روشهای جبر

جلد دوّم

پرویز شهریاری

روشهای جبر

جلد دوم

(هندسهٔ تحلیلی و ورود به‌آنالیز)

تألیف پرویز شهریاری

مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر
تهران، ۱۳۶۵

بسمه تعالی

جلد دوم روشهای جبر که اختصاص به هندسهٔ تحلیلی و مقدمهٔ آنالیز ریاضی دارد، روبروی شماست.

این کتاب هم با همان روش جلد اول تهیه شده است: از ذکر مطالبی که درکتابهای درسی وجود دارد، پرهیز شده است؛ کوشش شده است از ذکر تمرینها و مسأله‌هایی که در کتابهای درسی و کتابهای مسأله‌ای بطور عادی وجود دارد، خودداری شود؛ تکیه مطالب و مسأله‌ها بر این قرارگرفته است که خواننده را به فکر وادارد و مفهومهای ریاضی را عمیق‌تر به او بیاموزد.

امید نویسنده اینست که از بررسی کتاب به وسیلهٔ افراد دانش‌پژوه محروم نماند و از کمی‌های آن (که بدون شك بسیار است)، آگاه شود.

اول شهریور ۱۳۵۳
پرویز شهریاری

مطالب کتاب

۱. ورود به مطلب . . . . از صفحهٔ ۹ تا صفحهٔ ۲۰

۲. روش مختصات . . . . از صفحهٔ ۲۱ تاصفحهٔ ۳۷

هندسهٔ تحلیلی (۲۳)، رابطه‌های مقدماتی (۲۴)، تغییر محورهای مختصات(۳۰)، مختصات‌قطبی(۳۲)، دستگاه مختصات مایل (۳۳)، تمرین (۳۴).

۳. خط راست ـ مکان هندسی ـ تقارن . . . از صفحهٔ ۳۹ تا صفحهٔ ۶۰

نقطهٔ متغیر (۴۱)، مکان هندسی (۴۲)، تقارن (۴۶)، خط راست (۵۰)، تمرین (۵۲).

۴. تابع ـ مشتق ـ پیوستگی ـ حد ـ کاربرد مشتق ـ رسم منحنی . . از صفحهٔ ۶۱ تا صفحهٔ ۱۱۵

نوشتن تابع (۶۳)، فاصلهٔ معین بودن وفاصلهٔ تغییرات تابع(۶۷)، صعودی و نزولی بودن تابع (۶۹)، بررسی و رسم منحنی نمایش تغییرات تابع (۷۲)، بیان مفهوم تابع براساس نسبتهای دوتایی (۷۴)، نسبتهای‌دوتایی (۷۴)، تابع (۸۲)، تابع‌یك ارزشی(۸۷)، تابع معکوس (۸۸)، بعضی نکته‌ها دربارهٔ مشتق (۸۹)، مشتق تابعهای مثلثاتی(۹۰)، حدچپ و حدراست ـ پیوستگی تابع(۹۲)، تمرین (۹۳).

۵. مقادیرحداکثروحداقل (ماکزیمم ومی‌نیمم) **از صفحهٔ۱۱۷ تاصفحهٔ ۱۴۷**

ماکزیمم‌ومی‌نیمم نسبی و ماکزیمم‌ومی‌نیمم مطلق (۱۱۹)، استدلال آزاد (۱۲۰)، محاسبهٔ ماکزیمم ومی‌نیمم مطلق با استفاده از مشتق (۱۲۵)، ماکزیمم یك حاصلضرب (۱۳۰)، می‌نیمم یك مجموع (۱۳۶)، تمرین (۱۴۲)،

۶. تابع اولیه و محاسبهٔ سطح‌وحجم . . . از صفحهٔ ۱۴۹ تا صفحهٔ ۱۶۱
روش کلی(۱۵۱)، تابعهای‌اولیهٔ $y=f(x)(ax+b)^m$ (۱۵۲)،
تابعهای اولیهٔ $y=sin^{2n+1}x$ و $y=cos^{2n+1}x$ ، $y=tg^n x$
(۱۵۳)، تابعهای اولیهٔ توانهای زوج سینوس و کسینوس (۱۵۴)،
تمرین (۱۵۶)،

۷. منحنی‌های درجه دوم (مقاطع مخروطی) ازصفحهٔ ۱۶۳ تا صفحهٔ ۱۹۶
صورت‌کلی منحنی‌های درجه‌دوم (۱۶۵)، وقتی‌که مقطع مخروطی،
محوری موازی محور طول دارد (۱۷۱)، بیضی (۱۷۱)، هذلولی
(۱۷۵)، سهمی (۱۸۵)، تمرین (۱۸۹).

حل مسأله‌ها . . . . از صفحهٔ ۱۹۷ تا صفحهٔ ۴۲۳
روش مختصات (۱۹۸). خط‌راست‌ـ مکان هندسی‌ـ تقارن (۲۰۹)،
تابع‌ـ مشتق‌ـحدـ پیوستگی ـ‌کاربرد مشتق ـرسم منحنی (۲۲۹)،
مقادیر حداکثر و حداقل (۳۴۰)، تابع اولیه و محاسبهٔ سطح و
حجم (۳۷۲)، منحنی‌های درجه دوم (مقاطع مخروطی) (۳۹۱)،

سرگرمی . . . . از صفحهٔ ۴۲۵ تا صفحهٔ ۴۵۵
خط مماس بر منحنی ـ دو منحنی مماس برهم (۴۲۷)، محاسبهٔ حد
(۴۳۲)، چندمحاسبه (۴۳۳)، منحنی‌های جالب (۴۴۷)، ریاضیات
و گیاه‌شناسی (۴۰۲).

۱

ورود به مطلب

این‌چند صفحه نه‌تاریخ‌است و نه‌فلسفه ودرعین‌حال بهردوی آنها شباهت دارد، در حقیقت دریچه ایست برای کسانی که به تاریخ وفلسفه ریاضی‌علاقمندند ومی‌خواهند دانش‌بشری را ازدید انسانی‌آن مورد تحلیل قراردهند وباکششها وکوششهای مثبت و منفی‌آن‌آشنا شوند. گاه همین اشاره‌های‌کوتاه می‌تواند بسیاری از ذهنهارا روشن‌کند وبه‌آنها نشان دهدکه نمی‌توان دانش‌انسانی‌را در محدودهٔ دربسته و بی‌جان برنامه‌های مدرسه‌ای باز شناخت و وسیله‌ای برای‌گسترش‌دیدآنها ومحرکی‌برای‌مطالعات‌خارجی‌آنها شودتاشاید قانع‌شوندکه برای بررسی دانش‌انسانی ودست یافتن به نایافته‌ها نمی‌توان به انبانهای پر از مسأله و جمله‌های کلیشه‌ای کتابهای‌آشنای دوران تحصیلی اکتفاکرد.

ورود آنالیز عناصر بی‌نهایت‌کوچك در قلمرو علوم،
مانند هجوم‌طوفان ویاموج غیرقابل‌مقاومتی بودکه
بکلی دانش ریاضی‌را زیر و رو کرد وبه آن‌صورت
جدیدی بخشید.
پی‌یرروسو

دانش‌ریاضی، همچون همهٔ دانشهای دیگر، زاییدهٔ نیازمندیهای جامعهٔ بشری است . بررسی تاریخ ریاضیات در دورانهای باستانی و در سرزمینهای چین، بابل، مصر، هند و یونان بخوبی‌نشان می‌دهد که با وجودپردهٔ اسرارآمیزی‌که صاحبان‌دانش‌زمان، برروی دانسته‌های‌خود می‌کشیدند، هرگز نتوانستند پیوندهای خودرا باجامعهٔ خود ونیازهای آن‌پاره‌کنند واگرچه بظاهر درلاك‌خود فرورفته بودند ودرنظردیگران در عالم «روحانی و رمزگونهٔ» خود گام بر می‌داشتند ، تنها پاسخگوی نیازمندیهای روزمره بودند : داد و ستدها ، تقسیم زمین برای کشت و بهره گیری ازآن، ساختن معبدها، کاخها وقلعه‌ها، گردآوردن‌لشکرها و درکنارآن جمع‌آوری مالیاتها وباجهابرای نگهداری‌آنها و...،کشش های اصلی‌برای پدیدآمدن مفهومهای اولیهٔ ریاضیات بود.

با وجود این نباید گمان کرد که راه پیشرفت ریاضیات ، ساده و مستقیم بوده است و هیچ عامل دیگری درآن اثر نداشته است.

گاهی رابطهٔ دانش بانیازمندیهای جامعه، غیرمستقیم وباواسطه بوده‌است. به‌عنوان نمونه می‌توان ازمذهب، سنتهای‌ملی وروال اجتماعی حاکم نام‌برد. ازآنجاکه بهرحال سرچشمه‌های دانش‌امروزی به میزان زیادی به‌دانش‌یونانی می‌پیوندد، بی‌مناسبت نیست‌که با «دوران طلایی» یونان باستان بیشترآشنا شویم.

دوران شکفتگی دانش دریونان،همزمان با دورانی است‌که روال بردگی‌برآنجا چیره بود واین‌روال اجتماعی به سختی درتفکر، فلسفه ودانش یونانی اثرگذاشت. کارهای عملی مربوط به‌برده‌ها بود نه‌درشأن «مردم آزاد» و بهمین مناسبت بر خلاف امروز شعار «کار عاراست» بر جامعهٔ یونانی حکومت می‌کرد.«مردم‌آزاد» نه‌تنها به‌کارهای‌عملی نمی‌-پرداختند، بلکه شاخه‌هایی ازدانش بشری راهم‌که‌کاربرد عملی داشت ودرروابط انسانی‌گشایشی به‌وجود می‌آورد دورازمقام خودمی‌پنداشتند؛ افلاطون ، فیلسوف ذهن گرای یونانی، معتقد بود که تنها آن قسمتی از دانش‌را می‌توان به‌معنای واقعی‌خود «دانش» به حساب‌آورد که مطلقاً فایدهٔ عملی‌نداشته‌باشد. می‌گویندافلاطون برسردر«آکادمی» خودنوشته بود: «هرکس هندسه نمی‌داند وارد نشود». بگذریم ازاینکه اگر قرار باشد هندسه را به‌معنای واقعی‌خود ، یعنی یك شاخه ازدانش ریاضی‌که برپایهٔ استدلال منطقی‌قراردارد، بگیریم، قبل ازهرکس می‌بایست‌جلو خود افلاطون رابگیرند و به«آکادمی» راه ندهند: آنچه راکه افلاطون هندسه می‌نامید معجونی از اشراق وفلسفه وهنرسنتی بود و میانه‌ای با منطق ریاضی‌نداشت. ولی بهرحال علت اصلی علاقهٔ افلاطون به هندسه

ازآنجا بودکه گمان می‌کرد هندسه تنها با ذهن آدمی سروکار دارد و نمی‌تواند در صحنهٔ عمل وارد شود.

به‌همین مناسبت (یعنی فرار ازعمل) است که دانشمندان یونان باستان تامرز هندسهٔ عالی می‌رسند وحتی دربعضی موارد ازآنهم می‌گذرند، در حالیکه در زمینهٔ ریاضیات محاسبه‌ای گام مهمی برداشته نمی‌شود وخود عددنویسی‌هم درچارچوب ابتدایی خود باقی می‌ماند.

به ندرت می‌توان دانشمندانی از نوع ارشمیدس دریونان باستان پیداکردکه به‌مسأله‌های عملی‌پرداخته باشند وخارج ازتفکرات فلسفی وذهنی وازطریق مشاهده وتجربه، قانونهای حاکم برجهان‌هستی‌راکشف کرده باشند.

این موضوع را از جهت‌دیگری‌هم می‌توان بررسی‌کرد. «دوران طلایی» یونان، دوران تسلط‌فلسفه‌است وزمانی است‌که‌دانش‌بسختی زیر نفوذ فلسفه قراردارد واز آنجاکه چار چوب فکری‌آن از قبل مشخص شده‌است، نمی‌تواند رشدعادی داشته‌باشد وتاحد زیادی نیروهای‌خارجی و داخلی مربوط به‌تکامل دانش‌را خنثی می‌کنند.

این‌روش‌نادرست وغیرعلمی، یعنی‌تلاش‌درتطبیق قانونهای‌موجود باتصور ذهنی‌یا فلسفی که ازقبل‌آماده شده‌است، همیشه‌بسیاری رافریب داده است واز راه تحقیق منطقی دورنگاه داشته است.

اسمیت[1] منجم‌انگلیسی، اعتقاد بی‌اندازه‌ای به‌دقت دانش‌مصریهای باستانی داشت ویکی‌ازدلیلهای او وجود رابطه‌های هندسی‌شگفتی‌آور

۱- Piazzi Smith (۱۸۱۹-۱۹۰۰).

بین اندازه‌های هرمهای مصری بود . وقتی که اسمیت اندازه‌های دیوار کفش کن اطاق فرعون‌رادر هرم خئوپس بانتیجه‌هایی که از قبل آماده‌کرده بود مطابق ندید، پنهانی سوهانی بدست گرفت وشروع به‌تراشیدن‌دیوار کرد تاواقعیت را باتصور ذهنی‌خود ساز گار کند.

ولی‌حقیقت اینست که‌حتی‌افکار ذهن‌گرایانه وغیرعلمی هم خود، راه پیشرفت دانش را، منتهی از بیراهه، می گشاید وبطور غیر مستقیم چارچوب تنگ نظرانهٔ فلسفی‌خودرا درهم می‌شکند.

فیثاغورث معتقد به «خدایی» عددبود و بنای فکری و ساختمانی همه چیزرا بر«عدد» می‌پنداشت. برای او وپیروانش جز «عدد»، مفهوم عینی دیگری‌وجود نداشت و همهٔ تلاش آنها در اینجهت بودکه جهان هستی‌را، اعم ازمادی ومعنوی، برنظامی استوار سازندکه خمیرمایهٔ آن «عدد»بود وروشن‌است که این نظریهٔ ذهنی‌ونادرست نمی‌توانست درصحنهٔ عمل به‌کرسی بنشیند. ولی‌خود همین‌نظریهٔ فلسفی موجب شد بسیاری روابط ناشناخته درجهان عدد ودر برخوردی‌که این‌عدد باعناصرهندسی دارد،کشف شود. فیثاغورثیها،عددگنگ راکشف‌کردند وخود این‌کشف تزلزلی دربنیان نظریهٔ فلسفی‌آنها به وجودآورد.

فیثاغورثیها ثابت‌کردندکه مجذور وتر درمثلث قائم‌الزاویه‌برابر است بامجموع مجذورهای دوضلع دیگرمثلث. اگرمربعی به‌ضلع‌واحد درنظر بگیریم، امروز قطرآنرا به $\sqrt{2}$ نشان می‌دهیم. ولی درآنزمان عدد های گنگ شناخته نبود. آنها به دنبال عددی بودندکه مجذورش مساوی ۲ شود وچنین عددی‌هم‌بامعیارهای‌آنزمان،قابل بیان‌نبود. کشف

این واقعیت،تزلزلی درمبانی فکری فلسفهٔ فیثاغورثیها ایجادکرد .آنها که‌گمان می‌کردند همه چیزاز طول وزمان وفاصله‌های موسیقی وحتی عواطف‌وافکار را می‌توان بامعیارعدد (والبته بنابردانش آنها:عددگویا) ارزیابی کرد،متوجه شدندکه ازبیان‌طول یك‌پاره خط (قطرمربع‌به‌ضلع واحد) به‌کمك این‌عدد عاجزند . فیثاغورثیها تا مدتها این‌کشف را از دیگران پنهان‌کردند[1] و پیش خود اینطور تعبیر کردندکه پدیده های طبیعی بردونوع‌اند: آنهاکه با عدد قابل بیان‌اند وآنها که قابلیت بیان بوسیلهٔ عدد راندارند. دستهٔ اول‌را پدیده‌های **گویا** (منطق) و دسته دوم را پدیده‌های **گنگ** (اصم) نامیدند.

اصطلاح عددهای‌گویا وعددهای گنگ هم از همین تقسیم‌بندی فیثاغورثیها باقی‌مانده است.

ولی بهرحال این‌تغییرهم نتوانست فلسفهٔ فیثاغورثی‌را نجات‌دهد وظاهراً همین‌مطلب موجب ازهم پاشیدگی جمع آنها شد.

***

پیروان مکتب فلسفی ایلیایی[2]، بـه مناسبت مبانی خاص مورد اعتقادخود درموردساختمان جهان،ناچار بودند درجهت **نفی‌وجود حرکت**

۱ ـ فیثاغورثیها افکارخودراازدیگران پنهان‌می‌کردند وبخصوص‌تناقضی راکه درمورداندازه‌گیری قطرمربع‌باآن برخوردکرده‌بودند، همچون‌رازی بین خودمخفی‌کرده بودند. تااینکه‌یکی ازپیروان این‌مکتب‌بنام هیپاروس از اهالی متالونت آنرا برهمه آشکارکردکه بنابرروایتی به‌کیفراین‌گناه درآب غرق‌شد. این‌هیپازوس هان‌کسی است‌که برای نخستین‌بار دوازده وجهی‌منتظم باوجه‌های پنج ضلعی‌راکشف‌کرد.

۲ـ Eléates

تلاش کنند، بحثی که دراین زمینه به وجودآمد، منجربه بررسی مفهوم پیچیده وجالبی‌شد که بعدهادرهمهٔ جنبه‌های دانش‌بشری نام«پیوستگی وناپیوستگی» بخودگرفت.

مفهوم «پیوستگی» بامفهوم «حرکت» ارتباط جدی دارد و بدون یکی نمی تـوان دیگـری را توضیح داد. فیثاغورثیها معتقد به نوعی «پیوستگی ثابت» نقطه‌ها روی یك‌پاره خط بودند. به اعتقادآنها یك پاره‌خط از عدهٔ معینی‌نقطه‌های پیوسته بهم تشکیل‌شده بود. پارامنیدس[1] فکر نقطه‌های بهم پیوسته‌را کنار گذاشت و جهان را یکپارچه و بـه صورت یك مادهٔ واحد، که‌در همه‌جا بطور متجانس پخش شده است، در نظرگرفت. ماهیت فلسفهٔپارامنیدس هم‌ذهنی و غیرعلمی بود و منجر به عدم قبول حرکت می‌شد: اگر جهان همه‌جا از یك مادهٔ واحد پرشده است، بنابراین در داخل چنین جهانی حرکت ممکن نیست.

فیثاغورث و پارامیندس هردو فکر پیوستگی‌را پذیرفته بودند، منتهی هر کدام از جهتی حرکت را نفی می کـردند و بهمین مناسبت هیچکـدام از آنهـا نمی توانستند ساختمـان واقعی جهـان هستی را توضیح دهند.

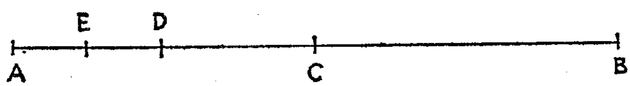
زنون[2] شاگرد پارامنیدس برای‌به‌کرسی نشاندن فلسفهٔ‌استادخود، چهار معما طرح کرد که همهٔ آنها منجربه قبول عدم وجود حرکت در جهان ما‌می‌شد.

۱ـ Paraménide ـ تولد ۴۲۰ پیش میلاد

۲ـ zénon ـ متولد ۴۸۰ پیش از میلاد .

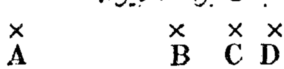
استدلالهای بظاهر منطقی، و در واقع نادرست زنون، دو نتیجهٔ اساسی بهمراه داشت: یکی اینکه باطرح آنها مفهوم بی‌نهایت (چه بی‌نهایت کوچك وچه بی‌نهایت بزرگ) وارد درریاضیات شد، مفهومی که یونانیها ازنزدیك شدن به‌آن ترس داشتند[1]. دوم اینکه نتیجه‌گیریهای زنون چه درفلسفه وچه درریاضیات بحثهایی‌را سبب شدکه قرنها طول کشید واگرچه‌خود موضوع آنها، ازلحاظ ریاضی دراواخر سدهٔ هفدهم وبا وارد شدن مقادیر بی‌نهایت‌کوچك ومفهوم حددر ریاضیات به‌وسیلهٔ نیوتون و لایب‌نیس و از لحاظ فلسفی در اوایل سدهٔ بیستم و به وسیلهٔ نویسندهٔ‌کتاب «دفاتر فلسفی» حل‌شد، ولی‌در جریان‌این دوهزار سال‌بحث و بررسی، گامهای‌بزرگی چه درفلسفه و چه در ریاضیات‌برداشته شد.

۱ـ یکی‌از استدلالهای زنون چنین‌است:



متحرکی که بخواهد روی پاره‌خط AB از A به B برسد، باید قبلا از نقطهٔ C وسط AB عبورکند و برای اینکه به C برسد، باید قبلا از D، وسط AC، بگذرد و برای این منظور باید قبلا از E وسط AD عبور کند و ... به این ترتیب برای رسیدن از A به B باید از بی‌نهایت نقطه عبورکندکه‌مستلزم زمان بی‌نهایت است.

در استدلال دیگر خود،زنون ثابت می‌کند که آشیل (قهرمان افسانه‌ای یونان) نمی‌تواند هرگز به لاك‌پشت برسد، زیرا:



اگر فرض کنیم لاك‌پشت در نقطهٔ B و آشیل در نقطهٔ A باشد، زمانی که آشیل‌فاصلهٔ A تا B را طی می‌کند، لاك‌پشت فاصله‌ای مثل B تا C راجلو می‌رود. بنابراین برای اینکه آشیل به لاك‌پشت برسد، باید فاصلهٔ جدید BC‌را به پیماید. اما در مدتی که آشیل BC را طی می‌کند، لاك‌پشت هم فاصلهٔ CD‌را جلو می‌رود و ... به این ترتیب لاك‌پشت همیشه از آشیل جلوتر است و اگرچه آشیل مرتباً به او نزدیك می‌شود، ولی هرگز به او نمی‌رسد.

این بحثها نتیجهٔ دیگری هم‌داشت: علم زیر بارسنگین فلسفه‌رشد کرد واین‌رشد اثرمتقابل خود را درفلسفه باقی گذاشت و خود بتدریج کوشیدتااز زیر نفوذ فلسفه خلاص‌شود، تاجائیکه درسده‌های ۱۶ و ۱۷ خودرا همطراز آن قرار داد و سپس از آنهم فراتر رفت وفلسفه را زیر نفوذخود گرفت[۱].

***

قانونهای طبیعت را بدون وارد کردن‌کمیتهای متغیر نمی‌توان شناخت. حرکت و تغییر جزو ذات طبیعت است. بقول نویسندهٔ **آنتی دورینگ**: «حرکت شیوهٔ وجود وطریقهٔ هستی‌ماده است. هرگز ودرهیچ مکانی، مادهٔ بدون حرکت نبوده و نمی‌تواند باشد». بنابراین وسیلهٔ شناسایی‌طبیعت هم‌باید بااین خصوصیت اصلی‌آن سازگار باشد. وقتی‌که مفهوم **متغیر** به‌میدان وارد شود، بدنبال آن مفهوم **تابع** و سپس مفاهیم «**پیوستگی**» و «**حد**» ظاهر می‌شوند که هستهٔ اصلی‌آنها را دو مفهوم «**بی‌نهایت کوچکها**» و «**بی‌نهایت بزرگها**» تشکیل می‌دهد. بحث دربارهٔ مجموعهٔ این‌مفاهیم، «**آنالیزریاضی**» را به وجود آورده است.

ریشه‌های آنالیزریاضی را می‌توان در دورترین فعالیتهای‌ریاضی گذشته هم پیداکرد. آنتیفون[۲] برای محاسبهٔ نسبت‌محیط دایره به‌قطرآن (یعنی‌محاسبهٔ عدد π)این‌فکررامطرح‌کردکه ابتدا یك مثلث‌متساوی‌ـ

۱ــ ومثلا دیگر لایب‌نیس تحت تاثیر بی‌نهایت‌کوچکها (که‌خود ازبنیان گذاران‌آن درریاضیات بود)، فلسفهٔ ساختمانی جهان را بر «**موناد**»ها گذاشت. «موناد فلسفی» لایب‌نیس با «بی‌نهایت‌کوچك» ریاضی اوچه در تعریف وچه در ساختمان شباهت فراوانی دارد.

۲ــ Antiphon ــ حدود ۴۳۵ پیش از میلاد

الاضلاع در دایره محاط کنیم، مسلم است که محیط این مثلث کمتراز محیط دایره خواهد بود ، ولی اگر تعداد ضلعهارا دو برابر کنیم وبجای مثلث یك شش‌ضلعی منتظم در نظر بگیریم، محیط آن به محیط دایره نزدیکتر می‌شود، بنابراین برای‌اینکه به محیط دایره برسیم، باید تا جائیکه می‌توانیم کار دو برابر کردن تعداد ضلعها را ادامه دهیم.

برویزن شاگـرد سقراط و بخصوص ارشمیدس این فکر را دنبال کردند. ارشمیدس توانست محیط ۳۸۴ ضلعی‌منتظم محاط در دایره را محاسبه‌کند ومقدار عدد π رابا تقریب خوبی بدست‌آورد. علاوه بر آن ارشمیدس توانست بسیاری از مساحتها را به‌کمك تقریبهای متوالی و با روشی‌که به انتگرال‌گیری امروز شباهت دارد، پیدا کند. قبلاهم‌دیدیم معماهایی‌که زنون طرح‌کرده بود، پای بی‌نهایتهارا به ریاضیات وفلسفه بازکرد .

حتی بحثهای بی‌پایان‌ودرعین‌حال بی‌سر و ته‌کشیشهای‌قرون‌وسطی هم (باهمهٔ اینکه‌در مجموع غیرعلمی‌ودرنتیجه‌بازدارندهٔ پیشرفت فکر بشری بوده‌اند) بطور غیرمستقیم درطرح مفهوم بی‌نهایت اثرداشته‌اند.

به قول پل‌تانری : « ... مشاجرات پایان ناپذیر کشیشها دربارهٔ نخستین نشریات علمی ، که مـانع هرگونه جستجوی سالم علمی بود ، و دائماً هم توسعه می یافت ، تنها یك نتیجه داشت و آن این بود کـه دانشمندان را واداشت تا دربارهٔ حدود و بی‌نهایت‌ها دقت بیشتری‌کنند واین دقت دربارهٔ موضوعهایی، که در تصور آنها مبهم وناقص بود، نقش اساسی در به‌وجودآمدن حساب بی‌نهایت کوچکها داشت...»

ولی بحث جدی در مورد اصلها و قضیه‌های مربوط به حساب بی‌نهایت کوچکها وبطورکلی آنالیز ریاضی در اوایل سدهٔ هفدهم و با کوششهای پاسکال،کاوالیری[1] فرما، دکارت، روبروال[2] شروع‌شدو باکارهای لایب نیس و نیوتون و سپس اولر به اوج خود رسید.

۱- Cavalieri - ایتالیائی
۲- Roberval - ۱۶۰۱ تا ۱۶۷۵

۲.
روش مختصات

روش‌مختصاتی، به‌معنای کلی‌خود، یعنی ایجاد رابطه‌بین‌جبر وهندسه، رابطه‌ای که بهردورشتهٔ ریاضی‌قدرت بیشتری می‌دهدواین امکان‌را به وجـود می‌آوردکه مسأله‌های هندسی را به‌کمك جبر تحلیل کنیم وخاصیتهای تازه‌ای ازآنها را بشناسیم ودر عین حال ویژه‌گیهای معادله‌های جبری را به کمك منحنی‌های هندسی آنها کشف کنیم .

ساده‌ترین عنصرجبر، عددحقیقی وساده‌ترین عنصرهندسه، نقطه‌است وبنابراین‌طبیعی‌است که ایجادرابطه را از همین دوعنصر ساده شروع کنیم.

این‌رابطه به‌طریقه‌های مختلف ممکن‌است ومادراینجا تنها به‌روش مختصات قائم (مشهور به‌مختصات دکارتی) می‌پردازیم که بابرنامه‌های دبیرستانی سازگار باشد.

فکر مختصات قائم راحتی در ترسیمهائی‌که بر دیوارهای داخلی‌هرمهای مصری باقی‌مانده‌است می‌توان دید، بعداز آنهم‌در طرحهای اولیهٔ نقشه‌های جغرافیایی ونجومی وحتی‌تابلوهای‌نقاشی می‌توان ردپای این‌فکررا دنبال‌کرد، ولی‌تنهافرما ودکارت‌بودند که‌آنرا بصورت رشتهٔ مشتقلی ازریاضی در آوردند.

۱. هندسهٔ تحلیلی

در ابتدای سدهٔ هفدهم ، شاخهٔ کاملا تازه‌ای به نام **هندسهٔ تحلیلی** در ریاضیات به‌وجود آمد که بستگی بین‌منحنی‌های مسطحه ومعادله‌های دومجهولی جبری را برقرار کرد.

به ندرت ودرعرض یکی دو سده پیش می‌آید که براساس فکری بسیار ساده وطبیعی، رشتهٔ کاملا جدیدی در ریاضیات به وجود آید که تاآن زمان از نظرها دورمانده باشد. پدیدآمدن هندسه تحلیلی درابتدای سدهٔ هفدهم تصادفی نبود. گذار اروپا به‌روال تازهٔ اجتماعی، یعنی شکل سرمایه‌داری تولید ، باز سازی وتکمیل رشته‌های زیادی از دانش بشری را ایجاب می‌کرد. گالیله و سایر دانشمندان شروع به‌بنیان‌گذاری مکانیك جدید کردند، درهمهٔ رشته‌های علوم طبیعت مفروضهای تجربی زیادی جمع شد، ابزارهای مشاهده تکمیل شد، نظریه‌های تـازه جانشین افکار کهنهٔ اسکولاستیکی شد. ــ در زمینهٔ نجوم سرانجام آموزش کوپرنیك پیروزشد. پیشرفت بیش ازاندازهٔ دریانوردی بطور جدی به‌دانش نجوم ومقدمات مکانیك نیازمند شد .

درمکانیك مبارزه‌ای لازم بود. بیضی وسهمی که ویژه گیهای هندسی آنها، به‌عنوان مقاطع مخروطی، ازقریب ۲۰۰۰ سال قبل به‌وسیلهٔ یونانیها به‌تفصیل روشن شده بود ، تنها مطالبی از هندسه به حساب می‌آمـدند (همانطور که یونانیها به آن می‌نگریستند) . بعد از آنکه کپلر کشف کرد که سیارات روی محیط بیضی‌دور خورشید می‌چرخند و گالیله متوجه شد که سنگ پرتاب شده روی سهمی‌حرکت می‌کند، لازم بود که بیضی‌را محاسبه کرد، سهمی‌راکه‌مسیر گلولهٔ توپ است بدست آورند ؛ لازم‌بود قانونی راکه بنابرآن فشار هوا در

ارتفاعها کم می‌شود، و به وسیلهٔ پاسکال کشف شده بود، جستجو کنند؛ لازم بود حجم جسمهای مختلف را بطور عملی محاسبه کنند وغیره.

مسأله‌هایی ازاینگونه، که دیگر وارد درزندگی بشرشده بود ، تقریباً بطور همزمان سه‌شاخهٔ تازه از ریاضیات را به وجـودآورد: هندسهٔ تحلیلی ، محاسبه‌های دیفرانسیلی ومحاسبه‌های انتگرالی (کهضمناً شامل‌حل معادله‌های دیفرانسیلی هم می‌شد) .

این سه‌نوع محاسبهٔ جدید چهرهٔ تمامی ریاضیات را دگرگون کرد و آنرا به مسیرتازه‌ای‌انداخت. به‌کمك‌این‌رشته‌ها،مسأله‌هایی مورد بررسی‌قرار گرفت‌که حل‌آنها تاآنزمان غیرممکن بنظر می‌رسید .

درنیمهٔ اول سدهٔ هفدهم ، یعنی در ابتدای سالهای ۱۶۰۰ ، عده‌ای از ریاضیدانهای بزرگ به اندیشهٔ هندسهٔ تحلیلی نزدیك شده بودند ، ولی تنها دو ریـاضیدان بطور اساسی متوجه شدند کـه می‌توان از این اندیشه یك شاخهٔ‌تازه در ریاضیات‌به‌وجودآورد. این‌دو نفر پیرفرما مشاور مجلس درتولوز یکی‌ازشهرهای فرانسه ویکی از بزرگترین ریاضیدانهای جهان و رنه‌دکارت فیلسوف مشهور فرانسوی بودند . همه کاشف اصلی هندسهٔ تحلیلی را دکارت می‌شناسند. دکارت به‌عنوان یك فیلسوف، مسأله را به صورت‌کاملا عمومی‌آن طرح‌کرد. دکارت رسالهٔ بزرگ فلسفی خود را چاپ‌کرد: «گفتار درروش، برای اینکه به عقل خـود جهت یابـی درست بدهیم وحقیقت را در دانشهای مربوط به شناسائی‌نور، هواشناسی ، هندسه و آنچه‌که مربوط به آنهاست ، کشف کنیم».

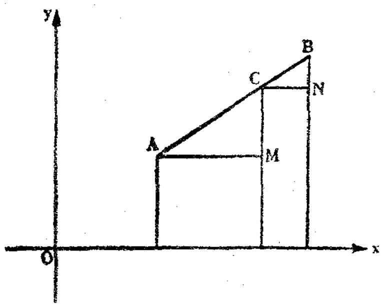
قسمت‌آخر این‌نوشته بنام «هندسه»که درسال ۱۶۳۷ چاپ شد، دارای توضیحاتی‌کافی، والبته‌کم وبیش درهم، دربارهٔ نظریه‌ای از ریاضیات است‌که ماآنرا «هندسه تحلیلی» می‌نامیم.

۲. رابطه‌های مقدماتی

I. تقسیم پاره خط به نسبت معلوم. نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_2\\y_2\end{matrix}\right.$ را در

نظر می گیریم (شکل۱) و فرض می کنیم که نقطهٔ C پاره خط AB رابه نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کرده باشد :

$$\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$$



شکل ۱

اگر مختصات نقطهٔC را (x,y) بگیریم، از تشابه دومثلث قائم‌الزاویهٔ ACM و CBN داریم:

$$\frac{AM}{CN}=\frac{AC}{CB}\ ;\ \frac{MC}{NB}=\frac{AC}{CB}$$

که باقرار دادن مقادیر مربوطه بدست می‌آید:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n}\ ;\ \frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{m}{n}$$

و ازآنجا :

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}\quad ;\quad y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}$$

و روشن است درحالت خاصی که نقطهٔ C وسط پاره خط AB باشد، این‌رابطه چنین می‌شوند :

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\ ;\ y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

مثال. نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}x_2\\y_2\end{matrix}\right.$ ، $C\left|\begin{matrix}x_3\\y_3\end{matrix}\right.$ مفروض‌اند . مطلوبست مختصات نقطهٔ G مرکزثقل مثلث .

حل . می‌دانیم که مرکز ثقل هرمثلث برمحل برخورد میانه‌های‌آن قرار

دارد ونقطهٔ برخورد میانه‌ها، هرمیانه رابه نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کند. بنابـراین اگر ´A را وسط ضلع BC بگیریم، داریم:

$$\frac{GA}{GA'}=2$$

از طرف دیگر داریم: $A'\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}(x_2+x_3)\\ \frac{1}{2}(y_2+y_3)\end{array}\right.$ وسپس:

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{2x_{A'}+x_A}{3}=\dfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\\ y_G=\dfrac{2y_{A'}+y_A}{3}=\dfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\end{cases}$$

II. مختصات مرکز ثقل دونقطهٔ مادی. می‌دانیم‌که اگر دونقطهٔ مادی A و B با جرمهای m_1 و m_2 داشته باشیم و نقطهٔ C مرکز ثقل این‌دونقطه باشد: اولا C روی پاره خط AB قرار دارد؛ ثانیاً اگر C پاره خط AB رابه نسبت p : q تقسیم‌کرده باشد، باید داشته باشیم:

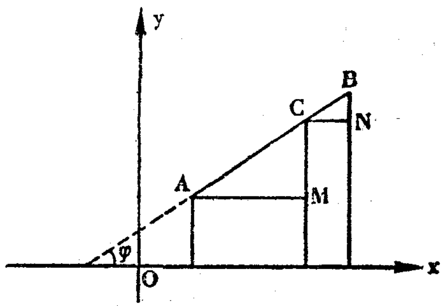
شکل ۲

$$p:q=m_2:m_1$$

بنابراین بسادگی روشن‌است‌که اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ باشد، برای پیداکردن مختصات C (مرکزثقل این دو نقطه) باید از رابطه‌های زیر استفاده کنیم:

$$x_C=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} \quad و \quad y_C=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$$

III. شرط اینکه سه نقطه روی یك خط راست باشند. سه نقطهٔ



شکل ۳

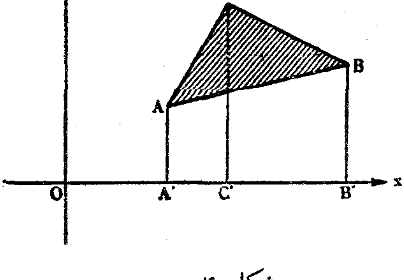
$A(x_1 , y_1)$ ، $B(x_2 , y_2)$ و $C(x_3 , y_3)$ را درنظر می گیریم . اگر C روی خط AB باشد، بسادگی ازتشابه دو مثلث ACM و BCN (شکل ۳) بدست می‌آید :

$$\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3} \qquad (1)$$

و همین رابطه شرط بر یك استقامت بودن A ، B و C را نشان می‌دهد . هر یك از نسبتهای تساوی (۱) برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط AB باجهت مثبت محور طول می‌سازد؛ بطورکلی اگر زاویهٔ خط AB رابا جهت مثبت محور طول φ بنامیم، داریم :

$$tg\varphi=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

محاسبهٔ مساحت مثلث . نقطه‌های $A\begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix}$ ، $B\begin{vmatrix}x_2\\y_2\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}x_3\\y_3\end{vmatrix}$ راراس‌های یك مثلث در نظر می گیریم (شکل ۴) . برای محاسبهٔ مساحت مثلث ABC می توان مساحت ذوزنقهٔ $AA'B'B$ را از مجموع مساحتهای دو ذوزنقهٔ $AA'C'C$ و $CC'B'B$ کم کرد . داریم :



شکل ۴

$$S_{AA'C'C}=\frac{۱}{۲}(y_۱+y_۳)(x_۳-x_۱) \quad ;$$

$$S_{CC'B'B}=\frac{۱}{۲}(y_۲+y_۳)(x_۲-x_۳) \quad ;$$

$$S_{AA'B'B}=\frac{۱}{۲}(y_۱+y_۲)(x_۲-x_۱)=$$

$$=-\frac{۱}{۲}(y_۱+y_۲)(x_۱-x_۲)$$

وازآنجا، اگرمساحت مثلث **ABC** را S بنامیم ، بدست می‌آید :

$$S=\frac{۱}{۲}\Big|[(y_۱+y_۲)(x_۱-x_۲)+(y_۲+y_۳)(x_۲-x_۳)+$$

$$+(y_۳+y_۱)(x_۳-x_۱)]$$

مساحت مثلث بایدباعددی مثبت بیان‌شودوبنابراین همیشه باید قدرمطلق مقدار سمت راست تساوی را به حساب آورد ، ولی اگـر شکل مثلث را روی دستگاه محورهای مختصات در نظر بگیریم ، می‌توانیم از قبل بدانیم‌که مقدار داخل قدر مطلق با چه علامتی بدست می‌آید. اگر حرکت از **A** بطرف **B** و سپس بطرف **C** درجهت مثلثاتی باشد، این مقدار مثبت ودر غیر اینصورت منفی می‌شود .

به عبارت دیگر مقـدار داخل‌کروشه وقتی مثبت است که برای انطباق **AB** بر **AC** (به کمك دوران روی صفحه دور نقطـهٔ **A**) در جهت مثلثاتی حرکت‌کنیم و برعکس.

توضیح . رابطهٔ مربوط به مساحت مثلث را به صورت زیر هم می‌توان در آورد :

$$S=\frac{۱}{۲}\Big|x_۱(y_۲-y_۳)+x_۲(y_۳-y_۱)+x_۳(y_۱-y_۲)\Big|$$

ویا به صورت **دترمینان** درجهٔ سوم زیر:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

واز همین‌جا می‌توان نتیجه گرفت که اگر A و B و C (رأسهای مثلث) روی یك خط راست باشند ، باید مساحت مثلث مساوی صفر شود ، یعنی شرط اینکه این سه نقطه بریك خط راست واقع باشند اینست که :

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0\ ;$$

یا
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

مثال. رأسهای مثلثی عبارتنداز $A(-1,3)$ ، $B(3,0)$ و $C(8,12)$. مطلوبست محاسبهٔ مساحت مثلث.

حل. روش‌اول : بنابر رابطهٔ مساحت مثلث داریم:

$$S=\frac{1}{2}\Big|[(3+0)(-1-3)+(0+12)(3-8)+$$
$$+(12+3)(8+1)]\Big|=\frac{1}{2}\Big|(-12-60+135)\Big|=\frac{63}{2}=$$
$$=31\frac{1}{2}\quad \text{(واحد مربع)}$$

روش دوم : اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ باشد برای محاسبهٔ طول پاره خط AB داریم:

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

به این ترتیب طول ضلعهای مثلث چنین می‌شود :

$$a=BC=13 \text{ و } b=AC=9\sqrt{2} \text{ و } c=AB=5$$

(a ، b و c طول ضلعهای مثلث وبترتیب روبروی رأسهای A B و C هستند) .

از طرف دیگر می‌دانیم که رابطهٔ مساحت مثلث با دردست داشتن سه ضلع آن چنین است :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که درآن p برابراست با نصف محیط مثلث.

دراینجا داریم:

$$p=\frac{۹}{۲}(۲+\sqrt{۲}) \ ; \ p-a=\frac{۱}{۲}(۹\sqrt{۲}-۸) \ ;$$

$$p-b=\frac{۹}{۲}(۲-\sqrt{۲}) \text{ و } p-c=\frac{۱}{۲}(۹\sqrt{۲}+۸)$$

وسپس :

$$p(p-b)=\frac{۸۱}{۴}(۴-۲)=\frac{۸۱}{۲}$$

$$(p-a)(p-c)=\frac{۱}{۴}(۱۶۲-۶۴)=\frac{۱}{۴}\times ۹۸=\frac{۴۹}{۲}$$

وبالاخره :

$$S=\sqrt{\frac{۸۱}{۲}\times\frac{۴۹}{۲}}=\frac{۶۳}{۲}=۳۱\frac{۱}{۲} \quad \text{(واحد مربع)}$$

۳. تغییر محورهای مختصات

I. انتقال محورهای مختصات به‌موازات خود. می‌دانیم که اگردستگاه محورهـای xOy را به موازات خـود جابجا کنیم تا مبدأ جـدید بر نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ قرارگیرد، بین مختصات جدید (x',y') و مختصات قدیم (x,y) نقطهٔ A رابطه‌های زیر برقرار است:

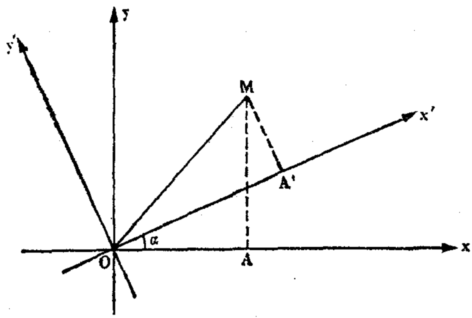
$$x'=x-\alpha \text{ و } y'=y-\beta$$

II. دوران محورهای مختصات دور مبداء . حالت خاص. اگرمحورها را دورمبداء مختصات به اندازهٔ ۹۰ درجه، درجهت مثلثاتی دوران دهیم، محور جدید Ox' روی جهت مثبت محور قدیم Oy ومحور جدید Oy' روی جهت منفی محور قدیم Ox قرار می‌گیرد . به این ترتیب x جدید مساوی همان y

قدیم و y جدید مساوی قرینهٔ x قدیم خواهدشد، یعنی اگر مختصات جدید نقطه را (x',y') ومختصات قدیم آنرا (x,y) فرض کنیم، داریم:

$$x'=-y \quad و \quad y'=x$$

حالت کلی. فرض کنید محورهای مختصات را به اندازهٔ زاویهٔ α دورمبداء دوران داده باشیم، تا دستگاه محورهای جدید $x'Oy'$ بدست آید. مختصات نقطهٔ M را دردستگاه قدیم (x, y) و در دستگاه جدید (x' , y') می گیریم (شکل۵) ، با توجه به حاصلجمع برداری داریم:



شکل۵

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'M} \qquad (1)$$

رابطه (۱) را برمحور Ox تصویر می‌کنیم:

$$\text{تصویر}\,\overrightarrow{OM}=\text{تصویر}\,\overrightarrow{OA'}+\text{تصویر}\,\overrightarrow{A'M}$$

وازآنجا ، بنابرخاصیت تصویر بریك محور بدست می‌آید

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$$

و بهمین ترتیب اگر رابطهٔ (۱) را بر محور Oy تصویر کنیم ، بدست می‌آید :

$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

که از این دوتساوی می‌توان، درصورت لزوم، x'وy' را هم بر حسب xوy محاسبه کرد.

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha \\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$$

مثال. نقطهٔ $A(-۲,۴)$ داده شده است، مطلوبست مختصات همین نقطه نسبت به دستگاه محورهای مختصاتی که مبداء آن درنقطهٔ $O'(-۱,۲)$ (نسبت به دستگاه قبلی) قرار گرفته است و محور Ox' آن با محور Ox زاویه‌ای مساوی ۶۰ درجه می‌سازد.

حل. اگرمختصات A را در دستگاه جدید (x', y') بنامیم، داریم:

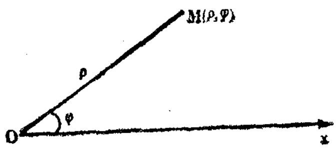
$$x' = -۲\cos۶۰^\circ + ۴\sin۶۰^\circ - (-۱) = ۲\sqrt{۳}$$

$$y' = ۲\sin۶۰^\circ + ۴\cos۶۰^\circ - ۲ = \sqrt{۳}$$

یعنی $A(۲\sqrt{۳}, \sqrt{۳})$ خواهد بود.

۴. مختصات‌قطبی

اگرمحور Ox را درنظر بگیریم، هر نقطهٔ M را می‌توان به‌وسیلهٔ فاصلهٔ آن از O (ρ) و زاویه‌ای که OM با Ox مـی سازد (φ) مشخص کرد (شکل ۶) . در اینصورت O راقطب ، Ox را محور قطبی، φ را زاویهٔ قطبی و ρ را شعاع حامل نقطهٔ M و(ρ,φ) رامختضات قطبی نقطهٔ M گویند.



شکل۶

زاویهٔ قطبی φ می‌تواند از$\pi-$ تا $\pi+$ تغییر کند ، به‌سادگی می‌توان مختصات قائم را برحسب مختصات قطبی محاسبه‌کرد . اگر مبداء مختصات را در دستگاه قائم منطبق برقطب و محور طول را منطبق برمحور قطبی بگیریم، مختصات (x,y) نقطهٔ M چنین خواهد شد:

$$x = \rho\cos\varphi \quad \text{و} \quad y = \rho\sin\varphi$$

وبرعکس برای رسیدن به مختصات قطبی ازمختصات قائم داریم:

$$\begin{cases} tg\varphi = \dfrac{y}{x} \qquad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi) \\ \rho = \sqrt{x^۲ + y^۲} \end{cases}$$

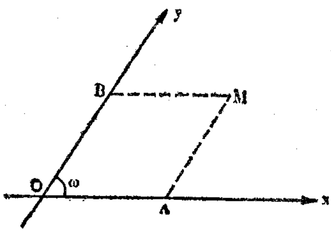
در رابطه‌های اخیر برای φ دوجواب بدست می‌آید وبرای اینکه بتوان،

مقدار مشخص φ را معین کرد، باید ازرابطه‌های زیر استفاده کنیم :

$$\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad و \quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

۵. دستگاه مختصات مایل

بجای آنکه محورهای مختصات را عمود برهم انتخاب کنیم ، می‌توان آنها را بنحو دلخواه گرفت ، طوری که زاویهٔ بین جهت مثبت محور طول با جهت مثبت محــور عــرض مساوی زاویهٔ دلخواهــی مثل ω باشد . در اینصورت زاویهٔω را زاویهٔ مختصاتی و دستگاه مختصات را مایل گویند (شکل۷). برای پیداکردن مختصات نقطه‌ای مانند M باید از آنجا به مــوازی دو محور رسم کرد : اندازهٔ OA طول و اندازهٔ OB عرض نقطهٔ M خواهد بود. روشن است که طول و عرض نقطهٔ M دراینحالت بااندازهٔ فاصله‌های این نقطه تا محورهای مختصات فرق دارد.



شکل۷

رابطه‌هایی که دردستگاه مختصات مایل بدست می‌آید، نسبت به‌رابطه‌های نظیر آنها در دستگاه مختصات قائم پیچیده‌ترند؛ مثلا اگرزاویهٔ مختصاتی را ω فرض کنیم، فاصلهٔ بین دونقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ چنین می‌شود:

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega}$$

ودرحالت خاص فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ ازمبداء :

$$OM=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\omega}$$

مساحت مثلثی که رأسهای آن $A(x_1,y_1)$ ، $B(x_2,y_2)$ و$C(x_3,y_3)$

باشد، دراین‌دستگاه مایل بارابطهٔ زیربیان می‌شود:

$$S=\frac{1}{2}\left| \sin\omega[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] \right|$$

ولی‌رابطه‌هایی‌که مربوط به‌استقرار نقطه‌ها نسبت بهم است ، در دستگاه مختصات مایل تغییرنمی‌کند ومثلا رابطهٔ مختصات وسط یك پاره‌خط یا مختصات مرکز ثقل یك مثلث ویاشرط بریك استقامت بودن سه نقطه همانست‌که درمورد دستگاه مختصات‌قائم بود.

در دستگاه مختصات مایل بازاویهٔ مختصاتیω رابطهٔ زیر برای خطی‌که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد بدست می‌آید :

$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)}$$

که درآنφ عبارتست از زاویهٔ بین‌خط AB باجهت مثبت محور طول. باتبدیل این رابطه، می‌توان بسادگی زاویهٔ φ را بدست‌آورد:

$$tg\varphi=\frac{(y_B-y_A)\sin\omega}{(x_B-x_A)+(y_B-y_A)\cos\omega}$$

همچنین اگر در دوران محورهای مختصات ، مبداء ثابت ومحور طول به اندازه زاویهٔ α ومحور عرض به اندازهٔ زاویهٔ β دوران‌کند وزاویهٔ مختصاتی دستگاه قدیم را ω بگیریم، مختصات قدیم xوy برحسب مختصات جدید x' و y' چنین می‌شود:

$$x=\frac{x'\cdot\sin(\omega-\alpha)+y'\cdot\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}$$

$$y=\frac{x'\cdot\sin\alpha+y'\cdot\sin\beta}{\sin\omega}$$

تمرین

۱. نقطه‌های $A(-1,-1)$ و$B(2,3)$ مفروض‌اند . مطلوبست رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ومحاسبهٔ مساحت ومختصات مرکز ثقل آن.

۲. نقطه‌های $A(-۱,۴)$ و $B(۳,۱)$ مفروض‌اند. مطلوبست مختصات رأس C ازمثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین $ABC(C=۹۰^\circ)$.

۳. نقطه های $A(۳,۱)$ و $B(۰,۳)$ مفروض‌انـد. مطلوبست مختصات رأس C از مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین $ABC(A=۹۰^\circ)$.

۴. مختصات قرینهٔ هریك از نقطه‌های زیررا ابتدا نسبت به نیمساز ربع اول وسوم وسپس نسبت به‌نیمساز ربع‌دوم وچهارم پیدا کنید:

$A(۴,۲)$ و $(B-۳,۱)$ و $C(۰,-۲)$

۵. $A(-۱,۲)$ و $C(-۴,-۱)$ مختصات دوسرقطر ازیك مربع‌اند. مختصات دورأس دیگر مربع (B و D) را پیدا کنید.

۶. مجموعهٔ نقطه‌هایی‌ازصفحهٔ محورهای‌مختصات‌را پیدا کنیدکه مختصات هریك ازآنها درمعادله یا نامعادله های زیرصدق کند.

$$\begin{array}{lll}
a)\ x\cdot y=۰ , & b)\ x\cdot y>۰ , & c)\ x\cdot y<۰, \\
d)\ x-y=۰ , & e)\ x-y<۰ , & f)\ x+y=۰, \\
g)\ x+y>۰ , & h)\ x^۲+y^۲=۰ , & i)\ x^۲-y^۲=۰, \\
j)\ x^۲+y^۲>۰ , & k)\ x+y<۰ , & l)\ x-y>۰,
\end{array}$$

$m)\ x(x-۲)+y(y+۴)+۵=۰ ,$

$n)\ ۱۰x^۲+۲۹y^۲+۳۴xy+۸x+۱۴y+۲=۰ ,$

$o)\ x^۴+y^۴+۲x^۲y^۲-۹x^۲-۱۰y^۲-۴x+۲۹=۰,$

$p)\ y=\sqrt{\log\cos x}\ ,\ q)\ x=\sqrt{\log\sin y}\ ,$

$r)\ \log_{\cos x}(|y|-۲)>۰\ ,\ s)\ y^۲+|x^۲-۱|=۰$

۷. $A(-۱,۳)$ و $C(-۲,۴)$ مختصات دوانتهای یکی‌از قطرهای لوزی ABCD هستند. اگرطول یکی ازضلعهای لوزی مساوی $\sqrt{۵}$ باشد، مختصات دورأس دیگرآنرا پیدا کنید.

۸. مرکز مربعی در نقطهٔ $\omega(۳,-۱)$ قرار دارد و $A(-۱,۲)$ یکی‌از رأسهای آنست. مختصات رأسهای دیگرمربع راپیدا کنید.

۹. نقطه‌های $A'(-3,-2)$ ، $B'(0,-1)$ ، $C'(-1,3)$ بترتیب وسط ضلعهای BC ، AC و AB از مثلث ABC هستند. اولاً ـ مطلوبست مختصات رأسهای مثلث ABC ومحاسبهٔ مساحت آن . ثانیاً ـ ثابت کنید مرکز ثقلهای دومثلث ABC و $A'B'C'$ برهم منطبق‌اند.

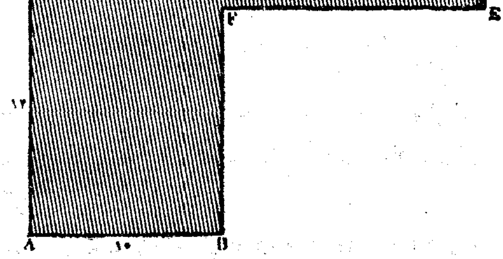
۱۰ . $A(2,-3)$ و $B(-5,1)$ دو رأس از مثلث ABC می‌باشند نقطهٔ C روی محور عرض ونقطهٔ G (محل تلاقی میانه های مثلث) روی محور طول قرار گرفته‌اند. مختصات رأس C را بدست آورید.

۱۱ . p و q دو عدد طبیعی ونسبت بهم اولند. اگر x و y عدد های طبیعی غیر منفی باشند، چند عدد طبیعی وجود داردکه نتوان آنها را به‌صورت $px+qy$ نوشت؟

۱۲ . در نقطه‌های $A(7, 1\frac{1}{2})$ ، $B(6, 7)$ ، $C(2, 4)$ بترتیب وزنه‌های ۶۰ ، ۱۰۰ و ۴۰ گرمی گذاشته شده است. مرکز ثقل این دستگاه را پیدا کنید .

۱۳. یك دستگاه مادی از n نقطهٔ $A_1(x_1, y_1)$، $A_2(x_2, y_2)$، ...، $A_n(x_n, y_n)$ باجرمهای m_1 ، m_2 ، ... ، m_n تشکیل شده‌است. مختصات مرکز ثقل این دستگاه را پیدا کنید .

۱۴ . اگر در شکل ۸ ، A مبداء و AB و AC محورهای مختصات



شکل۸

انتخاب شوند، باتوجه به‌اندازه‌های آن ، مختصات مرکز ثقل را پیدا کنید .

۱۵ ـ متحرکی روی یك خط راست حرکت می‌کند و ضمن حرکت از نقطه های $A(5,5)$ و $B(1,3)$ عبور می‌کند . این متحرك در چه نقطه به محور طول می‌رسد؟

۱۶ ـ نقطه هـای $A(1,3)$ ، $B(4,7)$ ، $C(2,8)$ و $D(-1,4)$ مفروض‌اند. اولا تحقیق کنیدکه چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است . ثانیاً اگر AB را قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع بگیریم ، طول ارتفاع وارد بر آنرا پیدا کنید .

۱۷ ـ نقطه هـای $A(4m-3\ ,\ m+2)$ و $B(m\ ,\ 2m+1)$ مفروض‌اند. اولا ثابت‌کنیدکه با تغییر m ، خط AB به موازات خود جابجا می‌شود. ثانیاً نقطهٔ ثابت C راطوری پیداکنیدکه مثلثهای ABC به ازای‌همهٔ مقادیرm بایکدیگر متشابه باشند.

۱۸ ـ با در دست داشتن مختصات سه رأس یك مثلث وتنها با استفاده از رابطهٔ مربـوط به فاصلهٔ بین دونقطه ، مختصات محل برخورد سه ارتفاع آنرا پیدا کنید .

حالت خاص: $A(1,1)$ ، $B(2,-3)$ ، $C(-1,0)$.

۳.

خط راست

مکان هندسی ـ تقارن

این بخش به منظور یادآوری واحتمالا دقیق‌تر کردن بعضی از مفهومهای اولیهٔ مربوط به هندسهٔ تحلیلی است. با به وجود آمدن هندسهٔ تحلیلی و در نتیجهٔ حل مسأله‌های هندسی به‌کمك جبر، بسیاری از بحثهای هندسی روشن‌تر و دقیق‌تر می‌شود. ولی اگر احتمالا به بعضی مبانی اساسی جبر وبخصوص جبر کمیتهای‌متغیر توجه نشود ممکن‌است نتیجه‌گیریها توأم باعدم دقت‌باشد ویاحتی در بعضی موارد نادرست ازآب درآید. آنچه هم‌که در این بخش می‌آید (چه به عنوان درس و چه به عنوان مسأله) بخاطر توجه خوانندهٔ عزیز بهمین مبانی است.

۱ـ نقطهٔ متغیر

نقطه‌ای مثل $A(-۱,۳)$ نقطه‌ای ثابت است و در دستگاه محورهای مختصات جای مشخص و معینی دارد، در حالیکه نقطهٔ $M(a-۱,۳a)$ (که درآن a عددی است حقیقی و دلخواه)، نقطـه‌ای است متغیر و با تغییر مقدار a، جای‌آن عوض می‌شود. بعضی ازاین نقطه‌ها درجدول زیرداده شده‌است :

a	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴
x	−۵	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱		۳
y	−۱۲	−۹	−۶	−۳	۰	۳	۶	۹	۱۲

x و y نقطهٔ M باواسطهٔ a بهم مربوطاند وروشن است‌که اگر بخواهیم رابطهٔ مستقیم بین طول و عرض نقطهٔ M را بدست آوریم، باید a را بین دو معادلهٔ زیر حذف کنیم:

$$\begin{cases} x=a-۱ \\ y=۳a \end{cases} \Longrightarrow y=۳x+۳$$

ومی‌دانیم‌که $y=۳x+۳$ معـادلهٔ یك خط راست است، یعنی نقطهٔ M روی این خط حرکت می‌کند: اولا به ازای هر مقدار دلخواه a ، نقطهٔ M روی این خط قرار می‌گیرد، ثانیاً هر نقطهٔ دلخواه از این خط مربوط به یکی از نقطه‌های M می‌باشد.

خط $y=3x+3$ را مکان هندسی نقطهٔ متغیر M گویند.

۲ـ مکان هندسی

بطورکلی جستجوی معادلهٔ مکان هندسی‌یك نقطهٔ متغیر، یعنی‌پیداکردن رابطه‌ای بین‌طول و عرض این نقطه. از نظر محاسبه‌های جبری، به چند نوع مکان هندسی برخورد می‌کنیم که به‌کمك مثال به روشن‌کردن‌آنها می‌پردازیم.

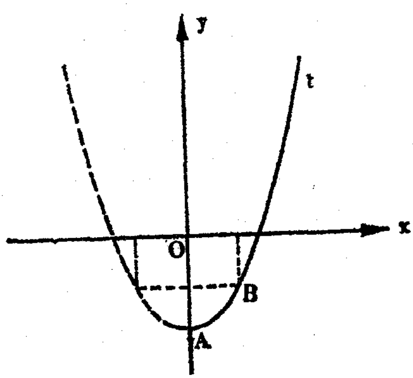
I. وقتی مختصات نقطه به صورت پارامتری داده شده باشد.

مثال۱ . مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ $A(\sqrt{a-2}\,،\,2a-8)$

حل. باحذف a بین x و y وبا توجه به غیر منفی بودن x به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$y=2x^2-4\ ,\ x\geq 0$$

یعنی‌آن قسمت ازمنحنی نمایش تغییرات تابع $y=2x^2-4$ که در سمت راست و یا روی محور عرض قرار گرفته است (درشکل ۹ قوس ABt شکل هندسی این مکان را نشان می‌دهد).



شکل۹

II. وقتی‌که نقطهٔ متغیر به شکل هندسی متغیر بستگی داشته باشد.

مثال۲. مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ برخورد دوخط

$$\begin{cases} mx-2y+2=0 \\ x+y-m-3=0 \end{cases}$$

حل. ازحل این دو معادلهٔ دو مجهولی (نسبت به x و y)، مقادیر xوy برحسب m بدست می‌آید وحل‌آن به‌حالت قبل منجر می‌شود. دراینجامختصات

نقطهٔ برخورد دوخط، $M(2,m+1)$ می‌شود. نقطهٔ متغیر M چنان حرکت می‌کند که طول آن مقداری ثابت و مساوی ۲ باقی بماند و بنابراین روی خط $x=2$ جابجا می‌شود.

مثال۴. مطلوبست معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات که مجموع فاصله‌های هریك ازآنها تادونقطهٔ $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$ مساوی مقدار ثابت $2a$ باشد.

حل. اگر یکی از نقطه‌های مکان را $M(x,y)$ بگیریم، طبق شرط مسأله باید داشته باشیم:

$$MF+MF'=2a$$

ویا:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

این معادله راگویا می‌کنیم، به‌ترتیب داریم:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2,$$
$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=c^2x^2-2a^2cx+a^4$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

که اگر $a^2-c^2=b^2$ فرض کنیم، بعد از تقسیم دو طرف تساوی بر a^2b^2 بدست می‌آید:

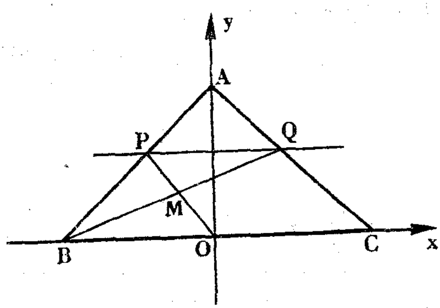
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

معادلهٔ مکان بدست آمد. همانطور که ازهندسه می‌دانیم این مکان یك بیضی است. بنابراین معادلهٔ (۱)، معادلهٔ یك بیضی‌است که مرکز آن برمبداء مختصات و دو قطر آن برمحورهای مختصات منطبق است (a و b بترتیب نیم قطرهای بزرگتر وکوچکتر و c نصف فاصلهٔ کانونی این بیضی است).

III. حل مسأله‌هایی‌که به صورت خالص هندسی‌اند.

مثال۴. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$، می‌دانیم طول ارتفاع AO مساوی نصف طول قاعدهٔ BC می‌باشد؛ خطی به موازی قاعدهٔ BC رسم کرده‌ایم تا ساقهای AB و AC را بترتیب در P و Q قطع کند. مطلوبست مکان نقطهٔ M محل برخورد OP و BQ وقتی‌که PQ به موازات خود حرکت می‌کند.

حل. امتداد BC را محور طول و عمود منصف آن (یعنی امتداد OA) رامحورعرض‌می‌گیریم. اگرطول OA را واحد.و معادلهٔ خط PQ را $y=a$ بگیریم، بسادگی بدست می‌آید:



شکل ۱۰

$$A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \;;\; B\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \;;\; C\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$$

برای پیداکردن مختصات نقطهٔ P، باید درمعادلهٔ خط AB مقدارyرامساوی a بگیریم، $x_P=a-1$ و ازآنجا $x_Q=1-a$ بدست‌می‌آید.معادلهٔخطهای OP و BQ را می‌نویسیم وازحل‌آنها (مثل دومعادلهٔ دو مجهولی)، مختصات نقطهٔ M را برحسب a بدست می‌آوریم:

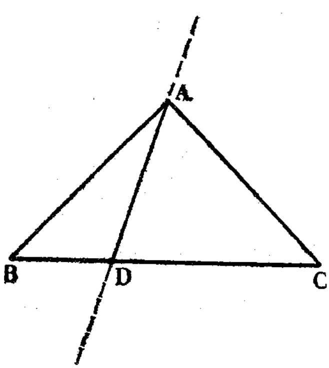
$$M\left(-\frac{a-1}{2a-3}, \; -\frac{a}{2a-3}\right)$$

به این ترتیب مسأله به‌حالت I منجر می‌شود وباحذف a بین x و y نقطهٔ M، مکان M بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{a-۱}{۲a-۳} \\ y=-\dfrac{a}{۲a-۳} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{۳x+۱}{۲x+۱} \\ a=\dfrac{۳y}{۲y+۱} \end{cases};$$

$$\frac{۳x+۱}{۲x+۱}=\frac{۳y}{۲y+۱} \Longrightarrow y=۳x+۱ \quad (۱)$$

معادلهٔ (۱) نشان می‌دهد که نقطهٔ M خارج از خط $y=۳x+۱$ نمی‌تواند باشد. اگر خط PQ را به‌موازات خود حرکت‌دهیم تا از A عبور کند، بسادگی معلوم می‌شود که باید A هم جزو این‌مکان باشد (باتحقیق هم معلوم می‌شود که مختصات نقطهٔ A درمعادلهٔ (۱) صدق می‌کند). وقتی‌که PQ بر BC منطبق شود، BQ بر BC و OP بر OB منطبق می‌شود ونقطهٔ خاصی به‌عنوان محل برخوردآنها بدست نمی‌آید. ازطرف دیگر اگردرمعادلهٔ (۱)، $y=۰$ بگیریم $x=-\frac{۱}{۳}$ می‌شود و این به معنای آنست که خط مکان ازنقطهٔ ثلث قاعده‌عبور می‌کند، ولی‌خود این نقطه جزو مکان نیست.



شکل ۱۱

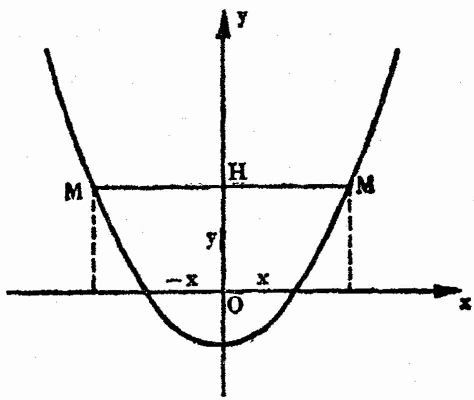
بطور خلاصه، وقتی‌که PQ در فاصلهٔ BC تا A حرکت‌کند، مکان‌عبارتست از پاره خط AD به‌استثنای نقطهٔ D (شکل ۱۱)، ودر حالتی که خط PQ بتواند از مرزهای BC و A بطرف پائین‌وبطرف بالا تابی‌نهایت عبورکند، مکان مطلوب عبارتست ازخطی‌که از دونقطه A و D می‌گذرد به‌استثنای خودنقطهٔ D.

ضمناً برای نقطهٔ D داریم : $DB:DC=\frac{۱}{۲}$.

۳. تقارن

I. محور تقارن یك منحنی. ازهندسه میدانیم که محور تقارن یك شکل مسطحه عبارتست ازخطی که قرینهٔ منحنی نسبت به آن برخودش منطبق شود. این تعریف را به این ترتیب هم می‌توان قبول کرد:

خطی‌را محور تقارن منحنی (c) گویند که اگر ازنقطهٔ دلخواه Hواقع بر آن، عمودی برمحور اخراج کنیم تا منحنی (c)را در دو نقطهٔMوM' قطع کند، داشته باشیم: $HM = HM'$ (شکل۱۲).



شکل۱۲

این‌تعریف به معنای آنست که وقتی محور عرض محور تقارن منحنی‌است، اگر $M(x,y)$ متعلق به‌منحنی باشد، نقطهٔ $M(-x,y)$ هم روی منحنی‌قرار دارد. به‌عبارت دیگر اگر درمعادلهٔ منحنی، x را به $-x$ تبدیل کنیم y تغییر نمی‌کند، یعنی اگر داشته باشیم:

$$f(x,y) = f(-x,y)$$

محور عرض محور تقارن منحنی $f(x,y) = 0$ است . بهمین ترتیب وقتی که داشته باشیم:

$$f(x,y) = f(x,-y)$$

محورطول محور تقارن منحنی‌است. مثلابرای منحنی‌نمایش تغییرات$y = \cos x$

$y=x^۲-۴$ ، $x^۲+y^۲=۱$ محور عرض محور تقارن است.

بطور خلاصه وقتی محور عرض محور تقارن $f(x\ ,\ y)=۰$ است که $f(x,y)$ نسبت به x زوج باشد، و وقتی محورطول محورتقارن‌است که نسبت به y زوج باشد.

مثال ۱. مطلوبست معادلهٔ محور تقارنی از منحنی تابع:

$$y=۲x^۲-۳x+۵$$

که موازی محور عرض باشد.

حل. این‌تابع نسبت به x زوج نیست وبنابراین خود محور عرض محور تقارن منحنی آن نیست. معادلهٔ محور تقارن منحنی آنرا $x=a$ می‌گیریم و معادلهٔ جدید منحنی را پیدا می‌کنیم، وقتی‌که محورهای مختصات رابه موازات خود حرکت دهیم تا مبداء جدید به نقطهٔ $\left|\begin{matrix} a \\ ۰ \end{matrix}\right.$ ω منتقل شود. اگـر (X,Y) مختصات جدید و (x,y) مختصات قدیم نقطه‌ای ازمنحنی این تابع باشدداریم:

$$x=X+a\ ,\ y=Y$$

وازآنجا معادلهٔ جدید منحنی چنین می‌شود:

$$Y=۲(X+a)^۲-۳(X+a)+۵$$

و یا:

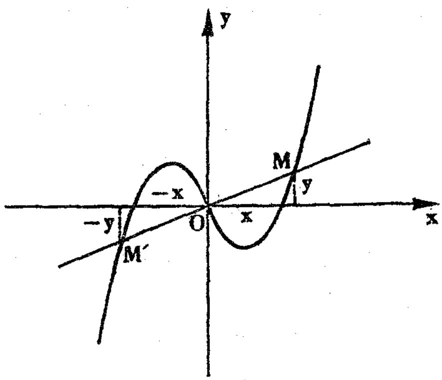
$$Y=۲X^۲+(۴a-۳)X+(۲a^۲-۳a+۵)$$

چون خط $y=a$ در دستگاه جدید منطبق برمحور عرض است، بنابراین‌معادلهٔ جدید منحنی باید نسبت به x زوج باشد وبرای این منظور باید داشته باشیم:

$$۴a-۳=۰ \Longrightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

یعنی خط $x=\frac{۳}{۴}$ یاه $۴x-۳=۰$معادلهٔ محورتقارن منحنی‌نمایش‌تغییرات‌تابع: $y=۲x^۲-۳x+۵$ است.

II. مرکز تقارن یك منحنی. نقطه‌ای را مرکز تقارن یك منحنی گویند که قرینهٔ منحنی نسبت به‌آن برخود منحنی منطبق شود. بـه عبارت دیگر هر خطی که ازمرکز تقارن بگذرد ومنحنی‌را در دو نقطه قطع کند، این دو نقطه از مرکز تقارن بیك فاصله‌اند.



شکل۱۳

بنابراین تعریف و با توجه به شکل۱۳، وقتی مبـداء مختصـات مرکز تقارن منحنی‌تابع $f(x,y)=0$ است که داشته باشیم:

$$f(x,y)=f(-x,-y)$$

یعنی باتبدیل x به $-x$ و y به $-y$ عبـارت $f(x,y)$ تغییر نکند (در اینحالت گویند تابع $y=\varphi(x)$ فرد است).

مثال۲. مرکزتقارن منحنی‌تابع $y=x^3-3x^2+4$ راپیداکنید.

حل. $\omega(\alpha,\beta)$ را مرکز تقارن منحنی تابع می‌گیریم، باید با انتقال مبداء به‌این نقطه به معادله‌ای برای منحنی برسیم که با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ تغییر نکند؛ رابطه‌های انتقال محورها چنین‌اند:

$$x=X+\alpha\ ,\ y=Y+\beta$$

که اگر درمعادلهٔ منحنی قرار دهیم، پس ازعملهای لازم بدست می‌آید:

$$Y=X^3+3(\alpha-1)X^2+3(\alpha^2-2\alpha)X+(\alpha^3-3\alpha^2+4-\beta)$$

و برای اینکه این تابع فرد باشد (یعنی با تبدیل X به $-X$ مقدار Y هم به $-Y$ تبدیل شود)، باید ضریب X^2 ومقدار ثابت درطرف دوم‌تساوی، مساوی صفرشود:

$$\begin{cases} \alpha-1=0 \\ \alpha^3-3\alpha^2+4-\beta=0 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha=1 \\ \beta=2 \end{array} \right.$$

یعنی نقطهٔ $\omega(1,2)$ مرکز تقارن منحنی تابع $y=x^3-3x^2+4$ است. مختصات نقطهٔ ω در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند، یعنی مرکز تقارن این منحنی برخود منحنی قرار دارد.

مثال ۳. مطلوبست مرکز تقارن منحنی $y=\dfrac{x^2+2x-1}{1-x}$.

حل. اگر $\omega(\alpha,\beta)$ را مرکز تقارن منحنی بگیریم و مثل مثال ۲ عمل کنیم بالاخره به معادلهٔ زیر می‌رسیم.

$$X^2+XY+(2\alpha+\beta+2)X+(\alpha-1)Y+$$
$$+(\alpha^2+\alpha\beta+2\alpha-\beta-1)=0$$

وبرای اینکه این معادله باتبدیل X به $-X$ وY به $-Y$ تغییر نکند باید ضریبهای X و Y مساوی صفر شود:

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+2=0 \\ \alpha-1=0 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha=1 \\ \beta=-4 \end{array} \right.$$

یعنی نقطهٔ $\omega(1,-4)$ مرکز تقارن منحنی تابع مفروض است. مختصات این نقطه در معادلهٔ منحنی صدق نمی‌کند و بنابراین مرکز تقارن منحنی مفروض، روی منحنی واقع نیست.

III. پیدا کردن معادلهٔ قرینهٔ یك منحنی نسبت بیك نقطه.

مثال ۴. مطلوبست معادلهٔ قرینهٔ منحنی تابع $y=x^2$ نسبت به نقطهٔ $\omega(3,1)$.

حل. اگر نقطهٔ (X,Y) را قرینهٔ نقطهٔ (x,y) منحنی نسبت به ω بگیریم باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x+X=6 \\ y+Y=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=6-X \\ y=2-Y \end{cases}$$

که اگر درمعادلهٔ منحنی مفروض قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$2-Y=(6-X)^2 \Longrightarrow Y=-X^2+12X-34$$

به این ترتیب معادلهٔ منحنی جدید $y=-x^2+12x-34$ خواهد بود.

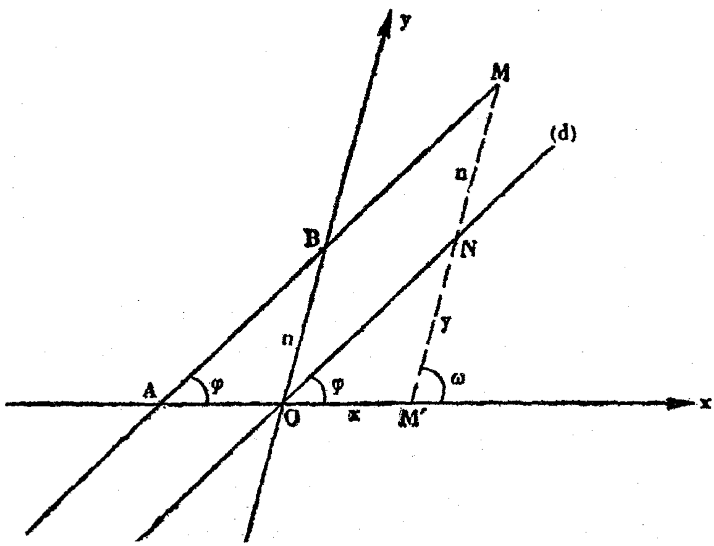
۴. خط راست

اگر خط راست موازی محور طول نباشد، می‌توان معادلهٔ آنرا (چه‌در دستگاه قائم وچه در دستگاه مایل) به صورت زیر نوشت:

$$y=mx+n$$

که m را ضریب زاویه و n را عرض از مبداء خط گویند.

از نقطهٔ O مبداء مختصات در دستگاهی که زاویهٔ مختصاتی آن ω است خط d را به موازات خط AB (به معادلهٔ $y=mx+n$) رسم می‌کنیم (شکل۱۴) ، بسادگی معلوم می‌شود که معادلهٔ خط d به صورت $y=mx$ در



شکل۱۴

می‌آید. در مثلث ONM' داریم:

$$\frac{y}{\sin\varphi}=\frac{x}{\sin(\omega-\varphi)} \Longrightarrow \frac{y}{x}=\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)}$$

یعنی‌ضریب‌زاویهٔ خطی که‌باجهت‌مثبت‌محور طول، زاویه‌ای مساوی φ می‌سازد در دستگاه با زاویهٔ مختصاتی ω برابر است با:

$$m=\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)}$$

وروشن است که وقتی $\omega=\frac{\pi}{2}$ باشد(یعنی دستگاه محورهای مختصات قائم‌باشد)، بدست می‌آید:

$$m=\frac{\sin\varphi}{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)}=tg\varphi$$

اگر دوخط باضریب زاویه‌های m و m' در نظر بگیریم وزاویهٔ بین دو خط α باشد، در حالت‌کلی داریم:

$$tg\alpha=\frac{(m'-m)\sin\omega}{1+(m'+m)\cos\omega+m'm} \qquad (1)$$

وبرای حالت $\omega=\frac{\pi}{2}$ (دستگاه مختصات قائم):

$$tg\alpha=\frac{m'-m}{1+m'm} \qquad (2)$$

بنابراین شرط توازی دوخط در هرحال:

$$m=m'$$

و شرط عمود بودن دوخط بر یکدیگر برای حالت‌کلی:

$$1+(m'+m)\cos\omega+m'm=0$$

وبرای حالت دستگاه محورهای قائم:

$$m'\cdot m=-1$$

توضیح: زاویهٔ α که از رابطه‌های (۱) یا (۲) بدست می‌آید عبارتست از زاویه‌ای‌که اگرخط باضریب زاویهٔ m به اندازهٔ آن درجهت مثلثاتی‌دوران

کند برخط با ضریب زاویهٔ m' منطبق شود.

***

فاصلهٔ نقطهٔ $M(x',y')$ از خط $Ax+By+C=0$ درحالت‌محور های مختصات قائم چنین است:

$$\delta=\frac{|Ax'+By'+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

و در حالت‌کلی:

$$\delta=\frac{|(Ax'+By'+C)\sin\omega|}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}$$

تمرین:

۱۹. تحقیق کنیدکه خطهای:

$$y=3x-1\ ;\ x-7y=7\ ;\ x+y-7=0$$

ضلعهای یك مثلث متساوی‌الساقین را تشکیل می‌دهند.

۲۰. می‌دانیم که خطهای:

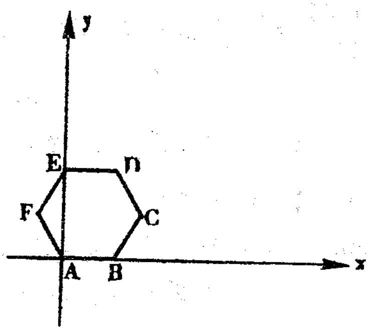
$$y=3\ ;\ x-y+4=0$$

دو ساق یك مثلث متساوی‌الساقین را تشکیل می‌دهند، اگر قاعدهٔ این مثلث از مبداء مختصات عبورکند، معادله‌اش را پیداکنید.

۲۱. مطلوبست معادلهٔ هریك از ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی‌که معادلهٔ وتر آن $y=3x+5$ و رأس قائمهٔ آن $A(4,-1)$ باشد.

۲۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی $B(5,7)$ رأس‌یکی اززاویه های حاده و $6x+4y=9$ معادلهٔ ضلع روبروی به این‌رأس می‌باشد؛ معادلهٔ هریك از دوضلع دیگرمثلث را پیداکنید.

۲۳. $A(2,-4)$ یکی از رأسها و $M(5,2)$ محل تلاقی قطرهای یك مربع است. معادلهٔ ضلعهای این مربع را پیداکنید.



شکل ۱۵

۲۴. معادلهٔ هریك از ضلعهای شش ضلعی منتظم ABCDEF رابدست آورید، بشرطی که بدانیم محور طول برضلع AB ومحور عرض بر قطر AE منطبق است (شکل ۱۵) و طول ضلع شش ضلعی مساوی a است.

۲۵. $A(3,5)$ و $B(6,1)$ دو رأس و $M(4,0)$ محل برخوردمیانه‌های مثلث ABC هستند. معادلهٔ هریك ازضلعهای مثلث را پیدا کنید.

۲۶. $M(-4,-1)$ مرکزتجانس دومثلث متشابه است. اگررأسهای مثلث کوچکتر $A(-3,-2)$، $B(2,0)$، $C(-1,1)$ و نسبت تجانس مساوی ۳ باشد، معادلهٔ هریك از ضلعهای مثلث بزرگتررا بدست آورید.

۲۷. معادلهٔ هریك ازضلعهای مجاوربه‌زاویهٔ قائمه ازمثلث قائم‌الزاویه‌ای را بدست آوریدکه مساحت آن مساوی ۲۰ واحد مربع، وتر آن منطبق برمحور طول ورأس زاویهٔ قائمهٔ آن منطبق برنقطهٔ $C(-1,4)$ باشد.

۲۸. خطی ضمن دوران خوددور نقطهٔ $B(0,4)$ محور طول را درنقطهٔ M قطع می‌کند. معادلهٔ خط BM را در هریك از حالتهای زیربنویسید:

۱) مساحت مثلث OBM مساوی ۶واحد مربع باشد؛

۲) پاره خط $BM=7$ باشد؛

۳) زاویهٔ $BMO=30°$ باشد؛

۴) BM برخط $3x-5y+8=0$ عمود باشد.

۲۹. خط $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ مفروض است. نیم خطی که از مبداء مختصات می‌گذرد این خط را در نقطهٔ P قطع می‌کند، روی این نیم خط نقطهٔ M

را چنان انتخاب می‌کنیم که $\lambda=\frac{OM}{OP}$ باشد، مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ M.

۳۰. تحقیق کنید که خطهای:

$$\sqrt{۱۱}x-۵y+۳۰=۰ \text{ و } ۲x+\sqrt{۵}y-۱۵=۰$$

بریك دایره به مرکز مبداء مختصات مماس‌اند. شعاع این دایره و مختصات نقطه‌های تماس‌را پیدا کنید.

۳۱. روی محور طول نقطه‌ای پیدا کنید که ازخط $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$ به فاصلهٔ a باشد.

۳۲. ازنقطهٔ $P(-۲,۱)$ خطی بگذرانید که ازنقطهٔ $C(۳,۱)$ به‌فاصلهٔ ۴ باشد.

۳۳. مختصات مرکز دایره‌ای به‌شعاع $r=۸$ را پیدا کنید که بردوخط $۳x-۴y+۱۰=۰$ و $۳x+۴y=۰$ مماس باشد.

۳۴. معادلهٔ خطی‌را پیدا کنید که باخط $۸x-۱۵y+۱۵=۰$ موازی و از نقطهٔ $P(۶,-۲)$ به فاصلهٔ $\delta=۴$ باشد.

۳۵. معادلهٔ خطی‌را پیدا کنید که متعلق به هردو دسته خط زیر باشد:

$$\begin{cases}(x+y-۱)+q(x-۱)=۰\\(۲x-۳y)+q'(y+۱)=۰\end{cases}$$

۳۶. معادلهٔ خطی‌را پیدا کنید که طول پاره خطی ازآن که در ربع‌اول محصور به محورهااست، دوبرابر فاصلهٔ‌آن از مبداء باشد. ضمناً مساحت مثلثی که ازاین خط و محورهای مختصات تشکیل می‌شود مساوی ۴٫۵ واحد مربع است.

۳۷. $۲x-۳y+۱=۰$ و $x+۴y-۵=۰$ معادله‌های ضلعهای یك زاویه‌اند. این ضلعها خطهای موازی $y=۲x+b$ را قطع می‌کنند. مطلوبست مکان هندسی:

۱) وسط پاره خطهایی ازخطهای موازی که بین دوضلع زاویه قراردارند.

۲) نقطه‌ای ازهمین پاره خطها که آنها را به‌نسبت $\lambda = ۳$ تقسیم می‌کنند.

۳۸. در یك مثلث متساوی‌الساقین، معادلهٔ قاعده $x - ۲y + ۳ = ۰$ و معادلهٔ یکی از ساقها $۴x - y + ۵ = ۰$ است. نقطهٔ $P(۱/۲, ۵/۶)$ برساق دیگر قرار دارد. مطلوبست:

۱) طول ارتفاع وارد بریکی ازساقها؛

۲) مختصات مرکز ثقل مثلث ؛

۳) مساحت مثلث.

۳۹. معادله‌های ضلعهای مثلثی چنین‌اند:

$$۲x - ۵y = ۲ \text{ و } x + y = ۸ \text{ و } ۵x - ۲y = ۵$$

نقطه‌ای در داخل این‌مثلث پیدا کنید که اگرازآنجا به‌سه رأس مثلث وصل کنیم، سه‌مثلث هم ارز (یعنی‌بامساحتهای مساوی) بدست‌آید.

۴۰. شعاع نوری از نقطهٔ $A(۳,۴)$ می‌گذرد وبه خط $x + y = ۲$ برخورد می‌کند وپس‌از بازتاب از نقطهٔ $B(۵,۲)$ عبور می‌کند. معادلهٔ شعاع تابش وشعاع بازتاب را پیدا کنید.

۴۱. ازنقطهٔ دلخواه M روی نیمسازربع‌اول وسوم به‌نقطهٔ $A(-۲,۰)$ وصل می‌کنیم و MA را امتداد می‌دهیم تا محور عرض‌را در C قطع کند. سپس از M به نقطهٔ $B(۰,۲)$ وصل می‌کنیم و MB را امتداد می‌دهیم تامحورطول را در D قطع کند. ثابت‌کنید که وقتی M روی نیمساز حرکت‌کند خط CD همیشه از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۴۲. روی‌صفحهٔ محورهای مختصات، همهٔ نقطه‌های به مختصات (x,y) را پیدا کنید که برای هرکدام ازآنها لااقل یك مقدار t وجود داشته باشد که به ازای‌آن عبارت:

$$۲\cos ۲t + ۴\sin ۲x \sin t + ۲\sin(x+y) - (\sin ۲x - ۱)^۲$$

بزرگتر ازواحد باشد. حوزه‌ای راکه ازاین‌نقطه‌ها تشکیل‌شده‌است معین کنید.

۴۳. نقطه‌های $A(۱,۳)$ ، $B(-۳,-۱)$ ، $C(۳,-۳)$ مفروض‌اند. نامعادله‌هایی بنویسید که مختصات هر نقطهٔ دلخواه واقع در داخل مثلث ABC در آنها صدق کند.

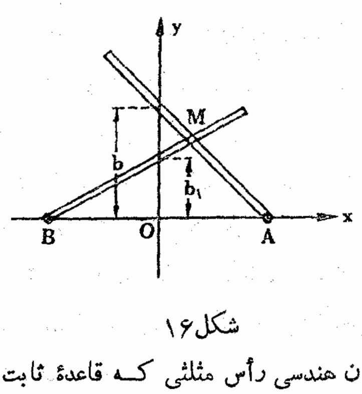
۴۴. مطلوبست معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع فاصله‌های آن از دونقطهٔ $A(-۳,۱)$ و $B(-۱,-۳)$ مساوی ۶ باشد.

۴۵. مطلوبست معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل فاصله‌های آن تا دونقطهٔ $F(c,۰)$ و $F'(-c,۰)$ مساوی مقدارثابت $۲a$ باشد.

۴۶. مطلوبست معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که از نقطهٔ $F(\frac{p}{۲}\ ,\ ۰)$ و خط $x=-\frac{p}{۲}$ بیک فاصله باشد.

۴۷. دونقطهٔ P و Q به فاصلهٔ $۲b$ از یکدیگر قرار دارند. مطلوبست مکان هندسی نقطه‌ای که حاصلضرب فاصله‌های آن ازاین دو نقطه مساوی مقدار ثابت $a^۲$ باشد.

۴۸. دو میله دور نقطه هـای ثابت $A(a,۰)$ و $B(-a,۰)$ حرکت مـی‌کنند (شکل ۱۶)، ضمناً حاصلضرب پاره خطهایی که‌این میله‌ها روی محور عرض جدا می کنند مقداری است ثابت: $b\cdot b_۱=a^۲$. معـادلهٔ مکان هندسی محل بر خورد این دو میله را پیداکنید.

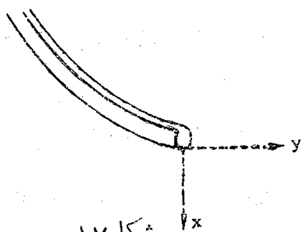


شکل۱۶

۴۹. مطلوبست معـادلهٔ مکان هندسی رأس مثلثی کـه قاعدهٔ ثابت آن $a=۱۲$ ومجموع مربعهای‌دوضلع دیگرآن $b^۲+c^۲=۱۰۰$ باشد. این‌مسأله را درحالت‌کلی هم حل کنید.

۵۰. معادلهٔ مکان هندسی مرکز دایره‌ای را پیدا کنید که برمحور طول مماس باشد واز نقطهٔ (۳,۴) بگذرد.

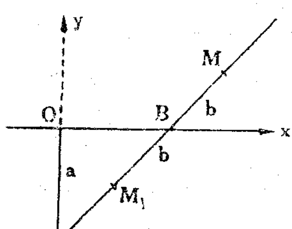
۵۱. گلوله‌ای داخل یك ناودان به پائین می‌غلتد (شکل ۱۶). سرعت این گلوله درلحظه‌ای که از انتهای آن به بیرون می‌افتد مساوی v است، اگر مماس دراین نقطه افقی باشد، مسیر بعدی گلوله را پیدا کنید.



شکل۱۷

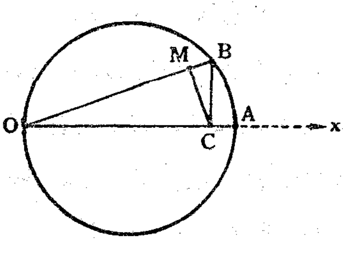
۵۲. دونقطه باحرکت یکنواخت و سرعتهای مساوی روی دو خط عمود برهم حرکت می کنند. اگر وضع اولیهٔ این دو نقطه را بدانیم، معادلهٔ مکان هندسی وسط پاره‌خطی را بنویسید که این دونقطه را به‌هم وصل می کند.

۵۳. ازنقطهٔ A، که به فاصلهٔ a از خط ox قرار گرفته است خط دلخواهی رسم می‌کنیم‌تا ox را درB قطع کند؛ روی همین خط ودر دوطرف نقطهٔ B، دونقطهٔ M و M_1 را به‌فاصلهٔ b تا نقطهٔ B جدا می کنیم. مطلوبست مکان هندسی این دونقطه (شکل۱۸).



شکل۱۸

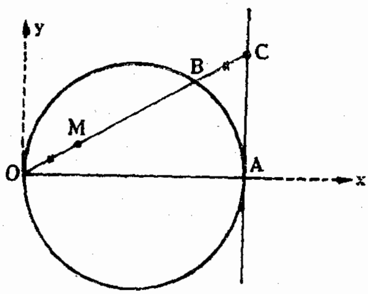
۵۴. دایرهٔ به قطر $OA=2r$ مفروض است (شکل۱۹). ازنقطهٔ O وتر OB را رسم می‌کنیم واز نقطهٔ B، انتهای این وتر، عمود BC را برقطر OA فرود می‌آوریم ، سپس از C ، پای این عمود ، عمودی بر وتر OB رسم می‌کنیم . مطلوبست مکان نقطهٔ M پای این‌عمود، وقتی که وتر OB دور نقطهٔ O حرکت کند.



شکل۱۹

۰۵۵ دایره‌ای به شعاع r ونقطهٔ O واقع برمحیط آن مفروض است. نیم خطی دور O' دوران می کند ، نقطهٔ برخورد این نیم‌خط رابادایره A می‌نامیم، روی OA طول AM=BA را در جهت مثبت نیم خط جدا می‌کنیم (B انتهای دیگر قطری است که از O می گذرد). مطلوبست معادلهٔ مسیر M وقتی که نیم خط دور O دوران می کند.

۰۵۶ دایره‌ای به قطر OA=۲r مفروض است (شکل ۲۰) . از A مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم واز O نیم‌خطی می‌کشیم تا دایره را در B ومماس را در C قطع کند. روی‌این‌نیم‌خط OM=BC را جدا می‌کنیم . مطلوبست معادلهٔ مکان M ، وقتی که نیم خط دور نقطهٔ O دوران می کند.



شکل ۲۰

۰۵۷ دوضلع یك مستطیل برمحورهای مختصات قرار دارد. این مستطیل طوری‌تغییر می کند که قطر آن همیشه مساوی مقدارثابت a باشد. ازرأس‌مستطیل که درمقابل مبدأ مختصات قرار گرفته است عمودی بر قطر آن فرود می‌آوریم. مطلوبست معادلهٔ مکان هندسی پای این‌عمود.

۰۵۸ زاویهٔ MON مساوی α ، پاره خط l وعدد m مفروض است. روی خطهای OM و ON نقطه‌های A و B را چنان انتخاب می کنیم که AB=l باشد. مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ P که پاره خط AB را به نسبت m تقسیم می کند (AP:PB=m).

۰۵۹ مطلوبست مکان هندسی مرکز مستطیلی کـه در مثلث مفروض محاط باشد .

۶۰. درهریك از حالتهای زیرمعادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ مربوطه را به صورت رابطه‌ای بین x و y پیداکنید:

$$۱)\begin{cases} x=\frac{a}{۲}(t+\frac{۱}{t}) \\ y=\frac{b}{۲}(t-\frac{۱}{t}) \end{cases} ;\qquad ۲)\begin{cases} x=t^۲+t+۱ \\ y=t^۲-t+۱ \end{cases}$$

$$۳)\begin{cases} x=۲t^۲-۳t+۱ \\ y=۳t^۲+۲t-۱۶ \end{cases} ;\qquad ۴)\begin{cases} x=\sin\alpha-\frac{۱}{\sin\alpha} \\ y=\cos\alpha-\frac{۱}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$$۵)\begin{cases} x=\sin\alpha+\cos\alpha \\ y=tg\alpha+cotg\alpha \end{cases}$$

۶۱. «فاصلهٔ» بین دو نقطه را در صفحه به‌این ترتیب تعریف می‌کنیم: اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ و $P(A,B)$ به معنای «فاصلهٔ» این‌دونقطه باشد، دراینصورت:

$$P(A,B)=Max\left\{|x_۱-x_۲| , |y_۱-y_۲|\right\}$$

یعنی از دوعدد $|x_۱-x_۲|$ و $|y_۱-y_۲|$ آنرا که بزرگتر است «فاصلهٔ» دو نقطهٔ A و B می‌نامیم.

باتوجه به این تعریف، مطلوبست مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ $A(۰,۲)$ و $B(۱,۴)$ بیك «فاصله» باشد.

۶۲. مرکز تقارن را درهریك از منحنی تابعهای زیرپیداکنید.

$$۱)\quad y=\frac{(x-۱)^۲}{۲(۲x-۱)} ;\qquad ۲)\quad ۳x^۲+y^۲-۴x+۵y=۰$$

$$۳)\quad y=x^۳-۳x^۲+۵x-۱ ;$$

$$۴)\quad x^۲-۲y^۲+۴x+۲y=۱ ;$$

۶۳. محور تقارن منحنی تابع $y^2+1=2(2x+y)$ را که موازی محور طول است پیدا کنید.

۶۴. مرکزهای تقارن منحنی تابع $y=\sin^2 x$ را پیدا کنید.

۶۵. محورهای تقارن موازی محور عرض را در منحنی نمایش تغییرات تابع $y=a\sin x+b\cos x+c$ بدست آورید.

۶۶. تابع $y=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$ چه شرطی داشته باشد تا منحنی آن دارای مرکز تقارن باشد؟

۶۷. تابع $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ مفروض است. معادلهٔ منحنی قرینهٔ آنرا نسبت به خط $x=2$ پیدا کنید.

۶۸. تابع $y=x^2-2x$ مفروض است. معادلهٔ منحنی قرینهٔ آنرا نسبت به نقطهٔ $\omega(-1,-2)$ بدست آورید.

۶۹. معادلهٔ قرینهٔ منحنی تابع $y=\dfrac{x^2}{2x-1}$ را نسبت به نیمساز ربع اول وسوم پیدا کنید.

۷۰. معادلهٔ قرینهٔ منحنی تابع $y=x^2+2x-1$ را نسبت به نیمساز ربع دوم وچهارم پیدا کنید.

۷۱. درمورد هریك ازمنحنی تابعهای زیر، محورهای تقارن رامشخص کنید:

۱) $y=x^2+|x-3|-6x+7$;

۲) $\big||y+2|-3\big|=\big|2-|x-1|\big|$;

۳) $\log_{x^2+2x+2}(y^2-4y+4)=2$;

۴) $|y+1|=\dfrac{x^3-2x^2}{2|x-2|}$; ۵) $y=\big||x+1|-2\big|$;

۶) $\big||y|-3\big|=\big||x+2|-1\big|+2$

۷) $2^{|y+4|}=x^2-6x+9$

۴.

تابع

مشتق- حد- پیوستگی- کاربرد مشتق - رسم منحنی

دراین بخش از اساسی‌ترین مفاهیم مربوط به‌ریاضیات با کمیتهای متغیر گفتگومی‌شود. مفاهیمی از نوع «تابع»، «پیوستگی»، «حد» و مانند آنها، ستونهای اصلی وبنیادی این دوره از ریاضیات بشمارمی‌روندوبدون درك درست آنها حتی یك گام هم نمی‌توان برداشت.

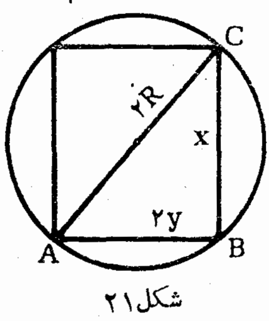
اگر چه در این کتاب بمناسبت قید و بندهای برنامه‌ای، نمی‌توان با دقت کامل پیش رفت، ولی بهرحال توصیه جدی ما به خوانندهٔ کتاب اینست که نفهمیده وقانع نشده ازاین بخش نگذرد.

در اینجا بدون اینکه وارد در بحث دقیق نظری بشویم سعی می‌کنیم بیشتر با ذکر مثال از مفهومهای مختلف مربوط به تابع گفتگو کنیم. ضمناً بحثی هم در بارهٔ مفهوم تابع با دید جدید آن (به‌کمك مجموعه‌ها) خواهیم آورد.

۱- نوشتن تابع

مثال ۱. در کره‌ای به‌شعاع R استوانه‌ای محاط کرده‌ایم. مطلوبست رابطهٔ تابعی حجم V وسطح جانبی P از استوانه نسبت به متغیر ارتفاع آن x. این تابعها درچه فاصله‌هائی معین هستند؟

حل. شعاع قاعدهٔ استوانه را y وارتفاع آنرا x می‌گیریم (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

دراینصورت داریم: $V=\pi y^{2}x$ و $P=2\pi yx$. با تغییر x، مقدار y هم تغییر می‌کند و می‌توان رابطهٔ بین x و y را بدست آورد. از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم: $4y^{2}+x^{2}=4R^{2}$ و از آنجا:

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{4R^{2}-x^{2}}$$

که اگر مقدار y را دررابطه‌های مربوط به‌حجم وسطح جانبی قراردهیم بدست می‌آید:

$$V=\pi\left(R^{2}x-\frac{x^{3}}{4}\right)\ ;\ P=\pi x\sqrt{4R^{2}-x^{2}}$$

و روشن است که هردوتابع درفاصلهٔ $\circ<x<2R$ معین هستند.

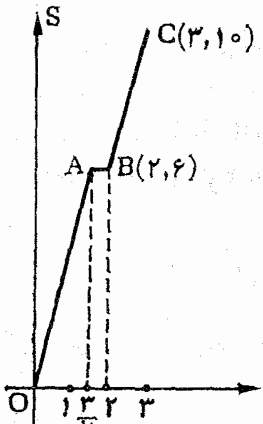
مثال۲. در یك مثلث متساوی‌الساقین مقدار مساحت ثابت و طول ضلعها متغیر است. طول l ساق این مثلث را به‌صورت تابعی از قاعدهٔ آن بنویسید و حوزهٔ معین بودن آنرا پیدا کنید.

جواب: $l=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{4s^2}{a^2}}$ که در آن a طول قاعده و s مساحت مثلث است. حوزهٔ معین بودن تابع با شرط $a>\circ$ مشخص می‌شود.

مثال۳. یك‌دسته پیش‌آهنگ دریك راه‌پیمائی سه‌ساعته، ساعتی ۴ کیلومتر حرکت‌می کند. بعدازیك ساعت‌ونیم‌راه‌پیمائی‌هم نیم‌ساعت‌استراحت دارد. طول راه S را به‌عنوان تابعی اززمان t بنویسید. نمایش تغییرات این تابع را رسم کنید. فاصله معین بودن وفاصلهٔ تغییرات تابع را معین کنید.

حل. وقتی که $\circ\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$ باشد داریم: $S=4t$. درفاصلهٔ $\frac{3}{2}<t\leqslant 2$ دسته استراحت می کند وجمع راه طی شده تغییرنمی کند. در $\frac{3}{2}$ ساعت $6=4\times\frac{3}{2}$ کیلومترراه طی شده است. به‌ازای $2<t\leqslant 3$ داریم: $S=6+4(t-2)=4t-2$. به‌این ترتیب داریم:

$$S=\begin{cases}4t & (\circ\leqslant t\leqslant\frac{3}{2})\\ 6 & (\frac{3}{2}<t\leqslant 2)\\ 4t-2 & (2<t\leqslant 3)\end{cases}$$



شکل۲۲

تابع درفاصلهٔ $\circ\leqslant t\leqslant 3$ معین است و مقدار تابع در فاصلهٔ $\circ\leqslant S\leqslant 10$ تغییرمی کند.

برای رسم نمایش تغییرات این تابع (شکل ۲۲)باید دردستگاه tOS خط $S=4t$ را در فاصلهٔ

$0\leq t\leq\frac{3}{2}$ ، خط $S=6$ را درفاصله $\frac{3}{2}<t\leq 2$ و بالاخره خط $S=4t-2$ را در فاصلهٔ $\frac{3}{2}<t\leq 2$ رسم کرد.

توضیح. به این نکته توجه کنیم که درمثالهای بالا فاصله‌ای که تابع درآن معین است تنهاازعبارت تحلیلی تابع مشخص نمی‌شود، بلکه با توجه به‌شرطهای مسأله درنظر گرفته می‌شود. مثلا در مثال ۱ تابع

$$V=\pi(R^2x-\frac{x^2}{4})$$

درفاصلهٔ$(0,2R)$ معین‌است، اگرچه عبارت تحلیلی تابع درسمت راست‌تساوی، برای همهٔ مقادیرx معین است.

مثال۴. چتربازی بعد از پرش از هواپیما ، درt_1 ثانیهٔ اول تحت تأثیر نیروی جاذبه و در t_2 ثانیهٔ بعد با سرعت ثانیه‌ای v متر به‌زمین رسید . طول راهی راکه چتربازطی‌کرده است، به‌عنوان تابعی اززمان بنویسید؛ لحظهٔ پرش را زمان صفربگیرید. فاصلهٔ معین بودن وفاصلهٔ تغییرات تابع را بنویسید.

حل. چترباز درt_1 ثانیهٔاول تحت تأثیرنیروی جاذبه حرکت‌کرده‌است. بنابراین اگرمقاومت هوا را درنظرنگیریم، برای $0\leq t\leq t_1$ داریم: $S=\frac{1}{2}gt^2$؛ برای $t_1<t\leq t_1+t_2$ داریم: $S=S(t_1)+v(t-t_1)$ یا $S=\frac{1}{2}gt^2+v(t-t_1)$. به‌این ترتیب:

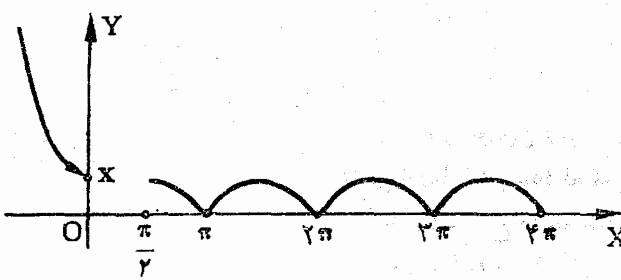
$$S=\begin{cases}\frac{1}{2}gi^2 & (0\leq t\leq t_1)\\ \frac{1}{2}gt_1^2+v(t-t_1) & (t_1<t\leq t_1+t_2)\end{cases}$$

تابع در فاصلهٔ $0\leq t\leq t_1+t_2$ معین است و در فاصلهٔ $0<S\leq\frac{1}{2}gt^2+vt_2$ تغییرمی‌کند.

