روشهای جبر

جلد اوّل

پرویز شهریاری

پرویز شهریاری

روشهای جبر

جلد اول

مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر

تهران، ۱۳۶۵

شهریاری، پرویز
روشهای جبر (جلد اول)
چاپ پنجم : ۱۳۶۰ - چاپ ششم : ۱۳۶۲
چاپ هفتم : ۱۳۶۵
چاپ و صحافی : چاپخانه سپهر، تهران

تعداد : ۸۸۰۰ نسخه

بسمه تعالی

وقتی که در اوایل سال ۱۳۴۷ برای نخستین بار کتاب روشهای جبر منتشر شد، گمان نمی‌رفت تا این حد مورد استقبال دانش‌آموزان قرار گیرد. روشهای جبر به این هدف چاپ شد که «در خور صفحه‌های محدود خود، علاقه‌مندان را از سردرگمی نجات دهد و این مطلب را روشن کند که هیچ راه حل یا روش استدلالی در ریاضی جنبهٔ «استثنایی» و «تصادفی» ندارد و می‌توان برای همهٔ آنها استنادهای منطقی جستجو کرد».

و ضمناً «خواننده‌ای برای کتاب در نظر گرفته شده بود که برنامهٔ ریاضی دبیرستانی را فراگرفته باشد و آمادگی درك مطالب در سطح بالاتر و عمیق‌تر را داشته باشد».

ولی در عمل روشن شد که من نتوانسته بودم قدرت ذهنی و علاقه‌مندی دانش‌آموزان را به درستی ارزیابی کنم. معلوم شد قدرت فکری و شایستگی جوانان ما خیلی بیش از آنست که تصور می‌رفت.

کتاب روشهای جبر به سرعت جای خود را بازکرد و به صورت کتاب «بالینی» هردانش‌آموز رشتهٔ ریاضی درآمد وروشهای حل و نوع مسأله‌های آن (که کم و بیش تازگی داشت) توانست حتی درکار کلاسها اثر بگذارد، زیرا دانش‌آموزان مستعد ما کار بحثهای آنرا بـه کلاسهای درس کشانده بودند. حقیقت اینست که برنامه‌های ریاضی دبیرستانی ما، اگر تنها به آنها اکتفا شود، نمی‌تواند به خلاقیت ذهنی دانش‌آموز کمك کند؛ رابطه‌ها و دستورهای کلیشه شده در کتابها وبرنامه‌ها تنها می‌تواند کششی به‌طرف تقویت حافظه داشته باشد و از هرگونه تلاش عمیق فکری جلوگیری کند.

تنها چیزی که می‌تواند ایـن مشکل را حـل کند، وجود کتابهای کمك درسی است. منتهی دراین مورد هم کتابهای سطحی فـراوان است، از

یکطرف وجود کتابهای حل مسأله، که اکثر به صورت انبانی از مسألههای عادی و احتمالا غیر عادی در آمده است، قدرت فکر کردن را از دانش‌آموز می‌گیرد و چون هیچ هدف مشخصی را دنبال نمی‌کنند و تنها بـه قصد ساده کردن کار دانش‌آموز تهیه شده‌انـد، نقص آموزش ریاضی دبیرستانـی مارا تشدید می‌کنند و درحقیقت به صورت عامل مؤثر هـدایت دانش‌آموز به‌سمت کم عمقی درآمده‌اند.

از طرف دیگر بعضی ازکتابهای خوب کمك درسی به‌وسیلهٔ افراد غیر متخصص ترجمه شده است ودر نتیجه خواننده را در میان اصطلاحات ناآشنا و احتمالا جمله‌های غلط و نارسا، گیج وسر درگم می‌کند.

به‌همین مناسبت کسانی‌که درامر آموزش ریاضی تجربه دارند وروشهای درست هدایت آدمی را به‌طرف تفکرعلمی می‌شناسند، مسئولیتی بـزرگ در قبال جوانان ما پیدا می‌کنند، اینها باید در درجهٔ اول کتابهای خوب‌وحساب شده‌ای را انتخاب وتـرجمه کنند و در درجهٔ دوم نتیجه‌هایی راکه از تجربهٔ طولانی خود در دوران آموزش ریاضی بدست آورده‌اند، در دسترس دیگران قرار دهند.

تجربه نشان داده است که اکثر دانش‌آموزان از کتاب خوب استقبال می‌کنند و خارج از حساب نمره وامتحان نسبت به مطـالب اصیل علاقه نشان می‌دهند. البته تردیدی نیست که علاقه‌مندی معلم در شناساندن کتابهای خوب و پرهیز دادن از کتابهای بازاری می‌تواند سهم بزرگی در این زمینه داشته باشد.

***

در چاپ چهارم روشهای جبر تغییراتی داده شده است، بدون آنکه به استخوان‌بندی اصلی کتاب لطمه‌ای وارد آید:

۱. بخشهای مربوط به‌مشتق، تابع اولیه، ماکزیمم‌ومی‌نیمم وحد ازجلد اول برداشته شده و برای جلد دوم در نظر گرفته شده است، بنابـراین در جلد اول تنها به ریاضیات مقدماتی (ریاضیات باکمیتهای ثابت) پرداخته شده است، اگر چه در بعضی موارد برای کامل بودن مطلب از روشهای مربوط به ریاضیات باکمیتهای متغیر استفاده شده است.

۲. در جلد دوم، روشهای هندسهٔ تحلیلی وبطور کلی مفاهیم مقدماتی مربوط به‌کمیتهای متغیر (از قبیل حد، پیوستگی، مشتق‌گیری وغیره) مورد بررسی قرار گرفته است.

۳. چه درجلد اول وچه درجلد دوم تاحدامکان از مطالب عادی کتابهای درسی سخن نرفته است و در عین حال کوشش شده است از حد برنامهٔ دبیرستانی هم خارج نشود. مطالب کتاب مربوط به نقاطی است که یا به‌مناسبت عدم پیوستگی اجباری برنامه‌های دبیرستانی قابل طرح در کتابهای درسی نبوده است ویااینکه درکتابهای درسی بطور سطحی از آنها گذشته‌اند.

شادی بی‌اندازهٔ من از آنجاست که این کتاب ، با همهٔ کمبهای آن درگذشته توانسته است نقش جدی در ساختمان فکری دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی داشته باشد و آرزوی من اینست که بازهم مثل گذشته مورد انتقاد همکاران و دانش‌آموزان در جهت بهترشدن کتاب قرار گیرم.

اول تیر ـ ۱۳۵۲
پرویز شهریاری

مطالب کتاب

١

جبر

وقتی که در دورهٔ دبیرستان با جبر کار می‌کنیم، کمتر پیش می‌آید که به محتوی، ماهیت و روش آن، و وجه تمایزی که با دیگر شاخه‌های ریاضیات دارد بپردازیم. ولی حالا که کم و بیش با مفهومها و مساله‌های جبری آشنا شده‌ایم، لازم است بدانیم که این شاخهٔ ریاضیات چه موقعیتی دارد و وضع کنونی آن از چه قرار است. ضمناً اینهم لازم است که‌لااقل بطور خلاصه‌از تاریخچهٔ جبر با اطلاع‌باشیم وبدانیم که روشها و محتوی آن با گذشت‌زمان دستخوش چه دگرگونیهایی شده است. از این راه است که هم مفهوم واقعی آنچه را که می‌خوانیم برایمان روشن‌تر می‌شود وهم دورنمای پیشرفت آیندهٔ آن از نظرمان دور نمی‌ماند.

آنچه را که در این فصل می‌بینید همین قصد را دنبال می‌کند و بطور کامل از آخرین چاپ فرهنگ بزرگ روسی‌ترجمه شده است.

۱. اطلاعات کلی

جبر یکی از رشته‌های متنوع ریاضیات است که از لحاظ قدمت می‌توان آنرا در ردیف حساب و هندسه قرار داد . نوع مسأله‌ها وروش خاص جبر ، که بتدریج و از دوره‌های باستانی به‌وجود آمده و قوام گرفته است ، آنرا از سایر رشته‌های ریاضیات جدا می‌کنند. جبر تحت تأثیر نیازهای فعالیتهای اجتماعی و به علت جستجوی روشهای عمومی برای حل مسأله‌های حساب به وجود آمد . این روشها معمولا منجر به تشکیل و حل معادله‌های جبری می‌شود .

مسأله‌های مربوط به حل و بحث معادله ها اثر فوق‌العاده‌ای در تکامل مفاهیم اولیهٔ عدد داشته است . بررسی کلی دستگاههای مختلف عددی : اعداد منفی ، گنگ و مختلط هم در حوزهٔ جبر قرار می‌گیرد. ضمناً در جبر از علامتهای حرفی (که از خصوصیتهای مشخصهٔ آنست) استفاده می‌شود که به‌کمك آنها می‌توان خواص عملهای روی عددها را به صورت خلاصه و به‌نحوی که برای تنظیم محاسبه‌های مربوط به عبارتهای حرفی ساده باشد، ضبط‌کرد . محاسبهٔ حرفی تبدیلهای اتحادی این امکان را می‌دهدکه بتوانیم طبق قانون معینی (که ناشی ازخاصیت عملهاست) نتیجهٔ عمل را بشکل دیگری بنویسیم و همین مطلب **ابزار جبر کلاسیك** را تشکیل می‌دهد . به این ترتیب جبر با خطوط

زیر از حساب متمایز می‌شود: جبر با بکار گرفتن تبدیلهای حرفی خواص عمومی دستگاههای عددی وروشهای عمومی حل مسأله‌ها به‌کمك معادله را مطالعه می‌کند؛ در حالی‌که حساب‌به بررسی روشهای محاسبه روی عددهای مفروض و مشخص می‌پردازد و در مراحل بالاتر (در نظریهٔ‌اعداد) خواص انحصاری ونادر عددها را موردمطالعه قرارمی‌دهد. پیشرفت جبر، روشهای آن و علامتی بودن آن تأثیر فوق‌العاده‌ای در تکامل یکی از جدیدترین رشته‌های ریاضیات، یعنی آنالیز ریاضی، داشته است. یادداشت ساده‌ترین مفاهیم اصلی آنالیز همچون کمیتهای متغیر و توابع،بدون وجود نشانه‌های حرفی ممکن نبود؛ در آنالیز و بخصوص درحساب دیفرانسیل و حساب انتگرال بطور وسیعی از ابزار جبر کلاسیك استفاده می‌شود. در هرجایی که سر و کار با عملهای مربوط به جمعها و ضربهای متشابه عددها داشته باشیم می‌توان ابزار جبر کلاسیك را بکار برد. این عملها نه تنها در مورد عددها، بلکه در مورد اشیائی با طبیعتهای بکلی متفاوت هم‌می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. مشهور ترین نمونهٔ اینگونه کار برد وسیع از روشهای جبر را می‌توان در جبر برداری پیداکرد. بردارها را می‌توان با هم جمع‌کرد، در عددی ضرب‌کرد و به دو طریق مختلف در هم‌ضرب نمود. این‌عملها دربارهٔ بردارها در بسیاری خواص شبیه خواص جمع و ضرب دربارهٔ عددهاست ولی در بعضی موارد هم‌بایکدیگر متفاوتند. مثلا حاصلضرب برداری دوبردار $\mathbf{A}$ و$\mathbf{B}$ از قانون جابجایی پیروی نمی‌کنند، یعنی‌بردار $\mathbf{C}=[\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}]$ ممکن است مساوی بردار $\mathbf{D}=[\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}]$ نباشد، در

محاسبهٔ برداری این قانون وجود دارد که $[A \cdot B] = -[B \cdot A]$.

به دنبال جبربرداری ، جبر تانسوری به وجود آمد کـه یکی از اساسی‌ترین وسایل کمکی فیزیك معاصر است. در مرزهای جبر کلاسیك، جبر ماتریسها و بسیاری دستگاههای دیگر جبری پیدا شد .

به این ترتیب جبر به مفهوم امروزی و وسیع خود می‌تواند به عنوان دانشی که دربارهٔ دستگاههای اشیاء بـا طبیعتهای مختلف بحث می‌کند ، تعریف شود . در این دستگاهها عملهایی انجام می‌شود کـه خاصیتهایی مخصوص بخود دارند و کم و بیش با جمع و ضرب عددها شبیهند. اینگونه عملها **جبری** نامیده می‌شود. جبر دستگاههایی راتنظیم می‌کندکه در آنها عملهای جبری و خاصیتهای‌خاص این عملها تعریف شده است ؛ مسأله‌هایی را که بطور طبیعی از این دستگاهها ناشی می‌شود مورد بررسی قرارمی‌دهد؛معادله‌هایی‌که در دستگاه اشیاء جدید مفهوم جدیدی‌کسب می‌کنند حل و بحث می‌کند (جواب این معادله‌ها ممکن است بردار ، ماتریس و یا چیز دیگری باشد) . این دید جدید در جبر ، که بطور کامل در قرن بیستم پیدا شد ، امکان تـوسعهٔ بعدی کاربرد روشهای جبری را در صنعت ، در ریاضیات جدید ، و بخصوص‌در فیزیك فراهم کرد . علاوه برآن ، جبر بـه مفهوم جدید خود ، رابطهٔ خود جبر را با سایر رشته‌های ریاضیات محکم کرد و اثر جبر را بـر تکامل آیندهٔ این رشته‌ها قوت بخشید .

۲. نگاهی به تاریخ

پیشرفت اولیه. جبر به دنبال حساب بــه وجود آمد. مجموعهٔ قانونهای عملی که بتدریج برای حل مسألههــای روزانهٔ معیشتی جمع شده بود، حساب راتشکیل می‌داد. این قانونهای حساب منجربه‌عملهای جمع ، تفریق ، ضرب و تقسیم می‌شدکه ابتدا تنها روی عددهای صحیح وسپس بتدریج وبا پیشرفتی‌کند، روی‌عددهای‌کسری‌هم انجام می‌گرفت. اختلاف اساسی جبربا حساب در اینست که در جبرمقدار مجهول وارد شده است ؛ که عملهای روی آن ، طبق شرایطی که مسأله داده است ، معادله‌ای بدست می‌دهدکه از آن خود مجهول بدست می‌آید. به‌چنین تفسیری‌ازمسأله‌های‌حساب‌حتی درمصر قدیم در پاپیروس‌آهمس(۱۷۰۰ ـ ۲۰۰۰ سال قبل‌از میلاد) هم اشاره‌شده است،درآنجا مقدارمجهول را «کوچا» می‌نامد و آنرا با علامت مربوطه هیروگلیفی نشان می‌دهد . مصریهای قدیم مسأله‌های بغرنجتری راهم حل می‌کردند (مثلا تصاعدـ های حسابی و هندسی) . چه تنظیم مسأله‌ها و چه حل آنها بــا بیان توضیحی و تنها به صورت مثالهای عددی مشخص داده می‌شد . در همهٔ این نمونه‌ها ، نه در شکل بلکه در معنا ، وجود روشهای کلی در حل مشابه معادله‌هــای درجهٔ اول و گاهی درجهٔ دوم احساس می‌شود. اولین علامتهای ریاضی هم در نوشته های مصر قدیم وجود دارد (مثلا علامت مخصوص برای کسر) .

در ابتدای قرن بیستم توانستند بسیاری از متنهای مربوط به ریاضیات و سایر زمینه‌های فرهنگ باستانی ملتهای قدیم بابل را (که به خط میخی بود) بخوانند. این حادثه، وجود دنیای شگفت‌انگیزی از فرهنگ ریاضی را، که مربوط به تا ۴۰۰۰ سال قبل از میلاد بود، در مقابل ما قرار داد. بابلیها به کمك جدولهای مخصوص مفصلی که داشتند، می‌توانستند انواع مسأله‌ها را حل کنند؛ بعضی از این مسئله‌ها معادل حل معادله‌های درجهٔ دوم وحتی یکنوع معادلهٔ درجهٔ سوم است. بین دانشمندانی که به بررسی تاریخ ریاضیات مشغولند این بحث درگرفت که ریاضیات بابلی را تا چه اندازه می‌توان جبر به حساب آورد. ولی نباید فراموش کرد که ریاضیات قدیم بصورت یك علم واحد بود و تقسیم آن خیلی بعد انجام گرفت.

در یونان باستان هندسه، کاملا و بطور مشخص جدا شده بود. هندسه‌دانهای یونان باستان برای نخستین بار بررسی آگاهانه را پایه گذاشتند، به‌نحوی که هرقدم آن براستدلال منطقی استوار بود. نیروی این روش چنان بزرگ بود که مطالب مربوط به حساب و یا جبر هم به زبان هندسه بیان می‌شد: کمیت را به عنوان طول و یا حاصلضرب دو مقدار را به عنوان مساحت مستطیل مورد بررسی قرار می‌دادند وغیره. در زبان ریاضی امروز هم مثلا اصطلاح «مربع» برای ضرب یك مقدار در خودش هنوز باقی‌مانده است. یگانگی دانش که از ویژگیهای اصلی فرهنگ باستانی است در مورد ریاضیات یونان باستان صادق نیست: هندسه را رشته‌ای منطقی به حساب می‌آوردند که برای درك فلسفی

لازم است ، درحالی‌که ، بنا به اعتقاد افلاطون فیلسوف ذهن گرا ، همهٔ رشته‌های محاسبه‌ای یعنی مطالب مربوط بـه حساب و جبر زمینهٔ شایسته‌ای برای علم نداشتند . بدون تردید ، این رشته‌ها هم (براساس سنتهای بابلی و مصری) پیشرفت خود را ادامه داده است ، منتهی تنها رسالهٔ **دیوفانت** به‌نام «حساب» (اسکندریه- حدود قرن سوم‌میلادی) به‌ما رسیده است که در آن بطور مستقیم با معادله‌های درجهٔ اول و درجهٔ دوم کار شده است ؛ در این رساله می‌توان مفهوم عددهای منفی را هم بصورت جنینی پیدا کرد .

میراث دانش یونان باستان به دانشمندان شرق میانه ، آسیای مرکزی،بین‌النهرین و افریقای شمالی رسید که زبان علمی بین المللی برای آنها عربی بود (همانطورکه زبان علمی دانشمندان غرب‌در قرون وسطی‌زبان لاتینی بود) ، به‌همین‌مناسبت این دوره را درتاریخ‌ریاضیات گاهی «عربی» گفته‌اند. در واقع یکی از مراکز بزرگ علمی‌وفرهنگی این زمان (قرنهای نهم تاپانزدهم) آسیای مرکزی بود . بین نمونه‌های فراوان دانشمندان این دوره‌می‌توان از**محمدبن‌موسی خوارزمی** ریاضی‌دان و منجم قرن نهم و **بیرونی** دانشمند بزرگ که رصدخانهٔ الغ بیك را در سمرقند در قرن پانزدهم به وجود آورد ، نام برد . دانشمندان قرون وسطی در شرق ، ریاضیات یونان و هند را با اصلاحات جدی و بکر در اروپا منتشر کردند ، ضمناً بسیاری از آنها در زمینهٔ جبر کار کردند . خود کلمهٔ «جبر» عربی است و برای نخستین بار خوارزمی این نام را روی یکی از نوشته‌های خود گذاشت (الجبر به معنای یکی

از روشهای تبدیل معادله‌هاست). از زمان خوارزمی می‌توان جبر را یکی از رشته‌های جداگانهٔ ریاضیات به‌حساب آورد.

ریاضی‌دانهای قرون‌وسطی درشرق، همهٔ عملها را با بیان جمله‌ای (ونه بیان‌علامتی)شرح می‌دادند. پیشرفت بعدی جبر تنها وقتی ممکن‌شد که‌توانستندبرای عملها،علامتهای ساده‌وکلی درنظر بگیرند. این‌پیشرفت به‌کندی و در راهی پرپیچ‌وخم انجام گرفت. قبلا از علامت‌کسردر مصر قدیم صحبت کردیم. دیوفانت از علامت i (حرف اول کلمهٔ isos به معنای مساوی) به عنوان علامت تساوی استفاده می‌کرد، هندیها هم علامتهای اختصاری مشابهی داشتند (قرنهای پنجم تا هفتم میلادی)، ولی بعد این علامتها دوباره از بین رفتند. پیشرفت بعدی جبردرایتالیا و با پیروی از ریاضی‌دانهای قرن دوازدهم میلادی در شرق ممکن شد. لئونارد‌پیزانسکی (قرن سیزدهم میلادی) ـ مشهورترین ریاضی‌دان این دوره ـ مسأله‌های جبری را مورد مطالعه قرار داد. بتدریج روشهای‌ـ جبری در عملهای محاسبه‌ای رخنه کرد و در ابتدا بسختی به رقابت با روشهای مربوط به حساب پرداخت. دانشمندان ایتالیایی، ضمن اینکه خود رابا عمل سازگارمی‌کردند، دوباره ساده نویسی را به وجودآوردند، مثلا بجای کلمه‌های «به اضافه» و «منهای» از حرفهای لاتینی p و m با خط‌کوتاهی بالای آن استفاده می‌کردند. در نوشته‌های ریاضی‌اواخر قرن پانزدهم علامتهای «+» و «−»، که امروز مورد قبول است، ظاهر شده است، ضمناً دلیلهایی وجود دارد که این علامتها از مدتها قبل از این کاربرد، در کارهای تجارتی برای نشان‌دادن اضافه یاکسری

وزن بکار می‌رفته است .

سایر علامتها بسرعت به‌وجود آمدند(علامت توان، ریشه، پرانتز و غیره) . در اواسط قرن هفدهم دستگاه علامتهای جبر امروزی بطور کامل معین شده بود ، بنحوی‌که نه تنها برای نشان دادن مقدار مجهول، بلکه بطور کلی برای هر مقدار که در مسأله وارد می‌شد ، از حرفها استفاده می‌کردند . قبل از این اصلاح، که بطور قطع بوسیلهٔ ف . **ویت** (اواخر قرن شانزدهم) تثبیت شد ، در جبرو حساب قانونها واستدلالهای کلی وجود نداشت و روی نمونه‌های خاص عددی بحث می‌شد و تقریباً ممکن نبود بعضی قضیه‌های کلی بیان‌کرد . حتی کتابهای درسی مقدماتی این زمان فوق‌العاده مشکل بود ، زیرا بجای یك قاعدهٔ کلی ، از دهها قاعدهٔ خاص استفاده می‌کردند. ویت برای نخستین بار شروع به نوشتن مسأله‌ها به صورت‌کلی‌کرد ، او مقدارهای مجهول را با حرفهای‌صدادار A ، E ، I ، ... و مقدارهای معلوم را با حرفهای بی‌صدای B ، C ، D ، ... نشان می‌داد. ویت از علامتهایی‌که دراین زمان برای‌عملهای ریاضی وجود داشت برای مربوط کردن این حرفها بیکدیگر استفاده می‌کرد . به این ترتیب برای نخستین‌بار دستورهای حرفی به‌وجود آمد که برای جبر امروزی از خصوصیتهای اصلی بشمار می‌رود . از زمان **رنه دکارت** (قرن هفدهم میلادی) بـه بعد اغلب حرفهای آخر الفبا (x ، y ، z) را برای مجهول بکار می‌بردند .

بوجود آمدن علامتگذاری رمزی و انجام عمل روی حرفها ،که جانشین هر عدد مشخص دلخواه شده‌اند ، اهمیت فوق‌العاده و استثنایی

دارد . بدون این وسیله ـ یعنی زبـان دستورهـا ـ پیشرفت درخشان ریاضیات عالی ، که از قرن هفدهم شروع شد ، بـه وجود آمدن آنالیز ریاضی ، بیان ریاضی قانونهای مکانیك و فیزیك و غیره غیرقابل تصور است .

محتوی جبر درزمان دیوفانت شامل معادله‌های درجهٔ اول ودرجهٔ دوم بود. ریاضی‌دانهای یونان باستان ظاهراً از راههای هندسی به‌معادلهٔ درجهٔ دوم می‌رسیدند ، زیرا مسأله‌هایی‌که به‌این معادله منجر می‌شوند بطور طبیعی ضمن تعیین مساحتها و ساختمان دایـره طبق مفروضات مختلف ، به وجود می‌آیند . ولی در یك مورد اساسی ، تعیین جواب معادله بین ریاضی‌دانهای باستان و امروز اختلاف وجود دارد : آنها از عددهای منفی استفاده نمی‌کردند . بهمین مناسبت از نظرریاضی‌دانهای باستان حتی معادلهٔ درجه اول هم همیشه جواب نداشت . برای بررسی معادلهٔ درجهٔ دوم حالتهای خاص مختلفی را (که بـه علامت ضریبها بستگی داشت) در نظر می‌گرفتند . ریاضی‌دانهای هندی (در قرن دهم میلادی) قدم اساسی را در مورد بکار گرفتن عددهای منفی برداشتند ، ولی دانشمندان شرق در قرون وسطی این راه را دنبال نکردند . عادت به عددهای منفی بتدریج به‌وجود آمد؛ به‌این منظور بخصوص‌محاسبه‌های بازرگانی‌کمك زیادی‌کرد، دراین نوع محاسبه‌ها عدد منفی معنایی روشن دارد : زیان ، هزینه ،کسری و غیره . عددهای منفی بطور قطعی درقرن هفدهم و بعد ازآنکه دکارت تعبیرهندسی آنهارا برای‌ساختمان هندسهٔ تحلیلی مورد استفاده قرار داد ، مورد قبول قرار گرفت .

به وجود آمدن هندسهٔ تحلیلی در عین‌حال پیروزی جبر هم بود. اگر قبلا یونانیهای باستان مسأله‌های جبری را به شکل هندسی در می‌آوردند، حالا دیگر برعکس، وسیلهٔ بیان جبری چنان ساده‌وروشن است‌که مسأله‌های هندسی را به زبان رابطه‌های جبری تبدیل‌می‌کنند. ازبحث تفصیلی مربوط به‌توسعهٔ تدریجی حوزهٔ عددها، پیدایش عددهای منفی، گنگ، موهومی و غیره می‌گذریم؛ ولی باید متذکر شویم که لزوم پیدایش این عددها در جبرهم بشدت احساس می‌شود، مثلاعددهای گنگ‌مربوط به‌ریشهٔدوم ضمن حل معادله‌های درجهٔدوم بوجود آمدند. البته ریاضی‌دانهای یونان و آسیای میانه نمی‌توانستند از کنار ریشه گرفتن ردشوند و روشهای جالبی برای محاسبهٔ تقریبی آنها ابداع‌کرده بودند؛ ولی اعتقاد به عدد گنگ به عنوان یك عدد، خیلی بعدتر پیدا شد. پیدایش عددهای مختلط یا «موهومی» هم به دورهٔ بعد مربوط می‌شود (قرن هجدهم میلادی).

به این ترتیب، اگر از جنبهٔ عددهای موهومی بگذریم، جبر قرن هیجدهم تقریباً شامل همان مطالبی بود که تا امروز در برنامهٔ دبیرستانی آموخته می‌شود. این جبر عملهای جمع و ضرب، و عملهای عکس آنها یعنی تفریق‌وتقسیم و همچنین بتوان رساندن «حالت خاص ضرب» و عکس آن یعنی ریشه گرفتن را در بر می‌گیرد. این عملها روی عددها و یا حرفها انجام می‌گیرند که می‌توانند مثبت یا منفی، گویایاگنگ باشند. این عملها در حل مسأله‌هایی بکار می‌رفت که در واقع منجر به معادلهٔهای درجهٔ اول و درجهٔ دوم می‌شد. امروز هرفرد

باسوادی این مقدار جبر را می‌داند. این همان جبر «مقدماتی» است که در صنعت، فیزیك و سایر رشته‌های علمی و عملی بکار می‌رود. ولی محتوی علم جبروکاربرد آن به‌هیچوجه به اینجا محدود نمی‌شود، تنها قدمهای اولیه به سختی‌وکندی برداشته شد. از قرن شانزدهم وبخصوص از قرن هجدهم، تکامل سریع جبر شروع می‌شود و در قرن بیستم شکفتگی جدیدی پیداکرد.

بیان جبر مقدماتی (به صورتی‌که در ابتدای قرن هیجدهم معین شده بود) به‌زبان شکل،برای نخستین بار در اثرمعروف ل.ف. **ماگنیتسکی** بنام «حساب» داده شده است که در سال ۱۷۰۳ چاپ شد.

جبر در قرنهای هجدهم و نوزدهم. انتهای قرن‌هفدهم وابتدای قرن هجدهم، نقطهٔ عطفی درتاریخ ریاضیات‌وعلوم طبیعت بشمارمی‌رود: در این زمان آنالیز بی‌نهایت کوچکها (حساب دیفرانسیل و انتگرال) به‌وجودآمد و بـه سرعت منتشر شد، این نقطهٔ عطف بخاطر پیشرفت چشمگیری که مورد نیاز صنعت و علوم طبیعت بود و بر پـایهٔ تکامل قبلی جبربه‌وجود آمد. بخصوص علامتهای حرفی وعمل روی آنهاحتی در قرنهای شانزدهم و هفدهم موجب شده بود که به کمیتهای ریاضی همچون متغیرها بنگرند، چیزی که برای آنالیز بی‌نهایت کوچکهااز خصوصیات اصلی است، زیرا در اینجا تغییر متصل یك‌کمیت معمولا به تغییرمتصل کمیت دیگری مربوط می‌شود که تابع آن نامیده می‌شود.

در قرنهای هفدهم و هجدهم، جبر و آنالیز کاملا در ارتباط با

یکدیگرپیش رفتند. تصور تابعی در جبر نفوذ کرد، دراینجهت **نیوتون** آنرا غنی‌تر کرد . از طرف دیگر جبر ، رابطه هـا و تبدیلهای پرثمر خود را به آنالیز داد که در مرحلهٔ اول محاسبهٔ انتگرالی و نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی نقش‌بسیار بزرگی به‌عهده دارد . مهمترین‌واقعه در جبر این دوره ، ظهور دورهٔ جبر **لئوناراولر** بود که در آن زمان در آکادمی علوم پترزبورگ کار می‌کرد . این دوره ابتدا به زبان روسی (۱۷۶۸ـ۶۹) ' سپس به کرات به زبانهای دیگر چاپ شد. تفاوت جبرو آنالیز در قرنهای هجدهم و نوزدهم به این ترتیب مشخص شدکه جبر با موضوع خاص خود که منفصل و محدود است ، سر و کار دارد . این خصوصیت جبر را **نیکلای ایوانویچ لباچوسکی** در نیمهٔ اول قرن نوزدهم در کتاب خود بنام «جبر یا محاسبهٔ محدودها» مشخص کرد؛ (۱۸۳۴) . جبر با عملهای اصلی (جمع‌وضرب) سروکاردارد و این عملها را به‌تعداد محدودی انجام می‌دهد .

ساده‌ترین نتیجهٔ ضرب عبارتست از یك جمله مثل $5a^3bx^2y$. مجموع تعدادمحدودی ازاینگونه جمله‌ها را (به‌شرط اینکه باتوانهای صحیح باشند) **چند جمله‌ای** گویند . اگر توجه خود را به‌یکی ازحرفها و مثلا x ، معطوف‌کنیم ، می‌توان چند جمله‌ای را به صورت $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ نوشت ، که در آن ضریبهای a_0 ، a_1 ، ..... ، a_n بستگی به x ندارند.این یك چند جمله‌ای از درجهٔ n است (و یا به زبان دیگر تابع گویا و صحیح) . جبر قرنهای‌هجدهم و نوزدهم ، قبل از هرچیز ، **جبر چند جمله‌ایهاست** .

بـه این ترتیب حجم مطالب جبر به مراتب محدودتر از حجم مطالب آنالیز می‌شود، ولی با وجود این، عملها و مطالب ساده‌ای کـه موضوع جبر را تشکیل می‌دهند، عمیق‌تر و مفصل‌تر مورد مطالعه‌قرار می‌گیرد؛ بخصوص به مناسبت ساده‌تر بودن ، آموزش آنهااهمیت فوق‌ـ العاده‌ای برای مجموعۀریاضیات دارد . دراین میان جبر و آنالیز وجوه مشترك خود را حفظ کردند ؛ و این وجوه مشترك را می‌توان بسادگی معین کرد . مثلا آنالیز ، علامتها را از جبر گرفته است ، بدون این علامتها پیدایش آنالیزممکن‌نبود. درموارد زیادی مطالعۀ چندجمله‌ایها به عنوان ساده‌ترین نوع تابع ، راه را برای نظریۀ کلی توابع باز کرد. از این به‌بعد در مطالعۀ تاریخی ریاضیات، تمایل بطرف بررسی توابع‌و چند جمله‌ایهای‌بغرنجتر و یا رشتۀ چند جمله‌اینها (که ساده‌ترین آنها رشتۀ **تیلور** است) وجود دارد . از طرف دیگر جبر گاهی از فکراتصال هم استفاده می‌کند ، ولی تصور تعداد نامحدود اشیاء ، به صورت جدیدو خاص خود ، بر جبر دوران اخیر مسلط می‌شود .

اگر یك چند جمله‌ای را مساوی صفر (ویا بطورکلی مساوی یك عدد معین) قراردهیم ، یك معادلۀ جبری بدست‌می‌آید. از نظرتاریخی نخستین مسألۀ جبرعبارت از حل معادله بود ، یعنی پیداکردن **ریشه‌های آن** ؛ ریشه‌های معادله عبارتند از مقدارهایی از مجهول x ،که به ازای آنها چند جمله‌ای مساوی صفرشود. از زمان دورتری جوابهای معادلۀ درجۀ دوم $x^2+px+q=0$ به صورت زیر معلوم بود :

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

حل جبری معادله‌های درجهٔ سوم ودرجهٔ چهارم در قرن شانزدهم میلادی پیدا شد ، برای معادلهٔ به صورت $x^3+px+q=0$ (که هر معادلهٔ درجهٔ سومی را می‌توان به آن تبدیل کرد) رابطهٔ زیر داده شده است :

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

این رابطه را که به رابطهٔ **کاردان** معروف است (اگر چه این سؤال وجود دارد که آیا خود کاردان این رابطه را بدست آورد یااز سایرین اقتباس کرد) نمی‌توان حل کامل معادله به حساب آورد . روش حل معادلهٔ جبری درجه چهارم را **ل. فراری** پیداکرد . بعد از آن تلاش پیگیرانه‌ای برای جستجوی رابطه‌هایی که بتوانند معادله‌های درجه‌های بالاتر را به طریق مشابهی حل کنند ، شروع شد ؛ یعنی می‌خواستند جوابها را به کمك ریشه گرفتن (حل به‌کمك رادیکالها) پیدا کنند . این تلاشها حدودسه‌قرن ادامه داشت ، تا اینکه در ابتدای قرن‌نوزدهم **ن. آبل و ا. گالوا** ثابت کردند که معادله‌های بالاتر از درجهٔ چهارم‌در حالت کلی به‌کمك رادیکالها **قابل حل نیستند** ؛ معلوم شدکه معادله‌های درجهٔ n وجود دارد که اگر n بزرگتر یا مساوی ۵ باشد ، به کمك رادیکالها قابل حل نیستند . از این قبیل مثلا می‌توان معادلهٔ $x^5-4x-2=0$ را نام برد . این کشف اهمیت فوق‌العاده‌ای داشت ، زیرا معلوم شد که ریشه‌های معادله‌های جبری بغرنجتر از آن هستند

که بوسیلهٔ رادیکالها قابل بیان باشند. گالوا تنها به جنبهٔ منفی کار اکتفا نکرد و شروع به طرح نظریهٔ عمیق‌تر معادلات کرد و بهر معادله‌ای گروه تبدیل ریشه‌های آنرا مربوط کرد. حل معادله به‌کمك رادیکالها به معنای تبدیل معادلهٔ اولیه به صورت معادلهٔ $y^m = a$ است (که خود آن بیان می‌کند که $y = \sqrt[m]{a}$). معلوم شدکه تبدیل به‌چنین معادله‌ای در حالت کلی ممکن نیست، ولی سؤالی پیش آمد: کدام معادله های ساده‌تر می‌توانند منجر به حل معادله‌های معینی شوند؟ مثلا از طریق ریشه‌های چه معادله‌هایی، ریشه‌های معادلهٔ مفروض به صورت گویا، یعنی به‌کمك چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، بیان می‌شود. تکامل نظریهٔ گالوا بطرف این مفهوم وسیع‌تر تا زمان ما ادامه دارد.

از جهت عملی، برای محاسبهٔ ریشه‌های معادله‌ای که ضریب‌های آن داده شده است، نیازی بـه داشتن رابطه‌های کلی حل برای معادله‌های از درجه‌های بالاتر نیست، زیرا حتی در موردمعادله‌های درجهٔ سوم و چهارم هم رابطه‌های جواب در عمل خیلی کم مورد استفاده قرار می‌گیرند. حل عددی معادله‌ها راه‌دیگری پیداکرد و از روشهای محاسبهٔ تقریبی کمك گرفت، بخصوص از اینجهت که در عمل (مثلا در نجوم و صنعت) خود ضریبها هم معمولا از طریق اندازه‌گیری بدست می‌آیند و به‌همین مناسبت تقریبی هستند.

محاسبهٔ تقریبی ریشه‌های معادله یکی از مسائل مهم ریاضیات محاسبه‌ای است و تـا امروز روشهای بسیار زیادی برای انجام آن پیدا

شده است که بخصوص با استفاده از ماشینهای حساب امروزی قــدرت بیشتری گرفته است . ولی ریاضیات تنها به‌شرح روشهای محاسبه نمی‌پـردازد . حتی در عمل و از نظر کاربرد ریاضیات هم جهت دیگر کار کم اهمیت نیست ، این جهت راه صرفاً نظری و بدون محاسبه و دادن جواب در مقابل سؤالهای طرح شده است. در حوزهٔ نظریهٔ معادله‌های جبری یکی از این سؤالها **دربارهٔ تعداد ریشه‌ها** وخصوصیتهای آنهاست. جواب این سؤال مربوط به‌این‌است که ما با چگونه عددهایی سر و کار داریم . اگر حوزهٔ عددهای مثبت و منفی را در نظر بگیریم ، معادلهٔ درجهٔ اول همیشه یك جواب دارد و این جواب هم منحصر بفرد است. ولی معادلهٔ درجهٔ دوم ممکن است بین عددهای مثبت یا منفی ، یعنی عددهای حقیقی ، جوابی نداشته‌باشد، مثلا معادلهٔ $x^۲+۲=۰$ به‌ازای هیچ‌عدد مثبت یا منفی x صادق نیست ، زیرا سمت چپ تساوی همیشه مثبت است و نمی‌تواند مساوی صفر شود. نمایش جواب بـه صورت $x=\sqrt{-۲}$ ، تا زمانی که ریشهٔ دوم عددهـای منفی را تعریف نکنیم ، معنایی نخواهد داشت . همینگونه مسائل بود که ریاضی‌دانها رابه‌فکر عددهای موهومی انداخت. اگرچه قبلا هم‌گاهی از آنها استفاده می‌شد، ولی ورود عددهای موهومی به علم بطور قطعی در قرن نوزدهم انجام گرفت . این عددها بوسیلهٔ بسیار مهمی نه تنها در جبر ، بلکه در همهٔ رشته‌های ریاضیات وپهنهٔ کاربرد آنها تبدیل شدند. حالا که دیگر وجود عددهای موهومی عادی شده است، جنبهٔ اسرارآمیز و «موهومی»خود۔ را از دست داده‌اند و به‌همین مناسبت دیگر اغلب بجای موهومی، آنها

را عددهای **مختلط** می‌نامند .

اگر وجود عددهای مختلط را قبول کنیم ، معلوم می‌شودکه هر معادلهٔ درجهٔ n دارای ریشه است ، ضمناً این حکم برای معادله هایی هم‌که ضریبهای موهومی دارند صحیح است. این قضیهٔ مهم،که نام قضیهٔ اصلی جبر را بخودگرفته است ، برای نخستین‌بار درقرن‌هفدهم و بوسیلهٔ **آ. ژیرار** ریاضی‌دان فرانسوی طرح شد، ولی اثبات‌دقیق آن در قرن هجدهم و بوسیلهٔ **ك. گوس** انجام گرفت ؛ از این زمان به بعد دهها اثبات مختلف دیگرهم داده شده است . همهٔ این استدلالها، باکم و بیش تفاوت ، بابکار گرفتن مفهوم **پیوستگی** انجام گرفت و بنابراین اثبات قضیهٔ اساسی جبر در خارج از مرزهای خود جبر ممکن شد و یکبار دیگر پیوستگی علوم ریاضی را به‌یکدیگر ثابت کرد.

اگر x_i یکی از ریشه‌های معادلهٔ جبری زیر باشد :

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

بسادگی می‌توان ثابت کرد که چند جمله‌ای سمت چپ تساوی بر $x-x_i$ قابل قسمت است. از قضیهٔ اساسی جبربه‌سهولت نتیجه می‌شود که هر چند جمله‌ای درجهٔ n به n عامل درجهٔ اول تجزیه می‌شود ، یعنی اتحاد زیر برقرار است :

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

ضمناً چند جمله‌ای تنها به‌یك‌طریق می‌تواند به ضرب عواملی از این نوع تجزیه شود .

بنابراین **معادلهٔ درجهٔ n دارای n ریشه است** . در حالتهای خاص ،

ممکن است بعضی از عوامل با هم مساوی باشند، یعنی بعضی از ریشه‌ها چند بارتکرار شده باشند (**ریشه‌های تکراری**)؛ یعنی تعداد ریشه‌های **متمایز** ممکن است کمتر از n باشد. اغلب محاسبهٔ خود ریشه‌ها به اندازهٔ کشف چگونگی خواص این ریشه‌ها اهمیت ندارد. مثل قاعده‌ای که **دکارت** به‌نام «قانون علامتها» پیدا کرد: تعداد ریشه‌های مثبت معادله بیشتر از تعداد تغییرهای متوالی علامت در ضریبهای آن نیست (واگر کمتر از آن باشد، به تعداد زوج کمتر است)؛ مثلا در معادلهٔ $x^5-4x-2=0$ تنها یك تغییر علامت در ضریبهای متوالی وجود دارد (ضریب جملهٔ اول مثبت و بقیهٔ ضریبها منفی است)، بنابر این‌بدون حل معادله می‌توان نتیجه گرفت که تنها یك ریشهٔ مثبت‌دارد؛ سؤال کلی مربوط به‌تعداد ریشه‌های حقیقی معادله دریك‌فاصلهٔ مفروض با قانون شتورم جواب داده شد. این مطلب هم بسیار مهم است‌که برای معادلهٔ با ضریبهای حقیقی، تعداد ریشه های مختلط زوج است: اگر معادله‌ای ریشهٔ $a+bi$ را قبول کند، $a-bi$ هم ریشهٔ دیگری از این‌معادله است. در عمل‌گاهی مسأله‌های بغرنجتری از این نوع‌مطرح می‌شود؛ مثلا در مکانیك ثابت می‌شود که حرکت وقتی پایدار است‌که یك معادلهٔ جبری‌چنان ریشه‌هایی داشته باشد (حتی ریشه‌های مختلط) که قسمت حقیقی آنها منفی باشند وبنابراین مسأله منجربه جستجوی شرطهایی می‌شود که برای آنها، ریشه‌های معادله دارای خاصیت مورد نظر باشند.

بسیاری از سؤالهای نظری و عملی منجر به‌یك معادله نمی‌شود،

بلکه یك‌دستگاه معادله‌ها باچند مجهول بدست می‌آید؛ حالت دستگاه معادله‌های خطی در این مورد اهمیت خاص دارد، یعنی دستگاه m معادلهٔ درجهٔ اول با n مجهول:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned}$$

در اینجا $x_1, \ldots, x_n$ مجهولها هستند و ضریبها چنانند که علامتهای زیر آنها شمارهٔ معادله و شمارهٔ مجهول را معین می‌کنند. اهمیت دستگاه معادله‌های درجهٔاول تنها مربوط به‌سادگی آنها نیست. در عمل (و مثلابرای جستجوی اصلاحی در محاسبه‌های نجومی، برای تخمین اشتباه در محاسبه‌های‌تقریبی وغیره) اغلب با مقدارهای‌کوچکی سروکار داریم که از توانهای بزرگ آنها می‌توان صرفنظر کرد (به مناسبت اینکه بسیار کوچکند)، به‌نحوی که معادله‌های مربوط به این مقدارها از نخستین تقریب منجر به معادله‌های خطی می‌شوند. اهمیت این مطلب هم کم نیست که حل دستگاه معادله‌های خطی نقش اساسی در حل عددی مسالههای تجربی مختلفی دارد. حتی **لایب‌نیتس** (۱۷۰۰) هم به این مطلب توجه کرد که از ضریبهای a_{ik} دستگاه معادله‌های خطی جدولی تشکیل می‌شود و ثابت کرد که از این ضریبها (درحالت $m=n$) یك **دترمینان** بوجود می‌آید که به کمك آن می‌توان دربارهٔ دستگاه معادله‌های خطی بحث کرد. بعدها این جدولها، یا **ماتریسها**، موضوع مستقلی برای مطالعه شدند، زیرا معلوم شد که نقش آنها به

بررسی دستگاههای خطی محدود نمی‌شود . نظریهٔ دستگاه معادله‌های خطی و نظریهٔ ماتریسها درزمان‌ماکسب‌اهمیت‌زیادی کرده‌اند ویکی از رشته‌های اساسی علم ، یعنی جبر خطی ، را تشکیل می‌دهند .

۲. وضع کنونی جبر

عرصهٔ فعالیت ریاضیات در طول زمان گسترش یافته وزمینهٔ این گسترش رو به افزایش است . اگر در قرن هجدهم میلادی ، ریاضیات اساس کار مکانیك ونجوم بود، در قرن نوزدهم برای شاخه‌های‌مختلف فیزیك لازم شد وامروز روشهای ریاضیات حتی در رشته‌هایی از دانش بشری کـه بکلی دور از ریاضیات بنظر می‌رسند، مثل زیست شناسی ، زبان‌شناسی ، جامعه شناسی وغیره نفوذ کرده است . هرنوع کار بـرد تازه‌ای که برای ریاضیات پیدا می‌شود ، فصلهای جـدیدی را در خود ریاضیات به‌وجود می‌آورد . این وضع تعداد بسیار زیادی شاخه‌هـای مختلف در ریاضیات پدید آورده است که اختلافشان در میدان مطالب مورد بررسی‌آنهاست (نظریهٔ توابع‌متغیرهای مختلط،نظریهٔ احتمالات، نظریهٔ معادله‌های فیزیك ریاضی و غیره ؛ و جدیدتر : نظریهٔ انفور ـ ماسیون، نظریهٔاداره خودکار و غیره) . با وجود همهٔ این تجزیه‌وتفرق، ریاضیات به‌صورت‌یك علم واحد باقی‌ماند. این یگانگی درنتیجهٔ تکامل و تکمیل یك رشته افکار و نقطه نظرهای‌کلی و متحدکننده حفظ‌شده است . این تمایل به یگانگی در ماهیت علوم ریاضی نهفته است کـه با روش انتزاعی سروکار دارد و علاوه برآن اغلب باعث می‌شود که در

بررسی همهٔ انواع مساله‌های متفاوتی کـه در رشته‌های مختلف دانش بشری پیش می‌آید ، تنها از یك نوع وسیلهٔ ریاضی استفاده کنیم .

جبرامروزی به معنای مطالعه عملهایی روی‌اشیاء دلخواه ریاضی فهمیده می‌شود ؛ جبر یکی از شاخه‌های ریاضیات است که مفاهیم و روشهای کلی را برای همهٔ ریاضیات منظم می‌کند . این نقش جبر را توپولوژی هم دارد ، که در آن خواص کاملا کلی‌تر ابعاد متصل مورد مطالعه‌قرارمی‌گیرد.جبر وتوپولوژی، باوجوداینکه موضوعهای مختلفی برای مطالعه دارند ، چنان بهم مربوطندکه به‌سختی می‌توان بین آنها خط‌فاصل کشید . بـرای جبر امروزی این خصوصیت در مرکز توجه است که خاصیت عملها را مورد توجه قرار می‌دهد ، نه اشیایی را که این عملها روی آنها انجام می‌گیرد . سعی می‌کنیم این مطلب را روی نمونـهٔ ساده‌ای روشن کنیم . دستور $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ را همه می‌دانند . این نتیجه بـه کمك رشته تساویهای زیر بدست آمـده است :

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=(a+b)a+(a+b)b=$$
$$=(a^2+ba)+(ab+b^2)=a^2+(ba+ab)+b^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

برای استدلال ، دوبار از قانون پخشی استفاده کرده‌ایم :

$c(a+b)=ca+cb$ (نقش c را $a+b$ بازی می‌کند) ،

$(a+b)c=ac+bc$ (نقش c را a و b به عهده دارند) ؛ از قانون شرکت‌پذیری استفاده کرده‌ایم و به‌کمك‌آن برای جمع،جمله‌هاراگروه‌

بندی کرده‌ایم و بالاخره از قانون جابجائی $ab = ba$ استفاده کرده‌ایم. اینکه اشیایی که به وسیلهٔ a و b نشان داده‌ایم چی هستند، مهم نیست؛ مهم این‌است که آنها به دستگاه اشیائی تعلق دارند که در موردآنها دو عمل جمع و ضرب تعریف شده است و این عملها خاصیتهایی دارند که مربوط به **عملها** هستند و نه اشیاء. به این ترتیب، برای حالتی هم که a و b **بردارهایی** در صفحه یا فضا باشند، باز هم این دستور صحیح است: جمع ابتدا به صورت جمع برداری است وسپس به صورت جمع عددها،ضرب هم به‌صورت‌ضرب‌داخلی‌بردارهاست. بجای a و b می‌توان ماتریسهای خاصی را قرار داد (یعنی ماتریسهایی که در مورد آنها $ab = ba$ باشد، خاصیتی که درمورد ماتریسها ممکن است وجود نداشته باشد)، یا عوامل دیفرانسیل دو متغیر مستقل را وغیره.

خاصیت عملهایی که روی اشیاء ریاضی در شرایط متفاوت انجام می‌شود، گاهی‌بکلی متفاوت‌وگاهی باوجود اشیاء مختلف، یکسان‌است. باکنارگذاشتن طبیعت اشیاء، و تثبیت خاصیتهای تعریفی عملها روی‌این اشیاء،به مفهومهای **مجموعه‌ها** و **دستگاههای جبری** می‌رسیم. نیازپیشرفت علوم، یك رشته‌دستگاههای جبری‌را وارد زندگی‌کرده است: **گروهها**، فضاهای خطی، حوزه‌ها،حلقه‌ها و غیره. موضوع جبرامروزی‌عبارتست از بررسی‌دستگاههای جبری، همچنین بررسی‌خاصیتهای دستگاههای جبری بطورکلی، بر اساس مفهومهای کاملا کلی (جبر Ω، مدلها). علاوه براین، روشهای جبر در سایر رشته‌های ریاضیات و هم خارج از ریاضیات آموخته می‌شود (توپولوژی، آنالیز تابعی، نظریهٔ عددها،

هندسهٔ جبری ، ریاضیات محاسبه‌ای ، فیزیك نظری ، بلور شناسی و غیره) .

مهمترین دستگاه‌جبری، که دارای یك عمل است ، عبارتست‌از گروهها. عمل در گروه **شرکت‌پذیر** است (یعنی $(a*b)*c=a*(b*c)$ برای هر a ، b ، c از گروه صحیح است ؛ علامت ستاره * نشانهٔ عملی است که در وضعهای مختلف نامهای مختلف بخود خواهد گرفت) و **برگشت‌تك‌ارزشی** دارد ، یعنی برای هر a و b از گروه، x و y منحصر بفردی پیدا می‌شود که $a*x=b$ و $y*a=b$ باشد . به عنوان نمونه‌هایی از گروه می‌توان از مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح نسبت به جمع، یا مجموعهٔ همهٔ عددهای‌گویا (صحیح وکسری) و مثبت نسبت به ضرب نام برد . در این نمونه‌ها ، عمل (برای نمونهٔ اول جمع و برای نمونهٔ دوم ضرب) دارای خاصیت **جابجایی** است . این گونه گروهها را **آبلی** گویند . مجموعهٔ حرکتهایی که یك شکل یا جسم مفروض را برخودش منطبق کند ، یك گروه تشکیل می‌دهد به شرطی کــه انجام دو حرکت متوالی را به عنوان عمل آن در نظر بگیریم . این گروهها (گروههای تقارن شکل) ممکن است غیر آبلی باشند . حرکتهایی که شبکهٔ اتمی بلور را بــر خودش منطبق می‌کند ، بــه گروه **فئودوروف** مشهور است که در بلورشناسی وازآن راه در فیزیك اجسام صلب‌نقشی اساسی دارد. گروه ممکن است محدودباشد (گروه تقارنهای‌مکعب) یانامحدود(گروه عددهای صحیح نسبت به جمع) ، منفصل باشد (همان مثال) ویا پیوسته (گروه دورانهای کره). نظریهٔ گروهها محتوی نظریهٔ ریاضی را وسعت

بخشید و غنی‌تر کرد و خود نیز مواردکاربرد فراوانی بدست آورد .

جبر خطی هم اهمیت‌کمتری ندارد . این جبر ، فضاهای خطی را مورد مطالعه قرار می‌دهد ، جبر خطی به یك دستگاه جبری گفته می‌شود که با دو عمل جمع و ضرب روی عددها (حقیقی یا مختلط) سر وکار دارد . نسبت به جمع ، اشیاء (به‌نام بردارها) تشکیل گروه آبلی می‌دهد و عمل ضرب در شرطهای زیر صدق می‌کند :

$$a(x+y)=ax+ay \quad \text{و} \quad (a+b)x=ax+bx \quad \text{و}$$
$$1\cdot x=x \quad \text{و} \quad a(bx)=ab(x)$$

در اینجا a و b نشانهٔ عددها و x و y نشانهٔ بردارها هستند .

مجموعه بردارها (به مفهوم‌معمولی) در صفحه و در فضا تشکیل فضاهای خطی را به مفهوم تعریفی که‌کردیم ، می‌دهند . مسأله‌هایی که درمقابل ریاضی‌دانها قرارگرفته است ، مطالعهٔ فضاهای خطی چند بعدی و حتی بی‌نهایت بعدی را مطرح کرده است . فضاهای اخیر (که عناصر آنها اغلب عبارتند ازتابعها) موضوع مطالعهٔ **آنالیز تابعی** راتشکیل می‌دهند. فکر و روش جبر خطی در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات مثل هندسهٔ تحلیلی و نظریهٔ دستگاه معادله‌های خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد . نظریهٔ ماتریسها و دترمینانها ابراز محاسبه‌ای جبر خطی را تشکیل می‌دهند .

۲

تجزیهٔ عبارتهای جبری

تجزیهٔ یك عبارت جبری به صورت ضرب عوامل اول ، از مباحث اساسی جبر است و اهمیت آن ناشی از آن‌است که در همهٔ زمینه‌های ریاضیات‌محاسبه‌ای مورد استعمال‌دارد: برای حل‌معادله‌ها، ساده کردن کسرها، بیرون‌آوردن‌عبارتی از زیررادیکال و... همه‌جا به تجزیه احتیاج داریم . در عین حال تجزیه یکی از مشکل‌ترین مباحث جبر است و نمی‌توان راه حل عمومی برای آن ذکر کرد.

دراین بخش صرفنظرازروشهای عادی (عامل مشترك گرفتن و یا استفاده از اتحادها) بـه بعضی از راههای ناآشنای تجزیه می‌پردازیم.

۱. روش ضریبهای نامعین

فرض کنید که می‌خواهیم عبارت x^4+2x^2+5 را به‌صورت ضرب دوعامل درجهٔ دوم حقیقی تجزیه کنیم. عوامل تجزیه را x^2+ax+b و $x^2+\alpha x+\beta$ فرض می‌کنیم ، در اینصورت باید داشته باشیم:

$$x^4+2x^2+5\equiv(x^2+ax+b)(x^2+\alpha x+\beta)$$

اتحاد وقتی بر قرار است که ضریبهای x^p در طرفین تساوی برابر باشند ، داریم :

$$x^4+2x^2+5\equiv$$
$$\equiv x^4+(a+\alpha)x^3+(b+\beta+a\alpha)x^2+(a\beta+b\alpha)x+b\beta$$

از آنجا باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} a+\alpha=0 \\ b+\beta+a\alpha=2 \\ a\beta+b\alpha=0 \\ b\beta=5 \end{cases} \qquad (1)$$

دستگاه چهارمعادلهٔ چهار مجهولی (۱) از درجهٔ دوم است و بنابراین در حالت کلی منجر به حل یك معادلهٔ درجهٔ چهارم می‌شود ، ولی درحالتهای خاص(مثل حالت فوق) که ضریبها مناسب باشند ، می‌توان **ضریبهای نامعین** a ، b ، α و β را محاسبه کرد .

از معادلهٔ اول دستگاه داریم : $a=-\alpha$ که اگر در معادلهٔ سوم دستگاه قرار دهیم به صورت $\alpha(b-\beta)=0$ در می‌آید .

اگر $\alpha=0$ باشد از تساوی $a=-\alpha$ بدست می‌آید $a=0$ و از معادلات دوم وچهارم دستگاه خواهیم داشت :

$$\begin{vmatrix} b+\beta=2 \\ b\cdot\beta=5 \end{vmatrix}$$

و b و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر هستند :

$$t^{2}-2t+5=0$$

که دارای مبین منفی و ریشه‌های موهومی است .

اگر $\alpha\neq 0$ باشد ، ناچار $b=\beta$ می‌شود . در نتیجـه معادلهٔ چهارم به صورت $\beta^{2}=5$ در می‌آید . در حالت $\beta=-\sqrt{5}$ ، از معادلهٔ دوم دستگاه نتیجه می‌شود : $\alpha^{2}=-2(\sqrt{5}+1)$ و بنابراین مقادیر α وسپس a موهومی خواهد شد .

به این ترتیب داریم : $b=\beta=\sqrt{5}$ و از معادلهٔ دوم دستگاه ،

$$\alpha=\pm\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$$

و بالاخره :

$$a=\mp\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$$

در نتیجهٔ تجزیهٔ عبارت درجهٔ چهارم مورد نظر چنین می‌شود :

$$x^{4}+2x^{2}+5=$$

$$=(x^{2}+x\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}+\sqrt{5})(x^{2}-x\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}+\sqrt{5})$$

توضیح: روش‌ضریبهای نامعین، ضمناً همهٔانواع ممکنهٔ تجزیهٔ یك‌عبارت رابدست می‌دهد (اگرمقیدبه ضریبهای حقیقی نباشیم).مثلا انواع دیگرتجزیهٔ عبارت فوق چنین می‌شود :

$$x^{4}+2x^{2}+5=(x^{2}+1+2\sqrt{-1})(x^{2}+1-2\sqrt{-1})=$$

$$=(x^{2}+x\sqrt{-2(\sqrt{5}+1)}-\sqrt{5})\times$$

$$\times(x^{2}-x\sqrt{-2(\sqrt{5}+1)}-\sqrt{5})$$

۲. استفاده از روش حل معادله‌ها

فرض کنید تجزیهٔ این عبارت مورد نظر باشد :

$$A=4(x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1)$$

این عبارت ، یك عبارت معکوسهٔ درجهٔ چهارم است. برای تجزیهٔ آن از همان‌روش‌حل معادلهٔمعکوسه‌استفاده می‌کنیم.ابتدا از x^{2} فاکتورمی گیریم:

$$A=4x^2\left(x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=$$
$$=4x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right]$$

اگر $x+\frac{1}{x}=t$ فرض کنیم ، $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ می‌شود و

بنابراین داریم : $A=4y^2(t^2+t-1)$

عبارت داخل پرانتز نسبت بـه t از درجهٔ دوم و قابل تجزیه است .

ریشه‌های این عبارت $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ است و بنابراین خواهیم داشت :

$$A=4x^2\left(t+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

دوباره بجای t مقدارش $x+\frac{1}{x}$ را قرار می‌دهیم :

$$A=4x^2\left(x+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

و با توجه به اینکه $4x^2=2x\times 2x$ می‌باشد ، هریك از پرانتزها را در $2x$ ضرب می‌کنیم ، نتیجهٔ تجزیهٔ عبارت، به‌صورت زیر در می‌آید :

$$A=[2x^2+(\sqrt{5}+1)x+2][2x^2-(\sqrt{5}-1)x+2]$$

۳. استفاده از خاصیت دوری بودن عبارت

تعریف. تبدیل دوری (Périodique) یك عبارت جبری نسبت به n حرف a و b و c و ... و l و k عبارتست از تبدیل آن به‌عبارت دیگری کـه از عبارت اول ، با تبدیل a به b و b به c و ... و l به k و k به a بدست آمده باشد .

مثلاعبارت a^2+b در تبدیل دوری نسبت به a و b به عبارت b^2+a تبدیل می‌شود (درعبارت a^2+b ، a را به b و b را به a تبدیل‌نمودیم). واضح است که اگر b^2+a را دو باره تبدیل دوری کنیم به همان عبارت اصلی خواهیم رسید .

ویا اگر بخواهیم تبدیلهای دوری‌عبارت $x^2+3xy+4z^2$ را نسبت به چهار حرف x و y و z و t بدست آوریم ، داریم :

عبارت‌اصلی : $x^2+3xy+4z^2$

تبدیل اول : ۱) $y^2+3yz+4t^2$

تبدیل دوم : ۲) $z^2+3zt+4x^2$

تبدیل سوم : ۳) $t^2+3tx+4y^2$

و اگر عبارت (۳) را تبدیل دوری‌کنیم ، همان عبارت اصلی بدست می‌آید.

عبارتهای دوری . عبارتی را نسبت به n حرف a و b و c و ... و k و l دوری گوییم‌که در اولین تبدیل دوری نسبت به‌این حروف به‌خودش تبدیل شود .

عبارت ab نسبت به a و b و عبارت $(x-y)(y-z)(z-x)$ نسبت به x و y و z عبارتهای دوری هستند ، زیرا در اولین تبدیل دوری ، هریك از آنها به خودشان تبدیل می‌شوند .

اگر عبارتی نسبت به n حرف غیر دوری باشد ، دارای $n-1$ تبدیل دوری خواهد بود .

خاصیت اصلی . خاصیت اصلی یك عبارت دوری در اینست که آنرا به هرشکلی بنویسیم بازهم‌یك عبارت دوری خواهد بود . هرگز باعملیاتی از قبیل ساده‌کردن ، بازکردن پرانتزها ، تجزیه‌کردن ، تبدیل اتحادی وغیره نمی‌توان‌یك‌عبارت دوری را به یك عبارت غیردوری ویا برعکس تبدیل‌کرد .

چند مثال:

۱. آیا تساوی زیر اتحاد است؟

$$(a+b-c)^3+(ab+2c)^3=$$
$$=(ab-2c)^3+(a+b+c)^3+3a^2bc$$

حل : سمت چپ تساوی نسبت بـه دو حرف a و b یك عبارت دوری است (یعنی با تبدیل a و b به یکدیگر تغییر نمی‌کند). درحالی که عبارت سمت راست تساوی نسبت به همین دو حرف a وb غیر دوری است (زیراجملهٔ $3a^2bc$ با تبدیل a و b به یکدیگر تغییر می‌کند) و بنابراین نمی‌تواندیك اتحاد باشد .

توضیح: واضح است که اگر هردو طرف یك تساوی نسبت به‌چندحرف دوری باشد، به معنای‌این نیست که تساوی حتماً یك‌اتحاد است. دراین‌صورت برای تحقیق در اتحاد بودن آن باید راه دیگری انتخاب کرد .

۴. عبارت زیر را تجزیه کنید :

$$A=(x-y)^۳+(y-z)^۳+(z-x)^۳$$

حل : عبارت A نسبت به سه حرف x و y و z دوری است، بنابراین بعد از تجزیه هم باید به صورت یك عبارت دوری نسبت به همین مجهولها درآید . از طرف دیگر روشن است که عبارت A به ازای $x=y$ برابرصفر می‌شود ، بنابراین شامل فاکتور $x-y$ می‌باشد ؛ ولی چون عبارت A دوری است ، ناچار باید تمام‌تبدیلهای دوری $x-y$ یعنی $y-z$ و $z-x$ جزو عوامل تجزیهٔ آن باشد ، در نتیجه می‌توانیم بنویسیم :

$$(x-y)^۳+(y-z)^۳+(z-x)^۳=\lambda(x-y)(y-z)(z-x)$$

عبارت سمت چپ تساوی نسبت به x از درجهٔ دوم است ($x^۳$ و $-x^۳$ حذف می‌شوند)، بنابراین باید سمت‌راست‌تساوی‌هم نسبت به x از درجهٔ دوم باشد و چون حاصل‌ضرب $(x-y)(y-z)(z-x)$ نسبت به x از درجهٔ دوم است ، λ نمی‌تواند شامل x باشد و با توجه به اینکه عبارت نسبت به x و y و z دوری است ، λ شامل y و z هم نخواهدبود ، پس λ مقداری‌است ثابت. برای محاسبهٔ λ می‌توان ضریبهای $x^۲$ رادر طرفین تساوی مساوی قرار داد ، ضریب $x^۲$ در سمت چپ تساوی $۳(z-y)$ و در سمت راست تساوی $-\lambda(y-z)$ است یعنی $\lambda=۳$ و داریم :

$$(x-y)^۳+(y-z)^۳+(z-x)^۳=۳(x-y)(y-z)(z-x)$$

توضیح: برای محاسبهٔ مقدارثابت λ می‌توانستیم از خاصیت دیگراتحاد استفاده کنیم (اتحاد به‌ازای هر مقدار دلخواه مجهولها برقرار است) و مثلا در طرفین تساوی قرار دهیم :

$$x=۰\ ;\ y=۱\ ;\ z=۲$$

در این‌صورت بدست می‌آمد :

$$-۱-۱+۸=\lambda(-۱)(-۱)\times ۲\ ;$$
$$۲\lambda=۶ \Longrightarrow \lambda=۳$$

۳. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای صحت تساوی :

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n} \quad (1)$$

اینست که n عددی فرد باشد و داشته باشیم :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z} \quad (2)$$

حل : تساوی (۲) را چنین می‌نویسیم :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x+y+z}=0$$

سمت چپ این تساوی نسبت به‌هریك از حروف x ، y و z از درجهٔ دوم است، از طرف دیگر به‌سادگی دیده می‌شود که به‌ازاء $x=-y$ برقرار است و بنابراین ، با توجه به دوری بودن عبارت نسبت به این حروف ، به صورت زیر در می‌آید:

$$\lambda(x+y)(y+z)(z+x)=0 \quad (2)'$$

همچنین تساوی (۱) هم به این صورت در می‌آید :

$$\lambda'(x^n+y^n)(y^n+z^n)(z^n+x^n)=0 \quad (1)'$$

λ و λ' مقداری ثابت و مخالف صفرند ، بنابراین شرط صفر بودن $(x+y)(y+z)(z+x)$ اینست که یکی از عاملهای $x+y$، $y+z$ ویا $z+x$ صفر باشد که دراین‌صورت، با توجه به فرد بودن n ، یکی‌ازعاملهای x^n+y^n ، y^n+z^n یا z^n+x^n صفر خواهد شد و تساوی $(1)'$ و در نتیجه (۱) برقرار است .

وبرعکس، بااستدلال‌مشابه، ازتساوی $(1)'$ هم‌می‌توان‌به‌تساوی $(2)'$ رسید.

۴. استفاده از جذر عبارتهای جبری

مقدمه : از عبارتهای جبری می‌توان با روشی مشابه حساب عددی‌جذر گرفت ، در این مورد باید به دو نکته توجه داشت :

اولا برای اینکه عبارتی قابل جذر گرفتن باشد ، باید نسبت به‌مجهول خود (و اگر شامل چند مجهول باشد ، نسبت به همهٔ مجهولها) از درجهٔ زوج باشد .

ثانیاً اگرضریب بزرگترین درجه مجذور کامل نباشد ، به معنای‌آن نیست که عبارت مفروض مجذور کامل نیست .

طریقهٔ جذرگرفتن : فرض کنیدکه می‌خواهیم جذرعبارت‌زیر رابدست آوریم :

$$۹a^۶-۱۲a^۵+۱۰a^۴-۳۴a^۳+۲۱a^۲-۱۰a+۲۵$$

صورت عمل چنین است :

$$
\begin{array}{l|l}
 & ۳a^۳-۲a^۲+a-۵ \\
\hline
\sqrt{۹a^۶-۱۲a^۵+۱۰a^۴-۳۴a^۳+۲۱a^۲-۱۰a+۲۵} & ۶a^۳-۲a^۲ \\
-۹a^۶ & \quad -۲a^۲ \\
\hline
\quad -۱۲a^۵+۱۰a^۴ & ۶a^۳-۴a^۲+a \\
\quad +۱۲a^۵-۴a^۴ & \qquad +a \\
\hline
\qquad ۶a^۴-۳۴a^۳+۲۱a^۲ & ۶a^۳-۴a^۲+۲a-۵ \\
\qquad -۶a^۴+۴a^۳-a^۲ & \qquad\qquad -۵ \\
\hline
\qquad\quad -۳۰a^۳+۲۰a^۲-۱۰a+۲۵ & \\
\qquad\quad +۳۰a^۳-۲۰a^۲+۱۰a-۲۵ & \\
\hline
\qquad\qquad R=۰ &
\end{array}
$$

شرح عمل : ابتدا جذر کامل $۹a^۶$ یعنی $۳a^۳$ را می‌نویسیم و مجذور آنرا از $۹a^۶$ کم می‌کنیم ، سپس دو جمله یعنی $-۱۲a^۵+۱۰a^۴$ راپایین می‌آوریم و اولین‌جملهٔ آن ، یعنی $-۱۲a^۵$ را بردو برابر $۳a^۳$ (یعنی $۶a^۳$) تقسیم می‌کنیم، خارج قسمت یعنی $-۲a^۲$ را در سمت راست $۶a^۳$ می‌نویسیم، سپس‌حاصل‌ضرب $۶a^۳-۲a^۲$ رادر $-۲a^۲$ بدست‌آورده، از $-۱۲a^۵+۱۰a^۴$ کم می‌کنیم . ضمناً $-۲a^۲$ را در سمت راست $۳a^۳$ (در بالا) هم می‌نویسیم . حالا دوباره دوجمله پایین می‌آوریم و پهلوی باقیماندهٔ قبلی می‌نویسیم‌واولین جملهٔ عبارت حاصل را برهمان $۶a^۳$(دوبرابر $۳a^۳$) تقسیم می‌کنیم و درسمت راست $۶a^۳-۴a^۲$ (دوبرابر $۳a^۳-۲a^۲$ یا حاصل جمع $۶a^۳-۲a^۲$ با $-۲a^۲$) می‌نویسیم و مانند سابق عمل را ادامه می‌دهیم . جذر عبارت $۳a^۳-۲a^۲+a-۵$ می‌شود .

توضیح : جذر یك‌عبارت جبری‌را با روش ضریبهای نامعین هم‌می‌توان بدست آورد :

$$۹a^۶-۱۲a^۵+۱۰a^۴-۳۴a^۳+۲۱a^۲-۱۰a+۲۵=$$
$$=(۳a^۳+\alpha a^۲+\beta a+\gamma)^۲$$

ضریب a^5 در سمت راست تساوی 6α و در سمت چپ ۱۲ — است ، بنابراین :

$$6\alpha=-12 \Longrightarrow \alpha=-2$$

ضریب a^4 در سمت راست تساوی $\alpha^2+6\beta$ و در سمت چپ تساوی ۱۰ می‌باشد :

$$\alpha^2+6\beta=10 \Longrightarrow 4+6\beta=10 \Longrightarrow \beta=1$$

ضریب a^3 در سمت راست تساوی $6\gamma+2\alpha\beta$ و در سمت چپ تساوی ۳۴ — است یعنی :

$$6\gamma+2\alpha\beta=-34 \Longrightarrow 6\gamma-4=-34 \Longrightarrow \gamma=-5$$

بنابراین عبارت جذر به صورت $3a^3-2a^2+a-5$ در می‌آید . البته دراین روش‌بایدپس‌از محاسبهٔ ضریبهای نامعین ، ضریبهای a^2، a و مقدار ثابت را در دوطرف تساوی آزمایش کرد تا صحت عمل جذر اثبات شود .

چند مثال :

۱. عبارت زیر را به صورت ضرب عاملها تجزیه کنید :

$$P=m^4+2m^3-m^2-2m-8$$

حل : اگر از عبارت P جذر بگیریم چنین می‌شود :

$$\begin{array}{l|l}
 & m^2+m-1 \\
\hline
\sqrt{\;m^4+2m^3-m^2-2m-8} & 2m^2+m \\
-m^4 & \quad +m \\
\hline
\quad 2m^3-m^2 & 2m^2+2m-1 \\
\quad -2m^3-m^2 & \quad\quad -1 \\
\hline
\quad\quad -2m^2-2m-8 & \\
\quad\quad +2m^2+2m-1 & \\
\hline
\quad\quad R=-9 &
\end{array}$$

می‌بینیم که عبارت مفروض مجذور کامل نیست و باقیمانده‌ای مساوی ۹ — دارد ، بنابراین P را می‌توان چنین نوشت :

$$P=(m^2+m-1)^2-9$$

و دیگر ادامهٔ کار روشن است ، با توجه به اتحاد :

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

خواهیم داشت :

$$P=(m^2+m-4)(m^2+m+2)=$$
$$=\frac{1}{4}(2m+1+\sqrt{17})(2m+1-\sqrt{17})(m^2+m+2)$$

(عبارت m^2+m+2 قابل تجزیه به عاملهای حقیقی درجهٔ اول نیست).

۴. عبارت درجهٔ چهارم زیر را به ضرب دو عامل درجهٔ دوم حقیقی تجزیه کنید :

$$f(x)=x^4+2x^3+3x^2+2x+2$$

حل : اگر از عبارات $f(x)$ جذر بگیریم ، حاصل جذر برابر x^2+x+1 و باقیماندهٔ جذر برابر ۱ خواهد شد و بنابراین داریم :

$$f(x)=(x^2+x+1)^2+1$$

به این ترتیب ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ موهومی است. این ریشه‌ها را بدست می‌آوریم :

$$f(x)=0 \implies x^2+x+1=\pm\sqrt{-1}$$
$$1)\qquad x^2+x+1=\sqrt{-1} \implies$$
$$x_1=\sqrt{-1}\ ;\ x_2=-(1+\sqrt{-1})$$
$$2)\qquad x^2+x+1=-\sqrt{-1} \implies$$
$$x_3=-\sqrt{-1}\ ;\ x_4=-(1-\sqrt{-1})$$

اگر برای سهولت کار $\sqrt{-1}=i$ فرض کنیم ، خواهیم داشت :

$$f(x)=(x-i)(x+1+i)(x+i)(x+1-i)=$$
$$=[(x-i)(x+i)][(x+i+1)(x-i+1)]=$$
$$=(x^2+1)(x^2+2x+2)$$

تمرینها

این عبارتها را به‌صورت ضرب عاملهای اول تجزیه‌کنید :

۱. $xy(x+y)+yz(y-z)-xz(x+z)$

۲. $[(x^2+y^2)(a^2+b^2)+4abxy]^2-$
$-4[xy(a^2+b^2)+ab(x^2+y^2)]^2$

۳. $2a^2b+4ab^2-a^2c+ac^2-4b^2c+2bc^2-4abc$

۴. $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$

۵. $y(x-۲z)^۲+۸xyz+x(y-۲z)^۲-۲z(x+y)^۲$

۶. $۲x^۴+x^۳+۴x^۲+x+۲$

۷. $۴(x^۲+xy+y^۲)^۳-۲۷x^۲y^۲(x+y)^۲$

۸. $(a+b+c)^۳-a^۳-b^۳-c^۳$

۹. $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc$

۱۰. $(a-b)^۵+(b-c)^۵+(c-a)^۵$

۱۱. $x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱$

۱۲. $x^۴-x^۲+۷$

۱۳. $x^۴+۴x-۱$

۱۴. $(۱+x+x^۲+\cdots+x^n)^۲-x^n$

۱۵. $۲x^۴+x^۳+۳x^۲+x+۲$

۱۶. $x^۶+۲x^۵+۳x^۴+۲۴x^۳+۲۳x^۲+۲۲x+۲۱$

۱۷. $x^۴+۶x^۲+۱۸$

۱۸. $(x^۲+y^۲+z^۲)^۲-۲(x^۴+y^۴+z^۴)$

۱۹. $x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz$

۲۰. $(a^۲-bc)^۳+(b^۲-ca)^۳+(c^۲-ab)^۳-$
$-۳(a^۲-bc)(b^۲-ca)(c^۲-ab)$

۲۱. $(x+y+z)^۵-x^۵-y^۵-z^۵$

۲۲. $a^{۵n}+a^n+۱$ (n عددی است صحیح و مثبت)

۲۳. $(x+۱)(x+۳)(x+۵)(x+۷)+۱۵$

۲۴. $a^۳(x-y)-x^۳(a-y)+y^۳(a-x)$

۲۵. $a^۲b^۲(b-a)+b^۲c^۲(c-b)+c^۲a^۲(a-c)$

۲۶. $۸x^۳(y+z)-y^۳(z+۲x)-z^۳(۲x-y)$

۲۷. $x^۲y+xy^۲+x^۲z+xz^۲+y^۲z+yz^۲+۲xyz$

۲۸. $x^۲y+xy^۲+x^۲z+xz^۲+y^۲z+yz^۲+۳xyz$

۲۹. $x^۳+۵x^۲+۳x-۹$

۳۰. $x^۳+۹x^۲+۱۱x-۲۱$

۳۱. $x^۳(x^۲-۷)^۲-۳۶x$

۳۲. $(x^۲+y^۲)^۳+(z^۲-x^۲)^۳-(y^۲+z^۲)^۳$

۳۳. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

۳۴. $x^3(z-y^2)+y^3(x-z^2)+z^3(y-x^2)+xyz(xyz-1)$

۳۵. $x^4+2x^2\cos\alpha+1$

۳۶. ۱) ثابت‌کنیداگر a عددی صحیح‌باشد ، عدد $(2a+1)^2-1$ بر ۸ قابل قسمت است .

۲) ثابت کنید اگر a عددی صحیح باشد . عدد a^3-a بر ۶ قابل‌قسمت است .

۳) ثابت کنید عددهای به صورت a^3+5a ، a^3+11a ، a^3-19a بر ۶ قابل‌قسمت‌اند .

۳۷. ۱) ثابت کنید تفاضل مربعهای دو عدد زوج متوالی بر ۴ قابل قسمت است .

۲) ثابت کنید تفاضل مربعهای دو عدد فرد متوالی بر ۸ قابل قسمت است .

۳) ثابت کنیدتفاضل مربعهای دو عددی که بر ۲ و ۳ قابل‌قسمت نیستند مضربی از ۲۴ است .

۳۸. ثابت کنید وقتی n عددی صحیح و فرد باشد ، عدد

$$n^4+7(2n^2+7)$$

بر ۶۴ قابل‌قسمت است .

۳۹. ثابت کنید که اگر $5x+2y$ بر ۱۷ قابل‌قسمت باشد، $9x+7y$ هم بر ۱۷ قابل قسمت است .

۴۰. با شرطهای $a^2+2(ab-ac-bc)=0$ ، $b\neq c$ ، $a+b\neq c$ ثابت کنید :

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}$$

۳
بیان تابع

ریاضیات در مراحل مختلف خود ازموارد مشخص ومحسوس به‌طرف مسائل مجرد و ازاحکام جزئی‌واختصاصی به‌طرف احکام‌کلی و عام ،بسوی‌کمال رفته است و این تمایل به‌طرف تجرید وانتزاع یکی از قوای محرکهٔ اصلی پیشرفت ریاضیات بوده است .

وقتی که بجای ۵ درخت و ۵ انگشت و ۵ ساختمان و... مفهوم‌کلی ۵ درك شد ، نخستین انتزاع انجام‌گرفت و سپس وقتی که بجای اعداد مشخص ۵ و ۲۲ و ۴— و غیره از حرف a یا x استفاده شد ، دومین انتزاع به‌وجودآمد.دراین‌حالت عبارتی مثل $۲x^۲+x-۱$ بسته به مقدار x تغییر می‌کند و به‌همین مناسبت حاصل آنرا تابعی از x نامیدند، درحالی‌که عبارت $a^۲-۵$ تابعی از a است و غیره .

درمرحلهٔبعدی انتزاع،برای همهٔانواع‌تابعهای x یاتابعهای a ، شکل نمایشی در نظر گرفته شد ، به‌صورت $f(x)$ یا $\varphi(a)$ و غیره .

دراین بخش ازبیان نمایشی تابع به‌صورت $f(x)$(درموارد یك متغیره) و $f(x, y, ...)$ (در حالت چند متغیره) گفتگو می‌شود و روشهای مطالعهٔ اینگونه تابعها و تبدیلهای آنها مورد مطالعه قرار می‌گیرد .

تابع $f(x)$ [1]

تعریف . متغیر y را تـابع یك متغیرهٔ f نسبت به متغیر x گویند ، وقتی‌که به‌ازای هرمقدار دلخواه از فاصلهٔ معینی از x ،تنها یك مقدارحقیقی برای y بدست آید و در این‌صورت آنرا به‌صورت $y=f(x)$ نشان می‌دهند.

فاصلهٔ تغییرات xرا وقتی‌که به‌صورت $a<x<b$ باشد با علامت $(a،b)$ و وقتی‌که به صورت $a\leq x<b$ باشد با علامت $[a،b)$ و وقتی‌که به‌صورت $a\leq x\leq b$ باشد با علامت $[a ، b]$ نشان می‌دهند .

وقتی که در تابع $y=f(x)$ از $f(\alpha)$ صحبت می‌کنیم، به معنی‌مقداری از y است‌که به‌ازای $x=\alpha$ بدست آمده باشد .

اغلب لازم است‌که در یك تابع نقش x را به متغیر دیگری محول کنیم و مثلا وقتی از $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ صحبت می‌کنیم به معنای این است که می‌خواهیم نقش x را به $-\frac{1}{x}$ واگذاریم (و البته به معنای این نیست کـه x با $-\frac{1}{x}$ برابر است) .

اگر در تابع چند متغیره مثل $f(x ، y)$ بنویسیم $f(\alpha ، y)$ به‌معنای آنست‌که نقش x را به α داده‌ایم (و در موردی‌که α عدد است یعنی $f(x،y)$ را به‌ازای $x=\alpha$ برحسب y بدست‌آورده‌ایم) . و یا $f(\alpha ، \beta)$ به‌معنای‌آنست که نقش xوy را به ترتیب به αوβ واگذاشته‌ایم (ودر حالت عددی α و β یعنی تابع را به‌ازای $x=\alpha$ و $y=\beta$ محاسبه‌کرده‌ایم) .

وقتی که مثلا $f(x)=x^2+x-1$ باشد می‌توان a^2+a-1 رابا $f(a)$ نشان داد ، در حالی‌که مثلا حق نداریم وقتی $f(x)=x^2+x-1$ است ، عبارت $2a^2-3a$ را با $f(a)$ نشان دهیم، بلکه آنرا باعلامت‌دیگری مثل $\varphi(a)$ یا $g(a)$ و غیره نشان خواهیم داد .

---

[1] f حرف اول کلمهٔ fonction به معنای تابع است .

چند مثال:

۱. اگر $f(x)=x^{2}-2x$ باشد، مطلوبست $f(2x+1)$

حل. داریم:

$$f(2x+1)=(2x+1)^{2}-2(2x+1)=4x^{2}-1$$

۲. اگر $f(x)=x+\frac{1}{x}$ باشد، مطلوبست $ff(x)$

حل.

$$ff(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=\frac{x^{4}+3x^{2}+1}{x(x^{2}+1)}$$

۳. اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ باشد، ثابت کنید:

$$fff(x)\cdot f(x)=-1$$

حل. داریم:

$$ff(x)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=-\frac{1}{x}$$

$$fff(x)=f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{-\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{x}+1}=-\frac{x+1}{x-1}$$

و از آنجا:

$$fff(x)\cdot f(x)=-\frac{x+1}{x-1}\times\frac{x-1}{x+1}=-1$$

۴. مطلوبست $f(x)$، بشرطی که داشته باشیم:

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^{2} \qquad (1)$$

حل. $\frac{x}{x+1}$ را مساوی t فرض می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+۱}=t \implies x=\frac{t}{۱-t}$$

و به این ترتیب رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر در می‌آید :

$$f(t)=\frac{t^{۲}}{(۱-t)^{۲}} \implies f(x)=\frac{x^{۲}}{(۱+x)^{۲}}$$

۵. عبارت $x^{۳}-۳x+۴$ را بر حسب توانهای $x+۲$ منظم کنید :

حل . راه اول (روش ضریبهای نامعین) : می‌نویسیم :

$$x^{۲}-۳x+۴\equiv(x+۲)^{۳}+\alpha(x+۲)^{۲}+\beta(x+۲)+\gamma$$

که اگر ضریبهای توانهای مساوی را در دو طرف اتحاد مساوی قراردهیم، به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases}\alpha+۶=۰\\ ۴\alpha+\beta+۱۲=-۳\\ ۴\alpha+۲\beta+\gamma+۸=۴\end{cases} \implies \left|\begin{array}{l}\alpha=-۶\\ \beta=۹\\ \gamma=۲\end{array}\right.$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$x^{۳}-۳x+۴\equiv(x+۲)^{۳}-۶(x+۲)^{۲}+۹(x+۲)+۲$$

راه دوم: اگر $x+۲=t$ فرض کنیم، داریم : $x=t-۲$ وازآنجا:

$$x^{۳}-۳x+۴=(t-۲)^{۳}-۳(t-۲)+۴=t^{۳}-۶t^{۲}+۹t+۲=$$
$$=(x+۲)^{۳}-۶(x+۲)^{۲}+۹(x+۲)+۲$$

۳. مجموع ضریبهای یك چند جمله‌ای

از آنجا که هر توانی از واحد برابر واحد است، به‌سادگی روشن می‌شود که برای محاسبهٔ مجموع جبری ضریبهای چندجمله‌ای $f(x)$ باید $f(۱)$ را محاسبه کرد .

و درحالتی که تابع $f(x , y , z , \ldots)$ از چند متغیر x و y و z و ... به‌صورت یك چندجمله‌ای باشد ، برای محاسبهٔ مجموع ضریبهای عددی آن باید $f(۱ , ۱ , ۱ , \ldots)$ را بدست آورد .

مثال : مطلوبست محاسبهٔ مجموع ضریبهای چند جمله‌ای که از بسط

عبارت زیر بدست می‌آید :

$$f(x)=(12x^3-54x^2+19x+22)^{71}$$

حل : درحقیقت اگر ضریبهای بسط عبارت را A ، B ، ... ، L فرض کنیم ، داریم :

$$f(x)=Ax^{213}+Bx^{212}+Cx^{211}+\cdots+Kx+L$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$f(1)=A+B+C+\cdots+K+L$$

از طرف دیگر داریم :

$$f(1)=(12-54+19+22)^{71}=(-1)^{71}=-1$$

یعنی مجموع جبری ضریبهای چندجمله‌ای $f(x)$ برابر است با -1

تمرینها

۴۱. اگر $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ باشد ، مطلوبست محاسبهٔ :

$$f(0)\ ;\ f(-x)\ ;\ f(x+1)\ ;\ f(x)+1\ ;\ f\left(\frac{1}{x}\right)\ ;\ \frac{1}{f(x)}$$

۴۲ . مطلوبست :

$$\varphi(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

با شرط :

$$a)\ f(x)=ax+b\ ;\ b)\ f(x)=x^2\ ;\ c)\ f(x)=a^x$$

۴۳ . مطلوبست مقدار x برای حالتهای : ۱) $f(x)=0$ ؛ ۲) $f(x)>0$ ؛ ۳) $f(x)<0$ ، بشرطی که داشته باشیم :

$$a)\ f(x)=x-x^3\ ;\ b)\ f(x)=\sin\frac{\pi}{x}\ ;$$

$$c)\ f(x)=(x+|x|)(1-x)$$

۴۴ . فرض می‌کنیم :

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

ثابت کنید :

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$$

۴۵ . تابع خطی $f(x)$ را چنان پیداکنید که داشته باشیم :

$$f(0)=-2 \;;\; f(3)=5$$

۴۶ . مطلوبست تابعی بصورت :

$$f(x)=a+bc^{x}$$

بشرطی‌که داشته باشیم :

$$f(0)=15 \;;\; f(2)=30 \;;\; f(4)=90$$

۴۷ . ثابت کنیدکه اگر برای تابع خطی :

$$f(x)=ax+b$$

مقدارهای $x=x_n\ (n=1, 2, 3, \ldots)$ به‌تصاعد حسابی‌باشند، مقدارهای نظیر $y_n=f(x_n)$ هم به تصاعد حسابی خواهند بود .

۴۸ . ثابت‌کنید که اگر برای تابع مجهول‌القوهٔ :

$$f(x)=a^{x} \qquad (a>0)$$

مقدارهای $x=x_n\ (n=1, 2, \ldots)$ بـه تصاعد حسابی بـاشند ، مقدارهای متناظر تابع $y_n=f(x_n)$ به تصاعد هندسی خواهند بود .

۴۹ . اگر داشته باشیم :

$$f(x)=\frac{1}{2}(a^{x}+a^{-x}) \qquad (a>0)$$

ثابت‌کنید :

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

۵۰ . اگر داشته باشیم :

$$f(x)+f(y)=f(z)$$

مطلوبست z بشرطی که :

$$\text{a) } f(x)=ax \;;\; \text{b) } f(x)=\frac{1}{x}$$

$$\text{c) } f(x)=\operatorname{arctg} x \qquad (|x|<1)$$

$$\text{d) } f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$$

۵۱ . اگر $f(x)=\frac{1}{1-x}$ باشد ، مطلوبست $ff(x)$ و $fff(x)$.

۵۲ . اگر فرض کنیم :

$$f_n(x)=\underbrace{fff\cdots f}_{\text{مرتبه } n}(x)$$

مطلوبست $f_n(x)$ باشرط :

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

۵۳ . اگر داشته باشیم :

$$f(x+1)=x^2-3x+2$$

مطلوبست $f(x)$.

۵۴ . مطلوبست $f(x)$ ، بشرطی که داشته باشیم :

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$$

۵۵ . مطلوبست $f(x)$ ، بشرطی که داشته باشیم :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2} \qquad (x>0)$$

۵۶ . اگر داشته باشیم :

$$f\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)=\frac{3x^2-3x+7}{(x+2)^2}$$

مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$

۵۷ . اگر داشته باشیم :

$$f(x)=(x+a)(x+a^2)\cdots(x+a^n)$$

ثابت کنید :

$$a^n(x+1)f(x)\equiv(x+a^n)\cdot f(ax)$$

۵۸ . اگر $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ باشد ، ثابت کنید :

a) $f(2x^2-1)=2f(x) \qquad (x>0)$

b) $f(4x^3-3x)=3f(x) \quad \left(x<-\frac{1}{2} \text{ یا } x>\frac{1}{2}\right)$

۵۹ . اگر $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ باشد ، ثابت کنید :

a) $f(a+b)\cdot f(b+c)\cdot f(c+a)=8f\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cdot f^2(0)$

b) $f(-a)\cdot f(-b)\cdot f(-c)=8f^2(a+b+c)\cdot f(0)$

۶۰ . اگر $f(x)=\sin x-\cos x$ ثابت کنید $f(1)>0$

۶۱ . اگر $f(x)=a+bx$ باشد ، ثابت کنید :

$$f_n(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^n x$$

۶۲ . از معادلهٔ زیر $f(x)$ را بدست آورید :

$$af(x-1)+bf(1-x)=cx$$

۶۳ . تابع $f(n)$ به ازای مقادیر صحیح n معین است و در شرایط زیر صدق می کند :

$$f(n)=f(n-1)+a^n \ ; \ f(1)=1$$

مطلوبست $f(n)$.

۶۴ . تابع زیر مفروض است :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-2 & (x\leqslant-3) \\ 4-3x-x^2 & (-3\leqslant x\leqslant 1) \\ x^2+3x-4 & (x>1) \end{cases}$$

آنرا بوسیلهٔ یك رابطه مشخص کنید .

۶۵ . اولا تابع:

$$f(x)=6x^4+19x^3-17x^2-72x-36$$

را برحسب قوای نزولی $x-1$ منظم کنید . ثانیاً $f(x)=0$ راحل کنید .

۶۶ . ثابت کنیدمعادلهٔ $f(x)=f(a)$ لااقل یك ریشهٔ حقیقی دارد. این ریشه کدام است ؟

۶۷ . مطلوبست تابع $f(x)$ ، بشرطی که داشته باشیم :

$$f(ab)=[f(a)]^b$$

۶۸ . اگر $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\frac{x^2+4x+4}{8x}$ باشد ، $f(x)$ را بدست آورید .

۶۹ . مجموع جبری ضریبهای چند جمله‌ای زیر را بدست آورید :

$$(1+4x-4x^2)^{175}(1+2x)^5(1-3x+x^2+2x^3)^{149}$$

۷۰. اگر مجموع ضریبهای عددی در بسط دو جمله‌ای $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ به اندازهٔ ۲۴۰ واحد از مجموع ضریبهای عددی در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^{2n}$ کمتر باشد، مطلوبست بسط دوجمله‌ای اول (n عددی است صحیح و مثبت و x عددی است مثبت).

۷۱. تابع $f(x)=\frac{4-x}{2x-4}$ مفروض است، ثابت کنید مقدار ثابتی مانند α می‌توان پیدا کرد بطوری که $f(\alpha+x)\cdot f(\alpha-x)$ مقدار ثابتی باشد، این مقدار ثابت و α را محاسبه کنید.

۷۲. تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

اولا مقادیر $f(a)$، $f(b)$ و $f(c)$ را محاسبه کنید

ثانیاً با تشکیل عبارت $f(x)-x$ نتیجه بگیرید: $f(x)=x$.

۷۳. $f(x)$ را چنان پیدا کنید که داشته باشیم:

$$af(x^n)+f(-x^n)=bx$$

بشرطی که $a^2\neq 1$ و n عددی فرد باشد.

۷۴. اولا دو ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$ را پیدا کنید.

ثانیاً در حالتی که $f(x)=x^2-12x+3$ باشد، تمام ریشه‌های معادله را بدست آورید.

۷۵. اگر داشته باشیم:

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\ (x>0)$$

مطلوبست $f(x)$.

۷۶. داریم:

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$$

مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$ و z بشرطی که به‌ازای $y=1$ داشته‌باشیم $z=x$.

۷۷. اگر داشته باشیم:

$$z=x+y+f(x-y)$$

وضمناً به ازای $y=0$ داشته باشیم $z=x^2$. مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$ و z.

۷۸ . مطلوبست محاسبهٔ $f(x,y)$ ، بشرطی که داشته باشیم :

$$f\left(x+y\ ,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$$

۷۹ . تابع $F_n(x)$ از دو متغیر x و n داده شده است . x متغیری حقیقی و n متغیری طبیعی است . این تابع را پیداکنید ، بشرطی که‌داشته باشیم :

$$F_{n+1}(x)+F_n(x+1)=F_n(x) \quad و \quad F_1(x)=\cos x$$

۸۰ . اگر داشته باشیم :

$$f(x)=\begin{cases}3+x & (x\leqslant 0)\\ 3-x & (x\geqslant 0)\end{cases}$$

اولا تابع $f(x)$ را با یك رابطه بنویسید . ثانیاً $ff(x)$ را پیداکنید و نمایش تغییرات آنرا رسم‌کنید .

۸۱ . مطلوبست همهٔ توابع f که در معادلهٔ زیرصدق‌کنند .

$$f\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=\frac{x^4+1}{x^2}$$

۴

قابلیت تقسیم

در این بخش، که از قابلیت تقسیم یك عبارت جبری بر یك عبارت جبری دیگر صحبت می‌شود، مبنای کار بر این گذاشته شده است که خوانندهٔ عزیز از تقسیم عبارتهای جبری بر یکدیگر وقواعد آنها اطلاع کافی دارد و علاوه بر آن بسیاری از مباحث دیگر جبر از قبیل مشتق گیری و مفهوم اعداد موهومی دانسته فرض شده است.

شاید مطالب این بخش بطور پراکنده در کتابهای جبر وجود داشته باشد، ولی منظور از طرح آن متمرکز کردن روشهای گوناگون جبر در زمینهٔ قابلیت تقسیم و ایجاد یك زمینهٔ فکری روشن دربارهٔ آن است .

۱. مقسوم‌علیه آشکار و مقسوم‌علیه مخفی

عبارت $3(x-1)$ را درنظر بگیرید، این عبارت به‌ازای همهٔ مقادیر x بر ۳ و بر $x-1$ قابل‌قسمت است ، ۳ یا $x-1$ را مقسوم علیه آشکار این عبارت گویند .

همین عبارت مثلا باشرط $x=5K+1$ بر ۵ و یا با شرط فردبودن x بر۲ هم قابل‌قسمت‌است، ۵یا۲را مقسوم‌علیه‌مخفی عبارت $3(x-1)$ گویند.

در جبر بیشتر گفتگو ازمقسوم‌علیه‌های آشکار است و وقتی که‌بطورمطلق از مقسوم علیه های یك عبارت صحبت می‌شود ، منظور همان مقسوم علیه‌های آشکار آنست .

به این ترتیب وقتی که مثلا گفته می‌شود عبارتهای $x+1$ و $x-3$ نسبت بهم اول هستند (یعنی مقسوم علیه مشترکی ندارند) به این معناست که اگر x متغیردلخواهی درنظر گرفته شود، این دو عبارت بجز واحد، برعدد یا عبارت دیگری مشترکاً قابل قسمت نیستند . والا اگر مقادیرخاص متغیر در نظر گرفته‌شود (مثلا اگر x عددی فرد باشد) دارای مقسوم‌علیه مشترکی خواهند بود .

۲. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك بین دوعبارت جبری

در مواردی که راهی برای تجزیهٔ عبارتهای‌جبری بنظر نرسد،می‌توان بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك بین‌آنها راباکمك تقسیمهای متوالی(شبیه‌روشی که در حساب بکار می‌رود) بدست آورد .

ازآنجا که‌در تقسیمهای‌متوالی (برای‌بدست‌آوردن بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك) باقیمانده ، نقش‌اساسی دارد (و نه خارج قسمت) ، اگر لازم باشد ، می‌توان‌مقسوم‌یامقسوم‌علیه را در هرعدد دلخواهی‌ضرب ویابرهرعدد دلخواهی تقسیم‌کرد. این‌عمل درضمن تقسیم و برای‌باقیمانده‌های‌جزئی هم مانعی‌ندارد، زیرا بااین ترتیب‌تنها خارج قسمت تغییر می‌کند و باقیمانده ، با تقریب یك

ضریب ثابت ، بدون تغییر باقی می‌ماند .

در موردی از این خاصیت استفاده می‌کنیم که ضریب بزرگترین درجهٔ مقسوم بر ضریب بزرگترین‌درجهٔ مقسوم‌علیه قابل‌قسمت نباشد ، دراین‌صورت مقسوم‌رادرعددمناسبی‌ضرب می‌کنیم‌تادچارضریبهای کسری‌درخارج‌قسمت نشویم.

مثال ، کسر زیر را ساده‌کنید :

$$\frac{4x^4+11x^3+2x^2+2x+1}{8x^4+2x^3+5x^2+1}$$

حل ، درحقیقت‌باید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك‌بین‌عبارتهای‌صورت و مخرج را بدست‌آوریم، از روش تقسیمهای متوالی استفاده می‌کنیم (صورت را A و مخرج را B می‌گیریم).

ابتدا مخرج‌کسر را برصورت آن تقسیم می‌کنیم: خارج قسمت‌مساوی ۲ و باقیمانده مساوی $C = -20x^3+x^2-4x-1$ می‌شود .

اکنون باید A را برCتقسیم‌کنیم، ولی برای اینکه به ضریبهای کسری در خارج قسمت برخورد نکنیم ، عبارت A را ۵ برابر کرده و سپس بر C تقسیم می‌کنیم :

$$\begin{array}{l|l}
\underline{4x^4+11x^3+2x^2+2x+1}\ \times 5 & \\
20x^4+55x^3+10x^2+10x+5 & -20x^3+x^2-4x-1 \\ \cline{2-2}
\quad \underline{56x^3+6x^2+9x+5}\ \times 5 & -x-14 \\
\quad 280x^3+30x^2+45x+25 & \\
\qquad \underline{44x^2-11x+11}\ :11 & \\
\qquad 4x^2-x+1 &
\end{array}$$

همانطور که دیده می‌شود ، ضمن عمل یکبار باقیماندهٔ جزئی $56x^3+6x^2+9x+5$ را ۵ برابر کرده‌ایم ودرآخرعمل هم، باقیماندهٔ تقسیم ، یعنی $44x^2-11x+11$ را بر ۱۱ تقسیم نموده‌ایم (روشن است که خارج قسمت‌این تقسیم‌با آنچه‌که‌ما‌به‌عنوان خارج قسمت‌نوشته‌ایم؛ارتباطی ندارد ، ولی همانطور که قبلا هم گفته‌ایم، در روش تقسیمهای متوالی برای

محاسبهٔ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك ، خارج قسمت نقشی ندارد).

حالا باید $-۲۰x^۳+x^۲-۴x-۱$ را بر $۴x^۲-x+۱$ تقسیم کنیم ، دراین تقسیم خارج قسمت‌مساوی $-۵x-۱$ و باقیمانده مساوی‌صفر می‌شود . بنابراین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك صورت و مخرج کسر $D=۴x^۲-x+۱$ است .

حالا برای ساده‌کردن کسر، صورت‌ومخرج آنرا بر D تقسیم می‌کنیم، نتیجه چنین می‌شود :

$$\frac{x^۲+۳x+۱}{۲x^۲+x+۱}$$

و این کسر غیر ممکن التحویل است ، زیرا D بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك صورت و مخرج بود .

۳. قابلیت تقسیم‌کثیرالجمله $f(x)$ بر $ax+b$

فرض می‌کنیم که در تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$ ، خارج قسمت برابر $Q(x)$ و باقیمانده برابر R شود (چون مقسوم‌علیه درجه اول است، باقیمانده مقداری ثابت خواهد بود). در این‌صورت خواهیم داشت :

$$(ax+b)\cdot Q(x)+R=f(x) \qquad (۱)$$

می‌دانیم‌که رابطهٔ (۱) (رابطهٔ تقسیم)یك اتحاد استو بنابراین به‌ازای هر مقدار دلخواه x برقرار است . این اتحاد به‌ازای ریشهٔ مقسوم علیه $\left(x=-\frac{b}{a}\right)$ به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

یعنی باقیماندهٔ تقسیم‌هر کثیرالجملهٔ $f(x)$ بریك دوجمله‌ای درجهٔ اول‌باقرار دادن ریشهٔ مقسوم‌علیه در $f(x)$ بدست می‌آید .

نتیجه . شرط لازم و کافی برای اینکه‌کثیرالجملهٔ $f(x)$ بردو جمله‌ای درجهٔ اول $ax+b$ قابل‌قسمت باشد ، این‌است که داشته باشیم :

$$f\left(-\frac{b}{a}\right)=۰$$

مثال . مطلوب‌است مقادیر a و n بشرطی که کثیرالجملهٔ :
$f(x)=(a-1)x^n-2ax^{n-1}+8$ بر $x-2$ قابل قسمت باشد و در این‌صورت خارج قسمت را محاسبه‌کنید .

حل . شرط قابلیت‌تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ این‌است‌که $f(2)=0$ باشد:

$$f(2)=(a-1)2^n-2a\times 2^{n-1}+8=$$
$$=(a-1)2^n-a\times 2^n+8=-2^n+8\ ;$$
$$-2^n+8=0 \implies 2^n=2^3 \implies n=3$$

یعنی عبارت $f(x)$ به‌ازای هرمقدار دلخواه a باشرط $n=3$ بر $x-2$ قابل‌قسمت است ، به‌ازای $n=3$ داریم:

$$f(x)=(a-1)x^3-2ax^2+8=$$
$$=ax^2(x-2)-(x-2)(x^2+2x+4)=$$
$$=(x-2)(ax^2-x^2-2x-4)=$$
$$=(x-2)[(a-1)x^2-2x-4]$$

یعنی خارج قسمت $f(x)$ بر $x-2$ چنین می‌شود :

$$Q(x)=(a-1)x^2-2x-4$$

۴. قابلیت تقسیم بر ax^n+b

مقدمه. واضح است که هر کثیرالجمله $f(x)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$(a_0x^{n-1}+b_0x^{n-2}+\cdots+l_0)(x^n)^p+(a_1x^{n-1}+b_1x^{n-2}+$$
$$+\cdots+l_1)(x^n)^{p-1}+\cdots+(a_px^{n-1}+b_px^{n-2}+$$
$$+\cdots+l_p)(x^n)+(a_{p+1}x^{n-1}+b_{p+1}x^{n-2}+$$
$$+\cdots+l_{p+1})$$

این عمـل را **اصطلاحاً تنظیم عبارت** $f(x)$ **برحسب قوای** (x^n) می‌نامیم .

مثال. عبارت :

$$A=2x^7-x^6-3x^5+7x^4-3x^3+5x^2+11x-6$$

را برحسب قوای (x^2) منظم کنید .

حل . به‌ترتیب می‌توان نوشت :

$$A=2x(x^2)^3-(x^2)^3-3x(x^2)^2+7(x^2)^2-3x(x^2)+$$
$$+5(x^2)+11x-6=(2x-1)(x^2)^3-(3x-7)(x^2)^2-$$
$$-(3x-5)(x^2)+(11x-6)$$

و همانطور که دیده می‌شود ، وقتی‌که عبارت A را برحسب قوای (x^2) منظم کرده‌ایم ، ضریبهای نسبت به x حداکثر از درجهٔ اول هستند .

* * *

بعد از این مقدمه می‌توان به سادگی شرط قابلیت تقسیم کثیرالجملهٔ $f(x)$ را بر ax^n+b توضیح داد : $f(x)$ را برحسب قوای (x^n) منظم می‌کنیم ، در این‌صورت باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر ax^n+b به‌ازای : $x^n=-\frac{b}{a}$ بدست می‌آید . در حالی که این باقیمانده مساوی صفر باشد $f(x)$ بر ax^n+b قابل قسمت است :

مثال ۱. مطلوب‌است باقیماندهٔ تقسیم عبارت :

$$A=2x^7-x^6-3x^5+7x^4-3x^3+5x^2+11x-6$$

بر x^2+2 .

حل . عبارت A را برحسب قوای نزولی (x^2) منظم می‌کنیم :

$$A=(2x-1)(x^2)^3-(3x-7)(x^2)^2-(3x-5)(x^2)+(11x-6)$$

باقیماندهٔ تقسیم ، عبارت‌است از حاصل عبارت A به‌ازای $x^2=-2$:

$$R(x)=(2x-1)(-2)^3-(3x-7)(-2)^2-$$
$$-(3x-5)(-2)+(11x-6)=-11x+20$$

انتظار چنین باقیمانده‌ای را هم داشتیم ، زیرا در تقسیم A بر عبارت درجهٔ دوم x^2+2 معمولا باقیمانده‌ای از درجهٔ اول بدست می‌آید .

مثال ۲. ثابت کنید که عبارت :

$$x^{3a}+x^{3b+1}+x^{3c+2} \qquad (1)$$

به‌ازای همهٔ مقادیر a و b و c بر x^2+x+1 قابل‌قسمت است .

حل. مقسوم علیه به‌صورت دوجمله‌ای نیست وظاهراً نمی‌توان ازروش قابلیت تقسیم بر ax^n+b استفاده کرد. ولی اگرمقسوم و مقسوم علیه رادر $x-1$ ضرب کنیم، مسأله مفروض چنین می‌شود:

ثابت‌کنید که عبارت:

$$(x-1)(x^{3a}+x^{3b+1}+x^{3c+2})=x^{3a+1}+x^{3b+2}+x^{3c+3}-$$
$$-x^{3a}-x^{3b+1}-x^{3c+2} \qquad (2)$$

به‌ازای همهٔ مقادیر a و b و c بر x^3-1 قابل قسمت است.

عبارت (۲) را برحسب قوای (x^3) منظم می‌کنیم، چنین می‌شود:

$$x(x^3)^a+x^2(x^3)^b+(x^3)^{c+1}-(x^3)^a-x(x^3)^b-x^2(x^3)^c$$

باقیماندهٔ تقسیم این‌عبارت بر x^3-1 به‌ازای $x^3=1$ بدست می‌آید:

$$R=x+x^2+1-1-x-x^2=0$$

یعنی در حالت $x\neq 1$، عبارت (۱) بر x^2+x+1 قابل‌قسمت است، وقتی هم‌که $x=1$ باشد صحت‌کم واضح است.

۵. قابلیت تقسیم بر $[\varphi(x)]^n$

اگر کثیرالجملهٔ $f(x)$ بر $[\varphi(x)]^n$ قابل‌قسمت باشد، می‌توان‌نوشت:

$$f(x)=[\varphi(x)]^n\cdot Q(x) \qquad (1)$$

خارج قسمت $f(x)$ بر $[\varphi(x)]^n$ را $Q(x)$ گرفته‌ایم.

از طرفین رابطهٔ (۱) نسبت به x مشتق می‌گیریم، می‌شود:

$$f'(x)=n\varphi'(x)[\varphi(x)]^{n-1}Q(x)+[\varphi(x)]^n\cdot Q'(x)=$$
$$=[\varphi(x)]^{n-1}[n\varphi'(x)\cdot Q(x)+\varphi(x)\cdot Q'(x)]$$

مقدار داخل کروشه را $Q_1(x)$ می‌گیریم، بنابراین:

$$f'(x)=[\varphi(x)]^{n-1}\cdot Q_1(x)$$

به این ترتیب اگر $f(x)$ بر $[\varphi(x)]^n$ قابل قسمت باشد، مشتق آن یعنی $f'(x)$ بر $[\varphi(x)]^{n-1}$ قابل‌قسمت خواهد بود. اگرعمل مشتق‌گیری نسبت به x را در رابطه‌هایی‌که بدست می‌آید تا $(n-1)$مرتبه ادامه دهیم، ردیف تساویهای زیر را خواهیم داشت:

$$f(x)=[\varphi(x)]^{n}\cdot Q(x)$$
$$f'(x)=\varphi(x)]^{n-1}\cdot Q_1(x)$$
$$f''(x)=[\varphi(x)]^{n-2}\cdot Q_2(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n-1)}(x)=\varphi(x)\cdot Q_{n-1}(x)$$

نتیجه . شرط لازم وکافی برای قابلیت تقسیم $f(x)$ بر $[\varphi(x)]^n$ این است که خود $f(x)$ و همهٔمشتقهای متوالیآن تا مرتبهٔ $(n-1)$ام بر $\varphi(x)$ قابل قسمت باشند .

حالت خاص. برای اینکه کثیرالجملهٔ $f(x)$ بر $(ax+b)^n$ قابلقسمت باشد، باید $f(x)$ ، $f'(x)$ ، $f''(x)$ و ... و $f^{(n-1)}(x)$ بهازای $x=-\frac{b}{a}$ (ریشهٔ $ax+b$) برابر صفر شوند .

مثال۱. اولا a و b را چنان پیداکنید که عبارت :

$$f(x)=x^n+ax^{n-1}+b$$

بر $(x-1)^2$ قابلقسمت باشد ، ثانیاً خارج قسمت $f(x)$ بر $(x-1)^2$ را بهازای مقادیر بدست آمدهٔ a و b محاسبه‌کنید .

حل . اولا برای اینکه $f(x)$ بر $(x-1)^2$ قابل قسمت باشد باید داشته باشیم :

$$f(1)=f'(1)=0$$

داریم :

$$f'(x)=nx^{n-1}+a(n-1)x^{n-2}$$

بنابراین داریم :

$$\begin{cases} f(1)=1+a+b=0 \\ f'(1)=n+(n-1)a=0 \end{cases}$$

و از آنجا :

$$a=-\frac{n}{n-1}\ ;\ b=\frac{1}{n-1}$$

در نتیجه برای اینکه $f(x)$ بر $(x-1)^2$ قابل قسمت باشد ، باید بهصورت زیر باشد :

$$f(x)=x^n-\frac{n}{n-1}x^{n-1}+\frac{1}{n-1}=$$
$$=\frac{1}{n-1}[(n-1)x^n-nx^{n-1}+1]$$

ثانیاً مقدار داخل کروشه عبارت $f(x)$ را $\varphi(x)$ فرض می‌کنیم و به‌ترتیب می‌نویسیم :

$$\varphi(x)=(nx^n-nx^{n-1})-(x^n-1)=$$
$$=nx^{n-1}(x-1)-(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)=$$
$$=(x-1)[nx^{n-1}-(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)]=$$
$$=(x-1)[(x^{n-1}-x^{n-2})+(x^{n-1}-x^{n-3})+\dots+$$
$$+(x^{n-1}-x)+(x^{n-1}-1)]=$$
$$=(x-1)[x^{n-2}(x-1)+x^{n-3}(x^2-1)+\dots+$$
$$+x(x^{n-2}-1)+(x^{n-1}-1)]=$$
$$=(x-1)^2[x^{n-2}+x^{n-3}(x+1)+x^{n-4}(x^2+x+1)+\dots$$
$$+x(x^{n-3}+x^{n-4}+\dots+1)+(x^{n-2}+x^{n-3}+$$
$$+\dots+x+1)]=$$
$$=(x-1)^2[(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+(n-3)x^{n-4}+$$
$$+\dots+2x+1]$$

و از آنجا خارج قسمت $f(x)$ بر $(x-1)^2$ چنین است :

$$Q(x)=\frac{1}{n-1}[(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+\dots+2x+1]$$

مثال۴. تابع $f(x)$ از درجهٔ پنجم را چنان پیدا کنید که $f(x)+2$ بر $(x-1)^3$ و $f(x)-4$ بر $(x+1)^3$ قابل‌قسمت باشد .

حل . وقتی‌که تابعی مثل $f(x)+2$ بر $(x-1)^3$ قابل‌قسمت است، مشتق آن‌یعنی $f'(x)$ بر $(x-1)^2$ قابل‌قسمت خواهد بود ، همچنین باتوجه به اینکه $f(x)-4$ بر $(x+1)^3$ قابل‌قسمت است ، $f'(x)$ بر $(x+1)^2$ قابل قسمت است .

$f'(x)$ هم بر $(x-1)^2$ و هم بر $(x+1)^2$ قابل‌قسمت است، پس‌بر

حاصلضرب آنها یعنی $(x^2-1)^3$ قابل‌قسمت است [زیرا $(x-1)^2$ و $(x+1)^2$ نسبت به‌هم اولند] . بنابراین می‌توان نوشت :

$$f'(x)=\lambda(x^2-1)^2=\lambda(x^4-2x^2+1)$$

λ مقداری‌است ثابت، زیرا $f(x)$ از درجهٔ پنجم و مشتق‌آن $f'(x)$ از درجهٔ چهارم است . از طرفین تساوی تابع اولیه می‌گیریم :

$$f(x)=\lambda\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right)+c$$

برای مجاسبهٔ مقادیر ثابت λ و c، از مفروضات مسأله استفاده می‌کنیم:
$f(x)+2$ بر $x-1$ قابل‌قسمت است و بنابراین داریم :

$$f(1)+2=0 \implies \lambda\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)+c+2=0 \quad (1)$$

$f(x)-4$ بر $x+1$ قابل قسمت است و بنابراین داریم :

$$f(-1)-4=0 \implies \lambda\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1\right)+c-4=0 \quad (2)$$

از حل دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) مقادیر λ و c بدست می‌آید :

$$\lambda=-\frac{45}{8}\ ;\ c=1$$

و تابع $f(x)$ چنین است :

$$f(x)=-\frac{3}{8}(3x^5-10x^3+15x)-1$$

۶. استفاده از ریشه‌های موهومی

در بحث مربوط‌به قابلیت تقسیم ، می‌توان‌از ریشه‌های موهومی عبارت مقسوم علیه هم (شبیه ریشه‌های حقیقی آن) استفاده کرد . در این مورد لازم است که بعضی‌قراردادها، نکات وقاعده‌های‌مربوط به عددهای موهومی‌را بدانیم.

I. عددهای به‌صورت $b\sqrt{-1}$ را عددهای موهومی خالص وعددهای به صورت $a+b\sqrt{-1}$ را عددهای مختلط گویند. در جبر معمولا $\sqrt{-1}$ را به i نشان می‌دهند[1]. رابطه‌های زیردرعملهای مربوط به‌عددهای موهومی‌مورد

۱) حرف اول کلمهٔ Imaginaire

استفاده است :

$$i^2=-1 \;;\; i^3=-i \;;\; i^4=1 \;;\; i^5=i \;;\; \ldots$$

ویا بطور کلی :

$$i^{4k}=1 \;;\; i^{4k+1}=i \;;\; i^{4k+2}=-1 \;;\; i^{4k+3}=-i$$

عددهای $a+bi$ و $a-bi$ را دو عدد مختلط مزدوج گویند .

حاصلضرب دو عدد مختلط مزدوج عددی است حقیقی :

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$$

$\sqrt{a^2+b^2}$ را مدول یا کالبد عددهای $a+bi$ یا $a-bi$ هم می‌نامندوچنین نمایش می‌دهند :

$$|a+bi|=|a-bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

دو عدد مختلط $a+bi$ و $a'+b'i$ وقتی برابرند که داشته باشیم :

$$a=a' \;;\; b=b'$$

II. کعبهای موهومی واحد .

همانطور که عدد ۱ دارای دو جذر حقیقی ± 1 است، ثابت می‌کنند که معادلهٔ $x^n=1$ دارای n ریشهٔ حقیقی یا موهومی می‌باشد . ما در اینجا کعبهای واحد را بدست می‌آوریم . داریم :

$$x^3=1 \Longrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \;;$$

$$x_1=1 \;;\; x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \;;\; x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

کعبهای موهومی واحد خاصیت جالبی دارند ، به این معنی که مجذور هریك برابر با دیگری است :

$$x_2^2=\frac{1-3-2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=x_3$$

$$x_3^2=\frac{1-3+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=x_2$$

و به‌همین مناسبت معمولاً آنها را به j و j^2 نشان می‌دهند. این ریشه‌ها هم در معادلهٔ $x^3=1$ و هم در معادلهٔ $x^2+x+1=0$ صدق می‌کنند، یعنی داریم :

$$j^3=1 \quad ; \quad j^2+j+1=0$$

ویا بطورکلی :

$$j^{3k}=1 \quad ; \quad j^{3K+2}+j^{3k+1}+1=0$$

III. ثابت می‌کنند که اگر معادله‌ای با ضریبهای حقیقی ، ریشه‌های موهومی داشته باشد ، این ریشه‌ها دو به دو مزدوج یکدیگرند . یعنی اگر $a+bi$ ریشه‌ای از یك معادله با ضریبهای حقیقی باشد ، $a-bi$ هم ریشهٔ آن خواهد بود. به‌عبارت دیگر اگر به‌ازای $x=a+bi$ چندجمله‌ای $f(x)$ با ضریبهای‌حقیقی برابرصفر شود ، به‌ازای $x=a-bi$ هم مساوی صفر خواهد شد .

مثال۱. مطلوب است مقدار n بشرطی‌که داشته باشیم :

$$(1+i)^n=(1-i)^n$$

حل . رابطهٔ فرض را می‌توان چنین نوشت :

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1$$

صورت و مخرج کسر داخل پرانتز را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم :

$$\left[\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right]^n=1 \implies i^n=1 \implies n=4k$$

یعنی وقتی‌که n عددی صحیح و مضرب ۴ باشد ، تساوی فوق صحیح است .

مثال۲. بدون عمل تقسیم ثابت‌کنید که عبارت :

$f(x)=2x^4+5x^2+3x+5$ بر $2x^2-2x+5$ قابل قسمت است .

حل . روش اول: برای اینکه $f(x)$ بر $2x^2-2x+5$ قابل قسمت باشد، باید به‌ازای ریشه‌های عبارت اخیرمساوی صفر شود :

$$2x^2-2x+5=0 \implies x=\frac{1\pm 3i}{2}$$

ولی چون ضریبهای $f(x)$ حقیقی‌ومقادیرجوابهای‌معادلهٔ $2x^2-2x+5=0$ مزدوج یکدیگرند ،کافی است به‌ازای یکی‌از این ریشه‌ها مساوی صفر باشد ، در این صورت بدون تردید به‌ازای ریشهٔ دوم هم مساوی صفر خواهد شد .

$$f\left(\frac{1+3i}{2}\right)=2\left(\frac{1+3i}{2}\right)^4+5\left(\frac{1+3i}{2}\right)^2+3\left(\frac{1+3i}{2}\right)+5=$$
$$=\frac{7-24i}{2}+\frac{-20+15i}{2}+\frac{3+9i}{2}+5=0$$

روش دوم: از روش ضریبهای نامعین استفاده می کنیم، برای اینکه $f(x)$ برسه جمله‌ای $2x^2-2x+5$ قابل قسمت باشد باید داشته باشیم :

$$2x^4+5x^2+3x+5=(2x^2-2x+5)(x^2+Ax+B)$$

ضریبهای جمله‌های متشابه را در دوطرف اتحاد مساوی قرارمی‌دهیم؛ به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} 2(A-1)=0 \\ 2B-2A+5=5 \\ 5A-2B=3 \\ 5B=5 \end{cases}$$

اتحاد وقتی ممکن است که این دستگاه متوافق باشد، از معادله‌های اول و چهارم دستگاه بدست می‌آید :

$$A=B=1$$

که ضمناً در معادله‌های دوم و سوم دستگاه هم صدق می‌کنند .

مزیت روش دوم در این‌است که ضمن اثبات حکم مسأله، خارج قسمت تقسیم هم بدست می‌آید :

$$Q(x)=x^2+x+1$$

مثال۳. ثابت کنید که عبارت :

$$f(x)=(x+1)^n-x^n-1$$

بر $x(x+1)(x^2+x+1)$ قابل قسمت است (بشرطی که n عددی فرد و غیرقابل قسمت بر ۳ باشد).

حل . به‌سادگی دیده می‌شود که به‌ازای همهٔ مقادیر n : $f(0)=0$ و به‌ازای مقادیر فرد n : $f(-1)=0$ است وبنابراین $f(x)$ بر $x(x+1)$ قابل قسمت است .

برای اینکه ثابت کنیم $f(x)$ بر x^2+x+1 قابل قسمت است، ریشه‌های سه جمله‌ای اخیر را بدست می‌آوریم :

$$x^2+x+1=0 \Longrightarrow x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=j \text{ و } j^2$$

بنابراین اگر $f(x)$ به‌ازای یکی‌از کعبهای موهومی واحد برابرصفر بشود بر x^2+x+1 قابل قسمت خواهد بود .

$$f(j)=(j+1)^n-j^n-1$$

n عددی است غیرقابل‌قسمت بر ۳ و بنابراین دوحالت وجود دارد :

I. $n=3k+1$:

$$f(j)=(j+1)^{3k+1}-j^{3k+1}-1=$$
$$=(j+1)(j+1)^{3k}-j\cdot j^{3k}-1$$

باتوجه به رابطه‌های $j+1=-j^2$ و $j^{3k}=1$ واینکه $3k$ عددی‌است زوج (چون $n=3k+1$ فرد است) خواهیم داشت :

$$f(j)=(j+1)-j-1=0$$

II. $n=3k+2$:

$$f(j)=(j+1)^{3k+2}-j^{3k+2}-1=$$
$$=(j+1)^2(j+1)^{3k}-j^2\cdot j^{3k}-1=$$
$$=-(j+1)^2-j^2-1=-(j^2+2j+1)-j^2-1=$$
$$=-2j-2j^2-2=-2(j^2+j+1)=0$$

و بنابراین $f(x)$ بر x^2+x+1 قابل‌قسمت است .

تمرینها

۸۲ . مقادیر m و n را چنان پیداکنید که عبارت :

$$f(x)=x^5+nx^4+(3m+n)x^3-7x^2+2(2m-n)x-8$$

بر x^2-3x+2 قابل قسمت باشد .

۸۳ . مطلوب است مقادیر a و b برای اینکه عبارت x^4-3x^3+ax+b بر x^2-2x+4 قابل قسمت باشد .

۸۴ . ثابت کنیدکه عبارت $f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ بر $(x-1)^2$ قابل قسمت است و سپس خارج قسمت را بدست آورید .

۸۵ . بهازای چه مقدار m عبارت $x^4+ma^2x^2+a^4$ بر x^2-ax+a^2 قابل قسمت است .

۸۶ . اولاً a و b را چنان پیدا کنید که عبارت $a(x-2)^{2n}+b(x-1)^n-1$ بر x^2-3x+2 قابل‌قسمت باشد، ثانیاً بهازای این مقادیر a و b خارج قسمت را محاسبه کنید .

۸۷ . اگر باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ و $x-3$ بهترتیب ۱ و ۴— باشد ، باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ را بر $(x-1)(x-3)$ بدست آورید .

۸۸ . اگر باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ و $x-2$ و $x+2$ بهترتیب ۱ و ۳— و ۲ باشد ، باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ را بر $(x+1)(x^2-4)$ بدست آورید .

۸۹ . $f(x)$ از درجهٔ چهارم را چنان پیدا کنید که بر $x+2$ قابل قسمت و مجموع ضریبهای عددی آن مساوی ۱۵ باشد و در تقسیم بر $x+1$ و $x+3$ و $x-2$ بهترتیب باقیماندههایی مساوی ۵ و ۱۳— و ۹۲ داشته باشد.

۹۰ . تابع $f(x)$ از درجهٔ سوم را چنان پیدا کنید که مجموع ضریبهای آن مساوی ۲ ، بر $x+1$ قابل قسمت و در تقسیم بر x^2+1 باقیماندهای مساوی $x-1$ داشته باشد .

۹۱ . a و b را چنان پیدا کنید که x^4+9 بر x^2+ax+b قابل‌قسمت باشد .

۹۲ . ثابت کنید که عبارت $f(x)=x^{4a}+x^{4b+1}+x^{4c+2}+x^{4d+3}$ بهازای همهٔ مقادیر صحیح و مثبت a و b و c و d بر x^3+x^2+x+1 قابل قسمت است بطورکلی ثابت کنید عبارت :

$$f(x)=x^{na}+x^{nb+1}+x^{nc+2}+\cdots+x^{nl+(n-1)}$$

بر $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ باشرط صحیح ومثبت بودن n و a و b و c و ... و l قابل قسمت است .

۹۳ . مقادیر m و n و p و q را چنان پیدا کنید که عبارت :

$$f(x)=x^{2a}+mx^{a+1}+nx^a+px^{a-1}+q$$

بر $(x-1)^4$ قابل قسمت باشد (a عددی است صحیح و بزرگتراز ۳).

۹۴ . $f(x)$ از درجهٔ هفتم را چنان پیدا کنید که در تقسیم بر $(x+1)^4$ و $(x-1)^4$ بهترتیب باقیماندههایی مساوی ۱ و ۱— داشته باشد .

۹۵. ثابت کنید که اگر $f(x)$ از درجهٔ دوم در تقسیم بر $x-۱$ و $x-۲$ و $x-۳$ باقیمانده‌هایی برابر با صفر و ۱ و ۴ داشته باشد، داریم:

$$f(u)=(u-۱)^۲$$

۹۶. $f(x)$ از درجهٔ پنجم را چنان پیدا کنید که $f(x)+۱$ بر $x^۲+۱$ و $f(x)-۱$ بر $x^۳+۱$ قابل قسمت باشد و در حالتی که ضریب بزرگترین درجه واحد فرض شود، $f(x)$ را برحسب قوای $x+۱$ بنویسید.

۹۷. ثابت کنید که عبارت زیر بر $(x-۱)^۳$ قابل‌قسمت است:

$$f(x)=(۱-x^n)(۱+x)-۲nx^n(۱-x)+n^۲x^n(۱-x)^۲$$

۹۸. در سه جمله‌ای $ax^۴+bx^۳+c$ ضریبهای a و b و c را چنان تعیین کنید که حاصل‌ضرب باقیمانده های تقسیم آن بر $x^۲+۱$ و $x^۳+۱$ برابر $۲x^۲-۱۲x+۱۰$ باشد.

۹۹. ثابت کنید که اگر کثیرالجملهٔ $x^۴+px^۲+qx+a^۲$ بر $x^۲-۱$ قابل قسمت باشد بر $x^۲-a^۲$ هم قابل قسمت است.

۱۰۰. می‌دانیم که درتقسیم‌عبارت $f(x)=x^۳+px+q$ بر $x-\alpha$ و $x-\beta$ به‌ترتیب باقیمانده‌هایی مساوی β و α بدست‌آمده است. ثابت کنید:

$$۱)\qquad (\alpha+\beta)(\alpha\beta+۱)=q$$

$$۲)\qquad \alpha^۲+\beta^۲+\alpha\beta=-(p+۱)$$

و به فرض $p=-۲۲$ و $q=-۱۹$ مقادیر α و β را محاسبه کنید.

۱۰۱. ثابت کنید که عبارت:

$$x^{n+۱}\cos(n-۱)\alpha-x^n\cos n\alpha-x\cos\alpha+۱$$

برعبارت $x^۲-۲x\cos\alpha+۱$ قابل قسمت است.

۱۰۲. ثابت کنید کثیرالجملهٔ:

$$f(x)=x(x^{n-۱}-na^{n-۱})+a^n(n-۱)$$

بر $(x-a)^۲$ قابل‌قسمت است.

۱۰۳. ثابت کنید کثیرالجملهٔ:

$$f(x)=(۱-x^n)(۱+x)-۲nx^n(۱-x)-n^۲x^n(۱-x)^۲$$

بر $(x-۱)^۳$ قابل قسمت است.

۱۰۴. عبارت زیر مفروض است:

$$f(x\,,\,y)=(x+y)^n-x^n-y^n$$

اولا اگر n عددی فرد و غیر قابل قسمت بر ۳ باشد ، ثابت کنید که $f(x , y)$ بر عبارت :

$$xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$$

قابل قسمت است .

ثانیاً اگر باقیماندهٔ تقسیم n بر ۶ برابر واحد باشد ، ثابت کنید که $f(x , y)$ بر عبارت :

$$xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$

قابل قسمت است .

ثالثاً با استفاده از حل این مسأله عبارتهای زیر را تجزیه کنید :

۱) $(x+y)^3-x^3-y^3$

۲) $(x+y)^5-x^5-y^5$

۳) $(x+y)^7-x^7-y^7$

۱۰۵. به چه شرطی عبارت : $(x+y+z)^m-x^m-y^m-z^m$ بر : $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ قابل قسمت است ؟

۱۰۶. به چه شرطی x^m-y^m بر x^n-y^n قابل قسمت است ؟ (m و n عددهایی مثبت و صحیح هستند) .

۱۰۷. با چه شرطی عبارت :

$$f(x)=1+x^2+x^4+\dots+x^{2n-2}$$

بر عبارت:

$$\varphi(x)=1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$$

قابل قسمت است ؟

۱۰۸. ثابت کنید که عبارت :

$$f(x)=(\cos\alpha+x\sin\alpha)^n-\cos n\alpha-x\sin n\alpha$$

بر x^2+1 قابل قسمت است .

۱۰۹. ثابت کنید که عبارت :

$$f(x)=x^n\sin\alpha-a^{n-1}x\sin n\alpha+a^n\sin(n-1)\alpha$$

بر $x^2-2ax\cos\alpha+a^2$ قابل‌قسمت است .

۱۱۰. ثابت کنید که اگر $f(x,y)$ نسبت به x و y متقارن[1] و بر $x-y$ قابل

۱ــ به بخش مربوط به تقارن مراجعه کنید

قسمت باشد ، بر $(x-y)^2$ قابل‌قسمت است .

۱۱۱. بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین دو عبارت زیر را بدست آورید :

$$f(x)=x^{91}+1 \quad ; \quad \varphi(x)=x^{65}+1$$

۱۱۲. کسر زیر را ساده کنید :

$$\frac{x^5-3x^3+x^2+2x-1}{x^6-2x^5+x^4-x^2+2x-1}$$

۱۱۳. با چه شرطی $f(x)=x^{2m}+x^m+1$ بر x^2+x+1 قابل‌قسمت است ؟

۱۱۴. m و n را طوری پیدا کنید که x^m+x^n+1 بر x^2+x+1 قابل قسمت باشد .

۱۱۵. باچه شرطی عبارت $f(x)=x^{4n}-x^{3n}+x^{2n}-x^n+1$ بر : $x^4-x^3+x^2-x+1$ قابل قسمت است ؟

۱۱۶. ثابت‌کنید که با شرط صحیح بودن x و y و a و b ، اگر : $f(x,y)=a^nb^n(x^{2n}+y^{2n})$ بر $xy(a^2+b^2)-ab(x^2+y^2)$ قابل قسمت باشد. $\varphi(x,y)=x^ny^n(a^{2n}+b^{2n})$ هم بر همان‌عبارت قابل قسمت است .

۱۱۷. عبارت زیر مفروض است :

$$f(x\ ,\ y\ ,\ z)=(y-z)^n+(z-x)^n+(x-y)^n$$

ثابت‌کنید که $f(x\ ,\ y\ ,\ z)$ درحالت $n=6k-1$ بر : $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz$ و درحالت $n=6k+1$ بر : $(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)^2$ قابل قسمت است و ازآنجا دوعبارت زیر را تجزیه کنید :

۱) $\quad (x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

۲) $\quad (x-y)^7+(y-z)^7+(z-x)^7$

۱۱۸. $f(x)$ ازدرجهٔ m را چنان پیداکنید که بر $f'(x)$ (مشتق تابع $f(x)$) قابل قسمت باشد و داشته باشیم:

$$f(1)=0 \quad ; \quad f(0)=1$$

۱۱۹. مقادیر x را چنان پیداکنید که عبارت :

$$a^{23}+a^{22}+\dots+a+1$$

بر عبارت زیر قابل قسمت باشد :

$$a^{x-1}+a^{x-2}+\dots+a+1$$

۰۱۲۰ ثابت کنید که اگر a^p-b^p بر p قابل قسمت باشد بر p^2 نیز قابل قسمت است (a و b عددهایی صحیح و مثبت و p عددی است اول) .

۰۱۲۱ $f(x)$ از درجهٔ چهارم را چنان پیدا کنید که $f(x+1)$ بر $(x-1)^2$ و $f(x-1)$ بر $(x+1)^2$ قابل قسمت و $f(1)=1$ باشد.

۰۱۲۲ ثابت کنید عبارت :

$$x^{n+1}\sin(n-1)\varphi-x^n\sin n\varphi+x\sin\varphi$$

بر $x^2-2x\cos\varphi+1$ قابل قسمت است .

۰۱۲۳ در تقسیم $1-abx^2$ بر $1-(a+b)x+abx^2$ خارج قسمت را برحسب قوای صعودی x مرتب کنید . اگر عمل تقسیم را در جملهٔ x^n خارج قسمت متوقف کنیم، صورت کلی باقیمانده را بنویسید .

این کسرها را ساده کنید :

۰۱۲۴
$$\frac{x^6+3x^5+x^4+4x^3-5x^2-x+1}{x^7+6x^5+7x^4-8x^3-5x^2+2x+1}$$

۰۱۲۵
$$\frac{(35a+14b-10c)^2+(35b+14c-10a)^2+(35c+14a-10b)^2}{(15a+10b-6c)^2+(15b+10c-6a)^2+(15c+10a-6b)^2}$$

۰۱۲۶ ثابت کنید اگر k عددی صحیح و غیرقابل قسمت بر ۳ باشد، عبارت:

$$(a+b)^{2k}+a^{2k}+b^{2k}$$

بر a^2+ab+b^2 قابل‌قسمت است .

۰۱۲۷ ثابت کنید عدد $19^{19}+69^{69}$ بر ۴۴ قابل‌قسمت است .

۵

عبارتهای گنگ

بحث دربارهٔ عبارتهای گنگ وعملهای مربوط به آنها رادر سالهای متوسطه دیده‌ایم ودر اینجا تنها به نکته‌هایی می‌پردازیم که یا به علت اهمیت آنها ضرورت تکرار پیش می‌آید و یا به علت وضع خاص برنامهٔ متوسطه ، بحث مفصل ودقیق آنها را ندیده‌ایم.

درمورد معادله‌های گنگ هم در این بخش بحثی نداریم و اگر برای حل آنها نکته‌های تازه‌ای وجود داشته باشددربخش مربوط به معادله‌ها گفتگو خواهد شد .

۱. وجود اعداد گنگ

فیثاغورث کشف کرد که: «عددهای صحیح ۱ ، ۲ ، ۳ وغیره برای بنای ریاضی کافی نیست». قبل از این کشف بزرگ ، فیثاغورث با اعتقاد و ایمان یك پیامبر تبلیغ می‌کرد که تمام طبیعت دنیای خارج‌وتمام موضوعهای ریاضی، فیزیك ، متافیزیك Métaphysique و اخلاق از روی نمونهٔ انفصالی اعداد صحیح ۱ ، ۲ ، ۳ و ... ساخته شده ومی‌توانند به‌وسیلهٔ این عناصری که از جانب خدا فرستاده شده‌اند تعبیر و تأویل شوند . فیثاغورث می گفت که خدا همان عدد است .

این نظریه به این مناسبت رد شد که فیثاغورث کشف کرد :

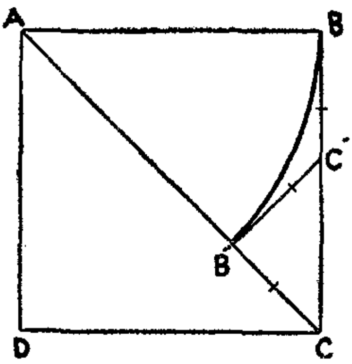
نمی‌توان دو عدد صحیح پیدا کرد بطوری که مجذوریکی مساوی دوبرابر مجذور دیگری باشد . این مطلب را می‌توان با استدلال ساده‌ای بیان کرد ، این استدلال برای همهٔ کسانی که به مفهومهای جبر و یا حساب مقدماتی آشنا باشند ، قابل فهم است .

فیثاغورث در هندسه به این مانع برخورد : نسبت یك ضلع مربع به‌ـ قطرش نمی‌تواند به وسیلهٔ نسبت دوعدد صحیح بیان شود .

... با بیان دیگرمی‌توان گفت که‌ریشهٔ دوم عدد ۲ یك عدد گنگ است، یعنی مساوی با هیچ عدد صحیح یاکسری که صورت و مخرج آن دو عددصحیح باشد ، نیست .

به این ترتیب یك تصور هندسی فوق‌العاده ساده،یعنی قطر مربع، ثابت نمود که اعداد صحیح ۱ ، ۲ ، ۳ و ... برای بیان پاره خطها کافی نیستند و در نتیجه نخستین نظریهٔ فلسفی فیثاغورثیها را باطل نمود: درحالی که‌می‌ـ توانیم قطر مربع را از نظر هندسی رسم کنیم ، نمی‌توانیم آنرا به وسیلهٔ یك عدد گویا نشان دهیم .

مربع ABCD که ضلع آنرا واحدانتخاب کرده‌ایم در نظر می گیریم (شکل ۱) . اگر جذر ۲ را عدد گویایی فرض کنیم ، باید بین دو پاره خط



(شکل ۱)

AB و AC واحد مشترکی مانند 1 وجود داشته باشد (یعنی قطعه خطی که بتواند در هر دو پاره خط AB و AC به تعداد صحیح و معینی جا گیرد). اگر B' را محل تلاقی AC با محیط دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB فرض کنیم و C' نقطهٔ تلاقی مماس در B' براین دایره، با BC باشد، واضح است که خواهیم داشت: $B'C = B'C' = BC'$، بنابراین پاره‌خطهای AB و $B'C = AC - AB'$ باید بـه وسیلهٔ واحد مشترك 1 قابل اندازه‌گیری باشند ، همچنین برای پاره‌خطهای $CC' = AB - B'C$ و $B'C$.

اکنون می‌توان همین عملها را در مورد پاره خطهای جدیـد تکرار کرد، بااین تفاوت که پاره‌خطهای CC'و$B'C$ کوچکتر از پاره‌خطهای ABو AC می‌باشند و در حقیقت همانطور که از شکل هم پیداست از نصف آنها هم کوچکترند . اگر این عمل را به اندازهٔ کافی تکرار کنیم ، می‌توانیم پاره خطهایی بدست آوریم که به اندازهٔ دلخواه کوچك باشند (زیرا هرمرتبه پاره خطها کوچکتر از نصف‌می‌شوند). ولی در هرحال 1 باید از تمام پاره‌خطهای بدست‌آمده کوچکتر باشد و این به معنای آن‌است که برای دو پاره خط AB وAC نمی‌توان واحد مشترکی پیدا کرد .

این عدم امکان اندازه گیری، ریاضی دانها را متوجه عددهای گنگ و مفهوم «بی‌نهایت» کرد ، مفهومی که خارج از ذهن و متناقض بنظرمی‌رسید[1].

۱ــ البته می‌توان جذر ۲را به‌وسیلهٔ رقمهای اعشاری با تقریب‌لازم‌نوشت ←

این مسألهٔ ساده، نتیجه‌هایی را ببار آورد که تا آن‌زمان برای ریاضی‌دانها مفهوم قانع‌کننده‌ای نداشت، این نتیجه‌ها شامل تصورهایی از بی‌نهایت، حد و پیوستگی در ریاضی بود، تصورهایی که باید آنها را ریشه‌های آنالیز جدید دانست [1].

۲. یادآوری یك قرارداد برای تبدیلهای جبری

اتحاد اساسی :

$$\sqrt[n]{a^n}=a$$

به‌ازای مقادیرزوج n وقتی صحیح است‌که $a \geqslant 0$ باشد وبه‌ازای مقادیر فرد n همیشه صحیح است .

در حالت زوج بودن n : $n=2k$ ، داریم :

$$\sqrt[2k]{a^{2k}}=\sqrt[2k]{|a|^{2k}}=|a|=\begin{cases} a & (a \geqslant 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

و یا مثلا :

$$\sqrt[2mn]{a^{2m}}=\sqrt[2mn]{|a|^{2m}}=\sqrt[n]{|a|}=\begin{cases} \sqrt[n]{a} & (a \geqslant 0) \\ \sqrt[n]{-a} & (a<0) \end{cases}$$

(آنطورکه در دبیرستان عمل می‌کنند).ولی رقمهای اعشاری هرگزتکرار نشده‌و دورهٔ تناوبی ماننداًنچه‌که در کسرهای اعشاری وجود دارد پیدا نمی‌کند. مثلا $\frac{1}{7}=0/142857142857...$ دارای دورهٔ تناوبی است که هرگز پایان نمی‌پذیرد (در محاسبهٔ کسرهای اعشاری هر وقت در باقیمانده به عددی می‌رسند که در صورت‌کسر اصلی وجود دارد و یا یکدفعهٔ دیگر در باقیمانده تکرار شده است ، عمل تقسیم را ادامه نمی‌دهند ، زیرا پس‌ازآن همان رقمهای قبلی دوباره تکرار می‌شود) .

۱ــ از کتاب **آنالیز ریاضی** تألیف **آندره دولاشه** ترجمهٔ **پرویزشهریاری**.

همچنین تساوی $\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{x^{2}}$ تنها بـرای مقادیر مثبت x صحیح است، به‌ازای مثلا $x=-8$، سمت‌چپ تساوی $\sqrt[3]{-8}=-2$ و سمت راست تساوی $\sqrt[6]{64}=2$ می‌شود . (اگر درحـوزهٔ اعداد موهومی هم بحث کنیم $\sqrt[3]{-8}$ دارای سه جواب و $\sqrt[6]{64}$ دارای ۶ جواب است) .

