ثابت کنید؟) اگر وقتی $n \to \infty$، از دو طرف نامساویهای بالا حد بگیریم و ۵.۷.۲ را به‌کار بریم قضیه ثابت می‌شود.

درقضیهٔ ۱۰.۹.۲، حتی اگر برای تعدادی‌متناهی n، $s_n > t_n$، بازهم قضیه برقرار است.

رابطهٔ زیرحتی برای دنباله‌های کراندار $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ همواره برقرار نیست.

$$\limsup_{n \to \infty} (s_n + t_n) = \limsup_{n \to \infty} s_n + \limsup_{n \to \infty} t_n.$$

مثلا، اگر $s_n = (-1)^n (n \in I)$ و $t_n = (-1)^{n+1} (n \in I)$، آنگاه $s_n + t_n = 0 (n \in I)$. در این مثال $\limsup_{n \to \infty} t_n = 1 = \limsup_{n \to \infty} s_n$، و $\limsup_{n \to \infty} (s_n + t_n) = 0$. ولی، نامساویهای مهمی وجود دارند که ثابت می‌کنیم.

۱۱.۹.۲. قضیه. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌های کراندار از اعداد حقیقی‌باشند، آنگاه

$$\text{(الف)} \quad \limsup_{n \to \infty} (s_n + t_n) \leqslant \limsup_{n \to \infty} s_n + \limsup_{n \to \infty} t_n,$$
$$\text{(ب)} \quad \liminf_{n \to \infty} (s_n + t_n) \geqslant \liminf_{n \to \infty} s_n + \liminf_{n \to \infty} t_n.$$

برهان: (الف) فرض کنیم $M_n = \text{l.u.b.}\{s_n, s_{n+1}, \ldots\}$، $P_n = \text{l.u.b.}\{t_n, t_{n+1}, \ldots\}$. پس، $s_k \leqslant M_n (k \geqslant n)$ و $t_k \leqslant P_n (k \geqslant n)$، و بنابراین، $s_k + t_k \leqslant M_n + P_n (k \geqslant n)$.

از این‌رو M_n+P_n یك کران بالای $\{s_n+t_n,\ s_{n+1}+t_{n+1},\ s_{n+2}+t_{n+2},\ \cdots\}$است، ودر نتیجه $\text{l.u.b.}\{s_n+t_n,\ s_{n+1}+t_{n+1},\ \cdots\}\leqslant M_n+P_n$. پس، بنا بر ۵.۷.۲و۱.۷.۲،

$$\lim_{n\to\infty}\text{l.u.b.}\{s_n+t_n,\ s_{n+1}+t_{n+1},\ \cdots\}\leqslant\lim_{n\to\infty}(M_n+P_n)=$$
$$\lim_{n\to\infty}M_n+\lim_{n\to\infty}P_n,$$

یا

$$\limsup_{n\to\infty}(s_n+t_n)\leqslant\limsup_{n\to\infty}s_n+\limsup_{n\to\infty}t_n,$$

که این دقیقاً همان (الف) است. اثبات (ب) شبیه اثبات (الف) است و به‌خواننده‌واگذار می‌شود. [ملاحظه کنید که جهت نامساویها در (الف) و (ب) عکس یکدیگرند.]

راههای دیگری برای تعریف حد بالا وحد پایین وجود دارند. قضیهٔ زیر یکی از این راهها را مشخص می‌کند.

۱۲.۹.۲ قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد.

۱. اگر $\limsup_{n\to\infty}s_n=M$، آنگاه‌به‌ازای‌هر $\varepsilon>0$. (الف): به‌ازای‌همهٔ‌مقادیر n، احیاناً جز تعدادی‌متناهی‌از آنها، $s_n<M+\varepsilon$؛(ب): به‌ازای بینهایت‌مقدار n،$s_n>M-\varepsilon$.

۲. اگر $\liminf_{n\to\infty}s_n=m$، آنگاه‌برای‌هر $\varepsilon>0$، (ج): به‌ازای‌همهٔ‌مقادیر n،احیاناً جز تعدادی متناهی از آنها، $s_n>m-\varepsilon$؛ (د) به‌ازای بینهایت مقدار n، $s_n<m+\varepsilon$.

برهان: فقط به اثبات ۲ می‌پردازیم. اگر (ج) برقرار نباشد، آنگاه ε مثبتی هست به‌گونه‌ای‌که به‌ازای بینهایت مقدار n، $s_n\leqslant m-\varepsilon$. پس، برای هر $n\in I$، مجموعهٔ $\{s_n,\ s_{n+1},\ \cdots\}$ شامل عنصری است که از $m-\varepsilon$ نابیشتر است. بنا براین،

$$\text{g.l.b.}\ \{s_n,\ s_{n+1},\ \cdots\}\leqslant m-\varepsilon\qquad(N\in I),$$

و بنا بر ۵.۷.۲، پس‌از حدگیری خواهیم‌داشت $\liminf_{n\to\infty}s_n\leqslant m-\varepsilon$ که با فرض‌متناقض است. بنا براین (ج) برقرار است.

حال، فرض کنیم (د) برقرار نباشد. پس، ε مثبتی هست که تنها برای تعدادی متناهی n، $s_n<m+\varepsilon$. درنتیجه عدد $N\in I$ هست به‌گونه‌ای‌که

$$s_n\geqslant m+\varepsilon\qquad(n\geqslant N).$$

از آنجا، بنا بر ۱۰.۹.۲، $\liminf_{n\to\infty}s_n\geqslant m+\varepsilon$، و این نیز با فرض متناقض‌است. پس(د) برقرار است.

عکس قضیهٔ ۱۲.۹.۲ هم‌برقراراست (ما آن‌را ثابت نمی‌کنیم). یعنی، اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد واگر برای هر $\varepsilon>0$، عدد حقیقی M درشرایط

(الف) و (ب) صدق کند، آنگاه $\limsup_{n\to\infty} s_n = m$؛ همچنین، اگر برای هر $\varepsilon > 0$، عدد حقیقی m در شرایط (ج) و (د) صدق کند، آنگاه $\liminf_{n\to\infty} s_n = m$.

با به‌کار بردن ۱۲.۹.۲ نتیجهٔ مفید زیر ثابت می‌شود.

۱۳.۹.۲. قضیه. هر دنبالهٔ کراندار از اعداد حقیقی زیردنباله‌ای همگرا دارد.

برهان: فرض می‌کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد و فرض می‌کنیم $\limsup_{n\to\infty} s_n = M$. زیردنباله‌ای مانند $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ خواهیم ساخت که به M همگرا باشد. بنابر (ب) از ۱۲.۹.۲، بینهایت مقدار n وجود دارند که $s_n > M-1$. فرض کنیم n_1 یکی از این مقادیر باشد. یعنی، $n_1 \in I$ و $s_{n_1} > M-1$. همچنین، چون به‌ازای بینهایت مقدار n، $s_n > M - 1/2$، می‌توانیم عددی مانند $n_2 \in I$ بیابیم به طوری که $n_2 > n_1$ و $s_{n_2} > M - 1/2$. اگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم، برای هر عدد صحیح $k > 1$ عددی مانند $n_k \in I$ می‌توانیم بیابیم به‌گونه‌ای که $n_k > n_{k-1}$ و

$$s_{n_k} > M - \frac{1}{k}. \qquad (1)$$

فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. بنابر (الف) از ۱۲.۹.۲، عدد $N \in I$ هست که

$$s_n < M + \varepsilon \qquad (n \geqslant M). \qquad (2)$$

حال، عدد $K \in I$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $1/K < \varepsilon$ و $n_K > N$. پس، اگر $k \geqslant K$، داریم $1/k < \varepsilon$ و $n_k > N$. از این‌رو، بنابر (۱) و (۲)

$$M - \varepsilon < M - \frac{1}{k} < s_{n_k} < M + \varepsilon \qquad (k \geqslant K),$$

از این نتیجه می‌شود که

$$|s_{n_k} - M| < \varepsilon \qquad (k \geqslant K).$$

از این رابطه ثابت می‌شود که $s_{n_k} \to M$ وقتی $k \to \infty$، و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تمرینهای ۹.۲

۱. حد بالا و حد پایین دنباله‌های زیر را پیدا کنید.

(الف) $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$ (ب) $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty} \quad (د) \qquad \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos n\pi\right\}_{n=1}^{\infty} \quad (ج)$$

۰۲ اگر M حد بالای دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد، ثابت کنید که حد بالای هر زیردنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نابیشتر از M است.

۰۳ اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد و $\liminf_{n\to\infty} s_n = m$، ثابت کنید که یك زیردنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد که به m همگراست.

همچنین، ثابت کنید که هیچیك از زیردنباله‌های $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به حدی کوچکتر از m همگرا نیست.

۰۴ اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که به بینهایت واگراست، ثابت کنید که

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \infty = \liminf_{n\to\infty} s_n.$$

(این مطلب عکس قضیهٔ ۹.۹.۲ است.) نظیر مطلب فوق را درمورد دنباله‌هایی که به منهای بینهایت واگرا هستند بیان و اثبات کنید.

۰۵ مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای واقع در $(0, 1)$ را به صورت $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ بنویسید. سپس $\limsup_{n\to\infty} r_n$ و $\liminf_{n\to\infty} r_n$ را حساب کنید.

۰۶ اگر دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ هیچ زیردنبالهٔ همگرا نداشته باشد، ثابت کنید که $\{|s_n|\}_{n=1}^{\infty}$ به بینهایت واگراست.

۰۷ اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد و اگر

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} \qquad (n \in I),$$

ثابت کنید که

$$\liminf_{n\to\infty} \sigma_n \geqslant \liminf_{n\to\infty} s_n \quad و \quad \limsup_{n\to\infty} \sigma_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} s_n$$

(راهنمایی: ۱۲.۹.۲ را به‌کار برید.)

۱۰.۲ دنباله‌های کوشی[1]

مهمترین معیار برای اثبات همگرایی دنباله، بدون آنکه مقدار حدآن را بدانیم، معیار کوشی نامیده شود.

۱۰۱۰۲ تعریف. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای ازاعدادحقیقی باشد. آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

---
1. Cauchy

دنبالۀ کوشی نامیده می‌شود اگر برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $N\in I$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که

$$|s_m-s_n|<\varepsilon \qquad (m,n\geqslant N).$$

به اجمال $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالۀ کوشی است، اگر وقتی m و n بزرگ هستند، s_m و s_n به‌یکدیگر نزدیک باشند. ابتدا نشان می‌دهیم که دنبالۀ همگرا دنبالۀ کوشی است.

۲.۱۰.۲ قضیه. اگر دنبالۀ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی همگرا باشد، آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالۀ کوشی است.

برهان: فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=L$. آنگاه برای عدد دلخواه $\varepsilon>0$، عدد $N\in I$ هست به‌گونه‌ای که

$$|s_k-L|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (k>N).$$

بنابراین، اگر $m,\ n\geqslant N$، داریم

$$|s_m-s_n|=|(s_m-L)+(L-s_n)|\leqslant|s_m-L|+|L-s_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

پس داریم

$$|s_m-s_n|<\varepsilon \qquad (m,\ n\geqslant N),$$

و این ثابت می‌کند که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالۀ کوشی است.

قضیۀ ۲.۱۰.۲ اجمالا می گوید که اگر جمله‌های $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به«چیزی» نزدیک‌شوند، جمله‌ها به‌یکدیگر نزدیک می‌شوند. در واقع عکس ۲.۱۰.۲ است که واقعاً مهم است. عکس این قضیه به‌ما می گوید، اگر ثابت کنیم دنبالۀ مفروضی کوشی است، معلوم می‌شود دنباله همگرا است. ابتدا به‌اثبات یک لم می‌پردازیم.

۳.۱۰.۲ لم. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالۀ کوشی از اعداد حقیقی باشد، آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

برهان: فرض کنید $\varepsilon=1$؛ $N\in I$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنید که

$$|s_m-s_n|<1 \qquad (m,\ n\geqslant N).$$

پس،

$$|s_m-s_N|<1 \qquad (m\geqslant N). \tag{1}$$

بنابراین، اگر $m\geqslant N$، داریم

$$|s_m|=|(s_m-s_N)+s_N|\leqslant|s_m-s_N|+|s_N|,$$

و لذا، از (۱) نتیجه می‌شود

$$|s_m| \leqslant ۱ + |s_N| \qquad (m \geqslant N).$$

اگر $M = \max\{|s_۱|, \ldots, |s_{N-۱}|\}$، آنگاه

$$|s_m| < M + ۱ + |s_N| \qquad (m \in I),$$

درنتیجه $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ کراندار است.

۴.۱۰.۲ قضیه. اگر $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی از اعدادحقیقی باشد، آنگاه $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا است.

برهان اول: بنابر لم ۳.۱۰.۲، می‌دانیم که $\limsup_{n\to\infty} s_n$ و $\liminf_{n\to\infty} s_n$ اعدادی حقیقی (متناهی) هستند. پس، برای اثبات قضیه، بنابر ۸.۹.۲، کافی‌است ثابت کنیم که

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n.$$

اما، از قضیهٔ ۷.۹.۲ می‌دانیم که $\limsup_{n\to\infty} s_n \geqslant \liminf_{n\to\infty} s_n$. پس کافی است ثابت کنیم

$$\limsup_{n\to\infty} s_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} s_n. \qquad (۱)$$

چون $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی است، اگر $\varepsilon > ۰$ عدد دلخواهی باشد، عدد $N \in I$ وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$|s_m - s_n| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (m, n \geqslant N),$$

و بنابراین،

$$|s_N - s_n| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (n \geqslant N).$$

ازاین‌نتیجه می‌شود که $s_N + \varepsilon/۲$ و $s_N - \varepsilon/۲$ به‌ترتیب، کران‌بالا و کران پایین مجموعهٔ $\{s_N, s_{N+۱}, s_{N+۲}, \ldots\}$ هستند. از این‌رو، اگر $n \geqslant N$، آنگاه $s_N + \varepsilon/۲$ و $s_N - \varepsilon/۲$ کران بالا و کران پایین مجموعهٔ $\{s_n, s_{n+۱}, s_{n+۲}, \ldots\}$ هستند. از این‌نتیجه می‌شود که برای $n \geqslant N$،

$$s_N - \frac{\varepsilon}{۲} \leqslant \text{g.l.b.}\{s_n, s_{n+۱}, s_{n+۲}, \ldots\} \leqslant \text{l.u.b.}\{s_n, s_{n+۱}, \ldots\} \leqslant s_N + \frac{\varepsilon}{۲}.$$

چون تفاوت دو عبارت در ابتدا و انتهای این نابرابریها برابر ε است داریم

$$\text{l.u.b.}\{s_n, s_{n+1}, \dots\} - \text{g.l.b.}\{s_n, s_{n+1}, \dots\} \leqslant \varepsilon,$$
$$\text{l.u.b.}\{s_n, s_{n+1}, \dots\} \leqslant \text{g.l.b.}\{s_n, s_{n+1}, \dots\} + \varepsilon.$$

با حدگیری از طرفین واستفاده از ۵.۷.۲ داریم

$$\limsup_{n\to\infty} s_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} s_n + \varepsilon.$$

چون ε دلخواه است، از این (۱) به‌دست می‌آید، واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تأکید می‌کنیم که این برهان قضیهٔ ۴.۱۰.۲ در دو مورد به اصل موضوع ۴.۷.۱ بستگی دارد. یکی درجایی که l.u.b. و g.l.b. دنبالهٔ $\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots\}$ به‌کار گرفته می‌شود و دیگری دراستفاده از حدهای بالا وپایین. وجود $\limsup_{n\to\infty}$ و $\liminf_{n\to\infty}$ در یك دنبالهٔ کراندار به‌وجود حد دنبالهٔ کراندار یکنوا بستگی دارد. این نیز به‌نوبهٔ‌خود به ۴.۷.۱ بستگی دارد. در واقع، می‌توان نشان داد که ۴.۱۰.۲ و ۴.۷.۱ هم‌ارز هستند. دربعضی از روشهای ساختن اعداد حقیقی، ۴.۱۰.۲ عنوان اصل موضوع بنیادی را دارد و ۴.۷.۱ یك‌قضیه است.

برهان دوم: بنابر ۶.۶.۲، $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك زیردنبالهٔ یکنوا مانند $\{s_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ دارد و بنابر ۳.۱۰.۲ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کرانداراست. پس $\{s_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ نیز کرانداراست. ازاین‌رو $\{s_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ به‌عددی مانند $s\in R$ همگراست. نشان خواهیم داد که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نیز به s همگراست. چون $\{s_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ به s همگراست، برای هر $\varepsilon>0$ مفروض،عدد $J\in I$ هست که

$$|s_{n_j}-s| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (j \geqslant J). \tag{۱}$$

چون $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی است، عدد $K\in I$ هست که

$$|s_m - s_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (m, n \geqslant K). \tag{۲}$$

می‌توانیم K را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که $K \geqslant J$.

حال، فرض می‌کنیم $k\in I$ و $k \geqslant K$. آنگاه، $k \geqslant J$، بنابراین، (۱) نتیجه‌می‌دهد $|s_{n_k}-s| < \varepsilon/2$. همچنین، $n_k \geqslant k \geqslant K$، بنابراین، از (۲) نتیجه می‌شود $|s_k - s_{n_k}| < \varepsilon/2$. از این‌رو،

$$|s_k - s| < \varepsilon \qquad (k \geqslant K)$$

وقضیه ثابت شده است.

حال، به ارائهٔ نتیجه‌ای مشهور درمورد مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌پردازیم. این نتیجه [به‌خاطر فرض (الف)]، قضیهٔ بازه‌های تودرتو نامیده می‌شود.

۵.۱۰.۲ قضیه. برای هر $n \in I$، فرض کنیم $I_n = [a_n , b_n]$ بازه‌ای (ناتهی) بسته وکراندار از اعداد حقیقی باشد به‌گونه‌ای که

(الف) $$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots,$$

و

(ب) $$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to \infty} (I_n \text{ طول}) = 0,$$

آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ دقیقاً شامل یك نقطه است.

برهان: بنابر فرض (الف) داریم $I_n \supseteq I_{n+1}$ و بنابراین، $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$. این نابرابری نشان می‌دهد که $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌ترتیب غیرنزولی وغیرصعودی هستند. به‌علاوه، بازهم بنابر (الف)، همهٔ جمله‌های این دو دنباله عضو I_1 هستند وبنابراین، هردو دنباله کراندار هستند. درنتیجه، بنابر ۲.۶.۲ و ۵.۶.۲ هردو دنباله همگرایند. فرض کنیم $x = \lim_{n \to \infty} a_n$ و $y = \lim_{n \to \infty} b_n$. آنگاه برای‌هر n داریم، $a_n \leqslant x$ و $y \leqslant b_n$ (چرا؟). اما، بنابر ۴.۷.۲ وفرض(ب) داریم $y - x = \lim_{n \to \infty} b_n - \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$.
بنابراین، $x = y$. درنتیجه، برای هر n، $a_n \leqslant x \leqslant b_n$، و این نشان می‌دهد که $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.
آشکار است که هیچ عدد غیر از x مانند z نمی‌تواند عضو $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ باشد، زیرا، بنابر فرض (ب)، اگر n به‌قدر کافی بزرگ باشد، آنگاه $|z - x|$ از طول I_n بزرگتر است. بنابراین، $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ شامل x است وشامل هیچ نقطهٔ دیگری نیست وقضیه ثابت شده است.

۶.۱۰.۲ قضیهٔ بازه‌های تودرتو تعمیم مهمی‌داردکه در فصل ۶ می‌آید. این تعمیم به‌وسیلهٔ دنباله‌های کوشی ثابت می‌شود. بنابراین، برای خواننده بسیار سازنده خواهدبود که بااستفاده از اطلاعات این بخش دربارهٔ دنباله‌های کوشی، اثبات‌دیگری برای ۵.۱۰.۲ بیاورد. نکات عمدهٔ چنین اثباتی را ارائه می‌دهیم:

۱. برای هر $N \in I$، نشان دهید که a_N، a_{N+1} و ...، همگی در I_N واقع‌اند.
۲. فرض (ب) را به‌کار برید ونتیجه بگیرید که $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی است.
۳. پس، $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست (چرا؟).
۴. به‌همین‌ترتیب $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست.
۵. بقیهٔ استدلال همان است که در ۵.۱۰.۲ آمده است.

تمرینهای ۱۰.۲

۱. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی از اعداد حقیقی باشد که دارای زیردنباله‌ای همگرا به L باشد، ثابت کنید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نیز، همگرا به L است.

۲. برای هر $n \in I$، فرض می‌کنیم $s_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$. با در نظر گرفتن $s_{2n} - s_n$، ثابت کنید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی نیست.

۳. ثابت کنید که هر زیردنبالهٔ یك دنبالهٔ کوشی، یك دنبالهٔ کوشی است.

۴. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر $c \in R$، $0 < r < 1$، و

$$|s_{n+1} - s_n| \leqslant cr^n \qquad (n \in I),$$

نشان‌دهید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است.

۵. دنباله‌ای از بازه‌های بستهٔ $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$ بیابید که نقاط دوسر آنها اعداد گویا باشند و $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{e\}$.

۶. فرض کنیم $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، وبرای هر $n \in I$،

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$t_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

ثابت کنید که اگر $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی باشد، آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نیز کوشی است.

۷. با مثالی نشان‌دهید که اگر بازه‌های I_n در ۵.۱۰.۲ بسته نباشند. لازم نیست حکم‌قضیه برقرار باشد.

۸. با استفاده از قضیهٔ بازه‌های تودرتو، اثبات جدیدی بیاورید که $[0, 1]$ شمارا نیست. (به‌این طریق شروع کنید: فرض‌کنید $J = [0, 1]$، و فرض کنید که J شماراست، مثلا، $J = \{x_1, x_2, \dots\}$. لااقل یکی ازسه‌بازه‌های بستهٔ $[0, 1/3]$، $[1/3, 2/3]$، $[2/3, 1]$ شامل x_1 نخواهد بود. چنین بازه‌ای را J_1 بنامید. اکنون، J_1 را به سه بازهٔ بسته تقسیم کنید و فرض‌کنید J_2 یکی از این سه بازه باشد که شامل x_2 نیست.)

۱۱.۲ مجموعپذیری دنباله‌ها

در فصل بعد سریهای نامتناهی را ارائه می‌دهیم.یك شاخهٔ مهم سریهای نامتناهی مطالعهٔ مجموعپذیری سریهای واگراست. این مطالعه،کوششی است برای نسبت‌دادن یك مقدار به‌سریهایی که همگرا نیستند. یعنی، کوششی است درجهت تعمیم‌مفهوم مجموع‌سری‌همگرا. بسیاری از روشهای مشهور مجموعپذیری (اما نه همهٔ آنها) منحصراً با دنبالهٔ مجموعهای جزئی‌یك‌سری نامتناهی‌سروکار دارند. بنا براین، در واقع‌این‌روشها مربوط به‌دنباله‌هاست، و اکنون بعضی از آنها را بررسی می‌کنیم.

۱۰۱۱۰۲ دیدیم کـه دنباله‌های $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ هردو واگرایند، اما، با مشخصه‌های کاملا متفاوت؛ اولی نوسانی و کراندار است، دومی به‌بینهایت واگراست. اگر $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ را به‌صورت ... $-1, 1, -1, 1, -1$ بنویسیم، محسوس است که «اندازهٔ متوسط» جمله‌هـای این دنباله 0 است. آسانتریـن نوع مجموعپذیری دنباله‌هـا، موسوم به‌مجموعپذیری $(C, 1)$ (C حرف‌اول Cesaro)، دقیقاً همان مفهوم اندازهٔ میانگین‌است.

تعریف. فرض‌کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد و

$$\sigma_n \doteq \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n} \quad (n \in I).$$

گوییم که دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعپذیر $(C, 1)$ به L است اگر دنبالهٔ $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L همگرا باشد. دراین حالت می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} s_n = L \qquad (C, 1).$$

ملاحظه کنید که σ_n دقیقاًهمان‌میانگین n جملهٔ اول $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ است. بنابراین $\sigma_1 = s_1$، $\sigma_2=(s_1+s_2)/2$، وغیره.

مثلا، اگر $s_n=(-1)^n \ (n \in I)$، آنگاه،

$$\sigma_n = \frac{(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^n}{n},$$

پس،

$$\sigma_n = 0 \qquad (n=2, 4, 6, \ldots),$$

$$\sigma_n = -\frac{1}{n} \quad (n=1, 3, 5, \ldots).$$

آشکار است که $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$، واین‌نشان‌می‌دهد که $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعپذیر $(C,1)$ به 0 است. یعنی،

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = 0 \qquad (C, 1).$$

این مثال نشان می‌دهد که دنبالهٔ واگرا ممکن است مجموعپذیر $(C, 1)$ باشد.

دنبالهٔ همگرای ... $1, 1, 1, 1$ راملاحظه‌کنید. در اینجا، $s_n = 1 (n \in I)$. همچنین، $\sigma_n = n^{-1}(s_1+\cdots+s_n)=1$. بنابراین، $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ به 1 همگراست و از این‌رو،

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \qquad (C, 1).$$

مثال آخر حالت خیلی خاصی از این نتیجهٔ مهم است‌که اگر دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L همگرا باشد، آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعپذیر $(C, 1)$ به L نیز هست.

۲.۱۱.۲ قضیه. اگر $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L\ (C,1)$.

برهان: حالت اول: $L=0$. در این‌حالت $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$، می‌خواهیم ثابت‌کنیم که $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$. فرض‌کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. عدد $N_1 \in I$ هست به‌گونه‌ای که

$$|s_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geqslant N_1).$$

اگر فرض کنیم $M = \max\left(|s_1|, |s_2|, \ldots, |s_{N_1-1}|\right)$، آنگاه برای $n \geqslant N_1$ داریم

$$|\sigma_n| \leqslant \frac{(|s_1| + \cdots + |s_{N_1-1}|) + (|s_{N_1}| + \cdots + |s_n|)}{n} \leqslant$$

$$\frac{(N_1-1)M + (n-N_1+1)\varepsilon/2}{n},$$

و از این‌رو،

$$|\sigma_n| \leqslant \frac{(N_1-1)M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geqslant N_1). \tag{1}$$

حال، عدد $N_2 \in I$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\varepsilon N_2 > 2(N_1-1)M$. سپس

$$\frac{(N_1-1)M}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geqslant N_2). \tag{2}$$

اگر $N = \max(N_1, N_2)$، آنگاه از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$|\sigma_n| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N),$$

و ازاین‌رو، $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = 0$. بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$، واین‌همان‌چیزی‌است که‌می‌خواستیم ثابت‌کنیم.

اثبات حالت اول تمام است.

حالت دوم: $L \neq 0$. داریم $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$. پس، $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n - L) = 0$. ازاین‌رو، بنابر حالت اول، $\{s_n - L\}_{n=1}^{\infty}$ به 0 مجموع‌پذیر $(C, 1)$ است. یعنی،

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - L) = 0 \qquad (C, 1),$$

یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(s_1 - L) + (s_2 - L) + \cdots + (s_n - L)}{n} = 0. \tag{3}$$

اما،

$$\frac{(s_۱-L)+(s_۲-L)+\cdots+(s_n-L)}{n}=\frac{s_۱+s_۲+\cdots+s_n}{n}-L=\sigma_n-L.$$

بنابراین، از (۳) نتیجه می‌شود $\lim_{n\to\infty}(\sigma_n-L)=۰$، وازاین‌رو، $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=L$. پس، از تعریف نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty}s_n=L \qquad (C,۱),$$

وحالت دوم ثابت شده است.

تا اینجا دیدیم که همهٔ دنباله‌های همگرا، مجموعپذیر $(C,۱)$ (به‌حدهای نظیرشان) هستند، ودنبالهٔ واگرای $\{(-۱)^n\}_{n=۱}^{\infty}$ نیز مجموعپذیر $(C,۱)$ است.

همهٔ دنباله‌های واگرا، مجموعپذیر $(C,۱)$ نیستند. مثلاً، اگر $s_n=n\ (n\in I)$، آنگاه $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ مجموعپذیر $(C,۱)$ نیست. زیرا، در این‌حالت،

$$\sigma_n=\frac{s_۱+s_۲+\cdots+s_n}{n}=\frac{۱+۲+\cdots+n}{n}=\frac{n(n+۱)}{۲n}=\frac{n+۱}{۲},$$

و بنابراین، $\{\sigma_n\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا نیست. در یکی از تمرینها از خواننده خواسته شده است که نشان دهد دنباله‌ای که به‌بینهایت واگراست نمی‌تواند مجموعپذیر $(C,۱)$ باشد.

دنبالهٔ $۱, -۱, ۲, -۲, ۳, -۳, \ldots$ یك دنبالهٔ نوسانی است. نشان می‌دهیم که این دنباله مجموعپذیر $(C,۱)$ نیست. [اما وقتی به‌مجموعپذیری $(C,۲)$ رسیدیم، خواهیم دید که این دنباله مجموعپذیر $(C,۲)$ است.] در این دنباله داریم

$$s_n=\frac{n+۱}{۲} \qquad (n=۱,۳,۵,\ldots),$$

$$s_n=\frac{-n}{۲} \qquad (n=۲,۴,۶,\ldots).$$

آشکار است که، اگر n زوج باشد، آنگاه

$$(s_۱+s_۲)+(s_۳+s_۴)+\cdots+(s_{n-۱}+s_n)=۰.$$

بنابراین،

$$\sigma_n=۰ \qquad (n=۲,۴,۶,\ldots).$$

اما، اگر n فرد باشد، $n-۱$ زوج است و $s_۱+s_۲+\cdots+s_{n-۱}+s_n=s_n$. از این‌رو

$$\sigma_n = \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n} = \frac{s_n}{n} = \frac{n+1}{2n}\ (n=1, 3, 5, \ldots).$$

چون $1/2 \rightarrow (n+1)/2n$، وقتی $n \rightarrow \infty$، دنبالهٔ $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنبالهٔ $\ldots, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_5$ است که به $1/2$ همگراست، وزیردنبالهٔ $\ldots, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_6$ به ۰ همگراست. ازاین‌رو، بنابر ۴.۳.۲، $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا نیست، **و بنابراین $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعپذیر $(C, 1)$ نیست.**

جهت تکمیل مطلب مثالی دیگر از یک دنبالهٔ واگرا می‌آوریم که مجموعپذیر $(C, 1)$ است. در بخش ۳.۲ دیدیم که اگر θ عدد گویا در $(0, 1)$ باشد، آنگاه $\{\sin n\theta\pi\}_{n=1}^{\infty}$ واگراست. اینک نشان می‌دهیم که این دنباله به ۰ مجموعپذیر $(C, 1)$ است. زیرا، از اتحاد

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx = \frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\qquad(0<x<\pi).$$

که در بخش ۴.۸، ثابت خواهد شد، می‌بینیم که

$$\sigma_n = \frac{\sin\theta\pi+\sin 2\theta\pi+\cdots+\sin n\theta\pi}{n} = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta\pi-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\pi}{2n\sin\frac{1}{2}\theta\pi},$$

و از این‌رو،

$$|\sigma_n| \leqslant \frac{1}{n\sin(\theta\pi/2)}.$$

به‌آسانی نتیجه می‌شود که $\sigma_n \rightarrow 0$ وقتی $n \rightarrow \infty$، و این ثابت می‌کند که $\{\sin n\theta\pi\}_{n=1}^{\infty}$ به ۰ مجموعپذیر $(C, 1)$ است. ملاحظه کنید که اگر θ عددی گنگ باشد استدلال فوق بازهم کارساز خواهد بود.

خواننده در اثبات نتیجهٔ زیر به مشکلی برنخواهد خورد.

۳.۱۱.۲. قضیه. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌ترتیب به L و M مجموعپذیر $(C, 1)$ باشند، آنگاه $\{s_n+t_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{s_n-t_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌ترتیب، به $L+M$ و $L-M$ مجموعپذیر $(C, 1)$ خواهند بود.

اکنون، به‌مجموعپذیری $(C, 2)$ می‌پردازیم.

۴.۱۱.۲. تعریف. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد و برای هر $n \in I$

$$\tau_n = \frac{ns_1 + (n-1)s_2 + (n-2)s_3 + \cdots + 2s_{n-1} + s_n}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{2(ns_1 + \cdots + s_n)}{n(n+1)}.$$

می‌گوییم که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L مجموعپذیر $(C, 2)$ است اگر دنبالهٔ $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L همگرا باشد. دراین حالت می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} s_n = L \qquad (C, 2).$$

داریم

$$\tau_1 = s_1, \qquad \tau_2 = \frac{2s_1 + s_2}{1+2} = \frac{2s_1 + s_2}{3}, \qquad \tau_3 = \frac{3s_1 + 2s_2 + s_3}{6},$$

وغیره.

آشکار است که $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \ (C, 2)$.

حال، $s_n = (-1)^n \ (n \in I)$ را در نظر می‌گیریم. [قبلا دیدیم که $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = 0 \ (C, 1)$.] آنگاه

$$\tau_n = \frac{-n + (n-1) - (n-2) + \cdots + (-1)^n}{1+2+\cdots+n}$$

اکنون، فرض می‌کنیم که n زوج باشد. آنگاه صورت کسر τ_n برابر است با

$$[-n + (n-1)] + [-(n-2) + (n-3)] + \cdots + [-2+1] = -\frac{n}{2},$$

زیرا، در $n/2$ کروشهٔ طرف اول مقدار هر کروشه برابر $1-$ است. اگر n فرد باشد، آنگاه

$$-n + [(n-1) - (n-2)] + \cdots + [2-1] = -n + \frac{n-1}{2} = -\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

بنابراین،

$$\tau_n = \begin{cases} \dfrac{-n/2}{n(n+1)/2} = \dfrac{-1}{n+1} & (n = 2, 4, 6, \ldots), \\[2ex] \dfrac{-(n+1)/2}{n(n+1)/2} = \dfrac{-1}{n} & (n = 1, 3, 5, \ldots), \end{cases}$$

که نشان می‌دهد $\tau_n \to 0$ وقتی $n \to \infty$. بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = 0 \qquad (C, 2).$$

در مثال آخر، بامجموعپذیری $(C, 2)$ همان «مقدار» برای $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌دست آمد که با مجموعپذیری $(C, 1)$ به‌دست آمده بود. ولی به‌کار بردن آن مشکلتر بود. حال،

با مثال نشان خواهیم داد که دنباله ممکن است مجموعپذیر $(C,\ ۲)$ باشد حتی اگر مجموعپذیر $(C,\ ۱)$ نباشد. دنبالهٔ $\dots\ ,۳-\ ,۳\ ,۲-\ ,۲\ ,۱-\ ,۱$، را که قبلا نشان داده‌ایم مجموعپذیر $(C,\ ۱)$ نیست درنظر می‌گیریم. [دراینجا، اگر n فرد باشد، $s_n=(n+۱)/۲$ و اگر n زوج باشد $s_n=-n/۲$.] بنابراین، اگر n زوج باشد، $n-۱$ فرد است و

$$s_{n-۱}=\frac{(n-۱)+۱}{۲}=\frac{n}{۲},\qquad s_n=\frac{-n}{۲}$$

و لذا،

$$\begin{aligned}\tau_n&=\frac{ns_۱+(n-۱)s_۲+\dots+۲s_{n-۱}+s_n}{n(n+۱)/۲}\\&=\frac{[n-(n-۱)]+[(n-۲)\cdot۲-(n-۳)\cdot۲]+\dots+[۲\cdot(n/۲)-(n/۲)]}{n(n+۱)/۲}\\&=\frac{۱+۲+\dots+n/۲}{n(n+۱)/۲}.\end{aligned}$$

ازآنجاکه اگر n زوج باشد، $n/۲$ عددی صحیح است، داریم

$$۱+۲+\dots+\frac{n}{۲}=\frac{(n/۲)((n/۲)+۱)}{۲}=\frac{n(n+۲)}{۸}$$

و از این‌رو،

$$\tau_n=\frac{n+۲}{۴(n+۱)}\qquad(n=۲,\ ۴,\ ۶,\ \dots).$$

اگر n فرد باشد، داریم

$$s_{n-۲}=\frac{n-۲+۱}{۲}=\frac{n-۱}{۲},\qquad s_{n-۱}=\frac{-(n-۱)}{۲},\qquad s_n=\frac{n+۱}{۲}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\tau_n&=\frac{ns_۱+(n-۱)s_۲+\dots+۳s_{n-۲}+۲s_{n-۱}+s_n}{n(n+۱)/۲}\\&=\frac{\{[n-(n-۱)]+\dots+[۳((n-۱)/۲)-۲((n-۱)/۲)]\}+(n+۱)/۲}{n(n+۱)/۲}\end{aligned}$$

$$=\frac{\{1+2+\cdots+(n-1)/2\}+(n+1)/2}{n(n+1)/2}=\frac{(n^2-1)/8+(n+1)/2}{n(n+1)/2}$$

$$=\frac{n^2+4n+3}{4(n^2+n)}.$$

(برای $n=5$ این رابطه را بررسی کنید. بایستی نتیجهٔ زیر را به‌دست آورید

$$\tau_5=\frac{5s_1+4s_2+\cdots+s_5}{15}=\frac{5-4+6-4+3}{15}=\frac{2}{5}.)$$

ازاین‌رو، $\tau_n\to 1/4$ وقتی $n\to\infty$، و بنابراین، دنبالهٔ $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ به $1/4$ مجموعپذیر $(C, 2)$ است.

درنتیجه، $(C, 2)$ می‌تواند کاری انجام دهد که $(C, 1)$ نمی‌تواند. قضیهٔ بعد نشان می‌دهد هرکار $(C, 1)$ را $(C, 2)$ نیز می‌تواند انجام دهد.

۵.۱۱.۲. قضیه. اگر

$$\lim_{n\to\infty} s_n=L \qquad (C, 1),$$

آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} s_n=L \qquad (C, 2).$$

برهان: حالت I، $L=0$. داریم $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=0$ که در آن

$$\sigma_n=\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}.$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که $\lim_{n\to\infty}\tau_n=0$. می‌نویسیم

$$\tau_n=\frac{ns_1+(n-1)s_2+\cdots+s_n}{1+2+\cdots+n}$$

$$=\frac{(s_1+\cdots+s_n)+(s_1+\cdots+s_{n-1})+(s_1+\cdots+s_{n-2})+\cdots+(s_1+s_2)+s_1}{1+2+\cdots+n}$$

$$=\frac{n\sigma_n+(n-1)\sigma_{n-1}+(n-2)\sigma_{n-2}+\cdots+2\sigma_2+\sigma_1}{1+2+\cdots+n}$$

$$=\frac{\sigma_1+2\sigma_2+\cdots+n\sigma_n}{1+2+\cdots+n}.$$

چون $\sigma_n \to ۰$ وقتی $n \to \infty$، برای عدد دلخواه $\varepsilon > ۰$، عدد $N_۱ \in I$ هست به گونه‌ای که

$$|\sigma_n| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (n \geqslant N_۱).$$

فرض کنیم $M = \max(|\sigma_۱|, |\sigma_۲|, \ldots, |\sigma_{N_۱ - ۱}|)$. آنگاه، برای $n \geqslant N_۱$،

$$|\tau_n| \leqslant \frac{[|\sigma_۱| + ۲|\sigma_۲| + \cdots + (N_۱ - ۱)|\sigma_{N_۱-۱}|] + (N_۱|\sigma_{N_۱}| + \cdots + n|\sigma_n|)}{۱ + ۲ + \cdots + n}$$

$$< \frac{M[۱ + ۲ + \cdots + (N_۱ - ۱)] + (\varepsilon/۲)(N_۱ + \cdots + n)}{۱ + ۲ + \cdots + n},$$

و بنابراین

$$|\tau_n| < \frac{MN_۱(N_۱ - ۱)}{n(n+۱)} + \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (n \geqslant N_۱).$$

بقیهٔ برهان عیناً مانند حالت اول برهان ۲.۱۱.۲ است.

حالت II، $L \neq ۰$. داریم $\lim_{n \to \infty} s_n = L(C, ۱)$. پس، بنابر ۳.۱۱.۲،

$$\lim_{n \to \infty} (s_n - L) = ۰ \qquad (C, ۱).$$

ولی، دراین صورت، بنابرحالت‌اول این برهان، $\lim_{n \to \infty} (s_n - L) = ۰(C, ۲)$. یعنی،

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n(s_۱ - L) + (n - ۱)(s_۲ - L) + \cdots + (s_n - L)}{۱ + ۲ + \cdots + n} = ۰. \qquad (۱)$$

پس از برداشتن پرانتزها درصورت کسر (۱) داریم

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{ns_۱ + (n-۱)s_۲ + \cdots + s_n}{۱ + ۲ + \cdots + n} - L \right] = ۰$$

یا

$$\lim_{n \to \infty} (\tau_n - L) = ۰.$$

بنابراین $\lim_{n \to \infty} \tau_n = L$، که نشان می‌دهد $\lim_{n \to \infty} s_n = L(C, ۲)$، وبرهان کامل است.

۶.۱۱.۲. نتیجه. اگر $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به L همگراباشد، آنگاه $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به L مجموعپذیر $(C, ۲)$ است.

برهان: برهان مستقیماً از ۲.۱۱.۲ و ۵.۱۱.۲ نتیجه می‌شود.

۷.۱۱.۲ بدون آنکه وارد جزئیات شویم به‌این مطلب که دنبالهٔ ... ,۶−,۵ ,۴− ,۳ ,۲− ,۱، مجموعپذیر $(C,2)$ نیست ولی مجموعپذیر $(C,3)$ است، اشاره می‌کنیم. به عنوان یادداشت، (C, k) را به ازای هر $k\in I$ تعریف می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و k یك‌عددصحیح‌مثبت‌دلخواه ثابت باشد، و برای $n\in I$ فرض می‌کنیم

$$\lambda_n=\left[\binom{n+k-2}{n-1}s_1+\binom{n+k-3}{n-2}s_2+\cdots+\binom{k}{1}s_{n-1}+s_n\right] \Big/ \binom{n+k-1}{n-1},$$

که در آن

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

[با نماد مجموع داریم

$$\lambda_n=\frac{1}{\binom{n+k-1}{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\binom{n+k-1-j}{n-j}s_j].$$

آنگاه می‌گوییم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L مجموعپذیر (C, k) است اگر دنبالهٔ $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به L باشد.

برخواننده است تحقیق کند که در حالتهای خاص $k=1$ و $k=2$، این تعریف با تعریف مجموعپذیری $(C, 1)$ و $(C, 2)$ که قبلا ارائه دادیم منطبق است.

اگر $k>1$ و $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L مجموعپذیر $(C, k-1)$ باشد، می‌توان نشان‌داد که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L مجموعپذیر (C, k) است. به‌علاوه، دنباله‌ای وجود دارد که مجموعپذیر (C, k) هست ولی مجموعپذیر $(C, k-1)$ نیست.

۸.۱۱.۲ به‌طور کلی، اصطلاح «روش مجموعپذیری» را می‌توان یك تابع حقیقی T که حوزهٔ تعریفش مجموعهٔ دنباله‌هاست تعریف کرد. یك نقطه (یعنی، یك دنباله) وقتی درحوزهٔ تعریف T است که T به‌دنباله «مجموع» دهد ــ یعنی، T یك عدد حقیقی به‌دنباله نسبت دهد.

بنابراین، جوزهٔ تعریف $(C, 1)$ یك زیرمجموعهٔ سرهٔ حوزهٔ تعریف $(C, 2)$ است. ازآنجا که مقدار $(C, 2)$ در هر دنباله‌ای که $(C, 1)$ تعریف شده است با مقدار $(C, 1)$ درآن دنباله برابراست می‌توانیم بگوییم که تابع $(C, 2)$ یك‌توسیع تابع $(C, 1)$ است.

روشهای مجموعپذیری (C, k) جزئی مهم ولی بسیار کوچك از ردهٔ روشهای مجموعیابی هستند. روشهای گوناگون، در توانائیشان در مجموع‌دادن به‌دنباله‌های واگرا و درسهولت به کار بردن آنها اختلاف بسیار دارند. ولی، تقریباً همیشه اصرار می‌ورزیم که روش مجموعپذیری T حداقل واجد یك‌شرط باشد و آن این‌است که هر دنبالهٔ همگرا

مجموعپذیر T به‌حدش باشد.

تعریف. فرض کنیم T یك روش مجموعپذیری دنباله‌ها باشد [مثلاً، $(C, 1)$، $(C, 2)$، ...]. آنگاه می‌گوییم T منظم است اگر وقتی $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L همگراست، آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L مجموعپذیر T باشد.

۹.۱۱.۲ قضیه. مجموعپذیری $(C, 1)$ ومجموعپذیری $(C, 2)$ منظم هستند.

برهان: برهان مستقیماً از ۲.۱۱.۲ و ۶.۱۱.۲ نتیجه می‌شود.

این نکته جالب توجه است که اگر یك روش مجموعپذیری به‌تعدادکثیری از دنباله‌ها مجموع دهد، آنگاه این روش نمی‌تواند منظم باشد. در واقع، می‌توان نشان داد که اگر هر دنبالهٔ کراندار مجموعپذیر T باشد، آنگاه T منظم نیست.

یك قضیهٔ خیلی کلی ومشهور درمورد مجموعپذیری در تمرینهای اضافی وملاحظات برای فصول ۱ تا ۳، در بخش ۱۲.۳ ارائه خواهد شد.

تمرینهای ۱۱.۲

۱. ثابت کنید که دنباله‌های زیر مجموعپذیر $(C, 1)$ هستند.

(الف) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

(ب) $1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0 \ldots$

(ج) $-1, 2, 2, -1, 2, 2, -1, 2, 2, \ldots$

۲. اگر $s_1, s_2, s_3, \ldots$ به s مجموعپذیر $(C, 1)$ باشد و اگر $t \in R$ ثابت کنید که $t, s_1, s_2, s_3, \ldots$ به s مجموعپذیر $(C, 1)$ است.

۳. ثابت کنید دنباله‌ای که به‌بینهایت واگراست نمی‌تواند مجموعپذیر $(C, 1)$ باشد.

۴. فرض کنید $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، و $\sigma_n = n^{-1}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n)$. ثابت کنید که اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعپذیر $(C, 1)$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{n \to \infty} (s_n / n) = 0$.

[راهنمایی: $n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}$ را حساب کنید.]

نتیجه بگیرید که $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ مجموعپذیر $(C, 1)$ نیست.

۵. فرض کنید $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد که به عدد مثبت s همگراست. ثابت کنید که

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{s_1 s_2 \cdots s_n} = s.$$

(راهنمایی: لگاریتم بگیرید.)

۶. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد و اگر $\lim\limits_{n \to \infty} (s_n / s_{n-1}) = L$، ثابت کنید که $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{s_n} = L$. (راهنمایی: فرض کنید

$$t_1 = s_1 ،\ t_2 = \frac{s_2}{s_1} ،\ \dots ،\ t_n = s_n / s_{n-1} \cdot$$

سپس تمرین قبل را درمورد $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌کار برید.

۷. بدون استفاده از مجموع‌پذیری $(C, 1)$، ثابت کنید که دنبالهٔ ... ، ۰ ، ۱ ، ۰ ، ۱ ، ۰ ، ۱ ، به ۱/۲ مجموع‌پذیر $(C, 2)$ است.

۸. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یکنوا باشد، آنگاه ثابت کنید که $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ که در آن

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

نیز یکنواست.

۹. با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۷ در بخش ۹.۲، قضیهٔ ۲.۱۱.۲ را ثابت کنید.

۱۲.۲ حد بالا وحد پایین در دنباله‌های مجموعه‌ها

۱.۱۲.۲ فرض کنیم E_1 ، E_2 ، ... زیرمجموعه‌های مجموعهٔ S باشند. برای هر $n \in I$ فرض می‌کنیم χ_n تابع مشخصهٔ E_n باشد. پس، اگر $x \in S$، آنگاه جمله‌های دنبالهٔ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ از ۰ها و ۱ها تشکیل می‌شود. پس آشکار است که یا $\limsup_{n\to\infty} \chi_n(x) = 0$ یا $\limsup_{n\to\infty} \chi_n(x) = 1$، وهمچنین است درمورد $\liminf_{n\to\infty} \chi_n(x)$. قضیهٔ زیر راداریم.

قضیه. فرض می‌کنیم $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ S باشد، و برای هر $n \in I$ فرض‌می‌کنیم χ_n تابع‌مشخصهٔ E_n باشد. اگر x یك نقطهٔ دلخواه S باشد، آنگاه

(الف) اگر بـه‌ازای بینهایت مقدار n داشته باشیم $x \in E_n$، آنگاه $\limsup_{n\to\infty} \chi_n(x) = 1$؛ حال آنکه اگر تنها برای تعدادی متناهی مقدار n داشته باشیم $x \in E_n$، آنگاه $\limsup_{n\to\infty} \chi_n(x) = 0$.

همچنین،

(ب) اگر به‌ازای همهٔ مقادیر n، جز تعدادی متناهی، $x \in E_n$، آنگاه $\liminf_{n\to\infty} \chi_n(x) = 1$، و حال آنکه اگر به‌ازای بینهایت مقدار n، $x \notin E_n$، آنگاه $\liminf_{n\to\infty} \chi_n(x) = 0$.

برهان: (ب) را ثابت‌می‌کنیم. اگر برای همهٔ مقادیر n مگر تعدادی‌متناهی، $x \in E_n$، آنگاه یك عضو I مانند N هست به‌گونه‌ای که $x \in E_n (n \geqslant N)$. از این‌رو، $\chi_n(x) = 1\ (n \geqslant N)$ و بنابراین $\liminf_{n\to\infty} \chi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_n(x) = 1$.

ولی، اگر بینهایت مقدار n باشند به‌گونه‌ای که به‌ازای آنها $x \notin E_n$، آنگاه به‌ازای بینهایت مقدار n، $\chi_n(x)=0$. از این‌رو، برای همهٔ مقادیر n

$$\text{g.l.b.}\ \{\chi_n(x), \chi_{n+1}(x), \dots\}=0$$

وبنابراین $\liminf_{n\to\infty} \chi_n(x)=0$. اثبات (ب) تمام‌است. اثبات (الف) به‌خوانندهواگذار می‌شود.

بنابراین، طبیعی است که تعریف زیر را بیاوریم:

۲۰۱۲۰۲. تعریف. فرض کنیم $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌هـای مجموعهٔ S باشد. آنگاه $\limsup_{n\to\infty} E_n$ را مجموعهٔ‌همهٔ‌عنصرهای S مانند x به‌طوری که به‌ازای بینهایت مقدار n، $x\in E_n$، تعریف می‌کنیم. همچنین، $\liminf_{n\to\infty} E_n$ را مجموعهٔ همهٔ عنصرهای S مانند x به‌گونه‌ای که برای همهٔ مقادیر n، بجز تعدادی متناهی، $x\in E_n$، تعریف می‌کنیم.

از قسمت (الف) قضیه نتیجه می‌شود که اگر $(x\in S)$ $\chi^*(x)=\limsup_{n\to\infty}\chi_n(x)$ و $E^*=\limsup_{n\to\infty} E_n$، آنگاه χ^* تابع مشخصهٔ E^* است. به‌همین‌ترتیب، قسمت (ب)ی قضیه نشان می‌دهد که اگر $(x\in S)$ $\chi_*(x)=\liminf_{n\to\infty}\chi_n(n)$ و $E_*=\liminf_{n\to\infty} E_n$، آنگاه χ_* تابع مشخصهٔ E_* است.

بنابراین، به‌طور اختصار، تابع مشخصهٔ $\limsup_{n\to\infty} E_n$ عبارت‌است‌از $\limsup_{n\to\infty}\chi_n$، و همچنین است برای lim inf.

تمرینهای ۱۲.۲

۱. اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های S باشد، ثابت کنید که

$$\liminf_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} E_n.$$

۲. اگر $E_1=E_3=E_5=\dots=S$ و $E_2=E_4=E_6=\dots=\varnothing$، آنگاه $\limsup_{n\to\infty} E_n$ و $\liminf_{n\to\infty} E_n$ را محاسبه کنید.

۳. فرض کنیم $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های S باشد.

(الف) اگر $x\in\limsup_{n\to\infty} E_n$، ثابت کنید که برای هر $n\in I$، $x\in\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$.

(ب) ثابت کنید که

$$\limsup_{n\to\infty} E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right).$$

۴. (الف) اگر $x \in \liminf_{n\to\infty} E_n$، ثابت کنید که عنصری از I مانند n هست که $x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$.

(ب) ثابت کنید که

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k\right).$$

۵. (الف) اگر $\dots \subseteq E_3 \subseteq E_2 \subseteq E_1$، ثابت کنید که

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

(ب) اگر $\dots \supseteq E_3 \supseteq E_2 \supseteq E_1$، ثابت کنید که

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

۶. تعریفی برای $\lim_{n\to\infty} E_n$ ارائه دهید.

۷. اگر بازهٔ بستهٔ $[n, 2n]$ را با E_n نشان دهیم، آنگاه $\lim E_n$ را پیدا کنید وقتی $n \to \infty$. در مورد طول E_n چه می‌توانید بگویید؟ آیا پاسخهای شما به‌دو قسمت اول این تمرین با معرفت ذهنی مطابقت می‌کند؟

۳

سریهای اعداد حقیقی

۱.۳ همگرایی و واگرایی

یادآورمی‌شویم که بنابرتعریف، مجموع سری نامتناهی $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ عبارت $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ است به‌شرط آنکه این حد وجود داشته باشد. ولی، این تعریف مجموع سری نامتناهی است و تعریف خود «سری نامتناهی» نیست.

اصطلاح «سری نامتناهی» مانند اصطلاح «جفت مرتب» بسیار شهودی است و تعریف صحیح آن چندان روشنگر نیست.

۱.۱.۳ تعریف. سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ جفت مرتب $\langle\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{s_n\}_{n=1}^{\infty}\rangle$ است که درآن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است و

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n \qquad (n\in I).$$

عدد a_n جملهٔ nام سری وعدد s_n مجموع جزئی nام سری نامیده می‌شوند.

علاوه‌بر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، گاهی سری را به‌صورت $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ یا به طور خلاصه با $a_1+a_2+\cdots$ می‌نویسیم. مثلا مجموع جزئی nام سری $1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$ برحسب اینکه n زوج یا n فرد باشد به‌ترتیب ۰ یا ۱ است.

اغلب مناسب است کـه اندیس‌گذاری جمله‌هـای سری را با $n=0$ شروع کنیم. به‌این معنی کـه بعضی‌از سریها را به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مـی‌نـویسیم. (در این حالت s_n را $s_n=a_0+a_1+\dots+a_n$ مـی‌گیریـم.) مثلا سری $1+x+x^2+\dots$ را بـه‌صـورت $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ می‌توان نوشت. آشکار است کـه هر تعریف یا قضیه درمورد سریهـای به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ عیناً یك مشابه در سریهای به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یا $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ دارد، p عددصحیح نامنفی دلخواهی است. بیش‌ازاین به‌بحث این مطلب نخواهیم پرداخت.

تعریف همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به‌همگرایی یاواگرایی‌دنبالۀمجموعهای جزئی $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بستگی دارد.

۲.۱.۳. تعریف. فرض‌کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری اعـداد حقیقی با مجموعهـای جزئی $s_n=a_1+\dots+a_n$ $(n\in I)$ باشد. اگـر دنبالۀ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌عـدد حقیقی A همگرا باشد، گوییم‌کـه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به A همگراست. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ واگرا باشد می گوییم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به A همگرا باشد، اغلب می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=A$. بنابرایـن نه‌تنهـا سری بلکه مجموع آن را (درصورتی‌که سری همگرا باشد) با $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نشان مـی‌دهیـم. پس ازاین تذکر به‌عهـدۀ خواننده مـی‌گذاریم تا خود را متقاعد سازد کـه هیچ ابهامی پیش نمی‌آید.

نتیجۀ زیر از قضایای مربوط به‌دنباله‌های همگرا به‌دست می‌آید.

۳.۱.۳. قضیه. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به A و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بـه B همـگـرا باشند، آنگاه سـری $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ به $A+B$ همگراست. همچنین، اگـر $c\in R$، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ بـه cA همگراست.

برهان: اگـر $s_n=a_1+\dots+a_n$ و $t_n=b_1+\dots+b_n$، آنگـاه بنابه فرض، $\lim_{n\to\infty} s_n=A$ و $\lim_{n\to\infty} t_n=B$. ولی مجموع جزئی nام سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ عبارت $(a_1+b_1)+\dots+(a_n+b_n)=s_n+t_n$ است کـه بنابر ۱.۷.۲ وقتی $n\to\infty$ بـه

$A+B$ میل می‌کند. ازاین ثابت می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=A+B$. قسمت دوم قضیه از ۲.۷.۲ نتیجه می‌شود.

یك نتیجهٔ آشکار ۳.۱.۳ این است که $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=A-B$

نتیجهٔ زیر یك شرط لازم (ولی نه‌کافی!) برای همگرایی سری است.

۴.۱.۳. قضیه. اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

برهان: فرض‌کنیم $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$. بنابراین، اگر $s_n=a_1+\dots+a_n$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=A$. اما دراین‌صورت، $\lim\limits_{n\to\infty}s_{n-1}=A$. حال، چون $a_n=s_n-s_{n-1}$، بنابر ۴.۷.۲ داریم $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_n-\lim\limits_{n\to\infty}s_{n-1}=A-A=0$ و این همان است که می‌خواستیم نشان دهیم.

مثلا بی‌درنگ نتیجه می‌گیریم که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1-n)/(1+2n)$ واگراست. دراینجا، $a_n=(1-n)/(1+2n)$، و بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-1/2\neq 0$. لذا، بنابر ۴.۱.۳، $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا نیست. به‌همین ترتیب، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ واگراست، زیرا $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ حتی وجود ندارد.

تأکید می‌کنیم که شرط $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ برای تشخیص همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ کافی نیست. در بخش بعدی خواهیم دیدکه $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ همگرا نیست‌هرچندکه $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

تمرینهای ۱.۳

۱. اگر $a_1+a_2+\dots$ به s همگرا باشد، ثابت کنید که $a_2+a_3+\dots$ به $s-a_1$ همگراست.

۲. ثابت‌کنیدکه سری $\sum_{n=1}^{\infty}[1/n(n+1)]$ همگراست. [راهنمایی: بنویسید

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ومجموعهای جزئی سری را محاسبه‌کنید.]

۳. برای چه‌مقادیری از x سری $(1-x)+(x-x^2)+(x^2-x^3)+\cdots$ همگراست؟
۴. ثابت کنید که سری $(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\cdots$ همگراست اگر و تنها اگر دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد.
۵. سری $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+1/n)$ همگراست یا واگرا؟
۶. ثابت کنید که برای هر $a, b\in R$، سری $a+(a+b)+(a+2b)+(a+3b)+\cdots$ واگراست مگر آنکه $a=b=0$.
۷. ثابت کنید که سری $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ همگراست اگر و تنها اگر برای هر عدد مثبت ε عددی مانند $N\in I$ باشد به‌گونه‌ای که

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}a_k\right|<\varepsilon \qquad (n>m\geqslant N).$$

۸. اگر $a_1+a_2+a_3+\cdots$ به A همگرا باشد، ثابت کنید که

$$\frac{1}{2}(a_1+a_2)+\frac{1}{2}(a_2+a_3)+\frac{1}{2}(a_3+a_4)+\cdots$$

همگراست. مجموع سری دوم چقدر است؟
۹. همگرایی یا واگرایی هریك از سریهای زیر را تعیین کنید.

(الف) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2},$$

(ب) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{10^{10}(n+2)}.$$

۱۰. اگر $a_1+a_2+a_3+\cdots$ به L همگرا باشد، ثابت کنید که $a_1+0+a_2+0+a_3+0+\cdots$ نیز به L همگراست. به‌طورکلی، نشان دهید که در یك‌سری همگرا هر تعداد جملهٔ ۰ می‌توان هرجا درج کرد (یا ازهرجا برداشت) بدون آنکه درهمگرایی یا درمجموع سری تأثیری داشته باشد.

۱۱. ثابت کنید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ واگراست.

۱۲. فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد. فرض کنیم $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیردنبالهٔ دلخواهی از دنبالهٔ اعدا صحیح مثبت باشد. سرانجام، فرض کنیم

$$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1},$$
$$b_2 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2},$$
$$\vdots$$
$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k} \qquad (k \in I).$$

ثابت کنید که $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همگراست ومجموعش بامجموع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ برابر است.

۱۳. تحقیق کنید که از تمرین قبل نتیجهٔ مهم زیر به‌دست می‌آید. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه هر سری کــه با درج پرانتز [مثلا، $\ldots + (\ldots) + (a_3 + \cdots + a_7) + (a_1 + a_2)$] از سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ حاصل شود به‌همان مجموع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

۱۴. مثالی ازیك سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بیاورید به گونه‌ای کــه $\ldots + (a_3 + a_4) + (a_1 + a_2)$ همگرا باشد ولی $\ldots + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ واگرا باشد. (این نشان می‌دهد که برداشتن پرانتزها ممکن است اشکالاتی ایجاد کند.)

۲.۳ سریهای با جمله‌های نامنفی

بحث در سریها درمورد سریهایی کــه جمله‌هایشان نامنفی هستند ازهمه آسانتر است. همهٔ قضایای همگرایی و واگرایی درمورد این‌گونه سریها درقضیهٔ زیر خلاصه می‌شوند.

۱.۲.۳. قضیه. اگرجمله‌های سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نامنفــی و $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ $(n \in I)$ باشد، آنگاه (الف) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار باشد؛ (ب) اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار نباشدآنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

برهان: (الف) چون $a_{n+1} \geqslant 0$ پس

$$s_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n.$$

بنابراین $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ غیرصعودی و (بنابرفرض) کــراندار است. بنا بــر ۲.۶.۲، $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست و لذا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

(ب) اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کرانــدار نباشد، آنگاه بنابــر ۲.۵.۲، $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ واگراست وازاین‌رو، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگراست.

حال، دو مثال مهم از سریهای با جمله‌های نامنفی می‌آوریم. اولی سری هندسی $1+x+x^2+\dots$ است.

۲.۲.۳. قضیه. (الف) اگر $0<x<1$، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ به $1/(1-x)$ همگراست.

(ب) اگر $x \geqslant 1$، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ واگراست.

برهان: (ب) نتیجهٔ فوری قضیهٔ ۴.۱.۳ است زیرا، اگر $x \geqslant 1$، آنگاه $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ به ۰ همگرا نیست. برای اثبات (الف) داریم $s_n = 1+x+\dots+x^n$ و بنابراین

$$s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \qquad (n\in I).$$

ولی اگر $0<x<1$، آنگاه بنابر ۳.۷.۲، $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$. از این‌رو، $\lim_{n\to\infty} s_n = 1/(1-x)$. این برهان قسمت (الف) است.

مثال دوم سری $1+1/2+\dots+1/n+\dots$، معروف به سری همساز است.

۳.۲.۳. قضیه. سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ واگراست.

برهان: اگر $s_n = 1+1/2+\dots+1/n$، آنگاه زیردنبالهٔ $s_1, s_2, s_4, s_8, \dots, s_{2^{n-1}}, \dots$ از دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ را بررسی می‌کنیم. داریم

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2,$$

$$s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{2};$$

به‌طورکلی، به‌کمك استقرا می‌توان نشان داد که $s_{2^n} \geqslant (n+2)/2$. بنابراین $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ شامل یك زیردنبالهٔ واگراست وازاین‌رو، بنابر ۴.۳.۲، واگراست وقضیه ثابت شده است.

تکرار می‌کنیم که واگرایی سری همساز نشان می‌دهد که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ممکن است واگرا باشد حتی اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

۴.۲.۳. فقط درمورد سریهای باجمله‌های نامنفی نماد زیررا معرفی می‌کنیم.

اگر سری با جمله‌های نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، گاهی می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$.
اگر سری با جمله‌های نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، گاهی می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\infty$.
بنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n<\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.$$

۵.۲.۳ این نکته بسیار جالب توجه است که سری‌ای وجود ندارد که واگرایی‌اش از دیگر سریهای واگرا «آهسته‌تر» باشد. به‌بیان دقیقتر:

قضیه. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری واگرا از اعداد مثبت باشد، آنگاه دنبالهٔ اعداد مثبت $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد که به‌صفر همگراست ولی باوجود این $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ بازهم واگراست.

برهان: فرض کنیم $s_n=a_1+a_2+\dots+a_n$. ابتدا نشان می‌دهیم که سری $\sum_{k=1}^{\infty}(s_{k+1}-s_k)/s_{k+1}$ واگراست. برای هر $m\in I$، عدد $n\in I$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $s_{n+1}>2s_m$. (این کار امکان دارد زیرا بنابه‌فرض $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ به‌بینهایت واگراست.) اما $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ غیرنزولی‌است. ازاین‌رو

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}}\geqslant\sum_{k=m}^{n}\frac{s_{k+1}-s_k}{s_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{s_{n+1}}[(s_{m+1}-s_m)+(s_{m+2}-s_{m+1})+\dots+(s_{n+1}-s_n)]$$

$$=\frac{s_{n+1}-s_m}{s_{n+1}}>\frac{s_{n+1}-(1/2)s_{n+1}}{s_{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

بنابراین، برای هر $m\in I$ یك $n\in I$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}}\geqslant\frac{1}{2}.$$

ازاین‌رو، مجموعهای جزئی سری $\sum_{k=1}^{\infty}(s_{k+1}-s_k)/s_{k+1}$ دنبالهٔ کوشی تشکیل نمی‌دهند

و بنابراین

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}}=\infty .$$

(تمرین ۷ از بخش ۱.۳ را ببینید.)
ولی $s_{k+1}-s_k=a_{k+1}$. بنابراین

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{s_{k+1}}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{s_k}=\infty .$$

اگر $\varepsilon_k=1/s_k$، آنگاه $\varepsilon_k\to 0$ وقتی $k\to\infty$ و $\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon_k a_k=\infty$. این اثبات را تمام می‌کند.

تمرینهای ۲.۳

۱. اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ یك سری همگرا از اعداد مثبت باشد، و اگر $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای از $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد، ثابت کنید که $\sum_{i=1}^{\infty}a_{n_i}$ همگراست.

۲. ثابت کنید که سری زیر همگراست.

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots .$$

۳. اگر $(n\geqslant 0)\ 0\leqslant a_n\leqslant 1$ و اگر $0\leqslant x<1$، آنگاه ثابت کنید که $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ همگراست ومقدارش از $1/(1-x)$ نابیشتر است.

۴. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ غیرنزولی باشد، و اگر $s_n\geqslant 0\ (n\in I)$، ثابت کنید که سری $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $a_k\geqslant 0\ (k\in I)$ و

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n \qquad (n\in I).$$

۵. ثابت کنید که سری $\cdots+1/7+1/5+1/3+1$ واگراست.

۶. به‌ازای چه‌مقادیری از عدد حقیقی x سری زیر همگراست ومجموعش چقدر است؟

$$1+\frac{1-x}{1+x}+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3+\cdots .$$

۳.۳ سریهای متناوب

سری متناوب یك سری نامتناهی است که جمله‌هایش متناوباً مثبت ومنفی باشند. برای مثال، سریهای

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots \text{،}\quad 1-2+3-4+\cdots \text{،}\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

همگی متناوب هستند. سری متناوب را ممکن است به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ [یا اگر اولین جملهٔ سری منفی باشد به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$] نوشت که در آن هر a_n عددی مثبت است. حال، به‌اثبات نتیجهٔ بنیادی سریهای متناوب می‌پردازیم.

۱.۳.۳. قضیه. اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به گونه‌ای که

(الف) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ غیرصعودی باشد (یعنی، $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant a_{n+1}\geqslant\cdots$)، و

(ب) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$،

آنگاه سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ همگراست.

برهان: ابتدا مجموعهای جزئی با اندیس فرد یعنی $s_1, s_3, s_5, \ldots$ را درنظر می‌گیریم. داریم $s_3=s_1-a_2+a_3$، وچون بنابر (الف)، $a_3\leqslant a_2$، داریم $s_3\leqslant s_1$. درواقع، برای هر $n\in I$، داریم $s_{2n+1}=s_{2n-1}-a_{2n}+a_{2n+1}\leqslant s_{2n-1}$. بنابراین $s_1\geqslant s_3\geqslant\cdots\geqslant s_{2n-1}\geqslant s_{2n+1}\geqslant\cdots$، یعنی $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ غیرصعودی است. ولی $s_{2n-1}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-3}-a_{2n-2})+a_{2n-1}$. پس، چون مقدار هر پرانتز نامنفی است و $a_{2n-1}>0$، داریم $s_{2n-1}>0$. ازاین‌رو بنابر ۵.۶.۲، $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست. همچنین، دنبالهٔ $s_2, s_4, \ldots, s_{2n}, \ldots$ نیز همگراست. زیرا $s_{2n+2}=s_{2n}+a_{2n+1}-a_{2n+2}\geqslant s_{2n}$، وبنابراین $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ غیرنزولی است. به‌علاوه، $s_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}$. از این‌رو، $s_{2n}\leqslant a_1$، پس $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ ازبالاکراندار است. اکنون، فرض کنیم $M=\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n-1}$ و $L=\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}$.

ازآنجا که $a_{2n}=s_{2n}-s_{2n-1}$، بنابرفرض (ب) داریم

$$0=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}s_{2n}-\lim_{n\to\infty}s_{2n-1}=L-M\,.$$

درنتیجه $L=M$، و بنابراین $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ هردو به L همگرایند. از این به‌آسانی ثابت می‌شود که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L همگراست. (تمرین ۵ دربخش ۳.۲ را ببینید.)

بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ به L همگراست ودرنتیجه برهان کامل است.

برهان فوق نشان می‌دهد که $s_{۲n-۱} \geqslant L$ و $s_{۲n} \leqslant L$. بنابراین $a_{۲n} = s_{۲n-۱} - s_{۲n} \geqslant s_{۲n-۱} - L \geqslant ۰$، و لذا $|s_{۲n-۱} - L| \leqslant a_{۲n}$. به‌همین ترتیب، $a_{۲n+۱} = s_{۲n+۱} - s_{۲n} \geqslant L - s_{۲n} \geqslant ۰$، به‌طوری که $|s_{۲n} - L| \leqslant a_{۲n+۱}$. یعنی، خواه k فرد باشد یا زوج نشان داده‌ایم که $|s_k - L| \leqslant a_{k+۱}$. ازاین‌رو، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید که ما را قادر می‌سازد مجموع این قبیل سریهای همگرا را برآورد کنیم.

۲.۳.۳. نتیجه. اگر سری متناوب $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱} a_n$ درمفروضات قضیهٔ ۱.۳.۳ صدق کند، و بنابراین به‌عددی مانند $L \in R$ همگرا باشد، آنگاه

$$|s_k - L| \leqslant a_{k+۱} \qquad (k \in I).$$

پس، قدرمطلق تفاضل مجموع سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱} a_n$ وهرمجموع جزئی آن از قدرمطلق اولین جملهٔ سری که در آن مجموع جزئی نیامده است تجاوز نمی‌کند.

حال، برای ۱.۳.۳ و ۲.۳.۳ مثال می‌آوریم. در ۳.۲.۳ دیدیم که $\sum_{n=۱}^{\infty} ۱/n$ واگراست. ولی، چون $\{۱/n\}_{n=۱}^{\infty}$ غیرصعودی است و $\lim_{n\to\infty} ۱/n = ۰$ بنابر ۱.۳.۳، $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱}/n$ همگراست. یعنی عدد حقیقی L وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} + \dots = L.$$

البته، مقدار L را نمی‌دانیم، ولی بااستفاده از ۲.۳.۳ می‌توانیم آن را تخمین بزنیم. زیرا، بنابر ۲.۳.۳، برای هر $n \in I$ داریم

$$\left|\left[۱ - \frac{۱}{۲} + \dots + \frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\right] - L\right| \leqslant \frac{۱}{n+۱}.$$

اگر درنامساوی فوق $n = ۹$ باشد خواهیم داشت

$$|۰٫۷۴۵۶ - L| \leqslant \frac{۱}{۱۰},$$

واز آنجا، $۰٫۶۴۵۶ \leqslant L \leqslant ۰٫۸۴۵۶$. (در واقع، می‌دانیم که $s_۹ \geqslant L$، وبنابراین نتیجه می‌گیریم که $۰٫۶۴۵۶ \leqslant L \leqslant ۰٫۷۴۵۶$.) درحقیقت، می‌توان نشان داد که $L = \log ۲ = ۰٫۶۹۳۲\dots$.

اگر $۰ < x < ۱$، آنگاه از ۱.۳.۳ نتیجه می‌شود که $۱ - x + x^۲ - \dots$ همگراست. روش ۲.۲.۳ را نیز ممکن است به‌کاربرد ونتیجه گرفت که

$$1-x+x^2-\dots=\frac{1}{1+x}\qquad (0<x<1).$$

به‌عنوان مثال آخر، سری زیر را درنظر می‌گیریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots\,.$$

بنابر ۱.۳.۳، این سری همگراست. اگر $L=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/n!$. آنگاه

$$\left|\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)-L\right|\leqslant\frac{1}{6!}\,.$$

ازآنجا، $|L-0{,}3666|\leqslant 0{,}0014$. (از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی باید به‌خاطر بیاورید که $L=e^{-1}=0{,}3679\dots$.)

تمرینهای ۳.۳

۱. برای چه‌مقادیری از p سری $\dots+1/1^p-1/2^p+1/3^p-1/4^p$ همگراست؟

۲. اگر x عددصحیح نباشد ثابت کنید که $1/(x+1)-1/(x+2)+1/(x+3)-\dots$ همگراست.

۳. ثابت کنید که

(الف) $2-2^{1/2}+2^{1/3}-2^{1/4}+\dots$ واگراست،

(ب) $(2-1)-(2^{1/2}-1)+(2^{1/3}-1)-(2^{1/4}-1)+\dots$ همگراست.

۴. اگر

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,,$$

نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ واگراست. (در اینجا $a_n>0$ و $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. پس چرا قضیهٔ ۱.۳.۳ به‌کار نمی‌آید؟)

۵. نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n/(2n-1)$ واگراست.

۴.۳ همگرایی شرطی و همگرایی مطلق

دربخش قبلی دیدیم که سری

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots \qquad (1)$$

و سری

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots \qquad (2)$$

هردو، همگرایند. ولی، این دوسری ازیك‌نظر باهم اختلاف دارند. اگر در (۱) قدرمطلق هرجمله را بگیریم خواهیم داشت

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots \qquad (3)$$

که یك سری همگراست. درحالی که اگر در (۲) قدرمطلق هرجمله را بگیریم، سری

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \qquad (4)$$

به‌دست می‌آید که واگراست. این نکته به‌تعریف زیر منجر می‌شود کـه سریهای همگرا را به‌دو رده تقسیم می‌کنند.

۱.۴.۳ تعریف. فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری اعداد حقیقی باشد.

(الف) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، گوییم کـه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگـرای مطلق یا مطلقـاً همگراست.

(ب) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا ولی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ واگـرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرای شرطی خوانیم.

بنابراین سری (۱) همگرای مطلق وسری (۲) همگرای شرطی است.
استعمال واژهٔ «همگرا» درعبارت «همگرای مطلق» درقضیهٔ زیر توجیه شده است.

۲.۴.۳ قضیه. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

برهان: فرض کنیم $s_n = a_1+\cdots+a_n$. مـی‌خواهیم ثابت کنیم کـه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست. بنابر ۴.۱۰.۲ کافی است ثابت کنیم کـه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یـك دنبالهٔ کوشی است.
بنابه‌فرض $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ (به ۴.۲.۳ مراجعه کنید) وبنابراین اگر $t_n = |a_1|+\cdots+|a_n|$، آنگاه $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست. از ۲.۱۰.۲ نتیجه می‌شود که $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی‌است. ازاین‌رو، برای عدد دلخواه $\varepsilon > 0$، عدد $N \in I$ هست که

$$|t_m - t_n| < \varepsilon \qquad (m, n \geqslant N).$$

ولی (اگر، مثلا $m > n$)، داریم

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| \leqslant |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = |t_m - t_n|.$$

ازاین‌رو،

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \qquad (m, n \geqslant N).$$

ثابت شد که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی است، پس همگراست و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳.۴.۳ اگرسری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را به‌سری a_nهای مثبت وسری a_nهای منفی تفکیك کنیم، آنگاه می‌توانیم یك تفاوت مهم ما بین همگرایی مطلق وهمگرایی شرطی را نشان دهیم.

به‌طور دقیقتر، اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری اعداد حقیقی باشد، فرض می‌کنیم

$$p_n = \begin{cases} a_n & (a_n > 0), \\ 0 & (a_n \leqslant 0). \end{cases}$$

[برای سری $1 - 1/2 + 1/3 - \cdots$، داریم

$$p_1 = 1,\ p_3 = \frac{1}{3},\ p_{2n-1} = \frac{1}{2n-1},$$

درحالی‌که $p_2 = p_4 = \cdots = 0$]، همچنین، فرض می‌کنیم

$$q_n = \begin{cases} 0 & (a_n > 0), \\ a_n & (a_n \leqslant 0). \end{cases}$$

بنابراین p_nها جمله‌های مثبت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (یا صفر) هستند درحالی‌که q_nها عبارت‌اند از جمله‌های منفی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و واضح است که

$$p_n = \max(a_n, 0), \qquad q_n = \min(a_n, 0),$$

وازاین‌رو بنابر ۴.۴.۱،

$$2p_n = a_n + |a_n| \quad \text{و} \quad 2q_n = a_n - |a_n|. \qquad (*)$$

همچنین،

$$a_n = p_n + q_n.$$

اکنون، اثبات نتیجهٔ مهم زیر مشکل نیست.

قضیه. (الف) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ هـر دو همگرایند. ولی،

(ب) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای شرطی باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ هردو واگرایند.

سرانجام،

(ج) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ هردوهمگرا باشند، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق‌است.

برهان: (الف) چون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ هردو همگـرایند، آنگاه بنا بـر ۳.۱.۳، $(a_n + |a_n|)$ $\sum_{n=1}^{\infty}$ نیز همگراست. ازاین‌رو، بنابر (*)، $\sum_{n=1}^{\infty} 2p_n$ همگـراست. ازآنجا، بازهــم بنابر ۳.۱.۳، $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ همگراست. به‌دلیل مشابه ثابت مـی‌شودکــه $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ نیز همگراست.

(ب) اکنون فرض می‌کنیم که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا ولی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ واگرا باشد. از (*) داریم $|a_n| = 2p_n - a_n$. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ همگرا باشد، آنگاه بنابر ۳.۱.۳،

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2p_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

نیز همگرا خواهد بود واین بافرض متناقض است. ازاین‌رو، $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ واگراست. باهمین روش ثابت می‌شودکه $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ نیز واگراست.

(ج) چون $p_n = (a_n + |a_n|)/2$ و $q_n = (a_n - |a_n|)/2$، پس $|a_n| = p_n - q_n$. ازاین‌رو، اگر $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ هردو همگرا باشند، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ هم‌همگراست.واین نشان می‌دهدکه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است.

مثلا، چـون سری $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$ همگرای شرطی است، سری

$\cdots+0+1/5+0+1/3+0+1$ واگراست، وازاین‌رو $\cdots+1/5+1/3+1$ واگراست.

قضیهٔ بالا به‌اجمال می‌گوید که سری مطلقاً همگرا، همگراست چون که جمله‌هایش «کوچک» هستند، درحالی که همگرایی سری همگرای شرطی به‌خاطر این است که جمله‌های مثبت ومنفی از اثر یکدیگر می‌کاهند.

تمرینهای ۴.۳

۱. سریهای زیر را برحسب واگرایی، همگرایی شرطی، یاهمگرایی مطلق دسته بندی کنید.

(الف) $$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots,$$

(ب) $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots,$$

(ج) $$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots,$$

(د) $$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\cdots,$$

(ه) $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2^4}+\cdots.$$

۲. آیا سری با جملات نامنفی می‌تواند همگرای شرطی باشد؟

۳. اگر $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$، آنگاه ثابت کنید که $\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

۴. اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرای مطلق باشد، و اگر برای هر $n\in I$، $\varepsilon_n=\pm1$، ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n$ همگراست.

۵. اگر به‌ازای هردنبالهٔ $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ با $\varepsilon_n=\pm1\,(n\in I)$، سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varepsilon_n$ همگرا باشد، آنگاه ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرای مطلق است.

۵.۳ تجدید آرایش سریها

۱.۵.۳ با بیانی اجمالی، تجدید آرایش سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ است که جمله‌هایش همان جمله‌های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است با ترتیب دیگری. (تعریف دقیق تجدید آرایش بعداً درهمین بخش خواهدآمد.) خواهیم دیدکه تجدیدآرایش درسری همگرای مطلق در مقدار سری تأثیر ندارد ولی تجدیدآرایش در سری همگرای شرطی مـی‌تواند اثر قابل ملاحظه‌ای داشته باشد.

دیدیم کـه سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-۱)^{n+۱}/n$ به‌عددی حقیقی مانند L همگرای شرطی است (البته بدون‌اثبات اشاره‌کردیم‌که $L=\log ۲$). به‌علاوه، می‌دانیم‌که $۰٫۶ \leqslant L \leqslant ۰٫۸$، پس $L \neq ۰$. داریم

$$L=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۸}+\cdots. \qquad (۱)$$

بنا بر ۳.۱.۳،

$$\frac{۱}{۲}L=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۱۲}+\cdots,$$

و بنابراین، به‌طور مسلم،

$$\frac{۱}{۲}L=۰+\frac{۱}{۲}-۰-\frac{۱}{۴}+۰+\frac{۱}{۶}-۰-\frac{۱}{۸}+\cdots. \qquad (۲)$$

سپس اگر (۲) را با (۱) جمع کنیم، مجدداً بنا بر ۳.۱.۳ خواهیم داشت،

$$\frac{۳}{۲}L=(۱+۰)+\left(-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۳}-۰\right)+\left(\frac{-۱}{۴}+\frac{-۱}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۵}+۰\right)$$
$$+\left(-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}\right)+\left(\frac{۱}{۷}+۰\right)+\left(-\frac{۱}{۸}+\frac{-۱}{۸}\right)+\cdots$$

یا

$$\frac{۳}{۲}L=۱+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۱}-\frac{۱}{۶}+\cdots. \qquad (۳)$$

سری سمت راست (۳) یك تجدیدآرایش سری سمت راست (۱) است، ولی این‌دوسری به‌دومقدار متفاوت همگرایند.

۲.۵.۳. در واقع، می‌توانیم یك تجدید آرایش سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ بیابیم به گونه‌ای که به‌هرعدد حقیقی که از قبل تعیین‌شده، مثلا ۵۱۲، همگرا باشد. بنا بر ۳.۴.۳، می‌دانیم کـه سری $1+1/3+1/5+\dots$ واگراست، لذا، بنا بر ۱.۲.۳، مجموعهـای جزئی این سری بی‌کران است. بنابراین $1+1/3+1/5+\dots+1/N$ اگر عدد فرد N به‌قدرکافی بزرگ باشد از ۵۱۲ بزرگتر است. فرض‌کنیم N_1 کوچکترین عدد صحیح فردی باشد که

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{N_1}>512.$$

پس

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{N_1}-\frac{1}{2}\leqslant 512.$$

(چرا؟). حال فرض می‌کنیم N_2 کوچکترین عدد صحیح فردی باشد کـه از N_1 بزرگتر است و

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{N_1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{N_1+2}+\dots+\frac{1}{N_2}>512.$$

بنابراین

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{N_1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{N_1+2}+\dots+\frac{1}{N_2}-\frac{1}{4}\leqslant 512.$$

اگر به‌همین‌ترتیب ادامه دهیم می‌توانیم یك تجدید آرایش $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ بسازیـم که به ۵۱۲ همگرا باشد. جزئیات را کامل‌کنید.

حال، به‌تعریف دقیق «تجدیدآرایش» می‌پردازیم.

۳.۵.۳. **تعریف.** فرض کنیم $N=\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعـداد صحیح مثبت باشد به‌گونه‌ای کـه هرعدد صحیح مثبت درست یك‌بار درمیان n_iها ظاهرشود. (یعنی، N تابعی ۱–۱ از I به‌روی I باشد.) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ یك سری اعداد حقیقی باشد واگر

$$b_i=a_{n_i}\qquad(i\in I),$$

آنگاه $\sum_{i=1}^{\infty}b_i$ را یـك تجدید آرایش $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ خوانیم.

در تعریف ۳.۵.۳، اگر $A=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $B=\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$، آنگاه $A\circ N=B$. اگر $N^{-1}=\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ تابـع وارون N باشد، آنگاه (بنابـر تمـریـن ۱۲ از بخش ۵.۱) $A=B\circ N^{-1}$ بهطوری که $a_i=b_{m_i}$. این نشان میدهد که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ یـك تجـدیـد آرایش $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز یك تجدید آرایش $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ است.

در تمرینها ازخواننده خواسته شده است برای قضیهٔ زیر برهان بیاورد. این برهان تقلیدی از روش ۲.۵.۳ است.

۴.۵.۳ قضیه. اگرسری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای شرطی باشد، آنگاه برای هر عددحقیقی x یك تجدید آرایش $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ وجود داردکه به x همگراست.

درمورد سریهای همگرای مطلق، وضع کاملا متفاوت است. ابتدا درحالتیکه سری باجملات نامنفی است بحث میکنیم.

۵.۵.۳ لم. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری از اعداد نامنفی و بهعدد حقیقی A همگرا باشد، واگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ یك تجدید آرایش $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگراست و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=A$

برهان: برای هر $N\in I$ فرض میکنیم $s_N=b_1+\cdots+b_N$. چون دنبالهای مانند $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ وجود دارد بهطوریکه $b_i=a_{n_i}$، داریم

$$b_1=a_{n_1},\ b_2=a_{n_2},\ \ldots,\ b_N=a_{n_N}$$

اگـر $M=\max\{n_1,\ldots,n_N\}$، آنگاه مسلماً $s_N\leqslant a_1+\cdots+a_M\leqslant A$. ازاینرو، بنابر ۱.۲.۳، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بهعددی حقیقی مانند B همگراست. اما $B=\lim_{N\to\infty} s_N$ و لذا بنابر ۵.۷.۲، $B\leqslant A$. (یعنی، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.) ازطرف دیگر، چـون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیـز یـك تجدید آرایش سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ است، بـاتعویض نقشهای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ در استدلال فوق خواهیم داشت $A\leqslant B$. بنابراین $A=B$ و اثبات تمام است.

نتیجهٔ ۵.۵.۳ برای سریهای اعداد نامثبت نیز برقرار است. لم فوق حالت خاصی از قضیهٔ زیر است.

۶.۵.۳ قضیه. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به A همگـرای مطلق باشد، آنگاه هرتجدیـد آرایش

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مانند $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز به A همگرای مطلق است.

برهان: p_n و q_n را که در ۳.۴.۳ آمده است درنظر می‌گیریم. دیدیم که $a_n=p_n+q_n$. سپس، بنا برقضیهٔ مذکور در ۳.۴.۳، $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ هردو همگرایند. فرض می‌کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} p_n=P$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n=Q$ $(Q\leqslant 0)$. آنگاه بنا بر ۳.۱.۳، $A=P+Q$. به‌ازای دنباله‌ای مانند $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ داریم

$$b_i=a_{n_i}=p_{n_i}+q_{n_i},$$

به‌علاوه، $\sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i}$ یك تجدیدآرایش سری با جمله‌های نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ است. ازاین‌رو، بنا بر لم ۵.۵.۳، $\sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i}$ همگراست و $\sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i}=P$. به‌همین‌ترتیب، $\sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i}=Q$. چون

$$b_i=p_{n_i}+q_{n_i},$$

از قضیهٔ ۳.۱.۳ نتیجه می‌شود که $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ همگراست و

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i=\sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i}+\sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i}=P+Q=A.$$

آنچه‌که باقی‌مانده است اثبات همگرایی مطلق $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ است. اما چون $b_i=q_{n_i}+p_{n_i}$ داریم

$$|b_i|\leqslant|p_{n_i}|+|q_{n_i}|=p_{n_i}-q_{n_i}.$$

لذا، برای هر $N\in I$،

$$|b_1|+\cdots+|b_N|\leqslant\sum_{i=1}^{N}p_{n_i}-\sum_{i=1}^{N}q_{n_i}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}p_{n_i}-\sum_{i=1}^{\infty}q_{n_i}=P-Q.$$

ازاین‌رو، مجموعهای جزئی $\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|$ همگی از $P-Q$ نابزرگتر واز بالاکراندارهستند. بنابراین* $\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|<\infty$ و اثبات تمام است.

۷.۵.۳ ازقضیهٔ تجدیدآرایش، یك قضیه درضرب سریها به‌دست می‌آید.

---

* ۴.۲.۳ را ببینید.

اگر به طور صوری* دو سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ را درهم ضرب کنیم و جمله‌هایی که توان xشان یکی است باهم جمع کنیم، داریم

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x$$
$$+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots.$$

یعنی،

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (*)$$

که در آن

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

ازنظر کاربرد، کافی‌است که (*) را درحالت $x=1$ بررسی کنیم. ثابت خواهیم کرد که

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

به‌شرط آنکه دوسری سمت چپ همگرای مطلق باشند.

قضیه. اگر سریهای $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ به‌ترتیب بـه A و B همگرای مطلق باشند، آنگاه $AB=C$ که در آن $C=\sum_{n=0}^{\infty} c_n$،

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

و C همگرای مطلق است.

برهان: داریم

$$|c_k|\leqslant|a_0b_k|+|a_1b_{k-1}|+\cdots+|a_kb_0| \qquad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

لذا، برای هر n،

$$|c_0|+|c_1|+\cdots+|c_n|$$
$$\leqslant|a_0b_0|+(|a_0b_1|+|a_1b_0|)+\cdots+(|a_0b_n|+|a_1b_{n-1}|+\cdots+|a_nb_0|)\leqslant$$

* یعنی، بدون رعایت دقت.

$$\leqslant(|a_0|+\cdots+|a_n|)(|b_0|+\cdots+|b_n|)\leqslant\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|\Big).$$

بنابراین دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|$ از بالاکراندار است، وازاین‌رو

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|<\infty.$$

نابرابریهـای فوق همچنین همگـرایی مطلق سری زیر را (کـه مجموعش $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ است) نشان می‌دهد

$$a_0b_0+a_0b_1+a_1b_0+a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0+a_0b_3+\cdots. \qquad (1)$$

بنابر ۶.۵.۳، می‌توانیم جمله‌های (۱) را تجدید آرایش کنیم و بنویسیم*

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k=[a_0b_0]+[a_0b_1+a_1b_0+a_1b_1]$$
$$+[a_0b_2+a_2b_0+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2]+\cdots. \qquad (2)$$

جمله‌های داخل کروشهٔ nام $(n=0, 1, 2, \ldots)$ سمت راست (۲) از تمام حاصلضربهای a_jb_k که در آنها j یا k مساوی n است وهیچ کدام از j یا k بزرگتراز n نیست تشکیل شده‌اند. بیاییم مجموع جمله‌های داخل هر کروشه را بررسی کنیم. اگر

$$B_n=b_0+b_1+\cdots+b_n \quad \text{و} \quad A_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$$

آنگاه داریم

$$a_0b_0=A_0B_0,$$
$$a_0b_1+a_1b_0+a_1b_1=(a_0+a_1)(b_0+b_1)-a_0b_0=A_1B_1-A_0B_0,$$
$$a_0b_2+a_2b_0+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2=(a_0+a_1+a_2)(b_0+b_1+b_2)$$
$$-(a_0+a_1)(b_0+b_1)=A_2B_2-A_1B_1,$$

وبه‌طـورکلی، برای هر $n\geqslant 1$ مقـدار داخل کروشهٔ nام در سمت راست (۲) برابر بـا $A_nB_n-A_{n-1}B_{n-1}$ است. بنابرایـن، مجمـوع n کـروشهٔ اول در سمت راست (۲) عبارت است از

---

* تمرین ۱۳ ازبخش ۱.۳ را ببینید.

$$[A_{\circ}B_{\circ}]+[A_{1}B_{1}-A_{\circ}B_{\circ}]+\cdots+[A_{n}B_{n}-A_{n-1}B_{n-1}]=A_{n}B_{n},$$

که به AB میل مـی‌کند وقتی $n\to\infty$. ازاین‌رو، سمت راست (۲) برابر AB است و برهان کامل می‌شود.

۸.۵.۳. نتیجه. اگر بـرای عـددی حقیقی x سـریهـای تـوانی $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=\circ}^{\infty} b_n x^n$ همگرای مطلق باشند، آنگاه

$$\Big(\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=\circ}^{\infty} b_n x^n\Big)=\sum_{n=\circ}^{\infty} c_n x^n \qquad (1)$$

که در آن $c_n=\sum_{k=\circ}^{n} a_k b_{n-k}$.

برهان: اگر $A_n=a_n x^n$ و $B_n=b_n x^n$، آنگاه بنابر ۷.۵.۳

$$\Big(\sum_{n=\circ}^{\infty} A_n\Big)\Big(\sum_{n=\circ}^{\infty} B_n\Big)=\sum_{n=\circ}^{\infty} C_n, \qquad (2)$$

که در آن

$$C_n=\sum_{k=\circ}^{n} A_k B_{n-k}=\sum_{k=\circ}^{n} a_k x^k b_{n-k} x^{n-k}=x^n\sum_{k=\circ}^{n} a_k b_{n-k}=c_n x^n.$$

بنابراین، معادلهٔ (۱) از (۲) نتیجه می‌شود.

تمرینهای ۵.۳

۱. اگر $|x|<1$، آنگاه ثابت کنید که

$$1+x^2+x+x^4+x^6+x^3+x^8+x^{10}+x^5+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

۲. اگر $a_1+a_2+a_3+\cdots$ همگرای مطلق باشد، آنگاه

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=(a_1+a_3+a_5+\cdots)+(a_2+a_4+a_6+\cdots).$$

آیا این مطلب برای همهٔ سریهای همگرای شرطی برقرار است؟

۳. اگر در روابط زیر اشکالی هست، آن اشکال چیست؟

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}+\cdots$$

$$=۱+\left(\frac{۱}{۲}-۱\right)+\frac{۱}{۳}+\left(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}\right)+\frac{۱}{۵}+\left(\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۳}\right)+\cdots$$

$$=\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\cdots\right)-۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}-\cdots$$

$$=\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots\right)-\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots\right)=۰ .$$

۴. نشان دهید که یک تجدید آرایش $۱-۱/۲+۱/۳-۱/۴+۱/۵-\cdots$ مانند $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ وجود دارد به‌طوری که اگر $t_n=b_۱+b_۲+\cdots+b_n$، آنگاه

$$\limsup_{n\to\infty} t_n=۱۰۰, \qquad \liminf_{n\to\infty} t_n=-۱۰۰$$

۵. نشان دهید که هر سری همگرای شرطی تجدید آرایشی دارد که واگراست.

۶. قضیهٔ ۳.۵.۴ را ثابت کنید.

۷. ضربهای زیر را به‌صورت $\sum_{n=۰}^{\infty} c_n x^n$ بنویسید.

(الف) $$\left(\sum_{n=۰}^{\infty} nx^n\right)\left(\sum_{n=۰}^{\infty} x^n\right),$$

(ب) $$\left(\sum_{n=۰}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n x^n\right).$$

۸. اگر $۰\leqslant x<۱$، ثابت کنید که

$$\left(\frac{۱}{۱-x}\right)^۲=\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)x^n.$$

۹. اگر $L=\sum_{n=۱}^{\infty}[(-۱)^{n+۱}]/n$، ثابت کنید که هر کدام از سریهای زیر به‌مجموعی که برایشان تعیین شده است همگرایند:

(الف) $$۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۱۲}+\cdots=\frac{L}{۲},$$

(ب) $$۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۱}-\cdots=L.$$

۶.۳ آزمونهای همگرایی مطلق

در بخش پیش رفتار سریهای همگرای مطلق و همگرای شرطی را به‌طور کلی بررسی کردیم. دراین بخش روشهایی (آزمونهایی) را به‌کار می‌بریم که برای تشخیص همگرایی مطلق سریها به‌کار می‌روند.

۱.۶.۳ تعریف. فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دوسری اعداد حقیقی باشند. گوییم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مغلوب $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ است* اگر عددی مانند $N\in I$ باشد به‌طوری که

$$|a_n|\leqslant|b_n| \qquad (n\geqslant N).$$

(یعنی، برای همهٔ مقادیر n، بجز تعدادی متناهی از آنها، $|a_n|\leqslant|b_n|$.) دراین‌حالت می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

مثلاً، $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^2\ll \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n+1)$ زیرا برای $n\geqslant 3$ داریم $|(-1)^n/n^2|\leqslant 1/(2n+1)$. همچنین، $100+1/2+1/4+\ldots$ مغلوب $1+1/2+1/4+\ldots$ است. (این مثال نشان می‌دهد که از $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ لزوماً $\sum_{n=1}^{\infty} a_n< \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نتیجه نمی‌شود.)

در انتهای بخش ۴.۳ گفتیم که سری همگرای مطلق، همگراست زیرا جمله‌هایش «کوچك» هستند. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مغلوب سری همگرای مطلق $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ باشد، آنگاه مسلماً $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرای مطلق است چون‌که بیشتر جمله‌هایش از جمله‌های نظیر در $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بزرگتر نیستند. اکنون این مطلب را ثابت می‌کنیم.

۲.۶.۳ قضیه. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مغلوب $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ باشد و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرای مطلق باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرای مطلق است. به‌صورت نمادی، اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ و

---

* یااینکه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ برسری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ غالب است.

$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|<\infty$ ، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$.

برهان: فرض کنیم $M=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$. برای هر n اگر $n\geqslant N$ داریم $|a_n|\leqslant|b_n|$.
ازاین‌رو، اگر $s_n=|a_1|+\cdots+|a_n|$، آنگاه به‌ازای $n\geqslant N$ داریم

$$s_n\leqslant|a_1|+\cdots+|a_N|+|b_{N+1}|+\cdots+|b_n|\leqslant|a_1|+\cdots+|a_N|+M.$$

بنابراین، دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ از بالا کراندار است وقضیه از ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۲.۶.۳ آزمون مقایسه درهمگرایی مطلق نامیده مـی‌شود چون‌که شامل مقایسهٔ جمله به‌جملهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ و $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ است. این قضیه پایهٔ سایر آزمونهای این بخش است.

۳.۶.۳. از ۲.۶.۳ فوراً نتیجه می‌شود که برای هر x در $(-1, 1)$، سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ همگرای مطلق است، زیرا

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ll\sum_{n=0}^{\infty}|x|^n$$

و سری سمت راست بنابر ۲.۲.۳ همگرای مطلق است.

تأکید می‌کنیم که قضیهٔ ۲.۶.۳ فقط درمورد همگرایی مطلق است. ملاحظه کنیدکه سری $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ مغلوب سری همگرای شرطی $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ است، ولی سری$\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ به‌هیچ‌وجه همگرا نیست. مفهوم «مغلوب» فقط درارتباط باقدرمطلقها کاربرد دارد.

نتیجهٔ زیر را مـی‌توان از قسمت (ب) در ۱.۲.۳ به‌دست‌آورد. از آوردن برهان صرفنظر می‌کنیم.

۴.۶.۳. قضیه. اگـر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ مغلوب $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ باشد و $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\infty$ ، آنـگـاه $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|=\infty$. (یـعـنـی، اگـر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ll\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\infty$ ، آنـگـاه $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|=\infty$.)

برای مثال، $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/(2n+5)$ را ملاحظـه کنید. ایـن سری برسری واگرای $\sum_{n=1}^{\infty}1/3n$ غالب است. ازاین‌رو $\sum_{n=1}^{\infty}1/(2n+5)$ واگراست.

اکنون، به‌اولین نتیجهٔ مهمی که از ۲.۶.۳ به‌دست می‌آید می‌پردازیم.

۵.۶.۳. قضیه. (الف) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرای مطلق باشد و اگر $\lim_{n\to\infty} |a_n|/|b_n|$ وجود داشته باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است.

(ب) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ و اگر $\lim_{n\to\infty} |a_n|/|b_n|$ وجود داشته باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \infty$.

برهان: (الف) بنابر ۲.۵.۲، دنبالهٔ $\{|a_n/b_n|\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است. بنابراین عدد مثبتی مانند M هست که

$$|a_n| \leqslant M|b_n| \qquad (n\in I)\,.$$

این مطلب نشان می‌دهد که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مغلوب سری همگرای مطلق $\sum_{n=1}^{\infty} Mb_n$ است. پس بنابر ۲.۶.۳، $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

(ب) همانند برهان (الف) داریم $|a_n| \leqslant M|b_n|$. پس $|b_n|$ بر سری واگرای $\sum_{n=1}^{\infty} (1/M)\cdot|a_n|$ غالب است. حال ۴.۶.۳ را به‌کار برید.

مثلا سری $\sum_{n=1}^{\infty} 2n/(n^2-4n+7)$ واگراست. زیرا اگر فرض کنیم $b_n = 2n/(n^2-4n+7)$ و $a_n = 1/n$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4n+7}{2n^2} = \frac{1}{2}\,.$$

ولی

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\,.$$

ازاین‌رو، بنابر (ب) از ۵.۶.۳،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2n}{n^2-4n+7}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2-4n+7} = \infty\,.$$

نتیجهٔ زیر، موسوم به‌آزمون نسبت، در بحث مربوط به‌نوع معینی از سریهای توانی خیلی مفید است.

۶.۶.۳.قضیه. فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یك سری اعداد حقیقی غیرصفر باشد و فرض کنیم

$$a=\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \qquad A=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

(درنتیجه $a\leqslant A$). آنگاه

(الف) اگر $A<1$، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$؛

(ب) اگر $a>1$، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

(ج) اگر $a\leqslant 1\leqslant A$، آنگاه آزمون نسبت به‌کار نمی‌آید. (یعنی، هیچ اطلاعی درمورد همگرایی نمی‌توان استنتاج کرد.)

برهان: (الف) اگر $A<1$، عدد B را طوری انتخاب می‌کنیم که $A<B<1$. پس به ازای یك عدد $\varepsilon>0$، $B=A+\varepsilon$. درنتیجه بنابر ۱۲.۹.۲، عدد $N\in I$ هست به‌طوری که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leqslant B \qquad (n\geqslant N).$$

پس $|a_{N+1}/a_N|\leqslant B$، $|a_{N+2}/a_{N+1}|\leqslant B$، و بنابراین

$$\left|\frac{a_{N+2}}{a_N}\right|=\left|\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\right|\cdot\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|\leqslant B^2.$$

به‌همین‌ترتیب، برای هر $k\geqslant 0$ داریم

$$\left|\frac{a_{N+k}}{a_N}\right|=\left|\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}\right|\cdots\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|\leqslant B^k.$$

ازاین‌رو

$$|a_{N+k}|\leqslant|a_N|B^k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

ولی چون $0<B<1$ بنابر ۲.۲.۳، $\sum_{k=0}^{\infty}|a_N|B^k$ همگراست. ازاین‌رو، بنابر ۲.۶.۳، $\sum_{k=0}^{\infty}|a_{N+k}|$ همگراست. یعنی، سری $|a_N|+|a_{N+1}|+|a_{N+2}|+\ldots$ همگراست.

ازاین به آسانی نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$. بااین (الف) ثابت شده است.

(ب) اگر $a>1$، آنگاه بنابر ۱۲.۹.۲، Nای هست به‌طوری که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1 \qquad (n\geqslant N)$$

پس داریم $\cdots>|a_{N+2}|>|a_{N+1}|>|a_N|$، و بنابراین، مسلماً $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ به ۰ همگرا نیست. ازاین‌رو، بنابر ۴.۱.۳، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

(ج) برای روشن‌شدن نتیجهٔ (ج) ابتدا سری $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را ملاحظه کنید. دراینجا

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

پس $A=1=a$، ومی‌دانیم که سری واگراست.

ازطرف دیگر به‌زودی خواهیم دید که $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ همگراست ودراینجا نیز $a=1=A$.

از ۶.۶.۳ فوراً نتیجه می‌گیریم که اگر $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|$ وجود داشته باشد (ومثلا مساوی L باشد)، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگراست اگر $L<1$، و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست اگر $L>1$، درحالی که اگر $L=1$، هیچ نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

دراینجا چندمثال برای روشن‌ساختن ۶.۶.۳ می‌آوریم. ابتدا سری $\sum_{n=1}^{\infty} n^n/n!$ را درنظر می‌گیریم. دراینجا $a_n=n^n/n!$ و

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

بنابر ۳.۶.۲، $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e>2$ و بنابراین $A=e=a$. از $a>2$ نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty} n^n/n!$ واگراست. این محاسبات نشان می‌دهد که در سری $\sum_{n=1}^{\infty} n!/n^n$ داریم $A=1/e<1/2<1$ و لذا $\sum_{n=1}^{\infty} n!/n^n$ همگراست.

سپس، سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ ، $x\in R$ را درنظر می گیریم. دراینجا داریم

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^n}=\frac{|x|}{n+1}.$$

بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=0$ ، واین نشان می‌دهدکه به‌ازای هرعدد حقیقی x، سری موردنظر مطلقاً همگراست. (درحساب دیفرانسیل و انتگرال دیده‌اید که مجموع این سری e^x است.)

سرانجام، می‌خواهیم مقادیری از عدد حقیقی x را بیابیم که به‌ازای آن، سری $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ همگرای مطلق است. درمورد این سری داریم $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=|x|$. درنتیجه سری به‌ازای $|x|<1$ همگرای مطلق و به‌ازای $|x|>1$ واگراست. آزمون نسبت درحالتی که $|x|=1$، یعنی $x=1$ یا $x=-1$، کارساز نیست. اما برای این دو مقدار x سری به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ درمی‌آید، که هیچ کدام همگرای مطلق نیستند. بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ برای $-1<x<1$ همگرای مطلق است (و برای $-1\leqslant x<1$ همگراست).

آخرین آزمون این بخش به‌آزمون ریشه معروف است. ازاین آزمون قضیهٔ کلی جالبی دربارهٔ سریهای توانی به‌دست می‌آید.

۷.۶.۳ قضیه. اگر $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=A$ ، آنگاه

(الف) اگر $A<1$، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است.

(ب) اگر $A>1$، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست. (این قسمت شامل حالت $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$ نیز می‌شود.)

اگر $A=1$، آنگاه این آزمون به‌کار نمی‌آید.

برهان: اگر $A<1$، آنگاه B را طوری اختیار می‌کنیم که $A<B<1$. بنابر ۱۲.۹.۲ عددی مانند $N\in I$ هست به‌گونه‌ای که

$$\sqrt[n]{|a_n|}<B \qquad (n\geqslant N).$$

یا $|a_n|<B^n (n\geqslant N)$. بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ مغلوب سری همگرای مطلق $\sum_{n=1}^{\infty} B^n$ است.

درنتیجه بنابر ۲.۶.۳، $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. دراینجا اثبات (الف) تمام است.

اگر $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$، آنگاه بنابر ۱۲.۹.۲ به‌ازای بینهایت مقدار n، $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$. پس به ازای بینهایت مقدار n، $|a_n| > 1$ و بنابراین $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ به ۰ همگرا نیست. پس بنابر ۴.۱.۳، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

توجه‌کنیدکه درسری واگرای $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ (که نشان خواهیم داد همگراست) داریم $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. [اگر $\lim_{n \to \infty} (\log n/n) = 0$ را از حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌خاطر بیاوریم، داریم

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n \to \infty} e^{(-\log n/n)} = e^0 = 1.$$

ازاین‌رو همچنین،

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1/n^2} = \lim_{n \to \infty} (\sqrt[n]{1/n})^2 = 1^2 = 1.]$$

ازاین قضیه نتیجه‌ای دربارهٔ سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ارائه می‌دهیم.

۸.۶.۳. قضیه. فرض کنیم $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. آنگاه

(الف) اگر $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای‌تمام‌مقادیر x همگرای مطلق است؛

(ب) اگر $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 0$، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای $|x| < 1/L$ همگرای مطلق است وبه‌ازای $|x| > 1/L$ واگراست؛

(ج) اگر $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ فقط به‌ازای $x = 0$ همگرا وبرای سایر مقادیر x واگراست.

برهان: داریم $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}$. ازاین‌رو، اگر $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$، آنگاه برای هر x دلخواه، $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot 0 = 0$ و لـذا بنابر (الف) از ۷.۶.۳، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ همگرای مطلق است. پس اثبات (الف) تمام است. برای اثبات (ب)

داریم $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=|Lx|$. مجدداً بنابر ۷.۶.۳، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ درصورتی که $|Lx|<1$ همگرای مطلق و اگر $|Lx|>1$، واگراست. پس اثبات (ب) نیز تمام است.
اثبات (ج) به‌خواننده واگذار می‌شود.

مطلب زیر برای هرسه‌حالت ۸.۶.۳ برقرار است.

۹.۶.۳. نتیجه. اگرسری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای $x=x_0$ همگرا باشد، آنگاه به‌ازای تمام مقادیر x که در $|x|<|x_0|$ صدق می کنند سری توانی همگرای مطلق است.
قضیهٔ زیر نشان می‌دهد هرجا که آزمون نسبت به‌کار آید آزمون ریشه نیز به‌کارمی آید.

۱۰.۶.۳. قضیه. اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی غیرصفر باشد، آنگاه

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \qquad (1)$$

و

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\geqslant \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad (2)$$

ازاین‌رو، اگر آزمون نسبت نتیجه دهد که $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$، آزمون ریشه نیز همین نتیجه را می‌دهد، و، اگر از آزمون نسبت $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\infty$ حاصل شود، از آزمون ریشه نیز همین نتیجه به‌دست می‌آید.

برهان: (۱) را اثبات خواهیم کرد.
اگر $\limsup_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=\infty$، آنگاه (۱) بدیهی است. فرض کنیم $A=\limsup_{n\to\infty}|a_{n+1}/(a_n)|$، A عددی حقیقی است. آنگاه بنابر ۱۲.۹.۲، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، عدد $N\in I$ هست به‌طوری که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leqslant A+\varepsilon \qquad (n\geqslant N).$$

ازاین‌رو

$$|a_{N+1}|\leqslant(A+\varepsilon)|a_N|,$$
$$|a_{N+2}|\leqslant(A+\varepsilon)|a_{N+1}|\leqslant(A+\varepsilon)^2|A_N|.$$

درواقع، اگر $n\geqslant N$، آنگاه داریم

$$|a_n|=|a_{N+(n-N)}|\leqslant(A+\varepsilon)^{n-N}|a_N|.$$

ازاین‌رو، اگر $B=|a_N|/(A+\varepsilon)^N$ داریم

$$|a_n|\leqslant B(A+\varepsilon)^n \qquad (n\geqslant N),$$

و بنابراین

$$\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant B^{1/n}(A+\varepsilon) \qquad (n\geqslant N).$$

چون $B^{1/n}\longrightarrow 0$ وقتی $n\longrightarrow\infty$، نتیجه می‌شود

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant A+\varepsilon$$

ولی ε عدد مثبت دلخواهی بود، بنابراین

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant A=\limsup_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

پس رابطهٔ (۱) ثابت شد. نامساوی (۲) باهمین روش ثابت می‌شود.

حال، برای دنبالهٔ مفروض $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ فرض می‌کنیم‌که از آزمون نسبت، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ نتیجه شود. آنگاه سمت راست (۱) کوچکتر از ۱ است. پس سمت چپ (۱) نیز کوچکتر از ۱ است، واین نشان می‌دهدکه از آزمون ریشه نیز همگرایی حاصل می‌شود. به‌همین‌ترتیب از (۲) نتیجه می‌شود که اگر از آزمون نسبت، واگرایی نتیجه شود، آزمون ریشه نیز همین نتیجه را می‌دهد. دراینجا برهان تمام است.

بنابراین، قضیهٔ بالا نشان می‌دهد که اگر آزمون نسبت دربارهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ به‌کار آید، آنگاه آزمون ریشه نیز به‌کارمی‌آید. باوجوداین، آزمون نسبت باارزش است چون که غالباً کاربرد آن آسانتر است.

تمرینهای ۶.۳

۱. درستی یا نادرستی این مطلب را ثابت‌کنید: اگر سری با جمله‌های نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد و سری با جمله‌های نامنفی $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}b_n \ll \sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

۲. آیا سریهای زیر همگرایند؟

(الف) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{4}}{n!}$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^{2}}$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4+2^{n}}$

۰۳ اگر $|x|<1$، نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty} n^{10000}x^{n}$ همگرای مطلق است.

۰۴ ثابت کنید که برای هر $x>0$ سریهای $\dots -!1-x^{2}/2!+x^{4}/4$ و $\dots -!x-x^{3}/3!+x^{5}/5$ مطلقاً همگرایند. با استفاده از قضیهٔ ۷.۵.۳ چند جملهٔ اول حاصلضرب آنهارا بهدست آورید. اتحاد $\sin 2x=2\sin x\cos x$ را نتیجه بگیرید.

۰۵ (الف) آیا آزمون نسبت درمورد سری زیر اطلاعی بهدست می‌دهد؟

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}+\left(\frac{1}{4}\right)^{1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\cdots.$$

(ب) آیا این سری همگراست؟

۰۶ اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالهای از اعداد حقیقی باشد، و اگر $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=L<1$، ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

۰۷ بهازای چهمقادیری از x سری زیر همگراست؟

$$x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\frac{x^{7}}{7}+\cdots.$$

۰۸ سری $\dots+1+2x+3x^{2}+4x^{3}$ بهازای چهمقادیری از x همگراست؟

۰۹ اگر $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ و اگر برای‌هر $n\in I$، $|b_{n+1}/b_n|\leqslant|a_{n+1}/a_n|$، ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|<\infty$. (راهنمایی: ابتدا نشان دهیدکه $|b_n|\leqslant|b_1/a_1|\cdot|a_n|$.)

۰۱۰ اگر $a_n=(3-e)(3-e^{1/2})(3-e^{1/3})\dots(3-e^{1/n})$، آنگاه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ را بیازمایید.

۰۱۱ آزمون ریشه یعنی ۷.۶.۳ را درمورد سریهای زیر بهکار برید و بیان کنیدکه چهچیز می‌توان نتیجه‌گرفت.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$,

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^{2n}}{e^n}$.

۱۲. ثابت کنید که برای تمام اعداد حقیقی x سری $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^n$ همگراست.

۷.۳ سریهایی که جمله‌هایشان دنبالهٔ غیرصعودی تشکیل می‌دهند

از آزمونهای بخش پیش هیچ اطلاعی در مورد سری مهم $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ به‌دست نمی‌آید. ویژگی به‌خصوص این‌سری این‌است که جمله‌هایش یك دنبالهٔ غیرصعودی تشکیل می‌دهند. غالباً چنین سریهایی از راه آزمون انتگرال که درحساب دیفرانسیل و انتگرال با آن آشنا هستیم موردبحث قرار می‌گیرند. ولی، چون تاکنون دربارهٔ انتگرالها صحبتی نکرده‌ایم، آزمون بسیار جالب دیگری به‌نام آزمون چگالش کوشی را به‌کار می‌بریم.

۱.۷.۳. قضیه. اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای غیرصعودی از اعداد مثبت باشد و اگر $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

برهان: داریم

$$a_1 \leqslant a_1,$$

$$a_2 + a_3 \leqslant a_2 + a_2 = 2a_2,$$

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leqslant 4a_4,$$

و برای هر $n \in I$،

$$a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1} \leqslant 2^n a_{2^n}.$$

ازاین نابرابریها نتیجه می‌شود که

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

ازاین‌رو، برای هر $m \in I$ داریم

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} .$$

(چرا؟). از آنجا که بنا به‌فرض $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$، قضیهٔ ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود.

عکس ۱.۷.۳ نیز برقرار است.

۲.۷.۳. قضیه. اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای غیرصعودی از اعداد مثبت باشد و اگر $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

برهان: داریم

$$a_3 + a_4 \geqslant 2 a_4,$$
$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geqslant 4 a_8,$$

و به‌طور کلی

$$a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}} \geqslant 2^n a_{2^{n+1}} = \frac{1}{2}(2^{n+1} a_{2^{n+1}}),$$

در نتیجه

$$\sum_{k=3}^{2^{n+1}} a_k \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} a_{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} 2^k a_{2^k} .$$

ادامهٔ برهان به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود. به‌شباهت این برهان با برهان ۳.۲.۳ توجه کنید.

۳.۷.۳. نتیجه. سری $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ همگراست.

برهان: با فرض $a_n = 1/n^2$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty .$$

ازاین‌رو، بنابر ۱.۷.۳،

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

ملاحظه کنید که برای $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ داریم $a_n = 1/n$، و بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (1/2^n) = \infty$. ازاین‌رو واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ از ۲.۷.۳ نتیجه می‌شود.

سری $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \log n)$ واگراست. زیرا دراینجا $a_n = 1/(n \log n)$ و بنابراین

$$\sum_{n=۲}^{\infty} ۲^n a_{۲^n} = \sum_{n=۲}^{\infty} ۲^n \cdot \frac{۱}{۲^n \log ۲^n} = \sum_{n=۲}^{\infty} \left(\frac{۱}{\log ۲}\right) \cdot \frac{۱}{n}$$

که واگراست. بنا بر ۲.۷.۳، $\sum_{n=۴}^{\infty} ۱/(n \log n) = \infty$.

سری $\sum_{n=۴}^{\infty} ۱/[n(\log n)^۲]$ همگراست. زیرا

$$\sum_{n=۲}^{\infty} ۲^n a_{۲^n} = \frac{۱}{(\log ۲)^۲} \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} < \infty \cdot$$

اگر جمله‌های یك سری همگرا یك دنبالهٔ غیرصعودی تشکیل بدهند، جمله‌ها باید «سریعتر» از $۱/n$ به‌صفر میل کنند. اکنون این نتیجه را، کــه قضیهٔ پرینگسهایم[1] نامیده می‌شود، بیان می کنیم (هرچند که این قضیه اصلا از آبل است).

۴.۷.۳. قضیه. اگر $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای غیرصعودی از اعداد مثبت باشد و اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} na_n = ۰$.

برهان: فرض کنیم $s_n = a_۱ + \cdots + a_n$. اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = A$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A = \lim_{n\to\infty} s_{۲n} \cdot$$

بنابراین، $\lim_{n\to\infty}(s_{۲n} - s_n) = ۰$. اکنون

$$s_{۲n} - s_n = a_{n+۱} + a_{n+۲} + \cdots + a_{۲n} \geqslant a_{۲n} + a_{۲n} + \cdots + a_{۲n},$$

وبنابراین $s_{۲n} - s_n \geqslant na_{۲n} \geqslant ۰$. ازاین‌رو، $\lim_{n\to\infty} na_{۲n} = ۰$ و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} ۲na_{۲n} = ۰ \cdot \qquad (۱)$$

ولی $a_{۲n+۱} \leqslant a_{۲n}$. ازاین‌رو

$$(۲n+۱)a_{۲n+۱} \leqslant \left(\frac{۲n+۱}{۲n}\right)(۲na_{۲n}).$$

بنا بر (۱)

$$\lim_{n\to\infty}(۲n+۱)a_{۲n+۱} = ۰ \cdot \qquad (۲)$$

1. Pringsheim

حکم قضیه از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

در قضیهٔ ۴.۷.۳ اگر فرض غیرصعودی‌بودن دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را حذف کنیم، قضیه دیگر برقرار نخواهد بود؛ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ باضابطهٔ زیر را ملاحظه‌کنید

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & (n=1, 4, 9, 16, \dots).\\ \frac{1}{n^2} & (\text{اگر } n \text{ مربع کامل نباشد}).\end{cases}$$

آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9}+\dots$$

ازاین‌رو مجموعهای جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ از بالا کراندار است. زیرا این مجموعهای جزئی از

$$\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots\right)+\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots\right)$$

کوچکتر و این مقدار از $2\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ کوچکتر است. بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست. ولی وقتی $n\to\infty$، na_n به‌صفر میل نمی‌کند، زیرا برای nهایی‌که مربع کامل هستند داریم $na_n=1$.

همچنین ملاحظه‌کنید که عکس قضیهٔ ۴.۷.۳ برقرار نیست. یعنی، دنباله‌ای‌غیرصعودی از اعداد مثبت مانند $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} na_n=0$ ولی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست. به‌عنوان مثال، دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را با ضابطهٔ زیر درنظر بگیرید

$$a_n=\begin{cases}2 & n=1\\ \dfrac{1}{n\log n} & n\geqslant 2\,.\end{cases}$$

تمرینهای ۷.۳

۱. به‌ازای چه‌مقادیری از x سری $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$ همگراست؟

۲. بهازای چهمقادیری از x سری $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\log n)^x]$ همگراست؟

۳. ثابت کنید که برای همهٔ مقادیر عدد حقیقی x سری $\sum_{n=3}^{\infty} 1/(\log n)^x$ واگراست.

۴. (الف) اگر جملههای سری همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگی مثبت و تشکیل یک دنبالهٔ غیرصعودی دهند، آنگاه ۲.۷.۳ را بهکار ببرید و ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} 2^n a_{2^n} = 0$.

(ب) برهان دیگری برای ۴.۷.۳ ارائه دهید.

۵. ۴.۷.۳ را بهکار ببرید و برهان دیگری برای ۳.۲.۳ ارائه دهید.

۸.۳ مجموعیابی جزءبهجزء

۱.۸.۳ قضیه. فرض کنیم $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند و $s_n = a_1 + \cdots + a_n$، آنگاه برای هر $n \in I$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} s_k (b_{k+1} - b_k). \tag{1}$$

برهان: s_0 را برابر ۰ تعریف میکنیم. چون $a_k = s_k - s_{k-1}$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} b_k (s_k - s_{k-1}) = b_1(s_1 - s_0) + b_2(s_2 - s_1) + \cdots \\ &\quad + b_{n-1}(s_{n-1} - s_{n-2}) + b_n(s_n - s_{n-1}) \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_{k+1} - b_k) + s_n b_n - s_n b_{n+1} + s_n b_{n+1} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} s_k(b_{k+1} - b_k) + s_n b_{n+1},\end{aligned}$$

که (۱) را ثابت میکند.

اگر برای هر دنبالهٔ $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ قرار دهیم $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$، آنگاه

$$\Delta a_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{(k+1) - k}$$

به «مشتق a_k نسبت به k» شبیه است. دراینصورت فرمول (۱) بهصورت

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \Delta s_{k-1} = s_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} s_k \Delta b_k \qquad (2)$$

درمی‌آید که به‌فرمول انتگرال جزء به‌جزء یعنی

$$\int_c^d b\, ds = sb\Big|_c^d - \int_c^d s\, db$$

شبیه است. ازاین‌رو گاهی فرمول (۱) را مجموعیابی جزء به‌جزء خوانند.

نتیجهٔ زیر که از ۱.۸.۳ به‌دست می‌آید به‌لم آبل معروف است. ازاین لم یک آزمون جدید همگرایی و، دربخش بعد، یک قضیه درمجموعیابی سریها حاصل می‌شود.

۲.۸.۳. لم آبل. فرض کنیم $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر دو عدد حقیقی m و M باشند به‌طوری‌که مجموعهای جزئی دنباله، یعنی $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$، در رابطهٔ

$$m \leqslant s_n \leqslant M \qquad (n \in I)$$

صدق کنند، و اگر $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای غیرصعودی از اعداد نامنفی باشد، آنگاه

$$mb_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant Mb_1 \qquad (n \in I). \qquad (1)$$

برهان: بنابر (۱) از ۱.۸.۳ داریم

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1}$$

چون، بنا به‌فرض، $b_k - b_{k+1} \geqslant 0$ و $s_k \leqslant M$، از رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k &\leqslant M \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) + M b_{n+1} \\ &= M[(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) + b_{n+1}] = Mb_1. \end{aligned}$$

پس طرف راست نامساوی (۱) ثابت شد. به‌طریق مشابه طرف چپ نامساوی را می‌توان ثابت کرد.

بنابراین در ۲.۸.۳، اگر برای همهٔ مقادیر n، $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant M$، آنگاه $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant Mb_1$.

قضیهٔ زیر آزمون دیریکله[1] نامیده می‌شود.

---

1. Dirichlet

۳.۸.۳. قضیه. فرض کنیم $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که مجموعهای جزئی‌اش، یعنی $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$، یك دنبالهٔ کراندار تشکیل می‌دهند، و فرض کنیم $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای غیرصعودی از اعداد نامنفی باشد که به ۰ همگراست. آنگاه $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ همگراست.

برهان: کافی است که ثابت کنیم مجموعهای جزئی $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ یك دنبالهٔ کوشی تشکیل می‌دهند. یعنی، برای عدد دلخواه $\varepsilon>0$ باید عدد $N\in I$ را بیابیم به‌گونه‌ای که

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right|<\varepsilon \qquad (n\geqslant m\geqslant N).$$

حال، بنا به‌فرض، عدد $M>0$ هست به‌طوری که $|s_n|\leqslant M (n\in I)$. ازاین‌رو برای هر $m, n\in I$،

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|=|s_n-s_{m-1}|\leqslant|s_n|+|s_{m-1}|,$$

وبنابراین

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|\leqslant 2M \qquad (m, n\in I; m\leqslant n).$$

ازاین بنابر ۲.۸.۳ (که درمورد $\{a_k\}_{k=m}^{\infty}$ و $\{b_k\}_{k=m}^{\infty}$ به‌کار برده شود) داریم

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right|\leqslant 2Mb_m \qquad (m, n\in I; m\leqslant n).$$

ولی، بنا به‌فرض، عدد $N\in I$ هست که $b_n<\varepsilon/2M\ (n\geqslant N)$. از این‌رو، $2Mb_m<\varepsilon (m\geqslant N)$ به‌طوری که

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right|<\varepsilon \qquad (n\geqslant m\geqslant N),$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴.۸.۳. برای مثال، از اتحاد

$$2\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx)=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x,$$

مـی بینیم کـه اگر $\sin x/۲\neq ۰$، آنگاه مجموعهـای جـزئی $s_n=\sum_{k=۱}^{n}\sin kx$ در $|s_n|\leqslant ۱/|\sin x/۲|$ صدق می کنند. بنا براین سریهای

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\ ,\ \sum_{n=۳}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}$$

هردو برای تمام مقادیر x همگـرایند. (زیرا $\{۱/n\}_{n=۱}^{\infty}$ و $\{۱/\log n\}_{n=۳}^{\infty}$ غیرصعودی و به ۰ همگرایند.)

از آزمون دیریکله می‌توان آزمونی قدری متفاوت به‌دست آورد کـه آزمون آبل نامیده می‌شود ودرآن فرض مربوط به $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ سنگینتر و فـرض مـربوط بـه $\{b_n\}_{n=۱}^{\infty}$ سبکتر است.

۵.۸.۳.قضیه. اگر $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ یك سری همگرا از اعـداد حقیقی باشد واگر دنبالـهٔ $\{b_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یکنوا و همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty}a_nb_n$ نیز همگراست.

برهان: فـرض کنیم $\{b_n\}_{n=۱}^{\infty}$ غیـر نـزولی باشد و $c_n=b-b_n$ کـه در آن $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. (اگر $\{b_n\}_{n=۱}^{\infty}$ غیرصعودی باشد، فرض مـی‌کنیم $c_n=b_n-b$.) آنگاه $c_n\geqslant ۰$، $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=۰$، و $\{c_n\}_{n=۱}^{\infty}$ غیـرصعـودی است. پس بنـابـر ۳.۸.۳، سـری $\sum_{n=۱}^{\infty}a_nc_n$ همگراست. بنا بر ۳.۱.۳، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}ba_n$ همگراست. ولی $a_nb_n=ba_n-a_nc_n$. ازاین‌رو (مجدداً بنا بر ۳.۱.۳) $\sum_{n=۱}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=۱}^{\infty}(ba_n-a_nc_n)$ همگـراست، و ایـن چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

برای مثال، سری همگرای

$$۱-۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}+\cdots$$

ودنبالهٔ یکنوا وهمگرای $۰,۱/۲,۱/۲,۲/۳,۲/۳,۳/۴,۳/۴,\ldots$ رادرنظرمی‌گیریم. درنتیجه بنا بر ۵.۸.۳، سری

$$۰-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳^۲}-\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴^۲}-\cdots$$

همگراست. ملاحظه کنید که قضیهٔ ۱.۳.۳ را درمورد سری اخیرنمی‌توان به‌کاربرد.(چرا؟)

تمرینهای ۸.۳

۱. اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} na_n$ همگرا باشد، ثابت کنید که $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

۲. می‌دانیم که

$$\cos x+\cos ۳x+\cos ۵x+\cdots+\cos(۲n-۱)x=\frac{\sin ۲nx}{۲\sin x}(\sin x\neq ۰).$$

ثابت کنید که اگر x مضربی از π نباشد، آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty}\cos(۲n-۱)x/(۲n-۱)$ همگرا است.

۳. ثابت کنید که $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱/n)\log(۱+۱/n)$ همگراست (راهنمایی: رابطهٔ (۲) از ۱.۸.۳ را با فرض $b_k=\log k$ به‌کار برید.)

۴. نشان‌دهید که‌سری $۱-۱/۲-۱/۳+۱/۴+۱/۵-۱/۶-۱/۷++--\cdots$ همگراست.

۵. به‌عنوان حالت خاصی از آزمون دیریکله (۳.۸.۳) قضیهٔ ۱.۳.۳ را به‌دست آورید.

۹.۳ مجموعپذیری $(C,۱)$ سریها

همچنان‌که همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ به‌معنی همگرایی دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ تعریف شده است، مجموعپذیری $(C,۱)$ سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ به‌معنی مجموعپذیری $(C,۱)$ دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ تعریف خواهد شد. (۱.۱۱.۲ را ببینید.)

۱.۹.۳ تعریف. فرض کنیم $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ یک سری از اعداد حقیقی با مجموعهای جزئی $s_n=a_۱+\cdots+a_n$ باشد. گوییم $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ به A مجموعپذیر $(C,۱)$ است اگر

$$\lim_{n\to\infty} s_n=A \qquad (C,۱).$$

دراین‌حالت می‌نویسیم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n=A \qquad (C,۱).$$

مثلاً، $(C, ۱)$ $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n = -(۱/۲)$. زیرا دنبالهٔ مجموعهای جزئی این‌سری‌عبارت است از... $-۱, ۰, -۱, ۰, -۱, ۰$ و این‌دنباله به $۱/۲-$ مجموع‌پذیر $(C, ۱)$است.

سری $...+۶-۵+۴-۳+۲-۱$ دارای دنبالهٔ مجموعهای جزئی $...,۳-,۳,۲-,۲,۱-,۱$ است. همان‌طوری‌که بعداز قضیهٔ ۲.۱۱.۲ دیدیم، این دنباله مجموع‌پذیر $(C, ۱)$ نیست. ازاین‌رو، سری $...+۶-۵+۴-۳+۲-۱$ مجموع‌پذیر $(C, ۱)$ نیست.

۲.۹.۳. تعریف. روش مجموع‌پذیری Tی سریهارا منظم‌خوانیم اگر هرسری همگرا، به‌مجموعش مجموع‌پذیر T باشد. (یعنی، اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ به A همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ به A مجموع‌پذیر T باشد.)

۳.۹.۳. قضیه. روش مجموع‌پذیری $(C, ۱)$ سریها، منظم است.

برهان: اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ به A همگرا باشد، آنگاه دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نیز به A همگرا است. ازاین‌رو، بنابر ۲.۱۱.۲، $(C, ۱)$ $\lim_{n\to\infty} s_n = A$. این نیز نتیجه می‌دهد که $(C, ۱)$ $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = A$، وقضیه ثابت شده است.

۴.۹.۳. می‌دانیم که سری ممکن است مجموع‌پذیر $(C, ۱)$ باشد و همگرا **نباشد.** حال، قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که شرط ساده‌ای بر مجموع‌پذیری $(C, ۱)$ سری می‌افزاید و همگرایی سری را تضمین می‌کند. ابتدا به‌یك لم احتیاج داریم.

لم. فرض می‌کنیم $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ مجموع‌پذیر $(C, ۱)$ باشد و $t_n = a_۱ + ۲a_۲ + \dots + na_n$. اگر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = ۰, \qquad (۱)$$

آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا است.

برهان: نخست می‌نویسیم $\sigma_n = n^{-۱}(s_۱ + s_۲ + \dots + s_n)$، و به‌استقرا نشان می‌دهیم که

$$t_n = (n+۱)s_n - n\sigma_n \qquad (n \in I). \qquad (۲)$$

به‌ازای $n = ۱$ رابطهٔ (۲) برقرار است زیرا $t_۱ = a_۱ = s_۱ = \sigma_۱$. فرض کنیم (۲) به‌ازای یك مقدار n برقرار باشد، دراین‌صورت داریم

$$\begin{aligned}t_{n+1}&=t_n+(n+1)a_{n+1}=(n+1)s_n-n\sigma_n+(n+1)a_{n+1}\\&=(n+1)(s_n+a_{n+1})-n\sigma_n=(n+1)(s_{n+1})-(s_1+\dots+s_n)\\&=(n+2)s_{n+1}-(s_1+\dots+s_n+s_{n+1}),\end{aligned}$$

و بنابراین

$$t_{n+1}=(n+2)s_{n+1}-(n+1)\sigma_{n+1}.$$

ازاین‌رو، (۲) برای $n+1$ برقرار و استقرا کامل است.

حال، فرض کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=A\,(C,1)$، آنگاه $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=A$. سپس از (۱) و (۲) داریم

$$s_n=\frac{t_n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\sigma_n=\frac{n}{n+1}\left(\frac{t_n}{n}+\sigma_n\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{t_n}{n}+\sigma_n\right)=1\cdot(0+A)=A.$$

درنتیجه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست و لم ثابت شده است.

قضیه. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مجموعپذیر $(C,1)$ باشد و اگر $\lim_{n\to\infty} na_n=0$، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

برهان: بنابه‌فرض دنبالهٔ $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ به ۰ همگراست. پس بنابر ۲.۱۱۰۲، $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ به ۰ مجموعپذیر $(C,1)$ است. یعنی

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n}=0.$$

اما این فرض (۱) در لم فوق است. درنتیجه مفروضات لم برقرار است و قضیه از لم نتیجه می‌شود.

۵.۹.۳. تنها روش مجموعپذیری که در این بخش بحث کرده‌ایم مجموعپذیری $(C,1)$ است. اما از بحثی که کردیم باید روشن باشد که هرروش منظم مجموعپذیری دنباله‌ها یك روش منظم متناظر درسریها تعریف می‌کند.

مثلا، می‌گوییم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=A\,(C,2)$ اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$، دنبالهٔ مجموعهای جزئی

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، به‌A مجموعپذیر $(C,۲)$ باشد. از این‌رو، برای مثال از ۴.۱۱.۲ نتیجه می‌شود که

$$۱-۲+۳-۴+۵-۶+\cdots=\frac{۱}{۴} \qquad (C,۲).$$

(زیرا در این‌حالت، دنبالهٔ مجموعهای جزئی‌عبارت‌است‌از $(۱,-۱,۲,-۲,۳,-۳,\ldots)$.
این‌روش مجموعپذیری $(C,۲)$ درسریها منظم‌است زیرا مجموعپذیری $(C,۲)$ در دنباله‌ها منظم است.

در یکی از بخشهای آینده یك روش مجموعپذیری درنظر می‌گیریم که با دنبالهٔ مجموعهای جزئی سروکار ندارد. بخش ۶.۹ را ببینید.

تمرینهای ۹.۳

۱. مجموعپذیری $(C,۱)$ سریهای زیر را امتحان کنید

(الف) $۱-۳+۱-۳+۱-۳+\cdots$.

(ب) $۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots$.

(ج) $۱+۰-۱-۰+۱+۰-۱-۰+\cdots$.

۲. آیا مجموع $(C,۱)$ سری (ج) درتمرین قبل با مجموع $(C,۱)$ سری زیر برابر است؟

$$۱-۱+۱-۱+۱-۱+\cdots.$$

۳. ثابت‌کنید که سری زیرمجموعپذیر $(C,۱)$ نیست.

$$۱+۱-۱+۱+۱-۱+۱+۱-۱+\cdots$$

۴. نشان دهیدکه سری واگرا باجمله‌های مثبت نمی‌تواند مجموعپذیر $(C,۱)$ باشد.

۵. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مجموعپذیر $(C,۱)$ باشد، آنگاه ثابت‌کنید که دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ به ۰ مجموعپذیر $(C,۱)$ است. (این نتیجه را با ۴.۱.۳ مقایسه کنید.)

۶. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مجموعپذیر $(C,۱)$ باشد، آنگاه با فرض $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ ثابت‌کنید که $\lim_{n\to\infty} s_n/n=۰$.

۱۰.۳ ردهٔ l^{2}

بیشتر مفاهیم مهم که تاکنون ارائه کرده‌ایم (نظیر مجموعه، دنباله، تابع، سری) همگی در تعریف ردهٔ l^{2} وارد می‌شوند.

۱.۱۰.۳. تعریف. ردهٔ l^{2} عبارت است از ردهٔ تمام دنباله‌های $s=\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^{2}<\infty$.

بنابراین عنصرهای l^{2} همگی دنباله هستند. آشکار است که دنبالهٔ $0, 0, 0, \ldots$ عنصر l^{2} است. بنابر ۳.۷.۳، دنبالهٔ $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ نیز عنصر l^{2} است. بنابر ۳.۲.۳، دنبالهٔ $\{1/\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ به l^{2} تعلق ندارد. به‌زودی نشان خواهیم داد که اگر $s, t\in l^{2}$، آنگاه $s+t\in l^{2}$.

دراینجا دو نامساوی مشهور را معرفی می‌کنیم.

۲.۱۰.۳. قضیه. (نامساوی شوارتس*) اگر $s=\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $t=\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ در l^{2} باشند، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n$ همگرای مطلق است و

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n\right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^{2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{2}\right)^{1/2}. \tag{1}$$

برهان: می‌توانیم فرض کنیم که حداقل یک s_n، مثلاً s_N، وجود دارد که مخالف ۰ باشد، زیرا درغیر این‌صورت قضیه بدیهی است. به‌ازای nای ثابت به‌طوری که $n\geqslant N$ وبه‌ازای هرعدد حقیقی x داریم

$$\sum_{k=1}^{n} (x s_k+t_k)^{2}\geqslant 0 .$$

با بسط‌دادن پرانتز درسمت چپ داریم

$$x^{2}\sum_{k=1}^{n} s_k^{2}+2x\sum_{k=1}^{n} s_k t_k+\sum_{k=1}^{n} t_k^{2}\geqslant 0 .$$

نابرابری فوق را می‌توان به‌صورت $Ax^{2}+Bx+C\geqslant 0$ نوشت که در آن

$$A=\sum_{k=1}^{n} s_k^{2}>0, \qquad B=2\sum_{k=1}^{n} s_k t_k, \qquad C=\sum_{k=1}^{n} t_k^{2}.$$

[از حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم که $(A>0)$ $Ax^{2}+Bx+C$ به‌ازای

---

* نامساوی Schwarz گاهی نامساوی کوشی یا بونیاکوفسکی (Buniakovski) نامیده می‌شود.

$x=-B/2A$ مینیمم است (تحقیق کنید!). از این مطلب در مرحلهٔ بعدی برهان استفاده می‌کنیم.]

اگر قرار دهیم $x=-B/2A$، داریم $A(-B/2A)^2+B(-B/2A)+C\geqslant 0$، یا $B^2\leqslant 4AC$. اما این می‌گوید که

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} s_k t_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} s_k^2\Big)\cdot\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k^2\Big)\cdot \qquad (2)$$

اگر در (۲) به‌جای s_k و t_k بگذاریم $|s_k|$ و $|t_k|$، خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^{n}|s_k t_k| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} s_k^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_{k=1}^{\infty} t_k^2\Big)^{1/2}\cdot$$

در نتیجه دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\sum_{k=1}^{\infty}|s_k t_k|$ کراندار است، و بنابراین $\sum_{k=1}^{\infty}|s_k t_k|<\infty$ به‌خصوص، بنابر ۲.۴.۳، $\sum_{k=1}^{\infty} s_k t_k$ همگراست. حال اگر در (۲)، n به ∞ میل کند و ۵.۷.۲ را به‌کار بریم، (۱) به‌دست می‌آید.

۳.۱۰.۳. قضیه. (نابرابری مینکوفسکی[1]). اگر $s=\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $t=\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ عنصرهای l^2 باشند، آنگاه $s+t=\{s_n+t_n\}_{n=1}^{\infty}$ عنصر l^2 است و

$$\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(s_n+t_n)^2\Big]^{1/2} \leqslant \Big[\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2\Big]^{1/2}+\Big[\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2\Big]^{1/2}\cdot$$

برهان: بنا به‌فرض سریهای $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2$ و $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2$ همگرایند. همچنین، بنابر ۲.۱۰.۳، سری $\sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n$ همگراست. چون $(s_n+t_n)^2=s_n^2+2s_nt_n+t_n^2$، از ۳.۱.۳ نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty}(s_n+t_n)^2$ همگراست و

$$\sum_{n=1}^{\infty}(s_n+t_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n+\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2\cdot$$

نابرابری شوارتس را درمورد جملهٔ دوم سمت راست برابری فوق به‌کار می‌بریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}(s_n+t_n)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2+2\Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2\Big)^{1/2}+\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2,$$

و بنابراین،

---

1. Minkowski

$$\sum_{n=1}^{\infty}(s_n+t_n)^2 \leqslant \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2\right)^{1/2}\right]^2.$$

با گرفتن ریشهٔ دوم ازطرفین نابرابری فوق برهان کامل می‌شود.

ردهٔ l^2 به‌عنوان مثالی از فضای متریك در فصل بعد به‌کار می‌رود. بنابراین مفید خواهد بودکه به‌معرفی مفهوم نرم یك عنصر l^2 بپردازیم.

۴.۱۰.۳. تعریف. اگر $s=\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ عنصر l^2 باشد، آنگاه $\|s\|_2$ که نرم s خوانده می‌شود چنین تعریف می‌شود

$$\|s\|_2=\left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2\right)^{1/2}.$$

بنابراین نرم یك دنباله در l^2 عددی نامنفی است. (پس درحقیقت، نرم تابعی است با حوزهٔ تعریف l^2 و حوزهٔ مقادیر $[0,\infty)$.) دنبالهٔ $0, 0, 0, \ldots$ دارای نرم 0، و هردنبالهٔ دیگر در l^2 دارای نرم مثبت است. اگر $c\in R$ و $s\in l^2$، آنگاه $\|cs\|_2=|c|\cdot\|s\|_2$ (تحقیق کنید).

۵.۱۰.۳. قضیه. نرم دنباله‌های در l^2 دارای ویژگیهای زیر هستند:

$$\|s\|_2 \geqslant 0 \qquad (s\in l^2), \tag{1}$$

$$\|s\|_2=0 \Longleftrightarrow s=\{0\}_{n=1}^{\infty}, \tag{2}$$

$$\|cs\|_2=|c|\cdot\|s\|_2 \qquad (c\in R,\ s\in l^2), \tag{3}$$

$$\|s+t\|_2 \leqslant \|s\|_2+\|t\|_2 \qquad (s,\ t\in l^2). \tag{4}$$

برهان: تنها (۴) ثابت نشده‌است که آن‌هم صورت دیگری از نابرابری مینکوفسکی است.

۶.۱۰.۳. این بخش را نخوانید مگرآنکه اطلاع مختصری دربارهٔ فضاهای برداری داشته باشید.

نخست، از آنجاکه اگر $s,\ t\in l^2$ آنگاه $s+t\in l^2$، و اگر $c\in R$، $s\in l^2$، آنگاه $cs\in l^2$، آشکار است که l^2 یك فضای برداری روی اعداد حقیقی است.

در فضای اقلیدسی n بعدی، بردار $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle$ دارای طول $\left(\sum_{k=1}^{n} s_k^2\right)^{1/2}$ است. حاصلضرب نقطه‌ای (اسکالر) دو بردار $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle$ و $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ برابر است با $\sum_{k=1}^{n} s_k t_k$، وقدرمطلق آن ازحاصلضرب طولهای دوبردار کوچکتر است. یعنی،

$$\left|\sum_{k=1}^{n} s_k t_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} s_k^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} t_k^2\right)^{1/2}. \tag{*}$$

بنابراین $\left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2\right)^{1/2}$، نرم دنباله در l^2، نظیر $\left(\sum_{k=1}^{n} s_k^2\right)^{1/2}$، طول بردار در فضای

nبعدی، است. نامساوی شوارتس نظیر (*) است. نامساوی مینکوفسکی بیان می‌کند که «طول» (نرم) مجموع دو بردار (دو دنباله) در l^2 از مجموع طولهایشان نابیشتر است. متناظر این حقیقت در فضای nبعدی این است که خط مستقیمی که دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند از هر خط شکسته‌ای که آنها را به‌هم متصل سازد بزرگتر نیست.

