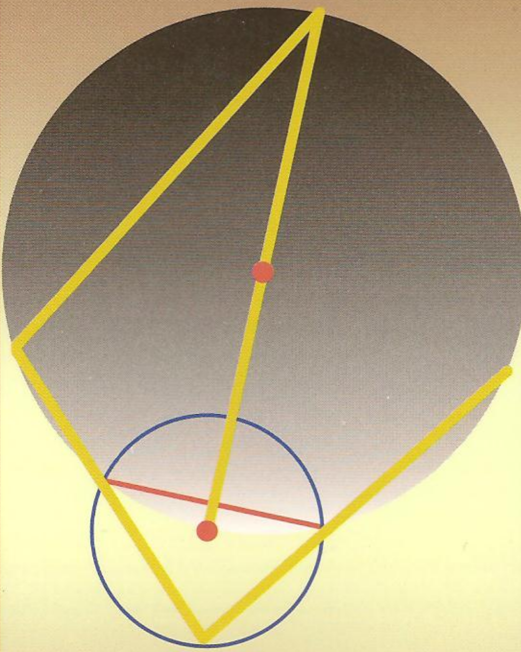
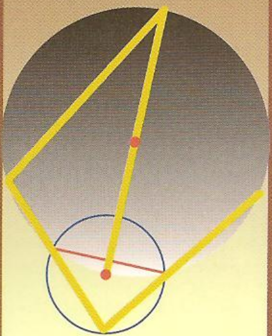
روشهای حل مسأله‌های مقدماتی هندسه



تألیف اِ. ژ. اُنه
ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی

انتشارات فاطمی

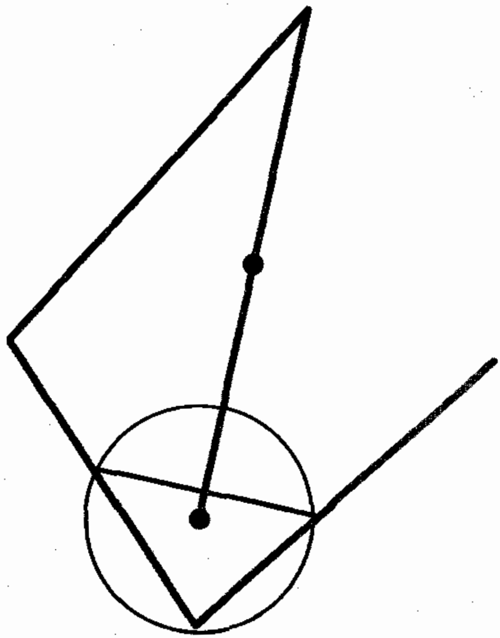


برخی از دانش آموزان بر این باورند که حل مسأله‌های هندسه بیش از دیگر مسأله‌های ریاضی به تلاشهای فکری نیاز دارد و کاری دشوار است.

مؤلف این کتاب با توجه به این باور کوشیده است تا با شیوه‌ای خاص دانش‌آموزان را راهنمایی کند که چگونه می‌توانند بر این مشکل چیره شوند. در این کتاب مسأله‌های هندسه دسته‌بندی و روشهایی را که برای حل کردن هر دسته از مسأله‌ها می‌توان به‌کار گرفت، ارائه شده است.

با هر روش، مسأله‌ای نمونه حل شده و حل مسأله‌هایی از همان گونه به خواننده واگذار گردیده است. با این شیوه خواننده گام به گام به آمادگی و کارایی در حل مسأله‌های هندسه دست می یابد.

روشهای حل مسألههای مقدماتی هندسه



تألیف اِ. ژ. اُنِه
ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی

انتشارات فاطمی

Résolution des problèmes élémentaire de géometrie
Seventh Edition
E. J. Honnet

روشهای حل مسأله‌های مقدماتی هندسه

مؤلف: اِ. ژ. اُنِه
مترجم: عبدالحسین مصحفی
ویراستار: علی ساوجی
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
چاپ سوم، ۱۳۸۷
شابِک ۹ـ۲۸۱ـ۳۱۸ـ۹۶۴
ISBN 964-318-281-9
تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه
قیمت: ۲۹۰۰ تومان

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
- مدیر تولید: فرید مصلحی
- طراح جلد: نینا وحیدی
- حروفچینی و صفحه‌بندی (TEX-پارسی): زهره امینی
- نمونه‌خوان: فاطمه صادقی
- رسامی و صفحه‌آرایی: حسین ابراهیمی
- نظارت بر چاپ: علی محمدپور

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ شرکت انتشارات علمی و فرهنگی

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۸۸۹۶۱۴۲۲ ـ ۸۸۹۶۴۷۷۰ نمابر: ۸۸۹۵۶۲۵۸
info@fatemi.ir

اُنه
Honnet, E.J.
روشهای حل مسأله‌های مقدماتی هندسه/ مؤلف ا. ژ. انه؛ ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. ــ تهران: فاطمی، ۱۳۷۸.
هفت، ۲۰۸ ص.: مصور.
ISBN 964-318-281-9: ۱۲۰۰۰ ریال
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Resolution des problemes elementaire de geometrie 7th ed.
چاپ سوم: ۱۳۸۷.
۱. هندسه ــ مسائل، تمرینها و غیره. الف. مصحفی، عبدالحسین، ۱۳۰۳ـ ، مترجم. ب. عنوان.
۵۱۶/۰۰۷۶
QA۴۵۹/الف۸ر۹
۱۳۷۸
کتابخانهٔ ملی ایران
۷۸ـ۷۰۲۸م

فهرست

به‌نام خدا

یادداشت مترجم

برخی از دانش‌آموزان بر این باورند که حل مسأله‌های هندسه بیش از دیگر مسأله‌های ریاضی به تلاشهای فکری نیاز دارد و کاری دشوار است. مؤلف این کتاب با توجه به این باور کوشیده است تا با شیوه‌ای خاص دانش‌آموزان را راهنمایی کند که چگونه می‌توانند بر این مشکل چیره شوند. در این کتاب مسأله‌های هندسه دسته‌بندی و روشهایی را که برای حل کردن هر دسته از مسأله‌ها می‌توان به‌کار گرفت، ارائه شده است. با هر روش، مسأله‌ای نمونه حل شده و حل مسأله‌هایی از همان‌گونه به خواننده واگذار گردیده است. با این شیوه خواننده گام به‌گام به آمادگی و کارایی در حل مسأله‌های هندسه دست می‌یابد.

ترجمهٔ فارسی این کتاب در سالهای ۱۳۴۶ و ۱۳۴۷ به‌صورت سلسله نوشتارهایی در شماره‌هایی از مجلهٔ ریاضی یکان چاپ شده است و اینک همراه با افزوده‌هایی، نخستین بار به‌صورت یک کتاب به چاپ می‌رسد. افزوده‌های بر ترجمه گاه یک بخش یا بندی از یک بخش و گاه یک یا چند مسأله است. بخشها یا بندها و مسأله‌های افزوده شده با نشانهٔ * درکنار عنوان یا شمارهٔ آنها آورده شده‌اند.

تابستان ۱۳۷۸

عبدالحسین مصحفی

۱
دسته‌بندی مسأله‌های هندسه

یک مسألهٔ هندسه یا ساده است یا از چند مسألهٔ ساده فراهم آمده است و حل آن به حل مسأله‌هایی ساده می‌انجامد. از این‌رو، برای آنکه در حل مسأله‌های هندسه توانمند شوید، نخست باید در حل مسأله‌های سادهٔ آن ورزیده شده باشید. اگر مسأله‌های سادهٔ هندسه دسته‌بندی شوند و روشهای حل مسأله‌های هر دسته نموده شود، آنگاه در روبه‌رویی با هر کدام از آنها، کافی است بتوانید دریابید که از کدام دسته است و کدام روش را برای حل آن باید به‌کار ببرید. به‌ویژه، اگر راه‌حل مسأله‌هایی نمونه از هر دسته نیز نموده شده باشد و مسأله‌هایی از همان‌گونه هم در دسترستان باشد تا آنها را حل کنید، برای حل مسأله‌هایی دیگر و از هرگونه ورزیده خواهید شد.

مسأله‌های هندسی ساده را به پنج دسته می‌توان تقسیم کرد:

مسأله‌هایی که زمینهٔ آنها ویژگیهای ناب هندسی است؛

مسأله‌های مربوط به ویژگیهای اندازه‌ای شکلها؛

مسأله‌های محاسبه‌ای؛

مسأله‌های مکانهای هندسی؛

مسأله‌های ترسیمی.

۱ـ۱ ویژگیهای ناب هندسی

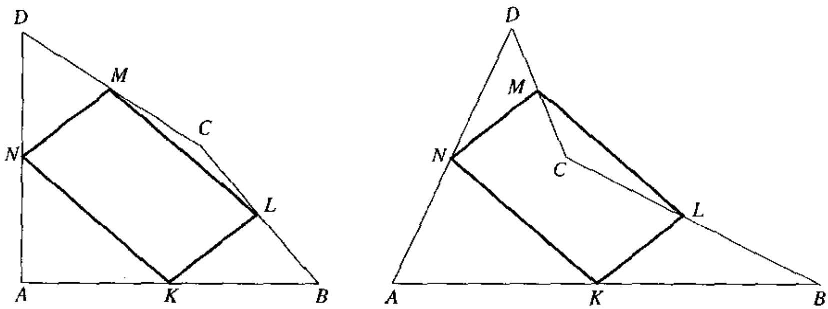
نقطه‌ها، خطها، خَمها، و زاویه‌ها، اندامهای هر شکل هندسی را تشکیل می‌دهند، که آنها را جزءهای آن شکل می‌نامند. وضع نسبی جزءهای هر شکل هندسی، یعنی وضع آنها نسبت به یکدیگر، ویژگیهای

ناب هندسی آن شکل را نشان می‌دهند. این ویژگیها یا بنابر تعریف و یا به‌عنوان اصل موضوع پذیرفته می‌شوند، یا زیر نام قضیه ثابت می‌شوند، یا به‌صورت مسأله بیان و باید ثابت شوند؛ مانند:

دو شکل که به‌تمامی بر هم واقع شوند با هم برابرند (= اصل همنهشتی شکلها = اصل انطباق شکلها)، دو قطر لوزی بر هم عمودند (= قضیه‌ای که ثابت می‌شود)، در چهارضلعی محاط در یک دایره، هر دو زاویهٔ روبه‌رو مکمل یکدیگرند (= قضیه‌ای که ثابت می‌شود)، اگر یک ضلع از مثلثی ثابت باشد و رأس روبه‌رو به آن روی خطی موازی با ضلع ثابت تغییر کند مساحت مثلث ثابت می‌ماند (= مسأله‌ای که باید آن را ثابت کرد).

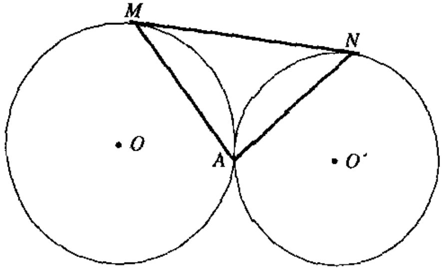
ویژگیهای ناب هندسی به اندازه‌های جزءهای شکل بستگی ندارند و اگر برای یک شکل برقرار باشند، برای هر شکل دیگری از آن‌گونه نیز برقرارند. اگر اندازهٔ بعضی یا همهٔ جزءهای شکل تغییر کند، آن ویژگی ناب، یعنی وضع نسبی جزءهایی معین از آن، تغییر نمی‌کند.

مثال ۱. چهارضلعی که چهار رأسش وسطهای ضلعهای یک چهارضلعی باشد، متوازی‌الاضلاع است. این ویژگی به اندازه‌های ضلعها و همچنین به اندازه‌های زاویه‌های چهارضلعی بستگی ندارد. چهارضلعی چه بزرگ باشد چه کوچک، چه کوژ باشد و چه کاو، این ویژگی را دارد. این ویژگی، وضع نسبی پاره‌خطهای وصل شدهٔ بین وسطهای ضلعهای چهارضلعی را بیان می‌کند.



شکل۱-۱

مثال ۲. اگر دو دایره به مرکزهای O و O' در A بر یکدیگر مماس بیرونی باشند، MN مماس مشترک بیرونی آنها و خطهای MA و NA، یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند. این ویژگی که وضع نسبی دو خط AM و AN را می‌رساند به اندازهٔ شعاعهای دو دایره بستگی ندارد؛ اگر شعاعهای دو دایره تغییر کنند، اندازه‌های ضلعهای مثلث AMN نیز تغییر می‌کنند اما در هر حال دو خط AM و AN بر هم عمودند و وضع نسبی آنها ثابت است.



شکل ۱-۲

۱ـ۲ ویژگیهای اندازه‌ای

این ویژگیها به‌صورت رابطه یا رابطه‌هایی جبری که معمولاً برابری‌اند و بین اندازه‌های جزءهایی از شکل برقرارند، نموده می‌شوند و بر دوگونه‌اند: در یک گونهٔ آن، رابطهٔ نموده شده با تغییر اندازه‌های جزءهای شکل ثابت می‌ماند. درگونهٔ دیگر، رابطه تنها وقتی برقرار است که جزء یا جزءهایی از شکل، اندازه‌ای معین و ثابت داشته باشند. در هر حال، باید اندازه‌های جزءها همه با یک یکا (یعنی با یک واحد) بیان شده باشند.

مثال ۱. در هر مثلث، حاصل‌ضرب اندازهٔ هر ضلع در اندازهٔ ارتفاع وارد بر آن برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ هر یک از دو ضلع دیگر در اندازهٔ ارتفاع وارد بر آن. هر گاه اندازه‌های ضلعها a، b و c، و اندازه‌های ارتفاعهای وارد بر آنها به ترتیب h_a، h_b و h_c باشد، رابطهٔ بیان شده چنین نوشته می‌شود:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

این رابطه برای مثلث از هرگونه برقرار است و با تغییر اندازه‌های ضلعها و زاویه‌ها پایا می‌ماند.

یادآوری. در بیان رابطهٔ بالا، و به‌طور کلی در بیان رابطه‌های اندازه‌ای، از بیان لفظ «اندازه» چشم‌پوشی می‌شود و به‌جای اندازهٔ ضلع، اندازهٔ ارتفاع، خود ضلع یا ارتفاع به‌کار می‌رود، چنانکه برای مثال بالا گفته می‌شود: در هر مثلث، حاصل‌ضرب هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن برابر است با حاصل‌ضرب هر یک از دو ضلع دیگر در ارتفاع وارد بر آن.

مثال ۲. اگر دو ضلع مثلثی بر هم عمود باشند، مجموع توانهای دوم این دو ضلع برابر است با توان دوم ضلع سوم، که بیان دقیق آن می‌شود:

در هر مثلثی که یک زاویهٔ قائمه دارد، مجموع توانهای دوم اندازه‌های دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه برابر است با توان دوم اندازهٔ ضلع سوم. این رابطه، که قضیهٔ فیثاغورس نام دارد و معمولاً به این صورت بیان می‌شود که «در مثلث قائم‌الزاویه، توان دوم وتر برابر است با مجموع توانهای دوم دو ضلع دیگر»، آنگاه برقرار است که زاویهٔ روبه‌روی ضلع بزرگتر قائمه باشد و با برقراری این شرط، حکم قضیه به اندازه‌های ضلعها و دو زاویهٔ دیگر بستگی ندارد. هر گاه a اندازهٔ وتر و b و c اندازه‌های دو ضلع مثلث

باشند، صورت جبری رابطه چنین می‌شود:

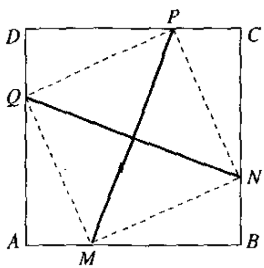
$$a^2 = b^2 + c^2$$

۱ـ۳ مسأله‌های محاسبه‌ای

در این دسته از مسأله‌ها، اندازهٔ یک یا چند جزء از شکل داده می‌شود و اندازهٔ جزء یا جزءهای دیگر آن باید به‌دست آید. برای محاسبه یا محاسبه‌هایی که باید انجام گیرد، ویژگیهای اندازه‌ای و اگر لازم باشد، ویژگیهای ناب هندسی نیز به‌کار می‌روند.

* **مثال.** در مربع $ABCD$ که اندازهٔ هر ضلع آن a است، نقطه‌های M، N، P و Q به‌ترتیب روی ضلعهای AB، BC، CD و DA چنان گزیده شده‌اند که مطابق با شکل ۱-۳، هر بخش بزرگتر از هر ضلع، k برابر بخش کوچکتر است. اندازهٔ پاره‌خطهای MP و NQ را حساب کنید.

برای حل این مسأله، ساده‌تر آن است، که نخست نوع چهارضلعی $MNPQ$ و وضع پاره‌خطهای MP و NQ نسبت به این چهارضلعی معلوم شود. با به‌کار بردن ویژگیهای ناب هندسی، درمی‌یابیم که این چهارضلعی مربع است و MP و NQ قطرهای آن هستند. در مربع، ضلعها با هم برابر و قطرها نیز با هم برابرند و با به‌کار بردن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AMQ، اندازهٔ ضلع مربع و از روی آن اندازهٔ قطر آن حساب می‌شود.



شکل ۱-۳

۱ـ۴ مکانهای هندسی

اگر p یک ویژگی معین و F شکلی باشد که همهٔ نقطه‌هایش ویژگی p را داشته باشند و این ویژگی فقط برای نقطه‌های شکل F برقرار باشد، شکل F را مکان هندسی نقطه‌های با ویژگی p می‌نامند. با توجه به مفهوم مجموعه، می‌توان گفت که هر مکان هندسی، مجموعهٔ نقطه‌هایی است که یک ویژگی معین دارند. برای نمونه، می‌دانیم که هر نقطهٔ واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط

واقع است. از این‌رو می‌گوییم: عمودمنصف هر پاره‌خط، مکان هندسی نقطه‌هایی است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.

در مسأله‌های مربوط به مکان هندسی، یا یک ویژگی بیان می‌شود و باید مکان هندسی نقطه‌هایی با آن ویژگی به‌دست آید، یا نقطه‌ای از یک شکل با یک شرط یا با شرطهایی تغییر جا می‌دهد و باید مکان هندسی آن معلوم شود. در هر گونه از این مسأله‌ها، دو حکم را باید ثابت کنیم:

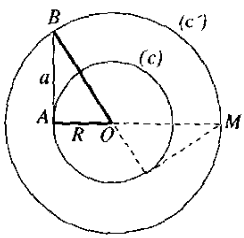
۱) شکلی را بیابیم و ثابت کنیم که هر نقطهٔ آن دارای آن ویژگی یا شرط بیان شده است؛

۲) ثابت کنیم هر نقطه که آن ویژگی یا آن شرط را داشته باشد روی آن شکل واقع است.

این دو حکم از راه معلوم کردن ویژگیهای ناب و ویژگیهای اندازه‌ای شکل ثابت می‌شوند و تفاوتی ندارد که نخست کدام‌یک از آنها ثابت شود.

مثال ۱. دایرهٔ ثابت (C) به مرکز O و به شعاع R داده شده است. مکان هندسی نقطه‌هایی را به‌دست آورید که اگر از هرکدام از آنها مماسی بر دایرهٔ (C) رسم شود طول مماس برابر با اندازهٔ ثابت a باشد.

نقطهٔ دلخواه B چنان به‌دست می‌آید که اگر از آن مماس BA بر دایرهٔ (C) رسم شود، اندازهٔ پاره‌خط BA برابر با a باشد و نخست ثابت می‌شود که B از O به فاصلهٔ ثابت $BO = R'$ قرار دارد و بنابراین، بر دایرهٔ (C') به مرکز O و به شعاع R' واقع است، سپس ثابت می‌شود هر نقطهٔ دلخواه M که بر دایرهٔ (C') واقع باشد و از آن مماسی بر دایرهٔ (C) رسم شود، طول این مماس برابر با a است. در این صورت ثابت شده است که دایرهٔ (C') مکان هندسی نقطه‌هایی است که اگر از هر کدام آنها مماسی بر دایرهٔ (C) رسم شود، طول مماس برابر با a می‌شود.



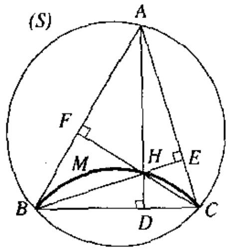
شکل۱-۴

مثال ۲. مثلث ABC که زاویه‌های آن حاده‌اند، در دایرهٔ ثابت S محاط است. اگر نقطه‌های B و C ثابت بمانند، A روی دایرهٔ S حرکت کند و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد، مکان هندسی H چیست؟

نخست ثابت می‌شود که اندازهٔ زاویهٔ BHC مقداری ثابت است و بنابراین، H روی کمانی قرار دارد که قرینهٔ کمان BC نسبت به خط BC است. پس از آن ثابت می‌شود که هر نقطهٔ دلخواه M

واقع بر این کمان در صورتی مرکز ارتفاعی مثلث ABC است که A روی خط گذرنده بر M و عمود بر BC واقع باشد. در این صورت ثابت شده است که کمانِ قرینهٔ کمان BC نسبت به خط BC، مکان هندسی نقطهٔ H است.

* یادداشت. در این مسأله، اگر قید حاده بودن زاویه‌های مثلث درکار نباشد، مکان هندسی A همهٔ دایرهٔ محیطی مثلث و مکان هندسی H، دایره‌ای است قرینهٔ دایرهٔ محیطی مثلث نسبت به خط BC. در حالتی که زاویهٔ A قائمه باشد این دو مکان بر هم واقع‌اند و دایرهٔ به قطر BC است.



شکل ۱-۵

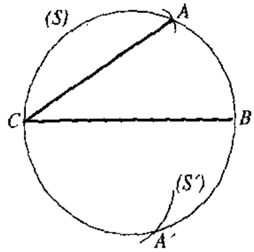
۱ـ۵ مسأله‌های ترسیمی

در این دسته از مسأله‌ها، اندازه‌های جزءهایی از یک شکل و وضع نسبی آنها داده می‌شود و باید شرح داد که با به‌کار بردن خط‌کش و پرگار، چگونه می‌توان آن شکل را رسم کرد. می‌توانید برای رسم آن شکل خط‌کش و پرگار را به‌کار ببرید و خود را بیازمایید اما در آزمونها و مسابقه‌ها باید چگونگی رسم کردن شکل را شرح دهید. اندازه‌ها و رابطه‌های داده شده باید برای رسم شکل کافی باشند و ممکن است از روی آنها بیش از یک شکل را بتوان رسم کرد، یعنی مسأله بیش از یک جواب داشته باشد. از مسأله‌های ترسیمی، بعضی با شرط تنها به‌کار بردن خط‌کش و پرگار، شدنی نیستند.

برای حل مسأله‌های ترسیمی، نخست ویژگیهای ناب هندسی و ویژگیهای اندازه‌ای شکل معلوم می‌شوند، سپس از روی آنها مکان هندسی رأسها یا نقطه‌هایی از شکل معلوم می‌شود، و سرانجام به کمک این مکانهای هندسی، جزءهای شکل یکی از روی دیگری به‌دست می‌آیند و شکل رسم می‌شود و پس از آن، شرط وجود جواب و تعداد جوابهای ممکن بیان می‌شود.

مثال ۱. اگر a اندازهٔ وتر و b اندازهٔ یک ضلع دیگر از مثلث قائم‌الزاویه‌ای داده شده باشد، آن مثلث چگونه باید رسم شود؟

با دانستن این ویژگی از مثلث قائم‌الزاویه که قطر دایرهٔ محیطی آن همان وتر مثلث است، اگر پاره‌خط BC به اندازهٔ داده شدهٔ a و دایرهٔ (S) به قطر BC رسم شوند، دایرهٔ (S) یک مکان هندسی



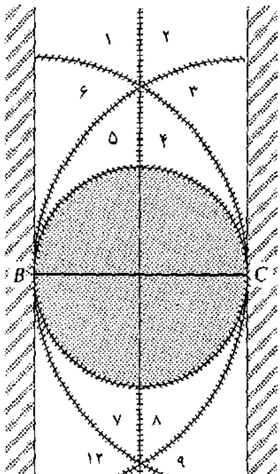
شکل۱-۶

A است. از سوی دیگر چون فاصلهٔ A تا C باید برابر با اندازهٔ داده شدهٔ b باشد، دایرهٔ (S') به مرکز C و به شعاع b یک مکان هندسی دیگر A است. دو دایرهٔ (S) و (S') اگر با هم برخورد کنند، نقطهٔ برخورد آنها رأس A است و با به‌دست آمدن این رأس، ضلع AB نیز به‌دست می‌آید و رسم می‌شود. این مسأله هنگامی جواب دارد که دایرهٔ (S') با دایرهٔ (S) برخورد کند و بنابراین: اگر $a > b$ مسأله دو جواب (با هم برابر) دارد، اگر $a = b$، جواب پذیرفتنی نیست، اگر $a < b$ مسأله جواب ندارد.

***مثال۲.** مثلثی رسم کنید که هیچ دو ضلع آن با هم برابر نباشند و هیچ زاویهٔ آن قائمه یا منفرجه نباشد.

اندازه‌های هیچ‌یک از ضلعهای مثلث داده نشده است و دلخواه‌اند. اگر پاره‌خط BC به اندازهٔ دلخواه رسم شود، می‌تواند یک ضلع مثلث باشد و تنها باقی می‌ماند که مکان هندسی رأس A به‌دست آید.

زاویه‌های B و C هر دو حاده‌اند پس A بین دو خطی واقع است که در B و C بر BC عمودند. زاویهٔ A هم حاده است پس A در خارج دایرهٔ به قطر BC باید باشد. دو ضلع AB و AC برابر نیستند پس A روی عمودمنصف BC نمی‌تواند باشد. ضلعهای AC و AB هیچ‌کدام با BC برابر نیستند پس A روی دایرهٔ به مرکز B و به شعاع BC همچنین روی دایرهٔ به مرکز C و به شعاع CB نمی‌تواند باشد.



شکل۱-۷

هرگاه ناحیه‌ها و خطهایی که A نمی‌تواند داخل یا روی آنها باشد با خطهای پرداز نشان شوند، ناحیه‌هایی که می‌توانند مکان هندسی A باشند نموده می‌شوند که عبارت‌اند از ناحیه‌هایی که روی شکل با شماره‌های از ۱ تا ۱۲ نشان شده‌اند بدون مرزهایشان. مسأله جوابهای بی‌شمار دارد.

۲

چگونگی دستیابی به راه‌حل یک مسأله

ورزیده شدن در حل مسأله‌ها تنها به این دلیل نیست که سیاهه‌ای از روشهای گوناگون حل مسأله‌ها را در دسترس داشته باشید. برای حل مسأله‌ای که با آن روبه‌رو شده‌اید، نمی‌شود سرسری انگشت روی یکی از روشها بگذارید و آن را به‌کار ببرید، و اگر آن نشد یکی دیگر را، و اگر این هم نشد یکی دیگر را. دستیابی به راه حل مناسب راهی دارد که برای پیمودن آن، هم توشهٔ راه را باید فراهم آورده باشید و هم بدانید چه گذرگاههایی را باید پشت‌سر بگذارید. توشهٔ راه، درسهایی است که آنها را آموخته‌اید و باید آنها را خوب به‌خاطر داشته باشید و پس از آن، باید بدانید از کجا آغاز کنید و چه ترتیبی را برای گذشتن از گذرگاهها به‌کار ببرید تا به بیراهه نروید.

۲ـ۱ رهنمودها

۲ـ۱ـ۱ رسم شکل دقیق و گویا

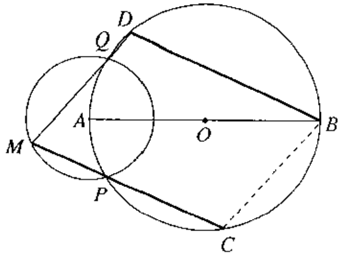
صورت مسأله را به‌دقت بخوانید و شکل مربوط به آن را جزء به‌جزء رسم کنید. این شکل باید هم دقیق و هم واضح باشد و اگر به‌جای دست، آن را با خطکش و پرگار و با ابزارهای دیگر رسم بکنید، خیلی بهتر به شما کمک خواهد کرد. چنانچه زمینهٔ مسأله مثلثی متساوی‌الساقین است، مثلثی را رسم کنید که دو ضلع آن واقعاً با هم برابر باشند و زاویهٔ رأس آن و قاعده‌اش نه خیلی کوچک و نه خیلی بزرگ باشند به‌گونه‌ای که اگر بنا باشد داخل آن خطها یا دایره‌ای رسم کنید، به مشکل برنخورید و شکل در هم ریخته نشود. اگر در صورت مسأله از دو خط عمود بر هم گفتگو شده است، پس از رسم یکی از آنها، دیگری را با گونیا رسم کنید.

هر شکل را در حالت کلی رسم کنید نه در حالت ویژه. مثلاً اگر فرض مسأله یک مثلث است،

مثلثی رسم کنید که قائم‌الزاویه یا متساوی‌الساقین نباشد. شکلی که دقیق رسم شود و جزءهای آن و وضع آنها نسبت به هم آشکارا نموده شده باشند، راهنمایی خواهد بود برای پی بردن به استدلالی که باید انجام گیرد و معلوم خواهد کرد برای هر جزء آن چه چیز را می‌توان و باید ثابت کرد.

مثال ۱. دایرهٔ به مرکز O و به قطر AB با دایرهٔ به مرکز A در P و Q برخورد کرده است، M نقطه‌ای دلخواه واقع بر دایرهٔ A است و خطهای MP و MQ به ترتیب در C و D با دایرهٔ O برخورد کرده‌اند. ثابت کنید پاره‌خطهای MC و BD با هم برابرند.

دایرهٔ به مرکز O را بزرگتر و دایرهٔ به مرکز A را کوچکتر و دو پاره‌خط MC و BD را سیاهتر از خطهای دیگر رسم می‌کنیم. با نگاه به شکل، دو خط MC و BD موازی با هم دیده می‌شوند. از اینجا راهنمایی می‌شویم که باید ثابت کنیم چهارضلعی $MCBD$ متوازی‌الاضلاع است.



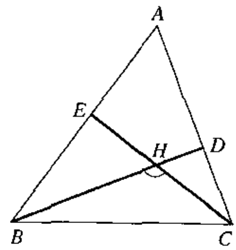
شکل۲-۱

* **یادداشت.** شکل مسأله نه تنها باید دقیق و واضح باشد، بلکه لازم است همهٔ حالتهای ممکن را نیز رسم کرد وگرنه ممکن است گمراه کننده باشد. چنین امکانی به‌ویژه در حالتهایی می‌تواند پیش آید که به‌جای اثبات یک وضعیت، خواسته شده باشد نوع آن وضعیت نیز معلوم شود؛ مثلاً بنا باشد در یک پرسش چند گزینه‌ای پاسخ درست را اعلام کرد.

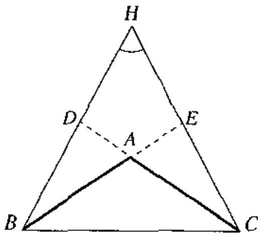
* **مثال ۲.** در مثلث ABC، دو ارتفاع BD و CE در H برخورد می‌کنند. زاویهٔ BHC چه نوع زاویه‌ای است؟

در این مسأله اگر تنها مثلثی را رسم کنید که در آن زاویهٔ A حاده باشد، از روی شکل به پاسخ نادرست راهنمایی می‌شوید. زیرا در این حالت به‌نظر می‌رسد که زاویهٔ BHC حتماً منفرجه است. اما اگر حالتهای حاده و قائمه بودن زاویهٔ A را نیز در نظر بگیرید و شکلهای مربوط به آنها را نیز رسم کنید، پی می‌برید که اگر زاویهٔ A منفرجه باشد زاویهٔ H حاده است و اگر زاویهٔ A قائمه باشد نقطه‌های D، E و H روی A می‌افتند و زاویهٔ H قائمه است.

در چنین مسأله‌هایی بهتر است که رابطهٔ (نسبی یا اندازه‌ای) بین آن جزء که نوع آن خواسته شده است



شکل۲-۲



شکل۲-۳

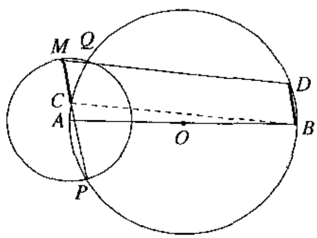
با یک جزء معلوم از شکل به‌دست آید.

در مثالی که یاد شد، به‌دست می‌آوریم

$$\angle H = ۱۸۰^\circ - \angle A$$

دو زاویهٔ A و H مکمل یکدیگرند و نوع زاویهٔ H به نوع زاویهٔ A بستگی دارد.

در مثال ۱ شکل به هرگونه که رسم شود، چه مطابق با شکل قبلی و چه مطابق با شکل زیر، و چه در حالتی که M داخل دایرهٔ O باشد، در هر حال حکم مسأله پابرجا می‌ماند.



شکل۲-۴

۲ـ۱ـ۲ شناسایی فرض و حکم

صورت مسأله را به‌دقت و با حواس جمع بخوانید تا به‌خوبی دریابید چه چیزهایی پذیرفته شده‌اند و چه چیز یا چیزهایی باید به‌دست آید. آن چیزهایی که پذیرفته شده‌اند، فرض مسأله‌اند و آنچه باید به‌دست آید، حکم مسأله است. فرض و حکم که شناخته شدند، اگر آنها را به گونه‌ای نمایان و جدا از هم بنویسید به شما کمک می‌کند تا بفهمید آنها دربارهٔ چه ویژگیهایی از شکل‌اند؛ ویژگیهای ناب هندسی یا ویژگیهای اندازه‌ای، آیا باید محاسبه‌ای را انجام دهید یا اینکه یک مکان هندسی را به‌دست آورید.

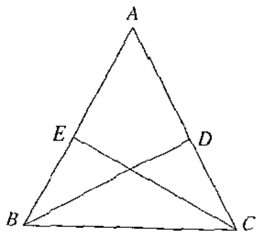
برای نمایان ساختن فرض و حکم روشهایی گوناگون را می‌توان به‌کار برد. یک روش آن است که در صورت مسأله، زیر هر جزء از فرض یک خط و زیر حکم دو خط بکشید. روشی که بیشتر به‌کار می‌رود، نوشتن هر جزء از فرض و حکم به‌صورت یک رابطهٔ جبری و قرار دادن هر گروه از رابطه‌های

فرض و حکم داخل یک ابرو و نوشتن واژه‌های فرض و حکم جلوی این ابروهاست.

مثال. در مسألهٔ «ثابت کنید که در مثلث متساوی‌الساقین دو ارتفاع وارد بر ساقها با هم برابرند»، فرض از سه جزء تشکیل می‌شود: یک مثلث ABC داریم، دو ضلع آن مثلاً AB و AC با هم برابرند. BD یک ارتفاع و CE یک ارتفاع مثلث است، و حکم این است که باید ثابت کنیم BD و CE با هم برابرند. شکل را رسم می‌کنیم و فرض و حکم را چنین می‌نویسیم:

فرض : مثلث ABC، $AB = AC$، $\angle D = ۹۰^\circ$ و $\angle E = ۹۰^\circ$؛

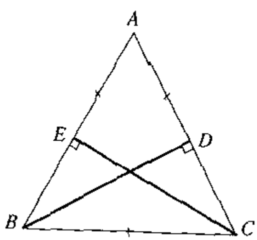
حکم : $BD = CE$.



شکل۲-۵

۲ـ۱ـ۳ نمایش فرض و حکم روی شکل

پس از آنکه شکل را رسم کردید و فرض و حکم را یافته و به‌گونه‌ای که گفته شد نوشتید، اگر فرض و حکم را با نشانه‌هایی روی شکل نشان دهید، کمک می‌کند تا زودتر و ساده‌تر به راه حل دست یابید. برای نمایش فرض و حکم روی شکل، معمولاً پاره‌خطهای برابر را باگذاشتن یک یا چند پاره‌خط ریز روی آنها، زاویه‌های برابر را باگذاشتن یک یا چند کمان ریز در فرجهٔ آنها، و زاویه‌های قائمه را باگذاشتن مربعی ریز در فرجهٔ آنها نشان می‌کنند. حکم مسأله را هم می‌شود با سیاهتر یا پررنگتر کردن جزء‌های مربوط به آن روی شکل نمایان ساخت. با این روش، شکل (۲-۵) مربوط به مثال پیش، به‌صورت شکل (۲-۶) خواهد بود.



شکل۲-۶

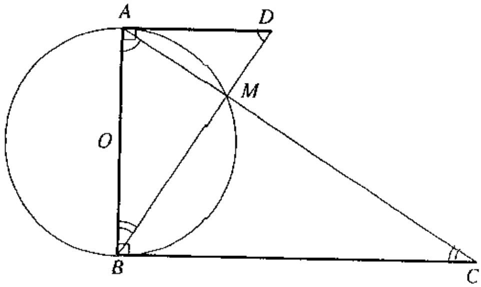
مثال. دایرهٔ به مرکز O و به قطر AB و نقطهٔ دلخواه M روی آن داده شده است. خطهای AM و BM با مماسهایی که در A و B بر دایره رسم شوند در C و D برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$AD \cdot BC = \overline{AB}^{۲}$$

فرض و حکم عبارت‌اند از:

فرض: AB قطر دایره، M روی دایره است، $\angle BAD = ۹۰^\circ$، $\angle ABC = ۹۰^\circ$

حکم: $AD \cdot BC = \overline{AB}^{۲}$



شکل۲-۷

اگر رابطهٔ حکم را به‌صورت یک تناسب بنویسید، راهنمایی می‌شوید که باید ثابت کنید دو مثلث ABC و ABD متشابه‌اند و از این‌رو زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متناسب را که باید برابر بودنشان ثابت شود، روی شکل نشان می‌کنید و شکل (۲-۷) بالا را خواهید داشت.

۲ـ۲ راهکارها

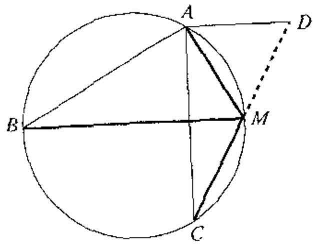
۲ـ۲ـ۱ دستکاری شکل

در برخی از مسأله‌ها، شکلی را که بنابر صورت مسأله رسم کرده‌اید ناکافی می‌بینید و از آن نمی‌توانید جواب را به‌دست آورید مگر آنکه آن را دستکاری کنید؛ باید خط یا خطهای جدیدی را به آن بیفزایید تا به کمک آنها بتوانید ویژگیها یا رابطه‌هایی را که در صورت مسأله بیان شده‌اند، در شکل بنمایانید. برای مثال اگر در صورت مسأله از مجموع دو ضلع از شکل سخن رفته است، یکی از آنها را به اندازهٔ دیگری امتداد دهید تا پاره‌خطی برابر با مجموع آنها را روی شکل داشته باشید. یا مثلاً اگر رابطه‌ای بین ضلعهای شکل خواسته شده است، ضلعهای تازه‌ای را چنان رسم کنید تا شکل رسم شده به شکلهایی تجزیه شود که رابطه‌های بین ضلعهای آنها را می‌شناسید. به هر حال، خطهای تازه‌ای که به شکل افزوده

می‌شوند باید جزء‌های موجود در شکل را به یکدیگر نزدیکتر کنند و کار را پیش ببرند نه اینکه شکل را درهم ریخته کنند و لنگ ماندن کار را در پی داشته باشند.

مثال ۱. سه نقطهٔ A و B و C دایره‌ای را به سه کمان برابر تقسیم کرده‌اند و M نقطه‌ای دلخواه از کمان AC است. ثابت کنید وتر MB با مجموع وترهای MA و MC برابر است.

اگر دایره و وترهای MA، MB و MC را رسم کنید، رابطه‌ای را بین آنها نمی‌بینید. اما اگر CM را تا نقطهٔ D امتداد دهید که MD برابر با MA باشد، آنگاه پاره‌خط CD برابر با مجموع وترهای MA و MC را روی شکل خواهید داشت. برای آنکه برابری CD با BM را ثابت کنید، باید مثلث یا مثلثهایی به این ضلعها را داشته باشید. برای این‌کار، خطهای AB، AC و AD را نیز به شکل می‌افزایید. اکنون آنچه را باید ثابت کنید، برابری دو مثلث ABM و ACD است.

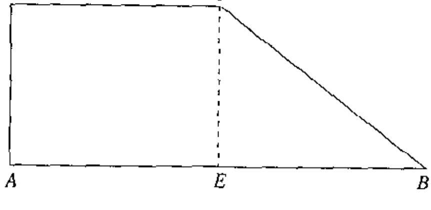


شکل ۲-۸

مثال ۲. در ذوزنقهٔ $ABCD$، قاعدهٔ بزرگتر $AB = ۸۰$، قاعدهٔ کوچکتر $CD = ۴۰$، ساقها عبارت‌اند از $BC = ۵۰$ و $DA = ۳۰$. ثابت کنید زاویه‌های A و D از ذوزنقه قائمه‌اند.

یکا (= واحد) را میلیمتر می‌گیرید و شکل را با دقت رسم می‌کنید اما می‌بینید که کمکی به شما نمی‌کند مگر اینکه می‌دانید و می‌بینید که CD با AB موازی است. پس به این فکر می‌افتید که یک متوازی‌الاضلاع بسازید. برای این‌کار، خط CE موازی با AD را به شکل می‌افزایید و نتیجه می‌گیرید $BC = ۵۰$، $CE = ۳۰$ و $BE = ۴۰$. اگر زاویهٔ A قائمه باشد، زاویهٔ E هم باید قائمه و رابطهٔ فیثاغورس باید در مثلث BCE برقرار باشد، بنابراین درمی‌یابید که:

$$۵۰^۲ = ۴۰^۲ + ۳۰^۲ \Longrightarrow \overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2$$



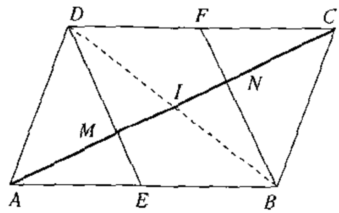
شکل ۲-۹

بنابر عکس قضیهٔ فیثاغورس، زاویهٔ E و بنابراین، زاویه‌های A و D باید قائمه باشند.

افزودن خطهایی به شکل برای نزدیکتر ساختن داده‌های مسأله به یکدیگر به‌ویژه در حل مسأله‌های ترسیمی کاربردهای زیادی دارد. ناگفته نباید گذاشت که خطهای افزوده شده به شکل ممکن است از خطهای مهم مشکل باشند مانند میانه‌ها و ارتفاعهای مثلثها، قطرهای چندضلعیها، شعاعهای نقطه‌های تماس مماسها بر دایره و مانند اینها، و ممکن است از خطهایی باشند که نقطه‌های مهم شکل را به هم وصل می‌کنند مانند خطهایی که وسطهای ضلعهای مثلث، یا وسطهای دو ساق یا دو قاعدهٔ ذوزنقه را به هم پیوند می‌دهند.

مثال۳. در متوازی الاضلاع $ABCD$، رأس D به E وسط AB و رأس B به F وسط CD وصل می‌شود. ثابت کنید خطهای DE و BF قطر AC را به سه پارهٔ برابر تقسیم می‌کنند.

اگر قطر BD (خط مهم در متوازی‌الاضلاع) رسم شود با قطر AC در I برخورد می‌کند. اکنون اگر ویژگی نقطهٔ برخورد میانه‌های دو مثلث ABD و BCD و ویژگی نقطهٔ I مرکز متوازی‌الاضلاع را به‌کار ببرید، حل مسأله به سادگی انجام می‌پذیرد.



شکل۲-۱۰

۲ـ۲ـ۲ بهره‌گیری از فرضهای تازه پدیدآمده

همان‌گونه که یادآوری شد، افزودن خطهایی به شکل به پدید آمدن و نمایان شدن رابطه‌هایی نو بین جزءهایی از شکل می‌انجامد. این رابطه‌ها در واقع فرضهایی نو هستند که به فرضهای مسأله افزوده می‌شوند. نه تنها با بهره‌گیری از این فرضها همراه با فرضهای داده شده مسأله حل می‌شود، بلکه در آنچه انجام می‌گیرد این فرضها جانشین بعضی از فرضهای داده شده می‌شوند و مسأله به مسأله‌ای ساده‌تر تبدیل و حل می‌شود. چنانکه در مثال پیش در آغاز داشتید.

فرض : $\left\{\begin{array}{l} \text{متوازی‌الاضلاع } ABCD، \\ AE = EB, DF = FC. \end{array}\right.$

حکم : $AM = MN = NC$.

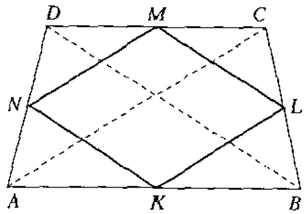
اما پس از رسم خط BD داشتید:

فرض جدید: $AI = IC, ID = IB$.

۲ـ۲ـ۳ به‌کار بردن کامل فرض

در مسأله‌ای که به‌گونهٔ صحیح طرح شده باشد هیچ‌یک از فرضها بیهوده نیست و برای اثبات حکم باید همهٔ آنها به‌کار روند و بعضی از آنها ممکن است چند بار به‌کار رود. بنابراین باید مطمئن شد تا در حل مسأله همهٔ فرضها به‌کار رفته باشند و چنانچه فرضی هنوز به‌کار نرفته است، باید دریافت که کاربرد آن در چیست.

مثال ۱. اگر وسطهای ضلعهای ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین یکی پس از دیگری به هم وصل شوند، ثابت کنید چهارضلعی به‌دست آمده لوزی است.



شکل ۲-۱۱

اگر فرض متساوی‌الساقین بودن ذوزنقهٔ $ABCD$ را در نظر نگیرید، ثابت می‌شود چهارضلعی $KLMN$ یک متوازی‌الاضلاع است که هر دو ضلع روبه‌روی آن با یکی از قطرهای ذوزنقه موازی و با نصف آن برابر است. اما برای لوزی بودن چهارضلعی $KLMN$ لازم است که KL با LM برابر باشد و این برابری تنها هنگامی برقرار می‌شود که دو قطر AC و BD با هم برابر باشند و فرض متساوی‌الساقین بودن ذوزنقهٔ $ABCD$ به‌کار رود.

مثال ۲. در مثال یاد شده در بند ۲-۱-۱ با عنوان «رسم شکل دقیق و گویا» از روی شکل (۲-۱) راهنمایی شدید که باید ثابت کنید چهارضلعی $MCBD$ متوازی‌الاضلاع است.