بطور خلاصه بین جذر ۲۵ و $\sqrt{25}$ اختلاف وجود دارد ، وقتی داشته باشیم : $x^{2}=25$ ، برای محاسبهٔ x باید از۲۵ جذر گرفت که‌در این‌صورت جواب x مساوی ۵± می‌شود :

$$x^{2}=25 \implies x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$$

درحالی‌که $\sqrt{25}$ تنها به‌معنای مقدار حسابی جواب‌آن یعنی ۵ استو بهتر است برای سهولت کار در موارد حرفی بنویسیم :

$$\sqrt{x^{2}}=|x|$$

از طرف دیگر می‌دانیم کـه قدر مطلق یك عدد مثبت ، خود آن عدد است :

$$|+5|=5$$

در حالی‌که قدر مطلق یك عدد منفی ، قرینهٔ آن‌است :

$$|-5|=-(-5)=5$$

چند مثال :

۱۰مطلوب‌است‌حاصل‌عبارت $\sqrt{a^{2}-2ab+b^{2}}$

حل.

$$\sqrt{a^{2}-2ab+b^{2}}=\sqrt{(a-b)^{2}}=|a-b|$$

و در نتیجه در حالت $a>b$ داریم :

$$\sqrt{a^{2}-2ab+b^{2}}=a-b$$

ودر حالت $a<b$:

$$\sqrt{a^{2}-2ab+b^{2}}=b-a$$

۲۰ عبارت زیر را ساده کنید :

$$A=\frac{\sqrt{4+4p+p^2}-\sqrt{4-4p+p^2}}{\sqrt{4+4p+p^2}+\sqrt{4-4p+p^2}}$$

حل. اگر $p\neq -2$ باشد ، داریم :

$$A=\frac{|2+p|-|2-p|}{|2+p|+|2-p|}=\frac{1-\left|\frac{2-p}{2+p}\right|}{1+\left|\frac{2-p}{2+p}\right|}$$

در حالتی کـه $\frac{2-p}{2+p}>0$ یعنی $-2<p<2$ یا $|p|<2$ باشد، داریم :

$$A=\frac{1-\frac{2-p}{2+p}}{1+\frac{2-p}{2+p}}=\frac{p}{2};$$

و در حالتی که $\frac{2-p}{2+p}<0$ یعنی $\left|\begin{matrix}p<-2\\p>2\end{matrix}\right.$ یا $|p|>2$ باشد،داریم:

$$A=\frac{1+\frac{2-p}{2+p}}{1-\frac{2-p}{2+p}}=\frac{2}{p};$$

و وقتی $\left|\begin{matrix}p=-2\\p=2\end{matrix}\right.$ یا $|p|=2$ باشد، می‌توان هرکدام از دوجواب را به دلخواه انتخاب کرد .

۳. عاملهای ممکن را از زیر رادیکال $\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}$ بیرون بیاورید .

حل. این عبارت وقتی حقیقی است که $a\geqslant 3$ باشد ، زیرا درغیراین صورت $(a-3)^3$ و همراه آن تمام زیـر رادیکال منفی و مقدار رادیکال موهومی می‌شود .

اگر $a\geqslant 5$ باشد ، مقدار رادیکال چنین می‌شود :

$$\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}=(a-5)^3(a-3)\sqrt{a-3}\ ;$$

و اگر $3<a<5$ باشد ، داریم :

$$\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}=-(a-5)^3(a-3)\sqrt{a-3}$$

و بطورکلی می‌توان نوشت :

$$\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}=|a-5|^3(a-3)\sqrt{a-3}\quad(a\geqslant 3)$$

۴. حاصل عبارت زیر را بدست آورید :

$$\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}-\frac{1}{a}$$

حل. قبل از همه متذکر می‌شویم که برای اینکه این عبارت درحوزهٔ عددهای حقیقی‌باشدباید $1+a$ و $1-a$ هم‌علامت باشند،ولی‌هردوی‌آنها منفی نمی‌توانند باشند ، زیرا برای منفی بودن $1+a$ باید $a<-1$ و برای منفی بودن $1-a$ باید $a>1$ باشد که غیر ممکن است . بنابراین $1+a$ و $1-a$ باید هردومثبت و $-1<a<1$ باشد، از این مقادیر بایده $a=0$ را استثناکرد ، زیرا در این‌صورت $\frac{1}{a}$ مفهوم خودرا ازدست می‌دهد.همچنین واضح است به‌ازای $a=1$ یا $a=-1$ یکی ازکسرهای زیرراديکالهامفهوم خود را از دست می‌دهند و بنابراین شرط وجود عبارت درحوزهٔ اعدادحقیقی این‌است‌که $0<a<1$ یا $-1<a<0$ باشد .

با توجه به این شرایط داریم :

$$\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}=\frac{\sqrt{(1+a)^2}+\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{1-a^2}}=$$

$$=\frac{|1+a|+|1-a|}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{(1+a)+(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}$$

و همچنین :

$$\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}=\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}$$

و در نتیجه حاصل عبارت برابر صفر می‌شود .

۴.گویاکردن مخرج یا صورت‌کسرها

گویاکردن مخرج و یا صورت کسرها ، نه تنها برای ساده کردن بسیاری از عبارتها مورد احتیاج است، بلکه به‌عنوان روشی از جبر در حل بسیاری ازمسألەها مثل رفع ابهام ازکسرهای به‌صورت $\frac{0}{0}$ یا $\infty-\infty$ بکار می‌رود . در اینگونه موارد ، بسته به وضع عبارت ، ممکن است لازم باشد که صورت و یا مخرج کسر را گویا کنیم .

اگردراین بند تنها ازگویاکردن مخرج کسر گفتگو می‌کنیم، تنها برای سهولت بحث است والاعین این روشها را برای گویا کردن صورت کسر هم می‌توان بکار برد .

حالتی‌که مخرج کسر شامل یك رادیکال باشد . روش کار را با چند مثال روشن می‌کنیم :

$$1)\quad \frac{A}{\sqrt[n]{x}}=\frac{A\sqrt[n]{x^{n-1}}}{\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}=\frac{A\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}{x}$$

در این مثال $x\neq 0$ و برای مقادیر زوج n ، $x>0$ است .

$$2)\quad \frac{15}{\sqrt[5]{648}}=\frac{15}{\sqrt[5]{2^3\times 3^4}}=\frac{15\sqrt[5]{2^2\times 3}}{2\times 3}=\frac{5\sqrt[5]{12}}{2}$$

حالتی که مخرج کسر شامل مجموع جبری دو رادیکال باشد . در این‌حالت تا وقتی که لااقل یکی از رادیکالهای مخرج فرجهٔ زوج دارد ، صورت و مخرج‌کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم ووقتی‌که فرجه‌های هردو رادیکال فرد باشد ، پس از یکی کردن فرجه ها ، یکی از دو اتحاد زیر را مورد استفاده قرار می‌دهیم :

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^{2}+\dots+b^{n-1})= \\ =a^{n}-b^{n}$$

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^{2}-\dots+b^{n-1})= \\ =a^{n}+b^{n} \qquad (n=2k+1)$$

چند مثال :

۱. مخرج کسر $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{y}}$ را گویـا کنید (x و y مقدارهایی مثبت هستند) .

حل. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{y}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{y}}{x-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt[4]{y})(x+\sqrt{y})}{x^{2}-y}$$

۲.
$$\frac{1}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{y}}=\frac{\sqrt[5]{x^{4}}-\sqrt[5]{x^{3}y}+\sqrt[5]{x^{2}y^{2}}-\sqrt[5]{xy^{3}}+\sqrt[5]{y^{4}}}{x+y}$$

۳. حدکسر زیر را ، وقتی که x به‌سمت عدد ۱ میل‌کند، پیدا کنید.

$$y=\frac{(x-1)^{n-1}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)\dots(\sqrt[n]{x}-1)}$$

حل. برای اینکه عامل $\sqrt{x}-1$ در مخرج گویا شود باید صورت و مخرج را در $\sqrt{x}+1$ ضرب کنیم و برای اینکه عامل $\sqrt[3]{x}-1$ گویاشود، بـاید صورت و مخـرج را در $\sqrt[3]{x^{2}}+\sqrt[3]{x}+1$ ضـرب کنیم و بطور کلی بـرای اینکه عـامل $\sqrt[p]{x}-1$ گویا شود بایدصورت ومخرج رادرعبارت $\sqrt[p]{x^{p-1}}+\sqrt[p]{x^{p-2}}+\dots+1$ ضرب کنیم که دراین‌صورت تمام عاملهای مخرج به $x-1$ تبدیل و حاصلضرب آنها با $(x-1)^{n-1}$ درصورت حذف

می‌شود و داریم :

$$y=(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}+$$
$$+\sqrt[4]{x}+1)\cdots(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\sqrt[n]{x^{n-3}}+\cdots+1)$$

و در نتیجه :

$$\lim_{x\to 1} y=2\times 3\times 4\times\cdots\times n=n!$$

(حاصلضرب عددهای‌صحیح متوالی از ۱ تا n را با $n!$ نشان می‌دهند و می‌خوانند فاکتوریل n) .

حالتی که مخرج کسر شامل مجموع جبری سه‌یاچهار رادیکال‌با فرجهٔ ۲ باشد. دراین‌حالت باید رادیکالهای مخرج را گروه‌بندی‌کرد، به‌نحوی‌که در هر گروه ۲ یا ۱ رادیکال وجود داشته باشد و سپس صورت ومخرج را در مزدوج مخرج ضرب نمود .

در این مورد تنها به این نکته اشاره می‌کنیم‌که برای این‌گروه‌بندی بهتر است رادیکالها راچنان تقسیم بندی‌کنیم‌که مجموع عددهای زیررادیکالها درگروههای مختلف، حتی الامکان به‌هم نزدیك باشند . یعنی مثلا در موردی که مخرج کسر شامل سه رادیکال است ، رادیکال با عدد بزرگتر را تنها و دو رادیکال دیگر را با هم می‌گیریم و در موردی‌که مخرج‌کسر شامل چهار رادیکال است ، دو رادیکال متوسط را در یك‌گروه و دو رادیکال دیگر را درگروه دوم قرار می‌دهیم .

چند مثال :

۱. مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

حل. داریم :

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{12}$$

۲. مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$A=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+1}$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$A=\frac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{7}+1)}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{7}-1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{7}+1)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{7}-1}{2(\sqrt{15}-\sqrt{7})}=\frac{(\sqrt{15}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{7}-1)}{16}$$

۳. مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$A=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

حل. در این مثال ، با توجه به صورت کسر اگر $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ رادر یک گروه قرار دهیم ، سریع‌تر به جواب اصلی می‌رسیم :

$$A=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{6}$$

حالتی که مخرج کسر شامل مجموع جبری سه رادیکال با فرجهٔ ۳ باشد.

در این‌حالت باید از اتحاد زیر استفاده کرد :

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc \qquad (1)$$

چند مثال :

۱. مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}+1}$ را گویاکنید .

حل. با توجه به اتحاد (۱) باید صورت و مخرج کسر را در عبارت زیر ضرب کرد :

$$\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}+1+\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$$

که در این‌صورت خواهیم داشت :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}+1}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}+1}{2+3\sqrt[3]{6}}=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}+1)(4-6\sqrt[3]{6}+9\sqrt[3]{36})}{170}$$

۲. مخرج کسر $\frac{A}{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}}$ را گویا کنید .

حل. مخرج کسر به‌صورت a^2-ab+b^2 است که در آن $a=\sqrt[3]{7}$ و $b=\sqrt[3]{2}$ می‌باشد و بنابراین کافی است صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}$ ضرب کنیم :

$$\frac{A}{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}}{7+2}=\frac{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}}{9}$$

استفاده از روش ضریبهای نامعین. گاهی برای گویا کردن مخرج کسرها، می‌توان از روش ضریبهای نامعین استفاده کرد (بخش تجزیهٔ عبارتهای جبری را ببینید) . مثال زیر مطلب را روشن می‌کند .

مثال : مخرج کسر $\frac{1}{4\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}-16}$ را گویا کنید .

حل. A و B و C را که با هم صفر نیستند ، چنان در نظر می‌گیریم که حاصلضرب :

$$(A\sqrt[3]{4}+B\sqrt[3]{2}+C)(4\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}-16)$$

برابر باعددی گویا شود. از اینجا به دستگاه زیر خواهیم رسید :

$$\begin{cases}-16A-2B+4C=0\\ 8A-16B-2C=0\end{cases}$$

که یك دسته از جوابهای آن $A=1$ ، $B=0$ ، $C=4$ است یعنی برای گویا کردن مخرج کسر می‌توان صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{4}+4$

ضرب کرد ، در این‌صورت :

$$\frac{۱}{۴\sqrt[۳]{۴}-۲\sqrt[۳]{۲}-۱۶}=-\frac{\sqrt[۳]{۴}+۴}{۶۸}$$

استفاده از تجزیهٔ مخرج . در بعضی موارد ، مخرج کسر قابل تجزیه است و دراین‌صورت می‌تواند به عاملهای ساده‌تری تبدیل شود که امکان گویا کردن مخرج را به وجود آورد .

مثال : مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$A=\frac{۱}{\sqrt{۱۵}+\sqrt{۱۰}+\sqrt{۶}+\sqrt{۵}+\sqrt{۲}+۲}$$

حل. مخرج کسر را می‌توان چنین نوشت :

$$(\sqrt{۱۵}+\sqrt{۱۰}+\sqrt{۵})+(\sqrt{۶}+۲+\sqrt{۲})=$$
$$=\sqrt{۵}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱)+\sqrt{۲}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱)=$$
$$=(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱)=$$
$$=(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})[(\sqrt{۲}+۱)+\sqrt{۳}]$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$A=\frac{(\sqrt{۵}-\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱-\sqrt{۳})}{۳[(\sqrt{۲}+۱)^{۲}-۳]}=$$
$$=\frac{(\sqrt{۵}-\sqrt{۲})(\sqrt{۲}-\sqrt{۳}+۱)}{۶\sqrt{۲}}=$$
$$=\frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}-\sqrt{۲})(\sqrt{۲}-\sqrt{۳}+۱)}{۱۲}$$

استفاده ازمجموع جبری‌جمله‌های مخرج. اگر بتوان جمله‌های‌مخرج را با یکدیگر جمع کرد ؛ بجای مخرج ، مجموع آنها را قرار می‌دهیم و سپس مخرج را گویا می‌کنیم .

در این مورد ، تصاعد هندسی نقش اساسی دارد و در بسیاری موارد جمله‌های مخرج،جمله‌های متوالی یك‌تصاعد هندسی هستند.رابطهٔ مجموع‌در تصاعد هندسی $S=\frac{a(q^{n}-۱)}{q-۱}$ است (a جملهٔ اول ، q قدر نسبت و n

تعداد جمله‌ها) ، و چون $a(q^n-1)$ بیش از دو جمله ندارد ، هروقت که جمله‌های مخرج جمله‌های متوالی یك تصاعدهندسی باشند،می‌توان به‌سادگی مخرج را گویاکرد .

مثال : مخرج‌کسر زیر را گویاکنید .

$$A=\frac{1}{\sqrt[5]{16}-\sqrt[5]{24}+\sqrt[5]{36}-\sqrt[5]{54}+\sqrt[5]{81}}$$

حل. جمله‌های مخرج به تصاعد هندسی هستند:جملهٔ اول این تصاعد $a=\sqrt[5]{16}$ ، قدرنسبت آن $q=-\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ و تعداد جمله‌ها $n=5$ است‌و بنابراین مجموع جمله‌های مخرج چنین می‌شود :

$$\frac{\sqrt[5]{16}\left[\left(-\sqrt[5]{\frac{3}{2}}\right)^5-1\right]}{-\sqrt[5]{\frac{3}{2}}-1}=\frac{\frac{5}{2}\sqrt[5]{16}}{\frac{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}}}=\frac{5}{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{2}}$$

که اگر بجای مخرج قرار دهیم ، می‌شود :

$$A=\frac{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{2}}{5}$$

توضیح : در حقیقت در اینگونه موارد می‌توان از اتحاد :

$$(a^{n-1}\pm a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2\pm\cdots+b^n)(a\mp b)=a^n\mp b^n$$

هم استفاده‌کرد (عامل اول سمت‌چپ اتحاد ، یك تصاعد هندسی است‌با جملهٔ اول a^{n-1} ، قدر نسبت $\pm\frac{b}{a}$ و تعداد جمله‌های n).

۴. تبدیل رادیکالهای مرکب

مثال ۱. مطلوب‌است محاسبهٔ $\sqrt[5]{\frac{a}{\sqrt[6]{a}}}$.

$$\sqrt[5]{\frac{a}{\sqrt[6]{a}}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{a^5}}=\sqrt[30]{a^5}=\sqrt[6]{a}$$

<u>تبدیل رادیکالهای بصورت $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$</u>. صحت اتحادزیر به‌سادگی روشن می‌شود :

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\quad(1)$$

از اتحاد (۱) روشن است که اگر A عددی گویاو A^2-B مجذور کامل باشد ، می‌توان رادیکال مرکب به‌صورت $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ رابه رادیکالهای ساده تبدیل کرد .

مثال۲. عبارت $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$ را ساده کنید .

حل. دراینجا $A=x+2$ و $B=4(x+1)$ است، اگر A^2-B را k^2 فرض کنیم ، داریم :

$$k^2=(x+2)^2-4(x+1)=x^2$$

و از آنجا (با فرض مثبت‌بودن x):

$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=\sqrt{\frac{x+2+x}{2}}-\sqrt{\frac{x+2-x}{2}}=$$
$$=\sqrt{x+1}-1$$

و با شرط منفی بودن x (در هرحال $x\geqslant-1$ است):

$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1-\sqrt{x+1}$$

مثال۳. مطلوب‌است محاسبهٔ حاصل عبارت زیر :

$$A=\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}$$

حل. ابتدا رادیکال مرکب $\sqrt{13+4\sqrt{3}}$ را محاسبه می‌کنیم :

$$k^2=13^2-(4\sqrt{3})^2=169-48=121=11^2\ ;$$

$$\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{13+11}{2}}+\sqrt{\frac{13-11}{2}}=\sqrt{12}+1$$

و از آنجا :

$$A=\sqrt{۱+\sqrt{۳+\sqrt{۱۲}+۱}}=\sqrt{۱+\sqrt{۴+\sqrt{۱۲}}}$$

حال به محاسبهٔ $\sqrt{۴+\sqrt{۱۲}}$ می‌پردازیم :

$$k^۲=۱۶-۱۲=۲^۲ ;$$
$$\sqrt{۴+\sqrt{۱۲}}=\sqrt{۳}+۱ \cdot$$

و در نتیجه :

$$A=\sqrt{۱+(\sqrt{۳}+۱)}=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=$$
$$=\sqrt{\frac{۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}$$

توضیح : اتحاد (۱) برای مواردی‌که A عددی گویا ویا $A^۲-B$ مجذور کامل (و یا حتی مثبت) نباشد ، نیز صحیح است و در موارد لزوم می‌توان از آن استفاده‌کرد .

مثال ۴. مطلوب‌است محاسبهٔ عبارت :

$$A=\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲}$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$A=\left(\sqrt{\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}}+\sqrt{\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}}\right)+$$
$$+\left(\sqrt{\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}}-\sqrt{\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}}\right)=۲\sqrt{\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}}=$$
$$=\sqrt{۲(\sqrt{۵}+۱)}$$

تبدیل رادیکالهای به‌صورت $\sqrt[n]{A+B\sqrt[m]{C}}$. بـرای تبدیل چنین رادیکالهایی (اگر ممکن باشد) می‌توان ازروش ضریبهای نامعین استفاده‌کرد،

بدین ترتیب که نتیجهٔ آنرا برابر $\alpha+\beta\sqrt[m]{C}$ می‌گیریم و با هم متحد قرار می‌دهیم، درحالتی‌که برای α و β جوابهای گویا وجود داشته باشد، رادیکال قابل تبدیل است .

مثال۵. عبارت $\sqrt[۳]{۳۸+۱۷\sqrt{۵}}$ را ساده کنید .

حل. فرض می‌کنیم :

$$\sqrt[۳]{۳۸+۱۷\sqrt{۵}}=\alpha+\beta\sqrt{۵}$$

دو طرف را مکعب می‌کنیم ، نتیجه می‌شود :

$$۳۸+۱۷\sqrt{۵}=(\alpha^۳+۱۵\alpha\beta^۲)+(۳\alpha^۲\beta+۵\beta^۳)\sqrt{۵}$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} \alpha(\alpha^۲+۱۵\beta^۲)=۳۸ \\ \beta(۳\alpha^۲+۵\beta^۲)=۱۷ \end{cases}$$

۱۷ عددی است اول وبنابراین تنها می‌تواند به‌صورت ۱۷×۱ نوشته شود ، از آنجا :

$$\beta=۱\ ;\ ۳\alpha^۲+۵\beta^۲=۱۷ \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}\alpha=۲\\ \beta=۱\end{array}\right.$$

این مقادیر درمعادلهٔ اول دستگاه هم صدق می‌کنند وبنابراین‌خواهیم داشت :

$$\sqrt[۳]{۳۸+۱۷\sqrt{۵}}=۲+\sqrt{۵}$$

استفاده از تبدیلهای اتحادی و جذرگرفتن. در مواردی‌که نتوان از روشهای مذکور استفاده کرد ، باید تلاش را در جهت تجزیهٔ عبارت زیر رادیکال و یا (در مواردی‌که فرجه زوج است) جذرگرفتن ازآن گذاشت.

مثال۶. حاصل عبارت زیر را بدست آورید :

$$A=\sqrt{۴x\sqrt[۳]{x}-۴x\sqrt[۳]{x^۲y}+x^۲\sqrt[۳]{y^۲}+y^۴-۴y^۲\sqrt[۳]{x^۲}+۲xy^۲\sqrt[۳]{y}}$$

حل. برای سهولت کار فرض می‌کنیم : $\sqrt[۳]{x}=a$ و $\sqrt[۳]{y}=b$ ، در این‌صورت خواهیم داشت :

$$A=\sqrt{4a^4-4a^5b+a^6b^2+b^{12}-4a^2b^6+2a^3b^7}=$$
$$=\sqrt{a^6b^2-4a^5b+4a^4+2a^3b^7-4a^2b^6+b^{12}}$$

حالا یا عبارت زیر را تبدیل اتحادی می‌کنیم و یا مستقیماً جذر می‌گیریم:

$$A=\sqrt{(a^3b-2a^2+b^6)^2}=|a^3b-2a^2+b^6|=$$
$$=|x\sqrt[6]{y}-2\sqrt[3]{x^2}+y^2|$$

تمرینها

عبارتهای زیر را ساده کنید:

۱۲۸. $\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+1)(a^2-1)(1+2a+a^2)}\cdot\left(\frac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-1}$

۱۲۹. $\sqrt{\frac{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}{3a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}$

۱۳۰. $ab\sqrt[n]{a^{1-n}\cdot b^{-n}-a^{-n}\cdot b^{1-n}}\cdot\sqrt[n]{(a-b)^{-1}}$

۱۳۱. $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+11)$

۱۳۲.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)$$

۱۳۳. $\left(\frac{1}{b-\sqrt{a}}+\frac{1}{b+\sqrt{a}}\right):\frac{\sqrt[-2]{\frac{1}{9}a^{-2}b^{-1}}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-2}}$

۱۳۴. $\frac{295-413\sqrt[3]{2}+177\sqrt[3]{4}}{5+3\sqrt[3]{4}-7\sqrt[3]{2}}$

۱۳۵. $$\left[4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]\left[4^{-0/25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right]$$

۱۳۶. $$\sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1-\cos 2x}+\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$$

۱۳۷. $$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4x}}}$$

۱۳۸. $$\sqrt{\sin^2 x(1+\cot g x)+\cos^2 x(1+tg x)}$$

۱۳۹. اگر $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$ باشد، به‌ازای چه مقدارهایی از α اتحاد زیر برقرار است :

$$\sqrt{1+\sin 2\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha$$

۱۴۰. نمایش تغییرات، دورهٔ تناوب و نقطه‌های انفصال را در تابع زیر بدست آورید :

$$y=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)$$

۱۴۱. مطلوب‌است محاسبهٔ مقدار عبارت :

$$\frac{xy-\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}}$$

به‌ازای $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ و $y=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$ ($a\geqslant 1$ و $b\geqslant 1$)،

۱۴۲. مطلوب‌است حاصل عبارت :

$$\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$$

وقتی‌که $x=\frac{2am}{b(1+m^2)}$ و $|m|<1$ باشد ،

عبارتهای زیر را ساده کنید:

۱۴۳.
$$x=\frac{n+۲+\sqrt{n^۲-۴}}{n+۲-\sqrt{n^۲-۴}}+\frac{n+۲-\sqrt{n^۲-۴}}{n+۲+\sqrt{n^۲-۴}}$$

۱۴۴.
$$y=\left[\frac{(\sqrt{a}+۱)^۲-\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+۱)^۳-a\sqrt{a}+۲}\right]^{-۳}$$

۱۴۵.
$$z=\frac{n^۳-۳n+(n^۲-۱)\sqrt{n^۲-۴}-۲}{n^۳-۳n+(n^۲-۱)\sqrt{n^۲-۴}+۲}$$

۱۴۶. اگر $x=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{۲pq}{q-p}}$ باشد ، مطلوب‌است محاسبهٔ عبارت زیر :

$$y=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{a^۲-b^۲}{a^۲+b^۲}\left(x^{\frac{۱}{p}}+x^{\frac{۱}{q}}\right)$$

۱۴۷. اگر $xy+yz+xz=۱$ و x و y و z مقادیری مثبت باشند، مطلوب‌است محاسبهٔ :

$$A^{۱}=\Sigma x\sqrt{\frac{(۱+y^۲)(۱+z^۲)}{۱+x^۲}}$$

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید .

۱۴۸. $\dfrac{۱}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}$ ۱۴۹. $\dfrac{۳+۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}$

۱۵۰. $\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}$ ۱۵۱. $\dfrac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt[۳]{۲}}$

۱۵۲. $\dfrac{۱۱+۳\sqrt[۳]{۳۵}}{\sqrt[۳]{۷}+\sqrt[۳]{۵}-۱}$ ۱۵۳. $\dfrac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}-\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۱}$

۱ــ برای مفهوم علامت Σ به بخش تقارن مراجعه بفرمایید .

۱۵۴. $$\frac{2}{1+2\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}$$

۱۵۵. اگر داشته باشیم $\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}$ مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$$

۱۵۶. مخرج کسر زیر راگویاکنید (باشرط $x>0$) :

$$\frac{1}{x+(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}+2)^2+\cdots+(\sqrt{x}+10)^2}$$

۱۵۷. مخرج این‌کسر راگویاکنید :

$$\frac{1}{\sqrt[6]{32}+\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{2}+1}$$

حاصل هریك از دو عبارت زیر را بدست آورید :

۱۵۸. $$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$$

۱۵۹. $$\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)(\sqrt{45}+9)}{(5-2\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$$

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید :

۱۶۰. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ ۱۶۱. $\sqrt{4\sqrt{5}-2\sqrt{15}}$

۱۶۲. $$\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}$$

۱۶۳. $$\frac{\sqrt{26+\sqrt{675}}-\sqrt{26-\sqrt{675}}}{\sqrt[3]{26+\sqrt{675}}+\sqrt[3]{26-\sqrt{675}}}$$

۱۶۴. $$\sqrt[3]{99+70\sqrt{2}}+2\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$$

۱۶۵. $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}$

۱۶۶. $\sqrt{a^2+a\sqrt{a}-\frac{13}{12}a-\frac{2}{3}\sqrt{a}+\frac{4}{9}}$

۱۶۷. $\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$

۱۶۸. $(4x^2\sqrt[3]{y^2}+9x\sqrt[3]{x}+16\sqrt[3]{x^2y^2}-12x\sqrt[3]{x^2y}+$

$+16x\sqrt[3]{xy^2}-4x\sqrt[3]{y^2}-24x\sqrt[3]{y}+6\sqrt[3]{x^2y}-8\sqrt[3]{xy^2})^{\frac{1}{2}}$

۱۶۹. مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{A}{2\sqrt[6]{2}-2\sqrt[6]{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-1}$$

۱۷۰. مخرج این کسر را گویا کنید :

$$\frac{1}{\sqrt[6]{32}+\sqrt[12]{768}+\sqrt[6]{24}+\sqrt[12]{432}+\sqrt[6]{18}+\sqrt[12]{243}}$$

۱۷۱. اگر بدانیم $ax^3=by^3=cz^3$ و $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

۱۷۲. اگر $x=\sqrt{ab}$ و $a>b$ باشد، حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}}$$

۱۷۳. حاصل این عبارت را بدست آورید :

$$\left[\left(\sqrt[x]{a^{-\frac{2}{y}}}+\sqrt[r]{a^{\frac{1}{y}}\cdot b}+2\sqrt{\sqrt[r]{b}}\right)\sqrt{\sqrt[x]{\sqrt[y]{\sqrt[r]{a^{x-2r}}}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

۱۷۴. اگر $x=ab^{\frac{n}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}}-b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{-1}$ باشد، حاصل این‌عبارت را بدست آورید :

$$(x^{-1}+a^{-1})(x+a)^{\frac{1}{n}}-b^{-1}x^{\frac{1}{n}}$$

۱۷۵. با شرط $x=\frac{1}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}$ و $0<m<n<2m$ محاسبه کنید:

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}-mx}{\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}+mx}:\sqrt{\frac{1-nx}{1+nx}}$$

۱۷۶. باشرط $x=\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$ ، محاسبه کنید :

$$\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^nx^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{x^n a^{n^2}}}-1$$

۱۷۷. می‌دانیم $x=\dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{b-a}\right)^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{2k}{n-2k}}}$. مطلوب‌است محاسبهٔ :

$$\sqrt[n]{a^kx^{n-k}}+\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}-2\sqrt{bx}+b^2$$

۱۷۸. باشرط $x=\dfrac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1}$ ، محاسبه کنید :

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}-4\sqrt[n]{x^2-1}+1$$

۱۷۹. اگر n عددی طبیعی باشد ، ثابت کنید :

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n -$$
$$-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

۱۸۰. با شرط $a>|b|$ ثابت کنید:

$$b\sqrt{2}\cdot\frac{2a+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}=\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}$$

٦

معادله‌ها و دستگاههای جبری

راه حل معادله‌های درجهٔ اول ودرجهٔدوم برهمه‌روشن است واحتیاجی به گفتگودربارهٔ آنها نیست. برای معادله‌های درجهٔسوم و درجهٔ چهارم هم راه حلهای کلی درجبر وجود دارد ، منتهی این راه‌حلها اغلب منجر به عملهای مفصل می‌شود وبرای رسیدن به‌ـ جواب وقت زیادی لازم دارد. به‌همین مناسبت در عمل از حل کلی اینگونه معادله‌ها صرفنظر و در موارد کلی به راه حلهای تقریبی قناعت می‌شود.

در جبر ثابت شده است که معادله‌های بالاتر ازدرجهٔ چهارم در حالت کلی نمی‌توانندبه‌طریق‌جبری حل شوند وبنابراین کوشش درراه‌حل‌جبری‌معادله‌های کامل درجهٔ پنجم و بالاتر بدون‌ثمرمی‌ماند.

باهمهٔ اینها، گاهی بااستفاده از بعضی روشهای ساده‌می‌توان معادله‌هایی راکه ازدرجه‌های بالا هستندحل کرد و جوابهای‌تحقیقی آنها را بدست‌آورد. ما دراین بخش به بعضی از این روشها، که گمان می‌رود دربارهٔ آنها کمتر گفتگو شده است، می‌پردازیم.

۱. حل معادله‌های به‌صورت $(x+a)^4+(x+b)^4=c$

این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\left[\left(x+\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a-b}{2}\right]^4+\left[\left(x+\frac{a+b}{2}\right)-\frac{a-b}{2}\right]^4=c$$

که اگر برای سهولت کار فرض کنیم :

$$x+\frac{a+b}{2}=t \quad ; \quad \frac{a-b}{2}=\alpha$$

معادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$(t+\alpha)^4+(t-\alpha)^4=c$$

که پس از باز کردن پرانتزها وجمع جبری جمله‌های متشابه به معادلهٔ دو-مجذوری زیر می‌رسیم :

$$2t^4+12\alpha^2t^2+(2\alpha^4-c)=0 \qquad (1)$$

ازاین معادله، مقادیر t و سپس مقادیر x (حقیقی یا موهومی) بدست‌می‌آید.

توضیح : اگر در معادلهٔ (۱) فرض کنیم $t^2=y$ ، معادله‌ای درجهٔدوم نسبت به y بدست می‌آید :

$$2y^2+12\alpha^2\cdot y+(2\alpha^4-c)=0$$

و این به معنای آن‌است که توانسته‌ایم معادلهٔ درجهٔ چهارم مفروض را به معادله‌ای درجهٔ دوم تبدیل کنیم (یعنی درجهٔ معادله را نصف کنیم). می‌توان این حکم راکلیت بخشید ، بدین معنی که اگر همین روش را برای‌معادله‌ای به‌صورت:

$$(x+a)^{2n}+(x+b)^{2n}=c$$

بکاربریم، به معادله‌ای از درجهٔ n خواهیم رسید.

مثال۱. مطلوب است حل معادلهٔ:

$$(x+2)^4+(x+5)^4=17$$

حل. فرض می‌کنیم $x+\frac{7}{2}=t$ ($x+\frac{7}{2}$ واسطهٔ عددی بین $x+2$ و

$x+5$ است) ، در این صورت به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\left(t-\frac{3}{2}\right)^4+\left(t+\frac{3}{2}\right)^4=17 \Longrightarrow 2t^4+27t^2-\frac{55}{8}=0$$

$$t^2=\frac{-27\pm\sqrt{27^2+55}}{4}=\frac{-27\pm 28}{4}\ ;$$

$$t^2=\frac{1}{4} \Longrightarrow t=\pm\frac{1}{2}$$

$$t^2=-55 \qquad \text{(ریشه‌های موهومی)}$$

$$t=\frac{1}{2} \Longrightarrow x+\frac{7}{2}=\frac{1}{2} \Longrightarrow x=-3$$

$$t=-\frac{1}{2} \Longrightarrow x+\frac{7}{2}=-\frac{1}{2} \Longrightarrow x=-4$$

مثال۲. مطلوب‌است حل معادلهٔ زیر :

$$(x+1)^6+(x+5)^6=730$$

حل. $x+3=t$ فرض‌می‌کنیم (t واسطهٔ عددی‌بین $x+1$ و $x+5$ است)، می‌شود:

$$(t-2)^6+(t+2)^6=730$$

که پس از بازکردن پرانتزها و خلاصه‌کردن خواهیم داشت :

$$t^6+60t^4+240t^2-301=0$$

و با فرض $t^2=y$ بدست می‌آید :

$$y^3+60y^2+240y-301=0$$

مجموع ضریبهای این معادله برابرصفر است وبنابراین عبارت سمت چپ تساوی بر $y-1$ قابل‌قسمت است. با تجزیهٔ عبارت سمت چپ تساوی خواهیم داشت :

$$(y-1)(y^2+61y+301)=0$$

و از آنجا :

$$y-1=0 \Longrightarrow y=1$$

$$y^2+61y+301=0 \Longrightarrow y=\frac{-61\pm\sqrt{2517}}{2}<0$$

$$y=1 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=\pm 1$$
$$t=1 \Rightarrow x+3=1 \Rightarrow x=-2$$
$$t=-1 \Rightarrow x+3=-1 \Rightarrow x=-4$$

دو جواب دیگر y منفی است و بنابراین برای t و در نتیجه برای x ، ریشه‌های موهومی بدست می‌آید . معادلهٔ درجهٔ ششم دارای دو ریشهٔ حقیقی و چهار ریشهٔ موهومی است .

۲. حل معادله‌های به‌صورت:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m \qquad (1)$$

این معادله را بشرطی می‌توان حل کرد که از چهار عدد a ، b ، c ، d مجموع دوعدد با مجموع دو عدد دیگر برابر باشد ، مثلا اگرداشته باشیم : $a+b=c+d$ ، معادلهٔ (۱) را می‌توان چنین نوشت :

$$[x^2+(a+b)x+ab][x^2+(c+d)x+cd]=m$$

که اگر فرض‌کنیم :

$$x^2+(a+b)x=x^2+(c+d)x=t$$

خواهیم داشت :

$$(t+ab)(t+cd)=m$$

ویا :

$$t^2+(ab+cd)t+(abcd-m)=0$$

که معادله‌ای درجهٔ دوم و قابل حل است .

مثال - معادلهٔ زیررا حل‌کنید:

$$(x^2+6x+8)(x^2-8x+15)=72$$

حل. ابتدا هریك از دوپرانتز سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم :

$$(x+2)(x+4)(x-3)(x-5)=72$$

و چون داریم :

$$2-3=4-5=-1$$

معادله را به‌صورت $[(x+2)(x-3)][(x+4)(x-5)]=72$ می‌نویسیم ، در این‌صورت داریم:

$$(x^۲-x-۶)(x^۲-x-۲۰)=۷۲$$

و اگر $x^۲-x=t$ فرض کنیم ، به معادلهٔ درجهٔ چهارم زیر می‌رسیم :

$$t^۲-۲۶t+۴۸=۰ \Longrightarrow t=۲ \text{ ، } ۲۴ \;;$$

$$t=۲ \Longrightarrow x^۲-x=۲ \Longrightarrow x_۱=-۱ \;;\; x_۲=۲$$

$$t=۲۴ \Longrightarrow x^۲-x=۲۴ \Longrightarrow$$

$$x_{۳،۴}=\frac{۱\pm\sqrt{۹۷}}{۲}$$

حالت خاص. وقتی‌که درمعادلهٔ (۱) مقادیر a ، b ، c و d به‌تصاعد حسابی باشند ، علاوه برروش بالا از قضیهٔ زیر هم می‌توان استفاده کرد :

قضیه : اگر به حاصل ضرب چهار جملهٔ متوالی از یك تصاعد حسابی، توان چهارم قدر نسبت را اضافه کنیم ، یك مجذور کامل بدست می‌آید .

اثبات . چهار جملهٔ متوالی تصاعد حسابی را باقدرنسبت d به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$a \;;\; a+d \;;\; a+۲d \;;\; a+۳d$$

حاصلضرب این چهار جمله را می‌توان چنین نوشت :

$$P=a(a+d)(a+۲d)(a+۳d)=$$

$$=[a(a+۳d)]\cdot[(a+d)(a+۲d)]=$$

$$=(a^۲+۳ad)\cdot[(a^۲+۳ad)+۲d^۲]=$$

$$=(a^۲+۳ad)^۲+۲d^۲(a^۲+۳ad)$$

و واضح است‌که اگر به این حاصلضرب $d^۴$ را اضافه‌کنیم، نتیجه یك‌مجذور کامل می‌شود :

$$(a^۲+۳ad)^۲+۲d^۲(a^۲+۳ad)+d^۴=[(a^۲+۳ad)+d^۲]^۲$$

مثال . مطلوب‌است حل و بحث معادلهٔ زیر :

$$(x+b)(x+a+b)(x+۲a+b)(x+۳a+b)=k$$

حل. برای سهولت کار $x+b=t$ فرض می‌کنیم ، می‌شود :

$$t(t+a)(t+۲a)(t+۳a)=k$$

اگر به طرفین تساوی $a^۴$ اضافه‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$(t^2+3at+a^2)^2=k+a^4$$

ویا :
$$t^2+3at+a^2=\pm\sqrt{k+a^4}$$

وبه این ترتیب معادلهٔ درجهٔ چهارم به دو معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌شود ، جوابهای x چنین‌اند :

$$x=-b+\frac{-3a\pm\sqrt{5a^2\mp\sqrt{k+a^4}}}{2}$$

بحث: اگر $k+a^4<0$ یعنی $k<-a^4$ باشد، معادله چهار ریشهٔ موهومی دارد. اگر $k=-a^4$ باشد ، معادله دو ریشهٔ مضاعف زیر را خواهد داشت:

$$x=-b+\frac{a}{2}(-3\pm\sqrt{5})$$

اگر $k>-a^4$ باشد : اولا $5a^2+\sqrt{k+a^4}$ همیشه مثبت و بنابراین دو جواب معادله حقیقی است . ثانیاً عبارت $5a^2-\sqrt{k+a^4}$ در حالت $k=\frac{9}{16}a^4$ مساوی صفر و به‌ازای $k>\frac{9}{16}a^4$ مثبت‌است. بنابراین در حالت اول ، معادله یك ریشهٔ‌مضاعف و در حالت دوم دوریشهٔ حقیقی‌دیگر هم دارد.

خلاصهٔ بحث در جدول زیر دیده می‌شود:

چهار ریشهٔ موهومی	$k<-a^4$
دوریشهٔ حقیقی و دو ریشهٔ موهومی	$-a^4<k<\frac{9}{16}a^4$
دو ریشهٔ مضاعف حقیقی	$k=-a^4$
یك ریشهٔ مضاعف ودوریشهٔ ساده حقیقی	$k=\frac{9}{16}a^4$
چهار ریشهٔ حقیقی ساده	$k>\frac{9}{16}a^4$

توضیح : در معادلهٔ (۱) با توجه به شرط معادله توانستیم از معادلهٔ درجهٔ چهارم به معادلهٔ درجهٔدوم برسیم . مسأله را می‌توان کلی‌تر طرح کرد، به این‌ترتیب :

معادلهٔ زیررا در نظر می‌گیریم :

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\cdots=m \qquad (۲)$$

فرض می‌کنیم درسمت‌چپ تساوی (۲) ، $2n$ پرانتز وجود داشته‌باشد و بین مقادیر ثابت این پرانتزها، رابطه‌های زیر برقرار باشد :

$$a+b=c+d=\cdots$$

در این صورت اگر طبق روش قبل عمل‌کنیم ، به معادله‌ای از درجهٔ n خواهیم رسید که به شرط قابل حل بودن ، جوابهای معادلـهٔ اصلی هم بدست می‌آید .

مثال . معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$x(x-4)(x-2)(x-1)^2(x+2)+66=0$$

حل. معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$[x(x-2)]\cdot[(x-4)(x+2)]\cdot[(x-1)^2]+66=0 \;;$$

ویا :

$$(x^2-2x)(x^2-2x-8)(x^2-2x+1)+66=0$$

که با فرض $x^2-2x=t$ خواهیم داشت :

$$t(t-8)(t+1)+66=0 \implies t^3-7t^2-8t+66=0 \;;$$

این معادله به صورت زیر قابل تجزیه است :

$$(t+3)(t^2-10t+22)=0$$

$$t+3=0 \implies t_1=-3$$

$$t^2-10t+22=0 \implies t_{2,3}=5\pm\sqrt{3}$$

و از آنجا مقادیر x بدست می‌آید :

$$t_1=-3 \implies x^2-2x+3=0 \qquad \text{(ریشه‌های موهومی)}$$

$$t_2=5+\sqrt{3} \implies x^2-2x-(5+\sqrt{3})=0 \;;$$

$$x=1\pm\sqrt{6+\sqrt{3}}$$

$$t_3=5-\sqrt{3} \implies x^2-2x-(5-\sqrt{3})=0 \;;$$

$$x=1\pm\sqrt{6-\sqrt{3}}$$

تبصره . برای حل انواع معادله‌هایی که در این بند مورد بحث قرار دادیم ، می‌توان واسطهٔ عددی پرانتزها را مجهول کمکی گرفت .

۴. حل معادله‌های به‌صورت:

$$(ax+b)^4+(cx+d)^4=(\alpha x+\beta)^4$$

باشرطهای : $a+c=\alpha$ و $b+d=\beta$

معادله را به‌ترتیب به صورتهای زیر می‌نویسیم :

$$[(ax+b)^2+(cx+d)^2]^2-2(ax+b)^2(cx+d)^2=(\alpha x+\beta)^4$$

و سپس :

$$\left\{[a+c)x+(b+d)]^2-2(ax+b)(cx+d)\right\}^2-$$
$$-2(ax+b)^2(cx+d)^2=(\alpha x+\beta)^4$$

که با توجه به شرطهای $a+c=\alpha$ و $b+d=\beta$ خواهیم داشت:

$$(\alpha x+\beta)^4+4(ax+b)^2(cx+d)^2-$$
$$-4(ax+b)(cx+d)(\alpha x+\beta)^2-2(ax+b)^2(cx+d)^2=$$
$$=(\alpha x+\beta)^4$$

که پس از ساده‌کردن چنین می‌شود .

$$2(ax+b)(cx+d)[(ax+b)(cx+d)-2(\alpha x+\beta)^2]=0$$

که دیگر قابل حل است .

مثال . مطلوب‌است حل معادلهٔ زیر :

$$(2-x)^4+(2x-1)^4=(x+1)^4$$

حل. اگر با روش بالا عمل کنیم، به ترتیب خواهیم داشت :

$$[(2-x)^2+(2x-1)^2]^2-2(2-x)^2(2x-1)^2=(x+1)^4\ ;$$
$$[(x+1)^2-2(2-x)(2x-1)]^2-2(2-x)^2(2x-1)^2=$$
$$=(x+1)^4\ ;$$
$$2(2-x)^2(2x-1)^2-4(2-x)(2x-1)(x+1)^2=0\ ;$$
$$2(2-x)(2x-1)(4x^2-x+4)=0\ ;$$

$$x_1=2 \; ; \; x_2=\frac{1}{2}$$

دو ریشهٔ دیگر موهومی است .

۴. تبدیل نقش مجهول و پارامتر به یکدیگر

به معادلهٔ زیر توجه کنید :

$$2x^4+x^3-(3a+2)x^2+2x+a^2-1=0 .$$

این معادله نسبت به x از درجهٔ چهارم است و بنابراین نمی‌توان از راه حلهای عادی برای حل آن استفاده کرد . ولی همین معادله نسبت به پارامتر a از درجهٔ دوم است واگر نقش مجهول و پارامتر را با هم عوض کنیم، نسبت به a معادله‌ای درجهٔ دوم و قابل حل می‌شود :

$$a^2-3x^2\cdot a+(2x^4+x^3-2x^2+2x-1)=0$$

شرط اینکه از این‌راه بتوان به نتیجه رسید، این‌است که جوابهای a نسبت به x مقادیر گویا باشند . بنابراین قبل از حل ، مبین معادله را حساب می کنیم :

$$\Delta=9x^4-4(2x^4+x^3-2x^2+2x-1)=$$
$$=x^4-4x^3+8x^2-8x+4=(x^2-2x+2)^2$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$a=\frac{3x^2\pm(x^2-2x+2)}{2} \; ;$$
$$a_1=x^2+x-1 \quad ; \quad a_2=2x^2-x+1$$

به این‌ترتیب معادلهٔ درجهٔ چهارم مفروض به دو معادلهٔ درجهٔ دوم زیر تبدیل می‌شود :

$$x^2+x-(a+1)=0 \quad ; \quad 2x^2-x+(1-a)=0$$

و از آنجا جوابهای x بدست می‌آید :

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{4a+5}\right) \; ; \; x_{3,4}=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{4a-3}\right)$$

بحث : اگر $a>\frac{۳}{۴}$ باشد ، معادله چهار ریشهٔ حقیقی دارد .

اگر $-\frac{۵}{۴}<a<\frac{۳}{۴}$ باشد ، معادله‌دوریشهٔ حقیقی و دوریشهٔموهومی دارد .

اگر $a<-\frac{۵}{۴}$ باشد ، چهار ریشهٔ معادله موهومی است .

در حالت‌خاص $a=\frac{۳}{۴}$ ، معادلـه یك ریشهٔ مضاعف و دو ریشهٔ سادهٔ حقیقی دارد.

و بالاخره در حالت $a=-\frac{۵}{۴}$ ، معادله یك ریشهٔ مضاعف حقیقی ودو ریشهٔ موهومی دارد.

مثال ۲. معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$x^{۳}-(۳+\sqrt{۳})x+۳=۰$$

حل. این معادله را می‌توان به طریق تجزیهٔ عبارت سمت چپ‌تساوی حل کرد ، ولی ما آنرابا روش بالا حل می‌کنیم. بهتر است $a=\sqrt{۳}$ فرض شود ، در این‌صورت معادله چنین می‌شود:

$$x^{۳}-(a^{۲}+a)x+a^{۲}=۰$$

سپس معادله را نسبت به a منظم می‌کنیم:

$$(۱-x)a^{۲}-x\cdot a+x^{۳}=۰$$

ریشه‌های این معادله (نسبت به مجهولa) چنین‌اند:

$$a=\frac{x\pm(x-۲x^{۲})}{۲(۱-x)}\Longrightarrow a_{۱}=x \ ، \ a_{۲}=\frac{x^{۲}}{۱-x}$$

که اگر بجای a مقدارش $\sqrt{۳}$ را قرار دهیم ، خواهیم داشت:

$$x=\sqrt{۳} \ ; \ x^{۲}+\sqrt{۳}x-\sqrt{۳}=۰$$

و از آنجا:

$$x_{۱}=\sqrt{۳} \ ; \ x_{۲،۳}=\frac{-\sqrt{۳}\pm\sqrt{۳+۴\sqrt{۳}}}{۲}$$

مثال ۳. مطلوب‌است حل معادلهٔ :

$$(ax^2+bx+c)^2=x^2(x^2+bx+c) \qquad (1)$$

حل. هر معادله‌ای به این‌صورت را می‌توان به دوطریق حل‌کرد.

روش اول : اگر فرض‌کنیم $bx+c=t$ خواهیم داشت :

$$(ax^2+t)^2=x^2(x^2+t)$$

معادله را نسبت به t منظم می‌کنیم :

$$t^2+x^2(2a-1)t+x^4(a^2-1)=0$$

معادله نسبت به t از درجهٔ دوم است ، جوابهای t چنین‌اند :

$$t=\frac{-x^2(2a-1)\pm x^2\sqrt{5-4a}}{2}$$

که اگر بجای t مقدارش را قرار دهیم ، به دو معادلهٔ درجهٔ دوم‌زیر (نسبت به مجهول x) می‌رسیم :

$$(1-2a\pm\sqrt{5-4a})x^2-2bx-2c=0$$

روش دوم : طرفین معادلهٔ (۱) را بر x^4 تقسیم می‌کنیم :

$$\left(a+\frac{bx+c}{x^2}\right)^2=1+\frac{bx+c}{x^2}$$

حالا $\frac{bx+c}{x^2}=y$ می‌گیریم ، چنین می‌شود :

$$(a+y)^2=1+y \implies y^2+(2a-1)y+(a^2-1)=0$$

از اینجا y و سپس x بدست می‌آید .

مثال ۴. مطلوب‌است حل معادلهٔ زیر :

$$(ax^2+bx+c)^2+(a'x^2+mbx+mc)^2=\alpha x^4$$

حل. این معادله را هم می‌توان‌شبیه معادلهٔ قبل با تقسیم طرفین‌تساوی بر x^4 و فرض $\frac{bx+c}{x^2}=t$ حل کرد و هم می‌توان $bx+c=y$ فرض کرد و سپس معادله را نسبت به مجهول y حل نمود .

مثال ۵. معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$(ax^2+bx+c)^2+(max^2+b'x+mc)^2=\alpha x^2$$

حل. هم با تقسیم طرفین معادله بر $x^۲$ و انتخاب $\frac{ax^۲+c}{x}=t$ و هم از ابتدا بفرض $ax^۲+c=y$ و حل معادله نسبت‌به مجهول y، می‌توان این معادله را حل کرد .

۵. استفاده از بعضی رابطه‌های مثلثاتی

معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\frac{۳x-x^۳}{۱-۳x^۲}=\sqrt{۳} \qquad (۱)$$

ضریبهای مجهول درکسرسمت‌چپ تساوی ، همان ضریبهای بسط $tg۳\alpha$ است و بنابراین اگر $x=tg\alpha$ فرض شود ، معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر در می‌آید :

$$\frac{۳tg\alpha-tg^۳\alpha}{۱-۳tg^۲\alpha}=\sqrt{۳} \implies tg۳\alpha=tg\frac{\pi}{۳}\ ;$$

$$۳\alpha=k\pi+\frac{\pi}{۳} \implies \alpha=\frac{۱}{۳}k\pi+\frac{\pi}{۹}$$

و بنابراین : $x=tg\left(\frac{۱}{۳}k\pi+\frac{\pi}{۹}\right)$

معادلهٔ (۱) ، معادله‌ای درجهٔ سوم است و بنابراین حداکثر سه‌جواب حقیقی دارد :

$$k=۰ \implies x_۱=tg۲۰^\circ$$
$$k=۱ \implies x_۲=tg۸۰^\circ$$
$$k=۲ \implies x_۳=tg۱۴۰^\circ=-tg۴۰^\circ$$

و به این ترتیب جوابهای معادلهٔ درجهٔ سوم بدست آمد .

توضیح . اگر معادلهٔ درجهٔ سوم (۱) را منظم‌کنیم ، می‌شود :

$$x^۳-۳\sqrt{۳}x^۲-۳x+\sqrt{۳}=۰$$

که با استفاده از رابطه‌های بین ضریبها و ریشه‌ها ، در معادلهٔ درجهٔ سوم ، رابطه‌های مثلثاتی زیر بدست می‌آید:

$$tg20^\circ - tg40^\circ + tg80^\circ = 3\sqrt{3}$$
$$tg20^\circ tg40^\circ + tg40^\circ tg80^\circ - tg20^\circ tg80^\circ = 3$$
$$tg20^\circ tg40^\circ tg80^\circ = \sqrt{3}$$

مثال ۲. مطلوب‌است حل معادلهٔ زیر:

$$32x^5 - 40x^3 + 10x = 1$$

حل. با فرض $x = \cos\alpha$ خواهیم داشت:

$$2(16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha) = 1 \Longrightarrow 2\cos5\alpha = 1\ ;$$

$$\cos5\alpha = \cos\frac{\pi}{3} \Longrightarrow \alpha = \frac{2}{5}k\pi \pm \frac{\pi}{15}$$

و از آنجا:

$$x = \cos\left(\frac{2}{5}k\pi \pm \frac{\pi}{15}\right)$$

که اگر مقادیر مختلف k را درنظر بگیریم ، پنج جواب برای x بدست می‌آید:

$$k = 0 \Longrightarrow x_1 = \cos12^\circ$$

$$k = 1 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x_2 = \cos84^\circ = \sin6^\circ \\ x_3 = \cos60^\circ = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$k = 2 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x_4 = \cos156^\circ = -\cos24^\circ \\ x_5 = \cos132^\circ = -\cos48^\circ \end{array} \right.$$

البته در اینجا باتوجه به‌معلوم بودن خطهای مثلثاتی قوس ۳۰ درجه‌و $\sin18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ، می‌توان $\cos12^\circ$ و بقیهٔ جوابها را به صورت جبری در آورد .

همچنین شبیه مثال ۱ ، می‌توان با استفاده از رابطه‌های بین ریشه‌هاو ضریبها در یك معادلهٔ درجهٔ ۵، پنج رابطهٔ مثلثاتی نتیجه‌گرفت.

مثال ۳. مطلوب است حل معادلهٔ:

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x-\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x=1$$

با شرط $0<a<1$

حل. دوطرف معادله را بر $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$ تقسیم‌می کنیم،چنین‌می‌شود:

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x+\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x=1$$

اگر فرض کنیم $a=tg\frac{\alpha}{2}$ ، معادلهٔ مفروض به‌صورت زیر در می‌آید:

$$(\cos\alpha)^x+(\sin\alpha)^x=1$$

با توجه به شرط $0<a<1$ می‌توان $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ در نظر گرفت.

در این‌صورت تابع سمت‌چپ تساوی ، نسبت به x نزولی است (یعنی بابزرگ شدن x زیاد و باکوچك شدن x ،کم می‌شود).

به‌ازای $x=2$ این تابع برابر۱ می‌شود وبنابراین $x=2$ تنها ریشهٔ معادلهٔ مفروض است .

توضیح. درمثلثات هم می‌توان بعضی‌ازمعادله‌های مثلثاتی رابه‌کمك‌جبر حل‌کرد و ما در اینجا یك نمونه از اینگونه مساله‌ها را می‌آوریم .

مثال . معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\cos^2\varphi+\cos^2 2\varphi-2\cos\varphi\cos 2\varphi\cos 4\varphi=\frac{3}{4}$$

حل. $\sqrt{-1}=i$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم :

$$z=\cos\varphi+i\sin\varphi \qquad (1)$$

به سادگی دیده می‌شود که داریم : $\frac{1}{z}=\cos\varphi-i\sin\varphi \quad (2)$

اگر از رابطه‌های (۱) و (۲) مقدار $\cos\varphi$ را بدست‌آوریم ، می‌شود:

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

حالا $\cos 2\varphi$ و $\cos 4\varphi$ را محاسبه می‌کنیم :

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)$$

و به‌همین ترتیب: $\cos 4\varphi = \frac{1}{2}\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)$

معادلهٔ مفروض به‌صورت زیر در می‌آید :

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)=3$$

که پس از تبدیل به‌صورت زیر در می‌آید:

$$(-1+z-z^2+\dots+z^{13}-z^{14})-(z^{13}+z)=0$$

مجموع جمله‌های پرانتز اول مساوی $\frac{z^{15}+1}{z+1}$ است و از طرف دیگر $z \neq -1$ است، زیرا $\varphi=(2k+1)\pi$ در معادلهٔ مفروض صدق نمی‌کند.
بنابراین معادله ، به‌صورت زیر در می‌آید:

$$1+z^{15}+(z+1)(z^{13}+z)=0$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$(1+z+z^2)+z^{13}(1+z+z^2)=0$$

ویا :

$$(1+z+z^2)(1+z^{13})=0$$

اگر $1+z+z^2=0$ باشد ، خواهیم داشت :

$$z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \;;\; z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ویا : $\varphi_1=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \;;\; \varphi_2=2k\pi-\frac{2\pi}{3}$

و اگر $z^{13}+1=0$ باشد ، می‌توان نوشت :

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{13}=-1 \implies \cos 13\varphi+i\sin 13\varphi=-1$$

(از رابطهٔ مواور استفاده کردیم).
و یا چون طرف دوم تساوی مقدار موهومی ندارد :

$$\cos 13\varphi=-1 \implies \varphi_3=\frac{(2k+1)\pi}{13}+2m\pi$$

$$(k \neq ۶ \; ; \; ۰ < k < ۱۲)$$

۶. جستجوی ریشه‌های گویا

قبلا چند قضیه را یادآوری می‌کنیم :

۱) رابطه‌های بین ریشه‌ها وضریبها درمعادلهٔ درجهٔ n [1]

معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

$$ax^n+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}+\cdots+kx+l=۰$$

اگر n ریشهٔ این معادله را (حقیقی یا موهومی) به $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ...، x_n نشان دهیم ، خواهیم داشت :

$$ax^n+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}+\dots+kx+l\equiv$$
$$\equiv a(x-x_۱)(x-x_۲)(x-x_۳)\dots(x-x_n)$$

از این اتحاد رابطه‌های زیر بدست می‌آید :

$$\Sigma x_۱=x_۱+x_۲+\cdots+x_n=-\frac{b}{a}$$

$$\Sigma(x_۱x_۲)=x_۱x_۲+x_۱x_۳+\cdots+x_{n-۱}x_n=\frac{c}{a}$$

$$\Sigma(x_۱x_۲x_۳)=-\frac{d}{a}$$

$$\Sigma(x_۱x_۲x_۳x_۴)=\frac{e}{a}$$

....

$$x_۱x_۲x_۳\cdots x_n=(-۱)^n\frac{l}{a}$$

۲) قضیه . اگردر معادله‌ای باضریبهای صحیح ضریب بزرگترین‌درجه

۱ــ منظورازرابطه‌های‌بین ریشه‌ها وضریبهاساده‌ترین‌رابطه‌های‌متقارن بین ریشه‌ها و ضریبها است، نه هررابطهٔ دلخواهی‌از ریشه‌ها (به‌کتاب تقارن در هندسه و جبر وکتاب تقارن در جبر مراجعه‌کنید).

مساوی واحد باشد، معادله دارای ریشه‌ای به‌صورت $\frac{p}{q}$ نیست (p و q عددهایی صحیح و نسبت به‌هم اولند) .

اثبات. معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+kx+l=0 \qquad (1)$$

(ضریبها عددهایی صحیح‌اند).

اگر این معادله، ریشه‌ای به‌صورت $\frac{p}{q}$ داشته باشد ، پس از قرار دادن این مقدار به جای x بدست می‌آید :

$$p^n=-q(bp^{n-1}+cqp^{n-2}+\dots+kq^{n-2}p+lq^{n-1})$$

طرف دوم تساوی مضربی است از q و بنابراین باید p^n و درنتیجه p مضربی از q باشد کـه با توجه به فرض (p و q نسبت به‌هم اول بودند) غیرممکن است .

۳) قضیه . اگر معادلهٔ (۱) دارای ریشهٔ گویا باشد ، اولا این ریشه صحیح است ، ثانیاً مقسوم علیهی (مثبت یا منفی) از مقدار ثابت l خواهـد بود.

اثبات. اگر α ریشهٔ صحیح معادلهٔ (۱) باشد ، باید داشته باشیم :

$$\alpha(\alpha^{n-1}+b\alpha^{n-2}+c\alpha^{n-3}+\dots+k)=-l$$

و بنابراین واضح است که باید l مضربی از α باشد.

مثال۱. این معادله را حل کنید :

$$x^4+5x^3-2x^2-9x+5=0$$

حل. حاصلضرب ریشه ها در این معادله برابر است با ۵ و بنابراین ریشه‌های احتمالی گویای این معادله(که درصورت وجود عددهایی صحیح‌اند) جزء مقسوم علیه‌های مثبت یا منفی ۵ هستند . این مقسوم علیه‌ها عبارتند از ۱± و ۵± و به‌سادگی دیـده می‌شود کـه ۱+ و ۵− در این معادله صدق می‌کنند. با توجه به این اطلاع می‌توان عبارت درجه‌چهارم سمت چپ تساوی را تجزیه کرد :

$$(x-1)(x+5)(x^2+x-1)=0$$

و از آنجا جوابهای معادله بدست می‌آید :

$$x_1=1 \;;\; x_2=-5 \;;\; x_{3,4}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$$

* * *

درحالتی که ضریب‌بزرگترین درجهٔ معادله مساوی واحدنباشد$(a\neq 1)$ به شرط صحیح بودن همه ضریبها و با توجه به اینکه قدر مطلق حاصلضرب ریشه‌ها مساوی $\left|\frac{l}{a}\right|$ است ، اگر معادله ، ریشهٔ گویا داشته باشد، این‌ریشه به صورت کسری است که صورت آن مقسوم‌علیهی از l و مخرج آن مقسوم علیهی از a است .

مثال۲. مطلوب‌است حل معادلهٔ زیر:

$$2x^4+2x^3-10x^2-2x+3=0$$

حل. قدر مطلق حاصلضرب ریشه‌ها ، در این معادله مساوی $\frac{3}{2}$ است و بنابراین ریشه‌های گویای معادله (اگر چنین ریشه‌هایی وجود داشته باشد) بین عددهای زیر هستند :

$$\pm 1 \;;\; \pm 3 \;;\; \pm\frac{1}{2} \;;\; \pm\frac{3}{2}$$

و به سادگی دیده می‌شود که عددهای $\frac{1}{2}$ و -3 در معادله‌صدق‌می‌کنند و معادله به‌صورت زیر در می‌آید :

$$(2x-1)(x+3)(x^2-x-1)=0 \;;$$

$$x_1=\frac{1}{2} \;;\; x_2=-3 \;;\; x_{3,4}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$$

* * *

روشن است که وقتی تعداد مقسوم‌علیه‌های مقدارثابت معادله زیاد باشد، جستجوی ریشه‌های صحیح معادلهٔ :

$$x^n+bx^{n-1}\times cx^{n-2}+\dots+px^3+hx^2+kx+l=0 \quad (1)$$

کاری مفصل و غیر عملی می‌شود .

روشی را ذکر می‌کنیم که با کمك آن بتوان مقسوم‌علیه‌هایی ازمقدار ثابت را که جزو ریشه‌ها نیستند «غربال» کرد.

این روش مبتنی بر قضیهٔ سادهٔ زیر است:

قضیه . اگر α ریشهٔ صحیح معادلهٔ (۱) باشد ، باید مقسوم علیهی از عدد :

$$k+\beta$$

باشد که در آن k ضریب x و $\beta=\frac{l}{\alpha}$ است .

اثبات . چون α ریشهٔ معادله است باید در آن صدق کند ، یعنی :

$$\alpha^n+b\alpha^{n-1}+\dots+h\alpha^2+k\alpha+l=0$$

این رابطه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\alpha^2(\alpha^{n-2}+b\alpha^{n-3}+\dots+h)=-(k\alpha+l)$$

طرف دوم تساوی باید بر α^2 قابل‌قسمت باشد یعنی کسر :

$$\frac{k\alpha+l}{\alpha^2}=\frac{k+\beta}{\alpha}$$

عددی است صحیح ، یعنی α مقسوم علیهی از $k+\beta$ است .

بنابراین اگر α مقسوم‌علیه $k+\beta$ نباشد، ریشهٔ معادله نیست و می‌توان آنرا از بین مقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت حذف کرد .

مثال . معادلهٔ زیر مفروض است :

$$x^4-5x^3+2x^2+20x-24=0$$

ریشه‌های صحیح معادله را تعیین کنید .

جدول زیر را برای مقسوم‌علیه‌های ۲۴ تشکیل می‌دهیم :

α	۲	−۲	۳	−۳	۴	−۴	۶	−۶	۸	−۸	۱۲	−۱۲	۲۴	−۲۴
$۲۰-\frac{۲۴}{\alpha}$	۸	۳۲	۱۲	۲۸	۱۴	۲۶	۱۶	۲۴	۱۷	۲۳	۱۸	۲۲	۱۹	۲۱
ریشهٔ قابل آزمایش	۲	−۲	۳	—	—	—	—	−۶	—	—	—	—	—	—

البته ۱± را در این جدول وارد نکرده‌ایم ، چون این دو عددهمیشه قابل آزمایش هستند. ازعددهای بدست‌آمده ۶− در معادله صدق نمی‌کند و ۲± و ۳ در معادله صدق می‌کنند .

معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$(x-۲)^۲(x+۲)(x-۳)=۰ \ ;$$
$$x_۱=x_۲=۲ \ ; \ x_۳=-۲ \ ; \ x_۴=۳$$

قضیه . اگر α ریشهٔ صحیح معادلهٔ (۱) باشد ، اعداد l و $k\alpha+l$ و $h\alpha^۲+k\alpha+l$ و ... و $b\alpha^{n-۱}+\dots+k\alpha+l$ به‌ترتیب بر α، $\alpha^۲$، $\alpha^۳$ و ... و α^n قابل قسمت خواهند بود.

برای اثبات کافی است تساویهای زیر را در نظر بگیریم :

$$\alpha^۳(\alpha^{n-۳}+b\alpha^{n-۴}+\dots+p)=-(h\alpha^۲+k\alpha+l)$$

....

$$\alpha^{n-۱}(\alpha+b)=-(c\alpha^{n-۲}+\dots+k\alpha+l)$$
$$\alpha^n=-(b\alpha^{n-۱}+c\alpha^{n-۲}+\dots+k\alpha+l)$$

چون سمت‌چپ این تساویها به‌ترتیب بر $\alpha^۳$، ...، $\alpha^{n-۱}$ و α^n قابل قسمت است، باید سمت راست تساویها هم بر همین مقادیرقابل قسمت باشند.

برای سهولت کار فرض می‌کنیم :

$$\beta_n=\frac{l}{\alpha}$$
$$\beta_{n-۱}=\frac{k\alpha+l}{\alpha^۲}=\frac{k+\beta_n}{\alpha}$$

$$\beta_{n-2}=\frac{h\alpha^2+k\alpha+l}{\alpha^3}=\frac{h+\beta_{n-1}}{\alpha}$$

....

$$\beta_2=\frac{c+\beta_3}{\alpha}$$

$$\beta_1=\frac{b+\beta_2}{\alpha}=-1$$

مثال. معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0$$

حل: جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

α	۱	−۱	۲	−۲	۴	−۴	۸	−۸	۱۶	−۱۶
$\beta_4=\frac{16}{\alpha}$	۱۶	−۱۶	۸	−۸	۴	−۴	۲	−۲	۱	۱
$\beta_3=\frac{12+\beta_4}{\alpha}$	۲۸	۴	۱۰	−۲	۴	−۲	—	—	—	—
$\beta_2=\frac{-8+\beta_3}{\alpha}$	۲۰	۴	۱	۵	−۱	—	—	—	—	—
$\beta_1=\frac{-3+\beta_2}{\alpha}$	۱۷	−۱	−۱	−۱	−۱	—	—	—	—	—
ریشه‌ها	—	−۱	۲	−۲	۴	—	—	—	—	—

در حالتی‌که ضریب بزرگترین درجه واحد نباشد و داشته باشیم :

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+kx+l=0$$

(a ، b ، c ، . . . ، k و l عددهایی صحیح هستند) . فرض می‌کنیم $y=ax$ ، بدست می‌آید :

$$\frac{y^n}{a^{n-1}}+\frac{by^{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{cy^{n-2}}{a^{n-2}}+\dots+\frac{ky}{a}+l=0$$

$$y^n+by^{n-1}+acy^{n-2}+\dots+ka^{n-2}y+la^{n-1}=0$$

و سپس مثل حالت قبل عمل می‌کنیم .

۷. راه حلهایی برای معادله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم

قبلا متذکر می‌شویم که اگر در معادلهٔ درجهٔ n :

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+kx+l=0$$

تغییر مجهول $x=X-\frac{b}{na}$ بدهیم ، به معادلهٔ درجهٔ n جدیدی‌می‌رسیم که فاقد جمله‌ای از مجهول با توان $(n-1)$ است .

به این ترتیب هر معادلهٔ کامل درجهٔ سوم را می‌توان به صورت زیر در آورد :

$$x^3+px+q=0 \qquad (1)$$

و همچنین هر معادلهٔ درجهٔ چهارم کامل را به صورت زیر :

$$x^4+px^3+qx^2+r=0 \qquad (2)$$

اکنون به حل معادلهٔ $x^3+px+q=0$ می‌پردازیم :

اتحاد زیر را در نظرمی‌گیریم :

$$x^3+px+q\equiv\alpha(x+a)^3+\beta(x+b)^3 \qquad (I)$$

اگردراین اتحاد بتوانیم‌ضریبهای نامعین α ، β ، a و b را معین کنیم، حل معادله به انجام می‌رسد . با مساوی قراردادن ضریبهای‌توانهای مساوی در دو طرف به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ a\alpha+b\beta=0\\ a^2\alpha+b^2\beta=\frac{p}{3}\\ a^3\alpha+b^3\beta=q\end{cases}$$

از معادلهٔ اول دستگاه بدست می‌آید : $\alpha = ۱ - \beta$

که اگر در سه معادلهٔ بعدی قرار دهیم می‌شود:

$$\begin{cases} \beta(a-b)=a \\ \beta(a^۲-b^۲)=a^۲-\frac{p}{۳} \qquad (II) \\ \beta(a^۳-b^۳)=a^۳-q \end{cases}$$

به ترتیب معادله‌های دوم و سوم این دستگاه را بر معادلهٔ اول تقسیم می‌کنیم ، می‌شود :

$$\begin{cases} a+b=\frac{۳a^۲-p}{۳a} \\ a^۲+ab+b^۲=\frac{a^۳-q}{a} \end{cases}$$

و یا پس از ساده کردن :

$$\begin{cases} ab=-\frac{p}{۳} \\ ab(a+b)=-q \end{cases}$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} a\cdot b=-\frac{p}{۳} \\ a+b=\ \ \frac{۳q}{p} \end{cases} \qquad (III)$$

از این دستگاه مقادیر a و b وسپس باکمك معادلهٔ اول دستگاه(II) مقدار β بدست می‌آید ، α هم از رابطهٔ $\alpha = ۱ - \beta$ محاسبه می‌شود .

توضیح. روشن است که اتحاد (I) وقتی برای مقادیر حقیقی برقرار است که معادلهٔ (۱) تنها یك ریشهٔ حقیقی داشته باشد ، زیرا معادلهٔ :

$$\alpha(x+a)^۳+\beta(x+b)^۳=۰$$

یك ریشهٔ حقیقی بیشتر ندارد . از طرف دیگر برای حقیقی بودن مقادیر a و

b ، باید ریشه‌های دستگاه III ، یعنی ریشه‌های معادلهٔ درجهٔدوم زیرحقیقی باشند :

$$3pt^2-9qt-p^2=0$$

مبین این معادله چنین است :

$$\Delta=81q^2+12p^3=3(4p^3+27q^2)$$

بنابراین شرط اینکه معادلهٔ (۱) تنها یك ریشهٔ حقیقی داشته باشد ، این‌است که $4p^3+27q^2>0$ باشد.

عین همین روش را برای معادلهٔ (۲) هم می‌توان بکار برد و ضریبهای نامعلوم را در اتحاد زیر بدست آورد :

$$x^4+px^2+qx+r\equiv\alpha(x+a)^4+\beta(x+b)^4$$

و سپس معادله را حل‌کرد .

ولی باید توجه داشت که اگرچه این روش برای حل معادله‌های درجهٔ سوم و چهارم‌کلی بنظر می‌رسد، در عمل منجر به محاسبه‌های طولانی و مفصل می‌شود و به‌ندرت می‌توان از آن استفاده کرد.

مثال . معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$x^3+6x^2+15x+14=0$$

حل. ابتدا باتبدیل $x=y-2$، معادله را به‌صورت زیردرمی‌آوریم:

$$y^3+3y+8=0$$

اتحاد زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$y^3+3y+8\equiv\alpha(x+a)^3+\beta(x+b)^3$$

دستگاه زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ a\alpha+b\beta=0\\ a^2\alpha+b^2\beta=1\\ a^3\alpha+b^3\beta=8\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\alpha=1-\beta\\ \beta(a-b)=a\\ \beta(a^2-b^2)=a^2-1\\ \beta(a^3-b^3)=a^3-8\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{a^{2}-1}{a} \\ a^{2}+ab+b^{2}=\dfrac{a^{3}-8}{a} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ab=-1 \\ a+b=8 \end{cases}$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$a=4+\sqrt{17} \;;\; b=4-\sqrt{17}$$

و سپس :

$$\alpha=\frac{17-4\sqrt{17}}{34} \;;\; \beta=\frac{17+4\sqrt{17}}{34}$$

حقیقی بودن مقادیر a و b و α و β به معنای این‌است که معادلهٔ درجهٔ سوم مفروض تنها یك ریشهٔ حقیقی دارد.

اکنون برای بدست آوردن این ریشهٔ حقیقی، معادلهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\alpha(y+a)^{3}+\beta(y+b)^{3}=0$$

که از آنجا مقدار حقیقی y بدست می‌آید :

$$y=-\frac{a\sqrt[3]{\alpha}+b\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}$$

$$x=y-2=-\left(2+\frac{a\sqrt[3]{\alpha}+b\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}\right)$$

۸. استفاده از وجود رابطه‌ای بین بعضی از ریشه‌ها

مطلب را با ذکر یك مثال روشن می‌کنیم.

مثال. m را چنان پیدا کنید که مجموع دو ریشه از معادلهٔ:

$$x^{4}-8x^{3}+mx^{2}+128x+165=0$$

مساوی ۶ باشد و سپس معادله را حل کنید.

حل. از رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبهای معادله استفاده می‌کنیم :

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8$$

و چون طبق فرض داریم : $x_1+x_2=6$ ، بدست می‌آید :

$$x_3+x_4=2$$

رابطهٔ حاصلضربهای دو بدوی ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=m$$

ویا : $x_1x_2+x_3x_4+(x_1+x_2)(x_3+x_4)=m$

ویا : $x_1x_2+x_3x_4=m-12 \quad (1)$

و رابطهٔ حاصلضربهای سه به سه ریشه‌ها:

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-128$$

و یا : $x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-128$

ویا : $2x_1x_2+6x_3x_4=-128$;

$$x_1x_2+3x_3x_4=-64 \qquad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x_1x_2+x_3x_4=m-12 \\ x_1x_2+3x_3x_4=-64 \end{cases}$$

و از آنجا :

$$x_1x_2=\frac{3m+28}{2} \ ; \ x_3x_4=-\frac{m+52}{2}$$

حاصلضرب چهار ریشه را می‌نویسیم :

$$x_1x_2x_3x_4=165 \qquad (3)$$

به جای x_1x_2 و x_3x_4 مقدارهایشان را قرار می‌دهیم ، می‌شود :

$$-\frac{m+52}{2}\times\frac{3m+28}{2}=165$$

و یا : $3m^2+184m+2116=0$;

$$m_1=-46 \ ; \ m_2=-\frac{46}{3}$$

ابتدا $m=-46$ رادرنظر می‌گیریم، رابطه‌های(۱)و(۳)رامی‌نویسیم:

$$\begin{cases} (x_1x_2)+(x_3x_4)=-58 \\ (x_1x_2)\cdot(x_3x_4)=165 \end{cases}$$

از اینجا مقادیر x_1x_2 و x_3x_4 بدست‌می‌آید . معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$t^2+58t+165=0$$

جوابهای t مساوی ۵۵— و ۳— می‌شود که با توجه به رابطهٔ (۲) خواهیم داشت :

$$x_1x_2=-55 \ ; \ x_3x_4=-3$$

و بالاخره باکمك دستگاههای زیر مقادیر جوابها بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1x_2=-55 \end{cases} ; \begin{cases} x_3+x_4=2 \\ x_3x_4=-3 \end{cases}$$

جواب :

$$x_1=-5 \ , \ x_2=11 \ ; \ x_3=-1 \ ; \ x_4=3$$

سپس $m=-\frac{46}{3}$ را در نظر می‌گیریم : دراین صورت بدست‌می‌آید:

$$\begin{cases} x_1x_2=1 \\ x_1+x_2=6 \end{cases} ; \begin{cases} x_3x_4=-\frac{55}{3} \\ x_3+x_4=2 \end{cases}$$

و چهار جواب x چنین است :

$$x_1=3+2\sqrt{2} \ ; \ x_2=3-2\sqrt{2} \ ;$$
$$x_3=\frac{3+\sqrt{174}}{3} \ ; \ x_4=\frac{3-\sqrt{174}}{3}$$

۹. نکته‌ای دربارهٔ حل معادله‌های گنگ

قبل از اینکه به گویاکردن یك معادلهٔ گنگ بپردازیم ، همیشه بهتر است احتمال تجزیهٔ عبارت را در نظربگیریم، برای این‌منظور ابتدا جمله‌های

گویا و یــا جمله‌های گنگ را (هر کدام که ساده‌تر است) تجزیه می‌کنیم و ریشه‌های آنرا در قسمت دیگر آزمایش می‌کنیم . اگر ریشهٔ مشترك داشته باشند، به معنای این‌است که معادله قابل تجزیه است .

مثال : معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}=2$$

حل. معادله را چنین می‌نویسیم :

$$(x^3+3x-2)+(x-1)(x+1)\sqrt{(x-2)(x+2)}=0$$

اعداد ۱− و ۲+ درهردو عبارت (عبارت گویا وعبارت گنگ)صدق می‌کنند ، بنابراین می‌توان معادله را به‌صورت زیر نوشت:

$$(x+1)^2(x-2)+(x-1)(x+1)\sqrt{(x-2)(x+2)}=0$$

ویا :

$$(x-1)\sqrt{x-2}[(x+1)\sqrt{x-2}+(x-1)\sqrt{x+2}]=0$$

و ریشه‌های معادله بدست می‌آید :

$$x_1=-1 \ ; \ x_2=+2$$

(مقدار داخل کروشه مخالف صفر است) .

۱۰. گویاکردن معادلات به‌صورت : $\sqrt[3]{u}\pm\sqrt[3]{v}=a$

با توجه به اتحاد :

$$(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$$

دوطرف معادلهٔ مفروض را مکعب می‌کنیم:

$$u\pm v\pm 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u}\pm\sqrt[3]{v})=a^3$$

و چون طبق فرض داریم $\sqrt[3]{u}\pm\sqrt[3]{v}=a$ ، معادلهٔ مفروض‌به‌صورت زیر در می‌آید :

$$u\pm v\pm 3a\sqrt[3]{uv}=a^3 \ ,$$

ویا :

$$u\pm v-a^3=\mp 3a\sqrt[3]{uv}$$

که اگر مجدداً دوطرف معادله‌را مکعب کنیم، به صورت زیر که‌معادله‌ای

گویا است در می‌آید :

$$(u\pm v-a^3)^3=\mp 27a^3uv$$

مثال . معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{3x+2}=3$$

حل. با مکعب کردن دوطرف معادله ، بدست می‌آید:

$$(2x-3)+(3x+2)+9\sqrt[3]{(2x-3)(3x+2)}=27$$

و یا پس از عملهای لازم :

$$9\sqrt[3]{6x^2-5x-6}=28-5x$$

دوباره دوطرف معادله را مکعب می‌کنیم، که پس از منظم کردن به معادلهٔ زیر خواهیم رسید :

$$125x^3+2274x^2+8115x-26226=0$$

این معادله به‌صورت زیر قابل تجزیه است:

$$(x-2)(125x^2+2524x+13163)=0$$

ریشهٔ عامل درجهٔ اول $x=2$ و ریشه‌های عامل درجهٔ دوم موهومی است .

در این معادله احتیاجی نیست که جواب بدست آمده را آزمایش کنیم، زیرا دوطرف معادله را دوبار به توان ۳ رساندیم و چون ۳ عددی است فرد، جواب حقیقی اضافی در معادله وارد نمی‌شود و جواب بدست آمده قابل‌قبول است .

۱۱. یك نكتهٔ دیگر

می‌دانیم که درمعادله‌های گنگ وقتی‌لااقل فرجهٔ یکی‌از رادیکالها زوج باشد ، اکثراً برای حل ناچار می‌شویم دوطرف معادله را یك یا چند بار به توان زوج برسانیم و این عمل باعث می‌شود که ریشه‌های معادله یا معادله‌های دیگری را در معادلهٔ مفروض ما داخل کند . از این‌رو باید ریشه‌هایی که از این راه بدست می‌آید مورد آزمایش قرار گیرد تا ریشه‌های معادلهٔ مفروض

از بقیه جدا شود.

بهترین روش برای آزمایش ریشه‌ها اینست که آنها را درمعادلهٔ اصلی (و یا یکی از صورتهای معادله، قبل از بتوان رساندن آن) امتحان کنیم، تا معلوم شود که در معادله صدق می‌کند یا نه؟

گاهی دیده شده است که بعضی از مؤلفین کتابهای درسی و یاحل‌مسائل، برای آزمایش ریشه‌ها به راه دیگری متوسل می‌شوند، بدین صورت که اگر به ازای جواب بدست آمده، تمام مقادیر زیر رادیکالها مثبت شود، آنرا قابل قبول و در غیراینصورت خارجی تلقی می‌کنند.

این روش بکلی نادرست است و باید فراموش شود، بـه دو مثال زیر توجه بفرمایید:

مثال۱. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}=2+\sqrt{2x-5}$$

حل. اگر دوطرف معادله را مجذورکنیم، داریم:

$$(x-3)+(x+2)+2\sqrt{(x-3)(x+2)}=$$
$$=4+(2x-5)+4\sqrt{2x-5}$$

و یا پس از خلاصه کردن:

$$\sqrt{x^2-x-6}=2\sqrt{2x-5}$$

دوباره دوطرف معادله را مجذور می‌کنیم:

$$x^2-x-6=8x-20 \implies x^2-9x+14=0$$

این معادلهٔ درجه دوم دو جواب ۲ و ۷ را قبول دارد و هر دو جواب هم در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، زیرا هرکدام از آنها را که در معادله قرار دهیم به‌یك‌اتحاد عددی‌می‌رسیم، درحالی‌که $x=2$ در حوزهٔ رادیکالهای حقیقی، برای معادلهٔ مفروض نیست.[1]

۱ـ فقط به‌یك شرط می‌توان از جواب $x=2$ صرفنظر کرد و آن موقعی است که در صورت مسأله ذکر شده باشد که جوابها باید در حوزهٔ رادیکالهای حقیقی باشند.

مثال۴. مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=5$$

حل. دوطرف معادله را مجذور می‌کنیم:

$$(2x-1)+(x-1)-2\sqrt{(2x-1)(x-1)}=25$$

ویا :

$$3x-27=2\sqrt{2x^2-3x+1}$$

مجدداً دوطرف معادله را مجذور و سپس ساده می‌کنیم :

$$x^2-150x+725=0 \implies x_1=5 \;;\; x_2=145$$

از این دو جواب $x=145$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند، درحالیکه $x=5$ ریشهٔ معادله مفروض نیست و در آن صدق نمی‌کند .

در این مثال با وجودی که $x=5$ در حوزهٔ رادیکالهای حقیقی است، جواب معادله نیست .

۱۲. معادله‌های معکوسه

تعریف و شناسایی . به معادله‌ای معکوسه گوییم که اگر α در آن صدق کند $\frac{1}{\alpha}$ ویا $-\frac{1}{\alpha}$ هم در آن صدق کند که در صورت اول **معکوسهٔ مثبت** و درصورت دوم **معکوسهٔ منفی** نامیده می‌شود .

به عبارت دیگر:

معکوسهٔ مثبت معادله‌ای‌است که باتبدیل x به $\frac{1}{x}$ به خودش تبدیل شود .

و معکوسهٔ منفی معادله‌ای است که با تبدیل x بـه $-\frac{1}{x}$ به خودش تبدیل شود .

از این تعریف نتیجه‌های زیر مستقیماً بدست می‌آید:

I. معادلهٔ معکوسهٔ منفی نمی‌تواند از درجهٔ فرد باشد. زیرا مثلابرای اینکه معادلهٔ درجه سوم:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad (1)$$

معکوسهٔ منفی باشد، باید با تبدیل x به $-\frac{1}{x}$ تغییر نکند. x را به $-\frac{1}{x}$ تبدیل می‌کنیم:

$$-\frac{a}{x^3}+\frac{b}{x^2}-\frac{c}{x}+d=0 \quad ,$$

ویا : $$dx^3-cx^2+bx-a=0 \qquad (2)$$

برای اینکه معادله‌های (۱)و(۲) هم‌ارز باشند، باید ضمناً داشته‌باشیم:

$$\frac{a}{d}=-\frac{d}{a} \Longrightarrow a^2=-d^2$$

که غیرممکن است.

II. اگر معادلهٔ معکوسهٔ مثبت از درجهٔ فرد باشد، حتماً ریشه‌ای مساوی ۱ یا ۱ — دارد، زیرا این دو عدد، تنها عددهای حقیقی هستندکه با عکس خود برابرند.

بنابراین سمت چپ معادلهٔ معکوسهٔ مثبت، وقتی از درجهٔ فرد باشد، همواره بر $x-1$ یا $x+1$ قابل قسمت است که پس از تقسیم به معادلهٔ معکوسهٔ مثبت از درجهٔ زوج خواهیم رسید.

با این مقدمه‌ها روشن می‌شودکه برای بحث درحل معادله‌های‌معکوسه، کافی است به معادله‌های معکوسهٔ از درجهٔ زوج بپردازیم، بعد از این‌هرجا از معادلهٔ معکوسه نام ببریم، منظور معادلهٔ معکوسهٔ از درجهٔ زوج است.

معادلهٔ زیر را که از درجهٔ $2n$ است در نظر می‌گیریم:

$$ax^{2n}+bx^{2n-1}+cx^{2n-2}+\dots+fx^n+\dots+$$
$$+mx^2+nx+p=0 \qquad (1)$$

برای اینکه این معادله، معکوسهٔ مثبت باشد، باید با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ تغییر نکند، با این تبدیل به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$px^{2n}+nx^{2n-1}+mx^{2n-2}+\dots+fx^n+$$
$$+\dots+cx^2+bx+a=0 \qquad (2)$$

وبرای‌اینکه معادله‌های (۱)و(۲) هم ارز باشند، باید ضریبهای‌متناسبی داشته باشند ، یعنی :

$$\frac{a}{p}=\frac{b}{n}=\frac{c}{m}=\ldots=\frac{f}{f}=\ldots=\frac{m}{c}=\frac{n}{b}=\frac{p}{a}$$

که از آنجا بدست می‌آید :

$$a=p \text{ ، } b=n \text{ ، } c=m \text{ ، } \ldots$$

یعنی برای اینکه معادله‌ای معکوسهٔ مثبت‌باشد، باید ضریبهای مجهولها از دو طرف دو به دو مساوی باشند.

برای شناسایی معادلهٔ معکوسهٔ منفی هم می‌توان با روشی شبیه روش بالا به نتیجه‌های زیر رسید:

I. در معادلهٔ معکوسهٔ منفی، وقتی بزرگترین توان مضربی از۴باشد، ضریبهای توانهای زوج از دوطرف باهم مساوی وضریبهای‌توانهای فرد از دو طرف قرینهٔ یکدیگرند.

II. وقتی که‌بزرگترین توان معادلهٔ معکوسه مضربی از۴ نباشد(یعنی در تقسیم بر۴ باقیمانده‌ای مساوی ۲ داشته باشد)، ضریبهای توانهای‌زوج از دوطرف قرینهٔ یکدیگر وضریبهای توانهای فرد ازدوطرف‌مساوی یکدیگرند.

روش حل. ثابت می‌شود[1] که $x^n\pm\frac{1}{x^n}$ را می‌توان بصورت‌تابع درجهٔ n از $x\pm\frac{1}{x}$ نوشت. در حل معادله‌های معکوسه باید $x+\frac{1}{x}$ (در مورد معکوسهٔ مثبت) و $x-\frac{1}{x}$ (در مورد معکوسهٔ منفی) به عنوان مجهول کمکی اختیار شود. در چنین صورتی به معادله‌ای خواهیم رسید که درجهٔ آن‌نصف درجهٔ معادلهٔ اصلی است و به شرط قابل حل بودن معادلهٔ جدید ، جوابهای معادلهٔ اصلی هم بدست می‌آید.

مثال۱. این معادله را حل کنید :

$$۲x^۴-۱۳x^۳+۲۴x^۲-۱۳x+۲=۰$$

۱ــ به بخش استقراء ریاضی مراجعه کنید .

حل. اگر دوطرف معادله را بر $x^۲$ تقسیم‌کنیم، بدست می‌آید :

$$۲x^۲-۱۳x+۲۴-\frac{۱۳}{x}+\frac{۲}{x^۲}=۰ \quad ،$$

ویا :
$$۲\left(x^۲+\frac{۱}{x^۲}\right)-۱۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)+۲۴=۰$$

اگر فرض کنیم $x+\frac{۱}{x}=t$، به‌سادگی (بامجذورکردن دوطرف آن) بدست می‌آید : $x^۲+\frac{۱}{x^۲}=t^۲-۲$. بنابراین معادلهٔ مفروض به‌صورت زیر در می‌آید :

$$۲(t^۲-۲)-۱۳t+۲۴=۰ \quad ،$$

$$۲t^۲-۱۳t+۲۰=۰ \implies t=۴ \quad ، \quad \frac{۵}{۲} \quad ;$$

$$t=۴ \implies x+\frac{۱}{x}=۴ \implies x^۲-۴x+۱=۰ \quad ،$$

$$x_۱=۲+\sqrt{۳} \quad ، \quad x_۲=۲-\sqrt{۳}$$

$$t=\frac{۵}{۲} \implies x+\frac{۱}{x}=\frac{۵}{۲} \implies ۲x^۲-۵x+۲=۰ \quad ،$$

$$x_۳=۲ \quad ، \quad x_۴=\frac{۱}{۲}$$

مثال۲. مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$۳۰x^۸-۷۳x^۷+۹۰x^۶-۲۹۲x^۵+۱۵۰x^۴-$$
$$-۲۹۲x^۳+۹۰x^۲-۷۳x+۳۰=۰$$

حل. دوطرف معادله را بر $x^۴$ تقسیم می‌کنیم، با مختصری‌تغییر به‌صورت زیردرمی‌آید :

$$۳۰\left(x^۴+\frac{۱}{x^۴}\right)-۷۳\left(x^۳+\frac{۱}{x^۳}\right)+۹۰\left(x^۲+\frac{۱}{x^۲}\right)-$$
$$-۲۹۲\left(x+\frac{۱}{x}\right)+۱۵۰=۰$$

اگر فرض کنیم : $x+\frac{1}{x}=t$ ، خواهیم داشت :

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2\ ;\ x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t\ ;$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=t^4-4t^2+2$$

در نتیجه معادلهٔ مفروض بصورت زیر در می‌آید :

$$30(t^4-4t^2+2)-73(t^3-3t)+90(t^2-2)-$$
$$-292t+150=0$$

ویا پس از ساده کردن :

$$30t^4-73t^3-30t^2-73t+30=0$$

ولی ، این خود یك معادلهٔ معکوسهٔ درجه‌چهارم است، دوطرف آنرا بر t^2 تقسیم می‌کنیم :

$$30\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-73\left(t+\frac{1}{t}\right)-30=0$$

که با فرض $t+\frac{1}{t}=p$ ، می‌شود:

$$30(p^2-2)-73p-30=0$$

ویا : $$30p^2-73p-90=0$$

با حل این معادلهٔ درجه دوم ، مقادیر p بدست می‌آید :

$$p=\frac{73\pm127}{60}\ ;\ p_1=\frac{10}{3}\ ;\ p_2=-\frac{9}{10};$$

$$p=\frac{10}{3}\implies t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}\implies t_1=3\ ;\ t_2=\frac{1}{3}$$

$$p=-\frac{9}{10}\implies t+\frac{1}{t}=-\frac{9}{10}$$ (ریشه‌های موهومی)

یعنی برای t دو ریشهٔ حقیقی و دو ریشهٔ موهومی بدست می‌آید .حالا به محاسبهٔ مقادیر حقیقی x می‌پردازیم :

$$t=3 \Longrightarrow x+\frac{1}{x}=3 \Longrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$t=\frac{1}{3} \Longrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{1}{3} \qquad \text{(ریشه‌های موهومی)}$$

به این ترتیب معادلهٔ درجه هشتم مطلوب دو ریشهٔ حقیقی و شش ریشهٔ موهومی دارد.

مثال۳. معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$2ax^4-(2a^2+3a-2)x^3+(3a^2-4a-3)x+$$
$$+(2a^2+3a-2)x+2a=0$$

حل. این معادله، یك معادله معکوسهٔ منفی است و بنابراین باید آنرا نسبت بـه $x-\frac{1}{x}$ منظم کنیم، دوطرف معادله رابر x^2 تقسیم می کنیم،می‌شود

$$2a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(2a^2+3a-2\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)+$$
$$+(3a^2-4a-3)=0$$

با فرض $x-\frac{1}{x}=t$ ، خواهیم داشت :

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=t^2 \Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$$

و بنابراین معادلهٔ مفروض به صورت زیر در می‌آید :

$$2a(t^2+2)-(2a^2+3a-2)t+(3a^2-4a-3)=0$$

ویا :

$$2at^2-(2a^2+3a-2)t+3(a^2-1)=0$$

ابتدا مبین معادله را محاسبه می کنیم :

$$\Delta=(2a^2+3a-2)^2-8a(3a^2-3)=$$
$$=4a^4-12a^3+a^2+12a+4=$$
$$=(2a^2-3a-2)^2$$

و بنابراین داریم :

$$t=\frac{(2a^2+3a-2)\pm(2a^2-3a-2)}{4a};$$

$$t_1=\frac{3}{2}\ ;\ t_2=\frac{a^2-1}{a};$$

$$t=\frac{3}{2}\Longrightarrow x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2};$$

$$x_1=2\ ;\ x_2=-\frac{1}{2}$$

$$t=\frac{a^2-1}{a}\Longrightarrow x-\frac{1}{x}=\frac{a^2-1}{a};$$

$$x_3=a\ ;\ x_4=-\frac{1}{a}$$

۱۳. معادله‌هایی‌که با روش معادله‌های معکوسه حل می‌شوند

معادله‌هایی از نوع :

$$ax^4+bx^3+cx^2\pm bkx+ak^2=0\ ;$$

$$ax^6+bx^5+cx^4+dx^3\pm chx^2+dk^2x\pm ak^3=0\ ;$$

....

را می‌توان با همان روش‌معادله‌های معکوسه حل‌کرد ، منتهی دراینجا باید معادله را برحسب $(x\pm\frac{k}{x})$ مرتب نمود .

مثال۱. معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$2x^4-15x^3+35x^2-30x+8=0$$

حل. طرفین معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم :

$$2(x^2+\frac{4}{x^2})-15(x+\frac{2}{x})+35=0$$

با فرض $x+\frac{2}{x}=t$ ، خواهیم داشت:

$$(x+\frac{2}{x})^2=t^2\Longrightarrow x^2+\frac{4}{x^2}=t^2-4$$

و بنابراین معادلهٔ مفروض بصورت زیر در می‌آید :

$$2(t^2-4)-15t+35=0 \implies 2t^2-15t+27=0\ ,$$

$$t=\frac{9}{2}\ ;\ 3$$

$$t=\frac{9}{2} \implies x+\frac{2}{x}=\frac{9}{2} \implies 2x^2-9x+4=0\ ;$$

$$x_1=4\ ;\ x_2=\frac{1}{2}$$

$$t=3 \implies x+\frac{2}{x}=3 \implies x^2-3x+2=0\ ;$$

$$x_3=1\ ;\ x_4=2$$

مثال۲. مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$2x^4+7x^3-34x^2-21x+18=0$$

حل. با تقسیم دوطرف معادله بر x^2 بدست می‌آید:

$$2(x^2+\frac{9}{x^2})+7(x-\frac{3}{x})-34=0$$

و با فرض $x-\frac{3}{x}=t$ خواهیم داشت:

$$x^2+\frac{9}{x^2}=t^2+6$$

و بنابراین معادلهٔ مفروض بصورت زیر در می‌آید :

$$2(t^2+6)+7t-34=0 \implies 2t^2+7t-22=0\ ;$$

$$t=2 \text{ و } -\frac{11}{2}\ ;$$

$$t=2 \implies x-\frac{3}{x}=2 \implies x^2-2x-3=0\ ;$$

$$x_1=-1\ ;\ x_2=3$$

$$t=-\frac{11}{2} \implies x-\frac{3}{x}=-\frac{11}{2} \implies 2x^2+11x-6=0\ ;$$

$$x_۳=\frac{۱}{۲}\ ;\ x_۴=-۶$$

۱۴. معادله‌های شامل قدرمطلق

میدانیم که $|a|$ با $\sqrt{a^۲}$ دو مفهوم مختلف نیستند[۱] و همیشه می‌توان یکی را بجای دیگری بکار برد ، بنابراین داریم :

$$\sqrt{a^۲}=|a|=\begin{cases} a & (a>۰) \\ -a & (a<۰) \end{cases}$$

مثلا برای $|۲x+۳|$ در موردی که $x<-\frac{۳}{۲}$ باشد : $|۲x+۳|=-(۲x+۳)$ و در موردی که $x>\frac{۳}{۲}$ باشد : $|۲x+۳|=۲x+۳$ خواهد بود .

مثال۱. مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$|۴x-۵|=۱$$

حل. دو حالت در نظر می‌گیریم :

حالت اول . $x<\frac{۵}{۴}$ ، دراینصورت داریم :

$$-(۴x-۵)=۱ \implies x=۱$$

و چون جواب x با شرط این حالت می‌سازد (یعنی از $\frac{۵}{۴}$ کوچکتر است) ، قابل قبول است .

حالت دوم. $x>\frac{۵}{۴}$ ، در اینحالت داریم :

$$۴x-۵=۱ \implies x=\frac{۳}{۲}$$

۱ــ به بخش عبارتهای گنگ مراجعه شود .

$\frac{۳}{۲}$ از $\frac{۵}{۴}$ بزرگتر است و بنابراین جواب دوم هم قابل قبول است .

جواب : $x_۲=\frac{۳}{۲}$ ، $x_۱=۱$

مثال۲. معادلهٔ زیر را حل‌کنید :

$$\sqrt{(x+۳)^۲}+\sqrt{(x-۲)^۲}+\sqrt{(۲x-۸)^۲}=۹$$

حل. معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت :

$$|x+۳|+|x-۲|+|۲x-۸|=۹ \ ;$$

برای اینکه در حل این معادله‌وتشخیص حالتهای مختلف اشتباهی‌پیش نیایـد و بخصوص برای جلوگیری از عملهای اضافی ، قبلا علامت عبارتهای داخل قدر مطلق‌ها را در جدولی مشخص می‌کنیم :

$$x+۳=۰ \Longrightarrow x=-۳$$
$$x-۲=۰ \Longrightarrow x=۲$$
$$۲x-۸=۰ \Longrightarrow x=۴$$

بنابراین جدول زیر را داریم :

x	$-\infty$	-۳		۲		۴	$+\infty$
$x+۳$	$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$x-۲$	$-$		$-$	۰	$+$		$-$
$۲x-۸$	$-$		$-$		$-$	۰	$+$

باتوجه به‌جدول روشن می‌شود که بایدمعادله را در چهار حالت مختلف حل کرد :

I) $\quad x<-۳$

در اینحالت (یعنی وقتی‌که x بزرگتر از ۳− نباشد) ، هرسه‌عبارت $x+۳$ ، $x-۲$ ، $۲x-۸$ منفی هستند و بنابراین معادله به صورت زیر در می‌آید :

$$-(x+۳)-(x-۲)-(۲x-۸)=۹ \qquad (۱)$$

و البته به‌شرطی جواب معادلهٔ (۱) قابل‌قبول است که با شرط این حالت ($x<-۳$) بسازد .

$$-x-۳-x+۲-۲x+۸=۹ \implies x=-\frac{۱}{۲}$$

و روشن است که این جواب قابل‌قبول نیست .

II) $-۳\leqslant x\leqslant ۲$

دراین حالت $x+۳$ مثبت‌ولی $x-۲$ و $۲x-۸$ منفی‌هستندوداریم:

$$(x-۳)-(x-۲)-(۲x-۸)=۹ \implies x=۲$$

و این جواب قابل قبول است .

III) $۲\leqslant x\leqslant ۴$

$$(x+۳)+(x-۲)-(۲x-۸)=۹ \implies ۹=۹$$

در این حالت معادله به اتحاد تبدیل می‌شود ، یعنی تمام مقادیر واقع در فاصلهٔ [۴ و ۲] در معادله صدق می‌کنند .

IV) $x>۴$

$$(x+۳)+(x-۲)+(۲x-۸)=۹ \implies x=۴$$

جواب : معادلهٔ مفروض در فاصلهٔ [۴ و ۲] به اتحاد تبدیل می‌شود و در خارج این فاصله جواب دیگری ندارد .

مثال۳. معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$|x^۲-۴|+|x|+۲x=۲$$

حل جدول علامتها را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$	-۲		۰		۲	$+\infty$
$x^۲-۴$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$

و معادله را در چهار حالت‌حل می‌کنیم :

I) $x<-۲$; $x^۲-۴-x+۲x=۲$;

$$x^۲+x-۶=۰ \implies x=-۳ ، ۲$$

که از آنها $x=-۳$ قابل قبول است .

$$\text{II)}\quad -۲\leq x\leq ۰ \;;\; -(x^{۲}-۴)-x+۲x=۲ \;;$$
$$x^{۲}-x-۲=۰ \implies x=۲ \text{ و } -۱$$

که‌ازآنها $x=-۱$ قابل‌قبول‌است (۲ درفاصلهٔ [۰ و ۲−] نیست).

$$\text{III)}\quad ۰\leq x\leq ۲ \;;\; -(x^{۲}-۴)+x+۲x=۲ \;;$$
$$x^{۲}-۳x-۲=۰ \implies x=\frac{۳\pm\sqrt{۱۷}}{۲}$$

که هیچیك قابل قبول نیستند ، یعنی معادلهٔ مفروض در فاصلهٔ [۲و۰] جوابی ندارد .

$$\text{IV)}\quad x\geq ۲ \;;\; (x^{۲}-۴)+x+۲x=۲$$
$$x^{۲}+۳x-۶=۰ \implies x=\frac{-۳\pm\sqrt{۳۳}}{۲}$$

که باز هم قابل قبول نیستند .

جواب : $x_{۱}=-۳$ ، $x_{۲}=-۱$

۱۵ . معادله‌های شامل «تابع قسمت صحیح»

مقدمه . منظور از $[x]$ ، بزرگترین‌عددصحیحی‌است‌که از x بزرگتر نباشد . $[x]$ را گاهی هم بصورت $E(x)$ نمایش می‌دهند . مثلا :

$$[\pi]=۳ \;;\; [۵\sqrt{۲}]=۷ \;;\; [-۴/۷]=-۵ \;;\; \dots$$

مثال۱. مطلوبست حل معادلهٔ زیر :

$$[x+۲]+[x]=۱۲ \qquad (۱)$$

حل. ابتدا معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم :

$$(x+۲)+x=۱۲ \implies x=۵$$

واضح است که $x=۵$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند .

اگر $x<۵$ باشد ، داریم :

$$\begin{cases} x+۲<۷ \\ x<۵ \end{cases} \implies \begin{cases} [x+۲]<۷ \\ [x]<۵ \end{cases}$$

و بنابراین معادله جواب کوچکتر از ۵ ندارد .

اگر $\text{x}\geqslant ۶$ باشد : داریم :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{x}+۲\geqslant ۸ \\ \text{x}\geqslant ۶ \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} [\text{x}+۲]\geqslant ۸ \\ [\text{x}]\geqslant ۶ \end{array}\right.$$

و بنابراین مقادیر $\text{x}\geqslant ۶$ هم در معادله صدق نمی‌کنند .

جواب ، $۵\leqslant \text{x}<۶$

مثال۲. معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$[۵\text{x}+۳]+[۷\text{x}+۹]=۱۸ \qquad (۱)$$

حل. معادلهٔ (۱) هم ارز معادلهٔ زیر است :

$$[۵\text{x}]+[۷\text{x}]=۱۸-(۹+۳)=۶$$

ابتدا معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم :

$$۵\text{x}+۷\text{x}=۶ \implies \text{x}=\frac{۱}{۲}$$

ولی $\text{x}=\frac{۱}{۲}$ جواب معادله نیست ، زیرا:

$$[۵\times\frac{۱}{۲}]+[۷\times\frac{۱}{۲}]=۲+۳=۵$$

و ضمناً چون $۶>۵$ است ، هیچ عدد کوچکتراز $\frac{۱}{۲}$ هم درمعادله صدق نمی‌کند، برای اینکه سمت چپ تساوی مساوی ۶ شود ، باید یا $۵\text{x}=۳$ و یا $۷\text{x}=۴$ شود . ولی بازاء $\text{x}=\frac{۳}{۵}$ داریم :

$$[۵\times\frac{۳}{۵}]+[۸\times\frac{۳}{۵}]=[۳]+[۴/۲]=۷$$

پس جواب معادله از $\frac{۳}{۵}$ کوچکتر است . بازاء $\text{x}=\frac{۴}{۷}$ داریم :

$$[۵\times\frac{۴}{۷}]+[۷\times\frac{۴}{۷}]=[۲/۸۵\cdots]+[۴]=۶$$

و بنابراین جواب معادله چنین است :

$$\frac{۴}{۷}\leqslant x<\frac{۳}{۵}$$

مثال۳. این معادله را حل کنید :

$$[-x^۲+۳x]=[x^۲+\frac{۱}{۲}]$$

حل. قبل از همه ملاحظه می‌کنیم که :

$$x^۲+\frac{۱}{۲}>۰$$

بنابراین باید داشته باشیم :

$$[x^۲+\frac{۱}{۲}]=n\geqslant ۰$$

از طرف دیگر به سادگی دیده می‌شود که نامعادلهٔ $-x^۲+۳x\geqslant ۳$ یا $x^۲-۳x+۳\leqslant ۰$ جواب ندارد، بنابراین n می‌تواند عددهای ۰، ۱ و ۲ را قبول کند . این سه مقدار n با سه دستگاه نامعادله‌ای زیر تطبیق می‌کند:

$$\begin{cases} ۰\leqslant -x^۲+۳x<۱ \\ ۰\leqslant x^۲+\frac{۱}{۲}<۱ \end{cases} ; \quad \begin{cases} ۱\leqslant -x^۲+۳x<۲ \\ ۱\leqslant x^۲+\frac{۱}{۲}<۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲\leqslant -x^۲+۳x<۳ \\ ۲\leqslant x^۲+\frac{۱}{۲}<۳ \end{cases}$$

که از آنجا جوابهای زیر بدست می‌آید :

$$۰\leqslant x<\frac{۱}{۲}(۳-\sqrt{۵}) \;;\; \frac{\sqrt{۲}}{۲}\leqslant x<۱ \;;$$

$$\frac{\sqrt{۶}}{۲}\leqslant x<\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۱۶ . محاسبهٔ مجموع توانهای متشابه ریشه‌ها

معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را در نظر می‌گیریم :

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

اگر دوطرف معادلهٔ (۱) را در x^{n-2} ضرب کنیم، می‌شود :

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}=0 \qquad (2)$$

واضح است که x_1 و x_2 ، ریشه‌های معادلهٔ (۱) ، در معادلهٔ (۲) هم صدق می‌کنند :

$$\left|\begin{array}{l} ax_1{}^n+bx_1{}^{n-1}+cx_1{}^{n-2}=0 \\ ax_2{}^n+bx_2{}^{n-1}+cx_2{}^{n-2}=0 \end{array}\right.$$

از جمع این دو رابطه بدست می‌آید :

$$a(x_1{}^n+x_2{}^n)+b(x_1{}^{n-1}+x_2{}^{n-1})+c(x_1{}^{n-2}+x_2{}^{n-2})=0$$

که اگر $x_1{}^p+x_2{}^p=S_p$ فرض کنیم ، خواهیم داشت :

$$aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0$$

ازاین رابطه، که به **رابطهٔ برگشتی** بین توانهای متشابه ریشه‌ها موسوم است ، دو نتیجه بدست می‌آید :

اولا مجموع توانهای متشابه ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم برحسب‌ضریبها قابل محاسبه‌اند .

ثانیاً برای محاسبهٔ مجموع توانهای nام ریشه‌ها باید مجموع توانهای $(n-1)$ ام ومجموع توانهای $(n-2)$ام ریشه‌ها معلوم باشد .

شبیه همین رابطه‌را برای‌مجموع توانهای‌متشابه ریشه‌های‌معادله‌های از درجه‌های بالاتر هم می‌توان بدست‌آورد ، مثلا در مورد معادلهٔ درجه سوم :

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

اگر ریشه‌ها را x_1 ، x_2 ، x_3 ، $x_1{}^p+x_2{}^p+x_3{}^p=S_p$ فرض‌کنیم ، بدست می‌آید.

$$aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}+dS_{n-1}=0$$

درعمل برای‌محاسبهٔ‌مجموع توانهای معینی‌ازریشه‌های‌معادله‌های‌درجه‌ های بالا بهتر است که رابطهٔ برگشتی را برای همان توانی که مورداحتیاج است ، مستقیماً محاسبه‌کنیم .

مثال۱. مطلوب محاسبهٔ مجموع توانهای چهارم ریشه‌ها درمعادلهٔ:

$$2x^2-4x+1=0$$

حل. داریم:

$$S_0=x_1^0+x_2^0=2 \ ; \ S=x_1+x_2=2$$

حالا رابطهٔ برگشتی را بین مجموع توانهای متشابه ریشه‌های این معادله می‌نویسیم:

$$2S_n-4S_{n-1}+S_{n-2}=0 \qquad (1)$$

اگر فرض کنیم $n=2$ ، بدست می‌آید:

$$2S_2-4S_1+S_0=0 \implies S_2=3$$

حالا در رابطهٔ (۱) فرض می‌کنیم $n=3$:

$$2S_3-4S_2+S_1=0 \implies S_3=5$$

و بالاخره به‌ازای $n=4$:

$$2S_4-4S_3+S_2=0 \implies S_4=\frac{17}{2}$$

جواب: $x_1^4+x_2^4=\frac{17}{2}$.

مثال۴. مطلوب‌است مجموع توانهای ششم ریشه‌ها در معادلهٔ زیر:

$$x^3-3x+1=0 \qquad (1)$$

حل. دوطرف معادلهٔ (۱) را در x^3 ضرب می‌کنیم.

$$x^6-3x^4+x^3=0 \qquad (2)$$

x_1 ، x_2 و x_3 ، ریشه‌های معادلهٔ (۱) ، در (۲) صدق می‌کنند :

$$\left|\begin{array}{l} x_1^6-3x_1^4+x_1^3=0 \\ x_2^6-3x_2^4+x_2^3=0 \\ x_3^6-3x_3^4+x_3^3=0 \end{array}\right.$$

از جمع این رابطه‌ها بدست می‌آید :

$$x_1^6+x_2^6+x_3^6= \\ 3(x_1^4+x_2^4+x_3^4)-(x_1^3+x_2^3+x_3^3) \qquad (3)$$

اکنون اگردوطرف معادلهٔ (۱) را در x ضرب کنیم و ریشه‌های x_1 ،

x_2 و x_3 را در آن صدق دهیم. بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x_1^4-3x_1^2+x_1=0 \\ x_2^4-3x_2^2+x_2=0 \\ x_3^4-3x_3^2+x_3=0 \end{cases}$$

از جمع این رابطه‌ها داریم:

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4=3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)=$$
$$=3[(x_1+x_2+x_3)^2-$$
$$-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)]-(x_1+x_2+x_3)$$

در معادلهٔ (۱)، مجموع ریشه‌ها $x_1+x_2+x_3=0$ و مجموع حاصلضربهای دو بدوی ریشه‌ها $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3$ می‌باشدو بنابراین:

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4=18 \qquad (4)$$

حالا اگر در معادلهٔ (۱) ریشه‌ها را صدق دهیم و سپس سه رابطه‌ای که بدست می‌آید با هم جمع کنیم، می‌شود:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=3(x_1+x_2+x_3)-3=-3 \qquad (5)$$

با در نظر گرفتن رابطه‌های (۴) و (۵)، رابطهٔ (۳) چنین می‌شود:

$$x_1^6+x_2^6+x_3^6=3\times 18-(-3)=57$$

۱۷. تشکیل معادله‌ها

معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}+\dots+l=0$$

این معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$x^n+\frac{b}{a}x^{n-1}+\frac{c}{a}x^{n-2}+\frac{d}{a}x^{n-3}+\dots+\frac{l}{a}=0$$

که با توجه به رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها، به صورت زیر درمی‌آید:

$$x^n-(\Sigma x_1)x^{n-1}+(\Sigma x_1x_2)x^{n-2}-(\Sigma x_1x_2x_3)x^{n-3}+$$
$$+\dots+(-1)^n(x_1x_2\cdots x_n)=0$$

این معادله ، رابطهٔ کلی تشکیل یك معادلهٔ درجهٔ n با دردست داشتن ریشه‌های آن است.

مثال۱. معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن چنین‌باشد:

$$x_1=3 \quad ; \quad x_2=2+\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad x_3=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل. داریم :

$$\Sigma x_1=x_1+x_2+x_3=7 \quad ;$$

$$\Sigma x_1x_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{61}{4} \quad ;$$

$$x_1x_2x_3=\frac{39}{4}$$

و بنابراین معادلهٔ درجهٔ سوم مطلوب چنین است :

$$x^3-7x^2+\frac{61}{4}x-\frac{39}{4}=0$$

ویا : $$4x^3-28x^2+61x-39=0$$

مثال۲. معادلهٔ درجه سومی تشکیل دهیدکه ریشه‌های آن مجذورریشه‌های معادلهٔ زیر باشد:

$$x^3+2x^2-x+5=0 \qquad (1)$$

حل. روش اول: اگرریشه‌های معادلهٔ (۱) را x_1 ، x_2 ، x_3 وریشه‌های معادلهٔ مطلوب را y_1 ، y_2 ، y_3 فرض کنیم ، طبق فرض مساله‌داریم:

$$y_1=x_1^2 \quad ; \quad y_2=x_2^2 \quad ; \quad y_3=x_3^2$$

و بنابراین :

$$\Sigma y_1=y_1+y_2+y_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2=$$
$$=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$$
$$=(-2)^2-2(-1)=6 \quad ;$$

$$\Sigma y_1y_2=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=$$
$$=(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=$$
$$=-19 \quad ;$$

$$y_1y_2y_3=(x_1x_2x_3)^2=25$$

و بنابراین معادلهٔ مطلوب چنین است :

$$y^3-6y^2-19y-25=0$$

روش دوم : طبق فرض داریم :

$$y=x^2\Longrightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

هریك ازدومقدار $\pm\sqrt{y}$ بایددرمعادلهٔ (۱) صدق کنند ، $x=\sqrt{y}$ را در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم :

$$(\sqrt{y})^3+2(\sqrt{y})^2-\sqrt{y}+5=0$$

ویا :

$$\sqrt{y}(1-y)=5+2y$$

با مجذورکردن دوطرف این معادله و منظم‌کردن آن بدست می‌آید:

$$y^3-6y^2-19y-25=0$$

که معادلهٔ مطلوب است .

مثال۳. اگر x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 ریشه‌های معادلهٔ :

$$x^4-4x^2+x+3=0 \qquad (1)$$

باشند ، مطلوباست محاسبهٔ مجموع زیر :

$$S=\frac{1}{2x_1-1}+\frac{1}{2x_2-1}+\frac{1}{2x_3-1}+\frac{1}{2x_4-1}$$

حل. فرض می‌کنیم :

$$y_1=\frac{1}{2x_1-1}\ ;\ y_2=\frac{1}{2x_2-1}\ ;$$

$$y_3=\frac{1}{2x_3-1}\ ;\ y_4=\frac{1}{2x_4-1}$$

و معادلهٔ درجهٔچهارمی‌تشکیل‌می‌دهیم که ریشه‌های آن y_1 ، y_2 ، y_3 و y_4 باشد ، داریم :

$$y=\frac{1}{2x-1}\Longrightarrow x=\frac{y+1}{2y}$$

و در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم :

$$\frac{(y+1)^4}{16y^4}-\frac{4(y+1)^2}{4y^2}+\frac{y+1}{2y}+3=0$$

که پس از ساده‌کردن چنین می‌شود :

$$41y^4-20y^3-10y^2+4y+1=0$$

مجموع مطلوب ، همان مجموع ریشه‌های این معادله است :

$$S=\frac{20}{41}$$

۱۸. ریشه‌های مشترك معادله‌ها

روشهای مورد نظر این بند را ضمن چند مثال ذکر می‌کنیم.

مثال ۱. چه رابطه‌ای بین p،q و p' ، q' برقرار باشد، تا دو معادلهٔ زیر یك ریشهٔ مشترك داشته باشند و سپس معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن ریشه‌های غیر مشترك دو معادله باشد:

$$\begin{cases} x^2+px+q=0 \\ x^2+p'x+q'=0 \end{cases}$$

حل . ریشه‌های معادلهٔ اول را α و β و ریشه‌های معادلهٔ دوم را αو β' فرض می‌کنیم . α ریشهٔ مشترك دو معادله است و بنابراین باید در هر دو معادله صدق کند:

$$\begin{cases} \alpha^2+p\alpha+q=0 \\ \alpha^2+p'\alpha+q'=0 \end{cases}$$

از حذف α بین‌این دورابطه ، شرط وجود ریشهٔ مشترك بدست‌می‌آید، ابتدا دو رابطه را از هم‌کم می‌کنیم:

$$(p-p')\alpha+(q-q')=0 \Longrightarrow \alpha=\frac{q'-q}{p-p'}$$

این مقدار α ، همان ریشهٔ مشترك دو معادله است و بنابراین باید در هریك‌ازدو معادله صدق‌کند،دراین صورت یکی ازدو رابطهٔ زیر بدست‌می‌آید:

$$(q-q')^2+q(p-p')^2=p(q-q')(p-p') \; ; \qquad (1)$$
$$(q-q')^2+q'(p-p')^2=p'(q-q')(p-p') \; ; \qquad (2)$$

که هریك از این دو رابطه را می‌توان پس‌از تبدیل به‌صورت زیر در آورد :

$$(p-p')(p'q-pq')=(q-q')^{2} \qquad (۳)$$

برای تشکیل معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌های آن ریشه‌های غیرمشترك دو معادله (یعنی β و β') باشد، می‌نویسیم:

$$\alpha\cdot\beta=q \implies \beta=\frac{q}{\alpha}=\frac{q(p-p')}{q'-q}$$

$$\alpha\cdot\beta'=q' \implies \beta'=\frac{q'}{\alpha}=\frac{q'(p-p')}{q'-q}$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} \beta+\beta'=\dfrac{(p-p')(q+q')}{q'-q} \\[2ex] \beta\cdot\beta'=\dfrac{qq'(p-p')^{2}}{(q-q')^{2}} \end{cases}$$

و معادلهٔ درجهٔ دوم مطلوب چنین می‌شود :

$$(q-q')^{2}x^{2}+(p-p')(q^{2}-q'^{2})x+qq'(p-p')^{2}=0$$

و چون شرط (۳) هم همراه‌این معادله است، اگر بجای $(q-q')^{2}$ مقدارش $(p-p')(p'q-pq')$ قرار دهیم ، بدست می‌آید :

$$(p'q-pq')x^{2}+(q^{2}-q'^{2})x+qq'(p-p')=0$$

که معادلهٔ مطلوب است.

نتیجه. شرط وجود یك ریشهٔ مشترك بین دو معادله (از هردرجه‌ای که باشند) با حذف مجهول بین دو معادله بدست می‌آید.

مثال۲. m را چنان پیدا کنید که یکی از ریشه‌های معادلهٔ

$$x^{2}-x-m=0$$

دو برابر یکی از ریشه‌های معادلهٔ زیر باشد :

$$x^{2}-(m+2)x+3=0 \qquad (۲)$$

حل. اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۲) را α بگیریم ، ریشهٔ نظیرش در معادلهٔ (۱)مساوی 2α می‌شود وبنابراین 2α درمعادلهٔ (۱) وαدر معادلهٔ (۲) صدق می‌کند :

$$\begin{vmatrix} 4\alpha^2-2\alpha-m=0 \\ \alpha^2-(m+2)\alpha+3=0 \end{vmatrix}$$

با حذف α بین این دو معادله ، مقدار m بدست می‌آید.

برای حذف α می‌توان α^2 و α را به‌عنوان دومجهول فرض کرد ومثل دو معادلهٔ دو مجهولی عمل کرد :

$$\alpha^2=\frac{m^2+2m+6}{4m+6} \quad ; \quad \alpha=\frac{m+12}{4m+6}$$

و بنابراین باید داشته باشیم :

$$\left(\frac{m+12}{4m+6}\right)^2=\frac{m^2+2m+6}{4m+6}$$

که پس از ساده‌کردن به معادلهٔ درجهٔ سوم زیر می‌رسیم:

$$4m^3+13m^2+12m-108=0$$

این معادله به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(m-2)(4m^2+21m+54)=0$$

عبارت درجهٔ دوم $4m^2+21m+54$ دارای مبین منفی است و بنابراین معادله تنها جواب حقیقی $m=2$ را قبول دارد .

جواب : $m=2$

مثال۳. اولا تعداد ریشه‌های مشترك دو معادلهٔ :

$$\begin{cases} 2x^4-x^3-4x^2+1=0 \\ x^4+x^3-4x^2-x+1=0 \end{cases}$$

را پیداکنید. ثانیاً هریك از دو معادله را حل‌کنید .

حل. در مواردی که تعداد ریشه‌های مشترك بیش از یکی باشد و یا تعداد ریشه‌های مشترك معلوم نباشد، بهتراست از روش پیداکردن‌بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك بین دو عبارت استفاده‌کنیم.

اگر بزرگترین‌مقسوم‌علیه‌مشترك بین‌دوعبارت $f(x)$و$\varphi(x)$،عبارتی از درجهٔ n باشد به‌این‌معنی است‌که معادله‌های $f(x)=0$ و $\varphi(x)=0$ دارای nریشهٔ مشترك هستند .

بزرگترین‌مقسوم علیه‌مشترك بین‌دوعبارت را می‌توان باروش‌تقسیمهای متوالی بدست آورد.

می‌دانیم‌که اگر در تقسیم A بر B به خارج‌قسمت Q و باقیماندهٔ R برسیم ، داریم :

$$A=B\cdot Q+R$$

اگر A و B مشترکاً بر عاملی قابل‌قسمت باشند ، R هم بر همان عامل قابل‌قسمت خواهد بود و بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك بین AوBهمان بزرگترین مقسوم علیه مشترك بین RوB است. حالا اگر دوباره در تقسیم B بر R به باقیماندهٔ R_1 برسیم،کافی است که بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك بین R و R_1 را بدست آوریم و اگراین عمل تقسیمهای متوالی را ادامه‌دهیم تا به باقیماندهٔ صفربرسیم ، آخرین مقسوم‌علیه، بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك بین AوB خواهد بود.

در مورد دوعبارت جبری، در حالتی هم که آخرین مقسوم علیه عدد ثابتی باشد، گویند دوعبارت از لحاظ جبری نسبت به‌هم اولند، یعنی‌مشترکاً بریك عبارت جبری دیگر قابل‌قسمت نیستند .

به حل مسأله می‌پردازیم :

ابتدا عبارت $A=2x^4-x^3-4x^2+1$ را بر :

$$B=x^4+x^3-4x^2-x+1$$

تقسیم می‌کنیم، باقیماندهٔ این تقسیم:

$$R=-3x^3+4x^2+2x-1$$

می‌شود ، در تقسیم BبرR ، برای اینکه دچارضریبهای کسری‌درخارج‌قسمت و باقیمانده نشویم $9B$ را برR تقسیم می‌کنیم :

$$9B=9x^4+9x^3-36x^2-9x+9$$

$$R=-3x^3+4x^2+2x-1$$

در این تقسیم به باقیماندهٔ $R_1=-2(x^2-x-1)$ می‌رسیم و با تقسیم بعدی روشن می‌شودکه $R=-3x^3+4x^2+2x-1$ بر :

$$-\frac{1}{2}R=x^2-x-1$$

قابل‌قسمت است وبنابراین x^2-x-1 بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عبارت جبری A وB است.

بنابراین ریشه‌های مشترك دومعادله، همان ریشه‌های $x^2-x-1=0$ است، یعنی معادله‌ها دارای دو ریشهٔ مشترك هستند و این ریشه‌های مشترك چنین‌اند :

$$x^2-x-1=0 \implies x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

برای حل هریك از معادله‌ها، دیگر می‌توان به‌سادگی آنها را تجزیه کرد و به‌صورت زیر در آورد :

$$\begin{cases} (x^2-x-1)(2x^2+x-1)=0 \\ (x^2-x-1)(x^2+2x-1)=0 \end{cases}$$

چهارریشهٔ معادلهٔ اول:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\ ;\ x_3=-1\ ;\ x_4=\frac{1}{2}$$

و چهار ریشهٔ معادلهٔ دوم :

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\ ;\ x_{3,4}=-1\pm\sqrt{2}$$

مثال۴. مقدار m را چنان پیداکنیدکه دو معادلهٔ :

$$\begin{cases} f(x)=2x^4-7x^3-2x^2+(7m-2)x+2=0 \\ \varphi(x)=x^4-7x^3+13x^2-x-6=0 \end{cases}$$

دارای سه ریشهٔ مشترك باشند و سپس ریشه‌های هریك از دو معادله را بدست آورید.

حل. بایـد بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $f(x)$ و $\varphi(x)$ ، عبارتی از درجهٔ سوم باشد.

در اولین تقسیم $f(x)$ بر $\varphi(x)$ به باقیمانده‌ای از درجهٔ سوم‌نسبت x می‌رسیم: $R_1(x)=7x^3-28x^2+7mx+14$. حالا باید $\varphi(x)$ بر $R_1(x)$ و یا بر : x^3-4x^2+mx+2 قابل‌قسمت باشد . دراین تقسیم باقیمانده‌ای به‌صورت : $(1-m)x^2+3(m-1)x$ بدست می‌آیـد ، پس :

$$(1-m)x^2+3(m-1)x\equiv 0 \implies m=1$$

به‌ازای $m=1$ بزرگترین‌مقسوم‌علیه‌مشترك دو عبارت $f(x)$ و $\varphi(x)$، عبارت درجهٔ سوم :

$$x^3-4x^2+x+2$$

مـی‌شود ، یعنی معادلهٔ $f(x)=0$ و $\varphi(x)=0$ دارای سه ریشهٔ مشترك می‌شوند.

به‌ازای این مقدار m دو معادله به‌صورت زیر در می‌آیند :

$$\begin{cases} f(x)=(x^3-4x^2+x+2)(x-3)=0 \\ \varphi(x)=(x^3-4x^2+x+2)(2x+1)=0 \end{cases}$$

ویا :

$$\begin{cases} (x-1)(x-3)(x^2-3x-2)=0 \\ (x-1)(2x+1)(x^2-3x-2)=0 \end{cases}$$

و دیگر پیدا کردن جوابها مشکل نیست.

۱۹. استفاده از رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها در حل دستگاهها

I. حل بعضی از دستگاههای خطی . به مثال زیر توجه کنید .

مثال. مطلوب‌است حل دستگاه زیر:

$$\begin{cases} (a-1)x-a(a-1)y-(a^2+1)z+a^3=0 \\ (b-1)x-b(b-1)y-(b^2+1)z+b^3=0 \\ (c-1)x-c(c-1)y-(c^2+1)z+c^3=0 \end{cases}$$

حل. معادله‌های دستگاه را بترتیب نسبت به a، b و c منظم می‌کنیم:

$$\begin{cases} a^3-(y+z)a^2+(x+y)a-(x+z)=0 \\ b^3-(y+z)b^2+(x+y)b-(x+z)=0 \\ c^3-(y+z)c^2+(x+y)c-(x+z)=0 \end{cases}$$

اگر معادلهٔ درجهٔ سوم زیرا در نظر بگیریم:

$$u^3-(y+z)u^2+(x+y)u-(x+z)=0 \quad (1)$$

مقادیر a وb وc طبق معادله‌های فرض در(۱) صدق می‌کنند وبنابراین a وb وc ریشه‌های معادلهٔ (۱) هستند .

رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها را در معادلهٔ (۱) می‌نویسیم :

$$\begin{cases} y+z=a+b+c \\ x+y=ab+ac+bc \\ x+z=abc \end{cases} \quad (2)$$

دستگاه (۲) به سادگی مقادیر x و y و z را بدست می‌دهد، ازجمع معادله‌های دستگاه داریم:

$$x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c+ab+ac+bc+abc) \quad (3)$$

واگر به‌ترتیب هریك از معادله‌های دستگاه (۲) را از معادلهٔ (۳) کم کنیم ، جوابهای x وy وz بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(ab+ac+bc+abc-a-b-c) \\ y=\frac{1}{2}(a+b+c+ab+ac+bc-abc) \\ z=\frac{1}{2}(a+b+c+abc-ab-ac-bc) \end{cases}$$

II، حل دستگاههای متقارن

تعریف. دستگاهی را نسبت به مجهولهای خود متقارن گوییم که باتبدیل هر دو مجهول دلخواه آن به یکدیگر ، تغییری دردستگاه حاصل نشود.مثلا دستگاههای معادله‌های زیر، دستگاههایی متقارن هستند :

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{7}{3} \\ x^3+y^3=-3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x+y+z=2a \\ x^2+y^2+z^2=6a^2 \\ x^3+y^3+z^3=8a^3 \end{cases}$$

روش حل. برای حل یك دستگاه متقارن n مجهولی بایدمعادله‌ای‌از

درجهٔ n تشکیل داد، به‌نحوی که ریشه‌های آن n مجهول دستگاه باشد. برای این منظور باید کوشش کرد تا آنچه را که برای تشکیل چنین معادله‌ای لازم است محاسبه نمود.

مثال۱. مطلوب‌است حل دستگاه زیر :

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}=\frac{۷}{۳} \\ x^{۳}+y^{۳}=-۳ \end{cases} \qquad (۱)$$

حل. اگر x و y را ریشه‌های یك معادلهٔ درجهٔ دوم در نظر بگیریم، برای تشکیل چنین معادله‌ای باید $x+y$ و xy را محاسبه‌کنیم. فرض‌می‌کنیم $x+y=S$ ، $x\cdot y=P$. در این‌صورت دستگاه (۱) به‌صورت‌زیر در می‌آید :

$$\begin{cases} S^{۲}-۲P=\frac{۷}{۳} \\ S^{۳}-۳PS=-۳ \end{cases}$$

اگر P را از معادلهٔ اول دستگاه محاسبه و در معادلهٔ دوم دستگاه‌قرار دهیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$S^{۳}-۷S-۶=۰ \implies (S+۱)(S+۲)(S-۳)=۰ \ ;$$
$$S=-۱ \ ; \ -۲ \ ; \ ۳$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$\left|\begin{array}{l} S=-۱ \\ P=-\frac{۲}{۳} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} S=-۲ \\ P=\frac{۵}{۶} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} S=۳ \\ P=\frac{۱۰}{۳} \end{array}\right.$$

اگر $S=-۱$ و $P=-\frac{۲}{۳}$ باشد ؛ x و y ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند :

$$۳t^{۲}+۳t-۲=۰ \implies t=\frac{-۳\pm\sqrt{۳۳}}{۶}$$

و همچنین :

$$\begin{cases} S=-۲ \\ P=\frac{۵}{۶} \end{cases} \Longrightarrow ۶u^۲+۱۲u+۵=۰ \Longrightarrow u=\frac{-۶\pm\sqrt{۶}}{۶}$$

$$\begin{cases} S=۳ \\ P=\frac{۱۰}{۳} \end{cases} \Longrightarrow ۳v^۲-۹v+۱۰=۰ \quad \text{(ریشه‌های موهومی)}$$

جواب:

$$\begin{cases} x_۱=\frac{-۳+\sqrt{۳۳}}{۶} \\ y_۱=\frac{-۳-\sqrt{۳۳}}{۶} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_۲=\frac{-۳-\sqrt{۳۳}}{۶} \\ y_۲=\frac{-۳+\sqrt{۳۳}}{۶} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_۳=\frac{-۶+\sqrt{۶}}{۶} \\ y_۳=\frac{-۶-\sqrt{۶}}{۶} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_۴=\frac{-۶-\sqrt{۶}}{۶} \\ y_۴=\frac{-۶+\sqrt{۶}}{۶} \end{cases} ;$$

مثال۲. این دستگاه را حل کنید :

$$\begin{cases} x+y+z=۲a \\ x^۲+y^۲+z^۲=۶a^۲ \\ x^۳+y^۳+z^۳=۸a^۳ \end{cases} \qquad (۱)$$

حل. معادلهٔدرجهٔسومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن xوyوz باشند.
برای این منظور فرض می‌کنیم :

$$x+y+z=S \;;\; xy+xz+yz=P \;;\; xyz=Q$$

از معادلهٔ اول دستگاه داریم :

$$S=x+y+z=۲a$$

و از معادلهٔ دوم دستگاه داریم :

$$(x+y+z)^۲-۲(xy+xz+yz)=۶a^۲ \Longrightarrow$$

$$۴a^۲-۲P=۶a^۲$$

و از آنجا :

$$P=xy+xz+yz=-a^{2}$$

و بالاخره معادلهٔ سوم دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$(x+y+z)(x^{2}+y^{2}+z^{2}-xy-xz-yz)+3xyz=8a^{3}:$$

$$2a(6a^{2}+a^{2})+3Q=8a^{3} \Longrightarrow Q=xyz=-2a^{3}$$

بنابراین معادلهٔ درجهٔ سومی که ریشه‌های آن x و y و z است ، چنین می‌شود :

$$t^{3}-2at^{2}-a^{2}t+2a^{3}=0$$

این معادله به صورت زیر قابل تجزیه است :

$$(t-a)(t+a)(t-2a)=0 \Longrightarrow t=a,-a\ ,\ 2a$$

از اینجا جوابهای x و y و z دستگاه چنین است :

$$\left|\begin{array}{l} x=a \\ y=-a \\ z=2a \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x=-a \\ y=a \\ z=2a \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x=a \\ y=2a \\ z=-a \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x=-a \\ y=2a \\ z=a \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x=2a \\ y=-a \\ z=a \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x=2a \\ y=a \\ z=-a \end{array}\right.$$

۲۰. دستگاههای متجانس نسبت به مجهولها

دستگاهی را نسبت به مجهولهای خودمتجانس گوییم که تمام جمله‌های شامل مجهول در آن از یك درجه باشند .

مثلا دستگاه :

$$\begin{cases} ax^{2}+by^{2}+cxy=d \\ a'x^{2}+b'y^{2}+c'xy=d' \end{cases} \qquad (1)$$

نسبت به x و y متجانس است، زیرا تمام جمله‌های شامل مجهول در آن، از درجهٔ دوم‌اند.

روش حل. برای حل دستگاه متجانس، نسبت $\frac{y}{x}$ را مساوی λ می‌گیریم و در هر دو معادلهٔ دستگاه بجای y مقدارش λx را قرارمی‌دهیم. مثلا اگر در دستگاه (۱) چنین کنیم، خواهیم داشت :

$$\begin{cases} ax^2+b\lambda^2x^2+c\lambda x^2=d \\ a'x^2+b'\lambda^2x^2+c'\lambda x^2=d' \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2(a+b\lambda^2+c\lambda)=d \\ x^2(a'+b'\lambda^2+c'\lambda)=d' \end{cases}$$

از تقسیم دو معادلهٔ دستگاه بریکدیگر ، به معادله‌ای با مجهول λ می‌رسیم که از آنجا λ و سپس x و y بدست می‌آید .

مثال ۱. مطلوب‌است حل این دستگاه :

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+5y^2=7 \\ 3x^2+xy-2y^2=12 \end{cases}$$

حل. فرض می‌کنیم : $y=\lambda x$ و در دو معادلهٔ دستگاه قرار می‌دهیم، می‌شود :

$$\begin{cases} x^2(2-3\lambda+5\lambda^2)=7 \\ x^2(3+\lambda-2\lambda^2)=12 \end{cases} \Longrightarrow \frac{2-3\lambda+5\lambda^2}{3+\lambda-2\lambda^2}=\frac{7}{12} \;;$$

و یا :

$$74\lambda^2-43\lambda+3=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{37}$$

$$\lambda=\frac{1}{2} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

$$\lambda=\frac{۲}{۳۷} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=\pm\frac{۳۷}{۲}\sqrt{\frac{۷}{۷۷۹}} \\ y=\pm\frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۷}{۷۷۹}} \end{array} \right.$$

مثال۲. مطلوب‌است حل دستگاه زیر:

$$\begin{cases} x^۳+۲x^۲y-y^۳=۳ \\ ۲x^۳-xy^۲+y^۳=۲ \end{cases}$$

حل. با فرض $y=\lambda x$ داریم:

$$\begin{cases} x^۳(۱+۲\lambda-\lambda^۳)=۳ \\ x^۳(۲-\lambda^۲+\lambda^۳)=۲ \end{cases} \Longrightarrow \frac{۱+۲\lambda-\lambda^۳}{۲-\lambda^۲+\lambda^۳}=\frac{۳}{۲} \;;$$

و از آنجا:

$$۵\lambda^۳-۳\lambda^۲-۶\lambda+۴=۰ \Longrightarrow \lambda=۱ \;,\; \frac{-۱\pm\sqrt{۲۱}}{۵}$$

به‌ازای $\lambda=۱$ بدست می‌آید: $x=y=۱$

و به‌ازای $\lambda=\frac{-۱\pm\sqrt{۲۱}}{۵}$:

$$\left| \begin{array}{l} x=\frac{۵}{\sqrt[۳]{۱۷۰\mp\sqrt{۲۱}}} \\ y=\lambda x \end{array} \right.$$

۲۱. دستگاههای خطی همگن

به دستگاههایی، خطی همگن گوییم که اولا نسبت به مجهولهای خودداز درجهٔ اول، ثانیاً فاقد مقدار ثابت باشند.

دستگاههای:

$$\left| \begin{array}{l} ax+by=۰ \\ a'x+b'y=۰ \end{array} \right. \;;\; \begin{cases} ax+by+cz=۰ \\ a'x+b'y+c'z=۰ \\ a''x+b''y+c''z=۰ \end{cases} \;;\; \ldots$$

دستگاههای خطی همگن هستند.

دستگاههای همگن خطی، در حالت کلی جوابهای صفر را برای تمام

مجهولها قبول دارند و تنها در موردی که جوابها به صورت $\frac{0}{0}$ در آیند، دستگاه به معادله یا دستگاه سیالی تبدیل می‌شود که جوابهایی غیر از صفر راهم می‌پذیرد.

مثال ۱. m را چنان پیدا کنید که دستگاه زیر جوابهایی غیر از صفر هم داشته باشد:

$$\left|\begin{array}{l} (m-2)x+(m-1)y=0 \\ mx+2(2m-3)x=0 \end{array}\right.$$

حل. در حالتی که داشته باشیم:

$$\frac{m-2}{m}\neq\frac{m-1}{2(2m-3)}$$

دستگاه، تنها جوابهای $x=y=0$ را خواهد داشت، ولی اگر داشته باشیم:

$$\frac{m-2}{m}=\frac{m-1}{2(2m-3)} \qquad (1)$$

بجز صفر جوابهای دیگری هم برای x و y بدست می‌آید.

از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$$3m^2-13m+12=0 \implies m=3\ ,\ \frac{4}{3}$$

در حالت $m=3$، دستگاه چنین می‌شود:

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x+6y=0 \end{cases} \implies x+2y=0$$

یعنی جوابهای دستگاه، جوابهای معادلهٔ سیال $x+2y=0$ است:

$$\left|\begin{array}{l} x=-2y \\ y=\text{عددی دلخواه} \end{array}\right. \quad \text{یا} \quad \left|\begin{array}{l} x=\text{عددی دلخواه} \\ y=-\frac{1}{2}x \end{array}\right.$$

و در حالت $m=\frac{4}{3}$، داریم:

$$\begin{cases} -\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۳}y=۰ \\ \\ \frac{۴}{۳}x-\frac{۲}{۳}y=۰ \end{cases} \Longrightarrow ۲x-y=۰$$

$$\left| \begin{array}{l} x= \text{عددی دلخواه} \\ y=۲x \end{array} \right. \quad \text{یا} \quad \left| \begin{array}{l} x=\frac{۱}{۲}y \\ y= \text{عددی دلخواه} \end{array} \right.$$

مثال۲. دستگاه زیررا حل وبحث کنید :

$$\begin{cases} x+ay+a^۲z=۰ \\ x+by+b^۲z=۰ \\ x+cy+c^۲z=۰ \end{cases}$$

حل. ابتدا معادلهٔ دوم و سپس معادلهٔ سوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم، می‌شود :

$$\begin{cases} (a-b)y+(a^۲-b^۲)z=۰ \\ (a-c)y+(a^۲-c^۲)z=۰ \end{cases}$$

I. اگر a ، b و c سه عدد متمایز باشند یعنی $a\neq b$ ، $a\neq c$ و $b\neq c$ داریم :

$$\begin{cases} y+(a+b)z=۰ \\ y+(a+c)z=۰ \end{cases} \Longrightarrow (b-c)z=۰$$

وچون فرض کردیم $b\neq c$ ، می‌شود $z=۰$ و از آنجا x و y هم‌مساوی صفر می‌شوند.

بنابراین درحالتی‌که a ، b و c متمایز باشند :

$$x=y=z=۰$$

II. اگر از سه مقدار a ، b و c ، تنها دو مقدار باهم برابر باشند و مثلا $a=b$ ، سه معادله به دو معادلهٔ زیر تبدیل می‌شوند :

$$\begin{cases} x+ay+a^{۲}z=\circ \\ x+cy+c^{۲}z=\circ \end{cases}$$

از تفاضل این دومعادله وبا توجه به اینکه $a\neq c$ است بترتیب داریم:

$$(a-c)y+(a^{۲}-c^{۲})z=\circ \implies y+(a+c)z=\circ$$

$$\begin{cases} x=acz \\ y=-(a+c)z \\ z=\text{عددی دلخواه} \end{cases}$$

ویا حالتهای دیگر .