تمرینهای ۱۰.۳

۱. کدام‌یك از دنباله‌های زیر در l^2 هستند؟

(الف) $\left\{\dfrac{1}{\log n}\right\}_{n=2}^{\infty}$

(ب) $\left\{\dfrac{1}{e^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(ج) $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{10}\right\}_{n=1}^{\infty}$

۲. مثالی از دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ در l^2 بیاورید به‌گونه‌ای که $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n| = \infty$.

۳. اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$، ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.

۴. نشان دهید که در (۱) از ۲.۱۰.۳ برابری برقرار است اگر و تنها اگر $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ با $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ «متناسب» باشد. یعنی، اگر و تنها اگر به‌ازای یك عدد حقیقی λ

$$t_n = \lambda s_n \qquad (n\in I).$$

۵. اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^2$، ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ همگرای مطلق است.

۶. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ ، ثابت کنید که $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ عنصر l^2 است.

۷. برای هر $k\in I$ فرض می‌کنیم e_k دنبالهٔ $\ldots ,0 ,0 ,1 ,0 ,\ldots ,0 ,0$ باشد. یعنی دنباله‌ای باشد که بجز جملهٔ kام آن که برابر با ۱ است بقیهٔ جمله‌هایش صفر باشد. نشان دهید که اگر $k\neq j$، آنگاه $\|e_k - e_j\|_2 = \sqrt{2}$. مقدار $\|e_k\|_2$ چقدر است؟
(آیا می‌توانید در فضای nبعدی بینهایت بردار به طول ۱ بیابید که فاصلهٔ هردوتای آنها از یکدیگر برابر با $\sqrt{2}$ باشد؟ جواب: نه. چه تعداد از این قبیل بردارها در فضای nبعدی یافت می‌شود؟ جواب: n)

۸. اگر $a_n \geqslant 0 (n\in I)$ و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}/n$ همگراست.

۱۱.۳ اعداد حقیقی و بسطهای دهدهی

به‌کمك نظریهٔ سریهای نامتناهی می‌توانیم رابطهٔ ما بین اعداد حقیقی و «بسطهای دهدهی» را که اولین‌بار در ۷.۱ به‌آن اشاره‌کردیم به‌طور دقیقتر بررسی کنیم.

فقط بسطهای اعداد واقع در $[0, 1]$ را موردمطالعه قرار می‌دهیم. در اینجا تعریف بسط دهدهی ارائه می‌شود.

۱.۱۱.۳. تعریف. بسط دهدهی، یك‌سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n$ است‌که در آن هر a_n یکی از رقمهای ۰، ۱، ۲، ...، ۹ است.

البته بسط دهدهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n$ را معمولا به صورت $0.a_1a_2a_3\ldots$ می‌نویسند. عدد a_n رقم nام بسط دهدهی نامیده می‌شود. حال ثابت خواهیم کردکه هر بسط دهدهی عددی در $[0, 1]$ را نمایش می‌دهد.

۲.۱۱.۳. قضیه. هر بسط دهدهی به‌عددی از $[0, 1]$ همگراست.

برهان: آشکار است که بسط دهدهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n$ مغلوب $\sum_{n=1}^{\infty} 9/10^n$ است. اما $\sum_{n=1}^{\infty} 9/10^n$ (مطلقاً) همگراست و ازاین‌رو، بنابر ۲.۶.۳، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n$ نیز همگراست. درحقیقت،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 9\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right] = 9\left[\frac{1}{1-1/10} - 1\right] = 1$$

بنابراین $1 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} 9/10^n \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n \geqslant 0$ و برهان تمام است.

۳.۱۱.۳. تعریف. اگر بسط‌دهدهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n = 0.a_1a_2a_3\ldots$ به $x \in [0, 1]$ همگرا باشد، گوییم‌که $0.a_1a_2a_3\ldots$ یك بسط دهدهی x است (یااینکه می‌گوییم x دارای بسط دهدهی $0.a_1a_2a_3\ldots$ است).

بنابراین ۲.۱۱.۳ به‌ما می‌گویدکه هربسط دهدهی برابر با بسط دهدهی یك عدد x از $[0, 1]$ است. اکنون نشان می‌دهیم‌که هر x از $[0, 1]$ دارای حداقل یك بسط دهدهی است.

۴.۱۱.۳. قضیه. اگر $x \in [0, 1]$، آنگاه یك بسط دهدهی وجود دارد که به x همگراست.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم‌که بتوان x را به‌صورت $x = k/10^n$ نوشت‌که درآن

$k, n \in I$ و $k < 10^n$. دراین‌صورت $k = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n$ که در آن a_i اعدادی‌صحیح‌اند و $0 \leqslant a_i \leqslant 9$. ازاین‌رو $x = a_1/10 + a_2/10^2 + \dots + a_n/10^n$ و $0.a_1 a_2 \dots a_n 000\dots$ به x همگراست.

اگر برای هیچ $n \in I$ نتوانیم x را به‌صورت $x = k/10^n$ بنویسیم، آنگاه x دریکی از ده بازهٔ باز $(0, 1/10)$، $(1/10, 2/10)$، ...، $(9/10, 10/10)$ واقع است. اگر $x \in (m/10, (m+1)/10)$، مـی‌نویسیم $a_1 = m$. پس $x - 0.a_1 < 1/10$. حال x دریکی از ده بازهٔ باز زیر واقع است

$$\left(\frac{a_1}{10}, \frac{a_1}{10} + \frac{1}{100}\right), \left(\frac{a_1}{10} + \frac{1}{100}, \frac{a_1}{10} + \frac{2}{100}\right), \dots, \left(\frac{a_1}{10} + \frac{9}{100}, \frac{a_1}{10} + \frac{10}{100}\right).$$

اگر

$$x \in \left(\frac{a_1}{10} + \frac{p}{100}, \frac{a_1}{10} + \frac{p+1}{100}\right).$$

می‌نویسیم $a_2 = p$. پس $x - 0.a_1 a_2 < 1/100$. اگر به‌همین‌ترتیب ادامه‌دهیم یك بسط دهدهی $0.a_1 a_2 a_3 \dots$ تعریف می‌شودکه آشکارا به x همگراست و اثبات کامل است.

متأسفانه، بعضی از اعـداد $[0, 1]$ دارای بیش از یـك بسط دهدهی هستند. مثلاً، $0.5000\dots = 1/2$ و $0.4999\dots = 1/2$. درواقع، چون $0.999\dots = 1$ داریم $0.0000\dots0999\dots = 1/10^n$ (که‌در آن بعدازممیز، nصفرقبل‌از دنبالهٔ ۹ها وجود دارد). بااستفاده ازاین‌مطلب و برهان ۲.۱۱.۳، اثبات نتیجهٔ زیر برای خواننده مشکل نخواهد بود.

۵.۱۱.۳. قضیه. هربسط دهدهی که به‌دنباله‌ای از ۹ها ختم شود به عددی به‌صورت $k/10^n$ همگراست. برعکس، هرعدد دربازهٔ $[0, 1)$ که به‌صورت $k/10^n$ باشد، دارای یك بسط دهدهی است کـه به‌رشته‌ای از ۹ها ختم مـی‌شود. ازاین‌رو هرعدد بازهٔ $(0, 1)$ به‌صورت $k/10^n$ دارای (حداقل) دو بسط دهدهی است، یکی‌آنکـه به‌رشتهٔ ۹هـا ختم می‌شود و دیگرآنکه به‌رشته‌ای از ۰ها ختم می‌شود.

از قضیه‌ای که درزیر می‌آید نتیجه می‌شودکـه هرعدد بازهٔ $[0, 1]$ کـه به‌صورت $k/10^n$ نیست دقیقاً یك بسط دهدهی دارد.

۶.۱۱.۳. قضیه. اگر دوبسط دهدهی $0.a_1 a_2 a_3 \dots$ و $0.b_1 b_2 b_3 \dots$ متمایز باشند (یعنی، اگـر به ازای یك $k \in I$، $a_k \neq b_k$)، و اگر هیچ‌کدام از بسطها به‌رشته‌ای از ۹ها ختم نشوند، آنگاه این دوبسط به‌دومجموع متمایز همگرایند.

برهان: فرض مـی‌کنیـم n بزرگترین عـدد صحیحی باشد که $a_k = b_k (k \leqslant n)$. دراین‌صورت $a_1 = b_1$، $a_2 = b_2$، ...، $a_n = b_n$، ولی $a_{n+1} \neq b_{n+1}$. فرض کنیم که مثلا $a_{n+1} > b_{n+1}$. پس $a_{n+1} \geqslant b_{n+1} + 1$ وبنابراین

$$0.a_{n+1}000\ldots \geqslant 0.b_{n+1}000\ldots + 0.1000\ldots = 0.b_{n+1}000\ldots + 0.0999\ldots$$
$$= 0.b_{n+1}999\ldots > 0.b_{n+1}b_{n+2}b_{n+3}\cdots,$$

چون که $0.b_1b_2\ldots$ به رشته‌ای از ۹ها ختم نمی‌شود. پس، به طور حتم، $0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\cdots > 0.b_{n+1}b_{n+2}b_{n+3}\cdots$ و بنابراین $0.a_1a_2a_3\ldots > 0.b_1b_2b_3\ldots$ و قضیه ثابت شده است.

۷.۱۱.۳. نتیجه. اگر $x\in(0,1)$ به‌صورت $k/10^n$ نباشد، آنگاه x یك و تنها یك بسط دهدهی دارد. اگر x به‌صورت $k/10^n$ باشد، آنگاه x دقیقاً دارای دو بسط دهدهی است.

برهان: برهان مستقیماً از ۴.۱۱.۳، ۵.۱۱.۳، و ۶.۱۱.۳ نتیجه می‌شود.(تحقیق کنید!)

تمرینهای ۱۱.۳

۱. بسط دهدهی متناوب، بسطی به‌صورت زیر است

$$0.a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_mb_1b_2\cdots b_mb_1b_2\cdots b_m\cdots.$$

نشان دهید که بسط دهدهی عدد گویا متناوب است. (راهنمایی: اگر $x=p/q$، بسط دهدهی x را با تقسیم محاسبه نموده تعداد باقیمانده‌های ممکن را درنظر بگیرید.)

۲. برعکس، نشان دهید که هر بسط دهدهی متناوب به‌عددی گویا همگراست.

۳. ثابت کنید که بین هر دو عدد حقیقی متمایز عددی گویا وجود دارد.

۴. ثابت کنید که بازهٔ باز $(0,1)$ با مربع باز زیر هم‌ارز است

$$\{\langle x, y\rangle : 0<x, y<1\}.$$

۱۲.۳ ملاحظات و تمرینهای اضافی فصلهای ۱، ۲، و ۳

I. چند نتیجه از نظریهٔ مجموعه‌ها

۱.۱۲.۳. نتیجهٔ زیر به‌قضیهٔ شرودر-برنشتاین[1] معروف است.

قضیه. فرض می‌کنیم A و B مجموعه‌های ناتهی و مجزا باشند. فرض می‌کنیم که A با زیرمجموعه‌ای از B هم‌ارز و B با زیرمجموعه‌ای از A هم‌ارز باشد، آنگاه A و B هم‌ارز هستند.

برهان: بنا برفرض، تابعی ۱ــ۱ مانند f از A به‌روی زیرمجموعه‌ای از B مانند B_1، و تابعی ۱ــ۱ مانند g از B به‌روی زیرمجموعه‌ای از A مانند A_1 وجود دارد.
x، یک عنصر A را درنظر بگیرید. اگر $x\in A-A_1$، آنگاه x نگارهٔ هیچ‌یك از

1. Schröder-Bernstein

نقاط B تحت g نیست. دراین‌حالت گوییم‌که x نیایی ندارد. ولی، اگر $x\in A_1$، آنگاه عنصر (یکتای) $y\in B$ وجود دارد به‌طوری‌که $x=g(y)$. دراین‌حالت گوییم‌که y یك نیای x است. سپس، این y را درنظر می‌گیریم. اگر $y\in B_1$، آنگاه عنصر یکتای $z\in A$ هست که $y=f(z)$. آنگاه گوییم که z یك نیای y و یك نیای x است. ازطرف‌دیگر، اگر $y\in B-B_1$، آنگاه y نیایی ندارد و y تنها نیای x است. ملاحظه‌کنیدکه اگر y وجود داشته باشد برابر با $g^{-1}(x)$ است، و اگر z وجود داشته باشد، برابر با $f^{-1}(y)=f^{-1}[g^{-1}(x)]$ است. ازاین‌رو نیاهای هر $x\in A$، عناصر مجموعه‌های ناتهی دنبالهٔ

$$g^{-1}(x),\ f^{-1}[g^{-1}(x)],\ g^{-1}\{f^{-1}[g^{-1}(x)]\},\ \cdots \qquad (*)$$

هستند (و بنابراین هرعنصر ناتهی (*) از یك عنصر A، یا یك عنصر B تشکیل می‌شود). البته، اگر جمله‌ای از (*) تهی باشد، جمله‌های بعدازآن نیز همه تهی خواهند بود.

بنابراین هر $x\in A$ دارای ۰، ۱، ۲، ... یا بینهایت نیا خواهد بود. (اگرنیایی بیش‌از یك بار در (*) ظاهر شود، باید به‌تعداد دفعاتی که ظاهر می‌شود به‌حساب آید. آیا نیایی می‌تواند فقط دوبار ظاهر شود؟) فرض می‌کنیم A_I مجموعهٔ آن نقاط A باشد که بینهایت نیا دارند. (تعداد نیاهای هر نقطهٔ دیگر A متناهی است) مجموعهٔ نقاطی از A راکه تعداد نیاهایشان عددی فرد است A_O، و مجموعهٔ آنهایی‌که تعداد نیاهایشان زوج است A_E می‌نامیم. به‌همین‌ترتیب برای B زیرمجموعه‌های B_I، B_O، B_E را تعریف می‌کنیم.

تمرین: برهان را تمام‌کنید.

۲۰۱۲۰۳ مجموعهٔ‌جزئی‌ـ‌مرتب، یك‌مجموعهٔ A است همراه بارابطهٔ $\leqslant$ بین بعضی‌از عناصر A، (ولی نه‌لزوماً بین همهٔ عناصر A)که درشرایط زیر صدق‌کند

$$x\leqslant x \qquad (x\in A) \qquad (۱)$$

$$(x\leqslant y,\ y\leqslant x)\Rightarrow x=y \qquad (x,\ y\in A), \qquad (۲)$$

$$(x\leqslant y,\ y\leqslant z)\Rightarrow x\leqslant z \qquad (x,\ y,\ z\in A). \qquad (۳)$$

دقیقتر بگوییم، $\leqslant$ زیرمجموعه‌ای از $A\times A$ است وبنابراین مجموعه‌ای‌ازجفتهای مرتب $\langle x,y\rangle$ است که در آن $x,y\in A$. به‌جای $\langle x,\ y\rangle\in\leqslant$ می‌نویسیم $x\leqslant y$.

مثلا، فرض‌کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و A خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X باشد. اگر $x,\ y\in A$، آنگاه $x\leqslant y$ را $x\subseteq y$ تعریف می‌کنیم (به‌خاطر داشته باشیدکه x و y زیرمجموعه‌های X هستند). آنگاه بعضی‌از $x,\ y\in A$ در $x\leqslant y$ صدق می‌کنند و بدیهی‌است که شرایط (۱) تا (۳) نیز برقرارند. ازاین‌رو مجموعهٔ A بارابطهٔ جزئیت، جزئی‌ـ‌مرتب است.

مثالی دیگر، فرض می‌کنیم $A=I=\{۱,\ ۲,\ \cdots\}$ و $x\leqslant y$ را به‌این معنی که x عدد y را می‌شمارد (یعنی، y مضرب صحیحی از x است) تعریف می‌کنیم. پس $۴\leqslant ۲۴$،

$24 \not\leqslant 5$. ملاحظه کنید که $24 \not\leqslant 5$ نتیجه نمی‌دهد $5 \leqslant 24$.

تمرین: نشان دهید که دراین مثال شرایط (۱) تا (۳) برقرارند.

۳.۱۲.۳ فرض کنیم کـه مجموعهٔ A با رابطهٔ $\leqslant$، جزئی-مرتب شده باشد. اگـر $B \subseteq A$، $x \in A$، گوییم که x یك کران بالای B است اگر

$$b \leqslant x \qquad (b \in B).$$

بنا براین درمثال آخر، اگر $B = \{3, 6, 10\}$ آنگاه ۱۲۰ یك کران بالای B است.
اینك زنجیر در A را تعریف مـی کنیم. B، یـك زیرمجموعهٔ A، را زنجیر در A می‌نامیم اگـر هردوعنصر B قابل مقایسه باشند. یعنی، B را زنجیر گوییم اگـر $x, y \in B$، آنگاه یا $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$.

تمرین: فرض کنید X و Y مجموعه‌هـای ناتهی باشند. فرض کنید A مجموعهٔ همـهٔ توابع یك‌به‌یك f از زیرمجموعه‌هـای ناتهی X به‌توی Y باشد. اگر $f, g \in A$، آنگاه $f \leqslant g$ را g یك توسیع f است تعریف می کنیم.

۱. ثابت کنید که بااین تعریفِ $\leqslant$، مجموعهٔ A یك مجموعهٔ جزئی-مرتب است.
۲. اگر B یك زنجیر در A باشد، ثابت کنید که B یك کران بالا دارد.

۴.۱۲.۳ فرض کنیم A یك‌مجموعهٔ جزئی-مرتب باشد. اگر $x \in A$، آنگاه x را عنصر ماکسیمال A خوانیم اگر هیچ عنصر $y \in A$ متمایز از x یافت نشود کـه $x \leqslant y$. یکی از نتایج مشهور درنظریهٔ مجموعه‌ها لم زورن است:

لم زورن[1]. فرض می کنیم A یك مجموعهٔ ناتهی وجزئی-مرتب باشد. فرض می کنیم هرزنجیر در A دارای کران بالا باشد. آنگاه A عنصر ماکسیمال دارد.

تمرین: بااستفاده از لم زورن قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

قضیه. فرض می کنیم X و Y مجموعه‌های ناتهی باشند. آنگاه یا X با زیرمجموعه‌ای از Y هم‌ارز است، یا Y با زیرمجموعه‌ای از X هم‌ارز است.

۵.۱۲.۳ دراینجا به‌توصیفی از پارادوکس معروف راسل[2] می‌پردازیم.
فرض کنیم A مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی باشد که عنصر خودشان نیستند. یعنی

$$A = \{X : X \notin X\}$$

سؤال این است: «آیا A عنصر خودش هست؟»
فرض کنیم $A \in A$. آنگاه، چون A فقط از مجموعه‌هایی کـه عنصر خودشان نیستند

---

1. Zorn 2. Russell

تشکیل شده است $A\notin A$ و این یک تناقض است. ازطرف دیگر اگر فرض کنیم $A\notin A$. بنابر تعریف A، باید داشته باشیم $A\in A$ و این نیز یک تناقض است. درنتیجه دو گزارهٔ $A\in A$ و $A\notin A$ منتهی به تناقض می‌شوند! پس دراین‌میان چیزی نادرست است.

در نظریه‌های جدید مجموعه‌ها کوشش شده است به‌طریقی به‌کاربردن اصطلاح «مجموعه» را محدود کنند که پارادوکس راسل (و سایر پارادوکسها) پیش نیاید. تنها بعضی گردایه‌های اشیاء، مجموعه خوانده شوند. در یك نظریه مجاز هستیم دربارهٔ گردایهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که عنصر خودشان نیستند صحبت کنیم. این گردایه را A می‌نامیم. فوراً نتیجه می‌شود که A مجموعه نیست. آنگاه چون عناصر A مجموعه هستند آشکار است که $A\notin A$ وهیچ تناقضی پیش نمی‌آید. (یعنی، $A\notin A$ نتیجه نمی‌دهد $A\in A$.) درنظریهٔ دیگر لزوماً مجاز نیستیم که حتی گردایهٔ همهٔ مجموعه‌هایی راکه دارای یك خاصیت معین هستند تشکیل دهیم. ولی، مجاز به تشکیل مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های یك مجموعهٔ مفروض هستیم، و مجاز هستیم که باگردآوردن همهٔ عناصر یك مجموعهٔ مفروض که دارای خاصیت به‌خصوصی هستند یك‌مجموعه تشکیل دهیم (که این ازلحاظ پارادوکس راسل مهم است). مثلا برطبق این نظریه، اگر مجموعهٔ Y مفروض باشد، آنگاه می‌توانیم مجموعهٔ A راکه در زیر می‌آید تعریف کنیم:

$$A=\{X: X\in Y \text{ و } X\notin X\}.$$

تمرین: نشان دهید که فرض $A\in A$ به‌یك تناقض می‌رسد. نتیجه بگیرید که $A\notin A$. ثابت کنید که $A\notin Y$. ملاحظه کنید که هیچ تناقضی ایجاد نمی‌شود.

مجدداً به‌خواننده اطمینان می‌دهیم که هرچند دربارهٔ استفاده از واژهٔ «مجموعه» سطحی گذشته‌ایم (اولین جملهٔ فصل ۱ را ملاحظه کنید)، هرچه دراین‌کتاب مجموعه نامیده شده‌است، حتی درمحدودترین قلمرو استفاده ازمجموعه، که انواع مختلف نظریه‌های دقیق لازم دانسته‌اند، واقعاً مجموعه است.

II. دربارهٔ سریهای واگرا

۶۰۱۲۰۳. آبل در ۱۸۲۸ نوشت: «سریهای واگرا از اختراعات شیطان است، و شرم‌آور است که روی آنها اثباتی، هرچه باشد، بنیان شود.»

درواقع طرز تلقی امروزهٔ ما از همگرایی و واگرایی و تعریف آنها را بیشتر آبل و کوشی، درهمان‌اوان در ریاضیات به‌کرسی نشاندند. ریاضیدانهای نسلهای پیشین به‌خوبی از دامهایی‌که دراستفاده ازسریهای واگرا وجود داشت آگاه بودند ولی‌آنهارا باشرایطی کم‌وبیش محدودکننده به‌کار بردند. بسیاری از نتایج آنها وقتی بایك روش مجموعپذیری مناسب تعبیر شوند صحیح‌اند. تعداد دیگر از نتایج آنهاهم به‌خاطراینکه درحقیقت با سریهای همگرا سروکار دارند، به‌صورت اصلی خود برقرارند. حتی این نتایج درست نیز غالباً از روشهای غیردقیق حاصل شده‌اند.

برای آن دسته از خوانندگان که با محاسبه با اعداد مختلط آشنا هستند یك نمونهٔ استدلال ضعیف می‌آوریم که از آن فرمول زیر نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۵^۲}+\frac{۱}{۷^۲}+\cdots=\frac{\pi^۲}{۸} \qquad (۱)$$

(تصادفاً، به‌دست‌آوردن این فرمول با برهانی محکم آسان نیست. معمولا آن‌را یا به‌وسیلهٔ سری فوریه یا نظریهٔ توابع تحلیلی متغیر مختلط به‌دست می‌آورند.)

فرض کنیم

$$s=۱-z+z^۲-z^۳+\cdots$$

که در آن z یك عدد مختلط است. آنگاه

$$zs=z-z^۲+z^۳-\cdots=۱-(۱-z+z^۲-\cdots),$$
$$zs=۱-s,$$

بنابراین

$$s=\frac{۱}{۱+z}\cdot$$

ازاین‌رو،

$$\frac{۱}{۱+z}=۱-z+z^۲-z^۳+\cdots\cdot$$

اگر $e^{i\theta}$ را به‌جای z قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۱+e^{i\theta}}=۱-e^{i\theta}+e^{۲i\theta}-e^{۳i\theta}+\cdots. \qquad (۲)$$

از فرمول $e^{i\alpha\theta}=\cos\alpha\theta+i\sin\alpha\theta$ می‌بینیم که جزء حقیقی سمت راست فرمول (۲) عبارت است از $\dots-۱-\cos\theta+\cos ۲\theta$. سمت چپ (۲) برابر است با

$$\frac{۱}{۱+e^{i\theta}}\cdot\frac{۱+e^{-i\theta}}{۱+e^{-i\theta}}=\frac{۱+\cos\theta-i\sin\theta}{۲+۲\cos\theta}$$

که جزء حقیقی آن برابر است با ۱/۲. ازاین‌رو، بنابر (۲)،

$$\frac{۱}{۲}=۱-\cos\theta+\cos ۲\theta-\cos ۳\theta+\cdots.$$

جمله به‌جمله از $\theta=۰$ تا $\theta=t$ انتگرال بگیرید، به‌دست می‌آید

$$\frac{t}{۲}=t-\sin t+\frac{\sin ۲t}{۲}-\frac{\sin ۳t}{۳}+\cdots$$

یا

$$\frac{t}{۲}=\sin t-\frac{\sin ۲t}{۲}+\frac{\sin ۳t}{۳}-\cdots.$$

مجدداً از $t=۰$ تا $t=x$ انتگرال بگیرید. نتیجه می‌شود

$$\frac{x^۲}{۴}=(۱-\cos x)-\frac{(۱-\cos ۲x)}{۲^۲}+\frac{(۱-\cos ۳x)}{۳^۲}-\cdots.$$

اکنون، x را برابر با π قراردهید، چون اگر n فرد باشد $\cos n\pi=-۱$ واگر n زوج باشد $\cos n\pi=۱$، داریم

$$\frac{\pi^۲}{۴}=۲-۰+\frac{۲}{۳^۲}-۰+\frac{۲}{۵^۲}-\cdots$$

ازاین فرمول (۱) نتیجه می‌شود.

تمرین: نتیجه‌گیریهـای فوق را مورد بازرسی قرار دهید. آیـا قسمتهـایی ازآن اشتباه‌اند؟ فکر می‌کنید برای چه‌قسمتهایی تا کنون مجوز ارائه نشده است؟

III. یك قضیهٔ واقعاً کلی درمجموعپذیری

۷۰۱۲۰۳. فرض‌کنیم $T=(c_{mn})_{m,\,n=۱}^{\infty}$ یك ماتریس نامتناهی از اعداد حقیقی باشد. اگر دنبالهٔ اعداد حقیقی $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ مفروض باشد، آنگاه دنبالهٔ $\{t_m\}_{m=۱}^{\infty}$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$t_m=\sum_{n=۱}^{\infty}c_{mn}s_n \qquad (m=۱,۲,\ldots). \tag{*}$$

(بنابرایـن، بردار ستونی مربوط بـه t_m برابر است با حاصلضرب ماتریس T در بردار ستونی مربوط به s_n.)

گوییم که $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به $L\in R$ مجموعپذیر T است اگر (سریهای (*) همگی همگرا باشند و)

$$\lim_{n\to\infty}t_n=L.$$

تمرین: فرض‌می کنیم T ماتریس زیرباشد

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ & \cdots \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & \cdots \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

نشان دهید که مجموعپذیری T دقیقاً همان مجموعپذیری $(C, ۱)$ است.

تمرین: نشان دهید که مجموعپذیری $(C, ۲)$ حالت خاصی از مجموعپذیری T است.

۸۰۱۲۰۳۰ در ۸۰۱۱۰۲ دیدیم که یك روش مجموعپذیری منظم خوانده می‌شود اگر با این روش هردنبالهٔ همگرا به‌حدش مجموعپذیر باشد.

اکنون شرایطی را بیان می‌کنیم که برای منظم بودن T هم لازم‌اند هم کافی. این شرایط عبارت‌اند از

الف) عدد مثبتی مانند M هست که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} |c_{mn}| \leqslant M \qquad (m = ۱, ۲, \cdots).$$

ب) $\lim_{m \to \infty} \sum_{n=۱}^{\infty} c_{mn} = ۱$.

ج) $\lim_{m \to \infty} c_{mn} = ۰ \quad (n = ۱, ۲, ۳, \cdots)$.

توجه کنید که شرایط الف و ب مربوط به‌سطرهای $T = (c_{mn})$ هستند، درحالی‌که شرط ج درمورد ستونهاست.

تمرین: درزیر ثابت می‌کنیم که الف، ب وج برای منظم بودن T شرایط لازم هستند، جزئیات برهان را کامل کنید.

فرض کنید T منظم باشد. یعنی، فرض کنید که اگر $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به L همگرا باشد، آنگاه هر سری (*) همگرا، و $\{t_m\}_{m=۱}^{\infty}$ به L همگـرا است. برای نشان دادن اینکه ج برقرار است، برای n مفروض $\{s_k\}$ را با ضابطهٔ زیر تعریف کنید:

$$s_k = ۰ \qquad (k \neq n)$$

$$s_n = ۱ .$$

آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به ۰ همگراست. دنبالهٔ نظیر آن، $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$، را محاسبه کنید و منظم بودن را به‌کار برید.

برای نشان دادن اینکه ب برقرار است دنبالهٔ $s_n=1(n=1, 2, \dots)$ را درنظر بگیرید.

حال باید نشان دهیم که الف برقرار است. این قسمتی است که کار می‌برد.

ابتدا نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_{mn}|<\infty \qquad (m=1, 2, \dots). \tag{1}$$

برای این کار، فرض کنید mای باشد که

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_{mn}|=\infty.$$

آنگاه دنباله‌ای مانند $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ که به ۰ همگراست وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n|c_{mn}|=\infty \tag{2}$$

(چرا؟). فرض کنید $s_n=\varepsilon_n$ برای nهایی که $c_{mn}\geqslant 0$ و فرض کنید $s_n=-\varepsilon_n$ برای nهایی که $c_{mn}<0$. برای‌این $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ نشان‌دهید که t_m با (۲) برابر است، و این با فرض منظم بودن متناقض است. پس (۱) برقرار است.

فرض کنید

$$k_m=\sum_{n=1}^{\infty}|c_{mn}|<\infty \qquad (m=1, 2, \dots).$$

برای اثبات اینکه الف برقرار است کافی است ثابت کنید که $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ کراندار است. این‌را هم با برهان خلف ثابت کنید.

فرض کنید $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ کراندار نیست. درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید. اگر n_1 عدد صحیح مثبت دلخواهی باشد، آنگاه m_1ای هست که

$$\sum_{n=1}^{n_1-1}|c_{m_1 n}|<1, \qquad k_{m_1}>1^2+2.$$

سپس n_2ای هست که $n_2>n_1$ و

$$\sum_{n=n_2}^{\infty}|c_{m_1 n}|<1.$$

ازاین نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=n_1}^{n_2-1} |c_{m_1 n}|>1^2$$

اکنون m_2ای هست که $m_2>m_1$ و

$$\sum_{n=1}^{n_2-1} |c_{m_2 n}|<1, \qquad k_{m_2}>2^2+2.$$

سپس n_3ای با $n_3>n_2$ وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$\sum_{n=n_3}^{\infty} |c_{m_2 n}|<1.$$

ازاین نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=n_2}^{n_3-1} |c_{m_2 n}|>2^2.$$

به‌همین روش ادامه دهید، اعداد

$$n_1<n_2<\cdots<n_r<\cdots,\ m_1<m_2<\cdots<m_r<\cdots$$

را به‌گونه‌ای تعریف کنید که به‌ازای هر $r=1,2,\ldots$،

$$\sum_{n=1}^{n_r-1} |c_{m_r n}|<1, \qquad \sum_{n=n_r}^{n_{r+1}-1} |c_{m_r n}|>r^2, \qquad \sum_{n=n_{r+1}}^{\infty} |c_{m_r n}|<1.$$

اکنون، $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ را به‌ترتیب زیر تعریف کنید

$$s_n=0 \qquad (n<n_1).$$

اگر $n_r\leqslant n<n_{r+1}$، فرض کنید

$$s_n=\frac{1}{r} \qquad (c_{m_r n}\geqslant 0),$$

$$s_n=\frac{-1}{r} \qquad (c_{m_r n}<0).$$

آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌صفر همگراست. برهان را با اثبات $t_{m_r}>r-2$ پایان دهید. این یك تناقض است (چرا؟) و برهان کامل است.

۹.۱۲.۳. حال ثابت می‌کنیم که شرایط الف و ب و ج برای منظم بودن مجموعپذیری T کافی هستند.

فرض می‌کنیم الف، ب و ج برقرار باشند. فرض می‌کنیم $\{s_n\}$ به L همگرا باشد. باید ثابت کنیم که $\{t_m\}$ نیز به L همگراست. داریم

$$t_m - L = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}s_n - L = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}[s_n - L] + L\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} - 1\right].$$

تمرین: برهان را تمام کنید.

برای به دست آوردن مطالب بیشتر در این زمینه کتاب سریهای واگرا نوشتهٔ هاردی را ببینید.[1]

IV. مطالب بیشتری دربارهٔ حاصلضرب سریها

۱۰.۱۲.۳. تمرین. در ۷.۵.۳ به‌جای همگـرایی مطلق $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ نمی‌توان شرط ضعیفتر همگرایی‌را گذاشت. برای توضیح این مطلب باانتخاب

$$a_k = b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

نشان دهید که $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ واگراست. اما می‌توان قضیه‌ای ثابت کرد قویتر از ۷.۵.۳.

۱۱.۱۲.۳. قضیهٔ مرتن[2]. فرض‌کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ به A همگرای مطلق، و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ بـه B همگرا باشد (لازم نیست کـه همگرای مطلق باشد). آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ که در آن

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

به $C = AB$ همگراست.

خلاصه‌ای از برهان:

حالت I: $B = 0$. بافرض $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$، بایـد نشان دهیـم کـه $C_n \to 0$ وقتی

1. *Divergent Series*, by G. H. Hardy (Oxford, 1949) 2. Merten

$n\to\infty$. فرض کنیم

$$B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad \alpha=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|<\infty.$$

ابتدا نشان دهید که

$$C_n=a_0B_n+a_1B_{n-1}+\cdots+a_nB_0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

اما $B_n\to 0$ وقتی $n\to\infty$ (چرا؟). از این‌رو اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، آنگاه عدد صحیح مثبت N هست به‌طوری که

$$|C_n|\leqslant|a_nB_0+\cdots+a_{n-N}B_N|+\varepsilon\alpha \qquad (n\geqslant N).$$

حالت II: $B\neq 0$. فرض کنید

$$b'_0=b_0-B,$$
$$b'_n=b_n \qquad (n\in I),$$

آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} b'_n=0$. حالت I را درمورد $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b'_n$ به‌کار برید.

تمرین: برهان را به‌تفصیل بیان و کامل کنید.

تمرینهای گوناگون

۱. فرض کنید $f:X\to Y$.

(الف) اگر $A\subseteq X$، نشان دهید که $A\subseteq f^{-1}[f(A)]$.

(ب) اگر $B\subseteq Y$، نشان دهید که $f[f^{-1}(B)]\subseteq B$.

۲. فرض کنید $f:X\to Y$. نشان دهید که f به‌روی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $E\subseteq Y$

$$E=f[f^{-1}(E)].$$

۳. اگر $f:X\to Y$، نشان دهید که f تابعی ۱ــ۱ است اگر و تنها اگر برای هر $A\subseteq X$

$$A=f^{-1}[f(A)].$$

۴. فرض کنید $s_1=1$ و

$$s_{n+1}=\sqrt{2+s_n} \qquad (n\geqslant 2).$$

نشان دهید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار وغیرنزولی است. سپس $\lim_{n\to\infty} s_n$ را حساب کنید.

۰۵ ثابت کنید برای هر x که $0\leqslant x<1$، دنبالهٔ $\{nx^n\}_{n=1}^{\infty}$ به ۰ همگراست.

۰۶ فرض کنید $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. ثابت کنید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ به L همگراست اگر و تنها اگر هر زیردنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا به L باشد.

۰۷ فرض کنید دنبالهٔ اعداد حقیقی $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است. فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ اعداد L باشد که حد زیردنباله‌ای از $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ هستند. ثابت کنید که

$$\limsup_{n\to\infty} s_n=\text{l.u.b.}A.$$

۰۸ فرض کنید A مجموعه‌ای ناتهی باشد و فرض کنید

$$X_n\subseteq A,\ Y_n\subseteq A \qquad (n\in I).$$

(الف) ثابت کنید که

$$\liminf_{n\to\infty} X_n\cup \liminf_{n\to\infty} Y_n\subseteq \liminf_{n\to\infty}(X_n\cup Y_n)$$

واینکه برابری لازم نیست برقرار باشد.

(ب) ثابت کنید که

$$\limsup_{n\to\infty} X_n\cup\limsup_{n\to\infty} Y_n=\limsup_{n\to\infty}(X_n\cup Y_n).$$

۰۹ ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}=1$. (با $s_n=n^{1/n}-1$ شروع کنید وقضیهٔ دوجمله‌ای را به‌کار برید.)

۰۱۰ ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{(1+1/n)}$ واگراست.

۰۱۱ فرض کنید $a_n\geqslant 0\,(n\in I)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ همگراست.

۰۱۲ ثابت کنید که $1/4$ به‌مجموعهٔ کانتور تعلق دارد ولی نقطهٔ انتهایی هیچ بازهٔ بازحذف شده‌ای نیست.

۰۱۳ بازی زیر را ماتسور[1] اختراع کرده است. بازیکن A صاحب اعداد گنگ $[0,1]$ است؛ بازیکن B اعداد گویای $[0,1]$ را مالک است. یکی از بازیکنها (A یا B)

1. S. Mazur

با انتخاب بازهٔ بسته‌ای در $[0, 1]$ به‌طول نابیشتر از ۱/۲ بازی را آغاز می‌کند. حال، بازیکن دوم بازهٔ بسته‌ای به طول نابیشتر از ۱/۳ در داخل بازه‌ای که قبلا انتخاب شده، انتخاب می‌کند. سپس بازیکـن اول بازه‌ای بسته به طول نابیشتر از ۱/۴ در داخل بازهٔ قبلی اختیار می‌کند، و غیره. بنابر قضیهٔ ۵.۱۰۲، یـك نقطهٔ یکتای x در همهٔ ایـن بازه‌ها وجود دارد. اگـر x گنگ باشد، بازیکن A برنده و اگر x گویا باشد، بازیکن B برنده است. ثابت کنید که نقشه‌های B هرچه باشد، بازیکن A همواره می‌تواند برنده باشد.

۴

حدود و فضاهای متریك

۱.۴ حد تابع روی خط حقیقی

درفصل ۲ حد دنباله را تعریف کردیم. اکنون، تعریف حد «تابع حقیقی» راکه درحساب دیفرانسیل و انتگرال دیده‌اید و تعریفهای تابع پیوسته و مشتق بر آن بنا شده است، یادآور می‌شویم. دراواخر فصل، این مفهوم را به‌ردهٔ وسیعی از فضاها (فضاهای متریك) تعمیم می‌دهیم. خط حقیقی R حالت خیلی خاصی ازاین فضاهاست.

فرض می‌کنیم $a\in R$، و f تابعی حقیقی است که حوزهٔ تعریفش شامل نقاط یك بازهٔ باز $(a-h,a+h)$ است، شاید بجز خود a.

۴.۱.۱ تعریف. می‌گوییم $f(x)$ به L میل می‌کند $(L\in R)$ وقتی x به a میل می‌کند اگر برای هر $\varepsilon>0$، عدد مثبت δ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$|f(x)-L|<\varepsilon \qquad (0<|x-a|<\delta).$$

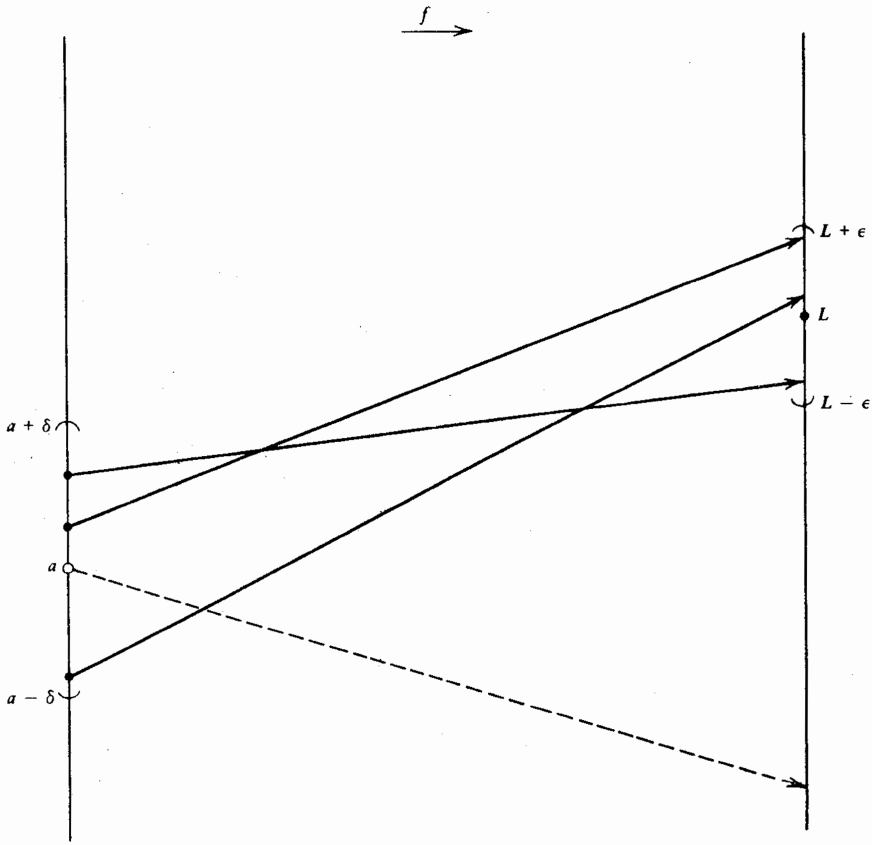
در این حالت می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x)=L$ یا $f(x)\to L$ وقتی $x\to a$. گاهی نیز به‌جای «$f(x)$ به L میل می‌کند وقتی x به a میل می‌کند» می‌گوییم «L حد f در a است».

تأکید می‌کنیم که لازم نیست نقطهٔ a در حوزهٔ تعریف f باشد. در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال دیدید (امیدواریم به خاطر بیاورید) که $\lim_{x\to 0}(\sin x/x)=1$، هرچند $\sin x/x$ در $x=0$ تعریف نشده است. بعد ازاینکه تعریف دقیق $\sin x$ را ارائه

کردیم در یکی از فصلهای بعدی درستی این حد را تحقیق می‌کنیم.

شکل ۱۲ را درنظر بگیرید. برای آنکه $f(x)$ بـه L میل کند وقتی x به a میل می‌کند باید مطالب زیـر برقرار باشند: برای هر پرانتز به فاصلهٔ ε از L بایـد پرانتزی به فاصلهٔ δ از a وجود داشته باشد به طوری‌که هر پیکانی کـه از داخل پرانتز δ شروع می‌شود (احتمالا بجز پیکانی که، درصورت وجود، از a شروع می‌شود) در داخل پرانتز ε ختم شود.[1]

به‌اجمال روی نمودار تابع f در صفحهٔ xy، وقتی $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$، می‌توان دید که وقتی مختص x یـك نقطهٔ متحرك روی نمودار، به a نزدیك می‌شود (از سمت چپ یا



شکل ۱۲

۱. یعنی هر پیکانی که مبدأ آن در بازهٔ $(a-\delta, a+\delta)$ است و در a نیست باید انتهایش در بازهٔ $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ باشد.ـــم.

سمت راست)، ارتفاع $f(x)$ آن نقطه به سمت L می‌رود. بیندیشید که چرا این یك تعبیر هندسی ۱.۱.۴ است. مثلاً توابعی که در اشکال ۱۳، ۱۴، و۱۵، آمده‌اند همگی در رابطهٔ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ صدق می‌کنند. (نقطهٔ تهی در شکل ۱۵ مشخص می‌کند که نقطه روی نمودار نیست.) از طرف دیگر، تابع شکل ۱۶ در نقطهٔ a حد ندارد. زیرا وقتی x از سمت چپ به a نزدیك می‌شود، $f(x)$ به ۳ نزدیك می‌شود، در حالی‌که اگر x از سمت راست به a نزدیك شود، آنگاه $f(x)$ به ۱ نزدیك می‌شود. از این‌رو، یك عدد معین L وجود ندارد که وقتی x به a نزدیك می‌شود، $f(x)$ به L نزدیك شود.

آخرین مثال تصویری، شکل ۱۷ را که نمایش نمودار تابع f با ضابطهٔ زیر است درنظر بگیرید

$$f(x)=\sin\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0).$$

در اینجا، وقتی x به $a=0$ نزدیك می‌شود، مقدار $f(x)$ به‌سرعت نوسان می‌کند. حتی اگر به‌یك طرف a نگاه کنیم، آشکاراست که عدد L وجود ندارد که مقدار $f(x)$ به‌سمت آن میل کند. ازاین‌رو f در 0 حد ندارد.

اکنون، چند مثال با برهان ارائه می‌کنیم. نخست، ثابت می‌کنیم که $\lim_{x\to 3}(x^2+2x)=15$. دراینجا، $f(x)=x^2+2x$، $L=15$، و $a=3$. برای هرعدد مثبت ε باید δی مثبتی بیابیم به‌طوری که

$$|(x^2+2x)-15|<\varepsilon \qquad (0<|x-3|<\delta). \tag{1}$$

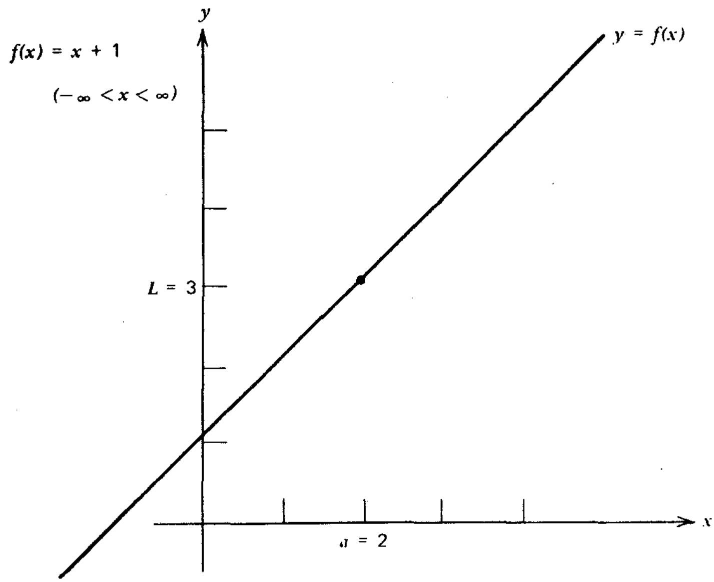
نخست توجه‌داریم که $|(x^2+2x)-15|=|x-3|\cdot|x+5|$. اماعامل $|x-3|$ از δ کوچکتر خواهد بود. سؤال این است که $|x+5|$ چه‌اندازه می‌تواند بزرگ باشد؟ قبل از انتخاب نهایی δ قرار می‌گذاریم که δ کوچکتر از ۱ یا حداکثر ۱ باشد. سپس، اگر $|x-3|<\delta$، خواهیم داشت $|x-3|<1$. از این‌رو $x\in(2,4)$ و بنابراین $x+5\in(7,9)$. پس، اگر $|x-3|<\delta\leq 1$، آنگاه $|x+5|<9$، و بنابراین اگر $|x-3|<\delta$ و $\delta\leq 1$، آنگاه $|x-3|\cdot|x+5|<9\delta$. فرض کنیم $\delta=\min(1,\varepsilon/9)$. آنگاه

$$|x-3|\cdot|x+5|<9\delta\leq\varepsilon \qquad (|x-3|<\delta),$$

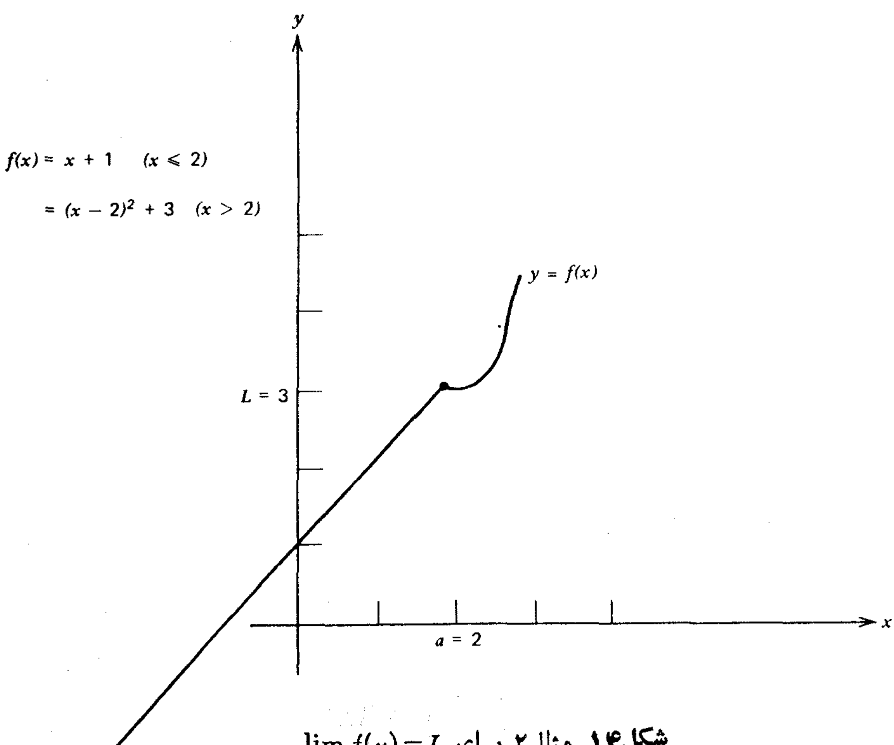
که(۱)را نتیجه می‌دهد. بنا براین برای‌عددمثبت‌دلخواه ε، یك δ [یعنی $\delta=\min\{1,\varepsilon/9\}$] یافتیم که به‌ازای آن (۱) برقرار است، و این ثابت می‌کند که $\lim_{x\to 3}(x^2+2x)=15$.

ملاحظه‌کنید که دراین مثال $a=3$ و رابطهٔ $|f(x)-L|<\varepsilon$ حتی برای $x=a$ برقرار است.

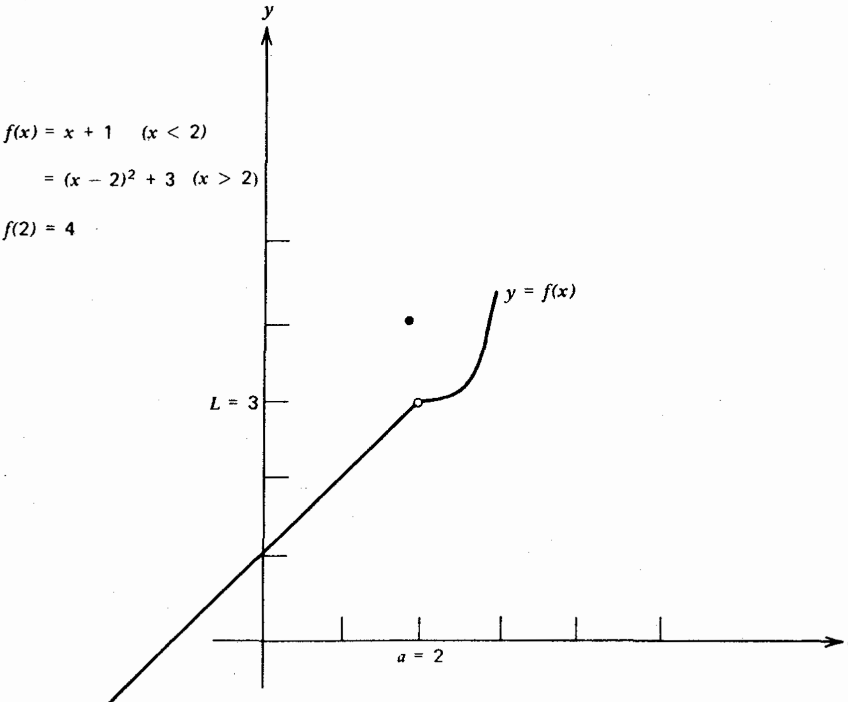
به‌عنوان مثال دوم نشان خواهیم دادکه $\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3}=2$. در اینجا



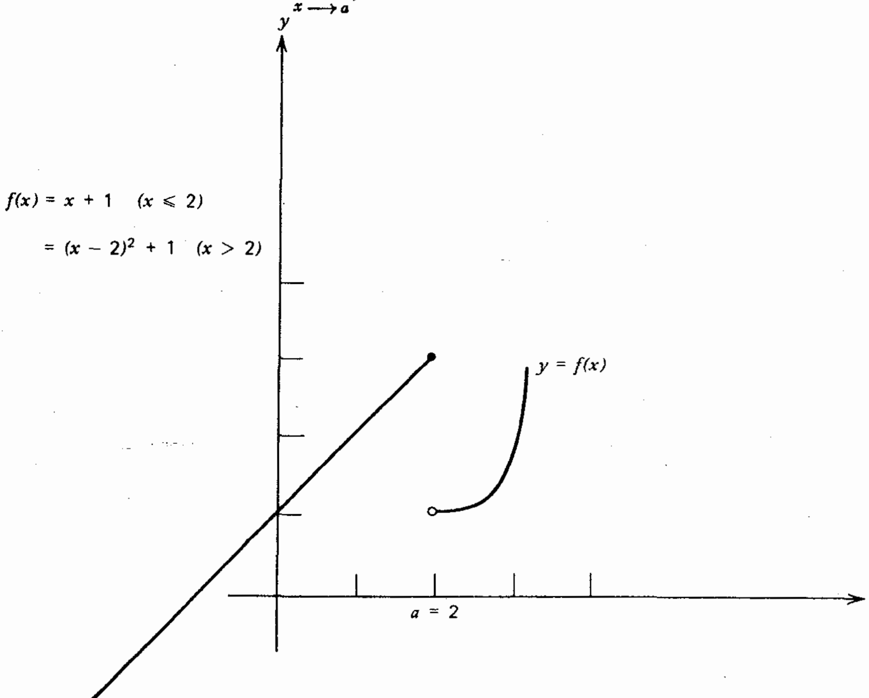
شکل ۱۳ مثال۱ برای $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.



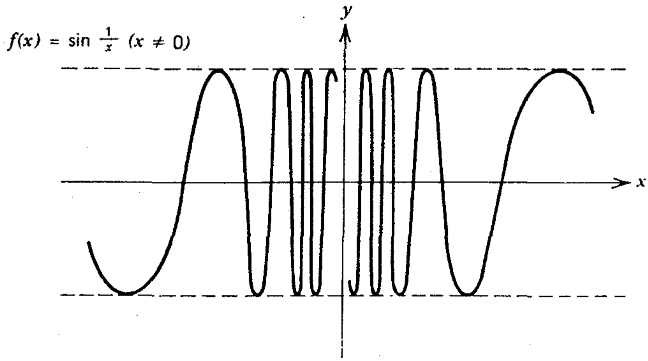
شکل۱۴ مثال۲ برای $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.



شکل ۱۵ مثال۳ برای $\lim_{x \to a} f(x) = L$.



شکل ۱۶ مثالی از یك تابع f که $f(x)$ به‌حدی میل نمی‌کند وقتی x به a میل می‌کند.



شکل ۱۷ تابع f در $x=۰$ حد ندارد.

$f(x)=\sqrt{x+۳}$، $L=۲$، $a=۱$. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد باید عدد مثبتی مانند δ بیابیم به‌طوری که

$$|\sqrt{x+۳}-۲|<\varepsilon \qquad (۰<|x-۱|<\delta). \tag{۲}$$

باضرب طرف چپ نابرابری (۲) در $|(\sqrt{x+۳}+۲)/(\sqrt{x+۳}+۲)|$ مـی‌بینیم که این نابرابری هم‌ارز است با

$$\frac{|(\sqrt{x+۳})^۲-۲^۲|}{|\sqrt{x+۳}+۲|}<\varepsilon \qquad (۰<|x-۱|<\delta)$$

یا

$$\frac{|x-۱|}{|\sqrt{x+۳}+۲|}<\varepsilon \qquad (۰<|x-۱|<\delta). \tag{۳}$$

اگر قرار بگذاریم $\delta\leqslant۱$ آنگاه از $|x-۱|<\delta$ نتیجه می‌شود که $x\in(۰,۲)$ و ازاین‌رو $\sqrt{x+۳}+۲>\sqrt{۳}+۲$. بنابراین اگر $|x-۱|<\delta\leqslant۱$، آنگاه

$$\frac{|x-۱|}{|\sqrt{x+۳}+۲|}<\frac{\delta}{\sqrt{۳}+۲}.$$

حال اگر $\delta=\min\{۱,\varepsilon(\sqrt{۳}+۲)\}$، آنگاه $\delta/(\sqrt{۳}+۲)\leqslant\varepsilon$، ازاین‌رو (۳) و از آنجا (۲) برقرار است، و در نتیجه‌کار تمام است.

به‌عنوان مثالی درجهت عکس، به‌اثبات آنچه که اخیراً ازشکل ۱۷ استنباط کرده‌ایم می‌پردازیم—یعنی، ثابت‌می‌کنیم که $\sin\frac{۱}{x}$ به‌حدی میل نمی‌کند وقتی $x\to۰$، زیرا، فرض

کنیم چنین نباشد–یعنی، فرض کنیم عددی حقیقی مانند L باشد که $\lim\limits_{x\to ۰} \sin(۱/x)=L$.
آنگاه برای $\varepsilon=۱$ عدد مثبتی مانند δ هست که

$$|\sin\frac{۱}{x}-L|<۱ \qquad (۰<|x|<\delta). \tag{۴}$$

حال، برای هر $n\in I$،

$$\sin\left(۲n\pi+\frac{\pi}{۲}\right)=\sin\frac{(۴n+۱)\pi}{۲}=۱.$$

ازاین‌رو برای $x=۲/\pi(۴n+۱)$ و درنتیجه برای xای در $(۰,\delta)$ داریم $\sin(۱/x)=۱$،
زیرا $\lim\limits_{n\to\infty} ۲/\pi(۴n+۱)=۰$. برای این x، از (۴) نتیجه می‌شود که

$$|۱-L|<۱. \tag{۵}$$

به‌همین‌ترتیب، به‌ازای هر $n\in I$، $\sin(۲n\pi+۳\pi/۲)=-۱$. ازاین‌رو xای در $(۰,\delta)$
وجود دارد که برای آن $\sin(۱/x)=-۱$. مجدداً بنابر (۴)

$$|-۱-L|<۱. \tag{۶}$$

خواننده باید بتواند از (۵) و (۶) یك تناقض به‌دست آورد. بنابراین $\lim\limits_{x\to ۰} \sin(۱/x)$
وجود ندارد.

۴.۱.۲. می‌خواهیم شباهت زیاد مابین تعریف ۴.۱.۱ و تعریف ۲.۲.۱ را تأکید کنیم. درواقع، «جدول مقایسهٔ» زیر را درنظر بگیرید:

جدول مقایسه

۲.۲.۱	۴.۱.۱
$S=\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$	f
n	x
s_n	$f(x)$
L	L
∞	a
ε	ε
N	δ
$n\geqslant N$	$۰<\|x-a\|<\delta$

اگر به‌جای هر درایهٔ ستون سمت‌چپ درایهٔ نظیرش درستون سمت‌راست را بگذاریم تعریف ۱.۲.۰۲ به‌تعریف ۱.۰۱.۰۴ تبدیل می‌شود.

با وجود این، دراینجا بیش ازیك عمل مکانیکی مطرح است. در واقع درایه‌های متناظر در جدول «دارای یـك معنی هستند». مثلاً، $S=\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ تابعی است (دنباله‌ای است) که در تعریف ۱.۲.۰۲ به‌کار رفته، حال آنکه f تابعی است که در تعریف ۱.۰۱.۰۴ آمده است. همچنین، s_n مقدار S در n است، در حالی‌که $f(x)$ مقدار f در x است. سرانجام، $n\geqslant N$ به‌این معنی است که «n به‌اندازهٔ‌کافی به‌بینهایت نزدیك است»[1] (ولی، البته، برابر بـا بینهایت نیست)، در صورتی که $\circ<|x-a|<\delta$ به این معنی است که «x به‌اندازهٔ کافی به a نزدیك است ولی برابر با a نیست.»

اکنون به‌اثبات قضیه‌ای نظیر ۱.۷.۰۲ مـی‌پردازیم. بهتر است‌کـه خواننده نخست برهان را مطالعه کند و سپس ببیند که چگونه می‌تواند از جدول تناظر بـا جانشین‌سازی مکانیکی، آنرا از برهان ۱.۷.۰۲ به‌دست آورد.

۰.۳.۱.۰۴ قضیه. اگر* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$، آنگـاه وقتی $x\to a$، $f(x)+g(x)$ دارای حدی است، و درواقع، $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+M$.

برهان: به‌ازای عدد دلخواه $\varepsilon>\circ$ عدد $\delta>\circ$ را باید به‌گونه‌ای بیابیم که

$$|[f(x)+g(x)]-(L+M)|<\varepsilon \qquad (\circ<|x-a|<\delta). \qquad (۱)$$

چون $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، عدد $\delta_۱>\circ$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{۲} \quad (\circ<|x-a|<\delta_۱).$$

به‌همین ترتیب، عدد مثبت $\delta_۲$ هست به‌طوری که

$$|g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{۲} \quad (\circ<|x-a|<\delta_۲).$$

ازاین‌رو، اگر $\delta=\min(\delta_۱,\delta_۲)$ و اگر $\circ<|x-a|<\delta$، آنگاه

$$|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{۲},\ |g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{۲},$$

---

۱. درواقع هیچ عددی به‌بینهایت نزدیك نیست بلکه فاصله‌اش تا بینهایت، بینهایت است، ولی جمله‌گویاست و منظور روشن است.ـم.

* دراین فصل، هرموقع فرضی مانند $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ را می‌نویسیم می‌فهمیم که f تابعی است که حوزهٔ تعریفش، بجز احتمالاً خود a، تمام نقاطی را که فاصله‌شان از a ازعدد مثبتی مـانند h کمتر است دربردارد.

و بنابراین

$$|[f(x)+g(x)]-(L+M)|=|[f(x)-L]+[g(x)-M]|$$
$$\leqslant|f(x)-L|+|g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon.$$

در نتیجه برای $\delta=\min(\delta_۱,\delta_۲)$ رابطهٔ (۱) برقرار است و برهان کامل است.

اگر خواننده برهانهای ۴.۷.۲، ۷.۷.۲، و ۹.۷.۲ را به عنوان الگو بگیرد، قادر خواهد بود که قضیهٔ زیر را ثابت کند.

۴.۱.۴. قضیه. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$، آنگاه

(الف) $$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=L-M,$$

(ب) $$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=L\cdot M,$$

(ج) $$\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)]=L/M \quad (M\neq ۰).$$

گاهی لازم می‌شود که حدهایی ازقبیل $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ را به‌کار بریم.

۵.۱.۴. تعریف. گوییم $f(x)$ بـه L میل می‌کند وقتی x به‌بینهایت میل کند، اگـر برای هر $\varepsilon>۰$، عدد مثبت $M\in R$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که

$$|f(x)-L|<\varepsilon \ (x>M).$$

در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$، یا $f(x)\to L$ وقتی $x\to\infty$.

البته، تعریف ۵.۱.۴ ایجاب می‌کند که حوزهٔ تعریف تابع (حقیقی) f شامل بازه‌ای به‌صورت (c,∞) باشد. به‌شباهت بسیار زیاد ۵.۱.۴ با ۱.۲.۲ توجه کنید.

برای مثال، ثابت می‌کنیم که $\lim\limits_{x\to\infty}(۱/x^۲)=۰$. اگر $\varepsilon>۰$ عدد دلخواهی باشد. باید عدد $M\in R$ را بیابیم به گونه‌ای که

$$\left|\frac{۱}{x^۲}-۰\right|<\varepsilon \quad (x>M). \qquad (۱)$$

چون (۱) هم ارز است با

$$\frac{۱}{x}<\sqrt{\varepsilon} \quad (x>M).$$

آشکار است که اگر M را مساوی $1/\sqrt{\varepsilon}$ بگیریم (۱) برقرار خواهد بود.
همچنین مفید خواهد بود که حدهای «یکطرفه» را نیز درنظر بگیریم.

۶.۱.۴. تعریف. گوییم $f(x)$ به L میل می‌کند وقتی x از راست به a میل کند. اگر برای هرعدد مثبت ε، عدد مثبتی مانند δ باشد به‌طوری‌که

$$|f(x)-L|<\varepsilon \quad (a<x<a+\delta).$$

دراین حالت می‌نویسیم $\lim_{x\to a+} f(x)=L$. (عدد L حد راست f در a خوانده‌می‌شود.)

گوییم $f(x)$ به M میل می‌کند وقتی x از چپ به a میل‌کند، اگر برای هرعدد مثبت ε، عدد مثبتی مانند δ باشد به‌طوری‌که

$$|f(x)-M|<\varepsilon \quad (a-\delta<x<a).$$

در این حالت می‌نویسیم $\lim_{x\to a-} f(x)=M$. (عدد M حد چپ f در a خوانده‌می‌شود.)

ازاین‌رو درگزارهٔ $\lim_{x\to a+} f(x)=L$ تنها مقادیر $f(x)$ برای xهای سمت راست a موردنظر هستند. درحالی‌که در $\lim_{x\to a-} f(x)=M$ تنها مقادیر $f(x)$ برای xهای سمت چپ a به‌کار می‌آیند. باید برای خواننده آشکار باشد که $\lim_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=L.$$

از طرف دیگر، ممکن است $\lim_{x\to a+} f(x)$ و $\lim_{x\to a-} f(x)$ هر دو وجود داشته باشند ولی با هم برابر نباشند. مثلاً، اگر

$$f(x)=x \quad (0\leqslant x<1),$$
$$f(x)=3-x \quad (1\leqslant x\leqslant 2),$$

آنگاه $\lim_{x\to 1-} f(x)=1$ درحالی‌که $\lim_{x\to 1+} f(x)=2$.

نشان دادن اینکه قضایای شبیه به ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴ برای حدهایی به‌صورت $\lim_{x\to\infty} f(x)$، $\lim_{x\to a+} f(x)$، یا $\lim_{x\to a-} f(x)$ نیز برقرارند مشکل نیست. (تمرین ۱۵ را ببینید.)

«حدهای یکطرفه» برای یك ردهٔ‌مهم توابع ـ یعنی، توابع یکنوا ـ همیشه وجوددارند.

۷.۱.۴. تعریف. اگر f تابعی حقیقی در بازهٔ $J\subseteq R$ باشد، گوییم f در J غیر نزولی است اگر

$$f(x)\leqslant f(y) \quad (x<y;\ x,y\in J).$$

f را در J غیرصعودی خوانیم اگر

$$f(x) \geqslant f(y) \qquad (x<y;\ x, y \in J).$$

سرانجام، گوییم که f یکنواست اگر f یا غیرنزولی یا غیرصعودی باشد.

پس، تعریف ۷.۱.۴ شبیه به تعریف ۱.۶.۲ در دنباله‌هاست. همانند دردنباله‌ها، گوییم که تابع f در بازهٔ $J \subseteq R$ ازبالا کراندار یا از پایین کراندار است اگر حوزهٔ مقادیر f به‌ترتیب ازبالاکراندار یا از پایین‌کراندار باشد. سپس نتیجهٔ مهم زیر راکه شبیه‌به ۲.۶.۲ است داریم

۸.۱.۴. قضیه. فرض کنیم f تابعی غیرنزولی در بازهٔ بازکراندار (a, b) باشد. اگر f در (a,b) ازبالا کراندار باشد، آنگاه $\lim_{x \to b-} f(x)$ وجود دارد. همچنین، اگر f در (a, b) از پایین‌کراندار باشد،آنگاه $\lim_{x \to a+} f(x)$ وجود دارد.

برهان: اگر f در (a,b) غیر نزولی و از بالا کراندار باشد، فرض می‌کنیم

$$M = \underset{x \in (a,b)}{\text{l.u.b.}}\ f(x).$$

فرض کنیم ε عددمثبت دلخواهی باشد، عدد $M-\varepsilon$ یک‌کران بالای حوزهٔ مقادیر f نیست. پس عنصری از (a, b) مانند y هست که $f(y)>M-\varepsilon$. فرض کنیم $\delta=b-y$. آنگاه

$$f(b-\delta)=f(y)>M-\varepsilon.$$

چون f غیر نزولی است، ازاین نتیجه می‌شود

$$f(x)>M-\varepsilon \qquad (b-\delta<x<b).$$

بنابراین، چون برای هر $x \in (a, b)$ داریم $f(x) \leqslant M$ پس

$$|f(x)-M|<\varepsilon \qquad (b-\delta<x<b).$$

این ثابت می‌کند که $\lim_{x \to b-} f(x)=M$.

اگر f ازپایین کراندار باشد، استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $\lim_{x \to a+} f(x)=m$ که درآن $m=\underset{x \in (a,b)}{\text{g.l.b.}} f(x)$.

اگر f در (a, b) غیر صعودی باشد، نتیجهٔ زیر را مـی‌توان با استفاده از ۸.۱.۴ درمورد $-f$ (که غیرنزولی است) ثابت‌کرد.

۹.۱.۴. قضیه. فرض کنیم f تابعی غیرصعودی در بازهٔ بازکراندار (a,b) باشد. اگر f در (a,b) ازپایین کراندار باشد، آنگاه $\lim_{x \to b-} f(x)$ وجود دارد، در حالی که اگر f در (a, b) از بالا کراندار باشد، آنگاه $\lim_{x \to a+} f(x)$ وجود دارد.

سپس، نتیجهٔ مهم ۱۰.۱.۴ را خواهیم داشت.

۱۰.۱.۴. نتیجه. اگر f تابعی یکنوا در بازهٔ باز (a, b) باشد، و اگر $c\in(a, b)$، آنگاه $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$ هردو وجود دارند.

برهان: فرض کنیم f غیرنزولی باشد. عدد مثبت δ را بـه‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که بازهٔ $(c-\delta, c+\delta)$ (بازهٔ بازکراندار) در (a,b) قرار گیرد. آنگاه $f(c)$ یك کران بالای مجموعهٔ مقادیر f در بازهٔ باز $(c-\delta, c)$ است. پس این مجموعه از بـالا کراندار است و بنابر ۸.۱.۴، $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$ وجود دارد. به‌همین ترتیب، مجموعهٔ مقادیر f در بازهٔ باز $(c,c+\delta)$ از پایین کراندار است و یك کران پایین آن $f(c)$ است. از این‌رو، مجدداً بنابر ۸.۱.۴، $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$ وجود دارد.

اگر f غیرصعودی باشد کافی است ۹.۱.۴ را به‌جای ۸.۱.۴ به‌کار بریم. در اینجا اثبات تمام می‌شود. توجه داشته باشید که (a, b) را کراندار فرض نکردیم.

حال که در این مبحث هستیم خوب است تابع اکیداً صعودی و تابع اکیداً نزولی را نیز تعریف کنیم.

۱۱.۱.۴. تعریف. تابع حقیقی f در بازهٔ $J\subseteq R$ اکیداً صعودی گفته می‌شود اگر

$$f(x)<f(y) \qquad (x<y; x, y\in J).$$

به‌همین ترتیب، f را اکیداً نزولی خوانند اگر

$$f(x)>f(y) \qquad (x<y; x, y\in J).$$

پس اگر f در J غیرنزولی باشد، آنگاه f در J اکیداً صعودی است اگر و تنها اگر f در J یك‌به‌یك باشد.

تمرینهای ۱.۴

۱. (الف) اگر $|x-۲|<۱$، ثابت کنید که $|x^۲-۴|<۵$.

(ب) اگر $|x-۳|<\frac{۱}{۱۰}$، ثابت کنید که $|x^۲-x-۶|<۰٫۵۱$.

(ج) اگر $|x+۱|<\frac{۱}{۱۰}$، ثابت کنید که $|x^۳+۱|<۰٫۳۳۱$.

۲. فرض کنید δ عددی باشد به‌طوری که $۰<\delta<۱$.

(الف) اگر $|x-۲|<\delta$، ثابت کنید که $|x^۲-۴|<۵\delta$.

(ب) اگر $|x-۳|<\delta$، ثابت کنید که $|x^۲-x-۶|<۶\delta$.

(ج) اگر $|x+۱|<\delta$، ثابت کنید که $|x^۳+۱|<۷\delta$.

(د) اگر $|x-۲|<\delta$، ثابت کنید که $|(x-۲)/(x+۳)|<\delta/۴$.

۰۳ (الف) فرض کنید $f(x)=x^{۲}+۴x$. عدد مثبت δ را به‌گونه‌ای بیابید که

$$|f(x)-۵|<\frac{۱}{۱۰} \qquad (۰<|x-۱|<\delta).$$

(ب) از تعریف ۱.۱.۰۴ مستقیماً ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to ۱} (x^{۲}+۴x)=۵$.

۰۴ برای هر یک از توابع در شکلهای ۱۳ تا ۱۷، نموداری از نوع شکل ۷ رسم کنید. نمودارها را با تعریف ۱.۱.۰۴ مربوط سازید.

۰۵ فقط با استفاده از تعریف ۱.۱.۰۴، درستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

(الف) $\lim\limits_{x\to -۲} x^{۲}+۳x=-۲$

(ب) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱}=۲$

(ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \sqrt{۴-x}=۲$

۰۶ اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=M$، ثابت کنید که $L=M$. (با قضیهٔ ۲.۰۳.۰۲، مقایسه کنید.)

۰۷ اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $c\in R$، ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=cL$.

۰۸ ثابت کنید که

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۷}-۲x^{۵}+۱}{x^{۳}-۳x^{۲}+۲}=۱\cdot$$

۰۹ اگر $c\in R$ و برای هر عدد حقیقی x، $f(x)=c$، ثابت کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$ که در آن a عدد دلخواهی در R است.

۰۱۰ فرض کنید $[x]$ نمایش بزرگترین عدد صحیحی باشد که از x بزرگتر نیست. (مثلاً، $[-۴]=-۴$، $[-۴٫۱]=-۵$، $[۱۵٫۴]=۱۵$.) اگر $n\in I$، ثابت کنید که

$$\lim_{x\to n+} [x]=n, \qquad \lim_{x\to n-} [x]=n-۱\cdot$$

۰۱۱ فرض کنید

$$f(x)=[۱-x^{۲}] \qquad (-۱\leqslant x\leqslant ۱).$$

آیا $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود دارد؟ درصورت وجود، مقدار آن‌را به‌دست آورید.

۱۲. برای هر $a\in R$ ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to a} x=a$. سپس، با استفاده از قضیه‌های این بخش، ثابت کنید $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$ که در آن P یک تابع چندجمله‌ای دلخواه است.

۱۳. اگر برای $|x-a|<h$ داشته باشیم $f(x)\geqslant 0$ و اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، ثابت کنید که $L\geqslant 0$.

۱۴. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L>0$، نشان دهید که عدد مثبتی مانند δ هست به گونه‌ای که

$$f(x)>0 \qquad (0<|x-a|<\delta).$$

(راهنمایی: ε را برابر با $L/2$ بگیرید.)

۱۵. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ و $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$، ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]=A+B$. همین کار را با $\lim\limits_{x\to a+}$ و $\lim\limits_{x\to b-}$ به جای $\lim\limits_{x\to\infty}$ انجام دهید.

۱۶. فرض کنید f و g توابعی غیرنزولی در بازهٔ (a,b) باشند و فرض کنید $h=f-g$. اگر $c\in(a,b)$، ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to c+} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to c-} h(x)$ وجود دارند.

۱۷. اگر f تابعی حقیقی در، $(0,\infty)$ باشد و اگر

$$g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (0<x<\infty),$$

ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=L$.

۱۸. تعریفی برای

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

بنویسید و برای این حد قضیه‌ای نظیر ۳.۱.۴ ثابت کنید.

۱۹. مثالی از تابع ۱ — ۱ در $(0,\infty)$ بیاورید که یکنوا نباشد.

۲۰. مثالی از تابع غیرنزولی در $[0,1]$ بیاورید که اکیداً صعودی نباشد.

۲۱. اگر f تابعی غیرنزولی و در (a,∞) از بالا کراندار باشد، ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ وجود دارد.

۲۲. فرض کنید f تابعی حقیقی در R باشد و فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالهٔ دلخواهی از اعداد حقیقی و همگرا به a باشد، و اگر $x_n\neq a\,(n\in I)$، ثابت کنید که دنبالهٔ $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ به L همگرا است.

۲۳. برعکس، فرض کنید برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که $x_n\neq a\,(n\in I)$ و $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$. ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

۲۴. فرض کنید که برای هردنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به طوری که $x_n \neq a(n\in I)$ و $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ فقط بدانیم که $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ وجود دارد. ثابت کنید که $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد.

۲۵. با به‌کاربردن تمرینهای ۲۲ و ۲۳ برهان جدیدی برای قضیهٔ ۳.۱.۴ ارائه دهید.

۲.۴ فضاهای متریك

۱.۲.۴. در برهـان قضایـای ۱.۷.۲، ۴.۷.۲، ۷.۷.۲، و ۹.۷.۲، و هم‌ارز آنها، ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴، ویژگیهای مهم زیر از تابع قدرمطلق، که در زیر می‌آیند، به‌کاررفتند

$$|0| = 0, \tag{۱}$$

$$|a| > 0 \qquad (a\in R,\ a\neq 0), \tag{۲}$$

$$|a| = |-a| \qquad (a\in R), \tag{۳}$$

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \quad (a, b\in R). \tag{۴}$$

حال، برای $x, y\in R$، تعبیر هندسی $|x-y|$ فاصلهٔ از x تا y است. اگـر «تابع فاصلهٔ» ρ را با ضابطهٔ

$$\rho(x,\ y) = |x-y| \qquad (x,\ y\in R),$$

تعریف کنیم، آنگاه از ویژگیهای (۱)–(۴) نتایج زیر، برای نقاط دلخواه $x, y, z\in R$، به‌دست می‌آیند:

$$\rho(x,\ x) = 0. \tag{۵}$$

(یعنی، فاصلهٔ یك نقطه از خودش برابر با صفر است.)

$$\rho(x,\ y) > 0 \qquad (x\neq y). \tag{۶}$$

(فاصلهٔ بین دو نقطهٔ متمایز اکیداً مثبت است.)

$$\rho(x,\ y) = \rho(y,\ x). \tag{۷}$$

(فاصلهٔ از x تا y برابر است با فاصلهٔ از y تا x.)

$$\rho(x,\ y) \leqslant \rho(x,\ z) + \rho(z,\ y) \qquad \text{(نابرابری مثلثی)} \tag{۸}$$

[نابرابری اخیر بـا قراردادن $a = x-z$، $b = z-y$ در (۴) ثابت می‌شود. نابرابری (۸) می‌گوید که راه مستقیم از x به y هرگز از راه از x بـه z و سپس از z به y بیشتر نیست.]

یك تعریف رضایت‌بخش حد نه‌تنها برای R، بلکه برای هرمجموعهٔ M که دارای «تابع فاصلهٔ» ρ که واجد شرایط (۵) تا (۸) باشد، می‌توان بنا کرد. «تابع فاصله» معمولاً متریك خوانده می‌شود.

۲.۲.۴. تعریف. فرض کنیم M یك‌مجموعهٔ دلخواه باشد. یك‌متریك برای M عبارت است‌از یك‌تابع ρ که حوزهٔ تعریفش $M \times M$ و حوزهٔ مقادیرش زیرمجموعه‌ای از $[\circ, \infty)$ است به‌گونه‌ای که

$$\rho(x,x)=\circ \qquad (x\in M),$$
$$\rho(x,y)>\circ \qquad (x,\ y\in M, x\neq y),$$
$$\rho(x,y)=\rho(y,x) \qquad (x,y\in M),$$
$$\rho(x,y)\leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y) \qquad (x,y,z\in M)$$ (نابرابری مثلثی)

اگر ρ یك متریك M باشد، آنگاه جفت مرتب $\langle M,\rho\rangle$ فضای متریك نامیده می‌شود. (در بسیاری ازحالتها، هرجا بیم ابهام نرود، فضای متریك $\langle M,\rho\rangle$ را به‌اختصار فضای متریك M می‌نامیم. مثلاً، اگر بگوییم «فرض می‌کنیم M یك فضای متریك باشد»، همواره یك متریك ρ در پشت M پنهان است.)

بنابراین یك متریك M تمام خواص (۵) تا (۸) تابع فاصلهٔ $|x-y|$ در R را داراست.

۳.۲.۴. دراینجا پنج مثال ازفضاهای متریك ارائه می‌شود.

۱. تابع ρ باضابطهٔ $\rho(x,y)=|x-y|$ به‌طور آشکار یك متریك مجموعهٔ اعداد حقیقی R است. فضای متریك حاصل یعنی $\langle R,\rho\rangle$ را با $R^{\text{۱}}$ نشان می‌دهیم. این متریك را متریك قدرمطلق می‌خوانیم.

۲. این‌هم‌متریك دیگر R. تابع $d:R\times R\to[\circ,\infty)$ را باضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$d(x,x)=\circ \qquad (x\in R),$$
$$d(x,y)=\text{۱} \qquad (x,y\in R;\ x\neq y).$$

یعنی، «فاصلهٔ» بین هردو نقطهٔ متمایز $x,y\in R$ برابر ۱ است. تحقیق اینکه d یك‌متریك R است به‌خواننده واگذار می‌شود. متریك d را متریك گسسته خوانند. ازاین‌پس فضای متریك $\langle R,d\rangle$ را با R_d نشان می‌دهیم. مثالهای ۱و۲ نشان می‌دهند که یك‌مجموعهٔ مفروض ممکن است بیش‌از یك متریك داشته باشد.

۳. یك‌عدد $n\in I$ انتخاب کنید. اگر $x=\langle x_{\text{۱}},\dots,x_n\rangle$ و $y=\langle y_{\text{۱}},\dots,y_n\rangle$ دو nتایی مرتب از اعداد حقیقی باشند، ρ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{k=\text{۱}}^{n}(x_k-y_k)^{\text{۲}}\right]^{\text{۱}/\text{۲}}$$

[پس، برای $n=۲$، $\rho(x,y)$ همان فرمول معمولی فاصلهٔ نقاط درصفحهٔ دکارتی است.] نشان می‌دهیم که ρ در نامساوی مثلثی صدق می‌کند. بنابراین، اگر $z=\langle z_۱,\dots,z_n\rangle$، باید نشان دهیم که $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$. به‌ازای $k=۱,۲,\dots,n$ فرض می‌کنیم که $a_k=x_k-z_k$، $b_k=z_k-y_k$. پس

$$\rho(x,z)=\Big(\sum_{k=۱}^{n} a_k^۲\Big)^{۱/۲},$$

$$\rho(z,y)=\Big(\sum_{k=۱}^{n} b_k^۲\Big)^{۱/۲},$$

و

$$\rho(x,y)=\Big[\sum_{k=۱}^{n}(a_k+b_k)^۲\Big]^{۱/۲}.$$

پس، باید نشان دهیم که

$$\Big[\sum_{k=۱}^{n}(a_k+b_k)^۲\Big]^{۱/۲}\leqslant\Big(\sum_{k=۱}^{n} a_k^۲\Big)^{۱/۲}+\Big(\sum_{k=۱}^{n} b_k^۲\Big)^{۱/۲}.$$

ولی فرمول فوق از ۳.۱۰.۳ نتیجه می‌شود. تحقیق اینکه ρ درسایر شرایط لازم صدق می‌کند بدیهی است. فضای متریك حاصل ازمجموعهٔ nتایی‌های مرتب اعداد حقیقی با این متریك ρ را بـا R^n نشان می‌دهیم. فضای متریك R^n را فضای اقلیدسی n بعدی نامند. (ملاحظه کنید که به‌ازای $n=۱$، R^n به $R^۱$، که درمثال ۱ آمده، تبدیل می‌شود زیرا

$$\Big[\sum_{k=۱}^{۱}(x_k-y_k)^۲\Big]^{۱/۲}=|x_۱-y_۱|.)$$

۴. فـرض کنیم l^∞ مجموعهٔ تمام دنباله‌های کراندار اعداد حقیقی را نشان می‌دهد. اگر $x=\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و $y=\{y_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نقاطی در l^∞ باشند، ρ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\rho(x,y)=\underset{۱\leqslant n<\infty}{\mathrm{l.u.b.}}|x_n-y_n|.$$

مثلاً، اگر $x=\{۱+۱/n\}_{n=۱}^{\infty}$، $y=\{۲-۱/n\}_{n=۱}^{\infty}$، آنگاه

$$\rho(x,y)=\underset{۱\leqslant n<\infty}{\mathrm{l.u.b.}}\Big|\Big(۱+\frac{۱}{n}\Big)-\Big(۲-\frac{۱}{n}\Big)\Big|=\underset{۱\leqslant n<\infty}{\mathrm{l.u.b.}}\Big|-۱+\frac{۲}{n}\Big|=۱.$$

دراینجا هم، تعیین اینکه ρ درسه‌شرط اول متریك صدق می‌کند آسان است. برای اثبات نابرابری مثلثی، فرض می‌کنیم $z=\{z_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نیز نقطه‌ای در l^∞ باشد. به‌ازای هر $k\in I$ داریم

$$|x_k-y_k|=|x_k-z_k+z_k-y_k|\leqslant|x_k-z_k|+|z_k-y_k|$$
$$\leqslant \underset{1\leqslant n<\infty}{\mathrm{l\cdot u\cdot b\cdot}}\ |x_n-z_n|+\underset{1\leqslant n<\infty}{\mathrm{l\cdot u\cdot b\cdot}}\ |z_n-y_n|,$$

و بنا براین

$$|x_k-y_k|\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)\qquad (k\in I).$$

از این نا برابری نتیجه می‌شود که $\underset{1\leqslant k<\infty}{\mathrm{l\cdot u\cdot b\cdot}}\ |x_k-y_k|\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$ (چرا؟)، و این همان نابرابری مثلثی ρ است.

معمول است که فضای متریك $\langle l^\infty,\rho\rangle$ را به‌طور خلاصه با l^∞ نشان دهند. (دلیل نماد ∞ روی l معمولا در درس بعدی آنالیز روشن می‌شود.)

۵. به عنوان آخرین مثال فضای متریك، مجموعهٔ l^2 از بخش ۱۰.۳ را ملاحظه کنید. برای $x,y\in l^2$، ρ را چنین تعریف می‌کنیم $\rho(x,y)=||x-y||_2$. آنگاه قضیهٔ ۵.۱۰.۳ نشان می‌دهد که ρ یك متریك l^2 است. مثلا، با استفاده از (۳) از ۵.۱۰.۳، داریم

$$\rho(x,y)=||x-y||_2=||(-1)(y-x)||_2$$
$$=|-1|\cdot||y-x||_2=||y-x||_2=\rho(y,x).$$

همچنین، برای $x,y,z\in l^2$ با استفاده از (۴) از ۵.۱۰.۳، داریم

$$\rho(x,y)=||x-y||_2=||x-z+z-y||_2$$
$$\leqslant||x-z||_2+||z-y||_2=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

فضای متریك $\langle l^2,\rho\rangle$ را با l^2 نشان می‌دهیم.

به‌این ترتیب R^1، R_d، R^n، l^∞، و l^2 را به‌عنوان مثالهایی از فضاهای متریك برشمردیم.

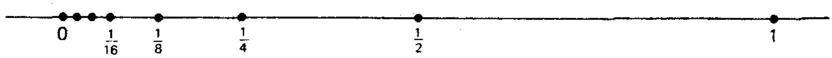
به‌اهمیت این نکته توجه کنید که اگر ρ یك متریك M باشد، آنگاه به‌طریقی آشکار برای هر زیرمجموعهٔ M متریك ρ تعریف می‌شود. مثلا، $\rho(x,y)=|x-y|$ یك متریك هر بازهٔ بسته از اعداد حقیقی $[a,b]$ است.

۴.۲.۴. در بخش بعد مفهوم نقطهٔ انباشتگی را به‌کار خواهیم برد.

تعریف. فرض کنیم $\langle M,\rho\rangle$ یك فضای متریك باشد و $A\subseteq M$. نقطهٔ $a\in M$ را نقطهٔ انباشتگی A در M خوانیم اگر برای هر $h>0$، یك نقطهٔ A مانند x باشد به‌طوری که $0<\rho(x,a)<h$.

یعنی، a یك نقطهٔ انباشتگی A است اگر نقاطی از A، غیر از a، وجود داشته باشند که هرقدر بخواهیم به a نزدیك باشند. توجه داشته‌باشید که لازم نیست a به A تعلق داشته باشد.

مثلا، فرض کنیم $M=R^{۱}$ و $A=\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\dots\}$، آنگاه ۰ تنها نقطهٔ انباشتگی A در M است. شکل ۱۸ را ببینید.



شکل ۱۸. تنها نقطهٔ انباشتگی $A=\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۱۶},\dots\}$، ۰ است.

تمرینهای ۲.۴

۱. اگر ρ یك متریك مجموعهٔ M باشد، نشان دهید که ۲ρ نیز یك متریك M است.

۲. اگر ρ و σ هر دو متریکهای مجموعهٔ M باشند، نشان دهید که $\rho+\sigma$ نیز یك متریك M است.

۳. فرض کنید $\rho_۱$ و $\rho_۲$ متریکهای مجموعهٔ M باشند. ثابت کنید که $\max(\rho_۱,\rho_۲)$ نیز یك متریك M است.

۴. فرض کنید $\langle M,\rho\rangle$ یك فضای متریك باشد. ثابت کنید که $\min(۱,\rho)$ نیز یك متریك M است.

۵. فرض کنید

$$\rho(x,y)=\left|\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}\right| \quad (x>۰, y>۰).$$

ثابت کنید که ρ یك متریك $(۰,\infty)$ است.

۶. فرض کنیم $\langle M,\rho\rangle$ یك فضای متریك باشد. ثابت کنید که

$$|\rho(x,y)-\rho(x,z)|\leqslant\rho(y,z) \qquad (x,y,z\in M).$$

۷. فرض کنید $l^{۱}$ ردهٔ تمام دنبالههایی از اعداد حقیقی $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ باشد بهطوری که $\sum_{n=۱}^{\infty}|s_n|<\infty$. اگر $s=\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و $t=\{t_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $l^{۱}$ باشند، نشان دهید که $\rho(s,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}|s_n-t_n|$ یك متریك $l^{۱}$ است.

۸. برای $P=\langle x_۱,y_۱\rangle$ و $Q=\langle x_۲,y_۲\rangle$ تعریف زیر را میآوریم

$$\sigma(P,Q)=|x_۱-x_۲|+|y_۱-y_۲|$$

نشان دهید که σ یك متریك مجموعهٔ جفتهای مرتب اعداد حقیقی است.

همچنین، اگر

$$\tau(P,Q)=\max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|),$$

نشان دهید که τ نیز یك متریك همان مجموعه است.

۹. فرض کنید که ۰ نقطهٔ $\langle 0,0\rangle$ در R^2 باشد. برای σ و τ که در تمرین ۸ آمده است، زیرمجموعه‌های R^2 راکه در ذیل می‌آیند رسم کنید.

$$A=\{P\in R^2:\sigma(0,P)<1\},$$
$$B=\{P\in R^2:\tau(0,P)<1\}.$$

سپس، اگر ρ متریك R^2 باشد ترسیمهای فوق را با مجموعهٔ زیر مقایسه کنید

$$C=\{P\in R^2:\rho(0,P)<1\}.$$

۱۰. اگر P، Q و R نقاطی در R^3 باشند و $\rho(P,R)=\rho(P,Q)+\rho(Q,R)$، آنگاه دربارهٔ وضعیت نسبی P، Q و R چه می‌توانید بگویید؟

به‌همین سؤال با R_d به‌جای R^3 جواب بدهید.

۱۱. فرض کنید A بازهٔ باز $(0,1)$ باشد. ثابت کنید که مجموعهٔ نقاط انباشتگی A در R^1، بازهٔ $[0,1]$ است.

۱۲. اگر $A=(0,1)$، مجموعهٔ نقاط انباشتگی A را در R_d بیابید.

۳.۴ حدود در فضاهای متریك

اگر تعریف ۱.۱.۴ را بررسی کنیم می‌بینیم که $\lim_{x\to a} f(x)=L$ به‌این معنی است که برای هرعدد مثبت ε عدد مثبتی مانند δ هست به‌گونه‌ای کـه فاصلهٔ $f(x)$ از L کمتراز ε است به‌شرط آنکه فاصلهٔ x از a کمتراز δ (وبزرگتراز ۰) باشد. حال که این تعریف را برمبنای فاصله‌ها بیان کرده‌ایم، مشکل نخواهد بود که تعریف متناظررا برای فضاهای متریك دلخواه بیان کنیم.

فرض می‌کنیم $\langle M_1,\rho_1\rangle$ و $\langle M_2,\rho_2\rangle$ دو فضای متریك‌اند، $a\in M_1$، و f تـابعی است که‌حوزهٔ مقادیرش زیرمجموعهٔ M_2 است و حوزهٔ تعریفش(به‌ازای یك $h>0$) شامل تمام نقاط $x\in M_1$، بجز شاید $x=a$، است که در $\rho_1(a,x)<h$ صدق می‌کنند. همچنین، فرض می‌کنیم که a یك نقطهٔ انباشتگی حوزهٔ تعریف f باشد.

۱.۳.۴ تعریف. گوییم $f(x)$ به‌L $(L\in M_2)$ میل می‌کند وقتی x به a میل کند، اگر برای هر عدد مثبت ε، عدد مثبت δ باشد به‌طوری که

$$\rho_2(f(x),L)<\varepsilon \qquad (0<\rho_1(x,a)<\delta).$$

دراین حـالـت مـی‌نـویسیـم $\lim_{x\to a} f(x)=L$، یـا $f(x)\to L$ وقتـی $x\to a$. اگـر $\langle M_1,\ \rho_1\rangle=\langle M_2,\ \rho_2\rangle=R^1$ ، آنـگـــاه $\rho_2(f(x),\ L)=|f(x)-L|$، $\rho_1(x,\ a)=|x-a_1|$ و ۱.۳.۴ به‌۱.۱.۴ تبدیل می‌شود.

درفصلهای بعدی غالباً توابع f در فضای متریک $M=[a,b]$ (بازهٔ بستهٔ کراندار با متریک قدرمطلق) را درنظر می‌گیریم. دراین فضا، درگزارهٔ

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x)=L \qquad (*)$$

تنها نقاط x واقع درسمت راست a موردنظر هستند (چون که نقاط $R^{۱}$ که درسمت چپ a هستند در M قرار ندارند). در ۶.۱.۴، L را «حدراست f» نامیدیم، ولی اگر به‌خاطر داشته باشیم که f درچه فضایی تعریف شده است لزومی ندارد که این اصطلاح را به‌کار بریم. نظیر این نکته در مورد

$$\lim_{x\longrightarrow b} f(x)=N$$

نیز صادق است. موقعی هم که مشتق تابع حقیقی در $[a,b]$ را تعریف کنیم این نکات به‌کار خواهند آمد.

دراینجا مثالی برای توضیح ۱.۳.۴ ارائه می‌کنیم. فرض کنیم $f: l^{۲}\to R^{۱}$ به‌ترتیب زیر تعریف شود: اگر $x=\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}\in l^{۲}$، آنگاه $f(x)=x_{۱}$. یعنی، نگارهٔ هردنباله در $l^{۲}$ تحت f اولین جملهٔ دنباله است. حال، فرض کنیم $a=\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یك عنصر ثابت $l^{۲}$ باشد. ثابت می‌کنیم که $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)=a_{۱}$. اگر ε عددمثبت دلخواهی باشد، باید عدد مثبت δ را به‌گونه‌ای بیابیم که فاصلهٔ $f(x)$ از $a_{۱}$ (در متریك $R^{۱}$) کمتر از ε باشد وقتی فاصلهٔ x تا a (در متریك $l^{۲}$) کوچکتر از δ و بزرگتر از ۰ است. یعنی، باید $\delta>۰$ را طوری بیابیم که

$$|f(x)-a_{۱}|<\varepsilon \qquad (۰<\|x-a\|_{۲}<\delta),$$

یا

$$|x_{۱}-a_{۱}|<\varepsilon \qquad (۰<\|x-a\|_{۲}<\delta), \qquad (۱)$$

ولی

$$\|x-a\|_{۲}=\left[\sum_{n=۱}^{\infty}(x_n-a_n)^{۲}\right]^{۱/۲}\geqslant[(x_{۱}-a_{۱})^{۲}]^{۱/۲}=|x_{۱}-a_{۱}|,$$

وبنابراین $|x_{۱}-a_{۱}|\leqslant\|x-a\|_{۲}$. از این‌رو اگر δ را مساوی ε اختیار کنیم، آنگاه از نابرابری $\|x-a\|_{۲}<\delta=\varepsilon$ نتیجه می‌شود $|x_{۱}-a_{۱}|\leqslant\|x-a\|_{۲}<\varepsilon$ و بنابراین (۱) برقرار است. این مطلب ثابت می‌کند که $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)=a_{۱}$. [ملاحظه کنید که $a_{۱}=f(a)$، درنتیجه ثابت کرده‌ایم که $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)=f(a)$.]

غالباً تعریف ۱.۳.۴ را در مورد توابع حقیقی، یعنی، موقعی که $\langle M_{۲},\rho_{۲}\rangle=R^{۱}$

است به‌کارمی‌بریم. بنابراین برهان قضیهٔ زیرعیناً تکرار برهانهای ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴ است.

۲.۳.۴. قضیه. فرض کنیم $\langle M, \rho\rangle$ یک‌فضای متریک و a نقطه‌ای از M باشد. فرض کنیم f و g توابعی حقیقی* باشندکه حوزه‌های تعریفشان زیرمجموعه‌های M هستند. اگر** $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=N$، آنگاه

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+N,$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=L-N,$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=LN,$$

و اگر $N\neq ۰$،

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{N}.$$

برهان: فقط $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=LN$ را ثابت می‌کنیم. (با برهان دوم ۷.۷.۲ مقایسه کنید.)

چون $\lim_{x\to a} g(x)=N$، به‌ازای عددی مانند $\delta_۱>۰$ داریم

$$|g(x)-N|<۱ \qquad (۰<\rho(x,a)<\delta_۱).$$

پس

$$|g(x)|<|N|+۱=Q \qquad (۰<\rho(x,a)<\delta_۱).$$

حال،

$$f(x)g(x)-LN=f(x)g(x)-Lg(x)+Lg(x)-LN$$
$$=g(x)[f(x)-L]+L[g(x)-N].$$
$$|f(x)g(x)-LN|\leqslant|g(x)|\cdot|f(x)-L|+|L|\cdot|g(x)-N|.$$

از این‌رو، اگر $۰<\rho(x,a)<\delta_۱$،

---

* ازاین پس وقتی عبارت «تابع حقیقی» را به‌کار می‌بریم مقصود تابعی است‌که حوزهٔ مقادیرش در $R^۱$ است. یعنی، متریک حوزهٔ مقادیر، متریک قدرمطلق است.

** پاورقی صفحهٔ ۱۶۹ را ببینید.

$$|f(x)g(x)-LN|\leqslant Q\cdot|f(x)-L|+|L|\cdot|g(x)-N|\cdot \qquad (۱)$$

اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، عدد مثبتی مانند $\delta_۲$ هست به‌گونه‌ای که

$$Q|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{۲} \qquad (۰<\rho(x,a)<\delta_۲), \qquad (۲)$$

و عدد مثبتی مانند $\delta_۳$ وجود دارد به‌طوری که

$$|L||g(x)-N|<\frac{\varepsilon}{۲} \qquad (۰<\rho(x,a)<\delta_۳). \qquad (۳)$$

اگر فرض کنیم $\delta=\min(\delta_۱,\delta_۲,\delta_۳)$، آنگاه از (۱)، (۲)، و (۳) نتیجه می‌شود

$$|f(x)g(x)-LN|<\varepsilon \qquad (۰<\rho(x,a)<\delta).$$

این مطلب ثابت می‌کند که $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=LN$.

۳.۳.۴ یک دنبالهٔ نقاط در یک فضای متریک M تابعی است از I به‌توی M. همانند دنباله‌های اعداد حقیقی، نماد $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را برای یک‌دنبالهٔ نقاط M به‌کار می‌بریم. برای چنین دنباله‌هایی، تعریف همگرایی نظیر تعریفهای ۱.۲.۲ و ۱.۳.۲ است.

تعریف. فرض کنیم $\langle M,\rho\rangle$ یک فضای متریک و $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از نقاط M باشد. گوییم s_n به L میل می‌کند $(L\in M)$ وقتی n به بینهایت میل می‌کند اگر برای هر عدد مثبت ε، عددی مانند $N\in I$ باشد به‌طوری که

$$\rho(s_n,L)<\varepsilon \qquad (n\geqslant N).$$

در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=L$، یا $s_n\to L$ وقتی $n\to\infty$، و می‌گوییم $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در M به‌نقطهٔ L همگر است.

تعریف دنباله‌های کوشی همانند تعریف ۱.۱۰.۲ است.

۴.۳.۴ تعریف. فرض کنیم $\langle M,\rho\rangle$ یک فضای متریک باشد و $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از نقاط M باشد. گوییم $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک دنبالهٔ کوشی است اگر به‌ازای هرعدد $\varepsilon>۰$، عددی مانند $N\in I$ باشد به‌طوری که

$$\rho(s_m,s_n)<\varepsilon \qquad (m,n\geqslant N).$$

برهان قضیهٔ زیر با برهان ۲.۱۰.۲ یکسان است.

۵.۳.۴ قضیه. فرض کنیم $\langle M,\rho\rangle$ یک‌فضای متریک باشد. اگر $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک دنبالهٔ همگرا از نقاط M باشد، آنگاه $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک دنبالهٔ کوشی است.

۶.۳.۴ اکنون به‌یک‌نکتهٔ بسیارمهم می‌رسیم. در برخی ازفضاهای متریک دنباله‌هایی وجود دارند که کوشی‌هستند ولی‌همگرا نیستند. یعنی، قضیهٔ ۴.۱۰.۲ را برای‌تمام فضاهای

متریك نمی‌توان تعمیم داد.

مثلاً، فرض کنیم M مجموعهٔ تمام نقاط $\langle x, y\rangle$ در صفحهٔ اقلیدسی R^2 باشد به‌طوری‌که $x^2+y^2<1$، و فرض کنیم متریك R^2 به عنوان متریك M به‌کار رود. دنبالهٔ $A=\{\langle 0, n/n+1\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی از نقاط در M است ولی نقطهٔ $L\in M$ وجود ندارد که A به L همگرا باشد! (شکلی ترسیم کنید و سپس تحقیق نمایید.) بنا براین دنبالهٔ A از نقاط M در M همگرا نیست.

البته، دنبالهٔ A به‌عنوان یك دنبالهٔ نقاط R^2 به‌نقطهٔ $\langle 1, 0\rangle$ در R^2 همگراست. ولی باوجود این A در M یك دنبالهٔ همگرا نیست (برطبق ۳.۳.۴) هرچندکه A کوشی است.

برخواننده‌است‌که برهان ۴.۱۰.۲ را مجدداً بررسی‌کند تا ببیند درکجا ویژگیهای اختصاصی R^1 به‌کار رفته‌اند و ازاین راه دریابد برهان ۲.۱۰.۲ برای هرفضای متریك به‌کار می‌رود اما برهان ۴.۱۰.۲ رانمی‌توان بی‌درنگ برای تمام فضاهای متریك به‌کار برد.

تمرینهای ۳.۴

۱. نشان دهید که درهرفضای متریك یك‌دنبالهٔ نقاط نمی‌تواند به‌دوحد متمایز همگرا باشد.

۲. برای هر $n\in I$ فرض‌کنید $P_n=\langle x_n, y_n\rangle$ نقطه‌ای در R^2 است. نشان دهید که $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ به $P=\langle x, y\rangle$ همگراست اگر و تنها اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ در R^1 به‌ترتیب به x و y همگرا باشند.

۳. فرض کنید $s=\{1/k\}_{k=1}^{\infty}$. دنباله‌ای از نقاط l^2 مانند $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بیابید به‌گونه‌ای که هر s_n از s متمایز و $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ در l^2 به s همگرا باشد.

۴. فرض‌کنید ρ و σ متریکهای M باشند به‌طوری‌که در $\langle M, \rho\rangle$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

اگر و تنها اگر در $\langle M, \sigma\rangle$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

(یعنی، دنباله در $\langle M, \rho\rangle$ همگرا باشد اگر و تنها اگر آن دنباله در $\langle M, \sigma\rangle$ همگرا بوده و حدها یکی باشند.) دراین صورت گوییم‌که ρ , σ هم‌ارز هستند.

ثابت کنید که متریك معمولی R^2، ومتریکهای σ , τ ازتمرین ۸ در ۲.۴ هرسه دو به‌دو بایکدیگر هم‌ارز هستند.

۵. اگر ρ و σ متریکهای M باشند، و اگر عددی مانند $k>1$ باشد به‌طوری‌که

$$\frac{1}{k}\sigma(x,y)\leqslant \rho(x,y)\leqslant k\sigma(x,y) \qquad (x,y\in M),$$

ثابت‌کنیدکه ρ و σ هم‌ارز هستند.

۰۶ اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ کوشی در فضای متریک $\langle M,\rho\rangle$ باشد، آنگاه نشان دهید که دنبالهٔ اعداد حقیقی $\{\rho(s_1,s_n)\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.
۰۷ اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ کوشی از نقاط فضای متریک M باشد، و اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا به $x\in M$ باشد، ثابت کنید که $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ خود به x همگراست.
۰۸ اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ همگرا در R_d باشد، نشان دهید که عدد $N\in I$ هست که $x_N = x_{N+1} = x_{N+2}\cdots$. (یعنی، دنباله در R_d همگراست اگر و تنها اگر همهٔ جمله‌هایش از مرتبه‌ای به‌بعد برابر باشند.)
۰۹ نشان دهید که هر دنبالهٔ کوشی در R_d همگراست.
۰۱۰ فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ در یک فضای متریک $\langle M,\rho\rangle$ همگرا باشند. ثابت کنید که $\{\rho(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ در R^1 همگراست.
۰۱۱ فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ در یک فضای متریک $\langle M,\rho\rangle$ دنباله‌های کوشی باشند. ثابت کنید که $\{\rho(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ در R^1 یک دنبالهٔ کوشی است.
۰۱۲ بیان کنید که اگر a نقطهٔ انباشتگی حوزهٔ تعریف f نباشد چرا نمی‌خواهیم تعریف ۱.۳.۴ را به‌کار بریم.

۵

توابع پیوسته در فضاهای متریك

۱.۵ توابع پیوسته در یك نقطهٔ خط حقیقی

قضیه‌های دربارهٔ توابع حقیقی پیوسته در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ مانند «اگر f در $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f یك‌مقدار ماکسیمم و یك‌مقدار مینیمم می‌گیرد»، و «اگر f در $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f هر مقدار بین $f(a)$ و $f(b)$ را می‌گیرد»، ابزار کار در اثبات قضیه‌های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند. این قضیه‌ها را به‌عنوان حالتهای خاص قضیه‌های توابع پیوسته در فضاهای متریك به‌دست‌خواهیم آورد. اما نخست مفهوم پیوستگی را در ابتدایی‌ترین شکل آن مرور می‌کنیم.

فرض کنیم a نقطه‌ای در R^1 باشد، f تابعی حقیقی وحوزهٔ تعریفش شامل a وشامل تمام نقاط بازهٔ باز $(a-h, a+h)$ باشد (البته $h>0$).

۱.۱.۵ تعریف. گوییم f در $a \in R_1$ پیوسته است اگر $\lim_{x \to \infty} f(x) = f(a)$.

در واقع، این تعریف ایجاب می‌کند که دو شرط برقرار باشند تا f در a پیوسته باشد. اولین شرط این است که $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود داشته باشد، شرط دوم آنکه این حد با $f(a)$ برابر باشد. به ویژه، اگر $f(a)$ تعریف نشده باشد، آنگاه f نمی‌تواند در a پیوسته باشد. مثلاً، تابع f با تعریف زیر

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad (x \in R^1, x \neq 0),$$

در $x=0$ تعریف نشده‌است و بنابراین در $x=0$ پیوسته‌نیست هرچندکه $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x)$ وجود دارد (و برابر ۱ می‌باشد).

ولی، تابع g با تعریف زیر

$$g(x)=\frac{\sin x}{x}\qquad (x\neq 0),$$

$$g(0)=1,$$

در $x=0$ پیوسته است چون‌که $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$.

اغلب این حالت پیش می‌آید کـه پیوسته نبودن f در نقطهٔ a به‌دلیل آن است‌که $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد. مثلا، تابع مشخصهٔ χ اعداد گویا را، که با ضابطه‌هـای زیـر تعریف شده است، ملاحظه‌کنید

$$\chi(x)=1 \qquad (\text{گویاست } x \text{ و } x\in R^1),$$

$$\chi(x)=0 \qquad (\text{گنگ است } x \text{ و } x\in R^1).$$

در این‌صورت $\chi(a)$ برای هر $a\in R^1$ تعریف شده است ولی $\lim\limits_{x\to a}\chi(a)$ برای هیچ a وجود ندارد. برای‌اثبات این‌مطلب فرض می‌کنیم خلافش برقرار باشد. پس، فرض‌می‌کنیم عددی مانند $L\in R^1$ باشدکه $\lim\limits_{x\to a}\chi(a)=L$. به‌ازای $\varepsilon=1/3$ عدد $\delta>0$ باید وجود داشته باشد به طوری‌که اگر $0<|x-a|<\delta$ آنگاه $|\chi(x)-L|<1/3$. ولی، مثلا دربازهٔ $(a, a+\delta)$ عدد گویا و عدد گنگ وجود دارد. اگر $x\in(a, a+\delta)$ گویا باشد، خواهیم داشت $|1-L|<1/3$، درحالی‌که اگـر $x\in(a, a+\delta)$ گنگ باشد داریم $|0-L|<1/3$. از این‌دو نابرابری یك‌تناقض حاصل می‌شود.

از طرف دیگر، بسیاری از توابع‌که «نوشتن آنها آسان است» در تمام نقاطی‌که تعریف‌شده‌اند پیوسته‌هستند. مثلا، دربخش ۱.۴، ثابت‌کردیم‌که $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+2x)=15$. این نشان می‌دهدکه تابع f با تعریف زیر

$$f(x)=x^2+2x \qquad (x\in R^1)$$

در $x=3$ پیوسته است. زیرا $f(3)=15$ و $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=15$. مثال بعـدی در بخش ۱.۴ نشان می‌دهدکه تابع g با ضابطهٔ

$$g(x)=\sqrt{x+3} \qquad (0<x<2)$$

در $x=1$ پیوسته است.

از قضیه‌های ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴ نتیجهٔ مهم زیر را به‌دست می‌آوریم.

۲.۱.۵ قضیه. اگر توابع حقیقی f , g در $a \in R^1$ پیوسته باشند، آنگاه $f+g$، $f-g$، و fg نیز در a پیوسته هستند. اگر $g(a) \neq 0$، آنگاه f/g هم در a پیوسته است.

برهان: چون f و g در a پیوسته هستند داریم

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

سپس، بنا بر ۳.۱.۴، $\lim_{x \to a} [f(x)+g(x)] = f(a)+g(a)$. به «بیان» دیگر:

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = (f+g)(a).$$

این ثابت می کند که $f+g$ در a پیوسته است، بقیهٔ قضیه با همین روش ثابت می‌شود.

تابعی پیوسته از یک تابع پیوسته، پیوسته است. به‌طور دقیقتر:

۳.۱.۵ قضیه. اگر f و g توابع حقیقی باشند، اگر f در a و g در $f(a)$ پیوسته باشد، آنگاه $g \circ f$ در a پیوسته است.

برهان: باید نشان‌دهیم که $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = g \circ f(a)$ یا،

$$\lim_{x \to a} g[f(x)] = g[f(a)].$$

یعنی، برای هر عدد مثبت ε، باید عدد مثبت δ را بیابیم به‌طوری که

$$|g[f(x)] - g[f(a)]| < \varepsilon \qquad (0 < |x-a| < \delta). \qquad (۱)$$

فرض کنیم $b = f(a)$، بنا به فرض $\lim_{y \to b} g(y) = g(b)$. بنابراین عددمثبت η هست به‌طوری که

$$|g(y) - g(b)| < \varepsilon \qquad (|y-b| < \eta). \qquad (۲)$$

(چرا مجبور نیستیم بنویسیم $0 < |y-b| < \eta$ ؟)، همچنین، بنا به‌فرض،

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

ازاین‌رو (به‌جای ε معمول در اینجا η را به‌کار می‌بریم) δ وجود دارد به‌گونه‌ای که

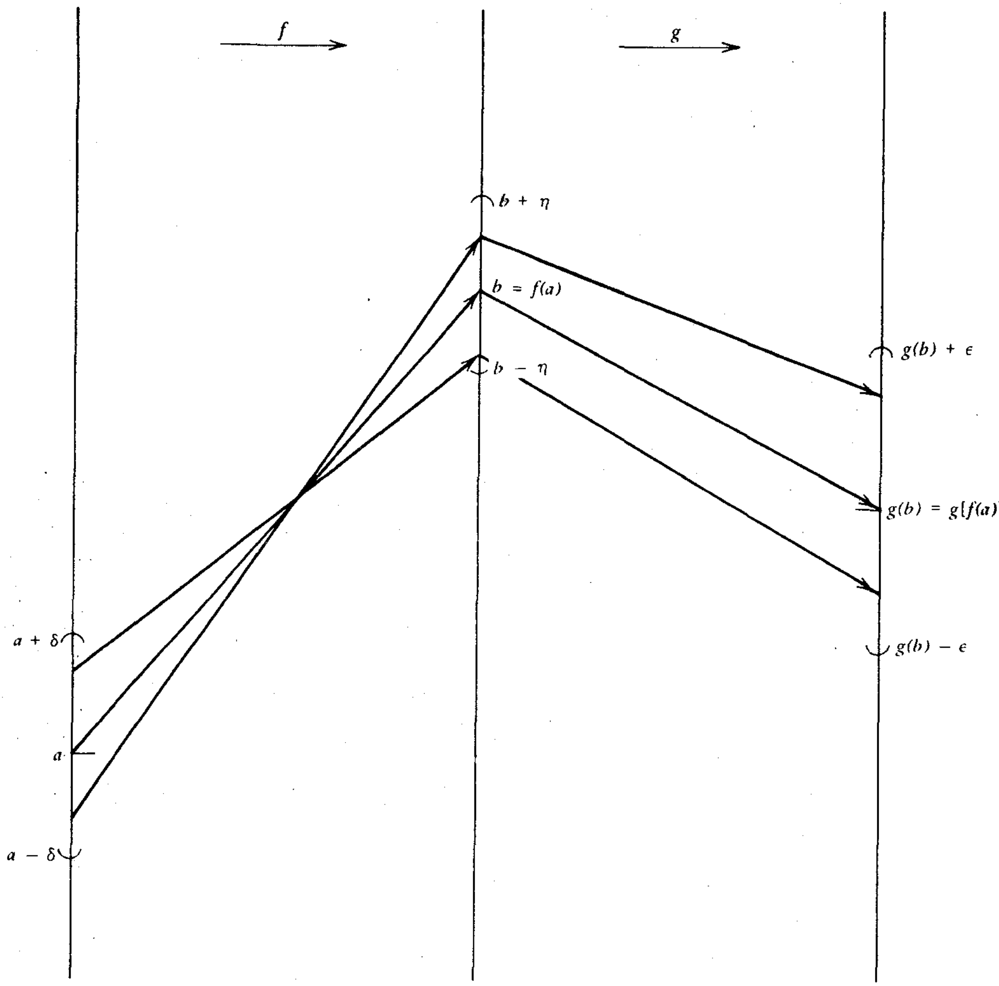
$$|f(x) - f(a)| < \eta \qquad (|x-a| < \delta),$$

یا

$$|f(x) - b| < \eta \qquad (|x-a| < \delta). \qquad (۳)$$

درنتیجه اگر $|x-a| < \delta$، آنگاه فاصلهٔ $f(x)$ تا b کمتر از η است وبنابراین می‌توانیم $f(x)$ را به‌جای y در (۲) جانشین کنیم. پس داریم

$$|g[f(x)] - g(b)| < \varepsilon \qquad (|x-a| < \delta),$$



شکل ۱۹

که (۱) را نتیجه می‌دهد، و برهان‌کامل است. (بعداً اثبات زیباتری برای این قضیه ارائه می‌دهیم) شکل ۱۹ را ببینید.

تمرینهای ۱.۵

۱. در شکلهای ۱۳ تا ۱۷ کدام یك از توابع در a پیوسته هستند؟

۲. اگر f در a پیوسته باشد، و اگر $c \in R$، ثابت کنید که cf در a پیوسته است.

۳. اگر f در a پیوسته باشد و $f(a)>0$، ثابت کنید که عدد مثبت h وجود دارد به‌طوری که

$$f(x)>0 \qquad (a-h<x<a+h).$$

(راهنمایی: ε را برابر با $f(a)$ بگیرید.)

۴. اگر f در $a\in R^1$ پیوسته باشد، ثابت کنید که $|f|$ نیز در a پیوسته است.

۵. اگر f در a پیوسته باشد و $f(a)\neq 0$، ثابت کنید که عدد مثبت h هست به‌طوری که

$$|f(x)|>0 \qquad (a-h<x<a+h).$$

۶. اگر توابع f و g هر دو در a پیوسته باشند، آنگاه $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$ نیز در a پیوسته هستند.

۷. اگر

$$f(x)=x \qquad (-\infty<x<\infty),$$

ثابت کنید که f در هر نقطهٔ R^1 پیوسته است.

۸. اگر $n\in I$ و

$$f(x)=x^n \qquad (-\infty<x<\infty),$$

ثابت کنید که f در هر نقطهٔ R^1 پیوسته است.

۹. ثابت کنید که هر تابع چندجمله‌ای در تمام نقاط R^1 پیوسته است.

۱۰. (الف) اگر

$$g(x)=\sqrt{x} \qquad (0<x<\infty),$$

ثابت کنید که g در هر نقطهٔ $(0, \infty)$ پیوسته است.

(ب) اگر

$$h(x)=\sqrt{1-x^2} \qquad (-1<x<1),$$

آنگاه ثابت کنید که h در هر نقطهٔ $(-1, 1)$ پیوسته است. [۳.۱.۵ را به‌کار برید. ملاحظه کنید که $h=g\circ f$ که در آن g همان تابعی است که در (الف) آمده است و

$$f(x)=1-x^2 \qquad (-1<x<1).]$$

۲.۵ بیانی دیگر

«f در a پیوسته است» را به‌معنای $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ تعریف کردیم. یعنی، f در a پیوسته است اگر به‌ازای هر عدد مثبت ε عدد مثبت δ باشد به‌طوری که اگر $0<|x-a|<\delta$، آنگاه $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. ولی (همان‌طوری که در آخرین برهان از شما خواستیم توجه کنید)، آشکار است که نابرابری $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ برای $x=a$ برقرار است. از این‌رو

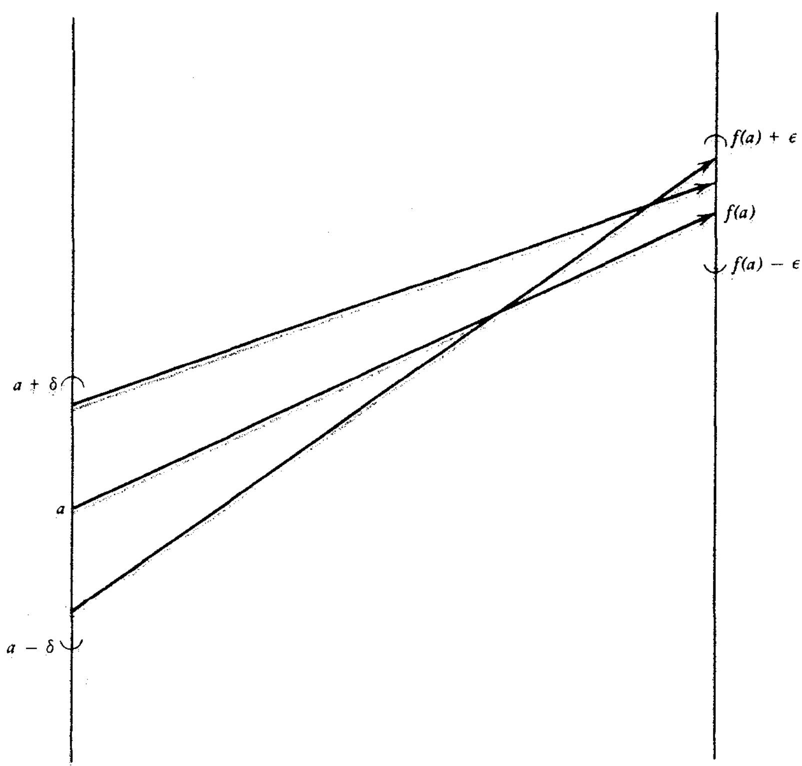
به‌جای $0<|x-a|<\delta$ کافی است فقط نابرابری $|x-a|<\delta$ را بنویسیم. بنابراین بیانی دیگر از تعریف ۱.۱.۵ ارائه می‌کنیم.

۱.۲.۵. قضیه. تابع حقیقی f در $a\in R^1$ پیوسته است اگر وتنها اگر برای‌هرعدد مثبت ε، عدد مثبت δ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \qquad (|x-a|<\delta).$$

در نتیجه، بنابر ۱.۲.۵، f در a پیوسته است اگر برای هر $\varepsilon>0$، عدد مثبت δ وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر فاصلهٔ x از a کمتر از δ باشد، آنگاه فاصلهٔ $f(x)$ از $f(a)$ کمتراز ε باشد. [گاهی به‌اجمال می‌گویند «اگر x به a نزدیك باشد، آنگاه $f(x)$ به $f(a)$ نزدیك است».] قضیهٔ ۱.۲.۵ نشان می‌دهد که تعریف پیوستگی روی متریك R^1 پایه‌گذاری شده است.

شکل ۲۰ را درنظر بگیرید. برای آنکه f در a پیوسته باشد، به‌ازای هر پرانتز به‌فاصلهٔ ε از $f(a)$ باید پرانتز به‌فاصلهٔ δ از a وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که هر پیکان‌که



شکل ۲۰

از داخل پرانتز δ شروع می‌شود به داخل پرانتز ε ختم شود.

تعریف زیر را که بیان دیگری ازتعریف پیوستگی است، معرفی می کنیم.

۲.۲.۵ تعریف. اگر $a \in R^1$ و $r>0$، آنگـاه $B[a;r]$ را مجموعهٔ تمام $x \in R^1$ تعریف می کنیم که فاصله‌شان تا a از r کمتر باشد. یعنی،

$$B[a;r]=\{x \in R^1 : |x-a|<r\}.$$

$B[a;r]$ را گوی باز به‌شعاع r درحول a (یا به‌مرکز a) خوانیم.

آشکار است که $B[a;r]$ یك طـریقهٔ غیرمعمول بـرای نمایش بازهٔ باز کـراندار $(a-r, a+r)$ است. اما در بعضی از فضاهای متریك بازه‌ای وجود ندارد .ولی نظیر $B[a;r]$ در هرفضای متریك وجود دارد، وبه‌این‌دلیل است که بازهٔ موردبحث را برحسب فاصله تعریف می کنیم.

بنابراین، قضیهٔ ۱.۲.۵ به‌این صورت در می‌آید: «f در a پیوسته است اگروتنها اگـر برای هـر $\varepsilon>0$ عدد مثبت δ بـاشد به‌طـوری کـه اگـر $x \in B[a;\delta]$ آنگـاه $f(x) \in B[f(a);\varepsilon]$». یعنی، f تمام‌گوی باز $B[a;\delta]$ را در گوی باز $B[f(a);\varepsilon]$ می‌نگارد.

درنتیجه، f در a پیوسته است اگـر و تنها اگر، برای هـرگوی باز B در حول $f(a)$، گوی بازی درحول a باشدکه f تمام‌آن‌را درداخل B بنگارد. بسیار مفیدخواهد بودکه این تعریف برحسب نگاره‌های وارون بیان شود.

۳.۲.۵ قضیه. تابع‌حقیقی f در $a \in R^1$ پیوسته است اگر و تنها اگرنگارهٔ وارون* تحت f هرگوی باز $B[f(a);\varepsilon]$ درحول $f(a)$، شامل یك‌گوی باز $B[a;\delta]$ درحول a باشد. (یعنی، برای هر $\varepsilon>0$ عدد مثبت δ باشد به‌طوری‌که

$$f^{-1}(B[f(a);\varepsilon]) \supseteq B[a;\delta].)$$

بسیار مهم است که خواننده بند ۳.۲.۵ را کاملا بفهمد وبعد به‌مطالعه ادامه دهد.

آخرین بیان دیگر، مفهوم پیوستگی برحسب دنباله‌ها خـواهد بود. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به a همگراست اگر و تنها اگر برای هـر عدد $\varepsilon>0$، عدد صحیح مثبت N باشد به‌گونه‌ای که

$$x_n \in B[a;\varepsilon] \qquad (n \geqslant N).$$

یعنی، به‌ازای هرگوی باز درحول a مانند B، همهٔ x_nها بجز تعدادی متناهی‌از آنها در B قرار داشته باشند.

۴.۲.۵ قضیه. تابع حقیقی f در $a \in R^1$ پیوسته است اگر و تنها اگر، برای هر دنبالهٔ اعداد حقیقی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که به a همگراست، دنبالهٔ $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ به $f(a)$ همگرا

---

* ۳.۳.۱ را ببینید.

باشد. یعنی، f در a پیوسته است اگر و تنها اگر

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a). \qquad (*)$$

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم که f در a پیوسته است و ثابت می‌کنیم که (*) برقرار است. فرض کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که به a همگراست. [درنتیجه برای nهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ $f(x_n)$ تعریف شده است.] باید نشان دهیم که $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ — یعنی، برای عدد مثبت‌دلخواه ε باید عدد $N \in I$ را به گونه‌ای بیابیم که

$$f(x_n) \in B[f(a); \varepsilon] \qquad (n \geqslant N). \qquad (۱)$$

ولی چون f در a پیوسته است، عدد مثبت δ هست که

$$f(x) \in B[f(a); \varepsilon] \qquad (x \in B[a; \delta]). \qquad (۲)$$

به‌علاوه، چون $\lim_{n\to\infty} x_n = a$، عدد صحیح مثبت N وجود دارد به‌طوری که

$$x_n \in B[a; \delta] \qquad (n \geqslant N). \qquad (۳)$$

برای این N، (۱) از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود.

برعکس، فرض کنیم (*) برقرار باشد. باید ثابت کنیم کــه f در a پیوسته است. فرض کنیم چنین نباشد. پس، بنابر ۳.۲.۵ عــدد مثبت ε هست به‌طــوری که نگارهٔ وارون $B = B[f(a); \varepsilon]$ تحت f شامل هیچ گوی باز در حــول a نباشد. به‌ویژه به‌ازای هیچ nای، $f^{-1}(B)$ شامل $B[a; 1/n]$ نیست. بنابــراین، بــرای هــر $n \in I$، عنصــری از $B[a; 1/n]$، که‌آن را x_n می‌نامیم هست که $f(x_n) \notin B$. یعنی، $|x_n - a| < 1/n$ ولی $|f(x_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon$. این مطلب به طور آشکار با (*) متناقض است، بنابراین باید f در a پیوسته باشد.

۵.۲.۵ قضیهٔ ۳.۱.۵ را با برهانی ساده به کمك قضیهٔ ۴.۲.۵، ثابت می‌کنیم.

فرض‌می‌کنیم مفروضات ۳.۱.۵ برقرار باشند. بنابر۴.۲.۵، کافی‌است ثابت کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} g[f(x_n)] = g[f(a)] \qquad (۱)$$

که در آن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ هر دنبالهٔ اعداد حقیقی است به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \qquad (۲)$$

چون f در a پیوسته است از (۲) و ۴.۲.۵ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a). \qquad (۳)$$

ولی چون g در $f(a)$ پیوسته است از(۳) و ۴.۲.۵ رابطهٔ (۱) نتیجه و برهان کامل‌می‌شود.

تمرینهای ۲.۵

۱. ۴.۲.۵ را به‌کار ببرید و ۲.۱.۵ را ثابت کنید.

۲. با به‌کار بردن قضیهٔ ۳.۲.۵، قضیهٔ ۳.۱.۵ را ثابت کنید.

۳. اگر f در $a \in R^1$ پیوسته باشد با استفاده از ۴.۲.۵ ثابت کنید که $|f|$ نیز در a پیوسته است.

۳.۵ توابع پیوسته در فضای متریك

تمام احکام پیوستگی تابع حقیقی در یك نقطهٔ R^1 روی متریك R^1 پایه‌گذاری شدند. درنتیجه توسعه دادن مفهوم پیوستگی در مورد توابع یك فضای متریك به توابع فضای متریك دیگر آسان است. ابتدا به‌تعریف «گوی باز» در فضای متریك می‌پردازیم.

۱.۳.۵. تعریف. فرض کنیم $\langle M, \rho\rangle$ یك فضای متریك باشد. اگر $a \in M$ و $r > 0$، آنگاه $B[a; r]$ را مجموعهٔ تمام نقاط M که فاصله‌شان از a کمتر از r است، تعریف می کنیم، یعنی

$$B[a; r] = \{x \in M : \rho(x, a) < r\}.$$

$B[a; r]$ را گوی باز به‌شعاع r حول a خوانیم.

مثلا، گوی باز به شعاع ۱ حول مبدأ درفضای اقلیدسی ۳ بعدی مجموعهٔ همهٔ نقاط $\langle x, y, z\rangle$ است به طوری که $x^2+y^2+z^2<1$. این مثال نشان می‌دهد که چرا اصطلاح «گوی» را به‌کار می بریم.

اگر M بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ با متریك قدرمطلق باشد، آنگاه $B[1/4; 1/2]$ بازهٔ $[0, 3/4)$ است. (نقاطی که در سمت چپ ۰ واقع‌اند در M نیستند.)

اگر $M = R_d$ (یعنی خط حقیقی با متریك گسسته)، و اگر a یك نقطهٔ دلخواه R_d باشد، آنگاه $B[a; 1] = \{a\}$. زیرا تنها نقطهٔ R_d که فاصله‌اش‌از a کمتر از ۱ است خود a است. از طرف دیگر، $B[a; 2] = R_d$.

اکنون پیوستگی را تعریف می‌کنیم. فرض می کنیم $\langle M_1, \rho_1\rangle$ و $\langle M_2, \rho_2\rangle$ دوفضای متریك باشند. فرض می کنیم $a \in M_1$، و فرض می‌کنیم f تابعی باشد که حوزهٔ مقادیرش زیرمجموعه‌ای از M_2 وحوزهٔ تعریفش‌شامل گوی باز $B[a; h]$ باشد ($h > 0$).

۲.۳.۵. تعریف. تابع f در $a \in M_1$ پیوسته‌است اگر $\lim\limits_{n \to a} f(x) = f(a)$ (مفهوم حد در ۱.۳.۴ تعریف شده است).

برهان قضیهٔ زیر صرفاً ترجمهٔ برهانهای ۱.۲.۵، ۳.۲.۵، و ۴.۲.۵ به‌زبان نمادی فضای متریك است. فرض می‌کنیم f همان تابعی است که در پاراگراف قبل از ۲.۳.۵ آمده است.

۳.۳.۵. قضیه. تابع f در $a \in M_1$ پیوسته است اگر و تنها اگر یکی از (ودر نتیجه تمام) شرایط زیر برقرار باشند.

(الف) برای هرعدد مثبت ε، عدد مثبت δ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\rho_2[f(x), f(a)] < \varepsilon \qquad (\rho_1(x, a) < \delta).$$

(ب) نگارهٔ وارون‌هر گوی‌باز $B[f(a) ; \varepsilon]$ تحت f شامل یك گوی باز $B[a ; \delta]$ باشد.

(ج) هرگاه‌دنبالهٔ‌نقاط M_1، مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به a باشد، آنگاه $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$، دنبالهٔ نقاط M_2، به $f(a)$ همگرا باشد.

اگر a نقطهٔ انباشتگی حوزهٔ تعریف f نباشد (پاراگراف قبل از ۱.۳.۴ را ببینید)، آنگاه $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ تعریف نمی‌شود. ولی، ویژگیهای (الف)، (ب)، و (ج) در ۳.۳.۵ برای‌چنین‌نقطهٔ a حتماً دارای معنی بوده وبایکدیگر هم‌ارز هستند. هریك از این‌ویژگیها را می‌توانیم تعریف پیوستگی f در a بگیریم. (نتیجه خواهدشد که f در a پیوسته‌است. تحقیق کنید.)

مشابه ۳.۱.۵ به‌قرار زیر است.

۴.۳.۵. قضیه. فرض می‌کنیم $\langle M_1, \rho_1 \rangle$، $\langle M_2, \rho_2 \rangle$، $\langle M_3, \rho_3 \rangle$ فضاهای متریك باشند و فرض می‌کنیم $f : M_1 \to M_2$، $g : M_2 \to M_3$.* اگر f در $a \in M_1$ پیوسته و g در $f(a) \in M_2$ پیوسته باشد، آنگاه $g \circ f$ در a پیوسته است.

برهان: بنا بر (ج) از ۳.۳.۵ کافی است ثابت کنیم که اگر دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در M_1 به‌گونه‌ای باشد که اگر

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

آنگاه

$$\lim_{n \to \infty} g[f(x_n)] = g[f(a)]$$

سپس، برهان عیناً مانند برهان ۵.۲.۵ ادامه می‌یابد.

برای توابع حقیقی در فضاهای متریك تعمیمی از ۲.۱.۵ وجود دارد. قضیهٔ زیر به‌سادگی‌از ۲.۳.۴ نتیجه‌می‌شود (به‌همان روش که ۲.۱.۵ از ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴ به‌دست آمد).

۵.۳.۵. قضیه. اگر M یك فضای متریك باشد، و اگر f و g توابعی حقیقی باشند که در $a \in M$ پیوسته هستند، آنگاه $f+g$، $f-g$، و fg نیز در a پیوسته‌اند. به‌علاوه، اگر $g(a) \neq 0$، آنگاه f/g در a پیوسته است.

---

* برای ساده‌کردن صورت قضیه فرض‌کرده‌ایم که حوزه‌های تعریف f و g به ترتیب تمام M_1 و تمام M_2 هستند.

تأکید می‌کنیم که تاکنون فقط پیوستگی در یك نقطه را تعریف کرده‌ایم. پیوستگی تابع f درنقطهٔ a یك ویژگی‌موضعی است ـ به‌این‌معنی که پیوستگی f در a فقط «به‌آنچه که در نزدیکی a می‌گذرد» بستگی دارد.

اکنون تابع پیوسته در تمام فضای متریك را تعریف می‌کنیم.

۶.۳.۵. تعریف. فرض می‌کنیم M_1 و M_2 فضاهای متریك باشند و فرض می‌کنیم $f: M_1 \to M_2$. گوییم f تابعی پیوسته از M_1 به‌توی M_2 است (یا، خلاصه‌تر، f در M_1 پیوسته است) اگر f در هر نقطهٔ M_1 پیوسته باشد.

۷.۳.۵. قضیه. اگر توابع حقیقی f و g در فضای متریك M پیوسته باشند، آنگاه $f+g$، $f-g$، و fg نیز در M پیوسته هستند. به‌علاوه، اگر در M، $g(x)\neq 0$، آنگاه f/g هم در M پیوسته است.

برهان: برهان مستقیماً از ۶.۳.۵ و ۵.۳.۵ نتیجه می‌شود.

بنابراین، هر تابع چندجمله‌ای f [یعنی، $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$] در R^1 پیوسته است. زیرا توابع ثابت و تابع $g(x)=x$ در R^1 پیوسته هستند. سپس تابع f را می‌توان به‌صورت مجموعی از حاصلضربهای این قبیل توابع نوشت ودرنتیجه بنابر ۷.۳.۵ پیوسته است.

تابع h را که‌با $h(x)=(1+x^3)/(1+x^2)$ تعریف شده‌است می‌توان به‌صورت f/g نوشت که درآن f و g چندجمله‌ای هستند. چون $g(x)$ هرگز صفر نمی‌شود، نتیجه می‌شود که h در R^1 پیوسته است.

اکنون به‌مثال عجیبی می‌پردازیم. فرض کنیم f تابعی ازفضای متریك R_d به‌توی یك فضای متریك M باشد. قبلا ملاحظه کرده‌ایم که برای هر $a \in R_d$، گوی باز $B[a;1]$ فقط شامل نقطهٔ a است. از این‌رو، برای هرعدد مثبت ε، نگارهٔ وارون $B[f(a);\varepsilon]$ تحت f مسلماً شامل $B[a;1]$ است. بنابر (ب) از ۳.۳.۵، این مطلب نشان می‌دهد که f در a پیوسته است. ازآنجا که a نقطهٔ دلخواهی از R_d بود داریم:

۸.۳.۵. تعجب‌آور! هرتابع از R_d (به‌توی یك‌فضای متریك) در R_d پیوسته است.

تمرینهای ۳.۵

۱. مثالی از یك تابع بیاورید‌که در R^1 پیوسته بوده وحوزهٔ مقادیرش عبارت باشد از

(الف) $(0, \infty)$ (ب) $[0, \infty)$

(ج) $(0, 1)$ (د) $[0, 1]$

می‌توانیدفرض کنید‌که e^x، $\log x$، $\sin x$، وغیره درجایی که پیوسته به‌نظرمی‌رسند واقعاً پیوسته هستند.

۲. فرض کنید f تابعی از R^2 به‌روی R^1 باشد‌که با ضابطهٔ زیر تعریف شده است.

$$f(\langle x, y\rangle)=x \qquad (\langle x, y\rangle \in R^2).$$

نشان دهید که f در R^2 پیوسته است.

۳. اگر $f : R^2 \to R^2$ با ضابطهٔ

$$f(\langle x, y\rangle)=\langle y, x\rangle \qquad (\langle x, y\rangle \in R^2),$$

تعریف شده باشد، ثابت کنید که f در R^2 پیوسته است.

۴. اگر $f : R^1 \to R^1$، $g : R^1 \to R^1$، اگر f و g هردو در R^1 پیوسته باشند، و اگر

$$h(\langle x, y\rangle)=\langle f(x), g(y)\rangle \qquad (\langle x, y\rangle \in R^2),$$

ثابت کنید که h در R^2 پیوسته است.

۵. تابع $f : l^2 \to l^2$ را به این ترتیب تعریف کنید: اگر $s \in l^2$ دنبالهٔ $s_1, s_2, \ldots$ باشد، آنگاه فرض کنید که $f(s)$ دنبالهٔ $0, s_1, s_2, \ldots$ باشد. نشان دهید که f در l^2 پیوسته است.

۶. فرض کنید M يك فضای متریك باشد. فرض کنید $f : M \to R_d$ و f تابعی ۱ — ۱ باشد. نشان دهید که اگر f در $a \in M$ پیوسته باشد، آنگاه $\{a\}$ يك گوی باز در M است.

۷. درستی یا نادرستی مطلب زیر را تحقیق کنید: اگر f تابعی پیوسته و ۱-۱ از يك فضای متریك M_1 به‌توی فضای متریك M_2 باشد، و اگر B يك گوی باز در M_1 باشد، آنگاه $f(B)$ يك گوی باز در M_2 است.

۸. فرض کنید A يك مجموعهٔ ناتهی باشد. يك متریك ρ برای A بیابید به‌گونه‌ای که دو عدد حقیقی r_1 و r_2 وجود داشته باشند به‌طوری که در این متریك $0<r_1<r_2$ و برای هر $a \in A$،

$$B[a ; r_1]=B[a ; r_2].$$

۹. فرض کنید M_1 و M_2 دو فضای متریك باشند و $f : M_1 \to M_2$. ثابت کنید که f پیوسته است اگر و تنها اگر f دنباله‌های همگرا در M_1 را به دنباله‌های همگرا در M_2 ببرد.

۱۰. برای هر عدد گویا در $(0, 1)$ بنویسید $r=p/q$ که در آن p و q اعدادی صحیح هستند که عامل مشترك ندارند و $q>0$. سپس f را چنین تعریف کنید: $f(r)=1/q$، و برای تمام اعداد گنگ x در $(0, 1)$، $f(x)=0$. درنتیجه $f : (0, 1) \to [0, 1]$.

(الف) ثابت کنید که f در هیچ عدد گویا پیوسته نیست.

(ب) ثابت کنید که f در هر عدد گنگ پیوسته است. (راهنمایی: نشان دهید که برای هر $\varepsilon>0$ تنها تعدادی متناهی عدد گویای p/q در $(0, 1)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $1/q \geqslant \varepsilon$.)

(ج) نشان دهید که می‌توانیم تابع f را به تابعی مانند g در R^1 توسیع دهیم به‌طوری که g در هر عدد گنگ پیوسته باشد و در هیچ عدد گویا پیوسته نباشد.

۴.۵ مجموعه‌های باز

به‌منظور بیان ویژگیهای توابع پیوسته در یك فضای متریك M نیاز داریم انواع مختلف زیرمجموعه‌های M را با نامهایی نظیر باز، بسته، کراندار، کراندارکلی، فشرده، و غیره مشخص کنیم. با تعریف مجموعهٔ باز شروع می‌کنیم.

۱.۴.۵ تعریف. فرض کنیم M یك‌فضای متریك باشد. گوییم که یك زیرمجموعهٔ M مانند G در M باز است (یا به اختصار، G باز است) اگر برای هر $x \in G$، عـدد مثبتی مانند r وجود داشته باشد به‌طوری‌که گوی باز $B[x ; r]$ به‌تمامی در G واقع شود.

به‌عنوان یك مثال شهودی مجموعهٔ A متشکل از تمام نقاط R^2 واقع در داخل یك بیضی را ملاحظه‌کنید. (شکلی ترسیم‌کنید.) اگر $P \in A$، آنگاه می‌توانیم دایره‌ای‌به‌مرکز P رسم‌کنیم‌که به‌تمامی در داخل بیضی قرار گیرد. اگر B مجموعهٔ تمام نقاط داخلی این دایره باشد، آنگاه B یك‌گوی باز (در R^2) است که به‌تمامی در A واقع‌است. ایـن نشان می‌دهد که A در R^2 باز است.

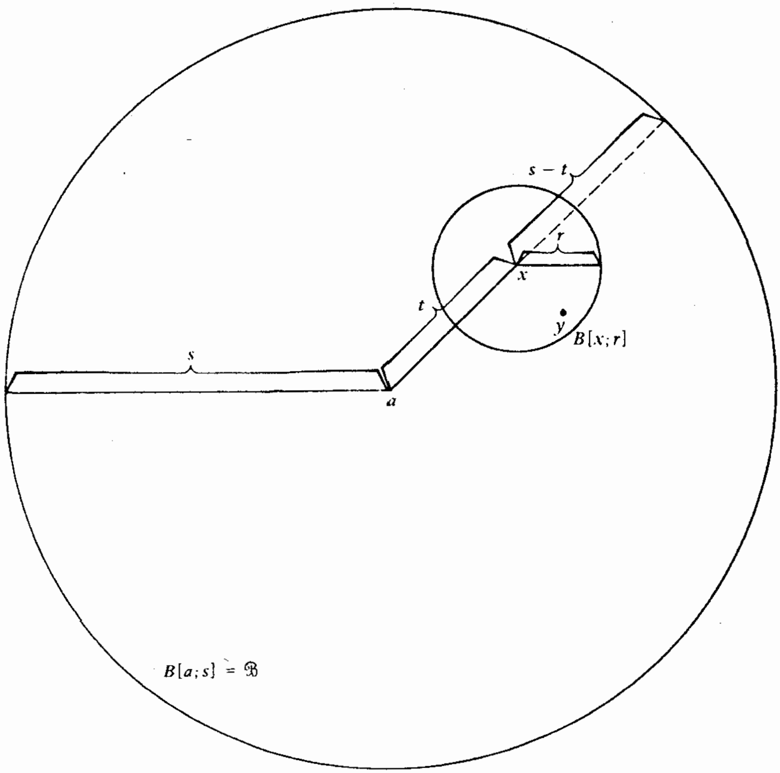
مثال دیگر: ثابت می‌کنیم که در هر فضای متریك دلخواه، $\langle M , \rho \rangle$، هر گوی باز $\mathcal{B}=B[a; s]$ خود یك‌مجموعهٔ باز است. (این‌مطلب به‌کار بردن واژهٔ «باز» در «گوی باز» را توجیه می‌کند.) اگر $x \in \mathcal{B}$، باید عدد مثبتی مانند r بیابیم به‌طوری‌که $B[x; r] \subseteq \mathcal{B}$، فرض‌می‌کنیم $t=\rho(x,a)$ و r را عدد مثبت کوچکتر از $s-t$ می‌گیریم. (چرا $s-t$ مثبت است؟) اگر $y \in B[x; r]$، آنگاه $\rho(a, y) \leqslant \rho(a, x)+\rho(x, y)$. ولی $\rho(a,x)=t$ وچون $y \in B[x; r]$، $\rho(x, y)<r$. بنابراین، $\rho(a, y)<t+r<t+s-t=s$. از این‌رو $y \in B[a;s]=\mathcal{B}$، که‌ثابت‌می‌کند $B[x;r] \subseteq \mathcal{B}$، وکار تمام‌است. شکل ۲۱ را ببینید.