برای این کار، نخست باید ثابت کنید دو زاویهٔ C و D با هم برابرند که در اینجا فرض «دایرهٔ O بر A می‌گذرد» به‌کار نمی‌رود. اما هنگامی که باید ثابت کنید دو زاویهٔ D و M مکمل یکدیگرند، لازم می‌شود این فرض به‌کار رود.

۲ـ۲ـ۴ مقایسهٔ با حکم، نه به‌کار بردن آن

در حل مسأله‌ها به‌ویژه اگر ویژگیهای اندازه‌ای در کار باشد، اگر آنچه را می‌دانید یا به‌دست آورده‌اید با آنچه را که باید به‌دست آورید مقایسه کنید، می‌توانید دریابید که از آن پس چه چیز دیگر را باید ثابت کنید یا به‌دست آورید. اما باید توجه داشته باشید که مقایسهٔ با حکم به آنجا نینجامد که خود حکم را در

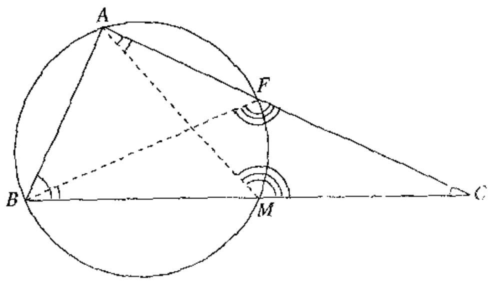
راه حل به‌کار ببرید. در استدلالی که برای ثابت کردن حکم به‌کار می‌رود نمی‌توان خود حکم را به هر صورت به‌کار برد.

مثال. مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. دایره‌ای رسم می‌شود که بر دو رأس A و B و بر نقطهٔ M وسط ضلع BC می‌گذرد و با ضلع AC در نقطهٔ F برخورد می‌کند. ثابت کنید که:

$$\frac{CF}{BC} = \frac{AM}{AC}$$

اگر خطهای AM و BF رسم شوند، مثلثهایی روی شکل پدید می‌آیند. با توجه به رابطهٔ حکم، راهنمایی می‌شوید آن دو مثلثی را با هم بسنجید که ضلعهایشان جمله‌هایی از رابطهٔ حکم باشند. این دو مثلث یکی BCF و دیگری ACM است. نخست ثابت می‌کنید که این دو مثلث متشابه‌اند و به‌دست می‌آورید:

$$\frac{CF}{CM} = \frac{BC}{AC} \Longrightarrow \frac{CF}{BC} = \frac{CM}{AC}$$



شکل۲-۱۲

اکنون اگر این رابطه را با رابطهٔ حکم بسنجید، درمی‌یابید که باید ثابت کنید CM با AM برابر است. این فرض را که زاویهٔ A قائمه است نیز باید به‌کار ببرید. بنابراین فرض و اینکه در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وتر با نصف وتر برابر است، از رابطهٔ به‌دست آمده، رابطهٔ حکم را نتیجه می‌گیرید.

* ۲ـ۳ توشه‌اندوزی

پیش از این گفته شد در راهی که برای ورزیده شدن در حل مسأله‌ها در پیش دارید یک توشهٔ راه لازم دارید و آن خوب به‌یاد داشتن درسهایی است که دربارهٔ تعریفها، قضیه‌ها و روشهای استدلال آموخته‌اید. اما هر چه در راه جلوتر بروید، توشهٔ راه باید مایه‌دارتر و نیروبخشتر شده باشد. هر مسأله دانستنیهای تازه‌ای را دربر دارد و نکته‌هایی را آشکار می‌سازد و می‌تواند مایهٔ افزایش و پربارتر شدن توشهٔ راه شما باشد، به شرط آنکه در حل آن اندیشهٔ خود را به‌کار انداخته باشید. اینکه راه حل مسأله‌ها را کسی برای شما بازگو کند یا آنها را در یک کتاب حل مسأله بیابید و بخوانید، ورزیدگی شما را برای

حل مسأله در پی نخواهد داشت و به اصطلاح، با خوردن غذاهای آماده شده آشپز نمی‌توان شد. پیش از این با راهبردها و راهکارهای دستیابی به راه حل یک مسأله آشنا شدید. اما صرف اینکه به راه حل مسأله‌ای دست یابید و جواب آن را به‌دست آورید، نباید کار را پایان یافته بدانید. پس از آن هم کارهایی هست که باید آنها را انجام دهید.

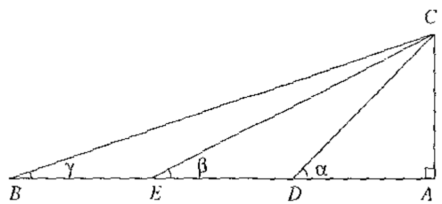
۲ـ۳ـ۱ بررسی راه حل

پس از آنکه مسأله‌ای را حل کردید، سعی کنید راه حلی را که به‌کار برده‌اید ار چند نظر بررسی کنید: یکی اینکه جایی اشتباه نکرده و نکته‌ای را نادیده نگرفته باشید، دیگر اینکه بیندیشید آیا راه حل دیگری را می‌توانید برای آن مسأله بیابید، و مهمتر اینکه اگر به چند راه‌حل مسأله دست یافتید، آنها را با هم بسنجید و ببینید هر کدام از چه قضیه‌هایی سود جسته است. در این مورد خیلی خوب می‌توانید از کتابهای حل مسأله بهره بگیرید. هنگامی که مسأله‌ای را با اندیشهٔ خود حل کردید، در کتابهای حل مسأله و درکتابهای دیگر، راه‌حلهایی از همان مسأله را بیابید و آنها را با راه‌حلی که خودتان به‌کار برده‌اید و نیز با یکدیگر مقایسه کنید.

مثال ۱. فرض کنید با مسأله‌ای به شرح زیر روبه‌رو شده‌اید:

در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه و AB سه برابر AC است. نقطه‌های D و E بر AB چنان‌اند که:

$$AC = AD = DE = EB$$



شکل۲-۱۳

ثابت کنید که زاویهٔ $\alpha = ADC$ برابر است با مجموع دو زاویهٔ $\beta = AEC$ و $\gamma = ABC$.

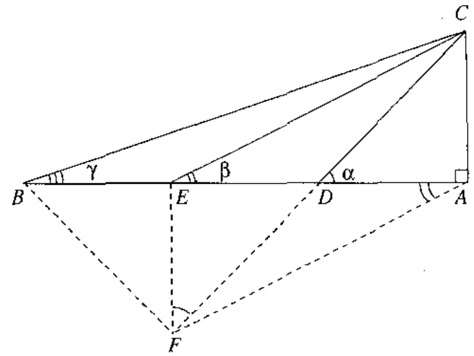
الف) روی این مسأله فکر خود را به‌کار انداخته و سرانجام به راه حل زیر دست یافته‌اید*:

CD را به اندازهٔ خود تا F امتداد داده و FA و FE و FB را رسم کرده و ثابت کرده‌اید $ACEF$ متوازی‌الاضلاع و EF بر AE عمود است و به‌دست آورده‌اید:

$$\angle BAF = \beta,\ \angle EFD = \alpha,\ \angle BFC = ۹۰^\circ$$

---

* راه حل از عبدالحسین مصحفی، مجلهٔ یکان مرداد ۱۳۴۳



شکل۲-۱۴

سپس نتیجه گرفته‌اید که دایرهٔ به قطر BC بر A و F می‌گذرد و در چهارضلعی محاطی $AFBC$ دو زاویهٔ AFC و ABC با هم برابرند و در نتیجه $\angle AFC = \gamma$. زاویهٔ ADC زاویهٔ خارجی مثلث ADF است و:

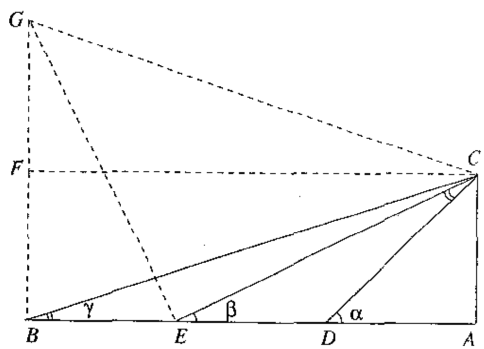
$$\angle ADC = \angle DAF + \angle AFD \Longrightarrow \alpha = \beta + \gamma$$

ب) مسأله را ثابت کرده‌اید و برای اطمینان بیشتر راه حل خود را بررسی می‌کنید و متوجه می‌شوید که جایی اشتباه نکرده‌اید. همین مسأله را با دوست خود در میان می‌گذارید و او روزی دیگر به شما اطلاع می‌دهد که به حل مسأله دست یافته و راه حل زیر را به‌کار برده است*:

در B عمودی بر AB و در E عمودی بر CE رسم می‌کنیم که در G با هم برخورد می‌کنند. از برابری دو مثلث BEG و AEC به‌دست می‌آید:

$$BG = AE = ۲AC,\ CE = EG,$$

$$\angle ECG = ۴۵^\circ$$



شکل۲-۱۵

* راه حل از خسرو جهانیار، مجلهٔ یکان مرداد ۱۳۴۳

اگر از C به F وسط BG وصل شود، CF بر BG عمود و مثلث CBG متساوی‌الساقین است و دو زاویهٔ BCF و FCG با هم برابرند. چهارضلعی $ABFC$ مستطیل است و به‌دست می‌آید:

$$\angle BCF = \angle FCG = \angle ABC = \gamma$$

$$\angle BCE + \angle BCF = \angle AEC = \beta$$

$$\angle BCE + \angle BCF + \angle FCG = \beta + \gamma = ۴۵^\circ = \alpha$$

ج) دوست دیگری که گفتگوهای شما را گوش می‌کند، می‌گوید راه حل مسأله خیلی ساده است؛ زیرا:

$$\alpha = ۴۵^\circ,\ \tan\alpha = ۱,\ \tan\beta = \frac{۱}{۲}, \tan\gamma = \frac{۱}{۳},$$

$$\tan(\beta+\gamma) = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{۱ - \tan\beta\tan\gamma} = \frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}{۱ - \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}} = \frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۵}{۶}} = ۱ = \tan ۴۵^\circ = \tan\alpha$$

$$\Longrightarrow \alpha = \beta + \gamma$$

د) در یک کتاب حل مسأله می‌بینید که برای حل این مسأله با فرض $AC = a$ به‌دست آورده است:

$$AD = a,\ AE = ۲a,\ AB = ۳a$$

و با به‌کار بردن قضیهٔ فیثاغورس در مثلثهای ADC، AEC و ABC به‌دست آورده است:

$$CD = a\sqrt{۲},\ CE = a\sqrt{۵},\ CB = a\sqrt{۱۰}$$

$$\frac{BC}{CE} = \frac{BD}{CD} = \frac{CD}{DE} = \sqrt{۲}$$

دو مثلث BCD و CDE در حالت تناسب سه ضلع با هم متشابه‌اند و نتیجه می‌شود

$$\angle DCE = \angle CBD = \gamma$$

و از اینکه α زاویهٔ خارجی مثلث CDE است، رابطهٔ $\alpha = \beta + \gamma$ به‌دست می‌آید.

ه) حل مسأله را از دبیر ریاضی خود درخواست می‌کنید و او چنین توضیح می‌دهد:

با فرض $AC = a$ داریم:

$$AD = DE = a,\ BD = ۲a,\ CD = a\sqrt{۲}$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{۲a}{a\sqrt{۲}} = \sqrt{۲},\ \frac{CD}{DE} = \frac{a\sqrt{۲}}{a} = \sqrt{۲}$$

و به‌دست می‌آید:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{DE}$$

یعنی دو ضلع BD و CD از مثلث BCD با دو ضلع CD و DE از مثلث CDE نظیر به نظیر متناسب‌اند و این دو مثلث که در زاویهٔ بین این دو ضلع ($\angle CDE$) مشترک‌اند، در حالت تناسب دو ضلع و برابری زاویهٔ بین آنها متشابه‌اند و نتیجه می‌شود

$$\angle DCE = \angle DBC = \gamma$$

و چون α زاویهٔ خارجی مثلث CDE و با مجموع دو زاویهٔ داخلی DEC و DCE برابر است بنابراین:

$$\alpha = \beta + \gamma$$

و) در یک کتابخانه به یک دوره از مجله‌ای ریاضی دست می‌یابید و می‌بینید که در آن، این مسأله به مسابقه گذاشته شده و یکی از راه‌حلهای رسیده برای آن چنین است:

با فرض $AC = a$ داریم:

$$\overline{CD}^{۲} = \overline{AC}^{۲} + \overline{AD}^{۲} = a^{۲} + a^{۲} = ۲a^{۲}$$

$$DE \cdot DB = a \times ۲a = ۲a^{۲}$$

و نتیجه می‌شود:

$$\overline{DC}^{۲} = DE \cdot DB$$

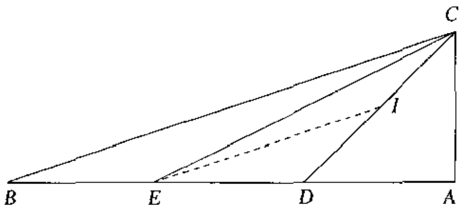
با توجه به رابطه‌های اندازه‌ای در دایره، نتیجه می‌شود دایره‌ای که بر سه نقطهٔ C و E و B می‌گذرد در C بر DC مماس است و نسبت به این دایره، زاویهٔ DCE ظلی و زاویهٔ DBC محاطی است و هر دو زاویه روبه‌رو به یک کمان‌اند و با هم برابرند. پس زاویهٔ DCE برابر با γ است و چون α زاویهٔ خارجی مثلث CDE است، پس:

$$\alpha = \beta + \gamma$$

ز) راه‌حل دیگری که در آن مجله نموده شده چنین است: از E به I وسط CD وصل می‌کنیم. خط EI که وسطهای دو ضلع DC و DB از مثلث CDB را به هم وصل کرده با ضلع BC موازی است و زاویهٔ DEI با زاویهٔ γ برابر است. از سوی دیگر، با فرض $AC = a$ داریم:

$$CD = a\sqrt{۲},\ DI = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$DI \cdot DC = a^{۲} = \overline{DE}^{۲}$$



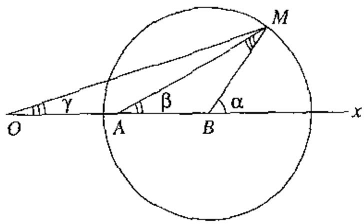
شکل۲-۱۶

دایره‌ای که بر سه نقطهٔ C و I و E می‌گذرد در E بر DE مماس است. نسبت به این دایره، زاویهٔ ظلی $DEI = \gamma$ با زاویهٔ محاطی ICE برابر است. بنابراین:

$$\angle ICE = \gamma,\ \alpha = \angle DEC + \angle DCE = \beta + \gamma$$

ح) راه حل دیگری که در آن مجله بهترین شناخته شده چنین است: نیم‌خط Ox و دو نقطهٔ A و B را روی آن در نظر می‌گیریم که A از B به O نزدیکتر است. اگر نقطهٔ M چنان به‌دست آمده باشد که با فرضِ

$$\alpha = \angle MBx,\ \beta = \angle MAx,\ \gamma = \angle MOx$$



شکل۲-۱۷

داشته باشیم $\alpha = \beta + \gamma$، معلوم می‌کنیم که مکان هندسی نقطهٔ M چیست. سپس حالت

$$OA = AB = a,\ \alpha = ۴۵^\circ$$

را بررسی و ثابت می‌کنیم که مسألهٔ مثلث قائم‌الزاویه حالت ویژه‌ای از این مسأله است.

از اینکه α زاویهٔ خارجی مثلث ABM است نتیجه می‌شود:

$$\alpha = \beta + \angle AMB$$

که در مقایسهٔ با فرض $\alpha = \beta + \gamma$ خواهیم داشت:

$$\angle AMB = \gamma$$

دو مثلث MBA و MBO که در زاویهٔ B مشترک‌اند در حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند و:

$$\frac{MB}{OB} = \frac{AB}{MB} \Longrightarrow \overline{BM}^{۲} = BA \cdot BO \qquad (۱)$$

نقطه‌های O، A و B ثابت‌اند و حاصل‌ضرب $BO \cdot BA$ نیز ثابت است پس $\overline{BM}^{۲}$ نیز ثابت است و BM اندازهٔ ثابت دارد و M بر دایرهٔ به مرکز B و به شعاع برابر با $\sqrt{BO \cdot BA}$ واقع است. برعکس هر نقطهٔ M از این دایره که انتخاب شود بنابر رابطهٔ (۱)، دو مثلث MOB و MAB در حالت تناسب دو ضلع و برابری زاویهٔ بین آنها متشابه‌اند و برابری زاویهٔ AMB با زاویهٔ MOB و سپس رابطهٔ $\alpha = \beta + \gamma$ نتیجه می‌شود. بنابراین، دایرهٔ به مرکز B و به شعاع برابر با $\sqrt{BO \cdot BM}$، که بر دایرهٔ به قطر OA نیز عمود است، مکان هندسی نقطهٔ M است.

در حالت ویژهٔ $OA = AB = a$، از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید:

$$\overline{BM}^{۲} = ۲a \times a = ۲a^{۲} \Longrightarrow BM = a\sqrt{۲}$$

و چنانچه در این حالت α نیز برابر با ۴۵ درجه باشد. چون عمود MH بر Ox رسم شود مثلث قائم‌الزاویهٔ MHB متساوی‌الساقین است و MH و همچنین BH برابر با a خواهند بود و مسأله به‌صورت مسألهٔ مثلث قائم‌الزاویه درمی‌آید. بنابراین مسألهٔ مثلث قائم‌الزاویه (مسألهٔ مثال ۱ از ۲ـ۳، ۱) حالت ویژه‌ای از این مسأله و ثابت است.

به هشت راه‌حل از مسأله دست یافته‌اید. اکنون موقع سنجش این راه‌حلها است. اما این سنجش بنابر چه معیاری باید انجام گیرد؟ یک معیار این می‌تواند باشد که کدام راه‌حل به‌وقت کمتری نیاز دارد. این موضوع در آزمونها و در مسابقه‌ها اهمیت زیاد دارد؛ روی یک مسأله هر چه کمتر معطل شوید برای پرداختن به مسأله‌های دیگر وقت بیشتری در اختیار دارید. معیار دیگر این می‌تواند باشد که برای کدام راه حل به دانستنیهای کمتری از متن درس نیاز خواهد بود. در آزمونها، زمینهٔ درسی و درسهای آموخته شده ملاک عمل است. در یک آزمون در زمینهٔ هندسه راه حل مثلثاتی پذیرفته نیست، اگر قضیهٔ فیثاغورس هنوز آموخته نشده است در حل مسأله از آزمون نمی‌توان آن را به‌کار برد.

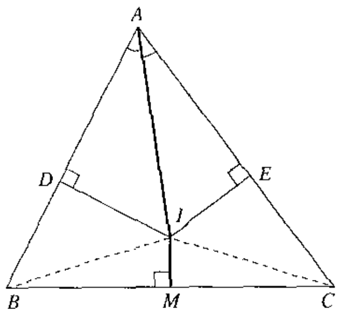
در هشت راه‌حل نموده شده: راه‌حل (ج) مثلثاتی است. راه حل (ب) هر چند پیچیده‌تر از سایر راه‌حلهاست، اما این امتیاز را دارد که در آن تنها از مقالهٔ اول هندسه (برابری مثلثها و ویژگیهای خطهای موازی) استفاده شده است. راه حل (الف) بدون بهره‌گیری از تشابه مثلثها و رابطه‌های اندازه‌ای انجام گرفته است. در راه حل (د) محاسبهٔ اندازه‌های CE و CB زیادی است؛ زیرا دو مثلث BCD و CDE در یک زاویه مشترک‌اند و تناسب دو ضلع این زاویه از دو مثلث برای تشابه آنها کفایت می‌کند. در راه‌حلهای (و) و (ز) از رابطهٔ اندازه‌ای به‌دست آمدهٔ بین سه پاره‌خط، تشابه دو مثلث و برابری دو زاویه نتیجه می‌شود و بهره‌گیری از ویژگیهای زاویه‌های ظلی و محاطی لزومی نداشته است. راه حل (هـ) بهترین و ساده‌ترین راه‌حلها برای مسأله به‌همان حالت ویژه به‌شمار می‌آید. راه حل (ح) یک راه‌حل کامل ریاضی است؛ یک مسأله کلی را بیان و حل می‌کند که نه‌تنها راه حل آن مسأله داده شده بلکه راه حل مسأله‌های دیگری از همان‌گونه را نیز در بردارد و نمونه‌ای از کاری است که یک ریاضیدان برای حل یک مسأله در پیش می‌گیرد.

گاه پیش می‌آید که پس از حل یک مسأله به نتیجه‌ای خلاف فرض یا حکم می‌رسید. پیش از آنکه اعلام کنید مسأله غلط است نه تنها راه حلی را که به‌کار برده‌اید بلکه شکلی را هم که رسم کرده‌اید باید با دقت بازبینی کنید و مطمئن شوید در هیچ‌کدام از آنها نکته‌ای را نادیده نگرفته‌اید.

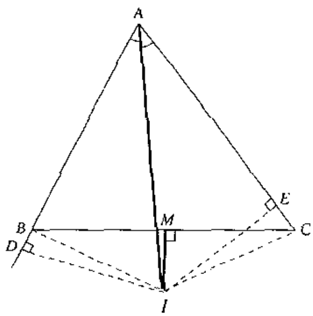
مثال۲. در مثلث ABC که AC بزرگتر از AB است نیمساز داخلی زاویهٔ A با عمودمنصف ضلع BC در I برخورد می‌کند. ثابت کنید زاویهٔ BIC مکمل زاویهٔ BAC است.

شکل مسأله را مطابق با شکل (۲-۱۸) صفحهٔ بعد رسم می‌کنید. با توجه به این نکته که باید همهٔ فرضهای مسأله را به‌کار برد، عمودهای ID و IE را بر ضلعهای AB و AC نیز رسم می‌کنید. در چهارضلعی $ADIE$ می‌بینید که دو زاویهٔ روبه‌روی D و E هر دو قائمه و مکمل یکدیگرند، پس

درمی‌یابید که زاویهٔ DIE مکمل زاویهٔ A است و برای اینکه زاویهٔ BIC نیز مکمل زاویهٔ A باشد باید دو زاویهٔ DIE و BIC با هم برابر باشند. اما شکل خلاف این را نشان می‌دهد. استدلال را هم که به‌کار ببرید درمی‌یابید این دو زاویه هنگامی برابرند که متقابل به‌رأس باشند که لازم می‌شود CID و همچنین BIE خط مستقیم و I مرکز ارتفاعی مثلث باشد. اما چون AB و AC با هم برابر نیستند، مرکز ارتفاعی نمی‌تواند روی نیمساز زاویهٔ A و یا روی عمودمنصف BC واقع باشد. به تناقض برخورده‌اید. از خود می‌پرسید اشتباه از شما یا از صورت مسأله است. به فکرتان می‌رسد که باید از ویژگیهای نیمساز زاویه و عمودمنصف پاره‌خط استفاده کنید. بنابراین ویژگیها، ID با IE و IB با IC برابر است و بنابراین، مثلث IBC متساوی‌الساقین است و دو مثلث IBD و ICE با هم برابرند. در نتیجه دو زاویهٔ MBI و MCI با هم، دو زاویهٔ ICE و IBD نیز با هم و مجموع آنها یعنی دو زاویهٔ B و C از مثلث ABC و در نتیجه، دو ضلع AB و AC با هم برابرند که خلاف فرض است. اشتباه از چیست؟ از شکلی است که رسم کرده‌اید. شکل صحیح مطابق با شکل (۲-۱۹) زیر است. از اینکه در چهارضلعی $ADIE$ دو زاویهٔ D و E قائمه و مکمل یکدیگرند و از اینکه دو زاویهٔ BID و CIE با هم برابرند نتیجه می‌شود که زاویهٔ BIC مکمل زاویهٔ A است.



شکل۲-۱۸



شکل۲-۱۹

۲ـ۳ـ۲ تبدیل و تعمیم مسأله

با حل هر مسأله با گروهی از مسأله‌های دیگر روبه‌رو می‌شوید: مسأله‌هایی که به‌هنگام پیش بردن راه حل با آنها سر وکار داشته‌اید و مسأله‌هایی که می‌توانید از آن مسأله به‌دست آورید. از این مسأله‌ها بعضی را می‌شناسید و بعضی برای شما تازگی دارند. بررسی آنها و کوشش برای حل مسأله‌های تازه بر دانسته‌های شما می‌افزاید و آمادگی بهتر شما را برای حل مسأله‌ها به‌دنبال خواهد داشت.

قضیه‌ها و همچنین مسأله‌ها را می‌توان به‌صورت «اگر فرض آنگاه حکم» بیان کرد. اگر فرض با گزارهٔ P و حکم با گزارهٔ Q نشان داده شود، «اگر P آنگاه Q» را یک استلزام می‌نامند و به‌صورت

$$P \Longrightarrow Q \qquad (۱)$$

نشان می‌دهند. این استلزام که برقرار باشد اگر درستی P پذیرفته شود Q هم باید درست باشد و اگر خلاف Q (= نفی Q) درست پنداشته شود باید خلاف P (= نفی P) نتیجه شود. خلاف P را با $\sim P$ یا با $\overline{P}$ و خلاف Q را با $\sim Q$ یا با $\overline{Q}$ نشان می‌دهند. استلزام

$$\sim Q \Longrightarrow \sim P \qquad (۲)$$

با استلزام $P \Longrightarrow Q$ هم‌ارز است، یعنی هر کدام که برقرار باشد دیگری نیز برقرار است و هر کدام که برقرار نباشد دیگری نیز برقرار نیست. استلزام (۲) را عکس نقیض استلزام (۱) می‌نامند. به‌جای اثبات یک قضیه یا مسأله می‌توان عکس نقیض آن را ثابت کرد که این گونه‌ای از برهان خلف است.

عکس یک قضیه یا یک مسأله را می‌توان به‌صورت استلزام «اگر حکم آنگاه فرض» بیان کرد. بنابراین، استلزام

$$Q \Longrightarrow P \qquad (۳)$$

یعنی «اگر Q آنگاه P» عکس استلزام (۱) است. می‌دانید که برای بعضی از قضیه‌ها، و نه برای همهٔ آنها، عکسشان نیز ثابت می‌شود. زیرا اگر قضیه‌ای درست باشد عکس آن ممکن است درست و ممکن است نادرست باشد. از این‌رو به جای اثبات یک قضیه یا یک مسأله نمی‌توان به اثبات عکس آن روی آورد.

در قضیه‌ها یا مسأله‌هایی که هم خود قضیه یا مسأله و هم عکس آن درست باشد، فرض را شرط لازم و کافی برای حکم می‌نامند. همان‌گونه که می‌دانید برای اثبات قضیه‌ها یا مسأله‌هایی که با شرط لازم و کافی بیان شده باشند هم باید خود قضیه یا مسأله را ثابت کرد و هم عکس آن را.

دو استلزام $P \Longrightarrow Q$ و $P \Longrightarrow \sim Q$ که در آنها P درست باشد خلاف یکدیگرند. خلاف قضیه یا مسألهٔ «اگر فرض آنگاه حکم» به‌صورت «اگر فرض آنگاه خلاف حکم» بیان می‌شود. در برهان خلف به جای اثبات قضیه یا مسأله ثابت می‌شود که خلاف آن ممکن نیست.

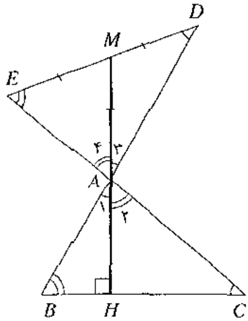
استلزام $\sim P \Longrightarrow \sim Q$ را متقابل استلزام $P \Longrightarrow Q$ می‌نامند و با عکس این استلزام یعنی با $Q \Longrightarrow P$ هم‌ارز است. متقابل قضیه یا مسألهٔ «اگر فرض آنگاه حکم» می‌شود «اگر خلاف فرض آنگاه خلاف حکم». اگر قضیه یا مسأله ثابت شده باشد متقابل آن هنگامی درست است که عکس آن قضیه یا مسأله نیز درست باشد، یعنی قضیه با شرط لازم و کافی بیان شده باشد.

اگر استلزام $P \Longrightarrow Q$ و گزارهٔ P درست باشند در استلزام $\sim P \Longrightarrow Q$، گزارهٔ Q ممکن است درست و ممکن است نادرست باشد. بنابراین، اگر قضیه یا مسألهٔ «اگر فرض آنگاه حکم» ثابت شده باشد قضیه یا مسألهٔ «اگر خلاف فرض آنگاه حکم» در موردهایی درست و در موردهایی نادرست است. استلزام $\sim Q \Longrightarrow P$ عکس نقیض $\sim P \Longrightarrow Q$ است و همان وضع را دارد.

پس از بررسی راه حلی که برای یک مسأله به‌کار برده‌اید آنگاه: نخست ببینید چه حکمهایی را در آن راه حل به‌کار برده‌اید و کدامها قضیه‌های ثابت شده بوده‌اند و کدامها را می‌توان به‌صورت مسأله

بیان کرد. پس از آن، مسأله را به‌صورت اگر آنگاه بیان کنید و ببینید از مسأله‌هایی که نظیر این استلزام می‌توان بیان کرد کدامها درست‌اند. از این مسأله‌ها آنها را که برای شما تازگی دارند به‌خاطر بسپارید. سرانجام آنکه اگر مسأله را برای حالت کلی یک شکل ثابت کرده باشید برای حالتهای ویژهٔ آن شکل نیز باید درست باشد.

مثال ۱. مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. در جهت بیرون مثلث، ضلع AB را تا نقطهٔ D امتداد داده‌ایم که AD برابر با AC و ضلع AC را تا نقطهٔ E امتداد داده‌ایم که AE برابر با AB باشد. ثابت کنید امتداد ارتفاع AH از مثلث ABC از M وسط DE می‌گذرد:



شکل۲-۲۰

با بهره‌گیری از قضیهٔ برابری زاویه‌های متقابل به‌رأس و این قضیه که در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر با هر ضلع زاویهٔ قائمه، زاویه‌ای برابر با زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع می‌سازد، به‌دست می‌آید که:

$$\angle C = \angle A_۱ = \angle A_۳ = \angle D$$

$$\angle B = \angle A_۲ = \angle A_۴ = \angle E$$

و بنابراین هر یک از دو مثلث AMD و AME متساوی‌الساقین است و MD و ME که با MA برابرند با یکدیگر هم برابرند و M وسط DE و AM میانهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ ADE است.

در این راه‌حل مسأله، با قضیه‌ها و مسأله‌هایی که به‌کار برده‌ایم آشناییم و برایمان تازگی ندارد. اکنون ببینیم از این مسأله چه مسأله‌هایی را می‌توانیم به‌دست آوریم و آیا خود مسأله را می‌توانیم به‌صورتی دیگر بیان کنیم؟

الف) در این مسأله ثابت کردیم «اگر AH بر BC عمود باشد آنگاه امتداد AH از M وسط DE می‌گذرد.»

۱) عکس نقیض مسأله می‌شود: «اگر امتداد AH از M وسط DE نگذرد آنگاه AH بر BC عمود نیست» که باید صحیح باشد و ثابت شود؛ اگر M وسط DE نباشد، AM

نمی‌تواند هم با MD و هم با ME برابر باشد و دست‌کم با یکی از آنها مثلاً با MD نابرابر است. زاویهٔ D با زاویهٔ A_2 و با زاویهٔ A_1 برابر نمی‌شود و چون زاویهٔ D متمم زاویهٔ E و در نتیجه متمم زاویهٔ B است پس زاویهٔ A_1 متمم زاویهٔ B نمی‌شود و در نتیجه زاویهٔ H قائمه نیست.

۲) عکس مسأله می‌شود: «اگر امتداد AH از M وسط DE بگذرد آنگاه AH بر BC عمود است». این حکم با برهان خلف و از راه به‌کار بردن رابطه‌های بین زاویه‌های شکل ثابت می‌شود و صحیح است. پس می‌توانیم مسأله را با شرط لازم وکافی بیان کنیم: مثلاً «برای آنکه خط گذرندهٔ بر A از وسط DE بگذرد لازم وکافی است که آن خط بر BC عمود باشد».

۳) مسألهٔ متقابل مسأله می‌شود: «اگر AH بر BC عمود نباشد آنگاه امتداد AH از M وسط DH نمی‌گذرد». چون عکس مسأله را ثابت کردیم، متقابل مسأله (که عکس نقیض عکس مسأله است) نیز ثابت شده است. به‌صورت مستقیم هم می‌توانیم آن را ثابت کنیم.

۴) خلاف مسأله می‌شود: «اگر AH بر BC عمود باشد آنگاه امتداد AH از M وسط DE نمی‌گذرد» که غلط است و اثبات غلط بودن آن بر پایهٔ اثبات عکس نقیض مسأله انجام می‌گیرد.

۵) حکم «اگر AH بر BC عمود نباشد آنگاه امتداد AH از وسط DE می‌گذرد» نیز غلط است (بنابر عکس مسأله).

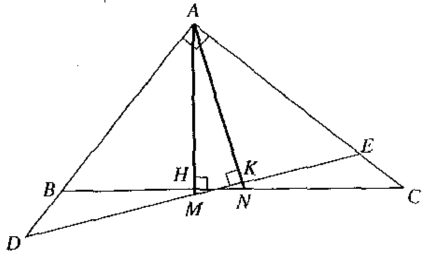
ب) در حالتهای بالا فرضها و حکم مسأله را تغییر ندادیم. اکنون ببینیم اگر جابه‌جاییهایی یا تغییرهایی در آنها بدهیم چه مسأله‌هایی را می‌توانیم بیان کنیم.

۶) فرض را این‌گونه می‌گیریم که AN میانهٔ BC است و حکم را عمود بودن امتداد آن بر DE بیان می‌کنیم. این مسأله هم به سادگی ثابت می‌شود و از این‌رو مسألهٔ داده شده را می‌توانیم چنین بیان کنیم.

اگر مثلث ADE را به ترتیبی که گفته شده است روی مثلث ABC و در بیرون آن رسم کنیم، امتداد ارتفاع وارد بر وتر هر یک از دو مثلث ABC و ADE میانهٔ نظیر وتر مثلث دیگر است و برعکس، امتداد میانهٔ وتر هر یک از دو مثلث ارتفاع وارد بر وتر مثلث دیگر است.

۷) این فرض را که مثلث ADE در بیرون مثلث ABC رسم شود تغییر می‌دهیم و به جای آن این فرض را می‌پذیریم که مثلث ADE روی مثلث ABC ساخته شود. شکل (۲-۲۱) را خواهیم داشت و باز هم ثابت می‌شود که ارتفاع وارد بر وتر هر یک از دو مثلث میانهٔ وتر مثلث دیگر است. در این شکل و در شکل (۲-۲۰)، هر یک از دو مثلث BAE و CAD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و در نتیجه دو مثلث ABC و ADE در شکل (۲-۲۰) نسبت به

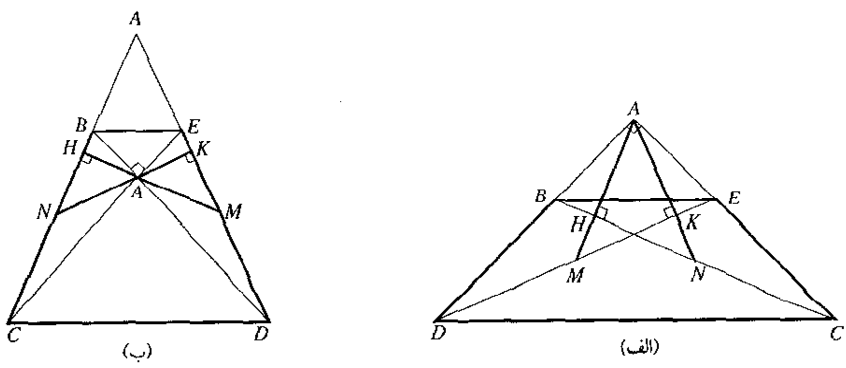
نیمساز خارجی زاویهٔ A و در شکل (۲-۲۱) نسبت به نیمساز داخلی زاویهٔ A قرینهٔ یکدیگرند و در حالت اول نیمساز خارجی زاویهٔ A و در حالت دوم نیمساز داخلی آن از نقطهٔ برخورد وترهای دو مثلث می‌گذرد. در حالتی که مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض متساوی‌الساقین باشد میانهٔ وتر و ارتفاع وارد بر وتر روی‌هم قرار دارند و باز هم حکم برقرار است. در این حالت، وترهای دو مثلث یا با هم موازی یا روی هم قرار دارند و در هر دو مورد با نیمساز خارجی زاویهٔ A موازی‌اند. با توجه به این نتیجه‌ها می‌توانیم مسأله را به‌گونهٔ کلیتر زیر بیان کنیم:



شکل۲-۲۱

هرگاه قرینهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را نسبت به هر یک از نیمسازهای داخلی یا خارجی زاویهٔ قائمهٔ آن به‌دست آوریم، ارتفاع و میانهٔ وتر هر یک از دو مثلث به ترتیب میانه و ارتفاع وتر مثلث دیگر است و وترهای دو مثلث یا با یکی از نیمسازهای زاویهٔ قائمه متقارب‌اند یا اینکه با نیمساز خارجی آن زاویه موازی‌اند.

۸) با توجه به اینکه در هر دو شکل (۲-۲۰) و (۲-۲۱) نقطه‌های B، C، D و E چهار رأس یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین‌اند، می‌توانیم مسأله را به‌گونه‌ای باز هم کلیتر چنین بیان کنیم: در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، اگر دو قطر بر هم عمود باشند خطی که از نقطهٔ برخورد دو قطر بر یکی از دو ساق عمود شود ساق دیگر را نصف می‌کند، و اگر دو ساق بر هم عمود باشند خطی که از نقطهٔ برخورد دو ساق بر یکی از دو قطر عمود شود قطر دیگر را نصف می‌کند.



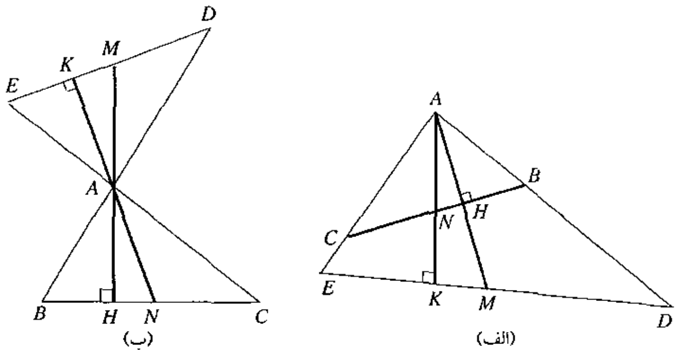
شکل۲-۲۲

ج) در آنچه تاکنون گذشت این فرض را داشتیم که مثلث قائم‌الزاویهٔ داده شده را به مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر چنان تبدیل می‌کردیم که دو مثلث به‌طور معکوس با هم برابر بودند، یعنی در این مثلثها ضلعهای زاویهٔ قائمه نظیر با غیرنظیر برابر می‌شدند. اکنون این فرض را تغییر می‌دهیم و مسأله را به‌گونه‌ای باز هم کلیتر چنین بیان می‌کنیم:

۹) در مثلث ABC که در زاویهٔ A قائمه است، اگر نقطه‌های D و E به‌ترتیب روی AB و AC یا در امتداد آنها چنان گزیده شوند که D و E به ترتیب با B و C یا هر دو در یک طرف A یا هر دو در دو طرف A باشند و اگر به‌ازای عدد حقیقی مفروض k، داشته باشیم:

$$AD = k \cdot AC,\ AE = k \cdot AB$$

آنگاه ارتفاع و میانهٔ وتر هر یک از دو مثلث ABC و ADE به‌ترتیب میانه و ارتفاع وتر مثلث دیگر است.

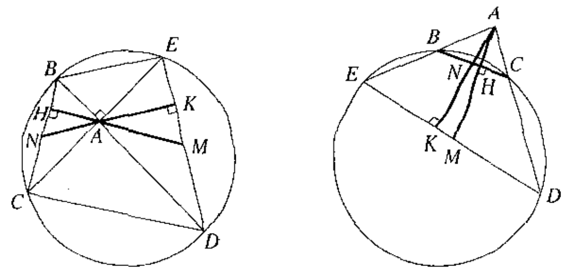


شکل۲-۲۳

از دیدگاه تبدیلهای هندسی، مثلث ADE از مثلث ABC با ترکیب دو تبدیل به‌دست می‌آید: تجانس به مرکز A و به نسبت k و تقارن نسبت به یکی از نیمسازهای زاویهٔ A.

۱۰) در همهٔ حالتهای گفته شده، از برابری دو زاویهٔ B و E و همچنین دو زاویهٔ C و D از دو مثلث، نتیجه می‌شود که چهارضلعی به رأسهای B، C، D و E محاطی است. از این‌رو می‌توان مسأله را به‌صورتی باز هم کلیتر چنین بیان کرد:

در هر چهارضلعی محاطی، اگر دو قطر بر هم عمود باشند خطی که از نقطهٔ برخورد دو قطر بر یکی از دو ضلع روبه‌روی هم عمود شود از وسط ضلع دیگر می‌گذرد، و اگر امتدادهای دو ضلع روبه‌روی هم بر هم عمود باشند خطی که از نقطهٔ برخورد آنها بر یکی از دو ضلع دیگر عمود شود از وسط دیگری می‌گذرد.



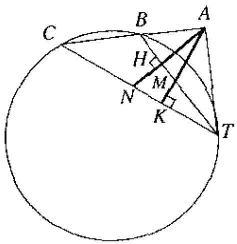
(الف) (ب)

شکل ۲-۲۴

۱۱) در همهٔ حالتها، دایرهٔ به قطر MN بر H و K می‌گذرد و از این‌رو، افزون‌بر چهارضلعی به رأسهای B، C، D و E، چهارضلعی به رأسهای H، K، M و N نیز محاطی است و نتیجه می‌شود:

$$AB \cdot AD = AC \cdot AE,\ AH \cdot AM = AK \cdot AN$$

۱۲) در آن شکل از شکلهای (۲-۲۴) که A خارج دایره است، اگر دو رأس C و D (یا دو رأس B و E) به‌تدریج به هم نزدیک شوند و سرانجام بر هم واقع شوند، خط ACD به مماس بر دایره تبدیل می‌شود و مسألهٔ زیر را می‌توان بیان کرد:
هرگاه یک ضلع زاویهٔ قائمه به رأس A در T بر یک دایره مماس باشد و ضلع دیگر آن با آن دایره در B و C برخورد کند، ارتفاع و میانهٔ وتر هر یک از دو مثلث ABT و ACT به ترتیب میانه و ارتفاع وتر مثلث دیگر است.



شکل ۲-۲۵

مثال ۲. ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خط بین وسطهای دو ضلع با ضلع سوم موازی و با نصف ضلع سوم برابر است. این مسأله و راه حل آن را به‌خوبی می‌شناسید. این نمونه‌ای از قضیه‌ها و مسأله‌هایی است که فرض یا حکم آنها بیش از یک جزء را دربردارد. خلاف چنین فرض یا حکمی چگونه باید بیان شود. با توجه به اینکه:

نفی «P و Q» در حالت کلی به صورت «$\sim P$ یا $\sim Q$» و در حالتی که P و Q هر دو گزارهٔ درست باشند به‌صورت «P و $\sim Q$» یا به‌صورت «$\sim P$ و Q» است، و همچنین:

نفی «P یا Q» در حالت کلی به‌صورت «$\sim P$ و $\sim Q$» است،
در صورتی که مسأله به‌صورت «اگرـآنگاه» بیان و هر جزء از فرض و هر جزء از حکم آن معلوم شود چگونگی بیان حالتهای گوناگون آن کاری ساده خواهد بود.

صورت مسأله: مثلث ABC، نقطهٔ M بر ضلع AB و نقطهٔ N بر ضلع AC داده شده است.

فرض: اگر «M وسط AB» و «N وسط AC» باشد، آنگاه

حکم: «MN با BC موازی» و «MN برابر با نصف BC» است.

عکس مسأله: «اگر MN با BC موازی» و «MN برابر با نصف BC» باشد آنگاه «M وسط AB» و «N وسط AC» است.

عکس نقیض: اگر «MN با BC موازی نباشد» یا «MN با نصف BC برابر نباشد» آنگاه «M وسط AB نیست» یا اینکه «N وسط AC نیست».

خلاف مسأله: یا با ثابت نگهداشتن فرض و نفی حکم، یا با ثابت نگهداشتن فرض و نفی یک جزء از حکم بیان می‌شود و اگر عکس مسأله هم درست باشد، خلاف عکس هم خلاف خود مسأله خواهد بود. از این‌رو خلاف مسأله را به‌صورتهای گوناگون می‌توان بیان کرد. چنان‌که برای مسألهٔ بالا داریم:

۱) اگر «M وسط AB» و «N وسط AC باشد آنگاه «MN با BC موازی نیست» یا اینکه «MN با نصف BC برابر نیست».
۲) اگر «M وسط AB» و «N وسط AC» باشد آنگاه «MN با BC موازی نیست» و «MN با نصف BC برابر است».
۳) اگر «M وسط AB» و «N وسط AC» باشد آنگاه «MN با BC موازی است» و «MN با نصف BC برابر نیست».
۴) اگر «MN با BC موازی» و «MN با نصف BC برابر» باشد آنگاه « M وسط AB نیست» یا «N وسط AC نیست».

متقابل مسأله: اگر «M وسط AB نباشد» یا «N وسط AC نباشد» آنگاه «MN با BC موازی نیست» یا اینکه «MN با نصف BC برابر نیست».
حالت اگر «M وسط AB نباشد» یا «N وسط AC نباشد» آنگاه «MN با BC موازی است» و «MN با نصف BC برابر است» و همچنین حالت اگر «MN با BC موازی نباشد» یا «MN با نصف BC برابر نباشد» آنگاه « M وسط AB است» و «N وسط AC است» نادرست است.