III. اگر $a=b=c$ باشد، سه معادلهٔ دستگاه به یك معادله تبدیل می‌شود :

$$x+ay+a^{۲}z=\circ \implies x=-a(y+az)$$

$$\left|\begin{array}{l} x=-c(y+az) \\ y=\text{عددی دلخواه} \\ z=\text{عددی دلخواه} \end{array}\right. \quad \text{یا} \quad \left|\begin{array}{l} x=\text{عددی دلخواه} \\ y=-\frac{۱}{a}(x+a^{۲}z) \\ z=\text{عددی دلخواه} \end{array}\right.$$

$$\text{یا} \quad \left|\begin{array}{l} x=\text{عددی دلخواه} \\ y=\text{عددی دلخواه} \\ z=-\frac{۱}{a^{۲}}(x+ay) \end{array}\right.$$

تمرینها

این معادله‌ها را حل کنید :

۱۸۱. $(x-۲)(x+۱)(x+۶)(x+۹)+۱۰۸=\circ$

۱۸۲. $x^{۴}+(x+\sqrt{۲})^{۴}=۶۸$

۱۸۳. $x^{۶}+(x+۲)^{۶}=۲$

۱۸۴. $(x+۳)^{۴}+(x+۵)^{۴}=۸$

.۱۸۵

$$(x-2)(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)(x+8)+476=0$$

.۱۸۶ $(\sqrt{x}+1)^4+(\sqrt{x}-3)^4=256$

.۱۸۷ $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)=120$

.۱۸۸ $x^4+2x^3+2x^2+x=42$

.۱۸۹ $x^4+6x^3+7x^2-6x=1$

.۱۹۰ $\frac{1}{a}\sqrt[n]{a+x}+\frac{1}{x}\sqrt[n]{a+x}=b\sqrt[n]{x}$

.۱۹۱ $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$

.۱۹۲ $(x^2+2x-12)^2=x^2(3x^2+2x-12)$

.۱۹۳ $(2x^2-x-6)^2+3(2x^2+x-6)^2=4x^2$

.۱۹۴ $\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2}=\frac{9}{2}$

.۱۹۵ $3x^4-20x^3+45x^2-40x+12=0$

.۱۹۶ $\sqrt[m]{(x+1)^2}-\sqrt[m]{(x-1)^2}+\frac{3}{2}\sqrt[m]{x^2-1}=0$

.۱۹۷ $x^3-3abx+a^3+b^3=0$

.۱۹۸ $(a^2-a)^2(x^2-x+1)^3=(a^2-a+1)^3(x^2-x)^2$

.۱۹۹ $(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0$

.۲۰۰

$$x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$$

.۲۰۱ $x^3+2\sqrt{3}x^2+3x+\sqrt{3}-1=0$

.۲۰۲ $x^5-5x^3+5x-1=0$

.۲۰۳ $\frac{(x-a)^2+(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{(x-a)^2-(x-a)(x-b)+(x-b)^2}=\frac{3c^2+1}{c^2+3}$

.۲۰۴

$$x^2-(3x^2-2x+1)x+(2x^4-5x^3+2x^2+6x-3)=0$$

.۲۰۵ $x^7-7^7=(x+7)^7$

.۲۰۶ $9x^4-15x^3+28x^2-20x+16=0$

۲۰۷. $8x^6-16x^5+2x^4+12x^3+3x^2-36x+27=0$

۲۰۸. $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$

۲۰۹. $x^2(1+x)^2+x^2=8(1+x)^2$

۲۱۰. $(1+x^2)^2=4x(1-x^2)$

۲۱۱. $\sqrt{a+x}=a-\sqrt{x}$

۲۱۲. $\frac{1}{a}\sqrt{a+x}+\frac{1}{x}\sqrt{a+x}=\sqrt{x}$

۲۱۳. $\sqrt{x-1}+6\sqrt[4]{x-1}=16$

۲۱۴. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$

۲۱۵. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a+b-2x}$

۲۱۶. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$

۲۱۷. $\sqrt{a+x}-\sqrt[3]{a+x}=0$

۲۱۸. $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$

۲۱۹. $\sqrt[5]{(7x-3)^3}+8\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}}=7$

۲۲۰. $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$

۲۲۱. $\sqrt[5]{16+\sqrt{x}}+\sqrt[5]{16-\sqrt{x}}=2$

۲۲۲. $\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^n x^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{x^n a^{n^2}}}=b \quad (a>0)$

۲۲۳. $\sqrt[n]{a^k x^{n-k}}+\sqrt[n]{x^k a^{n-k}}=2\sqrt{bx}$

با شرطهای $n>k>0$ و $b>a>0$

۲۲۴. $\frac{\sqrt[n]{a-x}}{x^2}-\frac{\sqrt[n]{a-x}}{a^2}=\sqrt[n]{\frac{x^2}{a+x}}$

۲۲۵. $$\sqrt{\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x^2}}}-\sqrt{\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{a^2}}}=\sqrt[2n]{x}$$

۲۲۶. $$2x^3-(3a-1)x^2+(a^2+a-8)x+a+3=0$$

۲۲۷. $$[x]=\left[\frac{x^2-2}{3}\right]$$

۲۲۸. $$x^4+4x^3-8x+a=0$$

۲۲۹. $$|x-2|\cdot|x+3|\cdot|x+6|=|x+1|\cdot|x+4|\cdot|x+9|$$

۲۳۰. $$x^3-(a+2)x+\sqrt{a+1}=0$$

۲۳۱. $$\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x}=x \qquad (p>0)$$

۲۳۲. $$\frac{(x+a+b)^5+(x+c+d)^5}{(x+a+c)^5+(x+b+d)^5}=\frac{(a+b-c-d)^5}{(a-b+c-d)^5}$$

(با شرط $a+c\neq b+d$)

۲۳۳. $$\frac{4x+3y}{2x}=\left[\frac{x^2+y^2}{x^2}\right]$$

۲۳۴. $$\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$$

۲۳۵. $$(x-1)^3+(x-2)^3+\dots+(x-n)^3=0$$

۲۳۶. $$x^4-2\sqrt{2}x^2-x+2-\sqrt{2}=0$$

۲۳۷. $$x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+2=0$$

۲۳۸. $$2x^3+x+\sqrt{2}=0$$

۲۳۹. $$x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$$

۲۴۰. $$3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x$$

۲۴۱. $$\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{\sqrt{5}+x}}=x$$

۲۴۲. $$\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\sin^2 3x$$

۲۴۳. $$(x+1)^2+(x+2)^3+(x+3)^4=2$$

۲۴۴. $x^4-2ax^2+x+a^2-a=0$

۲۴۵. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a+b}=0$

۲۴۶.
$$(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)(a+b+c)-abcx=0$$

۲۴۷.
$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+2a}+\frac{1}{x+3a}+\frac{1}{x+4a}+\frac{1}{x+5a}+\frac{1}{x+6a}=0$$

۲۴۸. $y^3+2py^2+(p^2+2)y+2p=0$

۲۴۹. $\frac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a-x)^2+(x-b)^2}=\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}$

۲۵۰. $x^3-(4a^2+3)x^2+4a^2(a^2+2)x-4(a^4-1)=0$

۲۵۱. $(x+a)^5-(x+b)^5=c^5$

۲۵۲. $x^7+a^7+b^7=(x+a+b)^7$

۲۵۳. $\sqrt[5]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[5]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[5]{2a}$

۲۵۴. $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$

۲۵۵.
$$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$$

۲۵۶. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=$
$$(x+1)^4+(x+2)^4+(x+3)^4+(x+4)^4$$

۲۵۷: $\sqrt{2(1+x^2)}+2(x-1)=2a\sqrt{x}$

۲۵۸. $(x^2+a^2)(x-3a)^2=8a^4 (a\neq 0)$

۲۵۹. $x^4+2x^3-x-a=0$

۲۶۰. $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}-4=0$

۲۶۱. $2x-\sqrt{3-2x}-3=0$

۲۶۲. $3\sqrt{x+6}-\sqrt{2-x}-4=0$

۲۶۳. $2\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x}-1=0$

۲۶۴. $\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{3-x}=4$

۲۶۵. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=0$

۲۶۶. $x^3-(2a+1)x^2+a^2(x+1)=0$

۲۶۷. $x^3-2(a-2)x^2+(a^2-6a+3)x+2a(a-1)=0$

۲۶۸.

$$a^2x^4-a(2a^2-a+2)x^2-2a^2x+(a^2+1)(a-1)^2=0$$

۲۶۹.

$$4x^4+12x^3+(4a+9)x^2+2(3a+1)x+a(a+2)=0$$

۲۷۰. $2a^2x^4-3a(2a^2+1)x^3+(4a^4+9a^2+1)x^2-$

$$-3a(2a^2+1)x+2a^2=0$$

۲۷۱. $6x^6-5x^5-22x^4-10x^3-32x^2-5x+6=0$

۲۷۲.

$$10a^6-19a^5+11a^4-18a^3+11a^2-19a+10=0$$

۲۷۳. چه رابطه‌ای بین a و b و c برقرار باشد، تا ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

به تصاعد حسابی باشند؟

۲۷۴. اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ:

$$4x^4-24x^3+57x^2+18x-45=0$$

برابر $3+i\sqrt{6}$ باشد، ریشه‌های دیگر آنرا بدست آورید $(i=\sqrt{-1})$.

۲۷۵. ثابت کنید که اگر $p^2<3q$ باشد، معادلهٔ:

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

فقط یك ریشهٔ حقیقی دارد.

۲۷۶. ثابت کنید که معادلهٔ $x^n=x+n$ وقتی n عددی صحیح و مثبت باشد، همیشه جوابی بین ۱ و ۲ دارد و وقتی n بزرگ شود، این ریشه کوچك می‌شود و حد آن واحد است.

۲۷۷. ثابت کنید که معادلهٔ زیر ریشهٔ حقیقی ندارد :

$$x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$$

۲۷۸. مطلوب‌است مساحت مثلثی که ارتفاعهای آن ریشه‌های معادلهٔ زیر باشند:

$$x^3-kx^2+px-z=0$$

۲۷۹. معادلهٔ $x^3+px+q=0$ مفروض است . ثابت کنید که اگر p^3+q^2 بر ۲۳ قابل قسمت باشد ، تفاضل دو ریشهٔ معادله هم مضربی از ۲۳ است .

۲۸۰. ثابت کنید که اگر یکی از معادله‌های $ax^2+bx+c=0$ یا $a'x^2+b'x+c'=0$ ریشه‌های موهومی داشته باشند ، ریشه های معادلهٔ زیر حقیقی است:

$$(ab'-ba')z^2+2(ac'-ca')z+(bc'-cb')=0$$

۲۸۱. اگر $0<\alpha<1$ و $0<\beta<1$ و $b>0$ و $a>0$ باشد، ثابت کنید معادلهٔ زیر ریشهٔ حقیقی ندارد :

$$P(x)=x^4-2a\alpha x^3+a^2x^2+2ab\beta x+b^2=0$$

۲۸۲. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای‌اینکه معادلهٔ :

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

با ضریبهای حقیقی، ریشهٔ‌موهومی خالص داشته باشد، این‌است که داشته‌باشیم:

$$ad=bc \text{ و } ac>0$$

۲۸۳. ثابت کنید که تابع $f(x)=a^x-b^x$ $(a>b>1)$ برای عددهای غیرمنفی x ، تابعی‌است صعودی‌وباتوجه‌به‌این‌خاصیت معادلهٔ $5^x-2^x=21$ را حل کنید.

۲۸۴. حدی را پیداکنید که ریشهٔ مثبت معادلهٔ زیر وقتی $n\to\infty$ ، به‌سمت آن میل می‌کند:

$$x^n+x^{n-1}+\dots+x^2+x=1$$

۲۸۵. ثابت کنید عکس ریشه‌های معادلهٔ $x^3-x+1=0$ در معادلهٔ $x^5+x+1=0$ صدق می‌کنند .

۲۸۶. a را چنان پیداکنید که معادلهٔ زیر به یك معادلهٔ دو مجذوری تبدیل شود :

$$x^4-8x^3+21x^2+ax+6=0$$

و سپس آنرا حل کنید :

۲۸۷. اگر بدانیم یکی از ریشه‌های معادلهٔ زیر دو برابر ریشهٔ دیگری از آن‌است ، معادله را حل کنید :

$$x^3+21x^2+140x-300=0$$

۲۸۸. اگر α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ $x^3+px+q=0$ باشد ، محاسبه کنید :

$$S=\frac{m\alpha+n}{m\alpha-n}+\frac{m\beta+n}{m\beta-n}+\frac{m\gamma+n}{m\gamma-n}$$

۲۸۹. شرط وجود یك ریشهٔ مشترك را بین معادله‌های زیر پیدا کنید:

$$x^3+px+q=0$$
$$x^3+p_1x+q_1=0$$

۲۹۰. اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادلهٔ $x^3-x+1=0$ باشد ، مطلوب‌است محاسبهٔ: $x_1^5+x_2^5+x_3^5$

۲۹۱. ثابت کنید که تفاضل ریشهٔ کوچکتر از مجذور ریشهٔ متوسط درمعادلهٔ زیر برابر است با ۲ :

$$x^3-3x+1=0$$

۲۹۲. ریشه‌های مشترك معادله‌های زیر را پیدا کنید :

$$\begin{cases} x^4-3x^3+4x^2-5x-3=0 \\ x^4+x^3-5x^2-7x-2=0 \end{cases}$$

۲۹۳. معادله‌ای با ضریبهای گویا پیدا کنید که یکی از ریشه‌های آن :

$$\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^9$$

باشد . به شرطی که α یکی از ریشه‌های معادلهٔ $\alpha^{13}-1=0$ است .

۲۹۴. معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌های آن توان چهارم ریشه‌های این معادله باشد :

$$ax^2+bx+c=0$$

۲۹۵. مطلوب‌است زاویه‌های مثلث‌متساوی‌الساقینی باقاعدهٔ a وساق b، به‌شرطی

که داشته باشیم:

$$a^3-3ab^2+b^3\sqrt{3}=0$$

۲۹۶. اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادلهٔ $x^3-1=0$ باشند، ثابت کنید:

$$x_1^n+x_2^n+x_3^n=x_1^nx_2^n+x_2^nx_3^n+x_3^nx_1^n$$

۲۹۷. مقادیر حقیقی a و b و p و q را چنان پیدا کنید که تساوی زیر به اتحاد تبدیل شود:

$$(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$$

۲۹۸. معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن چنین باشد:

$$\cos\frac{5\pi}{7}\ ,\ \cos\frac{3\pi}{7}\ ,\ \cos\frac{\pi}{7}$$

۲۹۹. λ را بین رابطه‌های زیر حذف کنید:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{1+\lambda^2}[\lambda^2p_1+(p_2-q_2)\lambda+q_1] \\ x=\dfrac{1}{1+\lambda^2}[\lambda^2q_2+(p_1-q_1)\lambda+p_2] \end{cases}$$

۳۰۰. معادلهٔ درجهٔ چهارمی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادلهٔ زیر باشد:

$$x^4+2x^3+x^2-3x+5=0$$

۳۰۱. اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^3-3x^2-x-7=0$$

باشند، مطلوب‌است محاسبهٔ عبارت زیر:

$$S=\frac{1}{x_1^2-1}+\frac{1}{x_2^2-1}+\frac{1}{x_3^2-1}$$

۳۰۲. اگر ۱ و α و β و γ و... و λ ریشه‌های معادلهٔ $x^n-1=0$ باشند، مطلوب‌است محاسبهٔ:

$$P=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\cdots(1-\lambda)$$

۳۰۳. اگر x_1 و x_2 و ... و x_n ریشه‌های معادلهٔ:

$$x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1=0$$

باشند ، مطلوب است محاسبهٔ حاصل عبارت‌زیر :

$$\sigma=\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\dots+\frac{1}{x_n-1}$$

۳۰۴. a را طوری پیدا کنید که حاصلضرب دو ریشه از معادلهٔ :

$$x^4-ax^3+22x^2+ax-168=0$$

برابر ۱۲ باشد و سپس معادله را حل کنید .

۳۰۵. a را طوری پیدا کنید که معادلهٔ $x^4-4x^2+4ax-a=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

و سپس معادله را حل کنید.

۳۰۶. اگرداشته باشیم:

$$f(x)=16x^4-32x^3-56x^2+72x+72$$

اولا $f(1-x)$ را پیدا کنید . ثانیاً $f(x)=0$ را حل کنید.

۳۰۷. m را طوری پیدا کنید که در معادلهٔ :

$$x^4-8x^3+mx^2-8x-3=0$$

مجموع دوریشه با مجموع دو ریشهٔ دیگر آن مساوی باشد و سپس معادله را حل کنید .

۳۰۸. اضلاع مثلثی ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$x^3-12x^2+47x-60=0$$

بدون حل معادله ، مساحت مثلث را بدست آورید.

۳۰۹. مجموع توانهای یازدهم ریشه‌های معادله زیر را پیدا کنید :

$$x^3+x+1=0$$

۳۱۰. ثابت کنید که اگر عدد سه رقمی $\overline{abc}$ اول باشد ، ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ عددهایی گنگ هستند.

۳۱۱. ثابت‌کنید مجموع توانهای سوم ریشه‌های معادلهٔ $x^3+px+q=0$ با ضریبهای صحیح ، عدد صحیحی است قابل‌قسمت بر ۳.

۳۱۲. به ازای چه مقادیری از n ، مجموع

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2$$

بر ۱۰ قابل‌قسمت است (n عددی طبیعی است).

۳۱۳. اگر $a^2+a+1=0$ باشد، مجموع $a^{1967}+\frac{1}{a^{1967}}$ را محاسبه کنید.

۳۱۴. ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ را x_1 و x_2 وریشه‌های معادلهٔ $a'x^2+b'x+c'=0$ را x'_1 و x'_2 می‌گیریم. بدون حل این معادله‌ها، دو معادلهٔ درجهٔ دوم تشکیل دهید که ریشه‌های آنها بترتیب $x_1+x'_1$ و $x_2+x'_2$ و $x_1+x'_2$ و $x_2+x'_1$ باشد.

* * *

دستگاههای زیر را حل کنید:

۳۱۵. $$\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2) \\ x+y=6 \end{cases}$$

۳۱۶. $$\begin{cases} x+xy+y=11 \\ xy^2+x^2y=30 \end{cases}$$

۳۱۷. $$\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$$

۳۱۸. $$\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ xy(x+y)=-2 \end{cases}$$

۳۱۹. $$\begin{cases} x^4+y^4=a^4 \\ x+y=b \end{cases} \quad (a\neq 0 \text{ و } b\neq 0)$$

۳۲۰. $$\begin{cases} x^5+y^5=a^5 \\ x+y=a \end{cases}$$

۳۲۱. $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3 \\ xyz=2 \end{cases}$$

۳۲۲. $$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$$

۳۲۳.
$$\begin{cases} x-ay-a^2z-a^3t=a^4 \\ x-by-b^2z-b^3t=b^4 \\ x-cy-c^2z-c^3t=c^4 \\ x-dy-d^2z-d^3t=d^4 \end{cases}$$

۳۲۴.
$$\begin{cases} x\sin a+y\sin 2a+z\sin 3a=\sin 4a \\ x\sin b+y\sin 2b+z\sin 3b=\sin 4b \\ x\sin c+y\sin 2c+z\sin 3c=\sin 4c \end{cases}$$

۳۲۵.
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=3 \\ b^2x^2+xy-a^2y^2=ab \end{cases}$$

۳۲۶. ثابت کنید که اگر اضلاع یك مثلث در رابطه‌های زیر صدق کنند:

$$\left| \begin{array}{l} a^4=b^4+c^4-b^2c^2 \\ b^4=c^4+a^4-c^2a^2 \end{array} \right. ;$$

در رابطهٔ زیر هم صدق می‌کنند:

$$c^4=a^4+b^4-a^2b^2$$

۳۲۷.
$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \qquad (x,y,z\neq 0) \\ xy+yz+xz=27 \end{cases}$$

۳۲۸.
$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=37 \\ x^2+z^2+xz=28 \\ y^2+z^2+yz=19 \end{cases}$$

۳۲۹.
$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=18 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4 \end{cases}$$

۳۳۰.
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+5x+2y-3}+\sqrt{x^2+x+y+2}= \\ \qquad =\sqrt{x^2+4x+3y-2}+\sqrt{x^2+2y+3} \\ x^{x-y}=2y-1 \end{cases}$$

۳۳۱.
$$\begin{cases} x=\dfrac{2yz}{y^2+z^2} \\ y=\dfrac{2xz}{x^2+z^2} \\ z=\dfrac{2xy}{x^2+y^2} \end{cases}$$

۳۳۲.
$$\begin{cases} x^3=ax+by \\ y^3=bx+ay \end{cases}$$

۳۳۳.
$$\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x}+\sqrt[4]{6-y}=3 \\ 5x-y=18 \end{cases}$$

۳۳۴.
$$\begin{cases} x=y^3-\ \ y \\ y=3x-x^3 \end{cases}$$

۳۳۵.
$$\begin{cases} ax-cy+bz=x^2+z^2 \\ -bx+ay+cz=y^2+z^2 \\ cx+by-az=x^2+y^2 \end{cases}$$

۳۳۶. x و y را بین معادله‌های دستگاه زیر حذف کنید :

$$\begin{cases} x+y=p+qxy \\ 2x=s+tx^2 \\ 2y=s+ty^2 \end{cases}$$

۳۳۷. شرط توافق دستگاه‌زیر را پیدا کنید:

$$x+y=a \ ; \ x^2+y^2=b \ ; \ x^3+y^3=c$$

۳۳۸. شرط توافق را در دستگاه زیر پیدا کنید :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \\ a''x+b''y+c''=0 \end{cases}$$

۳۳۹. با توجه به رابطه‌های زیر نسبت $x : y : z$ را پیدا کنید :

$$\left|\begin{array}{l} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{array}\right.$$

۳۶۰. ثابت‌کنید اگر a و b و c ضلعهای یك مثلث باشند $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[u]{c}$ هم می‌توانند ضلعهای یك مثلث باشند.

۳۶۱. مطلوب‌است‌محاسبهٔ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ بشرطی‌که داشته باشیم:

$$p=\left(\log N^{p-2}\right)^{\frac{1}{2}} \; ; \; q\left(\log N^{q-2}\right)^{\frac{1}{2}} \; ; \; r=\left(\log N^{r-2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

۷

معادله‌های سیال

در برنامهٔ دبیرستانی و حتی در برنامهٔ به اصطلاح «حساب استدلالی» در بارهٔ معادله‌های سیال سکوت شده است، در حالی‌که در بسیاری از مسأله‌های جبرمحتاج به حل معادله‌های سیال هستیم.

از لحاظ تاریخی هم‌گویا از زمان دیوفانت اینگونه‌مسأله‌ها مطرح بوده است و به‌همین مناسبت به آنها «معادله‌های دیوفانتی» هم می‌گویند.

به‌این مناسبتها بحث در موردمعادله‌های سیال ضروری‌بنظر می‌رسد ، اگر چه ، بجز در مورد معادله‌های سیال درجهٔ اول دو مجهولی و یا بعضی نوعهای دیگر، نمی‌توان راه حلهای‌کلی ذکر کرد و ذوق و ابتکار دانش‌آموز بیش از هر قاعده‌ای می‌تواند وسیله‌ای برای حل این معادله‌ها باشد.

معادله‌های سیال درجه اول

۱. توضیح مقدماتی: می‌دانیم که اگر در مورد معادله‌های درجه‌اول ، تعداد معادله‌ها کمتر از تعداد مجهولها باشد ، دستگاه دارای بینهایت جواب خواهد بود . چنین معادله‌ها یا دستگاهها را سیال گویند.

در عمل، اغلب به مواردی برمی‌خوریم که معادله‌ای بادو مجهول‌درجلو ماست ، صورت کلی این معادله‌ها چنین است:

$$ax+by=c$$

که در آن x و y مجهولها و a و b و c ضریبهای مفروضی هستند .

اغلب شرطهای‌مسأله طوری است که درچنین معادله‌هایی تنها به‌جوابهای صحیح و یا حتی تنها به جوابهای صحیح و مثبت احتیاج داریم.

مثال۱. عدد ۱۱۸ را به دو عدد تبدیل کنید که یکی از آنها بر ۱۱ و دیگری بر ۱۷ قابل قسمت باشد.

اگر یکی از دو عدد را $11x$ و دیگری را $17y$ فرض کنیم بایدداشته باشیم :

$$11x+17y=118$$

وچون درمساله ذکری از علامت جوابها نشده‌است، می‌توانیم جوابهای‌منفی‌را هم قبول کنیم. به‌عنوان‌نمونه عددهای ۳۳و۸۵ (به‌ازای $x=3$و$y=5$) و یا عددهای ۲۲۰ و۱۰۲− (به‌ازای $x=20$و$y=-6$)ویاعددهای ۱۵۴− و ۲۷۲ (به ازای $x=-14$ و $y=16$) و غیره در شرطهای مساله صدق می‌کنند.

مثال۲. برای بسته‌بندی یك نوع گلدان بلوری دو نوع جعبه داریم. در جعبهٔ کوچکتر ۴ گلدان و در جعبهٔ بزرگتر ۷ گلدان می‌توان جا داد . اگر بخواهیم یك سفارش ۴۱ گلدانی را بسته‌بندی کنیم ، چند جعبه از هر نوع لازم است ؟

اگر تعداد جعبه‌های کوچك را x وتعداد جعبه‌های بزرگ را y فرض کنیم، معادلهٔ زیررا خواهیم داشت :

$$۴x+۷y=۴۱$$

روشن است که در اینجا تنها جوابهای صحیح و مثبت مورد احتیاج‌است و این معادله تنها یك جواب ۵=x و ۳=y را قبول دارد.

بنابراین باید راهی برای پیداکردن جوابهای صحیح و در حالت‌خاص جوابهای صحیح و مثبت معادله‌های سیال پیداکنیم.

در حقیقت از شرط صحیح بودن ریشه‌ها (ویا صحیح و مثبت بودن‌آنها) باید استفاده‌کرد و راهی برای جستجوی جوابها (و یا رابطه‌ای که معرف صورت‌کلی جوابها باشد) بدست‌آورد.

۲.معادله‌هایی‌که جواب صحیح ندارند

معادلهٔ زیر را درنظر می‌گیریم:

$$ax+by=c$$

اگردربین ضریبهای این معادله،عددهای‌کسری وجود داشته باشد،می‌توان آنها را به یك مخرج تحویل، سپس از مخرجها صرفنظرکرد. به این ترتیب می‌توان همیشه ضریبها را عددهایی صحیح در نظرگرفت.

همچنین اگر ضریبها ، مقسوم علیه مشترکی غیراز واحد داشته‌باشند، می‌توان دوطرف معادله را بربزرگترین مقسوم علیه‌مشترك ضریبها تقسیم کرد و در نتیجه ضریبها را نسبت به‌هم اول به حساب آورد.

حالا فرض می‌کنیم‌که a وb بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترکی غیرازواحد داشته باشند ، مثلا داشته باشیم:

$$a=ma_۱ \ ; \ b=mb_۱$$

در این‌صورت معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$ma_۱x+mb_۱y=c$$

و اگر دوطرف تساوی را بر m تقسیم‌کنیم:

$$a_1x+b_1y=\frac{c}{m}$$

سمت چپ این تساوی به ازای هرمقدار صحیحی از x و y عددی‌است صحیح ، در حالی‌که طبق فرض c بر m قابل‌قسمت نیست و سمت‌راست‌تساوی عددی است غیرصحیح ، یعنی این تساوی ممکن نیست و بنابراین:

اگر ضریبهای مجهولهای یك‌معادلهٔسیال درجه اول مقسوم‌علیه‌مشترکی مخالف واحد داشته باشند (که مقسوم‌علیه مقدار ثابت معادله نباشد) ، در این صورت معادله نمی‌تواند دارای جوابهای صحیح باشد.

به‌همین‌مناسبت درتمام مواردی‌که بعداز این از معادلهٔ $ax+by=c$ صحبت می‌کنیم، فرض را براین می‌گیریم که a و b نسبت به‌هم اول هستند.

۳. معادله‌هایی‌که جواب مثبت ندارند

اگر در معادلهٔ $ax+by=c$ ، ضریبهای a و b مثبت و عددمعلومc منفی‌باشد ، به‌ازای تمام مقادیر مثبت x و y ، سمت چپ تساوی مثبت وسمت راست آن منفی می‌شود ومعادله جواب مثبت ندارد.

واگر ضریبهای aوb منفی‌و مقدار ثابتcمثبت باشد، با ضرب‌دوطرف معادله در ۱ — به‌همان حالت قبل می‌رسیم و بنابراین:

اگر ضریبهای مجهولهای یك‌معادلهٔ سیال علامتی مخالف باعلامت‌مقدار ثابت معادله داشته باشند، معادله نمی‌تواند جواب مثبت داشته باشد.

۴. رابطهٔ کلی جوابهای معادلهٔ سیال

فرض‌کنیم به طریقی (و مثلا جستجو) یکی از جوابهای صحیح معادلهٔ سیال $ax+by=c$ را بدست‌آورده باشیم. این جواب را $x=\alpha$ و $y=\beta$ فرض‌کنید، اگربجای x و y مقادیر جواب را در معادله قرار دهیم، اتحاد زیر بدست می‌آید :

$$a\alpha+b\beta=c$$

و اگر این اتحاد را از معادلهٔ مفروض کم کنیم، خواهیم داشت :

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$$

و از آنجا :

$$ax=a\alpha-b(y-\beta) \implies x=\alpha-\frac{b}{a}(y-\beta)$$

برای اینکه x عددی صحیح باشد، لازم و کافی است کــه کسر $\frac{b}{a}(y-\beta)$ عددی صحیح باشد (زیرا α عددی است صحیح). به عبارت دیگر لازم و کافی است که عبارت $b(y-\beta)$ بر a قابل‌قسمت باشد. ولی b نسبت به a اول است، بنابراین لازم است (و ضمناً کافی است) که $y-\beta$ بر a قابل‌قسمت باشد. اگر خارج قسمت $y-\beta$ بر a را t فرض کنیم (t می‌تواند مثبت یا منفی باشد) بدست می‌آید :

$$\frac{y-\beta}{a}=t \implies y=\beta+at$$

و اگر در رابطهٔ x بجای $\frac{y-\beta}{a}$ مقدارش t را قرار دهیم، خواهیم داشت :

$$x=\alpha-bt$$

بنابراین برای جوابهای معادلهٔ سیال رابطه‌های زیر بدست می‌آید :

$$x=\alpha-bt \;;\; y=\beta+at$$

اگر در این رابطه‌ها بجای t، عددهای صحیح دلخواهی (مثبت یا منفی) قرار دهیم، جوابهای معادلهٔ سیال (که تعداد آنها بینهایت است) بدست می‌آید. بخصوص به‌ازای $t=0$ جوابهای $x=\alpha$ و $y=\beta$ بدست می‌آید که از قبل برای ما معلوم بود.

با کمی دقت در رابطه‌هایی که بدست آمده است، روشن می‌شود که طبق قاعدهٔ زیر تنظیم شده‌اند:

۱ . جملهٔ اول رابطه ، جواب خاصی است که برای آن مجهول پیدا کرده‌ایم.

۲. جملهٔ دوم رابطه، عبارت‌است از حاصل‌ضرب عدد صحیح t در یکی

از ضریبهای مجهول معادلهٔ مفروض ، منتهی برای x از ضریب y و برای y از ضریب x استفاده می‌کنیم.

۳. یکی ازضریبهای دومجهول را با علامت‌قرینهٔ‌آن انتخاب می‌کنیم.

به سادگی می‌توان توجه‌کرد که انتخاب علامت قرینه برای این و یا آن ضریب فرقی ندارد. درحقیقت دو دستگاه رابطه‌های :

$$\begin{cases} x=\alpha-bt \\ y=\beta+at \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=\alpha+bt \\ y=\beta-at \end{cases}$$

با هم معادل‌اند ، فقط جوابهایی‌که از دستگاه اول به ازای مقادیری از t بدست می‌آید ، از دستگاه دوم به ازای قرینهٔ آن مقادیر بدست خواهد آمد و برعکس.

مثال. می‌خواهیم جوابهای صحیح معادلهٔ $۲x+۵y=۲۶$ را بدست آوریم.

با توجه مختصری دیده می‌شود که $x=۲$ و $y=۴$ در معادله صدق می‌کند و بنابراین تمام جوابهای معادله از رابطه‌های زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x=۲+۵t \\ y=۴-۲t \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=۲-۵t \\ y=۴+۲t \end{cases}$$

اگر در این رابطه‌ها بجای t عددهای صحیح دلخواهی قرار دهیم ، جوابهای صحیح معادلهٔ مفروض بدست می‌آید.

مثلا با استفاده از رابطه‌های اول داریم:

t	۰	۱	۲	۳	−۱	−۲	...
x	۲	۷	۱۲	۱۷	−۳	−۸	...
y	۴	۱	−۲	−۵	۷	۱۰	...

و اگر از رابطه‌های دوم هم استفاده می‌کردیم ، همین جوابها به‌ازای ۰ ، −۱ ، −۲ ، −۳ ، ۱ ، ۲ و غیره بدست می‌آمد.

به این ترتیب حل معادلهٔ سیال درجه اول به اینجا منجر می‌شود که بتوانیم یکی از جوابهای صحیح معادله را در دست داشته باشیم.

۵. روش جستجو

برای پیدا کردن یکی از ریشه‌های صحیح معادلهٔ سیال می‌توان ازروش زیر استفاده کرد:

فرض کنید معادلهٔ سیال به صورت زیر باشد:

$$ax+by=c$$

یکی از مجهولها را بر حسب مجهول دیگر بدست می‌آوریم (و بهتر است مجهولی را محاسبه کنیم که ضریب آن کوچکتر است)، مثلا فرض کنید $a<b$ باشد، در این صورت:

$$x=\frac{c-by}{a}$$

به y مقادیر متوالی ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ و ... را می‌دهیم تا به عددی برسیم که به ازای آن $c-by$ بر a قابل قسمت باشد. فرض کنید به ازای $y=n$ عبارت $c-bn$ بر a قابل‌قسمت و خارج قسمتی مساوی m داشته باشد، دراین صورت داریم:

$$x=m \; ; \; y=n$$

که یك جواب صحیح معادله است، در حقیقت داریم:

$$\frac{c-bn}{a}=m \Rightarrow c-bn=am \Rightarrow am+bn=c$$

یعنی مقادیر m و n در معادله صدق می‌کنند.

مثال. معادلهٔ $۷x-۴y=۲$ را در نظر می‌گیریم، y را نسبت به x محاسبه می‌کنیم:

$$۴y=۷x-۲ \Rightarrow y=\frac{۷x-۲}{۴}$$

اگر به x مقادیر متوالی ۰ ، ۱ ، ۲ و ... را بدهیم می‌بینیم که‌به‌ازای

$x=۲$ عبارت $۲-۷x$ بر ۴ قابل قسمت و خارج قسمتی مساوی ۳ دارد و بنابراین یکی از جوابهای معادله چنین است:

$$x=۲ \;;\; y=۳$$

و بقیهٔ جوابها از رابطه‌های کلی بدست‌می‌آیند:

$$\begin{cases} x=۲+۴t \\ y=۳+۷t \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=۲-۴t \\ y=۳-۷t \end{cases}$$

تبصره. در نظریهٔ عددها ثابت می‌کنند که اگر a و b نسبت به‌هم‌اول باشند، بین عددهای:

$$۰،۱،۲،۳،\ldots،(a-۱)$$

همیشه عددی مانند y وجود دارد که به ازای آن عبارت $c-by$ بر a قابل قسمت باشد. به‌همین مناسبت توصیه کردیم که از میان دو مجهول، آنرا برحسب دیگری بدست‌آوریم که ضریب کوچکتری دارد تا تعداد عددهای موردآزمایش کمتر باشد.

۶. حالت خاص معادلهٔ سیال

وقتی که یکی از ضریبهای دو مجهول مساوی واحد باشد، معادلهٔسیال را به سادگی می‌توان حل کرد. فرض کنید مثلا ضریب x برابر واحد باشد، خواهیم داشت:

$$x+by=c$$

x را برحسب y محاسبه می‌کنیم:

$$x=c-by$$

و واضح است هر عدد صحیحی از y متناظر است با عدد صحیحی برای x.

مثال. معادلهٔ $۵x+y=۱۸$ مفروض است، داریم:

$$y=۱۸-۵x$$

اگربه x مقادیر صحیح دلخواه بدهیم، برای y جوابهای صحیح‌نظیر آن بدست می‌آید:

x	۰	۱	۲	۳	۴	−۱	−۲	...
y	۱۸	۱۳	۸	۳	−۲	۲۳	۲۸	...

۷. راه حل کلی معادلهٔ سیال

بوسیلهٔ یك مثال راه حل کلی و عملی معادلهٔ سیال درجهٔ اول را بیان می‌کنیم . فرض‌کنید معادلهٔ زیر مفروض باشد :

$$۲۳x+۵۳y=۱۰۹$$

مجهولی راکه‌ضریب‌کوچکتردارد ، برحسب مجهول دیگر بدست‌می‌آوریم (و در اینجا x را) :

$$x=\frac{۱۰۹-۵۳y}{۲۳}$$

اگر قسمت صحیح کسر را خارج‌کنیم، می‌شود :

$$x=۴-۲y+\frac{۱۷-۷y}{۲۳}$$

شرط لازم وکافی برای اینکه x وy عددهایی صحیح باشند، این‌است که کسر $\frac{۱۷-۷y}{۲۳}$ عددی صحیح باشد . این کسر را مساوی tفرض می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۱۷-۷y}{۲۳}=t \implies ۱۷-۷y=۲۳t \implies ۲۳t+۷y=۱۷$$

اگر برای tوy عددهای‌صحیحی بدست‌آوریم که دررابطهٔ $\frac{۱۷-۷y}{۲۳}=t$ و یا معادلهٔ $۲۳t+۷y=۱۷$ صدق کنند ، برای x هم مقدار صحیحی بدست خواهد آمد و مساله حل شده است. بـه این ترتیب حل معادلهٔ سیال مفروض منجر به حل معادلهٔ سیال دیگری شد که ضریبهای آن کوچکتر و بنابراین حل آن ساده‌تر است،

اکنون در معادلهٔ اخیر هم y را (که ضریب کوچکتری دارد) نسبت‌به

t محاسبه می‌کنیم:

$$y=\frac{۱۷-۲۳t}{۷}=۲-۳t+\frac{۳-۲t}{۷}$$

برای اینکه y عددی صحیح باشد لازم و کافی است که کسر $\frac{۳-۲t}{۷}$ عددی صحیح باشد ، این کسر را مساوی $t_۱$ فرض می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۳-۲t}{۷}=t_۱ \implies ۷t_۱+۲t=۳$$

عددهای صحیحی از t و $t_۱$ که دراین معادله صدق کنند، متناظر باعددهای صحیحی از x و y معادلهٔ مفروض ما خواهند بود و به‌این ترتیب حل معادلهٔ ما منجر به حل معادلهٔ اخیر شدکه باز هم ضریبهای کوچکتری دارد. دراین معادله هم مثل‌قبل عمل می‌کنیم:

$$t=\frac{۳-۷t_۱}{۲}=۱-۳t_۱+\frac{۱-t_۱}{۲}$$

کسر $\frac{۱-t_۱}{۲}$ را مساوی عدد صحیح $t_۲$ می گیریم ، می‌شود :

$$\frac{۱-t_۱}{۲}=t_۲ \implies ۲t_۲+t_۱=۱$$

معادلهٔ سیالی بدست آوردیم که ضریب یکی از مجهولهای آن مساوی واحد است و چنین معادله‌ای را هم قبلا مورد بحث قرار داده‌ایم،

در حقیقت داریم: $t_۱=۱-۲t_۲$

اگر دراین معادله بجای $t_۲$ مقادیر صحیح قرار دهیم ، برای $t_۱$ هم عددهایی صحیح بدست می‌آید ، این مقادیر $t_۱$ و $t_۲$ را در عبارت t قرار می‌دهیم :

$$t=۱-۳t_۱+\frac{۱-t_۱}{۲}=۱-۳t_۱+t_۲$$

مقادیر صحیح متناظر t بدست می‌آید. سپس‌مقادیر بدست آمدهٔ t و $t_۱$ را در عبارت y قرار می‌دهیم :

$$y=۲-۳t+\frac{۳-۲t}{۷}=۲-۳t+t_۱$$

مقادیر متناظر y بدست می‌آید و بالاخره با قرار دادن مقادیر t و y در

عبارت x :

$$x=۴-۲y+\frac{۱۷-۷y}{۲۳}=۴-۲y+t$$

مقادیر صحیح x بدست خواهد آمد.

می‌توان مقادیر x و y را مستقیماً برحسب $t_۲$ بدست آورد، برای‌این منظور در رابطهٔ t بجای $t_۱$ مقدارش را برحسب $t_۲$ قرار می‌دهیم :

$$t=۱-۳t_۱+t_۲=۱-۳(۱-۲t_۲)+t_۲$$

ویا :

$$t=-۲+۷t_۲$$

حالا در عبارت y بجای t و $t_۱$ مقادیرشان را برحسب $t_۲$ می‌گذاریم:

$$y=۲-۳t+t_۱=۲-۳(-۲+۷t_۲)+(۱-۲t_۲)$$

ویا :

$$y=۹-۲۳t_۲$$

و بالاخره اگر در رابطهٔ x بجای y و t مقادیر بدست آمده برحسب $t_۲$ را قرار دهیم:

$$x=۴-۲y+t=۴-۲(۹-۲۳t_۲)+(-۲+۷t_۲)$$

ویا :

$$x=-۱۶+۵۳t_۲$$

و به این ترتیب برای x و y این رابطه‌ها را خواهیم داشت :

$$\left|\begin{array}{l} x=-۱۶+۵۳t_۲ \\ y=۹-۲۳t_۲ \end{array}\right.$$

اگر در این رابطه ها بجای $t_۲$ عددهای صحیح مثبت ، منفی و یا صفر قرار دهیم، جوابهای معادلهٔ سیال مفروض (که تعداد آنها بینهایت‌است) بدست می‌آید ، بعضی از این جوابها در جدول زیر داده شده است :

$t_۲$	۰	۱	۲	−۱	−۲
x	−۱۶	۳۷	۹۰	−۶۹	−۱۲۲
y	۹	−۱۴	−۳۷	۳۲	۵۵

اگر به عملهایی که روی ضریبهای معادلهٔمفروض انجام دادیم تا بهمعادلهٔ آخر رسیدیم ، توجه‌کنیم می‌بینیم :

۱) از تقسیم ضریب‌بزرگترمعادلهٔ مفروص یعنی ۵۳ برضریب‌کوچکتر یعنی ۲۳ به باقیماندهٔ ۷ و خارج قسمت ۲ رسیدیم.
۲) وسپس ضریب‌کوچکتریعنی ۲۳ را بر باقیماندهٔ قبلی یعنی ۷ تقسیم کردیم و به باقیماندهٔ دوم ۲ و خارج قسمت ۳ رسیدیم.
۳) و بالاخره از تقسیم باقیماندهٔ اول یعنی ۷ برباقیماندهٔ دوم یعنی ۲، به باقیماندهٔ واحد و خارج‌قسمت ۳ رسیدیم. به عبارت دیگر درست‌همان‌عملهای را انجام دادیم که برای پیدا کردن بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد انجام می‌دهیم.

می‌دانیم که بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عددی‌که نسبت به‌هم اولند مساوی واحد است وچون ضریبهای مجهولها را درمعادلهٔ سیال نسبت به‌هم اول فرض کردیم، بنابراین‌رشته عملهای انجام‌شده همیشه‌ما را به معادله‌ای می‌رساند که‌درآن ضریب‌یکی از مجهولها برابر واحد است و ازاینجا نتیجه می‌گیریم:
اگر ضریبهای مجهولهای معادلهٔ سیال نسبت به هم اول باشند، معادله همیشه دارای جوابهای صحیح است.

۸. ساده‌کردن حل معادله

گاهی برای حل معادلهٔ سیال می‌توان راههای ساده‌تری پیدا کرد که با سرعت بیشتری‌به جواب برسیم.

۱. اگر ضریب یکی از مجهولها و مقدار ثابت، مقسوم علیه مشترکی داشته باشند، می‌توان با انتخاب مجهول کمکی، بجای مجهول دوم، دوطرف معادله را به مقسوم‌علیه مشترك مذکور ساده کرده.

مثال ۱. این معادله را در نظر بگیرید:

$$۶x-۵y=۲۱$$

ضریب ۶ و مقدار معلوم ۲۱، مقسوم‌علیه مشترکی مساوی ۳ دارند، بنابراین جملهٔ $۵y$ هم باید بر ۳ قابل قسمت باشد و چون ۵ نسبت به ۳ اول است، باید y مضربی از ۳ باشد، اگر $y=۳t$ فرض کنیم (که در آن t

عددی است صحیح) خواهیم داشت :

$$6x-15t=21$$

و اگر دوطرف تساوی را به ۳ ساده کنیم می‌شود :

$$2x-5t=7$$

حالا معادلهٔ اخیر را حل می‌کنیم:

$$x=\frac{7+5t}{2}=3+2t+\frac{1+t}{2}=3+2t+t_1 \;;$$

$$\frac{1+t}{2}=t_1 \Longrightarrow t=-1+2t_1$$

و اگر این مقدار را در رابطه‌های x و y قرار دهیم:

$$\left|\begin{array}{l} x=3+2(-1+2t_1)+t_1=1+5t_1 \\ y=3(-1+2t_1)=-3+6t_1 \end{array}\right.$$

مثال۲. مطلوب است حل معادلهٔ زیر:

$$9x+14y=105$$

$y=3t$ فرض و دو طرف معادله را به ۳ ساده می‌کنیم:

$$3x+14t=35$$

حالا دراین‌معادله $x=7t_1$ می‌گیریم‌ودوطرف‌آنرا به ۷ ساده‌می‌کنیم:

$$3t_1+2t=5$$

و معادلهٔ اخیر را حل می‌کنیم:

$$t=\frac{5-3t_1}{2}=2-t_1+\frac{1-t_1}{2}=2-t_1+t_2 \;;$$

$$\frac{1-t_1}{2}=t_2 \Longrightarrow t_1=1-2t_2$$

و بالاخره خواهیم داشت:

$$t=2-(1-2t_2)+t_2=1+3t_2 \;;$$

$$\left|\begin{array}{l} x=7t_1=7(1-2t_2)=7-14t_2; \\ y=3t=3(1+3t_2)=3+9t_2 \end{array}\right.$$

۲. وقتی که ضمن محاسبهٔ یکی از مجهولها بر حسب مجهول دیگر ، بین جمله‌های صورت کسری که بدست می‌آید (پس‌ازخارج کردن مقدارصحیح

آن) مقسوم علیه مشترکی وجود داشته باشد ، می‌توان معادله را ساده‌تر حل کرد .

مثال ۳. می‌خواهیم معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$۱۲x+۱۷y=۴۱$$

x را برحسب y بدست می‌آوریم :

$$x=\frac{۴۱-۱۷y}{۱۲}=۳-y+\frac{۵-۵y}{۱۲}=۳-y+۵\times\frac{۱-y}{۱۲}$$

برای اینکه $۵\times\frac{۱-y}{۱۲}$ عددی صحیح باشد، لازم و کافی است که $\frac{۱-y}{۱۲}$ عددی صحیح باشد ، کسر اخیر را برابر t می‌گیریم:

$$\frac{۱-y}{۱۲}=t \Longrightarrow ۱-y=۱۲t \Longrightarrow y=۱-۱۲t \;;$$

و ضمناً :

$$x=۳-(۱-۱۲t)+۵t=۲+۱۷t$$

۳. اگر ضمن تقسیم ، باقیمانده بزرگتر از نصف مقسوم‌علیه باشد، بهتر است از باقیماندهٔ منفی استفاده کنیم.

مثال ۴. مطلوب‌است حل‌معادلهٔ:

$$۱۱x-۲۰y=۴۹$$

معادله را نسبت به x حل می‌کنیم:

$$x=\frac{۴۹+۲۰y}{۱۱}=۴+۲y+\frac{۵-۲y}{۱۱}=۴+۲y+t \;;$$

$$\frac{۵-۲y}{۱۱}=t \Longrightarrow ۵-۲y=۱۱t \Longrightarrow ۱۱t+۲y=۵ \;;$$

$$y=\frac{۵-۱۱t}{۲}=۲-۵t+\frac{۱-t}{۲}=۲-۵t+t_۱ \;;$$

$$\frac{۱-t}{۲}=t_۱ \Longrightarrow ۱-t=۲t_۱ \Longrightarrow t=۱-۲t_۱$$

و بالاخره :

$$\begin{cases} y=2-5(1-2t_1)+t_1=-3+11t_1 \\ x=4+2(-3+11t_1)+(1-2t_1)=-1+20t_1 \end{cases}$$

اگر همین معادله رابا باقیماندهٔ مثبت حل می‌کردیم، چنین داشتیم:

$$x=4+y+\frac{5+9y}{11}$$

و به عنوان معادلهٔ بعدی:

$$\frac{5+9y}{11}=t \implies 11t-9y=5$$

و روشن است که این معادله بغرنجتراز معادلهٔ $11t+2y=5$ است که باکمك باقیماندهٔ منفی، قبلا بدست‌آوردیم.

مثال ۵. مطلوب‌است حل معادلهٔ : $15x+28y=59$

معادله را نسبت به x حل می‌کنیم (با استفاده از باقیماندهٔ منفی):

$$x=\frac{59-28y}{15}=4-2y+\frac{-1+2y}{15}=4-2y+t\ ;$$

$$\frac{-1+2y}{15}=t \implies -1+2y=15t \implies 2y-15t=1$$

$$y=\frac{1+15t}{2}=7t+\frac{1+t}{2}=7t+t_1\ ;$$

$$\frac{1+t}{2}=t_1 \implies 1+t=2t_1 \implies t=2t_1-1$$

و بالاخره خواهیم داشت :

$$y=7(-1+2t_1)+t_1=-7+15t_1$$
$$x=4-2(-7+15t_1)+(-1+2t_1)=17-28t_1$$

اگر آزمایش‌کنیم، می‌بینیم که برای حل معادله‌هایی که در مثالهای بالا ذکرکردیم، اگراز راه معمولی و بدون استفاده از نکته‌های یادشده عمل می‌کردیم، عملهای مفصلتر و زیادتری لازم بود.

۹. جوابهای مثبت

همانطورکه قبلا هم‌گفتیم ، اغلب پیش می‌آید که تنها جوابهای مثبت

معادلهٔ سیال مورد احتیاج است ، یعنی باید مقادیر صحیح ومثبتی‌برای xوy پیدا کرد که در معادلهٔ سیال صدق کنند. می‌توان پس ازپیدا کردن‌جوابهای عمومی برای x و y مستقیماً جستجو کرد که به ازای چه مقادیری ازپارامتر جوابهای مثبت برای x و y بدست می‌آید.

رابطه‌های زیر را در نظرمی‌گیریم:

$$x=\alpha+bt \; ; \; y=\beta-at$$

برای اینکه x و y مثبت باشند ، باید مقادیری از t را انتخاب‌کرد که به ازای آنها داشته باشیم:

$$\alpha+bt>۰ \; ; \; \beta-at>۰$$

a را مثبت فرض می‌کنیم(واین به‌کلی‌بودن بحث لطمه‌ای نمی‌زند،زیرا قبلا دیدیم که اگر لازم باشد، می‌توان قرینهٔ a را در رابطه واردکرد). در این صورت سه‌حالت خواهیم داشت:

۱. هر دو نامساوی در یك جهت باشند. و این وقتی پیش می‌آیدکه b منفی باشد. در حقیقت با استفاده از خاصیت نامساویها خواهیم داشت:

$$bt>-\alpha \; ; \; at<\beta \; :$$

$$t<-\frac{\alpha}{b} \; ; \; t<\frac{\beta}{a}$$

در این حالت معادله دارای بینهایت جواب مثبت خواهد بود.

مثلا فرض کنید بدست‌آوریم:

$$t<\frac{۷}{۴} \; ; \; t<-۱\frac{۳}{۵}$$

واضح است‌که تمام عددهایی‌که از $-۱\frac{۳}{۵}$ کوچکترباشند ، از $\frac{۷}{۴}$ کوچکترند و بنابراین به ازای تمام مقادیر t کــه از ۱ — کوچکترند ، معادله جوابهای مثبت خواهد داشت.

و یا اگر مثلا بدست‌آوریم:

$$t>\frac{۷}{۱۵} \; ; \; t>۳\frac{۱}{۳}$$

واضح است‌که جواب $t>۳\frac{۱}{۳}$ در هر دو نامساوی صدق می‌کند و هر

مقدار بزرگتر از ۳ که به t بدهیم ، برای x و y جوابهای مثبت بدست می‌آید.

مثال۱. $۳x-۵y=۱۱$

به ترتیب داریم:

$$x=\frac{۱۱+۵y}{۳}=۴+۲y-\frac{۱+y}{۳}=۴+۲y-t \;;$$

$$\frac{۱+y}{۳}=t \implies y=-۱+۳t \;;$$

$$x=۴+۲(-۱+۳t)-t=۲+۵t$$

و برای اینکه جوابهای مثبت داشته باشیم ، باید:

$$-۱+۳t>۰ \;;\; ۲+۵t>۰$$

ویا : $t>\frac{۱}{۳} \;;\; t>-\frac{۲}{۵}$

یعنی اگر t را مقادیر صحیح بزرگتر از $\frac{۱}{۳}$ (و یا بزرگتر از صفر) انتخاب کنیم ، بینهایت زوج جواب مثبت برای x و y بدست می‌آید.

مثال۲. $۸x-۳y+۱۳=۰$

داریم :

$$y=\frac{۱۳+۸x}{۳}=۴+۳x+\frac{۱-x}{۳}=۴+۳x+t \;;$$

$$\frac{۱-x}{۳}=t \implies x=۱-۳t \;;\; y=۷-۸t$$

و اگر بخواهیم ریشه‌ها مثبت باشند ، باید داشته باشیم :

$$۱-۳t>۰ \;;\; ۷-۸t>۰$$

ویا : $t<\frac{۱}{۳} \;;\; t<\frac{۷}{۸}$

یعنی به ازای تمام مقادیر صحیح t که کوچکتر از $\frac{۱}{۳}$ باشد (یعنی ۰، ۱−، ۲−، ...) مقادیر صحیح و مثبتی برای x و y بدست می‌آید.

۲. دو نامساوی درخلاف جهت یکدیگر باشند و ضمناً متناقض‌یکدیگر.

مثلا اگر به نامساوی زیر برسیم:

$$t<\frac{۷}{۸}\ ;\ t>۱\frac{۱}{۳}$$

واضح است که در این‌صورت نمی‌توان مقداری برای t پیدا کرد که‌در هردو نامساوی صدق کند. در این حالت معادله جوابهای مثبت و صحیح ندارد.

مثال۳. $$۴x+۵y+۷=۰$$

پس از حل این معادله خواهیم داشت:

$$x=-۳+۵t\ ;\ y=۱-۴t$$

و از آنجا باید داشته باشیم:

$$-۳+۵t>۰\ ;\ ۱-۴t>۰$$

ویا: $$t>\frac{۳}{۵}\ ;\ t<\frac{۱}{۴}$$

نا مساویها یکدیگر را نقض می‌کنند و بنابراین معادله دارای جواب مثبت برای x و y نیست.

توضیح. در مورد مثال مورد بحث، از ابتدا هم روشن بود که اگر xو y مثبت باشند، حاصل $۴x+۵y$ هم مثبت می‌شود، در حالی که سمت راست تساوی ۷− و منفی است.

۳. دو نامساوی در خلاف جهت یکدیگر باشند، ولی یکدیگر رانقض نکنند.

مثلا فرض کنید به نامساویهای زیر برسیم:

$$t>۴\frac{۱}{۷}\ ;\ t<۷\frac{۳}{۴}$$

تمام مقادیر صحیح t که بین $۴\frac{۱}{۷}$ و $۷\frac{۳}{۴}$ واقع باشند، یعنی ۵ و۶ و۷ برای x و y مقادیر مثبت بدست می‌دهند. بنابراین در این‌حالت:

تعداد ریشه‌های مثبت به‌اندازهٔ عددهای صحیحی است که‌بین دوحدبدست آمدهٔ t قرارگرفته است.

متذکر می‌شویم که حتی در این حالت ممکن است، معادله‌جواب‌مثبت نداشته باشد. زیرا ممکن است بین دو حد بدست آمدهٔ t حتی یك‌عددصحیح

هم موجود نباشد . مثلا اگر نامساویهای زیر را داشته باشیم :

$$t > ۱\frac{۱}{۴} \;;\; t < ۱\frac{۷}{۸}$$

نامساویها متناقض نیستند ، ولی بین $۱\frac{۱}{۴}$ و $۱\frac{۷}{۸}$ یك عـدد صحیح هم وجود ندارد و بنابراین معادله جواب مثبتی پیدا نمی‌کند.

مثال۴. $$۳x + ۷y = ۵۵$$

معادله را حل می‌کنیم:

$$x = \frac{۵۵ - ۷y}{۳} = ۱۸ - ۲y + \frac{۱ - y}{۳} = ۱۸ - ۲y + t \;;$$

$$y = ۱ - ۳t \;;\; x = ۱۶ + ۷t$$

و از آنجا : $$۱ - ۳t > ۰ \;;\; ۱۶ + ۷t > ۰$$

و یا : $$t < \frac{۱}{۳} \;;\; t > -۲\frac{۲}{۷}$$

و واضح است که برای t تنها می‌توان مقادیر ۰ ، ۱— و ۲— را انتخاب کرد تا جوابهای x و y مثبت باشد:

t	۰	—۱	—۲
x	۱۶	۹	۲
y	۱	۴	۷

مثال۵. $$۵x + ۴y = ۳$$

پس از حل خواهیم داشت:

$$x = -۱ + ۴t \;;\; y = ۲ - ۵t$$

و از آنجا : $$t > \frac{۱}{۴} \;;\; t < \frac{۲}{۵}$$

نامساویها متناقض یکدیگر نیستند ، ولی بین دو عدد $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۲}{۵}$ هم‌عدد

صحیحی وجود ندارد و بنابراین معادله دارای جواب مثبت نیست.

* * *

معادله‌های سیال درجه دوم

معادلهٔ سیال کامل درجه دوم به‌صورت زیر است:

$$ax^{2}+by^{2}+cxy+dx+ey+f=0 \qquad (1)$$

برای چنین معادله‌ای راه حل کلی وجود ندارد و ما دراینجا حالتهای خاص و قابل حل آنرا ذکر می‌کنیم:

۱۰. حل معادله‌های به‌صورت $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

در تمام حالتهایی‌که رابطهٔ بین x و y یك رابطهٔ هموگرافیك باشد، می‌توان جوابهای صحیح و یا جوابهای صحیح و مثبت معادله رابدست‌آورد[1].

حالت اول: وقتی‌که a مضربی از c باشد. راه حل را با ذکرچندمثال روشن می‌کنیم.

مثال۱. جوابهای صحیح معادلهٔ زیر را بدست آورید:

$$y=\frac{3x+2}{x-4} \quad (1)$$

حل. معادلهٔ (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y=\frac{3(x-4)+14}{x-4}=3+\frac{14}{x-4}$$

برای اینکه y عددی صحیح باشد باید $\dfrac{14}{x-4}$ عددی صحیح باشد، یعنی باید ۱۴ بر $x-4$ قابل قسمت باشد. مقسوم علیه‌های ۱۴ عبارت‌است

۱ــ این‌حالت وقتی‌بدست می‌آیدکه در معادلهٔ‌کلی (۱)ضریبهای x^{2}وy^{2} مساوی صفر باشند.

از ۱± ، ۲± ، ۷∓ و ۱۴± و به‌ازای هر یك از این مقادیر یك زوج جواب صحیح برای x و y بدست می‌آید:

$x-۴$	-۱	۱	-۲	۲	-۷	۷	-۱۴	۱۴
x	۳	۵	۲	۶	-۳	۱۱	-۱۰	۱۸
y	-۱۱	۱۷	-۴	۱۰	۱	۵	۲	۴

و اگر جوابهای مثبت معادله را بخواهیم:

$$\begin{vmatrix}x=۵\\y=۱۷\end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix}x=۶\\y=۱۰\end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix}x=۱۱\\y=۵\end{vmatrix} \; \begin{vmatrix}x=۱۸\\y=۴\end{vmatrix}$$

به این ترتیب اگر باقیماندهٔ تقسیم صورت برمخرج را بدست‌آوریم، مقادیر x از اینجا بدست می‌آیدکه مخرج را مساوی با مقسوم‌علیه‌های مثبت یا منفی این باقیمانده قرار دهیم.

وقتی کــه ضریب x صورت بر ضریب x مخــرج قابل قسمت باشد ، باقیماندهٔ تقسیم صورت بر مخرج عددی است صحیح و بنابراین اگرضریبx در مخرج واحد باشد معادله همیشه دارای جواب است و ضمناً از آنجا که تعداد مقسوم‌علیه‌های یك عدد محدود است، تعداد جوابهای چنین معادلــه‌ای محدود است و هرگز معادلهٔ سیالی از این نوع دارای بینهایت جواب‌نیست.

مثال۲. به ازای چه مقادیری از m کسر $\frac{۱۰m-۱۳}{۵m-۷}$ برابر باعددی صحیح می‌شود؟

حل. حاصل کسر را مساوی a می‌گیریم، بترتیب‌داریم:

$$a=\frac{۲(۵m-۷)+۱}{۵m-۷}=۲+\frac{۱}{۵m-۷}$$

برای این‌که a عددی صحیح باشد ، باید $\frac{۱}{۵m-۷}$ مساوی عــددی صحیح باشد ، یعنی $۵m-۷$ باید مساوی ۱ یا ۱— شود:

$$۵m-۷=۱ \implies m=\frac{۸}{۵}$$

$$۵m-۷=-۱ \implies m=\frac{۶}{۵}$$

که در هیچیك از این دو مورد برای m عددی صحیح بدست نمی‌آید .

بنابراین معادلهٔ $a=\frac{۱۰m-۱۳}{۵m-۷}$ دارای جواب صحیح نیست.

به این ترتیب وقتی که‌ضریب‌مجهول در مخرج کسر برابر واحدنباشد، ممکن است که معادله دارای جواب نباشد.

مثال۳. مطلوب‌است‌حل‌معادلهٔ $y=\frac{۲۴x-۷۸}{۲x-۷}$

حل: باقیماندهٔ تقسیم صورت بر مخرج برابر است با ۶ و داریم:

$$y=۱۲+\frac{۶}{۲x-۷}$$

مقسوم‌علیه‌های ۶ عبارتند از ۱$\pm$ ، ۲$\pm$ ، ۳$\pm$ و ۶$\pm$.

ولی چون x عددی است صحیح $۲x-۷$ عددی فرد است و بـه‌ازای مقسوم‌علیه‌های ۲$\pm$ و ۶$\pm$ (که زوج هستند) جواب صحیحی برایxبدست نمی‌آید. به‌ازای مقسوم‌علیه‌های فرد ۱$\pm$ و ۳$\pm$ داریم .

$$۲x-۷=-۱ \implies x=۳ \;;\; y=۶$$

$$۲x-۷=۱ \implies x=۴ \;;\; y=۱۸$$

$$۲x-۷=-۳ \implies x=۲ \;;\; y=۱۰$$

$$۲x-۷=۳ \implies x=۵ \;;\; y=۱۴$$

حالت دوم. وقتی که a مضربی از c نباشد.

مثال۴. معادلهٔ $۵x+۵y-۲xy=۸$ را حل کنید.

حل. y را نسبت به x محاسبه می‌کنیم:

$$(۲x-۵)y=۵x-۸ \implies y=\frac{۵x-۸}{۲x-۵}$$

اگر دوطرف معادله را در ۲ ضرب کنیم می‌شود:

$$۲y=\frac{۱۰x-۱۶}{۲x-۵}$$

حالا مثل حالت اول عمل می‌کنیم ، منتهی در اینجا باید حاصل کسر یعنی $2y$ عدد زوج باشد تا y عددی صحیح شود. داریم:

$$2y=\frac{5(2x-5)+9}{2x-5}=5+\frac{9}{2x-5}$$

مقسوم‌علیه‌های ۹ عبارتند از ±1 ، ±3 و ±9.

$$2x-5=-1 \implies x=2 \;;\; y=-2$$
$$2x-5=1 \implies x=3 \;;\; y=7$$
$$2x-5=-3 \implies x=1 \;;\; y=1$$
$$2x-5=3 \implies x=4 \;;\; y=4$$
$$2x-5=-9 \implies x=-2 ; y=2$$
$$2x-5=9 \implies x=7 \;;\; y=3$$

و از بین جوابها ، جوابهای مثبت هم به‌سادگی تشخیص داده‌می‌شود.

مثال۵. مطلوب‌است حل‌معادلهٔ $y=\frac{2x+47}{6x+5}$

حل. بترتیب می‌نویسیم:

$$y=\frac{1}{3}\times\frac{6x+141}{6x+5}=\frac{1}{3}\times\frac{6x+5+136}{6x+5}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{136}{6x+5}\right)$$

مقسوم‌علیه‌های ۱۳۶ چنین است:

$$\pm1;\mp2;\pm4;\pm8;\pm17;\pm34;\pm68;\pm136$$

از طرف دیگر برای اینکه $6x+5$ مساوی عددی صحیح شود ، باید مساوی با عددی باشد که در تقسیم آن بر ۶ باقیمانده‌ای مساوی ۵ یا $1-$ بدست‌آید. بین مقسوم‌علیه‌های فوق تنها عددهای $1-$ و ۱۷ دارای چنین‌خاصیتی هستند ودر مورد این دو عدد داریم:

$$6x+5=-1 \implies x=-1 \;;\; y=-45$$
$$6x+5=17 \implies x=2 \;;\; y=3$$

و جوابهای مثبت منحصر به $(x=2 \;;\; y=3)$ می‌باشد.

توضیح. بطور کلی می‌توان جوابهای معادله‌های سیال بصورت $y=\frac{f(x)}{cx+d}$ را با روشهای مذکور دربالا پیدا کرد .

مثال۶. مطلوب‌است‌حل‌معادلهٔ $y=\frac{3x^2-x+1}{x-2}$

حل. $3x^2-x+1$ را بر $x-2$ تقسیم می‌کنیم، خارج‌قسمت‌مساوی $2x+5$ و باقیماندهٔ تقسیم مساوی ۱۶ می‌شود و بنابراین داریم:

$$y=3x+5+\frac{11}{x-2}$$

برای اینکه y عددی صحیح باشد ، باید $\frac{11}{x-2}$ مساوی عددی صحیح شود. مقسوم علیه‌های ۱۱ عبارتند از ۱± و ۱۱±:

$$\begin{aligned}
&x-2=-1 \implies x=1 \ ; \ y=-3\\
&x-2=1 \implies x=3 \ ; \ y=25\\
&x-2=-11 \implies x=-9 ; y=-23\\
&x-2=11 \implies x=13 \ ; \ y=39
\end{aligned}$$

مثال۷. معادلهٔ $y=\frac{x^3+1}{2x+1}$ را برای‌جوابهای صحیح x و y حل کنید.

حل. x^3+1 را بر $2x+1$ تقسیم می‌کنیم ، خارج قسمت مساوی: $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$ و باقیمانده مساوی $\frac{7}{8}$ می‌شود ، بنابراین می‌توان نوشت :

$$y=\frac{1}{8}\left(4x^2-2x+1+\frac{7}{2x+1}\right)$$

باید ۷ بر $2x+1$ قابل‌قسمت باشد . مقسوم علیه‌هـای ۷ عبارتند از ۱± و ۷±.

$$\begin{aligned}
&2x+1=-1 \implies x=-1 \ ; \ y=0\\
&2x+1=1 \implies x=0 \ ; \ y=1\\
&2x+1=-7 \implies x=-4 \ ; \ y=9\\
&2x+1=7 \implies x=3 \ ; \ y=4
\end{aligned}$$

و جواب صحیح‌ومثبت منحصر به $x=3$ ، $y=4$ است

۱۱. حل معادله‌های به‌صورت $a^2x^2 \pm b^2y^2 + cx + dy + e = 0$

در اینگونه معادله‌ها[1] جمله‌های a^2x^2+cx و $b^2y^2 \pm dy$ را به مجذور دو جمله‌ای تبدیل می‌کنیم و در یکطرف تساوی قرار می‌دهیم ومقدار ثابت را به طرف دیگر می‌بریم و با تجسس x و y را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول. ضریبهای x^2 و y^2 هم علامت نیستند.

مثال۱. به‌ازای چه‌مقادیر صحیحی از m، سه‌جمله‌ای m^2-6m+2 مجذور کامل است.

حل. در حقیقت باید معادلهٔ $m^2-6m+2=n^2$ را حل کنیم.

به ترتیب داریم:

$$(m-3)^2-n^2=7 \Longrightarrow (m+n-3)(m-n-3)=7$$

در سمت‌چپ تساوی هریك از پرانتزها عددی است صحیح (زیرا m و n عددهایی صحیح هستند) سمت راست تساوی (یعنی ۷) را تنها می‌توان به صورت 1×7 یا -1×-7 نوشت. بنابراین چهار دستگاه زیرداریم:

$$\begin{cases} m+n-3=7 \\ m-n-3=1 \end{cases} ; \begin{cases} m+n-3=-7 \\ m-n-3=-1 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} m+n-3=1 \\ m-n-3=7 \end{cases} ; \begin{cases} m+n-3=-1 \\ m-n-3=-7 \end{cases}$$

و جوابها چنین است:

$$\begin{cases} m=7 \\ n=3 \end{cases} ; \begin{cases} m=-1 \\ n=-3 \end{cases} ; \begin{cases} m=7 \\ n=-3 \end{cases} ; \begin{cases} m=-1 \\ n=3 \end{cases}$$

و با توجه به صورت مسأله جوابهای m عبارتند از $m=-1$ و $m=7$ و جواب مثبت و صحیح منحصر به $m=7$ است.

مثال۲. اگر x و y عددهایی صحیح باشند، معادلهٔ زیر را حل کنید:

۱ـ این‌حالت‌وقتی بدست می‌آید که در معادلهٔ کلی درجهٔ دوم ضریبهای x^2 و y^2 از لحاظ قدر مطلق مجذور کامل و ضریب xy مساوی صفر باشد.

$$x^2+5x+2=y^2$$

حل. معادله را بترتیب می‌توان چنین نوشت:

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+2=y^2 \implies \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-y^2=\frac{17}{4}\ ;$$

$$\left(x+y+\frac{5}{2}\right)\left(x-y+\frac{5}{2}\right)=\frac{17}{4}\ ;$$

دوطرف معادله را در ۴ ضرب می‌کنیم،می‌شود.

$$(2x+2y+5)(2x-2y+5)=17=1\times 17=-1\times -17$$

و بنابراین چهار دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases}2x+2y+5=1\\2x-2y+5=17\end{cases}\ ;\ \begin{cases}2x+2y+5=17\\2x-2y+5=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+2y+5=-1\\2x-2y+5=-17\end{cases}\ ;\ \begin{cases}2x+2y+5=-17\\2x-2y+5=-1\end{cases}$$

و جوابها چنین‌اند:

$$\begin{cases}x=2\\y=\pm 4\end{cases}\ ;\ \begin{cases}x=-7\\y=\pm 4\end{cases}$$

و جوابهای مثبت و صحیح منحصر به ($y=4$ و $x=2$) است.

مثال۳. جوابهای صحیح معادلهٔ زیر را بدست آورید:

$$4x^2-y^2-20x+y+6=0$$

حل. معادله را بترتیب چنین می‌نویسیم :

$$4(x^2-5x)-(y^2-y)+6=0\ ;$$

$$4\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right]-\left[\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+6=0\ ;$$

$$(4x-10)^2-(2y-1)^2=75\ ;$$

$$(4x+2y-11)(4x-2y-9)=75\ ;$$

عدد ۷۵ می‌توان به‌یکی‌از صورتهای زیر نوشت :

$$1\times 75\ ;\ 3\times 25\ ;\ 5\times 15\ ;\ -1\times -75$$

$$-3\times -25\ ;\ -5\times -15$$

دستگاههای مربوطه را تشکیل می‌دهیم وحل می‌کنیم.

جواب:

$$\begin{vmatrix} x=12 \\ y=-18 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x=12 \\ y=19 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x=-7 \\ y=19 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x=-7 \\ y=-18 \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} x=6 \\ y=-5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x=6 \\ y=6 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x=-1 \\ y=6 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x=-1 \\ y=-5 \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} x=5 \\ y=-2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x=5 \\ y=3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x=0 \\ y=3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x=0 \\ y=-2 \end{vmatrix}$$

و اگر جوابهای مثبت و صحیح را بخواهیم چنین‌اند:

$$\begin{vmatrix} x=12 \\ y=19 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x=6 \\ y=6 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x=5 \\ y=3 \end{vmatrix}$$

حالت دوم. ضریبهای x^2 و y^2 هم علامت‌اند .

مثال۴. جوابهای صحیح معادلهٔ زیر را بدست آورید:

$$x^2+y^2-10x=100$$

حل. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x-5)^2+y^2=125$$

عدد ۱۲۵ را تنها به‌یك صورت می‌توان به مجموع دومربع‌کامل‌تبدیل کرد :

$$100+25=(\pm 10)^2+(\pm 5)^2$$

و بنابراین دستگاههای زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} (x-5)^2=100 \\ y^2=25 \end{vmatrix} ; \text{یا} \begin{vmatrix} (x-5)^2=25 \\ y^2=100 \end{vmatrix}$$

که هریك از این دستگاهها ، خود به چهار دستگاه درجه اول تبدیل‌می‌شود.

جواب:

$$\begin{cases}x=15\\y=5\end{cases};\quad\begin{cases}x=-5\\y=-5\end{cases};\quad\begin{cases}x=10\\y=10\end{cases};\quad\begin{cases}x=0\\y=10\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=15\\y=-5\end{cases};\quad\begin{cases}x=0\\y=-10\end{cases};\quad\begin{cases}x=-5\\y=5\end{cases};\quad\begin{cases}x=10\\y=-10\end{cases}$$

و جوابهای صحیح و مثبت $(x=15\ ,\ y=5)$ یا $(x=10\ ,\ y=10)$ می‌باشد.

مثال۵. به ازای چه مقادیر صحیح m عبارت $115+14m-4m^2$ مجذور کامل است ؟

حل. باید معادلهٔ زیر را برای مقادیر صحیح m و n حل کنیم:

$$115+14m-4m^2=n^2\ ;$$

که پس از تبدیلهای ساده چنین می‌شود:

$$(4m-7)^2+4n^2=509=484+25$$

و بنابراین دستگاههای زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(4m-7)^2=484\\4n^2=25\end{cases};\quad\begin{cases}(4m-7)^2=25\\4n^2=484\end{cases}$$

دستگاه اول جواب صحیح ندارد و جوابهای صحیح دستگاه دوم چنین است :

$$\begin{cases}m=3\\n=11\end{cases};\quad\begin{cases}m=3\\n=-11\end{cases}$$

و بنابراین عبارت مفروض تنها به ازای $m=3$ مجذور کامل‌است.

۱۲. معادله‌هایی که جواب ندارند

واضح است که اگر داشته باشیم $A=B$ ، به شرطی که A و B عددهایی‌صحیح باشند،شرط لازم تساوی این‌است که‌باقیمانده‌های دوعدد AوB

بر عدد صحیح n با هم برابر باشند.

از این‌خاصیت می‌توان‌برای اثبات بدون جواب بودن بعضی‌ازمعادله‌ها استفاده کرد.

مثال۶. ثابت کنید معادلهٔ $x^2+y^2=3z^2$ جواب صحیح ندارد.

حل. می‌توان فرض کرد کــه x و y و z دارای مقسوم علیه مشترکی نیستند، زیرا اگر مقسوم علیه مشترك این سه‌عدد را k فرض‌کنیم . می‌توان نوشت :

$$x=kx' \;;\; g=ky' \;;\; z=kz'$$

که پس از قرار دادن در معادلهٔ مفروض ، بدست می‌آید :

$$x'^2+y'^2=3z'^2$$

که در آن x' و y' و z' مقسوم علیه‌مشترکی ندارند .

برای هریك از عددهای x' و y' دو حالت وجود دارد: یا بر۳ قابل قسمت‌اند و یا در تقسیم بر ۳ باقیمانده‌ای مساوی ± 1 بدست می‌آید.

۱) اگر x' و y' هر دو بر ۳ قابل‌قسمت باشند، $x'^2+y'^2$ بر ۹ قابل قسمت می‌شود و بنابراین باید $3z'^2$ هم بر ۹ ، یعنی z' بر۳قابل‌قسمت باشد، در این‌صورت x' و y' و z' مقسوم‌علیه‌مشترکی پیدامی‌کنند که‌مخالف فرض است.

۲) در حالتی که‌یکی از عددهای x' و y' و یا هردوآنهاغیرقابل‌قسمت بر۳ باشند، باقیماندهٔ تقسیم $x'^2+y'^2$ بر ۳ مساوی ۱ و یا۲ خواهدشد،در حالی‌که باقیماندهٔ $3z'^2$ بر ۳ مساوی صفر است.

یعنی x' و y' نمی‌توانند مساوی عددی صحیح باشند .

۱۳. استفاده از تجزیهٔ ناقص

اغلب تجزیهٔ ناقص یك معادلهٔ سیال(به نحوی‌که تنها مقدار ثابت‌معادله جدا بماند) وسیله‌ای برای حل معادله می‌شود . بــه چند مثال زیر تــوجه بفرمایید :

مثال۱. جوابهای صحیح و غیر منفی معادلهٔ زیر را بدست‌آورید:

$$2xy+2xz+yz+z^2-3=0$$

حل. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(2x+z)(y+z)=3$$

هریك از پرانتزهای سمت چپ تساوی عـددی صحیح و مثبت هستند و بنابراین دو دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases}2x+z=1\\ y+z=3\end{cases} ; \begin{cases}2x+z=3\\ y+z=1\end{cases}$$

که جوابهای صحیح و غیر منفی آنها چنین است:

$$x=0 \; ; \; y=2 \; ; \; z=1$$

$$x=1 \; ; \; y=0 \; ; \; z=1$$

مثال۲. مطلوب‌است جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ زیر :

$$x+y+z+t=xy+zt$$

حل. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$(x-1)(y-1)+(z-1)(t-1)=2$$

عدد ۲ را می‌توان ۱+۱ یا ۰+۲ در نظر گرفت وبنابراین‌جواب‌های معادله ، با حل دستگاههای زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases}(x-1)(y-1)=1\\ (z-1)(t-1)=1\end{cases} ; \begin{cases}(x-1)(y-1)=0\\ (z-1)(t-1)=2\end{cases} ;$$

$$\begin{cases}(x-1)(y-1)=2\\ (z-1)(t-1)=0\end{cases}$$

و جوابهای زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x=2\\ y=2\\ z=2\\ t=2\end{cases} ; \begin{cases}x=1\\ y=\text{عددی دلخواه}\\ z=2\\ t=3\end{cases} ; \begin{cases}x=1\\ y=\text{عددی دلخواه}\\ z=3\\ t=2\end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=1 \\ t=\text{عددی دلخواه} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=\text{عددی دلخواه} \\ y=1 \\ z=3 \\ t=2 \end{cases} , \quad \begin{cases} x=\text{عددی دلخواه} \\ y=1 \\ z=2 \\ t=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=\text{عددی دلخواه} \\ t=1 \end{cases} , \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=\text{عددی دلخواه} \\ t=1 \end{cases} , \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \\ t=\text{عددی دلخواه} \end{cases}$$

مثال۳. عددی درمبنای ۱۲ به‌صورت $\overline{abc}$ و در مبنای مجهولی به‌صورت $\overline{abc0}$ نوشته شده است. a و b و c و مبنای مجهول را پیدا کنید.

حل. مبنای مجهول را x می‌گیریم، در این‌صورت باید داشته باشیم:

$$ax^3+bx^2+cx=144a+12b+c \;;$$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a(x^3-144)+b(x^2-12)+c(x-1)=0 \;; \quad (1)$$

x نمی‌تواند بزرگتر از ۵ باشد ، زیرا در این‌صورت هرسه‌جملهٔ سمت چپ تساوی مثبت می‌شود و مجموع سه مقدار مثبت هم نمی‌تواند مساوی صفر باشد .

x نمی‌تواند کوچکتر از ۵ باشد. زیرا اگرمثلا $x=4$ انتخاب‌شود، بدست می‌آید:

$$-80a+4b+3c=0$$

b و c از ۴ کوچکترند (زیرا مبنا را ۴ گرفته‌ایم) ، در این صورت اگر b و c بزرگترین رقم ممکن و a کوچکترین رقم ممکن $(a=1)$ باشد ($a\neq 0$ است ، زیرا a رقم سمت چپ عدد است) ، باز هم مقدار سمت چپ تساوی منفی و مخالف صفر می‌شود.

پس اگر معادلهٔ (۱) جواب داشته باشد، تنها در حالت $x=5$ است، در معادله قرار می‌دهیم ، می‌شود:

$$-19a+13b+4c=0 \quad (2)$$

که یك معادلهٔ سیال درجهٔ اول سه مجهولی است . ضمناً $a \neq 0$ و a و b و c رقمهایی مثبت‌و کوچکتر از ۵هستند. c را(که ضریب کوچکتری دارد) برحسب دو مجهول دیگر بدست می‌آوریم:

$$c=\frac{19a-13b}{4}=5a-3b-\frac{a+b}{4}$$

برای‌اینکه $\frac{a+b}{4}$ عددی صحیح باشد، باید $a+b$ مضربی از ۴باشد، باشد، با توجه به اینکه a و b از ۵ کوچکتر و $a\neq 0$ است ، پنج حالت پیش می‌آید:

$$\begin{vmatrix}a=4\\b=4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a=2\\b=2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a=1\\b=3\end{vmatrix} \begin{vmatrix}a=3\\b=1\end{vmatrix} \begin{vmatrix}a=4\\b=0\end{vmatrix}$$

جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

a	۴	۲	۱	۳	۴
b	۴	۲	۳	۱	۰
c	۶	۳	−۵	۱۱	۱۹

و روشن است که تنها جوابهای $a=2$،$b=2$ و $c=3$ در شرطهای مسأله صدق می‌کنند.

۱۴. حل معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ [1]

عددهای صحیح و مثبت x و y و z که دررابطهٔ $x^2+y^2=z^2$ صدق کنند، **عددهای‌فیثاغورثی** نامیده می‌شوند . بنابر قضیهٔ فیثاغورث این عددها می‌توانندضلعهای یك مثلث‌قائم‌الزاویه باشند وبه‌همین‌مناسبتxوy را «ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه» و z را «وتر» گویند.

۱ــ بندهای ۱۴ و ۱۵ با استفاده از کتاب «سرگرمیهای جبر» تألیف‌پرلمان تنظیم شده است .

واضح است که اگر سه عدد x و y و z عددهای فیثاغورثی باشند، nx و ny و nz هم سه عدد فیثاغورثی خواهند بود (n عددی است صحیح ومثبت). برعکس اگر سه عـدد فیثاغورثی مقسوم علیه مشترکی داشته باشند ، می‌توان آنها را به مقسوم‌علیه مشترکشان کوچك کردو سه عدد فیثاغورثی جدید بدست آورد. بنابراین در مرحلهٔ اول کافی است که سه عدد فیثاغورثی پیداکنیم‌که دو به دو نسبت به هم اول باشند (بقیهٔ جوابها با ضرب این سه عدد در هر عدد صحیح دلخواه بدست می‌آید).

ثابت می‌کنیم که از سه عدد فیثاغورثی x ، y و z یکی از «ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه» زوج و دیگری فرد است. استدلال را به‌طریق برهان خلف انجام می‌دهیم. اگر x و y هر دو زوج باشند ، x^2+y^2 یعنی وترهم زوج می‌شود و سه عدد x و y و z مقسوم‌علیه مشترکی مساوی ۲ خواهند داشت و این مخالف فرض است که این سه عدد را بدون مقسوم‌علیه مشترك در نظر گرفتیم ، بنابراین لااقل یکی از دو عدد x و y فرد هستند.

امکان دیگری هم وجود دارد : هر دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه فرد و در نتیجه «وتر» زوج باشد.

به سادگی ثابت می‌شودکه این حالت هم ممکن‌نیست. درحقیقت اگر «ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه» هر دو فرد باشند به صورت :

$$۲a+۱ \text{ و } ۲b+۱$$

خواهند بود و مجموع مربعهای‌آنها چنین می‌شود :

$$(۴a^۲+۴a+۱)+(۴b^۲+۴b+۱)=۴(a^۲+a+b^۲+b)+۲$$

یعنی مجموع این مربعها عددی است که در تقسیم بر ۴ باقیمانده‌ای مساوی ۲ دارد ، در حالی که مجذور کامل هرعدد زوج باید بر۴ قابل‌قسمت باشد. به‌این ترتیب مجموع مربعهای دوعددفرد نمی‌تواند مجذورکامل باشد، به عبارت دیگر سه عدد فیثاغورثی نمی‌توانند «وتر» زوج و «دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه» فرد داشته‌باشد.

بنابراین از دو عدد x و y (دوضلع مجاور به زاویهٔ قائمه) یکی‌فرد و دیگری زوج است، در این‌صورت عدد $x^۲+y^۲$ یعنی «وتر» هم فرد خواهد بود .

فرض می‌کنیم x عددی فرد و y عددی زوج باشد ، از تساوی:

$$x^2+y^2=z^2$$

بدست می‌آید:

$$x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y)$$

عوامل $z+y$ و $z-y$ نسبت به هم اولند ، زیرا اگر این دو عدد مقسوم‌علیه مشترکی غیراز واحد داشته‌باشند، در این‌صورت مجموع آنها یعنی:

$$(z+y)+(z-y)=2z$$

و تفاضل آنها : $(z+y)-(z-y)=2y$

و حاصلضرب آنها: $(z+y)(z-y)=x^2$

هم براین مقسوم‌علیه‌مشترك قابل قسمت خواهند بود؛ یعنی عددهای $2y$ ، $2z$ و x مقسوم‌علیه‌مشترکی دارند، این مقسوم‌علیه‌مشترك نمی‌تواند مساوی ۲ باشد (چون x عددی است فرد) و بنابراین همان مقسوم‌علیه‌مشترك سه عدد x و y و z می‌شود که چیزی جز واحد نیست . بـه عبارت دیگر دو عدد $z+y$ و $z-y$ نسبت به‌هم اولند.

وقتی که حاصل‌ضرب دو عددی که نسبت‌به‌هم اولند مجذور کامل باشد، هریك از آنها مجذور کاملند، یعنی :

$$\begin{cases} z+y=m^2 \\ z-y=n^2 \end{cases}$$

با حل این دستگاه بدست می‌آید :

$$z=\frac{m^2+n^2}{2} \ ; \ y=\frac{m^2-n^2}{2} \ ;$$

$$x^2=(z+y)(z-y)=m^2n^2 \implies x=mn$$

بنابراین عددهای فیثاغورثی به صورت زیر هستند:

$$x=mn \ ; \ y=\frac{m^2-n^2}{2} \ ; \ z=\frac{m^2+n^2}{2}$$

m و n عددهایی فرد ونسبت به‌هم اولند. به سادگی معلوم می‌شود که به ازای هر دو عدد فرد متباین از m و n ، سه عدد فیثاغورثی برای x و y و z بدست می‌آید ...

عددهای فیثاغورثی خاصیتهای جالب دیگری هم دارند که ما بدون اثبات، آنها را ذکر می کنیم :

۱) یکی از «ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه» مضربی است از ۳.

۲) یکی از «ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه» مضربی است از ۴.

۳) یکی از سه عدد فیثاغورثی مضربی است از ۵.

۱۵. معادلهٔ سیال درجهٔ سوم

می‌توان سه عدد پیداکرد که مجموع مکعبهای آنها، خود مکعب کاملی باشد ، مثلا :

$$۳^۳+۴^۳+۵^۳=۶^۳$$

این رابطه به معنای آن‌است که حجم مکعب به ضلع ۶ سانتیمتر برابر است با مجموع حجمهای سه مکعب با ضلعهای مساوی ۳سانتیمتر، ۴ سانتیمتر و ۵ سانتیمتر (این رابطه منتسب به افلاطون است).

ببینیم می‌توانیم رابطه‌های عددی دیگری از این قبیل پیدا کنیم، یعنی باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x^3+y^3+z^3=u^3$$

بهتر است $u=-t$ بگیریم: در این‌صورت معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x^3+y^3+z^3+t^3=0$$

این معادله هم دارای بی‌نهایت جواب صحیح (مثبت یا منفی) است ، فرض کنید a ، b ، c ، d و α ، β ، γ ، δ دو گروه چهار عددی باشند که در معادلهٔ فوق صدق کنند ، هـریك از چهار عدد گروه دوم را در عدد صحیح k ضرب کرده و به عددهای گروه اول اضافه می کنیم. k راچنان می‌گیریم که گروه چهار عددی :

$$a+k\alpha \;;\; b+k\beta \;;\; c+k\gamma \;;\; d+k\delta$$

هم در معادلهٔ مفروض صدق کنند . به عبارت دیگر k را چنان می گیریم که تساوی زیر برقرار باشد :

$$(a+k\alpha)^3+(b+k\beta)^3+(c+k\gamma)^3+(d+k\delta)^3=0$$

پرانتزها را باز می‌کنیم و با توجه به اینکه گروه a ، b ، c ، d و گروه α ، β ، γ ، δ در معادلهٔ مفروض صدق می‌کنند ، یعنی :

$$a^3+b^3+c^3+d^3=0 \;;\; \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\gamma^3=0$$

خواهیم داشت:

$$3a^2k\alpha+3ak^2\alpha^2+3b^2k\beta+3bk^2\beta^2+3c^2k\gamma+3ck^2\gamma^2+$$
$$+3d^2k\delta+3dk^2\delta^2=0$$

ویا :

$$3k[(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta)+k(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2)]=0$$

و این عبارت وقتی مساوی صفر می‌شودکه یکی از عاملهای آن برابر صفر باشد ، اگر هر یك از عاملها را مساوی صفر قرار دهیم ، برای k دو مقدار بدست می‌آید، یکی $k=0$ که برای ما جالب نیست ، زیرابه معنای این‌است که اگر به‌گروه چهار عددی a ، b ، c ، d چیزی اضافه نکنیم ، چهار عدد بدست‌می‌آید که در معادلهٔ مفروض ما صدق می‌کنند . بنابراین‌تنها جواب دوم را در نظر می‌گیریم:

$$k=-\frac{a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta}{a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2}$$

به این ترتیب ، اگر دوگروه چهار عددی داشته باشیم که در معادلهٔ مفروض صدق‌کنند ، می‌توان گروه چهار عددی جدیدی پیداکرد که جواب معادلهٔ مفروض ما باشد .

برای این‌منظوربه‌عددهای‌گروه اول k برابرعددهای‌گروه دوم‌رااضافه می‌کنیم ، به شرطی‌که k را از رابطهٔ فوق بدست آورده باشیم.

برای اینکه از این مطلب بتوانیم استفاده‌کنیم ، باید دو گروه چهار عددی از جوابهای معادلـهٔ مفروض را در دست داشته باشیم. یـکی از این گروهها (۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶—) را می‌دانیم. گروه چهار عددی دوم راچگونه پیداکنیم؟ این گروه را به سادگی می‌توان بدست آورد : برای این گروه می‌توان عددهای r،$-r$ و s ، $-s$ را انتخاب کرد که روشن است در معادلهٔ مفروض صدق می‌کنند ، به عبارت دیگر داریم:

$$a=3\ ,\ b=4\ ,\ c=5\ ,\ d=-6\ ;$$
$$\alpha=r\ ,\ \beta=-r\ ,\ \gamma=s\ ,\ \delta=-s$$

که‌دراین صورت برای‌محاسبهٔ مقدار k ، رابطهٔ زیر را خواهیم‌داشت:

$$k=-\frac{-7r-11s}{7r^2-s^2}=\frac{7r+11s}{7r^2-s^2}$$

و برای عددهای $a+k\alpha$ ، $b+k\beta$ ، $c+k\gamma$،$d+k\delta$ به‌ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{28r^2+11rs-3s^2}{7r^2-s^2}\ ;\ \frac{21r^2-11rs-4s^2}{7r^2-s^2}\ ;$$
$$\frac{35r^2+7rs+6s^2}{7r^2-s^2}\ ;\ \frac{-42r^2-7rs-5s^2}{7r^2-s^2}$$

که طبق آنچه‌گفتیم این چهار عدد در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$x^3+y^3+z^3+t^3=0$$

و چون در هر چهار عدد ، مخرجها برابرند ، می‌توان از مخرجها صرفنظر کرد (یعنی صورتهای این‌کسرها هم در معادله صادق خواهندبود) ، به این‌ترتیب جوابهای معادلهٔ ما (به‌ازای هر مقدار دلخواه r , s) به‌صورت زیر هستند :

$$\begin{cases} x=28r^2+11rs-3s^2\ ; \\ y=21r^2-11rs-4s^2\ ; \\ z=35r^2+7rs+6s^2\ ; \\ t=-24r^2-7rs-5s^2 \end{cases}$$

که البته اگر مجموع مکعبهای آنها را حساب‌کنیم، صحت‌حکم‌محقق می‌شود . اگر در این رابطه‌ها r ، s را مقادیر صحیح دلخواه فرض کنیم ، جوابهای مختلف معادلهٔ مفروض‌بدست می‌آید. در حالتی‌که به‌ازای مقادیری از r , s ، جوابهایی بدست آیدکه مقسوم‌علیه‌مشترکی داشته باشند، می‌توان آنها را به این مقسوم علیه‌مشترك تقسیم‌کرد وجوابهای جدیدی بدست‌آورد. مثلا به‌ازای $r=1$ و $s=1$ برای x و y و z و t مقادیر زیربدست می‌آید: ۳۶ ، ۶ ، ۴۸ ، ۵۴ــ ،که پس از تقسیم آنها بر۶، مقادیر ۹،۸،۱،۶ــ

بدست می‌آید ، بنابراین داریم :

$$۱^۳+۶^۳+۸^۳=۹^۳$$

متذکر می‌شویم که اگر در گروه چهار عددی ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ــ جای عددها را عوض کنیم ، رشتهٔ جدیدی ازجوابها بدست می‌آید ، مثلا اگرچهار عدد اصلی را به صورت ۳،۵،۴و۶ــ بگیریم (یعنی $a=۳$ ،$b=۵$ ،$c=۴$ ، $d=-۶$) برای x و y و z و t مقادیر زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x=۲۰r^۲+۱۰rs-۳s^۲ \; ; \\ y=۱۲r^۲-۱۰rs-۵s^۲ \; ; \\ z=۱۶r^۲+۸rs+۶s^۲ \; ; \\ t=-۴۲r^۲-۷rs-۴s^۲ \end{cases}$$

که در این‌صورت به‌ازای مقادیرمختلف r وs جوابهای جدیدی‌بدست می‌آید.

تمرینها

جوابهای صحیح و مثبت معادله‌های زیر را پیداکنید:

۳۴۲. $۳x+۲y=۱۰$ ۳۴۳. $۷x+۵y=۱۵۷$

۳۴۴. $۵x-۱۱y=۱۷$ ۳۴۵. $۸x+۱۱y=۱۳$

۳۴۶. $۷x+۹y=۳۵$ ۳۴۷. $۱۵x+۲۸y=۱۸۵$

۳۴۸. عدد ۱۰۰ را به دو عدد مثبت چنان تبدیل کنید که یکی از آنها بر۷ و دیگری بر ۱۱ قابل‌قسمت باشد.

۳۴۹. برای فرش سطحی که ۳ متر طول دارد ، از دونوع تخته یکی به‌عرض ۱۱ سانتیمتر و دیگری به عرض ۱۳ سانتیمتر استفاده کرده‌ایم . طول‌تخته‌ها با عرض سطح برابر است. از هر نوع تخته چند عدد لازم است؟

۳۵۰. می‌خواهیم ۴۴۰ کیلوگرم گندم را در دو نوع کیسه جا دهیم . یك‌نوع ازکیسه‌ها ۸۰ کیلوگرم و نوع دیگر ۶۰ کیلوگرم گندم می‌گیرند. ازهر کیسه چند عدد لازم است؟

۳۵۱. صورت کلی عددهایی را پیداکنید که درتقسیم بر۷ باقیماندهٔ ۳ودرتقسیم

بر ۱۱ باقیماندهٔ ۴ بدهند.

۳۵۲. می‌خواهیم با ۵۰ ریال ۲۵ عدد تمبر ۴ ریالی ، ۲/۵ ریالی و ۰/۵ ریالی بخریم. از هر کدام چند عدد می‌توان خرید ؟

۳۵۳. مجموع ، تفاضل ، حاصلضرب و خارج قسمت دو عدد را با هم جمع کرده‌ایم ، عدد ۲۴۳ بدست آمده است . این عدد را پیدا کنید .

۳۵۴. عددمحیط یك‌مستطیل باعدد مساحت آن یکی است. اگرضلعهای‌مستطیل عددهایی صحیح باشند، آنها را بدست‌آورید.

۳۵۵. در یك مستطیل چهاربرابر مجموع طول و عرض و قطر از یکطرف و مساحت ازطرف‌دیگر با یك‌عدد بیان می‌شوند، بعدهای مستطیل‌رابدست‌آورید.

۳۵۶. مطلوب‌است یك عدد دو رقمی که برابرمربع رقم دهگان به‌اضافه مکعب رقم یکان خود باشد .

معادله‌های زیر را حل کنید و جوابهای صحیح و مثبت آنها را بدست‌آورید:

۳۵۷. $2xy-3x-5y+4=0$

۳۵۸. $4x^2+y^2=4x+6y+87$

۳۵۹. $xy+21=5(x+y)$

۳۶۰. $x^2-xy+2y=1$

۳۶۱. $x^3-2x^2-xy-3x+3y=1$

۳۶۲. $x^2-y^2=4x-9$

۳۶۳. $4x^2=y^2+2x+21$

۳۶۴. $x^2+y^2=3x+4y+19$

۳۶۵. می‌خواهیم با ۱۰۰۰۰ ریال جمعاً ۱۰۰ حیوان : گوسفند و مرغ و کبوتر ، بخریم. قیمت هر گوسفند ۵۰۰ ریال ، قیمت هر مرغ ۲۰۰ ریال و قیمت هر کبوتر ۱۰ ریال است ، تعداد هریك از حیوانات را معلوم کنید.

۳۶۶. مطلوب‌است محاسبهٔ یك عدد چهار رقمی که مساوی توان چهارم مجموع رقمهایش باشد .

۳۶۷. عدد چهار رقمی $\overline{mcdu}$ را چنان پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\overline{mcdu}=(\overline{mc}+\overline{du})^2$$

۳۶۸. عدد شش رقمی $\overline{mcduvt}$ را چنان پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\overline{mcduvt}=(\overline{mcd}+\overline{uvt})^{2}$$

۳۶۹. ثابت کنید معادلهٔ $5x^{2}+6x+15=y^{2}$ ریشهٔ صحیح ندارد.

۳۷۰. عدد سه رقمی $\overline{mcd}$ را چنان پیدا کنید که داشته باشیم :

$$m+d=2c \;;\; \overline{cd}=m^{2}$$

۳۷۱. ثابت کنید دستگاه $\begin{cases} x+y=z \\ 4xy=z \end{cases}$ دارای جوابهای صحیح نیست.

۳۷۲. عددچهاررقمی $\overline{mcdu}$ را طوری پیداکنیدکه حاصل‌ضرب رقمهای‌آن مساوی $(c-d)^{3}$ باشد، (هیچکدام از رقمها مساوی صفر نیستند).

۳۷۳. عدد سه رقمی $\overline{aba}$ را چنان پیداکنید که مجذور کامل و مضرب ۱۱ باشد.

۳۷۴. جوابهای صحیح معادلهٔ زیر را پیداکنید:

$$x^{2}+x=y^{4}+y^{3}+y^{2}+y$$

۳۷۵. رشته‌ای از عددهای صحیح ومثبت چنان نوشته‌ایم که ازجملهٔسوم به‌بعد، هرجمله برابربا قدر مطلق تفاضل دو جملهٔ قبل باشد. اگرهیچیك‌ازجمله‌های این‌رشته بزرگتراز۱۹۶۷ نباشد،حداکثرتعداد جمله‌های این رشته‌چقدراست؟

۳۷۶. عدد شش رقمی $\overline{x52yzt}$ را چنان پیدا کنید که هم خود عدد و هم مجموع رقمهای آن بر ۱۱ قابل‌قسمت باشد.

۳۷۷. به ازای چه مقادیر گویایی از x عبارت $\log_{2}(x^{2}-4x-1)$ برابر با عددی صحیح است؟

۳۷۸. اگر p عددی اول باشد ، جوابهای صحیح معادلهٔ زیررا بدست‌آورید:

$$p(x+y)=xy$$

۳۷۹. به ازای چه مقادیر گویایی‌از x ، حاصل عبارت $\sqrt{8x^{2}-2x-3}$ گویاست؟

۳۸۰. مقادیر صحیح xوyوz را بدست آورید :

$$\begin{cases} xz=2yt \\ x^{2}-2y^{2}=6t^{2}-3z^{2} \end{cases}$$

۳۸۱. ثابت کنید معادلهٔ $3x^{2}-4y^{2}=13$ جواب صحیح ندارد.

۳۸۲. عدد چهاررقمی $\overline{abca}$ را چنان پیدا کنید که مساوی $(5c+1)^2$ باشد.

۳۸۳. سه عدد صحیح مثبت چنان پیدا کنید که مربعهای آنها به تصاعد حسابی باشند ومجموع آنها مساوی ۳۷۶ شود.

۳۸۴. ثابت کنید که اگر عبارت ax^3+bx^2+cx+d به ازای $x=19$ مساوی ۱ و به ازای $x=62$ مساوی ۲ شود، a و b و c و d نمی‌توانند عددهایی صحیحی باشند.

۳۸۵. ریشه‌های صحیح و مثبت معادلهٔ زیر را پیدا کنید :

$$31(xyzt+xy+xt+zt+1)=40(yzt+y+t)$$

۳۸۶. جوابهای صحیح معادلهٔ زیر را بدست آورید :

$$x^4+2x^2y-x^{14}-y^2=7$$

۳۸۷. ریشه‌های صحیح دستگاه زیر را بدست آورید :

$$\begin{cases} tx=yz \\ t+x=y+z+2 \end{cases}$$

۳۸۸. ثابت کنید معادلهٔ $2x^2-5y^2=7$ جواب صحیح ندارد.

۳۸۹. ثابت کنید که عدد به صورت $121n-3$ نمی‌تواند به صورت حاصل‌ضرب دو عدد متوالی درآید.

۳۹۰. جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ زیر را بدست‌آورید:

$$4x^2y(x^2y-x+1)=15x^3+2x-1$$

۳۹۱. ریشه‌های صحیح دستگاه زیر را بدست آورید:

$$\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1 \\ y+z-x=3 \end{cases}$$

۳۹۲. عدد دو رقمی پیدا کنید که مساوی مربع مجموع رقمهایش باشد.

۳۹۳. معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$(1+2+3+\cdots+n)(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=m^2$$

۳۹۴. عدد سه رقمی $\overline{xyz}$ در مبنای ۷ بـا عدد $\overline{zyx}$ درمبنای ۹ برابراست. x و y و z را بدست آورید.

۳۹۵. مطلوب است عددی که هم خودش و هم توان چهارمش مساوی مجموع مربعهای دو عدد متوالی باشد.

۳۹۶. جوابهای صحیح و مثبت n و m را پیدا کنید:

$$5^{2n-1}\times 2^{n+1}+3^{n+1}\times 2^{2n-1}=19m$$

۳۹۷. عدد پنج رقمی $\overline{xzyyx}$ را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\overline{xyz}\times\overline{zyx}=\overline{xzyyx}$$

۳۹۸. تعداد جوابهای صحیح و غیر منفی معادلهٔ $5x+2y+z=10n$ را بدست آورید.

۳۹۹. جوابهای صحیح معادلهٔ زیر را بدست آورید (a و b و c عددهایی صحیح‌اند):

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$$

۴۰۰. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}x!+y!=z!\\ x+y=z\end{cases}$$

۴۰۱. ثابت کنید معادلهٔ $x^2+y^2=4^n$ ریشهٔ صحیح ندارد (n عددی است صحیح).

۴۰۲. عددی در یك مبنای مجهول به صورت زیر است:

$$10\underbrace{11\cdots1}_{n\text{ مرتبه}}101$$

می‌دانیم که این عدد در مبنای ۱۰ بر ۶۱ قابل‌قسمت است. کوچکترین مبنای ممکنهٔ عدد را پیدا کنید.

۴۰۳. این معادله را حل کنید:

$$1!+2!+3!+\dots+x!=y^2$$

۴۰۴. مطلوب‌است عدد n، بشرطی که اگر عدد n رقمی بر ۷ قابل‌قسمت باشد، عددی که از آن با جابجا کردن رقمهای اول و آخر بدست می‌آید بازهم بر ۷ قابل‌قسمت باشد.

۴۰۵. ثابت کنید معادلهٔ:

$$x^x+y^y+z^z=t^t$$

برای عددهای طبیعی جواب ندارد.

۴۰۶. با پاره‌خطهای به طولهای ۷ سانتیمتر و ۱۲ سانتیمتر به‌چند طریق‌می‌

توان پاره خطی به طول یک‌متر ساخت ؟

۴۰۷. این معادله را حل کنید :

$$\overline{xyztzy}+\overline{zyxyzt}=\overline{yxyztz}$$

۴۰۸. عدد چهار رقمی پیدا کنید که مساوی بامجذور عددی باشد که از دو رقم سمت راست آن تشکیل شده است.

۴۰۹. مسألهٔ دیوفانت: مثلث‌قائم‌الزاویه‌ای با ضلعهای صحیح پیدا کنید به‌نحوی که تفاضل هر ضلع آن با وتر مساوی مکعب عددی صحیح باشد.

۸

استقراء ریاضی

درکتابهای درسی از روش استقراء ریاضی گفتگویی نشده است، درحالی‌که بسیاری از مسأله‌های مربوط به‌ریاضیات مقدماتی (و هم ریاضیات عالی) با کمك این روش حل می‌شوند ، بخصوص در مسأله‌های مربوط به خاصیتهای عددها ، روش استقراء ریاضی بطور وسیعی مورد استفاده قرارمی‌گیرد.

از طرف دیگر بسیاری از دانش‌آموزان بطور ناخودآگاه درحل بعضی از مسأله‌ها ، به حالتهای خاص‌مسأله می‌پردازند ودر حقیقت برای بیان مقصوداز‌استقراء ناقص استفاده می‌کنند.

به‌همین مناسبات‌بحث دربارهٔ این‌روش ضروری بنظر‌می‌رسد تا هم نقص کتابهای درسی را برطرف‌کند و هم از استدلالهای‌غیر دقیق جلوگیری نماید.

آنها که به بحث مفصل در روش استقراء ریاضی وکاربرد آن‌در رشته‌های مختلف ریاضی علاقمندند می توانند به‌کتابی‌که به همین نام ترجمه و چاپ شده است مراجعه‌کنند .

ریاضی‌دان هم مانند دانشمند علوم طبیعی ، وقتی‌که یك قانون کلی را در ریاضیات حدس می‌زند ، ضمن اینکه بعضی از نتیجه های آنرا به محك آزمایش می‌زند ، این سؤال را در مقابل طبیعت می‌گذارد « به‌گمان من این‌قانون صحیح است، ولی آیا واقعاً صحیح‌است؟ »اگر نتیجه‌ای از قانون باصراحت رد شود قانون نمی‌تواند صحیح باشد ، ولی اگر این نتیجه‌مورد تأیید آزمایش قرارگیرد تنها اشاره‌ای است مبنی براینکه ممکن است قانون صحیح باشد.

طبیعت گاهی جواب می‌دهد « بله» وگاهی « نه»؛ولی « بله» را به صورت نجوا و مشروط می‌گوید، درحالی‌که « نه»را با صدای بلند و آشکارا.

د . پایا
(ریاضیات و استدلالهای مقرون به حقیقت)

۱. استقراء ناقص

اگر با جمع‌آوری مطالب جدا از هم و تجزیه و تحلیل آنها، بالاخره به‌یك نتیجهٔ‌کلی برسیم‌گویند استقراء انجام گرفته است. وقتی‌که آزمایشهای متعدد منجر به نتیجهٔ واحد بشود ، می‌توان احتمال داد که نتیجهٔ بدست‌آمده ناشی از یك نتیجهٔ‌کلی است و درآزمایشهای مشابه دیگر هم ، همین نتیجه به دست آید .

ولی‌آزمایش و جستجوی‌نتیجهٔ‌کلی نه‌تنها در مواردی‌که آزمایش‌منحصر به‌فرد است، بلکه حتی در مواردی‌که تعداد آنها خیلی زیاد هم باشد ، ممکن است منجر به‌اشتباهاتی بشود ، مثلا اگر کسی بخواهد دربارهٔ شرایط‌زندگی‌و حیات در روی زمین مطالعه‌کند ، اگر آزمایشهای خود را در جزیره‌ای که

زندگی می‌کند انجام دهد خیلی از حقیقت دور خواهد بود، این که اهالی یك جزیره بتوانند بفهمند که در خارج از جزیرهٔ آنها مردمی زندگی می‌کنند که از لحاظ رنگ پوست و یا سایر جهتها با آنها فرق دارند، به‌همان اندازهٔ درك حرکت زمین به‌دور خورشید مشکل است. تجربه‌های طولانی بشر کوچکترین تردیدی برای او باقی نگذاشته بود که اولا پوست همهٔ مردم از یك رنگ است، ثانیاً زمین در مرکز عالم قرار دارد.

و استقراء به‌علت همین عدم دقتی که در نتیجه‌گیریهایش بود، برای ریاضیات وسیلهٔ غیر قابل اطمینان و به‌دردنخوری به‌حساب می‌آمد. ولی با کمك استقراء بسیاری از خاصیتهای عددها (که اثبات آنها خیلی طولانی ومفصل بود) بدست می‌آمد.

اولر، ریاضیدان مشهور، در مورد یکی از کشفهای خود می‌نویسد:

«من هیچ استدلال دیگری بجز استقراء طولانی ندارم، آزمایشهای طولانی که انجام داده‌ام برای من شکی در صحت قانون باقی نگذاشته ... و بنظر می‌رسد که وقتی قانونی مثلا تا برای ۲۰ مورد متوالی آن صحیح باشد غیر ممکن است برای موارد بعدی نادرست از آب درآید».

نوشتهٔ اولر نشان می‌دهد که نه تنها ریاضیدانها گاهی از استقراء استفاده می‌کرده‌اند بلکه این نوع استدلال خود را بی‌عیب هم می‌دانسته‌اند. با وجود این، آنچه که به‌نظر اولر غیر ممکن است محتمل است.

مثلا حکم زیر را در نظر بگیرید:

هر عدد صحیح مثبت می‌تواند به‌صورت مجموع دو عدد نوشته شود که هریك از آنها یا عددی اول باشد و یا مجذور یك عدد صحیح.

اگر شما این حکم را در مورد عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ... آزمایش کنید صحت آن تأیید می‌شود:

$$۱=۱^۲+۰ ,\quad ۲=۱^۲+۱^۲ ,\quad ۳=۲+۱^۲ ,$$
$$۴=۳+۱^۲ ,\quad ۵=۳+۲ ,\quad ۶=۲+۲^۲ ,$$
$$۷=۳+۲^۲ ,\quad ۸=۵+۳=۲^۲+۲^۲ , \dots$$

و شما می‌توانید صحت این حکم را تا ۲۰ و ۵۰ وحتی ۱۰۰ تحقیق کنید. آیا برای عددهای بعد احتیاجی به‌تحقیق نیست ومی‌توانید نتیجه‌بگیرید

که این حکم همیشه صحیح است؟ مسلماً نه، مثلا عدد ۱۲۷ را نمی‌توان به‌این ترتیب منظم نمود.

به‌این نمونه هم توجه بفرمایید:

حکم می‌کنیم که عدد $A = x^۲ + x + ۴۱$ به ازای همهٔ مقادیر صحیح و غیر منفی x عددی است اول. این حکم را مورد آزمایش قرار می‌دهیم:

$$\left|\begin{array}{l} x=۰ \\ A=۴۱ \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} x=۱ \\ A=۴۳ \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} x=۲ \\ A=۴۷ \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} x=۳ \\ A=۵۳ \end{array}\right.,$$

$$\left|\begin{array}{l} x=۴ \\ A=۶۱ \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} x=۵ \\ A=۷۱ \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} x=۶ \\ A=۸۳ \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} x=۷ \\ A=۹۷ \end{array}\right.,$$

$$\left|\begin{array}{l} x=۸ \\ A=۱۱۳ \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} x=۹ \\ A=۱۳۱ \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} x=۱۰ \\ A=۱۵۱ \end{array}\right., \quad \ldots$$

وشما می‌توانید تا $x = ۳۹$ آزمایش کنید، درهرحال نتیجهٔ $x^۲ + x + ۴۱$ عددی است اول. ولی به ازای $x = ۴۰$ مقدار $A = ۴۱ \times ۴۱$ می‌شود و اول نیست. به ازای $x = ۴۱$ هم مقدار $A = ۴۱ \times ۴۳$ می‌شود که اول نیست. برای عددهای بزرگتر از ۴۱ هم مثلا به ازای $x = ۴۲$ و $x = ۴۳$ مقدار A عددی است اول و به‌ازای $x = ۴۴$ مقدار $A = ۴۳ \times ۴۷$ می‌شود و اول نیست. یعنی حتی با صحت ۴۰ آزمایش اولیه هم نمی‌توان بـه درستی حکم رأی داد.

نمونهٔ دیگری ذکر کنیم که در عین حال عجیب و باور نکردنی است. ریاضیدان مشهور شوروی «د. آ. گراو» براساس آزمایشهای زیاد ومتمادی نتیجه گرفت که عدد $۲^{p-۱} - ۱$ به‌شرط اول بودن عدد p بر $p^۲$ قابل‌قسمت نیست، ولی ظاهراً این قضیه به شرطی درست است که p کوچکتر از ۱۰۹۳ باشد، زیرا $۲^{۱۰۹۲} - ۱$ بر $۱۰۹۳^۲$ قابل‌قسمت است.

و یا مثلا $۲^{۲^n} + ۱$ (عدد فرما) را در نظر بگیریم. این عدد به‌ازای مقادیر ۱و۲و۳ برای n بترتیب عددهای ۵و۱۷و۲۵۷ را بدست می‌دهد که عددهایی اول هستند. آیا از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که عدد فرما به‌ازای همهٔ مقادیر n عددی است اول. مسلماً نه و مثلا همانطور که اولر ثابت کرد

به ازای $n=5$ عدد فرما بر ۶۴۱ قابل قسمت است.

۲. استقراء کامل یا استقراء ریاضی

تا میانه‌های قرن‌هفدهم‌تعداد زیادی قضیه‌های‌استقرائی ریاضی که‌بعضی‌از آنهااشتباه‌هم‌بودند رویهم انباشته‌شده بود، بنابراین‌بطور جدی احساس‌می‌شد که لازم‌است‌راهی برای اثبات منطقی پیدا شودتا اگر رابطه ویاقضیه‌ای به ازای $n=1,2,3,\ldots$، صحیح بودبتوان با قاطعیت‌حکم‌کرد که به‌ازای‌تمام عددهای طبیعی صحیح است. پس از بحثها و پیشنهادهای فراوان ، بالاخره‌روش‌اساسی اثبات بدست‌آمد : «عبور از k به $k+1$» که معمولا آن را استقراء ریاضی گویند. در راه رسیدن به این روش ، بیش از همه «بلزپاسکال»و«رنه‌دکارت» و «ژاکوب برنولی» زحمت کشیدند.

اثبات بطریق استقراء ریاضی به‌ترتیب زیر انجام می‌گیرد.

اولا) نتیجه را باکمك شواهد و قوانینی که وجود دارد حدس می‌زنیم.

ثانیاً) صحت نتیجه را برای کوچکترین عدد ممکن (واغلب $n=1$) آزمایش می‌کنیم.

ثالثاً) این قضیه‌راثابت می‌کنیم که:اگر نتیجهٔ مورد نظر به‌ازای $n=k$ صحیح باشد، به ازای $n=k+1$ هم صحیح خواهد بود . با اثبات این قضیه می‌توانیم‌مطمئن باشیم که نتیجه‌به‌ازای هرمقدار دلخواهی‌ازعددهای‌طبیعی صحیح است، زیرا به ازای ۱ صحیح بود، پس به ازای $1+1=2$ نیز صحیح خواهد بود . چون به ازای ۲ صحیح است پس به ازای $2+1=3$ صحیح خواهد بود و غیره.

ساختمان یك پله‌کان را در نظر خود مجسم کنید . اولین پله بر سطح زمین قرار دارد ، روی این پله می‌توانیم پله دوم را بسازیم ، وقتی که پلهٔ دوم آماده شد ، می‌توانیم پلهٔ سوم را بنا کنیم و غیره . با آماده بودن هرپله همیشه می‌توان پلهٔ بعدی را ساخت . روش استقراء ریاضی ثابت می‌کند که ساختمان پله‌کان می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد.

اکنون به‌ذکرچند مثال می‌پردازیم که می‌توان آنها را به کمك روش استقراء ریاضی به نتیجه رسانید . از رابطهٔ جملهٔ عمومی‌تصاعد حسابی شروع می‌کنیم:

$$a_1=a_1 \ , \ a_2=a_1+d \ , \ a_3=a_2+d=a_1+2d \ ;$$
$$a_4=a_3+d=a_1+3d$$

تا همین جاکافی است که بتوانیم رابطهٔ کلی را حدس بزنیم :

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

که صحت آنرا باید به‌طریق عبور از $n=k$ به $n=k+1$ ثابت‌کرد .

فرض می‌کنیم که رابطهٔ مفروض به ازای $n=k$ صحیح باشد :

$$a_k=a_1+(k-1)d$$

طبق تعریف تصاعد حسابی‌داریم:

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+kd$$

و اگر در رابطهٔ جملهٔ عمومی تصاعد حسابی هم بجای n عدد $k+1$ را قرار دهیم همین نتیجه بدست می‌آید:

$$a_{k+1}=a_1+(k+1-1)d=a_1+kd$$

و به این‌ترتیب‌رابطه ثابت شد.

مثال دیگری ذکر کنیم ، مطلوب‌است محاسبهٔ مجموع زیر:

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

ابتدا سعی می‌کنیم مجموع را حدس بزنیم:

$$S_1=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$$

$$S_2=S_1+\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

$$S_3=S_2+\frac{1}{3\times 4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

حدس می‌زنیم: $S_n=\frac{n}{n+1}$ باشد. آیا این حدس صحیح است ؟

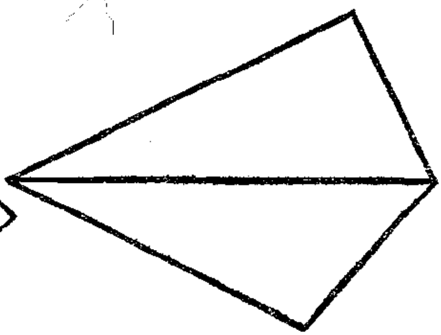
فرض می‌کنیم $S_k=\frac{k}{k+1}$ باشد، ثابت می‌کنیم $S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$ است .

داریم:

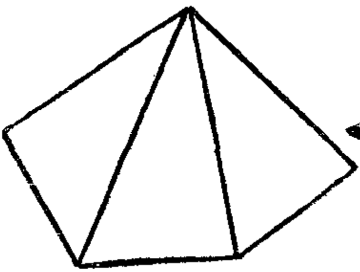
$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

و به‌این‌ترتیب حدس به‌یقین تبدیل می‌شود وما توانستیم S_n را باروش استقراء ریاضی بدست آوریم.

حالا مثالی از هندسه می‌آوریم . فرض کنید بخواهیم رابطه‌ای برای مجموع زاویه‌های داخلی یك چند ضلعی محدب پیدا کنیم.



شکل ۲



شکل ۳

مجموع زاویه‌های داخلی یك مثلث برابر است با ۱۸۰ درجه، مجموع زوایای داخلی یك چهار ضلعی برابر است با ۱۸۰ × ۲ درجه ، زیرا چهار ضلعی را می‌توان به دو مثلث تبدیل کرد (شکل ۲).

پنج ضلعی را می‌توان به‌سه مثلث تبدیل کرد (شکل۳) وبنابراین‌مجموع زاویه‌های‌آن برابراست با ۱۸۰ × ۳ درجه وبرای شش‌ضلعی ۱۸۰ × ۴درجه و غیره . این محاسبه‌ها نشان می‌دهد که رابطهٔ مربوط به مجموع زاویه‌های داخلی‌یك n ضلعی محدب باید مساوی $180(n-2)$ درجه باشد.

این رابطه راثابت می‌کنیم. فرض‌کنید که‌رابطه به ازای $n=k$ صحیح

باشد. یك $(k+1)$ضلعی در نظر می گیریم وسه رأس متوالی‌آنرا انتخاب‌و رأس اول را به رأس سوم وصل می کنیم، به‌این‌ترتیب $(k+1)$ ضلعی به یك مثلث و یك k ضلعی‌تقسیم می‌شود ومجموع زاویه‌های $(k+1)$ ضلعی مساوی مجموع زاویه‌های k ضلعی ومثلث‌خواهد بود. مجموع‌زاویه‌های داخلیkضلعی طبق فرض مساوی $(k-2)180$ درجه‌ومجموع زاویه‌های مثلث مساوی ۱۸۰ درجه است و بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی $(k+1)$ ضلعی مساوی :

$$(k-2)180+180=(k-1)180$$

خواهد بود. به‌این ترتیب قضیه ثابت شد، زیرا اگردر رابطهٔ مورد حدس هم $n=k+1$ قرار دهیم همین رابطهٔ $(k+1-2)180=(k-1)180$ بدست می‌آید.

نمونهٔ دیگری از هندسه :

می‌خواهیم تعداد قطرهای یك n ضلعی را بدست‌آوریم .

داریم : ۰ = تعداد قطرهای سه ضلعی

۲ = تعداد قطرهای چهار ضلعی

۵ = تعداد قطرهای پنج‌ضلعی

رابطهٔ‌کلی برای تعدادقطرهای n ضلعی‌باید چنان باشدکه‌بازای$n=3$ برابر صفر شود ، بنابراین در رابطهٔ کلی عامل $(n-3)$ وجود دارد . یعنی رابطهٔ‌کلی به‌صورت$f(n)(n-3)$ است.چون‌تعدادقطرهای چهار ضلعی‌مساوی ۲ شده است پس باید $f(2)=2$ شود . اگر $f(n)$ مقدار ثابتی باشد (یعنی به n بستگی نداشته باشد) باید همان عدد ۲ باشد و اگر $f(n)$ نسبت به n درجهٔ اول باشد می‌تواند مثلا $\frac{n}{2}$ باشد (که به ازای $n=4$ برابر۲شود).

$f(n)$ مقدار ثابت ۲ نیست زیرا در این صورت $2(n-3)$ بـه‌ازای $n=5$ برابر ۵ نمی‌شود ، ولی اگر $f(n)$ را برابر $\frac{n}{2}$ بگیریم$\frac{n}{2}(n-3)$ به ازای $n=5$ برابر ۵ می‌شود. بنابراین اگرتعداد قطرهای یك n ضلعی را با d_n نشان دهیم. احتمالا خواهیم داشت:

$$d_n=\frac{n}{2}(n-3)$$

این رابطه را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم به‌ازای $n=k$ صحیح باشد:

$$d_k=\frac{k}{2}(k-3)$$

برای اینکه یك k ضلعی به $(k+1)$ ضلعی تبدیل شود، مثلا می‌توان در طرف بیرون یکی از ضلعها نقطه‌ای انتخاب و به انتهای همان ضلع وصل کرد. دراین صورت خود این ضلع یکی ازقطرهای $(k+1)$ ضلعی می‌شود وضمناً می‌توان ازرأس‌جدید به همهٔ‌رأسهای غیر مجاورش (یعنی $k-2$ رأس) وصل‌کرد تا بقیهٔ قطرهای جدید بدست‌آید. در این صورت $k-1$ قطرجدید خواهیم داشت و از آنجا :

$$d_{k+1}=d_k+(k-1)=\frac{k}{2}(k-3)+(k-1)=$$
$$=\frac{1}{2}(k^2-k-2)=\frac{k+1}{2}[(k+1)-3]$$

و به‌این‌ترتیب رابطهٔ $d_n=\frac{n}{2}(n-3)$ ثابت شد .

حالا روش استقراء ریاضی‌را برای اثبات نامساوی زیر بکار می‌بریم :

$$|\sin nx|\leqslant n|\sin x|$$

اگر در موارد قبل می‌بایستی رابطهٔ مورد نظر را قبل ازاثبات حدس بزنیم ، در اینجا رابطه‌آماده است وماتنها باید به‌اثبات صحت آن بپردازیم. ابتدا صحت نامساوی را به ازای $n=1$ تحقیق می‌کنیم (در نمونه‌های قبل تحقیق صحت رابطه برای کمترین مقدار ضمن «حدس» رابطهٔ اصلی انجام گرفته بود):

$$|\sin x|\leqslant 1|\sin x|$$

و به‌این ترتیب قضیه به ازای $n=1$ صحیح است.

حالا فرض می‌کنیم که نامساوی به‌ازای $n=k$ برقرار باشد:

$$|\sin kx|\leqslant k|\sin x|$$

در این صورت داریم:

$$|\sin(k+1)x|=|\sin kx\cos x+\cos kx\sin x|\leqslant$$
$$\leqslant|\sin kx\cos x|+|\cos kx\sin x|\leqslant$$
$$\leqslant|\sin kx|+|\sin x|\leqslant k|\sin x|+|\sin x|=(k+1)|\sin x|$$

و به این ترتیب صحت نامساوی اثبات شد. (در اثبات این نامساوی از این مطلب استفاده کردیم که قدرمطلق مجموع چند عدد بزرگتر ازمجموع قدر مطلقهای آنها نیست و اینکه کسینوس از لحاظ قدر مطلق از واحد بزرگتر نیست).

۳. اشتباه نکنید

استقراء ریاضی در همهٔ رشته‌های ریـاضی: حساب، جبر، هندسه و مثلثات بطور وسیعی مورد استعمال دارد و ریاضیات عالی هم همیشه از کمك استقراء ریاضی برخوردار خواهد بود وبه‌هر حال امروزه استقراء ریاضی‌یکی از پرقدرت‌ترین روشهای اثبات در ریاضی می‌باشد. ولی فراموش نکنید که استفاده از استقراء ریاضی باید با دقت و در کمال احتیاط انجام گیرد. برای درك این مطلب به «اثبات» این «قضیه» می‌پردازیم که: «در جهان آدم ریشو وجود ندارد».

قضیه را برای $n=1$ آزمایش می‌کنیم. اگر مردی تنها یك مو در صورتش روییده باشد، البته، نمی‌توان گفت که ریش دارد.

فرض می‌کنیم که حکم به‌ازای $n=k$ صحیح باشد واضح است که اگر مردی با k عدد مو بدون ریش باشد با اضافه شدن یك مو هم ریش نخواهد داشت، یعنی به‌ازای $n=k+1$ هم بدون ریش خواهد بود. یعنی بطورکلی مردی که ریش داشته باشد، وجود ندارد.

استدلال بدون اشتباه انجام شد ولی نتیجهٔ آن نادرست است. البته‌اشتباه در این نیست که موهای ریش یکی پس از دیگری نمی‌رویند (آنطور که در استدلال ریاضی در نظر گرفتیم) بلکه اشتباه در اینجاست که ما استدلال را از نبودن ریش شروع کردیم، بدون اینکه آنرا تعریف کنیم. قبل از همه باید از تعریف ریش شروع کنیم وسپس روش استقراء ریاضی رادر مورد آن بکاربریم. ولی تعریف کمی (یعنی از لحاظ مقدار) برای‌ریش نمی‌توان پیدا کرد.

همچنین نباید تصور کرد که هرحکم کلی مثلا دربارهٔ عددها را می‌توان

با روش استقراء ریاضی به نتیجه رساند. چه بسیارند حکمهای کلی که یاتن به استقراء ریاضی نمی‌دهند ویا با استفاده از این روش به‌دور تسلسلی برمی‌خورند که عملا منجر به نتیجه نمی‌شود.

۴. روشهای دیگر استقراء ریاضی

روش استقراء ریاضی در همهٔ موارد ممکن، به‌نحو سادهٔ «عبور از k به $k+1$» انجام نمی‌گیرد. به دو نمونهٔ زیر توجه بفرمایید.

می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع توانهای متشابه ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+px+q=0$ برحسب ضریبها p و q قابل بیان است.

اگر فرض کنیم $x_1^n+x_2^n=S_n$ ، به‌ازای $n=1$ داریم:

$$x_1+x_2=-p$$

و به ازای $n=2$:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q$$

اکنون اگر دوطرف معادلهٔ درجهٔ دوم را در x^{n-2} ضرب و سپس ریشه‌های x_1 و x_2 را در آن قرار دهیم می‌شود:

$$x_1^n+px_1^{n-1}+qx_1^{n-2}=0$$
$$x_2^n+px_2^{n-1}+qx_2^{n-2}=0$$

و از جمع این دورابطه خواهیم داشت:

$$S_n+pS_{n-1}+qS_{n-2}=0$$

این رابطه که به **رابطهٔ برگشتی** (ویا رابطهٔ کاهشی) مشهور است نشان می‌دهد که اگر S_{n-1} و S_{n-2} برحسب ضریبها قابل بیان باشد ، S_n هم برحسب این ضریبها قابل بیان خواهد بود.

همانطور که دیده می‌شود در اینجا «عبور از $k-2$ و $k-1$ به k» مطرح است، نه «عبور از $k-1$ به k».

به عنوان نمونهٔ دوم ثابت می‌کنیم کـه واسطهٔ حسابی n عدد مثبت از واسطهٔ هندسی آنها کوچکتر نیست، یعنی:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}>\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$$

ابتدا برای $n=2$ ثابت می‌کنیم:

$$\frac{a_1+a_2}{2}>\sqrt{a_1a_2} \Longrightarrow (\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2>0$$

که واضح است.

حالا ثابت می‌کنیم که اگر نامساوی برای $n=k$ صحیح باشد، برای $n=2k$ هم صحیح است.

طبق فرض داریم:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}>\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$$

و باید ثابت کنیم:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2k-1}+a_{2k}}{2k}>$$

$$>\sqrt[2k]{a_1a_2a_3a_4\cdots a_{2k-1}a_{2k}}$$

سمت چپ نامساوی را به‌ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\cdots+\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}{k}=A$$

این کسر واسطهٔ حسابی k عدد مثبت است و بنابراین طبق فرض داریم:

$$A>\sqrt[k]{\frac{a_1+a_2}{2}\times\frac{a_3+a_4}{2}\times\cdots\times\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}>$$

$$>\sqrt[k]{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}\cdots\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}}=\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{2k}}$$

و چون نامساوی را برای $n=2$ ثابت‌کردیم پس برای $n=4$ و $n=8$, ... $n=2^k$ صحیح است.

حالا به اثبات نامساوی برای هرمقدار دلخواه n می‌پردازیم. فرض می‌کنیم:

$$n+q=2^k$$

طبق آنچه ثابت کردیم نامساوی برای $(n+q)$ عدد صحیح است:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+q}}{n+q}\geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n+q]{a_1a_2\cdots a_n\cdots a_{n+q}} \qquad (1)$$

برای سهولت کار فرض می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=P \quad و \quad \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=S$$

اگر فرض کنیم: $a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_{n+q}=S$

نامساوی (۱) به این‌صورت در می‌آید:

$$\frac{nS+qS}{n+q}\geqslant \sqrt[n+q]{P^n.S^q}$$

و یا:

$$S\geqslant \sqrt[n+q]{P^n.S^q}$$

که اگر دو طرف را به‌توان $n+q$ برسانیم پس‌از ساده‌کردن چنین می‌شود:

$$S\geqslant P$$

و حکم ثابت است.

تمرینها:

حکمهای زیر را با روش استقراء ریاضی ثابت‌کنید (n عددی طبیعی است).

۴۱۰. $$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}$$

۴۱۱. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

۴۱۲. $1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$

۴۱۳. $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdots\cos 2^n x=\frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x}$

۴۱۴. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}\quad(n>1)$

۴۱۵. ثابت کنید که می‌توان $x^n+\frac{1}{x^n}$ را به صورت کثیرالجمله‌ای ازدرجهٔ n نسبت به‌توانهای $x+\frac{1}{x}$ نوشت. ضمناً وقتی‌که n فرد باشد، تمام توانهای چندجمله‌ای حاصل فرداست و وقتی‌که n زوج باشد، تمام توانهای چندجمله‌ای حاصل زوج است.

۴۱۶. آیا n^2+n+17 به ازای مقادیر صحیح n عددی است اول.

۴۱۷. ثابت‌کنید عدد $4^{2^n}+2^{2^n}+1$ به ازای مقادیر صحیح و مثبت n بر ۷ قابل‌قسمت است.

مشتق مرتبهٔ nام هریك ازتابعهای زیر را بدست آورید:

۴۱۸. $y=\frac{1}{x+a}$ ۴۱۹. $y=\frac{1}{x^2-a^2}$

۴۲۰. $y=\sin x$

ثابت کنید (n عددی طبیعی است):

۴۲۱. $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\dots(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1}$

۴۲۲.

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\dots\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

۴۲۳. $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$

۴۲۴. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\dots+\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)^2=$

$$=\frac{1}{x^2-1}(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}})-2n-1$$

۴۲۵. $$\frac{1}{1\times 3\times 5}+\frac{1}{3\times 5\times 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

۴۲۶. $$\frac{1}{1\times 5}+\frac{1}{5\times 9}+\frac{1}{9\times 13}+\dots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

۴۲۷. $$\frac{1^2}{1\times 3}+\frac{2^2}{3\times 5}+\frac{3^2}{5\times 7}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

۴۲۸. $$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{3n+1}>1$$

۴۲۹. $$2^{n-1}(a^n+b^n)\geqslant(a+b)^n$$

a و b مقادیری مثبت هستند.

۴۳۰. ثابت کنید که مجموع مکعبهای سه عدد متوالی بر ۹ قابل قسمت است.

۴۳۱. ثابت کنید که به‌ازای هرمقدار x عبارت x^5-5x^3-4x بر ۱۲۰ قابل قسمت است.

۴۳۲. در تقسیم $1-x^2$ بر $1-2x\cos\alpha+x^2$، اگر خارج قسمت را بر حسب توانهای صعودی x منظم کنیم، جملهٔ شامل x^n خارج قسمت را پیدا کنید و صورت کلی باقیمانده را بنویسید.

۴۳۳. ثابت کنید (n عددی طبیعی است):

$$tg\alpha\, tg2\alpha+tg2\alpha\, tg3\alpha+\dots+tg(n-1)\alpha\, tg n\alpha=\frac{tg n\alpha}{tg\alpha}-n$$

ثابت کنید (n عددی است طبیعی):

۴۳۴. $$1\times 4+2\times 7+3\times 10+\dots+n(3n+1)=n(n+1)^2$$

۴۳۵. $$\sum_{m=1}^{n} m(m+1)(m+2)\cdots(m+p)=$$

$$=\frac{1}{p+2}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)$$

۴۳۶. $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n=$
$$=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}(x\neq 1)$$

۴۳۷. $\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\cdots+\frac{a+2^n-1}{2^n}=$
$$=\frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n}+n$$

۴۳۸. $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=$
$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}(|x|\neq 1)$$

۴۳۹. ثابت کنید عدد $11^{n+2}+12^{2n+1}$ (n عددی طبیعی است) بر ۱۳۳ قابل قسمت است.

۴۴۰. ثابت کنید : $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

۴۴۱. ثابت کنید عدد $3^{2k+1}+40k-67$ (k عددی طبیعی است) بر ۶۴ قابل‌قسمت است.

۴۴۲. ثابت کنید عدد $2^{5n+3}+5^n.3^{n+2}$ بر ۱۷ قابل قسمت است (n عددی طبیعی است).

۴۴۳. ثابت کنید عدد $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ بر ۱۱ قابل قسمت است (n عددی طبیعی است).

۴۴۴. ثابت کنید عدد $n^4+6n^3+11n^2+6n$ بر ۲۴ قابل قسمت است (n عددی طبیعی است).

۴۴۵. ثابت کنیدعدد $2^{n+5}.3^{4n}+5^{3n+1}$ بر ۳۷ قابل‌قسمت است (n عددی طبیعی است).

۴۴۶. ثابت کنید عدد $7^{n+2}+8^{2n+1}$ بر ۵۷ قابل قسمت است (n عددی طبیعی است).

۴۴۷. ثابت کنیدعدد $3^{2n+2}.5^{2n}-3^{3n+2}.2^{2n}$ بر ۱۰۵۳ قابل‌قسمت‌است (n عددی طبیعی است) .

۴۴۸. ثابت کنید عدد $n^6-3n^5+6n^4-7n^3+5n^2-2n$ بر ۲۴ قابل‌قسمت است (n عددی طبیعی است).

با فرض $a_0=1$ و $a_1=1$ و رابطهٔ برگشتی $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ به‌ترتیب عددهای ۱ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۸ ، ۱۳ ، ۲۱ ، ۳۴ ، ... بدست می‌آید که دنبالهٔ فیبوناچی نامیده می‌شود. برای دنبالهٔ فیبوناچی رابطه‌های زیر را ثابت‌کنید:

۴۴۹. $a_{2n+2}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}+1$

۴۵۰. $a^2_n-a_{n-1}\cdot a_{n+1}=(-1)^n$

۴۵۱. $a_{n+2}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+1$

۴۵۲. $a_{2n+1}=1+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$

۴۵۳. $a_{n+9}=a_{n-1}\cdot a_8+a_n\cdot a_9$

۴۵۴. دنبالهٔ عددی

$$a_0 ، a_1 ، a_2 ، \ldots ، a_n \text{ و } \ldots$$

با شرطهای $a_0=2$ و $a_1=3$ و $a_{n+1}=a_1\cdot a_n-a_0\cdot a_{n-1}$ مشخص شده است ثابت کنید:

$$a_n=2^n+1$$

۴۵۵. دنبالهٔ «زوج‌عددهای» زیر داده شده است:

$$(a ، b) ; (a_1 ، b_1) ; (a_2 ، b_2) ; \ldots ; (a_n ، b_n)$$

این زوج عددها با شرطهای زیر مشخص شده‌اند:

$$a_1=\frac{a+b}{2} ، b_1=\frac{a_1+b}{2} ، a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} ،$$

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_n}{2}$$

ثابت کنید:

$$a_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

$$b_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\times 4^n}\right)$$

۴۵۶. دنبالهٔ عددی

$$a_0 ، a_1 ، a_2 ، \ldots ، a_n ، \ldots$$

با شرطهای $a_0 = a$ ، $a_1 = b$ و $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ داده‌شده است.
ثابت کنید :

$$a_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{b-a}{3 \times 2^{n-1}}$$

۴۵۷. ثابت کنید :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} =$$
$$= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$$

۴۵۸. ثابت کنید :

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)^2 = x^{2n} + 2x^{2n-1} + 3x^{3n-2} +$$
$$+ \dots + (n+1)x^n + nx^{n-1} + \dots + 3x^2 + 2x + 1$$

۴۵۹. حاصلضرب زیر را پیدا کنید:

$$P = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{8}} \cdot 16^{\frac{1}{16}} \dots$$

۴۶۰. دنبالهٔ عددی

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

با شرطهای $a_1 = 2$ و $a_{n+1} = 3a_n + 1$ داده شده است. ثابت کنید:

$$a_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^{n-1} - 1)$$

۴۶۱. ثابت کنید برای دنبالهٔ فیبوناچی رابطهٔ زیر برقرار است :

$$a_n \cdot a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

۴۶۲. ثابت کنید که اگر داشته باشیم : $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ ، به ازای هر عدد طبیعی n خواهیم داشت : $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.

۹

کسرهای مسلسل

اهمیت اصلی کسرهای مسلسل در محاسبه‌های تقریبی است. متأسفانه در برنامهٔ دبیرستانی حتی اشاره‌ای هم به آنها نشده است. برای اینکه دانش‌آموزان علاقمند و کنجکاو با روشهای کسرهای مسلسل آشنا شوند ، ما این بخش را به کتاب افزوده‌ایم .

۱. تعریف

کسر مسلسل به کسری گفته می‌شود که به صورت زیر باشد:

$$a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3.}}}$$

$$.+\frac{1}{a_n}$$

که در آن عدد صحیح a باکسری جمع شده است که صورت آن واحد است و در مخرج عدد صحیح a_1 باکسری جمع شده‌است که در صورتش واحد و در مخرجش عدد صحیح a_2 جمع شده است باکسر... تاآخر (تمام عددها صحیح، مثبت فرض شده است).

کسرهای $\frac{a}{1}$ ، $\frac{1}{a_1}$ ، $\frac{1}{a_2}$ ، $\frac{1}{a_3}$, ... را «کسرهای اصلی»می‌نامیم.
کسر مسلسل فوق را به‌طور خلاصه به صورت زیر نمایش می‌دهند :

$$(a, a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

مثلاکسرهای :

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}} ; \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}$$

را بطور خلاصه به صورت (۳,۲,۱,۳) و (۰,۲,۱,۱۷) می‌نویسیم.

۲. تبدیل کسر مسلسل به‌کسرمعمولی

هر کسر مسلسلی را می‌توان به‌کسر معمولی تبدیل کرد ، بـرای این

منظور کافی است عملهایی را که در کسر وجود دارد انجام دهیم. مثلا فرض کنید کسر زیر را داشته باشیم:

$$(۲,۳,۱,۴)=۲+\frac{۱}{۳+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۴}}}$$

باید عملهای زیر را انجام دهیم :

$$۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}\ ;\ ۱:\frac{۵}{۴}=\frac{۴}{۵}\ ;\ ۳+\frac{۴}{۵}=\frac{۱۹}{۵}\ ;$$

$$۱:\frac{۱۹}{۵}=\frac{۵}{۱۹}\ ;\ ۲+\frac{۵}{۱۹}=\frac{۴۳}{۱۹}$$

واین یك کسر معمولی است که مقدار آن دقیقاً برابراست باکسرمسلسل مورد نظر.

۳. تبدیل کسر معمولی به کسر مسلسل

هر کسر معمولی را می‌توان به کسر مسلسل تبدیل کرد، کسر $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ را در نظر می گیریم ، ابتدا مقدار صحیح کسر را خارج می‌کنیم (رفع) ، به دست می‌آید :

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}=\mathbf{a}+\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{B}}$$

که در آن $\mathbf{a}$ خارج قسمت صحیح $\mathbf{A}$ بر $\mathbf{B}$ و $\mathbf{r}$ باقیماندهٔ این تقسیم است (اگر $\mathbf{A}$ از $\mathbf{B}$ کوچکتر باشد $\mathbf{a}=۰$ و $\mathbf{r}=\mathbf{A}$ خواهد شد).

$$\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{B}}=\frac{۱}{\mathbf{B}:\mathbf{r}}=\frac{۱}{\mathbf{a}_۱+\frac{\mathbf{r}_۱}{\mathbf{r}}}$$

که در آن $\mathbf{a}_۱$ خارج قسمت صحیح و $\mathbf{r}_۱$ باقیماندهٔ تقسیم $\mathbf{B}$ بر $\mathbf{r}$ است.

حالا دوباره صورت و مخرج کسر $\frac{\mathbf{r}_۱}{\mathbf{r}}$ را بر $\mathbf{r}_۱$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{r_1}{r}=\frac{1}{r:r_1}=\frac{1}{a_2+\frac{r_2}{r_1}}$$

که در آن a_2 خارج‌قسمت صحیح و r_2 باقیماندهٔ تقسیم r بر r_1 است. با ادامهٔ این روش به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{r_1:r_2}=\frac{1}{a_3+\frac{r_3}{r_2}};$$

$$\frac{r_3}{r_2}=\frac{1}{r_2:r_3}=\frac{1}{a_4+\frac{r_4}{r_3}};\dots$$

و چون داریم:

$$B>r>r_1>r_2>r_3>\cdots$$

با ادامهٔ این روش به جایی خواهیم رسید که باقیمانده ای مساوی صفر داشته باشیم. فرض‌کنید $r_n=0$ باشد ، یعنی:

$$\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}=\frac{1}{a_n}$$

دراینصورت خواهیم داشت :

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B}=a+\frac{1}{a_1+\frac{r_1}{r}}=a+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+\frac{r_2}{r_1}}=$$

$$=a+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+\cdot}$$

$$\cdot+\frac{1}{a_n}$$

از آنچه گفتیم نتیجه می‌شود که a ، a_1 ، a_2 ، ... و a_n خارج قسمتهای صحیحی هستند که به ترتیب از تقسیم A بر B ، سپس B براولین باقیمانده و بعد اولین باقیمانده بر باقیماندهٔ دوم و غیره بدست می‌آید . به عبارت دیگر اینها خارج قسمتهایی است که ضمن‌جستجوی‌بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك بین A و B (از راه تقسیمهای متوالی) بدست می‌آید. به همین

مناسبت، عددهای a ، a_1 ، a_2 ، ... ، a_n را خارج قسمتهای کسر مسلسل گویند .

مثال۱. کسر $\frac{۴۰}{۱۷}$ را به‌کسر مسلسل تبدیل کنید.

حل. داریم:

	۲	۲	۱	۵
۴۰	۱۷	۶	۵	۱
۶	۵	۱	۰	

و از آنجا :

$$\frac{۴۰}{۱۷}=۲+\frac{۱}{۲+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۵}}}$$

مثال۲. کسر $\frac{۷}{۱۲۰}$ را به‌کسر مسلسل تبدیل کنید .