به‌عنوان مثال سوم، R_d را درنظرمی‌گیریم. اگر $a \in R_d$، آنگاه $\{a\}=B[a ; 1]$ و از این‌رو $\{a\}$ یك‌گوی باز در R_d است. یعنی، هر مجموعه‌که فقط شامل‌یك عنصر است در R_d باز است.

از طرف دیگر، اگر $a \in R^1$، آنگاه $\{a\}$ در R^1 باز نیست. زیرا هر گوی باز در R^1 یك بازهٔ باز ناتهی است و، مسلماً، $\{a\}$ شامل‌چنین بازه‌ای نیست.

دو پاراگراف آخر نشان می‌دهد که باز بودن یا بـاز نبودن مجموعه‌ای مـانند A بستگی به‌این دارد که درچه فضای متریك مورد رسیدگی قرار گیرد. برای توضیح بیشتر این نکتهٔ مهم ملاحظه می‌کنیم کـه بازهٔ «نیم بـاز» $[0, 1/2)$ در R^1 بـاز نیست. ولی $[0, 1/2)$ یك زیرمجموعهٔ باز فضای متریك $[0, 1]$ است. در واقع، $[0, 1/2)$ دقیقاً همان‌گوی باز $B[0; 1/2]$ در فضای متریك $[0, 1]$ است.

۲.۴.۵ قضیه. در هرفضای متریك $\langle M , \rho \rangle$، مجموعهٔ M و مجموعهٔ تهی $\varnothing$ هر دو باز هستند.



شکل ۲۱

برهان: اگر $x \in M$، آنگاه (بنابر تعریف $B[x;r]$) هر گوی باز $B[x;r]$ در M واقع است. از این‌رو M باز است. مجموعهٔ تهی نیز باز است زیراکه هیچ xای به $\varnothing$ تعلق ندارد و درنتیجه هر $x \in \varnothing$ در شرط ۱.۴.۵ صدق می‌کند.

هر تعداد از مجموعه‌های باز با هم یك مجموعهٔ باز تشکیل می‌دهند. یعنی، اجتماع تعدادی متناهی، تعدادی شمارا، یا حتی تعدادی ناشمارا مجموعهٔ باز، نیز یك‌مجموعهٔ باز است. صورت و اثبات قضیه در زیر می‌آید.

۳.۴.۵ قضیه. فرض کنیم $\mathscr{F}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های‌باز فضای متریك M باشد، آنگاه $\bigcup_{G \in \mathscr{F}} G$ نیز یك زیرمجموعهٔ باز M است.

برهان: فرض کنیم $H = \bigcup_{G \in \mathscr{F}} G$. اگر $x \in H$، باید نشان دهیم که یك گوی باز $B[x;r]$، واقع در H وجود دارد. ولی اگر $x \in H$، آنگاه یك عنصر $\mathscr{F}$ مانند G هست که $x \in G$، وچون G باز است، گوی‌بازی‌مانند $B[x;r]$ وجود دارد به‌طوری‌که $B[x;r] \subseteq G$. اما $G \subseteq H$ و بنابراین $B[x;r] \subseteq H$، و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یك نتیجهٔ جالب ۳.۴.۵ در زیر می‌آید.

۴.۴.۵. قضیه. هر زیرمجموعهٔ R_d باز است.

برهان: درمثال سوم که بعد از ۱.۴.۵ آوردیم نشان‌دادیم که تمام زیرمجموعه‌های یك عنصری R_d باز هستند. اما آشکار است که هر زیرمجموعهٔ R_d مانند G اجتماع چنین مجموعه‌هایی است. درنتیجه، بنا بر ۳.۴.۵، G باز است.

ولی، نمی‌توانیم بگوییم که اشتراك تعدادی نامتناهی مجموعهٔ باز در یك فضای متریك همیشه باز است. مثلا، در R^1، اگر I_n بازهٔ باز $(-1/n, 1/n)$ باشد، آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ فقط شامل 0 است ودرنتیجه باز نیست. بااین‌حال به قضیهٔ زیر توجه کنید.

۵.۴.۵. قضیه. اگر G_1 و G_2 زیرمجموعه‌های باز فضای متریك M باشند، آنگاه $G_1 \bigcap G_2$ نیز باز است.

برهان: اگر $x \in G_1 \bigcap G_2$، آنگاه باید گوی بازی مانند $B[x ; r]$ بیابیم که در $G_1 \bigcap G_2$ واقع باشد. چون $x \in G_1$ و G_1 باز است، گوی بازی مانند $B[x ; r_1]$ هست که $B[x; r_1] \subseteq G_1$. به‌همین‌ترتیب، گوی بازی مانند $B[x ; r_2]$ وجود دارد به‌طوری‌که $B[x ; r_2] \subseteq G_2$. درنتیجه اگر $r = \min(r_1, r_2)$، آنگاه $B[x; r]$ هم در G_1 قراردارد و هم در G_2 وبنا براین $B[x ; r] \subseteq G_1 \bigcap G_2$. این برهان را کامل می‌کند.

بااستقرا از ۵.۴.۵ نتیجه می‌شودکه اشتراك هرتعداد متناهی‌مجموعهٔ باز، بازاست.

۶.۴.۵. مفید است بدانیم که مجموعه‌های‌باز در R^1 دقیقاً به‌چه‌صورتی هستند. اگر $I_1, I_2, \ldots$ بازه‌های باز باشند، آنگاه بنا بر ۳.۴.۵، $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ در R^1 باز است. اکنون عکس این مطلب را ثابت می‌کنیم.

قضیه. هر زیرمجموعهٔ باز R^1 مانند G را می‌توان به‌صورت $G = \bigcup I_n$ نوشت، که در آن I_1، I_2، ... بازه‌های باز دوبه‌دو مجزا (یعنی، اگر $m \neq n$، $I_m \bigcap I_n = \varnothing$)، وتعداد آنها متناهی یا شماراست.

برهان: اگر $x \in G$، آنگاه بازهٔ باز (گوی باز) شامل x مانند B هست به‌طوری‌که $B \subseteq G$. فرض کنیم I_x بزرگترین بازهٔ باز شامل x باشد به‌طوری‌که $I_x \subseteq G$.* [ممکن است که I_x بازهٔ بی‌کرانی باشد، مثلا $(0, \infty)$.] آنگاه $G = \bigcup_{x \in G} I_x$. اکنون، اگر $x, y \in G$ آنگاه یا $I_x = I_y$ یا $I_x \bigcap I_y = \varnothing$، زیرا، اگر $I_x \bigcap I_y \neq \varnothing, I_x \neq I_y$، آنگاه $I_x \bigcup I_y$ یك بازهٔ باز واقع در G است که از I_x بزرگتر است. این با تعریف I_x تناقض

---

* تمرین ۱ را ببینید.

دارد. سرانجام، هر I_x شامل یك عدد گویاست. چون بازه‌های مجزا عدد گویای مشترك ندارند و چون اعداد گویا فقط به تعدادی شمارا وجود دارند، تعداد بازه‌های دوبه‌دو مجزای I_x نمی‌تواند ناشمارا باشد. از این حکم قضیه نتیجه می‌شود.

اکنون، می‌توانیم مفهوم مجموعه‌های باز را به‌منظور به‌دست‌آوردن یك شرط لازم وکافی برای اینکه تابعی در یك‌فضای متریك پیوسته باشد به‌کار بریم. قضیهٔ زیر بنیادی‌است.

۷.۴.۵ قضیه. فرض می‌کنیم $\langle M_1, \rho_1\rangle$ و $\langle M_2, \rho_2\rangle$ دو فضای متریك باشند و $f: M_1 \to M_2$. آنگاه f در M_1 پیوسته است اگر و تنها اگر به‌ازای هر مجموعهٔ باز G در M_2، $f^{-1}(G)$ در M_1 باز باشد. (به‌طور خلاصه، f پیوسته است اگر و تنها اگر نگارهٔ وارون هرمجموعهٔ باز، باز باشد.)

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم که f در M_1 پیوسته است. می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر G در M_2 باز باشد، آنگاه $f^{-1}(G)$ در M_1 باز است. بنابراین اگر $x \in f^{-1}(G)$، بایدیك گوی باز $B[x; r]$ بیابیم که‌زیرمجموعهٔ $f^{-1}(G)$ باشد. حال‌چون $x\in f^{-1}(G)$، $y = f(x) \in G$. بنابراین، چون G در M_2 باز است گوی باز $B[y; s]$ هست که $B[y; s] \subseteq G$. بنابر (ب) از ۳.۳.۵، گوی باز $B[x; r]$ وجود دارد به‌طوری که $B[x; r] \subseteq f^{-1}(B[y; s])$. بنابراین، $f^{-1}(G) \supseteq f^{-1}(B[y; s]) \supseteq B[x; r]$ و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

اکنون، اگر G در M_2 باز باشد فرض می‌کنیم که، $f^{-1}(G)$ در M_1 باز باشد. برای اثبات اینکه f در M_1 پیوسته است‌کافی است نشان دهیم که f در یك نقطهٔ دلخواه M_1 مانند a پیوسته است. فرض‌کنیم $\mathcal{B} = B[f(a); \varepsilon]$ گوی دلخواهی درحول $f(a)$ است. آنگاه $\mathcal{B}$ در M_2 باز است و لذا، بنابه فرض، $f^{-1}(\mathcal{B})$ در M_1 باز است. چون $a\in f^{-1}(\mathcal{B})$ و $f^{-1}(\mathcal{B})$ باز است، گوی باز $B[a; \delta]$ وجود دارد به طوری که $B[a; \delta] \subseteq f^{-1}(\mathcal{B})$، پس بنابر (ب) از ۳.۳.۵، f در a پیوسته‌است. این برهان‌را کامل می‌کند.

تمرینهای ۴.۵

۱. این تمرین به‌برهان ۶.۴.۵ مربوط می‌شود. اگر G زیرمجموعهٔ بازی در R^1 باشد و اگر $x \in G$، آنگاه نشان دهید که بزرگترین بازهٔ بازی مانند I_x، شامل x، وجود دارد به‌طوری که $I_x \subseteq G$.

۲. از شهود خود کمك گرفته و تعیین کنید کدام یك از این زیرمجموعه‌های R^2 باز هستند.

(الف) $\{\langle x, y\rangle : x + y = 1\}$.

(ب) $\{\langle x, y\rangle : x + y > 1\}$.

(ج) $\{\langle x, y\rangle :$ y, x گویا هستند $\}$

(د) $R^2 - \{\langle 0, 0\rangle\}$ (یعنی، R^2 بدون مبدأ).

۳. فرض کنید x_1، x_2 دو نقطهٔ متمایز در فضای متریک M باشند. دو مجموعهٔ باز مجزا مانند G_1 و G_2 بیابید به‌طوری که $x_1 \in G_1$ و $x_2 \in G_2$.

۴. فرض کنید E مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت باشد. برای هر یك از توابع زیر $f^{-1}(E)$ را بیابید.

$$f(x)=\sin x \qquad (-\infty<x<\infty) \quad \text{(الف)}$$

$$f(x)=x^2 \qquad (-\infty<x<\infty) \quad \text{(ب)}$$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<0), \\ 1 & (x\geqslant 0). \end{cases} \quad \text{(ج)}$$

۵. اگر f تابع حقیقی دلخواهی در R^1 باشد، ثابت کنید که $f^{-1}(E)$ در R^1 باز است (E همان مجموعهٔ تمرین قبل است).

۶. فرض کنید f و g دو تابع حقیقی پیوسته در فضای متریك M باشند. فرض کنید A مجموعهٔ تمام عنصرهای M مانند x باشد به‌گونه‌ای که $f(x)<g(x)$. ثابت کنید که A باز است.

۷. فرض کنید A مجموعهٔ تمام دنباله‌های $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ در l^2 باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2<1$. ثابت کنید که A یك زیرمجموعهٔ باز l^2 است.

۸. فرض کنید G یك زیرمجموعهٔ باز R^1 باشد. ثابت کنید که χ_G (تابع مشخصهٔ G) در هر نقطهٔ G پیوسته است.

۹. دو زیرمجموعهٔ R^2 مانند A و B مثال بیاورید به‌طوری که هر سه شرط زیر برقرار باشند.

(الف) نه A باز باشد و نه B،

(ب) $A\cap B=\varnothing$،

(ج) $A\cup B$ باز باشد.

۱۰. تمرین قبل را با R به‌جای R^2 انجام دهید.

۱۱. اگر A و B زیرمجموعه‌های باز R^1 باشند، ثابت کنید که $A\times B$ در R^2 باز است.

۵.۵ مجموعه‌های بسته

۱.۵.۵ تعریف. فرض کنیم E زیرمجموعه‌ای از فضای متریك M باشد. نقطهٔ $x\in M$ را یك نقطهٔ حدی* E نامیم اگر دنباله‌ای از نقاط E مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که به x همگرا باشد وجود داشته باشد. $\bar{E}$، مجموعهٔ تمام نقاط حدی E را بستار E خوانیم.

فوراً نتیجه می‌شود که هر نقطهٔ E مانند x یك نقطهٔ حدی E است. زیرا دنبالهٔ

* بعضی از مؤلفین نقطهٔ حدی را به معنی آن چیزی که ما نقطهٔ انباشتگی می‌خوانیم به کار می‌برند.

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ از نقاط E به x همگراست. بنابراین، اگر $x\in E$ آنگاه $x\in\bar{E}$ به‌عبارت دیگر:

۲.۵.۵ نتیجه. اگر E زیرمجموعهٔ دلخواهی از فضای متریک M باشد، آنگاه $E\subseteq\bar{E}$.

به‌هرحال، بسیار اتفاق می‌افتد که $E\neq\bar{E}$ (یعنی، E تمام نقاط حدی‌اش را در بر ندارد). مثلا، اگر M را R^1 و E، زیرمجموعهٔ آن را بازهٔ باز $(0, 1)$ بگیریم، آنگاه 0 یک نقطهٔ حدی E است، زیرا دنبالهٔ $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ از نقاط E به 0 همگراست. ولی 0 به E تعلق ندارد هرچند که یک نقطهٔ حدی آن است.

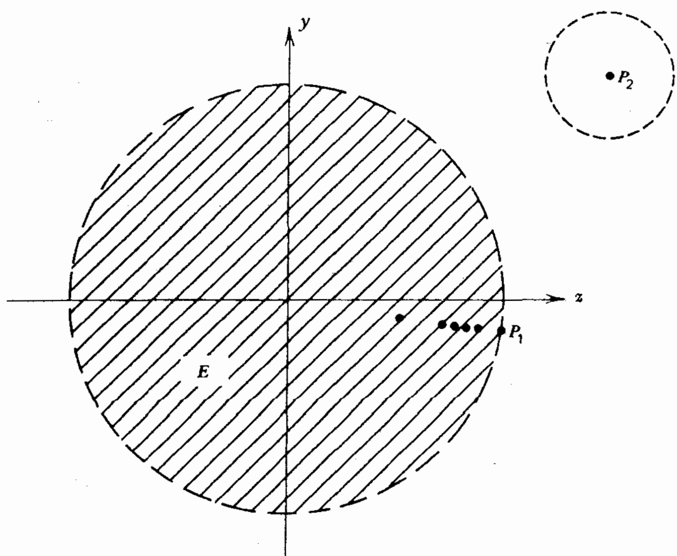
از طرف دیگر، بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ تمام نقاط حدی‌اش‌را در بر دارد (تحقیق کنید).

به‌عنوان مثال سوم، شکل ۲۲ را ملاحظه کنید. اگر E مجموعهٔ تمام نقاطی از R^2 مانند $\langle x, y\rangle$ باشد که $x^2+y^2<1$، آنگاه $\bar{E}$ مجموعهٔ تمام‌نقاط $\langle x, y\rangle$است به‌طوری که $x^2+y^2\leqslant 1$. زیرا هر نقطهٔ $P_1=\langle x_1, y_1\rangle$ به‌طوری که $x_1^2+y_1^2=1$ یک نقطهٔ‌حدی E است، اما آشکار است که هر نقطهٔ $P_2=\langle x_2, y_2\rangle$ به‌طوری‌که $x_2^2+y_2^2>1$ نقطهٔ حدی E نیست.

اکنون، زیر مجموعهٔ بستهٔ M را مجموعه‌ای که تمام نقاط حدی‌اش را در بر دارد، تعریف می کنیم.

۳.۵.۵ تعریف. فرض می کنیم E زیرمجموعه‌ای از فضای متریک M باشد. گوییم که E زیرمجموعهٔ بستهٔ M است اگر $E=\bar{E}$.

با توجه به ۲.۵.۵، برای آنکه نشان‌دهیم E، یک زیرمجموعهٔ M، بسته است کافی



شکل ۲۲. P_1 یک نقطهٔ حدی E است، ولی P_2 نقطهٔ حدی E نیست.

است ثابت کنیم که $\bar{E}\subseteq E$.

قبل از آنکه به ارائهٔ مثال بپردازیم بیان دیگری از مفهوم نقطهٔ حدی می‌آوریم.

۴.۵.۵. قضیه. فرض می‌کنیم E یك زیرمجموعهٔ فضای متریك M باشد. آنگاه $x\in M$ یك نقطهٔ حدی E است اگر و تنها اگر هر گوی باز به‌مرکز x مانند $B[x;r]$ شامل حداقل یك نقطه از E باشد.

برهان: فرض کنیم x یك نقطهٔ حدی E باشد. آنگاه دنباله‌ای از نقاط E مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد که به x همگراست. اگر $B[x;r]$ گوی باز دلخواهی به مرکز x باشد، آنگاه برای هر n که $\rho(x_n, x)<r$ داریم $x_n\in B[x;r]$. از این‌رو، $B[x;r]$ نقطه‌ای از E را در بر دارد.

برعکس، فرض می‌کنیم $x\in M$ و فرض می‌کنیم که هر گوی $B[x;r]$ نقطه‌ای از E را در بر داشته باشد. در این صورت به‌ازای هر $n\in I$، گوی باز $B[x;1/n]$ نقطه‌ای از E مانند x_n را در بر دارد. آشکار است که دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به x همگراست (زیرا $\rho(x, x_n)<1/n$)، و بنابراین x یك نقطهٔ حدی E است و برهان تمام است.

قضیهٔ ۴.۵.۵ اجمالا می‌گوید که $x\in M$ یك نقطهٔ حدی $E\subseteq M$ است اگر و تنها اگر در E نقاط به‌طور دلخواه نزدیك به x وجود داشته باشند.

فرض کنیم $E\subseteq R^2$، آنگاه x یك نقطهٔ حدی E است اگر و تنها اگر در داخل هر دایرهٔ به‌مرکز x نقطه‌ای از E وجود داشته باشد. بنابراین، به‌طور شهودی بدیهی است که اگر L خط مستقیمی در R^2 باشد آنگاه هیچ نقطه‌ای درخارج L نمی‌تواند نقطهٔ حدی L باشد. از این‌رو، L یك زیرمجموعهٔ بستهٔ R^2 است. به‌همین‌ترتیب، یك صفحه در R^3 یك زیرمجموعهٔ بستهٔ R^3 است.

برای هر فضای متریك مانند M، اگر $x\in M$، آنگاه $\{x\}$ یك زیرمجموعهٔ بستهٔ M است. زیرا تنها دنباله درمجموعهٔ $\{x\}$ عبارت است از $x, x, x, \ldots$، و بنابراین خود x تنها نقطهٔ حدی $\{x\}$ است. از این‌رو $\{x\}$ شامل تمام نقاط حدی‌اش است و بنابراین بسته است. در نتیجه اگر $a\in R_d$، آنگاه مجموعهٔ $\{a\}$ در R_d هم باز و هم بسته است.

این مطلب، این مثل مشهور را می‌گوید که «مجموعه‌ها مانند درها نیستند.» یك مجموعه ممکن است درعین‌حال هم باز و هم بسته باشد!

از جهت دیگر، یك مجموعه ممکن است نه باز باشد و نه بسته! مثلا، بازهٔ نیم‌باز $[0, 1)$ نه یك زیرمجموعهٔ بسته و نه یك زیرمجموعهٔ باز R^1 است.

بستار هر زیرمجموعهٔ فضای متریك M یك مجموعهٔ بسته است.

۵.۵.۵. قضیه. اگر E زیرمجموعهٔ دلخواهی از فضای متریك M باشد، آنگاه $\bar{E}$ بسته است، یعنی، $\bar{E}=\bar{\bar{E}}$.

برهان: چون بنابر ۲.۵.۵ داریم $\bar{E}\subseteq\bar{\bar{E}}$ تنها اثبات $\bar{E}\supseteq\bar{\bar{E}}$ را لازم داریم. فرض

کنیم x عنصر دلخواهی از $\bar{\bar{E}}$ باشد. برای آنکه نشان دهیم $x\in\bar{E}$،کافی است (بنابر ۴.۵.۵) نشان دهیم که هرگوی باز $B[x;r]$ شامل نقطه‌ای از E است. چون $x\in\bar{\bar{E}}$، (مجدداً بنابر ۴.۵.۵) گوی $B[x;r]$ شامل نقطه‌ای از $\bar{E}$ مانند y است. فرض کنیم $s=\rho(x,y)$ وعددمثبت دلخواه t به گونه‌ای انتخاب شده‌باشد که $t<r-s$. از آنجا که $y\in\bar{E}$، بنابر ۴.۵.۵، گوی $B[y;t]$ شامل نقطه‌ای از E مانند z است. ولی، $\rho(x,y)=s$، $\rho(y,z)<t<r-s$، بنابراین

$$\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z)<s+r-s=r.$$

از این‌رو، $z\in B[x;r]$. پس $B[x;r]$ شامل عنصری از E است، واین همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم. نظیر ۲.۴.۵، داریم

۶.۵.۵. قضیه. در هرفضای متریك $\langle M, \rho\rangle$، مجموعه‌های $\varnothing$, M هردو بسته‌هستند.

برهان: آشکار است که M تمام نقاط حدی‌اش را دربر دارد و $\varnothing$ هیچ نقطهٔ حدی ندارد (و ازاین‌رو شامل تمام نقاط حدی‌اش‌است).

درقضیه‌های ۳.۴.۵ و ۵.۴.۵ اگر جای اجتماع واشتراك را با هم عوض کنیم نتایج درستی دربارهٔ مجموعه‌های بسته به‌دست می‌آوریم. قضیهٔ زیر نظیر ۵.۴.۵ است.

۷.۵.۵. قضیه. اگر F_1 و F_2 زیرمجموعه‌های بستهٔ فضای متریك M باشند،آنگاه $F_1\bigcup F_2$ نیز بسته است.

برهان: فرض کنیم $x\in\overline{F_1\bigcup F_2}$. آنگاه دنباله‌ای‌ازنقاط $F_1\bigcup F_2$ مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود داردکه همگرا به x است. ولی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یا زیردنباله‌ای از نقاط F_1 یا زیردنباله‌ای از نقاط F_2 دارد. چون هر زیردنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به x است؛ این مطلب نشان می‌دهد که یا $x\in\bar{F}_1=F_1$ یا $x\in\bar{F}_2=F_2$. بنابراین $x\in F_1\bigcup F_2$. از این‌رو $F_1\bigcup F_2\supseteq\overline{F_1\bigcup F_2}$، و برهان کامل است.

اجتماع یك تعداد نامتناهی مجموعهٔ بسته لازم نیست که بسته باشد. مثلاً، $\bigcup_{n=2}^{\infty}[1/n, 1-1/n]=(0, 1)$ در R^1 بسته نیست. در واقع، هر مجموعه‌ای را می‌توان به‌صورت اجتماع مجموعه‌های بسته نوشت زیرا مجموعه‌های یك عنصری همواره بسته هستند.

از طرف دیگر، اشتراك هر تعداد مجموعهٔ بسته، بسته است. (با ۳.۴.۵ مقایسه کنید.)

۸.۵.۵. قضیه. اگر $\mathscr{F}$ خانوادهٔ دلخواهی از زیرمجموعه‌های بستهٔ فضای متریك M باشد، آنگاه $\bigcap_{F\in\mathscr{F}}F$ نیز بسته است.

برهان: فرض کنیم $x\in\overline{\bigcap_{F\in\mathscr{F}}F}$. آنگاه هرگوی $B[x;r]$ شامل نقطه‌ای از

مانند y است. چون y نقطه‌ای از هر $F \in \mathscr{F}$ است، گوی $B[x\,;\,r]$ شامل نقطه‌ای از F است. بنابراین $x \in \bar{F} = F$. درنتیجه x نقطه‌ای از هر $F \in \mathscr{F}$ است و بنابراین $x \in \bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$. این ثابت می‌کند که $\overline{\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F} \subseteq \bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$ و بنابراین $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$ بسته‌است.

اکنون به‌رابطهٔ بسیار مهمی‌که مابین مجموعه‌های باز و مجموعه‌های بسته وجود دارد ــ مجموعه باز است اگر و تنها اگر متممش بسته باشد ــ می‌رسیم.

۹.۵.۵. قضیه. فرض کنیم G یك زیرمجموعهٔ باز فضای متریك M باشد. دراین‌صورت $G' = M - G$ بسته است. برعکس، اگر F یك زیرمجموعهٔ بستهٔ M باشد، آنگاه $F' = M - F$ باز است.

برهان: نخست فرض می‌کنیم که G باز باشد. اگر $x \in G$، آنگاه گویی مانند $B = B[x\,;\,r]$ وجود دارد که تماماً در G قرار می‌گیرد. از این‌رو B هیچ نقطه‌ای از G' را دربر ندارد. بنابر ۴.۵.۵ (که در آن $E = G'$) نقطهٔ x نمی‌تواند یك نقطهٔ حدی G' باشد. بنابراین هیچ نقطهٔ G نقطهٔ حدی G' نیست، در نتیجه G' شامل تمام نقاط حدیش می‌باشد ازاین‌رو بسته است.

اکنون فرض می‌کنیم که F بسته‌است. اگر $y \in F'$، آنگاه باید گویی مانند $B[y;\,r]$ موجود باشد که شامل هیچ نقطه‌ای از F نباشد. زیرا در غیر این‌صورت y یك نقطهٔ حدی F خواهد بود. پس خواهیم داشت $y \in F$ (چون که F بسته است)، و این با $y \in F'$ متناقض است در نتیجه برای هر $y \in F'$ گویی مانند $B[y\,;\,r]$ وجود دارد به‌طوری که $B[y;\,r] \subseteq F'$. بنابراین F' باز است.

قضیهٔ ۹.۵.۵ ما را قادر می‌سازد قضایای مربوط به مجموعه‌های بسته را از روی قضایای مربوط به مجموعه‌های باز اثبات کنیم. برای مثال، ۷.۵.۵ را از ۵.۴.۵ به‌دست می‌آوریم.

فرض کنیم F_1 و F_2 بسته باشند. آنگاه، بنابر ۹.۵.۵، F'_1 و F'_2 باز هستند. پس، بنابر ۵.۴.۵، $F'_1 \bigcap F'_2$ باز است. حال، بنابر ۸.۲.۱ داریم $F'_1 \bigcap F'_2 = (F_1 \bigcup F_2)'$ و درنتیجه $(F_1 \bigcup F_2)'$ باز است. یك بار دیگر از ۹.۵.۵ نتیجه می‌شود که $F_1 \bigcup F_2$ [متمم $(F_1 \bigcup F_2)'$] بسته است. این ۷.۵.۵ را ثابت می‌کند.

به‌همین ترتیب، می‌توان ۸.۵.۵ را از ۳.۴.۵ به‌دست‌آورد. (ولی، برای انجام این کار ابتدا باید نشان دهیم که اگر $\mathscr{F}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌ها باشد، آنگاه $\bigcup_{F\in\mathscr{F}} F' = (\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F)'$، حتی اگر $\mathscr{F}$ شامل تعدادی نامتناهی مجموعه باشد. اثبات این اساساً شبیه اثبات ۸.۲.۱ است. همهٔ این مطالب را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.)

اکنون می‌توانیم پیوستگی را برحسب مجموعه‌های بسته بیان کنیم (با ۷.۴.۵ مقایسه کنید).

۱۰.۵.۵. قضیه. فرض می‌کنیم $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ و $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ فضاهای متریك باشند، و فرض می‌کنیم $f : M_1 \to M_2$. دراین‌صورت f در M_1 پیوسته است اگر و تنها اگر

برای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ M_2 مانند F، $f^{-1}(F)$ در M_1 بسته باشد.

برهان: نخست فرض می‌کنیم که f در M_1 پیوسته باشد. اگر $F \subseteq M_2$ بسته باشد، آنگاه بنابر ۹.۵.۵، F' باز است. بنابر ۷.۴.۵، $f^{-1}(F')$ در M_1 باز است. ولی چون $F \bigcup F' = M_2$، بنابر ۵.۳.۱ داریم $f^{-1}(F) \bigcup f^{-1}(F') = f^{-1}(M_2)$. یعنی، $f^{-1}(F) \bigcup f^{-1}(F') = M_1$. از این‌رو، $f^{-1}(F)$ (نسبت به M_1) متمم $f^{-1}(F')$ است. چون $f^{-1}(F')$ باز است، $f^{-1}(F)$ بسته است، و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم. قسمت عکس برهان به‌خواننده واگذار می‌شود.

چنانچه خواننده هم‌ارز بودن صورتهای مختلف پیوستگی را فهمیده‌باشد، در اثبات قضیهٔ زیر نباید هیچ نوع اشکالی داشته باشد.

۱۱.۵.۵ قضیه. فرض کنیم f تابعی ۱ـ۱ از فضای متریک M_1 به‌روی فضای متریک M_2 باشد. (یعنی، f یک تناظر ۱ـ۱ بین M_1 و M_2 باشد.) آنگاه اگر f یکی از ویژگیهای زیر را دارا باشد، تمام آنها را دارا خواهد بود.

(الف) f و f^{-1} پیوسته‌هستند (به‌ترتیب در M_1 و M_2).

(ب) مجموعهٔ $G \subseteq M_1$ باز است اگر و تنها اگر نگارهٔ آن یعنی $f(G)$ در M_2 باز باشد.

(ج) مجموعهٔ $F \subseteq M_1$ بسته است اگر و تنها اگر نگارهٔ آن یعنی $f(F)$ بسته باشد.

۱۲.۵.۵ تعریف. اگر f یکی از (و درنتیجه همهٔ) ویژگیهای مذکور در ۱۱.۵.۵ را دارا باشد، آنگاه f را یک همسانریختی از M_1 به روی M_2 خوانیم. چنانچه یک همسانریختی از M_1 به‌روی M_2 موجود باشد، گوییم که M_1 و M_2 همسانریخت هستند.

از این‌رو فضاهای متریک $[0, 1]$ و $[0, 2]$ (با متریک قدرمطلق) همسانریخت هستند. زیرا اگر $f(x) = 2x$، آنگاه f یک همسانریختی از $[0, 1]$ به‌روی $[0, 2]$ است.

اگر $f(x) = \log x$، آنگاه f یک همسانریختی از $(0, \infty)$ به‌روی R^1 است (تحقیق کنید).

آیا می‌توانید ثابت کنید که $(0, 1)$ و $[0, 1]$ همسانریخت نیستند؟

«زیرمجموعهٔ چگال» آخرین مفهوم این بخش است.

۱۳.۵.۵ تعریف. فرض کنیم M یک فضای متریک باشد. یک زیرمجموعهٔ M مانند A را در M چگال خوانیم اگر $\bar{A} = M$. (یعنی، A در M چگال است اگر هر نقطهٔ M یک نقطهٔ حدی A باشد.)

مثلا، اگر A مجموعهٔ اعداد گویا باشد، آنگاه A در R^1 چگال است. زیرا، بنابر ۴.۱۱.۳، هر عدد گنگ حد دنباله‌ای از اعداد گویا است.

از طرف دیگر، R_d هیچ زیرمجموعهٔ چگال ندارد (بجز خود R_d). زیرا، اگر $A \subseteq R_d$، آنگاه بنابر ۴.۴.۵ و ۹.۵.۵ داریم $\bar{A} = A$. بنابراین اگر $A \neq R_d$، آنگاه $\bar{A} \neq R_d$، و درنتیجه A در R_d چگال نیست.

تمرینهای ۵.۵

۱. با استفاده از شهود خود تعیین کنید کدام یك از مجموعه‌های تمرین ۲ در بخش ۴.۵، در R^2 بسته هستند.

۲. برای هر یك از ۵ فضای متریك در ۳.۲.۴، مثالی از یك مجموعه بیاورید که نه باز باشد و نه بسته.

۳. ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ متناهی از یك فضای متریك بسته است.

۴. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌های فضای متریك M باشند. اگر $A \subseteq B$، ثابت کنید که $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

۵. (الف) آیا این گزاره راست است یا دروغ؟ اگر A و B زیرمجموعه‌های R^1 باشند و اگر $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ آنگاه $A \subseteq B$.

(ب) همین سؤال با تبدیل R^1 به R_d.

۶. اگر $a \in R^1$، ثابت کنید که $[a, \infty)$ یك زیرمجموعهٔ بستهٔ R^1 است.

۷. فرض کنیم G, F زیرمجموعه‌هایی از فضای متریك M باشند به طوری که F در M بسته و G در M باز باشد. نشان دهید که $F - G$ در M بسته و $G - F$ در M باز است.

۸. اگر $0 < r < s$ و a نقطه‌ای از فضای متریك M باشد، نشان دهید که مجموعهٔ

$$\{x \in M : r < d(x, a) < s\}$$

در M باز است.

۹. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌های فضای متریك M باشند. ثابت کنید که

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

همچنین، ثابت کنید که

$$\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B},$$

و با مثالی نشان دهید که لازم نیست برابری برقرار باشد.

۱۰. فرض کنید f یك تابع حقیقی پیوسته در فضای متریك M باشد. فرض کنید

$$A = \{x \in M : f(x) \geqslant 0\}.$$

ثابت کنید که A بسته است.

۱۱. فرض کنید f یك تابع حقیقی پیوسته در فضای متریك M باشد. اگر

$$B = \{x \in M : f(x) = 0\}.$$

ثابت کنید که B بسته است.

۱۲. اگر A و B زیرمجموعه‌های بستهٔ R^1 باشند، ثابت کنید که $A \times B$ یك زیرمجموعهٔ بستهٔ R^2 است.

۱۳. مثالی از یك دنبالهٔ ... ,A_1, A_2 از زیرمجموعه‌های ناتهی و بستهٔ R^1 بیاورید به گونه‌ای که هردو شرط زیر برقرار باشند.

(الف) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$.

(ب) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.

۱۴. فرض کنید

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

ثابت کنید که f یك همسانریختی از R^1 به‌روی $(-1, 1)$ است.

۱۵. نشان دهید که R^1 و R_d همسانریخت نیستند.

۱۶. فرض کنیم M_1، M_2، M_3 فضاهای متریك باشند. اگر M_1 و M_2 همسانریخت باشند، و اگر M_2 و M_3 همسانریخت باشند، ثابت کنید که M_1 و M_3 همسانریخت هستند.

۱۷. ثابت کنید که $(0, \infty)$ (با متریك قدرمطلق) با $(0, 1)$ همسانریخت است.

۱۸. مثالی از یك زیرمجموعهٔ شمارای R^2 بیاورید که در R^2 چگال باشد.

۱۹. مثالی از یك زیرمجموعهٔ شمارای l^2 بیاورید به‌طوری‌که در l^2 چگال باشد. (این تمرین مشکلی است.)

۲۰. فرض‌می‌کنیم M یك فضای متریك باشد وفرض می‌کنیم $A \subseteq B \subseteq M$. اگر A در B چگال باشد و اگر B در M چگال باشد، ثابت کنید که A در M چگال است.

۲۱. مثالی از یك مجموعهٔ E بیاورید به‌گونه‌ای‌که هم E و هم متمم E در R^1 چگال باشند. آیا E می‌تواند بسته باشد؟

۶.۵ توابع ناپیوسته در $\mathbf{R}^1$.

به‌عنوان یك گریز جالب از بحثمان در فضای متریك، به‌بررسی مجموعهٔ نقاطی‌می‌پردازیم که در آن نقاط یك تابع حقیقی در R^1 ناپیوسته است.

بعد از برهان ۷.۵.۵ ملاحظه کردیم که یك اجتماع شمارا از زیرمجموعه‌های بستهٔ R^1 لازم نیست بسته باشد.

۱.۶.۵. تعریف. زیرمجموعهٔ D از R^1 را از نوع F_σ نامیم اگر $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ که درآن هر F_n یك زیرمجموعهٔ بستهٔ R^1 است.

بنابراین اگر F بسته باشد، آنگاه F از نوع F_σ است زیـرا می‌توانیم بنویسیم $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ که درآن $F_1 = F$ و $F_2 = F_3 = \ldots = \varnothing$.

هربازهٔ باز (a, b) نیز از نوع F_σ است، زیرا (a, b) اجتماع (تعدادی شمارا) بازه‌های بستهٔ $[a+1/n, b-1/n]$ است که درآن $n \in I$ و $2/n < b-a$.

اکنون، می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $f: R^1 \to R^1$ و D مجموعهٔ نقاطی از R^1 باشد کـه درآن f پیوسته نیست، آنگاه D از نـوع F_σ است. ولی، این مطلب به‌کمی مقدمات احتیاج دارد.

۲.۶.۵. تعریف. فرض کنیم $f: R^1 \to R^1$. اگر J بازهٔ بازکـراندار دلخواهی در

R^1 باشد، آنگاه $\omega[f\,;J]$ (موسوم به‌نوسان f روی J) را چنین تعریف می‌کنیم:*

$$\omega[f\,;J]=\underset{x\in J}{\mathrm{l.u.b.}}\ f(x)-\underset{x\in J}{\mathrm{g.l.b.}}\ f(x).$$

سپس، اگر $a\in R^1$، آنگاه $\omega[f\,;a]$ (موسوم به‌نوسان f در a) را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$\omega[f\,;a]=\mathrm{g.l.b.}\ \omega\,[f\,;J]$$

که در آن $\mathrm{g.l.b.}$ مربوط به مجموعهٔ همهٔ بازه‌های بازکراندار J است که شامل a هستند.
آشکار است که برای هر بازه مانند J، $\omega[f\,;J]\geqslant 0$، و از این‌رو درهر نقطهٔ a، $\omega[f\,;a]\geqslant 0$. به‌طور اجمال، عدد $\omega\,[f\,;J]$ اختلاف سطح بین «پایین‌ترین قسمت» و «بالاترین قسمت» نمودار f دربازهٔ J را اندازه می‌گیرد. به‌طور شهودی آشکار است که اگر f در a پیوسته باشد، و J بازهٔ «کوچکی» وشامل a باشد، آنگاه $\omega\,[f\,;J]$ به‌یقین «کوچك» خواهد بود.
اثبات قضیهٔ بعد را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

۳.۶.۵ قضیه. اگر $f:R^1\to R^1$ و $a\in R^1$، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند
(۱) اگر f در a پیوسته باشد، آنگاه $\omega\,[f\,;a]=0$،
(۲) اگر f در a ناپیوسته باشد، آنگاه $\omega\,[f\,;a]>0$.
اکنون، مجموعه‌های بسته را به‌کار می‌گیریم.

۴.۶.۵ قضیه. فرض می‌کنیم $f:R^1\to R^1$. به‌ازای هر $r>0$ فرض می‌کنیم که E_r مجموعهٔ همهٔ‌نقاط $a\in R^1$ باشد به‌گونه‌ای که $\omega\,[f\,;a]\geqslant 1/r$. آنگاه E_r بسته‌است.

برهان: فرض کنیم x یك نقطهٔ حدی دلخواه E_r باشد. باید نشان دهیم که $x\in E_r$. یعنی باید نشان دهیم کــه $\omega\,[f\,;x]\geqslant 1/r$. برای این منظور، کافی است نشان دهیم که اگر J بازه‌ای باز، کراندار و شامل x باشد، آنگاه $\omega\,[f\,;J]\geqslant 1/r$ (زیرا $\omega\,[f\,;x]$ بزرگترین کران پایین این $\omega\,[f\,;J]$ هاست). ولی بنابر ۴.۵.۵، بــازهٔ باز (گوی باز) J شامل عنصری از E_r مانند y است (چون کــه J شامل x، نقطهٔ حدی E_r است). پس داریم $\omega[f\,;J]\geqslant\omega[f\,;y]\geqslant 1/r$ و برهان کامل است.

اکنون، نتیجه‌ای را که به‌دنبالش بوده‌ایم حاصل می‌شود:

۵.۶.۵ قضیه. اگر $f:R^1\to R^1$ و اگر مجموعهٔ نقاطی از R^1 راکه f درآنها پیوسته نیست D بنامیم، آنگاه D از نوع F_σ است.

---

* در این بخش، برای سهولت فرض می‌کنیم که f کراندار باشد. یعنی فرض می‌کنیم که حوزهٔ مقادیر f زیرمجموعهٔ‌کرانداری از R^1 باشد. این به خاطر این است کــه از مقادیــر بینهایت $\omega[f\,;J]$ اجتناب شود. تمام نتیجه‌های این بخش برای fهای بی‌کران نیز برقرارند.

برهان: اگر $x \in D$، آنگاه بنابر ۳.۶.۵، $\omega[f\,;\,x]>0$. درنتیجه عددی مانند $n \in I$ وجود دارد به‌طوری که $\omega[f\,;\,x] \geqslant 1/n$. این ثابت می کند که $D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$ که در آن $E_{1/n}$ همان است که در ۴.۶.۵ آمده است. برعکس، اگر $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$، آنگاه $\omega[f\,;\,x]>0$ و بنابراین $x \in D$. ازاین‌رو $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$. ولی بنابر ۴.۶.۵، هر $E_{1/n}$ بسته‌است. درنتیجه D اجتماع تعدادی شمارا ازمجموعه‌های بسته‌است، واین‌همان چیزی است که می‌خواستیم نشان‌دهیم.

در تمرین ۱۰ از بخش ۳.۵ مثالی از یك تابع آوردیم که درهرعدد گنگ پیوسته‌و در هرعدد گویا ناپیوسته بود. حال می‌خواهیم نشان دهیم که تابعی‌وجودندارد به‌طوری که در هرعدد گویا پیوسته ولی در هر عددگنگ ناپیوسته باشد. برای‌این‌کار، برطبق ۵.۶.۵، کافی‌است نشان‌دهیم که مجموعهٔ تمام اعدادگنگ ازنوع F_σ نیست. برای این منظور لازم است مفهوم رسته را که درآنالیز عالی اهمیت به‌سزایی دارد معرفی‌کنیم.

۶.۶.۵. تعریف. زیرمجموعهٔ A از R^1 را (در R^1) هیچ‌جا چگال می‌نامیم اگر $\overline{A}$ شامل هیچ بازهٔ باز (ناتهی) نباشد.

ازاین‌رو مجموعهٔ بستهٔ F هیچ‌جاچگال‌است‌اگر F خود شامل بازهٔ بازی‌نباشد. مثلاً، مجموعهٔ اعداد صحیح‌مثبت I هیچ‌جا چگال است. مجموعهٔ کانتور (K) مثال دیگری از یك مجموعهٔ بستهٔ هیچ‌جاچگال است. (K بسته است چون که‌متمم آن اجتماعی از بازه‌های باز است. به‌علاوه، K هیچ‌جا چگال است زیرا، بنابر ۴.۶.۱، در ساختمان هندسی K از هر بازهٔ باز قطعهٔ بزرگی برداشته می‌شود.)

۷.۶.۵. تعریف. زیرمجموعهٔ D از R^1 را از رستهٔ اول‌خوانیم اگر $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ که درآن هر E_n در R^1 هیچ‌جا چگال است. اگر D از رستهٔ اول نباشد، گوییم که D از رستهٔ دوم است.

فوراً نتیجه می‌شود که هر مجموعهٔ شمارای D از رستهٔ اول است زیرا D اجتماعی شمارا از مجموعه‌های یك‌عنصری است، وهر مجموعهٔ یك عنصری (بسته‌و) هیچ‌جا چگال است. به‌ویژه، مجموعهٔ اعدادگویا از رستهٔ اول است. به‌علاوه

۸.۶.۵. قضیه. اگر A و B از رستهٔ‌اول باشند، آنگاه $A \bigcup B$ نیز از رستهٔ اول‌است.

برهان: اگر $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ و $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ به طوری که هر E_n و هر H_n هیچ‌جا چگال‌باشند، آنگاه $A \bigcup B$ اجتماع همهٔ E_nها و H_nها (که تعدادشان شماراست) می‌باشد. ازاین‌رو $A \bigcup B$ از رستهٔ اول است.

از طرف دیگر، تمام فضای R^1 از رستهٔ اول نیست. این نتیجهٔ مهم معروف به‌قضیهٔ رستهٔ بِر[1] (در R^1) است.

---

1. Baire

۹.۶.۵. قضیه. مجموعهٔ R^1 از رستهٔ دوم است.

برهان: فرض کنیم که حکم برقرار نباشد. آنگاه $R^1=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ که در آن هر F_n هیچ‌جا چگال است. می‌توانیم فرض کنیم که F_nها بسته هستند. زیرا در غیراین صورت می‌توانیم $\bar{F}_n$ را به‌جای F_n قرار دهیم، زیرا $R^1=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{F}_n$ و $\bar{F}_n$ها بسته و هیچ‌جا چگال هستند. عددی مانند x_1 که در F_1 نباشد درنظر می‌گیریم. از آنجاکه F_1 بسته است بازهٔ بازی به مرکز x_1 مانند I_1 هست که F_1 را تلاقی نمی‌کند. فرض می‌کنیم J_1 بازهٔ بسته‌ای باشد به‌طوری که ۱ $>$ طول $J_1>0$ و $J_1\subseteq I_1$. دراین‌صورت $J_1\bigcap F_1=\varnothing$. اکنون F_2 هیچ‌جا چگال است و بنابراین همهٔ درون* J_1 را دربرندارد. سپس عدد x_2 را در درون J_1 درنظر می‌گیریم به‌طوری‌که $x_2\notin F_2$. آنگاه بازهٔ بازی مانند I_2 حول x_2 وجود دارد که F_2 را تلاقی‌نمی‌کند و $I_2\subseteq J_1$. فرض‌کنیم J_2 بازهٔ بسته‌ای باشدبه‌گونه‌ای که $1/2>$ طول $J_2>0$ و $J_2\subseteq I_2$. دراین‌صورت $J_2\bigcap F_2=\varnothing$. با ادامهٔ این روش می‌توانیم دنباله‌ای از بازه‌های بستهٔ ناتهی بسازیم به گونه‌ای که $\dots\supseteq J_3\supseteq J_2\supseteq J_1$، $1/n>$ طول $J_n>0$، و $J_n\bigcap F_n=\varnothing$. سپس بنابر ۵.۱۰.۲، $y\in R^1$ هست به‌طوری که $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}J_n$. ولی برای هر n، y در J_n است و ازاین‌رو y در F_n نیست. بنابراین $y\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$. این یک تناقض است زیرا بنا به فرض $R^1=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$. این تناقض ثابت می‌کند که R^1 از رستهٔ دوم است.

۱۰.۶.۵. نتیجه. مجموعهٔ اعداد گنگ از رستهٔ دوم است.

برهان: همانگونه که قبلا دیدیم، مجموعهٔ اعداد گویا از رستهٔ اول است. حال اگر مجموعهٔ اعداد گنگ از رستهٔ اول باشد، آنگاه، بنابر ۸.۶.۵، R^1 از رستهٔ اول خواهد شد، که با ۹.۶.۵ متناقض است. بنابراین مجموعهٔ اعداد گنگ از رستهٔ دوم است.

۱۱.۶.۵. نتیجه. مجموعهٔ اعداد گنگ از نوع F_σ نیست.

برهان: فرض‌کنیم A مجموعهٔ اعداد گنگ باشد. اگر A از نوع F_σ باشد، آنگاه $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ که در آن هر F_n بسته است. ولی هر F_n تنها شامل اعداد گنگ است. ازاین‌رو F_n شامل هیچ بازهٔ باز ناتهی نیست. بنابراین هر F_n بسته وهیچ‌جاچگال است. از این نتیجه می‌شود که A از رستهٔ اول است و این با ۱۰.۶.۵ تناقض دارد.

سرانجام، نتیجه‌ای راکه در جستجویش بوده‌ایم به‌دست می‌آوریم:

۱۲.۶.۵. قضیه. تابعی حقیقی در R^1 وجود ندارد که درهرعددگویا پیوسته و درهر عددگنگ ناپیوسته باشد.

برهان: برهان مستقیماً از ۵.۶.۵ و۱۱.۶.۵ نتیجه می‌شود.

* مقصود از درون بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ بازهٔ (a, b) است.

تمرینهای ۶.۵

۰۱ اگر E در R^1 هیچ‌جا چگال باشد، ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ E نیز در R^1 هیچ‌جا چگال است.

۰۲ اگر E_1 و E_2 و ... تعدادی شمارا از زیرمجموعه‌های R^1 باشند، و اگر هر E_n از رستهٔ اول باشد، ثابت کنید که $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ از رستهٔ اول است.

۰۳ ثابت کنید که هر بازهٔ باز ناتهی در R^1 از رستهٔ دوم است.

۰۴ فرض کنید G یك زیرمجموعهٔ باز R^1 باشد. ثابت کنید که G در R^1 چگال است اگر و تنها اگر G' (متمم G) هیچ‌جاچگال باشد.

۰۵ فرض کنید ... $G_1, G_2,$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز R^1 باشد به‌گونه‌ای که هر مجموعهٔ آن در R^1 چگال است. ثابت کنید که $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ در R^1 چگال است. (راهنمایی: دوتمرین قبلی را به‌کار برید.)

۰۶ فرض کنیم χ تابعی در R^1 باشد که با

$$\chi(x)=0 \qquad (\text{اگر } x \text{ گویا باشد}),$$
$$\chi(x)=1 \qquad (\text{اگر } x \text{ گنگ باشد}).$$

تعریف شده است (یعنی، χ تابع مشخصهٔ مجموعهٔ اعداد گنگ باشد.) در برهان قضیهٔ زیر جزئیات ناگفته را بنویسید.

قضیه: هیچ دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ از توابع پیوسته در R^1 وجود ندارد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\chi(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \tag{*}$$

برهان: فرض کنیم حکم قضیه برقرار نباشد. یعنی، فرض می‌کنیم که دنبالهٔ توابع پیوستهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود داشته باشد به‌طوری که (*) برقرار باشد.

(الف) برای هر $n\in I$ فرض می‌کنیم $E_n=\{x : f_n(x)\geqslant 1/2\}$. آنگاه E_n بسته است. (چرا؟)

(ب) برای هر $N \in I$ فرض می کنیم $F_N=E_N\bigcap E_{N+1}\bigcap \cdots =\bigcap_{n=N}^{\infty} E_n$. آنگاه F_N بسته است. (چرا؟)

(ج) اگر x عددی گنگ باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\chi(x)=1$ و بنابراین عدد $N \in I$ هست به‌طوری که $x \in F_N$. (چرا؟)

(د) اگر به‌ازای N ی، $x \in F_N$، آنگاه x گنگ است. (چرا؟)

(ه) بنابراین $\bigcup_{N=1}^{\infty} F_N$ همان مجموعهٔ اعداد گنگ است. ولی از این نتیجه می‌شود که مجموعهٔ اعداد گنگ از نوع F_σ است. (چرا؟) این مطلب ۱۱.۶.۵ را نقض می کند، و تناقض قضیه را ثابت می کند.

۷.۵ فاصلهٔ یك نقطه از یك مجموعه

توسیع مفهوم فاصلهٔ بین نقاط به‌مفهوم فاصلهٔ یك نقطه از یك مجموعه سودمندخواهد بود.

۱.۷.۵ تعریف. فرض کنیم $\langle M, \rho\rangle$ یك فضای متریك باشد. فرض می کنیم A یك زیرمجموعهٔ ناتهی M و x نقطه‌ای از M باشد. فاصلهٔ x از A راکه با $\rho(x, A)$ نشان‌داده می‌شود چنین تعریف می کنیم:

$$\rho(x, A)=\text{g.l.b.}\ \{\rho(x, y): y \in A\}.$$

مثلا، اگر $M=R^{۱}$، $A=(\circ, ۱)$، و $x=۲$، آنگاه

$$\rho(x, A)=\underset{\circ<y<۱}{\text{g.l.b.}}|۲-y|=۱.$$

ملاحظه کنید که گرچه $\rho(x, A)=۱$، ولی هیچ نقطهٔ $y \in A$ وجود ندارد به‌طوری که $\rho(x, y)=۱$.

بنابراین اگر در A یك نزدیکترین نقطه به x مانند z (یا بیش از یك نزدیکترین نقطه) وجود داشته‌باشد، آنگاه $\rho(x,A)=\rho(x, z)$. ولی‌همان‌گونه که در مثال آمد، ممکن است هیچ نزدیکترین نقطه‌ای وجود نداشته باشد.

دراینجا مطلبی راکه با مجموعه‌های بسته در ارتباط است می‌آوریم.

۲.۷.۵. قضیه. فرض کنیم A یك زیرمجموعهٔ ناتهی ازفضای متریك M و x نقطه‌ای از M باشد. آنگاه

$$\rho(x, A)=\circ$$

اگر و تنها اگر $x \in \bar{A}$.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $\rho(x, A)=\circ$. پس $\circ$ بزرگترین‌کران پایین مجموعهٔ $\{\rho(x, y): y \in A\}$ است. بنابراین اگر $\varepsilon>\circ$، آنگاه ε کران پایین مجموعهٔ مزبور نیست، پس $y \in A$ وجود دارد به‌طوری که $\rho(x,y)<\varepsilon$. این نشان می‌دهدکه هر گوی $B[x ; \varepsilon]$ شامل نقطه‌ای از A است. درنتیجه بنابر ۵.۵.۵، x یك‌نقطهٔ حدی A است، پس $x \in \bar{A}$.

برعکس، اگر $x \in \bar{A}$. آنگاه یك دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در A وجود دارد به‌طوری که $\lim\limits_{n \to \infty} x_n=x$. ولی

$$\rho(x, A) \leqslant \rho(x, x_n) \qquad (n \in I).$$

اگر $n \to \infty$ خواهیم داشت $\rho(x, A) \leqslant \circ$، درنتیجه $\rho(x, A)=\circ$. با این نتیجه‌برهان کامل است.

اگر A بسته باشد، نتیجهٔ زیر را داریم.

۳.۷.۵. نتیجه. فرض کنیم A یك زیرمجموعهٔ بستهٔ ناتهی از فضای متریك M و x

نقطه‌ای از M باشد. آنگاه $x \in A$ اگر وتنها اگر $\rho(x, A) = 0$. ازاین‌رو $x \in A'$ (A' یعنی متمم A) اگر وتنها اگر $\rho(x, A) > 0$.

به عنوان تابع، $\rho(x, A)$ دارای ویژگیها وموارد استعمال جالبی است. (تمرینها را ببینید.)

۰۴۰۷۰۵ قضیه. فرض‌کنیم A زیرمجموعهٔ ناتهی از فضای متریك M باشد. اگر f را با ضابطهٔ

$$f(x) = \rho(x, A) \qquad (x \in M).$$

تعریف‌کنیم، آنگاه f در M پیوسته است.

برهان: فرض‌کنیم x نقطه‌ای از M باشد. عددمثبت دلخواه ε را درنظرگرفته‌فرض می‌کنیم x_1 نقطه‌ای از M باشدبه‌طوری که $\rho(x, x_1) < \delta = \varepsilon/2$. ازآنجاکه

$$f(x) = \rho(x, A) = \underset{y \in A}{\mathrm{g.l.b.}}\, \rho(x, y),$$

عنصری از A مانند y_1 هست به‌گونه‌ای که $f(x) + \varepsilon/2 > \rho(x, y_1)$. سپس

$$\rho(x_1, y_1) \leqslant \rho(x_1, x) + \rho(x, y_1) < \delta + f(x) + \frac{\varepsilon}{2} = f(x) + \varepsilon$$

از این‌رو

$$f(x_1) = \rho(x_1, A) = \underset{y \in A}{\mathrm{g.l.b.}}\, \rho(x_1, y) \leqslant \rho(x_1, y_1) < f(x) + \varepsilon,$$

پس $f(x_1) - f(x) < \varepsilon$. ولی، با تعویض نقشهای x و x_1 خواهیم داشت $f(x) - f(x_1) < \varepsilon$. درنتیجه نشان‌داده‌ایم

$$|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon \qquad (\rho(x, x_1) < \delta)$$

که‌پیوستگی f را در x نشان می‌دهد. چون x نقطهٔ دلخواهی‌از M بود، برهان‌کامل‌است.

تمرینهای ۷۰۵

۱. فرض‌کنید A زیرمجموعهٔ ناتهی از یك فضای متریك باشد. اگر $\varepsilon \geqslant 0$، نشان‌دهید که مجموعهٔ xهایی از M به‌طوری‌که $\rho(x, A) \geqslant \varepsilon$، یك مجموعهٔ بسته است.

۲. نشان‌دهیدکه هرزیرمجموعهٔ باز یك فضای متریك اجتماع تعدادی‌شمارا ازمجموعه‌های بسته است.

۳. فرض‌کنیم F_1 و F_2 زیرمجموعه‌های بستهٔ مجزای یك فضای متریك M باشند. ثابت کنیدکه‌دومجموعهٔ باز مجزای G_1 و G_2 وجود دارند به‌گونه‌ای‌که $F_1 \subseteq G_1$ و $F_2 \subseteq G_2$.

۶

همبندی، کمال، و فشردگی

۱.۶ مطالب بیشتری دربارهٔ مجموعه‌های باز

۱.۱.۶. همان گونه که در فصل پیش دیدیم، اگر فضای متریك $[0,1]$ (با متریك قدر مطلق) را با A نشان دهیم، آنگاه بازهٔ $[0,1/2)$ یك زیرمجموعهٔ باز A است هرچند که $[0,1/2)$ در R^1 باز نیست. بنابراین باز یا بسته بودن مجموعه بستگی دارد به اینکه زیرمجموعهٔ کدام فضای متریك باشد.

در واقع، اگر $\langle M, \rho\rangle$ یك فضای متریك باشد و $A\subseteq M$، آنگاه، بنا بر ۲.۴.۵، A در فضای متریك $\langle A, \rho\rangle$ همیشه باز است هرچند که ممکن است در $\langle M, \rho\rangle$ باز نباشد.

پیش از آنکه به مفاهیم جدید در این فصل بپردازیم، می‌خواهیم این پدیده را با دقت بیشتری مورد بررسی قرار دهیم.

فرض کنیم $\langle M, \rho\rangle$ یك فضای متریك و A یك زیرمجموعهٔ ناتهی دلخواه M باشد. آنگاه $\langle A, \rho\rangle$ نیز یك فضای متریك است. حال اگر $a\in A$، آنگاه بایستی بین گویهای باز حول a در A و گویهای باز حول a در M تمایزی قائل شد. مثلا، اگر $\langle M,\rho\rangle = R^1$ و $\langle A, \rho\rangle=[0, 1]$، آنگاه گوی باز $B[0 ; 1/2]$ در R^1 بازهٔ $(-1/2+1/2)$ است، درحالی که گوی باز $B[0; 1/2]$ در $A=[0,1]$ بازهٔ $[0,1/2)$ است. (یعنی، در $A=[0,1]$ مجموعهٔ نقاطی از A که فاصلهٔ آنها تا 0 کمتر از $1/2$ است بازهٔ $[0,1/2)$ است.) در نتیجه، به‌معرفی نمادهای زیر می‌پردازیم: اگر $a\in A$، فرض می‌کنیم

$$B_A [a ; r]=\{x\in A: \rho(a, x)<r\},$$
$$B_M[a ; r]=\{x\in M: \rho(a, x)<r\}.$$

بنابراین آشکار است که

$$B_A[a\,;r]=A\bigcap B_M[a;r]. \qquad (*)$$

اکنون می‌توانیم این سؤال را که چه مجموعه‌ای درچه فضایی باز است روشن کنیم.

۲.۱.۶. قضیه. فرض کنیم $\langle M,\rho\rangle$ یك فضای متریك و A یك زیرمجموعهٔ سرهٔ M باشد. آنگاه زیرمجموعهٔ G_A از A یك زیرمجموعهٔ باز $\langle A,\rho\rangle$ است اگر و تنها اگر زیرمجموعهٔ بازی از $\langle M,\rho\rangle$ مانند G_M باشد به‌طوری که $G_A=A\bigcap G_M$. یعنی، یك مجموعه در $\langle A,\rho\rangle$ باز است اگر و تنها اگر اشتراك یك مجموعهٔ باز $\langle M,\rho\rangle$ با A باشد.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم که G_A در A باز باشد، آنگاه برای هر $a\in G_A$ عدد مثبتی مانند r_a هست به‌طوری که $B_A[a\,;r_a]\subseteq G_A$. اگر G_M را

$$G_M=\bigcup_{a\in GA}B_M[a\,;r_a]$$

تعریف کنیم، آنگاه G_M در M باز است زیرا G_M اجتماع گویهای باز M است (۳.۴.۵). همچنین، بنابر (*) از ۱.۱.۶ نتیجه می‌شود که $G_M\bigcap A=G_A$.

برعکس، فرض می‌کنیم G_M در M باز باشد و $G_A=A\bigcap G_M$. ثابت می‌کنیم که G_A در A باز است. اگر $a\in G_A$ آنگاه $a\in G_M$. چون G_M در M باز است گوی باز $B_M[a\,;r]$ هست که $B_M[a\,;r]\subseteq G_M$. ولی دراین‌صورت $B_M[a\,;r]\bigcap A\subseteq G_M\bigcap A$ و از آنجا $B_A[a;r]\subseteq G_A$. درنتیجه، نشان داده‌ایم که برای هر $a\in G_A$ گوی بازی مانند $B_A[a;r]$ که زیرمجموعهٔ G_A باشد وجود دارد. این ثابت می‌کند که G_A در A باز است.

مثلاً، اگر $M=R^1$ و $A=[0,1]$، مجموعهٔ $G_A=[0,1/2)$ در A باز است. اما $G_A=A\bigcap(-\infty,1/2)$ و $(-\infty,1/2)$ در M باز است. بنابراین G_M مذکور در ۲.۱.۶ را می‌توان $(-\infty,1/2)$ گرفت.

اهمیت ۲.۱.۶ دراین است که ما را قادر می‌سازد همبندی را به‌صورت دیگری‌نیز بیان کنیم.

تمرینهای ۱.۶

۱. مثالی از یك فضای متریك M و یك زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی از M مانند A بیاورید به‌طوری که هر زیرمجموعهٔ باز A در M نیز باز باشد.

۲. اگر $A=[0,1]$، کدام‌یك از زیرمجموعه‌های A که ذیلا می‌آیند در A باز هستند؟

(الف) $\left]1, \frac{1}{2}\right)$،

(ب) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$،

(ج) $\left(1, \frac{1}{2}\right]$.

کدام‌یك از (الف)، (ب)، (ج) در R^1 باز هستند؟ کدام‌یك در R^2 باز هستند؟ (R^1 را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از R^2 در نظر بگیرید.)

۳. آیا زیرمجموعه‌ای از R^1 وجود دارد که در R^2 باز باشد؟

۴. فرض کنیم A یك زیرمجموعهٔ باز فضای متریك M باشد. اگر $B \subseteq A$، ثابت کنید که B در A باز است اگر و تنها اگر B در M باز باشد.

۲.۶ مجموعه‌های همبند

تعریف «مجموعهٔ همبند» هرچه باشد، شهود ما می‌گوید که بازهٔ $[0,1]$ باید یك زیرمجموعهٔ همبند R^1 نامیده شود حال آنکه اجتماع $[0, 1]\bigcup[2,3]$ را نباید همبند نامید.

ولی، روش معمول تعریف همبندی فوراً به‌شهود متوسل نمی‌شود. هرچند مجموعه‌ای «همبند» به‌نظر برسد، همبندی آن معمولاً نیاز به‌اثبات دارد.

نخست دو ویژگی هم‌ارز را می‌آوریم وسپس یك مجموعه را همبند تعریف می‌کنیم اگر یکی از این‌دو ویژگی (ودر نتیجه هردوی آنها) را دارا باشد. یادآور می‌شویم که در فضای متریك $\langle M, \rho\rangle$ مجموعه‌های M و $\varnothing$ هم‌باز و هم‌بسته هستند. اگر این دو، تنها زیرمجموعه‌های M باشند که هم باز وهم بسته‌هستند، (سرانجام) M را همبندخواهیم گفت.

۶.۲.۱. قضیه. فرض کنیم $\langle M, \rho\rangle$ یك فضای متریك و A یك زیرمجموعهٔ M باشد. آنگاه اگر A دارای یکی از ویژگیهای زیر باشد، ویژگی دیگر را نیز داراخواهدبود.

(الف) ممکن‌نیست زیرمجموعه‌هایی ناتهی از M مانند A_1، A_2 بیابیم به‌طوری که $A = A_1 \bigcup A_2$، $\bar{A}_1 \bigcap A_2 = \varnothing$، $A_1 \bigcap \bar{A}_2 = \varnothing$. (دراینجا $\bar{A}_i$ به‌معنی بستار A_i در $\langle M, \rho\rangle$ است.)

(ب) اگر $\langle A, \rho\rangle$ را خود یك فضای متریك در نظر بگیریم، مجموعهٔ دیگری جز A و $\varnothing$ وجود ندارد که در $\langle A, \rho\rangle$ هم باز و هم بسته باشد.

برهان: ثابت می‌کنیم که (ب) از (الف) نتیجه می‌شود. پس فرض می‌کنیم (الف) برقرار باشد. اگر (ب) دروغ باشد آنگاه یك زیرمجموعهٔ سرهٔ A مانند A_1 وجود دارد به‌طوری که در A هم باز و هم بسته‌است. سپس، بنا بر ۵.۵.۹، $A_2 = A - A_1$ نیز در A هم

باز و هم بسته خواهد بود.

اکنون نشان می‌دهیم که $A_1 \cap \overline{A}_2 = \varnothing$. فرض کنیم $x \in M$ نقطه‌ای در $\overline{A}_2$ باشد. بنابراین x نقطهٔ حدی دنباله‌ای از نقاط A_2 است. اگر x در A_1 باشد آنگاه x به A تعلق دارد. از آنجا که x نقطهٔ حدی دنباله‌ای از نقاط A_2 است نتیجه می‌شود که $x \in A_2$، زیرا A_2 در A بسته است. درنتیجه $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ واین با $A_2 = A - A_1$ متناقض است. از این‌رو اگر $x \in \overline{A}_2$، آنگاه $x \notin A_1$ و از آنجا $A_1 \cap \overline{A}_2 = \varnothing$. به‌همین ترتیب $\overline{A}_1 \cap A_2 = \varnothing$. آشکاراست که $A = A_1 \cup A_2$. ولی این با (الف) تناقض‌دارد، وبنابراین اگر (الف) برقرار باشد (ب) نیز برقرار است.

حال ثابت می‌کنیم که (الف) از (ب) نتیجه می‌شود. فرض می کنیم (ب) راست باشد. اگر (الف) دروغ باشد، آنگاه زیرمجموعه‌های ناتهی A_1، A_2 از M وجود دارند به‌طوری که $A = A_1 \cup A_2$ و $\overline{A}_1 \cap A_2 = \varnothing$، و $A_1 \cap \overline{A}_2 = \varnothing$. اگر $G = M - \overline{A}_2$، آنگاه (بنابر ۹.۵.۵) G یك زیرمجموعهٔ باز M است. از آنجاکه A_1 مجزا از $\overline{A}_2$ است داریم $A_1 \subseteq G$ این ثابت می کند که $G \cap A = A_1$. اما، بنابر ۲.۱.۶، A_1 یك زیرمجموعهٔ باز A است. به‌دلیل مشابه A_2 نیز یك زیرمجموعهٔ باز A است. ازاین‌رو $A_1 = A - A_2$ یك زیرمجموعهٔ بستهٔ A است. درنتیجه یك‌زیرمجموعهٔ سرهٔ A (یعنی A_1) تولیدکرده‌ایم که در A هم‌باز و هم بسته است. این با (ب) متناقض است. بنابراین اگر (ب) برقرار باشد باید (الف) برقرار باشد.

۲.۲.۶. تعریف. فرض می کنیم $\langle M, \rho \rangle$ یك فضای متریك و A یك زیرمجموعهٔ M باشد. اگر A یکی از دو (و درنتیجه هردو) ویژگی (الف) و (ب) در قضیهٔ ۱.۲.۶ را دارا باشد، گوییم که A همبند است.

از (ب) در ۱.۲.۶ باید آشکار باشدکه همبند بودن یا همبند نبودن A صرفاً با A و ρ تعیین می‌شود و ربطی به M ندارد. یعنی، A به عنوان زیرمجموعهٔ $\langle M, \rho \rangle$ همبند است اگر و تنها اگر A به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\langle A, \rho \rangle$ همبند باشد. (پس از این‌نظر، «همبند» با «باز» خیلی تفاوت دارد.) ولی، در برخی از برهانها بهتر است که A را به‌عنوان زیرمجموعهٔ یك فضای وسیعتر درنظر بگیریم.

حال نشان‌می‌دهیم که $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ یك‌زیرمجموعهٔ‌همبند R^1 نیست. زیرا $[0, 1]$ در A هم باز وهم بسته است. به‌طورکلی،

۳.۲.۶. قضیه. زیرمجموعهٔ A از R^1 همبنداست اگروتنها اگر $a, b \in A$ و $a < b$ آنگاه برای هر c که $a < c < b$، داشته باشیم $c \in A$. (یعنی، هرگاه $a, b \in A$ و $a < b$ آنگاه $(a, b) \subseteq A$.)

برهان: ابتدا فرض‌می‌کنیم که $A \subseteq R^1$ و دوعدد مانند a و b از A با شرط $a < b$ و عددی مانند c از $R^1 - A$ با شرط $a < c < b$ موجود باشند. نشان می‌دهیم که A همبند

نیست. در واقع، اگر فرض کنیم $A_1 = A\bigcap(-\infty, c)$ و $A_2 = A\bigcap(c, \infty)$، آنگاه $A = A_1 \bigcup A_2$. اگر $x \in \overline{A}_1$، آنگاه x حد دنباله‌ای از اعداد $(-\infty, c)$ است. پس، $x \leqslant c$. از این‌رو $x \notin A_2$. پس $\overline{A}_1 \bigcap A_2 = \varnothing$. به‌همین ترتیب $A_1 \bigcap \overline{A}_2 = \varnothing$، و درنتیجه A همبند نیست.

حال فرض می‌کنیم که A همبند نباشد. دراین صورت مجموعه‌های ناتهی A_1 و A_2 موجودند به‌طوری که $A = A_1 \bigcup A_2$، $\overline{A}_1 \bigcap A_2 = \varnothing = A_1 \bigcap \overline{A}_2$. دو نقطهٔ دلخواه‌مانند a_1 و a_2 اختیار می‌کنیم به‌طوری که $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. پس، $a_1 \neq a_2$ ومی‌توان فرض کرد که $a_1 < a_2$. نشان می‌دهیم که $A \not\supseteq (a_1, a_2)$. فرض کنیم

$$B = \{x \in A_1 : a_1 \leqslant x \leqslant a_2\}.$$

یعنی، $B = A_1 \bigcap [a_1, a_2]$. درنتیجه B یك مجموعهٔ ناتهی کراندار از اعداد حقیقی است و ازاین‌رو، بنابر ۴.۷.۱، دارای کوچکترین کران بالای $\overline{a}$ است. اکنون $\overline{a} \in \overline{B}$ (چرا؟) و ازاین‌رو، چون $B \subseteq A_1$، داریم $\overline{a} \in \overline{A}_1$. ازطرفی بنابه‌فرض $\overline{A}_1 \bigcap A_2 = \varnothing$ پس $\overline{a} \notin A_2$. اما $\overline{a} \in [a_1, a_2]$ بنابراین $\overline{a} < a_2$.

حال، یا $\overline{a} \in A$ یا $\overline{a} \notin A$. اگر $\overline{a} \notin A$، آنگاه $\overline{a} \neq a_1$ و لذا $\overline{a} > a_1$. بنابراین $a_1 < \overline{a} < a_2$ و $\overline{a} \notin A$، درنتیجه $A \not\supseteq (a_1, a_2)$. از طرف دیگر، اگر $\overline{a} \in A$، آنگاه $\overline{a} \in A_1$ (چون که $\overline{a} \notin A_2$). ازاین‌رو $\overline{a} \notin \overline{A}_2$ وبنابراین $\overline{a}$ یك نقطهٔ حدی A_2 نیست. درنتیجه عددی مانند c با شرط $\overline{a} < c < a_2$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $c \notin A_2$. ولی بنابر تعریف $\overline{a}$، $c \notin A_1$. ازاین‌رو $c \notin A$. چون $a_1 < c < a_2$، ثابت شد که $A \not\supseteq (a_1, a_2)$. بنابراین، درهرحالت داریم $A \not\supseteq (a_1, a_2)$ و این‌چیزی است که می‌خواستیم نشان‌دهیم.

سپس، B زیرمجموعهٔ R^2 را درنظر می‌گیریم که تشکیل شده است از نمودار $y = \sin(1/x)$ $(0 < x \leqslant 1)$ و بازهٔ بستهٔ روی محور yها از $\langle 0, -1\rangle$ تا $\langle 0, 1\rangle$. باکمال تعجب، می‌توان نشان داد که B یك مجموعهٔ همبند در R^2 است (اثبات نخواهیم کرد). این مثال نشان می‌دهد که درمسائل همبندی شهود شخص مبتدی همیشه‌کارساز نیست.

از قضیهٔ زیر می‌توان نتیجه‌ای به‌دست آورد که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مفید است.

۴.۲.۶ قضیه. فرض کنیم f تابعی پیوسته ازفضای متریك M_1 به‌توی فضای‌متریك M_2 باشد. اگر M_1 (حوزهٔ تعریف f) همبند باشد، آنگاه‌حوزهٔ مقادیر f نیزهمبنداست.

برهان: فرض کنیم $A = f(M_1)$، $f : M_1 \Rightarrow A$. اگر A همبند نباشد، آنگاه یك زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی از A مانند B وجود دارد به‌طوری که B در A هم باز وهم بسته است. سپس، بنابر ۷.۴.۵ و ۱۰.۵.۵، $f^{-1}(B)$ یك زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی از M_1 است که در M_1 هم باز و هم‌بسته است. این با فرض همبند بودن M_1 متناقض است. از این‌رو A همبند است و برهان کامل است.

حالت خاصی از ۴.۲.۶ که در آن M_1 بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ باشد و $M_2 = R^1$، نتیجه‌ای را به‌دست می‌دهد که به‌دنبالش بوده‌ایم.

۵.۲.۶. نتیجه. اگر f یك تابع حقیقی پیوسته در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ باشد، آنگاه **f هرمقدار بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می کند.**

برهان: بنا بر ۳.۲.۶ بازهٔ $[a, b]$ همبند است. درنتیجه بنا بر ۴.۲.۶ حوزهٔ مقادیر f همبند است. بقیهٔ برهان ازنتیجهٔ ۳.۲.۶ به‌دست می‌آید.

دراینجا کاربرد دیگری از همبندی ارائه می‌شود. نشان‌خواهیم داد که $[0, 1)$ و $(0, 1)$ همسانریخت نیستند. فرض کنیم چنین نباشد. پس تابعی ۱-۱ مانند f از $[0,1)$ به‌روی $(0, 1)$ وجود دارد به‌طوری‌که f و f^{-1} هردو پیوسته هستند. اگر $a = f(0)$، آنگاه تحدید f به $(0,1)$ تابعی است پیوسته از $(0,1)$ به‌روی $(0, a) \bigcup (a, 1)$. اما این با ۴.۲.۶ متناقض است زیرا $(0,1)$ همبند است در حالی که $(0, a) \bigcup (a, 1)$ همبند نیست. شکل ۲۳ را ببینید.

درقضیهٔ بعد همبندی را به‌صورت جالبی بیان می کنیم.

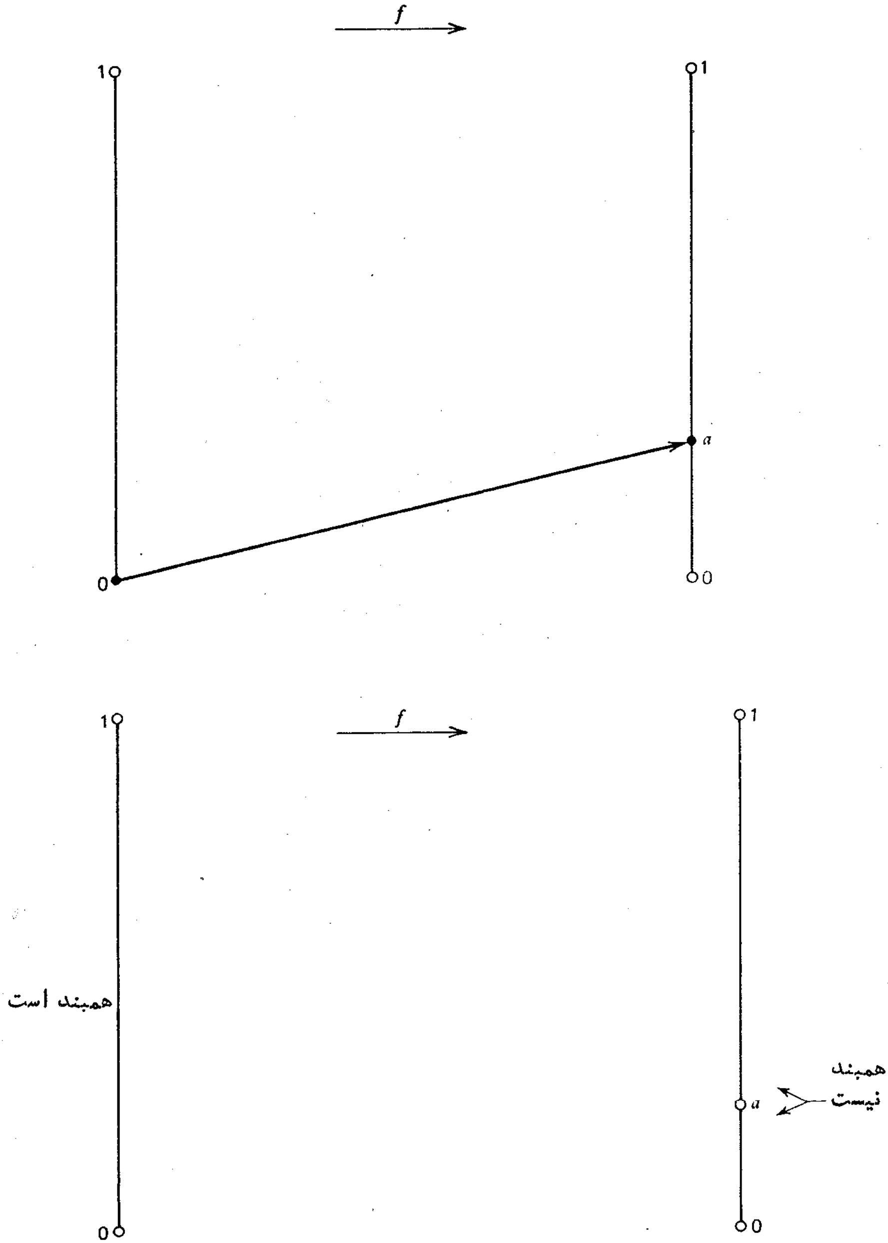
۶.۲.۶. قضیه. فرض کنیم M یك فضای متریك باشد. آنگاه M همبند است اگر و تنها اگرهر تابع مشخصهٔ پیوسته در M تابعی ثابت باشد. یعنی، M همبند است اگر وتنها اگر تابع متحد با صفر و تابع متحد با ۱ تنها توابع مشخصهٔ در M باشند که در M پیوسته‌اند.

برهان: فرض می‌کنیم $A \subseteq M$ و χ تابع مشخصهٔ A باشد. پس $A = \chi^{-1}(1)$. بنابراین اگر χ پیوسته باشد، آنگاه (بنا بر ۱۰.۵.۵) A بسته است زیرا A، نگارهٔ وارون $\{1\}$، زیرمجموعهٔ بستهٔ R^1 تحت χ است. همچنین، اگر χ پیوسته باشد، آنگاه $M - A = \chi^{-1}(0)$ بسته است، و بنابراین A باز است. درنتیجه، اگر χ یك تابع مشخصهٔ پیوسته در M باشد، آنگاه A در M هم باز و هم بسته است. ولی، اگر M همبند باشد، آنگاه $A = M$ یا $A = \varnothing$، ودرهردوحالت χ ثابت است.

اثبات عکس قضیه به‌خواننده واگذار می‌شود.

قضیهٔ ۶.۲.۶ را می‌توان برای یك اثبات سریع قضیهٔ ۴.۲.۶ به‌کار برد. فرض کنیم f یك تابع پیوسته ازفضای متریك همبند M_1 به‌توی فضای متریك M_2 باشد. برای اثبات اینکه $f(M_1)$ همبند است، بنابر ۶.۲.۶، کافی است نشان دهیم که هر تابع مشخصهٔ پیوستهٔ χ در $f(M_1)$ ثابت است. **ولی چون χ و f** هردوپیوسته هستند، (با استفاده از ۴.۳.۵) $\chi \circ f$ یك تابع مشخصهٔ پیوسته در M_1 است، و ازاین‌رو بنابر ۶.۲.۶، $\chi \circ f$ ثابت است. درنتیجه χ ثابت است. کاربرد جالب دیگر ۶.۲.۶ به‌قرار زیر است.

۷.۲.۶. قضیه. اگر A_1 و A_2 زیرمجموعه‌های همبند فضای متریك M باشند، و اگر $A_1 \bigcap A_2 \neq \varnothing$، آنگاه $A_1 \bigcup A_2$ نیز همبند است.



شکل ۲۳

برهان: فرض کنیم χ یک تابع مشخصهٔ پیوسته در $A_1 \bigcup A_2$ باشد. اگر $x_0 \in A_1 \bigcap A_2$، آنگاه بنابر ۶.۲.۶، چون A_1 همبند است

$$\chi(x) = \chi(x_0) \qquad (x \in A_1)$$

وچون A_2 همبند است

$$\chi(x) = \chi(x_0) \qquad (x \in A_2).$$

ازاین‌رو χ متحد با $\chi(x_0)$ و درنتیجه ثابت است. بنابر ۶.۲.۶، $A_1 \bigcup A_2$ همبند است و برهان کامل است.

تمرینهای ۲.۶

۱. اگر f یك تابع پیوستهٔ حقیقی غیرثابت در R^1 باشد، آنگاه ثابت کنید که برد f شمارا نیست.

۲. ثابت کنید که هیچ تابع حقیقی پیوستهٔ f در R^1 وجود ندارد به‌طوری‌که

اگر x گویا باشد، $f(x)$ گنگ باشد

و

اگر x گنگ باشد، $f(x)$ گویا باشد.

۳. ثابت کنید که بازهٔ $[0, 1]$ یك زیرمجموعهٔ همبند R_d نیست.

۴. گزارهٔ زیر راست است یا دروغ؟ اگر A و C زیرمجموعه‌های همبند فضای متریك M باشند، واگر

$$A \subseteq B \subseteq C,$$

آنگاه B همبند است.

۵. اگر A زیرمجموعهٔ همبند فضای متریك M باشد، ثابت کنید که $\bar{A}$ همبند است. (راهنمایی: ۶.۲.۶ را به‌کار برید.)

۶. اگر A زیرمجموعهٔ همبند فضای متریك M باشد. واگر $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$، ثابت کنید که B همبند است.

۷. ثابت کنید که مجموعهٔ تمام نقاط روی یك علامت «منها» (اگر به‌عنوان یك زیرمجموعهٔ R^2 درنظر گرفته‌شود) با مجموعهٔ تمام نقاط روی یك علامت «به‌علاوه» همسانریخت نیست. (راهنمایی: ابتدا مشخص کنید که آیا نقطهٔ مرکزی علامت به علاوه می‌تواند نگارهٔ یکی از نقاط انتهایی علامت منها تحت یك همسانریختی باشد؟)

۸. رئوس برهان اینکه هرعدد $c \geqslant 0$ یك ریشهٔ دوم دارد در زیر آمده است؛ آن‌را به‌تفصیل بنویسید.

(الف) فرض کنیم $f(x) = x^2 (0 \leqslant x < \infty)$. آنگاه f در $[0, \infty)$ پیوسته‌است، و 0 در برد f است.

(ب) اگر $c \geqslant 0$، آنگاه $c \leqslant (1+c)^2$ و $(1+c)^2$ دربرد f است.

(ج) بنابراین، c در برد f است. (چرا؟) ازاین‌رو x_1ای هست که $f(x_1)=x_1^2=c$. عدد x_1 ریشهٔ دوم c است.

۳.۶ مجموعه‌های کراندار و مجموعه‌های کراندار کلی

۱.۳.۶ تعریف. فرض‌کنیم $\langle M, \rho\rangle$ یك فضای متریك باشد. گوییم که زیرمجموعهٔ A از M کراندار است اگر عددی مثبت مانند L باشد به‌طوری که

$$\rho(x, y) \leqslant L \qquad (x, y \in A).$$

اگر A کراندار باشد، قطر A را (که با $\operatorname{diam} A$ نشان می‌دهیم) چنین تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{diam} A = \underset{\substack{x\in A\\ y\in A}}{\mathrm{l \cdot u \cdot b \cdot}} \rho(x, y).$$

اگر A کراندار نباشد، آنگاه می‌نویسیم $\operatorname{diam} A=\infty$.

بنابراین، تعریف مجموعهٔ کراندار در یك فضای متریك دلخواه با تعریف مجموعهٔ کراندار از اعداد حقیقی که در ۱.۷.۱ آمده سازگار است. یك زیرمجموعهٔ R^1 مانند A کراندار است اگر و تنها اگر A در بازه‌ای به طول متناهی واقع شود. به‌همین ترتیب، به‌آسانی می‌توان دید که یك زیرمجموعهٔ R^2 (یا R^3) کراندار است اگر و تنها اگر در یك مربع (یا مکعب) که یالهای متناهی داشته باشند، واقع شود.

بازهٔ $(0, \infty)$ یك زیرمجموعهٔ کراندار R^1 نیست. ولی $(0, \infty)$ یك زیرمجموعهٔ کراندار R_d است، زیرا

$$\rho(x, y) \leqslant 1 \qquad (x, y \in R_d).$$

درواقع، قطر هر زیرمجموعهٔ R_d مانند A که لااقل دو عضو داشته باشد مساوی ۱ است.

۲.۳.۶ مثال‌دیگری که بعداً موردتوجه خواهدبود به‌قرار زیر است: برای هر $k\in I$، فرض‌کنیم e_k دنباله‌ای باشدکه‌تمام جمله‌هایش، بجز جملهٔ kام که ۱ است، برابر ۰ باشد. پس‌مثلا e_3 دنبالهٔ ... , ۰ , ۰ , ۰ , ۱ , ۰ , ۰ است. دراین‌صورت $e_k \in l^2$ و زیرمجموعهٔ E از l^2 را چنین تعریف می‌کنیم:

$$E=\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}.$$

اگر $j\neq k$، آنگاه $\rho(e_j, e_k)=\|e_j-e_k\|_2=\sqrt{2}$. ازاین‌رو E کراندار است و $\operatorname{diam} E=\sqrt{2}$.

مثال اخیر نشان می‌دهد که یك زیرمجموعهٔ l^2 ممکن است کراندار باشد و با وجود این نسبتاً «بزرگ» باشد به‌این مفهوم که دارای تعدادی نامتناهی عنصر باشد که هیچ‌کدام «نزدیك» به دیگری نباشد. در نظریهٔ فضاهای متریك عمومی مفهوم «کراندار کلی» از مفهوم «کراندار» مفیدتر است.

۳.۳.۶ تعریف. فرض کنیم $\langle M, \rho\rangle$ یک فضای متریک باشد. زیرمجموعهٔ M مانند A کراندار کلی نامیده می‌شود اگر، به‌ازای هرعددمثبت ε، تعدادی متناهی زیرمجموعهٔ M مانند A_1، A_2، …، A_n وجود داشته باشد به‌طوری که $\operatorname{diam} A_k < \varepsilon\ (k=1, \ldots, n)$ و $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

(آشکار است که به‌جای عبارت «$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k$» می‌توان «$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$» را قرار داد.)

اگر اجتماع مجموعه‌های A_1، A_2، … شامل مجموعهٔ A باشند، گاهی گوییم که A_kها مجموعهٔ A را می‌پوشانند. بنابراین $A \subseteq M$ کراندار کلی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر عدد مثبت ε، بتوان A را با تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های M که قطر هر یک از ε کمتر باشد پوشاند.

برخی از مؤلفین عبارت «پیش‌فشرده» را به‌جای کراندار کلی به‌کار می‌برند. «کراندار کلی» قیدی قویتر از «کراندار» است.

۴.۳.۶ قضیه. اگر زیرمجموعهٔ A از فضای متریک $\langle M, \rho\rangle$ کراندار کلی باشد، آنگاه A کراندار است.

برهان: اگر A کراندار کلی باشد، آنگاه زیرمجموعه‌های ناتهی M مانند A_1، A_2، …، A_n وجود دارند به‌گونه‌ای که $\operatorname{diam} A_k < 1\ (k=1, \ldots, n)$ و $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. برای هر $k = 1, \ldots, n$، فرض کنیم a_k نقطه‌ای در A_k باشد. سپس فرض کنیم که $D = \rho(a_1, a_2) + \rho(a_2, a_3) + \cdots + \rho(a_{n-1}, a_n)$. اکنون، برای هردو نقطهٔ $x, y \in A$، i و j یی هست که $x \in A_i$، و $y \in A_j$ (زیرا A_kها مجموعهٔ A را می‌پوشانند). می‌توان فرض کرد که $i \leqslant j$. آنگاه

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x, a_i) + [\rho(a_i, a_{i+1}) + \cdots + \rho(a_{j-1}, a_j)] + \rho(a_j, y).$$

چون $\operatorname{diam} A_i < 1$ خواهیم داشت $\rho(x, a_i) < 1$. به‌همین ترتیب $\rho(a_j, y) < 1$. ازاین‌رو

$$\rho(x, y) < 1 + D + 1 = D + 2 \qquad (x, y \in A)$$

و بنابراین A کراندار است.

کراندار و کراندار کلی در R^1 به‌یک معنی هستند. درواقع، اگر $A \subseteq R^1$ کراندار باشد، آنگاه عدد مثبتی مانند L هست به‌گونه‌ای که $A \subseteq [-L, L]$. عدد مثبت دلخواه ε مفروض است، مسلماً

$$\left[-L, -L+\frac{\varepsilon}{2}\right], \left[-L+\frac{\varepsilon}{2}, -L+2\frac{\varepsilon}{2}\right], \ldots, \left[-L+(n-1)\frac{\varepsilon}{2}, -L+n\frac{\varepsilon}{2}\right],$$

A را می‌پوشانند اگر عدد مثبت n در $n(\varepsilon/2) \geqslant 2L$ صدق کند. بنابراین، در R^1، یک

مجموعه کراندار کلی است اگر و تنها اگر کراندار باشد.

در R^n نیز همین مطلب برقرار است. برهان را (در حالت $n=۲$) در تمرین از خواننده خواسته‌ایم.

ازطرف‌دیگر، در R_d «کراندار» و «کراندار کلی» ابداً‌هم‌ارزنیستند. زیرادیده‌ایم که‌هر زیرمجموعهٔ R_d کراندار است. ولی، اگر $B \subseteq R_d$ و $\operatorname{diam} B < ۱/۲$، آنگاه B حداکثر شامل یك نقطه خواهد بود. درنتیجه تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های R_d که قطر هرکدام کمتر از ۱/۲ باشد فقط یك زیرمجموعهٔ متناهی R_d را می‌پوشانند. بنابراین

۵.۳.۶. نتیجه. زیرمجموعهٔ A از R_d کراندار کلی است اگر و تنها اگر A فقط شامل تعدادی متناهی نقطه باشد:

به‌زودی نشان خواهیم داد که زیرمجموعهٔ E از $l^۲$ که در ۲.۳.۶ تعریف کردیم کراندار است ولی کراندار کلی نیست.

بنابراین به طور خلاصه، در هر فضای متریك یك مجموعهٔ کراندار کلی، کراندار است. ولی‌در بعضی از فضاهای‌متریك مجموعه‌های کرانداری وجود دارند که کراندار کلی نیستند.

اکنون «کراندار کلی» را به‌دوصورت مهم بیان می‌کنیم.

۶.۳.۶. تعریف. فرض کنیم A زیرمجموعهٔ فضای متریك M باشد. B، زیرمجموعهٔ A را در A، ε-چگال $(\varepsilon > ۰)$ خوانیم اگر برای هر $x \in A$، یك $y \in B$ باشد به‌طوری که $\rho(x, y) < \varepsilon$. (یعنی، B در A، ε-چگال است اگر هرنقطهٔ A در فاصله‌ای کمتر از ε از نقطه‌ای از B قرار داشته باشد.)

۷.۳.۶. قضیه. زیرمجموعهٔ A از فضای متریك $\langle M, \rho \rangle$ کراندار کلی است اگر و تنها اگر، برای هر $\varepsilon > ۰$، A شامل یك مجموعهٔ متناهی $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ که در A، ε-چگال است باشد.

برهان: عدد مثبت ودلخواه ε را درنظر می‌گیریم. اگر A کراندار کلی باشد، آنگاه $A = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i$ که درآن $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$. می‌توانیم فرض کنیم که $A_i \neq \varnothing$. اگر

$$a_i \in A_i \qquad (i = ۱, ۲, \ldots, n),$$

آنگاه $\{a_۱, \ldots, a_n\}$، در A، ε-چگال است. از این‌رو، اگر A کراندار کلی باشد، آنگاه A دارای یك زیرمجموعهٔ ε-چگال متناهی است.

برعکس، اگر $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ در A، $\varepsilon/۳$-چگال باشد، آنگاه مجموعه‌های $B[x_۱; \varepsilon/۳], \ldots, B[x_n; \varepsilon/۳]$ قطرشان از ε کمتر است و A را می‌پوشانند. از این حکم قضیه نتیجه می‌شود.

حال مهمترین ویژگی مجموعه‌های کراندار کلی را عرضه می‌کنیم.

۸.۳.۶. قضیه. فرض می‌کنیم $\langle M, \rho \rangle$ یك‌فضای متریك باشد. زیرمجموعهٔ A از M کراندار کلی است اگر و تنها اگر هر دنباله از نقاط A شامل یك زیردنبالهٔ کوشی باشد.

برهان: فرض می‌کنیم A کراندار کلی باشد و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از نقاط A باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای یك‌زیردنبالهٔ کوشی‌است. مجموعهٔ A را می‌توان به‌وسیلهٔ تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های A که قطرشان کمتر از ۱ است پوشاند. یکی از این مجموعه‌ها، که آن را A_1 می‌نامیم، باید به‌ازای تعدادی نامتناهی n شامل x_n باشد. (چرا؟). عدد $n_1 \in I$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $x_{n_1} \in A_1$. اکنون آشکار است که A_1 کراندار کلی است و از این‌رو می‌توان آن را به وسیلهٔ تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های A_1 که قطرشان کمتر از $1/2$ است پوشاند. یکی از این مجموعه‌ها، که آن‌را A_2 می‌نامیم، باید به‌ازای تعدادی نامتناهی n شامل x_n باشد. فرض‌کنیم n_2 عدد صحیحی بزرگتر از n_1 باشد به‌طوری که $x_{n_2} \in A_2$. چون $A_2 \subseteq A_1$ داریم $x_{n_2} \in A_1$. اگر باهمین‌روش‌ادامه‌دهیم، برای هر $k \in I$، یك زیرمجموعهٔ A_{k-1} مانند A_k با شرط $\operatorname{diam} A_k < 1/k$، و یك‌جملهٔ $x_{n_k} \in A_k$ از دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را به‌دست می‌آوریم. از اینکه

$$x_{n_k},\ x_{n_{k+1}},\ x_{n_{k+2}},\ \ldots$$

همگی در A_k واقع‌اند، و $\operatorname{diam} A_k < 1/k$، نتیجه می‌شود که $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ یك زیردنبالهٔ کوشی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ است.

برعکس، فرض کنیم که هر دنبالهٔ نقاط از یك زیرمجموعهٔ M مانند A دارای یك زیردنبالهٔ کوشی باشد. ثابت می‌کنیم که A کراندار کلی است. فرض کنیم‌چنین نباشد. آنگاه بنابر ۷.۳.۶ عدد مثبتی مانند ε هست به‌گونه‌ای که A شامل هیچ زیرمجموعهٔ ε-چگال متناهی نیست. بنابراین اگر $x_1 \in A$، آنگاه مجموعهٔ $\{x_1\}$ در A، ε-چگال نیست، و لذا $x_2 \in A$ هست که $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. ولی $\{x_1, x_2\}$ نیز در A، ε-چگال نیست و بنابراین $x_3 \in A$ هست که $\rho(x_1, x_3) \geqslant \varepsilon$ و $\rho(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon$. اگر باهمین‌روش ادامه‌دهیم‌دنباله‌ای ازنقاط $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌دست می‌آید به‌طوری که

$$\rho(x_j, x_k) \geqslant \varepsilon \qquad (j, k \in I\,;\ j \neq k).$$

درنتیجه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ هیچ‌زیردنبالهٔ‌کوشی ندارد و این با فرض متناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که A کراندار کلی است و برهان تمام است.

از ۸.۳.۶ فوراً نتیجه می‌شود که E، زیرمجموعهٔ l^2 که در ۲.۳.۶ تعریف کردیم کراندار کلی نیست. زیرا، برای $j \neq k$ داریم $\rho(e_j, e_k) = \sqrt{2}$، ولذا دنبالهٔ $e_1, e_2, \ldots$ هیچ زیردنبالهٔ کوشی ندارد.

تمرینهای ۳.۶

۱. ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ کراندار R^2 کراندار کلی است.

۲. مثالی از یك زیرمجموعهٔ کراندار l^∞ بیاوریدکه کراندار کلی نباشد.
۳. مثالی از یك مجموعهٔ نامتناهی l^2 بیاوریدکه کراندار کلی باشد.
۴. ثابت کنیدکه هرزیرمجموعهٔ متناهی فضای متریك M کراندارکلی است.
۵. اگر $\langle M,\rho\rangle$ کراندارکلی باشد و $A\subseteq M$، ثابت کنیدکه $\langle A,\rho\rangle$ نیزکراندارکلی است.
۶. فرض کنید B یك زیرمجموعهٔ فضای متریك M باشد. ثابت کنید که B در M چگال است اگر وتنها اگر برای هر $\varepsilon>0$ مجموعهٔ B در M، ε-چگال باشد.
۷. فرض کنید A یك زیرمجموعهٔ کراندار نامتناهی R^1 باشد. ثابت کنیدکه A حداقل یك نقطهٔ انباشتگی در R^1 دارد. (راهنمایی: فرض کنید $A\subseteq J_1$ که در آن J_1 یك بازهٔ بستهٔ کراندار است. اگر J_1 را به دونیمه تقسیم کنید، آنگاه لااقل یکی از نیمه‌ها تعدادی نامتناهی از نقاط A را در بر دارد. چنین نیمه‌ای را J_2 بنامید. این روش کار را ادامه دهید.) این نتیجه به‌قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس[1] معروف است.
۸. اثبات دیگری برای قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس به ترتیب زیر ارائه دهید: فرض کنید A یك زیرمجموعهٔ نامتناهی کراندار R^1 باشد. فرض کنید $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ دنباله‌ای از نقاط متمایز A باشد. آنگاه $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ دارای یك زیردنبالهٔ کوشی است. (چرا؟) حال برهان را تمام کنید.

۴.۶ فضاهای متریك کامل

در ۴.۱۰.۲ دیدیم که در فضای متریك R^1 هردنبالهٔ کوشی‌از نقاط R^1 به‌نقطه‌ای در R^1 همگرا است. در ۶.۳.۴ نیز ملاحظه کردیم که فضاهای متریك $\langle M,\rho\rangle$ وجود دارندکه در آنها بعضی از دنباله‌های کوشی نقاط M به نقطه‌ای از M همگرا نیستند.

۱.۴.۶. تعریف. فضای متریك M راکامل گوییم اگر هر دنبالهٔ کوشی از نقاط M به‌نقطه‌ای در M همگرا باشد.

از این‌رو بنابر ۴.۱۰.۲، R^1 کامل است. در تمرینها از شما خواسته شده است ثابت کنیدکه R^2 و R_d نیز کامل هستند.

۲.۴.۶. حال نشان می‌دهیم که l^2 کامل است. اگر $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots$ یك دنبالهٔ کوشی از نقاط l^2 باشد، باید نقطه‌ای در l^2 مانند s بیابیم به‌طوری که اگر $n\to\infty$، آنگاه $s^{(n)}\to s$. چون هر $s^{(n)}$ خود یك دنباله است نمادها کمی پیچیده خواهند بود. جملهٔ kام دنبالهٔ $s^{(n)}$ را با $s_k^{(n)}$ نشان می‌دهیم به‌طوری که

$$s^{(n)}=\{s_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty \quad \text{و} \quad \|s^{(n)}\|_2^2=\sum_{k=1}^\infty s_k^{(n)2}.$$

چون $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots$ یك‌دنبالهٔ کوشی در l^2 است، به‌ازای هرعددمثبت ε، عددی مانند $N\in I$

1. Bolzano-Weierstrass

هست به‌طوری که اگر $n, m \geqslant N$، آنگاه $\rho[s^{(n)}, s^{(m)}] < \varepsilon$. یعنی،

$$\|s^{(n)} - s^{(m)}\|_۲ < \varepsilon \qquad (n, m \geqslant N), \qquad (۱)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\|s^{(n)} - s^{(N)}\|_۲ < \varepsilon \qquad (n \geqslant N).$$

ازاین‌رو، اگر $n \geqslant N$،

$$\|s^{(n)}\|_۲ = \|[s^{(n)} - s^{(N)}] + s^{(N)}\|_۲ < \varepsilon + \|s^{(N)}\|_۲.$$

بنابراین، عدد مثبت A هست به‌طوری که

$$\|s^{(n)}\|_۲ \leqslant A \qquad (n \geqslant N). \qquad (۲)$$

حال، برای هر $k \in I$، با استفاده از (۱) داریم

$$|s_k^{(n)} - s_k^{(m)}| \leqslant \|s^{(n)} - s^{(m)}\|_۲ < \varepsilon \qquad (n, m \geqslant N).$$

ازاین‌رو (برای k ی ثابت) دنبالهٔ $\{s_k^{(n)}\}_{n=۱}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی در $R^۱$ است و لـذا، بنابر ۴.۱۰.۲، به‌عددی مانند $s_k \in R^۱$ همگراست. فرض کنیم s دنبالهٔ $\{s_k\}_{k=۱}^{\infty}$ را نشان دهد. ابتدا ثابت می‌کنیم که $s \in l^۲$. بنابر (۲) داریم

$$\sum_{k=۱}^{\infty} s_k^{(n)۲} \leqslant A^۲ \qquad (n \geqslant N).$$

ازاین‌رو برای هر $L \in I$،

$$\sum_{k=۱}^{L} s_k^{(n)۲} \leqslant A^۲ \qquad (n \geqslant N). \qquad (۳)$$

ولی برای L ، … ، ۲ ، $k = ۱$ داریم $s_k^{(n)} \to s_k$ وقتی $n \to \infty$. ازاین‌رو اگـر در (۳)، $n \to \infty$، و ۱.۷.۲ و ۵.۷.۲ را به‌کار بریم، خواهیم داشت.

$$\sum_{k=۱}^{L} s_k^۲ \leqslant A^۲ \qquad (L = ۱, ۲, \ldots).$$

نتیجه می‌شود که

$$\sum_{k=۱}^{\infty} s_k^۲ \leqslant A^۲,$$

که ثابت می‌کند $s = \{s_k\}_{k=۱}^{\infty}$ در $l^۲$ است. بنابر (۱) داریم

$$\sum_{k=۱}^{\infty} (s_k^{(n)} - s_k^{(m)})^۲ < \varepsilon^۲ \qquad (n, m \geqslant N).$$

ازاین‌رو برای $L \in I$،

$$\sum_{k=۱}^{L} (s_k^{(n)} - s_k^{(m)})^۲ < \varepsilon^۲ \qquad (n, m \geqslant N).$$

اگر $m \to \infty$ (و $\lim\limits_{m \to \infty} s_k^{(m)} = s_k$، ۱.۷.۲، و ۵.۷.۲ را به‌کار بریم)، داریم

$$\sum_{k=۱}^{L} (s_k^{(n)} - s_k)^۲ \leqslant \varepsilon^۲ \qquad (n \geqslant N ; L \in I),$$

و بنا براین

$$\sum_{k=1}^{\infty}(s_k^{(n)}-s_k)^2\leqslant\varepsilon^2 \qquad (n\geqslant N).$$

این بدان معنی است که اگر $N \geqslant n$، $\rho(s^{(n)}, s)=||s^{(n)}-s||_2\leqslant\varepsilon$ و لذا ثابت می‌شود که ... ,$s^{(2)}$,$s^{(1)}$ در l^2 به‌نقطهٔ s همگراست. پس برهان‌کامل است.

۳.۴.۶ قضیه. اگر $\langle M, \rho\rangle$ یك فضای متریك‌کامل و A زیرمجموعهٔ بسته‌ای‌از M باشد، آنگاه $\langle A, \rho\rangle$ نیزکامل است.

برهان: فرض‌می‌کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ‌کوشی ازنقاط $\langle A, \rho\rangle$ باشد. باید نشان دهیم‌که $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌نقطه‌ای در A همگراست. چون $A\subseteq M$، $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ‌کوشی از نقاط M است. از این‌رو چون M کامل است، $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به نقطه‌ای از M مانند x همگراست. ولی x یك‌نقطهٔ حدی A است زیرا x حد دنباله‌ای ازنقاط A است. ازاین‌رو چون A بسته است، $x\in A$، و برهان کامل است.

پس‌فضای‌متریك $[0,1]$ (بامتریك قدرمطلق) کامل‌است. زیرا $[0,1]$ یك زیرمجموعهٔ بستهٔ R^1 است.

اینك تعمیمی از قضیهٔ ۵.۱۰.۲، یعنی قضیهٔ بازه‌های تودرتو ارائه می‌شود.

۴.۴.۶ قضیه. فرض می‌کنیم $\langle M, \rho\rangle$ یك فضای متریك کامل باشد. به ازای هر $n\in I$ فرض می‌کنیم F_n یك زیرمجموعهٔ‌کراندار بستهٔ ناتهی از M باشد به‌طوری‌که

(الف) $F_1\supseteq F_2\supseteq \cdots F_n\supseteq F_{n+1}\supseteq\cdots$،

و

(ب) $n\to\infty\Rightarrow \operatorname{diam} F_n\to 0$.

آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ دقیقاً شامل یك نقطه است.

برهان: به‌ازای هر $n\in I$، فرض‌کنیم a_n نقطه‌ای از F_n باشد. آنگاه، بنا بر(الف)

(۱) a_n، a_{n+1}، a_{n+2}، ... همگی در F_n هستند.

به‌ازای هر $\varepsilon>0$، بنا بر (ب)، عدد صحیح $N\in I$ هست به‌طوری‌که $\operatorname{diam} F_N<\varepsilon$. حال a_N، a_{N+1}، a_{N+2}، ... همگی در F_N واقع‌اند. سپس برای $m, n\geqslant N$ داریم $\rho(a_n, a_m)\leqslant \operatorname{diam} F_N<\varepsilon$. این ثابت می‌کند که $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی است. چونMکامل‌است، نقطه‌ای‌ازM مانند a هست به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} a_n=a$. آنگاه گزارهٔ (۱) نشان می‌دهد که به‌ازای‌هر $n\in I$، a یك نقطهٔ حدی مجموعهٔ بستهٔ F_n است، پس $a\in F_n$. بنا براین $a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$. اگر $b\in M$، $b\neq a$، آنگاه برای nهایی‌که به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشند $\rho(a, b)>\operatorname{diam}F_n$. پس b در $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ نیست. این برهان را کامل می‌کند.

۵.۴.۶ اکنون می‌خواهیم به‌رده‌ای از توابع به‌نام ردهٔ انقباضها بپردازیم. گرچه

مفید بودنشان فوراً معلوم نخواهد شد، ولی کاربردهای مهمی خواهند داشت. در یکی از فصلهای بعدی نتیجه‌ای از ردهٔ انقباضها را برای اثبات یک قضیهٔ وجودی معادلات دیفرانسیل به‌کار خواهیم برد.

برای ساده‌کردن نمادهای این مبحث، اگر $T : M \to M$ و اگر $x \in M$، آنگاه به‌جای $T(x)$ می‌نویسیم Tx. همچنین، به‌جای $T \circ T$ و $T \circ T^{۲}$ به‌ترتیب $T^{۲}$ و $T^{۳}$ می‌نویسیم و براین قیاس ادامه می‌دهیم.

تعریف. فرض می‌کنیم $\langle M, \rho \rangle$ یك فضای متریك باشد. اگر $T : M \to M$، آنگاه T را یك انقباض در M خوانیم اگر عددی حقیقی مانند α با شرط $۰ \leqslant \alpha < ۱$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant \alpha \rho(x, y) \qquad (x, y \in M).$$

(تأکید می‌کنیم که عدد α باید مستقل از x و y باشد.)

درنتیجه T یك انقباض است اگر فاصلهٔ Tx تا Ty از α برابر فاصلهٔ x تا y بزرگتر نباشد. می‌بینیم که به‌هردو نقطه که انقباض T اعمال شود فاصلهٔ بین آنها را «منقبض» یعنی کم می‌کند.

برخواننده است که ثابت کند اگر T یك انقباض در M باشد، آنگاه T در M پیوسته است.

اینك مثال ساده‌ای از انقباض می‌آوریم. اگر $u = \{u_n\}_{n=۱}^{\infty} \in l^{۲}$، فرض می‌کنیم $Tu = \{u_n/۲\}_{n=۱}^{\infty}$. در این‌صورت T یك انقباض در $l^{۲}$ است. زیرا اگر $v = \{v_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نقطهٔ دلخواه دیگری در $l^{۲}$ باشد، آنگاه

$$\rho(Tu, Tv) = \|Tu - Tv\|_{۲} = \left[\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{u_n}{۲} - \frac{v_n}{۲}\right)^{۲}\right]^{۱/۲} = \frac{۱}{۲}\|u - v\|_{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}\rho(u, v).$$

پس، در این مثال α را می‌توان برابر ۱/۲ گرفت. آشکار است که برای این T یك و تنها یك دنبالهٔ $s \in l^{۲}$ وجود دارد به‌طوری که $Ts = s$، وآن دنبالهٔ ...,۰,۰,۰,۰ است. این توضیحی است برقضیهٔ زیر که به‌قضیهٔ نقطهٔ ثابت پیکار یا باناخ موسوم است.

۶.۴.۶ قضیه. فرض می‌کنیم $\langle M, \rho \rangle$ یك فضای متریك کامل باشد. اگر T یك انقباض در M باشد، آنگاه یك وتنها یك نقطهٔ x در M وجود دارد به‌طوری که $Tx = x$. (اغلب این قضیه به‌صورت «T دقیقاً یك نقطهٔ ثابت دارد» بیان می‌شود.)

برهان: فرض کنیم $x, y \in M$. داریم $\rho(Tx, Ty) \leqslant \alpha \rho(x, y)$ که در آن $۰ \leqslant \alpha < ۱$. آنگاه $\rho(T^{۲}x, T^{۲}y) \leqslant \alpha \rho(Tx, Ty) \leqslant \alpha^{۲} \rho(x, y)$. در واقع، برای هر $n \in I$، به‌آسانی می‌توان نشان داد که

$$\rho(T^n x, T^n y) \leqslant \alpha^n \rho(x, y) \qquad (x, y \in M). \tag{۱}$$

اکنون نقطهٔ دلخواهی از M مانند $x_{\circ}$ را اختیار می‌کنیم. فرض‌کنیم $x_{۱} = Tx_{\circ}$، $x_{۲} = Tx_{۱}$، ...، $x_{n+۱} = Tx_n$. پس $x_{۲} = T^{۲}x_{\circ}$ و برای‌هر $n \in I$، $x_n = T^n x_{\circ}$. نخست نشان می‌دهیم که $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی است زیرا اگر $m, n \in I$ (و مثلا اگر $m > n$ به‌طوری که $m = n + p$) داریم

$$\begin{aligned}&\rho(x_n, x_m)\\ &= \rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+۱}) + \rho(x_{n+۱}, x_{n+۲}) + \cdots + \rho(x_{n+p-۱}, x_{n+p})\\ &= \rho(T^n x_{\circ}, T^n x_{۱}) + \rho(T^{n+۱} x_{\circ}, T^{n+۱} x_{۱}) + \cdots + \rho(T^{n+p-۱} x_{\circ}, T^{n+p-۱} x_{۱}).\end{aligned}$$

از این‌رو بنا بر (۱)

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m) &\leqslant \alpha^n \rho(x_{\circ}, x_{۱}) + \alpha^{n+۱}\rho(x_{\circ}, x_{۱}) + \cdots + \alpha^{n+p-۱}\rho(x_{\circ}, x_{۱})\\ &\leqslant \alpha^n \rho(x_{\circ}, x_{۱})(۱ + \alpha + \alpha^{۲} + \cdots),\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \frac{\alpha^n \rho(x_{\circ}, x_{۱})}{۱ - \alpha}.$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = \circ$، به‌آسانی نتیجه می‌شود که می‌توان $\rho(x_n, x_m)$ را به‌طور دلخواه کوچك ساخت اگر n (و درنتیجه m) را به‌اندازهٔ کافی بزرگ اختیار کنیم. بنابراین $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ کوشی است. از آنجا که (بنا به‌فرض) M کامل است، در M، xای هست که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = Tx$. (چرا؟) ولی $Tx_n = x_{n+۱}$ ولذا، $\{Tx_n\}_{n=۱}^{\infty}$ که زیردنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ است، باید به $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ همگرا باشد. درنتیجه $Tx = x$ و بنابراین x یك نقطهٔ ثابت است. تنها می‌ماند نشان‌دهیم که اگر $y \in M$، $y \neq x$، آنگاه y یك نقطهٔ ثابت نیست. فرض‌کنیم چنین نباشد. پس $Ty = y$ و بنابراین (چون $Tx = x$)، $\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leqslant \alpha\rho(x, y)$. از این رابطه با توجه به اینکه $\rho(x, y) \neq \circ$ نتیجه می‌شود $\alpha \geqslant ۱$ و این یك تناقض است. ازاین‌رو $Ty \neq y$ و برهان کامل است.

تمرینهای ۴.۶

۱. ثابت کنید که R_d کامل است.

۲. ثابت کنید که بازهٔ $(\circ, ۱)$ با متریك قدرمطلق یك فضای متریك کامل نیست. ثابت کنید که $(\circ, ۱)$ با متریك R_d یك فضای متریك کامل است.

۳. ثابت کنید که $R^{۲}$ کامل است.

۴. ثابت کنید که l^{∞} کامل است. (از روش اثبات اینکه $l^{۲}$ کامل است پیروی کنید.)

۵. اگر

$$T(x)=x^{2} \qquad \left(0<x\leqslant \frac{1}{3}\right),$$

ثابت کنید که T در $[0, 1/3)$ یك انقباض است ولی T نقطهٔ ثابتی ندارد.

۶. اگر $T:[0,1] \rightarrow [0,1]$ و اگر عدد حقیقی α با شرط $0 \leqslant \alpha < 1$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$|T'(x)| \leqslant \alpha \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

(T' مشتق T است)، ثابت کنید که T یك انقباض در $[0, 1]$ است.

۷. فرض کنید M یك فضای متریك باشد که هم کراندار کلی و هم کامل است. ثابت کنید که هر دنباله از نقاط M دارای زیردنباله‌ای است که به‌نقطه‌ای از M همگراست.

۸. بازهٔ $M=[0, \infty)$ با متریك $\rho(x, y)=|x-y|$ را درنظر بگیرید. فرض کنید

$$f(x)=\frac{1}{1+x^{2}} \qquad (0 \leqslant x<\infty).$$

نشان دهید که $f: M \rightarrow M$ و

$$\rho[f(x), f(y)]<\rho(x, y) \qquad (x, y \in M),$$

ولی f نقطهٔ ثابتی ندارد.

۵.۶ فضاهای متریك فشرده

فشرده‌بودن بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ است که موجب می‌شود بسیاری از قضیه‌های مربوط به توابع پیوسته در $[a, b]$ برقرار باشند. اکنون یك بحث کلی در مورد فضاهای متریك فشرده را آغاز می‌کنیم.

۶.۵.۱. تعریف. فضای متریك $\langle M, \rho\rangle$ فشرده نامیده می‌شود اگر $\langle M, \rho\rangle$ هم کامل و هم کراندار کلی باشد.

مثلاً، فضای متریك $[a, b]$ (با متریك قدرمطلق) کراندار کلی و، بنابر ۶.۴.۳، کامل است. ازاین‌رو، $[a, b]$ فشرده است. فضای متریك R^{1} کامل است ولی کراندار کلی نیست. لذا R^{1} فشرده نیست. فضای متریك $(0, 1)$ (با متریك قدرمطلق) کراندار کلی است ولی کامل نیست و از این‌رو فشرده نیست.

از ۶.۳.۵ نتیجه می‌شود که یك زیرمجموعهٔ نامتناهی R_{d} نمی‌تواند فشرده باشد. ولی به‌عنوان تمرین (تمرین ۲) به‌خواننده واگذار می‌شود ثابت کند که هر زیرمجموعهٔ متناهی R_{d} فشرده است.

یکی از صورتهای خیلی مفید فشردگی در زیر آمده است.

۶.۵.۲. قضیه. فضای متریك $\langle M, \rho\rangle$ فشرده است اگر و تنها اگر هر دنباله از نقاط M دارای زیردنباله‌ای همگرا به‌نقطه‌ای از M باشد.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم که M فشرده و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالهٔ دلخواهی از نقاط M باشد. چون M کراندار کلی است، بنابر ۸.۳.۶، دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای یك زیردنبالهٔ کوشی $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ است. ازآنجا که M کامل است $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ به‌نقطه‌ای از M همگراست. ازاین‌رو اگر M فشرده باشد، آنگاه هر دنباله در M دارای زیردنباله‌ای همگراست.

برعکس، فرض می‌کنیم که هردنباله در M زیر دنباله‌ای‌همگرا دارد. آنگاه، بنابر ۸.۳.۶، M کراندار کلی است. برای اثبات‌اینکه M کامل است باید نشان‌دهیم که‌هردنبالهٔ کوشی در M مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به نقطه‌ای از M همگراست. بنابه فرض، $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ است که به‌نقطه‌ای از M مانند x همگراست. چون $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی است، اثبات اینکه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ خود نیز به x همگراست مشکل نیست. ازاین‌رو M کامل و درنتیجه فشرده است. این برهان را کامل می‌کند.

دراینجا یك نتیجهٔ مفید ارائه می‌شود.

۳.۵.۶ نتیجه. اگر A یك زیرمجموعهٔ بستهٔ فضای متریك فشردهٔ $\langle M,\rho\rangle$ باشد، آنگاه فضای متریك $\langle A, \rho\rangle$ نیز فشرده است.

برهان: هردنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از نقاط A دنباله‌ای است از نقاط M وازاین‌رو، بنابر ۲.۵.۶، دارای زیردنباله‌ای همگرا به نقطه‌ای از M مانند x است. ولی x یك‌نقطهٔ حدی A است ولذا $x \in A$ (چون‌که A بسته است)، بنابراین، هردنباله درA دارای زیردنباله‌ای است که به‌نقطه‌ای از A همگراست. درنتیجه بنابر ۲.۵.۶، A فشرده است.

قضیهٔ زیر را درجهت دیگر داریم:

۴.۵.۶ قضیه. فرض‌کنیم A زیرمجموعهٔ فضای متریك $\langle M,\rho\rangle$ باشد. اگر $\langle A,\rho\rangle$ فشرده باشد، آنگاه A یك زیرمجموعهٔ بستهٔ $\langle M , \rho\rangle$ است.

برهان: فرض‌کنیم $x \in M$ یك نقطهٔ حدی دلخواه A باشد. آنگاه دنباله‌ای‌ازنقاط A مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود داردکه همگرا به x است. ولی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك‌دنبالهٔ کوشی‌در A است وچون A کامل است $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌نقطه‌ای از A همگراست. آشکار است که این نقطه x است و بنابراین $x \in A$. در نتیجه A شامل تمام نقاط حدیش است ولذا A بسته است. (ملاحظه‌کنید که این برهان تنهـا کمال A را به‌کار می‌برد. با این‌حال این‌قضیه در زمینهٔ فشردگی بیشتر از زمینهٔ کمال به‌کار خواهد رفت.)

۵.۵.۶ فرض‌کنیم M مجموعهٔ دلخواهی باشد. خانوادهٔ $\mathscr{F}$ از زیرمجموعه‌هایی‌از M مانند A پوشش M نامیده می‌شود. اگـر $M \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{F}} A$. تـوجه ما بیشتر معطوف به‌پوششهای‌بازخواهدبود، یعنی، پوششهای $\mathscr{F}$ از یك فضای متریك M به‌طوری که‌هر $A \in \mathscr{F}$ یك زیرمجموعهٔ باز M باشد.

مثلا به‌ازای ... $n = ۳, ۴, ۵,$ خانوادهٔ بازه‌های باز $(۱/n, ۱ - ۱/n)$ یك‌پوشش بازفضای متریك $(۰, ۱)$ (بامتریك قدرمطلق) است. ملاحظه‌کنید که دراین پوشش $(۰, ۱)$

تعدادی نامتناهی مجموعهٔ باز وجود دارد وهیچ تعداد متناهی از این مجموعه‌ها یك پوشش تشکیل نمی‌دهند!

از طرف دیگر، خواننده باید چند پوشش باز $[0,1]$ را بیازماید. خواهیم دید که اگر $\mathcal{F}$ پوشش باز دلخواهی از $[0,1]$ باشد، آنگاه تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{F}$ وجود دارند که آنها نیز یك پوشش تشکیل می‌دهند. به‌زودی اثباتی از این مطلب ارائه خواهد شد.

۶.۵.۶ تعریف. می‌گوییم که فضای متریك M دارای ویژگی هاینه‌ـبورل[1] است اگر $\mathcal{F}$ یك پوشش باز M باشد، آنگاه تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{F}$ مانند G_1، G_2، …، G_n وجودداشته باشند به‌طوری که $\{G_1, \dots, G_n\}$ نیز پوششی از M باشد.

گاهی ویژگی هاینه - بورل چنین بیان می‌شود «هر پوشش باز M یك زیرپوشش متناهی دارد». از مثال اول ۵.۵.۶ نتیجه می‌شود که فضای متریك $(0,1)$ دارای خاصیت هاینه - بورل نیست. دوقضیهٔ بعدی دلیل بررسی ویژگی هاینه - بورل دراین بخش را روشن می‌سازند.

۷.۵.۶ قضیه. اگر M یك فضای متریك فشرده باشد، آنگاه M دارای ویژگی هاینه - بورل است.*

برهان: فرض کنیم حکم قضیه برقرار نباشد. آنگاه، پوشش بازی مانند $\mathcal{F}$ وجود دارد به‌طوری که هیچ تعداد متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{F}$ پوشش M نیست. چون M کراندار کلی است، آن را می‌توان به‌صورت اجتماع تعدادی متناهی زیرمجموعه‌های کراندار که قطر هر کدامشان کمتر از ۱ باشد نوشت. اما یکی از این زیرمجموعه‌ها، که آن را A_1 می‌نامیم، با تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{F}$ پوشیده نمی‌شود. (در غیر این صورت، همهٔ M را با تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{F}$ می‌توان پوشاند.) ولی، چون $\operatorname{diam} \bar{A}_1 = \operatorname{diam} A_1$ (تحقیق کنید)، $\bar{A}_1$ یك زیرمجموعهٔ بستهٔ M است (۵.۵.۵) که قطرش کمتر از ۱ است و با تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{F}$ پوشیده نمی‌شود. چون $\bar{A}_1$ خود نیز کراندار کلی است، با همین استدلال دیده می‌شود که یك زیرمجموعهٔ $\bar{A}_1$ مانند A_2 وجود دارد به‌طوری که $\operatorname{diam} \bar{A}_2 < 1/2$ و $\bar{A}_2$ با تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{F}$ پوشیده نمی‌شود. پس $\bar{A}_2 \subseteq \bar{A}_1$، $\operatorname{diam} \bar{A}_2 < 1/2$، و $\bar{A}_2$ با تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{F}$ پوشیده نمی‌شود. اگر با همین روش ادامه دهیم، می‌توانیم نشان دهیم که برای هر $n \in I$، یك زیرمجموعهٔ M مانند $\bar{A}_n$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\bar{A}_1 \supseteq \bar{A}_2 \supseteq \dots \supseteq \bar{A}_n \supseteq \dots$، $\operatorname{diam} \bar{A}_n < 1/n$، وهیچ تعداد متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{F}$

---

1. Heine - Borel

* گاهی خاصیت هاینه‌ـبورل را تعریف فشردگی می‌گیرند، زیرا که ویژگی هاینه‌ـبورل مستقیماً به‌فضای متریك بستگی ندارد بلکه بیشتر به‌مفهوم مجموعهٔ باز بستگی دارد که در رده‌ای از فضاهای کلی‌تر از فضاهای متریك موجود است.

پوششی برای هیچ یك از $\bar{A}_n$ها نیست. بنا بر ۴.۴.۶، در $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$ تنها یك نقطهٔ x وجود دارد. حال، چون $\mathscr{F}$ یك پوشش M است، مجموعه‌ای در $\mathscr{F}$ مانند G وجود دارد به‌طوری که $x \in G$. ولی G باز است (چون که $\mathscr{F}$ یك پوشش باز است) پس به‌ازای یك $r > 0$، $B[x; r]$ وجود دارد به‌طوری که $B[x; r] \subseteq G$. اگر $N \in I$ در شرط $1/N < r$ صدق کند، آنگاه $\operatorname{diam} \bar{A}_N < 1/N < r$. چون $x \in \bar{A}_N$ داریم $\bar{A}_N \subseteq B[x; r] \subseteq G$. از این‌رو G به‌تنهایی $\bar{A}_N$ را می‌پوشاند. ولی این یك تناقض است زیرا فرض براین بود که هیچ تعداد متناهی از مجموعه‌های $\mathscr{F}$ یك پوشش $\bar{A}_N$ نباشند. این تناقض قضیه را ثابت می‌کند.

عکس ۷.۵.۶ نیز برقرار است.

۸.۵.۶ قضیه. اگر فضای متریك M دارای ویژگی هاینه-بورل باشد، آنگاه M فشرده است.

برهان: فرض می‌کنیم M فضای متریك دارای ویژگی هاینه-بورل باشد، و فرض می‌کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالهٔ دلخواهی از نقاط M باشد. برای اینکه نشان دهیم M فشرده است، برطبق ۲.۵.۶ کافی است ثابت کنیم که $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنباله‌ای است که به‌نقطه‌ای از M همگراست.

نخست فرض می‌کنیم که در حول هر x از M یك گوی باز B_x وجود داشته باشد که تنها به‌ازای تعدادی متناهی از مقادیر n شامل x_n باشد. پس خانوادهٔ تمام این B_xها یك پوشش باز M خواهد بود. آنگاه، بنا به‌فرض، تعدادی متناهی از این B_xها M را می‌پوشانند. ولی آشکار است که این ممکن نیست. زیرا، از آنجا که هر B_x شامل فقط تعدادی متناهی x_n است، اجتماع تعدادی متناهی B_x نمی‌تواند شامل همهٔ x_nها باشد.

پس xای در M وجود دارد به طوری که هر گوی در اطراف x شامل تعدادی نامتناهی x_n است. بنا براین $n_1 \in I$ وجود دارد به‌طوری که $x_{n_1} \in B[x; 1]$؛ $n_2 \in I$ هست به‌طوری که $n_2 > n_1$ و $x_{n_2} \in B[x; 1/2]$؛ در واقع، برای هر $k \in I$، n_kای هست به‌طوری که $n_k > n_{k-1}$ و $x_{n_k} \in B[x; 1/k]$. آشکار است که این زیردنبالهٔ $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ از دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌نقطهٔ x در M همگراست، و برهان کامل است.

یك شرط دیگر هم‌ارز با فشردگی را ارائه می‌کنیم.

۹.۵.۶ تعریف. گوییم که یك خانوادهٔ $\mathscr{F}$ از زیرمجموعه‌های M دارای ویژگی اشتراك متناهی است اگر اشتراك هر تعداد متناهی ازمجموعه‌های $\mathscr{F}$ (هرگز) تهی نباشد. (یعنی، هرگاه $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathscr{F}$ آنگاه $F_1 \bigcap F_2 \bigcap \cdots \bigcap F_n \neq \varnothing$.)

مثلاً، خانوادهٔ تمام بازه‌های بستهٔ $[-1/n, 1/n]$ دارای ویژگی اشتراك متناهی است. همچنین است خانوادهٔ بازه‌های باز $(0, 1/n)$.

۱۰.۵.۶ قضیه. فضای متریك M فشرده است اگر و تنها اگر $\mathscr{F}$ خانواده‌ای از

زیرمجموعه‌های بستهٔ M باویژگی اشتراك متناهی باشد، آنگاه $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F\neq\varnothing$.

برهان: نخست فرض می‌کنیم که M یك فضای متریك فشرده باشد و $\mathscr{F}$ یك‌خانواده از زیرمجموعه‌های بستهٔ M باشدکه دارای ویژگی‌اشتراك‌متناهی‌است. باید نشان‌دهیم که

$$\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F\neq\varnothing. \qquad (۱)$$

برای هر $F\in\mathscr{F}$ فرض می‌کنیم $G=F'=M-F$، وفرض می‌کنیم $\mathscr{G}$ خانوادهٔ همهٔ این Gهای باز باشد. اگر $F_1, F_2, \ldots, F_n$ تعدادی متناهی‌دلخواه ازمجموعه‌های $\mathscr{F}$ باشند، آنگاه بنابر (۱) از ۸.۲.۱

$$F_1 \bigcap F_2 \bigcap \cdots \bigcap F_n = M-(G_1 \bigcup G_2 \bigcup \cdots \bigcup G_n). \qquad (۲)$$

به‌همین ترتیب،

$$\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F = M-\bigcup_{G\in\mathscr{G}} G. \qquad (۳)$$

سمت چپ (۲) بنا به‌فرض‌تهی نیست، و بنا براین $M-(G_1 \bigcup \cdots \bigcup G_n)\neq\varnothing$. ازاین‌رو هیچ تعداد متناهی از مجموعه‌های $\mathscr{G}$، M را نمی‌پوشانند. چون M فشرده‌است، از ۷.۵.۶ نتیجه می‌شود که $\mathscr{G}$ خود پوشش M نیست. بنابراین سمت‌راست (۳) تهی‌نیست. این (۱) را ثابت می‌کند، واین چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

اثبات قسمت عکس را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

تمرینهای ۵.۶

۱. ۳.۵.۶ را با استفاده از ۱.۵.۶ ثابت کنید.

۲. ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ متناهی یك فضای متریك فشرده است.

۳. ثابت کنید که زیرمجموعهٔ A از R^2 فشرده است اگر وتنها اگر A بسته وکراندار باشد.

۴. اگر A و B زیرمجموعه‌های‌فشردهٔ R^1 باشند، ثابت کنید که $A\times B$ زیرمجموعهٔ فشردهٔ R^2 است.

۵. فرض کنید f یك تابع حقیقی پیوسته در $[a, b]$ باشد. ثابت کنید که نمودار f یك زیرمجموعهٔ فشردهٔ R^2 است.

۶. به‌ازای هر x در $(0, 1)$ فرض‌کنید I_x بازهٔ باز $(x/2, (x+1)/2)$ را نشان‌دهد. ثابت کنید که خانوادهٔ $\mathscr{G}$ متشکل از تمام I_xها یك پوشش باز $(0, 1)$ است وهیچ زیرپوشش متناهی برای $(0, 1)$ ندارد.

۷. دو مجموعهٔ مناسب به خانوادهٔ $\mathscr{G}$ از تمرین قبل اضافه کنید تا یك پوشش باز مانند $\mathscr{H}$ برای $[0, 1]$ به‌دست‌آورید. نشان‌دهید که $\mathscr{H}$ زیرپوشش متناهی‌برای $[0, 1]$ دارد.

۸. مثالی از یك زیرمجموعهٔ همبند R^1 بیاورید که فشرده نباشد.

۹. ثابت کنید که یك زیرمجموعهٔ همبند R_d فشرده است.

۱۰. مثالی از یك زیرمجموعهٔ بستهٔ کراندار از l^2 بیاورید که فشرده نباشد.
۱۱. ثابت کنید که فضای متریك M فشرده است اگر وتنها اگر هر زیرمجموعهٔ نامتناهی M یك نقطهٔ انباشتگی در M داشته باشد.

۶.۶ توابع پیوسته در فضاهای متریك فشرده

به‌دلیل اهمیت فوق‌العادهٔ قضیهٔ زیر دو برهان ارائه می‌کنیم، که هر کدام برضابطهٔ متفاوتی از فشردگی بنا شده‌اند.

۶.۶.۱. قضیه. فرض کنیم f تابعی پیوسته از فضای متریك فشردهٔ M_1 به‌توی‌فضای متریك M_2 باشد. آنگاه حوزهٔ مقادیر f، یعنی $f(M_1)$ نیز فشرده است.

برهان ۱: فرض کنیم $\mathcal{G}$ پوشش باز دلخواهی از $f(M_1)$ باشد. برای هر $G \in \mathcal{G}$، مجموعهٔ $f^{-1}(G)$ بنا بر ۵.۴.۷ یك زیرمجموعهٔ باز M_1 است. بنابراین خانوادهٔ متشکل از تمام $f^{-1}(G)$ها، $G \in \mathcal{G}$، یك پوشش باز M_1 است. از آنجا که M_1 فشرده است، تعدادی متناهی از این مجموعه‌ها، مثلا $f^{-1}(G_1)$، ...، $f^{-1}(G_n)$ نیز M_1 را می‌پوشانند. پس G_1، ...، G_n یك پوشش برای $f(M_1)$ تشکیل می‌دهند. بنابراین تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{G}$ وجود دارند که $f(M_1)$ را می‌پوشانند، و لذا $f(M_1)$ فشرده است.

برهان ۲: فرض کنیم $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالهٔ دلخواهی از نقاط $f(M_1)$ باشد. برای هر $n \in I$ نقطهٔ x_n از M_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(x_n) = y_n$. بنابر ۶.۵.۲، $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ دارد که به‌نقطه‌ای‌مانند x در M_1 همگراست. چون f در M_1 پیوسته است، از ۵.۳.۳ نتیجه می‌شود که $\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. یعنی، $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ به $f(x) \in f(M_1)$ همگراست. بنابراین هردنباله در $f(M_1)$ مانند $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنباله‌ای همگراست ولذا، بنابر ۶.۵.۲، $f(M_1)$ فشرده است.

چون فضاهای فشرده کراندار هستند نتیجهٔ زیر بدیهی است.

۶.۶.۲. نتیجه. فرض کنیم f تابعی پیوسته ازفضای متریك‌فشردهٔ M_1 به‌توی‌فضای متریك M_2 باشد. آنگاه حوزهٔ مقادیر f، یعنی $f(M_1)$، یك‌زیرمجموعهٔ کراندار M_2است.

دراین‌موقع مقتضی است که مفهوم «تابع کراندار» را معرفی کنیم.

۶.۶.۳. تعریف. فرض کنیم f تابعی از مجموعهٔ A به توی فضای متریك M باشد. تابع f را کراندار خوانیم اگر حوزهٔ مقادیر f، یعنی $f(A)$، یك زیرمجموعهٔ کراندار M باشد.

بنابراین ۶.۶.۲ می‌گوید که یك تابع پیوسته در فضای متریك فشردهٔ M_1 (به‌توی یك فضای متریك M_2) کرانداراست. اگر $M_2 = R^1$ و M_1 بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ باشد، آنگاه نتیجهٔ ۶.۶.۴ را داریم:

۴.۶.۶ نتیجه. اگر تابع حقیقی f در یك بازهٔ بستهٔ کراندار واقع در $R^۱$ پیوسته باشد، آنگاه f کراندار است.

برخواننده است که مثالهایی بیاورد که نشان دهد اگر یکی از واژه‌های «بسته» یا «کراندار» از مفروضات حذف شود آنگاه ۴.۶.۶ دیگر برقرار نخواهد بود.

۵.۶.۶ اگر f یك تابع حقیقی در مجموعهٔ A باشد، کاملاطبیعی است بگوییم که f در $a \in A$ ماکسیمم است اگر

$$f(a) \geqslant f(x) \qquad (x \in A).$$

مثلا، اگر

$$f(x)=x^۲ \qquad (-۱ \leqslant x \leqslant ۱),$$

آنگاه f در $x=۱$ و $x=-۱$ ماکسیمم است. اگر

$$g(x)=x^۲ \qquad (-\infty < x < \infty),$$

آنگاه آشکار است که g در هیچ نقطه‌ای ماکسیمم نیست. در واقع، اگر تابع حقیقی f در A از بالا کراندار نباشد، آنگاه f در هیچ نقطهٔ A نمی‌تواند ماکسیمم باشد.

از طرف دیگر، مثالهای

$$f(x)=x \qquad (۰ \leqslant x < ۱)$$

$$f(x)=\frac{x-۱}{x} \qquad (۱ \leqslant x < \infty),$$

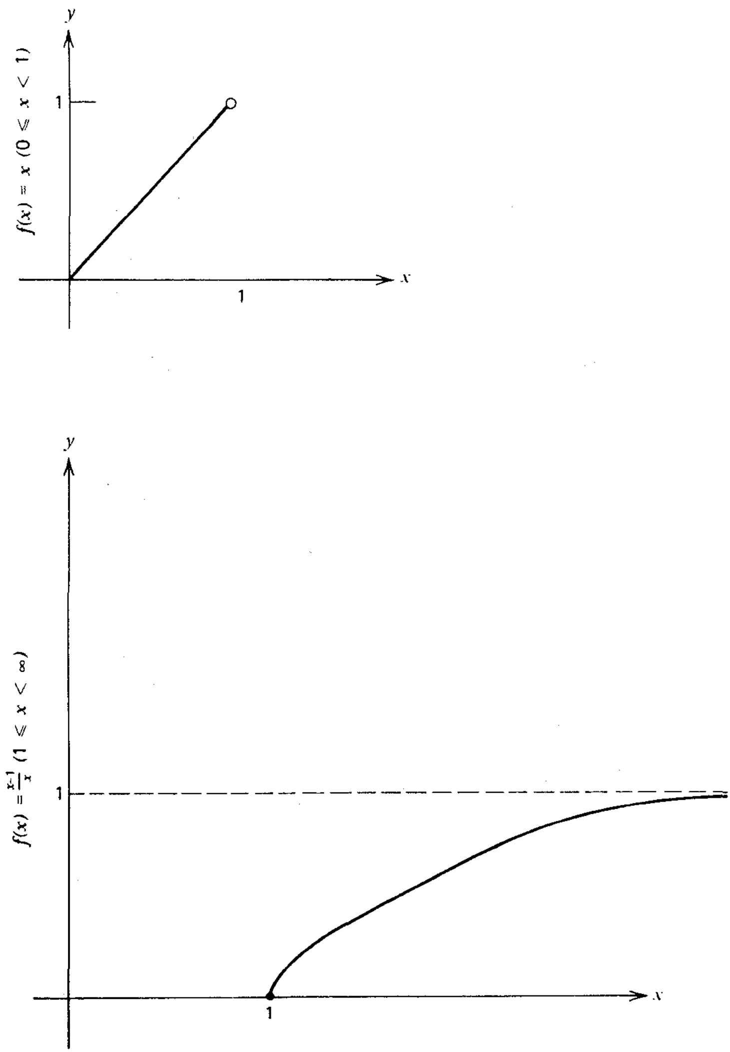
نشان می‌دهد که یك تابع حقیقی پیوستهٔ کراندار لازم نیست در هیچ نقطهٔ حوزهٔ تعریفش ماکسیمم باشد. شکل ۲۴ را ببینید.

تعریف ومثالهای مشابه برای مقدار مینیمم را به‌خواننده وا می‌گذاریم.

درقضیهٔ زیر فشردگی ظاهر می‌شود.

۶.۶.۶ قضیه. اگر تابع حقیقی f در فضای متریك فشردهٔ M پیوسته باشد، آنگاه f در نقطه‌ای از M ماکسیمم است. همچنین، f در نقطه‌ای از M مینیمم است.

برهان ۱: بنابر ۴.۶.۶، تابع f کراندار است. فرض کنیم $L=\text{l.u.b.}_{x\in M} f(x)$. برطبق تعریف کوچکترین کران بالا، عدد L یك نقطهٔ حدی $f(M)$ است. از طرفی بنابر ۱.۶.۶ می‌دانیم که $f(M)$ فشرده است. پس، بنابر ۴.۵.۶، $f(M)$ یك زیرمجموعهٔ بستهٔ $R^۱$ است. درنتیجه عدد L [که یك نقطهٔ حدی $f(M)$ است] به $f(M)$ تعلق دارد. یعنی، نقطه‌ای از M مانند a هست که $L=f(a)$. بنابراین آشکار است که f در نقطهٔ a ماکسیمم است.



شکل ۲۴ دوتابع پیوسته کراندار که هیچ‌کدام ماکسیمم ندارند.

گزارهٔ مربوط به‌مقدار مینیمم با روشی مشابه اثبات می‌شود.

برهان ۲: مجدداً فرض می‌کنیم $L=\text{l.u.b.}_{x\in M}f(x)$. اگر $L\notin f(M)$، آنگاه تابع g با تعریف

$$g(x)=L-f(x) \qquad (x\in M)$$

در M پیوسته است و g هرگز صفر نمی‌شود. پس بنا بر ۷.۳.۵، $1/g$ در M پیوسته‌است

وازاین‌رو بنابر ۶.۶.۴، $1/g$ کراندار است. درنتیجه عدد $N \geqslant 0$ هست که

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{L-f(x)} \leqslant N \qquad (x\in M).$$

لذا، برای هر x از M، $f(x) \leqslant L-1/N$. اما این بدان‌معنی است که $L-1/N$ یك کران بالای $f(M)$ است، و این یك تناقض است، زیرا بنابه‌فرض L کوچکترین کران بالای $f(M)$ بود. پس داریم $L\in f(M)$، ومانند برهان ۱ به‌نتیجه می‌رسیم.

در مبحث حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌نتیجهٔ زیر احتیاج داریم.

۶.۶.۷. نتیجه. اگر تابع‌حقیقی f دربازهٔ بستهٔ‌کراندار $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f درنقاطی از $[a, b]$ ماکسیمم و در نقاطی از $[a, b]$ مینیمم است.

تمرینهای ۶.۶

۱. اگر $f: A\to R^1$ و f در $a\in A$ ماکسیمم باشد، نشان دهید که

$$f(a)=\underset{x\in A}{\mathrm{l.u.b.}}\, f(x).$$

۲. اگر

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty<x<\infty),$$

نشان‌دهید‌که f ماکسیمم دارد ولی مینیمم ندارد.