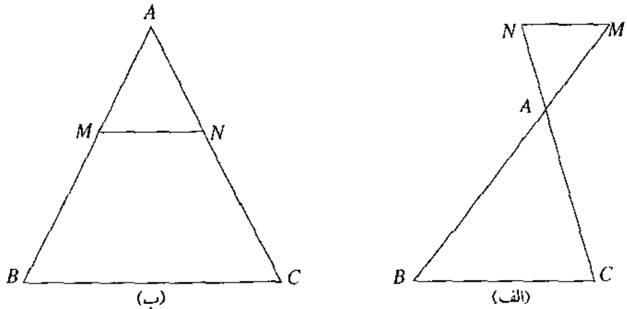
تعمیم مسأله: در مثلث ABC نقطهٔ M بر AB یا بر امتداد AB و نقطهٔ N بر AC یا بر امتداد AC واقع است. اگر M و N هر دو با B و C در یک طرف A یا هر دو با B و C در دو طرف A باشند و

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = k$$

آنگاه MN با BC موازی است و

$$\frac{MN}{BC} = k$$

که یکی از قضیه‌های مربوط به مثلثهای متشابه است.



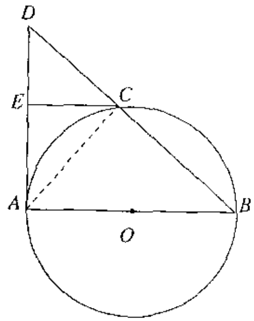
شکل۲-۲۶

* ۲ـ۴ نخستین گام در عمل

با آنچه در آغاز روبه‌رو شدن با یک مسأله باید انجام دهید، با آنچه آمادگی و توانمندی بیشتر شما را برای حل مسأله‌ها فراهم می‌آورد و با آنچه سزاوار است پس از حل یک مسأله به‌کار ببرید، آشنا شدید. اکنون خواهید گفت که پس از این مقدمه‌ها، آنگاه که هنگام عمل است نخستین گام چه باید باشد؟ این نخستین گام آن است که ببینید مسأله ساده است یا نه؛ اگر ساده است از کدام دسته مسأله‌های ساده است و اگر ساده نیست چه مسأله‌های ساده‌ای را در بردارد. روشهای گوناگون حل مسأله‌های سادهٔ مربوط به هر دسته در بخشهای آینده بیان می‌شوند. برای آنکه ببینید مسأله‌ای که ساده نیست چه مسأله‌های ساده‌ای را دربردارد، نخست ببینید حکم مسأله به تنهایی چه مسألهٔ ساده‌ای را نشان می‌دهد، سپس ببینید برای رسیدن به آن مسألهٔ ساده کدام مسألهٔ سادهٔ دیگر به چشم می‌خورد، و به همین گونه پیش از هر مسألهٔ ساده‌ای که می‌بینید مسألهٔ سادهٔ پیش از آن را بیابید تا سرانجام به مسألهٔ ساده‌ای برسید که بی‌درنگ از فرض مسأله به‌دست می‌آید.

مثال ۱. دایرهٔ به قطر AB و وتر دلخواه BC از آن داده شده است. مماسی که در A بر دایره رسم شود با امتداد BC در D و با مماسی که در C بر دایره رسم شود در E برخورد می‌کند. ثابت کنید E وسط AD است.

حکم مسأله، یعنی ثابت کردن برابری AE با DE، آخرین مسألهٔ ساده‌ای است که به چشم می‌خورد. مسألهٔ سادهٔ پیش از آن، ثابت کردن برابری EA با EC است. مسألهٔ سادهٔ پیش از این یکی این است که ثابت شود ED با EC برابر است. سرانجام این مسألهٔ ساده پیش می‌آید که از راه به‌کار بردن فرض مسأله ثابت شود زاویهٔ ACB قائمه است.

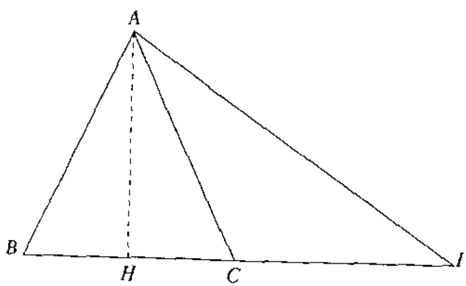


شکل ۲-۲۷

مثال ۲. مثلث ABC که دو ضلع AB و AC از آن با هم برابرند، داده شده است. از نقطهٔ I که بر BC یا بر امتداد آن واقع است به A وصل می‌کنیم ثابت کنید:

$$\overline{IA}^2 = \overline{AB}^2 + IB \cdot IC$$

حکم مسأله توان دوم دو پاره‌خط را در بردارد. پس مسألهٔ ساده‌ای که این دو توان دوم را توجیه کند یافتن یک یا دو مثلث قائم‌الزاویه است که آن پاره‌خطها ضلعهای آن باشند. با این فکر به‌رسم عمود AH بر BC راهنمایی می‌شوید. مسألهٔ سادهٔ پیش از آن نوشتن رابطهٔ فیثاغورس در دو مثلث IAH و ABH است. مسألهٔ سادهٔ دیگر تبدیل حاصل‌ضرب $IB \cdot IC$ به رابطه‌ای برحسب IH و BH است. مسألهٔ سادهٔ دیگر به‌دست آوردن رابطهٔ حکم از رابطه‌های به‌دست آمده است.

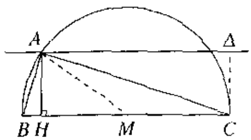


شکل ۲-۲۸

مثال ۳. در مثلث ABC که در زاویهٔ A قائمه است، اندازهٔ ارتفاع AH وارد بر وتر BC برابر است با یک چهارم اندازهٔ وتر. با به‌کار بردن خطکش و پرگار، این مثلث را چگونه باید رسم کرد؟ اندازه‌های زاویه‌های مثلث و اندازه‌های ضلعهای آن را با فرض $AH = a$ حساب کنید.

در این مسأله با مسأله‌های سادهٔ زیر روبه‌رو هستید:

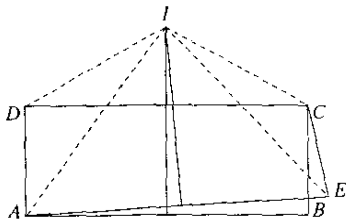
رسم پاره‌خط BC به اندازهٔ مناسب؛ رسم مکان هندسی A به‌طوری که زاویهٔ BAC قائمه باشد؛ رسم مکان هندسی A به‌طوری که فاصلهٔ آن از خط BC برابر با یک چهارم اندازهٔ BC باشد؛ به‌دست آوردن نقطه‌های برخورد دو مکان هندسی A؛ تعداد جوابها؛ رسم مثلث؛ بهره‌گیری از ویژگی میانهٔ وتر و رسم آن؛ پی‌بردن به نسبت بین ارتفاع AH و میانهٔ وتر؛ به‌دست آوردن اندازهٔ زاویه‌ای که میانهٔ AM با وتر BC می‌سازد؛ به‌دست آوردن اندازه‌های زاویه‌های B و C؛ به‌دست آوردن اندازه‌های AM، MH، BH و CH؛ به‌دست آوردن اندازه‌های AB و AC.



شکل ۲-۲۹

* تمرین پایانی فصل ۲

۱ـ مستطیل $ABCD$ داده شده است. پاره‌خط CE را برابر با CB در خارج مستطیل رسم و از A به E وصل می‌کنیم. عمودمنصف AB با عمودمنصف AE در I برخورد می‌کند. از I به نقطه‌های A، B، C، D و E وصل می‌شود. ثابت کنید دو زاویهٔ ICB و ICE با هم برابرند.



شکل ۲-۳۰

برای اثبات می‌گوییم عمودمنصف AB عمودمنصف CD هم هست و نقطهٔ I که بر عمودمنصف هر یک از پاره‌خطهای AB، AE و CD واقع است از دو سر هر یک از این پاره‌خطها به یک

فاصله است و داریم:

$$IA = IB,\ IA = IE,\ IC = ID$$

از این برابریها به‌دست می‌آید که دو مثلث IAD و ICE در حالت برابری سه ضلع با هم برابر باشند و بنابراین:

$$\angle IDA = \angle ICE \qquad (۱)$$

مثلث ICD متساوی‌الساقین است و دو زاویهٔ ICD و IDC با هم برابرند. دو زاویهٔ قائمهٔ CDA و DCB نیز با هم برابرند. پس مجموع دو زاویهٔ IDC و CDA با مجموع دو زاویهٔ ICD و DCB برابر است و بنابراین:

$$\angle IDA = \angle ICB \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ برابریهای (۱) و (۲) به‌دست می‌آید که دو زاویهٔ ICE و ICB با هم برابرند و حکم ثابت است.

اما از روی شکل دیده می‌شود که زاویهٔ ICE از زاویهٔ ICB بزرگتر است! اشتباه در چیست و به چه دلیل؟

۲ـ در هر لوزی دو قطر بر هم عمودند.

الف) فرض و حکم این مسأله را بنویسید.

ب) مسأله را به‌صورت «اگر‌ـ‌آنگاه» بیان کنید. سپس مسألهٔ عکس، مسألهٔ عکس نقیض، مسألهٔ متقابل، و مسألهٔ خلاف آن را بنویسید و معلوم کنید کدام‌یک از آنها درست وکدام‌یک نادرست است.

ج) آیا می‌توان مسألهٔ داده شده را به‌صورت شرط لازم وکافی بیان کرد یا نه؟

۳ـ هرگاه چهار پاره‌خط چنان باشند که اندازه‌های آنها به ترتیب جمله‌های یک تصاعد هندسی باشند و پاره‌خط چهارم دو برابر پاره‌خط یکم باشد، ثابت کنید که اگر درازای پاره‌خط یکم برابر یک باشد، درازای پاره‌خط دوم برابر $\sqrt[3]{۲}$ است.

الف) فرض و حکم این مسأله، عکس آن، عکس نقیض آن و متقابل آن را بیان کنید.

ب) آیا می‌توان این مسأله را به‌صورت شرط لازم وکافی بیان کرد؟

ج) این مسأله را تعمیم دهید.

۴ـ در مثلث ABC اگر زاویهٔ A قائمه و AH بر BC عمود باشد می‌دانیم که

$$\overline{AH}^{۲} = BH \cdot HC$$

چرا عکس این قضیه صحیح نیست؟

۵ـ در ذوزنقه $ABCD$ که AB و CD دو قاعدهٔ آن‌اند، خط k از رأس B موازی با قطر AC رسم

می‌شود و خط l بر A و بر وسط ساق BC می‌گذرد. ثابت کنید دو خط k و l با امتداد قاعدهٔ CD در یک نقطه برخورد می‌کنند. در حل این مسأله با چه مسأله‌های ساده‌ای سروکار خواهید داشت؟

۶ـ چهارضلعی $ABCD$ در دایره‌ای به شعاع R محاط است. زاویهٔ A از چهارضلعی قائمه است و نیمساز آن از رأس C می‌گذرد و با BD زاویهٔ ۷۵ درجه می‌سازد. اندازه‌های چهارضلع و دو قطر چهارضلعی را برحسب R به‌دست آورید. در حل این مسأله با چه مسأله‌های ساده‌ای روبه‌رو می‌شوید؟

۷ـ دایرهٔ ثابت (C) به مرکز O و به شعاع R داده شده است. دایرهٔ متغیر (S) به مرکز I و به شعاع T محیط دایرهٔ (C) را نصف می‌کند. مکان هندسی نقطهٔ I را به‌دست آورید. این مسأله چه مسأله‌های ساده‌ای را در بردارد؟

۸ـ در راه حل (هـ) از مسألهٔ مثال ۱ بند (۲-۳-۱) مسأله‌ای با فرض $\alpha = \beta + \gamma$ بیان و حل شد که اگر α برابر با ۴۵ درجه باشد مسأله به‌صورت همان مسأله مثال ۱ درمی‌آید. در این مسألهٔ حالت کلی (شکل ۲-۱۷)؛

الف) هرگاه α برابر با ۶۰ درجه، یا ۹۰ درجه، °۱۳۵، یا برابر با مقداری دیگر باشد، مسأله به چه صورت درمی‌آید؟

ب) هرگاه MB بر MO و MA بر OB عمود باشد مسأله به‌صورت کدام قضیهٔ هندسی خواهد بود؟

ج) آیا می‌توانید مسأله‌ها یا قضیه‌های دیگری را از این مسأله نتیجه بگیرید؟

د) حالتی را بررسی کنید که دو نقطهٔ A و B در دو طرف نقطهٔ O واقع باشند.

۳ روشهای حل مسأله‌های ساده با زمینهٔ ویژگیهای ناب هندسی

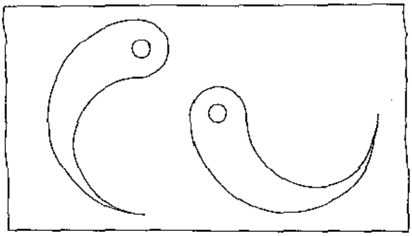
۳ـ۱ چگونگی اثبات برابری دو پاره‌خط

اثبات برابری دو پاره‌خط، مسألهٔ ساده‌ای است که با آن زیاد سروکار داریم. این مطلب، افزون بر مسأله‌هایی که زمینهٔ اصلی آنها اثبات برابری دو پاره‌خط است، در بسیاری از مسأله‌های دیگر نیز کاربرد دارد. به‌عنوان مسأله‌هایی از این دست، می‌توان از اثبات برابری دو مثلث، دو چندضلعی، یا اثبات اینکه یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع، لوزی، مستطیل یا مربع است، یا اثبات اینکه یک مثلث یا یک ذوزنقه متساوی‌الساقین است، یک چندضلعی منتظم است، نقطه‌هایی بر یک دایره واقع‌اند، و مانند اینها نام برد.

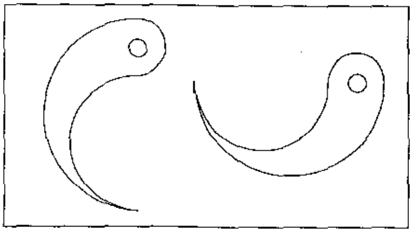
۳ـ۱ـ۱ روش یکم: بهره‌گیری از همنهشتی دو پاره‌خط

بنابر تعریف، دو شکل هندسی هنگامی برابرند که اگر روی هم نهاده شوند یکدیگر را کاملاً بپوشانند. از این‌رو به جای اصطلاح «برابری دو شکل»، اصطلاح «همنهشتی دو شکل» را نیز به‌کار می‌برند. برهم نهادن (= منطبق کردن) دو شکل واقع در یک صفحه به یکی از دوگونهٔ لغزاندن روی صفحه یا برگردان شکل از راه تاکردن صفحه، می‌تواند انجام گیرد. در حالتی که بتوان یکی از دو شکل را روی صفحه لغزاند و آن را روی دیگری نهاد، مانند شکل (۳-۱)، می‌گویند که آن دو شکل به‌طور مستقیم با هم برابرند. در حالتی که برای برهم نهادن دو شکل لازم باشد که یکی از آنها را (با تاکردن صفحه روی خودش) برگرداند و آنگاه لغزاند، مانند شکل (۳-۲)، می‌گویند که آن دو شکل به‌طور معکوس با هم برابرند. برابری بعضی از شکلها می‌تواند هم مستقیم و هم معکوس باشد. مانند دو پاره‌خط، دو زاویه، دو مستطیل، دو دایره، و . . . .

برای دو شکل داده شده هرگاه خطی در صفحه وجود داشته باشد، یا بتوان آن را یافت، به‌گونه‌ای



شکل۳-۱



شکل۳-۲

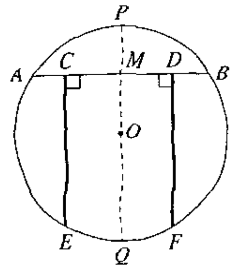
که اگر آن خط لولا فرض شود و صفحه به دور آن تا شود آن دو شکل روی‌هم قرار بگیرند و برابر باشند، می‌گویند آن دو شکل نسبت به آن خط قرینهٔ یکدیگرند و آن خط را محور تقارن آنها می‌نامند. بعضی از شکلها محور تقارن دارند به‌گونه‌ای که چون صفحهٔ آنها دور این محور تا شود دو قسمت شکل بر هم واقع می‌شوند، مانند مثلث متساوی‌الساقین که نیمساز زاویهٔ رأس محور تقارن آن است، لوزی که هر قطر آن محور تقارنش است یا دایره که هر قطر دلخواه از آن محور تقارنش به‌شمار می‌آید.

یک راه اثبات برابری دو پاره‌خط این است که بتوان خطی یافت که آن دو پاره‌خط نسبت به آن قرینهٔ هم باشند. چنانکه قضیه‌هایی از هندسه نیز از همین راه ثابت می‌شوند، مانند این قضیه که «در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویهٔ رأس میانهٔ قاعده است».

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۱. روی وتر AB از یک دایره دو نقطهٔ C و D به یک فاصله از M وسط AB واقع‌اند. در C و D دو خط عمود بر AB و در یک طرف آن رسم شده‌اند که با دایره به ترتیب در E و F برخورد کرده‌اند. ثابت کنید دو پاره‌خط CE و DF با هم برابرند.

فرض :
$$\left.\begin{aligned} MA &= MB \\ MC &= MD \\ CE &\perp AB \\ DF &\perp AB \end{aligned}\right\}$$

حکم : $CE = DE$



شکل۳-۳

حل. از O مرکز دایره به M وصل می‌کنیم و از دو سو امتداد می‌دهیم تا با دایره در P و Q برخورد کند. PQ قطر دایره و یک محور تقارن دایره است و اگر صفحه را دور آن تا کنیم دو نیمدایرهٔ دو طرف آن روی‌هم واقع می‌شوند. بنابراین قضیه که «قطری از دایره که از وسط یک وتر بگذرد بر آن عمود است»، در این تا کردن صفحه، MA روی MB می‌افتد و چون MC با MD برابر است، C بر D واقع می‌شود. زاویه‌های قائمهٔ MCE و MDF با هم برابرند و خط CE روی خط DF می‌افتد و دو نقطهٔ E و F از دایره نیز بر هم واقع می‌شوند و در نتیجه $CE = DF$.

تمرین ۳ـ۱ـ۱

۱ـ در دو دایرهٔ هم‌مرکز، خطی با دایرهٔ کوچکتر در B و C و با دایرهٔ بزرگتر در A و D برخورد می‌کند. ثابت کنید AB با CD و AC با BD برابر است.

۲ـ در دایرهٔ به مرکز O وتر AB را رسم کنید، وسط کمان بزرگتر AB را M و وسط کمان کوچکتر آن را N بنامید. خطهای AM و BM و نیمسازهای زاویه‌های MAB و MBA را رسم کنید که با دایره در D و E برخورد می‌کنند. خط DE را نیز رسم کنید که با MN در F برخورد می‌کند. ثابت کنید DF با FE برابر است و خطهای AD، BE و MN در یک نقطه با هم برخورد می‌کنند.

۳ـ مسألهٔ کوتاهترین راه. خط xy و دو نقطهٔ A و B واقع در یک طرف آن داده شده است. روی xy نقطهٔ C را چنان بیابید که درازای خط شکستهٔ ACB کمترین مقدار ممکن باشد. (راهنمایی: قرینهٔ B را نسبت به xy به‌دست آورید.)

۴ـ زاویهٔ xOy و دو نقطهٔ A و B واقع در درون آن داده شده‌اند. متحرکی از A آغاز به‌حرکت می‌کند، با دو ضلع زاویه برخورد می‌کند و به B می‌رسد. کوتاهترین راهی را که می‌تواند بپیماید کدام است؟

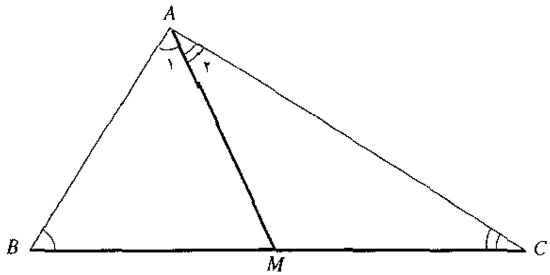
۳ـ۱ـ۲ روش دوم: بهره‌گیری از ویژگیهای مثلث متساوی‌الساقین

الف) در مثلث متساوی‌الساقین، دو زاویهٔ روبه‌رو به دو ساق با هم برابرند و برعکس، اگر دو زاویه از مثلثی با هم برابر باشند، ضلعهای روبه‌رو به آنها نیز با هم برابرند. بنابراین، برای اینکه ثابت کنید دو پاره‌خط با هم برابرند، کافی است ثابت کنید که آن دو پاره‌خط دو ضلع روبه‌رو به دو زاویهٔ برابر از یک مثلث‌اند.

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۲. در مثلث ABC که در زاویهٔ A قائمه است، خطی چنان رسم شده است که با ضلع AB زاویه‌ای برابر با زاویهٔ B می‌سازد و با وتر BC در M برخورد می‌کند. ثابت کنید سه پاره‌خط AM، BM و CM با هم برابرند

$$\left.\begin{aligned}\angle A &= ۹۰^\circ\\ \angle A_۱ &= \angle B\end{aligned}\right\}$$ فرض :

$$AM = BM = CM$$ حکم :



شکل۳-۴

حل. بنابر رابطهٔ دوم فرض، مثلث AMB متساوی‌الساقین است و در نتیجه

$$AM = BM \qquad (۱)$$

از اینکه زاویهٔ A از مثلث ABC قائمه است، به‌دست می‌آید:

$$\angle B + \angle C = ۹۰^\circ \ , \ \angle A_۱ + \angle A_۲ = ۹۰^\circ$$

از این دو رابطه و بنابر رابطهٔ دوم فرض به‌دست می‌آید که دو زاویهٔ C و $A_۲$ با هم برابرند و در نتیجه مثلث AMC متساوی‌الساقین است. یعنی

$$AM = CM \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ برابریهای (۱) و (۲) برابری سه پاره‌خط AM، BM و CM به‌دست می‌آید.

یادداشت. AM میانهٔ وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است و می‌دانید که: در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وتر با نصف وتر برابر است. این ویژگی از مثلث قائم‌الزاویه در حل بسیاری از مسأله‌های هندسه به‌کار می‌رود.

تمرین ۳ـ۱ـ۲

۱ـ خطی موازی با قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC رسم شده و با AB و AC به‌ترتیب در D و E برخورد کرده است. ثابت کنید که AD و AE با هم برابرند.

۲ـ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر یکی از زاویه‌های حاده به اندازهٔ ۳۰ درجه باشد، ضلع روبه‌رو به این زاویه با نصف وتر برابر است. این ویژگی در حل مسأله‌ها کاربرد زیاد دارد.

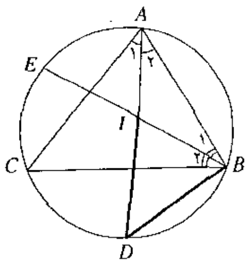
۳ـ در مثلث ABC زاویهٔ B حاده و دو برابر زاویهٔ C است. ارتفاع AD از مثلث را رسم می‌کنیم و AB را از طرف B تا نقطهٔ E امتداد می‌دهیم که BE برابر با BD باشد. هرگاه M نقطهٔ برخورد AC و DE باشد، ثابت کنید که سه پاره‌خط MA و MC و MD با هم برابرند.

۴ـ مسألهٔ پیش از این را در حالتی حل کنید که زاویهٔ B منفرجه باشد و BE روی BA و نه در امتداد آن جدا شود.

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۳. مثلث ABC در دایره‌ای داده شده محاط است. نیمسازهای داخلی زاویه‌های A و B با یکدیگر در I و با دایره به ترتیب در D و E برخورد می‌کنند. ثابت کنید BD با DI برابر است.

فرض : $\left.\begin{array}{l}\angle A_۱ = \angle A_۲ \\ \angle B_۱ = \angle B_۲\end{array}\right\}$

حکم : $DI = DB$



شکل۳-۵

حل. با دانستن اینکه در هر دایره اندازهٔ زاویهٔ محاطی با نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن و اندازهٔ زاویهٔ داخلی با نصف مجموع دو کمان روبه‌رو آن برابر است، داریم:

$$\angle EBD = \frac{۱}{۲}(\widehat{EC} + \widehat{CD}) \qquad (۱)$$

$$\angle DIB = \frac{۱}{۲}(\widehat{AE} + \widehat{BD}) \qquad (۲)$$

از فرض برابری دو زاویهٔ $A_۱$ و $A_۲$ برابری دو کمان BD و CD، و از فرض برابری دو زاویهٔ $B_۱$ و $B_۲$ برابری دو کمان AE و EC نتیجه می‌شود. بنابراین رابطهٔ (۲) چنین می‌شود:

$$\angle DIB = \frac{۱}{۲}(\widehat{EC} + \widehat{CD})$$

که همان رابطهٔ (۱) است و بنابراین، دو زاویهٔ DIB و EBD با هم برابرند. پس مثلث DIB متساوی‌الساقین است و دو ضلع آن، DB و DI، با هم برابرند.

تمرین ۳ـ۱ـ۳

۱ـ در مثلث ABC نیمسازهای داخلی زاویه‌های A و B با یکدیگر در I برخورد می‌کنند. خطی که از I موازی با AB رسم شود با AC و BC به ترتیب در D و E برخورد می‌کند. ثابت کنید پاره‌خط DE با مجموع دو پاره‌خط AD و BE برابر است.

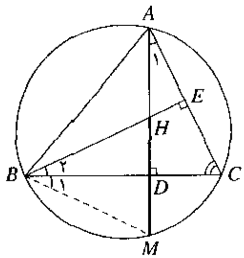
۲ـ M نقطه‌ای است از دایرهٔ به قطر AB که بر A یا بر B واقع نیست و CD قطر عمود بر AB از دایره است. مماسی که در M بر دایره رسم شود و خطهای MA و MB، با قطر CD یا با امتداد آن به ترتیب در N، P و Q برخورد می‌کنند. ثابت کنید دو پاره‌خط NP و NQ با هم برابرند.

ب) در هر مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویهٔ رأس عمودمنصف قاعده است. به عبارت دیگر، نیمساز زاویهٔ رأس، میانهٔ قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده بر هم واقع‌اند. این ویژگی را می‌توان برای اثبات برابری دو پاره‌خط واقع در یک امتداد به‌کار برد.

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۴. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن داده شده است. دو ارتفاع AD و BE از مثلث با یکدیگر در H و امتداد AD با دایره در M برخورد می‌کند. ثابت کنید دو پاره‌خط HD و DM با هم برابرند.

فرض : $\left.\begin{array}{l} AD\perp BC \\ BE\perp AC \end{array}\right\}$

حکم : $HD = DM$



شکل۳-۶

حل. خط BM را رسم می‌کنیم. دو زاویهٔ $A_۱$ و $B_۱$ که محاطی و روبه‌رو به یک کمان‌اند، با هم برابرند. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD و BCE در زاویهٔ حادهٔ C مشترک‌اند، پس دو زاویهٔ حادهٔ دیگر آنها، یعنی دو زاویهٔ $A_۱$ و $B_۲$، با هم برابرند. دو زاویهٔ $B_۱$ و $B_۲$ که هر دو با زاویهٔ $A_۱$ برابرند، با یکدیگر نیز برابرند و در نتیجه BD که ارتفاع مثلث BHM است، نیمساز زاویهٔ B نیز هست. بنابراین مثلث BHM متساوی‌الساقین و BD میانهٔ قاعدهٔ آن نیز هست و در نتیجه DM با DH برابر است.

یادداشت. مسألهٔ بالا را می‌توان چنین بیان کرد: قرینهٔ مرکز ارتفاعی هر مثلث نسبت به هر ضلع آن بر دایرهٔ محیطی مثلث واقع است.

تمرین ۳ـ۱ـ۴

۱ـ در دایرهٔ به قطر AB، وتر AC و مماس بر دایره در نقطهٔ B رسم شده است. نیمساز زاویهٔ CAB با وتر BC در E، با دایره در H و با مماس رسم شده در D برخورد می‌کند. ثابت کنید HD با EH و BE با BD برابر است.

۲ـ نیمدایرهٔ به مرکز O و به قطر AB و در درون آن نیمدایرهٔ به قطر AO رسم شده‌اند. از B خطی رسم می‌کنیم که در C بر این نیمدایره مماس شود. خط AC را نیز رسم می‌کنیم که با نیمدایرهٔ بزرگتر در D برخورد می‌کند. ثابت کنید AC با CD برابر است.

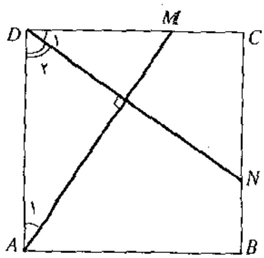
۳ـ۱ـ۳ روش سوم: بهره‌گیری از ویژگیهای برابری مثلثها

این روش بیشترین کاربرد را دارد و بر پایهٔ این ویژگی است که اگر دو مثلث با هم برابر باشند، ضلعهایی از آنها که روبه‌رو به زاویه‌های برابر باشند با هم برابرند. این ضلعها، ضلعهای نظیر هم نام دارند. برای آنکه ثابت کنیم دو پاره‌خط با هم برابرند، نخست دو مثلث را جستجو می‌کنیم که آن دو پاره‌خط دو ضلع نظیر هم از آنها باشند و سپس برابری این دو مثلث را ثابت می‌کنیم.

* **مسألهٔ ۳ـ۱ـ۵.** در مربع $ABCD$ خطی از A گذشته و با ضلع CD در M برخورد کرده است و خط دیگری از D عمود بر AM رسم شده که با ضلع BC در N برخورد کرده است. ثابت کنید AM با DN برابر است.

فرض : مربع $ABCD$،
M روی CD، N روی BC است،
$DN \perp AM$،

حکم : $AM = DN$.



شکل۳-۷

حل. پاره‌خطهایی که باید ثابت شود با هم برابرند ضلعهای دو مثلث ADM و CDN هستند و کافی است ثابت شود که این دو مثلث با هم برابرند. در هر مربع، چهار ضلع با هم برابرند و چهار زاویه قائمه‌اند. بنابراین AD با CD برابر است. دو زاویهٔ A_1 و D_1 هر دو متمم D_2 هستند و در نتیجه با هم برابرند. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADM و CDN در حالت برابری یک ضلع و زاویهٔ حادهٔ مجاور به آن ضلع با هم برابرند و بنابراین، AM با DN (همچنین DM با CN و MC با NB) برابر است.

تمرین ۳ـ۱ـ۵

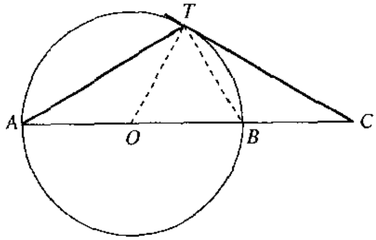
۱ـ ثابت کنید چهارضلعی که چهار رأسش وسطهای ضلعهای یک مربع باشند، مربع است.
۲ـ روی ضلعهای AB، BC، CD و DA از مربع $ABCD$ نقطه‌های M، N، P و Q چنان گزیده شده‌اند که هر یک از پاره‌خطهای AM، BN، CP و DQ یک چهارم ضلع مربع است. ثابت کنید چهارضلعی $MNPQ$ مربع است.
۳ـ روی ضلعهای یک مربع و در بیرون آن چهار مثلث متساوی‌الاضلاع ABE، BCF، CDG و DAH رسم و نقطه‌های E، F، G و H به هم وصل شده‌اند. ثابت کنید چهارضلعی $EFGH$ مربع است.
۴ـ هر یک از ضلعهای شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ در یک جهت و به اندازه‌های برابر با هم AA'، BB'، $\cdots$، و FF' امتداد یافته‌اند. ثابت کنید شش‌ضلعی $A'B'C'D'E'F'$ منتظم است.
۵ـ ثابت کنید در مثلث متساوی‌الساقین، دو ارتفاع وارد بر دو ساق، دو میانهٔ دو ساق، همچنین دو نیمساز نظیر دو ساق با هم برابرند.
۶ـ روی ضلعهای مثلث ABC و در بیرون آن، مثلثهای متساوی‌الاضلاع MAB، NBC و PAC رسم شده‌اند. ثابت کنید سه پاره‌خط MC، NA و PB با هم برابرند.
۷ـ ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع، هر پاره‌خط که از نقطهٔ برخورد دو قطر بگذرد و به دو ضلع روبه‌رو محدود شود در نقطهٔ برخورد دو قطر نصف می‌شود.

گاه پیش می‌آید که در شکل، مثلثهایی دیده نمی‌شوند که دو پاره‌خط داده شده ضلعهای نظیر هم از آنها باشند تا به کمک اثبات برابری این دو مثلث بتوان برابری آن دو پاره‌خط را ثابت کرد. اما در بیشتر این موردها، با رسم خطهایی می‌توان چنین دو مثلثی را تشکیل داد.

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۶. قطر AB از دایرهٔ به مرکز O تا نقطهٔ C امتداد یافته که BC برابر با شعاع دایره است و از نقطهٔ C مماس CT بر دایره و نیز خط AT رسم شده است. ثابت کنید دو پاره‌خط AT و CT با هم برابرند

فرض : $BC = R$ و $AB = ۲R$ ، CT مماس بر دایره است

حکم : $AT = CT$



شکل ۳-۸

حل. شعاع OT و خط BT را رسم می‌کنیم. به این ترتیب دو مثلث ABT و OTC پدید می‌آیند که هر دو در زاویهٔ T قائمه‌اند زیرا زاویهٔ ATB زاویه‌ای محاطی و روبه‌رو به قطر است و زاویهٔ OTC بین مماس و شعاع نقطهٔ تماس پدید آمده است. از اینکه BC برابر با شعاع دایره است نتیجه می‌شود که OC با AB برابر است. با دانستن اینکه در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وتر با نصف وتر برابر است، نتیجه می‌شود TB با نصف OC یعنی با شعاع دایره و با OT برابر است. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ATB و OTC در حالت برابری وتر و یک ضلع با هم برابرند و بنابراین AT با CT برابر است.

تمرین ۳ـ۱ـ۶

۱ـ ثابت کنید پاره‌خطهایی که از دو رأس مثلث بر میانهٔ ضلع بین آنها عمود شوند با هم برابرند.

۲ـ در مثلث ABC زاویهٔ B به اندازهٔ ۴۵ درجه است. از M وسط ضلع AB عمود MH برابر با نصف AB بر AB و به طرف خارج مثلث رسم شده است. عمود NG نیز برابر با نصف BC در N وسط BC بر BC به‌طرف خارج مثلث رسم شده است. اگر P وسط AC باشد، ثابت کنید که سه پاره‌خط PB، PH و PG با هم برابرند.

۳ـ ذوزنقهٔ $ABCD$ در دایرهٔ به مرکز O محاط است و زاویهٔ A از آن به اندازهٔ ۴۵ درجه و AB قاعدهٔ بزرگتر آن است. ثابت کنید درازای قاعدهٔ کوچکتر دو برابر فاصلهٔ مرکز دایره تا قاعدهٔ بزرگتر است.

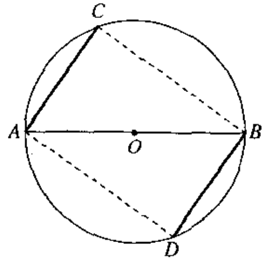
۳ـ۱ـ۴ روش چهارم: بهره‌گیری از ویژگیهای متوازی‌الاضلاع

الف) در هر متوازی‌الاضلاع، دو ضلع روبه‌رو با هم برابرند. از این‌رو برای آنکه ثابت شود دو پاره‌خط با هم برابرند، کافی است متوازی‌الاضلاعی جستجو یا ساخته شود که آن دو پاره‌خط دو ضلع روبه‌روی آن باشند.

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۷. در یک دایره، دو وتری که از دو سر یک قطر موازی با هم رسم شوند، با هم برابرند:

فرض : AB قطر دایره است
$AC \| BD$

حکم : $AC = BD$



شکل۳-۹

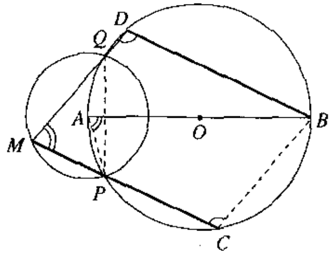
حل. وترهای BC و AD را رسم می‌کنیم. زاویه‌های C و D که محاطی و روبه‌رو به قطرند، قائمه‌اند و دو وتر BC و AD که بر دو خط موازی عمودند، با هم موازی‌اند. چهارضلعی $ADBC$ متوازی‌الاضلاع است و AC و BD که دو ضلع روبه‌رو از آنند با هم برابرند.

یادداشت. چهارضلعی $ADBC$ مستطیل است و CD از O مرکز دایره می‌گذرد و با AB برابر است.

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۸. دایرهٔ به مرکز O و به قطر AB با دایرهٔ به مرکز A در P و Q برخورد کرده و M نقطه‌ای دلخواه از دایرهٔ به مرکز A است. خطهای MP و MQ به ترتیب در C و D با دایرهٔ به مرکز O برخورد می‌کنند. ثابت کنید پاره‌خطهای MC و BD با هم برابرند.

فرض : AB قطری از دایرهٔ به مرکز O است
A مرکز دایره‌ای است که با دایرهٔ O در P و Q برخورد می‌کند
MP با دایرهٔ O در C برخورد می‌کند
MQ با دایرهٔ O در D برخورد می‌کند

حکم : $MC = BD$



شکل۳-۱۰

حل. خط‌المرکزین AO عمودمنصف PQ وتر مشترک دو دایره است و دو کمان AP و AQ باهم برابرند. برای دو زاویهٔ C و D که در دایرهٔ O محاط‌اند، داریم:

$$\angle C = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ + \widehat{AP})$$

$$\angle D = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ + \widehat{AQ})$$

و چون کمانهای AP و AQ با هم برابرند، دو زاویهٔ C و D نیز با هم برابرند. در دایرهٔ به مرکز A، کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی PAO نصف کمان روبه‌رو به زاویهٔ محاطی M است، پس این دو زاویه با هم برابرند. در چهارضلعی $APCB$ که در دایرهٔ به مرکز O محاط است، دو زاویهٔ C و PAO روبه‌رو و مکمل یکدیگرند. زاویهٔ M هم که با زاویهٔ PAO برابر است، مکمل زاویهٔ C است و در نتیجه دو خط CB و MD با هم موازی‌اند. بنابراین چهارضلعی $MCBD$ که دو ضلع آن موازی و دو زاویهٔ روبه‌رو از آن با هم برابرند، متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه MC و BD با هم برابرند.

تمرین ۳ـ۱ـ۷

۱ـ دو دایرهٔ O و O' در P و Q با هم برخورد کرده‌اند. از P و Q دو خط موازی با هم رسم می‌شوند که با دایرهٔ O در M و N و با دایرهٔ O' در M' و N' برخورد می‌کنند. ثابت کنید MN با $M'N'$ و MM' با NN' برابر است.

۲ـ نیمساز زاویهٔ B از مثلث ABC با ضلع AC در D برخورد کرده است. در D خطی موازی با AB رسم می‌شود که با BC در E برخورد می‌کند و خطی که در E موازی با AC رسم شود با AB در F برخورد می‌کند. ثابت کنید BE با AF برابر است.

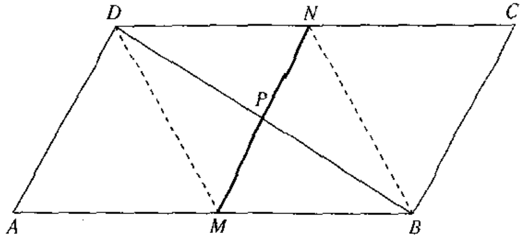
۳ـ مثلث ABC و میانه‌های AD، BE و CF از آن رسم شده‌اند. پاره‌خط DG موازی و برابر با BE رسم و A به G وصل می‌شود. ثابت کنید AG با CF برابر است.

ب) در متوازی‌الاضلاع دو قطر یکدیگر را نصف می‌کنند. این ویژگی را می‌توان در موردی به‌کار برد که باید ثابت شود نقطه‌ای وسط یک پاره‌خط است.

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۹. ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع خطی که وسطهای دو ضلع روبه‌رو را به هم وصل می‌کند از نقطهٔ برخورد دو قطر می‌گذرد و در این نقطه نصف می‌شود.

فرض: متوازی‌الاضلاع $ABCD$
M وسط AB و N وسط CD است
P وسط BD است

حکم: P روی MN قرار دارد و $PM = PN$



شکل۳-۱۱

حل. چون در هر متوازی‌الاضلاع دو قطر یکدیگر را نصف می‌کنند، P وسط قطر BD نقطهٔ برخورد دو قطر است و کافی است ثابت کنیم MN از P می‌گذرد. خطهای BN و DM را رسم می‌کنیم. چون BM و DN با هم موازی و با هم برابرند، چهارضلعی $BMDN$ متوازی‌الاضلاع است و دو قطر آن، BD و MN یکدیگر را نصف می‌کنند و MN از P وسط BD می‌گذرد.

تمرین ۳ـ۱ـ۸

۱ـ نقطهٔ M روی ساق AB از مثلث متساوی‌الساقین ABC واقع است. بر امتداد ساق AC و از طرف C نقطهٔ N چنان گزیده می‌شود که CN با BM برابر باشد و خط MN رسم می‌شود ثابت کنید MN در نقطهٔ برخوردش با BC نصف می‌شود.

۲ـ در دایرهٔ به مرکز O و به قطر AB، وتر CD موازی با AB و برابر با نصف آن رسم شده است. خطی که از M وسط OB عمود بر AB رسم شود با نیمدایرهٔ روبه‌رو به وتر CD در E برخورد می‌کند و از E به N وسط CD وصل می‌شود. ثابت کنید خط NE در نقطهٔ برخوردش با AB نصف می‌شود.

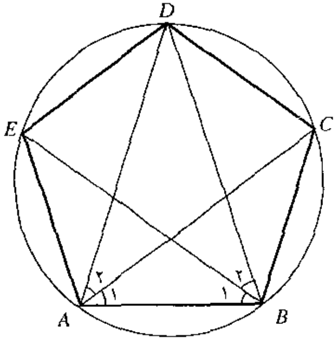
۳ـ۱ـ۵ روش پنجم: بهره‌گیری از ویژگیهای وترهای برابر در دایره

الف) در یک دایره، یا در دو دایرهٔ برابر، اگر دو کمان با هم برابر باشند، وترهای آنها نیز با هم برابرند. بنابراین، برای اثبات برابری دو پاره‌خط که وترهایی از دایره باشند، کافی است ثابت شود که کمانهای آنها با هم برابرند.

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۱۰. در یک دایره وتر AB چنان رسم شده است که کمان AB به اندازهٔ ۷۲ درجه است. از D وسط کمان بزرگتر AB به A و B وصل می‌شود و نیمسازهای زاویه‌های DAB و DBA رسم می‌شوند که با دایره به ترتیب در C و E برخورد می‌کنند. ثابت کنید ضلعهای چندضلعی $ABCDE$ با هم برابرند.

فرض :
$$\left.\begin{array}{r} \widehat{AMB} = ۷۲^\circ \\ \angle B_۱ = \angle B_۲ \text{ و } \angle A_۱ = \angle A_۲ \\ \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{array}\right\}$$

حکم : $AB = BC = CD = DE = EA$



شکل۳-۱۲

حل. اندازهٔ کمان بزرگتر AB برابر با $۲۸۸ = ۷۲ - ۳۶۰$ درجه است و چون دو کمان DA و DB با هم برابرند اندازهٔ هر کدام برابر با نصف ۲۸۸ درجه یعنی ۱۴۴ درجه است. از اینکه دو زاویهٔ محاطی $A_۱$ و $A_۲$ با هم و دو زاویهٔ محاطی $B_۱$ و $B_۲$ با هم برابرند، نتیجه می‌شود که کمانهای روبه‌رو به آنها نیز با هم برابرند و اندازهٔ هرکدام برابر با نصف ۱۴۴ درجه یعنی ۷۲ درجه است. بنابراین

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EA} = ۷۲^\circ$$

کمانها با هم برابر باشند، وترهای آنها نیز با هم برابرند و از این‌رو:

$$AB = BC = CD = DE = EA$$

یادداشت. به‌سادگی ثابت می‌شود که زاویه‌های پنج‌ضلعی $ABCDE$ نیز با هم برابرند و این چندضلعی منتظم است.

تمرین ۳ـ۱ـ۹

۱ـ ثابت کنید که هر دو وتر موازی با هم که در یک دایره رسم شوند، دو کمان واقع بین آنها با هم برابرند.

۲ـ ثابت کنید هر ذوزنقه که در یک دایره محاط شود متساوی‌الساقین است.

۳ـ در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه است. نیمساز داخلی این زاویه با وتر BC در D و عمود در D بر BC با ضلع AC در E برخورد می‌کند. ثابت کنید BD با DE برابر است.

۴ـ در مسألهٔ ۱ از تمرین (۳-۱-۷)، ثابت کنید هر یک از دو وتر MN و $M'N'$ با یک وتر ثابت برابر است و از این راه نیز برابری آنها را ثابت کنید.

۵ـ در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه و زاویهٔ B به اندازهٔ ۳۰ درجه است. ارتفاع AH، میانهٔ AM، عمود BE بر AM، و خط EH رسم می‌شوند. ثابت کنید سه پاره‌خط AH، BE و EH با هم برابرند.

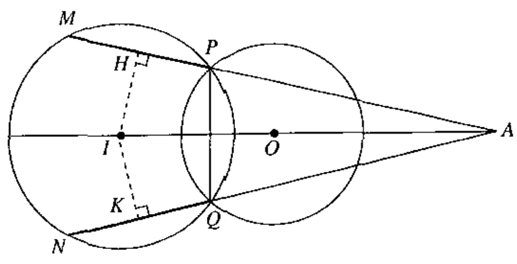
۶ـ از یک نقطهٔ P واقع در امتداد قطر AB از دایرهٔ به مرکز O، مماس PM بر دایره و نیمساز زاویهٔ MPA و عمود OE بر این نیمساز رسم می‌شوند. ثابت کنید مثلث OEM متساوی‌الساقین است

ب) در یک دایره، دو وتر که از مرکز به یک فاصله باشند با هم برابرند. این ویژگی را برای اثبات برابری دو وتر از یک دایره یا از دو دایرهٔ برابر نیز می‌توان به‌کار برد.

* **مسألهٔ ۳ـ۱ـ۱۱.** دو دایره به مرکزهای O و I در P و Q با یکدیگر برخورد کرده‌اند و نقطهٔ A بر خط گذرندهٔ بر O و I و در بیرون یا در درون دایرهٔ به مرکز I واقع است. خطهای AP و AQ با دایرهٔ به مرکز I به ترتیب در M و N برخورد می‌کنند. ثابت کنید دو پاره‌خط PM و QN با هم برابرند.