مثال۵. منحنی نمایش تغییرات این تابع را رسم‌کنید:

$$y=\begin{cases} ۱+x^۲ & (x<۰) \\ |\sin x| & (x\geqslant \frac{\pi}{۲}) \end{cases}$$

حل. برای $x<۰$، منحنی عبارتست‌ازشاخه‌ای ازیك سهمی که رأس‌آن $A(۰,۱)$ است (خود این نقطه جزو منحنی نیست) . برای $x\geqslant\frac{\pi}{۲}$ابتدامنحنی $\sin x$ را رسم می‌کنیم وسپس آن قسمت ازمنحنی راکه زیرمحورطول‌قراردارد به‌قرینهٔ خود نسبت به محور ox تبدیل می‌کنیم (شکل ۲۳).



شکل۲۳

مثال۶. منحنی نمایش تغییرات تابع زیررا رسم‌کنید.

$$y=\begin{cases} \dfrac{x^۳+x}{|x|} & (|x|\leqslant ۱ \ , \ x\neq ۰) \\ ۲ & (x>۱) \end{cases}$$

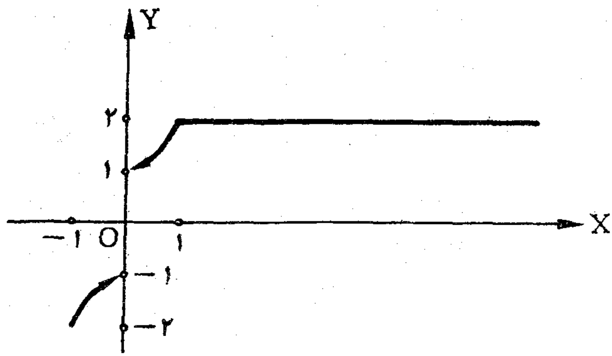
حل. با شرط $-۱\leqslant x<۰$ داریم: $|x|=-x$، بنابراین:

$$y=\frac{x^۳+x}{|x|}=\frac{x(x^۲+۱)}{-x}=-(x^۲+۱)$$

با شرط $۰<x\leqslant۱$ داریم: $|x|=x$، بنابراین:

$$y=\frac{x^۳+x}{x}=x^۲+۱$$

منحنی نمایش تغییرات تابع درشکل ۲۴ داده شده است.



شکل۲۴

۲. فاصلهٔ معین بودن وفاصلهٔ تغییرات تابع

در هر یك از مثالهای ۷ تا ۱۰ معلوم کنید درچه فاصله‌ای تابع معین است؟

مثال۷. $y=۳\sqrt[۴]{۱+x^۲}+\sqrt{|x+۲|-۷}$.

حل. زیر رادیکال در جملهٔ اول (یعنی $x^۲+۱$) همیشه مثبت است و بنابراین جملهٔ اول عبارت تابع، به‌ازای همهٔ مقادیر x معین است. جمله دوم وقتی معین است که داشته باشیم:

$$|x+۲|-۷\geqslant ۰ \implies |x+۲|\geqslant ۷$$

واین نامساوی وقتی صحیح است که $x\geqslant ۵$ یا $x\leqslant -۹$ باشد.

بنابراین تابع ممروض در دو فاصلهٔ $(-\infty,-۹]$ و $[۵,+\infty)$ معین است.

مثال۸. $y=\sqrt{\frac{۸}{|x|}-۱}+log(x^۲-۱)$.

حل. جملهٔ اول تابع دردوفاصلهٔ نیم بستهٔ $[-۸,۰)$ و $(۰,۸]$ وجملهٔ دوم به ازای $x>۱$ و $x<-۱$ معین است. بنابراین تابع مفروض در دو فاصلهٔ نیم بستهٔ $[-۸,-۱)$ و $(۱,۸]$ معین است.

مثال۹. $y=\sqrt{|x+5|+1}-\sqrt{10-|x|}+\sin 2x$.

جواب: تابع درفاصلهٔ بستهٔ $[-10,10]$ معین است.

مثال۱۰. $y=\sqrt{|x|-x}+\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$

جواب: تابع به ازای همهٔ مقادیر x بجزعددهای ۱ — و۱ معین است.

در مثالهای ۱۱ تا۱۵ معین‌کنید مقدارتابع‌درچه فاصله‌ای تغییرمی‌کند؟

مثال۱۱. $y=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{4}$.

حل. تابع برای همهٔ مقادیر x معین است. ازطرف دیگرداریم:

$$y=(\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)-2\sin^2 x\cos^2 x+\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

وچون $0\leqslant \sin^2 2x\leqslant 1$ ، پس:

$$\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant \frac{5}{4}\Longrightarrow \frac{3}{4}\leqslant y\leqslant \frac{5}{4}$$

مثال۱۲. $y=\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}$.

حل. تابع به ازای همهٔ مقادیر x بجز عددهای ۱ — و۲ معین است.

برای پیداکردن حدود تغییرات تابع ، این معادله را نسبت به x حل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$x=\frac{y+1\pm\sqrt{9y^2+2y+1}}{2y}$$

چون x عددی است حقیقی، باید نامساوی $9y^2+2y+1\geqslant 0$ برقرار باشد، ولی این نامساوی به‌ازای همهٔ مقادیر y صحیح است، بنابراین هر مقدار دلخواه $y\neq 0$ متناظر با مقداری از x است. ازصورت اصلی تابع معلوم است که $y=0$ متناظر با $x=0$ است. از اینجا معلوم می‌شود که حوزهٔ تغییرات تابع عبارتست ازهمهٔ عددهای حقیقی.

توضیح: فاصلهٔ تغییرات مقدار تابع را حوزهٔ تغییرات تابع یا مجموعهٔ مقادیرتابع هم می‌گویند.

مثال۱۳. $y=a\sin x+b\cos x$.

جواب: $-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$

مثال۱۴. $y=2+\sin x\cos x\cos 2x$ با شرط $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}$.

جواب: $2\leqslant y\leqslant 2\frac{1}{4}$.

مثال۱۵. $y=\frac{3}{x(x-2)}$.

جواب: شبیه مثال ۱۲ عمل کنید: $-\infty<y\leqslant-3$ و $0<y<\infty$.

۳. صعودی و نزولی بودن تابع

در مثالهای ۱۶ تا ۲۰ فاصلهٔ صعودی و نزولی بودن تابع را معین می‌کنیم.

مثال۱۶. $y=x^3$.

حل. x_1 و x_2 رادومقداردلخواه‌متغیرمی گیریم‌وفرض می کنیم $x_2>x_1$.

داریم:

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)$$

با توجه به‌نامساوی $x_2-x_1>0$ به تعیین علامت عبارت $x_2^2+x_1x_2+x_1^2$ می‌پردازیم. داریم:

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\geqslant\sqrt{x_1^2x_2^2}$$

وازآنجا

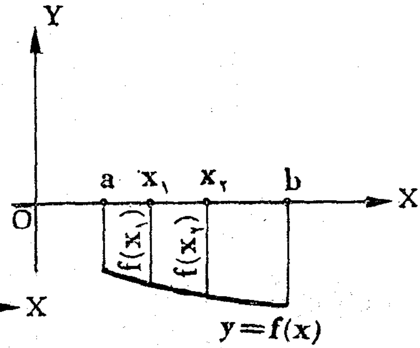
$$x_1^2+x_2^2\geqslant 2|x_1|\cdot|x_2|>|x_1|\cdot|x_2|$$

بنابراین نامساوی $x_2^2+x_1x_2+x_1^2>0$ برای هرعلامت x_1 و x_2 صحیح است. به‌این ترتیب تابع $y=x^3$ برای همهٔ مقادیر x صعودی است.

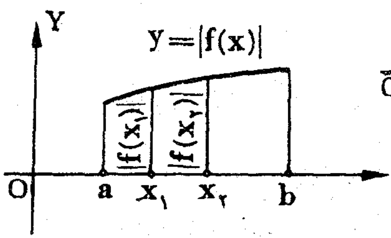
مثال۱۷. $y=|x^2+2x-3|$.

حل. قبلا متذکرمی‌شویم که اگر $f(x)\geqslant 0$ باشد، $f(x)$ و $|f(x)|$ باهم صعودی وبا هم نزولی‌اند. اگر درفاصله‌ای $f(x)$ منفی باشد، وقتی که در این

فاصله $f(x)$ نزولی است $|f(x)|$ صعودی و وقتی که $f(x)$ صعودی است $|f(x)|$ نزولی خواهد بود. شکلهای ۲۵ و ۲۶ این مطلب را درحالتی که $f(x)$ منفی است، روشن می‌کند.



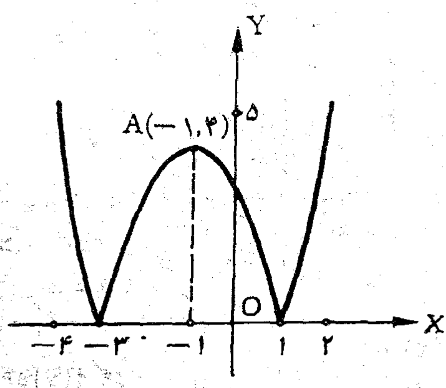
شکل۲۵



شکل۲۶

برای حل مسأله، فاصله‌هایی را معین می‌کنیم که در آنجا:
$x^۲+۲x-۳\geqslant ۰$ و $x^۲+۲x-$[illegible]<۰ باشد. نامساوی اول به ازای $x\leqslant -۳$ و $x\geqslant ۱$ ونامساوی دوم به ازای $-۳<x<۱$ برقرار است.
حال فاصله‌های صعودی ونزولی تابع زیررا بررسی می‌کنیم:

$$y_۱=x^۲+۲x-۳=(x+۱)^۲-۴$$



شکل۲۷

این تابع به ازای $x<-1$ نزولی وبه‌ازای $x>-1$ صعودی‌است.
ضمناً به‌ازای $x<-3$ نزولی و مثبت، به‌ازای $-3<x<-1$ نزولی و منفی، به‌ازای $-1<x<1$ صعودی ومنفی، وبالاخره به‌ازای $x>1$ صعودی ومثبت است. بنابراین تابع $y=|x^2+2x-3|$ به ازای $x<-3$ و $-1<x<1$ نزولی‌وبه‌ازای $-3<x<-1$ و $x>1$ صعودی‌است.

منحنی نمایش تغییرات این تابع درشکل ۲۷ داده شده است.

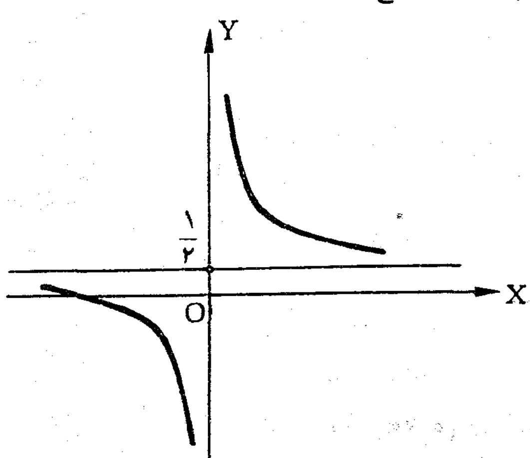
مثال۱۸. $y=\frac{x+2}{2x}$

حل. تابع درهمه جا، بجز در نقطهٔ $x=0$، معین است. روشن است‌که $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$. ابتداحالت $x<0$ رادرنظرمی گیریم. فرض‌کنیم $x_1<x_2<0$، دراینصورت:

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}<0$$

یعنی درحالت $x<0$ تابع نزولی است.

بهمین ترتیب معلوم می‌شود که در حالت $x>0$ هم تابع نزولی است.
منحنی نمایش تغییرات تابع درشکل ۲۸ داده شده است.



شکل۲۸

مثال۱۹. $y=|x^3|$

جواب: تابع برای $x\leqslant 0$ نزولی وبرای $x>0$ صعودی است.

مثال۲۰.

$$S=\begin{cases} \frac{1}{2}gt^2 & (0\leqslant t\leqslant t_1) \\ \frac{1}{2}g{t_1}^2+v(t-t_1) & (t_1<t\leqslant t_1+t_2) \end{cases}$$

جواب: تابع درتمام فاصله‌ای که معین است، صعودی است.

مثال۲۱. آیا تفاضل دوتابع صعودی، یك تابع صعودی است؟

حل. تفاضل دو تابع صعودی ممکن است صعودی نباشد، مثلا هر یك از دو تابع $y_1=x^3$ و $y_2=3x$ برای همهٔ مقادیر حقیقی xصعودی هستند؛ در حالیکه تفاضل آنها $y_3=x^3-3x$ برای همهٔ مقادیر حقیقی x صعودی نیست. در حالتی هم ممکن است تفاضل دو تابع صعودی، تابعی صعودی باشد. مثلا دو تابع $y_1=3x$ و $y_2=2x$ صعودی هستند؛ تفاضل آنها یعنی تابع $y_3=x$ هم صعودی است.

۴. بررسی و رسم منحنی نمایش تغییرات تابع

مثال۲۲. تابع $y=2^{1+\cos x}$ را بررسی و منحنی نمایش تغییرات آنرا رسم کنید.

حل. ۱) تابع به ازای همهٔ مقادیر حقیقی x معین است.

۲) حوزهٔ تغییرات تابع عبارتست‌از از $1\leqslant y\leqslant 4$.

۳) تابع زوج است، زیرا داریم:

$$y(-x)=2^{1+\cos(-x)}=2^{1+\cos x}=y(x)$$

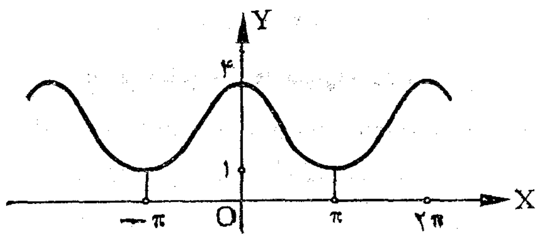
و بنابراین محور عرض محور تقارن منحنی آنست.

۴) تابع متناوب است و کوچکترین دورهٔ تناوب آن برابر است با 2π. بنابراین کافی است منحنی را مثلا در فاصلهٔ $(0,2\pi)$ رسم کنیم. با توجه به زوج بودن تابع، می‌توان منحنی را در فاصلهٔ $(0,\pi)$ رسم کرد و قرینهٔ آنرا نسبت به محور عرض بدست آورد تا منحنی در فاصلهٔ $(-\pi,\pi)$ بدست آید.

ضمناً متناوب بودن تابع نشان می‌دهد که خطهای $y=k\pi$ محورهـای تقارن منحنی هستند.

۵) کسینوس در فاصلهٔ $(\circ,\pi)$ نزولی و در فاصلهٔ $(\pi,۲\pi)$ صعودی است و بنابراین تابع مفروض هم در فاصله اول نزولی و در فاصلهٔ دوم صعودی است

۶) تابع $\cos x$ در نقطهٔ $x=\pi$ می‌نیمم نسبی مساوی ۱ — دارد، تابع $y=۲^{۱+\cos x}$ هم در همین نقطه می‌نیمم نسبی مساوی ۱ دارد. $\cos x$ در نقطهٔ $x=\circ$ ماکزیمم نسبی مساوی ۱ و تابع $۲^{۱+\cos x}$ در همین نقطه ماکزیمم نسبی مساوی ۴ دارد.



شکل ۲۹

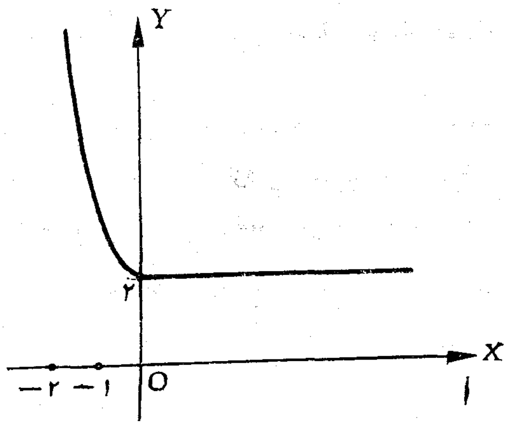
به این ترتیب دیگررسم منحنی نمایش تغییرات تابع مشکل نیست. این منحنی در شکل ۲۹ داده شده است.

مثال ۲۳: تابع $y=۲^{\frac{|x|-x}{۲}+۱}$ رابررسی ومنحنی نمایش تغییرات آنرا رسم کنید.

حل. تابع‌برای همهٔ مقادیر حقیقی x معین است. بـه ازای $x<\circ$ داریم: $y=۲^{-x+۱}$ و به ازای $x\geqslant\circ$ داریم : $y=۲$. برای $x<\circ$ تابع نزولی است، زیرا اگر $x_۱<x_۲<\circ$ باشد، داریم:

$$y_۲-y_۱=۲(۲^{-x_۲}-۲^{-x_۱})<\circ$$

برای $x\geqslant\circ$ تابع مقداری است ثابت. تابع متصل است و محور طول را قطع نمی‌کند (شکل ۳۰) .



شکل ۳۰

بیان مفهوم تابع بر اساس مطالعهٔ نسبتهای دوتایی

در جلد اول روشهای‌جبر، در فصل مجموعه‌ها، با بعضی مفهومهای مربوط به این نظریه، مثل زیرمجموعه، اجتماع و اشتراك مجموعه‌ها، نگاشت یك مجموعه بر مجموعهٔ دیگر و غیره آشنا شدیم. در اینجا می‌خواهیم با توجه بیشتر به نگاشت مجموعه‌ها و نسبتهای دو تایی، مفهوم تابع را با دید جدید آن مورد بررسی قرار دهیم.

۵. نسبتهای دوتائی

مفهوم زوج. در ریاضیات مجموعه‌ای که از دو عضو تشکیل شده باشد، مثل مجموعهٔ $\{x,y\}$ با زوج مرتب فرق دارد. اگر عضوهای x و y از مجموعهٔ $\{x,y\}$ با ترتیب معینی در نظر گرفته شود، یك زوج مرتب بدست می‌آید و به شکل (x,y) نشان داده می‌شود.

مثلا جوابهای صحیح معادلهٔ $x-y=۲$ که بین عددهای $۰<x<۶$ و $۰<y<۴$ واقع باشند، عبارتست از:

$$\begin{vmatrix} x_1=۳ \\ y_1=۱ \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2=۴ \\ y_2=۲ \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_3=۵ \\ y_3=۳ \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_4=۶ \\ y_4=۴ \end{vmatrix}$$

که اگر بخواهیم آنها را به صورت زوجهای مرتب نشان دهیم، داریم:

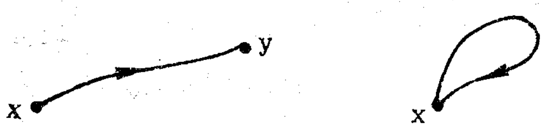
(۳,۱) ; (۴,۲) ; (۵,۳) ; (۶,۴)

روشن است که دوزوج (۴,۲) و (۲,۴) با یکدیگرفرق دارند، زیرا $x=۴$ و $y=۲$ جوابی از معادلهٔ $x-y=۲$ است، در حالیکه $x=۲$ و $y=۴$ جواب این معادله نیست، یعنی $(۲,۴)\neq(۴,۲)$.

زوجهای مرتب (x,y) و (z,u) تنها وقتی برابرند که داشته باشیم: $x=z$ و $y=u$. از اینجا معلوم می‌شود که زوجهای مرتب (x,y) و (y,x) تنها وقتی برابرند که $x=y$ باشد، که دراینصورت زوج مرتب (x,x) بدست می‌آید.

اگر (x,y) يك زوج مرتب باشد، x را مختص اول یا عضو اول یا تصویر اول یا طول، و y را مختص دوم یا عضو دوم یا تصویر دوم یا عرض می‌نامیم.

اغلب زوج مرتب (x,y) را به وسیلهٔ پیکان نشان می‌دهند؛ عضوهای x و y را نقطه‌هایی از صفحه در نظر می‌گیرند و آنها را به وسیلهٔ پیکانی که در جهت x به y باشد بهم وصل می‌کنند (۳۱).



زوج(x,y) شکل ۳۱ زوج(x,x)

حاصلضرب مستقیم مجموعه‌ها. XوY را دومجموعه درنظر می‌گیریم.

تعریف. حاصلضرب مستقیم مجموعه‌های XوY عبارتست ازمجموعه‌ای که از همهٔ زوجهای مرتب (x,y) تشکیل شده باشد، بنحوی که در آنها: $x\in X$ و $y\in Y$. حاصلضرب مستقیم را اینطور می‌نویسند:

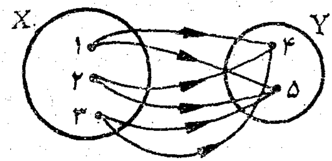
$$X\times Y=\{(x,y)|x\in X,y\in Y\}$$

مثال۱. فرض کنید $X=\{۱,۲,۳\}$ و $Y=\{۴,۵\}$، در اینصورت داریم:

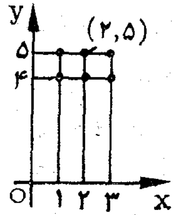
$$X\times Y=\{(۱,۴),(۱,۵),(۲,۴),(۲,۵),(۳,۴),(۳,۵)\}$$

اگر هر زوج مرتب را به وسیلهٔ پیکانی نشان دهیم، نمایش پیکانی حاصلضرب

مستقیم بدست می‌آید (شکل ۳۲).



شکل ۳۲



شکل ۳۳

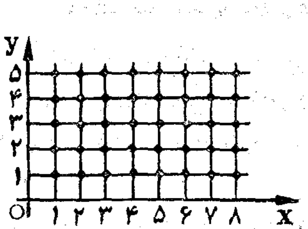
راه دیگری هم برای نشان دادن حاصلضرب مستقیم وجود دارد: عضوهای مجموعه‌های X و Y را روی دو خط راست عمود برهم روی صفحه، نشان می‌دهیم، از نقطه‌های x و y که به این ترتیب بدست می‌آید خطهایی موازی دو خط انتخابی می‌کشیم، و نقطه‌های برخورد این خطها را به عنوان زوج مرتب (x,y) در نظر می‌گیریم. این نمایش حاصلضرب مستقیم را نمایش مختصاتی گوئیم (شکل ۳۳).

اگر X و Y دو مجموعهٔ منطبق بر هم باشند، در اینصورت داریم: $X\times Y=X\times X$. این حاصلضرب را مربع دکارتی مجموعهٔ X گویند و به X^2 نشان می‌دهند.

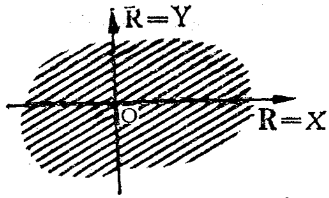
مثلا اگر داشته باشیم: $X=\{a,b,c\}$، در اینصورت:

$$X^2=\{(a,a) \text{ و } (a,b) \text{ و } (a,c) \text{ و } (b,a) \text{ و } (b,b) \text{ و } (b,c) \text{ و } (c,a) \text{ و } (c,b) \text{ و } (c,c)\}$$

مثال ۴. اگر N مجموعهٔ عددهای طبیعی باشد، N^2 مجموعهٔ زوجهای مرتبی است که جمله های اول و دوم هر یك از آنها عددی طبیعی باشد. در نمایش مختصاتی، این زوجها نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات را نشان می‌دهند که دارای مختصات صحیح‌اند و در ربع اول دستگاه محورهای مختصات قرار دارند (شکل ۳۴).

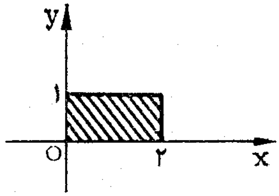


شکل ۳۴



مثال ۳. R را مجموعهٔ عددهای حقیقی می‌گیریم (محور عددها). R^2 مجموعهٔ زوجهای مرتبی است که هریك ازدوجملهٔ هر کدام ازآنها عددی حقیقی است. R^2 را صفحهٔ عددی گویند. در نمایش مختصاتی، این زوجها تمام صفحه را بطور کامل می‌پوشانند(شکل ۳۵).

شکل ۳۵



شکل ۳۶

مثال ۴. فرض کنید:

$$X=\{x|\circ\leqslant x\leqslant ۲\};$$
$$Y=\{y|\circ\leqslant y\leqslant ۱\}$$

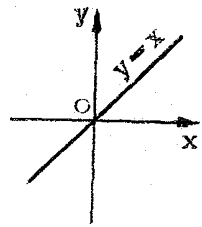
در اینصورت $X\times Y$ عبارتست از قسمتی از صفحهٔ عددی که در داخل مستطیل به ضلعهای $x=\circ$ و $x=۲$ و $y=\circ$ و $y=۱$ (شکل ۳۶) قرار گرفته است.

شکل ۳۷

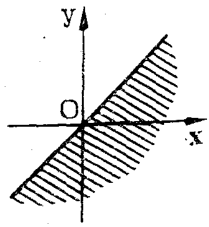
مثال ۵. یك حلقهٔ دایره‌ای داده شده است. X را مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر پاره خطی از یك شعاع می‌گیریم که داخل حلقه واقع باشد؛ Y را هم مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر محیط دایرهٔ داخلی حلقه فرض می‌کنیم. برای تعیین هر نقطهٔ واقع در داخل حلقه، کافی استیك نقطهٔ x از مجموعهٔ X و یك نقطهٔ y از مجموعهٔ Y معلوم باشد: از نقطهٔ x دایره‌ای هم مرکز با دایره‌هایی که حلقه را محدود کرده‌اند رسم می‌کنیم، از نقطهٔ y هم شعاعی عبور می‌دهیم، نقطهٔ (x,y) از حلقه (محل برخورد دایره و شعاعی‌که رسم کرده‌ایم) بدست می‌آید. به این ترتیب حلقهٔ دایره‌ای را می توان به عنوان مجموعهٔ همهٔ زوجهای (x,y) در نظر گرفت که در آن x نقطه‌ای از پاره خط X، و y نقطه‌ای از دایرهٔ Y است، یعنی حلقهٔ دایره‌ای عبارتستاز حاصلضرب مستقیم پاره‌خط Xدر دایرهٔ Y(شکل ۳۷).

نسبتهای دوتایی. **مثال۱.** از مجموعهٔ R^2 ، زیر مجموعه های زیر را جدا می‌کنیم:

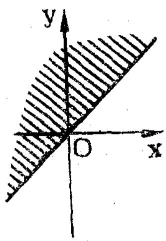
a) $A_1 \subset R^2$ ، بنحوی‌که $A_1 = \{(x,y) | x=y\}$. در نمایش مختصاتی ، این نقطه‌ها بر نیمساز اول و سوم دستگاه محورهای مختصات قرار دارند (شکل۳۸).



شکل۳۸



شکل۳۹



شکل۴۰

b) $A_2 \subset R^2$ ، بنحوی‌که $A_2 = \{(x,y) | x \in R, y \in R, x > y\}$، واین نقطه‌هایی از صفحه است که زیرخط $y = x$ قرار گرفته‌اند (شکل۳۹).

c) $A_3 \subset R^2$، بنحوی‌که $A_3 = \{(x,y) | x \in R, y \in R, x < y\}$، که‌عبارتست‌ازنقطه‌هایی ازصفحه که بالای‌خط $y = x$ قرارگرفته‌اند(شکل۴۰).

درحالیکه از R^2 زیرمجموعهٔ A_1 را ، یعنی زوجهای مرتبی‌راکه‌برای آنها $y = x$، جدا کرده‌ایم، درعین‌حال نسبت تساوی راهم درمجموعهٔ عددهای حقیقی تعریف‌کرده‌ایم: عدد اول زوج به‌عدد دوم‌آن نسبت تساوی دارد.

وقتی‌که از R^2 زیر مجموعهٔ A_2 را، یعنی زوجهای مرتبی راکه برای آنها عدد اول بزرگتر از عدد دوم است، جداکرده‌ایم، نسبت «بزرگتر» رادر مجموعهٔ عددهای حقیقی تعریف‌کرده‌ایم.

باجداکردن زیر مجموعهٔ A_3 از R^2 ، یعنی زوجهای مرتبی‌که برای آنها عدد اول کوچکتر ازعدد دوم است،نسبت «کوچکتر» را درمجموعهٔ عدد-

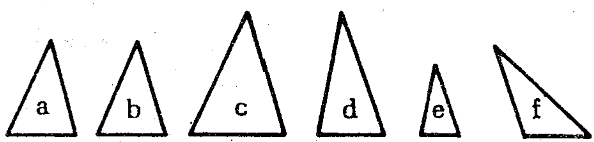
های حقیقی تعریف کرده‌ایم.

مثال۲. $M=\{a,b,c,d,e,f\}$ را مجموعه‌ای از مثلثها می‌گیریم (شکل۴۱). مثلثهای مجموعهٔ M ممکن‌است:

a) مساوی باشند یا نامساوی؛

b) متشابه باشند یاغیر متشابه؛

c) هم ارز باشند یا بامساحتهای مختلف.



شکل۴۱

همهٔ زوجهائی‌را نام می‌بریم‌که دوجملهٔ آنها مثلثهایی مساوی، متشابه‌یا هم‌ارز باشند؛ مجموعه‌هایی از زوجهای مرتب بدست می‌آید:

$$\text{a)}\quad A_1=\{(a,a)\text{،}(a,b)\text{،}(b,b)\text{،}(b,a)\text{،}(d,d)\text{،}(e,e)\text{،}(f,f)\text{،}(c,c)\};$$

$$\text{b)}\quad A_2=\{(a,a)\text{،}(a,b)\text{،}(a,c)\text{،}(b,b)\text{،}(b,a)\text{،}(b,c)\text{،}(c,a)\text{،}(c,b)\text{،}(c,c)\text{،}(d,d)\text{،}(d,e)\text{،}(e,d)\text{،}(e,e)\text{،}(f,f)\};$$

$$\text{c)}\quad A_3=\{(a,a)\text{،}(a,b)\text{،}(a,f)\text{،}(b,b)\text{،}(b,a)\text{،}(b,f)\text{،}(c,c)\text{،}(d,d)\text{،}(e,e)\text{،}(f,a)\text{،}(f,b)\text{،}(f,f)\}$$

مثلا زوج (a,b) در مجموعهٔ A_1 به این معناست‌که مثلث a با مثلث b برابراست؛ زوج (b,c) درمجموعهٔ A_2 یعنی مثلث b بامثلث c متشابه است؛

زوج (a,f) در مجموعهٔ A_3 نشان می‌دهد که مثلث a بامثلث f هم ارز است. می‌بینیم که نسبت تساوی، نسبت تشابه و نسبت هم‌ارزی بین زوج مثلثهایی از M، مجموعه‌های A_1، A_2 و A_3 را تشکیل می‌دهند که هر کدام از آنها زیرمجموعه‌ای ازمربع دکارتی مجموعهٔ M هستند.

درمثالهای ۱,۲ دیده می‌شود: هر نسبتی را که بین زوج عضوهای مجموعهٔ M وجود داشته‌باشد، می‌توان به‌وسیلهٔ مجموعه‌ای از زوجهای مرتب بیان کرد، بنحوی که در این مجموعه تنها زوجهائی باشند که نسبت مفروض در مورد آنها صادق است. برعکس، هر زیر مجموعهٔ A از مربع دکارتی M^2 (از مجموعهٔ M)، نسبتی را بین عضوهای مجموعهٔ M تعریف می کند.

تعریف. هر زیر مجموعهٔ A از مربع دکارتی M^2 (از مجموعهٔ M)، نسبت دوتایی در مجموعهٔ M نامیده می‌شود.

اگرزوج $(x,y)\in M^2$ متعلق به نسبت A باشد، می‌نویسند: xAy یا $(x,y)\in A$. و اگر زوج (x,y) متعلق به نسبت A نباشد، می‌نویسند: $(x,y)\notin A$

در مورد نسبتهایی که در ریاضیات بیشتر مورد استعمال دارد (بعد ازاین هر جا از نسبت صحبت می کنیم، منظور نسبت دوتـایی است)، از علامتهای $\parallel$، $\perp$، $\cong$، ∞، $>$، $<$، $=$ وغیره استفاده می‌شود.

مجموعهٔ جمله‌های اول زوجهای‌مرتب، حوزهٔ تعریف نسبت‌نامیده می‌شود و با علامت X نشان می‌دهند؛ مجموعهٔ جمله‌های دوم زوجهای مرتب، حوزهٔ مقادیرنسبت نامیده می‌شود وباعلامت Y نشان می‌دهند.

مثلا نسبت « x دو واحد از y بزرگتر است » در مجموعهٔ:

$M=\{1,2,3,4,5,6\}$ به صورت مجموعهٔ زوجهای مرتب:

$$A=\{(3,1)\text{و}(4,2)\text{و}(5,3)\text{و}(6,4)\}$$

مشخص می‌شود. حوزهٔ تعریف $X=\{3,4,5,6\}$ و حوزهٔ مقادیر:

$Y=\{۱,۲,۳,۴\}$ است.

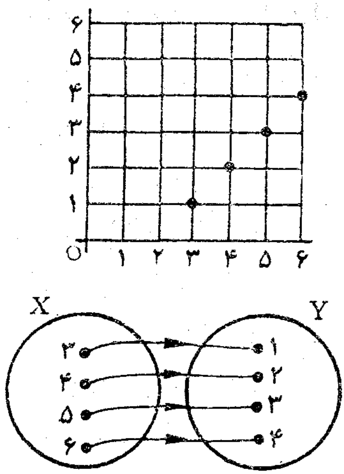
نسبت «x دو واحد از y بزرگتر است» در مجموعهٔ

$$M=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

را می‌توان با استفاده از نمایش مختصاتی (شکل۴۲ـa) و یا نمایش پیکانی (شکل ۴۲ـb) هم نشان داد.

در شکلهای ۴۳ ، ۴۴، و۴۵ نسبتهای «تساوی»، «تشابه»

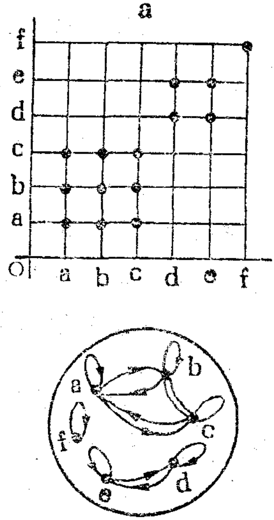
a



b

شکل۴۲

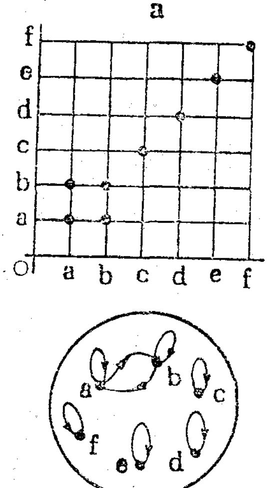
a



b

شکل۴۴

a



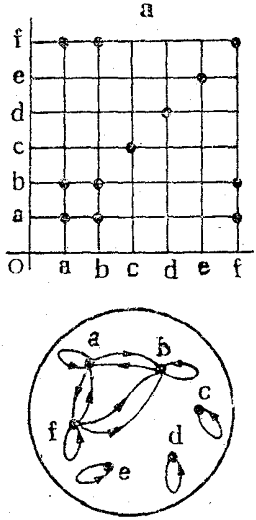
b

شکل۴۳

و « هم ارزی » در مجموعهٔ $M = \{a,b,c,d,e,f\}$ مثلثها (مثال ۲ را ببینید). بانمایش مختصاتی ونمایش پیکانی نشان داده شده‌است.

نقطه هایی که نمایندهٔ عضوهای‌یك مجموعه هستند، در دو مجموعهٔ جداگانه نشان‌داده نشده‌است، بهمین مناسبت‌پیکانها به‌صورتی که‌درشکلهای‌b-۴۳ ، b-۴۴ و b-۴۵ مشخص شده است، درآمده‌اند.

a



b

شکل۴۵

مثالهای دیگری برای نسبتهای دوتایی: «قابلیت‌تقسیم» در مجموعهٔ عدد های صحیح ؛ «تساوی»، «بزرگتر»، «کوچکتر» در مجموعه عدد های طبیعی ، مجموعهٔعددهای‌صحیح‌ومجموعهٔ عددهای گویا؛ «توازی» ، «تعامد» ، « تقاطع » در مجموعهٔ خطهای راست ؛ «تساوی»، «تشابه»، «هم ارزی» در مجموعهٔ شکلهای هندسی ؛ «هم ارزی» در مجموعهٔ معادله‌ها؛ «مادر بودن»، «پدر بودن» ، «خواهر بودن»، «برادر بودن» درمجموعهٔ آدمها وغیره .

۶.تابع

دوباره نسبت «x دو واحد بزرگتر از y است» را در مجموعهٔ:

$$M = \{ ۱,۲,۳,۴,۵,۶ \}$$

درنظر می گیریم، که درآن حوزهٔ تعریف $X = \{۳,۴,۵,۶\}$ وحوزهٔ مقادیر

$\{۱,۲,۳,۴\}=\mathbf{Y}$ است. این‌نسبت به‌وسیلهٔ مجموعهٔ زوجهای مرتب زیر نشان داده می‌شود:

$$\mathbf{A}=\{(۳,۱)و(۴,۲)و(۵,۳)و(۶,۴)\}$$

به این نکته توجه می‌کنیم که یك عدد طبیعی نمی‌تواند دو واحد بیشتر از دو عدد طبیعی مختلف باشد، بنابراین در نمایش پیکانی (شکل‌b-۴۲) از هر نقطه مجموعه تنها یك پیکان خارج شده است. این‌مطلب به معنای‌آنست که درنوشتن نسبت، به‌عنوان مجموعه‌ای از زوجهای مرتب، زوجهایی وجود ندارد که جملهٔ اول مشترك وجملهٔدوم متفاوت داشته باشند؛ درنمایش مختصاتی این نسبت،روی هرخط عمودتنها یك نقطهٔ نشان‌دار ممکن‌است وجود داشته باشد(شکل‌a-۴۲).

نسبتی که به این ترتیب باشد ، نسبت تابعی و یا بطور خلاصه تابع نامیده می‌شود.

تعریف. تابع عبارتست از مجموعه‌ای از زوجهای مرتب، بنحوی‌که در بین عضوهای‌آن نتوان دو عضو پیدا کرده که در جملهٔ اول مشترك باشند.

تابع را به‌وسیله حرفهای f، g، r، s، t، ... نشان می‌دهند .

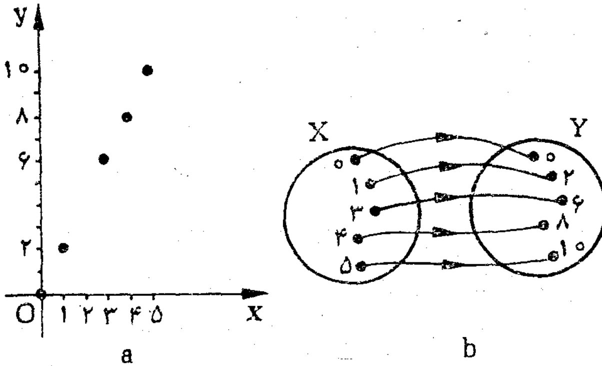
ازآنجاکه هرنسبتی را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتب نشان داد، نسبت $\mathbf{A}$ تنها وتنها وقتی‌یك تابع است‌که درشرط زیرصدق‌کند:

اگر (x,y) و $(x,u)\in A\Longrightarrow y=u$

مثال۱. نسبت $\{(۵,۱۰)$ و $(۴,۸)$ و $(۳,۶)$ و $(۱,۲)$ و $(۰,۰)\}=\mathbf{f}$

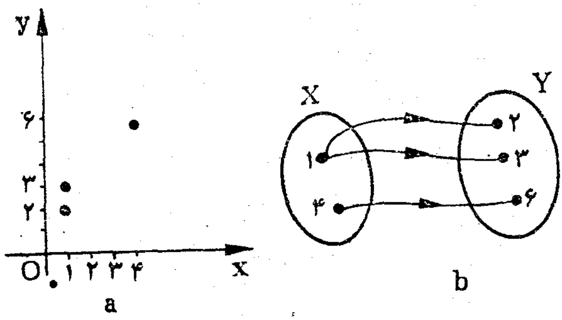
یك تابع است. حوزهٔ تعریف این تابع $\{۵,۴,۳,۱,۰\}=\mathbf{X}$ وحوزهٔ مقادیر آن $\{۱۰,۸,۶,۲,۰\}=\mathbf{Y}$ است (شکل۴۶) .

مثال۲. نسبت $\{(۴,۶)$ و $(۱,۳)$ و $(۱,۲)\}=\mathbf{A}$ تابع نیست ، زیرا



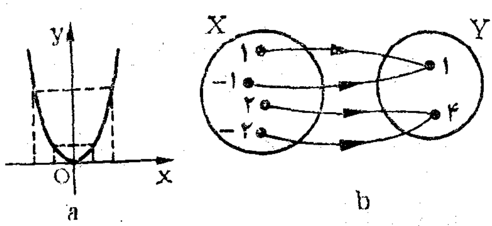
شکل۴۶

دوعضو مختلف (۱,۲) و (۱,۳) دارای جملهٔ اول مشترکند (شکل۴۷).



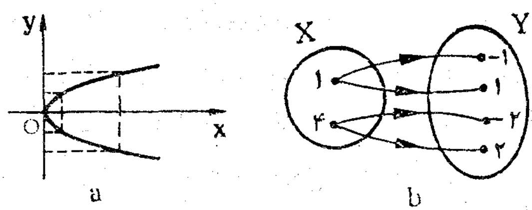
شکل۴۷

مثال۳. نسبت $A=\left\{ (x,x^2) \middle| x\in R\right\}$ یك تابع است ، زیرا اگر $x=u$، در اینصورت $x^2=u^2$ (شکل۴۸).



شکل۴۸

مثال۴. نسبت $A=\left\{(x^2,x)\,\middle|\,x\in R\right\}$ تابع نیست ، زیرا در آن زوجهای (۱,۱)،(۱-,۱)؛(۴,۲)،(۲-,۴) وغیره‌وجود دارد(شکل۴۹).



شکل۴۹

بجای کلمهٔ «تابع» ، اغلب از کلمهٔ «نگاشت» استفاده می‌شود. اگر f تابعی باحوزهٔ تعریف X وحوزهٔ مقادیرY باشد، می‌نویسند:

$$f:X\to Y \text{ یا } X\xrightarrow{f}Y$$

و می‌خوانند: تابع ازنوع X در Y.

اگر $(x,y)\in f$، دراینصورت x را آوند (آرگومان) تابع یا متغیر ، وy را مقدار تابع در x یا نگارهٔ مختص x در نگاشت f، یـا مختصی که x بوسیلهٔ f به‌آن تبدیل می‌شود، می‌نامند؛ اگرنگارهٔ y از مختص x معلوم‌باشد، x را اصل و y را مبدل هم‌گویند. برای بیان y ازعلامت $y=f(x)$ استفاده می‌کنند.

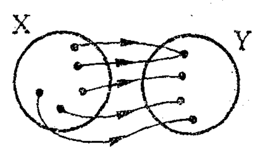
چون تابع عبارتست از مجموعهٔ زوجهای مرتب، بنابراین برای تعریف تساوی تابعها، معمولا از تعریف تساوی مجموعه‌ها استفاده می‌کنند. دو تابع f وg وقتی، وتنها وقتی، برابرند که از عضوهای مساوی تشکیل شده باشند ، به عبارت دیگر $f=g$، تنها وقتی‌که حوزهٔ تعریف‌آنها یکی‌باشد وبرای‌هرمختص دلخواه x ازحوزهٔ تعریف داشته باشیم: $f(x)=g(x)$. ازاینجا نتیجه‌می‌شود که تابع وقتی‌کاملا معین است‌که هم حوزهٔ تعریف‌آن وهم مقدار تابع به ازای

هر مقدار از حوزهٔ تعریف، معلوم باشد. مثلا تابع $f=\left\{(x,x^2)|x\in R\right\}$، به‌صورت دیگر به این شکل نوشته می‌شود.

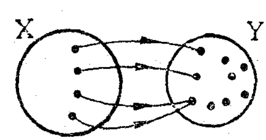
۱) حوزهٔ تعریف R.

۲) $f(x)=x^2$ برای هر $x\in R$.

وقتی که تابع به‌این‌ترتیب داده‌می‌شود، حوزهٔ مقادیر آن‌همیشه معلوم‌نیست؛ ولی‌مجموعه‌ای را نشان می‌دهد که حوزهٔ مقادیررا دربر گرفته‌است. به‌این مناسبت باید دقیقاً متوجه‌اختلاف‌این‌دومفهوم بود: «تابع f تابعی است بامقادیر برروی Y» یا «نگاشت برروی Y»؛ و «تابع f تابعی است بامقادیر بتوی Y» یا «نگاشت بتوی مجموعهٔ Y». f عبارتست ازنگاشت X برروی Y، بشرطی‌که هرعضوازمجموعهٔ Y عبارت‌باشدازمقدارتابع‌لااقل به ازای یك مقدار از آوند x (شکل ۵۰). وقتی که حوزهٔ مقادیر تابع f، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ Y باشد، در این صورت f عبارتست از نگاشت مجموعهٔ X بتوی مجموعهٔ Y (شکل ۵۱).



شکل۵۰



شکل۵۱

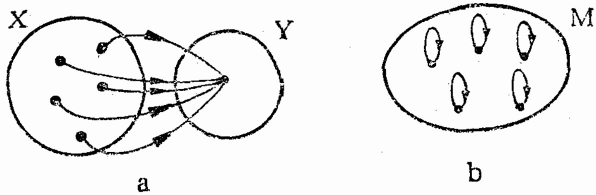
مثلا:

$$f(x)=2x, x\in R$$

عبارتست‌ازنگاشت R برروی R، تابع‌ازنوع $f:R\to R$.

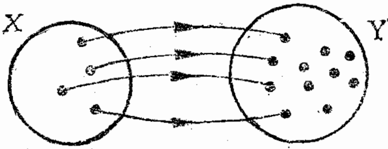
$f(x)=|x|, x\in R$، عبارتست از نگاشت مجموعهٔ عددهای حقیقی بر قدر مطلق آنها، نگاشت R برروی $R+$.

اگر مجموعهٔ مقادیر تابع تنها یك عضو داشته باشد، تابع‌را ثابت‌گویند (شکل ۵۲–a).



شکل۵۲

اگر هر عضو مجموعهٔ X ضمن نگاشت f بخودش منجر شود، نگاشت (تابع) را اتحادی گویند (شکل ۵۲ — b).



شکل ۵۳

به عنوان نمونه‌ای از تابع‌ثابت می‌توان از تابع $f(x)=2$ ، $x\in R$ و به عنوان تابع اتحادی از تابع $f(x)=x$ ،$x\in R$ نام برد.

تابع یك ارزشی

تعریف. نگاشت مجموعهٔ X در توی مجموعهٔ Y رایك‌ارزشی گویند، بشرطی که عضوهای مختلف مجموعهٔXمتناظر با عضوهای مختلف مجموعهٔ Y باشد، یعنی از $x_1\neq x_2$ نتیجه شود $f(x_1)\neq f(x_2)$ (شکل ۵۳).

مثال ۱. $y=2x-1$ ،$x\in R$ تابعی‌است یك‌ارزشی از نوع $R\to R$.

وقتی که f نگاشت یك ارزشی مجموعهٔ X بر روی مجموعهٔ Y باشد، گویند f بین مجموعه‌های X و Y تناظر یك به یك به وجود آورده است.

مثال ۲. نگاشت f مجموعهٔ X بلیطهای فروخته شده بر روی مجموعهٔ Y صندلیهایی که در سالن سینما اشغال شده، یك نگاشت یك ارزشی در یك تناظر یك به یك بین X و Y است؛ اگر Y_1 مجموعــه همهٔ صندلیهای سالن سینما باشد و همهٔ آنها اشغال نشده باشند، در اینصورتfیك نگاشت یك‌ارزشی X در توی Y_1 است.

مثال ۳. نگاشت fمجموعه Q همهٔ عددهای گویا در توی مجموعهٔ M همهٔ نقطه‌های محور l یك نگاشت یك ارزشی Q در توی M است.

مثال ۴. تصویر مرکزی محیط مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی محیط دایرهٔ محیطی آن، یك نگاشت یك ارزشی نقطه‌های محیط مثلث برروی مجموعهٔ

نقطه‌های دایرهٔ محیطی در تناظر یك به یك است.

مثال ۵. نگاشت $f : R \to R+$ با قانون $f(x)=x^۲$ یـك ارزشی نیست، زیرا عددهای مختلف x و $-x$ منجر به‌یك عدد $(-x)^۲ = x^۲$ می‌شود.

تابع معکوس. f را تابعی و مثلا $f=\left\{(x,x^۲) \middle| x\in R\right\}$ می گیریم. جای دومختص را درتابع f باهم عوض می کنیم، روشن‌است که‌دراینصورت‌به‌نسبت: $g = \left\{(x^۲,x) \middle| x\in R\right\}$ می‌رسیم که تابع نیست. نسبت g وقتی و تنها وقتی تابع است که، اگرداشته باشیم:

$$(y,x) \text{ و } (y,z)\in g$$

نتیجه بشود: $x=z$. این مطلب برای تابع f به‌این معناست که اگر داشته باشیم:

$$(x,y) \text{ و } (z,y)\in f$$

باید داشته باشیم: $x=z$، یعنی f باید تابعی یك ارزشی باشد.

تعریف. اگر تابع f یك ارزشی باشد، در اینصورت تابعی که از f با عـوض کردن جای مختصات تابع f بدست می‌آید، تابع معکوس f نامیده می‌شود و به صورت $f^{-۱}$ نشان داده می‌شود.

از آنجا که نقطه‌های با مختصات (x,y) و (y,x) در صفحهٔ محورهای مختصات نسبت به نیمساز ربعهای اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند، بنابراین منحنی نمایش تغییرات تابع $f^{-۱}$ از قرینهٔ منحنی نمایش تغییرات تـابع f نسبت به نیمساز ربعهای اول و سوم بدست می‌آید.

مثال ۱. $f(x)=x-۲$ و $x\in\{۳,۴,۵,۶\}$. در اینصورت: $Y=\{۱,۲,۳,۴\}$، یعنی:

$$f=\left\{(۳,۱)\text{و}(۴,۲)\text{و}(۵,۳)\text{و}(۶,۴)\right\} \quad \text{و}$$

$$f^{-۱}=\left\{(۱,۳)\text{و}(۲,۴)\text{و}(۳,۵)\text{و}(۴,۶)\right\}$$

مثال ۲. نسبت $f=\left\{(x,\sqrt{x})\text{و}x\in R\right\}$، یك تابع یك ارزشی بـا حوزهٔمقادیر $[\infty \text{ و } ۰)$ است، معکوس آن تابع $f^{-۱}=\left\{(\sqrt{x},x)\text{و}x\in R\right\}$

است با حوزهٔ تعریف $(\circ,\infty)$ و حوزهٔ مقادیر $[\circ,\infty)$.

برای اینکه در این تابع معکوس، حوزهٔ تعریف و حوزهٔ تغییرات مشخص باشد فرض می‌کنیم $\sqrt{x}=t$، در اینصورت $x=t^{2}$ و داریم:

$$f^{-1}=\left\{(\sqrt{x},x)\middle|x\in R+\right\}=\left\{(t,t^{2})\middle|t\in R+\right\}$$

از آنجا که انتخاب نوع حرف برای متغیرها اهمیتی ندارد، می‌توان گفت که تابع f^{-1} در مجموعهٔ عددهای حقیقی غیر منفی $R+$ معین می‌شود با مقادیری در $R+$ و $f^{-1}(x)=x^{2}$.

***

۷. بعضی نکته‌ها دربارهٔ مشتق

مشتق تابعهای معکوس مثلثاتی. فرض کنید که بخواهیم مشتق تابع $y=\operatorname{Arcsin}x$ را پیدا کنیم؛ داریم:

$$y=\operatorname{Arcsin}x\Longrightarrow x=\sin y\ \left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$$

از دوطرف رابطهٔ اخیر نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم، بدست می‌آید:

$$1=y'\cdot\cos y\Longrightarrow y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^{2}y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$\cos y$ را به اینجهت مساوی $\sqrt{1-\sin^{2}y}$ (و نه $-\sqrt{1-\sin^{2}y}$) گرفتیم که y (یعنی $\operatorname{Arcsin}x$) در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ تغییر می‌کند و در این فاصله هم $\cos y$ همیشه مثبت است.

بهمین‌ترتیب می‌توان‌مشتق سایر تابعهای معکوس‌مثلثاتی را بدست آورد:

$y=\operatorname{Arcsin}x$ $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$y=\operatorname{Arccos}x$ $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$y=\operatorname{Arctg}x$ $y'=\frac{1}{1+x^{2}}$
$y=\operatorname{Arccotg}x$ $y'=-\frac{1}{1+x^{2}}$	$y=\operatorname{Arcsec}x$ $y'=\frac{\lvert x\rvert}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}$	$y=\operatorname{Arccosec}x$ $y'=-\frac{\lvert x\rvert}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}$

مشتق و تابع ناپیوسته. مشتق تنها در نقطه‌ای از تابع معنا دارد که تابع درآن نقطه پیوسته باشد. بخصوص اگر تابعی درتمام نقطه‌های خود ناپیوسته

باشد، مشتق برای آن بی‌معنا می‌شود.

مشتق تابع یك متغیر، از نظر هندسی به معنای ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی آن تابع است و در نقطه‌ای که تابع پیوسته نیست، مماس بر منحنی و در نتیجه مشتق تابع مفهومی ندارد.

مثلا تابع $y=\sqrt{\log\cos x}$ را در نظر بگیرید. برای اینکه y حقیقی باشد، باید داشته باشیم: $\log\cos x \geqslant 0 \Longrightarrow \cos x \geqslant 1$

وچون $\cos x$ برای مقادیر حقیقی x نمی‌تواند بزرگتر از واحد باشد، تنها $\cos x = 1$ یا $x = 2k\pi$ (k عددی است صحیح) قابل قبول است. به‌این‌ترتیب تابع مفروض در تمام نقطه‌های خود ناپیوسته است و مشتق برای‌آن معنا ندارد (این تابع‌روی دستگاه محورهای مختصات نقطه‌های جدا ازهمی را روی محور طول مشخص می‌کندکه فاصلهٔ هر دو نقطهٔ مجاور آن مساوی 2π می‌باشد).

همچنین برای تابع $y=x!$ مشتق‌معنانداردویا برای‌تابع $y=E(x)$ (تابع قسمت صحیح x) برای مقادیر صحیح x مشتق بی‌معنا می‌شود.

مشتق تابعهای‌مثلثاتی. برای اینکه مشتق‌تابع $y=\sin x$ را بدست‌آوریم به متغیر x نمو Δx را می‌دهیم، در نتیجه برای y نمو Δy بدست می‌آید:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

و از آنجا:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

می‌دانیم‌که مشتق تابع y عبارتست از $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$، از طرف دیگر به شرطی که قوس بر حسب رادیان باشد[1]، داریم:

---

۱) نسبت $\frac{m}{n}$ وقتی معنا دارد که m و n بایك واحد بیان شده‌باشند. در نسبت $\frac{\sin a}{a}$، $\sin a$ با واحد شعاع دایره معین می‌شود (وقتی که می‌گوئیم مثلا $\sin\frac{\pi}{6}$ برابراست با $\frac{1}{2}$، به این معناست‌که $\sin\frac{\pi}{6}$ برابر است‌با $\frac{1}{2}$ شعاع دایره)؛ بنابراین باید a هم با واحد شعاع دایره‌بیان شود، یعنی‌با واحدرادیان.

$$\lim_{a\to 0}\frac{\sin a}{a}=1$$

و از آنجا:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\ \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\right]=\cos x$$

می‌بینیم برای تابع $y=\sin x$ داریم: $y'=\cos x$. ولی این به‌شرطی است که x با واحد رادیان‌بیان شده باشد. بنابراین‌درمشتق تابعهای مثلثاتی باید همیشه واحد قوس را رادیان درنظر گرفت تا بتوان ازرابطه‌های مشتق استفاده نمود.

مثال۱. مطلوبست مشتق $y=\sin x^{\circ}$.

حل. متغیربا واحد درجه‌بیان شده است، آنرا به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$x^{\circ}=\frac{\pi}{180}x\ (\text{رادیان})\ ;\ y=\sin\left(\frac{\pi}{180}x\right)$$

و ازآنجا:

$$y'=\frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi}{180}x\right)=\frac{\pi}{180}\cos x^{\circ}$$

مثال۲. مطلوبست مشتق $y=tg\,x^{g}$.

حل. داریم:

$$x^{g}=\frac{\pi}{200}x\ \ (\text{رادیان})$$

وبنابراین داریم:

$$y'=\frac{\pi}{200}\left[1+tg^{2}\left(\frac{\pi}{200}x\right)\right]=\frac{\pi}{200}\left(1+tg^{2}x^{g}\right)$$

تشخیص‌متغیر. مثال۳. مطلوبست مشتق تابع $y=x$، نسبت به متغیر x^{3}

حل. $x^{3}=t$ می‌گیریم، دراینصورت داریم:

$$y=(x^{3})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{t}\ \ ;$$

$$y'_{t}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^{2}}}=\frac{1}{3x^{2}}$$

مثال۴. مشتق تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ را نسبت به متغیر $Arcsin\,x$ پیدا کنید.

حل. $x=sin\,t$ $(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2})$ می‌گیریم، در اینصورت داریم:

$$\begin{cases} t=Arcsin\,x\ , \\ y=\sqrt{1-sin^2 t}=cos\,t \end{cases}$$

و از آنجا:

$$y'_t=-sin\,t$$

یعنی:

$$y'_{Arcsinx}=-sin(Arcsin\,x)=-x$$

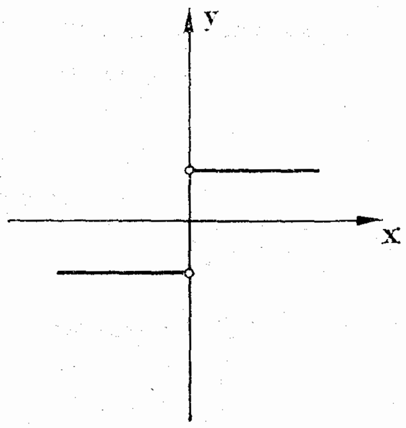
۸- حد چپ و حد راست ـ پیوستگی تابع

مثال۱. حد $y=\frac{|x|}{x}$ را وقتی که x بسمت صفر میل کند، پیدا کنید.

حل. y برای $x=0$ معنا ندارد. ازطرف دیگرمعلوم است که:

$$y=\begin{cases} -1 & (x<0) \\ +1 & (x>0) \end{cases}$$

به‌این ترتیب روشن است که اگر x ازطرف مقادیر منفی بسمت صفرمیل کند، y بسمت -1 و اگر x ازطرف‌مقادیر مثبت بسمت صفرمیل کند، y بسمت $+1$ میل می‌کند. گویند -1 حد چپ و $+1$ حد راست y است، وقتی که x بسمت صفرمیل کند. (شکل ۵۴).



شکل ۵۴

اگربطورکلی حدچپ وحد راست y، وقتی‌که x بسمت a میل‌می‌کند، متفاوت باشند، گویندکه تابع y درنقطهٔ $x=a$ ناپیوسته است.

تابع $y=f(x)$ درنقطه $x=a$ وقتی پیوسته است‌که اولا حدچپ و حد راست تابع دراین نقطه یکی باشد. ثانیاً این مقدارمساوی $f(a)$ شود.

مثال۲. حد تابع $y=\frac{x^2-x}{x^2+x}$ را، وقتی که x بسمت صفر میل کند، پیدا کنید.

حل. تابع به‌ازای $x=0$ بی‌معناست، ولی بسادگی معلوم می‌شود که‌وقتی x بسمت صفرمیل کند، حدچپ وحد راست تابع برابر -1 می‌شود، بنابراین با آنکه حد چپ وحد راست تابع در نقطهٔ $x=0$ یکی است، تابع در نقطهٔ $x=0$ ناپیوسته است (زیرا $f(0)$ معین نیست).

توضیح. اگراین تابع را به‌این‌صورت می‌گرفتیم:

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x^2+x} & (x\neq 0)\\[2ex] -1 & (x=0)\end{cases}$$

درنقطهٔ $x=0$ پیوسته می‌شد.

اگرحد چپ وحد راست $y=f(x)$ درنقطهٔ $x=a$ یکی باشد و $f(a)$ را، که نامعین است، مساوی همان مقدارفرض‌کنیم(که دراینصورت‌گویند اصل ادامه پیوستگی را پذیرفته‌ایم)، تابع درنقطهٔ $x=a$ پیوسته می‌شود.

برای تابع مثال ۱، پذیرفتن اصل ادامهٔ پیوستگی مفهومی ندارد و با هیچ شرطی درنقطهٔ $x=0$ پیوسته نمی‌شود.

تمرین

۷۲. تابع $y=f(x)$ با این شرط داده‌شده است: برای هرمقدارحقیقی x، مقدار $f(x)$ برابراست با فاصلهٔ x تا نزدیکترین عدد صحیح مثبت به‌آن. نمایش تغییرات این تابع را درمحورهای مختصات قائم رسم‌کنید.

۷۳. این معادله را، بدون استفاده از مجذورکردن دو طرف آن، حل کنید:

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3x}-\sqrt{6}}{\sqrt{2x+6}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$$

۷۴. تابع $f(x)$ برای همهٔ مقادیرحقیقی x معین وحقیقی است وضمناً درشرط زیرصدق می‌کند:

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$$

که درآن a عبارتست ازعدد دلخواهی مخالف صفر.

اولا ثابت‌کنید تابع $f(x)$ متناوب است، یعنی عددی مانند $b\neq 0$ وجود دارد بنحوی که برای همهٔ مقادیر x داشته باشیم $f(x+b)=f(x)$. ثانیاً نمونه‌ای ازتابع $f(x)$ راکه غیرازصفرباشد به‌ازای $a=1$ پیداکنید.

۷۵. ثابت‌کنید معادلهٔ

$$x^3+x^2+x=1$$

اولا بیش ازیك ریشهٔ حقیقی ندارد. ثانیاً این ریشهٔ حقیقی در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{1}{2}<x_0<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۷۶. تابع $g(x)$ را عکس تابع $f(x)$ گویند، وقتی که اولا در همان فاصله‌ای‌که $f(x)$ معین است، $g(x)$ هم معین باشد، ثانیاً برای هر مقدار x (ازفاصلهٔ معین بودن $g(x)$) داشته باشیم:

$$f(g(x))=x$$

سه تابع معکوس برای $f(x)=x^2$ پیداکنید.

۷۷. تابع معکوس تابع زیررا پیداکنید:

$$y=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$$

۷۸. تابع معکوس این تابع را بدست آورید:

$$y=\mathrm{Arc}\cos x^2$$

۷۹. تابع $f(x)$ به‌این ترتیب مشخص شده است:

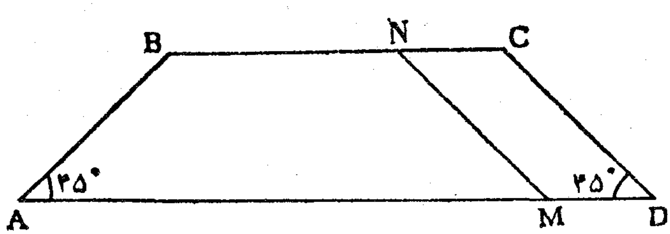
$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x<2) \\ -x+4 & (x\geq 2) \end{cases}$$

تابع معکوس $f(x)$ را پیدا کنید. ثابت کنید که معادلهٔ $f(x)=g(x)$ سه جواب حقیقی دارد. $g(x)$ را تابع معکوس $f(x)$ گرفته‌ایم.

۸۰. مقدار تابع $y=\frac{x^2+1}{x^2+2x+3}$ را به ازای $x=1385671/215$ تا ۰/۰۰۰۰۱ تقریب پیدا کنید.

۸۱. مقدار تابع $y=\frac{2x}{1+x^2}$ را به ازای $x=0/0015694$ تا ۰/۰۰۰۰۰۰۰۲ تقریب پیدا کنید.

۸۲. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ به ارتفاع مساوی واحد مفروض است. قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقه مساوی ۴ و زاویهٔ بین هر ساق با قاعدهٔ بزرگتر مساوی ۴۵ درجه است (شکل ۵۵). در این ذوزنقه خط MN را موازی CD رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم $AM=x$. مساحت قسمتی از ذوزنقه را که به‌وسیلهٔ این خط جدا می‌شود (قسمتی که طرف ساق AB قرار دارد) مساوی y می‌گیریم. روشن است که y تابعی است از x و x هم در فاصلهٔ [۰ و ۴] تغییر می‌کند. این تابع را بطریق تحلیلی بنویسید.



شکل ۵۵

در تمرینهای از ۸۳ تا ۸۵ معلوم کنید، تابع مورد نظر در چه فاصله‌ای از متغیر x معین است؟

۸۳. $y=\log[\sin(\log x)]$

۸۴. $y=\operatorname{Arccos}\sqrt{3-2x-x^2}$

۸۵. $y=(|x|-x)\sqrt{-\sin^2\pi x}$

۸۶. اگر تابع $y=f(u)$ درفاصله $0<u<1$ معین باشد، هریك از تابعهای زیر درچه فاصله‌ای معین‌اند:

$$a)\ f(x^2) \text{ و } \quad b)\ f(\sin x) \text{ و } \quad c)\ f(\ln x) \text{ و } \quad d)\ f\left(\frac{E(x)}{x}\right)$$[1]

۸۷. اگر داشته باشیم:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (|x|\leqslant 1) \\ 1 & (|x|>1) \end{cases} \quad ; \quad \varphi(x)=\begin{cases} x^2-2 & (|x|\leqslant 2) \\ -1 & (|x|>2) \end{cases}$$

تابع $f[\varphi(x)]$ را پیدا کنید.

۸۸. این نامعادله را حل کنید:

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2-4x-32)\geqslant \log_{\frac{1}{4}}(x^2-8x-20)$$

۸۹. با شرط $a\neq 1$ و $a>0$ ثابت کنید تابع:

$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ ، نسبت به متغیر x فرد است.

۹۰. ثابت کنید مجموع دوتابع زوج، تابعی‌است زوج.

۹۱. فرض می‌کنیم $f(x)$ درفاصله‌ای که نسبت به‌صفر متقارن است،معین باشد. ثابت کنید:

a) تابع $F_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ زوج است .

b) تابع $F_2(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ فرداست.

۹۲. ثابت کنید که تابع $y=\sin x^2$ متناوب نیست.

---

۱) برای $E(x)$ یا $[x]$ (بخوانید : قسمت‌صحیح x): اگر $k\leqslant x<k+1$ باشد، داریم: $E(x)=k$، مثلا:

$$E(\sqrt{2})=1 \text{ و } E\left(\frac{3}{4}\right)=0 \ ، \ E\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

۹۳. تابع $f(x)$ دارای دورهٔ تناوب $T=۲$ است و در فاصلهٔ $[۰,۲)$ با رابطهٔ $f(x)=x^۲-۱$ بیان می‌شود.

a) رابطهٔ تحلیلی تابع را درفاصلهٔ $[۲k,۲k+۲)$ بنویسید (k عددی است صحیح).

b) مطلوبست $f(۷)$ ، $f(\frac{۱۵}{۴})$ ، $f(-\sqrt{۲})$ و $f(\pi)$.

۹۴. معلوم کنید که تابع $y=(x^۲+۴x+۶)\ln(x^۲+۴x+۶)$ درچه فاصله‌ای نزولی ودرچه فاصله‌ای صعودی است.

۹۵. کوچکترین دورهٔ تناوب تـابع $f(x)=\left\{ x \right\}=x-E(x)$ را پیداکنید.

۹۶. مطلوبست محاسبهٔ $f'(۱)$ به شرطی که داشته باشیم:

$$f(x)=x+(x-۱)\text{Arc}\sin\sqrt{\frac{x}{x+۱}}$$

مشتق هریك از تابعهای زیر را بدست آورید:

۹۷. $y=\sin(\cos^۲x)\cdot\cos(\sin^۲x)$

۹۸. $y=\sin[\sin(\sin x)]$

۹۹. $y=\sin[\cos^۲(tg^۳x)]$

۱۰۰. $y=۴\sqrt[۳]{cotg^۲x}-\sqrt[۳]{cotg^۸x}$

۱۰۱. $y=\text{Arc}tg(\frac{x^۲}{a})$

۱۰۲. $y=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\text{Arc}cotg(\frac{\sqrt{۲}}{x})$

۱۰۳. $y=\sqrt{x}-\text{Arc}tg\sqrt{x}$

۰۱۰۴ $y=\mathrm{Arc}\cos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$

۰۱۰۵ $y=x\,\mathrm{Arc}\sin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\mathrm{Arc}tg\sqrt{x}-\sqrt{x}$

۰۱۰۶ $y=\mathrm{Arc}\sin(\sin x-\cos x)$

۰۱۰۷ $y=\mathrm{Arc}\cos(\cos^2 x)$

۰۱۰۸ $y=\mathrm{Arc}tg\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$

۰۱۰۹ $y=\mathrm{Arc}\sin\frac{1-x^2}{1+x^2}$

۰۱۱۰. با شرط $a>b\geqslant 0$:

$$y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathrm{Arc}tg\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,tg\frac{x}{2}\right)$$

۰۱۱۱ $y=\frac{1}{\mathrm{Arc}\cos^2(x^2)}$

۰۱۱۲ $y=\mathrm{Arc}tg x+\frac{1}{3}\mathrm{Arc}tg(x^3)$

۰۱۱۳ $y=\mathrm{Arc}\sin(\sin x^2)+\mathrm{Arc}\cos(\cos x^2)$

۰۱۱۴ $y=|x|$ ۰۱۱۵ $y=x\cdot|x|$

۰۱۱۶ $y=|\sin^3 x|$ ۰۱۱۷ $y=(x-1)^2\cdot|(x+1)^3|$

۰۱۱۸ $y=f(x^2)$ ۰۱۱۹ $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$

۰۱۲۰ $y=fff(x)$ ۰۱۲۱ $y=x\cdot f\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

۰۱۲۲. مطلوبست محاسبهٔ $f'(0)$، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$f(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000)$$

۰۱۲۳. منحنی‌نمایش تغییرات $y=x+\sqrt[3]{\sin x}$ درچه نقطه‌هائی مماس قائم دارد؟ این‌منحنی‌را رسم کنید.

مطلوبست y'_x به شرطی‌که داشته باشیم:

۱۲۴. $\begin{cases} x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}} \\ y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}} \end{cases}$

۱۲۵. $\begin{cases} x=\sin^2 t \\ y=\cos^2 t \end{cases}$

۱۲۶. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$

۱۲۷. $\begin{cases} x=\operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y=\operatorname{Arccos}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

۱۲۸. $x^2+2xy-y^2=2x$

۱۲۹. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

۱۳۰. اگر $y=\sqrt{x}$ و $x>0$ باشد، مطلوبست:

y'_x، $y'_{\sqrt{x}}$، y'_{x^2} و $y'_{\sin x}$

۱۳۱. منحنی‌های $y=\sin x$ و $y=\cos x$ تحت چه زاویه‌ای یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱۳۲. ثابت‌کنید طول قطعه مماس برمنحنی :

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

ومحدود به محورهای مختصات، مقداری است ثابت.

۱۳۳. با چه شرطی منحنی تابع $y=x^3+px+q$ بر محور Ox مماس است؟

۱۳۴. ثابت کنید که تابع $y=a\cos x+b\sin x$ (a و b مقادیری ثابت‌اند)، درمعادلهٔ $y''+y=0$ صدق می‌کند.

۱۳۵. ثابت کنید تابع $y=\sqrt{\dfrac{1}{\cos 2x}}$ درمعادلهٔ $y+y''=3y^5$

صدق می کند.

۱۳۶. ثابت کنید تابع $y=(x+\sqrt{x^2-1})^n$ درمعادلهٔ زیر صدق می کند:

$$(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0$$

۱۳۷. درمورد تابع $y=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}$ مقدار عبارت : $\frac{2y'^2-yy''}{y^3}$ را محاسبه کنید .

۱۳۸. معادله‌های قائمهائی که‌از نقطهٔ $M(2,-2)$ برمنحنی $y=\frac{x-1}{x+1}$ رسم می‌شود بنویسید.

۱۳۹. ثابت کنید بین مشتقهای اول ودوم تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ رابطه زیر برقرار است:

$$yy''-3y'^2+y^4=0$$

۱۴۰. مطلوبست کثیر الجملهٔ $f(x)$، بشرطی که داشته‌باشیم:

$$f[f'(x)]=27x^6-27x^4+6x^2+2$$

۱۴۱. خانوادهٔ منحنی‌های $y=x^n$ (n عـددی است صحیح و مخالف صفر)مفروض‌است. درنقطهٔ به‌طول a برهریك‌ازاین منحنی‌ها مماسی رسم می کنیم. ثابت کنید دنباله‌ای که از طولهای نقطه‌های برخورد این مماسها با محور Ox بدستمی‌آید،محدود و غیر یکنوا[1] است وحدی مساوی a دارد.

مقدار هریك ازعبارتهای زیر را بدست آورید:

۱۴۲. $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)\dots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$$

۱) یعنی بطورمنظم(تنهاصعودی‌یاتنهانزولی)بسمت حدخود میل‌نمی‌کند .

۱۴۳. $$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^{2}+\dots+x^{n}-n}{x-1}$$

۱۴۴. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$$

۱۴۵. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^{2}}$$

۱۴۶. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\dots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]$$

۱۴۷. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^{2}+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^{2}+\dots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^{2}\right]$$

۱۴۸. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2}+3^{2}+\dots+(2n-1)^{2}}{2^{2}+4^{2}+\dots+(2n)^{2}}$$

۱۴۹. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^{3}+2^{3}+\dots+n^{3}}{n^{3}}-\frac{n}{4}\right)$$

۱۵۰. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{3}+4^{3}+7^{3}+\dots+(3n-2)^{3}}{[1+4+7+\dots+(3n-2)]^{2}}$$

۱۵۱. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

۱۵۳. $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}$$

۱۵۳.
$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{۲۷+x}-\sqrt[۳]{۲۷-x}}{x+۲\sqrt[۳]{x^۴}}$$

۱۵۴. با فرض صحیح بودن m و n:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[m]{۱+\alpha x}-\sqrt[n]{۱+\beta x}}{x}$$

۱۵۵. با فرض صحیح بودن m و n:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[m]{۱+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{۱+\beta x}-۱}{x}$$

۱۵۶. اگر داشته باشیم:

$$P(x)=a_۱x+a_۲x^۲+a_۳x^۳+\dots+a_nx^n$$

و m عددی صحیح باشد، ثابت کنید:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[m]{۱+p(x)}-۱}{x}=\frac{a_۱}{m}$$

۱۵۷.
$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۳}{۱-\sqrt{x}}-\frac{۲}{۱-\sqrt[۳]{x}}\right)$$

۱۵۸.
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$$

۱۵۹.
$$\lim_{x\to +۰}\left\{\sqrt{\frac{۱}{x}+\sqrt{\frac{۱}{x}+\sqrt{\frac{۱}{x}}}}-\sqrt{\frac{۱}{x}-\sqrt{\frac{۱}{x}+\sqrt{\frac{۱}{x}}}}\right.$$

۱۶۰. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

۱۶۱. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

۱۶۲. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)}-x\right]$

۱۶۳. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x}$

(n عددی است صحیح).

۱۶۴. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n+(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$

(n عددی است صحیح).

۱۶۵. مطلوبست محاسبهٔ مقادیر a و b به شرطی که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$$

۱۶۶. مطلوبست محاسبهٔ مقادیر a_1، b_1 و a_2، b_2، اگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2\right)=0$$

۱۶۷. اگر m و n عددهایی صحیح باشند، مطلوبست $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

۱۶۸. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

۱۶۹. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$

۱۷۰. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x\,tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

۱۷۱. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)tg\frac{\pi x}{2}$

۱۷۲. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$

۱۷۳. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cotg(a+2x)-2cotg(a+x)+cotg\,a}{x^2}$

۱۷۴. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$

۱۷۵. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tg\,x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

۱۷۶. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

۱۷۷. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

۱۷۸. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$

۱۷۹. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

۱۸۰. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$

۱۸۱. $\lim\limits_{n\to +\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$

۱۸۲. اگر داشته باشیم:

$$x_0=1\ ;\quad x_n=\frac{1}{1+x_{n-1}}\quad (n=1,2,\dots)$$

مطلوبست $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\; x_n$.

۱۸۳. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\;[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ \cdots(1+x^{2^n})]$

(با شرط $|x|<1$)

۱۸۴. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$

۱۸۵. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\;\frac{3\,tg\,4x-12\,tg\,x}{3\sin 4x-12\sin x}$

۱۸۶. $\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\text{حد}}\;\frac{\sqrt[3]{tg\,x}-1}{2\sin^2 x-1}$

۱۸۷. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\;\frac{\mathrm{Arcsin}\,2x-2\,\mathrm{Arcsin}\,x}{x^3}$

۱۸۸. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\;\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$

۱۸۹.

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\;\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\,\mathrm{Arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\,\mathrm{Arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$$

۱۹۰. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(cotg\,x-\frac{1}{x}\right)$

۱۹۱. دنبالهٔ $\{a_n\}$ باشرطهای $a_1=0$ و $a_{n+1}=\frac{1}{2}(b+a_n^2)$ ($0\leqslant b\leqslant 1$) معین‌شده‌است. ثابت کنید که‌این‌دنباله‌متقارب‌است، یعنی‌اگر $n\to\infty$، برای a_n حدی بدست می‌آید. این حد را پیدا کنید.

۱۹۲. مطلوبست $\underset{x\to 1}{\text{حد}}\sqrt{\dfrac{x^{2m^2}-1}{x^{2n^2}-1}}$. m و n عددهایی صحیح‌اند وضمناً $mn>0$.

نمایش تغییرات هریك از تابعهای زیر را در دستگاه محورهای قائم رسم کنید:

۱۹۳. $y=x+|x-3|$

۱۹۴. $y=x|x|-4x$

۱۹۵. $y=\operatorname{Arctg}(\operatorname{tg}x)$

۱۹۶. $y=2^{\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|}$

۱۹۷. $y=|x-1|-2|x-2|-3|x-3|-4$

۱۹۸. $y=\operatorname{Arcsin}(\sin x)$

۱۹۹. $y=\dfrac{x+1}{|x-1|}$

۲۰۰. $y=\dfrac{|x+1|}{x-1}$

۲۰۱. $y=\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

۲۰۲. $y=E(x)$

۲۰۳. $y=x-E(x)$

۲۰۴. $y=\sqrt{\log\cos x}$

۲۰۵. $y=\pm x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

۲۰۶. $y=\pm x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

۲۰۷. $y=\sqrt{x^2-x^4}$

۲۰۸. $y=\sqrt[3]{x^2-x^4}$

۲۰۹. $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$

۲۱۰. $y=\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-8x+12}+\dfrac{x^2+8x+12}{x^2+7x+12}$

۲۱۱. $y=\dfrac{9x^2+25x+16}{x}+\dfrac{x}{9x^2+25x+16}$

۲۱۲. $(y-x)^2-4(x^2+4)=0$

۲۱۳. $y=\dfrac{(x-1)^3}{2(x+1)^2}$

۲۱۴. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$

۲۱۵. $y=\mathrm{Arc}\,tg\dfrac{1}{x}$ ۲۱۶. $y=\mathrm{Arc}\,cotg\dfrac{1}{x}$

۲۱۷. $y=\mathrm{Arc}\,sin(cos\,x)$

۲۱۸. $y=\mathrm{Arc}\,cos\,\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

۲۱۹. $y=x-2\,\mathrm{Arc}\,tg\,x$ ۲۲۰. $y=x\cdot\mathrm{Arc}\,cotg\,x$

۲۲۱. $y=\big||x|-1\big|$ ۲۲۲. $|y|+|x|=1$

۲۲۳. $|y|=x^2-2x-3$ ۲۲۴. $y=(1+|x|)(2-|x|)$

۲۲۵. $y=\dfrac{x^3-x^2}{2|x-1|}$ ۲۲۶. $y=\sqrt{2(x+|x-2|)}$

۲۲۷. $y=|sin\,x|+sin|x|$

۲۲۸. $(x+|x|)^2+(y+|y|)^2=16$

۲۲۹. $|y|=\dfrac{|x|}{x}-x^2$ ۲۳۰. $\dfrac{y}{|x|}+1=|xy|+y|y|$

۲۳۱. $|y|+\dfrac{1}{|y|}=|x|+\dfrac{1}{|x|}$

۲۳۲. $x+|x|=y+|y|$

۲۳۳. $y=\dfrac{1}{125}(x^2-5)^3$

۲۳۴. $y=x+\sqrt{y^2+2(x+1)y+4x}$

$$y=\sqrt{\frac{۲-۳x}{x^۲-۵x+۴}}$$ ۲۳۵.

$$y=\begin{cases} x\,\mathrm{Arctg}\frac{۱}{x} & (x\neq ۰) \\ ۰ & (x=۰) \end{cases}$$ ۲۳۶.

۲۳۷. با در دست داشتن منحنی تـابعهای $y=\varphi(x)$ و $y=F(x)$، منحنی تابع $y=F(\varphi(x))$ را چگونه می‌توان رسم کرد؟ منحنی تابعهای زیرا را با استفاده ازهمین روش رسم کنید:

a) $y=\log_۲(x^۲+۲x+۳)$ و b) $y=\log_۲(\cos x)$

۲۳۸. a) منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^۲-۴\sqrt{x^۲}+۳$ رادرسم کنید. b) معین کنید، این تابع درچه‌فاصله‌هایی صعودی ودرچه‌فاصله‌هایی نزولی است. c) جوابهای $y=۰$ رابدست‌آورید. d) درنقطهٔ $A(۰,۳)$ مماس برمنحنی به‌چه صورتی در می‌آید؟ e) ثابت کنید خطهای مماس برمنحنی‌در نقطه‌های برخوردآن بامحورطول، یك لوزی به‌وجودمی‌آورند. مختصات‌رأسهای‌این لوزی‌راپیدا کنید.

۲۳۹. a) منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^۲-۹}{\sqrt{x^۲-x-۲}}$ رادرسم کنید. b) تا توجه به‌این منحنی ثابت کنید معادلهٔ درجهٔ چهارم زیر به ازای همهٔ مقادیر $m\neq ۰$ دارای چهارریشهٔ حقیقی است:

$$x^۴-(m^۲+۱۸)x^۲+m^۲x+۲m^۲+۸۱=۰$$

۲۴۰. a) منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^۲}{۲x^۲-۴x+۴}$ و خط $۲y+۴x=۵$ را روی‌یك‌دستگاه محورهای مختصات رسم کنید. b) نقطه‌های A وB را روی منحنی و نقطهٔ C را روی خط‌طوری پیدا کنید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

۲۴۱. a) منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2+2}{x}$ را رسم کنید.

b) نقطهٔ A به عرض a برمحورعرض واقع است. ثابت کنید اگر ازنقطهٔ A بتوانیم سه مماس برمنحنی تابع رسم کنیم وطولهای نقطه‌های تماس را x_1، x_2 و x_3 بگیریم، همیشه داریم:

$$x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3=4$$

c) در حالتی که تنها دو مماس بتوان ازنقطهٔ A برمنحنی رسم کرد، ثابت کنید یکی ازنقطه‌های تماس، نقطهٔ عطف منحنی تابع است. دراینحالت عرض نقطهٔ A وطولهای نقطه‌های‌تماس راحساب کنید.

۲۴۲. a) درتابع $y=\frac{(a-1)x+8}{x^2}+\frac{b}{2(x-1)^2}$، مقادیر a و b را طوری پیدا کنید که نقطهٔ ماکزیمم یا می‌نیمم منحنی آن بر نقطهٔ $(1\ ,\ 2)$ منطبق باشد. **b)** منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{8}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$ را رسم کنید. **c)** جهت تقعر منحنی تابعی را که رسم کرده‌اید، پیدا کنید. **d)** معادلهٔ $\frac{8}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}=1$ را حل کنید.

۲۴۳. a) منحنی نمایش تغییرات هریك ازدوتابع زیررا رسم کنید:

$$y=8x^5-10x^3+5x \qquad (c)$$

$$y=3x^3 \qquad (c')$$

b) توضیح دهید چرا مرکز تقارن دو منحنی (c) و (c') بر هم منطبق‌اند؟

c) ازنقطهٔ A بطول ۱ واقع برمنحنی (c') خطی باضریب زاویهٔ m گذرانده‌ایم. m را طوری پیدا کنید که خط برمنحنی مماس باشد. **d)** درحالتی که این خط منحنی را غیراز A دردونقطهٔ دیگر B و C قطع می‌کند، ثابت کنید مکان M وسط پاره خط BC، نیم‌خطی است ازخط $2x+1=0$، مبداء این نیم‌خط رامعین کنید.

۲۴۴. بفرض $p<0$، معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم و نقطهٔ عطف منحنی تابع $y=x^3+px+q$ بگذرد. همین مسأله را درمورد معادلهٔ کلی $y=ax^3+bx^2+cx+d$ نیز حل کنید.

۲۴۵. اگر a و b و c سه عدد متمایز باشند، ثابت کنید منحنی نمایش تابع $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ همواره دارای یك ماکزیمم و یك می‌نیمم است. طولهای نقطه‌های، ماکزیمم‌ومی‌نیمم را با سه عدد a و b و c مقایسه کنید. درحالتی که $a=b\neq c$ یا $a=b=c$ باشد، چه وضعی پیش می‌آید؟

۲۴۶. با چه شرطی منحنی تابع $y=\dfrac{x^2+px+q}{x^2+p'x+q'}$ مرکز تقارنی واقع برمنحنی دارد؟

۲۴۷. a) با چه شرطی منحنی تابع $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ دارای سه نقطهٔ عطف است؟ b) ثابت کنید در حالتی که منحنی این تابع سه‌نقطهٔ عطف داشته باشد، این سه‌نقطه برروی یك خط راست قرار داردکه ضریب زاویهٔ آن مساوی نصف ضریب زاویهٔ خطی است که از نقطه‌های ماکزیمم ومی‌نیمم منحنی می گذرد.

۲۴۸. تابع $y=\dfrac{2x+1}{2x^2+1}$ داده شده است.

a) منحنی نمایش تغییرات تابع را رسم کنید ونقطه‌های برخوردآنرا با خط $y=m$ بررسی کنید. b) درحالتی که خط $y=m$ منحنی را دردونقطهٔ M و N قطع مــی‌کند، مکان نقطهٔ P وسط MN و مکان نقطهٔ Q زوج توافقی $A(0,m)$ را نسبت‌به M و N پیداکنید. c) اگر O مبداء مختصات باشد، معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های‌آن، ضریب زاویهٔ خطهای OM و ON باشد، تحقیق کنید که بین این ضریب زاویه‌ها، رابطه‌ای مستقل از m وجود دارد وهمچنین تحقیق کنید بین‌طولهای M و N، رابطه‌ای مستقل‌ازm وجود دارد وازآنجا نتیجه بگیرید که تصویرهای این دونقطه روی محورطول، زوج‌توافقی

دو نقطهٔ ثابت‌اند. این دو نقطهٔ ثابت را پیدا کنید. d) ثابت‌کنید برای اینکه سه نقطه به‌طولهای x_1، x_2وx_3 ازمنحنی بریك امتداد باشند، باید داشته‌باشیم:

$$4x_1x_2x_3+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-2(x_1+x_2+x_3)=1$$

e) ثابت‌کنید نقطه‌های ماکزیمم ومی‌نیمم تابع با نقطهٔ برخوردآن بامحورعرض بریك امتدادند. f) ثابت‌کنید سه نقطه برمنحنی تابع وجود داردکه ازهریك‌از آنها می‌توان دومماس منبطق‌برهم برمنحنی رسم‌کرد.

۲۴۹. تابع $y=\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}$ وخط $y=m$ مفروض است.

a) منحنی نمایش تغییرات‌تابع‌را رسم‌کنید وثابت‌کنیدکه‌این‌منحنی‌دارای سه نقطه‌عطف است‌که‌بریك امتدادند. b) درتعداد نقطه‌های برخورد خط‌ومنحنی بحث‌کنید. c) مکان‌هندسی نقطهٔ P وسط‌دو نقطهٔ‌تلاقی‌خط‌ومنحنی را مشخص‌کنید. d) اگر تصویر دو نقطهٔ تلاقی برمحورطول را AوB بنامیم،دونقطهٔ ثابت C و D چنان پیداکنیدکه‌زوج توافقی‌هم نسبت بهAوB باشند. e) دستگاه‌انعکاس ثابتی پیداکنیدکه درآن دونقطهٔ A و B همیشه منعکس یکدیگرباشند. f)- دایرهٔ ثابتی پیداکنیدکه بردایره‌هائی‌که ازAوB می‌گذرند عمودباشد. g)ثابت کنید دایره‌هائی‌که به‌قطر AB رسم‌شوند، تشکیل‌یك دسته دایره می‌دهند. معادلهٔ محوراصلی این دایره‌ها را بنویسید.

۲۵۰. تابع $y=\frac{x+m}{1-x^2}$ $(m>2)$ مفروض‌است: خط $y=t$ ،منحنی تابع را در دونقطهٔ AوB قطع می‌کند و C نقطه‌ای ازاین‌خط به‌طول aاست. مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ D زوج توافقی C نسبت به AوB، وقتی که خط $y=t$ به موازات خود حرکت‌می‌کند. a چقدر باشد تا این‌مکان به‌خط راست تبدیل شود؟ اگر $a\to\infty$ چه وضعی پیش می‌آید؟

۲۵۱. دربارهٔ شکلهای مختلف منحنی تابع $y=\frac{3x^2-2}{x^2+2x+a}$ بحث کنید.

۲۵۲. اگر x' و x'' طولها و y' و y'' عرضهای نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم منحنی تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{y^2-2x}$ باشد، مقادیر a و b را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2(x'+x'')+y'y''=19 \\ y'+y''+2x'x''=16 \end{cases}$$

۲۵۳. تابع $y=(a+2)x^2+2x-a+2$ مفروض است: a) ثابت کنید منحنی نمایش تغییرات تابع به ازای همهٔ مقادیر a از دو نقطهٔ ثابت عبور می‌کند. معادلهٔ خطی که از این دو نقطه می‌گذرد کدام است؟ b) مکان اکسترمم منحنی این تابع را پیدا کنید و معلوم کنید چه قسمتی از مکان متعلق به ماکزیمم و چه قسمتی متعلق به می‌نیمم است؟

۲۵۴. ثابت کنید منحنی تابع $y=\frac{4x^2-mx+m^2}{x-m}$ به ازای همهٔ مقادیر m بر دو خط ثابت مماس است.

۲۵۵. تابع $y=\frac{2x^2+m^2}{x-2m}$ که آنرا (c) می‌نامیم مفروض است.

a) ثابت کنید منحنی نمایش تغییرات تابع (c) به ازای همه مقادیر $m\neq 0$ بر دو خط ثابت مماس است. b) اگر M وسط دو نقطهٔ ماکزیمم و می‌نیمم منحنی تابع (c) باشد، مکان نقطهٔ M را وقتی که m تغییر می‌کند، پیدا کنید. $(m\neq 0)$
c) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن عرضهای نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم باشد. d) خط $y=h$ منحنی تابع (c) را، وقتی که $m=1$ باشد، در دو نقطهٔ A و B و محور عرض را در نقطهٔ C قطع می‌کند، مطلوبست محاسبهٔ طول نقطهٔ D مزدوج توافقی C نسبت به A و B و معادله مکان هندسی نقطهٔ D، وقتی که h تغییر می‌کند.

۲۵۶. a) در وجود و علامت طولهای نقطه‌های تلاقی منحنی دو تابع زیر بحث کنید و در حالتی که دو منحنی بر هم مماس‌اند، مختصات نقطه‌های مشترك را

پیدا کنید:

$$\begin{cases} y=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{5}{2} & (c) \\ y=-\frac{3}{2}x^2-3x+m & (c') \end{cases}$$

b) به‌ازای $m=-\frac{1}{2}$ منحنی نمایش تغییرات دو تابع را رسم کنید و معادلهٔ مماس برمنحنی تابع (c) را در نقطه‌ای که مرکز تقارن آنست پیدا کنید.

۲۵۷. ثابت کنید خط $y=mx-m(m-1)$ همواره بریك سهمی ثابت، که محوری موازی محورعرض دارد، مماس است.

۲۵۸. ثابت کنید که خط $m^2x-my+3=0$ به‌ازای همهٔ مقادیر m بریك سهمی ثابت، که محوری موازی محورطول دارد، مماس است.

۲۵۹. ثابت کنید خط $y=\frac{2}{m}(1-\frac{x}{m})$ به‌ازای همهٔ مقادیرحقیقی m بر یك هذلولی ثابت، که مجانبهائی موازی محورهای مختصات دارد، مماس است.

۲۶۰. دروجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ $x^3-x^2-5x+a=0$ بحث کنید ودرحالت وجود ریشهٔ مضاعف، معادله را حل کنید.

۲۶۱. دروجود علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم $mx^3-x^2-(3m-2)x-(2m+1)=0$ بحث کنیدودرحالت وجود ریشهٔ مضاعف، معادله را حل کنید.

۲۶۲. هذلولیهای $y=\frac{x+m-1}{x+1}$ و $y=\frac{mx+2}{x-1}$ مفروض‌اند.

a) درتعداد نقطه‌های برخورد این دوهذلولی، وقتی که m تغییرمی کند، بحث کنید. b) درحالتی که دومنحنی یکدیگررا در دونقطه قطع می کنند، مکان وسط دونقطهٔ تلاقی را پیدا کنید. c) تصویرهای دونقطهٔ برخورد را روی محورطول A و B می نامیم؛ دونقطهٔ ثابت C و D پیدا کنید که زوج توافقی یکدیگر نسبت به

B و A باشند. d) دستگاه انعکاس ثابتی پیدا کنید که در آن A و B همیشه منعکس یکدیگر باشند. e) دایرهٔ ثابتی پیدا کنید که بر همه دایره‌هایی که از A و B می گذرند عمود باشد.

۲۶۳. همهٔ مقادیر حقیقی a را پیدا کنید که به ازای آنها، حتی یك مقدار حقیقی x پیدا نشود که در دو نامساوی زیر همزمان صدق کند:

$$\begin{cases} ax^{2}+(a-3)x+\frac{2}{a}-2a\geqslant 0 \\ ax>a^{2}-2 \end{cases}$$

۲۶۴. مطلوبست مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات که در نامعادلهٔ $x^{y}>x^{\cos x}$ صدق کنند.

۲۶۵. مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات رامعین کنید که در نامعادلهٔ $x^{x^{2}+y^{2}}<x^{9}$ صدق کنند.

۲۶۶. مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات را پیدا کنید که در نامعادلهٔ $(\sin x)^{y}<(\sin x)^{2^{x}}$ صدق کنند.

۲۶۷. مطلوبست مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات که در نامعادلهٔ $\log_{\sin x} y>\log_{\sin x} tg\,x$ صدق کنند.

۲۶۸. درجلد اول روشهای جبر (صفحهٔ ۳۲۷ دیده شود) ثابت کردیم که برای واسطهٔ توافقی، واسطهٔ هندسی، واسطه حسابی و واسطه مربعی دو عدد مثبت a و b داریم:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^{2}+b^{2}}{2}}$$

این نامساویها را بطریق هندسی ثابت کنید.

۲۶۹. به کمك رسم منحنی، راهی برای بحث در وجود جوابهای حقیقی معادلهٔ درجهٔ چهارم زیر پیدا کنید:

$$x^4+ax^2+bx+c=0$$

۲۷۰. تابع $y=(a+1)x^2+(2a-1)x+a-1$ مفروض‌است. ثابت کنید دومنحنی نظیراین تابع به‌ازای مقادیر $a=a_1$ و $a=a_2$ متجانس‌اند ومرکزتجانس دومنحنی، نقطهٔ ثابت تابع است.

۲۷۱. تابع $y=(m+1)x^2-(6m+t)x+8(m+1)$ مفروض است. ثابت کنید که اگر t عددی ثابت و m پارامتر تابع و A و B دو نقطهٔ ثابت منحنی تابع باشد، عمودمنصف AB باتغییر t همواره بریك سهمی ثابت مماس است.

۲۷۲. روشهای مختلف حل معادلهٔ درجهٔ دوم و معادلهٔ درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم را به کمك رسم منحنی نشان دهید.

۵.

مقادیر حداکثر و حداقل

(ماکزیمم و می‌نیمم)

بررسی مقادیر ماکزیمم‌ومی‌نیمم تابع، یکی ازجالب‌ترین مباحث ریاضی است. اهمیت آن نه‌تنها بخاطر نتیجه‌های زیبائی‌است که دراینگونه‌مسأله‌ها بدست می‌آید، بلکه بیش‌ازهمه ناشی ازکاربرد فراوان‌آن درصنعت وزندگی روزمره است.

آنچه‌که دربرنامه‌های‌درسی‌دراین‌باره‌صحبت‌می‌شود، مربوط به‌ماکزیمم ومی‌نیمم نسبی است، درحالی‌که درعمل بیشترماکزیمم ومی‌نیمم مطلق مورد نیازاست. ازاین‌گذشته تنوع مسأله‌هایی که‌در دورهٔ دبیرستان موردبررسی قرارمی‌گیرد، بسیارمحدود وناچیزاست وگاهی از حدودی‌که برای رسم منحنی نمایش تغییرات تابعهای مقدماتی لازم است، تجاوزنمی‌کند.

بهمین‌مناسبت‌بحث کوتاهی دراین‌باره‌ضروری به‌نظرمی‌رسد، منتهی‌برای‌اینکه بحث به‌درازا نکشد، بسیاری ازنکته‌های‌مربوط به‌این‌بخش راضمن‌تمرین‌ها آورده‌ایم‌وبنابراین بایدگفت که‌بخصوص دراین بخش درس وتمرین رویهم‌جوابگوی نیازدانش‌آموزان‌است.

۱- ماکزیمم ومی‌نیمم نسبی وماکزیمم ومی‌نیمم مطلق

تعریف. گویند تابع $y=f(x)$ به‌ازای $x=a$ ماکزیمم نسبی است، بشرطی‌که برای مقادیر کوچك ε داشته باشیم:

$$f(a+\varepsilon)<f(a) \; ; \; f(a-\varepsilon)<f(a)$$

و یا به زبان ساده‌تر، در منحنی نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$، عرض نقطه‌ای‌که به ازای $x=a$ بدست می‌آید، بزرگتر ازعرضهای نقطه‌های‌مجاور خود باشد.

همچنین $y=f(x)$ به‌ازای $x=b$ می‌نیمم نسبی است، وقتی که برای مقادیربسیار کوچك ε داشته باشیم:

$$f(b+\varepsilon)>f(b) \; ; \; f(b-\varepsilon)>f(b)$$

یعنی عرض نقطه‌ای‌که‌به‌ازای $x=b$ بدست‌می‌آید، ازعرضهای‌نقطه‌های مجاور خودکوچکتر باشد.

وقتی‌که می‌گوئیم تابع $y=f(x)$ درفاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ به ازای $x=\alpha$ ماکزیمم مطلق (یا می‌نیمم مطلق) است، به‌این معناست که‌به‌ازای$x=\alpha$حداکثر (یا حداقل) مقداربرای y بدست می‌آید.

مثلا تابع $y=x^{3}-3x$ به‌ازای $x=-1$ ماکزیمم نسبی وبه ازای $x=1$ می‌نیمم نسبی است. در حالیکه تابع $y=x^{2}-2x$ به ازای $x=1$

می‌نیمم مطلق است ($y=-1$) یعنی درفاصله ($+\infty$ و $-\infty$) هر مقدار دیگری برای x انتخاب کنیم، مقدار y بزرگتراز -1 بدست می‌آید.

دراین‌بخش‌درباره ماکزیمم ومی‌نیمم مطلق بحث می‌کنیم وچون دراکثر موارد منظورمسأله روشن استاز ذکر کلمهٔ «مطلق»، بجز درمواردی‌که ابهامی ایجادکند، صرفنظر می‌کنیم.

۲. استدلال آزاد

دربسیاری ازمساله‌ها، می‌توان‌بدون استفاده ازیك روش خاص، ماکزیمم ویا می‌نیمم مطلق را با استدلال‌آزاد بدست آورد، اگرچه در اکثراین موارد استفادهٔ از مشتق ویا قضایای مربوط به ماکزیمم ومی‌نیمم مطلق هم مسأله‌را به جواب می‌رساند.

چند نمونه ذکر کنیم.

مثال۱. روی پاره‌خط $AB=a$، نقطهٔ M راچنان پیداکنید که‌حاصل‌ضرب $AM\times MB$ حداکثرباشد.

حل. $AM=x$ فرض می‌کنیم، $MB=a-x$ خواهد شد و داریم:

$$AM\times MB=x(a-x)=ax-x^2=\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$$

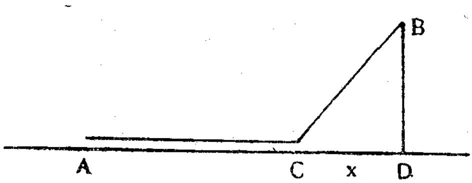
a مقداری است ثابت وبنابراین $\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ وقتی ماکـزیمم است که $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ مساوی صفرباشد:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0\Longrightarrow x-\frac{a}{2}=0\Longrightarrow x=\frac{a}{2}$$

یعنی برای اینکه $AM\times MB$ حداکثرمقدارخود باشد، باید نقطهٔ M دروسط پاره خط AB قرارگیرد.

مثال۲. دهستان B در ۲۰ کیلومتری راه‌آهن (که بطورمستقیم ادامه‌دارد) (شکل۴) قراردارد. ایستگاه فرعی C را درچه نقطه‌ای ازمسیرراه‌آهن بسازیم

تا مسافرت از A تا B (از A تا C به بوسیلهٔ قطار واز C تا B بـه وسیلهٔ جادهٔ شوسه) در کمترین وقت ممکن‌انجام‌شود؟ سرعت‌حرکت قطار ۰/۸ و سرعت در جادهٔ شوسه ۰/۲ کیلومتر در دقیقه است[1] .



شکل ۵۶

حل. اگر D پای عمودی باشدکه از B بر مسیر فرود می‌آید، فاصلهٔ AD را a و CD را x می‌گیریم ، در اینصورت داریم:

$$AC=a-x\ ;\ CB=\sqrt{x^{2}+400}$$

زمان لازم برای رسیدن از A به B چنین می‌شود (برحسب دقیقه) :

$$t=\frac{a-x}{0/8}+\frac{\sqrt{x^{2}+400}}{0/2} \qquad (1)$$

باید می‌نیمم t را بدست آوریم ، رابطهٔ (۱) را می‌توان چنین نوشت :

$$0/8t-a=-x+4\sqrt{x^{2}+400}$$

اگر $0/8t-a=k$ فرض و معادله را گویا کنیم ، به معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$15x^{2}-2kx+6400-k^{2}=0$$

و از آنجا:

$$x=\frac{k\pm\sqrt{16k^{2}-96000}}{15}$$

وقتی t می‌نیمم‌باشد، $k=0/8m-a$ نیزمی‌نیمم است و برعکس[2] ، ولی برای اینکه مقدار x حقیقی باشد، باید داشته باشیم:

---

۱) این مسأله از کتاب «سرگرمیهای جبر» برداشته شده است.

۲) باید در نظر داشت که $k>0$ است زیرا دادیم:

$$0/8t=a-x+4\sqrt{x^{2}+400}>a-x+x=a$$

$$۱۶k^۲-۹۶۰۰۰\geqslant ۰ \Longrightarrow k\geqslant ۲۰\sqrt{۱۵}$$

وبنابراین $k=۲۰\sqrt{۱۵}$ می‌نیمم مقدار k است و به‌ازای این مقدار k داریم:

$$x=\frac{k\pm ۰}{۱۵}=\frac{۲۰\sqrt{۱۵}}{۱۵}\# ۵/۱۶$$

یعنی باید ایستگاه فرعی تقریباً در ۵ کیلومتری نقطهٔ D ساخته شود وهمانطور که دیده می‌شود، جواب به $a=AD$ بستگی ندارد.

ولی این جواب وقتی مفهوم دارد که $x<a$ باشد، زیرا ضمن تشکیل معادلهٔ مقدار $x-a$ را مثبت فرض کردیم.

البته اگر $a\leqslant ۵$ باشد ، دیگر ساختن ایستگاه فرعی لازم نیست و باید جادهٔ شوسه را مستقیماً به ایستگاه اصلی کشید.

مثال ۳. به ازای چه مقادیری از x و y عبارت زیر حداقل مقدار ممکن است:

$$۵x^۲+۹y^۲-۱۲xy-۶x+۱۴$$

حل. روش اول) عبارت مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$۵x^۲+۹y^۲-۱۲xy-۶x+۱۴=$$
$$=(x^۲-۶x+۹)+(۴x^۲+۹y^۲-۱۲xy)+۵=$$
$$=(x-۳)^۲+(۲x-۳y)^۳+۵$$

و واضح است که حداقل مقدار برای عبارت مفروض وقتی بدست می‌آید که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x-۳=۰ \\ ۲x-۳y=۰ \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=۳ \\ y=۲ \end{array} \right.$$

که در اینصورت مقدار عبارت برابر با ۵ خواهد بود.

روش دوم) عبارت را برابر a فرض می‌کنیم،داریم:

$$۵x^۲-۶(۲y+۱)x+(۹y^۲+۱۴-a)=۰$$

و از آنجا :

$$x=\frac{۳(۲y+۱)\pm\sqrt{-۹y^۲+۳۶y+۵a-۶۱}}{۵}$$

برای اینکه مقدار x حقیقی باشد، باید عبارت زیر رادیکال مثبت و یا صفر شود. یعنی داشته باشیم:

$$-۹y^۲+۳۶y+۵a-۶۱\geqslant ۰$$

یعنی: $$a\geqslant \frac{۹y^۲-۳۶y+۶۱}{۵}=\frac{(۳y-۶)^۲+۲۵}{۵}$$

و ما به حداقل a احتیاج داریم:

$$a=\frac{۹}{۵}(y-۲)^۲+۵$$

وحداقل این مقدار هم به ازای $y=۲$ بدست می‌آید که در اینصورت $a=۵$ و $x=۳$ خواهد شد.