حل. داریم:

	۱۷	۷
۱۲۰	۷	۱
۱	۰	

$$\Longrightarrow \frac{۷}{۱۲۰}=\frac{۱}{۱۷+\frac{۱}{۷}}$$

۴. کسرهای متقارب

اگر در یك کسر مسلسل ، چند حلقهٔ اول را انتخاب‌کنیم و از بقیه صرفنظر نماییم، خودکسر مسلسلی خواهد بود که اگر آنرا به‌کسر معمولی تبدیل‌کنیم‌کسر متقارب نامیده می‌شود. اولین‌کسر متقارب وقتی بدست‌می‌آید که تنها حلقهٔ اول را انتخاب‌کنیم ، دومین کسر متقارب با انتخاب دو حلقهٔ اول و غیره بدست‌می‌آید. به این ترتیب مثلا در مورد کسر مسلسل‌زیر:

$$۳+\frac{۱}{۲+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}}$$

اولین‌کسر متقارب برابر است با $\frac{3}{1}$;

دومین کسر متقارب برابر است با : $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$;

سومین کسر متقارب برابر است با : $3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}=\frac{10}{3}$;

و دراین مثال چهارمین کسر متقارب ، همان مقدار واقعی کسرمسلسل یعنی $\frac{27}{8}$ است .

وقتی که در یك کسر مسلسل عدد صحیح وجود نداشته باشد ، اولین‌کسر متقارب مساوی صفر خواهد بود.

۵. قانون تشکیل کسرهای متقارب

برای‌کسر متقارب $(a, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ سه کسراولیهٔ متقارب را تشکیل می‌دهیم:

$$1)\quad \frac{a}{1} \cdot\quad 2)\ a+\frac{1}{a_1}=\frac{aa_1+1}{a_1}\ ,$$

$$3)\quad a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=a+\cfrac{1}{\cfrac{a_1a_2+1}{a_2}}=a+\frac{a_2}{a_1a_2+1}=$$

$$=\frac{aa_1a_2+a+a_2}{a_1a_2+1}=\frac{(aa_1+1)a_2+a}{a_1a_2+1}$$

با مقایسهٔ کسرمتقارب سوم با دوکسر متقارب اول، نتیجه می‌گیریم‌که صورت کسر سوم را می‌توان به‌این ترتیب بدست آورد که صورت کسرمتقارب دوم را در خارج‌قسمت مربوط (یعنی در a_2) ضرب و به‌حاصل‌ضرب ،صورت کسر اول را اضافه‌کنیم. درست به همین ترتیب می‌توان مخرج کسر سوم را با کمك مخرجهای دوکسر اول بدست آورد.

ثابت می‌کنیم که این قانون را می‌توان برای محاسبهٔ همهٔ کسرهای

متقارب بکار برد، یعنی ثابت می‌کنیم که بطور کلی صورت $(n+1)$ امین کسر متقارب را می‌توان به این ترتیب بدست آورد که صورت کسر متقارب nام را در خارج‌قسمت مربوط ، یعنی در a_n، ضرب وحاصلضرب رابا صورت کسر $(n-1)$ام جمع کنیم. بهمین ترتیب هم می‌توان مخرج کسر $(n+1)$ام را با کمك‌مخرجهای کسرهای nام و $(n-1)$ام بدست‌آورد. اثبات رابا روش استقراء ریاضی انجام می‌دهیم. یعنی ثابت می‌کنیم‌که اگر این قانون برای کسر nام صحیح باشد، برای کسر $(n+1)$ام هم صحیح خواهد بود.

کسرهای متقارب متوالی را به ترتیب زیر نشان می‌دهیم:

$$\frac{P_1}{Q_1}\,;\,\frac{P_2}{Q_2}\,;\,\frac{P_3}{Q_3}\,;\,\dots\,;\,\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\,;\,\frac{P_n}{Q_n}\,;\,\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

خارج قسمتهای متناظر آنها به‌ترتیب چنین هستند:

$$a\;;\;a_1\;;\;a_2\;;\dots;\;a_{n-2}\;:\;a_{n-1}\;:\;a_n$$

فرض می‌کنیم‌که تساویهای زیر صحیح باشند :

$$\begin{cases}P_n=P_{n-1}\cdot a_{n-1}+P_{n-2}\;; \\ Q_n=Q_{n-1}\cdot a_{n-1}+Q_{n-2}\end{cases}\qquad(1)$$

و بنابراین ؛

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}\cdot a_{n-1}+P_{n-2}}{Q_{n-1}\cdot a_{n-1}+Q_{n-2}}\qquad(2)$$

باید ثابت کنیم‌که در اینصورت خواهیم داشت:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_n\cdot a_n+P_{n-1}}{Q_n\cdot a_n+Q_{n-1}}\qquad(3)$$

با مقایسهٔ کسرهای متقارب :

$$\frac{P_n}{Q_n}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}}}}$$

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\cdot}}$$
$$\cdot\cdot+\frac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}$$

نتیجه می‌گیریم که برای محاسبهٔ کسر متقارب $(n+1)$ام بایددر کسر متقارب nام ، عدد a_{n-1} را به مجموع $a_{n-1}+\frac{1}{a_n}$ تبدیل کرد .

بنابراین از رابطهٔ (۲) بدست می‌آید:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)+P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)+Q_{n-2}}$$

پرانتزها را باز و صورت و مخرج را در a_n ضرب می‌کنیم ، می‌شود:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+2}}=\frac{P_{n-1}a_{n-1}a_n+P_{n-1}+P_{n-2}a_n}{Q_{n-1}a_{n-1}a_n+Q_{n-1}+Q_{n-2}a_n}=$$
$$=\frac{(P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2})a_n+P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2})a_n+Q_{n-1}}$$

که اگر رابطهٔ (۱) را در نظر بگیریم ، بالاخره بدست می‌آید :

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_na_n+P_{n-1}}{Q_na_n+Q_{n-1}}$$

و این همان رابطهٔ (۳) است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

به این ترتیب اگر تساوی (۳) برای کسر متقارب nام صحیح باشد، برای کسر متقارب $(n+1)$ام نیز صحیح خواهد بود . ولی بلافاصله دیده می‌شود که این تساوی برای کسر متقارب سوم صحیح است ، بنابراین طبق استدلال بالا برای کسر متقارب چهارم و سپس کسر متقارب پنجم و غیره صحیح خواهد بود .

با استفاده از این قانون همهٔ کسرهای متقارب را در مورد مثال زیر معین می‌کنیم:

$$x=۲+\frac{۱}{۱+}\frac{۱}{۳+}\frac{۱}{۲+}\frac{۱}{۳+}\frac{۱}{۱+}\frac{۱}{۵}$$

نتیجهٔ محاسبه را در جدول زیر منظم کرده‌ایم :

۵	۱	۳	۲	۳		
۶۴۱	۱۱۱	۸۶	۲۵	۱۱	۳	۲
۲۳۱	۴۰	۳۱	۹	۴	۱	۱

در سطر دوم صورت و در سطر سوم مخرج کسرهای متقارب به ترتیب نوشته شده است. دو کسر متقارب اول مستقیماً بدست می‌آید $\frac{۲}{۱}$ و $\frac{۳}{۱}$. بقیهٔ کسرها هم با توجه به قانونی که اثبات کردیم ، محاسبه می‌شوند .

برای سهولت کار در سطر اول ، مخرجهای صحیح از سوم تا آخر نوشته شده است .

۶. چند قضیه

قضیهٔ ۱. مقدار دقیق کسر مسلسل بین دو کسر متقارب متوالی قرار دارد و ضمناً به مقدار کسر بعدی نزدیکتر است تا مقدار کسر قبلی.

اثبات. کسر مسلسل زیر را در نظر می‌گیریم :

$$(a,a_۱,a_۲,\cdots,a_{n-۱},a_n,a_{n+۱},\cdots,a_s)=A$$

که مقدار دقیق آنرا به A نشان‌داده‌ایم. سه کسر متقارب متوالی را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{P_{n-۱}}{Q_{n-۱}}\ ;\ \frac{P_n}{Q_n}\ ;\ \frac{P_{n+۱}}{Q_{n+۱}}$$

طبق آنچه که قبلا اثبات کردیم ، داریم:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_n a_n+P_{n-1}}{Q_n a_n+Q_{n-1}}$$

اگردر طرف‌راست‌این‌تساوی به‌جای a_n مقدار $y=(a_n,a_{n+1},\cdots,a_s)$ را قرار دهیم ، مقدار دقیق کسر مسلسل ، یعنی A بدست می‌آید :

$$A=\frac{P_n y+P_{n-1}}{Q_n y+Q_{n-1}}$$

و از آنجا :

$$AQ_n y+AQ_{n-1}=P_n y+P_{n-1}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow AQ_n y-P_n y=P_{n-1}-AQ_{n-1}$$

یعنی : $$yQ_n\left(A-\frac{P_n}{Q_n}\right)=Q_{n-1}\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A\right)$$

از تساوی اخیر می‌توان دو نتیجهٔ زیر را بدست آورد:

۱) چـون عددهای y و Q_n و $n-1$ مثبت هستند ، در این صورت تفاضلهایی‌که در داخل پرانتز ها قرار دارند ، باید با هم مثبت و یا با هم منفی شوند ، یعنی:

اگر $A-\frac{P_n}{Q_n}>0$ باشد، $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A>0$ می‌شود .

واگر $A-\frac{P_n}{Q_n}<0$ باشد، $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A<0$ می‌شود .

یعنی اگر $A>\frac{P_n}{Q_n}$ باشد ، $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}>A$ و اگر $A<\frac{P_n}{Q_n}$ باشد ، $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}<A$ می‌شود .

۲) چون $y>1$ و $Q_n>Q_{n-1}$ وضمناً عددهای Q_n و Q_{n-1} مثبت هستند ، از همان تساوی نتیجه می‌شودکه قدر مطلق مقدار $\left(A-\frac{P_n}{Q_n}\right)$ از قدرمطلق مقدار $\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A\right)$ کوچکتر است و از آنجا نتیجه می‌شودکه A به $\frac{P_n}{Q_n}$ نزدیکتر است تا به $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$.

توضیح. چون واضح است که $A>a$ یعنی $A>\frac{P_1}{Q_1}$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$A<\frac{P_2}{Q_2}\ ;\ A>\frac{P_3}{Q_3}\ ;\ A<\frac{P_4}{Q_4};\dots$$

مقدار دقیق کسرمسلسل از همهٔ کسرهای متقارب ردیف فرد بزرگترو از همهٔ کسرهای متقارب ردیف زوج کوچکتر است.

قضیهٔ ۲. تفاضل دوکسر متقارب متوالی برابر است با ± 1 تقسیم بر حاصل ضرب مخرجهای این دوکسرمتقارب.

اثبات. چون داریم:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n+1}Q_n-P_nQ_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}$$

واضح است که مخرج این تفاضل همانست که می‌خواهیم. بنابراین کافی است ثابت کنیم که صورت آن مساوی ± 1 است. داریم:

$$P_{n+1}=P_na_n+P_{n-1}\ ;\ Q_{n+1}=Q_na_n+Q_{n-1}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}P_{n+1}Q_n-P_nQ_{n+1}&=(P_na_n+P_{n-1})Q_n-\\&+P_n(Q_na_n+Q_{n-1})=P_nQ_na_n+P_{n-1}Q_n-P_nQ_na_n-\\&-P_nQ_{n-1}=-(P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n)\end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز عبارتستاز صورت کسری که ازتفاضل کسر $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ از $\frac{P_n}{Q_n}$ بدست می‌آید. به این ترتیب ثابت کردیم که قدرمطلق‌مقدارصورت کسری که از تفاضل کسر $\frac{P_n}{Q_n}$ ازکسر $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ بدست می‌آید برابر است با قدرمطلق صورت کسری که از تفاضل $\frac{P_n}{Q_n}$ از $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ بدست می‌آید. به‌عبارت دیگر، قدرمطلق صورت‌کسری که از تفاضل دو کسر متقارب متوالی بدست می‌آید برای همهٔ کسرهای متقارب مقداری است ثابت، ولی تفاضل بین کسرهای متقارب اول و دوم را می‌توانیم حساب کنیم:

$$\left(a+\frac{۱}{a_۱}\right)-a=\frac{۱}{a_۱}$$

بنابراین صورت هر کسری که از تفاضل دو کسر متقارب متوالی بدست می‌آید ، از لحاظ قدرمطلق برابر واحد است .

مثلا اگر کسری را که درانتهای بند ۵ ذکر کردیم، در نظر بگیریم داریم :

$$\frac{۳}{۲}-\frac{۲}{۱}=\frac{۱}{۱}\ ;\ \frac{۱۱}{۴}-\frac{۳}{۱}=-\frac{۱}{۴}\ ;\ \frac{۲۵}{۹}-\frac{۱۱}{۴}=\frac{۱}{۳۶};$$

$$\frac{۸۶}{۳۱}-\frac{۲۵}{۹}=-\frac{۱}{۲۷۹},\dots$$

نتیجه‌ها:

۱) همهٔ کسرهای متقارب ساده نشدنی هستند ، زیرا اگر کسر $\frac{P_n}{Q_n}$ بتواند بـه مقسوم علیه $m>۱$ کسوچك شود ، در ایـن صورت تفاضل $P_nQ_{n-۱}-P_{n-۱}Q_n$ هم باید بر m قابل‌قسمت باشد که غیرممکن‌است، زیرا این تفاضل برابر است با $۱\pm$.

۲) اگر بجای مقدار حقیقی کسر مسلسل ، کسر متقارب $\frac{P_n}{Q_n}$ راانتخاب کنیم ، اشتباهی کوچکتر از هریك از سه عدد زیر کرده‌ایم:

$$\frac{۱}{Q_nQ_{n+۱}}\ ;\ \frac{۱}{Q_n(Q_n+Q_{n-۱})}\ ;\ \frac{۱}{(Q_n)^۲}$$

زیرا ، اگر A مقدار دقیق کسر مسلسل باشد، $A-\frac{P_n}{Q_n}$ از لحـاظ مقدار عددی از تفاضل $\frac{P_{n+۱}}{Q_{n+۱}}-\frac{P_n}{Q_n}$ کوچکتر است و تفاضل اخیرازلحاظ قدر مطلق ، طبق آنچه ثابت‌کردیم ، برابر است با $\frac{۱}{Q_nQ_{n-۱}}$. از طرف

دیگر چون داریم : $Q_{n+1}=Q_n a_n+Q_{n-1}\ (a_n\geqslant 1)$

خواهیم داشت: $Q_{n+1}\geqslant Q_n+Q_{n-1}$

بنابراین :

$$Q_nQ_{n+1}\geqslant Q_n(Q_n+Q_{n-1})\Longrightarrow\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}\leqslant\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$$

و بنابراین قدر مطلق تفاضل $A-\frac{P_n}{Q_n}$ از $\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$ کوچکتر است.

بالاخره چون $Q_{n+1}>Q_n$ است ، $Q_{n+1}Q_n>(Q_n)^2$ خواهد بود و از آنجا :

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}<\frac{1}{(Q_n)^2}$$

بنابراین قدر مطلق تفاضل $A-\frac{P_n}{Q_n}$ از $\frac{1}{(Q_n)^2}$ هم کوچکتر است .

از سه مقدار مذکور $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$ از همه کوچکتر است. وقتی که کسر متقارب $\frac{P_n}{Q_n}$ را به عنوان مقدار تقریبی کسر مسلسل انتخاب می‌کنیم ، در حالتی که مخرج کسر متقارب بعدی معلوم باشد ، خطا را مساوی $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$ می‌گیریم، اگر مخرج کسر متقارب قبلی معلوم باشد $\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$ راودرحالتی که فقط کسر متقارب $\frac{P_n}{Q_n}$ معلوم باشد ، $\frac{1}{(Q_n)^2}$ را به عنوان خطا می گیریم.

مثلا اگر بدانیم که یکی‌از کسرهای متقارب یك کسر مسلسل برابر $\frac{45}{17}$ است، می‌توانیم بگوییم که $\frac{45}{17}$ مقدار کسر را تا $\frac{1}{17^2}=\frac{1}{289}$ تقریب معین می‌کند . اگر علاوه بر این، بدانیم که مخرج کسر متقارب قبلی برابر ۸ است ، می‌توانیم بگوییم که $\frac{45}{17}$ ، مقدار کسر مسلسل را با تقریب

$\frac{۱}{۱۷(۱۷+۸)}=\frac{۱}{۴۲۵}$ بیان می‌کند.

و بالاخره اگر بدانیم که مخرج کسر متقارب بعدی مثلا مساوی ۳۷ است ، می‌گوییم که $\frac{۴۵}{۱۷}$، با مقدار واقعی کسر کمتر از $\frac{۱}{۱۷\times ۳۷}=\frac{۱}{۶۲۹}$ اختلاف دارد.

قضیهٔ ۳

کسر متقارب از هر کسر دیگری که مخرجش کوچکتر است به‌مقدار حقیقی کسر مسلسل نزدیکتر است.

اثبات .

فرض می‌کنیم کسری مثل $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ وجود داشته باشد که به مقدار حقیقی کسر مسلسل یعنی $\mathbf{A}$ نزدیکتر باشد تا کسر متقارب $\frac{\mathbf{P_n}}{\mathbf{Q_n}}$ و فرض می‌کنیم $\mathbf{P_n}<\mathbf{Q_n}$ باشد . ثابت می‌کنیم که این فرض ما را به تناقض می‌کشاند .
وقتی که $\frac{\mathbf{P_n}}{\mathbf{Q_n}}$ نسبت به $\frac{\mathbf{P_{n-۱}}}{\mathbf{Q_{n-۱}}}$ به $\mathbf{A}$ نزدیکتر است و $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ هم نسبت به $\frac{\mathbf{P_n}}{\mathbf{Q_n}}$ به $\mathbf{A}$ نزدیکتر است ، کسر $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ نسبت به $\frac{\mathbf{P_{n-۱}}}{\mathbf{Q_{n-۱}}}$ به $\mathbf{A}$ نزدیکتر خواهد بود.
از طرف دیگر می‌دانیم که $\mathbf{A}$ بین دو کسر متوالی $\frac{\mathbf{P_{n-۱}}}{\mathbf{Q_{n-۱}}}$ و $\frac{\mathbf{P_n}}{\mathbf{Q_n}}$ واقع‌است، در اینصورت قدر مطلق تفاضل $\frac{\mathbf{P_n}}{\mathbf{Q_n}}-\frac{\mathbf{P_{n-۱}}}{\mathbf{Q_{n-۱}}}$ بایدبزرگتراز قدرمطلق‌تفاضل $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}-\frac{\mathbf{P_{n-۱}}}{\mathbf{Q_{n-۱}}}$ باشد. یعنی (با توجه به مقادیر قدرمطلق) می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{۱}{\mathbf{Q_nQ_{n-۱}}}>\left|\frac{\mathbf{aQ_{n-۱}bP_{n-۱}}}{\mathbf{bQ_{n-۱}}}\right|$$

$$\mathbf{Q_nQ_{n-۱}}>\mathbf{bQ_{n-۱}}$$

با ضرب این دو نامساوی در یکدیگر ، بدست می‌آید:

$$۱>|\mathbf{aQ_{n-۱}}-\mathbf{bP_{n-۱}}|$$

عددهای $\mathbf{aQ_{n-۱}}$ و $\mathbf{bP_{n-۱}}$ عددهایی‌صحیح هستند و بنابراین‌نامساوی فوق وقتی امکان دارد که داشته باشیم:

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=0 \implies \frac{a}{b}=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

ولی این تساوی غیر ممکن است ، زیـرا طبق فرض $\frac{a}{b}$ به A نزدیک‌تر است تا $\frac{P_n}{Q_n}$. از طرف دیگر طبق آنچه قبلا ثابت‌کردیم، $\frac{P_n}{Q_n}$ نسبت بـه $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ به A نزدیکتر است . به این ترتیب قضیهٔ ۳ هم اثبات شد.

۷. مقدار تقریبی یک کسر

وقتی که صورت و مخرج کسر حسابی ساده‌نشدنی مفروضی با عددهای بزرگ بیان شده باشد ، اغلب لازم است که مقدار تقریبی آنرا به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسیم. برای این منظور کافی است که کسر مفروض را به‌کسر مسلسل تبدیل کنیم و یکی ازکسرهای متقارب آنرا (بسته به تقریبی که لازم داریم) انتخاب‌کنیم .

مثال. می‌دانیم که عدد π ، نسبت محیط دایره بـر قطر آن ، بین دو کسر : ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳ و ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۴ واقع است ، مقدار تقریبی π را به‌دست آورید.

هردوکسر را به‌کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم و قسمتهای مشترک آنهارا انتخاب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\pi=(۳,۷,۱۵,۱,\dots)$$

کسرهای متقارب چنین‌اند:

		۱۵	۱
۳	۲۲	۳۳۳	۳۵۵
۱	۷	۱۰۶	۱۱۳

کسر تقریبی $\frac{۲۲}{۷}$ را **ارشمیدس** پیدا کرده بود ، این کسر با تقریب $\frac{۱}{۷\times ۱۰۶}=\frac{۱}{۷۴۲}$ صحیح است، یعنی مسلماً تا $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقریب درست است .

عدد $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ را **تسوچونك‌چی** ریاضیدان قرن پنجم چین مقدار صحیح π می‌دانسته ، این کسر با تقریب $\frac{۱}{۳۷۴۰۵۲۶}=\frac{۱}{۱۱۳\times ۳۳۱۰۲}$ صحیح است. یعنی تا یك میلیونیم تقریب .

مقادیر تقریبی ارشمیدس و تسوچونك‌چی ، چون در ردیف زوج کسرهای متقارب‌اند ، از π بزرگترند.

۸. گرفتن جذر

فرض کنید می‌خواهیم $\sqrt{۴۱}$ را باکمك کسرهای مسلسل محاسبه کنیم. به این ترتیب استدلال می‌کنیم : بزرگترین عدد صحیحی که در $\sqrt{۴۱}$ وجود دارد ۶ است، بنابراین می‌توان نوشت :

$$\sqrt{۴۱}=۶+\frac{۱}{x} \qquad (۱)$$

و از آنجا :

$$\frac{۱}{x}=\sqrt{۴۱}-۶ \Longrightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۴۱}-۶}=\frac{\sqrt{۴۱}+۶}{۵}$$

بزرگترین عدد صحیحی که در $\frac{\sqrt{۴۱}+۶}{۵}$ وجود دارد ۲ می‌باشد ، بنابراین فرض می‌کنیم :

$$x=\frac{\sqrt{۴۱}+۶}{۵}=۲+\frac{۱}{y} \qquad (۲)$$

و از آنجا :

$$\frac{۱}{y}=\frac{\sqrt{۴۱}+۶}{۵}-۲=\frac{\sqrt{۴۱}-۴}{۵} \quad ;$$

$$y=\frac{۵}{\sqrt{۴۱}-۴}=\frac{\sqrt{۴۱}+۴}{۵} \quad ;$$

چون $10 > \sqrt{41}+4$ می‌باشد ، بزرگترین عدد صحیحی که در کسر $\frac{\sqrt{41}+4}{5}$ وجود دارد ، برابراست با ۲ ، بنابراین داریم:

$$y=\frac{\sqrt{41}+4}{5}=2+\frac{1}{z} \quad ; \quad (3)$$

ویا :

$$\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{41}-6}{5} \Longrightarrow z=\frac{5}{\sqrt{41}-6}=$$

$$=\frac{5(\sqrt{41}+6)}{5}=\sqrt{41}+6 \quad ;$$

بزرگترین عدد صحیحی که در $\sqrt{41}+6$ وجود دارد ۱۲ می‌باشد ، بنابراین می‌توان فرض کرد:

$$z=\sqrt{41}+6=12+\frac{1}{v} \quad ; \qquad (4)$$

$$\frac{1}{v}=\sqrt{41}-6 \Longrightarrow v=\frac{1}{\sqrt{41}-6}$$

با مقایسهٔ رابطهٔ v با رابطهٔ x بدست می‌آید : $v=x$ ، با استفاده از تساویهای (۱) ، (۲) ، (۳) و (۴) بدست می‌آید :

$$\sqrt{41}=6+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{12+\frac{1}{x}}=$$

$$=6+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{12+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{12+}\cdots$$

بنابراین $\sqrt{41}$ کسر مسلسل متناوبی است که کسرهای متقارب آن‌مقادیر تقریبی $\sqrt{41}$ خواهند بود :

		۲	۱۲	۲	۲	...
۶	۱۳	۳۲	۳۹۷	۸۲۶	۲۰۴۹	...
۱	۲	۵	۶۲	۱۲۹	۳۲۰	...

به همین‌ترتیب خواهیم داشت :

$$\sqrt{۱۳}=(۳\,,۱\,,۱\,,۱\,,۱\,,۶\,,۱\,,۱\,,\dots)\ ;$$
$$\sqrt{۲۹}=(۵\,,۲\,,۱\,,۱\,,۲\,,۱۰\,,\dots)$$

۹. جستجوی جوابهای معادلهٔ سیال

بـا کمك کسرهـای مسلسل می‌تـوان یکی از جوابهای معادلهٔ سیال $ax+by=c$ را پیدا کرد و ما این مطلب را ضمن یك مثال روشن می‌کنیم معادلهٔ سیال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$۴۳x+۱۵y=۸$$

کسر $\frac{۴۳}{۱۵}$ را در نظر می‌گیریم و آنرا به‌کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{۴۳}{۱۵}=۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۶+\cfrac{۱}{۲}}}$$

حالاکسرمتقارب ما قبل آخر را درنظرمی‌گیریم. این‌کسربرابر $\frac{۲۰}{۷}$ است. آخرین‌کسر برابر بامقدار حقیقی کسر یعنی $\frac{۴۳}{۱۵}$ است و $\frac{۲۰}{۷}$ هم‌کسر متقارب ردیف فرد است ، با توجه به قضیهٔ ۱ می‌توان نوشت :

$$\frac{۴۳}{۱۵}-\frac{۲۰}{۷}=\frac{۱}{۱۵\times ۷}\implies ۴۳+۷-۱۵+۲۰=۱$$

که اگر دوطرف تساوی را ۸ برابر کنیم ، می‌شود:

$$۴۳\times ۵۶+۱۵(-۱۶۰)=۸$$

با مقایسهٔ این تساوی و معادلهٔ مفروض نتیجه می‌شود که می‌توان x را مساوی ۵۶ و y را مساوی ۱۶۰ − گرفت . و همهٔ جوابهای معادلهٔ سیال از رابطه‌های زیر بدست می‌آیند :

$$\begin{cases} x=56-15t \\ y=-160+43t \end{cases}$$

این رابطه‌ها را می‌توان ساده کرد ، t را به $t+3$ تبدیل می‌کنیم:

$$x=56-15(t+3)=11-15t$$
$$y=-160+43(t+3)=-31+43t$$

مثال۲. معادلهٔ $7x-19y=5$ را در نظر می‌گیریم:

کسر $\frac{7}{19}$ را به کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{7}{19}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

کسر متقارب ما قبل آخر برابر است با $\frac{3}{8}$ و چون کسر متقارب‌ردیف زوج است ، داریم :

$$\frac{7}{9}-\frac{3}{8}=\frac{-1}{19\times 8}$$

و از آنجا: $7\times 8-19\times 3=-1$

دوطرف تساوی را در ۵ ضرب می‌کنیم :

$$7\times 40-19\times 15=-5 \Longrightarrow 7(-40)-19(-15)=5$$

یعنی می‌توان x را مساوی ۴۰ − و y را مساوی ۱۵ − گرفت در این صورت :

$$\begin{cases} x=-40+19t \\ y=-15+7t \end{cases}$$

که با تبدیل t به $t+2$ ، این رابطه‌ها ساده می‌شوند:

$$\begin{cases} x=-40+19(t+2)=-2+19t \\ y=-15+7(t+2)=-1+7t \end{cases}$$

۱۰. محاسبهٔ لگاریتم

فرض کنید می‌خواهیم $\log 2$ را محاسبه کنیم (درمبنای ۱۰) ، به عبارت دیگر می‌خواهیم معادلهٔ $2=10^x$ را حل کنیم . ابتدا بـرای x نزدیکترین عدده‌ـای صحیح را پیدا می‌کنیم . چون $1=10^0$ و $10=10^1$ می‌باشد ، بنابراین x بین صفر و یك قرار گرفته است . در این صورت می‌توان فرض کرد : $x=\frac{1}{z}$ و نوشت:

$$10^{\frac{1}{z}}=2 \Longrightarrow 10=2^z$$

به سادگی دیده می‌شود که z بین ۳ و ۴ قرارگرفته است، بنابراین می‌توان فرض کرد: $z=3+\frac{1}{z_1}$ و نوشت :

$$10=2^{3+\frac{1}{z_1}}=2^3\times 2^{\frac{1}{z_1}}=8\times 2^{\frac{1}{z_1}}$$

واز آنجا:

$$2^{\frac{1}{z_1}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4} \Longrightarrow 2=\left(\frac{5}{4}\right)^{z_1}$$

با جستجو روشن می‌شود کـه z_1 بین ۳ و ۴ قرار گرفته است ، یعنی می‌توان فرض کرد :

$$z_1=3+\frac{1}{z_2}\ ;\ 2=\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{z_2}}=\left(\frac{5}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}}$$

و از آنجا :

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}}=2:\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{128}{125} \Longrightarrow \left(\frac{128}{125}\right)^{z_2}=\frac{5}{4}$$

با تجسس روشن می‌شود که z_2 بین ۹ و ۱۰ قرار گرفته است و این روش را می‌توان به‌همین ترتیب ادامه داد. اگر مقدار تقریبی z_2 را در نظر بگیریم می‌توان $z_2=۹$ گرفت ، بنابراین:

$$z_1=۳+\frac{۱}{۹}\ ;\ z=۳+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۹}}\ ;\ x=\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۹}}}$$

و اگر این کسر مسلسل را به‌کسر معمولی تبدیل کنیم ، می‌شود :

$$x=\frac{۲۸}{۹۳}=۰/۳۰۱۰۷$$

و این مقدار تا رقم چهارم بعد از ممیز صحیح است . مقدار دقیق x چنین است :

$$x=۰/۳۰۱۰۳...$$

تمرینها

۴۶۳. کسر $\frac{۷۳}{۴۳}$ را به‌کسر مسلسل تبدیل کنید .

۴۶۴. تقارب پنجم کسر مسلسل زیر را بدست آورید :

$$\cfrac{۲}{۳-\cfrac{۲}{۳-\cfrac{۲}{۳-\cfrac{۲}{۳-\cfrac{۲}{۳-\ldots}}}}}$$

۴۶۵. یادآور می‌شویم که یك ماه قمری از ۲۹/۵۳ روز و یکسال شمسی از ۳۶۵/۲۴ روز تشکیل می‌شود. به‌کمك تقاربهای متوالی نشان دهید که‌تقریباً ۲۳۵ ماه قمری در ۱۹ سال شمسی قراردارد.

۴۶۶. مقدار کسر مسلسل زیر را حساب کنید :

$$\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\cdots$$

۴۶۷. اگر a ، b ، x و y عددهایی حقیقی باشند طوری که :

$$x=\frac{a}{1+}\frac{b}{1+}\frac{a}{1+}\frac{b}{1+}\cdots \qquad y=\frac{b}{1+}\frac{a}{1+}\frac{b}{1+}\frac{a}{1+}\cdots$$

ثابت کنید : $x-y=a-b$.

۴۶۸. به‌فرض آنکه عددهای a ، b ، c ، x و y حقیقی باشند طوری‌که .

$$x=\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots$$

$$y=\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{c+}\cdots$$

ثابت کنید : $x-y=\dfrac{a-b}{1+ab}$

۴۶۹. اگر a_i عددی حقیقی باشد و داشته باشیم ــ

$$x=\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots$$

$$y=\frac{1}{2a_1+}\frac{1}{2a_2+}\frac{1}{2a_1+}\frac{1}{2a_2+}\cdots$$

$$z=\frac{1}{3a_1+}\frac{1}{3a_2+}\frac{1}{3a_1+}\frac{1}{3a_2+}\cdots$$

ثابت کنید : $x(y^2-z^2)+2y(z^2-x^2)+3z(x^2-y^2)=0$

۴۷۰. اگر r عددی طبیعی و $\frac{P_r}{Q_r}$ تقارب rام کسر زیر باشد :

$$\frac{a}{b+}\frac{a}{b+}\frac{a}{b+}\cdots$$

ثابت کنید $P_{n+1}=aQ_n$ (n عددی طبیعی است).

۴۷۱. اگر a_i و n عددهایی حقیقی باشند ، ثابت کنید :

$$na_1+\frac{1}{na_2+}\frac{1}{na_3+}\frac{1}{na_4+}\cdots \equiv$$

$$\equiv n\left(a_1+\frac{1}{n^2a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{n^2a_4+}\cdots\right)$$

۴۷۲. تقارب nام کسر مسلسل زیر را بدست آورید:

$$\frac{1}{2+}\frac{1\times 3}{4+}\frac{3\times 5}{4+}\frac{5\times 7}{4+}\cdots$$

۴۷۳. تقارب nام کسر مسلسل متناوب زیر را بایك عنصر برگشتی بدست آورید:

$$a+\frac{b}{c+}\frac{b}{c+}\frac{b}{c+}\cdots$$

۴۷۴. تقارب nام کسر مسلسل متناوب زیر را بدست آورید:

$$1+\frac{3}{2+}\frac{3}{2+}\frac{3}{2+}\cdots$$

۴۷۵. $\sqrt{43}$ را به کسر مسلسل تبدیل کنید.

۴۷۶. $\sqrt{a^2+2a}$ را به کسر مسلسل تبدیل کنید (a عددی حقیقی است).

۴۷۷. ثابت کنید که هر رشته را می‌توان به‌صورت کسر مسلسل بیان کرد.

۴۷۸. مطلوب است محاسبهٔ مقدار:

$$S=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{2+}\frac{3}{3+}\frac{4}{4+}\cdots$$

۴۷۹. اگر $\frac{P_r}{Q_r}$ تقارب r ام $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ باشد، ثابت کنید:

$$P_3+P_5+\cdots+P_{2n-1}=P_{2n}-P_2$$ و

$$Q_3+Q_5+\cdots+Q_{2n-1}=Q_{2n}-Q_2$$

۴۸۰. اگر $\sqrt{N}$ به‌کسر مسلسل تبدیل شودو n تعداد خارج‌قسمتها درتناوب باشد ثابت کنید:

$$Q_{2n}=2P_nQ_n \quad \text{و} \quad P_{2n}=2P_n^2+(-1)^{n+1}$$

۴۸۱. اگر a_1 ، a_2 ، a_3 ، ... ، a_n به‌تصاعد توافقی باشند ، ثابت کنید:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cdots-\cfrac{1}{2-\cfrac{a_2}{a_1}}}}}.$$

۴۸۲. ثابت کنید حاصلضرب کسرهای مسلسل زیر مساوی ۱ — است:

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{a+\cdots}}}}$$

$$y=-d+\cfrac{1}{-c+\cfrac{1}{-b+\cfrac{1}{-a+\cfrac{1}{-d+\cdots}}}}$$

۴۸۳. اگر a عددی حقیقی و تابع $\varphi(x)$ بوسیلهٔ :

$$\varphi(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{a^2}{x(x+1)}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{a^3}{x(x+1)(x+2)}+\cdots$$

تعریف شده باشد ، ثابت کنید :

$$\frac{a\varphi(x+1)}{x\varphi(x)}=\cfrac{a}{x+\cfrac{a}{x+1+\cfrac{a}{x+2+\cdots}}}.$$

۱۰

تقارن در جبر

بسیاری ازمسأله‌های‌جبر، باتوجه به تقارن عبارتهای جبری، با سادگی بیشتری حل می‌شوند. ولی درچند صفحه نمی‌توان از عهدهٔ بحث کامل دربارهٔ این مبحث جالب ومهم جبر برآمد.

باوجود این «کاچی بهتر از هیچی است»

کسانی‌که علاقمند به بحث وسیع‌تر دراین باره هستند می‌توانند ازکتاب مستقل «تقارن در جبر» استفاده‌کنند.

۱. تعریف

چندجمله‌ای که نسبت به x و y وضع مشابهی داشته باشد، **چندجمله‌ای متقارن** نسبت به x و y نامیده می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، عبارتی را نسبت به x و y متقارن گوییم که با تبدیل x به y و y به x تغییر نکند. مثلاعبارت x^2y+xy^2 نسبت به x و y متقارن است، درحالی‌که عبارت x^3-y نسبت به این مجهولها متقارن نیست، زیرا با تبدیل x به y و y به x به چند جمله‌ای y^3-x تبدیل می‌شود که باچندجمله‌ای اصلی‌یکی نیست.

$x+y$ و xy ساده‌ترین عبارتهای متقارن نسبت به x و y هستند. به مناسبت اهمیت این دو عبارت معمولا آنها را با علامتهای $x+y=\sigma_1$ و $xy=\sigma_2$ نشان می‌دهیم.

بطورکلی عبارتی را نسبت به n مجهول x، y، z، t، ... متقارن گوییم که با تبدیل هردو مجهول دلخواه آن به یکدیگر تغییر نکند. مثلا عبارت $x^2+y^2+z^2$ نسبت‌به x، y، z وعبارت $xy+xz+xt+yz+yt+zt$ نسبت به x، y، z، t متقارن است. درحالی‌که عبارت $xz+yt$ نسبت به این مجهولها متقارن نیست[1].

۲. مجموع توانهای متشابه

اگر $x^n+y^n=S_n$ فرض کنیم، یعنی $S_1=x+y$، $S_2=x^2+y^2$، ...، S_1، S_2، S_3، ... را می‌توان به‌سادگی برحسب σ_1 و σ_2 بدست‌آورد:

۱ـ عبارت $xz+yt$ نسبت به xوyوzوt یك عبارت دوری است، یعنی با تبدیل x به yوy به zوz به tوt به x تغییر نمی‌کند، ولی متقارن نیست.

هر عبارت متقارنی دوری هست ولی یك عبارت دوری ممکن است متقارن باشد و ممکن است متقارن نباشد.

$$S_0 = x^0 + y^0 = 2$$
$$S_1 = x + y = \sigma_1$$
$$S_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$
$$S_3 = x^3 + y^3 = (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2)$$

ثابت می‌کنیم کـه هر مجموعی بـه شکل S_n را می‌توان به صورت چند جمله‌ای از σ_1 و σ_2 بیان کرد، داریم:

$$\sigma_1 S_{k-1} = (x+y)(x^{k-1} + y^{k-1}) =$$
$$= x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = S_k + \sigma_2 S_{k-2}$$

و از آنجا:
$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2}$$

با استفاده‌از این‌رابطه (که به **رابطهٔ کاهشی** ویا **رابطهٔ برگشتی** موسوم است)، می‌توان‌مقادیر S_4، S_5، ... را برحسب σ_1 و σ_2 محاسبه‌کرد، مثلا:

$$S_4 = \sigma_1 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot S_2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 \ ;$$
$$S_5 = \sigma_1 \cdot S_4 - \sigma_2 \cdot S_3 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 \ ; \ \dots$$

قضیهٔ فوق را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

هر عبارتی که نسبت به x و y متقارن‌باشد، برحسب σ_1 و σ_2 قابل بیان است.

برای اثبات‌این قضیه کافی است، جمله‌های متقارن به صورت ax^ky^l و ax^ly^k را دوبدو باهم در نظر بگیریم. اگر فرض کنیم $k<l$، می‌توان بین این دوجمله‌از $a\sigma_2^k = ax^ky^k$ عامل مشترک گرفت، دراین‌صورت درداخل پرانتز عبارتی به‌صورت $x^{l-k} + y^{l-k}$ به‌دست‌خواهد آمد که‌خود قابل‌بیان برحسب σ_1 و σ_2 است. مثلا:

$$2x^4y - 3x^3y^2 - 3x^2y^3 + 2xy^4 = (2x^4y + 2xy^4) +$$
$$+ (-3x^3y^2 - 3x^2y^3) = 2xy(x^3 + y^3) - 3x^2y^2(x+y) =$$
$$= 2\sigma_2 S_3 - 3\sigma_2^2 S_1 = 2\sigma_1^3\sigma_2 - 9\sigma_1\sigma_2^2$$

در مورد عبارتهایی که نسبت به سه مجهول x و y و z متقارن هستند، اگر فرض کنیم:

$$\begin{cases} \sigma_1 = x+y+z \;, \\ \sigma_2 = xy+xz+yz \;, \\ \sigma_3 = xyz \end{cases}$$

و $S_n = x^n+y^n+z^n$ بگیریم ، با توجه به رابطهٔ بر گشتی زیر (که به سادگی بدست می‌آید):

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \sigma_3 S_{k-3}$$

می‌توان مجموع توانهای متشابه x و y و z را بر حسب σ_1 ، σ_2 و σ_3 بدست آورد :

$$S_0 = 3 \;;$$
$$S_1 = \sigma_1 \;;$$
$$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_1 \;;$$
$$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \;;$$
$$S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 \;;$$
$$S_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 \;;$$
$$S_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 6\sigma_3^2 \;;$$

وهمچنین:
$$x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 \;;$$
$$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 \;;$$
$$x^3y+xy^3+x^3z+xz^3+y^3z+yz^3 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3 .$$

۳. حل دستگاهها

مثال ۱. مطلوب است حل دستگاه زیر:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2 = 4 \\ x+xy+y = 2 \end{cases}$$

حل. از آنجا که سمت چپ تساوی در هر یك از معادله‌ها نسبت به x و y متقارن است ، می‌توان دستگاه را بر حسب مجهولهای جدید σ_1 و σ_2 نوشت :

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=\sigma_1^2-\sigma_2$$
$$x+xy+y=\sigma_1+\sigma_2$$

و در نتیجه دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases}\sigma_1^2-\sigma_2=4\\ \sigma_1+\sigma_2=2\end{cases}$$

از جمع این معادله ها ، بـه معادلهٔ درجهٔ دوم $\sigma_1^2+\sigma_1-6=0$ می‌رسیم که دوجواب آن ۳ — و ۲ $=\sigma_1$ می‌باشد و به سادگی ۵ و ۰ $=\sigma_2$ بدست می‌آید . به‌این ترتیب دستگاه اصلی به دو دستگاه زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{cases}x+y=2\\ x\cdot y=0\end{cases}\quad ; \quad \begin{cases}x+y=-3\\ x\cdot y=5\end{cases}$$

که از حل آنها چهاردسته جواب زیر به‌دست می‌آید :

$$\begin{vmatrix}x_1=2\\ y_1=0\end{vmatrix}\; ; \;\begin{vmatrix}x_2=0\\ y_2=2\end{vmatrix}\; ; \;\begin{vmatrix}x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-11}}{2}\\ y_{3,4}=\dfrac{-3\mp\sqrt{-11}}{2}\end{vmatrix}$$

مثال۲. دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}x+y=5\\ x^5+y^5=275\end{cases}$$

حل. داریم :

$$x^5+y^5=S_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2$$

و دستگاه مفروض به دستگاه زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{cases}\sigma_1=5\\ \sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2=275\end{cases}$$

که اگر در معادلهٔ دوم بجای σ_1 عدد ۵ را قرار دهیم ، بـه معادلهٔ درجهٔ دوم $25\sigma_2^2-625\sigma_2+2850=0$ می‌رسیم که از آن جوابهای ۶ و ۱۹ $=\sigma_2$ بدست می‌آید و بنابـراین حل دستگاه مفروض منجر به حل دستگاههای زیر می‌شود :

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x \cdot y=19 \end{cases} ; \begin{cases} x+y=5 \\ x \cdot y=6 \end{cases}$$

که به سادگی قابل حل هستند .

انتخاب مجهولهای جدید σ_1 و σ_2 باعث می‌شود که درجهٔ معادله‌ها پایین بیاید (زیرا $\sigma_2=xy$ نسبت به مجهولهای x و y از درجهٔ دوم است) . مثلا در مثال فوق معادله از درجهٔ پنجم به معادله‌ای از درجهٔ دوم تبدیل می‌شود.

مثال۳. مطلوب‌است حل دستگاه زیر :

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ x^2+4y^2+9z^2=b^2 \\ x^3+8y^3-27z^3=a^3 \end{cases}$$

حل. فرض می‌کنیم :

$$x=u \ ; \ 2y=v \ ; \ -3z=w$$

در این صورت دستگاه معادله‌های مفروض به صورت زیر در می‌آید :

$$\begin{cases} u+v+w=a \ ; \\ u^2+v^2+w^2=b^2 \ ; \\ u^3+v^3+w^3=a^3 \end{cases}$$

حالا دستگاه را با مجهولهای جدید می‌نویسیم:

$$\begin{cases} u+v+w=\sigma_1 \ ; \\ uv+uw+vw=\sigma_2 \ ; \\ uvw=\sigma_3 \end{cases}$$

با توجه به رابطه‌هایی که در بند ۲ محاسبه کردیم، به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} \sigma_1=a \ ; \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=b^2 \ ; \\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=a^3 \end{cases}$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \\ \sigma_3 = \frac{1}{2}a\,(a^2 - b^2) \end{cases}$$

و بنابراین u و v و w ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم زیر هستند :

$$t^3 - at^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)t - \frac{1}{2}a(a^2 - b^2) = 0$$

سمت چپ این معادله را می‌توان تجزیه کرد:

$$(t - a)\left[\, t^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \,\right] = 0 \quad ;$$

$$t_1 = a \;\; ; \;\; t_2 = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ; \;\; t_3 = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$$

و از آنجا :

$$u = a \;\; ; \;\; v = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ; \;\; w = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$$

و یا پنج دسته جواب دیگر . در نتیجه جوابهای x و y و z چنین است :

$$1)\;\; x = a \;\; ; \;\; y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ; \;\; z = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ;$$

$$2)\;\; x = a \;\; ; \;\; y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ; \;\; z = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ;$$

$$3)\;\; x = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ; \;\; y = \frac{a}{2} \;\; ; \;\; z = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ;$$

$$4)\;\; x = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ; \;\; y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ; \;\; z = -\frac{a}{3} \;\; ;$$

$$5)\;\; x = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ; \;\; y = \frac{a}{2} \;\; ; \;\; z = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ;$$

$$6)\;\; x = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ; \;\; y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \;\; ; \;\; z = -\frac{a}{3}$$

۴. حل معادله‌های گنگ

از قضیهٔ مربوط بـه عبارتهای متقارن می‌توان برای حل معادله‌های گنگ هم استفاده کرد. مثلا معادلهٔ گنگ زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\sqrt[۴]{x}+\sqrt[۴]{۹۷-x}=۵$$

اگر فرض کنیم $\sqrt[۴]{x}=y$ و $\sqrt[۴]{۹۷-x}=z$ ، معادلهٔ مفروض به‌صورت $y+z=۵$ در می‌آید و ضمناً داریم :

$$y^۴+z^۴=x+(۹۷-x)=۹۷$$

در نتیجه حل معادلهٔ گنگ به حل دستگاه زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases} y+z=۵ \\ y^۴+z^۴=۹۷ \end{cases}$$

که اگر $\sigma_۱=y+z$ و $\sigma_۲=y\cdot z$ فرض کنیم، دستگاه مفروض به دستگاه زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases}\sigma_۱=۵ \\ \sigma_۱^۴-۴\sigma_۱^۲\sigma_۲+۲\sigma_۲^۲=۹۷\end{cases}$$

و از آنجا معادلهٔ درجهٔ دوم زیر برای $\sigma_۲$ بدست می‌آید:

$$۲\sigma_۲^۲-۱۰۰\sigma_۲+۵۲۸=۰$$

از حل این معادله $\sigma_۲=۶;۴۴$ به دست می‌آید ودر نتیجه مسأله منجر به حل دستگاههای سادهٔ زیر می‌شود :

$$\begin{cases} y+z=۵ \\ y\cdot z=۶ \end{cases};\quad \begin{cases} y+z=۵ \\ y\cdot z=۴۴ \end{cases}$$

اولین دستگاه ، جوابهای:

$$y_۱=۲\ ;\ z_۱=۳ \text{ و } y_۲=۳\ ;\ z_۲=۲$$

را بدست می‌دهد و چون $y=\sqrt[۴]{x}$ بود ، برای x جوابهای $x_۱=۱۶$ و $x_۲=۸$ بدست می‌آید و به سادگی روشن می‌شود کـه جوابهای دستگاه دوم

عددهای مختلط هستند.

۵. تجزیه عبارتهای جبری

از قضیهٔ مربوط به‌چندجمله‌ایهای متقارن، برای تجزیهٔ عبارتهای‌جبری هم می‌توان استفاده کرد.

مثال۱. عبارت زیر را به صورت ضرب عوامل اول تجزیه کنید:

$$f(x,y)=10x^4-27x^3y-110x^2y^2-27xy^3+10y^4$$

حل. داریم:

$$f(x,y)=10(x^4+y^4)-27xy(x^2+y^2)-110x^2y^2=$$
$$=10S_4-27\sigma_2S_2-110\sigma_2^2$$

که با استفاده از مقادیر S_4 و S_2 به سادگی خواهیم داشت:

$$f(x,y)=10\sigma_1^4-67\sigma_1^2\sigma_2-36\sigma_2^2$$

این‌عبارت نسبت‌به σ_2 از درجهٔ‌دوم ودارای جوابهای $\frac{5}{36}\sigma_1^2$ و $-2\sigma_1^2$ می‌باشد، بنابراین به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$f(x,y)=-36(\sigma_2+2\sigma_1^2)(\sigma_2-\frac{5}{36}\sigma_1^2)=$$
$$=(2\sigma_1^2+\sigma_2)(5\sigma_1^2-36\sigma_2)$$

که اگر بجای σ_1 و σ_2 مقادیرشان‌را قرار دهیم، چنین خواهیم داشت:

$$f(x,y)=[2(x+y)^2+xy][5(x+y)^2-36xy]=$$
$$=(2x^2+5xy+2y^2)(5x^2-36xy+5y^2)$$

هر یك از پرانتزهای اخیرهم قابل تجزیه‌هستند و $f(x,y)$ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$f(x,y)=(2x+y)(x+2y)(x-5y)(5x-y)$$

البته اگر پس‌ازتبدیل $f(x,y)$ به عبارتی‌برحسب σ_1 و σ_2 چندجمله‌ای درجهٔ دومی‌بدست آیدکه دارای ریشه‌های موهومی باشد، روش بالا نمی‌تواند برای تجزیهٔ عبارت مورد استفاده قرارگیرد. در این مورد برای تبدیل

$f(x,y)$ به صورت ضرب عبارتهایی که دارای ضریبهای حقیقی باشند، ازروش دیگری استفاده می‌کنیم.

این روش براین اساس قرار دارد که یك عبارت درجهٔ چهارم متقارن می‌تواند به صورت ضرب دو عبارت تجزیه شود که هریك از دو عبارت نسبت به x و y متقارن نباشند ولی با تبدیل x به y و y به x هر یك از دو عامل به عامل دیگر تبدیل شود. به عبارت دیگر هر عبارت درجهٔ چهارم متقارن نسبت به xوy را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x,y)=(Ax^2+Bxy+Cy^2)(Cx^2+Bxy+Ay^2)$$

که در آن AوEوC ضریبهای نامعینی هستند. در حقیقت از روش ضریبهای نامعین[1] برای عبارتهای متقارن استفاده می‌کنیم.

به عنوان نمونه به مثال زیر توجه کنید:

مثال۴. عبارت زیر را به صورت ضرب عوامل تجزیه کنید:

$$f(x,y)=2x^4+3x^3y+6x^2y^2+3xy^3+2y^4$$

حل. $f(x,y)$ نسبت به xوy متقارن است و می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$f(x,y)=(Ax^2+Bxy+Cy^2)(Cx^2+Bxy+Ay^2)$$

برای محاسبهٔ ضریبهای AوBوC توجه می‌کنیم که این رابطه باید به‌ازای همهٔمقادیر xوy برقرارباشد، بنابراین می‌توان مقادیر عددی‌دلخواهی بجای xوy قرار داد. مثلا فرض می‌کنیم $x=y=1$، بدست می‌آید:

$$(A+B+C)^2=16 \implies A+B+C=\pm 4$$

متذکر می‌شویم که ضریبهای A و B و C با تقریب یك علامت بدست خواهندآمد، زیرا اگر تمام ضریبهای AوBوC را تغییرعلامت‌دهیم، حاصل عبارت تغییر نمی‌کند. بنابراین بدون اینکه به عمومی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود می‌توان $A+B+C=4$ فرض‌کرد. حالا اگر $x=y=-1$ بگیریم به تساوی زیر می‌رسیم:

$$(A-B+C)^2=4 \implies A-B+C=\pm 2$$

و بالاخره اگر $x=0$ و $y=1$ فرض کنیم $AC=2$ می‌شود. به

۱ــ به‌بخش تجزیهٔ عبارتهای جبری مراجعه شود.

این ترتیب برای محاسبهٔ ضریبها باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-B+C=\pm 2 \\ AC=2 \end{cases}$$

اگر در معادلهٔ دوم دستگاه، علامت‌مثبت را اختیار کنیم، از دو معادلهٔ اول $A+C=3$ و $B=1$ بدست می‌آید که با استفاده از معادلهٔ سوم خواهیم داشت:

$$A=1 \ ; \ C=2 \quad \text{یا} \quad A=2 \ ; \ C=1$$

و در نتیجه تجزیهٔ عبارت مفروض چنین می‌شود:

$$f(x,y)=(x^2+xy+2y^2)(2x^2+xy+y^2)$$

که اگر پرانتزهای سمت راست تساوی را باز کنیم، صحت تساوی محقق می‌شود.

اگر سمت راست معادلهٔ دوم دستگاه را با علامت منفی اختیار کنیم، دستگاهی با ریشه‌های‌موهومی بدست می‌آید وبنابراین در این‌حالت نمی‌توان عبارت را به صورت ضرب عوامل حقیقی تبدیل کرد.

مثال۳. عبارت زیر را ساده‌کنید:

$$a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+$$
$$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

حل. عبارت مفروض را به‌ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$a(\sigma_1-2a)^2+b(\sigma_1-2b)^2+c(\sigma_1-2c)^2+$$
$$+(\sigma_1-2a)(\sigma_1-2b)(\sigma_1-2c)=$$
$$=(a+b+c)\sigma_1^2-4\sigma_1(a^2+b^2+c^2)+$$
$$+4(a^3+b^3+c^3)+\sigma_1^3-2\sigma_1^2(a+b+c)+$$
$$+4\sigma_1(ab+ac+bc)-8abc=$$
$$=\sigma_1^3-4\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)+4(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)+$$
$$+\sigma_1^3-2\sigma_1^3+4\sigma_1\sigma_2-8\sigma_3=4\sigma_3=4abc$$

تمرینها

۴۸۴. معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+3x-10=0$ مفروض است ، معادلهٔ درجهٔ دوم جدیدی تشکیل دهید که:

اولا ریشه‌های آن توان چهارم ریشه‌های این معادله باشد.

ثانیاً ریشه‌های آن $\frac{1}{x_1^3}$ و $\frac{1}{x_2^3}$ باشد.

ثالثاً ریشه‌های آن $x_1^2+x_2^4, x_1^4+x_2^2$ باشد.

دستگاههای زیر را حل کنید:

۴۸۵. $\begin{cases} xy=15 \\ x+y+x^2+y^2=42 \end{cases}$

۴۸۶. $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \end{cases}$

۴۸۷. $\begin{cases} xy(x+y)=20 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{4} \end{cases}$

۴۸۸. $\begin{cases} \frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\frac{31}{7} \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$

۴۸۹. $\begin{cases} x^3+y^3+xy(x+y)=13 \\ x^2y^2(x^2+y^2)=468 \end{cases}$

۴۹۰. $\begin{cases} x^3-y^3=5 \\ xy^2-x^2y=1 \end{cases}$

۴۹۱. $\begin{cases} 3xyz-x^3-y^3-z^3=b^3 \\ x+y+z=2b \\ x^2+y^2-z^2=b^2 \end{cases}$

۴۹۲. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\frac{73}{8} \\ xy+xz+yz=x+y+z \\ xyz=1 \end{cases}$

معادله‌های زیر را حل کنید:

۴۹۳. $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=1$

۴۹۴. $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$

۴۹۵. $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$

۴۹۶. $\sqrt[7]{a-x}+\sqrt[7]{x}=\sqrt[7]{a}$

۴۹۷. $(z^2+1)^7-(z^2-1)^7=2^7$

۴۹۸. اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+px+q=0$ را α و β فرض کنیم، مطلوب است محاسبهٔ $\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}$

۴۹۹. ثابت کنید که اگر داشته باشیم $a+b\geqslant c$ خواهیم داشت:

$$a^2+b^2\geqslant\frac{c^2}{2};\quad a^4+b^4\geqslant\frac{c^4}{8}\quad;\quad a^8+b^8\geqslant\frac{c^8}{128}$$

این عبارتها را به صورت ضرب عوامل تجزیه کنید:

۵۰۰. $2x^4+7x^3y+9x^2y^2+7xy^3+2y^4$

۵۰۱. $3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4$

۵۰۲. $6x^4-11x^3y-18x^2y^2-11xy^3+6y^4$

۵۰۳. کسر $\dfrac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^5-x^5-y^5}$ را ساده کنید:

۵۰۴. عبارت $2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4$ را به صورت ضرب‌عوامل درجهٔ اول تجزیه کنید.

۵۰۵. ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1$$

خواهیم داشت: $xyz=0$

۵۰۶. ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases}x+y+z=u+v+w\\x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2\\x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+w^3\end{cases}$$

به ازای هر مقدار صحیح n خواهیم داشت:

$$x^n+y^n+z^n=u^n+v^n+w^n$$

۵۰۷. صحت اتحاد زیر را تحقیق‌کنید:

$$(a-b)^6+(b-c)^6+(c-a)^6-9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=$$
$$=2(a-b)^3(a-c)^3+2(b-c)^3(b-a)^3+2(c-a)^3(c-b)^3$$

۵۰۸. مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}}$$

۵۰۹. ریشه‌های صحیح معادلهٔ زیر را بدست آورید :

$$x+y=x^2-xy+y^2$$

۵۱۰. ثابت کنید که اگر $a+b+c=0$ باشد ، داریم :

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\times\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

۵۱۱. ریشه‌های صحیح معادلهٔ زیر را بدست آورید :

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3$$

١١

محاسبة بعضى مجموعها

محاسبهٔ مجموع n جمله از یك تصاعد حسابی و یا هندسی برای هر دانش‌آموز دبیرستانی روشن است ، ولی در بسیاری موارد، وبخصوص در جبر و مثلثات ، بـه مجموعهایی برمی‌خوریم کـه استفاده از روش تصاعدها برای حل آنها کافی نیست .

در این بخش کوشش شده است تنها از روشهایی صحبت شود که اولا با ریاضیات مقدماتی قابل بیان باشد ، ثانیاً درریاضیات متوسطه مورد استفاده داشته باشد . و در این زمینه ، جبر و مثلثات هر دو مورد نظر بوده است .

باید به‌خاطر داشت که بحث دربارهٔ مجموعها ، درحالتهای کلی‌تر ، به مبحثهایی برمی‌خورد که خارج ازبرنامهٔ متوسطه است وطبیعی است که جای بحث آنها در اینجا نیست .

۱. محاسبهٔ مجموع توانهای متشابه عددهای صحیح متوالی

می‌خواهیم دربارهٔ مجموع:

$$S_k = ۱^k + ۲^k + ۳^k + \cdots + n^k$$

مطالعه کنیم و طریقه‌های محاسبهٔ آنرا بررسی نماییم.

در حالت $k = ۱$ ، مجموع مفروض به مجموع n جملهٔ متوالی از یك تصاعد حسابی تبدیل می‌شود که جملهٔ اول آن ۱ ، قـدر نسبت آن ۱ و تعداد جمله‌هایش n می‌باشد و بنابراین خواهیم داشت :

$$S_۱ = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{۱}{۲} n(n+۱)$$

ولی این مجموع را به دو طریق زیر هم می‌توان بدست آورد :

روش اول. اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(x+۱)^۲ = x^۲ + ۲x + ۱$$

این اتحاد به ازای همهٔ مقادیر x برقرار است ، اگر x را به‌ترتیب مساوی عددهای صحیح متوالی $n, \ldots, ۲, ۱, ۰$ بگیریم ، بدست می‌آید:

$$+\left|\begin{array}{l} ۱^۲ = ۱ \\ ۲^۲ = ۱^۲ + ۲ \times ۱ + ۱ \\ ۳^۲ = ۲^۲ + ۲ \times ۲ + ۱ \\ ۴^۲ = ۳^۲ + ۲ \times ۳ + ۱ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n+۱)^۲ = n^۲ + ۲n + ۱ \end{array}\right.$$

$$(n+۱)^۲ = ۲(۱+۲+۳+\cdots+n) + n + ۱$$

و یا :

$$۲S_۱ = (n+۱)^۲ - (n+۱)$$

$$S_۱ = \frac{۱}{۲} n(n+۱)$$

روش دوم. مسأله . تابع $f(x)$ را از درجهٔ دوم چنان پیدا کنید که اولا

$f(0)=0$ و ثانیاً $f(x)-f(x-1)\equiv x$ باشد و ثابت کنید در این‌صورت $f(n)$ مجموع n عدد صحیح متوالی است.

حل. با توجه به اینکه $f(x)$ از درجهٔ دوم و $f(0)=0$ است داریم:

$$f(x)=ax^2+bx$$

و از آنجا :

$$f(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)$$

و بنابراین طبق فرض مسأله باید داشته باشیم :

$$(ax^2+bx)-[a(x-1)^2+b(x-1)]\equiv x$$

ویا :

$$2ax+(b-a)\equiv x$$

و از آنجا با کمك دستگاه زیر مقادیر a و b بدست می‌آید :

$$\begin{cases} 2a=1 \\ b-a=0 \end{cases} \Longrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

و بنابراین :

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x(x+1)$$

اکنون اگر در اتحاد $f(x)-f(x-1)\equiv x$ به ترتیب مقادیر ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، n را بجای x قرار دهیم ، خواهیم داشت:

$$+\left|\begin{array}{l} f(1)-f(0)=1 \\ f(2)-f(1)=2 \\ f(3)-f(2)=3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(n)-f(n-1)=n \end{array}\right.$$

$$\overline{f(n)-f(0)=1+2+3+\cdots+n}$$

و چون $f(0)=0$ است ، خواهیم داشت :

$$S_1=f(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

* * *

روشهایی را که برای محاسبهٔ S_1 بکار بردیم ، می‌توان عمومیت داد و برای محاسبهٔ S_2 ، S_3 و ... نیز مورد استفاده قرار داد .

محاسبهٔ S_2

روش اول. از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم :

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$$

اگر n و ... و ۲ و ۱ و $x=0$ فرض‌کنیم ، خواهیم داشت :

$$+\left|\begin{array}{l} 1^3=1 \\ 2^3=1^3+3\times1^2+3\times1+1 \\ 3^3=2^3+3\times2^2+3\times2+1 \\ 4^3=3^3+3\times3^2+3\times3+1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1 \\ \hline (n+1)^3=3S_2+3S_1+(n+1) \end{array}\right.$$

که اگر $S_1=\frac{1}{2}n(n+1)$ قرار دهیم، بدست می‌آید :

$$S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

روش دوم. مسأله. تابع $f(x)$ از درجهٔ سوم را باشرطهای $f(0)=0$ و $f(x)-f(x-1)\equiv x^2$ پیداکنید وثابت‌کنیدکه $f(n)$ برابراست‌بامجموع مربعهای n عدد صحیح متوالی.

حل. تابع $f(x)$ با توجه به اینکه $f(0)=0$ است به‌این صورت‌است:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx$$

و بنابراین با توجه به شرط دوم مسأله باید داشته باشیم:

$$(ax^3+bx^2+cx)-[a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)]\equiv x^2$$

و از آنجا دستگاه زیر برای محاسبهٔ مقادیر a و b و c بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{r} 3a=1 \\ 3a-2b=0 \\ a-b+c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{6} \end{array}\right.$$

و بنابراین:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x=\frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$$

از طرف دیگر با توجه به اتحاد $f(x)-f(x-1)\equiv x^2$ به‌ترتیب داریم

$$+\left|\begin{array}{l} f(1)-f(0)=1^2 \\ f(2)-f(1)=2^2 \\ f(3)-f(2)=3^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(n)-f(n-1)=n^2 \end{array}\right.$$

$$\overline{f(n)-f(0)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$$

واز آنجا:

$$S_2=f(n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

روش دوم یك برتری نسبت به روش اول دارد و آن‌این‌استکه باروش اول محاسبهٔ S_2 منجر به محاسبهٔ S_1 می‌شود درحالیکه با روش دوم مقدار S_2 مستقیماً بدست‌می‌آید. با روش‌دوم می‌توان مثلابطور مستقیم مقدار S_5 رابدست آورد ، در حالیکه برای محاسبهٔ S_5 باروش اول باید قبلا S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 را محاسبه‌کرد.

اکنون مسأله را باکمك روش دوم درحالت‌کلی مطرح می‌کنیم.

مسأله. ثابت کنیدکه رابطهٔ S_k دارای شرطهای زیر است:

اولا نسبت به n چندجمله‌ای است از درجهٔ $k+1$.

ثانیاً این‌چندجمله‌ای فاقد مقدار ثابت است.

ثالثاً سه ضریب اولیهٔ این‌چندجمله‌ای به‌ترتیب عبارتست از: $\frac{1}{1+k}$ ، $\frac{1}{2}$ و $\frac{k}{12}$.

حل. تابع $f(x)$ ازدرجهٔ $k+1$ راطوری‌تعیین می‌کنیم که درشرطهای $f(0)=0$ و $f(x)-f(x-1)\equiv x^k$ صدق کند.

به‌سادگی‌می‌توان ثابت‌کردکه‌دراین‌صورت‌تابع $f(n)$ همان S_kخواهد بود . در اتحاد:

$$f(x)-f(x-۱)\equiv x^k$$

به جای x به‌ترتیب مقادیر ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... و n را قرار می‌دهیم:

$$+\left|\begin{array}{l} f(۱)-f(۰)=۱^k \\ f(۲)-f(۱)=۲^k \\ f(۳)-f(۲)=۳^k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(n)-f(n-۱)=n^k \end{array}\right.$$

$$f(n)-f(۰)=۱^k+۲^k+۳^k+\dots+n^k$$

در نتیجه با توجه به شرط $f(۰)=۰$ خواهیم داشت :

$$S_k=f(n)$$

حالا $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم . $f(x)$ از درجهٔ $k+۱$ است:

$$f(x)=ax^{k+۱}+bx^k+cx^{k-۱}+\dots+lx \qquad (۱)$$

(با توجه به شرط $f(۰)=۰$ برای $f(x)$ مقدار ثابت منظورنکردیم)

$$f(x-۱)=a(x-۱)^{k+۱}+b(x-۱)^k+ \qquad (۲)$$
$$+c(x-۱)^{k-۱}+\dots+l(x-۱)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) اتحاد $f(x)-f(x-۱)\equiv x^k$ به صورت زیر در می‌آید :

$$a(k+۱)x^k+\left[-\frac{a}{۲}(k+۱)k+bk\right]x^{k-۱}+$$
$$\left[\frac{a}{۶}(k+۱)k(k-۱)-\frac{b}{۲}k(k-۱)+\right.$$
$$\left.+c(k-۱)\right]x^{k-۲}+\dots\equiv x^k$$

و دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a(k+۱)=۱ \\ -\frac{a}{۲}(k+۱)k+bk=۰ \\ \frac{a}{۶}(k+۱)k(k-۱)-\frac{b}{۲}k(k-۱)+c(k-۱)=۰ \end{cases}$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$a=\frac{1}{k+1} \text{ و } b=\frac{1}{2} \text{ و } c=\frac{k}{12}$$

یعنی خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{1}{k+1}x^{k+1}+\frac{1}{2}x^{k}+\frac{k}{12}x^{k-1}+dx^{k-2}+\dots+lx$$

باتوجه به‌آنچه گفتیم می‌توان S_k را در هر مورد مشخص محاسبه کرد.

محاسبهٔ S_3 $(k=3)$

$$S_3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2+An$$

کافی است مقدار A را محاسبه کنیم. در اتحاد:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3\equiv\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2+An$$

$n=1$ می‌گیریم:

$$1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+A \implies A=0$$

و بنابراین:

$$S_3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

محاسبه S_4 $(k=4)$

$$S_4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3+An^2+Bn$$

در اتحاد:

$$1^4+2^4+3^4+\dots+n^4\equiv\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3+An^2+Bn$$

به‌ترتیب $n=1$ و $n=2$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} 1=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+A+B \\ 17=\frac{32}{5}+8+\frac{8}{3}+4A+2B \end{cases} \implies \left| \begin{array}{l} A=0 \\ B=-\frac{1}{30} \end{array} \right.$$

و بنابراین :

$$S_۴=\frac{۱}{۵}n^۵+\frac{۱}{۲}n^۴+\frac{۱}{۳}n^۳-\frac{۱}{۳۰}n=$$
$$=\frac{۱}{۳۰}n(n+۱)(۲n+۱)(۳n^۲+۳n-۱)$$

۲. مجموعهایی که باکمك S_k بدست می‌آیند

هر مجموعی که از جملهٔ pام به بعد دارای جملهٔ عمومی به‌صورت یك چند جمله‌ای برحسب n باشد ، باکمك S_k قابل محاسبه‌است.

مثال۱. مطلوب است محاسبهٔ مجموع زیر :

$$A=۱\times۲\times۳+۲\times۳\times۴+۳\times۴\times۵+\cdots+$$
$$+n(n+۱)(n+۲)$$

حل. جملهٔعمومی‌یعنی $n(n+۱)(n+۲)$ را به‌صورت چند جمله‌ای می‌نویسیم.

$$n(n+۱)(n+۲)=n^۳+۳n^۲+۲n \qquad (۱)$$

حالا در دوطرف اتحاد (۱) به ترتیب بجای n عددهای صحیح متوالی را قرار می‌دهیم و با هم جمع می‌کنیم:

$$+\left|\begin{array}{l} ۱\times۲\times۳=۱^۳+۳\times۱^۲+۲\times۱ \\ ۲\times۳\times۴=۲^۳+۳\times۲^۲+۲\times۲ \\ ۳\times۴\times۵=۳^۳+۳\times۳^۲+۲\times۳ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n(n+۱)(n+۲)=n^۳+۳n^۲+۲n \end{array}\right.$$
$$A=S_۳+۳S_۲+۲S_۱$$

و حالا اگر بجای $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ مقدارهایشان را قراردهیم، مقدار A بدست می‌آید :

$$A=\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}+۳\times\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}+۲\times\frac{n(n+۱)}{۲}$$

و یا پس از ساده کردن خواهیم داشت :

$$A=\frac{۱}{۴}n(n+۱)(n+۲)(n+۳)$$

مثال۲. اگر جملهٔ عمومی یك مجموع به صورت $u_n=n^2+n+2$ باشد ، مجموع n جملهٔ آنرا بدست آورید :

حل. بترتیب داریم:

$$+\left|\begin{array}{l} u_1=1^2+1+2 \\ u_2=2^2+2+2 \\ u_3=3^2+3+2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_n=n^2+n+2 \end{array}\right.$$
$$\overline{S=S_2+S_1+2n}$$

(مجموع $S=u_1+u_2+\dots+u_n$ فرض‌کردیم). از آنجا :

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}+2n$$

و یا پس از ساده‌کردن : $S=\frac{1}{3}n(n^2+9n+2)$

۳. مجموعهایی که جملهٔ عمومی آنها به صورت $f(n+\alpha)-f(n)$ باشد .

بررسی اینگونه مجموعها را با ذکر چند مثال روشن می‌کنیم.

مثال۱. مطلوب است محاسبهٔ مجموع زیر :

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

حل. جملهٔعمومی این مجموع به‌صورت $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

است‌که آنرا می‌توان چنین نوشت:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

که‌اگر $f(n)=\frac{1}{2}\sqrt{n}$ بگیریم‌جملهٔ عمومی‌به‌صورت:

$u^n=f(n+2)-f(n)$ است. اگر به‌جای n به‌ترتیب عددهای متوالی‌از صفر تا n را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$
+\left|\begin{array}{l}
u_{\circ}=\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}=\dfrac{۱}{۲}(\sqrt{۲}-\circ)\\[2ex]
u_{۱}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}+۱}=\dfrac{۱}{۲}(\sqrt{۳}-۱)\\[2ex]
u_{۲}=\dfrac{۱}{۲+\sqrt{۲}}=\dfrac{۱}{۲}(۲-\sqrt{۲})\\[2ex]
u_{۳}=\dfrac{۱}{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}=\dfrac{۱}{۲}\sqrt{۵}-\sqrt{۳})\\
\dotfill\\
u_n=\dfrac{۱}{\sqrt{n+۲}+\sqrt{n}}=\dfrac{۱}{۲}(\sqrt{n+۲}-\sqrt{n})
\end{array}\right.
$$

بعد از جمع این تساویها بایکدیگر بدست می‌آید:

$$\sigma=\frac{۱}{۲}(\sqrt{n+۲}+\sqrt{n+۱}-۱)$$

مثال۴. اولا اگر جملهٔ عمومی یک مجموع به‌صورت $u_n=\log\left(۱-\frac{۱}{n^{۲}}\right)$ باشد ، مجموع n جملهٔ آنرا (به ازای n , ...و۳ , ۲ = n) بدست آورید. ثانیاً حد مجموع این جمله‌ها را وقتی که n به‌سمت بی‌نهایت میل کند بدست آورید.

حل. اولا جملهٔ عمومی را می‌توان چنین نوشت :

$$u_n=\log\frac{n^{۲}-۱}{n^{۲}}=\log\frac{\dfrac{n+۱}{n}}{\dfrac{n}{n-۱}}=\log\frac{n+۱}{n}-\log\frac{n}{n-۱}$$

و بنابراین جملهٔ عمومی به‌صورت $f(n+۱)-f(n)$ است . اگر بجای n مقادیر متوالی ۲ ، ۳ ، ۴ ، ... و n را قرار دهیم:

$$+\left|\begin{array}{l} u_2 = \log\frac{3}{2} - \log 2 \\ u_3 = \log\frac{4}{3} - \log\frac{3}{2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n = \log\frac{n+1}{n} - \log\frac{n}{n-1} \end{array}\right.$$

$$\sigma_n = \log\frac{n+1}{n} - \log 2$$

ثانیاً به سادگی داریم:

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{n+1}{n} - \log 2\right) = \log 1 - \log 2 = -\log 2$$

مثال۳. حد مجموع زیررا وقتی که n بسمت بی‌نهایت میل کندپیدا کنید:

$$\sigma_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

حل. جملهٔعمومی‌این‌مجموع، یعنی $\frac{1}{n(n+1)}$ ، را می‌توان چنین‌نوشت:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

اگر در دو طرف اتحاد $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ به ترتیب بجای n مقادیرصحیح متوالی ۱ تا n را قرار دهیمو با هم جمع کنیم، بدست می‌آید:

$$\sigma_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

و بنابراین داریم:

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

مثال۴. مجموع زیر مفروض است:

$$A_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + n_n$$

کـه در آن $u_n=\dfrac{4n}{n^4+2n^2+9}$ می‌باشد ، A_n را محاسبه کنید و مقدار $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ را بدست آورید .

حل. ابتدا مخرج کسر u_n را تجزیه می‌کنیم :

$$n^4+2n^2+9=(n^2+3)^2-4n^2=$$
$$=(n^2+2n+3)(n^2-2n+3)$$

و حالا کوشش می‌کنیم کسر u_n را به دو کسر ساده‌تر تبدیل کنیم ، فرض می‌کنیم:

$$\frac{4n}{n^4+2n^2+9}=\frac{4n}{(n^2+2n+3)(n^2-2n+3)}=$$
$$=\frac{a}{n^2+2n+3}+\frac{b}{n^2-2n+3}$$

در اتحاد فوق a و b را محاسبه می‌کنیم ، داریم:

$$\frac{a}{n^2+2n+3}+\frac{b}{n^2-2n+3}=$$
$$=\frac{(a+b)n^2+2(b-a)n+3(a+b)}{n^4+2n^2+9}$$

و باید داشته باشیم:

$$4n\equiv(a+b)n^2+2(b-a)n+3(a+b)$$

و از آنجا :

$$\begin{cases}a+b=0\\ b-a=2\end{cases}\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}a=-1\\ b=1\end{array}\right.$$

یعنی داریم:

$$u_n=\frac{4n}{n^4+2n^2+9}=\frac{1}{(n-1)^2+2}-\frac{1}{(n+1)^2+2}$$

همانطور که می‌بینیم u_n به صورت $f(n)-f(n+2)$ می‌باشد و از آنجا به سادگی بدست می‌آید:

$$A_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n^2+2}-\frac{1}{(n+1)^2+2}$$

و روشن است که:

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۶}$$

مثال۵. محاسبهٔ $\Sigma \sin n\alpha$ و $\Sigma \cos n\alpha$[1] .

می‌خواهیم مجموعهای زیر را محاسبه‌کنیم.

$$۱)\qquad \sum_{k=۱}^{n} \sin kx=\sin x+\sin ۲x+\sin ۳x+\cdots+\sin nx$$

$$۲)\qquad \sum_{k=۱}^{n} \cos kx=\cos x+\cos ۲x+\cos ۳x+\cdots+\cos nx$$

حل. جملهٔ عمومی $\sin nx$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\sin nx=\frac{۱}{۲\sin\frac{x}{۲}}\cdot ۲\sin nx \sin\frac{x}{۲}=$$

$$=\frac{۱}{۲\sin\frac{x}{۲}}\left[\cos\left(n-\frac{۱}{۲}\right)x-\cos\left(n+\frac{۱}{۲}\right)x\right]$$

که اگر بجای n به‌ترتیب عددهای صحیح ۱ تا n قرار دهیم و باهم جمع کنیم، می‌شود:

$$\sum_{k=۱}^{n} \sin kx=\frac{۱}{۲\sin\frac{x}{۲}}\left[\cos\frac{x}{۲}-\cos\left(n+\frac{۱}{۲}\right)x\right]=\frac{\sin\frac{n+۱}{۲}x\sin\frac{n}{۲}x}{\sin\frac{x}{۲}}$$

و به‌همین ترتیب بدست می‌آید:

$$\sum_{k=۱}^{n} \cos kx=\frac{۱}{۲\sin\frac{x}{۲}}\left[\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)x-\sin\frac{x}{۲}\right]=$$

$$=\frac{\sin\frac{n}{۲}x\cos\frac{n+۱}{۲}x}{\sin\frac{x}{۲}}$$

۱ــ منظور از $\sum_{n=۱}^{n} f(n)$ یعنی مجموع $f(۱)+f(۲)+\cdots+f(n)$.

۴. استفاده از مشتق و تابع اولیه

مجموع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\dots+nx^{n-1} \qquad (1)$$

این مجموع را می‌توان به‌این طریق محاسبه کرد. ابتدا دوطرف رابطهٔ (۱) را در x ضرب می‌کنیم:

$$xf(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4+\dots+(n-1)x^{n-1}+nx^n \qquad (2)$$

و رابطهٔ (۲) را از رابطهٔ (۱) کم می‌کنیم، می‌شود:

$$f(x)-xf(x)=1+x+x^2+x^3+\dots+x^{n-1}-nx^n \quad (3)$$

n جملهٔ‌اول‌مجموع (۳) تشکیل تصاعد هندسی‌می‌دهندو بنابراین‌داریم:

$$(1-x)f(x)=\frac{x^n-1}{x-1}-nx^n=\frac{-nx^{n+1}+(1+n)x^n-1}{x-1}$$

و از آنجا:

$$f(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

و همچنین می‌توان مجموع (۱) را به طریق زیرهم محاسبه کرد. اگر تابع اولیهٔ $f(x)$ را $F(x)$ بنامیم، داریم:

$$F(x)=x+x^2+x^3+\dots+x^n+c=\frac{x(x^n-1)}{x-1}+c$$

و حالابرای محاسبهٔ $f(x)$ باید مشتق $F(x)$ را بدست آورد:

$$F'(x)=f(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

مثال۲. مطلوب‌است محاسبهٔ مجموع زیر:

$$\varphi(x)=\sin x+3\sin 3x+5\sin 5x+\dots+(2n-1)\sin(2n-1)x$$

اگر تابع اولیهٔ $\varphi(x)$ را $\Phi(x)$ فرض کنیم، داریم:

$$-\Phi(x)=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\dots+\cos(2n-1)x+c$$

و با توجه به اتحاد:

$$\cos(2n-1)x=\frac{1}{2\sin x}[\sin 2nx-\sin 2(n-1)x]$$

خواهیم‌داشت:

$$\Phi(x) = -\frac{\sin 2nx}{2\sin x} + c$$

و چون $\varphi(x)$ مشتق $\Phi(x)$ است ، به سادگی بدست می‌آید:

$$\varphi(x) = \frac{\sin 2nx\cos x - 2n\cos 2nx\sin x}{2\sin^2 x}$$

مثال۳. مجموع بی‌نهایت جملهٔ زیر را با شرط $|x| < 1$ بدست آورید و از آنجا راهی برای معرفی π به‌صورت یك مجموع پیدا کنید:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \qquad (1)$$

حل. این مجموع عبارت‌است از مجموع بی‌نهایت جمله از یك تصاعد هندسی نزولی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $-x^2$ ، و بنابراین دارای حدی است‌مساوی $\frac{1}{1+x^2}$.

از طرف دیگر می‌دانیم $\frac{1}{1+x^2}$ مشتق $\operatorname{Arctg} x$ استوبنابراین‌داریم:

$$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \dots \qquad (2)$$

[از عبارت (۱) نسبت به x تابع اولیه گرفته‌ایم].

اکنون اگر در اتحاد (۲) ، $x = 1$ فرض‌کنیم ، بدست می‌آید:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

و یا :

$$\pi = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots\right]$$

تمرینها

مطلوب‌است محاسبهٔ مجموعهای زیر :

۵۱۴. $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \dots + n(n+1)$

۵۱۳. $۳+۳۳+۳۳۳+\cdots+\underbrace{۳۳\cdots۳}_{n \text{ رقم}}$

۵۱۴. $\frac{۱}{۱\times۲\times۳}+\frac{۱}{۲\times۳\times۴}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)(n+۲)}$

۵۱۵. $\sin^۲ x+\sin^۲ ۲x+\sin^۲ ۳x+\cdots+\sin^۲ nx$

۵۱۶. $\cos^۳ x+\cos^۳ ۲x+\cos^۳ ۳x+\cdots+\cos^۳ nx$

۵۱۷. $\frac{۱}{۲^۲-۱}+\frac{۱}{۳^۲-۱}+\frac{۱}{۴^۲-۱}+\cdots+\frac{۱}{n^۲-۱}$

۵۱۸. $\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۳۶}+\frac{۷}{۱۴۴}+\cdots+\frac{۲n+۱}{n^۲(n+۱)^۲}$

۵۱۹. $k!+k\,k!+(k+۱)(k+۱)!+\cdots+(n-۱)(n-۱)!$

۵۲۰. $\sin^۴\alpha+\frac{۱}{۴}\sin^۴ ۲\alpha+\frac{۱}{۱۶}\sin^۴ ۴\alpha+\cdots+\frac{۱}{۴^n}\sin^۴ ۲^n\alpha$

۵۲۱. $\frac{۳}{۱!+۲!+۳!}+\frac{۴}{۲!+۳!+۴!}+\cdots+$

$$+\frac{n+۲}{n!+(n+۱)!+(n+۲)!}$$

۵۲۲. $\frac{n}{(n+۱)!}+\frac{n+۱}{(n+۲)!}+\cdots+\frac{n+p}{(n+p+۱)!}$

۵۲۳. اگر $u_۱=۱$ و $u_u=k+u_{k-۱}$ باشد ، ثابت کنید:

$$u_n+u_{n+۱}=(n+۱)^۲$$

۵۲۴. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۵}{۶}\times\cdots\times\frac{۹۹۹۹}{۱۰۰۰۰}<۰/۰۱$$

۵۲۵. ثابت کنید:

$$n+۲(n-۱)+۳(n-۲)+\cdots+n=$$
$$=\frac{۱}{۲}\left[n(n+۱)+(n-۱)n+(n-۲)(n-۱)\cdots+۲\times۱\right]$$

۵۲۶. اگر $a_۱=۱$ و برای $k\geqslant۲$ داشته باشیم: $a_k=۳a_{k-۱}+۲^{k-۱}$ ، جملهٔ a_n را برحسب n پیدا کنید .

۵۲۷. مجموع یك رشته عددهای فرد متوالی مساوی $۷^۳$ شده‌است ، این‌رشته

را معین کنید.

۵۲۸. اگر داشته باشیم:

$$a_{k+1}=\frac{3a_k-1}{-a_k+3} \qquad (k=1,2,3,\dots)$$

مطلوب است محاسبهٔ a_n برحسب a_1 و حد آن وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند.

۵۲۹. اگر فرض کنیم:

$$S_k=u_1+u_2+u_3+\dots+u_k$$

و بدانیم:

$$S_1=3 \;;\; S_2=6 \;;\; S_3=11 \;;\; S_4=18 \;;\; S_5=27 \;;\; \dots$$

مطلوب‌است تعیین u_n و S_n.

۵۳۰. اگر $u_n=\operatorname{Arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$ باشد، مطلوب‌است محاسبهٔ:

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n$$

و حد S_n وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند.

۵۳۱. مطلوب‌است محاسبهٔ مجموع:

$$S_n=\log\cos\frac{x}{2}+\log\cos\frac{x}{4}+\dots+\log\cos\frac{x}{2^n}$$

و حد S_n وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل کند.

درهر یك از تمرینهای زیر با در دست داشتن u_n اولا $S_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ را بدست آورید، ثانیاً حد S_n را وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، پیدا کنید:

۵۳۲. $u_n=\dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$ **۵۳۳.** $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$

۵۳۴. $$u_n=\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}$$

۵۳۵. $$u_n=\frac{(-1)^{n-1}\cos^3 3^{n-1}\alpha}{3^{n-1}}$$

۵۳۶. $u_n=\frac{2n+1}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$

۵۳۷. $u_n=\frac{4n-3}{n(n^2-4)}$

۵۳۸. $u_n=\frac{2n+3}{(n-1)n(n+1)}$ (با فرض $u_1=0$)

۵۳۹. $u_n=(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

۵۴۰. $u_n=\frac{2^n+3^n}{6^n}$

۵۴۱. $u_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ ۵۴۲. $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$

۵۴۳. اگر داشته باشیم:

$$a_1=1\ ;\ a_2=\frac{1}{1+a_1}\ ;\ a_3=\frac{1}{1+a_2};\ \dots\ ;\ a_n=\frac{1}{1+a_{n-1}}$$

حد a_n را وقتی n به سمت بی‌نهایت میل‌کند ، پیداکنید :

۵۴۴. اگر داشته باشیم:

$$a_1=1\ ;a_2=\frac{4-a_1}{3-a_1}\ ;\ a_3=\frac{4-a_2}{3-a_2};\dots;\ a_n=\frac{4-a_{n-1}}{3-a_{n-1}}$$

مطلوب‌است تعیین جملهٔ a_n بر حسب n و حد آن وقتی n به سمت بی‌نهایت میل‌کند .

۵۴۵. a) دنباله‌ای با رابطهٔ برگشتی زیر داده شده است :

$$a_n=a_{n-1}\cos x+\cos(n-1)x \qquad (n\geqslant 2)$$

اگر $a_1=1$ باشد ، جملهٔ عمومی آنرا پیداکنید .

b) دنباله‌ای با رابطهٔ برگشتی زیر داده شده است:

$$a_n=2a_{n-1}\cos x+a_{n-2} \qquad (n\geqslant 3)$$

اگر $a_1=1$ و $a_2=2\cos x$ باشد، جملهٔ عمومی آنرابدست آورید.

۵۴۶. صحت این اتحاد را تحقیق‌کنید:

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-2k+1)(2n-k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

۵۴۷. دو دنبالهٔ زیر مفروض است:

$$a_k=3^{2k+1}+3^{k+1}+4 \ \text{ و }\ b_k=3^{2k+1}-3^{k+1}+4$$

ثابت‌کنید برای‌هرعدد طبیعی k، یکی از دو عدد a_k و b_k مضرب۵هستند.

۵۴۸. دو دنبالهٔ عددهای حقیقی $\left\{a_n\right\}$ و $\left\{b_n\right\}$ به صورت زیر داده شده است:

$$1<a_1<b_1 \text{ و } a_n=\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \text{ و } b_n=\frac{b_{n-1}-1}{a_{n-1}-1} \qquad (n\geqslant 2)$$

به ازای چه مقادیری از a_1 و b_1 هر دو دنباله متقاربند؟

۵۴۹. ثابت کنیدکه اگر یك تصاعد هندسی از عددهای طبیعی مختلف‌تشکیل شده و بیش از دو جمله داشته باشد، مجموع جمله‌های آن نمی‌تواند توانی‌از ۳ باشد.

۵۵۰. اگر n عددی طبیعی باشد ، مجموع زیر را محاسبه‌کنید:

$$S=a+2a^3+3a^5+\dots+na^{2n-1}$$

۵۵۱. مطلوب‌است محاسبهٔ حاصلضرب زیر برحسب x و n :

$$P=\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}-1\right)\cdots\left(x^{2^n}+\frac{1}{x^{2^n}}-1\right)$$

۵۵۲. اگر داشته باشیم:

$$S_n=\frac{3}{1\times2\times3}+\frac{5}{2\times3\times4}+\frac{7}{3\times4\times5}+\dots+\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

اولا S_n را محاسبه‌کنید . ثانیاً وقتی‌که n به‌سمت بی‌نهایت میل‌کند، حد S_n چقدر است ؟

۱۲

نامعادله‌ها و نامساویها

بحث نامساویها یکی از دلکش‌ترین و درعین‌حال دشوار‌ترین بحثهای ریاضیات مقدماتی است. همراه نامساویها، می‌توان از نامعادله‌ها نام برد که بحث کلی آنها منجر به‌تعیین علامت یك تابع می‌شود و بازهم درحالتهای کلی‌تر، وضعی بغرنج پیدامی‌کند.

با وجودی که دستگاههای خطی نامعادله‌ها (تا حالت دو مجهولی) ونامعادله‌های گنگ (در حالتهای ساده) جزئی ازریاضیات مقدماتی است، درکتابهای درسی دبیرستانی ذکری ازآنها به‌میان نیامده است.

در این بخش کوشش شده است با ذکر مثالهای ساده، لااقل روش حل‌موارد سادهٔ اینگونه نامعادله‌ها روشن و بعضی از نکته‌های لازمی‌که درکتابهای درسی‌وجودنداردبرای‌دانش‌آموزعلاقمند به میان‌گذاشته شود.

I. نامعادله‌ها

۱. حل نامعادله‌های مضاعف

روشن است که اگر داشته باشیم: $-a<u<a$ ($a>0$ فرض‌شده است)، می‌توان آنرا به‌یکی از دو صورت زیر هم نوشت:

$$|u|<a \quad \text{و} \quad u^2<a^2$$

به این ترتیب بـا رسیدن به نامعادلهٔ $u^2<a^2$، نامعادلهٔ مضاعف (یا بهتر بگوییم‌دستگاه نامعادله‌های) $-a<u<a$ به‌یك نامعادله‌تبدیل می‌شود.

مثال ۱. x را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$-1<\frac{x^2-x}{x^2-2x-35}<1$$

حل. این دستگاه نامعادله‌ها با نامعادلهٔ زیر هم ارز است:

$$\frac{(x^2-x)^2}{(x^2-2x-35)^2}<1 \Longrightarrow \frac{(x^2-x)^2-(x^2-2x-35)^2}{(x^2-2x-35)^2}<0$$

با شرط $x\neq -5$ و $x\neq 7$ (-5 و 7 ریشه‌های مخرج کسر هستند) و تجزیهٔ عبارت صورت کسر بدست می‌آید:

$$(x+35)(2x^2-3x-35)<0$$

$$x+35=0 \Longrightarrow x=-35$$

$$2x^2-3x-35=0 \Longrightarrow x=-\frac{7}{2} \text{ و } 5$$

x	$-\infty$	-35		$-\frac{7}{2}$		5	$+\infty$
$x+35$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x^2-3x-35$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$(x+35)(2x^2-3x-35)$	$-$	0	$+$	∞	$-$	∞	$+$

و بنابراین جوابهای x چنین است:

$$x<-35 \quad \text{و} \quad -\frac{7}{2}<x<5$$

* * *

در حالتی که نامعادلهٔ مضاعف به صورت $a<u<b$ باشد ($a<b$ فرض شده است)، اگر واسطهٔ عددی a و b ، یعنی $\frac{a+b}{2}$ را از هر سه عضو نامعادلهٔ مضاعف کم کنیم، به نامعادلهٔ مضاعفی از نوع قبل می‌رسیم:

$$a<u<b \Rightarrow a-\frac{a+b}{2}<u-\frac{a+b}{2}<b-\frac{a+b}{2}$$

که پس از ساده کردن ، چنین می‌شود:

$$\frac{a-b}{2}<u-\frac{a+b}{2}<\frac{b-a}{2}$$

و همانطور که دیده می‌شود $\frac{a-b}{2}$ و $\frac{b-a}{2}$ قرینهٔ یکدیگرند.

مثال۲. مطلوب‌است حل این دستگاه نامعادله‌ها:

$$-1<\frac{2x^2+x+1}{2x+1}<2$$

حل. واسطهٔ‌عددی ۱ــ و۲یعنی $\frac{1}{2}$ را از هرسه جملهٔ نامعادلهٔ مضاعف کم می‌کنیم:

$$-1-\frac{1}{2}<\frac{2x^2+x+1}{2x+1}-\frac{1}{2}<2-\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3<\frac{4x^2+1}{2x+1}<3$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$\frac{(4x^2+1)^2}{(2x+1)^2}<9 \Rightarrow \begin{cases} (4x^2+1)^2-9(2x+1)^2<0 \\ x\neq-\frac{1}{2} \end{cases}$$

نامعادله را ساده می‌کنیم:

$$(4x^2-6x-2)(4x^2+6x+4)<0$$

عبارت $4x^2+6x+4$ ریشه‌هایی موهومی دارد و بنابراین همیشه مثبت است. جوابهای نامعادله چنین است:

$$\frac{3-\sqrt{17}}{4}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{4}$$

مثال ۳. این نامعادلهٔ مضاعف را حل کنید:

$$x<\frac{4x-3}{x}<x+2$$

حل. واسطهٔ‌عددی x و $x+2$ (یعنی $x+1$) را از سه جملهٔ نامعادلهٔ مضاعف کم می‌کنیم، می‌شود:

$$-1<\frac{4x-3}{x}-(x+1)<1 \Longrightarrow -1<\frac{-x^2+3x-3}{x}<1\ ;$$

$$\begin{cases}(x^2-3x+3)^2-x^2<0\\ x\neq 0\end{cases} \Longrightarrow 1<x<3$$

مثال ۴. مطلوب‌است حل نامعادلهٔ مضاعف زیر:

$$3x-5<\frac{1}{x+1}<x-1$$

حل. واسطهٔ‌عددی $3x-5$ و $x-1$ مساوی $2x-3$ است، بنابراین به‌ترتیب‌داریم:

$$x-2<\frac{1}{x+1}-(2x-3)<-(x-2)\quad ;$$

$$\left(\frac{-2x^2+x+4}{x+1}\right)^2<(x-2)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}(-2x^2+x+4)^2-(x^2-x-2)^2<0\\ x\neq -1\end{cases}$$

نامعادلهٔ این دستگاه مختلط به این‌صورت ساده می‌شود:

$$(3x^2-2x-6)(x^2-2)<0$$

و جوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود:

$$-\sqrt{2}<x<-\frac{\sqrt{19}-1}{3} \text{ و } \sqrt{2}<x<\frac{\sqrt{19}+1}{3}$$

۲. نامعادله‌های شامل پارامتر

مثال۱. مطلوب است حل نامعادلهٔ $\frac{x+3a}{ax-2}<1$

حل. بعد از ساده‌کردن نامعادله بدست می‌آید:

$$\frac{(1-a)x+3a+2}{ax-2}<0 \qquad (1)$$

$$(1-a)x+3a+2=0 \implies x=\frac{3a+2}{a-1}$$

$$ax-2=0 \implies x=\frac{2}{a}$$

برای اینکه بدانیم از دو مقدار $\frac{3a+2}{a-1}$ و $\frac{2}{a}$ کدام بزرگترند، تفاضل آنها را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{3a+2}{a-1}-\frac{2}{a}=\frac{a(3a+2)-2(a-1)}{a(a-1)}=\frac{3a^2+2}{a(a-1)}$$

صورت‌این کسر همیشه مثبت‌است (زیرا ریشه‌های‌موهومی دارد) ومخرج آن به‌ازای $0<a<1$ منفی وبه‌ازای $a<0$ یا $a>1$ مثبت‌است. یعنی‌داریم:

$$0<a<1 \implies \frac{3a+2}{a-1}<\frac{2}{a}$$

$$a<0 \text{ یا } a>1 \implies \frac{2}{a}<\frac{3a+2}{a-1}$$

برای جوابهای نامعادلهٔ (۱) (کــه هم ارز نامعادلهٔ اصلی است) این حالتها را داریم:

۱) $0<a<1$ ؛ در این‌حالت ضریبهای x در صورت و مخرج هم علامت‌اند، زیرا $a(1-a)$ به ازای $0<a<1$ مثبت است بنابراین داریم:

$$0<a<1 \implies \frac{3a+2}{a-1}<x<\frac{2}{a}$$

۲) $a<0$ یا $a>1$ ؛ در این‌حالت ضریبهای x در صورت و مخرج

کسر سمت چپ نامعادلهٔ (۱) با علامتهای مختلف‌اند و داریم:

$$a<0 \text{ یا } a>1 \Longrightarrow x<\frac{2}{a} \text{ یا } x>\frac{3a+2}{a-1}$$

۳) $a=0$ ؛ در این‌حالت نامعادلهٔ (۱) بـه صورت $\frac{x+2}{-2}<0$ ویا $x>-2$ در می‌آید.

۴) $a=1$ ؛ در اینحالت نامعادلهٔ (۱) به صورت $\frac{5}{x-2}<0$ ویـا $x<2$ در می‌آید.

جوابهای نامعادله را در جدول زیر منظم کرده‌ایم:

جوابهای نامعادله	مقدار پارامتر
$\frac{3a+2}{a-1}<x<\frac{2}{a}$	$0<a<1$
$x<\frac{2}{a}$ یا $x>\frac{3a+2}{a-1}$	$a<0$ یا $a>1$
$x>-2$	$a=0$
$x<2$	$a=1$

مثال۲. این نامعادله را حل کنید: $\frac{2ax+3}{5x-4a}<4$

حل. عدد ۴ را به‌سمت چپ می‌بریم و ساده می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\frac{2(a-10)x+16a+3}{5x-4a}<0 \qquad (1)$$

جواب صورت کسر $x=-\frac{16a+3}{2(a-10)}$ و جواب مخرج کسر $x=\frac{4a}{5}$ است. این دو مقدار را مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{۴a}{۵}-\left[-\frac{۱۶a+۳}{۲(a-۱۰)}\right]=\frac{۴a}{۵}+\frac{۱۶a+۳}{۲(a-۱۰)}=\frac{۸a^۲+۱۵}{۱۰(a-۱۰)}$$

سه حالت خواهیم داشت:

۱) $a<۱۰$، در این‌صورت $\frac{۴a}{۵}<-\frac{۱۶a+۳}{۲(a-۱۰)}$ و جوابهای نامعادلهٔ (۱) چنین می‌شود.

$$a<۱۰ \implies x<\frac{۴a}{۵} \text{ یا } x>-\frac{۱۶a+۳}{۲(a-۱۰)}$$

۲) $a>۱۰$ ، در اینصورت $-\frac{۱۶a+۳}{۲(a-۱۰)}<\frac{۴a}{۵}$ و جوابهای نامعادلهٔ (۱) چنین است:

$$a>۱۰ \implies -\frac{۱۶a+۳}{۲(a-۱۰)}<x<\frac{۴a}{۵}$$

۳) $a=۱۰$،در این‌حالت نامعادلهٔ (۱) به‌صورت $\frac{۱۶۳}{۵(x-۸)}<۰$ در می‌آید و داریم:

$$a=۱۰ \implies x<۸$$

۳. دستگاه نامعادله‌ها

الف) دستگاه نا معادله‌های شامل یك مجهول .

مثال۱. به ازای چه مقادیری از x تابع زیر حقیقی است؟

$$y=\sqrt{۲۱+۴x-x^۲}+\sqrt{\frac{x^۲-۱۶}{x}}$$

حل. برای‌اینکه هردو رادیکال حقیقی باشند، باید دستگاه نامعادله‌های زیر بر قرار باشد:

$$\begin{cases} -x^۲+۴x+۲۱\geqslant ۰ \\ \dfrac{x^۲-۱۶}{x}\geqslant ۰ \end{cases}$$

$$-x^{۲}+۴x+۲۱=۰ \Longrightarrow x=-۳ \text{ و } ۷$$

$$x^{۲}-۱۶=۰ \Longrightarrow x=\pm ۴$$

جدول علامتها را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		-۴		-۳		۰		۴		۷		$+\infty$
$-x^{۲}+۴x+۲۱$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	۰	$-$	
$x^{۲}-۱۶$		$+$	۰	$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
x		$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x^{۲}-۱۶}{x}$		$-$	۰	$+$		$+$	∞	$-$	۰	$+$		$+$	

روی جدول دیده می‌شود که وقتی x بین ۳− و صفر یا بین ۴ و ۷ واقع باشد هم عبارت $-x^{۲}+۴x+۲۱$ و هم کسر $\dfrac{x^{۲}-۱۶}{x}$ مثبت‌اند، بنابراین جواب چنین است:

$$-۳<x<۰ \quad \text{یا} \quad ۴<x<۷$$

مثال۲. به ازای چه مقادیری از m عبارت درجه‌دوم زیر همواره منفی می‌شود:

$$y=(۲m+۳)x^{۲}-۳(m+۲)x+۴m+۳$$

حل. برای اینکه یك عبارت درجه دوم علامت ثابتی داشته باشد باید مبین آن منفی باشد. در چنین صورتی (یعنی اگر مبین عبارت درجه دوم منفی باشد) علامت عبارت، همان علامت ضرب درجه دوم است؛ بنابراین برای اینکه علامت این عبارت همواره منفی باشد، باید ضمناً ضریب درجه دوم آن نیز منفی باشد. به این ترتیب دستگاه نامعادله‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\Delta<۰\\ a<۰\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}۹(m+۲)^{۲}-۴(۲m+۳)(۴m+۳)<۰\\ ۲m+۳<۰\end{cases}$$

که پس از ساده کردن چنین می‌شود:

$$\begin{cases} -23m^2-36m<0 \Longrightarrow m<-\frac{36}{23} \text{ یا } m>0 \\ 2m+3<0 \Longrightarrow m<-\frac{3}{2} \end{cases}$$

که جواب مشترك آنها $m<-\frac{36}{23}$ است . یعنی به‌ازای هر مقدار m که از $-\frac{36}{23}$ کوچکتر باشد عبارت y همواره (یعنی به‌ازای همهٔ مقادیر x) منفی می‌شود.

ب) دستگاه نامعادله‌های شامل دو مجهول

مثال۱. دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} 2x+5y<7 \\ 3x-4y<1 \end{cases}$$

حل. در هردونامعادله y را برحسب x پیدا می‌کنیم :

$$y<\frac{7-2x}{5} \text{ و } y>\frac{3x-1}{4}$$

از این دو نامعادله نتیجه می‌شود : $\frac{3x-1}{4}<y<\frac{7-2x}{5}$

نامعادلهٔ $\frac{3x-1}{4}<\frac{7-2x}{5}$ را حل می‌کنیم که از آنجا جواب $x<\frac{33}{23}$ بدست می‌آید. بنابراین جوابهای دستگاه چنین است:

$$x<\frac{33}{23} \text{ و } \frac{3x-1}{4}<y<\frac{7-2x}{5}$$

می‌توانستیم از ابتدا x را برحسب y حساب کنیم:

$$\begin{cases} 2x+5y<7 \\ 3x-4y<1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x<\frac{7-5y}{2} \\ x<\frac{1+4y}{3} \end{cases}$$

در اینجا ، یعنی وقتی که جهت نامساویها یکی است، دو مقدار $\frac{7-5y}{2}$ و $\frac{1+4y}{3}$ را با هم مقایسه می‌کنیم :

$$\frac{۱+۴y}{۳}-\frac{۷-۵y}{۲}=\frac{۲۳y-۱۹}{۶}$$

وبنابراین داریم:

$$y\leqslant\frac{۱۹}{۲۳} \Longrightarrow \frac{۱+۴y}{۳}\leqslant\frac{۷-۵y}{۲}$$
$$y>\frac{۱۹}{۲۳} \Longrightarrow \frac{۱+۴y}{۲}>\frac{۷-۵y}{۲}$$

و بنابراین جوابهای دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases}x\leqslant\frac{۱+۴y}{۳}\\ y\leqslant\frac{۱۹}{۲۳}\end{cases} \text{ یا: } \begin{cases}x<\frac{۷-۵y}{۲}\\ y>\frac{۱۹}{۲۳}\end{cases}$$

مثال۴. این دستگاه را حل کنید:

$$y-۴x>۰ \text{ و } y-x^۳<۰$$

حل. اگر y را بر حسب x بدست آوریم ، می‌شود

$$\begin{cases}y>۴x\\ y<x^۳\end{cases} \Longrightarrow ۴x<x^۳ \Longrightarrow x(۲-x)(۲+x)<۰$$

جوابهای این نامعادله چنین است:

$$-۲<x<۰ \text{ یا: } x>۲$$

و بنابراین جوابهای دستگاه را می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}-۲<x<۰\\ ۴x<y<x^۳\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}x>۲\\ ۴x<y<x^۳\end{cases}$$

۴. نامعادله‌های گنگ

مثال۱. این نامعادله را حل کنید:

$$\sqrt{x^۲-۷x+۶}-x+۲>۰$$

حل. نامعادله را به صورت $\sqrt{x^۲-۷x+۶}>x-۲$ می‌نویسیم .

دو حالت پیش می‌آید:

۱) $x-2<0$ یعنی $x<2$ ، در این‌صورت نامعادله به‌شرط حقیقی بودن رادیکال برقرار است (زیرا سمت‌چپ عددی مثبت و سمت راست عددی منفی است و عدد مثبت همیشه از عدد منفی بزرگتر است). بنابراین باید ببینیم به ازای چه مقادیری از x، مقدار رادیکال حقیقی‌است .

$$x^2-7x+6\geqslant 0 \implies x\leqslant 1 \text{ یا } x\geqslant 6$$

که با توجه به شرط این حالت ($x<2$) معلوم‌می‌شود به‌ازای $x\leqslant 1$ نامعادله برقرار است.

۲) $x-2>0$ یا $x>2$. در این‌حالت چون هر دو طرف نامعادله مثبت‌اند، می‌توان آنرا مجذور کرد که می‌شود:

$$x^2-7x+6>(x-2)^2 \implies -3x+2>0 \implies x<\frac{2}{3}$$

اما این جواب باشرط $x>2$ متناقض است.

به این ترتیب تنها $x\leqslant 1$ جواب نامعادله است.

مثال۴. این نامعادله را حل کنید:

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}<\sqrt{x-4}$$

حل. برای حقیقی بودن رادیکالها باید $x\geqslant 4$ باشد . نامعادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$\sqrt{2x+1}<\sqrt{x+3}+\sqrt{x-4}$$

چون دوطرف نامساوی غیر منفی است ، می‌توان دو طرف را مجذور کرد که بعد از ساده‌کردن چنین می‌شود:

$$\sqrt{x^2-x-12}>1$$

دوباره دوطرف نامساوی را مجذور می‌کنیم، به نامعادلهٔ زیر می‌رسیم.

$$x^2-x-13>0 \implies x<\frac{1-\sqrt{53}}{2} \text{ یا } x>\frac{1+\sqrt{53}}{2}$$

که با توجه به شرط $x\geqslant 4$ جواب نامعادله چنین می‌شود :

$$x>\frac{1+\sqrt{53}}{2}$$

مثال۳. این نامعادله را حل کنید : $\sqrt{\frac{x+a}{2x-a}}<a-2$

حل. چون سمت‌چپ نامعادله غیرمنفی‌است، بنابراین‌برای وجودجواب باید $a>2$ باشد. ازطرف دیگر برای اینکه مقدار رادیکال‌حقیقی باشد، باید $x\leqslant -a$ یا $x>\frac{a}{2}$ باشد.

دو طرف نامعادله غیرمنفی است و می‌توانیم آنرا مجذور کنیم .

$$\frac{x+a}{2x-a}<a^2-4a+4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{(-2a^2+8a-7)x+a(a^2-4a+5)}{2x-a}<0$$

ویا : $$\frac{(2a^2-8a+7)x-a(a^2-4a+5)}{2x-a}>0 \quad (1)$$

دو حالت در نظر می‌گیریم (با توجه به شرطهای $x\leqslant -a$ یا $x>\frac{a}{2}$):

حالت اول : $x>\frac{a}{2}$. در این حالت مخرج کسر سمت‌چپ نامعادلهٔ (۱) مثبت است و خواهیم داشت:

$$(2a^2-8a+7)x>a(a^2-4a+5) \quad (1)'$$

ریشه‌های عبارت $2a^2-8a+7$ مساوی $\frac{4\pm\sqrt{2}}{2}$ است، بنابراین:

الف) $\frac{4-\sqrt{2}}{2}<a<\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ که‌با توجه به‌شرط $a>2$ به‌صورت $2<a<\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ در می‌آید. بااین شرط‌عبارت $2a^2-8a+7$ منفی‌می‌شود و نامعادلهٔ $(1)'$ ، با توجه به شرط $x>\frac{a}{2}$ ، به این‌صورت در می‌آید:

$$\frac{a}{2}<x<\frac{a(a^2-4a+5)}{2a^2-8a+7}$$

در اینجا بایدداشته باشیم:

$$\frac{a}{2}<\frac{a(a^2-4a+5)}{2a^2-8a+7} \implies \frac{-3a}{2(2a^2-8a+7)}<0$$

که صحیح نیست، زیرا صورت و مخرج هردو منفی و خارج‌قسمت آنها مثبت است. از ابتدا هم معلوم بود که $\frac{a}{2}>1$ و $\frac{a(a^2-4a+5)}{2a^2-8a+7}<0$ است و نامساوی صحیح نیست، بنابراین جوابی را کـه بدست آورده‌ایم قابل قبول نیست.

ب) $a>\frac{4+\sqrt{2}}{2}$. با این شرط‌عبارت $2a^2-8a+7$ مثبت است و از نامعادلهٔ $(1)'$ بدست می‌آید:

$$x>\frac{a(a^2+4a+5)}{2a^2-8a+7}$$

ولی ضمناً باید $x>\frac{a}{2}$ باشد، این دو مقدار را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{a}{2}-\frac{a(a^2-4a+5)}{2a^2-8a+7}=\frac{-3a}{2(2a^2-8a+7)}<0 \implies$$

$$\implies \frac{a}{2}<\frac{a(a^2-4a+5)}{2a^2-8a+7}$$

و بنابراین همان $x>\frac{a(a^2-4a+5)}{2a^2-8a+7}$ جواب‌این‌حالت است.

ج) $a=\frac{4+\sqrt{2}}{2}$. برای اینحالت هم، با توجه به شرط $x>\frac{a}{2}$، نامعادله جواب ندارد.

حالت دوم: $x<-a$. مخرج سمت چپ نامعادلهٔ (۱) منفی می‌شود و نامعادله به این‌صورت در می‌آید:

$$(2a^2-8a+7)x<a(a^2-4a+5) \quad (1)''$$

الف) $2<a<\frac{4+\sqrt{2}}{2}$، نامعادلهٔ $(1)''$ چنین می‌شود (بـا توجه به شرط $x<-a$):

$$-a>x>\frac{a(a^2-4a+5)}{2a^2-8a+7}$$

دو طرف نامعادلهٔ مضاعف اخیر را مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{a(a^2-4a+5)}{2a^2-8a+7}+a=\frac{3a(a-2)^2}{2a^2-8a+7}<0$$

و بنابراین جواب اخیر قابل قبول است.

ب) $a>\frac{4+\sqrt{2}}{2}$. نامعادلهٔ "(۱) به این صورت درمی‌آید:

$$x<\frac{a(a^2-4a+5)}{2a^2-8a+7}$$

و چون شرط $x\leqslant -a$ هم وجود دارد، دو مقدار را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{a(a^2-4a+5)}{2a^2-8a+7}+a=\frac{3a(a-2)^2}{2a^2-8a+7}>0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{a(a^2-4a+5)}{2a^2-8a+7}>-a$$

بنابراین جواب این حالت $x\leqslant -a$ خواهد بود.

ج) $a=\frac{4+\sqrt{2}}{2}$. به ازای این‌مقدار a نامعادلهٔ "(۱) همیشه بر قرار است که با توجه به شرط $x\leqslant -a$ جواب نامعادله در این‌حالت $x\leqslant -\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ می‌شود.

نتیجهٔ بحث را در جدول زیر نشان می‌دهیم:

جواب نامعادله	مقدار پارامتر
نامعادله جواب ندارد	$a\leqslant 2$
$\frac{a(a^2-4a+5)}{2a^2-8a+7}<x\leqslant -a$	$2<a<\frac{4+\sqrt{2}}{2}$
$x\leqslant -\frac{4+\sqrt{2}}{2}$	$a=\frac{4+\sqrt{2}}{2}$
$x>\frac{a(a-4a+5)}{2a^2-8a+7}$ یا $x\leqslant -a$	$a>\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

۵. بحث کلی در حل نامعادله‌ها

روشن است که هر نامعادله‌ای را می‌توان بـه صورت $f(x)>0$ یـا $f(x)<0$ تبدیل کرد و بنابراین حل نامعادله درحالت کلی، منجر به‌تعیین علامت $f(x)$ می‌شود.

حالا در این زمینه مطالعه می‌کنیم که $f(x)$ درچه‌مواردی تغییرعلامت می‌دهد. به این چند مثال توجه کنید:

مثال۱. عبارت $2x-5$ را در نظر می‌گیریم ، می‌دانیم این عبارت به ازای مقادیر $x<\frac{5}{2}$ منفی و به ازای مقادیر $x>\frac{5}{2}$ مثبت است و در $x=\frac{5}{2}$ مساوی صفر می‌شود :

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x-5$	$-$	0	$+$

بنابراین: اگر $f(x)$ از صفر عبور کند ممکن است تغییرعلامت بدهد.

گفتیم «ممکن است تغییر علامت بـدهد» ، زیـرا اگـر مثلا عبارت $(2x-5)^2$ را در نظر بگیریم در نقطهٔ $x=\frac{5}{2}$ مساوی صفر می‌شود ، در حالی که تغییرعلامت نمی‌دهد.

درحالتی که a ریشهٔ ساده یا ریشهٔ تکراری از مرتبهٔ فرد $f(x)$ باشد؛ $f(x)$ با عبور از نقطهٔ $x=a$ تغییرعلامت می‌دهد؛ ولی اگر a ریشهٔ مضاعف یا بطور کلی ریشهٔ تکراری ازمرتبهٔ زوج $f(x)$ باشد، $f(x)$ با عبور ازنقطهٔ $x=a$ تغییر علامت نمی‌دهد.

مثال۲. به‌کسر $\frac{1}{2x-5}$ توجه کنیم، این کسر در نقطهٔ $x=\frac{5}{2}$ منفصل است و ضمناً در همین نقطه تغییر علامت می‌دهد.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x-5$	$-$	∞	$+$

بنابراین: اگر $f(x)$ از بی‌نهایت عبور کند، ممکن است تغییرعلامت بدهد[1].

در اینجا هم اگر a ریشهٔ‌ساده و یاریشهٔ تکراری ازمرتبهٔ فرد مخرج کسر باشد، کسردر نقطهٔ $x=a$ تغییرعلامت می‌دهد، ولی اگر a ریشهٔ‌تکراری ازمرتبهٔ‌زوج مخرج کسر باشد، کسر در نقطهٔ $x=a$ تغییر علامت نمی‌دهد.

مثال۳. عبارت $f(x)=2x-1-2\sqrt{x^2-x-6}$ راتعیین علامت کنید .

حل. $f(x)$ از نقطهٔ بی‌نهایت عبور نمی‌کند؛ $f(x)$ همچنین از صفرهم عبور نمی‌کند:

$$f(x)=0 \implies 2x-1=2\sqrt{x^2-x-6} \implies$$
$$\implies 4x^2-4x+1=4x^2-4x-24$$

و تساوی اخیر غیرممکن است، یعنی $f(x)\neq 0$.

$f(x)$ به ازای مقادیر $-2<x<3$ موهومی است. به جـدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$2x-1-2\sqrt{x^2-x-6}$	$-$	0		0	$+$

بنابراین : اگر $f(x)$ ازیك منطقهٔ موهومی عبورکندممکن استتغییر علامت بدهد.

مثال۴. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^4+x^2}}$ را درنظر می‌گیریم. روشن است کـه $f(x)$ به ازای مقادیر منفی x منفی و به‌ازای مقادیر مثبت x مثبت است (زیرا مخرج کسر همیشه مثبت است):

۱ــ در این بند نقطه‌های انفصالی را که به‌ازای ریشه‌های مخرج‌بدست آید، نقطه‌های بی‌نهایت می‌نامیم.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2}}$	$-$		$+$

ولی نقطهٔ $x=0$ چه نقطه‌ای از $f(x)$ است، $f(x)$ را می‌توان چنین نوشت:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2}}=\frac{x}{|x|\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & (x>0)\\ \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} & (x<0)\end{cases}$$

اگر صفر را جزو مقادیر مثبت به‌حساب آوریم $f_+(0)=1$ و اگر جزو مقادیر منفی به‌حساب آوریم $f_-(0)=-1$ می‌شود. در حقیقت اگر x از طرف مقادیر مثبت به‌سمت صفر میل کند $f(x)$ به‌سمت $+1$ میل می‌کند و اگر x ازجهت مقادیر منفی به‌سمت صفر میل کند، $f(x)$ به‌سمت -1 میل می‌کند. $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ **نامعین** است.

بنابراین: اگر $f(x)$ از یك مرز نامعین عبور کند ممکن است تغییر علامت بدهد[1].

ثابت می‌کنند که اگر $f(x)$ بخواهد تغییر علامت بدهد باید از صفر یا بی‌نهایت، یك منطقهٔ موهومی، و یا یك مرز نامعین عبور کرده باشد.

البته عکس این مطلب همیشه درست نیست، یعنی ممکن است $f(x)$ از یکی از این نقطه‌ها عبور کند، بدون اینکه تغییر علامت بدهد.

بـه این ترتیب برای تعیین علامت یك عبارت باید ابتدا نقطه‌هایی را که در آنجا ممکن است این عبارت تغییر علامت بدهد پیدا کنیم و سپس بـا جستجو علامت آنرا در هر فاصله مشخص نماییم.

۱ـ سه حالت اخیر را ، یعنی وقتی را که تابع از نقطهٔ بی‌نهایت عبور کند، یا از یك منطقهٔ موهومی یا از یك مرز نامعین، می‌توان حالتی دانست که تابع از نقطهٔ انفصال خود عبور می‌کند. ما دراینجا برای روشن‌تر بودن‌مطلب آنها را در سه حالت مختلف از هم جدا کردیم.

مثال۵. این نامعادله را حل کنید:

$$f(x)=\frac{x(x-1)(x+3+\sqrt{x^2+6x+8})}{(x+7)\sqrt{x^4-x^3-x+1}}<0$$

حل. $f(x)$ را به این صورت می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{x(x-1)[x+3+\sqrt{(x+2)(x+4)}]}{(x+7)\,|x-1|\,\sqrt{x^2+x+1}}$$

$f(x)$ در $x=0$ از نقطهٔ صفر، در $x=-7$ از نقطهٔ بی‌نهایت، در فاصلهٔ $-4<x<-2$ ازیك منطقه موهومی و در $x=1$ از یك مرز نامعین عبور می‌کند. بنابراین داریم:

x	$-\infty$	-7		-4	-2		0		1	$+\infty$
$f(x)$	$+$	∞	$-$	|	|	$+$	0	$-$	|	$+$

علامتها را با جستجو پیدا کرده‌ایم. مثلا بـه ازای $x=-8$ حاصل $f(x)$ عددی مثبت می‌شود، به ازای $x=-4$ حاصل $f(x)$ عددی منفی می‌شود و غیره.

به این ترتیب جوابهای نامعادله چنین است:

$$-7<x\leqslant-4 \quad و \quad 0<x<1$$

۶. دو نکته

الف) آیا می‌توان دوطرف نامساوی را معکوس کرد؟

اگر بدانیم دوطرف نامساوی مثبت یا هر دو طرف نامساوی منفی است، با معکوس کردن دو طرف آن جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$5<7 \Longrightarrow \frac{1}{5}>\frac{1}{7} \;;\; -6<-2 \Longrightarrow -\frac{1}{6}>-\frac{1}{2}$$

ولی اگر یکطرف نامساوی منفی و طرف دیگر مثبت باشد، بامعکوس کردن دو طرف نامساوی جهت تغییر نمی‌کند:

$$-5<2 \Longrightarrow -\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$$

بنابراین: درحالتی‌که از علامت دوطرف نامساوی اطلاعی نداریم بهتر است از معکوس کردن دو طرف آن صرفنظر کنیم.

ب) آیا می‌توان دو طرف نامساوی را به توان زوج رساند؟

اگرهردو طرف نامساوی مثبت‌باشد، توان زوج آنها هم دریك‌نامساوی با همان جهت صدق می‌کند. اگر هر دوطرف نامساوی منفی باشد، توان‌زوج آنها در یك نامساوی با جهت مخالف صدق می‌کند:

$$5<7 \Longrightarrow 25<49 \;;\; -7<-5 \Longrightarrow 49>25$$

ولی اگر دو طرف نامساوی هم علامت نباشند، توان زوج آنها گاهی جهت نامساوی را تغییر می‌دهد و گاهی تغییر نمی‌دهد.

$$-5<2 \Longrightarrow 25>4 \;;\; -5<7 \Longrightarrow 25<49$$

بنابراین: اگر از هم علامت بودن دو طرف نامساوی اطلاعی نداشته باشیم، بهتر است از توان زوج آنها استفاده نکنیم.

II. نامساویها

به نامساویها ، نامعادله‌های اتحادی‌هم می‌گویند و منظور نامساویهایی است‌که به‌ازای هرمقدار دلخواه ازحرفها،در فاصله‌هایی‌که تعیین شده است، بر قرار باشند.

مثلا: نامساوی $a^2+b^2>2ab$ با شرط $a\neq b$ یك نامعادلۀاتحادی است و یا نامساوی $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ به‌ازای مقادیر غیرمنفی a و b و c همیشه برقرار است.

صحت اثبات نامساویها (یا نامعادله‌های اتحادی) روش کلی نـدارد و بسته به نوع‌مسأله فرق می‌کند، وما در اینجا تنها به ذکر نامساویهای‌مربوط به واسطه‌ها (که در جبر مقدماتی اهمیت زیادی دارند) می‌پردازیم:

۷. نامساویهای مربوط به واسطه‌ها[1]

a_1 ، a_2، ....، a_nرا n عدد حقیقی مفروض درنظر می گیریم،هرعددی مانند M که بزرگتر از حداکثر و کوچکتر از حداقل عددهـای مفروض a_i نباشد، واسطه نامیده می‌شود:

$$\text{Min}\, a \leqslant M \leqslant \text{Max}\, a$$

کـه در آن $\text{Min}\, a$ و $\text{Max}\, a$ بترتیب حداقل و حداکثر از عددهـای a_i می‌باشد.

نظریهٔ واسطه‌ها،علاوه بر نقشی که در ریاضیات محاسبه‌ای دارند، مورد استفادهٔ فراوانی در نظریهٔ احتمالات و آمار ریـاضی، برای ارزیابی ریاضی نتیجه‌های مشاهده دارد.

تعریف. ۱) **واسطهٔ حسابی** n عدد a_1 ، a_2، ....، a_n عبارت‌است از $\frac{1}{n}$ مجموع آنها :

$$\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}=\frac{1}{n}\Sigma a_i$$

۲) **واسطهٔ هندسی** عددهای مثبت a_1 ، a_2 ، ... ، a_n عبارت‌است از ریشهٔ nام حاصلضرب آنها:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\sqrt[n]{\pi a_i}$$

۳) **واسطهٔ توافقی** عددهای مثبت a_1،a_2،...،a_n عبارت‌است ازعکس واسطهٔ حسابی عکس این عددها:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{n}{\Sigma\frac{1}{a_i}}$$

۴) **واسطهٔ مربعی** n عدد a_1،a_2،...،a_n عبارت‌است از جذر واسطهٔ

۱ــ قضیه‌های مربوط به‌اثبات نامساویهای واسطه‌ها بطور عمده وباجزیی تفاوت از کتاب «دورهٔ اختصاصی جبر مقدماتی» به ترجمهٔ نویسندهٔ همین کتاب برداشته شده است.

حسابی مربع این عددها:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma a_i^2}$$

قضیهٔ مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی. واسطهٔ حسابی عددهای مثبت، کوچکتر از واسطهٔ هندسی آنها نیست[1] . یعنی به شرطی که عددهای $a_1, a_2, \ldots, a_n$ مثبت باشند داریم:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

تساوی برای حالت $a_1=a_2=\ldots=a_n$ است.

اثبات (بر اساس روش استقراء ریاضی) . صحت نامساوی برای حالت $n=2$ واضح است.

برای اثبات نامساوی در حالت کلی به چند نامساوی کمکی نیازداریم. اگر x_1 و x_2 عددهایی غیر منفی باشند ، در صورتی که $x_1<x_2$ باشد $x_1^k<x_2^k$ (k عددی است طبیعی) خواهد بود. بنابراین برای عددهای غیرمنفی x_1 و x_2 داریم:

$$(x_1^{n-1}-x_2^{n-1})(x_1-x_2)\geqslant 0 \qquad (\text{تساوی برای حالت } x_1=x_2)$$

که بعداز جزیی تغییر به این‌صورت در می‌آید:

$$x_1^n+x_2^n \geqslant x_1x_2^{n-1}+x_2x_1^{n-1}$$

n عدد غیرمنفی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را در نظر می‌گیریم و نامساویهای مربوطه را برای دوبه‌دوی آنها می‌نویسیم وبا هم جمع می‌کنیم، بدست‌می‌آید:

$$\begin{aligned}
&(x_1^n+x_2^n)+(x_1^n+x_3^n)+\ldots+(x_1^n+x_n^n)+\\
&\quad+(x_2^n+x_3^n)+\ldots+(x_2^n+x_n^n)+\\
&\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots+\\
&\quad+(x_{n-1}^n+x_n^n)\geqslant\\
&\geqslant(x_1x_2^{n-1}+x_2x_1^{n-1})+(x_1x_3^{n-1}+x_3x_1^{n-1})+\\
&\quad+\ldots+(x_1x_n^{n-1}+x_nx_1^{n-1})+\\
&+(x_2x_3^{n-1}+x_3x_2^{n-1})+\ldots+(x_2x_n^{n-1}+x_nx_2^{n-1})+\\
&\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+
\end{aligned}$$

۱ــ اثبات دیگری از این قضیه در فصل استقراء ریاضی آمده است.

$$+(x_{n-1}x_n^{n-1}+x_nx_{n-1}^{n-1}$$

(حالت تساوی برای $x_1=x_2=\ldots=x_n$ است) . با ساده کردن این نا-
مساوی بدست می‌آید:

$$(n-1)(x_1{}^n+x_2{}^n+\cdots+x_n^n)\geqslant x_1(x_2{}^{n-1}+x_3{}^{n-1}+ +\cdots+x_n^{n-1})+$$

$$+x_2(x_1{}^{n-1}+x_3{}^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1})+$$

$$+\cdots+x_n(x_1{}^{n-1}+x_2{}^{n-1}+\cdots+x_{n-1}^{n-1}) \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم که برای $n-1$ عدد مثبت ، واسطهٔ حسابی کوچکتر از واسطهٔ هندسی نباشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$x_2{}^{n-1}+x_3{}^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}\geqslant(n-1)x_2x_3\cdots x_n$$

$$x_1{}^{n-1}+x_3{}^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}\geqslant(n-1)x_1x_3\cdots x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1{}^{n-1}+x_2{}^{n-1}+\cdots+x_{n-1}^{n-1}\geqslant(n-1)x_1x_2\cdots x_{n-1}$$

بـا استفاده از این نامساویها، می‌توان نامساوی (۱) را به‌صورت زیر نوشت:

$$(n-1)(x_1{}^n+x_2{}^n+\cdots+x_n^n)\geqslant n(n-1)x_1x_2\cdots x_n$$

و اگر در نامساوی‌اخیر $x_1{}^n=a_1$ ، $x_2{}^n=a_2$ ،…، $x_n^n=a_n$ بگیریم ، بدست می‌آید :

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

که تساوی مربوط به حالت $a_1=a_2=\ldots=a_n$ است.

بنابراین اگر برای $n-1$ عددمثبت، واسطه حسابی از واسطهٔ هندسی کوچکتر نباشد، برای n عدد مثبت هم همان نامساوی برقرار است. ازطرف دیگر درستی نامساوی را برای حالت $n=2$ ثابت کردیم و در نتیجه برای هر عدد $n>2$ درست است.

قضیهٔ مربوط به واسطه‌های توافقی و هندسی. واسطهٔ تـوافقی چند عدد مثبت از واسطهٔ هندسی آنها بزرگتر نیست:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \qquad (1)$$

اثبات. بنابرقضیهٔ واسطه های حسابی و هندسی ، نامساوی زیر واضح است:

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}$$

که اگر دو طرف این نامساوی را معکوس کنیم به همان نامساوی (۱) می‌رسیم (حالت تساوی مربوط به $a_1=a_2=\ldots=a_n$ است).

قضیهٔ مربوط به واسطه‌های مربعی و حسابی. واسطهٔ مربعی چندعدد کوچکتر از قدرمطلق واسطهٔ حسابی آنها نیست:

$$\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_n|}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

(تساوی برای حالت $a_1=a_2=\ldots=a_n$).

اثبات. اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+$$
$$+2a_1a_2+2a_1a_3+\cdots+2a_{n-1}a_n$$

با استفاده از نامساوی $2a_1a_2 \leqslant a_1^2+a_2^2$ هریك ازجمله‌های مربوط به دو برابر حاصلضربهارا به مجموع مربعهای عاملهای آن تبدیل می‌کنیم ، بدست می‌آید:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \leqslant n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

اگر دو طرف این نامساوی را بر n^2 تقسیم کنیم و سپس از دو طرف ریشهٔ دوم بگیریم، نامساوی مطلوب بدست می‌آید.

* * *

واسطهٔ حسابی بین حداقل و حداکثر مقادیر عددها قرار دارد، زیرا اگردر مجموع $a_1+a_2+\cdots+a_n$ هر یك از جمله‌ها رابه‌کوچکترین آنها و سپس به بزرگترین آنها تبدیل کنیم، بدست می‌آید:

$$n\cdot \mathrm{Min}\, a \leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n \leqslant n\cdot \mathrm{Max}\, a$$

واز آنجا:
$$\operatorname{Min} a \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq \operatorname{Max} a$$
شبیه همین استدلال را در مورد واسطهٔ هندسی و واسطهٔ توافقی هم می‌توان کرد و نتیجه گرفت:
$$\operatorname{Min} a \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \operatorname{Max} a,$$
$$\operatorname{Min} a \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \operatorname{Max} a$$
واسطهٔ مربعی بین حداقل و حداکثر قدرمطلقهای عددهای مفروض قرار دارد:
$$\operatorname{Min} |a| \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \leq \operatorname{Max} |a|$$
برای عددهای مثبت، واسطهٔ توافقی، واسطهٔ هندسی، واسطهٔ حسابی و واسطهٔ مربعی در نامساویهای زیر صدق می‌کنند:
$$\operatorname{Min} a \leq \frac{n}{\Sigma \frac{1}{a_i}} \leq \sqrt[n]{\pi a_i} \leq \frac{1}{n}\ \Sigma a_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma a_i^2} \leq \operatorname{Max} a$$

* * *

مثال۱. بسیاری از نامساویهای مربوط به واسطه‌ها را در حالتهای خاص می‌توانیم با روشهای ساده‌ای ثابت کنیم، بدون آنکه به‌رابطهٔ کلی آنها متوسل شویم، به عنوان مثال نامساوی مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی را در حالتهای $n=3$ ، $n=4$ و $n=5$ ثابت می‌کنیم.

۱) $n=3$ ، باید ثابت کنیم که برای عددهای مثبت a_1 ، a_2 و a_3 داریم:
$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$
برای سهولت کار فرض می‌کنیم: $\sqrt[3]{a_1}=x$ ، $\sqrt[3]{a_2}=y$ و $\sqrt[3]{a_3}=z$

نامساوی به این صورت در می‌آید:
$$x^3+y^3+z^3-3xyz \geq 0$$

عبارت سمت‌چپ نامساوی قابل تجزیه است:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+$$
$$+z^2-xy-xz-yz)=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+$$
$$+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

و غیرمنفی بودن عبارت اخیر واضح است. تنها درحالت $x=y=z$ حاصل این عبارت مساوی صفر می‌شود.

۲) $n=4$، باید ثابت کنیم‌که برای عددهای مثبت a_1 ، a_2 ، a_3، a_4 داریم:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

به‌ترتیب داریم :

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}} \geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

تبصره. باهمین روشی‌که نامساوی مربوط به واسطه‌های حسابی وهندسی را برای حالت $n=4$ اثبات‌کردیم (با استفاده از حالت $n=2$)، می‌توانیم برای حالت $n=6$ (با استفاده از حالتهای $n=2$ و $n=3$) ثابت کنیم:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\frac{a_5+a_6}{2}}{3} \geqslant$$
$$\geqslant\sqrt[3]{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\cdot\frac{a_5+a_6}{2}} \geqslant$$
$$\geqslant\sqrt[3]{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}\cdot\sqrt{a_5a_6}}=$$
$$=\sqrt[6]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$$

۳) $n=5$، باید ثابت کنیم (برای عددهای مثبت):

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5} \geqslant \sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}$$

$S=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}$ و $\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}=P$ می‌گیریم. با توجه به تبصرهٔ حالت قبل برای ۶ عدد مثبت a_1 ، a_2 ، a_3 ، a_4 ، a_5 و S می‌توان نوشت:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+S}{6} \geqslant \sqrt[6]{a_1a_2a_3a_4a_5S}$$

این نامساوی به‌سادگی به این‌صورت در می‌آید:

$$S \geqslant \sqrt[6]{P^5 \cdot S} \Longrightarrow S^6 \geqslant P^5 \cdot S \Longrightarrow S^5 \geqslant P^5$$

و در نتیجه

$$S \geqslant P$$

مثال۲. صحت نامساوی زیر را برای عددهای مثبت a_1 ، a_2 ، ...، a_n ثابت کنید:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

حل. نامساویهای زیر واضح است (نامساویهای مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی):

$$\begin{cases} a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \\ \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n} \geqslant n\sqrt[n]{\dfrac{1}{a_1}\cdot\dfrac{1}{a_2}\cdots\dfrac{1}{a_n}} \end{cases}$$

از ضرب این نامساویها در یکدیگر به‌همان نامساوی مورد نظر می‌رسیم.

این نامساوی را به این‌ترتیب هم می‌شد ثابت کرد، داریم:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}$$

اگر واسطهٔ هندسی عددها را کنار بگذاریم و در نامساوی که بدست می‌آید دو طرف را در $n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$ ضرب کنیم به‌نامساوی مطلوب

می‌رسیم.

مثال۳. ثابت کنید در هر مثلث با زاویه‌های حاده بین زاویه‌های A و B و C آن نامساوی زیر برقرار است:

$$tg A \cdot tg B + tg A \cdot tg C + tg B \cdot tg C \geqslant ۹$$

حل. اگر دوطرف این نامساوی را در

$$cotg A \cdot cotg B + cotg A \cdot cotg C + cotg B \cdot cotg C$$

ضرب کنیم درستی آن روشن می‌شود، بخاطر بیاورید که در هر مثلث بازاویه‌های A و B و C داریم:

$$cotg A \cdot cotg B + cotg A \cdot cotg C + cotg B \cdot cotg C = ۱$$

مثال۴. ثابت کنید برای عددهای مثبت a و b و c داریم:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geqslant ۸$$

حل. به‌ترتیب می‌نویسیم:

$$a+b \geqslant ۲\sqrt{ab} \ ، \ b+c \geqslant ۲\sqrt{bc} \ ، \ c+a \geqslant ۲\sqrt{ca}$$

از ضرب این سه نامساوی در یکدیگر به نامساوی حکم می‌رسیم.

تمرینها

صحت نامساویهای زیر را تحقیق کنید:

۵۵۳. $\sqrt[۳]{۴۳} < \sqrt[۳]{۳} + \sqrt[۳]{۹} < \sqrt[۳]{۴۴}$

۵۵۴. باشرط $n > ۱$:

$$۱ < \sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n + \cdots}}} < ۲$$

۵۵۵. اگر داشته‌باشیم:

$$a_n = \sqrt{۲ + \sqrt[۳]{۳ + \sqrt[۴]{۴ + \cdots + \sqrt[n]{n}}}}$$

ثابت کنید $۱/۹ < \lim_{n \to \infty} a_n < ۲$

۵۵۶. اگر a و b و c مقادیری غیر منفی باشند ، ثابت کنید :

$$a^3+b^3+c^3\geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}$$

۵۵۷. $(\sec^{2n}\alpha-1)(\operatorname{cosec}^{2n}\alpha-1)\geq(1+2+3+\cdots+n)^2$

۵۵۸. $\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_5 3}>2$

۵۵۹. a و b و c ضلعها ، S مساحت و R و r به‌ترتیب شعاع دایره‌های محیطی و محاطی یك مثلث‌اند، ثابت کنید:

$$a^3+b^3+c^3\geq 8S(2R-r)$$

۵۶۰. با شرط مثبت بودن a و b و c ثابت‌کنید:

$$(a+b-c)(a+c-a)(c+a-b)\leq abc$$

۵۶۱. اگر $x+y=a$ باشد، ثابت کنید: $x^n+y^n\geq\frac{a^n}{2^{n-1}}$ ($a>0$ و n عددی صحیح است).

۵۶۲. اگر a و b و c طول ضلعهای یك مثلث‌و x و y و z طول ضلعهای مثلث ارتفاعیه باشند، ثابت کنید:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\geq\frac{3}{4}$$

۵۶۳. باشرط $t>1$ ثابت کنید: $\frac{t^2+t}{t-1}\geq 2(2+\sqrt{3})$

۵۶۴. ثابت کنید برای $n>1$ و $0<a_i<1$ داریم:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)-a_1a_2\cdots a_n<n+1$$

۵۶۵. ثابت کنید برای مقادیر حقیقی a و b و c و d داریم:

$$\sqrt{(a-b)^2+(c-d)^2}\leq\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}$$

۵۶۶. به ازای همهٔ مقادیر طبیعی n ثابت کنید:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\cdots+\frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times n}<3$$

۵۶۷. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

۵۶۸. ثابت کنید برای هرعدد طبیعی n داریم:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$$

۵۶۹. ثابت کنید قدر مطلق مجموع چند عدد از مجموع قدرمطلقهای آنها بزرگتر نیست، یعنی:

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

این نامعادله‌ها را حل کنید:

۵۷۰. $\sqrt{3-x}>x-2$

۵۷۱. $2x+1>\sqrt{4x^2+4x-3}$

۵۷۲. $4(x-1)<\sqrt{(x+5)(3x+4)}$

۵۷۳. $2x-a<2ax-x^2-2$

۵۷۴. با شرط $a>0$: $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$

۵۷۵. تابع زیر به ازای چه مقادیری از x حقیقی است.

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x^2-5x+6}}+\sqrt{x^4-x^2}$$

۵۷۶. $\frac{2ax+3}{5x-4a}<4$ ۵۷۷. $|x^2-5x-4|<10$

۵۷۸. $|x|+|y|<1$

۵۷۹. (باشرط $a>0$) $(x^2+y^2)^2<a^2(x^2-y^2)$

۵۸۰. $\frac{x^2+y^2-1}{y^2-x^2}>0$

۵۸۱. $\frac{(a-x)y^2-x^2}{a-x}>0\ (a>0)$

۵۸۲. $\sqrt{x+6}-\sqrt{2x-5}>\sqrt{x+1}$

۵۸۳. $\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}}<a-1$

۵۸۴. ثابت کنید که اگر داشته باشیم: $a<\sqrt{N}<a+1$، خواهیم‌داشت:

$$\frac{a(a^2+3N)}{3a^2+N}<\sqrt{N}<\frac{(a+1)[(a+1)^2+3N]}{3(a+1)^2+N}$$

۵۸۵. ثابت کنید که در هر مثلث داریم:

$$\sqrt{h_a}+\sqrt{h_b}+\sqrt{h_c}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{6R}$$

۵۸۶. اگر S مساحت یك چهارضلعی و m_1 و m_2 و m_3 قطعه‌هایی باشند که وسطهای ضلعها روبرو و وسطهای دو قطر را بهم وصل می‌کند، داریم:

$$m_1^2+m_2^2+m_3^2\geqslant 2S$$

۵۸۷. مطلوب است مقدار k، برای اینکه بـه ازای همهٔ مقادیر x نامساوی زیر برقرار باشد:

$$(2k-1)x^2+(7k+2)x-3k>(k+3)x^2+$$
$$+5(k+1)x-4(k+1)$$

۵۸۸. صحت نامساوی زیر را تحقیق کنید (نامساوی بونیاکوسکی):

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

۵۸۹. ثابت کنید که اگر $a>b>0$ و $m>n$ باشد داریم:

$$\frac{a^m-b^m}{a^m+b^m}>\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$$

صحت نامساویهای زیر را تحقیق کنید:

۵۹۰. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$ ۵۹۱. $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}>\sqrt{x}+\sqrt{y}$

۵۹۲. $(c\geqslant 0 ، b\geqslant 0 ، a\geqslant 0)\; a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$

۵۹۳. اگر $a_1، a_2، \ldots، a_n$ عددهایی غیر منفی باشند، ثابت کنید:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

۵۹۴. اگر $a_1، a_2، a_3، \ldots، a_n$ عددهایی مثبت و $a_1a_2\ldots a_n=1$ باشد، ثابت کنید:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 2^n$$

صحت نامساویهای زیر را تحقیق کنید: $(n>1)$:

۵۹۵. $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$ ۵۹۶. $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

۵۹۷. $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<3$

۵۹۸. $\sqrt[n]{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}\geqslant\sqrt{n}$

۵۹۹. ثابت کنید که در هر مثلث نامساوی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{4}{R^2}$$

(a ، b ، c ضلعها ، p نصف محیط و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است).

این دستگاهها را حل کنید

۶۰۰. $\begin{cases}3x+2y>7\\4y+2x>3\end{cases}$

۶۰۱. $\begin{cases}3x-1>x+3y\\x(1-3x)>4x-3x^2-2y\end{cases}$

۶۰۲. $\begin{cases}3x+2y=6\\x^2+y^2>4\\xy<1\end{cases}$

۶۰۳. $\begin{cases}y>x^2\\x>y^2\end{cases}$

۶۰۴. $\begin{cases}y-x+1>0\\2x-y-3>0\end{cases}$

۶۰۵. $\begin{cases}2x-y+1<0\\9x-3y-2<0\end{cases}$

۶۰۶. $\begin{cases}x-2y+1<0\\2x-y-1<0\\x-y+1>0\end{cases}$

۶۰۷. $\begin{cases}4x-y-z+1>0\\x-y+z+2>0\end{cases}$

۶۰۸. $\begin{cases}4x-y-z+1<0\\x-y+z+2>0\end{cases}$

۶۰۹. $\begin{cases}y^2-2ax<0\\x^2+y^2-2ax>0\end{cases}\ (a>0)$

۶۱۰. $\begin{cases} x^2+y^2<4 \\ x-y+1=0 \end{cases}$

۶۱۱. $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z-y+1>0 \end{cases}$

۶۱۲. جوابهای نامعادلهٔ $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$ را پیداکنید.