فرض:
- دایرهٔ به مرکز O، دایرهٔ به مرکز I
- PQ وتر مشترک دو دایره است
- A واقع بر خط OI است
- M نقطهٔ برخورد AP با دایرهٔ به مرکز I است
- N نقطهٔ برخورد AQ با دایرهٔ به مرکز I است

حکم: $PM = QN$



شکل۳-۱۳

حل. اگر دو دایره با هم برخورد کنند، خطی که بر مرکزهای آنها می‌گذرد عمودمنصف وتر مشترک آنهاست. نقطهٔ A روی عمودمنصف PQ قرار دارد، مثلث APQ متساوی‌الساقین و AI که عمودمنصف قاعده است نیمساز زاویهٔ A نیز هست. عمودهای IH و IK که بر PM و QN رسم شوند با هم برابرند و دو وتر PM و QN که از مرکز دایره به یک فاصله‌اند، با هم برابرند.

یادداشت. دو وتری که AP و AQ روی دایرهٔ به مرکز O پدید می‌آورند نیز با هم برابرند.

تمرین ۳ـ۱ـ۱۰

* ۱ـ دایرهٔ به مرکز O و وتر AB از آن داده شده است. بر خطی که بر O و بر M وسط AB می‌گذرد، نقطهٔ P چنان انتخاب می‌شود که خطهای PA و PB با دایره به ترتیب در نقطه‌های دیگر C و D برخورد می‌کنند. ثابت کنید دو پاره‌خط AC و BD و همچنین دو پاره‌خط AD و BC با هم برابرند.

۲ـ دو دایرهٔ هم‌مرکز داده شده‌اند. ثابت کنید همهٔ وترهایی از دایرهٔ بزرگتر که بر دایرهٔ کوچکتر مماس باشند با هم برابرند.

۳ـ در دایرهٔ به مرکز O، قطر AB و وتر BC چنان رسم شده‌اند که زاویهٔ CBA به اندازهٔ ۳۰ درجه است. در این دایره، وتر PQ از M وسط BO می‌گذرد و بر AB عمود است. ثابت کنید دو پاره‌خط PQ و BC با هم برابرند.

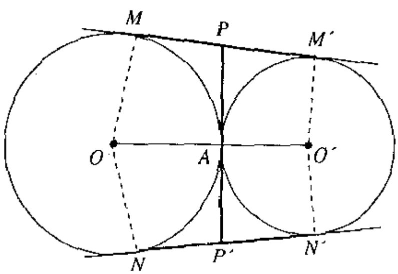
۳ـ۱ـ۶ روش ششم: بهره‌گیری از ویژگیهای مماس بر دایره

هرگاه از یک نقطه دو خط بر دایره‌ای مماس شوند، دو پاره‌خطی که بین آن نقطه و نقطه‌های تماس بر دایره واقع‌اند با هم برابرند.

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۱۲. دو دایرهٔ به مرکزهای O و O' در A بر هم مماس بیرونی‌اند. مماسهای مشترک بیرونی آنها MM' و NN' رسم می‌شوند. مماس مشترک درونی آنها نیز رسم می‌شود که با MM' و NN' به ترتیب در P و P' برخورد می‌کند. ثابت کنید سه پاره‌خط MM'، NN' و PP' با هم برابرند.

فرض :
- دایره‌های O و O' در A بر هم مماس‌اند
- MM' و NN' مماسهای مشترک بیرونی دو دایره‌اند
- مماس مشترک درونی دو دایره با MM' در P و با NN' در P' برخورد می‌کند

حکم : $MM' = NN' = PP'$



شکل ۳-۱۴

حل. از اینکه OM و ON و نیز $O'M'$ و $O'N'$ بر MM' و بر NN' عمودند و با هم برابرند، برمی‌آید که خط OO' نیمساز زاویه‌ای است که دو خط MM' و NN' با هم می‌سازند و بنابراین محور تقارن شکل است و MM' با NN' و AP با AP' برابر است. از سوی دیگر، از P دو مماس PM و PA بر دایرهٔ O و دو مماس PM' و PA بر دایرهٔ O' رسم شده‌اند. پس داریم:

$$PA = PM \ , \ PA = PM'$$

$$۲PA = PM + PM' = MM'$$

و چون PA و $P'A$ با هم برابرند $۲PA$ با $PA + P'A$ برابر است و به‌دست می‌آید:

$$PP' = MM' = NN'$$

تمرین ۳ـ۱ـ۱۱

۱ـ در مسألهٔ بالا ثابت کنید: دایرهٔ به قطر MM' در A بر OO' مماس است، چهار نقطهٔ M، M'، N و N' بر یک دایره واقع‌اند و مرکز این دایره را به‌دست آورید.

۲ـ ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه یک چهارضلعی بر دایره‌ای محیط باشد این است که مجموع دو ضلع روبه‌روی آن با مجموع دو ضلع روبه‌روی دیگرش برابر باشد.

۳ـ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمه برابر است با مجموع قطرهای دایره‌های محیطی و محاطی داخلی آن.

۴ـ اگر D، E و F به ترتیب نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با ضلعهای BC، CA و AB باشند. با فرض $BC = a$، $CA = b$ و $AB = c$، اندازهٔ هر یک از پاره‌خطهای AF، BD و CE را برحسب a و b و c به‌دست آورید.

۵ـ مسألهٔ پیش را برای هر یک از دایره‌های محاطی خارجی مثلث حل کنید.

۳ـ۱ـ۷ روش هفتم: بهره‌گیری از پاره‌خطهای متناسب

اگر اندازه‌های چهار پاره‌خط یک تناسب پدید آورند و دو تای یکم و دوم، یا دوتای یکم و سوم، یا دوتای دوم و چهارم، و یا دوتای سوم و چهارم باهم برابر باشند، دوتای دیگر هم با هم برابرند. به عبارت دیگر، اگر تناسب

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

برقرار باشد آنگاه:

$$a = b \Longrightarrow c = d$$

$$a = c \Longrightarrow b = d$$

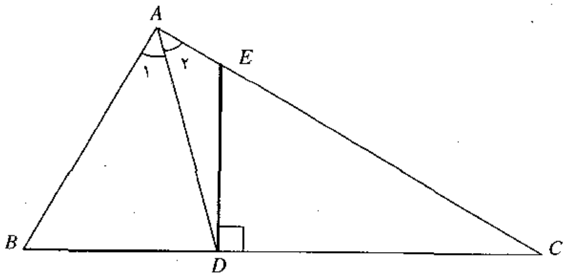
$$b = d \Longrightarrow a = c$$

$$c = d \Longrightarrow a = b$$

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۱۳. در مثلث ABC، زاویهٔ A قائمه است، نیمساز داخلی زاویهٔ A با وتر در D برخورد می‌کند و عمودی که در D بر وتر رسم شود با AC در E برخورد می‌کند. ثابت کنید دو پاره‌خط BD و DE با هم برابرند.

$$\left.\begin{aligned} \angle A = \angle D = ۹۰^\circ \\ \angle A_۱ = \angle A_۲ \end{aligned}\right\} \ \text{فرض :}$$

$$BD = DE \quad \text{: حکم}$$



شکل۳-۱۵

حل. نیمساز داخلی هر زاویهٔ مثلث، ضلع روبه‌روی آن ضلع را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند. بنابراین

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad (۱)$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و DEC که در زاویهٔ C مشترک‌اند با هم متشابه‌اند و داریم

$$\frac{DE}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad (۲)$$

دو تناسب (۱) و (۲) در یک نسبت مشترک‌اند پس دو نسبت دیگر آنها نیز با هم برابرند

$$\frac{BD}{DC} = \frac{DE}{DC}$$

در این تناسب جمله‌های دوم و چهارم با هم برابرند پس دو جملهٔ دیگر یعنی BD و DE نیز با هم برابرند.

تمرین ۳ـ۱ـ۱۲

۱ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC از نقطهٔ D واقع بر ساق AB خطی موازی با قاعدهٔ BC رسم شده است که با میانه‌های BM و CN و ضلع AC به ترتیب در E و F و G برخورد کرده است. ثابت کنید DE با FG برابر است.

۲ـ در مثلث ABC از نقطهٔ M وسط ضلع BC خطی موازی با AD نیمساز داخلی زاویهٔ A رسم شده است که با AB در E و با AC در F برخورد می‌کند. ثابت کنید BE با CF برابر است.

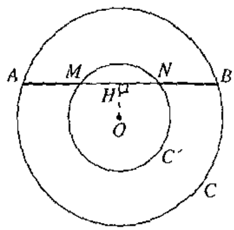
۳ـ۱ـ۸ روش هشتم: بهره‌گیری از رابطه‌های در بردارندهٔ دو پاره‌خط

الف) در مجموعهٔ پاره‌خطها نیز، اگر طرفهای دو برابری را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم برابری دیگری به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۱۴. اگر خطی با دو دایرهٔ هم‌مرکز برخورد کند پاره‌خطهای پدید آمدهٔ بین دو دایره با هم برابرند.

فرض : دو دایرهٔ C و C' هر دو به مرکز O هستند
وتر AB از دایرهٔ C با دایرهٔ C' در M و N برخورد کرده است

حکم : $AM = BN$



شکل۳-۱۶

حل. عمود OH را بر AB رسم می‌کنیم. می‌دانیم که در هر دایره، شعاع عمود بر وتر آن وتر را نصف می‌کند. بنابراین

$$AH = BH\ ,\ MH = NH$$

دو طرف این برابریها را نظیر به نظیر از هم کم می‌کنیم

$$AH - MH = BH - NH \Longrightarrow AM = BN$$

یادداشت. اگر MN را به هر یک از دو طرف برابری به‌دست آمده بیفزاییم، برابری $AN = BM$ به‌دست می‌آید.

تمرین ۳ـ۱ـ۱۳

۱ـ در دایرهٔ به مرکز O، دو شعاع OA و OB و نیز وتر MN عمود بر نیمساز زاویهٔ AOB رسم شده که با OA در E و با OB در F برخورد کرده است. ثابت کنید AE با BF و ME با NF برابر است.

۲ـ در مثلث ABC از M وسط AB و روی این ضلع و در جهت B به A پاره‌خط ME برابر با نصف BC، و از N وسط BC و روی این ضلع و در جهت B به C پاره‌خط NF برابر با نصف AB جدا شده است. ثابت کنید BE با BF و AE با CF برابر است.

۳ـ دو دایرهٔ به مرکزهای O و I در A برخورد کرده‌اند. از A به M وسط OI وصل شده و در A خطی بر AM عمود شده است که با دایرهٔ به مرکز O در B و با دایرهٔ به مرکز I در C برخورد می‌کند. ثابت کنید AB با AC برابر است.

۴ـ دو دایرهٔ برابر به مرکزهای O و I داده شده‌اند. خطی موازی با OI رسم می‌شود که با دایرهٔ به مرکز O در A و B و با دایرهٔ با مرکز I در C و D برخورد می‌کند به‌گونه‌ای که A، B، C و D به همین ترتیب واقع‌اند. ثابت کنید AC با BD برابر است.

۵ـ در دایرهٔ به قطر AB وتر دلخواه CD رسم می‌شود. وتر AE عمود بر راستای CD و نیز وتر BF عمود بر راستای CD رسم می‌شوند. خطهای AE و BF با CD یا با امتداد آن در G و H برخورد می‌کنند. ثابت کنید BH با EG و CH با DG برابر است.

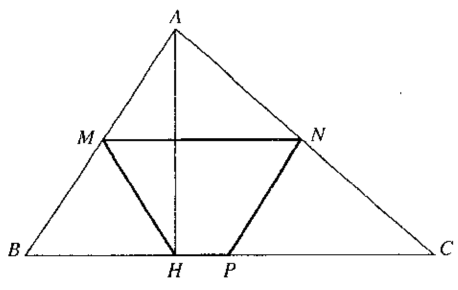
۶ـ از نقطهٔ دلخواه M واقع بر قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، خط ME عمود بر AB و خط MF عمود بر AC رسم می‌شوند. ثابت کنید مجموع $ME+MF$ با ارتفاع وارد بر یکی از دو ساق برابر است.

ب) اگر دو پاره‌خط جزءهایی برابر از دو پاره‌خط برابر باشند، با هم برابرند.

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۱۵. اگر M، N و P به ترتیب وسطهای ضلعهای AB، AC و BC ، و H پای ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC باشند، ثابت کنید چهار نقطهٔ M، N، P و H چهار رأس یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین‌اند.

فرض : مثلث ABC ؛ M وسط AB، N وسط AC ؛ P وسط BC، $AH\perp BC$

حکم : $MN\|HP$ و $MH=NP$



شکل۳-۱۷

حل. خطی که وسطهای دو ضلع مثلث را به هم وصل کند با ضلع دیگر مثلث موازی و با نصف آن برابر است. بنابراین MN با HP موازی و چهارضلعی $MNPH$ ذوزنقه است. پاره‌خط NP که وسطهای AC و BC را به هم وصل کرده با نصف AB برابر است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB پاره‌خط HM که میانهٔ وتر AB است با نصف وتر، یعنی با نصف AB برابر است. دو پاره‌خط NP و MH که هر دو با نصف AB برابرند، با هم برابرند و در نتیجه ذوزنقهٔ $MNPH$ متساوی‌الساقین است.

تمرین ۳ـ۱ـ۱۴

۱ـ ثابت کنید چهار نقطهٔ وسطهای ضلعهای هر چهارضلعی چهار رأس یک متوازی‌الاضلاع‌اند. چهارضلعی چگونه باشد تا متوازی‌الاضلاع پدید آمده، لوزی، مستطیل یا مربع باشد؟

۲ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، نقطهٔ M وسط AB و نقطهٔ N وسط CD است. خطهای DM و BN با قطر AC در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید سه پاره‌خط AE، EF و FC با هم برابرند.

۳ـ در مربع $ABCD$ نقطهٔ M وسط AB و نقطهٔ N وسط AD است. خطهای CM و CN با قطر BD در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید سه پاره‌خط BE، EF و FD با هم برابرند.

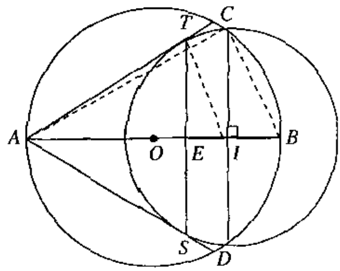
۴ـ ثابت کنید در هر ذوزنقه پاره‌خطی که وسطهای دو قطر را به هم وصل می‌کند با نصف تفاضل دو قاعده برابر است.

ج) اگر در یک برابری، عاملهای دو طرف نظیر به نظیر با هم برابر باشند، دو پاره‌خط که عاملهایی نظیر هم از این رابطه باشند، با هم برابرند.

مسألهٔ ۳ـ۱ـ۱۶. در دایرهٔ به مرکز O وتر CD در نقطهٔ I بر قطر AB عمود است. دایرهٔ به قطر CD، مماسهای AT و AS بر این دایره و خط TS رسم می‌شوند که این خط در E با AB برخورد می‌کند. ثابت کنید I وسط BE است.

فرض :
- AB قطر دایرهٔ به مرکز O است
- CD وتر دایره و عمود بر AB است
- CD قطر دایرهٔ به مرکز I است
- AT و AS مماسهای بر دایرهٔ به مرکز I هستند
- E نقطهٔ برخورد TS با AB است

حکم : $BI = IE$



شکل۳-۱۸

حل. خطهای AC، BC و IT را رسم می‌کنیم. مثلث ABC در زاویهٔ C قائمه و CI ارتفاع آن است. بنابراین:

$$\overline{IC}^{۲} = IA \cdot IB \qquad (۱)$$

مثلث ATI نیز در زاویهٔ T قائمه و TI ارتفاع آن است و بنابراین:

$$\overline{IT}^{۲} = IA \cdot IE \qquad (۲)$$

دو شعاع IT و IC از دایرهٔ I با هم برابرند و دو رابطهٔ (۱) و (۲) که در طرف اول با هم برابرند، در طرف دوم هم برابرند. پس:

$$IA \cdot IB = IA \cdot IE \Longrightarrow IB = IE$$

تمرین ۳ـ۱ـ۱۵

۱ـ ثابت کنید خطی که از نقطهٔ برخورد دو قطر ذوزنقه موازی با دو قاعدهٔ آن و محدود به دو ساق رسم شود، در این نقطه نصف می‌شود.

۲ـ مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است و مربعهای $ABEF$ و $ACDG$ روی ضلعهای AB و AC رسم شده‌اند. خط CE با AB در H و خط BD با AC در K برخورد می‌کند. ثابت کنید AH با AK برابر است.

* ۳ـ در مسألهٔ پیش، اگر I نقطهٔ برخورد BD با CE باشد، ثابت کنید مساحت چهارضلعی $AHIK$ با مساحت مثلث BCI برابر است.

تمرین بخش ۳-۱

۱ـ خط دلخواه xy بر نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC گذشته و عمودهای AE، BF و CG بر آن رسم شده‌اند. ثابت کنید مجموع دو عمودی که در یک طرف xy واقع‌اند با عمود واقع در طرف دیگر برابر است.

۲ـ در دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R و در دو طرف مرکز دو وتر موازی با هم AB و CD چنان رسم شده‌اند که AB با ضلع شش‌ضلعی منتظم محاطی و CD با ضلع سه‌ضلعی منتظم محاطی برابر است. ثابت کنید خطی که وسطهای دو ساق ذوزنقهٔ $ABCD$ را به هم وصل می‌کند با ارتفاع این ذوزنقه برابر است.

۳ـ روی ضلعهای AB، BC، CD و DA از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نقطه‌های M، N، P و Q چنان گزیده شده‌اند که هر یک از پاره‌خطهای AM، BN، CP و DQ یک‌چهارم ضلع نظیر است. ثابت کنید: قطرهای متوازی‌الاضلاع هر یک از پاره‌خطهای MP و NQ را به پاره‌خطهای برابر تقسیم می‌کنند، چهارضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است و مرکز آن همان مرکز متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است.

۴ـ ثابت کنید اگر دو میانه از مثلثی با هم برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است.

۵ـ بر پاره‌خط $AB = ۳a$ نقطهٔ M بین A و B واقع و $AM = ۲a$ است. در یک طرف AB، مثلثهای متساوی‌الاضلاع AMC و MBD، خط CD و عمود CH بر AB رسم می‌شوند. ثابت کنید CD با CH برابر است.

۶ـ دو وتر برابر AB و CD از یک دایره با یکدیگر در E برخورد کرده‌اند. ثابت کنید پاره‌خطهای کوچکتر و همچنین پاره‌خطهای بزرگتر از دو وتر با هم برابرند.

۷ـ در مربع $ABCD$، هر یک از ضلعها به اندازهٔ خود و همه در یک جهت امتداد یافته‌اند و نقطه‌های M، N، P و Q به‌دست آمده‌اند و MN و PQ رسم شده‌اند. ثابت کنید MN با PQ برابر است.

۸ـ در یک دایره دو وتر عمود بر هم AB و CD و قطر CE رسم شده‌اند. ثابت کنید AE با BD برابر است.

۹ـ در نیمدایرهٔ به قطر AB مماسهای Ax و By و در نقطهٔ دلخواه M واقع بر نیمدایره نیز مماس دیگری بر آن رسم شده است که با Ax و By در C و D برخورد می‌کنند. ثابت کنید CD با $AC+BD$ برابر است و اگر MH بر AB عمود باشد و I نقطهٔ برخورد MH با AD باشد ثابت کنید MI با IH برابر است.

۳ـ۲ چگونگی اثبات برابری دو زاویه

مسألهٔ سادهٔ اثبات برابری دو زاویه، چه در اثبات بسیاری از قضیه‌ها و چه در اثبات مسأله‌هایی زیاد و از هرگونه به‌کار می‌رود. برای اثبات اینکه: یک مثلث یا یک ذوزنقه متساوی‌الساقین است، یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، یک چندضلعی منتظم است، چند نقطه بر یک خط راست یا روی یک دایره واقع‌اند، دو مثلث با هم برابر یا متشابه‌اند، دو یا چند خط با هم موازی‌اند، و نیز برای اثبات حکمهایی دیگر از این‌گونه، سروکار با اثبات برابری دو زاویه است.

۳ـ۲ـ۱ روش یکم: بهره‌گیری از همنهشتی دو زاویه

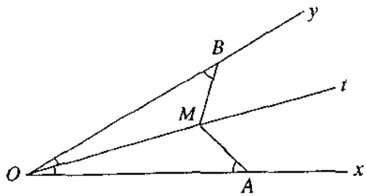
چند قضیهٔ بنیادی هندسه، از جمله قضیه‌های مربوط به حالتهای برابری مثلثها، با روش بر هم نهادن شکلها ثابت می‌شوند و پس از آن این روش خیلی کم به‌کار می‌رود. در حل مسأله‌ها هم این روش کاربرد

زیادی ندارد و همان‌گونه که در مورد برابری پاره‌خطها گوشزد شد، مگر برای شکلهایی که محور تقارن دارند، روش بر هم نهادن شکلها به‌کار نمی‌رود. برای این‌گونه شکلها هم می‌توان از ویژگیهای برابری مثلثها بهره گرفت. با این همه در موردهایی به‌کار بردن روش برهم نهادن شکلها ساده‌تر از روشهای دیگر است.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۱. دو نقطهٔ A و B بر دو ضلع زاویهٔ xOy به یک فاصله از O واقع‌اند و به نقطهٔ دلخواه M از نیمساز زاویه وصل شده‌اند. ثابت کنید خطهای MA و MB با دو ضلع زاویه زاویه‌های برابر می‌سازند.

فرض : $\left.\begin{aligned} OA &= OB \\ \angle AOM &= \angle MOB \end{aligned}\right\}$

حکم : $\angle MAO = \angle MBO$



شکل۳-۱۹

حل. Ot نیمساز زاویه محور تقارن آن است. اگر Ot را لولا بگیریم و صفحه را دور آن تا کنیم، Oy و Ox روی‌هم می‌افتند. چون OA با OB برابر است و O ثابت می‌ماند، A و B بر هم واقع می‌شوند و چون M نیز ثابت می‌ماند، AM و BM نیز روی‌هم قرار می‌گیرند و دو زاویهٔ OAM و OBM بر هم نهاده می‌شوند و در نتیجه با هم برابرند.

تمرین ۳ـ۲ـ۱

۱ـ در دایرهٔ به مرکز O و به قطر AB، شعاع OC عمود بر AB رسم شده است. قطر AB از طرف A تا نقطهٔ E و از طرف B تا نقطهٔ D امتداد می‌یابد که AE و BD برابر باشند. خطهای CD و CE نیز رسم می‌شوند که با دایره در F و G برخورد می‌کنند. ثابت کنید دو زاویهٔ OFC و OGC با هم برابرند.

۲ـ دو نقطهٔ A و B نسبت به خط xy قرینهٔ یکدیگرند. نقطهٔ C در همان طرفی از xy که A واقع است قرار دارد. خط BC با xy در D برخورد می‌کند و در D نیم‌خط Dt بر xy عمود می‌شود. ثابت کنید دو زاویهٔ ADt و BDt با هم برابرند.

۳ـ دو نقطهٔ A و B که نسبت به خط xy قرینهٔ یکدیگرند به دو نقطهٔ C و D از xy وصل می‌شوند. ثابت کنید دو زاویهٔ CAD و CBD با هم برابرند.

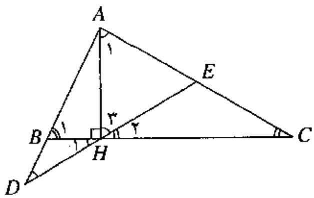
۳ـ۲ـ۲ روش دوم: بهره‌گیری از ویژگیهای مثلث متساوی‌الساقین

الف) در مثلث متساوی‌الساقین دو زاویهٔ روبه‌رو به دو ساق با هم برابرند.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۲. در مثلث ABC زاویهٔ B دو برابر زاویهٔ C و AH ارتفاع وارد بر BC است. ضلع AB از طرف B تا نقطهٔ D امتداد می‌یابد که BD برابر با BH است و خط DH رسم می‌شود که با ضلع AC در E برخورد می‌کند. ثابت کنید دو زاویهٔ EHC و ECH و نیز دو زاویهٔ EAH و AHE با هم برابرند

فرض : $\left.\begin{array}{r} AH\perp BC \text{ و } \angle B = ۲\angle C \\ BD = BH \end{array}\right\}$

حکم : $\left.\begin{array}{r} \angle EHC = \angle ECH \\ \angle EAH = \angle AHE \end{array}\right\}$



شکل۳-۲۰

حل. مثلث BDH متساوی‌الساقین است و دو زاویهٔ D و $H_۱$ و بنابراین دو زاویهٔ D و $H_۲$ با هم برابرند. زاویهٔ $B_۱$ که زاویهٔ خارجی مثلث BDH است با مجموع دو زاویهٔ برابر D و $H_۱$ برابر است. بنابراین زاویهٔ $B_۱$ دو برابر هر یک از این دو زاویه و در نتیجه دو برابر زاویهٔ $H_۲$ است. زاویهٔ $B_۱$ بنابر فرض دو برابر زاویهٔ C هم هست. بنابراین دو زاویهٔ $H_۲$ و C با هم برابرند. از اینکه AH بر BC عمود است برمی‌آید که زاویهٔ $H_۳$ متمم زاویهٔ C و زاویهٔ $A_۱$ نیز متمم زاویهٔ C است. بنابراین دو زاویهٔ $A_۱$ و $H_۳$ که متممهایشان با هم برابرند، خودشان هم با هم برابرند.

تمرین ۳ـ۲ـ۲

۱ـ در دایرهٔ به مرکز O، قطر AB از طرف B تا نقطهٔ C امتداد یافته که BC کوچکتر از شعاع دایره است و از C خطی چنان رسم شده است که با دایره در D و E برخورد می‌کند و CD برابر با شعاع دایره است. ثابت کنید زاویهٔ EOA سه برابر زاویهٔ ECA است.

۲ـ مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه و AB بزرگتر از AC است. به مرکز A و به شعاع برابر با نصف BC کمانی رسم می‌شود، ثابت کنید این کمان از وسط BC می‌گذرد و با آن یا با امتداد آن در نقطهٔ دیگر D برخورد می‌کند و اگر نیم‌خط Dx موازی و هم‌جهت با AB رسم می‌شود، زاویهٔ ADx سه برابر زاویهٔ ABC است.

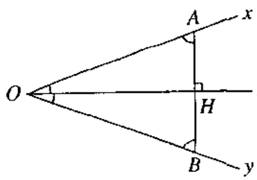
۳ـ در مثلث ABC دو ضلع AB و AC با هم برابرند. میانه‌های این دو ضلع در G با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید دو زاویهٔ BCG و CBG با هم برابرند.

ب) در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویهٔ رأس، میانهٔ قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده، هر سه بر هم واقع‌اند و برعکس.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۳. از نقطهٔ A واقع بر ضلع Ox از زاویهٔ O عمود AH بر نیمساز این زاویه رسم می‌شود و امتداد می‌یابد تا با ضلع دیگر آن در B برخورد کند. ثابت کنید خط AB با دو ضلع زاویه، زاویه‌هایی برابر می‌سازد.

فرض : Ot نیمساز زاویهٔ xOy ، A روی Ox، B روی Oy ، $AB \perp Ot$

حکم : $\angle OAB = \angle OBA$



شکل۳-۲۱

حل. مثلث OAB که Ot هم نیمساز و هم ارتفاع نظیر ضلع AB از آن است، متساوی‌الساقین است و دو زاویهٔ OAB و OBA که روبه‌رو به دو ساق آن هستند با هم برابرند.

تمرین ۳ـ۲ـ۳

۱ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، خطی موازی با قاعدهٔ BC با دو ساق در M و N برخورد کرده است. این دو نقطه به H پای ارتفاع وارد بر قاعده وصل می‌شوند. ثابت کنید دو زاویهٔ MNH و NMH با هم و دو زاویهٔ MHA و NHA نیز با هم برابرند.

۲ـ ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ آن ۳۰ درجه باشد، میانه و ارتفاع نظیر وتر، زاویهٔ قائمه را به سه قسمت برابر تقسیم می‌کنند.

۳ـ ثابت کنید قطرهای لوزی زاویه‌های آن‌را نصف می‌کنند.

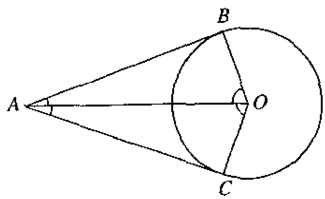
۳ـ۲ـ۳ روش سوم: بهره‌گیری از ویژگیهای نیمساز زاویه

در موردهایی که بنا باشد برابری دو زاویهٔ مجاور ثابت شود، کافی است ثابت شود ضلع مشترک آنها نیمساز زاویهٔ برابر با مجموع آن دو زاویه است.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۴. از نقطهٔ A دو مماس AB و AC بر دایرهٔ به مرکز O رسم شده‌اند. ثابت کنید دو زاویهٔ BAO و CAO با هم و دو زاویهٔ AOB و AOC نیز با هم برابرند.

فرض : AB در B و AC در C بر دایرهٔ O مماس است.

حکم : $$\left.\begin{array}{l}\angle BAO = \angle CAO \\ \angle AOB = \angle AOC\end{array}\right\}$$



شکل۳-۲۲

حل. مماس بر دایره بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است. پس زاویه‌های B و C قائمه‌اند. نقطهٔ O که از دو خط AB و AC به یک فاصله است بر نیمساز زاویهٔ BAC قرار دارد، یعنی OA نیمساز زاویهٔ A است و دو زاویهٔ BAO و CAO با هم برابرند. نیمساز هر زاویه محور تقارن آن است و بنابراین، خط AO محور تقارن شکل است و دو زاویهٔ AOB و AOC که نسبت به AO قرینه‌اند، با هم برابرند.

تمرین ۳ـ۲ـ۴

۱ـ از نقطهٔ M مماسهای MA و MB بر دایرهٔ به مرکز O رسم شده‌اند و OB به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ C امتداد یافته است. ثابت کنید زاویهٔ AMC سه برابر زاویهٔ BMC است.

۲ـ خطی با دو ضلع زاویهٔ xOy در A و B برخورد کرده است. نیمسازهای دو زاویهٔ xAB و yBA با هم در C برخورد می‌کنند. ثابت کنید دو زاویهٔ COA و COB با هم برابرند.

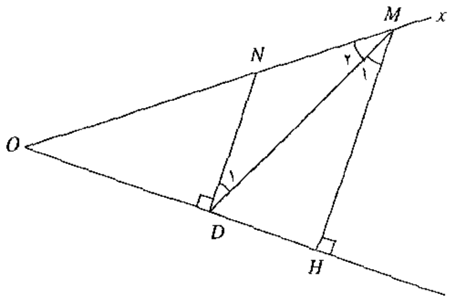
۳ـ۲ـ۴ روش چهارم: بهره‌گیری از ویژگیهای زاویه‌های متبادل یا متقابل نسبت به دو خط موازی

اگر خطی با دو خط موازی برخورد کند، دو زاویهٔ متبادل داخلی، دو زاویهٔ متبادل خارجی، و دو زاویهٔ متقابل داخل و خارج با هم برابرند.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۵. نقطهٔ M بر ضلع Ox از زاویهٔ xOy واقع است. عمود MH بر Oy و نیمساز زاویهٔ HMO رسم می‌شود که با Oy در D برخورد می‌کند. عمود بر Oy در D نیز رسم می‌شود که با Ox در N برخورد می‌کند. ثابت کنید مثلث MDN متساوی‌الساقین است.

فرض : زاویهٔ xOy و M روی Ox ، $MH \perp Oy$ ، $DN \perp Oy$ ، $\angle M_۱ = \angle M_۲$

حکم : $\angle D_۱ = \angle M_۲$



شکل۳-۲۳

حل. دو خط MH و DN با هم موازی‌اند و خط MD با آنها برخورد کرده است. دو زاویهٔ $D_۱$ و $M_۱$ متبادل داخلی‌اند و در نتیجه با هم برابرند. دو زاویهٔ $M_۱$ و $M_۲$ نیز بنابر فرض با هم برابرند. بنابراین دو زاویهٔ $D_۱$ و $M_۲$ که هر دو با زاویهٔ $M_۱$ برابرند، با یکدیگر برابرند و در نتیجه مثلث DMN متساوی‌الساقین است.

تمرین ۳ـ۲ـ۵

۱ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$ که AB قاعدهٔ بزرگتر آن است، از A و B دو خط به ترتیب موازی با BC و AD رسم می‌شوند که با امتداد CD در M و N برخورد می‌کنند. ثابت کنید زاویه‌های M و N به ترتیب با زاویه‌های B و A از ذوزنقه برابرند.

۲ـ دو قطر AC و BD از ذوزنقهٔ $ABCD$ در I برخورد می‌کنند. ثابت کنید زاویه‌های دو مثلث IAB و ICD نظیر به نظیر با هم برابرند.

۳ـ در مثلث ABC، ضلع AB از طرف A به اندازهٔ خودش تا M و ضلع AC نیز از طرف A به اندازهٔ خودش تا N امتداد می‌یابد و MN رسم می‌شود. ثابت کنید دو زاویهٔ M و B و دو زاویهٔ N و C با هم برابرند.

۴ـ خطی با ضلعهای Ox و Oy از زاویهٔ xOy به ترتیب در M و N برخورد کرده است. نیمسازهای زاویه‌های xMN و yNM با یکدیگر در Q، و خطی که از Q موازی MN رسم شود با Ox و Oy به ترتیب در P و R برخورد می‌کنند. ثابت کنید هر یک از مثلثهای PQM و RQN متساوی‌الساقین است.

۵ـ در دایرهٔ به مرکز O و به قطر AB، وترهای AC و BD موازی با هم رسم می‌شوند. ثابت کنید دو مثلث ACO و BDO با هم برابرند.

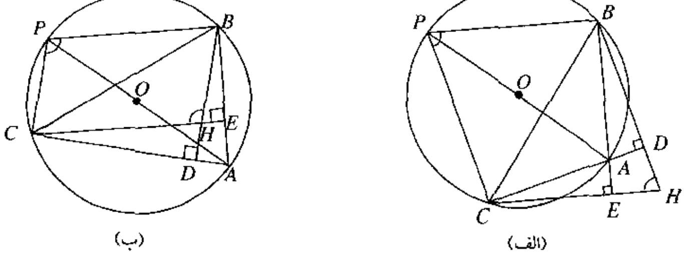
۳ـ۲ـ۵ روش پنجم: بهره‌گیری از زاویه‌هایی که ضلعهایشان با هم موازی یا بر هم عمودند

الف) اگر ضلعهای دو زاویه نظیر به نظیر با هم موازی باشند، آن دو زاویه در حالتی که هر دو حاده یا هر دو منفرجه باشند، با هم برابرند و در حالتی که یکی از آنها حاده و دیگری منفرجه باشد، مکمل یکدیگرند. هرگاه آن دو زاویه قائمه باشند، هم با هم برابر و هم مکمل یکدیگرند.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۶. مثلث ABC در دایرهٔ به مرکز O محاط است. قطر AP از دایره و ارتفاعهای BD و CE از مثلث رسم می‌شوند. اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعها باشد، ثابت کنید دو زاویهٔ BHC و BPC با هم برابرند.

فرض : AP قطر دایره، $BD\perp AC$، $CE\perp AB$، H نقطهٔ برخورد BD و CE

حکم : $\angle BPC = \angle BHC$



شکل۳-۲۴

حل. زاویه‌های ABP و ACP که محاطی و روبه‌رو به قطر AP اند، قائمه‌اند و در نتیجه PC با BD و PB با CE موازی است. ضلعهای دو زاویهٔ BPC و BHC نظیر به نظیر با هم موازی‌اند و در

حالتی که A زاویهٔ حاده باشد (شکل ۳-۲۴ (ب)) هر دو منفرجه و در حالتی که A زاویهٔ منفرجه باشد (شکل ۳-۲۴ (الف)) هر دو حاده‌اند و در هر حال با هم برابرند.

تمرین ۳ـ۲ـ۶

۱ـ در مسألهٔ (۳-۲-۶)، نقطهٔ O مرکز دایره به نقطه‌های M وسط AB و N وسط AC وصل می‌شود. ثابت کنید زاویهٔ MON نیز با زاویهٔ BPC برابر است.

۲ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$، نقطه‌های M، N، P و Q به ترتیب وسطهای دو قاعده و دو قطرند. ثابت کنید دو زاویهٔ M و N از چهارضلعی $MPNQ$ برابرند با زاویه‌ای که دو ساق AD و BC از ذوزنقه با هم می‌سازند.

۳ـ از نقطهٔ D واقع بر ضلع AB از مثلث ABC خطهایی موازی با دو ضلع دیگر مثلث رسم می‌شوند که با خطی که از C موازی با AB رسم می‌شود در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید زاویه‌های دو مثلث ABC و BEF نظیر به نظیر با هم برابرند.

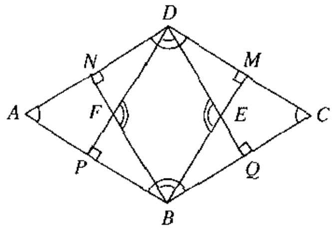
۴ـ نقطهٔ P بر قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC واقع است. از نقطه‌های M و N وسطهای پاره‌خطهای PB و PC عمودهایی بر BC رسم می‌شوند که با AB و AC در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید زاویهٔ EPF با زاویهٔ A برابر است.

ب) اگر ضلعهای دو زاویه نظیر به نظیر بر هم عمود باشند، در حالتی که آن دو زاویه هر دو حاده یا هر دو منفرجه باشند، با هم برابرند و اگر یکی از آنها حاده و دیگری منفرجه باشد، مکمل یکدیگرند. هرگاه آن دو زاویه قائمه باشند، هم با هم برابر و هم مکمل یکدیگرند.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۷. در لوزی $ABCD$ عمودهای BM، BN، DP و DQ بر ضلعهای روبه‌رو به رأسهای B و D رسم می‌شوند که با یکدیگر در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید زاویه‌های چهارضلعی $BEDF$ با زاویه‌های لوزی $ABCD$ نظیر به نظیر برابرند.

فرض :
$ABCD$ لوزی است
زاویه‌های A و C حاده و زاویه‌های B و D منفرجه‌اند
$\angle M = \angle N = \angle P = \angle Q = ۹۰^\circ$

حکم :
$$\left.\begin{aligned}\angle BED = \angle DFB = \angle B\\ \angle EDF = \angle FBE = \angle A\end{aligned}\right\}$$



شکل۳-۲۵

حل. ضلعهای روبه‌روی لوزی با هم موازی‌اند و BM که بر CD عمود است، بر AB نیز عمود است. همچنین BN نیز بر BC عمود است. دو ضلع زاویهٔ EBF بر دو ضلع زاویهٔ C عمودند و این دو زاویه هر دو حاده‌اند، پس با هم برابرند. خط BF بر CD و در نتیجه بر AB عمود است و خط DE نیز بر BC عمود است. دو ضلع زاویهٔ E و دو ضلع زاویهٔ B از لوزی بر هم عمودند و این دو زاویه که هر دو منفرجه‌اند با هم برابرند. به همین ترتیب ثابت می‌شود زاویهٔ EDF با زاویهٔ C و زاویهٔ DFB با زاویهٔ D برابر است.

تمرین ۳ـ۲ـ۷

۱ـ در مسألهٔ (۳-۲-۷) ثابت کنید چهار ضلعی $BEDF$ لوزی است.

۲ـ از نقطهٔ D واقع بر قاعدهٔ BC (یا واقع بر امتداد آن) از مثلث متساوی‌الساقین ABC عمود DH بر ضلع AC رسم می‌شود. ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ CDH نصف اندازهٔ زاویهٔ A است.

۳ـ ثابت کنید در هر مثلث، دو زاویه‌ای که دو ارتفاع نظیر دو ضلع با این دو ضلع در رأسهای مثلث می‌سازند، با هم برابرند.

۴ـ دایرهٔ به مرکز O در دو نقطهٔ M و N بر ضلعهای زاویهٔ A مماس است. خطی در نقطهٔ P بر دایرهٔ O مماس است و در B و C با ضلعهای زاویه برخورد می‌کند و این خط در ناحیهٔ بین A و O واقع است. ثابت کنید زاویه‌ای که دو شعاع OM و OP یا دو شعاع ON و OP با هم می‌سازند با یکی از زاویه‌های مثلث ABC برابر است.

۵ـ در مسأله پیش، اگر خط BC در خارج ناحیهٔ O و A باشد زاویه‌های یاد شده چه وضعیتی خواهند داشت؟

۶ـ روی خطی که در نقطهٔ A بر دایرهٔ به مرکز O مماس است دو نقطهٔ B و C گزیده می‌شوند که C بین A و B باشد. از نقطه‌های B و C مماسهای BD و CE بر دایره رسم می‌شوند. ثابت کنید دو زاویهٔ BOC و DAE با هم برابرند.

۷ـ در مسألهٔ پیش، در حالتی که A بین B و C باشد دو زاویهٔ یاد شده نسبت به هم چه وضعیتی خواهند داشت؟

۳ـ۲ـ۶ روش ششم: بهره‌گیری از ویژگیهای زاویه‌های وابسته به دایره

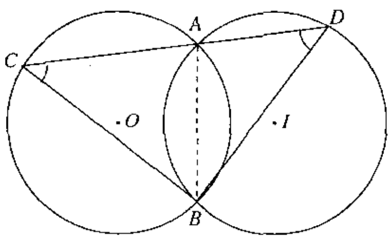
الف) این روش بیشتر در موردهایی به‌کار می‌رود که شکل مسأله دایره‌ای را در بردارد. ویژگیهایی که به‌کار می‌روند، چنین‌اند:

اندازهٔ زاویهٔ مرکزی دایره برابر است با اندازهٔ کمان روبه‌روی آن. اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازه کمان روبه‌روی آن، اندازهٔ زاویهٔ مماسی (= ظلی) برابر است با نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن؛ اندازهٔ زاویهٔ داخلی دایره برابر است با نصف مجموع اندازه‌های دو کمان روبه‌روی آن؛ اندازهٔ زاویهٔ خارجی برابر است با نصف تفاضل اندازه‌های دو کمان روبه‌روی آن.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۸. دو دایرهٔ برابر به مرکزهای O و I در دو نقطهٔ A و B با هم برخورد کرده‌اند. خطی که بر A می‌گذرد با دایرهٔ به مرکز O در C و با دایرهٔ به مرکز I در D برخورد می‌کند. ثابت کنید مثلث BCD متساوی‌الساقین است.

فرض :
- دایره‌های برابر به مرکزهای O و I در A و B برخورد کرده‌اند
- C نقطه‌ای از دایرهٔ O و D نقطه‌ای از دایرهٔ I است
- سه نقطهٔ A، C و D بر یک خط واقع‌اند.

حکم : $\angle C = \angle D$



شکل۳-۲۶

حل. در یک دایره یا در دو دایرهٔ برابر، اگر دو وتر با هم برابر باشند کمانهای آنها نیز با هم برابرند. دو دایرهٔ به مرکزهای O و I با هم برابرند و AB وتر مشترک آنهاست. بنابراین دو کمان کوچک AB از دو دایره که روبه‌رو به این وترند، با هم برابرند. دو زاویهٔ C و D که هر کدام در یکی از دو دایره محاطی و روبه‌رو به یکی از این دو کمان برابر است، با هم برابرند و در نتیجه مثلث BCD متساوی‌الساقین است.

تمرین ۳ـ۲ـ۸

۱ـ وتر BC از دایرهٔ به مرکز O عمودمنصف شعاع OA از این دایره است. ثابت کنید کمان BAC نصف کمان دیگر روبه‌رو به وتر BC است.

۲ـ نقطهٔ A روی دایرهٔ به مرکز O و نقطهٔ P داخل این دایره واقع است. عمودمنصف PA با دایره در B و C برخورد می‌کند و خطهای BP و CP به ترتیب در نقطه‌های دیگر D و E با دایره برخورد می‌کنند. ثابت کنید دو زاویهٔ BDE و BDA با هم برابرند و مثلث BPE متساوی‌الساقین است.

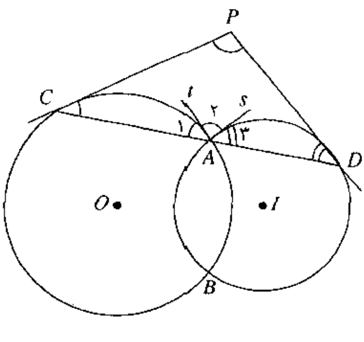
۳ـ دو نقطهٔ داده شدهٔ A و B و نقطهٔ دلخواه M هر سه بر دایرهٔ به مرکز O واقع‌اند. اگر P قرینهٔ M نسبت به خط OA و Q قرینهٔ M نسبت به خط OB باشد، دو زاویهٔ AOB و POQ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۴ـ دو دایرهٔ برابر به مرکزهای O و I چنان رسم شده‌اند که هر یک بر مرکز دیگری می‌گذرد و با هم در A و B برخورد می‌کنند. خطی دلخواه رسم می‌شود که از A بگذرد و با دایره‌ها در نقطه‌های دیگر C و D برخورد کند. ثابت کنید مثلث BCD متساوی‌الاضلاع است.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۹. دو دایرهٔ O و I با هم در A و B برخورد کرده‌اند. خطی از A گذشته با دایرهٔ O در C و با دایرهٔ I در D برخورد می‌کند. در نقطه‌های C و D مماسهایی بر دایره‌ها رسم می‌شوند که در P برخورد می‌کنند. ثابت کنید زاویهٔ بین این دو مماس برابر است با زاویهٔ بین دو خطی که در A بر دایره‌ها مماس می‌شوند.

فرض : PC در C و At در A بر دایرهٔ O مماس‌اند
PD در D و As در A بر دایرهٔ I مماس‌اند

حکم : $\angle P = \angle tAs$



شکل۳-۲۷

حل. در دایرهٔ O دو زاویهٔ مماسی C و A_1 که روبه‌رو به یک کمان‌اند، با هم برابرند. در دایرهٔ I نیز دو زاویهٔ مماسی D و A_3 با هم برابرند. مجموع دو زاویهٔ C و D با مجموع دو زاویهٔ A_1 و A_3 برابر و مکمل زاویهٔ A_2 است. در مثلث PCD نیز مجموع دو زاویهٔ C و D مکمل زاویهٔ P است. بنابراین، دو زاویهٔ P و A_2 با هم برابرند.