۳. مثالی از یك تابع پیوستهٔ کراندار در $(-\infty, \infty)$ بیاورید‌که نه ماکسیمم دارد و نه‌مینیمم.

۴. مثالی از یك تابع حقیقی‌پیوسته در $(0, 1]$ بیاورید به‌گونه‌ای‌که ماکسیمم داشته‌ولی مینیمم نداشته باشد.

۵. اگر f تابع‌حقیقی پیوسته درفضای متریك همبند وفشردهٔ M باشد، ثابت‌کنید که $f(x)$ با هر مقدار بین مقدار ماکسیمم ومقدار میتیمم خود برابر می‌شود.

۷.۶ پیوستگی تابع وارون

۱.۷.۶. سؤال زیر را مطرح می‌کنیم: اگر تابع f پیوسته و ۱ـ۱ باشد، آیا تابع وارون f^{-1} لزوماً پیوسته است؟ اثبات اینکه جواب منفی است چندان مشکل نیست.

مثال اول، تابع $f: R_d \Rightarrow R^1$ با تعریف زیر را درنظر می‌گیریم

$$f(x)=x \qquad (-\infty<x<\infty).$$

یعنی، f هرعدد حقیقی را به روی خودش می‌نگارد. اما، متریك حـوزهٔ تعریف f متریك گسسته است، درحالی‌که متریك حوزهٔ مقادیر تابع f متریك قدرمطلق است. اکنون آشکار است که f تابعی ۱ـ۱ است، به‌علاوه چون هر تابع در R_d پیوسته است، f پیوسته نیز هست. با وجـود این، f^{-1} پیوسته نیست، زیرا اگـر f^{-1} پیوسته بـاشد، آنگاه f یك همسانریختی از R_d به روی R^1 خواهد بود (۱۲.۵.۵). در این صورت بنابـر (ب) از ۱۱.۵.۵، اگر G در R_d باز باشدآنگاه $f(G)$ یك مجموعهٔباز در R^1 است. ولی به‌طور آشکار چنین‌نیست، زیرا $f(G)=G$ و هر زیرمجموعه در R_d بازاست (۴.۴.۵)، اما هر زیرمجموعهٔ R^1 باز نیست.

مثالی شهودیتر، تابع g با تعریف زیر را ملاحظه‌کنید

$$g(x)=\langle\cos x,\ \sin x\rangle \qquad (0\leqslant x<2\pi).$$

آنگاه g یك تابع پیوستهٔ ۱ـ۱ از بازهٔ $J=[0,\ 2\pi)$ به روی C، محیط دایرهٔ واحد در R^2 است. ولی g^{-1} محیط را به روی بازه می‌نگارد و بنابراین نمی‌تواند پیوسته باشد، زیرا برای آنکه محیط دایره روی یك بازه گسترده شود باید «شکسته» شود. در واقـع، می‌بینیم که g^{-1} نقطهٔ $\langle 1,\ 0\rangle$ را به $0\in J$ می‌فرستد، ولی تمام نقاط C نزدیك به $\langle 1,\ 0\rangle$ و در زیرآن را به نقاط نزدیك به 2π در J می‌فرستد.

با این‌حال، اگرحوزهٔ تعریف‌تابع ۱ـ۱ وپیوستهٔ f فشرده باشد، آنگاه f^{-1} پیوسته خواهد بود.

۲.۷.۶. قضیه. اگر f یك تابع پیوستهٔ ۱ـ۱ از فضای متریك فشردهٔ M_1 به روی فضای متریك M_2 باشد، آنگاه f^{-1} (در M_2) پیوسته‌است وبنابراین f یك‌همسانریختی از M_1 به‌روی M_2 است.

برهان: برای اثبات اینکه f^{-1} پیوسته است، بنابر۱۰.۵.۵، باید نشان‌دهیم‌که‌اگر F زیرمجموعهٔ بستهٔ دلخواهی از M_1 باشد، آنگاه نگارهٔ وارون F تحت f^{-1} در M_2 بسته‌است. ولی‌نگارهٔ وارون F تحت f^{-1}دقیقاًهمان $f(F)$ است (تحقیق‌کنید). ازاین‌رو لازم است نشان دهیم که اگر F در M_1 بسته باشد، آنگـاه $f(F)$ در M_2 بسته است. ازطرفی اگر F در M_1 بسته باشد،آنگاه بنابر ۳.۵.۶، F فشرده است. سپس بنابر ۱.۶.۶ می‌دانیم‌که $f(F)$ نیز فشرده است. در نتیجه، بنابر ۴.۵.۶، $f(F)$ در M_2 بسته است، و این‌چیزی است‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم.

به‌عنوان‌یك‌کاربرد ۲.۷.۶ نشان می‌دهیم‌که $\sqrt{x}$ تابع پیوسته‌ای از x است. به‌طور دقیقتر، اگر

$$g(x)=\sqrt{x} \qquad (0\leqslant x<\infty),$$

ثابت می‌کنیم که g در $[0,\ \infty)$ پیوسته است. به‌ازای هر $N\in I$ تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=x^2 \qquad (0\leqslant x\leqslant N)$$

تابعی است پیوسته و ۱ـ۱ از فضای فشردهٔ $[0, N]$ به‌روی $[0, N^2]$. پس، بنابر ۲.۷.۶، f^{-1} در $[0, N^2]$ پیوسته است. ولی f^{-1} دقیقاً تحدید g به $[0, N^2]$ است. درنتیجه g در $[0, \infty)$ پیوسته است.

تمرینهای ۷.۶

۱. در این تمرین شهود خود را به‌کار برید. فرض کنید f تابعی باشد که هر نقطهٔ یک نقشهٔ مسطح جهان را به‌روی نقطهٔ نظیر آن روی کره می‌فرستد.

(الف) آیا f پیوسته است؟

(ب) آیا f^{-1} پیوسته است؟

۲. ثابت کنید که به‌ازای هر $n \in I$ تابع $\sqrt[n]{x}$ پیوسته است.

۳. نشان‌دهید که اگر f یك تابع پیوستهٔ ۱ـ۱ از یك فضای متریك M به‌توی R_d باشد، آنگاه f^{-1} پیوسته است و بنابراین f یك همسانریختی است.

۴. نشان‌دهید که اگر f یك تابع پیوستهٔ ۱ـ۱ از R^1 به‌توی R^1 باشد، آنگاه f یك همسانریختی است.

۸.۶ پیوستگی یکنواخت

۱.۸.۶. تعریف کرده‌ایم که تابع حقیقی f درنقطهٔ $a \in R^1$ پیوسته است اگر برای هر عدد مثبت ε، عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \qquad (|x-a|<\delta).$$

به‌طور کلی، عدد δ نه‌تنها به ε بلکه به‌نقطهٔ a نیز بستگی دارد. مثلاً، فرض کنیم

$$g(x)=x^2 \qquad (-\infty<x<\infty).$$

آنگاه برای $\varepsilon=2$، گزارهٔ

$$|g(x)-g(a)|<2 \qquad \left(|x-a|<\frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

برای $a=1$ برقرار است. [زیرا در این‌صورت $g(x)-g(a)=x^2-a^2=x^2-1$. اگر $|x-a|<1/2$، آنگاه $0/5<x<1/5$ و بنابراین $-3/4<g(x)-g(a)<5/4$.] ولی، گزارهٔ (۱) برای $a=10$ برقرار نیست. زیرا، برای $a=10$، داریم $g(x)-g(a)=x^2-100$. اگر $x=10\frac{1}{4}$، آنگاه $|x-a|<1/2$ ولی $g(x)-g(a)=(10\frac{1}{4})^2-10^2=5\frac{1}{16}$ و بنابراین $|g(x)-g(a)|>2$.

از این‌رو (گرچه g در نقاط ۱۰ و ۱ پیوسته است) به عنوان یك δی نظیر $\varepsilon=2$،

عدد $\delta = ۱/۲$ در $a = ۱$ به‌کار می‌آید ولی در $a = ۱۰$ به‌کار نمی‌آید.

درواقع، به‌سادگی می‌توان نشان‌داد که عدد مثبتی مانند δ وجود ندارد که گزارهٔ

$$|g(x)-g(a)|<۲ \qquad (|x-a|<\delta) \qquad (۲)$$

برای همهٔ عناصر $R^۱$ مانند a برقرار باشد. زیرا فرض کنیم δیی باشد که برای همهٔ aها (۲) برقرار باشد، دراین‌صورت برای $a>۰$ و $x = a+\delta/۲$ خواهیم داشت

$$|g(x)-g(a)| = |(x-a)(x+a)| = |x-a||x+a| = \frac{\delta}{۲}\cdot|۲a+\frac{\delta}{۲}|<۲\cdot$$

از این‌نتیجه می‌شود که برای تمام aهای مثبت

$$a\delta<۲$$

و این به‌طور آشکار برقرار نیست. پس، برای این تابع g، متناظر با $\varepsilon = ۲$ یك‌عدد δ که برای همهٔ aها «کارساز» باشد وجود ندارد. (با اینکه g درهر $a \in R^۱$ پیوسته است.)

اگر تابع پیوسته چنان باشد که برای هر ε، همواره بتوانیم δیـی بیابیم کـه به a بستگی نداشته فقط به ε بستگی داشته باشد آنگاه می‌گوییم که این تابع پیوستهٔ یکنواخت است. اکنون این مطلب را برای توابع درفضاهای متریك روشن می‌سازیم.

۲.۸.۶. تعریف. فرض کنیم $\langle M_۱, \rho_۱\rangle$ و $\langle M_۲, \rho_۲\rangle$ فضاهای متریك باشند. اگر $f: M_۱ \to M_۲$، گـوییم که f در $M_۱$ پیوستهٔ یکنواخت است اگر برای هر $\varepsilon>۰$، عدد $\delta>۰$ باشد به‌طوری که

$$\rho_۲[f(x), f(a)]<\varepsilon \qquad [\rho_۱(x,a)<\delta;\ a\in M_۱]\cdot$$

در حالت خاص کـه $\langle M_۱, \rho_۱\rangle = \langle M_۲, \rho_۲\rangle = R^۱$ داریم «تـابع حقیقی f در $R^۱$ پیوستهٔ یکنواخت است اگر برای هر $\varepsilon>۰$ عدد $\delta>۰$ باشد به‌طوری که

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \qquad (|x-a|<\delta; -\infty<a<\infty)\cdot»$$

آنچه که دراینجا باید مورد تأکید واقع شود آن است که برای عدد دلخواه ε، δ باید به گونه‌ای باشد که گزارهٔ

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \qquad (|x-a|<\delta)$$

همزمان برای هر a برقرار بـاشد. بنابراین تابع g در ۱.۸.۶ در $R^۱$ پیوستهٔ یکنواخت نیست هرچند که g در $R^۱$ پیوسته است.

ازاین‌رو، چنین نیست که هر تابعی که در یك فضای متریك M پیوسته است، در M پیوستهٔ یکنواخت هم باشد. ازطرف دیگر، از ۲.۸.۶ آشکار است که اگر f در M پیوستهٔ یکنواخت باشد آنگاه f درهر نقطهٔ $a\in M$ پیوسته است و لذا f در M پیوسته است.

حال نشان خواهیم داد که اگر M فشرده باشد، آنگاه پیوستگی f در M، پیوستگی یکنواخت f در M را نتیجه می‌دهد. (بنابراین در یک فضای متریک فشرده، یک تابع پیوسته است اگر و تنها اگر پیوستهٔ یکنواخت باشد.)

۳.۸.۶ قضیه. فرض کنیم $\langle M_1, \rho_1\rangle$ یک فضای متریک فشرده باشد. اگر f تابعی پیوسته از M_1 به توی فضای متریک $\langle M_2, \rho_2\rangle$ باشد، آنگاه f در M_1 پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان: بنا به فرض، f در هر $a\in M_1$ پیوسته است. ازاین‌رو برای هر $a\in M_1$، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد عدد مثبت r (که به a بستگی دارد) وجود دارد به‌طوری که

$$\rho_2[f(x),\ f(a)]<\frac{\varepsilon}{2} \qquad [\rho_1(x, a)<r]. \tag{1}$$

برای هر $a\in M_1$ گوی باز $B[a; r/2]$ را در نظر می‌گیریم، خانوادهٔ تمام این گویهای باز یک پوشش باز M_1 است. چون M_1 فشرده است، تعدادی متناهی از این گویها، مثلا $B[a_1; r_1/2]$، ...، $B[a_n; r_n/2]$ وجود دارند که M_1 را می‌پوشانند. حال، فرض کنیم $\delta=\min(r_1/2, \dots, r_n/2)$. هر $a\in M_1$ در یکی از این گویهاست، مثلا به‌ازای یک j، $a\in B[a_j; r_j/2]$، $1\leqslant j\leqslant n$، و لذا $\rho_1(a, a_j)<r_j/2$. اکنون اگر $\rho_1(x, a)<\delta$، آنگاه $\rho_1(x, a)<r_j/2$ وازاین‌رو $\rho_1(x, a_j)<r_j$. سپس بنابر (۱) (با a_j، r_j به‌جای a، r) داریم

$$\rho_2[f(x),\ f(a_j)]<\frac{\varepsilon}{2}$$

و

$$\rho_2[f(a),\ f(a_j)]<\frac{\varepsilon}{2},$$

از این نتیجه می‌شود که $\rho_2[f(x),\ f(a)]<\varepsilon$. پس اگر $\delta=\min(r_1/2, \dots, r_n/2)$ نشان داده‌ایم که برای هر $a\in M_1$،

$$\rho_2[f(x),\ f(a)]<\varepsilon \qquad [\rho_1(x, a)<\delta].$$

این ثابت می‌کند که f در M_1 پیوستهٔ یکنواخت است.

۴.۸.۶ نتیجه. اگر تابع حقیقی f در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f در $[a, b]$ پیوستهٔ یکنواخت است.

۵.۸.۶ تابع f با تعریف

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad (0<x\leqslant 1)$$

در $[0, 1)$ پیوسته است. ولی راهی وجود ندارد تا $f(0)$ را به طریقی تعریف کنیم که تابع حاصل از توسیع f در $[0, 1]$ پیوسته باشد. (چرا؟)

به‌عنوان مثال دیگری از این‌قبیل، تابع g با تعریف

$$g(x)=\sin\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0)$$

در $R^1-\{0\}$ پیوسته و کراندار است. ولی نمی‌توان g را به‌تابعی توسیع داد که در تمام R^1 پیوسته باشد. (زیرا $\lim_{x\to 0} g(x)$ وجود ندارد.)

سؤال زیر را مطرح می‌کنیم: اگر تابع f در یك زیرمجموعهٔ چگال (۱۳.۵.۵) فضای متریك M پیوسته باشد، چه موقع می‌توانیم f را به‌تابعی پیوسته در تمام M توسعه دهیم؟ پاسخ جزئی که در اینجا آمده است متضمن پیوستگی یکنواخت است.

۶.۸.۶. قضیه. فرض کنیم $\langle M_1, \rho_1\rangle$ یك فضای متریك و A یك زیرمجموعهٔ چگال M_1 باشد. اگر f یك تابع پیوستهٔ یکنواخت از $\langle A, \rho_1\rangle$ به توی فضای متریك کامل $\langle M_2, \rho_2\rangle$ باشد، آنگاه می‌توان f را به‌یك تابع پیوستهٔ یکنواخت F از M_1 به‌توی M_2 توسعه داد.

برهان: ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی از نقاط A باشد، آنگاه $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ در M_2 کوشی است. درواقع، برای عدد مثبت دلخواه ε عدد $\delta>0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\rho_2[f(x), f(y)]<\varepsilon \qquad [\rho_1(x, y)<\delta; x, y\in A] \tag{1}$$

(چنین δیی را می‌توانیم بیابیم زیرا f در A پیوستهٔ یکنواخت است.) حال، چون $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در A کوشی است عدد $N\in I$ هست به‌طوری که

$$\rho_1(x_m, x_n)<\delta \qquad (m, n\geqslant N). \tag{2}$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$\rho_2[f(x_m), f(x_n)]<\varepsilon \qquad (m, n\geqslant N),$$

و این ثابت می‌کند که $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ در M_2 کوشی است.

اکنون اگر $x\in A$، آنگاه $F(x)$ را مساوی $f(x)$ تعریف می‌کنیم. اگر $x\in M_1$ ولی $x\notin A$، آنگاه بنا به فرض، x یك نقطهٔ حدی A است. ازاین‌رو دنباله‌ای از نقاط A مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ هست به‌طوری که $\lim_{n\to\infty} x_n=x$. دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در M_1 همگراست وازاین‌رو یك دنبالهٔ

کوشی از نقاط A است. سپس برطبق پاراگراف اول، $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ در M_2 کوشی است. چون M_2 کامل است، $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ وجود دارد. درنتیجه‌تعریف زیر را می‌آوریم

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

برخواننده‌است‌نشان‌دهدکه اگر $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالهٔ دلخواه دیگری در A باشدکه به x همگراست، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. این نشان‌خواهدداد‌که تعریف $F(x)$ به انتخاب $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ بستگی ندارد.

درنتیجه $F(x)$ را برای‌هر $x\in M_1$ تعریف کرده‌ایم، و آشکاراست‌که F یك‌توسیع f است. می‌ماند ثابت کنیم که F در M_1 پیوستهٔ یکنواخت‌است. برای‌عدد دلخواه $\varepsilon>0$ عدد δ_1 را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم‌که

$$\rho_2[f(x),\ f(y)]<\frac{\varepsilon}{3} \qquad [\rho_1(x,y)<\delta_1;\ x,y\in A]. \tag{۳}$$

اگر $a,\ b\in M_1$، آنگاه نقاط x و y از A را اختیار می‌کنیم به‌گونه‌ای که $\rho_1(x,\ a)<\delta_1/3$، $\rho_1(y,\ b)<\delta_1/3$ وهمچنین

$$\rho_2[F(x),\ F(a)]<\frac{\varepsilon}{3} \tag{۴}$$

$$\rho_2[F(y),\ F(b)]<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{۵}$$

[وجود x و y با این شرایط از تعریف $F(a)$ و $F(b)$ نتیجه می‌شود.] پس، اگر $\rho_1(a,\ b)<\delta_1/3$، داریم

$$\rho_1(x,\ y)<\rho_1(x,\ a)+\rho_1(a,\ b)+\rho_1(b,\ y)<\frac{\delta_1}{3}+\frac{\delta_1}{3}+\frac{\delta_1}{3}=\delta_1.$$

سپس از (۳) داریم [چون که $f(x)=F(x)$ و $f(y)=F(y)$]

$$\rho_2[F(x),\ F(y)]<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{۶}$$

از (۴)، (۵)، و (۶) نتیجه می‌گیریم که

$$\rho_2[F(a),\ F(b)]<\varepsilon$$

فقط به‌شرط آنکه $\rho_1(a,\ b)<\delta/3$. این نشان می‌دهدکه F در M_1 پیوستهٔ یکنواخت

است، و برهان تمام است.

از ۶.۸.۶ نتیجه می‌شود که هیچ کدام از f و g در ۵.۸.۶ پیوستهٔ یکنواخت نیستند.

تمرینهای ۸.۶

۱. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، عدد $\delta>0$ را بیابید به‌گونه‌ای که

$$|\sin x-\sin a|<\varepsilon \qquad (|x-a|<\delta;\ -\infty<a<\infty).$$

[راهنمایی: قضیه (یا قانون) میانگین را برای $f(x)=\sin x$ به‌کار برید.] نتیجه بگیرید که تابع سینوس در $(-\infty, \infty)$ پیوستهٔ یکنواخت است.

۲. فرض کنید که f یک تابع حقیقی در $[a, b]$ و قدرمطلق شیب هر خط قاطع برنمودار f نابیشتر از ۱ باشد. ثابت کنید که f در $[a, b]$ پیوستهٔ یکنواخت است.

۳. کدام یک از توابع با تعریفهای زیر پیوستهٔ یکنواخت هستند؟

(الف) $(0\leqslant x\leqslant 1)$ $\quad f(x)=x^3$.

(ب) $(0\leqslant x<\infty)$ $\quad f(x)=x^3$.

(ج) $(0\leqslant x<\infty)$ $\quad f(x)=\sin x^2$.

(د) $(0\leqslant x<\infty)$ $\quad f(x)=1/(1+x^2)$.

۴. فرض کنید که تابع حقیقی f در $(0, 1)$ پیوستهٔ یکنواخت باشد. ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ وجود دارد.

۵. فرض کنید که f یک تابع حقیقی پیوسته در R^1 باشد و

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0=\lim_{x\to-\infty} f(x). \qquad (*)$$

ثابت کنید که f در R^1 پیوستهٔ یکنواخت است. [راهنمایی: $(*)$ و ۴.۸.۶ را به‌کار برید.]

۶. ثابت کنید که هر تابع از R_d به‌توی یک فضای متریک پیوستهٔ یکنواخت است.

۷. فرض کنید M یک فضای متریک باشد، $x_0\in M$، و

$$f(x)=\rho(x, x_0) \qquad (x\in M).$$

ثابت کنید که f در M پیوستهٔ یکنواخت است.

۸. ثابت کنید که یک تابعِ پیوستهٔ یکنواخت، دنباله‌های کوشی را به دنباله‌های کوشی می‌فرستد.

۹.۶ ملاحظات و تمرینهای اضافی فصلهای ۴، ۵، و ۶

I. نظریه‌ای که حدهای نامتناهی را جایز می‌شمرد

۹.۶.۱. تاکنون، عمداً حد دنباله‌ای از اعداد حقیقی را عددی متناهی گرفتیم و عدد نامتناهی را به‌عنوان حد جایز نشمردیم. فکر می‌کنیم که این کار مناسب باشد، چون که در ابتدای کار از دشوارتر شدن مفهوم حد جلوگیری می‌کند.

اما نظریه‌ای که ∞ و $-\infty$ را به‌عنوان حد می‌پذیرد برتریهایی دارد، و در اینجا مشخص می‌کنیم که در این نظریه چگونه باید عمل کرد. چون قبلا «نظریهٔ حدهای متناهی» را به‌طور مفصل شرح داده‌ایم، بحث طولانی نخواهد شد.

ابتدا مجموعه‌ای را که به‌اعداد حقیقی توسعه یافته مشهور است تعریف می‌کنیم. این مجموعه که با R^* نشان‌داده می‌شود شامل کلیهٔ اعداد حقیقی و نمادهای ∞ و $-\infty$ است. به‌منظور توسیع ترتیب R به R^* روابط زیر را می‌پذیریم

$$a<\infty \qquad (a\in R),$$

$$-\infty<a \qquad (a\in R).$$

تمرین: فرض می‌کنیم $f(\infty)=1$، $f(-\infty)=-1$، و

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|} \qquad (x\in R),$$

و ρ را با

$$\rho(x, y)=|f(x)-f(y)| \qquad (x, y\in R^*)$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که ρ یك متریك R^* است.

۹.۶.۲. به‌منظور توسعهٔ جمع و تفریق از R به R^* تعریفهای زیر را می‌آوریم

$$a+\infty=\infty+a=\infty \qquad (a\in R),$$

$$a+(-\infty)=(-\infty)+a=-\infty \qquad (a\in R),$$

$$\infty+\infty=\infty,$$

$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty,$$

$$-(-\infty)=\infty,$$

و

$$a-b=a+(-b) \qquad (a, b\in R^*),$$

با این استثنا که $\infty-\infty$ یا $\infty+(-\infty)$ را تعریف نمی‌کنیم. درمورد ضرب تعریفهای

زیر را می‌آوریم

$$a(\infty)=\infty(a)=\infty \qquad (0<a\leqslant\infty),$$
$$a(-\infty)=(-\infty)a=-\infty \quad (0<a\leqslant\infty),$$
$$a(\infty)=(\infty)a=-\infty \qquad (-\infty\leqslant a<0),$$
$$a(-\infty)=(-\infty)a=\infty \qquad (-\infty\leqslant a<0).$$

اما $0(\infty)$، $(-\infty)0$، $0(\infty)$، یا $0(-\infty)$ را تعریف نمی‌کنیم.

تمرین: نشان‌دهید که جمع وضرب در R^* تعویضپذیر وشرکتپذیرند. آیا قانون توزیعپذیری

$$a(b+c)=ab+ac \qquad (a,\ b,\ c\in R^*)$$

به‌شرط آنکه دوطرف برابری تعریف شده باشند، برقرار است؟

۳.۹.۶ اکنون‌حدها را تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای ازعناصر R^* باشد.

اگر $L\in R$، گوییم که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای حد L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=L$ اگر شرط مذکور در ۱.۲.۲ برقرار باشد. ملاحظه کنید که دراین‌حالت تنها برای تعدادی متناهی n ممکن است s_n بینهایت باشد.

گوییم که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ حد ∞ است ومی‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\infty$ اگر شرط مذکور در ۱.۴.۲ برقرار باشد. دراین‌حالت تنها به‌ازای تعدادی متناهی n ممکن‌است s_n، $-\infty$ باشد. ولی به‌ازای‌تعدادی نامتناهی n، واحتمالا تمام مقادیر n ممکن است s_n بینهایت باشد.

$-\infty$ به‌عنوان حد تعریفی مشابه دارد.

دراین بخش از واژه‌های همگرا و واگرا اجتناب می‌کنیم.

تمرین ۱: ثابت کنید که هر دنبالهٔ یکنوا از عناصر R^* حدی دارد. (گزاره‌های ۲.۶.۲، ۴.۶.۲، و ۵.۶.۲ به‌این گزارهٔ ساده خلاصه می‌شوند.)

تمرین ۲: ثابت کنید که حد مجموع (دنباله‌های R^*) با مجموع حدها برابر است، به‌شرط آنکه مجموع حدها تعریف شده باشد. مشابه همین تمرین را درمورد حاصلضرب انجام دهید.

تمرین ۳: اگر ρ متریك R^* باشدکه در ۱.۹.۶ تعریف کردیم، ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(n,\infty)=0$. ملاحظه کنید که بنا بر ۳.۳.۴، این مطلب را می‌توانیم چنین بنویسیم

$n\to\infty$ وقتی $n\to\infty$.

تمرین ۴: فرض کنید $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در R^* باشد. نشان دهید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای حد s در R^* است اگر و تنها اگر

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \rho(s_n, s)=0.$$

۴.۹.۶ اکنون به‌تعریف سوپرمم (sup) واینفیمم (inf) در R^* می‌پردازیم. فرض کنیم E یك زیرمجموعهٔ ناتهی R^* باشد. اگر $E\subseteq R$ و E با تعریف ۱.۷.۱ از بالا کراندار باشد، آنگاه

$\sup E$ را کوچکترین کران بالای E تعریف می‌کنیم:

$$\sup E = \text{l.u.b.}\ E.$$

اگر $\infty\in E$ یا اگر $E\subseteq R$ ولی E ازبالا کراندار نباشد، آنگاه $\sup E$ را ∞ تعریف می‌کنیم:

$$\sup E=\infty.$$

به‌همین ترتیب، تعریف می‌کنیم

$$\inf E=\text{g.l.b.}\ E,$$

اگر $E\subseteq R$ و E از پایین کراندار باشد، و

$$\inf E=-\infty,$$

اگر $-\infty\in E$ یا $E\subseteq R$ ولی E از پایین کراندار نباشد.

به‌این ترتیب $\sup E$ و $\inf E$ برای تمام زیرمجموعه‌های ناتهی R^* تعریف‌می‌شوند. این به‌تعاریف $\limsup$ و $\liminf$ای منجر می‌شود که از تعاریف نظیر در ۹.۲ کمتر پیچیده هستند.

فرض کنیم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای ازعناصر R^* باشد. فرض می‌کنیم

$$M_n=\sup\{s_n, s_{n+1}, \cdots\} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

که درنتیجه $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ غیرصعودی و از این‌رو دارای حدی است. تعریف می‌کنیم:

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} s_n=\lim_{n\longrightarrow\infty} M_n.$$

با این تعریف، احتیاجی نیست در مبحث حدها در R^* تعریف را به‌دو قسمت مانند ۱.۹.۲ و ۲.۹.۲ تفکیك کنیم. همچنین ملاحظه کنید که در واقع

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} s_n=\lim_{n\longrightarrow\infty}[\sup\{s_n, s_{n+1}, \cdots\}].$$

به‌همین‌ترتیب $\liminf$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lim_{n \to \infty} \inf s_n = \lim_{n \to \infty} [\inf \{s_n, s_{n+1}, \cdots\}].$$

ازاین‌رو عیناً مانند R، هر دنباله در R^* دارای یك $\lim \sup$ و یك $\lim \inf$ است.

تمرین ۱: فرض کنید $\{s_n\}$ دنباله‌ای در R^* باشد. نشان‌دهید که $\{s_n\}$ دارای‌حداست اگر و تنها اگر

$$\lim_{n \to \infty} \sup s_n = \lim_{n \to \infty} \inf s_n.$$

تمرین ۲: اگر $\lim_{n \to \infty} \sup s_n = L \in R^*$، نشان دهید که $\{s_n\}$ دارای زیردنباله‌ای است که حدش L است.

تمرین ۳: فرض کنید $\{s_n\}$ دنباله‌ای در R^* باشد. آنگاه $\{s_n\}$ زیردنباله‌ای دارد که دارای حد است. (با ۱۳.۹.۲ مقایسه کنید.)

دراینجا بحث ما با حدهای نامتناهی تمام می‌شود.

در بقیهٔ کتاب (بجز در بعضی از تمرینهای اضافی) برمی‌گردیم به‌تعاریف معمول که در بخشهای ۱.۲ تا ۱۲.۲ معرفی کردیم. یعنی

$\lim_{n \to \infty} s_n$ باید متناهی باشد،

$\{s_n\}$ همگراست، یعنی $\{s_n\}$ دارای حدی است،

$\{s_n\}$ واگراست، یعنی $\{s_n\}$ همگرا نیست.

II. ناپیوستگیهای تابع یکنوا

۵.۹.۶ بجاست که نماد $f(c+)$ را با تعریف زیر معرفی کنیم:

$$f(c+) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

به‌شرط آنکه این‌حد یکطرفه وجود داشته باشد. به‌همین‌ترتیب

$$f(c-) = \lim_{x \to c^-} f(x).$$

از ۱.۴ می‌بینیم که اگر f در $[0, 1]$ تابعی غیرنزولی باشد، آنگاه $f(c+)$ و $f(c-)$ درهر $c \in (0, 1)$ وجود دارند (همچنین $f(0+)$ و $f(1-)$ وجود دارند). بنابراین اگر $0 < c < 1$، آنگاه f در c پیوسته خواهد بود اگر وتنها اگر

$$f(c-) = f(c) = f(c+).$$

اکنون، چون f غیرنزولی است، آشکار است که

$$f(c) \leqslant f(c+) \quad \text{و} \quad f(c-) \leqslant f(c)$$

درنتیجه اگر f در c پیوسته نباشد، $f(c-) < f(c+)$. دراین‌حالت، عدد

$$f(c+) - f(c-)$$

جهش f در c نامیده می‌شود، ومی‌گوییم که f در c یك ناپیوستگی جهشی دارد. اگر f در ۰ پیوسته نباشد، آنگاه جهش f در ۰ عبارت‌است‌از $f(0+) - f(0)$. به‌همین‌ترتیب، جهش f در ۱ (اگر جهشی وجود داشته باشد) برابر است با $f(1) - f(1-)$. دلیل واژهٔ «جهش» از نمودار مثال سادهٔ زیر آشکار می‌شود:

$$g(x) = 0 \qquad (0 \leqslant x < c),$$

$$g(c) = \frac{1}{2},$$

$$g(x) = 1 \qquad (c < x \leqslant 1).$$

مثلاً، اگر تابع غیرنزولی f در $[0,1]$ یك ناپیوستگی در $c \in [0,1]$ داشته باشد، آنگاه این ناپیوستگی یك ناپیوستگی جهشی است (درمقابل نوع ناپیوستگی تابع «بسیار نوسانی» h درصفر، که در زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \sin\frac{1}{x} \qquad (0 < x \leqslant 1),$$

$$h(0) = 0).$$

شاید غیرمنتظره باشد که یك تابع غیرنزولی f در $[0,1]$ دارای تعدادی نامتناهی ناپیوستگی باشد. به‌تابع f که در زیر تعریف شده است توجه‌کنید.

$$f(x) = 0 \qquad \left(0 \leqslant x < \frac{1}{2}\right),$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \qquad \left(\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{4}\right),$$

$$f(x) = \frac{3}{4} \qquad \left(\frac{3}{4} \leqslant x < \frac{7}{8}\right),$$

$$\vdots$$

و به‌ازای $x = 1$، $f(1) = 1$.

تمرین: نشان‌دهید که این تابع در نقطه‌های $(2^n)/1-1$ به ازای $n=1, 2, \ldots$ دارای جهش $(2^n)/1$ است.

۶.۹.۶. مثال‌فوق‌نشان می‌دهدکه یك‌تابع غیرنزولی در$[0,1]$ ممکن است تعدادی شمارا ناپیوستگی داشته باشد. قضیهٔ زیر بیان می کند که تعداد ناپیوستگیها نمی‌تواند ناشمارا باشد.

قضیه: فرض کنیم f در $[0,1]$ تابعی غیرنزولی باشد. آنگاه تعداد ناپیوستگیهای f حداکثر شماراست.

برهان را با این پرسش‌شروع کنید که f چندناپیوستگی با جهش بزرگتراز ۱می‌تواند داشته باشد؟ چند ناپیوستگی با جهش بزرگتر از $2/1$؟

تمرین: برهان را تمام‌کنید.

۷.۹.۶. قابل‌توجه‌است‌که مجموعهٔ نقاط‌ناپیوستگی یك تابع غیرنزولی ممکن است هرمجموعهٔ شمارای دلخواهی باشد. مثلاً، تابعی غیرنزولی در$[0,1]$ عرضه می‌کنیم‌که در هرعددگویای $(0,1)$ ناپیوسته است.

فرض‌کنیم $r_1, r_2, \ldots$ شمارشی از تمام اعدادگویای $(0,1)$ باشد. به ازای هر $n=1, 2, \ldots$، تابع t_n را با ضابطهٔ زیر تعریف می کنیم

$$t_n(x)=0 \qquad (0\leqslant x<r_n)$$

$$t_n(x)=\frac{1}{n^2} \qquad (r_n\leqslant x\leqslant 1),$$

دراین‌صورت t_n دارای جهش $1/n^2$ در نقطهٔ r_n است. فرض می‌کنیم

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} t_n(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

تمرین: ثابت‌کنید که f در $[0,1]$ غیرنزولی است و f در هر r_n ناپیوسته است. (همچنین می‌توان ثابت‌کرد‌که f درهر عدد‌گنگ پیوسته است. پس از بررسی همگرایی یکنواخت درفصل ۹ این مطلب را از سرمی‌گیریم.)

III. نقاط انباشتگی، نقاط تنها، و فضاهای‌گسسته

۸.۹.۶. فرض‌کنیم M یك‌فضای متریك باشد. یادآور می‌شویم‌که اگر $A\subseteq M$، آنگاه $x\in M$ یك نقطهٔ انباشتگی A است اگر هر گوی باز درحول x شامل نقطه‌ای از A غیرازx باشد. ازاین نتیجه می‌شودکه درهر گوی باز به‌مرکز یك‌نقطهٔ انباشتگی A مانند x تعدادی نامتناهی از نقاط A وجود دارد. (چرا؟)

پس نقطهٔ $x\in M$ یك نقطهٔ انباشتگی M است اگـر هرگوی باز درحول x شامل

تعدادی نامتناهی از نقاط M باشد.

ازطرف دیگر، اگر $x \in M$ یك نقطهٔ انباشتگی M نباشد، آنگاه گوی بازی به‌مرکز x وجود داردکه هیچ نقطهٔ دیگری از M را در بر ندارد. دراین‌حالت می گوییم که x یك نقطهٔ تنهای M است.

بنابراین هــر نقطهٔ یك فضای متریك یا یك نقطهٔ انباشتگی و یــا یك نقطهٔ تنهاست. مثلا، اگر

$$N=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \cup \{0\}$$

را با متریك قدرمطلق درنظر بگیریم، آنگاه ۰ تنها نقطهٔ انباشتگی N است و بقیهٔ نقــاط تنها هستند.

اگر x یك نقطهٔ تنهای فضای متریك M باشد، آنگاه $\{x\}$ یك گوی باز، و ازاین‌رو یك مجموعهٔ باز است. اگر تمام نقاط M تنها باشند، آنگاه هرزیرمجموعهٔ تك‌عنصری M و درنتیجه هر زیرمجموعهٔ M باز است. چنین فضای متریك را فضای متریك گسسته نامیم.

مثلا، فضای R_d گسسته است، زیرا به طور آشکارا هر نقطهٔ R_d تنهاست. به‌هرحال، ملاحظه کنیدکه فضای متریك $\langle M, \rho\rangle$ ممکن است گسسته باشد هرچندکه ρ متریك گسسته نباشد (یعنی، متریکی که فقط مقادیر ۰ و ۱ را می گیرد). در واقع فضای

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\},$$

با متریك قدرمطلق، گسسته است.

در هریك از تمرینهای زیر M یك فضای متریك است.

تمرین ۱: فرض کنید اگر $\mathscr{F}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های باز M باشد، آنگــاه $\bigcap_{G \in \mathscr{F}} G$ باز است. ثابت کنیدکه M گسسته است.

تمرین ۲: فرض کنید هرزیــرمجموعهٔ M یا بــاز باشد یا بسته. ثــابت کنیدکه M حداکثر یك نقطهٔ انباشتگی دارد.

تمرین ۳: اگر M نامتناهی باشد (یعنی، M دارای تعدادی نامتناهی نقطه باشد)، ثابت کنید که M شامل یك زیرمجموعهٔ باز Gاست به‌طوری‌که G و G' (متمم G) هردو نامتناهی هستند.

تمرین ۴: اگر M نامتناهی باشد، نشان‌دهیدکه M زیرمجموعه‌ای نامتناهی‌مانند A داردکه با متریك M یك فضای گسسته است.

تمرین ۵: فرض کنیدکه بستار هرزیرمجموعهٔباز M مانند G، یعنی $\overline{G}$، نیز باز باشد. ثابت کنیدکه M گسسته است.

تمرینهای گوناگون

۱. فرض کنید $\langle M, \rho\rangle$ یك فضای متریك باشد. نشان دهید که $\rho/(1+\rho)$ نیز یك متریك M است.

۲. نشان‌دهید که هرفضای متریك با یك‌فضای متریك کراندار همسانریخت‌است.

۳. مثالی از زیرمجموعه‌های R^1 مانند A و B بیاورید به‌طوری که‌هیچ کدام ازچهارمجموعهٔ $A\bigcap\overline{B}$، $\overline{A}\bigcap B$، $\overline{A\bigcap B}$، $\overline{A}\bigcap\overline{B}$ مساوی دیگری نباشد.

۴. نشان‌دهید که در R^2 یك زیرمجموعهٔ باز ناتهی وجود دارد به‌طوری‌که نمی‌توان آن‌را به‌صورت اجتماع تعدادی متناهی یا شمارا از گویهای دوبه‌دو مجزا در R^2 نوشت. (در نتیجه قضیهٔ ۶.۴.۵ در R^2 برقرار نیست.)

۵. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای متریك M باشد. ثابت‌کنید که هر کدام از گزاره‌های زیر دیگری را نتیجه می‌دهد:

(الف) A در M چگال است.

(ب) به‌ازای هر $r>0$ و هر $a\in M$، $B[a;r]\bigcap A\neq\varnothing$.

(ج) برای هرزیرمجموعهٔ باز ناتهی M مانند G، $A\bigcap G\neq\varnothing$.

۶. فرض کنید M یك فضای متریك باشد. گوی باز $B[a;r]$ را

$$B[a;r]=\{x\in M:\rho(a,\ x)<r\},$$

تعریف کرده‌ایم. گوی بستهٔ $B^c[a;r]$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$B^c[a;r]=\{x\in M:\rho(a,\ x)\leqslant r\}.$$

(الف) نشان‌دهید که $B^c[a;r]$ یك مجموعهٔ بسته است.

(ب) بامثالی نشان دهید که $\overline{B[a;r]}$ لزوماً با $B^c[a;r]$ مساوی نیست. یعنی، بستار گوی باز ممکن است با گوی بستهٔ آن مساوی نباشد.

(ج) مثالی از یك فضای متریك بیاورید که در آن گوی بازی باشد که یك مجموعهٔ بسته باشد ولی یك گوی بسته نباشد. (زیرمجموعه‌ای از R^2 را به‌کار برید که شامل $\langle 0, 1\rangle$، $\langle 0, -1\rangle$، و یك بازهٔ مناسب روی محور yها باشد.)

۷. فرض کنید M یك فضای متریك باشد که دارای یك زیرمجموعهٔ چگال شمارا است. اگر $A\subseteq M$، ثابت کنید که A دارای یك زیرمجموعهٔ چگال شمارا است.

۸. فرض کنید $f:R^1\to R^1$. ثابت کنید که f در $a\in R^1$ پیوسته است اگر وتنها اگر به ازای هر دنبالهٔ همگرا به a مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالهٔ $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا به $f(a)$ باشد.

۹. فرض می‌کنیم M_1، M_2 فضاهای متریك باشند و فرض می‌کنیم $f:M_1\to M_2$. ثابت کنید که f پیوسته است اگر وتنها اگر به‌ازای‌هر $A\subseteq M_1$،

$$f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}.$$

۱۰. مثالی از یك تابع پیوستهٔ f از یك فضای متریك M به‌تـوی یك فضای متریك N بیاورید به‌طوری که به‌ازای زیرمجموعه‌ای از N مانند A

$$f^{-1}(\overline{A}) \neq \overline{f^{-1}(A)}.$$

۱۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای‌متریك M باشد. f را چنین تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \rho(x, A) \qquad (x \in M).$$

ثابت کنید که f در M پیوستهٔ یکنواخت است.

۱۲. فرض کنید A یك فضای متریك همبند وحداقل دارای دونقطه باشد. نشان‌دهید که یك تابع حقیقی پیوسته در A وجود دارد کـه ثابت نیست. این مطلب را برای اثبات اینکه A ناشماراست به‌کار برید.

۱۳. یك نقشهٔ ایران را روی زمین مسطحی در داخل ایران پهن‌کرده‌ایم، ثابت‌کنیدکه‌یك نقطه از نقشه دقیقاً روی نقطهٔ متناظرش در روی زمین واقع است.

۱۴. اگر f تابعی پیوسته از $[0, 1]$ به‌توی $[0, 1]$ باشد، ثـابت‌کنیدکه f دارای یك نقطهٔ ثابت است.

۱۵. فرض کنید A یك‌زیرمجموعهٔ نامتناهی فضای متریك فشردهٔ M باشد. اگـر فضای A گسسته باشد، ثابت‌کنیدکه A در M بسته نیست.

۱۶. فرض کنید M یك فضای متریك فشرده باشد و $f: M \to M$ وفرض کنید که

$$\rho[f(x), f(y)] < \rho(x, y) \qquad (x, y \in M; x \neq y).$$

ثابت‌کنید xای در M هست به‌طـوری کـه $x = f(x)$. (کار را بـا نشان دادن اینکـه $\rho[x, f(x)]$ در M یك مینیمم دارد شروع کنید.)

۱۷. فرض کنید M فضای متریك فشرده‌ای باشدکه درآن‌بستار هر گوی باز $B[a; r]$ گوی بستهٔ $B^c[a; r]$ باشد. ثابت‌کنیدکه هر گوی باز همبند است.

خلاصهٔ برهان: با برهان‌خلف اثبات‌کنید. فـرض‌کنید $B = B[a; r]$ همبند نباشد. آنگاه $B = C \cup D$ که درآن C و D ناتهی و در B باز هستند. می‌توانیم فـرض‌کنیم که $a \in C$. اگر

$$f(x) = \rho(a, x) \qquad (x \in \overline{B} - C),$$

و اگر $s = \underset{x \in \overline{B} - C}{\text{g.l.b.}} f(x)$، آنگاه‌نقطه‌ای از D مانند d وجود داردبه‌طوری که $s = f(d)$. نقطهٔ d یك‌نقطهٔ حدی $C \supseteq B[a; s]$ است. برهان را به‌تفصیل بنویسید وآن‌را تمام‌کنید.

۱۸. فرض کنید M یك فضای متریك فشرده باشد وفرض‌کنید $f: M \to M$ به‌گـونه‌ای باشد که

$$\rho(x, y) \leqslant \rho[f(x), f(y)] \qquad (x, y \in M).$$

ثابت کنید که f تابعی به‌روی است و

$$\rho(x, y) = \rho[f(x), f(y)] \qquad (x, y \in M).$$

ازاین‌رو f حافظ فاصله است. (چنین f ای را یك طولپایی خوانند.)

خلاصهٔ برهان: برای $x \in M$ فرض می‌کنیم $x_1 = f(x)$، $x_2 = f(x_1)$، ...، $x_{n+1} = f(x_n)$، ... به‌همین ترتیب، برای $x \neq y$، فرض می‌کنیم $y_1 = f(y)$، $y_2 = f(y_1)$، وغیره.

قضیهٔ ۲.۵.۶ را به‌کار برید برای نشان‌دادن اینکه برای هر $0 < \varepsilon$، عددی مانند $k \in I$ هست به‌طوری که دو رابطهٔ زیر برقرار باشند

$$\rho(x, x_k) < \varepsilon \ , \ \rho(y, y_k) < \varepsilon.$$

بنابراین حوزهٔ مقادیر f در M چگال است. سپس فرض کنید که $\rho[f(x), f(y)] > \rho(x, y)$. آنگاه ε را طوری انتخاب کنید که

$$\rho[f(x), f(y)] > \rho(x, y) + 2\varepsilon.$$

یك تناقض به‌دست آورید. پس برای هر $x, y \in M$، $\rho[f(x), f(y)] = \rho(x, y)$. سرانجام، نشان دهید که f به‌روی M است.

۷

حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱.۷ مجموعه‌های صفر اندازه

در بخش بعد انتگرال ریمان[1] را، کــه در دروس مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگــرال به کار می‌آید تعریف می‌کنیم. خواهیم دید که یك تابع کراندار به‌شرطی انتگرال ریمان دارد که f در «تقریباً هر» نقطه پیوسته باشد. معنی‌دقیق «تقریباً هر» در زیر برحسب‌مفهوم مجموعهٔ صفراندازه تعریف خواهد شد.

اگر J بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد، طول J را با $|J|$ نشان می‌دهیم.

۱.۱.۷. تعریف. زیرمجموعهٔ E از R^1 صفراندازه نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $\varepsilon>0$، تعداد متناهی یــا شمارا بازهٔ بــاز I_1، I_2، ... وجود داشته بــاشند به طوری کــه $E\subseteq \bigcup_n I_n$ و $\sum_n |I_n|<\varepsilon$.

بنابراین E صفراندازه است اگــر، به‌ازای هــر $\varepsilon>0$، بتوان E را بــا اجتماع بازه‌های بازی که مجموع طولهایشان از ε کمتر است پوشاند. بنابراین، آشکار است که مجموعهٔ تك‌عنصری صفراندازه است.

نتیجهٔ زیر بسیار مفید است.

---

1. Riemann

۲.۱.۷. قضیه. اگر هریك از زیرمجموعه‌های R^1 مانند E_1، E_2 و ... صفراندازه باشند، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ نیز صفراندازه است.

برهان: یك عدد $\varepsilon > 0$ اختیارمی‌کنیم. چون E_n صفراندازه است، برای هر $n \in I$، تعدادی متناهی یا شمارا بازهٔ باز وجود داردکه E_n را می‌پوشانند و مجموع طولهایشان از $\varepsilon / 2^n$ کمتر است. در نتیجه اجتماع همهٔ این بازه‌های باز (به‌ازای تمام nهـای متعلق بـه I) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ را می‌پوشانـد، و مجموع طولهای تمام این بازه‌هـا (کـه تعدادشان شماراست*) کمتر از $\varepsilon / 2 + \varepsilon / 2^2 + \ldots = \varepsilon$ است. از این‌رو $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ صفراندازه است.

چون مجموعه‌های تك‌عنصری صفراندازه‌اند نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید.

۳.۱.۷. نتیجه. هر زیرمجموعهٔ شمارای R^1 صفراندازه است.

در واقع، حتی زیرمجموعه‌هایی *ناشمارا* از R^1 وجود دارند کـه صفراندازه‌اند. در فصل ۱۱ نشان خواهیم دادکه مجموعهٔ کانتور ۴.۶.۱ (کـه ناشماراست) صفراندازه است. از طرف دیگـر، یك بازهٔ باز ناتهی (هرقدرهم کوچك بـاشد) هرگز صفراندازه نیست. (تمرین ۳ را ببینید.)

اکنون معنی «تقریباً هر» را روشن می‌سازیم.

۴.۱.۷. تعریف. یك گزاره را درتقریباً هرنقطهٔ $[a, b]$ (یاتقریباً همه‌جا در $[a, b]$) برقرار خوانیم هرگاه مجموعهٔ نقاطی از $[a, b]$ کـه به‌ازای آنها گزاره برقرار نیست صفراندازه باشد.

مثلا گزارهٔ «f در تقریباً هرنقطه $[a, b]$ پیوسته است» به‌این معنی است‌که «اگـر E مجموعهٔ نقاطی از $[a, b]$ باشدکه f درآنها پیوسته نیست، آنگاه E صفراندازه‌است.» همچنین می‌توانستیم بگوییم که «f تقریباً همه‌جا در $[a, b]$ پیوسته است.»

تمرینهای ۱.۷

۱. اگـر A صفرانـدازه نباشد، و $B \subseteq A$، و B صفراندازه بـاشد، ثـابت‌کنید $A - B$ صفراندازه نیست.

۲. اگر $a < b$، ثابت کنید که $[a, b]$ رانمی‌توان با تعدادی متناهی بازهٔ باز که مجموع طولهایشان کمتر از $b - a$ باشد، پوشاند.

ویژگی هاینه ـ بورل $[a, b]$ را بـرای نشان دادن اینکه $[a, b]$ صفراندازه نیست، به‌کار برید.

---

* از ۶.۵.۱ استفاده می‌کنیم.

۳. اگر $a<b$، نشان دهید که (a, b) صفر اندازه نیست.
۴. (الف) نشان دهید که مجموعهٔ تمام اعداد گویا صفر اندازه است.
(ب) ثابت کنید که مجموعهٔ اعداد گنگ صفر اندازه نیست.
۵. گزارهٔ زیر راست است یا دروغ؟ اگر f در $[۰, ۱]$ پیوسته باشد، و در تقریباً هر نقطهٔ $x\in[۰, ۱]$، $g(x)=f(x)$، آنگاه g تقریباً همه‌جا در $[۰, ۱]$ پیوسته است.

۲.۷ تعریف انتگرال ریمان

در سرتاسر باقیماندهٔ این فصل تنها توابع حقیقی را درنظر می‌گیریم.

۱.۲.۷. تعریف. فرض کنیم $\mathscr{J}$ بازهٔ کراندار دلخواهی از اعداد حقیقی است، و f تابع (حقیقی) کرانداری در $\mathscr{J}$ است. $M[f;\mathscr{J}]$، $m[f;\mathscr{J}]$ و $\omega[f;\mathscr{J}]$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$M[f;\mathscr{J}]=\underset{x\in\mathscr{J}}{\mathrm{l.u.b.}}\, f(x),$$

$$m[f;\mathscr{J}]=\underset{x\in\mathscr{J}}{\mathrm{g.l.b.}}\, f(x),$$

$$\omega[f;\mathscr{J}]=M[f;\mathscr{J}]-m[f;\mathscr{J}].$$

(بنابراین $\omega[f;\mathscr{J}]$ دقیقاً همان تعریف ۲.۶.۵ است بـا این تفاوت که $\mathscr{J}$ باز فرض نشده است.) اگر a نقطه‌ای از $\mathscr{J}$ باشد، $\omega[f;a]$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\omega[f;a]=\mathrm{g.l.b.}\,\omega[f;J]$$

که در آن بزرگترین کران پایین روی تمام زیر بازه‌های باز $\mathscr{J}$، مانند J، به‌طوری که $a\in J$ گرفته می‌شود.* (این نیز با ۲.۶.۵ سازگار است.)

۲.۲.۷. تعریف. مقصود از زیرتقسیم $[a, b]$ یك زیرمجموعهٔ متناهی $[a, b]$ مـانند $\{x_۰, x_۱, \ldots, x_n\}$ است به گونه‌ای کـه $a=x_۰<x_۱<\cdots<x_n=b$. اگر σ و τ دو زیرتقسیم $[a, b]$ باشند، τ را تظریف σ خوانیم هـرگاه $\sigma\subseteq\tau$. (به‌عبارت دیگر، τ یك تظریف σ است به این معنی است که زیرتقسیم τ از زیرتقسیم σ با افزودن «نقاطی به‌این زیرتقسیم» به‌دست می‌آید.)

اگر $\sigma=\{x_۰, x_۱, \ldots, x_n\}$ یك زیـرتقسیم $[a, b]$ باشد، آنگاه بازه‌هـای بستهٔ $I_۱=[x_۰, x_۱]$، $I_۲=[x_۱, x_۲]$، …، $I_n=[x_{n-۱}, x_n]$ مؤلفه‌های بازه‌ای یا به‌طور خلاصه مؤلفه‌های σ نامیده می‌شوند.

---

* به‌خاطر داشته باشید که، مثلاً، $[۰, \frac{۱}{۲})$ یك بازهٔ باز $[۰, ۱]$ است.

۳.۲.۷. تعریف. فرض می‌کنیم f تابعی کراندار در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ باشد و فرض می‌کنیم σ زیرتقسیم دلخواهی از $[a, b]$ باشد. $U[f; \sigma]$، که مجموع بالای f متناظر با σ نامیده می‌شود، چنین تعریف می‌شود:*

$$U[f;\sigma]=\sum_{k=1}^{n} M[f;I_k]\cdot|I_k|$$

که در آن I_1، ...، I_n مؤلفه‌های σ هستند. به همین ترتیب، مجموع پایین $L[f;\sigma]$ چنین تعریف می‌شود

$$L[f;\sigma]=\sum_{k=1}^{n} m[f;I_k]\cdot|I_k|\cdot$$

آشکار است که $U[f;\sigma]\geqslant L[f;\sigma]$. ملاحظه کنید که اگر f تابعی نامنفی و پیوسته در $[a, b]$ باشد، آنگاه $U[f;\sigma]$ مجموع مساحتهای n مستطیل است که قاعدهٔ مستطیل kامی، I_k و ارتفاعش مساوی $\max_{x\in I_k} f(x)$ است. به‌این‌معنی که، $U[f;\sigma]$ مجموع مساحتهای «مستطیلهای محیطی» است که در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال دیده می‌شود. به‌همین ترتیب، $L[f;\sigma]$ مجموع مساحتهای «مستطیلهای محاطی» است. این تعبیرات هندسی نتایج زیر را (حداقل برای توابع پیوسته) کاملا موجه می‌سازد.

۴.۲.۷. لم. فرض کنیم f تابعی کراندار در $[a, b]$ باشد. آنگاه هرمجموع بالای f ناکوچکتر ازهرمجموع پایین f است. به‌عبارت‌دیگر، اگر σ و τ دو زیرتقسیم‌دلخواه $[a, b]$ باشند، آنگاه $U[f;\sigma]\geqslant L[f;\tau]$.

برهان: اگر σ^* تظریف دلخواهی از σ باشد نشان خواهیم دادکه

$$U[f;\sigma]\geqslant U[f;\sigma^*]\cdot \qquad (1)$$

کافی‌است رابطهٔ (۱) را درحالتی‌ثابت‌کنیم که σ^* باافزودن فقط‌یك‌نقطهٔ زیرتقسیم به‌دست‌آمده باشد. (زیرادراین‌صورت‌می‌توانیم‌استقرا را به‌کاربریم.) ازاین‌رومی‌توانیم فرض کنیم که σ دارای‌مؤلفه‌های I_1،...،I_k،...،I_n و σ^* دارای مؤلفه‌های I_1،...،I_k^*،I_k^{**}،...،I_n است که در آن $I_k=I_k^*\bigcup I_k^{**}$ و $|I_k|=|I_k^*|+|I_k^{**}|$. چون $I_k^*\subseteq I_k$ داریم $M[f;I_k^*]\leqslant M[f;I_k]$. به‌همین‌ترتیب، $M[f;I_k^{**}]\leqslant M[f;I_k]$. درنتیجه

---

* طول هربازهٔ کراندار I را با $|I|$ نشان می‌دهیم.

$$U[f;\sigma^*]=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} M[f;I_j]\cdot|I_j|+M[f;I_k^*]\cdot|I_k^*|+M[f;I_k^{**}]\cdot|I_k^{**}|$$

$$\leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} M[f;I_j]\cdot|I_j|+M[f;I_k](|I_k^*|+|I_k^{**}|)=U[f;\sigma],$$

که (۱) را ثابت می‌کند. اگر τ^* تظریف دلخواهی از τ باشد، با همین روش می‌توان نشان داد که

$$L[f;\tau]\leqslant L[f;\tau^*]. \qquad (۲)$$

ولی، چون $\sigma\bigcup\tau$ تظریفی از σ و از τ است، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$U[f;\sigma]\geqslant U[f;\sigma\bigcup\tau]\geqslant L[f;\sigma\bigcup\tau]\geqslant L[f;\tau].$$

این لم را ثابت می‌کند.

۵۰۲۰۷ از لم فوق نتیجه می‌شود

$$\text{g.l.b.}\,U[f;\sigma]\geqslant \text{l.u.b.}\,L[f;\sigma], \qquad (۱)$$

که در آن g.l.b. و l.u.b. هردو روی تمام زیرتقسیمهای σ از $[a,b]$ گرفته می‌شوند. زیرا، اگر τ زیرتقسیم دلخواهی از $[a,b]$ باشد، آنگاه لم مذکور نشان می‌دهد که $L[f;\tau]$ یك کران پایین مجموعهٔ تمام مجموعهای بالای $U[f;\sigma]$ است. از این‌رو برای هر زیرتقسیم τ

$$L[f;\tau]\leqslant \text{g.l.b.}\,U[f;\sigma].$$

ولی این می‌گوید که $\text{g.l.b.}\,U[f;\sigma]$ یك کران بالای مجموعهٔ تمام مجموعهای پایین $L[f;\tau]$ است بنابراین

$$\underset{\tau}{\text{l.u.b.}}\,L[f;\tau]\leqslant \underset{\sigma}{\text{g.l.b.}}\,U[f;\sigma],$$

که هم‌ارز با (۱) است. نابرابری (۱) رابطه‌ای مهم بین انتگرالهای بالا و پایین است.

تعریف. فرض کنیم f تابعی کراندار در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a,b]$ باشد.

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

را که انتگرال بالای f روی $[a,b]$ نامیده می‌شود چنین تعریف می‌کنیم

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\text{g.l.b.}\,U[f;\sigma]$$

که در آن .g.l.b روی تمام زیرتقسیمهای σ از $[a, b]$ گرفته می‌شود. به‌همین ترتیب

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

موسوم به‌انتگرال پایین f روی $[a, b]$ چنین تعریف می‌شود

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \text{l.u.b.}\, L[f;\sigma].$$

برای اختصار گاهی انتگرالهای بالا و پایین f را با

$$\underline{\int_a^b} f \quad \text{و} \quad \overline{\int_a^b} f,$$

نشان می‌دهیم.

توجه کنید که برای خود dx هیچ گونه معنائی قائل نمی‌شویم. از نابرابری (۱) می‌بینیم که

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f. \tag{۲}$$

به‌زودی نشان خواهیم داد که برای توابع پیوستهٔ f (و بعضی توابع دیگر)

$$\underline{\int_a^b} f \quad \text{و} \quad \overline{\int_a^b} f$$

برابرند. اما تابعهای fای وجود دارند که

$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f.$$

مثلاً، اگر χ تابع مشخصهٔ اعداد گویای $[۰, ۱]$ باشد، آنگاه برای هر بازهٔ $J \subseteq [۰, ۱]$ داریم

$$M[\chi; J] = ۱, \qquad m[\chi; J] = ۰.$$

از این‌رو، برای هر زیرتقسیم σ خواهیم داشت

$$U[\chi;\sigma] = ۱, \qquad L[\chi;\sigma] = ۰$$

در نتیجه،

$$\underline{\int_۰^۱} \chi = ۰ \quad \text{ولی} \quad \overline{\int_۰^۱} \chi = ۱.$$

۶.۲.۷. تعریف. اگر f تابعی کراندار در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ باشد، آنگاه گوییم که f در $[a, b]$ انتگرالپذیر ریمان است اگر

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

در این حالت، $\int_a^b f(x)\,dx$ (یا $\int_a^b f$) را چنین تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

ردهٔ تمام توابع f در $[a, b]$ را که انتگرالپذیر ریمان هستند با $\mathcal{R}[a, b]$ نشان می‌دهیم.

بنابراین تابع χ مذکور در ۵.۲.۷ در $[۰, ۱]$ انتگرالپذیر ریمان نیست. ازطرف دیگر، آشکار است که هر تابع ثابت در یک بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ در $[a, b]$ انتگرالپذیر ریمان است. در بخش بعد نشان می‌دهیم که دقیقاً چه‌توابعی به $\mathcal{R}[a, b]$ تعلق دارند. قضیهٔ زیر مفید خواهد بود.

۷.۲.۷. قضیه. فرض می‌کنیم f تابعی کراندار در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ باشد. آنگاه $f \in \mathcal{R}[a, b]$ اگر و تنها اگر، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، زیرتقسیم σ از $[a, b]$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$U[f; \sigma] < L[f; \sigma] + \varepsilon. \qquad (۱)$$

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم که برای عدد مثبت دلخواه ε زیرتقسیم σ وجود داشته باشد که در (۱) صدق کند. سپس، چون

$$\overline{\int_a^b} f \leqslant U[f; \sigma] \quad \text{و} \quad \underline{\int_a^b} f \geqslant L[f; \sigma].$$

داریم

$$\overline{\int_a^b} f < \underline{\int_a^b} f + \varepsilon.$$

چون ε دلخواه بود، نتیجه می‌شود که

$$\overline{\int_a^b} f \leqslant \underline{\int_a^b} f$$

و از این‌رو، بنابر (۲) از ۵.۲.۷،

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

این ثابت می‌کند که $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

برعکس، فرض می‌کنیم $f \in \mathcal{R}[a, b]$. پس

$$\overline{\int_a^b} f = \underset{\sigma}{\mathrm{g.l.b.}}\, U[f; \sigma] = \underset{\tau}{\mathrm{l.u.b.}}\, L[f; \tau] = \underline{\int_a^b} f.$$

اگر ε عددمثبت دلخواهی باشد می‌توانیم (بنا بر تعریف g.l.b.) زیرتقسیم σ را به‌طوری اختیار کنیم که

$$\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{۲} > U[f; \sigma].$$

به‌همین ترتیب، می‌توانیم زیرتقسیم τ را به‌طوری انتخاب کنیم که

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{۲} < L[f; \tau].$$

از این‌رو،

$$L[f; \tau] + \frac{\varepsilon}{۲} > U[f; \sigma] - \frac{\varepsilon}{۲}.$$

سپس بنابر (۱) و (۲) از ۴.۲.۷ داریم

$$L[f; \sigma \cup \tau] + \frac{\varepsilon}{۲} > U[f; \sigma \cup \tau] - \frac{\varepsilon}{۲}.$$

این هم‌ارز (۱) است (با $\sigma \cup \tau$ به‌جای σ).

تمرینهای ۲.۷

۱. فرض کنیم $f(x) = x \, (۰ \leqslant x \leqslant ۱)$. فرض می‌کنیم σ زیرتقسیم $\{۰, ۱/۳, ۲/۳, ۱\}$ از $[۰, ۱]$ باشد. مقادیر $U[f; \sigma]$ و $L[f; \sigma]$ را حساب کنید.

۲. برای هر $n \in I$، فرض کنیم σ_n زیرتقسیم $\{۰, ۱/n, ۲/n, \dots, n/n\}$ از $[۰, ۱]$ باشد. مقدار

$$\lim_{n \to \infty} U[f; \sigma_n]$$

را به‌ازای تابع تمرین قبل به‌دست آورید.

۰۳ اگر σ_n همان σ_n تمرین قبل باشد،

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} L[f;\sigma_n]$$

را برای تابع $f(x)=x^{۲}(۰\leqslant x\leqslant ۱)$ حساب کنید. به‌فرمول زیر احتیاج دارید

$$۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+\dots+n^{۲}=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}\quad (n\in I)\cdot$$

۰۴ اگر $f\in\mathcal{R}[۰,۱]$، $\sigma_n=\{۰,۱/n,۲/n,\dots,n/n\}$، و

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} U[f;\sigma_n]=\lim_{n\longrightarrow\infty} L[f;\sigma_n]=A,$$

ثابت کنید که $\int_{۰}^{۱} f(x)\,dx=A$.

۰۵ برای $f(x)=\sin x(۰\leqslant x\leqslant \pi/۲)$ و $\sigma_n=\{۰,\pi/۲n,۲\pi/۲n,\dots,n\pi/۲n\}$ مقدار $U[f;\sigma_n]$ را حساب کنید. اتحاد ۴۰۸۰۳ (با $x=\pi/۲n$) را برای نشان دادن رابطهٔ زیر به‌کار برید.

$$U[f;\sigma_n]=\frac{\pi/۴n}{\sin(\pi/۴n)}\left[\cos\frac{\pi}{۴n}-\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴n}\right)\right]\cdot$$

سپس ثابت کنید که

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} U[f;\sigma_n]=\cos ۰-\cos\frac{\pi}{۲}=۱\cdot$$

۰۶ فرض کنید f تابعی پیوسته در $[a,b]$ باشد. نکات ناگفتهٔ برهان زیر مربوط به‌اثبات $f\in\mathcal{R}[a,b]$ را بنویسید:

(الف) f در $[a,b]$ پیوستهٔ یکنواخت است.

(ب) برای عدد دلخواه $\varepsilon>۰$، عدد $\delta>۰$ وجود دارد به‌طوری که

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\qquad (|x-y|<\delta;\, x,\, y\in[a,b])\cdot$$

(ج) برای این ε زیرتقسیم σ از $[a,b]$ وجود دارد به‌طوری که، اگر I_k مؤلفهٔ دلخواهی از σ باشد، آنگاه

$$M[f;I_k]-m[f;I_k]<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot$$

(د) برای این σ،

$$U[f;\sigma]-L[f;\sigma]<\varepsilon.$$

(ه) بنابراین $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

۷. اگر f در $[0,1]$ پیوسته باشد، $\sigma_n=\{0,1/n,2/n,\dots,n/n\}$، و x_k^* نقطهٔ دلخواهی در بازهٔ $[(k-1)/n,k/n]$ $(k=1,\dots,n)$ باشد، نشان دهید که

$$L[f,\sigma_n]\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)\leqslant U[f,\sigma_n].$$

سپس نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)=\int_0^1 f.$$

(این نتیجه در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی کاربرد فراوان دارد.) (راهنمایی: پیوستگی یکنواخت f را برای نشان‌دادن اینکه برای nهای بزرگ

$$U[f;\sigma_n]-L[f;\sigma_n]<\varepsilon$$

برقرار است، به‌کار برید. نتیجه بگیرید که برای nهای بزرگ

$$U[f;\sigma_n]-\int_0^1 f<\varepsilon$$

و از این‌رو،

$$\lim_{n\to\infty}U[f;\sigma_n]=\int_0^1 f.$$

با همین روش، نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}L[f;\sigma_n]=\int_0^1 f.)$$

۸. اگر f در $[0,1]$ پیوسته باشد، ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f.$$

۹. حدهای زیر را حساب کنید

(الف) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\dots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right].$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{۲\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right). \quad (ب)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}(e^{۳/n}+e^{۶/n}+\cdots+e^{۳n/n}). \quad (ج)$$

۱۰. برای هر تابع f در «بازهٔ» $[a, a]$. ثابت کنید که $\int_a^a f = ۰$.

۱۱. گزارهٔ زیر راست است یا دروغ؟ اگر $f\in\mathscr{R}[a, b]$، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(u)\,du=\int_a^b f(g)\,dg.$$

۳.۷ وجود انتگرال ریمان

۱.۳.۷ قضیه. فرض کنیم f تابعی کراندار در بازهٔ بستهٔ کرانـدار $[a, b]$ باشد. آنگاه $f\in\mathscr{R}[a, b]$ اگر و تنها اگر f در تقریباً هر نقطهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که $f\in\mathscr{R}[a, b]$. ثابت می‌کنیم که مجموعهٔ E از نقاط $[a, b]$ که f در آن نقاط پیوسته نیست، صفراندازه است. اکنون، بنابر ۳.۶.۵، $x\in E$ اگر و تنها اگر $\omega[f; x]>۰$. از این‌رو، $E=\bigcup_{m=۱}^{\infty} E_m$ که در آن E_m مجموعهٔ تمام نقاط $x\in[a, b]$ است به‌طوری که $\omega[f; x]\geqslant ۱/m$. برای اثبات اینکه E صفراندازه است، بنابر ۲.۱.۷، کافی است نشان دهیم که هر E_m صفراندازه‌است. اکنون این‌کار را انجام می‌دهیم.

عدد ثابت m را درنظر بگیرید. چـون $f\in\mathscr{R}[a, b]$، بـرای عدد دلخواه $\varepsilon>۰$، بنابر ۷.۲.۷ زیرتقسیم σ از $[a, b]$ وجود دارد به‌طوری که $U[f;\sigma]-L[f;\sigma]<\varepsilon/۲m$. از این‌رو، اگر $I_۱$، ...، I_n مؤلفه‌های (بستهٔ) σ باشند، داریم

$$\sum_{k=۱}^{n} \omega[f; I_k]\cdot|I_k|=\sum_{k=۱}^{n} M[f; I_k]\cdot|I_k|-\sum_{k=۱}^{n} m[f; I_k]\cdot|I_k|$$
$$=U[f;\sigma]-L[f;\sigma],$$

و لذا،

$$\sum_{k=۱}^{n} \omega[f; I_k]\cdot|I_k|<\frac{\varepsilon}{۲m}. \quad (۱)$$

اکنون $E_m=E_m^*\bigcup E_m^{**}$ که در آن E_m^* مجموعهٔ نقاطی از E_m است که نقاط زیرتقسیم σ

هستند، و $E^{**}_m = E - E^*_m$. به‌طور آشکار، $E^*_m \subseteq J_1 \cup \cdots \cup J_p$ که‌در آن J_iها زیربازه‌های بازی هستند به‌طوری که $|J_1| + \cdots + |J_p| < \varepsilon/2$ (زیرا تعداد نقاط زیرتقسیم متناهی است). ولی اگر $x \in E^{**}_m$، آنگاه x یك نقطهٔ درونی یکی از I_kهاست. از این‌رو، $\omega[f; I_k] \geqslant \omega[f; x] \geqslant 1/m$. از این نتیجه می‌شود که اگر آن مؤلفه‌های σ را که نقطه‌ای از E^{**}_m در درونشان وجود دارد با

$$I_{k_1}, \ldots, I_{k_r}$$

نشان دهیم، داریم

$$\frac{1}{m}(|I_{k_1}| + \cdots + |I_{k_r}|) \leqslant \omega[f; I_{k_1}] \cdot |I_{k_1}| + \cdots + \omega[f; I_{k_r}] \cdot |I_{k_r}|.$$

پس، بنابر (۱)،

$$\frac{1}{m}(|I_{k_1}| + \cdots + |I_{k_r}|) < \frac{\varepsilon}{2m},$$

$$|I_{k_1}| + \cdots + |I_{k_r}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

از آنجا که E^{**}_m با نقاط درونی $I_{k_1}, \ldots, I_{k_r}$ پوشیده می‌شود، و چون E^*_m با $J_1, \ldots, J_p$ پوشیده می‌شود، نتیجه می‌گیریم که $E_m = E^*_m \cup E^{**}_m$ صفراندازه است، واین همان‌چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

برای اثبات عکس قضیه به‌یك لم احتیاج داریم.

لم. اگر برای هر x در بازهٔ بستهٔ کراندار J، $\omega[f; x] < a$، آنگاه زیرتقسیم τ از J وجود دارد به‌طوری که

$$U[f; \tau] - L[f; \tau] < a|J|. \qquad (2)$$

برهان. به‌ازای هر $x \in J$ زیربازهٔ باز I_x شامل x وجود دارد به‌طوری که $\omega[f; \bar{I}_x] < a$. چون J فشرده است، تعدادی متناهی از این I_xها J را خواهند پوشاند (بنابر ۷.۵.۶). فرض کنیم τ مجموعهٔ نقاط انتهایی این I_xها باشد. اگر I_1، I_2، ...، I_n بازه‌های مؤلفه‌ای τ باشند، داریم

$$\omega[f; I_k] < a \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

و (۲) به‌سادگی نتیجه می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم که f در تقریباً هر نقطهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $f \in \mathcal{R}[a, b]$. برای عدد دلخواه $\varepsilon > 0$، عدد $m \in I$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $(b-a)/m < \varepsilon/2$. اگر E_m مانند قسمت اول برهان تعریف شود، آنگاه، بنا به فرض E_m صفراندازه است. از این‌رو، $E_m \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ که در آن هر I_n یك زیربازهٔ باز $[a, b]$ است و

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \frac{\varepsilon}{2\omega[f; [a, b]]}.^*$$

ولی بنا بر ۴.۶.۵، E_m در R^1 بسته است. از این‌رو، E_m یك زیرمجموعهٔ بستهٔ $[a, b]$ و بنا براین فشرده است. در نتیجه تعدادی متناهی از I_nها مثلاً I_{n_1}، ...، I_{n_k} مجموعهٔ E_m را می‌پوشانند. اکنون

$$[a, b] - (I_{n_1} \cup \cdots \cup I_{n_k})$$

اجتماع بازه‌های بستهٔ J_1، ...، J_p است. به‌عبارت دیگر،

$$[a, b] = \bar{I}_{n_1} \cup \cdots \cup \bar{I}_{n_k} \cup J_1 \cup \cdots \cup J_p.$$

از آنجا که هیچ‌کدام از بازه‌های J_i $(i = 1, \ldots, p)$ شامل نقطه‌ای از E_m نیستند، بنا بر لم قبل، زیرتقسیم τ_i از J_i وجود دارد به‌طوری که $U[f; \tau_i] - L[f; \tau_i] < |J_i|/m$. اکنون زیرتقسیم σ از $[a, b]$ را به‌صورت $\sigma = \tau_1 \cup \cdots \cup \tau_p$ تعریف می‌کنیم. آنگاه مؤلفه‌های σ عبارت‌اند از مؤلفه‌های τ_1، ...، τ_p به‌اضافهٔ $\bar{I}_{n_1}$، ...، $\bar{I}_{n_k}$. از این‌رو،

$$\begin{aligned}
U[f; \sigma] - L[f; \sigma] &= \sum_{i=1}^{p} \{U[f; \tau_i] - L[f; \tau_i]\} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k} \{M[f; \bar{I}_{n_l}] - m[f; \bar{I}_{n_l}]\} |\bar{I}_{n_l}| \\
&< \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{p} |J_i| + \sum_{l=1}^{k} \omega[f; \bar{I}_{n_l}] \cdot |I_{n_l}| \\
&\leqslant \frac{b-a}{m} + \omega[f; [a, b]] \sum_{l=1}^{k} |I_{n_l}| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \omega[f; [a, b]] \cdot \frac{\varepsilon}{2\omega[f; [a, b]]} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

بنا بر ۷.۲.۷ داریم $f \in \mathcal{R}[a, b]$، و برهان کامل است.

---

* می‌توانیم فرض کنیم که $\omega[f; [a, b]] > 0$.

تمرینهای ۳.۷

۱. کدام‌یك از توابع زیر در $\mathcal{R}[0,1]$ هستند؟

(الف) تابع مشخصهٔ مجموعهٔ $\{0, 1/10, 2/10, 3/10, \dots, 1\}$.

(ب)
$$f(x)=\sin(1/x) \qquad (0<x\leqslant 1),$$
$$f(0)=7.$$

(ج) تابع f از تمرین ۱۰ در بخش ۳.۵.

(د) تابع مشخصهٔ مجموعهٔ $E\subseteq[0,1]$ به‌طوری‌که E و $[0,1]-E$ هر دو در $[0,1]$ چگال هستند.

۲. برای هر کدام از توابع f تمرین‌قبل $\omega[f;x]$ را به‌ازای هر x از $[0,1]$ حساب کنید.

۳. اگر $f\in\mathcal{R}[a,b]$ ثابت کنید که $|f|\in\mathcal{R}[a,b]$.

۴. گزارهٔ زیر راست است یا دروغ؟ اگر $f\in\mathcal{R}[a,b]$ و برای تمام نقاط $[a,b]$ مانند x بجز تعدادی شمارا داشته باشیم $f(x)=g(x)$، آنگاه $g\in\mathcal{R}[a,b]$.

۵. گزارهٔ زیر راست است یا دروغ؟ اگر $f\in\mathcal{R}[a,b]$ و برای تمام نقاط $[a,b]$ مانند x بجز تعدادی متناهی، داشته باشیم $f(x)=g(x)$، آنگاه $g\in\mathcal{R}[a,b]$.

۴.۷ خواص انتگرال ریمان

تمام نتایج این بخش دراثبات قضایای بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال و درحل‌مسائل متعارف آن به‌کار می‌روند. بر خواننده است $\int_a^b f$ را (برای توابع پیوستهٔ نامنفی f) سطح زیرخم $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ بگیرد و هر کدام از این نتایج را تعبیر هندسی کند.

۱.۴.۷ قضیه. اگر $f\in\mathcal{R}[a,b]$ و $a<c<b$، آنگاه $f\in\mathcal{R}[a,c]$*، $f\in\mathcal{R}[c,b]$، و

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

برهان: بنا بر ۱.۳.۷ مجموعهٔ نقاطی‌از $[a,b]$ مانند E که f در آنها پیوسته نیست صفراندازه است. بنا براین، آشکار است که $E\bigcap[a,c]$ صفراندازه است و لذا (بنا بر ۱.۳.۷) $f\in\mathcal{R}[a,c]$. به‌همین‌ترتیب، $f\in\mathcal{R}[c,b]$.

اگر σ زیرتقسیم دلخواهی از $[a,c]$ و τ زیرتقسیم دلخواهی از $[c,b]$ باشد،

---

* به‌طور دقیقتر، تحدید f به $[a,c]$ در $\mathcal{R}[a,c]$ است.

آنگاه $\sigma \bigcup \tau$ یک زیر تقسیم $[a, b]$ است که مؤلفه‌هایش عبارت‌اند از مؤلفه‌های σ و مؤلفه‌های τ. از این رو،

$$L[f;\sigma]+L[f;\tau]=L[f;\sigma\bigcup\tau]\leqslant\underline{\int_a^b} f$$

و بنابراین

$$L[f;\sigma]+L[f;\tau]\leqslant\int_a^b f.$$

اگر از طرف چپ رابطهٔ بالا به‌ازای تمام σها (درحالی‌که τ ثابت است) l.u.b. بگیریم خواهیم داشت

$$\int_a^c f+L[f;\tau]\leqslant\int_a^b f. \tag{۱}$$

اکنون با گرفتن l.u.b. روی همهٔ τها داریم

$$\int_a^c f+\int_c^b f\leqslant\int_a^b f.$$

اگر به σ و τی اصلی بر گردیم همچنین خواهیم داشت

$$U[f;\sigma]+U[f;\tau]=U[f;\sigma\bigcup\tau]\geqslant\overline{\int_a^b} f$$

به‌طوری که

$$U[f;\sigma]+U[f;\tau]\geqslant\int_a^b f.$$

با گرفتن g.l.b. مانند قسمت اول برهان، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\int_a^c f+\int_c^b f\geqslant\int_a^b f. \tag{۲}$$

از (۱) و (۲) قضیه نتیجه می‌شود.

هر دانشجوی سال اول بـه طور غریزی $\int_0^1 3x^2\,dx$ را به صورت $3\int_0^1 x^2\,dx$ خواهد نوشت. در اینجا مجوز این کار ارائه می‌شود.

۲.۴.۷. قضیه. اگـر $f\in\mathcal{R}[a, b]$ و λ عـدد حقیقی دلخواهـی بـاشد، آنگـاه $\lambda f\in\mathcal{R}[a, b]$ و

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

برهان: اگر $\lambda = 0$، قضیه بدیهی است. فرض کنیم $\lambda > 0$. چون در هر نقطه که f پیوسته باشد λf نیز پیوسته است، آشکار است که $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$. از آنجا که $\lambda > 0$، اگر J زیربازهٔ دلخواهی از $[a, b]$ باشد، آنگاه

$$M[\lambda f; J] = \lambda M[f; J]$$

(تحقیق کنید)، و بنابراین، برای هر زیرتقسیم σ از $[a, b]$،

$$U[\lambda f; \sigma] = \lambda U[f; \sigma].$$

با گرفتن g.l.b. از طرفین (روی همهٔ σها) به‌سادگی نتیجه می‌شود که

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f \qquad (\lambda > 0). \tag{1}$$

پس، برای $\lambda > 0$ قضیه ثابت شده است.

اکنون برای هر J نیز داریم

$$M[-f; J] = -m[f; J].$$

از این‌رو،

$$\int_a^b (-f) = \underset{\sigma}{\text{g.l.b.}}\, U[-f; \sigma] = \underset{\sigma}{\text{g.l.b.}}\, \{-L[f; \sigma]\}$$
$$= -\underset{\sigma}{\text{l.u.b.}}\, L[f; \sigma] = -\int_a^b f.$$

به‌عبارت دیگر،

$$\int_a^b (-f) = -\int_a^b f. \tag{2}$$

اگر $\mu < 0$، آنگاه $\lambda = -\mu > 0$ و بنابراین، بنابر (۲) و (۱) (چون که $\mu f \in \mathcal{R}[a, b]$)

$$\int_a^b \mu f = \int_a^b -(\lambda f) = -\int_a^b \lambda f = -\lambda \int_a^b f = \mu \int_a^b f.$$

این برهان را کامل می‌کند.

از قضیهٔ ۳.۴.۷ نتیجه می‌شود

$$\int_{\circ}^{\pi}(\sqrt{\text{۱}+x}+x^{\text{۲}})\,dx=\int_{\circ}^{\pi}\sqrt{\text{۱}+x}\,dx+\int_{\circ}^{\pi}x^{\text{۲}}\,dx.$$

۳.۴.۷. قضیه. اگر $f\in\mathcal{R}[a,b]$ و $g\in\mathcal{R}[a,b]$، آنگاه $f+g\in\mathcal{R}[a,b]$ و

$$\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g.$$

برهان: بنابر ۱.۳.۷، E_f و E_g مجموعه‌های نقاطی که به‌ترتیب f و g در آنها پیوسته نیستند صفراندازه هستند. از این‌رو، بنابر ۲.۱.۷، مجموعهٔ $E_f\bigcup E_g$ صفراندازه است. ولی اگر $x\in[a,b]-(E_f\bigcup E_g)$، آنگاه f و g و درنتیجه $f+g$ در x پیوسته هستند. بنابراین $f+g$ در تقریباً هرنقطهٔ $[a,b]$ پیوسته است، و لذا $f+g\in\mathcal{R}[a,b]$.

اگر J یك زیربازهٔ دلخواه $[a,b]$ باشد، و $y\in J$، داریم

$$f(y)+g(y)\leqslant M[f;J]+M[g;J].$$

پس $M[f+g;J]\leqslant M[f;J]+M[g;J]$.

سپس، به‌ازای هر زیرتقسیم σ داریم

$$\int_a^b(f+g)\leqslant U[f+g;\sigma]\leqslant U[f;\sigma]+U[g;\sigma]. \qquad (\text{۱})$$

ولی برای هر $\varepsilon>\circ$، بنابر ۷.۲.۷ زیرتقسیم $\sigma_{\text{۱}}$ از $[a,b]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$U[f;\sigma_{\text{۱}}]<L[f;\sigma_{\text{۱}}]+\frac{\varepsilon}{\text{۲}}\leqslant\int_a^b f+\frac{\varepsilon}{\text{۲}}.$$

همچنین، زیرتقسیم $\sigma_{\text{۲}}$ از $[a,b]$ وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$U[g;\sigma_{\text{۲}}]<L[g;\sigma_{\text{۲}}]+\frac{\varepsilon}{\text{۲}}\leqslant\int_a^b g+\frac{\varepsilon}{\text{۲}}.$$

اگر $\sigma=\sigma_{\text{۱}}\bigcup\sigma_{\text{۲}}$، آنگاه بنابر (۱) از ۴.۲.۷

$$U[f;\sigma]<\int_a^b f+\frac{\varepsilon}{\text{۲}},$$

$$U[g;\sigma]<\int_a^b g+\frac{\varepsilon}{\text{۲}}.$$

سپس بنابر (۱) داریم

$$\int_a^b(f+g)<\int_a^b f+\int_a^b g+\varepsilon.$$

از آنجاکه ε دلخواه بود، این ثابت می‌کند که

$$\int_a^b (f+g) \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g. \qquad (۲)$$

چون f و g توابع انتگرالپذیر دلخواه ریمان بودند می‌توانیم $-f$ و $-g$ را به‌جای f و g در (۲) جانشین کنیم. از این‌رو

$$\int_a^b (-f-g) \leqslant \int_a^b (-f) + \int_a^b (-g).$$

یا به‌کار بردن ۲۰۴۰۷ داریم

$$-\int_a^b (f+g) \leqslant -\left(\int_a^b f + \int_a^b g\right). \qquad (۳)$$

اکنون طرفین (۳) را در (۱ −) ضرب می‌کنیم. این‌جهت نابرابری‌را معکوس می‌سازد، و بنابراین

$$\int_a^b (f+g) \geqslant \int_a^b f + \int_a^b g. \qquad (۴)$$

از (۲) و (۴) قضیه نتیجه می‌شود.

اثبات نتیجهٔ بعد را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

۴۰۴۰۷ لم. اگر $f \in \mathcal{R}[a, b]$ و تقریباً همه‌جا در $[a, b]$

$$f(x) \geqslant 0,$$

آنگاه

$$\int_a^b f \geqslant 0.$$

۵۰۴۰۷ نتیجه. اگر $f \in \mathcal{R}[a, b]$، $g \in \mathcal{R}[a, b]$ و تقریباً همه‌جا $(a \leqslant x \leqslant b)$

$$f(x) \leqslant g(x),$$

آنگاه

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

برهان: بنابر ۲۰۴۰۷ و ۳۰۴۰۷ توابع $-f$ و $-g$ انتگرالپذیر ریمان هستند.

از آنجا که تقریباً همه‌جا $0 \leqslant g(x)-f(x)$، بنابر ۴.۴.۷، ۳.۴.۷، و ۲.۴.۷ داریم

$$0 \leqslant \int_a^b (g-f) = \int_a^b [g+(-f)] = \int_a^b g + \int_a^b (-f) = \int_a^b g - \int_a^b f.$$

این نتیجه را ثابت می‌کند.

۶.۴.۷ نتیجه. اگر $f \in \mathcal{R}[a,b]$، آنگاه $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ و

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

برهان: چون درهر نقطه‌که f پیوسته باشد $|f|$ نیز پیوسته است (تمرین ۴ در بخش ۱.۵)، بنابر ۱.۳.۷ آشکار است که $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$. اکنون، چون بـرای هر $x \in [a,b]$ داریم $f(x) \leqslant |f(x)| = |f|(x)$، ۵.۴.۷ نتیجه می‌دهد که

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|. \qquad (۱)$$

همچنین، چون برای هر $x \in [a,b]$، $-f(x) \leqslant |f(x)|$، از ۵.۴.۷ نتیجه می‌شود که

$$-\int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|. \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه حاصل می‌شود.

۷.۴.۷ اگر $b < a$، آنگاه $\int_a^b f$ را به‌صورت $-\int_b^a f$ تعریف می‌کنیم به‌شرط آنکه $f \in \mathcal{R}[a,b]$. اینك اثبات برقراری نتایجی نظیر

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f,$$

صرفنظر از ترتیب نقاط a، b، c، مشکل نخواهد بود.

تمرینهای ۴.۷

۱. تنها بااستفاده ازنتایج بخشهای ۳.۷ و ۴.۷، $\int_0^1 (2x^2-3x+5)\,dx$ را حساب کنید.

۲. تمرین قبل را در مورد $\int_1^3 (2x-3)\,dx$ انجام دهید.

۰۳ فرض کنیم J_1، J_2، …، J_n بازه‌های بازی در $[a, b]$ باشند. نشان دهید که $\chi=\chi_{J_1\cup\ldots\cup J_n}$ (تابع مشخصهٔ $J_1\cup\ldots\cup J_n$) در $\mathcal{R}[a, b]$ است. سپس نشان دهید که

$$\chi(x)\leqslant\chi_{J_1}(x)+\chi_{J_2}(x)+\cdots+\chi_{J_n}(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

نتیجه بگیرید که

$$\int_a^b \chi\leqslant|J_1|+|J_2|+\cdots+|J_n|.$$

۰۴ اگر f در $[a, b]$ پیوسته باشد و

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

ثابت کنید که F در $[a, b]$ پیوسته است.

۰۵ (الف) اگر $0\leqslant x\leqslant 1$، نشان دهید که

$$\frac{x^2}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\leqslant x^2.$$

(ب) ثابت کنید که

$$\frac{1}{3\sqrt{2}}\leqslant\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx\leqslant\frac{1}{3}$$

۰۶ ثابت کنید که

$$\frac{2\pi^2}{9}\leqslant\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2x}{\sin x}dx\leqslant\frac{4\pi^2}{9}.$$

۰۷ اگر f در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ پیوسته باشد، اگر

$$f(x)\geqslant 0 \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

و اگر به‌ازای یك $c\in[a, b]$، $f(c)>0$، ثابت کنید که

$$\int_a^b f(x)\,dx>0.$$

۰۸ اگر f در $[a, b]$ پیوسته باشد، اگر

$$f(x)\geqslant 0 \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

و اگر

$$\int_a^b f(x)\,dx = \circ,$$

ثابت کنید که f در $[a, b]$ همواره صفر است.

۵.۷ مشتقها

همان‌گونه که در بخش ۳.۷ دیدیم، تعریف انتگرال ربطی به‌مشتقها ندارد. این حقیقت که انتگرال

$$\int_a^b f$$

را می‌توان به‌وسیلهٔ «یافتن تابع اولیه و جانشین‌کردن a و b در آن» حساب کرد یك قضیه است و به‌هیچ‌وجه یك تعریف نیست. اکنون به بحث نظریهٔ مشتقها می‌پردازیم و سرانجام به‌این قضیه می‌رسیم.

۱.۵.۷ تعریف. فرض کنیم f تابعی‌حقیقی در بازهٔ $J \subseteq R^1$ است. اگر $c \in J$، گوییم که f در c مشتق دارد اگر

$$\lim_{x \longrightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \tag{1}$$

وجود داشته باشد.* اگر این حد وجود داشته باشد، آن‌را با $f'(c)$ نشان می‌دهیم.

آشکار است که

$$\lim_{x \longrightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

و

---

* اگر $J=[a, b]$ و $c=a$ یا $c=b$، حد (۱) حد یك‌طرفه است و گاهی مشتق یك‌طرفه‌خوانده می‌شود (۶.۱.۴ را ببینید). پس اگر f یك تابع حقیقی در $[a, b]$ باشد، آنگاه

$$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

درحالی که

$$f'(b) = \lim_{x \longrightarrow b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

در این‌صورت گاهی گفته می‌شود که f در a مشتق راست و در b مشتق چپ دارد.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

به یك معنی است. به جای «f در c مشتق دارد» گاهی خلاصه‌تر می‌گوییم «$f'(c)$ وجود دارد».

بنابراین اگر E مجموعهٔ نقاط c در J باشد به‌طوری که $f'(c)$ وجود داشته باشد (و اگر $E \neq \varnothing$)، آنگاه f' نیز یك تابع حقیقی در E است. البته، کاملا امکان دارد که E تهی باشد. به‌زودی خواهیم دید که اگر $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه f در c پیوسته‌است. در نتیجه اگر f در هیچ نقطهٔ J پیوسته نباشد، آنگاه f در هیچ نقطهٔ J مشتق ندارد. همچنین این امکان نیز وجود دارد که $f'(c)$ وجود نداشته باشد حتی اگر f در c پیوسته باشد. مثلا، اگر

$$f(x)=|x| \qquad (-\infty<x<\infty),$$

آنگاه

$$\text{اگر } x>0\text{، آنگاه } \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$$

درحالی که

$$\text{اگر } x<0\text{، آنگاه } \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$$

از این‌رو،

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

وجود ندارد. بنابراین f در ۰ مشتق ندارد هرچندکه f در ۰ پیوسته است. (در فصل ۹ نشان می‌دهیم که تابعی وجود داردکه در هر نقطهٔ $[0,1]$ پیوسته است ولی در هیچ نقطهٔ $[0,1]$ مشتق ندارد.)

تابع g با تعریف زیر

$$g(x)=x^2 \qquad (-\infty<x<\infty)$$

در هر نقطهٔ R^1 مشتق دارد. زیرا، اگر $c \in R^1$ و $x \neq c$،

$$\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=\frac{x^2-c^2}{x-c}=x+c,$$

پس

$$\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}(x+c)=۲c.$$

بنابراین،

$$g'(c)=۲c \qquad (-\infty<c<\infty),$$

که احتمالا هیچ گونه شگفتی برای کسی ندارد.

اکنون ثابت می‌کنیم کـه مشتق‌پذیری (مشتق‌داشتن) در یك نقطه، پیوستگی در آن نقطه را نتیجه می‌دهد.

۲.۵.۷ قضیه. اگر تابع حقیقی f درنقطهٔ $c\in R^۱$ دارای مشتق باشد، آنگاه f در c پیوسته است.

برهان: به‌ازای $x\neq c$ داریم

$$f(x)-f(c)=\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right](x-c).$$

چون

$$\lim_{x\to c}(x-c)=۰ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)$$

قضیهٔ ۴.۱.۴ نتیجه می‌دهد

$$\lim_{x\to c}[f(x)-f(c)]=f'(c)\cdot ۰=۰.$$

از این‌رو، چون $f(x)=f(c)+[f(x)-f(c)]$، بنابر ۳.۱.۴ داریم

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)+۰=f(c).$$

این قضیه را ثابت می‌کند.

اکنون قضایای آشنای مشتق‌گیری مجموع، حاصلضرب، وغیره را می‌آوریم.

۳.۵.۷ قضیه. اگر f و g هر دو در $c\in R^۱$ مشتق داشته بـاشند، آنگـاه $f+g$، $f-g$، fg، نیز در c مشتق دارند و

$$(f+g)'(c)=f'(c)+g'(c),$$

$$(f-g)'(c)=f'(c)-g'(c),$$
$$(fg)'(c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c).$$

بعلاوه، اگر $g(c)\neq 0$، آنگاه f/g در c مشتق دارد و

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c)=\frac{g(c)f'(c)-f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}.$$

برهان: فقط قسمت مربوط به fg را ثابت می‌کنیم. اگر $h=fg$، آنگاه برای $x\neq c$

$$h(x)-h(c)=f(x)g(x)-f(c)g(c)$$
$$=f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c),$$

و بنابراین

$$\frac{h(x)-h(c)}{x-c}=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.g(x)+f(c).\frac{g(x)-g(c)}{x-c}.$$

چون

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c),\qquad \lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=g'(c),$$

و (بنابر ۲.۵.۷) $\lim\limits_{x\to c} g(x)=g(c)$، با استفاده از ۴.۱.۴ و ۳.۱.۴، می‌بینیم که h در c مشتق دارد و

$$h'(c)=\lim_{x\to c}\frac{h(x)-h(c)}{x-c}=f'(c)g(c)+f(c)g'(c),$$

و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

در اینجا به‌بیان و اثبات «قاعدهٔ زنجیری» مشهور می‌پردازیم.

۴.۵.۷. قضیه. فرض کنیم g در c و f در $g(c)$ مشتق داشته باشند. آنگاه $\phi=f\circ g$ در c مشتق دارد و

$$\phi'(c)=f'[g(c)]g'(c).$$

ابتدا به‌اثبات یك لم می‌پردازیم.

لم. اگر f در c مشتق داشته باشد، آنگاه تابع F وجود دارد به‌طوری که

$$F \text{ در } \circ \text{ پیوسته است} \tag{۱}$$

و برای تمام hهای به‌قدر کافی کوچك

$$f(c+h)=f(c)+hF(h) \tag{۲}$$

برعکس، اگر تابع F که در (۱) و (۲) صدق کند وجود داشته باشد، آنگاه f در c مشتق دارد.

اگر این تابع F وجود داشته باشد، آنگاه $F(\circ)=f'(c)$.

برهان: فرض کنیم $f'(c)$ موجود باشد. اگر

$$F(h)=\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \qquad (h\neq\circ)$$

(به‌شرط آنکه $c+h$ در حوزهٔ تعریف f باشد) و

$$F(\circ)=f'(c).$$

آنگاه آشکار است که F در (۱) و (۲) صدق می‌کند. بعلاوه، بنابر تعریف F، $F(\circ)=f'(c)$.

برعکس، فرض می‌کنیم برای تابعی مانند f یك تابع F موجود باشد که در (۱) و (۲) صدق کند. از (۲) داریم

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=F(h) \qquad (h\neq\circ).$$

بنابر (۱)، وقتی h به‌صفر میل کند حد سمت راست $F(\circ)$ است. پس، حد سمت چپ نیز $F(\circ)$ خواهد بود. این نشان می‌دهد که $f'(c)$ وجود دارد و $f'(c)=F(\circ)$، و بنابراین اثبات لم تمام است.

اکنون می‌توانیم قاعدهٔ زنجیری را ثابت کنیم.

برهان قضیهٔ ۴۰۵۰۷. چون g در c مشتق دارد بنابر لم، تابع G وجود دارد که در $\circ$ پیوسته است، $G(\circ)=g'(c)$، و اگر h کوچك باشد،

$$g(c+h)=g(c)+hG(h).$$

به‌همین ترتیب، چون f در $g(c)$ مشتق دارد، تابع F وجود دارد به طوری که F در $\circ$ پیوسته است، $F(\circ)=f'[g(c)]$، و اگر k کوچك باشد

$$f[g(c)+k]=f[g(c)]+kF(k) \tag{۳}$$

اگر k را مقدار زیر بگیریم

$$k=g(c+h)-g(c)=hG(h)$$

(که به‌اندازهٔ کافی کوچك خواهد بود اگر h به‌اندازهٔ کافی کوچك باشد)، آنگاه

$$f[g(c)+k]=f[g(c+h)] \tag{۴}$$

و

$$kF(k)=hG(h)F[hG(h)]. \tag{۵}$$

اگر (۴) و (۵) را در (۳) بگذاریم خواهیم داشت

$$f[g(c+h)]=f[g(c)]+hG(h)F[hG(h)].$$

از آنجا که $\phi=f\circ g$ رابطهٔ فوق می‌گوید

$$\phi(c+h)=\phi(c)+h\Phi(h) \tag{۶}$$

که در آن $\Phi(h)=G(h)F[hG(h)]$. حال چون F و G در ۰ پیوسته‌اند، Φ نیز در ۰ پیوسته است. با توجه به (۶) از لم نتیجه می‌شود که $\phi'(c)$ وجود دارد و

$$\phi'(c)=\Phi(0)=F(0)G(0)=f'[g(c)]g'(c),$$

و این چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

نتیجهٔ زیر که مربوط به‌رابطهٔ بین مشتقها و توابع معکوس می‌باشد در کاربردهای بعدی مفید است. به‌خاطر داشته باشید که اگر f در $[a,b]$ یك‌به‌یك باشد، آنگاه $\varphi[f(x)]=x\,(a\leqslant x\leqslant b)$ که در آن φ تابع معکوس f است.

۵.۵.۷ قضیه. فرض کنیم f تابعی حقیقی و ۱ ــ ۱ در بازهٔ J باشد و فرض می‌کنیم φ تابع معکوس f باشد. اگر f در $c\in J$ پیوسته باشد، و اگر φ در $d=f(c)$ مشتق داشته باشد و $\varphi'(d)\neq 0$، آنگاه $f'(c)$ وجود دارد و

$$f'(c)=\frac{1}{\varphi'(d)}.$$

برهان: به‌ازای $h\neq 0$ فرض می‌کنیم $k(h)=f(c+h)-f(c)$. [چون f یك‌به‌یك است، می‌دانیم که اگر $h\neq 0$ آنگاه $k(h)\neq 0$.] سپس $d+k(h)=f(c)+k(h)=f(c+h)$. از این‌رو،

$$\varphi[d+k(h)]=\varphi[f(c+h)]=c+h.$$

همچنین داریم

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\frac{[d+k(h)]-d}{c+h-c}=\frac{k(h)}{\varphi[d+k(h)]-\varphi(d)}$$

$$=\frac{1}{\frac{\varphi[d+k(h)]-\varphi(d)}{k(h)}}$$

ولی $\lim\limits_{h\to 0}k(h)=0$ زیرا بنا به‌فرض f در c پیوسته است. بنابراین وقتی‌که h به 0 میل کند، طرف راست (۱) به‌حد $1/\varphi'(d)$ میل می‌کند. لذا

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\frac{1}{\varphi'(d)},$$

و این چیزی است‌که می‌خواستیم ثابت کنیم.

مثلا، اگر $f(x)=\sqrt{x}(0\leqslant x<\infty)$، آنگاه $\varphi(x)=x^2(0\leqslant x<\infty)$. بنابر ۵.۵.۷ می‌دانیم‌که $f'(3)$ وجود دارد و

$$f'(3)=\frac{1}{\varphi'(\sqrt{3})}.$$

قبلا نشان داده‌ایم‌که $\varphi'(x)=2x(0\leqslant x<\infty)$. از این‌رو، $f'(3)=1/2\sqrt{3}$. (این نتیجه با فرمول معروف $f'(x)=1/2\sqrt{x}(0<x<\infty)$ موافقت دارد.)

۶.۵.۷. در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی معمولا مشتقها با یك تعبیر هندسی عرضه می‌شوند. اگر f تابعی حقیقی در بازهٔ J باشد، آنگاه f یك‌نمودار تعریف می‌کند — یعنی زیرمجموعه‌ای از R^2 که از تمام نقاط $\langle x,y\rangle$ به‌طوری که $x\in J$ و $y=f(x)$ تشکیل شده است. این خم معمولا به‌طور خلاصه با

$$y=f(x) \tag{1}$$

نشان داده می‌شود. سپس گفته می‌شود که خم (۱) در $c\in J$ مماس دارد اگر f در c مشتق داشته باشد. شیب مماس در c به‌صورت $f'(c)$ تعریف می‌شود. نماد متداول برای شیب مماس در c عبارت است از $dy/dx|_{x=c}$. به‌عبارت دیگر،

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c}=f'(c).$$

هنگامی‌که f در تمام نقاط J مشتق داشته باشد [یعنی، وقتی‌که (۱) در تمام نقاط J مماس

داشته باشد] معمولا به‌طور خلاصه می‌نویسند

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

با نماد dy/dx نتایج دو قضیهٔ قبلی به‌صورت جالبتری درمی‌آیند.
مثلا، قاعدهٔ زنجیری را ملاحظه کنید که (به‌اجمال) می‌گوید اگر $\varphi=g\circ f$، آنگاه

$$\varphi'(x)=g'[f(x)]f'(x). \qquad (۲)$$

اکنون اگر $y=f(x)$ یك خم در صفحهٔ xy باشد و اگر $u=g(y)$ خم دیگری درصفحهٔ yu باشد، آنگاه

$$\frac{dy}{dx}=f'(x), \qquad \frac{du}{dy}=g'(y)=g'[f(x)].$$

ولی $u=g(y)=g[f(x)]=\varphi(x)$ وبنابراین $du/dx=\varphi'(x)$. پس، (۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (۳)$$

این باید اصطلاح «قاعدهٔ زنجیری» را موجب شده باشد.
اکنون ۵.۵.۷ را در نظر بگیرید. این قضیه به‌اجمال می‌گوید که اگر f یك به‌یك باشد و

$$y=f(x)$$

[به‌طوری که $x=\varphi(y)$]، آنگاه

$$f'(x)=\frac{۱}{\varphi'(y)}. \qquad (۴)$$

ولی $f'(x)=dy/dx$ و $\varphi'(y)=dx/dy$. پس، (۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{dx/dy}. \qquad (۵)$$

(۳) و (۵) هردو بدیهی بودند اگر dx، dy، و du را مقادیر مشخصی تعریف کرده‌بودیم و می‌توانستیم قوانین جبری را دربارهٔ آنها به کار بریم. ولـی، dx، dy وغیره را معنی نکرده‌ایم (و در این کتاب آنها را تعریف نخواهیم کرد). برقراری (۳) و (۵) خود دلیل خوبی برای انتخاب نماد dy/dx است.

بر خواننده است که در بخشهای بعدی تعبیر هندسی علامت مشتق را به‌خاطر داشته باشد. اگر $f'(c)>0$، آنگاه خم (۱) در c «صعودی» است؛ اگر $f'(c)<0$، خم در c «نزولی» است؛ در حالی‌که اگر $f'(c)=0$، مماس خم در c افقی است.

همچنین به یاد داشته باشید که اگر $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه خم (۱) در $x=c$ «هموار» است.

۷.۵.۷ فرض کنیم $f'(x)$ به‌ازای هر x از بازهٔ J وجود دارد. اگر $c\in J$ و

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} \qquad (1)$$

وجود داشته باشد، گوییم که f در c مشتق دوم دارد. در این‌صورت حد (۱) را با $f''(c)$ نشان می‌دهیم ــ یعنی

$$f''(c)=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c},$$

همچنین مشتق nام f در c چنین تعریف می‌شود

$$f^{(n)}(c)=\lim_{x\to c}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(c)}{x-c},$$

به‌شرط آنکه $f^{(n-1)}(x)$ به‌ازای هر x در بازه‌ای شامل c موجود باشد و به‌شرط آنکه حد فوق وجود داشته باشد. سپس از ۲.۵.۷ نتیجه می‌شود که اگر $f^{(n)}(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه $f^{(n-1)}$ در c پیوسته است.

فرض می کنیم که خواننده با معنی هندسی مشتق‌دوم، f''، آشنا است ــ یعنی می‌داند که تقعر نمودار

$$y=f(x)$$

در نقاطی که $f''(x)>0$ به‌طرف بالاست، و در نقاطی که $f''(x)<0$ تقعر به‌طرف پایین است.

تمرینهای ۵.۷

۱. ثابت کنید که مشتق تابع ثابت در $[a,b]$ تابع همواره صفر در $[a,b]$ است.

۲. اگر f در c مشتق داشته باشد، اگر $b\in R^1$، و اگر برای هر x در بازه‌ای که شامل c است $g(x)=bf(x)$، نشان دهید که

$$g'(c)=bf'(c).$$

۰۳ $f'(x)$ را با قاعدهٔ زنجیری به‌دست آورید اگر

(الف) $$f(x)=\sin x^{2} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

(ب) $$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \qquad (0\leqslant x<\infty).$$

۰۴ اگر $n\in I$ و

$$f(x)=x^{n} \qquad (-\infty<x<\infty),$$

با به‌کار بردن تعریف ۱.۵.۷ نشان دهید که

$$f'(x)=nx^{n-1} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

۰۵ (الف) اگر n یك عدد صحیح منفی باشد و

$$f(x)=x^{n} \qquad (-\infty<x<\infty;\ x\neq 0),$$

نشان دهید که

$$f'(x)=nx^{n-1} \qquad (-\infty<x<\infty;\ x\neq 0).$$

(ب) اگر n یك عددگویای غیرصفر باشد و

$$f(x)=x^{n} \qquad (-\infty<x<\infty),$$

نشان دهید که

$$f'(x)=nx^{n-1} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

(راهنمایی: اگر $n=p/q$، $f(x)$ را به صورت $(x^{p})^{1/q}$ بنویسید به طوری که $[f(x)]^{q}=x^{p}$.)

۰۶ فرض کنید که f و g در c دارای مشتقهای از تمام مرتبه‌ها هستند و $h=fg$.

(الف) ثابت کنید که

$$h''(c)=f''(c)g(c)+2f'(c)g'(c)+f(c)g''(c).$$

(ب) به‌طورکلی، برای $n\in I$ ثابت کنید که

$$h^{(n)}(c)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k)}(c)g^{(n-k)}(c).$$

(این فرمول معروف به قاعدهٔ لایبنیتس[1] است.)

۰۷ اگر f تابعی در $[a,b]$ باشد و اگر $a<c<b$ و $f'(c)>0$، ثابت کنید xی بسا

1. Leibniz

شرط $c<x<b$ وجود دارد به‌طوری که $f(x)>f(c)$.

۸. فرض کنید

$$f(x)=x \qquad (\text{اگر } x \text{ گویا باشد}),$$

$$f(x)=\sin x \qquad (\text{اگر } x \text{ گنگ باشد}).$$

ثابت کنید که $f'(0)=1$.

۹. گزارهٔ زیر راست است یا دروغ؟ اگر f تابعی در $[a, b]$ باشد، اگر $c\in[a, b]$، و اگر $f'(c)>0$، آنگاه f درزیر بازه‌ای از $[a, b]$ که شامل c است اکیداً صعودی است.

۱۰. اگر f تابعی حقیقی در $[a, b]$ باشد و اگر f در $c\in[a, b]$ مشتق راست داشته باشد، ثابت کنید که f در c پیوستهٔ راست است.

۶.۷ قضیهٔ رُل[1]

مسائل مربوط به ماکسیمم و مینیمم بخش بسیار مهمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال را تشکیل می‌دهند. ولی، برای کارهای ما، فقط به‌قسمت زیر از نظریهٔ ماکسیمم-مینیمم احتیاج داریم.

۱.۶.۷. قضیه. فرض کنیم f یک تابع حقیقی در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ باشد. اگر تابع f در نقطهٔ c، که $a<c<b$، ماکسیمم باشد، و اگر $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه $f'(c)=0$.

برهان: خلاف حکم را فرض می‌کنیم، یعنی، فرض می‌کنیم که $f'(c)\neq 0$. اگر $f'(c)>0$ آنگاه

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$$

و بنابراین δ_1 مثبتی وجود دارد به‌طوری که برای $0<|x-c|<\delta_1$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0.^*$$

اگر $x\in(c, c+\delta_1)$، آنگاه $x-c>0$ و از این‌رو $f(x)-f(c)>0$. این مطلب با این فرض که f در c ماکسیمم است متناقض است. اگر $f'(c)<0$، آنگاه برای

1. Rolle

* تمرین ۱۴ از بخش ۱.۴ را ببینید.

$$0<|x-c|<\delta_2$$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$$

اگر $x\in(c-\delta_2, c)$، آنگاه $x-c<0$ و از این‌رو $f(x)-f(c)>0$، که بازهم یك تناقض است. بنابراین، $f'(c)=0$.

برهان فوق را با کمی دستکاری می‌توان برای اثبات قضیهٔ زیر به‌کار برد.

۲.۶.۷. قضیه. درقضیهٔ ۱.۶.۷ اگر «مقدار ماکسیمم» را با «مقدار مینیمم» تعویض کنیم بازهم قضیه برقرار خواهد بود.

اگر نقاط انتهایی خم

$$y=f(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

روی محور xها واقع باشند و اگر این خم هموار باشد، به‌طور شهودی آشکار است که در نقطه‌ای از آن یك‌مماس افقی‌وجود دارد. این‌نتیجه را، اگر به‌صورت دقیقی درآوریم، قضیهٔ رل نامیده می‌شود و برای رسیدن به‌قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌آن نیاز داریم.

۳.۶.۷. قضیهٔ رل. فرض‌کنیم تابع حقیقی f در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ پیوسته است، و $f(a)=f(b)=0$. اگر $f'(x)$ در هر x در (a, b) وجود داشته باشد، آنگاه نقطهٔ $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f'(c)=0$.

برهان: اگر f در $[a, b]$ همواره صفر باشد، حکم قضیه بدیهی است. اگر به‌ازای یك $x\in(a, b)$، $f(x)>0$، چون $f(a)=f(b)=0$، و بنابر ۷.۶.۶، f در نقطه‌ای‌از $[a, b]$ ماکسیمم‌است، f در a یا در b ماکسیمم نخواهد بود. بنابراین f در نقطه‌ای‌مانند $c\in(a, b)$ ماکسیمم است و قضیه از ۱.۶.۷ نتیجه می‌شود. چنانچه به‌ازای $x\in(a, b)$، $f(x)<0$، قضیه از ۲.۶.۷ نتیجه می‌شود، این برهان را کامل می‌کند.

تأکید می‌کنیم‌که برهان قضیهٔ رل به‌این قضیه بستگی داردکـه تابع پیوسته در یك بازهٔ بستهٔ‌کراندار به‌مقدار ماکسیمم و به مقدار مینیمم می‌رسد.

توجه‌کنید‌که در ۳.۶.۷ لازم نیست‌که f' در $[a, b]$ وجود داشته باشد. بلکه‌تنها وجود آن در (a, b) کافی است. بنابراین، اگر

$$f(x)=\sqrt{1-x^2} \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1),$$

آنگاه f شرایط ۳.۶.۷ را به‌ازای $a=-۱$، $b=۱$ داراست. [در اینجا برای $-۱<x<۱$، $f'(x)=-x/\sqrt{۱-x^۲}$، درحالی که f در -۱ یا ۱ مشتق ندارد.] برای این f می‌توان دیدکه cی مذکور در ۳.۶.۷ برابر با ۰ است. یعنی، $f'(c)=f'(۰)=۰$.

این‌نکته نیز حائز اهمیت است که مفروضات ۳.۶.۷ را نمی‌توان ضعیفتر کرد. مثلاً، اگر

$$g(x)=۱-|x| \qquad (-۱\leqslant x\leqslant ۱),$$

آنگاه $g(-۱)=g(۱)=۰$ و g در $[-۱,۱]$ پیوسته است. همچنین، $g'(x)$ برای‌هر x در $(-۱,۱)$ بجز $x=۰$ وجود دارد. بنابراین g همهٔ مفروضات ۳.۶.۷ را داراست جز اینکه g در ۰ مشتق ندارد. برای این g، هیچ عددی مانند c در $(-۱,۱)$ وجودندارد به‌طوری که $g'(c)=۰$. این‌نشان‌می‌دهدکه اگر آخرین فرض را ضعیفتر کنیم، ممکن است که قضیهٔ رل برقرار نباشد.

۴.۶.۷ با استفاده از روشی که در برهان قضیهٔ رل به‌کار رفت می‌توانیم ویژگی بسیار جالبی از مشتقها را ثابت کنیم.

ابتدا ملاحظه کنیدکه اگر f با رابطهٔ

$$f(x)=x^۲\sin\frac{۱}{x} \qquad (x\neq ۰),$$

$$f(۰)=۰,$$

تعریف شده باشد، آنگاه f درهر نقطهٔ $(-\infty,\infty)$ مشتق دارد. زیرا، بنابر قضیه‌های ۴.۵.۷ و ۳.۵.۷ داریم*

$$f'(x)=-\cos\frac{۱}{x}+۲x\sin\frac{۱}{x} \qquad (x\neq ۰). \qquad (۱)$$

برای نشان‌دادن وجود $f'(۰)$، به‌ازای $x\neq ۰$ داریم

$$\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=x\sin\frac{۱}{x},$$

$$\left|\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}\right|\leqslant |x|.$$

و درنتیجه

---

* در فصل ۸ ثابت می‌کنیم که اگر $y=\sin x$ آنگاه $dy/dx=\cos x$.

$$\lim_{x \to \circ} \frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}=\circ.$$

بنابراین

$$f'(\circ)=\circ.$$

به‌این ترتیب نشان داده‌ایم که به‌ازای هر x، $f'(x)$ وجود دارد. ولی توجه‌کنید که f' در $\circ$ پیوسته نیست، زیرا به‌خاطر جملهٔ $\cos(1/x)$ در (۱)، $\lim_{x\to\circ} f'(x)$ وجود ندارد. این مثال نشان می‌دهد که ممکن است یك تابع درهر نقطهٔ یك بازه مشتق داشته‌باشد ولی (تابع) مشتق در آن بازه پیوسته نباشد.

با وجود این، مشتقها در یك ویژگی مهم با توابع پیوسته شریك‌اند. یعنی اگر برای هر x در $[a,b]$، $f'(x)$ وجـود داشته باشد، آنگاه نگارهٔ $[a,b]$ تحت f' همبنداست، هرچند که ممکن است f' پیوسته نباشد. (قضیهٔ زیر را با ۵.۲.۶ مقایسه‌کنید.)

۵.۶.۷ قضیه. اگر f در هر نقطهٔ $[a,b]$ مشتق داشته باشد، آنگاه f' با هر مقدار بین $f'(a)$ و $f'(b)$ برابر می‌شود.

برهان: کافی‌است‌حالتی‌رادرنظر بگیریم که در آن $f'(a)<f'(b)$. دراین‌صورت، اگر $f'(a)<\gamma<f'(b)$، بایدنشان‌دهیم $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f'(c)=\gamma$ فرض کنیم

$$g(x)=f(x)-\gamma x \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

بنابراین

$$g'(x)=f'(x)-\gamma \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

آنگاه، چون $g'(x)$ برای هر $x\in[a,b]$ وجود دارد، قضیهٔ ۲.۵.۷ نشان می‌دهد که g در $[a,b]$ پیوسته است. پس، بنابر ۷.۶.۶، g در نقطه‌ای مانند $c\in[a,b]$ مینیمم است.ولی $g'(a)=f'(a)-\gamma<\circ$، وبنابراین g نمی‌تواند در a مینیمم باشد(چرا؟). به‌همین‌ترتیب چـون $g'(b)=f'(b)-\gamma>\circ$، g نمی‌توانــد در b مینیمم بــاشد. پس $a<c<b$. دراین‌صورت قضیهٔ ۲.۶.۷ نشان‌می‌دهد که $g'(c)=\circ$. چون $g'(c)=f'(c)-\gamma$، ثابت می‌شود که $f'(c)=\gamma$، که این همان است که می‌خواستیم نشان دهیم.

ویژگی f در ۵.۲.۶ یا ویژگی f' در ۵.۶.۷ را ویژگی داربو[1] می‌نامند.

تمرینهای ۶.۷

۱. ثابت‌کنید که به‌ازای هیچ مقدار k معادلهٔ

1. Darboux

$$x^3 - 3x + k = 0$$

دارای دو ریشه متمایز در $[0, 1]$ نیست.

۲. کدام‌یك از توابع زیر مفروضات قضیهٔ رل در بازهٔ ذکرشده را دارا هستند.

(الف) $f(x) = \sin x (0 \leqslant x \leqslant \pi).$

(ب) $f(x) = \sqrt{x}(x-1) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$

(ج) $f(x) = \sin \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\pi} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\pi}\ ;\ x \neq 0\right),$

$f(0) = 0.$

(د) $f(x) = x^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$

۳. نقطهٔ c در قضیهٔ رل را برای تابع

$$f(x) = (x-a)(b-x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

بیابید.

۴. اگر

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0,$$

آنگاه ثابت کنید که معادلهٔ

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

حداقل یك ریشه بین ۰ و ۱ دارد. (راهنمایی: تابع

$$f(x) = \frac{a_0 x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 x^n}{n} + \dots + \frac{a_{n-1} x^2}{2} + a_n x$$

را درنظر بگیرید.)

۵. فرض کنید

$$f(x) = 0 \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 0),$$
$$f(x) = 1 \qquad (0 < x \leqslant 1).$$

آیا تابع g وجود دارد به‌طوری‌که

$$g'(x) = f(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)?$$

۷.۷ قانون میانگین

اگر خم

$$y=f(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

«هموار» باشد بدیهی به‌نظر می‌رسدکه در نقطه‌ای مانند $c\in(a, b)$ شیب مماس، یعنی $f'(c)$، برابر شیب وتری باشدکه دو انتهای منحنی را به‌هم وصل می‌کند. یعنی، عددی مانند $c\in(a, b)$ وجود دارد به‌طوری که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

این مطلب را، چنانچه به طور دقیق بیان شود، قانون میانگین (یا قضیهٔ مقدار میانگین) می‌نامند.

توجه کنیدکه قضیهٔ رل نیز دقیقاً همین مطلب را درحالت خاصی که $f(a)=f(b)=0$، بیان می‌کند. بنابراین، قانون میانگین صورت «دوران‌یافتهٔ» قضیهٔ رل است. راه برهان این است که از تابع f تابع g را که نمودار

$$y=g(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

آن وتری است که دو انتهای نمودار f را به‌هم وصل می‌کند، تفریق کنیم. [بنابراین، برای $a\leqslant x\leqslant b$،

$$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).]$$

آنگاه چون مقدار $f-g$ در a و b، 0 است می‌توان قضیهٔ رل را درمورد $f-g$ به‌کار برد. اکنون مطلب را به‌تفصیل بیان می‌کنیم.

۷.۷.۱ قضیه (قانون میانگین). اگر f در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ پیوسته باشد، و اگر، برای هر x در (a, b)، $f'(x)$ وجود داشته‌باشد، آنگاه عدد c در (a, b) وجود دارد به‌طوری که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

برهان: اگر h را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

آنگاه $h(a)=0=h(b)$، و h درمفروضات دیگر قضیهٔ رل هم صدق می‌کند. بنابراین عدد $c\in(a, b)$ وجود دارد به‌طوری که $h'(c)=0$. اما

$$h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

که نتیجهٔ مطلوب را به‌دست می‌دهد

یك کاربرد مهم قانون میانگین قضیهٔ زیر است.

۲.۷.۷. قضیه. اگر f یك تابع حقیقی پیوسته در بازهٔ J باشد، و اگر، برای هر x در J مگر احیاناً نقاط انتهایی J (اگر داشته باشد) $f'(x)>0$، آنگاه f در J اکیداً صعودی (و درنتیجه یك‌به‌یك) است.

برهان: اگر $a, b\in J$ و $a<b$، بنابر ۱.۷.۷ عددی مانند c بین a و b وجود دارد به‌طوری که

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

ولی، بنا به فرض، $f'(c)>0$ و از این‌رو، $f(b)-f(a)>0$. یعنی، اگر $a<b$، آنگاه $f(a)<f(b)$، که این همان است که می‌خواستیم نشان دهیم.

توجه به‌نمایش پارامتری خم هموار

$$x=g(t), \qquad y=f(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b).$$

انگیزه‌ای است برای تعمیم مفیدی از قانون میانگین. شیب وتری که نقاط انتهایی خم را به‌هم وصل می‌کند با

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

برابر است. شیب مماس بر خم درنقطهٔ $t=c$ برابر $f'(c)/g'(c)$ است. قانون‌تعمیم‌یافتهٔ میانگین می‌گوید که همواره یك نقطهٔ c در (a, b) وجود خواهد داشت که شیب مماس در آن نقطهٔ با شیب وتر برابر است. اکنون به‌بیان دقیق این مطلب می‌پردازیم.

۳.۷.۷. قضیه. فرض‌کنیم f و g توابعی پیوسته در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ باشند به‌طوری که $g(a)\neq g(b)$. اگر f و g درتمام نقاط (a, b) مشتق داشته باشند و درهیچ $t\in(a, b)$، $f'(t)$ و $g'(t)$ هردو برابر صفر نباشند، آنگاه نقطهٔ $c\in(a, b)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

برهان: فرض کنیم

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

آنگاه $h(a)=\circ$، $h(b)=\circ$ و h درمفروضات دیگرقضیهٔ رل نیز صدق می‌کند. بنابراین، عدد $c\in(a, b)$ وجود دارد به‌طوری که $h'(c)=\circ$. یعنی،

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.g'(c)=\circ.$$

اگر $g'(c)$ برابرصفر باشد، آنگاه $f'(c)$هم صفر خواهد بودکه خلاف فرض است. پس، $g'(c)\neq\circ$، و قضیه ثابت شده است.

تمرینهای ۷.۷

۱. کدام‌یك از توابع زیر در مفروضات قانون میانگین صدق می‌کنند. برای توابعی که قانون میانگین را می‌توان درمورد آنها به‌کار برد، نقطهٔ مناسب c را پیدا کنید.

(الف) $f(x)=\dfrac{x}{x-۱}$ $\quad(\circ\leqslant x\leqslant ۲)$.

(ب) $f(x)=\dfrac{x}{x-۱}$ $\quad(۲\leqslant x\leqslant ۴)$.

(ج) $f(x)=Ax+B$ $\quad(a\leqslant x\leqslant b)$.

(د) $f(x)=۱-x^{۲/۳}$ $\quad(-۱\leqslant x\leqslant ۱)$.

۲. برای هریك از جفتهای توابع زیر مقدار c را طوری تعیین کنید که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

(الف) $f(x)=x,\quad g(x)=x^{۲}\quad(\circ\leqslant x\leqslant ۱)$

(ب) $f(x)=\sin x,\quad g(x)=\cos x\quad\left(-\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\circ\right)$

۳. اگر برای هر x در $[a, b]$، $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند، و $g'(x)\neq\circ$ $(a\leqslant x\leqslant b)$، نشان دهیدکه f و g در مفروضات ۳.۷.۷ صدق می‌کنند.

۴. اگر برای هر x در (a, b)، $f'(x)=\circ$، ثابت‌کنیدکه f در (a, b) ثابت است.

۰۵ اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد، اگر $f'(x)$ به‌ازای $a<x<b$ وجود داشته باشد، و اگر $\lim\limits_{x\to b-} f'(x)=A$ ، ثابت کنید که مشتق (چپ) $f'(b)$ وجود دارد و برابر A است.

۰۶ فرض کنید

$$f'(x)>0 \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

اگر φ تابع معکوس f باشد، نشان دهید که φ در $[f(a), f(b)]$ پیوسته است.

۸.۷ قضیه‌های بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال

باسؤال زیرشروع می کنیم: با چه‌اطلاعاتی‌در بارهٔ تابع fدر بازهٔ $[a, b]$ مطمئن‌می‌شویم که f در $[a, b]$ مشتق تابعی مانند F است؟ با توجه به ۵.۶.۷ ملاحظه می کنیم کـه حتی یك تابع نسبتاً ساده مانند تابعی که با تساویهای

$$f(x)=0 \qquad (-1\leqslant x<0),$$
$$f(x)=1 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

تعریف می‌شود، مشتق هیچ تابعی در $[-1, 1]$ نیست. اکنون نشان خواهیم داد که اگر f در $[a, b]$ پیوسته باشد تـابع F در $[a, b]$ وجود خواهد داشت به طوری که به‌ازای هر $x\in[a,b]$، $F'(x)=f(x)$. [پس‌پیوستگی تابع در $[a,b]$ یك شرط کافی‌است برای اینکه تابع در $[a,b]$ مشتق تابع دیگری‌باشد. به‌هرحال، توجه‌کنیدکه پیوستگی یك شرط لازم نیست. زیرا در ۶.۷ نشان دادیم که مشتق تابع φ که با ضابطهٔ زیر تعریف شده است پیوسته نیست

$$\varphi(x)=x^2\sin\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0),$$
$$\varphi(0)=0.]$$

۱.۸.۷ قضیه. اگر f در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ پیوسته باشد، و اگر

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

آنگاه $F'(x)=f(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$.

برهان: برای هر نقطهٔ ثابت $x\in[a, b]$ اگر $h\neq 0$ و $x+h\in[a, b]$، داریم

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\,.$$

آنگاه، بنا بر ۱.۴.۷،

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt. \qquad (۱)$$

چون f در بازهٔ بستهٔ کراندار $[x, x+h]$ پیوسته است، بنا بر ۷.۶.۶، f در ایـن بازه یك ماکسیمم M و یك مینیمم m دارد، یعنی مقدار f در نقاطی از $[x, x+h]$ به M و m می‌رسد. (در اینجا به‌طور ضمنی فرض کرده‌ایم که h مثبت است. اگـر $h<0$ به‌جای $[x, x+h]$ از $[x+h, x]$ استفاده می‌کنیم و تعدیلهای مشابهی را در جزئیات برهـان انجام می‌دهیم.) به‌عبارتی دیگر

$$m\leqslant f(t)\leqslant M \qquad (x\leqslant t\leqslant x+h),$$

ونقاطی‌مانند $t_۱$ و $t_۲$ در $[x, x+h]$ وجود دارند به‌طوری که $f(t_۱)=m$، $f(t_۲)=M$. در این‌صورت، بنا بر ۵.۴.۷، داریم

$$\int_x^{x+h} m\,dt\leqslant\int_x^{x+h} f(t)\,dt\leqslant\int_x^{x+h} M\,dt,$$

$$mh\leqslant\int_x^{x+h} f(t)\,dt\leqslant Mh,$$

و سرانجام

$$m\leqslant\theta\leqslant M,$$

که در آن

$$\theta=\frac{۱}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

(از کجا می‌دانیم که $\int_x^{x+h} m\,dt=mh$ ؟)

بنا بر ۴.۲.۶ بایـد نقطه‌ای مانند $c(h)$ در $[x, x+h]$ وجـود داشته باشد به‌طوری کـه $f[c(h)]=\theta$. بنابراین نشان داده‌ایم که اگر $h>0$، نقطهٔ $c(h)$ در $[x, x+h]$ وجود دارد به‌طوری که

$$f[c(h)]=\frac{۱}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

سپس با استفاده از (۱) داریم

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f[c(h)]. \qquad (۲)$$

ولی،آشکار است که $\lim_{h\to 0} c(h)=x$ [زیرا $x\leqslant c(h)\leqslant x+h$]. بنابراین هنگامی که $h\to 0$، چون تابع f در نقطهٔ x پیوسته است، حد طرف راست (۲) برابر $f(x)$است. درنتیجه، حد طرف چپ (۲) هنگامی که $h\to 0$ برابر $f(x)$ است، و داریم

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x),$$

که این همان است که می‌خواستیم نشان دهیم.

با قضیهٔ ۱.۸.۷ برای اولین‌بار به‌نتیجه‌ای برخوردیم که بین مفهومهای مشتق و انتگرال ارتباط برقرار می‌کند. این قضیه تنها نشان‌نمی‌دهدکه اگر f پیوسته باشد، تابع F وجود دارد به‌طوری که $F'=f$، بلکه F را به‌صورت یك انتگرال نیز بیان می‌کند. قضیهٔ ۱.۸.۷ را گاهی قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌نامند. اما، چون گاهی قضیهٔ ۵.۸.۷ را هم به‌همین نام می‌خوانند، قضیهٔ ۱.۸.۷ را اولین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌نامیم.

قضیهٔ ۱.۸.۷ را می‌توان با این فرض که f تنها انتگرالپذیر ریمان و در نقطهٔ x پیوسته است به‌صورت بهتری درآورد. یعنی

۲.۸.۷. قضیه. اگر $f\in\mathcal{R}[a,b]$، اگر

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

و اگر f در $x_0\in[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه $F'(x_0)=f(x_0)$.

برهان: برای $h>0$ فرض می‌کنیم I_h بازهٔ $[x_0, x_0+h]$ باشد، آنگاه، اگر $\omega[f;I_h]$ همان باشد که در ۱.۲.۷ دیدیم، داریم

$$f(x_0)-\omega[f;I_h]\leqslant f(t)\leqslant f(x_0)+\omega[f;I_h] \qquad (t\in I_h).$$

درنتیجه، بنابر ۵.۴.۷،

$$h[f(x_0)-\omega[f;I_h]]\leqslant\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\leqslant h[f(x_0)+\omega[f;I_h]].$$

با تقسیم کردن بر h داریم

$$f(x_\circ)-\omega[f;I_h]\leqslant\frac{F(x_\circ+h)-F(x_\circ)}{h}\leqslant f(x_\circ)+\omega[f;I_h]. \qquad (۱)$$

[معادلهٔ (۱) برای $h<\circ$ رامی‌توان عیناً با همین روش ثابت کرد.] ولی، چون بنا به‌فرض، f در $x_\circ$ پیوسته است، داریم

$$\lim_{h\longrightarrow\circ}\omega[f;I_h]=\circ. \qquad (۲)$$

سپس قضیه از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

باید برای شما روشن باشد که ۱.۸.۷ نتیجه‌ای از ۲.۸.۷ است.

اکنون به‌سراغ دومین‌قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال می‌رویم که به‌موجب آن محاسبهٔ انتگرال

$$\int_a^b f$$

به‌وسیلهٔ «محاسبهٔ تابع اولیهٔ تـابع زیر انتگرال و گذاشتن a و b در آن» توجیه می‌شود. ابتدا به‌دو قضیه‌که دارای اهمیت فراوان هستند نیاز داریم.

۳.۸.۷. قضیه. اگر به‌ازای هر x در بازهٔ کراندار بستهٔ $[a, b]$، $f'(x)=\circ$، آنگاه f در $[a, b]$ ثابت است. یعنی، عدد $C\in R$ وجود دارد به‌طوری که

$$f(x)=C \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

برهان: قضیهٔ ۲.۵.۷ نشان می‌دهد که به‌ازای هر x، اگر $a<x\leqslant b$، f در بازهٔ $[a, x]$ پیوسته است. بنا برقانون میانگین ۱.۷.۷، عدد $c\in(a, x)$ وجود دارد به‌طوری که

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

ولی، بنا به فرض، $f'(c)=\circ$. پس، برای هر x در $[a, b]$، $f(x)=f(a)$ و قضیه [با $C=f(a)$] ثابت می‌شود.

قضیهٔ زیر نتیجهٔ فوری قضیهٔ فوق است.

۴.۸.۷. قضیه. اگر، به‌ازای هر x در بازهٔ کراندار بستهٔ $[a, b]$، $f'(x)=g'(x)$، آنگاه $f-g$ ثابت است. یعنی، عدد $C\in R$ وجود دارد به‌طوری که

$$f(x)=g(x)+C \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

برهان: بنابر ۳.۵.۷ به‌ازای هر x در $[a, b]$، $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$.
پس، بنابرفرض، برای هر $x\in[a, b]$، $(f-g)'(x)=0$. سپس قضیه از ۳.۸.۷ به‌دست می‌آید.

۵.۸.۷. قضیه (دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال). اگر تابع f در بازهٔ کراندار بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، و اگر

$$\Phi'(x)=f(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b), \tag{۱}$$

آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

برهان: اگر

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,$$

آنگاه، بنابر ۱.۸.۷،

$$F'(x)=f(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{۲}$$

با استفاده از (۱) و (۲) می‌بینیم که، برای هر x در $[a, b]$، $F'(x)=\Phi'(x)$. پس، بنابر ۴.۸.۷، عدد $C\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$F(x)=\Phi(x)+C \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

بنابراین، $F(b)-F(a)=[\Phi(b)+C]-[\Phi(a)+C]=\Phi(b)-\Phi(a)$. ولی

$$F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0.$$

بنابراین $F(b)=\Phi(b)-\Phi(a)$. چون

$$F(b)=\int_a^b f(t)\,dt,$$

قضیه ثابت می‌شود.

بنابراین محاسبه‌ای مانند

$$\int_1^2 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3} \tag{*}$$

با ۵.۸.۷ توجیه می‌شود. زیرا، اگر$(1 \leqslant x \leqslant 2)$ $f(x)=x^2$، آنگاه f در$[1, 2]$پیوسته است. بعلاوه، اگر$(1 \leqslant x \leqslant 2)$ $\Phi(x)=x^3/3$، آنگاه $(1 \leqslant x \leqslant 2)$ $\Phi'(x)=f(x)$. درنتیجه بنابر ۵.۸.۷،

$$\int_1^2 f(x)=\Phi(2)-\Phi(1),$$

که با (*) هم‌ارز است.

۶.۸.۷. درحساب دیفرانسیل وانتگرال‌مقدماتی غالباً انتگرالها را با روش‌تعویض متغیر محاسبه می‌کنند. مثلاً، انتگرال

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

را می‌توان با قرار دادن $x=2\sin u$ [و درنتیجه به‌طور صوری $dx=2\cos u\,du$]به

$$4\int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,du$$

تبدیل کرد.

در حالت کلی، به‌شرط اینکه f و φ در شرطهایی که مشخص خواهیم‌کرد صدق کنند، انتگرال

$$\int_A^B f(x)\,dx$$

با انتگرال

$$\int_a^b f[\varphi(u)]\varphi'(u)\,du$$

که در آن $\varphi(a)=A$ و $\varphi(b)=B$، برابراست. اما نمی‌توانیم این‌مطلب را با گفتن «اگر $x=\varphi(u)$ آنگاه $dx=\varphi'(u)\,du$» ثابت کنیم، زیرا نه dx را تعریف کرده‌ایم و نه هیچ ارتباطی بین dx در dx/du و dx در

$$\int_A^B f(x)\,dx$$

برقرارکرده‌ایم. این حقیقت‌که با تعویض صوری $x=\varphi(u)$، $dx=\varphi'(u)\,du$ در

$$\int_A^B f(x)\,dx$$

انتگرال

$$\int_a^b f[\varphi(u)]\varphi'(u)\,du$$

که با انتگرال اول برابر است، به‌دست می‌آید دلیلی است بر اینکه $\int_A^B f(x)\,dx$ نماد خوبی است. اما تکرار می‌کنیم که هنوز این تعویض متغیر با هیچ نتیجه‌ای کـه تا به‌حال اثبات کرده‌ایم توجیه نشده است.

قبل از اینکه به‌توجیه این‌مطلب بپردازیم باید متوجه یك نکته باشیم. اگر φ یك تابع پیوسته در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ باشد، آنگاه نگارهٔ $[a, b]$ تحت φ (بنابر ۱۰۶۰۶) فشرده و (بنابر ۴۰۲۰۶) همبند است. بنابراین، $\varphi([a, b])$ هم یك بازهٔ بستهٔ کراندار است.

۷۰۸۰۷. قضیه. اگر φ تابع حقیقی در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ باشد به‌طوری که φ' در $[a, b]$ پیوسته باشد، و اگر $A=\varphi(a)$ و $B=\varphi(b)$، آنگاه اگر f در $\varphi([a,b])$ پیوسته باشد، داریم

$$\int_A^B f(x)\,dx=\int_a^b f[\varphi(u)]\varphi'(u)\,du.$$

برهان: چون f یـك تابع پیوسته در بازهٔ بستهٔ‌کراندار $\varphi([a, b])$ است، بنابـر ۱۰۸۰۷، تابع F وجود دارد به‌طوری که

$$F'(x)=f(x) \qquad x\in\varphi([a, b]).$$

فرض‌کنیم برای $a\leqslant u\leqslant b$، $G(u)=F[\varphi(u)]$. آنگاه، بنا بر قاعدهٔ زنجیری،

$$G'(u)=F'[\varphi(u)]\varphi'(u)=f[\varphi(u)]\varphi'(u) \qquad (a\leqslant u\leqslant b).$$

با استفاده از ۵۰۸۰۷ داریم

$$\begin{aligned}\int_a^b f[\varphi(u)]\varphi'(u)\,du&=\int_a^b G'(u)\,du=G(b)-G(a)\\&=F[\varphi(b)]-F[\varphi(a)]=F(B)-F(A)\\&=\int_A^B F'(x)\,dx=\int_A^B f(x)\,dx.\end{aligned}$$

که این مطلب قضیه را ثابت می‌کند.

مثلاً، اگر f یك تابع پیوسته در $[0, 1]$ باشد، آنگاه بـا $\varphi(u)=\sin u$ داریم

$\varphi(0)=0$، $\varphi(\pi/2)=1$. چـون $\varphi'(u)=\cos u$ (فعلا ایـن مطلب را بپذیریـد) در $[0,\pi/2]$ پیوسته‌است، وچون f در $[0,1]=\varphi([0,\pi/2])$ پیوسته‌است، بنابر ۷.۸.۷، داریم

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\pi/2} f(\sin u)\cos u\,du.$$

همچنین توجه داشته باشیدکـه $\varphi(\pi)=0$، $\varphi(9\pi/2)=1$. چـون φ' در $[\pi, 9\pi/2]$ پیوسته است همچنین خواهیم داشت

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_\pi^{9\pi/2} f(\sin u)\cos u\,du,$$

به‌شرطاینکه f در $[-1,1]$که نگارهٔ $[\pi, 9\pi/2]$ تحت φ است پیوسته باشد. بنابراین درحالتی‌که $f(x)=\sqrt{x}$،

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin u}\cos u\,du$$

درست است. اما

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\int_\pi^{9\pi/2}\sqrt{\sin u}\cos u\,du$$

بی‌معنی است، زیرا $\sqrt{x}$ در $-1<x<0$ تعریف نشده‌است، ازطرف دیگر، هر دوگزارهٔ

$$\int_0^1 x^2\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^2 u\cos u\,du$$

و

$$\int_0^1 x^2\,dx=\int_\pi^{9\pi/2}\sin^2 u\cos u\,du$$

برقرار هستند و از ۷.۸.۷ نتیجه می‌شوند.

تمرینهای ۸.۷

۱. اگر

$$f(x)=\int_0^x \sqrt{t+t^6}\,dt \qquad (x>0),$$

$f'(\text{۲})$ را بیابید.

۲. همهٔ قضیه‌های مربوط به انتگرالگیری را که در محاسبات زیر به‌کار رفته‌اند بیان کنید:

$$\int_{\circ}^{\text{۲}} (\text{۳}x^{\text{۲}} - \text{۵})dx = \text{۳}\int_{\circ}^{\text{۲}} x^{\text{۲}}\, dx - \text{۵}\int_{\circ}^{\text{۲}} dx = \text{۳}\left(\frac{\text{۲}^{\text{۳}}}{\text{۳}} - \circ\right) - \text{۵}(\text{۲} - \circ).$$

۳. اگر f در $(-\infty, \infty)$ پیوسته باشد، و اگر

$$F(x) = \int_{\circ}^{x} f(t)\, dt \qquad (-\infty < x < \infty),$$

ثابت کنید که

$$F'(x) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

۴. اگر f در $[a, b]$ پیوسته باشد، اگر

$$f(x) > \circ \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

و اگر

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

ثابت کنید که F در $[a, b]$ اکیداً صعودی است.

۵. اگر f در $[a, b]$ پیوسته باشد، ثابت کنید که عدد $c \in (a, b)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = f(c)(b - a).$$

(راهنمایی: قانون میانگین را در مورد $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$ به‌کار بندید.) این قضیه را گاهی اولین قضیهٔ مقدار میانگین در انتگرالها می‌نامند.

۶. اگر f و g در $[a, b]$ پیوسته باشند، و اگر $g(t) \geqslant \circ$ $(a \leqslant t \leqslant b)$، ثابت کنید که عدد $c \in (a, b)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\int_{a}^{b} f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_{a}^{b} g(x)\, dx.$$

این قضیه را گاهی دومین قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها می‌نامند. حالت خاص $g = \text{۱}$ قضیهٔ قبلی را نتیجه می‌دهد.

۷. اگر f' و g' در $[a, b]$ پیوسته باشند، دستور آشنای انتگرالگیری جزء به‌جزء زیر را ثابت کنید:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

(راهنمایی: ۵.۸.۷ را در مورد $\int_a^b (fg)'(x)\,dx$ به‌کار بندید.)

۸. اگر $f \in \mathcal{R}[a, b]$ و اگر

$$F'(x) = f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

آنگاه ثابت کنید که

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(این یك تعمیم ۵.۸.۷ است. راهنمایی: اگر ε عدد مثبت مفروضی باشد، مانند ۷.۲.۷، برای زیر تقسیم $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ بنویسید

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} [F(x_k) - F(x_{k-1})]$$

سپس ۱.۷.۷ را به‌کار بندید.)

۹.۷ انتگرالهای ناسره

تعریف انتگرال

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

از بخش ۲.۷ به‌دست نمی‌آید زیرا بازهٔ $[a, \infty)$ کراندار نیست. چنین انتگرالی رایك انتگرال ناسره می‌نامند. نظریهٔ انتگرالهای ناسره بــه میزان زیادی شبیه نظریهٔ سریهــای نامتناهی است. به‌همین دلیل برخلاف معمول جزئیات چندانی ذکر نخواهیم کرد.

انتگرال فوق را می‌توان به‌روش زیر تعریف کرد: اگر برای هر $s > a$، $f \in \mathcal{R}[a, s]$، آنگاه

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

را جفت مرتب $\langle f, F\rangle$ تعریف می‌کنیم، که در آن

$$F(s) = \int_a^s f(x)\,dx \qquad (a \leqslant s < \infty).$$

شباهت بین این تعریف و تعریف ۱.۱.۳ زیاد است. تابع f با دنبالهٔ $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متناظر است، درحالی‌که «انتگرال جزئی»

$$F(s)=\int_a^s f$$

با مجموع جزئی $s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ متناظر است.