۶۱۳. به ازای چه مقادیری از k، نامساوی زیر برای همهٔ مقادیر x برقرار است:

$$\left|\frac{x^2-kx-1}{x^2+x+1}\right|<3$$

۶۱۴. مقادیری از a رابدست آورید که به‌ازای آنها نامعادله‌های زیرجواب مشترك نداشته باشند:

$$\begin{cases} ax^2+(a-3)x+\frac{2}{a}-2a\geqslant 0 \\ ax\geqslant a^2-2 \end{cases}$$

۶۱۵. کدام بزرگترند: 21^{23} یا 23^{21}؟ 555^{553} یا 553^{555}؟

۶۱۶. $a_1, a_2, \ldots$ رادنباله‌ای از عددهای غیرمنفی فرض می‌کنیم، G_n واسطهٔ هندسی n جملهٔ اول این دنباله است. ثابت کنید:

$$nG_n-(n-1)G_{n-1}\leqslant a_n$$

۶۱۷. ثابت کنید:

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_nb_n}{a_n+b_n}\leqslant\frac{(a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n)}{(a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n)}$$

که در آن $a_1,\ldots,a_n$ و $b_1,\ldots,b_n$ عددهایی مثبت‌اند.

۶۱۸. اگر a و b عددهایی طبیعی باشند، ثابت کنید:

$$2\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}}\leqslant a^2+b^2$$

۶۱۹. ثابت کنید اگر $a<\sqrt[n]{N}<a+1$ باشد، تقریب زیر هم‌درست‌است:

$$\frac{nNa}{a^n+(n-1)N}<\sqrt[n]{N}<\frac{(n-1)a^n+N}{na^{n-1}}$$

۶۲۰. اگر n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید:

$$\left(2-\frac{1}{n}\right)^n\geqslant n$$

۶۲۱. اگر $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i=1,2\dots,n)$ ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$$

۶۲۲. ثابت کنید که اگر $a>c$ و $b>d$ باشد، داریم:

$$(a+b+c+d)^2>8(ad+bc)$$

۶۲۳. بدون حل دستگاه معادله‌های

$$ax^2+by^2=x-y\ ;\ ax+by=m$$

ثابت کنید که وقتی دارای ریشه‌های حقیقی است که داشته باشیم:

$$\frac{\sqrt{ab}}{|a+b|}<\frac{1}{2m}$$

۶۲۴. اولاثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n\geqslant 3$ داریم: $2^n>2n+1$

ثانیاً بازای $n\geqslant 5$ داریم: $2^n>n^2$. ثالثاً بازای $n\geqslant 10$ داریم:

$$2^n>n^3$$

ثابت کنید برای همهٔ مقادیر طبیعی $n\geqslant 2$ داریم:

.۶۲۵ $(1+x)^n>1+nx$ ، $(x>-1)$

.۶۲۶ $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$

.۶۲۷ $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$

۶۲۸. ثابت کنید برای مقادیر مثبت a و b داریم:

$$2^{n-1}(a^n+b^n)\geqslant(a+b)^n$$

۶۲۹. برای مقادیر طبیعی $n\geqslant 3$ ثابت کنید: $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!$

۶۳۰. اگر n عددی طبیعی باشد ثابت کنید:

$$\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n-1}<n$$

۶۳۱. ثابت کنید:

$$\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\dots+\sqrt{c}}}}<\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$$

۶۳۲. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

۶۳۳. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

۶۳۴. فاصلهٔ تغییرات x را در این تابع معلوم کنید:

$$y=x+\sqrt{y^2+2(x+1)y+4x}$$

۶۳۵. ثابت کنید نامساوی $\frac{x^3(1-x)}{x^2-x+1}<3$ همیشه برقرار است.

۶۳۶. ثابت کنید به ازای همهٔ مقادیر x و $\lambda\neq 0$ نامعادلهٔ زیر همیشه برقرار است:

$$\frac{(\lambda+1)x^2+\lambda x+\lambda}{x^2+x+1}>\lambda$$

۶۳۷. اگر a، b، c، d و e عددهای حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geqslant a(b+c+d+e)$$

۶۳۸. اگر $0<\alpha<90^\circ$ باشد، ثابت کنید:

$$7^7\sin^4\alpha\cos^{10}\alpha\leqslant 12500$$

۶۳۹. ثابت کنید که اگر:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=1 \text{ و } \sum_{i=1}^{n}b_i=1\ ,\ a_i\geqslant 0\ ,\ b_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$$

داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}>1$$

۶۴۰. به ازای چه مقادیری از عددهای طبیعی a و b، عدد a^2+7b^2+811 بر $4ab+22a+47b$ قابل قسمت است؟

۱۳

تمرینهایی از تصاعدها

و لگاریتم

احتیاجی نبود در بارهٔ آنچه که حرف تازه‌ای نداشتیم بخش جداگانه‌ای باز کنیم و همان حرفهای کتابهای عادی دبیرستانی را تکرار کنیم. در این زمینه تنها به ذکر نمونهٔ مسأله‌ها پرداخته‌ایم و حتی دراین مورد هم با امساك قدم برداشته‌ایم تا اولا خواننده را درانبوه مسأله‌ها گم نکنیم، ثانیاً مساله‌هایی را که در کتابهای مشابه وجود دارد، تکرار نکرده باشیم.

اگر احتمالا در مورد این بخش نکتهٔ تازه‌ای وجود داشته باشد، ضمن حل مسأله‌ها از آنها گفتگو کرده‌ایم.

ولی به‌هرحال حل تمرینهای این بخش را بـه علاقمندان توصیه می‌کنیم.

۱. تصاعدها

۶۴۱. آیا مثلثی وجود دارد که هم زاویه‌ها و هم‌ضلعهای‌آن به تصاعد حسابی باشند؟

۶۴۲. اولا یك تصاعد حسابی ، ثانیاً یك تصاعد هندسی پیدا کنید که عددهای ۱۱ و ۴۴ و۷۰۴ جمله‌هایی از آنها باشند.

۶۴۳. تصاعد حسابی پیدا کنید.که مجموع n جملهٔاول‌آن مساوی $۲n^۲+۳n$ باشد.

۶۴۴. در خانه‌هـای خالی عددهایی قرار دهید که هر سطر و هر ستون به تصاعد هندسی باشند.

	۱۲		
			۱۴۴
۸۱			
		۲۸۸	

۶۴۵. ثابت کنید که اگر $a_۱$ ، $a_۲$ ، ... ، a_n مخالف صفر باشند و یك تصاعد حسابی تشکیل دهند، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{a_۱a_۲}+\frac{۱}{a_۲a_۳}+\frac{۱}{a_۳a_۴}+\dots+\frac{۱}{a_{n-۱}a_n}=\frac{n-۱}{a_۱a_n}$$

۶۴۶. اگر $a_۱$ ، $a_۲$، ... ،a_n به تصاعدحسابی باشند،حاصل مجموع زیررا بدست آورید:

$$S=\frac{۱}{\sqrt{a_۲}+\sqrt{a_۱}}+\frac{۱}{\sqrt{a_۳}+\sqrt{a_۲}}+\frac{۱}{\sqrt{a_۴}+\sqrt{a_۳}}+\dots+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}}$$

۶۴۷. اگر S_1، S_2 و S_3 بترتیب مجموع n_1 جملهٔ اول و n_2 جملهٔ اول و n_3 جملهٔ اول از یك تصاعد حسابی باشند ثابت کنید :

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=0$$

۶۴۸. تصاعد حسابی بنویسید که جملهٔ اول آن ۱ و مجموع ۵ جملهٔ اول آن $\frac{1}{4}$ مجموع ۵ جملهٔ بعدی آن باشد.

۶۴۹. مطلوب‌است مجموع همهٔ عددهای دو رقمی که درتقسیم بر ۷ باقیمانده‌ای مساوی ۳ داشته باشند.

۶۵۰. حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$(4\sqrt{3}+8)\left[\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\dots\right]$$

۶۵۱. در یك تصاعد هندسی نزولی ، جملهٔ دوم برابر است با ۶ و مجموع تمام‌جمله‌هامساوی $\frac{1}{8}$ مجموع مربعهای‌این‌جمله‌هااست. تصاعدرا معین کنید.

۶۵۲. ۳ عدد به مجموع ۲۶ تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند واگر به‌ترتیب به‌آنها عددهای ۱، ۶و۳ را اضافه کنیم،سه عدد بدست می‌آید که تشکیل تصاعدحسابی می‌دهند. این عددها را پیداکنید.

۶۵۳. اگرضلعهای یك مثلث بـه تصاعد هندسی بـاشند ، حدود قدرنسبت را پیدا کنید.

۶۵۴. آیا ۳ عدد می‌توان پیدا کرد که در عین حال هم به تصاعد حسابی و هم به تصاعد هندسی باشند؟

۶۵۵. ثابت کنید:

$$\underbrace{11\cdots1}_{k}\,\underbrace{55\cdots5}_{k-1}6=\underbrace{33\cdots3}_{k-1}4^2$$

۶۵۶. دریك تصاعد حسابی به‌جمله‌های a_1، a_2، a_3، ...می‌دانیم $a_{m+n}=A$ و $a_{m-n}=B$ ، مطلوب است محاسبهٔ a_m و a_n.

۶۵۷. دریک تصاعدهندسی به‌جمله‌های $a_1, a_2, a_3, \dots$ می‌دانیم $a_{m+n}=A$ و $a_{m-n}=B$، مطلوب‌است محاسبهٔ a_m و a_n.

۶۵۸. ثابت کنید که اگر a, b, c, d به تصاعد هندسی باشند، داریم:

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$$

۶۵۹. درچندجمله‌ای $f(x)=ax^4+bx^3+4x^2+dx+l$ ضریبهای a, b و ۴ به تصاعد هندسی و $4, d, l$ به تصاعد حسابی هستند. اگر $f(x)$ بر x^2+x+1 قابل‌قسمت باشد، $f(x)=0$ را حل کنید.

۶۶۰. اگر a, b, c, d چهار جملهٔ متوالی از یك تصاعد حسابی باشند، ثابت کنید عبارت $abcd+(b-c)^4$ مربع کامل است.

۶۶۱. m را چنان پیدا کنید که ریشه‌های معادلهٔ :

$3x^4-2(2m+1)x^2+m+1=0$ به تصاعد حسابی باشند.

۶۶۲. اگر a, b و c بترتیب جمله‌های mام ، nام و pام یك تصاعد هندسی باشند، ثابت کنید:

$$a^{n-p}.b^{p-m}.c^{m-n}=1$$

۶۶۳. اگر $a_1, a_2, \dots$ و a_n به تصاعد حسابی باشند، مطلوب‌است محاسبه:

1) $S_1=a_1a_2+a_2a_3+\dots+a_{n-1}a_n$

2) $S_2=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\dots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}$

3) $S_3=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_n^2$

4) $S_4=a_1^3+a_2^3+a_3^3+\dots+a_n^3$

۶۶۴. x را چنان پیدا کنید که $\log 2$ ، $\log(2^x-2)$ و $\log(2^x+2)$ به تصاعد حسابی باشند.

۶۶۵. ثابت کنید که اگر a, b و c به تصاعد هندسی باشند، $\frac{1}{\log_a x}$ ، $\frac{1}{\log_b x}$ و $\frac{1}{\log_c x}$ به تصاعد عددی خواهند بود.

۶۶۶. اولا مجموع مربعهای عددهای زوج را تا $2n$، ثانیاً مجموع مربعهای عددهای فرد را تا $(2n-1)$ بدست آورید.

۶۶۷. در معادلهٔ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ چه رابطه‌ای بین ضریبها

برقرار باشد، تا ریشه‌ها به‌تصاعد حسابی باشند.

۶۶۸. ثابت‌کنید که اگر a، b و c به تصاعد حسابی باشند $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و $\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ و $\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ نیز تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند، همچنین اگر a^2 ، b^2 و c^2 تشکیل تصاعد حسابی بدهند $\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$ ، $\frac{f(c)-f(a)}{c^2-a^2}$ و $\frac{f(c)-f(b)}{c^2-b^2}$ نیز به تصاعد حسابی‌خواهند بود [$f(x)$ یك تابع غیرمشخص نسبت به متغیر x است].

۶۶۹. اگر ضلعهای یك‌چهارضلعی محدب جمله‌های متوالی یك تصاعدهندسی باشند، ثابت کنید قدرنسبت این تصاعد بین $\frac{1}{2}$ و ۲ واقع است .

۲. لگاریتم

۶۷۰. این معادله را حل کنید:

$$(\log_a c)^{\log_b \log^2_a x} + \log_a c = \log_a ac[(\log_a x)^{\log_b \log_a c}]$$

۶۷۱. اگر $\log 2 = \alpha$ و $\log 3 = \beta$ باشد، مطلوب‌است‌محاسبهٔ $\log_{15}\sqrt[5]{11/25}$

۶۷۲. اگر $\log_{12} 27 = a$ باشد ، $\log_6 16$ را پیدا کنید.

بدون استفاده از جدول لگاریتم ، حاصل هر یك از عبارتهای زیر را بدست‌آورید:

۶۷۳. $\log 5 \log 20 + \log^2 2$

۶۷۴. $10 \times 100^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 2}$

۶۷۵. $100^{\frac{1}{2} - \log\sqrt[4]{4}}$

۶۷۶. $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}}$

۶۷۷. $49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$

۶۷۸. $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$

۶۷۹. اگر $4a^2+9b^2=13ab$ باشد، ثابت کنید:

$$\log\frac{۲a+۳b}{۵}=\frac{\log a+\log b}{۲}$$

۶۸۰. اگر $a^۲+b^۲=۷ab$ باشد، ثابت کنید:

$$\log\frac{a+b}{۳}=\frac{۱}{۲}(\log a+\log b)$$

۶۸۱. اگر $a^۲+b^۲=c^۲$ باشد، ثابت کنید:

$$\log_{b+c}a+\log_{c-b}a=۲\log_{b+c}a\log_{c-b}a$$

۶۸۲. اگر $a=\log_b c$ و $b=\log_c a$ و $c=\log_a b$ باشد، ثابت کنید:

$$۱)\ abc=۱$$

$$۲)\ \frac{a}{ab+a+۱}+\frac{b}{bc+b+۱}+\frac{c}{ca+c+۱}=۱$$

۶۸۳. اگر داشته باشیم:

$$x=\log_a(bc)\ ;\ y=\log_b(ca)\ ;\ z=\log_c(ab)$$

ثابت کنید: $x+y+z+۲=xyz$

۶۸۴. اگر x و y و z به تصاعد توافقی باشند، ثابت کنید:

$$\log(x+z)+\log(x-۲y+z)=۲\log(x-z)$$

۶۸۵. اگر بدانیم $\log\alpha$ ، $\log\beta$ و $\log\gamma$ ریشه‌های معادلهٔ:

$$ax^۳+۳bx^۲+۳cx+d=۰$$

باشند ، حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$S=\log\frac{\alpha}{\beta}\cdot\log\frac{\beta}{\gamma}+\log\frac{\beta}{\gamma}\cdot\log\frac{\gamma}{\alpha}+\log\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\log\frac{\alpha}{\beta}$$

معادله‌های زیر را حل کنید:

۶۸۶. $\log_۴\log_۳\log_۲x=۰$

۶۸۷. $\log_a\left\{۱+\log_b[۱+\log_c(۱+\log_p x)]\right\}=۰$

۶۸۸. $\log_۴\left\{۲\log_۳[۱+\log_۲(۱+۳\log_۲x)]\right\}=\frac{۱}{۲}$

۶۸۹. $\log_{۱۶}x+\log_۴x+\log_۲x=۷$

۶۹۰. $\log_a x-\log_{a^۲}x+\log_{a^۴}x=\frac{۳}{۴}$

۶۹۱. $1+a+a^2+\dots+a^{x-1}+a^x=$
$$=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$$

۶۹۲. $5^{\log x}-3^{\log x-1}=3^{\log x+1}-5^{\log x-1}$

۶۹۳. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2 \\ \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}\sqrt{a}+\log_{\frac{y}{\sqrt{b}}}\sqrt{b}=\dfrac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}$

۶۹۴. $\begin{cases} \log_4 x-\log_2 y=0 \\ x^2-5y^2+4=0 \end{cases}$

۶۹۵. $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2 \\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2 \\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2 \end{cases}$

۶۹۶. $\begin{cases} \sqrt[10]{2^x}\sqrt{\sqrt[5]{2^y}}=\sqrt[x]{128} \\ \log(x+y)=\log 40-\log(x-y) \end{cases}$

۶۹۷. $\log_x ay=p \;;\; \log_y bx=q$

۶۹۸. معادلهٔ زیر مفروض است:

$$\log_{100} x^2=\log_{\sqrt{x}} 10^{\left(\log 10a-\left|\log\frac{x}{a}\right|\right)}$$

اولا به‌ازای چه مقادیری‌از a این معادله جواب‌دارد؛ ثانیاً جوابهای آنرا پیدا کنید:

۶۹۹. این نامعادله را حل کنید:
$$\log_{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}(x^2-3x+1)\geq 0$$

این معادله‌ها را حل کنید:

۷۰۰. $\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^x+\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^x-1=0$

۷۰۱. $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x-6=0$

۷۰۲. $13^x+12^x-25=0$

۷۰۳. $2x+3\log(3x+4)-7=0$

۷۰۴. $2^x+3\log x-2=0$

۷۰۵. $\log_{\frac{\pi}{4}} x + \log_{\frac{\pi}{5}}\left(x + \frac{\pi}{5} - 1\right) - 1 = 0$

۷۰۶. $2\log_{\frac{\pi}{4}} x - 3\sqrt{\frac{4x}{\pi}} + 1 = 0$

۷۰۷. $3 \times 16^x + 36^x - 2 \times 81^x = 0$

۷۰۸. $5^x - 4^x - 3^x = 0$

۷۰۹. $3^{2-x} + 4^{2x} - 7 \times 2^x - 2 \times 3^x = 0$

۷۱۰. $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$

۷۱۱. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{6}\right)^x - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^x = 1$

۷۱۲. $2 \times 9^{\log_2 0/5x} = x^{\log_2 6} - x^2$

١٤
مجموعه‌ها

وقتی کــه ژرژکانتور نظریهٔ مجموعه‌ها را بنیان گذاشت ، گمان نمی‌کرد که با گذشت زمان ، روشهای این نظریه به عنوان یکی‌از پرقدرت‌ترین روشها برهمهٔ بخشهای‌ریاضیات سایه بیفکند.

این روزها برای به‌کرسی نشاندن روش مجموعه‌ها در همهٔ جهان مسابقه‌ای در گرفته است‌وکشور ماهم در برنامه‌های‌جدیدی که برای آموزش‌متوسطه طرح‌ریزی می‌شود، ازاین مسابقه‌بی‌نصیب نمانــده است، به‌همین مناسبت آشنایی دانش‌آمــوزان‌به‌این نظریه ضروری است و ما هم در اینجا بحث مختصری از آنرا آورده‌ایم.

مطالعهٔ کتاب کوچك «نظریهٔ مجموعه‌هــا» که از اثرهای ریاضیدان معروف معاصر «سرپینسکی» است می‌تواند به این هدف کمك بیشتری باشد.

۱. مجموعه

در گفتگوهای روزانه اغلب به مفهومهایی از نوع «گروه» ، «دسته»، «خانواده» ، «کلکسیون» و غیره برخورد می‌کنیم: فلانی «کلکسیون» تمبر دارد، «مجموعهٔ» بهترین اثرهای نقاشی معاصر در فلان موزه گردآوری‌شده است، گروهی‌از بهترین ریاضیدانها دربحث شرکت داشتند وغیره. «کلکسیون» «گروه» وغیره را «**مجموعه**» هم می‌توان نامید. همچنین می‌توان ازمجموعهٔ دانش‌آموزان یك کلاس ، مجموعهٔ صفحه‌های کتاب جبر ، مجموعهٔستاره‌ها ، مجموعهٔ همهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۶ ، مجموعه‌ای که از سه حرف f،a و x تشکیل شده است، مجموعهٔ همهٔ مثلثها و غیره صحبت کرد.

۲. عضو مجموعه

هر چیزی‌که متعلق به‌یك مجموعه باشد ، عضو آن مجموعه نامیده می‌شود. در مجموعهٔ اثرهای نقاشی ، هر تابلو نقاشی یك عضو آن مجموعه است؛ هردانش‌آموز عضوی از مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس خود است؛ هر یك ازعددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۶ عضوی ازمجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های عدد ۶ هستند وغیره.

Z را مجموعهٔ دانش‌آموزان یك کلاس و a را دانش‌آموزی از آن کلاس‌فرض می‌کنیم. دراینصورت گوییم: «a عضو Z است» یا «a به‌مجموعهٔ Z تعلق دارد» و آنرا اینطور می‌نویسیم: $a \in Z$.

$$\boxed{\begin{array}{c} a \in Z \\ \text{a به Z تعلق دارد} \end{array}}$$

bرا دانش آموزی از کلاس دیگر فرض می‌کنیم ، b عضو مجموعهٔ Z

نیست، b به Z تعلق ندارد و بطور خلاصه می‌نویسیم: $b \notin Z$.

$b \notin Z$
b به Z تعلق ندارد

D_n را همهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد طبیعی n می‌گیریم، مثلا $D_۶$ یعنی همهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۶. دراینصورت می‌توانیم بنویسیم: $۱ \in D_۶$، $۲ \in D_۶$، $۳ \in D_۶$، $۵ \notin D_۶$، $۶ \in D_۶$.

۳. مجموعه‌های معین

مجموعهٔ Z را به‌این ترتیب تعریف می‌کنیم: «Z عبارت‌است از همهٔ عددهای طبیعی کوچکتر از ۷». با این تعریف معلوم می‌شود که چه عددهایی به‌مجموعهٔ Z تعلق دارند وچه عددهایی عضو مجموعهٔ Z نیستند. مثلا $۳ \in Z$، زیرا ۳ عدد طبیعی کوچکتر از ۷ است؛ $۸ \notin Z$، زیرا ۸ عدد طبیعی کوچکتر از ۷ نیست. می‌توان عددهایی که مجموعهٔ Z را به‌وجود می‌آورد به‌هرترتیب دلخواه نوشت و به صورت یکی از تساویهای زیر نشان داد:

$$Z=\left\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\right\} \text{ یا } Z=\left\{۱,۵,۳,۴,۶,۲\right\} \text{ یا } \dots$$

دربارهٔ یك‌مجموعه تنهاوقتی می‌توان صحبت کرد که یا همهٔ عضوهای آنرا بشناسیم ویاشرطهایی راداشته‌باشیم که به‌کمك‌آنهابتوان عضو این‌مجموعه را شناخت و آنهایی را که عضو این مجموعه نیستند تشخیص داد.

۴. زیر مجموعهٔ یك مجموعهٔ مفروض

Z را مجموعهٔ دانش‌آموزان مدرسهٔ ما و Z' را مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس خودمـان می‌گیریم. هر عضو مجموعهٔ Z' ضمناً عضو مجموعهٔ Z هم می‌باشد، زیرا هـر دانش آموز کلاس مـا دانش‌آموز مدرسهٔ مـا هم هست. می‌توانیم بگوییم:

اگر $a\in Z'$ ، آنگاه $a\in Z$

بجای اصطلاح «اگر ... آنگاه ...» می‌توانیم از علامت $\Longrightarrow$ استفاده کنیم و بنویسیم:

$$a\in Z' \Longrightarrow a\in Z$$

اگر a متعلق‌به Z' باشد ، آنگاه a متعلق به Z هم خواهد بود.

این مفهوم رابترتیب دیگری هم می‌توان بیان کرد و گفت‌که مجموعهٔ Z' به مجموعهٔ Z تعلق دارد و بطور خلاصه نوشت: $Z'\subset Z$.

$$Z'\subset Z$$

Z' به Z تعلق دارد

مجموعهٔ Z' را **زیر مجموعه** یا جزء مجموعهٔ Z گویند.

D_6 را مجموعهٔ همهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۶ و D_{12} را مجموعهٔ همهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ فرض می‌کنیم. دراینصورت

$$D_6=\left\{1,2,3,6\right\}\ ;\ D_{12}=\left\{1,2,3,4,6,12\right\}$$

مجموعهٔ D_6 زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ D_{12} است، زیرا هر عددی‌که عضو مجموعهٔ D_6 باشد، عضو مجموعهٔ D_{12} هم خواهدبود:

$$D_6\subset D_{12}$$

۵. تساوی مجموعه‌ها

Z را مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیحی که‌بر۱۴۳ قابل قسمت باشند و Z' رامجموعهٔ عددهای صحیحی که بر ۱۱ و۱۳ قابل قسمت باشند، فرض‌می‌کنیم. شرطهایی که هر یك از این دو مجموعه‌را معین می‌کنندبا یکدیگرفرق‌دارند، با وجود این Z و Z' تنها یك مجموعه را مشخص می‌کنند . هرعددی کــه متعلق به مجموعهٔ Z ، یعنی بر ۱۴۳ قابل قسمت باشد ، حتماً بر ۱۱ و ۱۳

هم قابل قسمت است، زیرا ۱۳×۱۱=۱۴۳ . بنابراین چنین عددی عضو مجموعهٔ Z' هم خواهد بود. برعکس هر عضو مجموعهٔ Z' عددی است که بر ۱۱ و ۱۳ قابل قسمت است و بنابراین بر ۱۴۳ هم قابل قسمت خواهد بود و در نتیجه عضوی از مجموعهٔ Z است. می‌توان نوشت:

$$a \in Z \iff a \in Z'$$

اگر جهت راست پیکان را در نظر بگیریم به‌این معناست که: «اگر a متعلق به Z باشد، آنگاه a متعلق به Z' است» و اگر جهت‌چپ پیکان را در نظر بگیریم: «اگر a متعلق به Z' باشد، آنگاه a متعلق به Z است». این‌عبارت را به این ترتیب هم می‌توان خواند : «a تنها و تنها وقتی به Z تعلق دارد که متعلق به Z' باشد». همین عبارت‌را به‌این ترتیب هم می‌توان بیان کرد:

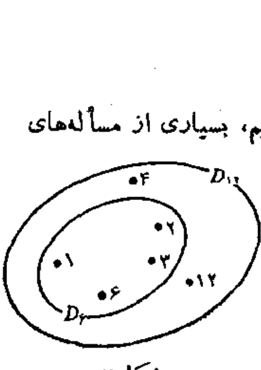
$$Z \subset Z' \quad \text{و} \quad Z' \subset Z$$

به این ترتیب علامتهای Z و Z' یك مجموعه را مشخص می‌کنند، بنابراین $Z = Z'$.

$Z = Z'$ Z همان Z' است	$a \in Z \iff a \in Z'$ a تنها وتنها وقتی به Z تعلق داردکه متعلق به Z' باشد. $Z \subset Z'$ و $Z' \subset Z$

۶. نمایش هندسی مجموعه‌ها

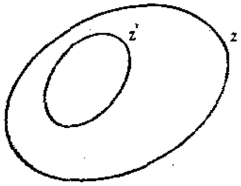
اگر از نمایش هندسی مجموعه‌ها استفاده کنیم، بسیاری از مسأله‌های مربوط به‌خاصیتهای مجموعه‌ها رامی‌توان باسادگی بیشتری حل کرد. مثلا شکل۴ با سادگی بیشتری رابطهٔ $D_6 \subset D_{12}$ را نشان می‌دهد.



شکل۴

هر مجموعهٔ Z را می‌توان به وسیلهٔ منحنی بسته‌ای نشان‌داد، بطوری‌که عضوهای این مجموعه بعضی از نقطه‌های واقع در داخل این منحنی را نشان دهند (مشخص کردن

خود این نقطه‌ها روی شکل اجباری نیست) . مثلا از شکل ۵ می‌خوانیم که مجموعهٔ Z' جزئی ازمجموعهٔ Z است، اگر چه عضوهای این دو مجموعه را نمی‌بینیم و از نوع این مجموعه‌ها هم‌اطلاعی نداریم. مثلا ممکن‌است Z' مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس ما و Z مجموعهٔ دانش‌آموزان مدرسهٔ ما باشد ؛ یا ممکن است Z' مجموعهٔ عددهای زوج و Z مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح باشد وغیره. معنای نشانه‌های Z و Z' می‌تواند متفاوت باشد ، ولی در هرحال Z' جزئی از Z است.



شکل ۵

۷. حاصل‌جمع منطقی (اجتماع) مجموعه‌ها

در جدول زیرورزشهای مورد علاقهٔ هریك از شش نفر a ، b ، c ، d ، e و f معین شده است:

	a	b	c	d	e	f	
اسکی	بله			بله	بله		$Z_a=\{a,d,e\}$
پاتیناژ	بله		بله		بله		$Z_p=\{a,c,e\}$
دو	بله	بله		بله			$Z_d=\{a,b,d\}$
پرش طول	بله					بله	$Z_t=\{a, f\}$
پرش‌ارتفاع	بله	بله					$Z_e=\{a, b\}$
فوتبال			بله	بله	بله	بله	$Z_f=\{c, d,e,f\}$

مجموعهٔ افرادی از این شش‌نفررا که به‌یکی از ورزشها علاقه دارند با نشانهٔ Z و یك اندیس نشان داده‌ایم، مثلا منظور ما از Z_t عبارت است از مجموعهٔ افرادی که به پرش طول علاقمندند.

حرف Z را برای مجموعهٔ همهٔ افرادی از این شش نفر می‌گیریم که لااقل به‌یکی از ورزشهای زمستانی، یعنی اسکی یـا پاتیناژ، علاقمند باشند. می‌بینیم که:

$a \in Z_a$ و $a \in Z_p$ یعنی $a \in Z$

$c \in Z_p$ یعنی $c \in Z$

$d \in Z_a$ یعنی $d \in Z$

$e \in Z_a$ و $e \in Z_p$ یعنی $e \in Z$

مجموعهٔ Z را حاصل‌جمع منطقی (یا اجتماع) دو مجموعهٔ Z_a و Z_p می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$Z = Z_a \cup Z_p = \{a, d, e\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\}$$

علامت $\cup$ (که ناو نامیده می‌شود) نشان می‌دهد که مجموعه‌های Z_a و Z_p را در یك مجموعه متحدکرده‌ایم که حاصل‌جمع منطقی آنها نامیده می‌شود.

اگر W را مجموعه‌ای از افراد این شش نفر بگیریم که به ورزشهای سبك دو، پرش طول وپرش ارتفاع علاقمندند، در اینصورت باید همهٔ عضوهای مجموعهٔ Z_d ، همهٔ عضوهای مجموعهٔ Z_t و همهٔ عضوهای مجموعهٔ Z_e را در مجموعهٔ W به حساب بیاوریم. بنابراین:

$$W = Z_d \cup Z_t \cup Z_e = \{a, b, d\} \cup \{a, f\} \cup \{a, b\} = \\ = \{a, b, d, f\}$$

حاصل‌جمع منطقی‌چند مجموعه، یعنی‌مجموعه‌ای‌که شامل‌همهٔ‌عضوهای این مجموعه‌ها باشد . برای اینکه بدانیم یك چیز عضو مجموعهٔ حاصل‌جمع هست ،کافی است لااقل عضو یکی از مجموعه‌های مفروض باشد.

$a\in Z_1 \cup Z_2 \Leftrightarrow a\in Z_1$ یا $a\in Z_2$	$Z=Z_1\cup Z_2$ Z حاصل‌جمع منطقی Z_1 و Z_2 است

مثال. مطلوب است مجموعهٔ

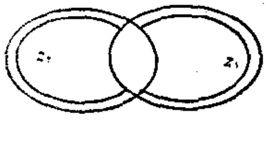
$$Z=D_{10}\cup D_6$$

چون $D_{10}=\{1,2,5,10\}$ و $D_6=\{1,2,3,6\}$، بنابراین

$$Z=D_{10}\cup D_6=\{1,2,3,5,6,10\}$$

در شکل ۶، دوروه‌ای که با دو خط مشخص شده است ، حاصل‌جمع منطقی دو مجموعهٔ Z_1 و Z_2 را نشان می‌دهد.

درشکل۷، مجموعهٔ $Z=D_{10}\cup D_6$ نشان داده شده است.



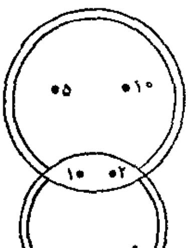
شکل ۶

۸. حاصلضرب منطقی (اشتراك) مجموعه‌ها

مجموعهٔ تهی

U را مجموعهٔ همهٔ دانش آموزانی می‌گیریم که به‌هردو ورزش زمستانی‌ازجدول‌صفحهٔ۳۵۹علاقمند باشند. بنابراین‌تنها دانش‌آموزانی عضو مجموعهٔ U هستند کـه هم عضو مجموعه Z_a و هم عضو مجموعهٔ Z_p باشند. در نتیجه

$$U=\{a, e\}$$



شکل ۷

مجموعهٔ U عبارت‌است از فصل‌مشترك دو مجموعهٔ Z_a و Z_p و به اینصورت نوشته می‌شود:

$$U=Z_a\cap Z_p=\{a,d,e\}\cap\{a,c,e\}=\{a, e\}$$

مجموعهٔ U را حاصلضرب منطقی (یا اشتراك) مجموعه‌هـای Z_a و Z_p و علامت $\cap$ را تاق گویند.

V را مجموعهٔ همهٔ دانش‌آموزانی می‌گیریم که به هر سه ورزش سبك (دو، پرش طول و پرش ارتفاع) علاقمند باشند، یعنی:

$$V=Z_d\cap Z_t\cap Z_e=\left\{a,b,d\right\}\cap\left\{a,\ f\right\}\cap\left\{a,\ b\right\}=\left\{\ a\ \right\}$$

مجموعهٔ V تنها یك عضو دارد: a. تنها دانش‌آموز a به هرسه ورزشی که سبك نامیده‌ایم، علاقمند است. به‌همین‌مناسبت مجموعهٔ V را **مجموعهٔ یك عضوی** گویند. مجموعهٔ V فصل مشترك مجموعه‌های Z_d ، Z_t و Z_e است .

Y را مجموعه‌ای ازشش‌دانش‌آموزمی گیریم که نسبت به همهٔ ورزشهای جدول صفحهٔ ۳۵۹ علاقمندباشند. می‌بینیم که چنین دانش‌آموزی وجودندارد. می‌گوییم که مجموعهٔ Y تهی‌است. مجموعهٔ تهی را با علامت Φ نشان‌می‌دهند بنابراین :

$$Y=\Phi$$

Φ
مجموعهٔ تهی

حاصلضرب منطقی (یااشتراك) چند مجموعه مفروض ، به مجموعه‌ای گفته می‌شودکه هر عضو آن عضو هریك از مجموعه‌های مفروض باشد .

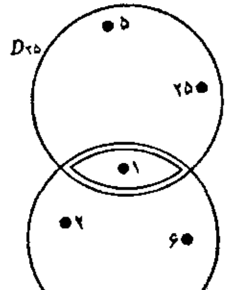
برای اینکه مطمئن شویم کـه چیزی عضو مجموعهٔ حاصلضرب است ، باید مطمئن شویم که این چیز عضو تمام مجموعه‌های مفروض می‌باشد .

$Z=Z_1\cap Z_2$ Z حاصلضرب منطقی Z_1 و Z_2 است Z اشتراك دو مجموعهٔ Z_1 و Z_2 است	$a\in Z_1\cap Z_2 \Longleftrightarrow a\in Z_1$ و $a\in Z_2$

مثال. مجموعهٔ $D_6\cap D_{25}$ را پیدا می‌کنیم.

چون $D_6=\left\{1,2,3,6\right\}$ و $D_{25}=\left\{\ 1,5,25\right\}$ ، پس:

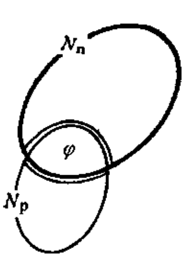
$$D_{۶} \cap D_{۲۵} = \{ ۱ \}$$



شکل ۸

در شکل ۸ بوسیلهٔ دورهٔ دو خطی، مجموعهٔ $D_{۶} \cap D_{۲۵}$ نشان داده شده است.

مجموعه‌ای که ازاشتراك(حاصلضرب‌منطقی) دو مجموعهٔ $D_{۶}$ و $D_{۲۵}$ بدست می‌آید تنها شامل يك عضو است ، یعنی ۱. وقتی کــه می‌نویسیم : $D_{۶} \cap D_{۲۵} = \{ ۱ \}$ به این معناست که عددهای ۶ و ۲۵ مقسوم‌علیه‌مشترکی بزرگتراز ۱ ندارند، یعنی نسبت به‌هم اولند.



شکل ۹

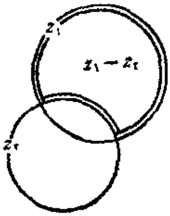
در شکل ۹ ، N_p عبارت است از مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی زوج (با دورهٔ نازك) و N_n مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی فرد (با دورهٔ کلفت). حاصلضرب منطقی‌این دومجموعه، مجموعه‌ای‌است که با دورهٔ دوخطی‌نشان داده شده است. از آنجا که این‌دو مجموعه عضو مشترك ندارند (چرا؟)، در داخل دوره‌ای که نمایندهٔ اشتراك دو مجموعهٔ N_p و N_n است، علامت مجموعهٔ تهی، یعنی Φ، را قرار داده‌ایم.

وقتی که دو مجموعه حتی‌یك عضو مشترك نداشته باشند، یعنی اشتراك آنها يك مجموعهٔ تهی باشد، آنها را **نامتقاطع** گویند.

مجموعه‌های N_p وN_n نا متقاطع‌اند، درحالی‌که مجموعه‌های $D_{۶}$ و $D_{۲۵}$ نامتقاطع نیستند.

۹. تفاضل مجموعه‌ها

مثال. در شکل ۱۰ دو مجموعه‌نشان داده شده است: $Z_{۱}$ و $Z_{۲}$. فرض



شکل ۱۰

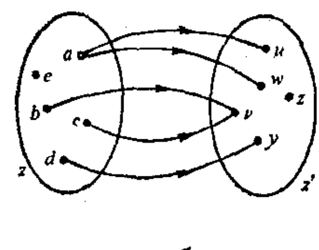
کنید Z_1 مجموعهٔ همهٔ دانش‌آموزان کلاس ما و Z_2 مجموعهٔ همهٔ دانش‌آموزانی از مدرسهٔ ما که پیانو می‌نوازند، باشند. دورهٔ دوخطی مجموعه‌ای را مشخص می‌کند که شامل آن دانش‌آموزان کلاس ماست که پیانو نمی‌نوازند. این مجموعه را با $Z_1 - Z_2$ نشان می‌دهند و تفاضل دو مجموعهٔ Z_1 و Z_2 می‌نامند.

تفاضل دو مجموعهٔ Z_1 و Z_2 به مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از Z_1 گفته می‌شود که متعلق به Z_2 نباشند.

$Z = Z_1 - Z_2$ Z عبارت است از تفاضل دو مجموعهٔ Z_1 و Z_2	$a \in Z_1 - Z_2 \iff a \in Z_1$ و $a \notin Z_2$

۱۰. نگاشت مجموعه‌ها

۱. Z را مجموعهٔ دانش‌آموزان یك دبیرستان و Z' را مجموعهٔ دانش‌آموزان دبستانهایی که در خیابان این محل قرار دارند، فرض می‌کنیم. درشکل ۱۱ این مجموعه‌ها نشان‌داده شده‌است؛ نقطه‌هایی که بوسیلهٔ حرفها نشان داده شده است، بعضی از عضوهای این مجموعه‌هاهستند. هر پیکان از نقطه‌ای که نمایندهٔ دانش‌آموزی از دبیرستان است به‌طرف نقطه‌ای‌است که نمایندهٔ برادر یا خواهر او در دبستان است. در شکل ۱۱ می‌بینیم که دانش آموز a دوبرادر (یا دو خواهر

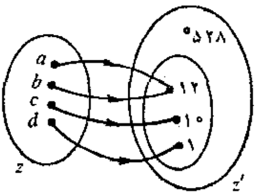


شکل ۱۱

یا یك خواهر و یك برادر) در دبستان دارد (w و u) ؛ دانش‌آموزان b و c برادر (یاخواهر) مشتر کی‌دارند (v)؛ دانش‌آموز d یك برادر (یا خواهر) دارد (y)؛ دانش‌آموز e برادر یا خواهری در دبستان ندارد ؛ z برادر یا خواهر دانش‌آموزی از دبیرستان نیست. از نقطه‌ای که نمایندهٔ یك عضو مجموعهٔ Z است ، می‌تواند یك یا چند پیکان خارج شود ، یا اصلا پیکانی خارج نشود (چرا؟). به نقطه‌ای که نمایندهٔ دانش‌آموزان دبستان است، ممکن است یك یا چند پیکان وارد شود و یا اصلا پیکانی وارد نشود (چرا؟)

پیکانها ارتباط بعضی از عضوهای مجموعهٔ Z را با بعضی از عضوهای مجموعهٔ Z' در **زوج مرتب** روشن می کنند: عضواول زوج (مبداء زوج) عبارت است از دانش‌آموز دبیرستان وعضو دوم زوج (منتهای زوج) عبارت است از برادر یا خواهری ازاوکه در دبستان است. درشکل ۱۱ زوجهای (a , u)، (a,w) ، (b,v) ، (c,v) ، (d,y) نشان داده‌شده است. زوجهای (a,u) و(a,w) دارای مبداء مشترك ومنتهای متمایزند. زوجهای (b,v) و (c,v) دارای یك منتها و مبداء متفاوتند.

۴. در شکل۱۲، مجموعهٔ Z چهار دانش‌آموز یك دبیرستان را نشان می‌دهد که به عنوان رئیس انجمن ریاضی دبیرستان کاندید شده‌اند ؛ Z' هم عبارت‌است‌از مجموعهٔ همهٔ عددهای‌طبیعی. پیکانها نشان می‌دهند که هریك از این کاندیدها ضمن انتخاب رئیس چند رأی آورده‌اند . از هر نقطه‌ای که نمایندهٔ یکی‌از کاندیدهاست، تنها یك پیکان‌خارج می‌شود (چرا؟)؛ به‌هر نقطه‌ای که نمایندهٔ یك عدد طبیعی است ممکن است یك یا چند پیکان وارد شود، یا اصلا پیکانی وارد نشود (چرا؟).



شکل ۱۲

به‌هرعضو مجموعهٔ Z ، یعنی بهر کاندید ریاست، تنها یك عدد طبیعی نسبت داده شده است، یعنی تعداد رأیهایی که ضمن انتخابات بدست آورده است. پیکانها زوجهای مرتب را مشخص می کنند . ابتدای این زوجها عبارت است‌از کاندیدهای ریاست، ومنتهای آنها تعداد رأیهایی که بدست آورده‌اند. در شکل زوجهای زیر وجود دارد:

$(a,۱۲)$ و $(b,۱۲)$ و $(c,۱۰)$ و $(d,۱)$

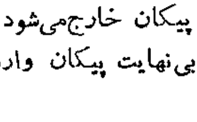
در مجموعهٔ این زوجها نمی‌تواند زوجهایی بـا یك مبداء و دو منتها وجود داشته باشد. چرا؟ در مثال قبل چگونه بود؟

وقتی که هر کاندید ریاست را به تعداد رأیهایی که آورده است نسبت می‌دهیم، گوییم مجموعهٔ Z را برجزئی از مجموعهٔ عددهای طبیعی نگاشته‌ایم.

عضوهایی از مجموعهٔ Z' (منتهای زوجها) که متناظر بـا عضوی از مجموعهٔ Z (ابتدای زوجها) می باشند ، نگارهٔ عضو مربوطهٔ Z درنگاشت داده شده ، نامیده می‌شود .

در مثال مـذکور، ۱۲ نگارهٔ a و هـم نگارهٔ b است ، ۱۰ نگارهٔ c و ۱ نگارهٔ d است . نگارهٔ تمام مجموعهٔ $\{a,b,c,d\}$ عبارت است از زیر مجموعه $\{۱۲,۱۰,۱\}$ از مجموعهٔ عددهای طبیعی.

۳. درشکل ۱۳، Z عبارت‌است از مجموعهٔ همه دایره‌ها و Z' مجموعهٔ همهٔ‌نقطه‌ها. هردایره به مرکز خود نسبت داده شده است. با اطلاع بر این مطلب از شکل۱۳ می‌فهمیم که‌دایره‌های aوb دارای مرکز مشترك A هستند.

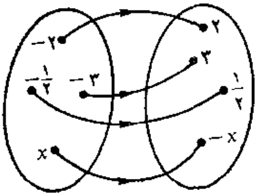


شکل ۱۳

از هر نقطه‌ای که نمایندهٔ یك‌دایره است تنها یك پیکان خارج‌می‌شود؛ ولی به‌هر نقطه‌ای کـه نمایندهٔ یك نقطهٔ هندسی است بی‌نهایت پیکان وارد می‌شود(درشکل ۱۳ تنها دو تا رسم شده است).چرا؟

وقتی که هردایره را به مرکز آن نسبت می‌دهیم، یك زوج مرتب‌تشکیل داده‌ایم: ابتدای این زوجها دایره‌هـا و منتهای آنها مرکزهـایشان خواهد بود. در مجموعهٔ این زوجها ، عضوهایی وجود ندارد که دارای یك مبداء و منتهای مختلف باشند. چرا؟ همین خاصیت را در مثال ۲ هم دیدیم. با وجود این بین مثالهای ۲ و ۳ اختلافی وجود دارد . در مثال ۲ ، عـدد ۵۲۸ از مجموعه Z' متناظر با هیچ عضوی از مجموعهٔ Z نیست (یعنی منتهای هیچ زوجی نیست) . در مثال ۳ ، هـر عضو مجموعهٔ Z' نگارهٔ عضوی از مجموعهٔ Z است (حتی نگارهٔ مشترك بی‌نهایت عضو مجموعهٔ Z وجود دارد؛ چرا؟).

با متناظر کردن هر دایره با مرکز آن ، مجموعهٔ همهٔدایره ها را برمجموعهٔ همهٔ نقطه ها نگاشته‌ایم. نگاشت مجموعهٔ Z عبارت است از تمام مجموعهٔ Z'.



شکل ۱۴

۴. Z را مجموعهٔ عددهای منفی و Z' را مجموعهٔ عددهای‌مثبت می‌گیریم (شکل ۱۴). هر عدد از مجموعهٔ Z را متناظر با عدد قرینهٔ آن‌در مجموعهٔ Z' قرار می‌دهیم. در اینصورت هر عضو x از مجموعهٔ Z درست‌مبداء یك‌زوج$(x ، -x)$؛ وهرعضو مجموعهٔ Z' درست‌منتهای یك‌زوج است. چرا؟

در شکل ۱۴، به نقطه‌ای که نمایندهٔ عدد مثبت‌است، هرگز بیش از یك پیکان وارد نمی‌شود. می‌گوییم کــه در این نگاشت **تناظر یك به یك** وجود دارد.

۵. Z را مجموعهٔ دانش‌آموزان a ، b ، c ، d ، e ، f می‌گیریم که به بازی مشغولند، به این ترتیب: پنج تا از آنها روی صندلیها نشسته‌اند و ششمی ایستاده است. دانش‌آموزانی‌که نشسته‌اندبلند می‌شوند و جای‌خود را عوض می‌کنند و در این ضمن آنکه ایستاده است سعی می‌کند روی‌صندلی بنشیند. اگر بــه این کار موفق شود، یکی‌از دیگران بدون صندلی می‌ماند وبازی را باخته است. هر دانش‌آموزرا با دانش‌آموزی‌که (نشسته یاایستاده) جای او را اشغال می‌کند ، متناظر می‌کنیم . به این ترتیب مجموعهٔ Z را بر خود مجموعهٔ Z در تناظر یك به یك نگاشته‌ایم .

نگاشت مجموعه‌ها

گوییم مجموعهٔ Z بر مجموعهٔ Z' نگاشته شده است ، وقتی که هر عضو مجموعهٔ Z درست به یك عضو از مجموعهٔ Z' نسبت داده شده باشد و ضمناً هر عضومجموعهٔ Z' متناظر بالااقل یك عضو مجموعهٔ Z باشد . از اینجامجموعهٔ زوجهای مرتب تشکیل می‌شود: هرعضو مجموعهٔ Z درست مبداء یکی اززوجها و هر عضو مجموعهٔ Z' منتهای لااقل یك زوج است .

مجموعهٔ همهٔ این زوجها را **نگاشت مجموعهٔ** Z برمجموعهٔ Z' گوییم. عضوی را که متناظر با عضوی از مجموعهٔ Z قرار می‌دهیم، **نگارهٔ** آن در نگاشت مفروض می‌نامیم. در مثالهای ۲، ۳، ۴ و ۵ نگاشت مجموعهٔ Z بر مجموعهٔ Z' یا زیر مجموعه‌ای از آن تعریف‌شده‌است. در مثال۵: $Z'=Z$.

اگر در نگاشت مفروض مجموعهٔ Z بر مجموعهٔ Z'، هر عضو مجموعهٔ Z' درست نگارهٔ یك عضو مجموعهٔ Z باشد (یعنی هـر مجموعهٔ Z' درست منتهای یك زوج باشد)، آنرا نگاشت مجموعهٔ Z بر Z' در تناظر یك به یك گوییم. در مثالهای ۴ و ۵ نگاشت در تناظر یك به یك شرح داده شده‌است.

در ریاضیات بجای کلمهٔ «نگاشت»، اسامی دیگری هم بکار می‌برند. در جبر اغلب نگاشت را **تابع** گویند. در هندسه نگاشت مجموعهٔ نقطه‌ها را بر مجموعهٔ نقطه‌ها **تبدیل** هم می‌گویند.

۱۱. مجموعه‌های مرتب

۱. در دفتر کلاس نام فامیل دانش آموزان را بترتیب الفبا نوشته‌اند. به این ترتیب مجموعهٔ دانش‌آموزان این کلاس مرتب است. در این ترتیب، دانش‌آموز a قبل از دانش‌آموز b می‌آید بشرطی که نام فامیل دانش‌آموز a در دفتر کلاس بالای نـام فامیل دانش آموز b نوشته شده باشد. واضح است که اگر دانش‌آموز a مقدم بر دانش‌آموز b باشد، دانش‌آموز b مقدم بر دانش آموز a نیست؛ ازدو دانش‌آموز a و b یا a مقدم بر b و یا b مقدم بر a است. اگر بدانیم که a مقدم بر b و b مقدم بر c است، در اینصورت a مقدم بر c خواهد بود. می‌توان این خاصیتهای مجموعه‌های مرتب را در مورد دانش آموزان این کلاس (طبق ثبت نامها در دفتر) به این ترتیب خلاصه کرد:

I. a مقدم بر b است $\Longleftarrow$ b مقدم بر a نیست.

II. $a\neq b$ $\Longleftarrow$ a مقدم بر b یا b مقدم بر a است.

III. a مقدم بر b و b مقدم بر c است $\Longleftarrow$ a مقدم بر c است،

۲. مجموعهٔ همهٔ عددها را می‌توان بترتیب صعودی، یعنی طبق رابطهٔ

«کوچکتر است»، مرتب کرد. طبق این ترتیب، عدد a تنها و تنها وقتی مقدم بر b است که $a<b$. واضح است که شرطهای I ، II ، III در اینجا هم برقرار است، یعنی:

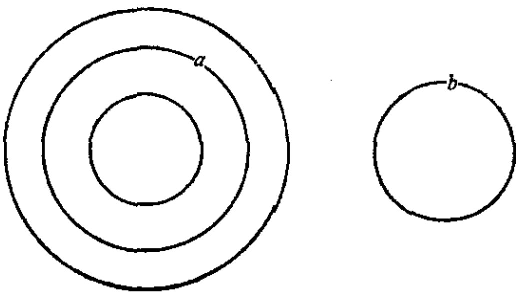
I. اگر $a<b$ ، نامساوی $b<a$ نادرست است.

II. اگر $a\neq b$ ، یا $a<b$ و یا $b<a$.

III. اگر $a<b$ و $b<c$ ، در اینصورت $a<c$.

۳. مجموعهٔ مساحتهای دایره‌های واقع بریك صفحه را که دارای مرکز مشترك هستند، در نظر می‌گیریم. مساحت دایرهٔ a را مقدم بر مساحت دایرهٔ b می‌گیریم، تنها وقتی که $a\neq b$ و $a\subset b$ باشد. در این حالت هم می‌توان امتحان کرد که شرطهای I ، II ، III بر قرار است.

۴. مجموعهٔ همهٔ مساحتهای دایره‌های واقع بر صفحه را باهمان شرط مسألهٔ قبل برای ترتیب آنها ، در نظر می‌گیریم . بسادگی معلوم می‌شود که شرطهای I و III در اینجا هم بر قرار است ، ولی شرط II برقرار نیست (مثلا در شکل ۱۵، $a\neq b$ و a مقدم بر b یا b مقدم بر a نیست، زیرا نه



شکل ۱۵

شرط $a\subset b$ ونه شرط $b\subset a$ برقرار نیست).

در هر یك از مثالهای ۱ ، ۲ ، ۳ مجموعه‌ای را کاملا مرتب کرده‌ایم، به این معنی کـه هر عضو مجموعه قبل از عضو دیگری از این مجموعه قرار گرفته است ؛ ضمناً شرطهای I ، II و III هم در مورد آنها برقرار است .

در مثال ۴ ، مجموعهٔ همهٔ دایره‌ها به این وضع مرتب نشده‌اند.

۱۲. مجموعه‌های کاملا مرتب

گوییم که مجموعهٔ Z کاملا مرتب است ، وقتی که نسبت مقدم بودن یك عضو مجموعه به عضو دیگر آن (نسبت ترتیب) به‌نحوی باشد که خاصیتهای زیر برای هرسه عضو a ، b و c از مجموعهٔ Z وجود داشته باشد:

I. خاصیت ناتقارنی

a مقدم است بر b $\Longleftarrow$ b مقدم بر a نیست.

II. خاصیت تمامیت

$a \neq b$ $\Longleftarrow$ a مقدم است بر b یا b مقدم است بر a.

III. خاصیت سرایت‌پذیری

a مقدم است بر b و b مقدم است بر c $\Longleftarrow$ a مقدم است بر c.

در یك ترتیب مفروض ، وقتی که a مقدم بر b باشد ، می‌شود گفت که b بعد از a می‌آید. وقتی که a مقدم بر b و b مقدم بر c باشد، گویند b بین a و c در این ترتیب قرار گرفته است. با استدلال ساده‌ای می‌توان ثابت کرد که از سه عضو متمایز یك مجموعهٔ کاملا مرتب تنهاو تنهایکی بین دو عضو دیگر قرار گرفته است.

درمثال ۲ عدد ۱۰۰ عضوی است که‌بعد ازعدد ۳ قرارگرفته است؛عدد $\frac{1}{2}$ یکی از عضوهایی است که قبل از عدد ۳ قرار دارد؛عدد ۲ بین عدد $\frac{1}{2}$ و عدد ۳ واقع است.

تمرینها

۰۷۱۳ مجموعه‌هایی را نام ببرید که تنها: a) سه عضو ، b) دو عضو ، c) یك عضو داشته باشند.

۰۷۱۴ مجموعه‌ای‌را مشخص‌کنید. شرطهایی بدهید که برای‌هرعضواین‌مجموعه

صادق باشد، وبرای هر عنصری که عضو این مجموعه نیست صادق نباشد.

۰۷۱۵ آیا این مجموعه مشخص است؟

«مجموعهٔ دانش‌آموزان خوب مدرسهٔ ما»،

چه شرطی باید به این بیان اضافه شود تـا مجموعه‌ای مشخص بدست آید ؟

۰۷۱۶ Z را مجموعهٔ عددهـای زوج در نظر بگیرید. نوشته‌های زیر راکامل کنید، به‌نحوی که حکمهای درستی باشند:

$Z \ldots ۱$ و $Z \ldots ۱۰۰$ و $Z \ldots ۸$ و $Z \ldots ۵$ و $Z \ldots ۲$

۰۷۱۷ Z مجموعهٔ کتابهای یك کتابخانه و Z' مجموعهٔ کتابهایی از این کتابخانه است که مؤلف آنها آقای x است. نوشتهٔ $Z \ldots Z'$ راکامل کنید و با تصویر نشان دهید.

۰۷۱۸ چند زیر مجموعه از مجموعهٔ دانش آموزان کلاس خود نام ببرید.

۰۷۱۹ Z یك مجموعه است؟ آیا درست است $Z \subset Z$ ؟

۰۷۲۰ اگر $a \in Z$ و $Z \subset Z'$ باشد، نوشتهٔ $a \ldots Z'$ را کامل کنید. مثالی ذکر کنید و روی تصویر نشان دهید .

۰۷۲۱ اگر $Z \subset Z'$ و $Z' \subset Z''$ باشد، نوشتهٔ $Z \ldots Z''$ راکامل کنید؛ مثالی ذکر کنیدو روی تصویر نشان دهید.

۰۷۲۲ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $D_۶$ رابنویسید. آیا بین این زیرمجموعه‌ها، مجموعه‌هایی به شکل D_n وجود دارد؟ آنها را بنویسید.

۰۷۲۳ Z مجموعهٔ همهٔ عددهاست. Z' مجموعهٔ همهٔ عددهایی است که می‌توان بدست آورد:

a) از راه کم کردن عددهای منفی از عددهای مثبت ،

b) از راه کم کردن هر عدد از هر عدد دیگر.

دربارهٔ مجموعه‌های Z و Z' چه می‌توان گفت ؟

۰۷۲۴ $Z_۱$ را مجموعهٔ همهٔ حرفهای مختلفی می گیریم که در «روشهای جبر» وجود دارد ، $Z_۲$ مجموعهٔ همهٔ حرفهای مختلف «جدول ضرب» و $Z_۳$ مجموعهٔ همه حرفهای «دفترحساب». عضوهای این مجموعه‌ها را نام ببرید:

a) $Z_۱ \cup Z_۲$; b) $Z_۱ \cap Z_۲$;

c) $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$; d) $Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3$

۷۲۵. علامت لازم را بگذارید و با ذکر مثال روی تصویر نشان دهید:

a) $Z \dots Z \cup Z'$; b) $(Z \cap Z') \dots Z$;

c) $(Z \cap Z') \dots (Z \cup Z')$

۷۲۶. آیا می‌توان دو عدد طبیعی m و n را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم :

$$D_m \cap D_n = \Phi$$

۷۲۷. N مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح ، N_p مجموعهٔ همهٔ عددهای زوج و N_n مجموعهٔ همه عددهای فرد است. علامتهای افتاده را در هریك ازحالتهای زیر بنویسید :

$N_p \dots N$; $N_n \dots N$; $N_p \cup N_n = \dots$;

$N_n \cup N = \dots$; $N_p \cup N = \dots$; $N_p \cap N = \dots$;

$N_n \cap N = \dots$; $N_p \cap N_n = \dots$; $N_p - N_n = \dots$;

$N - N_p = \dots$; $N - N_n = \dots$;

۷۲۸. با بکاربردن علامتهای لازم نشان بدهید که دو عدد ۱۴ و۳۹ نسبت به هم اولند.

۷۲۹. عددهای قابل‌قسمت بر۴ را در یك مجموعه و عددهای قابل قسمت بر۸ را در مجموعهٔ دیگری بگیرید. با انتخاب علامتهای‌لازم نشان دهید هر عددی که بر ۸ قابل‌قسمت باشد، بر ۴ هم قابل‌قسمت است.

۷۳۰. مثالهایی ذکرکنید برای:

a) نگاشت یك مجموعه بر مجموعهٔ دیگر،

b) نگاشت یك مجموعه بر خود آن مجموعه.

کدامیك در تناظر یك به یك هستند؟

۷۳۱. دربارهٔ نگاشتهای : a) مجموعهٔ دایره‌ها ، b) مجموعهٔ مستطیلها ؛ بر مجموعهٔعددهای‌مثبت‌فکرکنید. آیااین‌نگاشتها درتناظریك‌به‌یك‌هستند؟

۷۳۲. دربارهٔ نگاشت مجموعهٔ مربعها بر مجموعهٔ نقطه‌ها چه می‌گویید ؟ آیا در تناظر یك‌به‌یك هستند؟

۷۳۳. مجموعهٔ عددهای‌طبیعی را درنظر می‌گیریم. آیا بافرض زیراین‌مجموعه

کاملا مرتب است؟

الف) «a مقدم بر b است» به معنای «$a>b$» باشد.

ب) «a مقدم بر b است» به معنای «a قابل قسمت بر b باشد» (یعنی «b مقسوم‌علیهی از a است»).

۷۳۴. اگر مجموعهٔ کتابها را به‌این شکل مرتب کنیم، آیا مجموعهٔ کاملامرتبی خواهد بود؟

الف) «a مقدم بر b است» به معنای «شمارهٔ کتاب a کوچکتر از شمارهٔ کتاب b است» باشد (طبق یك فهرست معین).

ب) «a مقدم بر b است» به معنای «سال چاپ کتاب a جلوتر از سال چاپ کتاب b است» باشد.

ج) «a مقدم بر b است» به معنای «قیمت کتاب a بیشتر از قیمت کتاب b است» باشد.

۱. جواب: $(x+z)(y-z)(x+y)$

۲. عبارت داخل کروشهٔ اول را به‌سادگی می‌توان بصورت زیر درآورد:

$$(ax+by)^2+(ay+bx)^2$$

و عبارت داخل کروشهٔ دوم را به صورت: $(ay+bx)(ax+by)$ حالا اگر عبارت مفروض را A فرض کنیم به ترتیب داریم:

$$A=[(ax+by)^2+(ay+bx)^2]^2-4(ay+bx)^2\times$$
$$\times(ax+by)^2=[(ax+by)^2+(ay+bx)^2-$$
$$-2(ay+bx)(ax+by)][(ax+by)^2+(ay+bx)^2+$$
$$+2(ay+bx)(ax+by)]=[(ax+by)-$$
$$-(ay+bx)]^2[(ax+by)+(ay+bx)]^2=[(a-b)\times$$
$$\times(x-y)]^2[(a+b)(x+y)]^2=$$
$$=(a-b)^2(a+b)^2(x-y)^2(x+y)^2$$

۳. جواب: $(a+2b)(2b-c)(a-c)$

۴. جواب: $(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

۵. جواب: $(x-2z)(y-2z)(x+y)$

۶. روش اول: مجموع $2x^4+4x^2+2$ را به‌صورت $2(x^2+1)^2$ بنویسید. روش دوم: $4x^2$ را به صورت $2x^2+2x^2$ بنویسید و سپس با دسته‌بندی تجزیه کنید.

جواب: $(x^2+1)(2x^2+x+2)$

۷. عبارت نسبت به x و y متقارن است (یعنی با تبدیل x به y و y به x تغییر نمی‌کند) و چون به ازای $x=y$ برابر صفر است بنابراین بر $(x-y)^2$ قابل قسمت است. همچنین عبارت به‌ازای $x=-2y$ و بنابراین به‌ازای $x=-\frac{y}{2}$ صفر می‌شود.

جواب: $[(x+2y)(2x+y)(x-y)]^2$

۸. عبارت نسبت به a و b و c دوری است و به ازای $a=-b$ برابر صفر

می‌شود، بنابراین بصورت زیر درمی‌آید:

$$(a+b+c)^{۳}-a^{۳}-b^{۳}-c^{۳}=\lambda(a+b)(b+c)(c+a)$$

دو طرف تساوی نسبت به a هم درجه‌اند، بنابراین λ مقدار عددی است. ضریب $a^{۲}$ در سمت چپ تساوی $۳(b+c)$ و در سمت راست تساوی $\lambda(b+c)$ است، پس $\lambda=۳$ می‌شود:

$$(a+b+c)^{۳}-a^{۳}-b^{۳}-c^{۳}=۳(a+b)(b+c)(c+a)$$

۹. جواب: $(a+b)(b+c)(c+a)$

۱۰. عبارت مفروض نسبت به a و b و c دوری است و چون بـه ازای $a=b$ صفر می‌شود شامل فاکتور $a-b$ است وداریم:

$$A=(a-b)^{۵}+(b-c)^{۵}+(c-a)^{۵}=M(a-b)(b-c)(c-a)$$

M نسبت به a ازدرجهٔ دوم است، زیرا سمت چپ تساوی نسبت به a واز درجهٔ چهارم و ضریب M در سمت راست تساوی نسبت به a از درجهٔ دوم است. M در حالت کلی باید بصورت زیر باشد:

$$M=\alpha(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})+\beta(ab+bc+ca)+$$
$$+\gamma(a+b+c)+\lambda abc$$

در اینصورت ضریب $a^{۴}$ در سمت راست تساوی چنین است:

$$-\alpha(b-c)$$

ولی در سمت چپ تساوی جمله‌های شامل $a^{۴}$ در $(a-b)^{۵}$ به صورت $-۵a^{۴}b$ و در $(c-a)^{۵}$ به صورت $۵a^{۴}c$ و بنابراین ضریب $a^{۴}$ مساوی $-۵(b-c)$ است و بدست می‌آید:

$$\alpha=۵$$

حالا به جستجوی ضریب $a^{۳}b^{۲}$ در دوطرف تساوی می‌پردازیم:
درسمت‌چپ تساوی، جمله‌هایی که تنها شامل a و b باشند در $(a-b)^{۵}$ وجود دارند ودر اینجا ضریب $a^{۳}b^{۲}$ برابر است با ۱۰، در سمت راست تساوی در ضریب M جلمه‌های شامل a و b یکی بصورت $-a^{۲}b$ ودیگری بصورت $-ab^{۲}$ است که از ضرب اولی در βab و دومی در $\alpha a^{۲}$ ضریب جملهٔ $a^{۳}b^{۲}$ بصورت $(\alpha-\beta)$ بدست می‌آید. بنابراین:

$$\alpha-\beta=۱۰ \Longrightarrow ۵-\beta=۱۰ \Longrightarrow \beta=-۵$$

درسمت راست تساوی جمله‌ای بصورت $\gamma a^3 b-$ وجود دارد، درحالیکه‌چنین جمله‌ای در سمت چپ تساوی وجود ندارد یعنی: $\gamma=0$ همچنین درسمت چپ تساوی ترکیبی بصورت $a^m b^n c^p$ نداریم‌و بنابراین $\lambda=0$ می‌شود، به‌این ترتیب داریم:

$$A=5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

۱۱. عبارت مفروض به ازای $x=-1$ صفر می‌شود وبنابراین می‌توان عامل $x+1$ را در آن بوجود آورد:

$$\begin{aligned}x^5+x^4+x^3+x^2+x+1&=\\&=x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1)=\\&=(x+1)(x^4+x^2+1)=\\&=(x+1)[(x^2+1)^2-x^2]=\\&=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

۱۲. به‌ترتیب می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}x^4-x^2+7&=(x^2+\sqrt{7})^2-2x^2\sqrt{7}-x^2=\\&=(x^2+\sqrt{7})^2-(2\sqrt{7}+1)x^2=\\&=(x^2+\sqrt{2\sqrt{7}+1}\,x+\sqrt{7})(x^2-\sqrt{2\sqrt{7}+1}\,x+\sqrt{7})\end{aligned}$$

همچنین می‌توان تجزیهٔ این عبارت را باروش ضریبهای نامعین بدست آورد.

۱۳. بترتیب داریم:

$$\begin{aligned}x^4+4x-1&=(x^4+2x^2+1)-(2x^2-4x+2)=\\&=(x^2+1)^2-2(x-1)^2=\\&=[x^2+1+\sqrt{2}(x-1)][x^2+1-\sqrt{2}(x-1)]=\\&=(x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

۱۴. عبارت داخل پرانتز مجموع $n+1$ جمله از یك تصاعد هندسی است و بنابراین داریم:

$$(1+x+x^2+\dots+x^n)^2-x^n=\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)^2-x^n=$$

$$=\frac{(x^{n+1}-1)^2-x^n(x-1)^2}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^{2n+2}-2x^{n+1}+1-x^{n+2}+2x^{n+1}-x^n}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{(x^{2n+2}-x^n)-(x^{n+2}-1)}{(x-1)^2}=\frac{(x^n-1)(x^{n+2}-1)}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{x^{n+2}-1}{x-1}\times\frac{x^n-1}{x-1}=$$
$$=(x^{n+1}+x^n+\dots+x+1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)$$

۱۵. با استفاده از معکوسه بودن عبارت، آنرا تجزیه کنید.

جواب: $(x^2+x+1)(2x^2-x+2)$

۱۶. اگر جذر عبارت را بدست آوریم، حاصل جذر x^3+x^2+x+11 و باقیماندهٔ جذر مساوی -100 می‌شود و بنابراین داریم:

$$A=x^6+2x^5+3x^4+24x^3+23x^2+22x+21=$$
$$=(x^3+x^2+x+11)^2-100=$$
$$=(x^3+x^2+x+1)(x^3+x^2+x+21)$$

پرانتز اول به ازای $x=-1$ و پرانتز دوم به‌ازای $x=-3$ مساوی صفر می‌شود، بنابراین دراولی عامل $x+1$ و در دومی عامل $x+3$ وجود دارد، به این‌ترتیب:

$$A=[x^2(x+1)+(x+1)]\times$$
$$\times[x^2(x+3)-2x(x+3)+7(x+3)]=$$
$$=(x+1)(x+3)(x^2+1)(x^2-2x+7)$$

۱۷. جواب:

$$[x^2+x\sqrt{6(\sqrt{2}-1)}+2\sqrt{2}][x^2-x\sqrt{6(\sqrt{2}-1)}+2\sqrt{2}]$$

۱۸. پرانتزها را باز کنید و از رابطهٔ مربوط به مجذور سه جمله‌ای استفاده کنید:

جواب:

$$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$$

۱۹. بترتیب داریم:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=$$

$$=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz=$$
$$=[(x+y)^3+z^3]-3xy(x+y+z)=$$
$$=(x+y+z)[(x+y)^2-z(x+y)+z^2]-$$
$$-3xy(x+y+z)=$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$$

۲۰. اگر فرض کنید:

$$a^2-bc=x\ ;\ b^2-ac=y\ ;\ c^2-bc=z$$

به مسألهٔ شمارهٔ ۱۹ تبدیل می‌شود.

جواب: $(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2$

۲۱. عبارت نسبت به x و y و z دوری است و به ازای $x=-y$ برابر صفر می‌شود، بنابراین بر $x+y$ و تبدیلهای دوری آن $y+z$ و $z+x$ قابل قسمت است و داریم:

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=M(x+y)(y+z)(z+x) \quad (1)$$

سمت چپ تساوی نسبت به x و y و z متجانس ومتقارن و ضمناً از درجهٔ پنجم است، از طرف دیگر عبارت $(x+y)(y+z)(z+x)$ هم متجانس و متقارن واز درجهٔ سوم است (نسبت به xوyوz).

بنابراین M باید نسبت به xوyوz عبارتی متقارن و متجانس و از درجهٔ دوم باشد، یعنی داشته باشیم:

$$M=A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+xz)$$

به این ترتیب اتحاد (۱) بصورت زیر در می‌آید:

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=(x+y)(y+z)(z+x)\times$$
$$\times[A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx] \quad (2)$$

اتحاد (۲) باید به‌ازای همهٔ مقادیر x وyو z برقرار باشد. فرض می‌کنیم $x=y=z=1$ بدست می‌آید:

$$240=8(3A+3B) \implies A+B=10$$

و حالا اگر مثلا فرض کنیم $x=y=1$ و $z=0$ بدست می‌آید:

$$30=2(2A+B) \implies 2A+B=15$$

و از آنجا مقادیر A و B محاسبه می‌شود :

$$A=B=5$$

و در نتیجه داریم:

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=$$
$$=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$$

۲۲. اگر عبارت را مساوی A فرض کنیم، داریم:

$$A=a^{5n}-a^{2n}+a^{2n}+a^n+1=$$
$$=a^{2n}(a^{3n}-1)+(a^{2n}+a^n+1)=$$
$$=a^{2n}(a^n-1)(a^{2n}+a^n+1)+(a^{2n}+a^n+1)=$$
$$=(a^{2n}+a^n+1)(a^{3n}-a^{2n}+1)$$

۲۳. به‌ترتیب داریم:

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=$$
$$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=$$
$$=(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+120=$$
$$=[(x^2+8x)+11]^2-1=$$
$$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)=$$
$$=(x+2)(x+6)(x+4+\sqrt{6})(x+4-\sqrt{6})$$

۲۴. جواب: $(x-y)(a-x)(a-y)(x+y+a)$

۲۵. جواب: $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

۲۶. جواب: $(y+z)(2x-y)(2x+z)(2x+y-z)$

۲۷. عبارت‌مفروض نسبت به x و y و z متقارن است(یعنی با تبدیل هردومجهول دلخواه‌آن به یکدیگر تغییر نمی‌کند) ودر عین‌حال به‌ازای $x=-y$ برابر صفر می‌شود و بنابراین به‌سادگی بصورت زیر در می‌آید :

$$x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz=$$
$$=(x+y)(y+z)(z+x)$$

۲۸. به‌ترتیب می‌توان نوشت (عبارت را A فرض کرده‌ایم):

$$A=(x^2y+xy^2+xyz)+$$
$$+(x^2z+xz^2+xyz)+(y^2z+yz^2+xyz)=$$
$$=xy(x+y+z)+xz(x+y+z)+yz(x+y+z)=$$
$$=(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

۲۹. مجموع ضریبهای عبارت برابر صفر است و بنابراین بر $x-1$ قابل قسمت است.

جواب: $(x-1)(x+3)^2$

۳۰. جواب: $(x-1)(x+3)(x+7)$

۳۱. عامل x را کنار بگذارید و نتیجه را بـه ضرب دو عامل مزدوج تجزیـه کنید.

جواب: $x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-2)$

۳۲. جواب: $3(y^2+z^2)(x^2+y^2)(x-z)(x+z)$

۳۳. عبارت مفروض نسبت‌به‌xوyوz دوری و به‌ازای $x=y$ صفر می‌شود، یعنی می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$\lambda(x-y)(y-z)(z-x)$$

λ نسبت به x و y و z باید از درجهٔ اول باشد، یعنی:

$$\lambda=A(x+y+z)$$

و به‌سادگی $A=-1$ بدست‌می‌آید.

جواب: $-(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$

۳۴. جواب: $(x^2-y)(y^2-z)(z^2-x)$

۳۵. به‌ترتیب داریم:

$$x^4+2x^2\cos\alpha+1=x^4+2x^2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+1=$$
$$=(x^4+2x^2+1)-4x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}=(x^2+1)^2-4x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}=$$
$$=(x^2+2x\sin\frac{\alpha}{2}+1)(x^2-2x\sin\frac{\alpha}{2}+1)$$

۳۶. ۱) عدد $(2a+1)^2-1$ بعد از تجزیه به صورت $4a(a+1)$ درمی‌آید

وروشن است که $a(a+1)$ (یعنی حاصلضرب دوعدد متوالی) عددی است زوج.

۲) a^3-a به صورت $(a-1)a(a+1)$ در می‌آید و حاصلضرب سه عدد متوالی هم زوج است وهم قابل قسمت بر ۳.

۳) در عبارت a^3+5a که به صورت $a(a^2+5)$ در می‌آیـد ، اگر a فرد باشد a^2+5 زوج است وبنابراین حاصلضرب آنها حتماً عددی است زوج. ازطرف دیگر اگر a قابل قسمت بر ۳ نباشد ، باقیماندهٔ تقسیم a^2 بر ۳ مساوی ۱ می‌شود و a^2+5 بـر ۳ قابل قسمت می‌شود .

۳۷. ۱) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ دارای دوعامل زوج است و بنابراین حاصلضرب این دو عامل بر ۴ قابل قسمت است. بنابراین اگر دو عدد زوج متوالی هم نباشند اشکالی ندارد.

۲) دو عدد را $a=2k-1$ و $b=2k+1$ می گیریم، داریم:

$$b^2-a^2=(2k+1)^2-(2k-1)^2=8k$$

۳) اگر عدد صحیح x بر۲و۳ قابل قسمت نباشد ، می‌توان آنرا به صورت $x=6k\pm1$ نوشت ، بنابراین :

$$x^2=36k^2\pm12k+1 \quad \text{و}$$

$$x^2-1=12(3k^2\pm k)=12[2k^2+k(k\pm1)]=24N$$

اگر y هم بر ۲و۳ قابل‌قسمت نباشد داریم: $y^2-1=24M$ و از آنجا:

$$x^2-y^2=(x^2-1)-(y^2-1)=24(N-M)=24P$$

۳۸. عبارت $n^4+7(2n^2+7)$ به صورت $(n^2+7)^2$ در می‌آید، بنابراین باید ثابت کرد که n^2+7 بر ۸ قابل قسمت است . داریم $(n=2k+1$ می گیریم):

$$n^2+7=(2k+1)^2+7=4(k^2+k+2)=$$
$$=4[k(k+1)+2]=8M$$

۳۹. بسادگی معلوم می‌شود که اگر $A=5x+2y$ و $B=9x+7y$ باشد ، داریم:

$$7A-2B=17x$$

و از آنجا معلوم است که اگر A بر ۱۷ قابل قسمت باشد، B هم بر ۱۷ قابل قسمت است.

۴۰. از تساوی شرط مسأله بدست می‌آید:

$$a^2=(a-c)^2+2b(a-c)$$
$$b^2=(b-c)^2+2a(b-c)$$

و بنابراین داریم:

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{2(a-c)^2+2b(a-c)}{2(b-c)^2+2a(b-c)}=$$
$$=\frac{(a-c)(a+b-c)}{(b-c)(a+b-c)}=\frac{a-c}{b-c}$$

* * *

۴۱. جواب:

$$f(0)=1\ ;\ f(-x)=\frac{1+x}{1-x}\ ;\ f(x+1)=\frac{-x}{x+2}\ ;$$
$$f(x)+1=\frac{2}{1+x}\ ;\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x+1}\ ;\ \frac{1}{f(x)}=\frac{1+x}{1-x}$$

۴۲. جواب:

$$a)\ a\ ;\quad b)\ 2x+h\ ;\qquad c)\ a^x\frac{a^h-1}{h}$$

۴۳. جواب:

$$a)\ f(x)=0 \Longrightarrow x=-1\ ,\ x=0\ ;\ x=1$$
$$f(x)>0 \Longrightarrow x<-1\ ,\ 0<x<1$$
$$f(x)<0 \Longrightarrow -1<x<0\ ,\ x>1$$

$$b)\ f(x)=0 \Longrightarrow x=\pm\frac{1}{k}$$

$$f(x)>0 \Longrightarrow \frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}\ ,$$
$$-\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}\qquad (k=0,1,2,\dots)$$

$$f(x)<0 \implies \frac{1}{2k+2}<x<\frac{1}{2k+1},$$

$$-\frac{1}{2k}<x<-\frac{1}{2k+1} \qquad (k=0,1,2,\dots$$

c) $f(x)=0 \implies x=1\ ,\ x\leqslant 0$

$f(x)>0 \implies 0<x<1$

$f(x)<0 \implies x>1$

۴۵. جواب: $f(x)=\frac{7}{3}x-2$

۴۶. جواب: $f(x)=10+5\times 2^x$

۴۹. داریم:

$$f(x+y)+f(x-y)=\frac{1}{2}\left[a^{x+y}+a^{-(x+y)}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[a^{x-y}+a^{-(x-y)}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[a^x(a^y+a^{-y})+a^{-y}(a^y+a^{-y})\right]=$$
$$=2\times\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})\times\frac{1}{2}(a^y+a^{-y})=2f(x)f(y)$$

۵۰. داریم:

a) $f(x)+f(y)=ax+ay=a(x+y)=f(x+y)\ ;$

$f(z)=f(x+y) \implies z=x+y$

b) $f(x)+f(y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=f\left(\frac{xy}{x+y}\right)$

$f\left(\frac{xy}{x+y}\right)=f(z) \implies z=\frac{xy}{x+y}$

c) $f(x)+f(y)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y\ ;$

$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\alpha \implies$

$tg\alpha=tg(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)=\frac{x+y}{1-xy}\ ;$

$$\alpha = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \;;$$

$$z = \frac{x+y}{1-xy}$$

$$d)\ f(x)+f(y) = \log\frac{1+x}{1-x} + \log\frac{1+y}{1-y} =$$

$$= \log\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \log\frac{(1+xy)+(x+y)}{(1+xy)-(x+y)} =$$

$$= \log\frac{1+\dfrac{x+y}{1+xy}}{1-\dfrac{x+y}{1+xy}} = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right);$$

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = f(z) \implies z = \frac{x+y}{1+xy}$$

۵۱. جواب: $fff(x) = x \cdot ff(x) = \dfrac{x-1}{x}$

۵۲. جواب را به طریق استقراء ریاضی[1] بدست می‌آوریم:

$$f_2(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}};$$

$$f_3(x) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+[f_2(x)]^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} \;;$$

احتمالا باید داشته باشیم:

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (1)$$

اگر این رابطه صحیح باشد، باید $f_{n+1}(x)$ هم از همین قاعده پیروی کند:

---

۱) به‌بخش مربوط به استقراء ریاضی مراجعه کنید.

$$f_{n+1}(x)=\frac{f_n(x)}{\sqrt{1+[f_n(x)]^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$$

و بنابراین رابطهٔ (۱) صحیح است.

۵۳. جواب: $f(x)=x^2-5x+7$

۵۴. می‌توان نوشت:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2 \Longrightarrow f(x)=x^2-2 \quad (|x|\geqslant 2)$$

توضیح. $|x+\frac{1}{x}|\geqslant 2$ است و بنابراین تابع f وقتی معین است که‌قدر مطلق متغیر آن از ۲ کوچکتر نباشد.

۵۵. جواب: $f(x)=\frac{1}{x}(1+\sqrt{1+x^2})$

۵۶. جواب: $f(x)=x^2-x+1$

۵۷. داریم:

$$f(ax)=(ax+a)(ax+a^2)\cdots(ax+a^n)=$$
$$=a^n(x+1)(x+a)(x+a^2)\cdots(x+a^{n-1})=$$
$$=\frac{a^n(x+1)}{x+a^n}f(x)$$

و از آنجا: $(x+a^n)\cdot f(ax)=a^n(x+1)f(x)$

۵۸. a) $f(2x^2-1)=\log(2x^2-1+\sqrt{(2x^2-1)^2-1})=$
$$=\log(2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1})=\log(x+\sqrt{x^2-1})^2=$$
$$=2\log(x+\sqrt{x^2-1})=2f(x)$$

b) $f(4x^3-3x)=\log(4x^3-3x+\sqrt{(4x^3-3x)^2-1})=$
$$=\log(4x^3-3x+\sqrt{(x^2-1)(4x^2-1)^2})=$$
$$=\log(4x^3-3x+(4x^2-1)\sqrt{x^2-1})=$$
$$=\log(x+\sqrt{x^2-1})^3=3\log(x+\sqrt{x^2-1})=3f(x)$$

۵۹. شبیه تمرین ۵۸ عمل کنید.

۶۰. یك رادیان از ۴۵ درجه بزرگتر است و بنابراین انتهای کمان یك رادیان در نیمهٔ دوم ربع اول قرار می‌گیرد و بنابراین سینوس آن از کسینوس

آن بزرگتر است یعنی:

$$f(1)=\sin 1-\cos 1>0$$

۶۱. با روش استقراء ریاضی و شبیه تمرین ۵۲ حل کنید.

۶۲. اگر در دوطرف معادله، x را به $x+1$ تبدیل کنیم، می‌شود:

$$af(x)+bf(-x)=c(x+1) \qquad (1)$$

همچنین اگر x را به $x-1$ تبدیل کنیم، می‌شود:

$$af(-x)+bf(x)=c(1-x) \qquad (2)$$

از حل دستگاه معادله‌های (۱)و(۲) ، $f(x)$ و $f(-x)$ بدست می‌آید:

$$f(x)=\frac{c}{a-b}x+\frac{c}{a+b} \qquad (a^2\neq b^2)$$

اگر $a^2=b^2$ و $c\neq 0$ باشد، $f(x)$ وجود ندارد.

اگر $a=b$ و $c=0$ باشد ، $f(x)$ می‌تواند تابع دلخواهی با توانهای فرد باشد.

و بالاخره اگر $a=-b$ و $c=0$ باشد ، $f(x)$ تابع دلخواهی باتوانهای زوج است.

۶۴. با توجه به فرض مسأله بترتیب داریم.

$$f(2)=f(1)+a^2$$
$$f(3)=f(2)+a^3$$
$$f(4)=f(3)+a^4$$

....

$$f(n)=f(n-1)+a^n$$

از جمع این روابطه‌ها خواهیم داشت:

$$f(n)=1+a^2+a^3+\dots+a^n$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$f(n)=\begin{cases}1+\dfrac{a^2(a^{n-1}-1)}{a-1} & (a\neq 1)\\ n & (a=1)\end{cases}$$

۶۴. می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-3+(1-x) & ; \ x<-3 \\ 3-2x-x^2+(1-x) & ; \ -3<x<1 \\ x^2+2x-3+(x-1) & ; \ x>1 \end{cases}$$

به‌سادگی دیده‌می‌شود که‌تابع $y=x^2+2x-3$ به‌ازای $-3<x<1$ منفی و به‌ازای سایر مقادیر x غیر منفی است، تابع $y=x-1$ به‌ازای $x>1$ غیرمنفی و به ازای $x<1$ منفی است و بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x)=|x^2+2x-3|+|x-1|$$

۶۵. اولا اگر $x-1=t$ فرض کنیم، $x=t+1$ می‌شود و خواهیم‌داشت:

$$f(x)=\varphi(t)=6(t+1)^4+19(t+1)^3-17(t+1)^2-$$
$$-72(t+1)-36=6t^4+43t^3+76t^2-25t-100$$

و اگر بجای t مقدارش $x-1$ را قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$\varphi(x-1)=6(x-1)^4+43(x-1)^3+$$
$$+76(x-1)^2-25(x-1)-100$$

و بدین‌ترتیب $f(x)$ برحسب‌توانهای نزولی $(x-1)$ منظم شد.

ثانیاً) برای‌حل‌معادلهٔ $f(x)=0$، ابتدا معادلهٔ زیررادرنظرمی‌گیریم:

$$6t^4+43t^3+76t^2-25t-100=0$$

مجموع ضریبهای‌عددی درچندجمله‌ای سمت‌چپ تساوی برابرصفراست، بنابراین معادله ریشهٔ $t=1$ را قبول داردکه با توجه‌به رابطهٔ $x=t+1$، معادلهٔ $f(x)=0$، جواب $x=2$ را خواهد داشت؛ بـه این ترتیب $f(x)$ به سادگی به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x)=(x-2)(6x^3+31x^2+45x+18)$$

چند جمله‌ای داخل‌پرانتز هم‌به‌ازای $x=-3$ صفرمی‌شود وبنابراین عامل $x+3$ در آن وجود دارد وبدست می‌آید:

$$f(x)=(x-2)(x+3)(6x^2+13x+6)=$$
$$=(x-2)(x+3)(3x+2)(2x+3)$$

و جوابهای معادلهٔ $f(x)=0$ چنین است:

$$x_1=2 \;;\; x_2=-3 \;;\; x_3=-\frac{2}{3} \;;\; x_4=-\frac{3}{2}$$

۶۶. باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر است با $f(a)$ و بنابراین $f(x)-f(a)$ بر $x-a$ قابل قسمت است و یکی از ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=f(a)$ برابر است با $x=a$.

۶۷. اگر در رابطهٔ مفروض a و b را به یکدیگر تبدیل کنیم، بدست می‌آید:

$$f(ba)=[f(b)]^a$$

که با مقایسه با رابطهٔ فرض ، خواهیم داشت:

$$[f(a)]^b=[f(b)]^a$$

از دو طرف این تساوی در مبنای α ، لگاریتم می‌گیریم:

$$b\log_\alpha f(a)=a\log_\alpha f(b)$$

که می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\log_\alpha f(a)}{a}=\frac{\log_\alpha f(b)}{b}$$

سمت‌چپ تساوی تابعی از a و سمت‌راست تابعی از b است و بنابراین تنها وقتی می‌توانند مساوی باشند که هردوطرف برابر مقدار ثابتی شوند ، یعنی :

$$\frac{\log_\alpha f(a)}{a}=p \;;\; \log_\alpha f(a)=ap;$$

$$f(a)=\alpha^{pa} \Longrightarrow f(x)=\alpha^{px}$$

که اگر $\alpha^p=\beta$ فرض شود ، خواهیم داشت :

$$f(x)=\beta^x$$

یعنی هر تابع مجهول‌القوه دارای خاصیت مورد نظر مساله است.

۶۸. جواب : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

۶۹. جواب: ۲۴۳

۷۰. برای‌محاسبهٔ‌مجموع ضریبها در بسط دوجمله‌ای $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ باید $f(1)$ را محاسبه‌کرد:

$$f(1)=2^n$$

و برای محاسبهٔ مجموع ضریبها در بسط دوجمله‌ای $\varphi(a,b)=(a+b)^{2n}$ باید $\varphi(1,1)$ را محاسبه کرد:

$$\varphi(1,1)=2^{2n}$$

و بنابراین معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$2^{2n}-2^n=240 \Longrightarrow (2^n)^2-2^n-240=0 \quad ;$$
$$2^n=\frac{1\pm 31}{2}=-15 \text{ و } 16$$

جواب ۱۵ — قابل‌قبول نیست، زیرا وقتی‌که n عدد حقیقی است 2^n عددی مثبت است، پس:

$$2^n=16=2^4 \Longrightarrow n=4$$

حالا می‌توان بسط دو جمله‌ای اول را بدست‌آورد:

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4=x\sqrt[3]{x}+4\sqrt[6]{x}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{x\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{x^2}$$

۷۱. داریم:

$$f(\alpha+x)\cdot f(\alpha-x)=\frac{(4-\alpha-x)(4-\alpha+x)}{(2\alpha+2x-4)(2\alpha-2x-4)}=$$
$$=\frac{(4-\alpha)^2-x^2}{(2\alpha-4)^2-4x^2}$$

می‌خواهیم این کسر برابر با مقداری ثابت شود، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{(4-\alpha)^2-x^2}{(2\alpha-4)^2-4x^2}\equiv k$$

ویا :

$$(4k-1)x^2-(4k-1)\alpha^2+[8\alpha(2k-1)-16(k-1)]\equiv 0$$

و از آنجا:

$$\begin{cases} 4k-1=0 \\ 8\alpha(2k-1)-16(k-1)=0 \end{cases}$$

از حل این دستگاه مقادیر α و k بدست می‌آید:

$$k=\frac{۱}{۴}\ ;\ \alpha=۳$$

۷۲. اولا): $f(a)=a$ ، $f(b)=b$ ، $f(c)=c$

ثانیاً) با توجه به نتیجهٔ اولا روشن است که عبارت $f(x)-x$ به‌ازای مقادیر $x=a$ و $x=b$ و $x=c$ برابرصفر می‌شود، ولی چون این‌عبارت نسبت به x ازدرجهٔ دوم است، متحد با صفر خواهد بود، یعنی: $f(x)=x$

۷۳. در رابطهٔ مفروض x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$f(x^n)+af(-x^n)=-bx$$

ازاین رابطه و رابطهٔ فرض، می‌توان $f(x^n)$ را بدست آورد:

$$f(x^n)=\frac{bx}{a-۱}$$

واز آنجا:

$$f(x)=\frac{b}{a-۱}\sqrt[n]{x}$$

۷۴. اولا دو ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=f\left(\frac{x+۸}{x-۱}\right)$ از معادلهٔ $x=\frac{x+۸}{x-۱}$ بدست می‌آید، یعنی $x_۱=۴$ و $x_۲=-۲$.

ثانیاً به‌ترتیب داریم:

$$x^۲-۱۲x+۳=\left(\frac{x+۸}{x-۱}\right)^۲-۱۲\left(\frac{x+۸}{x-۱}\right)+۳\ ;$$

$$\left(x-\frac{x+۸}{x-۱}\right)\left(x+\frac{x+۸}{x-۱}\right)-۱۲\left(x-\frac{x+۸}{x-۱}\right)=۰\ ;$$

$$\left(x-\frac{x+۸}{x-۱}\right)\left(x+\frac{x+۸}{x-۱}-۱۲\right)=۰ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_۱=۴\ ,\ x_۲=-۲\ ,\ x_۳=۲\ ,\ x_۴=۱۰$$

۷۵. با توجه به مثبت بودن x داریم:

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^۲} \Longrightarrow f(x)=\sqrt{۱+x^۲}$$

۷۶. با توجه به فرض مسأله باید به‌ازای $y=۱$ داشته باشیم $z=x$. به‌ازای $y=۱$ داریم:

$$z=1+f(\sqrt{x}-1) \Longrightarrow f(\sqrt{x}-1)=x-1=$$
$$=(\sqrt{x}-1)^2+2(\sqrt{x}-1)$$

و از آنجا:

$$f(x)=x^2+2x \;\; ; \;\; z=\sqrt{y}+x-1$$

۷۷. جواب : $\quad z=2y+(x-y)^2$ و $f(x)=x^2-x$

۷۸. بترتیب داریم:

$$f(x+y\;,\;\frac{y}{x})=x^2-y^2=(x+y)^2\times\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}=$$

$$=(x+y)^2\times\frac{x-y}{x+y}=(x+y)^2\times\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

و از آنجا:

$$f(x,y)=x^2\times\frac{1-y}{1+y}$$

۷۹. از تساوی مفروض داریم:

$$F_{n+1}(x)=F_n(x)-F_n(x+1) \qquad (1)$$

چون $F_1(x)=\cos x$، پس $F_1(x+1)=\cos(x+1)$. از رابطهٔ (۱) به ازای $n=1$ بدست می‌آید:

$$F_2(x)=\cos x-\cos(x+1) \quad \text{و}$$
$$F_2(x+1)=\cos(x+1)-\cos(x+2)$$

این دو رابطه را از هم کم می‌کنیم، با توجه به‌اینکه $F_2(x)-F_2(x+1)$ مساوی $F_3(x)$ می‌شود (رابطهٔ (۱) را در نظر بگیرید) بدست می‌آید:

$$F_3(x)=\cos x-2\cos(x+1)+\cos(x+2)$$

بهمین ترتیب بدست می‌آید :

$$F_4(x)=\cos x-3\cos(x+1)+3\cos(x+2)-\cos(x+3)$$

می‌توان احتمال داد که[1].

$$F_n(x)=\cos x-c_{n-1}^{1}\cos(x+1)+c_{n-1}^{2}\cos(x+2)-$$
$$-c_{n-1}^{3}\cos(x+3)+\cdots+(-1)^{n-1}c_{n-1}^{n-1}\cos(x+n-1)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}c_{n-1}^{k-1}\cos(x+k-1)\qquad(2)$$

با روش استقراء ریاضی صحت این رابطه را ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم رابطهٔ (۲) صحیح باشد، در اینصورت :

$$F_n(x+1)=\cos(x+1)-c_{n-1}^{1}\cos(x+2)+$$
$$+c_{n-1}^{2}\cos(x+3)-c_{n-1}^{3}\cos(x+4)+\cdots+$$
$$+(-1)^{n-1}c_{n-1}^{n-1}\cos(x+n)\qquad(3)$$

۱ـ ضریبها در سمت راست تساوی مربوط به $F_n(x)$ همان ضریبهای بسط $(a-b)^n$ هستند:

$$(a-b)^n=a^n-c_{n-1}^{1}a^{n-1}b+c_{n-1}^{2}a^{n-2}b^2-c_{n-1}^{3}a^{n-3}b^3+$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}c_{n-1}^{n-1}b^n$$

منظور از c_n^k عبارتست از $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ، مثلا

$$c_7^3=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2}=35$$

از طرف دیگر داریم:

$$c_n^k+c_n^{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=$$
$$=\frac{n![(n-k+1)+k]}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=c_{n+1}^k$$

و بنابراین مثلا خواهیم داشت:

$c_{n-1}^{1}+1=c_n^{1}$ و $c_{n-1}^{2}+c_{n-1}^{1}=c_n^{2}$ و

$c_{n-1}^{3}+c_{n-1}^{2}=c_n^{3}$ و ...

رابطهٔ (۳) را از رابطهٔ (۲) کم می‌کنیم، با توجه به‌رابطهٔ (۱) بدست می‌آید:

$$F_{n+1}(x)= \cos x-(c_{n-1}^{1}+1)\cos(x+1)+(c_{n-1}^{2}+$$
$$+c_{n-1}^{1})\cos(x+2)-(c_{n-1}^{3}+c_{n-1}^{2})\cos(x+3)+\dots+$$
$$+(-1)^{n-1}c_{n-1}^{n-1}\cos(x+n)$$

ولی $c_{n-1}^{1}+1=c_n^{1}$، $c_{n-1}^{2}+c_{n-1}^{1}=c_n^{2}$، $c_{n-1}^{3}+c_{n-1}^{2}=c_n^{3}$، ... (پاورقی صفحهٔ ۳۹۴ را ببینید)، بنابراین:

$$F_{n+1}(x)=\cos x-c_n^{1}\cos(x+1)+c_n^{2}\cos(x+2)-$$
$$-c_n^{3}\cos(x+3)+\dots+(-1)^n c_n^{n}\cos(x+n)$$

به این‌ترتیب اگر تساوی (۲) برای n صحیح باشد برای $n+1$ هم‌صحیح است: ولی به ازای $n=1,2,3$ این تساوی صحیح بود، بنابراین تساوی (۲) برای هر مقدار طبیعی n صحیح است.

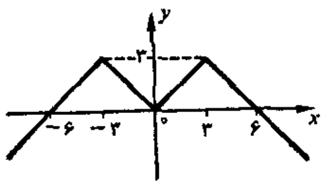
تساوی (۲)را، که همان تابع مورد نظر است، می‌توان به این ترتیب نشان داد:

$$F_n(x)=\begin{cases}-2^{n-1}\left(\sin\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\right) & (n=4k)\\ 2^{n-1}\left(\sin\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\cos\left(x+\frac{n-1}{2}\right) & (n=4k+1)\\ 2^{n-1}\left(\sin\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\right) & (n=4k+2)\\ -2^{n-1}\left(\sin\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\cos\left(x+\frac{n-1}{2}\right) & (n=4k+3)\end{cases}$$

۸۰. اولا تابع $f(x)$ را می‌توان به‌صورت $f(x)=3-|x|$ نوشت. ثانیاً داریم:

$$y=ff(x)=3-\left|f(x)\right|=3-\left|3-|x|\right|\ ;$$

$$x<-3, \quad y=6+x$$
$$-3<x<0 \quad y=-x$$
$$0<x<3 \quad y=x$$
$$x>3 \quad y=6-x$$



شکل۱۶

۸۱. چون داریم:

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\frac{1}{\left|x+\frac{1}{x}\right|}<\frac{1}{2}$$

بنابراین تابع f وقتی معین است که متغیر آن در فاصلهٔ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ باشد. از طرف دیگر اگر $t=\frac{x}{x^2+1}$ بگیریم، به سادگی معلوم می‌شود که $f(z)=\frac{1}{z^2}-2$ است. در نتیجه :

$$f(z)=\frac{1}{z^2}-2 \quad |z|<\frac{1}{2}$$

در حالت $|z|>\frac{1}{2}$ می‌توان $f(z)$ رامساوی هر تابع دلخواهی از z گرفت.

* * *

۸۲. باید داشته باشیم:

$$f(1)=f(2)=0$$

و از آنجادستگاه دومعادلهٔ دو مجهولی زیر را برای m و n بدست خواهیم آورد:

$$\begin{cases}7m-14=0\\32m+20n-4=0\end{cases} \Longrightarrow m=2 \ ; \ n=-3$$

۸۳. روش اول : برای اینکه عبارتی بر عبارت دیگر قابل قسمت باشد، باید باقیماندهٔ تقسیم متحد با صفر شود . در تقسیم x^4-3x^2+ax+b بر x^2-2x+4 باقیمانده‌ای مساوی $(a-8)x+b+24$ خواهیم داشت:

$$(a-8)x+(b+24)\equiv 0 \Longrightarrow a=8 \ ; \ b=-24$$

روش دوم: از روش ضریبهای نامعین استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$x^4-3x^3+ax+b\equiv(x^2-2x+4)(x^2+mx+n)$$

و از آنجا به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} m-2=-3 \\ n-2m+4=0 \\ 4m-2n=a \\ 4n=b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=-6 \\ a=8 \\ b=-24 \end{cases}$$

روش ضریبهای نامعین، علاوه بر شرط قابلیت تقسیم، مقدار خارج قسمت را هم بدست می‌دهد:

$$Q=x^2-x-6$$

روش سوم: از ریشه‌های موهومی مقسوم‌علیه استفاده می کنیم.

$$x^2-2x+4=0 \Longrightarrow x=1\pm i\sqrt{3}$$

کافی است که مقسوم به ازای یکی از این ریشه‌ها صفر باشد ، تا بر x^2-2x+4 قابل‌قسمت شود. مقسوم را $f(x)$ می گیریم:

$$f(1+i\sqrt{3})=(1+i\sqrt{3})^4-3(1+i\sqrt{3})^3+a(1+i\sqrt{3})+b=0$$

ویا:

$$(a+b+16)+\sqrt{3}(a-8)i=0$$

و از آنجا:

$$\begin{cases} a+b+16=0 \\ a-8=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=-24 \end{cases}$$

۸۴. برای اینکه $f(x)$ بر $(x-1)^2$ قابل قسمت باشد، باید داشته باشیم:

$$f(1)=f'(1)=0$$

که به سادگی تحقیق می‌شود.

برای محاسبهٔ‌خارج‌قسمت،عامل $(x-1)^2$ را در $f(x)$ظاهرمی کنیم:

$$f(x)=nx^n(x-1)-(x^n-1)=$$
$$=(x-1)[nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)]=$$
$$=(x-1)[(x^n-x^{n-1})+(x^n-x^{n-2})+\dots+(x^n-1)]=$$

$$=(x-1)^2[x^{n-1}+x^{n-2}(x+1)+x^{n-3}(x^2+x+1)+\dots+$$
$$+(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)]=$$
$$=(x-1)^2[nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+\dots+$$
$$+2x+1]$$

و از آنجا خارج قسمت چنین است:

$$Q=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\dots+2x+1$$

۸۵. می‌توان عبارت $x^4+ma^2x^2+a^4$ را بر x^2-ax+a^2 تقسیم کرد و باقیمانده رانسبت به xمتحد با صفر قرار داد. در این تقسیم خارج‌قسمت مساوی x^2+ax+a^2mو باقیمانده‌مساوی$a^3(m-1)x+a^4(m-1)$ می‌شود که این باقیمانده به ازای $m=1$ نسبت به x متحد صفر است و در اینصورت خارج‌قسمت مساوی x^2+ax+a^2 می‌شود.

جواب: $m=1$

۸۶. اولا) $a=b=1$

ثانیاً) به‌ترتیب‌داریم:

$$(x-2)^{2n}+(x-1)^n-1=[(x-2)^{2n}+(x-2)]+$$
$$+[(x-1)^n-(x-1)]=$$
$$=(x-2)[(x-2)^{2n-1}+1]+(x-1)[(x-1)^{n-1}-1]=$$
$$=(x-2)(x-1)[(x-2)^{2n-2}-(x-2)^{2n-3}+\dots+1]+$$
$$+(x-1)(x-2)[(x-1)^{n-2}+(x-1)^{n-3}+\dots+1]=$$
$$=(x^2-3x+2)\Big\{[(x-2)^{2n-2}-(x-2)^{2n-3}+\dots+1]+$$
$$+[(x-1)^{n-2}+(x-1)^{n-3}+-\dots+1]\Big\}$$

مقدار داخل آکولاد ، خارج قسمت مورد نظر است .

۸۷. بنابر فرض داریم:

$$f(1)=1 \;\; ; \;\; f(3)=-4$$

اکنون اگر خارج قسمت $f(x)$ بر $(x-1)(x-3)$ را $Q(x)$ و باقیمانده این تقسیم را $ax+b$ فرض‌کنیم (چون مقسوم‌علیه از درجهٔ دوم است، باقیمانده در حالت عمومی درجه اول خواهد بود)، داریم :

$$(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b\equiv f(x)$$

این اتحاد به ازای مقادیر $x=۱$ و $x=۳$ چنین می‌شود:

$$\begin{cases} a+b=f(۱)=۱ \\ ۳a+b=f(۳)=-۴ \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=-\frac{۵}{۲} \\ b=\frac{۷}{۲} \end{array} \right.$$

و بنابراین باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-۱)(x-۳)$ چنین می‌شود:

$$R=-\frac{۵}{۲}x+\frac{۷}{۲}$$

حالت کلی: اگر باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x-a$ را مساوی A و باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x-b$ را B فرض کنیم، باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ چنین است:

$$R=A\frac{x-b}{a-b}+B\frac{x-a}{b-a}$$

۸۸. شبیه تمرین قبل عمل کنید.

جواب: $R=-\frac{۱}{۱۲}x^۲-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۶}$

حالت کلی: اگر باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ ، $x-b$ و $x-c$ به‌ترتیب A، B و C باشد، باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)(x-b)(x-c)$ چنین خواهد بود:

$$R=A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+B\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+$$
$$+C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

۸۹. فرض کنید:

$$f(x)=ax^۴+bx^۳+cx^۲+dx+e$$

باید داشته باشیم:

$$f(-۲)=۰\ ;\ f(۱)=۱۵\ ;\ f(-۱)=۵\ ;$$
$$f(-۳)=-۱۳\ ;\ f(۲)=۹۲$$

جواب: $f(x)=x^۴+۶x^۳+۷x^۲-x+۲$

۹۰. فرض می‌کنیم:

$$f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$$

داریم:

$$۱)\ a+b+c+d=۲$$

$$۲)\ f(-۱)=-a+b-c+d=۰$$

$$۳)\ ax^۳+bx^۲+cx+d=(ax+b)(x^۲)+(cx+d)$$

که برای محاسبهٔ باقیماندهٔ تقسیم آن بر $x^۲+۱$ بایدبجای $x^۲$ مقدار -۱ را قرار دهیم:

$$(d-b)-(a-c)x\equiv ۱-x$$

و از آنجا:

$$d-b=۱\ ;\ a-c=۱$$

جواب: $f(x)=x^۳+۱$

۹۱. داریم:

$$x^۴+۹=(x^۲+۳)^۲-۶x^۲=$$
$$=(x^۲+x\sqrt{۶}+۳)(x^۲-x\sqrt{۶}+۳)$$

جواب: $a=\sqrt{۶}\ ,\ b=۳$ یا $a=-\sqrt{۶}\ ,\ b=۳$

۹۲. روش اول: اولا به ازای $x=۱$ عبارت $f(x)$ بـر $x^۳+x^۲+x+۱$ یعنی ۴قابل‌قسمت است. ثانیاً به‌ازای $x\neq ۱$ به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که $(x-۱)f(x)$ بر $x^۴-۱$ قابل‌قسمت است، یعنی‌به‌ازای $x^۴=۱$ برابرصفر می‌شود.

روش دوم : اگرمقسوم‌علیه را تجزیه‌کنیم بصورت$(x+۱)(x^۲+۱)$ در می‌آید و باز هم به سادگی ثابت می‌شودکه :

$$f(-۱)=۰ \text{ و } f(i)=۰$$

برای حالت‌کلی هم می‌توان مانند روش اول عمل کرد. اولا وقتی که $x=۱$ باشد $f(x)$ بر عبارت مفروض قابل‌قسمت است، ثانیاً وقتی‌که $x\neq ۱$ باشد، هم $f(x)$ و هم مقسوم‌علیه را در $x-۱$ ضرب می‌کنیم ، در نتیجه باید ثابت‌کردکه $(x-۱)f(x)$ بر $x^n-۱$ قابل‌قسمت‌است. اگر $(x-۱)f(x)$ را برحسب‌توانهای x^n منظم‌کنیم و $x^n=۱$ قرار دهیم به باقیمانده‌ای‌مساوی صفر می‌رسیم.

۹۳. دستگاه چهار معادلهٔ چهار مجهولی زیر را حل کنید:

$$f(1)=f'(1)=f''(1)=f'''(1)=0$$

جواب: $q=1\ ,\ n=2(a^2-1)\ ;\ m=p=-a^2$

۹۴. در حقیقت $f(x)-1$ بر $(x+1)^4$ و $f(x)+1$ بر $(x-1)^4$ قابل‌قسمت است، بنابراین $f'(x)$ بر $(x+1)^3$ و $(x-1)^3$ یعنی بر $(x^2-1)^3$ قابل‌قسمت خواهد بود. چون $f(x)$ از درجهٔ هفتم است، مشتق آن باید از درجهٔ ششم باشد و در نتیجه خواهیم داشت:

$$f'(x)=\lambda(x^2-1)^3$$

که در آن λ ضریب عددی ثابتی است، از دو طرف تساوی بالا تابع اولیه می‌گیریم:

$$f'(x)=\lambda(x^6-3x^4+3x^2-1)$$

$$f(x)=\lambda(\tfrac{1}{7}x^7-\tfrac{3}{5}x^5+x^3-x)+c$$

ولی طبق فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$f(1)=-1\ ;\ f(-1)=1$$

از آنجا مقادیر λ و c بدست می‌آید:

$$\lambda=\frac{35}{16}\ ;\ c=0$$

جواب: $f(x)=\frac{1}{16}(5x^7-21x^5+35x^3-35x)$

۹۵. اگر فرض کنید: $f(x)=ax^2+bx+c$ ، با توجه به شرطهای مسأله بدست می‌آید:

$$a=1\ ;\ b=-2\ ;\ c=1$$

۹۶. روش اول: بنا بر فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$(x^3+1)(x^2+mx+n)+1\equiv$$
$$\equiv(x^2+1)(x^3+px^2+qx+r)-1$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$p=q=m=-1\ ;\ r=2\ ;\ n=0$$

و داریم:

$$f(x)=x^{5}-x^{4}+x^{2}-x+1$$

روش دوم: اگر فرض کنیم:

$$f(x)=x^{5}+ax^{4}+bx^{3}+cx^{2}+dx+e$$

باقیماندهٔ آن بر $x^{2}+1$ بصورت:

$$(d-b+1)x+(a-c+e)$$

و بر $x^{3}+1$ بصورت:

$$(c-1)x^{2}+(d-a)x+(e-b)$$

در می‌آید و بنابراین طبق فرض مسأله داریم:

$$\begin{cases}(d-b+1)x+(a-c+e)\equiv-1\\(c-1)x^{2}+(d-a)x+(e-b)\equiv+1\end{cases}$$

و از آنجا مقادیر a،b،c،d و e بدست می‌آید.

۹۷. $f(x)$ ومشتقهای مرتبهٔ اول ودوم آن به ازای $x=1$ برابرصفرمی‌شود.

۹۸. داریم:

$$f(x)=ax^{4}+bx^{3}+c=a(x^{2})^{2}+bx(x^{2})+c$$

که به ازای $x^{2}=-1$ باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x^{2}+1$ بدست می‌آید:

$$-bx+a+c$$

و همچنین:

$$f(x)=(ax+b)(x^{3})+c$$

و بنابراین باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x^{3}+1$ چنین است.

$$-ax+c-b$$

و به این ترتیب داریم:

$$(-bx+a+c)(-ax+c-b)\equiv 2x^{2}-12x+10$$

و از آنجا به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}ab=4\\(a+b)(a-b+c)=12\\c(a-b+c)=12\end{cases}$$

از معادلهٔ دوم دستگاه‌داریم: $c=\frac{۱۲}{a+b}-a+b$

و از تقسیم معادلهٔ دوم بر معادلهٔ سوم: $c=a+b$

و از آنجا: $\frac{۱۲}{a+b}-a+b=a+b$

و یا پس از ساده کردن: $a^{۲}+ab=۶$

که با توجه به معادلهٔ اول دستگاه می‌شود: $a^{۲}=۴$

جواب: $a=۲$ ، $b=-۱$ ، $c=۱$ یا $a=-۲$ ، $b=۱$ ، $c=-۱$

۹۹. اگر چندجمله‌ای $f(x)=x^{۴}+px^{۲}+qx+a^{۲}$ بر $x^{۲}-۱$ قابل قسمت باشد، باید باقیماندهٔ آن بر $x^{۲}-۱$ متحد صفر شود:

$$f(x)=(x^{۲})^{۲}+p(x^{۲})+q+a^{۲}$$

$$۱+p+qx+a^{۲}\equiv ۰ \implies q=۰\ ;\ p=-(a^{۲}+۱)$$

و در اینصورت $f(x)$ چنین می‌شود:

$$f(x)=x^{۴}-(a^{۲}+۱)x^{۲}+a^{۲}=(x^{۲}-۱)(x^{۲}-a^{۲})$$

یعنی $f(x)$ بر $x^{۲}-a^{۲}$ هم قابل قسمت است.

۱۰۰. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases}\alpha^{۳}+p\alpha+q=\beta\\ \beta^{۳}+p\beta+q=\alpha\end{cases}$$

از تفاضل دو رابطه به سادگی به رابطهٔ $\alpha^{۲}+\beta^{۲}+\alpha\beta=-(p+۱)$ و از حذف p بین دو رابطه به رابطهٔ $q=(\alpha+\beta)(\alpha\beta+۱)$ می‌رسیم.

اگر $p=-۲۲$ و $q=-۱۹$ باشد، داریم:

$$\begin{cases}(\alpha+\beta)(\alpha\beta+۱)=-۱۹\\ \alpha^{۲}+\beta^{۲}+\alpha\beta=۲۱\end{cases} \implies \begin{cases}(\alpha+\beta)(\alpha\beta+۱)=-۱۹\\ (\alpha+\beta)^{۲}-\alpha\beta=۲۱\end{cases};$$

$$\begin{cases}\alpha\beta=-\left(\frac{۱۹}{\alpha+\beta}+۱\right)\\ \alpha\beta=(\alpha+\beta)^{۲}-۲۱\end{cases} \implies (\alpha+\beta)^{۲}+\frac{۱۹}{\alpha+\beta}=۲۰\ ;$$

$$(\alpha+\beta)^{۳}-۲۰(\alpha+\beta)+۱۹=۰$$

یکی از جوابهای $\alpha+\beta$ مساوی واحداست و بنابراین دوجواب‌دیگر

هم بدست می‌آید. با در دست داشتن $\alpha+\beta$ با کمك معادلهٔ اول دستگاه $\alpha\beta$ هم محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\cdot\beta=-20\end{cases};\quad \begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{\sqrt{77}-1}{2}\\ \alpha\cdot\beta=-\dfrac{\sqrt{77}+3}{2}\end{cases};\quad \begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{\sqrt{77}+1}{2}\\ \alpha\beta=\dfrac{\sqrt{77}-3}{2}\end{cases}$$

که اگر مقید به صحیح بودن α و β باشیم، داریم : $\alpha=5$ و $\beta=-4$

۱۵۱. می‌توان با تقسیم مستقیم مسأله را به نتیجه رساند، ولی اگر از رابطهٔ زیر که به رابطهٔ **مواور** مشهور است اطلاع داشته باشیم:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

می‌توان بـا قرار دادن یکی از ریشه‌هـای موهومی مقسوم علیه در مقسوم ، باقیماندهٔ صفر را بدست آورد:

$$x^2-2x\cos\alpha+1=0 \implies x=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$$

مثلا ریشهٔ $x=\cos\alpha+i\sin\alpha$ را آزمایش می‌کنیم، به‌ترتیب بدست می‌آید:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{n+1}\cos(n-1)\alpha-(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n\cos n\alpha-$$
$$-(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cos\alpha+1=[\cos(n+1)\alpha+i\sin(n+1)\alpha]\times$$
$$\times\cos(n-1)\alpha-(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)\cos n\alpha-$$
$$-(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cos\alpha+1=[\cos(n+1)\alpha\cos(n-1)\alpha-$$
$$-\cos^2 n\alpha-\cos^2\alpha+1]+i[\sin(n+1)\alpha\cos(n-1)\alpha-$$
$$-\sin n\alpha\cos n\alpha-\sin\alpha\cos\alpha]=$$
$$=[\tfrac{1}{2}(\cos 2n\alpha+\cos 2\alpha)-\tfrac{1}{2}(1+\cos 2n\alpha)-\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)+$$
$$+1]+i[\tfrac{1}{2}(\sin 2n\alpha+\sin 2\alpha)-\tfrac{1}{2}\sin 2n\alpha-\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha]=0$$

وقتی کـه یك ریشهٔ مختلط (به صورت $a+ib$) در معادله‌ای با ضریبهای حقیقی صدق کند، حتماً مزدوج آن (یعنی $a-ib$) هم در معادله صدق می‌کند. بنابراین آزمایش ریشهٔ $x=\cos\alpha-i\sin\alpha$ لازم نیست.

۱۵۴. اولا) به ازای تمام مقادیر n داریم:

$$f(0,y)=0 \quad ; \quad f(x,0)=0$$

و بنابراین $f(x,y)$ همیشه بر xy قابل قسمت است.

اگر n عددی فرد باشد، داریم:

$$f(-y,y)=0$$

و بنابراین $f(x,y)$ در حالت فرد بودن n بر $x+y$ قابل‌قسمت است.

اکنون باید ثابت کنیم که $f(x,y)$ بر x^2+xy+y^2 هم قابل قسمت است. کافی است $f(x,y)$ به ازای یکی از ریشه‌های موهومی معادلهٔ $x^2+y\cdot x+y^2=0$ صفر شود، تابراین سه جمله‌ای قابل قسمت باشد. ریشه‌های این معادله را نسبت به مجهول x معین می‌کنیم:

$$x^2+yx+y^2=0 \implies x=y\times\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=yj \text{ و } yj^2$$

$f(yj,y)$ را محاسبه می‌کنیم (j و j^2 کعبهای موهومی واحد هستند).

$$f(yj,y)=(yj+y)^n-(yj)^n-y^n=y^n(j+1)^n-J^n-1]$$

با توجه به رابطهٔ $J^2+J+1=0$، می‌توان بجای $J+1$ مساویش $-j^2$ را قرار داد و چون n عددی است فرد، داریم:

$$f(Jy,y)=-y^n(J^{2n}+J^n+1)$$

با توجه به اینکه n بر ۳ قابل‌قسمت نیست، دوحالت در نظر می‌گیریم:

$$1)\ j=3k+1 \implies f(jy,y)=-y^n(J^{6k+2}+J^{3k+1}+1)=$$
$$=-y^n(J^2+J+1)=0$$

$$2)\ j=3k+2 \implies f(Jy,y)=-y^n(J^{6k+4}+J^{3k+2}+1)=$$
$$=-y^n(J+J^2+1)=0$$

و به این ترتیب $f(x,y)$، با توجه به شرطهای مسأله، بر x^2+xy+y^2 هم قابل‌قسمت است.

ثانیاً) در اینحالت n بصورت $6k+1$ است، چون n عددی فرد و غیر قابل‌قسمت بر ۳ می‌باشد، بنابراین $f(x,y)$ بر (x^2+xy+y^2) و $xy(x+y)$ قابل‌قسمت است، برای اثبات قابلیت تقسیم آن بر $(x^2+xy+y^2)^2$ کافی است ثابت کنیم که مثلاً مشتق آن (نسبت به x یا y) هم بر x^2+xy+y^2 قابل‌قسمت است. می‌نویسیم:

$$\varphi(x)=(x+y)^n-x^n-y^n$$
$$\varphi'(x)=n(x+y)^{n-1}-nx^{n-1}$$
یکی ازریشه‌های $x^2+y\cdot x+x^2=0$ و مثلا jy را در مشتق قرارمی‌دهیم:
$$\varphi'(Jy)=n(J\cdot y+y)^{n-1}-n(Jy)^{n-1}=$$
$$=ny^{n-1}[(J+1)^{n-1}-J^{n-1}]$$
$n-1$ عددی است زوج و بنابراین داریم:
$$(J+1)^{n-1}=(-J^2)^{n-1}=J^{2(n-1)}$$
و اگر بجای n مقدارش $6k+1$ راقرار دهیم، خواهیم‌داشت:
$$\varphi'(Jy)=ny^{n-1}(J^{12k}-J^{6k})=0$$
و به این ترتیب وقتی $\varphi(x)$ و $\varphi'(x)$ هر دو بر x^2+xy+y^2 قابل‌قسمت باشند، $\varphi(x)$ بر $(x^2+xy+y^2)^2$ قابل‌قسمت خواهد بود.

ثالثاً) $\quad$ ۱) $(x+y)^3-x^3-y^3=Axy(x+y)$

چون‌دوطرف تساوی نسبت‌به x از درجه دومند، A مقداری است ثابت.ضریب x^2y درسمت‌چپ مساوی۳ ودرسمت راست مساوی A است پس $A=3$، یعنی:
$$(x+y)^3-x^3-y^3=3xy(x+y)$$

۲) $(x+y)^5-x^5-y^5=Bxy(x+y)(x^2+xy+y^2)$

(۵ عددی است فرد و غیرقابل‌قسمت بر ۳). مثل حالت قبل $B=5$ می‌شود:
$$(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$$
و بهمین ترتیب:

۳) $(x-y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$

۱۰۵. اتحاد زیر واضح است:
$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$$
وبه‌سادگی روشن می‌شود که عبارت $(x+y+z)^m-x^m-y^m-z^m$ وقتی بر $(x+y)(y+z)(z+x)$ قابل قسمت است که m عددی فرد باشد.

۱۰۶. اگر در تقسیم m بر n خارج‌قسمت q و باقیماندهٔ r را داشته باشیم، می‌توان نوشت:
$$m=n\cdot q+r$$

و بنابراین:

$$x^m - y^m = (x^n)^q \cdot x^r - y^{n \cdot q + r}$$

باقیماندهٔ تقسیم $x^m - y^m$ بر $x^n - y^n$ به‌ازای $x^n = y^n$ بدست می‌آید:

$$R = (y^n)^q \cdot x^r - y^{nq+r} = y^{nq}(x^r - y^r)$$

و برای اینکه این باقیمانده صفر باشد، باید داشته باشیم:

$$x^r = y^r \implies r = 0$$

یعنی باید m مضربی از n باشد.

۱۰۷. داریم:

$$f(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} \quad ; \quad \varphi(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad ;$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{(x^{2n} - 1)(x - 1)}{(x^n - 1)(x^2 - 1)} = \frac{x^n + 1}{x + 1}$$

و می‌دانیم برای‌اینکه $x^n + 1$ بر $x + 1$ قابل‌قسمت باشد، باید n عددی‌فرد باشد.

۱۰۸. از رابطهٔ زیر استفاده کنید (رابطهٔ مواور):

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

۱۰۹. از تقسیم مستقیم و یا از رابطهٔ مواور استفاده کنید.

۱۱۰. چون $f(x,y)$ نسبت به x و y متقارن است، داریم:

$$f(x,y) = f(y,x)$$

از طرف دیگر چون $f(x,y)$ بر $x - y$ قابل قسمت است. می‌توان نوشت:

$$f(x,y) = (x - y)\varphi(x,y) \quad ;$$

$$f(y,x) = (y - x)\varphi(y,x)$$

از آنجا: $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$

و بنابراین داریم:

$$\varphi(y,y) = -\varphi(y,y) \implies \varphi(y,y) = 0$$

یعنی $\varphi(x,y)$ هم بر $x - y$ و در نتیجه $f(x,y)$ بر $(x - y)^2$ قابل‌قسمت است.

۱۱۱. جواب: $x^{13} + 1$

۱۱۲. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عبارتهای صورت ومخرج x^3-x^2-x+1 است.

جواب: $\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}$

۱۱۳. مقسوم و مقسوم علیه‌را در $x-1$ ضرب می‌کنیم ، در اینصورت باید ثابت کنیم:

$$\varphi(x)=(x-1)f(x)=x^{2m+1}-x^{2m}+x^{m+1}-x^m+x-1$$

بر $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ قابل قسمت است، باید $\varphi(x)$ را بر حسب توانهای (x^3) منظم کنیم، برای این منظور سه حالت درنظر می‌گیریم:

$1)\ m=3k$

$$\varphi(x)=x(x^3)^{2k}-(x^3)^{2k}+x(x^3)^k-(x^3)^k+x-1$$

که‌به‌ازای $x^3=1$ برابر با $3(x-1)$ می‌شود. یعنی به‌ازای $m=3k$، $\varphi(x)$ بر x^3-1 قابل قسمت نیست.

$2)\ m=3k+1$

$$\varphi(x)=(x^3)^{2k+1}-x^2(x^3)^{2k}+x^2(x^3)^k-x(x^3)^k+x-1$$

که به ازای $x^3=1$ برابر صفر می‌شود، یعنی $f(x)$ به‌ازای $m=3k+1$ بر x^3-1 قابل‌قسمت است.

بهمین ترتیب درحالت $m=3k+2$ هم $\varphi(x)$ بر x^3-1 قابل‌قسمت خواهدشد.

جواب: $m=3k\pm1$

۱۱۴. جواب:

$n=3k+1\ ,\ m=3k+2$ یا $n=3k+2\ ,\ m=3k+1$

۱۱۵. شبیه دو تمرین قبل عمل کنید.

۱۱۶. راهنمایی: تفاضل $f(x,y)-\varphi(x,y)$ بر مقسوم‌علیه که بصورت $(ax-by)(ay-bx)$ در می‌آید، قابل‌قسمت است.

۱۱۷. مقسوم‌علیه را می‌توان به این ترتیب تجزیه کرد:

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=$$
$$=(x+Jy+J^2z)(x+J^2y+Jz)$$

بنابراین کافی است که مقسوم به ازای $x=-Jy-J^2z$ برابر صفرشود که به‌سادگی تحقیق می‌شود.

در حالت دوم ، باید علاوه بر $f(x,y,z)$ ، مشتق آن نسبت به x هم به ازای همین مقدار x برابر صفر شود.

تجزیهٔ عبارتها چنین است:

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=$$
$$=5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)\ ;$$
$$(x-y)^7+(y-z)^7+(z-x)^7=$$
$$=7(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)^2$$

۱۱۸. $f(x)$ از درجهٔ m را بصورت زیردرنظرمی‌گیریم:

$$f(x)=A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\lambda)$$

(در حالت کلی m ریشهٔ $\alpha,\beta,\gamma,\dots,\lambda$ می‌توانند حقیقی یا موهومی باشند).

مشتق این تابع درجهٔ m، از درجهٔ $m-1$ است و برای اینکه $f(x)$ بر $f'(x)$ قابل‌قسمت باشد باید بین $f(x)$ و $f'(x)$ ، $m-1$ ریشهٔ مشترك وجـود داشته باشد. این $m-1$ ریشهٔ مشترك را $\beta,\gamma,\dots,\lambda$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\lambda)=\varphi(x)$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=A(x-\alpha)\varphi(x)$$

و از آنجا:

$$f'(x)=A[\varphi(x)+(x-\alpha)\varphi'(x)]$$

$f'(x)$ باید بر $\varphi(x)$ قابل‌قسمت باشد. از دوجملهٔ داخل کروشه ، $\varphi(x)$ بر $\varphi(x)$ قابل قسمت است، پس باید $(x-\alpha)\varphi'(x)$ هم بر $\varphi(x)$ قابل قسمت باشد. $\varphi'(x)$ از درجهٔ $m-2$ و $\varphi(x)$ از درجهٔ $m-1$ است و بایدداشته باشیم:

$$(x-\alpha)\varphi'(x)=\lambda\varphi(x)$$

یعنی باید $\varphi(x)$ بـر $x-\alpha$ قابل‌قسمت باشد و این نمی‌شود مگر اینکه α با یکی از ریشه‌های $\varphi(x)$ برابر باشد و مثلا : $\alpha=\beta$ ، در اینصورت $f(x)$

بصورت زیر در می‌آید:

$$f(x)=(x-\alpha)^2\varphi_1(x)$$

و اگر بهمین‌ترتیب استدلال را ادامه دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\lambda$$

و داریم:

$$f(x)=A(x-\alpha)^m$$

که با توجه به شرطهای $f(1)=0$ و $f(0)=1$ بدست می‌آید:

$$f(x)=(-1)^m(x-1)^m$$

۱۱۹. چند جمله‌ایهای مقسوم و مقسوم علیه را می‌توان چنین‌نوشت:

$$\frac{a^{24}-1}{a-1}\ ;\ \frac{a^x-1}{a-1}$$

بنابراین مسأله به اینجا منجر می‌شود که به ازای چه مقادیری از x عبارت $a^{24}-1$ بر a^x-1 قابل قسمت است.

فرض‌می‌کنیم: $24=px+q$، که‌درآن p خارج‌قسمت ۲۴ برxوq باقیمانده این تقسیم است ($0\leqslant q<x$). در اینصورت:

$$a^{24}-1=a^{px+q}-1=a^q[(a^x)^p-1]+(a^q-1)$$

یعنی باید $q=0$ و x مقسوم علیهی از ۲۴ باشد، پس x یکی از عددهای زیر است:

$$1,2,3,4,6,8,12,24$$

۱۲۰. طبق قضیهٔ فرما a^p-a و b^p-b بر p قابل قسمت‌اند، بنابراین تفاضل آنها یعنی: $a^p-b^p-(a-b)$ هم بر p قابل قسمت است. از طرف دیگر طبق فرض a^p-b^p مضربی است از p، پس $a-b$ هم‌بر p قابل قسمت خواهد بود. فرض می‌کنیم $a-b=pt$، در اینصورت داریم:

$$a^p-b^p=(b+pt)^p-b^p=$$

$$=p\cdot b^{p-1}\cdot pt+\frac{p(p-1)}{2}b^{p-2}\cdot p^2t^2+\cdots+p^pt^p$$

و بنابراین a^p-b^p بر p^2 قابل قسمت است.

۱۲۱. طبق شرطهای‌مسأله باید داشته باشیم:

$$f(x+۱)=(x-۱)^۲\varphi(x) \quad ;$$
$$f(x-۱)=(x+۱)^۲\varphi_۱(x)$$

اگردر رابطهٔاول x رابه $x-۱$ ودر رابطهٔ دوم $x-۱$ رابه xتبدیل کنیم، می‌شود:

$$f(x)=(x-۲)^۲\varphi(x-۱)=(x-۲)^۲g(x)$$
$$f(x)=(x+۲)^۲\varphi_۱(x+۱)=(x+۲)^۲g_۱(x)$$

بنابراین $f(x)$ بر $(x-۲)^۲$ و $(x+۲)^۲$ و در نتیجه بر $(x^۲-۴)^۲$قابل قسمت است و داریم:

$$f(x)=\lambda(x^۲-۴)^۲$$

و چون $f(x)$ از درجهٔ چهارم است، λ مقداریست ثابت و چون طبق فرض مسأله $f(۱)=۱$ است، خواهیم داشت:

$$۱=\lambda(۱-۴)^۲ \implies \lambda=\frac{۱}{۹}$$

و بنابراین:
$$f(x)=\frac{۱}{۹}(x^۲-۴)^۲$$

۱۲۲. ریشه‌های‌عبارت $x^۲-۲x\cos\varphi+۱$ عبارتست از $x=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$ و کافی‌است‌یکی‌از این ریشه‌هاومثلا $\cos\varphi+i\sin\varphi$ مقسوم رامساوی‌صفر کند. با قراردادن‌این مقداربجایxدرمقسوم،وبااستفاده‌ازرابطهٔ‌مواور، بدست‌می‌آید:

$$[\cos(n+۱)\varphi+i\sin(n+۱)\varphi]\sin(n-۱)\varphi-$$
$$-(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\sin n\varphi+(\cos\varphi+i\sin\varphi)\sin\varphi=$$
$$=[\cos(n+۱)\varphi\sin(n-۱)\varphi-\cos n\varphi\sin n\varphi+\cos\varphi\sin\varphi)+$$
$$+i[\sin(n+۱)\varphi\sin(n-۱)\varphi-\sin^۲n\varphi-\sin^۲n\varphi+\sin^۲\varphi]=$$
$$=\frac{۱}{۲}[(\sin۲n\varphi-\sin۲\varphi)-\sin۲n\varphi+\sin۲\varphi]+$$
$$+i[(\cos۲\varphi-\cos۲n\varphi)-(۱-\cos۲n\varphi)+(۱-\cos۲\varphi)]=۰$$

بهمین ترتیب ریشهٔ $\cos\varphi-i\sin\varphi$ هم عبارت مقسوم را مساوی صفر می‌کند، یعنی مقسوم بر مقسوم‌علیه مفروض قابل‌قسمت است.

۱۲۴. تقسیم را انجام می‌دهیم:

$$
\begin{array}{l|l}
1 \qquad\qquad -abx^2 & 1-(a+b)x+abx^2 \\ \cline{2-2}
-1+(a+b)x-abx^2 & 1+(a+b)x+(a^2+b^2)x^2+\dots+(a^{n-1}+b^{n-1})x^{n-1}+(a^n+b^n)x^n \\ \cline{1-1}
\quad (a+b)x-2abx^2 & \\
-(a+b)x+(a+b)^2x^2-abx^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad (a^2+b^2)x^2-ab(a+b)x^3 & \\
-(a^2+b^2)x^2+(a^2+b^2)(a+b)x^3-ab(a^2+b^2)x^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad (a^3+b^3)x^3-ab(a^2+b^2)x^4 & \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \hline
\qquad\qquad (a^{n-1}+b^{n-1})x^{n-1}-ab(a^{n-2}+b^{n-2})x^n & \\
\qquad -(a^{n-1}+b^{n-1})x^{n-1}+(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1})x^n-ab(a^{n-1}+b^{n-1})x^{n+1} & \\ \hline
\qquad\qquad\qquad (a^n+b^n)x^n-ab(a^{n-1}+b^{n-1})x^{n+1} & \\
\qquad\qquad -(a^n+b^n)x^n+(a+b)(a^n+b^n)x^{n+1}-ab(a^n+b^n)x^{n+2} & \\ \hline
\qquad\qquad\qquad =(a^{n+1}+b^{n+1})x^{n+1}-ab(a^n+b^n)x^{n+2} &
\end{array}
$$

صورت کلی باقیمانده $=(a^{n+1}+b^{n+1})x^{n+1}-ab(a^n+b^n)x^{n+2}$

۱۲۴. مخرج کسر مجذور کامل است و به‌صورت $(x^۳+۳x^۲-x-۱)^۲$ در می‌آید و صورت کسر بر $x^۳+۳x^۲-x-۱$ قابل‌قسمت است و خارج قسمت مساوی $x^۳+۲x-۱$ می‌شود. در نتیجه کسر مفروض به این صورت در می‌آید:

$$\frac{x^۳+۲x-۱}{x^۳+۳x^۲-x-۱}$$

و این کسر دیگر ساده نمی‌شود.

۱۲۵. صورت کسر بعد از باز کردن پرانتزها $۱۵۲۱(a^۲+b^۲+c^۲)$ و مخرج کسر $۳۶۱(a^۲+b^۲+c^۲)$ می‌شود.

جواب: $\frac{۱۵۲۱}{۳۶۱}$

۱۲۶. فرض کنید α مخالف واحدویکی از ریشه‌های موهومی معادلهٔ $x^۳=۱$ باشد ، تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=(۱+x)^{۲k}+x^{۲k}+۱$$

به روشنی دیده می‌شود که :

$$f(\alpha)=(۱+\alpha)^{۲k}+\alpha^{۲k}+۱=(-\alpha^۲)^{۲k}+\alpha^{۲k}+۱=$$
$$=(\alpha^۳)^k\cdot\alpha^k+\alpha^{۲k}+۱=\alpha^{۲k}+\alpha^k+۱=\frac{(\alpha^۳)^k-۱}{\alpha^k-۱}=\circ$$

و بهمین ترتیب:

$$f(\alpha^۲)=(۱+\alpha^۲)^{۲k}+\alpha^{۴k}+۱=\alpha^{۲k}+\alpha^k+۱=\circ$$

بنابراین تابع $\alpha^{۲k}f(x)$ بر

$$a^۲(x-a)(x-a^۲)=a^۲(x^۲+x+۱) \qquad (a\neq\circ)$$

قابل قسمت است که به ازای $x=\frac{b}{a}$ به این معناست که عبارت‌به‌صورت $(a+b)^{۲k}+a^{۲k}+b^{۲k}$ بر $a^۲+ab+b^۲$ قابل‌قسمت است.

۱۲۷. راه حل اول: ثابت می‌کنیم که $s=۱۹^{۱۹}+۶۹^{۶۹}$ بر ۴ و ۱۱ قابل قسمت است:

$$s=(۲\circ-۱)^{۱۹}+(۶۸+۱)^{۶۹}=(۲\circ m-۱)+(۶۸n+۱)=$$
$$=۴(۵m+۱۷n);$$

$$s=(۲۲-۳)^{۱۹}+(۶۶+۳)^{۶۹}=۲۲m_۱+۶۶n_۱+۳^{۶۹}-۳^{۱۹}=$$
$$=۱۱p+۳^{۱۹}(۳^{۵۰}-۱)=$$
$$=۱۱p+۳^{۱۹}(۲۴۳^{۱۰}-۱)=۱۱p+۳^{۱۹}\cdot۲۴۲q=۱۱q_۱$$

و چون s هم بر ۴ و هم بر ۱۱ قابل‌قسمت است بر ۴۴ هم قابل قسمت‌است.

راه حل دوم: روشن است که :

$$s=۱۹^{۶۹}+۶۹^{۶۹}-۱۹^{۱۹}[(۱۹^{۱۰})^{۵}-۱]=$$
$$=۸۸m-۱۹^{۱۹}(۱۹^{۱۰}-۱)n$$

طبق قضیهٔ کوچك فرما عدد $N=۱۹^{۱۱-۱}-۱$ مضربی است از ۱۱.علاوه بر آن:

$$N=(۱۹^{۲})^{۵}-۱=۳۶۱^{۵}-۱=۳۶۰k$$

بنابراین n مضربی است از۸. به این‌ترتیب N مضربی است از ۸۸ ومجموع مفروض هم‌مضربی از ۸۸ است.

* * *

۱۲۸. مقدار رادیکال اول برابر است با $\sqrt[۴]{(a+۱)^{۴}(a-۱)}$ که‌مقدارآن می‌شود $|a+۱|\sqrt[۴]{a-۱}$ و مقدار عبارت چنین است:

$$\frac{a}{۲}|a+۱|\sqrt[۴]{a-۱}\times\frac{\sqrt{a-۱}}{(a+۲)(a+۱)}=\frac{a}{۲}\cdot\frac{|a+۱|\sqrt[۴]{(a-۱)^{۳}}}{(a+۲)(a+۱)}$$

ولی $a+۱$ همیشه مثبت است ، زیرا برای اینکه مقدار زیر رادیکال اول $(a+۱)^{۴}(a-۱)$ و یا مقدار زیررادیکال دوم $a-۱$ مثبت باشدباید $a>۱$ باشد که در اینصورت $a+۱>۲$ می‌شود و بنابراین حاصل عبارت مساوی $\frac{a\sqrt[۴]{(a-۱)^{۳}}}{۲(a+۲)}$ خواهد شد.

۱۲۹. جواب: $\frac{۱}{۳}\sqrt[۶]{a}$

توضیح: رادیکال اول به ازای مقادیر $a>۰$ حقیقی است . به ازای $a=۰$ هم مفهوم خود را از دست می‌دهد. رادیکال دوم به ازای همهٔمقادیر

a بجز $a=-1$ معنا دارد . بنابراین مقدار a می‌تواند هر مقدار مثبت دلخواه باشد.

۱۳۰. اگر ab را به رادیکال اول داخل کنیم ، عبارت به‌صورت زیر در می‌آید :

$$\sqrt[n]{a-b}\times\frac{1}{\sqrt[n]{a-b}}=1$$

توضیح: در حالت زوج بودن n باید $a<b$ باشد. حالت $a=b$ در هر دو مورد زوج یا فرد بودن n استثنا است ، زیرا در اینصورت رادیکال دوم مفهوم خود را از دست می‌دهد.

۱۳۱. اگر در پرانتز اول مخرجها را گویاکنیم ، عبارت چنین می‌شود:

$$(\sqrt{6}-11)(\sqrt{6}+11)=-115$$

۱۳۲. مقسوم برابر $\dfrac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{b}$ و مقسوم علیه‌آن برابر $\dfrac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$ و خارج قسمت برابر $\dfrac{\sqrt{a-b}}{b}$ می‌باشد.

توضیح: برای اینکه رادیکالها درحوزهٔ عددهای حقیقی باشند بایددر عین‌حال سه شرط $a\geqslant 0$ و $a-b\geqslant 0$ و $a+b\geqslant 0$ وجود داشته باشد (می‌توان این سه شرط را بصورت دو شرط $a\geqslant 0$ و $|b|<|a|$ نوشت).

۱۳۳. مقسوم مساوی $\dfrac{2b}{b^2-a}$ ، مقسوم‌علیه مساوی $\dfrac{3b}{b^2-a}$ وخارج‌قسمت مساوی $\frac{2}{3}$ می‌شود . a می‌تواند هر مقدار مثبت را اختیار کند و b می‌تواند هر عدد دلخواه بجز $\pm\sqrt{a}$ باشد .

۱۳۴. در صورت کسر می‌توان از ۵۹ فاکتور گرفت.

جواب: ۵۹

توضیح. اگر درصورت کسرعاملی‌مساوی مخرج کسر وجود نداشت‌بازهم می‌توانستیم‌با روش‌ساده‌ای مخرج‌را گویا کنیم. فرض کنیدبخواهیم مخرج کسر:

$\dfrac{A}{5+3\sqrt[3]{4}-7\sqrt[3]{2}}$ را گویا کنیم. از روش ضریبهای نامعین استفاده می کنیم: عبارتی را که باید در صورت و مخرج کسر ضرب کنیم $a+b\sqrt[3]{4}+c\sqrt[3]{2}$ می گیریم، در اینصورت مخرج کسر چنین می‌شود:

$$(5+3\sqrt[3]{4}-7\sqrt[3]{2})(a+b\sqrt[3]{4}+c\sqrt[3]{2})=$$
$$=(5b+3a-7c)\sqrt[3]{4}+(5c+6b-7a)\sqrt[3]{2}+$$
$$+(5a+6c-14b)$$

برای اینکه این عبارت گویا باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 5b+3a-7c=0 \\ 5c+6b-7a=0 \end{cases}$$

بین این دو رابطه c را حذف می کنیم، به‌رابطهٔ $34a=67b$ می‌رسیم که می‌توان $a=67$ و $b=34$ گرفت (کوچکترین عددهای صحیحی که برای a و b وجود دارد)، در اینصورت $c=53$ می‌شود. به‌این ترتیب:

$$\frac{A}{5+3\sqrt[3]{4}-7\sqrt[3]{2}}=\frac{A(67+34\sqrt[3]{4}+53\sqrt[3]{2})}{(5+3\sqrt[3]{4}-7\sqrt[3]{2})(67+34\sqrt[3]{4}+53\sqrt[3]{2})}=$$
$$=\frac{A(67+34\sqrt[3]{4}+53\sqrt[3]{2})}{177}$$

۱۳۵. جواب: $\dfrac{7}{16}$

۱۳۶. جواب اگر حاصل عبارت را A بگیریم داریم:

$$2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2} \implies A=2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$$

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<(2k+1)\pi \implies A=2\sqrt{2}\sin x$$

$$(2k+1)\pi<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2} \implies A=0$$

$$2k\pi+\frac{3\pi}{2}<x<2k\pi+2\pi \implies A=2\sqrt{2}\cos x$$

۱۳۷. داریم:

$$A=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4x}}=\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 4x)}}=$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{4\cos^2 2x}}=\sqrt{2(1+|\cos 2x|)}$$

و جواب آن در حالتهای مختلف $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$ چنین است:

$$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4} \Longrightarrow A=2\cos x$$
$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4} \Longrightarrow A=2\sin x$$
$$\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4} \Longrightarrow A=-2\cos x$$
$$\frac{5\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4} \Longrightarrow A=-2\sin x$$

۱۳۸. جواب: $|\sin x+\cos x|$.

۱۳۹. داریم:

$$\sqrt{1+\sin 2\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=$$
$$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha+\cos\alpha|$$

و این مقدار وقتی برابر با $\sin\alpha+\cos\alpha$ است که $\sin\alpha+\cos\alpha\geqslant 0$ باشد. بنابراین حل مسأله منجر به حل نامعادلهٔ $\sin\alpha+\cos\alpha\geqslant 0$ درفاصلهٔ $[0,2\pi]$ می‌شود.

$$\sin\alpha+\cos\alpha=0 \Longrightarrow \alpha=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

که‌جوابهای بین صفر و 2π آن چنین است: $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$

و در نتیجه جوابهای α چنین است:

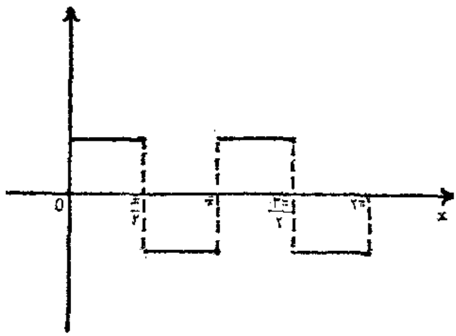
$$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{4}\ ;\ \frac{7\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$$

۱۴۰. تابع y پس از ساده کردن بصورت زیر در می‌آید:

$$y=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{|\sin\alpha|\cdot|\cos\alpha|}$$

و بنابراین وقتی انتهای قوس α در ربعهای اول و سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد $y=1$ و وقتی‌که انتهای قوس α درربعهای دوم و چهارم دایرهٔمثلثاتی باشد $y=-1$ می‌شود.