یعنی عبارت مفروض به ازای ($y=۲$ و $x=۳$) برابر است با حداقل مقدار خود یعنی ۵.

مثال ۴. روی خط $x'x$، n نقطهٔ A، B، C، ...، L را به فاصله‌های متوالی a از یکدیگر جدا می‌کنیم. نقطه‌ای مانند M روی $x'x$ طوری پیدا کنید که حاصلجمع زیر می‌نیمم باشد:

$$y=\overline{MA}^۲+۲\overline{MB}^۲+۳\overline{MC}^۲+\cdots+n\overline{ML}^۲$$

حل. خط $x'x$ را محوری در نظر می‌گیریم به مبداء A، بنابراین طولهای نقاط B، C، ...، L بترتیب a، ۲a، ...، $(n-۱)a$ می‌شود. اگر نقطهٔ مجهول M را به طول x فرض کنیم، داریم:

$$y=x^۲+۲(a-x)^۲+۳(۲a-x)^۲+\cdots+n[(n-۱)a-x]^۲$$

که به‌سادگی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$y=[۱+۲+۳+\cdots+(n-۱)]x^۲-۲a[۱\times۲+$$
$$+۲\times۳+\cdots+(n-۱)n]x+$$
$$+a^۲[۲\times۱^۲+۳\times۲^۲+۴\times۳^۲+\cdots+n(n-۱)^۲]$$

از طرف دیگر داریم (به بخش مجموعها از جلد اول مراجعه شود):

$$۱+۲+۳+\cdots+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\dots+(n-۱)n=\frac{n(n+۱)(n-۱)}{۳}$$

$$۲\times۱^۲+۳\times۲^۲+۴\times۳^۲+\dots+n(n-۱)^۲=$$
$$=\frac{n(n+۱)(n-۱)(۳n-۲)}{۱۲}$$

و بنابراین باید می‌نیمم عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$۱۲y=۶n(n+۱)x^۲-۸an(n+۱)(n-۱)x+$$
$$+a^۲n(n+۱)(n-۱)(۳n-۲)$$

مقدار ثابت این عبارت در می‌نیمم آن تأثیری ندارد ، بنابراین باید مـی‌نیمم عبارت زیر را بدست آورد:

$$۶n(n+۱)x^۲-۸an(n+۱)(n-۱)x=$$
$$=۶n(n+۱)\left[x^۲-\frac{۴}{۳}a(n-۱)x\right]=$$
$$=۶n(n+۱)\left[(x-\frac{۲(n-۱)}{۳}a)^۲-\frac{۴(n-۱)^۲a^۲}{۹}\right]$$

ومی‌نیمم این‌عبارت هم به‌ازای $x=\frac{۲}{۳}(n-۱)a$ خواهد بود. یعنی‌نقطهٔ M

باید به فاصلهٔ $\frac{۲}{۳}(n-۱)a$ از A ودرجهت نقاط B،C،... واقع باشد.

مثال۵. اگر AوBوC زاویه‌های یك مثلث باشند، حداکثرعبارت

$sin\frac{A}{۲}sin\frac{B}{۲}sin\frac{C}{۲}$ چقدراست؟

حل. داریم:

$$sin\frac{B}{۲}sin\frac{C}{۲}=\frac{۱}{۲}(cos\frac{B-C}{۲}-cos\frac{B+C}{۲})=$$
$$=\frac{۱}{۲}(cos\frac{B-C}{۲}-sin\frac{A}{۲})$$

اگر بجای $cos\frac{B-C}{۲}$ حداکثر آن یعنی ۱ را قراردهیم (که تنها در

حالت $B=C$ پیش می‌آید)، می‌توان نوشت:

$$\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} < \frac{۱}{۲}(۱-\sin\frac{A}{۲})$$

دوطرف نامساوی اخیررا در $\sin\frac{A}{۲}$ ضرب می‌کنیم (چون A زاویه‌ای

ازمثلث‌است، $\sin\frac{A}{۲}>۰$ است)، می‌شود:

$$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} < \frac{۱}{۲}\sin\frac{A}{۲}(۱-\sin\frac{A}{۲})$$

ازطرف دیگرمی‌توان نوشت:

$$\sin\frac{A}{۲}(۱-\sin\frac{A}{۲}) = \frac{۱}{۴} - (\frac{۱}{۲}-\sin\frac{A}{۲})^۲$$

وبنابراین حداکثر عبارت $\sin\frac{A}{۲}(۱-\sin\frac{A}{۲})$ برابر $\frac{۱}{۴}$ است و از

آنجا:
$$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} \leqslant \frac{۱}{۸}$$

یعنی حداکثرعبارت $\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$ برابر است با $\frac{۱}{۸}$ و آنهم وقتی

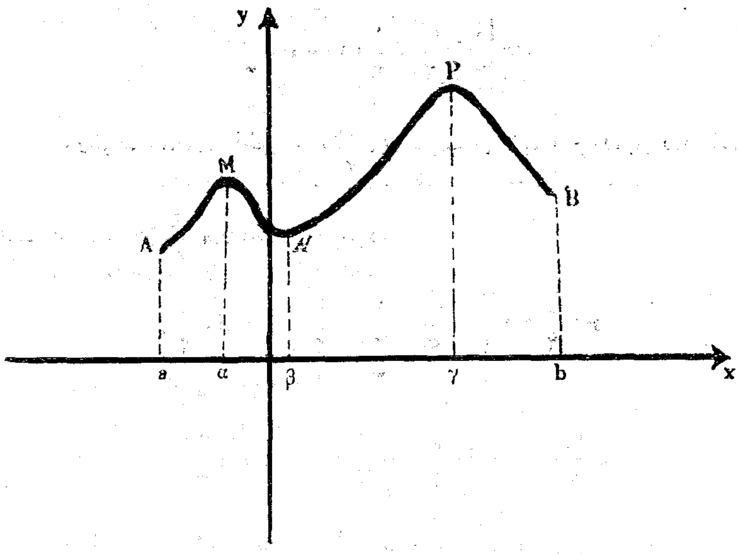
است‌که $A=B=C=\frac{\pi}{۳}$ یعنی مثلث مفروض متساوی‌الاضلاع باشد.

۳. محاسبهٔ ماکزیمم ومی‌نیمم مطلق با استفاده از مشتق

وقتی‌که تابع‌یك متغیرهٔ $y=f(x)$ درتمام نقطه‌های فاصلهٔ $[a,b]$ متصل و دارای مشتق باشد، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع به‌ازای یکی از طولهای ماکزیمم و می‌نیمم نسبی، یا یکی‌ازدوکرانهٔ متغیر (a و b) بدست می‌آید.

فرض‌کنید منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ درفاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ به‌صورت شکل ۵۷ باشد:

مشتق این تابع درفاصلهٔ $[a,b]$ ،درسه‌نقطهٔبه‌طولهای α و β و γ تغییر



شکل۵۷

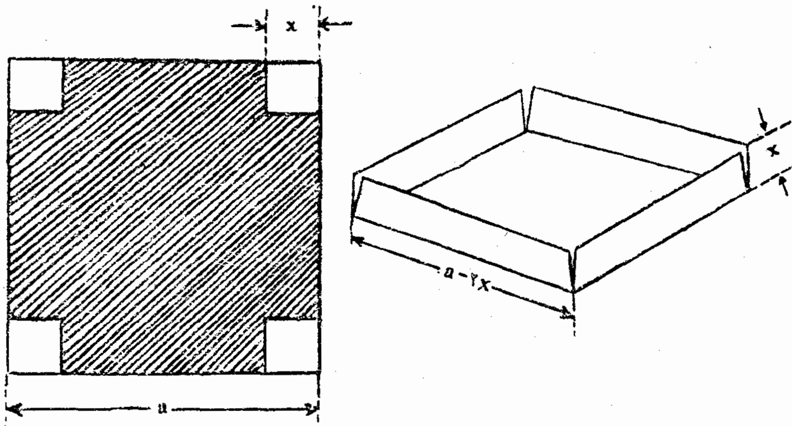
علامت‌می‌دهدو همانطور که روی‌شکل دیده می‌شود، ماکزیمم مطلق تابع به‌ازای $x=\gamma$ (یکی ازجوابهای مشتق) ومی‌نیمم مطلق تابع به‌ازای $x=a$ (یکی از کرانه‌های متغیر) بدست می‌آید ($P\gamma$ حداکثر و Aa حداقل مقدار تابع در فاصلهٔ $[a,b]$ است).

بنابراین برای پیدا کردن ماکزیمم ومی‌نیمم مطلق در تابع یك متغیرهٔ متصل، طولهای‌ماکزیمم ومی‌نیمم نسبی وکرانه‌های متغیر را به جای x درتابع قرار می‌دهیم، حداکثری که بدست آید مربوط به‌ماکزیمم مطلق و حداقلی که بدست‌آید مربوط به‌می‌نیمم مطلق است.

مثال۱. می‌خواهیم ازمربع به‌ضلع a قوطی مکعب مستطیل روبازی بسازیم که ارتفاع آن x باشد(شکل۵۸)، x را چقدر بگیریم تا حجم مکعب مستطیل ماکزیمم شود[1]؟

---

۱) این مسأله ازکتاب «ریاضیات ـ محتوی، روش واهمیت آن» برداشته شده است.



شکل۵۸

حل. حداقل x مساوی صفر وحداکثر آن مساوی $\frac{a}{۲}$ است، یعنی x در فاصلهٔ $\frac{a}{۲}>x>۰$ تغییر می‌کند. اگر حجم مکعب مستطیل‌را y فرض کنیم، داریم:

$$y=x(a-۲x)^۲$$

که مشتق آن نسبت به x چنین است:

$$y'=(a-۲x)^۲-۴x(a-۲x)=(a-۲x)(a-۶x) \quad ;$$

$$y'=۰ \Longrightarrow x=\frac{a}{۲}\,,\,\frac{a}{۶}$$

به‌ازای $x=۰$ و $x=\frac{a}{۲}$ (دوکرانهٔ متغیر) مقدار حجم (یعنی y) مساوی صفر می‌شود، که مربوط به‌حداقل حجم‌است. بنابراین حداکثر حجم به‌ازای $x=\frac{a}{۶}$ بدست می‌آید.

حجم ماکزیمم برابراست با: $\frac{۲a^۳}{۲۷}$

مثال۲. از بین استوانه‌های دوار به سطح کل S، حجم کدامیك ماکزیمم است؟

حل. اگر شعاع قاعدهٔ استوانه را x فرض کنیم، سطح جانبی استوانه مساوی $S-2\pi x^2$ خواهد شد، برای اینکه سطح جانبی منفی نباشد باید داشته باشیم:

$$S-2\pi x^2\geqslant 0 \Longrightarrow x\leqslant\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$$

و بنابراین حدود تغییرات x چنین است: $0\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$

با این شرط، ارتفاع استوانه از تقسیم سطح جانبی بر محیط قاعده بدست می‌آید:

$$h=\frac{S-2\pi x^2}{2\pi x}$$

و v، حجم استوانه چنین می‌شود:

$$v=\pi x^2\times\frac{S-2\pi x^2}{2\pi x}=\frac{1}{2}(Sx-2\pi x^3)$$

مقدار v به ازای $x=0$ و $x=\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ برابر صفر می‌شود، بنابراین ماکزیمم حجم به‌ازای یکی از جوابهای مشتق بدست می‌آید:

$$v'=\frac{1}{2}(S-6\pi x^2)\,;$$

$$v'=0 \Longrightarrow x^2=\frac{S}{6\pi}\Longrightarrow x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

اگر این مقدار x را در رابطهٔ h قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$h=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

وبنابراین. حجم ماکزیمم برای استوانه‌ای است که در آن قطر قاعده مساوی ارتفاع استوانه‌باشد، یا بعبارت دیگر ازمقطع محوری‌آن یك مربع بدست‌آید.

مثال۳. می‌خواهیم ظرف مکعب مستطیل شکلی بسازیم بنحوی که نسبت طول به عرض قاعدهٔ آن $\frac{۱}{۲}$ وحجم‌آن مساوی V باشد، اگر قیمت مصالحی‌که برای هرواحد مربع قاعدهٔ‌آن بکار می‌رود ثلث قیمتی باشد‌که برای هرواحد مربع ازبقیهٔ‌ظرف مصرف می‌شود. ارتفاع ظرف را بچه اندازه بگیریم، تابرای ساختن ظرف حداقل قیمت لازم باشد.

حل. عرض قاعده را x فرض می‌کنیم، طول قاعده مساوی $۲x$وارتفاع آن مساوی $y=\frac{V}{۲x^۲}$ خواهد شد. اگر قیمت هر واحد مربع را برای قاعده، a فرض می‌کنیم، مخارج قاعدهٔ ظرف $۲ax^۲$ و مخارج سطحهای جانبی $۶xy\times۳a=۱۸axy$ ومخارج قاعدهٔ بالا $۲x^۲\times۳a=۶ax^۲$ می‌شود و بنابراین مخارج ساختن تمام ظرف چنین است:

$$P=۲ax^۲+۱۸axy+۶ax^۲=۲a(۴x^۲+۹xy)$$

که اگربجای y مقدارش $\frac{V}{۲x^۲}$ را قرار می‌دهیم، پس از ساده‌کردن می‌شود:

$$P=a\times\frac{۸x^۳+۹V}{x}$$

وازآنجا :

$$P'=a\times\frac{۱۶x^۳-۹V}{x^۲}\ ;$$

$$P'=۰\Longrightarrow x=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{\frac{۹V}{۲}}$$

وسپس مقدار y بدست می‌آید:

$$y=\frac{V}{2x^2}=\frac{V}{\sqrt[3]{\frac{81V}{4}}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{4V}{3}}$$

به‌این ترتیب اگر V معلوم باشد، ابعاد مکعب مستطیل معین می‌شود، ولی بهتر است که نسبت $\frac{y}{x}$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{y}{x}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4V}{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9V}{2}}}=\frac{4}{9}$$

یعنی برای حداقل مخارج، باید طول وعرض وارتفاع مکعب مستطیل را بر نسبت عددهای ۲و۱ و $\frac{4}{9}$ گرفت.

۴. ماکزیمم یك حاصلضرب

دوقضیهٔ زیر برای پیدا کردن ماکزیمم بعضی ازحاصلضربها کمك می کند.

قضیهٔ ۱. اگر مجموع چند متغیر مثبت مقداری ثابت باشد، حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است‌که این متغیرها با هم برابر باشند.

اثبات. فرض کنیم n متغیر مثبت x ، y ، z ، ... ، t، مجموع ثابتی داشته باشند:

$$x+y+z+\cdots+t=na$$

حاصلضرب این متغیرها را درنظر می گیریم:

$$P=x\cdot y\cdot z\cdots t$$

چون مجموع را na گرفته‌ایم، وقتی‌که این متغیرها برابر نباشد، لااقل یکی ازآنها از a بزرگتر ویکی دیگر از a کوچکتر است. اگر $x>a$ و $y<a$

باشد وفرض کنیم $x=a+\alpha$. حاصلضرب:

$$P_1=a\cdot(y+\alpha)\cdot z\cdots t$$

همان مجموع na را دارد (زیرا از x به اندازهٔ α کم کردیم وهمان مقدار را به y افزودیم). دراینصورت داریم :

$$P_1-P=z\dots t[a(y+\alpha)-(a+\alpha)y]$$

ویا:

$$P_1-P=z\dots t[(a-y)\alpha]$$

مقدار داخل کروشه مثبت‌است، زیرافرض کردیم $a>y$ باشد، بنابراین‌داریم:

$$P_1-P>0 \Longrightarrow P_1>P$$

به‌این ترتیب اگریکی از متغیرها مساوی a شود، حاصلضرب بزرگ می‌شود واگراین‌استدلال را تکرارکنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم که‌وقتی همهٔعامها برابر باشند، حاصلضرب حداکثر خواهد بود.

مثال۱. ازبین مثلثهای بامحیط ثابت $2p$، سطح کدامیك ماکزیمم است؟

حل. رابطهٔ مساحت مثلث را می‌نویسیم (a وb وc ضلعها و S مساحت مثلث است):

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

S وقتی ماکزیمم است که $\frac{S^2}{p}$ ماکزیمم باشد و برعکس:

$$\frac{S^2}{p}=(p-a)(p-b)(p-c)$$

متغیرهای $p-a$, $p-b$ و $p-c$ مثبت وبه مجموع ثابت‌اند، زیرا:

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)=3p-(a+b+c)=p$$

وبنابراین حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که این متغیرها برابر باشند:

$$p-a=p-b=p-c \Longrightarrow a=b=c$$

یعنی سطح ماکزیمم متعلق به مثلث متساوی‌الاضلاع است.

مثال۲. اگر α و β و γ سه زاویهٔ حاده و مثبت به مجموع $\frac{\pi}{2}$ باشند،

ماکزیمم عبارت $y=tg\alpha tg\beta tg\gamma$ را بدست‌آورید.

حل. میدانیم که اگر $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{۲}$ باشد، داریم:

$$tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\alpha tg\gamma=۱ \qquad (۱)$$

ازطرف دیگر داریم:

$$y^{۲}=tg^{۲}\alpha tg^{۲}\beta tg^{۲}\gamma=(tg\alpha tg\beta)(tg\beta tg\gamma)(tg\alpha tg\gamma)$$

و حاصلضرب سه متغیر مثبت (که مجموع ثابتی دارند)،وقتی ماکزیمم است که با هم برابر باشند:

$$tg\alpha tg\beta=tg\beta tg\gamma=tg\alpha tg\gamma$$

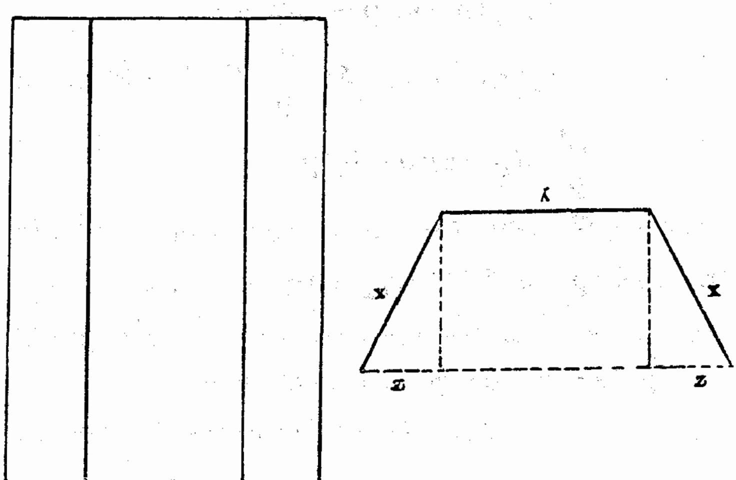
واز آنجا:

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{۶}$$

و مقدار ماکزیمم:

$$y=\left(tg\frac{\pi}{۶}\right)^{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۹}$$

مثال۳. می‌خواهیم ورقهٔ فلزی مستطیل شکلی‌را بهشکل ناودانی‌درآوریم که مقطع آن‌ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین باشد(شکل۵۹). عرض باریکه‌های دوطرف



شکل ۵۹

را چقدر بگیریم و آنها را تحت چه زاویه‌ای خم کنیم، تا مقطع ناودان حداکثر مساحت را داشته باشد[1]؟

حل. عرض ورقهٔ فلزی را a می‌گیریم، اگرمجهولات راطبق شکل۵۹ درنظر بگیریم، داریم:

$$۲x+y=a$$

وحالا S سطح ذوزنقهٔ مقطع راحساب می‌کنیم:

$$S=(y+z)\sqrt{x^۲-z^۲}$$

ویا:

$$۳S^۲=(y+z)(y+z)(x+z)(۳x-۳z)$$

چهار متغیر سمت‌راست‌تساوی، همه مثبت‌اند (زیرا $x>z$ است) وضمناً‌مجموع این متغیرها مقداری است ثابت:

$$(y+z)+(y+z)+(x+z)+(۳x-۳z)=۲(۲x+y)=۲a$$

وبنابراین حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است‌که باهم برابر باشند:

$$y+z=x+z=۳x-۳z$$

وازآنجا بدست می‌آید:

$$x=y=\frac{a}{۳};\quad z=\frac{x}{۲}=\frac{a}{۶}$$

وبنابراین باتوجه به رابطهٔ $z=\frac{x}{۲}$، زاویهٔ روبروی به z مساوی ۳۰ درجه می‌شود.

به‌این ترتیب باید عرض ورقهٔ فلزی را به سه قسمت مساوی تقسیم کرد و باریکه ها را تحت زاویهٔ ۱۲۰ درجه خم کرد، تا مقطعی با سطح ماکزیمم بدست آید.

در حقیقت مقطع به صورت سه ضلع متوالی از یك شش ضلعی منتظم در می‌آید.

۱ــ این مسأله را از کتاب «سرگرمیهای جبر» برداشته‌ایم.

قضیه۲. اگر x،y،z،...،t متغیر های مثبت به مجموع ثابت باشند، حاصلضرب $x^m \cdot y^n \cdot z^p \dots t^q$ وقتی ماکزیمم‌است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\dots=\frac{t}{q}$$

اثبات. مقادیری از x و y و z و...و t که عبارت $x^m \cdot y^n \cdot z^p \dots t^q$ را ماکزیمم کنند، عبارت $\frac{x^m}{m^m}.\frac{y^n}{n^n}.\frac{z^p}{p^p}\dots\frac{t^q}{q^q}$ را هم ماکزیمم خواهدکرد، ولی عبارت اخیررا می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{x}{m}\cdot\frac{x}{m}\dots\frac{x}{m}\right)\left(\frac{y}{n}\cdot\frac{y}{n}\dots\frac{y}{n}\right)$$
$$\left(\frac{z}{p}\cdot\frac{z}{p}\dots\frac{z}{p}\right)\dots\left(\frac{t}{q}\cdot\frac{t}{q}\dots\frac{t}{q}\right)$$

این‌عبارت دارای $m+n+p+\dots+q$ جملهٔ مثبت است که شامل m جملهٔ مساوی $\frac{x}{m}$، n جملهٔ مساوی $\frac{y}{n}$، p جملهٔ مساوی $\frac{z}{p}$،...، q جملهٔ مساوی $\frac{t}{q}$ است وبنابراین مجموع آنها:

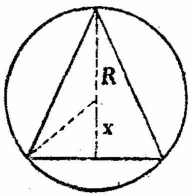
$$m\times\frac{x}{m}+n\times\frac{y}{n}+p\times\frac{z}{p}+\dots+q\times\frac{t}{q}=$$
$$=x+y+z+\dots+t$$

مقداریست ثابت. پس وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\dots=\frac{t}{q}$$

مثال۴. در کره‌ای به شعاع R ، مخروط دواری باحجم ماکزیمم محاط کنید.

حل. اگر ارتفاع مخروط را $R+x$ فرض کنیم (شکل ۶۰)، شعاع قاعدهٔ مخروط مساوی $\sqrt{R^2-x^2}$ می‌شود و در نتیجه می‌توان حجم مخروط را برحسب R و x نوشت:



شکل ۶۰

$$v=\pi(\sqrt{R^2-x^2})^2(R+x)=\pi(R+x)^2(R-x)$$

مجموع دو متغیر مثبت $(R+x)$ و $(R-x)$ مقداریست ثابت:

$$(R+x)+(R-x)=2R$$

و بنابراین حاصلضرب $(R+x)^2(R-x)$ وقتی ماکزیمم است که این تساوی را داشته باشیم:

$$\frac{R+x}{2}=R-x \Longrightarrow x=\frac{R}{3}$$

که در اینصورت ارتفاع مخروط مساوی $\frac{4R}{3}$ و شعاع قاعدهٔ آن مساوی $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$ می‌شود.

مثال ۵. پاره خط $AB=a$ را به ۳ قسمت چنان تقسیم کنید که حاصلضرب قطعهٔ اول در مربع قطعهٔ دوم در مکعب قطعهٔ سوم، حداکثر مقدار ممکن باشد.

حل. اگر قطعه‌های AB را x و y و z فرض کنیم، باید ماکزیمم عبارت $x\cdot y^2\cdot z^3$ را پیدا کنیم و چون $x+y+z=a$ مقداریست ثابت، بنابراین ماکزیمم وقتی حاصل می‌شود که داشته باشیم:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

یعنی باید پاره‌خط AB را به‌نسبت ۱ و ۲ و ۳ تقسیم کرد، در اینصورت مقادیر قطعه‌ها از دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3} \\ x+y+z=a \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x=\frac{a}{6} \\ y=\frac{a}{3} \\ z=\frac{a}{2} \end{array}\right.$$

ومقدار ماکزیمم حاصلضرب مساوی $\frac{a^6}{432}$ می‌شود.

مثال۶. ماکزیمم عبارت $x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x^2}$ را حساب کنید.

حل. عبارت مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{1-x^2}=(x^2)^{\frac{3}{4}}\cdot(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

و چون مجموع متغیرهای مثبت x^2 و $1-x^2$ مقداریست ثابت، ماکزیمم عبارت وقتی بدست می‌آید که داشته باشیم:

$$\frac{x^2}{\frac{3}{4}}=\frac{1-x^2}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow x=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

ومقدارماکزیمم عبارت برابر $0/425 \# \frac{1}{5}\sqrt[4]{\frac{108}{5}}$ می‌شود.

۵. می‌نیمم یك مجموع

دوقضیهٔ زیر به محاسبهٔ می‌نیمم بعضی مجموعها کمك می‌کنند.

قضیهٔ ۱ . اگر حاصلضرب چند متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع آنها وقتی می‌نیمم است‌که این متغیرها با هم برابر باشند.

اثبات. فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$\underbrace{x\cdot y\cdot z\cdots t}_{n\ \text{متغیر}}=a^n$$

اگر همهٔ متغیرها برابر a نباشد، لااقل یکی از آنها از a بزرگتر و دیگری از a کوچکتر است، مثلا اگر $q>1$ باشد، فرض می‌کنیم $x=aq>a$ و $y<a$، دراین صورت اگرمجموع متغیرها را S بنامیم، داریم:

$$S=aq+y+z+\cdots+t$$

اولین جمله را مساوی a می‌گیریم و برای اینکه حاصلضرب متغیرها تغییر نکند بجای جملهٔ دوم $\frac{y}{q}$ می‌گیریم:

$$S'=a+\frac{y}{q}+z+\cdots+t$$

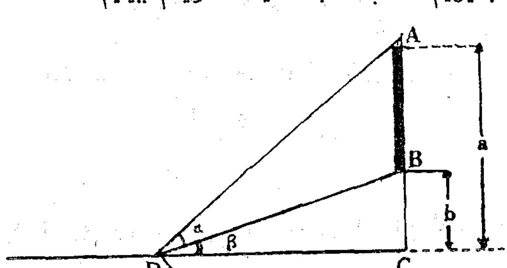
دراین صورت داریم:

$$S-S'=a(q-1)+y(1-\frac{1}{q})$$

که با توجه به‌اینکه $q>1$ بود $S-S'>0$ و $S'<S$ می‌شود.

به‌این ترتیب اگریکی از متغیرها را برابر a بگیریم، مجموع کوچك می‌شود و اگر این استدلال را ادامه دهیم، در حالتی‌که همهٔ متغیرها برابر a باشند، می‌نیمم مجموع بدست می‌آید.

مثال۱. قاب عکسی روی دیوار بطورقائم قرار گرفته است، درچه‌فاصله‌ای از دیوار قرار بگیریم تا قاب را با زاویهٔ ماکزیمم ببینیم؟



شکل ۶۱

حل. فرض می‌کنیم درحالتی‌که ناظر کناردیوار باشد فاصلهٔ AC (کنار

بالای قاب تا چشم ناظر) برابر a وفاصلهٔ BC (کنارپائین قاب تا چشم ناظر) برابر b بشود، زاویهٔدید قاب AB را ازنقطهٔ D مساوی α می گیریم. به یك زاویهٔ کمکی β نیز که‌درشکل ۶۱ مشخص‌شده،احتیاج‌داریم. روابط زیرواضح‌است:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{a}{x}\ ;\ tg\beta=\frac{b}{x}$$

(x را فاصلهٔ مجهول CD گرفته‌ایم).

در رابطهٔ $tg(\alpha+\beta)$ بجای $tg\beta$ مقدارش را قرارمیدهیم:

$$\frac{tg\alpha+\frac{b}{x}}{1-\frac{b}{x}tg\alpha}=\frac{a}{x}\Longrightarrow tg\alpha=\frac{(a-b)x}{x^2+ab}$$

α زاویه‌ای است حاده وبنابراین ماکزیمم‌آن همراه با ماکزیمم $tg\alpha$ و یا می‌نیمم $cotg\alpha$ است:

$$cotg\alpha=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{x^2+ab}{x}=\frac{1}{a-b}(x+\frac{ab}{x})$$

متغیرهای x و $\frac{ab}{x}$ مثبت و به حاصلضرب ثابت‌اند، بنابراین مجموع آنها وقتی می‌نیمم است‌که با هم برابرباشند:

$$\frac{ab}{x}=x\Longrightarrow x=\sqrt{ab}$$

که دراینصورت تانژانت زاویهٔ دید قاب AB چنین است:

$$tg\alpha=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$$

مثال۲. از بین چهار ضلعی‌های محاطی با سطح ثابت، محیط کدامیك می‌نیمم است؟

حل. اگر ضلعهای چهارضلعی محاطی را a،b،c،d ومحیط آنرا $2p$ فرض کنیم، باید می‌نیمم عبارت زیررا پیدا کنیم:

$$۲p=(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)$$

ولی می‌دانیم (S مساحت چهارضلعی است):

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)=S^۲$$

بنابراین مجموع چهار متغیر مثبت، که حاصلضرب ثابتی دارند، وقتی می‌نیمم است که با هم برابر باشند:

$$p-a=p-b=p-c=p-d$$

وازآنجا:

$$a=b=c=d$$

یعنی باید چهار ضلعی محاطی به صورت مربع باشد تا محیط می‌نیمم داشته باشد.

مثال۳. ازدونقطهٔ A و B که دردوطرف خط d قراردارند، دایره‌ای بگذرانید که روی خط مفروض وتری با طول می‌نیمم به‌وجود آورد.

حل. محل تلاقی AB را با خط d ، M می‌گیریم و فرض می‌کنیم $MA=a$ و $MB=b$. اگر دایره‌ای که از A و B می‌گذرد، خط d را درنقطه‌های P و Q قطع کندو $MP=x$ بگیریم، $MQ=\frac{ab}{x}$ می‌شود (زیرا داریم: $MA\times MB=MP\times MQ$) و بنابراین باید می‌نیمم $y=x+\frac{ab}{x}$ را بدست آوریم.

ولی باتوجه به‌ثابت بودن حاصلضرب x و $\frac{ab}{x}$ می‌نیمم وقتی حاصل می‌شود که داشته باشیم:

$$x=\frac{ab}{x} \Longrightarrow x=\sqrt{ab}$$

وازآنجا: $y=۲\sqrt{ab}$ خواهد شد.

مثال۴. بردایره‌ای به‌شعاع R، لوزی با مساحت می‌نیمم محیط کنید.

حل. اگرقطعه‌هایی از ضلع لوزی راکه بوسیلهٔ نقطهٔ تماس با دایره‌جدا

شده‌اند x و y و زاویهٔ لوزی مجاور به x را 2α بگیریم، داریم:

$$x = R\,cotg\,\alpha \;\; ; \;\; y = R\,tg\,\alpha$$

ومساحت لوزی چنین می‌شود:

$$S = 2R^2(tg\,\alpha + cotg\,\alpha)$$

حاصلضرب $tg\,\alpha$ و $cotg\,\alpha$ مقداری است ثابت و بنابراین مجموع آنها وقتی می‌نیمم است که با هم برابر باشند:

$$tg\,\alpha = cotg\,\alpha \Longrightarrow tg\,\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

یعنی $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ ولوزی باید به‌مربع تبدیل شود.

قضیهٔ ۲. اگر برای متغیرهـای مثبت x، y، z، ...، t، حاصلضرب $x^\alpha . y^\beta . z^\gamma \ldots t^\lambda$ مقدار ثابتی باشد، مجموع آنها وقتی می‌نیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \ldots = \frac{t}{\lambda}$$

اثبات. وقتی که حاصلضرب $x^\alpha . y^\beta . z^\gamma \ldots t^\lambda$ ثابت باشد، حاصلضرب $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\alpha . \left(\frac{y}{\beta}\right)^\beta . \left(\frac{z}{\gamma}\right)^\gamma \ldots \left(\frac{t}{\lambda}\right)^\lambda$ نیز ثـابت خـواهد بـود. در عبارت اخیر $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)$ عامل وجـود دارد (α عامل مساوی $\frac{x}{\alpha}$، β عامل مساوی $\frac{y}{\beta}$، ...، λ عامل مساوی $\frac{t}{\lambda}$) مجموع این عاملها $x+y+z+\ldots+t$ می‌شود که در حالت مساوی بودن آنها می‌نیمم می‌شود، یعنی:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \ldots = \frac{t}{\lambda}$$

مثال ۵. اگر a و b و x مقادیری مثبت باشند، می‌نیمم عبارت:

$y=\frac{a^8+b^2x^6}{x^2}$ را بدست‌آورید.

حل. عبارت مفروض را می‌توان به صورت $y=\frac{a^8}{x^2}+b^2x^4$ نوشت و چون داریم:

$$(\frac{a^8}{x^2})^2\times b^2x^4=a^{16}b^2=\text{مقدار ثابت}$$

بنابراین عبارت y وقتی می‌نیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{a^8}{2x^2}=b^2x^4 \Longrightarrow x=a\sqrt[2]{\frac{a}{b\sqrt{2}}}$$

ومی‌نیمم y (به‌ازای این مقدار x) برابر $\frac{3a^5\sqrt[3]{2ab^2}}{2}$ خواهد بود.

مثال۶. از مخروطهای به حجم ثابت v اولا کدامیك با مولد می‌نیمم، ثانیاً کدامیك باسطح جانبی می‌نیمم خواهند بود.

حل. شعاع قاعدهٔ مخروط را x می‌گیریم، دراینصورت ارتفاع مخروط مساوی $\frac{3v}{\pi x^2}$ می‌شود ومولد مخروط به سادگی بدست می‌آید:

$$l^2=x^2+\frac{9v^2}{\pi^2x^4}$$

می‌نیمم مولد l همراه با می‌نیمم l^2 است، ازطرف دیگر داریم:

$$(x^2)^2\times\frac{9v^2}{\pi^2x^4}=\frac{9v^2}{\pi^2}=\text{مقدار ثابت}$$

وبنابراین وقتی مقدار l می‌نیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x^2}{2}=\frac{9v^2}{\pi^2 x^4} \Longrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{3v\sqrt{2}}{\pi}}$$

حالا سطح جانبی مخروط را برحسب x بدست می‌آوریم:

$$S=2\pi x \times \frac{1}{2}\sqrt{x^2+\frac{9v^2}{\pi^2 x^4}} \Longrightarrow S^2=\pi^2 x^4+\frac{9v^2}{x^2}$$

وبا توجه به‌اینکه حاصلضرب $\pi^2 x^4 \times \left(\frac{9v^2}{x^2}\right)^2$ مقداری است ثابت. می‌نیمم S وقتی است که داشته باشیم:

$$\pi^2 x^4=\frac{9v^2}{2x^2} \Longrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{3v}{\pi\sqrt{2}}}$$

تمرین

۲۷۳. اگر $\frac{\pi}{2}>x>0$ باشد، می‌نیمم این تابع راپیداکنید:

$$f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\sec^4 x+\operatorname{cosec}^4 x$$

۲۷۴. مستطیلی باسطح ماکزیمم دریك بیضی‌مفروض محاط کنید.

۲۷۵. مکعب مستطیلی به حجم ماکزیمم دریك بیضوی به‌معادلهٔ:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ محاط کنید.

۲۷۶. حداکثر تابع $(3x^2+4)$: $f(x)=\sqrt[3]{(x^2+1)^2(x^2+3)}$

را پیدا کنید.

۲۷۷. اگر a و b و c عددهایی مثبت باشند، حداقل تابع:

$$y=\sqrt{x^{2}+a}+\sqrt{(c-x)^{2}+b}$$

را بدست‌آورید.

۲۷۸. اگر m و n و p و q مقادیری مثبت و $|m|<|n|$ و $|p|<|q|$ باشد می‌نیمم تابع: $y=\sqrt{x^{2}-2mx+n^{2}}+\sqrt{x^{2}-2px+q^{2}}$ و ماکزیمم تابع : $y=\sqrt{x^{2}+2mx+n^{2}}-\sqrt{x^{2}-2px+q^{2}}$ را بدست‌آورید.

۲۷۹. حداقل تابع:

$$y=\sqrt{-x^{2}+4x+12}-\sqrt{-x^{2}+2x+3}$$

را بدست آورید.

۲۸۰. باشرط $0<\alpha<90^{\circ}$ حداقل‌عبارت $(1+\frac{1}{\cos\alpha})(1+\frac{1}{\sin\alpha})$ را پیدا کنید.

۲۸۱. با شرط مثبت بودن مقادیر a و b و c ماکزیمم تابع زیر را بدست‌آورید:

$$y=\frac{3x^{2}}{ax^{4}+bx^{2}+c}$$

۲۸۲. اگر a و b و c و d مقادیری مثبت و $abcd=1$ باشد، می‌نیمم عبارت $\Sigma a^{2}+\Sigma ab$ را بدست‌آورید.

۲۸۳. حداکثر و حداقل تابع $y=\frac{\cos^{2}x-4\cos x+5}{3-2\cos x}$ را محاسبه کنید.

۲۸۴. به شرط $a\geq 0$. حداکثر و حداقل تابع:

$$y=(a+\sin x)(a+\cos x)$$

را بدست‌آورید.

۲۸۵. اگر a و b مقادیری مثبت و $0<x<1$ باشد، حداقل تابع $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$ را پیدا کنید.

۲۸۶. مطلوبست حداقل مقدار نسبت یك عدد سه رقمی به مجموع رقمهای آن.

۲۸۷. به ازای چه مقادیری از x و y عبارت زیر حداقل است:

$$A=x^2+2xy+2y^2+2x+4y+3$$

۲۸۸. اگر $0\leqslant x\leqslant a$ و $0\leqslant y\leqslant a$ باشد، حداقل تابع:

$$z=\frac{2a^2-x^2-y^2}{a^2-xy}$$

را پیدا کنید.

۲۸۹. کوچکترین عدد به صورت 2^n+3^n را که بر ۶۲۵ قابل‌قسمت باشد بدست‌آورید.

۲۹۰. اگر $ax+by+cz=d$ باشد، می‌نیمم عبارت $x^2+y^2+z^2$ را بدست‌آورید.

۲۹۱. ماکزیمم و می‌نیمم هریك از دوتابع زیررا بدست‌آورید:

$$y_1=\frac{a\sin x+b\cos x+c}{a'\sin x+b'\cos x+c'}\ ;\ y_2=\frac{tg3x-tg^3x}{tg x}$$

۲۹۲. دستگاه زیررا نسبت به x و y حل کنید:

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha=a\cos3\alpha \\ x\sin\alpha-y\cos\alpha=3a\sin3\alpha \end{cases}$$

و وقتی که x^2+y^2 حداکثر یا حداقل مقدار خودرا دارد، α رامحاسبه کنید.

۲۹۳. بر کرهٔ ثابت، مخروط دواری باحجم می‌نیمم محیط کنید.

۲۹۴. درکره‌ای، مخروط دواری باحجم ماکزیمم محاط کنید.

۲۹۵. روی ضلعهای مستطیل به‌محیط ثابت، نیمدایره‌هائی به‌قطر ضلعها

و در خارج مستطیل کشیده‌ایم. می‌نیمم مساحت شکل حاصل را پیدا کنید.

۲۹۶. می‌نیمم مساحت ذوزنقه متساوی‌الساقینی که محیط بردایرهٔ بشعاع R باشد، پیدا کنید.

۲۹۷. در کره‌ای بـه شعاع R، مخروط ناقصی محاط کنید که یك قاعده‌اش دایرهٔ عظیمه‌ای از کره و سطح جانبی‌اش ماکزیمم باشد.

۲۹۸. از استوانه‌های با حجم ثابت V، کدامیك در کوچکترین کره قابل محاط است.

۲۹۹. دو خط راه آهن یکدیگر را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند. دو قطار روی این‌دوخط و به طرف‌محل تلاقی حرکت می‌کنند، یکی‌از ایستگاهی که در ۴۰ کیلومتری محل تلاقی است و دیگری از ایستگاهی که در ۵۰ کیلو‌متری آنجاست. اولی دقیقه‌ای ۸۰۰ متر ودومی دقیقه‌ای ۶۰۰ متر سرعت دارد. پس از چه مدتی از لحظه شروع حـرکت، فاصلهٔ بین دو قطار حداقل خواهد شد؟

۳۰۰. مکعب‌مستطیلی باحجم ماکزیمم‌دریك استوانهٔ‌مفروض محاط کنید.

۳۰۱. قطاعی را طوری از یك دایره جدا کنید، که با بقیهٔ دایره بتوان مخروطی با حجم ماکزیمم ساخت.

۳۰۲. ماکزیمم و می‌نیمم عبارت $S=p\sin x+q\cos x$ راحساب کنید.

۳۰۳. اگر n عددی طبیعی باشد، حداقل تابع زیر را پیداکنید:

$$f(x)=\left(\frac{۱+\sin^۲ x}{\sin^۲ x}\right)^n+\left(\frac{۱+\cos^۲ x}{\cos^۲ x}\right)^n$$

۳۰۴. حداقل و حداکثر مقدار زیر را بدست آورید:

$$y=\sqrt{\frac{(x-۲)^۲+۴}{x^۲+۴}}$$

۳۰۵. از رأس A درمثلث ABC، خط l راچنان‌رسم کنید که اولاً‌مجموع فاصله‌های B و C از آن حداقل باشد؛ ثانیاً مجموع فاصله‌های B و C از آن حداکثر باشد.

۳۰۶. خط MN از زاویهٔ مفروض A، مثلثی بامساحت Q جدا می‌کند (M و N روی ضلعهای این زاویه‌اند) با چه شرطی طول پاره‌خط MN حداقل است؟ در این حالت طول MN چقدر است؟

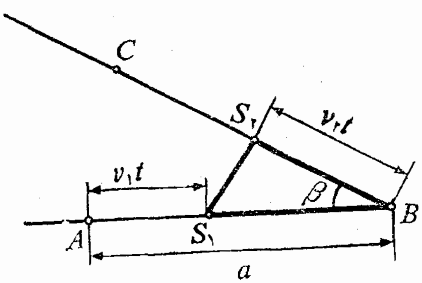
۳۰۷. روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC، بترتیب دو نقطهٔ M و N را طوری پیدا کنید که مثلث ABC به وسیلهٔ خط MN به‌دوشکل هم‌ارز تبدیل می‌شود و ضمناً طول MN حداقل باشد.

۳۰۸. هر یك از عددهای $x_1, x_2, \ldots, x_n$، بدون اینکه بهم ارتباطی داشته باشند، می‌توانندمقادیر ۰، ۱و ۱– را قبول کنند. حداقل مجموع همهٔ حاصل‌ضربهای ممکنهٔ دو به دوی این عددها چقدر است؟

۳۰۹. حداقل مقدارمجموع همهٔ حاصلضربهای ممکنهٔ دوبه دو را درمورد n عدد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ پیدا کنید، بشرطی که هر یك از آنها از لحاظ قدر مطلق بیشتر از واحد نباشد.

۳۱۰. از بین همهٔ مخروطهای دوار محاط در یك کرهٔ مفروض، آنرا پیدا کنید که سطح کل ماکزیمم داشته باشد.

۳۱۱. متحرکی از نقطهٔ A بطرف نقطهٔ B با سرعت v_1 حرکت می‌کند (شکل ۶۲). در همین‌زمان متحرك دیگری از نقطهٔ B بطرف نقطهٔ C باسرعت v_2 حرکت می‌کند.



شکل ۶۲

اگر $AB = a$ و $\widehat{ABC} = \beta$ معلوم باشند، بعد از چه مدتی فاصلهٔ بین دو متحرك به حداقل خود می‌رسد؟

۳۱۲. مطلوبست حداقل مقدار تابع $f(x,y) = \frac{y}{x}$، در مجموعهٔ مقادیر (x,y) که در معادلهٔ $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 1$ صدق می‌کنند.

۳۱۳. اگر a، b، c، d مقادیری مثبت باشند، حداقل مقدار مجموع زیر را پیدا کنید:

$$S=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}+$$
$$+\frac{b+c+d}{a}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+b+c}{d}$$

۳۱۴. با شرط $x,y,z,t\geqslant 0$ و $x+z=1$ و $y+t=1$، حداقل و حداکثر مقدار تابع زیر را پیدا کنید:

$$f(x,y,z,t)=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}$$

(a و b مقادیر مثبت و ثابتی‌اند).

۳۱۵. تابع $73x^2+52y^2+72xy=100$ مفروض است. ازمرکز تقارن منحنی این تابع، خطی با ضریب زاویهٔ m می‌گذرد و منحنی را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. m را طوری پیدا کنید که طول AB حداکثر یا حداقل مقدار ممکن باشد.

۳۱۶. در صفحهٔ محورهای مختصات، نقطه‌های با مختصات صحیح را قرارداده‌ایم. حداکثرمساحت، برای مربعی‌که شامل حتی یکی از این نقطه‌ها نباشد، چقدر است؟

۶. تابع اولیه و محاسبه سطح و حجم

اگرچه استفاده از فکر «انتگرال‌گیری» را می‌توان حتی درکارهای «ارشمیدس» و پس از آن در نوشته‌های بسیاری از ریاضیدانهای «اسلامی» دید، ولی بدون‌تردید باید دوران حکومت آنرا از زمان «نیوتون» و «لایب‌نیس» به بعد دانست. این دو دانشمند، اولی درجستجوهای مربوط به محاسبهٔ سرعت حرکت و دومی درجستجوی راه حل کلی برای رسم‌مماس برمنحنی ومحاسبهٔ مساحت شکلهای منحنی‌الخط، بطور جداگانه به مفهوم کم و بیش دقیق «مشتق» و «تابع اولیه» رسیدند. اما کار برد این‌دو مفهوم تنها در دایره اولیهٔ خود محدود نماندوامروز «حساب‌دیفرانسیل و انتگرال»، مبنایی برای همهٔ انواع محاسبه‌ها شده است و باید گفت که «آنالیزریاضی» قسمت عمدهٔ بار خود را بر دوش آن گذاشته‌است

ما در جستجوی تابع اولیه، تنها به روشهایی می‌پردازیم که با برنامه‌های درسی دبیرستانی سازگار باشد. آنها که علاقه بیشتری داشته باشند، برای توسعهٔ آموزش خوددراین زمینه، باید به‌کتابهای «آنالیز ریاضی» مراجعه‌کنند.

۱ـ روش کلی

در روشهای مقدماتی‌مربوط به‌محاسبهٔ تابعهای اولیهٔ یك تابع،روش‌کار منجربه‌این می‌شودکه بتوانیم‌تابع‌مفروض رابه‌صورت $y=af'(x).[f(x)]^m$ در آوریم، چون دراینصورت، تابعهای اولیهٔ آن به‌صورت زیر در خواهدآمد:

$$Y=\frac{a}{m+۱}\left[\ f(x)\ \right]^{m+۱}+c$$

(که در آن c عبارتست از مقدار ثابت دلخواه).

مثال۱. $y=\frac{x}{(x^۲+۱)^۲}$ ، که می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$y=x(x^۲+۱)^{-۲}=\frac{۱}{۲}(۲x).(x^۲+۱)^{-۲}$$

و از آنجا، تابعهای اولیهٔ آن چنین می‌شود:

$$Y=\frac{\frac{۱}{۲}}{-۲+۱}(x^۲+۱)^{-۱}+c=-\frac{۱}{۲(x^۲+۱)}+c$$

مثال ۲. $y=tg^۳x+tg^۵x$ ، که به صورت زیر در می‌آید:

$$y=(۱+tg^۲x)tg^۳x=(tgx)'\cdot(tgx)^۳,$$

و در نتیجه تابعهای‌اولیهٔ آن $Y=\frac{۱}{۴}tg^۴x+c$ می‌شود.

۲. تابعهای اولیهٔ $y=f(x)(ax+b)^m$

وقتی‌که $f(x)$ چند جمله‌ای از x باشد (m الزاماً عدد صحیح نیست)، $f(x)$را برحسب توانهای $(ax+b)$ منظم می‌کنیم و سپس تابع اولیه‌می گیریم.

مثال ۳. مطلوبست تابعهای اولیهٔ $y=\frac{x^3}{\sqrt[3]{x-1}}$.

حل. تابع مفروض را به اینصورت می‌نویسیم:

$$y=x^3(x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

باید x^3 را برحسب توانهای $x-1$منظم کنیم. برای این منظور فرض‌می‌کنیم:

$$x-1=t \implies x=t+1,$$

$$x^3=t^3+3t^2+3t+1=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$y=[(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1](x-1)^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=(x-1)^{\frac{8}{3}}+3(x-1)^{\frac{5}{3}}+3(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

و در نتیجه تابعهای اولیهٔ y چنین است:

$$Y=\frac{3}{11}(x-1)^{\frac{11}{3}}+\frac{9}{8}(x-1)^{\frac{8}{3}}+\frac{9}{5}(x-1)^{\frac{5}{3}}+$$

$$+\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}+c=\frac{3}{440}(40x^3+45x^2+54x+$$

$$+81)\sqrt[3]{(x-1)^2}+c$$

مثال ۴. مطلوبست تابعهای اولیهٔ $y=x^5(2x^3+1)^m$.

حل. تابع مفروض را بترتیب به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=x^2\cdot x^3(2x^3+1)^m=x^2\left[\frac{1}{2}(2x^3+1)-\frac{1}{2}\right](2x^3+1)^m=$$

$$=\frac{1}{2}x^2(2x^3+1)^{m+1}-\frac{1}{2}x^2(2x^3+1)^m$$

و از آنجا :

$$Y=\frac{1}{12(m+2)}(2x^3+1)^{m+2}-\frac{1}{12(m+1)}(2x^3+1)^{m+1}+c$$

و یا پس از ساده کردن:

$$Y=\frac{(2x^3+1)^{m+1}}{12(m+1)(m+2)}[(m+1)(3x^3+1)-(m+2)]+c;$$

وبالاخره :

$$Y=\frac{[3(m+1)x^3-1](2x^3+1)^{m+1}}{12(m+1)(m+2)}$$

۳. تابعهای اولیه $y=sin^{2n+1}x$ ، $y=cos^{2n+1}x$ ، $y=tg^n x$

مثلا برای تابع $y=sin^{2n+1}x$ می‌توان نوشت:

$$y=sin x\cdot sin^{2n}x=sin x(1-cos^2x)^n$$

که پس از بازکردن پرانتز و ضرب در $sin x$، تمام جمله‌ها به صورت $au'u^n$ در می‌آید و قابل تابع اولیه گرفتن است.

مثال ۵. مطلوبست تابع اولیه $y=sin^7x$.

حل. بترتیب داریم:

$$y=sin x\cdot sin^6x=sin x(1-cos^2x)^3=$$
$$=sin x-3sin x cos^2x+3sin x cos^4x-sin x cos^6x$$

و از آنجا:

$$Y=-cos x+cos^3x-\frac{3}{5}cos^5x+\frac{1}{7}cos^7x+c$$

مثال ۶. مطلوبست تابعهای اولیهٔ تابع $y=tg^8x$.

حل. بترتیب چنین می‌نویسیم:

$$y=tg^8x=(1+tg^2x)tg^6x-(1+tg^2x)tg^4x+$$
$$+(1+tg^2x)tg^2x-(1+tg^2x)+1$$

و چون $1+tg^2x$ مشتق $tg x$ است خواهیم داشت:

$$Y=\frac{1}{7}tg^7x-\frac{1}{5}tg^5x+\frac{1}{3}tg^3x-tgx+x+c$$

۴. تابعهای اولیهٔ توانهای زوج سینوس و کسینوس

برای توانهای‌زوج سینوس وکسینوس باید ازتبدیل به‌کسینو س قوس دو برابراستفاده کرد، یعنی از دو رابطهٔ زیر:

$$\sin 2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\quad ;\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

مثال۷. مطلوبست تابعهای اولیهٔ تابع $y=\sin^4x$.

حل. بترتیب می‌نویسیم:

$$y=\sin^4x=\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)=$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]=\frac{1}{8}(3-4\cos 2x+\cos 4x)$$

واز آنجا تابعهای اولیهٔ y چنین می‌شود:

$$Y=\frac{1}{8}\left(3x-2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+c$$

ویا:

$$Y=\frac{1}{32}(12x-8\sin 2x+\sin 4x)+c$$

مثال۸. تابعهای اولیهٔ تابع $y=\cos^6x$ را بدست‌آورید.

حل. بترتیب داریم:

$$y=\cos^6x=\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^3=$$

$$=\frac{1}{8}(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x)=$$

$$=\frac{1}{8}\left[1+3\cos 2x+\frac{3}{2}(1+\cos 4x)+\cos 2x(1-\sin^2 2x)\right]=$$

$$=\frac{1}{16}(5+8\cos 2x+3\cos 4x-2\cos 2x\sin^2 2x)$$

وازآنجا تابعهای اولیهٔ y چنین است:

$$Y=\frac{1}{16}\left(5x+4\sin 2x+\frac{3}{4}\sin 4x-\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+c$$

و یا:
$$Y=\frac{1}{192}\left(60x+48\sin 2x+9\sin 4x-4\sin^3 2x\right)+c$$

مثال۹. مطلوبست تابعهای اولیهٔ تابع $y=\sin^3 2x\sin^2 3x$.

حل. با توجه به رابطهٔ $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$ داریم:

$$\sin^2 3x=\frac{1}{2}(1-\cos 6x)$$

و با توجه به‌رابطهٔ: $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ و یا:

$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$ داریم:

$$\sin^3 2x=\frac{1}{4}(3\sin 2x-\sin 6x)$$

وازآنجا:

$$y=\frac{1}{8}(1-\cos 6x)(3\sin 2x-\sin 6x)=$$

$$=\frac{1}{8}(3\sin 2x-\sin 6x-3\sin 2x\cos 6x+\sin 6x\cos 6x)=$$

$$=\frac{1}{8}\left[3\sin 2x-\sin 6x-\frac{3}{2}(\sin 8x-\sin 4x)+\frac{1}{2}\cos 12x\right]=$$

$$=\frac{1}{16}(6\sin 2x+3\sin 4x-2\sin 6x-3\sin 8x+\sin 12x)$$

و ازآنجا:

$$Y=\frac{1}{16}\left(-3\cos 2x-\frac{3}{4}\cos 4x+\frac{1}{3}\cos 6x+\frac{3}{8}\cos 8x-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{12}\cos 12x\right)+c$$

ویا:

$$Y = -\frac{۱}{۳۸۴}(۷۲\cos ۲x + ۱۸\cos ۴x - ۸\cos ۶x - ۹\cos ۸x +$$
$$+ ۲\cos ۱۲x) + c$$

تمرین

۳۱۷. اگر $|x| < ۱$ باشد، حد مجموع زیررا بدستآورید:

$$x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \frac{x^۷}{۷} + \dots$$

۳۱۸. اگر $|x| < ۱$ باشد حد مجموع زیررا محاسبه کنید:

$$۱ \times ۲x + ۲ \times ۳x^۲ + ۳ \times ۴x^۳ + ۴ \times ۵x^۴ + \cdots$$

۳۱۹. مطلوبست محاسبهٔ مجموع زیر:

$$T_n = \cos x + ۲\cos ۲x + ۳\cos ۳x + \cdots + n\cos nx$$

تابعهای اولیهٔ هریك از تابعهای زیررا بدست آورید:

۳۲۰. $y = x(ax+b)^m$ ۳۲۱. $y = \frac{x^۲}{\sqrt{x-۱}}$

۳۲۲. $\frac{x^۳+x^۲+x+۱}{\sqrt[۳]{۱-x}}$ ۳۲۳. $y = \frac{x^{۱۱}}{\sqrt[۵]{x^۳-۱}}$

۳۲۴. $y = \frac{(۲x+۳)^۵}{(۵x-۱)^۷}$ ۳۲۵. $y = \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{n+۲}}$

۳۲۶. $y = \frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}$ ۳۲۷. $y = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲+\sqrt{(۱+x^۲)^۳}}}$

۳۲۸. $y = \frac{۱}{۱-\sin x}$ ۳۲۹. $y = (x^۵+x^۳+x)(x^۲+۱)^m$

۳۳۰. $y = \cos^۹ x$ ۳۳۱. $y = \cot g^{۱۰} x$

۳۳۲. $y = \sin mx \cos nx$ ۳۳۳. $y = \sin^۵ ۲x \cos^۲ ۵x$

۳۳۴. $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ ۳۳۵. $y=\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}}$

۳۳۶. $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ ۳۳۷. $y=\dfrac{x^3(x^3+2x^2+3x+2)}{(x^3+x^2+x+1)^2}$

۳۳۸. $\dfrac{a\,\mathrm{cotg}\,x(\mathrm{cotg}\,x-1)^m}{\sin^2 x}$ ۳۳۹. $y=\dfrac{3\sin^3\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\sqrt[15]{(\cos x-1)^8}}$

۳۴۰. $y=\dfrac{\sin^n x}{\cos^{n+2} x}$ ۳۴۱. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

۳۴۲. $y=(1-x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}$ ۳۴۳. $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

۳۴۴. $y=\dfrac{x}{4+x^4}$ ۳۴۵. $y=\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

۳۴۶. $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x^3+1)^3}}$ ۳۴۷. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$

۳۴۸. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ ۳۴۹. $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}$

۳۵۰. $y=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ ۳۵۱. $y=\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$

۳۵۲. $y=\cos^5 x\sqrt{\sin x}$ ۳۵۳. $y=\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

۳۵۴. $y=|x|$ ۳۵۵. $y=x|x|$

۳۵۶. $y=(x+|x|)^2$ ۳۵۷. $y=|x+1|-|1-x|$

۳۵۸. مطلوبست $f(x)$ بشرطی که $(x>0)f'(x^2)=\dfrac{1}{x}$ باشد.

۳۵۹. مطلوبست $f(x)$ بشرطی که $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$ باشد.

۳۶۰. مطلوبست معادلهٔ کلی منحنی هائی که قائمهای بر آنها ازمبداء مختصات عبور کند.

۳۶۱. اگر ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ $M(x,y)$ بصورت $\frac{x-1}{y-2}$ باشد، مطلوبست $y=f(x)$ بشرطی که منحنی آن ازمبداء مختصات عبور کند.

۳۶۲. جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ را رسم کنید و حجم حاصل از دوران این منحنی را دور محور xx' در فاصلهٔ صفر و $\frac{\sqrt{3}}{3}$ حساب کنید.

۳۶۳. تابعی بصورت $y=f(x)$ تعیین کنید به‌قسمی که بین y' و y'' مشتقات مرتبهٔ اول ودوم آن رابطهٔ $y'y''=\frac{x^2-1}{2x^5}$ برقرار باشدومنحنی نمایش‌تغییرات آن درنقطه‌ای به‌طول واحد برمحورطولها مماس شود.

۳۶۴. مطلوبست محاسبهٔ سطح محصوربین محور xx' ودوخط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ ومنحنی نمایش تابع $y=\sin^2 2x-\sin 2x$.

۳۶۵. مطلوبست محاسبهٔ سطح محصوربین منحنی $y=\cos^3 x$ و محور xx' ومحور yy' وخط $x=\frac{\pi}{2}$.

۳۶۶. اولا منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$ رارسم کنید. ثانیاً حجم حاصل ازدوران منحنی را حول محور ox درفاصلهٔ $x=2$ و $x=3$ بدست آورید.

۳۶۷. مطلوبست محاسبهٔ حجم حاصل از دوران سطح محصور بین کمان منحنی نمایش $y=\frac{x}{x^2+x+1}\sqrt{x^2+2x+3}$ و خطهای $x=-2$ و $x=1$ و محورطولها، دور محورطولها.

۳۶۸. ازنقطهٔ $A(-1,0)$ دومماس AB وAC برسهمی $y^2=x-2$ رسم می‌کنیم، مطلوبست محاسبهٔ سطح بین این دو مماس و منحنی و نیز حجم حاصل ازدوران این سطح حول BC (B وC نقطه‌های تماس‌اند).

۳۶۹. منحنی تابع $y=x^2-2x+3$ را دورمحور yy' دوران داده‌ایم مطلوبست حجم حاصل ازدوران سطحی‌که بین دوخط $y=3$ و $y=5$ ومحور yها وقوس منحنی (درربع اول) واقع است.

۳۷۰. سطح محصور بین منحنی $y=5x^2+1$ وخط $y=10x+1$ را دور محور xx' دوران می دهیم، حجمی را کــه بدست می‌آید حساب کنید .

۳۷۱. سطح محصوربین منحنی $y=x+\frac{1}{2x^2}$ وخط $y=x$ وخطهای موازی با محور عرضها به‌معادله‌های $x=1$ و $x=\lambda>1$ را بدست‌آورید.

۳۷۲. تابع $y=\frac{1}{6}(x^3+\frac{3}{x})$ مفروض است. درصورتیکه مقدارتابع اولیـهٔ $\sqrt{1+y'^2}$ از $x=1$ تا $x=\sqrt{tg\alpha}$ برابر $\frac{1}{3}$ شود، α را محاسبه کنید.

۳۷۳. مطلوبست تعیین تابع $y=f(x)$ درصورتیکه اولا منحنی نمایش این تابع درنقطه‌ای بطول $\frac{1}{2}$ برمحور طولها مماس شود. ثانیاً بین y' و y''، مشتقات مرتبهٔ اول و مـرتبهٔ دوم تابع مزبـود، رابطهٔ $y''(y'-1)=4x$

برقرارباشد.

۳۷۴. تابع $y=f(x)$ را طوری تعیین کنید که منحنی نمایش تغییرات آن درنقطهٔ A به‌طول ۲ برخط $y+3x=7$ مماس باشد وبین‌تابع ومشتقهای اول و دوم آن رابطهٔ زیربرقرارباشد:

$$2x+2yy'^2+y^2y''=0$$

تابعهای اولیهٔ هریك ازتابعهای زیررا پیداکنید:

۳۷۵. $y=\dfrac{x^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}$ ۳۷۶. $y=\dfrac{x^4+x^3+3x^2-x}{(x^2-1)^2}$

۳۷۷. $y=\dfrac{\sqrt[3]{2x-5x^2}-x^4}{x^3\sqrt[3]{2-5x}}$ ۳۷۸. $y=\dfrac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}$

۳۷۹. $y=\dfrac{5x^2+8x+14}{(x^2+x-2)^2}$ ۳۸۰. $y=\dfrac{x^3-1}{(x^3+2)^2}$

۳۸۱. $y=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{x}}$ ۳۸۲. $y=\sqrt[5]{\dfrac{4-\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt[3]{x^2}}}$

۳۸۳. تابع $y=f(x)$ راچنان پیداکنید که بین مشتقهای اول ودوم‌آن رابطهٔ $y'y''-y''=4x$ برقرارباشد ومماس برمنحنی درنقطهٔ به‌طول $\frac{1}{2}$، بر محورطول منطبق باشد.

۳۸۴. معادلهٔ منحنی‌هایی را پیداکنید که تحت قائمهای همهٔ نقطه‌های‌آن نسبت بیك محور، مقداری ثابت باشد.

۳۸۵. تابع $y=\dfrac{x}{(1+x)^3}$ مفروض است. خط $x=m$، با فرض مثبت بودن m ،منحنی نمایش تغییرات‌تابع‌مزبوررادر M قطع‌می‌کند. نقطهٔ‌عطف‌منحنی را R وطول‌آنرا λ می‌نامیم. اگر $m>\lambda$ باشد: a) اندازهٔ سطح بین‌قوس MR ودوخط $x=m$ و $x=\lambda$ و محور طول راپیداکنید. b) چنانچه قوس MR دور محور طول دوران کند، اندازهٔ حجمی را که ایجاد خواهد شد، بدست

آورید. c) وقتی‌که m بسمت بی‌نهایت میل کند، حداندازهٔ سطح‌و حجم‌بالا را پیدا کنید.

۳۸۶. a) منحنی نمایش تغییرات تابع $y^{۲}=x^{۲}(۲-x)$ را رسم کنید.

b) مساحت قسمتی‌ازصفحه راکه‌به‌صورت حلقه‌ای به‌وسیلهٔ منحنی‌محصور شده است، پیدا کنید.

۳۸۷. a) منحنی‌نمایش تغییرات دوتابع :

$$y=x+۱+\frac{۴}{(x+۱)^{۲}} \quad و \quad y=x+۱+\frac{۴}{(x-۳)^{۲}}$$

را دریك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

b) سطح محصور بین دو منحنی و خطهای $x=۴$ و $x=\lambda$ را محاسبه کنید.

c) حد این سطح‌را وقتی‌که λ بسمت‌بی‌نهایت میل می‌کند، بدست‌آورید.

۳۸۸. اگر $f'(x)$ و $F(x)$ به ترتیب مشتق و تابع اولیهٔ $f(x)$ وضمناً $F(۰)=۰$ باشد؛ $f(x)$ را پیداکنید، بشرطی‌که داشته باشیم:

$$F[f'(x)]=۲۱۶x^{۳}-۲۵۲x^{۲}+۱۰۲x-۱۴$$

۷

منحنی‌های درجهٔ دوم

(مقاطع مخروطی)

اگرچه هم درکارهای ریاضی‌دانهای یونان باستان وهم در نوشته‌های ریاضی‌دانهای اسلامی بحث‌در بارهٔ مقاطع مخروطی (البته به‌زبان هندسی) دنبال شده‌است؛ ولی بررسی دقیق ومنظم‌این مبحث ازریاضیات، تنها وقتی جدی تلقی شد، کــه نظم بطلمیوسی‌مطالعهٔ حرکتهای آسمانی درهم ریخت وجای خود را به‌بررسی واقعیتها سپرد . معلوم شد که سیاره‌ها روی بیضی به دور خورشید حرکت می‌کنند وخورشید دریکی‌ازکانونهای این‌بیضی قرار دارد؛ معلوم شدسنگی‌که پرتاب می‌شودروی قوسی از سهمی‌پیش می‌رود، معلوم شدکه بعضی‌از ستاره‌های دنباله‌دار روی قوسی از هذلولی حرکت می‌کنند و ...، وهمه‌اینها مستلزم این‌بودکه بیضی‌وسهمی وهذلولی را بهتربشناسند.

روشن است‌که‌کار توضیح خاصیتهای هندسی این منحنی‌ها مربوط به‌این‌کتاب نیست وما دراینجا تنها به‌تحلیل جبری‌معادلهٔ آنها (آنهم تاجائی‌که به‌برنامه دبیرستانی مربوط‌باشد) می‌پردازیم طبیعی‌است‌که مثل‌سایر فصلهای این‌کتاب، تنها به‌نکته‌هایی‌اشاره خواهیم کردکه برای خواننده‌کم و بیش تازگی داشته باشد و در کتابهای درسی‌کمتر به‌آنها برخورد نماید.

۱. صورت کلی منحنی‌های درجهٔ دوم

درهندسه، تعریف کلی یك مقطع مخروطی (دوخط راست، دایره، بیضی، هذلولی ویاسهمی) را به اینصورت می‌دهند: مکان هندسی نقطه‌هایی ازصفحه که نسبت فاصله‌های آنها ازیك‌خط ویك‌نقطهٔ ثابت، مقدار ثابتی‌باشد، مقطع‌مخروطی نامیده می‌شود. یعنی این‌مکان، بسته به‌جای نقطه و خط ثابت وبسته به مقدار نسبت ثابت، یکی‌از مقطعهای مخروطی‌را خواهد داد.

اگرخط‌ثابت $ax+by+c=0$ ونقطهٔ‌ثابت‌را (α,β)رادرنظربگیریم، معادلهٔ مکان هندسی‌نقطهٔ $M(x,y)$، که نسبت فاصله‌هایش ازخط ونقطهٔ،مساوی مقدار ثابت λ است، به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$\frac{(ax+by+c)^2}{(a^2+b^2)[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]}=\lambda^2$$

وهمانطور که دیده می‌شود، این‌یك معادلهٔ‌کامل درجه‌دوم، نسبت به xوy، است.

درهندسهٔ تحلیلی ثابت می‌کنند، که برعکس، هرمعادله‌ای‌که نسبت به x و y درجهٔ دوم باشد، معادلهٔ یك مقطع مخروطی را (حقیقی یا موهومی)، بیان می‌کند.

به‌این ترتیب، معادلهٔ‌کلی یك مقطع مخروطی به‌صورت زیراست:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \qquad (1)$$

در حالت $b=0$، تابع $y=f(x)$، که از (۱) بدست می‌آید، یك ارزشی و

گویا ودر حالت $b\neq 0$، تابع $y=f(x)$، دو ارزشی و گنگ است. ابتدا به حالت $b=0$ می‌پردازیم:

$$۱)\quad b=c=0\ ;\quad y=\frac{-1}{e}(ax^2+dx+f)$$

این‌تابع برای ما آشناست وعبارتست ازمعادلهٔ یك‌سهمی که محوری موازی‌محور عرض دارد. مشخصات این سهمی (کانون، خط هادی، محور) را بعداً (ضمن تمرینها) بررسی خواهیم کرد.

$$۲)\quad b=0 \text{ و } c\neq 0\ ;\quad y=-\frac{ax^2+dx+f}{cx+e}$$

که معادلهٔ یك هذلولی است و در هر حال مجانبی موازی محور عرض دارد $(x=-\frac{e}{c})$. درحالتی‌که $a=0$ باشد، این‌هذلولی متساوی‌الساقین می‌شود ومجانب دوم‌آن $(y=-\frac{d}{c})$ موازی محور طول می‌شود و در حالت $a\neq 0$، معادلهٔ مجانب دوم به‌صورت $y=\frac{a}{c}x+\frac{dc-ae}{c^2}$ در می‌آید.

به‌این ترتیب، اگرازحالت دوخط‌بگذریم ازبین مقطعهای مخروطی، تنها سهمی وهذلولی‌را می‌توان، درحالت خاص، به‌صورت $y=f(x)$ نمایش داد که درآن $f(x)$ نسبت به x گویا باشد وبه‌ازای هرمقدار مشخص x، تنها یك‌مقدار برای y بدست‌آید.

البته، معادلهٔ (۱) بافرض $b=0$، ممکن است درحالت خاص به دوخط راست تجزیه شود. برای تحقق این‌وضع باید درمعادلهٔ زیر، ریشه‌های x نسبت به y گویا باشد:

$$ax^2+(cy+d)x+(ey+f)=0$$

مبین این‌معادله چنین است:

$$\Delta=(cy+d)^{2}-4a(ey+f)=c^{2}y^{2}+$$
$$+2(cd-2ae)y+(d^{2}-4af)$$

وبرای اینکه این عبارت نسبت به y مجذور کامل باشد، باید مبین آن مساوی صفر شود:

$$(cd-2ae)^{2}-c^{2}(d^{2}-4af)=0 \Longrightarrow ae^{2}-cde+c^{2}f=0$$

وشرط اینکه عبارت اخیر بتواند مساوی صفر بشود، اینست که $d^{2}>4af$ باشد. بنابراین باشرطهای:

$$\begin{cases} ae^{2}-cde+c^{2}f=0 \\ d^{2}-4af>0 \end{cases}$$

وشرط اصلی $b=0$، معادلهٔ (۱) به دوخط راست تجزیه می‌شود که یکی‌از آنها خطی موازی محورعرض است. بطورکلی کافی است، معادلهٔ (۱) رانسبت به x منظم کنیم ودرمعادلهٔ درجهٔدومی که بدست می‌آید، x رابرحسب y محاسبه کنیم، چنانچه، معادلهٔ مفروض قابل‌تجزیه به‌دو خط راست باشد، x نسبت‌به y مقداری گویا خواهد شد.

مثلا اگردرمعادلهٔ:

$$4x^{2}+2mxy+10x+3my+6=0 \qquad (I)$$

x رابرحسب y بدست‌آوریم، خواهیم داشت:

$$4x^{2}+2(my+5)x+3(my+2)=0;$$

$$x=\frac{-(my+5)\pm\sqrt{(my+5)^{2}-12(my+2)}}{4}=$$

$$=\frac{-(my+5)\pm\sqrt{(my-1)^{2}}}{4}=\begin{cases} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}(my+2) \end{cases}$$

وبنابراین معادلهٔ (I) به دوخط زیرتجزیه می‌شود:

$$\begin{cases} 2x+3=0 \\ 2x+my+2=0 \end{cases}$$

***

اکنون به بررسی معادلهٔ (۱)، در حـالت $b\neq 0$، می‌پردازیم؛ معادلهٔ (۱) را نسبت به y منظم می‌کنیم:

$$by^2+(cx+e)y+(ax^2+dx+f)=0$$

و y را برحسب x محاسبه می‌کنیم:

$$y=-\frac{1}{2b}\left[(cx+e)\pm\sqrt{(cx+e)^2-4b(ax^2+dx+f)}\right]$$

که آنرا بطورخلاصه، می‌توان چنین نوشت:

$$y=mx+n\pm\sqrt{px^2+qx+r} \qquad (2)$$

درحالت $p<0$، حـدود تغییرات x محدود می‌شود و منحنی تابع اصلا شاخهٔ بی‌نهایت ندارد وبنابراین منحنی‌نمایش تغییرات تابع دایره یابیضی است.

درحالت $p>0$، منحنی‌تابع ازدو جهت ($x\to+\infty$ و $x\to-\infty$) دارای شاخه بی‌نهایت است وبسادگی می‌توان ثابت‌کرد که دارای دو مجانب هم می‌باشد وبنابراین منحنی‌نمایش تغییرات تابع، یك هذلولی‌است.

دراینحالت، اگرعبارت‌زیررادیکال، نسبت به x، مجذورکامل‌باشد، یعنی داشته باشیم: $q^2=4pr$، مقدار y نسبت‌به x گویا می‌شود وتابع به‌صورت دو خط راست درمی‌آید.

درحالت $p=0$،منحنی‌تابع‌تنهاازیك‌جهت($x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$)، شاخهٔ بی‌نهایت دارد و ضمناً این شاخهٔ بی‌نهایت مجانبی هـم ندارد و بنابراین سهمی‌است.

ضمناً روشن است که درحالت منفی‌بودن p، برای اینکه منحنی‌تابع (۲) یك‌دایره باشد، باید $p=-1$ و $m=0$ شود.

بطور خلاصه، هر تابع به‌صورت (۲)، یك مقطع مخروطی است و نوع مقطع مخروطی را می‌توان باتوجه به‌جدول زیر بازشناخت:

$$p>0\begin{cases} q^2-4pr\neq 0 & \text{هذلولی} \\ q^2-4pr=0 & \text{دوخط راست} \end{cases}$$

$$p<0\begin{cases} (p+1)^2+m^2=0 & \text{دایره} \\ (p+1)^2+m^2\neq 0 & \text{بیضی} \end{cases}$$

$$p=0 \qquad \text{سهمی}$$

البته درهریك از این حالتها (به‌استثنای حالت دو خط راست و حالت سهمی)، ممکن‌است‌یك‌تابع‌موهومی بدست‌آید، بنابراین به‌آنها باید شرط $q^2-4pr>0$ را، اضافه کرد تا منحنی‌تابع، هذلولی یادایره یابیضی حقیقی‌باشد.

مثال ۱. مطلوبست شرطهای لازم وکافی، برای اینکه منحنی‌تابع:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \qquad (1)$$

یك دایرهٔ حقیقی باشد.

حل. می‌دانیم که معادلهٔ دایرهٔ به مرکز $\omega(\alpha\,,\,\beta)$ وشعاع مساوی R چنین است:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

واین به‌معنای آنست که شرط‌لازم برای‌اینکه، معادلهٔ (۱) به‌صورت‌دایره‌درآید، اینست که داشته باشیم:

$$a=b \text{ و } c=0$$

دراینصورت، معادلهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$ax^2+ay^2+dx+ey+f=0$$

ویا :

$$x^2+y^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}y+\frac{f}{a}=0$$

و بالاخره:

$$(x+\frac{d}{2a})^2+(y+\frac{e}{2a})^2=\frac{d^2+e^2-4af}{4a^2}$$

واین معادلهٔ دایره‌ای است به مرکز $\omega(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2a})$ و شعاع $R=\frac{1}{2a}\sqrt{d^2+e^2-4af}$. روشن است که برای حقیقی بودن دایره باید داشته باشیم: $d^2+e^2-4af\geqslant 0$ (در حالت $d^2+e^2-4af=0$، دایره، بیك نقطه تبدیل می‌شود). بنابراین شرطهای لازم وکافی، برای اینکه، معادلهٔ (۱) بەدایره تبدیل شود، اینست که داشته باشیم:

$$a=b \quad و \quad c=0 \quad و \quad d^2+e^2\geqslant 4af$$

مثال۲. مطلوبست معادلهٔ محوراصلی دو دایرهٔ بەمرکزهای $\omega(\alpha,\beta)$ و $\omega'(\alpha',\beta')$ وشعاعهای R و R′.

حل. $M(x,y)$ را یکی ازنقطه‌های محور اصلی می‌گیریم. باید نقطهٔ M از دو دایره بیك قوت باشد، یعنی داشته باشیم:

$$M\omega^2-R^2=M\omega'^2-R'^2$$

و یا:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-R'^2$$

که پس ازساده‌کردن چنین می‌شود:

$$2(\alpha-\alpha')x+2(\beta-\beta')y=\alpha^2+\beta^2-\alpha'^2-\beta'^2-R^2+R'^2$$

یعنی برای پیداکردن معادلهٔ محوراصلی دو دایره،کافی است بین معادله‌های‌دو دایره، جمله‌های درجه دوم را حذف‌کنیم.

مثلا فرض‌کنیدکه بخواهیم، معادلهٔ وترمشترك دو دایرهٔ متقاطع زیر را پیداکنیم:

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}-۹=۰ \\ x^{۲}+y^{۲}-۴x-۲y+۱=۰ \end{cases}$$

اگر معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم کنیم، معادله وتر مشترك دو دایره بدست می‌آید:

$$۲x+y=۵$$

۲. وقتی که مقطع مخروطی، محوری، موازی محور طول دارد

بسادگی می‌توان ثابت کرد که اگر درمعادلهٔ

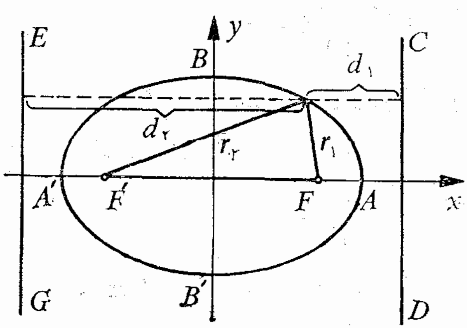
$$ax^{۲}+by^{۲}+cxy+dx+ey+f=۰$$

$c=۰$ باشد، خط $y=-\dfrac{e}{۲b}$ محور تقارن منحنی مقطع مخروطی است. همچنین اگر درتابع:

$$y=mx+n\pm\sqrt{px^{۲}+qx+r}$$

$m=۰$ شود، خط $y=n$ محـور تقارن منحنی آن (که یك مقطع مخروطی است)، می‌شود.

بنابراین در هر یك ازدو وضع فوق، اگرمنحنی بیضی یا هذلولی باشد، محورهایی به‌موازی محورهای مختصات دارد و اگرمنحنی، سهمی باشد، محور آن موازی محورطول است. وما دراینجا به بررسی هریك ازاین سه منحنی در این حالت خاص، می‌پردازیم.



شکل ۶۳

I. بیضی

بیضی عبارتست ازمکان هندسی نقطه‌هایی ازصفحه، که مجموع فاصله‌های آنها تا دو نقطهٔ ثابت، مقدارثابتی باشد. دونقطهٔ ثابت را **کانونهای** بیضی

گویند ومقدارثابت رابه $2a$ وفاصلهٔ بین‌دوکانون را به $2c$ نشان می‌دهند(شکل ۶۳). ازهندسه می‌دانیم که بیضی دارای دومحورتقارن ویك مرکزتقارن است. مرکزتقارن بروسط پاره خط FF' (FوF'کانونهای بیضی‌اند)ومحورها یکی منطبق برامتداد FF' و دیگری امتداد عمودمنصف پاره‌خط FF' است. ضمناً بسادگی معلوم می‌شود که قطربزرگتربیضی، یعنیAA' مساوی مقدارثابت$2a$ است و در اینصورت اگر طول قطـرکوچکتربیضی را $2b$ فرض کنیم، رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ بین آنها برقراراست.

ساده‌ترین معادلهٔ بیضی. امتداد قطر بزرگتر بیضی را محور طول و امتداد قطر کوچکتر آنرا محورعرض‌می‌گیریم، در اینصورت، مرکزبیضی بر مبداء مختصات‌منطبق می‌شود و خواهیم داشت:

$$F(c,0) \quad و \quad F'(-c,0)$$

اگرنقطه‌ای‌ازبیضی را $M(x,y)$فرض کنیم، بنابرتعریف‌بیضی‌ومحاسبه‌ای که درصفحهٔ ۴۳ (مثال ۳) انجام دادیم، معادلهٔ بیضی‌به اینصورت‌درمی‌آید:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ازاینجا بسادگی می‌توان به‌معادلهٔ بیضی،در دوحالت‌کلی‌ترزیررسید:

۱. اگرمرکزبیضی $\omega(\alpha,\beta)$وقطربزرگترAA'آن موازی محورطول باشد، معادلهٔ‌آن چنین است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

۲. اگرمرکزبیضی $\omega(\alpha,\beta)$ و قطر بزرگترآن AA'، موازی محور عرض باشد، معادلهٔ‌آن چنین است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$$

(مقادیر aوb با توجه به نامساوی $a>b$، باز شناخته می‌شوند) .

خروج از مرکز بیضی عبارتست ازنسبت فاصلهٔ‌کانونی ($2c$) برطول‌قطر

بزرگتر($۲a$)، وبه e نشان داده می‌شود:

$$e=\frac{c}{a}$$

وروشن است که دربیضی $e<۱$.

فاصلهٔ هرنقطهٔ $M(x,y)$ ازکانونهای بیضی را **شعاع حاملهای کانونی** بیضی گویند وبه $r_۱$و$r_۲$ نشان می‌دهند:

$$r_۱=a-ex \quad و \quad r_۲=a+ex$$

خط هادی بیضی عبارتست از خطی موازی قطر کوچکتر، بنحوی که فاصلهٔ آن تا این قطرمساوی $\frac{a}{e}$ باشد (روی شکل ۶۳، خطهای CDوEG).

معادلهٔ خطهای هادی بیضی (۱)، چنین است.

$$x=\frac{a}{e} \quad و \quad x=-\frac{a}{e}$$

نسبت فاصلهٔ هرنقطهٔ بیضی تاکانون به‌فاصلهٔ این نقطه تا خط‌هادی نظیر آن‌کانون، برابراست باخروج از مرکز بیضی:

$$\frac{r_۱}{d_۱}=e \quad و \quad \frac{r_۲}{d_۲}=e$$

بنابراین، می‌توان بیضی را مکان هندسی نقطه‌ای ازصفحه دانست که‌نسبت فاصلهٔ آن‌ازیك‌نقطهٔ ثابت‌برفاصلهٔ آن تایك خط‌ثابت، مساوی مقدارثابتی‌کوچکتر از واحد باشد .

معادلهٔ مماس بربیضی (۱) را درنقطهٔ $M(x_۱,y_۱)$ می‌توان به‌اینصورت نوشت:

$$\frac{xx_۱}{a^۲}+\frac{yy_۱}{b^۲}=۱$$

مثال۳. معادلهٔ هریك ازمماس مشترکهای دوبیضی زیررا پیداکنید:

$$\frac{x^۲}{۶}+y^۲=۱ \quad و \quad \frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}=۱$$

حل. معادلهٔ مماس مشترك دو بیضی را $y=mx+n$ می‌گیریم، در

اینصورت هریك ازدو دستگاه زیرباید جواب مضاعف داشته باشند:

$$\begin{cases} x^{2}+6y^{2}=6 \\ y=mx+n \end{cases} ; \begin{cases} 9x^{2}+4y^{2}=36 \\ y=mx+n \end{cases}$$

اگر y را بین دو معادلهٔ هریك از دو دستگاه حذف‌کنیم، دو معادلهٔ درجهٔدوم نسبت به‌x بدست می‌آید:

$$(6m^{2}+1)x^{2}+12mnx+6(n^{2}-1)=0$$

$$(4m^{2}+9)x^{2}+8mnx+4(n^{2}-9)=0$$

و اگر شرط وجود ریشهٔ مضاعف را برای هر یك از این دو معادله بنویسیم ، به دستگاه دومعادلهٔ زیر، نسبت به مجهولهای m و n، می‌رسیم:

$$\begin{cases} 6m^{2}-n^{2}+1=0 \\ 4m^{2}-n^{2}+9=0 \end{cases}$$

که از حل آن چهار جواب بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} m=2 \\ n=5 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} m=2 \\ n=-5 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} m=-2 \\ n=5 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} m=-2 \\ n=-5 \end{vmatrix}$$

وبنابراین معادلهٔ مماس مشترکها چنین است:

$$2x+y\pm5=0 \text{ و } 2x-y\pm5=0$$

مثال۴. مطلوبست معادلهٔ بیضی‌که درنقطهٔ $(0,3)$ بر محور عرض مماس باشد ومحورطول‌را درنقطه‌های $(3,0)$ و $(7,0)$ قطع کند، بشرطی‌که‌محورهای بیضی موازی با محورهای مختصات باشد. مختصات کانونهای این بیضی را هم پیدا کنید.

حل. روشن است‌که یکی از محورهای بیضی ازنقطه تماس آن با محور عرض، یعنی $(0,3)$ می‌گذرد ومحوردیگر آن،عمودمنصف وتری است‌که محور طول دربیضی‌به‌وجود می‌آورد (زیرامحورهای‌بیضی، موازی محورهای‌مختصات است). بنابراین معادلهٔ یکی ازمحورها $y=3$ ومعادلهٔ دیگری $x=5$می‌شود. ازاینجا مختصات مرکز بیضی $\omega(5,3)$ خواهد شد. فاصلهٔ این مرکز تانقطهٔ

(۳,۰)، مقدار a را می‌دهد، که مساوی ۵ می‌شود. به‌این‌ترتیب، معادلهٔ بیضی‌به اینصورت در می‌آید:

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

که با قراردادن مختصات یکی ازدونقطهٔ برخورد بیضی با محورطول،درمعادلهٔ (۱)، مقدار b^2 برابربا $\frac{75}{7}$ بدست‌می‌آید:

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{\frac{75}{7}}=1$$

با در دست داشتن مقادیر a^2 و b^2 می‌توان مقدار c را محاسبه‌کرد:

$$c^2=a^2-b^2=25-\frac{75}{7}=\frac{100}{7} \implies c=\frac{10}{\sqrt{7}}$$

کانونها روی قطربزرگترقراردارند وبنابراین هم عرض با مرکز بیضی هستند. برای محاسبهٔ طول‌کانونها داریم:

$$x_F=x_\omega-c=5-\frac{10}{\sqrt{7}}=\frac{35-10\sqrt{7}}{7}$$

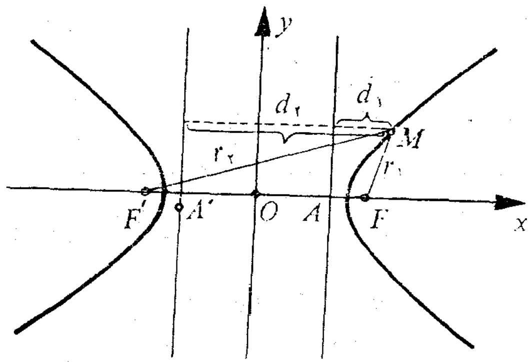
$$x_{F'}=x_\omega+c=5+\frac{10}{\sqrt{7}}=\frac{35+10\sqrt{7}}{7}$$

جواب: $F(\frac{35-10\sqrt{7}}{7}, 3)$ و $F'(\frac{35+10\sqrt{7}}{7}, 3)$.

II. هذلولی

هذلولی عبارتست ازمکان هندسی نقطه‌هایی ازصفحه، که تفاضل‌فاصله‌های آنها ازدونقطهٔ ثابت، مقدارثابتی‌باشد. دونقطهٔ‌ثابت را **کانونهای**‌هذلولی گویند. مقدار ثابت را به $2a$ و فاصلهٔ دوکانون رابه $2c$ و c^2-a^2 را به b^2 نشان می‌دهند (شکل ۶۴).

هذلولی‌دارای دومحورتقارن‌ویک مرکزتقارن است. مرکزتقارن هذلولی



شکل ۶۴

بروسط پاره‌خط FF' (F و F' کانونهای هذلولی‌اند) ومحورها، یکی منطبق بر FF' (محورقاطع هذلولی) ودیگری امتداد عمود منصف FF' (محورغیرقاطع) است. ضمناً بسادگی معلوم می‌شود که مقدار ثابت هذلولی، یعنی $2a$، مساوی طول پاره‌خط. AA' (فاصلهٔ دو رأس هذلولی) است.

ساده‌ترین معادلهٔ هذلولی. امتداد FF' را محورطول وامتدادعمودمنصف آنرا محورعرض می گیریم، دراینصورت مبداء مختصات برمرکزهذلولی‌منطبق می‌شود وخواهیم داشت:

$$F(c,0) \text{ و } F'(-c,0)$$

اگر نقطه‌ای ازهذلولی را $M(x,y)$ فرض‌کنیم، بنا برتعریف‌هذلولی و محاسبه‌ای که درمسألهٔ ۴۴ (صفحهٔ ۵۶) انجام‌دادیم، معادلهٔ هذلولی‌به‌اینصورت درمی‌آید:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ازاینجا می‌توان بسادگی، بهمعادلهٔ هذلولی در دوحالت کلی‌ترزیررسید:

۱. اگرمرکزهذلولی $\omega(\alpha,\beta)$ ومحورقاطع آن موازی محورطول باشد،

معادلهٔ آن چنین است:

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}-\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱ \qquad (۲)$$

۲. اگر مرکز هذلولی $\omega(\alpha,\beta)$ و محور قاطع آن موازی محور عرض باشد، معادلهٔ آن چنین است:

$$\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}-\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}=۱ \qquad (۳)$$

در هذلولی هر سه حالت $a>b$ و $a=b$ و $a<b$ ممکن است. اگر $a=b$ باشد، هذلولی را **متساوی‌الساقین** گویند.

خروج ازمرکز هذلولی عبارتست از نسبت فاصلهٔ بین دو کانون ($۲c$) بر فاصلهٔ بین دو رأس حقیقی ($۲a$) هذلولی:

$$e=\frac{c}{a}$$

و روشن است که در هذلولی $e>۱$.

هذلولی (۱) از دو شاخه (شاخهٔ راست و شاخهٔ چپ) تشکیل شده است که تا بی‌نهایت ادامه دارند. برای نقطه‌های شاخهٔ راست، **شعاعهای حامل کانونی** از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$r_۱=ex-a \quad \text{و} \quad r_۲=ex+a$$

$$r_۲-r_۱=۲a$$

و برای نقطه‌های شاخهٔ چپ داریم:

$$r_۱=-ex+a \quad \text{و} \quad r_۲=-ex-a$$

$$r_۱-r_۲=۲a$$

خط هادی هذلولی عبارتست از خطی عمود بر محور کانونی و به فاصلهٔ $\frac{a}{e}$ ازمرکز. معادلهٔ خطهای هادی هذلولی (۱) چنین است:

$$x=\frac{a}{e} \quad \text{و} \quad x=-\frac{a}{e}$$

نسبت فاصلهٔ هر نقطه ازهذلولی تاکانون بهفاصلهٔ این نقطه تا خط هادی نظیراین‌کانون، برابراست با خروج ازمرکزهذلولی:

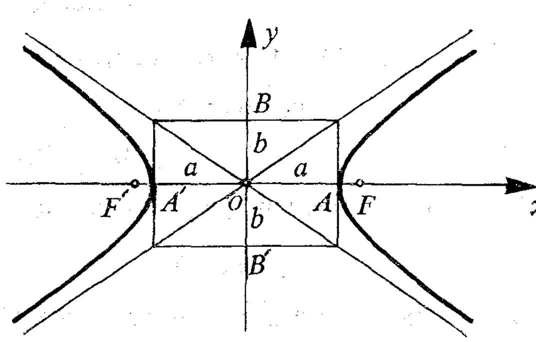
$$\frac{r_1}{d_1}=e \quad \text{و} \quad \frac{r_2}{d_2}=e$$

بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای ازصفحه‌که نسبت فاصلهٔ آن تا یك نقطهٔ ثابت، برفاصلهٔ آن تا یك خط ثابت مساوی مقدارثابتی‌بزرگترازواحد باشد،یك هذلولی است.

معادلهٔ مماس برهذلولی به‌معادلهٔ (۱) را درنقطهٔ (x_1, y_1)، می‌توان به اینصورت نوشت:

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$$

مستطیل مجانبها. ازهندسه می‌دانیم‌که اگرازرأسهای A و A' هذلولی،



شکل ۶۵

مماس‌هایی بر آن رسم کنیم تا مجانبهای هذلولی را قطع کنند؛ ازوصل نقطه‌های تلاقی به‌یکدیگر مستطیلی بدست‌می آید که آنرامستطیل مجانبها گویند(شکل ۶۵). این‌مستطیل بیشترمشخصات‌هذلولی را درخود دارد: امتداد قطرهای آن‌مجانبهای هذلولی، محورهای آن، محورهای هذلولی ومرکز آن،مرکزهذلولی است.دو بعد مستطیل‌مقادیر $2a$و$2b$ وطول قطرآن مقدار $2c$ را مشخص می کند. باوجود این، اگرمستطیل‌مجانبهارا داشته باشیم، دوهذلولی بدست می‌آید که درمجانبها و محورها مشترکند؛ منتهی، محور قاطع یکی، محورغیرقاطع دیگری است و بنابراین اگرمقدارثابت هذلولی‌اول $2a$ باشد، مقدارثابت هذلولی دوم‌مساوی $2b$ می‌شود. این دوهذلولی را **هذلولیهای مزدوج** گویند. بسادگی معلوم‌می‌شود که اگرمعادلهٔ یك هذلولی به صورت زیرباشد:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

معادلهٔ هذلولی مزدوج آن چنین می‌شود:

$$\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(y-\alpha)^2}{a^2}=1$$

***

ازشکل ۶۵ پیداست که ضریب زاویه‌های مجانبهای هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

عبارتست از $\pm\frac{b}{a}$ وبنابراین معادلهٔ این مجانبها چنین می‌شود:

$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$$

وبطور کلی درحالتی که معادلهٔ هذلولی به‌صورت (۲) باشد، معادلهٔ مجانبهای آن چنین می‌شود:

$$\frac{x-\alpha}{a}\pm\frac{y-\beta}{b}=0$$

مثال۵. یکی ازکانونهای یك هذلولی بهعرض‌مساوی ۵ ومعادلهٔمجانبهای آن $2x+y=7$ و $2x-y=1$ است. معادلهٔ هذلولی و معادلهٔ هذلولی مزدوج آنرا بنویسید وآنها را دریك دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

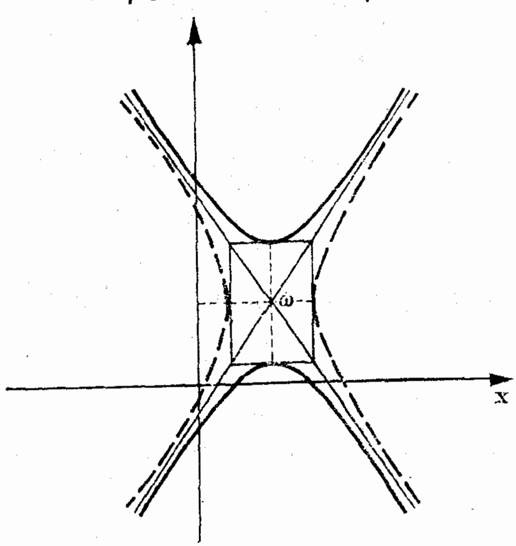
حل. مرکزهذلولی، محل تلاقی مجانبهای آنست:

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Longrightarrow \omega \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

ازطرف دیگر، چون ضریب زاویه‌های دومجانب، قرینهٔ یکدیگرند. نیمسازهای زاویه‌های بین دومجانب،موازی‌محورهای مختصات‌می‌شود. نیمسازهای‌زاویه‌های دو مجانب، همان محورهای هذلولی هستند، بنابراین معادلهٔ محورهای‌هذلولی عبارتست از $x=2$ و $y=3$. عرض‌کانون F مساوی ۵ است وبنابراین‌روی خط $x=2$ قراردارد ومختصات‌این‌کانون $F(2,5)$ می‌شود.

فاصلهٔ ωF، مقدار c را بدست می‌دهد: $c=2$ وبنابراین داریم:

$$a^2+b^2=c^2 \Longrightarrow a^2+b^2=4$$



شکل ۶۶

ضمناً چون امتداد $F\omega$(یعنی محور قاطع هذلولی) موازی محور عرض است، ضریب زاویهٔ مجانبها برابر $\pm\frac{a}{b}$ می‌شود و داریم:

$$\frac{a}{b}=۲$$

به این ترتیب مقادیر a و b از دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} a^{۲}+b^{۲}=۴ \\ \frac{a}{b}=۲ \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a^{۲}=\frac{۱۶}{۵} \\ b^{۲}=\frac{۴}{۵} \end{array} \right.$$

ومعادلهٔ هذلولی چنین می‌شود:

$$\frac{(y-۳)^{۲}}{\frac{۱۶}{۵}}-\frac{(x-۲)^{۲}}{\frac{۴}{۵}}=۱$$

ومعادلهٔ هذلولی مزدوج آن:

$$\frac{(x-۲)^{۲}}{\frac{۴}{۵}}-\frac{(y-۳)^{۲}}{\frac{۱۶}{۵}}=۱$$

ویا :

$$\begin{cases} y=۳\pm۲\sqrt{x^{۲}-۴x+\frac{۲۴}{۵}} & \text{(معادلهٔ هذلولی)} \\ y=۳\pm۲\sqrt{x^{۲}-۴x+\frac{۱۶}{۵}} & \text{(معادلهٔ هذلولی مزدوج)} \end{cases}$$

برای رسم هذلولی کافی است مرکز و محورهای هذلولی را رسم کنیم وبه کمك مقادیر a و b، مستطیل مجانبها را بدست آوریم. دراینصورت بادر دست داشتن رأسهای حقیقی ومجانبهای هذلولی، بسادگی می‌توان آنرا رسم کرد (در شکل ۶۶، هذلولی مزدوج، خطچین رسم شده‌است).

مثال۶. هذلولی $y=\frac{x^{۲}}{x+۱}$ مفـروض است : ۱) مختصات رأسهـا و کانونهای این‌هذلولی راپیداکنید. ۲) معادلهٔ هذلولی‌مزدوج آنرا بنویسید.

حل. ۱) معادلهٔ مجانبهـای این هذلـولی عبارتست از $x=-۱$ و $y=x-۱$. محل برخورد این‌دومجانب، یعنی $\omega(-۱,-۲)$،مرکزهذلولی است. محورهای هذلولی، همان نیمسازهای مجانبهای آنست وبنابراین بسادگی معادلهٔ محورها بدست می‌آید:

$$y=(\sqrt{۲}+۱)x+\sqrt{۲}-۱ \qquad \text{(محور قاطع)}$$

$$y=-(\sqrt{۲}-۱)x-\sqrt{۲}-۱ \qquad \text{(محور غیر قاطع)}$$

رأسهای هذلولی ازبرخورد محورقاطع، باخود هذلولی، یعنی ازحل دستگاه‌دو معادله دومجهولی زیر، بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^{۲}}{x+۱} \\[2ex] y=(\sqrt{۲}+۱)x+\sqrt{۲}-۱ \end{cases}$$

اگررأسهای هذلولی‌را AوA' فرض‌کنیم، مختصات‌آنها چنین‌است:

$$A\left|\begin{array}{l} -\frac{۱}{۲}(۲-\sqrt[۴]{۸}) \\[2ex] \frac{۱}{۲}(\sqrt[۴]{۸}+۲\sqrt[۴]{۲}-۴) \end{array}\right. \quad \text{و} \quad A'\left|\begin{array}{l} -\frac{۱}{۲}(۲+\sqrt[۴]{۸}) \\[2ex] -\frac{۱}{۲}(\sqrt[۴]{۸}+۲\sqrt[۴]{۲}+۴) \end{array}\right.$$

روشن‌است‌که رأسهای حقیقی هذلولی،غیرازنقطه‌های ماکزیمم ومی‌نیمم منحنی آنست (نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم منحنی این هذلولی، روی دستگاه محورهای مختصات، عبارتند از $M(۰,۰)$ و $N(-۲,-۴)$).

بادردست داشتن مختصات مرکز ورأسها، می‌توان مقدارثابت هذلولی‌را پیداکرد:

$$a^{۲}=\omega A^{۲}=[\tfrac{۱}{۲}(\sqrt[۴]{۸}+۲\sqrt[۴]{۲}-۴)+۲]^{۲}+$$

$$+[-\tfrac{۱}{۲}(۲-\sqrt[۴]{۸})+۱]^۲=\tfrac{۱}{۴}(\sqrt[۴]{۸}+۲\sqrt[۴]{۲})^۲+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=$$
$$=۲(\sqrt{۲}+۱)$$

برای محاسبهٔ مقدار b، باید مماس دریکی ازرأسهای حقیقی هذلولی‌را رسم کرد وروی این‌مماس، فاصلهٔ نقطهٔ تماس تامحل برخورد مماس بامجانب را بدست آورد (خاصیت مستطیل مجانبها). معادلهٔ مماس برهذلولی دررأس A را پیدا می‌کنیم. این‌مماس برمحور قاطع هذلولی عموداست وبنابراین ضریب‌زاویهٔ‌آن مساوی $(\sqrt{۲}-۱)-$ می‌شود. با در دست داشتن نقطهٔ تماس و ضریب زاویهٔ خط مماس، معادلهٔ آنرا می‌نویسیم:

$$y=-(\sqrt{۲}-۱)x+۲\sqrt[۴]{۲}-\sqrt{۲}-۱ \qquad \text{(مماس در رأس A)}$$

مختصات محل برخورد این‌مماس با مجانب $x=-۱$ را پیدا می‌کنیم. اگر این‌نقطهٔ برخورد را P بنامیم، خواهد شد:

$$P(-۱\,,\,۲\sqrt[۴]{۲}-۲)$$

وازآنجا بسادگی‌مقدار $b^۲$ بدست می‌آید:

$$b^۲=AP^۲=$$
$$=[\tfrac{۱}{۲}(\sqrt[۴]{۸}+۲\sqrt[۴]{۲}-۴)-۲\sqrt[۴]{۲}+۲]^۲+[-\tfrac{۱}{۲}(۲-\sqrt[۴]{۸})+۱]^۲=$$
$$=\tfrac{۱}{۴}(\sqrt[۴]{۸}-۲\sqrt[۴]{۲})^۲+\tfrac{۱}{۴}(\sqrt[۴]{۸})^۲=۲(\sqrt{۲}-۱)$$

اگرفاصلهٔ دوکانون هذلولی‌را ۲c بگیریم، داریم:

$$c^۲=a^۲+b^۲=۴(\sqrt{۲}+۱)^۲+۴(\sqrt{۲}-۱)^۲=۲۴$$

کانون هذلولی روی محور قاطع‌آنست، وبنابراین اگرطول این‌نقطه را α بگیریم،عرض‌آن مساوی $(\sqrt{۲}+۱)\alpha+\sqrt{۲}-۱$ می‌شود؛ چون ωFمساوی c (نصف فاصلهٔ‌کانونی) است، بنابراین:

$$\omega F^2=c^2 \Longrightarrow [(\sqrt{2}+1)(\alpha+1)]^2+(\alpha+1)^2=24,$$

$$(\alpha+1)^2=\frac{24}{2(2+\sqrt{2})}=6(2-\sqrt{2}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha=-1\pm\sqrt{6(2-\sqrt{2})}$$

ودرنتیجه مختصات کانونهای هذلولی بسادگی بدست می‌آید:

$$F\left|\begin{array}{l}-1+\sqrt{6(2-\sqrt{2})}\\ -2+\sqrt{6(2+\sqrt{2})}\end{array}\right. \quad \text{و} \quad F'\left|\begin{array}{l}-1-\sqrt{6(2-\sqrt{2})}\\ -2-\sqrt{6(2+\sqrt{2})}\end{array}\right.$$

۲) مجانبهای‌هذلولی‌مزدوج هم، همان‌خطهای $y=x-1$ و $x=-1$ است. بنابراین‌معادلهٔ هذلولی مزدوج به‌این‌صورت است:

$$y=\frac{(x+1)(x-1)+m'}{x+1}=\frac{x^2+m}{x+1}$$

مقدار ثابت یک‌هذلولی، یعنی $2a$، همان مقدار $2b$ درهذلولی مزدوج آنست.