تمرین ۳ـ۲ـ۹

۱ـ قطر AB و وتر AC از یک دایره با یکدیگر زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازند و مماسی که در نقطهٔ C بر دایره رسم شده است با امتداد AB در D برخورد می‌کند. ثابت کنید مثلث ACD متساوی‌الساقین است.

۲ـ دو دایرهٔ به مرکزهای O و I در A مماس خارج‌اند و دو خط از A گذشته‌اند که یکی از آنها با دایرهٔ به مرکز O در B و با دایرهٔ به مرکز I در C و دیگری با این دو دایره به ترتیب در D و E برخورد می‌کند. ثابت کنید دو زاویهٔ DBA و ACE با هم برابرند.

۳ـ مسألهٔ پیش را در حالتی حل کنید که دو دایره مماس داخل باشند.

۴ـ دو دایره در A مماس داخل‌اند و وتر BC از دایرهٔ بزرگتر در D بر دایرهٔ کوچکتر مماس است. ثابت کنید خط AD نیمساز زاویهٔ BAC است.

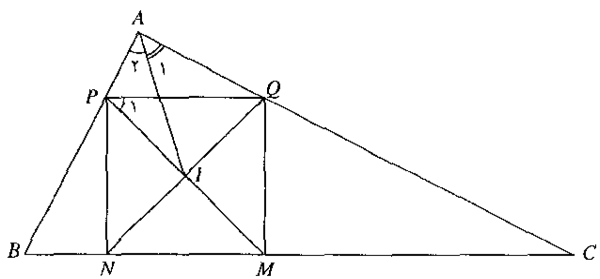
۵ـ دو دایرهٔ O و I در A مماس خارج‌اند. امتداد وتر BC از دایرهٔ O در D بر دایرهٔ I مماس است و خط BA در E با دایرهٔ I برخورد می‌کند. ثابت کنید خط AD نیمساز زاویهٔ CAE است.

ب) در هر چهارضلعی محاطی، دو زاویهٔ روبه‌رو مکمل یکدیگرند و برعکس. همچنین هر دو زاویهٔ واقع بین دو قطر چهارضلعی و دو ضلع روبه‌روی آن زاویه نیز با هم برابرند و برعکس.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۱۰. مربعی در یک مثلث قائم‌الزاویه چنان محاط شده که یک ضلعش بر وتر واقع است. ثابت کنید خطی که رأس زاویهٔ قائمه را به مرکز مربع وصل می‌کند نیمساز زاویهٔ قائمه است.

فرض :
- مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است.
- $MNPQ$ مربع و I مرکز آن است.
- MN بر BC، P بر AB و Q بر AC واقع است.

حکم : $\angle A_1 = \angle A_2$



شکل۳-۲۸

حل. چهارضلعی $APIQ$ که دو زاویهٔ روبه‌روی آن، A و I، قائمه و مکمل یکدیگرند، محاطی است. بنابراین دو زاویهٔ A_1 و P_1 که روبه‌رو به یک ضلع‌اند، با هم برابرند. زاویهٔ P_1 به اندازهٔ ۴۵ درجه است. پس زاویهٔ A_1 نیز به اندازهٔ ۴۵ درجه و در نتیجه AI نیمساز زاویهٔ A است.

تمرین ۳ـ۲ـ۱۰

۱ـ در یک دایره، از نقطهٔ A وسط کمان BC دو وتر دلخواه AD و AE رسم شده‌اند که با وتر BC به ترتیب در F و G برخورد می‌کنند. ثابت کنید چهارضلعی $DEGF$ محاطی است.

۲ـ در مثلث ABC، نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌های B و C با نیمساز داخلی زاویهٔ A به ترتیب در I و J برخورد می‌کنند. ثابت کنید دو زاویهٔ CIJ و CBJ با هم و دو زاویهٔ BIJ و BCJ با هم برابرند.

۳ـ از دو نقطهٔ A و B واقع در خارج یک دایره دو خط رسم می‌شوند که از نقطهٔ دلخواه M واقع بر دایره می‌گذرند و با دایره به ترتیب در C و D برخورد می‌کنند. وتر DE موازی با AB و نیز وتر EC رسم می‌شود که امتداد آن با امتداد AB در I برخورد می‌کند. ثابت کنید چهار نقطهٔ B، M، E و I بر یک دایره واقع‌اند.

۴ـ در مثلث ABC نقطهٔ M وسط AB و نقطهٔ N وسط BC است. عمودمنصف AB با AC در P برخورد می‌کند و عمودی که در N بر PN رسم شود با AB در Q برخورد می‌کند. ثابت کنید زاویهٔ NPQ با زاویهٔ A برابر است.

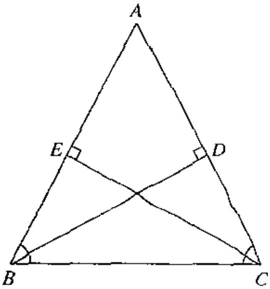
۳ـ۲ـ۷ روش هفتم: بهره‌گیری از مثلثهای برابر یا متشابه

اگر دو مثلث برابر یا متشابه باشند، زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهایی که نظیر یکدیگرند، با هم برابرند.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۱۱. ثابت کنید اگر دو ارتفاع از مثلثی با هم برابر باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

فرض : $\left.\begin{aligned} BD \perp AC \\ CE \perp AB \\ BD = CE \end{aligned}\right\}$

حکم : $\angle B = \angle C$



شکل ۳-۲۹

حل. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD و BCE، ضلع BC مشترک است و دو ضلع BD و CE بنابر فرض با هم برابرند بنابراین، این دو مثلث در حالت برابری وتر و یک ضلع با هم برابرند و در نتیجه دو زاویهٔ B و C از آنها که روبه‌رو به ضلعهای برابرند، با هم برابرند. بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

تمرین ۳ـ۲ـ۱۱

۱ـ بر ضلعهای زاویهٔ O دو نقطهٔ A و B به یک فاصله از رأس O واقع‌اند. از هر یک از این دو نقطه عمودی بر ضلع روبه‌رو رسم می‌شود. ثابت کنید نیمساز زاویهٔ O از نقطهٔ برخورد این دو عمود می‌گذرد.

۲ـ بر ضلع Ox از زاویهٔ xOy دو نقطهٔ A و B و بر ضلع Oy دو نقطهٔ C و D چنان واقع‌اند که OA با OC و OB با OD برابر است. ثابت کنید نیمساز زاویهٔ O از نقطهٔ برخورد دو خط AD و BC می‌گذرد.

۳ـ ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به یک اندازه و در یک جهت تا D ، E و F امتداد می‌یابند. ثابت کنید زاویه‌های DEF، EFD و FDE با هم برابرند.

۴ـ مسألهٔ پیش را در حالتی حل کنید که روی ضلعها و در یک جهت، پاره‌خطهایی با اندازه‌های برابر جدا شوند.

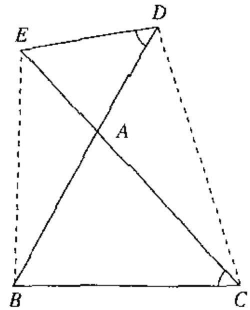
۵ـ ضلعهای یک شش‌ضلعی منتظم در یک جهت و به یک اندازه امتداد می‌یابند و نقطه‌های به‌دست آمده پشت‌سر هم به یکدیگر وصل می‌شوند. ثابت کنید زاویه‌هایی که در رأسهای تازه پدید آیند با هم برابرند.

۶ـ در مثلث ABC که B کوچکترین زاویه و A بزرگترین زاویه است بر ضلع BC دو نقطهٔ M و N چنان به‌دست می‌آیند که AM و AN با هم برابر باشند. ثابت کنید اگر زاویهٔ CAM با زاویهٔ B برابر باشد، زاویهٔ BAN با زاویهٔ C برابر خواهد بود.

* مسألهٔ ۳ـ۲ـ۱۲. در مثلث ABC، ضلع AB از طرف A تا نقطهٔ D امتداد یافته که AD برابر با نصف AC است. ضلع AC نیز از طرف A تا نقطهٔ E امتداد یافته که AE برابر با نصف AB است. ثابت کنید چهارضلعی $BCDE$ محاطی است.

فرض : $\left.\begin{aligned} AD &= \tfrac{۱}{۲}AC \\ AE &= \tfrac{۱}{۲}AB \end{aligned}\right\}$

حکم : چهارضلعی $BCDE$ محاطی است.



شکل۳-۳۰

حل. بنابر قسمت ب از روش ششم، برای آنکه ثابت کنیم یک چهارضلعی محاطی است کافی است ثابت کنیم که دو زاویهٔ بین دو ضلع روبه‌رو و دو قطر آن با هم برابرند. پس اگر ثابت کنیم مثلاً دو زاویهٔ ADE و ACB با هم برابرند، حکم ثابت شده است. در دو مثلث ABC و ADE داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{۱}{۲}\,,\ \angle BAC = \angle DAE$$

دو ضلع از دو مثلث نظیر به نظیر با هم متناسب‌اند و زاویه‌های بین آنها با هم برابرند. و در نتیجه چهارضلعی $BCDE$ محاطی است.

*** تمرین ۳ـ۲ـ۱۲**

۱ـ در یک مستطیل، ضلع بزرگتر به اندازهٔ ۲۱ و ضلع کوچکتر به اندازهٔ ۱۲ است. در مستطیل دیگر ضلع بزرگتر به اندازهٔ ۱۴ و ضلع کوچکتر به اندازهٔ ۸ است. ثابت کنید زاویه‌های بین دو قطر این دو مستطیل با هم برابرند.

۲ـ در مثلث ABC سه میانهٔ AM، BN و CP با هم در G برخورد می‌کنند. GM از طرف M به اندازهٔ خودش تا D امتداد می‌یابد و BD رسم می‌شود. در آن طرف از ضلع AC که بیرون مثلث است نقطهٔ E به‌گونه‌ای به‌دست می‌آید که AE برابر با CP و ME برابر با BN باشد. ثابت کنید زاویه‌های دو مثلث AME و BDG نظیر به نظیر با هم برابرند.

۳ـ در مثلث ABC زاویهٔ B منفرجه است، ارتفاع AH با ضلع AB زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد و درازای آن نصف درازای ضلع BC است. ثابت کنید زاویه‌ای که میانهٔ AM با ضلع AB می‌سازد با زاویهٔ C از مثلث برابر است.

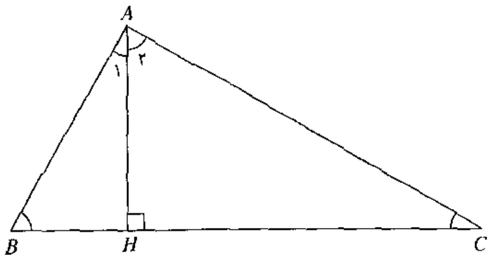
۳ـ۲ـ۸ روش هشتم: بهره‌گیری از رابطه‌ای معلوم که در بردارندهٔ اندازهٔ دو زاویه است

الف) دو زاویه که مکملهای برابر یا متممهای برابر داشته باشند، با هم برابرند.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۱۳. در مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌ای که ارتفاع وارد بر وتر با هر ضلع می‌سازد با زاویهٔ روبه‌رو به این ضلع برابر است.

فرض :
$$\left.\begin{array}{r}\angle BAC = ۹۰^\circ \\ AH \perp BC\end{array}\right\}$$

حکم :
$$\left.\begin{array}{r}\angle A_۱ = \angle C \\ \angle A_۲ = \angle B\end{array}\right\}$$



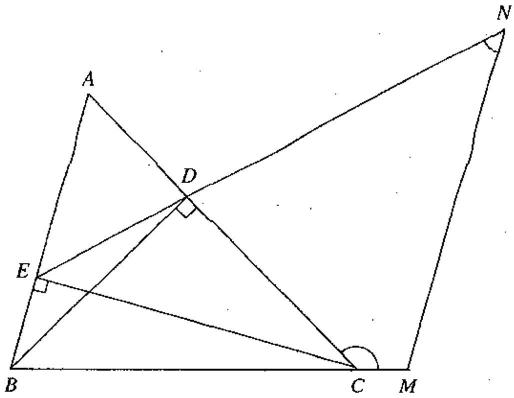
شکل۳-۳۱

حل. مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر با ۱۸۰ درجه است. پس اگر یک زاویه از مثلثی قائمه باشد مجموع دو زاویهٔ دیگر آن برابر ۹۰ درجه است و این دو زاویه متمم یکدیگرند. در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه است، پس دو زاویهٔ B و C متمم یکدیگرند. در مثلث AHB زاویهٔ H قائمه است و در نتیجه دو زاویهٔ $A_۱$ و B متمم یکدیگرند. در مثلث AHC نیز که زاویهٔ H قائمه است، دو زاویهٔ $A_۲$ و C متمم یکدیگرند. بنابراین دو زاویهٔ $A_۱$ و C که هر دو متمم زاویهٔ B هستند، با هم برابرند. به همین ترتیب، دو زاویهٔ $A_۲$ و B نیز که هر دو متمم زاویهٔ C هستند، با هم برابرند.

* **مسألهٔ ۳-۲-۱۴.** در مثلث ABC، ارتفاعهای BD و CE و خط DE رسم می‌شوند. از نقطهٔ M واقع در امتداد ضلع BC خطی موازی با ضلع AB رسم می‌شود که با خط DE در N برخورد می‌کند. ثابت کنید چهارضلعی $CMND$ محاطی است.

فرض :
$$\left.\begin{array}{r}BD \perp AC \\ CE \perp AB \\ MN \parallel AB\end{array}\right\}$$

حکم : چهارضلعی $CMND$ محاطی است



شکل۳-۳۲

حل. دو زاویهٔ N و BED نسبت به دو خط موازی MN و BE متبادل داخلی و مکمل یکدیگرند. زاویه‌های BEC و BDC که قائمه‌اند، با هم برابرند و در نتیجه چهارضلعی $BCDE$ محاطی است. بنابراین دو زاویهٔ BED و BCD مکمل یکدیگرند. زاویهٔ N که مکمل زاویهٔ BED است با زاویهٔ BCD برابر و در نتیجه مکمل زاویهٔ MCD است و از این‌رو چهارضلعی $CMND$ محاطی است.

تمرین ۳ـ۲ـ۱۳

۱ـ چهار نقطهٔ A، B، C و D به همین ترتیب روی یک دایره چنان واقع‌اند که اندازهٔ کمان AB یک ششم و اندازهٔ کمان BC یک سوم محیط دایره است. عمود AH بر خط BD رسم می‌شود. ثابت کنید دو زاویهٔ DAH و BAC با هم برابرند.

۲ـ چهارضلعی $ABCD$ در یک دایره محاط است. عمودهای AH و BK بر قطرهای چهارضلعی رسم می‌شوند. ثابت کنید دو زاویهٔ DAH و CBK با هم برابرند.

۳ـ در هر مثلث، ارتفاعها با ضلعهای مجاور خود شش زاویه می‌سازند. ثابت کنید این زاویه‌ها دو به دو با هم برابرند

۴ـ مثلث ABC در دایرهٔ به مرکز O محاط است. ارتفاع AH و شعاع OA رسم می‌شوند. ثابت کنید دو زاویهٔ BAH و CAO با هم برابرند.

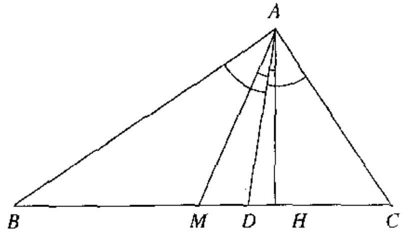
* ۵ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطهٔ D روی قاعدهٔ BC به دلخواه گزیده می‌شود و نقطهٔ E بر AB و نقطهٔ F بر AC چنان به‌دست می‌آید که BE با BD و CF با CD برابر باشد. ثابت کنید زاویهٔ EDF برابر است با زاویهٔ حاده‌ای که نیمساز خارجی زاویهٔ A با هر یک از ضلعهای AB و AC می‌سازد.

ب) دو زاویه‌ای که هر یک برابر باشد با مجموع یا تفاضل دو زاویهٔ برابر، با یکدیگر برابرند.

مسألهٔ ۳ـ۲ـ۱۵. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، نیمساز زاویهٔ قائمه، نیمساز زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ نظیر وتر است.

$$\left.\begin{array}{r} \angle BAC = ۹۰^\circ \\ \angle BAD = \angle DAC \\ BM = MC\ ,\ AH \perp BC \end{array}\right\} \ :\ \textbf{فرض}$$

$$\angle MAD = \angle DAH \quad :\ \textbf{حکم}$$



شکل۳-۳۳

حل. می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه، زاویهٔ بین ارتفاع وارد بر وتر و هر ضلع برابر است با زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع؛ همچنین زاویهٔ بین میانهٔ وتر و هر ضلع زاویهٔ قائمه برابر است با زاویهٔ حادهٔ روبه‌رو به آن ضلع. بنابراین، هر یک از دو زاویهٔ CAH و BAM با زاویهٔ B و در نتیجه با هم برابرند. دو زاویهٔ BAD و DAC نیز با هم برابرند. بنابراین:

$$\angle BAD - \angle BAM = \angle DAC - \angle CAH$$

$$\angle MAD = \angle DAH$$

تمرین ۳ـ۲ـ۱۴

۱ـ نیمسازهای دو زاویهٔ برابر B و C از مثلث متساوی‌الساقین ABC در I برخورد می‌کنند. ثابت کنید مثلث BIC متساوی‌الساقین است و اندازهٔ زاویهٔ رأس آن را برحسب اندازهٔ زاویهٔ A به‌دست آورید.

۲ـ اگر M، N و P به ترتیب وسطهای ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC و H پای ارتفاع وارد بر BC باشد، اندازه‌های زاویه‌های چهارضلعی $MNPH$ را برحسب اندازه‌های زاویه‌های مثلث به‌دست آورید.

۳ـ روی هر یک از ضلعهای یک شش‌ضلعی منتظم و در خارج آن یک مربع رسم و رأسهای آنها پشت‌سرهم به یکدیگر وصل می‌شوند. ثابت کنید دوازده‌ضلعی پدید آمده منتظم است.

۴ـ روی هر ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع و در خارج آن یک مربع رسم و رأسهای آنها پشت‌سرهم به یکدیگر وصل می‌شوند. ثابت کنید همهٔ زاویه‌های شش ضلعی پدید آمده با هم و نیز ضلعهای آن سه به سه با هم برابرند.

۵ـ دو نقطهٔ A و B بر ضلعهای Ox و Oy از زاویهٔ قائمهٔ xOy واقع‌اند. نقطهٔ M بر Oy و نقطهٔ N بر Ox چنان به‌دست می‌آیند که هر یک از زاویه‌های OAM و OBN به اندازهٔ ۳۰ درجه باشد. اگر D نقطهٔ برخورد دو خط AM و BN باشد ثابت کنید هر یک از مثلثهای ADN و BDM متساوی‌الساقین است.

تمرین پایانی بخش ۳-۲

* ۱ـ روی قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و در خارج مثلث، مربع $BCDE$ رسم شده و M نقطهٔ وسط DE است. ثابت کنید خط AD نیمساز زاویهٔ CAM است.

* ۲ـ از نقطهٔ A واقع در خارج یک دایره دو خط چنان رسم می‌شوند که یکی از آنها با دایره در B و C و دیگری با دایره در D و E برخورد کند (B بین A و C و D بین A و E است). از نقطهٔ M واقع بر کمان CE به B و به D وصل می‌شود. ثابت کنید مجموع دو زاویهٔ ABM و ADM به جای قرارگرفتن M بر کمان CE بستگی ندارد.

۳ـ M نقطهٔ دلخواهی واقع بر نیمدایرهٔ به قطر AB و به مرکز O است. مماسی که در M بر نیمدایره رسم شود با مماسهایی که در A و B بر آن رسم شوند به ترتیب در P و Q برخورد می‌کند. ثابت کنید هر یک از مثلثهای POQ و AMB قائم‌الزاویه است.

۴ـ ارتفاعهای AD، BE و CF از مثلث ABC و خطهای DE ، EF و FD رسم می‌شوند. ثابت کنید ارتفاعها و ضلعهای مثلث ABC به ترتیب نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌های مثلث DEF هستند.

۵ـ دو دایرهٔ به مرکزهای O و I در A بر هم مماس‌اند. خطی از A می‌گذرد و با دایرهٔ به مرکز O در B و با دایرهٔ به مرکز I در Cبرخورد می‌کند. ثابت کنید دو زاویهٔ AOB و AIC با هم برابرند.

۶ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، ضلعهای AB و AD به ترتیب تا نقطه‌های E و F امتداد یافته‌اند به‌طوری که $BE = BC$ و $DF = DC$. ثابت کنید دو زاویهٔ DCF و BCE با هم برابرند و در نتیجه سه نقطهٔ E، C و F بر یک خط واقع‌اند.

۷ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که زاویهٔ A قائمه و $AB < AC$ است، ارتفاع AH رسم می‌شود. روی وتر نقطهٔ D چنان به‌دست می‌آید که $DH = HB$ و عمود CE بر AD رسم می‌شود. ثابت کنید BC نیمساز زاویهٔ ECA است.

۸ـ از نقطهٔ M واقع بر کمان AB از دایرهٔ محیطی مثلث ABC، عمودهای MP، MQ و MR به ترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB رسم می‌شوند. ثابت کنید دو زاویهٔ QRA و BRP با هم برابرند و در نتیجه سه نقطهٔ P، Q و R بر یک خط واقع‌اند.

۹ـ ضلعهای AB و CD از چهارضلعی محاطی $ABCD$ امتداد می‌یابند تا در P با هم برخورد کنند. نقطهٔ P به نقطه‌های M و N وسطهای ضلعهای AD و BC وصل می‌شود. ثابت کنید دو زاویهٔ DMP و BNP با هم برابرند و نیمساز زاویهٔ APD نیمساز زاویهٔ MPN نیز هست.

۱۰ـ مثلث ABC در دایرهٔ به مرکز O محاط است نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A به ترتیب با دایره در D و E برخورد می‌کنند. ثابت کنید دو زاویهٔ AEB و OAD با هم برابرند.

۳ـ۳ چگونگی اثبات عمود برهم بودن دو خط

اثبات اینکه دو خط بر هم عمودند مسألهٔ ساده‌ای است که در حل بسیاری از مسأله‌ها با آن سروکار داریم؛ از جمله اثبات این‌که: یک مثلث قائم‌الزاویه است، خطی ارتفاع یک مثلث است، یک چهارضلعی لوزی، مستطیل یا مربع است، یک خط بر دایره مماس است، و مانند اینها.

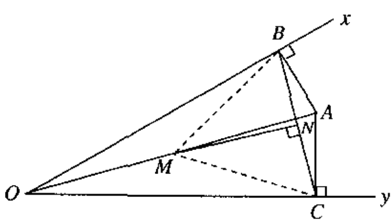
۳ـ۳ـ۱ روش یکم: بهره‌گیری از ویژگیهای مثلث متساوی‌الساقین

در مثلث متساوی‌الساقین، خطی که نیمساز زاویهٔ رأس یا میانهٔ قاعده باشد، ارتفاع وارد بر قاعده نیز هست.

مسألهٔ ۳ـ۳ـ۱. از نقطهٔ A واقع در داخل زاویهٔ xOy عمودهای AB و AC به ترتیب بر Ox و Oy رسم می‌شوند. ثابت کنید خطی که از وسطهای OA و BC می‌گذرد بر BC عمود است.

فرض : $\left.\begin{array}{r} AB\perp Ox \\ AC\perp Oy \\ OM=MA \\ BN=NC \end{array}\right\}$

حکم : $MN\perp BC$



شکل۳-۳۴

حل. خطهای BM و CM را رسم می‌کنیم. خط BM میانهٔ وتر OA از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB است و با نصف وتر OA برابر است. خط CM نیز میانهٔ وتر OA از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC است و با نصف OA برابر است. بنابراین دو خط MB و MC که هر دو با نصف OA برابرند، با یکدیگر نیز برابرند و در نتیجه مثلث MBC متساوی‌الساقین است. در این مثلث خط MN که میانهٔ قاعده است ارتفاع وارد بر قاعده نیز هست و در نتیجه بر BC عمود است.

تمرین ۳ـ۳ـ۱

۱ـ وتر CD از یک دایره رسم شده و P نقطهٔ دلخواهی از این دایره است. وترهای PC و PD رسم می‌شوند و CP تا نقطهٔ M امتداد می‌یابد که PM برابر با PD باشد. اگر A وسط کمان CPD باشد، ثابت کنید PA بر MD عمود است.

۲ـ سه نقطهٔ A، B و C بر دایرهٔ به مرکز O به‌گونه‌ای واقع‌اند که دو کمان AB و BC با هم برابرند. عمودهای BM و CN به ترتیب بر AO و BO رسم می‌شوند. ثابت کنید MN بر نیمساز زاویهٔ AOB عمود است.

۳ـ از نقطهٔ A واقع در خارج دایرهٔ به مرکز O، مماسهای AM و AN بر دایره رسم شده‌اند. ثابت کنید AO بر MN عمود است.

۴ـ در ربع دایرهٔ AOB، دو وتر برابر AM و BN رسم می‌شوند که در نقطهٔ C برخورد می‌کنند. ثابت کنید OC بر AB عمود است.

۳ـ۳ـ۲ روش دوم: بهره‌گیری از ویژگیهای مثلث قائم‌الزاویه

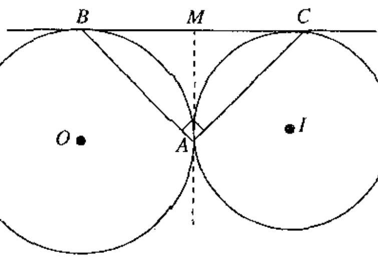
برای اینکه ثابت شود دو خط بر هم عمودند، می‌توان ثابت کرد که آنها دو ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند و برای آنکه ثابت شود یک مثلث قائم‌الزاویه است، می‌توان یکی از حالتهای زیر را ثابت کرد:

یک رأس مثلث بر نیمدایرهٔ به قطر ضلع روبه‌رو به آن واقع است، دو زاویه از مثلث متمم یکدیگرند، میانهٔ یک ضلع با نصف آن ضلع برابر است، یا بین اندازه‌های ضلعها رابطهٔ فیثاغورس برقرار است.

مسألهٔ ۳ـ۳ـ۲. دو دایره در A مماس خارج‌اند. خطی در B بر یکی از این دو دایره و در C بر دیگری مماس است. ثابت کنید دو خط AB و AC بر هم عمودند.

فرض :
- دایره‌های O و I در A مماس خارج‌اند.
- BC در B بر دایرهٔ O مماس است.
- BC در C بر دایرهٔ I مماس است.

حکم : $AB \perp AC$



شکل۳-۳۵

حل. مماس داخلی دو دایره را رسم می‌کنیم که با BC در M برخورد می‌کند. بنابراین قضیه که اگر دو مماس از یک نقطه بر یک دایره رسم شوند باهم برابرند، دو پاره‌خط MA و MB با هم و دو پاره‌خط MA و MC نیز با هم برابرند. خط AM هم میانهٔ ضلع BC و هم با نصف BC برابر است. پس مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه و در نتیجه دو خط AB و AC بر هم عمودند.

تمرین ۳ـ۳ـ۲

۱ـ ذوزنقه‌ای در یک دایره چنان محاط است که دو قاعده‌اش در دو سوی مرکز دایره واقع‌اند و یکی از آنها وتر کمانی به اندازهٔ یک سوم محیط دایره و دیگری وتر کمانی به اندازهٔ یک ششم محیط دایره است. ثابت کنید دو قطر این ذوزنقه بر هم عمودند.

۲ـ بر ضلعهای مربع $ABCD$ نقطه‌های M، N، P و Q به ترتیب به یک فاصله از رأسهای A، B، C و D واقع‌اند. ثابت کنید چهارضلعی $MNPQ$ مربع است.

۳ـ دو وتر AB و BC از یک دایره به ترتیب ضلع سه‌ضلعی منتظم و ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در آن دایره‌اند. از یک نقطهٔ M از کمان AC به A و به C وصل می‌شود. ثابت کنید دو وتر AM و CM بر هم عمودند.

۴ـ نقطهٔ O بر خط xy و نقطهٔ A در خارج این خط به‌گونه‌ای واقع است که AO بر xy عمود نیست. اگر B قرینهٔ A نسبت به xy و C قرینهٔ A نسبت به نقطهٔ O باشد، ثابت کنید دو خط BC و AB بر هم عمودند.

۵ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$ قاعدهٔ کوچکتر AB به اندازهٔ ۴۰، قاعدهٔ بزرگتر CD به اندازهٔ ۸۰، و ساق BC به اندازهٔ ۵۰ و ساق AD به اندازهٔ ۳۰ است. ثابت کنید این ذوزنقه قائم‌الزاویه است.

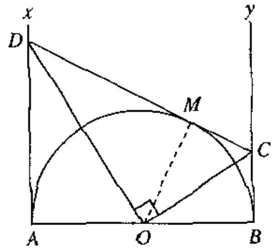
۳ـ۳ـ۳ روش سوم: بهره‌گیری از ویژگیهای نیمسازهای دو زاویهٔ مکمل هم

نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب بر هم عمودند. بنابراین اگر ثابت شود دو خط نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب‌اند، نتیجه می‌شود که آن دو خط بر هم عمودند.

مسألهٔ ۳ـ۳ـ۳. نقطهٔ M نقطه‌ای دلخواه از نیمدایرهٔ به قطر AB و به مرکز O است. مماسی که در M بر نیمدایره رسم شود با مماسهایی که در A و B بر آن رسم شوند به ترتیب در D و C برخورد می‌کند. ثابت کنید دو خط OC و OD بر هم عمودند.

فرض :
- AB قطر نیمدایرهٔ به مرکز O است.
- Ax در A و By در B بر نیمدایره مماس است.
- BC در M بر نیمدایره مماس است.

حکم : $OC \perp OD$



شکل۳-۳۶

حل. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AOD و DOM و نیز دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BOC و COM در حالت برابری وتر و یک ضلع با هم برابرند. نتیجه می‌شود OD نیمساز زاویهٔ AOM و OC نیمساز زاویهٔ BOM است. این دو زاویه مجانب و در نتیجه مکمل یکدیگرند، پس نیمسازهای آنها، OC و OD، برهم عمودند.

تمرین ۳ـ۳ـ۳

۱ـ دو دایره به مرکزهای O و I در A مماس خارج‌اند و مماس مشترک داخلی آنها با مماسهای مشترک خارجی در B و C برخورد می‌کند. ثابت کنید هر یک از زاویه‌های OBI و OCI قائمه است.

۲ـ دو دایره به مرکزهای O و I در بیرون از هم واقع‌اند و مماس هم نیستند. مماسهای مشترک داخلی و یک مماس مشترک خارجی آنها رسم می‌شود که با آن دو مماس در M و N برخورد می‌کند. ثابت کنید OM بر IM و ON بر IN عمود است.

۳ـ دو خط با هم موازی‌اند و خطی با آنها برخورد می‌کند. ثابت کنید نیمسازهای دو زاویهٔ متقابل داخلی بر هم عمودند.

۴ـ ثابت کنید نیمسازهای زاویه‌های مجاور به هر ساق یک ذوزنقه بر هم عمودند.

۵ـ ثابت کنید از برخورد نیمسازهای زاویه‌های یک متوازی‌الاضلاع یک مستطیل پدید می‌آید. این مستطیل در چه حالتی مربع است؟

۶ـ نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌های B و C از مثلث ABC رسم می‌شوند که نیمسازهای داخلی در I و نیمسازهای خارجی در J با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید چهار نقطهٔ I، B، J و C بر یک دایره واقع‌اند و مرکز این دایره را بیابید.

۷ـ نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A از مثلث ABC با ضلع BC در M و N برخورد می‌کنند. ثابت کنید مثلث MAN قائم‌الزاویه است.

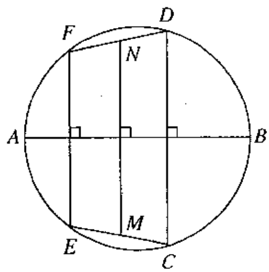
۳ـ۳ـ۴ روش چهارم: بهره‌گیری از ویژگیهای خطهای با هم موازی

اگر دو خط با هم موازی باشند، هر خط که بر یکی از آنها عمود باشد بر دیگری نیز عمود است. اگر دو خط بر هم عمود باشند، هر خط که با یکی از آنها موازی باشد بر دیگری عمود است.

مسألهٔ ۳ـ۳ـ۴. دو وتر CD و EF از یک دایره بر قطر AB از آن عمودند. ثابت کنید خطی که وسطهای دو وتر CE و DF را به هم وصل می‌کند بر AB عمود است.

$$\text{فرض}: \begin{cases} CD\perp AB \\ EF\perp AB \\ CM = ME \\ DN = NF \end{cases}$$

$$\text{حکم}: \quad MN\perp AB$$



شکل۳-۳۷

حل. وترهای CD و EF که بر AB عمودند با هم موازی‌اند و چهارضلعی $CDFE$ ذوزنقه است. می‌دانیم خطی که وسطهای دو ساق ذوزنقه را به هم وصل کند از وسط هر یک از دو قطر نیز می‌گذرد و با دو قاعده موازی است. بنابراین خط MN که با وترهای CD و EF موازی است بر AB عمود است.

تمرین ۳ـ۳ـ۴

۱ـ در لوزی $ABCD$ خط BM عمود بر AD و خط DN عمود بر BC رسم شده است. ثابت کنید $BMDN$ مستطیل است.

۲ـ در مثلث ABC عمودی که در M وسط AB بر این ضلع رسم شود با BC در N برخورد می‌کند. ثابت کنید در حالتی که N وسط BC باشد مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

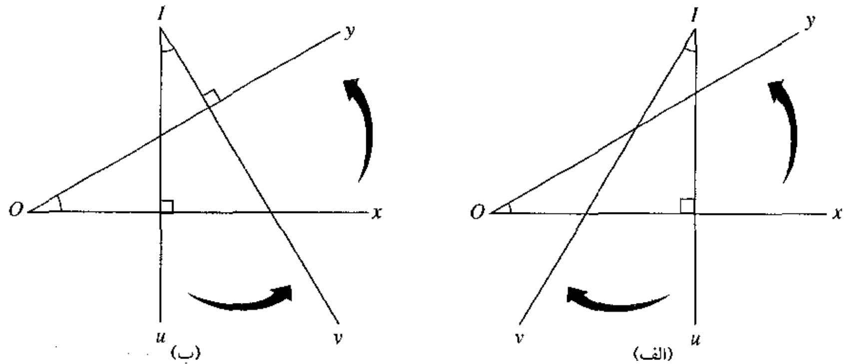
۳ـ دو دایره به مرکزهای O و I در بیرون هم واقع‌اند و نقطهٔ مشترک ندارند و MN یک مماس مشترک خارجی آنهاست. خط OI با دایرهٔ O در A و B و با دایرهٔ I در C و D برخورد می‌کند و چهار نقطهٔ A، B، C و D به همین ترتیب واقع‌اند. ثابت کنید MA بر ND و MB بر NC عمود است.

۴ـ مسألهٔ پیش را در حالتی حل کنید که MN یک مماس مشترک داخلی دو دایره باشد.

۵ـ باز هم مسألهٔ ۳ را در حالتی درنظر بگیرید که دو دایره مماس خارج باشند و نقطهٔ C بر B واقع باشد و NB با دایرهٔ O در P برخورد کند. در این حالت ثابت کنید که $AMBP$ مستطیل است.

۳ـ۳ـ۵ روش پنجم: بهره‌گیری از زاویه‌هایی که ضلعهای آنها نظیر به نظیر بر هم عمودند

اگر ضلعهای یک زاویه بر ضلعهای زاویهٔ دیگر عمود باشند، آن دو زاویه اگر هر دو حاده یا هر دو منفرجه باشند، با هم برابرند و بر عکس؛ اگر دو زاویه هر دو حاده یا هر دو منفرجه و با هم برابر باشند و یک ضلع از یکی بر یک ضلع از دیگری عمود باشد، به شرط اینکه اگر دو زاویه جهتدار فرض شوند، ضلع اول آنها همین ضلع باشد، دو ضلع دیگر آنها نیز بر هم عمودند.



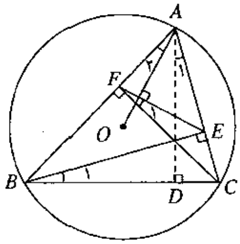
شکل۳-۳۸

در هر یک از دو شکل (۳-۳۸)، دو زاویهٔ xOy و uIv با هم برابرند و ضلع Iu از زاویهٔ دوم بر ضلع Ox از زاویهٔ یکم عمود است. در شکل (الف)، دو زاویه هم‌جهت نیستند و از این‌رو ضلع Iv از دومی بر ضلع Oy از یکمی عمود نیست. در شکل (ب)، دو زاویه هم‌جهت‌اند و از این‌رو ضلع Iv از دومی بر ضلع Oy از یکمی نیز عمود است.

مسألهٔ ۳ـ۳ـ۵. ارتفاعهای BE و CF از مثلث ABC و خط EF رسم شده‌اند. ثابت کنید خط EF بر شعاع OA از دایرهٔ محیطی مثلث عمود است.

$$\left.\begin{matrix} BE\perp AC \\ CF\perp AB \end{matrix}\right\}$$: فرض

$EF\perp OA$: حکم



شکل۳-۳۹

حل. ارتفاع AD را رسم می‌کنیم. بنابر مسألهٔ ۴ از تمرین ۳-۲-۱۳، دو زاویهٔ A_1 و A_2 با هم برابرند. زاویه‌های A_1 و B_1 نیز با هم برابرند. در نتیجه چهارضلعی $BCEF$ محاطی است و بنابراین، دو زاویهٔ B_1 و F_1 با هم برابرند، نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ A_2 و F_1 نیز با هم برابرند. ضلع AB از زاویهٔ A بر ضلع FC از زاویهٔ F_1 عمود است و هر یک از دو زاویه نسبت به این ضلع خود در یک جهت‌اند. بنابراین، ضلعهای دوم آنها، AO و FE، نیز بر هم عمودند.

تمرین ۳ـ۳ـ۵

۱ـ دو زاویه با هم برابرند و ضلعهای آنها نظیر به نظیر بر هم عمودند. ثابت کنید نیمسازهای این دو زاویه نیز بر هم عمودند.

۲ـ در دایرهٔ به مرکز O دو شعاع عمود بر هم OA و OB و در همان جهت از A به B دو وتر با هم برابر AC و BD رسم می‌شوند. ثابت کنید این دو وتر بر هم عمودند.

۳ـ روی ضلعهای AD و CD از مربع $ABCD$ پاره‌خطهای با هم برابر AM و DN جدا می‌شوند. ثابت کنید دو خط AN و BM بر هم عمودند.

۴ـ دو قطر چهارضلعی محاطی $ABCD$ در نقطهٔ I بر هم عمودند و M وسط CD است. ثابت کنید MI بر AB عمود است.

۵ـ در مثلث ABC، عمودمنصف ضلع AB در خارج مثلث به اندازهٔ نصف ضلع AB تا نقطهٔ D امتداد می‌یابد. عمودمنصف ضلع AC نیز در خارج مثلث به اندازهٔ نصف ضلع AC تا نقطهٔ F امتداد می‌یابد. دو نقطهٔ D و E به نقطهٔ M وسط ضلع BC وصل می‌شوند. ثابت کنید زاویهٔ DME قائمه است.

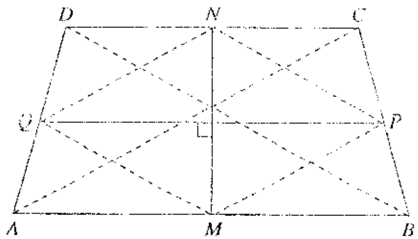
۳ـ۳ـ۶ روش ششم: بهره‌گیری از ویژگیهای لوزی و مربع

دو قطر هر لوزی و همچنین دو قطر هر مربع بر هم عمودند. از این‌رو اگر ثابت شود دو خط در راستای دو قطر یک لوزی یا در راستای دو قطر یک مربع قرار دارند، ثابت شده است که آن دو خط بر هم عمودند.

مسألهٔ ۳ـ۳ـ۶. دو خط که وسطهای دو ساق و همچنین وسطهای دو قاعده از یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را به هم وصل می‌کنند بر هم عمودند.

فرض :
$$\left.\begin{aligned} AD = BC \text{ و } AB \| CD \\ CN = ND \text{ و } AM = MB \\ AQ = QD \text{ و } BP = PC \end{aligned}\right\}$$

حکم : $MN \perp PQ$



شکل۳-۴۰

حل. دو قطر ذوزنقه و چهارضلعی $MPNQ$ را رسم می‌کنیم. خط MP که وسطهای دو ضلع AB و BC از مثلث ABC را به هم وصل کرده با ضلع AC موازی و با نصف این ضلع برابر است. به همین ترتیب، PN و MQ هر کدام موازی و برابر با نصف BD و QM موازی و برابر با نصف AC است. ضلعهای چهارضلعی $MPQN$ هر یک با یکی از قطرها موازی و با نصف آن برابرند. از اینکه ذوزنقهٔ $ABCD$ متساوی‌الساقین است معلوم می‌شود که دو قطر آن و نصفهای آنها با هم برابرند و در نتیجه چهارضلع چهارضلعی $MPNQ$ با هم برابرند و این چهارضلعی لوزی است و دو قطر آن، MN و PQ، بر هم عمودند.

تمرین ۳ـ۳ـ۶

۱ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به مرکز A و به شعاع AB، کمان BC (کوچکتر از نصف محیط دایره) رسم می‌شود و از نقطهٔ دلخواه D از این کمان به B و به C وصل می‌شود. ثابت کنید دو خطی که یکی وسط AB را به وسط CD و دیگری وسط AC را به وسط BD وصل می‌کند برهم عمودند.

۲ـ نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ B و C از مثلث ABC در I با هم برخورد می‌کنند. خطی که از I موازی با BC رسم شود با AB و AC در M و N، و دو خط که از I موازی با AB و AC رسم شوند با BC در P و Q برخورد می‌کنند. ثابت کنید NQ بر IC و MP بر IB عمود است.

۳ـ پاره‌خط AB و نقطهٔ دلخواه C از آن داده شده است. از A و B دو خط موازی با هم رسم می‌شوند و روی آنها و در یک طرف AB پاره‌خطهای AM برابر با AC و BN برابر با BC جدا می‌شوند. اگر D نقطهٔ وسط MN باشد، ثابت کنید مثلث ADB قائم‌الزاویه است.

۳ـ۳ـ۷ روش هفتم: بهره‌گیری از ویژگیهای مربوط به دایره

برای آنکه ثابت شود دو خط بر هم عمودند، می‌توان یکی از ویژگیهای زیر را به‌کار برد:

شعاعی از دایره که وتری از آن را نصف کند بر آن وتر عمود است؛ خط مماس بر دایره بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است؛ اگر دو دایره با هم برخورد کنند خطی که بر مرکزهای آنها می‌گذرد بر وتر مشترک آنها عمود است.

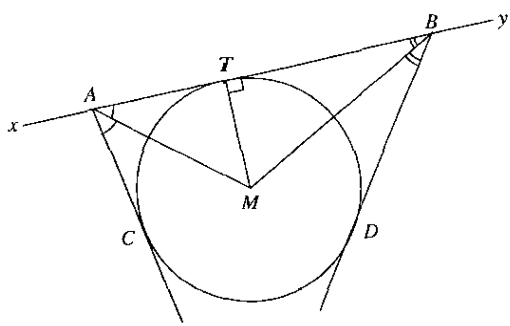
مسألهٔ ۳ـ۳ـ۷. خط xy در نقطهٔ T بر یک دایره مماس است. روی این خط و در دو سوی T دو نقطهٔ A و B به دلخواه گزیده می‌شوند و مماسهای AC و BD بر دایره رسم می‌شوند. نیمسازهای زاویه‌های CAT و DBT در M برخورد می‌کنند. ثابت کنید MT بر AB عمود است.

فرض : AB در T، AC در C و BD در D بر دایره مماس است

$$\angle CAM = \angle MAT$$

$$\angle TBM = \angle MBD$$

حکم : $MT \perp AB$



شکل۳-۴۱

حل. بنابراین قضیه که: «اگر از یک نقطه دو خط بر دایره‌ای مماس شوند، خطی که آن نقطه را به مرکز دایره وصل می‌کند نیمساز زاویهٔ بین دو مماس است»، نیمسازهای دو زاویهٔ A و B از مرکز

دایره می‌گذرند و M نقطهٔ برخورد آنها همان مرکز دایره است، بنابراین، MT شعاع نقطهٔ تماس و بر خط مماس AB عمود است.

تمرین ۳ـ۳ـ۷

۱ـ مثلث ABC در یک دایره محاط است. از A و در خارج مثلث و مجاور به ضلع AC، نیم‌خط Ax چنان رسم می‌شود که زاویهٔ xAC با زاویهٔ B برابر باشد. ثابت کنید خط Ax بر قطری از دایره که از A می‌گذرد عمود است.

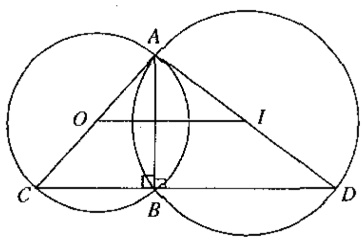
۲ـ خط xy بر نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB می‌گذرد. اگر C قرینهٔ B نسبت به xy باشد و عمودی که در C بر CO رسم می‌شود در D با xy برخورد کند، ثابت کنید DB بر دایرهٔ به قطر AB مماس است.

۳ـ نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A از مثلث ABC با دایرهٔ محیطی این مثلث در D و E برخورد می‌کنند. ثابت کنید خط DE بر BC عمود است.

مسألهٔ ۳ـ۳ـ۸. دو دایرهٔ به مرکزهای O و I در A و B با هم برخورد کرده‌اند. قطرهای AC و AD از دو دایره رسم می‌شوند. ثابت کنید خط CD از نقطهٔ B می‌گذرد و بر AB عمود است.