نمایش تغییرات تابع y در فاصلهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ روی دستگاه محورهای قائم چنین است.



شکل ۱۷

و بنابراین‌دورهٔ تناوب تابع‌مساوی π و طولهای نقطه‌های انفصال آن $x=k\frac{\pi}{2}$ است.

۱۴۱. اگر $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ را در عبارت $\sqrt{x^2-1}$ قرار دهیم ، بدست می‌آید:

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{1}{2}\left|a-\frac{1}{a}\right|$$

که با توجه به شرط $a>1$ مقدار $a-\frac{1}{a}>0$ می‌شود و داریم:

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

و بهمین ترتیب:

$$\sqrt{y^2-1}=\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{b}\right)$$

که اگر در عبارت فرض قرار دهیم مقدار آن بدست می‌آید.

جواب: $\dfrac{a^{2}+b^{2}}{a^{2}b^{2}+1}$

۱۴۲. باتوجه به شرط $x=\dfrac{2am}{b(1+m^{2})}$ ، به سادگی بدست می‌آید:

$$\sqrt{a+bx}=1+m\sqrt{\frac{a}{1+m^{2}}}$$

$$\sqrt{a-bx}=1-m\sqrt{\frac{a}{1+m^{2}}}$$

اولا با توجه به شرط $|m|<1$ ، هر دو مقدار $1+m$ و $1-m$ مثبت‌اند، ثانیاً a باید مقداری مثبت باشد ، زیرا در حالت منفی بودن a ، رادیکالها موهومی می‌شوند ($1+m^{2}$ همیشه مثبت است) و در حالت صفر بودن a ، رادیکالها برابر صفر و عبارت نامعین می‌شود.

عبارت مفروض بصورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{(1+m)\sqrt{\frac{a}{1+m^{2}}}+(1-m)\sqrt{\frac{a}{1+m^{2}}}}{(1+m)\sqrt{\frac{a}{1+m^{2}}}-(1-m)\sqrt{\frac{a}{1+m^{2}}}}=\frac{1}{m}$$

جواب: $\dfrac{1}{m}$ (به ازای $a>0$).

۱۴۳. جواب: $x=n$

۱۴۴. دوجمله‌ای $a-\sqrt{ax}$ را به صورت $\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})$ بنویسید ، صورت کسر داخل کروشه چنین می‌شود:

$$(\sqrt{a}+1)^{2}-\sqrt{a}=a+\sqrt{a}+1$$

و مخرج آن بصورت $3(a+\sqrt{a}+1)$ در می‌آید.

جواب : ۲۷

۱۴۵. جواب: $\dfrac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}$

۱۴۶. بجای x مقدارش را قراردهید و درداخل پرانتز از $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}$ عامل مشترك بگیرید.

جواب: $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}$

۱۴۷. باید مجموع زیر را محاسبه کنیم:

$$A=x\sqrt{\frac{(۱+y^۲)(۱+z^۲)}{۱+x^۲}}+y\sqrt{\frac{(۱+x^۲)(۱+z^۲)}{۱+y^۲}}+$$
$$+z\sqrt{\frac{(۱+x^۲)(۱+y^۲)}{۱+z^۲}}$$

ولی کافی است جملهٔ اول را محاسبه کنیم و با تبدیل دوری حاصل جمله‌های دوم و سوم را بدست آوریم.

راه حل اول: در جملهٔ اول بجای ۱ ، مقدارش $xy+yz+xz$ قرار می‌دهیم و عبارتهای داخل پرانتزها را تجزیه می‌کنیم:

$$x\sqrt{\frac{(۱+y^۲)(۱+z^۲)}{۱+x^۲}}=$$
$$=x\sqrt{\frac{(xy+yz+xz+y^۲)(xy+yz+xz+x^۲)}{xy+yz+xz+x^۲}}=$$
$$=x\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(x+z)(y+z)}{(x+y)(x+z)}}=$$
$$=x\sqrt{(y+z)^۲}=x\,|y+z|$$

و چون طبق فرض ، مقادیر x و y و z مثبت‌اند ، خواهیم داشت:

$$A=x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=۲(xy+yz+xz)=۲$$

راه حل دوم: فرض می‌کنیم:

$$x=tg\alpha\ ;\ y=tg\beta\ ;\ z=tg\gamma$$

α و β و γ را زاویه‌های حاده در نظرمی‌گیریم (x و y و z مقادیری مثبت‌هستند).

بنابراین داریم:

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}=tg\alpha\sqrt{\frac{(1+tg^2\beta)(1+tg^2\gamma)}{1+tg^2\alpha}}=$$

$$=tg\alpha\cdot\cos\alpha\frac{1}{\cos\beta}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\cos(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}=1-tg\beta tg\gamma$$

(چون $1=tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\alpha tg\gamma$ است : $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ می‌شود

وداریم: $\sin\alpha=\cos(\beta+\gamma)$).

و بنابراین :

$$A=(1-tg\alpha tg\gamma)+(1-tg\beta tg\gamma)+(1-tg\alpha tg\beta)=$$
$$=3-(tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\alpha tg\gamma)=3-1=2$$

۱۴۸. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{6}-(\sqrt{5}-2)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}-2}{4\sqrt{5}-3}=$$
$$=\frac{(4\sqrt{5}+3)(\sqrt{6}+\sqrt{5}-2)}{77}$$

۱۴۹. داریم:

$$\frac{3+4\sqrt{3}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\sqrt{5}}=\frac{(3+4\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5})}{3+4\sqrt{3}}=$$
$$=\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

۱۵۰. صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{2}-1$ ضرب کنید.

جواب: $\sqrt[3]{2}-1$.

۱۵۱. به‌ترتیب داریم :

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}{3-\sqrt[3]{4}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(9+3\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2})}{23}$$

۱۵۲. جواب: $\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}+1$

۱۵۳. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}+1)}=\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)}=$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)$$

۱۵۴. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{2}{1+2\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}=\frac{2(2\sqrt{2}-1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})}{8-(1-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9})^2}=$$
$$=\frac{2(2\sqrt{2}-1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})}{1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}=\frac{2(2\sqrt{2}-1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})(1+\sqrt[3]{3})}{1+3}=$$
$$=\sqrt[6]{72}+\sqrt[3]{9}+\sqrt{2}+1$$

۱۵۵. فرض می‌کنیم :

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}=\frac{1}{\lambda}$$

و از آنجا: $\alpha=a\lambda$ ، $\beta=b\lambda$ و $\gamma=c\lambda$.

که اگر بجای αوβوγ در کسر مفروض قرارار دهیم چنین می‌شود :

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{\lambda}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}=$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(1+\sqrt{\lambda})}$$

بجای λ مقدارش $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{a+b+c}$ قرار می‌دهیم، کسر بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\sqrt{a+b+c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a+b+c}+\sqrt{\alpha+\beta+\gamma})}$$

که گویاکردن مخرج آن مشکل نیست.

۱۵۶. ابتدا مجموع جمله‌های مخرج را محاسبه می‌کنیم (این مجموع را S می‌گیریم) :

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$$

در این اتحاد به جای n بترتیب $\sqrt{x}$ ، $\sqrt{x}+1$,..., $\sqrt{x}+10$ راقرار می‌دهیم:

$$+\left|\begin{array}{l}(\sqrt{x}+1)^3=(\sqrt{x})^3+3(\sqrt{x})^2+3(\sqrt{x})+1\\(\sqrt{x}+2)^3=(\sqrt{x}+1)^3+3(\sqrt{x}+1)^2+3(\sqrt{x}+1)+1\\(\sqrt{x}+3)^3=(\sqrt{x}+2)^3+3(\sqrt{x}+2)^2+3(\sqrt{x}+2)+1\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\sqrt{x}+11)^3=(\sqrt{x}+10)^3+3(\sqrt{x}+10)^2+3(\sqrt{x}+10)+1\end{array}\right.$$

$$(\sqrt{x}+11)^3=(\sqrt{x})^3+3S+3[\sqrt{x}+(\sqrt{x}+1)+(\sqrt{x}+2)+\\+\cdots+(\sqrt{x}+10)]+11$$

مقدار داخل کروشه ، مجموع جمله‌های متوالی یك تصاعد حسابی‌است و مساوی $11(\sqrt{x}+5)$ می‌شود.

S را از تساوی فوق بدست می‌آوریم:

$$S=11[10\sqrt{x}+(x+35)]$$

و بنابراین کسر مفروض چنین می‌شود:

$$\frac{1}{11[10\sqrt{x}+(x+35)]}=\frac{x-10\sqrt{x}+35}{11(x^2-20x+1225)}$$

۱۵۷. اگر مجموع جمله‌های مخرج را A فرض کنیم، داریم:

$$A=\sqrt[6]{32}+\sqrt[6]{16}+\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{2}+1$$

که مجموع جمله های متوالی از یك تصاعد هندسی هستند . در این تصاعد $a=1$ (جملهٔ اول) ، $q=\sqrt[6]{2}$ (قدرنسبت) و $n=6$ (تعدادجمله‌ها)است. بنابراین:

$$A=\frac{a(q^n-1)}{q-1}=\frac{(\sqrt[6]{2})^6-1}{\sqrt[6]{2}-1}=\frac{1}{\sqrt[6]{2}-1}$$

جواب: $\sqrt[6]{2}-1$

۱۵۸. مقدار کسر مثبت است ، آنرا مساوی x فرض کنید ودوطرف‌را مجذور کنید، جواب مثبت x حاصل کسر است.

جواب: $\sqrt{2}$

۱۵۹. جواب: $\frac{4(5+\sqrt{10})}{5}$

۱۶۰. جواب: $3-\sqrt{3}$

۱۶۱. جواب: $\sqrt[4]{5}(\sqrt{3}-1)$

۱۶۲. جواب: $\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

۱۶۳. هریك از رادیکالهای صورت و مخرج‌را جداگانه به رادیکالهای‌ساده تبدیل کنید.

جواب: $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

۱۶۴. جواب: ۹

۱۶۵. باید حد رادیکال را وقتی کـه تعداد رادیکالها بسمت بی‌نهایت میل می‌کند پیداکنیم. مقدار این حد را xمی گیریم، در اینصورت داریم:

$$x^2=a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}=a+x\ ;$$

$$x^2-x-a=0 \implies x=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$$

و چون $x>0$ است، داریم:

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

برای اینکه حاصل x عددی گویا باشد، باید داشته باشیم:

$$1+4a=k^2 \implies a=\frac{k^2-1}{4}$$

و اگر فرض کنیم $k=2k'+1$، می‌شود:

$$a=\frac{(2k'+1)^2-1}{4}=k'^2+k'=k'(k'+1)$$

یعنی برای گویا بودن x باید a حاصلضرب ۲ عدد متوالی باشد.

۱۶۶. جواب: $\left|a+\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{2}{3}\right|$

۱۶۷. به‌ترتیب داریم:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}\ ;$$

$$\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}=\sqrt{48-10(2+\sqrt{3})}=\sqrt{28-10\sqrt{3}}=$$
$$=\sqrt{(5-\sqrt{3})^2}=5-\sqrt{3}\ ;$$

$$\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}=$$
$$=\sqrt{5\sqrt{3}+5(5-\sqrt{3})}=\sqrt{25}=5\ ;$$

$$\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}=\sqrt{4+5}=3$$

۱۶۸. جواب: $\left|3x\sqrt[3]{y}-3\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{y}\right|$

۱۶۹. مخرج را S می‌گیریم، به‌ترتیب داریم:

$$S=\sqrt[6]{128}-\sqrt[6]{32}+\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{4}-\sqrt[6]{16}-1=$$
$$=(\sqrt[6]{128}-\sqrt[6]{16})-(\sqrt[6]{32}-\sqrt[6]{4})+(\sqrt[6]{8}-1)=$$
$$=\sqrt[6]{16}(\sqrt[6]{8}-1)-\sqrt[6]{4}(\sqrt[6]{8}-1)+(\sqrt[6]{8}-1)=$$
$$=(\sqrt[6]{8}-1)(\sqrt[6]{16}-\sqrt[6]{4}+1)=(\sqrt{2}-1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$$

بنابراین باید صورت و مخرج را در $(\sqrt{2}+1)(\sqrt[3]{2}+1)$ ضرب کنیم.

جواب: $\dfrac{A(\sqrt{2}+1)(\sqrt[3]{2}+1)}{3}$

۱۷۰. جمله‌های مخرج را بیك فرجه تبدیل کنید، به تصاعد هندسی هستند، مجموع جمله‌های مخرج چنین است:

$$S=\frac{\sqrt[12]{243}\left[\left(\sqrt[12]{\frac{4}{3}}\right)^6-1\right]}{\sqrt[12]{\frac{4}{3}}-1}=\frac{\sqrt[12]{243}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)}{\dfrac{\sqrt[12]{4}-\sqrt[12]{3}}{\sqrt[12]{3}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)}{\sqrt[6]{2}-\sqrt[12]{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt[6]{2}-\sqrt[12]{3}}$$

و بنابراین حاصل کسر چنین می‌شود:

$$\frac{\sqrt[6]{2}-\sqrt[12]{3}}{2-\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})(\sqrt[6]{2}-\sqrt[12]{3})$$

۱۷۱. داریم:

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}=$$

$$=\sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=x\sqrt[3]{a}$$

و بهمین ترتیب:

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=y\sqrt[3]{b}=z\sqrt[3]{c}$$

فرض می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=x\sqrt[3]{a}=y\sqrt[3]{b}=z\sqrt[3]{c}=\lambda$$

از آنجا خواهیم داشت :

$$\sqrt[3]{a}=\frac{\lambda}{x}\ ;\ \sqrt[3]{b}=\frac{\lambda}{y}\ ;\ \sqrt[3]{c}=\frac{\lambda}{z}$$

ویا:

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\lambda$$

یعنی :

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}$$

۱۷۲. حاصل کسررا M می‌نامیم وصورت و مخرج کسر را درمزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$M=\frac{(a+b)x+\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}{x^2+ab}=$$

$$=\frac{(a+b)\sqrt{ab}+\sqrt{(a^2-ab)(ab-b^2)}}{2ab}=$$

$$=\frac{(a+b)\sqrt{ab}+(a-b)\sqrt{ab}}{2ab}=\frac{2a\sqrt{ab}}{2ab}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

۱۷۳. جواب: $\frac{1}{\sqrt[xy]{a}}+\sqrt[2yz]{ab^y}$

۱۷۴. جواب: صفر

۱۷۵. داریم:

$$\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}=\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{(\sqrt{5}-2)^3}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}=1$$

بنابراین باید حاصل عبارت $A=\frac{1-mx}{1+mx}\cdot\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}$ را به ازای $x=\frac{1}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}$ محاسبه کنیم.

$$\frac{1-mx}{1+mx}=\frac{1-\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{1+\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}=\frac{m-n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m}\ ;$$

$$\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}=\sqrt{\frac{1+\frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{1-\frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}}=\frac{m+n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m}\ ;$$

$$A=\frac{m-n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m}\times\frac{m+n\sqrt{\frac{2m}{n}-1}}{n-m}=1$$

۱۷۶. عبارت را A می‌نامیم، داریم:

$$A=\sqrt[n]{x^{\frac{n^2}{n+1}}\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)}+$$

$$+\sqrt[n]{a^{\frac{n^2}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}}\right)}-1=$$

$$=\sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}}\left(\sqrt[n]{x^{\frac{n^2}{n+1}}}+\sqrt[n]{a^{\frac{n^2}{n+1}}}\right)-1=$$

$$=\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)-1=$$

$$=\left(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}-1=$$

$$=\left[\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)+a^{\frac{n}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}}-1=$$

$$=\left(b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}-1=b-1$$

۱۷۷. عبارت را A می‌نامیم، داریم:

$$A=\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}\left(\sqrt[n]{\frac{a^kx^{n-k}}{a^{n-k}x^k}}+1-2\sqrt{b}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt[2n]{\frac{x^n}{a^{2n-2k}x^{2k}}}\right)+b^2=$$

$$=\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{n}}-2\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}}+1\right]+b^2$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{x}{a}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{n}{n-2k}}};$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{b-a}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{b}{a}-1}\ \text{و}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$A=\sqrt[n]{a^{n-k}x^{k}}\left[\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{b}{a}-1}\right)^{2}-\right.$$
$$\left.-2\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{b}{a}-1}\right)+1\right]+b^{2}=$$
$$=\left(\frac{b}{a}-2\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}-1}+\frac{b}{a}-1-2\cdot\frac{b}{a}+\right.$$
$$\left.+2\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}-1}+1\right)+b^{2}=b^{2}$$

۱۷۸. چون $\frac{x+1}{x-1}=(2+\sqrt{3})^{n}$ ، بنابراین حاصل عبارت‌چنین است:

$$\sqrt[n]{(x-1)^{2}}\left[\left(\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^{2}+1-4\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}\right]+1=$$
$$=\sqrt[n]{(x-1)^{2}}[(2+\sqrt{3})^{2}+1-4(2+\sqrt{3})]+1=$$
$$=\sqrt[n]{(x-1)^{2}}\times 0+1=1$$

۱۷۹. به‌ترتیب داریم :

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-$$
$$-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-$$
$$-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\times$$

$$\times\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n-۱}\times\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}=$$

$$=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n-۱}\times\frac{(۱+\sqrt{۵})^۲}{۴}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n-۱}\times$$

$$\times\frac{(۱-\sqrt{۵})^۲}{۴}=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}$$

۱۸۰. داریم:

$$\sqrt{a+\sqrt{a^۲-b^۲}}=\sqrt{\frac{a+|b|}{۲}}+\sqrt{\frac{a-|b|}{۲}}$$

بنابراین اگر سمت چپ تساوی حکم را به A نشان دهیم، داریم:

$$A=b\sqrt{۲}\cdot\frac{۲a+\sqrt{a^۲-b^۲}}{\sqrt{\frac{a+|b|}{۲}}+\sqrt{\frac{a-|b|}{۲}}}=$$

$$=۲b\cdot\frac{۲a+\sqrt{a^۲-b^۲}}{\sqrt{a+|b|}+\sqrt{a-|b|}}=$$

$$=۲b\cdot\frac{(۲a+\sqrt{a^۲-b^۲})(\sqrt{a+|b|}-\sqrt{a-|b|})}{(a+|b|)(a-|b|)}=$$

$$=\frac{b}{|b|}\cdot[(a+|b|)+\sqrt{(a+|b|)(a-|b|)}+(a-|b|)]\times$$

$$\times(\sqrt{a+|b|}-\sqrt{a-|b|})=$$

$$=\frac{b}{|b|}[(\sqrt{a+|b|})^۳-(\sqrt{a-|b|})^۳]$$

در حالتی که $b>۰$ باشد $|b|=b$ و حاصل عبارت همان طرف دوم تساوی حکم می‌شود. درحالتی که $b<۰$ باشد $|b|=-b$ وبدست می‌آید:

$$A=-[(\sqrt{a-b})^۳-(\sqrt{a+b})^۳]=$$

$$=\sqrt{(a+b)^۳}-\sqrt{(a-b)^۳}$$

که باز هم همان طرف دوم تساوی حکم است.

* * *

۱۸۱. معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$(x^2+7x-18)(x^2+7x+6)+108=0$$

که با فرض $x^2+7x=y$ به معادله‌ای درجه دوم تبدیل می‌شود.

جواب: $x_1=0$ ، $x_2=-7$ ، $x_{3,4}=\dfrac{-7\pm\sqrt{97}}{2}$

۱۸۲. معادله را به اینصورت می‌نویسیم:

$$\left[\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^4+\left[\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^4=68$$

که با فرض $x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=y$ و باز کردن پرانتزها به معادله‌ای دو مجذوری تبدیل می‌شود.

جواب: $x_1=\sqrt{2}$ ، $x_2=-2\sqrt{2}$ ودوریشهٔ موهومی،

۱۸۳. معادله را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$[(x+1)-1]^6+[(x+1)+1]^6=2$$

با فرض $x+1=t$ و بازکردن پرانتزها، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$t^6+15t^4+15t^2=0 \implies t^2(t^4+15t^2+15)=0$$

جواب: $x_1=x_2=-1$ و چهار ریشهٔ موهومی.

۱۸۴. $x+4=t$ فرض کنید، پس از بازکردن پرانتزها خواهیم داشت:

$$t^3+3t-4=0$$

که به صورت زیر قابل تجزیه است.

$$(t-1)(t^2+t+4)=0$$

جواب: $x_1=-3$ ودوجواب موهومی.

۱۸۵. به‌ترتیب داریم:

$$[(x-2)(x+8)]\times[(x+1)(x+5)]\times$$
$$\times[(x+2)(x+4)]+476=0$$

ویا:

$$(x^2+6x-16)(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)+476=0$$

فرض می‌کنیم: $x^2+6x=t$ ، پس از باز کردن پرانتزها خواهیم داشت:

$$t^3-3t^2-168t-164=0$$

$t=-1$ در این معادله صدق می‌کند و بنابراین بصورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(t+1)(t^2-4t-164)=0$$

و در نتیجه به سه معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$x^2+6x+1=0$$
$$x^2+6x+(\sqrt{168}-2)=0$$
$$x^2+6x-(\sqrt{168}+2)=0$$

۱۸۶. $\sqrt{x}-1=y$ فرض کنید.

جواب: تنها جواب حقیقی معادله $x=9$ است.

۱۸۷. ابتدا هریك از پرانتزها را تجزیه کنید:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$$

ویا: $$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$$

و با فرض $x^2+5x=y$ معادله را حل کنید.

جواب: $x_1=1$ ، $x_2=6$ و دو ریشهٔ موهومی.

۱۸۸. به‌ترتیب داریم:

$$x(x^3+1)+2x^2(x+1)=42\ ;$$
$$x(x+1)(x^2-x+1+2x)=42\ ;$$
$$(x^2+x)(x^2+x+1)=42\ \Longrightarrow$$
$$(x^2+x)^2+(x^2+x)-42=0\ ;$$
$$x^2+x=6\ ,\ -7$$

جواب: $x_1=2\ ,\ x_2=-3\ ,\ x_{3,4}=\dfrac{-1\pm 3i\sqrt{3}}{2}\,(i=\sqrt{-1})$

۱۸۹. از عبارت $x^4+6x^3+7x^2-6x-1$ جذر می گیریم، حاصل‌جذر x^2+3x-1 وباقیماندهٔ‌جذر مساوی -2 می‌شود و بنابراین معادله‌بصورت زیر در می‌آید:

$$(x^2+3x-1)^2-2=0$$

ویا: $$(x^2+3x+\sqrt{2}-1)(x^2+3x-\sqrt{2}-1)=0$$

که دیگر قابل حل است.

جواب: $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{13-4\sqrt{2}}}{2}$ ؛ $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{13+4\sqrt{2}}}{2}$

۱۹۰. در سمت چپ تساوی مخرج مشترک می‌گیریم، پس از ساده کردن چنین می‌شود:

$$(a+x)\sqrt[n]{a+x}=abx\sqrt[n]{x}$$

دو طرف تساوی را به توان n می‌رسانیم:

$$(a+x)^{n+1}=a^n b^n x^{n+1}$$

از دو طرف ریشهٔ $(n+1)$ام می‌گیریم. دو حالت وجود دارد:
اگر n عددی زوج باشد:

$$a+x=x\sqrt[n+1]{a^n b^n} \implies x=\frac{a}{\sqrt[n+1]{a^n b^n}-1}$$

و اگر n عددی فرد باشد:

$$a+x=\pm x\sqrt[n+1]{a^n b^n}$$

دراینحالت شرط وجودجواب حقیقی‌هم علامت‌بودن a و b است $(a\cdot b>0)$، در اینصورت داریم:

$$x=\frac{a}{\pm\sqrt[n+1]{a^n b^n}-1}$$

۱۹۱. جواب: $x=a^2-\frac{(b-2a)^3}{27a}$

۱۹۲. $2x-12=t$ فرض کنید، می‌شود:

$$(x^2+t)^2=x^2(3x^2+t)$$

که اگر نسبت به t منظم کنیم، می‌شود:

$$t^2+x^2\cdot t-2x^4=0 \implies t=x^2 \text{ و } -2x^2$$

$$2x-12=x^2 \implies x_{1,2}=1\pm i\sqrt{11}$$

$$2x-12=-2x^2 \implies x_3=2 \;;\; x_4=-3$$

۱۹۳. $2x^2-6=t$ فرض کنید و شبیه تمرین قبل عمل نمایید.

جواب: $x_1=-2$ ، $x_2=\frac{3}{2}$ ، $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$

۱۹۴. پس از تبدیلهای عادی به معادلهٔ معکوسهٔ زیر می‌رسیم:

$$2x^4-9x^3-14x^2-9x+2=0$$

جواب: $x_{1,2}=4\pm2\sqrt{3}$ ، $x_{3,4}=\frac{1}{4}(-3\pm i\sqrt{7})$

۱۹۵. از روش حل معادله‌های معکوسه استفاده کنید: دو طرف را بر x^2 تقسیم کنید و $x+\frac{2}{x}=t$ فرض کنید.

جواب: $x_1=1$ ، $x_2=2$ ، $x_3=3$ ، $x_4=\frac{2}{3}$

۱۹۶. دوطرف معادله را بر $\sqrt[m]{x^2-1}$ تقسیم می‌کنیم ($m\neq\pm1$ است)، می‌شود:

$$2\sqrt[m]{\frac{x+1}{x-1}}-2\sqrt[m]{\frac{x-1}{x+1}}+3=0$$

فرض می‌کنیم، $\sqrt[m]{\frac{x+1}{x-1}}=y$ ، بدست می‌آید:

$$2y-\frac{2}{y}+3=0 \implies 2y^2+3y-2=0\ ;$$

$$y=2\ ,\ -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[m]{\frac{x+1}{x-1}}=2 \implies x=\frac{2^m+1}{2^m-1}$$

اگر m عددی زوج باشد، تساوی $y=-\frac{1}{2}$ ممکن نیست، ولی در حالت فرد بودن m داریم:

$$\sqrt[m]{\frac{x+1}{x-1}}=-\frac{1}{2}\implies x=\frac{1-2^m}{1+2^m}$$

۱۹۷. معادلهٔ مفروض را به اینصورت می‌نویسیم:

$$x^3-3abx+(a+b)^3-3ab(a+b)=0$$

واضح است که یکی از ریشه‌های این معادله $x=-(a+b)$ می‌باشد و معادله بصورت زیر در می‌آید:

$$(x+a+b)[x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2]=0$$

جواب: $x_1=-(a+b)$ ، $x_{2,3}=\frac{1}{2}[a+b\pm i\sqrt{3}(a-b)]$

۱۹۸. اگر $a=0$ ویا $a=1$ باشد ،معادله دارای دو ریشهٔ مضاعف : $x=0$ و $x=1$ خواهد بود. ولی اگر $a\neq 0$ و $a\neq 1$ باشد،معادله نه ریشهٔصفر و نه ریشهٔ واحد ندارد . به سادگی دیده می‌شود که اگر αریشه‌ای از این معادله باشد $\frac{1}{\alpha}$ و $1-\alpha$ هم ریشهٔ آن خواهد بود ، از آنجا $\frac{1}{1-\alpha}$ و $1-\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}$ هم درمعادله صدق‌خواهدکرد . وقتی که $a\neq 0$ و $a\neq 1$ باشد، معادله از درجهٔ ششم و دارای ۶ جواب است ، یعنی کافی است یکی از این جوابها را بدست‌آوریم.ولی $x=a$ درمعادله‌صدق می‌کند، بنابراین‌جوابهای معادلهٔ چنین است:

$$x_1=a\ ;\ x_2=\frac{1}{a}\ ;\ x_3=1-a\ ;\ x_4=\frac{1}{1-a}\ ;$$

$$x_5=\frac{a-1}{a}\ ;\ x_6=\frac{a}{a-1}$$

۱۹۹. واضح است که $x=3$ ریشهٔ معادله نیست، دوطرف معادله را بر $(x-3)^2$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^2+\frac{(3x)^2}{(x-3)^2}=16$$

سمت چپ تساوی را به مجذور یك دوجمله‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$\left(x+\frac{3x}{x-3}\right)^2=16+\frac{6x^2}{x-3}$$

ویا:

$$\left(\frac{x^1}{x-3}\right)^2-6\left(\frac{x^2}{x-3}\right)-16=0\ ;$$

$$\frac{x^2}{x-3}=2\ ,\ 8$$

جواب: $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{7}$; $x_{3,4}=2(2\pm i\sqrt{2})$

۲۰۰. معادله را نسبت به a منظم و به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a^2-2(x^2-5x-1)a+(x^4-10x^3+22x^2+12x)=0$$

جوابهای a نسبت به x چنین خواهد بود:

$$a=x^2-6x\ ;\ a=x^2-4x-2$$

هریك ازاین جوابها ، خود نسبت به x از درجهٔ دوم است و به‌سادگی حل می‌شوند:

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{a+9}\ ;\ x_{3,4}=2\pm\sqrt{a+6}$$

۲۰۱. اگر $\sqrt{3}=a$ فرض کنیم، معادلهٔ مفروض بصورت زیر در می‌آید:

$$x^3+2ax^2+a^2x+a-1=0$$

ویا:

$$x\cdot a^2+(2x^2+1)a+(x^3-1)=0$$

که اگر این معادله را نسبت به a حل کنیم، خواهیم داشت.

$$a=1-x\ ;\ -\frac{x^2+x+1}{x}$$

جواب: $x_1=1-\sqrt{3}$; $x_{2,3}=\dfrac{-(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt[4]{12}}{2}$

۲۰۲. سمت‌چپ معادلهٔ مفروض را به‌ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$x^5-5x^3+5x-1=(x^5-1)-5x(x^2-1)=$$
$$=(x-1)(x^4+x^3-4x^2-4x+1)=$$
$$=\frac{1}{4}(x-1)[(4x^4+4x^3+x^2)-6(2x^2+x)+9-$$
$$-5(x^2+2x+1)]=\frac{1}{4}(x-1)[(2x^2+x-3)^2-5(x+1)^2]$$

جواب: $x_1=3$ ، $x_{2,3}=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}\pm(\sqrt{30+6\sqrt{5}})$

$$x_{4,5}=\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right)$$

۲۰۳. میدانیم که اگر $\frac{u}{v}=\frac{t}{z}$ باشد ، می‌توان نوشت:

$$\frac{u+v}{u-v}=\frac{t+z}{t-z}$$

با این تبدیل، معادلهٔ مفروض بصورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2(x-a)(x-b)}=\frac{2c^2+2}{2c^2-2}$$

یکبار دیگر از همان تبدیل استفاده می کنیم ، می‌شود:

$$\frac{(x-a)^2+(x-b)^2+2(x-a)(x-b)}{(x-a)^2+(x-b)^2-2(x-a)(x-b)}=c^2$$

صورت و مخرج کسر سمت‌چپ معادله را می‌توان بهٔمجذور دو جمله‌ای تبدیل کرد:

$$\frac{(2x-a-b)^2}{(b-a)^2}=c^2 \implies \frac{2x-a-b}{b-a}=\pm c$$

جواب: $x_1=\frac{1}{2}(bc-ac+a+b)$ ، $x_2=\frac{1}{2}(ac-bc+a+b)$

۲۰۴. معادله را بهمین ترتیب و مثل یك معادلهٔ درجه دوم حل‌می کنیم،داریم:

$$\Delta=(3x^2-2x+2)^2-4(2x^4-5x^3+2x^2+6x-3)=$$
$$=x^4+8x^3+8x^2-32x+16=(x^2+4x-4)^2$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$x=\frac{1}{2}[(3x^2-2x+2)\pm(x^2+4x-4)]$$

و از آنجا به دو معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌نویسیم:

$$x=2x^2+x-1 \;;\; x=x^2-3x+3$$

جواب: $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_3=1$ ، $x_4=3$

۲۰۵. این معادله هم ارز معادلهٔ زیر است:

$$x(x+7)(x^4+2\times 7x^3+3\times 7^2x^2+2\times 7^3x+7^4)=0$$

بنابراین دو ریشهٔ معادله $x_1=0$ و $x_2=-7$ است .

بین بقیه ریشه‌های معادله صفر وجود ندارد و بنابراین می‌توان فرض کرد :

$$\frac{x}{7}+\frac{7}{x}=y \qquad (1)$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$x^4+2\times 7x^3+3\times 7^2x^2+2\times 7^3x+7^4=7^2x^2(y^2+2y+1)$$

بنابراین باید معادلهٔ $y^2+2y+1=0$ را حل کرد که از آنجا ریشهٔ مضاعف $y=-1$ بدست‌می‌آید، این ریشه‌رادر معادلهٔ (۱)قرارمی‌دهیم، چنین می‌شود:

$$x^2+7x+49=0$$

که داری دو ریشهٔ موهومی زیر است:

$$x=\frac{1}{2}(-7\pm 7i\sqrt{3}) \qquad (i=\sqrt{-1})$$

جواب: $x_1=0$ ، $x_2=1$ ، $x_3=x_4=\frac{7}{2}(-1+i\sqrt{3})$ ،

$$x_5=x_6=\frac{7}{2}(-1-i\sqrt{3})$$

۲۰۶. دوطرف معادله را بر x^2 تقسیم و $3x+\frac{4}{x}=y$ فرض کنید ، بەدو معادلهٔ زیر می‌رسید :

$$3x^2-x+4=0$$
$$3x^2-4x+4=0$$

هر چهار ریشهٔ معادله موهومی است.

۲۰۷. دوطرف معادله را بر x^3 تقسیم و $2x+\frac{3}{x}=y$ فرض کنید ، به معادلهٔ زیر می‌رسید:

$$y^3-4y^2-17y+60=0 \;;$$

که به صورت زیر تجزیه می‌شود :

$$(y-3)(y-5)(y+4)=0$$

و درنتیجه سه معادلهٔ درجهٔ دوم زیر نسبت به x بدست می‌آید:

$$۲x^۲-۳x+۳=۰ \qquad \text{(ریشه‌های موهومی)}$$
$$۲x^۲+۴x+۳=۰ \qquad \text{(ریشه‌های موهومی)}$$
$$۲x^۲-۵x+۳=۰ \Longrightarrow x=۱\ ,\ \frac{۳}{۲}$$

۲۰۸. سمت‌چپ معادله را به مجذور یك دو جمله‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$\left(x+\frac{x}{x-۱}\right)^۲-\frac{۲x^۲}{x-۱}=۸\ ;$$

ویا :

$$\left(\frac{x^۲}{x-۱}\right)^۲-۲\left(\frac{x^۲}{x-۱}\right)-۸=۰\ ,$$

جواب: $x_۱=x_۲=۲$، $x_۳=-۱+\sqrt{۳}$ ، $x_۴=-۱-\sqrt{۳}$

۲۰۹. سمت‌چپ معادله را به مربع یك دو جمله‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$[x(۱+x)+x]^۲=۲x^۲(۱+x)+۸(۱+x)^۲\ ;$$

ویا :

$$x^۲(x+۲)^۲=۲(x+۱)(x+۲)^۲$$

و از آنجا :

$$(x+۲)^۲(x^۲-۲x-۲)=۰$$

جواب $x_۱=x_۲=-۲$ ، $x_{۳,۴}=۱\pm\sqrt{۳}$

۲۱۰. سمت‌چپ معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$(۱-x^۲)^۲+۴x^۲$$

و بنابراین معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$(۱-x^۲)^۲-۴x(۱-x^۲)+۴x^۲=۰$$

ویا:

$$[(۱-x^۲)+۲x]^۲=۰$$

جواب: $x_۱=x_۲=\sqrt{۲}-۱$ ، $x_۳=x_۴=-(\sqrt{۲}+۱)$

۲۱۱. پس از گویا کردن معادله جواب $x=\frac{(a-۱)^۲}{۴}$ بدست می‌آید .

آزمایش‌درستی جواب: اگر مقدار x را در معادله قرار دهیم، بالاخره به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$|a+1|+|a-1|=2a$$

و واضح است که‌این تساوی وقتی برقرار است که $a\geqslant 1$ باشد.

جواب: به ازای $a\geqslant 1$ داریم: $x=\frac{1}{4}(a-1)^2$ و به ازای $a<1$ معادله جواب‌ندارد.

۲۱۲. معادلهٔ مفروض را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{(\sqrt{a+x})^3}{ax}=\sqrt{x} \implies (a+x)^{\frac{3}{2}}=ax^{\frac{3}{2}}$$ ،

دو طرف را به توان $\frac{2}{3}$ می‌رسانیم ، بدست می‌آید:

$$a+x=a^{\frac{2}{3}}x \implies x=\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}-1}$$

جواب: وقتی که $-1<a<0$ یا $a>1$ باشد، داریم:

$$x=\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}-1}$$

ووقتی‌که $a<-1$ یا $0\leqslant a\leqslant 1$ باشد ، معادله جواب ندارد.

۲۱۳. جواب: $x=17$

۲۱۴. پس از گویاکردن معادله ، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$(x-1)[12x(2x-3)-27(x-1)^2]=0$$

جواب: $x_1=1$ ، $x_2=3$.

۲۱۵. جواب : $x_1=a$ ، $x_2=b$ ، $x_3=\frac{a+b}{2}$

۲۱۶. جواب: $x_1=1$، $x_2=-\frac{27}{8}$

۲۱۷. جواب: $x_1=-a$ ، $x_2=1-a$

۲۱۸. ابتدا معادله راچنین می‌نویسیم:

$$(6x+7)^2\times\frac{1}{12}(6x+8)(6x+6)=6$$

با فرض: $6x+7=y$ بدست می‌آید :

$$y^2(y+1)(y-1)=72 \implies y^4-y^2-72=0 \;;$$

جواب: $x_1=-\frac{۲}{۳}$ ، $x_۲=-\frac{۵}{۳}$ ، $x_{۳،۴}=\frac{-۷\pm ۲i\sqrt{۲}}{۶}$

۲۱۹. فرض کنید: $\sqrt[۵]{(۷x-۳)^۳}=y$

جواب: $x_1=\frac{۲}{۷}$ ، $x_۲=۵$

۲۲۰. چون جوابها رادرحوزهٔ عددهای‌حقیقی می‌خواهیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{۱+bx}{۱-bx}>۰ \Longrightarrow (۱+bx)(۱-bx)>۰ \Longrightarrow x^۲<\frac{۱}{b^۲}$$

از طرف دیگر واضح است که باید داشته باشیم:

$$\frac{۱-ax}{۱+ax}>۰ \Longrightarrow (۱-ax)(۱+ax)>۰ \Longrightarrow x^۲<\frac{۱}{a^۲}$$

اگر این شرطها برقرار نباشد ، معادله دارای جواب‌نیست. اگر فرض کنیم که این‌شرطها برقرار باشد،دو طرف معادله مثبت می‌شود ومی‌توان دو طرف آنرا مجذور کرد:

$$\left(\frac{۱-ax}{۱+ax}\right)^۲ \times \frac{۱+bx}{۱-bx}=۱$$

با حل این معادله ، جوابهای زیر بدست می‌آید:

$$x_1=۰ \ ; \ x_۲=\sqrt{\frac{۲a-b}{a^۲b}} \ ; \ x_۳=-\sqrt{\frac{۲a-b}{a^۲b}}$$

ریشهٔ اول در معادله صدق می‌کند . برای ریشه‌های دوم و سوم : اولا برای حقیقی بودن ریشه‌ها باید داشته باشیم:

$$\frac{۲a-b}{a^۲b}\geqslant۰ \Longrightarrow \frac{۲a}{b}-۱\geqslant۰ \Longrightarrow \frac{a}{b}\geqslant\frac{۱}{۲}$$

ثانیاً باید شرطهای $x^۲<\frac{۱}{a^۲}$ و $x^۲<\frac{۱}{b^۲}$ برقرار باشد:

$$x^۲=\frac{۲a-b}{a^۲b}<\frac{۱}{a^۲} \Longrightarrow \frac{۲a-b}{b}<۱ \Longrightarrow \frac{a}{b}<۱$$

یعنی باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۲}\leqslant\frac{a}{b}<۱$$

در اینصورت شرط $x^2<\frac{1}{b^2}$ خود بخود برقرار است ، زیرا:

$$x^2-\frac{1}{b^2}=\frac{2a-b}{a^2b}-\frac{1}{b^2}=-\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}<0$$

(زیرا $a\neq b$ است).

۴۴۱. فرض می‌کنیم:

$$\sqrt[5]{16+\sqrt{x}}=u \;;\; \sqrt[5]{16-\sqrt{x}}=v$$

در اینصورت $u+v=2$ می‌شود. دو طرف این معادله را به توان ۵ می‌رسانیم، بدست می‌آید:

$$v^5+v^5+5uv(u+v)(u^2-uv+v^2)+10u^2v^2(u+v)=32$$

ویا:

$$u^5+v^5+5uv[(u+v)^2-3uv](u+v)+10u^2v^2(u+v)=32$$

اکنون اگر قرار دهیم: $u+v=2$ و

$$u^5+v^5=(16+\sqrt{x})+(16-\sqrt{x})=32 \text{ ،}$$

بدست می‌آید:

$$32+10uv(4-2uv)+20u^2v^2=32 \;;$$

ویا:

$$uv(4-uv)=0$$

$$\text{a)}\quad u=0 \implies \sqrt[5]{16+\sqrt{x}}=0 \implies 16+\sqrt{x}=0$$

که غیرممکن است.

$$\text{b)}\quad v=0 \implies \sqrt[5]{16-\sqrt{x}}=0 \implies x=256$$

$$\text{c)}\quad 4-uv=0 \implies uv=4$$

و باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$uv=4 \;;\; u+v=2$$

$$u(2-u)=4 \implies u=1\pm i\sqrt{3} \;;$$

و چون $u=\sqrt[5]{16+\sqrt{x}}$ باید مقداری حقیقی باشد ، در اینحالت هم

جواب نداریم.

۲۲۲. اگر n عددی فرد باشد، $n^۲$ هم عددی است فرد وریشهٔ $(n+۱)$ام $x^na^{n^۲}$ درحالت $x<۰$ موهومی است. بنابراین در حالت فرد بودن n، فرض می‌کنیم $x\geqslant ۰$. در حالت زوج بودن n مقدار x می‌تواند هر عدد حقیقی دلخواه باشد، در هر دو حالت b باید عددی مثبت باشد، زیرا در حالت زوج بودن، هر دورادیکال سمت چپ تساوی مثبت و درحالت فرد بودن n ، مقادیر زیر رادیکالها مثبت است.

برای حل معادله، ابتدا فرض می‌کنیم که n عددی فرد باشد، بنابر-این $x\geqslant ۰$ است و معادله را می‌توان به ترتیب چنین نوشت:

$$x^{\frac{n}{n+۱}}\sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}}+a^{\frac{n}{n+۱}}\sqrt[n]{a^{\frac{n}{n+۱}}+x^{\frac{n}{n+۱}}}=b\,;$$

$$\left(x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}\right)\sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}}=b\quad;$$

$$\left(x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}\right)^{\frac{n+۱}{n}}=b\ ;\ x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}=b^{\frac{n}{n+۱}}\ ;$$

$$x^{\frac{n}{n+۱}}=b^{\frac{n}{n+۱}}-a^{\frac{n}{n+۱}}\implies x=\left(b^{\frac{n}{n+۱}}-a^{\frac{n}{n+۱}}\right)^{\frac{n+۱}{n}}$$

و برای اینکه این جواب قابل قبول باشد باید $b\geqslant a$ باشد.

از همین حل روشن می‌شود کـه اگر n عددی زوج باشد، دو جواب خواهیم‌داشت :

$$x_{۱,۲}=\pm\left(b^{\frac{n}{n+۱}}-a^{\frac{n}{n+۱}}\right)^{\frac{n+۱}{n}}$$

۲۲۳. با توجه به شرط $n>k>۰$ ، معادله یك جواب $x_۱=۰$ دارد. حالا اگر $x\neq ۰$ فرض کنیم ، می‌توانیم دو طرف معادله را بر $\sqrt[n]{a^{n-k}.x^k}$ تقسیم کنیم ، در اینصورت به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$\sqrt{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-۲k}{n}}-۲\sqrt{b}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-۲k}{۲n}}+\sqrt{a}=۰$$

که با حل آن بدست می‌آید :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}}=\frac{\sqrt{b}\pm\sqrt{b-a}}{\sqrt{a}} \Longrightarrow \frac{x}{a}=\left(\frac{\sqrt{b}\pm\sqrt{b-a}}{\sqrt{a}}\right)^{\frac{2n}{n-2k}}$$

$$x_{2,3}=a^{\frac{2k}{2k-n}}(\sqrt{b}\pm\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}$$

در حالت $n=2k$ این محاسبه‌ها مفهوم خود را ازدست می‌دهد وتنها جواب $x=0$ باقی می‌مانـد . در حقیقت در اینحالت معادله بصورت $2\sqrt{ax}=2\sqrt{bx}$ در می‌آید که با توجه به اینکه $a\neq b$ است بجز $x=0$ جواب دیگری‌ندارد، ضمناً با توجه به مقدار سمت‌راست‌معادلهٔ اصلی،روشن است که باید $x\geqslant 0$ باشد و از این مطلب هم‌ضمن محاسبه استفاده شده است. شرط $b>a$ هم حقیقی بودن ریشه‌هـای x_2 و x_3 را تضمین می‌کند.

۲۲۴. دوطرف معادله رادر $\sqrt[n]{\frac{a+x}{x^2}}$ ضرب می‌کنیم، به‌ترتیب بدست می‌آید:

$$\frac{1}{x^2}\sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2}}-\frac{1}{a^2}\sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2}}=1 \Longrightarrow$$

$$\frac{a^2-x^2}{a^2x^2}\sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2}}=1\ ;\ \left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^{\frac{n+1}{n}}=a^2 \Longrightarrow$$

$$\frac{a^2-x^2}{x^2}=a^{\frac{2n}{n+1}} \Longrightarrow x=\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^{\frac{2n}{n+1}}}}$$

در حالتی که n عددی زوج باشد، باید $-a<x\leqslant a$ و $a>0$ باشد، در اینحالت تمام عملهایی‌که انجام دادیم صحیح است و جواب هم با شرطهای مسأله می‌سازد زیرا داریم:

$$\sqrt{1+a^{\frac{2n}{n+1}}}>1$$

در حالت فرد بودن n به سادگی روشن می‌شود که هیچ شرطی بجز

$a\neq 0$ لازم نیست.

۲۲۵. به‌ترتیب داریم (با فرض $a>0$):

$$\sqrt{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}-\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)}=\sqrt[2n]{x}$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}}=\sqrt[n]{a};$$

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}\right)^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{1}{n}}\Longrightarrow\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}=a^{\frac{3n}{2}}$$

و از آنجا: $x=a:\left[1+a^{\frac{2n}{3}}\right]^{n}$

اگر مثل تمرین ۲۲۴ استدلال کنیم، نتیجه می‌گیریم که این تنها جواب x است.

۲۲۶. معادله نسبت به a از درجهٔ دوم و قابل حل است.

جواب: $x_1=\frac{a+3}{2}$; $x_{2,3}=\frac{a-2\pm\sqrt{a^2-4a+8}}{2}$

۲۲۷. میدانیم که $[a]$ یعنی بزرگترین عددصحیحی که از a تجاوز نکند. واضح است که معادله به ازای مقادیری از x که به ازای آنها $\frac{x^3-2}{3}>x+1$ یا $\frac{x^3-2}{3}<x-1$ باشد، صدق نمی‌کند. بین‌جوابهای نامعادلهٔ اول $x\geqslant 3$ وجود دارد، زیرا داریم:

$$\frac{x^3-2}{3}\geqslant x+1\Longrightarrow x^3\geqslant 3x+5\Longrightarrow$$
$$x^2(x-3)\geqslant -3x^2+3x+5$$

به ازای $x\geqslant 3$ سمت‌چپ نامساوی غیرمنفی و سمت راست نامساوی منفی است. به این ترتیب مقادیر $x\geqslant 3$ جزو جوابهای این نامعادله است.

ثابت می‌کنیم که $x\leqslant -2$ بین جوابهای $\frac{x^3-2}{3}\leqslant x-1$ است ، زیرا در اینحالت داریم:

$$x^3\leqslant 3x-1 \implies x^2(x+2)\leqslant 2x^2+3x-1$$

به ازای $x\leqslant -2$ ، سمت چپ نامعادله مثبت نیست ، در حالیکه سمت راست نامعادله مثبت است .

بنابراین جـوابهای معادلهٔ مفروض را باید در فاصلهٔ $-2<x<3$ جستجو کرد ، برای این منظور باید دستگاههای نا معادله‌های زیر را حل کرد :

$$1)\ \begin{cases}-2<\frac{x^3-2}{3}<-1\\ -2<x<-1\end{cases}\ ;\quad (2)\ \begin{cases}-1\leqslant\frac{x^3-2}{3}<0\\ -1\leqslant x<0\end{cases}\ ;$$

$$3)\ \begin{cases}0\leqslant\frac{x^3-2}{3}<1\\ 0\leqslant x<1\end{cases}\ ;\quad 4)\ \begin{cases}1\leqslant\frac{x^3-2}{3}<2\\ 1\leqslant x<2\end{cases}\ ;$$

$$5)\ \begin{cases}2\leqslant\frac{x^3-2}{3}<3\\ 2<x<3\end{cases}$$

دستگاه (۳) دارای جواب نیست وجوابهای بقیهٔ دستگاهها چنین‌است:

$$-\sqrt[3]{4}<x<-1\ ;\ -1\leqslant x<0\ ;$$
$$\sqrt[3]{5}\leqslant x<2\ ;\ 2\leqslant x<\sqrt[3]{11}$$

جواب: $-\sqrt[3]{4}<x<0\ ;\ \sqrt[3]{5}<x<\sqrt[3]{11}$

۲۲۸. معادلهٔ مفروض را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x+1)^4-6(x+1)^2+a+5=0\ ;$$
$$x=-1\pm\sqrt{3\pm\sqrt{4-a}}$$

۱) اگر $a>4$ باشد ، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۲) اگر $-5<a<4$ باشد، معادله چهار ریشهٔ حقیقی دارد .

۳) اگر $a < -5$ باشد ، معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است :

$$x = -1 \pm \sqrt{3 + \sqrt{4 - a}}$$

۴) اگر $a = 4$ باشد ، معادله دارای دو ریشهٔ مضاعف است:

$$x_1 = x_2 = -1 + \sqrt{3} \ ; \ x_3 = x_4 = -1 - \sqrt{3}$$

۵) اگر $a = -5$ باشد،معادله یك ریشهٔ مضاعف و دوریشهٔ ساده‌دارد:

$$x_1 = x_2 = -1 \ ; \ x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}$$

۲۲۹. میدانیم که حاصلضرب قدر مطلقهای چند عدد جبری برابر است با قدر مطلق حاصلضرب آنها ، بنابراین معادلهٔ مفروض به صورت زیر در می‌آید :

$$|x^3 + 7x^2 - 36| = |x^3 + 14x^2 + 49x + 36|$$

و این معادله هم ارز دو معادلهٔ زیر است:

$$1)\ x^3 + 7x^2 - 36 = x^3 + 14x^2 + 49x + 36 \ ;$$
$$7x^2 + 49x + 72 = 0$$

$$2)\ x^3 + 7x^2 - 36 = -(x^3 + 14x^2 + 49x + 36) \ ;$$
$$2x^3 + 21x^2 + 49x = 0$$

با حل این دو معادله ، ریشه‌های معادلهٔ مفروض بدست می‌آید:

$$x_{1,2} = \frac{-49 \mp \sqrt{385}}{14} \ ; \ x_3 = 0 \ ; \ x_4 = -7 \ ; \ x_5 = -\frac{7}{2}$$

۲۳۰. داریم:

$$x^3 - (a+1)x - x + \sqrt{a+1} = 0 \ ;$$
$$x(x - \sqrt{a+1})(x + \sqrt{a+1}) - (x - \sqrt{a+1}) = 0 \ ;$$
$$(x - \sqrt{a+1})(x^2 + x\sqrt{a+1} - 1) = 0$$

و از آنجا .

$$x_1 = \sqrt{a+1} \ ; \ x_{2,3} = \frac{-\sqrt{a+1} \pm \sqrt{a+5}}{2}$$

۲۳۱. معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$2(\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x}) = (p+x) - (p-x)$$

واضح است که $x=0$ جواب معادله نیست (زیرا $p>0$ است). بنابراین می‌توان معادله را به $\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x}$ ساده کرده . دراین صورت بدست می‌آید :

$$\sqrt{p+x}-\sqrt{p-x}=2$$

با مجذور کردن دو طرف و پس از تبدیلهای ساده خواهیم داشت : $x=2\sqrt{p-1}$. جواب بدست‌آمده را در معادله آزمایش می‌کنیم. اگر این مقدار x را در سمت چپ معادله قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$\sqrt{p+2\sqrt{p-1}}+\sqrt{p-2\sqrt{p-1}}=$$
$$=|\sqrt{p-1}+1|+|\sqrt{p-1}-1|=$$
$$=\begin{cases} 2 & 1\leqslant p\leqslant 2 \\ 2\sqrt{p-1} & (p\geqslant 2) \end{cases}$$

جواب: به ازای $p>2$ ، $x=2\sqrt{p-1}$ و به ازای $p<2$ معادله جواب ندارد.

۴۳۴. فرض می‌کنیم:

$$a+b=\alpha+\beta \;\; ; \;\; a+c=\alpha+\gamma$$
$$c+d=\alpha-\beta \;\; ; \;\; b+d=\alpha-\gamma$$

از آنجا بدست می‌آید:

$$\alpha=\frac{1}{2}(a+b+c+d) \;\; ; \;\; \beta=\frac{1}{2}(a+b-c-d);$$

$$\gamma=\frac{1}{2}(a-b+c-d)$$

که با فرض $x+\alpha=y$ ، معادلهٔ مفروض به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{(y+\beta)^5+(y-\beta)^5}{(y+\gamma)^5+(y-\gamma)^5}=\frac{\beta^5}{\gamma^5}$$

که پس از تبدیلهای ساده و با توجه به اینکه $y\neq 0$ است ، بدست‌می‌آید:

$$(\gamma^5-\beta^5)y^4+10(\gamma^3-\beta^3)\beta^2\gamma^2y^2+5(\gamma-\beta)\beta^4\gamma^4=0$$

که معادله‌ای است دو مجذوری و قابل حل.

توضیح : اگر سمت راست معادلهٔ مفروض به صورت $\alpha^{۲} : \gamma^{۲}$ باشد ، معادلهٔ اخیر به صورت زیر در می‌آید :

$$(\gamma^{۲}-\beta^{۲})y^{۴}+۵(\gamma^{۲}\beta^{۴}-\beta^{۲}\gamma^{۴})=۰$$

که با فرض $\gamma\neq\pm\beta$ بدست می‌آید :

$$y^{۴}=۵\beta^{۲}\gamma^{۲}$$

$$x=-\frac{۱}{۲}(a+b+c+d)\pm\frac{۱}{۲}\sqrt[۴]{۵(a+b-c-d)^{۲}(a-b+c-d)^{۲}}$$

۲۳۳. معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$۲+\frac{۳y}{۲x}=\left[۱+\frac{y^{۲}}{x^{۲}}\right]$$

واضح است که $\frac{۳y}{۲x}=k$ عددی است صحیح و از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$\left[۱+\frac{y^{۲}}{x^{۲}}\right]=۱+\left[\frac{y^{۲}}{x^{۲}}\right]$$

و بدست می‌آید:

$$۱+k=\left[\frac{y^{۲}}{x_{۲}}\right]=\left[\frac{۴k^{۲}}{۹}\right]$$

و از آنجا :

$$۱+k\leqslant\frac{۴k^{۲}}{۹}<۲+k$$

و از آنجا دو نامعادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases}۴k^{۲}-۹k-۹\geqslant۰\\ ۴k^{۲}-۹k-۱۸<۰\end{cases}$$

از معادلهٔ اول دستگاه بدست می‌آید: $k\geqslant۳$ یا $k\leqslant-\frac{۳}{۴}$ و از معادلهٔ دوم دستگاه (با ۰٫۱ تقریب): $-۱٫۲<k<۳٫۶$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$-۱٫۲<k\leqslant۰٫۷۵ \quad \text{یا} \quad ۳\leqslant k<۳٫۶$$

که با توجه به اینکه k عددی است صحیح ، داریم:

$$k=-1 \quad ; \quad k=3$$

و بالاخره :

$$y=-\frac{2}{3}x \quad ; \quad y=2x$$

که در آن x عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر است.

۱۰۲۳۴ اگر فرض کنیم : $\frac{15x-7}{5}=t$ ، معادلهٔ مفروض به صورت زیردر می‌آید :

$$\left[\frac{30t+117}{120}\right]=t \implies \left[\frac{10t+39}{40}\right]=t$$

و از معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود.

$$0<\frac{10t+39}{40}-t<1$$

با حل این دستگاه نامعادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$-\frac{1}{30}< t<\frac{13}{10}$$

و چون t عددی است صحیح ، جوابهای $t=0$ و $t=1$ را قبول دارد و از آنجا:

$$\frac{15x-7}{5}=0 \implies x_1=\frac{7}{15}$$

$$\frac{15x-7}{5}=1 \implies x_2=\frac{4}{5}$$

۲۳۵. بعد از بازکردن پرانتزها معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$11x^3-3(1+2+3+\dots+n)x^2+3(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)x-(1^3+2^3+3^3+\dots+n^3)=0$$

از طرف دیگر می‌دانیم:

$$1+2+3+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

و بنابراین معادلهٔ درجهٔ سوم به صورت زیر در می‌آید:

$$4x^3-6(n+1)x^2+2(n+1)(2n+1)x-n(n+1)^2=0 \quad (1)$$

می‌دانیم معادلهٔ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ با تبدیل $x=y-\frac{b}{3a}$ به معادلهٔ درجه سوم ناقصی که فاقد جملهٔ درجهٔ دوم است تبدیل می‌شود. اگر این تبدیل را در مورد معادلهٔ (۱) انجام دهیم، یعنی فرض کنیم $x=y-\frac{n+1}{2}$ به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$4y^3+(n^2-1)y=0$$

و ازآنجا:

$$y_1=0 \;;\; y_{2,3}=\frac{1}{2}\sqrt{1-n^2}$$

و بنابراین:

$$x_1=\frac{1}{2}(n+1) \;;\; x_{2,3}=\frac{1}{2}(n+1\pm\sqrt{1-n^2})$$

ضمناً روشن است که جوابهای x_2 و x_3 موهومی‌اند، زیرا n عددی است صحیح و مثبت.

در حالت $n=1$ معادله ریشهٔ مکرر از مرتبهٔ سوم دارد:

$$x_1=x_2=x_3=1$$

۲۳۶. با فرض $\sqrt{2}=a$ می‌توان معادلهٔ مفروض را چنین نوشت:

$$a^2-(2x^2+1)a+(x^4-x)=0 \implies$$

$$a_1=x^2+x+1 \text{ و } a_2=x^2-x$$

که اگر دوباره $a=\sqrt{2}$ بگیریم به‌دو معادلهٔ درجهٔ‌دوم زیر می‌رسیم:

$$x^2+x+1-\sqrt{2}=0 \implies x=\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$$

$$x^2-x-\sqrt{2}=0 \implies x=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}$$

۲۳۷. می‌توان با تجزیه‌سمت چپ تساوی‌ویا با فرض $\sqrt{2}=a$ معادله‌راحل کرد.

جواب: $x_1 = \sqrt{2}$ ، $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}$

۲۳۸. معادله را به این صورت می‌نویسیم :

$$2x^2 + (2-1)x + \sqrt{2} = 0$$

که اگر $\sqrt{2} = a$ فرض کنیم ، می‌شود:

$$a^2x^2 + (a^2-1)x + a = 0$$

این‌معادله نسبت به a از درجهٔدوم است و جوابهای آن چنین می‌شود:

$$a_1 = \frac{x}{x^2+1} \text{ و } a_2 = -\frac{1}{x}$$

که اگر $a = \sqrt{2}$ بگیریم جوابهای x بدست می‌آید:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

۲۳۹. $\sqrt{3} = a$ فرض کنید.

جواب: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{3}+1}}{2}$ ،

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$$

۲۴۰. اگر $a = 3$ فرض کنیم ، معادله به اینصورت در می‌آید:

$$\sqrt{a+\sqrt{x}} = x - a \implies a + \sqrt{x} = (x-a)^2$$

که اگر نسبت به a منظم کنیم ، بدست می‌آید:

$$a^2 - (2x+1)a + (x^2 - \sqrt{x}) = 0$$

جوابهای این معادله چنین است:

$$a_1 = x - \sqrt{x} \text{ و } a_2 = x + \sqrt{x} + 1$$

a_2 در معادلهٔ $\sqrt{a+\sqrt{x}} = x - a$ صدق نمی‌کند ، زیرا برای آن داریم :

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x} + 1} = -(\sqrt{x}+1) \implies \sqrt{x}+1 = -(\sqrt{x}+1)$$

که ممکن نیست . ولی a_1 در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند . اگر بجای a_1 مقدارش ۳ را قرار دهیم:

$$x-\sqrt{x}-۳=۰ \implies \sqrt{x}=\frac{۱\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

که‌جواب منفی برای $\sqrt{x}$ قابل قبول نیست، به‌این ترتیب تنهاجواب معادله چنین می‌شود:

$$x=\frac{۱}{۲}(۷+\sqrt{۱۳})$$

۲۴۱. شبیه تمرین قبل $\sqrt{۵}=a$ فرض کنید.

جواب: $$x=\frac{۱+\sqrt{۱+۴\sqrt{۵}}}{۲}$$

۲۴۲. معادله را نسبت به $\sin x$ منظم می‌کنیم، اگر عامل $\sin^۲ x$ را، که جـواب $x=k\pi$ دارد، از آن خارج کنیم، بقیه ریشه مضاعف $\sin x=\frac{۱}{۲}$ (با جواب $x=(-۱)^n\frac{\pi}{۶}+n\pi$) دارد کـه اگر آنـرا بـر $(۲\sin x-۱)^۲$ تقسیم کنیم و در خارج‌قسمت $\sin x=t$ بگیریم، به معادلهٔ درجهٔ سوم زیر می‌رسیم:

$$f(t)=۱۶t^۳+۱۲t^۲-۱۶t-۱۳=۰ \qquad (۱)$$

در این معادله داریم:

$$f(۱)=۱۶+۱۲-۱۶-۱۳=-۱<۰$$
$$f(۲)=۱۲۸+۴۸-۳۲-۱۳=۱۳۱>۰$$

وبنابراین یکی‌از ریشه‌های معادلهٔ (۱) بین ۱و۲ قرار دارد: $۱<t<۲$.
از طرف دیگر در معادلهٔ (۱) با تبدیل $t=y-\frac{۱}{۴}$ به این معادله‌می‌رسیم:

$$y^۳-\frac{۱۹}{۱۶}y-\frac{۱۷}{۳۲}=۰$$

کـه $۴p^۳+۲۷q^۲$ در آن مثبت است و بنابراین یك جواب حقیقی بیشتر ندارد. بنابراین‌معادلهٔ (۱)هم تنها یك جواب‌حقیقی$۱<t<۲$دارد و چون $t=\sin x$ بود، این جواب قابل قبول نیست.

جواب: $$x=n\pi+(-۱)^n\frac{\pi}{۶} \;،\; x=k\pi$$

۲۴۳. $y=x+2$ بگیرید و پرانتزها را باز کنید، به معادلهٔ درجه چهارم زیر می‌رسید:

$$y^4+5y^3+7y^2+2y=0$$

که به سادگی به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$y(y+2)(y^2+3y+1)=0$$

که از اینجا جوابهای y و سپس x بدست می‌آید.

جواب: $x_1=-2$ ، $x_2=-4$ ، $x_3=-\frac{7-\sqrt{5}}{2}$ ،

$$x_4=-\frac{7+\sqrt{5}}{2}$$

۲۴۴. این معادله همان معادلهٔ مسألهٔ ۲۳۹ است که در آن بجای $\sqrt{3}$ مقدار پارامتر a گذاشته شده است:

جواب: $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$ ، $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$

۲۴۵. واسطهٔ عددی مخرجها را y فرض کنید:

$$y=\frac{x+(x+a)+(x+b)+(x+a+b)}{4}=x+\frac{a+b}{2}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x=y-\frac{a+b}{2}$$

که اگر بجای x در معادله قرار دهیم به معادلهٔ درجهٔ سومی بدون مقدار ثابت نسبت به y می‌رسیم.

جواب: $x_1=-\frac{a+b}{2}$ ، $x_2=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a-b)$ ،

$$x_3=-\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a+b)$$

۲۴۶. با فرض $x+a+b+c=y$ به دو معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$1)\ y=0$$

$$2)\ (a+b+c)y^2-(a+b+c)^2y+$$
$$+[(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc]=0$$

۲۴۷. واسطهٔ عددی مخرجها را مساوی y می‌گیریم:

$$y=x+\frac{7a}{2}\Longrightarrow x=y-\frac{7a}{2}$$

که اگر در معادلهٔ مفروض قرار دهیم ، بعد از تبدیلهای ساده به این معادله می‌رسیم:

$$۸y(۴۸y^۴-۲۸۰a^۲y^۲+۲۵۹a^۴)=۰$$

جواب: $x=\pm a\sqrt{\frac{۳۵\pm ۸\sqrt{۷}}{۱۲}}-\frac{۷a}{۲}$ ، $x=-\frac{۷a}{۲}$

۲۴۸. سمت چپ تساوی قابل تجزیه است و معادله به این صورت درمی‌آید:

$$(y+p)(y^۲+py+۲)=۰$$

جواب: $y_{۲,۳}=\frac{-p\pm\sqrt{p^۲-۸}}{۲}$ ، $y_۱=-p$

۲۴۹. $x=y+\frac{a+b}{۲}$ بگیرید ، معادلهٔ حاصل نسبت بـه y دو مجذوری می‌شود .

۲۵۰. معادله نسبت به a دو مجذوری است:

$$۴(x-۱)a^۴-۴(x^۲-۲x)a^۲+(x^۳-۳x^۲+۴)=۰$$

و از آنجا:

$$a^۲=\frac{x-۲}{۲}\implies x_۱=۲(a^۲+۱)$$

$$a^۲=\frac{x^۲-x-۲}{۲(x-۱)}\implies$$

$$\implies x_{۲,۳}=\frac{۱}{۲}\left(۲a^۲+۱\pm\sqrt{۴a^۴-۸a^۲+۹}\right)$$

۲۵۱. $x=y-\frac{a+b}{۲}$ بگیرید . معادله نسبت به y دو مجذوری می‌شود .

اگر $\frac{a-b}{۲}=\alpha$ بگیریم ، این معادلهٔ دو مجذوری چنین است :

$$۱۰\alpha y^۴+۲۰\alpha^۳y^۲+۲\alpha^۵-c^۵=۰$$

۲۵۲. تجزیهٔ زیر را قبلا دیده‌ایم (مسألهٔ ۱۰۴ را ببینید) :

$$(x+y)^۷-x^۷-y^۷=۷xy(x+y)(x^۲+xy+y^۲)^۲ \quad (۱)$$

معادلهٔ مفروض را چنین می‌نویسیم :

$$[(x+a+b)^۷-x^۷-(a+b)^۷]+[(a+b)^۷-a^۷-b^۷]=۰$$

عبارتهای داخل کروشه‌ها را طبق رابطهٔ (۱) تجزیه می کنیم :

$$2x(a+b)(x+a+b)[x^2+(a+b)x+(a+b)^2]^2+$$
$$+2ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2=0$$

اگر $a=-b$ باشد معادله بـه اتحاد تبدیل می‌شود و بـه ازای هر مقدار دلخواه x صادق است. درحالت $a\neq -b$ دو طرف معادله رابر $2(a+b)$ تقسیم می‌کنیم و به اینصورت می‌نویسیم:

$$[x(x+a)+bx][(x+a)(x+b)+(a^2+ab+b^2)]^2+$$
$$+ab(a^2+ab+b^2)^2=0$$

ضربها را انجام می‌دهیم:

$$x(x+a)^3(x+b)^2+2x(x+a)^2(x+b)(a^2+ab+b^2)+$$
$$+x(x+a)(a^2+ab+b^2)^2+bx(x+a)^2(x+b)^2+$$
$$+2bx(x+a)(x+b)(a^2+ab+b^2)+$$
$$+bx(a^2+ab+b^2)^2+ab(a^2+ab+b^2)^2=0$$

جمله‌های سوم، ششم و هفتم را می‌توان به‌اینصورت تجزیه کرد:

$$(x+a)(x+b)(a^2+ab+b^2)^2$$

وبنابراین درتمام‌جمله‌های سمت چپ معادلهٔمفروض عامل $(x+a)(x+b)$ وجود دارد و از اینجا دو جواب زیر بدست‌می‌آید:

$$x_1=-a \quad , \quad x_2=-b$$

حالا اگـر دو طرف معادله را بـر $(x+a)(x+b)$ تقسیم کنیم، بدست می‌آید:

$$x(x+a)^2(x+b)+2x(x+a)(a^2+ab+b^2)+$$
$$+bx(x+a)(x+b)+2bx(a^2+ab+b^2)+$$
$$+(a^2+ab+b^2)^2=0$$

دو جملهٔ اول و سوم را با هم و دو جملهٔ دوم و چهارم را باهم می‌گیریم و به اینصورت می‌نویسیم:

$$[x^2+(a+b)x+ab][x(x+a)+bx]+$$
$$+2(a^2+ab+b^2)[x^2+(a+b)x]+(a^2+ab+b^2)^2=0$$

که بالاخره به اینصورت در می‌آید:

$$[x^2+(a+b)x]^2+(2a^2+3ab+2b^2)[x^2+(a+b)x]+$$
$$+(a^2+ab+b^2)^2=0$$

که نسبت‌به $x^2+(a+b)x$ معادله‌ای ازدرجهٔ دوم وقابل حل است.

۲۵۳. $\sqrt[5]{a+\sqrt{x}}=u$ و $\sqrt[5]{a-\sqrt{x}}=v$ فرض کنید ، در نتیجه‌به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$u^5+v^5=2a \text{ و } u+v=\sqrt[5]{2a}$$

اگر u^5+v^5 را به $u+v$ و uv تبدیل کنیم و بجای $u+v$ مقدارش $\sqrt[5]{2a}$ را قرار دهیم به معادلهٔ زیر نسبت به uv می‌رسیم :

$$uv(uv-\sqrt[5]{4a^2})=0 \longrightarrow uv=0 \text{ و } uv=\sqrt[5]{4a^2}$$

جواب $uv=\sqrt[5]{4a^2}$ منجر به جوابهای موهومی برای u و v می‌شود و جواب $uv=0$ منجر به جواب $x=a^2$ برای معادله می‌شود.

۲۵۴. اگر دو طرف معادله را بتوان ۴ برسانیم ، به اینصورت در می‌آید:

$$\sqrt[4]{(a-x)(b-x)}\times$$
$$\times\left(2\sqrt{a-x}+3\sqrt[4]{(a-x)(b-x)}+2\sqrt{b-x}\right)=0$$

مقدار داخل پرانتز نمی‌تواند مساوی صفر شود (چون هر سه جملهٔ آن مثبت است) مگر در حالت $a=b=0$ که در اینصورت جواب صفر را قبول دارد .

جواب : $x=a$ برای حالت $a<b$ و $x=b$ برای حالت $a>b$

۲۵۵. معادله را به اینصورت می‌نویسیم:

$$\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}-$$
$$-\sqrt{x^2-3x-2}$$

که پس از مجذور کردن دو طرف معادله و ساده کردن آن بدست می‌آید ؛

$$\sqrt{(2x^2-1)(x^2-x+2)}=\sqrt{(2x^2+2x+3)(x^2-3x-2)}$$

کـه اگر یکبار دیگر دو طرف آنرا مجذور کنیم ، بعد از تبدیلهای ساده

چنین می‌شود:

$$x^3+5x^2+7x+2=0$$

ویا :
$$(x+2)(x^2+3x+1)=0$$

ریشهٔ $x=-2$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند ، ولی ریشه‌های معادلهٔ $x^2+3x+1=0$ یعنی $-\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ در آن صدق نمی‌کنند. بنابـراین معادله تنها یك ریشهٔ $x=-2$ را قبول دارد.

۲۵۶. واسطهٔ عددی چهار عبارت $x+1$ ، $x+2$ ، $x+3$ و $x+4$ را y می‌گیریم :

$$x+\frac{5}{2}=y \implies x=y-\frac{5}{2}$$

که در اینصورت معادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$\left(y-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)=$$
$$=\left(y-\frac{3}{2}\right)^4+\left(y-\frac{1}{2}\right)^4+\left(y+\frac{1}{2}\right)^4+\left(y+\frac{3}{2}\right)^4$$

که یك معادلهٔ دو مجذوری و قابل حل است .

۲۵۷. واضح است که $x=0$ جواب معادله نیست. بنابراین $x>0$.فرض می‌کنیم $x-1=y\sqrt{x}$، دراینصورت بدست می‌آید: $x^2+1=x(y^2+2)$ و معادلهٔ مفروض به اینصورت در می‌آید:

$$\sqrt{2(y^2+2)}=2(a-y)\ ,\ a\geqslant y$$

بعد از آنکه معادله را گویا کنیم ، بدست می‌آید:

$$y^2-4ay+2(a^2-1)=0$$

از آنجا:
$$y_1=2a+\sqrt{2(a^2+1)}$$
$$y_2=2a-\sqrt{2(a^2+1)}$$

به ازای $a\geqslant 0$ داریم:

$$a-y_1=-(a+\sqrt{2(a^2+1)})<0$$

و به ازای $a<0$:
$$a-y_1=-(a+\sqrt{2(a^2+1)})<0$$

بنابراین ریشهٔ y_1 قابل قبول نیست. از طرف دیگر :

$$a-y_2=\sqrt{2(a^2+1)}-a$$

که به ازای $a\geq 0$ و $a>0$ داریم: $a-y_2>0$ ، بنابراین باید این‌معادله را حل کنیم :

$$x-1=y_2\sqrt{x}$$

و از آنجا

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2}\left(y_2+\sqrt{y_2^2+4}\right)$$

و:

$$x=\frac{1}{4}\left[2a-\sqrt{2(a^2+1)}+\sqrt{6a^2+6-4a\sqrt{2(a^2+1)}}\right]$$

۲۵۸. معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$x^4-6ax^3+10a^2x^2-6a^3x+a^4=0$$

و از آنجا:

$$x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4-2(ax^3-2a^2x^2+a^3x)=0$$

یا:

$$(x-a)^4-2ax(x-a)^2=0;$$

$$(x-a)^2(x^2-4ax+a^2)=0$$

و بنابراین:

$$x_1=x_2=a \text{ و } x_3=a(2+\sqrt{3}) \text{ و } x_4=a(2-\sqrt{3})$$

۲۵۹. به‌ترتیب داریم:

$$x^4+2x^3+x^2-x(x+1)-a=0\ ;$$

$$x^2(x+1)^2-x(x+1)-a=0$$

که معادله‌ای درجه دوم نسبت به $x(x+1)$ است:

$$x(x+1)=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{4a+1}\right);$$

$$x^2+x-\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{4a+1}\right)=0\ ;$$

$$x=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{3\pm 2\sqrt{4a+1}}\right)$$

۲۶۰. روش اول: $x=2$ در معادله صدق می‌کند . از طرف دیگر تابع $y=2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}-4$ همواره صعودی است (مشتق آن مثبت است) و بنابراین معادلهٔ $y=0$ بیش از یك جواب نمی‌تواند داشته باشد.

روش دوم: با گویا کردن معادله به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$9x^2-196x+356=0$$

که دارای دو جواب $x=2$ و $x=\frac{178}{9}$ است که تنها جواب $x=2$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند.

۲۶۱. جواب: $x=\frac{3}{2}$

۲۶۲. جواب: $x=-2$

۲۶۳. تابع $f(x)=2\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x}-1$ همیشه صعودی است، زیرا:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}>0$$

ضمناً این تابع به ازای $x\geqslant 1$ پیوسته است و بنابراین $f(x)=0$ تنها یك جواب دارد.

جواب: $x=1$

۲۶۴. جواب: $x=2$

۲۶۵. جواب: $x=2$

۲۶۶. معادله را نسبت به a حل کنید.

جواب: $x_1=a$ ، $x_{2,3}=\frac{1}{2}\left(a+1\pm\sqrt{a^2+6a+1}\right)$

۲۶۷. معادله را نسبت به پارامتر a حل کنید.

جواب: $x_1=a-1$ ، $x_{2,3}=\frac{1}{2}\left(a-3\pm\sqrt{a^2-2a+a}\right)$

۲۶۸. اگر معادله را نسبت به a منظم کنیم بـه معادلهٔ معکوسهٔ زیـر تبدیل می‌شود:

$$x^4-2(x^2+1)a^3+(x^4+x^2-2x+2)a^2-$$
$$-2(x^2+1)a+1=0$$

که حل آن منجر به حل دو معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌شود:

$$x^2+x+2=a+\frac{1}{a} \text{ و } x^2-x=a+\frac{1}{a}$$

۲۶۹. اگرمعادله را نسبت به a حل کنیم، به دومعادلهٔ درجه دوم زیر نسبت‌به x می‌رسیم:

$$2x^2+5x-a+2=0 \quad و \quad 2x^2+x-a=0$$

جواب: $x_{1,2}=\frac{1}{4}\left(-5\pm\sqrt{8a+9}\right)$ ،

$$x_{3,4}=\frac{1}{4}\left(-1\pm\sqrt{8a+1}\right)$$

۲۷۰. معادله نسبت به x معکوسه و قابل حل است ولی اگر آنرا نسبت‌به a هم منظم کنیم ، چنین می‌شود:

$$4x^2\cdot a^4-6(x^3+x)\cdot a^3+(2x^4+9x^2+2)\cdot a^2-$$
$$-3(x^3+x)\cdot a+x^2=0$$

دو طرف این معادله را بر a^2 تقسیم می کنیم، بدست می‌آید:

$$x^2\left(4a^2+\frac{1}{a^2}\right)-3(x^3+x)\left(2a+\frac{1}{a}\right)+(2x^4+9x^2+2)=0$$

و با فرض $2a+\frac{1}{a}=t$ به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$x^2\cdot t^2-3(x^3+x)\cdot t+(2x^4+5x^2+2)=0 \ ;$$

$$t_1=\frac{x^2+2}{x} \quad و \quad t_2=\frac{2x^2+1}{x}$$

که اگر بجای t مقدارش $2a+\frac{1}{a}$ قرار دهیم به دو معادلهٔ درجهٔ دوم زیر نسبت به x می‌رسیم:

$$ax^2-(2a^2+1)x+2a=0$$
$$2ax^2-(2a^2+1)x+a=0$$

جواب: $x_1=a$ ، $x_2=\frac{1}{a}$ ، $x_3=2a$ ، $x_4=\frac{1}{2a}$

۲۷۱. جواب: $x_1=3$ ، $x_2=\frac{1}{3}$ ، $x_3=-2$ ، $x_4=-\frac{1}{2}$ و دو ریشهٔ موهومی.

۲۷۲. این معادله نسبت به a معکوسه است، اگر دو طرف را بر a^3 تقسیم

کنیم و $a+\frac{1}{a}=t$ بگیریم، به معادلهٔ درجهٔ سوم زیر نسبت به t می‌رسیم:

$$10t^3-19t^2-19t+10=0$$

که جوابهای آن $t_1=-1$ ، $t_2=\frac{2}{5}$ ، $t_3=\frac{5}{2}$ است ودر نتیجه سه‌معادلهٔ درجهٔ دوم زیر نسبت به a بدست می‌آید:

$$a^2+a+1=0 \quad \text{و} \quad 5a^2-2a+5=0 \quad \text{و} \quad 2a^2-5a+2=0$$

ریشه‌های دو معادلهٔ اول موهومی و ریشه‌های معادلهٔ آخر $a_1=2$ و $a_2=\frac{1}{2}$ است.

۲۷۳. اگر ریشه‌های معادله را x_1 و x_2 و x_3 بگیریم، داریم:

$$x_1+x_2+x_3=-a$$

و چون ریشه‌ها به‌تصاعد حسابی هستند، داریم: $2x_2=x_1+x_3$ واز آنجا:

$$3x_2=-a \implies x_2=-\frac{a}{3}$$

این مقدار x_2 باید در معادلهٔ مفروض صدق کند.

جواب: $\quad 2a^3-9ab+27c=0$

۲۷۴. وقتی که یکی ازریشه‌های‌معادله‌ای باضریبهای حقیقی $x_1=3+i\sqrt{6}$ باشد، $x_2=3-i\sqrt{6}$ (مزدوج x_1) نیز ریشهٔ معادله خواهد بود. یعنی عبارت درجـهٔ چهارم سمت‌چپ تساوی بسر $(x-x_1)(x-x_2)$ قابل قسمت می‌شود. داریم:

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-6x+15$$

در نتیجه معادلهٔ درجهٔ چهارم بصورت زیر در می‌آید:

$$(x^2-6x+15)(4x^2-3)=0$$

جواب: $\quad x_{1,2}=3\pm i\sqrt{6} \;;\; x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$

۲۷۵. راه حل اول: α و β و γ را ریشه‌های معادلهٔ مفروض می‌گیریم، داریم:

$$\alpha+\beta+\gamma=-p \;;\; \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=q$$

تفاضل p^2-3q را محاسبه می‌کنیم:

$$p^2-3q=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)=$$

$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma$$

و بنابراین باتوجه به‌فرض مسأله داریم:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma<0$$

ویا

$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2<0$$

و روشن است که این رابطه برای مقادیر حقیقی α و β و γ نمی‌تواند صحیح باشد. بنابـراین اگر ضریبهای معادله حقیقی باشد، دو ریشهٔ آن موهومی و یك ریشهٔ آن حقیقی است.

راه حل دوم: عبارت سمت‌چپ تساوی را $f(x)$ می‌گیریـم و تفاضـل $f(x+h)-f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta y=f(x+h)-f(x)=(x+h)^3+p(x+h)^2+$$
$$+q(x+h)+r-x^3-px^2-qx-r=$$
$$=3x^2h+3xh^2+h^3+2pxh+ph^2+qh=$$
$$=h[3x^2+2px+q+(3x+p)h+h^2]$$

ثابت می‌کنیم که مقدار داخل کروشه برای هر مقدار دلخواه x و h مثبت است. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که مبین این عبارت (که نسبت به h درجهٔ دوم است) به ازای همهٔ مقادیر x منفی است. اگر این‌مبین را d_1 بگیریم، داریم:

$$d_1=(3x+p)^2-4(3x^2+2px+q)=$$
$$=-3x^2-2px+p^2-4q$$

حالا d_2 مبین این سه جمله‌ای را (نسبت به x) محاسبه می‌کنیم:

$$d_2=p^2+3(p^2-4q)=4p^2-12q=4(p^2-3q)$$

از شرط مسأله نتیجه می‌شود که $p^2-3q<0$ است، بنابراین $d_2<0$ و از آنجا $d_1<0$ می‌شود و بالاخره نتیجه می‌شود که:

$$3x^2+2px+q+(3x+p)h+h^2>0$$

به این‌ترتیب‌وقتی $h>0$ باشد $\Delta y>0$ وقتی $h<0$ باشد $\Delta y<0$ خواهد بود. و این به معنای آنست که تابع $f(x)$ تابعی است صعودی و جز یکبار نمی‌تواند مساوی صفر شود. درنتیجه معادله $f(x)=0$ تنها یك ریشهٔ حقیقی خواهد داشت.

راه حل‌سوم. صعودی‌بودن تابع $f(x)$ را باکمك مشتق هم می‌توانستیم نتیجه بگیریم ، زیرا وقتی که $p^2<3q$ باشد داریم:

$$f'(x)=3x^2+2px+q>0$$

۲۷۶. تابع زیر را در نظر می‌گیریم :

$$f_n(x)=x^n-x-n \qquad (n=1,2,3,\dots,k,\dots)$$

داریم:

$$x^n-x=x(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\dots+1)$$

و واضح است که به‌ازای $x>1$ هریك ازاین تابعها (عاملهای ضرب)صعودی هستند. از طرف دیگر داریم:

$$f_n(1)=-n<0 \;;$$
$$f_n(2)=2(2-1)(2^{n-2}+2^{n-3}+\dots+1)-n>0$$

بنابراین معادلهٔ مفروض در فاصلهٔ [۱،۲] تنها دارای يك ریشه است . این ریشه را به x_n نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که به ازای $n>2$ داریم :

$$\sqrt[n]{n+1}<x_n<\sqrt[n-1]{n}$$

در حقیقت می‌توان نوشت:

$$f_n\left(\sqrt[n]{n+1}\right)=1-\sqrt[n]{n+1}<0$$

با تبدیلهای ساده می‌توان از نامساوی واضح :

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<3\leqslant n$$

به نامساوی زیر رسید :

$$(n-1)\sqrt[n-1]{n}-n>0$$

از طرف دیگر داریم :

$$f(\sqrt[n-1]{n})=(n-1)\sqrt[n-1]{n}-n \implies f(\sqrt[n-1]{n})>0$$

بنابراین ریشهٔ معادله بین مقادیر $\sqrt[n]{n+1}$ و $\sqrt[n-1]{n}$ قرار دارد.

از این نامساوی دو طرفه نتیجه می‌شود:

$$\sqrt[n+1]{n+2}<x_{n+1}<\sqrt[n]{n+1}<x_n<\sqrt[n-1]{n}$$

یعنی دنبالهٔ ریشه‌ها بطور یکنواخت نزولی است. بالاخره :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n-1]{n}=1 \quad ;$$

و بنابراین . $\lim_{n\to\infty}x_n=1$

زیرا $x_2=2$ و $x_3<\sqrt{3}<x_2$ ودنبالهٔ ریشه‌ها با شروع از $n=2$ نزولی است.

۲۷۷. چند جمله‌ای سمت چپ تساوی را می‌توان چنین نوشت:

$$(x^2-2x)^2+8\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$$

جملهٔ اول این عبارت غیر منفی و جملهٔ دوم مثبت است و بنابراین مجموع آنها نمی‌تواند مساوی صفر شود.

۲۷۸. a ، b و c را ضلعها و h_1 ، h_2 و h_3 را ارتفاعهای مثلث می‌گیریم. داریم:

$$h_1>0 \ ; \ h_2>0 \ , \ h_3>0 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} h_1+h_2+h_3=k \\ h_1h_2+h_1h_3+h_2h_3=q \\ h_1h_2h_3=z \end{cases} \qquad (2)$$

بنابراین ، با توجه به نامساویهای (۱) خواهیم داشت:

$$k>0 \ ; \ q>0 \ ; \ z>0 \qquad (3)$$

از تساویهای : $2S=ah_1=bh_2=ch_3$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$a=\frac{2S}{h_1} \ ; \ b=\frac{2S}{h_2} \ ; \ c=\frac{2S}{h_3}$$

$$p=\frac{a+b+c}{2}=S\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)=$$

$$=S\cdot\frac{h_1h_2+h_2h_3+h_1h_3}{h_1h_2h_3}=\frac{Sq}{z};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$
$$=\sqrt{\frac{Sq}{z}\left(\frac{Sq}{z}-\frac{2S}{h_1}\right)\left(\frac{Sq}{z}-\frac{2S}{h_2}\right)\left(\frac{Sp}{z}-\frac{2S}{h_3}\right)}=$$
$$=S^2\sqrt{\frac{q^4}{z^4}-2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\frac{q^3}{z^3}+}\rightarrow$$
$$\overline{\leftarrow+4\left(\frac{1}{h_1h_2}+\frac{1}{h_1h_3}+\frac{1}{h_2h_3}\right)\frac{q^2}{z^2}-\frac{8}{h_1h_2h_3}\cdot\frac{q}{z}}=$$
$$=S^2\sqrt{-\frac{q^4}{z^4}+\frac{4kq^3}{z^3}-\frac{8q}{z^2}}=\frac{S^2}{z^2}\sqrt{q(4kqz-q^3-8z^2)}\ ;$$
$$S=\frac{z^2}{\sqrt{q(4kqz-q^3-8z^2)}}$$

که در آن باید داشته باشیم:

$$4kqz>q^3+8z^2 \qquad (4)$$

رابطه‌های (۳) و (۴) شرطهای لازم برای وجود ریشه‌های حقیقی در معادلهٔ مفروض است.

۲۷۹. اگر مبین معادلهٔ مفروض را D فرض کنیم، داریم:

$$D=-4p^3-27q^2=-4(p^3+q^2)-23q^2$$

و چون p^3+q^2 (طبق فرض) و $23q^2$ مضربی از ۲۳ هستند، پس D هم مضربی از ۲۳ خواهدبود. از طرف دیگر داریم:

$$D=(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$$

و برای اینکه D مضربی از ۲۳ باشد، باید یکی از عوامل x_1-x_2، x_2-x_3 یا x_1-x_3 مضرب ۲۳ باشند.

۲۸۰. ریشه‌های معادلهٔ:

$$(ab'-ba')z^2+2(ac'-ca')z+(bc'-cb')=0 \qquad (1)$$

تنها وقتی حقیقی است که داشته باشیم:

$$(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')\geqslant 0 \qquad (2)$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که نامساوی (۲)، هم‌ارزنامساوی زیر است:

$$[2(ac'+ca')-bb']^2\geqslant(b^2-4ac)(b'^2-4a'c') \qquad (3)$$

حالاصحت نامساوی(۳)راتحقیق‌می کنیم به‌شرطی که‌معادلهٔ $a'x^2+b'x+c'=0$ دارای ریشه‌های موهومی باشد.

۱. فرض می کنیم ریشه‌های‌معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ حقیقی باشد، دراینصورت $b^2-4ac\geqslant 0$ و $b'^2-4a'c'<0$ و نامساوی(۳)واضح‌است.

۲. اگر ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ هم موهومی باشند ، در اینصورت خواهیم داشت:

$$b^2-4ac<0 \; : \; b'^2-4a'c'<0$$

که از آنها نتیجه می‌شود:

$$ac>0 \; ; \; a'c'>0 \; ; \; |bb'|<4|aa'|\sqrt{\frac{cc'}{aa'}}$$

از نامساوی اخیر نتیجه می‌شود :

$$\frac{bb'}{aa'}<4\sqrt{\frac{cc'}{aa'}}$$

که اگر نامساوی زیر را در نظر بگیریم:

$$\frac{c}{a}+\frac{c'}{a'}>2\sqrt{\frac{cc'}{aa'}}$$

بدست می‌آید:

$$\left[2\left(\frac{c}{a}+\frac{c'}{a'}\right)-\frac{bb'}{aa'}\right]^2\geqslant\left(4\sqrt{\frac{cc'}{aa'}}-\frac{bb'}{aa'}\right)^2$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود:

$$[2(ac'+a'c)-bb']^2\geqslant(4\sqrt{aa'cc'}-bb')^2=$$
$$=(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')+4(b\sqrt{a'c'}-b'\sqrt{ac})\geqslant$$
$$\geqslant(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')$$

به‌این ترتیب‌صحت نامساوی (۳) ودرنتیجه صحت نامساوی (۲) ثابت‌می‌شود.

۲۸۱. به ازای $x<0$ داریم:

$$P(x)>x^4+a^2x^2+2abx+b^2=x^4+(ax+b)^2>0$$

به ازای $x=0$: $\quad P(0)=b^2>0$

به ازای $x>0$:

$$P(x)>x^4-2ax^3+a^2x^2+b^2=(x^2-ax)^2+b^2>0$$

و چون $P(x)$ به ازای همهٔ مقادیر حقیقی x مثبت است ، $P(x)=0$ دارای جواب حقیقی نیست.

۲۸۲. فرض می‌کنیم αi ریشهٔ موهومی خالص معادله باشد ، اگر سمت چپ معادلهٔ مفروض را به $f(x)$ نشان دهیم، باید مقادیر حقیقی و ضریب $i=\sqrt{-1}$ در $f(\alpha i)$ برابر صفر شود:

$$\begin{cases} d-b\alpha^2=0 \\ c\alpha-a\alpha^3=0 \end{cases}$$

با حذف α بین این دو رابطه بدست می‌آید: $ad=bc$ ؛ همچنین از تساوی $ac=a^2\alpha^2$ نتیجه می‌شود $ac>0$ $(a\neq 0)$: به این ترتیب لزوم شرطها ثابت شد .

حالا کفایت این شرطها را ثابت می‌کنیم . فرض کنیم $ad=bc$ و $ac>0$ ، دو طرف معادلهٔ مفروض را در $a\neq 0$ ضرب می کنیم :

$$ax(ax^2+c)+abx^2+ad=0$$

که با استفاده از تساوی $ad=bc$ می‌شود:

$$ax(ax^2+c)+abx^2+bc=0$$

ویا:

$$(ax^2+c)(ax+b)=0$$

و ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+c=0$ چنین است:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}=\pm\frac{\sqrt{ac}}{a}i \;;$$

۲۸۳. فرض می کنیم: $x'>x''\geqslant 0$، در اینصورت داریم:

$$f(x'')-f(x')=(a^{x''}-b^{x''})-(a^{x'}-b^{x'})=$$
$$=a^{x'}(a^{x''-x'}-1)-b^{x'}(b^{x''-x'}-1)$$

و چون داریم:

$$a^{x'}\geqslant b^{x'}>0 \quad \text{و} \quad a^{x''-x'}>b^{x''-x'}>1$$

نتیجه می‌شود :

$$f(x'')>f(x') \quad \text{ویا} \quad f(x'')-f(x')>0$$

یعنی تابع $f(x)$ برای مقادیر $x>0$ صعودی است.

حالا به‌معادلهٔ $5^x - 2^x = 21$ می‌پردازیم روشن است که $x=2$ یکی از ریشه‌های این معادله است‌واز آنجا تابع $g(x)=5^x-2^x$ برای مقادیر مثبت x صعودی است و معادله نمی‌تواند ریشهٔ مثبت دیگری داشته باشد. از طرف دیگر ، معادله ریشهٔ منفی هم ندارد، زیرا برای مقادیر $x<0$ داریم:

$$5^x - 2^x < 0 < 21$$

به این‌ترتیب معادلهٔ مورد نظر، تنها یك ریشهٔ $x=2$ را قبول دارد.

۲۸۴. اگر ریشهٔ مثبت معادلهٔ مفروض را x_0 فرض کنیم، روشن است که‌برای $n>1$ داریم : $x_0<1$. از طرف دیگر چندجمله‌ای سمت چپ تساوی در معادلهٔ مفروض، مجموع n جمله از یك تصاعد هندسی است کـه جملهٔ اول آن x و قدر نسبتش نیز x است ، وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند ، حد مجموع جمله‌های سمت چپ تساوی، به حد مجموع جمله‌های یك تصاعد هندسی نزولی تبدیل می‌شود که برابر است با $\frac{x_0}{1-x_0}$ و بنابراین داریم:

$$\frac{x_0}{1-x_0}=1 \implies x_0=\frac{1}{2}$$

توضیح : به سادگی می‌توان ثـابت کرد که معادلهٔ (۱) حتماً دارای جواب مثبتی می‌باشد، معادله را چنین می‌نویسیم:

$$f(x)=x^n+x^{n-1}+\dots+x^2+x-1=0$$

داریم: $$f(0)=-1<0 \quad ; \quad f(1)=n-1>0$$

یعنی معادلهٔ مفروض در فاصلهٔ $[0\ ,\ 1]$ دارای ریشه است.

۲۸۵. اگر α ریشه‌ای از معادلهٔ $x^3-x+1=0$ باشد ، $\frac{1}{\alpha}$ ریشهٔ معادلـهٔ $x^3-x^2+1=0$ خواهد بود و ضمناً به سادگی بدست‌می‌آید:

$$x^5+x+1=(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$$

۲۸۶. فرض می‌کنیم ، $x=y+\lambda$. معادلهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$y^4+4(\lambda-2)y^3+3(2\lambda^2+8\lambda+7)y^2+(4\lambda^3-24\lambda^2+$$
$$+42\lambda+a)y+\lambda^4-8\lambda^3+21\lambda^2+a\lambda+6=0$$

و برای اینکه معادلهٔ اخیر ، معادله‌ای دومجذوری باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\lambda-2=0\\ 4\lambda^3-24\lambda^2+42\lambda+a=0\end{cases}\Longrightarrow \left|\begin{array}{l}\lambda=2\\ a=-20\end{array}\right.$$

با این مقادیر λ و a ، معادلهٔ دو مجذوری چنین می‌شود:

$$y^4-3y^2+2=0 \Longrightarrow y_{1,2}=\pm 1 \; ; \; y_{3,4}=\pm\sqrt{2}$$

جواب: $x_1=1$ ، $x_2=3$ ، $x_{3,4}=2\pm\sqrt{2}$

۲۸۷. یکی از ریشه‌های معادله را x می‌گیریم، ریشهٔ دیگر آن $x_1=2x$ می‌شود ، باید x_1 در معادله صدق کند، که اگر قرار دهیم بدست می‌آید:

$$8x^3-84x^2+280x-300=0 \qquad (1)$$

این معادله و معادلهٔ مفروض دستگاهی تشکیل می‌دهند که می‌توان از آنها مقدار x را بدست آورد . برای این منظور دوطرف معادلهٔ مفروض را در ۲ ضرب و دو طرف معادلهٔ (۱) را بر ۴ تقسیم می‌کنیم ، از تفاضل آنها بدست می‌آید:

$$21x^2-210x+525=0 \Longrightarrow (x-5)^2=0 \quad ;$$
$$x=5 \; ; \; x_1=10$$

با در دست داشتن دو ریشه از معادلهٔ درجه سوم، می‌توان ریشهٔ سوم آنرانیز بدست آورد. برای این منظورمثلا می‌توان از رابطهٔ مجموع ریشه‌ها استفاده کرد:

$$x+x_1+x_2=21 \Longrightarrow x_2=6$$

۲۸۸. معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن $y_1=\dfrac{m\alpha+n}{m\alpha-n}$ و $y_2=\dfrac{m\beta+n}{m\beta-n}$ و $y_3=\dfrac{m\gamma+n}{m\gamma-n}$ باشد ، باید داشته باشیم :

$$y=\frac{mx+n}{mx-n} \Longrightarrow x=\frac{n(y+1)}{m(y-1)}$$

در معادله مفروض قرار می‌دهیم:

$$\frac{n^3(y+1)^3}{m^3(y-1)^3}+\frac{pn(y+1)}{m(y-1)}+q=0$$

ویا:

$$n^3(y+1)^3+pm^2n(y+1)(y-1)^2+qm^3(y-1)^3=0 \quad (1)$$

مجموع مورد نظر S، مجموع ریشه‌های همین معادلهٔ (۱) است:

$$S=\frac{3qm^3+2pm^2n-3n^3}{n^3+pm^2n+qm^3}$$

۲۸۹. شرط وجود یك ریشهٔ مشترك بین دو معادله ، ازحذف مجهول بین آنها بدست می‌آید.

اگر دو معادله را از هم کنیم بدست می‌آید:

$$x=-\frac{q-q_1}{p-p_1}$$

این همان ریشهٔ مشترك است و باید در هر یك از معادله‌ها صدق کند:

$$(q-q_1)^2=(p-p_1)^2(pq_1-p_1q)$$

۲۹۰. اگر دوطرف معادلهٔ $x^3-x+1=0$ را در x^2 ضرب کنیم،معادلهٔ:

$$x^5-x^3+x^2=0$$

بدست می‌آید که واضح است x_1 و x_2 و x_3 در آن صدق می‌کند:

$$\begin{cases}x_1^5-x_1^3+x_1^2=0\\x_2^5-x_2^3+x_2^2=0\\x_3^5-x_3^3+x_3^2=0\end{cases}$$

از جمع این رابطه‌ها بدست می‌آید:

$$x_1^5+x_2^5+x_3^5=(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \quad (1)$$

اکنون اگر x_1 و x_2 و x_3 را در معادلهٔ $x^3-x+1=0$ قرار دهیم:

$$\begin{cases}x_1^3-x_1+1=0\\x_2^3-x_2+1=0\\x_3^3-x_3+1=0\end{cases}$$

و از مجموع آنها ،

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)-3=-3$$

از طرف دیگر:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2$$

که اگر در رابطهٔ (۱) قرار دهیم:

$$x_1^5+x_2^5+x_3^5=-3-2=-5$$

۲۹۱. راه حل اول: این معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد، زیرا داریم:

$$\begin{cases} f(-2)<0 \ ; \ f(0)>0 \\ f(1)<0 \ ; \ f(2)>0 \end{cases}$$

و بنابراین معادله در فاصله‌های $(-2 , 0)$ ، $(0 , 1)$ و $(1 , 2)$ دارای ریشه‌است. در نتیجه ریشهٔ متوسط،مثبت وکوچکتر از واحد و ریشهٔ‌کوچکتر بین ۲ــ و صفر است. ثابت می‌کنیم:

$$x_2=\frac{1}{1-x_1}$$

زیرا داریم:

$$\left(\frac{1}{1-x_1}\right)^3-3\times\frac{1}{1-x_1}+1=\frac{-(x_1^3-3x_1+1)}{(1-x_1)^3}=0$$

یعنی اگر x_1 ریشه‌ای از معادله باشد $\frac{1}{1-x_1}$ هم ریشهٔ آن خواهد بود. از اینجا نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{1-x_1}<1 \Longrightarrow \frac{1}{1-x_1}<x_3$$

یعنی $\frac{1}{1-x_1}$ ریشهٔ متوسط معادلـه است. حالا تفاضل مطلوب را بدست می‌آوریم:

$$x_2{}^2-x_1=\frac{1}{(1-x_1)^2}-x_1=\frac{1-x_1+2x_1{}^2-x_1{}^3}{(1-x_1)^2}=$$

$$=\frac{-x_1{}^3+3x_1-1+2(1-x_1{}^2)}{(1-x_1)^2}=2$$

راه حل‌دوم (استفاده‌ازرابطه‌های مثلثاتی): اگرفرض کنیم $x=2\cos\varphi$ خواهیم داشت:

$$x^3-3x+1=8\cos^3\varphi-6\cos\varphi+1=2\cos3\varphi+1=0;$$

$$\cos3\varphi=-\frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{2\pi}{9} \ ;$$

$$\begin{cases} x_1 = 2\cos\varphi_1 = 2\cos\frac{2\pi}{9} \\ x_2 = 2\cos\varphi_2 = 2\cos\frac{8\pi}{9} = -2\cos\frac{\pi}{9} \\ x_3 = 2\cos\varphi_3 = 2\cos\frac{14\pi}{9} = 2\cos\frac{4\pi}{9} \end{cases}$$

و ضمناً: $x_2 < x_3 < x_1$

تفاضل مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$x_3^2 - x_2 = 4\cos^2\frac{4\pi}{9} + 2\cos\frac{\pi}{9} = 2\left(1 + \cos\frac{8\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{9}\right) = 2$$

و به سادگی صحت تساوی زیر هم ثابت می‌شود:

$$x_1^2 - x_3 = x_2^2 - x_1 = 2$$

۲۹۲. معادلهٔ اول را از معادلهٔ دوم کم می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$4x^3 - 9x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad (1)$$

معادلهٔ اول را در ۴ و معادلهٔ (۱) را در x ضرب می‌کنیم، از مقایسهٔ آنها به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$-x^3 + 6x^2 - 7x - 4 = 0 \qquad (2)$$

دو طرف معادلهٔ (۲) را در ۴ ضرب و بـا معادلهٔ (۱) جمع می‌کنیم ، بدست می‌آید:

$$15x^2 - 30x - 15 = 0 \implies x^2 - 2x - 1 = 0 \qquad (3)$$

روشن است که ریشه‌های مشترك دو معادله، بین ریشه‌های معادلهٔ (۳)می‌باشد، از طرف دیگر بـه سادگی می‌توان دید کـه عبارتهای سمت چپ تساوی در معادله‌های‌مفروض، بر $x^2 - 2x - 1$ قابل‌قسمت‌اند. بنابراین $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ و $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ ریشه‌های مشترك دو معادله‌اند.

دیگر محاسبهٔ ریشه‌های غیر مشترك دو معادله مشکل نیست.

۲۹۳. اگر $\alpha = 1$ باشد ، $\alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^9 = 4$ می‌شود و معادلهٔ $y - 4 = 0$ جواب‌مسأله است. اگر $\alpha \neq 1$ باشد، با توجه به $\alpha^{13} - 1 = 0$ خواهیم داشت:

$$\alpha^{12} + \alpha^{11} + \alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_1=\alpha^9+\alpha^7+\alpha^6+\alpha^4 \\ y_2=\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^3+\alpha^2 \\ y_3=\alpha^{12}+\alpha^8+\alpha^5+\alpha \end{cases}$$

اولا با توجه به رابطهٔ (۱) داریم:

$$y_1+y_2+y_3=-1$$

ثانیاً داریم:

$$y_1y_2=\alpha^6(\alpha^5+\alpha^4+\alpha^2+1)(\alpha^9+\alpha^8+\alpha+1)$$

اگر ضربها را انجام دهیم و توجه کنیم که $\alpha^{13}=1$ است، بدست می‌آید :

$$y_1y_2=-1+y_1$$

و بهمین ترتیب:

$$y_2y_3=-1+y_2$$

$$y_1y_3=-1+y_3$$

و بنابراین بدست می‌آید:

$$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=-3+(y_1+y_2+y_3)=-4$$

ثالثاً داریم :

$$y_1y_2y_3=(-1+y_1)y_3=-y_3+y_1y_3=-y_3+(-1+y_3)=-1$$

و بنابراین معادله‌ای که ریشه‌های y_1 و y_2 و y_3 باشد، چنین می‌شود .

$$y^3+y^2-4y+1=0 \qquad (2)$$

توضیح: اگر با استفاده از رابطهٔ مواور ریشه‌های $x^{13}-1=0$ را بدست آوریم :

$$x^{13}=1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi \;;$$

$$x=\cos\frac{2k\pi}{13}+i\sin\frac{2k\pi}{13}$$

که ۱۳ جواب معادله به ازای مقادیر صحیح k از ۱ تا ۱۳ بدست می‌آید. اگر x_n را ریشهٔ nام بازای $k=n$ فرض کنیم ، بسادگی می‌توان ثابت کرد که عبارت :

$$x_n^4+x_n^6+x_n^7+x_n^9$$

تنها به سه صورت زیر می‌تواند باشد:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^4 + x_1^6 + x_1^7 + x_1^9 \\ y_2 = x_1^2 + {}_1^3 + x_1^{10} + x_1^{11} \\ y_3 = x_1 + x_1^5 + x_1^8 + x_1^{12} \end{cases}$$

و ازاینجا ثابت می‌شود که‌معادلهٔ (۲) تنها معادلهٔ درجهٔ‌سومی‌است که می‌تواند ریشه‌ای مساوی $\alpha^9+\alpha^7+\alpha^6+\alpha^4$ داشته باشد و اگرمعادلهٔ $y-4=0$ را هم در نظر بگیریم، جواب کلی مسأله چنین می‌شود:

$$(y-4)(y^3+y^2-4y+1)=0$$

۲۹۴. راه حل اول: داریم:

$$x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-2x_1x_2(2x_1^2+3x_1x_2+2x_2^2)=$$
$$=\frac{b^4}{a^4}-\frac{2c}{a}\Big[2(x_1+x_2)^2-x_1x_2\Big]=\frac{b^4}{a^4}-\frac{4b^2c}{a^3}+\frac{2c^2}{a^2}\quad;$$
$$x_1^4x_2^4=(x_1x_2)^4=\frac{c^4}{a^4}$$

و معادلهٔ مطلوب (پس از تبدیلهای ساده) چنین می‌شود:

$$a^4x^2-(b^4-4ab^2c+2a^2c^2)x+c^4=0$$

راه حل دوم: داریم $x^4=y$ (y را ریشهٔ معادلهٔ مطلوب گرفته‌ایم).

$$y=\pm\sqrt[4]{x}$$

$y=\sqrt[4]{x}$ را درمعادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ قرار می‌دهیم ومعادله را گویا می‌کنیم، به معادلهٔ مطلوب می‌رسیم.

۲۹۵. اگر α را زاویـهٔ روبرو به ضلع a (قاعـده) فرض کنیم ، داریم : $a=2b\sin\frac{\alpha}{2}$ ، در معادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم، می‌شود:

$$2\left(4\sin^3\frac{\alpha}{2}-3\sin\frac{\alpha}{2}\right)+\sqrt{3}=0\quad;$$

$$\sin\frac{3\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\implies\alpha=\frac{2\pi}{9}\ \text{و}\ \frac{4\pi}{9}$$

۲۹۶. اگر فرض کنیم $x_1=1$ ، در اینصورت خواهیم داشت:

$$x_1x_2=x_3 \;\; ; \;\; x_2x_3=x_1 \;\; ; \;\; x_1x_3=x_2$$

و دیگر تساوی حکم واضح است.

۲۹۷. روشن است که به ازای $x=\frac{1}{2}$ تساوی مفروض چنین می‌شود:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{p}{2}+q\right)^{10}+\left(\frac{a}{2}+b\right)^{20}=0$$

مجموع دومقدار غیرمنفی نمی‌تواند صفر شود، مگراینکه هردوی‌آنها مساوی صفر باشند، یعنی:

$$\left|\begin{array}{l} 2p+4q+1=0 \\ \quad a+2b=0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

از طرف دیگر برای اینکه تساوی مفروض بیك اتحاد نسبت به x تبدیل شود، باید ضریبهای توانهای مساوی x در دو طرف با هم برابر شود،ضریبهای x^{20} را در دو طرف تساوی برابر قرار می‌دهیم:

$$2^{20}-a^{20}=1 \implies a=\sqrt[20]{2^{20}-1}$$

که با توجه به رابطهٔ دوم (۱) خواهیم داشت:

$$b=-\frac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1}$$

اکنون مقادیر ثابت را در دو طرف تساوی فرض برابر قرار می‌دهیم:

$$1-b^{20}=q^{10} \implies q^{10}=\frac{1}{2^{20}} \implies q=\frac{1}{4}$$

و با مراجعه به رابطهٔ اول (۱) ، مقدار p بدست می‌آید: $p=-1$

اکنون اگر بجای a ، b ، p و q مقادیر بدست‌آمده را قراردهیم، بدست می‌آید:

$$(2x-1)^{20}-\left(\sqrt[20]{2^{20}-1}\,x-\frac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1}\right)^{20}=$$
$$=\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)^{10}$$

و برای اینکه‌صحت این اتحاد راتحقیق کنیم، می‌توان به‌سادگی‌عبارت سمت‌چپ تساوی را به عبارت سمت راست تبدیل کرد:

$$(2x-1)^{20}-\left(\sqrt[20]{2^{20}-1}\,x-\frac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1}\right)^{20}=$$

$$=2^{20}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{20}-(2^{20}-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^{20}=$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^{20}=\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{10}=\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)^{10}$$

۲۹۸. داریم:

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\right.$$

$$\left.+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}\right)=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left[\sin\frac{2\pi}{7}+\right.$$

$$\left.+\left(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\times\sin\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\times\sin\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\quad;$$

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{4\pi}{7}+2\cos\frac{2\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\right)=$$

$$=-\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\right)=\frac{1}{8\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{8\pi}{7}\right)=-\frac{1}{8}$$

و بنابراین معادلهٔ درجه سوم مطلوب چنین می‌شود:

$$x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}=0$$

ویا :

$$8x^3-4x^2-4x+1=0$$

۲۹۹. تساویهای مفروض را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases}(p_1-x)\lambda^2+(p_2-q_2)\lambda+q_1-x=0\\ (q_2-y)\lambda^2+(p_1-q_1)\lambda+p_2-y=0\end{cases}$$

دستگاه را نسبت به λ و λ^2 حل می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{(x-p_1)(p_2-y)+(q_2-y)(q_1-x)}{(p_1-q_1)(p_1-x)-(p_2-q_2)(q_2-y)}\quad;$$

$$\lambda^2=\frac{(x-q_1)(p_1-q_1)+(p_2-y)(p_2-q_2)}{(p_1-x)(p_1-q_1)-(p_2-q_2)(q_2-y)}$$

واز آنجا:

$$[(x-p_1)(p_2-y)+(q_2-y)(q_1-x)]^2=$$
$$=[(x-q_1)(p_1-q_1)+(p_2-y)(p_2-q_2)]\times$$
$$\times[(p_1-q_1)(p_1-x)-(p_2-q_2)(q_2-y)]$$

۳۰۰. اگر مجهول معادلهٔ جدید را y فرض کنیم، باید داشته باشیم:

$$y=x^2 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

$x=\sqrt{y}$ را در معادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم:

$$y^2+2y\sqrt{y}+y-3\sqrt{y}+5=0$$

معادله را گویا می‌کنیم:

$$(y^2+y+5)^2=[\sqrt{y}(2y(2y-3)]^2\ ;$$

که پس از ساده‌کردن به معادله زیر می‌رسیم:

$$y^4-2y^3+23y^2+y+25=0$$

۳۰۱. معادله‌ای تشکیل می‌دهیم کــه ریشه‌های آن $\frac{1}{x_1^2-1}$ و $\frac{1}{x_2^2-1}$ و $\frac{1}{x_3^2-1}$ باشد.

اگر معادلهٔ جدید را با مجهول y فرض کنیم، داریم:

$$y=\frac{1}{x^2-1} \implies x=\pm\sqrt{\frac{y+1}{y}}$$

در معادلهٔ مفروض $x=\sqrt{\frac{y+1}{y}}$ قرارمی‌دهیم، پس ازخلاصه‌کردن چنین می‌شود:

$$100y^3+60y^2+8y-1=0$$

مجموع مطلوب، مجموع ریشه‌های این معادله است: $S=-\frac{3}{5}$

۳۰۲. اگر ریشهٔ $x=1$ را ازمعادلهٔ $x^n-1=0$ خارج کنیم، بدست‌می‌آید:

$$x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\dots+x+1=0$$

ریشه‌های این معادله α،β،γ،... و λ است، بنابراین داریم:

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\lambda)$$

که به‌ازای $x=1$ بدست می‌آید: $P=n$

۳۰۳. معادله‌ای تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هــای آن $\frac{1}{x_1-1}$ ، $\frac{1}{x_2-1}$ و ...، $\frac{1}{x_n-1}$ باشد، در اینصورت داریم :

$$y=\frac{1}{x-1} \implies x=\frac{y+1}{y}$$

که اگر در معادله قرار دهیم:

$$\frac{(y+1)^n}{y^n}+\frac{(y+1)^{n-1}}{y^{n-1}}+\dots+\frac{y+1}{y}+1=0$$

ویا ؛

$$(y+1)^n+y(y+1)^{n-1}+y^2(y+1)^{n-2}+\dots+ \qquad (1)$$
$$+y^{n-1}(y+1)+y^n=0$$

مجموع مطلوب ، مجموع ریشه‌هــای معادلهٔ (۱) است. در معادلهٔ (۱) ضریب y^n:

$$a=1+1+\cdots+1=n+1$$

و ضریب y^{n-1} :

$$b=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n+1)$$

و بنابراین:

$$\sigma=-\frac{b}{a}=-\frac{n+1}{2}$$

۳۰۴. از رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها استفاده می کنیم، داریم:

$$x_1x_2x_3x_4=-168$$

و چون طبق فرض $x_1x_2=12$ است، پس $x_3x_4=-14$ می‌شود.

از طرف دیگر:

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=23$$

که با توجه به رابطه‌های قبل می‌شود:

$$(x_1+x_2)(x_3+x_4)=25 \qquad (1)$$

همچنین :

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-a$$

ویا :
همچنین :

$$\begin{cases}12(x_3+x_4)-14(x_1+x_2)=-a\\(x_3+x_4)+(x_1+x_2)=a\end{cases}$$

از حل دستگاه بدست می‌آید:

$$x_1+x_2=x_3+x_4=\frac{a}{2}$$

در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم، a بدست می‌آید:

$$a=\pm 10$$

$$1)\quad a=10 \Longrightarrow \begin{cases}x_1+x_2=5\\x_1x_2=12\end{cases} ; \begin{cases}x_3+x_4=5\\x_3x_4=-14\end{cases}$$

$$۲)\ a=-۱۰ \Longrightarrow \begin{cases} x_۱+x_۲=-۵ \\ x_۱x_۲=۱۲ \end{cases} ; \begin{cases} x_۳+x_۴=-۵ \\ x_۳x_۴=-۱۴ \end{cases}$$

که محاسبهٔ جوابها مشکل نیست.

۳۰۵. اگر معادله‌ای دارای ریشهٔ مضاعف باشد، این ریشهٔ مضاعف در معادلهٔ مشتق هم صدق می‌کند. معادلهٔ مشتق چنین است:

$$۴x^۳-۸x+۴a=۰$$

اگر x مقدار ریشهٔ مضاعف باشد، هم در این معادله و هم‌در معادلهٔ فرض‌صدق می‌کند. بین این دو معادله a را حذف می‌کنیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$x(۳x^۳-x^۲-۴x+۲)=۰$$

ویا:

$$x(x-۱)(۳x^۲+۲x-۲)=۰$$

مقادیر x که از این معادله بدست می‌آید، می‌توانند ریشهٔ مضاعف معادلهٔ مفروض باشند.

$$۱)\quad x=۰ \Longrightarrow a=۰$$

$$۲)\quad x=۱ \Longrightarrow a=۱$$

$$۳)\quad x=\sqrt{۷}-۱ \Longrightarrow a=\frac{۱۲۴-۴۰\sqrt{۷}}{۲۹}$$

$$۴)\quad x=-\sqrt{۷}-۱ \Longrightarrow a=\frac{۱۲۴+۴۰\sqrt{۷}}{۲۹}$$

۳۰۶. اولا به سادگی تحقیق می‌شود که $f(۱-x)=f(x)$.

ثانیاً بطورکلی اگر $f(x)=f(a-x)$ باشد، عبارت $f(x)$ را می‌توان برحسب توانهای زوج $۲x-a$ منظم‌کرد، زیرا اگر در $۲x-a$ مقدار x را به $a-x$ تبدیل کنیم $a-۲x$ می‌شود و برای اینکه تغییرنکند بایدتوان $۲x-a$ زوج باشد.

در اینجا $f(x)$ را برحسب توانهای $۲x-۱$ منظم می‌کنیم، به معادلهٔ زیر خواهیم رسید:

$$(۲x-۱)^۴-۲۰(۲x-۱)^۲+۹۱=۰$$

جواب:
$$x_{۳,۴}=\frac{۱\pm\sqrt{۷}}{۲}\ ,\quad x_{۱,۲}=\frac{۱\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

۳۰۷. از رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها استفاده می‌کنیم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8$$

و بنابراین با توجه به فرض خواهیم داشت:

$$x_1+x_2=x_3+x_4=4 \qquad (1)$$

مجموع حاصلضربهای دوبه‌دوی ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=m$$

و یا پس از تبدیلهای ساده:

$$x_1x_2+x_3x_4=m-16 \qquad (2)$$

و مجموع حاصلضربهای سه به سه ریشه‌ها:

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=8 \;;$$

که‌ازآنجا: $x_1x_2+x_3x_4=2 \qquad (3)$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۲) و (۳) بدست می‌آید:

$$m-16=2 \Longrightarrow m=18$$

برای محاسبهٔ ریشه‌ها، حاصلضرب چهار ریشه را می‌نویسیم:

$$x_1x_2x_3x_4=-3 \qquad (4)$$

رابطه‌ها (۳) و (۴) مقادیر x_1x_2 و x_3x_4 را بما می‌دهند:

$$x_1x_2=-1 \;;\; x_3x_4=3$$

حالا با کمك دستگاههای زیر مقادیر چهار جواب بدست می‌آید:

$$\left|\begin{array}{l} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=-1 \end{array}\right. \;;\; \left|\begin{array}{l} x_3+x_4=4 \\ x_3x_4=3 \end{array}\right.$$

۳۰۸. اگر ضلعهای مثلث را a ، b و c فرض کنیم، داریم:

$$a+b+c=12 \text{ و } ab+bc+ca=47 \text{ و } abc=60$$

از آنجا:

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=p[p^3-p^2(a+b+c)+$$
$$+p(ab+bc+ca)-abc]=-p^4+$$
$$+(ab+bc+ca)p^2-abcp=-6^4+47\times6^2-$$
$$-60\times6=36\Longrightarrow S=6$$

۳۰۹. روش اول : α ، β و γ را ریشه‌های معادلهٔ مفروض می‌گیریم ، در اینصورت $\alpha^3=-(\alpha+1)$ و از آنجا :

$$\alpha^{11}=-\alpha^2(\alpha+1)^3=-\alpha^5-3\alpha^4-3\alpha^3-\alpha^2=$$
$$=-(\alpha^3+\alpha+1)(\alpha^2+3\alpha+2)+3\alpha^2+5\alpha+2=$$
$$=3\alpha^2+5\alpha+2$$

و بهمین ترتیب:

$$\beta^{11}=3\beta^2+5\beta+2 \quad \text{و} \quad \gamma^{11}=3\gamma^2+5\gamma+2$$

و از آنجا:

$$\alpha^{11}+\beta^{11}+\gamma^{11}=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+5(\alpha+\beta+\gamma)+6$$

از طرف دیگر داریم :

$$\alpha+\beta+\gamma=0\ ;$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=-2$$

وبنابراین : $\alpha^{11}+\beta^{11}+\gamma^{11}=3\times-2+5\times 0+6=0$

روش‌دوم: $S_k=\alpha^k+\beta^k+\gamma^k$ فرض می‌کنیم. تساویهای $\alpha^3+\alpha+1=0$، $\beta^3+\beta+1=0$، $\gamma^3+\gamma+1=0$ را به‌ترتیب در α^n، β^n و γ^n ضرب می‌کنیم ؛ از جمع تساویهایی که بدست می‌آید به رابطهٔ بر گشتی زیر می‌رسیم:

$$S_{n+3}+S_{n+1}+S_n=0 \qquad (1)$$

از طرف دیگر داریم :

$$S_0=3 \quad \text{و} \quad S_1=\alpha+\beta+\gamma=0 \quad \text{و}$$
$$S_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=-2$$

حالا اگردررابطهٔ (۱) به‌ترتیب n رامساوی ۰، ۱، ۲، ...، ۷، ۸ بگیریم‌بدست می‌آید :

$$S_3=-3 \text{ و } S_4=2 \text{ و } S_5=5 \text{ و } S_6=1 \text{ و } S_7=-7 \text{ و}$$
$$S_8=-6 \text{ و } S_9=6$$

و به ازای $n=8$ داریم :

$$S_{11}+S_9+S_8=0 \implies S_{11}=0$$

۳۱۰. فرض می‌کنیم $b^2-4ac=d^2$ و d عددی صحیح و غیر منفی. چون $a>0$ و $c>0$ ، پس $d<b$ وداریم:

$$4a\cdot\overline{abc}=4a(100a+10b+c)=400a^2+40ab+4ac=$$
$$=(20a+b)^2-(b^2-4ac)=(20a+b)^2-d^2=$$
$$=(20a+b+d)(20a+b-d)$$

به این ترتیب باید عدد اول $\overline{abc}$ مقسوم‌علیه $20a+b+d$ یا $20a+b-d$ باشد. ولی

$$20a+b+d<100a+b+b<100a+10b+c<\overline{abc}$$

و در نتیجه بطور بدیهی : $20a+b-d<\overline{abc}$

یعنی $\overline{abc}$ مقسوم‌علیه هیچکدام ازاین دو عدد نیست و این تناقض حکم‌مسأله را ثابت می‌کند.

۳۱۱. α ، β و γ را ریشه‌های معادلهٔ مفروض می‌گیریم ، در اینصورت : $\alpha+\beta+\gamma=0$ و بنابراین :

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)+$$
$$+3\alpha\beta\gamma=-3q$$

۳۱۲. روش اول: داریم:

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2=2(2n^2+6n+7)$$

بنابراین $2n^2+6n+7=5k$. این معادلهٔ درجهٔ دوم را حل می‌کنیم:

$$n=\frac{-3\pm\sqrt{5(2k-1)}}{2}$$

عدد n تنها وقتی طبیعی است که داشته باشیم: $2k-1=5(2t+1)^2$. به این ترتیب:

$$n=\frac{-3+5(2t+1)}{2}\Longrightarrow n=5t+1$$

که در آن t عددی است صحیح و غیر منفی.

روش دوم: داریم:

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2=(2n+3)^2+5$$

بنابراین باید رقم آخر عدد $2n+3$ مساوی ۵ باشد ، یعنی $2n+3=10t+5$ از آنجا $n=5t+1$.

روش سوم: رقم آخر مجذور عددهای طبیعی متوالی را می‌نویسیم:

۰,۱,۴,۹,۶,۵,۶,۹,۴,۱

در این ردیف تنها به دوصورت می‌توان ۴ عدد متوالی در نظر گرفت که مجموع آنها مضربی از ۱۰ باشد:

$$1+4+9+6=20 \ ; \ 6+9+4+1=20$$

به این ترتیب رقم آخر عدد n باید مساوی ۱ یا ۶ باشد، یعنی $n=5t+1$.

۳۱۳. از تساوی $a^2+a+1=0$ نتیجه می‌شود:

$$a+\frac{1}{a}=-1 \ , \ a^3=1$$

و بنابراین داریم:

$$a^{1967}+\frac{1}{a^{1967}}=(a^3)^{655}\cdot a^2+\frac{1}{(a^3)^{655}\cdot a^2}=$$

$$=a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2=-1$$

۳۱۴. داریم:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \ , \ x_1x_2=\frac{c}{a} \ , \ x'_1+x'_2=-\frac{b'}{a'} \ ,$$

$$x'_1\cdot x'_2=\frac{c'}{a'}$$

مبین این معادله‌ها به‌ترتیب $D=b^2-4ac$ و $D'=b'^2-4a'c'$. فرض می‌کنیم: $X_1=x_1+x'_1$ و $X_2=x_2+x'_2$ ، در اینصورت:

$$X_1+X_2=-\frac{ab'+a'b}{aa'} \ ,$$

$$X_1X_2=\frac{2(ac'+a'c)+bb'-\sqrt{DD'}}{2aa'}$$

بنابراین یکی از دومعادلهٔ مجهول چنین است:

$$2aa'x^2+2(ab'+a'b)x+2(ac'+a'c)+bb'-\sqrt{DD'}=0$$

بهمین‌ترتیب می‌توان معادله‌ای را بدست‌آورد که ریشه‌های‌آن $x_1+x'_2$ و $x_2+x'_1$ ، باشد. این معادله چنین است:

$$2aa'x^2+2(ab'+a'b)x+2(ac'+a'c)+bb'+\sqrt{DD'}=0$$

۳۱۵. جواب $\left|\begin{array}{l}x=2\\y=4\end{array}\right.$; $\left|\begin{array}{l}x=4\\y=2\end{array}\right.$

۳۱۶. دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} xy+(x+y)=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$$

از اینجا $x+y$ و xy و سپس x و y بدست می‌آید.

جواب: $\left|\begin{array}{l}x=5\\y=1\end{array}\right.$; $\left|\begin{array}{l}x=1\\y=5\end{array}\right.$; $\left|\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right.$; $\left|\begin{array}{l}x=3\\y=2\end{array}\right.$

۳۱۷. جواب: $\left|\begin{array}{l}x=3\\y=2\end{array}\right.$; $\left|\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right.$

۳۱۸. سه برابر معادلهٔ دوم را با معادلهٔ اول دستگاه جمع کنید $x+y$ بدست می‌آید.

جواب: $\left|\begin{array}{l}x=2\\y=-1\end{array}\right.$; $\left|\begin{array}{l}x=-1\\y=2\end{array}\right.$

۳۱۹. معادلهٔ اول دستگاه را چنین می‌نویسیم:

$$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=a^4$$

از معادلهٔ دوم دستگاه داریم:

$$x^2+y^2=b^2-2xy$$

در نتیجه معادلهٔ زیر را که نسبت به xy از درجهٔ دوم است خواهیم داشت:

$$2x^2y^2-4b^2xy+(b^4-a^4)=0$$

و در نتیجه به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} xy=\frac{1}{2}\left(2b^2\pm\sqrt{2(a^4+b^4)}\right) \\ x+y=b \end{cases}$$

و جوابهای دستگاه ریشه‌های معادله‌های درجهٔ دوم زیر هستند:

$$t^2-bt+\frac{1}{2}\left(2b^2\pm\sqrt{2(a^4+b^4)}\right)=0$$

۳۲۰. می‌توان نوشت:

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x^3+y^3)-10x^2y^2(x+y)=$$
$$=(x+y)^5-5xy[(x+y)^3-3xy(x+y)]-10x^2y^2(x+y)$$

که با توجه به اینکه $x+y=a$ و $x^5+y^5=a^5$ است، بدست می‌آید:

$$-5axy(a^2-xy)=0 \implies xy=0\,,\ a^2$$

$$\left|\begin{array}{l} xy=0 \\ x+y=a \end{array}\right. \implies \left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=a \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} x=a \\ y=0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} xy=a^2 \\ x+y=a \end{array}\right. \implies \left|\begin{array}{l} x=a\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ y=a\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} x=a\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ y=a\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

۳۲۱. با توجه به اتحاد :

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+$$
$$+z^2-xy-yz-xz)+3xyz$$

و با توجه به معادله‌های اول‌وسوم دستگاه، معادلهٔ دوم بصورت زیردرمی‌آید:

$$x^2+y^2+z^2=6 \implies xy+yz+xz=-3$$

و از آنجا x و y و z ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم زیر هستند:

$$t^3-3t-2=0 \implies (t+1)^2(t-2)=0$$

جواب: $\left|\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{array}\right.$

۳۲۲. جواب: $\left|\begin{array}{l} x=a \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=a \\ z=0 \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=a \end{array}\right.$

۳۲۳. a، b، c، d در معادلهٔ درجهٔ چهارم زیر صدق می‌کنند:

$$u^4+tu^3+zu^2+yu-x=0 \qquad (1)$$

وبنابراین‌ریشه‌های این‌معادله هستند. رابطه‌های‌بین ریشه‌ها و ضریبها،جوابها را بدست می‌دهند.

جواب:
$$\begin{cases} x=-abcd \\ y=-(abc+abd+bcd+acd) \\ z=ab+ac+ad+bc+bd+cd \\ t=-(a+b+c+d) \end{cases}$$

۴۲۴. اگر $a=k\pi$ ولی $b\neq k'\pi$ و $c\neq k''\pi$ باشند ، دستگاه بـه دو معادلهٔ سه مجهولی تبدیل می‌شود که دستگاهی است سیال و x و y برحسب z بدست می‌آید.

اگر $a=k\pi$ و $b=k'\pi$ و $c\neq k''\pi$ باشد ، دستگاه بیك معادلهٔسه مجهولی تبدیل می‌شود و x برحسب y و z بدست می‌آید.

اگر $a=k\pi$ ، $b=k'\pi$ و $c=k''\pi$ باشد، دستگاه به‌اتحادتبدیل می‌شود.

حالا فرض‌می‌کنیم $a,b,c\neq k\pi$ باشد ، در اینصورت‌می‌توان دوطرف معادله‌ها را به‌ترتیب بر $\sin a$ ، $\sin b$ و $\sin c$ تقسیم کرد. پس ازتبدیلهای ساده ، به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} 8\cos^3 a-4z\cos^2 a-2(y+2)\cos a+(z-x)=0 \\ 8\cos^3 b-4z\cos^2 b-2(y+2)\cos b+(z-x)=0 \qquad (1) \\ 8\cos^3 c-4z\cos^2 c-2(y+2)\cos c+(z-x)=0 \end{cases}$$

معادلهٔ درجهٔ سوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$8t^3-4zt^2-2(y+2)t+(z-x)=0 \qquad (2)$$

مقادیر $\cos a$ ، $\cos b$ و $\cos c$ ، بنابر رابطه‌های (۱) ، در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند و بنابراین ریشه‌های‌معادلهٔ (۲) هستند. با در نظر گرفتن رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \cos a+\cos b+\cos c=\frac{z}{۲} \\ \cos a\cos b+\cos a\cos c+\cos b\cos c=-\frac{y+۲}{۴} \\ \cos a\cos b\cos c=\frac{x-z}{۸} \end{cases}$$

و از آنجا:

$$\begin{vmatrix} x=۸\cos a\cos b\cos c+۲(\cos a+\cos b+\cos c) \\ y=-۴(\cos a\cos b+\cos a\cos c+\cos b\cos c)-۲ \\ z=۲(\cos a+\cos b+\cos c) \end{vmatrix}$$

۳۲۵. $y=mx$ فرض می‌کنیم ، در اینصورت خواهیم داشت :

$$\begin{cases} b^۲x^۲+abmx^۲+a^۲m^۲x^۲=۳a^۲b^۲ \\ b^۲x^۲+mx^۲-a^۲m^۲x^۲=ab \end{cases}$$

و از تقسیم دوطرف این دو معادله برهم بدست می‌آید:

$$\frac{b^۲+abm+a^۲m^۲}{b^۲+m-a^۲m^۲}=۳ab \;;$$

$$a^۲(۳ab+۱)m^۲-۲abm-b^۲(۳ab-۱)=۰ \;;$$

$$m_۱=\frac{b}{a} \;;\quad m_۲=\frac{b(۱-۳ab)}{a(۱+۳ab)}$$

$$m=\frac{b}{a} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x=a \\ y=b \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x=-a \\ y=-b \end{vmatrix}$$

$$m=\frac{b(۱-۳ab)}{a(۱+۳ab)} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x=\pm a\sqrt{\frac{۳ab+۱}{۳ab-۱}} \\ y=\pm b\sqrt{\frac{۳ab-۱}{۳ab+۱}} \end{vmatrix}$$

۳۲۶. از جمع رابطه‌های مفروض بدست می‌آید:

$$۲c^۴=c^۲(a^۲+b^۲) \Longrightarrow c^۲=\frac{a^۲+b^۲}{۲}$$

و بنابراین داریم:

$$a^4=b^4+\frac{a^4+b^4+2a^2b^2}{4}-\frac{a^2b^2+b^4}{2}$$

از آنجا بدست می‌آید $a^2=b^2$ و سپس $a^2=c^2$ و دیگر تحقیق صحت رابطهٔ حکم مشکل نیست.

۴۲۷. دستگاه نسبت به مجهولهای خود متقارن است و بنابراین x و y و z را ریشه‌های یك معادلهٔ درجهٔ سوم فرض می‌کنیم. داریم :

$$x+y+z=9\ ;\ xy+yz+xz=27$$

و از معادلهٔ دوم دستگاه

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \Longrightarrow \frac{xy+yz+xz}{xyz}=1 \Longrightarrow xyz=27$$

x و y و z ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$t^3-9t^2+27t-27=0 \Longrightarrow (t-3)^3=0$$

جواب: $x=y=z=3$

۴۲۸. معادلهٔ دوم را از اول ومعادلهٔ سوم را ازدوم کم می‌کنیم ، بدست‌می‌آید:

$$\begin{cases}(y-z)(x+y+z)=9\\(x-y)(x+y+z)=9\end{cases}$$

$$y-z=x-y \Longrightarrow 2y=x+z$$

و بنابراین : $(x-y)y=3 \Longrightarrow x=\frac{3}{y}+y$

اگر این مقدار x را در معادلهٔ اول دستگاه قرار دهیم، بمعادلهٔ دومجذوری زیر می‌رسیم:

$$3y^4-28y^2+9=0$$

جواب:
$$\begin{cases} x=۴ \\ y=۳ \\ z=۲ \end{cases} , \begin{cases} x=-۴ \\ y=-۳ \\ z=-۲ \end{cases} ; \begin{cases} x=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳} \\ y=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ z=-\frac{۸\sqrt{۳}}{۳} \end{cases} ; \begin{cases} x=\frac{-۱۰\sqrt{۳}}{۳} \\ y=-\frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ z=\frac{۸\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

۳۲۹. از معادلهٔ اول دستگاه داریم:
$$x+y+z=۶$$
از معادلهٔ دوم دستگاه به سادگی بدست می‌آید.
$$xy+yz+xz=۹$$
اکنون اگر دوطرف معادلهٔ سوم دستگاه را مجذور کنیم ، با توجه به معادلهٔ اول بدست می‌آید :
$$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}=۵$$
و اگر معادلهٔ اخیر را دوباره مجذور کنیم بدست می‌آید: $xyz=۴$
اکنون‌معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن x و y و z باشد:
$$t^۳-۶t^۲+۹t-۴=۰ \implies (t-۱)^۲(t-۴)=۰$$
جواب:
$$\begin{cases} x=۱ \\ y=۱ \\ z=۴ \end{cases} ; \begin{cases} x=۱ \\ y=۴ \\ z=۱ \end{cases} ; \begin{cases} x=۴ \\ y=۱ \\ z=۱ \end{cases}$$

۳۳۰. اتحادهای زیر واضح است:
$$x^۲+۵x+۲y-۳=(x^۲+۴x+۳y-۲)+(x-y-۱)$$
$$x^۲+x+y+۲=(x^۲+۲y+۳)+(x-y-۱)$$
برای سهولت کار فرض می‌کنیم : $x^۲+۴x+۳y-۲=A$ ، $x^۲+۲y+۳=B$ ؛ در اینصورت معادلهٔ اول دستگاه را می‌توان چنین نوشت :
$$\sqrt{A+(x-y-۱)}+\sqrt{B+(x-y-۱)}=\sqrt{A}+\sqrt{B} \quad (۱)$$
البته باید مقادیر زیر رادیکالها مثبت باشد . اگر $x-y-۱>۰$ باشد ، داریم :

$$\sqrt{A+(x-y-1)}>\sqrt{A} \text{ و } \sqrt{B+(x-y-1)}>\sqrt{B}$$

وبنابراین‌تساوی (۱) ممکن نیست. بهمین‌ترتیب اگر $x-y-1<0$ باشد، باز هم تساوی (۱) غیرممکن می‌شود . به این ترتیب تنها در حالتی معادلهٔ (۱) می‌تواند جواب داشته باشد که $x-y-1=0$ ، یعنی $x-y=1$ باشد، که در اینحالت معادلهٔ دوم دستگاه به صورت $x=2y-1$ درمی‌آید. بنابراین اگر دستگاه مفروض جواب داشته‌باشد، می‌توان این جوابها را از دستگاه زیر پیدا کرد:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array} \right.$$

۳۳۱. هیچکدام از مجهولهای x و y و z نمی‌توانند مساوی صفر باشند ، زیرا اگر مثلا $x=0$ باشد، از معادلهٔ اول معلوم می‌شود که y یا z باید صفر باشند؛ اگر $y=0$ باشد، معادلهٔ سوم و اگر $z=0$ باشد،معادلهٔ دوم بدون معنا می‌شود. اگر دوطرف معادلهٔ اول را در yz ، دو طرف معادلهٔ دوم رادر xz و دو طرف معادلهٔ سوم را در xy ضرب کنیم ، بعد از تبدیلهای ساده به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{2}{xyz} \\[2ex] \dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2}{xyz} \\[2ex] \dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2}{xyz} \end{array} \right. \Longrightarrow x^2=y^2=z^2$$

حالا اگر در سمت‌چپ معادلهٔ اول‌دستگاه بجای z^2 مساویش y^2 راقراردهیم به تساوی $y=xz$ می‌رسیم وبنابراین دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر برای تعیین جوابها پیدا می‌شود :

$$x^2=y^2=z^2 \text{ و } y=xz$$

که به سادگی جوابهای $x^2=y^2=z^2=1$ بدست می‌آید .

برای‌تعیین جوابهای x و y و z باید توجه داشت‌که با توجه‌به معادلهٔ سوم دستگاه اخیر ($y=xz$) یا هر سه مجهول x و y و z مثبت‌اند ویا دوتای

آنها منفی است.

جواب: $x_1=y_1=z_1=1$ ، $\begin{vmatrix} x_2=1 \\ y_2=z_2=-1 \end{vmatrix}$ ،

$\begin{vmatrix} y_3=1 \\ x_3=z_3=-1 \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} z_4=1 \\ x_4=y_4=-1 \end{vmatrix}$

۳۳۲. از مجموع و تفاضل دو معادلهٔ دستگاه، بـه دستگاه دو معادلهٔ زیـر می‌رسیم :

$$\begin{cases}(x+y)(x^2-xy+y^2-a-b)=0\\(x-y)(x^2+xy+y^2-a+b)=0\end{cases}$$

که خود این دستگاه هم به چهار دستگاه زیر تبدیل می‌شود:

$$1)\begin{cases}x+y=0\\x-y=0\end{cases};\quad 2)\begin{cases}x+y=0\\x^2+xy+y^2=a-b\end{cases};$$

$$3)\begin{cases}x-y=0\\x^2-xy+y^2=a+b\end{cases};\quad 4)\begin{cases}x^2-xy+y^2=a+b\\x^2+xy+y^2=a-b\end{cases}$$

که‌حل هیچیك از آنها مشکل نیست.

۳۳۳. اگر $\sqrt[4]{1+5x}=u$, $\sqrt[4]{6-y}=v$ فرض کنیم ، داریم :

$u^4+v^4=(5x-y)+7$

که با توجه به معادلهٔ دوم دستگاه می‌شود :

$u^4+v^4=18+7=25$

بنابراین به دستگاه زیر می‌رسیم که حل آن مشکل نیست

$u^4+v^4=25$ و $u+v=3$

۳۳۴. داریم:

$$y^3=x+3y \quad ، \quad x^3=3x-y \qquad (1)$$

واضح است که یکی از جوابها $x=0$ ، $y=0$ است. اگر $x\neq 0$ باشد $y\neq 0$ می‌شود. فرض می‌کنیم $y=tx$، در اینصورت:

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{x+3y}{3x-y}=\frac{1+3t}{3-t}=t^2$$

از آنجا بدست می‌آید:

$$t^4-3t^3+3t+1=0$$

و یا :

$$(t^2-1)^2-3t(t^2-1)+2t^2=0$$

بنابراین $t^2-1=\frac{3t\pm t}{2}$ ، از آنجا :

$$1)\ t=1\pm\sqrt{2}\ ,\qquad 2)\ t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

از طرف دیگر طبق معادلهٔ دوم دستگاه (۱) داریم :

$$x^2=3x-tx$$

ولی $x\neq 0$ است و بنابراین:

$$x=\pm\sqrt{3-t}\ ,\ y=\pm t\sqrt{3-t}$$

که اگر بجای t چهار مقداری را که بدست آمده است قرار دهیم، ۸جواب دستگاه بدست می‌آید که با جواب (۰,۰) رویهم ۹ جواب می‌شود :

$$(0,0)\ ;\ \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\ ;$$

$$\left(-\sqrt{2-\sqrt{2}}\ ,\ -\sqrt{2+\sqrt{2}}\right);$$

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\ ,\ -\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\ ;\ \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\right);$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\ ,\ \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\ ;$$

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\ ;$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ ,\ -\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)\ ;$$

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ ,\ \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$

۳۳۵. دستگاه را نسبت به مجهولهای a و b و c حل می‌کنیم، یعنی a و b و c را برحسب x و y و z بدست می‌آوریم:

بین دومعادلهٔ اول و دوم c را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} xa+zb-yc=x^2+z^2 \\ -za+yb+xc=x^2+y^2 \end{cases}$$

معادلهٔ اول را در x و معادلهٔ دوم را در y ضرب و سپس دو معادله را بـا هم جمع می‌کنیم، بدست می‌آید :

$$(x^2-yz)a+(y^2+xz)b=x^3+y^3+xz^2+x^2y \quad (۱)$$

بهمین‌ترتیب بین معادله‌های اول و سوم دستگاه هم c را حذف می‌کنیم، بـه معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$(y^2+xz)a+(z^2-xy)b=y^3+z^3+x^2z+yz^2 \quad (۲)$$

اکنون بین معادله‌های (۱) و (۲) مجهول b را حذف می‌کنیم ، بعد ازساده کردن چنین می‌شود:

$$y(x^3+y^3+z^3+xyz)a=y(x+y)\times \quad (۳)$$
$$\times(x^3+y^3+z^3+xyz)$$

جواب $y=0$ منجر به $x=0$ و $z=0$ می‌شودکه از همان صورت دستگاه اصلی هم معلوم بود:

$$x_1=y_1=z_1=0$$

اگر $x^3+y^3+z^3+xyz\neq 0$ باشد، ازمعادلهٔ(۳) بدست‌می‌آید:

$$a=x+y \quad (۴)$$

و شبیه آن برای b و c به جوابهای زیر می‌رسیم:

$$b=y+z \;,\; c=x+z \quad (۵)$$

و از این سه معادله بدست می‌آید:

$$x_2=\frac{a+c-b}{2} \;,\; y_2=\frac{a+b-c}{2} \;,\; z_2=\frac{b+c-a}{2}$$

به این جوابها به‌ترتیب دیگری هم می‌توانستیم برسیم. سمت راست هر یك از معادله‌های اصلی از درجهٔ دوم و سمت‌چپ آنها از درجهٔ اول است، بنابراین a و b و c باید به این صورت باشند:

$$\begin{cases} a=Ax+By+Cz \\ b=A'x+B'y+C'z \\ c=A''x+B''y+C''z \end{cases}$$

کـه اگر در معادله‌هـای اصلی قرار دهیم و در هر معادله دو طرف را متحد یکدیگر بگیریم، به‌همان معادله‌های (۴) و (۵) می‌رسیم.