بنابراین برای هذلولی مزدوج داریم:

$$a^2=2(\sqrt{2}-1)$$

ضمناً معادلهٔ محورقاطع در این هذلولی مزدوج چنین است (همان محور غیر قاطع درهذلولی اصلی):

$$y=-(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}-1$$

ازحل معادلهٔ محورقاطع بامعادلهٔ هذلولی ، مختصات رأسهای هذلولی مزدوج بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2+m}{x+1} \\ y=-(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}-1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}x+m+\sqrt{2}+1=0$$

وازآنجا:

$$x=\frac{۱}{۲}\left(-۲\pm\sqrt{-۲\sqrt{۲}(m+۱)}\right)$$

ومختصات یکی‌از رأسها چنین می‌شود:

$$A\left|\begin{array}{l}-\frac{۱}{۲}\left(۲+\sqrt{-۲\sqrt{۲}(m+۱)}\right)\\ -۲+\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}-۱)\sqrt{-۲\sqrt{۲}(m+۱)}\end{array}\right.$$

که باتوجه به‌مختصات مرکزاین هذلولی: $\omega(-۱ \text{ و } -۲)$، می‌توان نوشت:

$$a^۲=\omega A^۲=\frac{۱}{۴}(\sqrt{۲}-۱)^۲[-۲\sqrt{۲}(m+۱)]+$$

$$+\frac{۱}{۴}[-۲\sqrt{۲}(m+۱)]=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۲}-۱)^۲(m+۱)-$$

$$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(m+۱)=-۲(\sqrt{۲}-۱)(m+۱)$$

که اگراین مقداررا مساوی مقدار $a^۲$ قراردهیم، m بدست می‌آید:

$$-۲(\sqrt{۲}-۱)(m+۱)=۲(\sqrt{۲}-۱) \implies m=-۲$$

ودرنتیجه، معادلهٔ هذلولی مزدوج چنین است:

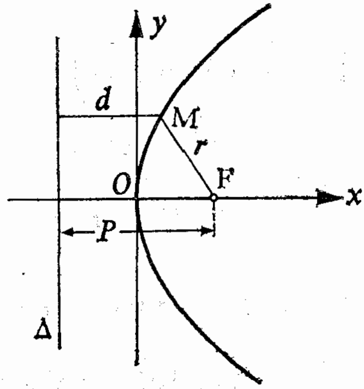
$$y=\frac{x^۲-۲}{x+۱}$$

III. سهمی

سهمی‌مکان هندسی نقطه‌هایی‌ازصفحه است‌که از یك نقطه ثابت (کانون سهمی) ویك خط ثابت (خط هادی سهمی)، بیك فاصله باشند.

فاصلهٔ کانون تاخط هادی سهمی را به p نشان می‌دهند و پارامتر سهمی می نامند.

ساده‌ترین معادلهٔ سهمی. اگر امتداد خطی‌راکه از کانون سهمی برخط



شکل ۶۷

هادی‌آن عمود می‌شود، محور طول و وسط فاصلهٔ کانون تاخط هادی را مبداء مختصات بگیریم (شکل ۶۷)، بسادگی معلوم می‌شود (مسألهٔ ۴۶ صفحهٔ ۵۶ را ببینید) که معادلهٔ سهمی به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$y^{2}=2px$$

در اینحالت، محور طول، تنها محور سهمی و مبداء مختصات، رأس سهمی خواهد بود.

روشن است که اگر، رأس سهمی‌را $S(\alpha,\beta)$ و محورآنرا موازی محور طول بگیریم، برای معادلهٔ سهمی خواهیم داشت:

$$(y-\beta)^{2}=2p(x-\alpha)$$

واگر محورسهمی را موازی محور عرض بگیریم:

$$(x-\alpha)^{2}=2p(y-\beta)$$

بسادگی می‌توان ثابت کرد، که اگر تقعرمنحنی سهمی بطرف جهت مثبت‌محور طول یاعرض باشد، ضریب $2p$، در طرف دوم معادلهٔ سهمی، مثبت و در حالت عکس، منفی‌خواهد بود.

هرخطی موازی بامحور سهمی، تنهاآنرا دریك نقطه قطع می‌کند و هر

خطی که بامحور سهمی‌موازی نباشد، دونقطهٔ برخورد (حقیقی یاموهومی) با سهمی خواهد داشت.

درسهمی $y^۲=۲px$ $(p>۰)$، شعاع کانونی هرنقطه از سهمی برابر است با:

$$r=x+\frac{p}{۲}$$

ومعادلهٔ مماس براین‌سهمی، درنقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ به‌اینصورت درمی‌آید:

$$yy_۱=p(x+x_۱)$$

مثال۷. کانون یك سهمی $F(۲,۱)$ و معادلهٔ Δ خط هادی آن $y=۳$ است. معادلهٔ سهمی‌را پیدا کنید.

حل. چون خط هادی سهمی، موازی محورطول ودرنتیجه، محورسهمی موازی محورعرض است، معادلهٔ سهمی‌به اینصورت خواهدبود:

$$(x-\alpha)^۲=۲p(y-\beta)$$

ازطرف دیگر وضع استقرارکانون نسبت‌به‌خط هادی،روشن‌می‌کند که تقعرسهمی بسمت جهت منفی محور عرض‌است وبنابراین‌ضریب $۲p$ درسمت راست تساوی عددی منفی خواهد بود.

رأس سهمی، وسط پاره‌خط عمودی است که از F برخط Δ فرودآید. پای این‌عمود $H(۲,۳)$ وبنابراین وسط پاره‌خط FH (رأس‌سهمی) $S(۲,۲)$ می‌شود. ازطرف دیگر، قدرمطلق مقدار p برابراست بافاصلهٔ‌کانون ازخط هادی، یعنی ۲. به‌این ترتیب معادلهٔ سهمی‌مورد نظرچنین می‌شود:

$$(x-۲)^۲=-۴(y-۲)$$

ویا:

$$y=-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۱$$

مثال۸. $F(۱,۰)$ کانون و $y=x+۱$ (Δ)، معـادلهٔ خط هادی یك سهمی است:

a) معـادلهٔ سهمی را بنویسید و مختصـات نقطهٔ ماکزیمـم منحنی آنرا

پیدا کنید.

b) اگرمحورهای مختصات رابه‌اندازه ۴۵ درجه دورمبداء و درجهت مثلثاتی دوران‌دهیم، بدون استفاده ازرابطه‌های مربوط به‌دوران محورها،معادلهٔ جدید سهمی‌را پیدا کنید.

حل. محور سهمی درامتداد عمودی است که ازکانون برخط هادی فرود آید وبنابراین ضریب زاویه‌ای مساوی ۱ — ومعادله‌ای به اینصورت دارد:

$$y=-x+۱ \qquad \text{(محور سهمی)}$$

ازحل معادلهٔ محور سهمی بامعادلهٔ خط‌هادی، مختصات نقطهٔ H، پای‌عمودی که از F بر Δ فرودآید، بدست می‌آید: $H(۰,۱)$، درنتیجه، مختصات‌رأس S، وسط FH چنیـن می‌شود: $S(\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲})$. ضمناً بسادگی معلوم می‌شود که در این سهمی: $p=\sqrt{۲}$.

a) برای پیدا کردن معادلهٔ سهمی، یکی از نقطه های آنرا $M(x,y)$ می‌گیریم؛ اگرفاصلهٔ این‌نقطه ازخط هادی را d فرض کنیم، باید داشته‌باشیم:

$$d=MF$$

$$MF^۲=(x-۱)^۲+y^۲\ ,\ \ d^۲=\frac{(x-y+۱)^۲}{۲}\ ;$$

$$(x-۱)^۲+y^۲=\frac{(x-y+۱)^۲}{۲}\ ;$$

که ازآنجا بدست می‌آید:

$$x^۲+y^۲+۲xy-۶x+۲y+۱=۰$$

ویا:

$$y=-x-۱\pm۲\sqrt{۲x} \qquad (۱)$$

بسادگی معلوم می‌شودکه تابع $y=-x-۱-۲\sqrt{۲x}$ همـواره نزولی و تابع $y=-x-۱+۲\sqrt{۲x}$ ماکزیممی به‌مختصات $(۲,۱)$ دارد.

b) وقتی که محورهای مختصات را درجهت مثلثاتی وبه‌اندازهٔ ۴۵ درجه

دوران دهیم، دردستگاه جدید XOY، محورطول موازی خط هادی سهمی و محورعرض‌موازی‌محور سهمی‌می‌شود (زیرا خط هادی‌باجهت‌مثبت‌محورطول در دستگاه قدیم، زاویه‌ای مساوی ۴۵درجه می‌سازد). ضمناً جهت تقعر سهمی در دستگاه جدید بطرف جهت منفی محور عرض‌است. بنابراین معادلهٔ این سهمی چنین است:

$$(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta) \quad (p<0)$$

مقدار p، که معرف یك فاصله‌است، در دو دستگاه قدیم و جدید یکی‌است، یعنی $p=\sqrt{2}$. در دستگاه محورهای جدید، محور طول از نقطه S، رأس سهمی، می‌گذرد (زیرا $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ روی نیمسازربع‌اول در دستگاه قدیم قرارداشت).

فاصلهٔ این‌نقطه تامبداء مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است و بنابراین در دستگاه جدید: $S(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ می‌شود. به‌این‌ترتیب معادلهٔ جدید سهمی چنین خواهد بود:

$$(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = -2\sqrt{2}y$$

ویا:

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

تمرین

۳۸۹. درسهمی $y=ax^2+bx+c$، مطلوبست مختصات رأس‌وکانون ومعادلهٔ خط هادی.

۳۹۰. a) ثابت‌کنید منحنی‌تابع $y=\frac{x+1}{x-1}$، یك هذلولی است. b) مختصات مرکز،رأسهای حقیقی،کانونهاومعادلهٔ مجانبها ومحورهای این‌هذلولی را بنویسید. c) ثابت‌کنید مکان هندسی نقطه‌هایی ازصفحهٔ محورهای مختصات که ازآنجا بتوان دومماس عمود برهم براین هذلولی رسم‌کرد، دایره‌ای است

به شعاع صفر(دایرهٔ مؤثر). d) معادلهٔ هذلولی مزدوج این‌هذلولی رابنویسید.

e) محورهـای مختصات را به اندازهٔ $\frac{۳\pi}{۴}$ در جهت مثلثاتـی، دور مبداء مختصات، دوران داده‌ایم، بدون استفاده از رابطه‌های مربوط به‌دوران، معادلهٔ جدید هذلولی را بنویسید.

۰۳۹۱ a) ثابت کنید ساده‌ترین معادلهٔ بیضی، هذلولی وسهمی‌رامی‌توان به اینصورت نوشت:

$$Ax^۲+By^۲+Cx+D=۰$$

b) طبق تعریف، قطر یك منحنی درجه دوم عبارتست از مکان هندسی وسط وترهای متوازی. دراینصورت ثابت کنیدکه قطر یك منحنی درجه دوم، یك خط راست است. وضع قطر را در هریك از حالتهای دایره ، بیضی ، هذلولی و سهمی بررسی کنید. اگر طبق تعریف قبول کنیم که: دو قطر را مزدوج هم گویندکه هریك از آنها، وترهای موازی دیگری را نصف‌کند، رابطهٔبین ضریب زاویهٔ قطرهای مزدوج رادرهر یك ازحالتهای بیضی، هذلولی وسهمی پیدا کنید.

۰۳۹۲ این‌دوبیضی مفروض‌است:

$$\frac{x^۲}{a^۴}+\frac{y^۲}{b^۴}=۱ \quad و \quad \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

ثابت کنید قطرهای مزدوج بیضی‌اول (یاامتداد آنها)، بیضی دوم‌را در نقطه‌هایی قطع می‌کندکه مماس درآنها برهم عمودند.

۰۳۹۳ خطی ازکانون هذلولی عبور کرده است. از رأسهای هذلولی ، مماسهایی برهذلولی رسم‌کرده‌ایم تااین‌خط رادر نقطه‌های P و Q قطع کنند. ثابت کنید، دایرهٔ به‌قطر PQ برهذلولی مماس است.

۰۳۹۴ سه‌رأس متوالی‌یك لوزی بترتیب‌روی ضلعهای AB، BC وCD ازمربع مفروضی به‌ضلع مساوی‌واحد، قرارگرفته‌اند. مطلوبست محاسبهٔمساحت شکلی که باجابجاشدن‌سه‌رأس‌این‌لوزیهابه‌وسیلهٔرأس‌چهارم به وجود آمده است.

۰۳۹۵ هذلولی متساوی‌الساقین γ به‌مرکز O داده شده‌است:

۱) نقطهٔ P راروی هذلولی انتخاب کرده‌ایم وبه مرکز P وشعاع‌مساوی

$2OP$ دایره‌ای رسم کرده‌ایم. ثابت کنید که این دایره، هذلولی را درچهار نقطه قطع می کند که سه تا ازآنها، رأسهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

۲) مثلث‌متساوی‌الاضلاعی پیدا کنید که‌سه‌رأس آن بر هذلولی‌متساوی‌الساقین مفروض واقع ویکی ازراههای‌آن معلوم باشد.

۳۹۶. سه نقطهٔ A،B،C روی هذلولی متساوی‌الساقینی داده شده‌است. از نقطهٔ A خطی موازی‌قطر نظیر وترهای‌موازی BC رسم‌می کنیم. بهمین‌ترتیب از نقطه‌های BوCهم خطهایی رسم می کنیم. ثابت کنید، سه خطی که به‌این‌ترتیب رسم شوند، روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC بهم می‌رسند.

۳۹۷. معادلهٔ کلی منحنی‌های درجه دوم را درنظرمی گیریم:

$$f(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

ثابت کنید، مرکزتقارن منحنی این تابع (درصورت وجود)، ازحل دستگاه‌زیر، نسبت به‌مجهولهای xوy، بدست می‌آید:

$$f'_x=0 \quad \text{و} \quad f'_y=0$$

(f'_x، یعنی مشتق $f(x,y)$ نسبت به‌x، به شرطی که y را ثابت فرض کنیم)، ازاینجا نتیجه بگیرید که اگرمعادلهٔ منحنی درجه دوم را به‌این‌صورت بنویسیم:

$$y=mx+n\pm\sqrt{px^2+qx+r}$$

مختصات مرکزتقارن: $\omega(-\frac{q}{2p}$ و $n-\frac{mq}{2p})$ می‌شود.

۳۹۸. ثابت کنید که درمنحنی درجه دوم

$$y=mx+n\pm\sqrt{px^2+qx+r} \quad (p>0)$$

اگرمعادلهٔ مجانبها را به‌صورت $y=ax+b$ بگیریم، داریم:

$$a=m\pm\sqrt{p}\ ;\ b=\pm\frac{q}{2\sqrt{p}}+n$$

۳۹۹. منحنی تابع $y^2=ax^2+bx+c$ را بررسی کنید.

۴۰۰. خط d به‌معادلهٔ $(m^2-2)x-8my+4(m^2+1)=0$

مفروض است.

۱) مطلوبست مکان هندسی نقطه‌هایی ازصفحهٔ محورهای مختصات، که از هر کدام‌آنها، تنها یکی ازخطهای (d)می‌گذرد. ناحیه‌هایی ازصفحهٔمحورهای مختصات را پیدا کنیدکه ازآنجا دوخط ازخطهای d بگذرد ویا خطی عبورنکند.

۲) اگر M نقطه‌ای ازصفحهٔمحورهای‌مختصات باشد. که ازآنجادونمونه ازخطهای d بگذرد، ثابت کنیدکه هردوخط برمکان قسمت اول مماس‌اند.

۳) مکان هندسی نقطه‌هایی ازصفحه را پیداکنیدکه دوخطی از آنجا از نوع خطهای d می‌گذرد، برهم عمود باشند.

۴۰۱. معادلهٔ دایره‌ای را پیداکنیدکه ازسه‌نقطهٔ $A(0,2)$ ، $B(1,1)$ و $C(2,-2)$ بگذرد.

۴۰۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسیدکه $C(5,4)$ مرکزآن وضمناً بردایرهٔ $x^2+y^2=4x+5$ مماس خارج باشد.

۴۰۳. با چه شرطی، این دودایره‌برهم عمودند:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R'^2\end{cases}$$

۴۰۴. مختصات مرکزتجانس این دودایره را پیداکنید:

$$\begin{cases}x^2+y^2-6x+2y+6=0\\ x^2+y^2+4x+3=0\end{cases}$$

۴۰۵. معادلهٔ هریك ازمماس مشترکتهای این دودایره را بنویسید:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1 \quad ; \quad (x+2)^2+(y+1)^2=9$$

۴۰۶. مطلوبست محاسبهٔ طول مماسی که از نقطهٔ $M(2,6)$ بر دایرهٔ $(x+3)^2+(y-2)^2=25$ رسم می‌شود.

۴۰۷. ثابت کنید، معادلهٔ

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2+$$
$$+\lambda[(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-R_1^2]=0$$

نمایش یك دسته دایره است. عدد λ چه نسبتی را مشخص می‌کند؟

۴۰۸. معادلهٔ دایره‌ای را پیدا کنید که از نقطهٔ $(-۳,۱)$ عبور کند و با دودایرهٔ

$$(x-۵)^۲+y^۲=۵ \quad \text{و} \quad x^۲+(y-۱۰)^۲=۱۳۰$$

یك محور اصلی داشته باشد.

۴۰۹. دربیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$، مثلث $A_۱MA_۲$ را محاط کرده‌ایم. ضلع $A_۱A_۲$، ازاین مثلث برقطربزرگتر بیضی‌منطبق است ورأس M روی‌محیط بیضی حرکت می‌کند. مطلوبست‌مکان هندسی مرکز ثقل این‌مثلث.

۴۱۰. نقطهٔ P روی محیط دایرهٔ $x^۲+y^۲=R^۲$ حرکت می‌کند. نقطهٔ متغیر M چنانست که همیشه عرض نقطهٔ P را به‌نسبت λ تقسیم می‌کند. مطلوبست مکان نقطهٔ M.

۴۱۱. میلهٔ $OP=p$ باسرعت زاویه‌ای ω دور نقطهٔ O (مبداء مختصات) می‌چرخد. میلهٔ دیگر $PQ=q$ هم‌با سرعت‌زاویه‌ای $-\omega$ دور نقطهٔ P می‌چرخد، مطلوبست مسیر نقطهٔ Q، به شرطی که در لحظهٔ شروع حرکت، هردو میله بر محورطول منطبق باشند و نقطهٔ P بین دونقطهٔ O و Q قرار گرفته‌باشد. حالتهای $p>q$ ، $p<q$ و $p=q$ را توضیح دهید.

۴۱۲. دوانتهای پاره‌خطی به طول ثابت، روی ضلعهای زاویهٔ قائمه‌ای حرکت می‌کنند. مطلوبست‌مکان نقطهٔ M واقع‌براین پاره‌خط. اگر نقطهٔ M بر امتداد پاره‌خط انتخاب شود، مکان آن چیست؟

۴۱۳. مختصات رأسهای مثلث ABC داده شده است: $A(۰\ ,\ ۰)$ ، $B(۲,۲)$، $C(-۲,۲)$ نقطهٔ M چنان حرکت می‌کند که مجموع مربعهای فاصله‌های آن ازسه‌ضلع مثلث، همواره برابرمقدارثابت ۱۶ است. مکان M را پیدا کنید.

۴۱۴. مطلوبست مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از نقطهٔ $A(۳\ ,\ ۰)$ بگذرند و بردایرهٔ $x^۲+y^۲=۲۵$ مماس باشند.

۴۱۵. معادلهٔ هذلولی‌را بنویسید که‌از کانونهای بیضی $\frac{x^۲}{۱۶۹}+\frac{y^۲}{۱۴۴}=۱$ بگذرد ورأسهای این بیضی، کانونهای آن باشند.

۴۱۶. هذلولی $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱$ داده شده است. مطلوبست:

۱) مختصات کانونها ورأسهای هذلولی،

۲) معادلهٔ مجانبها وخطهای هادی،

۳) محاسبهٔ خروج ازمرکز آن،

۴) معادلهٔ هذلولی مزدوج ومحاسبهٔ خروج ازمرکز آن.

۴۱۷. معادلهٔ مجانبهای یك هذلولی $y=\pm\frac{۱}{۲}x$ است. این هذلولی‌از نقطهٔ $M(۱۲\ ,\ ۳\sqrt{۳})$ می‌گذرد، معادلهٔ آنرا پیدا کنید.

۴۱۸. روی هذلولی $\frac{x^۲}{۱۶}-\frac{y^۲}{۹}=۱$، نقطه‌ای پیدا کنید که:

۱) شعاع بردارهای کانونی آن برهم عمود باشند.

۲) فاصلهٔ آن ازکانون چپ دوبرابرفاصلهٔ آن ازکانون راست باشد.

۴۱۹. خروج از مرکزهذلولی $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ چه شرطی داشته‌باشد، تا روی شاخهٔ راست‌آن‌نقطه‌ای بیك‌فاصله ازکانون راست وخط هادی‌چپ، وجود داشته باشد؟

۴۲۰. ثابت کنید که حاصلضرب فاصله‌های هر نقطهٔ هذلولی تا دومجانب آن، مقداری است ثابت.

۴۲۱. قطری ازهذلولی $۹x^۲-۱۶y^۲=۵۷۶$ را پیدا کنید که طولی مساوی ۲۰ داشته باشد.

۴۲۲. ازنقطهٔ $A(۳, -۱)$، وتری ازهذلولی $\frac{x^۲}{۴}-y^۲=۱$ رسم کنید که دراین نقطه نصف شود.

۴۲۳. معادلهٔ هذلولی را بنویسید که برخط $5x-6y-8=0$ مماس و معادلهٔ مجانبهای آن $y=\pm\frac{1}{2}x$ باشد.

۴۲۴. ثابت کنید که اگر بیضی وهذلولی، کانونهای مشترك داشته باشند، برهم عمودند، یعنی مماسهای بردومنحنی درهریك از نقطه‌های برخورد، برهم عمودند.

۴۲۵. ثابت کنید، حاصلضرب‌فاصله‌های دوکانون هذلولی، ازمماس بر آن، مقداری است ثابت.

۴۲۶. دومیله، در دوجهت مخالف، دورنقطه‌های ثابت A و B طوری می‌چرخند، که همیشه با خط AB، زاویه‌هایی متمم‌یکدیگرمی‌سازند. مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ برخورد دومیله.

۴۲۷. مطلوبست مکان هندسی مرکز دایره‌هایی‌که ازدوضلع یك زاویهٔ قائمه، پاره‌خطهایی به‌طولهای معلوم $2a$و$2b$ جدا می‌کنند.

۴۲۸. ثابت کنید، مکان هندسی مرکزدایره‌هایی که بریك دایرهٔ مفروض مماس خارج باشند وازنقطهٔ مفروض بگذرند، یك هذلولی است.

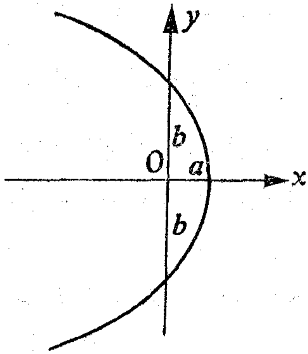
۴۲۹. طول ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاعی را پیدا کنید که در سهمی $y^2=2px$ محاط باشد.

۴۳۰. مطلوبست کوتاهترین فاصلهٔ سهمی $y^2=64x$ از خط $4x+3y+46=0$.

۴۳۱. معادلهٔ مماسهای مشترك بیضی $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ و سهمی $y^2=\frac{20}{3}x$ را پیدا کنید:

۴۳۲. ثابت کنید، اگر کانونها وامتداد محورهای دو سهمی برهم‌منطبق، ولی جهت تقعر دوسهمی برخلاف یکدیگر باشد، دو سهمی برهم عمودند.

۴۳۳. معادلهٔسهمی را بنویسید که محورطول، محورتقارن آن باشد وروی



شکل ۶۸

محورطول پاره‌خط $+a$ وروی‌محور عرض پاره خطهای $\pm b$ را جدا کند (شکل ۶۸).

۴۳۴. یك پل‌چنان ساخته‌شده است که قوس دهانهٔ آن، قوسی از یك سهمی است. اگر طول دهانهٔ پل ۲۴ متروارتفاع آن ۶ متر باشد ، پارامتر سهمی را پیدا کنید.

۴۳۵. معادلهٔ منحنی درجه دومی را بنویسید که از نقطه‌های $(0,0)$، $(2,0)$، $(0,-1)$، $(1,-2)$ و $(3,-1)$ می‌گذرد.

۴۳۶. معادلهٔ منحنی درجه دومی را بنویسید که ازمبداءِ مختصات بگذرد وبرخط $4x+3y+2=0$ درنقطهٔ $(1,-2)$ وبرخط $x-y-1=0$ در نقطهٔ $(0,-1)$ مماس باشد.

۴۳۷. معادلهٔ خطهایی را بنویسید که ازمبداءِ مختصات بگذرد وبا منحنی $6x^2-xy-y^2+5x-3y+2=0$ تنها یك نقطهٔ برخورد داشته‌باشند.

۴۳۸. خطهایی که تنها دریك نقطه، منحنی $x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0$ را قطع می‌کنند، چه‌زاویه‌ای با محورطول می‌سازند؟

حل مسأله‌ها

$AB=۵ ۰۱$ می‌شود. اگر $C(x,y)$ بگیریم داریم:

$$AC=\sqrt{(x+۱)^۲+(y+۱)^۲}\quad;$$

$$BC=\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۳)^۲}$$

و چون مثلث متساوی‌الاضلاع‌است، بـاید داشته باشیم $AC=BC=AB$. $AB=۵$ است و بنابراین به‌دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر می‌رسیم[۱].

$$\begin{cases}(x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۲۵\\(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۲۵\end{cases}\qquad(۱)$$

از تفاضل این دو معادله، به معادلهٔ درجه اول $۶x+۸y=۱۱$ و یـا معادلهٔ $y=\frac{۱۱-۶x}{۸}$ می‌رسیم. اگراین مقدارy را دریکی ازدومعادلهٔ دستگاه (۱) ومثلا معادلهٔ اول، قراردهیم، پس ازساده‌کردن خواهیم داشت:

$$۴x^۲-۴x-۴۷=۰\implies x=\frac{۱\pm۴\sqrt{۳}}{۲}$$

---

۱) معادله‌های این دستگاه عبارتند از معادله‌های دایره‌هایی به شعاع ۵ وبه مرکزهای A و B. وروشن است که نقطهٔ C یکی ازنقطه‌های برخورد این‌دو دایره است.

ودرنتیجه دوجواب برای نقطهٔ C بدست می‌آید:

$$C_۱\left(\frac{۱+۴\sqrt{۳}}{۲}\ ,\ \frac{۲-۳\sqrt{۳}}{۲}\right),$$

$$C_۲=\left(\frac{۱-۴\sqrt{۳}}{۲}\ ,\ \frac{۲+۳\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

مساحت هریك ازمثلثهای $ABC_۱$ و $ABC_۲$ چنین می‌شود:

$$S=\frac{۱}{۲}\left|\left(-۶+\frac{۸-۳\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۳-۴\sqrt{۳}}{۲}+\frac{-۳\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۳+۴\sqrt{۳}}{۲}\right)\right|=\frac{۲۵}{۴}\sqrt{۳}$$

روشن است که دراینجا می‌شد مساحت مثلث را با توجه به رابطهٔ $S=\frac{۱}{۲}ab\sin C$ بدست آورد:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۵\times \sin ۶۰^\circ=\frac{۲۵}{۴}\sqrt{۳}$$

۲. مختصات‌رأس C را (x,y) فرض کنید ودومعادلهٔ زیررا تشکیل‌دهید:

$$\begin{cases} CA=CB \\ CA^۲+CB^۲=AB^۲ \end{cases}$$

که پس ازساده‌کردن چنین می‌شود:[1]

$$\begin{cases} ۸x-۶y+۷=۰ \\ (x+۱)^۲+(y-۴)^۲=\frac{۲۵}{۲} \end{cases}$$

---

۱) معادلهٔ اول این دستگاه، معادلهٔ خط عمودمنصف AB و معادلهٔ دوم، معادلهٔ دایرهٔ به مرکز A (یا B) وبه شعاع $\frac{۲۵}{\sqrt{۲}}$ است.

جواب: $C_1(\frac{۵}{۲}, \frac{۹}{۲})$ ، $C_۲(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$.

۳. مختصات (x, y) رأس C ازدستگاه زیر بدست خواهدآمد[1]:

$$\begin{cases} AC = AB \\ AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x-۳)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱۳ \\ x^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۶ \end{cases}$$

جواب: $C_1(۵,۴)$ و $C_۲(۱,-۲)$.

۴. نسبت به‌نیمسازربع اول وسوم:

$A_1(۲,۴)$ و $B_1(۱,-۳)$ و $C_1(-۲,۰)$

ونسبت به‌نیمسازربع دوم وچهارم:

$A_۲(-۲,-۴)$ و $B_۲(-۱,۳)$ و $C_۲(۲,۰)$

۵. این همان مسألهٔ ۲، منتهی به‌زبان دیگری است.

جواب: $B(-۴,۲)$ و $D(-۱,۱)$.

۶. a) مجموعهٔ نقطه‌های واقع برمحورهای مختصات.

b) مجموعهٔ نقطه‌های واقع درربع اول وسوم(نقطه‌های واقع برمحورها عضوهای این مجموعه نیستند).

c) نقطه‌های واقع در ربع دوم و چهارم (نقطه‌های روی محورها استثنا هستند).

d) مجموعهٔ نقطه‌های واقع برنیمسازربع اول وسوم.

e) مجموعهٔ نقطه‌های‌واقع در سمت‌چپ‌نیمساز ربع اول وسوم به استثنای نقطه‌های واقع براین نیمساز (استدلال کنند).

f) نقطه‌های واقع برنیمساز ربع دوم وچهارم به‌استثنای نقطه‌های واقع

---

۱) معادلهٔ اول دستگاه، معادلهٔ دایره‌ای است به مرکز A وشعاع مساوی طول AB ومعادله‌دوم‌عبارتست‌ازمعادله‌دایرهٔ به‌مرکزB و شعاع مساوی $AB\sqrt{۲}$. نقطه C یکی از نقطه‌های برخورد این دو دایره است.

برخود این نیمساز.

g) مجموعهٔ نقطه‌های واقع در سمت راست نیمساز ربع دوم و چهارم بجز نقطه‌های واقع برخود این نیمساز (استدلال کنید).

h) تنها مبداء مختصات.

i) نقطه‌های واقع بر نیمسازهای چهار مربع.

j) مجموعهٔ همهٔ نقطهٔهای صفحهٔ محورهای مختصات به استثنای مبداء مختصات.

k) مجموعهٔ نقطه‌های واقع درسمت‌چپ نیمساز ربع‌دوم و چهارم (بجز نقطه‌های واقع برخود نیمساز).

l) مجموعهٔ نقطه‌های واقع در سمت راست نیمساز اول وسوم. نقطه‌های واقع برخود نیمساز جزو مجموعه نیست.

m) این معادله را می‌توان به سادگی چنین نوشت:

$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۰$$

و روشن است که تنها مختصات نقطهٔ (۲−,۱) در آن صدق می‌کند.

n) معادله هم نسبت به x وهم نسبت به y از درجهٔ دوم است. مثلا نسبت به y منظم می‌کنیم:

$$۲۹y^۲+۲(۱۷x+۷)y+(۱۰x^۲+۸x+۲)=۰$$

مبین این معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta=(۱۷x+۷)^۲-۲۹(۱۰x^۲+۸x+۲)=$$
$$=-x^۲+۶x-۹=-(x-۳)^۲$$

که تنها در حالت $x=۳$ منجر به جواب حقیقی $y=-۲$ می‌شود. به این ترتیب تنها مختصات نقطهٔ (۲−,۳) در این معادله صدق می‌کند.

o) این معادله نسبت به y دو مجذوری است، بهمین مناسبت آنرا نسبت به y منظم می‌کنیم (معادله نسبت به x برای ماقابل حل نیست):

$$y^۴+۲(x^۲-۵)y^۲+(x^۴-۹x^۲-۴x+۲۹)=۰$$

که برای محاسبهٔ $y^۲$ به این مبین می‌رسیم:

$$\Delta=(x^{۲}-۵)^{۲}-(x^{۴}-۹x^{۲}-۴x+۲۹)=-(x-۲)^{۲}$$

وبنابراین تنها $x=۲$ قابل‌قبول است که به ازای‌آن $y=\pm ۱$ بدست می‌آید. به‌این ترتیب مختصات دونقطهٔ $(۲,۱)$ و$(۲,-۱)$ در این معادله صدق می‌کند.

p) برای حقیقی بودن y باید داشته باشیم:

$$\log\cos x\geqslant ۰\Longrightarrow \cos x\geqslant ۱$$

و چون $\cos x$ نمی‌تواندازواحد بزرگتر شود، تنها $\cos x=۱$ قابل قبول‌است که در اینصورت $y=۰$ می‌شود.

جواب: مجموعهٔ نقطه‌های $(۲k\pi,۰)$ که درآن k عدد صحیح دلخواهی است.

q) جواب: مجموعه نقطه‌های $(۰,۲k\pi+\frac{\pi}{۲})$ که درآن k عددصحیح دلخواهی است.

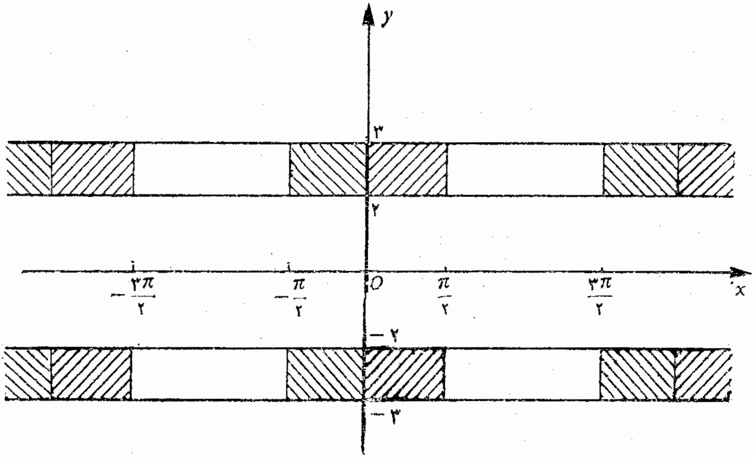
r) می‌دانیم مبنای لگاریتم نمی‌تواند منفی یا صفر یا واحد باشد، بنابراین باید داشته باشیم $۰<\cos x<۱$؛ از طرف دیگر لگاریتم عدد منفی یا صفر بی‌معناست، یعنی $|y|-۲>۰$؛ همچنین لگاریتم یك عدد در مبنای عدد کوچکتر از واحد وقتی مثبت است که مقدار جلو لگاریتم کوچکتر از واحد باشد، یعنی $|y|-۲<۱$. به این ترتیب باید این شرطها برقرار باشد:

$$\begin{cases}۰<\cos x<۱\\ ۲<|y|<۳\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}۲k\pi-\frac{\pi}{۲}<x<۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ x\neq ۲k\pi\\ ۲<y<۳\ \ ,\ \ -۳<y<-۲\end{cases}$$

مجموعهٔ نقطه‌های جواب در شکل ۶۹ نشان داده شده است.

s) دو نقطهٔ $(۱,۰)$ و $(-۱,۰)$.



شکل ۶۹

۷. جواب: $B(۰,۵)$ ، $D(-۳,۲)$.

۸. این مسأله منجر بهمسألهٔ ۵ می‌شود، زیرا اگر قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به ω را پیداکنیم، انتهای دیگر قطر AC بدست می‌آید.

جواب: $B(۰,-۵)$، $C(۷,-۴)$ ، $D(۶,۳)$.

۹. دستگاههای زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_A+x_C=۰ \\ x_A+x_B=-۲ \\ x_B+x_C=-۶ \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y_A+y_C=-۲ \\ y_A+y_B=۶ \\ y_B+y_C=-۴ \end{cases}$$

و ازآنجا بدست می‌آید: $A(۲,۴)$ ، $B(-۴,۲)$، $C(-۲,-۶)$؛ $S=۲۶$.

۱۰. جواب: $C(۰,۲)$.

۱۱. مقدمه. p و q را دو عدد طبیعی می‌گیریم که نسبت بهم اول باشند. دو حکم زیرروشن است: ۱°. هر عددصحیح را می‌توان به صورت $px+qy$ نوشت، بشرطی‌که x و y دوعدد صحیح باشند (زیرا، اگر p و q نسبت بهم‌اول و x و y و n عددهایی‌صحیح باشند، معادلهٔ $px+qy=n$ همیشه دارای جواب است)[1]. ۲°. اگر یك عدد به دوصورت $px'+qy'=px''+qy''$ وجود داشته باشد داریم: $x'-x''=kq$ و $y''-y'=kp$ که در آنها k عدد

۱) جلد اول روشهای جبر را ببینید (بخش معادله‌های سیال).

صحیح دلخواهی است (روشن‌است‌که ازتساوی $px'+qy'=px''+qy''$ بدست می‌آید: $\frac{q}{p}=\frac{x'-x''}{y''-y'}$ و چون pوq نسبت بهم اولند نتیجه می‌شود: $x'-x''=kq$ و $y''-y'=kp$).

ضمناً وقتی‌کهpوq نسبت‌بهم‌اول، وxوy عددهای صحیح غیرمنفی‌باشند، عدد صحیحی‌که به‌صورت $px+qy$ نوشته‌شود، عدد خوب وعددصحیحی‌راکه به اینصورت نتوان نوشت، عدد بد می‌گویند.

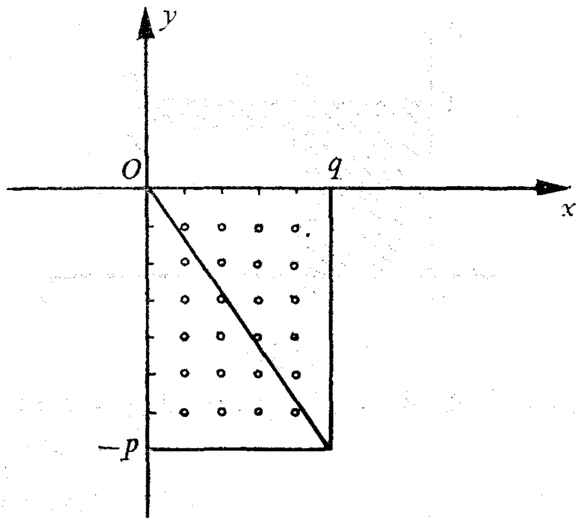
***

حالا به‌حل مسأله می‌پردازیم .

ازحکم اول ودوم مقدمه نتیجه می‌شودکه اگر x_0وy_0 دوعدد صحیح و pوq نسبت بهم‌اول باشند ، هرعدد صحیح دلخواه را تنها بیك طریق می‌توان به‌صورت $n=px_0+qy_0$ نشان داد، بشرطی‌که $0\leq x_0<q$ باشد. بنابراین اگردراین نمایش‌عدد y_0 غیرمنفی باشد، n عدد خوب است واگـر y_0 عددی منفی‌باشد، n عدد بد است.

به‌این ترتیب، تعداد عددهای طبیعی که‌نتوان‌آنها را به‌صورت $px+qy$ (xوy عددهای صحیح‌غیرمنفی) نوشت، برابراست باتعداد زوج عددهای‌صحیح $(x_0\ ,\ y_0)$ که در شرطهـای $0\leq x_0<q$، $y_0<0$ و $px_0+qy_0>0$ صدق کنند.

بسادگی می‌توان این زوج عددها را شمرد ، زیرا آنها متناظرند با نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات Oxy، که مختصات‌آنها عددهایی‌صحیح است و در داخل مثلث به‌رأسهای $(0,0)$ $(q,-p)$، $(q,0)$ قرار گرفته‌اند (شکل ۷۰). اگر قرینهٔ این مثلث را هم در نظر بگیرید، تعداد نقطه‌های با مختصات صحیح داخل مستطیل $(0,0)$، $(0,-p)$، $(q\ ,\ -p)$، $(q,0)$ دو برابر تعداد نقطه‌های داخل مثلث مذکور خواهد بود (روی قطر این مستطیل نقطه‌ای وجود ندارد، زیرا pوq نسبت بهم اول‌اند). تعداد نقطه‌های‌داخل‌این مستطیل هم‌مساوی $(q-1)(p-1)$ است.



شکل ۷۰

جواب: $\frac{(p-۱)(q-۱)}{۲}$

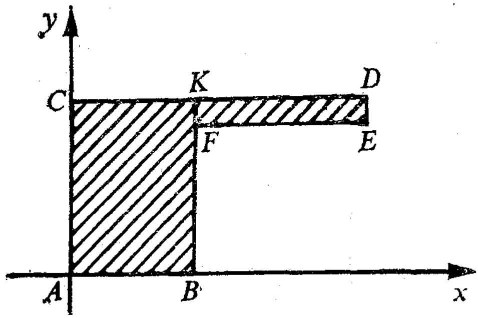
۱۲. جواب: $M(۵/۵,۴/۷۵)$، راهنمایی: ابتدا مرکز ثقل دو نقطهٔ A و B را پیدا کنید، سپس مرکز ثقل این نقطه و نقطهٔ C را بدست آورید.

۱۳. جواب:

$$\begin{cases} x=\dfrac{m_۱x_۱+m_۲x_۲+\cdots+m_nx_n}{m_۱+m_۲+\cdots+m_n} \\ y=\dfrac{m_۱y_۱+m_۲y_۲+\cdots+m_ny_n}{m_۱+m_۲+\cdots+m_n} \end{cases}$$

۱۴. مرکز ثقل مستطیل ABKC (شکل ۷۱) بسادگی بدست می‌آید: $M_۱(۵,۷)$، همچنین مرکز ثقل مستطیل KDEF: $M_۲(۱۷,۱۳)$.

نسبت جرمهای این دومستطیل (به‌علت یکنواخت بودن هر یك از آنها) متناسب با نسبت مساحتهای آنهاست: $۱۴۰:۲۸=۵:۱$ ودیگر بسادگی مختصات مرکز ثقل بدست می‌آید: $M(۷,۸)$.



شکل۷۱

۱۵. اگر نقطهٔ مجهول‌را $C(x,0)$ بگیریم، باید AوBوC بریك خط راست واقع باشند.

جواب: $C(-5,0)$

۱۶. برای متـوازی‌الاضلاع بودن چهار ضلعی، کافی است ثابت‌کنیم: $AB=CD$ و $BC=AD$، برای محاسبهٔ ارتفاع، ابتدا مساحت متوازی‌ـ الاضلاع راکه دوبرابرمساحت‌مثلث ABC است‌بدست می‌آوریم: $h=2/2$.

۱۷. اولا) بسادگی‌ثابت می‌شودکه ضریب زاویهٔ خط AB مقداری‌است ثابت وبستگی به مقدار m ندارد:

$$\text{ضریب زاویهٔ خط AB}=\frac{m+2-(2m+1)}{4m-3-m}=\frac{-(m-1)}{3(m-1)}=-\frac{1}{3}$$

یعنی‌خط AB باتغییرm بموازات خط جابجا می‌شود.

ثانیاً) برای‌اینکه مثلثهای CAB متشابه بایکدیگر باشند، بایدخطهای CAوCB هم بموازات خود حرکت‌کنند،یعنی ضریب زاویه‌های ثابتی داشته باشند؛ طول وعرض نقطهٔ C را xوy می گیریم، دراینصورت:

$$\text{ضریب زاویهٔ خط CA}=\frac{2m-(y-1)}{m-x}$$

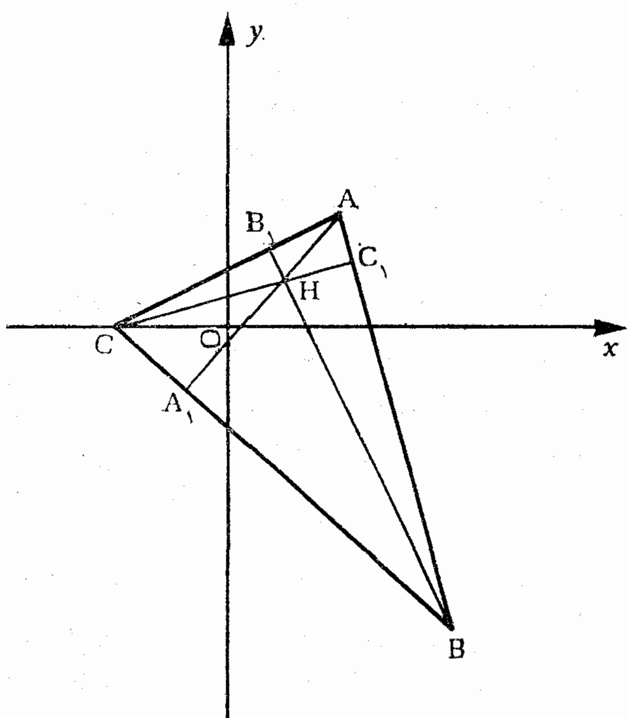
$$\text{ضریب زاویهٔ خط CB}=\frac{m-(y-2)}{4m-(x+3)}$$

وبرای اینکه هریك ازاین کسرها به‌ازای همهٔ مقادیر m مساوی مقدار ثابتی شوند (یعنی مقدار هر کسر به m بستگی نداشته باشد)، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\dfrac{y-۱}{x}=۲\\[2ex]\dfrac{y-۲}{x+۳}=\dfrac{۱}{۴}\end{cases}\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}x=۱\\[2ex]y=۳\end{array}\right.$$

یعنی اگر $C(۱,۳)$ باشد، CA و CB با تغییر m به موازات خود حرکت می‌کنند ودرنتیجه مثلثهای ABC بایکدیگر متشابه می‌شوند.

۱۸. $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$ رابترتیب پای ارتفاعهای وارد ازسه‌رأس A، B، C و H را محل برخورد این ارتفاعها می‌گیریم (شکل۷۲).



شکل ۷۲

ازمثلثهای قائم‌الـزاویهٔ AHC_1 و BHC_1 داریم:

$$HA^2-AC_1^2=HB^2-BC_1^2$$

وازآنجا :

$$HA^2-HB^2=AC_1^2-BC_1^2 \quad (1)$$

همچنین ازمثلثهای قائم‌الزاویهٔ ACC_1 و BCC_1:

$$AC^2-AC_1^2=BC^2-BC_1^2$$

و یا :

$$AC_1^2-BC_1^2=AC^2-BC^2 \qquad (2)$$

باتوجه به تساویهای (۱)و(۲) بدست می‌آید:

$$HA^2-HB^2=AC^2-BC^2 \qquad (3)$$

وبه همین ترتیب

$$HA^2-HC^2=AB^2-BC^2 \qquad (4)$$

مختصات رأسهای مثلث ومحل‌برخورد ارتفاعها را $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$، $C(x_3,y_3)$ و $H(x,y)$ می‌گیریـم . در اینصورت رابطه های (۳) و (۴) چنین می‌شود:

$$\begin{cases}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(x-x_2)^2-(y-y_2)^2= \\ =(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2-(x_2-x_3)^2-(y_2-y_3)^2 \;; \\ (x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(x-x_3)^2-(y-y_3)^2= \\ =(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-(x_2-x_3)^2-(y_2-y_3)^2\end{cases}$$

که پس ازسادهٔ کردن بدستگاه زیرمی‌نویسیم:

$$\begin{cases}(x_2-x_1)x+(y_2-y_1)y=x_3(x_2-x_1)+y_3(y_2-y_1) \\ (x_3-x_1)x+(y_3-y_1)y=x_2(x_3-x_1)+y_2(y_3-y_1)\end{cases}$$

وچنانچه مختصات سه رأس مثلث را درمورد حالت خاص درنظربگیریم، جواب این دستگاه (مختصات نقطهٔ H) چنین می‌شود: $H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

خط راست ـ مکان هندسی ـ تقارن

۱۹. مختصات سه رأس مثلث بسادگی بدست می‌آید: $A(۲\,,\,۵)$، $B(۰,-۱)$، $C(۷,۰)$ وازآنجا بدست می‌آید: $CA=CB=۵\sqrt{۲}$.

۲۰. جواب: $y=(-۱\pm\sqrt{۲})x$.

۲۱. راهنمایی: هردوضلع ازنقطهٔ $A(۴,-۱)$ می‌گذرند، یکی ازآنها با وترزاویه‌ای مساوی ۴۵ درجه می‌سازد (مثلث متساوی‌الساقین‌است) ودیگری براولی عمود است.

جواب: $۲x+y=۷$ و $x-۲y=۳$.

۲۲. جواب: ضلع دیگر مجاوربه‌زاویهٔ قائمه: $۲x-۳y+۱۱=۰$؛ وتر: $x+۵y=۴۰$ یا $y=۵x-۱۸$.

۲۳. جواب: $۳x+y=۲$؛ $x-۳y=۱۴$؛ $x-۳y+۱۶=۰$ و $۳x+y=۳۲$.

۲۴. جواب: $(AB)y=۰$ ؛ $(BC)y=\sqrt{۳}(x-a)$ ؛ $(CD)y=-\sqrt{۳}(x-۲a)$ ؛ $(DE)y=a\sqrt{۳}$ ؛ $(EF)\ y=\sqrt{۳}(x+a)$ ؛ $(FA)y=-\sqrt{۳}x$.

۲۵. جواب: $(AB)۴x+۳y=۲۷$ ؛ $(AC)x=۳$ ؛ $(BC)۷x-۳y=۳۹$.

۲۶. راهنمایی: برای‌پیدا کردن معادلهٔ هریك ازضلعهای مثلث‌بزرگتر، ابتدا مختصات سه رأس آنرا بدست آورید رأس A' روی MA قراردارد ودر حالتی‌که A و A' دریکطرف M واقع باشند، نقطهٔ A پاره خط MA' رابه نسبت ۱و۲ تقسیم می‌کند ووقتی‌که A و A' در دو طرف M قرارگیرند، نقطهٔ M پاره خط AA' را به نسبت ۱و۳ تقسیم می‌کند ودر نتیجه دوجواب‌برای A' و شبیه‌آن برای B' و C' بدست می‌آید.

جواب: $(A'B')\ 2x-5y=18$ ؛ $(B'C')\ x+3y=20$ ؛ $(C'A')\ 3x-2y=5$ یا $(A''B'')\ 2x-5y+24=0$ ؛ $(B''C'')\ x+3y+34=0$ ؛ $(C''A'')\ 3x-2y+25=0$.

۲۷. جواب: $x-2y+9=0$ ؛ $2x+y-2=0$ یا $2x-y+6=0$ ؛ $x+2y-7=0$

۲۸. جواب:

$$1)\ \pm 4x+3y-12=0 \quad ;$$
$$2)\ \pm 4x+\sqrt{33}\,y=4\sqrt{33} \quad ;$$
$$3)\ x-\sqrt{3}\,y+4\sqrt{3}=0 \quad ;$$
$$4)\ 5x-3y=12$$

۲۹. جواب: $\frac{x}{\lambda a}+\frac{y}{\lambda b}=1$ یعنی خطی موازی خط اول.

۳۰. راهنمایی: اگر این خطها بر یك دایره به‌مرکز مبداءمختصات مماس باشند، باید ازمرکز بیك‌فاصله‌باشند واین فاصله‌همان‌شعاع دایره‌وپای عمودهایی که از مرکز براین خطها فرود آید نقطه‌های تماس‌اند.

جواب: $r=5$ (شعاع دایره) ؛ $T(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\sqrt{5})$ و $T'(-\frac{5}{6}\sqrt{11}, \frac{15}{6})$ (نقطه‌های تماس).

۳۱. اگر نقطهٔ مجهول را $M(x,0)$ بگیریم، بایدفاصلهٔ آن ازخط‌مفروض مساوی a باشد:

$$\frac{|bx-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=a \implies x=a\pm\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$$

۳۲. اگرضریب زاویهٔ خطراکه از $P(-2,1)$ می‌گذرد k بگیریم، معادلهٔ خط چنین می‌شود:

$$kx-y+2k+1=0$$

باید فاصلهٔ نقطهٔ $C(3,1)$ ازاین خط مساوی ۴ باشد، که پس ازساده‌کردن به

معادلهٔ زیرمنجرمی‌شود:

$$\frac{|۵k|}{\sqrt{k^۲+۱}}=۴ \implies k=\pm\frac{۴}{۳}$$

ومعادلهٔ‌خط‌مطلوب $۴x-۳y+۱۱=۰$ یا $۴x+۳y+۵=۰$ می‌شود.

۳۳. باید نقطه‌ای را پیدا کرد که فاصلهٔ آن ازهردوخط مفروض مساوی ۸ باشد. مسأله چهارجواب دارد.

جواب: $C_۱(-\frac{۵}{۳}\ ,\ ۱۱\frac{۱}{۴})$ ؛ $C_۲(-۱۵\ ,\ \frac{۵}{۴})$ ؛

$C_۳(-\frac{۵}{۳},-۸\frac{۳}{۴})$ ؛ $C_۴(۱۱\frac{۲}{۳}\ ,\ \frac{۵}{۴})$.

۳۴. جواب: $۸x-۱۵y=۱۰$.

۳۵. باید q و q' چنان انتخاب شوند که به‌ازای آنها دو معادلهٔ مفروض نمایش یك خط راست باشند. دومعادله را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases}(q+۱)x+y-(q+۱)=۰\\ ۲x+(q'-۳)y+q'=۰\end{cases}$$

وبرای اینکه این دومعادله نمایش یك خط باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{q+۱}{۲}=\frac{۱}{q'-۳}=-\frac{q+۱}{q'}$$

که از حل این دستگاه $q=-\frac{۷}{۵}$ و $q'=-۲$ بدست می‌آید و بـه ازای هرکدام‌از آنها به خط $۲x-۵y-۲=۰$ می‌رسیم.

۳۶. جواب: $x+y=۳$.

۳۷. جواب: ۱) $۱۴x-۴۲y+۲۹=۰$ ؛

۲) $۲x-۲۵y+۲۳=۰$.

۳۸. جواب: ۱) $h=\frac{۲۱}{\sqrt{۱۷}}$ ؛ ۲) $M(\frac{۱۷}{۱۲} , \frac{۱۱}{۳})$ ؛ ۳) $S=۱۳\frac{۱}{۸}$ واحد مربع.

۳۹. جواب: $M(\frac{۱۰}{۳} , \frac{۷}{۳})$.

۴۰. جواب: $۷x-۳y=۹$ و $۳x-۷y=۱$.

۴۱. $M(\alpha,\alpha)$ فرض می‌کنیم، مختصات نقطه‌های C و D بسادگی برحسب α بدست می‌آیند:

$$C(۰ , \frac{۲\alpha}{\alpha+۲}) \ ; \ D(-\frac{۲\alpha}{\alpha-۲} , ۰)$$

و معادلهٔ خط CD چنین می‌شود:

$$(\alpha-۲)x-(\alpha+۲)y+۲\alpha=۰$$

که می‌توان آنرا به‌این صورت نوشت:

$$(x-y+۲)\alpha-۲(x+y)=۰$$

و برای اینکه نقطهٔ ثـابت این خط را پیداکنیم، باید نسبت به α متحد صفر بگیریم، یعنی

$$\begin{cases} x-y+۲=۰ \\ x+y=۰ \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=-۱ \\ y=۱ \end{array} \right.$$

۴۲. نامساوی:

$$۲\cos۲t+۴\sin۲x\sin t+۲\sin(x+y)-(\sin۲x-۱)^۲>۱$$

را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$۲-۴\sin^۲t+۴\sin۲x\sin t+۲\sin(x+y)-$$
$$-\sin^۲۲x+۲\sin۲x-۱>۱$$

و یا:

$$۲[\sin(x+y)+\sin۲x]-(۲\sin t-\sin۲x)^۲>۰$$

اگر $\sin(x+y)+\sin 2x\leqslant 0$ باشد،سمت چپ نامساوی اخیرمنفی می‌شود. ولی‌حالت:

$$\sin(x+y)+\sin 2x>0 \quad (1)$$

می‌تواند برقرارباشد، زیرا مثلا به ازای مقادیر $t=\arcsin(\frac{1}{2}\sin 2x)$ بدست می‌آید:

$$2[\sin(x+y)+\sin 2x]-(2\sin t-\sin 2x)^2=$$

$$=2[\sin(x+y)+\sin 2x]>0$$

به این مختصات (x,y)،همهٔ نقطه‌هایی که درنامعادلهٔ (۱) صدق کنند، با شرط مسأله هم می‌سازد. نامعادلهٔ (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$\sin\frac{3x+y}{2}\cos\frac{y-x}{2}>0$$

حالا توجه می‌کنیم که همهٔ جوابهای نامعادلهٔ:

$$\sin\frac{3x+y}{2}>0$$

چنین است:

$$4k\pi<3x+y<4k\pi+2\pi$$

و همهٔجوابهای نامعادلهٔ:

$$\sin\frac{3x+y}{2}<0$$

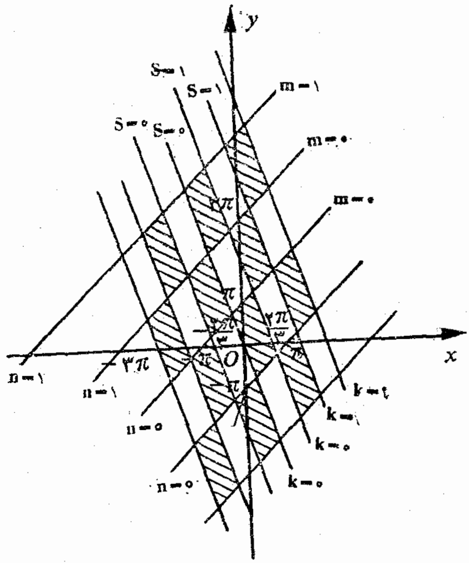
به اینصورت:

$$4s\pi-2\pi<3x+y<4s\pi$$

که درآنها k و s عددهایی صحیح هستند.

همه جوابهای نامعادلهٔ $\cos\frac{y-x}{2}>0$:

$$-\pi+4n\pi<y-x<\pi+4n\pi$$



شکل۷۳

و همهٔ جوابهای نامعادلهٔ $\cos\frac{y-x}{۲}<۰$:

$$\pi+۴m\pi<y-x<۳\pi+۴m\pi$$

که m و n عددهایی صحیح هستند.

ابتدا این خطها را درنظرمی‌گیریم:

$$(A)\ \begin{cases}۳x+y=۴k\pi\\ ۳x+y=۴k\pi+۲\pi\end{cases};\ (B)\begin{cases}y-x=۴n\pi-\pi\\ y-x=۴n\pi+\pi\end{cases};$$

$$(C)\ \begin{cases}۳x+y=۴s\pi-۲\pi\\ ۳x+y=۴s\pi\end{cases};\ (D)\begin{cases}y-x=۴m\pi+\pi\\ y-x=۴m\pi+۳\pi\end{cases}$$

هردوخط موازی (A) (به‌ازای هرمقدارصحیح k) وهردوخط موازی B (به ازای هرمقدارصحیح n) با هم متوازی‌الاضلاعی می‌سازندکه برای مختصات‌هر نقطهٔ داخلی‌آن نامساوی (۱) برقراراست.

بهمین ترتیب برای معادله‌های (C)و(D) (شکل۷۳).

۴۳. جواب:
$$\begin{cases} x-y+۲>۰ \\ ۳x+y-۶<۰ \\ x+۳y+۶>۰ \end{cases}$$

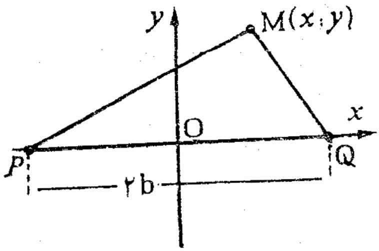
۴۴. جواب: به‌صورت تابع ضمنی:
$$۸x^۲+۵y^۲+۴xy+۳۶x+۱۸y+۹=۰$$
و به‌صورت تابع صریح:
$$y=-\frac{۱}{۵}\left[۲x+۹\pm\sqrt{۱۴۵-(x+۱۲)^۲}\right]$$

۴۵. این مکان یك هذلولی است؛ اگر نقطه‌ای از این مکان را $M(x,y)$ بگیریم، طبق شرط مسأله باید داشته باشیم:
$$MF-MF'=\pm ۲a$$
علامت $\pm$ مربوط به اینست که $MF>MF'$ یا $MF<MF'$ باشد، این رابطه چنین می‌شود:
$$\sqrt{(x-c)^۲+y^۲}-\sqrt{(x+c)^۲+y^۲}=\pm ۲a$$
که اگر این معادله را گویا کنیم، با فرض $c^۲-a^۲=b^۲$ بدست می‌آید:
$$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

۴۶. این مکان یك سهمی است که رأس آن درمبداء مختصات ومحور آن منطبق برمحور طول است.
جواب: $y^۲=۲px$.

۴۷. مکان هندسی نقطه‌هایی ازصفحه که حاصلضرب فاصله‌های هریك از آنها تادو نقطهٔ ثابت P و Q، مقداری ثابت‌باشد، بیضی کاسینی نامیده می‌شود.

امتداد PQ رامحور طول و عمودمنصف پاره‌خط PQ را محور عرض می‌گیریم، دراینصورت $P(-b,۰)$ و $Q(b,۰)$ خواهدشد (شکل ۷۴). اگر نقطه‌ای ازمکان را $M(x,y)$ بگیریم،طبق شرط مسأله



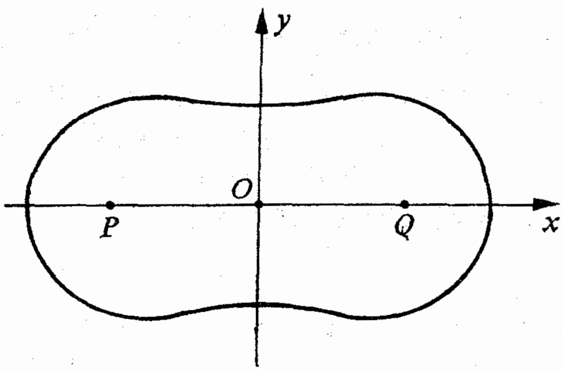
شکل ۷۴

باید داشته باشیم: $MP \cdot MQ = a^2$، که اگر آنرا برحسب مختصات نقطه‌ها بیان کنیم، چنین می‌شود:

$$\sqrt{(x+b)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-b)^2+y^2} = a^2$$

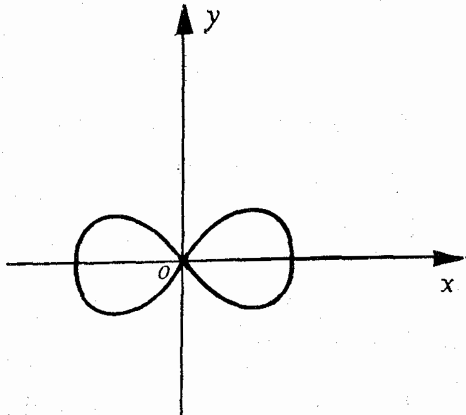
و اگر آنرا گویا وسپس ساده کنیم، معادلهٔ زیر (معادلهٔ بیضی کاسینی) بدست می‌آید:

$$(x^2+y^2)^2 - 2b^2(x^2-y^2) = a^4 - b^4$$



شکل ۷۵

که منحنی آن (شکل ۷۵) نسبت به‌محورها ومبداء مختصات متقارن است.



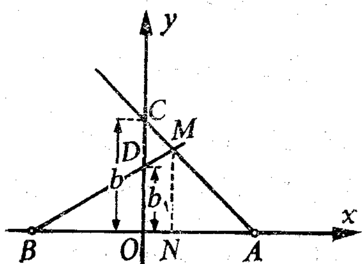
شکل ۷۶

درحالت خاصی که $a=b$ باشد معادله بیضی کاسینی به‌صورت:

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$$

درمی‌آید و دراین حالت آنرا لمینسکات برنولی گویند (شکل ۷۶).

۴۸. راهنمائی: پاره خطهای b و b_1 را به‌کمك تشابه مثلثهای MNA و GOA وسپس تشابه‌مثلثهای BOD و BNM پیدا کنید. همچنین می‌توانید b و b_1 را به‌عنوان عرضهای نقطه‌هایی از پاره خطهای AM و BM که طولی مساوی صفردارند، بدست‌آورید (شکل ۷۷).



شکل۷۷

جواب: مکان دایره‌ای است به‌مرکزمبداء مختصات و شعاع مساوی a:

$$x^2+y^2=a^2.$$

۴۹. راهنمایی: قاعدهٔ مثلث را محور طول و وسط آنرا مبداء مختصات بگیرید.

جواب: دایرهٔ $x^2+y^2=14$ ویا درحالت‌کلی دایرهٔ $4(x^2+y^2)=2s^2-a^2$ که درآن $s^2=b^2+c^2$.

۵۰. جواب: سهمی $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{25}{8}$.

۵۱. اگر نیروی‌جاذبه‌زمین نبود، گلوله درامتداد مماس برانتهای‌ناودان یعنی روی Oy باسرعت v متردرثانیه حرکت می‌کرد و در ثانیهٔ tام در نقطهٔ $y=vt$ قرارداشت. ازطرف‌دیگراگردرانتهای‌ناودان سرعتی مساوی‌صفرداشت درجهت کشش‌زمین(Ox) باشتاب g متربرثانیه حرکت می‌کرد و بعداز t ثانیه در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}gt^2$، روی محور Ox، قرار داشت. ازحذف پارامتر t بین x و y، معادلهٔ مسیر بدست می‌آید.

جواب: سهمی $y^2=\frac{2v^2}{g}x$.

۵۲. اگرمسیر حرکت نقطه‌ها، به‌عنوان محورهای مختصات وجهت حرکت آنها درجهت مثبت محور مربوطه وشروع حرکت را ازنقطه‌های $A(a,0)$ و $B(0,b)$ انتخاب کنیم، معادلـهٔ مسیر نقطهٔ وسط پـاره خط AB به صورت $x-y=\frac{1}{2}(a-b)$ درمی‌آید.

۵۳. دستگاه محورهای مختصات را مطابق شکل ۱۸ انتخاب می‌کنیم: $A(0,-a)$ ومعادلهٔخطAB (با انتخاب ضریب زاویهٔ m برای‌آن)به‌صورت $mx-y=a$ و $B(\frac{a}{m}\;,\;0)$ درمی‌آید. اگر عرض نقطهٔ M یا M_1 را y بگیریم (چون روی خط AB قراردارند) طول آنها $\frac{1}{m}(y+a)$ می‌شود:

$$BM^2=BM_1^2=b^2 \Longrightarrow y^2+\frac{1}{m^2}y^2=b^2 \Longrightarrow$$

$$y^2=\frac{m^2b^2}{m^2+1}$$

و ازآنجا $m^2=\frac{y^2}{b^2-y^2}$، که اگردر معادلهٔ خط AB قرار دهیم، معادلهٔ مکان M و M_1 چنین می‌شود:

$$x^2y^2=(b^2-y^2)(y+a)^2$$

منحنی این مکان را کنکوئید گویند.

توضیح: اگردرهمین‌مسأله‌نقطه‌هایMوM_1 را روی‌خط ABوبه‌فاصله‌ای مساویOBازنقطهٔB بگیریم، معادلهٔ مکان‌نقطه‌هایMوM_1 به‌صورت‌زیردرمی‌آید:

$$a(x^2-y^2)=y(x^2+y^2)$$

که منحنی‌آن استروفوئید نامیده می‌شود.

۵۴. امتداد OAرامحور طول ونقطهٔ O را مبداء مختصات می‌گیریم. اگر ضریب زاویهٔ وتر OB را مساوی m بگیریم، معادلهٔ آن $y=mx$ و

معادلهٔ دایرهٔ مفروض $x^2+y^2-2rx=0$ و بنابراین مختصات نقطهٔ B (محل برخورد OB با دایره) و در نتیجه، مختصات نقطهٔ C بدست می‌آید:

$C(\frac{2r}{m^2+1}, 0)$. ضریب زاویهٔ خط CM مساوی $-\frac{1}{m}$ و در نتیجه معادلهٔ آن به صورت $y=-\frac{1}{m}(x-\frac{2r}{m^2+1})$ درمی‌آید. ازبرخورد این خط با خط $y=mx$، مختصات نقطهٔ M برحسب پارامتر m بدست می‌آید:

$$M\left(\frac{2r}{(m^2+1)^2}, mx\right)$$

که ازحذف m بین آنها، معادلهٔ مکان M بدست می‌آید:

$$(x^2+y^2)^2=2rx^3$$

۵۵. داریم:

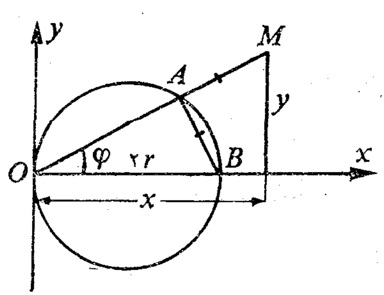
$$OM=OA+AM=OA+AB \quad (1)$$

وبا توجه به شکل ۷۸ بسادگی داریم:

$$OM=\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ OA=2r\cos\varphi=\frac{2rx}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$AB=\pm 2r\sin\varphi=\pm\frac{2ry}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

در رابطهٔاخیر، علامت + برای وقتی است که φ و در نتیجه y مثبت است و علامت − برای وقتی‌که φ و درنتیجه y منفی است. اگرمقادیر OA، OM و AB را دررابطهٔ (۱) قرار دهیم ، معادلهٔ مکان بدست می‌آید.



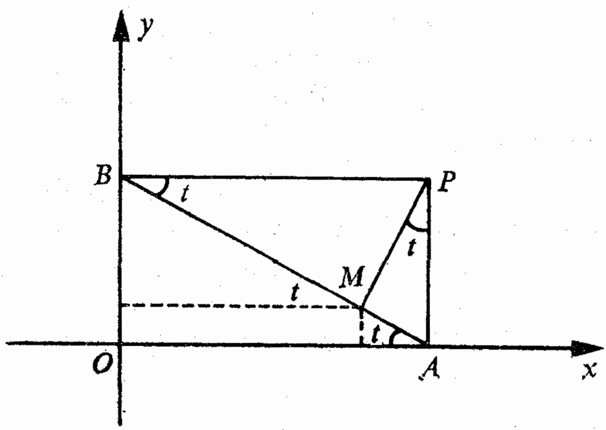
شکل۷۸

جواب: برای $y>0$ قوسی ازدایرهٔ $(x-r)^2+(y-r)^2=2r^2$
وبرای $y<0$ قوسی ازدایرهٔ $(x-r)^2+(y+r)^2=2r^2$.

۵۶. جواب: منحنی این مکان سیسوئید نام دارد ومعادلهٔ آن‌چنین‌است:

$$y^2=\frac{x^3}{2r-x}$$

۵۷. زاویهٔ‌حادهٔ بین قطر AB ومحور طول‌را t و$M(x,y)$می گیریم، داریم (شکل ۷۹) :



شکل۷۹

$$x=MB\cos t=BP\cos^2 t=AB\cos^3 t;$$
$$x=a\cos^3 t$$
$$y=AM\sin t=AP\sin^2 t=AB\sin^3 t;$$
$$y=a\sin^3 t$$

باحذف t بین مختصات نقطهٔ M، معادلهٔ مکان‌آن بدست می‌آید:

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$$

منحنی این مکان آستروئید نامیده می‌شود.

۵۸. دستگاه محورهای مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که محورطول بر OM و مبداء مختصات برO منطبق باشد. اگر $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ بگیریم، معادلهٔ خط ON به‌صورت $y=kx$ درمی‌آید که‌در آن $k=tg\alpha$.

فرض می‌کنیم $A(s,0)$ و $B(t,kt)$، دراینصورت بدست می‌آید: $P\left(\frac{s+mt}{1+m}, \frac{mkt}{1+m}\right)$. ازطرف‌دیگرمی‌دانیم $AB=l$، یعنی:

$$(s-t)^2+k^2t^2=l^2 \Longrightarrow s=t\pm\sqrt{l^2-k^2t^2}$$

بنابراین معادلهٔ پارامتری مکان مطلوب چنین می‌شود:

$$\begin{cases} x=t\pm\frac{1}{m+1}\sqrt{l^2-k^2t^2} \\ y=\frac{mkt}{1+m} \end{cases}$$

ازمعادلهٔ دوم، $t=\frac{(1+m)y}{mk}$ بدست می‌آید، که اگر آنرا درمعادلهٔاول‌قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x=\frac{1+m}{mk}y\pm\frac{1}{1+m}\sqrt{l^2-\frac{k^2y^2(1+m)^2}{m^2k^2}}$$

که باگویاکردن‌آن، پس ازساده‌کردن، خواهیم‌داشت:

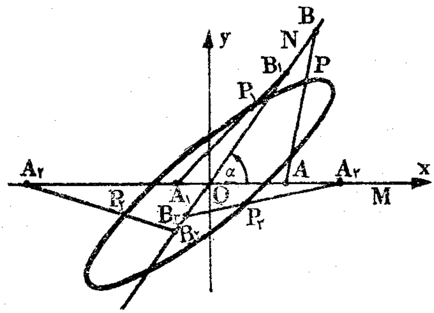
$$x^2-2\frac{1+m}{mk}xy+\frac{(1+m)^2+k^2}{m^2k^2}y^2-\frac{l^2}{(1+m)^2}=0$$

و این همان معادلهٔ مکان مطلوبست. منحنی این مکان یك بیضی است که مرکز آن برمبداء مختصات منطبق است (شکل ۸۰).

درحالتی که $\alpha=\frac{\pi}{2}$ باشد، با استدلالی شبیه آنچه گفتیم به معادلهٔ زیر

می‌رسیم:

$$x^{2}+\frac{1}{m^{2}}y^{2}-\frac{l^{2}}{(1+m)^{2}}=0 \qquad (2)$$



شکل ۸۰

معادلهٔ (۲) را می‌توان ازمعادلهٔ (۱) بدست‌آورد، به‌شرطی‌که در آن k بسمت بی‌نهایت میل‌کند. منحنی(۲) هم یك بیضی‌است‌که محورهای آن برمحورهای مختصات منطبق است ونیم قطرهای‌آن مساوی $\frac{l}{1+m}$ و $\frac{lm}{1+m}$ است.

درحالت $m=1$، یعنی وقتی‌که نقطهٔ P پاره‌خط AB را نصف‌کند، مکان هندسی‌آن چنین می‌شود:

$$x^{2}+y^{2}=\left(\frac{l}{2}\right)^{2}$$

یعنی دایره‌ای به‌مرکزمبداء مختصات وشعاع مساوی $\frac{l}{2}$. این‌حالت‌را می‌توان به‌صورت زیر بیان‌کرد:

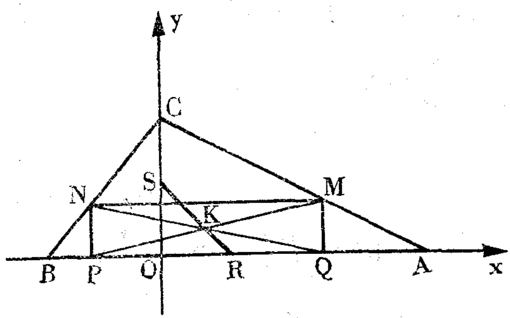
مکان هندسی وسط‌پاره‌خطهای مساوی که دو انتهای آنها بر دوضلع یك زاویهٔ قائمه منطبق باشند، دایره‌ای است به مرکز رأس زاویهٔ قائمه.

۵۹. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم (شکل ۸۱). محور طـول را منطبق بر امتداد AB و محور عرض را منطبق بـر امتداد ارتفاع CO می‌گیریم. فرض می‌کنیم: $OA=a$ ، $OB=b$ و $OC=h$. در اینصورت

بدست می‌آید:

معادلهٔ AC: $\frac{x}{a}+\frac{y}{h}=1$

معادلهٔ BC: $-\frac{x}{b}+\frac{y}{h}=1$



شکل ۸۱

خط MN راموازی قاعدهٔ AB وبه فاصلهٔ m ازآن درنظر می‌گیریم، مختصات نقطه‌های M و N ازحل دودستگاه زیرمعین می‌شود:

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{h}=1\\ y=m\end{cases};\quad \begin{cases}-\frac{x}{b}+\frac{y}{h}=1\\ y=m\end{cases}$$

وازآنجا بدست می‌آید:

$$M[\frac{a}{h}(h-m),m];\ N[-\frac{b}{h}(h-m),m]$$

ودرنتیجه:

$$P[-\frac{b}{h}(h-m),0];Q[\frac{a}{h}(h-m),0]$$

ودیگربسادگی مختصات نقطهٔ K (مرکزمستطیل) پیدا می‌شود:

$$K \left| \begin{array}{l} x=\frac{a-b}{۲h}(h-m) \\ y=\frac{m}{۲} \end{array} \right.$$

که با حذف m بین مختصات نقطهٔ K خواهیم داشت:

$$۲hx+۲(a-b)y=h(a-b),$$

$$\frac{x}{\frac{a-b}{۲}}+\frac{y}{\frac{h}{۲}}=۱$$

واین خطی است که ازدو نقطهٔ:

$$R\left(\frac{a-b}{۲}, ۰\right) \text{و} S\left(۰, \frac{h}{۲}\right)$$

می‌گذرد. بنابراین مکان مطلوب عبارتست ازپاره خط RS.

۶۰. ۱) $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ (بیضی). ۲) $y=x+۱\pm\sqrt{۴x-۳}$ (سهمی).

۳) $y=\frac{۱}{۸}[۱۲x-۱۰۱\pm\sqrt{۱۳(۱۰۴x+۱۳)}]$(سهمی).

۴) $x^۲y^۲(x^۲+y^۲+۳)=۱$. ۵) $y=\frac{۲}{x^۲-۱}$ با شرط $-\sqrt{۲}<x\leq\sqrt{۲}$.

۶۱. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ مجموعهٔ نقطه‌های مورد نظر باشد. در اینصورت باید داشته باشیم:

$$\rho(M,A)=\rho(M,B)$$

یعنی:

$$\operatorname{Max}\{|x|, |y-۲|\}=\operatorname{Max}\{|x-۱|, |y-۴|\}$$

چهارحالت منطقی راکه می‌توان انتخاب کرد، درنظرمی گیریم:

a) $|x|\geqslant|y-۲|$ و $|x-۱|\geqslant|y-۴|$. دراین حالت بدست می‌آید:

$$|x|=|x-۱| \Longrightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

ولی‌دراینصورت‌باید $|y-۲|\leqslant\frac{۱}{۲}$ و $|y-۴|\leqslant\frac{۱}{۲}$ باشدکه به سادگی غیر ممکن بودن آن معلوم می‌شود.

b) $|x|\geqslant|y-۲|$ و $|x-۱|<|y-۴|$. در این حالت‌بدست می‌آید:

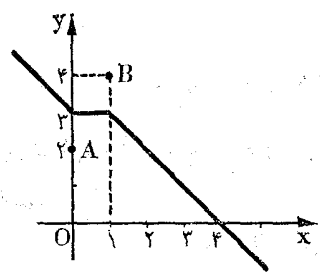
$$|x|=|y-۴| \Longrightarrow \begin{cases} y=x+۴ \\ y=-x+۴ \end{cases}$$

برای $y=x+۴$، با توجه به‌شرط این‌حالت، دستگاه دونامعادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} |x|\geqslant|x+۲| \\ |x-۱|<|x| \end{cases}$$

که‌ممکن‌نیست. برای $y=-x+۴$ این دستگاه بدست می‌آید:

$$\begin{cases} |x|\geqslant|x-۲| \\ |x-۱|<|x| \end{cases}$$



شکل ۸۲

که جواب $x\geqslant۱$ را قبول دارد. بنابراین نیم خطی از $y=-x+۴$ که درآن $x\geqslant۱$ باشد جزومکان مطلوب است.

اگربهمین ترتیب حالتهای c) و d) را بررسی‌کنیم به‌شکل ۸۲ که مکان موردنظررا نشان می‌دهد، می‌رسیم.

۶۲. جواب: ۱) $\omega(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۴})$. ۲) $\omega(\frac{۲}{۳}, -\frac{۵}{۲})$. ۳) $\omega(۱,۲)$.
۴) $\omega(-۲, \frac{۱}{۲})$.

۶۳. جواب: خط $y=۱$.

۶۴. $\omega(\alpha,\beta)$ را مرکزتقارن منحنی مـی گیریم، دراینصورت اگـر

مبداء مختصات را به‌نقطهٔ ω منتقل کنیم، باید به‌معادله‌ای برای منحنی برسیم که باتبدیل X به‌ $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نکند. رابطه‌های انتقال محورها چنین است:

$$x = X + \alpha \quad \text{و} \quad y = Y + \beta$$

وبنابراین برای معادلهٔ جدید منحنی بترتیب داریم:

$$Y + \beta = \sin^{2}(X + \alpha) = (\sin X \cos\alpha + \cos X \sin\alpha)^{2} =$$
$$= \sin^{2} X \cos^{2}\alpha + \cos^{2} X \sin^{2}\alpha + 2\sin X \cos X \sin\alpha \cos\alpha =$$
$$= (\cos^{2}\alpha - \sin^{2}\alpha)\sin^{2} X + 2\sin X \cos X \sin\alpha\cos\alpha + \sin^{2}\alpha =$$
$$= \cos 2\alpha \cdot \sin^{2} X + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot \sin 2X + \sin^{2}\alpha$$

و یا:

$$Y = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot \sin 2X + \cos 2\alpha \cdot \sin^{2} X + (\sin^{2}\alpha - \beta)$$

وبرای اینکه این تابع باتبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نکند، بایدداشته باشیم:

$$\cos 2\alpha = 0 \quad ; \quad \sin^{2}\alpha - \beta = 0$$

که ازآنجا بدست می‌آید:

$$\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

بنابراین منحنی تابع مفروض دارای بی‌نهایت مرکز تقارن است که مختصات آنها چنین است:

$$\omega \left| \begin{array}{l} k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \\ \frac{1}{2} \end{array} \right. \qquad (\text{k عددی است صحیح})$$

۶۵. جواب: $x = k\pi + \mathrm{Arctg}\frac{a}{b}$ (k عددی است صحیح).

۶۶. اگرمرکزتقارن را $\omega(\alpha,\beta)$ بگیریم، با انتقال مبداء به‌این نقطه به معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$X^2Y+(2\alpha+c)XY+(\beta-1)X^2+(2\alpha\beta+c\beta-2\alpha-a)X+$$
$$+(\alpha^2+c\alpha+d)Y+(\alpha^2\beta+c\alpha\beta+d\alpha-\alpha^2-a\alpha-b)=0$$

وبرای اینکه این معادله با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نکند، باید ضریبهای XY، X^2 و مقدارثابت معادله برابرصفرشود:

$$\begin{cases} 2\alpha+c=0 \\ \beta-1=0 \\ \alpha^2\beta+c\alpha\beta+d\beta-\alpha^2-a\alpha-b=0 \end{cases}$$

ازمعادله‌های اول ودوم این دستگاه بدست می‌آید: $\omega(-\frac{c}{2}, 1)$ و این مرکز تقارن منحنی است، بشرطی‌که مختصات آن درمعادلهٔ سوم دستگاه صدق کند، که اگرقراردهیم به‌رابطهٔ زیرمی‌رسیم:

$$c(a-c)=2(b-d) \quad (1)$$

شرط (۱) شرط وجود مرکزتقارن درمنحنی تابع مفروض است.

ضمناً ازمختصات‌مرکزتقارن معلوم می‌شودکه این نقطه اولا روی‌مجانب افقی منحنی واقع است، ثانیاً ازدومجانب قائم منحنی بیك فاصله است.

۶۷. هرنقطهٔ M به‌طول x ازمنحنی تابع مفروض درقرینهٔ نسبت‌به‌خط $x=2$ به‌نقطه‌ای مانند M' تبدیل می‌شودکه عرض‌آن همان عرض نقطهٔ M و طول‌آن مساوی $4-x$ است (زیرا نقطهٔ به‌طول ۲ باید وسط دونقطهٔ M و M' باشد). بنابراین برای‌پیداکردن معادله‌منحنی قرینه، باید درمعادلهٔ‌منحنی‌مفروض x را به $4-x$ تبدیل کرد.

جواب: $y=\dfrac{x-5}{x-3}$.

۶۸. در قرینهٔ نسبت به نقطهٔ $\omega(-1,-2)$، هرنقطهٔ $M(x,y)$ از

منحنی به‌نقطه‌ای مانند $M'(-x-۲,-y-۴)$ تبدیل می‌شود (زیرا نقطهٔ ω وسط پاره‌خط MM' است). بنابراین برای پیداکردن معادلهٔ قرینهٔ منحنی تابع مفروض باید درآن x رابه $-x-۲$ و y را به $-y-۴$ تبدیل کرد.

جواب: $y=-(x^۲+۶x+۱۲)$.

۶۹. درقرینهٔ یك نقطه نسبت به‌نیمسازربع اول وسوم xبه y و y به x تبدیل‌می‌شود (وبهمین مناسبت اگر $f(x,y)=f(y,x)$ باشد، نیمساز ربع‌اول‌و سوم محورتقارن‌منحنی تابع $f(x,y)=۰$است). بنابراین برای معادلهٔ‌منحنی قرینه، باید درتابع مفروض x را به yوy را به x تبدیل کرد.

جواب: $y=x\pm\sqrt{x^۲-x}$.

۷۰. درقرینهٔ یك نقطه نسبت به‌نیمسازربع دوم وچهارم، xبه$-y$ وy به $-x$ تبدیل می‌شود (و بهمین مناسبت اگر $f(x,y)=f(-y,-x)$ باشد، نیمسازربع دوم وچهارم محور تقارن منحنی تابع $f(x,y)=۰$ خواهد بود). درنتیجه برای بدست‌آوردن معادلهٔ منحنی قرینه، باید در تابع مفروض، x را به $-y$ وy را به $-x$ تبدیل کرد.

جواب: $y=۱\pm\sqrt{۲-x}$.

۷۱. ۱) تابع مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$y=(x-۳)^۲+|x-۳|-۲=f(x-۳)$$

که درآن $f(x)=x^۲+|x|-۲$. تابع $y=f(x)$ زوج است‌وبنابراین‌محور عرض، محورتقارن‌منحنی آنست، بنابراین‌برای‌تابع $y=f(x-۳)$ خط $x=۳$ محورتقارن منحنی آن می‌شود.

۲) اگرهمهٔ جمله‌ها رابه‌سمت‌چپ تساوی‌منتقل کنیم، این معادله به‌صورت $F(x-۱,y+۲)=۰$ درمی‌آید که درآن

$F(x,y)=\Big|\,\big||y|-۳\big|-\big|۲-|x|\big|\,\Big|$، تابعی است که هم نسبت به x و هم نسبت به y زوج است وبنابراین‌برای منحنی‌آن محورهای مختصات، محورهای

تقارن‌اند. به این ترتیب برای منحنی تابع $F(x-1,y+2)=0$ خطهای $x=1$ و $y=-2$ محورهای تقارن می‌شوند (وچون این دو محور برهم عمودند، محل تلاقی آنها، یعنی نقطهٔ $\omega(1,-2)$ مرکز تقارن منحنی می‌شود).

۳) تابع مفروض را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$(x^2+2x+2)^2=y^2-4y+4$$

ویا: $$F(x+1,y-2)=(y-2)^2-[(x+1)^2+1]^2=0$$

که‌در آن‌تابع $f(x,y)=y^2-(x^2+1)^2$ تابعی‌است که‌نسبت‌به x و y زوج‌است. بنابراین خطهای $x=-1$ و $y=2$ محورهای‌تقارن‌ونقطهٔ $\omega(-1,2)$ مرکز تقارن منحنی تابع مفروض است.

۴) جواب: خط $y=-1$ محورتقارن منحنی است.

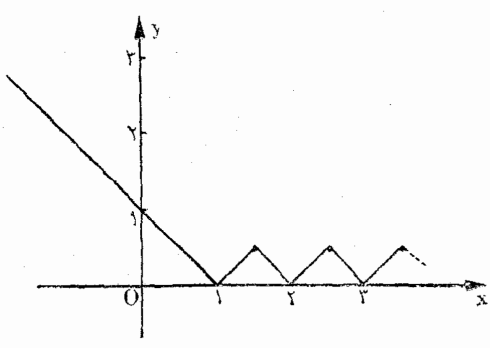
۵) جواب: $x=-1$ تنها محورتقارن منحنی است.

۶) جواب: خطهای $x=-2$ و $y=0$ محورهای‌تقارن‌و نقطهٔ $\omega(-2,0)$ مرکزتقارن منحنی تابع است.

۷) جواب: خطهای $x=3$ و $y=-4$ محورهای تقارن‌و $\omega(3,-4)$ مرکزتقارن منحنی تابع است.

تابع ـ مشتق ـ حد ـ پیوستگی ـ کاربرد مشتق ـ رسم منحنی

۰۷۲ اگر $x \leqslant 1$ باشد، نزدیکترین عدد صحیح مثبت به‌آن، عدد ۱ ومقدار



شکل ۸۳

تابع مفروض به‌ازای این مقادیر x مساوی $x-1$ می‌شود.

برای مقادیر $x>1$ ومثلا وقتی $k<x\leqslant k+1$ باشد (k عددی‌است صحیح ومثبت)، وقتی $x<k+\frac{1}{2}$ است، مقدار y مساوی فاصلهٔ k تا x یعنی $x-k$ و وقتی‌که $x>k+\frac{1}{2}$ باشد، مقدار y مساوی فاصلهٔ x تا $k+1$ یعنی $k+1-x$ می‌شود. به‌این‌ترتیب تابع $y=f(x)$ رامی‌توان چنین نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & (x\leqslant 1) \\ x-k & (k<x<k+\frac{1}{2}) \\ k+1-x & (k+\frac{1}{2}<x\leqslant k+1) \end{cases} \Bigg\} x>1$$

در حالت $x=k+\frac{1}{2}$، بـه‌مفهوم دقیق، نزدیکترین عدد صحیح مثبت برای آن وجود ندارد و بنابراین می‌توان گفت‌که تابع دراین نقطه‌ها نامعین است، بهمین‌مناسبت‌روی شکل۸۳ (که نمایش تغییرات تابع را نشان می‌دهد)، این نقطه‌ها جزونمایش تغییرات به‌حساب نیامده‌اند.

۷۳. روشن است‌که دراین معادله $x>0$ است و

$$f_1(x)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3x}-\sqrt{6}}{\sqrt{2x+6}}=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{\frac{6}{x}}}{\sqrt{2+\frac{6}{x}}}$$

یك تابع صعودی است، زیرا برای مقادیر مثبت x، وقتی‌که x بزرگ شود، صورت‌کسر بزرگ‌و مخرج‌کوچك و در نتیجه $f_1(x)$ بزرگ می‌شود.

همچنین بسادگی معلوم می‌شودکه :

$$f_2(x)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$$

برای مقادیر مثبت x یك تابع نزولی‌است. بنابراین معادلهٔ $f_1(x)=f_2(x)$ تنها یك جواب می تواند داشته باشد. از طرف دیگر توجه می کنیم که:

$f_2(x)=f_1(\frac{12}{x})$ ، زیرا:

$$f_1(\frac{12}{x})=\frac{\sqrt{\frac{12}{x}}+\sqrt{\frac{36}{x}}-\sqrt{6}}{\sqrt{\frac{24}{x}+6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{36}-\sqrt{6x}}{\sqrt{24+6x}}=f_2(x)$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$x=\frac{12}{x}\Longrightarrow x^2=12\Longrightarrow x=2\sqrt{3}$$

وچون معادله نمی‌تواند بیش از یك جواب حقیقی داشته باشد، $x=2\sqrt{3}$ تنها ریشهٔ معادله است.

۷۴. اولا ثابت می کنیم که کوچکترین دورهٔ تناوب‌تابع مساوی $2a$است.

ازشرط مسأله معلوم است که به‌ازای همهٔ مقادیر x داریم: $f(x+a)>\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}$ را به‌سمت چپ تساوی می‌بریم و دوطرف رامجذور می کنیم:

$$[f(x+a)-\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}=f(x)-[f(x)]^2$$

ویا :

$$[f(x+a)]^2-f(x+a)=f(x)-[f(x)]^2-\frac{1}{4}\qquad(1)$$

حالا می‌نویسیم:

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}$$

که بااستفاده ازرابطهٔ (۱) بدست می‌آید:

$$f(x+۲a)=\frac{۱}{۲}+\sqrt{[f(x)]^{۲}-f(x)+\frac{۱}{۴}}=$$

$$=\frac{۱}{۲}+\left|f(x)-\frac{۱}{۲}\right|=f(x)$$

(از شرط $f(x)>\frac{۱}{۲}$ استفاده کردیم).

ثانیاً: بسادگی می‌توان تحقیق کرد که تابع زیر درشرطهای تابع به‌ازای $a=۱$ صدق می‌کند (شکل۸۴):

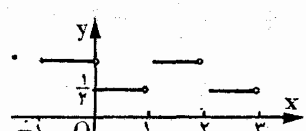
$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲} & (۲n\leqslant x<۲n+۱)\\ ۱ & (۲n+۱\leqslant x<۲n+۲)\end{cases}\qquad n=۰,\pm ۱,\pm ۲,\dots$$

می‌توان نمونهٔ بغرنجتری ازاین تابع را هم نشان داد (شکل۸۵):

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}-n & (۲n\leqslant x<۲n+۱)\\ \frac{۱}{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۲}x-n-(\frac{۱}{۲}x-n)^{۲}} & (۲n+۱\leqslant x<۲n+۲)\end{cases}$$

$$n=۰,\pm ۱,\pm ۲,\dots$$

شکل۸۵



شکل۸۴

۷۵. اولا: تابع $f(x)=x^{۳}+x^{۲}+x$ به‌ازای $x>۰$ یك تابع صعودی است، بنابراین معادلهٔ مفروض نمی‌تواند بیش‌از یك‌ریشهٔ مثبت داشته باشد. در

حالتی‌که $x<0$ باشد، $f(x)=x(x^2+x+1)$ مقـداری منفی می شود (x^2+x+1 برای همهٔ مقادیرحقیقی x، مثبت است) ونمی‌تواند مساوی ۱ شود؛ یعنی معادلهٔ مفروض ریشهٔ منفی‌ندارد.

به‌این ترتیب باتوجه به‌پیوسته بودن تابع $f(x)$، معادلهٔموردنظر، تنهایك ریشهٔ مثبت می‌تواند داشته باشد.

ثانیاً: کافی‌است نامساوی مضاعف زیر را ثابت‌کنیم:

$$f(\frac{1}{2})<1<f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

که تحقیق درستی‌آن بسادگی انجام می گیرد.

۷۶. قبلا متذکر می‌شویم‌که وقتی‌از «تابع» صحبت می‌شود معمولاًمنظور تابع یك ارزشی‌است؛ درحالت غیرآن بهتراست‌که ازکلمه «نسبت» یا «رابطه» استفاده شود. بنابراین مثلا درمورد این‌مسأله نمی‌توان گفت‌که یکی‌از تابعهای عکس به‌صورت $g(x)=\pm\sqrt{x}$ است.

درمورد تابع مفروض، دوتابع به‌سادگی بدست می‌آید:

$$g_1(x)=\sqrt{x} \quad \text{و} \quad g_2(x)=-\sqrt{x}$$

برای پیدا کردن تابع معکوس سوم، متذکر می‌شویم‌کـه برای برقرار بودن تساوی $x=(g(x))^2$ (برای $x>0$)، کافی است برای هرمقدار $x>0$ ، $g(x)$ مساوی $\sqrt{x}$ یا $-\sqrt{x}$ باشد. به‌این ترتیب می‌توان مجموعهٔ عددهای غیرمنفی‌را به دوزیر مجموعهٔ A وB تقسیم‌کرد وتابع معکوس $g(x)$ را چنین نوشت:

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & (x\in A)\\ -\sqrt{x} & (x\in B)\end{cases}$$

بنابراین تابع $f(x)=x^2$ دارای بی‌نهایت تابع عکس می‌شود.

۷۷. جواب:

$$g(x)=\begin{cases} a & (x=1،a>0) \\ 0 & (x=0) \\ b & (x=-1،b<0) \end{cases}$$

۷۸. برای $0\leqslant x\leqslant 1$ داریم $x=\sqrt{\cos y}$ و برای $-1\leqslant x\leqslant 0$ داریم $x=-\sqrt{\cos y}$. بنابراین معکوس تابع مفروض چنین است:

$$1)\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \Longrightarrow g(x)=\sqrt{\cos x}\quad (0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2})$$

$$2)\quad -1\leqslant x\leqslant 0 \Longrightarrow g(x)=-\sqrt{\cos x}\quad (0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2})$$

۷۹. درحالت $x\leqslant 2$ داریم:

$$x^2-4x+6-y=0\Longrightarrow x=2\pm\sqrt{y-2}$$

که باتوجه به شرط $x\leqslant 2$ باید داشته باشیم:

$$x=2-\sqrt{y-2}$$

درحالت $x\geqslant 2$ داریم:

$$y=-x+4<2\ ;\ x=-y+4$$

بنابراین بدست می‌آید:

$$g(x)=\begin{cases} -x+4 & (x\leqslant 2) \\ 2-\sqrt{x-2} & (x\geqslant 2) \end{cases}$$

برای معادله $f(x)=g(x)$ دوحالت داریم:

$$1)\quad x\leqslant 2\ ,\ x^2-4x+6=-x+4 \Longrightarrow x=1,2$$

$$2)\quad x\geqslant 2\ ,\ -x+4=2-\sqrt{x-2}\Longrightarrow x=2,3$$

بنابراین معادلهٔ $f(x)=g(x)$ دارای سه‌جواب حقیقی‌است:

$$x_1=1 \,،\, x_2=2 \,،\, x_3=3$$

۸۰. تابع مفروض‌را به اینصورت می‌نویسیم:

$$y=x-2+\frac{x+7}{x^2+2x+3}$$

چون به‌ازای $x>1000000$ داریم:

$$\frac{x+7}{x^2+2x+3}<\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}<0.000002$$

بنابراین به‌ازای $x=1385671.215$ باتقریب 0.00001 داریم:

$$y\neq x-2=1385669.215$$

۸۱. تابع $f(x)$ را چنین می‌نویسیم:

$$f(x)=2x-\frac{2x^3}{1-x^2}$$

به‌ازای $x=0.0015694$ این‌نامساوی درست است:

$$\frac{2x^3}{1+x^2}<2x^3<2\times 0.002^3=$$

$$=0.000000016<0.00000002$$

بنابراین مقدار تابع تا 0.00000002 تقریب چنین می‌شود:

$$f(x)\neq 2x=0.0031388$$

۸۲. درحالت $0\leqslant x\leqslant 2$ آنچه‌که از ذوزنقه جـدا می‌شود، مثلثی است به قاعدهٔ مساوی x وارتفاع مساوی $\frac{x}{2}$ وبنابراین مساحت آن مساوی $\frac{x^2}{4}$ می‌شود. در حالت $2<x\leqslant 4$ قسمت جدا شده عبارتست‌ازیك مثلث ویك متوازی‌الاضلاع. مساحت مثلث مساوی ۱ و مساحت متوازی‌الاضلاع مساوی $(x-2)$ می‌شود و بنابراین مساحت شکل $ABNM$ مساوی $(x-1)$ خواهد شد (شکل ۵۵ ـ صفحهٔ۹۵). بنابراین تابع y بارابطه‌های زیر معین می‌شود:

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^۲}{۴} & (۰\leqslant x\leqslant ۲)\\ x-۱ & (۲<x\leqslant ۴)\end{cases}$$

۸۳. چون x و $\sin(\log x)$ جلوعلامت لگاریتم قراردارند، باید داشته باشیم: $x>۰$ و $\sin(\log x)>۰$. ازنامساوی دوم نتیجه می‌شود:

$$۲k\pi<\log x<(۲k+۱)\pi \implies ۱۰^{۲k\pi}<x<۱۰^{(۲k+۱)\pi}$$

که درآنها k می‌تواند هر عدد صحیح دلخواه باشد و همین نامساویها، فاصله تغییرات x را نشان می‌دهد.

۸۴. جواب: $-۳<x<-۱-\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}-۱<x<۱$.

۸۵. برای هرمقدار $x\geqslant ۰$ داریم: $|x|-x=۰$ وبنابراین در اینحالت مقدار تابع هم مساوی صفر می‌شود و $x\geqslant ۰$ جزو فاصلهٔ تغییرات x است . از طرف دیگر، ازمقدار زیر رادیکال معلوم است که برای حقیقی بودن تابع باید داشته باشیم: $\sin \pi x=۰$ که ازآنجا $x=n$ بدست می‌آید. بنابراین حوزهٔ تغییرات x عبارتست از $x\geqslant ۰$ و $x=n$ $(n=-۱،-۲،-۳،\dots)$.

۸۶. a) جواب: $۰<u^۲<۱$ ویا $-۱<u<۰$ و $۰<u<۱$.

b) $۰<\sin x<۱$ یعنی $۲k\pi<x<(۲k+۱)\pi$.

c) $۰<\ln x<۱$ یعنی $۱<x<e$.

d) به‌ازای هرمقدار صحیح x داریم $\dfrac{E(x)}{x}=۱$، به‌ازای مقادیرمثبت وغیر صحیح x داریم $۰<\dfrac{E(x)}{x}<۱$ وبه ازای مقادیرمنفی وغیر صحیح x داریم: $\dfrac{E(x)}{x}>۱$. بنابراین حوزه تغییرات x چنین است:

$$n<x<n+۱ \quad (n=۰،۱،۲،\dots)$$

۸۷. برای مقادیری‌از x که به‌ازای آنها $|\varphi(x)|\leqslant ۱$ باشد $f[\varphi(x)]=۰$
و برای مقادیر، $f[\varphi(x)]=۱$ می‌شود . طبق فرض مسأله، به ازای $|x|>۲$
داریم $\varphi(x)=-۱$، بنابراین وقتی‌که $|x|>۲$ باشد، $f[\varphi(x)]=۰$ است.
وقتی‌که $|x|\leqslant ۲$ باشد، برای اینکه $|\varphi(x)|\leqslant ۱$ شود باید داشته باشیم:

$$|x^۲-۲|\leqslant ۱ \Longrightarrow \begin{cases} ۱\leqslant x\leqslant \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۳}\leqslant x\leqslant -۱ \end{cases}$$

که دراینحالت هم $f[\varphi(x)]=۰$ است. وقتی‌که $\sqrt{۳}<x\leqslant ۲$ یا:
$-۲\leqslant x<-\sqrt{۳}$ باشد ، $|\varphi(x)|>۱$ می‌شود و داریم $f[\varphi(x)]=۱$.
بنابراین جواب چنین است:

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} ۰ & (|x|>۲ \text{ ، } ۱\leqslant x\leqslant\sqrt{۳} \text{ ، } -\sqrt{۳}\leqslant x\leqslant -۱) \\ ۱ & (\sqrt{۳}<x\leqslant ۲ \text{ ، } -۲\leqslant x<-\sqrt{۳}) \end{cases}$$

۸۸. باید دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} x^۲-۴x-۳۲>۰ \\ x^۲-۸x-۲۰>۰ \\ x^۲-۴x-۳۲\leqslant x^۲-۸-۲۰ \end{cases}$$

که از آنجا جواب $-۲<x\leqslant ۳$ بدست می‌آید.

۸۹. x همهٔ مقادیر حقیقی‌را می‌تواند اختیار کند وداریم:

$$f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{x^۲+۱})=\log_a\frac{۱}{x+\sqrt{x^۲+۱}}=$$

$$=-\log_a(x+\sqrt{x^۲+۱})=-f(x)$$

وچون $f(-x)=-f(x)$، بنابراین $f(x)$ تابعی‌است فرد.

۹۰. $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ رادوتابع زوج فرض می‌کنیم و a را عددی‌ازفاصلهٔ
تغییرات مجموع آنها، یعنی $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ می‌گیریم. در اینصورت

a جزء فاصلهٔ تغییرات $\varphi(x)$و$\psi(x)$ هم خواهد بود وضمناً ازشرطهای $\varphi(a)=\varphi(-a)$ و $\psi(a)=\psi(-a)$ نتیجه‌می‌شود:

$$f(-a)=\varphi(-a)+\psi(-a)=\varphi(a)+\psi(a)=f(a)$$

یعنی $f(x)$ هم تابعی است زوج.

۹۱. داریم:

$$a)\ F_1(-x)=\frac{f(-x)+f[-(-x)]}{2}=$$

$$=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=F_1(x)$$

$$b)\ F_2(-x)=\frac{f(-x)-f[-(-x)]}{2}=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=$$

$$=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-F_2(x)$$

چون $F_1(x)+F_2(x)=f(x)$ ، بنابراین هر تابعی راکه در فاصلهٔ متقارنی نسبت به‌صفرمعین باشد، می‌توان به‌مجموع دوتابع تبدیل‌کردکه یکی ازآنها زوج ودیگر فرد است.

۹۲. فرض می‌کنیم که عدد $T>0$ وجود داشته باشد، بنحوی که به‌ازای همهٔ مقادیرx داشته باشیم:

$$\sin x^2=\sin(x+T)^2 \quad (1)$$

$x=0$ می‌گیریم، بدست می‌آید $\sin T^2=0$ وازآنجا خواهیم‌داشت: $T^2=n\pi$ $(n=0،1،2،...)$، بنابراین $T=\sqrt{n\pi}$. این مقدار T را در رابطهٔ (۱) قرارمی‌دهیم:

$$\sin x^2=\sin(x+\sqrt{n\pi})^2=\sin(x^2+2x\sqrt{n\pi}+n\pi) \quad (2)$$

x را بنحوی اختیارمی‌کنیم که با هیچیك ازمقادیر $\frac{2m\pi-n\pi}{2\sqrt{n\pi}}$ (m عددی است صحیح) برابر نباشد(روشن است که‌چنین‌مقداری را می‌توان‌برای x انتخاب

کرد). دراینصورت بدست می‌آید:

$$۲x\sqrt{n\pi}+n\pi\neq ۲m\pi$$

و بنابراین:

$$\sin x^{۲}\neq \sin(x^{۲}+۲x\sqrt{n\pi}+n\pi)$$

که تساوی (۲) را نقض می‌کند. درنتیجه تابع $f(x)=\sin x^{۲}$ نمی‌تواند متناوب باشد.