آنگاه می‌گوییم‌که $\int_a^{\infty} f$ به A همگراست اگر $\lim_{s\to\infty} F(s)=A$. در این حالت می‌نویسیم $\int_a^{\infty} f=A$. اگر $\int_a^{\infty} f$ همگرا نباشد آن‌را واگرا می‌نامیم.

بنابراین $\int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx$ همگراست. زیرا اگر

$$F(s)=\int_1^s \frac{1}{x^2}\,dx,$$

آنگاه $F(s)=1-1/s$ و درنتیجه $\lim_{s\to\infty}F(s)=1$. پس

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=1.$$

از طرف دیگر انتگرال

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

واگراست، زیرا

$$F(s)=\int_1^s\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2(\sqrt{s}-1).$$

اگر $\int_a^{\infty} f$ و $\int_a^{\infty} g$ هردو همگرا باشند آنگاه $\int_a^{\infty}(f\pm g)$ نیز همگراست و

$$\int_a^{\infty}(f\pm g)=\int_a^{\infty} f\pm\int_a^{\infty} g.$$

این مطلب را می‌توان به روش ۳.۱.۳ ثابت کرد. به‌همین‌ترتیب، اگر $\int_a^{\infty} f$ همگرا باشد و $c\in R$، آنگاه $\int_a^{\infty} cf$ همگراست و

$$\int_a^\infty cf = c\int_a^\infty f.$$

اگر برای هر $s>a$، $f\in\mathcal{R}[a,s]$ و اگر $\int_a^\infty |f(x)|dx$ همگرا باشد، می‌گوییم که $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرای مطلق است. اگر

$$F(s)=\int_a^s |f(x)|\,dx$$

و اگر F در $[a,\infty)$ (از بالا) کراندار باشد، آنگاه، بنابر تمرین ۲۱ در بخش ۱.۴، $\lim\limits_{s\to\infty} F(s)$ وجود دارد و بنابراین $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرای مطلق است.

اگر $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرای مطلق باشد، اگر برای هر $s>a$، $g\in\mathcal{R}[a,s]$، و اگر

$$|g(x)|\leqslant|f(x)| \qquad (a\leqslant x<\infty),$$

آنگاه $\int_a^\infty g(x)\,dx$ همگرای مطلق است، زیرا

$$G(s)=\int_a^s |g(x)|\,dx\leqslant\int_a^s |f(x)|\,dx\leqslant\int_a^\infty |f(x)|\,dx.$$

بنابراین G در $[a,\infty)$ از بالا کراندار است و همگرایی مطلق $\int_a^\infty g(x)\,dx$ از پاراگراف قبل نتیجه می‌شود.

نتیجهٔ اخیر به ما امکان می‌دهد ثابت کنیم که اگر $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ همگرای مطلق باشد، آنگاه $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگراست. زیرا، چون

$$0\leqslant f(x)+|f(x)|\leqslant 2|f(x)| \qquad (a\leqslant x<\infty).$$

و چون (بنابر فرض) $\int_a^\infty 2|f(x)|\,dx$ همگراست، نتیجه می‌گیریم که

$$\int_a^\infty \{f(x)+|f(x)|\}\,dx$$

همگرای مطلق است. چون $f(x)+|f(x)|\geqslant 0$، این بدان‌معنی است که

$\int_a^\infty \{f(x)+|f(x)|\}\,dx$ همگراست. ولی، چون $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ همگراست، (با تفریق) نتیجه می‌گیریم که

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

نیز همگراست، و این همان است که می‌خواستیم نشان دهیم.

اگر $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرا باشد ولی همگرای مطلق نباشد، می‌گوییم که $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرای شرطی است. یك مثال کلاسیك از یك انتگرال ناسرهٔ همگرای شرطی

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

است.

برای نشان دادن اینکه $\int_\pi^\infty ((\sin x)/x)dx$ همگراست. (با استفاده از انتگرالگیری جزء‌به‌جزء) برای هر $s>\pi$ داریم

$$\int_\pi^s \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{۱}{\pi}-\frac{\cos s}{s}+\int_\pi^s \frac{\cos x}{x^۲}\,dx. \qquad (۱)$$

اکنون

$$\frac{|\cos x|}{x^۲}\leqslant\frac{۱}{x^۲} \qquad (\pi\leqslant x<\infty).$$

چون $\int_\pi^\infty (۱/x^۲)\,dx$ همگرای (مطلق) است نتیجه می‌گیریم که $\int_\pi^\infty (\cos x)/x^۲\,dx$ همگرای مطلق و بنابراین همگراست. در این‌صورت هنگامی که $s\to\infty$ همهٔ جملات طرف راست (۱) دارای حد خواهند بود. پس

$$\lim_{s\to\infty}\int_\pi^s \frac{\sin x}{x}dx$$

وجود دارد که ثابت می‌کند $\int_\pi^\infty ((\sin x)/x)dx$ همگراست. [این مطلب همچنین نشان می‌دهد که

$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{2}}dx+\frac{1}{\pi}\cdot$$

هرچندکه انتگرال دوم همگرای مطلق است، انتگرال اول (همان‌طور که هم‌اکنون نشان خواهیم داد) همگرای مطلق نیست.]

اکنون نشان می‌دهیم که $\int_{\pi}^{\infty}((\sin x)/x)\,dx$ همگرای مطلق نیست. به‌ازای هر $N\in I$ داریم

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{N\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx&=\sum_{n=1}^{N-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\\&\geqslant\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+1}\int_{0}^{\pi}|\sin(u+n\pi)|\,du\cdot\end{aligned}$$

اکنون

$$\sin(u+n\pi)=\sin u\cos n\pi+\cos u\sin n\pi=\sin u\cos n\pi\cdot$$

چون $\cos n\pi=\pm1$، می بینیم که $|\sin(u+n\pi)|=|\sin u|$. بنا براین، اگر $0\leqslant u\leqslant\pi$، آنگاه $|\sin(u+n\pi)|=\sin u$. پس

$$\int_{\pi}^{N\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+1}\int_{0}^{\pi}\sin u\,du=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+1}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k}\cdot \tag{2}$$

بنا بر ۳.۲.۳، با بزرگ گرفتن N می‌توانیم طرف راست (۲) را هرقدر بخواهیم بزرگ کنیم. این مطلب و (۲) نشان می‌دهند که

$$\lim_{s\to\infty}\int_{\pi}^{s}\frac{|\sin x|}{x}dx$$

وجود ندارد. بنا براین، $\int_{\pi}^{\infty}((\sin x)/x)dx$ همگرای مطلق نیست.

همین روش را می‌توان درمورد نتیجهٔ مهم زیر به‌کار برد.

۱.۹.۷. قضیه. انتگرال ناسرهٔ

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}dx$$

واگراست.

برهان: برای هر عدد صحیح N داریم

$$\int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx \geqslant \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+1}\int_n^{n+1} 1\cdot dx$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k}. \qquad (1)$$

مجدداً، چون هنگامی که $N \to \infty$ طرف راست (۱) به‌بینهایت واگراست، می‌بینیم که

$$\lim_{s\to\infty}\int_1^s \frac{1}{x}\,dx$$

وجود ندارد. این مطلب قضیه را ثابت می‌کند.

هم‌اکنون واگرایی یک‌سری نامتناهی را برای اثبات واگرایی یک‌انتگرال ناسره به‌کار گرفتیم. رایجتر این‌است که انتگرالها را برای بررسی سریها به‌کار برند. این را آزمون انتگرال در سریها می‌نامند.

۲۰۹۰۷. قضیه. اگر f تابعی غیرصعودی در $[1, \infty)$ باشد به‌طوری که $(1 \leqslant x < \infty)$ $f(x) \geqslant 0$. آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ همگراست، اگر $\int_1^\infty f(x)\,dx$ همگرا باشد، و $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ واگراست اگر $\int_1^\infty f(x)\,dx$ واگرا باشد.

برهان: چون f غیرصعودی است برای هر $n\in I$ داریم

$$f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n+1) \qquad (n \leqslant x \leqslant n+1)$$

سپس با انتگرالگیری از n تا $n+1$ داریم

$$\int_n^{n+1} f(n)\,dx \geqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx$$

یا

$$f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant f(n+1).$$

بنابراین، برای $N\in I$ داریم

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n) \geqslant \int_1^N f(x)\,dx \geqslant \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) = \sum_{k=2}^{N} f(k). \qquad (1)$$

اگر $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ به A همگرا باشد، آنگاه، بنابر (۱)،

$$\sum_{k=2}^{N} f(k) \leqslant \int_{1}^{N} f(x)\,dx \leqslant A.$$

در نتیجه مجموعهای جزئی $\sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ از بالا کراندارند. بنابر ۱.۲.۳، سری $\sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ همگراست و بنابراین، $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ همگراست.

اگر $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ واگرا باشد، واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ را می‌توان به‌روش مشابهی، با استفاده از نابرابری طرف چپ (۱)، ثابت کرد. این برهان را کامل می‌کند.

(آشکار است که می‌توان ۲.۹.۷ را برای توابع در $[a, \infty)$ تعدیل کرد.)

مثلاً، می‌توانیم همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ را، با استفاده از ۲.۹.۷، مجدداً ثابت کنیم. زیرا، اگر $f(x) = 1/x^2 \; (1 \leqslant x < \infty)$، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

چون

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

همگراست، نتیجه می‌گیریم که $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ همگراست.

اگر $g(x) = 1/(x \log x)$، آنگاه g در $[3, \infty)$ نامنفی و غیرصعودی است. چون $G'(x) = g(x)$، که در آن $G(x) = \log\log x$، آنگاه

$$\int_{3}^{s} g(x)\,dx = \log\log s - \log\log 3,$$

و بنابراین $\int_{3}^{\infty} g(x)dx$ واگراست. از ۲.۹.۷ نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty} [1/(n \log n)]$ واگراست. (همهٔ ویژگیهای $\log x$ را که در بالا به‌کار بردیم درفصل آینده اثبات‌شده‌اند.)

۳.۹.۷ انتگرالهای به‌صورت $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ را می‌توان بـا همان روشی کـه درمورد انتگرالهای به‌صورت $\int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$ به‌کاررفت بررسی کرد. بنابراین می‌گوییم که $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ به A همگراست اگر

$$\lim_{s\to\infty}\int_{-s}^{a} f(x)\,dx=A.$$

تعویض متغیر $x=-u$ یك انتگرال نـوع $\int_{-\infty}^{a}$ را بـه یك انتگرال نوع $\int_{b}^{\infty}$ تبدیل می‌کند. مثلا

$$\int_{-\infty}^{-۲}\frac{۱}{۱-x}dx.$$

را درنظر بگیرید. برای هر $s>۲$ داریم

$$\int_{-s}^{-۲}\frac{۱}{۱-x}\,dx=\int_{s}^{۲}\frac{۱}{۱+u}(-۱)du=\int_{۲}^{s}\frac{۱}{۱+u}\,du.$$

چون برای $۲\leqslant u<\infty$، $۱/(۱+u)\geqslant ۱/۲u$، از ۱.۹.۷ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{s\to\infty}\int_{۲}^{s}\frac{۱}{۱+u}\,du$$

وجود ندارد. بنابراین $\lim_{s\to\infty}\int_{-s}^{-۲}(۱/(۱-x))dx$ وجود ندارد. این ثابت می‌کند که $\int_{-\infty}^{-۲}(۱/(۱-x))\,dx$ همگرا نیست. در این مسأله واگرایی

$$\int_{-\infty}^{-۲}\frac{۱}{۱-x}\,dx$$

از واگرایی $\int_{۲}^{\infty}(۱/(۱+u))\,du$ نتیجه شد.

انتگرالهایی را کـه در این بخش مورد بحث قرار دادیم گاهی انتگرالهای ناسرهٔ نوع اول می‌نامند. این نامگذاری در مقابل انتگرالهای ناسرهٔ نوع دوم است که در بخش آینده مورد بحث قرار می‌گیرند.

تمرینهای ۹.۷

۱. کدام‌یك از انتگرالهای زیر همگرا هستند؟

(الف) $\int_{۱}^{\infty}\frac{۱}{x^{۲/۳}}dx$ (ب) $\int_{۱}^{\infty}\frac{۱}{x^{۴/۳}}dx$

(ح) $\int_{1}^{\infty}\frac{x}{1+x^{2}}dx$ (د) $\int_{1}^{\infty}\frac{43x^{2}}{1+2x^{2}+12x^{4}}dx$

(ه) $\int_{1}^{\infty}x\cos x\,dx$ (و) $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^{3})^{1/2}}dx$

(ز) $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^{3})^{1/3}}dx$

۲. نشان دهید که

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^{3}}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(1+x)^{2}}dx.$$

۳. نشان دهید که

$$\int_{1}^{\infty}\frac{x^{1/2}}{(1+x)^{2}}dx=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

۴. گزارهٔ زیر راست است یا دروغ؟ اگر f در $[1,\infty)$ پیوسته باشد و اگر $\int_{1}^{\infty}f(x)\,dx$ همگرا باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. (جواب: دروغ.)

۵. اگر $\int_{1}^{\infty}f(x)\,dx$ همگرا باشد و اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$، ثابت کنید که $L=0$.

۶. مثالی از یك تابع پیوستهٔ f بیاورید به‌طوری که

$$f(x)\geqslant 0 \qquad (1\leqslant x<\infty),$$

و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ همگرا باشد. ولی $\int_{1}^{\infty}f(x)\,dx$ واگرا باشد.

۷. مثالی از یك تابع پیوستهٔ f بیاورید به‌طوری که

$$f(x)\geqslant 0 \qquad (1\leqslant x<\infty)$$

و $\int_{1}^{\infty}f(x)\,dx$ همگرا باشد ولی $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ واگرا باشد.

۸. گزارهٔ زیر را که نظیر ۴.۷.۳ است ثابت کنید: اگر $f(x)\geqslant 0$ $(1\leqslant x<\infty)$، اگر f در $[1,\infty)$ غیرصعودی باشد، و اگر $\int_{1}^{\infty}f(x)\,dx$ همگرا باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=0$. (راهنمایی: از ۴.۷.۳ استفاده کنید.)

۹. فرض کنید f تابع پیوسته‌ای در $[a,\infty)$ باشد به‌طوری که اگر

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (a\leqslant x<\infty),$$

آنگاه F در $[a,\infty)$ کراندار است. فرض کنید g تابعی در $[a,\infty)$ باشد به‌طوری که g' در $[a,\infty)$ پیوسته است، و برای $a\leqslant t<\infty$، $g'(t)\leqslant 0$ و $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=0$. ثابت کنید که

$$\int_a^\infty f(t)\,g(t)\,dt \text{ همگراست.}$$

(راهنمایی: از انتگرالگیری جزءبه‌جزء استفاده کنید.) مطلب را با ۳.۸.۳ مقایسه کنید.

۱۰. با استفاده از تمرین قبلی نشان دهید که

$$\int_2^\infty \frac{\sin t}{\log t}\,dt \text{ همگراست.}$$

۱۱. نشان دهید که $\int_1^\infty \cos u^2\,du$ همگراست.

۱۰.۷ انتگرالهای ناسره (ادامه)

تعریف

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

از بخش ۲.۷ به‌دست نمی‌آید، زیرا تابع f که با رابطهٔ

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (0<x\leqslant 1)$$

تعریف شده است کراندار نیست. اما ملاحظه کنید که برای هر $\varepsilon>0$، f در $[\varepsilon,1]$ کراندار (و پیوسته) است. این نکته باعث می‌شود که

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \text{ را } \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

درنظر بگیریم (که مقدار آن، ۲ به‌دست می‌آید).

درحالت کلی، اگر، $f\in\mathcal{R}[a+\varepsilon,b]$ به‌ازای هر ε که در $0<\varepsilon<b-a$ صدق کند، ولی $f\notin\mathcal{R}[a,b]$، آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx$ را به‌صورت جفت مرتب $\langle f,F\rangle$ تعریف

می‌کنیم که در آن

$$F(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \qquad (0<\varepsilon<b-a).$$

می‌گوییم که $\int_a^b f$ به A همگراست اگر $\lim_{\varepsilon\to 0+} F(\varepsilon)=A$. اگر $\int_a^b f$ همگرا نباشد آن را واگرا می‌نامیم. انتگرال $\int_a^b f$ را انتگرال ناسرهٔ نوع دوم می‌خوانیم.

بنابراین $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ همگراست درحالی که $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ واگراست.

ویژگیهایی مانند همگرایی مطلق و همگرایی شرطی برای انتگرالهای ناسرهٔ نوع دوم مانند حالت انتگرالهای ناسرهٔ نوع اول تعریف می‌شوند، و نتایج مربوط به‌این‌ویژگیها بی‌هیچ‌اشکالی به‌انتگرالهای ناسرهٔ نوع‌دوم هم منتقل می‌شوند. مثلا، اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ یك‌انتگرال ناسرهٔ همگرای مطلق باشد، و اگر $(a<x\leqslant b)$ $|g(x)|\leqslant|f(x)|$، آنگاه $\int_a^b g(x)\,dx$ همگرای مطلق است، بنابراین

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{همگرای مطلق است،}$$

زیرا

$$\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (0<x\leqslant 1).$$

اغلب مفید است که یك انتگرال ناسرهٔ نوع دوم را با یك تعویض متغیر به یك انتگرال ناسرهٔ نوع اول تبدیل کنیم. مثلا

۷.۱۰.۱۰. قضیه. انتگرال ناسرهٔ

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

واگراست.

برهان: به‌ازای $0<\varepsilon<1$. فرض کنیم

$$F(\varepsilon)=\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

اگـر $\varphi(u)=1/u\ (1\leqslant u\leqslant 1/\varepsilon)$، آنگاه $\varphi'(u)=-1/u^2\,du (1\leqslant u\leqslant 1/\varepsilon)$.
پس، بنابر ۷.۸.۷،

$$F(\varepsilon)=\int_{1/\varepsilon}^{1} u\left(\frac{-1}{u^2}\right)du=\int_{1}^{1/\varepsilon}\frac{1}{u}\,du.$$

بنابر ۱.۹.۷،

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1}^{1/\varepsilon}\frac{1}{u}\,du$$

وجود ندارد. پس $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}F(\varepsilon)$ وجود ندارد و قضیه ثابت شده است.

بنابراین، تاکنون در این بخش با انتگرالهایی به‌صورت $\int_a^b f$ سروکار داشته‌ایم که f در نزدیکی a «ناهنجار» بوده است. نظیر این مطالب برای حالتی‌هم کـه f در نزدیکی b «ناهنجار» باشد برقرار است. بنابراین، اگر به‌ازای هر ε که $0<\varepsilon<b-a$،

$$f\in\mathcal{R}[a,b-\varepsilon]$$

و اگر

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx$$

وجود داشته باشد، بازهم می‌گوییم که $\int_a^b f(x)\,dx$ یك انتگرال ناسرهٔ همگراست.

۲.۱۰.۷. قضیه. انتگرال ناسرهٔ

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

همگراست.

برهان: چون $1/\sqrt{1-x^2}$ در $[0,1]$ کراندار نیست انتگرال ناسره است. ابتدا نشان می‌دهیم که انتگرال ناسرهٔ

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

همگـرا (و در نتیجه چون $\sqrt{1-x}\geqslant 0$، همگرای مطلق) است. اگر $0<\varepsilon<1$، داریم

$$\int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

و بنابراین

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2.$$

درنتیجه، $\int_{0}^{1} 1/\sqrt{1-x}\,dx$ همگرای مطلق است.
ولی، برای $0 \leqslant x < 1$،

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

بنابراین، $\int_{0}^{1} 1/\sqrt{1-x^2}\,dx$ همگرای مطلق است، و نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

۳۰۱۰۰۷. انتگرال

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$$

درهیچ کدام‌ازنمونه‌هایی‌که تاکنون توصیف‌کرده‌ایم نمی‌گنجد، زیراکه این انتگرالی در بازه $(0, \infty)$ است و $1/(x^2+\sqrt{x})$ برای x در نزدیکیهای 0 کراندار نیست. ولی با وجوداین $\int_{0}^{\infty}(1/(x^2+\sqrt{x}))\,dx$ را یك‌انتگرال ناسرهٔ همگرا می‌نامیم، زیرامی‌توان آن‌را به‌دو انتگرال

$$J_1 = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \quad , \quad J_2 = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx.$$

تفکیك کرد. اکنون J_1 یك انتگرال ناسرهٔ همگرا از نوع دوم است [زیرا، به‌ازای $0 < x \leqslant 1$، $1/(x^2+\sqrt{x}) \leqslant 1/\sqrt{x}$] و J_2 یك انتگرال ناسرهٔ همگرا از نوع اول است [زیرا، به‌ازای $1 \leqslant x < \infty$، $1/(x^2+\sqrt{x}) < 1/x^2$].

به‌طورکلی، اگر یك انتگرال J را بتوان با این‌روش به دو یا چند انتگرال ناسرهٔ نوع اول یا نوع دوم مانند $J_1, \ldots, J_n$ تفکیك کرد، و اگر تمام این انتگرالها همگرا باشند، می‌گوییم‌که J یك انتگرال ناسرهٔ همگراست. اما، اگر یکی یا چند تا ازآنها واگرا باشند، J را یك انتگرال ناسرهٔ واگرا می‌نامیم.

بنا بر این $\int_0^\infty (1/x^2)\,dx$ یك انتگرال ناسرهٔ واگراست زیرا

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx \quad , \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

انتگرالهای ناسرهٔ (به‌ترتیب، نوع دوم و نوع اول) هستند که یکی از آنها واگراست. همچنین

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$$

یك انتگرال ناسرهٔ واگراست، زیرا

$$\int_0^\infty \frac{1+x}{1+x^2}dx \quad , \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1+x}{1+x^2}dx$$

انتگرالهای ناسرهٔ نوع دوم واگرا هستند. (ملاحظه کنید که، به‌ازای $1 \leqslant x < \infty$، $(1+x)/(1+x^2) \geqslant 1/x$.)

۴۰۱۰۷. همان‌طور که هم‌اکنون مشاهده شد. انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$$

واگراست زیرا

$$\int_0^s \frac{1+x}{1+x^2}dx \qquad (1)$$

هنگامی که $s \to \infty$، به هیچ حدی میل نمی‌کند. همچنین

$$\int_{-s}^0 \frac{1+x}{1+x^2}dx \qquad (2)$$

هنگامی که $s \to \infty$ به‌هیچ حدی میل نمی‌کند. ولی، مجموع (۱) و (۲) هنگامی که $s \to \infty$ دارای حد است. زیرا مجموع (۱) و (۲) عبارت است از

$$\int_{-s}^0 \frac{1+x}{1+x^2}dx + \int_0^s \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int_0^s \frac{1-u}{1+u^2}du + \int_0^s \frac{1+u}{1+u^2}du$$

$$= 2\int_0^s \frac{1}{1+u^2}du.$$

و

$$\lim_{s\to\infty} ۲ \int_{\circ}^{s} \frac{۱}{۱+u^{۲}}\, du$$

وجود دارد. مجموع (۱) و (۲) را به‌صورت $\int_{-s}^{s} (۱+x)/(۱+x^{۲})\, dx$ نیزمی‌توان نوشت. بنابراین، نشان داده‌ایم که

$$\lim_{s\to\infty} \int_{-s}^{s} \frac{۱+x}{۱+x^{۲}}\, dx$$

موجود است، هرچندکه $\int_{-\infty}^{\infty} (۱+x)/(۱+x^{۲})\, dx$ واگراست. حد اخیر را مقدار اصلی کوشی انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} (۱+x)/(۱+x^{۲})\, dx$ می‌نامیم.

درحالت کلی، مقدار اصلی کوشی انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$، با

$$\lim_{s\to\infty} \int_{-s}^{s} f(x)\, dx,$$

تعریف می‌شود، به‌شرط آنکه این‌حد وجود داشته‌باشد. مقداراصلی کوشی را با .C.P.V نشان می‌دهیم. بنابراین، $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx$ واگراست ولی

$$\text{C.P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} x\, dx = \lim_{s\to\infty} \int_{-s}^{s} x\, dx = \lim_{s\to\infty} \circ = \circ.$$

دریکی‌ازتمرینها ازشماخواسته‌خواهدشد که‌نشان‌دهید که اگر $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ به A همگرا باشد، آنگاه $\text{C.P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = A$. ولی، همان‌طور که‌دیده‌ایم‌ممکن‌است مقدار اصلی کوشی $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ وجود داشته باشد حتی اگر انتگرال واگرا باشد.

تمرینهای ۱۰.۷

۱. کدام‌یك از انتگرالهای ناسرهٔ زیر همگرا هستند؟

(الف) $\int_{\circ}^{۱} \frac{۱}{x^{۲/۳}}\, dx$ (ب) $\int_{\circ}^{۱} \frac{۱}{x^{۴/۳}}\, dx$

(ج) $\int_{0}^{2} \frac{x}{(16-x^4)^{1/3}}\,dx$ (د) $\int_{a-1}^{a+1} \frac{1}{(x-a)^{1/3}}\,dx$

(ه) $\int_{0}^{1} \frac{\log(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$ (و) $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$

(ز) $\int_{0}^{\infty} \frac{t^{-1/2}}{1+t}\,dt$

۲. اگر $s<1$، ثابت کنید که

$$\int_{a}^{b} (x-a)^{-s}\,dx = \frac{(b-a)^{1-s}}{1-s}.$$

اگر $s \geqslant 1$ ثابت کنید که انتگرال واگراست.

۳. ثابت کنید که

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx$$

همگراست اگر و تنها اگر $0<s<1$.

۴. اگر

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{\sin t}{t^{3/2}}\,dt \qquad (0<x<\infty).$$

ثابت کنید که $F(x)$ به‌ازای $x=\pi$ ماکسیمم است.

۵. برای کدام یك از انتگرالهای زیر مقدار اصلی کوشی وجود دارد؟

(الف) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin t\,dt$

(ب) $\int_{-\infty}^{\infty} |\sin t|\,dt$

(ج) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

آیا هیچ یك از انتگرالهای فوق همگرا هستند؟

۶. اگر f در $(-\infty, \infty)$ پیوسته باشد و اگر $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ به A همگرا باشد، ثابت کنید که

$$\text{C.P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = A.$$

۰۷ اگر f در $[۰,۱]$ پیوسته باشد، ثابت کنید که

$$\int_{۰}^{۱} \frac{f(x)}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\,dx$$

همگرا است.

سپس ثابت کنید که

$$\int_{۰}^{۱} \frac{f(x)}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\,dx = \int_{۰}^{\pi/۲} f(\sin u)\,du.$$

آیا انتگرال طرف راست ناسره است؟

۰۸ اگر f در $[a,b]$ جز درنزدیکی نقطهٔ $c\in(a,b)$ «خوشرفتار» باشد، مقدار اصلی کوشی $\int_a^b f$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lim_{\varepsilon\to ۰+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^{b} f\right).$$

(الف) نشان دهید که $\text{C.P.V.} \int_{-۱}^{۱} \frac{۱}{x}\,dx = ۰$.

(ب) نشان دهید که $\text{C.P.V.} \int_{-۱}^{۱} \frac{۱}{|x|}\,dx$ وجود ندارد.

۸

توابع مقدماتی. سریهای تیلر

می‌خواهیم دو دستهٔ عمده از توابع مقدماتی را تعریف کنیم. اولین‌دسته شامل تابع نمایی، تابع لگاریتمی، توابع هذلولوی $\sinh$، $\cosh$، $\tanh$ و توابع هذلـولـوی معکوس $\sinh^{-1}$ و $\tanh^{-1}$ است. دستهٔ دوم توابع مثلثاتـی $\sin$، $\cos$، $\tan$ وغیره و توابع معکوس $\sin^{-1}$ و $\tan^{-1}$ را شامل می‌شود.

روشی که برای تعریف این توابع در پیش‌می‌گیریم محتملا برای شما تازگی‌خواهد داشت (هرچند در پایان کار خواهید دیدکه اینها همان‌توابعی هستندکه درحساب‌دیفرانسیل وانتگرال با آنهاسروکار داشته‌اید). این‌روش‌هرچندکه صرفاً تحلیلی‌است، مزایای‌متعددی دارد. یکی از این مزایا آن است که تعریف تـوابع دستهٔ دوم پابه‌پای توابع دستهٔ اول پیش می‌رود. دیگر اینکـه مجبور نیستیم هنگام تعریف تـوابع مثلثاتی به‌هیچ قضیه‌ای از هندسه، که قبلا درستی آن‌را تحقیق نکرده‌ایم، متکی باشیم.

۱.۸ توابع هذلولوی

فرض کنیم

$$U(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{\sqrt{1+t^{2}}}dt \qquad (-\infty<x<\infty).$$

ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$U(-x)=-U(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۱)$$

زیرا

$$U(-x)=\int_{0}^{-x}\frac{1}{\sqrt{1+t^{2}}}dt=\int_{0}^{x}\frac{1}{\sqrt{1+(-u)^{2}}}(-1)du=-U(x).$$

بنا براین، از آنجا که هرگاه $0\leqslant x$، $0\leqslant U(x)$، داریم اگر $x\leqslant 0$ آنگاه $U(x)\leqslant 0$. مثلا $U(-4)=-U(4)$. سپس، چون برای $1\leqslant t<\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^{2}}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2t^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}\,t}$$

از ۱.۹.۷ نتیجه می‌شود که $\int_{1}^{\infty}1/\sqrt{1+t^{2}}dt$ واگر است. بنا براین $\int_{0}^{\infty}1/\sqrt{1+t^{2}}dt$ واگراست، و این نشان می‌دهد که U از بالاکراندار نیست. سپس معادلهٔ (۱) نشان می‌دهد که U از پایین هم کراندار نیست.

بنا بر ۱.۸.۷،

$$U'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}} \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۲)$$

در نتیجه، بنا بر ۲.۵.۷، U در بازهٔ $(-\infty,\infty)$ پیوسته است. از آنجا که U نه از بالا کراندار است و نه از پایین، بنا بر قضیهٔ ۴.۲.۶ حوزهٔ مقادیر U بازهٔ $(-\infty,\infty)$ است. همچنین (۲) و ۲.۷.۷ نشان می‌دهند که U در بازهٔ $(-\infty,\infty)$ یك به‌یك است.

درنتیجه U تابعی است پیوسته و یك‌به‌یك از R^{1} به‌روی R^{1}. اگر تابع معکوس U را با S نشان‌دهیم S تابعی یك‌به‌یك از R^{1} به روی R^{1} خواهد بود. بعلاوه، چون بنا بر ۲.۷.۶، تحدید U به‌هر بازهٔ فشرده، یك همسانریختی در آن بازه است نتیجه‌می‌گیریم که S در هر نقطهٔ R^{1} پیوسته است (تمرین ۴ از بخش ۷.۶ را ببینید).

اگر $S(a)=b$، آنگاه $U(b)=a$. بنا بر ۵.۵.۷ و (۲)،

$$S'(a)=\frac{1}{U'(b)}=\sqrt{1+b^{2}}.$$

چون $b=S(a)$ بنا براین داریم

$$S'(a)=\sqrt{1+[S(a)]^{2}} \qquad (-\infty<a<\infty). \qquad (۳)$$

بنا براین، با مشتقگیری داریم

$$S''(a)=\frac{S(a)S'(a)}{\sqrt{۱+[S(a)]^۲}} \qquad (۴)$$

ولی از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$S''(a)=S(a) \qquad (-\infty<a<\infty). \qquad (۵)$$

یعنی S با مشتق مرتبهٔ دوم خودش برابر است. سرانجام تابع C را با تساوی زیر تعریف می‌کنیم.*

$$C(x)=\sqrt{۱+[S(x)]^۲} \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۶)$$

پس، با توجه به (۳)

$$C(x)=S'(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۷)$$

درنتیجه، بنا بر (۵)

$$C'(x)=S(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۸)$$

همان‌طور که ممکن‌است تاکنون حدس زده باشید، U را معمولاً $\sinh^{-۱}$ می‌نامند. $S(x)$ معمولاً با نماد $\sinh x$ (سینوس هذلولوی x) و $C(x)$ معمولاً با نماد $\cosh x$ (کسینوس هذلولوی x) نمایش‌داده می‌شوند. به‌این‌ترتیب (۷) و (۸) این حقیقت آشنا را بیان می‌کنند که sinh و cosh مشتقهای یکدیگرهستند. از (۶) اتحاد زیر بدست می‌آید.

$$\cosh^۲ x-\sinh^۲ x=۱,$$

و این اتحاد به‌نوبهٔ خود نشان می‌دهد که $\cosh x \geqslant ۱$.
چون $S=U^{-۱}$ و

$$U(\circ)=\int_\circ^\circ \frac{۱}{\sqrt{۱+t^۲}}dt=\circ,$$

پس $S(\circ)=\circ$. یعنی $\sinh \circ=\circ$. بنا براین با توجه به (۶) ملاحظه می‌کنیم که $\cosh \circ=۱$.
همچنین از (۱) نتیجه می‌شود که اگر $U(x)=y$ آنگاه $U(-x)=-y$. بنا براین

$$S(y)=x=-(-x)=-S(-y).$$

یعنی

$$\sinh(-y)=-\sinh y \qquad (-\infty<y<\infty). \qquad (۹)$$

* به‌خاطر داشته‌باشید که $\sqrt{\ }$ به معنی ریشهٔ دوم نامنفی است.

از (۶) و (۹) نتیجه می‌گیریم که

$$\cosh(-y)=\cosh y \qquad (-\infty<y<\infty). \qquad (۱۰)$$

به‌این‌ترتیب توابع $\sinh^{-1}$، $\sinh$ و $\cosh$ را تعریف کردیم. اکنون می‌توانیم سایر توابع هذلولوی را برحسب اینها تعریف کنیم. به عنوان مثال $\tanh x$ را به صورت $\sinh x/\cosh x$ تعریف می‌کنیم.

تمرینهای ۱.۸

۱. در حل تمرینهای زیر فقط از نتایج بخش ۱.۸ استفاده کنید.

(الف) ثابت کنید که برای هر x حقیقی $\tanh(-x)=-\tanh x$.

(ب) ثابت کنید که برای هر x حقیقی $C''(x)=C(x)$.

(ج) نشان دهید که S در بازهٔ $(-\infty,\infty)$ اکیداً صعودی است.

(د) نشان دهید که نمودار S در $0\leqslant x<\infty$ دارای تقعر رو به بالا و در $-\infty<x\leqslant 0$ دارای تقعر رو به پایین است.

(ه) نمودار S را رسم کنید.

۲. ثابت کنید $\tanh$ در $(-\infty,\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲.۸ تابع نمایی

تابع E را با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$E(x)=C(x)+S(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۱۱)^*$$

درنتیجه E در بازهٔ $(-\infty,\infty)$ پیوسته است و

$$E(0)=C(0)+S(0)=\cosh 0+\sinh 0=1+0=1,$$

همچنین، $E(-x)=C(-x)+S(-x)$، که بنابر (۹) و (۱۰)،

$$E(-x)=C(x)-S(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۱۲)$$

با استفاده از (۱۱) و (۱۲) داریم

$$E(x)E(-x)=[C(x)]^2-[S(x)]^2=\cosh^2 x-\sinh^2 x=1.$$

از این‌رو

---

* شماره‌گذاری معادلات فقط درچهاربخش اول این فصل متوالی خواهد بود.

$$E(x)E(-x)=1 \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۱۳)$$

این نشان می‌دهد که $E(x)$ هرگز صفر نیست. درنتیجه، بنابر ۴.۲.۶، E یا همواره مثبت است یا همواره منفی. از آنجا که $E(0)=1$، حالت دوم امکان ندارد. پس

$$E(x)>0 \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۱۴)$$

چون برای هر x، $C(x)\geqslant 1$، با توجه به (۱۱) می‌بینیم که برای هر x، $E(x)>S(x)$. چون S از بالا کراندار نیست پس E هم از بالا کراندار نیست. یعنی E با هرمقدار مثبت دلخواه بزرگ برابر می‌شود. سپس بنابر (۱۳)، E با هر مقدار مثبت دلخواه کوچکی برابر می‌شود. [زیرا، بنابر (۱۳) اگر $E(x)=M$ (M یك عدد بزرگ) آنگاه $E(-x)=1/M$، ($1/M$ یك عدد کوچك)]. درنتیجه، قضیهٔ ۴.۲.۶ و رابطهٔ (۱۴) نشان می‌دهند که برد E دقیقاً $(0, \infty)$ است.

بااستفاده از (۱۱) داریم $E'(x)=C'(x)+S'(x)=S(x)+C(x)$. درنتیجه

$$E'(x)=E(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۱۵)$$

بنابراین، بااستفاده از (۱۴) می‌بینیم که به‌ازای هر x، $E'(x)>0$، که بنابر ۲.۷.۷ نتیجه می‌شود که E در بازهٔ $(-\infty, \infty)$ یك‌به‌یك است. پس (با توجه به تمرین ۴ از بخش ۷.۶، E یك همسانریختی از $(-\infty, \infty)$ به‌روی $(0, \infty)$ است.

سرانجام، ثابت می‌کنیم که

$$E(x+a)=E(x)E(a) \qquad [a,\ x\in(-\infty, \infty)]. \qquad (۱۶)$$

اگر a عددی ثابت باشد و $F(x)=E(x+a)E(-x)$، بااستفاده از ۳.۵.۷ و ۴.۵.۷ و مشتق‌گیری نسبت به x، داریم

$$F'(x)=E(x+a)[-E'(-x)]+E'(x+a)E(-x) \quad (-\infty<x<\infty).$$

بااستفاده از (۱۵) ملاحظه می‌کنیم که برای هر x، $F'(x)=0$. درنتیجه، بنابر ۳.۸.۷، F ثابت است. یعنی برای هر x، $F(x)=F(0)=E(a)$. به‌این ترتیب

$$E(x+a)E(-x)=E(a) \qquad (-\infty<x<\infty).$$

که این تساوی همراه با (۱۳)، اتحاد (۱۶) را ثابت می‌کند.

البته رسم براین است که $E(x)$ را با علامت e^x نمایش دهند. به‌این ترتیب $e^0=E(0)=1$. همچنین (۱۵) این حقیقت آشنا را بیان می‌کند که e^x با مشتق خودش مساوی است، در حالی که (۱۶) قاعدهٔ اساسی نماها، یعنی $e^{x+a}=e^x \cdot e^a$، را بیان می‌کند.

[برای توجیه استعمال حرف e در اینجا، باید نشان دهیم که e^1، به‌صورتی که در اینجا

تعریف شده است، با مقدار eی مذکور در تساوی (۲) از بند ۳.۶.۲ برابراست. این‌کار را دربخش بعد انجام می‌دهیم.]

تمرینهای ۲.۸

برای حل تمرینهای زیر فقط از نتایج بخشهای ۱.۸ و ۲.۸ استفاده کنید.

۱. (الف) ثابت کنید $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

(ب) نشان‌دهید که نمودار $y=e^x$ در هر x دارای تقعر رو به بالا است.

(ج) نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y=e^x \qquad (-\infty<x<\infty).$$

۲. ثابت کنید

(الف) $e^{2x}=(e^x)^2 \qquad (-\infty<x<\infty)$

(ب) $e^x/e^y=e^{x-y} \qquad (-\infty<x,\ y<\infty)$

۳. نشان‌دهید که

$$C(x)=\frac{E(x)+E(-x)}{2}$$

[یعنی، $\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$.] همچنین نشان‌دهید که

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

۴. اتحادهای زیر را ثابت کنید.

(الف) $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$

(ب) $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$

(ج) $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$

(د) $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$

(ه) $2[\sinh(x/2)]^2=\cosh x-1$

۵. (الف) نشان‌دهید که

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

(ب) برد tanh چیست؟
(ج) اگر w تابع معکوس tanh باشد نشان دهیدکه برای هر x درحوزهٔ تعریف w،

$$w'(x)=\frac{1}{1-x^2}\cdot$$

۳.۸ تابع لگاریتمی. تعریف x^a

در بخش اخیر دریافتیم که E یك‌همسانریختی از بازهٔ $(-\infty, \infty)$ به‌روی بازهٔ $(0, \infty)$ است. اکنون L را به‌عنوان تابع معکوس E تعریف می کنیم. درنتیجه، L یك‌همسانریختی از بازهٔ $(0, \infty)$ به‌روی بازهٔ $(-\infty, \infty)$ است، و

$$L(E(x))=x \quad (-\infty<x<\infty); \quad E(L(x))=x \quad (0<x<\infty). \tag{17}$$

چون $E(0)=1$ پس $L(1)=0$. اگر $L(x)=a$ و $L(y)=b$، آنگاه $x=E(a)$ و $y=E(b)$. درنتیجه، بنا بر (۱۶)، $xy=E(a)E(b)=E(a+b)$. پس،

$$L(xy)=a+b=L(x)+L(y).$$

به‌این ترتیب نشان‌دادیم که

$$L(xy)=L(x)+L(y) \qquad [x,\ y\in(0, \infty)]. \tag{18}$$

این تساوی برای $y=x$ نشان می‌دهد که $L(x^2)=2L(x)$. به‌همین ترتیب، $L(x^3)=L(x^2)+L(x)=3L(x)$ شد. می‌توانیم به‌استقرا نشان‌دهیم که

$$L(x^n)=nL(x) \qquad (0<x<\infty;\ n\in I). \tag{19}$$

اگر $y=1/x$، آنگاه بنا بر (۱۸) داریم $L(1)=L(x)+L(1/x)=0$. درنتیجه

$$L\left(\frac{1}{x}\right)=-L(x) \qquad (0<x<\infty). \tag{20}$$

بنا براین

$$L\left(\frac{x}{z}\right)=L\left(x\cdot\frac{1}{z}\right)=L(x)+L\left(\frac{1}{z}\right)=L(x)-L(z).$$

یعنی

$$L\left(\frac{x}{z}\right)=L(x)-L(z) \qquad [x,\ z\in(0, \infty)]. \tag{21}$$

اگر $y = L(x)$، آنگاه $E(y)=x$. بنابر ۵.۵.۷ داریم $L'(x)=1/E'(y)$. ولی بنا بر (۱۵) داریم $1/E'(y)=1/E(y)=1/x$. در نتیجه

$$L'(x)=\frac{1}{x} \qquad (0<x<\infty). \tag{۲۲}$$

از این‌رو، بنابر ۵.۸.۷،

$$L(x)-L(1)=\int_1^x L'(t)dt=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

از آنجا که $L(1)=0$، می‌بینیم

$$L(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad (0<x<\infty). \tag{۲۳}$$

با استفاده از (۲۲) داریم $L'(1)=1$. یعنی،

$$1=\lim_{h\to 0}\frac{L(1+h)-L(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{L(1+h)}{h}.$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{L(1+1/n)}{1/n}=\lim_{n\to\infty} nL\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

سپس، با توجه به (۱۹) داریم $\lim_{n\to\infty} L[(1+1/n)^n]=1$. یعنی، دنبالهٔ

$$\left\{L\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$$

به ۱ همگراست. چون E در ۱ پیوسته است مطلب اخیر نشان می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} E\left\{L\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\right\}=E(1)$$

یا، بنابر (۱۷)،

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=E(1). \tag{۲۴}$$

طرف چپ (۲۴) همان e است که در برابری (۲) از بند ۳.۶.۲ تعریف شد، درحالی‌که طرف راست، همان e^1 است که در بخش ۲.۸ تعریف شد. این نشان‌می‌دهد که به‌کاربردن نماد e با تعریف قبلی نماد e سازگار بوده است.

هنگامی که نماد مرسوم $L(x)=\log x$ را به‌کار می‌بریم، (۱۷) به‌صورت

$$\log e^x=x \qquad (-\infty<x<\infty)\ ,\ e^{\log x}=x \qquad (0<x<\infty);$$

(۱۸) به‌صورت $\log xy=\log x+\log y$ و (۲۰) به‌صورت $\log(1/x)=-\log x$

درمی‌آید، و دیگر روابط نیز برهمین سیاق خواهند بود.

توجه داشته باشید که $\log x^a = a \log x$ را جز هنگامی که a عددی صحیح ومثبت است ثابت نکرده‌ایم [معادلهٔ (۱۹)]. در واقع ما هنوز x^a را وقتی a گنگ است تعریف نکرده‌ایم. (همان‌طور که درمقدمه ذکر شد، همواره فرض کرده‌ایم که x^a وقتی a گویاست در درس جبر تعریف شده است.)

اگر x یك عدد مثبت دلخواه و a یك عدد حقیقی دلخواه باشد، x^a را اکنون چنین تعریف می‌کنیم

$$x^a = e^{a \log x}. \tag{۲۵}$$

درنتیجه $\log x^a = \log e^{a \log x}$ که بنابر (۱۷)،

$$\log x^a = a \log x.$$

همچنین، توجه داشته باشید که اگر $a = ۲$، آنگاه

$$x^۲ = e^{۲\log x} = e^{\log x + \log x} = e^{\log x} \cdot e^{\log x} = x \cdot x.$$

بنابراین، حتی مطابق تعریف (۲۵)، هم $x^۲$ به‌معنی حاصلضرب x درخودش است. باروشی مشابه می‌توان نشان‌داد که اگر a عددگویای دلخواهی باشد، آنگاه x^a، با تعریف (۲۵) همان است که درجبر دبیرستانی تعریف شده است.

تمرینهای ۳.۸

درحل تمرینهای زیر فقط از نتایج بخشهای ۱.۸، ۲.۸، و ۳.۸ استفاده کنید.

۱. (الف) نشان‌دهید که L در بازهٔ $(۰, \infty)$ اکیداً صعودی است.

(ب) نشان‌دهید که نمودار

$$y = L(x) \qquad (۰ < x < \infty)$$

دارای تقعر رو به‌پایین است

(ج) خم زیر را رسم کنید

$$y = L(x) \qquad (۰ < x < \infty).$$

۲. (الف) اگر $a \neq ۰$، ثابت کنید که

$$x^{-a} = \frac{۱}{x^a} \qquad (۰ < x < \infty).$$

(ب) اگر $a \neq ۰$، ثابت کنید که برای هر x و y مثبت

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a=\frac{x^a}{y^a}.$$

۳. (الف) اگر $a\neq 0$ و

$$f(x)=x^a \qquad (0<x<\infty),$$

ثابت کنید که

$$f'(x)=ax^{a-1} \qquad (0<x<\infty).$$

(ب) اگر $a>0$ و

$$g(x)=a^x \qquad (-\infty<x<\infty),$$

ثابت کنید که

$$g'(x)=a^x\log a \qquad (-\infty<x<\infty).$$

۴. ثابت کنید که $\lim_{x\to\infty}(\log x)/x=0$. [راهنمایی: ابتدا نشان دهید که

$$\left.\frac{\log x}{x}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}\int_1^x\frac{dt}{t^{3/2}} \qquad (x\geqslant 1)\right].$$

۵. اگر $a>0$، ثابت کنید که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}=0.$$

۶. ثابت کنید که برای هر M مثبت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^M}{e^x}=0.$$

۴.۸ توابع مثلثاتی

قبل از شروع بحث دربارهٔ توابع مثلثاتی می‌خواهیم خاطرنشان کنیم که در بسیاری از کتابهای مقدماتی حساب دیفرانسیل وانتگرال اثبات اینکه مشتق تابع سینوس برابر تابع کسینوس است به‌این حقیقت بستگی دارد که $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x=1$. دراثبات این‌تساوی معمولا از دستور مساحت قطعاع دایره استفاده می‌شود که خود از دستور مساحت دایره به‌دست آمده‌است. بنابراین، برای یافتن مشتق تابع‌سینوس‌ازاین‌طریق، باید دستورمساحت دایره را بدانیم. اما یکی از موارد استعمال عمدهٔ توابع مثلثاتی در درس‌حساب‌دیفرانسیل وانتگرال محاسبهٔ انتگرال زیر است

$$4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

که این انتگرال، مساحت دایره را نشان می‌دهد. بنابراین، دراین روش، که به‌اختصار بیان شد، «اثبات» اینکه مساحت دایره πr^2 است، بااستفاده از تعویض متغیرمثلثاتی معتبر نیست. زیراکه متضمن دانستن این مطلب است که مشتق سینوس برابر کسینوس‌است، که این‌مطلب به‌نوبهٔ خود متضمن دانستن این است که مساحت دایره πr^2 است.

در روشی که برای ساختن توابع مثلثاتی در پیش می‌گیریم هیچ‌یك از فرمولهای هندسه را به‌کار نمی‌بریم. ودر واقع، حتی π وچیزهای دیگررا (بدون کمك هندسه)تعریف می‌کنیم

همان‌طورکه در ۲.۱۰.۷ دیدیم انتگرال ناسرهٔ

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

همگراست. عدد حقیقی π را با برابری

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین، اگر تابع u را با

$$u(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1),$$

تعریف‌کنیم، آنگاه $u(1)=\pi/2$، و $u(-1)=-\pi/2$ و u در بازهٔ $[-1,1]$ پیوسته است. چون $1/\sqrt{1-t^2}$ برای $-1<t<1$ پیوسته است، بنابر ۲.۸.۷

$$u'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1). \tag{۲۶}$$

بنابراین، برای $(-1<x<1)$، $u'(x)>0$ و درنتیجه، بنابر ۲.۷.۷، u در بازهٔ $[-1,1]$ تابعی یك‌به‌یك است. پس، بنابر ۲.۷.۶، u یك همسانریختی از $[-1,1]$ به روی $[-\pi/2,\pi/2]$ است. به‌آسانی می‌توان نشان‌داد که برای $-1\leqslant x\leqslant 1$، $u(-x)=-u(x)$. (اکنون، بااستفاده از u' و u'' نمودار تقریبی u را رسم کنید.)

فرض کنیم s تابع معکوس u باشد. دراین‌صورت s یك‌همسانریختی‌از $[-\pi/2,\pi/2]$ به‌روی $[-1,1]$ است به‌گونه‌ای که $s(-\pi/2)=-1$ و $s(\pi/2)=1$. چون $u(0)=0$

پس $s(0)=0$ با توجه به اینکه برای $-1\leqslant y\leqslant 1$، $u(-y)=-u(y)$، نتیجه می‌گیریم که برای $-\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2$، $s(-x)=-s(x)$. اگر $-\pi/2<x<\pi/2$ و $y=s(x)$، آنگاه $-1<y<1$ و $u(y)=x$. بنا بر ۵.۵.۷ و (۲۶) داریم

$$s'(x)=\frac{1}{u'(y)}=\sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-[s(x)]^2}\,.$$

یعنی

$$s'(x)=\sqrt{1-[s(x)]^2}\qquad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right). \tag{۲۷}$$

این نشان می‌دهد که

$$\lim_{x\to(\pi/2)-} s'(x)=\lim_{x\to(\pi/2)-}\sqrt{1-[s(x)]^2}=\sqrt{1-[s(\pi/2)]^2}=0.$$

چون عدد c باشرط $x<c<\pi/2$، وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{s(\pi/2)-s(x)}{\pi/2-x}=s'(c),$$

نتیجه می‌شود که

$$s'(\pi/2)=\lim_{x\to(\pi/2)-}\frac{s(\pi/2)-s(x)}{\pi/2-x}=\lim_{x\to(\pi/2)-} s'(c)=0.$$

بنا بر این $s'(\pi/2)=0$، [که $s'(\pi/2)$ مشتق چپ s در $\pi/2$ است].* به‌همین طریق می‌توان نشان داد $s'(-\pi/2)=0$ که این بار مشتق راست به‌کار رفته است. این بدان معنی است که (۲۷) هم برای $x=\pi/2$ و هم برای $x=-\pi/2$ برقرار است. یعنی

$$s'(x)=\sqrt{1-[s(x)]^2}\qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right). \tag{۲۷الف}$$

اکنون، به‌منظور توسیع s، برای yهایی که در $\pi/2<y\leqslant 3\pi/2$ صدق می‌کنند، $s(y)$ را با معادلهٔ

$$s(x+\pi)=-s(x)\qquad \left(-\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

تعریف می‌کنیم. (توجه داشته باشید که اگر $-\pi/2<x\leqslant\pi/2$ آنگاه $\pi/2<x+\pi\leqslant 3\pi/2$.)

---

* اینجا می‌توانستیم تمرین ۵ از بخش ۷.۷ را به‌کار ببریم.

دراین‌صورت

$$s'(x+\pi)=-s'(x) \qquad \left(-\frac{\pi}{۲}<x\leqslant\frac{\pi}{۲}\right).$$

مشتق راست این تابع در $\pi/۲$، یعنی $s'(\pi/۲)$ مساوی قرینهٔ مشتق راست این تابع در $-\pi/۲$، یعنی $s'(-\pi/۲)$، است که قبلا نشان‌دادیم مساوی ۰ است. از آنجاکه مشتق چپ s در $\pi/۲$ هم برابر ۰ است، نتیجه می‌گیریم که s، پس از آنکه به بازهٔ $[-\pi/۲, ۳\pi/۲]$ توسیع یافته باشد، در $\pi/۲$ دارای مشتق(دوطرفه)است و $s'(\pi/۲)=۰$. می‌توان با شرط سادهٔ

$$s(\pi+x)=-s(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۲۸)$$

s را به‌تمام $(-\infty, \infty)$ توسیع داد. دراین‌صورت تابع توسیع یافتهٔ s درتمام نقاط $(-\infty, \infty)$ دارای مشتق (دو طرفه) خواهد بود. (این مطلب را می‌توان با بحثی مشابه باآنچه‌که هم‌اکنون دیدیم نشان‌داد). با استفاده از (۲۸) و اینکه برای $-\pi/۲\leqslant x\leqslant\pi/۲$، $s(-x)=-s(x)$ می‌توان به‌آسانی نشان‌داد که، برای هر x، $s(-x)=-s(x)$. (یك نمودار تقریبی s را رسم کنید.)

اکنون تابع c را با رابطهٔ

$$c(x)=\sqrt{۱-[s(x)]^۲} \qquad \left(-\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}\right). \qquad (۲۹)$$

در بازهٔ $[-\pi/۲, \pi/۲]$ تعریف می‌کنیم. آنگاه $c(۰)=\sqrt{۱-۰^۲}=۱$ و $c(\pi/۲)=۰=c(-\pi/۲)$.

بنابر (۲۷الف) برای $-\pi/۲\leqslant x\leqslant\pi/۲$ داریم $c(x)=s'(x)$. بنابراین، می‌توانیم تابع c را با رابطهٔ

$$c(x)=s'(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۳۰)$$

به‌تمام $(-\infty, \infty)$ توسیع دهیم. از آنجا که $s(-x)=-s(x)$، پس $s'(-x)=-s'(x)$. یعنی، برای هر x، $c(-x)=c(x)$. بنابر (۲۸)، برای‌هر x، $s'(x+\pi)=-s'(x)$ ودرنتیجه، برای هر x، $c(x+\pi)=-c(x)$.

بنابر (۲۷الف) برای $-\pi/۲<x<\pi/۲$ داریم

$$s''(x)=\frac{-s(x)s'(x)}{\sqrt{۱-[s(x)]^۲}}=-s(x).$$

با روشی‌که قبلا به‌کار بردیم به‌آسانی می‌توان دیدکه، برای هر x، $s''(x)=-s(x)$، یعنی

$$s''(x)=-s(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۳۱)$$

بنابراین، با توجه به (۳۰)

$$c'(x)=-s(x) \qquad (-\infty<x<\infty),$$

ودر نتیجه

$$c''(x)=-c(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \qquad (۳۲)$$

با توجه به (۲۹) داریم.

$$[c(x)]^۲+[s(x)]^۲=۱ \qquad \left(-\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}\right), \qquad (۳۳)$$

ولی، اگر y عددحقیقی دلخواهی باشد، عددصحیح k هست که $y+k\pi\in[-\pi/۲,\ \pi/۲]$.
در نتیجه

$$s(y+k\pi)=-s[y+(k-۱)\pi]=\dots=(-۱)^k s(y).$$

به‌همین‌طریق $c(y+k\pi)=(-۱)^k c(y)$. در نتیجه [بنا بر (۳۳)]

$$[s(y)]^۲+[c(y)]^۲=[s(y+k\pi)]^۲+[c(y+k\pi)]^۲=۱.$$

بنا براین،

$$[c(y)]^۲+[s(y)]^۲=۱ \qquad (-\infty<y<\infty). \qquad (۳۴)$$

اکنون اتحاد زیر را ثابت می‌کنیم

$$s(x+a)=s(x)c(a)+s(a)c(x) \qquad [a,\ x\in(-\infty,\ \infty)]. \qquad (۳۵)$$

فرض می‌کنیم که a ثابت است و $F(x)=s(x+a)-s(x)c(a)-s(a)c(x)$.
آنگاه با استفاده از (۳۱) و (۳۲) داریم

$$F''(x)+F(x)=۰ \qquad (-\infty<x<\infty).$$

در نتیجه

$$۲F'(x)F''(x)+۲F(x)F'(x)=۰ \qquad (-\infty<x<\infty).$$

از آنجا که $۲F'F''+۲FF'$ مشتق $(F')^۲+F^۲$ است، بنا بر ۳.۸.۷

$$[F'(x)]^۲+[F(x)]^۲=[F'(۰)]^۲+[F(۰)]^۲ \qquad (-\infty<x<\infty).$$

مقداری ثابت است. ولی از آنجا که $c(۰)=۱$ ، $s(۰)=۰$، می‌توان به‌آسانی نشان داد که $F(۰)=۰$. به‌همین‌طریق، $F'(۰)=۰$. بنا براین

$$[F'(x)]^۲+[F(x)]^۲=۰ \qquad (-\infty<x<\infty).$$

در نتیجه F و F' هر دو همواره صفر هستند. از اینکه F همـواره صفر است (۳۵) ثابت

می‌شود، و از اینکه F' همواره ۰ است اتحاد زیر به‌دست می‌آید

$$c(x+a)=c(x)c(a)-s(x)s(a) \qquad [a,\ x\in(-\infty,\ \infty)]. \qquad (۳۶)$$

به‌ازای $x=a$، دستورهای زیر، که به‌دستورهای «دو برابر زاویه» موسوم‌اند، به‌دست‌می‌آیند.

$$s(۲x)=۲s(x)c(x), \quad c(۲x)=[c(x)]^۲-[s(x)]^۲. \qquad (۳۷)$$

واضح است که s همان چیزی است که معمولاً تابع سینوس نامیده می‌شود درحالی که c تابع کسینوس است. تقریباً همهٔ اتحادهای مثلثاتی موجود را می‌توان از آنهایی که تاکنون ثابت کرده‌ایم [یعنی از (۳۴) تا (۳۷)] به‌دست آورد. به‌عنوان مثال، با توجه به (۳۷) داریم

$$\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x.$$

با استفاده از (۳۴) داریم

$$\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱,$$

$$\cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}.$$

با قراردادن $۲x=\theta$ داریم

$$\cos\frac{\theta}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱+\cos\theta}{۲}},$$

که همان دستور مربوط به «*نصف زاویه*» است.

اکنون دو اتحاد مهمتر را ثابت می‌کنیم.

بنابر (۳۶) داریم

$$\cos(x+a)=\cos x\cos a-\sin x\sin a.$$

با جانشین‌کردن $-a$ به‌جای a و استفاده از روابط $\cos(-a)=\cos a$ و $\sin(-a)=-\sin a$ داریم

$$\cos(x-a)=\cos x\cos a+\sin x\sin a.$$

برای هرعدد حقیقی θ وهر $k\in I$، فرض کنیم $x=k\theta$ و $a=(۱/۲)\theta$. دراین‌صورت

$$\cos\left(k+\frac{۱}{۲}\right)\theta-\cos\left(k-\frac{۱}{۲}\right)\theta=-۲\sin k\theta\sin\frac{۱}{۲}\theta.$$

اکنون معادلهٔ اخیر را برای هر k از $k=۱$ تا $k=n$ می‌نویسیم:

$$\cos\frac{3}{2}\theta-\cos\frac{1}{2}\theta=-2\sin\theta\sin\frac{1}{2}\theta \qquad (k=1),$$

$$\cos\frac{5}{2}\theta-\cos\frac{3}{2}\theta=-2\sin 2\theta\sin\frac{1}{2}\theta \qquad (k=2),$$

$$\vdots$$

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta=-2\sin n\theta\sin\frac{1}{2}\theta \qquad (k=n).$$

با جمع کردن این تساویها خواهیم داشت

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\frac{1}{2}\theta=-2\sin\frac{1}{2}\theta\,[\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta]$$

در نتیجه
(اگر θ مضرب 2π نباشد)

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta=\frac{\cos\frac{1}{2}\theta-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta} \qquad (38)$$

[در ۴۰.۸.۳ از (۳۸) استفاده کردیم.]

اتحاد مشابهی درمطالعهٔ سریهای فوریه حیاتی است. از (۳۵) شروع می‌کنیم.

$$\sin(x+a)=\sin x\cos a+\sin a\cos x.$$

با تبدیل a به $-a$ داریم

$$\sin(x-a)=\sin x\cos a-\sin a\cos x.$$

در نتیجه

$$\sin(x+a)-\sin(x-a)=2\sin a\cos x.$$

به‌ازای $x=k\theta$ و $a=(1/2)\theta$ داریم

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta=2\sin\frac{1}{2}\theta\cos k\theta.$$

با جمع کردن این اتحادها به‌ازای $k=0, 1, 2, \ldots, n$ داریم

$$\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\theta-\sin\left(-\frac{۱}{۲}\theta\right)=۲\sin\frac{۱}{۲}\theta(\cos ۰\theta+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta),$$

$$\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\theta+\sin\frac{۱}{۲}\theta=۲\sin\frac{۱}{۲}\theta(۱+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta),$$

$$\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\theta=۲\sin\frac{۱}{۲}\theta\left(\frac{۱}{۲}+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta\right),$$

سرانجام

$$\frac{۱}{۲}+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\theta}{۲\sin\frac{۱}{۲}\theta}\ (\theta \text{ مضرب } ۲\pi \text{ نیست}). \qquad (۳۹)$$

تمرینهای ۴.۸

فقط با استفاده از نتایج بخش ۴.۸ تمرینهای زیر را حل کنید.

۱. ثابت کنید که برای x حقیقی،

(الف) $\sin(\pi/۲-x)=\cos x$

(ب) $\cos(\pi/۲-x)=\sin x$

[راهنمایی: از (۳۵) و (۳۶) استفاده کنید.]

۲. ثابت کنید که برای هر x حقیقی،

(الف) $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$

(ب) $\sin ۳x=۳\sin x-۴\sin^۳ x$

(ج) $\cos ۳x=\cos x-۴\sin^۲ x\cos x$

۳. نشان دهید که

(الف) $\sin\frac{\pi}{۴}=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

(ب) $\sin\frac{\pi}{۶}=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$

(ج) $\sin\frac{\pi}{۳}=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

[راهنمایی: برای اثبات (ب) ابتدا نشان دهید که $\sin(\pi/۶)=\cos(\pi/۳)$. آنگاه نشان دهید که $\cos(\pi/۳)=۱-۲\sin^۲(\pi/۶)$. این دو نکته را باهم در نظر بگیرید.]

۴. نشان دهید که چگونه معادلهٔ

$$\sin(x+۲\pi)=\sin x \qquad (-\infty<x<\infty)$$

از (۲۸) نتیجه می‌شود. آنگاه نشان‌دهید که

$$\cos(x+۲\pi)=\cos x \qquad (-\infty<x<\infty).$$

۵. اگر x مضرب فردی از $\pi/۲$ نباشد، باتوجه به‌تعریفهای

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

و

$$\sec x=\frac{۱}{\cos x}.$$

ثابت کنید که

$$\sec^۲ x=۱+\tan^۲ x.$$

۶. نشان‌دهید که

(الف) $\tan(-x)=-\tan x$

(ب) $\tan(x+a)=\dfrac{\tan x+\tan a}{۱-\tan x\tan a}$

۷. نشان‌دهید که اگر

$$t(x)=\tan x \qquad \left(-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\right),$$

آنگاه

$$t'(x)=\sec^۲ x \qquad \left(-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\right).$$

اگر v تابع معکوس t باشد، ثابت کنید که

$$v:(-\infty,\infty)\Longrightarrow\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right),$$

و

$$v'(x)=\frac{۱}{۱+x^۲} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

۸. اگر x مضربی از π نباشد، ثابت کنید که

$$\cos x+\cos ۳x+\cos ۵x+\cdots+\cos(۲n-۱)x=\frac{\sin ۲nx}{۲\sin x},$$

و

$$\sin x+\sin ۳x+\sin ۵x+\cdots+\sin(۲n-۱)x=\frac{\sin^۲ nx}{\sin x}.$$

۵.۸ قضیهٔ تیلر

۱.۵.۸. فرض کنیم که تابع f را بتوان برای هر x متعلق به بازه‌ای چون J به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)=A_۰+A_۱(x-a)+A_۲(x-a)^۲+\cdots+A_n(x-a)^n+\cdots, \quad (۱)$$

که در آن $a\in J$. در این‌صورت می‌گوییم که (۱) بسط تابع f برحسب توانهای $x-a$ است. اکنون به‌طور صوری نحوهٔ محاسبهٔ ضرایب $A_۰$، $A_۱$، ... را نشان می‌دهیم.

با گذاشتن $x=a$ در (۱) همهٔ جملات طرف راست بجز اولین جمله ($A_۰$) صفر می‌شوند و بنابراین

$$f(a)=A_۰.$$

اگر از هردوطرف (۱) مشتق بگیریم، داریم

$$f'(x)=A_۱+۲A_۲(x-a)+۳A_۳(x-a)^۲+\cdots,$$

به‌طوری که

$$f'(a)=A_۱.$$

درمرحلهٔ اخیر از دوفرض ثابت نشده استفاده کردیم. اولاً فرض کردیم که $f'(x)$ وجود دارد، ثانیاً فرض کردیم که مشتق طرف راست (۱) را می‌توان با مشتقگیری جمله به‌جمله محاسبه کرد. از آنجا که تعدادی نامتناهی جمله درطرف راست (۱) وجود دارد، این روش با هیچ چیزی که تاکنون ثابت کرده‌ایم قابل توجیه نیست.

اگر به‌همین ترتیب پیش برویم خواهیم داشت

$$f''(x)=۲A_۲+۳\cdot ۲A_۳(x-a)+۴\cdot ۳A_۴(x-a)^۲+\cdots$$

وبنابراین

$$f''(a)=۲A_۲.$$

به‌طور کلی، برای هر $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ داریم

$$f^{(n)}(x) = n!\,A_n + (n+۱)(n)\cdots(۲)A_{n+۱}(x-a) + (n+۲)(n+۱)\cdots(۳)A_{n+۲}(x-a)^۲ + \cdots,$$

به‌طوری که

$$f^{(n)}(a) = n!\,A_n.$$

(در اینجا $f^{(۰)}$ به‌معنی f است و بنا به تعریف $۰! = ۱$) بنابراین به‌طور صوری نشان‌داده‌ایم که

$$A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots).$$

بنابراین طرف راست (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^۲ + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots. \quad (۲)$$

سری (۲)، سری تیلر (یا بسط تیلر) تابع f حول نقطهٔ $x = a$ نامیده‌می‌شود. حالت‌خاص $a = ۰$، یعنی

$$f(۰) + \frac{f'(۰)}{۱!}x + \frac{f''(۰)}{۲!}x^۲ + \cdots + \frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n + \cdots$$

را گاهی سری ماك لورن تابع f می‌نامند.

واضح است که برای آنکه حتی بتوانیم سری تیلر $f(x)$ حول a را بنویسیم باید برای هر $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$، $f^{(n)}(a)$ وجود داشته باشد. ولی، حتی اگر $f(x)$ درحول a سری تیلر (۲) داشته باشد، ممکن است سری (۲) به‌ازای هیچ‌مقدار x به $f(x)$ همگرا نباشد (البته بجز در $x = a$). [دربخش بعد نشان خواهیم‌داد که جملات سری ماك لورن $f(x) = e^{-۱/x^۲}$ همگی ۰ هستند.]

بررسی سری تیلر را به طریق زیر دنبال می‌کنیم. نخست نشان می‌دهیم که اگر f دارای شرایط مناسبی باشد فرمول

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^۲ + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+۱}(x) \quad (۳)$$

برقرار است. این فرمول دستور تیلر با باقیمانده نامیده می‌شود. جملهٔ باقیمانده، یعنی

$R_{n+1}(x)$، را می‌توانیم برحسب نیازهایمان به صورتهای مختلفی بیان کنیم. بنابراین، برای یك تابع مفروض f، اگر نشان‌دهیم که

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0. \qquad (۴)$$

ثابت می‌شود که سری تیلر (۲) به $f(x)$ همگراست. اثبات (۴) برحسب اینکه با چه تابعی سروکار داریم، ممکن است آسان، مشکل، یا غیرممکن باشد.

فرض کنیم n یك عدد صحیح نامنفی دلخواه و h یك‌عدد مثبت دلخواه باشد.

۰۲۰۵۰۸ لم. فرض کنیم f تابعی حقیقی دربازهٔ $[a,a+h]$ باشد به‌طوری که برای‌هر $x\in[a,a+h]$*، $f^{(n+1)}(x)$ موجود و $f^{(n+1)}$ در بازهٔ $[a,a+h]$ پیوسته‌باشد. به‌فرض اینکه

$$R_{k+1}(x)=\frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)dt \qquad (x\in[a,\ a+h];\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

آنگاه

$$R_k(x)-R_{k+1}(x)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x\in[a,\ a+h];\ k=1,\ \cdots,\ n).$$

درحالتی‌که $h<0$ اگر $[a,\ a+h]$ با $[a+h,\ a]$ تعویض‌شود، این نتیجه بازهم برقرار خواهد بود.

برهان: بااستفاده از انتگرالگیری جزء به‌جزء داریم

$$\begin{aligned}R_{k+1}(x)&=\frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)dt\\&=\frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k)}(t)\Big|_{t=a}^{x}+\frac{k}{k!}\int_a^x (x-t)^{k-1}f^{(k)}(t)dt\\&=\frac{-(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+R_k(x).\end{aligned}$$

ونتیجه به‌دست می‌آید.

---

* وجود $f^{(n+1)}(x)$ برای هر $x\in[a,\ a+h]$ مستلزم وجود $f'(x)$، $f''(x)$، ...، $f^{(n)}(x)$ برای‌هر $x\in[a,a+h]$ است. البته‌مقصود ما از $f^{(k)}(a)$ و $f^{(k)}(a+h)$، که $(k=1,\dots,n)$ مشتقهای یك‌طرفه است.

در مرحلهٔ بعد دستور تیلر را درحالتی‌که باقیمانده به‌صورت انتگرال است ثابت می‌کنیم.

۳.۵.۸. قضیه. فرض می‌کنیم که f تابعی‌حقیقی در بازهٔ $[a, a+h]$ باشد به‌طوری که برای هر $x\in[a, a+h]$، $f^{(n+1)}(x)$موجود و $f^{(n+1)}$ در $[a, a+h]$ پیوسته باشد. دراین‌صورت

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x) \qquad (x\in[a, a+h])$$

که درآن

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

درحالتی‌که $h<0$، اگر $[a, a+h]$ با $[a+h, a]$ تعویض شود نتیجه بازهم برقرار خواهد بود.

برهان: باتوجه به R_k در ۲.۵.۸ داریم

$$-R_1(x)=-\int_a^x f'(t)dt=f(a)-f(x).$$

همچنین بنابر ۲.۵.۸

$$R_1(x)-R_2(x)=\frac{f'(a)}{1!}(x-a),$$

$$R_2(x)-R_3(x)=\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2,$$

$$\vdots$$

$$R_n(x)-R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

اگر همهٔ این معادلات را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت

$$-R_{n+1}(x)=-f(x)+f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+$$
$$\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

وقضیه ثابت می‌شود.

بنابراین اگر f در بازهٔ $[a, a+h]$ دارای مشتق ازهمهٔ مرتبه‌ها باشد و اگر

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0,$$

آنگاه

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

یعنی، سری تیلر f به $f(x)$ همگراست. معمولا استفاده ازباقیماندهٔ $R_{n+1}(x)$ هنگامی‌که به‌صورتی متفاوت با صورت قبلی درآمده باشد آسانتر است. برای رسیدن به‌این منظور احتیاج به‌نتیجه‌ای داریم که‌گاهی قضیهٔ دوم مقدار میانگین در انتگرالها نامیده می‌شود.

۴.۵.۸. قضیه. فرض‌کنیم φ یك تابع پیوسته (حقیقی) دربازهٔ کراندار بستهٔ $[a,b]$ باشد، وفرض‌کنیم‌که g تابعی پیوسته در $[a, b]$ باشد به‌طوری‌که

$$g(t)\geqslant 0 \qquad (a\leqslant t\leqslant b),$$

آنگاه عدد $c\in[a, b]$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که

$$\int_a^b \varphi(t)g(t)dt=\varphi(c)\int_a^b g(t)dt. \tag{1}$$

برهان: بنابر ۶.۶.۶، تابع پیوستهٔ φ در بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ به ماکسیمم خود M و مینیمم خود، m می‌رسد. سپس چون برای هر t، $g(t)\geqslant 0$،

$$m\int_a^b g(t)dt\leqslant\int_a^b \varphi(t)g(t)dt\leqslant M\int_a^b g(t)dt. \tag{2}$$

اگر g همواره صفر باشد، قضیه واضح است. بنابراین می‌توانیم فرض‌کنیم‌که در نقطه‌ای چون t، $g(t)>0$، پس

$$\int_a^b g(t)dt>0$$

(چرا؟). آنگاه بنابر (۲) داریم

$$m \leqslant \theta \leqslant M$$

که در آن

$$\theta = \frac{\int_a^b \varphi(t) g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt}.$$

چون m و M در برد φ هستند، بنابر قضیهٔ ۴.۲.۶، θ هم‌دربرد φ است. یعنی، عددی‌چون $c \in [a, b]$ وجوددارد که $\varphi(c) = \theta$. که از این‌مطلب، معادلهٔ (۱) بی‌درنگ نتیجه‌می‌شود.

اکنون می‌توانیم دستور تیلر را باصورت باقیماندهٔ لاگرانژ[1] به‌دست آوریم.

۵.۵.۸. قضیه. فرض‌کنیم f تابع حقیقی در بازهٔ $[a, a+h]$ باشد، به‌طوری‌که برای‌هر $x \in [a, a+h]$، $f^{(n+1)}(x)$ موجود و تابع $f^{(n+1)}$ در بازهٔ $[a, a+h]$ پیوسته باشد. دراین‌صورت اگر $x \in [a, a+h]$، عددی مانند $c \in [a, x]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

درحالتی‌که $h < 0$، اگر $[a, a+h]$ با $[a+h, a]$ تعویض شود، نتیجه بازهم برقرار خواهد بود.

برهان: بنابر ۴.۵.۸، [به‌ازای $\varphi = f^{(n+1)}$ و $g(t) = (x-t)^n / n!$]، عدد $c \in [a, x]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt.$$

درنتیجه

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

این‌مطلب و ۳.۵.۸ برهان را کامل می‌کنند.

---

1. Lagrange

توجه به‌این نکته مهم است که c هم به n بستگی‌دارد (چون به $f^{(n+1)}$ بستگی‌دارد) وهم به x. به‌عنوان یك مثال ساده تابع

$$f(x)=e^x \qquad (-\infty<x<\infty).$$

را درنظر بگیرید. در این صورت، برای هر x و هر $n=0, 1, 2, \ldots$، $f^{(n)}(x)=e^x$. اگر در ۵.۵.۸ قرار دهیم $a=0$، خواهیم داشت

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

که درآن $0\leqslant c\leqslant x$ (یا اگر $x<0$، آنگاه $x\leqslant c\leqslant 0$). بنابراین، بدون توجه به‌مقدار x و n داریم، $0<e^c<1+e^x$. ازآنجا که $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1}/n!=0$ (درستی این مطلب را تحقیق کنید)، می‌توانیم با میل‌دادن n به‌بینهایت فرمول زیر راکه برای هر x حقیقی برقرار است به‌دست آوریم.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

درنتیجه سری ماك‌لورن تابع e^x برای هر x به e^x همگراست.

۶.۵.۸. با قراردادن $x=a+h$ در ۵.۵.۸ داریم $c=a+\theta h$، که در آن $0\leqslant\theta\leqslant 1$. به‌این‌ترتیب ۵.۵.۸ به‌صورت زیر درمی‌آید: θیی با $0\leqslant\theta\leqslant 1$ هست که

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+$$

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}. \qquad (1)$$

تابع $f(x)=\log x\,(x>0)$ را درنظر بگیرید. آنگاه

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=\frac{-1}{x^2},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

اگر فرض‌کنیم $a=1$، آنگاه برای هر n، اگر h مثبت باشد، $f^{(n)}(x)$ برای هر $x\in[1, 1+h]$ وجود دارد. همچنین اگر $-1<h<0$، آنگاه $f^{(n)}(x)$ برای هر $x\in[1+h, 1]$ موجود است.

اکنون برای این f تساوی (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\log(1+h)=0+h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}h^n}{n}+\frac{(-1)^n h^{n+1}}{(n+1)(1+\theta h)^{n+1}}. \qquad (2)$$

اگر $0\leqslant h\leqslant 1$، آنگاه

$$\left|\frac{(-1)^n h^{n+1}}{(n+1)(1+\theta h)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{n},$$

وبنا براین هرگاه n به بینهایت میل کند، جملهٔ باقیمانده در (۲) به‌صفر میل می‌کند. درنتیجه اگر $0 \leqslant h \leqslant 1$، آنگاه

$$\log(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}h^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}h^n}{n}. \qquad (۳)$$

به‌ویژه، $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots = \log 2$. (مثال بعد از ۲.۳.۳ را ملاحظه کنید). اگر $-1 < h < 0$، بازهم وقتی که n به بینهایت میل کند جملهٔ باقیمانده در (۲) به‌صفر میل می‌کند. ولی اثبات آن (در این مرحله) آسان نیست. [آزمایش کنید. اشکال از آنجا ناشی می‌شود که اگر h به -1 نزدیک باشد مخرج کسر $(-1)^n h^{n+1}/(n+1)(1+\theta h)^{n+1}$ ممکن است خیلی به‌صفر نزدیک بشود]. اما اثبات اینکه تساوی (۳) برای $-1 < h < 0$ برقرار است بعد از معرفی صورت دیگری از باقیمانده مشکل نخواهد بود.

قضیهٔ بعد، دستور تیلر را، با صورت باقیماندهٔ کوشی به‌ما می‌دهد.

۷.۵.۸ قضیه. فرض کنیم f تابعی حقیقی در بازهٔ $[a, a+h]$ باشد، به‌طوری که برای هر $x \in [a, a+h]$، $f^{(n+1)}(x)$ موجود و تابع $f^{(n+1)}$ در بازهٔ $[a, a+h]$ پیوسته باشد، دراین‌صورت اگر $x \in [a, a+h]$، عدد $c \in [a, x]$* وجود دارد به‌طوری که

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a).$$

درحالتی که $h < 0$، اگر $[a, a+h]$ با $[a+h, a]$ تعویض شود، نتیجه بازهم برقرار خواهد بود.

برهان: بنابر ۴.۵.۸ [به‌ازای $\varphi(t) = f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ و $g(t) = 1$] عدد $c \in [a, x]$ وجود دارد، به‌طوری که

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!}\int_a^x 1\, dt$$

---

* عدد c دراین قضیه، درحالت کلی، همان عدد c درقضیهٔ ۵.۵.۸ نیست.

در نتیجه

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a).$$

این مطلب همراه با ۳.۵.۸ برهان را کامل می‌کند.

۸.۵.۸. اگر در ۷.۵.۸ قرار دهیم $x=a+h$، آنگاه $c=a+\theta h$ که در آن $0\leqslant\theta\leqslant 1$. در این صورت نتیجهٔ ۷.۵.۸ به‌شکل زیر در خواهد آمد: عدد $\theta\in[0,1]$ وجود دارد، به‌طوری که

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+$$
$$\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!}(1-\theta)^n h^{n+1}.$$

اکنون، مانند ۶.۵.۸، حالت خاصی را، که‌در آن $f(x)=\log x\,(x>0)$ و $a=1$، موردنظر قرار می‌دهیم. دراین‌صورت اگر $|h|<1$، بنابر ۷.۵.۸ داریم،

$$\log(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}h^n}{n}+\frac{(-1)^n(1-\theta)^n h^{n+1}}{(1+\theta h)^{n+1}}. \quad (1)$$

حال فرض کنیم $-1<h<0$ (یعنی همان حالتی که با صورت باقیماندهٔ لاگرانژ به‌اشکال برخوردیم). چون $0\leqslant\theta\leqslant 1$، داریم

$$1+\theta h\geqslant 1+h$$

و همچنین

$$0\leqslant\frac{1-\theta}{1+\theta h}\leqslant 1.$$

با استفاده از این روابط داریم

$$\left|\frac{(-1)^n(1-\theta)^n h^{n+1}}{(1+\theta h)^{n+1}}\right|=\left|\frac{1-\theta}{1+\theta h}\right|^n\frac{|h|^{n+1}}{|1+\theta h|}\leqslant\frac{|h|^{n+1}}{1+h}.$$

بنابراین هنگامی که n به بینهایت میل کند، جملهٔ باقیمانده در (۱) به صفر میل خواهد کرد. این نکته نشان می‌دهد که معادلهٔ (۳) در ۶.۵.۸ برای $-1<h<0$ هم برقرار است.

قضیهٔ تیلر با صورت باقیماندهٔ کوشی (یا لاگرانژ) را با استفاده از ۳.۵.۸، یعنی قضیهٔ تیلر با باقیماندهٔ به‌صورت انتگرال، به‌دست آوردیم. می‌توان این قضیه را مستقیماً از ۳.۷.۷ یعنی قانون تعمیم یافتهٔ میانگین نیز به‌دست آورد. درحقیقت، با این روش برهان

به‌فرض پیوسته بودن $f^{(n+1)}$ نیاز نداریم، بلکه‌فقط فرض وجود آن کافی است. جزئیات این امر را درحالت‌کوشی ذکر می‌کنیم. حالت لاگرانژ یك تمرین خواهد بود.

۹.۵.۸. قضیه. حتی اگر فرض پیوستگی $f^{(n+1)}$ در بازهٔ $[a, a+h]$ حذف شود قضیهٔ ۷.۵.۸ باز هم برقرار می‌ماند.

برهان: فرض‌کنیم $x \in [a, a+h]$ عددی ثابت باشد. با شرط $t \in [a, x]$، قرار می‌دهیم

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{۱!}(x-t)-\ldots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n, \quad (۱)$$

$$G(x)=x-t,$$

آنگاه محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$F'(t)=\frac{-f^{(n+۱)}(t)}{n!}(x-t)^n, \quad (۲)$$

که درآن F' مشتق F نسبت به t است.

ازآنجاکه برای هر $t \in [a, x]$، $G'(t)=-۱$. فرضهای ۳.۷.۷ برقـرار هستند (G, F به‌جای g, f). در نتیجه عدد $c \in (a, x)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(c)}{G'(c)}$$

ولی $F(x)=G(x)=۰$، و $G'(c)=-۱$. پس بااستفاده از (۲) خواهیم داشت

$$\frac{F(a)}{G(a)}=-F'(c)=\frac{f^{(n+۱)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

وبنابراین

$$F(a)=\frac{f^{(n+۱)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a). \quad (۳)$$

باقراردادن $t=a$ در (۱) واستفاده از (۳) قضیه ثابت می‌شود.

بررسی دقیق برهان نشان می‌دهد که آنچه واقعاً موردنیاز است این است‌که $f^{(n)}$ در $[a, a+h]$ پیوسته و $f^{(n+۱)}(x)$ برای هر x در $(a, a+h)$ مـوجود باشد. زیـرا دراین‌صورت F در $[a, x]$ پیوسته و $F'(t)$ برای هر t در (a, x) وجود خواهد داشت.

تمرینهای ۵.۸

۱. سری تیلر تابع زیر را حول ۲ $= x$ پیدا کنید:

$$f(x)=x^{۳}+۲x+۱ \qquad (-\infty<x<\infty).$$

ثابت کنید، که برای هر x حقیقی، سری تیلر به $f(x)$ همگرا است.

۲. سری تیلر با باقیماندهٔ بصورت انتگرال تابع زیر را بهازای ۰ $= a$ بنویسید:

$$f(x)=\sin x \qquad (-\infty<x<\infty)$$

نشان دهید که

$$|R_{n+۱}(x)|<\frac{|x|^{n+۱}}{(n+۱)!} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

۳. نشان‌دهید که سری تیلر تابع $f(x)=\sin x$ حول نقطهٔ ۰ $= x$ برای هر x حقیقی به $\sin x$ همگرا است.

۴. دستور تیلر را باصورت باقیماندهٔ لاگرانژ درحالات زیر بنویسید

(الف) $f(x)=\log(۱+x) \qquad (-۱<x<\infty)$

$a=۲,$

$n=۴.$

(ب) $f(x)=\tan^{-۱}x \qquad \left(-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\right)$

$a=۰$

$n=۳.$

۵. دستور تیلر را با صورت باقیماندهٔ کوشی برای تابع زیر در ۰ $= a$ بنویسید

$$f(x)=(۱-x)^{۱/۲} \qquad (-۱<x<۱).$$

۶. اگر $a>۰$، $h>۰$ و $n\in I$ ثابت کنید که عدد $\theta\in[۰,۱]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{۱}{a+h}=\frac{۱}{a}-\frac{h}{a^{۲}}+\frac{h^{۲}}{a^{۳}}+\cdots+\frac{(-۱)^{n-۱}h^{n-۱}}{a^{n}}+\frac{(-۱)^{n}h^{n}}{(a+\theta h)^{n+۱}}.$$

۷. اگر δی مثبتی وجود داشته باشد که f'' در $[a-\delta, a+\delta]$ پیوسته باشد ثابت کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-۲f(a)+f(a-h)}{h^{۲}}=f''(a).$$

۶.۸ قضیهٔ دوجمله‌ای

۰.۱.۶.۸ درجبر مقدماتی با دستورهای

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2,$$

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3,$$

برای $x \in R$ آشنا شده‌ایم. درجبر «دبیرستانی» دستور کلیتر

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+x^m \qquad (1)$$

تدریس می‌شود. دراینجا m عددصحیح دلخواهی است وضریب x^n برای $n=1, \dots, m$ عبارت است از

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\dots n}.$$

برمبنای دستور تیلر (با هر صورتی از باقیمانده) می‌توان برهانی برای(۱) ارائه نمود.

اگر $m \in I$، فرض کنیم

$$f(x) = (1+x)^m \qquad (-\infty<x<\infty).$$

دراین‌صورت برای هر x و هر n، $f^{(n)}(x)$ وجود دارد. درحقیقت اگر $n=1, \dots, m$ آنگاه

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

درحالی که اگر $n>m$ آنگاه $f^{(n)}(x)=0$. درنتیجه

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1) \qquad (n=1, \dots, m),$$

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad (n>m).$$

اکنون اگر دستور تیلر را به‌کار بندیم داریم

$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m+0.$$

یعنی

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-m+1)}{m!}x^m,$$

که (۱) را اثبات می‌کند.

۲۰۶۰۸. اگر m یك عدد صحیح نامنفی نباشد، بازهم دستوری برای $(۱+x)^m$ موجوداست. (به‌شرط اینکه $|x|<۱$). این دستور را هم می‌توان از دستور تیلر به‌دست آورد ولی با مشکلات بیشتری سروکار خواهیم داشت.

قضیه. اگر $m\in R$ یك‌عدد صحیح نامنفی نباشد، آنگاه

$$(۱+x)^m=۱+mx+\frac{m(m-۱)}{۲!}x^۲+\dots+$$

$$\frac{m(m-۱)\dots(m-n+۱)}{n!}x^n+\dots \qquad (۱)$$

به‌شرط اینکه $|x|<۱$.

برهان اول: اگر $f(x)=(۱+x)^m$ که در آن $-۱<x<۱$، آنگاه

$$f^{(n)}(x)=m(m-۱)\ \dots\ (m-n+۱)(۱+x)^{m-n} \qquad (n=۱,\ ۲,\ \dots).$$

درنتیجه، برای هر n، بنابر دستور تیلر با صورت باقیماندهٔ کوشی (مطابق ۸۰۵۰۸ و باشرط $a=۰$ و $-۱<h<۱$) داریم

$$f(h)=۱+mh+\frac{m(m-۱)}{۲!}h^۲+\dots+\frac{m(m-۱)\dots(m-n+۱)}{n!}h^n+R_{n+۱} \qquad (۲)$$

که در آن

$$R_{n+۱}=\frac{m(m-۱)\dots(m-n)}{n!}\cdot(۱+\theta h)^{m-n-۱}(۱-\theta)^n h^{n+۱},$$

$$R_{n+۱}=\frac{m(m-۱)\dots(m-n)}{n!}\left(\frac{۱-\theta}{۱+\theta h}\right)^n(۱+\theta h)^{m-۱}h^{n+۱},$$

$$|R_{n+۱}|\leqslant\left|\frac{m(m-۱)\dots(m-n)}{n!}\right|(۱+\theta h)^{m-۱}|h|^{n+۱}. \qquad (۳)$$

تأکید می‌کنیم که θ به n بستگی دارد، به‌طوری‌که رفتار $(۱+\theta h)^{m-۱}$، هنگامی که n به‌بینهایت میل کند، واضح نیست. اگر $m>۱$، آنگاه $m-۱>۰$ وبنابراین

$$۰<(۱+\theta h)^{m-۱}\leqslant(۱+|h|)^{m-۱}.$$

اگر $m<۱$، آنگاه

$$۰<(۱+\theta h)^{m-۱}=\frac{۱}{(۱+\theta h)^{۱-m}}\leqslant\frac{۱}{(۱-|h|)^{۱-m}}=(۱-|h|)^{m-۱}.$$

درنتیجه برای هر m،

$$(۱+\theta h)^{m-۱}\leqslant(۱\pm|h|)^{m-۱}.$$

سپس بنابر (۳) داریم

$$|R_{n+۱}|\leqslant(۱\pm|h|)^{m-۱}a_n$$

که در آن

$$a_n=\frac{|m(m-۱)\dots(m-n)|\,|h|^{n+۱}}{n!}.$$

به‌این‌ترتیب مسأله‌ای را که از θ ایجاد شده بود برطرف کردیم. اکنون آزمون نسبت ۶.۶.۳ نشان می‌دهد که $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n<\infty$. در نتیجه $\lim_{n\to\infty} a_n=۰$، پس $\lim_{n\to\infty} R_{n+۱}=۰$. با این مطلب و (۲)، (۱) به‌دست می‌آید (که h به‌جای x است) وقضیه ثابت می‌شود.

[آنچه‌که در ۱.۶.۸ نشان‌دادیم فقط این بودکه اگر m عدد صحیح مثبتی باشد، تساوی (۱) در۲.۶.۸ برای هر x برقراراست. زیراکه دراین تساوی همهٔ جملات، طرف راست، بجز $m+۱$ جملهٔ اول، صفر هستند.]

برهان دوم: اگر برای $-۱<x<۱$، داشته باشیم $f(x)=(۱+x)^m$، آنگاه بنابر ۳.۵.۸

$$f(x)=۱+mx+\frac{m(m-۱)}{۲!}x^۲+\dots$$

$$+\frac{m(m-۱)\dots(m-n+۱)}{n!}x^n+R_{n+۱}(x) \qquad (۴)$$

که در آن

$$R_{n+۱}(x)=\frac{m(m-۱)\dots(m-n)}{n!}\int_۰^x(۱+t)^{m-n-۱}(x-t)^n dt$$

$$=\frac{m(m-۱)\dots(m-n)}{n!}\int_۰^x(۱+t)^{m-۱}\left(\frac{x-t}{۱+t}\right)^n dt.$$

اگر $0 \leqslant x < 1$، به‌آسانی می‌توان دیدکه تابع

$$g(t)=\frac{x-t}{1+t} \qquad (0 \leqslant t \leqslant x)$$

در $t=0$ ماکسیمم است. اگر $-1 < x < 0$، آنگاه

$$G(t)=\frac{x-t}{1+t} \qquad (x \leqslant t \leqslant 0)$$

در بازهٔ $[x, 0]$ نامثبت وغیرصعودی‌است. درنتیجه $|G|$ در $t=0$ ماکسیمم است. بنابراین درهرحالت،

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|.$$

ازاین‌رو

$$\begin{aligned}|R_{n+1}(x)| &= \left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{m-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n dt\right| \\ &\leqslant \left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{m-1}\left|\frac{x-t}{1+t}\right|^n dt\right| \\ &\leqslant \left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!}\right| |x|^n \left|\int_0^x (1+t)^{m-1} dt\right|.\end{aligned}$$

از آنجاکه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n)|x|^n}{n!}=0$$

(نظیر این‌مطلب را دربرهان اول داشتیم.) $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0$، و قضیهٔ مطلوب از (۴) نتیجه می‌شود.

تمرینهای ۶.۸

۱. فرض‌کنیدکه $\binom{m}{k}$ به‌معنی $\frac{m!}{k!(m-k)!}$ باشد، که درآن m و k اعداد صحیح نامنفی هستند و $k \leqslant m$. ثابت‌کنیدکه

(الف) $\displaystyle 2^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}$

(ب) $\displaystyle 0=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}$

[راهنمایی: ابتدا نشان‌دهید که $\binom{m}{k}$ضریب x^k درتساوی (۱) از بند۱.۶.۸ است.
سپس x را برابر ۱± اختیار کنید.]

۰۴ برهانی برای قضیهٔ دوجمله‌ای ۲.۶.۸ برای حالت $0<x<1$، ارائه کنید که درآن ازصورت باقیماندهٔ لاگرانژ استفاده شود.

۷.۸ قاعدهٔ هوپیتال[1] (لوپیتال)

در ۴.۱.۴ دیدیم که

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

مشروط بر اینکه $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ هردو موجود باشند و $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$. اما گاهی پیش‌می‌آید که$\lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)]$موجوداست‌درحالی که $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0=\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

قاعدهٔ هوپیتال به‌اجمال چنین‌می گوید که‌اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$، آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مشروط بر اینکه حد طرف راست موجود باشد.

ما تنها حالت حدهای یك‌طرفه در $x=0$. (یعنی حدهایی به‌صورت $(\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$ را به‌تفصیل بررسی می‌کنیم. همان‌طورکه خواهیم دید همهٔ حالات دیگر را می‌توان‌بر مبنای همین یك حالت بررسی کرد.

۱.۷.۸ قضیه. اگر برای هر x در $(0,\delta]$، $f'(x)$و$g'(x)$ موجودباشند، به‌طوری که

$$g'(x)\neq 0 \qquad (0<x\leqslant\delta),$$

و

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=0=\lim_{x\to 0+}g(x), \tag{1}$$

و

---

1. L' Hospital

تلفظ فرانسوی لوپیتال است اما درفارسی تلفظ هوپیتال رایج شده است.ـــم.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \tag{۲}$$

آنگاه

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

برهان: اگر مقدار توابع f و g را در ۰ به صورت $f(0) = 0 = g(0)$ تعریف کنیم آنگاه، بنابر (۱)، f و g هردو دره پیوسته‌خواهند بود. بنابر ۳.۷.۷ اگر $x \in (0, \delta]$ آنگاه عدد $c \in (0, x)$ موجود است به‌طوری که

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

که البته c به x بستگی دارد. (از کجا می‌دانیم که $g(x) \neq g(0)$؟)، بنا براین

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (0 < x < \delta), \tag{۳}$$

ازآنجا که اگر $x \to 0+$، آنگاه c به‌صفر میل می‌کند، بنابر (۲) داریم

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

آنگاه قضیهٔ مطلوب از (۳) به‌دست می‌آید.

به‌عنوان مثال اگر $f(x) = \sin x$، $g(x) = x$ به‌ازای $0 \leqslant x \leqslant 1$، آنگاه فرضهای قضیه برقرار هستند. درنتیجه

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

دربعضی مسائل، دو (یا بیشتر از دو) بار به کاربردن قضیه لازم می‌شود. به‌عنوان مثال، اگر $f(x) = \sin x - x\cos x$ و $g(x) = x^2 \sin x$، آنگاه $f'(x) = x\sin x$ و $g'(x) = x^2\cos x + 2x\sin x$، وبنابراین

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\sin x}{x\cos x + 2\sin x} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

دراینجا $\lim_{x \to 0+} \psi(x) = 0 = \lim_{x \to 0+} \varphi(x)$. ولی بنابر ۱.۷.۸

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x}{-x\sin x+۳\cos x}=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{۳}=\lim_{x\to 0+}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x-x\cos x}{x^{۲}\sin x},$$

که در تساویهای دوم وچهارم از ۱.۷.۸ استفاده شده است.

۲.۷.۸. اگر بخواهیم نظیر ۱.۷.۸ را برای حدهایی ثابت کنیم که در آنها $x\to a+$، کافی است از این مطلب استفاده شود که اگر $F(x)=f(x+a)$، آنگاه

$$\lim_{x\to 0+}F(x)=\lim_{x\to 0+}f(x+a)=\lim_{x\to a+}f(x),$$

و

$$\lim_{x\to 0+}F'(x)=\lim_{x\to a+}f'(x).$$

درنتیجه ۱.۷.۸، درحالتی که $0+$ با $a+$ تعویض شده باشد، به‌کار بستن ۱.۷.۸ (به‌همان صورت اولیه) درمورد توابع $F(x)=f(x+a)$ و $G(x)=g(x+a)$، ثابت می‌شود.

به‌همین‌طریق، اگر بخواهیم ۱.۷.۸ را، درحالتی که $0+$ با ∞ تعویض شده باشد، ثابت کنیم باید

$$F(x)=f\left(\frac{۱}{x}\right),\qquad G(x)=g\left(\frac{۱}{x}\right).$$

را موردنظر قرار دهیم، زیرا

$$\lim_{x\to 0+}F(x)=\lim_{x\to\infty}f(x).$$

از آن گذشته، $F'(x)=-(۱/x^{۲})f'(۱/x)$ و $G'(x)=-(۱/x^{۲})g'(۱/x)$. در نتیجه

$$\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{f'(۱/x)}{g'(۱/x)},$$

و بنابراین

$$\lim_{x\to 0+}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

اکنون خواننده باید بتواند که صورتهای متفاوت ۱.۷.۸ را درحالات $x\to a+$، $x\to\infty$ و $x\to a-$ بیان وثابت کند.

۳.۷.۸. با مفروضات ۱.۷.۸، گاهی‌کسر $f(x)/g(x)$ را صورت مبهم نوع $0/0$ می‌نامند، زیرا که صورت و مخرج (وقتی‌که $x\to 0+$) هردو به 0 میل می‌کنند.

حالت بسیار مهم دیگـر، مبهم نوع ∞/∞ نامیده می‌شود. دراین حالت با کسر $f(x)/g(x)$ سروکار داریم، که $f(x)$ و $g(x)$ (آن‌چنان‌که ذیلا تعریف می‌شود) هر دو به‌بینهایت میل می‌کنند (با ۱.۴.۲ مقایسه کنید).

تعریف. فـرض کنیم f تابعی حقیقی بـاشد کـه حوزه‌اش شامـل همهٔ نقاط بـازهٔ $(a-h,\ a+h)$، مگراحتمالا خود a، باشد. اگر برای هرعددمثبت دلخواه M، عددمثبت δ موجود باشد به گونه‌ای که

$$f(x)\geqslant M \qquad (0<|x-a|<\delta),$$

گوییم وقتی x به a میل کند $f(x)$ به بینهایت میل‌می‌کند ومی‌نویسیم $f(x)\to\infty$ وقتی $x\to a$. برای گزاره‌های

$f(x)\to\infty$ وقتی‌که $x\to a+$،

$f(x)\to\infty$ وقتی‌که $x\to a-$،

و $f(x)\to\infty$ وقتی‌که $x\to\infty$،

هم تعریفهای مشابهی به‌کار می‌رود که آنها را برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

اکنون دومین حالت مهم قاعدهٔ هوپیتال را ثابت می‌کنیم.

۴.۷.۸. قضیه. فرض می‌کنیم $f'(x)$ و $g'(x)$ برای هر x در $[0,\ \delta)$ موجود باشند و

$$g'(x)\neq 0 \qquad (0<x\leqslant\delta).$$

اگر $f(x)\to\infty$ و $g(x)\to\infty$ وقتی $x\to 0+$، و اگر

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L, \tag{1}$$

آنگاه

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

برهان: فرض می کنیم به‌ازای $0<x\leqslant\delta$، $h(x)=f(x)-Lg(x)$. بنابراین $h'(x)=f'(x)-Lg'(x)$، پس بنابر (۱)،

$$\lim_{x\to 0+}\frac{h'(x)}{g'(x)}=0 .$$

اگر ε عددمثبت‌دلخواهی باشد. از رابطهٔ فوق و فرض‌اینکه $g(x)\to\infty$ هر گاه $x\to 0+$، نتیجه می‌شود که عدد مثبت δ_1 هست، به‌طوری که

$$g(x)>0 \qquad (0<x\leqslant\delta_1) \tag{۲}$$

و برای هر $c\in(0,\ \delta_1)$

$$\left|\frac{h'(c)}{g'(c)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

اگر $x\in(0\ ,\ \delta_1)$ آنگاه عددی مانند $c\in(x,\ \delta_1)$ وجود دارد که

$$\frac{h(\delta_1)-h(x)}{g(\delta_1)-g(x)}=\frac{h'(c)}{g'(c)}$$

در نتیجه

$$\left|\frac{h(x)-h(\delta_1)}{g(x)-g(\delta_1)}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (0<x<\delta_1). \tag{۳}$$

از آنجاکه $g(x)\to\infty$ وقتی که $x\to 0+$، عدد δ_2 هست به‌طوری که $\delta_2<\delta_1$ و

$$g(x)>g(\delta_1) \qquad (0<x<\delta_2). \tag{۴}$$

در نتیجه بنابر (۲) و (۴) داریم

$$0<g(x)-g(\delta_1)<g(x) \qquad (0<x<\delta_2). \tag{۵}$$

سپس، بااستفاده از (۳) و (۵)، نتیجه می گیریم که

$$\frac{|h(x)-h(\delta_1)|}{g(x)}<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (0<x<\delta_2). \tag{۶}$$

اکنون δ_3 را با شرط $\delta_3<\delta_2$ طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\frac{|h(\delta_1)|}{g(x)}<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (0<x<\delta_3). \tag{7}$$

اگر $0<x<\delta_3$، داریم

$$\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{h(x)-h(\delta_1)}{g(x)}+\frac{h(\delta_1)}{g(x)},$$

$$\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right|\leqslant\frac{|h(x)-h(\delta_1)|}{g(x)}+\frac{|h(\delta_1)|}{g(x)},$$

و سپس بنابر (۶) و (۷)

$$\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right|<\varepsilon \qquad (0<x<\delta_3).$$

این ثابت می‌کند که

$$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)}{g(x)}=0.$$

چون

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{h(x)}{g(x)}+L,$$

قضیهٔ موردبحث نتیجه می‌شود

۵.۷.۸. در ۴.۷.۸ می‌توان $x\to 0+$ را با $x\to a+$، $x\to\infty$، $x\to -\infty$، یا $x\to a-$ تعویض کرد. ما آن‌را اثبات نمی‌کنیم.

به‌عنوان یك مثال، فرض می‌کنیم برای $x>0$، $f(x)=\log x$ و $g(x)=x$. در این‌صورت $f(x)\to\infty$ و $g(x)\to\infty$ وقتی‌که $x\to\infty$. چون $f'(x)=1/x$ و $g'(x)=1$، داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0.$$

درنتیجه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0.$$

اکنون $\lim_{x\to\infty} (x^n/e^x)$ را که در آن $n\in I$، درنظر می‌گیریم. داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\dots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad (n\in I).$$

بااستفاده از این مطلب که $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(1/x)$ نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^n e^{1/x}}=0 \qquad (n\in I). \tag{1}$$

بااین مطلب می‌توانیم مثال بسیار جالبی دربارهٔ سری تیلر ارائه دهیم. فرض کنیم

$$g(x)=e^{-1/x} \qquad (x>0),$$
$$g(0)=0.$$

پس بنابر (۱) داریم

$$g'(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-1/x}}{x}=0.$$

چون

$$g'(x)=\frac{e^{-1/x}}{x^2} \qquad (x>0),$$

بااستفاده از (۱) می‌توان نشان‌داد که $g''(0)=0$. درحقیقت، چون (برای $x>0$) $g^{(n)}(x)$ یك مجموع متناهی از جملاتی به‌صورت $e^{-1/x}/x^m$ است، یك استقرای ریاضی ساده نشان می‌دهد که

$$g(0)=g'(0)=\dots=g^{(n)}(0)=\dots=0. \tag{2}$$

درنتیجه سری ماك‌لورن g متحداً صفر است و بنابراین برای هیچ x مثبتی همگرا به $g(x)$ نیست.

این مثال نشان می‌دهد که از موجود بودن همهٔ مشتقهای یك تابع f درنقطه‌ای‌چون a برقراری تساوی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

برای هیچ $x \neq a$ نتیجه نمی‌شود.

توجه داشته باشید که همهٔ مشتقهای $g^{(n)}(\circ)$ در (۲) مشتق راست هستند. تابع h که با تساویهای

$$h(x)=e^{-1/x^{2}} \qquad (x\neq 0),$$
$$h(0)=0,$$

تعریف شده است، دارای ویژگی $h(0)=h'(0)=\ldots=h^{(n)}(0)=\ldots$ است که در آن همهٔ مشتقها دوطرفه هستند. بررسی این مطلب را برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۶.۷.۸. صورتهای مبهم دیگر را غالباً می‌توان با تحویل آنها به یکی از انواع ۰/۰ یا ∞/∞ بررسی کرد. مثلاً، x^{-x} را هنگامی که $x \to 0+$ در نظر بگیرید، که آن را می‌توان یک صورت مبهم از نوع 0^{0} نامید. اکنون

$$\log x^{-x}=-x\log x=\frac{-\log x}{1/x}=\frac{\log(1/x)}{1/x},$$

و

$$\frac{\log(1/x)}{1/x}$$

از نوع ∞/∞ است. درنتیجه

$$\lim_{x\to 0+}\log x^{-x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\log(1/x)}{1/x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-1/x}{-1/x^{2}}$$
$$=\lim_{x\to 0+}x=0,$$

که در آن ۴.۷.۸ درمورد دومین علامت تساوی به‌کار رفته‌است. ولی از آنجاکه تابع نمایی پیوسته است داریم

$$\lim_{x\to 0+}x^{-x}=\lim_{x\to 0+}e^{\log x^{-x}}=\exp(\lim_{x\to 0+}\log x^{-x})=e^{0}=1.$$

به‌طور کلی، صورت مبهم $[F(x)]^{G(x)}$ را می‌توان با ملاحظهٔ

$$\log[F(x)]^{G(x)}=\frac{\log F(x)}{1/G(x)}.$$

بررسی کرد.

هنگامی‌که $x \to 0+$، کمیت $1/x^2 - 1/(x\tan x)$ مبهم نوع $\infty - \infty$ است. اما با کمی عملیات جبری می‌توان نوشت

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\tan x} = \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x}.$$

کمیت طرف راست مبهم نوع $0/0$ است که قبلاحد آن‌را (هنگامی‌که $x \to 0+$)، در پایان قضیهٔ ۱.۷.۸، محاسبه کردیم.

تمرینهای ۷.۸

۱. مقدار حدهای زیررا حساب کنید.

(الف) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$.

(ب) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{10^x - 5^x}{x}$.

(ج) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log[(1+x)/(1-x)]}{x}$.

۲. مقدار حدهای زیر را حساب کنید.

(الف) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log(1+e^{3x})}{x}$.

(ب) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log x}{x^{0.0001}}$.

(ج) $\lim\limits_{x \to \infty} x(\sqrt{x^2+4} - x)$.

(راهنمایی: «صورت» را گویا کنید.)

۳. مقدار حدهای زیر را حساب کنید.

(الف) $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{x - 5x^5 + 4x^6}{(1-x)^2}$.

(ب) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - 4\sin^2(\pi x/6)}{1 - x^2}$.

۴. مقدار حدهای زیر را حساب کنید.

(الف) $\lim\limits_{x \to \circ}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{\sin x}\right)$

(ب) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{۱/x}$

(ج) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x}$

(د) $\lim\limits_{x \to ۳}\frac{۱}{x-۳}\int_{۳}^{x} e^{\sqrt{۱+t^{۲}}}dt$

۹

دنباله‌ها و سریهای توابع

۱.۹ همگرایی نقطه‌ای دنباله‌های توابع

در فصلهای ۲ و ۳ دربارهٔ همگرایی دنباله‌ها وسریهای اعداد حقیقی بحث کردیم. در این فصل همگرایی دنباله‌ها و سریهای توابع را مورد بحث قرار خواهیم داد. سروکارما تنها با توابع حقیقی خواهد بود.

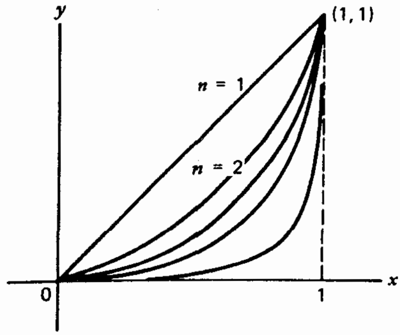
۰.۱.۹ تعریف. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی در مجموعهٔ E باشد، می‌گوییم که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E به‌تابع f همگراست اگر

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)=f(x) \qquad (x\in E). \tag{۱}$$

اگر (۱) برقرار باشد، گاهی گفته می‌شود کـه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای نقطه‌ای به f است. زیرا اگر (۱) برقرار باشد آنگاه برای هر نقطهٔ $x\in E$، دنبالهٔ اعـداد حقیقی $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ به $f(x)$ همگراست. در اینجا چند مثال می‌آوریم.
اگر

$$f_n(x)=x^n \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

آنگاه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0,1]$ به f همگراست که مقادیر f عبارت‌اند از



شکل ۲۵. $f_n(x)$ $f_n(x)=x^n \ (\circ \leqslant x \leqslant \text{۱})$

$$f(x)=\circ \qquad (\circ \leqslant x < \text{۱}),$$
$$f(\text{۱})=\text{۱}.$$

شکل ۲۵ را ملاحظه کنید.

به‌عنوان مثال دوم فرض کنید

$$g_n(x)=\frac{x}{\text{۱}+nx} \qquad (\circ \leqslant x < \infty).$$

اگر $x>\circ$، آنگاه $\circ < g_n(x) \leqslant x/nx = \text{۱}/n$. در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\circ \qquad (x>\circ).$$

همچنین، چون برای هر $n\in I$، $g_n(\circ)=\circ$، واضح است که $\{g_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ در $[\circ, \infty)$ به $\circ$ (یعنی تابعی که همواره صفر است) همگراست.

به‌عنوان مثال دیگر فرض کنیم

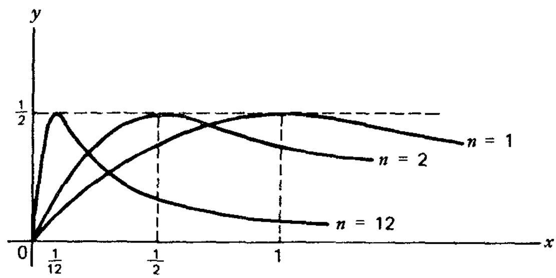
$$h_n(x)=\frac{nx}{\text{۱}+n^{\text{۲}}x^{\text{۲}}} \qquad (\circ \leqslant x < \infty).$$

در این‌صورت اگر $x>\circ$، داریم

$$h_n(x)=\frac{\text{۱}/nx}{(\text{۱}/n^{\text{۲}}x^{\text{۲}})+\text{۱}}$$

و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} h_n(x)=\circ$. چون برای هر $n\in I$، $h_n(\circ)=\circ$، می‌بینیم که $\{h_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ در $[\circ, \infty)$ به $\circ$ همگراست. شکل ۲۶ را ملاحظه کنید.

درمثال چهارم فرض می‌کنیم که χ_n تابع مشخصهٔ بازهٔ $[-n, n]$ باشد. برای هر



شکل ۲۶ $y=h_n(x)$، $(0\leqslant x<\infty)$ $h_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

$x\in R^1$، به‌شرط اینکه $n\geqslant |x|$ داریم $\chi_n(x)=\chi_{n+1}(x)=\chi_{n+2}(x)=\ldots=1$ (زیرا که در این حالت $x\in[-n, n]$). درنتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\chi_n(x)=1 \qquad (x\in R^1),$$

و بنابراین $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $(-\infty, \infty)$ به ۱ همگراست.

۲.۱.۹. بنابه‌تعریف ۱.۱.۹، دنبالهٔ توابع $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ درمجموعهٔ E به f همگراست اگر برای هر $x\in E$ و هر $\varepsilon>0$ عدد $N\in I$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N). \tag{1}$$

درحالت‌کلی عدد N به‌هر دوی ε و x وابسته است. همیشه نمی‌توان Nی یافت که (۱) به‌ازای تمام xهای در E برقرار باشد.

مثلا، اگر $(0\leqslant x\leqslant 1)$ $f_n(x)=x^n$، آنگاه، همان‌طور که دیدیم، $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ به f همگراست که $(0\leqslant x<1)$ $f(x)=0$ و $f(1)=1$. برای $\varepsilon=1/2$ و برای هر $x\in E$، عدد $N\in I$ موجود است به‌طوری‌که

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{2} \qquad (n\geqslant N). \tag{2}$$

اگر $x=0$ یا $x=1$، آنگاه(۲) برای $N=1$ برقراراست. اما اگر $x=3/4=0{,}75$ آنگاه‌کوچکترین مقدار N که برای آن (۲) برقرار باشد $N=3$ است. زیرا اگر $x=3/4$، آنگاه $f_n(x)=(3/4)^n$ درحالی‌که $f(x)=0$. بنابراین

$$|f_n(x)-f(x)|=\left(\frac{3}{4}\right)^n، \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^n<\frac{1}{2}$$

اگر وتنها اگر $n\geqslant 3$. به‌همین طریق اگر $x=0{,}9$، آنگاه کوچکترین مقدار N که برای

آن (۲) برقرار باشد $N=۷$ است.

درحقیقت، هیچ عدد $N\in I$ نیست که (۲) برای همهٔ xهای واقع در $[۰,۱]$ برقرار باشد. زیرا اگر چنین Nی موجود باشد باید برای هر $x\in[۰,۱)$ داشته باشیم

$$x^n<\frac{۱}{۲} \qquad (n\geqslant N)$$

درنتیجه $x^N<۱/۲$ $(۰\leqslant x<۱)$. اگر $x\to ۱^-$ بهتناقض $۱\leqslant ۱/۲$ میرسیم.

درمورد مثال دوم ۱.۱.۹ وضعیت متفاوت است. زیرا اگر

$$g_n(x)=\frac{x}{۱+nx} \qquad (۰\leqslant x<\infty),$$

آنگاه $(۰\leqslant x<\infty)$ $۰\leqslant g_n(x)\leqslant ۱/n$. درنتیجه بـرای هر $\varepsilon>۰$ اگر $N>۱/\varepsilon$، گزارهٔ

$$|g_n(x)-۰|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N) \tag{۳}$$

برای همهٔ xهای متعلق به بازهٔ $[۰,\infty)$ راست است. (زیرا در اینحالت برای همهٔ xهای متعلق به $[۰,\infty)$، $|g_n(x)-۰|\leqslant ۱/n\leqslant ۱/N<\varepsilon$.) درنتیجه برای دنبالهٔ $\{g_n\}_{n=۱}^{\infty}$ میتوان یك $N\in I$ یافت بهطوری کـه برای هر $x\in[۰,\infty)$، (۳) برقرار باشد. این N فقط به ε وابسته است و به x بستگی ندارد.

اکنون

$$h_n(x)=\frac{nx}{۱+n^۲x^۲} \qquad (۰\leqslant x<\infty).$$

را درنظر بگیرید. قبلا دیدهایم که $\{h_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[۰,\infty)$ به ۰ همگراست. بنابراین اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، میدانیم کـه برای هر $x\in[۰,\infty)$ عدد $N\in I$ موجود است بهطوری که

$$|h_n(x)-۰|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N). \tag{۴}$$

اما توجه داشته باشید که $h_n(۱/n)=۱/۲$. بنابراین، اگـر $\varepsilon=۱/۲$، هیچ Nی در I وجود ندارد کـه (۴) برای هر $x\in[۰,\infty)$ برقرار باشد. زیـرا اگر چنین Nی وجود داشت آنگاه

$$h_N(x)<\frac{۱}{۲} \qquad (۰\leqslant x<\infty),$$

و بهازای $x=۱/N$ بهتناقض میرسیم.

اگر χ_n تابع مثال چهارم بند ۱.۱.۹ باشد، برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم که نشان دهد اگر $\varepsilon < ۱$، آنگاه هیچ Nی در I وجود ندارد که برای آن گزارهٔ

$$|\chi_n(x) - ۱| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N)$$

برای هر x حقیقی برقرار باشد.

تمرینهای ۱.۹

۱. اگر

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \qquad (۰ \leqslant x \leqslant ۱)$$

آیا عدد N در I وجود دارد که برای همهٔ xهای بازهٔ $[۰, ۱]$

$$|f_n(x) - ۰| < \frac{۱}{۱۰} \qquad (n \geqslant N)?$$

۲. اگر

$$f_n(x) = \frac{x^n}{۱ + x^n} \qquad (۰ \leqslant x \leqslant ۱).$$

نشان دهید که $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[۰, ۱]$ همگرای نقطه‌ای است. اگر

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad (۰ \leqslant x \leqslant ۱),$$

آیا عدد N در I وجود دارد که برای همهٔ xهای بازهٔ $[۰, ۱]$ داشته باشیم

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{۱}{۴} \qquad (n \geqslant N)?$$

۳. اگر χ_n تابع مشخصهٔ بازهٔ باز $(۰, ۱/n)$ باشد و اگر

$$f_n(x) = n\chi_n(x) \qquad (۰ \leqslant x \leqslant ۱).$$

(الف) نشان دهید که $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[۰, ۱]$ به ۰ همگراست.

(ب) آیا Nی در I هست که برای همهٔ xهای بازهٔ $[۰, ۱]$ داشته باشیم

$$|f_n(x) - ۰| < \frac{۱}{۲} \qquad (n \geqslant N)?$$

(ج) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n$ را محاسبه کنید.
(د) (الف) و (ج) را باهم مقایسه کنید.
۴. برای $n\in I$ فرض کنید

$$f_n(x)=nx(1-x^2)^n \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

(الف) نشان دهید که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0,1]$ به 0 همگراست.
(ب) نشان دهید که $\left\{\int_0^1 f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ به $1/2$ همگراست.
(ج) (الف) و (ب) را باهم مقایسه کنید.
۵. اگر

$$f_n(x)=\frac{x}{n}e^{-x/n} \qquad (0\leqslant x<\infty).$$

(الف) ثابت کنید که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در بازهٔ $[0,\infty)$ به 0 همگراست.
(ب) آیا Nی در I وجود دارد که برای هر x در بازهٔ $[0,\infty)$

$$|f_n(x)-0|<\frac{1}{10} \qquad (n\geqslant N)? \tag{*}$$

(جواب منفی است.)
(ج) اگر $A>0$، آیا Nی وجود دارد که برای هر x در بازهٔ $[0,A]$، (*) برقرار باشد؟ (جواب مثبت است.)

۲.۹ همگرایی یکنواخت دنباله‌های توابع

تاکنون پذیرفته‌ایم که بگوییم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E به f همگرای نقطه‌ای است اگر برای هر $x\in E$، به‌ازای هر عدد مفروض $\varepsilon>0$ عدد $N\in I$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N). \tag{1}$$

مثالهای متعددی هم دیده‌ایم که در آنها یافتن یك N، به‌طوری که (۱) برای همهٔ xهای E برقرار باشد، غیرممکن است.

اگر برای هر $\varepsilon>0$ یافتن Nی ممکن باشد، به‌طوری که (۱) برای همهٔ xهای E برقرار باشد آنگاه می‌گوییم که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به f است.

۱.۲.۹. تعریف. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی در مجموعهٔ E باشد، آنگاه می‌گوییم که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به‌تابع f است اگر برای هر $\varepsilon>0$

مفروض، عدد $N\in I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N; x\in E). \tag{۲}$$

از نحوهٔ بیان این تعریف نتیجه می‌گیریم که N به ε بستگی دارد ولی به x بستگی ندارد. آشکار است که اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به f باشد آنگاه به f همگرای نقطه‌ای است.

درنتیجه، اگر $g_n(x)=x/(1+nx)$ $(0\leqslant x<\infty)$، آنگاه ~~آنچه~~ که در بخش ۱.۹ انجام دادیم نشان می‌دهد که $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0,\infty)$ همگرای یکنواخت به ۰ است. زیرا که قبلا نشان داده‌ایم که، برای هر عدد مثبت دلخواه ε، عدد $N\in I$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$|g_n(x)-0|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N; 0\leqslant x<\infty).$$

(هر Nی که از $1/\varepsilon$ بزرگتر باشد کارآمد است.)

بیان این معنی که دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به f نیست چندان آسان نیست. اکنون این مطلب را روشن خواهیم کرد.

۲.۲.۹. نتیجه. دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به f نیست اگر و تنها اگر ε مثبتی وجود داشته باشد که برای هیچ $N\in I$ گزارهٔ

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N; x\in E)$$

برقرار نباشد.

خواننده باید در این مرحله آن‌قدر تأمل کند تا مطمئن شود که تعریف ۲.۲.۹ با تعریف ۱.۲.۹ هم‌ارز است.

اگر $f_n(x)=x^n$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ و $f(x)=0$ $(0\leqslant x<1)$ و $f(1)=1$، قبلا دیدیم که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0,1]$ به f همگرای نقطه‌ای است. اما $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0,1]$ همگرای یکنواخت به f نیست. زیرا همان‌طور که در ۲.۱.۹ دیدیم اگر $\varepsilon=1/2$، آنگاه برای هیچ $N\in I$ گزارهٔ

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N; 0\leqslant x\leqslant 1).$$

برقرار نیست.

همچنین، دنباله‌های $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ مذکور در بخش ۱.۹ در حوزه‌های تعریفشان به‌ترتیب همگرای یکنواخت به ۰ و ۱ نیستند (هرچند که به ۰ و ۱ همگرای نقطه‌ای‌اند). (تحقیق کنید!)

۳.۲.۹. توجه داشته باشید که (۲) را می‌توان به‌صورت

$$f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon \qquad (n\geqslant N; x\in E).$$

بیان کرد. پس می‌توان همگرایی یکنواخت (دنباله‌ای از توابع حقیقی که حوزهٔ تعریفشان مجموعه‌ای از اعداد حقیقی چون E است) را با بیان هندسی زیر توصیف کرد: برای اینکه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به f باشد، باید برای هر ε مثبت دلخواه عدد $N\in I$ موجود باشد به طوری که اگر $n\geqslant N$ آنگاه تمامی نمودار $y=f_n(x)$ بین نمودارهای $y=f(x)-\varepsilon$ و $y=f(x)+\varepsilon$ واقع شود. شکل ۲۷ را ببینید.

این ضابطهٔ هندسی، با $\varepsilon<1/2$، نیز نشان می‌دهد که دنباله‌های $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$، مربوط به شکلهای ۲۵ و ۲۶، همگرای یکنواخت نیستند. زیرا $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شکل ۲۵، همگرای نقطه‌ای به f است که در آن $f(1)=1$ و $f(x)=0$ $(0\leqslant x<1)$. اما، n هرچه باشد، برای xهایی که به اندازهٔ کافی به ۱ نزدیک باشند (ولی با آن مساوی نباشند) نقاطی روی نمودار $y=f_n(x)$ یافت می‌شوند که بین نمودارهای $y=f(x)-\varepsilon$ و $y=f(x)+\varepsilon$ واقع نیستند. همچنین، $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شکل ۲۶ همگرای نقطه‌ای به ۰ است. اما، برای هر n، نقطهٔ $\langle 1/n, 1/2\rangle$ روی نمودار $y=h_n(x)$ است در حالی که بین نمودارهای $y=-\varepsilon$ و $y=\varepsilon$ واقع نیست.

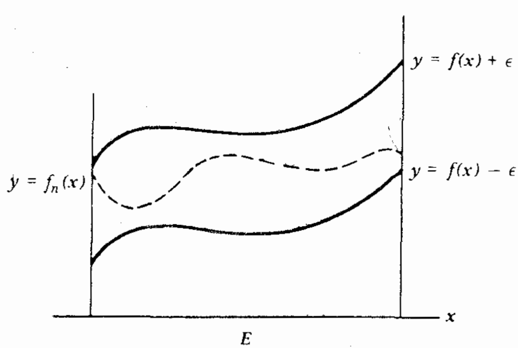
۹.۲.۴. بازهم روش دیگری برای مشاهدهٔ همگرایی یکنواخت ارائه می‌کنیم. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به ۰ باشد، آنگاه به‌ازای هر عدد مفروض $\varepsilon>0$، Nی هست که

$$|f_n(x)|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N; x\in E).$$

درنتیجه

$$\operatorname*{l.u.b.}_{x\in E} |f_n(x)|\leqslant\varepsilon \qquad (n\geqslant N).$$

بنابراین اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به ۰ باشد، آنگاه



شکل ۲۷

$$\lim_{n \to \infty} \underset{x \in E}{\mathrm{l.u.b.}} |f_n(x)| = 0. \qquad (1)$$

برعکس، به‌آسانی ثابت‌می‌شود که اگر (۱) برقرار باشد، آنگاه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به ۰ است.

از این مطلب به‌راحتی ثابت می‌شود که دنبالهٔ $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ مذکور در بخش ۱۰۹ در $(-\infty, \infty)$ همگرای یکنواخت به ۰ نیست. زیرا

$$\underset{-\infty<x<\infty}{\mathrm{l.u.b.}} |h_n(x)| \geqslant \left| h_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2} \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

و درنتیجه $\underset{-\infty<x<\infty}{\mathrm{l.u.b.}} |h_n(x)|$ نمی‌توانند وقتی که $n \to \infty$، به صفر میل کنند.

۵۰۲۰۹. بی‌درنگ از ۱۰۲۰۹ نتیجه می‌شود که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به f است اگر و تنها اگر $\{f_n - f\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به ۰ باشد. سپس، بنابر ۴۰۱۰۹ داریم

قضیه. دنبالهٔ توابع $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به f است اگر و تنها اگر

وقتی $n \to \infty$،
$$\underset{x \in E}{\mathrm{l.u.b.}} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

نتیجهٔ بعدی معیار کوشی در همگرایی یکنواخت نامیده می‌شود، و مشابه همان‌است که یك دنباله از اعداد حقیقی همگراست اگر و تنها اگر یك دنبالهٔ کوشی باشد.

۶۰۲۰۹. قضیه. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی در E باشد، آنگاه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت (به‌تابعی چون f) است اگر و تنها اگر برای هر ε مثبت دلخواه عدد $N \in I$ موجود باشد به‌طوری که

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (m, n \geqslant N; x \in E). \qquad (1)$$

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ همگرای یکنواخت از توابعی باشد که در E تعریف شده‌اند و در E به f همگراست. آنگاه، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، عدد $N \in I$ وجود دارد به‌طوری که

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geqslant N; x \in E).$$

بنابراین اگر $m, n \geqslant N$، برای هر $x \in E$، داریم

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

و درنتیجه، برای این N، (۱) برقرار است.

برعکس، فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ توابع در E باشد، به‌طوری که به‌ازای هر $\varepsilon>0$ مفروض، عدد $N\in I$ وجود داشته باشد که (۱) برقرار باشد. باید نشان دهیم که تابع f در E موجود است به طوری که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به f است. با توجه به (۱) ملاحظه می‌شود که، برای هر عنصر ثابت E مانند x، دنبالهٔ اعداد حقیقی $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی است. درنتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ برای هر $x\in E$ موجود است. f را به‌وسیلهٔ تساوی

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x\in E).$$

تعریف می‌کنیم. با ثابت نگاه‌داشتن m در (۱) و میل‌دادن n به ∞ داریم

$$|f_m(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \qquad (m\geqslant N;\, x\in E).$$

چون ε دلخواه بود نتیجه می‌گیریم که $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به f است.

نتیجهٔ بعدی، که قضیهٔ دینی[1] نامیده می‌شود، نشان می‌دهد کـه تحت شرایط بسیار خاصی دنبالهٔ توابع پیوسته همگرای یکنواخت است.

۷۰۲۰۹. قضیه. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالـه‌ای از توابع حقیقی پیوسته در فضای متریك فشردهٔ $\langle M,\rho\rangle$ باشد، به‌طوری که

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots \qquad (x\in M). \tag{۱}$$

و اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در M به‌تابع پیوستهٔ f همگرای نقطه‌ای باشد، آنگاه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در M همگرای یکنواخت به f است.

برهان: برای هر $n\in I$ فرض می‌کنیم $g_n=f-f_n$، آنگاه بنابر (۱) داریم

$$g_1(x)\geqslant g_2(x)\geqslant\cdots\geqslant g_n(x)\geqslant\cdots\geqslant 0 \qquad (x\in M). \tag{۲}$$

همچنین، از آنجا که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در M به f همگراست، داریم

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0 \qquad (x\in M). \tag{۳}$$

باید نشان دهیم که $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ در M همگرای یکنواخت به ۰ است.

فرض کنیم $\varepsilon>0$ عدد ثابت دلخواهی باشد، اگر $x\in M$، آنگاه، بنابر (۳)، عدد $N(x)\in I$ وجود دارد به‌طوری که

---

1. Dini

$$g_{N(x)}(x)<\frac{\varepsilon}{۲}.$$

چون $g_{N(x)}$ در x پیوسته است، گوی باز B_x به مرکز x وجود دارد به‌طوری که

$$g_{N(x)}(y)<\varepsilon \qquad (y\in B_x).$$

مجموعهٔ همهٔ B_xها، وقتی که $x\in M$، یك پوشش باز M است. بنا بر ۷.۵.۶ تعدادی متناهی از B_xها، مثلاً

$$B_{x_۱}, B_{x_۲}, \ldots, B_{x_k}$$

باز هم M را می‌پوشانند. فرض کنیم $N=\max[N(x_۱), \ldots, N(x_k)]$. حال اگر y یك نقطهٔ دلخواه M باشد، برای یکی از jهای $k, \ldots, ۱=j$، $y\in B_{x_j}$. در نتیجه

$$g_{N(x_j)}(y)<\varepsilon.$$

چون $N(x_j)\leqslant N$، بنابر (۲)

$$g_N(y)\leqslant g_{N(x_j)}(y).$$

درنتیجه، برای هر $y\in M$

$$\circ\leqslant g_N(y)<\varepsilon$$

اما، در این‌صورت (۲) نشان می‌دهد که

$$\circ\leqslant g_n(y)<\varepsilon \qquad (n\geqslant N; y\in M),$$

و بنابراین، $\{g_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در M همگرای یکنواخت به ۰ است.

آشکار است که اگر جهت نامساویها را در (۱) عوض کنیم بازهم ۷.۲.۹ برقرار خواهد بود. زیرا در این حالت می‌توانیم از $g_n=f_n-f$ استفاده‌کرده برهان را به‌همان‌ترتیب دنبال کنیم.

تمرینهای ۲.۹

۱. اگر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و $\{g_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت باشند، ثابت کنید که $\{f_n+g_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت است.

۲. اگر

$$g_n(x)=\frac{۱}{n}e^{-nx} \qquad (\circ\leqslant x<\infty).$$

ثابت کنید که $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, \infty)$ همگرای یکنواخت به 0 است.

۳. اگر تابع حقیقی f پیوستهٔ یکنواخت در $(-\infty, \infty)$ باشد، و اگر برای هر $n \in I$

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

ثابت کنید که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $(-\infty, \infty)$ همگرای یکنواخت به f است.

۴. اگر

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

(الف) نشان دهید که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, 1/2]$ همگرای یکنواخت است.

(ب) آیا $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است؟

۵. اگر

$$f_n(x) = \frac{x}{n} e^{-x/n} \qquad (0 \leqslant x < \infty).$$

(الف) آیا $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, \infty)$ همگرای یکنواخت به 0 است؟

(ب) آیا $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, 500]$ همگرای یکنواخت به 0 است؟

۶. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع پیوستهٔ حقیقی باشد که در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ همگرای یکنواخت است، و اگر برای هر $n \in I$

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

نشان دهید که $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت است. [راهنمایی: از ۶.۲.۹ استفاده کنید.]

۷. اگر

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

(الف) نشان دهید که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ همگرای یکنواخت به 0 است.

(ب) آیا $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ همگرای یکنواخت به 0 است؟

۸. فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته در $[0, 1]$ باشد که همگرای یکنواخت است.

(الف) نشان دهید که عدد $M > 0$ موجود است به‌طوری که

$$|f_n(x)| \leqslant M \qquad (n \in I;\ 0 \leqslant x \leqslant 1).$$

(ب) اگر شرط همگرایی یکنواخت را با همگرایی نقطه‌ای عوض کنیم آیا باز هم نتیجهٔ قسمت (الف) برقرار می‌ماند؟

۹. با یك مثال نشان دهید که اگر شرط فشرده بودن M را برداریم قضیهٔ دینی برقرار نخواهد بود.

۱۰. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع باشد که در $(-\infty, \infty)$ همگرای یکنواخت به‌تابع پیوستهٔ f است، ثابت کنید که

$$\lim_{n \to \infty} f_n\left(x+\frac{1}{n}\right)=f(x) \qquad (-\infty<x<\infty).$$

۱۱. فرض کنیم A یك زیرمجموعهٔ چگال فضای متریك M باشد. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع پیوستهٔ در M باشد و اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در A همگرای یکنواخت باشد، ثابت کنید که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در M همگرای یکنواخت است.

۳.۹ نتایج همگرایی یکنواخت

۱.۳.۹. اگر $f_n(x)=x^n \; (0 \leqslant x \leqslant 1)$ که در آن $n \in I$، آنگاه f_n در $[0, 1]$ پیوسته است. اما $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ به f همگرای نقطه‌ای است که $f(x)=0 \; (0 \leqslant x<1)$ و $f(1)=1$. تابع f در $[0, 1]$ پیوسته نیست. این مطلب نشان‌می‌دهد که یك‌دنبالهٔ توابع پیوسته ممکن‌است به‌تابعی ناپیوسته همگرای نقطه‌ای باشد.

اما اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد که همگرای یکنواخت به f است آنگاه f پیوسته است. این مطلب نتیجهٔ قضیهٔ زیر است.

۲.۳.۹. قضیه. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ توابع حقیقی در فضای متریك M باشد که در M همگرای یکنواخت به f باشد، و اگر f_n برای هر $n \in I$ درنقطهٔ $a \in M$ پیوسته باشد، آنگاه f هم در نقطهٔ a پیوسته است.

برهان: اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد می‌توانیم $N \in I$ را چنان انتخاب کنیم که

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (n \geqslant N; x \in M).$$

چون f_N در نقطه‌ی a پیوسته است δی مثبتی وجود دارد به‌طوری‌که

$$|f_N(x)-f_N(a)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad [\rho(x, a)<\delta],$$

که در آن ρ متریك فضای M است.

درنتیجه اگر $\rho(x, a)<\delta$، داریم

$$|f(x)-f(a)| \leqslant |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(a)|+|f_N(a)-f(a)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{۳}+\frac{\varepsilon}{۳}+\frac{\varepsilon}{۳}=\varepsilon.$$

بنابراین

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \qquad [\rho(x, a)<\delta],$$

که قضیه را ثابت می‌کند.

۳.۳.۹. نتیجه. اگر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یك دنبالهٔ توابع حقیقی پیوسته در فضای متریك M باشد که در M همگرای یکنواخت به تابع f است، آنگاه f هم در M پیوسته است.

۴.۳.۹. همان‌طور که یك‌دنبالهٔ توابع پیوسته ممکن‌است به‌تابعی‌ناپیوسته همگرای نقطه‌ای باشد، یك دنبالهٔ توابع انتگرالپذیر ریمان‌هم ممکن است به‌تابعی همگرای‌نقطه‌ای باشدکه انتگرالپذیر ریمان نیست.

مثلاً، اگر $A=\{r_۱, r_۲, \ldots\}$ مجموعهٔ همهٔ اعدادگویای بازهٔ $[۰ , ۱]$ باشد و اگر χ_n تابع مشخصهٔ زیرمجموعهٔ متناهی $\{r_۱, \ldots, r_n\}$ باشد، آنگاه χ_n در $[۰ , ۱]$ کراندار است و در همهٔ نقاط $[۰ , ۱]$ بجز $r_۱$، ...، r_n پیوسته است. بنابراین برای هر $n\in I$داریم $\chi_n\in\mathcal{R}[۰ , ۱]$. ولی $\{\chi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به χ_A همگرای نقطه‌ای است، که χ_A تابع مشخصهٔ A است. چون χ_A در هیچ نقطهٔ $[۰ , ۱]$ پیوسته نیست، پس $\chi_A\notin\mathcal{R}[۰ , ۱]$.

ازطرف دیگر، با داشتن همگرایی‌یکنواخت نتیجهٔ مثبت زیر را به‌دست می‌آوریم.

۵.۳.۹. قضیه. اگر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یك دنبالهٔ توابع متعلق به $\mathcal{R}[a, b]$ باشد، و اگر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت به f باشد، آنگاه fهم متعلق به $\mathcal{R}[a, b]$است.

برهان: برای $\varepsilon=۱$، عدد $N\in I$ موجود است به‌طوری‌که

$$|f_n(x)-f(x)|<۱ \qquad (n\geqslant N;\, x\in[a, b]).$$

به‌ویژه

$$|f_N(x)-f(x)|<۱ \qquad (x\in[a, b]),$$

پس برای هر $x\in[a, b]$

$$|f(x)| \leqslant |f_N(x)|+|f(x)-f_N(x)|<|f_N(x)|+۱$$

حال، f_N کراندار است، زیرا $f_N\in\mathcal{R}[a, b]$. بنابراین آشکار است که fهم در $[a, b]$

کراندار است.

برای هر $n\in I$، فرض کنید E_n مجموعهٔ نقاطی از $[a,b]$ باشد که f_n در آن نقاط پیوسته نیست و فرض کنید $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. بنابر ۱.۳.۷ هرمجموعهٔ E_n صفراندازه است. پس، بنابر ۲.۱.۷، E هم صفراندازه است. ولی اگر $x\in[a,b]-E$، آنگاه x در هیچ E_nی نیست وبنابراین هر f_nی در x پیوسته‌است. بنابر ۲.۳.۹، تابع f هم در x پیوسته است، بنابراین تابع f تقریباً در هر نقطهٔ $[a,b]$ پیوسته است. چون f کراندار است پس، بنابر ۱.۳.۷، $f\in\mathcal{R}[a,b]$، و اثبات تمام است.

هم‌اکنون دیدیم که همگرایی یکنواخت یك شرط کافی است برای اینکه یك دنبالهٔ توابع انتگرالپذیر ریمان به‌یك تابع انتگرالپذیر ریمان همگرا باشد. ولی نباید تصور کرد که همگرایی یکنواخت یك شرط لازم است. مثلاً، اگر $(0\leqslant x\leqslant 1)$ $f_n(x)=x^n$ آنگاه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0,1]$ به‌یك تابع انتگرالپذیر ریمان همگراست، هرچند که این همگرایی یکنواخت نیست.

به‌همین ترتیب، برای اینکه یك دنبالهٔ توابع پیوسته به‌یك تابع پیوسته همگرا باشد کافی است که همگرایی یکنواخت باشد ولی این شرط لازم نیست. (بررسی‌کنید.)

۶.۳.۹. اکنون فرض کنید که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ توابع متعلق به $\mathcal{R}[a,b]$ باشد که در $[a,b]$ همگرای نقطه‌ای به f است. حال می‌پرسیم: به فرض اینکه $f\in\mathcal{R}[a,b]$، آیا $\left\{\int_a^b f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به $\int_a^b f$ است؟ به‌عبارت دیگر، اگر

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),$$

آیا

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx?$$

که این خود هم‌ارز است با

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx. \qquad (1)$$

گاهی این مطلب را به این‌صورت بیان می‌کنیم «آیا تعویض جاهای $\lim\limits_{n\to\infty}$ و $\int_a^b$ مجاز است؟» مجدداً، اگرفقط همگرایی نقطه‌ای فرض‌شده باشد، ممکن‌است پدیده‌های نامطلوبی رخ دهد.

مثلاً، اگر

$$f_n(x)=۲n \qquad \left(\frac{۱}{n}\leqslant x\leqslant\frac{۲}{n}\right),$$

$$f_n(x)=۰ \qquad (\text{برای دیگر } x\text{های } [۰,۱])$$

در این‌صورت، برای هر $n\in I$، داریم

$$\int_۰^۱ f_n(x)\,dx=\int_{۱/n}^{۲/n} ۲n\,dx=۲n\left(\frac{۲}{n}-\frac{۱}{n}\right)=۲.$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\int_۰^۱ f_n(x)\,dx=۲.$$

از طرف دیگر $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=۰\ (۰\leqslant x\leqslant ۱)$. زیـرا $f_n(۰)=۰$، در حالی‌که اگر $x>۰$، آنگاه برای $x>۲/N$،

$$f_N(x)=f_{N+۱}(x)=\cdots=۰.$$

پس

$$\int_۰^۱ \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx=۰.$$

در نتیجه، تساوی (۱) برای دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ برقرار نیست.

یك‌باردیگر همگرایی یکنواخت باعث می‌شود که وضع به‌صورت مطلوبی درآید. یعنی، اگر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[a,b]$ همگرای یکنواخت باشد (۱) برقرار خواهد بود.

۷.۳.۹. قضیه. فرض کنیم $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یك دنبالهٔ توابع متعلق به $\mathcal{R}[a,b]$ باشد که‌در $[a,b]$ همگرای یکنواخت به‌تابع f است. آنگاه $f\in\mathcal{R}[a,b]$ و

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

برهان: ایـن مطلب کـه $f\in\mathcal{R}[a,b]$ از ۵.۳.۹ نتیجه می‌شود. اگر ε عـدد مثبت دلخواهی باشد عدد $N\in I$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (n\geqslant N;\ a\leqslant x\leqslant b).$$

با استفاده از ۳.۴.۷ و ۶.۴.۷ داریم

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx.$$

در نتیجه، بنا بر (۱)، اگر $n\geqslant N$ داریم

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dx=\varepsilon.$$

این نشان می دهد که $\left\{\int_a^b f_n(x)\,dx\right\}_{n=1}^{\infty}$ به $\int_a^b f(x)\,dx$ همگرا است، و این همان است که می خواستیم ثابت کنیم.

۸.۳.۹. سرانجام، به طرح سؤال زیر می پردازیم: فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ توابع در $[a,b]$ باشد به طوری که، برای هر $n\in I$، $f_n'(x)$ برای همهٔ xهای بازهٔ $[a,b]$ موجود باشد. همچنین فرض کنیم که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a,b]$ همگرا به f است. می پرسیم آیا، اولاً $f'(x)$ برای همهٔ xها وجود دارد؟ وثانیاً اگر وجود داشته باشد آیا $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به f' است؟

قبل از هرچیز باید بگوییم که یك دنبالهٔ توابع مشتقپذیر ممکن است همگرای یکنواخت به تابعی باشد که در هیچ نقطه‌ای دارای مشتق نیست. زیرا در بخش ۷.۹ نشان خواهیم داد که تابع پیوستهٔ F در $[\circ,1]$ وجود دارد که در هیچ نقطه‌ای از $[\circ,1]$ دارای مشتق نیست. ولی از ۱.۲.۱۰ نتیجه می‌شود که یك دنبالهٔ توابع چندجمله‌ای $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد که همگرای یکنواخت به F است. در اینجا $P_n'(x)$ برای هر $n\in I$ و $x\in[\circ,1]$ وجود دارد و $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[\circ,1]$ همگرای یکنواخت به F است، ولی $F'(x)$ برای هیچ xی در $[\circ,1]$ وجود ندارد. این مطلب نشان می‌دهد که جواب اولین سؤال منفی است.

حتی اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرای یکنواخت به f باشد و f_n' و f' برای همهٔ xهای متعلق به $[a,b]$ موجود باشند، بازهم ممکن است در نقطه‌ای از $[a,b]$، $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ به f' همگرا نباشد. مثلاً، اگر

$$f_n(x)=\frac{x^n}{n}\qquad(\circ\leqslant x\leqslant 1),$$

آنگاه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرای یکنواخت به $f=\circ$ است، ولی $\{f_n'(1)\}_{n=1}^{\infty}$ به $f'(1)$ همگرا نیست. بنا براین، در این مثال، معادلهٔ

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=(\lim_{n\to\infty} f_n)'(x)$$

به‌ازای $x=1$ برقرار نیست.