در حالتی که $x^3+y^3+z^3+xyz=0$ باشد، می‌تـوان بین سه معادلهٔ اصلی و این معادله x وy وz را حذف کرد و به رابطه‌ای بین a وb وc وe رسید. رابطه‌ای که بدست می‌آید به این معناست کـه با تحقق آن دستگاه مفروض به دو معادلهٔ سه مجهولی، یعنی بیك دستگاه سیال، تبدیل می‌شود.

۳۳۶. I) اگر $t=0$ باشد، $x=y=\frac{s}{2}$ و از آنجا:

$$s=p+q\cdot\frac{s^2}{4} \implies qs^2-4(s-p)=0$$

II) اگر $t\neq 0$ باشد، x وy ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر هستند:

$$tz^2-2z+s=0 \qquad (1)$$

دوحالت پیش می‌آید: a) x وy هردو مساوی یکی از ریشه‌های معادلهٔ(۱) باشند، یعنی $x=y=z_1$ یا $x=y=z_2$. در اینحالت بدست می‌آید:

$$\begin{cases} tx^2-2x+s=0 \\ qx^2-2x+p=0 \end{cases}$$

که از آنجا خواهیم داشت:

$$(pt-qs)^2=4(q-t)(s-p)$$

b) x وy ریشه‌های مختلف معادلهٔ (۱) هستند، یعنی:

$$\begin{cases} x=z_1 \\ y=z_2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=z_2 \\ y=z_1 \end{cases}$$

در اینحالت داریم: $x+y=\frac{2}{t}$ ، $xy=\frac{s}{t}$. ازمعادلهٔاول دستگاه‌مفروض بدست می‌آید:

$$pt+qs=2$$

به این‌ترتیب:

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} t=0 \\ qs^2-4(s-p)=0 \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} t\neq 0 \\ (pt+qs-2)[(pt-qs)^2-4(q-t)(s-p)]=0 \end{cases}$$

۳۳۷. داریم:

$$(x+y)^3=3(x+y)(x^2+y^2)-2(x^3+y^3)$$

و از آنجا رابطهٔ مطلوب چنین می‌شود:

$$a^3=3ab-2c$$

۳۳۸. از دو رابطهٔ اول x و y را محاسبه کنید و در رابطهٔ سوم قرار دهید.

جواب: $a''(bc'-cb')+b''(ca'-ac')+c''(ab'-ba')=0$

۳۳۹. جواب:

$$x:y:z=(bc'-cb'):(ab'-ba'):(ca'-ac')$$

۳۴۰. بافرض $a<b+c$ (چون a،b و c ضلعهای‌مثلث‌اند) باید ثابت‌کنیم:

$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c} \qquad (1)$$

و دو رابطهٔ دیگرشبیه آن. نامساوی (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$a<\left(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\right)^n=b+c+\cdots<b+c$$

۳۴۱. رابطه‌های مفروض رامی‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} p^3-p\log N+3\log N=0 \\ q^3-q\log N+3\log N=0 \\ r^3-r\log N+3\log N=0 \end{cases}$$

و بنابراین pوqوr ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$t^3-t\log N+3\log N=0$$

که درآن داریم:

$$\left| \begin{aligned} pq+qr+pr&=\log N \\ pqr&=-3\log N \end{aligned} \right.$$

و بنابراین داریم:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{pq+qr+pr}{pqr}=\frac{\log N}{-3\log N}=-\frac{1}{3}$$

* * *

۳۴۲. به‌ترتیب داریم:

$$۲y=۱۰-۳x \Longrightarrow y=۵-x-\frac{x}{۲} \ ;$$

$$\frac{x}{۲}=t \Longrightarrow x=۲t \ ; \ y=۵-۳t$$

و برای مثبت بودن جوابها باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۲t>۰ \\ ۵-۳t>۰ \end{cases} \Longrightarrow ۰<t<\frac{۵}{۳}$$

و تنها عدد صحیح بین صفر و $\frac{۵}{۳}$ عدد ۱ است که‌به‌ازای آن $x=۲$ و $y=۲$ بدست می‌آید.

۳۴۳. جواب: $y=۳۰+۷t \ , \ x=۱-۵t$

که به‌ازای $-\frac{۳۰}{۷}<t<\frac{۱}{۵}$ یعنی $t=-۴,-۳,-۲,-۱,۰$ جوابهای مثبت زیر بدست می‌آید:

$$t=-۴\left|\begin{matrix} x=۲۱ \\ y=۲ \end{matrix}\right. \ ; \ t=-۳\left|\begin{matrix} x=۱۶ \\ y=۹ \end{matrix}\right. \ ; \ t=-۲\left|\begin{matrix} x=۱۱ \\ y=۱۶ \end{matrix}\right.$$

$$t=-۱\left|\begin{matrix} x=۶ \\ y=۲۳ \end{matrix}\right. \ ; \ t=۰\left|\begin{matrix} x=۱ \\ y=۳۰ \end{matrix}\right.$$

۳۴۴. $x=۱۱t-۱$ ، $y=۵t-۲$ و جوابهای مثبت به ازای $t\geqslant ۱$ بدست می‌آید.

۳۴۵. معادله جواب مثبت ندارد و جوابهای منفی و صحیح از رابطه‌های $x=۱۱t+۳$ و $y=-۸t-۱$ بدست می‌آید.

۳۴۶. $y=۷y'$ فرض کنید ، بدست می‌آید:

$$x+۹y'=۵ \Longrightarrow x=۵-۹y'$$

بنابراین جوابهای صحیح از رابطه‌های $x=۵-۹y'$ و $y=۷y'$ بدست می‌آیند و معادله جواب مثبت ندارد.

۳۴۷. جوابهای صحیح از رابطه‌های $x=۲۸t+۳$ و $y=۵-۱۵t$ بدست می‌آید و تنها به ازای $t=۰$ جوابهای مثبت $x=۳$ و $y=۵$ راقبول‌دارد.

۳۴۸. باید جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ زیر را پیدا کنیم:

$$۷x+۱۱y=۱۰۰$$

(دو عدد مطلوب را $۷x$ و $۱۱y$ فرض کرده‌ایم) و تنها جواب مسأله ۴۴ و ۵۶ است.

۳۴۹. اگر تعداد تخته‌های به عرض ۱۱ سانتیمتر را x و تعداد تخته‌های به عرض ۱۳ سانتیمتر را y بگیریم، مسأله دو جواب دارد:

$$\left|\begin{matrix}x=۶\\ y=۱۸\end{matrix}\right. \quad \text{یا} \quad \left|\begin{matrix}x=۱۹\\ y=۷\end{matrix}\right.$$

۳۵۰. ۴ کیسهٔ ۸۰ کیلوگرمی و ۲ کیسه ۶۰ کیلوگرمی و یا یك کیسهٔ ۸۰ کیلو گرمی و ۶ کیسهٔ ۶۰ کیلوگرمی.

۳۵۱. اگر عدد مجهول را x بگیریم، باید داشته باشیم:

$$x=۷t+۳ \quad \text{یا} \quad x=۱۱t'+۴$$

و از آنجا باید معادلهٔ سیال زیر را حل کرد:

$$۷t+۳=۱۱t'+۴$$

که از آنجا t و t' بصورت $t=۱۱\lambda-۳$ و $t'=۷\lambda-۲$ در می‌آید واز آنجا x به صورت زیر است:

$$x=۷۷\lambda-۱۸$$

۳۵۲. جواب : ۴ عدد تمبر ۴ ریالی، ۱۳ عدد ۲/۵ ریالی و ۳ عدد ۰/۵ ریالی و یا ۸ عدد ۴ ریالی ، ۶ عدد ۲/۵ ریالی و ۶ عدد ۰/۵ ریالی.

۳۵۳. عدد بزرگتر را x و عدد کوچکتر را y می‌گیریم، باید داشته‌باشیم:

$$(x+y)+(x-y)+x\cdot y+\frac{x}{y}=۲۴۳$$

این معادله بـه سادگی به صورت زیـر در می‌آید (x را بر حسب y بـدست آورده‌ایم) :

$$x=\frac{۲۴۳y}{(y+۱)^۲}$$

y و $y+1$ مقسوم علیه‌مشترکی ندارند و بنابراین باید ۲۴۳ بر $(y+1)^2$ قابل‌قسمت باشد، ۲۴۳ برابر است با 3^5 و برای اینکه برمجذور کاملی‌قابل قسمت باشد، این مجذورکامل می‌تواند مساوی ۱، ۹ یا ۸۱ باشد ، پس $y+1$ مساوی ۳ یا ۹ خواهد بود ($y+1=1$ جواب مثبت نمی‌دهد)، و از آنجا جوابهای xوy بدست می‌آید.

جواب: ۲۴ و ۸ یا ۵۴ و ۲.

۳۵۴. اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب x و y فرض کنیم باید داشته باشیم :

$$2x+2y=xy \implies y=\frac{2x}{x-2}=2+\frac{4}{x-2}$$

برای‌اینکه $\frac{4}{x-2}$ عددی‌صحیح بشود ، باید $x-2$ یکی از مقسوم‌علیه‌های ۴ باشد. به ازای مقسوم علیه‌های منفی ۴ ، برای x یا y جواب منفی بدست می‌آید که قابل قبول نیست و به‌ازای مقسوم‌علیه‌های مثبت ۴ داریم:

$$x-2=1 \implies \left|\begin{array}{l}x=3\\y=6\end{array}\right. ;\quad x-2=2 \implies \left|\begin{array}{l}x=4\\y=4\end{array}\right. ;$$

$$x-2=4 \implies \left|\begin{array}{l}x=6\\y=3\end{array}\right.$$

بنابراین ابعاد مستطیل ۳،۶، یا ۴،۴ است.

۳۵۵. اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب xوy فرض کنیم، طبق فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$4(x+y+\sqrt{x^2+y^2})=xy$$

این معادله پس از گویاکردن بصورت قابل حل زیر در می‌آید:

$$y=\frac{8x-32}{x-8}$$

جواب: $\left|\begin{array}{l}x=16\\y=12\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}x=24\\y=10\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}x=40\\y=9\end{array}\right.$

۳۵۶. اگر رقم یکان عدد y و رقم دهگان‌آن x باشد، باید داشته باشیم:

$$۱۰x+y=x^۲+y^۳ \Longrightarrow x(۱۰-x)=(y-۱)y(y+۱)$$

سمت راست تساوی حاصلضرب سه عدد متوالی است وبنابراین عددی است‌زوج و قابل قسمت بر ۳. بنابراین $x(۱۰-x)$ و از آنجا خود x عددی است زوج. برای اینکه$x(۱۰-x)$ قابل قسمت‌بر ۳ باشد باید $x=۴$ یا $x=۶$ بشود. که در هر دو حالت $y=۳$ بدست می‌آید.

جواب : ۴۳ یا ۶۳.

۳۵۷. معادله را می‌توان به ترتیب چنین نوشت:

$$y=\frac{۳x-۴}{۲x-۵}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶x-۸}{۲x-۵}=$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳(۲x-۵)+۷}{۲x-۵}=\frac{۱}{۲}\left(۳+\frac{۷}{۲x-۵}\right)$$

ادامهٔ عمل روشن است.

جواب: $x=۳$ ، $y=۵$ یا $x=۶$ ، $y=۲$.

۳۵۸. پس از تبدیلهای ساده ، معادلهٔ مفروض به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۲x-۱)^۲+(y-۳)^۲=۹^۲+۴^۲$$

که با توجه به فرد بودن $۲x-۱$ داریم:

$$\begin{cases} ۲x-۱=۹ \\ y-۳=۴ \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=۵ \\ y=۷ \end{array} \right.$$

۳۵۹. جوابها در جدول زیر داده شده است:

x	۱	۳	۴	۶	۷	۹
y	۴	۳	۱	۹	۷	۶

۳۶۰. جواب: $x=۳$ ، $y=۸$ یا $x=۵$ ، $y=۸$

۳۶۱. جواب: $x=۲$ ، $y=۷$ یا $x=۴$ ، $y=۱۹$

۳۶۲. معادلهٔ مفروض دا می‌توان چنین نوشت:

$$y^۲-(x-۲)^۲=۵ \Longrightarrow (y+x-۲)(y-x+۲)=۵$$

که جوابهای مثبت و صحیح آن منحصر به $x=۳$ و $y=۴$ است.

۳۶۳. معادلهٔ مفروض را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$(۴x-۱)^۲-۴y^۴=۸۵\ ;$$

$$(۴x+۲y-۱)(۴x-۲y-۱)=۸۵\ ;$$

۸۵ را می‌توان به چهار صورت ۸۵×۱ ، -۸۵×-۱ یا ۵×۱۷ ، -۱۷×-۵ نوشت کـه از آنجا ۸ دستگاه مختلف تشکیل می‌شود و از بین آنها جوابهای مثبت $x=۱۱$ ، $y=۲۱$ یا $x=۳$ ، $y=۳$ بـدست می‌آید.

۳۶۴. معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$(۲x-۳)^۲+۴(y-۲)^۲=۱۰۱=۱۰^۲+۱^۲$$

و چون $۲x-۳$ عددی فرد و $۲(y-۲)$ عددی زوج است داریم:

$$\begin{cases} ۲x-۳=\pm۱ \\ ۲(y-۲)=\pm۱۰ \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=۱ \\ y=۷ \end{array} \right. \text{ یا } \left| \begin{array}{l} x=۲ \\ y=۷ \end{array} \right.$$

۳۶۵. تعداد گوسفند، مرغ و کبوتر را به‌ترتیب x و y و z می‌گیریم. دو معادلهٔ زیر را داریم:

$$\begin{cases} x+y+z=۱۰۰ \\ ۵۰۰x+۲۰۰y+۱۰z=۱۰۰۰۰ \end{cases} \Longrightarrow ۴۹x+۱۹y=۹۰۰\ ;$$

که پس از حل معادلهٔ سیال درجهٔ اول ، مقادیر x و y و سپس z بدست‌می‌آید.

جواب: ۱۱ گوسفند، ۱۹ مرغ و ۷۰ کبوتر.

۳۶۶. اگر عدد را به صورت $\overline{abcd}$ در نظر بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\overline{abcd}=(a+b+c+d)^۴$$

داریم:

$$۱۰۰۰\leqslant\overline{abcd}<۱۰۰۰۰ \Longrightarrow ۵<a+b+c+d<۱۰$$

و بنابراین $\overline{abcd}$ توان چهارم یکی از عددهای ۸،۷،۶ یا ۹ می‌تواندباشد که از بین‌آنها تنها توان چهارم ۷ یعنی ۲۴۰۱ رقمهایی به مجموع ۷دارد.

جواب: ۲۴۰۱

۳۶۷. اگر فرض کنیم $\overline{mc}=a$ و $\overline{du}=b$ ، باید داشته باشیم:

$$۱۰۰a+b=(a+b)^۲ \Longrightarrow (a+b)(a+b-۱)=۹۹a$$

سمت‌چپ تساوی، حاصلضرب‌دو عدد متوالی است، بنابراین باید $۹۹a$ به‌صورت حاصلضرب دو عدد متوالی درآید:

۱) $a=۹۸$ که‌در این صورت $b=۱$ وعدد مطلوب به‌صورت ۹۸۰۱ در می‌آید.

۲) اگر $a=xy$ فرض کنیم، تنها می‌توان $۱۱x$ و $۹y$ را به‌صورت دو عدد متوالی در آورد، در این‌صورت باید داشته باشیم:

$$۱۱x+۱=۹y \quad \text{یا} \quad ۱۱x=۹y+۱$$

در حالت $۱۱x=۹y+۱$، از حل معادلهٔ سیال درجهٔ اول به جوابهای‌زیر می‌رسیم:

$$x=۹t-۴ \ ; \ y=۱۱t-۵$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$a=x\cdot y=۹۹t^۲-۸۹t+۲۰$$

ولی باید $a<۱۰۰$ باشد ، از حل نامساوی $۹۹t^۲-۸۹t+۲۰<۱۰۰$ به جواب $-\frac{۵}{۹}<t<\frac{۱۶}{۱۱}$ می‌رسیم که چون t عددی است صحیح $t=۰و۱$ می‌شود.

ولی چون به ازای $t=۰$ مقادیر xوy منفی می‌شوند، تنها $t=۱$ قابل‌قبول است که به‌ازای‌آن $x=۵$ و $y=۶$ و در نتیجه $a=۳۰$ و $b=۲۵$ بدست می‌آید و عدد مطلوب به صورت ۳۰۲۵ است.

در حالت $۹y=۱۱x+۱$ هم اگر مثل حالت قبل عمل کنیم ، بـه جواب ۲۰۲۵ می‌رسیم:

جواب: ۹۸۰۱ یا ۳۰۲۵ یا ۲۰۲۵

۳۶۸. $\overline{uvt}=b\ ,\ \overline{mcd}=a$ فرض کنید، معادله‌به‌صورت زیردمی‌آید:

$$(a+b)(a+b-۱)=۹۹۹a$$

و با توجه به‌اینکه $۹۹۹=۳۷\times ۲۷$ است شبیه تمرین قبل عمل کنید.

جواب: ۹۹۸۰۰۱ یا ۴۹۴۲۰۹

۳۶۹. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۳(۲x+۵)=y^۲-۵x^۲$$

سمت چپ تساوی مضربی است از ۳ . بنابراین سمت راست تساوی هم بایـد مضربی از ۳ باشد. بنابراین باید xوy هر دومضرب ۳ باشند (زیرا درغیر-

اینصورت باقیمانده‌های y^2 و x^2 بر ۳ مساوی واحد و تفاضل x^2-5y^2 غیر- قابل قسمت بر ۳ می‌شود). ولی اگر x و y هردو مضرب ۳ باشند x^2-5y^2 مضرب ۹ می‌شود و باید $2x+5$ مضرب ۳ باشد که غیرممکن است (زیرا x را مضرب ۳ گرفته‌ایم).

۳۷۰. بین دومعادلهٔ $m+d=2c$ و $10c+d=m^2$ مجهول d را حذف می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$m(m+1)=12c$$

از دوعدد متوالی m و $m+1$ باید یکی مضرب ۳ و دیگر مضرب ۴ باشد. بنابراین $m=3$ یا $m=8$ می‌تواندباشد، ولی به‌ازای $m=3$ برای d عدد منفی -1 بدست می‌آید که قابل قبول نیست و به ازای $m=8$ خواهیم داشت:

$$c=6 \ ; \ d=4$$

جواب : ۸۶۴

۳۷۱. بین دو معادله z را حذف کنید، به یك معادلهٔ سیال درجه اول می‌رسید که بدون جواب است.

۳۷۲.[1] فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} m\cdot c\cdot d\cdot u=\alpha^3 \\ c-d=\alpha \end{cases}$$

واضح است که $\alpha\neq 0,1$ است، زیرا اگر $\alpha=0$ باشد، باید یکی از رقمها برابر صفر شود که مخالف فرض است و اگر $\alpha=1$ باشد باید همهٔ رقمها برابر ۱ باشند که در اینصورت $\alpha=c-d=0$ می‌شود.

برای بقیهٔ موردها دوحالت تشخیص می‌دهیم:

حالت اول) α عددی است اول (۲، ۳، ۵ یا ۷)، در اینصورت می‌توان نوشت :

$$m\cdot c\cdot d\cdot u=\alpha^3\times1\times1\times1=\alpha^2\times\alpha\times1\times1=\alpha\times\alpha\times\alpha\times1$$

بنابراین یکی ازموردهای زیر امکان پذیر است:

$$1)\ \alpha^3-1=\alpha\ ; \qquad 2)\ \alpha^2-\alpha=\alpha\ ;$$

---

۱) اساس حل این مسأله از کتاب «حساب استدلالی» مجموعهٔ علوم برداشته شده است.

$$۳)\ \alpha^۲-۱=\alpha\ ;\qquad ۴)\ \alpha-۱=\alpha$$

معادله‌های (۱)و(۳) و (۴) ریشهٔ صحیح ندارند و از معادلهٔ (۲)جواب $\alpha=۲$ بدست می‌آید که از آنجا:

$$\overline{mcdu}=۱۴۲۱$$

حالت دوم) α عددی است غیر اول (۴ ، ۶ یا ۸).

برای $\alpha=۴$ داریم:

$$m\cdot c\cdot d\cdot u=۶۴\ ;\ c-d=۴$$

از مقسوم‌علیه‌های ۶۴ که تفاضلی برابر ۴ داشته باشند $c=۸$ و $d=۴$ قابل قبول است ودر نتیجه $m\cdot u=۲$ وجوابهای مسأله ۱۸۴۲ و ۲۸۴۱ می‌شود.

برای $\alpha=۶$ داریم:

$$m\cdot c\cdot d\cdot u=۲۱۶\ ;\ c-d=۶$$

از مقسوم‌علیه‌های ۲۱۶ که تفاضل ۶ داشته باشند $c=۹$ و $d=۳$ قابل قبول‌اند. از آنجا $m\cdot u=۸$ و جوابهای مسأله ۸۹۳۱ ، ۱۹۳۸ ، ۲۹۳۴، ۴۹۳۲ می‌شود.

برای $\alpha=۸$ داریم:

$$m\cdot c\cdot d\cdot u=۵۱۲\ :\ c-d=۸$$

چون همهٔ مقسوم‌علیه‌های ۵۱۲ توانهایی از ۲هستند، تفاضل بین‌دو مقسوم‌علیه هرگز برابر ۸ نیست و در نتیجه مسأله در این حالت جواب ندارد.

جواب: ۱۴۲۱ ، ۱۸۴۲ ، ۲۸۴۱ ، ۸۹۳۱ ، ۱۹۳۸ ، ۲۹۳۴ و ۴۹۳۲

۳۷۳. جواب: ۱۲۱ و ۴۸۴.

۳۷۴. دوطرف معادله‌را ۴ برابر و سپس به دوطرف یك واحد اضافه‌می‌کنیم، می‌شود:

$$(۲x+۱)^۲=۴y^۴+۴y^۳+۴y^۲+۴y+۱$$

سمت راست معادله را چنین می‌نویسیم:

$$۱)\ ۴y^۴+۴y^۳+۴y^۲+۴y+۱=(۲y^۲+y)^۲+۳y^۲+۴y+۱$$

عبارت $۳y^۲+۴y+۱$ دو ریشهٔ -۱ و $-\frac{۱}{۳}$ را دارد ، یعنی به ازای همهٔ مقادیر صحیح y (بجز $y=-۱$) مثبت است . بنابراین بـه‌ازای همهٔ

مقادیر y (بجز $y=-1$) داریم:

$$(2x+1)^2>(2y^2+y)^2$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$(2)\quad 4y^4+4y^3+4y^2+4y+1=(2y^2+y+1)^2-(y^2-2y)$$

به‌استثنای $y=0,1,2$ به‌ازای همهٔ مقادیر y داریم $y^2-2y>0$ وبنابر-
این اگر $y\neq 0,1,2$ باشد داریم:

$$(2x+1)^2<(2y^2+y+1)^2$$

و بنابراین به استثنای مواردی که y مساوی -1، ۰، ۱، ۲ باشد، داریم:

$$(2y^2+y)^2<(2x+1)^2<(2y^2+y+1)^2$$

یعنی اگر معادلهٔ مفروض جوابهای صحیح داشته باشد، این جوابها تنها به ازای $y=-1$ ، ۰ ، ۱، ۲ است:

$$y=-1 \implies 2x+1=\pm 1$$
$$y=0 \implies 2x+1=\pm 1$$
$$y=1 \implies (2x+1)^2=17$$
$$y=2 \implies 2x+1=\pm 11$$

جواب:
$$\begin{vmatrix} x=-6 \\ y=2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x=5 \\ y=2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x=-1 \\ y=0 \end{vmatrix};$$
$$\begin{vmatrix} x=0 \\ y=0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x=-1 \\ y=-1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x=0 \\ y=-1 \end{vmatrix}$$

و جوابهای صحیح و مثبت منحصر به $x=5$ و $y=2$ است.

۳۷۵. واضح است که دراین رشته عددها بزرگترین عدد، یکی از دو عدد اول یا دوم است. روشن است که در این مورد هم وقتی که بزرگترین عدد جملهٔ دوم باشد، رشته طولانی‌تر خواهد شد، زیرا اگر این رشته عددها $a,b,\ldots$ باشند که در آن $a<b$ باشد، می‌توان $a-b$ را بعنوان اولین جمله به‌آن اضافه کرد بدون اینکه در عددهای بعدی تغییری حاصل شود. به این ترتیب طولانی‌ترین رشتهٔ مطلوب وقتی بدست می‌آید که‌آنهارا به صورت زیر بنویسیم:

۱۹۶۶ ; ۱۹۶۷ ; ۱ ; ۱۹۶۶ ; ۱۹۶۵ ; ۱;...

که در اینصورت به سادگی روشن می‌شود که در آن ۲۹۵۲ عدد خواهدبود.

حالا ثابت می‌کنیم که اگر اولین عدد را عدد دیگری بجز ۱۹۶۶ بنویسیم، تعداد از ۲۹۵۲ تجاوز نمی‌کند.

اثبات را به‌طریق استقراء ریاضی انجام می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که اگر رشتهٔ عددهایی که با قانون فوق تشکیل شده‌اند از بزرگترین جملهٔ خودمساوی n شروع شده باشد، تعداد جمله‌هایش از $\left[\frac{3n+1}{2}\right]$ تجاوز نمی‌کند[1].

تحقیق حکم برای $n=1,2$ مشکل نیست. فرض کنید $n>2$ و رشتهٔ عددها به این ترتیب شروع شده باشد:

$$n; k; n-k; \dots$$

دو حالت درنظر می‌گیریم:

۱) $\frac{n}{2}<k<n$ ، دراینصورت رشته‌ای که از k شروع می‌شود، طبق فرض استقراء ، از $\left[\frac{3k+1}{3}\right]$ جمله بیشتر ندارد و از آنجا نتیجه می‌شود که در رشتهٔ اصلی حداکثر تعداد جمله‌ها چنین است:

$$\left[\frac{3k+1}{2}\right]+1\leqslant\left[\frac{3(n-1)+1}{2}\right]+1=$$
$$=\left[\frac{3n}{2}\right]\leqslant\left[\frac{3n+1}{2}\right]$$

۲) $k<\frac{n}{2}$. در اینصورت رشتهٔ عددهای مفروض چنین است:

$$n\ ;\ k\ ;\ n-k\ ;\ \underline{n-2k}\ ;\ \underline{k}\ ;\ \dots$$

رشته‌ای را که از $m=n-2k$ یا $m=k$ شروع می‌شود در نظر می‌گیریم (یعنی اولین جملهٔ آن یکی از جمله‌هایی باشد که زیر آن خط کشیده‌ایم). در این رشته حداکثر $\left[\frac{3m+1}{2}\right]$ جمله است و چون $m\leqslant n-2$ است و حداقل سه جملهٔ رشته را حذف کرده‌ایم ، تعداد جمله‌های رشتهٔ اصلی حداکثر چنین است:

---

۱) منظور از $[\alpha]$ بزرگترین عدد صحیحی است که از α تجاوز نکند (تابع قسمت صحیح α).

$$\left[\frac{۳(n-۲)}{۲}+۱\right]+۳=\left[\frac{۳n+۱}{۲}\right]$$

در حالتهای $k=n$ و $k=\frac{n}{۲}$ حداکثر تعداد جمله‌ها $\left[\frac{۳n+۱}{۲}\right]>۳$است.

بنابراین ثابت شدکه اگر رشته عددهایی‌از بزرگترین عدد خودیعنی n شروع شود ، حداکثر $\left[\frac{۳n+۱}{۲}\right]$ جمله خواهـد داشت. از اینجا نتیجه می‌شود که اگردررشتهٔ ...;a;b داشته باشیم $a<b\leqslant ۱۹۶۷$ حداکثر تعداد جمله‌ها چنین است:

$$۱+\left[\frac{۳b+۱}{۲}\right]\leqslant\left[\frac{۳\times ۱۹۶۷+۱}{۲}\right]=۲۹۵۱$$

۳۷۶. طبق فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$x+۵+۲+y+z+t=۱۱n \qquad (۱)$$

با توجه به‌اینکه $x\neq ۰$ است، حـداقل $x+y+z+t$ مساوی ۱ و حداکثر آن ۳۶ است و بنابراین نـامساوی $۸\leqslant ۱۱n\leqslant ۴۳$ برقرار است ، یعنی n می‌تواند مقادیر ۱و۲و۳ را اختیار کند که در اینصورت یکی ازسه معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$x+y+z+t=۴ \qquad (۲)$$

$$x+y+z+t=۱۵ \qquad (۳)$$

$$x+y+z+t=۲۶ \qquad (۴)$$

برای اینکه خود عدد بر ۱۱ قابل قسمت باشد ، باید داشته باشیم:

$$x-۵+۲-y+z-t=۱۱m$$

که با توجه به حداقل و حداکثر مقدار سمت‌چپ تساوی بدست‌می‌آید: $-۲۰\leqslant ۱۱m\leqslant ۲۵$ وبنابراین m می‌تواند یکی از مقادیر ۱ — ، ۰ ، ۱+ را اختیار کند که در اینصورت یکی از سه معادلهٔ زیر باید برقرار باشد:

$$x-y+z-t=-۸ \qquad (۵)$$

$$x-y+z-t=۳ \qquad (۶)$$

$$x-y+z-t=۱۴ \qquad (۷)$$

برای حل مسأله باید هر یك از معادله‌های (۲) و (۳) و (۴) راباهر

یك از معادله‌های (۵) و (۶) و (۷) حل کرد کـه در اینصورت ۹ دستگاه مختلف بدست می‌آید. دستگاههای (۲) و (۵) ؛ (۲) و (۶) ؛ (۲) و (۷)؛ (۳) و (۵) ؛ (۳) و (۷) ، (۴) و (۶) ؛ (۴) و (۷) جواب صحیح و مثبت ندارند. بنابراین‌دستگاه (۳) و (۶) و یا دستگاه (۴) و (۵) را بایدحل‌کنیم.

از دستگاه :

$$\begin{cases} x+y+z+t=۱۵ \\ x-y+z-t=۳ \end{cases}$$

به‌دست می‌آید : $x+z=۹$ و $y+t=۶$. مقادیر متناظر x و z وهمچنین مقادیر متناظر t و y را در جدولهای زیر داده‌ایم:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
z	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۹	۰

;

y	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
t	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

که از اینجا $۹ \times ۷=۶۳$ جواب بدست می‌آید.

همچنین از دستگاه:

$$\begin{cases} x+y+z+t=۲۶ \\ x-y+z-t=-۸ \end{cases}$$

بدست می‌آید : $x+z=۹$ و $y+t=۱۷$ ، مقادیر متناظر x و z مثل حالت قبل است و برای y و t : $y=۸$ ، $t=۹$ یا $y=۹$ ، $t=۸$ بدست می‌آیـد کـه از آنجا $۹ \times ۲=۱۸$ جواب و رویهم بـرای مسأله $۶۳+۱۸=۸۱$ جواب خواهیم داشت.

اگر عدد شش رقمی را با رقمهای نامساوی در نظر بگیریم ۸ جواب بیشتر نخواهیم داشت، این ۸ جواب چنین‌اند:

از دستگاه اول:

۱۵۲۰۸۶ ؛ ۱۵۲۶۸۰ ؛ ۸۵۲۰۱۶ ؛ ۸۵۲۶۱۰

از دستگاه دوم:

۳۵۲۸۶۹ ؛ ۳۵۲۹۶۸ ؛ ۶۵۲۸۳۹ ؛ ۶۵۲۹۳۸

۴۷۷. فرض می‌کنیم:

$$\log_{۲}(x^{۲}-۴x-۱)=m$$

در اینصورت خواهیم داشت:

$$x^{۲}-۴x-(۲^{m}+۱)=۰ \implies x=۲\pm\sqrt{۵+۲^{m}}$$

اگر $\sqrt{۵+۲^{m}}$ عددی گویا باشد، x هم گویاست و برعکس. بنابراین باید ببینیم به ازای چه مقادیری از m عدد $\sqrt{۵+۲^{m}}$ عددی گویاست؟ دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $m\geqslant ۰$. در اینصورت اگر k عددی صحیح باشد، باید داشته باشیم:

$$۵+۲^{m}=(۲k+۱)^{۲} \implies ۲^{m-۲}=k(k+۱)-۱$$

سمت راست این تساوی عددی است فرد وبنابراین باید $m=۲$ باشد که در اینصورت $x_{۱}=۵$ و $x_{۲}=-۱$ می‌شود.

۲) $m<۰$. اگر فرض کنیم $m=-n$ ، $n>۰$ می‌شود و داریم:

$$\sqrt{۵+۲^{m}}=\sqrt{\frac{۵\times ۲^{n}+۱}{۲^{n}}}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که باید $n=۲p$ باشد (p عددی است صحیح) و اگر k عددی صحیح باشد:

$$۵\times ۴^{p}+۱=(۲k+۱)^{۲} \implies ۵\times ۴^{p-۱}=k(k+۱)$$

چون k و $k+۱$ ، همچنین ۵ و $۴^{p-۱}$ نسبت بهم اولند باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}k+۱=۵\\ k=۴^{p-۱}\end{cases} \implies p=۲ \implies m=-۴$$

که از آنجا جوابهای $x_{۳}=\frac{۱۷}{۴}$ ، $x_{۴}=-\frac{۱}{۴}$ بدست می‌آید.

جواب: $x_{۱}=۵$ ، $x_{۲}=-۱$ ، $x_{۳}=\frac{۱۷}{۴}$ و $x_{۴}=-\frac{۱}{۴}$.

۴۷۸. معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$(x-p)(y-p)=p^2$$

حاصلضرب دو عدد صحیح $x-p$ و $y-p$ مساوی مجذور یك عدد اول شده است و بنابراین تنها حالتهای زیر را خواهیم داشت:

$$1)\ x-p=p \quad ; \quad y-p=p \quad ;$$
$$2)\ x-p=-p \quad ; \quad y-p=-p \quad ;$$
$$3)\ x-p=1 \quad ; \quad y-p=p^2 \quad ;$$
$$4)\ x-p=-1 \quad ; \quad y-p=-p^2 \quad ;$$
$$5)\ x-p=p^2 \quad ; \quad y-p=1 \quad ;$$
$$6)\ x-p=-p^2 \quad ; \quad y-p=-1$$

و بنابراین برای معادله ۶ جواب بدست می‌آید:

$$\left|\begin{array}{l}x_1=2p\\y_1=2p\end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l}x_2=0\\y_2=0\end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l}x_3=p+1\\y_3=p+p^2\end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l}x_4=p-1\\y_4=p-p^2\end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l}x_5=p+p^2\\y_5=p+1\end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l}x_6=p-p^2\\y_6=p-1\end{array}\right.$$

۳۷۹. داریم:

$$8x^2-2x-3=(4x-3)(2x+1)$$

اگر $4x-3=0$ باشد، $x=\frac{3}{4}$ در شرط مسأله صدق می‌کند و اگر $4x-3\neq 0$ باشد داریم:

$$\sqrt{8x^2-2x-3}=|4x-3|\sqrt{\frac{2x+1}{4x-3}}$$

بنابراین طبق شرط مسأله باید داشته باشیم:

$$\frac{2x+1}{4x-3}=m^2 \Longrightarrow x=\frac{3m^2+1}{4m^2-2}$$

جواب: $x=\frac{3}{4}$ و $x=\frac{3m^2+1}{4m^2-2}$ که درآن m عددی گویا و دلخواه است.

۳۸۰. به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر یکی از چهار مجهول مساوی

صفر باشد، سه مجهول دیگر نیز بـرابـر صفر می‌شود . بنابراین دستگاه جوابهای $x=y=z=t=0$ را قبول دارد. حالا اگر مجهولها رامخالف صفر فرض کنیم، معادلهٔ دوم را، پس از ضرب دو طرف آن در x^2 ، می‌توان چنین نوشت:

$$x^4-2x^2y^2+3(x^2z^2)-6x^2t^2=0$$

که‌اگر بجای x^2z^2مساویش $4y^2t^2$ رااز معادلهٔاول قرار دهیم، پس‌ازتجزیه، عبارت اخیر بەصورت زیر در می‌آید:

$$(x^2-2y^2)(x^2-6z^2)=0$$

و این معادله هم (با فرض صفر نبودن جوابها) دارای جواب صحیح نیست. بنابراین معادله بجز جوابهای صفر، جواب دیگری ندارد .

۳۸۱. از محاسبهٔ باقیماندهٔ تقسیم جمله‌ها ، بر ۳ یا بر ۴ استفاده‌کنید .

۳۸۲ طبق شرط مسأله بدست می‌آید:

$$1000a+100b+10c+a=(5c+1)^2$$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$1000a+100b-25c^2=1-a$$

چون سمت چپ معادله بر ۲۵ قابل‌قسمت است، باید داشته باشیم: $a=1$ و معادله چنین می‌شود:

$$c^2=4(b+10) \implies b=6 \ ; \ c=8$$

جواب: ۱۶۸۱

۳۸۳. اگر x ، y و z عددهای مجهول باشند و داشته باشیم $x<y<z$، مسأله منجر به جستجوی جوابهای صحیح دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} x+y+z=376 \\ x^2+z^2=2y^2 \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم‌روشن است‌که اگرxوz عددهایی فرد باشند، y هم‌عددی است فرد (زیرا مجموع مربعهای دو عدد فرد عددی است زوج و غیرقابل‌قسمت بر ۴) که در اینصورت مجموع $x+y+z$ عددی فرد و متناقض با معادلهٔ اول می‌شود . پس x و z هر دو زوج‌اند و در نتیجه y هم زوج است. اگر

فرض کنیم:

$$x=2x_1 \;;\; y=2y_1 \;;\; z=2z_1$$

دستگاه چنین می‌شود:

$$\begin{cases} x_1+y_1+z_1=188 \\ x_1^2+z_1^2=2y_1^2 \end{cases}$$

با استدلالی شبیه استدلال بالا، می‌توان بالاخره به دستگاه زیر رسید :

$$\begin{cases} u+v+w=47 \\ u^2+w^2=2v^2 \end{cases}$$

که در آن $x=8u$ ، $y=8v$ و $z=8w$ است اینجا دیگر u و v و w عددهای فرد هستند وضمناً داریم: $1<v<23$.

اگر $v\leqslant 11$ باشد $2v^2\leqslant 242$ و $u+w\geqslant 36$ و $u^2+w^2>324$ می‌شود که غیر ممکن است.

بنابراین برای v مقادیر ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹ و ۲۱ باقی‌می‌ماند. با قرار دادن هریك از این مقادیر v در دستگاه به جواب منحصر $u=7$ ، $v=17$ و $w=23$ می‌رسیم.

جواب. ۵۶، ۱۳۶ و ۱۸۴.

۳۸۴. اگر عبارت ax^3+bx^2+cx+d به‌ازای $x=19$ برابر ۱ و به ازای $x=62$ برابر ۲ شود ، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a\times 19^3+b\times 19^2+c\times 19+d=1 \\ a\times 62^3+b\times 62^2+c\times 62+d=2 \end{cases}$$

رابطهٔ اول را از رابطهٔ دوم کم می‌کنیم:

$$a(62^3-19^3)+b(62^2-19^2)+c(62-19)=1$$

می‌بینیم که سمت‌چپ تساوی بر $43=19-62$ قابل‌قسمت است، درحالیکه سمت راست تساوی بر این عدد قابل قسمت نیست.

۳۸۵. عددهای $\frac{40}{31}$ و $\frac{xyzt+xy+xt+zt+1}{yzt+y+t}$ را به‌کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z+\cfrac{1}{t}}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}$$

و چون هر کسر تنها به‌یك صورت ،می‌تواند به‌کسر مسلسل تبدیل شود،خواهیم داشت:

$$x=1 \;;\; y=3 \;;\; z=2 \;;\; t=4$$

۳۸۶. معادله را نسبت به y منظم می‌کنیم:

$$y^2-2x^7\cdot y+(x^{14}-x^4+7)=0$$

و از آنجا :

$$y=x^7\pm\sqrt{x^4-7} \qquad (1)$$

برای اینکه y عددی صحیح باشد، باید x^4-7 مجذور کامل باشد ، فرض می‌کنیم:

$$x^4-7=k^2 \implies (x^2+k)(x^2-k)=7$$

و چون ۷ را می‌توان به‌صورت 1×7 یا -1×-7 نوشت، مقادیر x و k بدست می‌آید.

جوابهای x منحصر به ±2 است که از آنجا، با توجه به‌رابطهٔ (۱)، مقدار y هم محاسبه می‌شود.

جواب:
$$\begin{vmatrix}x=2\\y=131\end{vmatrix}\;;\;\begin{vmatrix}x=2\\y=125\end{vmatrix}\;;\;\begin{vmatrix}x=-2\\y=-131\end{vmatrix}\;;\;\begin{vmatrix}x=-2\\y=-125\end{vmatrix}$$

که جوابهای مثبت $x_1=2$ ، $y_1=131$ و $x_2=2$ ، $y_2=125$ است .

روش دوم. معادله را می‌توان به این صورت نوشت:

$$(x^7+x^2-y)(-x^7+x^2+y)=7$$

و بنابراین مقادیر x و y باید در یکی از دستگاههای زیر صدق کنند:

$$\begin{cases}x^7+x^2-y=1\\-x^7+x^2+y=7\end{cases}\;;\;\begin{cases}x^7+x^2-y=7\\-x^7+x^2+y=1\end{cases}\;;$$

$$\begin{cases}x^7+x^2-y=-1\\-x^7+x^2+y=-7\end{cases}\;;\;\begin{cases}x^7+x^2-y=-7\\-x^7+x^2+y=-1\end{cases}$$

و از آنجا جوابها بدست می‌آید.

۳۸۷. فرض می‌کنیم $tx \neq 0$ ، دراینصورت به ازای $t=y$ بنا برمعادلهٔ‌اول دستگاه داریم $x=z$ و بنابراین $t+x=y+z$ که متناقض با معادلهٔ دوم دستگاه است. بنابراین $t \neq y$ و همچنین $t \neq z$ است.

با توجه به این مقدمه جوابهای به صورت:

$$t=mn \; ; \; x=pq \; ; \; y=mp \; ; \; z=nq \quad (\mathrm{I})$$

در معادلهٔ اول صدق می‌کنند (m، n، p و q عددهای صحیح‌هستند).

باقراردادن مقادیر (I) در معادلهٔ دوم دستگاه بدست می‌آید:

$$mn+pq=mp+nq+2 \implies (m-q)(n-p)=2 \quad (\mathrm{II})$$

از تساوی (II) دستگاههای زیر بدست می‌آید:

$$1)\ \begin{cases} m-q=2 \\ n-p=1 \end{cases} ;\ 2)\ \begin{cases} m-q=-2 \\ n-p=-1 \end{cases} ;$$

$$3)\ \begin{cases} m-q=1 \\ n-p=2 \end{cases} ;\ 4)\ \begin{cases} m-q=-1 \\ n-p=-2 \end{cases}$$

و از آنجا:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} p_1=n-1 \\ q_1=m-2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} p_2=n+1 \\ q_2=m+2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} p_3=n-2 \\ q_3=m-1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} p_4=n+2 \\ q_4=m+1 \end{vmatrix} \end{array}\right\} \quad (5)$$

با قرار دادن مقادیر (۵) در رابطه‌های (I) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} t_1=mn \\ x_1=(m-2)(n-1) \\ y_1=m(n-1) \\ z_1=(m-2)n \end{cases} ;\ \begin{cases} t_2=mn \\ x_2=(m+2)(n+1) \\ y_2=m(n+1) \\ z_2=(m+2)n \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} t_3 = mn \\ x_3 = (m-1)(n-2) \\ y_3 = m(n-2) \\ z_3 = (m-1)n \end{cases} ; \quad \begin{cases} t_4 = mn \\ x_4 = (m+1)(n+2) \\ y_4 = m(n+2) \\ z_4 = (m+1)n \end{cases}$$

چهار دستگاه جواب شامل تمام جوابهای ممکن دستگاه مفروض‌می‌باشند.

فقط متذکر می‌شویم‌که دستگاه معادله‌های مفروض با تبدیل t وx به یکدیگر و همچنین y و z بیکدیگر تغییر نمی‌کند ، بنابراین از هر دسته جواب(λ و γ و β و α) می‌توان ، با تبدیل دوری ، سه دسته جواب دیگر هم بدست آورد (که در حقیقت این جوابهای جدید به ازای مقادیر جدیدی از m و n هستند):

t	α	α	β	β
x	β	β	α	α
y	γ	λ	γ	λ
z	λ		λ	γ

به این ترتیب به ازای هر مقدار دلخواه mوn می‌توان $۴ \times ۴ = ۱۶$ دسته جواب بدست آورد.

۳۸۸. از معادله معلوم است‌که yعددی است فرد. فرض کنیم $y = ۲z + ۱$ بدست می‌آید:

$$x^۲ = ۱۰z^۲ + ۱۰z + ۶$$

از اینجا معلوم می‌شود که y عددی است زوج ، $x = ۲u$ می گیریم، در این صورت بدست می‌آید:

$$۲u^۲ - ۵z(z+۱) = ۳$$

که غیر ممکن است، زیرا $۲u^۲$ و $z(z+۱)$ زوج‌اند ، درحالیکه ۳ عددی است فرد .

۳۸۹. از تساوی $۱۲۱n-۲=k(k+۱)$ نتیجه می‌شود:

$$k=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۱(۴۴n-۱)}}{۲}$$

مقدار زیر رادیکال به ازای هیچ مقداری از n نمی‌تواند مجذور کامل باشد، زیرا بر ۱۱ قابل‌قسمت است ولی بر $۱۱^۲$ قابل‌قسمت نیست، یعنی به‌ازای هر مقداری از n، عدد k گنگ است.

۳۹۰. جواب: $x=۱$ ، $y=۲$.

۳۹۱. اگر بین دو معادله x را حذف کنیم به معادلهٔ $y=\frac{۳z-۴}{z-۳}$ می‌رسیم که قابل حل است.

۳۹۲. اگر عدد را $\overline{ab}$ فرض کنیم، باید داشته باشیم:

$$۱۰a+b=(a+b)^۲ \implies a=۵-b\pm\sqrt{۲۵-۹b}$$

$۲۵-۹b$ تنها به ازای $b=۰$ و $b=۱$ مجذور کامل است ولی بـه ازای $b=۰$ برای a دو جواب صفر و ۱۰ بدست می‌آید که هیچکدام قابل قبول نیست.

به‌ازای $b=۱$ جواب $a=۸$ و $a=۰$ بدست می‌آید که تنها $a=۸$ قابل قبول است.

جواب: ۸۱

۳۹۳. داریم:

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{۱}{۲}n(n+۱)$$

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\frac{۱}{۶}n(n+۱)(۲n+۱)$$

و از آنجا معادلهٔ مفروض به صورت زیر در می‌آید:

$$\left[\frac{۱}{۴}n^۲(n+۱)^۲\right]\times\frac{۱}{۳}(۲n+۱)=m^۲$$

$n(n+۱)$ عددی است زوج و بنابراین $\frac{۱}{۴}n^۲(n+۱)^۲$ مجذور یک عدد صحیح است، پس کافی است $\frac{۱}{۳}(۲n+۱)$ مجذور یک عدد صحیح باشد.

برای اینکه $2n+1$ بر ۳ قابل‌قسمت باشد، باید باقیماندهٔ تقسیم$2n$ بر۳ مساوی ۲ یا باقیماندهٔ تقسیم n بر ۳ مساوی ۱ باشد، یعنی داشته‌باشیم: $n=3k+1$ ، در اینصورت $\frac{1}{3}(2n+1)$ به صورت $2k+1$ در می‌آید که باید مجذور کامل باشد و چون $2k+1$ عددی است فرد، باید مجذوریك عدد فرد باشد:

$$2k+1=(2r+1)^2 \implies k=2r^2+2r$$

که اگر در رابطهٔ $n=3k+1$ قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$n=6r^2+6r+1$$

به ازای هر عدد صحیح غیرمنفی از r مقدار n و سپس m بدست می‌آید.

۳۹۴. جواب: $x=5$ ، $y=0$ ، $z=3$

۳۹۵. N را عددی مجهول می‌گیریم ، باید داشته باشیم:

$$N=n^2+(n+1)^2=2n^2+2n+1 \;;$$
$$N=(2n+1)^2+4n^2(2n+1)+4n^2=$$
$$=(2n+1)^2+4n^2(n+1)^2 \;;$$
$$N^4=[4n^2(n+1)^2-(2n+1)^2]^2+[4n(n+1)(2n+1)]^2$$

چون N^4 باید مجموع مربعهای دو عدد متوالی باشد، باید داشته باشیم:

$$4n(n+1)(2n+1)-4n^2(n+1)^2+(2n+1)^2=1$$

که پس از خلاصه کردن ، چنین می‌شود:

$$|4n(n+1)^2(n-2)-1|=1$$

که منجر به حل دو معادلهٔ زیر می‌شود:

$$n(n+1)^2(n-2)=0$$
$$2n(n+1)^2(n-2)=1$$

معادلهٔ اول سه جواب $n=0$ ، $n=-1$ و $n=2$ را قبول دارد و معادلهٔ دوم دارای‌جواب صحیح نیست.

از آنجا: $N_1=N_2=1 \;;\; N_3=4+9=13$

توضیح. برای حل کامل مسأله باید ضمناً ثابت کرد که صورت N^4، که در بالا آوردیم، تنهاصورتی است که می‌تواند به‌شکل مجموع دومربع کامل

نوشته شود.

۳۹۶. اگر فرض کنیم:

$$N=5^{2n-1}\times 2^{n+1}+3^{n+1}\times 2^{2n-1}$$

داریم:

$$10N=4\times 25^{n}\times 2^{n}+15\times 3^{n}\times 4^{n}=$$
$$=4(50^{n}-12^{n})+19\times 12^{n}$$

تفاضل $50^{n}-12^{n}$ بر $50-12$ یعنی $38=2\times 19$ قابل‌قسمت‌است و بنابراین N بر ۱۹ قابل قسمت است یعنی به ازای هر عدد صحیح و مثبت n برای m هم عددی صحیح و مثبت بدست می‌آید.

۳۹۷. چون حاصلضرب دو عدد سه رقمی $\overline{xyz}$ و $\overline{zyx}$ یك عددپنج رقمی‌شده است، بنابراین باید حاصلضرب دو رقم zوx، عددی یکرقمی باشد، اگر یکان عاملهای ضرب را با یکان حاصلضرب مقایسه کنیم، باید داشته باشیم:

$$x\cdot z=x \implies z=1 \quad (x\neq 0\ ;\ z\neq 0)$$

در اینصورت خواهیم داشت:

$$(100x+10y+1)(100z+10y+x)=10000x+$$
$$+1000+100y+10y+x\ ;$$

ویا: $$101xy+10x^{2}+90y+10y^{2}=90$$

جملهٔ $101xy$ درسمت چپ تساوی به‌این معناست که x یا y باید صفر باشند، زیـرا در غیر اینصورت سمت چپ تساوی از ۹۰ بزرگتر می‌شود. ولی اگر $y\neq 0$ باشد وجود $90y+10y^{2}$ بازهم سمت‌چپ تساوی را از ۹۰بزرگتر می‌کند، پس $y=0$ و از آنجا $x=3$ بدست می‌آید.

جواب: ۳۱۰۰۳

۳۹۸. می‌خواهیم‌تعداد ریشه‌های‌صحیح‌وغیرمنفی‌معادلهٔ $5x+2y+z=10n$ را بدست آوریم (n عددی صحیح، مثبت و مفروض است).

واضح‌است که جوابهای x_0، y_0و z_0 از معادلهٔ $5x+2y+z=10n$ متناظرند با جوابهای x_0+2 ، y_0 و z_0 از معادلهٔ: $5x+2y+z=10(n+1)$. اگر در معادلهٔ اخیر $x\geqslant 2$ باشد، پیدا کردن جوابهای آن منجر به پیدا کردن جوابها در معادلهٔ اصلی می‌شود (منتهی با

این شرط که در معادلهٔ اصلی x را دو واحد کمتر بگیریم).

مثلا اگردرمعادلهٔ $5x+2y+z=10(n+1)$ فرض‌کنیم $x=2$ مثل اینست که درمعادلهٔ $5x+2y+z=10n$ فرض کنیم $x=0$. به‌این ترتیب اگرتعداد جوابهای صحیح وغیرمنفی‌در معادلهٔ:

$5x+2y+z=10(n+1)$ را $\varphi(n+1)$ وتعدادجوابهای صحیح وغیر منفی معادلهٔ $5x+2y+z=10n$ را $\varphi(n)$ فرض کنیم ، اختلاف $\varphi(n+1)$ و $\varphi(n)$ برابر می‌شود با تعداد جوابهای معادلهٔ:

$5x+2y+z=10(n+1)$ به‌ازای $x=0$ و $x=1$. ولی‌این معادله‌به ازای $x=0$ دارای $5n+6$ جواب $(0<y<5n+5)$ و بـه ازای $x=1$ دارای $5n+3$ جواب $(0<y<5n+2)$ است.

بنابراین داریم :

$$\varphi(n+1)-\varphi(n)=10n+9$$

از طرف دیگر با جستجو می‌توان تحقیق کرد کـه $\varphi(1)=10$ ، به این ترتیب داریم :

$$+\left|\begin{array}{l}\varphi(1)=10\\ \varphi(2)-\varphi(1)=10\times1+9\\ \varphi(3)-\varphi(2)=10\times2+9\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi(n)-\varphi(n-1)=10(n-1)+9\end{array}\right.$$

واز جمع این رابطه‌ها بدست می‌آید:

$$\varphi(n)=5n^2+4n+1$$

۴۹۹. معادلهٔ مفروض را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{z}{x}=\frac{bz+cy}{ay}$$

و فرض می‌کنیم $\frac{z}{y}=\frac{m}{n}$. در اینصورت خواهیم داشت :

$$\frac{z}{x}=\frac{bm+cn}{an}$$

و از آنجا:

$$x:y:z=amn:n(bm+cn):m(bm+cn)$$

۴۰۰. داریم:

$$x!+y!=(x+y)!$$

ویا:

$$\frac{1}{x!}+\frac{1}{y!}=\frac{(x+y)!}{x!y!}$$

سمت راست تساوی عددی صحیح است،سمت‌چپ تساوی تنهاوقتی صحیح‌خواهد بود که $x=y=0$ یا $x=y=1$ یا $x=y=2$ باشد.

جواب: $x=y=1$ ، $z=2$.

۴۰۱. از معادله معلوم است که x و y یا هردو زوج و یا هردو فرداند.

۱) اگر $x=2\alpha+1$ و $y=2\beta+1$ باشد، در اینصورت داریم:

$$4\alpha(\alpha+1)+4\beta(\beta+1)+2=4^n$$

که پس از ساده کردن به ۲ بدست می‌آید:

$$2\alpha(\alpha+1)+2\beta(\beta+1)+1=2\times 4^{n-1}$$

که غیرممکن است،زیرا سمت راست تساوی عددی زوج وسمت‌چپ‌آن عددی فرد است.

۲) اگر $x=2m$ و $y=2p$ باشد، داریم:

$$m^2+p^2=4^{n-1}$$

از معادلهٔ اخیر هم معلوم می‌شود که باید $m=2r$ و $p=2s$ باشد:

$$r^2+s^2=4^{n-2}$$

که بالاخره به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$u^2+v^2=4$$

و معادلهٔ اخیرهم‌جواب غیر صفر ندارد. بنابراین‌معادلهٔ مفروض مسأله،جواب صحیح غیر صفر ندارد.

۴۰۲. اگرعدد مفروض را به N و مبنای مجهول را x فرض کنیم، داریم:

$$N=x^{n+2}+x^{n+1}+x^n+\dots+x^3+x^2+1=$$
$$=x^{n+2}+\frac{x^2(x^n-1)}{x-1}+1=$$

$$=\frac{x^{n+4}-x^{n+3}+x^{n+2}-x^2+x-1}{x-1}=$$

$$=\frac{(x^2-x+1)(x^{n+2}-1)}{x-1}=$$

$$=(x^2-x+1)(x^{n+1}+x^n+\dots+x+1)$$

عبارت x^2-x+1 به ازای $x=14$ بر ۶۱ قابل‌قسمت است و بـه ازای $x<14$ بر ۶۱ قابل‌قسمت نیست. بنابراین به ازای $x=14$ عدد N مضربی از ۶۱ است (به ازای هرعدد n). $x=14$ کوچکترین عددی بااین خاصیت است، زیرا در حالت $x<13$ به ازای $n=1$ عدد N بر ۶۱ قابل قسمت نیست و در حالت $x=13$ به ازای $n=2$.

۴۰۳. داریم:

$$1)\ x=1 \Longrightarrow y^2=1 \Longrightarrow y=\pm 1$$

$$2)\ x=3 \Longrightarrow y^2=1!+2!+3!=9 \Longrightarrow y=\pm 3$$

(به ازای $x=2$ برای y عدد صحیحی بدست نمی‌آید).

به ازای $x=4$ داریم:

$$1!+2!+3!+4!=33$$

که مجذور کامل نیست و چون ۵! برابر ۱۲۰ است وقتی $x\geqslant 4$ باشد، سمت چپ معادله، عددی بدست می‌آید که به ۳ ختم می‌شود ونمی‌تواند مجذور کامل باشد.

جواب: $\begin{cases} x=1 \\ y=\pm 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3 \\ y=\pm 3 \end{cases}$

۴۰۴. فرض کنید عددهای

$$A=\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n} \text{ و } A_1=\overline{a_na_2\cdots a_{n-1}a_1}$$

بر ۷ قابل‌قسمت باشند. در این صورت تفاضل این دو عدد، یعنی:

$$A-A_1=(10^{n-1}-1)(a_1-a_n)$$

هم باید بر ۷ قابل‌قسمت‌باشد. ولی A عدد دلخواه n رقمی است و بنابراین درحالت کلی a_1-a_n بر ۷ قابل قسمت نیست، بنابراین باید عدد :

$$۱۰^{n-۱}-۱=\underbrace{۹۹\dots۹۹}_{n-۱\ \text{رقم}}$$

بر ۷ قابل قسمت باشد. تقسیم را انجام می‌دهیم:

$$۹۹\dots۹۹ : ۷=۱۴۲۸۵۷۱\dots$$

یعنی وقتی بر ۷ قابل‌قسمت است که از ۱۸،۱۲،۶، ... رقم تشکیل شده‌باشد.

به‌این ترتیب $n-۱$ بر ۶ قابل‌قسمت است، یعنی $n=۶k+۱$، که در آن k عددی صحیح و غیرمنفی است (روشن است که حالت $n=۱$ هم با شرط مسأله می‌سازد).

۴۰۵. فرض کنید معادلهٔ:

$$x^x+y^y+z^z=t^t \qquad (۱)$$

برای بعضی از عددهای طبیعی برقرار باشد. می‌توان فرض‌کرد : $x\leqslant y\leqslant z$ ، در اینصورت $t>z$. اگر $z=۱$ باشد، $x=y=۱$می‌شود، ولی $t^t\neq ۳$.

اگر $z=۲$ باشد، دراینصورت $t\geqslant ۳$ و

$$t^t\geqslant ۳^۳>۳\times ۲^۲\geqslant x^x+y^y+z^z$$

که با تساوی (۱) متناقض است.

اگر $z\geqslant ۳$ باشد، داریم:

$$t^t\geqslant (z+۱)^{z+۱}>z^{z+۱}=z\cdot z^z\geqslant ۳z^z\geqslant x^x+y^y+z^z$$

که بازهم با رابطهٔ (۱) متناقض است. بنابراین معادلهٔ مفروض جواب طبیعی ندارد.

۴۰۶. اگر m و n را تعداد پاره خطهایی بگیریم که به ترتیب به طول ۷ سانتیمتر و ۱۲ سانتیمتر باشند و از آنها پاره خطی به طول یک‌متر یا ۱۰۰ سانتیمتر بدست آید، در اینصورت :

$$۷m+۱۲n=۱۰۰ \qquad (۱)$$

چون ۱۲ و ۱۰۰ بر۴ قابل‌قسمت‌اند، پس m هم بر ۴ قابل‌قسمت است. علاوه بر این عدد m نمی‌تواند بزرگتراز ۱۴ باشد (چون $۷\times۱۵>۱۰۰$). از اینجا معلوم می‌شود که m مساوی ۴ یا ۸ یا ۱۲ است. اگر این مقادیر را در معادلهٔ (۱) قرار دهیم، معلوم می‌شود که تنها به ازای $m=۴$ و $n=۶$ برقرار است.

۴۰۷. بعد از ساده‌کردن بدست می‌آید:

$$1000x-889y+1109z+t=0 \implies \quad (1)$$

$$\implies 111(9x-8y+10z)=(y+z)-(x+t)$$

از آنجا که x، y، z و t عددهایی یك رقمی هستند باید داشته باشیم:

$$9x-8y+10z=0 \qquad (2)$$

و در آن صورت $\qquad y+z=x+t \qquad (3)$

رابطهٔ (۲) را می‌توان به‌اینصورت نوشت:

$$10(y+z)=9(2y-x)$$

تنها دوحالت ممکن است:

۱) $y+z=2y-x=0$ ، در اینصورت $x+t=0$.

که به جواب بی‌معنی $x=y=z=t=0$ می‌رسد.

۲) $y+z=9$ ، $2y-x=10$ ، یعنی باید این دستگاه را حل کنیم:

$$\begin{cases} y+z=9 \\ z+t=9 \\ 2y-x=10 \end{cases}$$

از معادلهٔ آخر معلوم می‌شود که x عددی زوج است؛ x را به‌ترتیب $x_1=0$، $x_2=2$ ، $x_3=4$ ، $x_4=6$ ، $x_5=8$ می‌گیریم و جوابها را بدست می‌آوریم:

	۱	۲	۳	۴	۵
x	۰	۲	۴	۶	۸
y	۵	۶	۷	۸	۹
z	۴	۳	۲	۱	۰
t	۹	۷	۵	۳	۱

۴۰۸. بنابر شرط مسأله داریم:

$$\overline{abcd}=(\overline{cd})^2$$

واز آنجا

$$100(10a+b)+(10c+d)=(10c+d)^2$$

ویا :

$$100(10a+b)=(10c+d)(10c+d-1)$$

اگر $10c+d=k$ بگیریم، چون $c\neq 0$ است k عددی دورقمی می‌شود.
بنابراین

$$100(10a+b)=k(k-1)$$

حاصلضرب $k(k-1)$ بر ۱۰۰ قابل‌قسمت است، بنابراین‌یکی از دو عدد k و $k-1$ بر ۴ و دیگری بر ۲۵ قابل‌قسمت است. به سادگی معلوم می‌شود که $k=25$ و $k-1=24$ یا $k=76$ و $k-1=75$.

در حالت اول داریم:

$$10a+b=6$$

که باید $a=0$ باشد و ممکن نیست.

در حالت دوم داریم:

$$10a+b=19\times 3=57$$

و از آنجا $a=5$ و $b=7$. در اینصورت

$$76=10c+d \implies c=7\ ,\ d=6$$

و عدد مورد نظر ۵۷۷۶ است.

۴۰۹. اگر در مثلث قائم‌الزاویه وتررا z و دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه‌را xوy بگیریم، باتوجه به بند ۱۴ همین فصل (صفحهٔ ۲۱۳) باید داشته‌باشیم:

$$z=\frac{m^2+n^2}{2}\ ,\ y=\frac{m^2-n^2}{2}\ ,\ x=mn$$

طبق شرط مسأله باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} z-y=A^3 \\ z-x=B^3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n^2=A^3=A^2\cdot A \\ (m-n)^2=2B^3=B^2\cdot 2B \end{cases} \qquad (1)$$

و بنابراین باید A و $2B$ مجذور کامل باشند ، یعنی داشته باشیم:

$$A=k^2\ ;\ B=2t^2$$

که در اینصورت دستگاه (۱) به اینصورت در می‌آید:

$$\begin{cases} n^2 = k^6 \\ (m-n)^2 = 16t^6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n = k^3 \\ m = k^3 + 4t^3 \end{cases}$$

که در آنها k و t هرعدد طبیعی دلخواهند. مثلا به ازای $k=t=1$ داریم:

$$\begin{cases} m = 5 \\ n = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 13 \\ y = 12 \\ x = 5 \end{cases}$$

و همانطور که می‌بینیم $z-y=1^2$ و $z-x=2^3$.

ویا به ازای $k=3$ و $t=2$ داریم:

$$\begin{cases} m = 59 \\ n = 27 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 2105 \\ y = 1376 \\ x = 1593 \end{cases} ; \quad \begin{cases} z-y = 9^3 \\ z-x = 4^3 \end{cases}$$

تعمیم مسأله. می‌توان این مسأله را به اینصورت کلی کرد:

مثلث قائم‌الزاویه‌ای باضلعهای صحیح پیداکنید بنحوی که با فرض فرد بودن p، تفاضل هر ضلع آن با وتر مساوی توان pام یك عدد طبیعی‌باشد.

در اینجا هم باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} z-y = n^2 = A^p \\ z-x = \dfrac{(m-n)^2}{2} = B^p \end{cases}$$

چون n عددی فرداست، بنابراین باید $A=k^2$ و $B=2t^2$ باشد،درنتیجه:

$$n = k^p \quad \text{و} \quad m-n = 2^{\frac{p+1}{2}} t^p$$

و از آنجا:

$$n = k^p \quad \text{و} \quad m = k^p + 2^{\frac{p+1}{2}} t^p \qquad (1)$$

و برای اینکه مثلث قائم‌الزاویهٔ اصلی[1] بدست آید، باید k و $2t$ نسبت بهم

---

۱) مثلث‌قائم‌الزاویه‌ای را اصلی گویند که ضلعهای آن نسبت بهم اول باشند.

اول باشند.

مثلا برای $p=۵$ ، اگر $k=۳$ و $t=۲$ بگیریم ، بدست می‌آید :

$$n=۳^۵=۲۴۳\ ,\ m=۳^۵+۲^۳\times ۲^۵=۴۹۹\ ,$$
$$x=۴۹۹\times ۲۴۳=۱۲۱۲۵۷\ ,$$
$$y=(۴۹۹^۲-۲۴۳^۲):۲=۹۴۹۷۶\ ,$$
$$z=(۴۹۹^۲+۲۴۳^۲):۲=۱۵۴۰۲۵\ ;$$
$$z-x=۸^۵\ ,\ z-y=۹^۵$$

و روشن‌است که همیشه کوچکترین مثلث‌قائم‌الزاویهٔ اصلی به ازای $k=t=۱$ بدست می‌آید.

مثلا برای پیدا کردن کوچکترین مثلث قائم‌الزاویهٔ اصلی که تفاضل هر ضلع آن از وتر مساوی توان هفدهم یك عدد صحیح باشد ، به ازای $k=t=۱$ و $p=۱۷$ بدست می‌آید:

$$x=۵۱۳\ ,\ y=۱۳۱۵۸۴\ ,\ z=۱۳۱۵۸۵\ ;$$
$$z-x=۲^{۱۷}\ ,\ z-y=۱$$

* * *

توضیح: تمرینهایی‌که در این بخش حل‌نشده‌اند به مناسبت شباهتی‌است که به حل تمرینهای دیگر داشته‌اند.

۴۱۰. به ازای $n=۱$ داریم:

$$\frac{۱}{a(a+۱)}=\frac{۱}{a(a+۱)}$$

فرض می‌کنیم تساوی به ازای $n=k$ صحیح باشد ، یعنی داشته باشیم:

$$S_k=\frac{۱}{a(a+۱)}+\frac{۱}{(a+۱)(a+۲)}+\dots+$$
$$+\frac{۱}{(a+k-۱)(a+k)}=\frac{k}{a(a+k)}$$

ثابت می‌کنیم که در اینصورت به ازای $n=k+۱$ هم صحیح است، داریم:

$$S_{k+۱}=S_k+\frac{۱}{(a+k)(a+k+۱)}=\frac{k}{a(a+k)}+$$

$$+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{k(a+k+1)+a}{a(a+k)(a+k+1)}=$$
$$=\frac{(a+k)(k+1)}{a(a+k)(a+k+1)}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}$$

۴۱۱. تساوی به ازای $n=1$ صحیح است:

$$1=1^2$$

حالا اگر فرض کنیم که تساوی به ازای $n=k$ صحیح باشد:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

خواهیم داشت:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+$$
$$+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

یعنی به ازای $n=k+1$ هم صحیح است.

۴۱۲. حکم به ازای $n=1$ صحیح است:

$$1\times 1!=2!-1$$

اگر مجموع سمت‌چپ تساوی حکم را S_n بگیریم و داشته باشیم: $S_k=(k+1)!-1$، در اینصورت خواهیم‌داشت:

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)(k+1)!=$$
$$=[(k+1)!-1]+(k+1)(k+1)!=$$
$$=(k+1)!(1+k+1)-1=(k+2)!-1$$

۴۱۳. برای $n=1$ داریم:

$$\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$$

که رابطهٔ واضحی است. اگر داشته باشیم:

$$P_k=\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdots\cos 2^k x=\frac{\sin 2^{k+1}x}{2^{k+1}\sin x}$$

خواهیم داشت:

$$P_{k+1}=P_k\cdot\cos 2^{k+1}x=\frac{\sin 2^{k+1}x}{2^{k+1}\sin x}\cdot\cos 2^{k+1}x=\frac{\sin 2^{k+2}x}{2^{k+2}\sin x}$$

۴۱۴. به ازای $n=2$ داریم ($n>1$ فرض شده است):

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}>\frac{۱۳}{۲۴} \Longrightarrow \frac{۷}{۱۲}>\frac{۱۳}{۲۴}$$

که واضح است. حالا اگر فرض کنیم نامساوی:

$$S_k=\frac{۱}{k+۱}+\frac{۱}{k+۲}+\dots+\frac{۱}{۲k}>\frac{۱۳}{۲۴}$$

صحیح باشد، برای $n=k+۱$ بدست می‌آید:

$$S_{k+۱}=\frac{۱}{k+۲}+\frac{۱}{k+۳}+\dots+\frac{۱}{۲(k+۱)}=$$

$$=S_k+\frac{۱}{۲k+۱}+\frac{۱}{۲k+۲}-\frac{۱}{k+۱}=$$

$$=S_k-\frac{۱}{۲(k+۱)}+\frac{۱}{۲k+۱}=\frac{۱۳}{۲۴}+\alpha-$$

$$-\frac{۱}{۲(k+۱)}+\frac{۱}{۲k+۱}>\frac{۱۳}{۲۴}$$

($S_k=\alpha+\frac{۱۳}{۲۴}$ فرض کردیم . در اینصورت α مثبت و در عین حال

$\frac{۱}{۲(k+۱)}<\frac{۱}{۲k+۱}$ می‌باشد) .

۴۱۵. $x+\frac{۱}{x}=t$ نسبت به t ازدرجهٔ اول است (بدون مقدار ثابت). اگر دوطرف این تساوی را مجذور کنیم ، خواهیم داشت : $x^۲+\frac{۱}{x^۲}=t^۲-۲$. یعنی $x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ نسبت به t از درجهٔ دوم است و تمام توانهای t هم زوج است (۲ و صفر).

رابطهٔ زیر واضح است:

$$x^n+\frac{۱}{x^n}=\left(x^{n-۱}+\frac{۱}{x^{n-۱}}\right)\left(x+\frac{۱}{x}\right)-\left(x^{n-۲}+\frac{۱}{x^{n-۲}}\right)$$

که اگر برای سهولت کار $x^n+\frac{۱}{x^n}=S_n$ فرض کنیم می‌شود:

$$S_n=S_{n-۱}\cdot S_۱-S_{n-۲} \qquad (۲)$$

اگر در این رابطه n زوج باشد، $n-۱$ فرد و $n-۲$ زوج می‌شود و $S_۱=t$ نسبت به t از درجهٔ اول است (بدون مقدار ثابت)، بنابراین اگر $S_{n-۱}$ نسبت بـه t از درجهٔ $n-۱$ (و فقط بـا توانهای فرد t) و $S_{n-۲}$ نسبت به t از درجهٔ $n-۲$ (و فقط با توانهای زوجt) باشد، S_n هم نسبت‌به t از درجهٔ n (و فقط با توانهای زوجt) خواهد بود.

همچنین درحالتی که n فرد باشد، باز هم با فرض صحت حکم برای $S_{n-۱}$ و $S_{n-۲}$، نسبت بهt از درجهٔ n (و فقط باتوانهای فرد) خواهدبود.

رابطهٔ (۱) یك‌رابطهٔ‌برگشتی است که‌محاسبهٔ S_n را به محاسبهٔ$S_{n-۱}$ و $S_{n-۲}$ منجر می‌کند.

۴۱۶. واضح است که به ازای $n=۱۷$ خواهیم داشت:

$$n^۲+n+۱۷=۱۷\times ۱۹$$

و بنابراین $n^۲+n+۱۷$ نمی‌تواند عددی اول باشد (البته این عبارت بـه ازای مقادیر$n=۰,۱,\dots,۱۵$ عددی اول است : به ازای $n=۱۶$ بصورت $۱۷^۲$ در می‌آید).

۴۱۷. اگر فرض‌کنیم $A_n=۴^{۲^n}+۲^{۲^n}+۱$، داریم:

$$A_۰=۴+۲+۱=۷\ ;\ A_۱=۴^۲+۲^۲+۱=۲۱=۳\times ۷$$

حالا می‌نویسیم:

$$A_{k+۱}=۴^{۲^{k+۱}}+۲^{۲^{k+۱}}+۱$$

$$A_k=۴^{۲^k}+۲^{۲^k}+۱$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$A_{k+۱}-A_k=۴^{۲^{k+۱}}+۲^{۲^{k+۱}}-۴^{۲^k}-۲^{۲^k}\ ;$$

از طرف دیگر داریم:

$$۲^{۲^{k+۱}}=۲^{۲\times ۲^k}=۴^{۲^k}$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$A_{k+۱}-A_k=۴^{۲^{k+۱}}-۲^{۲^k}=$$

$$=۴^{۲\times ۲^k}-۲^{۲^k}=۱۶^{۲^k}-۲^{۲^k}=(۱۴+۲)^{۲^k}-۲^{۲^k}=۷m$$

بنابراین اگر A_k بر ۷ قابل قسمت باشد $A_{k+۱}=A_k+۷m$ هم بر ۷ قابل‌قسمت خواهد بود و حکم ثابت است.

۴۱۸. داریم:

$$y'=\frac{-۱}{(x+a)^۲}\ ;\ y''=\frac{۱\times ۲}{(x+a)^۳}=\frac{۲!}{(x+a)^۳}$$

$$y'''=\frac{-۱\times ۲\times ۳}{(x+a)^۴}=\frac{-(۳!)}{(x+a)^۴}$$

حدس می‌زنیم که برای مشتق مرتبهٔ‌ام داشته باشیم (مشتق مرتبهٔ n‌ام را بصورت $y^{(n)}$ نشان می‌دهیم):

$$y^{(n)}=\frac{(-۱)^n n!}{(x+a)^{n+۱}}$$

برای اثبات این رابطه کافی است یکبار دیگر از آن مشتق بگیریم، تاصحت استنباط ثابت شود.

۴۱۹. می‌توان نوشت:

$$y=\frac{۱}{x^۲-a^۲}=\frac{۱}{۲a}\left(\frac{۱}{x-a}-\frac{۱}{x+a}\right)$$

و اگر شبیه مسألهٔ قبل عمل کنیم بدست می‌آید:

$$y^{(n)}=\frac{۱}{۲a}\left[\frac{(-۱)^n\cdot n!}{(x-a)^{n+۱}}+\frac{(-۱)^{n+۱}\cdot n!}{(x+a)^{n+۱}}\right]$$

۴۲۰. داریم:

$$y'=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{۲}+x\right)\ ,$$

$$y''=\cos\left(\frac{\pi}{۲}+x\right)=\sin\left(۲\times\frac{\pi}{۲}+x\right)\ ,$$

$$y'''=\cos\left(۲\times\frac{\pi}{۲}+x\right)=\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)\ ,$$

....

$$y^{(n)}=\sin\left(\frac{n\pi}{۲}+x\right)$$

۴۲۱. صحت تساوی به‌ازای $n=1$ واضح است و اگر سمت‌چپ‌تساوی‌را P_n فرض کنیم ، داریم:

$$P_{n+1}=P_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}$$

و حکم ثابت است.

۴۲۳. تساوی به ازای $n=1$ واضح است و ضمناً اگرمقدار سمت‌چپ‌تساوی را S_n فرض کنیم، داریم:

$$S_{n+1}=S_n+\frac{n}{(n+1)!}=\left(1-\frac{1}{n!}\right)+\frac{n}{(n+1)!}=$$

$$=1-\frac{(n+1)-n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

۴۲۴. به ازای $n=1$ طرف اول تساوی $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ است و طرف راست تساوی چنین می‌شود:

$$\frac{1}{x^2-1}\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)-3=$$

$$=\frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^2(x^2-1)}-3=\frac{x^4+x^2+1}{x^2}-3=$$

$$=x^2+1+\frac{1}{x^2}-3=x^2+\frac{1}{x^2}-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

حالا اگر سمت چپ تساوی را S_n بگیریم و داشته باشیم :

$$S_n=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}}\right)-2n-1$$

باید ثابت کنیم :

$$S_{n+1}=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+4}-\frac{1}{x^{2n+2}}-2(n+1)-1\right)$$

داریم:

$$S_{n+1}=S_n+\left(x^{n+1}-\frac{1}{x^{n+1}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}}\right)-2n-1+$$

$$+x^{2n+2}+\frac{1}{x^{2n+2}}-2=$$

$$=\frac{x^{4n+2}-1}{x^{2n}(x^2-1)}+\frac{x^{4n+4}+1}{x^{2n+2}}-2(n+1)-1=$$

$$=\frac{x^{4n+4}-x^2+x^{4n+6}+x^2-x^{4n+4}-1}{x^{2n+2}(x^2-1)}-$$

$$=2(n+1)-1=\frac{x^{4n+6}-1}{x^{2n+2}(x^2-1)}-2(n+1)-1=$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+4}-\frac{1}{x^{2n+2}}\right)-2(n+1)-1$$

۴۲۸. به ازای $n=1$ سمت‌چپ نامساوی چنین است:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$$

فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{3n+1}>1$$

می‌توان نوشت:

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}=$$

$$=1+\alpha+\frac{2}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)}>1$$

$S_k=1+\alpha$ فرض کردیم که در آن α عددی است مثبت.

۴۲۹. به ازای $n=1$ حکم صادق است:

$$2^0(a^1+b^1)=(a+b)^1$$

و به ازای $n=2$: $\quad 2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2 \implies (a-b)^2\geqslant 0$

فرض می‌کنیم که داشته باشیم:

$$2^{k-1}(a^k+b^k)\geqslant(a+b)^k \qquad (1)$$

ثابت می‌کنیم که در اینصورت داریم:

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})\geqslant(a+b)^{k+1} \qquad (2)$$

برای این‌منظور ، دوطرف نامساوی (۱) را در $a+b$ ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$(a+b)^{k+1}\leqslant 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)=$$

$$=2^k\times\frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{2}$$

حالا نامساوی زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{2}\leqslant a^{k+1}+b^{k+1}$$

که در اینصورت نامساوی (۲) هم صحیح خواهد بود . تفاضل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(a^{k+1}+b^{k+1})-\frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{2}$$

$$=\frac{(a-b)(a^k-b^k)}{2}$$

$a-b$ و a^k-b^k (با توجه به مثبت بودن مقادیر a و b) هم علامت‌اند و بنابراین داریم:

$$\frac{(a-b)(a^k-b^k)}{2}\geqslant 0$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{2}\leqslant a^{k+1}+b^{k+1}$$

و به این‌ترتیب نامساوی (۲) ثابت شد.

۴۳۰. سه عدد متوالی را $n-1$ ، n و $n+1$ فرض می‌کنیم . باید ثابت کنیم عدد :

$$A_n=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n$$

بر ۹ قابل‌قسمت است. به ازای $n=1$ صحت حکم واضح است. اگر فرض کنیم:

$$A_k=3k^3+6k$$

بر ۹ قابل‌قسمت باشد، داریم:

$$A_{k+1}=3(k+1)^3+6(k+1)=A_k+9(k^2+k+1)$$

و واضح است که اگر A_k مضربی از ۹ باشد ، A_{k+1} هم مضربی از ۹ خواهد بود.

۴۳۱. به‌ازای $x=1$ و $x=2$ صحت حکم واضح است. اگر فرض کنیم:

$$A_k=9k^5-5k^3-4k$$

در این صورت داریم:

$$A_{k+1}=9(k+1)^5-5(k+1)^3-4(k+1)=$$
$$=A_k+15k(k+1)(3k^2+3k+2)=$$
$$=A_k+15k(k+1)[3k(k+1)+2]$$

ثابت می‌کنیم که عبارت $15k(k+1)[3k(k+1)+2]$ بر ۱۲۰ و یا $k(k+1)[3k(k+1)+2]$ بر ۸ قابل‌قسمت است.

$k(k+1)$ عددی است زوج که اگر بر ۴ قابل‌قسمت باشد، عبارت $3k(k+1)+2$ بر ۲ و حاصلضرب آنها بر ۸ قابل‌قسمت می‌شود. اگر $k(k+1)$ تنها بر ۲ قابل‌قسمت باشد (یعنی در تقسیم بر ۴ باقیمانده‌ای مساوی ۲ بدهد) $3k(k+1)+2$ بر ۴ قابل‌قسمت می‌شود و حاصلضرب آنها باز هم بر ۸ قابل‌قسمت است، بنابراین داریم:

$$A_{k+1}=A_k+120m$$

یعنی اگر A_k بر ۱۲۰ قابل‌قسمت باشد ، A_{k+1} هم بر ۱۲۰ قابل قسمت خواهد بود.

۴۳۲. تقسیم را تا چند جملهٔ خارج قسمت انجام دهیم :

$$\begin{array}{l|l}
1-x^2 & 1-2x\cos\alpha+x^2 \\
\underline{-1+2x\cos\alpha-x^2} & \overline{1+2x\cos\alpha+2x^2\cos2\alpha+\dots} \\
\quad 2x\cos\alpha-2x^2 & \\
\quad \underline{-2x\cos\alpha+4x^2\cos^2\alpha-2x^3\cos\alpha} & \\
\quad\quad 2x^2\cos2\alpha-2x^3\cos\alpha & \\
\quad\quad \underline{-2x^2\cos2\alpha+4x^3\cos\alpha\cos2\alpha-2x^4\cos2\alpha} & \\
\quad\quad\quad 2x^3\cos3\alpha-2x^4\cos2\alpha & \\
\quad\quad\quad \dots\dots\dots\dots &
\end{array}$$

احتمال داده می‌شود کـه جملهٔ شامل x^n در خارج قسمت بـه صورت $2x^n\cos n\alpha$ باشد و در آن صورت باقیمانده‌ای مساوی:

$$2x^{n+1}\cos(n+1)\alpha - 2x^{n+2}\cos n\alpha$$

داشته باشد. برای اطمینان نسبت بـه این استنباط کافیست برای یـك جمله باقیماندهٔ احتمالی را بـر مقسوم علیه تقسیم کنیم و ببینیم جملهٔ بعدی خارج قسمت و عبارت بعدی باقیمانده از قانونی که حدس زده‌ایم پیروی می‌کنند یا نه؟

و این تقسیم صحت استنباط را ثابت خواهدکرد.

۴۳۳. ابتدا صحت اتحاد را برای $n=2$ ثابت می‌کنیم:

$$tg\alpha \cdot tg2\alpha = \frac{tg2\alpha}{tg\alpha} - 2 ;$$

$$\frac{tg2\alpha}{tg\alpha} - 2 = \frac{2}{1-tg^2\alpha} - 2 = \frac{2tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha} = tg\alpha \cdot tg2\alpha$$

فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$S_n = tg\alpha\ tg2\alpha + tg2\alpha \cdot tg3\alpha + \dots + tg(n-1)tg n\alpha = \frac{tg n\alpha}{tg\alpha} - n$$

در اینصورت خواهیم داشت:

$$S_{n+1} = S_n + tg n\alpha tg(n+1)\alpha = \frac{tg n\alpha}{tg\alpha} + tg n\alpha tg(n+1)\alpha - n = \frac{tg n\alpha + tg\alpha tg n\alpha tg(n+1)\alpha}{tg\alpha} - n ;$$

از طرف دیگر داریم:

$$tg n\alpha + tg\alpha tg n\alpha tg(n+1)\alpha = tg n\alpha + tg\alpha tg n\alpha \frac{tg n\alpha + tg\alpha}{1 - tg n\alpha tg\alpha} = \frac{tg n\alpha + tg n\alpha tg^2\alpha}{1 - tg n\alpha tg\alpha} = \frac{(tg n\alpha + tg\alpha) - tg\alpha(1 - tg n\alpha tg\alpha)}{1 - tg n\alpha tg\alpha} = tg(n+1)\alpha - tg\alpha$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$S_{n+1}=\frac{tg(n+1)\alpha-tg\alpha}{tg\alpha}-n=\frac{tg(n+1)\alpha}{tg\alpha}-(n+1)$$

و به این ترتیب اگر رابطه برای n صحیح باشد ، برای $n+1$ هم صحیح خواهد بود و حکم ثابت است.

۴۳۵. به ازای $n=1$ تساوی‌چنین می‌شود:

$$1\times 2\times 3\times\cdots\times(1+p)=$$
$$=\frac{1}{p+2}\times 1\times 2\times 3\times\cdots\times(1+p)(2+p)$$

که صحت آن واضح است، حالا فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$\sum_{m=1}^{n} m(m+1)\cdots(m+p)=\frac{1}{p+2}n(n+1)\cdots(n+p+1)$$

در اینصورت داریم:

$$\sum_{m=1}^{n+1} m(m+1)\cdots(m+p)=\sum_{m=1}^{n} m(m+1)\cdots$$
$$\cdots(m+p)+(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)=$$
$$=\frac{1}{p+2}n(n+1)\cdots(n+p+1)+(n+1)(n+2)\cdots$$
$$\cdots(n+p+1)=(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)\times$$
$$\times\left[\frac{n}{p+2}+1\right]=\frac{1}{p+2}(n+1)(n+2)\cdots(n+p+2)$$

و بنابراین اتحاد اصلی صحیح است.

۴۳۹. به‌ازای $n=0$ حکم‌واضح‌است. فرض‌می‌کنیم $A_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$ مضربی از ۱۳۳ باشد ، در اینصورت:

$$A_{n+1}-A_n=(11^{n+3}-11^{n+2})+(12^{2n+3}-12^{2n+1})=$$
$$=11^{n+2}(11-1)+12^{2n+1}(144-1)=$$
$$=10\times 11^{n+2}+143\times 12^{2n+1}=10(11^{n+2}+12^{2n+1})+$$
$$+133\times 12^{2n+1}=10A_n+133\times 12^{2n+1}$$

و از اینجا روشن است که اگر A_n بر ۱۳۳ قابل‌قسمت باشد، A_{n+1} هم‌بر ۱۳۳ قابل‌قسمت است.

۴۴۹. مقدمه. **فیبوناچی** ریاضی‌دان ایتالیایی در یکی از کارهای خود مسألهٔ زیر را مورد بحث قرار می‌دهد:

یك جفت خرگوش در هرماه دوبچه می‌آورند (از دو جنس مختلف). ضمناً بچه‌هایی‌که متولد می‌شوند، بعد از ۲ ماه می‌توانند اولین بچه‌های‌خود را به دنیا بیاورند. اگر در ابتدای سال دو بچه خرگوش تازه به‌دنیا آمده‌داشته باشیم ، در آخر سال چند خرگوش خواهیم داشت ؟

از شرطهای مسأله نتیجه می‌شود کـه بعد از یك ماه همان یك جفت خرگوش را خواهیم داشت، در آخر ماه دوم ۲ جفت ، در آخر ماه سوم باز هم همان خرگوشهای اول بچه می‌آورند و ۳ جفت‌خواهیم داشت؛ یك ماه‌بعد، یعنی در آخر ماه چهارم هم بچه خرگوشهای اول وهم آنها که ۲ ماه بعدبه دنیا آمده‌اند دارای بچه می‌شوند و ۵ جفت خرگوش خواهیم داشت.

تعداد جفت خرگوشهایی که بعد از گذشت n ماه از اول سال وجود خواهد داشت به $F(n)$ نشان می‌دهیم . درآخر ماه $(n+1)$ام این $F(n)$ جفت خرگوش وجود دارد به اضافهٔ اینکه همه جفت خرگوشهایی‌که درآخر ماه $n-1$ام بوده‌اندبچه‌های جدیدی‌به‌دنیا می‌آورند. به عبارت دیگررابطهٔ برگشتی زیر بدست می‌آید.

$$F(n+1)=F(n)+F(n-1)$$

و چون طبق شرط $F(0)=1$ و $F(1)=1$ پس به ترتیب بدست می‌آید:

$$F(2)=2\ ,\ F(3)=3\ ,\ F(4)=5\ ,\ F(5)=8\ ,\dots,\ F(12)=233$$

عددهای $F(n)$ را **عددهای فیبوناچی** و دنبالهٔ عددهای

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,\dots$$

را **دنبالهٔ فیبوناچی** گویند. همانطور که می‌بینیم این دنباله را می‌توان بـا شرطهای $a_0=1$ ، $a_1=1$ و $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ معین کرد.

حالا به اثبات تساوی مسألهٔ ۴۴۹ می‌پردازیم:

اگر $n=1$ بگیریم ، داریم:

$$a_{2n+2}=a_4=5=1+3+1=a_1+a_3+1$$

یعنی به ازای $n=1$ حکم درست‌است.

فرض می‌کنیم تساوی برای $n=k$ درست باشد، یعنی

$$a_{2k+2}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}+1 \qquad (1)$$

ثابت می‌کنیم که در اینصورت به ازای $n=k+1$ هم درست است، یعنی باید ثابت کنیم:

$$a_{2k+4}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}+a_{2k+3}+1$$

طبق تعریف برای دنبالهٔ فیبوناچی داریم:

$$a_{2k+4}=a_{2k+2}+a_{2k+3}$$

از آنجا با استفاده از رابطهٔ (۱) بدست می‌آید:

$$a_{2k+4}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}+a_{2k+3}+1$$

۴۵۰. برای $n=1$ حکم صحیح است.

فرض‌می‌کنیم $a^2_k-a_{k-1}\cdot a_{k+1}=(-1)^k$ ، در اینصورت‌داریم:

$$a^2_{k+1}-a_k\cdot a_{k+2}=a^2_{k+1}-a_k(a_{k+1}+a_k)=$$
$$=a_{k+1}(a_{k+1}-a_k)-a^2_k=a_{k+1}\cdot a_{k-1}-a^2_k=$$
$$=-(a^2_k-a_{k-1}\cdot a_{k+1})=-(-1)^k=(-1)^{k+1}$$

۴۵۳. برای $n=1$ حکم واضح است.

فرض می‌کنیم‌که حکم برای $n\leqslant k$ صحیح باشد، در این صورت داریم(برای $n=k+1$):

$$a_{k+10}=a_{k+9}+a_{k+8}=(a_{k-1}\cdot a_8+a_k\cdot a_9)+$$
$$+(a_{k-2}\cdot a_8+a_{k-1}\cdot a_9)=(a_{k-1}+a_{k-2})a_8+$$
$$+(a_k+a_{k-1})a_9=a_k\cdot a_8+a_{k+1}\cdot a_9$$

۴۵۴. حکم برای $n=1$ درست است.

فرض می‌کنیم‌که حکم برای $n\leqslant k$ درست باشد ثابت می‌کنیم‌که دراینصورت برای $n=k+1$ هم درست‌است، یعنی‌ثابت‌می‌کنیم $a_{k+1}=2^{k+1}+1$.

طبق تعریف دنباله داریم: $a_{k+1}=a_1\cdot a_k-a_0\cdot a_{k-1}$. از طرف دیگر به استناد فرض استقراء داریم:

$$a_k=2^k+1\ ;\ a_{k-1}=2^{k-1}+1,$$

و از آنجا:

$$a_{k+1}=3\times 2^k-2^k+3-2=2^{k+1}+1$$

۴۵۵. در رابطه‌های حکم $n=1$ می‌گیریم:

$$a_1=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{a+b}{2}\ ,$$

$$b_1=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{a+3b}{4}=\frac{(a+b)+2b}{4}=$$

$$=\frac{2a_1+2b}{4}=\frac{a_1+b}{2}$$

بنابراین رابطه‌های حکم به ازای $n=1$ برقرارند.

حالا فرض می‌کنیم:

$$a_k=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^k}\right)$$

$$b_k=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\times 4^k}\right)\qquad (1)$$

و ثابت می‌کنیم که:

$$a_{k+1}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^{k+1}}\right)$$

$$b_{k+1}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\times 4^{k+1}}\right)$$

طبق شرط داریم: $a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+b_k\right)$. با استفاده از رابطه‌های (۱) بدست می‌آید:

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}\Big[a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^k}\right)+a+$$

$$+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\times 4^k}\right)\Big]=\frac{1}{2}\Big[2a+\frac{2}{3}(b-a)\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{4^k}+1+\frac{2}{4^{k+1}}\right)=a+\frac{1}{3}(b-a)\left(\frac{2\times 4^{k+1}-2}{4^{k+1}}\right)=$$

$$=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^{k+1}}\right)$$

و بهمین‌ترتیب:

$$b_{k+1}=\frac{1}{2}(a_{k+1}+b_k)=\frac{1}{2}\Big[a+\frac{2}{3}\,(b-a)\Big(1-\frac{1}{4^{k+1}}\Big)+$$

$$+a+\frac{2}{3}\,(b-a)\Big(1+\frac{1}{2\times 4^k}\Big)\Big]=\frac{1}{2}\Big[2a+\frac{2}{3}\,(b-a)\times$$

$$\times\Big(1-\frac{2}{2\times 4^{k+1}}+1+\frac{1}{2\times 4^k}\Big)\Big]=$$

$$=a+\frac{1}{3}\,(b-a)\Big(\frac{2\times 2\times 4^{k+1}+2}{2\times 4^{k+1}}\Big)=a+\frac{2}{3}(b-a)\times$$

$$\times\Big(1+\frac{1}{2\times 4^{k+1}}\Big)$$

۴۵۶. از استقراء ریاضی به‌شکلی کـه در مسألهٔ ۴۵۳ عمل کردیم، استفاده کنید.

۴۵۷. مسأله را به صورت کلی خود طرح می‌کنیم و ثابت می‌کنیم برای همهٔ مقادیر n داریم:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}= \qquad (1)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

به ازای $n=1$ تساوی (۱) واضح است. فرض می‌کنیم:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$$

ثابت می‌کنیم:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-$$

$$-\frac{1}{2k+2}+\cdots=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+2}$$

در حقیقت داریم:

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+$$

$$+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\dots+\frac{1}{2k}\right)+$$

$$+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+$$

$$+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\dots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

۴۵۹. فرض می‌کنیم:

$$P_n=2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{8}}\cdot 16^{\frac{1}{16}}\dots(2^n)^{\frac{1}{2^n}}$$

در اینصورت:

$$P=\lim_{n\to\infty} P_n$$

داریم $(2^n)^{\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{n}{2^n}}$ و بنابراین اگرفرض کنیم : $P_n=2^{s_n}$ باید داشته باشیم:

$$s_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\dots+\frac{n}{2^n}$$

به ترتیب داریم:

$$s_1=\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2}=2-\frac{1+2}{2^1}$$

$$s_2=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=1=2-1=2-\frac{2+2}{2^2}$$

$$s_3=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}=\frac{11}{8}=2-\frac{5}{8}=2-\frac{3+2}{2^3}$$

$$s_4=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}=\frac{26}{16}=2-\frac{6}{16}=2-\frac{4+2}{2^4}$$

بنابراین می‌توان حدس زد :

$$s_n = ۲ - \frac{n+۲}{۲^n}$$

و این حدس به سادگی باروش استقراءریاضی به‌یقین تبدیل می‌شود. ازطرف دیگر :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(۲ - \frac{n+۲}{۲^n}\right) = ۲$$

و بنابراین :

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = ۴$$

۴۶۲. ازرابطهٔ $(۲+\sqrt{۳})^n = a_n + b_n\sqrt{۳}$ به‌ازای $n=۱$ بدست‌می‌آید:

$$a_۱ = ۲ \ , \ b_۱ = ۱$$

از طرف دیگر به ازای $n=۱$ رابطهٔ حکم چنین می‌شود:

$$a_۱^۲ - ۳b_۱^۲ = ۴ - ۳ = ۱$$

فرض می‌کنیم رابطهٔ $a_n^۲ - ۳b_n^۲ = ۱$ درست باشد، باید ثابت کنیم:

$$a_{n+۱}^۲ - ۳b_{n+۱}^۲ = ۱$$

طبق فرض داریم:

$$(۲+\sqrt{۳})^{n+۱} = a_{n+۱} + b_{n+۱}\sqrt{۳}$$

یعنی:

$$(a_n + b_n\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳}) = a_{n+۱} + b_{n+۱}\sqrt{۳}$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$a_{n+۱} = ۲a_n + ۳b_n \ , \ b_{n+۱} = a_n + ۲b_n .$$

و از آنجا:

$$a_{n+۱}^۲ - ۳b_{n+۱}^۲ = (۲a_n + ۳b_n)^۲ - ۳(a_n + ۲b_n)^۲ =$$
$$= a_n^۲ - ۳b_n^۲ = ۱$$

* * *

۴۶۳. به ترتیب داریم :

$$\frac{۷۳}{۴۳}=۱+\frac{۳۰}{۴۳}=۱+\cfrac{۱}{\cfrac{۴۳}{۳۰}}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱۳}{۳۰}}=$$

$$=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{\cfrac{۳۰}{۱۳}}}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۴}{۱۳}}}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۴}}}}$$

یعنی : $\frac{۷۳}{۴۳}=(۱,۱,۲,۳,۴)$

۴۶۴. تقاربهای اول تا پنجم به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{۲}{۳}\ ,\ \frac{۶}{۷}\ ,\ \frac{۱۴}{۱۵}\ ,\ \frac{۳۰}{۳۱}\ ,\ \frac{۶۲}{۶۳}$$

۴۶۵. از شرطهای مسأله داریم:

$$\text{یکسال شمسی}=۳۶۵/۲۴\ \text{روز}=\frac{۳۶۵/۲۴}{۲۹/۵۳}\ \text{ماه قمری}=\frac{۳۶۵۲۴}{۲۹۵۳}\ \text{ماه قمری}=$$

$$=۱۲+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۱۵۵}}}}}$$

تقاربهای متوالی این کسر مسلسل عبارتند از:

$$۱۲\ ,\ \frac{۲۵}{۲}\ ,\ \frac{۳۷}{۳}\ ,\ \frac{۹۹}{۸}\ ,\ \frac{۲۳۵}{۱۹}$$

تقارب آخر یعنی $\frac{۲۳۵}{۱۹}$ تقریب خوبی‌است واز آنجا حکم مسأله ثابت‌می‌شود.

۴۶۶. اگر مقدار کسر مسلسل را به x نشان دهیم ، داریم:

$$x=\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۳+x}}=\frac{۳+x}{۷+۲x}\quad ;$$

$$۲x^۲+۶x-۳=۰ \implies x=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۵}-۳)$$

(روشن است که مقدار x مثبت است و ریشهٔ منفی معادله قابل قبول نیست) .

۴۶۷. داریم:

$$x=\frac{a}{1+y}\ ,\ \ y=\frac{b}{1+x}\ ,$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} x+xy=a \\ y+xy=b \end{cases} \Longrightarrow x-y=a-b$$

۴۶۸. داریم:

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+x}}}=\frac{bc+x+1}{abc+abx+a+c+x}$$

$$y=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+y}}}=\frac{ac+y+1}{abc+aby+b+c+y}$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} abcx+abx^2+ax+cx+x^2-bc-bx-1=0 \\ abcy+aby^2+by+cy+y^2-ac-ay-1=0 \end{cases}$$

از تفاضل این دو معادله بدست می‌آید:

$$(x+y+c)[(x-y)(ab+1)+a-b]=0$$

و چون x و y و c مثبت‌اند، بنابراین $x+y+c\neq 0$ و داریم:

$$x-y=\frac{b-a}{ab+1}$$

۴۶۹. داریم:

$$x=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+x}}=\frac{a_2+x}{a_1a_2+a_1x+1}$$

که از آنجا (و بهمین‌ترتیب برای y و z) بدست می‌آید:

$$\begin{cases} a_1x^2+a_1a_2x-a_2=0 \\ a_1y^2+2a_1a_2y-a_2=0 \\ a_1z^2+3a_1a_2z-a_2=0 \end{cases}$$

که اگر بین این سه معادله a_1 ، a_1a_2 و $-a_2$ را حذف کنیم ، به رابطهٔ مورد نظر می‌رسیم .

۴۷۰. با استفاده از رابطهٔ مربوط به محاسبهٔ تقاربهای متوالی، رابطهٔمطلوب بدست می‌آید.

۴۷۱. می‌توان نوشت:

$$\cfrac{1}{na_2+\cfrac{1}{na_3+\cfrac{1}{na_4+\cfrac{1}{na_5+\cdots}}}} =$$

$$= \cfrac{n}{n^2a_2+\cfrac{n}{na_3+\cfrac{1}{na_4+\cfrac{1}{na_5+\cdots}}}} =$$

$$= \cfrac{n}{n^2a_2+\cfrac{n}{na_3+\cfrac{n}{n^2a_4+\cfrac{n}{na_5+\cdots+\cfrac{n}{na_{2r-1}+\cfrac{n}{n^2a_{2r}+\cdots}}}}}} =$$

$$=\frac{n}{n^2a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{n^2a_4+\frac{1}{a_5+\ddots+\frac{1}{a_{2r-1}+\frac{1}{n^2a_{2r}+\cdots}}}}}}$$

۴۷۲. جملهٔ nام این کسر مسلسل مساوی است با $\frac{(2n-3)(2n-1)}{4}$،
بنابراین:

$$P_n=4P_{n-1}+(2n-3)(2n-1)P_{n-2}\ ;$$

این رابطه را می‌توان به‌شکل زیرمرتب کرد:

$$P_n-(2n+1)P_{n-1}=-(2n-3)[P_{n-1}-(2n-1)P_{n-2}]$$

با تبدیل n به $n-1$ و سپس $n-1$ به $n-2$ و ... بتوالی داریم:

$$P_{n-1}-(2n-1)P_{n-2}=-(2n-5)[P_{n-2}-(2n-3)P_{n-3}]$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots$$

$$P_3-7P_2=-3(P_2-5P_1)$$

اما با توجه‌به $P_1=1$ و $P_2=4$ داریم: $P_2-5P_1=-1$ و از آنجا:

$$P_n-(2n+1)P_{n-1}=(-1)^{n-1}(2n-3)(2n-5)\ldots3\times1$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{P_n}{1\times3\cdots(2n+1)}-\frac{P_{n-1}}{1\times3\cdots(2n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{P_2}{1\times3\times5}-\frac{P_1}{1\times3}=\frac{(-1)^1}{3\times5}$$

پس:

$$\frac{P_n}{1\times 3\times 5\cdots(2n+1)}=\frac{1}{1\times 3}-\frac{1}{3\times 5}+\cdots+$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

و چون مخرج تقاربها باهمان قانون صورت تقاربها بنا می‌شود، داریم:

$$Q_n-(2n+1)Q_{n-1}=(-1)^{n-2}3\times 5\cdots$$
$$\cdots(2n-3)(Q_2-5Q_1)=0$$

زیرا $Q_1=3$ و $Q_2=15$. از آنجا:

$$\frac{Q_n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\times 1}=\frac{Q_{n-1}}{(2n-1)\cdots 3\times 1}=$$
$$=\cdots=\frac{Q_2}{5\times 3\times 1}=\frac{Q_1}{3\times 1}=1$$

و در نتیجه :

$$Q_n=1\times 3\cdots(2n-1)(2n+1)$$

و بنابراین:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{1}{1\times 3}-\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

۴۷۴. داریم:

$$P_n=cP_{n-1}+bP_{n-2}$$

حالا اگر در کسر $\frac{A+Bx}{1-cx-bx^2}$ صورت را بر مخرج بهمین‌ترتیب تقسیم کنیم، ضریبهای جمله‌های متوالی خارج قسمت بعد از جملهٔ دوم با قانون $u_n=cu_{n-1}+bu_{n-2}$ بهم مربوط می‌شوند. اگر A و B طوری انتخاب شوند که $u_1=P_1$ و $u_2=P_2$ باشد، در اینصورت: $u_n=P_n$.
مقادیر لازم برای A و B به‌ترتیب عبارتند از P_1 و P_2-cP_1 یعنی a و b.
از آنجا صورت تقارب nام کسر مسلسل مفروض، همان ضریب x^{n-1} در بسط $\frac{a+bx}{1-cx-bx^2}$ برحسب توانهای صعودی x می‌باشد.

به ترتیب مشابهی ،مخرج تقارب nام ضریب x^{n-1} در تقسیم صورت بر مخرج کسر $\dfrac{Q_1+(Q_2-cQ_1)x}{1-cx-bx^2}$ یعنی $\dfrac{1}{1-cx-bx^2}$ می‌باشد .

۴۷۴. صورت تقارب nام، عبارتست از ضریب x^{n-1} در

$$\frac{1+3x}{1-2x-3x^2}=\frac{3}{2(1-3x)}-\frac{1}{2+2x}$$

از آنجا:

$$P_n=\frac{1}{2}\left[3^n+(-1)^n\right]$$

همچنین Q_n مساوی است با ضریب x^{n-1} در

$$\frac{1}{1-2x-3x^2}=\frac{3}{4(1-3x)}+\frac{1}{4(1+x)}$$

از آنجا،

$$Q_n=\frac{1}{4}\left[3^n-(-1)^n\right]$$

و بنابراین:

$$\frac{P_n}{Q_n}=2\times\frac{3^n+(-1)^n}{3^n-(-1)^n}$$

۴۷۵. به ترتیب داریم:

$$\sqrt{43}=6+\sqrt{43}-6=6+\frac{7}{\sqrt{43}+6}=6+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{43}+6}{7}},$$

$$\frac{\sqrt{43}+6}{7}=1+\frac{\sqrt{43}-1}{7}=1+\frac{42}{7(\sqrt{43}+1)}=$$

$$=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{43}+1}{6}},$$

$$\frac{\sqrt{43}+1}{6}=1+\frac{\sqrt{43}-5}{6}=1+\frac{18}{6(\sqrt{43}+5)}=$$

$$=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{43}+5}{3}}$$

$$\frac{\sqrt{43}+5}{3}=3+\frac{\sqrt{43}-4}{3}=3+\frac{27}{3(\sqrt{43}+4)}=$$

$$=۳+\cfrac{۱}{\cfrac{\sqrt{۴۳}+۴}{۹}},$$

$$\frac{\sqrt{۴۳}+۴}{۹}=۱+\frac{\sqrt{۴۳}-۵}{۹}=۱+\frac{۱۸}{۹(\sqrt{۴۳}+۵)}=$$

$$=۱+\cfrac{۱}{\cfrac{\sqrt{۴۳}+۵}{۲}},$$

$$\frac{\sqrt{۴۳}+۵}{۲}=۵+\frac{\sqrt{۴۳}-۵}{۲}=۵+\frac{۱۸}{۲(\sqrt{۴۳}+۵)}=$$

$$=۵+\cfrac{۱}{\cfrac{\sqrt{۴۳}+۵}{۹}},$$

$$\frac{\sqrt{۴۳}+۵}{۹}=۱+\frac{\sqrt{۴۳}-۴}{۹}=۱+\frac{۲۷}{۹(\sqrt{۴۳}+۴)}=$$

$$=۱+\cfrac{۱}{\cfrac{\sqrt{۴۳}+۴}{۳}},$$

$$\frac{\sqrt{۴۳}+۴}{۳}=۳+\frac{\sqrt{۴۳}-۵}{۳}=۳+\frac{۱۸}{۳(\sqrt{۴۳}+۵)}=$$

$$=۳+\cfrac{۱}{\cfrac{\sqrt{۴۳}+۵}{۶}},$$

$$\frac{\sqrt{۴۳}+۵}{۶}=۱+\frac{\sqrt{۴۳}-۱}{۶}=۱+\frac{۴۲}{۶(\sqrt{۴۳}+۱)}=$$

$$=۱+\cfrac{۱}{\cfrac{\sqrt{۴۳}+۱}{۷}},$$

$$\frac{\sqrt{۴۳}+۱}{۷}=۱+\frac{\sqrt{۴۳}-۶}{۷}=۱+\frac{۷}{۷(\sqrt{۴۳}+۶)}=$$

$$=۱+\frac{۱}{\sqrt{۴۳}+۶},$$

$$\sqrt{۴۳}+۶=۱۲+\sqrt{۴۳}-۶=\ldots$$

و بنابراین:

$$\sqrt{43}=6+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{12+}\cdot$$

که دورهٔ تناوب آن از ده عدد ۱، ۱، ۳، ۱، ۵، ۱، ۳، ۱، ۱و ۱۲ تشکیل شده‌است.

۴۷۶.

$$\sqrt{a^2+2a}=a+\sqrt{a^2+2a}-a=a+\frac{2a}{a+\sqrt{a^2+2a}}=$$

$$=a+\frac{2a}{a+a+}\frac{2a}{a+\sqrt{a^2+2a}}=a+\frac{2a}{2a+}\frac{2a}{2a+}\cdot$$

۴۷۷. رشتهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \qquad (1)$$

و ثابت می‌کنیم مجموع n جمله از این رشته مساوی تفاوت nام کسرمسلسل زیر می‌باشد:

$$\frac{u_1}{1-}\frac{u_2}{u_1+u_2-}\frac{u_1u_3}{u_2+u_3-}\frac{u_2u_4}{u_3+u_4-} \qquad (2)$$

$$\cdot-\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1}+u_n-}\cdot$$

اثبات قضیه‌برای حالتهای $n=1,2,3$ به‌سادگی انجام می‌شود،فرض‌می‌کنیم حکم برای n صحیح باشد، ثابت می‌کنیم در اینصورت برای $n+1$ هم

صحیح است. برای حالت $n+1$ باید جملهٔ دیگری از رشته را با تبدیل u_n به u_n+u_{n+1} به حساب آورد و با این تغییر عبارت $\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1}+u_n}$ به صورت

$$\frac{u_{n-2}(u_n+u_{n+1})}{u_{n-1}+u_n+u_{n+1}}$$

در می‌آید که به سادگی روشن می‌شود مساوی

$$\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1}+u_n-\frac{u_{n-1}u_{n+1}}{u_n+u_{n+1}}}$$

می‌باشد، یعنی مجموع $n+1$ جمله از رشتهٔ (۱) مساوی تقارب nام کسر مسلسل (۲) می‌باشد، پس

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{u_1}{1-\frac{u_2}{u_1+u_2-\frac{u_1u_3}{u_2+u_3-\frac{u_2u_4}{u_3+u_4-\cdots}}}} \qquad \text{(A)}$$

همچنین به طریق مشابهی می‌توان ثابت کرد که

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\ (\text{تا جملهn}) =$$

$$=\frac{u_1}{1+\frac{u_2}{u_1-u_2-\frac{u_1u_3}{u_2-u_3-\frac{u_2u_4}{u_3-u_4-\cdots}}}} \quad (\text{تا n خارج قسمت})\ \text{(B)}$$

رابطهٔ (A) مربوط به اولر است.

چون بیشتر محاسبه‌ها بخصوص محاسبه‌های تقریبی به‌یاری رشته‌ها انجام می‌گیرد، بنابراین دراین مورد هم‌کسرهای مسلسل دارای اهمیت می‌شوند.

حالتهای خاص زیر جالب است :

$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2 b_3} \pm \ldots \text{(تا n جمله)} =$$

$$= \frac{a_1}{b_1 \mp} \frac{b_1 a_2}{b_2 \pm a_2 \mp} \frac{b_2 a_3}{b_3 \pm a_3 \mp \cdot} \quad \text{(تا n خارج‌قسمت)} \qquad (C)$$

(باید یا تمام علامتهای بالا و یا تمام علامتهای پایین در نظر گرفته شود).

$$\frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \pm \frac{1}{a_4} + \ldots \text{(تا n جمله)} =$$

$$= \frac{1}{a_1 \mp} \frac{a_1^2}{a_2 \pm a_1 \mp} \frac{a_2^2}{a_3 \pm a_2 \mp \cdot} \quad \text{(تا n خارج‌قسمت)} \qquad (D)$$

اثبات این دو رابطه را هم شبیه قبل و با استقراء ریاضی می‌توان انجام داد.
حالتهای خاصی از (C) به صورت زیر است:

$$a_1 \pm a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 \pm a_1 a_2 a_3 a_4 + \ldots =$$

$$= \frac{a_1}{1 \mp} \frac{a_2}{1 \pm a_2 \mp} \frac{a_1 a_3}{1 \pm a_3 \mp} \frac{a_2 a_4}{1 \pm a_4 \mp \cdot} \qquad (E)$$

$$\frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \pm \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{a_1 \mp} \frac{a_1}{a_2 \pm 1 \mp} \frac{a_2}{a_3 \pm 1 \mp} \frac{a_3}{a_4 \pm 1 \mp \cdot} \qquad (F)$$

مثلا با استفاده از رابطهٔ (D) داریم:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\ddots}}}} = \log_e 2 \text{ (اولر)}$$

زیرا بـا قرار دادن $a_1=1$ و $a_2=2$ و $a_3=3$ و غیره در رابطهٔ (D) فوراً این نتیجه حاصل می‌شود.

۴۷۸. با توجه به رابطهٔ (F) از مسألهٔ قبل داریم:

$$S=\frac{1}{1}-\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}-\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\dots=1-\frac{1}{e}$$

۴۷۹. داریم:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

از آنجا بدست می‌آید:

$$P_{n+1}=P_n+P_{n-1} \implies P_{n+1}-P_{n-1}=P_n\ ,$$
$$P_3+P_5+\dots+P_{2n-1}=(P_4-P_2)+(P_6-P_4)+\dots+$$
$$+(P_{2n}-P_{2n-2})=P_{2n}-P_2$$

رابطهٔ دوم هم بهمین‌ترتیب ثابت می‌شود.

۴۸۰. با توجه به رابطهٔ[1]

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{P_n}{Q_n}+\frac{NQ_n}{P_n}\right)$$

داریم: $P_{2n}=P_n^2+NQ_n^2\ ;\ Q_{2n}=2P_nQ_n$

و باز $a_1P_n+P_{n-1}=NQ_n\ ,\ a_1Q_n+Q_{n-1}=P_n$

یا $P_n^2-NQ_n^2=P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(-1)^n$

---

۱) برای اثبات‌این رابطه مثلا می‌توانید به‌کتاب «نظریهٔ اعداد» صفحهٔ ۱۱۹ مراجعه کنید.

بنابراین

$$NQ_n^۲=P_n^۲+(-۱)^{n+۱} \implies P_{۲n}=۲P_n^۲+(-۱)^{n+۱}$$

۴۸۱. بنابه تعریف داریم:

$$\frac{۱}{a_n}+\frac{۱}{a_{n-۲}}=\frac{۲}{a_{n-۱}}$$

بنابراین

$$\frac{a_{n-۱}}{a_n}=۲-\frac{a_{n-۱}}{a_{n-۲}} \implies \frac{a_n}{a_{n-۱}}=\frac{۱}{۲-\frac{a_{n-۱}}{a_{n-۲}}}$$

و به طریق مشابه

$$\frac{a_{n-۱}}{a_{n-۲}}=\frac{۱}{۲-\frac{a_{n-۲}}{a_{n-۳}}}, \dots, \frac{a_۳}{a_۲}=\frac{۱}{۲-\frac{a_۲}{a_۱}}$$

۴۸۲. برای x، تقاربها عبارتند از

$$\frac{a}{۱}, \frac{ab+۱}{b}, \frac{abc+c+a}{bc+۱}, \frac{abcd+cd+ad+ab+۱}{bcd+d+b},$$

$$x=\frac{(abcd+cd+ad+ab+۱)x+abc+c+a}{(bcd+b+d)x+bc+۱}$$

و از آنجا:

$$(bcd+d+b)x^۲-(abcd+ab+ad-bc+cd)x-$$
$$-(abc+c+a)=۰$$

و اگر به‌ترتیب a،b،c وd را به $-d$، $-c$، $-b$ و $-a$ تبدیل کنیم، بدست می‌آید :

$$(abc+c+a)y^۲+(abcd+ab+ad-bc+cd)y-$$
$$-(bcd+b+d)=۰$$

و چون y ریشهٔ منفی این معادله است، با فرض $y=-\frac{۱}{z}$ داریم:

$$(bcd+d+b)z^۲-(abcd+ab+ad-bc+cd)z-$$
$$-(abc+c+a)=۰$$

و از آنجا $z=x$ و $xy=-1$.

۴۸۳. فرض می‌کنیم: $\frac{a\varphi(x+1)}{x\varphi(x)}=\frac{a}{x+F}$ ، از آنجا

$$F=x\frac{\varphi(x)-\varphi(x+1)}{\varphi(x+1)}$$

اما

$$\varphi(x)-\varphi(x+1)=\frac{a}{x(x+1)}+\frac{a^2}{1!}\cdot\frac{1}{x(x+1)(x+2)}+$$

$$+\frac{a^3}{2!}\cdot\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+\ldots=\frac{a}{x(x+1)}\varphi(x+2)$$

بنابراین $F=\frac{a}{x+1}\cdot\frac{\varphi(x+2)}{\varphi(x+1)}$

و از آنجا

$$\frac{a\varphi(x+1)}{x\varphi(x)}=\frac{a}{x+\frac{a}{x+1}\cdot\frac{\varphi(x+2)}{\varphi(x+1)}}=\frac{a}{x+}\frac{a}{x+1+}\frac{a}{x+2+}.$$

* * *

۴۸۴. جواب: اولا) $x^2-641x+10000=0$.

ثانیاً) $1000x^2-117x-1=0$

ثالثاً) $x^2-670x+25789=0$

۴۸۵. جواب: $\begin{cases}x_1=5\\y_1=3\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}x_2=3\\y_2=5\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}x_{3,4}=\frac{-9\pm\sqrt{21}}{2}\\y_{3,4}=\frac{-9\mp\sqrt{21}}{2}\end{cases}$

۴۸۶. جواب:

$$\begin{cases} x_1=6 \\ y_1=6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2} \\ y_2=\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_3=\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2} \\ y_3=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

۴۸۷. دستگاه کمکی چنین می‌شود:

$$\sigma_1\sigma_2=20 \quad ; \quad 4\sigma_1=5\sigma_2$$

و از آنجا: $\begin{cases} \sigma_1=5 \\ \sigma_2=4 \end{cases}$ یا $\begin{cases} \sigma_1=-5 \\ \sigma_2=-4 \end{cases}$

جواب: $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases}$;

$$\begin{cases} x_3=\dfrac{-5+\sqrt{41}}{2} \\ y_3=\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_4=\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2} \\ y_4=\dfrac{-5+\sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

۴۸۸. اگر مجهولهای جدیدرا $\sigma_1=x+y$ و $\sigma_2=xy$ فرض کنیم، دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 7(\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2)=31(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2) \\ \sigma_1^2-\sigma_2=3 \end{cases}$$

اگر معادلهٔ اول را به σ_1 ساده کنیم (که جوابی هم حذف نمی‌شود) و سپس مقدار σ_2 را از معادلهٔ دوم بدست آورده، در معادلهٔ اول قرار دهیم، به معادلهٔ دو مجذوری زیر می‌رسیم:

$$7\sigma_1^4-43\sigma_1^2+36=0$$

که از آنجا جوابهای زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \sigma_1=\pm\dfrac{6}{\sqrt{7}} \\ \sigma_2=\dfrac{15}{7} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sigma_1=\pm 1 \\ \sigma_2=-2 \end{cases}$$

جواب: $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=-1 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=2 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x_3=-2 \\ y_3=1 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x_4=1 \\ y_4=-2 \end{cases}$

بقیهٔ جوابها موهومی است.

۴۸۹. از تقسیم معادلهٔ دوم برمعادلهٔ اول بدست می‌آید: $\sigma_2^2=36\sigma_1$. اگر σ_1 را از این معادله بدست آورده و در معادلهٔ اول قرار دهیم به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\sigma_2^6-2\times 36^2\sigma_2^3-13\times 36^3=0$$

و از آنجا جوابهای زیر بدست می‌آید $(i=\sqrt{-1})$:

$$\begin{cases} \sigma_1=1 \\ \sigma_2=-6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sigma_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2=3(1+i\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2=3(1-i\sqrt{3}) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sigma_1=\sqrt[3]{169} \\ \sigma_2=6\sqrt[3]{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1=\sqrt[3]{169}\times\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2=-3\sqrt[3]{13}(1+i\sqrt{3}) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sigma_1=\sqrt[3]{169}\times\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2=-3\sqrt[3]{13}(1-i\sqrt{3}) \end{cases}$$

که هریك از آنها دو جواب از دستگاه مفروض را می‌دهند:

(بقیهٔ جوابها موهومی‌اند) $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=-2 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=3 \end{cases}$

۴۹۰. اگر فرض کنیم $z=-y$ ، دستگاه مفروض چنین می‌شود:

$$\begin{cases} x^3+z^3=5 \\ xz^2+x^2z=1 \end{cases}$$

جواب: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ y_1 = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ y_2 = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

۴۹۱. با وجودی که معادلهٔ سوم نسبت به x و y و z متقارن نیست، می‌توان دستگاه را با استفاده از معادله‌های اول و دوم حل کرد. از دو معادلهٔ اول داریم:

$$3\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 = b^3 \;;\; \sigma_1 = 2b$$

و از آنجا بدست می‌آید: $\sigma_1 = 2b$ و $\sigma_2 = \frac{3}{2}b^2$.

حالا معادلهٔ سوم دستگاه را چنین می‌نویسیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2 + 2z^2$$

ویا:

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = b^2 + 2z^2$$

که با قرار دادن مقادیر σ_1 و σ_2 بدست می‌آید: $z = 0$ ، حالا از رابطه‌های σ_1 و σ_2 خواهیم داشت:

$$x + y = 2b \;;\; xy = \frac{3}{2}b^2$$

و از آنجا جوابها بدست می‌آید:

$\begin{cases} x_1 = b\left(1 + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ y_1 = b\left(1 - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ z_1 = 0 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x_2 = b\left(1 - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ y_2 = b\left(1 + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ z_2 = 0 \end{cases}$

۴۹۲. دستگاه کمکی بصورت زیر در می‌آید :

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \dfrac{73}{8} \\ \sigma_2 = \sigma_1 \\ \sigma_3 = 1 \end{cases}$$

اگر مقادیر σ_2 و σ_3 را از دو معادلهٔ آخر در معادلهٔ اول قرار دهیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\sigma_1^3-3\sigma_1^2-\frac{49}{8}=0$$

که می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$(2\sigma_1)^3-6(2\sigma_1)^2-49=0$$

که از آنجا $2\sigma_1=7$ و $\sigma_1=\frac{7}{2}$ بدست می‌آید (دوجواب دیگرموهومی‌است):

$$\sigma_1=\frac{7}{2}\ ;\ \sigma_2=\frac{7}{2}\ ;\ \sigma_3=1$$

و بنابراین x وy وz ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$u^3-\frac{7}{2}u^2+\frac{7}{2}u-1=0$$

که بصورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(u-1)(u-2)(u-\frac{1}{2})=0$$

بنابراین‌جوابهای حقیقی‌دستگاه با تبدیل دوری‌از جوابهای زیر بدست‌می‌آید:

$$x=1\ ;\ y=2\ ;\ z=\frac{1}{2}$$

۴۹۳. فرض می‌کنیم:

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}=u\ ;\ \sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=v$$

در اینصورت دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$u+v=1\ ;\ u^5+v^5=1$$

که حل آن مشکل نیست.

جواب : $x_1=\frac{1}{2}$ ؛ $x_2=-\frac{1}{2}$

۴۹۴. اگر فرض کنیم $y=\sqrt{17-x^2}$ ، دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x+y+xy=9 \end{cases}$$

جواب: $x_1=1$ ؛ $x_2=4$

۴۹۵. با فرض $y=\sqrt[3]{35-x^3}$ ، حل معادلهٔ مفروض به حل دستگاه زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$$

جواب : $x_1=2$ ، $x_2=3$

۴۹۶. با فرض $\sqrt[7]{a-x}=u$ و $\sqrt[7]{x}=v$ به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} u+v=\sqrt[7]{a} \\ u^7+v^7=a \end{cases}$$

جواب: $x_1=0$ ، $x_2=a$

۴۹۷. با فرض $z^2+1=u$ و $z^2-1=-v$ به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} u+v=2 \\ u^7+v^7=2^7 \end{cases}$$

جواب: $z=\pm 1$ (بقیهٔ جوابها موهومی است).

۴۹۸. فرض می‌کنیم: $\sqrt[4]{\alpha}=u$ و $\sqrt[4]{\beta}=v$ ، در اینصورت خواهیم داشت:

$$-p=\alpha+\beta=u^4+v^4 \ ; \ q=\alpha\beta=u^4v^4$$

اگر $u+v=\sigma_1$ و $uv=\sigma_2$ بگیریم،دستگاه اخیر به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$-p=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2 \ ; \ q=\sigma_2^4$$

که با حذف σ_2 به معادلهٔ دو مجذوری زیر می‌رسیم :

$$\sigma_1^4-4\sqrt[4]{q}\sigma_1^2+2\sqrt{q}+p=0$$

و چون $\sigma_1=\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}$ مقداریست مثبت، تنها،جواب مثبت این معادله‌قابل قبول است. جوابهای این معادله چنین است:

$$\pm\sqrt{2\sqrt[4]{q}\pm\sqrt{2\sqrt{q}-p}}$$

با توجه به شرطهای $\alpha>0$ و $\beta>0$ نتیجه می‌شود که $p<0$ و $q>0$ و $p^2-4q\geqslant 0$ است ، بنابراین $|p|\geqslant 2\sqrt{q}$ یعنی $-p\geqslant 2\sqrt{q}$ می‌شود و از آنجا:

$$\sqrt{2\sqrt{q}-p} > \sqrt{4\sqrt{q}} = 2\sqrt[4]{q}$$

و بنابراین جواب مورد نظر مسأله چنین است:

$$\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}=\sqrt{2\sqrt[4]{q}+\sqrt{2\sqrt{q}-p}}$$

۴۹۹. اگر $a+b=\sigma_1$ و $ab=\sigma_2$ و $(a-b)^2=z$ فرض کنیم، داریم:

$$a^2+b^2=\sigma_1^2-2\sigma_2=\sigma_1^2-2\times\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)=\frac{1}{2}\sigma_1^2+\frac{1}{2}z$$

و چون $z\geqslant 0$ و طبق شرط مسأله $\sigma_1\geqslant c$ است، خواهیم داشت:

$$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}c^2$$

و اگر در این نامساوی استدلال قبل را تکرار کنیم، بدست می‌آید:

$$a^4+b^4\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c^2\right)^2=\frac{1}{8}c^4$$

و شبیه‌آن:

$$a^8+b^8\geqslant\frac{1}{128}c^8$$

توضیح. باروش استقراء ریاضی می‌توان ثابت کرد که اگر $a+b\geqslant c$ باشد، به ازای هر مقدار صحیح n نامساوی زیر صحیح است:

$$a^{2^n}+b^{2^n}\geqslant\frac{c^{2^n}}{2^{2^n-1}}$$

۵۰۰. داریم:

$$\begin{aligned}
&2x^4+7x^3y+9x^2y^2+7xy^3+2y^4=\\
&=2(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)+7\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+9\sigma_2^2=\\
&=2\sigma_1^4-\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_2^2=(\sigma_2+2\sigma_1^2)(\sigma_1^2-\sigma_2)=\\
&=[xy+2(x+y)^2][(x+y)^2-xy]=\\
&=(2x^2+5xy+2y^2)(x^2+xy+y^2)=\\
&\qquad=(x+2y)(2x+y)(x^2+xy+y^2)
\end{aligned}$$

۵۰۱. با تبدیل عبارت‌به σ_1 و σ_2 به معادلهٔ دو مجذوری باریشه‌های موهومی

می‌رسیم، بنابراین بهتر است که تجزیهٔ آنرا با روش‌ضریبهای نامعین انجام دهیم :

$$3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4=$$
$$=(Ax^2+Bxy+Cy^2)(Cx^2+Bxy+Ay^2)$$

که اگر یکبار $x=y=1$ ، سپس $x=0$ و $y=1$ و بالاخره $x=1$ ، $y=-1$ قرار دهیم به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ A-B+C=\pm 6 \\ \quad A\cdot C=3 \end{cases}$$

علامت $-$ در معادلهٔ‌دوم‌منجر به جوابهای موهومی می‌شود و علامت $+$جوابهای زیر را می‌دهد

$$A=1\ ;\ B=-2\ ;\ C=3$$

و از آنجا :

$$3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4=$$
$$=(x^2-2xy+3y^2)(3x^2-2xy+y^2)$$

۵۰۲. جواب: $(2x^2+3xy+2y^2)(x-3y)(3x-y)$

۵۰۳. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^5-x^5-y^5}=\frac{\sigma_1^7-S_7}{\sigma_1^5-S_5}=\frac{7\sigma_1^5\sigma_2-14\sigma_1^3\sigma_2^2+7\sigma_1\sigma_2^3}{5\sigma_1^3\sigma_2-5\sigma_1\sigma_2^2}=$$
$$=\frac{7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^4-2\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2)}{5\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2)}=\frac{7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2)^2}{5\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2)}=\frac{7}{5}(\sigma_1^2-\sigma_2)=$$
$$=\frac{7}{5}[(x+y)^2-xy]=\frac{7}{5}(x^2+xy+y^2)$$

۵۰۴. اگر $x+y+z=\sigma_1$ ، $xy+xz+yz=\sigma_2$ و $xyz=\sigma_3$باشد، داریم :

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4=$$
$$=2(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3)-(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_2)=$$
$$=-\sigma_1^4+4\sigma_1^2\sigma_2-8\sigma_1\sigma_3=\sigma_1(4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3-8\sigma_3)$$

بنابراین عبارت مفروض بر $\sigma_1 = x+y+z$ قابل‌قسمت است، ولی چون‌این عبارت نسبت به‌متغیرهای x و y و z از درجهٔزوج است، با تبدیل x به $-x$ (یا y به $-y$ و یا z به $-z$) تغییر نمی‌کند و در نتیجه بدست می‌آید:

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4=$$
$$=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)P$$

و با آزمایش (مثلا به ازای $x=y=z=1$) روشن می‌شود که $P=1$است.

۵۵۵. شرطهای مسأله را می‌توان چنین نوشت:

$$\sigma_1=1 \;;\; \sigma_1^2-2\sigma_2=1 \;;\; \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=1$$

از این دستگاه بدست می‌آید: $\sigma_2=0$ و $\sigma_3=0$. تساوی $\sigma_3=0$ به معنای $xyz=0$ است.

۵۵۶. اگر ساده‌ترین چند جمله‌ایهای متقارن را نسبت بـه x و y و z بـه σ_1 و σ_2 و σ_3، ونسبت به u و v و w را به t_1 و t_2 و t_3 نشان‌دهیم، شرطهای مسأله به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases}\sigma_1=t_1\\ \sigma_1^2-2\sigma_2=t_1^2-2t_2\\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=t_1^3-3t_1t_2+3t_3\end{cases}$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$\sigma_1=t_1 \;;\; \sigma_2=t_2 \;;\; \sigma_3=t_3$$

و بنابراین نتیجه می‌شود که برای هر چند جمله‌ای بصورت $\varphi(t_1, t_2, t_3)$ داریم:

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=\varphi(t_1, t_2, t_3)$$

وبنابراین‌اگر $f(x, y, z)$ چندجمله‌ای متقارنی‌نسبت به xوyوz باشد،داریم:

$$f(x, y, z)=f(u, v, w)$$

و درحالت خاص: $x^n+y^n+z^n=u^n+v^n+w^n$

۵۵۷. اگر فرض کنیم:

$$a-b=x \;;\; b-c=y \;;\; c-a=z$$

اتحاد مفروض، به‌صورت زیر در می‌آید:

$$x^6+y^6+z^6-9x^2y^2z^2=-2x^3z^3-2x^3y^3-2y^3z^3$$

که اگر تبدیلهای زیر را در نظر بگیریم:

$$x^6+y^6+z^6=3\sigma_3^2-2\sigma_2^3\ ;$$
$$x^3z^3+x^3y^3+y^3z^3=\sigma_2^3+3\sigma_3^2\ ;$$
$$x^2y^2z^2=\sigma_3^2\ ;\ \ x+y+z=\sigma_1=0$$

صحت اتحاد به‌سهولت ثابت می‌شود.

۵۰۸. اگر $S_n=x^n+y^n+z^n$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+3\sigma_1\sigma_3$$
$$S_8=\sigma_1^8-8\sigma_1^6\sigma_2+20\sigma_1^4\sigma_2^2-16\sigma_1^2\sigma_2^2+2\sigma_2^4+8\sigma_1^5\sigma_3-$$
$$-32\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3+12\sigma_1^2\sigma_3^2+24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3-8\sigma_2\sigma_3^2$$

در اینصورت داریم:

$$2S_8-S_4^2=\ldots-16\sigma_2\sigma_3^2$$

تمام جمله‌های شامل σ_1 را از سمت راست به سمت چپ منتقل و دو طرف را مجذور می‌کنیم:

$$(2S_8-S_4^2-\ldots)^2=256\sigma_2^2\sigma_3^4$$

که می‌توان آنرا به صورت زیر درآورد:

$$(2S_8-S_4^2)^2+\ldots=256\sigma_2^2\sigma_3^4$$

وچون‌داریم: $S_4=\ldots+2\sigma_2^2$ می‌توان نوشت: $256\sigma_2^2\sigma_3^4=128S_4\sigma_3^4+\ldots$ (که جمله‌های بعدی همه قابل‌قسمت بر σ_1 هستند). وبنابراین خواهیم داشت:

$$(2S_8-S_4^2)^2-128S_4\sigma_3^4=\ldots$$

به عبارت دیگر باید سمت‌چپ تساوی بالا بر σ_1 قابل‌قسمت باشد:

$$(2S_8-S_4^2)^2-128S_4\sigma_3^4=\sigma_1 A$$

که در آن A چند جمله‌ای متقارنی است (اگر خواننده بخواهد A را پیدا کند، باید تمام عملهای مربوطه را انجام دهد).

حالا اگر فرض کنیم: $x=\sqrt[4]{a}$ ، $y=\sqrt[4]{b}$ ، $z=\sqrt[4]{c}$ (که

در اینصورت $S_4=a+b+c$ و $S_8=a^2+b^2+c^2$ و $\sigma_3=\sqrt[4]{abc}$

خواهد بود). بدست می‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}}=\frac{1}{\sigma_1}=\frac{A}{(2S_8-S_4^2)^2-128S_4\sigma_3^4}=$$

$$=\frac{A}{(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)^2-128(a+b+c)abc}$$

۵۰۹. معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\sigma_1=\sigma_1^2-3\sigma_2$$

از طرف دیگر برای اینکه دستگاه $x+y=\sigma_1$ و $xy=\sigma_2$ دارای‌ریشه‌های حقیقی برای x و y باشد باید $4\sigma_2\leqslant\sigma_1^2$ باشد و بنابراین:

$$\sigma_1^2-\sigma_1=3\sigma_2\leqslant\frac{3}{4}\sigma_1^2$$

یعنی:

$$\frac{1}{4}\sigma_1^2-\sigma_1\leqslant 0 \implies \sigma_1(\sigma_1-4)\leqslant 0$$

و از اینجا نتیجه می‌شود: $0\leqslant\sigma_1\leqslant 4$

حالا اگر به معادلهٔ $3\sigma_2=\sigma_1^2-\sigma_1$ برگردیم، جوابهای زیر امکان دارد:

$$\left|\begin{matrix}\sigma_1=0\\ \sigma_2=0\end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix}\sigma_1=1\\ \sigma_2=0\end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix}\sigma_1=2\\ \sigma_2=\frac{2}{3}\end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix}\sigma_1=3\\ \sigma_2=2\end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix}\sigma_1=4\\ \sigma_2=4\end{matrix}\right.$$

و در نتیجه یکی‌ازچهار دستگاه زیر را خواهیم داشت (حالت سوم راکه‌برای x و y جوابهای صحیح نمی‌دهد، حذف کردیم):

$$\left|\begin{matrix}x+y=0\\ xy=0\end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix}x+y=1\\ xy=0\end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix}x+y=3\\ xy=2\end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix}x+y=4\\ xy=4\end{matrix}\right.$$

که با حل آنها جوابهای صحیح معادله بدست می‌آید:

$$\left|\begin{matrix}x_1=0\\ y_1=0\end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix}x_2=1\\ y_2=0\end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix}x_3=0\\ y_3=1\end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix}x_4=2\\ y_4=1\end{matrix}\right.;$$

$$\begin{vmatrix} x_5=1 \\ y_5=2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_6=2 \\ y_6=2 \end{vmatrix}$$

۵۱۰. با توجه به شرط مسأله داریم:

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{S_7}{7}=\sigma_2^{\,2}\cdot\sigma_3$$

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\times\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{S_5}{5}\times\frac{S_2}{2}=$$

$$=(-\sigma_2\sigma_3)(-\sigma_2)=\sigma_2^{\,2}\cdot\sigma_3$$

۵۱۱. از معادلهٔ مفروض معلوم است که هریك از مقادیر x و y و z مخالف صفراند، فرض می‌کنیم:

$$u=\frac{xy}{z}\ ;\ v=\frac{xz}{y}\ ;\ w=\frac{yz}{x}$$

در اینصورت طبق فرض مسأله داریم: $\sigma_1=u+v+w=3$ و سپس:

$$\sigma_2=uv+uw+vw=x^2+y^2+z^2$$

از نامساوی واضح: $(u+v+w)^2\geqslant 3(uv+uw+vw)$

نتیجه می‌شود: $x^2+y^2+z^2\leqslant 3$

با توجه به‌اینکه xوyوz مقادیری صحیح و مخالف صفرند، نتیجه می‌شود: $|x|=|y|=|z|=1$، بنابراین هریك از مقادیر u و v و w مساوی ± 1 می‌شود، ولی از رابطهٔ $u+v+w=3$ نتیجه می‌شود که $u=v=w=1$، بنابراین هریك ازمقادیر xوyوz مساوی ± 1 می‌شود ولی بهرحال حاصلضرب آنها باید مساوی ۱ شود.

جوابها به قرار زیرند:

$$\begin{vmatrix} x_1=1 \\ y_1=1 \\ z_1=1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2=1 \\ y_2=1 \\ z_2=-1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_3=-1 \\ y_3=1 \\ z_3=-1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_4=-1 \\ y_4=-1 \\ z_4=1 \end{vmatrix}$$

* * *

۵۱۲. داریم: $n(n+1)=n^2+n$ که اگر در آن به جای n مقادیر

متوالی از ۱ تا n را قرار دهیم و با هم جمع کنیم، بدست می‌آید:

$$1\times 2+2\times 3+\cdots+n(n+1)=$$
$$=(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)=$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

۵۱۳. اگر مجموع مطلوب را S بگیریم، به‌ترتیب داریم:

$$S=\frac{3}{9}(9+99+999+\cdots+99\ldots99)=$$
$$=\frac{1}{3}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)]=$$
$$=\frac{1}{3}[(10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-n]=$$
$$=\frac{1}{27}(10^{n+1}-9n-10)$$

۵۱۴. اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$A=\frac{1}{2}\ ;\ B=-1\ ;\ C=\frac{1}{2}$$

و بنابراین داریم:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{n+1}$$

در دو طرف این اتحاد به‌ترتیب از ۱ تا n بجای n قرار می‌دهیم و باهم‌جمع می‌کنیم (جمله‌های پشت‌سرهم مجموع را u_1 و u_2، ...، u_n و مجموع n جملهٔ آنرا S_n گرفته‌ایم):

$$+\left|\begin{array}{l} u_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\\ u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}\\ u_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{4}\\ u_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{5}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n}\\ u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{n+1}\end{array}\right.$$

$$S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{n+1}$$

ویا :

$$S_n=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

و حد مجموع جمله‌ها، وقتی که n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، چنین می‌شود:

$$S=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,S_n=\frac{1}{4}$$

۵۱۵. اگر مجموع مفروض را S_n فرض کنیم داریم:

$$\begin{aligned}2S_n&=(1-\cos 2x)+(1-\cos 4x)+\\&+(1-\cos 6x)+\cdots+(1-\cos 2nx)=\\&=n-(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cdots+\cos 2nx)=\\&=n-\frac{\sin nx\cos(n+1)x}{\sin x}\end{aligned}$$

و از آنجا:

$$S_n=\frac{n\sin x-\sin nx\cos(n+1)x}{2\sin x}$$

۵۱۶. اگر مجموع مطلوب را S_n فرض کنیم، با توجه به رابطهٔ:

$$\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)$$

خواهیم داشت:

$$4S_n=(\cos 3x+\cos 6x+\cdots+\cos 3nx)+$$
$$+3(\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx)=$$
$$=\frac{\sin\frac{3}{2}nx\cos\frac{3}{2}(n+1)x}{2\sin\frac{3}{2}x}+\frac{3\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

۵۱۷. با توجه به رابطهٔ: $\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$ خواهیم‌داشت:

$$S_n=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

و حد این مجموع وقتی که n به‌سمت بی‌نهایت میل کند ، چنین می‌شود:

$$S=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,S_n=\frac{3}{4}$$

۵۱۸. جملهٔ عمومی این مجموع را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n^2+2n+1)-n^2}{n^2(n+1)^2}=$$
$$=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

و حالا اگر در اتحاد $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$ ، به جای n به ترتیب از ۱ تا n قرار دهیم و با هم جمع کنیم ، بدست می‌آید:

$$S_n=\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

و ضمناً :
$$S=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,S_n=1$$

۵۱۹. داریم:

$$k!+k\cdot k!=k!(1+k)=(k+1)! \;;$$

و سپس:

$$(k+1)!+(k+1)(k+1)!=$$
$$=(k+1)!(1+k+1)=(k+2)! \;;$$

و بنابراین با روش استقراء ریاضی به سادگی بدست می‌آید:

$$k!+k\cdot k!+(k+1)(k+1)!+\cdots+(n-1)(n-1)!=n!$$

۵۲۰. جملهٔ اول این مجموع را می‌توان به این‌ترتیب تبدیل کرد:

$$\sin^4\alpha=\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$$
$$=\sin^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$$

و بنابراین اتحادهای زیر واضح است:

$$+\left|\begin{array}{l}\sin^4\alpha=\sin^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\\[2mm] \frac{1}{4}\sin^4 2\alpha=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\frac{1}{16}\sin^2 4\alpha\\[2mm] \frac{1}{16}\sin^4 4\alpha=\frac{1}{16}\sin^2 4\alpha-\frac{1}{64}\sin^2 8\alpha\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{1}{4^n}\sin^4 2^n\alpha=\frac{1}{4^n}\sin^2 2^n\alpha-\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2 2^{n+1}\alpha\end{array}\right.$$

که اگرمجموع‌مطلوب را S_n بگیریم، از جمع رابطه‌های بالا خواهیم‌داشت:

$$S_n=\sin^2\alpha-\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2 2^{n+1}\alpha$$

و ضمناً چون $\sin^2 2^{n+1}\alpha$ مقداریست محدود و مثبت که از واحد بزرگتر نیست، داریم:

$$S=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, S_n=\sin^2\alpha$$

۵۲۱. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{n+2}{n!(n+2)+(n+2)!}=$$

$$=\frac{1}{n!+(n+1)!}=\frac{1}{n!(n+2)}=\frac{n+1}{(n+2)!}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

جواب: $S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}$ و ضمناً $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

۵۲۲. راهنمایی: از اتحاد:

$\frac{n+p}{(n+p+1)!}=\frac{1}{(n+p)!}-\frac{1}{(n+p+1)!}$ استفاده کنید.