۹۳. a) طبق شرط مسأله: $x\in[۲k,۲k+۲)$، یعنی $۲k\leqslant x<۲k+۲$ ازآنجا بدست می‌آید: $۰\leqslant x-۲k<۲$. چون درفاصلهٔ [۰و۲) داریم $f(x)=x^{۲}-۱$، پس درفاصلهٔ $[۲k,۲k+۲)$ داریم: $f(x-۲k)=(x-۲k)^{۲}-۱$. ازآنجاکه دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ مساوی است با ۲، بنابراین $f(x)=f(x-۲k)$. به این‌ترتیب ثابت کردیم که اگر $۲k\leqslant x<۲k+۲$ باشد، داریم:

$$f(x)=(x-۲k)^{۲}-۱$$

b) چون $x=۷$ درفاصلهٔ $[۲\times۳,۲\times۳+۲)$ قراردارد، بنابراین

$$f(۷)=f(۷-۲\times۳)=(۷-۲\times۳)^{۲}-۱=۰$$

وسپس

$$f\left(\frac{۱۵}{۴}\right)=f\left(\frac{۱۵}{۴}-۲\right)=\left(\frac{۷}{۴}\right)^{۲}-۱=\frac{۳۳}{۱۶},$$

$$f(-\sqrt{۲})=f(-\sqrt{۲}+۲)=(۲-\sqrt{۲})^{۲}-۱=۵-۴\sqrt{۲},$$

$$f(\pi)=f(\pi-۲)=(\pi-۲)^{۲}-۱=\pi^{۲}-۴\pi+۳$$

۹۴. تابع $y=z\ln z$ به‌ازای $z>۱$ عبارتست از حاصلضرب دو تابع صعودی مثبت وبنابراین صعودی است. تابع

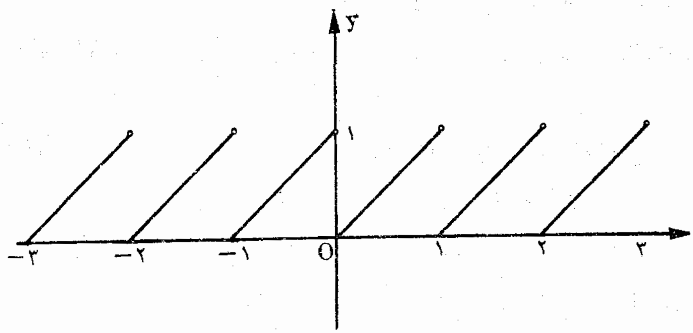
$$z=x^{۲}+۴x+۶=(x+۲)^{۲}+۲>۱$$

به ازای $x>-۲$ صعودی و به ازای $x<-۲$ نزولی است. در نتیجه تابع مفروض هم به‌ازای $x>-۲$ صعودی وبه‌ازای $x<-۲$ نزولی است.

۹۵. با توجه به‌تساوی $E(x+۱)=E(x)+۱$ داریم:

$$f(x+۱)-(x+۱)-E(x+۱)=x-E(x)=f(x)$$

وبنابراین کوچکترین دورهٔ تناوب تابع برابراست با ۱. نمایش تغییرات تابع درشکل ۸۶ داده شده است:



شکل ۸۶

۹۶. جواب: $۱+\frac{\pi}{۴}$

۹۷. داریم:

$$y=\sin(\cos^{۲}x)\cdot\cos(\sin^{۲}x)$$

$$y'=-۲\sin x\cos x\cos(\cos^{۲}x)\cdot\cos(\sin^{۲}x)-$$
$$-۲\sin x\cos x\sin(\sin^{۲}x)\sin(\cos^{۲}x)=$$
$$=-۲\sin x\cos x[\cos(\cos^{۲}x)\cdot\cos(\sin^{۲}x)+$$
$$+\sin(\cos^{۲}x)\cdot\sin(\sin^{۲}x)]=$$
$$=-\sin ۲x[\cos(\cos^{۲}x-\sin^{۲}x)]=-\sin ۲x\cdot\cos(\cos ۲x)$$

۹۸. بترتیب داریم:

$$y'=[\sin(\sin x)]'\cdot\cos[\sin(\sin x)]=$$
$$=(\sin x)'\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]=$$
$$=\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$$

۹۹. جواب: $y'=-۳tg^{۲}x\cdot\sec^{۲}x\cdot\sin(۲tg^{۳}x)\cdot\cos[\cos^{۲}(tg^{۳}x)]$

$\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

۱۰۰. جواب: $y'=-\frac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\cot g\,x}}$ $(x\neq k\pi)$.

۱۰۱. جواب: $y'=\frac{2ax}{x^4+a^2}$ $(a\neq 0)$.

۱۰۲. جواب: $y'=\frac{1}{x^2+2}$ $(x\neq 0)$.

۱۰۳. جواب: $y'=\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ $(x\geqslant 0)$.

۱۰۴. جواب: $y'=\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ $(|x-1|<\sqrt{2})$.

۱۰۵. جواب: $y'=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ $(x\geqslant 0)$.

۱۰۶. جواب: $y'=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ $\left(0<x-k\pi<\frac{\pi}{2}\right)$.

۱۰۷. جواب: $y'=\frac{\sin 2x}{|\sin x|}$ $(x\neq k\pi)$،

۱۰۸. جواب: $y'=-1$ $\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$.

۱۰۹. جواب: $y'=\frac{-2x}{|x|(1+x^2)}$ $(x\neq 0)$.

۱۱۰. جواب: $y'=\frac{1}{a+b\cos x}$

۱۱۱. جواب: $y'=\frac{4x}{\sqrt{1-x^4}\arccos^3(x^2)}$ $(|x|<1)$.

۱۱۲. جواب: $y'=\frac{1+x^4}{1+x^6}$

۱۱۳. جواب:

$$y'=2x\left[\frac{\cos x^2}{|\cos x^2|}+\frac{\sin x^2}{|\sin x^2|}\right] \qquad \left(|x|\neq\frac{k\pi}{2} \text{ و } k=0,1,2,\ldots\right).$$

۱۱۴. داریم: $y=|x|=\sqrt{x^2}$

وازآنجا: $y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}=\frac{x}{|x|}$

۱۱۵. $y'=|x|+\frac{x^2}{|x|}=\frac{x^2+x^2}{|x|}=\frac{2|x|^2}{|x|}=2|x|$

۱۱۶. جواب: $y'=\frac{3}{2}\sin 2x|\sin x|$

۱۱۷. جواب: $y'=(x-1)(x+1)^2(5x-1)\times\frac{x+1}{|x+1|}$

۱۱۸. جواب: $y'=2xf'(x^2)$

۱۱۹. جواب: $y'=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$

۱۲۰. جواب: $y'=f'(x)\cdot f'[f(x)]\cdot f'\left\{f[f(x)]\right\}$

۱۲۱. جواب: $y'=f\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}f'\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

۱۲۲. داریم:

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-1000)+\\&+x(x-2)(x-3)\ldots(x-1000)+\ldots+\\&+x(x-1)(x-2)\ldots(x-999)=\\&=(x-1)(x-2)\ldots(x-1000)+x\cdot\varphi(x)\end{aligned}$$

و بنابراین: $f'(0)=(-1)(-2)(-3)\ldots(-1000)=1000!$

۱۲۳. مشتق تابع چنین است:

$$y' = 1 + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \frac{3\sqrt[3]{\sin^2 x} + \cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

مشتق تابع به ازای $x = k\pi$ برابر بی‌نهایت می‌شود وبنابراین منحنی تابع در این نقطه‌ها دارای مماس قائم است.

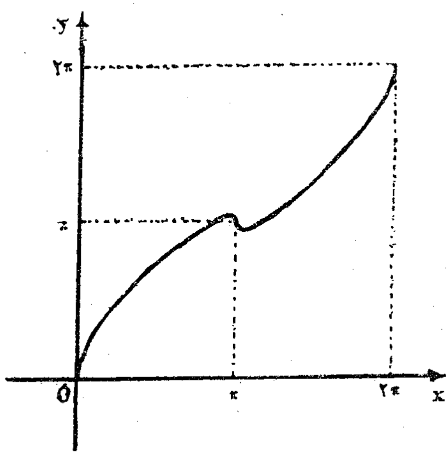
برای رسم منحنی به نکته‌های زیر توجه کنید:

۱. منحنی تابع نسبت به‌مبداء مختصات ونسبت بـه نقطهٔ (π, π)، ... و بطور کلی نسبت به‌نقطهٔ $(k\pi, k\pi)$ متقارن است.

۲. مشتق تابع‌درنقطه‌های‌نزدیك به π برابرصفراست(اگر $y' = 0$ قرار دهیم $-1 < \cos x < -0{,}9$ بدست می‌آید).

۳. اگر منحنی نمایش تغییرات تابع را در فاصلهٔ $(0$ و $2\pi)$ رسم کنیم، بقیهٔ منحنی از انتقال مبداء مختصات به نقطهٔ $(2\pi, 2\pi)$ یا $(-2\pi, -2\pi)$ وسپس به‌نقطهٔ $(4\pi, 4\pi)$ یا $(-4\pi, -4\pi)$ وغیره بدست می‌آید.

منحنی نمایش تابع درفاصلهٔ $(0$ و $2\pi)$ چنین است:



شکل ۸۷

۱۲۴. ازرابطهٔ $y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ استفاده کنید.

جواب: $y'_x=\sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}\ (t\neq 1, t>0)$.

۱۲۵. جواب: $y'_x=-1\ (0<x<1)$:

۱۲۶. جواب: $y'_x=\operatorname{cotg}\frac{t}{2}$ $(t\neq 2k\pi)$.

۱۲۷. جواب: -1

۱۲۸. جواب: $y'=\frac{1-x-y}{x-y}$

۱۲۹. جواب: $y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$

۱۳۰. $1)\quad y'_x=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ ,\quad 2)\quad y'_{\sqrt{x}}=1$

$3)\quad y=\sqrt{x}=(x^2)^{\frac{1}{4}}$ و

$$y'_{x^2}=\frac{1}{4}(x^2)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$4)\quad y=\sqrt{x}=\sqrt{\operatorname{Arcsin}(\sin x)}\ (0<x\leqslant\frac{\pi}{2})\ ,$

$$y'_{\sin x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot 2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\cos x}\ (0<x\leqslant\frac{\pi}{2})$$

۱۳۱. جواب: $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\ \# \ 70^\circ 30'$.

۱۳۲. مشتق تابع چنین است: $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ وضریب زاویهٔمماس

در نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ برابراست با $-\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}$ ومعادلهٔ خط مماس:

$y=-\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}(x-\alpha)+\beta$ می‌شود. اگرمحل برخورد این خطرا بامحور طول A وبا محورعرض B فرض کنیم، طول A مساوی $\sqrt[3]{a^2\alpha}$ وعرض B مساوی $\sqrt[3]{a^2\beta}$ می‌شود (توجه داشته باشید که: $\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\beta^2}=\sqrt[3]{a^2}$).

دراینصورت طول قطعه خط AB چنین است:

$$AB=\sqrt{\sqrt[3]{a^4\alpha^2}+\sqrt[3]{a^4\beta^2}}=\sqrt{\sqrt[3]{a^4}(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\beta^2})}=$$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[6]{a^6}=a$$

۱۳۳. جواب: $(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2=0$

۱۳۴. داریم:

$$y'=-a\sin x+b\cos x \quad ; \quad y''=-a\cos x-b\sin x \quad ;$$

وازآنجا: $y''+y=0$

۱۳۶. داریم:

$$y'=n(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=$$

$$=n(x+\sqrt{x^2-1})^n.\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{ny}{\sqrt{x^2-1}} \quad ;$$

$$y''=\frac{ny'\sqrt{x^2-1}-\frac{nxy}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{ny}{\sqrt{x^2-1}}-$$

$$-\frac{nxy}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

و ازآنجا:

$$(x^2-1)y''+xy'-n^2y=(x^2-1)\left(\frac{ny'}{\sqrt{x^2-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{nxy}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\right)+xy'-n^2y=$$

$$=ny'\sqrt{x^2-1}-\frac{nxy}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{nxy}{\sqrt{x^2+1}}-n^2y=$$

$$=ny'\sqrt{x^2-1}-n^2y=n^2y-n^2y=0$$

۱۳۷. داریم:

$$y=\frac{a-b}{x^2-(a+b)x+ab}\implies$$

$$\implies\frac{1}{y}=\frac{1}{a-b}x^2-\frac{a+b}{a-b}x+\frac{ab}{a-b}\quad :$$

و ازآنجا:

$$\left(\frac{1}{y}\right)'=-\frac{y'}{y^2}=\frac{2}{a-b}x-\frac{a+b}{a-b}\quad ;$$

$$\left(-\frac{y'}{y^2}\right)'=\frac{2y'^2-yy''}{y^3}=\frac{2}{a-b}$$

۱۳۸. اگرطول نقطهٔ P ،پای قائم را، α بگیریم، عرض آن $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ خواهد شد، دراینصورت ازیکطرف ضریب زاویهٔ خط MP چنین می‌شود:

$$m_{MP}=\frac{y_P-y_M}{x_P-x_M}=\frac{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}+2}{\alpha-2}=\frac{3\alpha+1}{(\alpha+1)(\alpha-2)}$$

از طرف دیگرضریب زاویهٔ قائم برابر $-\frac{1}{y'}$ است وداریم:

$$y' = \frac{۲}{(x+۱)^۲} \Longrightarrow m_{MP} = -\frac{(\alpha+۱)^۲}{۲};$$

و در نتیجه به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{۳\alpha+۱}{(\alpha+۱)(\alpha-۲)} = -\frac{(\alpha+۱)^۲}{۲} \quad ;$$

این معادله بصورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\alpha(\alpha-۱)(\alpha^۲+۲\alpha-۱) = ۰ \Longrightarrow \alpha = ۰, ۱, -۱ \pm \sqrt{۲}$$

$$P_۱\left|\begin{matrix} ۰ \\ -۱ \end{matrix}\right. \;;\; P_۲\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۰ \end{matrix}\right. \;;\; P_۳\left|\begin{matrix} \sqrt{۲}-۱ \\ -(\sqrt{۲}-۱) \end{matrix}\right. \;;\; P_۴\left|\begin{matrix} -(\sqrt{۲}+۱) \\ \sqrt{۲}+۱ \end{matrix}\right.$$

ودیگرمعادله‌های قائمها بدست می‌آید.

۱۳۹. داریم: $\frac{۱}{y^۲} = x^۲+ax+b$

که اگردوبارازدوطرف این رابطه نسبت به x مشتق بگیریم، به رابطهٔ مطلوب می‌رسیم.

۱۴۰. اگر $f(x)$ ازدرجهٔ n باشد، $f'(x)$ ازدرجهٔ $n-۱$ و $f[f'(x)]$ ازدرجهٔ $n(n-۱)$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$n(n-۱) = ۶ \Longrightarrow n = ۲$$

بنابراین $f(x)$ باید به‌صورت:

$$f(x) = ax^۳+bx^۲+cx+d$$

باشد،ازطرف دیگرازفرض مسأله روشن‌می‌شود که مشتق باید تنها شامل توانهای زوج x باشد و بنابراین $b=۰$ و $f(x)=ax^۳+cx+d$ می‌شود که در اینصورت $f'(x)=۳ax^۲+c$ می‌شود وداریم:

$$f[f'(x)] = ۲۷a^۴x^۶+۲۷a^۳cx^۴+۳ac(۳ac+۱)x^۲+ \\ +(ac^۳+c^۲+d)$$

که اگربا عبارت فرض متحد قراردهیم، مقادیرضریبها بدست می‌آید:

$a=\pm۱$, $c=\mp۱$, $d=۲$ و

$f(x)=-x^۲+x+۲$ یا $f(x)=x^۲-x+۲$

۱۴۱. معادلهٔ مماس بر منحنی $y=x^n$ را درنقطهٔ (a,a^n) می‌نویسیم:

$$y-a^n=y'(a)(x-a)$$

ویا:

$$y-a^n=na^{n-1}(x-a)$$

درمعادلهٔ مماس $y=0$ می‌گیریم:

$$-a^n=na^{n-1}(x-a)$$

وازآنجا:

$$x_n=a(1-\frac{1}{n})$$

به‌ازای $x\leqslant -1$ داریم $1-\frac{1}{n}\leqslant 2$ وبه‌ازای $n>1$ داریم $1-\frac{1}{n}<1$

بنابراین:

$$|x_n|\leqslant 2|a|$$

وقتی $n<0$ باشد، دنبالهٔ $\left\{x_n\right\}$ صعودی و وقتی $n>0$ باشد، بازهم دنبالهٔ $\left\{x_n\right\}$ صعودی است $(a>0)$، ولی $x_{-1}=2a$ و $x_0=0$ ، یعنی $x_0<x_{-1}$ ، بنابراین دنبالهٔ $\left\{x_n\right\}$ غیر یکنواست.

حد دنبالهٔ x_n را پیدا می‌کنیم.

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left[a(1-\frac{1}{n})\right]=a$$

۱۴۲. هم‌صورت وهم‌مخرج کسر نسبت به x ازدرجهٔ $\frac{1}{2}n(n+1)$ است وبنابراین حد این عبارت وقتی‌که $x\to\infty$ برابر است با

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}n(n+1)}}$$

۱۴۳. بترتیب داریم:

$$\underset{x\to 1}{\text{حد}}\frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}=$$

$$=\underset{x\to 1}{\text{حد}}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\dots+(x^n-1)}{(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\ldots+(x^{n-1}+x^{n-2}+$$
$$+\ldots+x+1)]=1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

روشن است که با قاعدهٔ هوپیتال هم می‌توان به همین نتیجه رسید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}(1+2x+\ldots+nx^{n-1})=$$
$$=1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

۱۴۴. جواب: $\frac{49}{24}$.

۱۴۵. اگر از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم، باید دوبار از صورت و مخرج نسبت به x مشتق بگیریم. ولی بدون استفاده از قاعدهٔ هوپیتال هم می‌توان عمل کرد. برای این منظور باید صورت را بر مخرج تقسیم کرد و خارج‌قسمت را بدست آورد (برای بدست آوردن خارج قسمت ابتدا فاکتور $x-1$ را از صورت خارج می‌کنیم وسپس یکبار دیگر فاکتور $x-1$ را بیرون می‌آوریم). این خارج قسمت چنین است:

$$x^{n-1}+2x^{n-2}+3x^{n-3}+\ldots+(n-1)x+n$$

که حد آن وقتی $x\to 1$ می‌شود:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

۱۴۶. عبارت مفروض با تبدیلهای ساده به‌صورت $\frac{(2x+a)n-(2x+a)}{2n}$ در می‌آید؛ جواب: $x+\frac{a}{2}$

۱۴۷. جواب: $x^2+ax+\frac{1}{3}a^2$

۱۴۸. جواب: ۱. **۱۴۹.** جواب: $\frac{1}{2}$. **۱۵۰.** جواب: ۳.

۱۵۱. جواب: ۱. **۱۵۲.** جواب: $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. **۱۵۳.** جواب: $\frac{2}{27}$

۱۵۴. جواب: $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$. ۱۵۵. $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$

۱۵۶. بترتیب داریم:

$$\frac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{x}=\frac{a_1+a_2x+a_3x^2+\dots+a_nx^{n-1}}{\sqrt[m]{\alpha^{m-1}}+\sqrt[m]{\alpha^{m-2}}+\dots+\sqrt[m]{\alpha}+1}$$

که در آن $\alpha=1+p(x)$ است که به ازای $x=0$، صورت کسر مساوی a_1 ومخرج مساوی m می‌شود:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}$$

۱۵۷. جواب: $\frac{1}{2}$. ۱۵۸. جواب: $\frac{1}{2}$. ۱۵۹. جواب: ۱

۱۶۰. جواب: ۲. ۱۶۱. جواب: $-\frac{1}{4}$.

۱۶۲. جواب: $\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)$. ۱۶۳. جواب: 2^n

۱۶۴. جواب: $2n$. ۱۶۵. جواب: $a=1$ ، $b=-1$.

۱۶۶. جواب: $a_1=1$ ، $b_1=-\frac{1}{2}$ و $a_2=-1$ ، $b_2=\frac{1}{2}$.

۱۶۷. $x-\pi=z$ فرض می‌کنیم، دراینصورت $x=\pi+z$ خواهدشد وداریم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(m\pi+mz)}{\sin(n\pi+nz)}=$$

$$=(-1)^{m+n}\lim_{z\to 0}\frac{\sin mz}{\sin nz}=(-1)^{m+n}\lim_{z\to 0}\frac{mz}{nz}=$$

$$=(-1)^{m+n}\cdot\frac{m}{n}$$

۱۶۸. بترتیب داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos x(1-\cos^2 x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[4\cos x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right] = \lim_{x\to 0}(4\cos x) = 4$$

۱۶۹. بترتیب داریم:

$$1+\sin x-\cos x = 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right) \quad ;$$

$$1+\sin px-\cos px = 2\sin\frac{px}{2}\left(\sin\frac{px}{2}+\cos\frac{px}{2}\right) \quad ;$$

وازآنجا اگرمقدارکسررا y فرض کنیم:

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{p\left(\sin\frac{px}{2}+\cos\frac{px}{2}\right)} = \frac{1}{p}$$

۱۷۰. داریم:

$$tg\,2x\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{2tg\,x}{1-tg^2 x}\times\frac{1-tg\,x}{1+tg\,x} = \frac{2tg\,x}{(1+tg\,x)^2}$$

جواب: $\frac{1}{2}$

۱۷۱. $1-x=z$ فرض کنید. جواب: $\frac{2}{\pi}$

۱۷۲. صورت کسر به $-4\sin^2\frac{x}{2}\sin(a+x)$ قابل تجزیه است.

جواب: $-\sin a$

۱۷۳. کسررا می‌توان پس ازتبدیلات چنین نوشت:

$$\frac{2\sin^2 x\cos(a+x)}{x^2\sin a\sin(a+x)\sin(a+2x)}$$

جواب: $\frac{2\cos a}{\sin^3 a}$ $.(a\neq k\pi)$

۱۷۴. صورت کسر مفروض را می‌توان بسادگی به شکل:

$$-\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\sin\left(2a+\frac{3x}{2}\right)$$

تبدیل نمود.

جواب: $\frac{3}{2}\sin 2a$

۱۷۵. اگر کسر مفروض را y فرض کنیم، داریم:

$$y=\frac{tg x-\sin x}{x^3\left(\sqrt{1+tg x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}=$$

$$=\frac{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x\left(\sqrt{1+tg x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$$

که بسادگی باتوجه به رابطهٔ $\lim_{x\to 0}\sin x=x$ و $\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2}=\frac{x^2}{4}$، بدست می‌آید:

$$\lim_{x\to 0} x=\frac{1}{4}$$

۱۷۶. جواب: $\frac{4}{3}$

۱۷۷. داریم: $\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$

جواب: $\sqrt{2}$

۱۷۸. جواب: صفر. ۱۷۹. جواب: ۳

۱۸۰. داریم:

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

که با توجه به رابطهٔ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=0$ داریم:

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$$

۱۸۱. داریم: $\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{n^2}+\cdots$

با توجه به‌اینکه وقتی n بسمت‌بی‌نهایت میل می‌کند، می‌توان ازجمله‌های بعد صرفنظر کرد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n^2}\right)$$

ازطرف دیگرداریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n^2}\right)=\frac{1}{2n^2}+\frac{2}{2n^2}+\frac{3}{2n^2}+\cdots+\frac{n}{2n^2}=\frac{n(n+1)}{4n^2}$$

وبنابراین $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n^2}\right)=\frac{1}{4}$

جواب: $\frac{1}{4}$

۱۸۳. $\frac{1}{1-x}$. **۱۸۴.** $\frac{\sin x}{x}$. **۱۸۵.** -2

۱۸۶. $\frac{1}{3}$. **۱۸۷.** 1 **۱۸۸.** $\frac{1}{2}$

۱۸۹. $\frac{a-b}{3ab}$. **۱۹۰.** صفر.

۱۹۱. داریم $a_1<a_2$ و $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n^2-a_{n-2}^2)$، از آنجا با استقراء ریاضی ثابت‌می‌شودکه برای هرمقدار n داریم: $a_n<a_{n+1}$.

علاوه بر آن می‌دانیم $a_1 < 1$ واگر $a_k < 1$ باشد:

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}(b+a_k^2)<\frac{1}{2}(1+1)=1$$

یعنی دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی ومحدوداست وبنابراین حدی‌دارد.

فرض می کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=c$ ، دراینصورت:

$$c=\lim_{n\to\infty} c_{n+1}=\frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty}(b+a_n^2)\right]=\frac{1}{2}(b+c^2)$$

یعنی: $$c=\frac{1}{2}(b+c^2)$$

وازآنجا: $$c=1\pm\sqrt{1-b}$$

ولی چون $a_n < 1$، بنابراین $c\leqslant 1$، یعنی :

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1-\sqrt{1-b}$$

۱۹۲. بترتیب داریم:

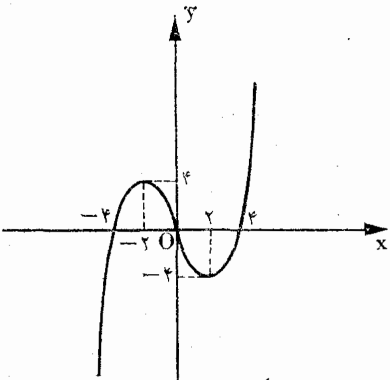
$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^{2m^2}-1}{x^{2n^2}-1}}=\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{(x-1)(x^{2m^2-1}+\dots+x+1)}{(x-1)(x^{2n^2-1}+\dots+x+1)}}$$

$$=\sqrt{\frac{2m^2}{2n^2}}=\frac{m}{n}$$

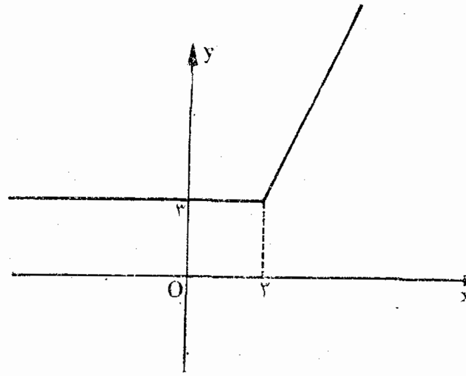
۱۹۳. به‌ازای $x\leqslant 3$ داریم: $y=3$ وبه‌ازای $x>3$ داریم $y=2x-3$ (شکل ۸۸). تابع درفاصلهٔ $[-\infty, 3]$ ثابت و درفاصلهٔ $(3, +\infty)$ صعودی است.

۱۹۴. داریم: (شکل ۸۹).

$$y=\begin{cases}-x^2-4x & (x\leqslant 0)\\ x^2-4x & (x\geqslant 0)\end{cases}$$



شکل۸۹

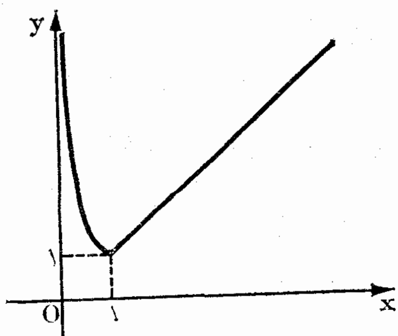


شکل۸۸

تابع درفاصله‌های $(-\infty, -2)$ و $(3, +\infty)$ صعودی و در فاصلهٔ $(-2, 2)$ نزولی است. $(-2, 4)$ نقطهٔ ماکزیمم و $(2, -4)$ نقطهٔ می‌نیمم منحنی است. منحنی درمبداء مختصات برخط $4x+y=0$ مماس است.

۱۹۵. پاره‌خطی ازنیمسازربع اول درفاصلهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. دو انتهای این پاره‌خط جزو نمایش تغییرات نیست.

۱۹۶. ازآنجاکه $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$، بنابراین $|\log_{\frac{1}{2}} x| = |\log_2 x|$



شکل۹۰

وتابع رامی‌توان به‌صورت $y = 2^{|\log_2 x|}$ نوشت. تابع برای $x > 0$ معین است. اگر از دو طرف درمبنای ۲ لگاریتم بگیریم:

$$\log_2 y = |\log_2 x| = \begin{cases} -\log_2 x = \log_2 \frac{1}{x} & (0 < x \leqslant 1) \\ \log_2 x & (x \geqslant 1) \end{cases}$$

وبنابراین (شکل۹۰):

$$y=\begin{cases}\frac{۱}{x} & (۰<x\leqslant ۱)\\ x & (x>۱)\end{cases}$$

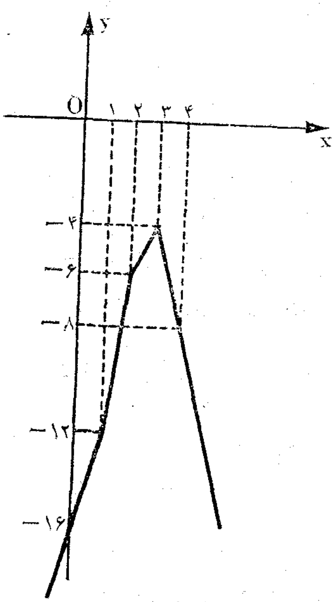
۱۹۷. برای تعیین مقدارتابع درفاصله‌های مختلف داریم:

۱) $x\leqslant ۱;\ y=-x+۱+۲x-۴+۳x-۹-۴=۴x-۱۶$

۲) $۱\leqslant x\leqslant ۲;\ y=x-۱+۲x-۴+۳x-۹-۴=۶x-۱۸$

۳) $۲\leqslant x\leqslant ۳;\ y=x-۱-۲x+۴+۳x-۹-۴=۲x-۱۰$

۴) $x\geqslant ۳;\ y=x-۱-۲x+۴-۳x+۹-۴=-۴x+۸$



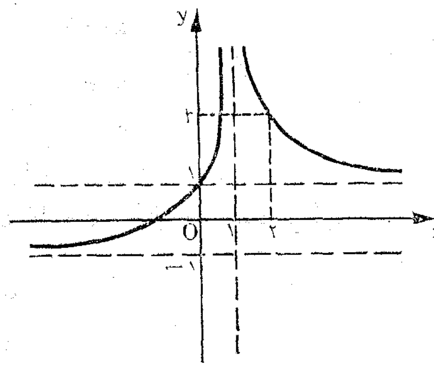
شکل۹۱

نمایش تغییرات تابع درشکل۹۱ داده‌شده‌است. تابع درفاصلهٔ $(-\infty, ۳)$ صعودی و در فاصلهٔ $(۳, +\infty)$ نزولی است. $(۳, -۴)$ نقطهٔ ماکزیمم و $(۱, -۱۲)$ و $(۲, -۶)$ نقطه‌های شکستگی منحنی تابع‌اند.

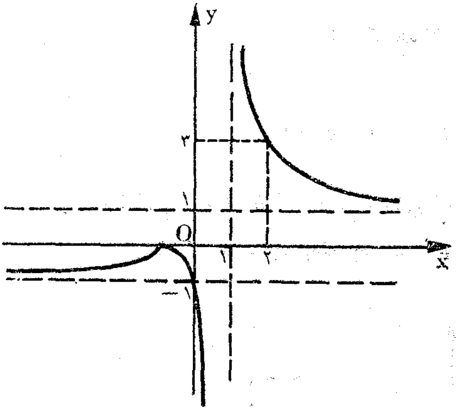
۱۹۸. پاره‌خطی ازنیمسازربع اول وسوم در فاصلهٔ $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$.

۱۹۹. داریم (شکل۹۲):

$$y=\begin{cases}-\dfrac{x+۱}{x-۱} & (x<۱)\\[2mm] \dfrac{x+۱}{x-۱} & (x>۱)\end{cases}$$



شکل۹۲



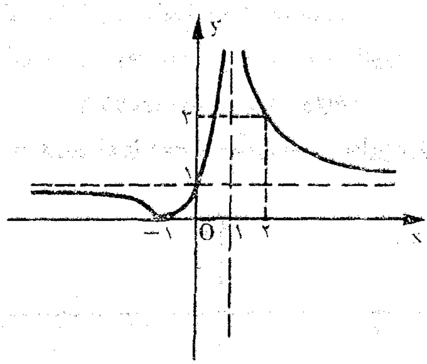
شکل۹۳

۲۰۰. داریم (شکل ۹۳):

$$y=\begin{cases} -\dfrac{x+1}{x-1} & (x\leqslant -1) \\[2ex] \dfrac{x+1}{x-1} & (x\geqslant -1) \end{cases}$$

نقطهٔ $(-1, 0)$، نقطهٔ ماکزیمم منحنی تابع است.

۲۰۱. داریم (شکل۹۴):

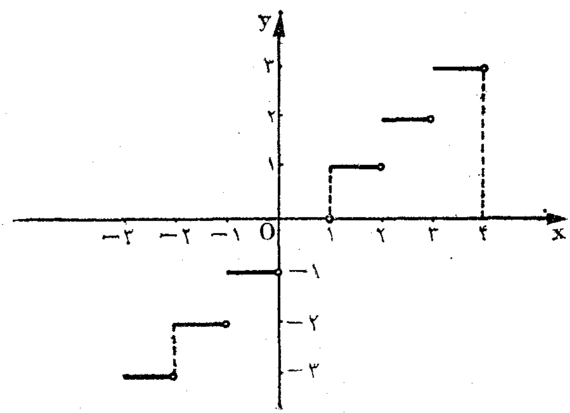


شکل۹۴

$$y=\begin{cases} -\dfrac{x-1}{x-1} & (-1\leq x<1) \\ \dfrac{x+1}{x-1} & (x\leq -1 \text{ یا } x>1) \end{cases}$$

نقطهٔ $(-1,0)$ نقطهٔ می‌نیمم منحنی تابع است.

۲۰۲. با توجه به‌تعریف تابع $y=E(x)$، شکل ۹۵ بدست می‌آید:



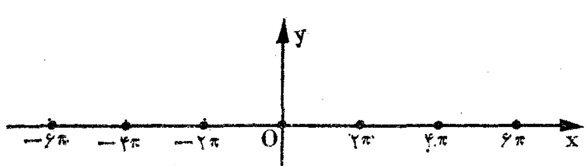
شکل۹۵

۲۰۳. شکل مسألهٔ ۹۵ صفحهٔ ۲۴۰دیده شود.

۲۰۴. برای حقیقی بودن مقدار y باید داشته باشیم:

$$\log\cos x\geq 0 \Longrightarrow \cos x\geq 1$$

و بنابراین تنها $\cos x=1$ یا $x=2k\pi$ ممکن است. به‌این‌ترتیب تنها مختصات



شکل۹۶

نقطه‌های $(2k\pi, 0)$ درتابع مفروض صدق می‌کند. تابع درتمام نقطه‌های خود ناپیوسته است وازنقطه‌هائی واقع برمحورطول وبه‌فاصلهٔ 2π ازیکدیگر تشکیل شده است (مبداء مختصات هم‌جزو این نقطه‌هاست) (شکل ۹۶).

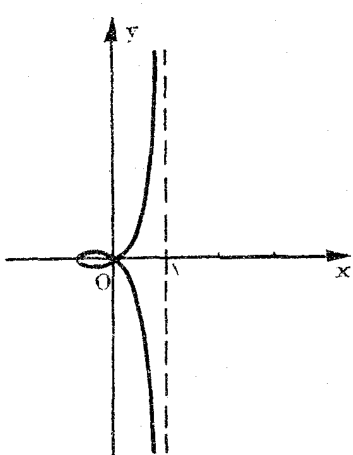
۲۰۵. منحنی تابع $y=x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ را رسم می‌کنیم؛ منحنی تابع $y=-x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ قرینهٔ آن نسبت به محورطول خواهد بود. مشتق این تابع به‌صورت $y'=\frac{-x^2+x+1}{(1-x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$ در می‌آید که ریشه‌های صورت آن $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ است. ازاین دوجواب تنها $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ درحدودتغییرات x یعنی $-1\leqslant x<1$ است که به ازای آن :

$$y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}\approx -0/3$$

بدست می‌آید.

تابع به‌ازای $x=0$ و $x=-1$ برابرصفراست ووقتی‌که x بسمت ۱ میل کند، مقدار تابع بسمت $+\infty$ میل می‌کند.

تابع درفاصلهٔ $\left[-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ نزولی ودرفاصلهٔ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ صعودی و در نقطهٔ به مختصات

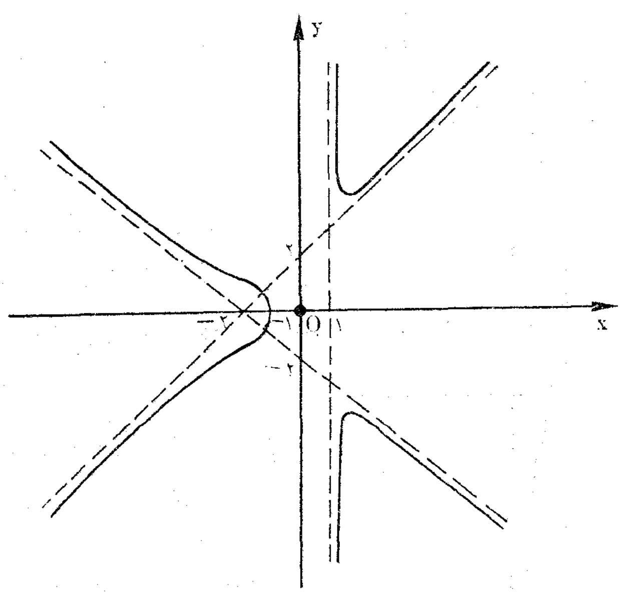


شکل ۹۷

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$ می‌نیمم است.

درشکل ۹۷ تمام منحنی تابع $y=\pm x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ داده شده است،

۲۰۶. تابع در فاصله‌های $x\leqslant -1$ و $x>1$ و نقطهٔ $x=0$ معین و نسبت به‌محورطول متقارن است. منحنی تابع $y=x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ را رسم‌می‌کنیم وسپس قرینهٔ آنرا نسبت به‌محورطول به‌آن اضافه می‌کنیم. مشتق تابع به‌صورت $y'=\frac{x^2-x-1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$ است، که به‌ازای مقادیر $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$، مساوی‌صفر



شکل۹۸

می‌شود که ازاین دو مقدار تنها $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$، در فاصلهٔ تغییرات x است و به‌ازای آن $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt{2+\sqrt{5}}\ \#\ 3/3$ می‌شود. تابع‌دارای مجانب $y=x+2$ ونیم‌مجانب $x=1$ $(x\to+\infty)$ ودرنقطهٔ $(-1,0)$ مماس‌قائم دارد.

درشکل ۹۸ منحنی نمایش تابع $y=\pm x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ رسم شده است.

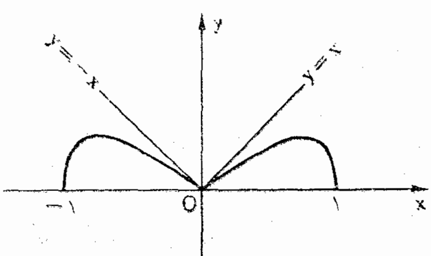
این منحنی دارای یك نقطهٔ منفرد (مبداء مختصات) می‌باشد.

۲۰۷. تابع درفاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ معین است ومشتق آن به‌صورت $y'=\frac{x}{|x|}\cdot\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ درمی‌آید. مشتق به‌ازای $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ مساوی صفر وبه‌ازای $x=0$ نامعین است.

در حقیقت:

$$\lim_{x\to+0} y'=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-0} y'=-1$$

یعنی وقتی که منحنی درربع‌اول به مبداء نزدیك می‌شود، در مبداء بر نیمساز ربع اول مماس است و وقتی که در ربع دوم به مبداء نزدیك می‌شود، درمبداء بر نیمساز ربع دوم مماس است.

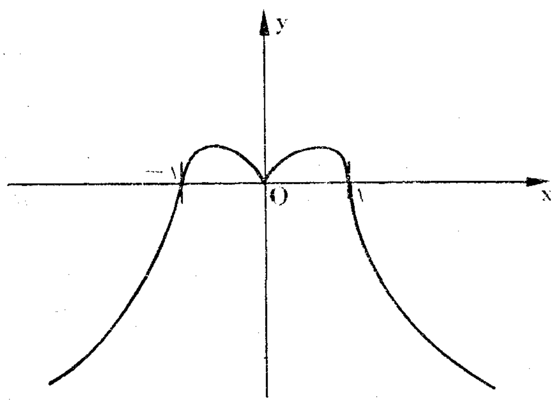


شکل۹۹

منحنی درمبداء مختصات می‌نیمم ودرنقطه‌های $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ ماکزیمم است. مماس بر منحنی در نقطه‌های $(-1,0)$ و $(1,0)$ قائم است

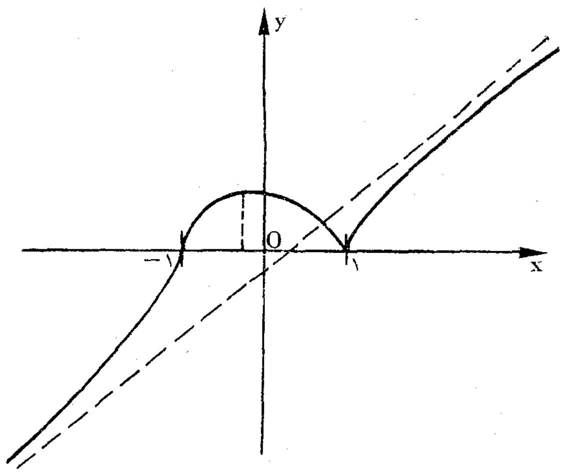
(شکل ۹۹).

۲۰۸. مشتق تابع $y'=\frac{2(1-2x^2)}{3\sqrt[3]{x(1-x^2)^2}}$ است ودر نقطه‌های $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x=0$ تغییر علامت می‌دهد. منحنی تابع در نقطه‌های به‌طول $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ مماس افقی ودر نقطه‌های $x=0$ و $x=\pm 1$ مماس قائم دارد. ونسبت به‌محور عرض متقارن است (شکل ۱۰۰).



شکل ۱۰۰

۲۰۹. مشتق تابع به‌صورت $y'=\frac{3x+1}{3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$ درمی‌آید و بنابراین منحنی تابع درنقطه $x=-\frac{1}{3}$ مماس افقی ودر نقطه‌های $x=1$ و $x=-1$ مماسهای قائم دارد. منحنی دارای مجانبی است به‌معادلهٔ $y=x-\frac{1}{3}$ و در نقطه (۱,۰) محورعرض را قطع می‌کند (شکل ۱۰۱).



شکل۱۰۱

۲۱۰. مشتق تابع به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$y' = (-x^{۲}+۱۲)\left[\frac{۱}{(x^{۲}-۸x+۱۲)^{۲}}+\frac{۱}{(x^{۲}+۷x+۱۲)^{۲}}\right]$$

وبنابراین به‌ازای $x=\pm ۲\sqrt{۳}$ تغییر علامت می‌دهد.

خطهای $x=-۴$، $x=-۳$، $x=۲$ و $x=۶$ مجانبهای منحنی تابع هستند ومنحنی درنقطه‌های به‌طولهای $۲/۳\pm$ و $۲/۵\pm$ (به‌تقریب)محورطول، ودرنقطه به‌عرض ۲ محورعرض را قطع می‌کند.

۲۱۱. مشتق تابع چنین است:

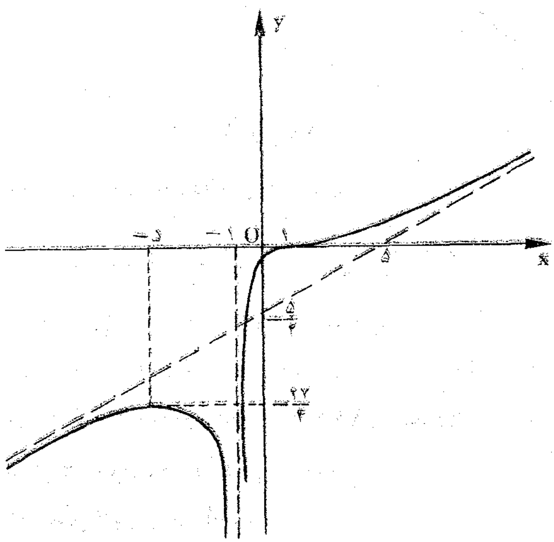
$$y' = \frac{(x+۲)(۳x+۴)^{۳}(۹x+۸)(۳x-۴)}{x^{۲}(۹x^{۲}+۲۵x+۱۶)^{۲}}$$

وبنابراین دارای دوماکزیمم ودومی‌نیمم است. منحنی چهارمجانب به‌معادله‌های $x=۰$، $x=-۱$، $x=-\frac{۱۶}{۹}$ و $y=۹x+۲۵$ دارد.

۲۱۲. منحنی نمایش تغییرات این تابع یك هذلولی است که خطهای

$y = -x$ و $y = 3x$ مجانبهای آنست وضمناً نسبت به‌مبداء مختصات متقارن است.

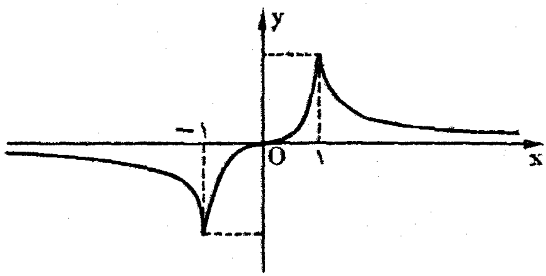
۲۱۳. مشتق تابع $y' = \frac{(x-1)^2(x+5)}{2(x+1)^3}$. تابع در نقطهٔ به مختصات $(-5\ ,\ -\frac{27}{4})$ ماکزیمم ودر نقطه $(1,0)$ برمحورطول مماس است. خطهای $x = -1\ (y \to -\infty)$ و $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ مجانبهای منحنی هستند. منحنی مجانب مایل خودرا درنقطهٔ $(-\frac{1}{3}\ ,\ -\frac{8}{3})$ قطع می‌کند (شکل ۱۰۲).



شکل ۱۰۲

۲۱۴. $y' = \frac{2(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1})}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$. صورت کسر مشتق همیشه منفی است، ولی مخرج آن به‌ازای $x = -1$ و $x = 1$ تغییر علامت می‌دهد. خط $y = 0$ مجانب منحنی است ومنحنی درنقطه‌های $(-1, -\sqrt[3]{4})$ و $(1, \sqrt[3]{4})$ مماس قایم

دارد. مبداء مختصات مرکزتقارن منحنی است ودراین نقطه،ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی مساوی $\frac{۴}{۳}$ است. (شکل ۱۰۳).

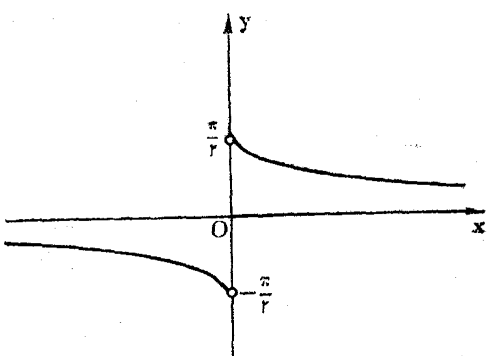


شکل ۱۰۳

۲۱۵. $y' = -\frac{1}{x^2+1} < 0$ وبنابراین تابع همیشه نزولی است.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\mathrm{Arctg}\frac{1}{x}\right) = 0$$

یعنی محورطول،مجانب‌منحنی است. تابع‌درنقطهٔ $x = 0$ منفصل‌است،حد راست



شکل ۱۰۴

وحد چپ تابع درین نقطه چنین است:

$$\lim_{x\to +0} y=\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to -0} y=-\frac{\pi}{2}$$

منحنی تابع درشکل ۱۰۴ رسم شده است.

۲۱۶. مشتق تابع مثبت وبنابراین تابع، همیشه‌صعودی است.

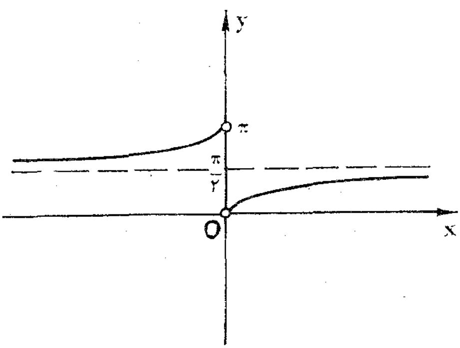
$$\lim_{x\to \pm\infty} y=\lim_{x\to \pm\infty}\left(\mathrm{Arccotg}\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

خط $y=\frac{\pi}{2}$، مجانب‌منحنی‌تابع است وداریم:

$$\lim_{x\to +0} y=0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x\to -0} y=\pi$$

تابع در نقطهٔ $x=0$ منفصل است (شکل ۱۰۵).



شکل ۱۰۵

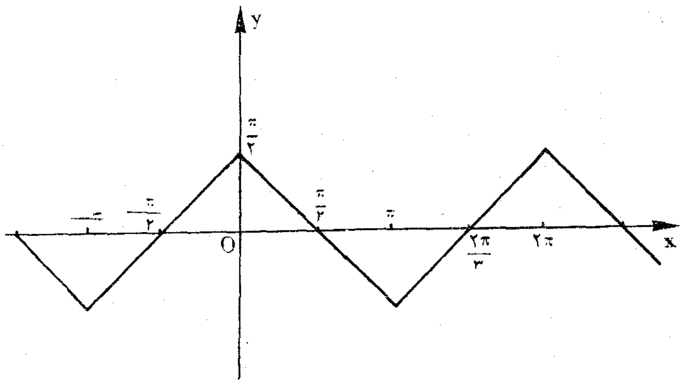
۲۱۷. مشتق تابع $y'=-\frac{\sin x}{|\sin x|}$ وبنابراین:

$$2k\pi<x<(2k+1)\pi \implies y'=-1$$

$$(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi \implies y'=1$$

$x=k\pi$ مشتق معنا ندارد

کوچکترین دورهٔ تناوب تابع، مساوی 2π است و نمایش تغییرات آن در شکل ۱۰۶ داده شده است.



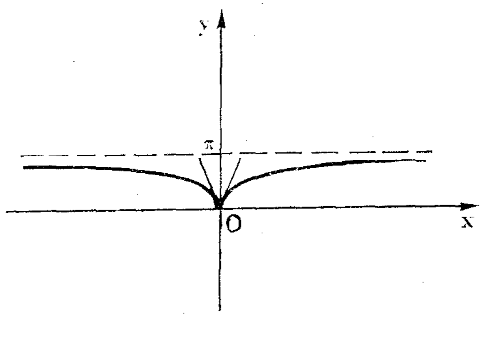
شکل ۱۰۶

۲۱۸. بسادگی معلوم می‌شود که این تابع را می‌توان به‌صورت $y=|2\mathbf{Arc}tg\mathbf{x}|$ نوشت یعنی :

$$y=\begin{cases} 2\mathbf{Arc}tg\mathbf{x} & (\mathbf{x}>0) \\ -2\mathbf{Arc}tg\mathbf{x} & (\mathbf{x}<0) \end{cases}$$

تابع به‌ازای همهٔ مقادیرحقیقی $\mathbf{x}$ معین است وضمناً داریم:

$$\underset{\mathbf{x}\to\pm\infty}{\text{حد}}\ y=\pi$$



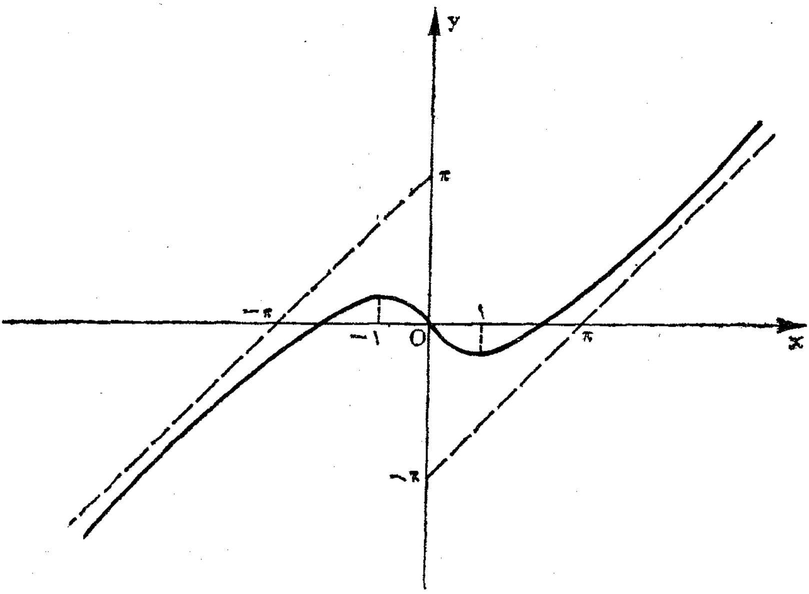
شکل ۱۰۷

یعنی خط $y=\pi$ مجانب منحنی تابع است. ازطرف دیگر:

$$\lim_{x\to+0} y' = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-0} y' = -2$$

یعنی ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی در مبداء مختصات، درربع اول مساوی ۲ و در ربع دوم مساوی ۲ − است. تابع زوج است وبنابراین محورعرض محورتقارن آنست (شکل ۱۰۷).

۲۱۹. $y' = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. منحنی تابع درنقطهٔ $(-1, \frac{\pi}{2}-1)$ ماکزیمم و درنقطهٔ $(1, 1-\frac{\pi}{2})$ می‌نیمم است وازمبداء مختصات هم می‌گذرد، با توجه‌به $\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{Arctg}\,x)=\frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{Arctg}\,x)=-\frac{\pi}{2}$، بسادگی‌معلوم می‌شود که خطهای $y=x+\pi$ $(x\to-\infty)$ و $y=x-\pi$ $(x\to+\infty)$



شکل ۱۰۸

مجانبهای منحنی تابع است وضمناً داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} y=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} y=+\infty$$

مبداء مختصات، نقطهٔ عطف وضمناً مرکز تقارن منحنی تابع است (شکل۱۰۸).

۲۲۰. $y'=\mathrm{Arc}\cot g\,x-\frac{x}{1+x^2}$. اگر فرض کنیم:

$$\mathrm{Arc}\cot g\,x=t \Longrightarrow \cot g\,t=x\ (0<t<\pi)$$

وبدست می‌آید:

$$y'=t-\frac{\cot g\,t}{1+\cot g^2 t}=t-\sin t\cos t=\frac{1}{2}(2t-\sin 2t)>0$$

(برای قوسهای مثبت همیشه داریم: $\sin u<u$). بنابراین تابع مفروض همیشه صعودی است.

از طرف دیگر داریم:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{Arc}\cot g\,x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1$$

یعنی خط $y=1$ ($x\to+\infty$) یکی ازمجانبهای منحنی است.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(x\cdot\mathrm{Arc}\cot g\,x)=-\infty$$

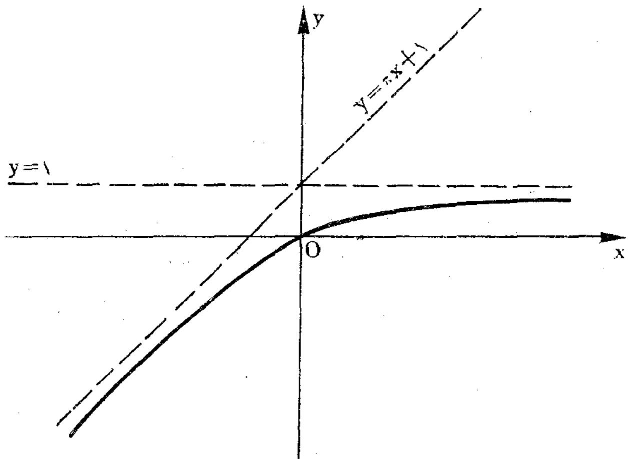
مجانب مایل منحنی را پیدا می‌کنیم:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\pi$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}(y-mx)=\lim_{x\to-\infty}(x\cdot\mathrm{Arc}\cot g\,x-\pi x)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{Arc}\cot g\,x-\pi}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1$$

و بنابراین خط $y=\pi x+۱$ $(x\to-\infty)$ مجانب منحنی تابع است (شکل ۱۰۹).



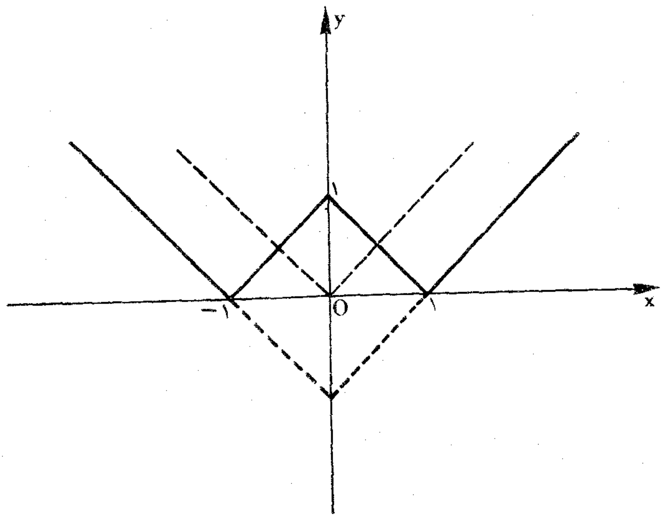
شکل۱۰۹

۲۲۱. تابع مفروض به‌سادگی به اینصورت درمی‌آید:

$$y=\begin{cases}-x-۱ & (x<-۱)\\ x+۱ & (-۱<x<۰)\\ -x+۱ & (۰<x<۱)\\ x-۱ & (۱<x)\end{cases}$$

می‌توان نمایش تغییرات تابع را به‌اینصورت هم پیداکرد:

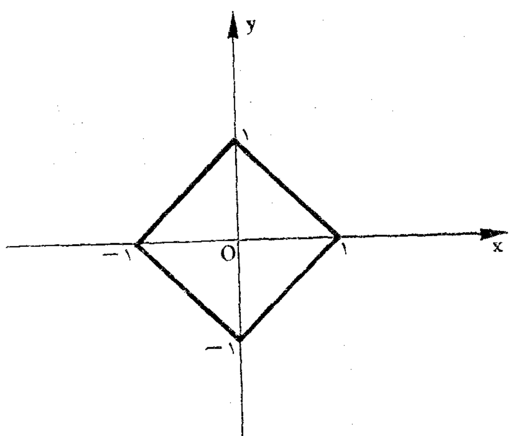
ابتدا $y=|x|$ رادرسم می‌کنیم. (نیمسازهای ربع اول‌وسوم)، سپس آنرا درامتداد محورعرض، به‌اندازه‌۱ — جابجا می‌کنیم؛ قرینهٔ آنچه را که زیرمحورطول است نسبت به‌محور طول پیدا می‌کنیم (شکل۱۱۰).



شکل ۱۱۰

۲۲۲. نمایش تغییرات تابع ازچهارپاره‌خط تشکیل شده است:

$$۱)\ y=-x+۱\ \ (x>۰\ ,\ y>۰)$$



شکل ۱۱۱

$$۲)\ y=x+۱ \quad (x<۰, y>۰)$$
$$۳)\ y=-x-۱ \quad (x<۰, y<۰)$$
$$۴)\ y=x-۱ \quad (x>۰, y<۰)$$

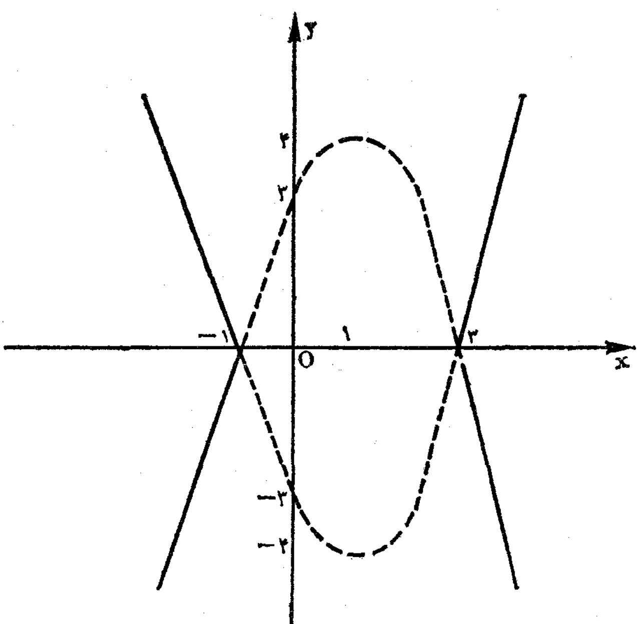
مکان هندسی $M(x,y)$ که درتابع $|y|+|x|=۱$ صدق می‌کند، عبارتست ازمحیط مربعی به‌قطرمساوی ۲ که مرکزش درمبداء مختصات و رأسهایش روی محورهای مختصات باشد (شکل ۱۱۱).

۲۲۳. ازشرط مسأله پیداست که باید داشته باشیم:

$$x^۲-۲x-۳>۰ \implies x<-۱ \text{ و } x>۳$$

وبنابراین با توجه به‌فاصلهٔ تغییرات x داریم:

$$\begin{cases} y=x^۲-۲x-۳ & (y>۰) \\ y=-x^۲+۲x+۳ & (y<۰) \end{cases}$$



شکل ۱۱۲

نمایش تغییرات تابع درشکل ۱۱۲ داده شده است.

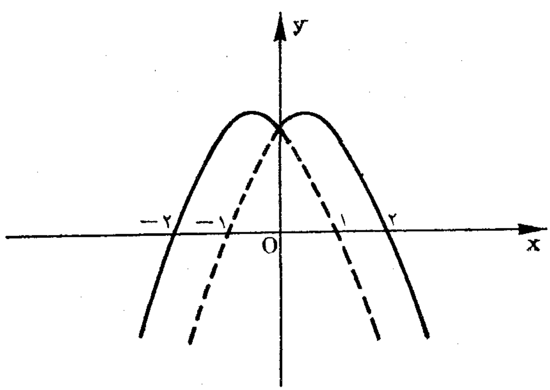
۲۲۴. تابع زوج‌است زیرا:

$$f(-x)=(1+|-x|)(2-|-x|)=(1+|x|)(2-|x|)=$$
$$=f(x)$$

و بنابراین محور عرض، محورتقارن منحنی است وداریم:

$$\begin{cases} y=(1+x)(2-x) & (x\geqslant 0) \\ y=(1-x)(2+x) & (x<0) \end{cases}$$

نمایش تغییرات‌تابع درشکل ۱۱۳ داده‌شده است. منحنی‌تابع دارای‌دوماکزیمم: $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ ویك می‌نیمم: $(0, 2)$ است.

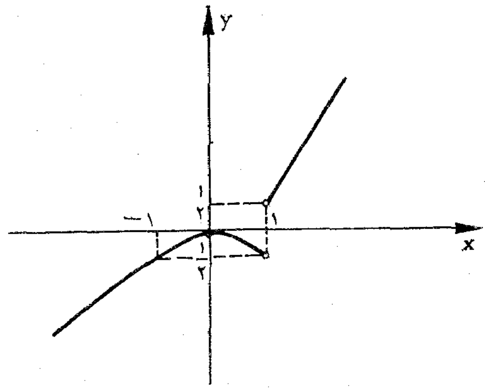


شکل ۱۱۳

۲۲۵. تابع به‌ازای همهٔ مقادیر x بجز $x=1$ معین است:

$$y=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (x>1) \\ -\frac{1}{2}x^2 & (x<1) \end{cases}$$

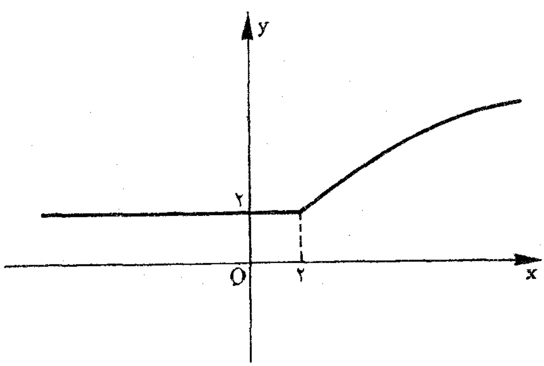
شکل ۱۱۴ نمایش تغییرات تابع را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱۴

۲۲۶. داریم (شکل ۱۱۵):

$$y=\begin{cases} ۲\sqrt{x-۱} & (x\geq ۲) \\ ۲ & (x<۲) \end{cases}$$



شکل ۱۱۵

۲۲۷. چون داریم:

$$|\sin(-x)|+\sin|-x|=|-\sin x|+\sin|x|=$$

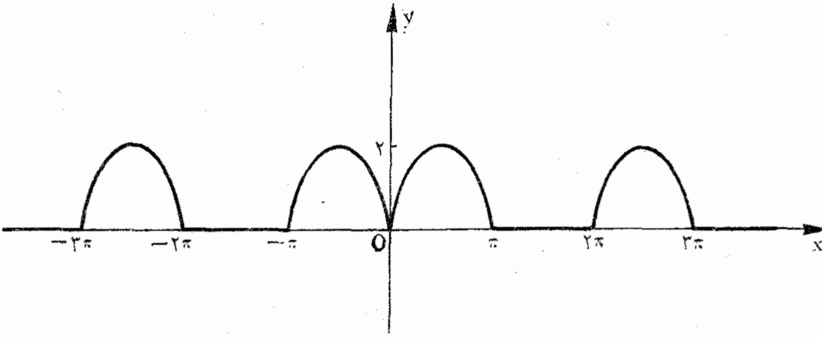
$$=|\sin x|+\sin|x|)=y$$

بنابراین‌تابع زوج ومنحنی‌نمایش تغییرات آن، نسبت به‌محورعرض،متقارن‌است.

کوچکترین دورهٔ تناوب تابع برابراست با 2π وبنابراین کافی است نمایش تغییرات آنرا درفاصلهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کنیم. ازطرف دیگرداریم:

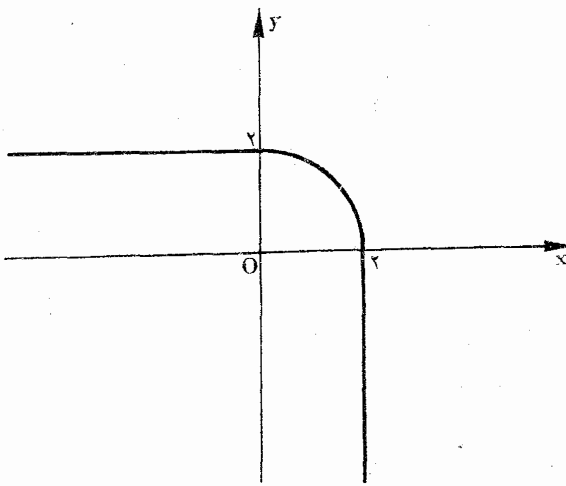
$$y=\begin{cases} 2\sin x & (0 \leqslant x \leqslant \pi) \\ 0 & (\pi < x \leqslant 2\pi) \end{cases}$$

نمایش تغییرات درشکل ۱۱۶ داده شده است.



شکل ۱۱۶

۲۲۸. ۱) درحالت $x \geqslant 0$ و $y \geqslant 0$ ، این رابطه به صورت $x^2+y^2=4$



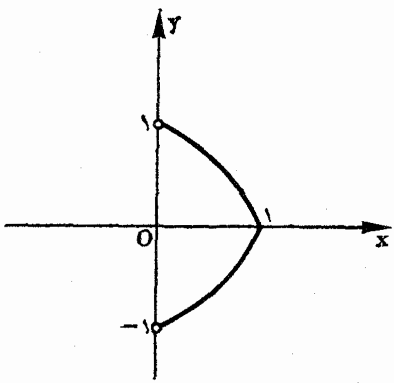
شکل ۱۱۷

درمی‌آید، یعنی قسمتی ازمنحنی که درربع اول قراردارد، عبارتست ازربع دایره‌ای به‌مرکزمبداء مختصات وشعاع مساوی ۲.

۲) درحالت $x<0$ و $y\geqslant 0$، معادلهٔ مفروض به‌صورت $y=2$ درمی‌آید، یعنی درربع دوم. نمایش تغییرات عبارتست ازنیم‌خطی به‌موازت محور طول وبه فاصلهٔ ۲ واحد ازآن.

۳) درحالت $x<0$ و $y<0$، به رابطهٔ نادرست $16=0$ می‌رسیم، یعنی هیچ نقطه‌ای ازربع سوم درمعادلهٔ مفروض صدق نمی‌کند.

۴) درحالت $x\geqslant 0$ و $y<0$ به‌رابطهٔ $x=2$ می‌رسیم، یعنی درربع چهارم، نیم‌خطی داریم به‌موازی محورعرض وبه‌فاصلهٔ ۲ ازآن (شکل ۱۱۷).



شکل ۱۱۸

۲۲۹. چون $|y|\geqslant 0$ و $-x^2<0$ است، بنابراین باید $\frac{|x|}{x}>0$ باشد و از آنجا $x>0$ بدست می‌آید (برای $x=0$ تابع مفهومی‌ندارد). به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض به‌این صورت در می‌آید:

$$|y|=1-x^2$$

باتوجه به‌اینکه $|y|\geqslant 0$ است، داریم: $1-x^2\geqslant 0$ وازآنجا (بادرنظر گرفتن $x>0$) بدست می‌آید $0<x\leqslant 1$. اگر $y\geqslant 0$ باشد، نمایش تغییرات عبارتست از قسمتی از سهمی $y=1-x^2$، که در فاصلهٔ $0<x\leqslant 1$ واقع باشد، در حالت $y<0$، قرینهٔ قسمت‌اول نسبت به‌محور طول‌بدست می‌آید(شکل۱۱۸).

۲۳۰. تابع نسبت به متغیر x زوج وبنابراین نسبت به‌محور عرض‌متقارن است. معادلهٔ مفروض‌را می‌توان بترتیب چنین نوشت:

$$y|y|-\frac{y}{|x|}+|xy|-1=0,$$

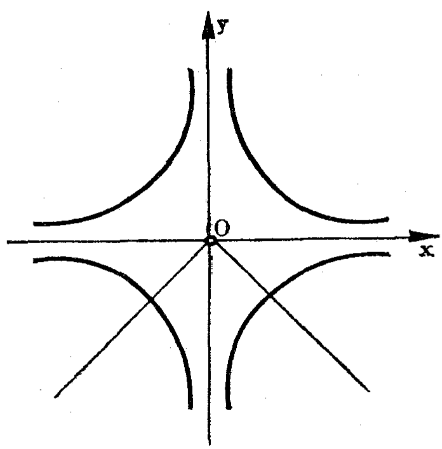
$$y(|y| - \frac{1}{|x|}) + |x|(|y| - \frac{1}{|x|}) = 0,$$

$$(y + |x|)(|y| - \frac{1}{|x|}) = 0$$

بنابراین معادلهٔ مفروض برای $x \neq 0$ به مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

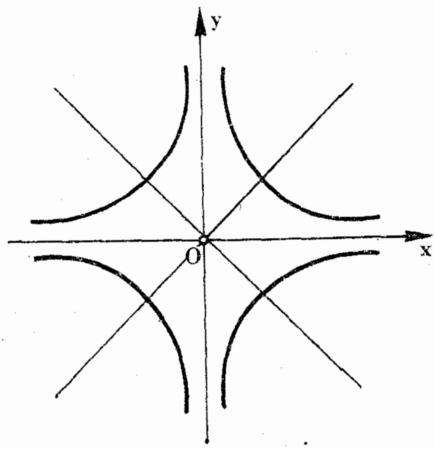
$$y + |x| = 0 \quad \text{و} \quad |y| - \frac{1}{|x|} = 0$$

یعنی نمایش تغییرات آن عبارتست از نیمسازهای دو ربع سوم وچهارم (به استثنای مبداء مختصات) و دو هذلولی $y = \frac{1}{x}$ و $y = -\frac{1}{x}$ (شکل ۱۱۹).



شکل ۱۱۹

۲۳۱. روشن است که $x \neq 0$ و $y \neq 0$. باتوجه به اینکه معادله هم نسبت به x وهم نسبت به y زوج است، بنابراین تابع نسبت بهردو محور طول و عرض، و درنتیجه نسبت به مبداء مختصات، متقارن است. به این ترتیب کافی است نمایش تغییرات آنرا درحالت $x > 0$ و $y > 0$ رسم کنیم وسپس قرینهٔ آنرا نسبت بهردو محور ونسبت به مبداء مختصات پیدا کنیم.



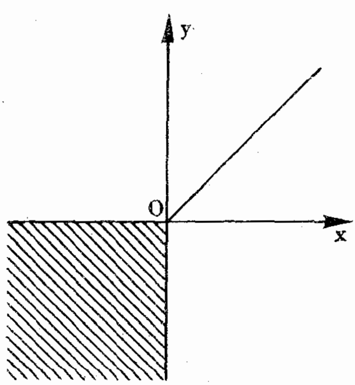
شکل ۱۲۰

اگر $x>0$ و $y>0$ باشد، رابطهٔ مفروض چنین‌می‌شود:

$$y+\frac{1}{y}=x+\frac{1}{x}$$

واز آنجا نتیجه می‌شود که‌یا $y=x$ ویا $y=\frac{1}{x}$

بنابراین نمایش‌تغییرات آن (به ازای $x>0$ و $y>0$) عبارتست از نیمساز ربع اول (به استثنای مبداء مختصات) و شاخه‌ای از هذلولی $y=\frac{1}{x}$ که درربع اول قراردارد (شکل۱۲۰).



شکل۱۲۱

۲۳۲. متذکر می‌شویم که x و y نمی‌توانندباعلامتهای مختلف‌باشند، زیرا باشرط $x>0$ داریم:

$$x+|x|=2x>0$$

ودر نتیجه‌باید $y+|y|>0$ ویا $y>0$ باشد.

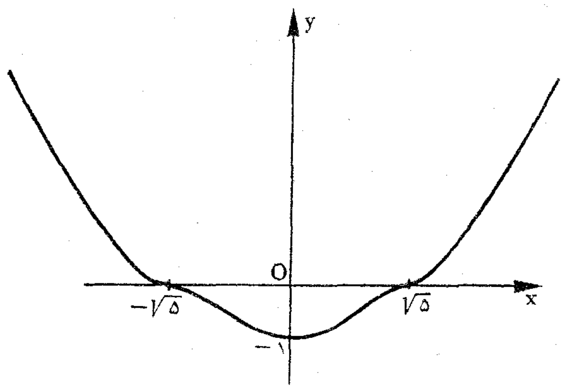
به این ترتیب تنها دو حالت داریم:

۱) اگر $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$ باشدبه معادلهٔ $y=x$ می‌رسیم که نمایش تغییرات‌آن عبارتست از نیمساز ربع‌اول.

۲) اگر $x<0$ و $y<0$ باشد، رابطهٔ فرض‌همیشه برقرار است،یعنی مختصات تمام‌نقطه‌های واقع درربع سوم (وخود نیم محورهای Ox' و Oy')

دررابطه صدق می‌کند (شکل۱۲۱).

۲۳۳. مشتق تابع $y'=\frac{6x}{125}(x^2-5)^2$ وبنابراین نقطه $(0,-1)$ می‌نیمم منحنی آنست. مشتق دوم تابع $y''=\frac{24x^2}{125}(x^2-5)$ و بنابراین نقطه‌های $(\pm\sqrt{5},0)$، نقطه‌های عطف منحنی آنست و دراین نقطه ها، منحنی برمحور طول مماس است. تابع نسبت به متغیر x زوج وبنابراین محور عرض



شکل۱۲۲

محور تقارن منحنی آنست (شکل ۱۲۲).

۲۳۴. معادله را به اینصورت می‌نویسیم:

$$y-x=\sqrt{y^2+2(x+1)y+4x} \qquad (1)$$

روشن است که باید $y-x\geqslant 0$ باشد. دوطرف رابطهٔ (۱) را مجذور می‌کنیم و y را نسبت‌به x بدست می‌آوریم:

$$y=\frac{x^2-4x}{2(2x+1)} \qquad (2)$$

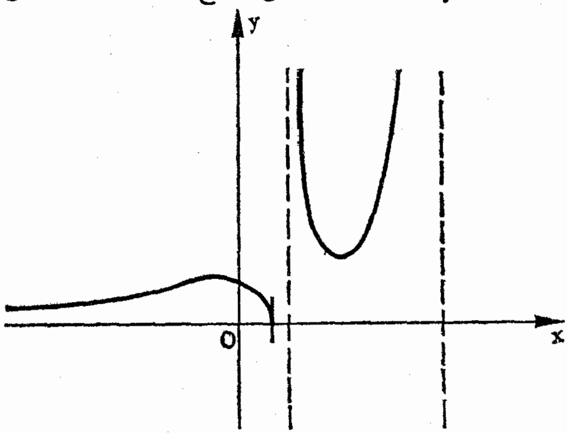
از حل نامعادلهٔ $y-x\geqslant 0$ بدست می‌آید:

$$\frac{x^{2}-4x}{2(2x+1)}-x\geqslant 0 \Longrightarrow x\leqslant -2 \text{ و } -\frac{1}{2}<x\leqslant 0$$

یعنی تابع در فاصله‌های $-\frac{1}{2}<x\leqslant 0$ و $x\leqslant -2$ معین است. به این ترتیب نمایش تغییرات تابع y، عبارتست‌ازقسمتی ازهذلولی (۲) که در فاصله‌های‌مجاز متغیر باشد.

۲۳۵. مشتق تابع
$$y'=\frac{3x^{2}-4x-2}{\sqrt{(2-3x)(x^{2}-5x+4)^{3}}}$$

تابع درفاصله‌های $x\leqslant\frac{2}{3}$ و $1<x<4$ حقیقی است و منحنی آن دارای یك ماکزیمم‌ویك‌می‌نیمم‌است. خطهای $y=0\ (x\to-\infty)$، $x=1\ (y\to+\infty)$ و $x=4\ (y\to+\infty)$ مجانبهای منحنی تابع هستند. ضمناً منحنی تابع در



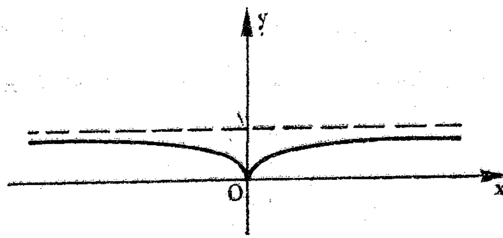
شکل ۱۲۳

نقطهٔ $(\frac{2}{3},0)$ مماسی موازی محور عرض دارد (شکل۱۲۳).

۲۳۶. چون داریم:

$$\lim_{x\to+0} y'=\frac{\pi}{2} \text{ و } \lim_{x\to-0} y'=-\frac{\pi}{2}$$

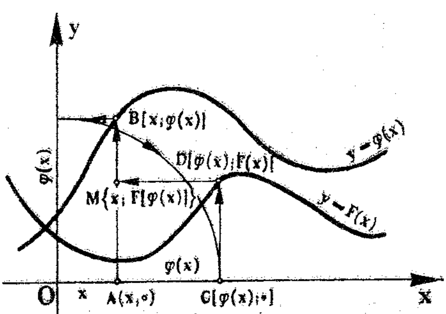
وضمناً به‌ازای $x=0$ داریم $y=0$ ومبداء مختصات نقطهٔ می‌نیمم منحنی‌تابع است. دراین‌نقطه، مماس برمنحنی درربع‌اول باضریب زاویه $\frac{\pi}{2}$ و در ربع دوم با



شکل ۱۲۴

ضریب زاویهٔ مساوی $-\frac{\pi}{2}$ است. تابع زوج ونسبت به‌محور عرض‌متقارن است. خط $y=1$ مجانب منحنی است. منحنی‌تابع درفاصلهٔ $(-\infty, 0)$ نزولی و در فاصلهٔ $(0, +\infty)$ صعودی است (شکل ۱۲۴).

۲۳۷. برای رسم منحنی‌نمایش تغییرات $y=F[\varphi(x)]$، ابتدا منحنی تابع های $y=\varphi(x)$ و $y=F(x)$ را رسم می‌کنیم، نقطهٔ $A(x,0)$ به‌وسیلهٔ‌منحنی تابع $y=\varphi(x)$ به نقطهٔ $B[x,\varphi(x)]$ تبدیل می‌شود. روی محورطول به‌اندازهٔ‌عرض نقطهٔ B (یعنی $\varphi(x)$) جدا می‌کنیم، نقطهٔ $C[\varphi(x),0]$

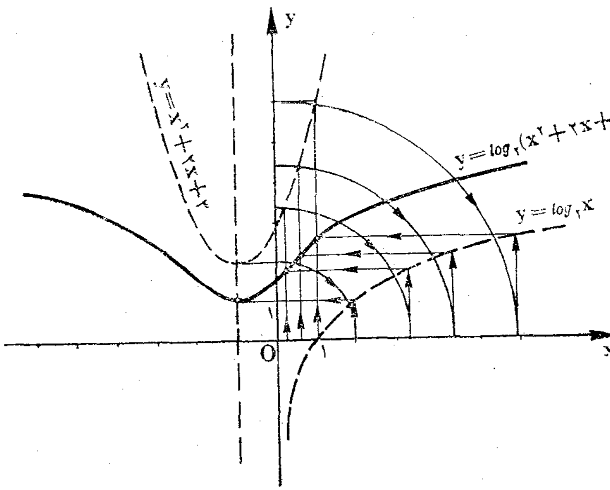


شکل ۱۲۵

بدست می‌آید. نقطهٔ اخیر به وسیلهٔ منحنی تابع $y=F(x)$ به نقطهٔ $D[\varphi(x),F(\varphi(x))]$ تبدیل‌می‌شود. ازنقطهٔ D موازی محورطول رسم‌می‌کنیم تا AB رادرM قطع کند، نقطهٔ $M[x,F(\varphi(x))]$ یکی‌ازنقطه‌های منحنی‌تابع $y=F[\varphi(x)]$ خواهد بود. رسم را می‌توان روی یك دستگاه یادستگاههای

مختلف (منتهی بـا مقیاسهای مساوی) برای $y=\varphi(x)$ ، $y=F(x)$ و $y=F[\varphi(x)]$ انجام داد.

a) چون‌عبارت $x^۲+۲x+۳=(x+۱)^۲+۲$ همیشه مثبت‌وحداقل آن مساوی ۲ می‌باشد، تـابع $y=log_۲(x^۲+۲x+۳)$ برای همهٔ مقادیر حقیقی x معین و حدود تغییرات تابع $۱=log_۲ ۲\leqslant y<+\infty$ است.



شکل ۱۲۶

برای رسم منحنی تابع مفروض ازمنحنی تابعهای

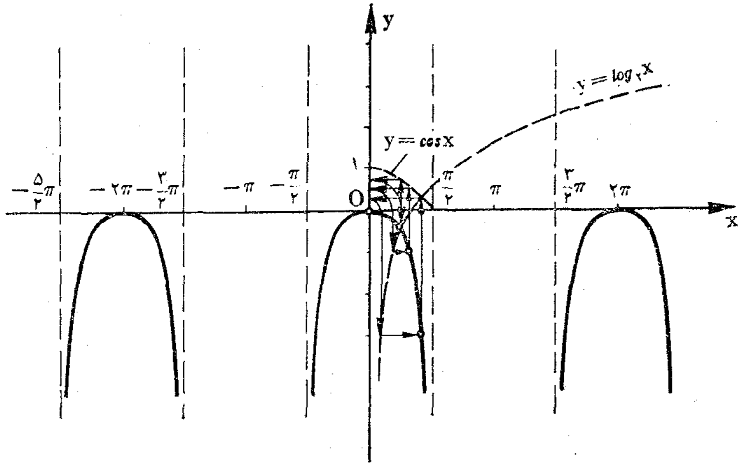
$$y=\varphi(x)=x^۲+۲x+۳$$

$$y=F(x)=log_۲x$$

استفاده می‌کنیم. چون خط $x=-۱$ محورتقارن سهمی $y=x^۲+۲x+۳$ است، همین خط محورتقارن‌منحنی تابع مفروض هم خواهد بود. تابع‌مفروض برای $x<-۱$ از $+\infty$ تا ۱ نزولی‌وبرای $x>-۱$ از ۱ تا $+\infty$ صعودی است. نقطه $(-۱, ۱)$ می‌نیمم منحنی تابع مفروض است.

b) تابع $y=log_۲(cos x)$ درفاصله‌ای ازمتغیر x معین است که $۰<cos x\leqslant ۱$ بـاشد، یعنی درفـاصلهٔ $(-\frac{\pi}{۲}+۲k\pi, \frac{\pi}{۲}+۲k\pi]$. چـون

$0<\cos x\leqslant 1$، منحنی تابع مفروض تنها درزیرمحورطول $(y\leqslant 0)$ قراردارد. تابع زوج است‌و کوچکترین دورهٔ تناوب آن $T=2\pi$ است، بنابراین کافی‌است منحنی آنرا درنیمی ازدورهٔ تناوب رسم کنیم. خطهای به‌صورت $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مجانبهای منحنی تابع هستند. در فاصلهٔ $0<x<\frac{\pi}{2}$ تابع از ۰ تا $-\infty$ نزولی است. برای رسم منحنی تابع مفروض ازمنحنی تابعهای $y=\varphi(x)=\cos x$ و $y=F(x)=\log_2 x$ استفاده می‌کنیم (شکل۱۲۷).



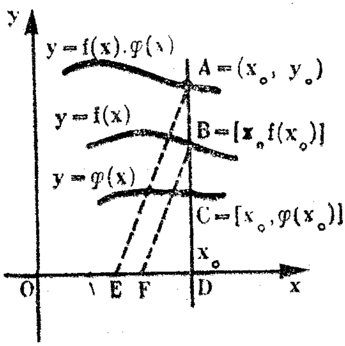
شکل۱۲۷

با دردست داشتن منحنی تـابعهای $y=f(x)$ و $y=\varphi(x)$، می‌توان منحنی تابع $y=f(x)\cdot\varphi(x)$ را هم رسم‌کرد.

فرض‌کنید، تابعهای $f(x)$و$\varphi(x)$، درنقطهٔ x_0، مقادیر $f(x_0)$و$\varphi(x_0)$ را (که مخالف صفر ند) قبول کنند، دراینصورت تابع $y=f(x)\cdot\varphi(x)$درنقطهٔ x_0، مقدار$y_0=f(x_0)\varphi(x_0)$ را خواهد داشت. ازآنجا می‌توان نوشت:

$$|y_0|\times 1=|f(x_0)|\times|\varphi(x_0)| \implies \frac{1}{|\varphi(x_0)|}=\frac{|f(x_0)|}{|y_0|}$$

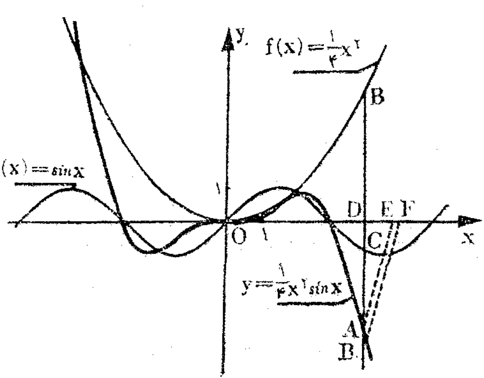
پاره خط $|y_0|$، به‌عنوان‌جزء چهارم تناسبی‌که سه جزء اول‌آن۱، $|\varphi(x_0)|$ و



شکل۱۲۸

$|f(x_\circ)|$ است، بدست مـی‌آید (۱ به اندازهٔ واحد انتخابـی درمحورهـای مختصات است). علاوه بر این، عرض $y_\circ$، روی دستگاه‌محورهای‌مختصات، درحـالت هم‌علامت بودن $f(x_\circ)$ و $\varphi(x_\circ)$ بالای $x_\circ$ قرار می‌گیرد ودر حالتی‌کـه $f(x_\circ)$ و$\varphi(x_\circ)$ مختلف‌العلامه‌اند، در زیر $x_\circ$. برای حالت $f(x_\circ)>\circ$ و $\varphi(x_\circ)>\circ$ به‌شکل ۱۲۸ توجه‌کنید. درآنجا $DC=\varphi(x_\circ)$ و$DB=f(x_\circ)$، روی محورطول. پاره‌خطهای $DE=DC=\varphi(x_\circ)$ و $DF=۱$ را جدا می‌کنیم. نقطه‌های B وF را بهم وصل‌وازنقطهٔ E خطی موازی BF رسم می‌کنیم تا نقطهٔA بدست آید؛ A یکی ازنقطه‌های منحنی تابع $y=f(x).\varphi(x)$ است.

درشکل ۱۲۹ منحنی نمایش تغییرات‌تابع $y=\frac{۱}{۴}x^۲\sin x$ به‌کمك‌منحنی تابعهای $f(x)=\frac{۱}{۴}x^۲$ و $\varphi(x)=\sin x$ رسم شده است.



شکل ۱۲۹

تـابع $y=\frac{۱}{۴}x^۲\sin x$ فرد است ومبداء مختصات، مرکزتقارن آنست،

بنابراین کافی است، منحنی را تنها برای $x>0$ رسم کنیم.

باهمین روش می‌توان تابعهای به صورت $y=\frac{f(x)\cdot\psi(x)}{\varphi(x)}$ ، $y=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ و $y=\frac{1}{\varphi(x)}$ را هم رسم کرد. دراین موردها، تناسبهایی که مورد استفاده قرارمی‌گیرند، بترتیب چنین‌اند:

$$\varphi(x_0) : f(x_0)=\psi(x_0) : y_0 \ ; \ \varphi(x_0) : f(x_0)=1 : y_0 \ ;$$
$$\varphi(x_0) : 1=1 : y_0$$

(درهمهٔ این‌حالتها، ساختمان نقطه‌هایی انجام می‌شود، که برای‌آن $\varphi(x_0)\neq 0$ باشد).

۲۳۸. a) تابع مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$y=\begin{cases} x^2+4x+3 & (x\leqslant 0) \\ x^2-4x+3 & (x>0) \end{cases}$$

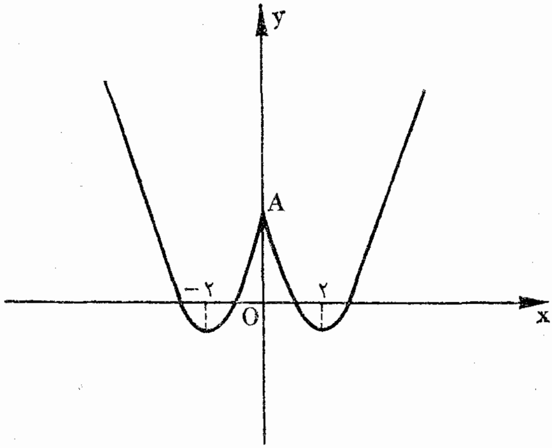
بنابراین، باید منحنی نمایش تغییرات این دوسهمی را، درفاصله‌های مربوطه رسم کرد (شکل ۱۳۰).

b و c) ازروی شکل بسادگی معلوم می‌شود:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y	نزولی	صعودی	نزولی	صعودی	
		Min	Max	Min	

$$y=0 \Longrightarrow x_1=-3, x_2=-1, x_3=1, x_4=3$$

d) مماس برمنحنی درنقطهٔ A نامعین است، ولی اگر x ازطرف مقادیر منفی، بسمت صفرمیل کند، y' (یعنی ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی) بسمت ۴، واگر x ازطرف مقادیرمثبت، بسمت صفر میل کند، y' بسمت ۴− میل می‌کند.



شکل ۱۳۰

به‌این‌ترتیب داریم:

$$\text{معادلهٔ خط مماس}\quad\begin{cases} y=۴x+۳ & (x\to -۰) \\ y=-۴x+۳ & (x\to +۰)\end{cases}$$

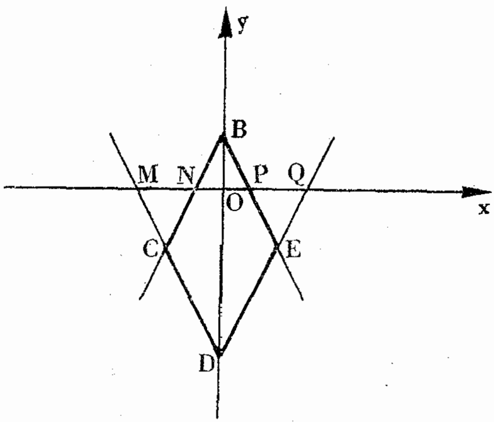
e) نقطه‌های برخورد منحنی با محورطول چنین است:

$$M\left|\begin{matrix}-۳\\ ۰\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad N\left|\begin{matrix}-۱\\ ۰\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad P\left|\begin{matrix}۱\\ ۰\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad Q\left|\begin{matrix}۳\\ ۰\end{matrix}\right.$$

مماسهای برمنحنی‌درنقطه‌های MوPبا هم موازی وبه‌ضریب زاویهٔ مساوی۲ — هستند. همچنین‌مماسهای درنقطه‌های NوQ به‌ضریب زاویه ۲ وباهم‌موازی‌اند. بنابراین چهارضلعی حاصل،یك متوازی‌الاضلاع می‌شود. مختصات رأسهای‌این متوازی‌الاضلاع بسادگی بدست می‌آید:

$$B\left|\begin{matrix}۰\\ ۲\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad C\left|\begin{matrix}-۲\\ -۲\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad D\left|\begin{matrix}۰\\ -۶\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad E\left|\begin{matrix}۲\\ -۲\end{matrix}\right.$$

وبه‌روشنی معلوم است‌که قطرهای این متوازی‌الاضلاع برهم عمودندوبنابراین یك لوزی است (شکل ۱۳۱).



شکل۱۳۱

۲۳۹. a) تابع برای $x<-۱$ و $x>۲$ حقیقی ومعین است. مشتق تابع به صورت $y'=\dfrac{(x-۱)(۲x^۲-x+۹)}{۲(x^۲-x-۲)\sqrt{x^۲-x-۲}}$ در می‌آید وبنابراین

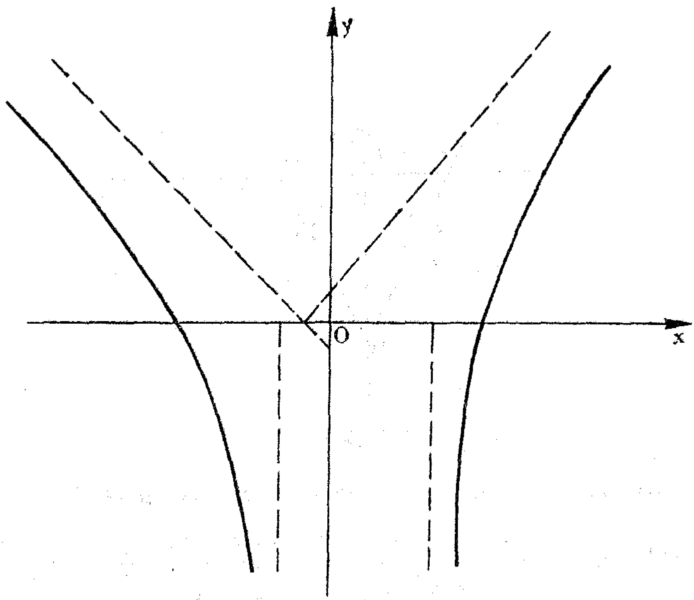
تابع مفروض برای $x<-۱$، نزولی وبرای $x>۲$، صعودی است. ازطرف دیگر داریم:

$$\text{د}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} y=+\infty \quad \text{و} \quad \text{د}\xrightarrow[x\to-۱,۲]{} y=-\infty$$

یعنی خطهای $x=-۱\ (y\to-\infty)$ و $x=۲\ (y\to-\infty)$ مجانبهای منحنی‌تابع‌هستند. منحنی تابع، دومجانب دیگرهم‌داردکه‌بسادگی بدست‌می‌آید:

$$\left|\begin{array}{l} y=x+\frac{۱}{۲} \\ \\ x\to+\infty \end{array}\right. \quad \text{و} \quad \left|\begin{array}{l} y=-x-\frac{۱}{۲} \\ \\ x\to-\infty \end{array}\right.$$

منحنی نمایش تغییرات تابع درشکل۱۳۲ داده شده است.



شکل ۱۳۲

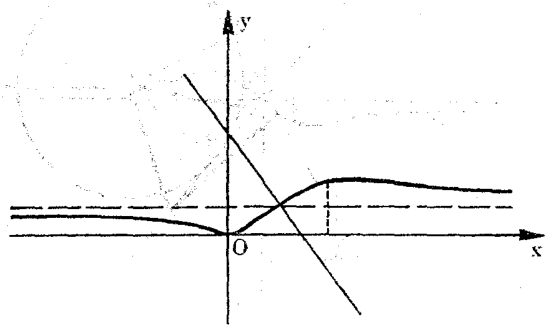
b) اگر در معادلهٔ درجهٔ چهارم مفروض، m را برحسب x بدست آوریم، چنین می‌شود:

$$m = \pm \frac{x^۲ - ۹}{\sqrt{x^۲ - x - ۲}}$$

و بسادگی معلوم می‌شود که اگر قرینهٔ منحنی شکل ۱۳۲ را نسبت به محور طول درهمان دستگاه رسم کنیم، منحنی تابع $y = \pm \dfrac{x^۲ - ۹}{\sqrt{x^۲ - x - ۲}}$ بدست می‌آید که با خط $y = m$، به ازای همه مقادیر $m\,(m \neq ۰)$ چهار نقطهٔ برخورد دارد.

۲۴۰. a) مشتق تابع $y' = \dfrac{x(۲ - x)}{(x^۲ - ۲x + ۲)^۲}$ می‌شود و بنابراین نقطه‌های $O(۰,۰)$ و $M(۲,۱)$ بترتیب نقطه‌های می‌نیمم و ماکزیمم منحنی آن

هستند (شکل ۱۳۳). منحنی تنها یک مجانب به‌معادلهٔ $۲y-۱=۰$ دارد و آنرا در نقطهٔ $(۱ , \frac{۱}{۲})$ قطع می‌کند. خط $۲y+۴x=۵$ هم روی شکل رسم شده است.



شکل ۱۳۳

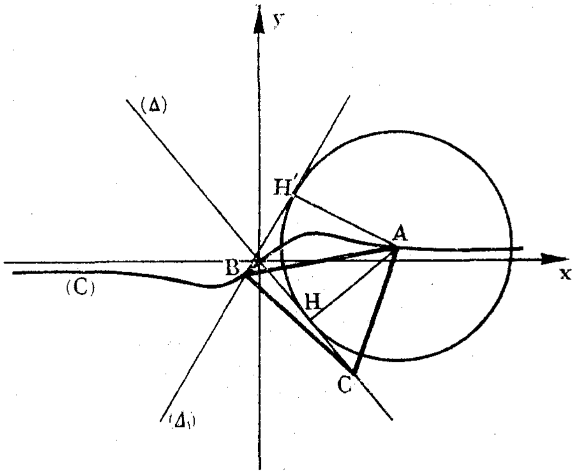
b) معادلهٔ منحنی را می‌توان به‌اینصورت نوشت:

$$y=\frac{۱}{۲}+\frac{x-۱}{(x-۱)^{۲}+۱}$$

برای اینکه این معادله به‌صورت ساده‌تری درآید، $x-۱=X$ و $y-\frac{۱}{۲}=Y$ می‌گیریم؛ دراینصورت معادله‌های منحنی وخط چنین می‌شود:

$$Y=\frac{X}{X^{۲}+۱}(c), Y=-۲X \ (\Delta)$$

درشکل ۱۳۴، منحنی تابع (c) وخط (Δ) رسم شده است. اگر نقطهٔ **A** راروی منحنی تابع (c) اختیار کنیم وفرض را براین بگیریم که مثلث متساوی‌الاضلاع **ABC**، مثلث موردنظر باشد، روشن‌است که اگر این‌مثلث را به‌اندازهٔ ۶۰ درجه دور نقطهٔ **A** ودرخلاف جهت مثلثاتی دوران دهیم، نقطهٔ **C** بر نقطهٔ **B** منطبق می‌شود وچون نقطهٔ C برخط (Δ) واقع است، نقطهٔ **B** عبارتست ازنقطهٔ برخورد خط (Δ) با منحنی (c)، بعد از آنکه خط (Δ) را دور نقطهٔ **A** ودرخلاف جهت مثلثاتی به‌اندازهٔ ۶۰ درجه دوران دهیم تا به‌وضع $(\Delta_۱)$ درآید.



شکل ۱۳۴

بنابراین، از لحاظ هندسی برای بدست‌آوردن نقطهٔB، ابتدا به مرکز A وشعاع AH (فاصلهٔ A تاخط Δ)، دایره‌ای رسم می‌کنیم (که در H بر Δ مماس است)؛ سپس ′AHراطوری‌رسم می‌کنیم که با AH زاویه‌ای‌مساوی ۶۰ درجه بسازد، از′H مماسی بردایره رسم می‌کنیم تا منحنی (c) را درB قطع کند. با دردست داشتن دونقطهٔAوB، بسادگی رأس سوم C بدست‌می‌آید. به‌این‌ترتیب روشن می‌شودکه مسأله بی‌نهایت جواب دارد.

ازلحاظ جبری هم مـی‌توان، همین روش هندسی را، منتهی بـا زبان تحلیلی دنبال کرد. همچنین می‌توان، معادلهٔ خط AB رابه‌صورت$y=mx$ درنظر گرفت (اگربخواهیم این خط ازنقطهٔ دیگری ازمنحنی (c) عبورکند، می‌توان‌مبداء مختصات را به‌آنجامنتقل کرد تامعادلهٔ AB به‌صورت$y=mx$ درآید). دراینصورت مختصات نقطه‌های AوB چنین می‌شود:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x}{x^{۲}+۱} \\ y=mx \end{cases} \Longrightarrow A\left|\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{۱-m}{m}} \\ \sqrt{m(۱-m)} \end{array}\right. \quad \text{و}$$

$$B \left| \begin{array}{l} -\sqrt{\dfrac{۱-m}{m}} \\ \\ -\sqrt{m(۱-m)} \end{array} \right.$$

نقطهٔ C را روی خط (Δ) به مختصات $(\alpha, -۲\alpha)$ می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$AB = AC = BC$$

$$\begin{cases} AC^۲ = \left(\alpha - \sqrt{\dfrac{۱-m}{m}}\right)^۲ + \left(۲\alpha + \sqrt{m(۱-m)}\right)^۲ \\ \\ BC^۲ = \left(\alpha + \sqrt{\dfrac{۱-m}{m}}\right)^۲ + \left(۲\alpha - \sqrt{m(۱-m)}\right)^۲ \end{cases}$$

که از تساوی $AC^۲ = BC^۲$، بسادگی بدست می‌آید: $m = \frac{۱}{۲}$، بنابراین داریم:

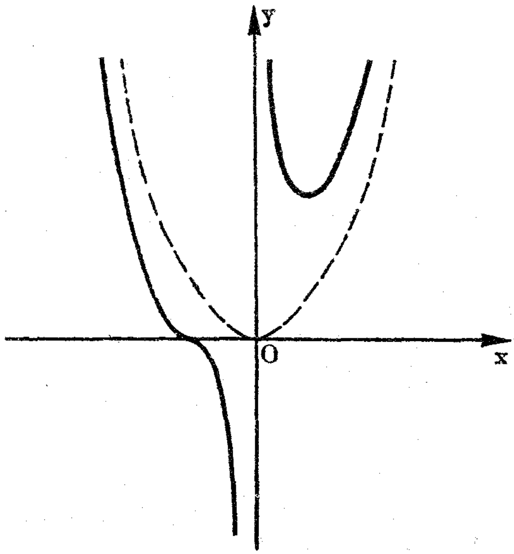
$$A(۱, \tfrac{۱}{۲}) \text{ و } B(-۱, -\tfrac{۱}{۲}) \text{ و } AB = \sqrt{۵}$$

واگر دررابطهٔ $AC^۲$، بجای m و $AC^۲$، مقادیرشان‌را قراردهیم، بدست‌می‌آید:

$$\alpha = \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

و به این ترتیب مختصات دو نمونه از مثلث متساوی‌الاضلاع مورد نظر بدست می‌آید:

۲۴۱. a) منحنی تابع دارای دومجانب به‌معادله‌های $x = ۰$ و $y = x^۲$ است. منحنی در $(۱, ۳)$ از نقطهٔ می‌نیمم ودر $(-\sqrt[۳]{۲}, ۰)$ ازنقطهٔ عطف خود می‌گذرد وضریب زاویهٔ مماس برمنحنی درنقطهٔ اخیر، مساوی $-۳\sqrt[۳]{۲}$ است (شکل ۱۳۵).



شکل ۱۳۵

b) اگر نقطهٔ تماس را $T(x , \frac{x^{۳}+۲}{x})$ بگیریم، ضریب زاویهٔ خط AT چنین خواهد بود:

$$m_{AT}=\frac{\frac{x^{۳}+۲}{x}-a}{x}=\frac{x^{۳}-ax+۲}{x^{۲}}$$

ازطرف دیگر، ضریب زاویهٔ مماس برابراست با مشتق:

$$m_{AT}=\frac{۲(x^{۳}-۱)}{x^{۲}}$$

وازآنجا، معادلهٔ زیر برای تعیین مختصات نقطه‌های تماس بدست می‌آید[۱]:

$$x^{۳}+ax-۴=۰ \quad (۱)$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ (۱) را $x_{۱}$،$x_{۲}$و$x_{۳}$ بنامیم داریم:

$$x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}=۰ \quad و \quad x_{۱}x_{۲}x_{۳}=۴$$

۱) اگرطول نقطهٔ تماس بسمت صفرمیل کند، ضریب زاویهٔ مماس، بسمت بی‌نهایت می‌رود وخط مماس بسمت مجانب منحنی میل می‌کند.

c) برای اینکه معادلهٔ (۱)، سه جواب حقیقی داشته باشد؛ باید داشته‌باشیم:

$$۴p^۳+۲۷q^۲=۴(a^۳+۱۰۸)<۰$$

بنابراین برای $a>-۳\sqrt[۳]{۴}$، تنها یك مماس و برای $a<-۳\sqrt[۳]{۴}$، سه‌مماس و برای $a=-۳\sqrt[۳]{۴}$، دومماس می‌توان برمنحنی رسم کرد (درحالت اخیر یك مماس ساده و یك مماس مضاعف وجود دارد). برای حالت $a=-۳\sqrt[۳]{۴}$ معادلهٔ (۱) یك ریشهٔ مضاعف خواهد داشت و این ریشهٔ مضاعف، همان ریشهٔ مشترك معادله ومشتق است. ونقطه‌های تماس بسادگی بدست می‌آید:

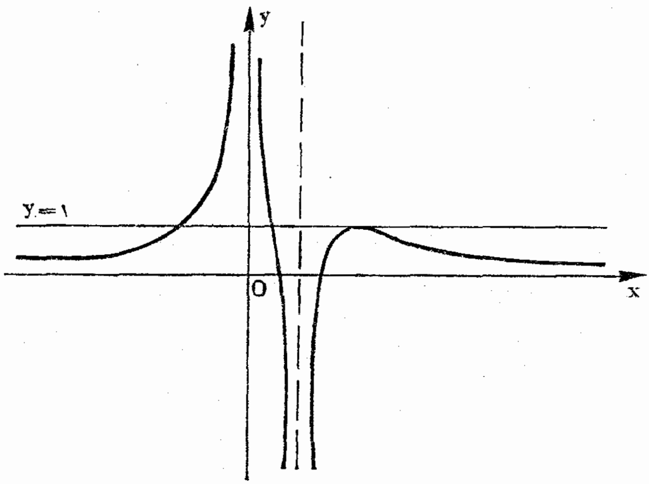
$$a=-۳\sqrt[۳]{۴}\Longrightarrow T_۱\begin{vmatrix}-\sqrt[۳]{۲}\\ ۰\end{vmatrix} \quad و \quad T_۲\begin{vmatrix}۲\sqrt[۳]{۲}\\ \frac{۹}{۲}\sqrt[۳]{۴}\end{vmatrix}$$

وهمانطورکه دیده می‌شود، $T_۱$ همان نقطهٔ عطف منحنی است.