آنچه می‌توان گفت این است که: اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرا باشد و اگر هر f'_n پیوسته باشد، و اگر $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} f'_n = (\lim_{n\to\infty} f_n)'$$

این مطلب نتیجهٔ قضیهٔ زیر است.

۹.۳.۹. قضیه. اگر (برای‌هر $n\in I$) $f'_n(x)$ برای هر $x\in[a, b]$ وجود داشته‌باشد، و اگر f'_n در $[a, b]$ پیوسته باشد، واگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرا به f باشد، و اگر $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت به g باشد، آنگاه

$$g(x)=f'(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

یعنی

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x)=f'(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

برهان: چون $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت به g است، پس بنا بر ۳.۳.۹، g در $[a, b]$ پیوسته است. از این گذشته $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, y]$ همگرای یکنواخت به g است، که y نقطهٔ دلخواهی از $[a, b]$ است. بنابر ۷.۳.۹

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^y f'_n(x)\,dx=\int_a^y g(x)\,dx.$$

درنتیجه، بنابر ۵.۸.۷،

$$\lim_{n\to\infty} [f_n(y)-f_n(a)]=\int_a^y g(x)\,dx.$$

ولی، بنابه فرض، $\lim_{n\to\infty} f_n(y)=f(y)$ و $\lim_{n\to\infty} f_n(a)=f(a)$. بنابراین

$$f(y)-f(a)=\int_a^y g(x)\,dx \qquad (a\leqslant y\leqslant b).$$

پس، با توجه به ۱.۸.۷ داریم

$$f'(y)=g(y) \qquad (a\leqslant y\leqslant b),$$

و قضیهٔ ثابت شده است.

تمرینهای ۳.۹

۱. با بررسی $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ برای $0\leqslant x<\infty$، که در آن

$$f_n(x)=\frac{۱}{۱+x^n},$$

ثابت کنید که $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[۰,\infty)$ همگرای یکنواخت نیست.

۲. اگر g تابع پیوسته‌ای در بازهٔ کراندار بستهٔ $[a,b]$ باشد، و اگر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد که در $[a,b]$ همگرای یکنواخت به f است، ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n g=\int_a^b fg.$$

۳. اگر

$$f_n(x)=nx(۱-x^۲)^n \qquad (۰\leqslant x\leqslant ۱),$$

با استفاده از تمرین ۴ بخش ۱.۹ نشان دهید که $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[۰,۱]$ همگرای یکنواخت نیست، هرچند که همگرای نقطه‌ای هست.

۴. اگر

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{n} \qquad (۰\leqslant x\leqslant ۱).$$

نشان دهید که $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[۰,۱]$ همگرای یکنواخت به ۰ است. ولی $\{f'_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[۰,۱]$ (حتی) همگرای نقطه‌ای به ۰ نیست.

۵. اگر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یك دنبالهٔ توابع در $[a,b]$ باشد به‌طوری که برای هر $x\in[a,b]$ و هر $n\in I$، $f'_n(x)$ وجود داشته باشد و

(۱) در نقطهٔ $x_۰\in[a,b]$، $\{f_n(x_۰)\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا باشد.

(۲) $\{f'_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[a,b]$ همگرای یکنواخت باشد.

ثابت کنید که $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[a,b]$ همگرای یکنواخت است. چگونه می‌توان از این نتیجه برای ضعیفتر کردن فرض بند ۹.۳.۹ استفاده کرد. [راهنمایی: برای $x\in[a,b]$ بنویسید

$$f_n(x)-f_m(x)=\{[f_n(x)-f_m(x)]-[f_n(x_۰)-f_m(x_۰)]\}$$
$$+[f_n(x_۰)-f_m(x_۰)].$$

با به‌کار بستن ۱.۷.۷ خواهید داشت

$$f_n(x)-f_m(x)=[f'_n(c)-f'_m(c)](x-x_۰)+[f_n(x_۰)-f_m(x_۰)].$$

سپس از (۱) و (۲) استفاده کنید.]

۴.۹ همگرایی و همگرایی یکنواخت سریهای توابع

همان‌طور که همگرایی سریهای اعدادحقیقی به‌معنی همگرایی دنباله‌های مجموعهای‌جزئی تعریف شده است، همگرایی یك سری توابع نیز برحسب دنبالهٔ مجموعهای جزئی تعریف می‌شود.

۱.۴.۹ تعریف. اگر u_1، u_2، ... توابعی حقیقی در مجموعهٔ E باشند، می‌گوییم $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ به‌تابع f در E همگراست اگر دنبالهٔ توابع $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ با $s_n=u_1+u_2+\dots+u_n$، در E به f همگرا باشد. در این‌حالت می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=f$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=f(x) \qquad (x\in E).$$

مثلاً، اگر $u_n(x)=x^n\ (-1<x<1)$، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ در $(-1, 1)$ بـه f همگراست، که در آن $f(x)=x/(1-x)\ (-1<x<1)$. زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}=f(x) \qquad (-1<x<1).$$

در مرحلهٔ بعد همگرایی یکنواخت سریهای توابع را تعریف می‌کنیم.

۲.۴.۹ تعریف. اگر u_1، u_2، ... توابعی حقیقی در مجموعهٔ E باشند، می‌گوییم‌که $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ در E همگرای یکنواخت به f است اگر $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت‌به f باشد، که در آن $s_n=u_1+u_2+\dots+u_n$. در این‌حالت می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=f \quad \text{یکنواخت}$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=f(x) \quad \text{یکنواخت} \qquad (x\in E).$$

از ۲.۳.۹ نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم.

۳.۴.۹. قضیه. اگر u_1، u_2، ... توابعی حقیقی در فضای متریك M باشند، و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ در M به f همگرای یکنواخت باشد، و اگر هر u_n در نقطهٔ $a\in M$ پیوسته باشد، آنگاه f هم در a پیوسته است.

برهان: دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ با $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ در M همگرای یکنواخت به f است. اکنون هر u_k در a پیوسته است. پس، بنابر ۵.۳.۵، هر s_n در a پیوسته است. درنتیجه، بنابر ۲.۳.۹، f در a پیوسته است، و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴.۴.۹. نتیجه. اگر u_1، u_2، ... توابع حقیقی پیوسته در فضای متریك M باشند، و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ در M همگرای یکنواخت به f باشد، آنگاه f در M پیوسته است.

سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$$

در $[0,1]$ به‌تابع f که $f(0)=0$ و $f(x)=1$ $(0<x\leqslant 1)$، همگراست. (زیرا اگر $0<x<1$، آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n=x\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n=x\left[\frac{1}{1-(1-x)}\right]=1.)$$

حال، اگر

$$u_n(x)=x(1-x)^n \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

آنگاه u_n در $[0,1]$ پیوسته‌است و $\sum_{n=1}^{\infty} u_n=f$. ازآنجاکه f در $[0,1]$ پیوسته نیست، نتیجهٔ ۴.۴.۹ ما را مطمئن می‌سازد که $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ در $[0,1]$ همگرای یکنواخت نیست.

اکنون آزمون مشهوری راکه آزمون M وایرشتراس[1] نامیده می‌شود برای همگرایی یکنواخت ذکر می‌کنیم.

۵.۴.۹. قضیه. اگر $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ یك‌سری توابع حقیقی درمجموعهٔ E باشد، و اگر اعداد مثبت M_1، M_2، ... موجود باشند به‌طوری‌که $\sum_{k=1}^{\infty} M_k<\infty$ و

1. Weierstrass

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \ll \sum_{k=1}^{\infty} M_k \qquad (x\in E),^{*}$$

آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ در E همگرای یکنواخت است.

برهان: اگر $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ و $t_n = \sum_{k=1}^{n} M_k$، آنگاه برای $m > n \geqslant N_1$،

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)|$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{m} M_k = t_m - t_n \qquad (x\in E). \qquad (1)$$

چون $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$، $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ همگرا و در نتیجه یك دنبالهٔ کوشی است. بنابراین اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، عدد $N \geqslant N_1$ موجود است به‌طوری که

$$|t_m - t_n| < \varepsilon \qquad (m, n \geqslant N).$$

ولی آنگاه از (۱) نتیجه می‌شود که

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon \qquad (m, n \geqslant N; x\in E).$$

پس، بنابر ۶.۲.۹، $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت است. این بدان معنی است که $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ در E همگرای یکنواخت است، و برهان کامل است.

به‌عنوان‌مثال، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx/n^2$، برای همهٔ xهای حقیقی، مغلوب‌سری‌همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ است. بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx/n^2$، برای‌هر x حقیقی، همگرای‌یکنواخت‌است. سپس با استفاده از ۴.۴.۹ می‌دانیم که مجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx/n^2$ در $(-\infty, \infty)$ پیوسته است.

تأکید می کنیم که در ۵.۴.۹، M_kها باید مستقل از x باشند.

با استفاده از آزمون M می توانیم نتیجهٔ مهمی‌را دربارهٔ سریهای‌توانی ثابت‌کنیم.

---

* یعنی، عدد $N_1 \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $k \geqslant N_1$ و هر x داشته باشیم $|u_k(x)| \leqslant M_k$، به ۱.۶.۳ مراجعه کنید.

۶.۴.۹. قضیه. اگر سری توانی

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (1)$$

برای $x = x_0$ (که $x_0 \neq 0$) همگرا باشد، آنگاه (۱) در $[-x_1, x_1]$ همگرای یکنواخت است، که در آن x_1 عدد دلخواهی است که در شرط $0 < x_1 < |x_0|$ صدق می کند.

برهان: بنا بر ۹.۶.۳، اگر (۱) برای $x = x_0$ همگرا باشد، آنگاه (۱) برای هر xی که درشرط $|x| < |x_0|$ صدق کند همگرای مطلق است. به‌ویژه، اگر $0 < x_1 < |x_0|$ آنگاه (۱) برای $x = x_1$ مطلقاً همگراست. یعنی

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| x_1^k < \infty.$$

ولی

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \ll \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| x_1^k \qquad (|x| \leqslant x_1).$$

بنا بر ۵.۴.۹، (با اختیار کردن $(M_k = |a_k| x_1^k)$)، سری (۱) برای $|x| \leqslant x_1$ همگرای یکنواخت است و این همان است که می‌خواستیم.

به‌عنوان مثال، سری $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k$ در $-1 \leqslant x < 1$ همگراست. از ۶.۴.۹ نتیجه می گیریم که $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k$ در $-a \leqslant x \leqslant a$ همگرای یکنواخت است، که در آن a عددی دلخواه متعلق به‌بازهٔ $(0, 1)$ می‌باشد.

سری $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ برای همهٔ xهای حقیقی (به e^x) همگراست. این سری در $(-\infty, \infty)$ همگرای یکنواخت نیست. (تحقیق کنید.) اما بنا بر ۶.۴.۹ برای هر $R > 0$، این سری در $[-R, R]$ همگرای یکنواخت است.

از ۷.۲.۹، قضیهٔ دینی، نتیجهٔ زیر دربارهٔ سریهای توابع نامنفی پیوسته به‌دست می‌آید، که آن‌را قضیهٔ دینی در سریها می‌نامیم.

۷.۴.۹. قضیه. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ یك سری توابع نامنفی پیوسته در فضای متریك فشردهٔ M باشد، و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ در M به‌تابع پیوستهٔ f همگرا باشد، آنگاه این همگرایی در M یکنواخت است.

برهان: برای $n\in I$ فرض می‌کنیم $s_n=u_1+\dots+u_n$. چون برای هر $x\in M$ و هر $k\in I$، $u_k(x)\geqslant 0$، داریم

$$s_1(x)\leqslant s_2(x)\leqslant \dots\leqslant s_n(x)\leqslant \dots \qquad (x\in M).$$

همچنین، $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=f(x)\ (x\in M)$. پس، بنابر ۷.۲.۹، دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ در M همگرای یکنواخت به f است. درنتیجه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ در M همگرای یکنواخت به f است.

تمرینهای ۴.۹

۱. نشان دهید که هر یك از سریهای زیر در بازه‌های مربوطه همگرای یکنواخت هستند.

(الف) $(0\leqslant x<\infty)$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+x^2}$

(ب) $(0\leqslant x\leqslant 10)$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}x^n$

(راهنمایی: ماکسیمم xe^{-x} را در بازه پیدا کنید.)

۲. آیا سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

در $(-\infty,\infty)$ همگرای یکنواخت است؟ (راهنمایی: مجموع سری را پیدا کنید.)

۳. اگر $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$، ثابت کنید کـه $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ در $0\leqslant x\leqslant 1$ همگرای یکنواخت است.

۴. اگر سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد و

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \qquad (-1<x<1),$$

ثابت کنید که f در $(-1,1)$ پیوسته است.

۵. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^2}{n^3+x^3}$$

برای هر $A>0$، در $[0, A]$ همگرای یکنواخت است.
ثابت کنید که

$$\lim_{x\to 1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^2}{n^3+x^3}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}.$$

۶. اگر A زیرمجموعهٔ چگالی از فضای متریك M باشد، و اگر u_1، u_2، ... توابع پیوسته‌ای در M باشند، و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ در A همگرای یکنواخت باشد، ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ در M همگرای یکنواخت است.

۷. قضیهٔ ۶.۲.۹ را به‌صورت یك‌معیار برای همگرایی یکنواخت یك سری توابع درآورید.

۸. اگر $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع در E باشد به‌طوری که

$$|s_n(x)|\leqslant M \qquad (n\in I;\, x\in E),$$

که در آن $s_n=u_1+\dots+u_n$. و اگر $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ غیرصعودی از اعداد نامنفی باشد که به ۰ همگراست، ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n$ در E همگرای یکنواخت است.

(راهنمایی: ۳.۸.۳ را ملاحظه کنید.)

۹. با استفاده از تمرین قبلی نشان دهید که

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\dots$$

برای هر $\delta>0$، در $[\delta, \pi/2]$ همگرای یکنواخت است.

۵.۹ انتگرالگیری و مشتقگیری سریهای توابع

اکنون، با استفاده از نتایج بخش ۳.۹ دربارهٔ انتگرالگیری و مشتقگیری دنباله‌های توابع، مسائل مشابهی را در سریهای توابع بررسی می‌کنیم.

۱.۵.۹ قضیه. اگر $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ یك سری توابع متعلق به $\mathcal{R}[a, b]$ باشد، که در $[a,b]$ همگرای یکنواخت به f است، آنگاه $f\in\mathcal{R}[a, b]$ و

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,dx,$$

یعنی

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx.$$

برهان: اگر $s_n = u_1 + \cdots + u_n$، آنگاه $s_n \in \mathcal{R}[a, b]$ و $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت به f است. بنابر ۷.۳.۹، $f \in \mathcal{R}[a, b]$ و

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{۱}$$

ولی بنابر ۳.۴.۷

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b [u_1(x) + \cdots + u_n(x)]\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx.$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx. \tag{۲}$$

ازمقایسهٔ (۱) با (۲) قضیه نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۱.۵.۹ این را می‌گوید که از یک‌سری توابع، که همگرای یکنواخت است، می‌توان جمله‌به‌جمله انتگرال گرفت. یعنی، اگر

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{۳}$$

در $[a, b]$ همگرای یکنواخت باشد، آنگاه انتگرال (۳) در $[a, b]$ مساوی است با

$$\int_a^b u_1 + \int_a^b u_2 + \cdots + \int_a^b u_n + \cdots.$$

به‌عنوان مثال، داریم

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x},$$

این سری در $-1 < x < 1$ همگراست. اگر $|y| < 1$، آنگاه بنابر ۶.۴.۹ این سری‌در $[0, y]$ (یا اگر $y < 0$ در $[y, 0]$) همگرای یکنواخت است. بنابر ۱.۵.۹ می‌توان

جمله به‌جمله از ۰ تا y انتگرال گرفت. نتیجه می‌شود

$$\int_{0}^{y} 1\, dx-\int_{0}^{y} x\, dx+\int_{0}^{y} x^{2}\, dx-\cdots=\int_{0}^{y} \frac{1}{1+x}\, dx.$$

بنابراین

$$y-\frac{y^{2}}{2}+\frac{y^{3}}{3}-\cdots=\log (1+y) \qquad (|y|<1).$$

این نتیجه قبلاهم در ۶.۵.۸ و ۷.۵.۸ به‌دست آمده بود.
قضیهٔ بعد دربارهٔ مشتقگیری جمله به‌جملهٔ سریهاست.

۲.۵.۹. قضیه. اگر u_1، u_2، ... توابعی باشند که هر کدام از آنها در هر نقطهٔ $[a,b]$ دارای مشتق هستند، و اگر u_k' برای هر $k\in I$ در $[a, b]$ پیوسته باشد، و اگر $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ در $[a, b]$ همگرا به f باشد، و اگر $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت باشد، آنگاه

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

برهان: اگر $s_n=u_1+\cdots+u_n$، آنگاه $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرا به f است. چون $s_n'=u_1'+\cdots+u_n'$، دنبالهٔ $\{s_n'\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت به g است، که $g=\sum_{k=1}^{\infty} u_k'$ پس، بنابر ۹.۳.۹،

$$f'(x)=g(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

که این همان است که می‌خواستیم.

بنابراین، تحت شرایط ۲.۵.۹، مشتق

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

برابر است با

$$u_1'+u_2'+\cdots+u_n'+\cdots.$$

به‌عنوان مثال، داریم

$$1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}+\cdots=\frac{1}{1-x}, \qquad (1)$$

این سری بــرای $|x|<۱$ همگراست. بنابر ۲.۵.۹، اگــر $۰<a<۱$، بــا مشتقگیری جمله به‌جمله داریم

$$۱+۲x+۳x^۲+\cdots+nx^{n-۱}+\cdots=\frac{۱}{(۱-x)^۲} \quad (-a\leqslant x\leqslant a) \qquad (۲)$$

به‌شرط اینکــه سری مذکور در (۲) در $[-a, a]$ همگرای یکنواخت باشد. ولــی بــا به‌کاربردن آزمون نسبت می‌توان نشان داد که این سری برای $-۱<x<۱$ همگراست. پس، بنابر ۶.۴.۹، این سری در $[-a, a]$ همگرای یکنواخت است. در نتیجه مشتقگیری جمله‌به‌جمله از (۱) مجاز است. توجه داشته باشید که، چون a عدد دلخواهی بین ۰ و ۱ بود، نتیجه می‌گیریم که برای همهٔ xهایی که $|x|<۱$

$$۱+۲x+۳x^۲+\cdots+nx^{n-۱}+\cdots=\frac{۱}{(۱-x)^۲}.$$

مثال اخیر نمایانگر قضیهٔ کلی زیر دربارهٔ سریهای توانی است.

۳.۵.۹. قضیه. اگرعددمثبت S وجود داشته باشد که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_nx^n$ در $(-S,S)$ همگرا باشد، و اگر

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty} a_nx^n \qquad (-S<x<S), \qquad (۱)$$

آنگاه $f'(x)$ در $-S<x<S$ وجود دارد و

$$f'(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} na_nx^{n-۱} \qquad (-S<x<S). \qquad (۲)$$

برهان: بنابر ۸.۶.۳، اگر

$$L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

و $|x|>۱/L$، آنگاه سری (۱) واگراست، (یا اگر $L=۰$، برای همهٔ xها همگراست). درنتیجه اگر $L>۰$، آنگاه

$$S\leqslant\frac{۱}{L}.$$

ولی با به کاربستن آزمون ریشهٔ ۸.۶.۳ درمورد

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \qquad (۳)$$

می‌بینیم که اگر $L>0$، (۳) برای $|x|<1/L$ و اگر $L=0$، (۳) برای همهٔ xها همگراست. درنتیجه (۳) برای $|x|<S$ همگراست. بنابر ۶.۴.۹، (۳) در $[-T, T]$، که در آن $T<S$ عددمثبت دلخواهی است، همگرای یکنواخت است. پس، بنابر ۲.۵.۹، مشتقگیری جمله‌به‌جمله از (۱) برای $|x|\leqslant T$ مجاز است. داریم

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \qquad (-T\leqslant x\leqslant T). \qquad (۴)$$

ازآنجاکه (۴) برای هر $T<S$ برقرار است، (۲) ثابت می‌شود.

با به‌کار بستن ۳.۵.۹ درمورد f' (به‌جای f) داریم

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \qquad (-S<x<S).$$

با همین روش می‌توان نشان‌داد که، تحت مفروضات ۳.۵.۹، تابع f دارای مشتق ازهمهٔ مرتبه‌ها است، و

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}. \qquad (۵)$$

باقراردادن $x=0$، همهٔ‌جمله‌های سری، بجز جملهٔ مربوط به $n=k$، صفرمی‌شوند. بنابراین

$$f^{(k)}(0)=k!a_k.$$

به‌این ترتیب نتیجهٔ زیر را برای ۳.۵.۹ به‌دست می‌آوریم.

۴.۵.۹. نتیجه. اگر عدد مثبت S وجود داشته باشد به‌طوری که

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (-S<x<S)$$

آنگاه برای $k\in I$ و $-S<x<S$، $f^{(k)}(x)$ وجود دارد و

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

از این گذشته

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k\in I).$$

یعنی، اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (-S<x<S)$، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ الزاماً سری‌ماک‌لورن f است.

تمرینهای ۵.۹

۱. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|<\infty$، ثابت کنید

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big) dx=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

۲. با استفاده از قضیهٔ ۳.۵.۹ معادلهٔ

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots \qquad (-\infty<x<\infty)$$

را از معادلهٔ

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \qquad (-\infty<x<\infty).$$

به‌دست آورید.

۳. بدون یافتن مجموع سری

$$1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots \qquad (-\infty<x<\infty),$$

که آن را $f(x)$ می‌نامیم، نشان دهید که $(-\infty<x<\infty)$ $f'(x)=2xf(x)$.

۶.۹ مجموعپذیری آبل

اکنون بـه‌روش دیگری از مجموعپذیری سریها، کـه مجموعپذیری آبل نـامیده می‌شود، می‌پردازیم. در اثبات اینکـه مجموعپذیری آبل منظم است (۲.۹.۳ را ببینید) همگرایی یکنواخت به‌کار می‌رود، که علت ظهور این بخش را در این فصل روشن می‌کند.

۱.۶.۹ روش مجموعپذیری آبل را با مثال زیر نشان می‌دهیم، سری

$$1-1+1-1+1-\cdots \qquad (1)$$

واگراست. با ضرب جملهٔ nام (۱) در x^n (برای $n=0, 1, 2, \ldots$) سری توانی زیر

را تشکیل می‌دهیم

$$۱-x+x^۲-x^۳+\cdots. \qquad (۲)$$

سری (۲) برای $۰\leqslant x<۱$ همگرا و مجموعش $۱/(۱+x)$ است. اکنون

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱}{۱+x}=\frac{۱}{۲}.$$

بنابراین، هر چند که حدگیری جمله به‌جملهٔ (۲) وقتی که $x\to ۱^-$ سری واگرای (۱) را به‌ما می‌دهد، ولی حدگیری مجموع سری (۲) وقتی که $x\to ۱^-$ به‌حد ۱/۲ منتهی می‌شود. به‌این جهت می‌گوییم که (۱) مجموعپذیر آبل به ۱/۲ است. [توجه داشته باشید که (۱) مجموعپذیر $(C, ۱)$ به ۱/۲ هم هست.]

اکنون تعریف کلی مجموعپذیری آبل را می‌آوریم.

۲.۶.۹. تعریف. می‌گوییم که سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ مجموعپذیر آبل به L است اگر $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=L$، که در آن

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n \qquad (۰\leqslant x<۱).^*$$

در این‌حالت می‌نویسیم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n=L \qquad (\mathrm{A}).$$

از این‌رو در مثال ۱.۶.۹ داریم

$$f(x)=۱/(۱+x)\ ،a_n=(-۱)^n \qquad (n=۰, ۱, ۲, \ldots).$$

بنابراین، از ۱.۶.۹ نتیجه می‌شود که

$$۱-۱+۱-۱+۱-\cdots=\frac{۱}{۲} \qquad (\mathrm{A}).$$

اکنون سری واگرای

$$۱-۲+۳-۴+\cdots \qquad (۱)$$

را درنظر بگیرید. در این‌حالت داریم

---

* بنابراین، مجموعپذیری آبل برای سریهای $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ فقط وقتی بامعنی است که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ در $۰\leqslant x<۱$ همگرا باشد.

$$f(x)=۱-۲x+۳x^{۲}-۴x^{۳}+\cdots . \qquad (۲)$$

(آزمون نسبت نشان می‌دهد که این سری توانی در $-۱<x<۱$ همگراست.) ولی ازآنجا که

$$\frac{-۱}{۱+x}=-۱+x-x^{۲}+x^{۳}-x^{۴}+\cdots \qquad (-۱<x<۱),$$

از قضیهٔ ۳.۵.۹ نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{(۱+x)^{۲}}=۱-۲x+۳x^{۲}-۴x^{۳}+\cdots .$$

که ازمقایسهٔ آن با (۲) می بینیم که $f(x)=۱/(۱+x)^{۲}$. پس $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱/۴$.

درنتیجه، بنابر ۲.۶.۹

$$۱-۲+۳-۴+\cdots=\frac{۱}{۴} \qquad (A).$$

[با توجه به بخشهای ۱۱.۲ و ۹.۳ می‌دانیم که (۱) مجموعپذیر $(C, ۱)$ نیست ولی مجموعپذیر $(C, ۲)$ به ۱/۴ است.]

منظم‌بودن مجموعپذیری آبل نتیجه‌ای است از قضیهٔ بعد (که به قضیهٔ آبل موسوم است).

۳.۶.۹. قضیه. اگر $\sum_{k=۰}^{\infty} a_k$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{k=۰}^{\infty} a_k x^k$ برای $۰\leqslant x\leqslant ۱$ همگرای یکنواخت است.

برهان: اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد می‌توانیم $N\in I$ را چنان انتخاب کنیم که

$$\left|\sum_{k=m+۱}^{n} a_k\right|<\varepsilon \qquad (m, n\geqslant N).$$

یعنی

$$-\varepsilon<a_{m+۱}+a_{m+۲}+\cdots+a_n<\varepsilon \qquad (m, n\geqslant N).$$

اگر $۰\leqslant x\leqslant ۱$ آنگاه با به‌کار بردن لم آبل، ۲.۸.۳، (درمورد $\{a_k\}_{k=m+۱}^{\infty}$ و $(\{x^k\}_{k=m+۱}^{\infty}$) داریم

$$-\varepsilon x^{m+۱}<a_{m+۱}x^{m+۱}+a_{m+۲}x^{m+۲}+\cdots+a_n x^n<\varepsilon x^{m+۱} .$$

در نتیجه

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k\right| < \varepsilon x^{m+1} \leqslant \varepsilon \qquad (m, n \geqslant N;\ 0 \leqslant x \leqslant 1). \qquad (1)$$

اگر $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$، آنگاه از (۱) نتیجه‌می‌شود که برای $m, n \geqslant N$ و $0 \leqslant x \leqslant 1$، داریم $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. سپس، بنا بر ۶.۲.۹، $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ در $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است. از آنجا کـه $f_n(x)$ مجموع جزئی nام $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ است قضیه نتیجه می‌شود.

۴.۶.۹. نتیجه. مجموعپذیری آبل منظم است.

برهان: فرض کنیم $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ به L همگرا باشد. باید نشان‌دهیم که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مجموعپذیر آبل به L است. یعنی باید نشان دهیم که $\lim_{x \to 1^-} f(x) = L$، که در آن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

ولی، بنا بر ۳.۶.۹، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در $0 \leqslant x \leqslant 1$ همگرای یکنواخت است. پس، بنا بر ۴.۴.۹، f در $[0, 1]$ پیوسته است. به‌ویژه f در ۱ پیوسته است. در نتیجه $\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$. از آنجا که $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$، داریم $\lim_{x \to 1^-} f(x) = L$. که این همان است کـه می‌خواستیم.

روش مجموعپذیری آبل برای هر k، از (C, k) قویتر است. یعنی برای هر $k \in I$، اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مجموعپذیر (C, k) به L باشد، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مجموعپذیر آبل به L است.* به‌اثبات این مطلب برای $k = 1$ اکتفا می‌کنیم.

۵.۶.۹. قضیه. اگر

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L \qquad (C, 1). \qquad (1)$$

---

* اما سریهایی وجود دارند که مجموعپذیر آبل هستند ولی برای هیچ kیی مجموعپذیر (C, k) نیستند.

آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L \qquad (A).$$

برهان: اگر $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$، آنگاه (۱) به این معنی است که دنبالهٔ $s_0, s_1, s_2, \dots$ مجموعپذیر $(C, 1)$ به L است. یعنی،

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = L,$$

که در آن*

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

از آنجا که $(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1} = (s_0 + \dots + s_n) - (s_0 + \dots + s_{n-1}) = s_n$، داریم

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \sigma_n - \sigma_{n-1} \right) = L - L = 0.$$

درنتیجه

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} - \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{s_{n-1}}{n-1} \right)$$
$$= 0 - 0 = 0.$$

بنا بر ۲.۵.۲، دنبالهٔ $\{a_n/n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است. این نشان می‌دهد که، اگر $0 \leqslant x < 1$، عددمثبتی مانند M وجود دارد به‌طوری که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ مغلوب $\sum_{n=0}^{\infty} M n x^n$ است. درنتیجه، بنا بر ۲.۶.۳، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برای $0 \leqslant x < 1$ همگرای مطلق است. اگر

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \qquad (0 \leqslant x < 1). \qquad (۲)$$

آنگاه، چون

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \qquad (۳)$$

هم در $0 \leqslant x < 1$ همگرای مطلق است، بنا بر ۸.۵.۳ داریم

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (0 \leqslant x < 1),$$

---

* $(s_0 + s_1 + \dots + s_n)/(n+1)$ را σ_n یا σ_{n+1} نامیدن تأثیری در اصل مطلب ندارد.

که در آن $c_n = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1$، یعنی، $c_n = s_n$، به‌طوری که

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \qquad (0 \leqslant x < 1). \tag{4}$$

مجدداً با استفاده از ۸.۵.۳ و ضرب (۴) در (۳) داریم

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n x^n \qquad (0 \leqslant x < 1).$$

در نتیجه

$$f(x) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n x^n \qquad (0 \leqslant x < 1). \tag{5}$$

ولی

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (-1 < x < 1),$$

به‌طوری که

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 \qquad (-1 < x < 1),$$

$$L = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)Lx^n \qquad (-1 < x < 1). \tag{6}$$

از (۵) و (۶) داریم

$$f(x) - L = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\sigma_n - L)x^n \qquad (0 \leqslant x < 1). \tag{7}$$

اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد $N \in I$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$|\sigma_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geqslant N).$$

(چون $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = L$، چنین انتخابی ممکن است.) سپس، بنا بر (۷)

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &\leqslant (1-x)^2 \sum_{n=1}^{N} (n+1)|\sigma_n - L|x^n + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (n+1)x^n \\ &\leqslant (1-x)^2 \sum_{n=1}^{N} (n+1)|\sigma_n - L| + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ &\leqslant (1-x)^2 \cdot A + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

که در آن $A=\sum_{n=1}^{N}(n+1)|\sigma_n-L|$. چون با فرض $\delta=\sqrt{\varepsilon/2A}$، اگر $1-\delta<x<1$، آنگاه $(1-x)^2<\varepsilon/2A$، داریم

$$|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2A}\cdot A+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \qquad (1-\delta<x<1).$$

این ثابت می‌کند که $\lim_{x\to 1^-} f(x)=L$، و برهان کامل می‌شود.

قضیهٔ ۳.۹.۳ نتیجهٔ فوری ۵.۶.۹ و ۴.۶.۹ است.

البته، یك سری ممکن است با وجود واگرابودن مجموعپذیر آبل باشد. قضیهٔ زیر که قضیهٔ تاوبر[1] نامیده می‌شود، شرطی را بر یك‌سری وضع می‌کند که، همراه با شرط جمعپذیری آبل، تضمین کنندهٔ همگرایی سری است. ایـن قضیه سرآغاز دستهٔ بزرگی از قضیه‌ها است که قضیه‌های تاوبری نامیده می‌شوند.

۶.۶.۹. قضیه. اگر

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n=L \qquad (\mathrm{A}), \tag{۱}$$

و اگر

$$\lim_{n\to\infty} na_n=0, \tag{۲}$$

آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ به L همگرا است.

برهان: بنابر (۲) و ۲.۱۱.۲ دنبالهٔ $\{|na_n|\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعپذیر $(C,1)$ به 0 است. یعنی

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|ka_k|=0. \tag{۳}$$

اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، از (۲)، (۳) و (۱) نتیجه می‌شود که عدد $N\in I$ وجود دارد به‌طوری که

$$|na_n|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (n\geqslant N), \tag{۴}$$

---

1. Tauber

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|ka_k|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (n\geqslant N), \tag{5}$$

و به‌طوری که

$$\left|L-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad \left(1-\frac{1}{N}<x<1\right). \tag{6}$$

برای هر $n\in I$ و هر $x\in(0\,,1)$ داریم

$$\begin{aligned}L-\sum_{k=0}^{n}a_k&=L-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-\sum_{k=0}^{n}a_k\\&=L-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k+\sum_{k=1}^{n}a_k(x^k-1)+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\left|L-\sum_{k=0}^{n}a_k\right|&\leqslant\left|L-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right|+\sum_{k=1}^{n}|a_k|\cdot(1-x^k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|x^k\\&=I_1+I_2+I_3,\ (\text{مثلا})\end{aligned} \tag{7}$$

برای هر $n\geqslant N$، x را طوری انتخاب می‌کنیم که $1-1/n<x<1-1/(n+1)$.
آنگاه $1-1/N\leqslant 1-1/n<x<1$، و در نتیجه، بنا بر (۶)،

$$I_1=\left|L-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

اکنون، برای هر $k\in I$، $1-x^k=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})\leqslant k(1-x)$.
چون $1-x<1/n$، داریم

$$1-x^k\leqslant k(1-x)<\frac{k}{n}. \tag{8}$$

سپس (چون $n\geqslant N$) بنا بر (۸) و (۵) داریم

$$I_2=\sum_{k=1}^{n}|a_k|(1-x^k)<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|ka_k|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

برای برآورد کردن I_3، با استفاده از (۴)، داریم

$$\begin{aligned}I_3=\sum_{k=n+1}^{\infty}|ka_k|\frac{x^k}{k}&<\frac{\varepsilon}{3}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\leqslant\frac{\varepsilon}{3(n+1)}\sum_{k=n+1}^{\infty}x^k\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{3(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{\varepsilon}{3(n+1)(1-x)}.\end{aligned}$$

اما $x < 1 - 1/(n+1)$ و بنابراین $1 - x > 1/(n+1)$. در نتیجه $(n+1)(1-x) > 1$ و بنابراین

$$I_3 \leqslant \frac{\varepsilon}{3(n+1)(1-x)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

بنابراین با استفاده از (۷) داریم

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k - L \right| \leqslant I_1 + I_2 + I_3 < \varepsilon \qquad (n \geqslant N),$$

این ثابت می‌کند که $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ به L همگراست.

با توجه به ۵.۶.۹، می‌بینیم که قضیهٔ ۴.۹.۳ نتیجهٔ ۶.۶.۹ است.

تمرینهای ۶.۹

۱. نشان دهید که سریهای زیر مجموعپذیر آبل هستند:

(الف) $$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots ,$$

(ب) $$1 - 3 + 6 - 10 + 15 - \cdots .$$

۲. اگر

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L \qquad (A)$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = M \qquad (A),$$

ثابت کنید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = L + M \qquad (A).$$

۳. اگر

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = L \qquad (A),$$

ثابت کنید که

$$0+a_0+0+a_1+0+a_2+\cdots=L \qquad (A).$$

۴. اگر $L>0$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n L^n$ همگرا باشد، نشان‌دهید که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در $(0 \leqslant z \leqslant L)$ همگرای یکنواخت است.

۵. ثابت‌کنیدکه اگر

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad (0 \leqslant x<1), \qquad (*)$$

آنگاه

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

آیا این یك انتگرال سره است یا یك انتگرال ناسره؟ [راهنمایی: انتگرال $(*)$ را از 0 تا y که در آن $0<y<1$، محاسبه کنید. سپس ۳.۶.۹ را برای تعیین مقدار حد طرف راست معادله هنگامی که $y \to 1^-$، به‌کار ببرید.]

۶. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ دو سری همگرا از اعداد حقیقی باشند، و اگر

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

و اگر $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ همگرا باشد، نشان دهید که

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n .$$

[راهنمایی: ابتدا نشان دهید که برای $0 \leqslant x<1$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n].$$

اگر شرط همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ حذف شود نتیجهٔ فوق برقرار نیست.

۷.۹ یك تابع پیوستهٔ هیچ‌جا مشتقپذیر

به‌عنوان کاربرد دیگری از همگرایی یکنواخت تابعی حقیقی چون F می‌سازیم که در R^1 پیوسته باشد ولـی در هیچ‌نقطهٔ R^1 دارای مشتق نباشد. بـرای این‌کار F را بـه‌صورت

مجموع یك‌سری همگرای یکنواخت $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ تعریف می‌کنیم، که در آن نمودار u_n در هر بـازهٔ $[x, x+1]$ تقریباً دارای 2×10^n گوشهٔ تیز است و درنتیجه به‌مقدار قابل‌توجهی نوسان می‌کند. اثر جمعی این نوسانها نتیجهٔ مطلوب را می‌دهد.

۹.۷.۱۰. قضیه. تابعی‌حقیقی F وجود دارد به‌طوری‌که F در R^1 پیوسته است، ولی $F'(a)$ برای هیچ $a\in R^1$ وجود ندارد.

برهان: در این برهان فقط از بسطهای دهدهی‌که به‌رشته‌ای از ۹ها ختم نمی‌شوند استفاده می‌کنیم.

نخست f_0 را به‌طریقی که در زیر می‌آید تعریف می‌کنیم. برای هر عدد حقیقی x فرض می‌کنیم $f_0(x)$ فاصلهٔ x تا نزدیکترین عدد صحیح به‌آن باشد. مثلا اگر $x=7.3$ آنگاه ۷ نـزدیکترین عددصحیح به x است. درنتیجه، $f_0(x)$ فاصلهٔ ۷٫۳ تا ۷ یعنی ۰٫۳ است. بـه‌همین ترتیب $f_0(-6)=0$ و $f_0(1.83)=0.17$. [نمودار f_0 متشکل از پاره‌خطهای مستقیمی است کـه $\langle m, 0\rangle$ را به $\langle m+1/2, 1/2\rangle$ و $\langle m+1/2, 1/2\rangle$ را به $\langle m+1, 0\rangle$ وصل می‌کنند، که در آن $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$.] آشکاراست که

$$f_0(x+1)=f_0(x) \qquad (x\in R^1).$$

اکنون $f_1(x)$ را فاصلهٔ $10x$ تا نزدیکترین عددصحیح به‌آن تعریف‌می‌کنیم. مثلا، $f_1(7.64)$ فاصلهٔ ۷۶٫۴ تا ۷۶ یعنی ۰٫۴ است. ملاحظه می‌کنیم که

$$f_1(x)=f_0(10x) \qquad (x\in R^1).$$

باادامهٔ این‌روش، $f_2(x)$ را فاصلهٔ $100x$ تا نزدیکترین عدد صحیح به‌آن تعریف می‌کنیم. مثلا $f_2(0.678)=0.2$. به طورکلی f_k را بـرای $k=0, 1, 2, \ldots$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$f_k(x)=f_0(10^k x) \qquad (x\in R^1).$$

اکنون F را با تساوی

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k(x)}{10^k} \qquad (x\in R^1). \tag{1}$$

تعریف می‌کنیم. از آنجاکه

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k(x)}{10^k}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}}{10^k} \qquad (x\in R^1),$$

آزمون M مذکور در بند ۹.۴.۵ نشان می‌دهدکـه سری (۱) در R^1 همگرای یکنواخت

است. هر f_k در $R^۱$ پیوسته است، پس بنابر ۴.۴.۰۹، F در $R^۱$ پیوسته است.

حال نشان می‌دهیم کــه اگر $a\in R^۱$، آنگاه $F'(a)$ وجود ندارد. برای این منظور کافی است نشان دهیم که دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ وجود دارد به‌طوری که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ولی

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x_n)-F(a)}{x_n-a}$$

وجود ندارد.

فرض کنیم $a = a_۰ / a_۱ a_۲ a_۳ \cdots a_n \cdots$. برای $n\in I$ فرض می کنیم

$$x_n = a_۰ / a_۱ a_۲ \cdots a_{n-۱} b_n a_{n+۱} \cdots$$

که در آن $b_n = a_n + ۱$ اگر $a_n \neq ۴$ یا $a_n \neq ۹$ و $b_n = a_n - ۱$ اگر $a_n = ۴$ یا $a_n = ۹$. بنابراین $x_n - a = \pm ۱۰^{-n}$ و درنتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. برای مثال، اگر

$$a = ۰/۲۷۴۵۱,$$

آنگاه

$$x_۱ = ۰/۳۷۴۵۱$$

$$x_۲ = ۰/۲۸۴۵۱$$

$$x_۳ = ۰/۲۷۳۵۱$$

$$x_۴ = ۰/۲۷۴۶۱ .$$

درمورد این مثال داریم

$$f_۰(x_۳) - f_۰(a) = -۰/۰۰۱,$$

$$f_۱(x_۳) - f_۱(a) = +۰/۰۱,$$

$$f_۲(x_۳) - f_۲(a) = -۰/۱,$$

$$f_۳(x_۳) - f_۳(a) = ۰,$$

$$f_k(x_۳) - f_k(a) = ۰ \qquad (k \geqslant ۳).$$

[برای اینکه ببینید چرا به جای اینکه $x_۳$ را ۰/۲۷۵۵۱ انتخاب کنیم آن را ۰/۲۷۳۵۱ انتخاب کرده‌ایم $f_۲(۰/۲۷۵۵۱) - f_۲(a)$ را محاسبه کنید.]

آنچه که ذکر شد مثالی عددی از مطالب زیر بود: برای هر $n\in I$،

$$f_k(x_n)-f_k(a)=\pm 10^{k-n} \qquad (k=0,1,\cdots,n-1) \qquad (2)$$
$$f_k(x_n)-f_k(a)=0 \qquad (k\geqslant n).$$

درنتیجه

$$\frac{F(x_n)-F(a)}{x_n-a}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k(x_n)-f_k(a)}{10^k(x_n-a)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pm 10^{k-n}}{10^k(\pm 10^{-n})}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\pm 1.$$

یعنی، برای‌هر $n\in I$، $[F(x_n)-F(a)]/(x_n-a)$ برابرمجموع n جمله‌است که‌هر کدام از آنها ۱+ یا ۱− هستند. درنتیجه اگر n فرد باشد $[F(x_n)-F(a)]/(x_n-a)$ یك عدد صحیح فرد است و اگر n زوج باشد این کسر یك عدد صحیح زوج است. این ثابت می‌کند که $\lim_{n\to\infty}[F(x_n)-F(a)]/(x_n-a)$ وجود ندارد و این همان است که می‌خواستیم نشان دهیم.

۳.۷.۹. مثالی که برای یك تابع پیوسته هیچ‌جا مشتق‌پذیر ذکر کردیم منسوب به وان در واردن[1] است. مثال قدیمی‌تری که منسوب به وایرشتراس است، تابع زیر است:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 3^n x}{2^n} \qquad (x\in R^1).$$

ازآنجاکه این‌سری در R^1 همگرای یکنواخت است‌از ۴.۴.۹ نتیجه می‌شودکه F پیوسته است. از اثبات اینکه $F'(x)$ برای هیچ xی وجود ندارد صرفنظر می‌کنیم. اما توجه داشته باشید اگر مشتق جمله به‌جملهٔ این سری را محاسبه کنیم $-\sum_{n=0}^{\infty}(3/2)^n\sin 3^n x$ را به‌دست می‌آوریم که اگر x مضرب π نباشد این سری واگراست. این دلیلی ارائه می‌کند تا باور کنیم که F در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد.

مجدداً این‌حقیقت که نمودار تابع $\cos 3^n x$ (وقتی که n بزرگ باشد) سریعاً نوسان می‌کند باعث می‌شود که این مثال کارساز باشد.

تمرینهای ۷.۹

۱. فرض کنید $a=0/39261$

(الف) x_1، x_2 و x_3 را برای این a حساب کنید.

---

1. Van der Waerden

(ب)

$$f_0(x_2)-f_0(a),$$
$$f_1(x_2)-f_1(a),$$
$$f_2(x_2)-f_2(a),$$
$$f_3(x_2)-f_3(a).$$

را حساب کنید.

(ج) همین‌کار را برای x_3 انجام دهید.

(د) با استفاده از (ب) و (ج) نشان دهید که $[F(x_2)-F(a)]/(x_2-a)$ زوج، و $[F(x_3)-F(a)]/(x_3-a)$ فرد است.

۱۰

سه قضیهٔ مشهور

۱.۱۰ فضای متریك $C[a, b]$

در هریك از سه بخش آینده قضیه‌ای مهم ومشهور از آنالیز را ثابت خواهیم کرد. به‌هریك از این قضیه‌ها می‌توان به‌عنوان قضیه‌ای دربارهٔ یك فضای متریك خـاص نگریست، یعنی، فضای توابع پیوسته در یك بازهٔ بستهٔ کراندار همراه بامتریکی که هم‌اکنون تعریف‌خواهیم کرد. با تعریف نرم تابع حقیقی پیوسته در یك بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ شروع می‌کنیم. (توجه داشته باشیدکه قدرمطلق چنین‌تابعی، یعنی $|f|$، خود تابعی پیوسته‌است و در نتیجه، بنابر ۷.۶.۶، درنقطه‌ای از $[a, b]$ ماکسیمم‌است.)

۱.۱.۱۰. تعریف. اگر f یك تابع حقیقی پیوسته در بازهٔ‌کـراندار بستهٔ $[a, b]$ باشد، آنگاه، $||f||$ را، که نرم f نامیده می‌شود، با رابطهٔ

$$||f|| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$$

تعریف می‌کنیم.

این نرم ویژگیهایی شبیه نرم l^2 دارد. به‌ویژه (با ۵.۱۰.۳ مقایسه‌کنید).

۲.۱.۱۰. قضیه. نرم توابع حقیقی پیوستهٔ f و g، در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$، دارای ویژگیهای زیر است:

$$\|f\| \geqslant 0 \qquad (۱)$$

$f(x)=0 \ (a \leqslant x \leqslant b)$ اگر وتنها اگر $0=\|f\|$ (۲)

$\|cf\|=|c| \cdot \|f\|$ برای هر c حقیقی (۳)

$$\|f+g\| \leqslant \|f\|+\|g\| \qquad (۴)$$

برهان: همهٔ ویژگیها بجز (۴) بدیهی هستند. برای اثبات (۴)، برای هر $x \in [a,b]$، داریم

$$|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)| \leqslant \|f\|+\|g\|,$$

ودر نتیجه

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)+g(x)| \leqslant \|f\|+\|g\|.$$

طرف چپ این نامساوی دقیقاً همان $\|f+g\|$ است، و (۴) نتیجه می‌شود.

۳.۱.۱۰ از ۲.۱.۱۰ به‌آسانی نتیجه می‌شود که اگر ρ را بارابطهٔ

$$\rho(\varphi, \psi)=\|\varphi-\psi\|,$$

تعریف کنیم، آنگاه ρ یك متریك در فضای توابع حقیقی پیوسته در $[a, b]$ است. مثلا، اگر φ، ψ و η چنین توابعی باشند، آنگاه

$$\rho(\varphi, \eta)=\|\varphi-\eta\|=\|(\varphi-\psi)+(\psi-\eta)\|.$$

سپس، بنابر (۴) از بند ۲.۱.۱۰ داریم

$$\rho(\varphi, \eta) \leqslant \|\varphi-\psi\|+\|\psi-\eta\|=\rho(\varphi, \psi)+\rho(\psi, \eta).$$

درنتیجه، ρ در نابرابری مثلثی صدق می‌کند. درستی ویژگیهای دیگر متریك به‌آسانی تحقیق می‌شود. با این تعریف نرم به‌تعریف زیر می‌رسیم.

تعریف. مقصود ما از $C[a,b]$، فضای متریك همهٔ توابع حقیقی پیوسته در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ با متریك ρ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho(f, g)=\|f-g\| \qquad (f, g \in C[a, b]).$$

بنابراین «نقاط» (یا عنصرهای) $C[a, b]$ توابع پیوسته در $[a, b]$ هستند.
خواهیم‌دید که همگرایی یك دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $C[a,b]$ نسبت به‌متریك $C[a, b]$ (۳.۳.۴ را ببینید) دقیقاً همان همگرایی یکنواخت دنباله‌های توابع $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a,b]$ است.

۴.۱.۱۰ قضیه. دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $C[a, b]$ (نسبت به‌متریك ρ) به $f \in C[a,b]$ همگراست اگر و تنها اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت به f باشد.

برهان: فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ نسبت به‌متریك ρ به f همگرا باشد. این بدان معنی است که برای عدد مثبت دلخواه ε عدد $N \in I$ وجود دارد به‌طوری که

$$\rho(f_n, f) = \|f_n - f\| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N). \tag{۱}$$

یا

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N). \tag{۲}$$

ولی (۲) هم‌ارز است با

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N;\ a \leqslant x \leqslant b). \tag{۳}$$

(چرا؟) با توجه به (۳) می‌بینیم که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت به f است.

به‌عکس، از اینکه (۱) از (۳) نتیجه می‌شود می‌بینیم که اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت به f باشد، آنگاه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ نسبت به ρ، متریك $C[a, b]$، به f همگراست. این مطلب برهان را کامل می‌کند.

از ۴.۱.۱۰ نتیجهٔ مهم زیر به‌دست می‌آید

۵.۱.۱۰ قضیه. فضای متریك $C[a, b]$ کامل است.

برهان: اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی در $C[a, b]$ باشد (۴.۳.۴ را ببینید)، آنگاه اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد عدد $N \in I$ وجود دارد به‌طوری که

$$\rho(f_m, f_n) < \varepsilon \qquad (m, n \geqslant N).$$

یعنی

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon \qquad (m, n \geqslant N)$$

یا

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (m, n \geqslant N).$$

در نتیجه

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (m, n \geqslant N;\ a \leqslant x \leqslant b).$$

بنابر ۶.۲.۹، $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت به‌تابعی مانند f است. از این گذشته بنابر ۳.۳.۹، $f \in C[a, b]$. ولی دراین‌صورت، بنابر ۴.۱.۱۰، $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ نسبت

به ρ به f همگراست. بنابراین هر دنبالهٔ کوشی در $C[a, b]$ به نقطه‌ای در $C[a, b]$ همگراست. این مطلب ثابت می‌کند که $C[a, b]$ کامل است.

نتیجهٔ زیر موردنیازمان خواهد بود.

۶.۱.۱۰ نتیجه. اگر l و m دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به‌طوری که $l<m$، و اگر C^* زیرمجموعهٔ $C[a, b]$ باشد متشکل از همهٔ توابعی که درشرط

$$l \leqslant f(x) \leqslant m \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

صدق می‌کنند، آنگاه C^* (با متریك $C[a ،b]$) یك فضای متریك کامل است.

برهان: چون $C^* \subseteq C[a, b]$ و $C[a, b]$ کامل است، بنابر ۳.۴.۶ کافی است ثابت کنیم که C^* زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $C[a, b]$ است. بنابراین، فرض می‌کنیم $f \in C[a ،b]$ یك نقطهٔ حدی C^* باشد. آنگاه دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در C^* وجود دارد که (نسبت به‌متریك $C[a, b]$) به f همگراست. در نتیجه، بنابر ۴.۱.۱۰، $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت به f است، و بنابراین $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a ,b]$ همگرای نقطه‌ای به f است. یعنی،

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{۱}$$

ولی هریك از f_nها در C^* هستند و بنابراین

$$l \leqslant f_n(x) \leqslant m \qquad (a \leqslant x \leqslant b; n \in I). \tag{۲}$$

از (۱)، (۲) و ۵.۷.۲ نتیجه می‌شود که برای هر $x \in [a, b]$، $l \leqslant f(x) \leqslant m$. در نتیجه $f \in C^*$. نشان دادیم که C^* همهٔ نقاط حدیش را شامل است، پس C^* بسته است، و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تمرینهای ۱.۱۰

۱. اگر L یك تابع حقیقی در $C[a, b]$ باشد که با

$$L(f) = \int_a^b f \qquad (f \in C[a, b]),$$

تعریف شده است. ثابت کنید که L در $C[a, b]$ پیوسته است.

۲. اگر T یك انقباض (۵.۴.۶) در $C[a, b]$ باشد نشان دهید که T یك تابع پیوستهٔ یکنواخت در $C[a, b]$ است.

۳. فرض کنید که $C^1[0, 1]$ زیرفضایی از $C[0, 1]$ متشکل از همهٔ توابع $f \in C[0, 1]$ باشد که مشتق‌پذیرند و $f' \in C[0, 1]$. به $C^1[0, 1]$ متریك $C[0, 1]$ را بدهید. $T: C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ را با رابطهٔ

$$Tf=f' \qquad (f\in C^1[0,1])$$

تعریف کنید. ثابت کنید که T پیوسته نیست.

۰۴ اگر $m, n\in R$ به‌طوری که $m<n$، و اگر

$$A=\{f\in C[a,b]: m<f(x)<n\} \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

ثابت کنید که A یک زیرمجموعهٔ باز $C[a,b]$ است.

۰۵ اگر $B[a,b]$ مجموعهٔ همهٔ توابع حقیقی کراندار در $[a,b]$ باشد، برای $f\in B[a,b]$ فرض کنید

$$\|f\|_B=\underset{a\leqslant x\leqslant b}{\mathrm{l.u.b.}}\ |f(x)|,$$

و متریک ρ برای $B[a,b]$ را با برابری

$$\rho(f,g)=\|f-g\|_B \qquad (f, g\in B[a,b])$$

تعریف کنید. ثابت کنید که $B[a,b]$ کامل است.

۰۶ ثابت کنید که $C[a,b]$ فشرده نیست.

۲.۱۰ قضیهٔ تقریب وایرشتراس

مقصود از تابع چندجمله‌ای (یا به‌بیان ساده‌تر، چندجمله‌ای) تابعی است مانند P که بتوان آن‌را به‌صورت

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n \qquad (x\in R^1)$$

بیان کرد، که در آن n یک عدد صحیح نامنفی و a_0، a_1، ...، a_n اعدادی حقیقی هستند. واضح است که تحدید تابع چندجمله‌ای به بازهٔ بستهٔ کراندار $[a,b]$ در $[a,b]$ پیوسته است. از طرف دیگر، توابعی در $C[a,b]$ وجود دارند که چندجمله‌ای نیستند.* (مثلا، تابعی در $C[a,b]$ که در نقطه‌ای از $[a,b]$ دارای مشتق نباشد نمی‌تواند یک چندجمله‌ای باشد.) ولی، وایرشتراس نشان داد که هر تابعی در $C[a,b]$ به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها تقریب‌پذیر یکنواخت است. این حکم قضیهٔ تقریب وایرشتراس نامیده می‌شود، که هم‌اکنون آن را بیان می‌کنیم.

۱.۲.۱۰ قضیه. فرض کنیم f تابع دلخواهی در $C[a,b]$ باشد. آنگاه اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد یک چندجمله‌ای P وجود دارد به‌طوری که

* به‌بیان دقیقتر، توابعی در $C[a,b]$ وجود دارند که تحدید چندجمله‌ایها به $[a,b]$ نیستند.

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{۱}$$

۲.۲.۱۰. به‌زودی برهانی برای ۱.۲.۱۰ خواهیم آورد. ولی ابتدا صورتهای هم‌ارز مختلفی از آن‌را بیان می‌کنیم. توجه کنید که رابطهٔ (۱) در ۱.۲.۱۰ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\|P-f\|<\varepsilon$$

یا برحسب متریك ρ در $C[a\ b]$،

$$\rho(P,\ f)<\varepsilon.$$

بنابراین، ۱.۲.۱۰ می‌گوید که هرگوی باز $B[f\ ;\ \varepsilon]$ حول f در $C[a,\ b]$ شامل یك چندجمله‌ای است. بنابر ۴.۵.۵، این بدان‌معنی است که هر $f\in C[a,\ b]$ نقطهٔ حدی مجموعهٔ $\mathcal{P}$ متشکل از همهٔ چندجمله‌ایها است. پس، ۱.۲.۱۰ را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

I. مجموعهٔ $\mathcal{P}$ متشکل از همهٔ چندجمله‌ایها درفضای متریك $C[a,\ b]$ چگال است.

صورت هم‌ارز دیگر ۱.۲.۱۰ به‌طریق زیر به‌دست می‌آید. گزارهٔ I هم‌ارز است با اینکه بگوییم برای هر $f\in C[a,\ b]$ دنباله‌ای مانند $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ از چندجمله‌ایها وجود دارد که در $C[a,\ b]$ به f همگراست. بنابر ۴.۱.۱۰ این هم‌ارز است با

II. برای هر $f\in C[a,\ b]$ دنباله‌ای از چندجمله‌ایها مانند $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a,\ b]$ همگرای یکنواخت به f باشد.

درنتیجه I و II هم‌ارزند.

۳.۲.۱۰. قبل از اینکه برهان ۱.۲.۱۰ را بیاوریم مناسب است که لم زیر را ثابت کنیم.

لم. برای اثبات ۱.۲.۱۰ کافی است که آن را درحالت خاص $[a,\ b]=[0,\ 1]$ ثابت کنیم

برهان: فرض کنیم ۱.۲.۱۰ در $C[0,\ 1]$ برقرار باشد. نشان خواهیم‌داد که دراین صورت ۱.۲.۱۰ برای $C[a,\ b]$ نیز، که درآن $[a,\ b]$ یك بازهٔ بستهٔ کراندار دلخواه است، برقرار می‌باشد. بنابراین، اگر $f\in C[a,\ b]$ و ε عدد مثبت دلخواهی باشد، باید یك چندجمله‌ای مانند P بیابیم به‌طوری که

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{۱}$$

اگر g را با رابطهٔ

$$g(x)=f(a+[b-a]x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

تعریف کنیم. آنگاه $g(0)=f(a)$ و $g(1)=f(b)$. بنابر ۴.۳.۰۵، g در $[0,1]$ پیوسته است. در نتیجه با این فرض که ۱۰.۲.۱۰ در $C[0,1]$ برقرار است، یك چندجمله‌ای Q وجود دارد به‌طوری که

$$|g(y)-Q(y)|<\varepsilon \qquad (0\leqslant y\leqslant 1).$$

اگر $y=(x-a)/(b-a)$، آنگاه

$$g(y)=g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)=f\left(a+(b-a)\frac{x-a}{b-a}\right)=f(x).$$

پس داریم

$$\left|f(x)-Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon \qquad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{۲}$$

اگر P را با رابطهٔ

$$P(x)=Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

تعریف کنیم آنگاه، بنا بر قضیهٔ دوجمله‌ای، P یك چندجمله‌ای است (زیرا Q یك چندجمله‌ای است). سپس نامساوی (۱) از (۲) نتیجه و برهان کامل می‌شود.

۴.۲.۱۰. اکنون ۱۰.۲.۱ را در $C[0,1]$ ثابت می‌کنیم. این برهان به برنشتاین[1] منسوب است و در آن از چندجمله‌ایهایی که چندجمله‌ایهای برنشتاین نامیده می‌شوند استفاده می‌شود.

برای هر $f\in C[0,1]$ دنباله‌ای از چندجمله‌ایها مانند $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ را به طریق زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1;\ n\in I), \tag{۱}$$

که در آن

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

---

1. Bernstein

چندجمله‌ای B_n را چندجمله‌ای nام برنشتاین برای f می‌نامند.

اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، نشان خواهیم داد که عدد $N \in I$ وجود دارد به‌طوری که

$$\|f-B_n\|<\varepsilon \qquad (n \geqslant N). \tag{۲}$$

این نشان خواهدداد که $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ همگرای یکنواخت به f است، به‌ویژه، ۱۰.۲.۱۰ را ثابت خواهد کرد.

به‌محاسبات مقدماتی زیادی نیاز داریم. بنابرقضیهٔ دوجمله‌ای، برای هر $p, q \in R$، داریم

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=(p+q)^n \qquad (n \in I). \tag{۳}$$

اگر از آن نسبت به p مشتق بگیریم داریم

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k\,p^{k-1}q^{n-k}=n(p+q)^{n-1}.$$

که درنتیجه

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=p(p+q)^{n-1} \qquad (n \in I). \tag{۴}$$

بامشتق‌گیری مجدد داریم

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n}\binom{n}{k}p^{k-1}q^{n-k}=p(n-1)(p+q)^{n-2}+(p+q)^{n-1},$$

و بنابراین

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=p^2\left(1-\frac{1}{n}\right)(p+q)^{n-2}+\frac{p}{n}(p+q)^{n-1}. \tag{۵}$$

اکنون، اگر $x \in [0, 1]$، با قرار دادن $p=x$ و $q=1-x$، از (۳)، (۴) و (۵) نتیجه می‌شود

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1. \tag{۶}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=x,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=x^2\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{x}{n}.$$

از این معادلات [با بسط‌دادن $(k/n-x)^۲$] به‌آسانی نتیجه می‌شود که

$$\sum_{k=۰}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^{۲}\binom{n}{k}x^{k}(۱-x)^{n-k}=\frac{x(۱-x)}{n} \qquad (۰\leqslant x\leqslant ۱). \qquad (۷)$$

بنابر ۳.۸.۶، f در $[۰, ۱]$ پیوستهٔ یکنواخت است. درنتیجه، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، δی مثبتی وجود دارد به‌طوری که

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{۲} \qquad (|x-y|<\delta;\ x,\ y\in[۰,\ ۱]).$$

اکنون $N\in I$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\frac{۱}{\sqrt[۴]{N}}<\delta \qquad (۸)$$

و

$$\frac{۱}{\sqrt{N}}<\frac{\varepsilon}{۴||f||}. \qquad (۹)$$

(البته می‌توان فرض کرد که $||f||>۰$.)

$x\in[۰, ۱]$ را ثابت نگه می‌داریم. (۶) را در $f(x)$ ضرب و (۱) را از آن کم می‌کنیم. آنگاه برای هر $n\in I$ داریم

$$f(x)-B_n(x)=\sum_{k=۰}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^{k}(۱-x)^{n-k}=\Sigma'+\Sigma'' \qquad (۱۰)$$

که در آن Σ' مجموع آن مقدارهایی از k است که

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|<\frac{۱}{\sqrt[۴]{n}}, \qquad (۱۱)$$

درحالی که Σ'' مجموع بقیهٔ مقدارهای k است. اگر k درنامساوی (۱۱) صدق نکند، یعنی، اگر $|k/n-x|\geqslant ۱/\sqrt[۴]{n}$، آنگاه $(k-nx)^۲=n^۲|k/n-x|^۲\geqslant\sqrt{n^۳}$. درنتیجه

$$\begin{aligned}|\Sigma''|&=\left|\Sigma''\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^{k}(۱-x)^{n-k}\right|\\&\leqslant\Sigma''\left[|f(x)|+\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right]\binom{n}{k}x^{k}(۱-x)^{n-k}\\&\leqslant ۲||f||\Sigma''\binom{n}{k}x^{k}(۱-x)^{n-k}\leqslant\frac{۲||f||}{\sqrt{n^۳}}\ \Sigma''(k-nx)^۲\binom{n}{k}x^{k}(۱-x)^{n-k}\\&\leqslant\frac{۲||f||}{\sqrt{n^۳}}\sum_{k=۰}^{n}(k-nx)^۲\binom{n}{k}x^{k}(۱-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

درنتیجه، بنابر (۷)

$$|\Sigma''| \leqslant \frac{۲\|f\|}{\sqrt{n^۳}} \cdot nx(۱-x) \leqslant \frac{۲\|f\|}{\sqrt{n}}.$$

اگر $n \geqslant N$، از (۹) نتیجه می‌شود که $۱/\sqrt{n} < \varepsilon/۴\|f\|$ و بنابراین

$$|\Sigma''| < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

از این گذشته، اگر $n \geqslant N$ و اگر k در (۱۱) صدق کند، آنگاه بنابر (۸) و (۱۱)، $|k/n-x| < \delta$ و بنابراین

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

درنتیجه

$$|\Sigma'| = \left| \Sigma' \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} x^k (۱-x)^{n-k} \right| < \frac{\varepsilon}{۲} \Sigma \binom{n}{k} x^k (۱-x)^{n-k},$$

ولذا از (۶) نتیجه می‌شود

$$|\Sigma'| < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

درنتیجه، بنابر (۱۰)

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant |\Sigma'| + |\Sigma''| < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon.$$

ازآنجاکه x نقطه‌ای دلخواه از $[۰, ۱]$ و n عددی صحیح و دلخواه با شرط $n \geqslant N$ بود این مطلب نشان می‌دهد که

$$|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon \qquad (۰ \leqslant x \leqslant ۱;\ n \geqslant N).$$

و این (۲) را ثابت و برهان را کامل می‌کند.

۵۰۲۰۱۵ نظریهٔ احتمال برهان قبل را تا اندازه‌ای روشن می‌کند. فرض کنیم که یك سکه پرتاب کرده‌ایم که احتمال آمدن شیر x و درنتیجه احتمال آمدن خط $۱-x$ باشد. اگر سکه n بار پرتاب شود، احتمال اینکه در n پرتاب درست k مرتبه شیر بیاید،

$\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ است. [این عبارت در تعریف $B_n(x)$ ظاهر می‌شود.]

امید ریاضی تعداد شیرها در n پرتاب nx است. (این یك واقعیت احتمالاتی است که مطمئناً حتی برای کسانی که تعریف دقیق «امید ریاضی» را نمی‌دانند قابل قبول است.) در واقع، هر کس حس می‌کند که یقیناً آوردن درست k شیر در n پرتاب برای مقداری (یا مقدارهایی) از k که به nx نزدیکترند محتملتر ازمقدارهایی از k است که از nx دور هستند. درنتیجه $\sum'$ به kهایی مربوط می‌شود که آوردن درست k مرتبه شیر در n پرتاب «محتملتر» است. درحالی که $\sum''$ به kهایی مربوط می‌شود که آوردن درست k مرتبه شیر در n پرتاب «کمتر محتمل» است.

درواقع، برهان ۱.۲.۱۰ که ارائه شده‌است اساساً یکی از برهانهای رایج «قانون ضعیف اعداد بزرگ» است.

۶.۲.۱۰. ثابت کرده‌ایم که مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ایها در $C[0,1]$ چگال است. طبیعی است که بپرسیم آیا به‌همهٔ چندجمله‌ایها احتیاج داریم.

فرض کنیم $N=\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنبالـه‌ای اکیداً صعودی از اعداد صحیح مثبت باشد و فرض کنیم که $\mathcal{P}_N$ مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ایهای P باشد که P به‌صورت

$$P(x)=a_0+a_1x^{n_1}+a_2x^{n_2}+\cdots+a_kx^{n_k}$$

است. یعنی، $P\in\mathcal{P}_N$ اگر P مجموع یك عدد ثابت و یك چندجمله‌ای باشد که نماهای این چندجمله‌ای همگی به N متعلق باشند. اکنون قضیهٔ اعجاب‌انگیزی ذکر می‌کنیم (که برهانش دراین کتاب نمی‌گنجد.)

قضیهٔ مونتس-ساس.[1] مجموعهٔ $\mathcal{P}_N$ در $C[0,1]$ چگال است، اگروتنها اگر

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}=\infty.$$

بنابراین مثلا، مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ایهای به‌صورت

$$a_0+a_1x^2+a_2x^4+a_3x^8+\cdots+a_kx^{2^k}$$

در $C[0,1]$ چگال نیست. زیرا دراینجا $n_i=2^i$ که‌درنتیجه $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\infty$. از طرف دیگرمجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ایهایی که نماهایشان زوج‌است در $C[0,1]$ چگال‌است.

---

1. Muntz-Szasz

تمرین ۲.۱۰

۱. B_1، B_2 و B_3 را برای

$$f(x)=x^2 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

حساب کنید، سپس نمودار این توابع را رسم کنید.

۳.۱۰ قضیهٔ وجودی پیکار[1] درمعادلات دیفرانسیل

در درس معادلات دیفرانسیل مقدماتی بسیاری از مسائل با جواب معادلاتی به‌صورت

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{۱}$$

با شرط آغازی

$$y(x_0)=y_0 \tag{۲}$$

مربوط می‌شوند. البته دراینجا f یك‌تابع حقیقی است که درتمام یا قسمتی از R^2 تعریف شده‌است. منظور ما از جواب، تابعی است مانند φ که حوزهٔ تعریفش شامل بازه‌ای مانند $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ باشد به‌طوری که $\varphi(x_0)=y_0$ و

$$\varphi'(x)=f[x,\ \varphi(x)] \qquad (|x-x_0|\leqslant\delta). \tag{۳}$$

این (بااستفاده از انتگرالگیری) هم‌ارز است با

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\ \varphi(t)]dt \qquad (|x-x_0|\leqslant\delta). \tag{۴}$$

بنابراین، وجود جواب مسأله‌ای که با (۱) و (۲) مطرح می‌شود هم‌ارز است با وجود تابعی φ، که به‌ازای δیی در (۴) صدق کند. اکنون به‌اثبات قضیه‌ای منسوب به‌پیکار می‌پردازیم که درآن شرایطی برای f فرض می‌کند که برای وجود و یکتایی تابع φ که در (۴) صدق کند کافی‌اند.

قضیه: اگر f درمستطیل $D\subseteq R^2$، که درونش شامل $\langle x_0,\ y_0\rangle$ است،* پیوسته باشد، و اگر عدد مثبت M وجود داشته باشد به‌طوری که**

---

1. Picard

* به بیان دقیقتر، $D=\{\langle x,\ y\rangle: |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\}$ که در آن a و b دو عدد مثبت‌اند.

** شرط (۵) را شرط لیپشیتس (Lipschitz) می‌نامند.

$$|f(x,\ y_{۱})-f(x,\ y_{۲})|\leqslant M|y_{۱}-y_{۲}| \qquad (\langle x,\ y_{۱}\rangle,\ \langle x,\ y_{۲}\rangle\in D) \qquad (۵)$$

آنگاه یك δی مثبت ویك تابع یکتای φ وجود دارند به‌طوری که (۴) برقرار باشد

برهان: چون f درمجموعهٔ فشردهٔ D پیوسته است، (بنابر ۲.۶.۶) می‌دانیم که kی مثبتی وجود دارد به‌طوری که

$$|f(x,\ y)|\leqslant k \qquad (\langle x,\ y\rangle\in D).$$

$\delta>۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

(۶) اگر $|x-x_{۰}|\leqslant\delta$، $|y-y_{۰}|\leqslant k\delta$ آنگاه $\langle x,\ y\rangle\in D$

و به‌طوری که

$$M\delta<۱ \qquad (۷)$$

که M همان است که در (۵) ذکر شد.

اگر C^* زیرمجموعهٔ $C[x_{۰}-\delta,\ x_{۰}+\delta]$ متشکل از همهٔ توابع φ باشد که در $[x_{۰}-\delta,\ x_{۰}+\delta]$ پیوسته هستند و به‌طوری که

$$|\varphi(x)-y_{۰}|\leqslant k\delta \qquad (|x-x_{۰}|\leqslant\delta),$$

آنگاه، بنابر ۶.۱.۱۰، C^* یك فضای متریك کامل است. توجه داشته باشید که بنابر (۶) اگر $|t-x_{۰}|\leqslant\delta$ و $\varphi\in C^*$، آنگاه $\langle t,\ \varphi(t)\rangle\in D$.

اکنون تابع T را در C^* به‌طریق‌زیر تعریف می‌کنیم: اگر $\varphi\in C^*$، آنگاه $T\varphi=\psi$ که در آن

$$\psi(x)=y_{۰}+\int_{x_{۰}}^{x}f[t,\ \varphi(t)]dt \qquad (|x-x_{۰}|\leqslant\delta). \qquad (۸)$$

دراین‌صورت φ در (۴) صدق می‌کند اگر و تنها اگر $T\varphi=\varphi$.

نشان خواهیم‌داد که T یك انقباض (۵.۴.۶) در فضای متریك‌کامل C^* است. ابتدا نشان‌می‌دهیم که T، C^* را به‌توی C^* می‌نگارد. درواقع، اگر $\varphi\in C^*$ و $T\varphi=\psi$، به‌آسانی می‌توان نشان‌داد که ψ در $[x_{۰}-\delta,x_{۰}+\delta]$ پیوسته‌است. ازاین گذشته اگر $|x-x_{۰}|\leqslant\delta$ آنگاه

$$|\psi(x)-y_{۰}|=\left|\int_{x_{۰}}^{x}f[t,\ \varphi(t)]dt\right|\leqslant k|x-x_{۰}|\leqslant k\delta.$$

درنتیجه، اگر $|x-x_{۰}|\leqslant\delta$، آنگاه $|\psi(x)-y_{۰}|\leqslant k\delta$، و بنابراین $\psi\in C^*$. از این‌رو، $T:C^*\to C^*$.

برای اینکه نشان‌دهیم T یك انقباض است فرض‌می‌کنیم $\varphi_۱, \varphi_۲ \in C^*$ و $\psi_۱ = T\varphi_۱$، $\psi_۲ = T\varphi_۲$. آنگاه، بنابر (۸)، اگر $|x - x_۰| \leqslant \delta$, داریم

$$\psi_۱(x) - \psi_۲(x) = \int_{x_۰}^{x} \{f[t, \varphi_۱(t)] - f[t, \varphi_۲(t)]\} dt,$$

و بنابراین

$$|\psi_۱(x) - \psi_۲(x)| \leqslant \left| \int_{x_۰}^{x} |f[t, \varphi_۱(t)] - f[t, \varphi_۲(t)]| dt \right|.$$

سپس بااستفاده از (۵) داریم

$$|\psi_۱(x) - \psi_۲(x)| \leqslant \left| M \int_{x_۰}^{x} |\varphi_۱(t) - \varphi_۲(t)| dt \right|$$

$$\leqslant \left| M \int_{x_۰}^{x} ||\varphi_۱ - \varphi_۲|| dt \right| \leqslant M\delta ||\varphi_۱ - \varphi_۲||.$$

درنتیجه

$$||\psi_۱ - \psi_۲|| \leqslant M\delta ||\varphi_۱ - \varphi_۲||,$$

یا

$$||T\varphi_۱ - T\varphi_۲|| \leqslant M\delta ||\varphi_۱ - \varphi_۲||.$$

با توجه به‌متریك ρ برای C^* رابطهٔ فوق به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\rho(T\varphi_۱, T\varphi_۲) \leqslant M\delta \rho(\varphi_۱, \varphi_۲).$$

باتوجه به (۷)، این رابطه ثابت می‌کندکه T یك انقباض در C^* است. درنتیجه، بنابر ۶.۴.۶، درست یك $\varphi \in C^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $T\varphi = \varphi$. ولی تعریف T در (۸) نشان می‌دهدکه $T\varphi = \varphi$ به‌معنی برقراربودن (۴) است. این‌مطلب برهان را کامل می‌کند.

برهان ما برای اثبات وجود و یکتایی جواب

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_۰) = y_۰$$

هم از پیوستگی f و هم از شرط لیپشیتس (۵) استفاده می‌کند.

با به‌کاربردن برهانی با روش متفاوت، می‌توان تنها بافرض پیوستگی f و بدون استفاده از شرط لیپشیتس، نشان‌دادکه یك جواب وجود دارد. بخش ۶.۱۰ را ببینید.

اما شرط لیپشیتس برای اثبات یکتایی جواب لازم است. مثلا $\varphi_۱(x) = ۰$ و $\varphi_۲(x) = x^۳/۲۷$ هردو جوابهای معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx}=y^{2/3} \qquad y(0)=0 \tag{9}$$

هستند. بنابراین جواب (۹) یکتا نیست. نشان‌دادن این‌را که $f(x, y)=y^{2/3}$ در هیچ مستطیل D حول $\langle 0, 0\rangle$ در شرط لیپشیتس صدق نمی‌کند به‌خواننده واگذار می‌کنیم. (نشان‌دهید که

$$|f(0, y)-f(0, 0)| \leqslant My \qquad (\langle 0, y\rangle \in D)$$

برای هیچ Mی برقرار نیست.)

تمرینهای ۳.۱۰

۱. نشان‌دهید که φ یك جواب معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx}=x+y, \qquad y(0)=0$$

است اگر وتنها اگر

$$\varphi(x)=\int_0^x [t+\varphi(t)]dt.$$

T را به‌طریق زیر تعریف کنید: برای هر φ فرض کنید $T\varphi=\psi$ که در آن

$$\psi(x)=\int_0^x [t+\varphi(t)]dt.$$

به فرض $\varphi_0=0$، اگر $\varphi_1=T\varphi_0$، نشان دهید که $\varphi_1(x)=x^2/2!$. اگر $\varphi_2=T\varphi_1$، نشان دهید که $\varphi_2(x)=x^2/2!+x^3/3!$. به‌طور کلی، اگر $\varphi_n=T\varphi_{n-1}$، نشان دهید که $\varphi_n(x)=x^2/2!+x^3/3!+\ldots+x^n/n!$. آنگاه نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty} T^n\varphi_0(x)=e^x-x-1.$$

تحقیق کنید که $\varphi(x)=e^x-x-1$ یك جواب مسألهٔ اصلی است.

این روش حل را با برهان ۶.۴.۶ مقایسه کنید.

۲. همین روش را برای حل معادلهٔ

$$y'=y, \qquad y(1)=1$$

به‌کار برید.

۳. همین روش را برای حل معادلهٔ

$$y'=x-y \qquad y(0)=1$$

به‌کار برید.

۴.۱۰ قضیهٔ آرزلا[1] و خانواده‌های همپیوسته

۱۰۴۰۱۰. در آنالیز عالی دانستن این نکته غالباً مفید است که چه هنگامی یك دنبالهٔ توابع پیوسته در $[a, b]$ دارای یك زیردنبالهٔ همگرای یکنواخت است.
مثالی می‌آوریم که چنین زیردنباله‌ای وجود ندارد. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f_n(x)=x^n \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

همان‌طور که قبلا دیده‌ایم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ همگرای نقطه‌ای به تابع ناپیوستهٔ f است، که

$$f(x)=0 \qquad (0\leqslant x<1),$$
$$f(1)=1.$$

بنابراین هر زیردنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ هم باید همگرای نقطه‌ای به f باشد. درنتیجه، بنابر ۳.۳.۹، هیچ زیردنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ نمی‌تواند در $[0, 1]$ همگرای یکنواخت باشد، زیرا f پیوسته نیست.
شرطی که در پی آن هستیم متضمن مفهوم همپیوستگی است.

۲۰۴۰۱۰. **تعریف.** اگر $[a, b]$ یك بازهٔ بستهٔ کراندار باشد، $\mathscr{F}$ زیرمجموعهٔ $C[a,b]$ را همپیوسته می‌نامند اگر برای هرعدد مثبت ε عدد مثبت δ وجود داشته باشد به طوری که

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \qquad (|x-y|<\delta;\, f\in\mathscr{F}).$$

یعنی، $\mathscr{F}$ یك زیرمجموعهٔ همپیوستهٔ $C[a, b]$ است اگر برای هر ε مثبت دلخواه، δیی مستقل از f وجود داشته باشد به‌طوری که اگر $|x-y|<\delta$ آنگاه $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.
باید δی واحدی برای هر $f\in\mathscr{F}$ و همهٔ x و yها به‌کار آید.
یك شرط کافی برای اینکه مطمئن شویم یك دنباله از توابع پیوسته در $[a,b]$ یك زیردنبالهٔ همگرای یکنواخت دارد از نتیجهٔ زیر (که آن را قضیهٔ آرزلا یا قضیهٔ اسکولی[2] می‌نامند) به‌دست می‌آید.

۳۰۴۰۱۰. **قضیه.** اگر $\mathscr{F}$ یك زیرمجموعهٔ کراندار همپیوسته از فضای متریك $C[a,b]$ باشد، آنگاه $\mathscr{F}$ کراندار کلی است.

برهان: اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد باید نشان‌دهیم که تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های $C[a, b]$ مانند A_i وجود دارد به‌طوری که $\operatorname{diam} A_i<\varepsilon$ و $\mathscr{F}\subseteq\bigcup A_i$.

---

1. Arzela 2. Ascoli

چون $\mathscr{F}$ کراندار است عدد مثبت M وجود دارد به‌طوری که

$$\rho(f, \circ)=\|f\|\leqslant M \qquad (f\in\mathscr{F}).$$

چون $\mathscr{F}$ همپیوسته است عدد مثبت δ وجود دارد به‌طوری که

$$|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{۱۵} \qquad (|x-x'|<\delta;\ f\in\mathscr{F}). \tag{۱}$$

$[a, b]$ را به‌وسیلهٔ نقاط $a=x_\circ<x_۱<\cdots<x_n=b$ تقسیم می‌کنیم به‌طوری که

$$x_{j+۱}-x_j<\delta \qquad (j=\circ, ۱, \ldots, n-۱).$$

روی محور yها $[-M, M]$ را نیز با نقاط $-M=y_\circ<y_۱<\cdots<y_m=M$، تقسیم می‌کنیم به‌طوری که

$$y_{k+۱}-y_k<\frac{\varepsilon}{۱۵}(k=\circ, ۱, \cdots, m-۱).$$

بنابراین مستطیل $a\leqslant x\leqslant b$، $-M\leqslant y\leqslant M$، به‌زیر مستطیلهایی که قاعده‌شان کوچکتر از δ و ارتفاعشان کوچکتر از $\varepsilon/۱۵$ است تقسیم می‌شود. برای هر $f\in\mathscr{F}$، تابع $g\in C[a, b]$ را به‌طریق زیر تعریف می‌کنیم: به ازای هر $x_j(j=\circ, ۱, \ldots, n)$ فرض می‌کنیم $g(x_j)=y_{k(j)}$، که در آن $k(j)$ طوری انتخاب شده است که

$$|g(x_j)-f(x_j)|=|y_{k(j)}-f(x_j)|<\frac{\varepsilon}{۱۵}. \tag{۲}$$

به‌خاطر روشی که درانتخاب yها به‌کار بردیم این‌کار امکانپذیر است. سپس g را طوری تعریف می‌کنیم که نمودار آن متشکل از پاره‌خطهای مستقیمی باشد که نقاط $\langle x_\circ, g(x_\circ)\rangle$، $\langle x_۱, g(x_۱)\rangle$، …، $\langle x_n, g(x_n)\rangle$ را متوالیاً به‌هم وصل کند. دراین صورت برای $j=\circ, ۱, \ldots, n-۱$ داریم

$$|g(x_{j+۱})-g(x_j)|\leqslant|g(x_{j+۱})-f(x_{j+۱})|+|f(x_{j+۱})$$
$$-f(x_j)|+|f(x_j)-g(x_j)|.$$

و درنتیجه، بنابر (۱) و (۲)

$$|g(x_{j+۱})-g(x_j)|<\frac{\varepsilon}{۱۵}+\frac{\varepsilon}{۱۵}+\frac{\varepsilon}{۱۵}=\frac{\varepsilon}{۵}.$$

چون تحدید g به $[x_j, x_{j+۱}]$ خطی است، بی‌درنگ نتیجه می‌گیریم که

$$|g(x)-g(x_j)|<\frac{\varepsilon}{۵} \quad (x_j\leqslant x\leqslant x_{j+۱};j=\circ, ۱, \ldots, n-۱). \tag{۳}$$

اکنون برای هر $x \in [a,b]$، j را طوری انتخاب می‌کنیم که $x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}$. در این صورت

$$|g(x)-f(x)| \leqslant |g(x)-g(x_j)|+|g(x_j)-f(x_j)|+|f(x_j)-f(x)|.$$

در نتیجه، بنا بر (۳)، (۲) و (۱)

$$|g(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{15}+\frac{\varepsilon}{15}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

در نتیجه برای هر $f \in \mathscr{F}$، نشان داده‌ایم که gیی وجود دارد به‌طوری که

$$\|g-f\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

گویهای باز $B[g;\varepsilon/3]$ دارای قطری نابزرگتر از $2\varepsilon/3$ هستند و $\mathscr{F}$ زیرمجموعهٔ اجتماع آنها است. ولی تعداد توابع متمایز g متناهی است؛ زیرا هر g با مقدارهایش در $n+1$ نقطهٔ $x_0, x_1, \dots, x_n$ مشخص می‌شود. از آن گذشته برای هر j، $g(x_j)$ باید یکی از $m+1$ مقدار $y_0, y_1, \dots, y_m$ باشد. درنتیجه، حداکثر $(m+1)^{n+1}$ تابع g وجود دارد. بنابراین تعداد گویهای باز $B[g;\varepsilon/3]$ متناهی است، قطر هر کدام هم از ε کمتر است، و اجتماع آنها هم شامل $\mathscr{F}$ است. این برهان را کامل می‌کند.

اکنون به نتیجه‌ای می‌رسیم که درجستجوی آن بوده‌ایم.

۱۰.۴.۴. نتیجه. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $C[a, b]$ باشد، و اگر توابع دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک زیرمجموعهٔ کراندار همپیوسته از $C[a, b]$ باشند، آنگاه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنباله‌ای است که به تابعی در $C[a, b]$ همگرای یکنواخت است.

برهان: اگر $\mathscr{F}$ مجموعهٔ توابع دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد، یعنی، $\mathscr{F}=\{f_1, f_2, \dots\}$، آنگاه، بنا بر ۱۰.۴.۳، $\mathscr{F}$ کراندار کلی است. درنتیجه، بنا بر ۶.۳.۸، $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای یک زیردنبالهٔ کوشی $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (نسبت به متریک $C[a, b]$) است. چون $C[a, b]$ کامل است (۱۰.۱.۵)، پس دنبالهٔ $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ به عنصری از $C[a, b]$ مانند f همگراست. از ۱۰.۱.۴ نتیجه می‌شود که $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت به f است. به این ترتیب نتیجهٔ موردنظر ثابت می‌شود.

تمرینهای ۱۰.۴

۱. ثابت کنید که خانوادهٔ $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ یک زیرمجموعهٔ همپیوسته از $C[0,\pi]$ نیست.

۲. اگر $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالهٔ دلخواهی از توابع در $[0,1]$ باشد، وعدد مثبت M وجود داشته باشد به‌طوری که

$$|\varphi_n(x)| \leqslant M \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1;\ n \in I)$$

و

$$|\varphi_n'(x)| \leqslant M \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1;\ n \in I)$$

ثابت کنید که $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنبالهٔ همگرای یکنواخت است.

۰۳ اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته در $[0,1]$ باشد که در $[0,1]$ همگرای یکنواخت است، ثابت کنید که خانوادهٔ توابع f_n همپیوسته است.

۰۴ مثالی از یك دنبالهٔ توابع $f_n \in C[a,b]$ ذکر کنید که تشکیل یك خانوادهٔ همپیوسته می‌دهد ولی $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای هیچ زیردنبالهٔ همگرای یکنواخت نیست.

۵۰۱۰ تمرینهای اضافی و ملاحظات برای فصلهای ۹ و ۱۰

I. قضیهٔ استون‌ـوایرشتراس و یك‌کاربرد آن

۰۱۰۵۰۱۰ وایرشتراس قضیهٔ خودش، یعنی ۰۱۰۲۰۱۰، را در سال ۱۸۸۵ به‌اثبات رساند. برهانی که ارائه کردیم برنشتاین درسال ۱۹۱۲ منتشر کرد. درسال ۱۹۳۷ م. ه. استون تعمیم واقعاً قابل‌توجهی از قضیهٔ وایرشتراس ارائه کرد. در این نتیجه، به‌جای بازهٔ $[a,b]$، یك فضای فشردهٔ دلخواه موردنظر است. ازاین گذشته، به‌جای مجموعهٔ چندجمله‌ایها یك جبر دلخواه از توابع پیوسته که شامل توابع ثابت باشد و نقاط را جدا سازد به‌کار می‌رود. هم‌اکنون مفاهیم «جبر» و «جداسازی نقاط» را تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم E یك مجموعهٔ دلخواه و F خانواده‌ای از توابع حقیقی در E باشد، اگر F تحت عملهای جمع، ضرب و ضرب درعددهای ثابت بسته باشد F یك جبر نامیده می‌شود. یعنی، F یك‌جبر است هر گاه

$f, g \in F$ ایجاب کند $f+g \in F$ و $fg \in F$

$f \in F$، $c \in R$ ایجاب کند $cf \in F$.

می‌گوییم که‌خانوادهٔ‌توابع‌حقیقی G در E نقاط E را جدامی‌سازد درصورتی که اگر x و y نقاط متمایز E باشند، تابع $g \in G$ وجود داشته باشد به‌طوری که $g(x) \neq g(y)$.

۰۲۰۵۰۱۰ اگر M یك فضای متریك فشرده باشد، مجموعهٔ همهٔ توابع حقیقی پیوسته در M را با $C(M)$ نشان می‌دهیم. با توجه به‌تعریفهای

$$\|f\| = \max_{x \in M} |f(x)| \qquad (f \in C(M))$$

و

$$\rho(f, g) = \|f - g\| \qquad (f, g \in C(M)),$$

ρ یك متریك برای $C(M)$ است. این مطلب را می‌توان دقیقاً به‌همان‌طریقی که درحالت $M=[a, b]$ دربخش ۱۰.۱۵ بحث کردیم نشان‌داد. ازاین گذشته، دراینجاهم‌مانند $C[a,b]$، همگرایی نسبت به‌متریك $C(M)$، همگرایی یکنواخت در M است.

تمرین. فرض کنیدکه M یك فضای متریك فشرده باشد وفرض‌کنید $A\subseteq C(M)$. اگر A یك جبر باشد. ثابت‌کنیدکه $\overline{A}$ (بستار A در M) هم یك جبر است. (این مطلب درقضیهٔ استون‌ـ‌وایرشتراس حائزاهمیت است.)

۱۰.۵.۳. اکنون یکی از صورتهای قضیهٔ استون‌ـ‌وایرشتراس را ذکر می‌کنیم.

قضیه. اگر M یك فضای متریك فشرده باشد و اگر A زیرمجموعه‌ای از $C(M)$ باشد به‌طوری‌که

(۱) A یك‌جبر باشد،
(۲) A نقاط M را جدا سازد،
(۳) A شامل توابع ثابت باشد،

آنگاه $\overline{A}=C(M)$. یعنی A در $C(M)$ چگال است.

اکنون مختصراً برهان قضیهٔ استون‌ـ‌وایرشتراس را به‌صورت دنباله‌ای از لمها، که بعضی ازآنها با خلاصه‌ای از برهان نیز همراه هستند، ذکر می‌کنیم.

تمرین: برهان لمهای زیر را به تفصیل بیان‌کنید.

فرض می‌کنیم‌که M فشرده است و A زیرمجموعه‌ای است از $C(M)$، به‌طوری‌که شرطهای (۱)، (۲) و (۳) برقرار باشند.

لم ۱. اگر $f\in\overline{A}$، آنگاه $|f|\in\overline{A}$.

خلاصهٔ برهان: اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، یك‌چندجمله‌ای P وجود دارد به‌طوری‌که

$$\Big|\,|x|-P(x)\,\Big|<\varepsilon \qquad (-\|f\|\leqslant x\leqslant\|f\|).$$

درنتیجه

$$\Big||f(t)|-P[f(t)]\Big|<\varepsilon \qquad (t\in M).$$

اما $P\circ f\in\overline{A}$. درنتیجه $|f|\in\overline{A}$.

لم ۲. اگر $f, g\in\overline{A}$، آنگاه $\max(f, g)\in\overline{A}$ و $\min(f, g)\in\overline{A}$.

لم۳. اگر $x_1, x_2 \in M$ و $x_1 \neq x_2$، آنگاه تابع $f \in \bar{A}$ وجود دارد به‌طوری که

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \qquad (x \in M),$$

$$f(x_1) = 1,$$

برای همهٔ xهای گوی بازی حول x_2، $f(x) = 0$.

خلاصهٔ برهان: بنابر فرض (۲)، تابع $P \in A$ وجود دارد به‌طوری که $P(x_1) \neq P(x_2)$. اگر

$$\Phi(x) = \frac{P(x) - P(x_2)}{P(x_1) - P(x_2)} \qquad (x \in M).$$

آنگاه $\Phi(x_1) = 1$، و برای هر x در گوی بازی حول x_2، $\Phi(x) < 1/2$. فرض کنیم

$$\Psi(x) = 2\max\left[\Phi(x) - \frac{1}{2}, 0\right] \qquad (x \in M),$$

و

$$f(x) = \min[\Psi(x), 1] \qquad (x \in M).$$

آنگاه $f \in \bar{A}$ و f دارای همهٔ ویژگیهای موردنظر است.

لم۴. فرض کنیم K یك زیرمجموعهٔ سرهٔ فشردهٔ M است، و $x_1 \in M - K$. آنگاه تابع $f \in \bar{A}$ وجود دارد به‌طوری که

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \qquad (x \in M),$$

$$f(x_1) = 1,$$

$$f(x) = 0 \qquad (x \in K).$$

خلاصهٔ برهان: لم۳، قضیهٔ ۶.۵.۷، و لم۲.

لم۵. فرض کنیم K_1 و K_2 دو زیرمجموعهٔ فشردهٔ متمایز M باشند، آنگاه تابع $f \in \bar{A}$ وجود دارد به‌طوری که

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \qquad (x \in M),$$

$$f(x) = 1 \qquad (x \in K_1),$$

$$f(x) = 0 \qquad (x \in K_2).$$

خلاصهٔ برهان: برای هر $x_1 \in K_1$ تابع $F \in \bar{A}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \qquad (x \in M),$$

$$F(x) = 0 \qquad (x \in K_2),$$

برای همهٔ xهای گوی بازی حول x_1 مانند B، $F(x) > 1/2$.

اگر

$$\Phi(x) = 2\min\left[F(x), \frac{1}{2}\right] \qquad (x \in M),$$

آنگاه

$$0 \leqslant \Phi(x) \leqslant 1 \qquad (x \in M),$$

$$\Phi(x) = 0 \qquad (x \in K_2),$$

$$\Phi(x) = 1 \qquad (x \in B).$$

اکنون قضیهٔ هاینه-بورل و لم۲ را به‌کار برید.

سرانجام به‌قسمت نهایی برهان قضیه می‌رسیم.

لم ۶.۱ اگر $f \in C(M)$، آنگاه $f \in \bar{A}$.

خلاصهٔ برهان: می‌توان فرض کرد که f ثابت نیست. بنابراین $g = f + \|f\|$ یك تابع نامنفی است که متحداً صفر نیست. اگر $h = g/\|g\|$، آنگاه برای هر x، $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$. کافی است نشان‌دهیم که $h \in \bar{A}$. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، $n \in I$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $1/n < \varepsilon$. برای $k = 0, 1, \dots, n-1$ فرض می‌کنیم،

$$E_k = \left\{x \in M : h(x) \leqslant \frac{k}{n}\right\}, \qquad F_k = \left\{x \in M : h(x) \geqslant \frac{k+1}{n}\right\}.$$

بنابراین تابع $f_k \in \bar{A}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$0 \leqslant f_k(x) \leqslant 1 \qquad (x \in M),$$

$$f_k(x) = 0 \qquad (x \in E_k),$$

$$f_k(x) = 1 \qquad (x \in F_k).$$

اگر

$$P(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) \qquad (x \in M),$$

آنگاه $P \in \bar{A}$ و

$$|h(x) - P(x)| < \frac{1}{n} \qquad (x \in M).$$

در نتیجه $\|h - P\| < \varepsilon$. پس $h \in \bar{A}$.

۴.۵.۱۰. در بخش ۳.۱۰ تذکر دادیم که برای اثبات وجود (و نه یکتایی) جواب (۱) و (۲) در آن بخش، شرط لیپشیتس لازم نیست. اکنون این مطلب را به‌عنوان یك قضیه ذکر می‌کنیم و خلاصه‌ای از برهان آن‌را (که قضایای استون-وایرشتراس و آرزلا به آن مربوط می‌شوند) می‌آوریم. ابتدا به‌بیان یك لم می‌پردازیم.

لم. اگر

$$D = \{\langle x, y\rangle : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}.$$

آنگاه تحت مفروضات قضیهٔ بخش ۳.۱۰، جوابی مانند φ برای معادلهٔ

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]dt$$

وجود دارد که در تمام بازهٔ $[x_0 - h, x_0 + h]$ تعریف شده است، و در آن

$$h = \min\left(a, \frac{b}{k}\right)$$

و k یك کران بالای دلخواه $\{|f(x, y)| : \langle x, y\rangle \in D\}$ است.

اهمیت این لم در این است که h فقط به D و کران تابع f بستگی دارد، ولی به M در شرط لیپشیتس بستگی ندارد.

تمرین. لم بالا را ثابت کنید وجزئیات برهان قضیهٔ زیر را بنویسید.

قضیه: D را که در بالا تعریف کردیم در نظر می‌گیریم. اگر f در D پیوسته باشد، آنگاه یك δی مثبت و یك تابع φ وجود دارد به‌طوری که

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]dt \qquad (|x - x_0| \leqslant \delta). \qquad (*)$$

(در نتیجه $y = \varphi(x)$ یك جواب معادلهٔ $dy/dx = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ است.)

خلاصهٔ برهان: دنبالهٔ $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ از چندجمله‌ایها برحسب x و y وجود دارد به‌طوری که $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ در D همگرای یکنواخت به f است.

kی مثبتی وجود دارد به‌طوری که

$$|f(x, y)| \leqslant k \qquad (\langle x, y\rangle \in D)$$

و

$$|P_n(x, y)| \leqslant k \qquad (\langle x, y\rangle \in D; n=۱, ۲, \ldots).$$

هریك از P_nها در D درشرط لیپشیتس صدق می‌کنند. درنتیجه φ_nی وجود دارد به‌طوری که

$$\varphi_n(x) = y_\circ + \int_{x_\circ}^{x} P_n[t, \varphi_n(t)]dt \qquad (|x - x_\circ| \leqslant \delta)$$

که در آن $\delta = \min(a, b/k)$. این φ_nها یك خانوادهٔ همپیوسته در $[x_\circ - \delta, x_\circ + \delta]$ تشکیل می‌دهند، به‌طوری که یك زیردنبالهٔ $\{\varphi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[x_\circ - \delta, x_\circ + \delta]$ همگرای یکنواخت به‌تابع φ است. این φ یك جواب معادلهٔ (*) است.

II. قضیهٔ توسیع تیتسه[1]

این قضیه دربارهٔ توسیع‌پذیری یك تابع پیوسته است.

۵.۵.۱۰ قضیه. اگر F یك زیرمجموعهٔ بستهٔ فضای متریك M باشد، و اگر f یك تابع حقیقی کراندار پیوسته در F باشد. آنگاه یك تابع حقیقی پیوستهٔ φ در تمام M وجود دارد به‌طوری که

$$\varphi(x) = f(x) \qquad (x \in F),$$

و

$$\underset{x \in M}{\text{l.u.b.}} |\varphi(x)| = \underset{x \in F}{\text{l.u.b.}} |f(x)|.$$

ابتدا به‌لم زیر نیاز داریم:

لم. فرض کنیم F یك زیرمجموعهٔ بستهٔ فضای متریك M باشد، و فرض کنیم که g یك تابع حقیقی کراندار پیوسته در F باشد. اگر

$$\theta = \underset{x \in F}{\text{l.u.b.}} |g(x)|,$$

آنگاه یك تابع حقیقی پیوستهٔ h در M وجود دارد به‌طوری که

1. Tietze

$$|h(x)| \leqslant \frac{\theta}{3} \qquad (x \in M)$$

و

$$|g(x)-h(x)| \leqslant \frac{2\theta}{3} \qquad (x \in F).$$

شروع برهان: فرض می‌کنیم

$$A=\left\{x \in F: -\theta \leqslant g(x) \leqslant -\frac{\theta}{3}\right\},$$

$$B=\left\{x \in F: -\frac{\theta}{3} < g(x) < \frac{\theta}{3}\right\},$$

$$C=\left\{x \in F: \frac{\theta}{3} \leqslant g(x) \leqslant \theta\right\},$$

و فرض می‌کنیم که

$$h(x)=\frac{\theta}{3} \cdot \frac{\rho(x, A)-\rho(x, C)}{\rho(x, A)+\rho(x, C)} \qquad (x \in M),$$

که در آن $\rho(x, A)$ فاصلهٔ نقطهٔ x تا مجموعهٔ بستهٔ A است.

تمرین. برهان را تمام‌کنید.

خلاصهٔ برهان قضیه: کافی است f ی را درنظر بگیریم که

$$\underset{x \in F}{\mathrm{l.u.b.}}\, f(x)=1, \qquad \underset{x \in F}{\mathrm{g.l.b.}}\, f(x)=-1.$$

دنباله‌ای از توابع پیوسته در M مانند $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ را به‌طریق زیر تعریف می‌کنیم: f_1 راهمان h در لم قبل می‌گیریم‌وقتی که f به‌جای g قرار گیرد. اگر f_1، f_2، ...، f_{n-1} تعریف‌شده‌باشند f_n راهمان h درلم قبل می‌گیریم وقتی که $g=f-(f_1+\dots+f_{n-1})$ گرفته شده باشد. آنگاه برای هر $n=1, 2, \dots$، داریم

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad (x \in M)$$

و

$$|f(x)-[f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)]| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad (x \in F).$$

بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ در M همگرای یکنواخت به‌تابعی مانند φ است.

تمرین. جزئیات را تکمیل و برهان را کامل کنید.

۶.۵.۱۰. نتیجهٔ زیر، لم اوریزون[1] نامیده می‌شود.

تمرین. اگر A و B زیرمجموعه‌های بستهٔ مجزای فضای متریك M باشند، ثابت کنید که تابع پیوستهٔ f در M وجود دارد به‌طوری که

$$\begin{aligned} 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \qquad & (x \in M), \\ f(x) = 0 \qquad & (x \in A), \\ f(x) = 1 \qquad & (x \in B). \end{aligned}$$

III. تمرینهای متفرقه

۱. اگر

$$f_n(x) = x^n(1-x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1\,;\, n \in I),$$

$$g_n(x) = x^n(1-x^n) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1\,;\, n \in I).$$

آیا $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0\,,1]$ همگرای یکنواخت است؟ $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ چطور؟

۲. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $C[0\,,1]$ باشد به‌طوری که $\lim_{n\to\infty} f_n(0)$ وجود داشته باشد، فرض کنید برای هر $g \in C[0\,,1]$ که $g(0)=0$، دنبالهٔ $\{f_n g\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0\,,1]$ همگرای یکنواخت باشد.

آیا $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ هم باید در $[0\,,1]$ همگرای یکنواخت باشد؟

۳. اگر

$$f_n(x) = (1+x^n)^{1/n} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\,;\, n \in I)$$

که هر کدام از f_nها مشتقپذیر هستند. نشان‌دهید که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرای یکنواخت به‌تابعی است که درنقطه‌ای از $(0\,,2)$ دارای مشتق نیست.

۴. اگر r_1، r_2، ... شمارشی از اعداد گویای بازهٔ $[0\,,1]$ باشد، فرض کنید برای $n = 1, 2, \ldots$

1. Urysohn

$$t_n(x)=0 \qquad (0\leqslant x<r_n),$$

$$t_n(x)=\frac{1}{n^2} \qquad (r_n\leqslant x\leqslant 1)$$

و تابع f را با ضابطهٔ زیر تعریف کنید

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} t_n(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

ثابت کنید که f درهر نقطهٔ گنگ پیوسته است. (۷.۹.۶ را ببینید.)

۵. فرض کنید $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ همگرای یکنواخت از توابع‌حقیقی در زیرمجموعهٔ E از R^1 باشد به‌طوری که عدد $A>0$ وجود داشته باشد که

$$f_n(x)\leqslant A \qquad (x\in E;\, n\in I),$$

اگر برای $x\in E$، $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$، ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{l.u.b.}_{x\in E} f_n(x)\right]=\operatorname{l.u.b.}_{x\in E} f(x).$$

۶. ثابت کنید که

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots=\frac{1}{4\sqrt{2}}[\pi+2\log(1+\sqrt{2})].$$

۷. ثابت کنید که برای $0\leqslant x\leqslant 1$

$$\log(x+\sqrt{x^2+1})=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots.$$

۸. اگر

$$f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad (x\in R^1;\, n\in I).$$

ثابت کنید که در هر بازهٔ بستهٔ کراندار در R^1 همگرایی f_n که در زیر می‌آید یکنواخت است

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=e^x.$$

۹. اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ غیرصعودی از اعداد مثبت باشد، و اگر

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$$

در $[-1, 1]$ همگرای یکنواخت باشد، ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.
(با این روش شروع کنید: اگر برای $-1 \leqslant x \leqslant 1$ و $n \in I$،

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$$

و اگر $t_n = s_{2n} - s_n$، نشان دهید که

$$t_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) \geqslant na_n \sin\frac{\pi}{4}.$$

۱۰. نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sin nx}{n}$$

در $[-1, 1]$ همگرای یکنواخت است.

۱۱. اگر $f \in C[a, b]$، و اگر

$$\int_0^1 x^n f(x)dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

نشان دهید که برای هر $x \in [a, b]$، $f(x) = 0$.

۱۲. ثابت کنید که $C[0, 1]$ دارای یك زیرمجموعهٔ چگال شماراست.

۱۳. ثابت کنید که $C[a, b]$ همبند است.

۱۴. فرض کنید که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ همگرا در $C[0, 1]$ است. اگر برای هر $x \in [0, 1]$،

$$h(x) = \text{l.u.b.}\ \{f_1(x), f_2(x), \ldots\},$$

ثابت کنید که $h \in C[0, 1]$. نشان دهید که اگر تنها همگرایی نقطه‌ای را مفروض بگیریم ممکن است این نتیجه برقرار نباشد.

۱۵. $T: C[0, 1] \to C[0, 1]$ را به روش زیر تعریف کنید: برای $\varphi \in C[0, 1]$ فرض کنید $T\varphi = \psi$ که در آن

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt \qquad [0 \leqslant x \leqslant 1].$$

نشان‌دهید که T یك انقباض نیست ولی $T^{2}=T\circ T$ یك انقباض است. توجه‌کنید که T دارای یك‌نقطهٔ ثابت است.

۱۶• فرض‌کنید که $T: M \to M$، که در آن M یك فضای متریك‌کامل است. همچنین فرض کنید‌که عدد $n\in I$ وجود دارد به‌طوری‌که T^{n} یك انقباض باشد. ثابت‌کنید‌که T دارای یك نقطهٔ ثابت است.

۱۱

انتگرال لبگ[1]

راههای بسیاری برای بحث در انتگرال لبگ وجود دارد. راهی که ما عرضه می‌کنیم به‌هیچ‌وجه جالبترین نیست، ولی احتمالا آسانترین آنها است.

به‌کارگرفتن مفهوم اندازه، انتگرال لبگ را از انتگرال ریمان متمایز می‌سازد. درحالی که تعریف انتگرال ریمان متضمن تقسیم $[a, b]$ به‌بازه‌های بسته است. انتگرال لبگ با تقسیم $[a, b]$ با مجموعه‌های عمومیتری سروکار دارد که مجموعه‌های اندازه‌پذیر نامیده می‌شوند.

ما نخست راه را برای تعریف مجموعهٔ اندازه‌پذیر باز می‌کنیم.

۱۰۱۱ طول مجموعه‌های باز و مجموعه‌های بسته

۰۱۰۱۰۱۱ اگر $[a, b]$ یك مجموعهٔ بستهٔ کراندار در R^1، و G یك زیرمجموعهٔ باز (فضای متریك) $[a, b]$ باشد، آنگاه بنا بر ۲۰۱۰۶، G اشتراك $[a, b]$ با یك زیرمجموعهٔ باز R^1 است. سپس از ۶۰۴۰۵ نتیجه می‌شود که G اجتماع تعدادی متناهی یا شمارا از بازه‌های I_n دوبه‌دو مجزا* ست؛ که هر I_n در $[a, b]$ باز است. (به‌خاطر داشته باشید

---

1. Lebesgue

* این‌مطلب که I_nها دوبه‌دو مجزا هستند به‌این معنی است که هیچ دو I_nای نقطهٔ مشترك ندارند.

که بازه‌هایی به‌صورت $[a,c)$ یا $(c,b]$ و همچنین (c,d) در $[a,b]$ باز هستند.) به‌هرحال اگر G یك زیرمجموعهٔ باز ناتهی $[a, b]$ باشد، آنگاه $G=\bigcup_n I_n$، که هر I_n یك بازه‌است و هیچ دو I_n نقطهٔ مشترك ندارند. با این مطلب می‌توانیم $|G|$، یعنی طول زیرمجموعهٔ باز G از $[a, b]$ را تعریف کنیم.

تعریف. اگر G یك زیرمجموعهٔ باز $[a, b]$ باشد و $G=\bigcup_n I_n$، آنگاه $|G|$، یعنی طول G با رابطهٔ

$$|G|=\sum_n |I_n|$$

تعریف می‌شود، که در آن $|I_n|$ طول بازهٔ I_n است.

به‌این‌ترتیب $|G|$ برابر مجموع طولهای بازه‌های تشکیل‌دهندهٔ G است.

در یکی از تمرینها به‌خواننده واگذار می‌کنیم نشان‌دهد که اگر G_1 و G_2 زیرمجموعه‌های باز $[a, b]$ باشند به‌طوری که $G_1\subseteq G_2$، آنگاه $|G_1|\leqslant|G_2|$. سپس نتیجه می‌شود که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ باز G از $[a, b]$، $|G|\leqslant b-a$.

بررسی مطلب زیر هم آسان است.

$$|I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n|\leqslant|I_1|+|I_2|+\cdots+|I_n|$$

که در آن I_jها بازه هستند. (تمرین ۲ از این بخش را ملاحظه کنید.) اکنون این نتیجه را تعمیم می‌دهیم.

۲۰۱۰۱۱. قضیه. اگر G_1، G_2، ... زیرمجموعه‌های باز $[a, b]$ باشند، آنگاه*

$$\left|\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|G_n|. \qquad (1)$$

برهان: به‌ازای هر $n\in I$، داریم $G_n=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n$. اگر $G=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$، آنگاه (بنا بر ۳۰۴۰۵) G باز است و بنابراین $G=\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ که در آن J_nها بازه‌های دوبه‌دو مجزا هستند. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد $N\in I$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\sum_{n=N+1}^{\infty}|J_n|<\varepsilon$. در این صورت $|G|<\sum_{n=1}^{N}|J_n|+\varepsilon$. اکنون به‌ازای هر $n=1, 2,\ldots,N$ فرض می‌کنیم K_n

---

* البته ممکن است که $\sum_{n=1}^{\infty}|G_n|=\infty$.

بازه‌ای باز باشد به‌طوری که $\overline{K}_n \subseteq J_n$ و $|J_n|<|K_n|+\varepsilon/N$. بنابراین

$$|G|<\sum_{n=1}^{N}|K_n|+2\varepsilon. \qquad (2)$$

از این گذشته $\bigcup_{n=1}^{N}\overline{K}_n$ کراندار و (بنابر ۷.۵.۵) بسته، و درنتیجه‌فشرده‌است. چون $\bigcup_{n=1}^{N}\overline{K}_n$ زیرمجموعهٔ $\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ است، تعدادی متناهی از I_k^nها، مثلا

$$I_{k_1}^{n_1},\ I_{k_2}^{n_2},\ \dots,\ I_{k_r}^{n_r}$$

وجود دارند به‌طوری که

$$\bigcup_{n=1}^{N}\overline{K}_n\subseteq I_{k_1}^{n_1}\cup\cdots\cup I_{k_r}^{n_r}.$$

درنتیجه

$$\bigcup_{n=1}^{N}K_n\subseteq I_{k_1}^{n_1}\cup\cdots\cup I_{k_r}^{n_r}.$$

چون K_nها مجزا هستند (چرا؟) داریم

$$\sum_{n=1}^{N}|K_n|\leqslant|I_{k_1}^{n_1}\cup\cdots\cup I_{k_r}^{n_r}|\leqslant|I_{k_1}^{n_1}|+\cdots+|I_{k_r}^{n_r}|$$

و درنتیجه

$$\sum_{n=1}^{N}|K_n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|G_n|. \qquad (3)$$

از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که $|G|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|G_n|+2\varepsilon$. چون ε دلخواه بود پس $|G|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|G_n|$، که دقیقاً همان نابرابری (۱) است.

قضیهٔ بعدی ما را قادر می‌سازد که طول مجموعهٔ بسته را تعریف کنیم.

۳.۱.۱۱. قضیه. اگر G_1 و G_2 دو زیرمجموعهٔ باز $[a,b]$ باشند، آنگاه

$$|G_1|+|G_2|=|G_1\cup G_2|+|G_1\cap G_2|. \qquad (1)$$

برهان: ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که G_1 و G_2 اجتماع تعدادی متناهی از

بازه‌ها باشند. آنگاه $G_1 \bigcup G_2$ و $G_1 \bigcap G_2$ هم اجتماع تعدادی متناهی از بازه‌ها هستند. بنابراین به‌آسانی می‌توان‌دیدکه توابع مشخصهٔ این مجموعه‌ها، یعنی

$$\chi_{G_1}, \chi_{G_2}, \chi_{G_1 \cup G_2}, \chi_{G_1 \cap G_2}$$

در $[a, b]$ انتگرالپذیر ریمان هستند. از این گذشته، به‌ازای هر $x \in [a, b]$

$$\chi_{G_1}(x) + \chi_{G_2}(x) = \chi_{G_1 \cup G_2}(x) + \chi_{G_1 \cap G_2}(x). \qquad (۲)$$

درواقع اگر x در G_1 و G_2 باشد، آنگاه طرفین برابری (۲) با ۲ برابر می‌شوند. اگر x درهیچ کدام از G_1 و G_2 نباشد طرفین (۲) برابر ۰ می‌شوند. سرانجام اگر x فقط در یکی از G_1 و G_2 باشد طرفین (۲) برابر ۱ هستند. اکنون اگر انتگرال (۲) را از a تا b حساب کنیم، (۱) را به‌دست می‌آوریم. درنتیجه هنگامی که G_1 و G_2 اجتماع تعدادی متناهی از بازه‌ها هستند (۱) برقرار است.

اکنون برای حالت کلی، داریم $G_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ و $G_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد $N \in I$ را طوری انتخاب می کنیم که

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon, \qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} |J_n| < \varepsilon.$$

اگر

$$G_1^* = \bigcup_{n=1}^{N} I_n,\ G_1^{**} = \bigcup_{n=N+1}^{\infty} I_n,\ G_2^* = \bigcup_{n=1}^{N} J_n,\ G_2^{**} = \bigcup_{n=N+1}^{\infty} J_n.$$

آنگاه به‌ازای $i = 1, 2$، $|G_i| = |G_i^*| + |G_i^{**}|$ و $|G_i^{**}| < \varepsilon$. درنتیجه

$$\begin{aligned} |G_1| + |G_2| &= |G_1^*| + |G_1^{**}| + |G_2^*| + |G_2^{**}| \\ &< |G_1^*| + |G_2^*| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

چون G_1^* و G_2^* اجتماع تعدادی متناهی از بازه‌ها هستند، بااستفاده از قسمت اول برهان می‌توان نوشت

$$|G_1| + |G_2| < |G_1^* \bigcup G_2^*| + |G_1^* \bigcap G_2^*| + 2\varepsilon.$$

ولی $G_1^* \bigcup G_2^* \subseteq G_1 \bigcup G_2$ و $G_1^* \bigcap G_2^* \subseteq G_1 \bigcap G_2$. پس

$$|G_1| + |G_2| < |G_1 \bigcup G_2| + |G_1 \bigcap G_2| + 2\varepsilon.$$

چون ε دلخواه بود پس

$$|G_1| + |G_2| \leqslant |G_1 \bigcup G_2| + |G_1 \bigcap G_2|. \qquad (۳)$$

ازطرف دیگر داریم $G_1 \bigcup G_2=(G_1^* \bigcup G_2^*) \bigcup G_1^{**} \bigcup G_2^{**}$، پس، بنابر ۲.۱.۱۱،

$$|G_1 \bigcup G_2| \leqslant |G_1^* \bigcup G_2^*|+2\varepsilon. \qquad (4)$$

به‌همین‌ترتیب $G_1 \bigcap G_2=(G_1^* \bigcup G_1^{**}) \bigcap (G_2^* \bigcup G_2^{**}) \subseteq (G_1^* \bigcap G_2^*) \bigcup G_1^{**} \bigcup G_2^{**}$.
پس

$$|G_1 \bigcap G_2| \leqslant |(G_1^* \bigcap G_2^*) \bigcup G_1^{**} \bigcup G_2^{**}| \leqslant |G_1^* \bigcap G_2^*|+2\varepsilon. \qquad (5)$$

درنتیجه، بااستفادهٔ مجدد از قسمت اول برهان ونابرابریهای (۴) و (۵) داریم

$$\begin{aligned} |G_1|+|G_2| &\geqslant |G_1^*|+|G_2^*|=|G_1^* \bigcup G_2^*|+|G_1^* \bigcap G_2^*| \\ &\geqslant (|G_1 \bigcup G_2|-2\varepsilon)+(|G_1 \bigcap G_2|-2\varepsilon). \end{aligned}$$

چون ε دلخواه بود، پس

$$|G_1|+|G_2| \geqslant |G_1 \bigcup G_2|+|G_1 \bigcap G_2|. \qquad (6)$$

اکنون برابری (۱) از (۳) و (۶) نتیجه می‌شود.

۴.۱.۱۱. اگر F یك زیرمجموعهٔ بستهٔ بازهٔ $[a, b]$ باشد، آنگاه F' (متمم F نسبت به $[a, b]$). بنابر ۹.۵.۵ یك‌زیرمجموعهٔ باز $[a, b]$ است. درنتیجه، اگر G زیرمجموعهٔ باز دلخواهی از $[a,b]$ باشد، آنگاه $G-F=G \bigcap F'$ بنابر ۵.۴.۵، بازاست. بنابراین $|G-F|$ قبلا تعریف شده است. اکنون $|F|$ را به‌طریق زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف. اگر F زیرمجموعهٔ بستهٔ دلخواهی از $[a,b]$ باشد، آنگاه $|F|$، که‌آن را طول F می‌نامیم، به‌صورت

$$|F|=|G|-|G-F| \qquad (1)$$

تعریف می‌شود، که درآن G زیرمجموعهٔ باز دلخواهی از $[a, b]$ است، به طوری‌که $F \subseteq G$.

لازم است نشان‌دهیم که این‌تعریف $|F|$ به‌مجموعهٔ باز Gکه به‌کاررفته است‌بستگی ندارد. یعنی باید نشان‌دهیم که اگر G_1 وG_2 هردو مجموعه‌های باز شامل F باشند، آنگاه

$$|G_1|-|G_1-F|=|G_2|-|G_2-F| \qquad (2)$$

پس $|F|$ را می‌توان باهریك‌ازطرفین (۲) محاسبه‌کرد. اکنون، بنابر ۳.۱.۱۱، (با G_2-F به‌جای G_2) چون $F \subseteq G_1$ و $F \subseteq G_2$، داریم

$$|G_1|+|G_2-F|=|G_1 \bigcup G_2|+|(G_1 \bigcap G_2)-F|.$$

همچنین، بنابر ۳.۱.۱۱

$$|G_1-F|+|G_2|=|G_1\bigcup G_2|+|(G_1\bigcap G_2)-F|.$$

اگر طرفهای چپ دو معادلهٔ اخیر را برابر قرار دهیم،(۲) به‌دست می‌آید. درنتیجه $|F|$ در (۱) به G بستگی ندارد.

به‌ویژه، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ $[a, b]$، مانند F

$$|F|=b-a-|F'|.$$

تمرینهای ۱.۱۱

۰۱ اگر G_1 و G_2 زیرمجموعه‌های باز $[a, b]$ باشند واگر $G_1\subseteq G_2$، ثابت کنید که $|G_1|\leqslant|G_2|$. (راهنمایی: بنویسید $G_1=\bigcup_k I_k$، $G_2=\bigcup_n J_n$. نخست نشان دهید که هر I_k زیرمجموعهٔ یکی‌از J_nها است. سپس تعداد متناهی دلخواهی از I_kها را که در J_n واقع‌اند در یك‌دسته جای دهید.)

۰۲ اگر I_1، ...، I_k زیر بازه‌های باز $[a, b]$ باشند ثابت کنید که

$$|I_1\bigcup\cdots\bigcup I_k|\leqslant|I_1|+\cdots+|I_k|. \qquad (*)$$

در اثبات خود از ۲.۱.۱۱ استفاده نکنید، زیرا که (*) دراثبات آن به‌کار رفته است. (راهنمایی: برای $j=1, \ldots, k$، فرض کنید χ_j تابع مشخصهٔ I_j باشد، و فرض کنید که χ تابع مشخصهٔ $I_1\bigcup\cdots\bigcup I_k$ باشد. نشان دهید که χ، χ_1، ...، χ_k در $\mathcal{R}[a, b]$ هستند و

$$\chi(x)\leqslant\chi_1(x)+\cdots+\chi_k(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

سپس انتگرال بگیرید.)

۰۳ درستی یا نادرستی این گزاره را تحقیق کنید: اگر G یك زیرمجموعهٔ باز $[a, b]$باشد و $|G|=0$ آنگاه $G=\varnothing$.

۰۴ درستی یا نادرستی این گزاره را تحقیق کنید: اگر F یك زیرمجموعهٔ بسته $[a, b]$باشد و $|F|=0$ آنگاه $F=\varnothing$.

۰۵ ثابت کنید که طول مجموعهٔ کانتور، مذکور دربند ۴.۶.۱، صفر است.

۲.۱۱ اندازهٔ داخلی و خارجی، مجموعه‌های اندازه‌پذیر

اکنون اندازهٔ داخلی واندازهٔ خارجی یك‌زیرمجموعهٔ دلخواه $[a, b]$ مانند E را تعریف می‌کنیم.

۱۰۲۰۱۱. تعریف. اگر $E\subseteq[a, b]$. آنگاه $\overline{m}E$، که اندازهٔ خارجی E نامیده می‌شود، به‌صورت

$$\overline{m}E=\text{g.l.b.}\ |G|$$

تعریف‌می‌شود، که‌در آن .g.l.b روی‌تمام مجموعه‌های‌باز G که‌حاوی E هستند گرفته‌می شود.
اندازهٔ داخلی E، یعنی $\underline{m}E$، به‌صورت

$$\underline{m}E=\text{l.u.b.}\ |F|$$

تعریف می‌شود که در آن .l.u.b روی تمام مجموعه‌های بستهٔ F که زیرمجموعهٔ E هستند گرفته می‌شود.

بنا براین $\overline{m}E$ به‌وسیلهٔ مجموعه‌های بازی که E را «احاطه‌می کنند» محاسبه‌می‌شود. از تعریف نتیجه‌می‌شود که هر گاه G باز باشد و $E\subseteq G$، آنگاه $\overline{m}E\leqslant|G|$. به‌همین‌ترتیب، اگر F بسته باشد و $F\subseteq E$، آنگاه $\underline{m}E\geqslant|F|$.

۲۰۲۰۱۱. تعریف. مجموعهٔ $E\subseteq[a, b]$ را اندازه‌پذیر می‌نامیم اگر $\overline{m}E=\underline{m}E$. دراین‌حالت mE یعنی اندازهٔ E را به‌صورت

$$mE=\overline{m}E=\underline{m}E$$

تعریف می‌کنیم بنا براین $\underline{m}E$ و $\overline{m}E$ برای همهٔ زیرمجموعه‌های $[a,b]$ مانند E تعریف شده‌اند، درحالی که mE فقط برای آن E هایی که اندازهٔ داخلی واندازهٔ خارجی آنها برابرند تعریف شده است. به‌زودی نشان خواهیم داد که مجموعهٔ E وجود دارد به‌طوری که $\underline{m}E\neq\overline{m}E$، یعنی، مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر وجود دارد.

اکنون به‌بحث ویژگیهای اندازهٔ داخلی واندازهٔ خارجی می‌پردازیم.

۳۰۲۰۱۱. قضیه. اگر $E\subseteq[a, b]$، آنگاه $\underline{m}E\leqslant\overline{m}E$.

برهان: اگر F مجموعهٔ بستهٔ دلخواهی در E باشد، واگر G مجموعهٔ باز دلخواهی شامل E باشد، آنگاه $F\subseteq E\subseteq G$، وبنابراین $|F|=|G|-|G-F|$. درنتیجه

$$|F|\leqslant|G|.$$

باگرفتن .g.l.b روی همهٔ Gها داریم $|F|\leqslant\overline{m}E$. اکنون با گرفتن .l.u.b روی همهٔ Fهای بسته‌ای که $F\subseteq E$، داریم $\underline{m}E\leqslant\overline{m}E$، واین‌همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴۰۲۰۱۱. قضیه. اگر $E\subseteq[a, b]$، آنگاه

$$\overline{m}E+\underline{m}E'\overset{?}{=}b-a$$

(که در آن $E'=[a,b]-E$).

برهان: اگر G یك مجموعهٔ باز دلخواه شامل E باشد، آنگاه G' بسته است و $G'\subseteq E'$. داریم

$$|G|+\underline{m}E'\geqslant |G|+|G'|.$$

در نتیجه، چون $|G|+|G'|=b-a$، داریم

$$|G|+\underline{m}E'\geqslant b-a.$$

با گرفتن g.l.b. روی همهٔ Gهای باز شامل E خواهیم داشت

$$\overline{m}E+\underline{m}E'\geqslant b-a. \qquad (۱)$$

اکنون اگر F مجموعهٔ بستهٔ دلخواهی باشد که $F\subseteq E'$، داریم $E\subseteq F'$ و بنابراین

$$\overline{m}E+|F|\leqslant |F'|+|F|,$$
$$\overline{m}E+|F|\leqslant b-a,$$
$$\overline{m}E+\underline{m}E'\leqslant b-a. \qquad (۲)$$

قضیه از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

به‌عنوان حاصلی از دوقضیهٔ قبل نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم.

۵.۲.۱۱. نتیجه. فرض کنیم $E\subseteq[a,b]$، آنگاه E اندازه‌پذیر است اگر وفقط اگر

$$\overline{m}E+\overline{m}E'\leqslant b-a. \qquad (۱)$$

برهان: درهر مجموعهٔ E (بنابر ۴.۲.۱۱، با تعویض جای E و E') داریم

$$\overline{m}E'+\underline{m}E=b-a. \qquad (۲)$$

اکنون، اگر E اندازه‌پذیر باشد، $\underline{m}E=\overline{m}E$. بنابراین

$$\overline{m}E'+\overline{m}E=b-a,$$

که (۱) ازآن نتیجه می‌شود.

به‌عکس، فرض می‌کنیم برای مجموعه‌ای مانند $E\subseteq[a,b]$، (۱) برقرار باشد، چون(۲) هم برای E برقراراست باتفریق (۲) از (۱) نتیجه می گیریم $\overline{m}E-\underline{m}E\leqslant 0$. از این‌مطلب و ۳.۲.۱۱، ثابت می‌شود که $\overline{m}E=\underline{m}E$. درنتیجه، E اندازه‌پذیر است و برهان کامل می‌شود.

ضابطهٔ زیربرای اندازه‌پذیری راگاهی به‌عنوان تعریف اندازه‌پذیری به‌کارمی‌برند.

۶.۲.۱۱. قضیه. زیرمجموعه‌ای از $[a, b]$، مانند E، اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر ε مثبت مجموعه‌هـای باز مانند G_1 و G_2 وجود داشته باشند به طوری کـه $G_1 \supseteq E$ و $G_2 \supseteq E'$ و $|G_1 \cap G_2| < \varepsilon$.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم E اندازه‌پذیر است، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد مجموعه‌هـای بازی مـانند G_1 و G_2 وجـود دارند به‌طوری که $G_1 \supseteq E$ و $G_2 \supseteq E'$ و $|G_1| < \overline{m}E + \varepsilon/2$ و $|G_2| < \overline{m}E' + \varepsilon/2$. (این مطلب نتیجه‌ای از تعریف اندازهٔ خارجی است.) آنگاه، بنا بر ۳.۱.۱۱،

$$|G_1 \cap G_2| = |G_1| + |G_2| - |G_1 \cup G_2|$$

و بنا براین

$$|G_1 \cap G_2| < \overline{m}E + \overline{m}E' + \varepsilon - |G_1 \cup G_2|$$

ولی چون $G_1 \supseteq E$ و $G_2 \supseteq E'$، داریم $G_1 \cup G_2 = [a, b]$. درنتیجه

$$|G_1 \cap G_2| < \overline{m}E + \overline{m}E' - (b-a) + \varepsilon.$$

چون فرض کرده‌ایم که E اندازه‌پذیر است، بنابر ۵.۲.۱۱

$$|G_1 \cap G_2| < \varepsilon.$$

این نصف قضیه را ثابت می‌کند

به‌عکس، فرض می‌کنیم که $E \subseteq [a,b]$، و برای هر ε مثبت دلخواه، مجموعه‌های بازی مانند G_1 و G_2 وجود داشته باشند به‌طوری که $G_1 \supseteq E$، $G_2 \supseteq E'$ و $|G_1 \cap G_2| < \varepsilon$. داریم

$$\overline{m}E + \overline{m}E' \leqslant |G_1| + |G_2| = |G_1 \cup G_2| + |G_1 \cap G_2|,$$

و بنا بر این

$$\overline{m}E + \overline{m}E' \leqslant b - a + \varepsilon.$$

چون ε دلخواه بود، $\overline{m}E + \overline{m}E' \leqslant b-a$. درنتیجه، بنا بر ۵.۲.۱۱، مجموعهٔ E اندازه‌پذیر است. این مطلب، برهان را کامل می‌کند.

۷.۲.۱۱ نتیجه. اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ بـاشد، آنگاه E' هم اندازه‌پذیر است و

$$mE' = (b-a) - mE. \tag{۱}$$

برهان: چون ضابطهٔ اندازه‌پذیری ۶.۲.۱۱ نسبت به E و متمم آن E' متقارن است، بدیهی است که اندازه‌پذیری E اندازه‌پذیری E' را نتیجه می‌دهد. پس $\overline{m}E = mE$ و

$\underline{m}E' = mE'$، و بنابراین، (۱) از ۴.۲.۱۱ نتیجه می‌شود.

اکنون ثابت می‌کنیم که مجموعه‌های باز و بسته اندازه‌پذیرند.

۸.۲.۱۱. قضیه. اگر G یك زیرمجموعهٔ باز $[a,b]$ باشد، آنگاه G اندازه‌پذیر است و $mG = |G|$ همچنین، اگر F یك زیرمجموعهٔ بستهٔ $[a, b]$ باشد، آنگاه F اندازه‌پذیر است و $mF = |F|$.

برهان: اگر G باز باشد. آشکار است که $\overline{m}G = |G|$. اکنون $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$، که‌در آن J_nها بازه‌هایی هستند که در $[a,b]$ بازند. برای ε مثبت دلخواه می‌توان K_1، ...، K_N را همان‌طور که در برهان ۲.۱.۱۱ دیدیم، تعریف کرد. آنگاه $\bigcup_{n=1}^{N} \overline{K}_n$ بسته و زیرمجموعه‌ای از G است. همچنین، بنابر (۲) از بند ۲.۱.۱۱.

$$\overline{m}G < \left|\bigcup_{n=1}^{N} K_n\right| + ۲\varepsilon.$$

درنتیجه، $\overline{m}G < \underline{m}G + ۲\varepsilon$. چون ε دلخواه بود پس $\overline{m}G \leqslant \underline{m}G$. این نابرابری و ۳.۲.۱۱ ثابت می‌کند که G اندازه‌پذیر است. علاوه‌براین $mG = \overline{m}G = |G|$.

اکنون اگر F زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $[a, b]$ باشد، آنگاه G، متمم F، باز و در نتیجه اندازه‌پذیر است. بنابر ۷.۲.۱۱، F اندازه‌پذیر است و $mF = (b-a) - mG = (b-a) - |G|$. ولی، بنابر تعریف $|F| = (b-a) - |G|$، پس $mF = |F|$، و برهان کامل است.

۹.۲.۱۱. برخواننده است که نشان‌دهد، زیرمجموعهٔ E از $[a,b]$ اندازه‌پذیر است و $mE = ۰$ اگر و تنها اگر E مطابق تعریف ۱.۱.۷ صفر اندازه باشد.

به‌عنوان مثال، مجموعهٔ کانتور K، مذکور در بند ۴.۶.۱، را درنظر می‌گیریم، متمم K (نسبت به $[۰,۱]$) اجتماع بازه‌های بازی‌است که مجموع طولهایشان ۱ است. پس K' باز است و $mK' = |K'| = ۱$. درنتیجه، بنابر ۷.۲.۱۱، K اندازه‌پذیر است و $mK = (۱ - ۰) - mK' = ۰$. این برابری نشان‌می‌دهد که مجموعهٔ کانتور اندازه‌پذیر و صفر اندازه است. (هرچند که K شمارا نیست.)

آشکار است که اگر $mE = ۰$، آنگاه هرزیرمجموعهٔ E اندازه‌پذیر وصفراندازه‌است.

تمرینهای ۲.۱۱

۱. نشان‌دهید که $E \subseteq [a, b]$ اندازه‌پذیر است اگر وتنها اگر به‌ازای هر ε مثبت دلخواه

مجموعهٔ بسته‌ای مانند $F\subseteq E$ ومجموعهٔ بازی مانند $G\supseteq E$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که $|G|-|F|<\varepsilon$.

۲. اگر c و d متعلق به (a, b) باشند و $c<d$، ثابت کنید که $[c, d)$ اندازه‌پذیر است.

۳. اگر $E\subseteq[a, b]$ و $\overline{m}E=0$، ثابت کنید که E اندازه‌پذیر است و $mE=0$.

۴. اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد، ثابت کنید که برای هر زیرمجموعهٔ A مانند $[a, b]$

$$\overline{m}A=\overline{m}(A\cap E)+\overline{m}(A\cap E').$$

(راهنمایی: از ۶.۲.۱۱ استفاده کنید.)

۵. اگر $E\subseteq[a, b]$ و $x\in E'$ و اگر $E\cup\{x\}$ اندازه‌پذیر باشد، ثابت کنید که E اندازه‌پذیر است.

۶. اگر E_1 زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری از $[a, b]$ باشد و اگر $mE_2=0$، ثابت کنید که $E_1\cup E_2$ اندازه‌پذیر است.

۷. اگر $E_1, E_2\subseteq[a, b]$ و $mE_2=0$ و اگر $E_1\cup E_2$ اندازه‌پذیر باشد، ثابت کنید که E_1 اندازه‌پذیر است.

۸. اگر $a<c<b$ و E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از $[a, b]$ باشد، نشان دهید که $E\cap[a, c]$ یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, c]$ است.

۹. ثابت کنید که تابع مشخصهٔ مجموعهٔ کانتور در $\mathcal{R}[0, 1]$ است.

۱۰. اگر $E\subseteq[a, b]$، نشان‌دهید که زیرمجموعه‌ای از E، مانند H، وجود دارد به‌طوری که H از نوع F_σ است و $\underline{m}H=\underline{m}E$.

۳.۱۱ ویژگیهای مجموعه‌های اندازه‌پذیر

دراین‌بخش یکی از چیزهایی‌که نشان خواهیم‌داد این است‌که هم اجتماع و هم اشتراك تعدادی شمارا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر بازهم اندازه‌پذیراست. به‌اولین قضیهٔ زیر برای نشان‌دادن اینکه اجتماع واشتراك دومجموعهٔ اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است نیاز داریم.

۱.۳.۱۱ قضیه. اگر E_1 و E_2 زیرمجموعه‌های $[a, b]$ باشند، آنگاه

$$\overline{m}E_1+\overline{m}E_2\geqslant\overline{m}(E_1\cup E_2)+\overline{m}(E_1\cap E_2), \tag{1}$$

و

$$\underline{m}E_1+\underline{m}E_2\leqslant\underline{m}(E_1\cup E_2)+\underline{m}(E_1\cap E_2). \tag{2}$$

برهان: اگر ε عددمثبت دلخواهی باشد، مجموعه‌های باز G_1 و G_2 را طوری‌انتخاب می‌کنیم که $G_1\supseteq E_1$، $G_2\supseteq E_2$، و

$$mG_1 < \overline{m}E_1 + \frac{\varepsilon}{2},\ mG_2 < \overline{m}E_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

آنگاه

$$\overline{m}E_1 + \overline{m}E_2 + \varepsilon > mG_1 + mG_2 + |G_1| + |G_2|.$$

از این رابطه، بنابر ۳.۱.۱۱، نتیجه می‌گیریم

$$\overline{m}E_1 + \overline{m}E_2 + \varepsilon > |G_1 \bigcup G_2| + |G_1 \bigcap G_2|.$$

ولی $G_1 \bigcup G_2$ و $G_1 \bigcap G_2$ مجموعه‌های بازی‌هستند که به‌ترتیب شامل $E_1 \bigcup E_2$ و $E_1 \bigcap E_2$ هستند. پس

$$\overline{m}E_1 + \overline{m}E_2 + \varepsilon > \overline{m}(E_1 \bigcup E_2) + \overline{m}(E_1 \bigcap E_2).$$

چون ε دلخواه بود (۱) نتیجه می‌شود.

با به‌کار بستن (۱) درمورد E_1' و E_2' داریم

$$\overline{m}E_1' + \overline{m}E_2' \geqslant \overline{m}(E_1' \bigcup E_2') + \overline{m}(E_1' \bigcap E_2')$$

با توجه به ۸-۲.۱ نتیجه می‌گیریم

$$\overline{m}E_1' + \overline{m}E_2' \geqslant \overline{m}(E_1 \bigcap E_2)' + \overline{m}(E_1 \bigcup E_2)'.$$

سپس، بااستفاده از ۴.۲.۱۱، داریم

$$\begin{aligned}(b-a-\underline{m}E_1)+(b-a-\underline{m}E_2) &\geqslant [b-a-\underline{m}(E_1 \bigcap E_2)]\\ &+[b-a-\underline{m}(E_1 \bigcup E_2)]\end{aligned}$$

که پس از ساده کردن (۲) از آن به‌دست می‌آید. این برهان را کامل می‌کند.

۲.۳.۱۱. نتیجه. اگر E_1 و E_2 زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشند، آنگاه هم $E_1 \bigcup E_2$ و هم $E_1 \bigcap E_2$ اندازه‌پذیرند، علاوه‌براین

$$mE_1 + mE_2 = m(E_1 \bigcup E_2) + m(E_1 \bigcap E_2). \qquad (۱)$$

برهان: بنابه‌فرض، برای $i = ۱, ۲$ داریم $\overline{m}E_i = \underline{m}E_i = mE_i$. سپس با استفاده از ۱.۳.۱۱ و ۳.۲.۱۱ داریم

$$\begin{aligned}mE_1 + mE_2 \geqslant \overline{m}(E_1 \bigcup E_2) + \overline{m}(E_1 \bigcap E_2) &\geqslant \underline{m}(E_1 \bigcup E_2)\\ + \underline{m}(E_1 \bigcap E_2) &\geqslant mE_1 + mE_2 \qquad (۲)\end{aligned}$$

چون دوانتهای نابرابری (۲) با هم برابرند، می‌توان همهٔ $\geqslant$ها را در (۲) به $=$ تبدیل

کرد. درنتیجه

$$\bar{m}(E_1 \bigcup E_2)+\bar{m}(E_1 \bigcap E_2)=\underline{m}(E_1 \bigcup E_2)+\underline{m}(E_1 \bigcap E_2).$$

بنابر ۳.۲.۱۱، از این برابری نتیجه می‌گیریم که $\bar{m}(E_1 \bigcup E_2)=\underline{m}(E_1 \bigcup E_2)$ و $\bar{m}(E_1 \bigcap E_2)=\underline{m}(E_1 \bigcap E_2)$. درنتیجه $E_1 \bigcup E_2$ و $E_1 \bigcap E_2$ اندازه‌پذیر هستند. پس می‌توانیم با قراردادن m به‌جای $\bar{m}$ و $\underline{m}$ در (۲)، برابری (۱) را به‌دست آوریم.

۳.۳.۱۱. نتیجه. اگر E_1 و E_2 زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشند، آنگاه $E_1 - E_2$ هم اندازه‌پذیر است. علاوه بر این، اگر $E_2 \subseteq E_1$، آنگاه $m(E_1 - E_2) = mE_1 - mE_2$.

برهان: بنابر ۷.۲.۱۱، E_2' اندازه‌پذیر است. اما $E_1 - E_2 = E_1 \bigcap E_2'$. با به‌کار بستن ۲.۳.۱۱ نشان‌دهید که $E_1 - E_2$ اندازه‌پذیر است.

اکنون اگر $E_2 \subseteq E_1$، آنگاه

$$E_1 = E_2 \bigcup (E_1 - E_2) \text{ و } m[E_2 \bigcap (E_1 - E_2)] = m\varnothing = 0.$$

درنتیجه،

$$mE_1 = m[E_2 \bigcup (E_1 - E_2)] = m[E_2 \bigcup (E_1 - E_2)] + m[E_2 \bigcap (E_1 - E_2)].$$

با به‌کاربستن ۲.۳.۱۱ درمورد طرف راست این برابری داریم

$$mE_1 = mE_2 + m(E_1 - E_2),$$

و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴.۳.۱۱. قضیه.

(الف) اگر E_1، E_2، ... زیرمجموعه‌های $[a, b]$ باشند، آنگاه

$$\bar{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \bar{m} E_n.$$

(ب) اگر E_1، E_2، ... زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزای $[a, b]$ باشند، آنگاه

$$\underline{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \underline{m} E_n.$$

برهان: (الف) اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، مجموعهٔ باز G_n را طوری انتخاب می‌کنیم که $G_n \supseteq E_n$ و $|G_n| < \bar{m}E_n + \varepsilon/2^n$. بنابراین $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ یك مجموعهٔ باز است

(۳.۴.۵) که شامل $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ است. در نتیجه $\left|\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right| \leqslant \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\overline{m}$. سپس بنا بر ۲.۱.۱۱ داریم

$$\overline{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |G_n| < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{m}E_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right),$$

و بنا براین

$$\overline{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}E_n + \varepsilon.$$

چون ε دلخواه بود، (الف) ثابت می‌شود.

(ب) اکنون فرض می‌کنیم که E_1، E_2، ... دو به‌دو مجزا باشند. آنگاه بنا بر (۲) از ۱.۳.۱۱،

$$\underline{m}(E_1 \bigcup E_2) \geqslant \underline{m}E_1 + \underline{m}E_2.$$

با استقرای ریاضی، به آسانی می‌توان نشان‌داد که

$$\underline{m}(E_1 \bigcup E_2 \bigcup \cdots \bigcup E_N) \geqslant \underline{m}E_1 + \underline{m}E_2 + \cdots + \underline{m}E_N \qquad (N \in I). \quad (1)$$

سپس، برای هر $N \in I$، داریم $\bigcup_{n=1}^{N} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$، و بنا براین $\underline{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geqslant \underline{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)$. این مطلب و (۱) ثابت می‌کنند که

$$\underline{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \underline{m}E_n.$$

با میل‌دادن N به بینهایت (ب) ثابت می‌شود.

اکنون نتایج مهمی دربارهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر به دست می‌آوریم. اولین نتیجه به‌اجتماع تعدادی شمارا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزا مربوط می‌شود. دو نتیجهٔ بعدی با اندازه‌پذیری «اجتماع صعودی» و «اشتراك نزولی» مجموعه‌های اندازه‌پذیر سروکار دارند. آخرین نتیجه اندازه‌پذیری اجتماع و اشتراك تعدادی شمارا ازمجموعه‌های اندازه‌پذیر را بیان می‌کند.

۵.۳.۱۱ نتیجه. اگر E_1، E_2، ... زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر دو به‌دو مجزای $[a,b]$ باشند، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ اندازه‌پذیر است و

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}mE_n.$$

برهان: بنابر ۴.۳.۱۱ و ۳.۲.۱۱، (چون $\underline{m}E_n=\overline{m}E_n=mE_n$) داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}mE_n\leqslant\underline{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)\leqslant\overline{m}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mE_n. \qquad (1)$$

چون ابتدا و انتهای نابرابریهای فوق باهم برابر هستند، هر چهار مقدار مذکور در (۱) باید باهم برابر باشند، که نتیجهٔ موردنظر از آن به‌دست می‌آید.