فرض :
- AC قطر دایرهٔ به مرکز O است
- AD قطر دایرهٔ به مرکز I است
- AB وتر مشترک دو دایره است

حکم :
- CD بر B می‌گذرد
- $CD \perp AB$



شکل۳-۴۳

حل. در مثلث ACD خط OI که وسطهای دو ضلع AC و AD را به هم وصل کرده با CD موازی است. اگر دو دایره با هم برخورد کرده باشند، خطی که مرکزهای آنها را به هم وصل می‌کند، بر

وتر مشترک آنها عمود است. بنابراین OI بر AB عمود است و خط CD هم که با OI موازی است در نقطهٔ B' با امتداد AB برخورد می‌کند و بر آن عمود است. چون زاویهٔ قائمهٔ $AB'C$ باید روبه‌رو به قطر AC از دایرهٔ O باشد، رأس آن B' باید روی این دایره باشد. به همین ترتیب رأس B' از زاویهٔ قائمهٔ $AB'D$ نیز که باید روبه‌رو به قطر AD از دایرهٔ I باشد، روی این دایره قرار دارد. در نتیجه نقطهٔ B' روی هر دو دایره است و باید بر B واقع باشد و این به معنی گذشتن خط CD از B است.

تمرین ۳ـ۳ـ۸

۱ـ دو دایره در A بر هم مماس‌اند (مماس داخل یا مماس خارج). خطی بر A می‌گذرد و با دایره‌ها در M و N برخورد می‌کند. وترهای MB و NC در دو دایره عمود بر MN رسم می‌شوند. ثابت کنید خط BC در A بر مماس مشترک دو دایره عمود است.

۲ـ در دایرهٔ به مرکز O وتر AB رسم شده است. از یک نقطهٔ دلخواه D روی این وتر به نقطهٔ دلخواه C از دایره وصل می‌شود. عمودمنصفهای AD و CD در M با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید OM بر AC عمود است.

تمرین پایانی بخش ۳-۳

۱ـ در یک چهارضلعی محاطی، ضلعهای روبه‌رو امتداد می‌یابند تا با یکدیگر برخورد کنند. ثابت کنید نیمسازهای دو زاویه‌ای که پدید می‌آید بر یکدیگر عمودند.

* ۲ـ در حالتی که چهارضلعی محاطی ذوزنقه یا مستطیل باشد، مسألهٔ پیش به چه صورت بیان می‌شود؟

۳ـ در نیمدایرهٔ به قطر AB وتر BC رسم شده است. عمودی که در نقطهٔ دلخواه H واقع بر AB بر این قطر رسم شود با BC در E و با دایره در F برخورد می‌کند. نیمدایرهٔ به قطر BE نیز رسم می‌شود که با نیمدایرهٔ نخست در D برخورد می‌کند. ثابت کنید AE بر BD عمود است.

۴ـ روی ضلعهای AB و AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و در خارج آن، مربعهای $ABDE$ و $ACFG$ رسم شده‌اند. ثابت کنید ارتفاع AH از مثلث بر EG و همچنین EC بر BG عمود است.

۵ـ قطر MN از دایرهٔ محیطی مثلث ABC از H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن می‌گذرد و نقطه‌های P و Q به ترتیب قرینه‌های M و N نسبت به BC هستند. ثابت کنید زاویهٔ PHQ قائمه است.

۶ـ روی ضلعهای AD و DC از مربع $ABCD$ پاره‌خطهای برابر AF و DE جدا شده و AE و BF رسم شده‌اند که در I با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید خطی که وسط BE را به وسط FE وصل می‌کند بر AE عمود است.

۷ـ مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. ضلع CA را از طرف A تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم که AD برابر با AC باشد و عمود DE بر BC رسم می‌شود که با AB در F برخورد می‌کند. ثابت کنید CF بر BD عمود است.

۸ـ نقطهٔ C خارج دایرهٔ به مرکز O واقع است و خط CO با دایره در A برخورد می‌کند. به مرکز C و به شعاع CO دایره‌ای رسم می‌شود. مماس مشترک این دو دایره نیز رسم می‌شود که در M بر دایرهٔ O و در N بر دایرهٔ C مماس است. ثابت کنید NA بر خط CO عمود است.

۳ـ۴ چگونگی اثبات متوازی بودن دو خط

اثبات اینکه دو خط با هم موازی‌اند، مسألهٔ ساده‌ای است که در حل بسیاری از مسأله‌ها با آن سروکار داریم؛ از جمله اینکه ثابت شود: دو زاویه با هم برابرند، یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع، لوزی، مستطیل یا مربع است، دو مثلث با هم متشابه‌اند، دو پاره‌خط به نسبت معلوم هستند، و حکمهایی مانند اینها.

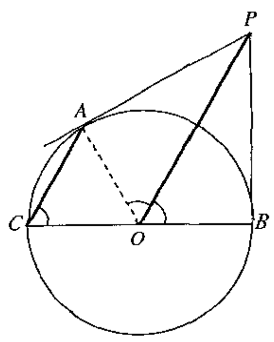
۳ـ۴ـ۱ روش یکم: بهره‌گیری از ویژگیهای زاویه‌هایی که از برخورد یک خط با دو خط دیگر پدید می‌آیند

دو خط که خط دیگری با آنها برخورد کرده باشد هنگامی با هم موازی‌اند که از زاویه‌های پدید آمده: دو زاویه که متبادل داخلی یا متبادل خارجی‌اند با هم برابر باشند؛ یا دو زاویه که متقابل داخل و خارج‌اند با هم برابر باشند؛ یا دو زاویه که متقابل داخلی یا متقابل خارجی‌اند مکمل یکدیگر باشند.

مسألهٔ ۳ـ۴ـ۱. از نقطهٔ P واقع در خارج دایرهٔ به مرکز O، دو مماس PA و PB بر دایره، قطر BC و وتر AC از دایره رسم شده‌اند. ثابت کنید AC با PO موازی است.

فرض : PA و PB بر دایرهٔ O مماس‌اند
BC قطر دایره است

حکم : $AC \| PO$



شکل۳-۴۳

حل. شعاع OA را رسم می‌کنیم. خط PO نیمساز زاویهٔ AOB است و زاویهٔ POB نصف زاویهٔ مرکزی AOB و بنابراین، اندازهٔ زاویهٔ POB نصف اندازهٔ کمان AB است. زاویهٔ C محاطی و اندازهٔ آن نصف اندازهٔ کمان AB است. بنابراین، دو زاویهٔ C و POB با هم برابرند. این دو زاویه نسبت به دو خط PO و AC که OA با آنها برخورد کرده است متقابل داخل و خارج‌اند و از برابری آنها نتیجه می‌شود که دو خط PO و AC با هم موازی‌اند.

تمرین ۳ـ۴ـ۱

۱ـ دو دایره در A مماس خارج‌اند. از A دو خط رسم می‌شوند که به ترتیب با دایره‌ها در E و B و در C و D برخورد می‌کنند. (که E و C در یک دایره‌اند). ثابت کنید BD با CE موازی است.

۲ـ دو دایره در A مماس خارج‌اند. خطی از A می‌گذرد و با دایره‌ها در B و C برخورد می‌کند. ثابت کنید مماسهایی که در B و C بر دایره‌ها رسم شوند با هم موازی‌اند.

۳ـ دو مسألهٔ ۱ و ۲ را در حالتی حل کنید که دایره‌ها مماس داخل باشند.

۴ـ دو دایرهٔ به مرکزهای O و I در نقطهٔ A بر هم مماس‌اند، در دایرهٔ O وتر AM و در دایرهٔ I وتر AN عمود بر AM رسم می‌شود. ثابت کنید OM با IN موازی است.

۵ـ دو دایره در A و B با هم برخورد کرده‌اند. از A و B دو خط رسم می‌شوند که با دایره‌ها به ترتیب در M و N و در P و Q برخورد می‌کنند. ثابت کنید MP با NQ موازی است.

۶ـ به مرکز A واقع بر یک دایرهٔ به قطر BC دایره‌ای رسم می‌شود که بر BC مماس باشد. از نقطه‌های B و C دو مماس بر این دایره رسم می‌شوند. ثابت کنید این دو مماس با هم موازی‌اند.

۷ـ دو ضلع AB و CD از چهارضلعی محاطی $ABCD$ در M با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید نیمساز زاویهٔ M با یکی از نیمسازهای زاویهٔ بین دو قطر چهارضلعی موازی است.

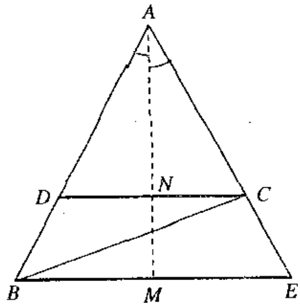
۳ـ۴ـ۲ روش دوم: بهره‌گیری از عمود مشترک دو خط

دو خط عمود بر خط دیگر با هم موازی‌اند.

مسألهٔ ۳ـ۴ـ۲. در مثلث ABC، بر ضلع AB و در جهت A به B، پاره‌خط AD برابر با AC، و بر ضلع AC و در جهت A به C، پاره‌خط AE برابر با AB جدا شده است. ثابت کنید BE با CD موازی است.

فرض : $\left.\begin{aligned} AD &= AC \\ AE &= AB \end{aligned}\right\}$

حکم : $BE \| CD$



شکل۳-۴۴

حل. نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC را رسم می‌کنیم که با BE و CD به ترتیب در M و N برخورد می‌کند. چون هر یک از مثلثهای ABE و ACD متساوی‌الساقین است، بنابراین AN بر CD و AM بر BE عمود است و در نتیجه دو خط BE و CD که هر دو بر MN عمودند، با هم موازی‌اند.

تمرین ۳ـ۴ـ۲

۱ـ ضلعهای دو زاویهٔ یکی حاده و دیگری منفرجه نظیر به نظیر بر هم عمودند. ثابت کنید نیمسازهای این دو زاویه با هم موازی‌اند.

۲ـ دو زاویهٔ روبه‌رو از یک چهارضلعی قائمه‌اند. ثابت کنید نیمسازهای دو زاویهٔ دیگر این چهارضلعی با هم موازی‌اند.

۳ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، روی دو ساق و از سوی رأسهای قاعده، دو پاره‌خط برابر BM و CN جدا شده‌اند. ثابت کنید MN با BC موازی است.

۴ـ در چهارضلعی $ABCD$، دو ضلع AB و AD با هم و دو ضلع BC و CD نیز با هم برابرند. ضلعهای روبه‌رو امتداد می‌یابند که در M و N با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید MN با BD موازی است.

۵ـ مثلث ABC در یک دایره محاط است. قطر AD از دایره و ارتفاع CE از مثلث رسم می‌شوند. ثابت کنید BD با CE موازی است.

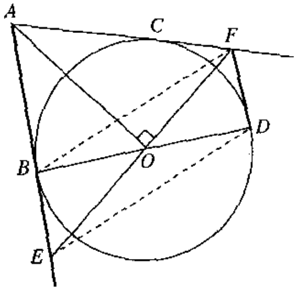
۳ـ۴ـ۳ روش سوم: بهره‌گیری از ویژگیهای متوازی‌الاضلاع

الف) اگر ثابت شود دو خط ضلعهای روبه‌رو از یک متوازی‌الاضلاع‌اند، نتیجه می‌شود که آن دو خط با هم موازی‌اند. برای آنکه ثابت شود یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، کافی است ثابت شود که: زاویه‌های روبه‌رو از آن با هم برابرند؛ زاویه‌های مجاور آن مکمل یکدیگرند؛ ضلعهای روبه‌روی آن با هم برابرند، دو ضلع روبه‌رو از آن با هم برابر و با هم موازی‌اند، یا دو قطر آن یکدیگر را نصف می‌کنند.

مسألهٔ ۳ـ۴ـ۳. از نقطهٔ A واقع در خارج دایرهٔ به مرکز O دو مماس AB و AC بر دایره رسم شده‌اند. قطر BD و همچنین قطر عمود بر AO رسم می‌شوند که با امتدادهای AB و AC به ترتیب در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید DF با AE موازی است.

فرض :
- AB و AC بر دایره مماس‌اند.
- BD قطر دایره است.
- EF در O بر AO عمود است

حکم : $DF \| AE$



شکل۳-۴۵

حل. مثلث AEF که نیمساز زاویهٔ A از آن ارتفاع ضلع EF نیز هست، متساوی‌الساقین است و در نتیجه این ارتفاع میانهٔ ضلع EF نیز هست. دو خط EF و BD یکدیگر را نصف کرده‌اند. اگر دو خط BF و DE را رسم کنیم، چهار ضلعی $BFDE$ که دو قطرش یکدیگر را نصف می‌کنند متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه DF با BE یعنی با AE موازی است.

تمرین ۳ـ۴ـ۳

۱ـ نقطهٔ O بیرون پاره‌خط AB است. اگر C و D به ترتیب قرینه‌های A و B نسبت به نقطهٔ O باشند، ثابت کنید که AB با CD و همچنین BC با AD موازی است.

۲ـ دو دایره در A و B با هم برخورد کرده‌اند. از A و B دو خط موازی با هم رسم می‌شوند که با دایره‌ها به ترتیب در M و N و در P و Q برخورد می‌کنند. ثابت کنید MP و NQ با هم موازی و برابر و MN و PQ با هم برابرند.

۳ـ از نقطهٔ M وسط ضلع AB از مثلث ABC خطی به دلخواه رسم می‌شود که با AC در N برخورد می‌کند. خط MN در جهت از N به M به اندازهٔ خودش تا P امتداد می‌یابد. ثابت کنید PB با AC موازی است.

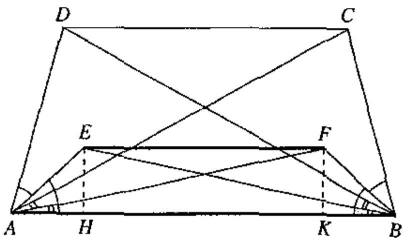
۴ـ میانه‌های AM و BN از مثلث ABC رسم شده‌اند. دو خط که یکی از N موازی با BC و دیگری از C موازی با BN رسم شوند با یکدیگر در P برخورد می‌کنند. اگر D وسط PN باشد، ثابت کنید CD با MN موازی است.

ب) اگر دو خط با هم موازی باشند، همهٔ نقطه‌های هر یک از آنها از دیگری به یک فاصله‌اند و برعکس: اگر دو نقطه از خطی از خط دیگری به یک فاصله باشند، آن دو خط با هم موازی‌اند. با بهره‌گیری از این ویژگی ثابت می‌شود یک چهارضلعی مستطیل و بنابراین متوازی‌الاضلاع است.

مسألهٔ ۳ـ۴ـ۴. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ با قاعده‌های AB و CD، نیمسازهای زاویه‌های DAB و DBA در E و نیمسازهای زاویه‌های CBA و CAB در F با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید EF با AB موازی است.

$$\text{فرض}:\left.\begin{array}{r} AD=BC \text{ و } AB\|CD \\ \angle ABE=\angle EBD \text{ و } \angle DAE=\angle EAB \\ \angle BAF=\angle FAC \text{ و } \angle ABF=\angle FBC \end{array}\right\}$$

حکم : $EF\|AB$



شکل۳-۴۶

حل. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، دو زاویهٔ مجاور به هر قاعده با هم و همچنین دو زاویه‌ای که قطرها با هر قاعده می‌سازند، با هم برابرند. بنابراین، دو زاویهٔ DAB و ABC با هم و دو زاویهٔ CAB و ABD نیز با هم برابرند. اگر دو زاویه برابر باشند نیمه‌های آنها نیز با هم برابرند. از این‌رو دو زاویهٔ EAB و FBA با هم و دو زاویهٔ FAB و ABE نیز با هم برابرند. در دو مثلث ABE و ABF ضلع AB مشترک است و زاویه‌های مجاور به این ضلع نظیر به نظیر با هم برابرند. پس این دو مثلث به حالت برابری دو زاویه و ضلع بین با هم برابرند و در نتیجه ارتفاعهای EH و FK از آنها نیز با هم برابرند. پس چهارضلعی $EFKH$ مستطیل است و بنابراین دو ضلع روبه‌روی آن، EF و HK، و به عبارت دیگر، دو خط EF و AB با هم موازی‌اند.

تمرین ۳ـ۴ـ۴

۱ـ از نقطهٔ P واقع بر پاره‌خط AB، دو پاره‌خط PM و PN برابر با هم و در یک طرف AB چنان رسم می‌شوند که با AB زاویه‌هایی برابر بسازند. ثابت کنید MN با AB موازی است.

۲ـ ثابت کنید خطی که پای ارتفاعهای وارد بر دو ساق مثلث متساوی‌الساقین را به هم وصل می‌کند با قاعدهٔ مثلث موازی است.

۳ـ در نیمدایرهٔ به مرکز O و به قطر AB، دو شعاع عمود بر هم OM و ON و همچنین عمودهای MC و ND بر AB رسم می‌شوند. اگر I و J مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای MOC و NOD باشند، ثابت کنید IJ با AB موازی است.

۴ـ بر وتر AB از یک دایره دو نقطهٔ C و D به یک فاصله از نقطهٔ M وسط AB گزیده می‌شوند و در این دو نقطه عمودهایی بر AB رسم می‌شوند که به ترتیب با دایره در E و F و در G و H برخورد می‌کنند (که E و G در یک طرف AB واقع‌اند). ثابت کنید دو وتر EG و FH با هم موازی‌اند.

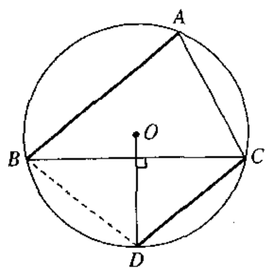
۳ـ۴ـ۴ روش چهارم: بهره‌گیری از ویژگیهای وترهای موازی در دایره

اگر دو وتر از یک دایره با هم موازی باشند، کمانهای واقع بین آنها با هم برابرند. عکس این قضیه چنین بیان می‌شود: اگر دو کمان نظیر دو ضلع روبه‌رو از یک چهارضلعی محاطی با هم برابر باشند، دو ضلع دیگر آن با هم موازی‌اند.

مسألهٔ ۳ـ۴ـ۵. مثلث ABC در دایرهٔ به مرکز O محاط و زاویهٔ A از آن دو برابر زاویهٔ B است. شعاع OD عمود بر BC رسم می‌شود. ثابت کنید دو خط AB و CD با هم موازی‌اند.

فرض : $\left.\begin{array}{r} O \text{ مرکز دایره} \\ \angle A = ۲\angle B \\ OD \perp BC \end{array}\right\}$

حکم : $CD \parallel AB$



شکل ۳-۴۷

حل. وتر OB را رسم می‌کنیم. شعاع OA که بر وتر BC عمود است کمان این وتر را نصف می‌کند و دو کمان BD و DC با هم برابرند. چون زاویهٔ A دو برابر زاویهٔ B است و هر دو محاطی‌اند، پس کمان AC نصف BC است و در نتیجه با کمان BD برابر است. در چهارضلعی محاطی $ABDC$، کمانهای AC و BD که نظیر دو ضلع روبه‌رو هستند با هم برابرند، پس دو وتر AB و CD نیز با هم موازی‌اند.

تمرین ۳ـ۴ـ۵

۱ـ یک دایره و وتر AB از آن رسم شده‌اند. در یک طرف AB دو وتر AC و BD چنان رسم می‌شوند که با AB زاویه‌هایی برابر با هم بسازند. ثابت کنید AB با CD موازی است. شکل را در دو حالت رسم کنید: دو وتر AC و BD در داخل یا در خارج دایره با هم برخورد کنند.

۲ـ دو نقطهٔ A و B بر یک دایره واقع‌اند. دو وتر دلخواه AM و AN و دو وتر BP و BQ به ترتیب موازی با AM و AN رسم می‌شوند، ثابت کنید MQ با NP موازی است.

۳ـ در یک دایره، وتر AB رسم شده و نقطهٔ M وسط کمان بزرگتر AB است. وترهای AC و BD نیمسازهای زاویه‌های MAB و MBA رسم می‌شوند که در I با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید CD با AB موازی است و چهارضلعی $MDIC$ متوازی‌الاضلاع است.

۳ـ۴ـ۵ روش پنجم: بهره‌گیری از عکس قضیهٔ تالس

الف) اگر خطی با ضلعهای AB و AC از مثلث یا با امتدادهای آنها به ترتیب در M و N برخورد کند و AM و AN هر دو با AB و AC هم‌جهت یا هر دو با AB و AC ناهم‌جهت باشند و یکی از تناسبهای:

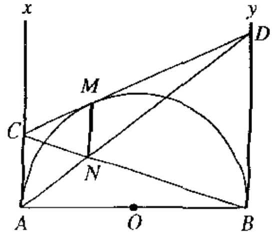
$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \text{ یا } \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \text{ یا } \frac{AM}{AN}=\frac{MB}{NC} \text{ یا } \ldots$$

برقرار باشد آنگاه خط MN با ضلع BC موازی است.

مسألهٔ ۳ـ۴ـ۶. مماسهای Ax و By بر نیمدایرهٔ به قطر AB رسم شده‌اند. در نقطهٔ دلخواه M مماس دیگری بر نیمدایره رسم می‌شود که با Ax و By به ترتیب در C و D برخورد می‌کند. اگر خطهای AD و BC رسم شوند در N با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید MN با AC و BD موازی است.

فرض:
- نیمدایره به قطر AB.
- Ax و By بر نیمدایره مماس‌اند.
- CD در M بر نیمدایره مماس است.
- AD و BC در N مشترک‌اند

حکم: $MN \| AC$



شکل۳-۴۸

حل. دو خط AC و BD که بر AB عمودند، با هم موازی‌اند و دو مثلث ACN و BDN با هم متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AN}{ND} = \frac{AC}{BD}$$

اگر دو مماس از یک نقطه بر یک دایره رسم شوند، با هم برابرند. بنابراین، AC با CM و BD با DM برابر است و تناسب بالا چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{AN}{ND} = \frac{CM}{DM}$$

و بنابر عکس قضیهٔ تالس در مثلث DAC، نتیجه می‌شود که خط MN با خط AC و نیز با خط BD موازی است.

تمرین ۳ـ۴ـ۶

۱ـ روی ضلعهای AB، BC، CD و DA از چهارضلعی $ABCD$، نقطه‌های M، N، P و Q چنان واقع‌اند که:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{DQ}{DA}$$

ثابت کنید چهارضلعی $MPQN$ متوازی‌الاضلاع است.

۲ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، نیمسازهای زاویه‌های A و D با قطرهای BD و AC به ترتیب در M و N برخورد می‌کنند. ثابت کنید MN با AD موازی است.

۳ـ از یک نقطهٔ I در درون مثلث ABC به سه رأس مثلث وصل می‌شود و از نقطهٔ D واقع بر IA دو خط موازی با AB و AC رسم می‌شوند که با IB و IC به ترتیب در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید EF با BC موازی است.

۴ـ مسألهٔ پیش را در حالتی حل کنید که D در امتداد IA واقع باشد.

۵ـ مسألهٔ ۳ را در حالتی حل کنید که به جای مثلث یک چندضلعی دلخواه داده شده باشد.

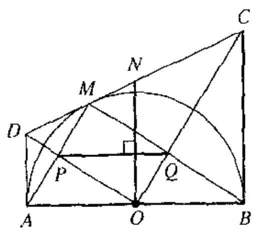
۶ـ در چهارضلعی $ABCD$، دو خط از B و C به ترتیب موازی با CD و AB رسم می‌شوند که به ترتیب با AC و BD در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید EF با AD موازی است.

ب) دو حالت ویژهٔ عکس قضیهٔ تالس: خطی که وسطهای دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند، با ضلع سوم موازی است همچنین خطی که وسطهای دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند با دو قاعدهٔ ذوزنقه موازی است.

مسألهٔ ۳ـ۴ـ۷. ذوزنقهٔ $ABCD$ در زاویه‌های A و B قائمه است و نیمدایرهٔ به قطر AB در آن محاط و در نقطهٔ M بر ضلع CD مماس است. از O مرکز نیمدایره به نقطه‌های C و D، و از M به نقطه‌های A و B وصل می‌شود. خطهای MA و OD در P و خطهای MB و OC در Q برخورد می‌کنند و خطی از O عمود بر PQ رسم می‌شود که با CD در N برخورد می‌کند. ثابت کنید PQ با AB و ON با BC موازی است و N وسط CD است.

فرض :
$BC \perp AB$, $AD \perp AB$
AB قطر و O مرکز نیمدایره است.
CD در M بر نیمدایره مماس است
$ON \perp PQ$

حکم :
$PQ \| AB$
$ON \| BC$
N وسط CD است



شکل۳-۴۹

حل. از C دو مماس CB و CM و از D دو مماس DA و DM بر نیمدایره رسم شده‌اند. بنابراین، OC عمودمنصف وتر BM و OD عمودمنصف وتر AM از نیمدایره است. در مثلث MAB، خط PQ وسطهای دو ضلع MA و MB را به هم وصل کرده و در نتیجه با AB موازی است. خط ON که بر PQ عمود است بر خط AB موازی با PQ نیز عمود است و در نتیجه با BC (و همچنین با AD) که بر AB عمودند، موازی است. در ذوزنقهٔ $ABCD$، خط ON که ساق AB را نصف کرده و با دو قاعده موازی است، ساق CD را نیز نصف می‌کند و در نتیجه N وسط CD است.

تمرین ۳ـ۴ـ۷

۱ـ مثلث ABC در نیمدایرهٔ به قطر AB و به مرکز O محاط است. OD عمود بر AC و OE عمود بر BC رسم می‌شود. ثابت کنید DE با AB موازی است.

۲ـ ضلع BA از مثلث ABC از طرف A به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ D امتداد می‌یابد و پاره‌خط CE موازی و برابر با BA نیز در طرفی از BC که A قرار دارد، رسم می‌شود. دو خط AE و CD در M برخورد می‌کنند و از M به N وسط BC وصل می‌شود. ثابت کنید MN با AB موازی است.

۳ـ شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ در دایرهٔ به مرکز O محاط است. عمودهای OM، ON و OP به ترتیب بر ضلعهای AB، CD و EF رسم می‌شوند. ثابت کنید هر یک از سه خط PM، PN و MN با قطری از شش ضلعی موازی است.

۴ـ دو دایرهٔ به مرکزهای O و I در B مماس خارج‌اند. مماس مشترک خارجی آنها MN با مماس مشترک داخلی آنها در A برخورد می‌کند. خطهای OA و IA با BM و BN به ترتیب در C و D برخورد می‌کنند. ثابت کنید CD با MN موازی است.

ج) اگر در مثلث، ABC، رأس A به نقطه‌های D، E و F از BC وصل شود و خطی موازی با BC با خطهای AB، AD، AE، AF و AC به ترتیب در M، N، P، Q و R برخورد کند، تناسبهای زیر برقرارند:

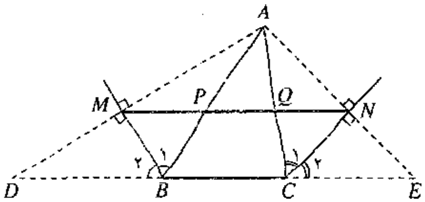
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{AP}{AE} = \frac{AQ}{AF} = \frac{AR}{AC}$$

برعکس، اگر نقطه‌های M، N، $\cdots$، و R به‌گونه‌ای باشند که این تناسبها برقرار باشند، آن نقطه‌ها بر خطی موازی با BC واقع‌اند.

مسألهٔ ۳ـ۴ـ۸. در مثلث ABC، خطهای AM و AN عمود بر نیمسازهای خارجی زاویه‌های B و C رسم می‌شوند. ثابت کنید خط MN بر وسطهای AB و AC می‌گذرد و با BC موازی است.

فرض : $\left.\begin{array}{r}\angle C_1 = \angle C_2 \text{ و } \angle B_1 = \angle B_2 \\ AN \perp CN \text{ و } AM \perp BM\end{array}\right\}$

حکم : $\left.\begin{array}{r} MN \parallel BC \\ AQ = QC \text{ و } AP = PB\end{array}\right\}$



شکل۳-۵۰

حل. خطهای AM و AN را امتداد می‌دهیم تا با امتداد BC در D و E برخورد کند. در هر یک از مثلثهای ABD و ACE، نیمساز زاویهٔ رأس (C,B) ارتفاع نظیر آن رأس هم هست، پس این مثلثها متساوی‌الساقین‌اند و ارتفاع، میانه هم هست و در نتیجه نقطهٔ M وسط AD و نقطهٔ N وسط AE است. در مثلث ADE داریم:

$$\frac{AM}{AD}=\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{AN}{AE}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین، چهار نقطهٔ M، P، Q و N بر خطی موازی با BC واقع‌اند و نقطه‌های P و Q به ترتیب وسط AB و وسط AC هستند.

تمرین ۳ـ۴ـ۸

۱ـ نقطهٔ M وسط وتر AP از یک دایره و نقطهٔ N وسط MP است. عمودی در N بر AP رسم می‌شود که با دایره در B و C برخورد می‌کند. ثابت کنید نقطهٔ M و سه نقطهٔ برخورد میانه‌های هر یک از مثلثهای ABC، ABN و ACN روی خطی موازی با BC واقع‌اند.

۲ـ از دو سر قاعدهٔ کوچکتر CD از ذوزنقهٔ $ABCD$، دو خط موازی با دو ساق رسم می‌شوند که با قاعدهٔ بزرگتر در E و F و با قطرهای BD و AC در P و Q برخورد می‌کنند. از E خطی موازی با AC و از F خطی موازی با BD رسم می‌شود که این دو خط به ترتیب با BC و AD در P و Q برخورد می‌کنند. ثابت کنید چهار نقطهٔ M، N، P و Q روی خطی موازی با AB واقع‌اند.

۳ـ وتر AC از دایرهٔ به قطر AB به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ E امتداد می‌یابد. وتر AD عمود بر AC و در طرف دیگر AB رسم می‌شود و این نیز به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ F امتداد می‌یابد. ثابت کنید سه نقطهٔ F و B و E روی خطی موازی با CD واقع‌اند.

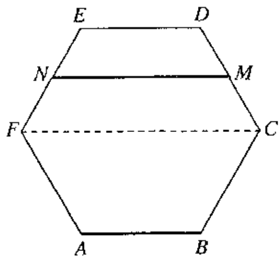
۳ـ۴ـ۶ روش ششم: بهره‌گیری از سومین خط موازی

اگر دو خط با خط سومی موازی باشند، با هم موازی‌اند. بنابراین برای آنکه ثابت شود دو خط با هم موازی‌اند، کافی است خطی یافت شود که هر دو با آن موازی باشند.

مسألهٔ ۳ـ۴ـ۹. نقطهٔ M وسط ضلع CD و نقطهٔ N وسط ضلع EF از شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ به هم وصل می‌شوند. ثابت کنید MN با AB موازی است.

فرض :
- $ABCDEF$ شش‌ضلعی منتظم است
- M وسط CD است
- N وسط EF است

حکم : $MN \| AB$



شکل۳-۵۱

حل. قطر CF را رسم می‌کنیم. چون شش‌ضلعی منتظم و تعداد ضلعهایش زوج است، ضلعها همه با هم برابرند، همچنین ضلعهای روبه‌رو با هم و نیز با یکی از قطرها موازی و زاویه‌ها همه با هم برابرند. بنابراین هر یک از چهارضلعیهای $ABCF$ و $CDEF$ ذوزنقه است. در این ذوزنقه، خط MN که وسطهای دو ساق را به هم وصل کرده با قاعده‌ها و در نتیجه با CF موازی است. ضلع AB نیز با CF موازی است. دو خط MN و AB که هر دو با CF موازی‌اند، با یکدیگر نیز موازی‌اند.

تمرین ۳ـ۴ـ۹

۱ـ ثابت کنید وسطهای ضلعهای هر چهارضلعی چهار رأس یک متوازی‌الاضلاع‌اند.

۲ـ روی ضلعهای برابر AB و AC از مثلث متساوی‌الساقین ABC و در خارج آن، دو مربع $ABDE$ و $ACFG$ رسم می‌شوند. ثابت کنید DF و EG با هم موازی‌اند.

۳ـ ثابت کنید در هر چهارضلعی، وسطهای دو ضلع روبه‌رو و وسطهای دو قطر، چهار رأس یک متوازی‌الاضلاع‌اند.

۴ـ در مثلث ABC، میانه‌های AM، BN و CP در G برخورد می‌کنند و D وسط AG و E وسط BG است. ثابت کنید چهارضلعی $BEMN$ متوازی‌الاضلاع است.

۵ـ ساقهای ذوزنقهٔ $ABCD$ امتداد می‌یابند و در E با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید چهار نقطهٔ وسطهای AE، BE، AC و BD چهار رأس یک ذوزنقه‌اند.

۶ـ مثلث ABC در دایرهٔ به مرکز O محاط است و H مرکز ارتفاعی آن، N وسط AH، P وسط AB و Q وسط AC است. ثابت کنید HP با OQ موازی و چهارضلعی $OPNQ$ متوازی‌الاضلاع است.

تمرین پایانی بخش ۳-۴

۱ـ مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. در خارج مثلث، دو خط Bx و Cy چنان رسم می‌شوند که به ترتیب با ضلعهای BA و CA زاویه‌های ۴۵ درجه بسازند. از A عمودهای AE و AF بر Bx و بر Cy رسم می‌شوند. ثابت کنید سه نقطهٔ E، A و F بر یک خط راست واقع‌اند و چهارضلعی $BCFE$ ذوزنقه است.

۲ـ نقطهٔ A روی ضلع Ox از زاویهٔ xOy واقع است. دایره‌ای رسم می‌شود که در A بر Ox مماس باشد. خطهایی موازی با Oy چنان رسم می‌شوند که در نقطه‌های M و N بر این دایره مماس می‌شوند، ثابت کنید AM و AN به ترتیب با نیمسازهای زاویهٔ xOy موازی‌اند.

۳ـ دو دایره به دلخواه رسم می‌شوند که هر دو بر دو رأس B و C از مثلث ABC بگذرند و با ضلعهای AB و AC یا با امتداد آنها، اولی در M و N و دومی در P و Q برخورد کند. ثابت کنید MN با PQ موازی است.

۴ـ میانه‌های AM، BN و CP از مثلث ABC رسم شده‌اند. از N موازی با CP رسم می‌شود که با امتداد BC در E برخورد می‌کند. دو خط که از E و از B به ترتیب موازی با BN و با CP رسم شوند در D برخورد می‌کنند. ثابت کنید سه نقطهٔ D، M و P بر یک خط راست واقع‌اند و DN و AM با یکدیگر برابر و موازی‌اند.

۵ـ ارتفاعهای AD، BE و CF از مثلث ABC و عمودهای FH و EK به ترتیب بر AC و بر AB رسم می‌شوند. ثابت کنید KH با BC موازی است.

۶ـ نیمسازهای زاویه‌های متوازی‌الاضلاع دو به‌دو با هم برخورد می‌کنند و یک چهارضلعی پدید می‌آورند. ثابت کنید قطرهای این چهارضلعی با ضلعهای متوازی‌الاضلاع موازی‌اند.

۴ روشهای حل مسأله‌های سادهٔ دارای ویژگیهای اندازه‌ای

مسأله‌های سادهٔ شامل ویژگیهای اندازه‌ای در شکلهای هندسی، از سه‌گونه می‌توانند باشند. در یک گونهٔ آنها باید رابطه‌ای به یکی از دو صورت

$$a \cdot b = c \cdot d \qquad \text{یا} \qquad \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

بین اندازه‌های چهار پاره‌خط ثابت شود. در گونهٔ دیگر آنها، رابطه‌ای که باید ثابت شود به‌صورت

$$a^{۲} = b \cdot c$$

بین اندازه‌های سه‌پاره‌خط است؛ به‌عبارت دیگر باید ثابت شود یک پاره‌خط واسطهٔ هندسی دو پاره‌خط دیگر است. در گونهٔ دیگر آنچه باید ثابت شود رابطه‌ای نامشخص بین اندازه‌های پاره‌خطهایی از شکل داده شده است.

۴ـ۱ چگونگی اثبات رابطه‌ای به یکی از دو صورت $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ یا $a \cdot b = c \cdot d$

این دو رابطه هر چند در ظاهر متفاوت به‌نظر می‌آیند اما در واقع یک مفهوم را می‌رسانند: در هر تناسب، حاصل‌ضرب دو کران (= دوطرف) برابر است با حاصل‌ضرب دو میان (= دو وسط). برعکس، اگر حاصل‌ضرب دو مقدار ناصفر برابر باشد با حاصل‌ضرب دو مقدار ناصفر دیگر، این چهار مقدار چهار جزء یک تناسب‌اند.

رابطهٔ بالا به هر یک از دو صورت که باشد کاربردهای یکسان دارد، اما اگر به‌صورت حاصل‌ضرب

باشد از دید محاسبه بر صورت دیگر آن برتری دارد مگر آنکه در صورت مسأله‌ای عنوان تناسب به‌کار رفته باشد.

به یک نکته هم باید توجه داشت: هرگاه اندازه‌ها مقدارهایی مطلق باشند، می‌توان دو صورت رابطه را به جای یکدیگر به‌کار برد. اما اگر اندازه‌ها مقدارهایی از کمیتهای متفاوت باشند، نسبت آنها تعریف‌شده و با معنی است در صورتی که حاصل‌ضرب آنها چنین نیست.

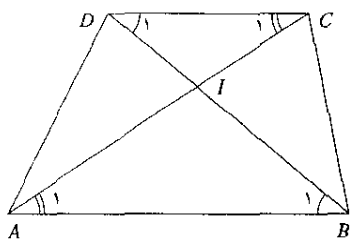
۴ـ۱ـ۱ روش یکم: بهره‌گیری از تشابه مثلثها

الف) اگر دو مثلث متشابه باشند، ضلعهای نظیر آنها متناسب‌اند. برای اثبات رابطه‌ای به‌صورت $a \cdot b = c \cdot d$ باید دو مثلث را بیابیم، یا اینکه با رسم کردن خطی به‌چنین دو مثلثی دست یابیم، به‌گونه‌ای که a با c یا a با d اندازه‌های دو ضلع از یکی از آنها و دو جزء دیگر رابطهٔ اندازه‌های دو ضلع نظیر از دیگری باشند. در رابطهٔ $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$، دو مثلثی را که می‌یابیم نباید اندازه‌های دو ضلع از هیچ‌کدام آنها دو جملهٔ کران یا دو جملهٔ میان تناسب باشد.

مسألهٔ ۴ـ۱ـ۱. ثابت کنید هر قطر ذوزنقه قطر دیگر را به‌نسبت دو قاعده تقسیم می‌کند.

فرض : $AB \| CD$ ، I نقطهٔ برخورد AC با BD

حکم : $$\frac{IC}{IA} = \frac{ID}{IB} = \frac{CD}{AB}$$



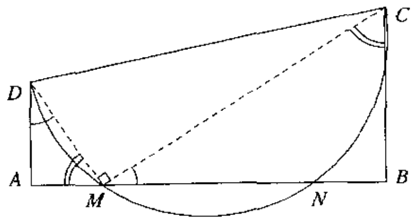
شکل۴-۱

حل. می‌بینیم که صورتهای تناسب حکم، ضلعهای مثلث ICD و مخرجهای آنها ضلعهای مثلث IABاند. بنابراین کافی است ثابت کنیم این دو مثلث متشابه‌اند. نسبت به دو خط موازی AB و CD و مورب AC، دو زاویهٔ A_1 و C_1 و نسبت به همان دو خط و مورب BD، دو زاویهٔ B_1 و D_1 متبادل داخلی و در نتیجه با هم برابرند. بنابراین، دو مثلث یاد شده در حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند و از این‌رو ضلعهای روبه‌رو به زاویه‌های برابر متناسب‌اند و تناسب آنها همان رابطهٔ حکم است.

مسألهٔ ۴ـ۱ـ۲. در ذوزنقهٔ $ABCD$ زاویه‌های A و B قائمه‌اند و نیمدایرهٔ به‌قطر CD با ساق AB در M و N برخورد می‌کند. ثابت کنید حاصل‌ضرب دو پاره‌خطی که هر یک از دو نقطهٔ M و N روی AB جدا می‌کند برابر است با حاصل‌ضرب دو قاعده.

فرض :
$AD \| BC$
$\angle B = ۹۰^\circ , \angle A = ۹۰^\circ$
BC قطر نیمدایره است
M و N روی نیمدایره و روی BC قرار دارند

حکم :
$AM \cdot MB = AD \cdot BC$
$AN \cdot NB = AD \cdot BC$



شکل۴-۲

حل. باید دو مثلث بیابیم که AM و AD ضلعهای یکی و MB و BC ضلعهای دیگری باشند. با رسم خطهای MC و MD این دو مثلث به‌دست می‌آیند. حال باید ثابت کنیم که آنها متشابه‌اند. زاویهٔ DMC قائمه است زیرا محاطی روبه‌رو به قطر است و دو زاویهٔ AMD و BMC متمم یکدیگرند. در مثلث ADM که در آن زاویهٔ A قائمه است، دو زاویهٔ ADM و AMD متمم یکدیگرند. بنابراین دو زاویهٔ ADM و BMC که هر دو با زاویهٔ AMD متمم‌اند، با هم برابرند. به این ترتیب دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADM و BMC در حالت برابری یک زاویهٔ حاده متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AM}{BC} = \frac{AD}{BM} \Longrightarrow AM \cdot BM = AD \cdot BC$$

با رسم خطهای CN و DN و به روشی همانند، رابطهٔ مربوط به N نیز به‌دست می‌آید.

تمرین ۴ـ۱ـ۱

۱ـ ارتفاعهای AD، BE و CF از مثلث ABC در H برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$AD \cdot DH = DC \cdot DB$$

$$BE \cdot EH = EA \cdot EC$$

$$CF \cdot FH = FB \cdot FA$$

۲ـ مثلث ABC در یک دایره محاط است. از A و داخل مثلث دو خط رسم می‌شوند که زاویهٔ یکمی با AB برابر باشد با زاویهٔ دومی با AC. خط یکم با دایره در D و با BC در E، و خط دوم با دایره در F و با BC در G برخورد می‌کند. ثابت کنید.

$$AB \cdot AC = AD \cdot AG = AF \cdot AE$$

۳ـ در مسألهٔ پیش اگر یکی از دو خط بر BC عمود باشد دیگری از مرکز دایره می‌گذرد. در این صورت مسأله به‌صورت کدام‌یک از قضیه‌ها درمی‌آید؟

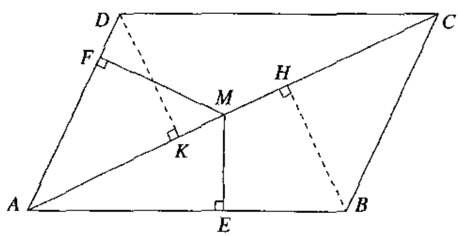
۴ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ خطی از A می‌گذرد و با BC در M و با امتداد CD در N برخورد می‌کند. ثابت کنید حاصل‌ضرب $BM \cdot DN$ برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع.

ب) در حالتی که نتوان مثلثهایی متشابه را به‌دست آورد که جمله‌های رابطهٔ خواسته شده ضلعهای آنها باشند، یا باید نسبت یا حاصل‌ضربی به‌دست آورد که هر یک از دو طرف رابطهٔ حکم با آن برابر باشند یا اینکه با یافتن مثلثهایی متشابه تناسبی به‌دست آورد که با بهره‌گیری از ویژگیهای تناسب بتوان آن را به تناسب خواسته شده تبدیل کرد.

مسألهٔ ۴ـ۱ـ۳. از نقطهٔ M واقع بر قطر AC از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ عمود ME بر AB و عمود MF بر AD رسم می‌شود. ثابت کنید نسبت ME به MF برابر است با نسبت AD به AB.

فرض : $\left\{ \begin{array}{l} BC \parallel AD \text{ و } AB \parallel CD \\ MF \perp AD \text{ و } ME \perp AB \end{array} \right.$

حکم : $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{AD}{AB}$



شکل ۴-۳

حل. دو مثلث متشابه که ME و AB ضلعهای یکی و MF و AD ضلعهای دیگری باشند در شکل وجود ندارد. پس باید مثلث یا مثلثهایی متشابه به‌دست آوریم که از تشابه هر دوتا از آنها یکی از نسبتهای تناسب، حکم به‌دست آید. عمودهای BH و DK را بر AC رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AME و ABH با هم و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMF و ADK با هم مشابه‌اند و در نتیجه دو تناسب زیر را به ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{ME}{BH}=\frac{AM}{AB} \quad \text{و} \quad \frac{MF}{DK}=\frac{AM}{AD}$$

این دو تناسب را به‌صورت حاصل‌ضرب می‌نویسیم:

$$ME\cdot AB=AM\cdot BH \qquad (۱)$$

$$MF\cdot AD=AM\cdot DK \qquad (۲)$$

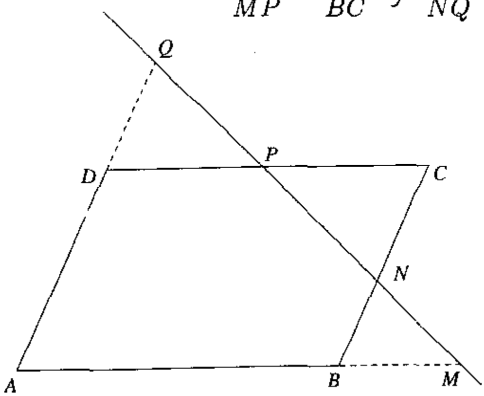
از برابری دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADK و BCH برابری DK با BH نتیجه می‌شود. بنابراین طرفهای دوم دو رابطهٔ (۱) و (۲) با هم برابرند، پس طرفهای یکم آنها نیز با هم برابرند و داریم:

$$ME\cdot AB=MF\cdot AD\Longrightarrow\frac{ME}{MF}=\frac{AD}{AB}$$

مسألهٔ ۴ـ۱ـ۴. خطی با ضلعهای AB، BC، CD و AD (یا با امتداد آنها) از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به‌ترتیب در M، N، P و Q برخورد می‌کند. ثابت کنید نسبت PQ به NQ برابر است با نسبت PD به CD، همچنین نسبت MN به PM برابر است با نسبت BN به BC.

فرض :
- $BC\|AD$ و $AB\|CD$
- M روی AB و N روی BC است
- MN در P با CD و در Q با AD برخورد می‌کند.