۲۴۲. a) مختصات نقطهٔ (۲,۱)، درمعادلهٔ منحنی صدق می‌کندومشتق تابع به‌ازای $x=۲$ برابرصفرمی‌شود. ازآنجابسادگی بدست می‌آید: $a=۱$، $b=۲$.

b) منحنی نمایش تغییرات تابع در شکل ۱۳۶ داده شده است. نقطهٔ (۲,۱) ماکزیمم‌منحنی‌وخطهای $x=۰$ $(y\to-\infty)$، $x=۱$ $(y\to-\infty)$ و $y=۰$، مجانبهای منحنی‌اند.

c) جهت تقعرمنحنی درفاصله‌های $x<۰$ و $۰<x<\frac{۲}{۲+\sqrt[۴]{۲}}$ و $x>\frac{۲}{۲-\sqrt[۴]{۲}}$، بطرف جهت مثبت محور عرض و در فاصله‌های $\frac{۲}{۲+\sqrt[۴]{۲}}<x<۱$ و $۱<x<\frac{۲}{۲-\sqrt[۴]{۲}}$، بطرف جهت منفی محور عرض است.



شکل ۱۳۶

d) ازشکل ۱۳۶ پیداست که معادلهٔ $۱ = \frac{۱}{(x-۱)^۲} - \frac{۸}{x^۲}$، ریشهٔ مضاعف $x = ۲$ دارد. اگرمعادله را منظم کنیم چنین می‌شود.

$$x^۴ - ۲x^۳ - ۶x^۲ + ۱۶x - ۸ = ۰$$

که به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(x-۲)^۲(x^۲+۲x-۲) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} x_۱ = x_۲ = ۲ \\ x_{۳,۴} = -۱ \pm \sqrt{۳} \end{cases}$$

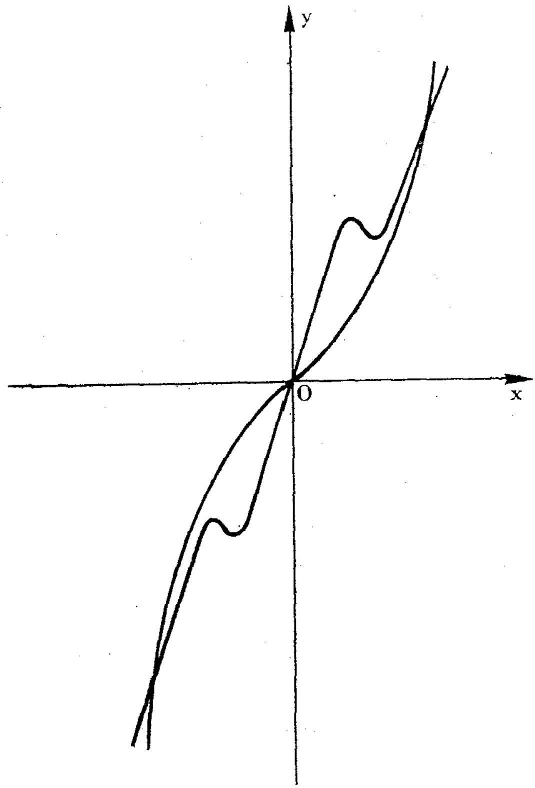
۲۴۳. a) منحنی نمایش تغییرات هردوتابع درشکل ۱۳۷ رسم شده‌است.

b) هر دوتابع، فردند وبنابراین مبداء مختصات، مرکز تقارن هردو منحنی است.

c) معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $A(۱,۳)$ با ضریب زاویهٔ m عبور کند، چنین است.

$$y = mx - m + ۳$$

برای اینکه، این‌خط برمنحنی تابع $y = ۳x^۳$ مماس‌باشد، باید ازحل‌معادلهٔ



شکل۱۳۷

خط بامعادله منحنی (به‌عنوان دومعادلهٔ دومجهولی)، به‌معادله‌ای برسیم که یك ریشهٔ مضاعف داشته باشد. این معادله چنین است:

$$۳x^۳-mx+m-۳=۰$$

با توجه‌به‌اینکه، یکی‌ازریشه‌های این معادله مساوی ۱(طول نقطهٔ A)می‌باشد، بسادگی قابل تجزیه است:

$$(x-۱)[۳x^۲+۳x-(m-۳)]=۰ \quad (۱)$$

برای اینکه، معادلهٔ (۱)، یك ریشه مضاعف داشته باشد، باید یا یکی از ریشه‌های عبارت داخل کروشه، مساوی ۱ شود ویا اینکه همین عبارت، ریشهٔ

مضاعف داشته باشد که دراینصورت به دوجواب زیرمی‌رسیم:

$$m_1=9, m_2=\frac{9}{4}$$

که $m=9$ همان ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی درنقطهٔ A است.

d) درحالتی که خط منحنی را، غیرازA، دردونقطهٔ دیگر BوC قطع کند، طولهای این دونقطه، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیراست:

$$3x^2+3x-(m-3)=0 \quad (2)$$

اگرریشه‌های این معادله را x_1وx_2 بگیریم، داریم:

$$B\left|\begin{array}{l}x_1\\ mx_1-m+3\end{array}\right. \quad \text{و} \quad C\left|\begin{array}{l}x_2\\ mx_2-m+3\end{array}\right.$$

و ازآنجا، مختصات نقطهٔ M (وسط پاره خط BC) چنین می‌شود:

$$M\left|\begin{array}{l}x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{1}{2}\\[2ex] y=\frac{m(x_1+x_2)-2m+6}{2}=-\frac{3}{2}m+3\end{array}\right.$$

ازطرف دیگر،مقدارm باید چنان باشد، که ریشه‌های معادلهٔ (۲)حقیقی‌بشود (یعنی نقطه‌های‌برخورد BوCوجود داشته باشد). ریشه‌های معادلهٔ (۲) بشرطی حقیقی است که داشته باشیم:

$$9+12(m-3)\geqslant 0\Longrightarrow m\geqslant\frac{9}{4}$$

یعنی برای عرض نقطهٔ M، باید داشته باشیم: $y\leqslant-\frac{3}{8}$. به‌این‌ترتیب معادله مکان نقطهٔ M با دستگاه زیرمشخص می‌شود:

$$x=-\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad y\leqslant-\frac{3}{8}$$

مکان عبارتست ازنیم‌خطی ازخط $2x+1=0$ که مبداءآن نقطهٔ$\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{8}\right)$ است وبطرف پائین امتداد دارد.

۲۴۴. می‌دانیم که نقطهٔ عطف منحنی یك تابع درجه سوم، مرکز تقارن آنست، بنابراین نقطه های ماکزیمم ومی‌نیمم (درصورت وجود) و نقطهٔ عطف منحنی بریك امتدادند.

برای منحنی‌تابع $y=x^۳+px+q$، نقطهٔ‌عطف $I(۰,q)$ ونقطه‌های ماکزیمم ومی‌نیمم:

$$M\left(-\sqrt{-\frac{p}{۳}}\,,\ -\frac{۲}{۳}p\sqrt{-\frac{p}{۳}}+q\right)$$

$$N\left(\sqrt{-\frac{p}{۳}}\,,\ \frac{۲}{۳}p\sqrt{-\frac{p}{۳}}+q\right)$$

است ومعادلهٔ خطی‌که ازاین سه‌نقطه می گذرد بسادگی‌بدست می‌آید:

$$y=\frac{۲p}{۳}x+q \quad (I)$$

درحالت‌کلی تابع $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$، بهتراست به‌این‌صورت عمل کنیم: مختصات نقطه های ماکزیمم و می‌نیمم منحنی، در دو معادلهٔ زیر صدق می کنند:

$$\begin{cases} ax^۳+bx^۲+cx+d-y=۰ & (E_۱) \\ ۳ax^۲+۲bx+c=۰ & (E_۲) \end{cases}$$

ریشهٔ مشترك این‌دومعادله، درمعادلهٔ $۳E_۱-xE_۲=۰$ هم‌صدق می کند، که در اینصورت داریم:

$$۳E_۱-xE_۲=bx^۲+۲cx+۳d-۳y=۰ \quad (E_۳)$$

وازحذف جملهٔ درجه‌دوم بین $(E_۲)$و$(E_۳)$ بهمعادلهٔ درجه اول زیر می‌رسیم، که همان معادلهٔ خطی‌است‌که ازنقطه‌های ماکزیمم ومی‌نیمم منحنی‌می گذرد:

$$y=\frac{۲(۳ac-b^۲)}{۹a}x+d-\frac{bc}{۹a} \quad (II)$$

ازاین معادله، می‌توان برای ساده‌تر کردن محاسبهٔ مختصات ماکزیمم و‌می‌نیمم منحنی تابع درجه سوم استفاده کرد. مثلا درتابع $y=x^{۳}-۵x^{۲}-x+۱$، طولهای نقطه‌های ماکزیمم و‌می‌نیمم، جوابهای معادلهٔ $۳x^{۲}-۱۰x-۱=۰$ یعنی $x=\frac{۵\pm ۲\sqrt{۷}}{۳}$ می‌باشد. برای‌تعیین‌عرضهای این‌نقطه‌ها می‌توان از معادلهٔ (II) استفاده کرد:

$$y=-\frac{۴}{۹}[\frac{۱۴}{۳}(۵\pm ۲\sqrt{۷})-۱]$$

۲۴۵. مشتق این‌تابع به‌صورت زیردر می‌آید:

$$f'(x)=(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)$$

بدون‌اینکه به کلی‌بودن مسأله‌لطمه‌ای واردآید،می‌توان $a>b>c$ فرض کرد، دراینصورت بسادگی‌روشن می‌شود که:

$$f'(a)\cdot f'(b)<۰ \quad و \quad f'(b)\cdot f'(c)<۰$$

واین تساویها، به‌معنای‌آنست‌که اولا $f'(x)=۰$ همیشه دوریشهٔ حقیقی دارد و این دوریشه، یکی‌بین a و b ودیگری بین b و c قراردارد ($x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های $f'(x)=۰$ گرفته‌ایم):

$$c<x_۱<b<x_۲<a$$

در حالت $a=b\neq c$، یکی‌از طولهای ماکزیمم و‌می‌نیمم مساوی a و دیگری مساوی $\frac{a+۲c}{۳}$ می‌شود. درحالت $a=b=c$، منحنی‌تابع بدون ماکزیمم و‌می‌نیمم و $x=a$،طول نقطهٔ عطف‌آن می‌شود.

۲۴۶. منحنی‌این تابع‌تنها یك‌مجانب موازی محورطول دارد ($y=۱$) وروشن‌است که مرکزتقارن (درصورت وجود)، بایدروی این‌خط باشد.ازطرف دیگر، درحالتی که منحنی‌دومجانب موازی محور عرض داشته‌باشد، باید مرکز تقارن ازاین دومجانب بیك‌فاصله باشد، یعنی‌طولی‌مساوی $-\frac{p'}{۲}$ داشته‌باشد. به این‌ترتیب مختصات مرکزتقارن $(-\frac{p'}{۲}, ۱)$ می‌شود، که باید درمعادلهٔمنحنی

صدق کند. ازآنجا به‌رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$p'(p-p')=2(q-q') \quad (1)$$

در حالتی که منحنی تابـع ، پیوسته باشد، حتمـاً دارای یك ماکزیمم و یك می‌نیمم است و مرکز تقارن (که در اینحالت نقطهٔ عطف منحنی هم می‌باشد)، باید از این دو نقطه بیك فاصله باشد ودراینصورت هم، همان‌رابطهٔ (۱) بدست می‌آید.

۲۴۷. a) جواب: $b'^2-4a'c'>0$ و $ab'\neq ba'$.

b) نقطه‌های عطف‌ریشه‌های $y''=0$، یعنی ریشه‌های معادله درجه سوم زیر هستند:

$$a'(ba'-ab')x^3+3a'(ca'-ac')x^2+3a'(cb'-bc')x+$$
$$+ac'^2-ca'c'-bb'c'+cb'^2=0 \quad (1)$$

ازطرف دیگر، اگرفرض کنیم، سه‌نقطهٔ عطف بریك استقامت‌باشند ومعادلهٔ خطی که ازاین سه‌نقطه عبورمی‌کند، $y=mx+n$ بگیریم، بایدازحل معادلهٔاین خط بامعادلهٔ منحنی تابع، به‌معادلهٔ درجهٔ سومی برسیم، که بامعادلهٔ (۱) هم‌ارز باشد. ازبرخورد معادلهٔخط ومعادلهٔ منحنی، به‌این معادله می‌رسیم:

$$ma'x^3+(mb'+na'-a)x^2+(mc'+nb'-b)x+$$
$$+nc'-c=0 \quad (2)$$

برای‌هم ارزبودن دومعادلهٔ (۱)و(۲) باید داشته‌باشیم:

$$\frac{a'(ba'-ab')}{ma'}=\frac{3a'(ca'-ac')}{mb'+na'-a}=\frac{3a'(cb'-ba')}{mc'+nb'-b}=$$
$$=\frac{ac'^2-ca'c'-bb'c'+cb'^2}{nc'-c}$$

ازدومعادلهٔ اول، مقادیر m وn را بدست می‌آوریم؛ این‌دومعادله رااز تساوی کسر اول‌ودوم، وکسراول وسوم، منظم می‌کنیم:

$$\begin{cases}[3a'(ca'-ac')-b'(ba'-ab')]m- \\ \qquad -a'(ba'-ab')n=-a(ba'-ab') \\ [3a'(cb'-bc')-c'(ba'-ab')]m- \\ \qquad -b'(ba'-ab')n=-b(ba'-ab')\end{cases}$$

مقادیر m و n چنین خواهدبود:

$$m=\frac{ab'-ba'}{b'^2-4a'c'} \quad \text{و} \quad n=\frac{bb'-ac'-3a'c}{b'^2-4a'c'} \qquad (3)$$

واگراین مقادیررا، مثلا درتساوی دوکسراول وچهارم قراردهیم، صحت‌تساوی بسادگی‌روشن می‌شود. بنابراین دومعادلهٔ (۱)و(۲) به‌ازای مقادیر(۳)هم‌ارزند ومعادلهٔ خطی‌که ازسه‌نقطهٔ عطف می‌گذرد چنین‌است:

$$y=\frac{ab'-ba'}{b'^2-4a'c'}x+\frac{bb'-ac'-3a'c}{b'^2-4a'c'}$$

اکنون به محاسبهٔ ضریب زاویهٔ خطی می‌پردازیم، که از نقطه های ماکزیمم و می‌نیمم می گذرد.

طولهای نقطه‌های ماکزیمم ومی‌نیمم، ازمعادلهٔ $y'=0$، یعنی‌معادلهٔزیر بدست می‌آید:

$$(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+bc'-cb'=0$$

همچنین عرضهای نقطه‌های ماکزیمم ومی‌نیمم هم‌ازمعادلهٔ زیربدست می‌آیند[1]:

$$(b'^2-4a'd)y^2-2(bb'-2a'c-2ac')y+b^2-4ac=0$$

اگرطولهای ماکزیمم‌ومی‌نیمم‌را x_1وx_2 وعرضهای این‌دونقطه‌را y_1وy_2 بگیریم برای‌محاسبهٔ ضریب زاویهٔ خطی‌که ازاین دو نقطه می‌گذرد، باید $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

---

۱) برای بدست‌آوردن این‌معادله، معادلهٔ $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ را نسبت به x منظم‌می‌کنیم ودرآن شرط وجودریشهٔ مضاعف رامی‌نویسیم.

را محاسبه کنیم:

$$y_1-y_2=$$

$$=\frac{2\sqrt{(bb'-2a'c-2ac')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')}}{b'^2-4a'c'}$$ و

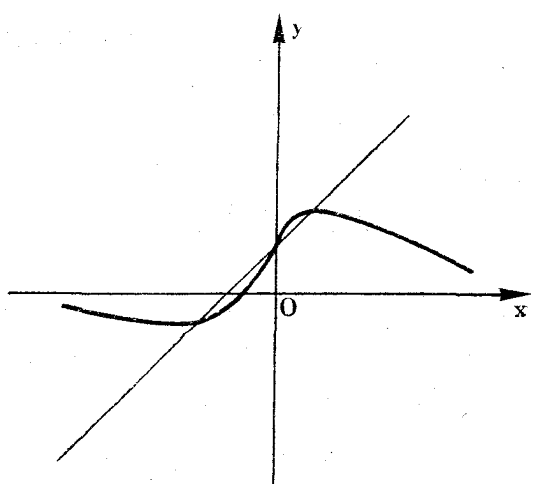
$$x_1-x_2=\frac{2\sqrt{(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')}}{ab'-ba'}$$

و دیگر بسادگی بدست می‌آید:

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2(ab'-ba')}{b'^2-4a'c'}$$

و همانطور که می‌بینیم، ضریب زاویهٔ خطی که از نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم می‌گذرد، دوبرابر ضریب زاویهٔ خطی‌است که از سه نقطهٔ عطف می‌گذرد.

۲۴۸. a) منحنی نمایش تغییرات تابع درشکل ۱۳۸ رسم‌شده است. هم از روی شکل وهم با محاسبه، می‌توان نتیجه گرفت که اگر:



شکل ۱۳۸

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

باشد، خط $y=m$، منحنی‌تابع رادردو نقطه قطع‌می‌کند ($m\neq 0$)، در حالت

$m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$، خط برمنحنی‌مماس‌است. به‌ازای‌بقیهٔ‌مقادیر m، خط $y=m$،

منحنی تابع‌را قطع نمی‌کند.

b) مختصات نقطهٔ P وسط دو نقطهٔ تلاقی M و N چنین می‌شود.

$$P\left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{2m} \\ y=m \end{array}\right. \Longrightarrow y=\frac{1}{2x}$$

(این‌نتیجه را به این‌ترتیب هم می‌توانستیم بدست‌آوریم که ازصورت ومخرج‌تابع اصلی بطور جداگانه مشتق بگیریم). ولـی‌باتوجه به‌بحث قسمت a) ، باید به این‌معادله، شرط $\frac{1-\sqrt{3}}{2}<y<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ یا شرطهای ($x<-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ یا $x>\frac{\sqrt{3}-1}{2}$) را اضافه کنیم:

$$P \text{ مکان} \Longrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2x} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}<y<\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

اگر $Q(x,m)$ را زوج توافقی A، نسبت به‌دو نقطهٔ M و N بگیریم، اولاً x' و x''، طولهای M و N، ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم زیرهستند:

$$2mx^2-2x+m-1=0 \qquad (I)$$

ثانیاً باید داشته‌باشیم (رابطهٔ دکارت):

$$\frac{2}{AQ}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN} \Longrightarrow \frac{2}{x}=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}$$

که از آنجا بسادگی $x=m-1$ بدست می‌آید ومکان‌نقطهٔ Q چنین‌می‌شود:

$$\text{مکان } Q \Longrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{2}<x<\frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

c) معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌های‌آن ضریب‌زاویه‌های OM و ON را می‌دهد، چنین‌است:

$$(m-1)t^2-2mt+2m^3=0$$

واگر m_1 و m_2 بترتیب ضریب زاویه‌هـای OM و ON باشند، بدست می‌آید:

$$m_1m_2=\frac{(m_1+m_2)^3}{(m_1+m_2-2)^2}$$

که رابطه‌ای مستقل‌از m، بین ضریب زاویه‌هاست.

اگرطولهای نقطه‌های M وN را x' و x'' بگیریم، باتوجه به اینکه این طولها، ریشه‌های معادلهٔ (I) هستند، رابطهٔ بین x' و x'' که مستقل از m باشد، چنین‌است.

$$x'+x''+2x'x''=1 \quad (1)$$

ازطرف دیگراگر نقطه‌های ثابت‌را (که زوج توافقی یکدیگر نسبت به تصویرهای دونقطهٔ M وN هستند)، P وQ به‌طولهای α وβ و روی محور طول بگیریم، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{2}{\overline{PQ}}=\frac{1}{\overline{PM}}+\frac{1}{\overline{PN}}\Longrightarrow\frac{2}{\beta-\alpha}=\frac{1}{x'-\alpha}+\frac{1}{x''-\alpha}$$

که‌از آنجا به‌رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$(\alpha+\beta)(x'+x'')-2x'x''=2\alpha\beta \qquad (2)$$

برای‌اینکه رابطه‌های (۱) و (۲) هم ارز باشند، بایدداشته باشیم:

$$\frac{\alpha+\beta}{۱}=\frac{-۲}{۲}=\frac{۲\alpha\beta}{۱}\Longrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-۱\\ \alpha\beta=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

بنابراین، طولهای نقطه‌های ثابت، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیرهستند؛

$$۲x^۲+۲x-۱=۰$$

که‌همان معادلهٔ $y'=۰$ است. بنابراین دونقطهٔ ثابت، همان‌تصویرهای ماکزیمم ومی‌نیمم منحنی‌روی محورطول هستند.

d) سه‌نقطهٔ به‌طولهای $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ راروی‌خط $y=ax+b$ می‌گیریم، دراینصورت این‌طولها، ریشه‌های معادلهٔ درجه‌سوم زیرخواهند بود:

$$۲ax^۳+۲bx^۲+(a-۲)x+(b-۱)=۰$$

وازآنجا داریم:

$$x_۱+x_۲+x_۳=-\frac{b}{a}\text{و}x_۱x_۲x_۳=-\frac{b-۱}{۲a},$$

$$x_۱x_۲+x_۱x_۳+x_۲x_۳=\frac{a-۲}{۲a}$$

که اگردررابطهٔ مسأله قراردهیم، صحت‌آن معلوم می‌شود.

e) بسادگی تحقیق می‌شود.

f) سه‌نقطهٔ عطف منحنی‌تابع.

۲۴۹. a) رسم‌منحنی‌تابع مشکل‌نیست وبرای بریك امتدادبودن سه‌نقطهٔ عطف، به‌حالت‌کلی مسألهٔ ۲۴۷ مراجعه‌کنید.

b) به‌ازای $m=۲$ و $m=-۱$، خط برمنحنی مماس است، به‌ازای $-۱<m<۲$، خط منحنی‌را دردو نقطه قطع‌می‌کند $(m\neq۱)$. بالاخره اگر $m<-۱$ یا $m>۲$ باشد، خط و منحنی با یکدیگر برخوردی ندارند.

c) اگر بین معادلهٔ منحنی‌وخط، y را حذف کنیم، به‌معادلهٔ درجه دوم

زیر می‌رسیم:

$$(m-1)x^2-2(m+1)x+3(m+1)=0 \qquad (1)$$

اگر طولهای دونقطهٔ تلاقی خط ومنحنی را x_1 و x_2 بگیریم، داریم:

$$x_p=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m+1}{m-1} \text{ و } y_p=m$$

که از آنجا مکان نقطهٔ P بدست می‌آید (باتوجه به‌شرط قسمت b):

$$y=\frac{x+1}{x-1} \quad (-1<y<2)$$

درتابعهای کسری به شکل $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$، وقتی که باخط $y=m$ دونقطهٔ برخورد داشته‌باشند، همیشه، معادلهٔ مکان وسط دونقطهٔ برخورد (وقتی که m تغییرمی‌کند)، عبارتست از $y=\frac{2ax+b}{2a'x+b'}$ (در حالت کلی ثابت کنید).

d) طولهای نقطه‌های A و B بترتیب مساوی x_1 و x_2 هستند (ریشه‌های معادلهٔ (۱)). ازطرف‌دیگر بین ریشه‌های معادلهٔ (۱)، رابطهٔ:

$$3(x_1+x_2)=2x_1x_2$$

برقراراست. این‌رابطه رامی‌توان چنین نوشت:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}=\frac{2}{\overline{OD}}$$

که درآن $O(0,0)$ و $D(3,0)$ است. یعنی‌نقطه ثابت C برمبداء ونقطهٔ D بر $(3,0)$ منطبق‌است.

e) اگردرحالت قبل، وسط CD را ω بگیریم، باید داشته‌باشیم:

$$\overline{\omega A}\cdot\overline{\omega B}=\overline{\omega C}^2 \Longrightarrow \overline{\omega A}\cdot\overline{\omega B}=\frac{9}{4}$$

بنابراین، نقطه‌های A و B در دستگاه انعکاس بهمرکز $\omega(\frac{3}{2},0)$ وقوت $p=\frac{9}{4}$،

همیشه منعکس یکدیگرند.

f) دایرهٔ به‌قطر CD، برهردایره‌ای‌که از A وB بگذرد عمــود است (زیراقطردایرهٔاول به‌وسیلهٔ هریک‌ازدایره‌های‌دوم، به‌نسبت توافقی‌تقسیم‌می‌شود). معادلهٔ دایرهٔ به‌قطرCD چنین‌است.

$$x^۲+y^۲=۳x$$

g) دایره‌های به‌قطر AB، به‌این مناسبت تشکیل‌یک دسته دایره‌می‌دهند که اولاهمهٔ‌آنها بردایرهٔ ثابت به قطر CD عمودند، ثانیاً مرکزهای‌آنها روی یک خط راست قرار دارند (محور طول). معادلهٔ محــور اصلی این دایره‌ها $۲x-۳=۰$ است.

۲۵۰. x' وx'' طولهای نقطه هــای A' وB ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند:

$$tx^۲+x+m-t=۰ \qquad (۱)$$

اگرطول نقطهٔ Dرا x بگیریم، برای‌اینکه C وD زوج توافقی‌هم، نسبت‌به A وB باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{۲}{\overline{CD}}=\frac{۱}{\overline{CA}}+\frac{۱}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{۲}{x-a}=\frac{۱}{x'-a}+\frac{۱}{x''-a}$$

ویا:

$$(x+a)(x'+x'')-۲x'x''=۲ax$$

بجای $x'+x''$ و $x'x''$، مقادیرشان‌را، ازمعادلهٔ (۱)، قرارمی‌دهیم:

$$-\frac{x+a}{t}-\frac{۲(m+t)}{t}=۲ax \Rightarrow x=\frac{۲t-۲m-a}{۲at+۱}$$

به‌این ترتیب، مختصات پارامتری نقطهٔ D و ازآنجا، معــادلهٔ مکان D بدست می‌آید:

$$D\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{۲t-۲m-a}{۲at+۱} \\ \\ y=t \end{array}\right. \Rightarrow y=\frac{x+۲m+a}{۲(۱-ax)}$$

البته به‌این‌مکان، باید شرط $\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{2} > y > \frac{m-\sqrt{m^2-1}}{2}$ را اضافه کرد، که شرط حقیقی بودن ریشه‌های معادلهٔ (۱) است.

برای اینکه، این مکان به‌خط راست تبدیل شود، باید $a=0$ باشد؛ که دراینصورت، معادلهٔ مکان به‌اینصورت درمی‌آید:

$$y=\frac{1}{2}x+m$$

همچنین با شرط $a^2+2ma+1=0$ هم، مکانD، به‌خط راستی به معادلهٔ $2ay+1=0$ تبدیل می‌شود. این شرط به‌معنای‌آنست‌که نقطهٔ C برتصویر یکی ازدونقطهٔ ماکزیمم ومی‌نیمم روی خط $y=t$ منطبق است.

درحالتی‌که a بسمت بی‌نهایت میل کند، معادلهٔ مکان به‌صورت $y=-\frac{1}{2x}$ درمی‌آید، دراینحالت مکان‌نقطهٔD، همان مکان نقطه‌های ماکزیمم ومی‌نیمم‌منحنی است، وقتی‌که m تغییرمی‌کند.

۲۵۱. بسادگی روشن می‌شودکه دومعادلهٔ درجه دوم

$$3x^2-2=0 \text{ و } x^2+2x+a=0$$

به ازای $a=\frac{-2\pm2\sqrt{6}}{3}$ ، ریشهٔ مشترك دارند. بنابراین اگر a ، یکی ازاین دو مقدار را اختیارکند، معادلهٔ تابع به‌صورت یك تابع هموگرافیك در می‌آید:

$$a=-\frac{2+2\sqrt{6}}{3} \implies y=\frac{3\sqrt{3}x+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$a=\frac{-2+2\sqrt{6}}{3} \implies y=\frac{3\sqrt{3}x-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

درحقیقت به‌ازای این دومقدارa، مشتق تابع اصلی، عبارت درجهٔ دومی می‌شود که یك ریشهٔ‌مضاعف دارد:

$$y' = \frac{۶x^۲ + ۲(۳a+۲)x + ۴}{(x^۲+۲x+a)^۲}$$

واگرمبین عبارت درجهٔ دوم صورت y' را Δ فرض کنیم، داریم:

$$\Delta = ۴(۳a+۲)^۲ - ۹۶ = ۴(۳a+۲+۲\sqrt{۶})(۳a+۲-۲\sqrt{۶})$$

که به‌ازای همان مقادیر a، مساوی صفر می‌شود ومی‌دانیم که صفرشدن y' به‌معنای آنست که صورت ومخرج کسر y، ریشهٔ مشترك دارند.

ازطرف دیگر بسادگی معلوم می‌شود که برای $a<۱$، منحنی تابع مفروض پیوسته، به‌ازای $a=۱$، انفصال مضاعف وبه‌ازای $a>۱$، دومجانب قائم دارد. نتیجهٔ بحث را می‌توان به این‌ترتیب خلاصه کرد.

تابع دردونقطه ناپیوسته است ویك ماکزیمم ویك می‌نیمم دارد $\quad a < -\frac{۲+۲\sqrt{۶}}{۳}$

به‌تابع هموگرافیك تبدیل می‌شود $\quad a = -\frac{۲+۲\sqrt{۶}}{۳}$

تابع دو دونقطه ناپیوسته است وماکزیمم ومی‌نیمم ندارد $\quad -\frac{۲+۲\sqrt{۶}}{۳} < a < \frac{-۲+۲\sqrt{۶}}{۳}$

به تابع هموگرافیك تبدیل می‌شود $\quad a = \frac{-۲+۲\sqrt{۶}}{۳}$

تابع دردونقطه ناپیوسته است و یك ماکزیمم و یك می‌نیمم دارد $\quad \frac{-۲+۲\sqrt{۶}}{۳} < a < ۱$

تابع دارای یك مجانب‌قائم ویك می‌نیمم است $\quad a = ۱$

تابع پیوسته ودارای یك ماکزیمم ویك می‌نیمم است $\quad a > ۱$

۲۵۲. x' و x'' (طولهای ماکزیمم ومی‌نیمم) و y' و y'' (عرضهای ماکزیمم ومی‌نیمم). بترتیب ریشه‌های معادله‌های درجه دوم زیرهستند:

$$(a+۲)x^۲ + ۲bx - ۲b = ۰$$

$$۴y^۲ + ۴(a+b)y + a^۲ - ۴b = ۰$$

وبنابراین باید دستگاه زیررا حل کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{۴b}{a+۲}+\frac{a^۲-۴b}{۴}=۱۹ \\ -(a+b)-\frac{۴b}{a+۲}=۱۶ \end{array}\right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=۲ \\ b=-۹ \end{array}\right.$$

۲۵۳. a) معادلهٔ تابع را نسبت به a متحد با صفرقرارمی‌دهیم، مقادیر x و y نقطه‌های ثابت بدست می‌آید:

نقطه‌های ثابت: $A(۱,۶)$ و $B(-۱,۲)$

برای معادلهٔ خطی که‌ازاین دونقطهٔ ثابت می‌گذرد، می‌توان بطورمستقیم عمل کرد، یا درمعادلهٔ تابع، ضریب درجهٔ دوم را مساوی صفر گرفت (زیرا به ازای مقداری از a که ضریب درجه دوم تـابع مساوی صفر شود، بازهم نمایش تغییرات تابع ازدونقطه ثابت می‌گذرد):

خطی که ازنقطه‌های ثابت می‌گذرد: $y=۲x+۴$

b) می‌دانیم‌منحنی‌سهمی $y=px^۲+qx+r$، به‌ازای مقادیر $p<۰$، ماکزیمم وبه‌ازای مقادیر $p>۰$، می‌نیمم دارد. بنابراین منحنی تابع مفروض وقتی ماکزیمم دارد کـه $a<-۲$ باشد و وقتی می‌نیمم دارد که $a>-۲$ بشود.

ازطرف دیگر مختصات نقطهٔ اکسترمم تابع $\left(-\frac{۱}{a+۲}, -\frac{a^۲-۳}{a+۲}\right)$ است و بنابراین، معادلهٔ مکان اکسترمم چنین می‌شود(که یك هذلولی‌است):

$$y=\frac{x^۲+۴x+۱}{x} \quad (۱)$$

اگرطول اکسترمم را x بگیریم، داریم:

$$x=-\frac{۱}{a+۲} \Longrightarrow a=-\frac{۲x+۱}{x}$$

برای اینکه ماکزیمم داشته باشیم، باید نامعادلهٔ زیربرقرارباشد:

$$a=-\frac{2x+1}{x}<-2 \implies x>0$$

به‌این‌ترتیب،قسمتی ازمنحنی تابع (۱)،که برای‌آن $x>0$ است، مربوط به مکان ماکزیمم و قسمتی، که برای آن $x<0$ است، مربوط به مکان می‌نیمم است.

۲۵۴. فرض می‌کنیم، منحنی تابع $y=\frac{4x^2-mx+m^2}{x-m}$ به ازای همهٔ مقادیر m برخط $y=ax+b$ مماس باشد، دراینصورت ازحل معادلهٔ منحنی وخط، به‌معادله‌ای می‌رسیم که باید یك ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\begin{cases} y=\dfrac{4x^2-mx+m^2}{x-m} \\ y=ax+b \end{cases} \implies (a-4)x^2-[(a-1)m-b]x-(m^2+bm)=0\ ,$$

$$\Delta=[(a-1)m-b]^2+4(a-4)(m^2+bm)=$$
$$=(a^2+2a-15)m^2-2b(a+5)m+b^2=0$$

و برای اینکه، این تساوی به ازای همهٔ مقادیر m ، درست باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a^2+2a-15=0 \\ 2b(a+5)=0 \\ b^2=0 \end{cases} \implies \left| \begin{array}{l} a=3,-5 \\ b=0 \end{array} \right.$$

یعنی‌خطهای $y=3x$ و $y=-5x$ ، به‌ازای همهٔ مقادیر m ، برمنحنی‌مفروض مماس‌اند.

این دوخط را پوش منحنی مفروض گویند وما دراینجا به‌بررسی دقیق‌تر مفهوم پوش می‌پردازیم.

***

پوش

پوش یك منحنی پارامتری $y=f(x)$، عبارتست ازمنحنی ثابتی‌که بر منحنی $y=f(x)$، به‌ازای همهٔ مقادیرپارامترآن، مماس باشد.

مسألهٔ ۲۵۴ را، با توجه به این تعریف، بررسی می‌کنیم. صورت مسأله

را به‌شکل کلی‌تری مطرح می‌کنیم:

مطلوبست معادلهٔ پوش منحنی تابع $(c)y=\frac{4x^2-mx+m^2}{x-m}$.

معادلهٔ منحنی (c) را می‌توان به‌اینصورت نوشت (نسبت به پارامتر m منظم کرده‌ایم):

$$m^2-(x-y)m+(4x^2-xy)=0 \quad (1)$$

ازمعادلهٔ (۱)، که نسبت به m ازدرجهٔدوم است، معلوم می‌شودکه به‌هر نقطه از صفحهٔ محورهای مختصات، دومقدار m (حقیقی یا موهومی) مربوط می‌شود. برای نقطه‌هائی ازصفحهٔ محورهای مختصات، که این دومقدار m حقیقی باشد، به‌این‌معناست که ازهریك ازاین‌نقطه‌ها، دونمونه ازمنحنی‌های (c) عبورمی‌کند. نقطه‌هایی در صفحهٔ محورهای مختصات وجود داردکه از آنها، تنها یکی از منحنی‌های (c) عبورمی‌کند واین وقتی است‌که معادلهٔ (۱) ریشهٔ مضاعف داشته باشد. این نقطه‌ها باید درمعادلهٔ زیرصدق‌کنند (معادلهٔ $\Delta=0$ درمورد (۱)):

$$(x-y)^2-4(4x^2-xy)=0 \Longrightarrow y^2+2xy-15x^2=0$$

که ازآنجا به‌دومعادلهٔ $y=3x$ و $y=-5x$ می‌رسیم. این دوخط مکان‌هندسی نقطه‌هایی ازصفحهٔ محورهای مختصات هستند، که ازهریك ازآنها، تنها یکی‌از منحنی‌های (c) عبورمی‌کند. علاوه بـر آن روشن است‌که هریك ازاین دوخط (یا بطورکلی مکان) برمنحنی (c)مماس است (زیرا ازشرط وجود ریشهٔ‌مضاعف بدست‌آمده‌است). بنابراین، همین مکان، یعنی دوخط $y=3x$ و $y=-5x$، پوش منحنی (c) را تشکیل می‌دهند.

به‌این‌ترتیب برای پیداکردن‌معادلهٔ‌پوش (بدون اینکه ازقبل معلوم باشد که ازچه‌نوع است)، می‌توان معادلهٔ منحنی را نسبت به‌پارامترآن منظم‌کرد و سپس شرط وجود ریشهٔ مضاعف را نوشت.

مثال‌دیگر. پوش سهمی‌هـای $y=m^2x^2-2mx+2m+3$ را پیدا کنید.

معادله را نسبت به‌m، منظم می‌کنیم:

$$x^{2}m^{2}-2(x-1)m+(3-y)=0$$

وشرط وجود ریشهٔ مضاعف را درآن می‌نویسیم:

$$(x-1)^{2}-x^{2}(3-y)=0 \Longrightarrow y=\frac{2x^{2}+2x-1}{x^{2}}$$

۲۵۵. a) جواب: منحنی همیشه بردوخط $y=x$ و $y=-2x$ مماس است.

b) طولهای ماکزیمم ومی‌نیمم ریشه‌های $y'=0$، یعنی ریشه‌های معادلهٔ زیر، هستند:

$$2x^{2}-8mx-m^{2}=0 \quad (1)$$

عرضهای ماکزیمم ومی‌نیمم هم، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیرهستند:

$$y^{2}-16my-8m^{2}=0 \quad (2)$$

وبنابراین $M(2m,8m)$ ومکان M به‌صورت $y=4x$ می‌شود. ازآنجا که معادله‌های (۱)و(۲)، همیشه ریشه‌های حقیقی دارند، تمام خط $y=4x$ جزء مکان مطلوب است.

c) همان معادلهٔ (۲) ازقسمت قبل.

d) جواب: $D(\frac{2h+1}{2h},h)$، مکان D: $y=\frac{1}{2(x-1)}$ با شرط $y<8-6\sqrt{2}$ یا $y>8+6\sqrt{2}$.

۲۵۶. a) ازحل دومعادله، بمعادلهٔ درجهٔ سوم زیرمی‌رسیم:

$$x^{3}-3x+\frac{5}{2}-m=0, \quad (1)$$

$$4p^{3}+27q^{2}=-4\times 27+27(\frac{5}{2}-m)^{2}=$$

$$=27(m-\frac{1}{2})(m-\frac{9}{2})$$

ازطرف دیگر: اگرریشه‌های معادلهٔ (۱) را x_1، x_2، x_3 بگیریم، داریم:

$$x_1+x_2+x_3=0 \quad , \quad x_1x_2x_3=m-\frac{5}{2}$$

ازصفر بودن مجموع ریشه‌های یك معادله، معلوم می‌شود که هرسه ریشه نمی‌توانند یك علامت داشته باشند. درجدول زیر تعدادریشه‌های حقیقی وعلامت آنهامشخص شده است:

m	$4p^3+27q^2$	$x_1x_2x_3$	نتیجه
$-\infty$			
	$+$	$-$	یك ریشهٔ حقیقی منفی
$\frac{1}{2}$	0		ریشهٔ مضاعف مثبت و ریشهٔ سادهٔ منفی
	$-$	$-$	یك ریشهٔ حقیقی منفی و دو ریشهٔ حقیقی مثبت
$\frac{5}{2}$		0	یك ریشه صفر و دو ریشهٔ قرینه
	$-$	$+$	یك ریشهٔ حقیقی مثبت و دو ریشهٔ حقیقی منفی
$\frac{9}{2}$	0		ریشهٔ مضاعف منفی و ریشهٔ سادهٔ مثبت
	$+$	$+$	یك ریشهٔ حقیقی مثبت
∞			

b) مرکز تقارن یك سهمی درجه سوم، همان نقطهٔ عطف منحنی آنست: $\omega(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$. ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی، دراین نقطه برابراست با $-\frac{27}{4}$ و معادلهٔ خط مماس: $54x+8y=21$.

۲۵۷. مسأله را می‌توان با روش کلی تعیین پوش یك منحنی پیداکرد (حل مسألهٔ ۲۵۴ را ببینید). معادله خط را نسبت به m منظم می‌کنیم:

$$m^2-(x+1)m+y=0$$

برای اینکه این معادلـه، ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید مبین آن مساوی صفر شود:

$$(x+1)^2-4y=0 \implies y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

که معادلهٔ یك سهمی است، با محوری موازی محورعرض.

مسأله را به‌این‌ترتیب هم می‌توانستیم حل کنیم: معادلهٔ سهمی مطلوب را

$y=ax^2+bx+c$ می گیریم.

باید a،bوc را چنان پیدا کنیم که این سهمی به‌ازای همهٔ مقادیرm بر خط $y=mx-m(m-1)$ مماس باشد.

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=mx-m(m-1) \end{cases} \Longrightarrow ax^2+(b-m)x+$$
$$+(c+m^2-m)=0$$

برای اینکه خط برسهمی مماس باشد، باید این معادلهٔ درجه دوم(به‌ازای همهٔ مقادیرm) ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$\Delta=(b-m)^2-4a(c+m^2-m)=0$$
$$(1-4a)m^2+2(2a-b)m+(b^2-4ac)=0$$

واین تساوی به‌شرطی، نسبت به m، یك اتحاد است که‌داشته باشیم:

$$1-4a=0, 2a-b=0, b^2-4ac=0$$

و ازآنجا بدست می‌آید: $a=\frac{1}{4}$، $b=\frac{1}{2}$، $c=\frac{1}{4}$. درنتیجه‌معادلهٔ‌سهمی‌مطلوب چنین می‌شود:

$$y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

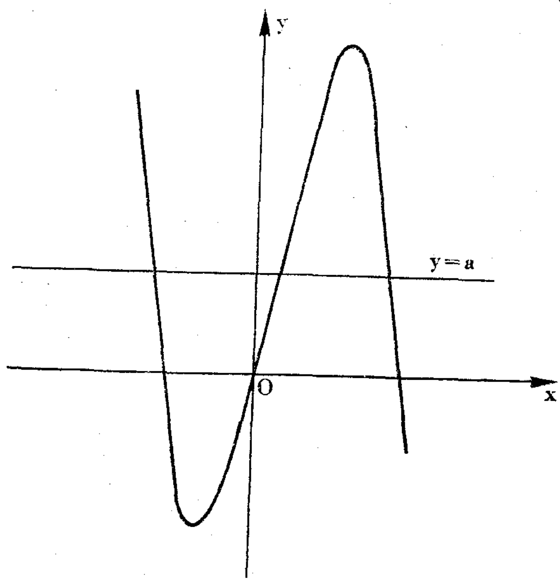
۲۵۸. جواب: خط مفروض به‌ازای همهٔ‌مقادیرm، برسهمی$y^2=12x$ مماس‌است.

۲۵۹. جواب: خط مفروض همیشه برهذلولی $2xy=1$ مماس است.

۲۶۰. برای تحقیق در تعداد ریشه‌های حقیقی این معادله (به‌ازای‌مقادیر مختلف a) ، می‌توان بطریق محاسبه و با تبدیل‌آن، به‌معادله‌ای به‌صورت $x^3+px+q=0$، عمل کرد؛ ولی در آنصورت نمی‌توان علامت ریشه‌ها را تشخیص داد. بنابراین حل مسأله را به‌کمك بررسی وضع برخورد منحنی تابع $y=-x^3+x^2+5x$ وخط $y=a$ انجام می‌دهیم.

منحنی نمایش تغییرات تابع درجه سوم در شکل ۱۳۹ داده شده است.

این منحنی درنقطه (-۱ و -۳) می‌نیمم، درنقطه ($\frac{۵}{۳}$ و $\frac{۱۷۵}{۲۷}$)ماکزیمم است و درنقطه‌های به‌طولهای $\frac{۱\pm\sqrt{۲۱}}{۲}$ و مبداء مختصات، محور طول را قطع می‌کند.



شکل ۱۳۹

بحث دروجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ مفروض درجدول داده شده‌است:

a	نتیجهٔ بحث	
$-\infty$		
	یك ریشهٔ حقیقی مثبت	
-۳		ریشهٔ‌مضاعف منفی‌وریشهٔ‌ساده مثبت
	دوریشهٔ حقیقی منفی ویك ریشهٔ حقیقی مثبت	
۰		یك ریشه منفی، یك‌ریشهٔ مثبت ویك ریشهٔ صفر
	دوریشهٔ حقیقی مثبت ویك‌ریشهٔ حقیقی منفی	
$\frac{۱۷۵}{۲۷}$		ریشهٔ مضاعف مثبت وریشهٔ ساده منفی
	یك ریشهٔ حقیقی منفی	
$+\infty$		

همانطور که از جدول دیده می‌شود، معادلهٔ مفروض به ازای $a=-3$ و $a=\frac{175}{27}$ ریشهٔ مضاعف دارد؛ دراین دوحالت، ریشه‌ها چنین‌اند:

$$a=-3 \implies x_1=x_2=-1, x_3=3$$

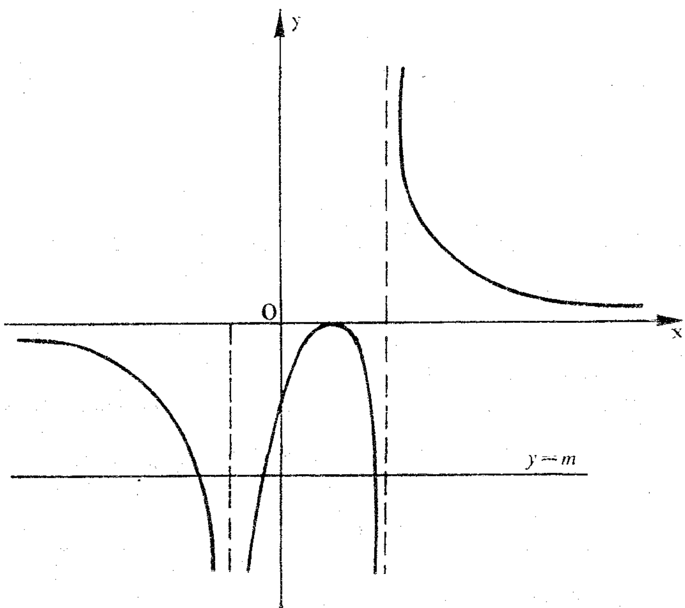
$$a=\frac{175}{27} \implies x_1=x_2=\frac{5}{3} \text{ و } x_3=-\frac{7}{3}$$

۲۶۱. معادله را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$m=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2(x-2)}$$

و بنابراین، بحث مسأله، منجربه بحث دربارهٔ تعداد وعلامت طولهای نقطه‌های برخورد منحنی

$$y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2(x-2)} \quad (1)$$



شکل ۱۴۰

با خط $y=m$ می‌شود.

منحنی نمایش تغییرات تابع (۱)، در شکل ۱۴۰ داده شده است.

نتیجهٔ بحث چنین است.

۱. $m<-\frac{۱}{۲}$: در این حالت، معادلهٔ مفروض درجهٔ سوم، یك ریشهٔ مثبت و دو ریشهٔ منفی حقیقی دارد.

۲. $m=-\frac{۱}{۲}$: یکی از ریشه‌های معادله، مساوی صفر و دو ریشهٔ دیگر، یکی منفی و دیگری مثبت است.

۳. $-\frac{۱}{۲}<m<۰$: معادله، دو ریشهٔ مثبت و یك ریشهٔ منفی دارد.

۴. $m=۰$: معادلهٔ درجهٔ سوم، به یك معادلهٔ درجه دوم با ریشهٔ مضاعف مساوی ۱، تبدیل می‌شود (ریشهٔ سوم به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند).

۵. $m>۰$: معادله تنها یك ریشهٔ حقیقی مثبت دارد.

۲۶۲. a) طولهای نقطه‌های برخورد دو هذلولی، از معادلهٔ درجهٔ دوم زیر بدست می‌آید:

$$(m-۱)x^۲+۴x+m+۱=۰ \quad (۱)$$

و این معادله، وقتی دو ریشهٔ حقیقی دارد که داشته باشیم: $-\sqrt{۵}<m<\sqrt{۵}$، بنابراین به‌ازای $-\sqrt{۵}<m<\sqrt{۵}$، هذلولیها دو نقطه برخورد دارند؛ به‌ازای $m=\pm\sqrt{۵}$، هذلولیهای برهم مماس‌اند و به‌ازای $m>\sqrt{۵}$ یا $m<-\sqrt{۵}$، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

b) x' و x''، طولهای نقطه‌های برخورد دو منحنی (درصورت وجود)، ریشه‌های معادلهٔ (۱) هستند و بنابراین، طول نقطهٔ P، وسط دو نقطهٔ برخورد، چنین می‌شود:

طول نقطهٔ p : $$x=\frac{x'+x''}{۲}=-\frac{۲}{m-۱}$$

ازاین رابطه، بدست می‌آید: $m=\frac{x-۲}{x}$، که با توجه به شرط قسمت **a** (شرط وجود نقطه‌های برخورد)، باید داشته باشیم:

$$-\sqrt{۵}<\frac{x-۲}{x}\leqslant\sqrt{۵} \Longrightarrow \left(\frac{x-۲}{x}\right)^{۲}\leqslant ۵ \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x\leqslant\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \\ x\geqslant\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲} \end{array} \right.$$

ازطرف دیگر، برای عرض نقطهٔ P داریم:

$$y=\frac{y'+y''}{۲}=\frac{\frac{mx'+۲}{x'-۱}+\frac{mx''+۲}{x''-۱}}{۲}=$$

عرض نقطهٔ P:
$$=\frac{۲mx'x''-(m-۲)(x'+x'')-۴}{۲[x'x''-(x'+x'')+۱]}=\frac{m-۱}{۲}$$

با حذف پارامتر m، بین طول وعرض نقطهٔ P، معادلهٔ مکان‌آن بدست می‌آید:

$$xy=-۱ \quad \left(x\leqslant\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \text{ یا } x\geqslant\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right)$$

c) $A(x',۰)$ و $B(x'',۰)$ است (x',x'' ریشه‌های معادلهٔ (۱) هستند).
اگر $C(\alpha,۰)$ و $D(\beta,۰)$ بگیریم، برای اینکه CوD زوج توافقی‌یکدیگر، نسبت به AوB باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{۲}{\overline{CD}}=\frac{۱}{\overline{CA}}+\frac{۱}{\overline{CB}} \Longrightarrow \frac{۲}{\beta-\alpha}=\frac{۱}{x'-\alpha}+\frac{۱}{x''-\alpha}$$

وازآنجا، به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$(\alpha+\beta)(x'+x'')-۲x'x''=۲\alpha\beta \quad (۲)$$

ازطرف دیگر، بین ریشه‌های معادلهٔ (۱)، رابطه زیروجود دارد (رابطهٔ مستقل از m):

$$(x'+x'')+۲x'x''=۲ \quad (۳)$$

برای اینکه رابطه‌های (۲)و(۳) یکی باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{\alpha+\beta}{۱}=\frac{-۲}{۲}=\frac{۲\alpha\beta}{۲} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-۱ \\ \alpha\beta=-۱ \end{cases}$$

وازآنجا برای αوβ، جوابهای $\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$ بدست می‌آید.

جواب : $C(-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲},۰)$ و $D(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲},۰)$.

d) مرکزاین دستگاه انعکاس، وسط پاره‌خطCD، یعنی $\omega(\frac{-۱}{۲},۰)$ و قوت انعکاس مساوی $\omega C^۲$، یعنی$\frac{۵}{۴}=p$ است.

e) این دایره عبارتست ازدایرهٔ به‌قطرCD که معادلهٔ آن چنین می‌شود:

$$x^۲+y^۲=۱-x$$

۲۶۳. مقدار $a=۰$، درحوزهٔ تعریف تابع:

$$ax^۲+(a-۳)x+\frac{۲}{a}-۲a$$

نیست وبنابراین دربحث ماوارد نمی‌شود.

حالت‌اول: $a>۰$. نامساوی $ax\geqslant a^۲-۲$ را می‌توان چنین نوشت:

$$x\geqslant\frac{a^۲-۲}{a}$$

والبته، مقادیری از x وجود داردکه دراین نامساوی وضمناً نامساوی زیرصدق کند:

$$\varphi=ax^۲+(a-۳)x+\frac{۲}{a}-۲a=$$

$$=a(x-\frac{a+۱}{a})(x-۲\times\frac{۱-a}{a})>۰$$

برای‌این‌منظور، کافی‌است مقدارx را چنان انتخاب کنیم که از$\frac{a^۲-a}{a}$ ، $\frac{a+۱}{a}$

و $2\times\frac{1-a}{a}$ بزرگتر باشد و این به‌معنای آنست که همهٔ مقادیر مثبت a، با شرطهای مسأله نمی‌سازد.

حالت دوم: $a<0$. نامساوی $ax \geqslant a^2-1$، به‌این صورت درمی‌آید:

$$x \leqslant \frac{a^2-2}{a}$$

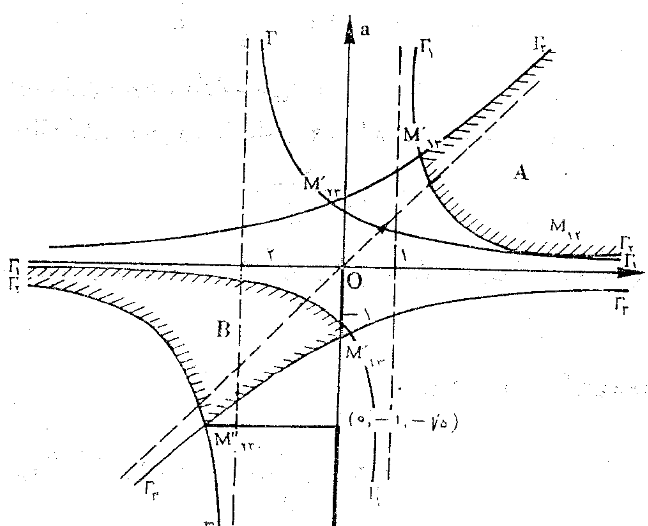
وطبق شرط مسأله، مقادیری از x، که درنامساوی بالا صدق می‌کند، باید در نامساوی زیرهم صدق کند:

$$a\left(x-\frac{a+1}{a}\right)\left(x-2\times\frac{1-a}{a}\right)<0$$

یا (با توجه به $a<0$):

$$\left(x-\frac{a+1}{a}\right)\left(x-2\times\frac{1-a}{a}\right)>0$$

نامساوی اخیر وقتی به‌ازای همهٔ مقادیر $x \leqslant \frac{a^2-2}{a}$، درست است که داشته



شکل ۱۴۱

باشیم:

$$\frac{a^۲-۲}{a}<\frac{a+۱}{a} \quad و \quad \frac{a^۲-۲}{a}<۲\times\frac{۱-a}{a}$$

ویا $(a<۰)$:

$$a^۲-۲>a+۱ \quad و \quad a^۲-۲>۲-۲a$$

یا :

$$\begin{cases} a^۲-a-۳>۰ \\ a^۲+۲a-۴>۰ \end{cases}$$

که با توجه به‌منفی بودنa، ازحل این دستگاه بدست می‌آید:

$$a<-۱-\sqrt{۵}$$

برای تعبیرهندسی مسأله، نامعادله را به اینصورت می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a[a(x-۱)-۱][a(x+۲)-۲]\geqslant۰ \\ a(a-x)-۲\leqslant۰ \end{cases}$$

معادلهٔ $a=۰$، معادلهٔ محور Ox است (a را عـرض گرفته‌ایم). معادله‌های $a(x-۱)=۱$ و $a(x+۲)=۲$، معادلهٔ هذلولیهای $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ هستند که مجانبهای اولی $a=۰$ و $x=۱$ و مجانبهای دومی $a=۰$ و $x=-۲$ است (شکل۱۴۱).

$a(a-x)=۲$ هم، معادلهٔ یك هذلولی است $(\Gamma_۳)$، که مجانبهای آن $a=۰$ و $a=x$ است.

هذلولیهای $\Gamma_۱$و$\Gamma_۲$ درنقطهٔ $M_{۱۲}(۴,\frac{۱}{۳})$ بهم می‌رسند. هذلولیهای $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۳$، دونقطهٔ برخورد دارند:

$$M'_{۱۳}\left(\frac{۵-\sqrt{۱۳}}{۶},\frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲}\right) \quad و \quad M''_{۱۳}\left(\frac{۵+\sqrt{۱۳}}{۶},\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}\right)$$

هذلولیهای $\Gamma_۲$و$\Gamma_۳$ هم دونقطهٔ برخورد دارند:

$$M'_{۲۳}\left(\frac{\sqrt{۵}-۳}{۲},\sqrt{۵}-۱\right) \quad و \quad M''_{۲۳}\left(\frac{-\sqrt{۵}-۳}{۲},-\sqrt{۵}-۱\right)$$

برای دومنطقه A و B، که درشکل ۱۴۱ مشخص‌شده است، هردونامساوی برقرارند. اگر $a_0 \geqslant -1-\sqrt{5}$ باشد، خط $a=a_0$، یکی ازاین دومنطقه راقطع‌می کند. اگر $a_0 < -1-\sqrt{5}$ باشد، خط $a=a_0$، هذلولی Γ_2 را درنقطهٔ (x_0, a_0) قطع می کند که به‌ازای $x>x_0$ درنامساوی دوم وبه ازای $x<x_0$، در نامساوی اول صدق نمی کند.

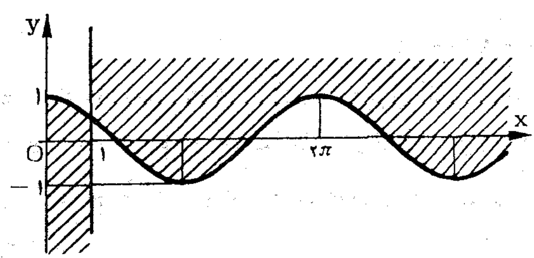
۲۶۴. حوزهٔ مقادیرقابل قبول: $x>0$، $x\neq 1$؛ y هرعدد حقیقی.

برای حل مسأله دوحالت درنظربگیرید:

a) $0<x<1$، دراینصورت $y<\cos x$.

b) $x>1$، در اینصورت $y>\cos x$.

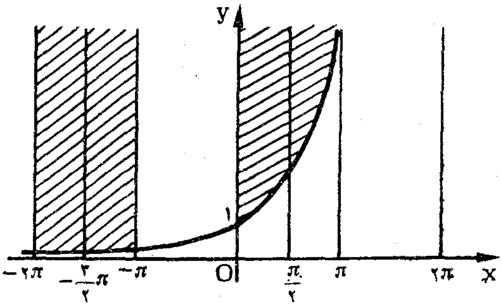
مکان‌هندسی مطلوب‌درشکل ۱۴۲ نشان‌داده شده است (مرزهای‌این‌مکان، جزومکان نیست).



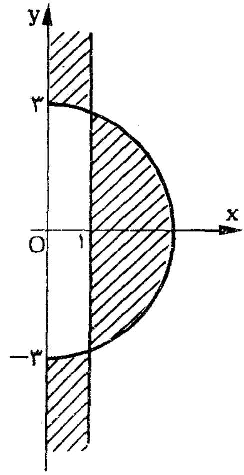
شکل ۱۴۲

۲۶۵. حوزهٔ مقادیرقابل قبول: $x>0$، $x\neq 1$، y هرعدد حقیقی.

برای $0<x<1$ داریم: $x^2+y^2>9$ وبرای $x>1$ داریم: $x^2+y^2<9$. مکان‌هندسی مطلوب درشکل ۱۴۳ نشان داده شده است. مرزهای مکان، جزومکان نیست.



شکل ۱۴۴



شکل ۱۴۳

۲۶۶. حوزهٔ مقادیر قابل‌قبول: $\sin x>0$، $2k\pi<x<(2k+1)\pi$؛ $\sin x\neq 1$ ، $x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$، y هر عدد حقیقی دلخواه؛ چون $0<\sin x<1$، پس $y>2^x$. مکان هندسی مورد نظر (شکل ۱۴۴)، از بی‌نهایت نوار صفحهٔ محورهای مختصات تشکیل شده است، که از چپ به خطهای $x=2k\pi$، از راست به خطهای $x=(2k+1)\pi$ و از پائین به منحنی $y=2^x$ محدود شده‌اند.

مرزهای مکان و نقطه‌های خط $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$، جزو مکان نیست.

۲۶۷. حوزهٔ مقادیر قابل‌قبول:

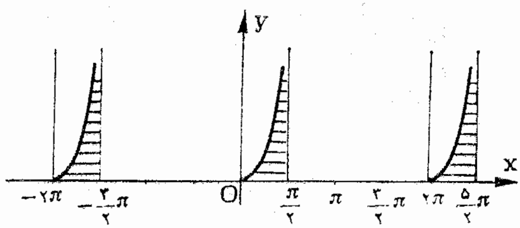
$$\sin x>0 \Longrightarrow 2k\pi<x<(2k+1)\pi$$

$$\sin x\neq 1\Longrightarrow x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$tg x>0\Longrightarrow k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $۲k\pi < x < ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و بنابراین $y > ۰$. چون $۱ > sin x > ۰$ است، پس $y < tg x$.

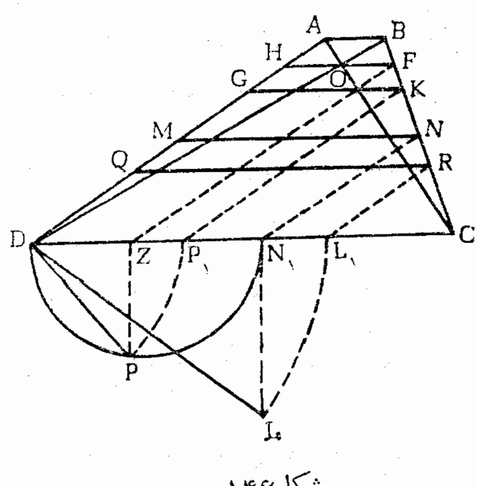
مکان هندسی موردنظر، که شامل مرزهای خود نیست، درشکل ۱۴۵ داده شده است.



شکل ۱۴۵

۲۶۸. I. ذوزنقهٔ ABCD را درنظر می‌گیریم وفرض می کنیم: $AB = a$ و $DC = b$.

دراین ذوزنقه، چهارپاره‌خط، موازی قاعده‌ها ومحدود به‌ساقها، درنظر می گیریم (شکل ۱۴۶).



شکل ۱۴۶

۱) طول پاره‌خط HF، که‌ازمحل برخورد قطرهای ذوزنقه‌عبورمی کند، برابراست با واسطهٔ توافقی a و b:

دومثلث ABD و HOD، همچنین دومثلث ABC و OFC متشابه‌اند، بنابراین داریم:

$$\frac{HO}{a}=\frac{HD}{AD} \text{ و } \frac{OF}{a}=\frac{FC}{BC}$$

وچون $\frac{HD}{AD}=\frac{FC}{BC}$، بدست می‌آید:

$$HO=OF=\frac{۱}{۲}HF$$

ازتشابه دومثلث ADC و AHO نتیجه می‌شود:

$$\frac{HF}{۲b}=\frac{AD-DH}{AD}=۱-\frac{DH}{AD}$$

وبنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{HF}{۲b}=۱-\frac{HF}{۲a}\Longrightarrow HF=\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$$

۲) پاره خط GK را طوری رسم می‌کنیم که ذوزنقهٔ مفروض را به دو ذوزنقهٔ متشابه تبدیل کند، در اینصورت طول پاره خط GK واسطه هندسی a و b خواهد بود.

ازتعریف تشابه چندضلعی‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{GK}=\frac{GK}{b}\Longrightarrow GK=\sqrt{ab}$$

۳) خط میانهٔ ذوزنقه، یعنی پاره‌خط MN (پاره خطی که وسط دوساق ذوزنقه را بهم وصل می‌کند)، برابراست باواسطهٔ حسابی a و b؛ $MN=\frac{a+b}{۲}$.

۴) طول پاره خط QR، که ذوزنقه مفروض را به دو ذوزنقه هم‌ارز (با مساحتهای مساوی)، تقسیم می‌کند؛ برابراست با واسطهٔ مربعی a و b:

اگر ضلعهای ناموازی ذوزنقه، یعنی DA و CB، را امتداد دهیم، تا یکدیگر را در T قطع کنند، مثلث ATB بدست می‌آید که مساحت آنرا S_x می‌نامیم. اگر مساحت ذوزنقه $ABCD$ مساوی S باشد، بنابر خاصیت دوشکل متشابه، بدست می‌آید:

$$\frac{S_x}{S+S_x}=\frac{a^۲}{b^۲} \Longrightarrow S_x=\frac{a^۲S}{b^۲-a^۲}$$

وچون بنابرفرض، QR، ذوزنقهٔ مفروض‌را به دو ذوزنقهٔ متشابه تبدیل‌می‌کندو چون دومثلث QTR و DTC متشابه‌اند، بدست می‌آید:

$$\frac{S_x+\frac{۱}{۲}S}{S_x+S}=\frac{QR^۲}{b^۲}$$

که اگر بجای S_x، مقدارش‌را برحسب a و b و S قراردهیم، خواهیم داشت:

$$QR=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}$$

II. بسادگی‌معلوم می‌شود که GK، نه‌تنها ذوزنقهٔ مفروض $ABCD$ را، بلکه ذوزنقهٔ $HFNM$ راهم به‌دو ذوزنقهٔ متشابه تبدیل‌می‌کند. وقتی‌که‌دو ذوزنقهٔ $GHFK$ و $MGKN$ متشابه‌باشند، داریم:

$$HF:GK=GK:MN$$

اما می‌دانیم: $HF=\dfrac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$ و $MN=\dfrac{a+b}{۲}$، دراینصورت:

$$GK=\sqrt{HF\cdot MN}=\sqrt{\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}\times\frac{a+b}{۲}}=\sqrt{ab}$$

به‌این ترتیب، واسطهٔ هندسی‌دومقدار تغییر نمی‌کند، اگر بجای یکی ازاین دو مقدار، واسطهٔ حسابی‌آنها وبجای مقداردیگر، واسطهٔ توافقی‌آنها راقراردهیم.

ازاینجا نتیجه می‌شود که می‌توان بجای نامساوی $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$ ،

نامساوی $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{4}+\frac{ab}{a+b}$ را قرارداد.

III. ثابت می‌کنیم که پاره‌خطهای HF، GK، MN و QR رامی‌توان روی یك شکل رسم نمود.

روی قاعدهٔ بزرگتر $DC=b$، به‌اندازهٔ $DN_1=MN=\frac{a+b}{2}$

جدا می‌کنیم، در اینصورت $N_1C=\frac{b-a}{2}$ می‌شود، N_1L راعمود بر DC

ومساوی N_1C رسم می‌کنیم. درمثلث قائم‌الـزاویهٔ DN_1L، برای وتر DL داریم:

$$DL=\sqrt{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

به‌قطر DN_1، نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم وسپس‌وتر $N_1D=N_1L=\frac{b-a}{2}$

راجدا می‌کنیم. درمثلث قائم‌الزاویهٔ DN_1P برای‌ضلع DP داریم:

$$DP=\sqrt{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\sqrt{ab}$$

DZ، تصویر $DP=\sqrt{ab}$ راروی‌وتر $DN_1=\frac{a+b}{2}$ بدست می‌آوریم، داریم:

$$DP^2=DN_1\cdot DZ \Longrightarrow DZ=\frac{DP^2}{DN_1}=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

به‌این ترتیب: $DZ=\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$، ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ و $DP=\sqrt{ab}$ ،
وترمثلث DZP هستند؛ همچنین $DP=\sqrt{ab}$، ضلع‌مجاور به‌زاویهٔ قائمه و $DN_۱=\frac{a+b}{۲}$ وترمثلث $DN_۱P$ هستند؛ وبالاخره $DN_۱=\frac{a+b}{۲}$،ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه و $DL=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}$، وتـر مثلث $DN_۱L$ هستند وازآنجا:

$$\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{۲}<\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}$$

درستی نامساویهارا، ازروی جای‌نقطه های Z، $P_۱$، $N_۱$ و $L_۱$ روی پاره‌خط DC هم می‌توان دید. این‌واسطه‌ها، در حالت $a=b$، باهم برابر می‌شوند، دراین حالت ذوزنقهٔ $ABCD$ به متوازی‌الاضلاع تبدیل می‌شود وپاره خطهای HF، GK، MN و QR برهم منطبق وتبدیل به‌پاره خطی‌می‌شوند که ازمحل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع گذشته است ودر اینصورت طول هریك ازآنها مساوی $a=b$ می‌شود.

۲۶۹. توضیح۱. هرمعادلهٔ‌کامل درجه‌چهارم به‌صورت:

$$mx^۴+nx^۳+px^۲+qx+r=۰$$

باتبـدیل $x=X-\frac{n}{۴m}$ به‌معادلهٔ درجهٔ چهارمی به‌صورت:

$$mX^۴+PX^۲+QX+R=۰$$

که فاقدجملهٔ درجه سوم‌است، تبدیل‌می‌شود وازتقسیم دوطرف معادلهٔ اخیر به m به معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$X^۴+aX^۲+bX+c=۰$$

بنابراین بحث درتعداد ریشه‌های حقیقی‌این معادله، بمنزلهٔ بحث در تعداد ریشه های حقیقی‌یك معادله کامل درجهٔ چهارم‌است.

توضیح ۲. می‌دانیم که معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳+px+q=۰$ درحالت $۴p^۳+۲۷q^۲>۰$، تنها یك ریشهٔ حقیقی ودرحالت $۴p^۳+۲۷q^۲<۰$، سه ریشهٔ حقیقی ودرحالت $۴p^۳+۲۷q^۲=۰$، یك‌ریشهٔ ساده ویك ریشهٔ مضاعف حقیقی‌دارد. عبارت $۴p^۳+۲۷q^۲$ رابرای سهولت کار، می‌توان چنین‌نوشت:

$$۴p^۳+۲۷q^۲=۴\times۲۷[(\frac{p}{۳})^۳+(\frac{q}{۲})^۲]$$

و بنابراین برای بحث درتعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ درجهٔ سوم به‌صورت: $x^۳+px+q=۰$، می‌توان علامت‌عبارت $(\frac{p}{۳})^۳+(\frac{q}{۲})^۲$ را جستجو کرد.

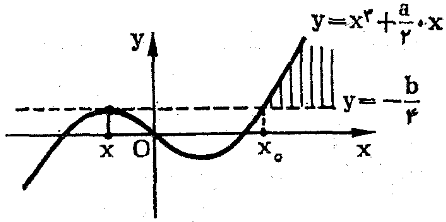
حالا به‌بررسی تعداد ریشه‌های حقیقی، درمعادلهٔ مفروض درجهٔ چهارم می‌پردازیم:

قضیهٔ ۱. اگر $(\frac{a}{۶})^۳+(\frac{b}{۸})^۲\geqslant۰$ باشد، معادلهٔ مفروض یا ریشهٔ حقیقی ندارد ویادارای دوریشهٔ حقیقی است (مختلف یامساوی).

اثبات. اگر معادلهٔ مفروض‌را به صورت $x^۴+ax^۲+bx=-c$ بنویسیم، باید دربارهٔ تعداد نقطه‌های برخورد منحنی :

$$f(x)=x^۴+ax^۲+bx$$

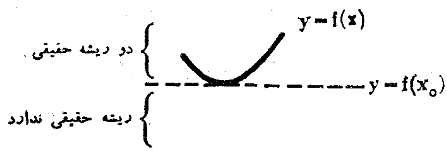
وخط $y=-c$ بحث کنیم. متذکر می‌شویم که شرط $f'(x)\geqslant۰$ را می‌توان به صورت نا معادلهٔ $x^۳+\frac{a}{۲}x+\frac{b}{۴}\geqslant۰$ نوشت. به این ترتیب در حالتی که $(\frac{a}{۶})^۳+(\frac{b}{۸})^۲>۰$ باشد، معادلهٔ $f'(x)=۰$ تنها یك ریشهٔ حقیقی دارد $(x=x_۰)$ ، در اینصورت اگر $x\geqslant x_۰$ باشد، $f'(x)\geqslant۰$ و اگر $x<x_۰$ باشد، $f'(x)<۰$ می‌شود. این بحث برای حالت $(\frac{a}{۶})^۳+(\frac{b}{۸})^۲=۰$ هم درست‌است، دراین حالت نقطه‌ای مانند $x=\alpha<x_۰$ وجود داردکه برای آن $x^۳+\frac{a}{۲}x=-\frac{b}{۴}$ است، ولی وجود این‌نقطه، هیچ‌تغییری در نتیجه‌ای که



شکل ۱۴۷

ما گرفتیم، نمی‌دهد (شکل ۱۴۷).

به‌این ترتیب، نقطهٔ $x=x_0$، نقطهٔ می‌نیمم تابع $f(x)$ است و بنابراین به‌ازای $f(x_0)>-c$، معادلهٔ مفروض درجهٔ چهارم، ریشهٔ حقیقی ندارد و به ازای $f(x_0)<-c$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. ضمناً در حالت $f(x_0)=-c$ این دو ریشهٔ حقیقی باهم‌برابرند (شکل ۱۴۸).



شکل ۱۴۸

قضیهٔ ۴. اگر $(\frac{a}{6})^3+(\frac{b}{8})^2<0$ باشد، معادلهٔ مفروض درجهٔ چهارم یا ریشهٔ حقیقی ندارد، یا دو ریشهٔ حقیقی دارد و یا چهار ریشهٔ حقیقی.

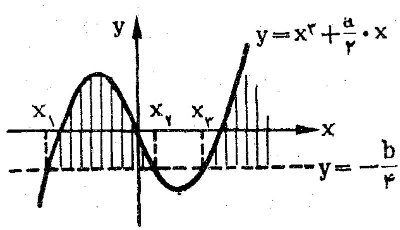
اثبات. بنابرفرض این حالت، معادلهٔ $x^3+\frac{a}{2}x=-\frac{b}{4}$ دارای سه ریشهٔ حقیقی است:

$$x_1<x_2<x_3$$

بنابراین رابطهٔ:

$$x^3+\frac{a}{2}x\geqslant-\frac{b}{4}$$

وقتی برقرار است که داشته باشیم: $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ ویا $x\geqslant x_3$ در حالت $x<x_1$ ویا $x_2<x<x_3$ داریم:



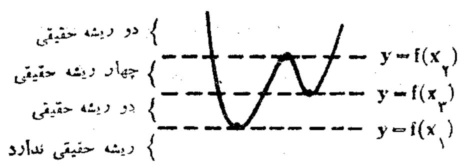
شکل ۱۴۹

$x^3+\frac{a}{2}x<-\frac{b}{4}$ (در شکل ۱۴۹ خط $y=-\frac{b}{4}$ بـرای $b>0$ نشان داده شده است).

به‌این ترتیب به‌ازای $x_1<x<x_2$ یا $x>x_3$ داریم: $f'(x)>0$ وبه‌ازای $x<x_1$ ویا $x_2<x<x_3$ داریم: $f'(x)<0$. یعنی $x=x_1$ و $x=x_3$، نقطه‌های می‌نیمم‌و $x=x_2$ نقطهٔ ماکزیمم تابع

$f(x)=x^4+$
$+ax^2+bx$

است. طرح کلی نمایش



شکل ۱۵۰

تغییرات تابع $f(x)$ درشکل ۱۵۰ نشان‌داده‌شده‌است، که‌در آن‌برای مشخص بودن وضع $f(x_1)<f(x_3)$ گرفته شده‌است.

۲۷۰. منحنی تابـع مفـروض به ازای همهٔ مقـادیر a، از نقطهٔ ثابت $A(-1,1)$ می‌گذرد.

خط دلخواهی باضریب زاویهٔ m از A می‌گذرانیم:

$$y=mx+m+1$$

این‌خط منحنی‌تابع مفروض‌را درنقطهٔ دیگری (غیراز A) قطع‌می‌کند، که‌آنرا Bمی‌نامیم. مختصاتB بسادگی‌بدست می‌آید:

$$B\left(\frac{m-a+2}{a+1}, \frac{m^2+3m+a+1}{a+1}\right)$$

واگرضریب زاویهٔ مماس درنقطهٔ B برمنحنی تابـع مفروض‌را پیداکنیم (طول نقطهٔ Bرا بجایx، درمشتق‌تابع قرارمی‌دهیم)، مقدار $2m+3$ بدست‌می‌آید. می‌بینیم که این‌ضریب زاویه به‌مقدار پارامتر a بستگی‌ندارد، یعنی‌اگر منحنی‌را به‌ازای مقادیرمختلف پارامترa، درنظربگیریم ونقطه‌های نظیر B، B_1، B_2 و غیره راروی‌آنها پیداکنیم، مماس دراین‌نقطه‌ها، باهم موازی می‌شودوبنابراین

منحنی‌های نظیر این پارامتر، نسبت به‌مرکز A، مجانس یکدیگرند.

چون به‌ازای $a > -۱$، منحنی‌های تابع مفروض دارای می‌نیمم و به ازای $a < -۱$ دارای ماکزیمم‌اند؛ اگر دومقداری که به‌پارامتر a نسبت‌می‌دهیم، هردو بزرگتر از -۱ یا هردو کوچکتر از -۱ باشند، دو منحنی نظیر آنها مجانس مستقیم‌اند ودرحالتی که دومقدار یکی کوچکتر ودیگری بزرگتر از -۱ به a نسبت دهیم، دومنحنی‌نظیر ، مجانس‌معکوس یکدیگر می‌شوند.

۲۷۱. مختصات نقطه‌های ثابت چنین است:

$$A\left|\begin{matrix}۲\\ ۲(۶-t)\end{matrix}\right. \quad ; \quad B\left|\begin{matrix}۴\\ ۴(۶-t)\end{matrix}\right.$$

ضریب زاویهٔ‌خط AB مساوی $۶-t$ وبنابراین ضریب زاویهٔ‌خط عمود منصف آن $-\frac{۱}{۶-t}$ می‌شود. مختصات وسط پاره‌خط AB:

$$M(۳,۳(۶-t))$$

ازاینجا، معادلهٔ عمود منصف پاره‌خط AB بسادگی بدست می‌آید:

$$x+(۶-t)y-۳[(۶-t)^۲+۱]=۰$$

که اگر برای سهولت‌کار $\alpha = ۶-t$ بگیریم:

$$x+\alpha y-۳(\alpha^۲+۱)=۰$$

ویا:

$$۳\alpha^۲-\alpha y-x+۳=۰$$

برای اینکه‌پوش این‌خط رابدست‌آوریم، بایدشرط وجودریشهٔ مضاعف‌را، نسبت به‌مجهول α بنویسیم:

$$y^۲-۱۲(۳-x)=۰$$

و یا:

$$x=-\frac{۱}{۱۲}y^۲+۳$$

واین‌معادلهٔ یك سهمی‌است که محوری موازی محورطول دارد وبرعمود منصف پاره‌خط AB، به‌ازای همهٔ مقادیر t مماس‌است.

۲۷۳. I. حل نموداری معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$x^2+px+q=0 \qquad (1)$$

روش اول. منحنی‌سهمی $y=x^2+px+q$ را رسم می‌کنیم. طولهای نقطه‌های برخورد این‌منحنی بامحورطول، جوابهای معادلهٔ (۱) خواهد بود. معادلهٔ (۱) وقتی‌ریشه‌های حقیقی‌ندارد، که این‌سهمی، محورطول راقطع نکند.

روش‌دوم. بجای معادلهٔ (۱) دستگاه دومعادلهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y=x^2 & (2) \\ y+px+q=0 & (3) \end{cases}$$

طولهای نقطه‌های برخورد سهمی(۲) باخط (۳)، جوابهای معادلهٔ(۱) است.

ولی‌چون رسم‌دقیق سهمی‌بسادگی میسر نیست، بهتراست بجای روشهای اول ودوم، به‌روشهائی متوسل‌شویم، که‌بجای سهمی، ازدایره استفاده‌شود.چون دایره رامی‌توان بسهولت وبه‌کمك یك‌پرگار رسم‌کرد.

روش‌سوم. بجای معادلهٔ(۱)، دستگاه دومعادلهٔ زیررادرنظرمی‌گیریم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+px+q=0 \\ y=0 \end{cases}$$

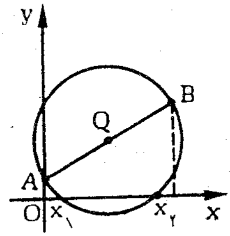
طولهای نقطه‌های برخورد دایره بامحور طول، جوابهای معادلهٔ (۱) است. مرکزاین دایره $Q(-\frac{p}{2},0)$ وشعاع آن‌مساوی $\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$ می‌باشد .

روش چهارم. بجای معادلهٔ (۱)، این‌دستگاه را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+px+sy+q=0 & (4) \\ y=0 \end{cases}$$

که در آن مقدار s را می‌توان به‌دلخـواه انتخاب کرد. معادلهٔ (۴)، معرف دایره‌ای است به مرکز $Q(-\frac{p}{2}, -\frac{s}{2})$. بهتراست مقدارs راچنان اختیار

کنیم که این‌دایره، محورعرض‌را درنقطهٔ ثابتی، مثل $A(0,1)$، قطع کند؛ در اینصورت $s=-(q+1)$ و مرکز دایره $Q(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2})$ می‌شود. مختصات نقطهٔ B، طرف دیگرقطری که از A عبورمی‌کند: $B(-p,q)$ خواهدشد، به‌این‌ترتیب کافی‌است نقطه‌های $A(0,1)$ و $B(-p,q)$ را پیدا کنیم وبه قطر AB دایـره‌ای رسم نمـائیم

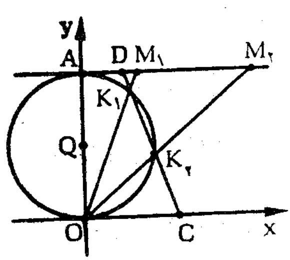


شکل۱۵۱

(شکل۱۵۱). طولهای نقطه‌های برخورد این‌دایره بامحـور طول، جوابهای معادلهٔ (۱) خواهدبود. این‌روش به‌این مناسبت ساده‌تراز روش سوم است، که نیازی به‌ساختن پاره‌خط مساوی $\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$ ندارد. البته در روش اخیـر می‌شد دایره رابه مرکز$Q(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2})$ و به‌شعاع مساوی QA رسم‌کرد $[A(0,1)]$.

روش پنجم. برای حل‌معـادلهٔ درجه دوم(۱)، می‌تـوان از یك دایرهٔ ثابت و مثلا دایرهٔ به مرکز $Q(0\ ,\ 1)$ و شعـاع واحد، استفاده‌کرد:

$$x^2+(y-1)^2=1$$



شکل ۱۵۲

برای این‌منظور، دونقطهٔ $C(-\frac{4}{p}\ ,\ 0)$ و $D(-\frac{q}{p}\ ,\ 2)$ رادوی محور طول وخط $y=2$ مشخص‌کنیم (شکل ۱۵۲) وازنقطه‌های K_1 و K_2 (اگروجود داشته باشند)، محل‌برخورد CD بادایرهٔ

نامبرده، خطهای $OK_۱$ و $OK_۲$ را رسم می‌کنیم تاخط $y=۲$ رادرنقطه‌های $M_۱$و$M_۲$ قطع کنند. طولهای نقطه‌های $M_۱$و$M_۲$، جوابهای معادلهٔ (۱) هستند. استدلال را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

II. حل نموداری معادلهٔ درجه‌سوم

$$x^۳+px+q=۰ \quad (۵)$$

میدانیم که هرمعادلهٔ درجه‌سوم را می‌توان بسادگی بـه صورت معادلهٔ (۵) در آورد. p و q مقادیری ثابت و $q\neq ۰$ فرض شده است.

روش اول. منحنی تابع $y=x^۳+px+q$ را رسم می‌کنیم، طولهای نقطه‌های برخورداین منحنی بامحور Ox ، جوابهای معـادلهٔ (۵) هستند. البته روشن است که برای رسم این منحنی، باید مقداری وقت صرف کرد.

روش دوم. برای حل معادلهٔ (۵)، دستگاه زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y=x^۳ \\ y+px+q=۰ \end{cases}$$

طولهای نقطه‌های تلاقی سهمی درجه‌سوم $y=x^۳$ و خط $y+px+q=۰$، ریشه‌های معادلهٔ (۵) خواهد بود.

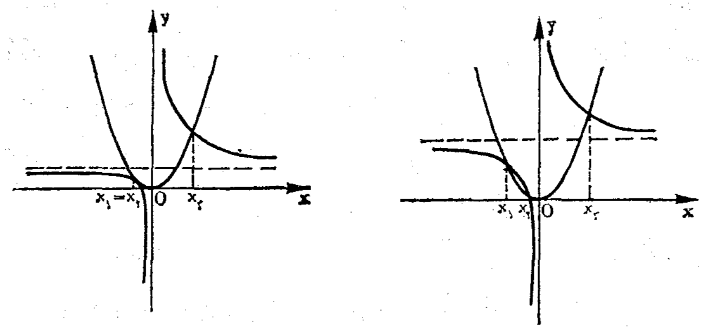
حسن این روش دراینجاست که تابع $y=x^۳$ برای حل هرمعادلهٔ درجه سومی ثابت است وتنهاخط $y+px+q=۰$ تغییرمی‌کند.

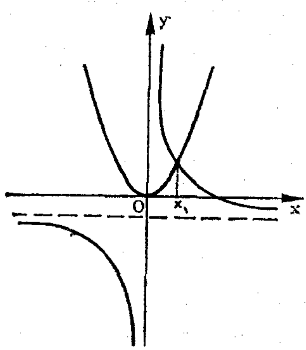
روش سوم. بجای منحنی درجه‌سوم $y=x^۳$، می‌توان ازسهمی $y=x^۲$ استفاده کرد .برای این منظور، از دستگاه زیر، برای حل معادلهٔ (۵) استفاده می‌کنیم :

$$\begin{cases} y=x^۲ \\ xy+px+q=۰ \end{cases}$$

معادلهٔ دوم این دستگاه، یك هذلولی است به معادلهٔ:

$$x(y+p)=-q$$





شکل ۱۵۳

بامجانبهای $x=0$ و $y=-p$ و مرکز $\omega(0,-p)$. سهمی وهذلولی نامبرده . ممکن‌دریك‌نقطه ویا سه نقطه یکدیگر را قطـع کنند (بسته به اینکه معادلهٔ (۵) یك‌یا سه‌ریشهٔ حقیقی‌داشته باشد). در حـالت خاص : ممکن است هذلولی وسهمی دریك‌نقطه برهم‌مماس باشند، که دراینصورت، معادلهٔ (۵) یك ریشهٔ مضاعف ویك‌ریشهٔ ساده دارد (شکل۱۵۳) .

روش چهارم. می‌توان دستگاهی که بجای معادلهٔ (۵) انتخاب‌می‌کنیم، طوری گرفت‌که مجانبهای هذلولی، محورهای مختصات باشد:

$$\begin{cases} y=x^2+p \\ xy+q=0 \end{cases}$$

درحالت‌کلی معادلهٔ درجه‌سوم، یعنی‌وقتی که به‌صورت:

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad (6)$$

باشد، می‌توان، بدون تغییرمعادله، ازدستگاه زیراستفاده کرد:

$$\begin{cases} y=x^{2} \\ xy+ay+bx+c=0 \end{cases}$$

معادلهٔ دوم این‌دستگاه باشرط $ab-c\neq 0$، هذلولی‌است به‌اینصورت:

$$(x+a)(y+b)=ab-c$$

که مرکز آن $\omega(-a,-b)$ ومجانبهای‌آن $x=-a$ و $y=-b$ است.

III. حل نموداری معادلهٔ درجه‌چهارم:

$$x^{4}+ax^{2}+bx+c=0 \qquad (7)$$

(هرمعادلهٔ درجه چهارم رامی‌توان به‌معادلهٔ درجه چهارمی تبدیل کردکه شامل جمله درجـه سوم نباشد ــ به تـوضیح ۱ در حل مسألهٔ ۲۶۹، صفحـهٔ ۳۲۸ مراجعه‌کنید).

برای حل‌معادلهٔ (۷) ازدستگاه زیراستفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} y=x^{2} \\ y^{2}+ay+bx+c=0 \end{cases}$$

معادله‌دوم این‌دستگاه یك‌سهمی‌است‌که محوری موازی‌محور طول‌دارد.طولهای نقطه‌های برخورد این دوسهمی، ریشه‌های معادلهٔ(۷) خواهندبود.

می‌توان سهمی‌دوم رابه‌این ترتیب به‌دایره تبدیل‌کرد: به‌سمت چپ این معادله، x^{2} اضافه می‌کنیم وسپسyرا (که مساوی x^{2}است) از آن‌کم می‌کنیم.

$$x^{2}+y^{2}+(a-1)y+bx+c=0 \quad ,$$

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^{2}+\left(y+\frac{a-1}{2}\right)^{2}=\left(\frac{b}{2}\right)^{2}+\left(\frac{a-1}{2}\right)^{2}-c \quad (8)$$

در حالتی‌که $\left(\frac{b}{2}\right)^{2}+\left(\frac{a-1}{2}\right)^{2}-c>0$ باشد، معادلهٔ (۸) نماینده‌دایره‌ای

است به مرکـز $Q\left(-\frac{b}{2}\, , \frac{1-a}{2}\right)$ وشعاع $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^{2}+\left(\frac{a-1}{2}\right)^{2}-c}$

طولهای نقطه‌های برخورد سهمی $y=x^2$ با این دایره، ریشه‌های معادله (۷) هستند.

در حالت $(\frac{b}{2})^2+(\frac{a-1}{2})^2-c=0$، معادلهٔ (۸) به نقطهٔ $Q(-\frac{b}{2}, \frac{1-a}{2})$ تبدیل می‌شود. اگرسهمی $y=x^2$ از این نقطه عبور کند، بدست می‌آید $(\frac{b}{2})^2=\frac{1-a}{2}$، که ازآنجا بدست می‌آید:

$$a=1-\frac{b^2}{2}, c=\frac{b^2}{4}+\frac{b^4}{16}$$

ومعادلهٔ درجه چهارم (۷) به‌اینصورت درمی‌آید:

$$x^4+(1-\frac{b^2}{2})x^2+bx+\frac{b^2}{4}+\frac{b^4}{16}=0$$

و $x=-\frac{b}{2}$، ریشهٔ مضاعف این معادله است.

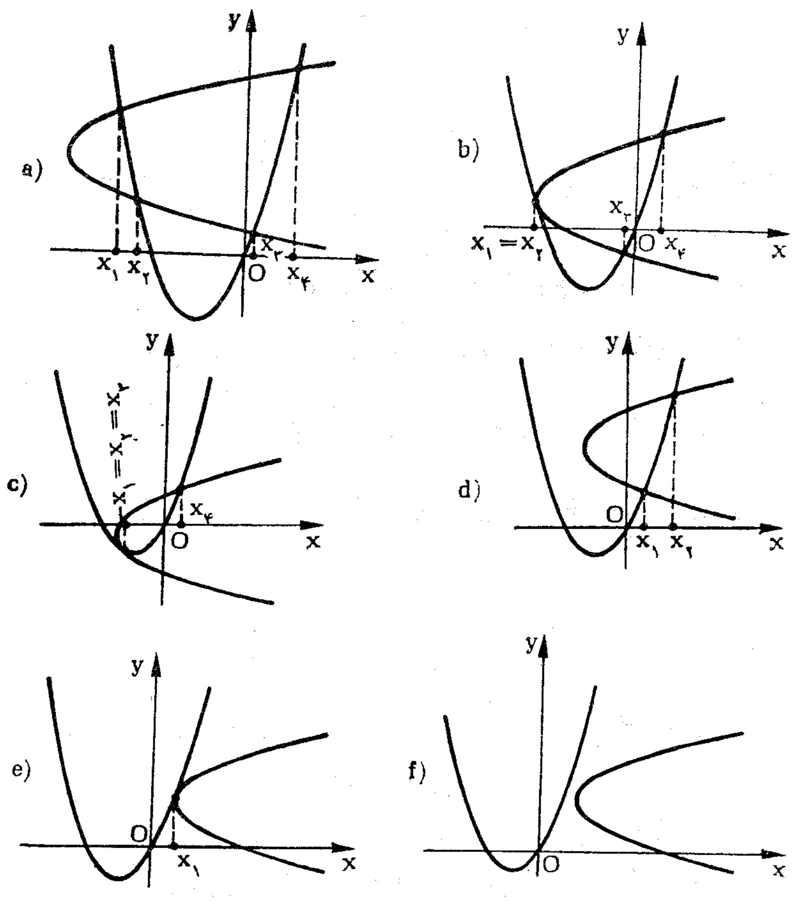
درحالت $(\frac{b}{2})^2+(\frac{a-1}{2})^2-c<0$ دایرهٔ (۸) یك دایرهٔ موهومی است وبنابراین معادلهٔ (۷) هم‌ریشهٔ حقیقی‌ندارد.

برای معادلهٔ درجه‌چهارم کلی، یعنی‌معادلهٔ به‌صورت:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad (9)$$

می‌توان با تبدیل $\alpha y=x^2+\frac{a}{2}x$ $(\alpha\neq 0)$، عمل‌نمود. دراینصورت، ریشه‌های معادلهٔ (۹)، طولهای نقطه‌های تلاقی دوسهمی زیرخواهند بود.

$$\begin{cases} y=\frac{1}{\alpha}x^2+\frac{a}{2\alpha}x \\ x=\dfrac{\alpha^2}{\frac{ab}{2}-\frac{a^2}{8}-c}y^2+\dfrac{a(b-\frac{a^2}{4})}{\frac{ab}{2}-\frac{a^2}{8}-c}y+d \end{cases}$$



شکل ۱۵۴

α رامی‌توان طوری انتخاب کرد، که دو سهمی (که‌یکی محوری موازی محور عرض ودیگری محوری موازی محورطول دارد)، مساوی باشند، در اینصورت باید داشته باشیم :

$$\alpha^3=\frac{ab}{2}-\frac{a^2}{8}-c$$

حالتهای مختلف وضع‌این دوسهمی‌را، می‌توان درشکل ۱۵۴ دبد.

درحالت $\alpha=0$ ، سهمی $\alpha y=x^2+\frac{a}{2}x$ به‌دوخط‌موازی محورعرض تبدیل می‌شود ومابررسی‌آنرا به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مقادیر حداکثر وحداقل

۲۷۳. بااستفاده از نامساویهای $|sin\alpha|\leqslant 1$ و $a^2+b^2\geqslant 2ab$، بدست می‌آید:

$$f(x)=(sin^2x+cos^2x)^2-2\,sin^2x\,cos^2x+(1+tg^2x)^2+$$
$$(1+cotg^2x)^2=1-\frac{1}{2}sin^2 2x+2+2(tg^2x+cotg^2x)+(tg^4x+$$
$$+cotg^4x)\geqslant 3-\frac{1}{2}+4+2=\frac{17}{2}\Longrightarrow f(x)\geqslant\frac{17}{2}$$

به‌این ترتیب‌تابع $f(x)$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{4}$، برابر با حداقل مقدار خود، یعنی $\frac{17}{2}$ می‌شود.

۲۷۴. اگرمرکز بیضی‌را منطبق برمبداء مختصات وقطر بزرگترآنرا منطبق برمحور xx' فرض‌کنیم، معادله‌اش به‌صورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$خواهدبود، که درآن aوb نیم‌قطرهای بزرگتر وکوچکتر بیضی‌هستند.

مستطیلی‌که در بیضی محاط شود، محورهائی منطبق بر محورهای بیضی خواهد داشت وبنابراین اگر $M(x,y)$ را رأسی از مستطیل‌که در ربع اول است درنظر بگیریم، $x\cdot y$ برابر با ربع مساحت مستطیل است. به این ترتیب ماکزیمم مساحت مستطیل همراه باماکزیمم $x\cdot y$ و یا ماکزیمم عبارت: $\frac{x^2y^2}{a^2b^2}=\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}$ است، ولی‌چون مجموع $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ مقداری ثابت و طبق فرض مساوی واحداست، ماکزیمم حاصلضرب آنها وقتی بدست می‌آید که $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$ باشد وازآنجا بدست‌می‌آید:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\ ;\ \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

که درنتیجه مقادیر a و b بدست می‌آید: $x=\frac{a}{\sqrt{۲}}$ و $y=\frac{b}{\sqrt{۲}}$ و مساحت مستطیل مطلوب: $S=۲ab$ می‌شود.

۲۷۵. اگر شبیه مسألهٔ قبل استدلال کنیم، ابعاد مکعب مستطیل به حجم ماکزیمم چنین می‌شود:

$$x=\frac{a}{\sqrt{۳}}\ ;\ y=\frac{b}{\sqrt{۳}}\ ;\ z=\frac{c}{\sqrt{۳}}$$

وحجم ماکزیمم: $V=\frac{۸abc}{۳\sqrt{۳}}$ خواهد شد.

۲۷۶. تابع مفروض را به‌این ترتیب تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{۵۰}f(x)=\sqrt[۳]{\frac{۵x^۲+۵}{۳x^۲+۴}\cdot\frac{۵x^۲+۵}{۳x^۲+۴}\cdot\frac{۲x^۲+۶}{۳x^۲+۴}}$$

باتوجه به اینکه هریك ازعاملهای زیر رادیکال مقادیری مثبت هستند، اگراز نامساوی واسطه‌ها استفاده کنیم ($\sqrt[۳]{a\cdot b\cdot c}\leqslant\frac{a+b+c}{۳}$) بدست می‌آید:

$$\sqrt[۳]{۵۰}f(x)\leqslant\frac{۱۲x^۲+۱۶}{۳(۳x^۲+۴)}=\frac{۴}{۳}$$

علامت تساوی‌وقتی‌صحیح است ، که داشته‌باشیم:

$$۵x^۲+۵=۲x^۲+۶\Longrightarrow x^۲=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین به ازای $x^۲=\frac{۱}{۳}$ حداکثر $f(x)$ برابربا $\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{۵۰}}$ بدست می‌آید.

۲۷۷. ابتدا به‌اثبات نامساوی زیرمی‌پردازیم:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}\geqslant\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2} \qquad (1)$$

چون هردوطرف نامساوی‌مثبت است، می‌توان دوطرف آنرامجذورکرد، که پس ازساده‌کردن، به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}\geqslant aa'+bb'$$

اگر $aa'+bb'<0$ باشد، نامساوی واضح است ودرحالتی که داشته باشیم: $aa'+bb'>0$ ، می‌توان دوباره دوطرف آنرا مجذور کرد که پس ازساده کردن به‌نامساوی واضح زیرتبدیل می‌شود:

$$(ab'-ba')^2\geqslant 0$$

تذکر. می‌توان باروش استقراء ریاضی، نامساوی (۱) را درحالت‌کلی زیر ثابت‌کرد:

$$\sqrt{a^2+b^2+\cdots+l^2}+\sqrt{a'^2+b'^2+\cdots+l'^2}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2+\cdots+(l+l)^2}$$

حالا برای حداقل تابع مفروض با استفاده ازنامساوی (۱) می‌نویسیم:

$$y=\sqrt{x^2+(\sqrt{a})^2}+\sqrt{(c-x)^2+(\sqrt{b})^2}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{(x+c-x)^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

وبه این‌ترتیب:

$$y\geqslant\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

یعنی‌داریم:

$$y_{Min}=\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

۲۷۸. a) با توجه به‌نامساوی:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}\geqslant\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2}$$

می‌توان نوشت:

$$y=\sqrt{x^2-2mx+n^2}+\sqrt{x^2-2px+q^2}=$$

$$=\sqrt{(x-m)^2+(n^2-m^2)}+\sqrt{(p-x)^2+(q^2-p^2)}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{(x-m+p-x)^2+\left(\sqrt{n^2-m^2}+\sqrt{q^2-p^2}\right)^2}$$

وبنابراین:

$$y_{Min}=\sqrt{(p-m)^2+\left(\sqrt{n^2-m^2}+\sqrt{q^2-p^2}\right)^2}$$

واین مقدارمی‌نیمم به‌ازای مقداری از x است که ازمعادلهٔ زیربدست می‌آید:

$$\frac{x-m}{p-x}=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

b) برای پیدا کردن ماکزیمم تابع‌دوم، ازنامساوی زیراستفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a'^2+b'^2}\leqslant\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}$$

که دراینصورت خواهیم داشت:

$$y=\sqrt{x^2+2mx+n^2}-\sqrt{x^2-2px+q^2}=$$

$$=\sqrt{(x+m)^2+(n^2-m^2)}-\sqrt{(x-p)^2+(q^2-p^2)}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{(x+m+p-x)^2+\left(\sqrt{n^2-m^2}-\sqrt{q^2-p^2}\right)^2}$$

$$y_{Max}=\sqrt{(m+p)^2+\left(\sqrt{n^2-m^2}-\sqrt{q^2-p^2}\right)^2}$$

واین مقدارماکزیمم به‌ازای‌مقداری از x است که ازمعادلهٔ زیربدست می‌آید:

$$\frac{x+m}{x-p}=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

درهردوحالت تنها با فرض $|m|<|n|$ و $|p|<|q|$ نیز می‌توان به‌نتیجه رسید.

۲۷۹. می‌توان نوشت:

$$y^2=[\sqrt{(x+2)(6-x)}-\sqrt{(x+1)(3-x)}]^2=$$
$$=[\sqrt{(x+1)(6-x)}-\sqrt{(x+2)(3-x)}]^2+3\geqslant 3$$

وبنابراین $|y|\geqslant\sqrt{3}$.

به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که به‌ازای مقادیر قابل‌قبول x (که به ازای آنها مقادیر رادیکالها حقیقی باشند)، داریم:

$$-x^2+4x+12>-x^2+2x+3$$

وبنابراین $y>0$ و $|y|=y$ و $y\geqslant\sqrt{3}$ می‌شود.

علامت تساوی تنها برای حالت:

$$\sqrt{(x+1)(6-x)}-\sqrt{(x+2)(3-x)}=0$$

وجود دارد که جواب $x=0$ را می‌دهد.

جواب: به‌ازای $x=0$، $y=\sqrt{3}$ حداقل مقدار تابع است.

۲۸۰. راه حل اول. داریم:

$$A=(1+\frac{1}{\sin\alpha})(1+\frac{1}{\cos\alpha})=1+(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha})+\frac{2}{\sin 2\alpha}\geqslant$$
$$\geqslant 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}\Longrightarrow A_{Min}=3+2\sqrt{2}$$

راه حل دوم. تبدیلهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$A=\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=1+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$
$$=1+\frac{2}{\sin 2\alpha}(1+\sqrt{1+\sin 2\alpha})=1+\frac{2}{\sqrt{1+\sin 2\alpha}-1}\geqslant$$
$$\geqslant 1+\frac{2}{\sqrt{2}-1}=1+2(\sqrt{2}+1)=3+2\sqrt{2}$$

حالت تساوی به‌ازای $\alpha=45^\circ$ بدست می‌آید.

۲۸۱. داریم:
$$y=\frac{3}{ax^2+\frac{c}{x^2}+b}$$

و چون حاصلضرب $ax^2\times\frac{c}{x^2}$ مقداریست ثابت ، مجموع $ax^2+\frac{c}{x^2}$

وقتی می‌نیمم است که $ax^2=\frac{c}{x^2}$ باشد، از آنجا $x=\pm\sqrt[4]{\frac{c}{a}}$ بدست‌می‌آید

وضمناً:

$$y_{Max}=\frac{3}{b+2\sqrt{ac}}$$

۲۸۲. ثابت می‌کنیم که وقتی $x>0$ باشد، $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ است، درحقیقت

داریم:

$$x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x^2+1\geqslant 2x \Longrightarrow x+\frac{1}{x}\geqslant 2$$

حالا می‌نویسیم:

$$ab+cd=ab+\frac{1}{ab}\geqslant 2 \qquad (1)$$

$$ac+bd=ac+\frac{1}{ac}\geqslant 2 \qquad (2)$$

$$ad+bc=ad+\frac{1}{ad}\geqslant 2 \qquad (3)$$

علاوه بر آن داریم:

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab\geqslant 2ab$$
$$c^2+d^2=(c-d)^2+2cd\geqslant 2cd$$

ازجمع دونامساوی اخیر بدست می‌آید:

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 2ab+2cd=2(ab+\frac{1}{ab}) \geqslant 4 \quad (4)$$

با جمع نامساویهای (۱)، (۲)، (۳) و (۴) بدست می‌آید:

$$\Sigma ab+\Sigma a^2 \geqslant 10$$

بنابراین، حداقل‌عبارت مساوی ۱۰ می‌باشد که به‌ازای $a=b=c=d=1$ بدست می‌آید

۲۸۳. چون $\cos^2 x \leqslant 1$ است، داریم:

$$\cos^2 x-4\cos x+5 \leqslant 6-4\cos x$$

وچون $3-2\cos x>0$ است، بدست می‌آید:

$$\frac{\cos^2 x-4\cos x+5}{3-2\cos x} \leqslant 2$$

و واضح است کـه حالت تساوی برای $\cos x=\pm 1$ بدست می‌آید، بنابراین حداکثر تابع مساوی ۲ می‌باشد.