۶.۳.۱۱. نتیجه. اگر E_1، E_2، ... زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[a\,,b]$ باشند و اگر $E_1\subseteq E_2\subseteq E_3\subseteq\ldots$، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ اندازه‌پذیر است و

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\lim_{n\to\infty}mE_n. \qquad (1)$$

برهان: بنابر ۳.۳.۱۱ مجموعه‌های E_1، E_2-E_1، E_3-E_2، ...، E_n-E_{n-1}، ... اندازه‌پذیر و دوبه‌دو مجزا هستند. پس، بنابر ۵.۳.۱۱،

$$E_1\bigcup(E_2-E_1)\bigcup\cdots\bigcup(E_n-E_{n-1})\bigcup\cdots$$

اندازه‌پذیر است و

$$m[E_1\bigcup(E_2-E_1)\bigcup\cdots\bigcup(E_n-E_{n-1})\bigcup\cdots]$$

$$=mE_1+\sum_{k=2}^{\infty}m(E_k-E_{k-1})=mE_1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}m(E_k-E_{k-1}). \qquad (2)$$

ولی $E_1\bigcup(E_2-E_1)\bigcup\cdots\bigcup(E_n-E_{n-1})\bigcup\cdots$ دقیقاً برابر $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ است (تحقیق کنید). از این گذشته، بنابر ۳.۳.۱۱،

$$\sum_{k=2}^{n}m(E_k-E_{k-1})=\sum_{k=2}^{n}(mE_k-mE_{k-1})$$

$$=(mE_2-mE_1)+(mE_3-mE_2)+\cdots+(mE_n-mE_{n-1})$$

$$=mE_n-mE_1$$

درنتیجه $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ اندازه‌پذیر است و بنابر (۲)،

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=mE_1+\lim_{n\longrightarrow\infty}(mE_n-mE_1).$$

که از آن (۱) نتیجه و برهان کامل می‌شود.

۷.۳.۱۱. نتیجه. اگر E_1، E_2، ... زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشند و اگر $E_1\supseteq E_2\supseteq E_3\supseteq\ldots$، آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ اندازه‌پذیر است و

$$m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\lim_{n\longrightarrow\infty}mE_n.$$

برهان: بنابر ۷.۲.۱۱، به ازای هر $n\in I$، مجموعهٔ E'_n اندازه‌پذیر است و $mE'_n=b-a-mE_n$. از این گذشته، $E'_1\subseteq E'_2\subseteq E'_3\subseteq\ldots$. پس، بنابر ۶.۳.۱۱، $\bigcup_{n=1}^{\infty}E'_n$ اندازه‌پذیر است و

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E'_n\Big)=\lim_{n\longrightarrow\infty}mE'_n=b-a-\lim_{n\longrightarrow\infty}mE_n.$$

ولی $\bigcup_{n=1}^{\infty}E'_n$ متمم $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ است. درنتیجه $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ اندازه‌پذیر است و

$$b-a-m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=b-a-\lim_{n\longrightarrow\infty}mE_n.$$

که نتیجهٔ موردنظر از آن به‌دست می‌آید.

سرانجام نشان می‌دهیم که اگر مجموعه‌های E_1، E_2، ... اندازه‌پذیر باشند، دومجموعهٔ $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ اندازه‌پذیرند.

۸.۳.۱۱. نتیجه. اگر E_1، E_2، ... زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر دلخواهی از $[a,b]$ باشند، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ اندازه‌پذیر است و

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mE_n. \qquad (1)$$

از این گذشته، $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ اندازه‌پذیر است.

برهان: داریم

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \bigcup [E_2 - E_1] \bigcup [E_3 - (E_1 \bigcup E_2)] \bigcup \cdots$$
$$\bigcup [E_n - (E_1 \bigcup E_2 \bigcup \cdots \bigcup E_{n-1})] \bigcup \cdots \qquad (۲)$$

مجموعه‌های طرف راست (۲) اندازه‌پذیر و دوبه‌دو مجزا هستند. پس، بنابر ۵.۳.۱۱، طرف راست (۲) یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است. درنتیجه، $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ اندازه‌پذیر است. نابرابری (۱) را می‌توان از قسمت (الف) ۴.۳.۱۱ به دست آورد، زیرا که می‌توان m را به‌جای $\overline{m}$ گذاشت.

اندازه‌پذیری $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ از این حقیقت نتیجه می‌شود که $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ متمم $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n'$ است.

۹.۳.۱۱. مقصود از تفاضل متقارن دومجموعهٔ A و B مجموعه‌ای‌است که عناصرش به یکی از مجموعه‌ها و نه به‌هردوی آنها تعلق داشته باشند. یعنی، تفاضل متقارن A و B اجتماع مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ است. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که مجموعه‌های صفر اندازه تأثیری براندازه‌پذیری ندارند.

قضیه. اگر E_1 و E_2 زیرمجموعه‌های $[a, b]$ باشند و اگر تفاضل متقارن E_1 و E_2 صفر اندازه باشد، و اگر E_1 اندازه‌پذیر باشد، آنگاه E_2 اندازه‌پذیر است. به‌علاوه $mE_1 = mE_2$

برهان: داریم

$$E_2 = [E_1 \bigcup (E_2 - E_1)] - (E_1 - E_2). \qquad (۱)$$

بنابه‌فرض، هم $E_2 - E_1$ وهم $E_1 - E_2$ اندازه‌پذیرند و اندازه‌شان صفر است. چون E_1 و $E_2 - E_1$ مجزا هستند، بنابر ۵.۳.۱۱، $E_1 \bigcup (E_2 - E_1)$ اندازه‌پذیر است و $m[E_1 \bigcup (E_2 - E_1)] = mE_1 + 0 = mE_1$. اما چون

$$E_1 - E_2 \subseteq [E_1 \bigcup (E_2 - E_1)],$$

از (۱) و ۳.۳.۱۱ نتیجه می‌گیریم که E_2 اندازه‌پذیر است و

$$mE_2 = m[E_1 \bigcup (E_2 - E_1)] - m(E_1 - E_2) = mE_1 - 0 = mE_1.$$

این برهان را کامل می‌کند.

۱۰.۳.۱۱. قضیه‌های قبلی نشان می‌دهند که همهٔ اعمالی که متضمن اجتماع شمارا و اشتراك شمارای مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشند به‌مجموعه‌های اندازه‌پذیر منجر خواهند شد. به این دلیل، نشان دادن وجود مجموعه‌ای که اندازه‌پذیر نباشد چندان آسان نیست.

اکنون به‌طریقهٔ نشان‌دادن وجود یك مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر می‌پردازیم. مناسب است که‌این مجموعه را روی دایرهٔ C که طول محیطش ۱ است بسازیم. این‌دایره را می‌توان به‌روش بدیهی با بازهٔ $[0, 1)$ یکی گرفت.

اگر $x, y \in C$، می‌گوییم که $x \sim y$ اگر طول قـوس از x به y عددگویا باشد. آشکار است که

$$x \sim x; \qquad (۱)$$

$$x \sim y \Rightarrow y \sim x; \qquad (۲)$$

و

$$(x \sim y \,\&\, y \sim z) \Rightarrow x \sim z. \qquad (۳)$$

سپس C را به‌زیرمجموعه‌هایی مانند E_α تقسیم‌می‌کنیم به‌طوری‌که x و y در یك E_α باشند اگر و تنها اگر $x \sim y$. بنابراین، هریك‌از E_αها شامل تعدادی شمارا نقطه‌هستند (چون اعدادگویا شمارا هستند.) از این گذشته، با توجه به (۱)، (۲) و (۳) می‌توان‌نشان‌داد که E_αها دو به‌دو مجزاهستند. بنابراین، بایستی تعدادی ناشمارا E_α وجود داشته باشد. اکنون فرض می کنیم که V یك زیرمجموعهٔ C باشد به‌طوری‌که از هر E_α درست یك عنصر مانند x_α در V باشد. دراین صورت هیچ دو عنصر متمایز V مانند x_α، x_β در $x_\alpha \sim x_\beta$ صدق نمی‌کنند. (برای اطمینان از وجود مجموعهٔ V باید از اصل انتخاب استفاده کنیم.) نشان خواهیم‌داد‌که V اندازه‌پذیر نیست.

فرض‌کنیم r_1، r_2، ... اعداد گویای‌بازهٔ $[0, 1)$ باشند و $r_1 = 0$. به‌ازای هر $n \in I$، فرض می‌کنیم V_n زیرمجموعه‌ای از C باشد‌که از دوران V به‌اندازهٔ قوسی به‌طـول r_n (درجهت حرکت‌عقربه‌های ساعت) به‌دست می‌آید. دراین‌صورت $V_1 = V$. از این‌گذشته V_nها بایکدیگر همنهشت (یعنی قابل‌انطباق) هستند. اکنون نشان‌می‌دهیم‌که V_nها دو به‌دو مجزا هستند. اگـر چنین نباشد، m و nی وجود دارد به طـوری‌که $m \neq n$ و $V_m \cap V_n$ شامل نقطه‌ای مانند y است. اما چون $y \in V_m$، عنصری مانند $x_\alpha \in V$ وجود داردبه‌طوری که طول قوس از x_α تا y برابر r_m باشد.* به‌همین‌ترتیب چون $y \in V_n$، عنصری مـانند $x_\beta \in V$ وجـود دارد به‌طوری‌که طول قوس از x_β تا y برابر r_n است. بنابراین، طول قوس از x_α تا x_β عددی گویا است. درنتیجه $x_\beta = x_\alpha$. ولی‌دراین‌صورت داریم $r_m = r_n$، که این یك تناقض است. این نشان می‌دهد‌که V_nها دوبه‌دو مجزا هستند.

سرانجام، هر $x \in C$ دریکی از V_nها قرار دارد. زیرا αیی وجود دارد به‌طوری‌که $x \in E_\alpha$. وبنابراین، طول قوس از x_α تا x برابرعددی مانند r_n است. درنتیجه $x \in V_n$. بنابراین، درموقعیت زیر قرار داریم.

(الف) $C = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots$،

(ب) V_nها دوبه‌دو مجزا هستند،

---

* زیرا هرعنصر V_m از دوران یك‌عنصر V به‌وجود می‌آید.ـم.

(ج) V_nها با یکدیگر همنهشتند،

اگر $V=V_1$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه بنابر (ج) همهٔ V_nها اندازه‌پذیر خواهند بود و برای هر n، $mV_n = mV$. ولی آنگاه بنابر (الف) و (ب) و ۵.۳.۱۱،

$$mC = mV_1 + mV_2 + mV_3 + \cdots,$$

$$mC = mV + mV + mV + \cdots. \qquad (۴)$$

طرف‌چپ (۴) متناهی است. درنتیجه $mV + mV + mV + \ldots$ باید همگرا باشد. این فقط وقتی ممکن است که $mV = 0$. ولی دراین‌صورت از (۴) نتیجه می‌گیریم که $mC = 0$، که این یك تناقض است، زیرا که $mC = 1$. این تناقض ثابت می‌کند که V اندازه‌پذیر نیست.

تمرینهای ۳.۱۱

۱. ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ $[a, b]$ که از نوع F_σ باشد اندازه‌پذیر است.

۲. درستی یا نادرستی گزارهٔ زیر را بررسی کنید. اجتماع تعدادی‌ناشمارا از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[a, b]$ اندازه‌پذیر است.

۳. اگر E_1 و E_2 زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشند، ثابت‌کنید که تفاضل متقارن E_1 و E_2 هم‌اندازه‌پذیر است.

۴. اگر E_1 و E_2 زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[0, 1]$ باشند، و اگر $mE_1 = 1$ ثابت کنید که

$$m(E_1 \cap E_2) = mE_2.$$

۵. اگر E_1، E_2، ... زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشند، ثابت کنید که

$$\liminf_{n\to\infty} E_n \quad \text{و} \quad \limsup_{n\to\infty} E_n$$

اندازه‌پذیرند.

۶. نشان‌دهید که یك‌زیرمجموعهٔ بستهٔ هیچ‌جاچگال از $[a,b]$ مانند E وجود دارد به‌طوری که $mE > 0$.

۴.۱۱ توابع اندازه‌پذیر

خواهیم‌دید که یك تابع ممکن است در $[a, b]$ انتگرالپذیر لبگ باشد حتی اگر این‌تابع درهیچ نقطه‌ای‌از $[a,b]$ پیوسته‌نباشد. در واقع برای اینکه یك تابع کراندار انتگرالپذیر لبگ باشد خواهیم دیدکه فقط لازم است این تابع در شرطی صدق‌کندکه خیلی کمتر از پیوستگی محدودیت ایجاد می‌کند واین شرط اندازه‌پذیری تابع‌است. «تابع‌اندازه‌پذیر» را هم در مورد توابع بیکران و هم در مورد توابع کراندار تعریف می‌کنیم. و سرانجام تعریف انتگرال‌لبگ را به‌دستهٔ وسیعی ازتوابع بیکران ولی اندازه‌پذیر گسترش می‌دهیم.

تنها توابع حقیقی مورد بحث ما خواهندبود.

۱۰۴۰۱۱. تعریف. فرض کنیم f تابعی در $[a, b]$ باشد. f را یک‌تابع اندازه‌پذیر می‌نامیم اگر، به‌ازای هر $s \in R$، مجموعهٔ

$$\{x : f(x) > s\}$$

یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد.

یعنی f اندازه‌پذیر است اگر، برای هرعدد حقیقی s، نگارهٔ وارون بازهٔ (s,∞) تحت f یک‌مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد. فوراً نتیجه می‌گیریم که هر تابع‌پیوستهٔ g در $[a,b]$ اندازه‌پذیر است. زیرا (s, ∞) یک مجموعهٔ باز است. اگر g پیوسته باشد، آنگاه بنا بر ۷.۴.۵، نگارهٔ وارون (s, ∞) تحت g باز است. ولی بنابر ۸.۲.۱۱، مجموعه‌های باز اندازه‌پذیرند. درنتیجه، $\{x : g(x) > s\}$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است. و بنابراین g یک تابع اندازه‌پذیر است

از طرف دیگر بعضی از توابعی که درهمهٔ نقاط ناپیوسته‌اند باز هم اندازه‌پذیرند، برای مثال، اگر χ تابع مشخصهٔ اعدادگویای بازهٔ $[۰, ۱]$ باشد، آنگاه، مجموعهٔ $\{x : \chi(x) > s\}$ برای $۱ \leqslant s$ تهی است. اگر $۰ \leqslant s < ۱$، این مجموعه اعداد گویای بازهٔ $[۰,۱]$ است، درحالی که اگر $s < ۰$ آنگاه $\{x : \chi(x) > s\} = [۰,۱]$. درهرحالت $\{x : \chi(x) > s\}$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است.

اکنون ضوابط دیگر اندازه‌پذیری هم‌ارز با ۱.۴.۱۱ را ارائه می‌کنیم.

۲۰۴۰۱۱. قضیه. تابع f در $[a,b]$ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر هریک از (و درنتیجه همهٔ) گزاره‌های زیر برقرار باشند.

(الف) به‌ازای هر $s \in R$، مجموعهٔ $\{x : f(x) \geqslant s\}$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد،
(ب) به‌ازای هر $s \in R$، مجموعهٔ $\{x : f(x) < s\}$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد،
(ج) به‌ازای هر $s \in R$، مجموعهٔ $\{x : f(x) \leqslant s\}$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد.

برهان: فرض کنیم f اندازه‌پذیر باشد. آنگاه، بنابر ۱.۲.۱۱، $\{x : f(x) > s\}$ یک مجموعهٔ‌اندازه‌پذیر است. ولی $\{x : f(x) \leqslant s\}$ متمم مجموعهٔ $\{x : f(x) > s\}$ است. پس، بنابر ۷.۲.۱۱، $\{x : f(x) \leqslant s\}$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است. در نتیجه اگر f اندازه‌پذیر باشد، آنگاه (ج) برقرار است.

اکنون نشان می‌دهیم که اگر f اندازه‌پذیر باشد (الف) برقرار است. زیرا اگر f اندازه‌پذیر باشد و $s \in R$، آنگاه، بنابر ۱.۴.۱۱، هریک ازمجموعه‌های $\{x : f(x) > s - ۱/n\}$ به‌ازای $(n = ۱, ۲, ...)$ اندازه‌پذیر است. ولی، در این صورت، بنابر ۸.۳.۱۱، $\bigcap_{n=۱}^{\infty} \left\{x : f(x) > s - \frac{۱}{n}\right\}$ اندازه‌پذیر است. به‌آسانی می‌توان نشان‌داد که

$$\{x : f(x) \geqslant s\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > s - \frac{1}{n}\right\}.$$

بنابراین مجموعهٔ طرف چپ اندازه‌پذیر است و درنتیجه (الف) برقرار است.

بقیهٔ برهان به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

۳.۴.۱۱. نتیجه. اگر f یك تابع اندازه‌پذیر در $[a,b]$ باشد، آنگاه نگارهٔ وارون هر بازهٔ (کراندار، بیکران، بسته، باز، نیمه‌باز، وغیره) تحت f یك مجموعهٔ اندازه‌پذیر است.

برهان: اگر $[\lambda, \mu)$ یك بازهٔ کراندار نیمه‌باز باشد، آنگاه

$$[\lambda, \mu) = [\lambda, \infty) \bigcap (-\infty, \mu).$$

بنابر (الف) از ۲.۴.۱۱، مجموعهٔ $f^{-1}([\lambda, \infty))$ اندازه‌پذیر است. بنابر (ب) از ۲.۴.۱۱، مجموعهٔ $f^{-1}((-\infty, \mu))$ اندازه‌پذیر است. ولی، بنابر ۶.۳.۱،

$$f^{-1}([\lambda, \mu)) = f^{-1}([\lambda, \infty)) \bigcap f^{-1}((-\infty, \mu)).$$

چون هر یك از دو مجموعهٔ طرف راست اندازه‌پذیر هستند، از ۲.۳.۱۱ نتیجه می‌شود که $f^{-1}([\lambda, \mu))$ اندازه‌پذیر است. به‌این‌ترتیب قضیه برای بازه‌هایی که به‌صورت $[\lambda, \mu)$ باشند ثابت می‌شود. همهٔ حالات دیگر را می‌توان عیناً به‌همین روش ثابت کرد.

مجموعه‌های صفراندازه براندازه‌پذیری توابع اثر ندارند.

۴.۴.۱۱. قضیه. اگر f و g توابعی در $[a, b]$ باشند، و اگر

$$f(x) = g(x) \quad \text{تقریباً درهمه‌جای } [a, b]\text{،*} \tag{۱}$$

و اگر f اندازه‌پذیر باشد، آنگاه g هم اندازه‌پذیر است.

برهان: برای اینکه نشان دهیم g اندازه‌پذیر است باید نشان دهیم که، اگر $s \in R$، آنگاه مجموعهٔ

$$E_1 = \{x : g(x) > s\}$$

اندازه‌پذیر است. چون f اندازه‌پذیر است می‌دانیم که مجموعهٔ

$$E_2 = \{x : f(x) > s\}$$

اندازه‌پذیر است. ولی، بنابر (۱)، تفاضل متقارن E_1 و E_2 صفر اندازه است. پس، بنابر قضیهٔ مذکور در ۹.۳.۱۱، اندازه‌پذیری E_2 از اندازه‌پذیری E_1 نتیجه می‌شود.

اکنون به‌نشان‌دادن این مطلب می‌پردازیم که مجموع، حاصلضرب و حد دنباله‌های

---

* یعنی مجموعهٔ xهایی از $[a,b]$ که به‌ازای آنها گزارهٔ $f(x) = g(x)$ برقرار نیست صفر اندازه است. ۴.۱.۷ را ببینید.

توابع اندازه‌پذیر هم توابعی اندازه‌پذیر هستند. در حقیقت، تقریباً هرکاری که بتوانید با توابع اندازه‌پذیر انجام دهید بازهم توابعی اندازه‌پذیر به‌دست خواهید آورد. با این حقیقت به‌قضایایی بهتر از آنچه‌که برای توابع انتگرالپذیر ریمان می‌توان به‌دست آورد، دست می‌یابیم.

۵.۴.۱۱. قضیه. اگر f یك تابع اندازه‌پذیر در $[a,b]$ باشد، واگر $c \in R$، آنگاه توابع $f+c$ و cf اندازه‌پذیرند.

برهان: اگر $s \in R$، آنگاه

$$\{x : f(x)+c > s\} = \{x : f(x) > s-c\}.$$

چون f یك تابع اندازه‌پذیر است، مجموعهٔ طرف راست اندازه‌پذیر است. درنتیجه مجموعهٔ طرف چپ هم‌اندازه‌پذیر است، که نشان می‌دهد تابع $f+c$ اندازه‌پذیراست.

اگر $c < 0$، آنگاه $cf(x) > s$ اگر وتنها اگر $f(x) < s/c$. درنتیجه

$$\{x : cf(x) > s\} = \left\{x : f(x) < \frac{s}{c}\right\}.$$

بنابر (ب) از ۲.۴.۱۱ مجموعهٔ طرف راست اندازه‌پذیر است. درنتیجه مجموعهٔ طرف چپ اندازه‌پذیر است. این نشان می‌دهدکه اگر $c < 0$،آنگاه cf یك تابع اندازه‌پذیر است. برای تکمیل برهان می‌توان حالتهای $c > 0$ و $c = 0$ را باهمین روش انجام‌داد.

از ۵.۴.۱۱ نتیجه می‌گیریم که هرگاه f اندازه‌پذیر باشد $-f$ هم‌اندازه‌پذیر است. همچنین اگر f اندازه‌پذیر باشد به‌ازای هر $c \in R$، $f - c$ هم یك تابع اندازه‌پذیر است. اکنون به مجموع، حاصلضرب و... توابع اندازه‌پذیر می‌پردازیم.

۶.۴.۱۱. قضیه. اگر f و g توابعی اندازه‌پذیر در $[a ، b]$ باشند، آنگاه $f+g$، $f-g$ و fg هم‌اندازه‌پذیرند. به‌علاوه، اگر $g(x) \neq 0 (a \leqslant x \leqslant b)$،آنگاه f/g هم اندازه‌پذیر است.

برهان: فرض‌کنیم r_1، r_2، r_3، ... شمارشی از مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا باشد، اگر $x \in [a, b]$ و $s \in R$،آشکار است‌که $f(x) > s - g(x)$ اگر وتنها اگر عددگویایی‌مانند r_n وجود داشته باشد به‌طوری که $f(x) > r_n$ و $r_n > s - g(x)$. درنتیجه

$$\{x : f(x)+g(x) > s\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\{x : f(x) > r_n\} \cap \{x : s-g(x) < r_n\}]. \quad (1)$$

به‌ازای‌هر $n \in I$،مجموعهٔ $\{x : f(x) > r_n\}$ اندازه‌پذیراست. زیرا f یك‌تابع‌اندازه‌پذیر است. مجموعهٔ $\{x : s - g(x) < r_n\}$ هم اندازه‌پذیر است، زیرا، بنابر ۵.۴.۱۱، $s-g$ یك تابع اندازه‌پذیر است. پس، بنابر ۲.۳.۱۱ و ۸.۳.۱۱، مجموعهٔ طرف راست (۱)

اندازه‌پذیر است. این ثابت می‌کند که $f+g$ یك تابع اندازه‌پذیر است.

سپس از ۵.۴.۱۱ نتیجه‌می‌شود که $f-g=f+(-g)$ یك‌تابع‌اندازه‌پذیر است.

برای نشان دادن اینکه fg اندازه‌پذیر است از شگرد برهان اول ۷.۷.۲ پیروی می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم که مربع یك تابع اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است. در واقع اگر h یك تابع‌اندازه‌پذیر در $[a,b]$ باشد و $s<0$، آنگاه مجموعهٔ $\{x:[h(x)]^2>s\}$ برابر $[a,b]$ ودرنتیجه اندازه‌پذیر است. اگر $s\geqslant 0$ آنگاه

$$\{x:[h(x)]^2>s\}=\{x:h(x)>\sqrt{s}\}\cup\{x:h(x)<-\sqrt{s}\}.$$

چون h یك‌تابع اندازه‌پذیر است. هریك ازمجموعه‌های طرف‌راست اندازه‌پذیرند. پس، برای هر $s\in R$، $\{x:[h(x)]^2>s\}$ اندازه‌پذیر است، که ثابت می‌کند h^2 یك تابع اندازه‌پذیر است.

اکنون اگر f و g توابعی‌اندازه‌پذیر باشند، آنگاه بنابرآنچه قبلا ثابت کرده‌ایم $(f+g)^2$ و $(f-g)^2$ هم‌اندازه‌پذیرند. چون

$$fg=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2],$$

نتیجه می‌گیریم که fg اندازه‌پذیر است.

برهان این‌حکم را درمورد f/g برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم. توجه داشته باشید که چون $f/g=f\cdot(1/g)$ کافی است نشان داده شود که هرگاه g تابعی اندازه‌پذیر باشد به‌طوری که $g(x)\neq 0\,(a\leqslant x\leqslant b)$ آنگاه $1/g$ هم اندازه‌پذیر است.

نتیجهٔ بعدی با دنباله‌های توابع اندازه‌پذیر سروکار دارد.

۷.۴.۱۱ قضیه. فرض‌کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر در $[a,b]$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $x\in[a,b]$ دنبالهٔ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار باشد. اگر

$$M(x)=\text{l.u.b.}\{f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \dots\}\qquad(a\leqslant x\leqslant b)$$

و

$$m(x)=\text{g.l.b.}\{f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \dots\}\qquad(a\leqslant x\leqslant b)$$

آنگاه توابع M و m هردو اندازه‌پذیرند.

برهان: اگر $s\in R$ و $x\in[a,b]$، آنگاه $m(x)<s$ اگر و تنها اگر n ی وجود داشته باشد به‌طوری که $f_n(x)<s$. درنتیجه

$$\{x:m(x)<s\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x)<s\}.$$

بنابر(ب) از ۲.۴.۱۱، هریك‌ازمجموعه‌های $\{x : f_n(x) < s\}$ اندازه‌پذیر است. درنتیجه، بنابر ۸.۳.۱۱، $\{x : m(x) < s\}$ اندازه‌پذیر است. این مجدداً بنابـر (ب) از ۲.۴.۱۱ نشان می‌دهد که تابع m اندازه‌پذیر است.

اندازه‌پذیر بودن M از معادلهٔ

$$\{x : M(x) > s\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > s\}$$

به‌دست می‌آید.

حالت خاصی که در آن ... $f_2 = f_3 = f_4 =$، نشان می‌دهد که $\max(f_1, f_2)$ و $\min(f_1, f_2)$ اندازه‌پذیرند اگر f_1 و f_2 اندازه‌پذیر باشند.

۸.۴.۱۱ قضیه. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیـر در $[a, b]$ باشد به‌طوری که دنبالهٔ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ به‌ازای هر $x \in [a, b]$ کراندار باشد، و اگر

$$f^*(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

$$f_*(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

آنگاه توابع f^* و f_* هردو اندازه‌پذیرند. به‌ویـژه اگـر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ به f همگرای نقطه‌ای باشد، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

برهان: به‌ازای $n \in I$، اگر

$$g_n(x) = \text{l·u·b·}\{f_n(x), f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), \dots\} \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

آنگاه، بنابر ۷.۴.۱۱، هر g_n یك تابع اندازه‌پذیر است. به‌علاوه، بنابر ۱.۹.۲،

$$f^*(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

همچنین، به‌ازای هر $x \in [a, b]$،

$$g_1(x) \geqslant g_2(x) \geqslant g_3(x) \geqslant \cdots,$$

پس، اگر $s \in R$، آنگاه

$$\{x : f^*(x) < s\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : g_n(x) < s\}.$$

از ۲.۴.۱۱ و ۸.۳.۱۱ نتیجه می‌شود که f^* اندازه‌پذیر است.

اندازه‌پذیری f_* را می‌توان با روش مشابهی ثابت کرد. سرانجام، اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ به f همگرای نقطه‌ای باشد، آنگاه، بنابر ۳.۹.۲ و ۶.۹.۲، $f_* = f^* = f$ و بنابراین f

اندازه‌پذیر است. این برهان را کامل می‌کند.

این بخش را با نشان‌دادن این‌نکته‌که در ۸.۴.۱۱ همگرایی نقطه‌ای را می‌توان با تقریباً همه‌جا همگرایی نقطه‌ای تعویض کرد، به‌پایان می‌رسانیم.

۹.۴.۱۱ قضیه. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر در $[a,b]$ باشد و اگر

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)=f(x) \qquad \text{تقریباً همه‌جا در } [a,b]$$

آنگاه f اندازه‌پذیر است.

برهان: اگر E مجموعهٔ همهٔ xهایی از $[a,b]$ باشدکه به‌ازای آنها گزارهٔ

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)=f(x)$$

برقرار نیست، آنگاه، بنابرفرض، E صفر اندازه است. توابع g و g_n را به‌ازای $n\in I$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_n(x)=f_n(x) \ \ (x\notin E); \ \ g(x)=f(x) \ \ (x\notin E)$$

$$g_n(x)=0 \qquad (x\in E); \ \ g(x)=0 \qquad (x\in E).$$

آنگاه، بنابر ۴.۴.۱۱، هر g_n اندازه‌پذیر است. اکنون، اگر $x\in E$، آنگاه

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} g_n(x)=0=g(x).$$

همچنین اگر $x\notin E$، آنگاه

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} g_n(x)=\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)=f(x)=g(x).$$

درنتیجه $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a,\, b]$؛ (همه‌جا) به f همگرای نقطه‌ای است. چون هر g_n اندازه‌پذیر است، از ۸.۴.۱۱ نتیجه می‌گیریم که g اندازه‌پذیر است. به‌کار بستن مجدد ۴.۴.۱۱ نشان می‌دهدکه f اندازه‌پذیر است و برهان‌کامل می‌شود.

تمرینهای ۴.۱۱

۱. اگر

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad (0<x<1),$$

$$f(0)=5,$$

$$f(1)=7,$$

ثابت کنید که f در $[\circ, ۱]$ اندازه‌پذیر است.

۲. نشان دهید که زیرمجموعهٔ E از $[a, b]$ اندازه‌پذیر است اگر وتنها اگر تابع مشخصهٔ آن χ_E، اندازه‌پذیر باشد.

۳. آیا یك تابع اندازه‌ناپذیر در $[a, b]$ وجود دارد؟

۴. اگر $J_۱$ و $J_۲$ بازه‌هایی از اعداد حقیقی باشند، واگر f تابعی اندازه‌پذیر در $[a, b]$ باشد، نشان دهید که $f^{-۱}(J_۱ \bigcup J_۲)$ یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ است.

۵. اگر $F'(x)$ به‌ازای هر $x \in [a, b]$ وجود داشته باشد و

$$f(x) = F'(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

ثابت کنید که f یك تابع اندازه‌پذیر است. (راهنمایی: به‌ازای $x > b$، $F(x)$ را برابر $F(b)$ تعریف کنید. فرض کنید

$$f_n(x) = \frac{F(x + ۱/n) - F(x)}{۱/n} \qquad (a \leqslant x \leqslant b;\ n \in I).$$

نشان دهید که هر f_n اندازه‌پذیر است و توجه کنید که

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) \qquad (a \leqslant x < b).)$$

۶. اگر G یك زیرمجموعهٔ باز $R^۱$ باشد و اگر f یك تابع اندازه‌پذیر در $[a, b]$ باشد، ثابت کنید که $f^{-۱}(G)$ یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ است.

۵.۱۱. تعریف و وجود انتگرال لبگ توابع کراندار

تعریفی که برای انتگرال لبگ می‌آوریم به‌موازات تعریف انتگرال ریمان است. کار را با تعریف $M[f; E]$ و $m[f; E]$ برای یك تابع کراندار f و زیرمجموعه‌ای مانند E از بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ شروع می‌کنیم. این تعمیم ۱.۲.۷ است.

۱.۵.۱۱. تعریف. اگر f یك تابع کراندار در $[a, b]$ باشد، واگر E زیرمجموعه‌ای از $[a, b]$ باشد، آنگاه $M[f; E]$ و $m[f; E]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M[f; E] = \underset{x \in E}{\text{l.u.b.}}\ f(x),$$

$$m[f; E] = \underset{x \in E}{\text{g.l.b.}}\ f(x).$$

به‌جای اینکه (مانند ۲.۲.۷) $[a,b]$ را به بازه‌هایی تقسیم کنیم، آن را با زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر افراز خواهیم کرد.

۲۰۵۰۱۱. تعریف. یك افراز اندازه‌پذیر $[a, b]$، مانند P، گردایه‌ای متناهی از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[a, b]$ مانند $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ است به‌طوری که

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = [a, b]$$

$$m(E_j \cap E_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n; j \neq k).$$

مجموعه‌های E_1، E_2، ...، E_n را مؤلفه‌های P می‌نامند.

اگر P و Q افرازهای اندازه‌پذیر باشند، آنگاه Q را یك تظریف P می‌نامند، اگر هر مؤلفهٔ Q تماماً دریك مؤلفهٔ P واقع باشد. (یعنی مؤلفه‌های Q از شکستن مؤلفه‌های P به‌دست‌آمده باشند.)

بنابراین، یك افراز اندازه‌پذیر P گردایه‌ای است متناهی از زیرمجموعه‌هایی که اجتماع آنها همهٔ $[a, b]$ است و اشتراك آنها با یکدیگر صفر اندازه است.

از این‌رو، آشکار است که اگر $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ یك زیرتقسیم $[a, b]$ (مانند ۲۰۲۰۷) با مؤلفه‌های I_1، I_2، ...، I_n باشد، آنگاه $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ یك افراز اندازه‌پذیر $[a, b]$ است. ولی $[a, b]$ افرازهای اندازه‌پذیر بسیاری داردکه مؤلفه‌های آنها بازه نیستند. برای مثال، اگر E_1 مجموعهٔ اعدادگویای بازهٔ $[a, b]$ و E_2 مجموعهٔ اعداد گنگ بازهٔ $[a, b]$ باشد، آنگاه $\{E_1, E_2\}$ یك افراز اندازه‌پذیر $[a, b]$ است.

اکنون به‌تعمیم ۳۰۲۰۷ می‌پردازیم.

۳۰۵۰۱۱. تعریف. اگر f یك تابع کراندار در $[a, b]$ و $P = \{E_1, \dots, E_n\}$ یك افراز اندازه‌پذیر دلخواه $[a,b]$ باشد، آنگاه مجموع بالای $U[f; P]$ را به صورت

$$U[f; P] = \sum_{k=1}^{n} M[f; E_k] \cdot mE_k.$$

و به‌همین‌ترتیب مجموع پایین $L[f; P]$ را به‌صورت

$$L[f; P] = \sum_{k=1}^{n} m[f; E_k] \cdot mE_k$$

تعریف می‌کنیم.

توجه داشته باشیدکه اگر E_1، ...، E_n مؤلفه‌های بازه‌ای یك زیرتقسیم σ باشند، آنگاه $U[f; P]$ به صورتی که در اینجا تعریف شد دقیقاً همان $U[f, \sigma]$ در تعریف ۳۰۲۰۷ است. در نتیجه، مجموعهٔ همهٔ اعداد $U[f; \sigma]$ به‌ازای همهٔ زیرتقسیمهای σ، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ همهٔ اعداد $U[f; P]$ به‌ازای همهٔ افرازهای اندازه‌پذیر P است.

نتیجهٔ زیر با ۴۰۲۰۷ متناظر است.

۴.۵.۱۱. لم. اگر f یك تابع کراندار در $[a, b]$ باشد، آنگاه هرمجموع بالای f ناکوچکتر از هر مجموع پایین f است. یعنی اگر P و Q افرازهای اندازه‌پذیر دلخواه $[a, b]$ باشند، آنگاه $L[f; Q] \leqslant U[f; P]$.

برهان: برای این برهان جزئیات چندانی ذکر نمی‌کنیم. زیرا نظیر برهان ۴.۲.۷ است. ابتدا باید نشان‌داد که اگر P^* تظریفی از P باشد، آنگاه

$$U[f; P] \geqslant U[f; P^*]. \tag{۱}$$

حالت $P = \{E_1, \ldots, E_k, \ldots, E_n\}$ و $P^* = \{E_1, \ldots, E_k^*, E_k^{**}, \ldots, E_n\}$ مانندحالت نظیر در ۴.۲.۷ ثابت می‌شود و حالت کلی (۱) به‌استقرای ریاضی‌نتیجه می‌شود.

به‌همین‌ترتیب، اگر Q^* تظریفی از Q باشد، آنگاه

$$L[f; Q] \leqslant L[f; Q^*]. \tag{۲}$$

اکنون اگر E_1، ...، E_n مؤلفه‌های P و F_1، ...، F_m مؤلفه‌های Q باشند و اگر T افراز اندازه‌پذیری باشد که‌مؤلفه‌هایش $n \cdot m$ زیرمجموعهٔ $E_i \bigcap F_j (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$ باشند، آنگاه T تظریفی از هردوی P و Q است. پس بنابر (۱) و(۲) داریم

$$U[f; P] \geqslant U[f; T] \geqslant L[f; T] \geqslant L[f; Q],$$

و لم ثابت می‌شود.

۵.۵.۱۱. اکنون، عیناً مانند ۵.۲.۷، می‌توان نشان‌داد که

$$\underset{P}{\text{g.l.b.}}\, U[f; P] \geqslant \underset{P}{\text{l.u.b.}}\, L[f; P], \tag{۱}$$

که‌درآن g.l.b. و l.u.b. روی همهٔافرازهای اندازه‌پذیر $[a, b]$ مانند P گرفته‌شده‌اند. (تحقیق کنید.) این‌مطلب ما را در موقعیتی قرار می‌دهد که بتوانیم انتگرالهای بالا وپایین لبگ یك تابع کراندار f را در $[a,b]$ تعریف‌کنیم. برای پرهیز از ابهام، انتگرالهای بالا و پایین ریمان تابع f را که در ۵.۲.۷ تعریف شدند با

$$\mathcal{R}\underline{\int_a^b} f \quad \text{و} \quad \mathcal{R}\overline{\int_a^b} f$$

نشان می‌دهیم، درحالی‌که انتگرالهای بالا و پایین لبگ تابع f را، که به‌زودی تعریف خواهیم‌کرد، با

$$\mathcal{L}\underline{\int_a^b} f \quad \text{و} \quad \mathcal{L}\overline{\int_a^b} f.$$

نشان خواهیم‌داد.

تعریف. اگر f یك تابع کراندار در $[a, b]$ باشد، آنگاه

$$\overline{\mathcal{L}\int_a^b} f(x)dx.$$

را، که انتگرال بالای لبگ تابع f در $[a, b]$ نامیده می‌شود، به‌صورت

$$\overline{\mathcal{L}\int_a^b} f(x)dx = \underset{P}{\text{g.l.b.}}\, U[f; P]$$

تعریف می‌کنیم، که درآن .g.l.b روی همهٔ افرازهای اندازه‌پذیر $[a, b]$ مانند P گرفته شده است، به‌همین روش

$$\underline{\mathcal{L}\int_a^b} f(x)dx\,,$$

را که انتگرال پایین لبگ تابع f در فاصلهٔ $[a, b]$ نامیده می‌شود، به‌صورت

$$\underline{\mathcal{L}\int_a^b} f(x)dx = \underset{P}{\text{l.u.b.}}\, L[f; P].$$

تعریف می‌کنیم. گاهی انتگرالهای بالا وپایین را به‌خاطر اختصار به‌صورت

$$\underline{\mathcal{L}\int_a^b} f \quad \text{و} \quad \overline{\mathcal{L}\int_a^b} f.$$

نشان می‌دهیم. از نابرابری (۱) نتیجه می‌شود که

$$\underline{\mathcal{L}\int_a^b} f \leqslant \overline{\mathcal{L}\int_a^b} f. \tag{۲}$$

از نکته‌ای که به‌دنبال تعریف ۳.۵.۱۱ ذکر شد (یعنی، اینکه هر $U[f; \sigma]$ یك $U[f; P]$ است) نتیجه می‌شود که

$$\overline{\mathcal{L}\int_a^b} f = \underset{P}{\text{g.l.b}}\, U[f; P] \leqslant \underset{\sigma}{\text{g.l.b}}\, U[f; \sigma] = \overline{\mathcal{R}\int_a^b} f. \tag{۳}$$

(به‌اجمال، یعنی، هر چه مجموعه بزرگتر باشد، .g.l.b آن مجموعه کوچکتر است.) به‌همین‌روش

$$\underline{\mathcal{L}\int_a^b} f = \underset{P}{\text{l.u.b}}\, L[f; P] \geqslant \underset{\sigma}{\text{l.u.b}}\, L[f, \sigma] = \underline{\mathcal{R}\int_a^b} f. \tag{۴}$$

بنابراین، از (۴)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر تابع کراندار در $[a, b]$مانند f داریم

$$\mathcal{R}\underline{\int_a^b} f \leqslant \mathcal{L}\underline{\int_a^b} f \leqslant \mathcal{L}\overline{\int_a^b} f \leqslant \mathcal{R}\overline{\int_a^b} f. \qquad (۵)$$

اکنون انتگرال (ریمان) راکه در ۶.۲.۷ تعریف کردیم با $\mathcal{R}\int_a^b f$ و انتگرال لبگ راکه هم‌اکنون تعریف خواهیم کرد با $\mathcal{L}\int_a^b f$ نشان می‌دهیم.

۶.۵.۱۱. تعریف. اگر f یك تابع کراندار در $[a, b]$ باشد، آنگاه می‌گوییم که f در $[a, b]$ انتگرال لبگ دارد (یا f در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر لبگ است.) اگر

$$\mathcal{L}\underline{\int_a^b} f = \mathcal{L}\overline{\int_a^b} f.$$

دراین حالت، $\mathcal{L}\int_a^b f(x)dx$ (یا $\mathcal{L}\int_a^b f$) را با

$$\mathcal{L}\int_a^b f = \mathcal{L}\underline{\int_a^b} f = \mathcal{L}\overline{\int_a^b} f.$$

تعریف می‌کنیم. اگر f در $[a, b]$ انتگرال لبگ داشته باشد، می‌نویسیم $f\in\mathcal{L}[a, b]$.

دربخش ۷.۱۱ انتگرال لبگ را برای ردهٔ وسیعی از توابع بیکران تعریف خواهیم کرد. بنابراین، نهایتاً از گزارهٔ $f\in\mathcal{L}[a,b]$ کراندار بودن f نتیجه نخواهد شد. بنابراین، در بخش ۶.۱۱ کراندار بودن را به‌مفروضات بسیاری از قضایای مربوط به‌توابع کراندار متعلق به $\mathcal{L}[a, b]$ اضافه می‌کنیم.

اکنون قضیهٔ بسیار مهمی را ثابت می‌کنیم که می‌گوید اگر یك تابع کراندار f انتگرال‌پذیر ریمان باشد آنگاه f انتگرال‌پذیر لبگ است ودو انتگرال f برابر هستند.

۷.۵.۱۱. قضیه. اگر f یك تابع کراندار در $[a,b]$ باشد و اگر $f\in\mathcal{R}[a, b]$، آنگاه $f\in\mathcal{L}[a, b]$ و

$$\mathcal{R}\int_a^b f = \mathcal{L}\int_a^b f. \qquad (۱)$$

برهان: بنابر (۵) در ۴.۵.۱۱ داریم

$$\mathcal{R}\underline{\int_a^b} f \leqslant \mathcal{L}\underline{\int_a^b} f \leqslant \mathcal{L}\overline{\int_a^b} f \leqslant \mathcal{R}\overline{\int_a^b} f. \qquad (۲)$$

اگر $f\in\mathcal{R}[a, b]$، آنگاه، بنابر تعریف، باید انتهای چپ وانتهای راست (۲) باهم برابر باشند. درنتیجه هرچهارجملهٔ (۲) باید برابر باشند ـ یعنی

$$\underline{\mathcal{R}\int_a^b} f=\underline{\mathcal{L}\int_a^b} f=\overline{\mathcal{L}\int_a^b} f=\overline{\mathcal{R}\int_a^b} f.$$

پس $f\in\mathcal{L}[a, b]$ ومعادلهٔ (۱) فوراً نتیجه می‌شود
بنا براین هیچ لزومی ندارد که بین

$$\mathcal{R}\int_a^b f \text{ و } \mathcal{L}\int_a^b f,$$

فرق بگذاریم، زیرا هنگامی که هردو انتگرال وجود داشته باشند باید با هم برابر باشند. از این به‌بعد، انتگرال ریمان یا انتگرال لبگ f را به‌صورت $\int_a^b f$ (یا $\int_a^b f(x)dx$) خواهیم نوشت، وبا توجه به ۷.۵.۱۱، هیچ ابهامی پیش نخواهد آمد.

قضیهٔ ۷.۵.۱۱. می‌گوید که هر تابع کراندار که انتگرالپذیر ریمان است، انتگرالپذیر لبگ هم هست. پس از آنکه دربارهٔ وجود انتگرال لبگ بحث کردیم آشکار خواهد شد که بسیاری از توابع کراندار که انتگرالپذیر لبگ هستند، انتگرالپذیر ریمان نیستند.

چون برهان قضیهٔ بعدی تقریباً با برهان ۷.۲.۷ یکی‌است (با تعویض زیرتقسیمها با افرازها) آن‌را حذف می‌کنیم.

۸.۵.۱۱. قضیه. اگر f یك تابع کراندار در $[a, b]$ باشد، آنگاه $f\in\mathcal{L}[a, b]$ اگر و تنها اگر به ازای هر $\varepsilon>0$، افراز اندازه‌پذیری از $[a, b]$، مانند P، وجود داشته باشد به‌طوری که

$$U[f; P]<L[f; P]+\varepsilon. \tag{۱}$$

برای روشن ساختن ۸.۵.۱۱ فرض می‌کنیم که χ تابع مشخصهٔ اعداد گنگ بازهٔ $[0, 1]$ باشد، اگر E_1 مجموعهٔ اعداد گنگ و E_2 مجموعهٔ اعداد گویای بازهٔ $[0, 1]$ باشد، آنگاه $P=\{E_1, E_2\}$ یك افراز اندازه‌پذیر $[0, 1]$ است، به علاوه χ در E_1 همواره ۱ و در E_2 همواره ۰ است. درنتیجه $M[\chi;E_1]=m[\chi;E_1]=1$. درحالی که $M[\chi; E_2]=m[\chi; E_2]=0$. بنابراین $U[\chi; P]=1 \cdot mE_1+0 \cdot mE_2=1$. به همین ترتیب $L[\chi; P]=1$. چون $U[\chi; P]=L[\chi; P]$، از ۸.۵.۱۱ نتیجه می‌شود که $\chi\in\mathcal{L}[0, 1]$. از این گذشته، چون

$$L[\chi; P]\leqslant\int_0^1\chi\leqslant U[\chi; P],$$

داریم

$$\int_0^1\chi=1.$$

توجه داشته باشید که $\chi\notin\mathscr{R}[0, 1]$.

برای اغلب توابع f افرازی مانند P وجود ندارد که به‌ازای آن $U[f; P]=L[f; P]$. (تابع χ پاراگراف قبلی یك استثناء است.) اگر $f\in\mathscr{L}[a, b]$، افراز P که به ازای آن (۱) برقرار باشد معمولاً به ε بستگی دارد.

اکنون نقش مهمی را که توابع اندازه‌پذیر بازی می‌کنند نشان می‌دهیم. ثابت خواهیم کرد که هر تابع اندازه‌پذیر کراندار f انتگرال‌پذیر لبگ است. توجه داشته باشید که برهان متضمن یك زیرتقسیم بازه‌ای است که شامل حوزهٔ مقادیر f است. یعنی، برخلاف انتگرال ریمان، به‌جای تقسیم محور xها، محور yها را تقسیم می‌کنیم.

۹.۵.۱۱. قضیه. اگر f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a, b]$ باشد، آنگاه $f\in\mathscr{L}[a, b]$.

برهان: چون f کراندار است عدد مثبت M وجود دارد به‌طوری‌که حوزهٔ مقادیر f در بازهٔ نیمه‌باز $(-M, M]$ قرار گیرد. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، تعدادی متناهی از نقاط y_0، y_1، ...، y_n وجود دارند به‌طوری‌که $-M=y_0<y_1<\dots<y_n=M$ و $y_k-y_{k-1}<\varepsilon/(b-a)$، $(k=1, \dots, n)$. (یعنی، $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ یك زیرتقسیم $[-M, M]$ است به طوری‌که فاصلهٔ بین هردو نقطهٔ متوالی در زیرتقسیم کمتر از $\varepsilon/(b-a)$ است.) به‌ازای هر $k=1, 2, \dots, n$ اگر E_k نگارهٔ وارون $[y_{k-1}, y_k)$ تحت f باشد. (یعنی، $x\in E_k$ اگر و تنها اگر $y_{k-1}\leqslant f(x)<y_k$)، آنگاه، بنابر ۳.۴.۱۱ E_k اندازه‌پذیر است. دراین‌صورت، به‌آسانی می‌توان نشان داد که $P=\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ یك افراز اندازه‌پذیر $[a, b]$ است. چون $M[f; E_k]\leqslant y_k$ داریم

$$U[f; P]=\sum_{k=1}^{n}M[f; E_k]\cdot mE_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}y_k\cdot mE_k.$$

همچنین، چون $y_{k-1}\leqslant m[f; E_k]$ داریم

$$L[f; P)=\sum_{k=1}^{n}m[f; E_k]\cdot mE_k\geqslant\sum_{k=1}^{n}y_{k-1}\cdot mE_k.$$

بنابراین

$$U[f; P]-L[f; P]\leqslant\sum_{k=1}^{n}(y_k-y_{k-1})\cdot mE_k<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}mE_k. \qquad (1)$$

چون E_kها دوبه‌دو مجزا هستند و $\bigcup_{k=1}^{n}E_k=[a, b]$، بنابر ۵.۳.۱۱، داریم

$$\sum_{k=1}^{n}mE_k=m\Big(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\Big)=b-a. \qquad (2)$$

سپس، از (۱) و (۲)، خواهیم داشت

$$U[f;P]-L[f;P]<\varepsilon.$$

پس بنا بر ۸.۵.۱۱ داریم $f\in\mathfrak{L}[a,b]$ و برهان کامل می‌شود.

برای تأکید بیشتر نتیجهٔ ۹.۵.۱۱ را تکرار می‌کنیم. هر تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a,b]$ انتگرال لبگ دارد. بنابراین اگر f در $[a,b]$ کراندار باشد، اندازه‌پذیری f یك شرط کافی برای $f\in\mathfrak{L}[a,b]$ است.

در بخش بعدی (قضیهٔ ۱۴.۶.۱۱) نشان خواهیم داد که اگر تابع f کراندار باشد، برای اینکه $f\in\mathfrak{L}[a,b]$، اندازه‌پذیری یك شرط لازم هم هست. یعنی اگر f کراندار باشد و $f\in\mathfrak{L}[a,b]$، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

تمرینهای ۵.۱۱

۱. برهانهای ۴.۵.۱۱ و ۸.۵.۱۱ را به‌تفصیل بنویسید.

۲. اگر $[a,b]$ یك افراز اندازه‌پذیری مانند P داشته باشد به‌طوری که

$$U[f;P]=L[f;P]$$

دربارهٔ تابع f چه می‌توان گفت؟

۳. فرض کنید

$$\begin{aligned} f(x)&=۲ && (۰\leqslant x<۱),\\ f(x)&=۴ && (۱\leqslant x<۲),\\ f(x)&=۳ && (۲\leqslant x<۳),\\ f(x)&=۲ && (۳\leqslant x\leqslant ۴). \end{aligned}$$

(الف) اگر σ زیرتقسیم $\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ از بازهٔ $[۰,۴]$ باشد، $U[f;\sigma]$ را حساب کنید.

(ب) برای $k=۲,۳,۴$ اگر E_k نگارهٔ وارون $[k,k+۱)$ تحت f باشد، نشان‌دهید که $P=\{E_۲,E_۳,E_۴\}$ یك افراز اندازه‌پذیر $[۰,۴]$ است.

(ج) $U[f;P]$ و $L[f;P]$ را حساب کنید.

۶.۱۱ ویژگیهای انتگرال لبگ توابع اندازه‌پذیر کراندار

۱.۶.۱۱. قضیه. اگر f در $[a,b]$ یك تابع اندازه‌پذیر کراندار (ولذا در

$\mathcal{L}[a, b]$) باشد، و اگر $a<c<b$، آنگاه $f\in\mathcal{L}[a, c]$ و $f\in\mathcal{L}[c, b]$ و

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f\cdot$$

برهان: ابتدا باید نشان دهیم که f در $[a, c]$ و $[c, b]$ انتگرال لبگ دارد. یا به بیان دقیقتر، تحدید f به‌این بازه‌ها انتگرالپذیر لبگ است. برای نشان‌دادن اینکه تحدید f به $[a, c]$ یك تابع اندازه‌پذیر در $[a, c]$ است باید نشان دهیم که به ازای هر $s\in R$، مجموعهٔ $E=\{x\in[a, c]: f(x)>s\}$ اندازه‌پذیر است ولی $E=[a, c]\bigcap E^*$ که‌در آن $E^*=\{x\in[a, b]: f(x)>s\}$. چون f در $[a, b]$ اندازه‌پذیر است، مجموعهٔ E^* اندازه‌پذیر است. در نتیجه E اندازه‌پذیر است (تمرین ۸ بخش ۲.۱۱ را ببینید). بنابراین f در $[a, c]$ اندازه‌پذیر و کراندار است و درنتیجه انتگرال لبگ دارد. به‌همین ترتیب f در $[c, b]$ انتگرال‌لبگ دارد. آنگاه برهان اینکه

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

تکرار قسمت‌متناظر برهان ۱.۴.۷ است‌که درآن زیرتقسیمها باافرازها تعویض‌شده‌باشند.

دونتیجهٔ بعدی را می‌توان عیناً مانند ۲.۴.۷ و ۳.۴.۷ ثابت کرد. توجه داشته‌باشید که‌اگر f در $[a,b]$ اندازه‌پذیر باشد و $\lambda\in R$، آنگاه بنابر ۵.۴.۱۱، λf اندازه‌پذیراست. همچنین اگر f و g در $[a, b]$ اندازه‌پذیر باشند، آنگاه‌بنابر ۵.۴.۱۱، $f+g$ اندازه‌پذیر است. بنابراین اگر f و g اندازه‌پذیر وکراندار باشند، λf و $f+g$ هم اندازه‌پذیر و کراندارند.

۲.۶.۱۱ قضیه. اگر f یك تابع اندازه‌پذیر وکراندار در $[a, b]$ باشد و اگر $\lambda\in R$، آنگاه $\lambda f\in\mathcal{L}[a, b]$، و

$$\int_a^b \lambda f=\lambda\int_a^b f\cdot$$

۳.۶.۱۱ قضیه. اگر f و g توابعی اندازه‌پذیر وکراندار در $[a, b]$ باشند، آنگاه $f+g\in\mathcal{L}[a, b]$، و

$$\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g\cdot$$

نتیجهٔ بعدی یکی از برتریهای عمدهٔ انتگرال‌لبگ را نسبت به‌انتگرال ریمان نشان می‌دهد. اگر f یك تابع اندازه‌پذیرکراندار (و درنتیجه انتگرالپذیر لبگ) در $[a, b]$ باشد، آنگاه تعویض مقادیر f در مجموعه‌ای صفر اندازه در انتگرالپذیری (لبگ) f یا در مقدار انتگرال $\int_a^b f$ تأثیری‌ندارد. ازطرف دیگر، تعویض‌مقادیر یك‌تابع‌انتگرالپذیر

ریمان در یك مجموعهٔ صفر اندازه، ممکن است انتگرالپذیری ریمان تابع را نقض کند. برای مثال اگر $f(x)=۱ (۰\leqslant x\leqslant ۱)$ و اگر χ تابع مشخصهٔ اعداد گنگ بازهٔ $[۰, ۱]$ باشد، آنگاه χ را می‌توان با تعویض مقادیر f در یك مجموعهٔ صفر اندازه، یعنی مجموعهٔ اعداد گویای بازهٔ $[۰, ۱]$، به‌دست آورد. ولی f انتگرالپذیر ریمان است درحالی‌که χ انتگرالپذیر ریمان نیست.)

۴.۶.۱۱. قضیه. اگر f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a, b]$ باشد، و اگر g یك تابع کراندار در $[a, b]$ باشد، به‌طوری که

$$f(x)=g(x) \qquad \text{تقریباً همه‌جا در } [a, b]؛$$

آنگاه $g\in\mathcal{L}[a, b]$ و

$$\int_a^b g=\int_a^b f.$$

برهان: بنابر ۴.۴.۱۱، g اندازه‌پذیر است. چون g کراندار است از ۹.۵.۱۱ نتیجه می‌شود که g انتگرالپذیر است. اگر E مجموعهٔ xهایی در $[a, b]$ باشد که $f(x)\neq g(x)$، آنگاه بنا به‌فرض $m(E)=۰$. اکنون اگر $E'=[a, b]-E$، آنگاه به‌ازای $x\in E'$ داریم $f(x)=g(x)$. اگر $P=\{E, E'\}$، آنگاه

$$\begin{aligned}U[g-f; P]&=M[g-f; E]\cdot mE+M[g-f; E']\cdot mE'\\&=M[g-f; E]\cdot ۰+۰\cdot mE'=۰\end{aligned}$$

به‌همین‌ترتیب، $L[g-f; P]=۰$. چون

$$۰=L[g-f; P]\leqslant\int_a^b(g-f)\leqslant U[g-f; P]=۰,$$

داریم

$$\int_a^b(g-f)=۰.$$

درنتیجه،

$$\int_a^b g=\int_a^b(g-f)+\int_a^b f=۰+\int_a^b f,$$

و قضیه ثابت می‌شود.

از ۴.۶.۱۱ فوراً نتیجه می‌شود که یك تابع کراندار که تقریباً همه جا برابر صفر است، انتگرالپذیر لبگ و مقدار انتگرالش صفر است.

۵.۶.۱۱. قضیه. اگر f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a, b]$ باشد و اگر
تقریباً همه‌جا در $[a, b]$، $f(x) \geqslant 0,$
آنگاه

$$\int_a^b f \geqslant 0.$$

برهان: بنابر ۴.۶.۱۱، می‌توان فرض کرد که به‌ازای هر $x \in [a, b]$، $f(x) \geqslant 0$. (زیرا این فقط مستلزم تعویض مقادیر f در یك مجموعهٔ صفر اندازه است و بنابراین برمقدار $\int_a^b f$ تأثیری ندارد.) ولی در این صورت آشکار است که به ازای هر افراز اندازه‌پذیر P، $U[f; P] \geqslant 0$، ودرنتیجه

$$\overline{\mathfrak{L}\int_a^b f} = \underset{P}{\text{g.l.b.}}\, U[f; P] \geqslant 0.$$

چون f انتگرالپذیر است داریم

$$\int_a^b f = \overline{\mathfrak{L}\int_a^b f} \geqslant 0,$$

وقضیه ثابت می‌شود.

اکنون می‌توان مطلب بعدی را، عیناً همان‌طور که ۵.۴.۷ از ۴.۴.۷ به‌دست آمد، نتیجه‌گرفت.

۶.۶.۱۱. نتیجه. اگر f و g توابعی اندازه‌پذیر وکراندار در $[a, b]$ باشندواگر
تقریباً همه‌جا در $[a, b]$ $\quad f(x) \leqslant g(x)$
آنگاه

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

از ۶.۶.۱۱، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید.

۷.۶.۱۱. نتیجه. اگر f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a, b]$ باشد، آنگاه $|f| \in \mathfrak{L}[a, b]$، و

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

برهان: چون $|f| = \max(f, 0) - \min(f, 0)$، از ۷.۴.۱۱ و ۶.۴.۱۱

نتیجه می‌شود که $|f|$ اندازه‌پذیر است. چون $|f|$ کراندار هم هست، انتگرالپذیر است. بقیهٔ برهان مانند ۶.۴.۷ است.

۸.۶.۱۱. تعریف. اگر $b<a$ و f در $[b, a]$ انتگرالپذیر باشد آنگاه $\int_a^b f$ را $-\int_b^a f$ تعریف می‌کنیم.

۹.۶.۱۱. برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم که ثابت کند بدون توجه به ترتیب a، b، و c داریم

$$\int_a^c f+\int_c^b f=\int_a^b f.$$

۱۰.۶.۱۱. تعریف. اکنون تعریف $\int_E f$ را که درآن f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a, b]$ و E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ است خواهیم آورد. توجه داشته باشید که در این وضعیت تابع $f\chi_E$ در $[a, b]$ کراندار و اندازه‌پذیر و در نتیجه انتگرالپذیر است. (بدیهی است که χ_E تابع مشخصهٔ E است.)

تعریف: اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد و اگر f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a, b]$ باشد، آنگاه $\int_E f$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\int_E f=\int_a^b f\chi_E.$$

پس $\int_E f$ دارای همان ویژگیهای مقدماتی است که درمورد $\int_a^b f$ ثابت کرده‌ایم. اکنون فهرستی از این ویژگیها را ذکر کرده سپس نکاتی را دربارهٔ نحوهٔ اثبات آنان خاطرنشان می‌کنیم.

۱۱.۶.۱۱. قضیه.

۱. اگر E_1 و E_2 زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزای $[a, b]$ باشند، و اگر f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a, b]$ باشد، آنگاه

$$\int_{E_1\cup E_2} f=\int_{E_1} f+\int_{E_2} f.$$

۲. اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد، واگر f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a, b]$ باشد، و اگر $\lambda\in R$، آنگاه

$$\int_E \lambda f = \lambda \int_E f.$$

۰۳ اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد، و اگر f و g توابعی اندازه‌پذیر و کراندار در $[a, b]$ باشند، آنگاه

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$

۰۴ اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد، و اگر f و g توابعی اندازه‌پذیر و کراندار در $[a, b]$ باشند، به‌طوری که

$$f(x) = g(x) \qquad \text{تقریباً همه‌جا در } E$$

آنگاه

$$\int_E f = \int_E g.$$

۰۵ اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a,b]$ باشد، و اگر f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a, b]$ باشد، به‌طوری که تقریباً همه‌جا در E، $f(x) \geqslant 0$، آنگاه

$$\int_E f \geqslant 0.$$

۰۶ اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد، اگر f و g توابعی اندازه‌پذیر و کراندار در $[a, b]$ باشند، و اگر تقریباً همه‌جا در E، $f(x) \leqslant g(x)$، آنگاه

$$\int_E f \leqslant \int_E g.$$

برهان: به‌عنوان مثال، برای اثبات (۱) توجه کنید که $\chi_{E_1 \cup E_2} = \chi_{E_1} + \chi_{E_2}$. زیرا که E_1 و E_2 مجزا هستند، درنتیجه $f\chi_{E_1 \cup E_2} = f\chi_{E_1} + f\chi_{E_2}$ و بنابراین، با استفاده از ۱۰.۶.۱۱ و ۳.۶.۱۱ داریم

$$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_a^b f\chi_{E_1 \cup E_2} = \int_a^b (f\chi_{E_1} + f\chi_{E_2})$$

$$= \int_a^b f\chi_{E_1} + \int_a^b f\chi_{E_2} = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f.$$

این (۱) را ثابت می‌کند.

برای اثبات (۴) توجه کنید که اگر تقریباً برای هر x در E، $f(x) = g(x)$، آنگاه

تقریباً همه‌جا در $[a, b]$،
$$f(x)\chi_E(x)=g(x)\chi_E(x)$$
ولی، بنابر ۱۱.۶.۴،
$$\int_a^b f\chi_E=\int_a^b g\chi_E.$$
پس، بنابر ۱۱.۶.۱۰،
$$\int_E f=\int_E g.$$
این (۴) را ثابت می‌کند. بقیهٔ گزاره‌ها هم به‌همین سادگی نتیجه می‌شوند.

۱۱.۶.۱۲. قضیه. اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد، آنگاه*
$$\int_E 1=mE.$$

برهان: داریم
$$\int_E 1=\int_a^b \chi_E. \tag{۱}$$
اگر $E'=[a, b]-E$، و اگر $P=\{E, E'\}$، به‌آسانی می‌توان نشان داد که $U[\chi_E; P]=mE=L[\chi_E; P]$. درنتیجه
$$mE=L[\chi; P]\leqslant\int_a^b \chi_E\leqslant U[\chi; P]=mE,$$
و بنابراین
$$\int_a^b \chi_E=mE. \tag{۲}$$
قضیه از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

نتیجهٔ بعدی کاملا مفید است.

۱۱.۶.۱۳. قضیه. اگر f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a, b]$ باشد به‌طوری که تقریباً همه‌جا در E، $f(x)\geqslant 0$، و اگر

---

* البته، $\int_E 1$ به‌معنی $\int_E f$ است که در آن $f(x)=1\,(a\leqslant x\leqslant b)$.

$$\int_a^b f = \circ, \tag{۱}$$

آنگاه تقریباً همه‌جا در $[a, b]$، $f(x) = \circ$.

برهان: فرض کنیم قضیه برقرار نباشد، در این‌صورت مجموعهٔ $E = \{x : f(x) > \circ\}$ اندازه‌پذیر خواهد بود و $mE > \circ$. اکنون $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ که در آن $E_n = \{x : f(x) > 1/n\}$. چون هر E_n اندازه‌پذیر است و $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$، از ۶.۳.۱۱ نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty} mE_n = mE$، و بنابراین $\lim_{n\to\infty} mE_n > \circ$. پس عدد $N \in I$ وجود دارد به‌طوری که $mE_N > \circ$. ولی دراین‌صورت

$$\int_a^b f \geqslant \int_a^b f\chi_{E_N} = \int_{E_N} f \geqslant \int_{E_N} \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \cdot mE_N > \circ.$$

این با (۱) متناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که قضیه برقرار است.

سرانجام نشان می‌دهیم که هر تابع کراندار انتگرالپذیر لبگ، اندازه‌پذیر است.

۱۴.۶.۱۱ قضیه. اگر f کراندار باشد و $f \in \mathcal{L}[a, b]$، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

برهان: بنابر ۸.۵.۱۱، به‌ازای هر $n = 1, 2, \dots$، یك افراز اندازه‌پذیر $[a, b]$ مانند P_n وجود دارد به‌طوری که

$$U[f; P_n] - L[f; P_n] < \frac{1}{n}. \tag{۱}$$

می‌توانیم فرض کنیم که P_{n+1} یك تظریف P_n است. (زیرا درغیر این‌صورت می‌توانیم اشتراك مؤلفه‌های P_n با مؤلفه‌های P_{n+1} را تشکیل دهیم و افراز P'_{n+1} را بسازیم که تظریفی از هردوی P_n و P_{n+1} است. آنگاه خواهیم داشت

$$L[f; P_{n+1}] \leqslant L[f; P'_{n+1}] \leqslant U[f; P'_{n+1}] \leqslant U[f; P_{n+1}],$$

به‌طوری که

$$U[f; P'_{n+1}] - L[f; P'_{n+1}] \leqslant U[f; P_{n+1}] - L[f; P_{n+1}] < \frac{1}{n+1}.$$

بنابراین P'_{n+1} تظریفی از P_n است که در (۱) صدق می‌کند.)

به‌ازای n ثابت فرض می‌کنیم $P_n = \{E_n^1, E_n^2, \dots, E_n^k\}$. می‌توانیم فرض کنیم که

E_nها دوبه‌دو مجزا هستند. توابع g_n و h_n را در $[a, b]$ با روابط

$$h_n(x) = M[f; E_n^j] \qquad (x \in E_n^j;\ j = 1, \cdots, k_\circ)$$

$$g_n(x) = m[f; E_n^j] \qquad (x \in E_n^j;\ j = 1, \cdots, k_\circ)$$

تعریف می‌کنیم، به‌طوری که

$$g_n(x) \leqslant f(x) \leqslant h_n(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

g_n و h_n هردو اندازه‌پذیرند. زیرا که درهر E_n^j ثابت هستند. از این گذشته چون P_{n+1} تظریفی از P_n است، به‌ازای هر $n = 1, 2, \ldots$ و هر $x \in [a, b]$ داریم

$$g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x), \qquad h_n(x) \geqslant h_{n+1}(x).$$

بنابر ۲.۶.۲ و ۵.۶.۲ دنباله‌های توابع $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ همگرای نقطه‌ای هستند. اگر

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

$$h(x) = \lim_{n \to \infty} h_n(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

آنگاه بنابر ۹.۴.۱۱، g و h اندازه‌پذیرند و

$$g_n(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant h_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ a \leqslant x \leqslant b). \quad (2)$$

درنتیجه

$$\int_a^b g_n \leqslant \int_a^b g \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b h \leqslant \int_a^b h_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (3)$$

ولی در E_n^j، $h_n = M[f; E_n^j]$، پس، بنابر ۱۱.۶.۱۱،

$$\int_a^b h_n = \int_{E_n^1} h_n + \cdots + \int_{E_n^k} h_n = M[f; E_n^1] \cdot mE_n^1 + \cdots + M[f; E_n^k] \cdot mE_n^k$$

درنتیجه

$$\int_a^b h_n = U[f; P_n]. \qquad (4)$$

همچنین

$$\int_a^b g_n = L[f; P_n]. \qquad (5)$$

از (۱)، (۴) و (۵) داریم

$$\int_a^b h_n - \int_a^b g_n < \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

سپس، با استفاده از (۳) داریم

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

درنتیجه، $\int_a^b (h-g) = 0$. چون برای همهٔ xها، $g(x) \leqslant h(x)$، از ۱۳.۶.۱۱ نتیجه می‌شود که تقریباً همه‌جا $g(x) = h(x)$، پس، بنابر (۲)، تقریباً همه‌جا $f(x) = h(x)$. ولی دراین‌صورت، چون h اندازه‌پذیر است، بنابر ۴.۴.۱۱، f اندازه‌پذیر است و برهان کامل می‌شود.

باتوجه به ۹.۵.۱۱ و ۱۴.۶.۱۱ مشاهده می‌کنیم که اگر f یك تابع کراندار در $[a, b]$ باشد، آنگاه $f \in \mathcal{L}[a, b]$، اگر وتنها اگر f اندازه‌پذیر باشد.

تمرینهای ۶.۱۱

۱. اگر $f \in \mathcal{L}[a, b]$، واگر $E \subseteq [a, b]$ و $mE = 0$، نشان‌دهید که

$$\int_E f = 0.$$

۲. اگر E_1 و E_2 زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشند، واگر $f \in \mathcal{L}[a, b]$، ثابت کنید که

$$\int_{E_1} f + \int_{E_2} f = \int_{E_1 \cup E_2} f + \int_{E_1 \cap E_2} f.$$

۳. اگر f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a, b]$ باشد، واگر $\int_a^b [f(x)]^2 dx = 0$، ثابت کنید که تقریباً به‌ازای هر $x \in [a, b]$، $f(x) = 0$.

۴. جزئیات برهانهای ۴.۶.۱۱ و ۷.۶.۱۱ را بنویسید.

۵. اگر f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a, b]$ باشد به‌طوری‌که تقریباً همه‌جا در E، $f(x) \geqslant 0$، واگر E و F زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[a,b]$ باشند به‌طوری‌که $E \subseteq F$، ثابت کنید که

$$\int_E f \leqslant \int_F f.$$

۰۶ اگر $E_۱$، $E_۲$، ...، E_n زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر [۰,۱] باشند، و اگر هر نقطهٔ بازهٔ [۰,۱] اقلاً به‌سه‌تا از این‌مجموعه‌ها متعلق باشد، نشان‌دهید که اندازهٔ اقلاً یکی از این مجموعه‌ها بزرگتر از $۳/n$ یا مساوی $۳/n$ است. [راهنمایی: اگر $\chi_۱$، $\chi_۲$، ...، χ_n توابع مشخصهٔ مجموعه‌های $E_۱$، $E_۲$، ...، E_n باشند، ابتدا نشان‌دهید که

$$\chi_۱(x)+\cdots+\chi_n(x)\geqslant ۳ \qquad (۰\leqslant x\leqslant ۱).$$

۷.۱۱ انتگرال لبگ توابع بیکران

اکنون تعریف انتگرال لبگ را به‌دستهٔ بزرگی‌ازتوابع اندازه‌پذیر بیکران توسعه‌می‌دهیم. ابتدا توابع نامنفی‌را بررسی می کنیم.

۰۱.۷.۱۱ تعریف. اگر f یك تابع نامنفی در $[a, b]$ باشد، و اگر $n\in I$، تابع ^nf را در $[a, b]$ به‌صورت زیر تعریف می کنیم: به‌ازای هر $x\in[a, b]$

$$^nf(x)=f(x) \qquad (۰\leqslant f(x)\leqslant n),$$

$$^nf(x)=n \qquad (f(x)>n).$$

یعنی

$$^nf(x)=\min[f(x), n] \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

بنابراین نمودار f^n از «پیراستن» نمودار f به‌دست می‌آید. برای مثال، اگر

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} \qquad (۰<x\leqslant ۱),$$

$$f(۰)=۰,$$

آنگاه

$$^۴f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} \qquad \left(\frac{۱}{۶۴}\leqslant x\leqslant ۱\right),$$

$$^۴f(x)=۴ \qquad \left(۰<x<\frac{۱}{۶۴}\right),$$

$$^۴f(۰)=۰.$$

۰۲.۷.۱۱ اکنون فرض می کنیم که f یك تابع اندازه‌پذیر بیکران و نامنفی باشد.

در این‌صورت، برای هر $n\in I$، تابع ^nf یك تابع کراندار و بنابر ۷.۴.۱۱ یك تابع اندازه‌پذیر است. در نتیجه بنابر ۹.۵.۱۱، ^nf انتگرالپذیر لبگ است. بنابراین، آشکار است که

$$\left\{\int_a^b {}^nf\right\}_{n=1}^{\infty}$$

یك دنبالهٔ غیرنزولی از اعداد حقیقی است، و در نتیجه، یا همگراست یا واگرا به بینهایت.

تعریف. اگر f یك تابع نامنفی اندازه‌پذیر بیکران در $[a, b]$ باشد واگر

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b {}^nf$$

وجود داشته‌باشد، آنگاه می‌گوییم که f در $[a,b]$ انتگرالپذیر (لبگ) است و $\int_a^b f$ را

$$\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b {}^nf$$

تعریف می‌کنیم. اگر f انتگرالپذیر لبگ باشد می‌نویسیم $f\in\mathscr{L}[a, b]$.

اگر f همان تابع مثال بعد از ۱.۷.۱۱ باشد، آنگاه*

$$\int_0^1 {}^nf=\int_{1/n^3}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx+\int_0^{1/n^3} n\,dx=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2n^2}\right)+\frac{1}{n^2}.$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 {}^nf=\frac{3}{2}.$$

دراین‌صورت، بنا به‌تعریف، می‌گوییم که f در $[0,1]$ انتگرالپذیر است و

$$\int_0^1 f=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\frac{3}{2}.$$

درنتیجه، اگرچه

---

* مقدار ^nf در ۰ تأثیری در محاسبات ندارد (۴.۶.۱۱).

$$\int_{\circ}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

یک انتگرال ریمان ناسره است، ولی به‌عنوان یک انتگرال لبگ کاملا «سره» است، هرچندکه تابع زیر انتگرال بیکران است. توجه کنیدکه اگر این‌انتگرال را به‌عنوان‌یک انتگرال ریمان ناسره درنظر بگیرید بازهم مقدارش ۳/۲ است.

برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم که نشان‌دهد که اگر $f(x)=1/x \ (\circ<x\leqslant 1)$، $f(\circ)=19$، آنگاه f در $[\circ, 1]$ انتگرالپذیر نیست.

با استفاده از ۲.۷.۱۱، می‌توان به‌آسانی نشان‌دادکه اگر f یك تابع اندازه‌پذیر نامنفی در $[a, b]$ باشد، واگر

$$f(x)\leqslant g(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

که در آن $g\in\mathcal{L}[a, b]$، آنگاه f هم در $\mathcal{L}[a, b]$ است. (تمرین ۳ را ببینید.)

اگر f یك تابع اندازه‌پذیر کراندار نامنفی در $[a, b]$ باشد، آنگاه برای nهایی که به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشند داریم $f={}^{n}f$. بنابراین معادلهٔ

$$\int_{a}^{b} f=\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b} {}^{n}f$$

برای توابع کراندار هم برقرار است.

برای اینکه انتگرال‌لبگ را برای توابع اندازه‌پذیر درحالت‌کلی تعریف‌کنیم، نشان می‌دهیم‌که هر تابع اندازه‌پذیر را می‌توان به‌صورت تفاضل دو تابع اندازه‌پذیر نامنفی نوشت.

۳.۷.۱۱. تعریف. اگر f تابع حقیقی دلخواهی در $[a,b]$ باشد، توابع f^{+} و f^{-} را، که به ترتیب قسمتهای مثبت و منفی f نامیده می‌شوند، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{+}=\max(f, \circ),$$

$$f^{-}=\max(-f, \circ)$$

یك عنصر $x\in[a, b]$ را درنظربگیرید. اگر $f(x)>\circ$، آنگاه $f^{+}(x)=f(x)$ و $f^{-}(x)=\circ$. اگر $f(x)<\circ$، آنگاه $f^{+}(x)=\circ$ و $f^{-}(x)=-f(x)$. اگر $f(x)=\circ$، آنگاه $f^{+}(x)=f^{-}(x)=\circ$. با توجه به‌این نکته‌ها آشکار است که نتیجهٔ

زیر برقرار است.

۴۰۷۰۱۱. نتیجه. اگر f تابع حقیقی دلخواهی در $[a, b]$ باشد، آنگاه

$$f=f^{+}-f^{-}\ ,\ \ |f|=f^{+}+f^{-}.$$

با توجه به ۳۰۷۰۱۱، آشکار است که f^{+} و f^{-} نامنفی هستند (هرچند که f^{-} قسمت منفی f نامیده می‌شود). نمودار f^{+} متشکل است از قسمتهایی از نمودار f که بالای محور xها واقع‌اند، به‌انضمام قسمتهایی از محور xها. نمودار f^{-} به‌روشی مشابه از نمودار $-f$ به‌دست می‌آید.

به‌عنوان مثال، اگر

$$f(x)=x^{۲}-۱ \qquad (-۲\leqslant x\leqslant ۲)$$

آنگاه

$$f^{+}(x)=f(x) \qquad (-۲\leqslant x\leqslant -۱),$$
$$f^{+}(x)=۰ \qquad (-۱< x< ۱),$$
$$f^{+}(x)=f(x) \qquad (۱\leqslant x\leqslant ۲).$$

همچنین

$$f^{-}(x)=-f(x) \qquad (-۱< x< ۱),$$
$$f^{-}(x)=۰ \qquad (-۲\leqslant x\leqslant -۱, \text{ یا } ۱\leqslant x\leqslant ۲).$$

۵۰۷۰۱۱. اکنون اگر تابع حقیقی f در $[a, b]$ اندازه‌پذیر باشد، از ۷۰۴۰۱۱ نتیجه می‌شود که f^{+} و f^{-} هم اندازه‌پذیرند. همچنین f^{+} و f^{-} نامنفی هستند. درنتیجه، به‌وسیلهٔ تعریفهای قبلی می‌توان مشخص کرد که f^{+} و f^{-} انتگرالپذیر هستند یا نه. به‌این ترتیب به‌تعریف انتگرال لبگ توابع دلخواه اندازه‌پذیر که در زیر می‌آید می‌رسیم.

تعریف. فرض‌کنیم f یك تابع اندازه‌پذیر در $[a, b]$ باشد. اگر هردوی f^{+} و f^{-} در $[a, b]$ انتگرالپذیر لبگ باشند آنگاه می‌گوییم که f در $[a, b]$ انتگرالپذیر لبگ است. در این‌حالت می‌نویسیم $f\in\mathcal{L}[a, b]$، و $\int_a^b f$ را به‌صورت‌زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^b f=\int_a^b f^{+}-\int_a^b f^{-} \qquad (*)$$

بر عهدهٔ خواننده می‌گذاریم نشان‌دهدکه اگر f کراندار باشد آنگاه (*) با نتایج قبلی سازگار است.

بنابراین ردهٔ $\mathcal{L}[a, b]$ شامل همهٔ توابع اندازه‌پذیر کراندار است و به‌علاوه، شامل همهٔ توابع اندازه‌پذیر بیکران مانند f است به‌طوری‌که هردوی f^+ و f^- بر طبق تعریفهای ۲.۷.۱۱ یا ۶.۵.۱۱ انتگرالپذیر باشند.* توجه‌کنید که از گزارهٔ $f \in \mathcal{L}[a,b]$ اندازه‌پذیری f نتیجه می‌شود!!

بسیاری از ویژگیهای مقدماتی انتگرال لبگ برای توابع دلخواه اندازه‌پذیر را به‌آسانی می‌توان با استفاده از نتایج متناظر برای توابع کراندار اثبات کرد. (البته اثبات بعضی از این نتایج درمورد توابع بیکران کار زیادی می‌برد.) بیشتر این ویژگیها را در مورد انتگرالهای در یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ مانند E اثبات خواهیم کرد.

اگر f یك تابع اندازه‌پذیر نامنفی در $[a, b]$ باشد، و اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد، آنگاه، برای هر $n \in I$، به‌آسانی می‌توان نشان‌داد‌که

$$^n f \cdot \chi_E = {}^n(f\chi_E).$$

با انتگرالگیری از طرفین داریم

$$\int_E {}^n f = \int_a^b {}^n(f\chi_E). \tag{۱}$$

اگر $f \in \mathcal{L}[a, b]$، آنگاه هیچ‌یك از دوطرف (۱) از $\int_a^b f$ بزرگتر نیستند. پس، وقتی که $n \to \infty$، حد هریك از دوطرف (۱) وجود دارد. بنابراین داریم

$$\lim_{n\to\infty} \int_E {}^n f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b {}^n(f\chi_E).$$

ولی بنابر تعریف ۲.۷.۱۱، مقدار طرف راست برابر $\int_a^b f\chi_E$ است. پس

$$\lim_{n\to\infty} \int_E {}^n f = \int_a^b f\chi_E. \tag{۲}$$

بنابراین هریك از دوطرف (۲) را می‌توان برای تعریف $\int_E f$ به‌کار برد، که در آن f یك تابع نامنفی اندازه‌پذیر در $\mathcal{L}[a, b]$ است ولازم نیست‌کراندار باشد.

۶.۷.۱۱. تعریف. اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد، و اگر f یك

* اگر f بیکران باشد، ممکن است یکی از توابع f^+، f^- (ولی نه‌هردو) کراندار باشد.

تابع نامنفی در $\mathcal{L}[a, b]$ باشد، آنگاه $\int_E f$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_E f = \int_a^b f\chi_E = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_E {}^n f.$$

از این گذشته، اگر f یك تابع دلخواه اندازه‌پذیر در $\mathcal{L}[a,b]$ باشد، آنگاه $\int_E f$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

اکنون به‌ویژگیهای این انتگرال می‌پردازیم.

۱۱.۷.۷. قضیه. اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر دلخواه $[a, b]$ باشد، و اگر $f \in \mathcal{L}[a, b]$ و $g \in \mathcal{L}[a, b]$، و اگر

(۱) تقریباً همه‌جا در E، $\quad f(x) = g(x)$

آنگاه

$$\int_E f = \int_E g.$$

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم که f و g نامنفی باشند. از (۱) نتیجه‌می‌شود که، برای هر $n \in I$، تقریباً همه‌جا در E، ${}^n f(x) = {}^n g(x)$. سپس، بنا بر (۴) از بند ۱۱.۶.۱۱، داریم

$$\int_E {}^n f = \int_E {}^n g.$$

اگر $n \rightarrow \infty$، با استفاده از ۱۱.۷.۶، داریم

$$\int_E f = \int_E g.$$

درنتیجه، قضیه برای حالتی که f و g نامنفی باشند برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم که f و g توابع دلخواهی در $\mathcal{L}[a, b]$ باشند، به‌طوری که (۱) برقرار باشد. آنگاه تقریباً همه‌جا در E، $f^+(x) = g^+(x)$. سپس، بنا برقسمت اول برهان داریم

$$\int_E f^+ = \int_E g^+.$$

به‌همین ترتیب،

$$\int_E f^- = \int_E g^- \cdot$$

در نتیجه

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g \cdot$$

و برهان کامل می‌شود.

برهان ۷.۷.۱۱ الگوی برهان بسیاری از قضیه‌های مربوط به‌ویژگیهای انتگرال لبگ برای توابع دلخواه اندازه‌پذیر را روشن می‌کند. این‌نمونه به‌صورت زیر است: یك ویژگی P برای انتگرال توابع اندازه‌پذیر کراندار برقرار است. با شیوهٔ حدگیری نشان می‌دهیم که ویژگی P برای انتگرال‌توابع اندازه‌پذیر نامنفی (که ممکن‌است بیکران باشند) برقرار است. سرانجام به‌وسیلهٔ معادلهٔ

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-,$$

نشان می‌دهیم که P برای انتگرال توابع دلخواه اندازه‌پذیر در $\mathcal{L}[a, b]$ برقرار است.
این الگو را می‌توان برای اثبات دو قضیهٔ زیر به‌کار برد.

۸.۷.۱۱. قضیه. اگر E_1 و E_2 زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزای $[a,b]$ باشند، واگر $f \in \mathcal{L}[a, b]$، آنگاه

$$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f \cdot$$

۹.۷.۱۱. قضیه. اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد، و λ عددی حقیقی دلخواه باشد، واگر $f \in \mathcal{L}[a, b]$، آنگاه $\lambda f \in \mathcal{L}[a, b]$ و

$$\int_E \lambda f = \lambda \int_E f \cdot$$

۱۰.۷.۱۱. تعمیم قسمت (۳) از قضیهٔ ۱۱.۶.۱۱ به توابع دلخواه در $\mathcal{L}[a, b]$ آسان نیست. ابتدا به‌یك لم احتیاج داریم.

لم. اگر f و g توابع نامنفی در $[a, b]$ باشند، و اگر $f, g \in \mathcal{L}[a, b]$، آنگاه $f + g \in \mathcal{L}[a, b]$ و

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{۱}$$

همچنین، $f-g \in \mathcal{L}[a, b]$ و

$$\int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g. \tag{۲}$$

برهان: فرض کنیم $h = f+g$، بنابراین h نامنفی و اندازه‌پذیـر است، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که، برای هر $n \in I$،

$$^n h(x) \leqslant {}^n f(x) + {}^n g(x) \leqslant {}^{2n} h(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

آنگاه، با استفاده از (۶) و (۳) از ۱۱.۶.۱۱ داریم

$$\int_a^b {}^n h \leqslant \int_a^b {}^n f + \int_a^b {}^n g \leqslant \int_a^b {}^{2n} h \tag{۳}$$

چون

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b {}^n f = \int_a^b f \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \int_a^b {}^n g = \int_a^b g$$

نتیجه می گیریم که

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b {}^n h$$

وجود دارد. بنابراین $h = f+g \in \mathcal{L}[a, b]$. اگر درنابرابری (۳)، n به‌بینهایت میل کند داریم

$$\int_a^b h \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g \leqslant \int_a^b h$$

درنتیجه،

$$\int_a^b h = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

که دقیقاً همان (۱) است.

برای اثبات قسمت دوم لم اگر $k = f-g$ و

$$E_1 = \{x \in [a, b] : k(x) \geqslant 0\},$$

آنگاه، برای $x \in E_1$، مقادیر $f(x)$، $g(x)$ و $k(x)$ همگی نامنفی هستند. درنتیجه، $f\chi_{E_1}$،

$g\chi_{E_1}$، $k\chi_{E_1}$ در $[a, b]$ نامنفی هستند. همچنین

$$f\chi_{E_1} = g\chi_{E_1} + k\chi_{E_1} \tag{۴}$$

این نشان می‌دهد که، برای هر $x \in [a, b]$، $k\chi_{E_1}(x) \leqslant f\chi_{E_1}(x)$، که در نتیجه $k\chi_{E_1} \in \mathcal{L}[a, b]$. بنابرقسمت اول قضیه اگر در رابطهٔ (۴) از a تا b انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$\int_a^b f\chi_E = \int_a^b g\chi_{E_1} + \int_a^b k\chi_{E_1}.$$

ولی (بنابرتعریف $k\chi_{E_1} = k^+(E_1$. پس $k^+ \in \mathcal{L}[a, b]$ و داریم

$$\int_a^b f\chi_{E_1} = \int_a^b g\chi_{E_1} + \int_a^b k^+. \tag{۵}$$

اکنون اگر $E_2 = \{x \in [a, b] : k(x) < 0\}$، آنگاه برای $x \in E_2$، مقادیر $f(x)$، $g(x)$ و $-k(x)$ نامنفی هستند. همچنین

$$g\chi_{E_2} = f\chi_{E_2} + (-k\chi_{E_2}).$$

چون $-k\chi_{E_2} = k^-$، $k^- \in \mathcal{L}[a, b]$ و

$$\int_a^b g\chi_{E_2} = \int_a^b f\chi_{E_2} + \int_a^b k^-. \tag{۶}$$

ولی، بنابر (۱)،

$$\int_a^b f\chi_{E_1} + \int_a^b f\chi_{E_2} = \int_a^b f(\chi_{E_1} + \chi_{E_2}) = \int_a^b f.$$

همچنین،

$$\int_a^b g\chi_{E_1} + \int_a^b g\chi_{E_2} = \int_a^b g.$$

همچنین، چون $k^+, k^- \in \mathcal{L}[a, b]$، نتیجه می‌گیریم که $k \in \mathcal{L}[a, b]$ و

$$\int_a^b k = \int_a^b k^+ - \int_a^b k^-.$$

با تفریق (۶) از (۵) خواهیم داشت

$$\int_a^b (f-g) = \int_a^b k = \int_a^b f - \int_a^b g.$$

این برهان را کامل می‌کند.

اکنون برای توابع دلخواه f و g ثابت می‌کنیم که

$$\int_E (f+g)=\int_E f+\int_E g.$$

به‌بیان دقیقتر:

۱۱۰۷۰۱۱ قضیه. اگر E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد و اگر $f, g\in\mathcal{L}[a, b]$، آنگاه $f+g\in\mathcal{L}[a, b]$ و

$$\int_E (f+g)=\int_E f+\int_E g. \tag{۱}$$

برهان: بنا بر تعریف ۵۰۷۰۱۱، توابع f^+، f^-، g^+، g^- همگی در $\mathcal{L}[a,b]$ هستند. اگر $h=f+g$، آنگاه $h=(f^+-f^-)+(g^+-g^-)$ و بنابراین، $h=(f^++g^+)-(f^-+g^-)$. اکنون، بنابر قسمت اول لم ۱۰۰۷۰۱۱، هردوی (f^++g^+) و (f^-+g^-) در $\mathcal{L}[a,b]$ هستند. پس بنا بر قسمت دوم لم ۱۰۰۷۰۱۱، $h\in\mathcal{L}[a, b]$. بنا براین داریم

$$\int_a^b h=\int_a^b[(f^++g^+)-(f^-+g^-)]=\int_a^b(f^++g^+)-\int_a^b(f^-+g^-)$$
$$=\int_a^b f^++\int_a^b g^+-\int_a^b f^--\int_a^b g^-$$
$$=\left(\int_a^b f^+-\int_a^b f^-\right)+\left(\int_a^b g^+-\int_a^b g^-\right).$$

یعنی،

$$\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g. \tag{۲}$$

اکنون اگر در (۲)، f و g را با $f\chi_E$ و $g\chi_E$ تعویض کنیم (۱) به‌دست می‌آید.

سپس از ۱۱۰۷۰۱۱ و ۹۰۷۰۱۱ نتیجه می‌شود که

$$\int_E (f-g)=\int_E f-\int_E g$$

(تحت شرایط ۱۱۰۷۰۱۱).

اکنون تعمیم دوقضیهٔ دیگر را که قبلا برای‌توابع اندازه‌پذیر کراندار اثبات شده بودند،

ثابت می‌کنیم.

۱۲.۷.۱۱. قضیه. اگر E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد، اگر $f, g \in \mathcal{L}[a, b]$ و اگر تقریباً همه‌جا در E، $f(x) \leqslant g(x)$ آنگاه

$$\int_E f \leqslant \int_E g$$

برهان: بنا به‌فرض داریم، برای هر $n \in I$، تقریباً همه‌جا در E، $^n f(x) \leqslant {}^n g(x)$.
پس، بنابر (۶) از ۱۱.۶.۱۱ داریم

$$\int_E {}^n f \leqslant \int_E {}^n g.$$

با میل‌دادن n به ∞ قضیه نتیجه می‌شود.

برهان قضیهٔ بعدی به‌همین آسانی است وحذف می‌شود.

۱۳.۷.۱۱. قضیه. اگر $f \in \mathcal{L}[a,b]$، اگر تقریباً همه‌جا در $[a,b]$، $f(x) \geqslant 0$، واگر

$$\int_a^b f = 0,$$

آنگاه تقریباً همه‌جا در $[a, b]$، $f(x) = 0$.
آخرین نتیجهٔ این بخش دارای اهمیت ویژه‌ای است.

۱۴.۷.۱۱. قضیه. اگر f یک‌تابع اندازه‌پذیر در $[a,b]$ باشد، آنگاه $f \in \mathcal{L}[a,b]$، اگر وتنها اگر $|f| \in \mathcal{L}[a, b]$. از این گذشته، اگر $f \in \mathcal{L}[a, b]$، آنگاه

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

برهان: اگر $f \in \mathcal{L}[a,b]$، آنگاه، بنابر ۵.۷.۱۱، هردوی f^+ و f^- در $\mathcal{L}[a,b]$ هستند. ولی بنابر ۴.۷.۱۱، $|f| = f^+ + f^-$. درنتیجه، بنابر ۱۱.۷.۱۱، $|f| \in \mathcal{L}[a,b]$.
آنگاه، نابرابری

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^a |f|$$

همان‌گونه که در برهان ۶.۴.۷ آمده است، ثابت می‌شود.
برعکس، فرض‌کنیم f اندازه‌پذیر باشد وفرض‌کنیم که $|f| \in \mathcal{L}[a, b]$. ازآنجا که

$$\circ \leqslant f^{+}(x) \leqslant |f(x)| \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

نتیجه می‌گیریم که $f^{+} \in \mathcal{L}[a, b]$. همچنین $f^{-} \in \mathcal{L}[a, b]$. از این‌رو $f \in \mathcal{L}[a, b]$. این برهان را کامل می‌کند.

تمرینهای ۷.۱۱

۱. اگر

$$f(x) = \log \frac{۱}{x} \qquad (\circ < x \leqslant ۱),$$

$f^{۲}$ را بیابید.

۲. اگر

$$f(x) = \frac{۱}{x^{p}} \qquad (\circ < x \leqslant ۱),$$

و اگر $p < ۱$، ثابت کنید که $f \in \mathcal{L}[\circ, ۱]$ و

$$\int_{\circ}^{۱} f = \frac{۱}{۱+p}.$$

۳. اگر f یك تابع اندازه‌پذیر نامنفی در $[a, b]$ باشد و

$$f(x) \leqslant g(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

که در آن $g \in \mathcal{L}[a, b]$، ثابت کنید که $f \in \mathcal{L}[a, b]$.

۴. اگر

$$f(x) = \frac{۱}{۲} + \sin x \qquad (\circ \leqslant x < ۲\pi),$$

f^{+} و f^{-} را بیابید.

۵. اگر $g \in \mathcal{L}[a, b]$ و f یك تابع اندازه‌پذیر در $[a, b]$ باشد به‌طوری که

$$|f(x)| \leqslant |g(x)| \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

ثابت کنید که $f \in \mathcal{L}[a, b]$.

۶. درستی یا نادرستی گزارهٔ زیر را مشخص کنید: اگر f و g در $\mathcal{L}[a, b]$ باشند. آنگاه $fg \in \mathcal{L}[a, b]$.

۰۷ اگر f یك تابع نامنفی در $\mathcal{L}[a,b]$ باشد، آنگاه برای $n=0, 1, 2, \ldots$ فرض کنید $E_n=\{x: n\leqslant f(x)<n+1\}$. ثابت کنید که $\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot mE_n<\infty$.

۰۸ اگر، برای هر x درمجموعهٔ کانتور K، $f(x)=0$، و برای هر x در هریك از بازه‌های به طول $1/3^k$ در K'، $f(x)=k$، ثابت کنید که f در $[0, 1]$ انتگرالپذیر لبگ است و

$$\int_0^1 f=3.$$

۰۹ اگر $f\in\mathcal{L}[a, b]$ و ε عدد مثبت دلخواهی باشد، نشان‌دهید که یك تـابع اندازه‌پذیر کراندار g در $[a, b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\int_a^b|f-g|<\varepsilon.$$

(راهنمایی: ابتدا تمرین را برای f نامنفی حل کنید.)

۰۱۰ اگر $f\in\mathcal{L}[a, b]$ وعدد $c\in R$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$g(t)=f(t-c) \qquad (a+c\leqslant t\leqslant b+c),$$

نشان دهید که $g\in\mathcal{L}[a+c, b+c]$ و

$$\int_{a+c}^{b+c} g(t)dt=\int_{a+c}^{b+c} f(t-c)\,dt=\int_a^b f(t)dt$$

۰۱۱ اگر $f\in\mathcal{L}[a, b]$، نشان‌دهید که

$$\int_a^b f(t)dt=\int_{-b}^{-a} f(-t)dt.$$

۸.۱۱ بعضی از قضیه‌های اساسی

در انتگرال لبگ تحت شرایطی بسیار کلی می‌توان از یك دنباله جمله به‌جمله انتگـرال گرفت. ابتدا یك لم ثابت می‌کنیم.

۰۱۰۸۰۱۱ لم. اگر $f\in\mathcal{L}[a, b]$، آنگاه به‌ازای عدد مثبت دلخواه ε، عدد مثبت δ وجود دارد به‌طوری که

$$\left|\int_E f\right|<\varepsilon,$$

به‌شرط اینکه E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد و $mE<\delta$.

برهان: ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که f نامنفی است. دراین‌صورت، بنابر ۲.۷.۱۱،

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_a^b {}^n f=\int_a^b f.$$

بنابراین، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، عددی مانند $N\in I$ وجود دارد به‌طوری که

$$\int_a^b f-\int_a^b {}^N f<\frac{\varepsilon}{۲}.$$

یعنی،

$$\int_a^b (f-{}^N f)<\frac{\varepsilon}{۲}. \qquad (۱)$$

اکنون $\delta>۰$ را کوچکتر از $\varepsilon/۲N$ انتخاب می‌کنیم. اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد، و $mE<\delta$ داریم

$$\int_E {}^N f\leqslant\int_E N=N(mE)<N\delta<\frac{\varepsilon}{۲}. \qquad (۲)$$

درنتیجه با استفاده از (۱) و (۲) داریم

$$\int_E f=\int_E(f-{}^N f)+\int_E {}^N f\leqslant\int_a^b(f-{}^N f)+\int_E {}^N f<\frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon,$$

که لم را برای fهای نامنفی ثابت می‌کند.

برای یك تابع اندازه‌پذیر دلخواه $f\in\mathcal{L}[a, b]$ داریم $f=f^+-f^-$. بنابر قسمت اول برهان، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، عدد مثبت $\delta_۱$ وجود دارد به‌طوری که

$$\int_E f^+<\frac{\varepsilon}{۲}.$$

به‌شرط اینکه $mE<\delta_۱$. همچنین، عدد مثبت $\delta_۲$ وجود دارد به‌طوری که اگر $mE<\delta_۲$، آنگاه

$$\int_E f^-<\frac{\varepsilon}{۲}.$$

بنابراین اگر $mE<\delta=\min(\delta_۱, \delta_۲)$، داریم

$$\left|\int_E f\right|\leqslant\int_E|f|=\int_E f^+ +\int_E f^-<\frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon.$$

این برهان را کامل می‌کند.

قضیهٔ زیر، که قضیهٔ همگرایی مغلوب لبگ نامیده می‌شود، نشان می‌دهد که تحت قیودی بسیار کمتر از شرط همگرایی یکنواخت در ۷.۳.۹ می‌توان از یك دنبالهٔ توابع انتگرالپذیر جمله‌به‌جمله انتگرال گرفت.

۲.۸.۱۱. قضیهٔ همگرایی مغلوب لبگ. فرض‌کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع در $\mathcal{L}[a, b]$ باشد به‌طوری که

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)=f(x) \qquad \text{تقریباً همه‌جا در } [a, b] \tag{1}$$

و فرض‌کنیم تابع $g\in\mathcal{L}[a, b]$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$|f_n(x)|\leqslant g(x) \quad \text{تقریباً همه‌جا} \quad (a\leqslant x\leqslant b;\, n\in I), \tag{2}$$

آنگاه $f\in\mathcal{L}[a, b]$ و

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b f. \tag{3}$$

برهان: چون هریك از f_nها به $\mathcal{L}[a, b]$ تعلق دارند، (از ۱۴.۶.۱۱ یا ۵.۷.۱۱) نتیجه می‌شود که هر f_n اندازه‌پذیر است. درنتیجه، بنابر (۱) و ۹.۴.۱۱، f اندازه‌پذیر است. بنابر (۱) و (۲) برای تقریباً همهٔ xها داریم $|f(x)|\leqslant g(x)$. در نتیجه $|f|\in\mathcal{L}[a, b]$. پس، بنابر ۱۴.۷.۱۱، $f\in\mathcal{L}[a, b]$.

عدد مثبت دلخواه ε را در نظر می‌گیریم. برای هر $N\in I$ فرض‌کنید E_N مجموعهٔ همهٔ xهایی در $[a, b]$ باشد به‌طوری که

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (n\geqslant N). \tag{4}$$

آنگاه $E_1\subseteq E_2\subseteq E_3\subseteq\ldots$ وبنابر (۱)، تقریباً هر نقطهٔ $[a, b]$ دریکی (ودرنتیجه در تعدادی نامتناهی) از E_Nها قرار می‌گیرد. یعنی اندازهٔ $\bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$ برابر $b-a$ است. بنابر ۶.۳.۱۱ داریم

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} mE_N=b-a. \tag{5}$$

بنابر لم ۱.۸.۱۱ عدد مثبت δ وجود دارد به‌طوری که اگر $mE<\delta$، آنگاه

$$\int_E g<\frac{\varepsilon}{4}$$

سپس از (۲) و (۱) نتیجه می‌گیریم که

$$\int_E |f_n| < \frac{\varepsilon}{۴}, \quad \int_E |f| < \frac{\varepsilon}{۴} \qquad (mE < \delta) \tag{۶}$$

بنابر (۵) عدد $M \in I$ وجود دارد به طوری که $b - a - mE_M < \delta$. یعنی، $mE'_M < \delta$ که در آن $E'_M = [a, b] - E_M$. اکنون اگر $n \geqslant M$، بنابر (۴) و (۶) داریم

$$\int_a^b |f_n - f| = \int_{E_M} |f_n - f| + \int_{E'_M} |f_n - f|$$

$$\leqslant \int_{E_M} \frac{\varepsilon}{۲(b-a)} + \int_{E'_M} |f_n| + \int_{E'_M} |f| < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۴} + \frac{\varepsilon}{۴}.$$

یعنی،

$$\int_a^b |f_n - f| < \varepsilon \qquad (n \geqslant M). \tag{۷}$$

درنتیجه، بنابر ۱۴.۷.۱۱،

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N),$$

که این (۳) را ثابت می‌کند.

با توجه به (۷) عملا نتیجهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم که اندکی قویتر از ۲.۸.۱۱ است.

۳.۸.۱۱ قضیه. تحت مفروضات ۲.۸.۱۱ داریم

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx = ۰.$$

قضیهٔ ۲.۸.۱۱ دارای مزایای متعددی نسبت به قضیهٔ ۷.۳.۹ است. برای مثال، در ۲.۸.۱۱، لازم نیست توابع f_n کراندار باشند. از این گذشته به همگرایی یکنواخت هم احتیاجی نیست.

در واقع به آسانی می‌توان مثالی از یك دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ آورد که در مفروضات ۲.۸.۱۱ صدق کند ولی همگرای یکنواخت نباشد. به ازای $n \in I$ فرض می‌کنیم

$$f_n(x) = \sqrt{n} \qquad \left(\frac{۱}{n} \leqslant x \leqslant \frac{۲}{n}\right)$$

$$f_n(x) = ۰ \qquad \left(x \in \left[۰, \frac{۱}{n}\right) \cup \left(\frac{۲}{n}, ۲\right]\right).$$

آنگاه، برای هر $x\in[\circ, ۲]$، $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\circ$، به‌طوری که $f=\circ$ در شرط (۱) از ۲.۸.۱۱ صدق می‌کند. از این گذشته، به‌ازای هر $n\in I$، داریم $|f_n(x)|\leqslant g(x)(\circ\leqslant x\leqslant ۲)$ که در آن

$$g(x)=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}} \qquad (\circ<x\leqslant ۲),$$

$$g(\circ)=\circ.$$

چون $g\in\mathfrak{L}[\circ,۲]$، فرض (۲) از ۲.۸.۱۱ هم برقرار است. اما آشکار است که $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[\circ, ۲]$ همگرای یکنواخت نیست.

اکنون نتیجه‌ای مشهور را، که به فاتو[1] منسوب است، می‌آوریم. به‌خاطر دلایل تاریخی آن‌را یك لم می‌نامند.

۴.۸.۱۱. قضیه (لم فاتو). اگر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی در $\mathfrak{L}[a, b]$ باشد، و اگر

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad \text{تقریباً همه‌جا در } [a, b]، \tag{۱}$$

آنگاه

$$\liminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n\geqslant\int_a^b f,$$

به‌شرط اینکه $f\in\mathfrak{L}[a, b]$. درحالی که اگر $f\notin\mathfrak{L}[a, b]$، آنگاه

$$\liminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n=\infty.$$

برهان: به‌ازای هر $m\in I$، بنابر (۱)، داریم

$$\lim_{n\to\infty} {}^m f_n(x)={}^m f(x) \qquad \text{تقریباً همه‌جا در } [a, b]،$$

آنگاه، برای m ثابت، دنبالهٔ $\{{}^m f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در مفروضات ۲.۸.۱۱ صدق می‌کند. (g را برابر m بگیرید). درنتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b {}^m f_n=\int_a^b {}^m f. \tag{۲}$$

---

1. Fatou

ولی، برای هر $x\in[a,b]$، داریم $^mf_n(x)\leqslant f_n(x)$. پس

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b {}^mf_n=\liminf_{n\to\infty}\int_a^b {}^mf_n\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n. \tag{۳}$$

درنتیجه، بنابر (۲) و (۳) داریم

$$\liminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n\geqslant\int_a^b {}^mf.$$

با میل دادن m به‌بینهایت نتیجهٔ موردنظر حاصل می‌شود.

در ۲.۸.۷ ثابت کردیم که اگر $f\in\mathcal{R}[a,b]$ و

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

آنگاه $F'(x_\circ)=f(x_\circ)$، باشرط اینکه f در $x_\circ$ پیوسته باشد. چون توابع انتگرالپذیر ریمان تقریباً همه‌جا پیوسته هستند نتیجه می‌گیریم که

$$F'(x)=f(x) \qquad \text{تقریباً همه‌جا در } [a,b]، \tag{*}$$

اکنون اگر $f\in\mathcal{L}[a,b]$ و

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,$$

باز هم می‌توان ثابت کرد که (*) برقرار است، هرچندکه ممکن است f در هیچ نقطه‌ای پیوسته نباشد. ولی اثبات این قضیه‌کار بسیار زیادی می‌برد، و به‌همین‌جهت از برهان آن صرفنظر می‌کنیم. این برهان درمراجعی که درپایان فصل ذکر خواهدشد به‌تفصیل آمده‌است.

۵.۸.۱۱. قضیه. اگر $f\in\mathcal{L}[a,b]$ و اگر

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

آنگاه

$$F'(x)=f(x) \qquad \text{تقریباً همه‌جا در } [a,b]،$$

تمرینهای ۸.۱۱

۱. اگر $f\in\mathcal{L}[a,b]$ و

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

ثابت کنید که F در $[a, b]$ پیوسته است.

۲. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع در $\mathcal{L}[a, b]$ باشد، اگر

$$|f_n(x)|\leqslant g(x) \qquad \text{تقریباً همه‌جا } (a\leqslant x\leqslant b;\ n\in I)$$

که در آن $g\in\mathcal{L}[a, b]$، اگر

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad \text{تقریباً همه‌جا در } [a, b]،$$

و اگر h تابع اندازه‌پذیر کراندار دلخواهی در $[a, b]$ باشد، ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n h=\int_a^b fh.$$

۳. فرض کنید $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع در $\mathcal{L}[a, b]$ باشد، به‌طوری که

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

همچنین فرض کنید که

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

(الف) اگر $f\in\mathcal{L}[a, b]$، نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b f.$$

(ب) اگر $f\notin\mathcal{L}[a, b]$، نشان دهید که

$$\left\{\int_a^b f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

به ∞ واگرا است.

این نتیجه، قضیهٔ همگرایی یکنوا نامیده می‌شود.

۴. اگر $f\in\mathcal{L}[a, b]$ و اگر، به‌ازای هر $n=0, 1, 2, \ldots$،

$$E_n=\{x\in[a, b]: |f(x)|\geqslant n\},$$

ثابت کنید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} mE_n < \infty. \qquad (*)$$

[راهنمایی: نشان دهید که $mE_n = mH_n + mH_{n+1} + \ldots$ که در آن $H_k = \{x : k \leqslant |f(x)| < k+1\}$. آنگاه $\Delta mE_n = mE_{n+1} - mE_n = -mH_n$.
فرمول (۲) از ۱.۸.۳ را با $s_k = k$ و $b_k = mE_k$ به‌کار برید.]

۵. به‌ازای $n \in I$ فرض کنید

$$f_n(x) = 2n \qquad \left(\frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}\right),$$

$$f_n(x) = 0 \qquad \left[x \in \left(0, \frac{1}{2n}\right) \cup \left(\frac{1}{n}, 1\right)\right].$$

سپس، با محاسبهٔ

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \text{ و } \int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx$$

نشان دهید که می‌توان لم فاتو را به کار بست، ولی به کار بستن قضیهٔ همگرایی مغلوب ممکن نیست.

۹.۱۱ فضای متریک $\mathcal{L}^2[a, b]$

در این بخش رده‌ای از توابع در $[a, b]$ را معرفی می‌کنیم که بسیاری از ویژگیهای آن با ویژگیهای ردهٔ l^2 از دنباله‌ها مشترک است.

۱.۹.۱۱. تعریف. فرض کنیم f یك تابع اندازه‌پذیر در بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ باشد. می‌گوییم f یك تابع انتگرالپذیر مربعی در $[a, b]$ است اگر $f^2 \in \mathcal{L}[a, b]$.

اکنون نابرابریهای شوارتس و مینکوفسکی را برای توابع انتگرالپذیر مربعی ثابت می‌کنیم. (با ۳.۱۰.۳ و ۴.۱۰.۳ مقایسه کنید.)

۲.۹.۱۱. قضیه (نابرابری شوارتس). اگر f و g توابعی اندازه‌پذیر در $[a, b]$ باشند، و اگر f و g انتگرالپذیر مربعی باشند، آنگاه $fg \in \mathcal{L}[a, b]$ و

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2} \qquad (1)$$

برهان: برای هر $x \in [a, b]$ داریم $[|f(x)| - |g(x)|]^2 \geqslant 0$. پس

$$|f(x)g(x)|\leqslant\frac{۱}{۲}([f(x)]^{۲}+[g(x)]^{۲})\qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

چون، بنا به‌فرض، $f^{۲}$ و $g^{۲}$ در $\mathcal{L}[a,b]$ هستند، $|fg|\in\mathcal{L}[a, b]$. درنتیجه، بنا بر ۱۴۰۷۰۱۱، $fg\in\mathcal{L}[a, b]$.

سپس، برای هر $\lambda\in R$ داریم

$$\int_{a}^{b}(\lambda f+g)^{۲}\geqslant ۰$$

یا، به‌عبارت هم‌ارز،

$$\lambda^{۲}\int_{a}^{b}f^{۲}+۲\lambda\int_{a}^{b}fg+\int_{a}^{b}g^{۲}\geqslant ۰.$$

که آن‌را می‌توان به‌صورت $A\lambda^{۲}+B\lambda+C\geqslant ۰$ نوشت، که در آن

$$A=\int_{a}^{b}f^{۲},\quad B=۲\int_{a}^{b}fg,\quad C=\int_{a}^{b}g^{۲}.$$

اگر $A=۰$، آنگاه، بنا بر ۱۳۰۷۰۱۱، برای تقریباً همهٔ xهای $[a,b]$ داریم $[f(x)]^{۲}=۰$. یعنی، تقریباً برای همهٔ xهای $[a, b]$، $f(x)=۰$. دراین‌حالت هردوطرف (۱) برابر ۰ هستند. اگر $A\neq ۰$ آنگاه با گذاشتن $\lambda=-B/۲A$ به‌نابرابری $B^{۲}\leqslant ۴AC$ می‌رسیم یعنی

$$\left(\int_{a}^{b}fg\right)^{۲}\leqslant\left(\int_{a}^{b}f^{۲}\right)\left(\int_{a}^{b}g^{۲}\right),$$

که با گرفتن ریشهٔ دوم از آن (۱) به‌دست می‌آید.

۳.۹.۱۱ قضیه (نابرابری مینکوفسکی). اگر f و g توابعی اندازه‌پذیر در $[a, b]$ باشند، و اگر f و g انتگرالپذیر مربعی باشند، آنگاه $f+g$ هم انتگرالپذیر مربعی است و

$$\left[\int_{a}^{b}(f+g)^{۲}\right]^{۱/۲}\leqslant\left(\int_{a}^{b}f^{۲}\right)^{۱/۲}+\left(\int_{a}^{b}g^{۲}\right)^{۱/۲}.\qquad (۱)$$

برهان: داریم

$$(f+g)^{۲}=f^{۲}+۲fg+g^{۲}.\qquad (۲)$$

بنا به‌فرض $f^{۲}$ و $g^{۲}$ در $\mathcal{L}[a,b]$ هستند. همچنین، بنا بر ۲۰۹۰۱۱، $fg\in\mathcal{L}[a, b]$. درنتیجه، بنا بر (۲) و ۱۱۰۷۰۱۱، تابع $(f+g)^{۲}$ در $\mathcal{L}[a, b]$ است. [یعنی، $(f+g)$ انتگرالپذیر مربعی است]، و

$$\int_a^b (f+g)^2 = \int_a^b f^2 + 2\int_a^b fg + \int_a^b g^2.$$

سپس، با استفاده از ۲.۹.۱۱، داریم

$$\int_a^b (f+g)^2 \leqslant \int_a^b f^2 + 2\left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2} + \int_a^b g^2$$
$$= \left[\left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}\right]^2,$$

و (۱) از آن نتیجه می‌شود.

اکنون نرم تابع انتگرالپذیر مربعی را تعریف می‌کنیم.

۴.۹.۱۱. تعریف. اگر f یك تابع انتگرالپذیر مربعی در $[a, b]$ باشد، $\|f\|_2$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}.$$

نمادی‌که برای نرم تابع انتگرالپذیر مربعی به‌کار می‌بریم همان است‌که برای یك دنباله در l^2 به‌کار برده‌ایم. ولی این هیچ ابهامی به‌وجود نمی‌آورد.

۵.۹.۱۱. قضیه. نرم توابع انتگرالپذیر مربعی دارای ویژگیهای زیر است:
(۱) برای هرتابع انتگرالپذیر مربعی f در $[a, b]$ مانند f، $\|f\|_2 \geqslant 0$.
(۲) $\|f\|_2 = 0$ اگر وتنها اگر تقریباً همه‌جا در $[a, b]$، $f(x) = 0$.
(۳) اگر f انتگرالپذیر مربعی باشد و $c \in R$، آنگاه $\|cf\|_2 = |c| \cdot \|f\|_2$.
(۴) اگر f و g انتگرالپذیر مربعی باشند، آنگاه $\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$.

برهان: ویژگیهای (۱) و (۳) فوراً از تعریف نرم نتیجه می‌شوند. ویژگی (۲) نتیجهٔ ۱۳.۷.۱۱ است. و سرانجام ویژگی (۴) بیان دیگری از نابرابری مینکووسکی ۳.۹.۱۱ است.

۶.۹.۱۱. اکنون می‌خواهیم از همهٔ توابع انتگرالپذیر مربعی یك فضای متریك بسازیم. اگر بخواهیم به‌موازات راهی‌که درمورد l^2 رفتیم پیش برویم باید برای توابع انتگرالپذیر مربعی f و g، $\rho(f, g)$ را $\|f-g\|_2$ تعریف کنیم. ولی، با این تعریف، ρ تمام ویژگیهای یك متریك را نخواهد داشت، مگر اینکه یك فرض دیگر به فرضهایمان اضافه کنیم! زیرا بنابر (۲) از ۵.۹.۱۱، اگر مقادیر دو تابع انتگرالپذیر مربعی متمایز

f و g در تقریباً همهٔ xهای $[a, b]$ (ولی نه همهٔ آنها) برابر باشند، آنگاه $\rho(f,g)=0$. پس، برای اینکه فضای متریك موردنظر را بسازیم باید هردو تابع را که مقادیرشان تقریباً همه‌جا بـرابـر است، نمایش یك نقطهٔ فضا تصور کنیم. یعنی نقاط این فضا ـ که آن را با $\mathcal{L}^2[a, b]$ نمایش می‌دهیم ـ بنا بر تعریف، رده‌های توابع انتگرالپذیر مربعی هستند، ودر هر رده توابع تنها درمجموعه‌ای صفر اندازه با یکدیگر متفاوت‌اند.

اما این مرسوم است که یك عنصر $\mathcal{L}^2[a, b]$ را، به‌جای رده‌ای از توابع، یك تابع بنامیم. بنابراین یك تابع انتگرالپذیر مربعی‌را به‌جای اینکه «نماینده‌ای از یك ردهٔ توابع در $\mathcal{L}^2[a, b]$» درنظر بگیریم آن‌را «عنصری از $\mathcal{L}^2[a, b]$» معرفی می‌کنیم و می‌نویسیم $f\in\mathcal{L}^2[a, b]$.

اگر توابع انتگرالپذیر مربعی f و g عنصرهای متمایز $\mathcal{L}^2[a, b]$ باشند (یعنی در دو ردهٔ متمایز باشند، آنگاه بنابـر (۲) از ۵.۹.۱۱، $\|f-g\|_2>0$. زیرا اگر f و g عنصرهای متمایز $\mathcal{L}^2[a,b]$ باشند، آنگاه مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ درهمهٔ xهای یك‌مجموعهٔ با اندازهٔ مثبت متفاوت هستند. درنتیجه اگر ρ را با رابطهٔ

$$\rho(f, g)=\|f-g\|_2 \qquad (f, g\in\mathcal{L}^2[a, b]), \tag{*}$$

تعریف کنیم، آنگاه $\rho(f, g)>0$ به‌شرط اینکه $f\neq g$. دیگـر شرایط یك فضای متریك را می‌توان به‌کمك ۵.۹.۱۱ به‌آسانی بررسی کرد، وقضیهٔ زیر را به‌دست آورد.

قضیه. اگر ρ با (*) تعریف شده باشد، آنگاه ρ یك متریك در $\mathcal{L}^2[a,b]$ است.

فضای متریك $\langle\mathcal{L}^2[a, b], \rho\rangle$ را به‌طور خلاصه با $\mathcal{L}^2[a, b]$ نشان می‌دهیم.

اکنون ثابت می‌کنیم که $\mathcal{L}^2[a, b]$ کامل‌است. یعنی، نشان می‌دهیم که اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کـوشی در $\mathcal{L}^2[a,b]$ باشد، آنگاه تابع $f\in\mathcal{L}^2[a,b]$ وجود دارد به‌طوری که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بامتریك $\mathcal{L}^2[a,b]$ به f همگرا است. این‌نتیجه‌را گاهی قضیهٔ ریس-فیشر[1] می‌نامند.

۷.۹.۱۱. قضیه. فضای متریك $\mathcal{L}^2[a, b]$ کامل است.

برهان: فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی در $\mathcal{L}^2[a, b]$ باشد. آنگاه، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، عدد $N\in I$ وجود دارد به‌طوری که

$$\|f_m-f_n\|_2=\left[\int_a^b[f_m(x)-f_n(x)]^2dx\right]^{1/2}<\varepsilon \quad (m, n\geqslant N).$$

برای هر $\nu\in I$، فرض می‌کنیم n_ν کوچکترین‌عدد صحیح مثبتی باشد که

$$\int_a^b[f_m(x)-f_n(x)]^2dx<\frac{1}{4^\nu} \qquad (m,n\geqslant n_\nu). \tag{۱}$$

1. Riesz-Fischer

آنگاه $\cdots \leqslant n_\nu \leqslant \cdots \leqslant n_2 \leqslant n_1$. به‌ویژه

$$\int_a^b [f_{n_{\nu+1}}(x) - f_{n_\nu}(x)]^2 dx < \frac{1}{3^\nu} \qquad (\nu \in I).$$

اگر E_ν مجموعهٔ همهٔ xهایی از $[a, b]$ باشد، به‌طوری که

$$|f_{n_{\nu+1}}(x) - f_{n_\nu}(x)| > 2^{-\nu/2}.$$

آنگاه

$$mE_\nu = \int_{E_\nu} 1 \leqslant 2^\nu \int_{E_\nu} |f_{n_{\nu+1}}(x) - f_{n_\nu}(x)|^2 dx$$

$$\leqslant 2^\nu \int_a^b [f_{n_{\nu+1}}(x) - f_{n_\nu}(x)]^2 dx < \left(\frac{2}{3}\right)^\nu.$$

به ازای هر $N \in I$ فرض کنیم F_N متمم $\cdots \bigcup E_{N+1} \bigcup E_N$ باشد. آنگاه $\cdots \subseteq F_N \subseteq \cdots \subseteq F_2 \subseteq F_1$. همچنین، چون

$$m(E_N \bigcup E_{N+1} \bigcup \cdots) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^N + \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} + \cdots$$

نتیجه‌می گیریم که

$$\lim_{N \to \infty} m(E_N \bigcup E_{N+1} \bigcup \cdots) = 0.$$

در نتیجه

$$m\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} F_N\right) = \lim_{N \to \infty} mF_N = b - a.$$

یعنی، تقریباً هر x از $[a, b]$ در $\bigcup_{N=1}^{\infty} F_N$ است. ولی اگر $x \in \bigcup_{N+1}^{\infty} F_N$، آنگاه Nای وجود دارد که x درهیچ کدام ازمجموعه‌های E_N، E_{N+1}، ... نیست. درنتیجه، اگر $x \in \bigcup_{N=1}^{\infty} F_N$، آنگاه

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [f_{n_{\nu+1}}(x) - f_{n_\nu}(x)] \ll \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu/2}$$

(۱.۶.۳ را ببینید). از ۲.۶.۳ نتیجه می‌گیریم که سری $\sum_{\nu=1}^{\infty}[f_{n_{\nu+1}}(x) - f_{n_\nu}(x)]$ در $[a, b]$ تقریباً همه‌جا همگراست، یعنی

$$\lim_{\nu\to\infty}\{[f_{n_2}(x)-f_{n_1}(x)]+[f_{n_3}(x)-f_{n_2}(x)]+\cdots+[f_{n_\nu}(x)-f_{n_{\nu-1}}(x)]\}$$

برای تقریباً هر $x\in[a, b]$ وجود دارد. بنابراین

$$\lim_{\nu\to\infty}[f_{n_\nu}(x)-f_{n_1}(x)]$$

برای تقریباً همهٔ xها وجود دارد، ودر نتیجه $\lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x)$ برای تقریباً همهٔ xها وجود دارد. برای هرچنین xی فرض کنیم

$$f(x)=\lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x). \tag{۲}$$

[اگر حد (۲) وجود نداشته باشد، فرض می‌کنیم $f(x)=0$.] آنگاه برای νی ثابت، تقریباً همه‌جا در $[a, b]$ داریم

$$\lim_{\mu\to\infty}[f_{n_\nu}(x)-f_{n_\mu}(x)]^2=[f_{n_\nu}(x)-f(x)]^2 .$$

پس، بنابر لم فاتو، ۴.۸.۱۱ و (۱) داریم $(f_{n_\nu}-f)\in\mathcal{L}^2[a, b]$ و

$$\int_a^b [f_{n_\nu}(x)-f(x)]^2dx\leqslant\liminf_{\mu\to\infty}\int_a^b[f_{n_\nu}(x)-f_{n_\mu}(x)]^2dx\leqslant\frac{1}{3^\nu}. \tag{۳}$$

در نتیجه، بنابر ۳.۹.۱۱، $f=(f-f_{n_\nu})+f_{n_\nu}$ در $\mathcal{L}^2[a, b]$ است. از (۳) نتیجه می‌شود که

$$\rho(f_{n_\nu}, f)=\|f_{n_\nu}-f\|_2<\frac{1}{\sqrt{3^\nu}}$$

درحالی‌که از (۱) داریم

$$\rho(f_n, f_{n_\nu})=\|f_n-f_{n_\nu}\|<\frac{1}{\sqrt{3^\nu}} \qquad (n\geqslant n_\nu).$$

بنابراین،

$$\rho(f_n, f)<\frac{2}{\sqrt{3^\nu}} \qquad (n\geqslant n_\nu).$$

وبه‌آسانی نتیجه می‌شود که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ به f همگراست. این برهان را کامل می‌کند.

کامل بودن $\mathcal{L}^2[a,b]$ نتایج بسیار گسترده‌ای درآنالیز عالی دارد. اگر تنها انتگرال ریمان را دراختیار داشتیم، نمی‌توانستیم چنین نتیجه‌ای راثابت کنیم. (تمرین ۷ را ببینید.)

به عنوان آخرین نتیجهٔ اساسی این بخش ثابت می‌کنیم که مجموعهٔ توابع پیوسته در $[a,b]$ در $\mathcal{L}^2[a,b]$ چگال است. این نتیجه فوراً از دو لم زیر به‌دست می‌آید.

۰۸.۹.۱۱ لم. اگر f یک تابع اندازه‌پذیر کراندار در $[a,b]$ باشد، آنگاه، به‌ازای عدد مثبت دلخواه ε، تابع پیوستهٔ g در $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $\|f-g\|_2<\varepsilon$.

برهان: برای $x\in(b, b+1]$، $f(x)$ را برابر ۰ تعریف می‌کنیم، به‌طوری که f در $[a, b+1]$ تعریف شده باشد. اگر

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (a\leqslant x\leqslant b+1).$$

آنگاه F در $[a, b+1]$ پیوسته است. [زیرا

$$|F(x+h)-F(x)|=\left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right|\leqslant M|h|,$$

که در آن $M=\operatorname*{l.u.b.}_{x\in[a,b]}|f(x)|$.] برای هر $n\in I$، فرض می‌کنیم

$$G_n(x)=n\int_x^{x+1/n} f(t)dt \qquad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{1}$$

آنگاه

$$G_n(x)=\frac{F(x+1/n)-F(x)}{1/n} \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

نتیجه می‌گیریم که G_n در $[a, b]$ پیوسته است. بنا بر ۵.۸.۱۱، داریم

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x)=F'(x)=f(x) \qquad \text{تقریباً همه‌جا در } [a, b]$$

و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} [G_n(x)-f(x)]^2=0 \qquad \text{تقریباً همه‌جا در } [a, b] \tag{2}$$

از (۱) داریم

$$|G_n(x)|\leqslant n\int_x^{x+1/n}|f(t)|dt\leqslant n\int_x^{x+1/n}M dt=M,$$

و بنابراین

$$[G_n(x)-f(x)]^۲ \leqslant (M+M)^۲ = ۴M^۲ \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \qquad (۳)$$

از (۲)، (۳) و ۲.۸.۱۱ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (G_n-f)^۲ = \lim_{n\to\infty} \|G_n-f\|_۲^۲ = ۰.$$

درنتیجه، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، برای nهایی‌که به اندازهٔ کافی بزرگ باشند، داریم $\|G_n-f\|_۲<\varepsilon$ و لم با $(g=G_n)$ ثابت می‌شود.

۹.۹.۱۱ لم. اگر $h\in\mathcal{L}^۲[a,b]$، آنگاه، به‌ازای عددمثبت دلخواه ε تابع اندازه‌پذیر کراندار f در $[a, b]$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|h-f\|_۲<\varepsilon$.

برهان: ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که در آن h یك تابع نامنفی در $\mathcal{L}^۲[a,b]$ باشد. داریم

$$\lim_{m\to\infty} [h(x)-{}^m h(x)]^۲ = ۰ \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

چون $(a\leqslant x\leqslant b)$ $۰\leqslant {}^m h(x)\leqslant h(x)$، داریم

$$[h(x)-{}^m h(x)]^۲ \leqslant [h(x)]^۲ \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

چون $h^۲\in\mathcal{L}[a, b]$، از ۲.۸.۱۱ نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b (h-{}^m h)^۲ = ۰.$$

پس، برای mهای به اندازهٔ کافی بزرگ، $\|h-{}^m h\|_۲<\varepsilon$. چون ${}^m h$ کراندار است، لم برای حالت h نامنفی ثابت می‌شود.

اکنون اگر h تابع دلخواهی در $\mathcal{L}^۲[a, b]$ باشد، داریم $h=h^+-h^-$. چون در $[a, b]$، $[h^+(x)]^۲\leqslant[h(x)]^۲$، آشکار است که $h^+\in\mathcal{L}^۲[a, b]$. بنابرقسمت اول لم، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، تابع اندازه‌پذیر کراندار $f_۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|h^+-f_۱\|_۲<\varepsilon/۲$. به‌همین‌ترتیب، تابع اندازه‌پذیر کراندار $f_۲$ وجود دارد به‌طوری که $\|h^--f_۲\|_۲<\varepsilon/۲$. اگر $f=f_۱-f_۲$، آنگاه f کراندار است و

$$\|h-f\|_۲ = \|(h^+-h^-)-(f_۱-f_۲)\|_۲ = \|(h^+-f_۱)-(h^--f_۲)\|_۲$$
$$\leqslant \|h^+-f_۱\|_۲ + \|h^--f_۲\|_۲ < \varepsilon.$$

این برهان را کامل می‌کند.

از ۸.۹.۱۱ و ۹.۹.۱۱ قضیهٔ زیر فوراً به‌دست می‌آید.

۱۰.۹.۱۱. قضیه. اگر $h\in\mathcal{L}^{۲}[a,b]$، آنگاه به‌ازای هرعدد مثبت ε، تابع پیوستهٔ g در $[a,\ b]$ وجود دارد به‌طوری که $\|h-g\|_{۲}<\varepsilon$.

قضیهٔ ۱۰.۹.۱۱ می‌گوید که هر گوی باز $B[h;\varepsilon]$ حول h در $\mathcal{L}^{۲}[a,\ b]$ شامل یك تابع پیوسته است. یعنی، هر $h\in\mathcal{L}^{۲}[a,\ b]$ یك نقطهٔ حدی مجموعهٔ توابع پیوسته است. به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ توابع پیوسته در $\mathcal{L}^{۲}[a,\ b]$ چگال است.

برهانی که برای ۱۰.۹.۱۱ موردنظر ما است به ۵.۸.۱۱ بستگی دارد (چرا؟). ولی باکار بیشتر می‌توانستیم ۱۰.۹.۱۱ را بدون استفاده از ۵.۸.۱۱ ثابت کنیم.

نتیجهٔ بعدی را به آسانی می‌توان از ۱۰.۹.۱۱ به‌دست آورد. اثبات آن را برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم

۱۱.۹.۱۱. قضیه. اگر $h\in\mathcal{L}^{۲}[a,\ b]$ و $\varepsilon>۰$، تابع پیوستهٔ g در $[a,\ b]$ وجود دارد به‌طوری که $g(a)=g(b)$ و $\|h-g\|_{۲}<\varepsilon$.

تمرینهای ۹.۱۱

۱. (الف) نشان‌دهید که $C[a,\ b]\subseteq\mathcal{L}^{۲}[a,\ b]$.

(ب) اگر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای در $C[a,\ b]$ باشدکه در $[a,\ b]$ همگرای یکنواخت به f است. نشان‌دهید که $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{۲}=۰$.

۲. فرض‌کنید $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع در $\mathcal{L}^{۲}[a,\ b]$ باشدکه با متریك $\mathcal{L}^{۲}[a,\ b]$ به f همگراست. اگر $g\in\mathcal{L}^{۲}[a,\ b]$، نشان‌دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n g=\int_a^b fg.$$

(راهنمایی: نابرابری شوارتس را درمورد $\int_a^b (f_n-f)g$ به‌کار برید.)

۳. اگر f در $[a,\ b]$ انتگرالپذیر مربعی باشد، ثابت‌کنید که $f\in\mathcal{L}[a,\ b]$.

۴. اگر $f\in\mathcal{L}^{۲}[a,\ b]$ واگر برای $t\notin[a,\ b]$، $f(t)=۰$، ثابت‌کنید که

$$\lim_{x\to ۰}\int_a^b [f(x+t)-f(t)]^{۲}dt=۰.$$

(راهنمایی: ابتدا تمرین را برای f پیوسته ثابت‌کرده، سپس از ۱۰.۹.۱۱ استفاده کنید.)

۵. اگر $f\in\mathcal{L}^{۲}[a,\ b]$، اگر برای $x\notin[a,\ b]$، $f(x)=۰$، واگر

$$F(x)=\int_a^b f(x+t)\cdot f(t)dt\qquad(-\infty<x<\infty),$$

ثابت کنید که F در ۰ پیوسته است. (راهنمایی: نابرابری شوارتس را درمورد

$$F(x)-F(0)=\int_a^b [f(x+t)-f(t)]\cdot f(t)dt.$$

به‌کار ببرید، سپس از تمرین قبلی استفاده کنید.)

۱۰۶ اگر E یك زیرمجموعهٔ $[a, b]$ باشد، آنگاه، $D(E)$ را که مجموعهٔ تفاضل نامیده می‌شود، مجموعهٔ همهٔ اعداد به‌صورت $x-y$، که درآن $x, y\in E$، تعریف می‌کنیم. [یعنی، $D(E)$ مجموعهٔ همهٔ تفاضلهای نقاط E است.) جزئیات برهانی راکه برای قضیهٔ مشهور زیر آورده‌ایم تکمیل کنید: اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[a,b]$ باشد واگر $mE>0$، آنگاه $D(E)$ شامل یك بازهٔ باز حول نقطهٔ ۰ است.

برهان: اگر χ تابع مشخصهٔ E باشد، واگر

$$F(x)=\int_a^b \chi(t)\chi(x+t)dt \qquad (-\infty<x<\infty).$$

(الف) آنگاه F در ۰ پیوسته است (چرا؟).

(ب) چون $F(0)>0$ (چرا؟) نتیجه می‌شود که δیی وجود دارد به‌طوری که

$$F(x)=\int_a^b \chi(t)\chi(x+t)dt>0 \qquad (-\delta<x<\delta).$$

(ج) اگر $x\in(-\delta, \delta)$، آنگاه t_0ای (وابسته به x) وجود دارد به‌طوری که $\chi(t_0)\chi(x+t_0)>0$ (چرا؟).

(د) از این مطلب نتیجه می‌شود که $t_0\in E$ و $x+t_0\in E$ (چرا؟).

(ه) درنتیجه، چون $x=(x+t_0)-t_0$ داریم $x\in D(E)$. این ثابت می‌کند که $(-\delta, \delta)\subseteq D(E)$. [این برهان منسوب به آ. کالدرون[1] است.]

۱۰۷ اگر r_1، r_2، ... شمارشی از اعداد گویای بازهٔ $[0, 1]$ باشد، به‌ازای هر $n\in I$، فرض کنید J_n یك زیربازهٔ باز $[0, 1]$ باشد به‌طوری که $r_n\in J_n$ و $|J_n|<1/2^n$.

(الف) اگر χ تابع مشخصهٔ $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ باشد، نشان‌دهید که $\chi=\chi^2$ انتگرالپذیر لبگ است.

(ب) با نشان‌دادن اینکه χ درهر نقطه از متمم $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ ناپیوسته است، ثابت کنید که $\chi=\chi^2$ انتگرالپذیر ریمان نیست وهیچ تابع انتگرالپذیر مربعی که تقریباً همه‌جا برابر χ باشد نمی‌تواند انتگرالپذیر ریمان باشد.

---

1. A. Calderon

(ج) اگر χ_n تابع مشخصهٔ $J_1 \cup \ldots \cup J_n$ باشد، نشان‌دهید که

$$\chi_n = \chi_n^2 \in \mathcal{R}[a, b].$$

(د) نشان‌دهید که $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ با متریك $\mathcal{L}^2[a, b]$ به χ همگرا است.

(ه) از همهٔ اینها نتیجه بگیرید که اگر تنها انتگرال ریمان را به‌کار می‌بردیم ۷.۹۰۱۱ برقرار نمی‌بود.

۱۰.۱۱ انتگرال در $(-\infty, \infty)$ ودرصفحه

۱۰۱۰۰۱۱۰ اکنون $\mathcal{L}[-\infty, \infty]$ را تعریف می‌کنیم. فرض‌کنیم f تابعی نامنفی در $(-\infty, \infty)$ باشد. اگر به‌ازای هر $N \in I$، $f \in \mathcal{L}[-N, N]$، واگر

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} f$$

وجود داشته باشد، آنگاه $\int_{-\infty}^{\infty} f$ را به‌صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} f$$

تعریف می‌کنیم. دراین‌حالت می‌نویسیم $f \in \mathcal{L}[-\infty, \infty]$.

برای یك تابع f که هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی بگیرد، می‌گوییم $f \in \mathcal{L}[-\infty, \infty]$، اگر وتنها اگر، f^+ و f^- هردو در $\mathcal{L}[-\infty, \infty]$ باشند، وآنگاه $\int_{-\infty}^{\infty} f$ را به‌صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{\infty} f^+ - \int_{-\infty}^{\infty} f^-$$

تعریف می‌کنیم.

۲۰۱۰۰۱۱۰ اگر f درهر بازهٔ کراندار اندازه‌پذیر باشد، اثبات اینکه $f \in \mathcal{L}[-\infty, \infty]$ اگر وتنها اگر $|f| \in \mathcal{L}[-\infty, \infty]$ آسان است. درواقع اگر $f \in \mathcal{L}[-\infty, \infty]$، آنگاه f^+ و f^- در $\mathcal{L}[-\infty, \infty]$ هستند. چون $|f| = f^+ + f^-$، و

$$\int_{-N}^{N} |f| = \int_{-N}^{N} f^+ + \int_{-N}^{N} f^-,$$

به‌سادگی نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}|f|$$

وجود دارد. بنابراین $|f|\in\mathscr{L}[-\infty,\infty]$. به عکس اگر f درهر بازهٔ کراندار اندازه‌پذیر باشد و اگر $|f|\in\mathscr{L}[-\infty,\infty]$، آنگاه به‌ازای هر $n\in I$،

$$\int_{-N}^{N} f^+\leqslant\int_{-N}^{N}|f|\leqslant\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}|f|=\int_{-\infty}^{\infty}|f|=A.$$

درنتیجه،

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f^+$$

وجود دارد (و نابیشتر از A) است. بنابراین $f^+\in\mathscr{L}[-\infty,\infty]$. همچنین $f^-\in\mathscr{L}[-\infty,\infty]$ ودرنتیجه $f\in\mathscr{L}[-\infty,\infty]$.

این حقیقت که از $f\in\mathscr{L}[-\infty,\infty]$ نتیجه می گیریم که $|f|\in\mathscr{L}[-\infty,\infty]$، نشان می‌دهد که انتگرال لبگ در $(-\infty,\infty)$ باانتگرال ناسرهٔ ریمان در $(-\infty,\infty)$ اختلاف زیادی دارد.

می‌توان نشان‌داد که $\mathscr{L}[-\infty,\infty]$ دارای همهٔ ویژگیهای مهم $\mathscr{L}[a,b]$ است، قضیه‌هایی مانند ۲.۸.۱۱ را می‌توان با استفاده از همین قضیه‌ها درمورد $\mathscr{L}[a,b]$ برای $\mathscr{L}[-\infty,\infty]$ ثابت کرد. ولی توجه‌داشته‌باشید که ممکن‌است تابع f در $\mathscr{L}[-\infty,\infty]$ نباشد، حتی اگر f در $(-\infty,\infty)$ کراندار و در هر بازهٔ کراندار اندازه‌پذیر باشد. برای مثال $1\notin\mathscr{L}[-\infty,\infty]$.

۳.۱۵.۱۱. یك انتگرال به‌صورت $\int_{0}^{\infty} f$ را می‌توان مانند ۱.۱۵.۱۱ تعریف کرد. یعنی برای f نامنفی وغیره

$$\int_{0}^{\infty} f=\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} f.$$

۴.۱۵.۱۱. اکنون خلاصه‌ای از نظریهٔ اندازه و انتگرالگیری درصفحهٔ R^2 را ذکر می‌کنیم. شیوهٔ عمل بسیار شبیه شیوهٔ عمل درمورد خط است. مستطیلها در R^2 نقش بازه‌ها در R^1 را بازی می‌کنند.

بنا بر تعریف یك مستطیل K در R^2، حاصلضرب دکارتی دو بازهٔ I_1 و I_2 در R^1 است. مستطیل K، برحسب اینکه بازه‌های I_1 و I_2 باز، نیمه‌باز یا بسته باشند، ممکن است شامل همه یا بعضی از اضلاعش باشد یا شامل هیچ ضلعی نباشد. برای مثال، اگر $K=(0,1)\times[1,3)$، آنگاه

$K=\{\langle x,\ y\rangle : ۰<x<۱,\ ۱\leqslant y<۳\}$. در این مورد K شامل قاعده‌اش هست ولی شامل هیچ یك از سه ضلع دیگرش نیست. در هرمستطیل K، $|K|$ را مساحت آن مستطیل تعریف می کنیم. این نظیر طول فاصله در $R^{۱}$ است.

از این به بعد فرض می کنیم که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعهٔ مستطیل ثابتی مانند $T=[a,\ b]\times[c,\ d]$ باشند. زیرمجموعه‌ای از T مانند G را مقدماتی می‌نامیم اگر $G=\bigcup_n K_n$، که در آن K_nها تعدادی متناهی یا شمارا از مستطیلهای دو به‌دو مجزا هستند. (می‌توان نشان‌داد که هر زیرمجموعهٔ باز T یك مجموعهٔ مقدماتی است.) درچنین حالتی $|G|$ را با رابطهٔ $|G|=\sum_n|K_n|$ تعریف می کنیم.

برای هر زیرمجموعهٔ T مانند E اندازهٔ خارجی $\overline{m}E$ را به‌صورت

$$\overline{m}E=\text{g.l.b.}|G|$$

تعریف می کنیم که در آن g.l.b. روی همهٔ مجموعه‌های مقدماتی G کـه $E\subseteq G$، گرفته شده است. (با ۲.۱۱ مقایسه کنید.) اندازهٔ داخلی $\underline{m}E$ را به‌صورت

$$\underline{m}E=(b-a)(d-c)-\overline{m}E'$$

تعریف می کنیم که درآن $E'=T-E$. [تـوجه کنیدکه $|T|=(b-a)(d-c)$.] این نظیر قضیهٔ ۴.۲.۱۱ است.

سرانجام مجموعهٔ E را اندازه‌پذیرمی گوییم اگر $\underline{m}E=\overline{m}E$. اگر E اندازه‌پذیر باشد، اندازهٔ E را

$$mE=\underline{m}E=\overline{m}E$$

تعریف می‌کنیم. آنگاه می‌توان نشان‌داد که اندازهٔ m در T همهٔ ویژگیهایی را که اندازه دریك بازهٔ بستهٔ کراندار دارد، داراست.

۵.۱۵.۱۱ تعریفی که برای تابع اندازه‌پذیر می‌آوریـم به‌آنچه که در ۱.۴.۱۱ دیدیم بسیار نزدیك است. اگر f یك تابع حقیقی در T باشد، آنگاه f را اندازه‌پـذیر می‌نامیم، اگر به ازای هر $s\in R$، مجموعهٔ $\{\langle x,\ y\rangle\in T : f(x,\ y)<s\}$ یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر T بـاشد، آنگاه ویژگیهای توابع اندازه‌پذیر مـانند بخش ۴.۱۱ بـه دست می‌آیند.