جواب: $S_p=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+p+1)!}$ و ضمناً $S=\lim_{p\to\infty}S_p=\frac{1}{n!}$

۵۲۳. داریم:

$u_1=1\ ;\ u_2=2+u_1=3\ ;\ u_3=3+u_2=6;\dots$

به این ترتیب u_1وu_2و...وu_n همان دنبالهٔ عددهای مثلثی هستند. داریم:

$u_1+u_2=1+3=2^2\ ;\ u_2+u_3=3+6=3^2\ ;$

فرض می‌کنیم که داشته باشیم: $u_k+u_{k+1}=(k+1)^2$

ثابت می‌کنیم: $u_{k+1}+u_{k+2}=(k+2)^2$

به‌ترتیب داریم:

$$u_{k+1}+u_{k+2}=[(k+1)+u_k]+[(k+2)+u_{k+1}]=$$
$$=(2k+3)+(u_k+u_{k+1})=(2k+3)+(k+1)^2=(k+2)^2$$

و بنابراین حکم مسأله با روش استقراء ریاضی ثابت شد.

۵۲۴. حاصلضرب زیر را در نظر می‌گیریم:

$$P=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\dots\times\frac{2n-1}{2n}$$

می‌دانیم که اگر به صورت مخرج کسری یك مقدار اضافه کنیم، کسر به‌واحد نزدیك می‌شود، بنابراین داریم:

$$P<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)P}\ ;$$

$$P^2<\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n}\Longrightarrow P<\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

حالا اگر، طبق فرض مسأله $n=5000$ فرض کنیم، داریم:

$$P<\frac{1}{\sqrt{10000}}=0/01$$

۵۲۵. مقدار سمت راست تساوی چنین است (مسألهٔ ۵۱۲ را ببینید):

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

و همچنین مقدار سمت‌چپ تساوی :

$$\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)=n\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}(k-1)k=$$

$$=n\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)n(n+1)}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

۵۲۶. طبق شرط مسأله داریم:

$$a_2=3a_1+2$$
$$a_3=3a_2+2^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_k=3a_{k-1}+2^{k-1}$$

دو طرف تساوی اول را در 3^{k-2} و دوطرف تساوی‌دوم را در 3^{k-3} وغیره ضرب می‌کنیم و تساویهایی را که بدست می‌آید با هم جمع می‌کنیم ، بدست می‌آید:

$$a_k=3^{k-1}+2\times3^{k-2}+2^k\times3^{k-3}+\ldots+2^{k-1}=$$

$$=3^{k-1}+\frac{2}{3}\times3^{k-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times3^{k-1}+\ldots+$$

$$+\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\times 3^{k-1}=\frac{3^{k-1}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right]}{1-\frac{2}{3}}=3^{k}-2^{k}$$

و به این ترتیب: $a_n=3^n-2^n$

۵۲۷. اولین جملهٔ این عددها را $2k+1$ و آخرین آنها را $2k+(2n-1)$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$(2k+1)+(2k+3)+\cdots+[2k+(2n-1)]=7^3\ ;$$

و از آنجا: $n(2k+n)=7^3=7\times 49\ ;$

$$\begin{cases} n=7 \\ 2k+n=49 \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} n=7 \\ k=21 \end{cases}$$

جواب : $43;45;47;\ldots;55$

۵۲۸. رابطه‌های زیر به سادگی بدست می‌آید:

$$a_2=\frac{3a_1-1}{3-a_1}\ ;\ a_3=\frac{5a_1-3}{5-3a_1}\ ;\ a_4=\frac{9a_1-7}{9-7a_1}\ ;$$

$$a_5=\frac{17a_1-15}{17-15a_1}\ ;\ \cdots$$

و از اینجا می‌توان حدس زد:

$$a_k=\frac{(2^{k+1}+1)a_1-(2^{k+1}-1)}{(2^{k+1}+1)-(2^{k+1}-1)a_1}\qquad(1)$$

صحت این رابطه را با روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم:

$$a_{k+1}=\left[3\frac{(2^{k-1}+1)a_1-(2^{k-1}-1)}{(2^{k-1}+1)-(2^{k-1}-1)a_1}-1\right]:$$

$$:\left[3-\frac{(2^{k-1}+1)a_1-(2^{k-1}-1)}{(2^{k-1}+1)-(2^{k-1}-1)a_1}\right]=\frac{(2^{k}+1)a_1-(2^{k}-1)}{(2^{k}+1)-(2^{k}-1)a_1}$$

و به این‌ترتیب رابطهٔ (۱) ثابت شد (درحالتی که به ازای بعضی از مقادیر صحیح k، مقدار a_1 درمعادلهٔ $2^{k-1}+1-(2^{k-1}-1)a_1=0$ صدق کند، مسأله مفهوم خود را از دست می‌دهد).

حالا حد جملهٔ عمومی را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2^k+1)a_1-(2^k-1)}{(2^k+1)-(2^k-1)a_1}=$$

$$=\lim_{k\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2^k}\right)a_1-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}{\left(1+\frac{1}{2^k}\right)-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)a_1}=-1 \quad (a_1\neq 1)$$

اگر $a_1=1$ باشد، $a_k=1$ و $\lim_{k\to\infty} a_k=1$ خواهد بود.

۰۵۲۹ داریم:

$$u_1=S_1=3 \;;\; u_2=S_2-S_1=3 \;;\; u_3=S_3-S_2=5 \;;$$
$$u_4=S_4-S_3=7 \;;\; u_5=S_5-S_4=9 \;;\; \dots$$

و بنابراین $u_n=2n-1$ (برای $n\geqslant 2$) و S_n چنین است:

$$S_n=2+[1+3+5+\dots+(2n-1)]=2+n^2$$

۰۵۳۰ می‌توان نوشت:

$$u_n=\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{arctg}\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}=$$
$$=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg} n$$

و بنابراین داریم:

$$+\left|\begin{array}{l} u_1=\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1 \\ u_2=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2 \\ \dots\dots\dots \\ u_n=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n \end{array}\right.$$
$$\overline{S_n=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}1}$$

و ضمناً:

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

۰۵۳۱ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\log\cos a=\log\frac{\sin 2a}{2\sin a}=\log\sin 2a-\log\sin a-\log 2$$

که به سادگی بدست می‌آید:

$$S_n = \log\sin x - \log\sin\frac{x}{2^n} - n\log 2$$

وقتی‌که n به‌سمت بی‌نهایت میل کند $\frac{x}{2^n}$ به سمت صفر میل می‌کند و می‌توان بجای $\sin\frac{x}{2^n}$ خود قوس $\frac{x}{2^n}$ را اختیار کرد که در اینصورت بدست می‌آید:

$$S = \lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}[\log\sin x - \log x + n\log 2 - n\log 2] =$$

$$= \log\sin x - \log x = \log\frac{\sin x}{x}$$

۵۳۲. داریم:

$$S_n = \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

که با استفاده از اتحاد: $\frac{u}{1-u^2} = \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1-u^2}$ بدست می‌آید:

$$S_n = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}$$

و ضمناً: $$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-x^2}$$

۵۳۳. از رابطهٔ $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ استفاده کنید.

جواب: $S_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}$ و $S = \lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{1}{2}$

۵۳۴. داریم:

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}} = tg\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1}$$

جواب: $S_n=tg1-tg\frac{1}{n+1}$ و $S_n=tg1$ $S=\lim\limits_{n\to\infty}$

۵۳۵. داریم:

$$S_n=\cos^3\alpha-\frac{1}{3}\cos^3 3\alpha+\frac{1}{9}\cos^3 9\alpha-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\cos^3 3^{n-1}\alpha$$

با استفاده از رابطهٔ $\cos^3\varphi=\frac{1}{4}(\cos 3\varphi+3\cos\varphi)$ می‌توان نوشت:

$$+\left|\begin{array}{l}
\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)\\[2mm]
-\frac{1}{3}\cos^3 3\alpha=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\cos 9\alpha-\cos 3\alpha\right)\\[2mm]
\frac{1}{9}\cos^3 9\alpha=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\cos 27\alpha+\frac{1}{3}\cos 9\alpha\right)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\cos^3 3^{n-1}\alpha=\frac{1}{4}\Big[\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\cos 3^n\alpha+\\[2mm]
\qquad\qquad\qquad+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\cos 3^{n-1}\alpha\Big]
\end{array}\right.$$

$$S_n=\frac{1}{4}\left[3\cos\alpha+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\cos 3^n\alpha\right]$$

وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند $\cos 3^n\alpha$ مقداری بین ۱− و ۱+ باقی‌می‌ماند ، ولی ضریب آن به‌سمت صفر میل می‌کند و بنابراین:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}\cos\alpha$$

۵۳۶. عبارت u_n را می‌توان چنین نوشت:

$$u_n=\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}$$

جواب: $S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2+2n+2}$ و $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

۵۳۷. با فرض $u_{۱}=u_{۲}=۰$ می‌توان نوشت:

$$u_n=\frac{۱}{۸}\left(\frac{۵}{n-۲}+\frac{۶}{n}-\frac{۱۱}{n+۲}\right)$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$۸S_n=-۱۱\left(\frac{۱}{n+۲}+\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n-۱}\right)+۶\left(\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n-۱}\right)+$$
$$+۵\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+۱\right)+۶\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}\right)$$

و ضمناً : $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{۱۶۷}{۱۲}$

۵۳۸. جواب: $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{۶۵}{۳۶}$

۵۳۹. جواب: $S_n=\sqrt{n+۲}-\sqrt{n+۱}+۱-\sqrt{۲}$;
$S=\lim_{n\to\infty}S_n=۱-\sqrt{۲}$

۵۴۰. داریم: $u_n=\frac{۱}{۳^n}+\frac{۱}{۲^n}$ و بنابراین داریم.

$$S_n=\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\dots+\frac{۱}{۳^n}\right)+\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{۲^n}\right)=$$
$$=\frac{۳^n-۱}{۲\times۳^n}+\frac{۲^n-۱}{۲^n}=\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\times۳^n}\right)+\left(۱-\frac{۱}{۲^n}\right)=$$
$$=\frac{۳}{۲}-\left(\frac{۱}{۲\times۳^n}+\frac{۱}{۲^n}\right);$$
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{۳}{۲}$$

۵۴۱. از رابطهٔ $۳u_n=\frac{۱}{۳n-۲}-\frac{۱}{۳n+۱}$ استفاده کنید.

جواب: $S_n=\frac{n}{۳n+۱}$ و $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{۱}{۳}$

۵۴۲. اگر تفاضل $u_{n-۱}-u_n$ را تشکیل دهیم، خواهیم داشت:

$$u_{n-1}-u_n=\frac{2n-3}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}=\frac{2n-5}{2^n}=\frac{2n-1}{2^n}-\frac{4}{2^n}$$

و یا:

$$u_{n-1}-u_n=u_n-\frac{1}{2^{n-2}}$$

و از آنجا بدست میآید:

$$2u_n-u_{n-1}=\frac{1}{2^{n-2}}$$

بنابراین میتوان نوشت:

$$+\left|\begin{array}{l} 2u_2-u_1=1 \\ 2u_3-u_2=\frac{1}{2} \\ 2u_4-u_3=\frac{1}{4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2u_n-u_{n-1}=\frac{1}{2^{n-2}} \end{array}\right.$$

$$-u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}+2u_n=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}$$

و از آنجا به سادگی خواهیم داشت :

$$S_n+u_n-2u_1=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}}$$

که اگر به جای u_n و u_1 مقادیرشان را قرار دهیم ، پس از ساده کردن چنین میشود:

$$S_n=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}+1=3-\frac{2n+3}{2^n}$$

و در نتیجه:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=3$$

۵۴۴. واضح است که $a_n<1$ است، زیرا $1+a_{n-1}>1$ است، وهمچنین $a_n>\frac{1}{2}$ است زیرا اگر در تساوی $a_n=\frac{1}{1+a_{n-1}}$، بجای a_{n-1} بزرگترین مقدار خود، یعنی واحد، را قرار دهیم $a_n>\frac{1}{2}$ بدست می‌آید.

حالا تفاضل a_n-a_{n-1} را تشکیل می‌دهیم:

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{1+a_{n-1}}-\frac{1}{1+a_{n-2}}=\frac{a_{n-2}-a_{n-1}}{(1+a_{n-1})(1+a_{n-2})}$$

با توجه به اینکه a_{n-1} و a_{n-2} از $\frac{1}{2}$ بزرگترند، می‌توان نوشت:

$$|a_n-a_{n-1}|<\frac{4}{9}|a_{n-1}-a_{n-2}| \qquad (1)$$

اگر در رابطهٔ (۱) بجای n به‌ترتیب مقادیر پشت سرهم از ۳ تا n را قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$|a_3-a_2|<\frac{4}{9}|a_2-a_1|$$

$$|a_4-a_3|<\frac{4}{9}|a_3-a_2|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|a_n-a_{n-1}|<\frac{4}{9}|a_{n-1}-a_{n-2}|$$

از ضرب این نامساویها در یکدیگر بدست می‌آید:

$$\left|a_n-a_{n-1}\right|<\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\left|a_2-a_1\right|$$

a_2-a_1 مقداری است ثابت و وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند حد $\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}$ مساوی صفر می‌شود و بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-a_{n-1}|=0$$

یعنی وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند مقادیر a_n و a_{n-1} به‌سمت یک مقدار میل می‌کنند، اگر این مقدار را x فرض کنیم، باتوجه به‌رابطهٔ $a_n=\frac{1}{1+a_{n-1}}$

در حالت حدی داریم:

$$x=\frac{1}{1+x} \Longrightarrow x^2+x-1=0$$
$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

جواب: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

۵۴۴. مستقیماً محاسبه می‌کنیم:

$$a_1=1\ ;\ a_2=\frac{3}{2}\ ;\ a_3=\frac{5}{3}\ ;\ a_4=\frac{7}{4}\ ;\ \cdots$$

حدس می‌زنیم که $a_n=\frac{2n-1}{n}$ باشد، صحت آنرا با روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم:

$$a_{n+1}=\frac{4-a_n}{3-a_n}=\frac{4-\frac{2n-1}{n}}{3-\frac{2n-1}{n}}=\frac{2n+1}{n+1}$$

به این ترتیب صحت رابطهٔ $a_n=\frac{2n-1}{n}$ ثابت شد و در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2$$

۵۴۵. (a داریم:

$$a_1=1\ ;\ a_2=a_1\cos x+\cos x=2\cos x=\frac{\sin 2x}{\sin x}\ ;$$

$$a_3=a_2\cos x+\cos 2x=\frac{\sin 3x}{\sin x}$$

با روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم که: $a_n=\frac{\sin nx}{\sin x}$. این رابطه بـرای حالتهای $n=1,2,3$ صحیح است، فرض می‌کنیم که برای $n=k$ صحیح باشد، در اینصورت داریم:

$$a_{k+1}=a_k\cos x+\cos kx=\frac{\sin kx\cdot\cos x}{\sin x}+\cos kx=\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}$$

بنابراین جملهٔ nام دنباله به صورت $\frac{\sin nx}{\sin x}$ است.

b) داریم:

$$a_1=1\ ;\ a_2=2\cos x=\frac{\sin 2x}{\sin x}\ ;$$

$$a_3=2a_2\cos x-a_1=\frac{2\sin 2x\cos x}{\sin x}-1=\frac{\sin 3x}{\sin x}$$

فرض می‌کنیم رابطهٔ $a_n=\frac{\sin nx}{\sin x}$ برای $n=k$ درست باشد، در اینصورت داریم:

$$a_{k+1}=2a_k\cos x-a_{k-1}=\frac{2\sin kx\cos x}{\sin x}-$$

$$-\frac{\sin(k-1)x}{\sin x}=\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}$$

و از آنجا نتیجه می‌شود : $a_n=\frac{\sin nx}{\sin x}$.

۵۴۶. فرض می‌کنیم:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-2k+1)(2n-k+1)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n-2k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n-k+1}\ ;$$

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

با روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم: $2S_n=\sigma_n$.

برای $n=1$ داریم: $\sigma_1=1$ ، $S_1=\frac{1}{2}$ و $2S_1=\sigma_1$ روشن است که

$\sigma_{n+1}-\sigma_n=\frac{1}{n+1}$ سپس

$$S_{n+1}-S_n=\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n+2}\right)-\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2(n+1)}$$

یعنی: $2(S_{n+1}-S_n)=\sigma_{n+1}-\sigma_n$

یا : $2S_{n+1}-\sigma_{n+1}=2S_n-\sigma_n$

و چون $2S_1-\sigma_1=0$، بنابراین‌بافرض $2S_n-\sigma_n=0$ ، بدست می‌آید :
$2S_{n+1}-\sigma_{n+1}=0$، به این ترتیب: $2S_n=\sigma_n$.

۵۴۷. روشن است که تفاضل

$$a_k-b_k=2\times 3^{k+1}$$

بر ۵ قابل‌قسمت نیست، یعنی a و b همزمان بر ۵ قابل‌قسمت نیستند. ازطرف دیگر :

$$a_k\cdot b_k=(3^{2k+1}+4)^2-3^{2k+2}=9^{2k+1}+15\times 9^k+16$$

از تقسیم 9^{2k+1} بر ۵ باقیمانده‌ای مساوی ۴ و از تقسیم ۱۵ بر ۵ باقیمانده‌ای مساوی صفر و از تقسیم ۱۶ بر ۵ باقیمانده‌ای مساوی واحد بـدست می‌آید . بنابراین $a_k\cdot b_k$ مضربی‌است از ۵، یعنی یا a_k و یا b_k بر ۵ قابل‌قسمت‌اند.

۵۴۸. دنباله‌ای را متقارب گویند کـه جملهٔ عمومی آن a_n ، وقتی کـه $n\to\infty$، به سمت حد معینی میل‌کند. اگر دنبالهٔ زیر را محاسبه‌کنیم:

$$a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_6,b_6$$

معلوم می‌شود که $a_1=a_6$ و $b_1=b_6$. از اینجا به سادگی معلوم می‌شود که دنباله‌های مفروض به اینصورت‌اند:

$$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_1,\cdots$$
$$b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_1,\cdots$$

و این دنباله‌ها تنها وقتی متقاربند که داشته باشیم:

$$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5\ ;\ b_1=b_2=b_3=b_4=b_5$$

و ضمناً $\lim_{n\to\infty} a_n=a_1$ و $\lim_{n\to\infty} b_n=b_1$ ، از شرطهای دنباله‌ها نتیجه می‌شود که:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{\lim_{n\to\infty} b_{n-1}}{\lim_{n\to\infty} a_{n-1}}\ ;\ \lim_{n\to\infty} b_n=\frac{\lim_{n\to\infty} b_{n-1}-1}{\lim_{n\to\infty} a_{n-1}-1}$$

و از آنجا: $a_1=\frac{b_1}{a_1}$ و $b_1=\frac{b_1-1}{a_1-1}$

با حل این دستگاه و در نظر گرفتن $1<a_1<b_1$ بدست می‌آید:

$$a_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{و}\ b_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

۵۴۹. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم‌در تصاعد هندسی

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots, a_1q^{n-1}$$

($n>3$ و $q\neq 1$) داشته باشیم:

$$a_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=3^k$$

در اینصورت باید تساوی زیر را داشته باشیم:

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=3^l \qquad (1)$$

روشن است که قدر نسبت q نمی‌تواند بر ۳ قابل‌قسمت باشد . دو حالت پیش می‌آید:

۱) $q=3m+1$. در اینحالت تمام توانهای q ضمن تقسیم بر ۳ ، باقیمانده‌ای مساوی واحد دارند و بنابراین نتیجه می‌شود که باید n بر ۳ قابل‌قسمت باشد ($n=3q$). می‌توانیم تساوی (۱) را به اینصورت بنویسیم:

$$(1+q+q^2)(1+q^3+\cdots+q^{3p-3})=3^l \qquad (2)$$

که از آنجا باید $1+q+q^2$ مقسوم علیهی از 3^l باشد ، یعنی

$$1+q+q^2=3^r \qquad (3)$$

ولی $q=3m+1$ بود و رابطهٔ (۳) به اینصورت در می‌آید:

$$1+q+q^2=9m^2+9m+3=3^r\ ;$$
$$3m^2+3m+1=3^{r-1}$$

که تنها به ازای $r=1$ ممکن است، ولی در اینصورت باید $q=1$ باشد که طبق شرط مسأله ممکن نیست.

۲) $q=3m-1$. در اینحالت سمت‌چپ رابطهٔ (۱) تنها وقتی بر ۳ قابل‌قسمت است که n عددی زوج باشد. $n=2p$ ، در اینصورت

$$(1+q)(1+q^2+q^4+\cdots+q^{2p-2})=3^l \qquad (4)$$

که از آنجا به این تساوی می‌رسیم:

$$1+q^2+q^4+\cdots+q^{2p-2}=3^r \qquad (5)$$

سمت‌چپ این تساوی عبارتست از مجموع جمله‌های یك تصاعد هندسی باقدر نسبت $q^2=3m'+1$ و بنابراین تساوی (۵) برای $p>2$ ممکن نیست (با توجه به حالت (۱) و برای $p=2$ هم تساوی (۴) ممکن نیست ، زیرا تساوی (۴) به‌ازای $p=2$ به صورت زیر در می‌آید:

$$1+q+q^2+q^3=3^l$$

و می‌توان ثابت کرد که $1+q+q^2+q^3=A$ تنها به ازای $q=0$ می‌تواند توانی از ۳ باشد:

از تساویهای $A=(1+q)(1+q^2)$ و $A=3^l$ بدست می‌آید:

$$q+1=3^s \text{ و } q^2+1=3^k$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$(3^s-1)^2+1=3^k \implies 3^{2s}-2\times 3^s+2=3^k$$

که تنها به ازای $s=k=0$ برقرار است . به این‌ترتیب لازم است $q=0$ باشد.

بنابراین در هر دو حالت به تناقض برخورد می‌کنیم.

۵۵۰. اگر S را دو برابر کنیم.

$$2S=2a+4a^3+6a^5+\cdots+2na^{2n-1}$$

که مشتق مجموع زیر است:

$$A=a^2+a^4+a^6+\cdots+a^{2n}=\frac{a^2(a^{2n}-1)}{a^2-1}$$

مشتق تابع اخیر نسبت به a برابر $2S$ است.

جواب:
$$S=\frac{a[na^{2n+2}-(n+1)a^{2n}+1]}{(a^2-1)^2}$$

۵۵۱. از اتحاد زیر استفاده کنید:

$$x^{2^n}+\frac{1}{x^{2^n}}-1=\frac{x^{2^{n+1}}+\frac{1}{x^{2^{n+1}}}+1}{x^{2^n}+\frac{1}{x^{2^n}}+1}$$

جواب:
$$P=\frac{x^{2^{n+1}}+\frac{1}{x^{2^{n+1}}}+1}{x+\frac{1}{x}+1}$$

۵۵۲. جملهٔ عمومی این رشته را به مجموع جبری سه‌کسر تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

از این اتحاد بدست می‌آید:

$$A=\frac{1}{2},\ B=1,\ C=-\frac{3}{2}$$

یعنی :

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{2(n+2)}$$

اگر بجای n به‌ترتیب مقادیر از ۱ تا n را قرار دهیم و با هم جمع کنیم ، بدست می‌آید:

$$S_n=\frac{5}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{3}{2(n+2)}$$

و روشن است که وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، S_n به سمت $\frac{5}{4}$ میل خواهد کرد .

* * *

۵۵۳. از آنجا که داریم:

$$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})^3=9(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})+12$$

واضح است که $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ ریشهٔ حقیقی عبارت زیر است:

$$f(x)=x^3-9x-12$$

اگر $f(x)$ را به صورت $x(x^2-9)-12$ بنویسیم، به‌سادگی روشن‌می‌شود که‌برای $x>3$ تابع $f(x)$ صعودی است. از طرف دیگر داریم: $f(\sqrt[3]{43})<0$ و $f(\sqrt[3]{44})>0$ و بنابراین:

$$\sqrt[3]{43}<\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}<\sqrt[3]{44}$$

۵۵۴. فرض می کنیم:

$$x_k=\underbrace{\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n+\cdots+\sqrt[n]{n}}}}_{\text{مرتبه } k}$$

در اینصورت داریم : (۱) $\quad x_{k+1}=\sqrt[n]{n+x_k}$.

چون $n>1$ است،واضح‌است که داریم: $1<x_1<2$، فرض می کنیم $1<x_k<2$ باشد، از رابطهٔ (۱) با توجه به نامساوی$1<\sqrt[n]{n+2}<2$ (که به سادگی و مثلا با استقراء ریاضی ثابت می‌شود) بدست می‌آید:

$$1<x_{k+1}<2 \qquad (2)$$

دنبالهٔ عددهای $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ صعودی است و ضمناً از سمت بالا محدود است ، بنابراین دارای حدی است. اگر این حـد را x بنامیم ، از نامساوی (۲) نتیجه می‌شود $1<x\leqslant 2$ و از تساوی (۱) خواهیم داشت:

$$x^n-x-n=0$$

عدد ۱ به ازای هیچ‌مقداری‌ازn، ریشهٔ این معادله‌نیست وعدد۲ به ازای $n=2$ ریشهٔ این معادله است، بنابراین به ازای $n\geqslant 2$ داریم:

$$1<\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n+\cdots+\sqrt[n]{n+\cdots}}}\leqslant 2$$

ضمناً علامت تساوی تنها به‌ازای $n=2$ صحیح است. بنابراین نامساوی مضاعف حکم وقتی برقرار است که $n>2$ باشد.

۵۵۵. از نامساویهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt[k]{k+1}>1\ ;\ \sqrt[k]{k}<\sqrt[k]{k+2}<2\quad (k>2)\qquad (1)$$

که اولین آنها واضح است و نامساوی دوم را هم می‌توان باروش استقراء ریاضی ثابت کرد. دنبالهٔ عددهای a_n صعودی است و با استفاده از نامساویهای (۱) خواهیم داشت:

$$a_n=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\cdots+\sqrt[n]{n}}}<$$

$$<\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\cdots+\sqrt[n-1]{n-1+2}}}<\cdots<\sqrt{2+\sqrt[4]{5}}$$

بنابراین دنبالهٔ عددهای مفروض دارای حدی مساوی a_0 می‌باشند که ضمناً داریم:

$$a_0<\sqrt{2+\sqrt[4]{5}}<2$$

حالا ، با استفاده از (۱) بدست می‌آید:

$$a_n>\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\cdots+\sqrt[n-1]{n}}}>\cdots>\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{5}}}$$

و بنابراین:

$$a_0>\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{5}}}$$

ولی به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که:

$$\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{5}}}>1/9$$

و بنابراین خواهیم داشت: $1/9<a_0<2$

۵۵۶. نامساویهای واضح زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a^2-ab+b^2\geqslant ab\ ; \\ b^2-bc+c^2\geqslant bc\ ; \\ c^2-ca+a^2\geqslant ca \end{cases}$$

اگر دوطرف این نامساویها را به‌ترتیب در $a+b$ ، $b+c$ و $c+a$ ضرب کنیم، بدست می‌آید:

$$\begin{cases} a^3+b^3>ab(a+b) \\ b^3+c^3>bc(b+c) \\ c^3+a^3>ca(c+a) \end{cases}$$

که از جمع آنها خواهیم داشت:

$$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

ویا: $$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$

و از آنجا: $$a^3+b^3+c^3\geqslant a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$$

۵۵۷. متذکر می‌شویم که نامساوی تنها برای $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$ صحیح است . اثبات رابه طریق استقراء ریاضی انجام می‌دهیم.

اگر $n=1$ باشد، داریم :

$$(\sec^2\alpha-1)(cosec^2\alpha-1)=tg^2\alpha\, cotg^2\alpha=1=1^2$$

یعنی درحالت $n=1$ علامت تساوی صحیح است.

اگر $n=2$ باشد، داریم:

$$(\sec^4\alpha-1)(cosec^4-1)=tg^2\alpha(\sec^2\alpha+1)cotg^2\alpha(cosec^2\alpha+1)=$$
$$=(2+tg^2\alpha)(2+cotg^2\alpha)=4+2(tg^2\alpha+cotg^2\alpha)+1\geqslant 9$$

زیرا $tg^2\alpha+cotg^2\alpha\geqslant 2$ می‌باشد، بنابراین:

$$(\sec^4\alpha-1)(cosec^4\alpha-1)\geqslant(1+2)^2$$

علامت تساوی وقتی صحیح است که داشته باشیم: $tg\alpha=cotg\alpha=1$،

یعنی $\alpha=(4k+1)\frac{\pi}{4}$ باشد.

برای $n=3$ داریم:

$$(\sec^6\alpha-1)(\operatorname{cosec}^6\alpha-1)=(\sec^2\alpha-1)(\sec^4\alpha+\sec^2\alpha+1)\times$$
$$\times(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)\times(\operatorname{cosec}^4\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha+1)=[(\sec^2\alpha+1)^2-$$
$$-\sec^2\alpha][(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)^2-\operatorname{cosec}^2\alpha]=(3+3tg^2\alpha+tg^4\alpha)\times$$
$$\times(3+3cotg^2\alpha+cotg^4\alpha)=19+12(tg^2\alpha+cotg^2\alpha)+$$
$$+3(tg^4\alpha+cotg^4\alpha)\geqslant 19+24+6=49$$

و چون داریم $36=(1+2+3)^2$ بنابراین خواهیم داشت:

$$(\sec^6\alpha-1)(\operatorname{cosec}^6\alpha-1)>(1+2+3)^2$$

و علامت تساوی در اینحالت وجود ندارد .

حالا فرض می‌کنیم به ازای $n=m\geqslant 3$ داشته باشیم:

$$(\sec^{2m}\alpha-1)(\operatorname{cosec}^{2m}\alpha-1)>(1+2+3+\dots+$$
$$+m)^2=\frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

در اینصورت به ازای $n=m+1$ خواهیم داشت:

$$(\sec^{2m+2}\alpha-1)(\operatorname{cosec}^{2m+2}\alpha-1)=(\sec^2\alpha\cdot\sec^{2m}\alpha-1)\times$$
$$\times(\operatorname{cosec}^2\alpha\cdot\operatorname{cosec}^{2m}\alpha-1)=\frac{(\sec^{2m}\alpha-\cos^2\alpha)(\operatorname{cosec}^{2m}\alpha-\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}>$$
$$>\frac{4}{\sin^2 2\alpha}(\sec^{2m}\alpha-1)(\operatorname{cosec}^{2m}\alpha-1)>4\times\frac{m^2(m+1)^2}{4}=$$
$$=m^2(m+1)^2=(m+1)^2\left(\frac{m+2}{2}+\frac{m-2}{2}\right)^2>$$
$$>\frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}=[1+2+\dots+m+(m+1)]^2$$

بنابراین به ازای هر مقدار $n\geqslant 3$ داریم:

$$(\sec^{2n}\alpha-1)(\operatorname{cosec}^{2n}\alpha-1)>(1+2+\dots+n)^2$$

وعلامت‌تساوی تنها به‌ازای $n=1$ و $n=2$ [با شرط $\alpha=(4k+1)\frac{\pi}{4}$]

برقرار است.

۵۵۸. داریم:

$$\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_5 3}=\log_3 2+\log_3 5=\log_3 10>2$$

۵۵۹. فرض می‌کنیم:

$$a^3+b^3+c^3-16SR+8Sr=\lambda$$

در اینصورت پس از تبدیلهای ساده خواهیم داشت:

$$\lambda=abc\left[(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9\right]$$

از طرف دیگر داریم:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+$$
$$+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geqslant 9$$

و بنابراین خواهیم داشت: $\lambda\geqslant 0$

علامت تساوی تنها برای حالتی که مثلث مفروض متساوی‌الاضلاع باشد، برقرار است.

۵۶۰. فرض می‌کنیم $a\geqslant b\geqslant c>0$. اگر $a\geqslant b+c$ باشد، نامساوی برقرار است، زیرا سمت‌چپ نامساوی غیر مثبت می‌شود، در حالی که سمت راست نامساوی مقداری است مثبت. اگر $a<b+c$ باشد، سمت‌چپ نامساوی‌مثبت است و می‌توان نوشت:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=$$
$$=\sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2}=$$
$$=\sqrt{[b^2-(a-c)^2][a^2-(b-c)^2][c^2-(a-b)^2]}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{a^2b^2c^2}=abc$$

علامت تساوی وقتی برقرار است که داشته باشیم: $a=b=c$.

روش دوم. اتحاد زیر واضح است:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)-abc\equiv\frac{1}{2}[(a+b-c)\times$$
$$\times(a-b)^2+(b+c-a)(b-c)^2+(c+a-b)(c-a)^2]$$

وبنابراین نامساوی مسأله برای حالت $a \geqslant b \geqslant c$ و $a<b+c$ برقرار است.
درحالت $a \geqslant b \geqslant c$ و $a>b+c$ هم می‌توان همان استدلال روش اول را تکرار کرد.

۵۶۱. فرض می‌کنیم:

$$x=\frac{a}{۲}+t \ ; \ y=\frac{a}{۲}-t$$

دراینصورت داریم:

$$x^n=\left(\frac{a}{۲}+t\right)^n=\frac{a^n}{۲^n}+n\frac{a^{n-۱}}{۲^{n-۱}}\cdot t+\cdots$$

$$y^n=\left(\frac{a}{۲}-t\right)^n=\frac{a^n}{۲^n}-n\frac{a^{n-۱}}{۲^{n-۱}}\cdot t+\cdots$$

و ازآنجا:

$$x^n+y^n=۲\times\frac{a^n}{۲^n}+\cdots$$

و بنابراین:

$$x^n+y^n \geqslant \frac{a^n}{۲^{n-۱}}$$

علامت تساوی برای وقتی است که $t=۰$ یعنی $x=y=\frac{a}{۲}$ باشد.

۵۶۲. باتوجه به‌اینکه ازهردو رأس مثلث وپای ارتفاعهایی که ازاین دو رأس عبور می‌کنند، می‌توان دایره‌ای عبور داد، داریم:

$$x=a|\cos A| \ ; \ y=b|\cos B| \ ; \ z=c|\cos C|$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\cos^۲A+\cos^۲B+\cos^۲C \geqslant \frac{۳}{۴}$$

ویا:

$$\sin^۲A+\sin^۲B+\sin^۲C \geqslant \frac{۹}{۴}$$

واین نامساوی هم واضح است. زیرا درهرمثلث داریم:

$$OH^۲=۹R^۲-(a^۲+b^۲+c^۲)$$

که درآن O مرکز دایرهٔ محیطی و H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث است. از این تساوی نتیجه می‌شود:

$$\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{4R^{2}}<\frac{9}{4}$$

توصیح: می‌توان نامساوی $\frac{a^{2}}{x^{2}}+\frac{b^{2}}{y^{2}}+\frac{c^{2}}{z^{2}}\geqslant 12$ را هم ثابت کرد.

در حقیقت داریم:

$$\frac{1}{cos^{2}A}+\frac{1}{cos^{2}B}+\frac{1}{cos^{2}C}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{(cos A\, cos B\, cos C)^{2}}}$$

از طرف دیگر می‌دانیم: $cos A\, cos B\, cos C\leqslant\frac{1}{8}$ است و بنابراین:

$$\frac{1}{cos^{2}A}+\frac{1}{cos^{2}B}+\frac{1}{cos^{2}C}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{64}}}=12$$

حالت تساوی برای موقعی است که داشته باشیم:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=2$$

۵۶۳. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{t^{3}+t}{t-1}-4-2\sqrt{3}=\frac{t^{3}-3t-2\sqrt{3}t+4+2\sqrt{3}}{t-1}=$$

$$=\frac{(t-1)^{3}+[3t^{2}-(6+2\sqrt{3})t+5+2\sqrt{3}]}{t-1}$$

چون $t>1$ است $t-1>0$ می‌شود و سه‌جمله‌ای داخل کروشه‌هم همیشه‌مثبت است و بنابراین صحت نامساوی ثابت می‌شود.

۵۶۴. ابتدا صحت نامساوی زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-b_i)>1-\sum_{i=1}^{n}b_i\quad(0<b_i<1)\qquad(1)$$

نامساوی (۱) درحالت $n=2$ واضح است. فرض می‌کنیم که برای $n=k$ هم صحیح باشد، دراینصورت بدست می‌آید:

$$\prod_{j=1}^{k+1}(1-b_j)>(1-\sum_{j=1}^{k} b_j)(1-b_{k+1})=$$

$$=1-\sum_{i=1}^{k+1} b_i+b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} b_i > 1-\sum_{i=1}^{n+1} b_i$$

یعنی نامساوی (۱) بهازاء همهٔ مقادیر n صحیح است.

حالا اگر درنامساوی (۱) فرض‌کنیم $b_j=1-a_j$ ، بدست می‌آید $0<a^i<1$ و ضمنا:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i>1-n+\sum_{i=1}^{n} a_i$$

وازآنجا:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} a_i<n-1$$

۵۶۵. چون دو طرف نامساوی مثبت است ، می‌توان آنرا مجذور کرد ، که پس از ساده کردن چنین می‌شود:

$$-(ab+cd)<\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}$$

در حالتی‌که $ab+cd\geqslant 0$ باشد نامساوی واضح است، در حالتی که $ab+cd<0$ باشد باز دوطرف نامساوی مثبت است و می‌توانآنرا مجذور کرد که پس از ساده بودن بهصورت زیر در می‌آید:

$$(ad-bc)^2\geqslant 0$$

که واضح است. حالت تساوی برای موقعی است‌که داشته باشیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

۵۶۶.[1] صحت نامساوی برای $n=1$ و $n=2$ مستقیماً بدست می‌آید . اگر از جملهٔ چهارم بهبعد ، عددهای $n,\dots,4,3$ را در مخرجها بهعددکوچکتر ۲ تبدیل کنیم، نامساوی زیر بدست می‌آید:

---

۱) حل مسأله‌های ۵۶۶ ، ۵۶۷ ، ۵۶۸ و ۵۶۹و۵۷۹ از کتاب «دورهٔ اختصاصی جبر مقدماتی» ترجمهٔ مولف همین‌کتاب برداشته شده است .

$$\frac{۱}{۱\times۲\times۳\times\cdots\times k}<\frac{۱}{۲^{k-۱}}$$

بنابراین داریم (S را مجموع کسرهای سمت چپ نامساوی گرفته‌ایم):

$$S<۱+۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}=۱+\frac{۱-\frac{۱}{۲^n}}{۱-\frac{۱}{۲}}=۳-\frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

که با حذف جملهٔ منفی $-\frac{۱}{۲^{n-۱}}$ به همان نامساوی فرض می‌رسیم.

۵۶۷. با استفاده از بسط دو جمله‌ای و حل مسألهٔ قبل به‌ترتیب داریم:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n=۱+۱+\frac{n(n-۱)}{۱\times۲}\cdot\frac{۱}{n^۲}+\cdots+$$
$$\frac{n(n-۱)\cdots(n-k+۱)}{۱\times۲\times\cdots\times k}\cdot\frac{۱}{n^k}+\cdots+$$
$$+\frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots\times۲\times۱}{۱\times۲\times\cdots\times(n-۱)n}\cdot\frac{۱}{n^n}=۲+$$
$$+\frac{۱}{۱\times۲}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)+\cdots+\frac{۱}{۱\times۲\times\cdots\times k}\left(۱-\frac{n}{۱}\right)\cdots$$
$$\left(۱-\frac{k-۱}{n}\right)+\cdots+\frac{۱}{۱\times۲\times\cdots\times n}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\left(۱-\frac{۲}{n}\right)\cdots$$
$$\left(۱-\frac{n-۱}{n}\right)<۲+\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۱\times۲\times۳}+\cdots+$$
$$+\frac{۱}{۱\times۲\times\cdots\times n}<۳$$

۵۶۸. از نامساوی اتحادی زیر استفاده کنید:

$$\frac{۱}{k^۲}=\frac{۱}{k\cdot k}<\frac{۱}{(k-۱)k}=\frac{۱}{k-۱}-\frac{۱}{k}$$

۵۶۹. در حالتی که هیچیك از عددها منفی نباشند، واضح است که داریم:

$$|a_۱+a_۲+\cdots+a_n|=|a_۱|+|a_۲|+\cdots+|a_n|$$

و در حالتی که بین عددها جملهٔ منفی هم وجود داشته باشد، برای محاسبهٔ

مقدار قدرمطلق‌مجموع می‌توان قدرمطلق مقادیرمثبت را جداگانه و قدرمطلق مقادیر منفی را جداگانه باهم جمع کرد و مجموع کوچکتر را از مجموع بزرگتر کم کرد. برای محاسبهٔ مجموع قدرمطلقها ، می‌توان مجموع قدرـ مطلقهای‌مقادیر مثبت رابا مجموع قدر مطلقهای‌مقادیر منفی‌جمع کرد و واضح است که دراینصورت داریم :

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|<|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

۵۷۰. معادله به‌ازای $x>3$ جواب ندارد (زیرادر اینصورت رادیکال‌موهومی می‌شود) و به ازای $x\leqslant 2$ همیشه برقرار است ، زیرا در اینحالت سمت چپ نامعادله مثبت و سمت راست آن منفی می‌شود. برای مقادیر $2<x\leqslant 3$،چون دوطرف نامعادله‌مثبت است می‌توانیم‌آنرا مجذور کنیم، که پس از ساده‌کردن چنین می‌شود:

$$x^2-3x+1<0 \Longrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

که با توجه به شرط $2<x\leqslant 3$ بدست می‌آید: $2<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

جواب: $x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

۵۷۱. رادیکال وقتی حقیقی است‌که داشته باشیم: $x\leqslant -\frac{3}{2}$ یا $x\geqslant \frac{1}{2}$. از طرف دیگر $2x+1\leqslant 0$ یا $x\leqslant -\frac{1}{2}$ نمی‌تواند باشد (عدد منفی نمی‌تواند از عدد مثبت بزرگتر شود) و بنابراین نامعادله برای $x\leqslant -\frac{1}{2}$جواب‌ندارد.

وقتی $x\geqslant \frac{1}{2}$ باشد ، دو طرف نامعادله مثبت و می‌توان آنرا مجذور کرد که در اینصورت به نامساوی واضح زیر می‌رسیم:

$$4x^2+4x+1>4x^2+4x-3$$

بنابراین نامعادله جواب $x\geqslant \frac{1}{2}$ را قبول دارد .

۵۷۲. جواب : $x\leqslant -5$ ؛ $-\frac{4}{3}\leqslant x<4$

۵۷۳. جواب: نامعادله در حالت $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ جواب ندارد و در حالت $a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ یا $a<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ دارای جوابی به این صورت است:

$$a-1-\sqrt{a^2-a-1}<x<a-1+\sqrt{a^2-a-1}$$

۵۷۴. با توجه به شرط $a>0$ ، نا معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$2a+2\sqrt{a^2-x^2}>a^2 \Longrightarrow 2\sqrt{a^2-x^2}>a^2-2a \quad (1)$$

حالت اول: $a^2-2a<0$ یعنی $0<a<2$. در این حالت نامعادله به ازای همهٔ مقادیر $-a\leqslant x\leqslant a$ برقرار است.

حالت دوم: $a=2$. در این حالت نامعادلهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$\sqrt{4-x^2}>0$$

و برای همهٔ مقادیر $-2<x<2$ درست است.

حالت سوم: $a>2$. در این حالت $a^2-2a>0$ ومی‌توان نامعادله را چنین نوشت:

$$\begin{cases} 4(a^2-x^2)>a^2(a-2)^2 \\ |x|<a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2<a^3\times\frac{4-a}{4} \\ |x|<a \end{cases} \quad (2)$$

اگر $a\geqslant 4$ باشد نامعادله جواب ندارد . در حالت $2<a<4$ دستگاه نا-معادله‌های (۲) وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x<\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$$

متذکر می‌شویم که درحالت $0<a<4$ داریم : $\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}<a$ و بنابراین می‌توان نوشت:

$$-\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}<x<\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$$

۵۷۵. باید جوابهای مشترک نامعادله‌های زیر را پیدا کنیم:

$$\frac{1-x}{x^2-5x+6}\geqslant 0 \ , \ x^4-x^2\geqslant 0$$

جواب: $x<-1$ ، $2<x<3$ ، $x=0$ و $x=1$

۵۷۶. جواب: ۱) اگر $a<10$ باشد: $x<\frac{4a}{5}$ یا $x>\frac{16a+3}{2(10-a)}$.

۲) اگر $a=10$ باشد: $x<8$.

۳) اگر $a>10$ باشد: $\frac{16a+3}{2(10-a)}<x<\frac{4a}{5}$.

۵۷۷. جواب: $-2<x<2$ ؛ $3<x<7$.

۵۷۸. چهار حالت درنظر بگیرید (بسته به اینکه x و y مثبت یامنفی باشند).

جواب:

$$\begin{cases}0\leqslant x<1\\ x-1<y<-x+1\end{cases} ; \begin{cases}-1<x\leqslant 0\\ -x-1<y<x+1\end{cases}$$

۵۷۹. نامعادله را می‌توان به اینصورت نوشت:

$$y^4+(2x^2+a^2)y^2+x^2(x^2-a^2)<0 \qquad (1)$$

با فرض $z=y^2$ ، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$z^2+(2x^2+a^2)z+x^2(x^2-a^2)=0$$

چون داریم:

$$\begin{cases}\Delta=(2x^2+a^2)^2-4x^2(x^2-a^2)=a^2(8x^2+a^2)>0\\ z_1+z_2=-(2x^2+a^2)<0\end{cases}$$

ریشه های این معادله حقیقی و متمایزند و ضمناً ریشهٔ کوچکتر منفی است.

اگر $|x|<a$ باشد، $z_1z_2=x^2(x^2-a^2)<0$ ، $z_1<0<z_2$.

اگر $|x|>a$ باشد ، $z_1<z_2<0$ و درحالت $x=\pm a$ یا $x=0$ داریم : $z_2=0$.

نامعادلهٔ (۱) وقتی برقرار است که $z=y^2$ بین دوریشهٔ z_1 و z_2 واقع باشد، ولی چون $y^2\geqslant 0$ است، باید نامساوی $0\leqslant y^2<z_2$ برقرار باشدواین وقتی امکان دارد که $|x|<a$ باشد. اگر $|x|\geqslant a$ یا $x=0$ باشد ، $z_2\leqslant 0$ می‌شود ونامعادلهٔ (۱) نمی‌تواند برقرار باشد.

به این ترتیب اگر $|x|<a$ باشد ، $|y|<\sqrt{z_2}$ می‌شود.

جواب: برای $0<x<a$ و $-a<x<0$ داریم:

$$-\sqrt{\frac{a\sqrt{۸x^۲+a^۲}-(۲x^۲+a^۲)}{۲}}<y<$$
$$<\sqrt{\frac{a\sqrt{۸x^۲+a^۲}-(۲x^۲+a^۲)}{۲}}$$

۵۸۰. دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\text{حالت اول}\ \begin{cases}x^۲+y^۲-۱<۰\\ y^۲-x^۲<۰\end{cases}\ ;\ \text{حالت دوم}\ \begin{cases}x^۲+y^۲-۱>۰\\ y^۲-x^۲>۰\end{cases}$$

حالت اول. داریم: $y^۲<۱-x^۲$ و $y^۲<x^۲$. چون $y^۲$ مقداری است مثبت باید $۱-x^۲>۰$ یعنی $۰<x<۱$ باشد. ضمناً اگر $|x|\leqslant\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد $۱-x^۲\leqslant x^۲$ و اگر $|x|\leqslant\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد $۱-x^۲>x^۲$ می‌شود. بنابراین جوابها چنین است:

$$y<\begin{cases}|x| & \left(۰<x<\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\\ \sqrt{۱-x^۲} & \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\leqslant x<۱\right)\end{cases}$$

و بهمین ترتیب برای حالت دوم می‌توان عمل کرد و به این جوابها رسید:

$$y^۲>\begin{cases}x^۲ & \left(|x|\leqslant\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\\ ۱-x^۲ & \left(|x|>\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\end{cases}$$

۵۸۱. اگر $x<۰$ باشد $a-x>۰$ می‌شود و نامعادله به صورت $y^۲>\frac{x^۳}{a-x}$ در می‌آید که همیشه برقرار است. ($\frac{x^۳}{a-x}<۰$ است و عدد مثبت همیشه از عدد منفی بزرگتر است).

اگر $۰\leqslant x<a$ باشد بازهم $a-x>۰$ می‌شود و نامعادله به صورت

$y^2>\frac{x^3}{a-x}$ یا $|y|>x\sqrt{\frac{x}{x-a}}$ در می‌آید.

اگر $x>a$ باشد $a-x<0$ و نامعادله به صورت

$(a-x)y^2-x^3<0$ یا $y^2>\frac{x^3}{a-x}$ در می‌آید که همیشه برقرار است.

جواب: $\left|\begin{array}{l} x>a \\ y= \text{هرعدد دلخواه} \end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l} 0<x<a \\ |y|>x\sqrt{\frac{x}{x-a}} \end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l} x<0 \\ y= \text{هرعدد دلخواه} \end{array}\right.$

۵۸۲. شبیه مثال ۳ صفحهٔ ۳۱۹ حل کنید . جوابها در جدول زیر داده شده است :

جواب نامعادله	مقدار پارامتر
جواب ندارد	$a\leq 1$
$\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}<x\leq -\frac{a}{2}$	$1<a<1+\sqrt{3}$
$x\leq -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$a=1+\sqrt{3}$
$x\leq -\frac{a}{2}$ $x>\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}$	$a>1+\sqrt{3}$

۵۸۴. داریم:

$$0<(\sqrt{N}-a)^3=N\sqrt{N}-3aN+3\sqrt{N}a^2-a^3$$

وبنابراین: $\sqrt{N}(3a^2+N)>a^3+3aN$

ویا:
$$\sqrt{N}>\frac{a(a^2+3N)}{3a^2+N}$$

وشبیه آن:

$$0>[\sqrt{N}-(a+1)]^3=N\sqrt{N}-3(a+1)N+$$
$$+3(a+1)^2\sqrt{N}-(a+1)^3\ ;$$
$$\sqrt{N}[3(a+1)^2+N]<(a+1)^3+3(a+1)N$$

وازآنجا:
$$\sqrt{N}<\frac{(a+1)[(a+1)^2+3N]}{3(a+1)^2+N}$$

توضیح: همچنین با شرط: $a<\sqrt[3]{N}<a+1$ می‌توان ثابت کرد:

$$\frac{a(a^3+2N)}{2a^3+N}<\sqrt[3]{N}<\frac{(a+1)[(a+1)^3+2N]}{3(a+1)^3+N}$$

درحقیقت ازنامساوی $(\sqrt[3]{N}-a)^2>0$ نتیجه می‌شود:

$$\sqrt[3]{N}^2+a^2>2a\sqrt[3]{N}$$

واگردوطرف این نامساوی را در $\sqrt[3]{N}^2-a^2>0$ ضرب کنیم بدست می‌آید:

$$\sqrt[3]{N}^4-a^4>2a\sqrt[3]{N}(\sqrt[3]{N}^2-a^2)$$

وازآنجا:
$$\sqrt[3]{N}(N+2a^3)>a(a^3+2N)$$

ویا:
$$\sqrt[3]{N}>\frac{a(a^3+2N)}{2a^3+N}$$

وشبیه آن داریم:

$$[\sqrt[3]{N}-(a+1)]^2>0 \Longrightarrow \sqrt[3]{N}^2+(a+1)^2>2(a+1)\sqrt[3]{N}$$

که‌اگردوطرف آنرا درمقدارمنفی $\sqrt[3]{N}^2-(a+1)^2$ ضرب کنیم بدست می‌آید:

$$N\sqrt[3]{N}-(a+1)^4<2(a+1)N-2(a+1)^3\sqrt[3]{N}$$

و ازآنجا:
$$\sqrt[3]{N}<\frac{(a+1)[(a+1)^3+2N]}{2(a+1)^3+N}$$

۵۸۵. روش اول: داریم (m_a و m_b و m_c میانه‌های مثلث هستند):

$$\sqrt{h_a}+\sqrt{h_b}+\sqrt{h_c}<\sqrt{m_a}+\sqrt{m_b}+\sqrt{m_c}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{3(m_a+m_b+m_c)}\leqslant\sqrt{3\times\frac{9}{2}R}=\frac{3}{2}\sqrt{6R}$$

روش دوم:

$$\sqrt{h_a}+\sqrt{h_b}+\sqrt{h_c}\leqslant\sqrt{3(h_a+h_b+h_c)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{3(m_a+m_b+m_c)}\leqslant\sqrt{3\times\frac{9}{2}R}=\frac{3}{2}\sqrt{6R}$$

۵۸۶. اگر وسطهای ضلعهای چهار ضلعی $ABCD$ را به‌ترتیب K و L و M و N فرض کنیم، چهار ضلعی $KLMN$ یك متوازی الاضلاع است و داریم:

$$S_{ABCD}=2S_{KLMN}$$

از طرف دیگر اگر زاویهٔ حادهٔ بین دو قطر متوازی‌الاضلاع (یعنی KM و LN) را α فرض کنیم ، داریم:

$$2S=4S_{KLMN}=2KM\cdot LN\cdot \sin\alpha\leqslant 2KM\cdot LN=2m_1\cdot m_2$$

که باتوجه به نامساوی واضح $2m_1m_2<m_1^2+m_2^2$ خواهیم داشت:

$$2S\leqslant m_1^2+m_2^2\leqslant m_1^2+m_2^2+m_3^2$$

۵۸۷. نامساوی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(k-4)x^2+(2k-3)x+k+4>0$$

برای اینکه یك سه جمله‌ای دارای علامت ثابتی باشد، بـاید مبین آن منفی شود ، در اینصورت علامت سه جمله‌ای همان علامت ضریب x^2 خواهد بود . بنابراین باید جوابهای مشترك دو نامعادلهٔ زیر را بدست آوریم:

$$\begin{cases}\Delta=(2k-3)^2-4(k-4)(k+4)<0\\ k-4>0\end{cases}$$

جواب: $k<\frac{73}{12}$

۵۸۸. نامساوی واضح زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2+(a_3+b_3x)^2\geqslant 0$$

سمت چپ این نامساوی نسبت به x از درجهٔ دوم است و چون بـه ازای همهٔ مقادیر x مثبت است ، باید مبین آن منفی باشد و از آنجا صحت نـامساوی بونیاکوسکی ثابت می‌شود.

۵۸۹. چون $a\neq 0$ است ، نامساوی مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{۱-\left(\frac{b}{a}\right)^m}{۱+\left(\frac{b}{a}\right)^m}>\frac{۱-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{۱+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

از طرف دیگر، چون $۱>\frac{b}{a}>۰$ و $m>n$ است، داریم:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m<\left(\frac{b}{a}\right)^n \Longrightarrow ۱-\left(\frac{b}{a}\right)^m>۱-\left(\frac{b}{a}\right)^n \qquad (۱)$$

و همچنین:

$$۱+\left(\frac{b}{a}\right)^m<۱+\left(\frac{b}{a}\right)^n \qquad (۲)$$

که با توجه به نامساویهای (۱) و (۲) نامساوی مطلوب بدست می‌آید.

۵۹۰. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{(x^۲+۱)+۱}{\sqrt{x^۲+۱}}=\sqrt{x^۲+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}-۲+۲=$$

$$=\left(\sqrt[۴]{x^۲+۱}-\frac{۱}{\sqrt[۴]{x^۲+۱}}\right)^۲+۲\geqslant ۲$$

۵۹۱. داریم:

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x^۳}+\sqrt{y^۳}}{\sqrt{xy}}=$$

$$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})\frac{\sqrt{x^۲}-\sqrt{xy}+\sqrt{y^۲}}{\sqrt{xy}}=$$

$$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^۲+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})\left[۱+\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^۲}{\sqrt{xy}}\right]>\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

۵۹۲. با استفاده از نامساوی واسطه‌ها داریم:

$$a^۴+b^۴+c^۴=\frac{a^۴+b^۴}{۲}+\frac{b^۴+c^۴}{۲}+\frac{c^۴+a^۴}{۲}\geqslant\sqrt{a^۴b^۴}+$$

$$+\sqrt{b^4c^4}+\sqrt{c^4a^4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=a^2\cdot\frac{b^2+c^2}{2}+$$

$$+b^2\cdot\frac{c^2+a^2}{2}+c^2\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant a^2\sqrt{b^2c^2}+b^2\sqrt{c^2a^2}+$$

$$+c^2\sqrt{a^2b^2}=abc(a+b+c)$$

۵۹۳. با استفاده از نامساوی $\sqrt{mn}\leqslant\frac{m+n}{2}$ داریم:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_3}{2}+$$

$$+\cdots+\frac{a_{n-1}+a_n}{2}=\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

۵۹۴. با استفاده از نامساوی $1+a_k\geqslant 2\sqrt{a_k}$ داریم:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 2\sqrt{a_1}\cdot 2\sqrt{a_2}\cdots 2\sqrt{a_n}=$$
$$=2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}=2^n$$

۵۹۵. داریم:

$$2^n=1+(2^n-1)=1+(2-1)(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+$$

$$+1)>1+n\sqrt[n]{2^{n-1}\times 2^{n-2}\times\cdots\times 2\times 1}=$$

$$=1+n\sqrt[n]{2^{\frac{(n-1)n}{2}}}=1+n\sqrt{2^{n-1}}$$

۵۹۶. داریم:

$$n!=\sqrt{(n!)^2}=\sqrt{(1\times n)[2\times(n-1)][3\times(n-2)]\cdots(n\times 1)}=\sqrt{1\times n}\cdot\sqrt{2(n-1)}\cdot\sqrt{3(n-2)}\cdots$$

$$\cdots\sqrt{n\times 1}>\frac{1+n}{2}\times\frac{2+(n-1)}{2}\times\frac{3+(n-2)}{2}\cdots\frac{n+1}{2}=$$

$$=\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

۵۹۷. به‌ترتیب داریم:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{1}{2\times 3\times\cdots\times n}<1+$$

$$+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

۵۹۸. داریم:

$$\sqrt[n]{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}=\sqrt[n]{\frac{(1\times 2\times 3\times\cdots\times n)^2}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}}=$$

$$=\sqrt[n]{\frac{(1\times n)[2(n-1)]\cdots[k(n-k+1)]\times\cdots(n\times 1)}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}}$$

از طرف دیگر داریم:

$$k(n-k+1)=kn-k(k-1)=kn-n-k(k-1)+n=$$
$$=(k-1)(n-k)+n.$$

وبنابراین به‌ازای هر مقدار $1\leqslant k\leqslant n$ نامساوی $k(n-k+1)\geqslant n$ صحیح است و داریم :

$$\sqrt[n]{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}\geqslant\sqrt[n]{\frac{n^n}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}}=$$

$$=\frac{n}{\sqrt[n]{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}}$$

و از آنجا:

$$(\sqrt[n]{1\times 2\times 3\times\cdots\times n})^2\geqslant n\Longrightarrow\sqrt[n]{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}\geqslant\sqrt{n}$$

علامت تساوی برای $n=1$ و $n=2$ است و برای $n>2$ برقرار نیست.

۵۹۹. از رابطهٔ $r=(p-a)tg\frac{A}{2}$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}-\frac{4}{R^2}=$$
$$=\frac{1}{r}\left(tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\right)-\frac{4}{R^2}\geqslant\frac{1}{r^2}-\frac{4}{R^2}=$$
$$=\frac{R^2-4r^2}{R^2r^2}\geqslant 0$$

زیرا $tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\geqslant 1$ و $R\geqslant 2r$ است.

۶۰۰. نامعادله‌ها را نسبت به y حل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$y>\frac{7-3x}{2}\ ;\ y>\frac{3-2x}{4}$$

از این نامساویها نتیجه می‌شود که x می‌تواند هر عدد دلخواه باشد، در اینصورت y باید بزرگتر از بزرگترین مقدار بین دو عدد $\frac{7-3x}{2}$ و $\frac{3-2x}{4}$ انتخاب شود، برای اینکه بدانیم کدامیك از این دو مقدار بزرگترند، نامعادلهٔ $\frac{7-3x}{2}\geqslant\frac{3-2x}{4}$ را حل می‌کنیم که جواب $x\leqslant\frac{11}{4}$ بدست می‌آید.

جواب: اگر $x\leqslant\frac{11}{4}$ باشد، $y>\frac{7-3x}{2}$ و اگر $x\geqslant\frac{11}{4}$ باشد، دراینصورت $y>\frac{3-2x}{4}$ خواهد بود.

۶۰۱. دستگاه نامعادله‌ها پس از تبدیلهای ساده چنین می‌شود:

$$3y-2x<-1\ ;\ 2y-3x>0$$

که از آنها بدست می‌آید:

$$y<\frac{2x-1}{3}\ ;\ y>\frac{3x}{2}\implies\frac{3x}{2}<y<\frac{2x-1}{3}$$

که ضمناً برای مقادیر x باید داشته باشیم:

$$\frac{3x}{2}<\frac{2x-1}{3} \Longrightarrow x<-\frac{2}{5}$$

جواب: $\frac{3}{2}x<y<\frac{2x-1}{3}$ و $x<-\frac{2}{5}$

۶۰۲. مقدار y را از معادلهٔاول محاسبه و در دو نامعادله قراردهید، ازآنجا x بدست می‌آید.

جواب. $y=\frac{6-3x}{2}$ و $x>2$

۶۰۳. از نامعادله‌ها روشن است که x و y مثبت‌اند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$y>x^2 \;;\; y<\sqrt{x} \Longrightarrow x^2<y<\sqrt{x}$$

در اینصورت باید نامعادلهٔ $x^2<\sqrt{x}$ برقرار باشد و از آنجا:

$$x^4-x<0 \Longrightarrow x(x-1)<0 \Longrightarrow 0<x<1$$

جواب: $x^2<y<\sqrt{x}$ و $0<x<1$

۶۰۴. جواب: اگر نامعادله‌ها را نسبت به y حل کنیم:

$$x>2 \quad , \quad x-1<y<2x-3$$

و اگر نسبت به x حل کنیم:

$$y>1 \qquad \frac{1}{2}(y+3)<x<y+1$$

۶۰۵. جواب:

$$y>\begin{cases} 3x-\frac{2}{3} & \left(x\geqslant\frac{5}{3}\right) \\ 2x+1 & \left(x\leqslant\frac{5}{3}\right) \end{cases}$$

۶۰۶. از حل‌دو نامعادلهٔ اول ودوم دستگاه بدست می‌آید:

$$y>\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & (x\leqslant 1) \\ 2x-1 & (x>1) \end{cases}$$

اگر نامعادلهٔ سوم را نسبت به y حل کنیم، بدست می‌آید:

$$y<x+1$$

بنابراین باید دو دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\text{a)} \begin{cases} y>\frac{1}{2}(x+1) \\ y<x+1 \\ x\leqslant 1 \end{cases} \quad ; \qquad \text{b)} \begin{cases} y>2x+1 \\ y<x+1 \\ x\geqslant 1 \end{cases}$$

که جوابهای هر کدام از آنها به سادگی بدست می‌آید:

$$\frac{1}{2}(x+1)<y<x+1 \quad -1<x\leqslant 1 \quad (a)$$

$$2x-1<y<x+1 \quad 1\leqslant x<2 \quad (b)$$

۶۰۷. در دو معادله، z را نسبت به x و y پیدا می‌کنیم:

$$z<4x-y+1 \ , \ z>-x+y-2$$

این نامعادله‌ها وقتی برقرارند که داشته باشیم:

$$-x+y-2<4x-y+1 \Longrightarrow y<\frac{1}{2}(5x+3)$$

جواب:

$$\begin{cases} x= \text{عددی دلخواه} \\ y<\frac{1}{2}(5x+3) \\ -x+y-2<z<4x-y+1 \end{cases}$$

۶۰۸. دو معادلهٔ دستگاه را نسبت به z حل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$z>4x-y+1 \ , \ z>-x+y-2$$

بنابراین باید دو مقدار $4x-y+1$, $-x+y-2$ را با هم مقایسه کنیم :

$$4x-y+1-(-x+y-2)=5x-2y+3>0 \ ;$$

$$y<\frac{1}{2}(5x+3)$$

در نتیجه جوابها چنین می‌شود:

$$\begin{cases} x= \text{عددی دلخواه} \\ y\leqslant\frac{1}{2}(5x+3) \\ z>4x-y+1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x= \text{عددی دلخواه} \\ y\geqslant\frac{1}{2}(5x+3) \\ z>-x+y-2 \end{cases}$$

۶۰۹. جواب:

$$\begin{cases} 0<x\leqslant 2a \\ \sqrt{2ax-x^2}<|y|<\sqrt{2ax} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x>2a \\ -\sqrt{2ax}<y<\sqrt{2ax} \end{cases}$$

۶۱۰. از معادله بدست می‌آید: $y=x+1$ که اگر در نامعادله قرار دهیم:

$$x^2+(x+1)^2<4 \implies 2x^2+2x-3<0$$

و از آنجا جوابهای دستگاه بدست می‌آید:

$$\begin{cases}\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}<y<\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}\\ y=x+1\end{cases}$$

۶۱۱. از معادلهٔ $x^2+y^2=4$ بدست می‌آید:

$$y=\pm\sqrt{4-x^2} \qquad (-2\leq x\leq 2)$$

اگر $y=-\sqrt{4-x^2}$ بگیریم، دستگاه مفروض به دو دستگاه نامعادله‌های زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases}-2\leq x\leq 2\\ -x-1<0\end{cases} ; \begin{cases}4-x^2>(-x-1)^2\\ -x-1\geq 0\end{cases}$$

و اگر $y=\sqrt{4-x^2}$ بگیریم به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases}-2\leq x\leq 2 \ , \ x+1\geq 0\\ 4-x^2<(x+1)^2\end{cases}$$

جوابهای دستگاه مختلط مسأله چنین می‌شود:

$$\begin{cases}\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}<x\leq 2\\ y=-\sqrt{4-x^2}\end{cases} , \begin{cases}\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}<x\leq 2\\ y=\sqrt{4-x^2}\end{cases}$$

۶۱۲. جواب: $0<x<5$

۶۱۳. نامساوی مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$-3<\frac{x^2-kx-1}{x^2+x+1}<3$$

و از آنجا به دستگاه نامعادله‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}2x^2+(k+3)x+2>0\\ 4x^2-(k-3)x+4>0\end{cases}$$

برای اینکه دو نامعادلهٔ فوق به ازای همهٔ مقادیر x برقرار باشند، باید مبین سه جمله‌ایهای درجهٔ دوم سمت‌چپ نامساویها منفی شود، یعنی:

$$\begin{cases}(k+3)^2-16=(k+7)(k-1)<0\\(k-3)^2-64=(k+5)(k-11)<0\end{cases}$$

جواب: $-5<k<1$

۶۱۴. به ازای $a=0$ تابع:

$$ax^2+(a-3)x+\frac{2}{a}-2a$$

معین نیست و بنابراین در بحث زیر $a\neq 0$ در نظر گرفته می‌شود.

حالت اول: $a>0$، در اینصورت نامعادله $ax>a^2-2$ را می‌توان به صورت $x\geqslant\frac{a^2-2}{a}$ نوشت. ضمناً باید داشته باشیم.

$$\varphi=ax^2+(a-3)x+\frac{2}{a}-2a=a\left(x-\frac{a+1}{a}\right)(x-2\times$$
$$\times\frac{1-a}{a})>0$$

به این ترتیب درحالت $a>0$ اگرمثلا x از مقادیر $\frac{a^2-2}{a}$ و $\frac{a+1}{a}$ و $\frac{2(1-a)}{a}$ بزرگتر باشد در نامعادله‌ها صدق می‌کند. یعنی بـرای حالت $a>0$ نمی‌توان شرطهای مسأله را برقرار کرد.

حالت دوم: $a<0$. در اینصورت نامعادلهٔ $ax\geqslant a^2-2$ به صورت $x\leqslant\frac{a^2-2}{a}$ در می‌آید و ضمناً با توجه به شرط $a<0$ باید داشته باشیم:

$$\left(x-\frac{a+1}{a}\right)\left(x-2\frac{1-a}{a}\right)>0$$

و این نامساوی برای همهٔ مقادیر $x\leqslant\frac{a^2-2}{a}$ تنها وقتی برقرار است کـه

داشته‌باشیم:

$$\begin{cases} \dfrac{a^{۲}-۲}{a}<\dfrac{a+۱}{a} \\ \dfrac{a^{۲}-۲}{a}<\dfrac{۲(۱-a)}{a} \end{cases} \Longrightarrow a<-۱-\sqrt{۵}$$

۶۱۵. جواب هر دو سؤال مسأله را می‌توان از نامساوی زیر بدست آورد:

$$(n+۲)^{n}<n^{n+۲} \qquad (۱)$$

ثابت می‌کنیم که این نامساوی برای همهٔ مقادیر $n\geqslant ۳$ برقراراست. نامساوی (۱) را به اینصورت می‌نویسیم:

$$\sqrt[n+۲]{n+۲}<\sqrt[n]{n}$$

در اینصورت روشن است که نامساوی (۱) نتیجه‌ای از نامساوی زیر است:

$$\sqrt[n+۱]{n+۱}<\sqrt[n]{n}\ ,\ n\geqslant ۳ \qquad (۲)$$

اگر دو طرف نامساوی (۲) را به‌توان $n(n+۱)$ برسانیم به اینصورت در می‌آید:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}<n\ ,\ n\geqslant ۳ \qquad (۳)$$

و بنابراین دو نامعادلهٔ (۳) به اینصورت درمی‌آید:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}<۳$$

و این نامساوی را هم در مسألهٔ ۵۶۷ ثابت کرده‌ایم. در اینجا طریق دیگری برای اثبات آن می‌آوریم:

$a_n=\dfrac{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}}{n}$ می‌گیریم و باید ثابت‌کنیم‌به‌ازای $n\geqslant ۳$ داریم: $a_n<۱$.

برای $n=۳$ نامساوی درست است، علاوه بر آن برای $n\geqslant ۳$ داریم: $a_{n+۱}<a_n$، زیرا این نامساوی را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱}}{n+۱}<\frac{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}}{n} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ودرستی این نامساوی هم روشن است. بنابراین برای $n \geqslant 3$ داریم: $a_n < 1$.

۶۱۶. داریم:

$$(G_{n-1})^{n-1} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}$$

بنابراین:
$$(G_n)^n = a_1 a_2 \cdots a_n = (G_{n-1})^{n-1} \cdot a_n$$

و از آنجا:
$$G_n = \sqrt[n]{G_{n-1} \cdots G_{n-1} \cdot a_n}$$

که با استفاده از نامساوی مربوط به واسطه‌های عددی و هندسی داریم:

$$G_n \leqslant \frac{(n-1)G_{n-1} + a_n}{n}$$

که به سادگی به اینصورت در می‌آید:

$$nG_n - (n-1)G_{n-1} \leqslant a_n$$

۶۱۷. اثبات را باروش استقراء ریاضی انجام می‌دهیم؛ برای $n=2$ داریم:

$$\frac{a_1 b_1}{a_1+b_1} + \frac{a_2 b_2}{a_2+b_2} \leqslant \frac{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)}{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)}$$

که بعد از انجام عملهای لازم به این نتیجهٔ درست می‌رسد:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geqslant 0$$

حالا فرض می‌کنیم که نامساوی فرض برای $n=k$ درست باشد، با توجه به اینکه برای $n=2$ درست است، بدست می‌آید:

$$\frac{a_1 b_1}{a_1+b_1} + \cdots + \frac{a_k b_k}{a_k+b_k} + \frac{a_{k+1} b_{k+1}}{a_{k+1}+b_{k+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(a_1+\cdots+a_k)(b_1+\cdots+b_k)}{(a_1+\cdots+a_k)+(b_1+\cdots+k_k)} + \frac{a_{k+1} b_{k+1}}{a_{k+1}+b_{k+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(a_1+\cdots+a_k+a_{k+1})(b_1+\cdots+b_k+b_{k+1})}{(a_1+\cdots+a_k+a_{k+1})+(b_1+\cdots+b_k+b_{k+1})}$$

۶۱۸. راه حل اول: از رابطهٔ بین نامساویهای عددی و هندسی برای $a+b$ عدد استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}}=2\sqrt[a+b]{\underbrace{a^{2}\cdot a^{2}\cdots a^{2}}_{\text{مرتبه}\ b}\cdot\underbrace{b^{2}\cdot b^{2}\cdots b^{2}}_{\text{مرتبه}\ a}}\leqslant$$

$$\leqslant 2\times\frac{\overbrace{a^{2}+a^{2}+\cdots+a^{2}}^{\text{مرتبه}\ b}+\overbrace{b^{2}+b^{2}+\cdots+b^{2}}^{\text{مرتبه}\ a}}{a+b}=2\times$$

$$\times\frac{a^{2}b+ab^{2}}{a+b}=2ab\leqslant a^{2}+b^{2}$$

راه حل‌دوم: به سادگی می‌توان ثابت‌کرد که برای مقادیر مثبت a و b داریم: $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant 1$. در حقیقت اگر $a\geqslant b$ باشد $\frac{a}{b}\geqslant 1$ و $a-b\geqslant 0$ و بنابراین $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geqslant 1$ می‌شود. اگر $a<b$ باشد، $\frac{a}{b}<1$, $a-b<0$ و درنتیجه $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$ می‌شود.

سپس داریم:

$$a^{2}+b^{2}\geqslant 2ab=2\sqrt[a+b]{a^{a+b}b^{a+b}}=2\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}}\geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}}$$

متذکر می‌شویم که در این حل نامساوی

$$2(a^{2b}b^{2a})^{\frac{1}{a+b}}\leqslant a^{2}+b^{2}$$

را برای هر مقدار مثبت a و b ثابت کردیم، درحالیکه در راه حل اول از طبیعی بودن دو عدد a و b استفاده کردیم.

۶۱۹. طبق قضیهٔ مربوط به واسطه‌های عددی و هندسی، می‌توان نوشت:

$$\frac{(n-1)a^{n}+N}{n}>\sqrt[n]{a^{n(n-1)}.\ N}$$

از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\sqrt[n]{N}<\frac{(n-1)a^{n}+N}{na^{n-1}}$$

به‌همین‌ترتیب:

$$\frac{a^n+(n-1)N}{nNa}>\frac{1}{Na}\sqrt[n]{a^nN^{n-1}}=\frac{1}{\sqrt[n]{N}}$$

یعنی:

$$\sqrt[n]{N}>\frac{nNa}{(n-1)N+a^n}$$

و بنابراین

$$\frac{nNa}{(n-1)N+a^n}<\sqrt[n]{N}<\frac{(n-1)a^n+N}{na^{n-1}}$$

۶۲۰. راه حل اول : نامساوی مفروض بـرای $n=2$ صحیح است . فرض می‌کنیم که نامساوی برای مقداری از $n>2$ صحیح باشد ، ثابت می‌کنیم که در اینصورت برای $n+1$ هم صحیح است ، داریم :

$$\left(2-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n+1}=$$
$$=\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}\left(2-\frac{1}{n}\right)>n\left(2-\frac{1}{n}\right)=$$
$$=2n-1=(n+1)+(n-2)\geqslant n+1$$

علامت تساوی برای حالت $n=1$ است.

راه حل دوم: روشن است که:

$$\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}=\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^{n}=1+n\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2}+\dots+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

واز آنجا:

$$\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}>1+n\left(1-\frac{1}{n}\right)=1+n-1\implies\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}>n$$

۶۲۱. برای $n=2$ داریم:

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}\leqslant\frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}}\quad(1)$$

نامساوی (۱) هم ارز نامساوی زیر است:

$$\frac{2+x_1+x_2}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2} < \frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}} ,$$

$$2\sqrt{x_1x_2}+(x_1+x_2)\sqrt{x_1x_2} < (x_1+x_2)+2x_1x_2 ,$$

$$(x_1+x_2)(1-\sqrt{x_1x_2}) > 2\sqrt{x_1x_2}(1-\sqrt{x_1x_2}) ,$$

و چون $1-\sqrt{x_1x_2}>0$ است ، بدست می‌آید:

$$x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}$$

که یك نامساوی واضح است. بنابراین نامساوی برای $n=2$ ثابت شد .

حالافرض می کنیم که نامساوی برای $n-1$ صحیح باشدوفرض می کنیم:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=P_n \ , \ x_j=k_jP_n$$

که در آن به‌سادگی معلوم می‌شود که $k_i>0$ و $k_1k_2\cdots k_n=1$. طبق فرض داریم:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1+k_iP_n} < \frac{n-1}{1+\sqrt[n-1]{k_1k_2\cdots k_{n-1}}\cdot P_n}$$

با توجه به نامساوی (۱):

$$\frac{n-1}{1+\sqrt[n-1]{k_1k_2\cdots k_{n-1}}\cdot P_n}+\frac{n-1}{1+\sqrt[n-1]{k_n}\cdot P_n} <$$

$$< \frac{2(n-1)}{1+\sqrt{\sqrt[n-1]{k_1k_2\cdots k_n}\cdot P_n^2}}=\frac{2(n-1)}{1+P_n}$$

بالاخره دوباره طبق فرض داریم:

$$\frac{1}{1+k_nP_n}+\frac{n-2}{1+P_n}=\frac{1}{1+k_nP_n}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{1+P_n}+\frac{1}{1+P_n}+\cdots+\frac{1}{1+P_n}\right)<$$

$$< \frac{n-1}{1+\sqrt[n-1]{k_n\cdot P_n\cdot P_n^{n-2}}}=\frac{n-1}{1+\sqrt[n-1]{k_n\cdot P_n^{n-1}}}=$$

$$=\frac{n-1}{1+\sqrt[n-1]{k_n}\cdot P_n}$$

هر سه نامساوی را با هم جمع می‌کنیم، بعد از ساده‌کردن بدست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}+\frac{n-2}{1+P_n}\leqslant\frac{2(n-1)}{1+P_n}$$

که از اینجا معلوم می‌شود نامساوی برای n عدد هم صحیح است.

بسادگی می‌توان متوجه شد که نامساوی برای حالتی هم که عددهای x_i (یا بعضی از آنها) مساوی واحد باشند، صحیح است.

۶۲۲. سه جمله‌ای درجهٔ دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=2x^2-(a+b+c+d)x+(ad+bc)$$

مبین این معادله چنین است:

$$\Delta=(a+b+c+d)^2-8(ad+bc)$$

ثابت می‌کنیم که اگر $a>c$ و $b>d$ باشد، این معادله ریشه‌های حقیقی دارد. داریم:

$$f(a)=a^2-ab-ac+bc=(a-b)(a-c)\ ;$$
$$f(b)=b^2-ab-bd+ad=(b-a)(b-d)$$
$$f(c)=c^2-ac-cd+ad=(c-a)(c-d)$$
$$f(d)=d^2-bd-cd+bc=(d-b)(d-c)$$

اگر $a\neq b$ باشد $f(a)\cdot f(b)<0$ و اگر $c\neq d$ باشد دراینصورت $f(c)\cdot f(d)<0$ می‌شود و معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

در حالتی که $a=b$ و $c=d$ باشد، $f(a)=f(c)=0$ می‌شود و بازهم معادله دو ریشهٔ متمایز a و c دارد ($a>c$). بنابراین در هرحال مبین معادلهٔ مثبت است، یعنی

$$(a+b+c+d)^2>8(ad+bc)$$

۶۲۳. از شرط مسأله معلوم می‌شود که $ab\geqslant 0$ ، $a+b\neq 0$ و $m>0$.

۱. اگر $b=0$ باشد $a\neq 0$ می‌شود ودستگاه

$$ax^2=x-y\ ,\ ax=m$$

دارای ریشه‌های حقیقی است.

۲. اگر $b\neq ۰$ باشد داریم: $y=\dfrac{m-ax}{b}$ و پس از حذف y بدست می‌آید:

$$a(a+b)x^۲-(a+b+۲ma)x+m^۲+m=۰$$

و مبین آن: $\Delta=(a+b)^۲-۴abm^۲$

که از شرط $\dfrac{\sqrt{ab}}{|a+b|}<\dfrac{۱}{۲m}$ نتیجه می‌شود $\Delta>۰$ و بنابراین دستگاه ریشه‌های حقیقی دارد.

۶۲۴. اولا) نامساوی به‌ازای $n=۳$ صحیح است. فرض می‌کنیم برای $k\geqslant ۳$ نامساوی $۲^k>۲k+۱$ صحیح باشد، در اینصورت داریم:

$$۲^{k+۱}=۲\times ۲^k>۲(۲k+۱)=(۲k+۳)+(۲k-۱)>۲k+۳$$

و بنابراین نامساوی مفروض با روش استقراء ریاضی ثابت شد.

ثانیاً) نامساوی برای $n=۵$ صحیح است. فرض می‌کنیم نامساوی $۲^k>k^۲$ $(k\geqslant ۵)$ صحیح باشد، در اینصورت داریم:

$$۲^{K+۱}=۲^k\times ۲>۲k^۲=(k+۱)^۲+(k^۲-۲k-۱)>(k+۱)^۲$$

زیرا برای $k\geqslant ۵$ داریم: $k^۲-۲k-۱>۰$.

ثالثا) برای $n=۱۰$ نامساوی صحیح است . فرض می‌کنیم نامساوی $۲^k>k^۳$ $(k\geqslant ۱۰)$ صحیح باشد، در اینصورت داریم:

$$۲^{k+۱}=۲\times ۲^k>۲k^۳=(k+۱)^۳+(k^۳-۳k^۲-۳k-۱)$$

ثابت می‌کنیم برای $k\geqslant ۱۰$ داریم: $k^۳-۳k^۲-۳k-۱>۰$. برای $k=۱۰$ این نامساوی صحیح است. اگر نامساوی را به‌این‌ترتیب بنویسیم:

$$k(k^۲-۳k-۳)>۱$$

کافی است ثابت کنیم $k^۲-۳k-۳>\frac{۱}{۱۰}$ (برای $k\geqslant ۱۰$) که به‌سادگی ثابت می‌شود.

۶۲۵. نامساوی به ازای $n=۲$ صحیح است ، زیرا:

$$(۱+x)^۲=۱+۲x+x^۲>۲x$$

فرض می‌کنیم نامساوی برای n صحیح باشد، در اینصورت داریم :

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)>(1+nx)(1+x)=$$
$$=1+(n+1)x+nx^2>1+(n+1)x$$

نامساوی $(1+x)^n>1+nx$ بشرطی هم ارز با نامساوی $(1+x)^n(1+x)>(1+nx)(1+x)$ است که $1+x>0$ یعنی $x>-1$ باشد. بنابراین صحت نامساوی به ازای $x>-1$ ثابت شد.

۶۲۶. ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$$

نامساوی به ازای $n=2$ واضح است. اگر نامساوی برای $n>2$ صحیح باشد، داریم:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

بنابراین باید ثابت کنیم: $2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}$. این نامساوی با ضرب دو طرف آن در مقدار مثبت $\sqrt{n+1}$ چنین می‌شود:

$$2\sqrt{n(n+1)}+1<2(n+1) \Longrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$$

که با مجذور کردن دوطرف آن به نامساوی واضح زیر می‌رسیم:

$$4n^2+4n<4n^2+4n+1$$

حالا طرف دیگر نامساوی را ثابت می‌کنیم. باید ثابت کنیم:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

نامساوی برای $n=2$ صحیح است. فرض می‌کنیم نامساوی برای $n>2$ صحیح باشد، در اینصورت داریم:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1} \Rightarrow \sqrt{n(n+1)}+$$
$$+1>n+1 \Rightarrow \sqrt{n(n+1)}>n$$

که از آنجا به نامساوی واضح زیر می‌رسیم : $n^2+n>n^2$

۶۲۷. نامساوی به ازای $n=2$ واضح است، زیرا:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$$

فرض می‌کنیم نامساوی برای $n=k$ صحیح باشد، یعنی:

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$$

در این صورت داریم:

$$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2(k+1)}=$$
$$=\left(\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-$$
$$-\frac{1}{k+1}=S_k+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}>\frac{13}{24}$$

۶۲۸. مسأله ۴۲۹ را ببینید:

۶۲۹. برای $n=3$ نامساوی واضح است . فرض می‌کنیم نامساوی برای $n\geqslant 3$ درست باشد، در این صورت برای $n+1$ داریم:

$$2^{\frac{1}{2}(n+1)n}=2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\times 2^n>n!\times 2^n>n!(n+1)=(n+1)!$$

(در قسمت اولا مسالهٔ ۶۲۴ ثابت کردیم که برای $n\geqslant 3$ داریم : $2^n>2n+1$ و بطور بدیهی $2^n>n+1$).

۶۳۰. ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2} \quad (1)$$

روش اول. نامساوی (۱) به ازای $n=۱$ به صورت $\frac{۱}{۲}<۱$ درمی‌آید، یعنی برای $n=۱$ این نامساوی صحیح است. حالا فرض می‌کنیم :

$$S_k=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{۲^k-۱}>\frac{k}{۲}$$

و ثابت می‌کنیم:

$$S_{k+۱}=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۲^{k+۱}-۱}>\frac{k+۱}{۲}$$

داریم :

$$S_{k+۱}=\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۲^k-۱}\right)+$$
$$+\left(\frac{۱}{۲^k}+\frac{۱}{۲^k+۱}+\dots+\frac{۱}{۲^{k+۱}-۱}\right)=S_k+A$$

عبارت A عبارتست از مجموع ۲^k کسر که هرکدام از آنها از $\frac{۱}{۲^{k+۱}}$ بزرگتر است . بنابراین:

$$A>\frac{۱}{۲^{k+۱}}+\frac{۱}{۲^{k+۱}}+\dots+\frac{۱}{۲^{k+۱}}=۲^k\cdot\frac{۱}{۲^{k+۱}}=\frac{۱}{۲}$$

به این ترتیب : $S_k>\frac{k}{۲}$ و $A>\frac{۱}{۲}$ ، بنابراین :

$$S_{k+۱}=S_k+A>\frac{k+۱}{۲}$$

روش دوم. داریم:

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۲^n-۱}=۱+\frac{۱}{۲}+$$
$$+\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸}\right)+\dots+$$
$$+\left(\frac{۱}{۲^{n-۱}+۱}+\frac{۱}{۲^{n-۱}+۲}+\dots+\frac{۱}{۲^n}\right)-\frac{۱}{۲^n}>۱+$$

$$+\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{۲}\right)-\frac{۱}{۲^n}=\left(۱-\frac{۱}{۲^n}\right)+n\times\frac{۱}{۲}>\frac{n}{۲}$$

حالا ثابت می‌کنیم:

$$S_n=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^n-۱}<n \qquad (۲)$$

روش اول. نامساوی (۲) به ازای $n=۲$ به صورت زیر در می‌آید:

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}<۲ \Longrightarrow ۱\frac{۵}{۶}<۲$$

و بنابراین برای $n=۲$ صحیح است (برای $n=۱$ نامساوی (۲) به تساوی تبدیل می‌شود). فرض می‌کنیم: $S_k>k$ و ثابت می‌کنیم:

$$S_{k+۱}=S_k+\left(\frac{۱}{۲^k}+\frac{۱}{۲^k+۱}+\cdots+\frac{۱}{۲^{k+۱}-۱}\right)>k+۱ \quad (۳)$$

داخل پرانتز درنامساوی (۳) شامل ۲^k جمله است که مخرج جملهٔ اول آن مساوی ۲^k و مخرج بقیهٔ جمله‌ها از ۲^k بزرگترند، بنابراین:

$$\frac{۱}{۲^k}+\frac{۱}{۲^k+۱}+\cdots+\frac{۱}{۲^{k+۱}-۱}<$$
$$<\frac{۱}{۲^k}+\frac{۱}{۲^k}+\cdots+\frac{۱}{۲^k}=۲^k\times\frac{۱}{۲^k}=۱$$

و بنابراین: $S_{k+۱}<S_k+۱=k+۱$

روش دوم. داریم:

$$S_n=۱+\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)+\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{۱}{۲^{n-۱}}+\frac{۱}{۲^{n-۱}+۱}+\cdots+\frac{۱}{۲^n-۱}\right)<$$
$$<۱+۱+۱+\cdots+۱=n$$

۶۳۱. راهنمایی. باید ثابت کرد که دنبالهٔ

$$\sqrt{c}\,,\ \sqrt{c+\sqrt{c}}\,,\ \sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}}\,,\ \dots$$

وقتی تعداد جمله‌ها بی‌نهایت باشد، حدی مساوی $\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$ دارد و
برای این منظور اگر جملهٔ nام را a_n بگیریم توجه داشته باشید که
$a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$.

۶۳۲. نامساوی به ازای $n=2$ به صورت $\frac{16}{3}<6$ در می‌آید که واضح است.

فرض می‌کنیم: $\frac{4^k}{k+1}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}$ و ثابت می‌کنیم: $\frac{4^{k+1}}{k+2}<\frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2}$

داریم:

$$\frac{4^{k+1}}{k+2}=\frac{4^k\times 4}{(k+1)\frac{k+2}{k+1}}=\frac{4^k}{k+1}\times$$

$$\times\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\frac{4(k+1)}{k+2} \qquad (1)$$

از طرف دیگر ثابت می‌کنیم:

$$\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \qquad (2)$$

نامساوی (۲) بعد از ساده کردن به اینصورت در می‌آید:

$$\frac{2(k+1)}{k+2}<\frac{2k+1}{k+1} \implies 2(k+1)^2<(2k+1)(k+2)$$

که از آنجا به نامساوی واضح $4<5$ می‌رسیم. بنابراین نامساوی (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{4^{k+1}}{k+2}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\frac{4(k+1)}{k+2}<$$

$$<\frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}=\frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2}$$

۶۳۳. نامساوی حکم به ازای $n=1$ به تساوی $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ و به ازای $n=2$

به نامساوی درست $\frac{1}{\sqrt{7}}<\frac{3}{8}$ درمی‌آید. حاصلضرب سمت‌چپ نامساوی‌حکم را P_n می گیریم وفرض می کنیم داشته باشیم: $P_n<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. ثابت می‌کنیم : $P_{n+1}<\frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$. داریم:

$$P_{n+1}=P_n\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}<\frac{1}{\sqrt{3(n+1)}}$$

دو طرف نامساوی را در مقدار مثبت $\sqrt{n+1}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2n+1}{2\sqrt{(3n+1)(n+1)}}<\frac{1}{\sqrt{3}}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 3(2n+1)^2<4(3n+1)(n+1)$$

که از آنجا به نامساوی واضح $4n+1>0$ می‌رسیم.

۶۳۴. در تساوی $y-x=\sqrt{y^2+2(x+1)y+4x}$ روشن‌است که‌باید $y-x\geqslant 0$ باشد. اگر دو طرف این تساوی را مجذور کنیم و y را نسبت به x بدست آوریم، می‌شود:

$$y=\frac{x^2-4x}{2(2x+1)}\Longrightarrow y-x=-\frac{3x(x+2)}{2(2x+1)}$$

و چون مقدار اخیر باید غیرمنفی باشد:

$$-\frac{3x(x+2)}{2(2x+1)}\geqslant 0\Longrightarrow x\leqslant -2 \text{ یا } -\frac{1}{2}<x\leqslant 0$$

۶۳۵. x^2-x+1 همیشه مثبت است، بنابراین نامساوی را می‌توان بعداز عملهای ساده اینطور نوشت:

$$x(x-1)(x^2+3)+3>0 \qquad (1)$$

درحالتی که $x(x-1)$ غیرمنفی، یعنی $x\leqslant 0$ یا $x\geqslant 1$ باشد، صحت نامساوی

(۱) واضح است. در حالتی که $0<x<1$ باشد ، معلوم است کـه حداقل عبارت :

$$x(x-1)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

مساوی $-\frac{1}{4}$ است و اگر این حداقل‌را بجای $x(x-1)$ قرار دهیم به نامساوی $-\frac{x^2+3}{4}+3>0$ می‌رسیم که صحت‌آن درفاصلهٔ $(0,1)$ به‌سادگی روشن می‌شود.

۶۳۶. نامساوی پس از ساده‌کردن به‌صورت $\frac{x^2}{x^2+x+1}>0$ در می‌آید که صحت‌آن‌برای $x\neq 0$ واضح است‌ودرحالت $x=0$ به‌تساوی تبدیل‌می‌شود.

۶۳۷. نامساوی حکم به سادگی به صورت زیر در می‌آید:

$$\left(\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a}{2}-c\right)^2+\left(\frac{a}{2}-d\right)^2+\left(\frac{a}{2}-e\right)^2\geqslant 0$$

که واضح است. حالت تساوی برای موقعی است که داشته باشیم:

$$\frac{a}{2}=b=c=d=e$$

۶۳۸. از نامساوی مربوط به‌واسطه‌های عددی و هندسی برای ۷ عدد غیرمنفی استفاده می‌کنیم، داریم:

$$7^7\sin^4\alpha\cos^{10}\alpha=7^7\cdot 2^2\cdot 5^5\left(\frac{\sin^2\alpha}{2}\right)^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{5}\right)^5\leqslant$$

$$\leqslant 7^7\cdot 2^2\cdot 5^5\left(\frac{2\cdot\frac{\sin^2\alpha}{2}+5\cdot\frac{\cos^2\alpha}{5}}{7}\right)^7=$$

$$=7^7\cdot 2^2\cdot 5^5\cdot\frac{1}{7^7}=2^2\cdot 5^5=12500$$

حالت تساوی برای وقتی است که داشته باشیم:

$$\frac{\sin^2\alpha}{2}=\frac{\cos^2\alpha}{5}\implies\alpha=\mathrm{Arctg}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

۶۳۹. داریم: $(a_i-b_i)^2\geqslant 0$ و از آنجا:

$$a_i^2-2a_ib_i+b_i^2\geqslant 0$$

و چون $b_i>0$ ، بنابراین:

$$\frac{a_i^2}{b_i}-2a_i+b_i\geqslant 0$$

ویا:

$$\frac{a_i^2}{b_i}\geqslant 2a_i-b_i$$

که در آن $i=1,2,\ldots,n$. از آنجا:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i=2\times 1-1=1$$

۶۴۰. برای اینکه $4ab+22a+47b$ بر a^2+7b^2+811 قابل‌قسمت باشد ، لازم است که داشته باشیم:

$$4ab+22a+47b\geqslant a^2+7b^2+811$$

ویا

$$a^2-2(2b+11)a+7b^2-47b+811\leqslant 0$$

برای اینکه این عبارت درجهٔ دوم نسبت بـه a مثبت نباشد ، باید دارای دو ریشهٔ‌حقیقی باشد و مقدار a هم بین این دو ریشهٔ حقیقی قرار گیرد. ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$a=2b+11\pm\sqrt{-3b^2+91b-690} \qquad (1)$$

برای حقیقی بودن ریشه‌ها باید داشته باشیم:

$$-3b^2+91b-690\geqslant 0 \implies 15\leqslant b\leqslant 15\frac{1}{3}$$

ولی b عددی است طبیعی و بنابراین $b=15$ و از (۱) بدست می‌آید :

$$a=41$$

اگراین‌مقادیر $a=41$, $b=15$ را درعبارتهای مفروض قراردهیم، می‌بینیم که در شرط مسأله صدق می‌کنند.

* * *

۶۴۱. ضلعهای‌مثلث را a،b،c و زاویه‌های روبروی به این ضلعها را A،B و C می‌نامیم .

برای اینکه زاویه‌ها به تصاعد حسابی باشند، باید داشته باشیم:

$$۲B=A+C \implies ۲B=\pi-B \implies B=\frac{\pi}{۳}$$

و برای اینکه ضلعها به تصاعد حسابی باشند:

$$۲b=a+c \implies ۲\sin B=\sin A+\sin C$$

که پس از تبدیلهای ساده خواهیم داشت:

$$\cos\frac{A-C}{۲}=۱ \implies A=C$$

بنابراین تنها مثلث متساوی‌الاضلاع دارای خاصیت مورد نظر است.

۶۴۴. اولا) ۱۱ را جملهٔ اول ، ۴۴ را جملهٔ p ام و ۷۰۴ را جملهٔ q ام یك تصاعد حسابی می‌گیریم ، اگر قدر نسبت این تصاعد d باشد ، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۷۰۴=۱۱+(q-۱)d \\ ۴۴=۱۱+(p-۱)d \end{cases} \implies \begin{cases} (q-۱)d=۶۹۳ \\ (p-۱)d=۳۳ \end{cases}$$

از تقسیم این دو رابطه بر یکدیگر بدست می‌آید:

$$\frac{q-۱}{p-۱}=۲۱ \implies q=۲۱p-۲۰ \qquad (p>۱) \qquad (۱)$$

از رابطهٔ (۱) مقادیر صحیح p و q و از آنجا d بدست می‌آید. مثلا به ازای $p=۲$ داریم $q=۲۲$ و $d=۳۳$ ، یعنی ۱۱ و ۴۴ و ۷۰۴ می‌توانند جمله‌های اول ، دوم‌وبیست و دوم از یك تصاعد حسابی به قدرنسبت ۳۳ باشند و غیره .

ثانیاً) ۱۱ را جملهٔ اول ، ۴۴ را جملهٔ pام و ۷۰۴ را جملهٔ qام یك تصاعد هندسی با قدر نسبت r می‌گیریم ، خواهیم داشت :

$$۱۱r^{p-۱}=۴۴ \;;\; ۱۱r^{q-۱}=۷۰۴$$

و یا:

$$\begin{cases} r^{p-۱}=۴=۲^{۲}=۴^{۱} \\ r^{q-۱}=۶۴=۲^{۶}=۴^{۳} \end{cases}$$

بنابراین r مساوی ۲ یا ۴ است که در حالت اول $p=۳$ و $q=۷$ و در حالت دوم $p=۲$ و $q=۴$ می‌شود.

۶۴۳. مجموع n جملهٔ تصاعد حسابی چنین است:

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]=\frac{1}{2}dn^2+\frac{1}{2}(2a-d)n$$

و بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{2}dn^2+\frac{1}{2}(2a-d)n\equiv 2n^2+n\ ;$$

$$\frac{1}{2}d=2\ ;\ \frac{1}{2}(2a-d)=3\implies d=4\ ;\ a=5$$

۶۴۴. عدد زیر ۱۲ را x فرض می‌کنیم، با توجه به خاصیت تصاعد هندسی، عدد زیر آن مساوی $\frac{x^2}{12}$ خواهد شد و در نتیجه (باتوجه به اینکه عدد بعداز $\frac{x^2}{12}$ مساوی ۸۱ است)، عدد قبل از آن مساوی $\frac{x^4}{144\times 81}$ می‌شودوسپس عدد روی آن باید مساوی $\frac{x^8}{144^3\times 81^2\times 2}$ می‌شود و باید داشته باشیم:

$$144x=\frac{x^{16}}{144^6\times 81^4\times 2^2}$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$x^{15}=144^7\times 81^4\times 2^2=2^{28}\times 2^2\times 3^{14}\times 3^{16}=2^{30}\times 3^{30}\ ;$$

$$x=2^2\times 3^2=36$$

جواب:

۱۰۸	۳۶	۱۲	۴
۱۴۴	۷۲	۳۶	۱۸
۱۹۲	۱۴۴	۱۰۸	۸۱
۲۵۶	۲۸۸	۳۲۴	$\frac{729}{2}$

۶۴۵. داریم:

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{a_n-a_{n-1}-d+1}{a_{n-1}a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}+\frac{1-d}{a_{n-1}a_n}$$

و بنابراین خواهیم داشت (مجموع مطلوب را S می‌گیریم):

$$+\left|\begin{array}{l}\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1-d}{a_1a_2}\\ \frac{1}{a_2a_3}=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\frac{1-d}{a_2a_3}\\ \frac{1}{a_3a_4}=\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+\frac{1-d}{a_3a_4}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}+\frac{1-d}{a_{n-1}a_n}\end{array}\right.$$

$$S=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}+(1-d)S$$

و از آنجا:

$$dS=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_1}{a_1a_n}=\frac{(n-1)d}{a_1a_n}\implies S=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

۶۴۶. داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}=\frac{1}{d}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}})$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$S=\frac{1}{d}(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+\frac{1}{d}(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+$$

$$+\frac{1}{d}(\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3})+\cdots+\frac{1}{d}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}})=$$

$$=\frac{1}{d}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{a_n-a_{n-1}}$$

۶۴۷. به‌جای Sها مقادیرشان را قرار دهید، صحت رابطه ثابت می‌شود.

۶۴۸. اگر S_n مجموع n جمله ازتصاعد باشد ، طبق فرض باید داشته‌باشیم:

$$S_5=\frac{1}{4}(S_{10}-S_5) \Longrightarrow 5S_5=S_{10}$$

از طرف دیگر داریم:

$$S_5=\frac{5}{2}(2+4d) \ ; \ S_{10}=5(2+9d) \ ;$$

$$\frac{25}{2}(2+4d)=5(2+9d) \Longrightarrow d=-3$$

جواب: قدرنسبت تصاعد مطلوب مساوی ۳− است.

۶۴۹. هریك از عددهای مطلوب بصورت $7k+3$ هستند و برای اینکه دو رقمی باشند، باید داشته باشیم:

$$10<7k+3<100 \Longrightarrow 1<k\leqslant 13$$

و بنابراین باید مجموع ۱۳ جمله از یك تصاعد حسابی با جملهٔ اول ۱۰ و قدرنسبت ۷ را بدست آوریم.

جواب: $S=676$

۶۵۰. مجموع داخل کروشه، مجموع بی‌نهایت جمله از یك تصاعد هندسی نزولی با جملهٔ اول $\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$ و قدرنسبت $\frac{1}{\sqrt{3}}$ است.

جواب: $-6(\sqrt{3}+1)$

۶۵۱. جواب: $a=12$ (جملهٔ اول) و $q=\frac{1}{2}$ (قدر نسبت).

۶۵۲. اگر سه عدد را a و b و c فرض کنیم، طبق فرض مسأله داریم:

$$\begin{cases} a+b+c=26 \\ ac=b^2 \\ a-2b+c=8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} a=2 \\ b=6 \\ c=18 \end{vmatrix}$$

۶۵۳. اگر ضلع کوچکتر مثلث را a و قدرنسبت را q فرض کنیم، $q\geqslant 1$ خواهد شد و داریم:

$$aq^2<aq+a \Longrightarrow q^2-q-1<0$$

که با توجه به شرط $q\geqslant 1$ بدست می‌آید: $1\leqslant q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

بهمین ترتیب اگرضلع بزرگتر را c و قدر نسبت را q فرض‌کنیم ، $q<1$ خواهد شدو بدست می‌آید:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<1$$

جواب : $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

۶۵۴- برای اینکه سه عدد a وb وc هم به تصاعد حسابی و هم به‌تصاعد هندسی باشند ، باید داشته باشیم:

$$a+c=2b \quad ; \quad a\cdot c=b^2$$

و از آنجا مقادیر a وc باید جوابهای معادلهٔ درجه دوم زیر باشند:

$$t^2-2bt+b^2=0 \implies t'=t''=b$$

یعنی باید داشته باشیم $a=b=c$ و تنها در این حالت است که سه عدد a وb وc هم به تصاعد حسابی و هم به تصاعد هندسی هستند.

۶۵۵- داریم:

$$\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{55\ldots5}_{k-1}6=\underbrace{11\ldots1}_{2k}+\underbrace{44\ldots4}_{k}+1=$$

$$=(10^{2k-1}+10^{2k-2}+\ldots+10+1)+$$

$$+4(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+10+1)+1=\frac{10^{2k}-1}{10-1}+$$

$$+4\times\frac{10^k-1}{10-1}+1=\frac{1}{9}(10^{2k}-1+4\times10^k-4+9)=$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2k}+2\times10^k\times2+2^2)=$$

$$=\left(\frac{10^k+2}{3}\right)^2=\left(\frac{10^k-1}{3}+1\right)^2=$$

$$=\left[\frac{3(10^k-1)}{9}+1\right]^2=\left[\frac{3(10^k-1)}{10-1}+1\right]^2=$$

$$=[3(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+10+1)+1]^2=$$

$$=(3\times10^{k-1}+3\times10^{k-2}+\dots+3\times10+4)^2=$$
$$=(\underbrace{33\dots3}_{k-1}4)^2$$

۶۵۶. اگر a_n راجملهٔاول تصاعد در نظر بگیریم، a_{m+n} جملهٔ$(m+1)$ام تصاعد می‌شود و داریم:

$$a_{m+n}=a_n+md$$

همچنین اگر a_m راجملهٔ اول‌تصاعد فرض کنیم، a_{m+n} جملهٔ $(n+1)$ام تصاعد می‌شود و داریم:

$$a_{m+n}=a_m+nd$$

و بالاخره‌اگر a_{m-n} راجملهٔ اول‌تصاعد بگیریم، a_{m+n}جملهٔ$(2n+1)$ام تصاعد می‌شود و داریم:

$$a_{m+n}=a_{m-n}+2nd$$

در هر سه تساوی d راقدرنسبت‌تصاعد گرفتیم. ازاین‌سه‌معادله بدست می‌آید:

$$a_m=a_{m+n}-nd=A-nd\ ;\ a_n=a_{m+n}-md=A-md;$$
$$d=\frac{a_{m+n}-a_{m-n}}{2n}=\frac{A-B}{2n}$$

که اگر مقدار d را در دو تساوی اول قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$a_m=A-n\times\frac{A-B}{2n}=A-\frac{A-B}{2}=\frac{A+B}{2}\ ;$$
$$a_n=A-m\times\frac{A-B}{2n}=\frac{2nA-mA+mB}{2n}=$$
$$=\frac{(2n-m)A+mB}{2n}$$

۶۵۷. اگر q را قدرنسبت تصاعد بگیریم و شبیه تمرین قبل عمل کنیم، به تساویهای زیر می‌رسیم:

$$a_{m+n}=a_m\cdot q^n\implies a_m=A\cdot q^{-n}\ ;$$
$$a_{m+n}=a_n\cdot q^m\implies a_n=A\cdot q^{-m}\ ;$$
$$a_{m+n}=a_{m-n}\cdot q^{2n}\implies A=B\cdot q^{2n}$$

از رابطهٔ اخیر بدست می‌آید: $q=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2n}}$

و از آنجا مقادیر a_m و a_n بدست می‌آید:

$$a_m=A\cdot\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{-n}{2n}}=A\cdot\left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{A\cdot B}\ ;\ a_n=A\cdot\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{-m}{2n}}$$

۶۵۸. اگر a را جملهٔ اول و q را قدر نسبت تصاعد فرض کنیم، داریم:

$$b=a\cdot q\ ;\ c=a\cdot q^2\ ;\ d=a\cdot q^3$$

با استفاده از این رابطه‌ها خواهیم داشت:

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(aq-aq^2)^2+$$
$$+(aq^2-a)^2+(aq^3-aq)^2=$$
$$=a^2(1-q)^2[q^2+(q+1)^2+q^2(q+1)^2]=$$
$$=a^2(1-q)^2[q^2+2q(1+q^2)+(1+q^2)^2]=a^2(1-q)^2\times$$
$$\times(q^2+q+1)^2=a^2(1-q^3)^2=(a-aq^3)^2=(a-d)^2$$

۶۵۹. جواب: $a=1$ ، $b=2$ ، $d=3$ ، $l=2$ و $f(x)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x)=(x^2+x+1)(x^2+x+2)$$

و در نتیجه چهار ریشهٔ $f(x)=0$ موهومی است.

۶۶۰. اگر قدرنسبت تصاعد را k فرض کنیم ، داریم:

$$b=a+k\ ;\ c=a+2k\ ;\ d=a+3k$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$abcd+(b-c)^4=a(a+k)(a+2k)(a+3k)+k^4=$$
$$=a^4+6a^3k+11a^2k^2+6ak^3+k^4=(a^2+3ak+k^2)^2$$

۶۶۱. بطور کلی در معادلهٔ دو مجذوری $ax^4+bx^2+c=0$ وقتی ریشه‌ها به تصاعد حسابی هستند که در معادلهٔ حلال آن $ay^2+by+c=0$ یکی از ریشه‌ها ۹ برابر ریشهٔ دیگر باشد، زیرا اگر ریشه‌های معادلهٔ دو مجذوری را $\pm x'$ و $\pm x''$ و $|x'|>|x''|$ فرض کنیم ، بـرای اینکه عددهای $-x'$ ، $-x''$ ، x'' و x' به تصاعد حسابی باشند باید داشته باشیم:

$$3x'' = x' \Longrightarrow 9x''^2 = x'^2 \Longrightarrow y' = 9y''$$

به این ترتیب در مورد معادلهٔ مفروض مسأله داریم:

$$\begin{cases} y' + y'' = \dfrac{2(2m+1)}{3} \\ y' \cdot y'' = \dfrac{m+1}{3} \\ y' = 9y'' \end{cases} \Longrightarrow m = 2 \text{ و } -\frac{11}{2}$$

که به ازای $m=2$ چهار ریشهٔ حقیقی و به ازای $m=-\frac{11}{2}$ چهارریشهٔ موهومی خواهیم داشت که در هرحال به تصاعد حسابی هستند.

۶۶۲. اگر جملهٔ اول تصاعد را α و قدرنسبت آنرا q فرض کنیم، داریم:

$$a = \alpha \cdot q^{m-1} \;;\; b = \alpha \cdot q^{n-1} \;;\; c = \alpha \cdot q^{p-1}$$

که اگر در رابطهٔ حکم قرار دهیم، صحت آن به‌سادگی ثابت می‌شود.

۶۶۳. ۱) قدرنسبت تصاعد را d فرض می‌کنیم، در اینصورت خواهیم داشت:

$$a_{n-1} \cdot a_n = [a_1 + (n-2)d] \cdot [a_1 + (n-1)d] =$$
$$= a_1^2 - 3da_1 + 2nda_1 + (n-2)(n-1)d^2$$

در دوطرف این تساوی n را از ۲ تا n می‌گیریم:

$$+\left|\begin{array}{l} a_1 \cdot a_2 = a_1^2 - 3da_1 + 4da_1 \\ a_2 \cdot a_3 = a_1^2 - 3da_1 + 6da_1 + 1 \times 2d^2 \\ a_3 \cdot a_4 = a_1^2 - 3da_1 + 8da_1 + 2 \times 3d^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} \cdot a_n = a_1^2 - 3da_1 + 2nda_1 + (n-2)(n-1)d^2 \end{array}\right.$$

$$S_1 = (n-1)a_1^2 - 3(n-1)da_1 + 2(2+3+4+\cdots+n)da_1 +$$
$$+ [1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + (n-2)(n-1)]d^2 =$$
$$= (n-1)a_1^2 - 3(n-1)da_1 + (n-1)(n+2)da_1 +$$
$$+ \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)d^2$$

جواب : $S_1 = \dfrac{n-1}{3}[3a_1^2 + 3(n-1)da_1 + n(n-2)d^2]$

۲) مسألهٔ ۶۴۵ را ببینید.

۳) اگر شبیه حالت اول عمل کنیم ، بدست می‌آید:

$$S_3=\frac{n}{6}[6a_1^2+6(n-1)a_1d+(n-1)(2n-1)d^2]$$

۴) جواب :

$$S_4=\frac{n}{4}[4a_1^3+6(n-1)da_1^2+$$
$$+2(n-1)(2n-1)d^2a_1+n(n-1)^2d^3]$$

۶۶۴. باید داشته باشیم:

$2\log(2^x-2)=\log 2+\log(2^x+2)$;

$(2^x-2)^2=2(2^x+2) \implies 2^x=0$ و 6

جواب صفر برای 2^x قابل قبول نیست ، زیرا در اینصورت $\log(2^x-2)$ مفهوم خود را از دست می‌دهد.

$$2^x=6 \implies x\log 2=\log 6 \implies x=1+\frac{\log 3}{\log 2}$$

۶۶۵. بنابر فرض مسألهٔ داریم:

$$b^2=a\cdot c \implies 2\log b=\log a+\log c \qquad (1)$$

دوطرف رابطهٔ (۱) را بر $\log x$ تقسیم می‌کنیم:

$$2\frac{\log b}{\log x}=\frac{\log a}{\log x}+\frac{\log c}{\log x}$$

که با توجه به‌رابطهٔ واضح $\frac{\log\alpha}{\log\beta}=\log_\beta\alpha$ خواهیم داشت:

$$\frac{2}{\frac{\log x}{\log b}}=\frac{1}{\frac{\log x}{\log a}}+\frac{1}{\frac{\log x}{\log c}} \implies \frac{2}{\log_b x}=\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}$$

و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۶۶۶. برای اولا داریم:

$$S_1=2^2+4^2+6^2+\dots+(2n)^2=4(1^2+2^2+3^2+\dots+$$

$$+n^2)=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

برای محاسبهٔ مجموع مربعهای عددهای فردمتوالی تا $(2n-1)$، ابتدامجموع مربعهای عددهای متوالی را تا $2n$ محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma=1^2+2^2+3^2+\dots+(2n)^2=\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$$

مجموع مربعهای عددهای فرد متوالی تا $(2n-1)$، تفاضل $\sigma-S_1$ است:

$$S_2=\sigma-S_1=\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}-$$

$$-\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

۶۶۷. برای اینکه ریشه‌ها به تصاعد حسابی باشند، باید داشته باشیم:

$$2x_2=x_1+x_3=(x_1+x_2+x_3)-x_2=-\frac{b}{a}-x_2\ ;$$

و از آنجا:

$$3x_2=-\frac{b}{a}\implies x_2=-\frac{b}{3a}$$

این مقدار x_2 باید در معادله صدق کند که از آنجا بدست می‌آید:

$$2b^3+27a^2b=9abc$$

۶۶۸. اگر قدرنسبت تصاعد مربوط به aوbوc را d فرض کنیم، داریم:

$$b-a=c-b=d\ ;\ c-a=(c-b)+(b-a)=2d\ ;$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{d}+\frac{f(c)-f(b)}{d}=2\times\frac{f(c)-f(a)}{2d}$$

که صحت آن با عملهای ساده روشن می‌شود. قسمت‌دوم هم بهمین‌ترتیب ثابت می‌شود.

۶۶۹. q را قدرنسبت‌تصاعد می‌گیریم وبنابراین ضلعهای چهارضلعی به‌صورت a ، aq ، aq^2 ، aq^3 درمی‌آید. در هرچهارضلعی ضلع بزرگتر ازمجموع سه ضلع دیگر کوچکتر است.

اگر $q>1$ باشد ، می‌نویسیم:

$$aq^3<aq^2+aq+a \Longrightarrow q^3<q^2+q+1$$

این نامساوی به‌سادگی به اینصورت درمی‌آید:

$$(q-2)(q^2+q)+(q-1)<0$$

چون $q>1$ است، به‌شرطی این نامساوی می‌تواند برقرار باشد که $q<2$ باشد.

اگر $q<1$ باشد ، می‌نویسیم:

$$a<aq+aq^2+aq^3 \Longrightarrow 1<q+q^2+q^3$$

دو طرف این نامساوی را بر q^3 تقسیم می‌کنیم :

$$\left(\frac{1}{q}\right)^3<\left(\frac{1}{q}\right)^2+\left(\frac{1}{q}\right)+1$$

که اگر $r=\frac{1}{q}$ فرض کنیم ، به نامساوی $r^3<r^2+r+1$ می‌رسیم که‌شبیه حالت اول به نتیجهٔ $r<2$ می‌رسد (وقتی $q<1$ باشد $r=\frac{1}{q}>1$ می‌شود)، بنابراین $\frac{1}{q}<2$ یا $q>\frac{1}{2}$.

* * *

۶۷۰.معادله وقتی مفهوم دارد که $a>0$ ،$a\neq 1$ ، $b>0$ و $b\neq 1$ ،$c>0$ ، $\log_a c>0$ باشد. فرض می‌کنیم:

$$\log_a c=A \;\; ; \;\; \log_a x=y$$

معادلهٔ مفروض به صورت زیر در می‌آید:

$$A^{2\log_b y}+A=(1+A)y^{\log_b A}$$

به ازای $A\neq 1$ داریم :

$$\log_b y=\log_A y\cdot\log_b A \;\; ; \Longrightarrow y=A^{\log_A y}$$

بنابراین معادلهٔ مفروض به صورت زیر در می‌آید:

$$A^{2\log_A y\cdot\log_b A}+A=(1+A)\cdot y^{\log_b A}$$

ویا :
$$y^{2\log_b A}+A=(1+A)\cdot y^{\log_b A}$$

به این‌ترتیب معادله، به‌صورت معادلهٔ درجهٔدوم زیر تبدیل می‌شود:

$$z^2-(1+A)z+A=0 \quad (z=y^{\log_b A})$$

که از آنجا بدست می‌آید: $z_2=A$ ، $z_1=1$

یا: $y_2=b$ ، $y_1=1$

و از آنجا: $x_2=a^2$ ، $x_1=a$

درحالت خاصی‌که $A=1$ $(a=c)$ باشد، x باید مقدار مثبتی‌باشد، $\log_a x>0$. بنابراین‌بایدفرض‌کرد $x>1$ اگر $a>1$ باشد و $0<x<1$ اگر $0<a<1$ باشد.

۶۷۱. باتوجه به تساویهای $\frac{10\times 3^2}{2^3}=\frac{90}{8}=\frac{1125}{100}=11/25$ و $\frac{10\times 3}{2}=\frac{30}{2}=15$ داریم:

$$\log_{15}\sqrt[5]{11/25}=\frac{\frac{1}{5}\log 11/25}{\log 15}=\frac{\log\frac{10\times 3^2}{2^3}}{5\log\frac{10\times 3}{2}}=\frac{3\alpha-2\beta-1}{5(\alpha-\beta-1)}$$

۶۷۲. داریم :
$$a=\log_{12}27=\frac{\log 27}{\log 12}=\frac{3\log 3}{2\log 2+\log 3}=\frac{3}{2\frac{\log 2}{\log 3}+1}$$

و از آنجا بدست می‌آید : $\frac{\log 3}{\log 2}=\frac{2a}{3-a}$

حالا می‌نویسیم:

$$\log_6 16=\frac{\log 16}{\log 6}=\frac{4\log 2}{\log 2+\log 3}=\frac{4}{1+\frac{\log 3}{\log 2}}=$$

$$=\frac{۴}{۱+\frac{۲a}{۳-a}}=\frac{۴(۳-a)}{۳+a}$$

۶۷۳. به‌ترتیب داریم:

$$\log ۵ \log ۲۰+\log^۲ ۲=\log ۵(\log ۵+۲\log ۲)+\log^۲ ۲=\log^۲ ۵+$$
$$+۲\log ۵ . \log ۲+\log^۲ ۲=(\log ۵+\log ۲)^۲=\log^۲ ۱۰=۱$$

۶۷۴. با توجه به رابطهٔ واضح $۱۰^{\log a}=a$ داریم:

$$۱۰\times ۱۰۰^{\frac{۱}{۲}\log ۹-\log ۲}=۱۰\times ۱۰^{\log ۹-۲\log ۲}=۱۰^{۱+\log ۹-\log ۴}=$$
$$=۱۰^{\log ۲۲/۵}=۲۲/۵$$

۶۷۵. جواب : ۵

۶۷۶. جواب : ۲۰

۶۷۷. به‌ترتیب داریم:

$$x=۷^{۲-۲\log_۷ ۲}+\frac{۱}{۵^{\log_۵ ۴}}=\frac{۷^۲}{۷^{\log_۷ ۴}}+\frac{۱}{۴}=\frac{۴۹}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۲۵}{۲}$$

۶۷۸. حاصل عبارت را x می‌گیریم، داریم:

$$\log x=\frac{\log(\log a)}{\log a}.\log a=\log(\log a) \implies x=\log a$$

۶۷۹. از فرض مسأله بدست می‌آید:

$$\left(\frac{۲a+۳b}{۵}\right)^۲=ab$$

و از آنجا:

$$۲\log\frac{۲a+۳b}{۵}=\log a+\log b$$

۶۸۰. از تساوی $a^۲+b^۲=۷ab$ نتیجه می‌شود :

$$(a+b)^۲=۹ab \implies \left(\frac{a+b}{۳}\right)^۲=ab$$

و از آنجا:

$$۲\log\frac{a+b}{۳}=\log a+\log b$$

۶۸۱. اگر از دوطرف‌تساوی $a^{۲}=(c+b)(c-b)$ یکبار درمبنای $c+b$ و یکبار در مبنای $c-b$ لگاریتم بگیریم، بدست‌می‌آید:

$$۲\log_{c+b}a=۱+\log_{c+b}(c-b)\ ;\ ۲\log_{c-b}a=۱+\log_{c-b}(c+b)$$

از ضرب این دو رابطه دریکدیگر بدست می‌آید:

$$۴\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a=$$
$$=۱+\log_{c+b}(c-b)+\log_{c-b}(c+b)+$$
$$+\log_{c+b}(c-b)\log_{c-b}(c+b)=\left[۱+\log_{c+b}(c-b)\right]+$$
$$+\left[۱+\log_{c-b}(c+b)\right]=۲\log_{c-b}a+۲\log_{c+b}a$$

۶۸۲. داریم:

$$۱)\quad a\cdot b\cdot c=\frac{\log c}{\log b}\cdot\frac{\log a}{\log c}\cdot\frac{\log b}{\log a}=۱$$

$$۲)\quad \frac{a}{ab+a+۱}+\frac{b}{bc+b+۱}+\frac{c}{ca+c+۱}=$$
$$=\frac{\log c}{\log a+\log b+\log c}+\frac{\log a}{\log a+\log b+\log c}+$$
$$+\frac{\log b}{\log a+\log b+\log c}=۱$$

۶۸۳. به‌ترتیب داریم:

$$x\cdot y\cdot z=(\log_a b+\log_a c)(\log_b c+\log_b a)(\log_c a+\log_c b)=$$
$$=۲+\log_c a+\log_b c+\log_b a+\log_a b+\log_c b+\log_a c=$$
$$=۲+(\log_c a+\log_c b)+(\log_b a+\log_b c)+(\log_a b+\log_a c)=$$
$$=۲+\log_c(ab)+\log_b(ac)+\log_a(bc)=۲+x+y+z$$

۶۸۴. داریم:

$$\log(x+z)+\log(x-۲y+z)=\log[(x+z)(x+z-۲y)]=$$
$$=\log[(x+z)^{۲}-۲(xy+yz)]$$

و چون x و y و z به‌تصاعد توافقی هستند داریم.

$$xy+yz=۲xz$$

و از آنجا عبارت فوق چنین می‌شود:

$$log[(x+z)^۲-۴xz]=log(x-z)^۲=۲log(x-z)$$

۶۸۵. داریم:

$$S=(log\alpha-log\beta)(log\beta-log\gamma)+(log\beta-log\gamma)(log\gamma-log\alpha)+$$
$$+(log\gamma-log\alpha)(log\alpha-log\beta)=(x_۱-x_۲)(x_۲-x_۳)+$$
$$(x_۲-x_۳)(x_۳-x_۱)+(x_۳-x_۱)(x_۱-x_۲)=(x_۱x_۲+x_۲x_۳+$$
$$+x_۱x_۳)-(x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲)=۳(x_۱x_۲+x_۲x_۳+x_۱x_۳)-$$
$$-(x_۱+x_۲+x_۳)^۲=\frac{۹(ac-b^۲)}{a^۲}$$

۶۸۶. داریم:

$$log_۴log_۳log_۲x=log_۴۱ \Longrightarrow log_۳log_۲x=۱=log_۳۳\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow log_۲x=۳ \Longrightarrow x=۸$$

۶۸۷. شبیه تمرین قبل به‌ترتیب داریم:

$$۱+log_b[۱+log_c(۱+log_p x)]=۱ \;;$$
$$log_b[۱+log_c(۱+log_p x)]=۰=log_b ۱ \;;$$
$$۱+log_c(۱+log_p x)=۱ \Longrightarrow log_c(۱+log_p x)=۰ \;;$$
$$۱+log_p x=۱ \Longrightarrow log_p x=۰ \Longrightarrow x=۱$$

۶۸۸. مقدار داخل آکولاد مثبت است، زیرا مقدار منفی در مبنای ۴ لگاریتم حقیقی ندارد، بنابراین معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$۲log_۳[۱+log_۲(۱+۳log_۲x)]=\sqrt{۴}$$

در اینجا هم باید مقدار مثبت $\sqrt{۴}$ یعنی ۲ را انتخاب کرد، زیرا لگاریتم عددهای بزرگتر از واحد مثبت است. ادامهٔ کار مشکل نیست وجواب $x=۲$ بدست می‌آید.

۶۸۹. همهٔ لگاریتمها را به مبنای ۲ می‌بریم، داریم:

$$log_۴x=\frac{log_۲x}{log_۲۴}=\frac{۱}{۲}log_۲x \;;\; log_{۱۶}x=\frac{۱}{۴}log_۲x$$

و بنابراین معادلهٔ مفروض به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{۱}{۴}log_۲x+\frac{۱}{۲}log_۲x+log_۲x=۷ \Longrightarrow log_۲x=۴$$

جواب: $x=16$

۶۹۰. جواب: $x=a$

۶۹۱. سمت چپ تساوی مجموع $x+1$ جمله از یك تصاعد هندسی است و برای حالت $a\neq 1$ داریم:

$$\frac{1-a^{x+1}}{1-a}=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$$

ویا :

$$1-a^{x+1}=(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)=1-a^{16};$$

$$a^{x+1}=a^{16} \implies x+1=16 \implies x=15$$

درحالت $a=1$، تمام جمله‌های سمت‌چپ تساوی برابر ۱ و بنابراین‌مجموع آنها $x+1$ می‌شود و داریم:

$$x+1=2^4=16 \implies x=15$$

جواب: $x=15$

۶۹۲. معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$5^{\log x}+5^{\log x-1}=3^{\log x+1}+3^{\log x-1};$$

یا :

$$5^{\log x}\left(1+\frac{1}{5}\right)=3^{\log x}\left(3+\frac{1}{3}\right)$$

یا :

$$\frac{5^{\log x}}{3^{\log x}}=\frac{25}{9} \implies \left(\frac{5}{3}\right)^{\log x}=\left(\frac{5}{3}\right)^2;$$

$$\log x=2 \implies x=100$$

۶۹۳. اگر فرض‌کنیم $\sqrt[x]{a}=u$ ، بدست می‌آید : $\sqrt{a}=u^{\frac{x}{2}}$ واز آنجا:

$$\log_{\sqrt[x]{a}}\sqrt{a}=\log_u u^{\frac{x}{2}}=\frac{x}{2}$$

و شبیه آن :

$$\log_{\sqrt[y]{b}}\sqrt{b}=\frac{y}{2}$$

وبنابراین دستگاه مفروض به صورت زیردر می‌آید:

$$\begin{cases} x^۲+xy+y^۲=a^۲ \\ x+y=\frac{۲a}{\sqrt{۳}} \end{cases}$$

که به سادگی به دستگاه زیر منجر می‌شود:

$$x+y=\frac{۲a}{\sqrt{۳}} \; ; \; xy=\frac{a^۲}{۳}$$

که تنها جواب آن چنین است:

$$x=y=\frac{a}{\sqrt{۳}}$$

۶۹۴. جواب: $\left|\begin{matrix} x=۱ \\ y=۱ \end{matrix}\right. \; ; \; \left|\begin{matrix} x=۴ \\ y=۲ \end{matrix}\right.$

۶۹۵. دستگاه مفروض به دستگاه زیر تبدیل می‌شود:

$$x^۲yz=۱۶ \; ; \; y^۲xz=۸۱ \; ; \; z^۲xy=۲۵۶$$

و از آنجا $xyz=۲۴$ بدست می‌آید (با توجه به مثبت بودن x و y و z).

جواب : $x=\frac{۲}{۳}$ ، $y=\frac{۲۷}{۸}$ ، $z=\frac{۳۲}{۳}$.

۶۹۶. دستگاه به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$x(x+y)=۷۰ \; ; \; x^۲-y^۲=۴۰$$

و ازآنجا با توجه به شرطهای $x+y>۰$ و $x-y>۰$ بدست می‌آید:

$$x=۷ \text{ و } y=۳$$

۶۹۷. جواب: $x=\sqrt[pq-۱]{a^p.b} \; ; \; y=\sqrt[pq-۱]{a.b^p}$

۶۹۸. معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\log^۲ x-۲\left(۱+\log a-\left|\log\frac{x}{a}\right|\right)}{\log x}=۰$$

ریشه‌های این معادله ، همان‌ریشه‌های صورت کسر (به شرطی که مخالف واحد

باشند) می‌باشد. به این ترتیب باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\log^2 x - 2\left(1 + \log a - \left|\log\frac{x}{a}\right|\right) = 0$$

ویا . $\log^2 x - 2 - 2\log a + 2|\log x - \log a| = 0$ (۱)

حالت اول . $\log x \geqslant \log a$ ، در اینصورت معادلهٔ (۱) به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر ، نسبت به $\log x$، تبدیل می‌شود:

$$\log^2 x + 2\log x - 2 - 4\log a = 0 \qquad (2)$$

مبین این معادله $\Delta = 3 + 4\log a$ است.

ریشه‌های معادلهٔ (۲) وقتی حقیقی است که $\Delta \geqslant 0$ یعنی $\log a \geqslant -\frac{3}{4}$ باشد .

وقتی که $\log a = -\frac{3}{4}$ باشد، معادلهٔ (۲) دو ریشهٔ مساوی $\log x = -1$ را دارد که درشرط $\log x \geqslant \log a$ صدق نمی‌کند وبنابراین‌به ازای $a = 10^{-\frac{3}{4}}$، معادلهٔ مفروض جوابی که در شرط $\log x \geqslant \log a$ صدق کند، ندارد.

اگر $\log a > -\frac{3}{4}$ باشد، ریشه‌های معادلهٔ (۲) حقیقی و متمایزند ، در اینصورت $\log x = \log a$ وقتی جواب معادله است که داشته باشیم:

$$\log^2 a - 2\log a - 2 = 0 \Longrightarrow \log a = 1 \pm \sqrt{3}$$

معادلهٔ مفروض به ازای $a = 10^{1-\sqrt{3}}$ ریشهٔ $x = 10^{1-\sqrt{3}}$ و به ازای $a = 10^{1+\sqrt{3}}$ ریشهٔ $x = 10^{1+\sqrt{3}}$ خواهد داشت.

حالا فرض می‌کنیم $\log a > -\frac{3}{4}$ و $\log a \neq 1 \pm \sqrt{3}$، در اینصورت (و تنها در اینصورت) معادلهٔ (۲) دارای ریشه‌های حقیقی و متمایز و مخالف با $\log a$ می‌باشد.

معادلـهٔ (۲) در حالت اول $\left(\log a \neq 1 \pm \sqrt{3} \text{ و } \log a > -\frac{3}{4}\right)$

دارای دو ریشهٔ بزرگتر از $log\,a$ است وقتی که داشته باشیم[1]:

$$\begin{cases} log^2 a + 2\,log\,a - 2 - 4\,log\,a > 0 \\ 2\,log\,a + 2 < 0 \end{cases}$$

نامساوی دوم‌شرط $log\,a > -\frac{3}{4}$ را نقض می‌کند و بنابراین دوریشهٔ معادله نمی‌تواند از $log\,a$ بزرگتر باشد.

معادلهٔ (۲) دارای دو ریشه، یکی بزرگتر از $log\,a$ و دیگری کوچکتر از $log\,a$ است، وقتی که داشته باشیم:

$$log^2 a + 2\,log\,a - 2 - 4\,log\,a < 0$$

یعنی:

$$1 - \sqrt{3} < log\,a < 1 + \sqrt{3}$$

و بنابراین ریشهٔ معادلهٔ مفروض، ریشهٔ بزرگتر معادلهٔ (۲) است:

$$log\,x = -1 + \sqrt{3 + 4\,log\,a} \implies x = 10^{-1 + \sqrt{3 + 4\,log\,a}}$$

ولی چون $log\,x \neq 1$ است و به ازای $log\,x = -1 + \sqrt{3 + 4\,log\,a} = 0$ داریم: $log\,a = -\frac{1}{2}$ یعنی $a = \frac{1}{\sqrt{10}}$ و این عدد در فـاصلهٔ $1 - \sqrt{3}$ و $1 + \sqrt{3}$ قرار دارد، جواب فوق وقتی قابل قبول است که داشته باشیم:

---

۱) اگر x_1 و x_2 ریشه‌های حقیقی و متمایز معادلهٔ $x^2 + px + q = 0$ باشد، عدد λ وقتی از هر دو ریشه کوچکتر است که $\lambda^2 + p\lambda + q > 0$ و $2\lambda + p < 0$ باشد. عدد λ بین دو ریشه است وقتی‌که $\lambda^2 + p\lambda + q < 0$ باشد و بالاخره λ از دو ریشه بزرگتر است. وقتی که $\lambda^2 + p\lambda + q > 0$ و $2\lambda + p > 0$ باشد.

در حقیقت اگر $\lambda < x_1$ و $\lambda < x_2$ باشد، باید داشته باشیم: $\lambda - x_1 < 0$ و $\lambda - x_2 < 0$ یـا: $(\lambda - x_1)(\lambda - x_2) > 0$ و $\lambda - x_1 + \lambda - x_2 < 0$ که از آنجا به دو نامساوی زیر می‌رسیم:

$$\lambda^2 + p\lambda + q > 0 \ ; \ 2\lambda + p < 0$$

برای دو حالت دیگر هم می‌توان به‌همین ترتیب استدلال کرد.

$$1-\sqrt{3}<a<\frac{1}{\sqrt{10}} \text{ یا } \frac{1}{\sqrt{10}}<a<1+\sqrt{3}$$

حالت دوم. $\log x<\log a$، در اینصورت معادلهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$\log^2 x-2\log x-2=0$$

و از آنجا :
$$\log x=1\pm\sqrt{3}$$

یعنی اگر $\log a\leqslant 1-\sqrt{3}$ باشد، معادلهٔ مفروض جوابهایی که به ازای آنها $\log x<\log a$ باشد ندارد .

اگر $1-\sqrt{3}<a\leqslant 1+\sqrt{3}$ باشد ، ریشهٔ معادله $x=10^{1-\sqrt{3}}$

واگر $\log a>1+\sqrt{3}$ باشد ، ریشهٔ معادلهٔ مفروض $x=10^{1-\sqrt{3}}$ و $x=10^{1+\sqrt{3}}$ خواهد بود.

۶۹۹. تابع $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ وقتی معین است که $x\geqslant 1$ باشد که در اینصورت $y>0$ خواهد بود، ابتدا نامعادلهٔ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}<1$ را حل می‌کنیم، داریم :

$$\sqrt{x+1}<1+\sqrt{x-1} \Rightarrow 2\sqrt{x-1}>1 \Rightarrow x>\frac{5}{4}$$

وحل نامعادلهٔ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}>1$ منجر به دستگاه
$$\begin{cases} 4(x-1)<1 \\ x\geqslant 1 \end{cases}$$
می‌شود که از آنجا بدست می‌آید :

$$1\leqslant x<\frac{5}{4}$$

و بالاخره از حل معادلهٔ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$ بدست‌می‌آید: $x=\frac{5}{4}$

۱) اگر $1\leqslant x<\frac{5}{4}$ باشد ، نامعادلهٔ مفروض تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x^2-2x+1\geqslant 1 \Rightarrow x^2-2x>0$$

و چون $x\geqslant 1$ است ، بدست می‌آید: $x\geqslant 2$

بنابراین نامعادله در فاصلهٔ نیم‌بستهٔ $1 \leqslant x < \frac{5}{4}$ دارای جواب نیست.

۲) اگر $x > \frac{5}{4}$ باشد، نامعادله‌وقتی‌برقرارخواهدبود که‌داشته‌باشیم:

$$0 < x^2 - 3x + 1 \leqslant 1$$

که با توجه به شرط $x > \frac{5}{4}$ به جوابهای زیر می‌رسیم:

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leqslant 3$$

که جوابهای نامعادله می‌باشند.

۷۰۰. واضح است که معادله بـه ازای مقادیر منفی x جواب ندارد، زیرا $\sin\frac{\pi}{7}$ و $\cos\frac{\pi}{7}$ مقادیری کوچکتر از واحدند و اگر x منفی باشد $\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^x$ و $\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^x$ هر دو از واحد بزرگتر می‌شوند

$x = 0$ هم در معادله صدق نمی‌کند. به این ترتیب $x > 0$ است.

$x = 2$ در معادله صدق می‌کند. اگر $0 < x < 2$ باشد داریم:

$$\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^x > \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 \text{ و } \left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^x > \left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^2$$

و اگر $x > 2$ باشد:

$$\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^x < \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 \text{ و } \left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^x < \left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^2$$

یعنی معادله جوابی غیر از $x = 2$ ندارد.

۷۰۱. شبیه تمرین قبل استدلال کنید. جواب: $x = 2$.

۷۰۲. جواب: $x = 1$

۷۰۳. جواب: $x = 2$

۷۰۴. جواب: $x = 1$

۷۰۵. جواب: $x = 1$

۷۰۶. جواب : $x=\frac{\pi}{۴}$

۷۰۷. دو طرف معادله را بر ۳۶^x تقسیم کنید و $y=\left(\frac{۴}{۹}\right)^x$ بگیرید .

جواب: $x=\frac{۱}{۲}$

۷۰۸. دو طرف را بر ۵^x تقسیم کنید و شبیه مسألهٔ ۷۰۰ حل کنید.

جواب : $x=۲$

۷۰۹. جواب : $x=۰$

۷۱۰. $log_۳ x=y$ می‌گیریم ، در این‌صورت معادله به‌ترتیب چنین می‌شود:

$$log_۲(۱+\sqrt{۳^y})=y \Longrightarrow ۱+(\sqrt{۳})^y=۲^y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^y+\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^y=۱$$

که شبیه مسألهٔ ۷۰۰ حل می‌شود. جواب : $x=۹$

۷۱۱. $x+۱=-۲z$ می‌گیریم، به‌ترتیب داریم:

$$۲^{۲z}+۶^{۲z+۱}-\frac{۶^{۲z+۱}}{۲^z}-۱=۰ \quad ;$$

$$۲^{۲z}-۱+۶^{۲z+۱}-۳^{۲z+۱}\times ۲^{z+۱}=۰ \quad ;$$

$$(۲^z-۱)(۲^z+۱)+۳^{۲z+۱}\times ۲^{z+۱}(۲^z-۱)=۰ \quad ;$$

$$(۲^z-۱)(۲^z+۱+۶\times ۱۸^z)=۰$$

و چون $۲^z+۶\times ۱۸^z+۱\neq ۰$ ، بنابراین $۲^z-۱=۰$ و از آنجا

$z=۰$ و $x=-۱$

۷۱۲. معادلهٔ مفروض را تبدیل می‌کنیم:

$$۲\times ۹^{\log_۲ x-۱}=x^{\log_x ۶\cdot\log_۲ x}-۲^{۲\log_۲ x} \quad ;$$

$$\frac{۲}{۹}\times ۹^{\log_۲ x}=۶^{\log_۲ x}-۴^{\log_۲ x}$$

دوطرف این معادله را بر $۶^{\log_۲ x}$ تقسیم می‌کنیم :

$$۲\left(\frac{۳}{۲}\right)^{\log_۲ x} = ۹ - \left(\frac{۲}{۳}\right)^{\log_۲ x} \times ۹$$

اگر $t = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{\log_۲ x}$ بگیریم ، بدست می‌آید:

$$۲t^۲ - ۹t + ۹ = ۰ \implies t = ۳ , \frac{۳}{۲}$$

و از آنجا :

$$x_۱ = ۲,\ x_۲ = ۲^{\frac{۱}{۱ - \log_۲ ۲}}$$

پایان

بعضی از ترجمه‌های نویسندهٔ این کتاب

۱. ریاضیات؛ محتوی، روش و اهمیت آن
۲. تاریخ حساب
۳. آنالیز ریاضی
۴. هندسهٔ غیر اقلیدسی
۵. سرگرمیهای ریاضی
۶. سرگرمیهای جبر
۷. سرگرمیهای هندسه
۸. اعداد اول
۹. مثلثات
۱۰. تقارن در هندسه و جبر
۱۱. هندسه در گذشته و حال (ترجمه و تألیف)
۱۲. استقراء ریاضی
۱۳. تقارن در جبر
۱۴. لگاریتم
۱۵. ۲۵۰ مسألهٔ حساب
۱۶. در قلمرو ریاضیات
۱۷. درپی فیثاغورث
۱۸. مسائل مسابقات ریاضی (از کنکورهای شوروی)
۱۹. دورهٔ اختصاصی جبر مقدماتی
۲۰. مثلثات (مستقیم‌الخط و کروی)
۲۱. روشهای مثلثات (تألیف)
۲۲. روشهای جبر (در دو جلد) (تألیف)
۲۳. نظریهٔ مجموعه‌ها
۲۴. نامساویها
۲۵. اشتباه استدلالهای هندسی
۲۶. انعکاس
۲۷. ریاضیات در شرق
۲۸. مسائل و تمرینهای آنالیز ریاضی
۲۹. مسائل جبر برای سال چهارم ریاضی (تألیف)
۳۰. مسائل جبر برای سال پنجم ریاضی (تألیف)

بعضی از کتابهایی که با کمك دیگران تهیه شده است

۱. دورهٔ پنج‌سالهٔ ریاضیات ابتدایی
۲. دورهٔ سه‌سالهٔ ریاضیات راهنمایی
۳. نظریهٔ اعداد
۴. مسائل جبر و راهنمای حل آنها (برای داوطلبان کنکور)
۵. مسائل مثلثات و راهنمای حل آنها (برای داوطلبان کنکور)
۶. حل مسائل حساب برای چهارم ریاضی
۷. حل مسائل هندسه برای چهارم ریاضی
۸. حل مسائل مثلثات برای پنجم ریاضی
۹. حل مسائل هندسه برای پنجم ریاضی
۱۰. حل مسائل مثلثات برای ششم ریاضی
۱۱. حل مسائل حساب استدلالی برای ششم ریاضی
۱۲. حل مسائل هندسه و مخروطات برای ششم ریاضی
۱۳. حل مسائل هندسه ترسیمی برای ششم ریاضی
۱۴. حل مسائل هندسهٔ رقومی برای ششم ریاضی
۱۵. تست ریاضیات
۱۶. مسائل هندسه و راهنمای حل آنها (برای داوطلبان کنکور)

امیرکبیر منتشر کرده است:

تقارن در هندسه و جبر
ترجمه: پرویز شهریاری

درونمایهٔ گفتارهـای کتاب حاضر را می‌باید بـه عنوان مـدخلی برای ورود به تقارن برداشت کرد. سه مقاله‌ای که در این کتاب آمده از نشریهٔ مشهور ریاضیات در دبیرستان چاپ اتحادشوروی سالهای هزارونهصدوشصت‌وسه وشصت‌وچهار برگردانده شده است. مترجم‌درگوشه‌ای ازپیشگفتار می‌نویسد: «دربارهٔ تقارن مطالب بسیار می‌توان گفت و ابتدا نظربراین بود که باتوجه به یادداشتهای متعددی کـه در این زمینه فراهم آورده بودم، مشروح‌تر بحث شود ولی موقع تنظیم دریغم‌آمدکه قالب این مقالات را بر هم بزنم، زیرااین مقالات بـه همین صورت خود می‌تواند مورد استفادهٔ خاص دانش‌آموزان و دانشجویان واقع شود.»

۷۰۰ مسأله با حل کامل
تنظیم: باقر امامی، پرویز شهریاری، جواد حریرچی

مؤلفان کتاب، در توجیه و معرفی آن اینطور بیان داشته‌اند:
«چند سال قبل قریب به هفتصد مسأله در زمینهٔ جبر و مثلثات، بدون حل آنها ازطرف مؤسسهٔ انتشارات‌امیر کبیرمنتشرشد ودر دسترس علاقه‌مندان قرار گرفت، این جزوه بزودی جای خود را باز کرد و مسائل آن مورد بحث دانش آموزان و دانشجویان قرار گرفت و با وجودی که نسخه‌های چاپی آن نایاب شد مسائل آن دست به دست می‌گشت و راه حل بعضی از آنها حتی به مجلات علمی کشیده شد. مؤلفان احساس کردند که حل کامل این مسائل می‌تواند وسیلهٔ جالبی برای کار خارج از کلاس دانش‌آموزان و داوطلبان کنکور ودانشجویان باشد و به همین مناسبت به‌نشر آن همت گماشتند.»

مسائل مسابقات ریاضی شوروی
ترجمهٔ پرویز شهریاری
مسائل مسابقات ریاضی، از کتابهای انگشت شماری است که با شیوه‌ای درست و اصولی مسائل مربوط به جبر، مثلثات، حساب و هندسه را بسه داوطلبان کنکورهای ریاضی، دانش‌آموزان و دانشجویان علاقه‌مند می‌آموزد.
تمامی مسائل همراه با حل آنها است.