حکم : $\dfrac{MN}{MP}=\dfrac{BN}{BC}$ و $\dfrac{PQ}{NQ}=\dfrac{PD}{CD}$



شکل ۴-۴

حل. دو مثلث که جمله‌های تناسب حکم ضلعهای آنها باشند در شکل دیده نمی‌شود و نمی‌توان چنین مثلثهایی را تشکیل داد. اما از تشابه دو مثلث PDQ و PCN به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{PQ}{PN} = \frac{PD}{PC}$$

و اگر در دو طرف این تناسب ترکیب نسبت در مخرج کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{PQ}{PQ+PN} = \frac{PD}{PD+PC} \Longrightarrow \frac{PQ}{NQ} = \frac{PD}{CD}$$

تناسب دیگر حکم نیز به‌روش مشابه ثابت می‌شود.

تمرین ۴ـ۱ـ۲

۱ـ از نقطهٔ A واقع در خارج یک دایره مماسهای AB و AC بر آن رسم شده است. خطی از A می‌گذرد و با این دایره در M و N برخورد می‌کند و چهارضلعی $BMCN$ نیز رسم می‌شود. ثابت کنید حاصل‌ضرب دو ضلع روبه‌رو از این چهارضلعی برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع دیگر آن.

۲ـ در مسألهٔ پیش، عمود AH بر MB (یا بر امتداد آن) و عمود AK بر MC (یا بر امتداد آن) رسم می‌شود، ثابت کنید:

$$\frac{AH}{AK} = \frac{BM}{CM}$$

۳ـ در ذوزنقه $ABCD$ که AB قاعدهٔ بزرگتر آن است رأس D به نقطهٔ M وسط ساق BC وصل می‌شود و امتداد می‌یابد تا با امتداد AB در E برخورد کند. به فرض آنکه I وسط DM بر قطر AC واقع شود، ثابت کنید:

$$\frac{DI}{ME} = \frac{CD}{AB}$$

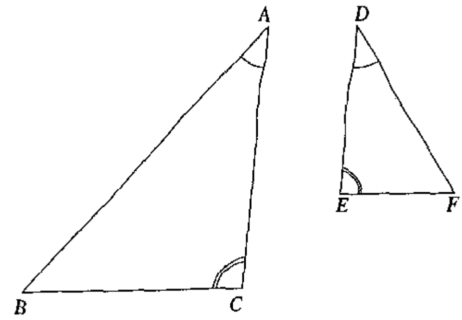
۴ـ۱ـ۲ روش دوم: بهره‌گیری از ویژگیهای نیمساز زاویه

در هر مثلث، نیمساز داخلی یا خارجی هر زاویه ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به‌نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند. برعکس، اگر خطی از یک رأس مثلث بگذرد و ضلع روبه‌رو به آن رأس را به‌نسبت دو ضلع دیگر تقسیم کند، نیمساز زاویهٔ آن رأس است.

مسألهٔ ۴ـ۱ـ۵. اگر دو زاویه از دو مثلث با هم برابر و دو زاویهٔ دیگر آنها مکمل هم باشند، ثابت کنید نسبت ضلعهای روبه‌رو به زاویه‌های برابر، برابر است با نسبت ضلعهای روبه‌رو به زاویه‌های مکمل.

فرض : $\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D \\ \angle C + \angle E = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\}$

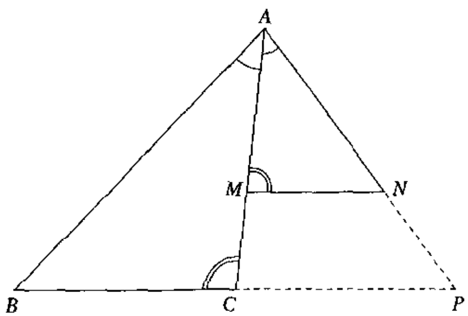
حکم : $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AB}{DF}$



شکل ۴-۵

حل. دو مثلث را کنار هم چنان قرار می‌دهیم که دو زاویهٔ با هم برابر A و D به وضع دو زاویهٔ مجاور درآیند. در این صورت مثلث DEF به وضع مثلث AMN شکل ۴-۶ درمی‌آید. امتداد AN با امتداد BC در P برخورد می‌کند. در مثلث ABP خط AC که نیمساز زاویهٔ BAP است ضلع BP را به‌نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند و داریم:

$$\frac{BC}{CP} = \frac{AB}{AP} \Longrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{CP}{AP} \qquad (۱)$$



شکل ۴-۶

از اینکه دو زاویهٔ AMN و ACB مکمل یکدیگرند برمی‌آید که MN با CP موازی است و در نتیجه دو مثلث AMN و ACP متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{MN}{CP} = \frac{AN}{AP} \Longrightarrow \frac{MN}{AN} = \frac{CP}{AP} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ دو تناسب (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} \Longrightarrow \frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AN}$$

و چون به‌جای MN و AN به‌ترتیب EF و DF را بگذاریم تناسب حکم به‌دست می‌آید.

تمرین ۴ـ۱ـ۳

۱ـ نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A از مثلث ABC با ضلع BC و امتداد آن در P و Q برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC}$$

۲ـ از نقطهٔ P واقع در امتداد قطر AB از یک دایره، مماسهای PM و PN بر دایره رسم می‌شوند. وتر MN نیز رسم می‌شود که با AB در C برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{PA}{PB}$$

۳ـ وتر CD از یک دایره بر قطر AB از آن عمود است و M نقطهٔ دلخواهی از دایره است. وترهای MC و MD با AB (یا با امتداد آن) به‌ترتیب در P و Q برخورد می‌کنند، ثابت کنید:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}$$

۴ـ قطر MN از دایرهٔ محیطی مثلث ABC عمود بر BC رسم شده است. خطهای AM و AN با BC (یا با امتداد آن) در P و Q برخورد می‌کنند، ثابت کنید:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC}$$

۵ـ نقطهٔ A که بر قطر PQ از یک دایرهٔ به‌مرکز O واقع است به نقطهٔ دلخواه M از دایره وصل می‌شود. قرینهٔ AM (یا امتداد آن) نسبت به شعاع OM با PQ در N برخورد می‌کند. مماسی که در M بر دایره رسم شود با امتداد PQ در B برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$\frac{OA}{ON} = \frac{BA}{BN}$$

۶ـ در مثلث ABC از M وسط ضلع AB خطی موازی با BC رسم می‌شود که با AC در N برخورد می‌کند. روی MN و بین M و N یک نقطهٔ D چنان به‌دست می‌آید که:

$$\frac{DM}{DN} = \frac{AC}{AB}$$

و نقطهٔ D به P وسط BC وصل می‌شود. ثابت کنید PD نیمساز زاویهٔ MPN است.

۷ـ مسألهٔ پیش را در حالتی حل کنید که D در امتداد MN به‌دست آید.

۴ـ۱ـ۳ روش سوم: بهره‌گیری از ویژگیهای توان نقطه نسبت به دایره

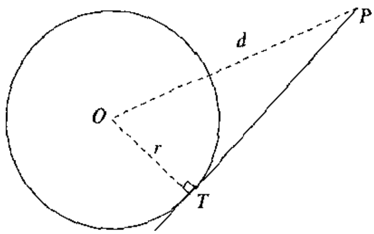
اگر P نقطه‌ای دلخواه واقع در صفحهٔ دایرهٔ به مرکز O و به شعاع r و d فاصلهٔ P تا O باشد، مقدار جبری $d^2 - r^2$ را توان نقطهٔ P نسبت به آن دایره می‌نامند. توان نقطه نسبت به دایره مثبت، صفر یا منفی است بنابرآنکه نقطه خارج دایره، روی دایره، یا داخل دایره واقع باشد.

دربارهٔ توان نقطه نسبت به دایره قضیه‌های صفحهٔ بعد ثابت می‌شوند:

۱ـ اگر P نقطه‌ای واقع در خارج دایره باشد و مماس PT بر دایره رسم شود، توان نقطهٔ P نسبت به دایره برابر با $\overline{PT}^2$ است. زیرا اگر از O مرکز دایره به T و به P وصل شود، همان‌گونه که در شکل (۴-۷) دیده می‌شود، مثلث POT در زاویهٔ O قائمه است و بنابر قضیهٔ فیثاغورس:

$$\overline{PT}^2 + \overline{OT}^2 = \overline{PO}^2$$

$$\overline{PT}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OT}^2 = d^2 - r^2$$

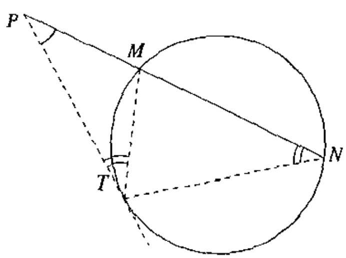


شکل۴-۷

۲ـ اگر P خارج دایره باشد و از آن خط دلخواهی رسم شود که با دایره در M و N برخورد کند، توان P نسبت به دایره برابر است با $PM \cdot PN$. زیرا مطابق با شکل (۴-۸)، اگر مماس PT بر دایره و وترهای TM و TN رسم شوند، از تشابه دو مثلث PTM و PTN به‌دست می‌آید:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{PT}{PN}$$

$$PM \cdot PN = \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

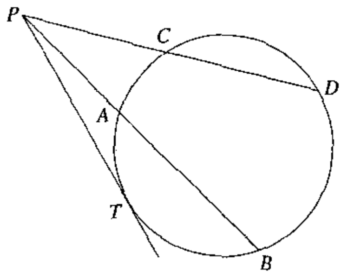


شکل۴-۸

از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر از نقطهٔ P واقع در خارج دایره مماس PT بر دایره و دو خط دلخواه رسم شوند که مطابق با شکل (۴-۹)، یکی از آنها در A و B و دیگری در C و D با دایره

برخورد کند، برابریهای زیر برقرارند:

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD} = \overline{PT}^{2}$$



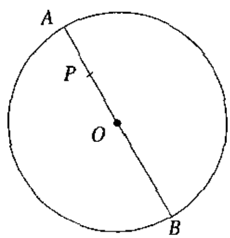
شکل۴-۹

این نتیجه در کتابهای درسی به‌صورت یک قضیهٔ مستقل و از راه تشابه مثلثهای PAD و PCB ثابت می‌شود.

۳ـ اگر نقطهٔ P داخل دایره باشد و قطر AB که بر P می‌گذرد رسم شود (شکل ۴-۱۰)، داریم:

$$\begin{aligned} d^2 - r^2 &= -(r^2 - d^2) = -(r-d)(r+d) \\ &= -(OA - OP)(OB + OP) = -PA \cdot PB \end{aligned}$$

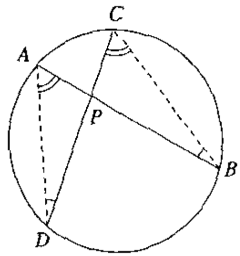
پس در این حالت توان نقطه برابر است با منفی حاصل‌ضرب دوپاره‌خطی که آن نقطه روی قطر گذرندهٔ بر آن نقطه جدا می‌کند.



شکل۴-۱۰

۴ـ اگر نقطهٔ P داخل دایره باشد و دو وتر دلخواه AB و BC رسم شوند که بر آن بگذرند، حاصل‌ضرب دو پاره‌خطی که روی هر یک از آنها ایجاد می‌شوند برابر است با حاصل‌ضرب دو پاره‌خطی که روی دیگری پدید می‌آید. زیرا، مطابق با شکل ۴-۱۱ از تشابه دو مثلث PAD و PBC نتیجه می‌شود:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Longrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



شکل ۴-۱۱

این وترها دلخواه‌اند و یکی از آنها می‌تواند قطر دایره باشد و بنابر (۳) نتیجه می‌شود که منفی حاصل‌ضرب دو پاره‌خطی که روی هر وتر گذرنده بر P ایجاد می‌شود برابر است با توان P نسبت به دایره.

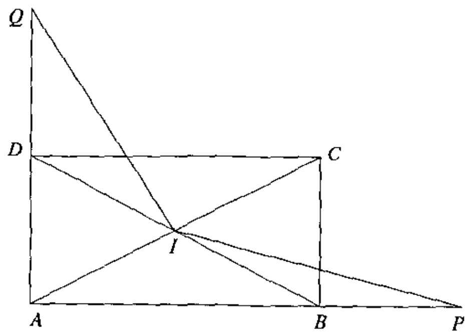
از ویژگیهای توان نقطه نسبت به دایره آنچه برای اثبات رابطه‌ای از گونهٔ $a \cdot b = c \cdot d$ به‌کار می‌رود این است که:

اگر از یک نقطهٔ P واقع در خارج یا داخل یک دایره دو خط بگذرند و یکی از آنها با دایره در A و B و دیگری با دایره در C و D برخورد کند، حاصل‌ضرب $PA \cdot PB$ با حاصل‌ضرب $PC \cdot PD$ برابر است.

* **مسألهٔ ۴ـ۱ـ۶.** روی ضلعهای AB و AD (یا در امتداد آنها) از مستطیل $ABCD$ دو نقطهٔ P و Q به یک فاصله از I مرکز مستطیل به‌دست می‌آیند. ثابت کنید حاصل‌ضرب $PA \cdot PB$ با حاصل‌ضرب $QA \cdot QD$ برابر است.

فرض :
- $ABCD$ مستطیل است.
- I مرکز مستطیل است.
- P بر خط AB قرار دارد.
- Q بر خط AD قرار دارد.
- $IP = IQ$

حکم : $PA \cdot PB = QA \cdot QD$



شکل ۴-۱۲

حل. دو قطر مستطیل با هم برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند و از این‌رو نقطهٔ برخورد آنها از چهار رأس به یک فاصله است. بنابراین دایرهٔ به مرکز I و به شعاع IA بر چهار رأس مستطیل $ABCD$ می‌گذرد. نسبت به این دایره، توانهای P و Q به ترتیب برابرند با:

$$\overline{PI}^{2}-\overline{IA}^{2}=PA\cdot PB$$

$$\overline{QI}^{2}-\overline{IA}^{2}=QA\cdot QD$$

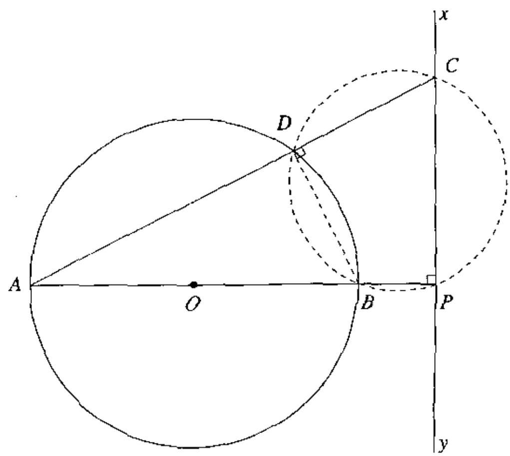
بنابر فرض PI و QI با هم برابرند. پس طرفهای نخست دو رابطهٔ بالا با هم برابرند و نتیجه می‌شود که طرفهای دومشان نیز باید برابر باشند و بنابراین:

$$PA\cdot PB=QA\cdot QD$$

مسألهٔ ۴ـ۱ـ۷. نقطهٔ P بر قطر AB (یا بر امتداد آن) از یک دایره و نقطهٔ C روی عمودی که در P بر AB رسم می‌شود واقع است. خط CA با دایره در نقطهٔ دیگر D برخورد می‌کند. ثابت کنید حاصل‌ضرب $AB\cdot AP$ با حاصل‌ضرب $AD\cdot AC$ برابر است.

فرض :
- AB قطر دایرهٔ به مرکز O است.
- P واقع بر AB است.
- $xy\perp AP$
- C واقع بر xy است.
- D نقطهٔ برخورد AC با دایرهٔ O است.

حکم : $AB\cdot AP=AD\cdot AC$



شکل۴-۱۳

حل. زاویهٔ BPC بنابر فرض قائمه است. زاویهٔ ADB که محاطی و روبه‌رو به قطر AB است نیز قائمه است و زاویهٔ مجانب آن BDC هم قائمه است. بنابراین چهارضلعی $BPCD$ محاطی است و نسبت به دایرهٔ محیطی این چهارضلعی، توان A برابر با $AB \cdot AP$ و همچنین برابر با $AD \cdot AC$ است. بنابراین:

$$AB \cdot AP = AD \cdot AC$$

یادداشت. هر نقطه از خط xy ویژگی نقطهٔ C را دارد و این خط را منعکس دایرهٔ به مرکز O در انعکاس به قطب A می‌نامند.

تمرین ۴ـ۱ـ۴

۱ـ دو وتر AB و CD از یک دایره در P با هم برخورد کرده‌اند و E قرینهٔ B نسبت به P است. دایره‌ای که بر سه نقطهٔ D، A و E می‌گذرد با CD در F برخورد می‌کند. ثابت کنید PC با PF برابر است.

۲ـ دو نقطهٔ C و D روی قطر AB از یک دایره و به یک فاصله از O مرکز دایره واقع‌اند. از این دو نقطه و در یک طرف AB دو نیم‌خط موازی با هم رسم می‌شوند که با دایره به ترتیب در M و N برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$CM \cdot DN = CA \cdot CB = DA \cdot DB$$

۳ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس A قائمه است، دایره‌ای بر دو رأس A و B و بر M وسط وتر BC می‌گذرد و با AC (یا با امتداد آن) در E برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$\frac{EC}{BC} = \frac{AM}{AC}$$

۴ـ ارتفاعهای AD، BE و CF از یک مثلث در H برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$AH \cdot AD = AE \cdot AC = AF \cdot AB$$

۵ـ در مسألهٔ پیش ثابت کنید:

$$AH \cdot DH = BH \cdot EH = CH \cdot FH$$

۶ـ از نقطهٔ دلخواه P واقع بر وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC عمودی بر BC رسم می‌شود که با AB (یا با امتداد آن) در M و با AC (یا با امتداد آن) در N برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$BA \cdot BM = BP \cdot BC$$

$$NA \cdot NC = NM \cdot NP$$

$$MA \cdot MB = MN \cdot MP$$

۷ـ در نقطهٔ N وسط وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC عمود NM برابر با میانهٔ AN بر وتر رسم می‌شود. دو خط BM و AC در P و دو خط CM و AB در Q با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$PA \cdot PC = PB \cdot PM \quad \text{و} \quad QA \cdot QB = QC \cdot QM$$

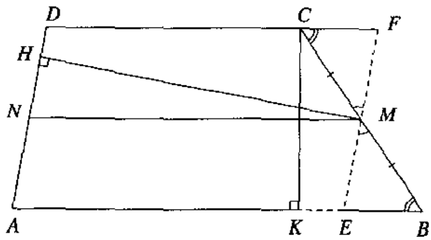
۴ـ۱ـ۴ روش چهارم: بهره‌گیری از شکلهای هم‌مساحت

مساحت بسیاری از شکلهای هندسی با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو پاره‌خط وابسته به آن شکل تعریف می‌شود. برای مثال مساحت مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو ضلع مجاور آن، مساحت چندضلعی منتظم برابر است با حاصل‌ضرب محیط (= پاره‌خطی برابر با مجموع ضلعها) در نصف سهم آن، مساحت دایره برابر است با حاصل‌ضرب محیط در نصف شعاع آن، و مانند اینها. از این‌رو برای آنکه ثابت شود دو حاصل‌ضرب با هم برابرند، کافی است ثابت شود آن دو حاصل‌ضرب هر دو برابر با مساحت یک شکل یا برابر با مساحتهای دو شکل هم‌مساحت‌اند.

مسألهٔ ۴ـ۱ـ۸. در ذوزنقهٔ $ABCD$ نقطهٔ M وسط ساق BC و نقطهٔ N وسط ساق AD است. عمود MH بر AD و عمود CK بر AB رسم می‌شوند. ثابت کنید حاصل‌ضرب $AD \cdot MH$ با حاصل‌ضرب $MN \cdot CK$ برابر است.

$$\text{فرض}: \left.\begin{array}{r} AB \| CD \\ DN = NA \text{،} CM = MB \\ MH \perp AD \text{،} CK \perp AB \end{array}\right\}$$

$$\text{حکم}: \quad AD \cdot MH = MN \cdot CK$$



شکل۴-۱۴

حل. می‌دانیم که MN با دو قاعدهٔ ذوزنقه موازی است. از نقطهٔ M خطی موازی با AD رسم می‌کنیم که با AB در E و با امتداد CD در F برخورد می‌کند. دو مثلث MBE و MCF در حالت برابری دو زاویه و ضلع بین با هم برابرند و در نتیجه مساحتهای برابر دارند. از این‌رو اگر مثلث MBE از ذوزنقه برداشته شود و به جای آن مثلث MCF به ذوزنقه افزوده شود، مساحت ذوزنقه فرق

نمی‌کند. بنابراین، مساحت متوازی‌الاضلاع $AEFD$ با مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ برابر است. مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع وارد بر آن. در متوازی‌الاضلاع $AEFD$ اگر قاعده را AE بگیریم ارتفاع می‌شود CK و مساحت می‌شود $AE \cdot CK$. اما چهارضلعی $AEMN$ نیز متوازی‌الاضلاع است و AE با MN برابر است. بنابراین، مساحت متوازی‌الاضلاع $AEFD$ برابر است با $MN \cdot CK$. اما اگر قاعدهٔ همین متوازی‌الاضلاع را AD بگیریم، ارتفاع آن می‌شود MH و مساحت آن می‌شود $AD \cdot MH$. بنابراین دو حاصل‌ضرب $MN \cdot CK$ و $AD \cdot MH$ که هر دو برابر با مساحت یک شکل‌اند، با هم برابرند.

تمرین ۴ـ۱ـ۵

۱ـ AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است. ثابت کنید:

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH$$

۲ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ از رأس A عمودهای AM و AN بر CD و بر BC رسم می‌شوند. ثابت کنید AM و AN با CD و CB به طور معکوس متناسب‌اند.

۳ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ عمودهای AM و AN به‌ترتیب بر BC و بر BD رسم می‌شوند. ثابت کنید AM و AN به طور معکوس با BC و BD متناسب‌اند.

۴ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ عمودهای AM و BN بر قطرهای BD و AC رسم می‌شوند. ثابت کنید این عمودها با قطرهای نظیر به طور معکوس متناسب‌اند.

۵ـ ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع، فاصله‌های هر نقطهٔ قطر از دو ضلع مجاور با این دو ضلع به طور معکوس متناسب‌اند.

۶ـ ثابت کنید در هر مثلث، ارتفاعها با ضلعهای نظیر به طور معکوس متناسب‌اند.

۷ـ در مثلث ABC از نقطهٔ M وسط ضلع BC عمودهای MH و MK بر AB و بر AC رسم می‌شوند. ثابت کنید این عمودها با ضلعهای نظیر به طور معکوس متناسب‌اند.

۸ـ مسألهٔ پیش را در حالتی حل کنید که به جای M نقطهٔ دلخواه N از میانهٔ AM گزیده شود.

۹ـ ثابت کنید در هر مثلث، فاصله‌های گرانیگاه از سه ضلع با ضلعهای نظیر به طور معکوس متناسب‌اند.

تمرین پایانی بخش ۴-۱

۱ـ نقطهٔ P بر قطر AB از یک نیمدایره واقع است. P به نقطهٔ دلخواه M از نیمدایره وصل و عمودی در M بر MP رسم می‌شود که با مماسهای در A و B بر نیمدایره در C و D برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$AC \cdot BD = AP \cdot PB$$

۲ـ در چهارضلعی محیطی $ABCD$، نقطه‌های M و N نقطه‌های تماس AD و BC با دایرهٔ محاطی و I نقطهٔ برخورد AC با MN است. ثابت کنید نسبت IA به IC برابر است با نسبت MA به NC.

۳ـ دو شعاع OA و IC از دو دایرهٔ بیرون از هم و به مرکزهای O و I با هم موازی‌اند. خط AC با خط OI در P و با دایره‌های به مرکزهای O و I در B و D نیز برخورد می‌کند. ثابت کنید حاصل‌ضرب $PA \cdot PD$ با حاصل‌ضرب $PC \cdot PB$ برابر است.

۴ـ دو دایره به مرکزهای O و I در A و B با هم برخورد کرده‌اند. از نقطهٔ دلخواه P واقع بر خط AB دو خط رسم می‌شود که یکی از آنها با دایرهٔ به مرکز O در C و D و دیگری با دایرهٔ به مرکز I در E و F برخورد می‌کند. ثابت کنید $PC \cdot PD$ با $PE \cdot PF$ برابر است (مسأله را در دو حالت حل کنید: P بین A و B یا P در امتداد AB باشد).

۵ـ دو دایره به مرکزهای O و I در A مماس خارج‌اند. نقطهٔ M در بیرون از دایره‌ها به‌گونه‌ای به‌دست آمده که MA نیمساز زاویهٔ OMI است. مماسهای MT و MS بر دو دایره رسم می‌شوند. ثابت کنید:

$$\frac{MT}{MS} = \frac{OA}{IA}$$

۶ـ دوضلع AB و AD از چهارضلعی محاطی $ABCD$ با هم برابرند. دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AB رسم و نقطهٔ M بر آن چنان گزیده می‌شود که M و A در یک طرف BD باشند. اگر خطهای MB و MD رسم شوند با نیمساز خارجی زاویهٔ C در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$CE \cdot CF = CB \cdot CD$$

۷ـ (قضیهٔ پاپوس) یک چهارضلعی در دایره‌ای محاط است. ثابت کنید حاصل‌ضرب فاصله‌های هر نقطهٔ دایره از دو ضلع روبه‌روی چهارضلعی برابر است با حاصل‌ضرب فاصله‌های آن نقطه از دو ضلع دیگر.

۸ـ در مثلث ABC خط xy از رأس A می‌گذرد و با BC موازی است. از M وسط BC خط دلخواهی رسم می‌شود که با xy در N، با AB (یا با امتداد آن) در P و با AC (یا با امتداد آن) در Q برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$\frac{PN}{PM} = \frac{QN}{QM}$$

۹ـ در مثلث ABC، نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و نقطهٔ J مرکز دایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ A است. ثابت کنید:

$$AB \cdot AC = AI \cdot AJ$$

۱۰ـ دو دایرهٔ به مرکزهای O و I بیرون از یکدیگرند. دو مماس مشترک خارجی آنها در S و دو مماس مشترک داخلی آنها در T برخورد می‌کنند. ثابت کنید T، S، O و I بر یک خط راست واقع‌اند و:

$$\frac{SI}{SO} = \frac{TI}{TO}$$

۴ـ۲ چگونگی اثبات رابطه‌ای به‌صورت $a^۲ = b \cdot c$

در رابطهٔ $a^۲ = b \cdot c$، مقدار a را واسطهٔ هندسی دو مقدار b و c می‌نامند و از این‌رو در مسأله‌هایی با رابطه‌ای از این‌گونه باید ثابت شود یک پاره‌خط واسطهٔ هندسی دو پاره‌خط دیگر است. در این‌گونه مسأله‌ها، به‌جای به‌کار بردن «اندازهٔ پاره‌خط» برای سادگی از به‌کار بردن قید «اندازه» چشم‌پوشی می‌کنند.

رابطهٔ $a^۲ = b \cdot c$ در واقع یکی از رابطه‌های $a/b = c/a$ یا $b/a = a/c$ است و از این‌رو روشهای اثبات آن همان روشهایی هستند که در بخش پیش یادآوری شدند.

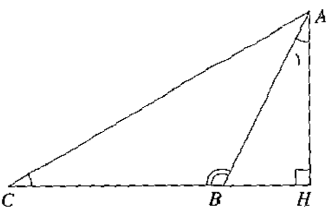
۴ـ۲ـ۱ روش یکم: بهره‌گیری از مثلثهای متشابه

برای اثبات رابطه‌ای از گونهٔ $a^۲ = bc$، می‌باید دو مثلث متشابه بیابیم که یا در ضلعی به اندازهٔ a مشترک باشند یا هر دو، ضلعی به اندازهٔ a داشته باشند. در هر حال لازم است که این ضلع مشترک یا این دو ضلع به اندازهٔ a روبه‌رو به زاویه‌های برابر نباشند و افزون بر این، دو ضلع دیگر نظیر هم از دو مثلث یکی به اندازهٔ b و دیگری به اندازهٔ c باشد.

* مسألهٔ ۴ـ۲ـ۱. مثلثی را که تفاضل دو زاویهٔ آن برابر با زاویهٔ قائمه باشد، در رأس زاویهٔ دیگر شبه قائمه و ضلع روبه‌رو به این رأس را شبه‌وتر مثلث می‌نامند. ثابت کنید در مثلث شبه‌قائمه، ارتفاع وارد بر شبه‌وتر واسطهٔ هندسی است بین دو پاره‌خطی که روی این ضلع پدید می‌آورد.

فرض : $\left\{ \begin{array}{l} \text{مثلث } ABC \\ \angle B - \angle C = ۹۰^\circ \\ AH \perp BC \end{array} \right.$

حکم : $\overline{AH}^۲ = BH \cdot CH$



شکل ۴-۱۵

حل. باید دو مثلث بیابیم که در ضلع AH مشترک باشند و BH و CH هر کدام ضلع یکی از آن دو مثلث باشند. دو مثلث ABH و ACH چنین‌اند و کافی است ثابت کنیم با هم مشابه‌اند.

زاویهٔ B از مثلث ABC زاویهٔ خارجی مثلث ABH و در نتیجه با مجموع دو زاویهٔ H و A_1 یعنی با $\angle A_1 + 90^\circ$ برابر است. همین زاویه بنابرفرض با $\angle C + 90^\circ$ نیز برابر است و بنابراین دو زاویهٔ C و A_1 با هم برابرند. پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH در حالت برابری یک زاویهٔ حاده متشابه‌اند و دو زاویهٔ دیگر آنها، $\angle ABH$ و $\angle CAH$ نیز باهم برابرند و داریم:

$$\frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \Longrightarrow \overline{AH}^2 = BH \cdot CH$$

تمرین ۴ـ۲ـ۱

۱ـ در مثلث ABC که در آن زاویهٔ B از زاویهٔ A بزرگتر است، از رأس B و داخل مثلث خطی چنان رسم می‌شود که با BC زاویه‌ای برابر با زاویهٔ A بسازد. این خط با ضلع AC در D برخورد می‌کند. ثابت کنید BC واسطهٔ هندسی است بین AC و CD.

۲ـ خط xy بر دایرهٔ به قطر AB در نقطهٔ A مماس و M نقطهٔ دیگری از دایره است. وتر MA و عمود MH بر xy رسم می‌شوند. ثابت کنید MA واسطهٔ هندسی AB و MH است.

۳ـ از رأس A از مثلث متساوی‌الساقین ABC خطی رسم می‌شود که با قاعدهٔ BC در D و با دایرهٔ محیطی مثلث در E برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$\overline{AB}^2 = AD \cdot AE$$

۴ـ به مرکز D وسط قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC نیمدایره‌ای مماس بر دو ساق AB و AC رسم می‌شود. مماس دیگری بر این نیمدایره رسم می‌شود که با دو ساق در M و N برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$\overline{BD}^2 = BM \cdot CN$$

۵ـ از نقطهٔ A که بیرون یک دایره قرار دارد، مماسهای AB و AC بر این دایره و نیز وتر BC از این دایره رسم شده‌اند. از نقطهٔ M روی کمانی از دایره که داخل مثلث ABC است عمودهای MD و ME و MF به‌ترتیب بر BC، CA و AB رسم می‌شوند. ثابت کنید:

$$\overline{MD}^2 = ME \cdot MF$$

۶ـ قطرهای AC و BD از پنج‌ضلعی منتظم $ABCDE$ در M با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$\overline{AM}^2 = AC \cdot MC$$

یادداشت. نقطهٔ M پاره‌خط AC را به دو پارهٔ AM و MC چنان تقسیم کرده است که پارهٔ بزرگتر واسطهٔ هندسی است بین پارهٔ کوچکتر و تمام پاره‌خط. در این حالت می‌گویند M پاره‌خط AC را به‌نسبت ذات وسط و دو طرف تقسیم کرده است.

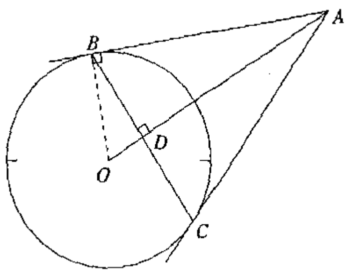
۴ـ۲ـ۲ روش دوم: بهره‌گیری از ویژگیهای اندازه‌ای مثلث قائم‌الزاویه

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی است بین دو پاره‌خطی که از وتر جدا می‌کند؛ هر ضلع زاویهٔ قائمه واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویر آن ضلع بر وتر.

مسألهٔ ۴ـ۲ـ۲. از نقطهٔ A واقع در بیرون دایرهٔ به مرکز O دو مماس AB و AC بر دایره رسم شده‌اند. خط AO و وتر BC رسم می‌شوند که در D با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید شعاع دایره واسطهٔ هندسی است بین OA و OD.

فرض :
- دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R
- AB مماس بر دایره
- AC مماس بر دایره
- D نقطهٔ برخورد CA با BC

حکم : $OA \cdot OD = R^2$



شکل۴-۱۶

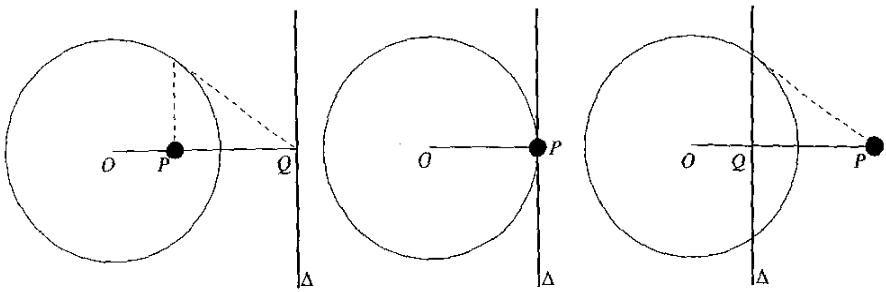
حل. خط مماس بر دایره بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است. اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره‌ای رسم شود خطی که آن نقطه را به مرکز دایره وصل می‌کند عمودمنصف وتری است که دو نقطهٔ تماس را به هم وصل می‌کند. بنابراین ویژگیها، هر یک از دو زاویهٔ OBA و ODB قائمه‌اند و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBA که در آن OD تصویر ضلع OB بر وتر OA است، داریم:

$$\overline{OB}^2 = OA \cdot OD \Longrightarrow OA \cdot OD = R^2$$

یادداشت. برای هر نقطهٔ P واقع در صفحهٔ دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R، یک نقطهٔ Q بر خط OP یافت می‌شود به گونه‌ای که P و Q در یک طرف O باشند و:

$$OP \cdot OQ = R^2$$

خط Δ را که در Q عمود بر OP رسم شود قطبی P، و نقطهٔ P را قطب خط Δ نسبت به دایرهٔ O می‌نامند. مطابق با شکلهای ۴-۱۷، اگر P خارج دایره باشد قطبی آن با دایره برخورد می‌کند، اگر P روی دایره باشد قطبی آن مماس بر دایره در همان نقطه است، اگر P داخل دایره باشد قطبی آن خارج دایره است. قطب و قطبی یک تبدیل هندسی است که نقطه را با خط و خط را با نقطه نظیر می‌کند.



شکل ۴-۱۷

تمرین ۴-۲-۲

۱ـ بر نیمدایرهٔ به قطر AB و به شعاع R، مماسهای Ax و By و مماس دیگری در نقطهٔ دلخواه M رسم شده است که با Ax و By در P و Q برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$AP \cdot BQ = R^2$$

۲ـ دو دایره در A مماس خارج‌اند. مماس مشترک داخلی دو دایره با یک مماس مشترک خارجی آنها در B برخورد می‌کند. ثابت کنید AB واسطهٔ هندسی است بین شعاعهای دو دایره.

۳ـ دو دایره مماس داخل‌اند. وتری از دایرهٔ بزرگتر چنان رسم می‌شود که بر دایرهٔ کوچکتر مماس و بر خط مرکزهای دو دایره عمود باشد. ثابت کنید خطی که نقطهٔ تماس دو دایره را به یکی از دو سر آن وتر وصل می‌کند واسطهٔ هندسی است بین قطرهای دو دایره.

۴ـ از نقطهٔ P واقع بر قطر AB از یک دایره، به نقطهٔ دلخواه M از آن دایره وصل می‌شود. عمودی در M بر PM نیز رسم می‌شود که با مماسهایی که در A و B بر دایره رسم می‌شوند در C و D برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$\overline{MP}^2 = MC \cdot MD$$

۵ـ مثلث ABC در نیمدایرهٔ به قطر BC محاط است. در نقطهٔ D از این قطر عمودی بر آن رسم می‌شود که با AC (یا با امتداد آن) در E، با AB (یا با امتداد آن) در F و با نیمدایره در G برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$\overline{DG}^2 = DE \cdot DF$$

۶ـ از نقطهٔ A واقع در بیرون دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R، خطی رسم می‌شود که با دایره در B و C برخورد می‌کند. در B و C مماسهایی بر دایره رسم می‌شوند که با هم در M برخورد می‌کنند. عمود MP بر OA نیز رسم می‌شود. ثابت کنید:

$$OA \cdot OP = R^2$$

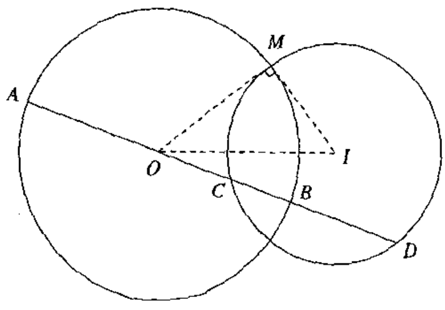
۴ـ۲ـ۳ روش سوم: بهره‌گیری از توان نقطه نسبت به دایره

توان نقطه و ویژگیهای آن در آغاز بخش (۴-۱-۳) یادآوری شد. آنچه در این بخش کاربرد دارد این است که اگر از یک نقطه دو خط رسم شود که یکی بر دایره‌ای مماس شود و دیگری با این دایره در دو نقطه برخورد کند، اندازهٔ مماس واسطهٔ هندسی است بین اندازه‌های دو پاره‌خطی که با آغاز از آن نقطه روی خط دیگر پدید می‌آیند.

مسألهٔ ۴ـ۲ـ۳. دو منحنی را در نقطهٔ برخوردشان عمود بر هم می‌نامند هرگاه مماسهای رسم شده بر دو منحنی در نقطهٔ برخوردشان بر یکدیگر عمود باشند. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R در نقطهٔ M بر دایرهٔ به مرکز I عمود است. قطر دلخواه AB از دایرهٔ به مرکز O با دایرهٔ به مرکز I در C و D برخورد می‌کند. ثابت کنید شعاع دایرهٔ به مرکز O واسطهٔ هندسی است بین OC و OD.

فرض :
- دایرهٔ به مرکز O بر دایره به مرکز I در M عمود است
- AB قطر دایرهٔ O و R شعاع آن است
- AB با دایرهٔ I در C و D برخورد می‌کند.

حکم : $OC \cdot OD = R^2$



شکل۴-۱۸

حل. می‌دانیم مماس بر دایره بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است. بنابراین اگر دو دایره در M بر هم عمود باشند مماسی که در M بر هر یک از آنها رسم می‌شود از مرکز دیگری می‌گذرد. در شکل بالا

شعاع OM از دایرهٔ به مرکز O در M بر دایرهٔ به مرکز I مماس است. توان نقطهٔ O نسبت به دایرهٔ I برابر است با $\overline{OM}^{۲}$ و نیز برابر است با $OC \cdot OD$ و چون $OM = R$، داریم:

$$OC \cdot OD = R^{۲}$$

تمرین ۴ـ۲ـ۳

۱ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع CD وارد بر ساق AB و دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AD رسم می‌شود که با امتداد AB در E برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$\overline{CD}^{۲} = BD \cdot BE$$

۲ـ روی مماسی که در نقطهٔ B بر دایرهٔ به قطر AB و به مرکز O رسم می‌شود، پاره‌خط BC برابر با OB جدا می‌شود. خط AC رسم می‌شود که با دایره در E برخورد می‌کند. وتر AF از دایره نیز چنان رسم می‌شود که AC نیمساز زاویهٔ BAF باشد. دو خط AC و BF در D با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$\overline{BD}^{۲} = CA \cdot CE$$

۳ـ در دو دایرهٔ هم‌مرکز، وتری از دایرهٔ بزرگتر و مماس بر دایرهٔ کوچکتر رسم می‌شود. ثابت کنید نصف اندازهٔ این وتر واسطهٔ هندسی است بین مجموع و تفاضل شعاعهای دو دایره.

۴ـ نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC با ضلع BC در D و با دایرهٔ محیطی مثلث در E برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$\overline{BE}^{۲} = ED \cdot EA$$

۵ـ از نقطهٔ M واقع بر شعاع OA از یک دایره عمودی بر OA رسم می‌شود که با دایره در B برخورد می‌کند و خط دلخواهی از M نیز رسم می‌شود که با دایره در C و D برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$\overline{MB}^{۲} = MC \cdot MD$$

تمرین پایانی بخش ۴-۲

۱ـ دو خط موازی xy و uv در A و B بر دایرهٔ به شعاع R مماس‌اند. از نقطهٔ D واقع بر دایره دو خط به B و به A وصل می‌شوند که به‌ترتیب با xy و با uv در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$AE \cdot BF = ۴R^{۲}$$

۲ـ ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین در دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R محاط است، دو ساق آن در P و دو قطر آن در Q برخورد می‌کنند. ثابت کنید.

$$OP \cdot OQ = R^{۲}$$

۳ـ در مثلث ABC، زاویه‌های B و C حاده‌اند، ارتفاعها در H برخورد می‌کنند و امتداد ارتفاع AD با نیمدایرهٔ به قطر BC در E برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$\overline{DE}^{2} = DH \cdot DA$$

۴ـ در دایرهٔ به قطر AB، به مرکز O و به شعاع R، وتر CD عمود بر AB رسم شده است. از نقطهٔ P واقع بر کمان کوچکتر CD دو خط رسم می‌شود که بر C و D می‌گذرند و با AB در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$OE \cdot OF = R^{2}$$

۵ـ نیمساز داخلی زاویهٔ A از مثلث ABC با ضلع BC در D برخورد می‌کند. دایره‌های به مرکزهای B و C و به شعاعهای BD و CD با AD در نقطه‌های دیگر E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$\overline{AD}^{2} = AE \cdot AF$$

۴ـ۳ چگونگی اثبات یک رابطهٔ اندازه‌ای نامشخص

برای حل بیشتر مسأله‌هایی از این‌گونه، هم رابطه‌های اندازه‌ای کلاسیک و هم محاسبه‌های جبری به‌کار می‌روند. نمونه‌هایی از رابطه‌های کلاسیک از این قرارند:

رابطهٔ فیثاغورس و رابطه‌های اندازه‌ای دیگر مربوط به مثلث قائم‌الزاویه، رابطه‌های اندازه‌ای مربوط به یک مثلث نامشخص، رابطه‌های اندازه‌ای در دایره، و رابطه‌های دیگری که در متن کتابهای درسی هندسه بیان و ثابت می‌شوند.

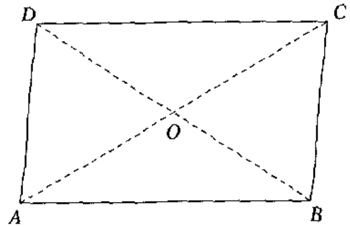
۴ـ۳ـ۱ روش یکم: محاسبهٔ مستقیم جمله‌های رابطه

در این روش از راه به‌کار بردن رابطه‌های اندازه‌ای کلاسیک مقدار هر یک از جمله‌های یک طرف رابطهٔ داده شده حساب می‌شود و عبارت به‌دست آمده ساده می‌شود تا عبارت طرف دیگر رابطه به‌دست آید.

مسألهٔ ۴ـ۳ـ۱. ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع توانهای دوم چهارضلع برابر است با مجموع توانهای دوم دو قطر.

فرض : $\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{array}\right\}$

حکم : $\overline{BA}^{2} + \overline{BC}^{2} + \overline{CD}^{2} + \overline{DA}^{2} = \overline{AC}^{2} + \overline{BD}^{2}$



شکل ۴-۱۹

حل. قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم که در O با هم برخورد و یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابر رابطهٔ اندازه‌ای که در هر مثلث بین اندازهٔ میانه و اندازه‌های ضلعها برقرار است، در دو مثلث ABC و ACD داریم:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,\overline{BO}^2 + \frac{1}{2}\overline{AC}^2$$

$$\overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 2\,\overline{DO}^2 + \frac{1}{2}\overline{AC}^2$$

این دو برابری را جمله به جمله با هم جمع می‌کنیم و با توجه به اینکه

$$2\,\overline{BO}^2 + 2\,\overline{DO}^2 = \frac{1}{2}\overline{BD}^2 + \frac{1}{2}\overline{BD}^2 = \overline{BD}^2$$

رابطهٔ حکم به‌دست می‌آید.

تمرین ۴ـ۳ـ۱

۱ـ اگر D پای ارتفاع وارد بر ساق AB از مثلث متساوی‌الساقین ABC باشد، ثابت کنید مجموع توانهای دوم سه‌ضلع مثلث برابر است با:

$$\overline{BD}^2 + 2\,\overline{AD}^2 + 3\,\overline{CD}^2$$

۲ـ در مسألهٔ پیش، اگر مثلث متساوی‌الاضلاع باشد رابطه به چه صورت درمی‌آید؟

۳ـ مثلث ABC در رأس A قائمه است. از D وسط ضلع AB عمود DE بر وتر رسم می‌شود. ثابت کنید:

$$\overline{EC}^2 - \overline{EB}^2 = \overline{AC}^2$$

۴ـ ثابت کنید که در هر مثلث، مجموع توانهای دوم سه میانه برابر است با سه چهارم مجموع توانهای دوم سه ضلع.

۵ـ دو دایرهٔ برابر به مرکزهای O و I در A و B برخورد کرده‌اند. از A خطی رسم می‌شود که با دایره‌ها در C و D برخورد کند. ثابت کنید:

$$\overline{CA}^2 + \overline{DA}^2 = 2\,\overline{OI}^2$$

۶ـ از نقطهٔ A واقع در داخل دایرهٔ به مرکز O خطی رسم می‌شود که با دایره در B و C برخورد می‌کند. ثابت کنید:

$$AB \cdot AC + \overline{OA}^{2} = \overline{OC}^{2}$$

۷ـ ثابت کنید در هر چهارضلعی مجموع توانهای دوم دو قطر برابر است با دو برابر مجموع توانهای دوم پاره‌خطهایی که وسطهای دو ضلع روبه را به هم وصل می‌کنند.