یك افـراز T مانند P عیناً مـانند یك افراز بازهٔ $[a,\ b]$ تعـریف می‌شود. یعنی $P=\{E_{۱},\ \cdots,\ E_n\}$، که درآن E_iها زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر T هستند واشتراك‌هردو E_i متمایز (حداکثر) یك مجموعهٔ صفر اندازه است. سپس می‌تـوانیم مجموعهای بـالا و پایین، انتگرالهای بالا وپایین وسرانجام انتگرال لبگ بـرای توابع کراندار را تعریف کنیم. از این گذشته، برهان اینکه توابع اندازه‌پذیر کراندار، انتگـرالپذیر لبگ هستند (قضیهٔ ۹.۵.۱۱)، درمورد توابع کراندار اندازه‌پذیر در T هم معتبر است. تـوسیع این

تعریف به‌توابع بیکران مانند بخش ۶.۱۱ انجام می‌شود.

اگر f در T انتگرالپذیر لبگ باشد، می‌نویسیم $f\in\mathscr{L}(T)$. اگر $f\in\mathscr{L}(T)$، انتگرال f روی T با نماد

$$\iint_T f(x,y)dx\,dy$$

نشان داده می‌شود. چنین انتگرال را غالباً انتگرال دوگانه می‌نامند.

اگر E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر T باشد، می‌توان، مانند ۶.۷.۱۱

$$\iint_E f(x,\ y)dxdy \text{ را به‌صورت } \iint_T f(x,\ y)\chi_E(x,\ y)dxdy$$

تعریف کرد. ازاین گذشته، می‌توان باروشی‌مشابه ۱.۱۰.۱۱، انتگرال دوگانه را به‌توابعی در تمام R^2 توسعه داد.

۶.۱۰.۱۱ اکنون به ارتباط بین توابع اندازه‌پذیر در $T=[a,\ b]\times[c,\ d]$ و توابع اندازه‌پذیر در یك بازه در R^1 می‌پردازیم، نتیجه‌ای اصلی در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیه. اگر f در $T=[a,b]\times[c,\ d]$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه

۱. برای تقریباً هر $x\in[a,\ b]$ تابع $f(x,\ y)$ یك تابع اندازه‌پذیر y است، و

۲. برای تقریباً هر $y\in[c,\ d]$ تابع $f(x,\ y)$ یك تابع اندازه‌پذیر x است.

یعنی، اگر $x\in[a,\ b]$، تابع g_x، که با رابطهٔ

$$g_x(y)=f(x,\ y) \qquad (c\leqslant y\leqslant d)$$

تعریف می‌شود، یك تابع حقیقی در $[c,\ d]$ است، بنابر قسمت (۱) قضیه اگر f در T اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای تقریباً همهٔ xها، g_x یك تابع اندازه‌پذیر در $[c,\ d]$ است، قسمت (۲) نیز معنای مشابهی دارد.

درعمل انتگرالی به‌صورت

$$\iint_T f(x,\ y)dxdy$$

را با انتگرالگیری نسبت به x وسپس نسبت به y (یا به‌عکس) محاسبه می‌کنند. این‌حقیقت که یك انتگرال دوگانه را می‌توان با انتگرالگیری مکرر محاسبه کرد از تعریف

$$\iint_T f(x,y)dx\,dy$$

فوراً نتیجه نمی‌شود، بلکه این مطلب موضوع قضیهٔ نسبتاً مشکل و مشهوری بنام قضیهٔ فوبینی[1] است.

قضیهٔ فوبینی. اگر $T=[a, b]\times[c, d]$ و اگر $f\in\mathcal{L}(T)$، آنگاه
(۱) برای تقریباً هر $x\in[a, b]$، $f(x, y)$ در $\mathcal{L}[c, d]$ است (به‌عنوان یك تابع y).
در نتیجه

$$\int_c^d f(x, y)dy$$

برای تقریباً همهٔ xها تعریف شده است،
(۲) $\int_c^d f(x,y)dy$ در $\mathcal{L}[a, b]$ است (به‌عنوان تابع x)، و

$$\iint_T f(x,y)dx\,dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx. \qquad (۳)$$

همچنین،

$$\iint_T f(x,y)dx\,dy=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy. \qquad (۴)$$

یعنی، اگر f به عنوان تابعی از دو متغیر انتگرالپذیر لبگ باشد، آنگاه $\iint_T f$ را می‌توان با انتگرالگیری مکرر محاسبه کرد. در نتیجه اگر $f\in\mathcal{L}(T)$، آنگاه طرفهای راست (۳) و (۴) برابر هستند.

اغلب در یك انتگرال مکرر لازم است ترتیب انتگرالگیری عوض شود. این شیوهٔ عمل را می‌توان با قضیهٔ تونلی-هابسن[2] توجیه کرد.

قضیهٔ تونلی-هابسن. فرض کنیم f یك تابع اندازه‌پذیر در T باشد. اگر یکی از انتگرالهای مکرر

$$\int_c^d\left[\int_a^b|f(x,y)|dx\right]dy \quad \text{یا} \quad \int_a^b\left[\int_c^d|f(x,y)|dy\right]dx$$

1. Fubini 2. Tonelli-Hobson

وجود داشته باشد، آنگاه $f\in\mathcal{L}(T)$ ودرنتیجه (بنا برقضیهٔ فوبینی)

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy.^*$$

بنا براین در انتگرالهای مکرر می‌توان ترتیب انتگرالگیری را عوض کرد اگر یکی از انتگرالهای مکرر «همگرای مطلق» باشد. هم‌قضیهٔ فوبینی و هم قضیهٔ تونلی‌-هابسن برای انتگرالهای روی تمام R^2 برقرار هستند. درحقیقت، تمام نظریهٔ انتگرالگیری در T را که در بالا آوردیم می‌توان به‌تمام R^2، یا به‌انتگرالهای $\iint_E f$، که‌در آن E یك زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر R^2 است، توسعه داد.

۷۰۱۰۰۱۱ اکنون به‌تشریح نتایج این بخش می‌پردازیم. اگر $f\in\mathcal{L}[0,\infty)$، آنگاه چون $e^{-a}\leqslant 1$، اگر $a\geqslant 0$، تابع $e^{-xt}f(t)$ نیز برای هر $x\geqslant 0$ در $\mathcal{L}[0,\infty)$ است. تابع $\hat f$ راکه با

$$\hat f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}f(t)dt \qquad (0\leqslant x<\infty)$$

تعریف می‌شود مبدل‌لاپلاس f می‌نامند.

اگر f و g در $\mathcal{L}[0,\infty)$ باشند، آنگاه انتگرال

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt \tag{۱}$$

برای تقریباً هر $x\in[0,\infty)$ وجود دارد ویك تابع اندازه‌پذیر x در $[0,\infty)$ است. برهان این مطلب به‌صورت زیر است: توابع f و g را با رابطهٔ $f(t)=0=g(t)$ برای $-\infty<t<0$ تعریف می‌کنیم. برای هر tی حقیقی، با تعویض متغیر $u=x-t$، داریم

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x-t)|dx=\int_{-\infty}^\infty |f(u)|du,$$

---

* وجود $\int_a^b\left[\int_c^d |f(x,y)|dy\right]dx$ به این معنی است که

۱. برای تقریباً همهٔ xها در $[a,b]$، تابع $|f(x,y)|$ در $\mathcal{L}[c,d]$ باشد، و

۲. تابع $\int_c^d |f(x,y)|dy$ [که برای تقریباً همهٔ xها به وسیلهٔ ۱ تعریف شده است] در $\mathcal{L}[a,b]$ باشد. بنابراین، تحت این شرایط، $\int_a^b\left[\int_c^d |f(x,y)|dy\right]dx$ یك عددحقیقی است.

و بنا بر این

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-t)g(t)|\,dx\right]dt=\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,dt\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|\,du$$

$$=\int_{0}^{\infty}|g(t)|\,dt\cdot\int_{0}^{\infty}|f(u)|\,du.$$

مقدار اخیر متناهی است، زیرا که $f\,,\,g\in\mathcal{L}[0\,,\,\infty)$. در نتیجه، بنا بر قضیهٔ تونلی-هابسن، تابع $f(x-t)g(t)$ در $\mathcal{L}(R^2)$ است. از قضیهٔ فوبینی نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)\,dt \tag{۲}$$

برای تقریباً همهٔ xها وجود دارد وانتگرالپذیر است. اما برای $t<0$، $g(t)=0$ و برای $t>x$، $f(x-t)=0$. بنابراین، انتگرال (۲) برابرانتگرال (۱) است وادعای ما ثابت می‌شود. اگر $f\,,\,g\in\mathcal{L}[0\,,\infty)$ واگر

$$h(x)=\int_{0}^{x}f(x-t)g(t)\,dt\,,$$

می گوییم که h پیچش f و g است ومی‌نویسیم $h=f*g$. به‌این‌ترتیب نشان‌داده‌ایم که $h(x)$ برای تقریباً همهٔ xها وجود دارد و $h\in\mathcal{L}[0\,,\,\infty)$.

اکنون‌قضیهٔ مشهوری را که با مبدلهای‌لاپلاس و پیچشها سروکار دارد ثابت‌می‌کنیم.

قضیه. اگر f و g توابعی در $\mathcal{L}[0,\infty)$ باشند که مبدلهای لاپلاسشان $\hat{f}$ و $\hat{g}$ است، واگر $h=f*g$، آنگاه $\hat{h}=\hat{f}\hat{g}$. یعنی مبدل لاپلاس پیچش f و g با حاصلضرب‌مبدلهای لاپلاس f و g برابر است.

برهان: برای $y\geqslant 0$ داریم

$$\hat{h}(y)=\int_{0}^{\infty}e^{-yx}h(x)\,dx=\int_{0}^{\infty}e^{-yx}\left[\int_{0}^{x}f(x-t)g(t)\,dt\right]dx.$$

که این انتگرال در یك مثلث در R^2، یعنی $E=\{\langle x,t\rangle : 0\leqslant t\leqslant x,\ 0\leqslant x<\infty\}$، گرفته می‌شود. با معکوس کردن ترتیب انتگرالگیری داریم $E=\{\langle x,\,t\rangle : t\leqslant x<\infty$ و $0\leqslant t<\infty\}$. بنابراین

$$h(y)=\int_{\circ}^{\infty}g(t)\left[\int_{t}^{\infty}e^{-yx}f(x-t)\,dx\right]dt$$

$$=\int_{\circ}^{\infty}g(t)\left[\int_{\circ}^{\infty}e^{-y(u+t)}f(u)\,du\right]dt$$

$$=\int_{\circ}^{\infty}e^{-yt}g(t)\,dt\cdot\int_{\circ}^{\infty}e^{-yu}f(u)\,du=\hat{g}(y)\hat{f}(y).$$

نشان‌دادیم که، برای هر $y\geqslant\circ$، $\hat{h}(y)=\hat{f}(y)\hat{g}(y)$. پس $\hat{h}=\hat{f}\,\hat{g}$ که این همان‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم. تعویض ترتیب انتگرالگیری را می‌توان با قضیهٔ تونلی ـ هابسن توجیه کرد (بررسی کنید.)

۱۰.۱۱.۸ این فصل را با ذکر این‌نکته به پایان می‌رسانیم که نظریهٔ اندازه و انتگرالگیری را در رده‌ای‌از فضاها که بسیار کلیتر از $R^{۱}$، $R^{۲}$ وغیره هستند می‌توان‌مطرح کرد. برای یك بحث‌کلیتر کتاب زیر را به‌عنوان یك مرجع پیشنهاد می‌کنیم.

H. L. Royden. *Real Analysis* (Macmillan, New York, 1968).

برای نظریهٔ مشتقگیری مربوط به‌انتگرال لبگ، که با قضیهٔ ۵.۸.۱۱ به‌اختصار از آن گذشتیم خواننده را به‌یکی از دوکتاب زیر ارجاع می‌دهیم:

F. Riesz, B. von Sz. Nagy. *Functional Analysis*, New York, Ungar, 1955 یا E. C. Titchmarsh. *Theory of Functions*, Oxford New York, 1939 (2nd ed).

متذکر می‌شویم که ما درانتگرال لبگ به‌قضیه‌هایی دربارهٔ تعویض متغیر، انتگرالگیری جزء‌به‌جزء وغیره نپرداخته‌ایم و این قضایا دراین مرجعها یافت می‌شوند.

تمرینهای ۱۰.۱۱

۱. کدام‌یك از توابع زیر در $\mathscr{L}[\circ,\infty)$ هستند؟

(الف) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\qquad(\circ<x<\infty)$

(ب) $f(x)=\dfrac{۱}{۱+x^{۲}}\qquad(\circ\leqslant x<\infty)$

(ج) تابع مشخصهٔ

$$\bigcup_{n=۱}^{\infty}\left[n,\,n+\frac{۱}{n^{۲}}\right]$$

(د) تابع مشخصهٔ اعداد گویا در $[\circ,\infty)$،

(ه) تابع مشخصهٔ اعداد کنگ در $[0, \infty)$.

۲. اگر f یك تابع نامنفی در $(0, \infty)$ باشد، و اگر به‌ازای هر $0<\varepsilon$، $N>0$، $f\in\mathscr{R}[\varepsilon, N]$ واگر انتگرال ناسرهٔ ریمان $\int_0^\infty f$ وجود داشته باشد ثابت‌کنید که $f\in\mathscr{L}[0, \infty]$.

۳. نشان‌دهید که اگر $x>0$، آنگاه $e^{-t}t^{x-1}$ در $[0,\infty)$ انتگرالپذیر لبگ است، فرض کنید

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (0<x<\infty).$$

این تابع را تابع گاما می‌نامند.

(الف) باانتگرالگیری‌جزءبه‌جزء روی بازهٔ $[\varepsilon, N]$ ومیل‌دادن $\varepsilon \to 0+$ و $N \to \infty$ نشان‌دهید که

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \qquad (0<x<\infty).$$

(ب) نشان‌دهید که $\Gamma(1)=1$،

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

۴. اگر $T=[a, b]\times[c, d]$ و اگر f در T پیوسته باشد، ثابت‌کنید که

$$\int\int_T f(x, y)dx\,dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy.$$

۵. نشان‌دهید که

$$\int_0^1\left[\int_0^x f(x, y)dy\right]dx=\int_0^1\left[\int_y^1 f(x,y)dx\right]dy$$

به‌شرط اینکه f در $[0, 1]\times[0, 1]$ انتگرالپذیر لبگ باشد.

۶. اگر $T=[0, 1]\times[0, 1]$ واگر

$$f(x, y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad (\langle x, y\rangle \in T; \langle x, y\rangle\neq\langle 0, 0\rangle),$$

$$f(0, 0)=0.$$

(الف) نشان‌دهید که

$$\int_0^1 f(x, y)dy=\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{1+x^2} \qquad (0<x\leqslant 1),$$

و در نتیجه

$$\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{1} f(x, y)dy\right]dx=\frac{\pi}{4}.$$

(ب) همچنین نشان دهید که

$$\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{1} f(x, y)dx\right]dy=-\frac{\pi}{4}.$$

(ج) با استفاده از قضیهٔ فوبینی نتیجه بگیرید که f روی T انتگرالپذیر نیست.

(د) با استفاده از قضیهٔ تونلی-هابسن نتیجه بگیرید که

$$\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{1} |f(x, y)|dy\right]dx$$

وجود ندارد.

۰۷ فرض کنید $T=[-1, 1]\times[-1, 1]$ و تابع f را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$f(x, y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad (\langle x, y\rangle\in T,\ \langle x, y\rangle\neq\langle 0, 0\rangle),$$
$$f(0, 0)=0,$$

(الف) نشان دهید که

$$\int_{-1}^{1} f(x, y)dy=0 \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

و نشان دهید که در نتیجه

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1} f(x, y)dy\right]dx=0.$$

(ب) اگر f روی T انتگرالپذیر بود، آنگاه f روی $T^*=[0, 1]\times[0, 1]$ انتگرالپذیر بود در این حالت

$$\int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{1} f(x, y)dy\right]dx \tag{*}$$

وجود می‌داشت (چرا؟)

(ج) نشان دهید که

$$\int_{0}^{1} f(x,y)\,dy=\frac{1}{2x}-\frac{x}{2(x^{2}+1)} \qquad (0<x\leqslant 1),$$

ودر نتیجه، انتگرال مکرر (*) وجود ندارد.

(د) نتیجه بگیرید که f روی T انتگرالپذیر نیست، هرچند که

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy\right]dx$$

وجود دارد وبرابر ۰ است.

۱۲

سریهای فوریه

۱.۱۲ تعریف سریهای فوریه

بسط توابع حقیقی برحسب توابع ۱، $\cos x$، $\sin x$، $\cos ۲x$، $\sin ۲x$، ... مورد بحث ما خواهد بود. ابتدا باید بعضی از انتگرالهای معین توابع مثلثاتی را حساب کنیم.

۱.۱.۱۲. قضیه.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = ۰ \qquad (k, n = ۰, ۱, ۲, \ldots; k \neq n) \qquad (۱)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{۲} nx \, dx = \begin{cases} \pi & (n = ۱, ۲, \ldots) \\ ۲\pi & (n = ۰) \end{cases} \qquad (۲)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = ۰ \qquad (k, n = ۱, ۲, \ldots; k \neq n) \qquad (۳)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{۲} nx \, dx = \pi \qquad (n = ۱, ۲, \ldots) \qquad (۴)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx\, dx = \circ \qquad (k, n = \circ, ۱, ۲, \ldots). \qquad (۵)$$

برهان: همهٔ این نتایج را می‌توان به‌آسانی از اتحادهای مثلثاتی مناسب به‌دست آورد. مثلاً،

$$\cos(kx+nx) = \cos kx \cos nx - \sin kx \sin nx,$$

$$\cos(kx-nx) = \cos kx \cos nx + \sin kx \sin nx.$$

با جمع آنها داریم

$$\cos kx \cos nx = \frac{۱}{۲}[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x].$$

فرض کنیم $k \neq n$. با انتگرالگیری از $-\pi$ تا π خواهیم داشت

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\, dx = \frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+n)x\, dx + \frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-n)x dx$$

$$= \frac{۱}{۲} \cdot \frac{\sin(k+n)x}{k+n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{۱}{۲} \cdot \frac{\sin(k-n)x}{k-n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \circ.$$

که (۱) را ثابت می‌کند. اثبات (۲) تا (۵) برعهدهٔ خواننده گذاشته شده است.

۲.۱۰۱۴. فرض کنیم تابعی حقیقی مانند f در $[-\pi, \pi]$ داریم که می‌توان آن را به‌صورت زیر بیان کرد.

$$f(x) = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{k=۱}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi). \quad (۱)$$

اکنون به‌طور صوری [یعنی سطحی و بدون بحث در درستی یا نادرستی نتیجهٔ حاصل] ضرایب $a_\circ$، $a_۱$، $b_۱$، $a_۲$، $b_۲$، ... را به‌دست می‌آوریم. با انتگرالگیری از (۱) داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_\circ + \sum_{k=۱}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx\right) = \pi a_\circ.$$

بنابراین، با فرض مجاز بودن انتگرالگیری جمله‌به‌جمله، داریم

$$a_\circ = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \qquad (۲)$$

حال، به‌ازای یك عدد ثابت $n \in I$، فرمول (۱) را در $\cos nx$ ضرب می‌کنیم و از آن

انتگرال می گیریم، داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{a_\circ}{۲}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx$$
$$+\sum_{k=۱}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\, dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\, dx\right).$$

با استفاده از ۱۰۱۰۱۲ می بینیم که فقط یکی از انتگرالهای طرف راست، یعنی

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\, dx$$

به‌ازای $k=n$ صفر نیست. بنابراین

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{۲} nx\, dx = \pi a_n,$$

درنتیجه

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \qquad (n=۱,\ ۲,\ \cdots) \tag{۳}$$

ملاحظه کنید که باقراردادن $n=\circ$ درفرمول (۳) فرمول (۲) به‌دست می‌آید. به‌همین‌علت است که در فرمول (۱) به‌جای $a_\circ$ نوشته‌ایم $a_\circ/۲$. به‌همین طریق می‌توان نشان‌داد که

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx. \tag{۴}$$

درنتیجه، اگر بتوانیم تابع f را به‌صورت (۱) بنویسیم، می‌توانیم انتظار داشته‌باشیم که ضرایب از فرمولهای (۲)، (۳) و (۴) به‌دست آیند. بـا این مطلب به‌تعریف زیر رهنمون می‌شویم.

۳۰۱۰۱۲. تعریف. اگر $f\in\mathcal{L}[-\pi,\pi]$، آنگاه سری‌زیر

$$\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{k=۱}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi),$$

را که درآن

$$a_k = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx \qquad (k=\circ,\ ۱,\ ۲,\ \cdots),$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad (k=1,\,2,\,\dots).$$

سری فوریهٔ تابع f وضرایب a_k و b_k را ضرایب فوریهٔ f می‌نامیم و می‌نویسیم

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

ملاحظه کنید که دراینجا از نماد $\sim$ استفاده کرده‌ایم نه از نماد $=$. هنوز نشان‌نداده‌ایم که سری فوریهٔ تابع $f\in\mathscr{L}[-\pi,\pi]$ همگراست، واگر همگـرا باشد به‌ازای همه یا بعضی از مقادیر x مجموع این‌سری $f(x)$ است.

به‌عنوان مثال فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi\leqslant x<0),\\ 1 & (0\leqslant x\leqslant\pi).\end{cases}$$

آنگاه

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx.$$

بنابراین

$$a_0=1,\ a_k=0 \qquad (k=1,\,2,\,3,\,\dots).$$

همچنین

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx=\frac{1-\cos k\pi}{k\pi}.$$

بنابراین

$$b_k=0(k=2,\,4,\,6,\,\dots)\ \text{و}\ b_k=\frac{2}{k\pi} \qquad (k=1,3,5,\dots,).$$

درنتیجه

$$f\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right],$$

توجه کنید که به‌ازای $x=0$ مجموع سری فوریهٔ f برابر $\frac{1}{2}$ است که برابر $f(0)$ نیست.

تمرینهای ۱۰۱۲

۰۱ تابع f در $[-\pi, \pi]$ را یك تابع زوج می‌نامیم اگر

$$f(-x)=f(x) \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

مثلا، تابع کسینوس یك تابع زوج است.

تابع f در $[-\pi, \pi]$ را یك تابع فرد می‌نامیم اگر

$$f(-x)=-f(x) \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

مثلا، تابع سینوس یك تابع فرد است.

(الف) نشان‌دهید که اگر f تابع زوج باشد آنگاه

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = ۲\int_{۰}^{\pi} f(x)dx.$$

(ب) نشان‌دهید که اگر f تابع فرد باشد آنگاه

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = ۰.$$

(ج) نشان‌دهید که اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد آنگاه fg یك تابع فرد است.

(د) نشان دهید که fg یك تابع زوج است اگر و فقط اگر f و g هردو فرد یا هردو زوج باشند.

(ه) فرض کنید $f \in \mathcal{L}[-\pi, \pi]$ و

$$f(x) \sim \frac{a_{۰}}{۲} + \sum_{k=۱}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

نشان‌دهید که اگر f زوج باشد آنگاه $b_۱ = b_۲ = \ldots = ۰$، درحالی که اگر f فرد باشد آنگاه $a_۰ = a_۱ = a_۲ = \ldots = ۰$.

۰۲ اگر f تابع حقیقی دلخواهی در $[-\pi, \pi]$ باشد و

$$g(x)=f(x)+f(-x) \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi),$$
$$h(x)=f(x)-f(-x) \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi),$$

نشان‌دهید که g یك تابع زوج و h یك تابع فرد است. نتیجه بگیرید که هرتابع حقیقی در $[-\pi, \pi]$ را می‌توان به‌صورت مجموع یك تابع زوج و یك تابع فرد نوشت.

۰۳ سری فوریهٔ هریك از توابع زیر را بیابید.

(الف)
$$f(x)=\begin{cases} -۱ & (-\pi \leqslant x < ۰) \\ ۱ & (۰ \leqslant x \leqslant \pi) \end{cases}$$

(ب) $f(x)=x \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$

(ج) $f(x)=|x| \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$

(د) $f(x)=e^x \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$

(ه) $f(x)=\sin x+\cos 2x \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$

هروقت ممکن باشد از قسمت (ه)ی تمرین ۱ استفاده کنید.

۴. (الف) درمورد هریك از توابـع قسمتهای (الف) و (ب)ی تمرین ۳ تحقیق کنید آیا سری فوریه به‌ازای $x=0$ به $f(0)$ همگراست یا نه.

(ب) به‌فرض اینکه سری فوریهٔ

$$f(x)=|x| \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

به‌ازای $x=0$ به $f(0)$ همگرا باشد، ثابت کنید

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots=\frac{\pi^2}{8}.$$

۵. اگر سری

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (1)$$

در $[-\pi,\pi]$ همگرای یکنواخت به‌تابع f باشد ثابت کنید که (۱) سری‌فوریهٔ f است. [راهنمایی: به‌ازای هر $n\in I$ نشان‌دهید که

$$\frac{a_0\cos nx}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx\cos nx+b_k\sin kx\cos nx)$$

در $[-\pi,\pi]$ همگرای‌یکنواخت به $f(x)\cos nx$ است. سپس با انتگرالگیری نشان‌دهید که a_n، nامین ضریب کسینوسی سری فوریهٔ f است. شبیه همین‌کار را برای b_n انجام دهید.]

۲.۱۲ بیان مسائل همگرایی

۱.۲.۱۲. برای اینکه ببینیم سری فوریهٔ یك تـابع $f\in\mathcal{L}[-\pi,\pi]$ در یك نقطهٔ $x\in[-\pi,\pi]$ واقعاً به‌مقدار تابع f همگراست، باید درستی

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=f(x)$$

را تحقیق کنیم که در آن s_nها مجموعهای جزئی سری فوریه هستند، یعنی

$$s_n(t)=\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{k=۱}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt) \qquad (-\pi\leqslant t\leqslant\pi). \qquad (۱)$$

برای اینکه $s_n(x)$ را به‌صورت مناسبتری درآوریم از تعریف a_k و b_k استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_\circ}{۲}+\sum_{k=۱}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \\ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ &\quad +\frac{۱}{\pi}\sum_{k=۱}^{n}\left(\cos kx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt+\sin kx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right) \\ &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{۱}{۲}+\sum_{k=۱}^{n}(\cos kx\cos kt+\sin kx\sin kt)\right]dt \\ &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{۱}{۲}+\sum_{k=۱}^{n}\cos k(x-t)\right]dt. \end{aligned}$$

با استفاده از اتحاد (۳۹) از بخش ۴.۸ داریم

$$s_n(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$$

که در آن*

$$D_n(t)=\frac{۱}{۲}+\sum_{k=۱}^{n}\cos kt=\frac{\sin(n+۱/۲)t}{۲\sin(t/۲)} \qquad (-\infty<t<\infty). \quad (۲)$$

(تابع D_n را هستهٔ دیریکله می‌نامند.)
با قراردادن $u=x-t$ خواهیم‌داشت

$$s_n(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_n(u)du. \qquad (۳)$$

اکنون با استفاده از شرط

$$f(u+۲\pi)=f(u). \qquad (۴)$$

تعریف تابع f را به‌تمام $(-\infty,\infty)$ توسعه می‌دهیم. به‌این‌طریق $f(u)$ به‌صورتی یکتا

---

* به‌ازای $t=\circ, \pm۲\pi, \pm۴\pi, \ldots$ مقدار، $D_n(t)$ را برابر $n+۱/۲$ اختیار می‌کنیم تا D_n در $(-\infty, \infty)$ پیوسته باشد.

برای تمام مقادیر u به‌استثنای ... $u=\pm ۳\pi, \pm ۵\pi,$ [درحالتی که $f(\pi)\neq f(-\pi)$] تعریف‌می‌شود. دراین‌نقاط‌می‌توانیم $f(u)$ را به‌هرطریقی که مایل باشیم تعریف کنیم بی آنکه انتگرالهای مربوط به f تغییر کنند. توابعی که در شرط (۴) صدق می کنند توابع دوره‌ای (با دورهٔ ۲π) نامیده می‌شوند. چون D_n هم یك تابع دوره‌ای است، با استفاده از (۳) می‌توان به‌آسانی نشان‌داد که

$$s_n(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du.$$

(تمرین ۱ این بخش را ببینید.) بنابراین

$$s_n(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\circ} f(x-u)D_n(u)du+\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du$$
$$=\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} f(x+t)D_n(-t)\,dt+\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt.$$

چون به‌ازای هر t، $D_n(-t)=D_n(t)$، داریم

$$s_n(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt. \qquad (۵)$$

درحالت خاص $f=۱$ داریم

$$a_{\circ}=۲,\ a_k=b_k=\circ \qquad (k\geqslant ۱)$$

بنابراین به‌ازای هر n، $s_n(x)=۱$. درنتیجه بااستفاده از (۵) داریم

$$۱=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} D_n(t)dt. \qquad (۶)$$

اکنون به تابع دلخواه $f\in\mathscr{L}[-\pi,\pi]$ باز می گردیم، با ضرب (۶) در $f(x)$ وتفریق آن از (۵) خواهیم‌داشت

$$s_n(x)-f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{۲}-f(x)\right]D_n(t)dt.$$

بنابراین نشان‌داده‌ایم که

$$\frac{a_{\circ}}{۲}+\sum_{k=۱}^{\infty} a_k\cos kx+b_k\sin kx=f(x)$$

[یعنی سری فوریهٔ تابع f درنقطهٔ x به $f(x)$ همگراست] اگر وفقط اگر

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x)-f(x)]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{۲}-f(x)\right]D_n(t)dt=۰,$$
که در آن D_n همان است که در (۲) آمده است.

۲.۲.۱۲ اگر $f\in\mathscr{L}^۲[-\pi,\pi]$، آنگاه $f\in\mathscr{L}[-\pi,\pi]$ (چرا؟)، بنابراین f یك سری فوریه دارد. ازآنجاکه هریك از توابع $\cos kt$، $\sin kt$ در $\mathscr{L}^۲[-\pi,\pi]$ هستند، از ۳.۹.۱۱ نتیجه می‌شود که $s_n\in\mathscr{L}^۲[-\pi,\pi]$، که s_n مجموع جزئی nام سری فوریهٔ f است که در فرمول (۱) بخش ۱.۲.۱۲ تعریف شد. پس، علاوه‌براین سؤال که‌آیا دنبالهٔ $\{s_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$ در نقطهٔ x به $f(x)$ همگراست، می‌توانیم دربارهٔ این دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ که در آن توابع $s_n\in\mathscr{L}^۲[-\pi,\pi]$، سؤال بسیار جالب دیگری را مطرح کنیم، یعنی جویاشویم که‌آیا این دنباله با متریك $\mathscr{L}^۲[-\pi,\pi]$ به f همگراست؟ یعنی آیا

$$\lim_{n\to\infty}\|s_n-f\|_۲=۰?$$

دربخش ۴.۱۲ خواهیم دید که جواب این سؤال به‌ازای همهٔ توابع $f\in\mathscr{L}^۲[-\pi,\pi]$ مثبت است.

۳.۲.۱۲ اکنون به‌عنوان‌آخرین سؤال می‌پرسیم: به‌ازای چه xهایی سری فوریهٔ $f\in\mathscr{L}[-\pi,\pi]$ به $f(x)$ مجموع‌پذیر $(C,۱)$ است؟ یعنی به ازای کدام $x\in[-\pi,\pi]$

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=f(x)\qquad(C,۱),$$

یا به‌عبارت هم‌ارز

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=f(x)$$

که در آن

$$\sigma_n(x)=\frac{s_۰(x)+s_۱(x)+\cdots+s_{n-۱}(x)}{n}=\frac{۱}{n}\sum_{k=۰}^{n-۱}s_k(x)?$$

بااستفاده از (۵) بند ۱.۲.۱۲ داریم

$$\sigma_n(x)=\frac{۱}{n}\sum_{k=۰}^{n-۱}\cdot\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_k(t)dt,$$

وبنابراین

$$\sigma_n(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]K_n(t)dt \qquad (۱)$$

که در آن

$$K_n(t)=\frac{۱}{n}\sum_{k=۰}^{n-۱}D_k(t)=\frac{۱}{۲n\sin(t/۲)}\sum_{k=۰}^{n-۱}\sin\left(k+\frac{۱}{۲}\right)t\quad(-\infty<t<\infty). \qquad (۲)$$

اکنون

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=\sum_{j=1}^{n}\sin\left(j-\frac{1}{2}\right)t=\sum_{j=1}^{n}\sin(2j-1)\frac{t}{2},$$

ودرنتیجه بنا بر تمرین ۸ بخش ۴.۸،

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=\frac{\sin^2(nt/2)}{\sin(t/2)}.$$

بنابراین بااستفاده از (۲)،

$$K_n(t)=\frac{\sin^2(nt/2)}{2n\sin^2(t/2)}\qquad(-\infty<t<\infty). \tag{۳}$$

[توجه داشته باشید که به‌ازای هر t، $K_n(t)\geqslant 0$.] درحالت خاص $f=1$،

$$s_0(x)=s_1(x)=\dots=s_{n-1}(x)=1.$$

درنتیجه بنا بر (۱) داریم

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)dt. \tag{۴}$$

اکنون به‌تابع دلخواه $f\in\mathcal{L}[-\pi,\pi]$ باز می‌گردیم و (۴) را در $f(x)$ ضرب کرده، از (۱) تفریق می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right]K_n(t)dt.$$

بنابراین نشان‌دادیم که

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx=f(x)\qquad(C,1)$$

اگر وتنها اگر

$$\lim_{n\to\infty}[\sigma_n(x)-f(x)]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right]K_n(t)dt=0.$$

تمرینهای ۲.۱۲

۱. اگر $f\in\mathcal{L}[-\pi,\pi]$ و اگر

$$f(u+2\pi)=f(u)\qquad(-\infty<u<\infty),$$

نشان‌دهید که به‌ازای هر x حقیقی،

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(u)du = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)du.$$

[راهنمایی: ابتدا بنویسید

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du = \int_{-\pi}^{-\pi+x} f(u)du + \int_{-\pi+x}^{\pi} f(u)du = I_1 + I_2.$$

آنگاه نشان‌دهید که

$$I_1 = \int_{\pi}^{\pi+x} f(t-2\pi)dt = \int_{\pi}^{\pi+x} f(t)dt = \int_{\pi}^{\pi+x} f(u)du$$

و I_2 را با آن جمع کنید.]

۲. اگر $f \in \mathscr{L}[-\pi, \pi]$ و اگر

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi),$$

نشان‌دهید که به‌ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ و $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$

$$\sigma_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

۳. فرمولهای زیر راست هستند یا دروغ؟

(الف) $$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |K_n(t)|dt \qquad (n \in I).$$

(ب) $$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |D_n(t)|dt \qquad (n \in I).$$

۴. اگر f در $[-\pi, \pi]$ پیوسته باشد و

$$\max_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} |f(t)| = M,$$

با استفاده از (۱) بند ۳.۲.۱۲ ثابت کنید که

$$|\sigma_n(t)| \leqslant M \qquad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi).$$

آیا با همین روش اثبات می‌توانید ثابت کنید که

$$|s_n(t)| \leqslant M \qquad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi)?$$

۳.۱۲ مجموعپذیری $(C, 1)$ سریهای فوریه

اکنون نشان می‌دهیم که پیوستگی در x برای اطمینان اینکه سری فوریهٔ $f\in\mathcal{L}[-\pi, \pi]$ در x به $f(x)$ مجموعپذیر $(C, 1)$ است شرط کافی است. قضیهٔ زیر منسوب به‌فیر[1] است. (و K_n را اغلب هستهٔ فیر می‌نامند).

۱.۳.۱۲ قضیه. اگر $f\in\mathcal{L}[-\pi, \pi]$ و اگر f در $x\in[-\pi, \pi]$ پیوسته باشد* آنگاه

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=f(x) \qquad (C, 1) \qquad (1)$$

برهان: یك ε مثبت اختیار می کنیم. بنا بر ۳.۲.۱۲ برای اثبات قضیه کافی است که $N\in I$ را چنان تعیین کنیم که

$$|\sigma_n(x)-f(x)|=\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2}\right]K_n(t)\,dt\right|<\varepsilon$$
$$(n\geqslant N). \qquad (2)$$

از آنجا که f در x پیوسته است می‌توانیم δ را با شرط $0<\delta<\pi$ بیابیم به‌گونه‌ای که

$$|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (|y-x|<\delta).$$

بنابراین، اگر $0\leqslant t<\delta$، آنگاه

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}[|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|]$$
$$<\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)=\frac{\varepsilon}{2}.$$

در نتیجه

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2}\right]K_n(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}K_n(t)\,dt,$$

ولذا، بنابر (۴) از ۳.۲.۱۲،

---

1. Fejer

* اگر $x=\pi$ یا $x=-\pi$ مقصود از پیوستگی f در x، پیوستگی f است هنگامی که f بامعادلهٔ $f(u)=f(u+2\pi)$ توسعه یافته باشد.

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\delta\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2}\right]K_n(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad (n\in I). \quad (3)$$

اگر $t\geqslant\delta$ آنگاه $K_n(t)\leqslant\frac{1}{2n\sin^2(\delta/2)}$. درنتیجه

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_\delta^\pi\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2}\right]K_n(t)dt\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{4n\pi\sin^2(\delta/2)}\int_\delta^\pi[|f(x+t)|+|f(x-t)|+2|f(x)|]dt, \quad (4)$$

وبنابراین، $N\in I$ وجود دارد بهگونهای که

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_\delta^\pi\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2}\right]K_n(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad (n\geqslant N). \quad (5)$$

که ازآن نابرابری (۲) از (۳) و (۵) بهدست میآید وبرهان تمام میشود.

۲۰۳۰۱۲. دراینزمینه نتیجهٔ قویتری راهم میتوان اثبات کرد. درحقیقت با برآوردهای دقیقتری میتوان نشان داد که اگر $f\in\mathscr{L}[-\pi,\pi]$، آنگاه (۱) تقریباً برای هر xی در $[-\pi,\pi]$ برقرار است (حتی اگر f در هیچ xی پیوسته نباشد). مجموعهٔ نقاط E که (۱) درآن نقاط برقرار است شامل همهٔ نقاط x است که $f(x)$ مشتق

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

است ودرنتیجه (بنابر ۵۰۸۰۱۱)، E شامل تقریباً همهٔ نقاط $[-\pi,\pi]$ است. مااین مطلب را اثبات نمیکنیم.

اگر فرض کنیم که f در $[-\pi,\pi]$ پیوسته است و $f(-\pi)=f(\pi)$، میتوانیم همگرایی یکنواخت $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ را ثابت کنیم.

۳۰۳۰۱۲. قضیه. اگر $f\in C[-\pi,\pi]$ واگر $f(-\pi)=f(\pi)$، آنگاه $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ در $[-\pi,\pi]$ همگرای یکنواخت به f است، که درآن

$$\sigma_n=\frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}}{n}$$

و

$$s_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^n(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

برهان: چون f در بازهٔ بستهٔ کراندار $[-\pi, \pi]$ پیوسته است، با توجه به ۳.۸.۶ می‌دانیم که پیوستگی f در $[-\pi, \pi]$ یکنواخت است. ازآنجاکه $f(-\pi)=f(\pi)$، نتیجه می‌گیریم که f (به‌شرط آنکه با ضابطهٔ $f(u+2\pi)=f(u)$ در $(-\infty, \infty)$ توسعه یافته باشد) در $(-\infty, \infty)$ پیوستهٔ یکنواخت است. درنتیجه δی برهان ۱.۳.۱۲ را می‌توان مستقل از x اختیار کرد. ازآن گذشته بنابر (۴) از ۱.۳.۱۲ داریم

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2}K_n(t)dt\right|\leqslant\frac{2\|f\|(\pi-\delta)}{n\pi\sin^2(\delta/2)}$$

که $\|f\|=\max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|f(x)|$. درنتیجه N در (۵) بند ۱.۳.۱۲ را می‌توان طوری انتخاب کرد که فقط به δ (و نه به x) بستگی داشته باشد. چنین نتیجه خواهیم گرفت که

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (n\geqslant N;\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi),$$

وقضیه ثابت می‌شود.

تمرینهای ۳.۱۲

۱. اگر $f\in\mathcal{L}[-\pi, \pi]$ و اگر f در نقطهٔ $x\in[-\pi, \pi]$ پیوسته باشد، ثابت کنید که

$$f(x)=\lim_{r\to 1-}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)r^k\right].$$

۴.۱۲ نظریهٔ $\mathcal{L}^2$ی سریهای فوریه

۱.۴.۱۲. اگر $n\in I$، آنگاه یك چندجمله‌ای مثلثاتی درجهٔ n تابعی است مانند T_n به‌صورت

$$T_n(t)=A_0+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kt+B_k\sin kt) \qquad (-\pi\leqslant t\leqslant\pi), \qquad (1)$$

که در آن A_0، …، A_n و B_1، …، B_n اعداد حقیقی هستند. هر چندجمله‌ای مثلثاتی به $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$ تعلق دارد. اکنون ثابت می‌کنیم که اگر $f\in\mathcal{L}[-\pi, \pi]$، آنگاه نزدیکترین چندجمله‌ای مثلثاتی به f (با متریك $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$) مجموع جزئی nام سری فوریهٔ f، یعنی s_n، است.

قضیه. اگر $f\in\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ و اگر T_n چندجمله‌ای مثلثاتی درجه n دلخواهی باشد، آنگاه

$$\|f-T_n\|_۲ \geqslant \|f-s_n\|_۲ \qquad (۲)$$

که در آن

$$s_n(t)=\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{k=۱}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt) \qquad (-\pi\leqslant t\leqslant\pi)$$

و a_kها و b_kها ضرایب فوریهٔ f هستند.

برهان: برای هر T_n اگر

$$J=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T_n(t)]^۲dt,$$

آنگاه $\|f-T_n\|_۲=\sqrt{\pi J}$، وبنابراین باید ثابت کنیم هنگامی که $T_n=s_n$، J مینیمم است. داریم

$$J=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^۲-\frac{۲}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}fT_n+\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n^۲. \qquad (۳)$$

اگر T_n همان چندجمله‌ای مذکور در (۱) باشد، آنگاه

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}fT_n=A_\circ\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f+$$
$$\sum_{k=۱}^{n}\left(A_k\cdot\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt+B_k\cdot\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt\right)$$

وبنابراین

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}fT_n=A_\circ a_\circ+\sum_{k=۱}^{n}(A_ka_k+B_kb_k). \qquad (۴)$$

همچنین،

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n^۲=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(t)T_n(t)dt=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[A_\circ+\sum_{k=۱}^{n}(A_k\cos kt+B_k\sin kt)\right]$$
$$\cdot\left[A_\circ+\sum_{j=۱}^{n}(A_j\cos jt+B_j\sin jt)\right]dt.$$

انتگرال طرف راست را می‌توانیم با استفاده از ۱.۲.۱۲ محاسبه کنیم. بنابراین

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n^۲=۲A_\circ^۲+\sum_{k=۱}^{n}(A_k^۲+B_k^۲). \qquad (۵)$$

با جانشین‌کردن (۴) و (۵) در (۳) خواهیم داشت

$$J=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{2}-2A_{0}a_{0}-2\sum_{k=1}^{n}(A_{k}a_{k}+B_{k}b_{k})+2A_{0}^{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_{k}^{2}+B_{k}^{2}).$$

با اضافه کردن و کم‌کردن

$$\frac{a_{0}^{2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_{k}^{2}+b_{k}^{2})$$

و انجام چندعمل جبری، داریم

$$\begin{aligned} J&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-T_{n})^{2}\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{2}-\left[\frac{a_{0}^{2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_{k}^{2}+b_{k}^{2})\right]\\ &\quad+\left\{2\left(A_{0}-\frac{a_{0}}{2}\right)^{2}+\sum_{k=1}^{n}[(A_{k}-a_{k})^{2}+(B_{k}-b_{k})^{2}]\right\}. \end{aligned} \tag{۶}$$

کمیت داخل ابرو نمی‌تواند منفی باشد، و بنابراین J وقتی مینیمم خواهد بود که داشته‌باشیم $A_{0}=a_{0}/2$، $A_{k}=a_{k}(k=1,\ldots,n)$، $B_{k}=b_{k}(k=1,\ldots,n)$. یعنی، اگر $T_{n}=s_{n}$ آنگاه J مینیمم خواهد بود، که این همان است که می‌خواستیم نشان‌دهیم.

نتیجهٔ زیر دارای اهمیت فراوان است.

۲۰۴۰۱۳. نتیجه (نابرابری بسل[1]). اگر $f\in\mathcal{L}^{2}[-\pi,\pi]$ دارای ضرایب فوریهٔ a_{k} و b_{k} باشد، آنگاه

$$\frac{a_{0}^{2}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k}^{2}+b_{k}^{2})\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{2}. \tag{۱}$$

به‌ویژه، سری $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k}^{2}+b_{k}^{2})$ همگراست.

برهان: اگر در (۶) از ۱۰۴۰۱۲ قرار دهیم $A_{0}=a_{0}/2$، $A_{k}=a_{k}$، $B_{k}=b_{k}$، خواهیم داشت

$$J=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-s_{n})^{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{2}-\left[\frac{a_{0}^{2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_{k}^{2}+b_{k}^{2})\right]. \tag{۲}$$

1. Bessel

انتگرال طرف چپ نامنفی است، وبنابراین طرف راست نامنفی است. درنتیجه

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2. \tag{۳}$$

چون طرف راست (۳) مستقل از n است می‌توان n را به بینهایت میل داد و (۱) را به‌دست آورد.

اکنون نشان‌می‌دهیم که اگر $f\in\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$، آنگاه سری فوریهٔ f با متریك $\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ به f همگراست. یعنی،

۳۰۴۰۱۲. قضیه. اگر $f\in\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\|s_n-f\|_2=0, \tag{۱}$$

که در آن

$$s_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\qquad(-\pi\leqslant t\leqslant\pi).$$

برهان: بنابر ۱۱۰۹۰۱۱، اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد تابع پیوستهٔ f^* وجود دارد به‌طوری که $f^*(\pi)=f^*(-\pi)$، و

$$\|f-f^*\|_2<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{۲}$$

بنابر ۳۰۳۰۱۲ می‌دانیم که $\{\sigma_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ در $[-\pi,\pi]$ همگرای یکنواخت به f^* است، که در آن

$$\sigma_n^*=\frac{s_0^*+\cdots+s_{n-1}^*}{n}$$

و s_k^*ها مجموعهای جزئی سری فوریهٔ f^* هستند. از این همگرایی یکنواخت نتیجه می گیریم که

$$\lim_{n\to\infty}\|\sigma_{n+1}^*-f^*\|_2=0,$$

و بنابراین، عدد $N\in I$ وجود دارد که

$$\|\sigma_{n+1}^*-f^*\|_2<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(n\geqslant N). \tag{۳}$$

از (۲) و (۳) داریم

$$\|f-\sigma_{n+1}^*\|_2<\varepsilon\qquad(n\geqslant N). \tag{۴}$$

ولی

$$\sigma^*_{n+1}=\frac{s^*_0+\cdots+s^*_n}{n+1}$$

یك چندجمله‌ای مثلثاتی درجهٔ n است. پس، بنا بر ۱۰۴۰۱۲،

$$\|f-s_n\|_2\leqslant\|f-\sigma^*_{n+1}\|_2.$$

بنابراین، با استفاده از (۴) داریم

$$\|f-s_n\|_2<\varepsilon \qquad (n\geqslant N),$$

که (۱) را نتیجه می‌دهد و برهان کامل می‌شود.

تأکید می‌کنیم که قضیهٔ ۳۰۴۰۱۲ با همگرایی با متریك $\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ سروکار دارد. از (۱) لزوماً نتیجه نمی‌شود که برای هر x خاصی $\lim_{n\to\infty} s_n(x)=f(x)$.

اکنون به‌دو نتیجهٔ مهم قضیهٔ ۳۰۴۰۱۲ می‌پردازیم.

۴۰۴۰۱۲. نتیجه. اگر $a_k(k=0,1,2,\ldots)$ و $b_k(k=1,2,\ldots)$، ضرایب فوریهٔ تابع $f\in\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ همگی ۰ باشند، آنگاه $f=0$.*

برهان: چون همهٔ a_kها و b_kها ۰ هستند، نتیجه‌می‌گیریم که به‌ازای هر $n\in I$، $s_n=0$. سپس با توجه به ۳۰۴۰۱۲ نتیجه فوراً به‌دست می‌آید.

۵۰۴۰۱۲. نتیجه. اگر f و g دوتابع در $\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ باشند که‌ضرایب فوریه‌شان یکی باشد، آنگاه $f=g$.**

برهان: تحت این‌مفروضات، $f-g$ در $\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ است وضرایب‌فوریهٔ $f-g$ همگی ۰ هستند. اکنون ۴۰۴۰۱۲ را به‌کار بندید.

در ۲۰۴۰۱۲ نشان دادیم که اگر $a_k(k=0,1,2,\ldots)$ و $b_k\ (k=1,2,\ldots)$ ضرایب فوریهٔ $f\in\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ باشند، آنگاه

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)<\infty. \qquad (*)$$

اکنون عکس این مطلب را ثابت می‌کنیم. یعنی، اگر $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌هایی از

---

* یعنی f عنصر صفر $\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ است، یا به عبارت هم‌ارز، تقریباً برای هر x در $[-\pi,\pi]$، $f(x)=0$.

** یعنی، برای تقریباً همهٔ xها، $f(x)=g(x)$.

اعداد باشند که در(*) صدق می‌کنند، آنگاه تابع $f\in\mathcal{L}^{۲}[-\pi,\pi]$ وجود دارد که ضرایب فوریه‌اش a_kها و b_kها هستند. به بیان دیگر، ۲.۴.۱۲ می‌گوید که اگر $f\in\mathcal{L}^{۲}[-\pi,\pi]$، آنگاه $\{a_k\}_{k=۰}^{\infty}$ و $\{b_k\}_{k=۱}^{\infty}$ در $l^{۲}$ هستند. آنچه که اکنون ثابت می‌کنیم این است که اگر $\{a_k\}_{k=۰}^{\infty}$ و $\{b_k\}_{k=۱}^{\infty}$ دنباله‌های دلخواهی در $l^{۲}$ باشند، آنگاه تابع $f\in\mathcal{L}^{۲}[-\pi,\pi]$ وجود دارد که ضرایب فوریه‌اش این دنباله‌ها هستند. ملاحظه کنید که دراین برهان ازکمال $\mathcal{L}^{۲}[-\pi,\pi]$ (قضیهٔ ۷.۹.۱۱) استفاده شده‌است. نظیر این قضیه برای توابع انتگرالپذیر مربعی ریمان وجود ندارد.

۶.۴.۱۲. قضیه.* اگر $\{a_k\}_{k=۰}^{\infty}$ و $\{b_k\}_{k=۱}^{\infty}$ دنباله‌های دلخواهی از اعداد حقیقی باشند، به‌طوری که

$$\frac{a_{۰}^{۲}}{۲}+\sum_{k=۱}^{\infty}(a_k^{۲}+b_k^{۲})<\infty, \qquad (۱)$$

آنگاه تابع $f\in\mathcal{L}^{۲}[-\pi,\pi]$ وجود دارد که ضرایب فوریه‌اش دقیقاً a_k و b_k هستند.

برهان: به‌ازای هر $n\in I$، چندجمله‌ای مثلثاتی s_n را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$s_n(t)=\frac{a_{۰}}{۲}+\sum_{k=۱}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\qquad(-\pi\leqslant t\leqslant\pi). \qquad (۲)$$

اگر $m<n$، آنگاه

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(s_n-s_m)^{۲}=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=m+۱}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\right]^{۲}dt,$$

با به‌کاربستن ۱.۱.۱۲ داریم

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(s_n-s_m)^{۲}=\sum_{k=m+۱}^{n}(a_k^{۲}+b_k^{۲}).$$

طرف چپ مساوی $(۱/\pi)\,\|s_n-s_m\|_{۲}^{۲}$ است. با توجه به (۱) می‌بینیم که $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی در $\mathcal{L}^{۲}[-\pi,\pi]$ است. پس، بنابر قضیهٔ ریس-فیشر، یعنی ۷.۹.۱۱، تابعی مانند $f\in\mathcal{L}^{۲}[۱-\pi,\pi]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\|s_n-f\|_{۲}=۰.$$

برای هر $j=۰,۱,۲,\ldots$، نتیجه می‌شود که

---

* این قضیه را قضیهٔ ریس-فیشر (Riesz-Fischer) هم می‌نامند.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(t)\cos jt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos jt\,dt \qquad (۳)$$

(تمرین ۲ از بخش ۹.۱۱ را ببینید). ولی، اگر $j\leqslant n$، از (۲) و۱.۱.۱۲ نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(t)\cos jt\,dt=a_j.$$

بنا بر این، بااستفاده از (۳) داریم

$$a_j=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos jt\,dt \qquad (j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

این نشان می‌دهد که a_jها ضرایب کسینوسی فوریهٔ تابع f هستند، با همین‌روش می‌توان نشان داد که b_jها ضرایب سینوسی فوریهٔ تابع f هستند، واین برهان را کامل‌خواهد کرد.

تمرینهای ۴.۱۲

۱. اگر $f\in\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ و

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

ثابت کنید که

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

(این‌را برابری‌پارسوال[1] می‌نامند) (راهنمایی: ۳.۴.۱۲را درموردفرمول(۲) از۲.۴.۱۲ به‌کار بندید.)

۲. با به‌کاربستن نتیجهٔ تمرین ۱ درمورد

$$f(t)=t \qquad (-\pi\leqslant t\leqslant\pi).$$

نتیجه بگیرید که

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

۳. با به‌کار بستن نابرابری پارسوال درمورد تابع بعد از ۳.۱.۱۲ نشان‌دهید که

1. Parseval

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

۴. آیا سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}} \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

سری فوریهٔ تابعی در $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$ است؟

۵. آیا سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{3/2}} \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

سری فوریهٔ تابعی در $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$ است؟

۶. (الف) اگر $f\in\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$ و

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

ثابت کنید که

$$\lim_{k\to\infty} a_k=0=\lim_{k\to\infty} b_k. \qquad (*)$$

(ب) ثابت کنید که حتی اگر فرض کنیم $f\in\mathcal{L}[-\pi, \pi]$، بازهم (*) برقرار است.

۵.۱۲ همگرایی سریهای فوریه

ما هنوز دربارهٔ همگرایی سری فوریهٔ یک‌تابع $f\in\mathcal{L}[-\pi, \pi]$ درنقطه‌ای مانند x چیزی ثابت نکرده‌ایم. شرطهایی‌کافی‌که برای همگرایی ذکر خواهیم‌کرد متضمن وجود حدهای چپ و راست $\lim_{t\to x+} f(t)$ و $\lim_{t\to x-} f(t)$ و وجودمشتقهای تعمیم‌یافتهٔ چپ و راست f در x، که هم‌اکنون آنها را تعریف می‌کنیم، خواهد بود.

۱.۵.۱۲ برای هر تابع حقیقی f در R^1، تعریف $\lim_{t\to x+} f(t)$ و $\lim_{t\to x-} f(t)$ در ۶.۱.۴ ذکر شد. یادآوری می‌کنیم که در ۵.۹.۶، نمادهای $f(x+)$ و $f(x-)$ را به‌صورت

$$f(x+)=\lim_{t\to x+} f(t);\quad f(x-)=\lim_{t\to x-} f(t),$$

تعریف کردیم، مشروط بر اینکه حدهای مورد بحث وجود داشته باشند. [بنابراین f در x پیوسته است اگر و تنها اگر $f(x+)$ و $f(x-)$ هردو موجود و برابر $f(x)$ باشند.]

۲.۵.۱۲. تعریف. اگر $x\in R^۱$ و اگــر f تابعی حقیقی باشد به‌طوری‌که $f(x+)$ وجود داشته باشد، $f'_r(x)$، مشتق راست تعمیم یافتهٔ f در x، را به‌صورت

$$f'_r(x)=\lim_{t\longrightarrow x+}\frac{f(t)-f(x+)}{t-x}$$

تعریف می‌کنیم، مشروط بر اینکه این‌حد وجود داشته باشد. به‌همین‌تــرتیب، $f'_l(x)$، مشتق چپ تعمیم‌یافتهٔ f در x، را به صورت

$$f'_l(x)=\lim_{t\longrightarrow x-}\frac{f(t)-f(x-)}{t-x}$$

تعریف می‌کنیم. برای مثال، فرض کنیم

$$\begin{aligned} &f(t)=۱+t \qquad (t>۱),\\ &f(۱)=۱۷,\\ &f(t)=۳t^۲ \qquad (t<۱). \end{aligned}$$

دراین‌صورت، $f(۱+)=\lim_{t\longrightarrow ۱+} f(t)=\lim_{t\longrightarrow ۱+} (۱+t)=۲$. به‌علاوه

$$f'_r(۱)=\lim_{t\longrightarrow ۱+}\frac{(۱+t)-۲}{t-۱}=۱\,.$$

به‌همین‌ترتیب، $f(۱-)=۳$ و $f'_l(۱)=۶$ (تحقیق کنید). دراین‌مثال $f'_r(x)$ و $f'_l(x)$ هردو در $x=۱$ وجود دارند، ملاحظه کنید که f در $x=۱$ نه از راست پیوسته است و نه از چپ. بنابراین f در $x=۱$ دارای مشتق راست یا مشتق چپ معمولی نیست.

قبل ازآنکه بتوانیم قضیهٔ موردنظر را برای همگرایی سریهای فوریه ثـابت‌کنیم، به‌قضیهٔ مهم ومشهوری نیاز داریم. این‌قضیه می‌گوید هنگامی‌که $k\to\infty$، ضرایب فوریهٔ یك تابع انتگرالپذیر لبگ، یعنی a_k و b_k، به‌صفر میل می‌کنند.

۳.۵.۱۲. قضیهٔ (ریمان‌ـ‌لبگ). اگر $f\in\mathcal{L}[-\pi,\pi]$ و اگر $\{a_k\}_{k=۰}^{\infty}$ و $\{b_k\}_{k=۱}^{\infty}$ ضرایب فوریهٔ f باشند، آنگاه

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} a_k=\lim_{k\longrightarrow\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt=۰ \qquad (۱)$$

و

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} b_k=\lim_{k\longrightarrow\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt=0. \qquad (۲)$$

برهان: فرض کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. از تعریف $\int_{-\pi}^{\pi} f$ به‌آسانی می‌توان نشان‌داد که تابع اندازه‌پذیر کراندار g در $[-\pi, \pi]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-g(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot \qquad (۳)$$

(تمرین ۹ در بخش ۷.۱۱ را ببینید.) چون g کراندار و اندازه‌پذیر است. $g\in\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$. درنتیجه، بنا بر ۲.۴.۱۲،

$$\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2+B_k^2)<\infty, \qquad (۴)$$

که در آن

$$A_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos kt\, dt, \qquad B_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin kt\, dt.$$

از (۴) نتیجه می گیریم که $\sum_{k=1}^{\infty}A_k^2<\infty$ و بنابراین، $\lim_{k\longrightarrow\infty} A_k=0$. پس عدد $N\in I$ وجود دارد که

$$|A_k|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (k\geqslant N). \qquad (۵)$$

ولی، برای هر k،

$$|a_k-A_k|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-g(t)]\cos kt\, dt\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-g(t)|\,dt.$$

ودرنتیجه، بنا بر (۳)،

$$|a_k-A_k|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (k\in I). \qquad (۶)$$

اکنون

$$a_k=(a_k-A_k)+A_k,$$

$$|a_k|\leqslant|a_k-A_k|+|A_k|,$$

و بنابراین، با استفاده از (۵) و (۶) داریم

$$|a_k|<\varepsilon \qquad (k\geqslant N).$$

این (۱) را ثابت می‌کند. برای کامل کردن برهان، (۲) را می‌توان به همین روش اثبات کرد.

مطلب زیر نتیجهٔ بدیهی قضیهٔ فوق است.

۴.۵.۱۲. نتیجه. اگر $\varphi\in\mathcal{L}[\circ, \pi]$، آنگاه

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\circ}^{\pi}\varphi(t)\sin\left(k+\frac{1}{۲}\right)t\,dt=\circ.$$

برهان: برای $-\pi\leqslant t<\circ$، $\varphi(t)$ را برابر $\circ$ تعریف می‌کنیم. آنگاه $\varphi\in\mathcal{L}[-\pi,\pi]$. از آنجا که

$$\sin\left(k+\frac{1}{۲}\right)t=\sin kt\cos\frac{t}{۲}+\cos kt\sin\frac{t}{۲}$$

داریم

$$\int_{\circ}^{\pi}\varphi(t)\sin\left(k+\frac{1}{۲}\right)t\,dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\varphi(t)\cos\frac{t}{۲}\right]\sin kt\,dt+\int_{-\pi}^{\pi}\left[\varphi(t)\sin\frac{t}{۲}\right]\cos kt\,dt.$$

ولی، $\varphi(t)\cos(t/۲)$ و $\varphi(t)\sin(t/۲)$ توابعی در $\mathcal{L}[-\pi, \pi]$ هستند، پس، بنابر ۳.۵.۱۲، هنگامی که $k\to\infty$، هر دو انتگرال طرف راست به $\circ$ میل می‌کنند و نتیجهٔ موردنظر به‌دست می‌آید.

اکنون به‌قضیهٔ مربوط به‌همگرایی سریهای فوریه می‌پردازیم.

۵.۵.۱۲. قضیه. فرض کنیم $f\in\mathcal{L}[-\pi, \pi]$، و x نقطهٔ دلخواهی از $[-\pi, \pi]$ باشد. اگر $f(x+)$ و $f(x-)$ موجود باشند، اگر*

$$f(x)=\frac{f(x+)+f(x-)}{۲}, \qquad (۱)$$

و اگر $f'_r(x)$ و $f'_l(x)$ موجود باشند، آنگاه سری فوریهٔ f در x به $f(x)$ همگراست.

---

*اگر $x=\pi$، آنگاه $f(x+)=f(\pi+)$ را با استفاده از مقدارهای $f(t)$، برای $t>\pi$، که به‌وسیلهٔ معادلهٔ $f(u+۲\pi)=f(u)$ توسیع یافته باشد محاسبه می‌کنیم. بیانی مشابه در مورد $x=-\pi$ نیز به کار می‌رود. ملاحظه کنید که اگر f در x پیوسته باشد (۱) برقرار است.

برهان: بنا بر آنچه‌که در ۱۰۲۰۱۲ نشان‌دادیم، برای اثبات اینکه سری فوریهٔ f در x به $f(x)$ همگرا است باید نشان‌دهیم که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{۲}-f(x)\right]D_n(t)dt=\circ$$

که در آن

$$D_n(t)=\frac{\sin(n+۱/۲)t}{۲\sin(t/۲)}\qquad(-\infty<t<\infty).$$

با توجه به (۱)، باید نشان‌داد که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\{[f(x+t)-f(x+)]+[f(x-t)-f(x-)]\}D_n(t)dt=\circ,$$

یا

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\varphi(t)\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)t\,dt=\circ \qquad (۲)$$

که در آن

$$\varphi(t)=\{[f(x+t)-f(x+)]$$
$$+[f(x-t)-f(x-)]\}\cdot\frac{۱}{۲\sin(t/۲)}\qquad(\circ<t\leqslant\pi). \qquad (۳)$$

اگر $\varphi(t)$ را به‌صورت

$$\varphi(t)=\left[\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x-)}{t}\right]\cdot\frac{t}{۲\sin(t/۲)}$$
$$(\circ<t\leqslant\pi),$$

بنویسیم می‌بینیم که $\lim_{t\to\circ+}\varphi(t)=f'_r(x)-f'_l(x)$، و بنابراین، φ در نزدیکی $t=\circ$ «خوش‌رفتار» است. به عبارت دقیقتر، به‌ازای یک δی مثبت، φ در $[\circ,\delta]$ کراندار است. ولـی، با توجه به (۳) چون $f\in\mathcal{L}[-\pi,\pi]$ و $۱/[۲\sin(t/۲)]$ در $[\delta,\pi]$ کراندار است، آشکار است که φ در $[\delta,\pi]$ انتگرالپذیر لبگ است. پس، φ در $[\circ,\pi]$ انتگرالپذیر لبگ است. اکنون از ۴۰۵۰۱۲ نتیجه می‌شود که (۲) برقرار است، که این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

عملا اندکی بیش‌از آنچه‌که در ۵.۵.۱۲ بیان‌شده‌بود ثابت کرده‌ایم. زیرا ۵.۵.۱۲ می‌گوید که اگر $f(x+)$، $f(x-)$، $f'_r(x)$ و $f'_l(x)$ وجود داشته باشند، آنگاه

$$\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{k=۱}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{f(x+)+f(x-)}{۲} \qquad (*)$$

به‌شرط اینکه $f(x)=[f(x+)+f(x-)]/۲$. اما، مقدار f در نقطهٔ x نمی‌تواند برمقادیر a_k و b_k اثر داشته‌باشد، و بنا براین، نمی‌تواند بر طرف‌چپ (*) اثر کند. در نتیجه، حتی‌اگر $f(x)\neq[f(x+)+f(x-)]/۲$ بازهم (*) برقرار است. یعنی،

۶.۵.۱۲. نتیجه. فرض کنیم $f\in\mathcal{L}[-\pi,\pi]$ و x نقطهٔ دلخواهی از $[-\pi,\pi]$ باشد. اگر $f(x+)$، $f(x-)$، $f'_r(x)$ و $f'_l(x)$ وجود داشته باشند، آنگاه سری‌فوریهٔ f در x به $[f(x+)+f(x-)]/۲$ همگراست. [یعنی، (*) برقرار است.]

برای مثال، فرض کنیم

$$f(x)=\circ \qquad (-\pi\leqslant x<\circ),$$

$$f(x)=۱ \qquad (\circ\leqslant x\leqslant\pi),$$

و فرض کنیم $f(u+۲\pi)=f(u)$. دراین‌صورت $f'_r(\pi)$ و $f'_l(\pi)$ وجود دارند و $f(\pi+)=\circ$، $f(\pi-)=۱$. بنا بر ۶.۵.۱۲، سری‌فوریهٔ f در $x=\pi$ به $\frac{۱}{۲}=(\circ+۱)/۲$ همگراست. در واقع، درپایان بخش ۱.۱۲ دیدیم که سری فوریهٔ f عبارت است از

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{\pi}\left[\frac{\sin x}{۱}+\frac{\sin ۳x}{۳}+\frac{\sin ۵x}{۵}+\cdots\right],$$

که اگر $x=\pi$، به $\frac{۱}{۲}$ همگراست.

همچنین ملاحظه کنید که اگر $x=\pi/۲$، سری به‌صورت

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{\pi}\left[۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\cdots\right]$$

درمی‌آید. بنا بر ۶.۵.۱۲، این‌سری‌به $[f(\pi/۲+)+f(\pi/۲-)]/۲=۱$ همگراست. یعنی

$$۱=\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{\pi}\left[۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\cdots\right],$$

یا

$$\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\cdots.$$

۷.۵.۱۲. دربارهٔ موضوع همگرایی و مجموع‌پذیری سریهای فوریه، قضیه‌هایی بسیار قویتر از آنچه که ما ارائه کردیم وجود دارد. این قضیه‌ها به‌نتایجی از مبحث انتگرال لبگ نیاز دارند که ما به‌شرح و بسط آنها نپرداخته‌ایم. خواننده می‌تواند به‌کتاب سریهای‌فوریه تالیف ج. ه. هاردی و و. و. روگوزینسکی چاپ کمبریج ۱۹۴۴[1] مراجعه کند.

۸.۵.۱۲. تأکید می‌کنیم که برای همگرایی سری فوریهٔ تابع $f\in\mathcal{L}[-\pi,\pi]$ به $f(x)$ پیوستگی در نقطهٔ x کافی نیست. درواقع، تابعی وجود دارد که در $[-\pi,\pi]$ پیوسته است، ولی سری فوریه‌اش در هر نقطهٔ یك زیرمجموعهٔ چگال از $[-\pi,\pi]$. واگراست. بخش ۷.۱۲ را ببینید.

تمرینهای ۵.۱۲

۱. فرض کنید $f, g\in\mathcal{L}[-\pi,\pi]$ وفرض کنید δی مثبتی وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای نقطه‌ای مانند $x\in[-\pi,\pi]$

$$f(t)=g(t)\qquad (x-\delta<t<x+\delta)$$

نشان دهید که سریهای فوریهٔ f و g در x هردو همگرا یا هردو واگرایند.

۲. نشان‌دهید که سری فوریهٔ تابع

$$f(t)=\frac{t^۲}{۴}\qquad (-\pi\leqslant t\leqslant\pi)$$

سری زیر است:

$$\frac{\pi^۲}{۱۲}-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}\cos nt}{x^۲}.$$

(الف) بااستفاده از ۵.۵.۱۲ نشان‌دهید که این سری‌فوریه در $t=۰$ به $f(۰)$ همگراست. نتیجه بگیرید که

$$\frac{\pi^۲}{۱۲}=\frac{۱}{۱^۲}-\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{۴^۲}+\dots.$$

(ب) بااستفاده از تساوی پارسوال نشان‌دهید که

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۴}=\frac{\pi^۴}{۹۰}.$$

---

1. G. H. Hardy and W.W.Rogosinski *Fourier Series*, Cambridge, 1944

۳. (الف) بااستفاده از سری فوریهٔ تابع $f(t)=|t|\,(-\pi\leqslant t\leqslant\pi)$ مجموع سری

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

را بیابید.

(ب) مجموع سری زیر را حساب کنید.

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots$$

۶.۱۲ بسطهای یکا متعامد در $\mathcal{L}^2[a,b]$

در این بخش بعضی از نتایج مربوط به نظریهٔ $\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ سریهای فوریه را به صورت کلیتری عرضه می کنیم. ابتدا مفهوم حاصلضرب (یا ضرب) داخلی دو تابع در $\mathcal{L}^2[a,b]$ را معرفی می کنیم. این ضرب داخلی دارای بسیاری از ویژگیهای ضرب داخلی (یا نقطه‌ای) دو بردار است.

۱.۶.۱۲. تعریف. اگر $f,g\in\mathcal{L}^2[a,b]$، آنگاه (f,g) را، که حاصلضرب داخلی f و g نامیده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)dt.$$

بنا بر این، برای هر $f\in\mathcal{L}[a,b]$، $\|f\|_2=\sqrt{(f,f)}$. (این مطلب متناظر است با اینکه ریشهٔ دوم حاصلضرب داخلی یك بردار درخودش مساوی طول بردار است.) اثبات نتایج زیر آسان است.

۲.۶.۱۲. قضیه. ضرب داخلی دارای ویژگیهای زیر است:

$(f,g)=(g,f)$	$(f,g\in\mathcal{L}^2[a,b])$,	(۱)
$(\lambda f,g)=\lambda(f,g)$	$(\lambda\in R;\, f,g\in\mathcal{L}^2[a,b])$,	(۲)
$(f+g,h)=(f,h)+(g,h)$	$(f,g,h\in\mathcal{L}^2[a,b])$,	(۳)
$(f,f)\geqslant 0$	$(f\in\mathcal{L}^2[a,b])$,	(۴)
$(f,f)=0 \iff f=0.$*		(۵)

* یادآوری می کنیم که $f=0$ به‌معنی $f(x)=0$ برای تقریباً هر $x\in[a,b]$ است.

اکنون تعامد را به‌همان روشی که برای بردارها رایج است تعریف می‌کنیم.

۳.۶.۱۲. تعریف. اگر $f, g \in \mathcal{L}^2[a, b]$، می‌گوییم که f و g متعامد هستند اگر $(f, g) = 0$.

بنابراین، با توجه به ۱.۱.۱۲ می‌بینیم که اگر $k \neq n$ توابع $\cos kx$ و $\cos nx$ در $[-\pi, \pi]$ متعامد هستند. زیرا

$$(\cos kx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = 0.$$

چیزی که در $\mathcal{L}^2[a, b]$ با مجموعهٔ بردارهای واحد دوبه‌دو متعامد متناظر است، خانوادهٔ یکا متعامد نامیده می‌شود.

۴.۶.۱۲. تعریف. خانوادهٔ شمارای $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ از توابع متعلق به $\mathcal{L}^2[a,b]$ را خانوادهٔ یکا متعامد در $\mathcal{L}^2[a, b]$ می‌نامیم اگر

$$(\varphi_k, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_k \varphi_n = 0 \qquad (k, n = 1, 2, \dots; k \neq n),$$

$$(\varphi_n, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_n^2 = 1 \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

بنابراین اگر به‌ازای هر n، $\|\varphi_n\|_2 = 1$، و اگر هردو عنصر متمایز Φ متعامد باشند، آنگاه Φ یك خانوادهٔ یکا متعامد است.

برای مثال، اگر T خانوادهٔ

$$T = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\},$$

باشد، قضیهٔ ۱.۱.۱۲ نشان می‌دهد که T یك خانوادهٔ یکا متعامد در $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$ است.

به‌عنوان یك مثال دیگر، خانوادهٔ توابع لژاندر[1] $L = \{L_0, L_1, L_2, \dots\}$ را در نظر بگیرید، که در آن

$$L_n(x) = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1; n = 0, 1, 2, \dots).$$

می‌توان نشان داد که L یك خانوادهٔ یکا متعامد در $\mathcal{L}^2[-1, 1]$ است.

مثال مشهور دیگر، خانوادهٔ توابع رادماخر[2] $R = \{R_0, R_1, \dots\}$ است، که در آن

---

1. Legendre 2. Rademacher

$$R_n(x)=\operatorname{sgn}(\sin 2^n\pi x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

و تابع sgn به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{sgn} a=1 \qquad (a>0),$$

$$\operatorname{sgn} a=-1 \qquad (a<0),$$

$$\operatorname{sgn} 0=0.$$

برای مثال، مقدار $R_2(x)$ دربازه‌های $(0\,,\frac{1}{4})$ و $(\frac{2}{4}\,,\frac{3}{4})$ برابر ۱، و دربازه‌های $(\frac{1}{4}\,,\frac{2}{4})$ و $(\frac{3}{4}\,,1)$ برابر ۱ــ است. درحالی که

$$R_2(0)=R_2\left(\frac{1}{4}\right)=R_2\left(\frac{2}{4}\right)=R_2\left(\frac{3}{4}\right)=R_2(1)=0.$$

می‌توان نشان‌داد که R یك خانوادهٔ یکامتعامد در $\mathcal{L}^2[0\,,1]$ است.

۵.۶.۱۲. فرض کنیم که $\Phi=\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots\}$ یك خانوادهٔ یکا متعامد در $\mathcal{L}^2[a,b]$ باشد، وفرض می‌کنیم که تابع $f\in\mathcal{L}^2[a,\ b]$ را بتوان به‌صورت

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots$$

نشان‌داد، که درآن ... $c_1,\ c_2,$ اعدادحقیقی‌هستند. این‌سری‌باید به‌صورت $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\varphi_k$، که این‌حد با متریك $\mathcal{L}^2[a,\ b]$ گرفته شده است، تعبیر شود.

اکنون به‌طور صوری [یعنی با اعمالی به‌صورت ظاهر درست] ضرایب$c_1,\ c_2,\dots$ را برحسب f حساب می‌کنیم. با ضرب داخلی در φ_n داریم

$$(f\,,\varphi_n)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\varphi_k,\ \varphi_n).$$

ولی، چون Φ یك خانوادهٔ یکامتعامد است، به‌ازای $k\neq n$، $(\varphi_k,\ \varphi_n)=0$، و به‌ازای $k=n$، $(\varphi_k,\ \varphi_n)=1$. بنابراین

$$(f\,,\varphi_n)=c_n.$$

بااین نتیجه به تعریف زیر می‌رسیم.

تعریف. فرض کنیم $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\dots\}$ یك‌خانوادهٔ یکامتعامد در $\mathcal{L}^2[a,b]$ باشد. اگر $f\in\mathcal{L}^2[a,\ b]$، واگر

$$c_k=(f,\varphi_k) \qquad (k\in I),$$

آنگاه c_k را ضریب فوریهٔ تعمیم یافتهٔ f می‌نامیم. سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ سری فوریهٔ تعمیم یافتهٔ f نامیده می‌شود، ومی‌نویسیم

$$f\sim\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k.$$

برای مثال، اگر $[a,b]=[-\pi,\pi]$ و

$$\Phi=T=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \dots\right\},$$

آنگاه سری فوریهٔ تعمیم‌یافتهٔ $f\in\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ سری

$$\left(f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\left(f,\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}+\left(f,\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}+\cdots$$

یا

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}dx\right)\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$$
$$+\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}dx\right)\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}+\cdots$$

یا

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots$$

است. یعنی، درحالت خاص $\Phi=T$، سری فوریهٔ تعمیم یافتهٔ $f\in\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ دقیقاً همان سری فوریهٔ (معمولی) است که در ۳.۱.۱۲ تعریف شد. بنا بر این، تعریف اخیر واقعاً یك تعمیم ۳.۱.۱۲ است. ولی، توجه کنید که ضرایب فوریهٔ تعمیم‌یافتهٔ $f\in\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ نسبت به T به‌صورت زیر هستند:

$$a_0\sqrt{\pi/2},\ a_1\sqrt{\pi},\ b_1\sqrt{\pi},\ a_2\sqrt{\pi},\ b_2\sqrt{\pi},\ \dots$$

۶.۶.۱۲. اکنون ۲.۴.۱۲ را تعمیم می‌دهیم. اگر $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\dots\}$ یك خانوادهٔ یکامتعامد در $\mathcal{L}^2[a,b]$ باشد، آنگاه تابع T_n به‌صورت

$$T_n = d_\text{۱}\varphi_\text{۱} + d_\text{۲}\varphi_\text{۲} + \cdots + d_n\varphi_n \qquad (\text{۱})$$

(که در آن $d_\text{۱}$، ...، d_n اعداد حقیقی هستند) یك Φ ـ چندجمله‌ای درجهٔ n نامیده می‌شود. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $f \in \mathcal{L}^\text{۲}[a, b]$، آنگاه s_n، یعنی مجموع جزئی nام سری فوریهٔ تعمیم‌یافتهٔ f، نزدیکترین Φ ـ چندجمله‌ای به f (با متریك $\mathcal{L}^\text{۲}[a, b]$) است. این مطلب ۱.۴.۱۲ را تعمیم می‌دهد.

قضیه. اگر $f \in \mathcal{L}[a, b]$ و اگر T_n یك Φ ـ چندجمله‌ای درجهٔ n باشد، آنگاه

$$\|f - T_n\|_\text{۲} \geqslant \|f - s_n\|_\text{۲} \qquad (\text{۲})$$

که در آن $s_n = c_\text{۱}\varphi_\text{۱} + \cdots + c_n\varphi_n$ و c_kها ضرایب فوریهٔ f یعنی

$$c_k = (f, \varphi_k) \qquad (k = \text{۱}, \ldots, n)$$

هستند.

برهان: برای هر T_n فرض می‌کنیم $J = \|f - T_n\|_\text{۲}^\text{۲}$. باید ثابت کنیم که اگر $T_n = s_n$، J مینیمم است. با استفاده از ۲.۶.۱۲، داریم

$$J = (f - T_n, f - T_n) = (f, f) - \text{۲}(f, T_n) + (T_n, T_n). \qquad (\text{۳})$$

اگر T_n مطابق (۱) باشد، آنگاه

$$(f, T_n) = (f, d_\text{۱}\varphi_\text{۱} + \cdots + d_n\varphi_n) = d_\text{۱}(f, \varphi_\text{۱}) + \cdots + d_n(f, \varphi_n),$$

و بنابراین

$$(f, T_n) = \sum_{k=\text{۱}}^{n} d_k c_k. \qquad (\text{۴})$$

همچنین،

$$(T_n, T_n) = (d_\text{۱}\varphi_\text{۱} + \cdots + d_n\varphi_n, d_\text{۱}\varphi_\text{۱} + \cdots + d_n\varphi_n)$$

$$= d_\text{۱}(\varphi_\text{۱}, d_\text{۱}\varphi_\text{۱} + \cdots + d_n\varphi_n) + \cdots + d_n(\varphi_n, d_\text{۱}\varphi_\text{۱} + \cdots + d_n\varphi_n).$$

چون به‌ازای $j \neq k$، $(\varphi_j, \varphi_k) = \text{۰}$ و $(\varphi_k, \varphi_k) = \text{۱}$، داریم

$$(T_n, T_n) = \sum_{k=\text{۱}}^{n} d_k^\text{۲}. \qquad (\text{۵})$$

با جانشین کردن (۴) و (۵) در (۳) داریم

$$J=(f,f)-2\sum_{k=1}^{n}d_kc_k+\sum_{k=1}^{n}d_k^2.$$

با اضافه و کم کردن $\sum_{k=1}^{n} c_k^2$ خواهیم داشت

$$J=(f,\ f)-\sum_{k=1}^{n}c_k^2+\sum_{k=1}^{n}(d_k-c_k)^2. \tag{۶}$$

با توجه به (۶) آشکار است که اگر $d_k=c_k(k=1,\ \dots,\ n)$، J مینیمم خواهد بود. یعنی، هرگاه $T_n=s_n$، J مینیمم خواهد بود، که این همان است که می‌خواستیم نشان دهیم.

نابرابری زیر به‌آسانی از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود.

۷.۶.۱۲ نابرابری بسل درسریهای فوریهٔ تعمیم یافته. فرض کنیم $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\dots\}$ یك خانوادهٔ یکامتعامد در $\mathcal{L}^2[a,\ b]$ باشد. اگر $f\in\mathcal{L}^2[a,b]$ و اگر

$$c_k=(f,\ \varphi_k) \qquad (k\in I),$$

آنگاه

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\leqslant\|f\|_2^2.$$

برهان: اگردر برابری(۶) بند۶.۶.۱۲ قراردهیم $d_k=c_k\ (k=1,\dots,n)$، خواهیم داشت

$$J=\|f-s_n\|_2^2=(f,\ f)-\sum_{k=1}^{n}c_k^2. \tag{*}$$

چون $\|f-s_n\|_2^2\geqslant 0$، نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{k=1}^{n}c_k^2\leqslant(f,\ f)=\|f\|_2^2.$$

چنانچه $n\to\infty$ نتیجه به‌دست می‌آید.

اگر $[a,\ b]=[-\pi,\ \pi]$ و

$$\Phi=T=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \dots\right\},$$

در ۵.۶.۱۲ نشان داده‌ایم که ضرایب فوریهٔ تعمیم یافتهٔ $f\in\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$a_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}, a_1\sqrt{\pi}, b_1\sqrt{\pi}, a_2\sqrt{\pi}, b_2\sqrt{\pi}, \dots .$$

از ۷.۶.۱۲ نتیجه می‌شود که مجموع مربعات این ضرایب از $||f||_2^2$ نابزرگتر است. یعنی

$$\frac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2.$$

ولی، این دقیقاً همان ۲.۴.۱۲ است!

قضیهٔ ۶.۴.۱۲ را می‌توان به‌صورت زیر تعمیم‌داد.

۸.۶.۱۲. قضیه. فرض کنیم $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\dots\}$ یك خانوادهٔ یکا متعامد در $\mathcal{L}^2[a,b]$ باشد. اگر $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد باشد به‌طوری که

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2<\infty, \tag{1}$$

آنگاه تابع $f\in\mathcal{L}^2[a, b]$ وجود دارد به‌طوری که ضرایب فوریهٔ تعمیم‌یافتهٔ f دقیقاً c_kها هستند. یعنی

$$c_k=(f, \varphi_k) \qquad (k\in I).$$

به‌علاوه، برای این f، $\lim_{n\to\infty}||s_n-f||_2=0$. که در آن

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k .$$

برهان: اگر $m<n$، این حقیقت که Φ یکامتعامد است نشان می‌دهد که

$$||s_n-s_m||_2^2=\left\|\sum_{k=m+1}^{n}c_k\varphi_k\right\|_2^2=\sum_{k=m+1}^{n}c_k^2.$$

این برابری و (۱) نشان می‌دهند که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی در $\mathcal{L}^2[a, b]$ است. پس، بنابر ۷.۹.۱۱، تابع $f\in\mathcal{L}^2[a, b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty}||s_n-f||_2=0.$$

از تمرین (۲) از بخش ۹.۱۱ نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty}(s_n, \varphi_k)=(f, \varphi_k) \qquad (k\in I). \tag{2}$$

ولی، اگر $n>k$، آنگاه $c_k=(c_1\varphi_1+\cdots+c_k\varphi_k+\cdots+c_n\varphi_n,\ \varphi_k)=(s_n,\ \varphi_k)$.
پس، بنا بر (۲)، داریم

$$c_k=(f,\ \varphi_k)\qquad (k\in I).$$

وقضیه ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۳.۴.۱۲ را در مورد خانواده‌های یکا متعامد دلخواه تعمیم نداده‌ایم، به این دلیل ساده که این قضیه برای خانواده‌های یکا متعامد دلخواه برقرار نیست. اگر Φ یك خانوادهٔ یکا متعامد در $\mathcal{L}^2[a,\ b]$ باشد، آنگاه Φ باید دارای ویژگی به خصوص باشد تا مطمئن شویم که سری فوریهٔ تعمیم‌یافتهٔ هر $f\in\mathcal{L}^2[a,b]$ با متریك $\mathcal{L}^2[a,\ b]$ به f همگراست. این ویژگی، که اکنون آن را تعریف می‌کنیم، می‌گوید که Φ نباید زیرخانوادهٔ یك خانوادهٔ یکا متعامد بزرگتر باشد.

۹.۶.۱۲. تعریف. اگر $\Phi=\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\}$ یك خانوادهٔ یکامتعامد در $\mathcal{L}^2[a,\ b]$ باشد، آنگاه Φ را کامل* می‌نامیم اگر $h=0$ تنها تابع $h\in\mathcal{L}^2[a,\ b]$ باشد که بر همهٔ φ_kها $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ متعامد است.

یعنی Φ کامل است اگر از

$$(h,\ \varphi_k)=0\qquad (k\in I)$$

نتیجه بگیریم که $h=0$. به‌عبارت دیگر، اگر Φ یك خانوادهٔ یکامتعامد کامل در $\mathcal{L}^2[a,\ b]$ باشد. تنها تابعی در $\mathcal{L}^2[a,\ b]$ که ضرایب فوریهٔ تعمیم‌یافته‌اش همگی صفر هستند تابعی است که (تقریباً همه‌جا) برابر صفر است.

از ۴.۴.۱۲ نتیجه می‌شود که خانوادهٔ

$$T=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots\right\}$$

کامل است. می‌توان نشان داد که خانوادهٔ توابع لژاندر، L، هم (در $\mathcal{L}^2[-1,\ 1]$) کامل است ولی خانوادهٔ توابع رادماخر، R، (در $\mathcal{L}^2[0,\ 1]$) کامل نیست.

قضیهٔ ۳.۴.۱۲ را می‌توان برای خانواده‌های یکامتعامد کامل تعمیم داد. این تعمیم نتیجه‌ای از قضیهٔ زیر است.

۱۰.۶.۱۲. قضیه. فرض کنیم $\Phi=\{\varphi_1,\ \varphi_2\ \ldots\}$ یك خانوادهٔ یکا متعامد در $\mathcal{L}^2[a,b]$

---

* استعمال کلمهٔ «کامل» هنگامی که درمورد خانواده‌های یکامتعامد به کار می‌رود با کلمهٔ «کامل» که درمورد فضای متریك، مطابق ۱.۴.۶ به‌کار می‌رود، ربطی ندارد.

باشد. آنگاه اگر Φ هریك از ویژگیهای زیر را داشته باشد، همهٔ این‌ویژگیها را دارد.

(الف) Φ کامل است.

(ب) مجموعهٔ Φ ـ چندجمله‌ایها (از همهٔ درجات) در $\mathcal{L}^2[a, b]$ چگال است.

(ج) برای هر $f \in \mathcal{L}^2[a, b]$ سری فوریهٔ تعمیم‌یافتهٔ f با متریك $\mathcal{L}^2[a, b]$ به f همگراست. [یعنی،

$$\lim_{n \to \infty} \|s_n - f\|_2 = 0$$

که در آن $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ و $c_k = (f, \varphi_k)$.]

(د) اگر $f \in \mathcal{L}^2[a, b]$، آنگاه

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

که در آن $c_k = (f, \varphi_k)$. (این برابری را برابری پارسوال می‌نامند.)

برهان: I. از (الف)، (ب) نتیجه می‌شود.

فرض کنیم (الف) برقرار باشد. برای هر $f \in \mathcal{L}^2[a, b]$، اگر $c_k = (f, \varphi_k)$ $(k \in I)$، آنگاه، بنابر ۷.۶.۱۲

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty,$$

سپس، قضیهٔ ۸.۶.۱۲ نشان می‌دهد که تابع $g \in \mathcal{L}^2[a, b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\lim_{n \to \infty} \|s_n - g\|_2 = 0 \tag{1}$$

که در آن $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$، و

$$c_k = (g, \varphi_k) \qquad (k \in I).$$

درنتیجه $c_k = (f, \varphi_k) = (g, \varphi_k)$ و بنابراین

$$(f - g, \varphi_k) = 0 \qquad (k \in I).$$

چون، بنا به‌فرض، Φ کامل است، نتیجه می‌گیریم که $f - g = 0$. پس، بنابر (۱)، $\lim_{n \to \infty} \|s_n - f\|_2 = 0$. این نشان می‌دهد که f یك نقطهٔ حدی مجموعهٔ همهٔ Φ ـ چندجمله‌ایهاست، که (ب) از آن نتیجه می‌شود.

II. از (ب)، (ج) نتیجه می‌شود.
اگر (ب) برقرار باشد، آنگاه برای هر $f\in\mathfrak{L}^{2}[a,b]$ و هر $\varepsilon>0$، یك Φــ چندجمله‌ای درجهٔ N مانند T_N وجود دارد به‌طوری که $\|T_N-\varphi\|_2<\varepsilon$. از ۶.۶.۱۲ نتیجه‌می گیریم که

$$\|s_N-f\|_2<\varepsilon.$$

اگر $n\geqslant N$، آنگاه $s_N=s_N+0\cdot\varphi_{N+1}+\dots+0\cdot\varphi_n$ هم‌یك Φــ چندجمله‌ای درجه n است. پس، بنابر ۶.۶.۱۲،

$$\|s_n-f\|_2\leqslant\|s_N-f\|_2\qquad(n\geqslant N).$$

پس داریم $\|s_n-f\|_2<\varepsilon\quad(n\geqslant N)$، که ثابت می‌کند (ج) برقرار است.

III. از (ج)، (د) نتیجه می‌شود.
فرض کنیم (ج) برقرار باشد. اگر $f\in\mathfrak{L}^{2}[a,b]$، آنگاه بنابر (ج)

$$\lim_{n\to\infty}\|s_n-f\|_2^2=0. \tag{۲}$$

ولی بنابر (*) بند ۷.۶.۱۲، داریم

$$\|f-s_n\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{k=1}^{n}c_k^2.$$

اگر $n\to\infty$ بااستفاده از (۲)، (د) ثابت می‌شود.
IV. از (د)، (الف) نتیجه می‌شود.
فرض کنیم (د) برقرار باشد. اگر h تابع‌دلخواهی در $\mathfrak{L}^{2}[a,b]$ باشد به‌طوری که

$$(h,\varphi_k)=0\qquad(k\in I),$$

آنگاه، بنابر (د)، داریم $\|h\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}(h,\varphi_k)^2=0$. پس $h=0$. این ثابت می‌کند که (الف) برقرار است. برهان قضیه اکنون کامل است.

تمرینهای ۶.۱۲

۱. توابع لژاندر L_1، L_2، L_3 را حساب کنید ونشان‌دهید که در $[-1,1]$ متعامد هستند ونرم هرکدام برابر ۱ است.
۲. همین‌کار را برای توابع رادماخر R_1، R_2، R_3 تکرار کنید.
۳. فرض کنیم $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\dots\}$ یك خانوادهٔ یکا متعامد کامل در $\mathfrak{L}^{2}[a,b]$ باشد. تابع A از $\mathfrak{L}^{2}[a,b]$ به توی l^2 را به‌صورت زیر تعریف کنید.

$$A(f)=\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \qquad (f\in \mathfrak{L}^2[a,b]),$$

که در آن $c_k=(f,\varphi_k)\ (k\in I)$.

(الف) نشان دهید که A یك‌به‌یك است

(ب) نشان‌دهید که A، $\mathfrak{L}^2[a,b]$ را به‌روی l^2 می‌نگارد.

(ج) اگر $f\in\mathfrak{L}^2[a,b]$، نشان‌دهید که $\|A(f)\|_2=\|f\|_2$ (که البته در آن، نرم دوم به l^2 مربوط می‌شود.)

۷.۱۲ ملاحظات و تمرینهای اضافی برای فصلهای ۱۱ و ۱۲

۱. تابع پیوسته‌ای که سری فوریه‌اش در یك نقطه واگراست

۱.۷.۱۲ لازم است نمادهایی را که اندکی از نمادهای بخش قبل پیچیده‌تر هستند به‌کار بریم. فرض می‌کنیم $f\in\mathfrak{L}[-\pi,\pi]$ و

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt). \qquad (*)$$

قرار می‌گذاریم

$$s_n[f;x]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

به طوری که $s_n[f;x]$ دقیقاً همان چیزی است که قبلا با $s_n(x)$ نشان داده می‌شد. به‌همین ترتیب قرار می‌گذاریم

$$\sigma_n[f;x]=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}s_k[f;x].$$

پس

$$s_n[f;x]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)D_n(x-u)\,du,$$

$$\sigma_n[f;x]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)K_n(x-u)\,du$$

که D_n و K_n در بخش ۲.۱۲ تعریف شده‌اند.

تمرین: اگر f همان باشد که در $(*)$ است. نشان‌دهید که

$$\sigma_n[f;x]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

۲۰۷۰۱۲. اکنون قضیهٔ مربوط به‌عدم همگرایی را عرضه می‌کنیم.

قضیه. تابع $f\in C[-\pi, \pi]$ وجود دارد که سری فوریه‌اش در ۰ واگراست. این قضیه از دنباله‌ای از لمها نتیجه می‌شود

تمرین: لمهای زیر را به‌تفصیل ثابت کنید.

لم ۱. دنبالهٔ $\left\{\int_{0}^{\pi}|D_n(t)|dt\right\}_{n=1}^{\infty}$ بیکران است. به‌عبارت دقیقتر

$$\int_{0}^{\pi}|D_n(t)|dt>\frac{2}{\pi}\log n \qquad (n\in I).$$

خلاصهٔ برهان:

$$\int_{0}^{\pi}|D_n(t)|dt\geqslant\int_{0}^{\pi}\frac{|\sin(n+1/2)t|}{t}dt$$

$$=\int_{0}^{\pi(n+1/2)}\frac{|\sin u|}{u}du>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin u|du>\frac{2}{\pi}\log n.$$

برخلاف رفتار K_n، این رفتار D_n است که گاهی باعث عدم همگرایی می‌شود، درحالی که مجموع‌پذیری $(C, 1)$ برای توابع پیوسته همواره به‌نتیجه می‌رسد.

لم ۲. برای هر $n\in I$، تابع $g_n\in C[-\pi, \pi]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\|g_n\|=\max_{x\in[-\pi, \pi]}|g_n(x)|=1$$

و

$$|s_n[g_n; 0]|>\frac{1}{\pi^2}\log n.$$

خلاصهٔ برهان: n را ثابت نگهدارید. فرض کنید

$$h(x)=1 \qquad (D_n(x)\geqslant 0)$$
$$h(x)=-1 \qquad (D_n(x)<0),$$

بنابراین h یك «تابع پله‌ای» است و $\int_{-\pi}^{\pi}h(t)D_n(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt$. فرض می‌کنیم $g_n=h$ مگر در بازه‌های کوچکی حول نقاط ناپیوستگی h. دراین بازه‌ها g_n را خطی می‌گیریم به‌طوری که g_n پیوسته باشد. اگر اندازهٔ کل این بازه‌ها ε باشد، آنگاه

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}g_n(t)\,D_n(t)\,dt-\int_{-\pi}^{\pi}h_n(t)D_n(t)dt\right|<\varepsilon\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

به‌طوری که، اگر ε به‌اندازهٔ کافی کوچك باشد،

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t)D_n(t) > \frac{1}{\pi}\log n.$$

سرانجام، ملاحظه کنید که

$$s_n[g_n;\, ۰] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t)D_n(t)dt.$$

لم ۳. به ازای هر $n\in I$ یك چندجمله‌ای مثلثاتی درجهٔ $n^۲$ مانند ϕ_n وجود دارد به‌طوری که

$$\|\phi_n\| = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |\phi_n(x)| \leqslant ۱$$

و

$$s_n[\phi_n;\, ۰] > \frac{1}{\pi^۲}\log n - ۲.$$

خلاصهٔ برهان: n را ثابت‌نگاه می‌داریم. فرض می‌کنیم که

$$\phi_n(t) = \sigma_{n^۲}[g_n;\, t],$$

که g_n همان است که در لم ۲ بود. اگر

$$g_n \sim \frac{A_۰}{۲} + \sum_{k=۱}^{\infty}(A_k\cos kt + B_k\sin kt)$$

آنگاه

$$\phi_n(t) = \frac{A_۰}{۲} + \sum_{k=۱}^{n^۲}\left(۱ - \frac{k}{n^۲}\right)(A_k\cos kt + B_k\sin kt)$$

به‌طوری که

$$s_n[\phi_n;\, t] = \frac{A_۰}{۲} + \sum_{k=۱}^{n}\left(۱ - \frac{k}{n^۲}\right)(A_k\cos kt + B_k\sin kt).$$

بنابراین،

$$|s_n[\phi_n;\, ۰] - s_n[g_n;\, ۰]| = \left|\frac{1}{n^۲}\sum_{k=۱}^{n} kA_k\right| \leqslant ۲$$

که لم موردنظر از آن به‌دست می‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم $\lambda_n = ۲^{۳^n}$ و تابع f را با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$f(t) = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{1}{n^۲}\cdot\phi_{\lambda_n}(\lambda_n t) \qquad (-\pi\leqslant t\leqslant\pi).$$

آنگاه $f\in C[-\pi, \pi]$ (چرا؟) و بنابراین قضیه پس از اثبات لم زیر ثابت می‌شود.

لم ۴. $s_{\lambda_n^2}[f, 0]\to\infty$ وقتی که $n\to\infty$.

خلاصهٔ برهان: n را ثابت نگاه می‌داریم و

$$s_{\lambda_n^2}[\phi_{\lambda_j}(\lambda_j t); t]$$

را ابتدا برای $j\geqslant n+1$، سپس برای $j\leqslant n-1$، و سرانجام برای $j=n$ درنظر می‌گیریم. اکنون اگر

$$\phi_{\lambda_j}(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\lambda_j^2}(a_m\cos mt+b_m\sin mt)$$

(که البته درآن a_k و b_k به j بستگی دارند)، آنگاه

$$\phi_{\lambda_j}(\lambda_j t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\lambda_j^2}(a_m\cos m\lambda_j t+b_m\sin m\lambda_j t).$$

اگر $j\geqslant n+1$، سری فوریهٔ $\phi_{\lambda_j}(\lambda_j t)$ از جملهٔ ثابت و جملاتی شامل $\cos kt$ و $\sin kt$ برای $k\geqslant\lambda_j\geqslant\lambda_n^2$ تشکیل می‌شود. بنابراین

$$s_{\lambda_n^2}[\phi_{\lambda_j}(\lambda_j t); 0]=\text{جملهٔ ثابت}$$

به‌طوری که

$$\left|s_{\lambda_n^2}\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\phi_{\lambda_j}(\lambda_j t); 0\right]\right|\leqslant\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}. \qquad (1)$$

در مرحلهٔ بعد، اگر $j\leqslant n-1$، آنگاه $\phi_{\lambda_j}(\lambda_j t)$ یك چندجمله‌ای مثلثاتی از درجهٔ λ_j^3 است. چون $\lambda_j^3\leqslant(2^{3^{n-1}})^3=2^{3^n}<\lambda_n^2$ داریم

$$s_{\lambda_n^2}[\phi_{\lambda_j}(\lambda_j t); t]=\phi_{\lambda_j}(\lambda_j t).$$

بنابراین،

$$\left|s_{\lambda_n^2}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^2}\phi_{\lambda_j}(\lambda_j t); 0\right]\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}. \qquad (2)$$

سرانجام، به‌حالت $j=n$ می‌پردازیم. اگر

$$\phi_{\lambda_n}(t)=A_\circ+\sum_{m=\backslash}^{\lambda_n^\Upsilon}(A_m\cos mt+B_m\sin mt),$$

آنگاه

$$\phi_{\lambda_n}(t)=A_\circ+\sum_{m=\backslash}^{\lambda_n^\Upsilon}(A_m\cos m\lambda_n t+B_m\sin m\lambda_n t).$$

بنابراین،

$$s_{\lambda_n^\Upsilon}[\phi_{\lambda_n}(\lambda_n t);\circ]=A_\circ+\sum_{m=\backslash}^{\lambda_n}A_m=s_{\lambda_n}[\phi_{\lambda_n};\circ]. \qquad (\text{٣})$$

اکنون لم موردنظر از (۱)، (۲)، (۳) و لم۳ نتیجه می‌شود.

تمرین: برای هر $j\in I$ فرض کنید X_j مجموعهٔ مقدارهای $k\geqslant ۱$ باشد به‌طوری که $\cos kt$ یا $\sin kt$ دارای یك ضریب غیرصفر در سری فوریهٔ $\phi_{\lambda_j}(\lambda_j t)$ باشد. نشان‌دهید که X_jها مجزا هستند. این تمرین راهنمایی برای برهان فوق است.

تمرین: نشان‌دهید که تابعی پیوسته وجود دارد که سری فوریه‌اش درهرمضرب گویای ۲π صفر می‌شود.

کار را با همان f قبلی ولی با $\lambda_n=n!\cdot ۲^{۳^n}$ شروع کنید. نشان‌دهید که برای $m\in I$، تفاضل f و تابعی که دوره‌ای است ودورهٔ آن $(۲\pi)/(\lambda_m)$ است، یك چندجمله‌ای مثلثاتی است. بنابراین، سری فوریهٔ f برای هرعدد صحیح j درنقاط $۲\pi(j)/(\lambda_m)$واگراست.

II قضیهٔ یگوروف[1] وقضیهٔ لوزین[2]

۳.۷.۱۲. لیتلوود[3] سه اصل بیان کرد که در انتگرالگیری لبگ اهمیت دارند. این سه‌اصل عبارت‌اند از

۱. مجموعه‌های اندازه‌پذیر «تقریباً» اجتماع تعدادی متناهی از بازه‌ها هستند.
۲. همگرایی نقطه‌ای یك‌دنباله از توابع اندازه‌پذیر «تقریباً» همگرایی یکنواخت است.
۳. توابع اندازه‌پذیر «تقریباً» پیوسته هستند.

گزارهٔ ۱ صورت دیگری از

$$mE=\text{g.l.b.}\,mG$$

---

1. Egoroff 2. Lusin 3. J. E. Littlewood

است(که در آن Gها مجموعه‌های باز شامل E هستند) همراه با ۶.۴.۵. گزاره‌های ۲ و ۳ صورتهای دیگری از قضیهٔ یگوروف و قضیهٔ لوزین هستند که هم‌اکنون آنهارا ارائه‌می‌کنیم.
برای اختصار به‌جای «تقریباً همه‌جا» می‌نویسیم a.e.

قضیه. (یگورف) فرض می‌کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر در $[a,b]$ باشد به‌طوری که

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)=f(x) \text{ a.e. } (a\leqslant x\leqslant b),$$

آنگاه اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد، مجموعهٔ بستهٔ $F\subseteq[a, b]$ وجود دارد به‌طوری که $mF'<\varepsilon$ و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در F همگرای یکنواخت به f است. (اینجا هم، طبق معمول، $F'=[a, b]-F$.)

خلاصهٔ برهان: به‌ازای هر $n\in I$، فرض کنیم $g_n=|f_n-f|$. اگر n و p اعداد صحیح دلخواهی باشند، فرض می‌کنیم

$$E_{n,p}=\{x\in[a, b]: g_k(x)<\frac{1}{p}(k\geqslant n)\}.$$

آنگاه $E_{n,p}$ اندازه‌پذیر است. و

$$E_{1,p}\subseteq F_{2,p}\subseteq \cdots,$$

و

$$m\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n,p}\right]=b-a.$$

بنابراین، برای هر p عدد $n(p)$ وجود دارد به‌طوری که

$$mE'_{n(p),p}<\frac{\varepsilon}{2^p}.$$

فرض می‌کنیم

$$E=\bigcap_{p=1}^{\infty} E_{n(p),p}.$$

آنگاه $mE'<\varepsilon$ و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E همگرای یکنواخت به f است.

تمرین: جزئیات برهان فوق را بنویسید و آن‌را کامل کنید.

۴.۷.۱۲. اگر حوزهٔ مقادیر تابع حقیقی f در $[a, b]$ متناهی باشد f را یك‌تابع

ساده می‌نامیم. بنابراین، اگر f یک تابع ساده، وحوزهٔ مقادیر آن مجموعهٔ $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ باشد، آنگاه

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_k$$

که در آن χ_k تابع مشخصهٔ مجموعهٔ

$$E_k = \{x \in [a, b] : f(x) = c_k\}$$

است.

روشی برای مطالعهٔ انتگرال لبگ وجود دارد که در آن از توابع ساده استفادهٔ فراوان می‌شود. در این روش قضیهٔ زیر دارای اهمیت ویژه است. (ما از آن در اثبات قضیهٔ لوزین استفاده خواهیم کرد.)

قضیه. اگر f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی در $[a, b]$ باشد، دنباله‌ای از توابع سادهٔ اندازه‌پذیر در $[a, b]$ مانند $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد به‌طوری که

$$0 \leqslant s_1(x) \leqslant s_2(x) \leqslant \cdots \leqslant s_n(x) \leqslant \cdots \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

و

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

خلاصهٔ برهان: به‌ازای هر $N \in I$ فرض می‌کنیم

$$E_{N,k} = \left\{x \in [a, b] : \frac{k-1}{2^N} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^N}\right\} \qquad (k = 1, 2, \dots, N2^N),$$

و فرض می‌کنیم که

$$E_N = \{x \in [a, b] : f(x) \geqslant N\}.$$

s_N را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$s_N(x) = \frac{k-1}{2^N} \qquad (x \in E_{N,k}; k = 1, 2, \dots, N2^N).$$

$$s_N(x) = N \qquad (x \in E_N).$$

در این‌صورت اگر $f(x) < N$، داریم $|s_N(x) - f(x)| < 1/(2^N)$

تمرین: جزئیات برهان فوق را بنویسید و آن‌را کامل کنید.

۵۰۷۰۱۲. اکنون به قضیهٔ لوزین می‌پردازیم. اگر f یك تابع حقیقی در $[a, b]$ باشد، می‌گوییم که f دارای ویژگی C است، اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مجموعهٔ بستهٔ $F \subseteq [a, b]$ وجود داشته باشد به‌طوری که $mF' < \varepsilon$ و تحدید f به F پیوسته باشد.

تمرین: نشان‌دهید که هر تابع سادهٔ اندازه‌پذیر دارای ویژگی C است.

قضیه. (لوزین). هر تابع اندازه‌پذیر در $[a, b]$ دارای ویژگی C است.

خلاصهٔ برهان: اگر f اندازه‌پذیر باشد، دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ از توابع سادهٔ اندازه‌پذیر وجود دارد که در $[a, b]$ به f همگراست. هریك از s_nها دارای ویژگی C است. عدد مثبت ε دلخواه را درنظر می‌گیریم. به‌ازای هر n مجموعهٔ بستهٔ $F_n \subseteq [a,b]$ وجود دارد به‌طوری که $mF_n' < (\varepsilon)/(2^{n+1})$ و تحدید s_n به F_n پیوسته است.
همچنین مجموعهٔ بستهٔ $F_0 \subseteq [a, b]$ وجود دارد که $mF_0' < \varepsilon/2$ و $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ در F_0 همگرای یکنواخت به f است. فرض کنید $F = F_0 \bigcap F_1 \bigcap F_2 \bigcap \cdots$.

تمرین: جزئیات برهان فوق را بنویسید و آن‌را کامل کنید.

۶۰۷۰۱۲. عکس قضیهٔ لوزین نیز برقرار است.

قضیه. اگر f یك تابع حقیقی در $[a,b]$ و دارای ویژگی C باشد، f اندازه‌پذیر است.

خلاصهٔ برهان: فرض کنیم f دارای ویژگی C باشد. به‌ازای هر $n \in I$، مجموعه‌ای بسته مانند F_n انتخاب می‌کنیم به‌طوری که $mF_n' < 1/n$ و تحدید f به F_n پیوستهٔ باشد. آنگاه مجموعهٔ صفر اندازهٔ $A \subseteq [a, b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \bigcup A.$$

اگر s عدد حقیقی دلخواهی باشد، آنگاه

$$E = \{x \in [a, b] : f(x) \geqslant s\}$$

اجتماع مجموعه‌های

$$E_n = \{x \in F_n : f(x) \geqslant s\}$$

با یك مجموعهٔ صفر اندازه است.

تمرین: جزئیات برهان فوق را بنویسید و آن‌را کامل کنید. از بسته بودن F_nها کجا استفاده می‌شود؟

تمرینهای متفرقه

۱. نشان دهید که تابعی مانند f در $[0,1)$ وجود دارد که پیوسته است و انتگرال ناسرهٔ $\int_{0+}^{1} f$ وجود دارد ولی $f \notin \mathcal{L}[0,1]$.

۲. ثابت کنید که مجموعهٔ بستهٔ $F \subseteq [0,1]$ وجود دارد به‌طوری که F هیچ‌جا-چگال است و $0 < mF < 1$.

۳. تابع اندازه‌پذیر کرانداری مانند f در $[0,1]$ بیابید به‌طوری که برای‌هر $g \in \mathcal{R}[0,1]$

$$\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx > 0.$$

۴. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کوشی در $\mathcal{L}^2[a,b]$ باشد، ثابت کنید که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای دارد که تقریباً همه‌جا در $[a,b]$ همگرا است.

۵. فرض کنید $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\mathcal{L}^2[a,b]$ باشد، وفرض کنید که تابع اندازه‌پذیر f در $[a,b]$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{a.e.} \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

و تابع $g \in \mathcal{L}^2[a,b]$ موجود باشد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_2 = 0.$$

ثابت کنید که

$$f(x) = g(x) \quad \text{a.e.} \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

۶. فرض کنید $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$. اگر $f:[a,b] \to R$ و به‌ازای $j = 1, \dots, n$، f در بازهٔ باز (a_{j-1}, a_j) ثابت باشد، f را یك تابع پله‌ای می‌نامیم. (هیچ قیدی برای مقادیر $f(a_j)$ قائل نمی‌شویم.)

ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ توابع پله‌ای در $\mathcal{L}^2[a,b]$ چگال است.

۷. اگر $f \in \mathcal{L}^2[a,b]$، ثابت کنید که دنباله‌ای از توابع پله‌ای $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = f(x) \quad \text{a.e.} \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

۸. فرض کنید که f و F توابعی باشند که در برهان قضیهٔ لوزین آمده‌اند. ثابت کنید که تابع $g \in C[a,b]$ وجود دارد به‌طوری که مجموعهٔ

$$\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$$

دارای اندازهٔ کمتر از ε باشد. و

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x)|=\max_{x\in F}|f(x)|.$$

۰۹ ویژگیهای $\limsup_{n\to\infty} E_n$ را از بخش ۱۲۰۲ به‌خاطر بیاورید.

اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[a, b]$ باشد به‌طوری که

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE_n<\infty,$$

ثابت کنید که مجموعهٔ $\limsup_{n\to\infty} E_n$ صفر اندازه است.

نتیجه بگیرید که تقریباً همهٔ نقاط $[a, b]$ تنها به‌تعدادی متناهی از E_nها تعلق دارند.

۰۱۰ اگر f یك تابع اندازه‌پذیر در $[a, b]$ باشد، ثابت کنید که دنباله‌ای از توابع پیوسته در $[a, b]$ مانند $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=f(x)\quad \text{a.e.}\quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

۰۱۱ اگر f تابع اندازه‌پذیر دلخواهی در $[a, b]$ باشد، ثابت کنید که دنباله‌ای مانند $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ از توابع پله‌ای در $[a, b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x)=f(x)\quad \text{a.e.}\quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

(با تمرین ۷ مقایسه کنید.)

۰۱۲ فرض کنید f و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ توابعی در $\mathcal{L}^2[a, b]$ باشند، به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\quad \text{a.e.}\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2=\|f\|_2.$$

ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n-f\|_2=0.$$

پیوست

اصول موضوع جبری و ترتیبی اعداد حقیقی

I جبر

دستگاه اعداد حقیقی یك سه‌تایی مرتب $\langle R, +, \cdot\rangle$ است که در آن R یك مجموعه‌است و $+$ و. توابعی از $R \times R$ به‌توی R هستند.

برای $a, b \in R$، به‌جای $+\langle a, b\rangle$ (یعنی، نگارهٔ جفت $\langle a, b\rangle$ تحت تابع $+$) از نماد رایج $a+b$، یا، در بعضی حالات، از $(a)+b$، $a+(b)$ یا $(a)+(b)$ استفاده می‌کنیم. به‌همین ترتیب، نگارهٔ $\langle a, b\rangle$ تحت تابع. را، برحسب مورد، به‌صورت ab، $a\cdot b$، $a(b)$، $(a)b$ یا $(a)(b)$ خواهیم نوشت.

فرض می‌کنیم که اصول موضوع زیر برقرار باشند:

برای $+$:

A۱. (قانون تعویض‌پذیری درجمع)

$$a+b=b+a \qquad (a, b \in R).$$

A۲. (قانون شرکت‌پذیری در جمع)

$$a+(b+c)=(a+b)+c \qquad (a, b, c \in R).$$

A۳. (وجود عضو خنثا در جمع) یك عنصر ۰ در R وجود دارد به‌طوری‌که

$$a+0=a \qquad (a \in R).$$

A۴. (وجود عنصر وارون درجمع (قرینه‌ها)) اگر $a \in R$، عنصری مانند $b \in R$ وجود دارد، به‌طوری‌که $a+b=0$، که در آن ۰ همان است که در A ۳ ذکر شد.

برای .:

M۱. (قانون تعویضپذیری درضرب)

$$ab = ba \qquad (a, b \in R).$$

M۲. (قانون شرکتپذیری در ضرب)

$$a(bc) = (ab)c \qquad (a, b, c \in R).$$

M۳. (وجود عنصر خنثی در ضرب) یك عنصر ۱ در R وجود دارد به‌طوری که

$$۱ \cdot a = a \qquad (a \in R).$$

M۴. (وجود عنصر وارون در ضرب (وارونها)) اگر $a \in R$ و $a \neq ۰$، عنصر $b \in R$ وجود دارد به‌طوری که $ab = ۱$، که در آن ۱ همان است که در M ۳ ذکر شد.

آخرین اصل موضوع قانون توزیعپذیری است.

D. اگر $a, b, c \in R$، آنگاه

$$a(b + c) = ab + ac.$$

همهٔ قوانین متعارف جبر مقدماتی را می‌توان از این نه اصل موضوع به‌دست‌آورد. ما بعضی ازآنها را اثبات خواهیم کرد. ابتدا پنج قضیه دربارهٔ ضرب ذکر می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. اگر $a \neq ۰$ و $ab = ac$، آنگاه $b = c$.

برهان: بنابر M۴ عنصر $x \in R$ وجود دارد به‌طوری که $ax = ۱$. سپس، بنابر M۱، داریم $xa = ۱$. چون . یك تابع است، از $ab = ac$ نتیجه‌می گیریم که $x(ab) = x(ac)$[۱]. در نتیجه، بنابر M ۲، $(xa)b = (xa)c$. اما $xa = ۱$، پس $۱.b = ۱.c$. از این‌رو، بنابر M ۳، $b = c$ و برهان‌کامل است.

قضیهٔ ۲. عنصر ۱ در M ۲ یکتاست.

برهان: فرض کنیم که عنصر $۱'$ وجود داشته‌باشد به‌طوری که برای هر a، $۱'.a = a$. دراین‌صورت $۱ \cdot ۱ = ۱ = ۱' \cdot ۱$. پس، بنابر M۱، $۱ \cdot ۱ = ۱' \cdot ۱$. بنابرقضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که $۱ = ۱'$، یعنی همان‌طور که گفته شد ۱ یکتاست.

قضیهٔ ۳. اگر $a, b \in R$ و $b \neq ۰$، عنصر یکتای $x \in R$ وجود دارد به‌طوری که $ax = b$.

برهان: بنابر M۴، $y \in R$ وجود دارد به‌طوری که $ay = ۱$. فرض کنیم $x = yb$. سپس، بااستفاده از M ۲ و M ۳، داریم $ax = a(yb) = (ay)b = ۱ \cdot b = b$.

این نشان‌می‌دهد که xای وجود دارد به‌طوری که $ax = b$. اگر، همچنین داشته‌باشیم $ax' = b$، آنگاه $ax = ax'$. پس، بنابرقضیهٔ ۱، $x = x'$، که نشان می‌دهد x یکتاست.

---

۱. توضیح آنکه از $\langle x, ab\rangle = \langle x, ac\rangle$، $\langle x, ac\rangle . = \langle x, ab\rangle .$ یا $x(ab) = x(ac)$ نتیجه می‌شود.ـــم.

مطابق معمول، xای را که به‌ازای آن $ax=b$، با b/a نشان می‌دهیم. xای را که به‌ازای آن $ax=۱$، با $a^{-۱}$ نشان می‌دهیم. یعنی، $a^{-۱}=۱/a$.

قضیهٔ ۴. اگر $a, b \in R$ و $a \neq ۰$، آنگاه $b/a=b \cdot a^{-۱}$.

برهان: فرض کنیم $x=b/a$ و $y=b \cdot a^{-۱}$. بنا بر تعریف b/a داریم $ax=b$.

همچنین، داریم $ay=ya=(b \cdot a^{-۱})a=b(a^{-۱} \cdot a)=b(a \cdot a^{-۱})$. ولی بنا بر تعریف $a^{-۱}$، $a \cdot a^{-۱}=۱$. پس، $ay=b \cdot ۱=b$. بنا بر این، $ax=ay=b$. بنا بر قضیهٔ ۱ داریم $x=y$، که این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

قضیهٔ ۵. اگر $a \neq ۰$، آنگاه $(a^{-۱})^{-۱}=a$.

برهان: فرض کنیم $b=(a^{-۱})^{-۱}$. بنا بر تعریف $a^{-۱}$، $a \cdot a^{-۱}=۱$. همچنین بنا بر تعریف $(a^{-۱})^{-۱}$، $a^{-۱} \cdot b=۱$. بنا بر این $a^{-۱} \cdot a=۱=a^{-۱} \cdot b$. آنگاه از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود $a=b$.

قضیه‌های ۶ تا ۱۰ مربوط به‌جمع هستند و آنها را می‌توان عیناً با روش قضیه‌های ۱ تا ۵ ثابت کرد. برای اثبات آنها کافی است به‌جای . از + و به‌جای اصلهای M از اصلهای Aی متناظر استفاده شود.

قضیهٔ ۶. اگر $a+b=a+c$، آنگاه $b=c$.

قضیهٔ ۷. عنصر ۰ در $A۳$ یکتاست.

قضیهٔ ۸. اگر $a,b \in R$، عنصر یکتای $x \in R$ وجود دارد به‌طوری که $a+x=b$.

مطابق معمول، xای را که به‌ازای آن $a+x=b$، با $b-a$ نشان می‌دهیم. xای را که به ازای آن $a+x=۰$، با $-a$ نشان می‌دهیم. یعنی، $-a=۰-a$.

قضیهٔ ۹. اگر $a, b \in R$، آنگاه $b-a=b+(-a)$.

قضیهٔ ۱۰. اگر $a \in R$، آنگاه $-(-a)=a$.

اکنون نتایجی را اثبات می‌کنیم که (مستقیماً یا به طور ضمنی) هم با جمع وهم با ضرب سروکار دارند. خواننده باید نتیجه‌گیریها را توضیح دهد.

قضیهٔ ۱۱. اگر $a, b, c \in R$، آنگاه $a(b-c)=ab-ac$.

برهان: فرض کنیم $x=a(b-c)$ و $y=ab-ac$. بنا بر این

$$ac+x=ac+a(b-c)=a[c+(b-c)]=ab.$$

همچنین، $ac+y=ac+(ab-ac)=ab$. بنابراین $ac+x=ac+y$. در نتیجه $x=y$.

قضیهٔ ۱۲. اگر $a\in R$، آنگاه $0\cdot a=a\cdot 0=0$.

برهان: داریم $0=0+0$. بنابراین $a\cdot 0=a\cdot(0+0)$. در نتیجه $(a\cdot 0)+0=(a\cdot 0)+(a\cdot 0)$. بنابراین، $a\cdot 0=0$.

قضیهٔ ۱۳. اگر $ab=0$، آنگاه یا $a=0$ یا $b=0$.

برهان: فرض کنیم $a\neq 0$، باید نشان دهیم که $b=0$. داریم

$$b=b\cdot 1=b(a\cdot a^{-1})=(ba)a^{-1}=(ab)a^{-1}=0\cdot a^{-1}=0.$$

قضیهٔ ۱۴. اگر $a,\, b\in R$، آنگاه $(-a)b=-(ab)$.

برهان: فرض کنیم $x=(-a)b$، $y=-(ab)$. آنگاه

$$ab+x=ab+(-a)b=ba+b(-a)=b[a+(-a)]=b\cdot 0=0.$$

همچنین $ab+y=ab+[-(ab)]=0$. پس $ab+x=0=ab+y$. در نتیجه، $x=y$.

قضیهٔ ۱۵. اگر $a,\, b\in R$، آنگاه $(-a)(-b)=ab$.

برهان: فرض کنیم $x=(-a)(-b)$. آنگاه

$$x=-[a(-b)]=-[(-b)a]=-[-ba]=ba$$

پس $x=ab$.

قضیهٔ ۱۶. اگر $a,\, b,\, c,\, d\in R$، و اگر $b\neq 0$ و $d\neq 0$، آنگاه

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

برهان: فرض کنیم $x=a/b+c/d$ و $y=(ad+bc)/bd$. آنگاه

$$(bd)x=(bd)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=(bd)\left(\frac{a}{b}\right)+(bd)\left(\frac{c}{d}\right)=(db)\left(\frac{a}{b}\right)+(bd)\left(\frac{c}{d}\right)$$

$$=d\left[b\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\right]+b\left[d\cdot\left(\frac{c}{d}\right)\right]=da+bc=ad+bc.$$

همچنین، $(bd)y=(bd)\cdot((ad+bc)/bd)=ad+bc$. درنتیجه $(bd)x=(bd)y$.
پس $x=y$.

این نتایج باید برای اقناع خواننده برصدق گفتار ما، که همهٔ فرمولهای جبرمقدماتی را می‌توان از این نه اصل به‌دست آورد، کفایت کند. به عنوان تمرین سعی کنید که احکام زیر را ثابت کنید:

$$1^{-1}=1,$$
$$(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$$ به‌شرط اینکه $b\neq 0$، $d\neq 0$،
$$-(a+b)=-a-b.$$

II ترتیب

اکنون به‌مسألهٔ ترتیب می‌پردازیم. فرض اضافی زیر را بر R وضع می‌کنیم:

اصل موضوع ترتیب. زیرمجموعه‌ای از R مانند R^+ وجود دارد به‌طوری که

O۱. اگر $x, y\in R^+$، آنگاه $x+y, xy\in R^+$.
O۲. اگر $x\in R$ و $x\neq 0$، آنگاه یا $x\in R^+$ یا $-x\in R^+$.[1]
O۳. $0\notin R^+$.

اعداد R^+ را مثبت می‌نامیم.
با توجه به O۲، اگر $x\neq 0$، آنگاه x و $-x$ ممکن نیست هردو به R^+ متعلق باشند. زیرا اگر $x\in R^+$ و $-x\in R^+$، آنگاه بنابر O۱، $0=x+(-x)$ نیز به R^+ تعلق خواهد داشت، که با O۳ متناقض است.

اکنون علامتهای نابرابری مرسوم را تعریف می‌کنیم.

تعریف: اگر $x, y\in R$، آنگاه

$$x<y \quad \text{یا} \quad y>x$$

به‌معنی $y-x\in R^+$ است.
همچنین،

$$x\leqslant y \quad \text{یا} \quad y\geqslant x$$

یعنی یا $x=y$ یا $x<y$.

---

۱. به‌این معنی که اگر $x\in R^+$، آنگاه $-x\notin R^+$، واگر $-x\in R^+$، آنگاه $x\notin R^+$. ـ م.

اکنون به‌چند قانون آشنای مربوط به‌نابرابریها می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱. اگر $a, b \in R$، آنگاه تنها یکی از گزاره‌های زیر برقرار است:

$$a=b,$$
$$a<b,$$
$$b<a.$$

برهان: نخست فرض می‌کنیم $a=b$. آنگاه $b-a=0$ پس $b-a \notin R^+$. درنتیجه $a<b$ برقرار نیست. به‌همین‌ترتیب $a-b=0$ به‌طوری که $a-b \notin R^+$. در نتیجه $b<a$ برقرار نیست.

در مرحلهٔ بعد فرض می‌کنیم $a \neq b$. بنابراین $b-a \neq 0$. بنابر $O2$، یا $b-a \in R^+$، یا $a-b=-(b-a) \in R^+$، ولی نه‌هردو. بنابراین یا $a<b$ یا $b<a$، ولی نه‌هردو. این برهان را کامل می‌کند.

قضیهٔ ۲. اگر $a, b, c \in R$ و $a<b$، آنگاه $a+c<b+c$.

برهان: چون $a<b$، داریم $b-a \in R^+$. بنابراین

$$(b+c)-(a+c)=b-a \in R^+،$$

که در نتیجه $a+c<b+c$.

قضیهٔ ۳. اگر $a<b$ و $b<c$، آنگاه $a<c$.

برهان: بنابرفرض $b-a$ و $c-b$ هردو به R^+ تعلق دارند. بنابر $O1$، مجموعشان، $(b-a)+(c-b)=c-a$ هم به R^+ تعلق دارد. درنتیجه $a<c$.

قضیهٔ ۴. اگر $a<b$ و $c>0$، آنگاه $ac<bc$.

برهان: بنا به فرض، $b-a$ و $c-0=c$ در R^+ هستند. بنابر $O1$ حاصلضربشان $c(b-a)=bc-ac$ هم در R^+ است. درنتیجه $ac<bc$.

قضیهٔ ۵. اگر $a \in R$ و $a \neq 0$ آنگاه $a^2>0$.

برهان: چون $a \neq 0$، بنابرقضیهٔ ۱، یا $a>0$ یا $a<0$ ولی نه‌هردو. اگر $a>0$، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۴، $a \cdot a>0 \cdot a$، بنابراین $a^2>0$. از طرف دیگر، اگر $a<0$، آنگاه $-a=0-a$ به R^+ متعلق است. در نتیجه، بنابر $O1$، $(-a)(-a)=a^2$ هم به R^+ متعلق است. بنابراین $a^2=a^2-0 \in R^+$ و از این‌رو $a^2>0$.

قضیهٔ ۶. اگر $a<b$ و $c<0$، آنگاه $ac>bc$.

برهان: چون $c<0$، داریم $-c=0-c\in R^{+}$. بنابراین $-c>0$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۴، $a(-c)<b(-c)$، بنابراین $-ac<-bc$ که در نتیجه $-bc-(-ac)\in R^{+}$. یعنی، $ac-bc\in R^{+}$ ولذا $bc<ac$.

این نتایج باید برای نشان‌دادن اینکه همهٔ نابرابریها را می‌توان از اصول موضوع ترتیب (همراه بااصول موضوع جبری) به‌دست آورد، کافی باشد. خواننده باید به‌عنوان تمرین سعی کند که احکام‌زیر را ثابت کند.

$1>0$.

اگر $ab>0$، آنگاه یا $a>0$، $b>0$ یا $a<0$، $b<0$.

اگر $x\in R$، آنگاه $x^{2}+1>0$. (بنابراین به‌ازای هیچ x حقیقی $x^{2}=-1$ برقرار نیست.)

اگر $0<a<b$، آنگاه $0<b^{-1}<a^{-1}$.

III اعداد صحیح واعداد گویا

فرض می‌کنیم $A\subseteq R^{+}$، A را یك مجموعهٔ استقرایی می‌نامیم اگر

$$1\in A$$

و

$$\text{اگر } x\in A\text{، آنگاه } x+1\in A.$$

برای مثال، R^{+} یك مجموعهٔ استقرایی است.

قضیه. فرض‌کنیم I اشتراك همهٔ مجموعه‌های استقرایی باشد، دراین‌صورت I یك مجموعهٔ استقرایی است.

برهان: چون عدد ۱ به‌هرمجموعهٔ استقرایی تعلق‌دارد، نتیجه می‌گیریم که ۱ به‌اشتراك همهٔ مجموعه‌های استقرایی نیز تعلق‌دارد. بنابراین

$$1\in I.$$

اکنون فرض‌کنیم $x\in I$. نشان خواهیم‌داد که $x+1\in I$. اگر A مجموعهٔ استقرایی دلخواهی باشد، بنابر تعریف I، $x\in A$ و بنابراین $x+1\in A$. ازاین‌رو اگر $x\in I$، آنگاه $x+1$ به‌هرمجموعهٔ استقرایی تعلق‌دارد، ودرنتیجه $x+1$ دراشتراك همهٔ مجموعه‌های استقرایی است. یعنی،

$$\text{اگر } x\in I\text{، آنگاه } x+1\in I$$

این برهان را کامل می‌کند.

تعریف. اعضای I را اعداد صحیح مثبت می‌نامند. عدد حقیقی n را یک‌عددصحیح منفی می‌نامند اگر $-n \in I$. سرانجام، می‌گوییم که n یک‌عدد صحیح است اگر $n = 0$ یا n یک‌عدد صحیح مثبت یامنفی باشد.

تعریف. اگر $x \in R$، می‌گوییم که x عددگویاست اگر اعداد صحیحی مانند a و b وجود داشته باشند. به‌طوری‌که $b \neq 0$ و $x = a/b$. اگر $x \in R$ ولی x عددگویا نباشد، x را عدد گنگ می‌نامیم.

اگر a عدد صحیح باشد، آنگاه $a = a/1$ و بنابراین a عدد گویاست. یعنی، هر عدد صحیح یک‌عددگویاست.

IV کمال

نشان‌دادن اینکه مجموعهٔ اعدادگویا از همان اصول موضوع جبری و ترتیبی مجموعهٔ‌اعداد حقیقی پیروی می‌کند مشکل نیست. بنابراین اصل موضوعی دیگر لازم است تا بین‌مجموعهٔ اعداد حقیقی ومجموعهٔ اعدادگویا تمایز ایجادکنیم. چنین اصلی (که اصل موضوع کمال نامیده می‌شود) دارای صورتهای مختلفی است، ما در بخش ۷۰۱ آن‌را به‌صورت اصل موضوع کوچکترین کران بالا ارائه‌کردیم، خواننده‌ای که مایل باشد با ترتیب اکیداً منطقی پیش برود باید بعد از تمام‌کردن این پیوست به‌سراغ بخش ۷۰۱ برود.

V قدر مطلق

اگر $x \in R$ و $x > 0$، $|x|$ را برابر x تعریف می‌کنیم. اگر $x < 0$، $|x|$ را برابر $-x$ تعریف می‌کنیم. سرانجام، $|0|$ را برابر 0 می‌گیریم. بنابراین برای‌هر $x \in R$، $|x| \geqslant 0$ و $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

قضیه. اگر $x, y \in R$، آنگاه

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \tag{1}$$

و

$$|xy| = |x| \cdot |y|. \tag{2}$$

برهان: چون $x \leqslant |x|$ و $y \leqslant |y|$، داریم

$$x + y \leqslant |x| + |y|. \tag{3}$$

چون $x \leqslant |x| -$ و $y \leqslant |y| -$ داریم

$$-|x|-|y| \leqslant x+y$$

یا

$$-(x+y) \leqslant |x|+|y|. \qquad (۴)$$

اگر $x+y \geqslant 0$، آنگاه $|x+y| = x+y$، بنابراین (۱) از (۳) نتیجه می‌شود. در غیر این‌صورت، $x+y < 0$ بنابراین $|x+y| = -(x+y)$ و (۱) از (۴) نتیجه‌می‌شود. اثبات (۲) را به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

برای $a,b,c \in R$، فرض کنیم $x = a-c$ و $y = c-b$. آنگاه $x+y = a-b$، و از قضیهٔ قبل نابرابری

$$|a-b| \leqslant |a-c|+|c-b|$$

به‌دست می‌آید. چون تعبیر هندسی $|x-y|$ فاصلهٔ x تا y است نابرابری اخیر می‌گوید که فاصلهٔ a تا b هرگز بیشتر از فاصلهٔ a تا c به‌اضافهٔ فاصلهٔ c تا b نیست.

فهرست راهنما

آبل ۱۳۳
آزمون
ـ آبل ۱۳۸
ـ M وایرشتراس ۳۸۷
ـ انتگرال ۳۱۲
ـ چگالش کوشی ۱۳۱
ـ دیریکله ۱۳۶
ـ ریشه ۱۲۶
ـ مقایسه ۱۲۲
ـ نسبت ۱۲۴

ε-چگال ۲۲۷
اجتماع ۹
از بالا کراندار ۳۷
از پایین کراندار ۳۷
اشتراک ۹
اعداد حقیقی توسعه یافته ۲۵۰
اعداد صحیح ۳، ۵۷۴
افراز ۴۶۵
انتگرال
ـ بالا ۲۶۴، ۴۶۷
ـ پایین ۲۶۵، ۴۶۷
ـ ریمان ۲۶۶
ـ ناسره ۳۰۷، ۳۱۶
ـ واگرا ۳۱۱، ۳۱۷
ـ همگرا ۳۰۷
انتگرالپذیر ۲۶۶، ۴۶۸، ۴۸۲، ۴۸۴
انتگرالپذیر مربعی ۵۰۰
اندازه ۴۴۴
ـ پذیر ۴۴۴
ـ خارجی ۴۴۴
ـ داخلی ۴۴۴
انقباض ۲۳۲
اینفیمم ۲۵۲

بازه ۴
برابری پارسوال ۵۴۰، ۵۵۶
برد تابع ۱۵
بزرگترین کران پایین ۳۷
بستار مجموعه ۲۰۳
بسط دودویی ۳۳
بسط دهدهی ۳۲، ۱۴۷
بسط سه‌سه‌یی ۳۴
به بینهایت واگرا ۵۳

به‌روی ۱۷
پارادوکس راسل ۱۵۱
پیچش ۵۱۶
پیوستگی یکنواخت ۲۴۴

تابع ۱۳
ـ اکیداً صعودی ۱۷۳
ـ اکیداً نزولی ۱۷۳
ـ اندازه‌پذیر ۴۵۷
ـ پله‌ای ۵۶۶
ـ پیوسته ۱۸۷، ۱۹۵، ۱۹۷
ـ پیوستهٔ هیچ‌جا مشتقپذیر ۴۰۵
ـ چندجمله‌ای ۳۱
تابع
ـ رادماخر ۵۴۹
ـ زوج ۵۲۵
ـ ساده ۵۶۳، ۵۶۴
ـ غیرصعودی ۱۷۱
ـ غیرنزولی ۱۷۱
ـ فرد ۵۲۵
ـ کراندار ۲۳۹
ـ گاما ۵۱۸
ـ لگاریتمی ۳۳۰
ـ مشخصه ۲۳
ـ نمایی ۳۲۷
ـ وارون ۲۶، ۲۴۲
ـ وایرشتراس ۴۰۸
ـ یکنوا ۱۷۲
تجدید آرایش سری ۱۱۴
تحدید تابع ۱۷
ترکیب توابع ۱۸
تظریف ۲۶۲، ۴۶۵
تعمیم مشتق ۵۴۱
تعویض متغیر ۳۰۳

تقریب با توابع چندجمله‌ای ۴۱۴
تقریباً همه‌جا ۲۶۱
توابع
ـ حقیقی ۲۱
ـ لژاندر ۵۴۹
ـ مثلثاتی ۳۳۳
ـ هذلولوی ۳۲۴
توسیع تابع ۱۷

جزئی‌ـمرتب ۱۵۰
جفت مرتب ۱۴

چگال ۲۰۸
چندجمله‌ایهای برنشتاین ۴۱۶

حاصلضرب داخلی ۵۴۸
حاصلضرب دکارتی ۱۴
حد
ـ بالا ۷۱
ـ پایین ۷۴
ـ تابع ۱۶۲، ۱۸۱
ـ دنبالهٔ اعداد ۴۴
حوزهٔ تعریف تابع ۱۵

خانوادهٔ یکا متعامد ۵۴۹

دنباله ۴۱
ـ غیرصعودی ۵۷
ـ غیرنزولی ۵۷
ـ کراندار ۵۶
ـ کوشی ۷۹، ۱۸۴
ـ نوسانی ۵۴
ـ واگرا ۵۱
ـ همگرا ۵۱، ۱۸۴

ـ یکنوا ۵۷

رده ۷
رسته ۲۱۲
روش ماتریسی مجموعپذیری ۱۵۴
روش مجموعپذیری منظم ۹۴

زیرتقسیم ۲۶۲
زیردنباله ۴۳
زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر ۴۶۵

سری
ـ تیلر ۳۴۲
ـ فوریه ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۵۰، ۵۵۱
ـ مالک‌لورن ۳۴۳، ۳۹۶
ـ مغلوب ۱۲۱
ـ نامتناهی ۹۸
ـ واگرا ۹۹
سریهای متناوب ۱۰۶
ـ همساز ۱۰۳
ـ همگرا ۹۹
ـ هندسی ۱۰۳
سوپرمم ۲۵۲

شرط لیپشیتس ۴۲۱
شمارا ۲۷

صفراندازه ۲۶۰

ضرب سریها ۱۱۶، ۱۱۷

طول مجموعهٔ باز ۴۴۰
طول مجموعهٔ بسته ۴۴۳
طولپایی ۲۵۹

عدد
ـ جبری ۳۶
ـ گنگ ۳، ۵۷۵
ـ گویا ۳، ۵۷۴
ـ متعالی ۳۶
عنصر ۷

فشرده ۲۳۴، ۲۳۷
فضای متریك ۱۷۶
فضای متریك کامل ۲۲۹

قاعدهٔ زنجیری ۲۸۳
قاعدهٔ هوپیتال ۳۵۷
قانون میانگین ۲۹۵
قدرمطلق ۳، ۵۷۵
قضیه
ـ آبل ۳۹۸
ـ آرزلا ۴۲۵
ـ آسکولی ۴۲۵
ـ استون-وایرشتراس ۴۲۸
ـ بازه‌های تودرتو ۸۳
ـ بولتسانو-وایرشتراس ۲۲۹
ـ پرینگسهایم ۱۳۳
ـ تاوبر ۴۰۲
ـ تقریب وایرشتراس ۴۱۴
ـ توسیع تیتسه ۴۳۳
ـ تونلی-هابسن ۵۱۴
ـ تیلر ۳۴۲، ۳۵۱
ـ دوجمله‌ای ۳۵۳
ـ دینی ۳۷۶، ۳۸۹
ـ رستهٔ بر ۲۱۲
ـ رل ۲۹۰
ـ ریس-فیشر ۵۰۳، ۵۳۹
ـ ریمان-لبگ ۵۴۲

ـ شرودر-برنشتاین ۱۴۹
ـ فوبینی ۵۱۴
ـ فیر ۵۳۲
ـ اوزین ۵۶۵
ـ مرتن ۱۵۸
ـ میانگین ۲۹۵
ـ نقطهٔ ثابت پیکار ۲۳۲
ـ وجودی پیکار ۴۲۱
ـ های بنیادی حساب
ـ های دیفرانسیل و انتگرال ۲۹۸، ۳۰۲
ـ همگرایی مغلوب لبگ ۴۹۵
ـ یگورف ۵۶۲
قطر ۲۲۵

کران بالا ۳۷
کران پایین ۳۷
کراندار کلی ۲۲۶
کوچکترین کران بالا ۳۷

گوی ۱۹۵
گوی باز ۱۹۳، ۱۹۵

لگاریتم ۳۳۰
لم
ـ آبل ۱۳۶
ـ اوریزون ۴۳۵
ـ زورن ۱۵۱
ـ فاتو ۴۹۷
لیتلوود ۵۶۲

ماکسیمم ۲۴۰
مؤلفهٔ بازه‌ای ۲۶۲
مبدل لاپلاس ۵۱۵
متریک ۱۷۷
ـ قدرمطلق ۱۷۷
متریکهای هم‌ارز ۱۸۵
متعامد ۵۴۹
متمم ۱۱
مجموع
ـ بالا ۲۶۳، ۴۶۵
ـ پایین ۲۶۳، ۴۶۵
ـ جزئی ۹۸
مجموعپذیری
ـ آبل ۳۹۶
ـ $(C, 1)$ ۸۵، ۵۳۲
ـ سریها ۱۳۹
مجموعه ۷، ۱۵۲
ـ اندازه‌پذیر ۴۴۴، ۵۱۲
ـ اندازه‌ناپذیر ۴۵۶
ـ باز ۱۹۹
ـ بسته ۲۰۳، ۲۰۴
ـ تفاضل ۵۰۹
ـ تهی ۹
ـ کانتور ۳۴، ۴۴۸
ـ کراندار ۳۷، ۲۲۵
ـ متناهی ۲۷
ـ نامتناهی ۲۷
ـ های هم‌ارز ۲۶
مجموعیابی جزء‌به‌جزء ۱۳۵
مشتق ۲۸۰
معیار کوشی (در همگرایی یکنواخت) ۳۷۶
مغلوب ۱۲۱
مقدار اصلی کوشی ۳۲۱
مینیمم ۲۴۰

نابرابری بسل ۵۳۶، ۵۵۳
نابرابری مینکوفسکی ۱۴۴، ۵۰۱
ناشمارا ۲۷

نامساوی
ـ بونیاکوفسکی ۱۴۳
ـ شوارتس ۱۴۳، ۵۰۰
ـ کوشی ۱۴۳
نقطهٔ
ـ انباشتگی ۱۷۹، ۲۵۵
ـ تنها ۲۵۵
ـ ثابت ۲۳۲
ـ حدی ۲۰۳
نگاره ۱۵
ـ وارون ۱۵
نگاشت ۱۵
نوسان تابع ۲۱۱

واندرواردن ۴۰۸
ویژگی
ـ ارشمیدسی ۳۹
ـ اشتراك متناهی ۲۳۷

ـ داربو ۲۹۳
ـ هانیه-بورل ۲۳۶

هستهٔ دیریکله ۵۲۷
هستهٔ فیر ۵۳۲
همبند ۲۲۰
همپیوسته ۴۲۵
همسانریختی ۲۰۸
همگرایی
ـ شرطی انتگرال ۳۱۰، ۳۱۷
ـ شرطی سری ۱۰۹
ـ مطلق انتگرالهای ناسره ۳۰۷،۳۱۶
ـ مطلق سری ۱۰۸
ـ نقطه‌ای ۳۶۷، ۳۸۵
ـ یکنواخت ۳۷۲، ۳۸۶، ۳۹۱
هیچ‌جا چگال ۲۱۲

یك‌به‌یك ۲۵

لطفاً قبل از مطالعه موارد زیر را اصلاح نمایید

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۳۴	۱۳	که آن را به K	که آن را با K
۴۳	۸	S_{n_i}	s_{n_i}
۴۴	۱۲ آخر سطر	$n_۲$	$s_{n_۲}$
۶۰	۱۴	$s_{n_۳}$	$s_{n_۲}$
۶۱	۴	$n \in I$	$N \in I$
۷۶	۷	برای حد بالا $\cdots$	برای حد بالا و حد پایین $\cdots$
۷۷	۱۰−	$(N \in I)$	$(n \in I)$
۷۸	۱	$s_n = m$	$s_n = M$
۷۸	۱۱−	$(n \geq M)$	$(n \geq N)$
۱۳۱	۲−	$\sum_{k=۰}^{\infty}$	$\sum_{k=۰}^{n}$
۱۷۳	۳	عدد مثبت ε	عدد مثبت δ
۱۷۳	۵	پس این مجموعه از	پس f در این مجموعه از
۱۸۷	۶−	$\lim_{x\to\infty}$	$\lim_{x\to a}$
۲۰۳	۸	اگر f تابع حقیقی دلخواهی	اگر f تابع حقیقی پیوسته دلخواهی
۲۱۹	۲−	آنگاه یک زیرمجموعهٔ سرهٔ	آنگاه یک زیرمجموعهٔ ناتهی سرهٔ
۲۲۰	۱۳	اما بنا بر $\cdots$	لذا بنا بر