حالا تابع را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\cos^2 x-4\cos x+5}{3-2\cos x}=\frac{(3-2\cos x)^2+5+(6-4\cos x)}{4(3-2\cos x)}=$$

$$=\frac{3-2\cos x}{4}+\frac{5}{4(3-2\cos x)}+\frac{1}{2} \geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{3-2\cos x}{4}\cdot\frac{5}{4(3-2\cos x)}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$$

حالت تساوی تنها وقتی وجود داردکه داشته باشیم:

$$\frac{3-2\cos x}{4}=\frac{5}{4(3-2\cos x)}$$

که ازآن بدست می‌آید: $\cos x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. حداکثرمقدارتابع مساوی

$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ می‌شود.

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\leq y<2$$

۲۸۴. داریم:

$$y=(\sin x+a)(\cos x+a)=\sin x\cos x+a(\sin x+\cos x)+a^2=$$
$$=\frac{1}{2}[2\sin x\cos x+1+2a(\sin x+\cos x)+2a^2-1]=$$
$$=\frac{1}{2}[2\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x+2a(\sin x+\cos x)+a^2+$$
$$+(a^2-1)]=\frac{1}{2}[(\sin x+\cos x+a)^2+(a^2-1)];\ (1)$$

وچون داریم: $-\sqrt{2}\leq\sin x+\cos x\leq\sqrt{2}$

طبق رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$y_{Max}=\frac{1}{2}[(a+\sqrt{2})^2+a^2-1]=(a+\frac{\sqrt{2}}{2})^2$$

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

وقتی $0\leq a\leq\sqrt{2}$ باشد، حداقل مقدار y به‌ازای $\sin x+\cos x+a=0$ بدست می‌آید:

$$y_{Min}=\frac{1}{2}(a^2-1)$$

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm(\pi-\arccos\frac{a}{\sqrt{2}}) \qquad (3)$$

وقتی $a>\sqrt{2}$ و $\sin\alpha+\cos x=-\sqrt{2}$ باشد:

$$y_{Min}=\frac{1}{2}[(a-\sqrt{2})^2+a^2-1]=(a-\frac{\sqrt{2}}{2})^2\quad ;$$

$$x=(8k+5)\frac{\pi}{4} \qquad (4)$$

طبق عبارتهای ۲ تا ۴ می‌توان نتیجه گرفت که حداکثر وحداقل تابع y، با زیاد

شدن a زیاد می‌شود.

به ازای $a=0$، طبق رابطهٔ (۳)، می‌نیمم مطلق تابع مفروض، مساوی $y_{Min}=-\frac{1}{2}$ می‌شود.

۲۸۵. تابع مفروض را به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$y=a^2\frac{1-x}{x}+b^2\frac{x}{1-x}+a^2+b^2$$

حاصلضرب مقادیر مثبت $a^2\frac{1-x}{x}$ و $b^2\frac{x}{1-x}$ (باتوجه‌به‌شرط $0<x<1$) مقداریست ثابت، بنابراین می‌نیمم مجموع آنها وقتی بدست می‌آید، که داشته باشیم:

$$a^2\frac{1-x}{x}=b^2\frac{x}{1-x}\Longrightarrow x=\frac{a}{a+b}$$

جواب: $y_{Min}=(a+b)^2$ به‌ازای $x=\frac{a}{a+b}$.

۲۸۶. طبق فرض مسأله، باید حداقل نسبت زیررا بدست‌آوریم:

$$\lambda=\frac{100x+10y+z}{x+y+z}$$

که درآن xوyوz عددهایی صحیح و $1\leqslant x\leqslant 9$، $0\leqslant y\leqslant 9$ و $0\leqslant z\leqslant 9$ می‌باشد. ازآنجا:

$$\lambda=1+9\times\frac{11x+y}{x+y+z}$$

واضح است که باید $z=9$ باشد وسپس:

$$\lambda=1+9\times\frac{11x+y}{9+x+y}=1+9\left(1+\frac{10x-9}{9+x+y}\right)$$

ازاینجا روشن است که $y=9$ می‌شود وداریم:

$$\lambda=10+9\times\frac{10x-9}{x+18}=100-\frac{1701}{x+18}$$

وحداقل λ وقتی است که $x=1$ باشد.

جواب: $\lambda_{Min}=10\frac{9}{19}$ برای عدد ۱۹۹.

۲۸۷. عبارت مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$A=(x+y+1)^2+(y+1)^2+1$$

وواضح است که حداقل عبارت وقتی بدست می‌آید که داشته باشیم:

$$x+y+1=0 \quad ; \quad y+1=0$$

وازآنجا $x=0$ و $y=-1$ و $A=1$ می‌شود.

۲۸۸. تابع z را چنین می‌نویسیم:

$$z=\frac{2(a^2-xy)-(x-y)^2}{a^2-xy}=2-\frac{(x-y)^2}{a^2-xy}$$

و z وقتی می‌نیمم است که $\frac{(x-y)^2}{a^2-xy}$ ماکزیمم باشد که با توجه به‌شرایط x و y درحالت $x=0$، $y=a$ یا $y=0$، $x=a$ بدست می‌آید ودراینصورت:

$$z_{Min}=1$$

۲۸۹. می‌توان نوشت:

$$2^n+3^n=2^n+(-1)^n(2-5)^n=2^n+(-1)^n\times2^n-$$
$$-(-1)^n\times2^{n-1}\times5n+(-1)^n\times2^{n-2}\times$$
$$\times5^2\frac{n(n-1)}{2}-(-1)^n\times2^{n-3}\times5^3\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+$$
$$+625N$$

n باید عددی فرد باشد تا 2^n+3^n بر ۵ قابل باشد:

$$2^n+3^n=5n[2^{n-1}-(n-1)2^{n-2}\times5+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{3}2^{n-3}\times5^2]+625N \quad (n>4)$$

مقدارداخل کروشه بر۵ قابل قسمت نیست، بنابراین برای اینکه $۳^n+۲^n$ بر ۶۲۵ قابل‌قسمت باشد بایدn بر۱۲۵ قابل‌قسمت باشد، یعنی $n=۱۲۵$.

به‌ازای $n=۱$و۲و۳ هم $۳^n+۲^n$ بر۶۲۵ قابل قسمت نیست.

۲۹۰. z را برحسب x وy بدست می‌آوریم:

$$z=-\frac{ax+by-d}{c} \qquad (۱)$$

دراینصورت خواهیم داشت:

$$x^۲+y^۲+z^۲=$$
$$=\frac{(a^۲+c^۲)x^۲+۲abxy+(b^۲+c^۲)y^۲-۲d(ax+by)+d^۲}{c^۲}$$

اگرصورت کسر را N بنامیم، می‌توان نوشت:

$$N=\frac{۱}{a^۲+c^۲}[(a^۲+c^۲)^۲x^۲+۲a(a^۲+c^۲)(by-d)x]+$$
$$+(b^۲+c^۲)y^۲-۲bdy+d^۲=$$
$$=\frac{۱}{a^۲+c^۲}[(a^۲+c^۲)x+a(by-d)]^۲-$$
$$-\frac{a^۲(by-d)^۲}{a^۲+c^۲}+(b^۲+c^۲)y^۲-۲bdy+d^۲=$$
$$=\frac{۱}{a^۲+c^۲}[(a^۲+c^۲)x+a(by-d)]^۲+$$
$$+\frac{c^۲}{a^۲+c^۲}[(a^۲+b^۲+c^۲)y^۲-۲bdy+d^۲]$$

ضمناً داریم:

$$(a^۲+b^۲+c^۲)y^۲-۲bdy+d^۲=$$
$$=(a^۲+b^۲+c^۲)\left(y-\frac{bd}{a^۲+b^۲+c^۲}\right)^۲+\frac{d^۲(a^۲+c^۲)}{a^۲+b^۲+c^۲}$$

وبنابراین خواهیم داشت:

$$x^۲+y^۲+z^۲=\frac{[(a^۲+c^۲)x+a(by-d)]^۲}{c^۲(a^۲+c^۲)}+$$

$$+(a^۲+b^۲+c^۲)\frac{\left(y-\frac{bd}{a^۲+b^۲+c^۲}\right)^۲}{a^۲+c^۲}+\frac{d^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}$$

عبارت مفروض مساوی مجموع سه مقدار مثبت است که فقط دوعبارت اول آن متغیر است وحداقل آن وقتی است که این دوعبارت مساوی صفر شود:

$$\begin{cases} y=\frac{bd}{a^۲+b^۲+c^۲} \\ (a^۲+c^۲)x+a(by-d)=\circ \end{cases}$$

که ازآنجا بدست می‌آید:

$$x=\frac{ad}{a^۲+b^۲+c^۲}\ ;y=\frac{bd}{a^۲+b^۲+c^۲}$$

وبا توجه به‌رابطهٔ (۱):

$$z=\frac{cd}{a^۲+b^۲+c^۲}$$

مقدار می‌نیمم عبارت چنین است:

$$\frac{d^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}$$

۰۲۹۱ ۱) برای محاسبهٔ ماکزیمم ومی‌نیمم $y_۱$، اگر $tg\frac{x}{۲}=t$ فرض کنیم، داریم:

$$\sin x=\frac{۲t}{۱+t^۲}\ ;\cos x=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}$$

وکسرمفروض به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$y_۱=\frac{۲at+b(۱-t^۲)+c(۱+t^۲)}{۲a't+b'(۱-t^۲)+c'(۱+t^۲)}=$$

$$=\frac{(c-b)t^۲+۲at+(c+b)}{(c'-b')t^۲+۲a't+(c'+b')}\qquad(۱)$$

اگرمعادلهٔ (۱) را نسبت به t منظم کنیم، بدست می‌آید:

$$[c-b-y_1(c'-b')]t^2+2(a-a'y_1)t+$$
$$+c+b-y_1(c'+b')=0$$

برای اینکه این معادله ریشه‌های حقیقی نسبت به مجهول t داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$(a-a'y_1)^2-[c-b-y_1(c'-b')]\times$$
$$\times[c+b-y_1(c'+b')]\geqslant 0$$

ویا:

$$(a'^2+b'^2-c'^2)y_1^2-2(aa'+bb'-cc')y_1+$$
$$+a^2+b^2-c^2\geqslant 0 \qquad (2)$$

برای تعیین علامت این سه‌جمله‌ای، سه‌حالت‌درنظرمی‌گیریم:

حالت اول: سه‌جمله‌ای(۲) دارای دوریشهٔ حقیقی y'_1 و y''_1 است. برای این منظورباید داشته باشیم:

$$(ac'-ca')^2+(bc'-cb')^2-(ab'-ba')^2\geqslant 0$$

اگر $a'^2+b'^2-c'^2>0$ باشد، باید $y_1<y'_1$ یا $y_1>y''_1$ باشد. یعنی نامساوی (۲) به‌ازای همهٔ مقادیر y_1 بجزمقادیری که بین y'_1 و y''_1 واقع باشند، صادق است. دراینصورت ریشهٔ کوچکترسه جمله‌ای (۲) متناظر با یك ماکزیمم و ریشهٔ بزرگتر آن متناظر با یك می‌نیمم است (ماکزیمم و می‌نیمم نسبی).

اگر $a'^2+b'^2-c'^2<0$ باشد، نامساوی (۲) به‌ازای مقادیر بین y'_1 و y''_1 صادق است وریشهٔ کوچکترمتناظر با می‌نیمم وریشهٔ بزرگتر متناظر با ماکزیمم است.

حالت دوم: سه‌جمله‌ای (۲) دارای دوریشه برابراست:

$$(ac'-ca')^2+(bc'-cb')^2-(ab'-ba')^2=0$$

دراینحالت سه جمله‌ای (۲) هم علامت با اولین جملهٔ خود است (بجز وقتی که

y_1 مساوی ریشهٔ مضاعف سه‌جمله‌ای باشد).

اگر $a'^2+b'^2-c'^2>0$ باشد ، سه جمله‌ای (۲) همیشه مثبت یا صفر است و این به معنای آنست که y_1 می‌تواند مساوی هر مقدار حقیقی دلخواهی باشد.

اگر $a'^2+b'^2-c'^2<0$ باشد، سه جمله‌ای (۲) هرگزمثبت نیست ونامساوی بجزبرای جواب سه‌جمله‌ای صادق نیست که دراینصورت هم کسر y_1 به‌یك مقدارثابت تبدیل می‌شود.

حالت سوم: سه‌جمله‌ای (۲) دارای ریشه‌های موهومی است:

$$(ac'-ca')^2+(bc'-cb')^2-(ab'-ba')^2<0$$

در اینحالت ضریب y_1^2 نمی‌تواند غیر مثبت باشد و نامساوی (۲) همیشه صادق‌است:

باین‌ترتیب بجز درحالت:

$$(ac'-ca')^2+(bc'-cb')^2-(ab'-ba')^2>0$$

y_1 دارای ماکزیمم ومی‌نیممی نیست که دراینصورت y'_1 ماکزیمم و y''_1می‌نیمم است، بشرطی‌که داشته باشیم:

$$a'^2+b'^2-c'^2>0$$

و y'_1 می‌نیمم و y''_1 ماکزیمم است، اگرداشته باشیم:

$$a'^2+b'^2-c'^2<0$$

برای تکمیل این بحث باید حالت $a'^2+b'^2-c'^2=0$ را هم مورد توجه قراردهیم. دراینحالت شرط به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$-2(aa'+bb'-cc')y_1+a^2+b^2-c^2>0 \quad ;$$

$$3(aa'+bb'-cc')\left[y_1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2(aa'+bb'-cc')}\right]<0$$

اگر $aa'+bb'-cc'>0$ باشد داریم:

$$y_1<\frac{a^2+b^2+c^2}{2(aa'+bb'+cc')}$$

وماکزیمم y_1 مقدار کسر سمت راست نامساوی است.

واگر $aa'+bb'-cc'<0$ باشد، خواهیم داشت:

$$y_1>\frac{a^2+b^2+c^2}{2(aa'+bb'+cc')}$$

و مقدار می‌نیمم y_1، کسر سمت راست نامساوی است.

۲) با توجه به‌رابطهٔ $tg3x=\frac{3tgx-tg^3x}{1-3tg^2x}$ داریم:

$$y_2=\frac{3-tg^2x}{1-3tg^2x}-tg^2x=\frac{3-2tg^2x+3tg^4x}{1-3tg^2x}$$

با حذف مخرج بدست می‌آید:

$$3tg^4x-(2-3y_2)tg^2x+(3-y_2)=0 \qquad (1)$$

برای tg^2x وقتی دوجواب حقیقی بدست می‌آید که داشته باشیم:

$$y_2<-\frac{4\sqrt{2}}{3} \quad \text{یا} \quad y_2>\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

در حالت $y_2<-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ هر دو جواب tg^2x مثبت است وبنابراین برای tgx جوابهای حقیقی بدست می‌آید.

در حالت $y_2>\frac{4\sqrt{2}}{3}$، مجموع ریشه‌ها منفی است. برای اینکه یکی ازریشه‌ها مثبت باشد باید حاصلضرب ریشه‌ها منفی، یعنی $y_2>3$ باشد.

معادلهٔ (۱) نمی‌تواند دوریشهٔحقیقی داشته باشد، مگر اینکه داشته‌باشیم:

$$y_2<-\frac{4\sqrt{2}}{3} \quad \text{یا} \quad y_2>3$$

دراینصورت ماکزیممی مساوی $-\frac{4\sqrt{2}}{2}$ و می‌نیممی مساوی ۳خواهد داشت (ماکزیمم ومی‌نیمم نسبی) واین می‌نیمم به‌ازای $x=0$ بدست می‌آید.

۲۹۲. جوابهای دستگاه چنین است:

$$\begin{cases} x=a(\cos\alpha\cos3\alpha+3\sin\alpha\sin3\alpha) \\ y=a(\sin\alpha\cos3\alpha-3\cos\alpha\sin3\alpha) \end{cases}$$

وازآنجا پس از تبدیلهای لازم بدست می‌آید:

$$x^2+y^2=a^2(1+8\sin^2 3\alpha)$$

این عبارت به‌ازای $\sin^2 3\alpha=1$ حداکثرمقدارخود را داردکه در اینصورت:

$$\alpha=(2k+1)\frac{\pi}{6}$$

وبه ازای $\sin^2 3\alpha=0$ حداقل مقدارخود، یعنی وقتی‌که داشته باشیم:

$$\alpha=k\frac{\pi}{6}$$

۲۹۳. اگرارتفاع‌مخروط‌محیطی‌را x وشعاع کرهٔ مفروض را R بگیریم؛

شعاع قاعدهٔ مخروط مساوی $R\sqrt{\frac{x}{x-2R}}$ می‌شود وبسادگی‌حجم‌آن مساوی:

$\frac{x^2}{x-2R}\cdot\frac{\pi R^2}{3}$ خواهد شد. بنابراین می‌نیمم حجم‌همراه با می‌نیمم‌عبارت

$\frac{x^2}{x-2R}$ است وداریم:

$$\frac{x^2}{x-2R}=\frac{x^2-4R^2+4R^2}{x-2R}=x+2R+\frac{4R^2}{x-2R}=$$

$$=4R+(x-2R)+\frac{4R^2}{x-2R}$$

حاصل‌ضرب دومتغیر مثبت $(x-2R)$ و $\frac{4R^2}{x-2R}$ مقداری است ثابت و

بنابراین مجموع آنها وقتی می‌نیمم است‌که با هم برابرباشند:

$$x-2R=\frac{4R^2}{x-2R}\Longrightarrow x=4R$$

یعنی حجم می‌نیمم مخروط وقتی بدست می‌آید که ارتفاع آن مساوی $4R$ و شعاع قاعدهٔ آن مساوی $R\sqrt{2}$ باشد.

۲۹۴. ارتفاع مخروط محاطی را x بگیرید، دراینصورت شعاع قاعدهٔ آن $\sqrt{x(2R-x)}$ وحجم آن مساوی $\frac{\pi}{3}x^2(R-x)$ خواهد شد. مجموع x و $2R-x$ مقداری است ثابت و بنابراین حاصلضرب $x^2(2R-x)$ وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{2}=\frac{2R-x}{1}\Longrightarrow x=\frac{4}{3}R$$

۲۹۵. اگرمحیط مستطیل را $2p$ و یکی‌ازبعدهای آنرا x فرض کنیم، مساحت شکل حاصل، پس‌ازتبدیلهای ساده چنین می‌شود:

$$S=\frac{1}{2(\pi-2)}\left[(x-\frac{p}{2})^2+\frac{p^2(\pi+2)}{4(\pi-2)}\right]$$

و واضح است که می‌نیمم S به ازای $x=\frac{p}{2}$ بدست می‌آید و مساحت می‌نیمم $S_{Min}=\frac{p^2(\pi+2)}{8(\pi-2)^2}$ می‌شود.

۲۹۶. اگرقاعدهٔ بزرگترذوزنقه‌را $2x$ فرض کنیم، طول قاعدهٔ کوچکتر ذوزنقه مساوی $\frac{2R^2}{x}$ می‌شود وبنابراین مساحت ذوزنقه $S=2R(x+\frac{R^2}{x})$ خواهد بود.

حاصلضرب متغیرهای مثبت x و $\frac{R^2}{x}$ مقداری است ثابت وبنابراین‌مجموع آنها وقتی می‌نیمم است‌که با هم برابرباشند:

$$x=\frac{R^2}{x}\Longrightarrow x=R$$

یعنی می‌نیمم مساحت موقعی بدست می‌آیدکه ذوزنقهٔ محیطی‌بەمربع تبدیل‌شود.

۲۹۷. شعاع قاعدهٔ کوچکتر مخروط ناقص را x می‌گیریم، مولد مخروط $\sqrt{2R(R-x)}$ وسطح جانبی مخروط $S=\pi\sqrt{2R}(R+x)(R-x)^{\frac{1}{2}}$ خواهدشد.

مجموع متغیرهای $(R+x)$ و $(R-x)$ مقداری است ثابت وبنابراین حاصلضرب $(R+x)(R-x)^{\frac{1}{2}}$ وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم.

$$\frac{R+x}{1}=\frac{R-x}{\frac{1}{2}}\Longrightarrow x=\frac{R}{3}$$

ومساحت می‌نیمم: $S_{Min}=\frac{8}{9}\pi R^2\sqrt{3}$ می‌شود.

۲۹۸. اگرشعاع قاعدهٔ استوانه را x فرض کنیم، ارتفاع استوانه $h=\frac{V}{\pi x^2}$ خواهد شد وچنانچه شعاع کره، مساوی R باشد، خواهیم داشت:

$$4R^2=\frac{V^2}{\pi^2x^4}+4x^2 \qquad (1)$$

وچون حاصلضرب $(\frac{V^2}{\pi^2x^4})(4x^2)^2$ مقداری است ثابت، مجموع سمت راست تساوی (۱) وقتی می‌نیمم است که داشته باشیم :

$$\frac{V^2}{\pi^2x^4}=2x^2\Longrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi\sqrt{2}}}$$

که دراینصورت شعاع کره چنین می‌شود: $R=\sqrt[2]{\frac{3V\sqrt{3}}{4\pi}}$

۲۹۹. فرض کنیم بعد از t دقیقه فاصلهٔ دوقطار حداقل شود، دراین مدت قطاراول $0{,}8t$ کیلومتروقطاردوم $0{,}6t$ کیلومتر تغییرمحل‌داده است وبنابراین فاصلهٔاولی تامحل تلاقی‌خطهای راه‌آهن $(40-0{,}8t)$ کیلومتروفاصلهٔدومی تا

این نقطه $(50 - 0{,}6t)$ کیلومتراست وبنابراین اگرفاصلهٔ دوقطاررا x فرض کنیم، معادلهٔ زیررا خواهیم داشت:

$$x^2 = (40 - 0{,}8t)^2 + (50 - 0{,}6t)^2$$

ویا:

$$t^2 - 124t + (4100 - x^2) = 0$$

برای اینکه این معادله ، نسبت به t، ریشه‌های حقیقی داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\Delta = 62^2 - 4100 + x^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2 - 64 \geqslant 0$$

وبنابراین، حداقل‌مقدارx وقتی‌است‌که $x = 8$ باشد، که دراینصورت $t = 62$ بدست می‌آید .

جواب: بعداز یکساعت و۲ دقیقه، فاصلهٔ دوقطار، به حداقل خود، یعنی ۸ کیلومتر می‌رسد.

۳۰۰. ارتفاع‌استوانه، باارتفاع‌مکعب مستطیل برابراست. بنابراین حجم ماکزیمم، برای مکعب مستطیل، وقتی‌است‌که، مساحت قاعدهٔ آن ماکزیمم‌باشد.

اگر بعدهای قاعدهٔ مکعب مستطیل‌را x وy بگیریم، $x^2 + y^2$ مقداری است‌ثابت (وبرابر بامجذور قطرقاعدهٔ استوانه). بنابراین حاصلضرب $x \cdot y$ (یا $(x^2y^2$)، وقتی‌ماکزیمم است‌که $x = y$ باشد.

جواب: حداکثرحجم، مربوط به‌مکعب مستطیلی‌است‌که قاعدهٔ آن به‌شکل مربع باشد.

۳۰۱. اگرطول قوس‌قطاع بزرگتررا (که باآن مخروط رامی‌سازیم)، مساوی x وشعاع‌دایره‌را R بگیریم، شعاع‌قاعدهٔ مخروط $r = \frac{x}{2\pi}$ و ارتفاع آن $\sqrt{R^2 - r^2}$ یا $h = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2R^2 - x^2}$ خواهد شد. بنابراین ، اگر حجم مخروط را V فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$V=\frac{۱}{۳}\times\frac{x^{۲}}{۴\pi}\times\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{۴\pi^{۲}R^{۲}-x^{۲}}=$$

$$=\frac{۱}{۲۴\pi^{۲}}(x^{۲})\cdot(۴\pi^{۲}R^{۲}-x^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

وچون مجموع $x^{۲}$ و $۴\pi^{۲}R^{۲}-x^{۲}$، مقداری است ثابت، ماکزیمم V وقتی است که داشته باشیم:

$$\frac{x^{۲}}{۱}=\frac{۴\pi^{۲}R^{۲}-x^{۲}}{\frac{۱}{۲}}\Longrightarrow x=۲\pi R\sqrt{\frac{۲}{۳}}=۲\pi\sqrt{\frac{۲}{۳}}\ \text{(رادیان)}$$

به‌این‌ترتیب، قطاعی که‌ازدایره‌جدا کرده‌ایم، بایدمساوی $۲\pi(۱-\sqrt{\frac{۲}{۳}})$ رادیان باشد (درحدود ۶۶ درجه)، تاحجم مخروطی‌که ازقطاع بزرگتر درست‌می‌شود ماکزیمم بشود.

۳۰۲. جواب:

$$S_{Min}=-\sqrt{p^{۲}+q^{۲}}\ \text{و}\ S_{Max}=\sqrt{p^{۲}+q^{۲}}$$

۳۰۳. چون $\frac{۱+\sin^{۲}x}{\sin^{۲}x}>۰$ و $\frac{۱+\cos^{۲}x}{\cos^{۲}x}>۰$ است، بااستفاده از نامساوی معلوم:

$$\frac{۱}{۲}(a^{n}+b^{n})\geqslant\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{n}$$

بدست می‌آید:

$$f(x)=\left(\frac{۱+\sin^{۲}x}{\sin^{۲}x}\right)^{n}+\left(\frac{۱+\cos^{۲}x}{\cos^{۲}x}\right)^{n}\geqslant ۲\times$$

$$\times\frac{\left(\frac{۱+\sin^{۲}x}{\sin^{۲}x}+\frac{۱+\cos^{۲}x}{\cos^{۲}x}\right)^{n}}{۲^{n}}=$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left(2+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^n=2^{1-n}\left(2+\frac{4}{\sin^2 2x}\right)^n$$

حداقل‌مقدار تابع $f(x)$، به ازای $\sin^2 2x=1$ یا $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}$

بدست می‌آید، یعنی:

$$f_{Min}(x)=2^{1-n}\times 6^n=2\times 3^n$$

۳۰۴. راه حل اول. تابعهای y و $y^2=z$ باهم (یعنی به ازای یك مقدار x)، به‌حداقل یاحداکثرخود می‌رسند. داریم:

$$z'=\frac{1}{(x^2+4)^2}(x^2-2x-4)$$

که به ازای $x_1=1-\sqrt{5}$ و $x_2=1+\sqrt{5}$ مساوی صفر می‌شود. اگر $x<x_1$ یا $x>x_2$ باشد، $z'>0$ می‌شود و بنابراین به‌ازای $x=x_1$، تابع z ماکزیمم و به ازای $x=x_2$، می‌نیمم است (حدود تغییرات x از $\infty-$ تا $\infty+$ است، ووقتی x بسمت یکی‌ازاین دو، میل کند، حدy مساوی ۱ می‌شود وهمانطور که ازمقادیر y به‌ازای‌جوابهای مشتق دیده‌می‌شود، این‌مقدار y، معرف حداقل یاحداکثرتابع نیست) وداریم:

$$y_{Max}=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{و} \quad y_{Min}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

راه حل دوم. مقدار زیررادیکال، به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x، مثبت است و علاوه بر آن $y>0$ است، بنابراین تساوی مفروض، هم‌ارز تساوی زیر است:

$$(x^2+4)y^2=x^2-4x+8$$

ویا:

$$(y^2-1)x^2+4x+(4y^2-8)=0$$

برای حقیقی بودن ریشه‌های این معادله (نسبت به مجهول x)، باید مبین آن

مثبت باشد:

$$-y^4+3y^2-1>0$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$\frac{3-\sqrt{5}}{5}<y^2<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

وباتوجه به‌مثبت بودن مقدار y، خواهیم‌داشت:

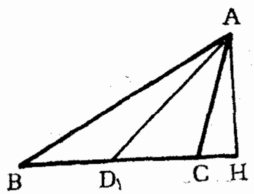
$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}<y<\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2}<y<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

یعنی‌حداقل مقدار تابع مساوی $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ و حداکثر آن مساوی $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است .

۳۰۵. قبلا به‌حل این‌مسأله می‌پردازیم:

روی ضلع BC ، از مثلث ABC، نقطهٔ D را چنان پیدا کنید که پاره خط AD به‌طول حداکثر یا به‌طول حداقل باشد.

درمثلث ABC، فرض می‌کنیم $AB>AC$ باشد. نقطهٔ دلخواه D_1 را روی ضلع BC انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۵۵). چون :



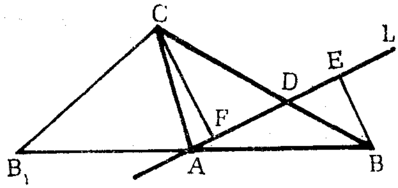
شکل۱۵۵

$$\widehat{AD_1B}>\widehat{C}>\widehat{B}$$

بنابراین $AB>AD_1$. به این ترتیب، پاره‌خط AD، وقتی حداکثر طول‌را خواهد داشت‌که برAB منطبق باشد. درحالتی‌که $AB=AC$ باشد، دوجواب داریم: AB وAC.

اگرهیچکدام اززاویه‌های BوC منفرجه‌نباشند، روشن‌است‌که پاره‌خط AD، وقتی‌به‌طول می‌نیمم است‌که AD برBC عمودباشد. اما اگر یکی ازدو زاویهٔ BوC، ومثلاC، منفرجه باشد، پای‌ارتفاعAH درخارج ضلع BCقرار می‌گیرد و چون مایل AC از هر مایل دیگری، مثل AD_1 کوتاهتر است، بنابراین AD وقتی‌به‌طول می‌نیمم است‌که بر AC منطبق‌باشد.

حالا به‌حل مسأله می‌پردازیم: ضلع AB از مثلث ABC را ، از طرف A به اندازهٔ پاره‌خط AB_1 مساوی AB امتداد می‌دهیم (شکل۱۵۶). هر خطی که ازرأس A عبورکند



شکل۱۵۶

یاپاره‌خطBCویاپاره‌خط B_1C راقطع می‌کند. اگرخطl، پاره‌خط BC را، در نقطهٔ D ،قطع کند، عمودهایBEوCF رابرآن رسم‌می‌کنیم. مساحتS ازمثلث ABC ، مساوی مجموع مساحتهای دومثلث ABDوACD است. بنابراین:

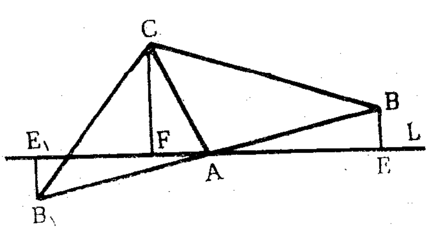
$$S=\frac{1}{2}AD\cdot BE+\frac{1}{2}AD\cdot CF$$

وازآنجا:

$$BE+CF=\frac{2S}{AD}$$

چون مقدارS ثابت‌است، $BE+CF$ وقتی می‌نیمم است که AD ماکزیمم باشد؛ بنابراین اگر $AB>AC$ باشد، بایدl برAB منطبق‌شود، دراینصورت مجموع فاصله‌های مورد نظر، مساوی ارتفاع مثلث، که ازرأس C می‌گذرد، خواهدشد. اگر $AB=AC$ باشد، می‌توان lرا منطبق بر AB یا AC گرفت.

حالافرض‌می‌کنیم که خط l ، پاره خط B_1C راقطع کند (شکل ۱۵۷). B_1E_1 راعمود برl رسم می‌کنیم. از تساوی مثلثهای ABE

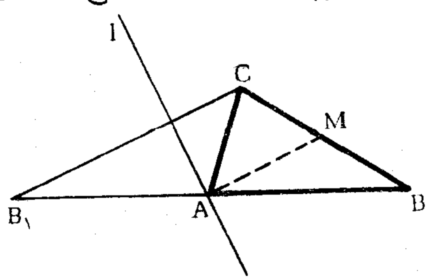


شکل ۱۵۷

و AB_1E_1 نتیجه‌می‌شود که $BE=B_1E_1$. حالا مجموع فاصله‌های B_1E_1 وCF تاخط l راموردبررسی قرارمی‌دهیم. شبیه استدلال حالت‌قبل معلوم‌می‌شود که‌اگر $AB>AC$ باشد، خط‌مطلوب‌برABمنطبق‌است واگر$AC=AB$ باشد، یکی‌از خطهای ABیاAC جواب مسأله‌است.

برای اینکه مجموع فاصله‌های $BE+CF=\frac{2S}{AD}$ ماکزیمم باشد، باید خط l را چنان رسم‌کردکه پاره‌خط AD ازآن حداقل‌شود. اگرزاویهٔ A منفرجه باشد وخطl، ضلع BC را قطع‌کند، حداقل AD وقتی است‌که ADبرBC عمودباشد (چون زاویهٔ A منفرجه است، ارتفاع AD در داخل مثلث قرار می‌گیرد)، دراینصورت مقدار حداکثر مجموع فاصله های BوC از AD مساوی BC می‌شود. اگرخط l، پاره‌خط B_1C را قطـع‌کند، حداقل مقدار AD برابراست باارتفاع مثلث AB_1Cکه برضلع B_1C فـرود آمده باشد ویاکوچکترین ضلع، ازبین دوضلع AB_1 و AC. در اینحالت حداکثر مجموع فاصله‌های BوC از l ، از طول پاره خط B_1C تجاوز نمی‌کند. از مثلثهای ABC و AB_1C معلوم می‌شود کـه $BC>B_1C$، بنابراین: اگر زاویهٔ A از مثلث ABC، منفرجه باشد، خط مطلوب l عمود برBCخواهد بود وحداکثر مجموع فاصله‌های B و C ازآن برابر باضلـع BC می‌شود.

جای BوB_1 راباهم عوض می‌کنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم: اگر در مثلث ABC، زاویهٔ A حاده باشد، خط مطلوبl، عبارتست از خطی‌که از A بر B_1C یا میانهٔ AM (از مثلث ABC) عمودباشد(شکل۱۵۸) و در اینصـورت فاصلهٔ دورأس B و C از آن مساوی B_1C یعنی دو برابر میانهٔ AM خواهد



شکل۱۵۸

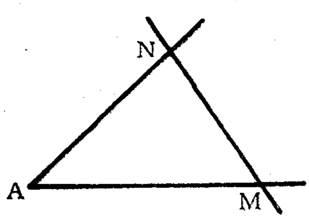
شد (که از BC بزرگتر است).

بالاخره، درحالتی‌که زاویهٔ A قائمه‌باشد، به‌علت‌اینکه $CB=CB_1$، مسأله دوجواب خواهد داشت، یکی وقتی که خط l منطبق برارتفاع مثلث ABC باشد و دیگری وقتی که خط l عمود برمیانهٔ AM از مثلث ABC باشد .

۳۰۶. طول پاره خطهای AM و AN (شکل ۱۵۹) را بترتیب x و y می‌گیریم، بنابرقضیهٔ کسینوسها داریم:

$$MN^2=x^2+y^2-2xy\cos A=(x-y)^2+2xy(1-\cos A)=$$
$$=(x-y)^2+4Q\,tg\frac{A}{2}$$

(از رابطهٔ $Q=\frac{1}{2}xy\sin A$، استفاده کردیم)، بنابراین ، حداقل پاره خط MN وقتی‌است که $x=y$، یعنی $AM=AN$ باشد و دراینصورت داریم:

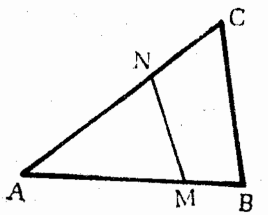


شکل۱۵۹

$$MN=\sqrt{4Q\,tg\frac{A}{2}}$$

۳۰۷. فرض می‌کنیم، MN پاره‌خط مطلوب باشد (شکل ۱۶۰)، اگر مساحت مثلث ABC را مساوی S فرض کنیم، مساحت مثلث AMN مساوی $\frac{1}{2}S$ می‌شود که با توجه به مسألهٔ ۳۰۶، بدست می‌آید:

$$MN=\sqrt{2S\,tg\frac{A}{2}}$$



شکل ۱۶۰

AM را برحسب ضلعهای b و c، از مثلث ABC، محاسبه می‌کنیم. چون مساحت مثلث AMN مساوی نصف مساحت مثلث ABC است، بنابراین داریم:

$$AM^2 \sin A = \frac{1}{2} bc \sin A \Longrightarrow AM = \sqrt{\frac{bc}{2}}$$

طبق شرط مسأله، M و N باید روی ضلعهای AB و AC واقع باشند، بنابراین مقداری که برای AM بدست آمده است، نباید از هیچیك ازدوضلع b و c بزرگتر باشد. اگر $b<c$ بگیریم، باید داشته باشیم: $\sqrt{\frac{bc}{2}} \leqslant b$، که ازآنجا بدست می‌آید: $c \leqslant 2b$. به‌این ترتیب اگر $b<c\leqslant 2b$ باشد، می‌توانیم روی ضلعهای AB و AC، نقطه‌های M و N را طوری پیدا کنیم که داشته‌باشیم:

$$AM = AN = \sqrt{\frac{bc}{2}}$$

بسادگی می‌توان ثابت‌کرد که اگر $c>2b$ باشد، پاره خط مورد نظر، بر میانهٔ ضلع c منطبق است و ضمناً در این حالت، طول این میانه هم مساوی $\sqrt{2S\,tg\frac{A}{2}}$ خواهد شد.

می‌توان این‌مسأله راکلی‌ترطرح کرد: مثلث‌مفروض ABC رابه وسیلهٔ پاره خطی باحداقل طول به دوقسمت هم ارز تقسیم‌کنید.

فرض می‌کنیم $a<b<c$ باشد، دراینصورت خواهیم‌داشت:

$a<a+b<2b$، یعنی $b<c<2b$. پاره‌خط MN که ضلعهای زاویهٔ A راقطع کند (ومساوی $\sqrt{2S\,tg\frac{A}{2}}$ است)، پاره خط مورد نظراست، زیرا

این پاره‌خط، ازپاره خطهای نظیرمربوط به‌زاویه‌های B و C کوچکتر است:

$$\sqrt{2S\,tg\frac{A}{2}}<\sqrt{2S\,tg\frac{B}{2}}<\sqrt{2S\,tg\frac{C}{2}}$$

بنابراین، باید روی ضلعهای کوچکترین زاویهٔ مثلث، دونقطهٔ M و N راطوری پیداکرد که داشته باشیم:

$$AM=AN=\sqrt{\frac{bc}{2}}$$

۳۰۸. مجموع همهٔ حاصلضربهای ممکنهٔ دوبه‌دوی عددهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ را می‌توان به‌اینصورت نوشت:

$$s=\frac{1}{2}[(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)]$$

روشن است که:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\geqslant 0,\ -(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\geqslant -n$$

بنابراین، مجموع s نمی‌تواند از $-\frac{n}{2}$ کوچکتر باشد.

اگر n عددی زوج‌باشد، نیمی از عددهای x_k را مساوی ۱ و نیم دیگر آنها را مساوی ۱ — می‌گیریم، در اینصورت هر دو نامساوی فوق، به تساوی تبدیل می‌شود و بدست می‌آید:

$$s=-\frac{n}{2}$$

اگر n عددی فردباشد، چون s تنها مقادیرصحیح می‌تواند باشد:

$$s\geqslant -\frac{n-1}{2}$$

حداقل مقدار s، مثلاوقتی‌است که بین‌عددهای x_k، تعداد $\frac{n+1}{2}$ را مساوی ۱ و

تعداد $\frac{n-1}{2}$ را مساوی ۱ — بگیریم.

جواب: وقتی n عددی زوج باشد: $-\frac{n}{2}$ ؛ ووقتی n عددی فرد باشد:

$$-\frac{n-1}{2}$$

۳۰۹. ثابت می‌کنیم که می‌توان هریك از عددهای x_k را به ۱ یا ۱ — تبدیل کرد، بنحوی که مجموع همهٔ انواع حاصلضربهای دوبه دوی آنها، بزرگ نشود؛ دراینصورت، این‌مسأله، بمسالهٔ ۳۰۸ منجرمی‌شود.

x_k را وقتی‌به ۱ — تبدیل می‌کنیم که مجموع بقیهٔ $(n-1)$ عدد غیر منفی‌باشد ووقتی‌به ۱تبدیل می‌کنیم که مجموع بقیه غیرمثبت باشد؛ دراینصورت عبارت $x_1(x_2+\cdots+x_n)$ و در نتیجه، همهٔ مجموع حاصلضربهای ممکنهٔ دوبه‌دو اضافه‌نمی‌شود. همین‌عمل‌را دربارهٔ x_2، x_3، ...، x_n هم‌تکرارمی‌کنیم. حکم ثابت است.

متذکر می‌شویم که این‌استدلال تنهابرای حالت فردبودن n لازم است، زیرا دراین‌حالت، بلافاصله نمی‌توان نتیجه گرفت‌که مجموع حاصلضربهای دو بەدو، نمی‌تـواند از $-\frac{n-1}{2}$ کمترشود.

۳۱۰. اگرزاویهٔ رأس‌مخروط داروی مقطع محوری‌آن 2α، شعاع‌قاعدهٔ مخروط را rومولدآنرا l بگیریم، بسادگی‌بدست می‌آید(Rشعاع کره است):

$$\begin{cases} r=l\cdot \sin\alpha \\ l=2R\cos\alpha \end{cases} \Longrightarrow r=2R\sin\alpha\cos\alpha=R\sin 2\alpha$$

وبنابراین سطح کل مخروط چنین می‌شود:

$$2\pi R^2\cos\alpha\sin 2\alpha+\pi R^2\sin^2 2\alpha=\pi R^2(2\cos\alpha\sin 2\alpha+\sin^2 2\alpha)$$

یعنی باید α راطوری پیداکردکه تابع

$$\frac{1}{4}[2\cos\alpha\sin 2\alpha+\sin^2 2\alpha]=\sin\alpha(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)^2$$

ماکزیمم باشد. $\sin\alpha=x$ می گیریم. خواهیم‌داشت:

$$P(x)=-x^4-x^3+x^2+x$$

روشن‌است که داریم: $\frac{\pi}{2}>\alpha>0$ وبنابراین: $x=\sin\alpha>0$. ضمناً به ازای

$\alpha=0$ یا $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (حدودمتغیر)، مقدار سطح کل مساوی صفرمی‌شود وبنابراین

ماکزیمم سطح کل به‌ازای یکی‌از جوابهای مشتق بدست می‌آید:

$$P'(x)=-4x^3-3x^2+2x+1=-(x+1)(4x^2-x-1),$$

$$P'(x)=0\Longrightarrow x_1=-1, x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{8}\quad,$$

$$x_3=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

که اگراز جوابهای منفی‌بگذریم، معلوم می‌شود که تابع به‌ازای

$$x=\sin\alpha=\frac{1+\sqrt{17}}{8}\neq 0{,}64$$

به حداکثرمقدار خود می‌رسد. که‌ازآنجا $2\alpha\neq 79^\circ 40'$ می‌شود:

۳۱۱. تابع موردبررسی، عبارتست ازطول پاره خط S_1S_2 ، که‌درآن S_1وS_2 موضعهای‌متحرکها، بعدازگذشت‌فاصلهٔ زمانی t، درنظرگرفته‌شده است (شکل۶۲، صفحهٔ ۱۴۶ را ببینید). درمثلث S_1BS_2 داریم:

$$S_1S_2^2=S_1B^2+S_2B^2-2S_1B\cdot S_2B\cos\beta\quad(0<\beta<\frac{\pi}{2})$$

ازطرف دیگرروشن است که: $AS_1=v_1t$ ، $BS_2=v_2t$ و بنابراین

$$y(t)=S_1S_2^2=(a-v_1t)^2+(v_2t)^2-2(a-v_1t)(v_2t)\cos\beta$$

وبنابراین تابع مورد نظر چنین می‌شود:

$$f(t)=\sqrt{(a-v_1t)^2+(v_2t)^2-2(a-v_1t)(v_2t)\cos\beta}$$

می‌نیمم $f(t)$ برمی‌نیمم $y(t)$ منطبق است. اگر $y'(t)$ رامساوی صفر قراردهیم، بدست می‌آید:

$$t=\frac{a(v_1+v_2\cos\beta)}{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\beta} \quad (1)$$

$y(t)$ نسبت به t یك سه جمله‌ای درجه دوم است که ضریب درجهٔ دوم آن (t^2) چنین است:

$$v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\beta \quad (v_1>0\ ,\ v_2>0)$$

وچون این ضریب همیشه مثبت است، می‌نیمم نسبی تابع $y(t)$ برمی‌نیمم مطلق آن منطبق می‌شود. بنابراین برای اینکه فاصلهٔ S_1S_2 به حداقل خود برسد، باید t مساوی مقداری باشد، که ازرابطهٔ (۱) بدست می‌آید.

۳۱۲. روشن است که اگر برای نقطه‌های (x,y) داشته‌باشیم $x>2$ و $y>2$، درمعادلهٔ مفروض صدق نخواهد کرد وبنابراین باید داشته باشیم:

$$1<x<2 \quad \text{و} \quad 1\leqslant y\leqslant 2$$

به این ترتیب: $f(x,y)=\frac{y}{x}\geqslant\frac{1}{2}$ وچون مختصات نقطهٔ $(2,1)$ در معادله صدق می‌کند، حداقل تابع $f(x,y)$ مساوی همان $\frac{1}{2}$ می‌شود.

۳۱۳. بااستفاده ازاین مطلب که حداقل مجموع دو عدد مثبت وعکس هم مساوی است با ۲، داریم:

$$3S=\left(\frac{3a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{3a}\right)+\left(\frac{3b}{a+c+d}+\right.$$

$$\left.+\frac{a+c+d}{3b}\right)+\left(\frac{3c}{a+b+d}+\frac{a+b+d}{3c}\right)+$$

$$+\left(\frac{۳d}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{۳d}\right)+\frac{۸}{۳}\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{d}+\frac{d}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)\right]\geqslant$$

$$\geqslant ۲\times ۴+\frac{۸}{۳}\times ۲\times ۶=۴۰$$

وبنابراین $S\geqslant\frac{۴۰}{۳}$. مقدار $\frac{۴۰}{۳}$ وقتی‌بدست می‌آید که داشته‌باشیم:

$$a=b=c=d$$

۳۱۴. بترتیب داریم:

$$f(x,y,z,t)=۱+\left(\frac{ax^۲+by^۲}{ax+by}-۱\right)+\frac{az^۲+bt^۲}{az+bt}=$$

$$=۱+\frac{-axz-byt}{ax+by}+\frac{az^۲+bt^۲}{az+bt}=$$

$$=۱+\frac{ab(z-t)(zy-xt)}{(ax+by)(az+bt)}=$$

$$=۱+\frac{ab(z-t)^۲}{(ax+by)(az+bt)}$$

واین‌تساوی نشان می‌دهد که حداقل مقدار تابع مفروض برابراست با ۱؛ این حداقل وقتی‌بدست می‌آید که $z=t$ باشد (باکمی تغییرنوع محاسبه، می‌توان همین‌نتیجه را برای حالت $x=y$ هم گرفت).

طبق شرط مسأله داریم: $۰\leqslant x,y,z,t\leqslant ۱$ دراینصورت:

$$\begin{cases} ax^۲\leqslant ax, by^۲\leqslant by, az^۲\leqslant az, bt^۲\leqslant bt; \\ ax^۲+by^۲\leqslant ax+by, az^۲+bt^۲\leqslant az+bt \end{cases} \qquad (۱)$$

وبنابراین $f(x,y,z,t)\leqslant ۲$؛ حالت تساوی مربوط به وقتی است‌که مثلا داشته باشیم: $x=t=۰$ و $y=z=۱$.

۳۱۵. مرکز تقارن منحنی $O'(\circ,\circ)$، یعنی مبداء مختصات است. از حل خط $y=mx$ بامعادلهٔ منحنی، مختصات نقطه‌های A و B بدست می‌آیدواز آنجا طول پاره‌خط AB چنین‌می‌شود:

$$AB^{۲}=f(m)=\frac{۴\circ\circ(m^{۲}+۱)}{۵۲m^{۲}+۷۲m+۷۳}$$

$f(m)$ تابعی پیوسته است وبنابراین ماکزیمم ومی‌نیمم مطلق آن برماکزیمم و می‌نیمم نسبی‌منحنی آن منطبق می‌شود:

$$y'=\frac{۲۴\circ\circ(۱۲m^{۲}+۷m-۱۲)}{(۵۲m^{۲}+۷۲m+۷۳)^{۲}}\ ;$$

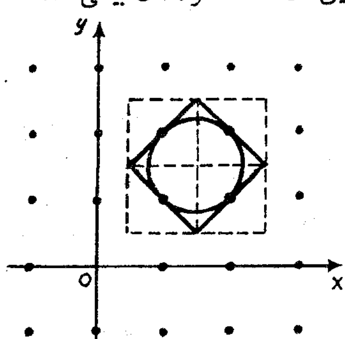
$$y'=\circ\Longrightarrow m_{۱}=-\frac{۴}{۳}\ ,\ m_{۲}=\frac{۳}{۴}\ ;$$

که اگر بجای m، دررابطهٔ طول AB، قراردهیم، بدست می‌آید:

$m=-\frac{۴}{۳}$	$m=\frac{۳}{۴}$
$AB=۴$ (حداکثر)	$AB=\frac{۶}{۵}$ (حداقل)

توضیح : منحنی‌تابع مفروض یك بیضی‌است، بنابراین ازحل این مسأله نتیجه می‌شودکه خط $y=-\frac{۴}{۳}x$، امتداد قطربزرگتر و $y=\frac{۳}{۴}x$، امتداد قطر کوچکتر بیضی‌را معین می‌کند، یعنی‌این دوخط، محورهای بیضی‌اند.

۳۱۶. از صورت مسأله، نمی‌توان فهمیدکه آیامربع‌مورد نظرشامل محیط آن هم می‌شود یا بدون توجه به محیط ، در نظر گرفته شده است؛ به عبارت دیگر، اگر در داخل مربعی، هیچیك ازنقطه‌های با مختصات صحیح وجود نداشته‌باشد، ولی‌روی محیط آن،



شکل ۱۶۱

ازاین نقطه‌ها وجود داشته باشد، می‌تواند به‌عنوان جواب به‌حساب آید؟

اگرشرط را براین بگیریم که نقطه‌های مفروض روی ضلعهای مربع‌هم قرارنگیرند، مربع مشخصی با مساحت حداکثر، بدست نمی‌آید، در اینحالت برای‌هرمربعی که نه‌روی ضلعها ونه‌درداخل آن، نقطه‌ای بامختصات صحیح نباشد، می‌توان با «اندکی» بزرگ کردن آن، بازهم مربعی‌باهمین خاصیت‌بدست‌آورد.

بنابراین‌به‌حالتی می‌پردازیم، که نقطه‌های‌با مختصات صحیح بتوانندروی ضلعهای‌مربع قرارگیرند. اگرازچهارنقطهٔ مجاورهم (شکل۱۶۱)دایره‌ای‌عبور دهیم، بزرگترین دایره‌ای خواهد بودکه در درون آن هیچیك ازنقطه‌های بـا مختصات صحیح وجود ندارد. بنابراین مربع مورد نظر، مربع محیطی همین دایره است، که ضلعهای‌آن‌درچهارنقطهٔ مذکور، بردایره مماس باشد،وبسادگی معلوم می‌شودکه مساحت چنین دایره‌ای برابراست با۲.

تابع اولیه ومحاسبهٔ سطح وحجم

۳۱۷. اگرازمجموع مفروض، مشتق بگیریم،مجموع زیربدست‌می‌آید:

$$۱-x^۲+x^۴-x^۶+\cdots \quad (۱)$$

با توجه به‌شرط $|x|<۱$، می‌توان حد مجموع(۱) را، که حدمجموع جمله‌های يك تصاعد هندسی نزولی است، بدست‌آورد:

$$۱-x^۲+x^۴-x^۶+\cdots=\frac{۱}{۱+x^۲}$$

مجموع مطلوب، تابع اولیهٔ $\frac{۱}{۱+x^۲}$، بدون مقدار ثابت (چرا؟)، است.

جواب: $\mathrm{Arctg}\,x$.

۳۱۸. اگرمجموع‌مفروض را s وتابع اولیهٔ‌آنرا S فرض‌کنیم، داریم:

$$S=x^۲+۲x^۳+۳x^۴+۴x^۵+\cdots$$

وضمناً:

$$Sx=\qquad x^۳+۲x^۴+۳x^۵+\cdots$$

ازتفاضل این دورابطه بدست می‌آید:

$$S(1-x)=x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{x^2}{1-x}$$

(ازشرط $|x|<1$، استفاده کردیم). ازآنجا:

$$S=\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

مجموع s، عبارتست ازمشتق S نسبت به x:

$$s=S'_x=\frac{2x(1-x)^2+2x^2(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{2x}{(1-x)^3}$$

۳۱۹. از T_n تابع اولیه وسپس ازحاصل آن مشتق بگیرید.

جواب:
$$T_n=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

۳۲۰. با توجه به‌رابطهٔ $x=\frac{1}{a}(ax+b)-\frac{b}{a}$ داریم:

$$y=\frac{1}{a}(ax+b)^{m+1}-\frac{b}{a}(ax+b)^m;$$

وازآنجا:

$$Y=\frac{1}{a^2(m+2)}(ax+b)^{m+2}-\frac{b}{a^2(m+1)}(ax+b)^{m+1}+c$$

جواب:
$$Y=\frac{(ax+b)^{m+1}}{a^2(m+1)(m+2)}[a(m+1)x-b]+c$$

۳۲۱. با توجه به‌رابطهٔ $x^2=(x-1)^2+2(x-1)+1$ داریم:

$$y=x^2(x-1)^{-\frac{1}{2}}=(x-1)^{\frac{3}{2}}+2(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

وازآنجا:
$$Y=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2(x-1)^{\frac{1}{2}}+c$$

جواب:
$$Y=\frac{2}{15}(3x^2+4x+8)\sqrt{x-1}+c.$$

۳۲۲. اگر $1-x=t$ فرض کنیم، داریم: $x=1-t$ وبنابراین:

$$x^3+x^2+x+1=(1-t)^3+(1-t)^2+(1-t)+1$$
$$=-t^3+4t^2-6t+4=$$
$$=-(1-x)^3+4(1-x)^2-6(1-x)+4$$

ودرنتیجه می‌توان نوشت:

$$y=(x^3+x^2+x+1)(1-x)^{-\frac{1}{3}}=$$
$$=-(1-x)^{\frac{}{3}}+4(1+x)^{\frac{5}{3}}-6(1-x)^{\frac{2}{3}}+4(1-x)^{-\frac{1}{3}}$$

وبنابراین:

$$Y=\frac{3}{11}(1-x)^{\frac{11}{3}}-\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{8}{3}}+\frac{18}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}}-$$
$$-6(1-x)^{\frac{2}{3}}+c$$

جواب: $Y=-\frac{3}{110}(10x^3+25x^2+52x-307)\sqrt[3]{(x-1)^2}$

۳۲۳. تابع y را بترتیب چنین می‌نویسیم:

$$y=x^2\cdot x^9(x^3-1)^{-\frac{1}{5}}=x^2[(x^3-1)^3+$$
$$+3(x^3-1)^2+3(x^3-1)+1](x-1)^{-\frac{1}{5}}=$$
$$=x^2(x^3-1)^{\frac{14}{5}}+3x^2(x^3-1)^{\frac{9}{5}}+$$
$$+3x^2(x^3-1)^{\frac{4}{5}}+x^2(x^3-1)^{-\frac{1}{5}}$$

جواب: $Y=\frac{5}{4788}[84(x^3-1)^3+342(x^3-1)^2+$

$$+532(x^3-1)+399]\sqrt[5]{(x^3-1)^4}$$

۳۲۴. تابع y را می‌توان چنین نوشت:

$$y=\frac{(2x+3)^5}{(5x-1)^7}=\frac{1}{(5x-1)^2}\left(\frac{2x+3}{5x-1}\right)^5$$

اکنون با توجه به رابطهٔ $\left(\frac{2x+3}{5x-1}\right)'=\frac{-17}{(5x-1)^2}$ خواهیم داشت :

$$Y=-\frac{1}{102}\left(\frac{2x+3}{5x-1}\right)^6+c$$

۳۲۵. جواب : $Y=\frac{1}{(n+1)(ad-bc)}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n+1}$

۳۲۶. روش اول ـ بترتیب داریم:

$$y=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=\frac{2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}=$$

$$=tg^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})=[1+tg^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})]-1 \quad ;$$

$$Y=-2tg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})-x+c$$

روش دوم ـ بترتیب داریم:

$$y=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}=\frac{1-2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=$$

$$=(1+tg^2x)-2\sin x\cos^{-2}x+tg^2x=$$

$$=2(1+tg^2x)-2\sin x\cos^{-2}x-1 \quad ;$$

$$Y=2tg x-\frac{2}{\cos x}-x+c=-\frac{2(1-\sin x)}{\cos x}-x+c$$

۳۲۷. تابع را بترتیب چنین می‌نویسیم:

$$y=\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)(1+\sqrt{1+x^2})}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

که باتوجه‌به‌رابطهٔ $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=(1+\sqrt{1+x^2})'$ خواهیم‌داشت:

$$Y=2\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+c$$

۳۲۸. جواب: $Y=\frac{1+\sin x}{\cos x}+c$

۳۲۹. داریم:

$$x^5+x^3+x=x(x^4+x^2+1)=$$
$$=x[(x^2+1)^2-(x^2+1)+1]$$

وبنابراین تابع به‌صورت زیردر می‌آید:

$$y=x(x^2+1)^{m+2}-x(x^2+1)^{m+1}+x(x^2+1)^m \;;$$

جواب:

$$Y=\frac{1}{2(m+3)}(x^2+1)^{m+3}-$$
$$-\frac{1}{2(m+2)}(x^2+1)^{m+2}+\frac{1}{2(m+1)}(x^2+1)^{m+1}+c$$

۳۳۰. بترتیب داریم:

$$y=\cos x\cdot\cos^8 x=\cos x(1-\sin^2 x)^4=$$
$$=\cos x\cdot\sin^8 x-4\cos x\cdot\sin^6 x+$$

$$+6\cos x\cdot\sin^4 x-4\cos x\cdot\sin^2 x+\cos x$$

جواب:

$$Y=\frac{1}{9}\sin^9 x-\frac{4}{7}\sin^7 x+\frac{6}{5}\sin^5 x-\frac{4}{3}\sin^3 x+\sin x+c$$

۳۳۱. تابع را به‌ترتیب زیر تبدیل می‌کنیم:

$$y=(1+\cot g^2 x)\cot g^8 x-(1+\cot g^2 x)\cot g^6 x+(1+\cot g^2 x)\times$$
$$\times\cot g^4 x-(1+\cot g^2 x)\cot g^2 x+(1+\cot g^2 x)-1$$

جواب:

$$Y=-\frac{1}{9}\cot g^9 x+\frac{1}{7}\cot g^7 x-\frac{1}{5}\cot g^5 x+\frac{1}{3}\cot g^3 x-\cot g x-$$
$$-x+c$$

۳۳۲. صورت ضرب تابع را به‌مجموع تبدیل می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]$$

جواب:

$$Y=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{m+n}\cos(m+n)x-\frac{1}{m-n}\cos(m-n)x\right]+c$$

۳۳۳. از این رابطه‌ها استفاده کنید:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$$

$$\sin^5\alpha=\frac{1}{16}(\sin 5\alpha+20\sin^3\alpha-5\sin\alpha)=$$

$$=\frac{1}{16}(\sin 5\alpha-5\sin 3\alpha+10\sin\alpha)$$

دراینصورت تابع y به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$Y=\frac{1}{64}(\sin 20x-5\sin 16x+10\sin 12x+$$
$$+2\sin 10x-10\sin 8x-5\sin 6x+20\sin 2x)$$

جواب: $Y=\frac{1}{64}\left(-\frac{1}{20}\cos 20x+\frac{5}{16}\cos 16x-\frac{5}{6}\cos 12x-\right.$

$$\left.-\frac{1}{5}\cos 10x+\frac{5}{4}\cos 8x+\frac{5}{6}\cos 6x-10\cos 2x\right)+c$$

۳۳۴. بسادگی معلوم می‌شود که: $y=-tg(\frac{\pi}{4}+x)$

جواب: $Y=\ln\cos(\frac{\pi}{4}+x)+c$

۳۳۵. جواب:

$$Y=\frac{1}{2(a+b)}\sqrt{a\sin^2x+b\cos^2x+c}+C$$

۳۳۶. بسادگی معلوم می‌شود که: $y=cotg\frac{x}{2}$

جواب: $y=2\ln\sin\frac{x}{2}+c$.

۳۳۷. تابع y رامی‌توان چنین نوشت:

$$y=\frac{(x^3+x^2+x+1)^2-(3x^2+2x+1)}{(x^3+x^2+x+1)^2}=$$
$$=1-(3x^2+2x+1)(x^3+x^2+x+1)^{-2}$$

جواب: $$Y=\frac{x^4}{x^3+x^2+x+1}+c$$

۳۳۸. تابع را می‌توان به‌این‌ترتیب تبدیل کرد:

$$y=\frac{a}{\sin^2x}[(cotgx-1)+1](cotgx-1)^m=$$

$$=\frac{a}{\sin^۲ x}(cotg\,x-۱)^{m+۱}+\frac{a}{\sin^۲ x}(cotg\,x-۱)^m$$

جواب:

$$Y=-\frac{a}{(m+۱)(m+۲)}(cotg\,x-۱)^{m+۱}\times$$
$$\times[(m+۱)cotg\,x+۱]+c$$

۳۳۹. تابع رامی‌توان به‌صورت $y=\frac{۳}{۴}\sin x(۱-\cos x)^{\frac{۷}{۱۵}}$ نوشت.

جواب: $Y=\frac{۴۵}{۸۸}(۱-\cos x)\sqrt[۱۵]{(۱-\cos x)^۷}+c$

۳۴۰. تابع به‌صورت $y=(۱+tg^۲x)tg^n x$ تبدیل‌پذیر است.

جواب: $Y=\frac{۱}{n+۱}tg^{n+۱}x+c$

۳۴۱. جواب: $Y=\frac{۲}{۳}(x+۳)\sqrt{x}+c$

۳۴۲. جواب: $Y=\frac{۴}{۱۰۵}x(۱۵-۷x^۲)\sqrt[۴]{x^۳}+c$

۳۴۳. جواب: $Y=x-arctg\,x+c$

۳۴۴. جواب: $Y=\frac{۱}{۴}arc\,tg\frac{x^۲}{۲}+c$

۳۴۵. تابع را بصورت $y=۲\times\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۱+(\sqrt{x})^۲}$ می‌نویسیم:

جواب: $Y=۲arctg\sqrt{x}+c$

۳۴۶. جواب: $Y=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}+c$

۳۴۷. جواب: $Y=\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{x^۲-۱}+c$

۳۴۸. داریم: $y=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}=2(\sqrt{x})'\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$

جواب: $Y=2\arcsin\sqrt{x}+c$

۳۴۹. جواب: $Y=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}+c$

۳۵۰. تابع مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$y=\frac{x^2+1}{x^4+1}=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'}{2\left[1+\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)^2\right]}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)'}{1+\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)^2}$$

جواب: $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+c$

۳۵۱. تابع مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$y=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}=$$

$$=(1+tg^2x)+(1+cotg^2x)$$

جواب: $Y=tg\,x-cotg\,x+c$

۳۵۲. تابع y را می‌توان چنین نوشت:

$$y=\cos x\cdot(1-\sin^2x)^2\cdot\sin^{\frac{1}{2}}x=\cos x\cdot\sin^{\frac{1}{2}}x-$$

$$-2\cos x\sin^{\frac{5}{2}}x+\cos x\sin^{\frac{9}{2}}x$$

جواب: $Y=\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2x+\frac{2}{11}\sin^4x\right)\sqrt{\sin^3x}+c$

۳۵۳. تابع مفروض را به‌این‌ترتیب می‌نویسیم:

$$y=\frac{a+x}{\sqrt{a^۲-x^۲}}=\frac{x}{\sqrt{a^۲-x^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۱-(\frac{x}{a})^۲}}$$

جواب: $Y=-\sqrt{a^۲-x^۲}+a\cdot\arcsin\frac{x}{a}+c$

۳۵۴. جواب: $Y=\frac{x|x|}{۲}+c$

۳۵۵. جواب: $Y=\frac{x^۲|x|}{۳}+c$

۳۵۶. جواب: $Y=\frac{۲}{۳}x^۲(x+|x|)+c$

۳۵۷. جواب: $Y=\frac{۱}{۲}(۱+x)|۱+x|+\frac{۱}{۲}(۱-x)|۱-x|+c$

۳۵۸. $f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ ودرنتیجه $f(x)=۲\sqrt{x}+c$ می‌شود

۳۵۹. $f'(x)=۱-x$ وازآنجا $f(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+x+c$ می‌شود.

۳۶۰. درهر نقطهٔ دلخواه $(x\ ,\ y)$ ازمنحنی مطلوب، ضریب زاویهٔ قائم برابر $-\frac{۱}{y'}$ می‌شود، بنابراین‌باید داشته باشیم:

$$\frac{y}{x}=-\frac{۱}{y'}\Longrightarrow y\cdot y'=-x\Longrightarrow\frac{۱}{۲}y^۲=-\frac{۱}{۲}x^۲+c\ ;$$

$$x^۲+y^۲=۲c\quad(c>۰)$$

یعنی هردایرهٔ به‌مرکزمبداء مختصات دارای خاصیت مورد نظرمسأله است.

۳۶۱. طبق فرض مسأله داریم:

$$y'=\frac{x-۱}{y-۲}\Longrightarrow y'(y-۲)=(x-۱)\Longrightarrow$$

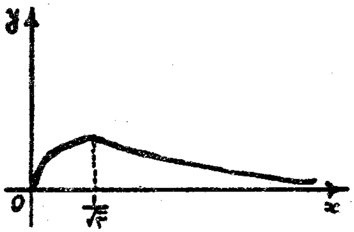
$$\Longrightarrow \ \frac{1}{2}(y-2)^2=\frac{1}{2}(x-1)^2+c \ ;$$

$$(y-2)^2=(x-1)^2+2c \Longrightarrow$$

$$y=2\pm\sqrt{x^2-2x+1+2c}$$

که با توجه به‌شرط مسأله $c=\frac{2}{3}$ بدست می‌آید.

منحنی تابع، هذلولی‌متساوی‌الساقینی‌است که مرکز آن $\omega(1,2)$ می‌باشد.



شکل ۱۶۲

۳۶۲. منحنی نمایش تغییرات تابع در شکل ۱۶۲ داده شده است، برای محاسبهٔ حجم مورد نظر، باید تابع اولیهٔ y^2 راحساب‌کنیم، داریم:

$$f(x)=y^2=\frac{x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=x(x^2+1)^{-2} \ ;$$

$$F(x)=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1}=-\frac{1}{2(x^2+1)}$$

وبنابراین، اگرحجم مطلوب را V فرض‌کنیم داریم:

$$V=\pi\left|-\frac{1}{2(x^2+1)}\right|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\pi}{8} \quad \text{(واحد مکعب)}$$

۳۶۳. رابطهٔ مفروض را به‌صورت: $y''\cdot y'=\frac{1}{2}x^{-3}-\frac{1}{2}x^{-5}$ می‌نویسیم وازدوطرف این رابطه نسبت به x تابع اولیه می‌گیریم، بدست می‌آید:

$$\frac{1}{2}y'^2=-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{8x^4}+c$$

چون منحنی تابع درنقطهٔ به‌طول واحد برمحورطولها مماس است، باید به‌ازای $x=1$ برابرصفرشود، یعنی:

$$-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+c=۰ \Longrightarrow c=\frac{۱}{۸}$$

و از آنجا:

$$y'^{۲}=\frac{(x^{۲}-۱)^{۲}}{۴x^{۴}} \Longrightarrow y'=\pm\frac{x^{۲}-۱}{۲x^{۲}}=\pm\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}x^{-۲}\right)$$

دوباره نسبت به x تابع اولیه می‌گیریم:

$$y=\pm\frac{۱}{۲}x\pm\frac{۱}{۲x}+c$$

وچون باید تابع ازنقطهٔ (۰ , ۱) عبور کند، مقدار $c=\mp ۱$ بدست می‌آید.

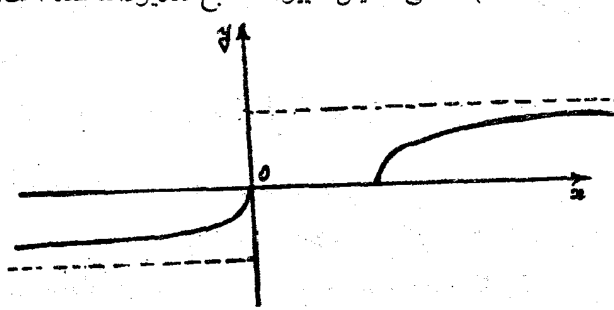
جواب: $f(x)=\frac{(x-۱)^{۲}}{۲x}$ یا $f(x)=-\frac{(x-۱)^{۲}}{۲x}$

۳۶۴. معادلهٔ $y=۰$ جوابی درفاصلهٔ صفر و $\frac{\pi}{۴}$ ندارد، بنابراین باید تابع اولیهٔ y را درفاصلهٔ صفرتا $\frac{\pi}{۴}$ حساب کنیم.

جواب: $\frac{۱}{۸}(۴-\pi)$ واحد مربع.

۳۶۵. جواب: $\frac{۲}{۳}$ واحد مربع.

۳۶۶. اولا) منحنی نمایش تغییرات تابع درزیرداده شده است:



شکل ۱۶۳

ثانیاً) حجم مطلوب ازتابع اولیهٔ $\pi y^{۲}$ درفاصلهٔ ۲ تا ۳ بدست می‌آید.

جواب : $\frac{\pi}{2}$ واحد مکعب.

۳۶۷. حجم مطلوب، ازتابع اولیهٔ πy^2 درفاصلهٔ ۲ ــ تا ۱ بدست می‌آید وداریم:

$$y^2 = f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{(x^2+x+1)^2 - (2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$$
$$= 1 - (2x+1)(x^2+x+1)^{-2}$$

واز آنجا:
$$F(x) = x + \frac{1}{x^2+x+1}$$

جواب: 3π واحد مکعب.

۳۶۸. نقطهٔ A برمحور xx' وضمناً برمحور سهمی واقع‌است، بنابراین کافی‌است سطح بین‌مماس AB ومنحنی و محور xx' را پیداکنیم، دو برابر این‌سطح، سطح مطلوبست. برای این منظور سطح بین منحنی و $B\omega$ و محور طول‌را پیدا می‌کنیم (ωمحل تلاقی‌BC بامحور طول‌است) وآنرا ازسطح‌مثلث قائم‌الزاویه $AB\omega$ کم می‌کنیم.

جواب: (واحدمربع) $S = 2\sqrt{3}$

برای محاسبهٔ حجم مورد نظر باید مبداء مختصات را به نقطهٔ $\omega(5,0)$ (نقطهٔ تـلاقی BC با محور طـول) منتقل کنیم تا دوران دور محور y هـا انجام گیرد.

جواب: (واحدمکعب) $V = \frac{72\sqrt{3}}{5}\pi$

۳۶۹. x دابرحسب y محاسبه می‌کنیم:

$$x^2 - 2x + (3 - y) = 0 \Longrightarrow x = 1 \pm \sqrt{y-2}$$

وچون باید شاخه‌ای ازمنحنی‌راکه درربع اول‌است درنظر بگیریم، داریم:

$$x = 1 + \sqrt{y-2} \Longrightarrow x^2 = y - 1 + 2\sqrt{y-2}$$

تابع اولیه πx^2 را درفاصلهٔ $y=3$ تا $y=5$ محاسبه می‌کنیم، حجم مطلوب

بدست می‌آید.

جواب: $\pi\frac{۱۴+۱۲\sqrt{۳}}{۳}$ (واحدمکعب).

۳۷۰. جواب: ۱۲۰π (واحد مکعب).

۳۷۱. جواب: $S_\lambda=\frac{\lambda-۱}{۲\lambda}$ وضمناً: $S=\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda=\frac{۱}{۲}$

۳۷۲. داریم: $y'=\frac{۱}{۲}\left(x^۲-\frac{۱}{x^۲}\right)$ و ازآنجا:

$$f(x)=\sqrt{۱+y'^۲}=\sqrt{۱+\frac{۱}{۴}\left(x^۲-\frac{۱}{x^۲}\right)^۲}=\frac{۱}{۲}\left(x^۲+\frac{۱}{x^۲}\right)$$

$$F(x)=\frac{۱}{۶}\left(x^۳-\frac{۳}{x}\right);$$

وبنابراین طبق فرض‌مسأله ($tg\alpha>۰$) داریم:

$$\frac{۱}{۶}\left|tg\alpha\sqrt{tg\alpha}-\frac{۳}{\sqrt{tg\alpha}}+۲\right|=\frac{۱}{۳}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow tg\alpha=\sqrt{۳}\Longrightarrow\alpha=k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

۳۷۳. جواب: $f(x)=-x^۲+x-\frac{۱}{۴}$

۳۷۴. رابطهٔ مفروض بین‌تابع ومشتقهای اول ودوم‌آنرا، می‌توان چنین نوشت:

$$۲x+۲yy'^۲+y^۲y''=۰\Longrightarrow۲x+(y'y^۲)'=۰$$

وازآنجا، اگراز دوطرف تابع‌اولیه بگیریم، بدست می‌آید:

$$x^۲+y'y^۲=c$$

ضریب‌زاویهٔمماس درنقطهٔ$A(۲,۱)$ برمنحنی برابراست با۳ ــ .بنابراین دررابطهٔ اخیربایدمقادیر $x=۲$، $y=۱$ و $y'=-۳$ صدق‌کنندکه ازآنجا

$c=1$ بدست می‌آید:

$$x^2+y'y^2=1$$

دوباره، ازدوطرف تابع اولیه می‌گیریم:

$$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3=x+c_1$$

باقراردادن $x=2$، $y=1$، مقدار $c_1=1$ بدست می‌آید وتابع‌مطلوب چنین می‌شود:

$$y=-\sqrt[3]{x^3-3x-3}$$

۳۷۵. تابع اولیه رابه‌صورت $Y=\dfrac{mx+n}{x^2+a^2}$ درنظر بگیرید، دراینصورت باید تساوی $Y'=y$ برقرار باشد.

جواب: $Y=\dfrac{-x}{x^2+a^2}+c$

۳۷۶. تابع مفروض را می‌توان به سادگی به اینصورت تبدیل‌کرد:

$$y=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+1$$

جواب: $Y=\ln\dfrac{(x-1)^2}{x+1}+\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}+c$

۳۷۷. تابع رابه اینصورت بنویسید:

$$y=\frac{\sqrt[3]{2x-5x^2}-x^2}{x^2\sqrt[3]{2-5x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2-5x}}=$$

$$=x^{-\frac{5}{3}}-(2-5x)^{-\frac{1}{3}}$$

جواب: $Y=\dfrac{3\sqrt[3]{(2x-5x^2)^2}-15}{10\sqrt[3]{x^2}}+c$

۳۷۸. جواب: $Y=-\dfrac{1}{x}\sqrt{2x+3}+c$

۳۷۹. کسرمفروض رابه دوکسر ساده‌تر تبدیل می‌کنیم:

$$y=\frac{5x^2+8x+14}{(x^2+x-2)^2}=\frac{5x^2+8x+14}{(x-1)^2(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+2(2A-B)x+(4A+B)}{(x^2+x-2)^2}$$

درنتیجه، برای محاسبهٔ مقادیر A و B، به‌دستگاه زیرمی‌رسیم:

$$A+B=5, 2A-B=4, 4A+B=14$$

این‌دستگاه متوافق‌است وجواب $A=3$، $B=2$ راقبول‌دارد؛ بنابراین‌داریم:

$$y=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x+2)^2}=3(x-1)^{-2}+2(x+2)^{-2}$$

ودیگر بسادگی می‌توان تابعهای اولیهٔ آنرا بدست‌آورد.

جواب: $Y=-\dfrac{5x+4}{x^2+x-2}+c$

۳۸۰. تابعهای اولیهٔ این تابع رابه صورت $Y=\dfrac{ax+b}{x^3+2}+c$ فرض می‌کنیم، دراینصورت:

$$Y'=\frac{a(x^3+2)-3x^2(ax+b)}{(x^3+2)^2}=\frac{-2ax^3-3bx^2+2a}{(x^3+2)^2}$$

وچون $Y'=y$، بنابراین باید داشته باشیم:

$$-2a=1, -3b=0, 2a=-1$$

که ازآنجا $a=-\frac{1}{2}$ و $b=0$ بدست می‌آید.

جواب: $Y=\dfrac{-x}{2(x^3+2)}+c$

۳۸۱. اگر فرض‌کنیم: $u=1-\sqrt{x}$، بدست می‌آید:

$$u' = -\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

وتابع مفروض چنین می‌شود: $y = -۲u'u^{\frac{۱}{۲}}$

جواب: $Y = -\frac{۴}{۳}(۱-\sqrt{x})\sqrt{۱-\sqrt{x}} + c$

۳۸۲. جواب: $Y = -\frac{۵}{۴}(۴-\sqrt[۴]{x^۲})\sqrt[۵]{۴-\sqrt[۴]{x^۲}} + c$

۳۸۳. جواب:

$$f(x) = -x^۲ + x + \frac{۱}{۴} \quad \text{یا} \quad f(x) = x^۲ + x - \frac{۳}{۴}$$

۳۸۴. ضریب زاویهٔ مماس درنقطهٔ (x,y) مساوی y' و ضریب زاویهٔ قائم درهمین نقطه‌مساوی $-\frac{۱}{y'}$ ومعادلهٔ قائم دراین‌نقطه،

$$Y - y = -\frac{۱}{y'}(X - x)$$

است. نقطهٔ تلاقی‌قائم بامحورطول $(y'y + x, ۰)$ وبنابراین تحت قائم منحنی تابع،نسبت به‌محورطول، مساوی $y'y$ می‌شود،که بنابرشرط مسأله بایدمقداری ثابت‌باشد:

$$y'y = c \Longrightarrow \frac{۱}{۲}y^۲ = cx + d \Longrightarrow y^۲ = ۲cx + ۲d$$

واین معادله یك سهمی‌است‌که محورآن برمحور طول منطبق است.

درحالتی که تحت قائم‌را نسبت به‌محور عرض‌پیداکنیم، به عنوان جواب سهمی‌هایی‌بدست می‌آیدکه محورآنها برمحورعرض منطبق‌باشد.

۳۸۵. $R(۱, \frac{۱}{۸})$ می‌شود:

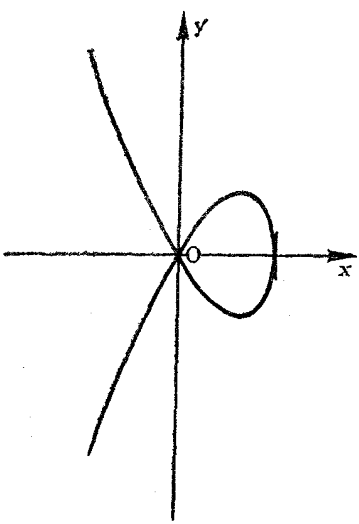
$$S_m=\frac{3m^2-2m-1}{8(m+1)^2} \quad (a$$

$$V_m=\frac{\pi}{60}-\frac{(10m^2+5m+1)\pi}{30(m+1)^5} \quad (b$$

$$V=\lim_{m\to\infty} V_m=\frac{\pi}{60};\ S=\lim_{m\to\infty} S_m=\frac{3}{8} \quad (c$$

۳۸۶. a) منحنی‌تابع $y=x\sqrt{2-x}$ دارسم‌کنید، قرینهٔ آن نسبت به محورطول، منحنی تابع $y=-x\sqrt{2-x}$ خواهد بود (شکل۱۶۴).

نقطهٔ $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ماکزیمم منحنی‌تابع $y=x\sqrt{2-x}$ است. این منحنی در نقطهٔ $(2,0)$ مماس‌قائم دارد.



شکل۱۶۴

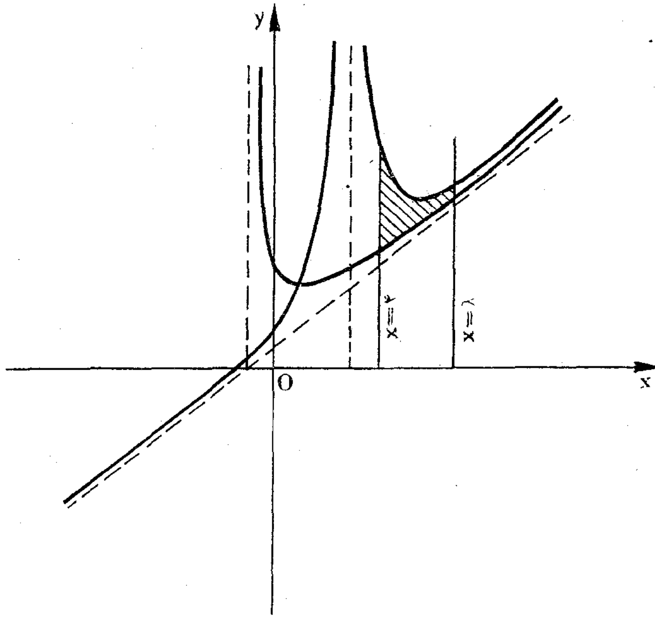
b) مساحت بین منحنی تابع $y=x\sqrt{2-x}$ و محور طول را (درفاصلهٔ صفرتا ۲) پیدا کنید، سطح مطلوب دوبرابر آن خواهد بود.

جواب: $S=\frac{32}{15}\sqrt{2}$

۳۸۷. a) منحنی‌نمایش تغییرات دوتابع درشکل ۱۶۵ رسم شده است.

b؛ جواب: $S_\lambda=\frac{16}{15}-\frac{16}{(\lambda+1)(\lambda-3)}$

$$S=\lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda=\frac{16}{15} \quad (c$$



شکل۱۶۵

۳۸۸. اگر $f(x)$، چند جمله‌ای صحیحی ازدرجهٔ n باشد، $f'(x)$ از درجهٔ $n-۱$ و $F(x)$ از درجـهٔ $n+۱$ و بنابراین $F[f'(x)]$، از درجهٔ $n^۲-۱$ خواهدشد. به‌این‌ترتیب روشن می‌شودکه $f(x)$، درمسألهٔما، ازدرجهٔ دوم است:

$$f(x)=ax^۲+bx+c$$

اگرمقدار ثابت را در $F(x)$ مساوی d بگیریم، در چند جمله‌ای $F[f'(x)]$، ضریبها چنین می‌شوند:

$$x^۳ \text{ ضریب} =\frac{۸}{۳}a^۴$$

$$x^۲ \text{ ضریب} = ۲a^۲b(۲a+۱)$$

$$x \text{ ضریب} = ۲a(ab^۲+b^۲+c)$$

$$\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{2}b^2+bc+d=\text{مقدار ثابت}$$

اگراین‌ضریبها را، باضریبهای $F[f'(x)]$، درفرض مسأله، مساوی قراردهیم، به‌دو دسته جواب می‌رسیم:

$$1)\ a=3, b=-2, c=1, d=0$$

$$2)\ a=-3, b=\frac{14}{5}, c=-\frac{33}{25}, d=\frac{84}{125}$$

بنابراین، چند جمله‌ای $f(x)$، یکی‌از دوصورت زیراست:

$$(1)\ f(x)=3x^2-2x+1\ ,$$

$$(2)\ f(x)=-3x^2+\frac{14}{5}x-\frac{33}{25}$$

منتهی برای اینکه، این‌تابعها در شرطهای مسأله، صدق‌کنند، باید درتابع‌اولیهٔ حالت (۱)، مقدارثابت را مساوی صفر و درحالت (۲) مساوی $\frac{84}{125}$ گرفت.

منحنی‌های‌درجهٔ‌دوم (مقاطع مخروطی)

۳۸۹. معادلهٔ سهمی‌را به‌اینصورت می‌نویسیم:

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{1}{a}(y+\frac{b^2-4ac}{4a})$$

از اینجا معلوم می شود که محور سهمی، موازی محور عرض است، رأس آن $S(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ و پارامترآن $p=\frac{1}{2a}$ است (اگـر منظور از پارامتر سهمی، فاصلهٔ کانون تاخط هادی، باشد، باید نوشت $p=\left|\frac{1}{2a}\right|$).

کانون سهمی، روی محورآن وبه‌فاصلهٔ $\left|\frac{p}{2}\right|$ از آنست. بنابراین بسادگی بدست می‌آید.

$$x_F = x_S = -\frac{b}{۲a}\ ,\ y_F = y_S + \frac{p}{۲} = \frac{۴ac - b^۲ + ۱}{۴a}$$

وبنابراین داریم:

$$F\left(-\frac{b}{۲a}\ ,\ \frac{۴ac - b^۲ + ۱}{۴a}\right)$$

معادلهٔ خط هادی سهمی‌هم بسادگی بدست می‌آید:

$$y = \frac{۱}{۴a}(۴ac - b^۲ - ۱)$$

۳۹۰. a) معادلهٔ $y = \frac{x+۱}{x-۱}$، نسبت به yوx، ازدرجه دوم وبنابراین یك‌مقطع مخروطی‌است؛ ولی‌این مقطع مخروطی دارای دو مجانب عمود برهم است، درنتیجه، منحنی‌آن یك هذلـولی متساوی‌الساقین می‌شود (چون مجانبها برهم عمودند؛ مستطیل مجـانبها، تبدیل به مـربع می شود و بنابراین بدست می‌آید: $a = b$).

b) مجانبهای هذلولی بسادگی بدست می‌آید: $x = ۱$ و $y = ۱$. نقطهٔ برخورد مجانبها، مرکز هذلولی‌است: $\omega(۱,۱)$. محورهای‌هذلولی، نیمسازـ های زاویه‌های مجانبهای آنست وبنابراین معادلهٔ‌آنها بسادگی بدست می‌آید:

محور قاطع: $y = x$

محور غیرقاطع: $x + y = ۲$

رأسهای هذلولی، ازبرخورد محورقاطع، بامنحنی‌آن بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+۱}{x-۱} \\ y = x \end{cases} \Longrightarrow A \left|\begin{matrix} ۱+\sqrt{۲} \\ ۱+\sqrt{۲} \end{matrix}\right. \text{ و } A' \left|\begin{matrix} ۱-\sqrt{۲} \\ ۱-\sqrt{۲} \end{matrix}\right.$$

ازطرف دیگر:

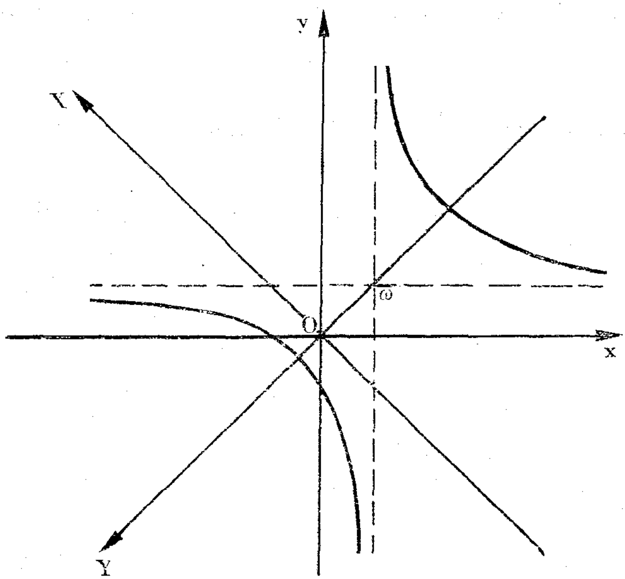
$$2a=2b=AA'=\sqrt{2[(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})]^2}=4\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a=b=2$$

$$c^2=a^2+b^2=8\Longrightarrow c=2\sqrt{2}$$

کانون، روی‌محور قاطع هذلولی‌است $(y=x)$، اگر $F(\alpha,\alpha)$ بگیریم، باید $\omega F=c$ باشد:

$$\omega F^2=2(\alpha-1)^2\Longrightarrow 2(\alpha-1)^2=8\Longrightarrow \alpha=-1,3$$

وبنابراین: $F(3,3)$ و $F'(-1,-1)$



شکل۱۶۶

توضیح . هذلولی‌بودن منحنی‌تابع $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ را باروش تحلیلی هم می‌توان ثابت کرد. اگرمنحنی‌این تابع، یك هذلولی‌باشد،مختصات کانونهای آن همانست که بدست‌آوردیم، دراینصورت باید قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطهٔ

دلخواه ازمنحنی تااین دونقطه،مساوی مقداری ثابت باشد ($2a=4$).

نقطهٔ دلخواه $M(x,\frac{x+1}{x-1})$ راروی‌منحنی‌تابع‌انتخاب‌می‌کنیم، بسادگی بدست می‌آید:

$$MF^2=(\frac{x^2-4x+5}{x-1})^2, MF'^2=(\frac{x^2+1}{x-1})^2;$$

$$MF=\frac{x^2-4x+5}{|x-1|}\ ,\ MF'=\frac{x^2+1}{|x-1|}$$

(عبارتهای x^2-4x+5 و x^2+1، به‌ازای همهٔمقادیرحقیقی x، مثبت‌هستند).

از آنجا:

$$MF'-MF=\frac{4(x-1)}{|x-1|}\Longrightarrow|MF'-MF|=4$$

c) نقطهٔ دلخواه $K(\alpha,\beta)$ را درنظر می‌گیریم، خطی با ضریب زاویهٔ مساوی m ازاین نقطه می‌گذرانیم، معادلهٔ این‌خط به‌صورت

$$y=mx+\beta-m\alpha$$

خواهد بود. اگربخواهیم چنین‌خطی برهذلولی $y=\frac{x+1}{x-1}$ مماس‌باشد، باید ازحل معادلهٔ خط بامعادلهٔ منحنی، به‌معادله‌ای بایک ریشهٔ مضاعف برسیم:

$$mx^2-[(\alpha+1)m-(\beta-1)]x+\alpha m-\beta-1=0$$

$$\Delta=(\alpha-1)^2m^2-2[(\alpha+1)(\beta-1)-2(\beta+1)]m+$$
$$+(\beta-1)^2=0$$

درجهٔ دوم بودن این‌معادله، نسبت‌به m، به‌معنای‌آنست‌که معمولا از نقطهٔ K، دومماس می‌توان برهذلولی رسم‌کرد، که ضریب زاویه‌های‌آنها جوابهای این معادله‌اند. برای اینکه این‌دومماس برهم عمود باشند، باید حاصلضرب‌این دو ضریب زاویه مساوی -1 شود، که ازآنجا به رابطهٔ زیربین αوβ می‌رسیم:

$$(\alpha-۱)^۲+(\beta-۱)^۲=۰$$

واین معادلهٔ دایره‌ای است به‌مرکز $\omega(۱,۱)$ وشعاع مساوی صفر؛ یعنی تنهااز مرکزاین هذلولی، می‌توان دومماس عمود برهم برآن رسم کرد، این مماسها همان مجانبهای هذلولی‌اند وبنابراین نقطه‌های تماس‌به بی‌نهایت می‌روند.

d) دوهذلولی مزدوج مجانبهای‌مشترك دارند وبنابراین، معادلهٔ‌هذلولی مزدوج باید به‌صورت $y=\frac{x+\lambda}{x-۱}$ باشد. ازطرف دیگر، شاخه‌های یك هذلولی متساوی‌الساقین باشاخه‌های‌هذلولی‌مزدوج آن، نسبت‌به‌مجانبها،قرینه‌یکدیگرند، بنابراین باید هذلولی مزدوج از نقطهٔ $(۳,۰)$ بگذرد (قرینهٔ نقطهٔ $(-۱,۰)$ نسبت به‌مجانب $x=۱$). ازاینجا $\lambda=-۳$ بدست می‌آید و معـادلهٔ هذلولی مزدوج $y=\frac{x-۳}{x-۱}$ می‌شود.

e) وقتی که محورهای مختصات رابه اندازهٔ $\frac{۳\pi}{۴}$، درجهت مثلثاتی، دوران دهیم، محورجدید OX برامتداد نیمسازربع دوم‌وچهارم، ومحور جدید OY برامتداد نیمسازربع اول‌وسوم منطبق می‌شود. درحقیقت، در دستگاه محورهای مختصات جدید، محورقاطع هذلولی برمحور عرض منطبق می‌شود و بنابراین معادلهٔ‌آن، به‌اینصورت است (صفحهٔ ۱۷۷ راببینید):

$$\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}-\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}=۱$$

aوb، که‌معرف فاصله‌اند،دردستگاه قدیم‌وجدید یکی‌است: $a=b=۲$. αوβ، مختصات مرکزهذلولی دردستگاه جدیداست. مرکزهذلولی روی محور عرض دستگاه جدید قراردارد، بنابراین: $\alpha=۰$. مقدارβ، عددی منفی وبرابراست با $-\sqrt{۲}$. در نتیجه، معادلهٔ هذلولی، در دستگاه محورهـای جدید ، چنین می‌شود :

$$\frac{(y+\sqrt{۲})^۲}{۴}-\frac{x^۲}{۴}=۱\Longrightarrow y=-\sqrt{۲}\pm\sqrt{x^۲+۴}$$

۳۹۱. a) ساده‌ترین معادلهٔ مقطع مخروطی (یا معادلهٔ کانونی آن)، در بحث مربوط به مقطعهای مخروطی (از صفحهٔ ۱۷۱ به‌بعد)، روشن شده است.

ساده‌ترین معادلهٔ بیضی، هذلولی وسهمی را می‌توان به‌صورت کلی:

$$Ax^۲+By^۲+Cx+D=۰ \quad (۱)$$

نشان داد، زیرا:

۱) برای $A=B=۱$، $C=۰$، $D=-r^۲$، معادلهٔ (۱) به اینصورت در می‌آید:

$$x^۲+y^۲=r^۲ \quad (۲)$$

که معادلهٔ یك دایره است.

۲) برای $A=\frac{۱}{a^۲}$، $B=\frac{۱}{b^۲}$، $C=۰$، $D=-۱$، معادلهٔ (۱) به صورت:

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱ \quad (۳)$$

در می‌آید که معادلهٔ یك بیضی است.

۳) برای $A=\frac{۱}{a^۲}$ ، $B=-\frac{۱}{b^۲}$، $C=۰$ و $D=-۱$ ، معادلهٔ (۱) به صورت:

$$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱ \quad (۴)$$

درمی‌آید، که معادلهٔ یك هذلولی است.

۴) برای $A=۰$ ، $B=۱$ ، $C=-۲p$ ، $D=۰$ ، معادلهٔ (۱) به صورت:

$$y^۲=۲px \quad (۵)$$

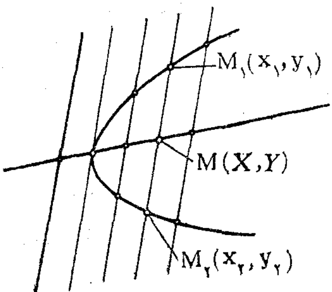
درمی‌آید، که معادلهٔ یك سهمی است.

b) معادلهٔ درجه دوم (۱) وخط زیررا درنظرمی گیریم:

$$y=kx+b \quad (۶)$$

ازحل این دومعادله با هم، نقطه‌های برخوردآنها بدست‌می‌آید: $M_۱(x_۱,y_۱)$

و $M_2(x_2,y_2)$. این دو نقطه ممکن است حقیقی و متمایز، حقیقی و منطبق برهم یا موهومی باشند (درحالت موهومی بودن نقطه‌ها، طولهای M_1 و M_2 وهمچنین عرضهای M_1 و M_2 مزدوج یکدیگرند). پاره‌خط M_1M_2 را وتر گویند، کــه دوانتهای آن ممکن است حقیقی یا موهومی باشد.



شکل ۱۶۷

درهرسه‌حالت، عددهای X و Y که ازتساویهای:

$$X=\frac{x_1+x_2}{2} ، Y=\frac{y_1+y_2}{2} \quad (7)$$

بدست می‌آید، حقیقی‌اند ونقطهٔ $M(X,Y)$، یك نقطهٔ حقیقی‌ازخط (۶) است (شکل ۱۶۷).

حالا همهٔ خطهای موازی خط (۶) را درنظر می‌گیریم، ومکان هندسی نقطه‌های $M(X,Y)$، که ازتساویهای (۷) بدست می‌آید، معین می‌کنیم . این مکان، یکی ازقطرهای منحنی (۱) خواهد بود.

مختصات دونقطهٔ $M_1(x_1,y_1)$ و $M_2(x_2,y_2)$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} Ax_1^2+By_1^2+Cx_1+D=0 \\ Ax_2^2+By_2^2+Cx_2+D=0 \end{cases}$$

تساوی اول را ازتساوی دوم کم‌می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$A(x_2-x_1)(x_2+x_1)+B(y_2-y_1)(y_2+y_1)+ \\ +C(x_2-x_1)=0 \quad (8)$$

اگر $x_2-x_1\neq 0$ باشد، این تساوی چنین می‌شود:

$$A\frac{x_2+x_1}{2}+B\frac{y_2+y_1}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{C}{2}=0 \quad (8')$$

دراین تساوی $X=\frac{x_1+x_2}{2}$ و $Y=\frac{y_1+y_2}{2}$، مختصات نقطهٔ M، و

$k=\frac{y_{2}-y_{1}}{x_{2}-x_{1}}$، ضریب زاویهٔ خط (۶) است. معادلهٔ (´۸) به اینصورت در می‌آید:

$$AX+BkY+\frac{C}{2}=0 \quad (9)$$

ازمعادلهٔ (۹)، معلوم می‌شود که‌قطرمنحنی‌درجه‌دوم به‌معادلهٔ (۱)، یك خط‌راست است. قطر(۹) را مزدوج وترهای با ضریب زاویهٔ k، گویند.

اگر $x_{2}-x_{1}=0$ باشد (و این وضع وقتی پیش می‌آید که وترها موازی محور Oy باشند) ، $y_{2}-y_{1}\neq 0$ می‌شود و از معادلهٔ (۸) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{y_{1}+y_{2}}{2}=0 \implies Y=0$$

یعنی قطرمنحنی،منطبق برمحور Ox است. به‌کمك معادلهٔ (۹) می‌توان،معادلهٔ قطرهای دایره، بیضی، هذلولی وبیضی را، وقتی‌که معادلهٔ آنها به صورت‌کانونی باشد، بدست‌آورد.

۱)درحالتی‌که معادلهٔ (۱)، یك دایره باشد، معادلهٔ قطر(۹)به‌اینصورت درمی‌آید:

$$X+kY=0 \quad (10)$$

ویا:

$$Y=-\frac{1}{k}X \quad (10')$$

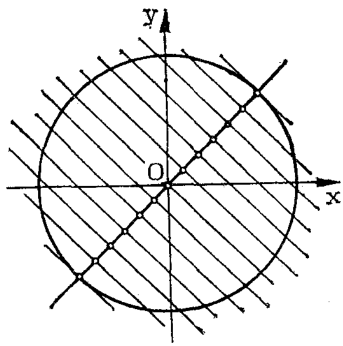
ضریب زاویهٔ این قطر: $k'=-\frac{1}{k}$. به‌این ترتیب، هرقطردایره بروترهای مزدوج خودش عمود است (شکل ۱۶۸). همچنین ازمعادلهٔ(۱۰) معلوم می‌شود که به‌ازای هر مقدار k، قطردایره ازمبداء مختصات (یعنی‌مرکزدایره) عبور می‌کند.

۲) در حـالت بیضی،معادلهٔ قطربه‌اینصورت درمی‌آید:

$$\frac{X}{a^۲}+k\frac{Y}{b^۲}=۰ \quad (۱۱)$$

از معادلهٔ (۱۱)معلوم می‌شود، که قطر بیضی ازمبداء مختصات (یعنی‌مرکز بیضی)عبورمی کند. اگراین‌معادله‌را، نسبت به Y، حل کنیم ، چنین می‌شود:

$$Y=-\frac{b^۲}{a^۲k}X$$



شکل۱۶۸

یعنی ضریب‌زاویهٔ‌آن $k'=-\frac{b^۲}{a^۲k}$ می‌شود وازآنجا :

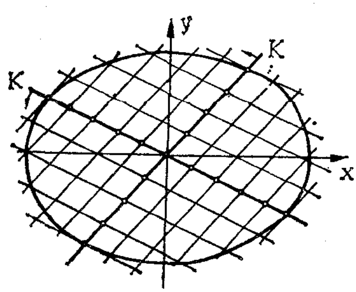
$$k\cdot k'=-\frac{b^۲}{a^۲} \quad (۱۲)$$

رابطهٔ (۱۲) نسبت بهkوk'متقارن است،یعنی‌اگروترهای‌باضریب زاویهٔ k' را درنظربگیریم، قطرمزدوج‌آنها بەضریب زاویهٔ مساویk خواهد شد.

دوقطری که ضریب زاویه‌های آنها در رابطهٔ (۱۲) صدق کنند، قطرهای مزدوج نامیده می‌شوند. هریك‌ازقطرهای مزدوج، وترهای موازی‌دیگری رانصف می کند (شکل۱۶۹).

ازتساوی(۱۲)معلوم‌می‌شودکه‌اگرkمثبت باشد، k' منفی‌است‌وبنابراین، اگرقطری ازربعهای اول‌وسوم بگذرد،مزدوج‌آن‌از ربعهای‌دوم وچهارم عبورخواهدکرد.

اگر k بزرگ شود، یعنی قطـری در جهت مثلثاتی دوران‌کنـد، ازتسـاوی (۱۲) معلوم می‌شودکـه k' ازلحاظ قدرمطلق، کوچك می‌شودوچون



شکل۱۶۹

k' منفی است، قطرمزدوج‌هم درجهت مثلثاتی حرکت می‌کند: قطرهای مزدوج نمی‌توانند برهم منطبق شوند، زیرا اگر $k=k'$ باشد، باید داشته باشیم:

$$k_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}}.$$

اگر $k\to 0$، دراینصورت $|k'|\to\infty$. دراینصورت قطرهای مزدوج بر محورهای بیضی منطبق‌وبرهم عمود می‌شوند.

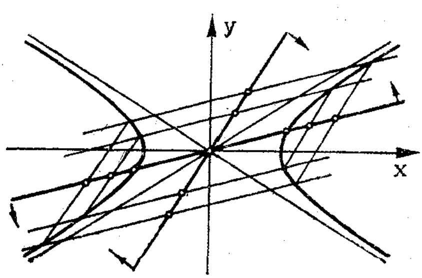
۳) معادلهٔ قطرهذلولی به‌اینصورت درمی‌آید:

$$\frac{X}{a^2}-k\,\frac{Y}{b^2}=0 \quad (13)$$

ازاین‌معادله، معلوم‌می‌شود که‌قطرهذلولی، ازمبداء مختصات(یعنی‌مرکزهذلولی)، می‌گذرد. ضریب زاویهٔ این قطر $k'=\frac{b^2}{a^2k}$، وازآنجا:

$$k\cdot k'=\frac{b^2}{a^2} \quad (14)$$

این تساوی، نسبت به‌kوk' متقارن است. بنابراین قطر با ضریب زاویهٔ k، مزدوج وترهای باضریب‌زاویهٔ k' است وبرعکس دو قطری که ضریب زاویه‌های



شکل ۱۷۰

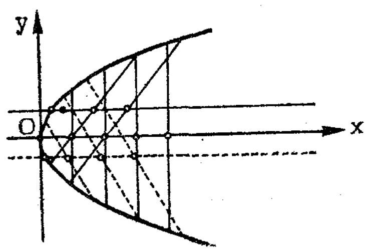
آنها، در رابطهٔ (۱۴) صدق‌کند، مزدوج هم نامیده می‌شوند، هرکدام ازاین دوقطر، وترهای موازی‌دیگری را نصف می‌کند. همچنین ازرابطهٔ (۱۴)معلوم می‌شود که kوk' هم‌علامت‌اند، یعنی هر دوازیك ربع عبورمی‌کنند؛ ضمناً اگر

k بزرگ شود، k' کوچك می‌شود، یعنی اگر یکی ازقطرها درجهت مثلثاتی دوران کند، دیگری درخلاف جهت‌مثلثاتی دوران خواهد کرد (شکل ۱۷۰). در حالت هذلولی، دوقطرمزدوج می‌توانند برهم منطبق‌شوند، اگر $k=k'$ باشد، $k_{1,2}=\pm\frac{b}{a}$ بدست‌می‌آید. دراین‌وضع قطرهای هذلولی: $Y=\frac{b}{a}X$ و $Y=-\frac{b}{a}X$ برمجانبهای هذلولی‌منطبق می‌شود. بنابراین هریك ازمجانبهای هذلولی را می‌توان‌مثل‌دوقطرمزدوج آن‌درنظر گرفت. اگر $k\to 0$، دراینصورت $k'\to\infty$. دراینحالت دوقطرمزدوج عمود برهم بدست می‌آیدکه برمحورهای هذلولی منطبق‌اند.

۴) درحالت سهمی، معادلهٔ قطربه‌اینصورت درمی‌آید:

$$kY-p=0 \Longrightarrow Y=\frac{p}{k} \quad (۱۵)$$

ازاین‌معادله‌نتیجه‌می‌شود که‌همهٔ قطرهای سهمی، موازی بامحور Ox هستند. اگر $k\to\infty$، قطرمزدوج وترهای نظیرآن، برمحور Ox منطبق می‌شود. به این ترتیب تمام قطرهای سهمی، موازی‌بامحور آن هستند (شکل ۱۷۱).



شکل۱۷۱

مثال۱. دو قطر مزدوج، ازبیضی $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ را پیدا کنید. که یکی ازآنها ازنقطهٔ $(4,2)$ عبور کند.

حل. چون قطرهای این بیضی، ازمبداء مختصات‌عبورمی‌کنند، معادلهٔ آنها به‌صورت $y=kx$ است. چون‌یکی ازقطرهاازنقطهٔ $(4,2)$ عبورمی‌کند، $2=4k$

و ازآنجا $k=\frac{۱}{۲}$ بدستمی‌آید؛ ازطرف‌دیگر بین ضریب زاویه‌های دوقطرمزدوج

بیضی، رابطهٔ $kk'=-\frac{b^۲}{a^۲}$ برقرار است، وچون دراینجا $b^۲=۴$ و $a^۲=۸$

است، $k'=-۱$ بدست می‌آید. بنابراین، معادلهٔ دوقطرمزدوج مطلوب‌چنین می‌شود:

$$y=\frac{۱}{۲}x, y=-x$$

مثال۲. سهمی $y^۲=-۸x$ مفروض است. از نقطهٔ $(-۱,۱)$ وتری عبوردهید که درهمین نقطه، نصف شود.

حل. معادلهٔ وترموردنظررا به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$y-۱=k(x+۱)$$

معادلهٔ قطرمزدوج این وترها، $Y=\frac{p}{k}=-\frac{۴}{k}$ است: این قطرباید از وسط وترهای مربوطه عبورکند، یعنی مختصات نقطهٔ $(-۱,۱)$ درآن صدق‌می‌کند:

$$۱=-\frac{۴}{k} \Longrightarrow k=-۴$$

وازآنجا معادلهٔ وترموردنظرچنین می‌شود:

$$۴x+y+۳=۰$$

۳۹۲. اگر $y=m_۱x$ و $y=m_۲x$ رادوقطرمزدوج بیضی اول بگیریم، داریم: $m_۱m_۲=-\frac{b^۲}{a^۲}$ (مسألهٔ ۳۹۱ را ببینید). قطراول، بیضی دوم رادر نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ قطع می‌کند. ضریب زاویهٔ k مماس دراین نقطه، به‌سادگی بدست می‌آید:

$$k_۱=-\frac{b^۲}{a^۲}.\frac{x_۱}{y_۱}=-\frac{b^۲}{a^۲m_۱}$$

وبهمن ترتیب‌معلوم می‌شود: $k_2 = -\frac{b^2}{a^2 m_2}$. بنابراین:

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{1}{m_1 m_2} = -1$$

یعنی مماسهای بر بیضی دوم برهم عمودند.

۳۹۳. خط $y=k(x-c)$، مماسهای $x=a$ و $x=-a$ بر رأسهای هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ را در نقطه‌های $P(a,k(a-c))$ و $Q\big(-a,-k(a+c)\big)$ قطع می‌کند $(c^2=a^2+b^2)$. بنابراین نقطهٔ $E(0,-kc)$، مرکز دایرهٔ به‌قطر PQ خواهد بود و معادلهٔ این دایره چنین می‌شود:

$$x^2+(y+kc)^2=(1+k^2)a^2$$

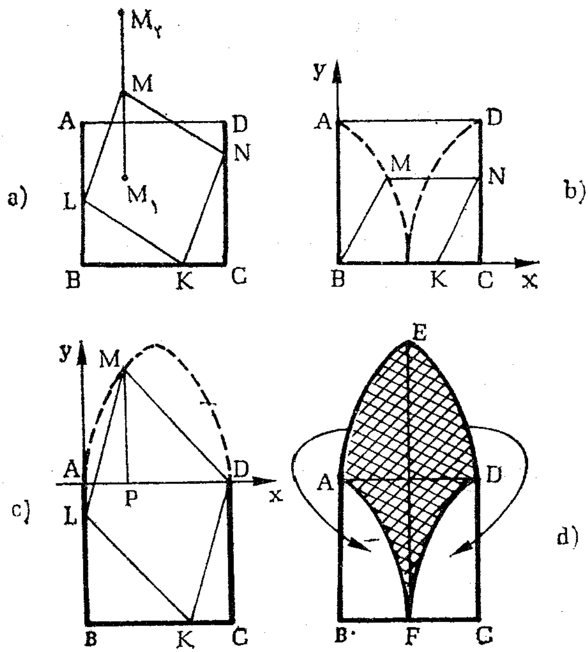
اگر بین این معادله ومعادلهٔ هذلولی، x^2 را حذف‌کنیم، بدست می‌آید:

$$(cy+b^2k)^2=0$$

بنابراین‌دایره برهذلولی، دردونقطهٔ قرینهٔهم، نسبت به‌محور Oy، برهم‌مماس‌اند.

۳۹۴. L، K و N را سه رأس متوالی از لوزی $KLMN$ می‌گیریم، متذکرمی‌شویم که اگر رأس K، واقع برضلع BC را ثابت فرض‌کنیم؛ رأس M، روی پاره‌خط M_1M_2 قرارمی‌گیرد که موازی با AB وبه‌فاصلهٔ $x=kc$ ازآنست (شکل ۱۷۲ — a). جای دوانتهای M_1 و M_2، این پاره‌خط را معین می‌کنیم.

$x<\frac{1}{2}$ می‌گیریم (در حالت $x>\frac{1}{2}$، جای نقطهٔ M، به‌قرینهٔ خود نسبت به‌محورمربع منتقل می‌شود). روشن است که پائین‌ترین وضع نقطهٔ M وقتی بدست می‌آید که رأس L ازلوزی، روی رأس B ازمربع قرار گرفته باشد (شکل ۱۷۲ — b). دراینصورت:



شکل۱۷۲

$$KC=x \;;\; NK=BK=1-x \;;$$

$$NC=\sqrt{(1-x)^2-x^2}=\sqrt{1-2x}$$

به‌این‌ترتیب، نقطهٔ M_1 روی یك‌سهمی قرار گرفته است، که معادلهٔ آن دردستگاه محورهای‌مختصاتی که روی شکل۱۷۲ — b، نشان داده شده است، چنین است:

$$y=\sqrt{1-2x}\ (0\leqslant x\leqslant \tfrac{1}{2})$$

بالاترین وضع نقطهٔ M_2، وقتی‌است که نقطهٔ N بر D منطبق باشد (شکل۱۷۲ — c). عمود M_2P را بر AD فرود می‌آوریم، دراینصورت:

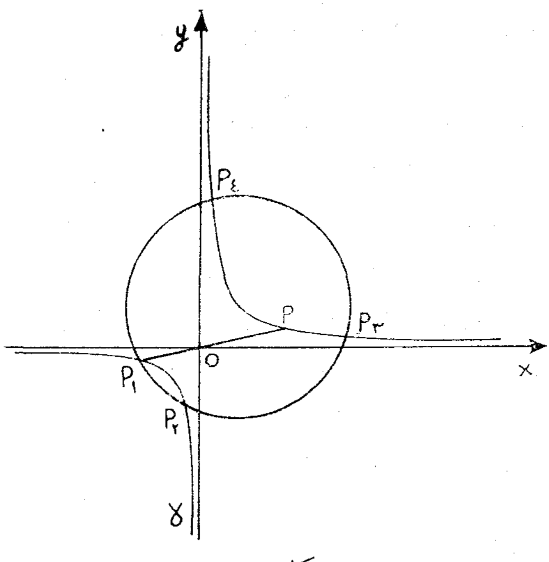
$$KC=x\,;LK=KN=\sqrt{1+x^2}\,;$$

$$MP=LB=\sqrt{1+x^2-(1-x)^2}=\sqrt{2x}$$

به این ترتیب، نقطهٔ M_2 برسهمی قراردارد، که معادلهٔ آن دردستگاه محورهای مختصاتی که روی شکل ۱۷۲ — c نشان داده شده است، چنین است:

$$y=\sqrt{2x} \quad (0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2})$$

بنابراین مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های M، شکلی به‌وجود می‌آورد که از چهار کمان مشابه سهمی درست‌شده است (شکل ۱۷۲ — d). اگر این شکل را، روی پاره‌خط AD و روی محور تقارن EF ببریم، چهارقطعه بدست می‌آید، که می‌توان به کمك آنها، مربعی مساوی مربع ABCD ساخت. درنتیجه مساحت موردنظر برابراست باواحد.



شکل ۱۷۳

۰۳۹۵ ۱) هذلولی متساوی‌الساقین γ، به معادلهٔ $y=\frac{k}{x}$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۷۳). اگر $P(a,\frac{k}{a})$ را روی هذلولی اختیار کنیم، معادلهٔ دایرهٔ به مرکز P و شعاع مساوی $2OP$ چنین می‌شود:

$$(x-a)^2+(y-\frac{k}{a})^2=4(a^2+\frac{k^2}{a^2})$$

برای پیدا کردن مختصات نقطه‌های P_1، P_2، P_3 و P_4، برخورد هذلولی و دایره، باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} y=\dfrac{k}{x} \\ (x-a)^2+\left(y-\dfrac{k}{a}\right)^2=4\left(a^2+\dfrac{k^2}{a^2}\right) \end{cases}$$

با حذف y، بین این دومعادله، به‌معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$a^{2}x^{4}-2a^{3}x^{3}-3(a^{4}+k^{2})x^{2}-2k^{2}ax+k^{2}a^{2}=0$$

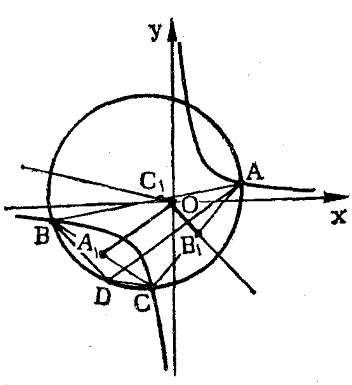
روشن است که $x=-a$، یکی ازریشه‌های این معادله است. با توجه‌به‌رابطهٔ مربوط به‌مجموع ریشه‌ها داریم:

$$x_{2}+x_{3}+x_{4}=3a$$

ازاینجا برای نقطهٔ $G(x_0, y_0)$، مرکزثقل مثلث $P_2P_3P_4$، بدست می‌آید: $x_0=a$، $y_0=\frac{k}{a}$. به‌این‌ترتیب مرکزثقل مثلث $P_2P_3P_4$ برنقطهٔ P، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، منطبق می‌شود و این به معنای آنست‌که مثلث $P_2P_3P_4$ متساوی‌الاضلاع است.

۲) برای ساختن مثلث متساوی‌الاضلاعی‌که رأس A ازآن، روی‌هذلولی معلوم‌باشد، باید روی هذلولی‌نقطهٔ P راچنان پیداکردکه $PA=2PO$ باشد. مکان هندسی نقطه‌هایی را رسم می‌کنیم که نسبت فاصله‌های هر یك از آنها تا نقطه‌های A و O مساوی ۲:۱ باشد. این مکان دایره‌ای به قطر K_1K_2 است (دایرهٔ آپولون)، که درآن K_1 و K_2 عبارتند ازنقطه‌هایی‌واقع برپاره‌خط OA یا امتدادآن، بنحوی‌که OA را به‌نسبت ۲:۱ تقسیم کنند. نقطهٔ برخورد این دایره با هذلولی، همان نقطهٔ P است.

حالااگردایره‌ای به‌مرکز P و شعاع مساوی 2OP رسم کنیم، هذلولی‌رادرچهارنقطه قطع می‌کند، که سه تا ازآنها، رأسهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع‌هستند. تعدادجوابهای مسأله‌به‌تعدادنقطه‌های برخورددایرهٔ آپولون‌باهذلولی‌است.



شکل ۱۷۴

۳۹۶. روی هذلولی $y=\frac{1}{x}$،

سه نقطهٔ $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ و $C(x_3,y_3)$ انتخاب می‌کنیم(شکل ۱۷۴).
قطری از هذلولی که از وسط وتر BC عبور کند، ضریب زاویه‌ای مساوی $\frac{1}{x_2x_3}=\frac{y_2+y_3}{x_2+x_3}$ خواهد داشت(حل مسألهٔ ۳۹۱ را ببینید). بنابراین معادلهٔ خطی که از نقطهٔ A ، موازی این خط رسم شود، چنین است:

$$y=y_1+\frac{1}{x_2x_3}(x-x_1)$$

بهمین ترتیب می‌توان، معادلهٔ دوخط دیگر را هم تشکیل داد:

$$y=y_2+\frac{1}{x_3x_1}(x-x_2)$$

$$y=y_3+\frac{1}{x_1x_2}(x-x_3)$$

بسادگی می‌توان تحقیق کرد که این سه خط در یك نقطهٔ D با این مختصات بهم می‌رسند:

$$x_0=x_1+x_2+x_3 \quad \text{و} \quad y_0=y_1+y_2+y_3$$

حالا باید ثابت کنیم، نقطهٔ D، روی دایره‌ای است که از نقطه‌های A، B و C می‌گذرد. داریم:

$$tg(\widehat{BDC})=\frac{\frac{1}{x_3x_3}-\frac{1}{x_2x_1}}{1+\frac{1}{x_1^2x_2x_3}}\;;\; tg(\widehat{BAC})=\frac{-\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_3x_1}}{1+\frac{1}{x_1^2x_2x_3}}$$

یعنی $tg(\widehat{BDC})=tg(\widehat{BAC})$ و نقطه‌های A، B، C و D روی یك دایره‌اند.

۳۹۷. مرکز تقارن منحنی درجهٔ دوم :

$$f(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \quad (1)$$

را $\omega(\alpha,\beta)$ می‌گیریم. اگر این نقطه، مرکز تقارن منحنی باشد، باید پس از

انتقال مبداء مختصات به‌این نقطه، به‌معادله‌ای برسیم که باتبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$، تغییر نکند. رابطه‌های انتقال‌محورهاچنین است:

$$x = X + \alpha \quad \text{و} \quad y = Y + \beta$$

که اگردرمعادلهٔ (۱) قراردهیم، پس ازساده کردن چنین می‌شود:

$$aX^2 + bY^2 + cXY + (2a\alpha + c\beta + d)X +$$
$$+ (2b\beta + c\alpha + e)Y + (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\alpha\beta + d\alpha + e\beta + f) = 0$$

ودرنتیجه αوβ جواب دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} 2a\alpha + c\beta + d = 0 \\ 2b\beta + c\alpha + e = 0 \end{cases} \quad (2)$$

ازطرف دیگرداریم:

$$\begin{cases} f'_x = 2ax + cy + d: & \text{مشتق } f(x,y) \text{ نسبت به } x: \\ f'_y = 2by + cx + e\ ; & \text{مشتق } f(x,y) \text{ نسبت به } y: \end{cases}$$

ازمقایسهٔ دستگاه (۲) با مقادیر f'_x و f'_y، معلوم می‌شودکه برای پیدا کردن مرکزتقارن یك منحنی درجه دوم (در صورت وجود)، باید دستگاه زیررا حل کرد:

$$f'_x = 0, f'_y = 0$$

اکنون این روش را در مورد معادلهٔ

$$y = mx + n \pm \sqrt{px^2 + qx + r}$$

بکار می‌بریم. این‌معادله رامی‌توان چنین‌نوشت:

$$(y - mx - n)^2 = px^2 + qx + r$$

اگراز دوطرف، یکبارنسبت به‌متغیر x ویکبارنسبت به‌متغیر y مشتق‌بگیریم، به دستگاه زیرمی‌رسیم:

$$\begin{cases} -2m(y - mx - n) = 2px + q \\ 2(y - mx - n) = 0 \end{cases}$$

که ازحل آن به‌جواب زیر(مختصات مرکزتقارن منحنی)، می‌رسیم:

$$x=-\frac{q}{۲p}\ ;\ y=n-\frac{mq}{۲p}\ (p\neq ۰)$$

۰۳۹۸ تحقیق ساده‌است.

۰۳۹۹ نتیجهٔ بحث‌دراین‌جدول داده شده است:

$a=۰$	$b=۰$	$c=۰$	دوخط منطبق برهم
		$c>۰$	دوخط متوازی
		$c<۰$	موهومی
	$b\neq ۰$		سهمی (محور این سهمی بر محورطول قراردارد)
$a\neq ۰$	$b^۲-۴ac=۰$	$a<۰$	یك نقطه
		$a>۰$	دوخط متقاطع
	$b^۲-۴ac>۰$	$a<۰$	بیضی یا دایره
		$a>۰$	هذلولی
	$b^۲-۴ac<۰$	$a<۰$	موهومی
		$a>۰$	هذلولی

۰۴۰۰ ۱) به‌ازای‌مختصات هرنقطهٔ (x,y) ازصفحهٔ محورهای‌مختصات، به‌معادلهٔ درجهٔ دومی‌نسبت به‌m می‌رسیم:

$$(x+۴)m^۲-۸ym-(x-۴)=۰$$

مبین این‌معادله: $\Delta=۴(x^۲+۱۶y^۲-۱۶)$ است. بنابراین برای‌مقادیری

از x و y که درمعادلهٔ $x^2+16y^2-16=0$ یا $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1$ (بیضی c)، صدق کنند، تنها یک مقدار برای m بدست می‌آید. یعنی مکان هندسی نقطه‌هائی از صفحهٔ محورهای مختصات، که ازهر کدام آنها، تنها یکی از خطهای (d) می‌گذرد، عبارتست ازبیضی c. بسادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر ناحیهٔ داخل بیضی را در نظر بگیریم، از آنها، هیچ خطی ازخطهای (d) عبور نمی‌کند، و اگر ناحیهٔ خارجی بیضی را انتخاب کنیم، از هر کدام از نقطه‌های آنجا، دو نمونه ازخطهای (d) عبور کند.

۲) هرخط (d) بر بیضی c مماس است واین مطلب بسادگی، باحل معادلهٔ خط و بیضی بدست می‌آید:

$$\begin{cases}(m^2-1)x-8my+4(m^2+1)=0\\ x^2+16y^2-16=0\end{cases}$$

با حذف x، بین دو معادلهٔ این دستگاه، به معادلهٔ درجه دوم زیر، نسبت به y، می‌رسیم:

$$(m^2+1)^2y^2-4m(m^2+1)y+4m^2=0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow [(m^2+1)y-2m]^2=0$$

وجود ریشهٔ مضاعف برای این معادلـه، به معنای مماس بودن خط d بر بیضی c است.

۳) ضریب زاویهٔ خطهای d به صورت $\frac{m^2-1}{8m}$ است. اگر نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ رادر نظر بگیریم، از آنجا، دو نمونه ازخطهای d می‌گذرد که مقدار m برای هر کدام از آنها، ازمعادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$(\alpha+4)m^2-8\beta m-(\alpha-4)=0 \qquad (1)$$

اگر ریشه‌های این معادله را m_1 و m_2 فرض کنیم، برای اینکه دو خطی که از M می‌گذرند، برهم عمودباشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{m_1^2-1}{8m_1}\times\frac{m_2^2-1}{8m_2}=-1$$

که بااستفاده ازرابطه‌های مربوط به‌جموع وحاصلضرب ریشه‌ها درمعادلهٔ (۱)، رابطهٔ اخیر به اینصورت درمی‌آید:

$$\alpha^2+\beta^2=17$$

یعنی‌مکان M دایره‌ای است به‌مرکز مبداء مختصات (همان مرکز بیضی)وشعاع مساوی $\sqrt{17}$. این‌دایره به دایرهٔ مؤثرمعروف‌است وازهندسه‌هم می‌دانیم که‌شعاع آن مساوی $\sqrt{a^2+b^2}$ است.

۴۰۱. صورت کلی معادلهٔ یك‌دایره چنین‌است:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

مختصات نقطه‌های A ، B و C، باید دراین‌معادله صدق کند. به‌این دستگاه می‌رسیم :

$$\begin{cases}4-4\beta+\alpha^2+\beta^2-R^2=0\\2-2\alpha-2\beta+\alpha^2+\beta^2-R^2=0\\8-4\alpha+4\beta+\alpha^2+\beta^2-R^2=0\end{cases}$$

اگرمعادلهٔ اول‌را بترتیب ازدومعادلهٔ دیگردستگاه کم کنیم، بدست می‌آید:

$$\alpha-2\beta=1,\alpha-3\beta=3$$

که ازآنجا $\alpha=-3$ و $\beta=-2$ بدست می‌آید وباقراردادن دریکی‌ازمعادله های دستگاه $R=5$ می‌شود.

جواب: $(x+3)^2+(y+2)^2=25$.

توضیح. برای حل‌این‌مسأله‌می‌شد ازاین‌خاصیت استفاده‌کرد که مرکز دایره،محل‌برخورد عمودمنصفهای دوضلع AB وAC وشعاع آن مساوی فاصلهٔ مرکز تایکی ازاین نقطه‌هاست.

۴۰۲. راهنمائی. اگر دودایره مماس خارج‌باشند، طول‌پاره‌خط بین‌دو

مرکز برابراست بامجموع دوشعاع.

جواب: $x^{۲}+y^{۲}-۱۰x-۸y+۳۷=۰$

۴۰۳. اگریکی ازنقطه‌های برخورد دودایره را A ومرکزهای آنها را ω و ω' فرض کنیم، وقتی که دودایره برهم عمود باشند، مثلث $\omega A\omega'$، در رأس A قائمه است، یعنی باید داشته‌باشیم:

$$\omega\omega'^{۲}=R^{۲}+R'^{۲}$$

جواب: $(a-\alpha)^{۲}+(b-\beta)^{۲}=R^{۲}+R'^{۲}$

۴۰۴. راهنمائی: مرکزتجانس دو دایره عبارتست از نقطه‌ای مانند ω، بنحوی که، اگرازآن خطی رسم‌شود تادو دایره را بترتیب درنقطه‌های A و A' قطع کند، داشته باشیم $\frac{\omega A}{\omega A'}=\frac{R}{R'}$ (R و R'، شعاعهای دو دایره‌اند).

دودایره دارای دومرکز تجانس‌اندکه بر خطالمرکزین آنها قراردارد (یکی داخل پاره‌خط خطالمرکزین و دیگـری خـارج آن)، بنحوی‌که پاره خط خطالمرکزین را به‌نسبت دوشعاع تقسیم‌کند.

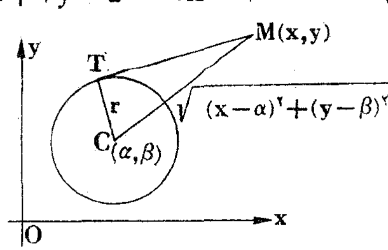
جواب: $\omega_{۱}(-\frac{۱}{۳}\ ,\ -\frac{۱}{۳})$ ، $\omega_{۲}(-۷\ ,\ ۱)$

۴۰۵. راهنمائی: مماسهای مشترك دودایره، ازمرکز تجانس دو دایره می‌گذرند (دومماس مشترك خارجی درمرکزتجانس خارجی ودو مماس مشترك داخلی، درمرکز تجانس داخلی‌بهم می‌رسند).

جواب: مماسهای خارجی: $y-۲=۰$ و $۴x-۳y-۱۰=۰$

مماسهای داخلی: $x-۱=۰$ و $۳x+۴y-۵=۰$

۴۰۶. اگـر از نقطهٔ $M(x,y)$، مماس MT را بر دایـرهٔ به مرکز $C(\alpha,\beta)$ وشعاع مساوی r رسم کنیم، روش است که داریم:



شکل ۱۷۵

$$MT^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2$$

یعنی اگر معادلهٔ دایره، به صورت $f(x,y)=0$ نوشته شود، عبارت $f(x,y)$ مساوی مجذور طول مماسی است که از نقطهٔ $M(x,y)$ بر دایره رسم می‌شود. (شکل ۱۷۵).

جواب: طول مماس مطلوب مساوی ۴ است.

۴۰۷. بسادگی می‌توان ثابت کرد که معادلهٔ مفروض، نمایندهٔ دایره‌ای است که از دو نقطه برخورد (حقیقی یا موهومی) دو دایرهٔ

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=R_1^2\end{cases}\qquad(1)$$

می‌گذرد و مرکز آن برخط‌المرکزین این دو دایره واقع است. ضمناً مرکز این دایره، پاره خط محدود به دو مرکز دایره‌های (۱) را به نسبت λ قطع می‌کند.

۴۰۸. هر دایره‌ای که بادو دایرهٔ

$$(x-5)^2+y^2=5 \text{ و } x^2+(y-10)^2=130$$

یك محور اصلی داشته باشد، بین دسته دایرهٔ زیر است.

$$[(x-5)^2+y^2-5]+\lambda[x^2+(y-10)^2-130]=0$$

که باقرار دادن مختصات نقطهٔ $(1,-3)$ در آن، مقدار λ بدست می‌آید.

جواب: $(x-2)^2+(y-6)^2=50$.

۴۰۹. اگر $M(\alpha,\beta)$ فرض کنیم، مختصات مرکز ثقل مثلث $G(\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3})$ می‌شود:

$$x=\frac{\alpha}{3} \Longrightarrow \alpha=3x;\ y=\frac{\beta}{3}\Longrightarrow\beta=3y$$

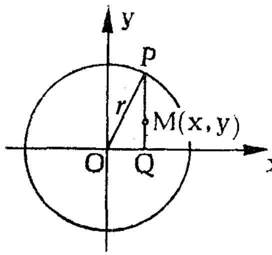
مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ بیضی صدق می‌کند:

$$\frac{9x^2}{a^2}+\frac{9y^2}{b^2}=1\Longrightarrow\frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{3}\right)^2}=1$$

یعنی‌مکان مطلوب بیضی‌است که مرکز ومحورهای‌آن برمرکز ومحورهای‌بیضی مفروض منطبق وطول قطرهای بزرگتر وکوچکترآن بترتیب مساوی ثلث‌طول قطرهای بزرگتر وکوچکتر بیضی مفروض‌است.

۴۱۰. بنابر فرض داریم:

$\lambda = \frac{QM}{MP}$ (شکل ۱۷۶). نقطهٔ M پاره خط PQ را بـه نسبت λ تقسیم می‌کند و بنابـراین عـرض این نقطه چنین می‌شود:



شکل ۱۷۶

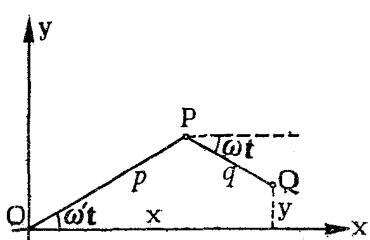
$$y = \frac{\lambda\sqrt{r^{۲} - x^{۲}}}{۱ + \lambda}$$

که پس‌از تبدیلهای ساده چنین می‌شود:

$$\frac{x^{۲}}{r^{۲}} + \frac{y^{۲}}{\left(\frac{\lambda r}{۱ + \lambda}\right)^{۲}} = ۱$$

یعنی‌مکان موردنظرعبارتست ازیك‌بیضی که مرکزآن برمرکز دایره منطبق‌است ومقادیر نیم‌قطرهای بزرگتروکوچکترآن $a = r$ و $b = \frac{\lambda r}{۱ + \lambda}$ می‌باشد.

۴۱۱. در لحظهٔ زمانی t، میلهٔ OP با محـور طول، زاویه‌ای مساوی ωt ومیلهٔ PQ با همان محور، زاویه‌ای مساوی ωt — می‌سازد. برای‌پیدا کردن‌مختصات نقطـهٔ $Q(x, y)$، خط



شکل ۱۷۷

شکستهٔ OPQ را روی دو محور تصویر می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = Ox \text{ روی } OP \text{ تصویر} + Ox \text{ روی } PQ \text{ تصویر} = p\cos\omega t + q\cos\omega t \,; \\ y = Oy \text{ روی } OP \text{ تصویر} + Oy \text{ روی } PQ \text{ تصویر} = p\sin\omega t - q\sin\omega t \,; \end{cases}$$

$$Q\begin{cases} x = (p+q)\cos\omega t \\ y = (p-q)\sin\omega t \end{cases}$$

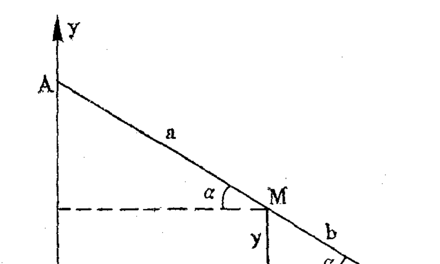
که باحذف t بین‌مختصات نقطهٔ Q، مکان‌آن بدست می‌آید:

$$\frac{x^2}{(p+q)^2} + \frac{y^2}{(p-q)^2} = 1$$

یعنی یك‌بیضی بانیم قطرهای مساوی $p+q$ و $p-q$.

اگر $p>q$ باشد، نقطهٔ Q روی بیضی‌درجهت مثلثاتی‌حرکت‌می‌کند. اگر $p<q$ باشد، نقطهٔ Q روی بیضی‌درخلاف جهت مثلثاتی‌حرکت‌می‌کند. درحالت $p=q$، ضمن یك دوران‌کامل میلهٔ OP، نقطهٔ Q، دوبار پاره خطی ازمحور Ox به‌طول $2(p+q)$ راطی می‌کند.

۴۱۲. دوانتهای پاره‌خط‌را AوBو $MA=a$ و $MB=b$ می‌گیریم (aوb مقادیری ثابت‌اند). اگر زاویهٔ حادهٔ بین AB و محور طول را α و



شکل۱۷۸

مختصات نقطهٔ M را (x,y) فرض‌کنیم، داریم:

$$x = a\cos\alpha \quad \text{و} \quad y = b\sin\alpha$$

وبنابراین، معادلهٔ مکان M به صورت $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$ درمی‌آید واین‌معادلهٔ یك بیضی‌است بەمرکزرأس زاویهٔ قائمه ونیم‌قطرهای مساوی a و b (شکل ۱۷۸).
در حالت خاصی‌که نقطهٔ M در وسط پاره‌خط AB قرار گرفته باشد، مکان مطلوب دایره‌ای است به معادلهٔ $x^{2}+y^{2}=a^{2}$.

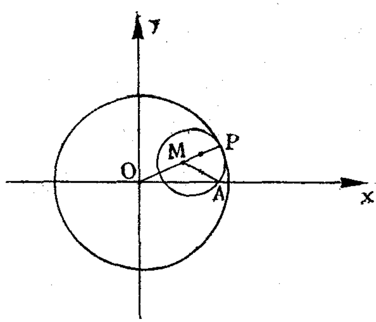
وقتی‌که نقطهٔ M بر امتداد AB باشد، اگر فاصلهٔ M راتا نقطه‌های A و B بترتیب a و b فرض کنیم، معادلهٔ مکان $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$ می‌شود که در هرحال یك بیضی‌است.

۴۱۳. جواب : بیضی $\frac{x^{2}}{14}+\frac{(y-1)^{2}}{7}=1$

۴۱۴. ازشکل۱۷۹پیداست که $MO+MA=OP$، مقداری‌است ثابت ومساوی ۵؛ بنابراین مکان‌نقطهٔ M بیضی است که‌کانونهای‌آن O و A ومقدار ثابت‌آن $2a=5$ است.

جواب :

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2}}{\frac{25}{4}}+\frac{y^{2}}{4}=1$$



شکل۱۷۹

ویا : $16x^{2}+25y^{2}-48x=64$

۴۱۵. جواب : $\frac{x^{2}}{25}-\frac{y^{2}}{144}=1$

۴۱۶. جواب: ۱) $F(5,0)$، $F'(-5,0)$؛ $A(3,0)$، $A'(-3,0)$

۲) مجانبها: $y=\pm\frac{4}{3}x$، خطهای هادی : $x=\pm\frac{9}{5}$ ؛ ۳) $e=\frac{5}{3}$:

۴)معادلهٔ هذلولی‌مزدوج: $\frac{y^۲}{۱۶}-\frac{x^۲}{۹}=۱$، خروج از مرکز آن: $e'=\frac{۵}{۴}$.

۴۱۷. جواب: $\frac{x^۲}{۳۶}-\frac{y^۲}{۹}=۱$

۴۱۸. ۱) $x=\pm\frac{۴}{۵}\sqrt{۳۴}$، $y=\pm ۱/۸$ (چهار نقطه)؛

۲) $x=۹/۶$، $y=\pm\frac{۳}{۵}\sqrt{۱۱۹}$ (دو نقطه).

۴۱۹. اگر روی هذلولی، نقطه‌ای وجود داشته باشد، که برای آن $r_۱=d_۲$ باشد، باتوجه به‌رابطهٔ $\frac{r_۲}{d_۲}=e$، بدست خواهد آمد: $e=\frac{r_۲}{r_۱}$ یا $\frac{ex+a}{ex-a}=e$؛ ازاینجا طول نقطهٔ مجهول بدست می‌آید: $x=\frac{a(۱+e)}{e^۲-e}$.

ولی‌برای هر نقطهٔ واقع برهذلولی باید داشته باشیم: $x\geqslant a$. ازآنجا به‌نامعادلهٔ $\frac{۱+e}{e^۲-e}\geqslant ۱$ می‌رسیم که باتوجه به‌شرط $e>۱$ (که برای هرهذلولی‌درست است)، بدست می‌آید: $e\leqslant ۱+\sqrt{۲}$.

۴۲۰. جواب: $\delta_۱\cdot\delta_۲=\frac{a^۲b^۲}{c^۲}$. بنابراین خاصیت، می‌توان تعریف جدیدی برای هذلولی‌پیداکرد: هذلولی عبارتست ازمکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه، که حاصلضرب فاصله‌های هریك ازآنها تا دوخط متقاطع ثابت، مقدار ثابتی باشد. این دوخط ثابت مجانبهای هذلولی خواهند بود.

۴۲۱. هرقطر هذلولی از مرکزآن می‌گذرد و معادله‌ای به صورت $y=mx$ دارد. ازحل معادلهٔ این‌خط، بامعادلهٔ هذلولی، مختصات دو سرقطر بدست می‌آید:

$$\left(\frac{۲۴}{\sqrt{۹-۱۶m^۲}}, \frac{۲۴m}{\sqrt{۹-۱۶m^۲}}\right) \quad ;$$

$$\left(\frac{-۲۴}{\sqrt{۹-۱۶m^۲}}, \frac{-۲۴m}{\sqrt{۹-۱۶m^۲}}\right)$$

فاصلهٔ هرکدام ازاین‌نقطه‌ها، تامبداء مختصات (مرکزهذلولی)، بایدمساوی ۱۰ باشد، که ازآنجا مقدار m بدست می‌آید.

جواب: $y=\pm\frac{۴}{۹}\sqrt{۳۴}$

توضیح: اگریکی ازدوانتهای قطر مطلوب را $M(x,y)$ بگیریم، اولا باید فاصلهٔ OM مساوی ۱۰ باشد، ثانیاً مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ هذلولی صدق می‌کند. بنابراین مختصات دوانتهای قطرها رااز دستگاه زیرهم می‌توان پیدا کرد:

$$۹x^۲-۱۶y^۲=۵۷۶ \;,\; x^۲+y^۲=۱۰۰$$

۴۲۲. معادلهٔ خطی‌که ازنقطهٔ A می‌گذرد، به این صورت است:

$$y=mx-۳m-۱$$

ازحل این‌معادله بامعادلهٔ هذلولی، بمعادلهٔ درجهٔ دوم زیرمی‌رسیم:

$$(۴m^۲-۱)x^۲-۸m(۳m+۱)x+۴(۹m^۲+۶m+۲)=۰$$

x' و x'' ریشه‌های این‌معادله، طولهای دوانتهای وترهستند وچون نقطهٔ A باید وسط این‌وترباشد، داریم:

$$x_A=\frac{x'+x''}{۲} \Longrightarrow \frac{۴m(۳m+۱)}{۴m^۲-۱}=۳ \Longrightarrow m=-\frac{۳}{۴}$$

بنابراین، معادلهٔ وتر موردنظر به‌صورت $۳x+۴y=۵$ درمی‌آید.

۴۲۳. با توجه به معادلهٔ مجانبها، رابطهٔ $\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲}$ بین a و b بـدست می‌آید. ازطرف دیگراگر شرط مماس بودن هذلولی $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ و خط

$5x-6y-8=0$ رابنویسیم، بـه‌رابطهٔ $25a^2-36b^2=64$ می‌رسیم .
ازاین دورابطه، مقادیر a و b بدست می‌آید.

جواب: $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

۴۲۴. معادلهٔ هذلولی وبیضی‌را، وقتی که کانونهای مشترك داشته باشند، می‌توان به‌اینصورت نوشت:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1\ ,\ \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2-c^2}=1$$

ازحل این‌دومعادله باهم، به‌عنوان‌یك دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی، بدست‌می‌آید:

$$x^2=\frac{A^2a^2}{c^2}\ \text{و}\ y^2=\frac{(c^2-a^2)(A^2-c^2)}{c^2}$$

ازطرف دیگر، برای اینکه دومنحنی برهم مماس‌باشند، باید حاصلضرب مشتقهای دوتابع آنها، درنقطهٔ برخورد، مساوی ۱ — شود. مشتقهای دوتابع‌چنین‌اند:

$$y'=\frac{(c^2-a^2)x}{a^2y}\ ,\ y'=-\frac{(A^2-c^2)x}{A^2y}$$

وحاصلضرب‌آنها چنین می‌شود:

$$\frac{(c^2-a^2)x}{a^2y}\times-\frac{(A^2-c^2)x}{A^2y}=$$
$$=-\frac{(c^2-a^2)(A^2-c^2)x^2}{A^2a^2y^2}=-1$$

۴۲۵. $\delta_1.\delta_2=-b^2$. علامت‌منفی‌به‌معنای اینست که‌کانونهای‌هذلولی دردوطرف مماس برآن قراردارند.

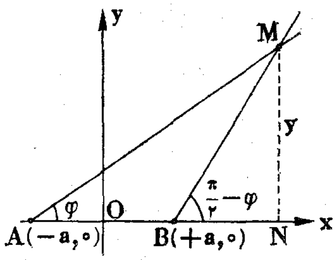
۴۲۶. عرض نقطهٔ M، محل‌برخورد دومیله، را ازمثلثهای AMN و BMN بدست می‌آوریم (شکل۱۸۰):

$$y=(x+a)tg\varphi\ ,\ y=(x-a)cotg\varphi$$

باضرب این‌دورابطه‌دریکدیگر، پارامتر φ حذف‌می‌شود ومعادلهٔ مکان M به‌صورت :

$$x^{2}-y^{2}=a^{2}$$

در می‌آید.



شکل۱۸۰

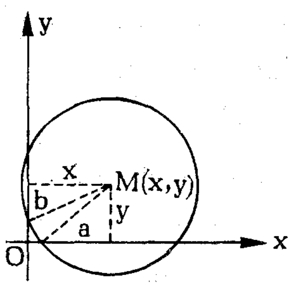
مکان مطلوب عبارتست ازهذلولی متساوی‌الساقینی‌که رأسهای‌آن بر نقطه‌های A وB قراردارد.

۴۲۷. باتوجه به شکل ۱۸۱ بسادگی داریم:

$$x^{2}=R^{2}-b^{2}\ ;$$
$$y^{2}=R^{2}-a^{2}$$

وازآنجا، باحذف R ، بدست می‌آید:

$$x^{2}-y^{2}=a^{2}-b^{2}$$



شکل۱۸۱

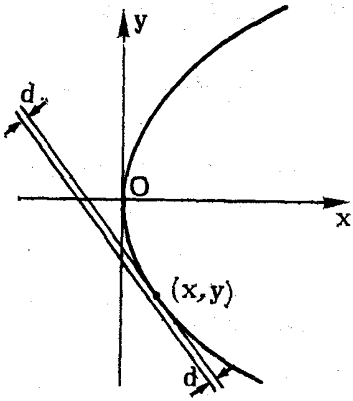
مکان مورد نظر ، یك هذلولی متساوی‌الساقین است.

۴۲۸. مسألهٔ ۴۱۴ راببینید. مکان مطلوب، هذلولی‌است‌که مرکزدایرهٔ مفروض ونقطهٔ مفروض،کانونهای‌آن هستند.

۴۲۹. راهنمائی. محورسهمی، محور تقارن این‌مثلث است. بنابراین‌یك رأس مثلث بررأس سهمی منطبق و ضلع روبروی به این رأس برمحور سهمی عمود است.

جواب: $a_{3}=4p\sqrt{3}$

۴۳۰. راهنمائی: اگرخط راست،سهمی‌را قطع نکند، کوتاهترین‌فاصلهٔ سهمی ازآن عبارتست ازفاصلهٔ نقطه‌ای ازسهمی تا خط،که مماس در آن نقطه برسهمی، باخط مفروض موازی باشد (شکل ۱۸۲).



جواب: $|d|=۲$

۴۳۱. مماس مشترك دو منحنی را $y=mx+n$ بگیرید ودر مورد هریك از منحنی ها ، شرط مماس را بنویسید.

جواب:

$x-۳y+۱۵=۰$;

$x+۳y+۱۵=۰$

شکل۱۸۲ ←

۴۳۲. محور مشترك دوسهمی‌را، محور طول وکانون مشترك را، مبداء مختصات می گیریم. دراینصورت می‌توان معادله سهمی‌هارا به اینصورت نوشت:

$$y^۲=۲p(x+\frac{p}{۲}) \text{ , } y^۲=-۲q(x-\frac{q}{۲})$$

نقطه‌های برخورد دومنحنی بسادگی بدست می‌آید:

$$A\left(\frac{q-p}{۲} \text{ , } \sqrt{pq}\right) \text{ ; } B\left(\frac{q-p}{۲} \text{ , } -\sqrt{pq}\right)$$

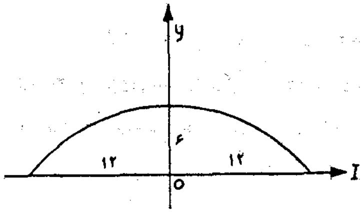
ضریب زاویهٔ مماس برهریك ازدوسهمی در نقطهٔ A چنین می‌شود (به کمك مشتق) :

$$m_۱=\frac{p}{\sqrt{pq}} \text{ ; } m_۲=\frac{-q}{\sqrt{pq}} \Longrightarrow m_۱\cdot m_۲=-۱$$

یعنی دومنحنی درنقطهٔ برخورد A (وبهمین ترتیب درنقطهٔ برخورد B) برهم عمودند .

۴۳۳. چون محورطول، محور سهمی ونقطهٔ $(a,۰)$ رأس آنست، معادلهٔ سهمی به‌صورت $y^۲=۲p(x-a)$ درمی‌آید. برای پیداکردن پارامتر p، از این‌خاصیت استفاده می‌کنیم که سهمی‌مفروض ازنقطه‌های $(۰,\pm b)$ می گذرد.

جواب: $\frac{x}{a}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$



شکل ۱۸۳

۴۳۴. معادلهٔ سهمی (شکل ۱۸۳)

به‌صورت $\frac{x^2}{144}+\frac{y}{6}=1$ و یا

$x^2=-24(y-6)$ درمی‌آید.

جواب: $p=-12$

۴۳۵. معادلهٔ کلی منحنی درجه دوم به صورت:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

است. با قرار دادن مختصات نقطهٔ $(0,0)$ درآن $f=0$ بدست می‌آید. باقرار دادن مختصات چهار نقطه دیگر، چهار ضریب را برحسب ضریب پنجم بدست آورید.

جواب: $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$ (بیضی).

۴۳۶. معادلهٔ منحنی درجه دوم‌را به‌اینصورت می‌گیریم:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

به‌علت اینکه، منحنی ازمبداء مختصات می‌گذرد $f=0$ می‌شود. ازشرط مماس بودن منحنی‌برخط $4x+3y+2=0$ درنقطهٔ $(1,-2)$، رابطه های زیر بدست می‌آید:

$$\frac{2a-2c+d}{4}=\frac{c-4b+e}{3}=\frac{d-2e}{2}$$

و از شرط مماس بودن منحنی بر خط $x-y-1=0$ درنقطهٔ $(1,0)$، این رابطه‌ها بدست می‌آید:

$$\frac{d-c}{1}=\frac{e-2b}{-1}=\frac{-e}{-1}$$

وبه‌کمك این‌رابطه‌ها، معادله منحنی‌مطلوب بدست می‌آید.

جواب: $6x^2-y^2+3xy+2x-y=0$ (هذلولی).

۴۳۷. درحالت کلی منحنی‌درجه دوم

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

ازبرخورد منحنی‌باخط $y=kx$ به‌معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$(bk^2+ck+a)x^2+(d+ek)x+f=0$$

وبرای اینکه این‌معادله، تنها یك‌جواب ساده داشته‌باشد، باید داشته‌باشیم:

$$bk^2+ck+a=0$$

درحالت خاص مسألهٔ ما، این‌معادله چنین‌می‌شود:

$$k^2+k-6=0 \Longrightarrow k=2, -3$$

جواب: $y=2x$ و $y=-3x$

۴۳۸. راهنمائی. منحنی مفروض‌یك سهمی‌است‌وهمهٔ خطهایی که‌با آن‌تنها یك‌نقطهٔ تلاقی‌دارند، موازی بامحور سهمی هستند .

جواب: $\varphi=\frac{\pi}{4}$

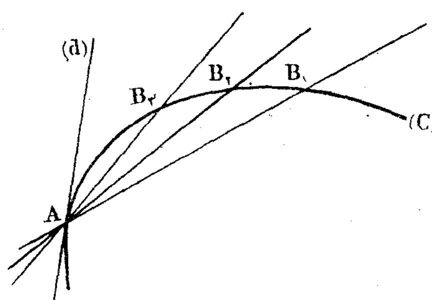
سرگرمی

ریاضیات تنها استفادهٔ ازرابطه‌ها نیست. بسیار پیش‌می‌آید، که اگر بدون توجه به نکته‌هائی‌که در یك مسأله وجود دارد و بدون توجه به تعریف دقیق مفاهیمی که باید مورد استفاده قرار گیرد، به حل سادهٔ آن بپردازیم ، دچـار تناقض بشویم. در هیچ مرحله‌ای از ریاضیات نمی‌توان‌خود را بی‌نیاز از تفکرواستدلال دانست واین‌همان چیزی است‌که نقش انسان را درکارهای علمی مشخص می‌کند.

دراین بخش به‌چند نمونه ازاینگونه مسأله‌ها پرداخته‌ایم وتوصیه می‌کنیم که‌خواننده، قبل ازآنکه توضیحات و راه حلهای کتاب را ببیند، خود را بیازماید و اگر لازم می‌داند به تعریفها و روشهای درسی مـراجعه کند و سپس برای بررسی راه حلهای خود، به کتاب مراجعه‌کند.

خط مماس بر منحنی - دو منحنی مماس برهم

ازهندسه می‌دانیم که اگر خطی‌مثل AB_1، منحنی (C) رادردو نقطهٔ A و B_1 قطع کند (شکل ۱۸۴)، وقتی که نقطهٔ B_1 روی منحنی (C) به طرف نقطهٔ

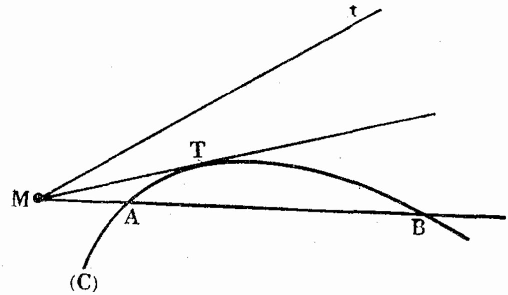


شکل ۱۸۴

A میل کند، خط AB_1 بطرف مماس (d) میل خواهد کرد. بنابراین خط مماس برمنحنی را می‌توان خط قاطعی دانست که دو نقطهٔ برخورد آن با منحنی برهم منطبق شده باشد.

منحنی (C) و نقطهٔ M را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۸۵). خطی که از نقطهٔ M عبور کند، ممکن است منحنی را مثلا در دونقطهٔ A و B قطع کند، تا در نقطهٔ T بر آن مماس باشد، ویا نقطهٔ برخوردی با منحنی نداشته باشد. اگر معادلهٔ منحنی (C) را با معادلهٔ خطی که از نقطهٔ M می‌گذرد، به عنوان یك دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی در نظر بگیریم، با حذف یکی‌از مجهولهای

y و x، بین آنها، در وضع مفروض بیك معادلهٔ درجهٔ دوم می‌رسیم کـه در حالت اول دو ریشه حقیقی، درحالت دوم دوریشهٔ مساوی (یك ریشهٔ مضاعف) ودرحالت



شکل ۱۸۵

سوم دو ریشهٔ موهومی دارد.

بنابراین می‌توان گفت : یك خط وقتی بر منحنی مماس است که از حل معادلهٔ آن با معادلهٔ منحنی، به معادله‌ای برسیم که یك ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

شبیه **همین** تعریف را درمورد دو منحنی مماس بریکدیگر هم، می‌توان قبول کرد: دو منحنی وقتی بر هم مماس‌اند که از حل معادله‌های آنها باهم (مثل دومعادله دو مجهولی)، به معادله‌ای برسیم که یك ریشهٔ مضاعف داشته باشد .

حالا به این مسأله‌ها توجه کنید:

مسألهٔ ۱. ازنقطهٔ $M(۱,۵)$ مماسهایی بردایرهٔ

$$x^۲+y^۲-۶x-۲y+۶=۰$$

رسم کرده‌ایم. مطلوبست مختصات نقطه‌های تماس.

حل. ضریب زاویهٔ خطی‌راکه ازنقطهٔ M عبور می‌کند، m می گیریم. معادلهٔ خط به‌صورت $y=mx-(m-۵)$ درمی‌آید. برای اینکه این خط بردایرهٔ مفروض مماس باشد، باید ازحل دومعادلـهٔ آنها باهم، به‌معادلهٔ درجـهٔ

دومی باریشهٔ مضاعف، برسیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x-2y+6=0 \\ y=mx-(m-5) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (m^2+1)x^2-2(m^2-4m+3)x+m^2-8m+21=0$$

شرط وجود ریشهٔ مضاعف را دراین معادله می‌نویسیم:

$$(m^2-4m+3)^2-(m^2+1)(m^2-8m+21)=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -16m-12=0$$

همانطور که می‌بینیم، به معادله‌ای درجهٔ اول نسبت به m رسیدیم که از آنجا $m=-\frac{3}{4}$ بدست می‌آید. ظاهراً ازاینجا باید این نتیجه راگرفت که ازنقطهٔ M تنها یك مماس می‌توان بردایرهٔ مفروض رسم کرد. مختصات نقطهٔ تماس هم بسادگی بدست می‌آید. وقتی که معادلهٔ درجه دومی‌ریشهٔ مضاعف داشته باشد،این ریشهٔ برابربا $-\frac{b}{2a}$ است و بنابراین اگرنقطهٔ تماس را T فرض‌کنیم،داریم:

$$x_T=\frac{m^2-4m+3}{m^2+1}=\frac{(-\frac{3}{4})^2-4(-\frac{3}{4})+3}{(-\frac{3}{4})^2+1}=\frac{21}{5}$$

وبا قرار دادن مقادیر xوm در معادلهٔ خط، عرض نقطهٔ تماس بدست می‌آید:

$$y_T=-\frac{3}{4}\times\frac{21}{5}+\frac{3}{4}+5=\frac{13}{5}\ ;\ T(\frac{21}{5}\ ,\ \frac{13}{5})$$

ولی ازطرف دیگر می‌دانیم که ازیك‌نقطهٔ واقع درخارج دایره، دومماس‌می‌توان برآن رسم‌کرد[1] ونتیجه‌ای‌را که دراینجا بدست‌آوردیم‌باید نادرست یاناقص‌باشد.

۱) بطورکلی تعداد مماسهایی‌که ازیك نقطه بر یك منحنی می‌توان رسم کرد، مساوی درجه معادلهٔ منحنی (نسبت بهxوy) است. بنابراین همیشه ازیك نقطهٔ مفروض بریك منحنی درجه دوم، دومماس می‌توان رسم‌کرد. این دو مماس ممکن است حقیقی و متمایز ، حقیقی و منطبق بر هم و یا موهومی باشند. یعنی معادله‌ای‌که برای تعیین m، ضریب زاویهٔ مماس، بدست می‌آید باید درجه دوم باشد (بادو ریشه حقیقی یاموهومی یا یك ریشهٔ مضاعف) نه درجهٔ اول.

اگر باروش دیگری به جستجوی نقطه‌های تماس بپردازیم ، دقیق‌تر به ناقص بودن این نتیجه پی‌می‌بریم.

مختصات نقطهٔ تماس‌را $T(\alpha,\beta)$ می گیریم، بنابراین ضریب زاویهٔخطی که از M وT می گذرد (خط مماس)، چنین می‌شود:

$$m_{MT}=\frac{\beta-۵}{\alpha-۱}$$

از طرف دیگر، ضریب زاویهٔ مماس‌را باقرار دادن مختصات نقطهٔ تماس‌درمشتق تابع هم می‌توان حساب کرد:

$$y'=\frac{x-۳}{۱-y}\Longrightarrow m_{MT}=\frac{\alpha-۳}{۱-\beta}$$

از تساوی دو مقداری‌که برای ضریب زاویهٔ مماس بدست‌آوردیم، این‌رابطه بین αوβ بدست می‌آید:

$$\alpha^۲+\beta^۲-۴\alpha-۶\beta+۸=۰$$

ضمناً مختصات نقطهٔ تماس، درمعادلهٔ دایره هم صدق می کند:

$$\alpha^۲+\beta^۲-۶\alpha-۲\beta+۶=۰$$

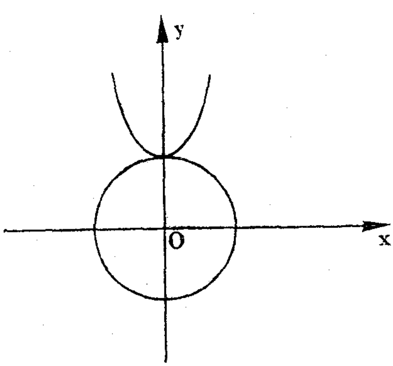
واز حل این دو معادله‌با یکدیگر، مقادیر α و β، یعنی‌مختصات دونقطهٔ تماس بدست می‌آید:

$$T_۱(\frac{۲۱}{۵},\frac{۱۳}{۵}) \text{ و } T_۲(۱,۱)$$

چرا مختصات نقطهٔ $T_۲$ باروش اول بدست نمی‌آید؟ چگـونه می‌توان با همان روش به وجود این نقطه هم پی‌برد وآنرا پیداکرد؟

مسألهٔ۴۰. R را طوری پیدا کنید که دایرهٔ $x^۲+y^۲=R^۲$ بر سهمی $y=x^۲+۲$ مماس باشد.

حل. رسم هندسی (شکل۱۸۶) بخوبی‌روشن می کندکه مسأله یك‌جواب دارد: $R=۲$. به‌حل‌مسأله به طریق تحلیلی می‌پردازیم: اگر بین‌معادلهٔ دایره و



شکل ۱۸۶

معادلهٔ سهمی، x را حذف کنیم، بدست می‌آید:

$$y^{۲}+y-(R^{۲}+۲)=۰$$

برای اینکه، دومنحنی برهم‌مماس باشند، بایداین‌معادله ریشه مضاعف‌داشته‌باشد. شرط وجود ریشهٔ‌مضاعف چنین‌است:

$$\Delta=۱+۴(R^{۲}+۲)=$$
$$=۴R^{۲}+۹=۰$$

که ریشه‌های‌آن نسبت به R موهومی است وظاهراً باید نتیجه گرفت که چنین دایره‌ای که برسهمی مفروض‌مماس‌باشد، وجود ندارد.

چرا این‌نتیجهٔ نادرست بدست‌آمد؟ اشکال‌کار درکجاست؟

مسألهٔ ۴۹. سهمی $y=x^{۲}-۳x+۳$ و هذلولی $y=\frac{۱}{x}$ مفـروض‌اند. وضع برخوردآنها را بررسی‌کنید.

حل. ازحل معادلهٔ سهمی وهذلولی، بسادگی بدست می‌آید.

$$x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱=۰\Longrightarrow(x-۱)^{۳}=۰\Longrightarrow x=۱$$

به این‌ترتیب دومنحنی تنها در نقطهٔ $A(۱,۱)$ بهم می‌رسند و چون در نقطهٔ به طول ۱، عبارت $(x-۱)^{۳}$ تغییر علامت می‌دهد، دومنحنی در این نقطه از هم عبور می‌کنند.

ازطرف دیگر اگرمعادلهٔ مماس برهـریك از این دو منحنی را در نقطهٔ برخورد بدست‌آوریم، برای هردو منحنی، خط $x+y=۲$ پیدا می‌شود، یعنی دومنحنی درنقطهٔ A، مماس مشترك دارند وبنابراین برهم مماس‌اند.

این وضع را چگونه توجیه می‌کنید؟

محاسبهٔ حد

مسالهٔ۴۹. مطلوبست حد تابع $y=\dfrac{\text{Arc}\sin 2x-2\,\text{Arc}\sin x}{x^3}$، وقتی x بسمت صفر میل کند.

روش‌اول. $\text{Arc}\sin 2x=\alpha$ و $\text{Arc}\sin x=\beta$ می‌گیریم، دراینصورت $\sin\alpha=2x$ و $\sin\beta=x$ و $\sin\alpha=2\sin\beta$ می‌شود. تابع مفروض رامی‌توان چنین نوشت:

$$y=\frac{\alpha-2\beta}{\sin^3\beta}=\frac{\alpha}{\sin^3\beta}-\frac{2\beta}{\sin^3\beta}=\frac{8\alpha}{\sin^3\alpha}-\frac{2\beta}{\sin^3\beta}$$

می‌دانیم‌که $\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{\lambda}{\sin\lambda}=1$. در مسألهٔ ما، وقتی‌که x بسمت صفر میل کند، α و β هم‌بسمت صفر میل می‌کنند وچون :

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\sin\beta}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1$$

داریم:

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{\alpha,\beta\to 0}\left(\frac{8}{\sin^2\alpha}-\frac{2}{\sin^2\beta}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha,\beta\to 0}\left(\frac{8}{\sin^2\alpha}-\frac{8}{\sin^2\alpha}\right)=0$$

روش‌دوم. ازقاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-4x^2}}\right]=$$

$$= \underset{x\to ۰}{\text{حد}}\left[\frac{۲}{۳}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{۳x^۲}{x^۲\sqrt{۱-x^۲}\cdot\sqrt{۱-۴x^۲}\left(\sqrt{۱-x^۲}+\sqrt{۱-۴x^۲}\right)}\right]=۱$$

حد y کدامیك ازاین دومقدار است: ۰ یا ۱؟ چرا دوروش مختلف، دو جواب مختلف بدست داده است؟

چند محاسبه

مسألهٔ ۵. ازدوعدد $a=\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۵}$ و $b=\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۴}$، کدام‌بزرگترند؟

حل. اگر بجای ریشهٔ سوم، باریشهٔ دوم سروکار داشتیم، مقایسهٔ دو عدد بسادگی انجام‌می‌شد. مثلا اگربخواهیم‌دوعدد $x=\sqrt{۲}+\sqrt{۵}$ و $y=۲+\sqrt{۳}$ را مقایسه کنیم، می‌نویسیم:

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۵}\wedge ۲+\sqrt{۳}$$

(علامت $\wedge$ را به‌معنای کوچکتر یا بزرگتر گرفته‌ایم). چون دوطرف نامساوی مثبت است، می‌توانیم آنرا مجذور کنیم:

$$۲+۵+۲\sqrt{۱۰}\wedge ۴+۳+۴\sqrt{۳}\Longrightarrow\sqrt{۵}\wedge\sqrt{۶}$$

وچون $\sqrt{۵}<\sqrt{۶}$ پس $x<y$.

ولی این روش را برای مسألهٔ مفروض نمی‌توان بکار برد (آزمایش کنید). آیا باید کعب عددهارا باتقریب لازم بدست‌آورد؟ می‌دانید که کعب گرفتن احتیاج به وقت زیادی دارد، بخصوص اگر برای اطمینان، ناچار باشیم مثلا تا یکهزارم تقریب محاسبه کنیم. البته اگر حوصله بخرج دهیم، به این نتیجه‌ها می‌رسیم:

$$a=\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۵}\,\#\,۱/۲۶۰+۱/۷۱۰=۲/۹۷۰$$

$$b=\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۴}\,\#\,۱/۴۴۲+۱/۵۸۷=۳/۰۲۹$$

وبنابراین نتیجه بگیریم: $a<b$.

اگر بجای ریشهٔ سوم، مثلاباریشهٔ پنجم‌یاهفتم سروکار داشته‌باشیم، دیگر محاسبهٔ مستقیم (بدون استفاده از جدولهای لگاریتم)، تقریباً غیر ممکن می‌شود .

آیا راه حل ساده‌ای بنظرتان می‌رسد؟ کمی فکر کنید، نوع عددها شما را راهنمائی می‌کند.

مسألهٔ ۶. می‌خواهیم حاصل عبارت:

$$f(x)=x^{۷}-۴x^{۶}+۵x^{۴}-۵x^{۳}-۶x^{۲}+۳۰x-۱۱$$

را به‌ازای $x=۲+\sqrt{۳}$ بدست‌آوریم.

آیابرای حل این‌مسأله، به محاسبهٔ مستقیم بپردازیم؟ می‌دانیدکه این‌راه بسیار مفصل وخسته‌کننده است. چه روشی‌برای این محاسبه پیشنهاد می‌کنید؟

مسألهٔ ۷. می خواهیم حاصل عددی عبارت :

$$A=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۷}+\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۷}$$

را پیدا کنیم.

چه راه حلی پیشنهاد می‌کنید؟ آیا راهی غیراز روش مستقیم محاسبه وجود دارد؟

مسألهٔ ۸. برای محاسبهٔ حاصل‌این عبارت چه راه حلی‌پیشنهاد می‌کنید؟

$$\frac{a^{۴}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{۴}}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^{۴}}{(c-a)(c-b)}$$

مسألهٔ ۹. می‌دانیم‌که اگر منحنی (C) ، شامل منحنی (C') هم باشد، درجهٔ معادلهٔ منحنی (C)، ازدرجهٔ معادلهٔ منحنی (C') کمتر نیست (یعنی‌باآن مساوی ویا ازآن بیشتراست). مثلا معادلهٔ نیمساز ربع اول وسوم $x-y=۰$ است، ولی معادله دو نیمساز محورهای مختصات (که شامل نیمساز ربع اول و سوم هم می‌باشد) به‌صورت $x^{۲}-y^{۲}=۰$ در می آید، که از درجهٔ بالاتری است .

حالا نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ را در نظر می‌گیریم، معادلهٔ این نقطهٔ را (یعنی معادله‌ای راکه تنها مختصات این نقطه، در آن صدق کند) می‌توان به صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0$ نوشت. ازطرف دیگر، معادلهٔ خطی‌که از نقطهٔ A می‌گذرد، به‌صورت $mx-y=m\alpha-\beta$ درمی‌آید. این خط شامل نقطهٔ A است، ولی درجهٔ معادله‌اش، از درجهٔ معادلهٔ نقطه، کمتراست. به‌این تناقض چه جوابی می‌دهید؟

***

حالا به بررسی وحل این۹ مسأله می‌پردازیم.

حل مسألهٔ ۱. ابتدا به‌این قضیه توجه می‌کنیم:

اگر در معادلهٔ

$$ax^n+bx^{n-1}+\dots+kx+l=0 \qquad (1)$$

ضریب درجهٔn، یعنیa، بسمت صفر میل‌کند، یکی‌از ریشه‌ها، بسمت بی‌نهایت میل می‌کند.

بدون اینکه وارد اثبات دقیق این قضیه بشویم، یادآوری می‌کنیم‌که اولا هرمعادلهٔ درجهٔ n (nعددی صحیح است). همیشه دارایn ریشه است(که البته ممکن‌است بعضی‌ازآنهاموهومی یاتکراری باشند)، ثانیاً حاصلضرب‌این n ریشه (حقیقی یاموهومی)ازلحاظ قدرمطلق برابراست با قدر مطلق نسبت‌مقدار ثابت معادله‌برضریب درجهٔ n:

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{l}{a}$$

وروشن است‌که وقتیa بسمت صفر میل‌کند، $\frac{l}{a}$ ودرنتیجه حاصلضرب ریشه‌ها بسمت بی‌نهایت میل می‌کند واین به‌معنای‌آنست‌که لااقل یکی از ریشه‌ها بسمت بی‌نهایت میل خواهدکرد.

روشن است‌که اگر $b\neq 0$ باشد، معادلهٔ:

$$bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+kx+l=0$$

دارای $n-1$ ریشهٔ مشخص (حقیقی یا موهومی) خواهد بود و بنابراین در چنین صورتی‌تنها یکی ازریشه‌های معادلهٔ (۱) بسمت بی‌نهایت میل می‌کند.

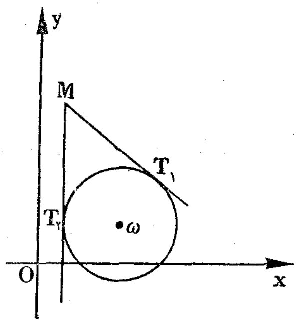
آیا ازاینجا می‌توان این‌نتیجه را گرفت که مثلا هر معادلهٔ درجه اول، معادلهٔ درجه دومی‌است که یك ریشهٔ آن بی‌نهایت است؟ یا بطور کلی هر معادلهٔ درجه nرا معادلهٔ درجهٔ m به حساب‌آورد $(m>n)$ که $m-n$ ریشهٔ آن مساوی بی‌نهایت است؟ روشن است که نه! هر معادله، تنها به تعداد درجهٔ خود ریشه دارد، نه‌بیشتر و نه کمتر. بهمین مناسبت تشخیص درجهٔ معادله، یکی از اساسی‌ترین نکته‌هایی است‌که باید برای حل‌معادله درنظر گرفته شود. به‌این معادلهٔ مثلثاتی توجه‌کنید:

$$a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\sin x\cos x=d \qquad (۲)$$

این معادله، نسبت به سینوس وکسینوس ودرنتیجه نسبت به تانژانت، از درجهٔ دوم است، بنابراین اگرضمن عمل، بدون توجه به ضریبهای خاص آن، روشی را برای حل انتخاب‌کردیم‌که مثلا به معادلهٔ درجه اولی، نسبت به تانـژانت، رسیدیم، به این معناست‌که این‌بایدآنرا، معادلهٔ درجهٔ دومی‌به حساب آوردکه ضریب درجهٔ دوم‌آن بسمت صفرمیل‌کرده است. اگر درمعادلهٔ (۲) داشته‌باشیم $a=d$ وبرای حل‌آن، مجهولها را برحسب $tg x$ بنویسیم، چنین وضعی پیش می‌آید، که در اینصورت $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ هم یك رشته از جوابهای معادله است (که به‌ازای‌آنها، $tg x$ بسمت بی‌نهایت میل‌می‌کند).

درمورد روش اول حل‌مسألهٔ ۱هم، چنین وضعی پیش آمـده است. چون ازیك نقطهٔ همیشه دومماس (حقیقی یاموهـومی) می‌توان بریك منحنی درجـه دوم رسم‌کرد، وقتی‌که می‌بینیم برای محـاسبهٔ ضریب زاویهٔ مماس،بیك معادلهٔ درجه اول رسیده‌ایم، باید آنرا معادلهٔ درجه دومی به حساب آورد،که ضریب درجه دوم‌آن بسمت صفر وبنابراین یکی از ریشه‌های آن بسمت بی‌نهایت میل

کرده است. در واقـع، اگـر دایرهٔ مفـروض را در دستگاه محـورهای مختصات رسم کنیم، معلوم می‌شود که یکی از دوممـاس مرسوم از نقطهٔ $\mathbf{M}$ بر آن، خطی است موازی محور عرض و بنابـراین ضریب زاویـه‌ای مساوی بی‌نهایت دارد (شکل ۱۸۷).



شکل ۱۸۷

بنابراین، باتوجه به این‌مطلب، در راه حل اول هـم متوجه می شدیم که یکی‌ازمماسها برمحورطول عموداست وچون ازنقطهٔ$\mathbf{M}$ می گذرد، معادله‌ای به‌صورت $x=1$ دارد، که باقرار دادن این مقدار x، در معادلهٔ دایره، عرض نقطهٔ T_2 بدست می‌آید.

حل‌مسألهٔ ۴. سهمی ودایره، درحالت کلی، می‌توانند چهارنقطهٔ برخورد داشته باشند. اگر ازحل معادلهٔ دایره ومعادلهٔ سهمی‌به معادلهٔدرجه دومی‌برسیم، وجود ریشهٔ مضاعف، درچنین معادلهٔ درجه دومی، به معنای اینست که سهمی و دایره در دونقطه برهم مماس‌اند. به‌این‌مثال توجه کنید:

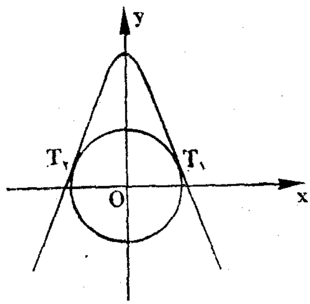
اگر دایرهٔ $x^2+y^2=R^2$ و سهمی $x^2+y=5$ در دو نقطه بـر هم مماس باشند، مقدار R و مختصات نقطه‌های تماس را پیداکنید.

باهمان روش حل تحلیلی مسالهٔ ۲، مجهول x^2 را بین دو معادله حذف می کنیم، به معادلهٔ درجه دوم زیر، نسبت به‌مجهول y، می‌رسیم:

$$y^2-y-(R^2-5)=0 \qquad (1)$$

شرط وجود ریشهٔ مضاعف را دراین معادله می‌نویسیم:

$$\Delta=1+4(R^2-5)=0 \Longrightarrow R^2=\frac{19}{4}$$



شکل۱۸۸

که در اینصورت $y=\frac{۱}{۲}$ می‌شود؛ یعنی سهمی و دایره در نقطه‌ای به عرض $\frac{۱}{۲}$ بر هم مماس‌اند. ولی به ازای $y=\frac{۱}{۲}$، دو مقدار برای x بدست می‌آید: $x=\pm\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$، و چون $y=\frac{۱}{۲}$، ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۱) است، دو نقطهٔ $T_{۱}(\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}\ ,\ \frac{۱}{۲})$ و $T_{۲}(-\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}\ ,\ \frac{۱}{۲})$ نقطه های تماس دایره و سهمی می‌شود.

در مسألهٔ ۲، دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}=R^{۲}$ و سهمی $y=x^{۲}+۲$ نمی‌توانند دردو نقطه برهم مماس باشند وبهمین مناسبت برای R، مقداری موهومی‌بدست آمده است.

مسألهٔ ۲ را چگونه حل‌کنیم. باید ازحل معادلهٔ دایره ومعادلهٔ سهمی با یکدیگر به‌معادلهٔ درجهٔ چهارمی‌برسیم که یك‌ریشهٔ مضاعف داشته‌باشد. برای‌این منظور، مجهول yرا بین‌دو معادله حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}=R^{۲} \\ y=x^{۲}+۲ \end{cases} \Longrightarrow x^{۴}+۵x^{۲}+۴-R^{۲}=۰$$

برای‌اینکه‌این‌معادله، تنها‌یك‌ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید بامعادله‌ای که‌ازمشتق آن بدست می‌آید، یك ریشهٔ مشترك پیدا کند. معادلهٔ مشتق چنین است:

$$۴x^{۳}+۱۰x=۰$$

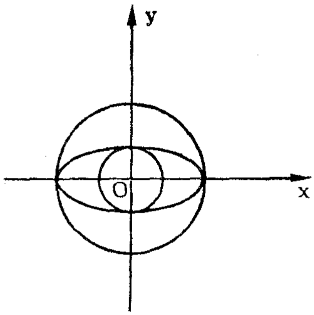
که تنها یك ریشهٔ حقیقی $x=۰$ دارد. برای اینکه $x=۰$ ریشهٔ معادلهٔ درجه چهارم باشد، باید درآن صدق کند، که در اینصورت به رابطهٔ $۴-R^{۲}=۰$

ویا $R=2$ می‌رسیم، که جواب مسأله است.

حالا ازخواننده می‌خواهیم که این‌مسأله را تفسیر کند.

مسأله. R را طوری پیـدا کنید که دایـرهٔ $x^2+y^2=R^2$ بر بیضی $x^2+4y^2=4$ مماس باشد.

شکل ۱۸۹ به روشنی نشان می‌دهدکه $R=1$ و $R=2$ جواب مسأله است ودر هرمورد هم، دایره دردو نقطه بربیضی مماس است.



شکل ۱۸۹

ولی اگربه طریق‌تحلیلی دنبال حل مسأله برویم، باحذف x^2 بین دو معادله، به معـادلهٔ $3y^2=4-R^2$ می رسیم. و برای اینکه، این معادله ریشه مضاعف داشته باشد، باید$R=2$ شود، یعنی بااین روش تنهـا یکی از دایره های مماس بدست می‌آید. اگر هم بین دومعادله،y^2را حذف‌کنیم، به معـادلهٔ $3x^2=4R^2-4$ می‌رسیم، که به‌ازای $R=1$، ریشهٔ‌مضاعف‌دارد: با این روش هم، تنها یکی‌از دایره‌ها (منتهی دایرهٔ دیگر)، بدست می‌آید.

چرا نمی‌توان هردو جواب را، بایك روش بدست‌آورد؟ چرا در هریك ازاین روشها، یکی ازجوابها پیدا نمی‌شود؟

حل‌مسألهٔ ۳۰. درابتدای فصل، این تعریف را پذیرفتیم:

دو منحنی وقتی بر هم مماس‌اند، که از حل معادله‌هـای آنها با هم، به معادله‌ای برسیم که یك ریشه مضاعف داشته باشد.

این تعریف دقیق نیست و وقتی‌که در مسألهٔ ۳، با استناد به آن، نتیجه گرفتیم که: چون ازحل معادلهٔ سهمی وهذلولی به معادله‌ای رسیدیم که دارای ریشهٔ تکراری ازمرتبه سوم است (ونه ریشهٔ مضاعف) و بنابراین برهم مماس نیستند، درست نیست.

موضوع‌دومنحنی مماس‌برهم رادقیق‌تر بررسی کنیم. تعریف‌دقیق دومنحنی مماس بریکدیگر چنین است:

شرط لازم و کافی برای اینکه دو منحنی (C) و (C') در نقطهٔ A بر هم مماس باشند، اینست که خط مماس بر منحنی C در این نقطه، بر خط مماس بر منحنی (C') در این نقطه، منطبق باشد. به‌عبارت دیگر تنها وقتی دو منحنی به معادله‌های $y=f(x)$ و $y=\varphi(x)$ درنقطه A به‌طول α برهم مماس‌اند که داشته باشیم: $f'(\alpha)=\varphi'(\alpha)$.

ازلحاظ جبری، ازحل معادله‌های دو منحنی (یا یك خط ویك منحنی) مماس برهم، به معادله‌ای می‌رسیم که نسبت به x ریشهٔ تکراری دارد (که ممکن است ازمرتبهٔ زوج ویااز مرتبهٔ فردباشد)، ولی این‌شرط کافی نیست، یعنی وقتی ازحل دومعادله بایکدیگر، به‌معادله‌ای باریشهٔ تکراری برسیم، ممکن‌است‌نمایش تغییرات‌آنها برهم مماس باشند وممکن است برهم مماس نباشند.

البته وقتی که دو منحنی (یایك خط ویك منحنی)، درنقطه‌ای مانند A، برهم مماس‌باشند، اگرضمن حل معادله‌های دومنحنی‌بایکدیگر، طول‌نقطهٔ A، ریشهٔ تکراری‌مرتبه زوج معادلهٔ حاصل باشد، دومنحنی درنقطهٔ تماس ازهم‌عبور نمی‌کنند، ودرحالتی که طول نقطهٔ A، ریشهٔ تکراری از مرتبهٔ فرد این‌معادله باشد، دومنحنی (یاخط ومنحنی) درنقطهٔ تماس ازیکدیگرعبور می‌کنند.

باچند مثال مطلب را روشن‌کنیم:

مثال۱. مطلوبست معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y=x^3+x$ در مبداء مختصات.

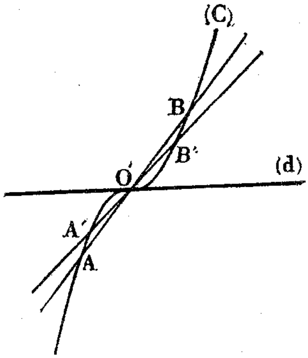
ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی در مبداء مختصات، برابر است با ۱ و بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y=x$ درمی‌آید. اگرمعادلهٔ منحنی‌را با معادلهٔ خط مماس، مثل دومعادلهٔ دومجهولی درنظر بگیریم، بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y=x^3+x \\ y=x \end{cases} \Longrightarrow x^3=0 \Longrightarrow x_1=x_2=x_3=0$$

می‌بینیم که وقتی معادلهٔ منحنی وخط مماس راباهم حل‌کردیم، طول نقطهٔ تماس

به‌عنوان ریشهٔ تکراری ازمرتبهٔ سوم، بدست‌آمد وبنابراین نتیجه می‌گیریم که خط مماس، درنقطهٔ تماس، ازمنحنی عبور می‌کند.

تعبیرهندسی[1] این‌مطلب چنین است: مبداء مختصات، مرکز تقارن منحنی تابع‌مفروض‌است وبنابراین برای‌خطی که‌ازاین‌نقطه عبورکند ومنحنی رادردو نقطهٔ دیگر A و B قطـع کند (شکل ۱۹۰)، پاره خطهای $O'A$ و $O'B$، مساوی می‌شونـد. وقتی کـه نقطهٔ A، روی منحنی، به نقطهٔ O' نزدیك شود، نقطهٔ B هم به O' نـزدیك می‌شود، بنحوی‌که وقتی نقطهٔ A بر O' منطبق شود، نقطهٔ B هم بر O' منطبق می‌شودو



شکل ۱۹۰

خط AB به‌صورت مماس (d) درمی‌آید. یعنی‌دراین حالت‌خاص، برای اینکه خطی‌مثل $AO'B$، برمنحنی(C) مماس‌شود، دونقطهٔ A وB ازآن بطورهمزمان بر O' منطبق می‌شود وبهمین‌مناسبت در حل تحلیلی مسأله، $x=0$، به عنوان ریشهٔ تکراری ازمرتبهٔ سوم بدست می‌آید.

مثال ۲. آیاخط $x+y=5$ برنمایش تغییرات

$$3x^2+y^2-4xy+2y-3=0 \qquad (C)$$

مماس‌است؟

ازحل دومعادله باهم (مثل دومعادلهٔ دومجهولی)، بدست می‌آید:

$$\begin{cases} 3x^2+y^2-4xy+2y-3=0 \\ x+y=5 \end{cases} \Longrightarrow 8(x-2)^2=0$$

$x=2$ ریشهٔ مضاعف‌این معادله‌است، ولی‌ازاینجا نمی‌توان بلافاصله به‌این‌نتیجهٔ قطعی‌رسیدکه خط $x+y=5$ برمنحنی نمایش تغییرات (C) مماس‌است.

درحقیقت، معادلهٔ (C) قابل تجزیه‌است:

$$3x^2+y^2-4xy+2y-3=(x-y+1)(3x-y-3)=0$$

وبنابراین نمایش تغییرات آن از دو خط تشکیل می‌شود که در نقطهٔ $A(2,3)$ یکدیگر را قطع می‌کنند وخط $x+y=5$ هم، ازنقطهٔ برخوردآنها می گذرد ومسألهٔ مماس بودن بی‌معنا می‌شود.

دیگر موضوع مسألهٔ ۳، روشن‌است. سهمی $y=x^2-3x+3$ وهذلولی $y=\frac{1}{x}$ در نقطهٔ به طول واحد ، بر هم مماس‌اند و در این نقطه از هم عبور می کنند .

حل مسألهٔ ۴. روشن‌است که‌روش‌هوپیتال،جواب‌درست‌راداده‌است. برای اینکه به‌اشکال روش‌اول پی‌ببریم، مثال ساده‌تری را ذکرمی کنیم.

می‌خواهیم حد عبارت $\frac{\sin x - x}{x^3}$ را، وقتی که x بسمت صفرمیل کند، پیدا کنیم.

باروش هوپیتال، این‌حد بسادگی‌بدست می‌آید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}$$

ولی اگر می خواستیم با روش اول مسألهٔ ۴، حل کنیم ، کسر را به صورت $\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3}$ می‌نوشتیم وچون حدمقدار $\frac{\sin x}{x}$ (وقتی که x بسمت صفر میل کند)، برابراست باواحد، عبارت مفروض به‌صورت $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}$ در می آمد، که مساوی صفراست.

درحقیقت وقتی که می گوئیم حد $\sin x$ با x (برای $x\to 0$) برابر است باواحد به‌این معناست که اگر x، بی‌نهایت کوچك باشد، x و $\sin x$ از

یك درجه‌اند:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

ازرابطهٔ $\sin x$ پیداست که:

$$\sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

وبنابراین:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{120}x^2 - \frac{1}{5040}x^4 + \cdots\right)}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

حل مسألهٔ ۵. تابع $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$ را برای مقادیر مثبت x در نظر می‌گیریم. مشتق این تابع $y' = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}$، به ازای مقادیر مثبت x، منفی‌است وبنابراین‌تابع y، برای مقادیرمثبت x، نزولی‌است. داریم:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

وچون تابع نزولی‌است، وقتی $x_2 > x_1$ باشد $y_2 < y_1$ می‌شود:

$$\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \Longrightarrow \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}$$

روشن است که اگر بجای ریشهٔ سوم، ریشهٔ پنجم، ششم وغیره هم‌بود، می‌توانستیم بهمین ترتیب عمل کنیم.

حل مسألهٔ ۶. معادلهٔ درجه دومی تشکیل می دهیم که ریشه های آن $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ و $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ باشد:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

ازتقسیم $f(x)$ بر x^2-4x+1 بدست می‌آید:

$$f(x)=(x^2-4x+1)(x^5-x^3+x^2-7)+2x-4$$

وبنابراین:

$$f(2+\sqrt{3})=2(2+\sqrt{3})-4=2\sqrt{3}$$

برای اینکه مطلب روشن‌ترشود، مثال دیگری ذکر می‌کنیم.

مثال. حاصل کسر $F(x)=\dfrac{x^7-2x^6-2x^5+x+1}{x^8-2x^7-2x^6-x+3}$ را به ازای $x=1-\sqrt{3}$ پیداکنید.

معادلهٔ درجه دومی که باریشه‌های $x_1=1-\sqrt{3}$ و $x_2=1+\sqrt{3}$ تشکیل شود، چنین است:

$$x^2-2x-2=0$$

کسررا به‌اینصورت می‌نویسیم:

$$F(x)=\frac{x^5(x^2-2x-2)+x+1}{x^6(x^2-2x-2)-x+3}=\frac{(1-\sqrt{3})+1}{-(1-\sqrt{3})+3}=$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$$

حل‌مسألهٔ ۷. $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ می‌گیریم ومعادلهٔ درجه دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن x_1وx_2 باشد:

$$x^2-x-1=0 \qquad (1)$$

برای محاسبهٔ حاصل‌عبارت A، باید مجموع توانهای هفتم ریشه های معادلهٔ (۱) رابدست‌آوریم:

$$x_1+x_2=1 \text{ و } x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3,$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=4,$$

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=7,$$

$$A=x_1^7+x_2^7=(x_1^4+x_2^4)(x_1^3+x_2^3)-x_1^3x_2^3(x_1+x_2)=29$$

حل مسألهٔ ۸. عبارت زیررا درنظر می‌گیریم:

$$S_k=\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}$$

بامحاسبهٔ مستقیم وبه سادگی می‌توان بدست‌آورد:

$$S_0=S_1=0\ ,\ S_2=1$$

برای محاسبهٔ S_3،S_4 و غیره، می‌توان به این ترتیب عمل‌کرد: اتحاد زیر را درنظر می‌گیریم:

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+$$
$$+(ab+ac+bc)x-abc$$

این اتحاد به‌ازای مقادیر $x=a$،$x=b$و$x=c$، بترتیب به اتحادهای زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases}a^3-(a+b+c)a^2+(ab+ac+bc)a-abc=0\\ b^3-(a+b+c)b^2+(ab+ac+bc)b-abc=0\\ c^3-(a+b+c)c^2+(ab+ac+bc)c-abc=0\end{cases}$$

دو طرف اتحاد اول را بر $(a-b)(a-c)$ و دو طرف اتحاد دوم را بر $(b-a)(b-c)$ ودوطرف‌اتحاد سوم‌رابر $(c-a)(c-b)$ تقسیم می‌کنیم. دراینصورت ازجمع سه رابطهٔ حاصل، بدست می‌آید:

$$S_3-(a+b+c)S_2+(ab+ac+bc)S_1-abcS_0=0$$

که باتوجه به‌مقادیر $S_0=S_1=0$ و $S_2=1$ ، خواهیم داشت:

$$S_3=a+b+c$$

برای محاسبه S_4، از این اتحاد استفاده می‌کنیم:

$$x(x-a)(x-b)(x-c)=x^4-(a+b+c)x^3+$$
$$+(ab+ac+bc)x^2-abcx$$

وشبیه حالت قبل‌عمل می‌کنیم تابه‌این رابطه برسیم:

$$S_4-(a+b+c)S_3+(ab+ac+bc)S_2-abcS_1=0$$

که از آنجا بسادگی بدست می‌آید:

$$S_4=a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc$$

بهمین ترتیب، می‌توان به‌رابطهٔ زیر رسید:

$$S_5-(a+b+c)S_4+(ab+ac+bc)S_3-abcS_2=0$$

که از آن، مقدار S_5 بدست می‌آید:

$$S_5=a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+$$
$$+c^2a+c^2b+abc$$

همانطور که دیده می‌شود S_3 مجموع همهٔ جمله‌های درجه اول (نسبت به a و b و c) S_4 مساوی مجموع همهٔ جمله‌های درجهٔ دوم (نسبت به a و b و c) و S_5 مساوی مجموع همهٔ جمله‌های درجهٔ سوم (نسبت به a و b و c) شده‌است:

$$S_3=\Sigma a\ ,\ S_4=\Sigma(a^2+ab)\ ,\ S_5=\Sigma(a^3+a^2b+abc)$$
$$S_6=\Sigma(a^4+a^3b+a^2b^2+a^2bc),\cdots$$

باهمین روش می‌توان دربارهٔ محاسبهٔ عبارت زیر (بـرای مقادیر صحیح k) و عبارتهای مشابه‌آن عمل‌نمود:

$$\sigma_k=\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$$
$$+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^k}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

وبدست آورد:

$$\sigma_0=\sigma_1=\sigma_2=0\ ,\ \sigma_3=1\ ,\ \sigma_4=a+b+c+d,$$
$$\sigma_5=a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd,\cdots$$

حل‌مسألهٔ ۹. درست است که معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0$$

درحوزهٔ عددهای حقیقی، تنهانقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ رانشان می‌دهد، ولی درواقع (با فرض $i=\sqrt{-1}$)، می‌توان سمت چپ این‌معادله را تجزیه کرد:

$$[(x-\alpha)+i(y-\beta)][(x-\alpha)-i(y-\beta)]=0$$

هر کدام از کروشه‌ها، که مساوی صفرشوند، یك‌خط موهومی‌را نمایش‌می‌دهند:

$$\begin{cases} x+iy=(\alpha+i\beta) \\ x-iy=(\alpha-i\beta) \end{cases} \quad (1)$$

وروشن است، خطی که معادله آن در فرض مسأله‌آمده است، شامل این دو خط نیست وبهمین مناسبت نتیجه‌گیری مسأله، بیمورد است.

خطهای (۱) را ، خطهای ایزوتروپ گویند و دارای این خاصیتها هستند :

۱. درنقطهٔ حقیقی $A(\alpha,\beta)$ بهم می‌رسند.

۲. هریك ازاین خطها برخودش عمود است (زیرا اگر ضریب زاویهٔ هریك ازاین خطهارا درخودش ضرب کنیم، حاصلضرب مساوی ۱ — می‌شود).

۳. اگر نقطهٔ حقیقی‌این خطها، مبداء مختصات‌باشد ($\alpha=0$ و $\beta=0$)، معادلهٔ دوخط به‌صورت $x\pm iy=0$ درمی‌آید. اگر دراین‌حالت، محورهای مختصات را به‌اندازهٔ زاویهٔ φ دوران دهیم، با استفاده از رابطه‌های مربوط به دوران محورها:

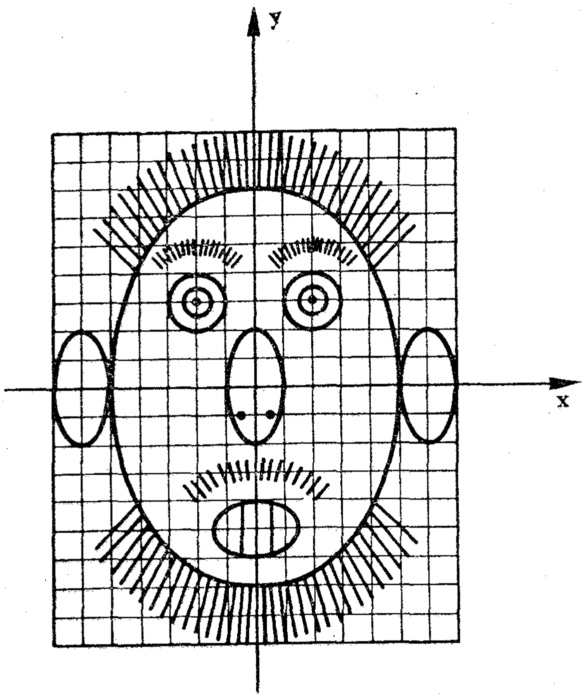
$$x=X\cos\varphi-Y\sin\varphi \;\;,\;\; y=X\sin\varphi+Y\cos\varphi$$

معادلهٔ جدید این‌دوخط به $X\pm iY=0$ تبدیل می‌شود. یعنی‌دوران محورها (وقتی که مبداء برنقطهٔ حقیقی‌خطهای ایزوتروپ منطبق‌باشد)، تغییری‌درمعادلهٔ آنها به‌وجود نمی‌آورد.

***

منحنی‌های‌جالب

I. به‌شکل ۱۹۱ توجه کنید. این‌شکل که سریك مرد رانشان می‌دهد، از



شکل ۱۹۱

شکلهای سادهٔ هندسی(پاره‌خط ـ دایره ـ بیضی) به‌وجود آمده است. مادراینجا تابعهایی‌را پیدا خواهیم کرد، که بارسم منحنی نمایش آنها، این شکل جالب بدست‌آید. شما می‌توانید شکلهای دیگری رسم‌کنید وباکمی دقت و حوصله، معادله‌های مربوطه رابدست‌آورید.

مبداء مختصات را بروسط بینی ومحورهای طول وعرض‌را برامتداد خطهای افقی وقائم می گیریم.

۱. مرکز چشمها و سوراخهای بینی

$$|۲x^۲-۵|x|+۲|+|۳y-۸|x|+۷|=۰ \qquad (۱)$$

مجموع دوقدر مطلق‌تنها وقتی مساوی صفر است، که هرکدام‌آنها مساوی

صفر باشد، که ازآنجا چهارنقطه بدست می‌آید؛ که مختصات آنها درمعادلهٔ (۱) صدق می‌کند:

$$A_1\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right. ،\ A_2\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right. ;\ B_1\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\-1\end{matrix}\right. ،\ B_2\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{matrix}\right.$$

A_1وA_2، مرکز چشمها و B_1وB_2، سوراخهای بینی‌را مشخص می‌کنند.

۲. گوشها و بینی

$$4\left(x+a+\sqrt{-|a(a^2-36)|}\right)^2+y^2=4 \qquad (2)$$

مقدار زیررادیکال نمی‌تواند مثبت باشد وبنابراین معادلهٔ (۲)، تنها به ازای مقادیر $a=0$ و$a=\pm 6$ حقیقی است:

$$a=0\ ;\ 4x^2+y^2=4 \Longrightarrow x^2+\frac{y^2}{4}=1$$

که معادلهٔ بیضی قائمی است به مرکز مبداء مختصات و قطرهای $2a=4$ و $2b=2$. این بیضی معرف بینی‌شکل ۱۹۱ است.

$$a=\pm 6\ ;\ 4(x\pm 6)^2+y^2=4 \Longrightarrow (x\pm 6)^2+\frac{y^2}{4}=1$$

این دوبیضی، یکی گوش راست ودیگری گوش چپ را رسم می‌کند.

۳. دهان ودندانها

$$(y+5)(2x+n)\sqrt{9-4x^2-9(y+5)^2}=0 \quad (3)$$

که درآن، n عددی صحیح (مثبت یامنفی) فرض شده‌است.

هریك ازاین عاملهارا می‌توان مساوی صفر گرفت:

$$9-4x^2-9(y+5)^2=0 \Longrightarrow \frac{y^2}{\frac{9}{4}}+(y+5)^2=1$$

این‌بیضی، دورهٔ دهان‌را نشان می‌دهد. ضمناً، از آنجاکه عبارت

$$۹-۴x^۲-۹(y+۵)^۲$$

زیررادیکال قرارگرفته است، درمعادلهٔ(۳)، تنهامقادیری ازxوy قابل‌قبول‌اند که به‌ازای‌آنها، این‌عبارت زیر رادیکال، مثبت یاصفر باشد. بسادگی معلوم می‌شودکه این‌نقطه‌ها درداخل ویاروی محیط بیضی مفروض قراردارند.

$$y+۵=۰ \quad -\frac{۳}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{۳}{۲}$$

شرط رابه این مناسبت قراردادیم، که نقطه‌های خط $y+۵=۰$ خارج بیضی دهان قرار نگیرند (ودرنتیجه زیررادیکال، درمعادله (۳)، منفی نشود). پاره خط $y+۵=۰\ (-\frac{۳}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{۳}{۲})$، خط بین‌دندانها را مشخص می‌کند.

$$۲x+n=۰\Longrightarrow x=\pm۱ \text{ و } x=\pm\frac{۱}{۲}\,,\ x=۰$$

اولاقدر مطلق n نمی‌تواند از۳ بزرگترشود، چون دراین‌صورت، خط متناظرآن خارج بیضی‌دهان واقع خواهدشد. ثانیاً ازاین خطهاهم، پاره‌خطهائی قابل‌قبول‌اندکه محدود به‌محیط بیضی دهان باشند. این پاره خطها، دندانها را مشخص می‌کنند.

۴. چشمها

$$(x\pm۲)^۲+(y-۳)^۲=a+\sqrt{-|۴a^۲-۵a+۱|} \quad (۴)$$

مقدار زیر رادیکال، تنها می‌تواند مساوی صفرشود که ازآنجا $a=۱$ یا $a=\frac{۱}{۴}$ بدست می‌آید. درنتیجه چهار دایرهٔ زیر پیدا می‌شود:

$$(x\pm۲)^۲+(y-۳)^۲=۱\,,\quad (x\pm۲)^۲+(y-۳)^۲=\frac{۱}{۴}$$

که دایره‌های چشمها رامشخص می‌کنند.

۵. سر، موهای سر وموهای ریش

$$\left(x+y\,cotg\frac{m\pi}{۶۴}\right)\sqrt{\frac{\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۴۹}-۱}{۱-\frac{x^۲}{۴۹}-\frac{y^۲}{۸۱}}}=۰ \qquad (۵)$$

که درآن m عددی‌است صحیح باشرط $۱۶\leqslant|m|\leqslant۳۲$

بیضـی $\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۴۹}=۱$، دورهٔ سررا مشخص می‌کند. ضمناً برای‌اینکه مقدار زیررادیکال، منفی‌نباشد، نقطه‌هایی ازصفحهٔ محورهـای مختصات برای معادلهٔ (۵) قابل‌قبول است که بین دو بیضی $\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۴۹}=۱$ و $\frac{x^۲}{۴۹}+\frac{y^۲}{۸۱}=۱$ یاروی محیط آنها قرار گرفته باشند.

باصفر قراردادن پرانتزجلو رادیکال باتوجـه به‌شرط مربوط به m و شرطی که برای (x,y) پیدا کردیم، پاره خطهای موهـای سروریش بدست می‌آید .

۶. موهای سبیل

$$\frac{|x|-(y+۶)cotg\frac{k\pi}{۳۲}}{\sqrt{\left(\frac{۴x^۲}{۲۵}+\frac{۴(y+۵)^۲}{۹}-۱\right)\left(۱-\frac{۴x^۲}{۴۹}-\frac{۴(y+۵)^۲}{۲۵}\right)}}=۰ \qquad (۶)$$

که درآن k عددی است صحیح باشرط $۸\leqslant|k|\leqslant۱۶$.

برای اینکه زیررادیکال مخرج منفی‌نباشد، نقطه‌هایی‌از صفحهٔ‌محورهای مختصات درمعادلهٔ (۶) صدق می‌کند که اولا مختصات‌آنها صورت کسررا صفر

کند، ثانیاً بین دو بیضی زیرواقع باشند:

$$\frac{x^{۲}}{\frac{۲۵}{۴}}+\frac{(y+۵)^{۲}}{\frac{۹}{۴}}=۱ \ , \ \frac{x^{۲}}{\frac{۴۹}{۴}}+\frac{(y-۵)^{۲}}{\frac{۲۵}{۴}}=۱$$

که باتوجه به‌شرط k، پاره خطهای مربوط به‌موهای سبیل را می‌دهد.

۷. موهای دو ابرو

$$\frac{|x\pm ۲|-(y-۳)cotg\frac{p\pi}{۳۲}}{\sqrt{[(x\pm ۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}-\frac{۹}{۴}][\frac{۲۵}{۴}-(x\pm ۲)^{۲}-(y-۳)^{۲}]}}=۰$$

(۷)

که درآن p عددی است صحیح باشرط $۸<|p|<۱۶$.

وجود مخرج نشان می‌دهد که تنها نقطه‌هایی ازصفحهٔ محورهای‌مختصات درمعادلهٔ (۷) صدق می‌کند که بین یکی‌اززوج دایره‌های زیرباشند:

$$(x+۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}=\frac{۹}{۴} \ , \ (x+۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}=\frac{۲۵}{۴}$$

$$(x-۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}=\frac{۹}{۴} \ , \ (x-۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}=\frac{۲۵}{۴}$$

وبه این ترتیب پاره خطهای معرف موهای دوابرو بدست می‌آید.

II. ریاضیات و گیاه‌شناسی[1]

تصویر۱، ازشکل ۱۹۲را ملاحظه کنید. اغلب کسانی که به‌مظاهر طبیعت عشق می‌ورزند، بانام‌آن‌آشنا هستند (مردم به‌این گیاه «شبدر» می‌گویند). ولی

۱. این‌مقاله ازمجلهٔ «علم وزندگی»، چاپ شوروی ترجمه ویکبار هم در شمارهٔ هشتم سال پنجم مجلهٔ سخن علمی چاپ شده است. نویسندهٔ مقاله، و. داموخین است.

نادرند کسانی‌که به‌معادلهٔ ریاضی برگ این‌علف فکر کـرده باشند. این معادله چنین است (دردستگاه مختصات قطبی):

$$\rho = ۴(۱ + cos۳\varphi + sin^{۲}۳\varphi)$$

منحنی این‌معادله، بادقت تمام‌شکل برگ‌شبدررا تقلید کرده‌است(شکل۱۹۲-۲).

وچقدر برگ«آلالهٔ زرد» که‌درشکل۱۹۲-۳، می‌بینید، به‌بیضی «مونگر» (شکل۱۹۲-۴)شبیه‌است. این‌منحنی از درجهٔشش، ومعادلهٔ ضمنی‌آن‌در دستگاه محورهای قائم، چنین‌است:

$$(x^{۲}+y^{۲})^{۳} - ۳ax^{۳}(x^{۲}+y^{۲}) + (a^{۲}-r^{۲})x^{۴} = ۰$$

بیضی «مونگر» به‌این ترتیب رسم می‌شود: دایره‌ای درنظر می‌گیریم، که‌مرکز آن روی محورطول ومبداء مختصات درخارج دایره واقع‌باشد. هرنقطهٔ P از دایره را، به‌نقطهٔ $P_{۱}$ ازبیضی، به‌این ترتیب تبدیل می‌کنیم:

نقطهٔ P رابه مبداء مختصات وصل‌می‌کنیم، ازP عمودی برمحور طول فرود می‌آوریم، سپس ازنقطهٔQ (پای‌عمودی‌که ازP برمحورطول‌رسم‌کردیم)، عمود $QP_{۱}$ رابر OP رسم می‌کنیم، مکان هندسی‌نقطهٔ $P_{۱}$، بیضی «مونگر» خواهد بود.

ریاضی‌دانهای یونان قدیم‌هم به‌شباهت بعضی‌از منحنی‌ها بادنیای گیاهان توجه‌کرده بودند، ولی‌علاقه به‌مطالعهٔ اینگونه منحنی‌ها، ازبین رفت تااینکه در سده‌های میانه، با کشف روش مختصات، دوباره ازنو زنده‌شد. این‌روش درسال ۱۶۳۷، به‌وسیلهٔ رنه‌دکارت، درکتاب «هندسه» شرح داده شد. باروش‌مختصات می‌توان، منحنی‌را متناظر بامعادلهٔآن رسم‌کرد. درعین حال این روش منجر به کشف‌آنالیز بی‌نهایت‌کوچکها شد. این‌وسیلهٔ جدید ریاضی، باز هم امکانهای تازه‌تری برای بررسی منحنی‌ها، برای ما به‌وجود آورد. مسأله‌های زیادی که در دانشهای مکانیك، نجوم، نور ومساحی، درسده‌های ۱۷ و ۱۸ مطرح شد، علاقهٔ ریاضی‌دانهای بزرگ رابه مطالعهٔ منحنی‌ها، جلب‌کرد.

خود دکارت، با استفاده از روش مختصات، منحنی را پیداکرد، که نام

شاعرانهٔ «گلبرگ‌یاسمن» را بر آن گذاشت (شکل ۱۹۲ — ۵). معادلهٔ این منحنی $x^3+y^3=3axy$ است. «گلبرگ یاسمن» امروزه «برگ دکارتی» نامیده می‌شود.

درسدهٔ هیجدهم گراندی، هندسه‌دان ایتالیائی، کوشش کرد معادله های مربوط به‌شکل ظاهری گلها را پیدا کند. خانوادهٔ منحنی‌هایی که مورد بررسی گراندی قرار گرفت، درریاضیات بنام خانوادهٔ «گل‌سرخ» مشهور شد، اگرچه ازنظرظاهر، این منحنی‌ها بیشتر شبیه گلهایی از خانوادهٔ پُر پَر هستند(شکل ۱۹۲ — ۶) مجموعهٔ این منحنی‌هارا می‌توان در دستگاه‌مختصات‌قطبی بامعادلهٔ $\rho=a\sin k\varphi$ بیان کرد، که درآن a وk مقادیر ثابت ومثبتی هستند. باانتخاب مقادیر مختلف برای k، می‌توان گلهایی باتعداد دلخواه گلبرگ بدست آورد. مقدار a هم‌طول گلبرگ را معین‌می‌کند (درشکل ۱۹۲ — ۶، منحنی‌های‌مختلفی ازخانوادهٔ «گل‌سرخ» رسم شده‌است وضریب تناظر k مربوط به آنها، در زیر هریك ذکرشده است).

هابه نیخت ، هندسه‌دان آلمانی هم روی شکل گلها وبرگها، بررسیهای زیادی انجام داد که نتیجهٔ تحقیقات او در سال ۱۸۹۶ بنام «شکلهای تحلیلی برگها» منتشرشد.

هابه‌نیخت، معادله‌هایی پیداکرد که باتقریب‌خوب، شکل برگ‌درختهای افرا، ترشك وبید را بدست می‌داد. هم او، معادلهٔ شکل برگ شبدر را پیشنهاد کرد که منحنی آن درشکل ۱۹۲ـ۲ رسم شده‌است. بعضی‌از معادله‌های هابه‌نیخت چنین‌است:

برگ ترشك: $$\rho=4(1+\cos 3\varphi-\sin^2 3\varphi)$$

برگ عشقه: $$\rho=3(1+\cos^2\varphi)+2\cos\varphi+\sin^2\varphi-2\sin^2 3\varphi\cos^4\frac{\varphi}{2}$$

نوع استقرار میوهٔ گیاهان‌هم، درموارد زیادی، مورد بررسی‌ریاضی‌دانها قرار گرفته است. مثلا ثابت کرده‌اند که درگل آفتاب‌گردان، نظم استقرار

تخمه‌ها، شبیه‌قوس«مارپیچ‌لگاریتمی» است(شکل۱۹۲ — ۷). دردستگاه‌مختصات قطبی، منحنی «مارپیچ لگاریتمی» بامعادله‌ای به صورت $\rho = a^{\varphi}$ بیان می‌شود، که درآن a عدد دلخواه مثبتی‌است. اگر $a > ۱$ باشد، مارپیچ دور مرکز و درجهت مثلثاتی، ودرحالت $a < ۱$ درجهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیچد.

بررسی این منحنی‌ها، درپیشرفت ریاضیات وصنعت، نقش اساسی دارد. مثلا معلوم شدکه بین «گل‌سرخ»ها وسیکلوئیدها، رابطهٔ خیلی نزدیکی وجود دارد. معلوم شدکه «گل‌سرخ»ها، خط سیری راکه به‌وسیلهٔ بعضی از مکانیسمها رسم می‌شود، معین می‌کنند وغیره.

بااستفاده ازخاصیت مارپیچهای لگاریتمی ، که شعاع حاملهای خود را تحت یك‌زاویه قطع می‌کنند، می‌توان‌کاردهایی به‌شکل این منحنی‌ها ساخت‌که ضمن چرخش، برشهایی بازاویهٔ ثابت به‌وجودآورند. از اینگـونه کاردها، در ماشین‌های علف‌بری استفاده کرده‌اند.

ازاین‌خاصیت، درصنعت استفاده ازآبهای طبیعی‌هم استفاده می‌کنند. وقتی که لوله، جریان‌آب را وارد توربین می‌کند، شکل مارپیچی به‌آن می‌دهد. در این‌حالت ثابت بودن زاویهٔ بین‌شعاع حامل ومماس برمسیر منحنی، منجربه‌کم کردن انرژی ازبین‌رفته، درموقع تغییر جریان‌آب درلوله، می‌شود.