۸ـ ثابت کنید در هر چهارضلعی مجموع توانهای دوم ضلعها برابر است با مجموع توانهای دوم قطرها به‌علاوهٔ چهار برابر توان دوم پاره‌خطی که وسطهای دو قطر را به هم وصل می‌کند.

۹ـ مسألهٔ پیش را در حالتی حل کنید که چهارضلعی ذوزنقه باشد.

۱۰ـ ارتفاعهای AD و BE از مثلث ABC در F برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$BE \cdot BF + BC \cdot DC = \overline{BC}^{2}$$

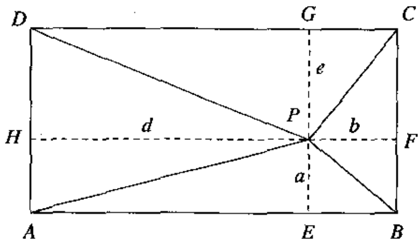
۴ـ۳ـ۲ روش دوم: تبدیل رابطه به یک همانی

هر یک از جمله‌های رابطه را بر حسب اندازهٔ یک پاره‌خط به‌دست می‌آوریم و رابطه را به یک همانی تبدیل می‌کنیم.

مسألهٔ ۴ـ۳ـ۲. ثابت کنید مجموع توانهای دوم فاصله‌های هر نقطهٔ داخل مستطیل از دو رأس روبه‌رو برابر است با مجموع توانهای دوم فاصله‌های آن نقطه از دو رأس دیگر.

فرض : $\begin{cases} ABCD \text{ مستطیل} \\ \text{نقطهٔ } P \text{ در داخل مستطیل قرار دارد} \end{cases}$

حکم : $\overline{PA}^{2} + \overline{PC}^{2} = \overline{PB}^{2} + \overline{PD}^{2}$



شکل۴-۲۰

حل. از P عمودهایی بر چهار ضلع مستطیل رسم می‌کنیم و اندازه‌های آنها را a، b، c و d می‌گیریم. داریم:

$$PE = AH = BF = a \quad \text{و} \quad PF = BE = CG = b$$

$$PG = CF = DH = c \quad \text{و} \quad PH = AE = DG = d$$

در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ PAE، PCG، PBF و PDH بنابر قضیهٔ فیثاغورس به‌ترتیب داریم:

$$\overline{PA}^2 = a^2 + d^2 \quad \text{و} \quad \overline{PC}^2 = b^2 + c^2$$

$$\overline{PB}^2 = a^2 + b^2 \quad \text{و} \quad \overline{PD}^2 = c^2 + d^2$$

اگر دو طرف برابریهای واقع در هر سطر نظیر به نظیر با هم جمع شوند، به‌دست می‌آید:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$\overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

و نتیجه می‌شود:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$$

تمرین ۴ـ۳ـ۲

۱ـ ثابت کنید اگر دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه باشند، حاصل‌ضرب وترهای آنها برابر است با مجموع حاصل‌ضربهای ضلعهای نظیر هم در آنها.

۲ـ از نقطهٔ I واقع در صفحهٔ مثلث ABC، عمودهای ID، IE و IF به‌ترتیب بر ضلعهای AB، BC و CA رسم می‌شوند. ثابت کنید:

$$\overline{AD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{AF}^2$$

۳ـ نقطهٔ P بر قطر AB از نیمدایرهٔ به مرکز O واقع است. در O و در P عمودهایی بر AB رسم می‌شوند که با نیمدایره به ترتیب در C و D برخورد می‌کنند و P به C وصل می‌شود. ثابت کنید:

$$2\,\overline{PD}^2 + 2\,\overline{PC}^2 = \overline{AB}^2$$

۴ـ از نقطهٔ M واقع بر قطر AB از یک دایره، وتر CD چنان رسم شده است که با AB زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد. ثابت کنید:

$$2\,\overline{CM}^2 + 2\,\overline{DM}^2 = \overline{AB}^2$$

۵ـ خطی از رأس A از مربع $ABCD$ رسم شده که با BC (یا با امتداد آن) در M و با CD (یا با امتداد آن) در I برخورد کرده است. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\overline{AM}^2} + \frac{1}{\overline{AI}^2} = \frac{2}{\overline{AC}^2}$$

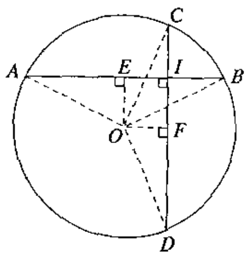
۴ـ۳ـ۳ روش ویژهٔ مربوط به رابطه‌های برابر با مقدار ثابت

در برخی از مسأله‌ها خواسته می‌شود ثابت کنیم که مقدار یک عبارت با جمله‌های متغیر ثابت باقی می‌ماند. در این‌گونه از مسأله‌ها نخست باید به مقدار ثابت پی‌برد و پس از آن روشهایی را که پیشتر گفته شد به‌کار گرفت.

مسألهٔ ۴ـ۳ـ۳. دو وتر متغیر AB و CD از یک دایره در نقطهٔ متغیر I بر یکدیگر عمودند. ثابت کنید مجموع توانهای دوم چهار پاره‌خطی که I روی وترها جدا می‌کند برابر با یک مقدار ثابت است.

فرض : دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R،
I نقطهٔ برخورد وتر AB با CD است،
$AB \perp CD$

حکم : $\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2 + \overline{ID}^2 =$ ثابت



شکل۴-۲۱

حل. از O به دو سر هر یک از وترها وصل و عمودهای OE و OF را به‌ترتیب بر AB و بر CD رسم می‌کنیم. مطابق با شکل داریم:

$$IA = AE + IE = BE + IE$$

$$IB = BE - IE$$

$$IC = CF - IF$$

$$ID = DF + IF = CF + IF$$

دو طرف این برابریها را به‌توان ۲ می‌رسانیم:

$$\overline{IA}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{IE}^2 + 2BE \cdot IE$$

$$\overline{IB}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{IE}^2 - 2BE \cdot IE$$

$$\overline{IC}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{IF}^2 - 2CF \cdot IF$$

$$\overline{ID}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{IF}^2 + 2CF \cdot IF$$

اگر چهار برابری اخیر جمله به جمله با هم جمع شوند، به‌دست می‌آید:

$$\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2 + \overline{ID}^2 = 2(\overline{BE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{IE}^2 + \overline{IF}^2)$$

در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OBE و OCF داریم:

$$\overline{BE}^{2} = R^{2} - \overline{OE}^{2} \quad و \quad \overline{CF}^{2} = R^{2} - \overline{OF}^{2}$$

اما OE با IF و OF با IE برابر است که نتیجه می‌شود:

$$\overline{IA}^{2} + \overline{IB}^{2} + \overline{IC}^{2} + \overline{ID}^{2} = 2(R^{2} - \overline{OE}^{2} + R^{2} - \overline{OF}^{2} + \overline{OF}^{2} + \overline{OE}^{2})$$

$$= 4R^{2}$$

چون R شعاع دایره ثابت است، مقدار $4R^{2}$ نیز ثابت است.

تمرین ۴ـ۳ـ۳

۱ـ ثابت کنید در یک چهارضلعی محاط در دایرهٔ به شعاع R، اگر دو قطر بر هم عمود باشند مجموع توانهای دوم چهارضلع برابر با مقدار ثابت است.

۲ـ M نقطه‌ای ثابت واقع در دایرهٔ به شعاع ثابت R است. دو وتر متغیر AB و CD بر M می‌گذرند و در این نقطه بر هم عمودند. ثابت کنید $\overline{AB}^{2} + \overline{CD}^{2}$ برابر با مقداری ثابت است.

۳ـ در دو دایرهٔ هم‌مرکز، از نقطهٔ P روی دایرهٔ کوچکتر وتر دلخواه PC در دایرهٔ کوچکتر و وتر AB از دایرهٔ بزرگتر و عمود بر PC رسم شده است. هرگاه وترها دور P بچرخند اما همواره عمود بر هم باقی بمانند، ثابت کنید:

$$\overline{PA}^{2} + \overline{PB}^{2} + \overline{PC}^{2} = \text{ثابت}$$

$$\overline{AC}^{2} + \overline{CB}^{2} + \overline{AB}^{2} = \text{ثابت}$$

۴ـ از نقطهٔ متغیر M روی یکی از دو دایرهٔ هم‌مرکز به دو سر قطر AB از دیگری وصل می‌شود. هرگاه M و AB تغییر کنند، ثابت کنید مجموع $\overline{MA}^{2} + \overline{MB}^{2}$ برابر با مقداری ثابت باقی می‌ماند.

۵ـ از نقطهٔ A واقع در بیرون دایرهٔ به مرکز O، خطی متغیر می‌گذرد و با دایره در B و C برخورد می‌کند. ثابت کنید حاصل‌ضرب $AB \times AC$ برابر با مقداری ثابت است.

۶ـ لوزی $ABCD$ تغییرشکل می‌دهد به‌گونه‌ای که در آن همواره قطر AC از نقطهٔ ثابت P می‌گذرد، اندازهٔ ضلعهای آن ثابت می‌ماند و دو رأس B و D روی دایرهٔ ثابتی به مرکز P تغییر جا می‌دهند. ثابت کنید حاصل‌ضرب $PA \cdot PC$ برابر با مقداری ثابت است.

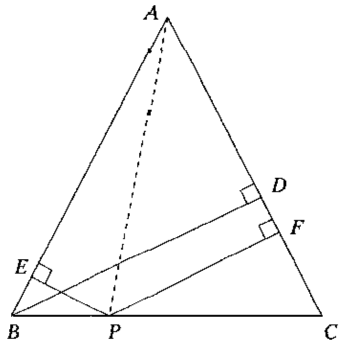
۴ـ۳ـ۴ بهره‌گیری از مقایسهٔ دو مساحت

برخی از رابطه‌های اندازه‌ای را می‌توان بر پایهٔ مقایسهٔ مساحتها ثابت کرد. گاهی هم می‌توان از این ویژگی بهره گرفت که مساحت یک شکل برابر است با مجموع مساحتهای شکلهایی که از تجزیهٔ آن به‌دست می‌آیند.

مسألهٔ ۴ـ۳ـ۴. از نقطهٔ P واقع بر قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، عمودهای PE و PF بر AB و AC رسم می‌شوند. ثابت کنید مجموع دو پاره‌خط PE و PF برابر است با ارتفاع وارد بر یکی از دوساق مثلث.

$$\left.\begin{array}{r} AB = AC \\ PF \perp AC, PE \perp AB \\ BD \perp AC \end{array}\right\} \text{: فرض}$$

$$PE + PF = BD \quad \text{: حکم}$$



شکل۴-۲۲

حل. خط AP را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث ABC برابر است با مجموع مساحتهای ABP و ACP. بنابراین:

$$\tfrac{۱}{۲}AB \cdot PE + \tfrac{۱}{۲}AC \cdot PF = \tfrac{۱}{۲}AC \cdot BD$$

با توجه به برابری AB با AC، از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$PE + PF = BD$$

تمرین ۴ـ۳ـ۴

۱ـ ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر است با ارتفاع مثلث.

۲ـ ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ واقع در داخل یک nضلعی منتظم از ضلعها برابر است با n برابر اندازهٔ سهم nضلعی.

۳ـ ارتفاعهای AD، BE و CF از مثلث ABC در H برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = ۱$$

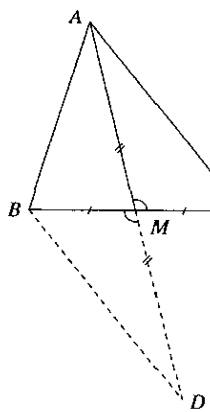
* ۴ـ۳ـ۵ نابرابریهای اندازه‌ای

در برخی از مسأله‌های هندسه، رابطه‌ای که باید ثابت شود یک نابرابری بین اندازه‌هایی از شکلی معین است. در این‌باره همان روشهای مربوط به اثبات برابریها به‌کار می‌روند افزون بر اینکه در اینجا هم باید با آن قضیه‌هایی از هندسه آشنا بود که موضوع آنها اثبات نابرابریهایی مربوط به شکلها است و هم باید ویژگیهای نابرابریهای جبری را به‌یاد داشت مانند: در هر مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر است، در هر مثلث ضلع بزرگتر روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر و ضلع کوچکتر روبه‌رو به زاویهٔ کوچکتر است، قطر هر دایره از هر وتر آن بزرگتر است. اینها و قضیه‌های دیگری از این‌گونه، نمونه‌هایی از قضیه‌هایی هستند که به‌کار می‌آیند.

مسألهٔ ۴ـ۳ـ۵. ثابت کنید میانهٔ هر ضلع مثلث از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است.

فرض : مثلث ABC
M وسط BC است.

حکم : $AM < \frac{AB+AC}{۲}$



شکل۴-۲۳

حل. میانهٔ AM را به اندازهٔ MD برابر با خودش امتداد می‌دهیم و D را به B وصل می‌کنیم. دو مثلث AMC و BMD در حالت برابری دو ضلع و دو زاویهٔ بین با هم برابرند. بنابراین نتیجه می‌شود BD با AC برابر است. در مثلث ABC داریم:

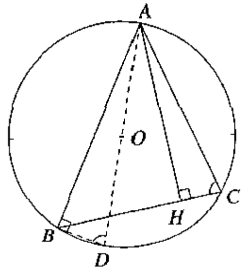
$$AD < AB + BD \Longrightarrow ۲AM < AB + AC$$

و از تقسیم دو طرف این نابرابری بر ۲، نابرابری حکم به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۴ـ۳ـ۶. ثابت کنید در هر مثلث، اگر مجموع توانهای دوم اندازه‌های سه ضلع بر مجموع اندازه‌های سه ارتفاع تقسیم شود، حاصل از چهاربرابر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث کوچکتر است.

فرض :
c, b, a اندازه‌های سه ضلع یک مثلث‌اند.
h_c, h_b, h_a اندازه‌های سه ارتفاع آن مثلث هستند.
R شعاع دایرهٔ محیطی همان مثلث است.

حکم : $\frac{a^2+b^2+c^2}{h_a+h_b+h_c} < 4R$



شکل۴-۲۴

حل. نخست این قضیه را یادآوری می‌کنیم که در هر مثلث، حاصل‌ضرب هر ارتفاع در قطر دایرهٔ محیطی برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور آن ارتفاع. مطابق با شکل، مثلث ABC، ارتفاع AH و قطر AD از دایرهٔ محیطی آن را درنظر می‌گیریم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH و ABD در حالت برابری یک زاویهٔ حاده متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AD} \Longrightarrow AH \cdot AD = AB \cdot AC$$

برای ارتفاعهای دیگر هم رابطه‌ای نظیر این رابطه به‌دست می‌آید و نتیجه می‌شود:

$$h_a = \frac{bc}{2R} \quad , \quad h_b = \frac{ca}{2R} \quad , \quad h_c = \frac{ab}{2R}$$

و رابطهٔ حکم که باید ثابت شود به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} < 2 \qquad (1)$$

اما از اینکه a، b و c اندازه‌های ضلعهای یک مثلث‌اند داریم:

$$\begin{cases} |a-b| < c \\ |b-c| < a \\ |c-a| < b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-2ab < c^2 \\ b^2+c^2-2bc < a^2 \\ c^2+a^2-2ca < b^2 \end{cases}$$

و چنانچه این نابرابریهای هم‌جهت را جمله به جمله با هم جمع و ساده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ < ۲(ab + bc + ca)$$

که اگر دو طرف این نابرابری را بر مقدار مثبت $ab + bc + ca$ تقسیم کنیم، همان رابطهٔ (۱) را خواهیم داشت.

تمرین ۴ـ۳ـ۵

۱ـ ثابت کنید در هر مثلث، حاصل‌ضرب سه ارتفاع از حاصل‌ضرب سه ضلع کوچکتر است.

۲ـ ثابت کنید در هر مثلث، برای آنکه یک زاویه حاده باشد لازم و کافی است که مجموع توانهای دوم دو ضلع آن از توان دوم ضلع سوم بزرگتر باشد و برای آنکه یک زاویه منفرجه باشد لازم و کافی است که مجموع توانهای دوم دو ضلع آن از توان دوم ضلع سوم کوچکتر باشد.

۳ـ ثابت کنید بنابر آنکه یک زاویه از مثلثی حاده یا منفرجه باشد، میانهٔ نظیر رأس این زاویه از نصف ضلع روبه‌رو به این رأس بزرگتر یا کوچکتر است.

۴ـ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، توان سوم وتر از مجموع توانهای سوم دو ضلع دیگر بزرگتر است.

۵ـ ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز داخلی بزرگترین زاویه از نیمساز داخلی کوچکترین زاویه کوچکتر است.

۶ـ در یک مثلث، اگر a، b و c اندازه‌های ضلعها و m_a، m_b و m_c اندازه‌های میانه‌های نظیر آنها باشند، ثابت کنید:

$$\frac{m_a^۲ + m_b^۲ + m_c^۲}{ab + bc + ca} < \frac{۳}{۲}$$

۷ـ دایره‌ای به قطر d در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محاط است. ثابت کنید اندازهٔ قطر این ذوزنقه از $d\sqrt{۲}$ بزرگتر است.

۵ روشهای حل مسأله‌های سادهٔ محاسبه‌ای

در حل مسأله‌های محاسبه‌ای هندسه، هم با مسأله‌های با ویژگیهای ناب هندسی، هم با مسأله‌های با ویژگیهای اندازه‌ای و هم با دستورها و قاعده‌های جبری سروکار داریم. داده‌های این‌گونه مسأله‌ها عددی یا حرفی‌اند که حرفها هم نمایشگر عددهایند. این عددها یا حرفها اندازه‌های جزءهایی از یک شکل معین‌اند و مقصود از حل مسأله به‌دست آوردن اندازه یا اندازه‌های جزء یا جزءهای دیگری از همان شکل است که اگر داده‌ها حرفی باشند، محاسبه‌ها و جواب یا جوابها هم حرفی خواهند بود. اگر داده‌ها عددی باشند، هرگاه ممکن باشد و دشواری ویژه‌ای بر سر راه نباشد، درصورتی که حرف به‌جای عدد به‌کار رود، برای مسأله جوابی کلی به‌دست می‌آید و می‌توان آن را روی مسأله‌های دیگر مشابه با آن نیز به‌کار برد. افزون بر این، در محاسبه‌های عددی گاه خطاهای ناشی از تقریبها وجود دارند و در محاسبه‌های حرفی چنین نیست؛ پس از به‌دست آوردن جواب کلی مسأله برحسب یک یا چند حرف، به سادگی می‌توان عدد یا عددهای داده شده را در آن قرار داد و به جواب عددی نیز دست یافت.

۵ـ۱ روش کلی حل مسأله‌های محاسبه‌ای

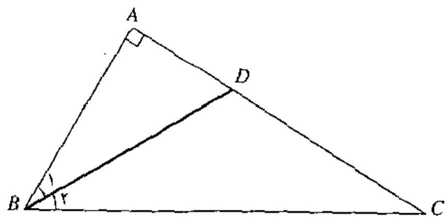
برای حل مسأله‌های محاسبه‌ای، نخستین کاری که باید انجام گیرد بررسی دقیق شکل و یافتن رابطه‌ای اندازه‌ای بین جزء مجهول و جزءهای دیگر شکل است. این رابطه کلید حل مسأله است و از این‌رو آن را رابطهٔ کلیدی می‌نامیم. اگر رابطهٔ کلیدی به‌دست آید با بررسی معلوم می‌شود که اگر به غیر از آن جمله که شامل اندازهٔ جزء مجهول است، همهٔ جمله‌های دیگر مقدارشان معلوم باشد، از روی همین رابطه اندازهٔ مجهول حساب می‌شود. اما اگر اندازه‌های جمله‌های دیگری از رابطهٔ کلیدی نیز معلوم نباشد، باید

رابطه یا رابطه‌های دیگری را بین جزءهای با اندازه‌های نامعلوم و جزءهای با اندازه‌های معلوم شکل به‌دست آورد و این فرایند را باز هم به کار برد تا اینکه رابطه‌ای تنها با یک جزء مجهول به‌دست آید.

مثال. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اندازهٔ وتر BC برابر با $۱۳a$ و اندازهٔ ضلع AB برابر با $۵a$ است. نیمساز داخلی زاویهٔ B با ضلع AC در D برخورد می‌کند. اندازهٔ BD را برحسب a به‌دست آورید.

داده‌ها : $\left.\begin{array}{r} \angle B_۱ = \angle B_۲ \text{ و } \angle A = ۹۰^\circ \\ BC = ۱۳a \\ AB = ۵a \end{array}\right\}$

خواسته‌ها : $BD = ?$



شکل۵-۱

از روی شکل می‌بینیم که مثلث ABD قائم‌الزاویه است. پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\overline{BD}^۲ = \overline{AB}^۲ + \overline{AD}^۲ \qquad \text{(رابطهٔ کلیدی)} \qquad (۱)$$

در این رابطه، غیر از BD اندازهٔ AD نیز نامعلوم است. پس باید رابطه‌ای شامل AD و جزءهای دیگر شکل را نیز به‌دست آوریم. با توجه به اینکه BD نیمساز زاویهٔ B است، ویژگیهای اندازه‌ای نیمساز زاویهٔ مثلث را در ذهن خود بررسی می‌کنیم و پی می‌بریم که:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

در این رابطه نیز دو مجهول داریم، اما درمی‌یابیم که اگر ترکیب نسبت در مخرج کنیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{AD}{AD+DC} = \frac{AB}{AB+BC} \Longrightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB+BC} \qquad (۲)$$

در این رابطه، غیر از AD اندازهٔ AC نیز نامعلوم است. با بررسی دوبارهٔ شکل می‌بینیم که مثلث ABC قائم‌الزاویه است و بنابرقضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\overline{AC}^۲ = \overline{BC}^۲ - \overline{AB}^۲ \qquad (۳)$$

به رابطه‌ای رسیده‌ایم که تنها یک مجهول دارد و از روی آن اندازهٔ AC، پس از آن از رابطهٔ (۲) اندازهٔ AD، و سرانجام از رابطهٔ (۱) اندازهٔ BD به‌دست می‌آید:

$$\overline{AC}^{۲} = (۱۳a)^{۲} - (۵a)^{۲} = ۱۴۴a^{۲} \Longrightarrow AC = ۱۲a$$

$$\frac{AD}{۱۲a} = \frac{۵a}{۵a + ۱۳a} \Longrightarrow AD = \frac{۱۰a}{۳}$$

$$\overline{BD}^{۲} = (۵a)^{۲} + (\frac{۱۰a}{۳})^{۲} \Longrightarrow BD = \frac{۵a\sqrt{۱۵}}{۳}$$

یادداشت. در مثال بالا می‌توان فرمول مربوط به اندازهٔ نیمساز داخلی یک زاویه از مثلث را رابطهٔ کلیدی قرار داد، اما محاسبه‌ها طولانی‌تر می‌شوند.

۵ـ۲ محاسبهٔ اندازهٔ یک پاره‌خط

روشی که به‌کار می‌رود همان روش کلی است. اما بنابرآنکه رابطهٔ کلیدی با بهره‌گیری از چه ویژگیهایی به‌دست آید، می‌توان دسته‌بندیهایی را روی مسأله انجام داد.

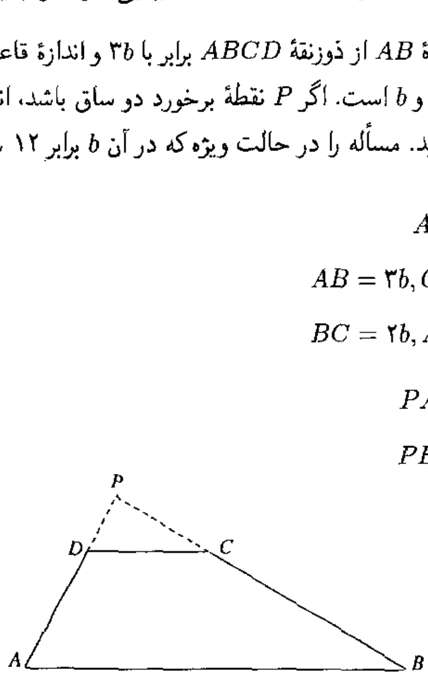
۵ـ۲ـ۱ بهره‌گیری از قضیهٔ تالس یا از تشابه مثلثها

با به‌کار بردن قضیهٔ تالس و یا تشابه مثلثها می‌توان رابطهٔ کلیدی را به‌صورت یک تناسب به‌دست آورد و این تناسب را نیز با بهره‌گیری از ویژگیهای تناسب به تناسبهایی کارامدتر تبدیل کرد.

مسألهٔ ۵ـ۲ـ۱. اندازهٔ قاعدهٔ AB از ذوزنقهٔ $ABCD$ برابر با $۳b$ و اندازهٔ قاعدهٔ CD، ساق BC و ساق AD به ترتیب برابر با b، $۲b$ و b است. اگر P نقطهٔ برخورد دو ساق باشد، اندازهٔ هر یک از دو پاره‌خط PA و PB را به‌دست آورید. مسأله را در حالت ویژه که در آن b برابر ۱۲ سانتیمتر است، حل کنید.

داده‌ها : $\left.\begin{array}{r} AB \| CD \\ AB = ۳b, CD = b \\ BC = ۲b, AD = b \end{array}\right\}$

خواسته‌ها : $\left.\begin{array}{r} PA = ? \\ PB = ? \end{array}\right\}$



شکل۵-۲

حل. از تشابه دو مثلث PAB و PCD داریم:

$$\frac{PC}{PB}=\frac{PD}{PA}=\frac{CD}{AB} \qquad (۱)$$

$$\frac{PC}{PB}=\frac{PD}{PA}=\frac{b}{۳b}=\frac{۱}{۳} \qquad (۲)$$

این تناسب را در دو طرف تفضیل نسبت در صورت می‌کنیم:

$$\frac{PB-PC}{PB}=\frac{PA-PD}{PA}=\frac{۳-۱}{۳}=\frac{۲}{۳} \qquad (۳)$$

با بررسی شکل و با توجه به داده‌ها داریم:

$$PB-PC=BC=۲b$$

$$PA-PD=AD=b$$

و رابطهٔ (۳) چنین می‌شود:

$$\frac{۲b}{PB}=\frac{b}{PA}=\frac{۲}{۳} \qquad (۴)$$

در نتیجه داریم:

$$PB=\frac{۳\times ۲b}{۲}=۳b \quad \text{و} \quad PA=\frac{b\times ۳}{۲}=\frac{۳b}{۲}$$

یادداشت. در حالت کلی اگر قاعدهٔ بزرگتر یک ذوزنقه به اندازهٔ a، قاعدهٔ کوچکتر آن به اندازهٔ b، ساقها به اندازه‌های m و n باشند، رابطه‌های (۲) و (۴) چنین می‌شوند:

$$\frac{PC}{PB}=\frac{PD}{PA}=\frac{b}{a}$$

$$\frac{m}{PB}=\frac{n}{PA}=\frac{a-b}{a}$$

و در نتیجه خواهیم داشت.

$$PA=\frac{na}{a-b} \quad \text{و} \quad PB=\frac{ma}{a-b}$$

تمرین ۵ـ۲ـ۱

۱ـ ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC به ترتیب برابر با a، $\frac{۲a}{۳}$ و $\frac{۳a}{۲}$ هستند. میانه‌های BM و CN رسم می‌شوند که در G برخورد می‌کنند. خطی که از G موازی با BC رسم شود با دو ضلع دیگر در D و E برخورد می‌کند. اندازه‌های ضلعهای چهارضلعی $DEMN$ را حساب کنید. مثال عددی: a را برابر با ۹ سانتیمتر بگیرید.

۲ـ در یک ذوزنقه دو قاعده به اندازه‌های $۳b$ و b و ارتفاع به اندازهٔ h است. از امتداد دو ساق مثلثی پدید می‌آید. اندازهٔ ارتفاع این مثلث را حساب کنید. مثال عددی: $b=۱۶$ و $h=۱۸$.

۳ـ از نقطهٔ D واقع بر ضلع AB از مثلث ABC، خط DE موازی با AC رسم می‌شود. اگر $BD=a$، $BE=۲AD$ و $CE=۲a$، اندازه‌های AB و BC را حساب کنید. مثال عددی: $a=۵$.

۴ـ در مثلث ABC که در آن $AC = a$، $AB = \frac{۳a}{۲}$ و $BC = ۲a$، در امتداد BC نقطهٔ D و در امتداد AB نقطهٔ E چنان به‌دست می‌آیند که $CD = \frac{a}{۳}$ و $AE = \frac{a}{۶}$. خط DE رسم می‌شود که با AC در F برخورد می‌کند. اندازه‌های CF و AF را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۱۰$.

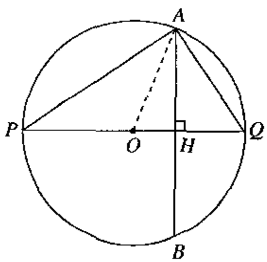
۵ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن وتر BC برابر با a و ارتفاع AH برابر با h است، مربع $MNPQ$ چنان محاط می‌شود که PQ بر وتر واقع باشد. اندازهٔ ضلع این مربع را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۸$، $h = ۳$.

۶ـ دو دایرهٔ به مرکزهای O و I و به شعاعهای R و r در A مماس خارج‌اند. از A خطی رسم می‌شود که با دایرهٔ O در B و با دایرهٔ I در C برخورد می‌کند. اگر $AB = \frac{۳R}{۲}$، اندازهٔ AC را حساب کنید. مثال عددی $R = ۸$ و $r = ۳$.

۵ـ۲ـ۲ بهره‌گیری از رابطه‌های اندازه‌ای مثلث قائم‌الزاویه

رابطه‌های اندازه‌ای که بین ضلعها و جزءهای دیگر مثلث قائم‌الزاویه برقرارند، به‌ویژه رابطهٔ فیثاغورس، در حل مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ اندازهٔ یک پاره‌خط بیشترین کاربرد را دارند. از این‌رو شناختن و به یادسپاری این رابطه‌ها اهمیت دارد.

مسألهٔ ۵ـ۲ـ۲. در دایرهٔ به شعاع $R = ۳$ وتری رسم می‌شود که فاصلهٔ مرکز دایره از آن برابر با یک سوم شعاع دایره است. اندازهٔ این وتر و همچنین فاصله‌های دو سر آن از دو سر قطر عمود بر آن را حساب کنید.



شکل۵-۳

داده‌ها:
$$\left.\begin{array}{r} \text{دایرهٔ به قطر } PQ \text{ و به مرکز } O \\ AB \perp PQ \\ PQ = ۲R \\ OH = \frac{R}{۳} \end{array}\right\}$$

خواسته‌ها:
$$\left.\begin{array}{r} AB = ? \\ AQ = ?, AP = ? \end{array}\right\}$$

حل. شعاع OA را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHO داریم:

$$\overline{AH}^۲ = \overline{OA}^۲ - \overline{OH}^۲ = R^۲ - \frac{R^۲}{۹} = \frac{۸R^۲}{۹}$$

$$AH = \frac{۲R\sqrt{۲}}{۳} \quad \text{و} \quad AB = ۲AH = \frac{۴R\sqrt{۲}}{۳}$$

در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AHP و AHQ داریم:

$$\overline{AP}^{۲} = \overline{AH}^{۲} + \overline{PH}^{۲} \quad \text{و} \quad \overline{AQ}^{۲} = \overline{AH}^{۲} + \overline{QH}^{۲}$$

$$PH = OP + OH = R + \frac{R}{۳} = \frac{۴R}{۳}$$

$$QH = OQ - OH = R - \frac{R}{۳} = \frac{۲R}{۳}$$

$$\overline{AP}^{۲} = \frac{۸R^{۲}}{۹} + \frac{۱۶R^{۲}}{۹} = \frac{۲۴R^{۲}}{۹} \Longrightarrow AP = \frac{۲R\sqrt{۶}}{۳}$$

$$\overline{AQ}^{۲} = \frac{۸R^{۲}}{۹} + \frac{۴R^{۲}}{۹} = \frac{۱۲R^{۲}}{۹} \Longrightarrow AQ = \frac{۲R\sqrt{۳}}{۳}$$

با توجه به تقارن نسبت به PQ، فاصله‌های PB و QB به ترتیب با AP و AQ برابرند و در حالت ویژهٔ $R = ۳$ داریم:

$$AB = ۴\sqrt{۲} \ , \ AP = BP = ۲\sqrt{۶} \ , \ AQ = BQ = ۲\sqrt{۳}$$

تمرین ۵ـ۲ـ۲

۱ـ اندازهٔ ارتفاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر با h است. اندازهٔ ضلع آن را حساب کنید. مثال عددی: $h = ۵۴$.

۲ـ در چهارضلعی $ABCD$ زاویه‌های A و B قائمه‌اند، $AB = ۳a$، $CD = a$ و $AD = a$. اندازه‌های BC، AC و BD را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۱/۲$.

۳ـ نقطهٔ D روی ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC واقع است. اگر $BC = ۴a$ و $CD = a$، اندازهٔ AD را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۳$.

۴ـ دو دایرهٔ به شعاعهای R و r بر یکدیگر عمودند. فاصلهٔ مرکزهای آنها را از یکدیگر و اندازهٔ وتر مشترک آنها را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۸$ و $r = ۳$.

۵ـ در مربع $ABCD$ که هر ضلعش به اندازهٔ a است، مربع دیگری چنان محاط می‌شود که فاصلهٔ هر رأس آن از رأس مربع محیطی برابر با یک‌چهارم ضلع این مربع باشد. اندازهٔ قطر مربع محاطی را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۳۲$.

۶ـ در یک مربع به ضلع a، مربعی دیگر چنان محاط شده است که ضلعهای نظیر هم از دو مربع با یکدیگر زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازند. اندازهٔ ضلع مربع محاطی را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۸$.

۷ـ دو دایره به شعاعهای R و r مماس خارج‌اند. اندازهٔ مماس مشترک خارجی آنها را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۷$ و $r = ۲۱$.

۸ـ مماسهای Ax و By و مماسی دیگر بر نیمدایرهٔ به قطر $AB = ۲R$ رسم شده‌اند. این مماس با Ax در C و با By در D برخورد می‌کند. با فرض $AC = \frac{R}{۲}$، اندازه‌های BD و CD را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۸$.

۹ـ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$، دو قطر AC و BD به ترتیب بر دو ساق BC و AD عمودند. با فرض $CD = b$ و $AB = ۲b$، اندازه‌های قطرها و ساقها را حساب کنید. مثال عددی: $b = ۷۲$.

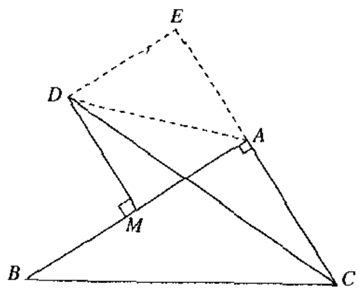
۱۰ـ در مثلث ABC، زاویهٔ B به اندازهٔ ۴۵ درجه، زاویهٔ C به اندازهٔ ۶۰ درجه و ارتفاع AH به اندازهٔ h است. اندازه‌های ضلعها را حساب کنید. مثال عددی: $h = ۱۲$

۵ـ۲ـ۳ بهره‌گیری از رابطه‌های اندازه‌ای مثلث نامشخص

مسألهٔ ۵ـ۲ـ۳. در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه است، $AB = ۴a$ و $AC = ۳a$. از M وسط AB و در خارج مثلث عمود MD برابر با نصف AB بر AB عمود می‌شود. اندازهٔ CD را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۵$.

$$\left.\begin{array}{r} \angle A = ۹۰^\circ \\ AC = ۳a, AB = ۴a \\ AM = MB \\ MD = MA, MD \perp AB \end{array}\right\} : \text{داده‌ها}$$

خواسته‌ها : $CD = ?$



شکل۵-۴

حل. مربع $AMDE$ و خط AD را رسم می‌کنیم. در مثلث ACD که زاویهٔ A از آن منفرجه و DE ارتفاع وارد بر ضلع AC است، بنابر رابطه‌های اندازه‌ای در مثلث نامشخص داریم:

$$\overline{CD}^۲ = \overline{AC}^۲ + \overline{AD}^۲ + ۲AC \cdot AE \qquad (۱)$$

دراین رابطه باید اندازه‌های $\overline{AD}^۲$ و AE را حساب کنیم. چهارضلعی $AMDE$ مربع است و در آن داریم:

$$AE = MD = ۲a, \qquad \overline{AD}^۲ = \overline{AM}^۲ + \overline{MD}^۲ = ۴a^۲ + ۴a^۲ = ۸a^۲$$

اکنون رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$\overline{CD}^{۲} = ۹a^{۲} + ۸a^{۲} + ۲ \times ۳a \times ۲a = ۲۹a^{۲}$$

$$CD = a\sqrt{۲۹}$$

در حالت $a = ۵$ داریم $CD = ۵\sqrt{۲۹}$.

* یادداشت. مسأله را می‌توان با به‌کار بردن رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADE نیز حل کرد. در این مثلث داریم:

$$DE = AE = ۲a \quad \text{و} \quad CE = CA + AE = ۵a$$

$$\overline{CD}^{۲} = \overline{CE}^{۲} + \overline{DE}^{۲} = ۲۵a^{۲} + ۴a^{۲} = ۲۹a^{۲}$$

تمرین ۵ـ۲ـ۳

۱ـ در مثلث ABC اندازه‌های ضلعهای AB، BC و CA به‌ترتیب $۲a$، $۴a$ و $۳a$ و H پای ارتفاع وارد بر ضلع AB است. اندازه‌های AH و CH را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۷۲$.

۲ـ در مثلث ABC زاویهٔ A به اندازهٔ ۶۰ درجه و دو ضلع AB و AC به‌ترتیب برابر با $۲a$ و $۳a$ هستند. اندازهٔ ضلع BC را حساب کنید. مثال عددی: $AB = ۱۸$.

۳ـ در مثلث ABC، دو برابر AB با سه برابر BC برابر است و AC برابر با نصف مجموع دو ضلع دیگر است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را حساب کنید. مثال عددی: $AB = ۱۲$.

۴ـ دو دایرهٔ به مرکزهای O و I و به شعاعهای R و r در A و B با هم برخورد کرده‌اند. با فرض $r = \frac{R}{۲}$ و $OI = \frac{۴R}{۳}$، اندازهٔ وتر مشترک AB و فاصلهٔ A تا وسط OI را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۳۶$.

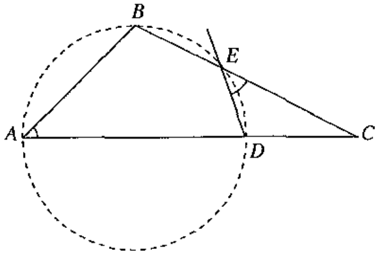
۵ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$، قاعده‌های AB و CD به‌ترتیب برابر با $۳a$ و a، ساق AD برابر با a و زاویهٔ A به اندازهٔ ۶۰ درجه است. اندازهٔ ساق BC و فاصلهٔ وسطهای دو قاعده از یکدیگر را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۸۵$.

۵ـ۲ـ۴ بهره‌گیری از ویژگیهای توان نقطه نسبت به دایره

مسألهٔ ۵ـ۲ـ۴. در مثلث ABC، زاویهٔ A به اندازهٔ ۴۵ درجه و ضلعهای AC و BC به‌ترتیب برابر با a و $\frac{۳a}{۴}$ هستند. نقطهٔ D روی ضلع AC واقع و فاصله‌اش از C برابر با یک‌سوم اندازهٔ این ضلع است. خط Dx رسم شده که با BC در E برخورد کرده و زاویهٔ DEC به اندازهٔ ۴۵ درجه است. اندازهٔ CE را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۱۲$.

$$\left.\begin{array}{r}\angle A = ۴۵^\circ \\ BC = \frac{۳a}{۴}, AC = a \\ \angle E = ۴۵^\circ, CD = \frac{a}{۳}\end{array}\right\}$$ داده‌ها :

خواسته‌ها : $CE = ?$



شکل۵-۵

حل. زاویهٔ DEB به اندازهٔ ۱۳۵ درجه و در نتیجه چهارضلعی $ADEB$ محاطی است. نسبت به دایرهٔ محیطی این چهارضلعی داریم:

$$CE \cdot CB = CD \cdot CA$$
$$CE \times \frac{۳a}{۴} = \frac{a}{۳} \times a \Longrightarrow CE = \frac{۴a}{۹}$$

با فرض $a = ۱۲$ اندازهٔ CE برابر با $\frac{۱۶}{۳}$ می‌شود.

تمرین ۵ـ۲ـ۴

۱ـ در امتداد قطر BC از دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R، به چه فاصله از O باید نقطهٔ A واقع باشد که از آن بتوان خطی رسم کرد که با دایره در D و E برخورد کند به‌گونه‌ای که AD با DE و با شعاع دایره برابر باشد. اندازه‌های AB و AC را نیز حساب کنید. مثال عددی: $R = ۵$.

۲ـ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و ABD در وتر AB مشترک‌اند و در یک طرف آن واقع‌اند. ضلع AD با ضلع BC در E واقع در $\frac{۲}{۵}$ در ازای آن ابتدا از C برخورد می‌کند. به فرض $AB = a$ و $AC = \frac{۳a}{۵}$، اندازه‌های ضلعهای دیگر دو مثلث را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۲۰$.

۳ـ قطر یک دایره از یک طرف به اندازهٔ شعاع امتداد می‌یابد و از آنجا مماسی بر دایره رسم می‌شود. اندازهٔ این مماس را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۲۴$.

۴ـ در نقطهٔ B از دایرهٔ به شعاع R، مماسی بر آن رسم می‌شود که با امتداد قطر MN از آن در A برخورد می‌کند و با آن زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد. در یک نقطهٔ دیگر E نیز مماسی بر دایره

رسم می‌شود به‌گونه‌ای که در نقطه‌ای مانند C بر AB عمود باشد و با MN در D برخورد کند. اندازه‌های AC و CD را حساب کنید.

۵ـ۲ـ۵ بهره‌گیری از دستورهای مربوط به چندضلعیهای منتظم

برای محاسبهٔ اندازه‌های ضلع، سهم یا شعاع یک چندضلعی منتظم که در یک دایره محاط یا بر آن محیط باشد بر حسب R شعاع آن دایره، دستورهایی وجود دارد که می‌توان آنها را به‌کار برد. (شعاع دایرهٔ محیطی چندضلعی منتظم را شعاع آن چندضلعی و شعاع دایرهٔ محاطی آن را سهم آن چندضلعی می‌نامند.)

ضلع n ضلعی منتظم محاطی را با C_n و سهم آن را با r_n نشان می‌دهند. برای سه‌ضلعی، چهارضلعی و شش‌ضلعی منتظم محاطی دستورهایی را که می‌توان به‌کار برد چنین‌اند:

$$C_۳ = R\sqrt{۳} \quad , \quad r_۳ = \frac{R}{۲}$$

$$C_۴ = R\sqrt{۲} \quad , \quad r_۴ = \frac{R\sqrt{۲}}{۲}$$

$$C_۶ = R \quad , \quad r_۶ = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$$

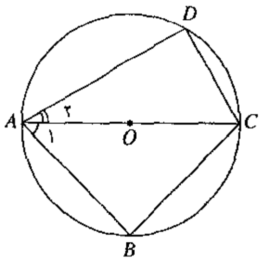
در n ضلعی منتظم محیطی، سهم همان R شعاع دایرهٔ محاطی است، ضلع را با A_n و شعاع را با R_n نشان می‌دهند و در چند حالت ویژه داریم:

$$A_۳ = ۲R\sqrt{۳} \quad و \quad R_۳ = ۲R$$

$$A_۴ = ۲R \quad و \quad R_۴ = R\sqrt{۲}$$

$$A_۶ = \frac{۲R\sqrt{۳}}{۳} \quad و \quad R_۶ = \frac{۲R\sqrt{۳}}{۳}$$

مسألهٔ ۵ـ۲ـ۵. چهارضلعی $ABCD$ در دایرهٔ به قطر $AC = ۲R$ محاط است و ضلعهای AB و AD از آن با این قطر به ترتیب زاویه‌های ۴۵ درجه و ۳۰ درجه می‌سازند. اندازهٔ هر یک از ضلعها را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۲۵$.



شکل۵-۶

داده‌ها : چهارضلعی $ABCD$ محاط در دایرهٔ O است.
$AC = ۲R$
$\angle A_۱ = ۴۵^\circ$ و $\angle A_۲ = ۳۰^\circ$

خواسته‌ها : اندازهٔ هر یک از ضلعها

حل. کمانهای BC و CD که روبه‌رو به زاویه‌های محاطی ۴۵ درجه و ۳۰ درجه‌اند به‌ترتیب به اندازه‌های ۹۰ درجه و ۶۰ درجه‌اند و چون AC قطر دایره است، نتیجه می‌شود کمان AB به اندازهٔ ۹۰

درجه و کمان AD به اندازهٔ ۱۲۰ درجه است. بنابراین:

$$AB = BC = C_۴ = R\sqrt{۲}$$

$$CD = C_۶ = R$$

$$DA = C_۳ = R\sqrt{۳}$$

$$R = ۲۵ \Longrightarrow AB = BC = ۲۵\sqrt{۲}$$

$$CD = ۲۵$$

$$DA = ۲۵\sqrt{۳}$$

تمرین ۵ـ۲ـ۵

۱ـ در یک ذوزنقهٔ محاط در دایرهٔ به شعاع R، قاعدهٔ کوچکتر ضلع شش‌ضلعی منتظم است و قاعدهٔ بزرگتر شعاع عمود بر آن را نصف می‌کند و این دو قاعده در دو طرف مرکز دایره واقع‌اند. اندازهٔ ارتفاع ذوزنقه را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۷/۵$.

۲ـ مسألهٔ پیش را در حالتی حل کنید که دو قاعدهٔ ذوزنقه در یک طرف مرکز دایره واقع باشند.

۳ـ هشت‌ضلعی منتظمی در دایرهٔ به شعاع R محاط است. وسطهای ضلعهای مجاور پشت سرهم به‌هم وصل می‌شوند و هشت‌ضلعی منتظم دیگری رسم می‌شود. اندازهٔ ضلع این هشت‌ضلعی را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۱۵$.

۴ـ مثلثی متساوی‌الاضلاع در دایرهٔ به شعاع R محاط است. اندازهٔ ارتفاع و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی آن را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۳۵$.

۵ـ محیط دایره‌ای به شش قسمت برابر تقسیم می‌شود و نقطه‌های به‌دست آمده یک در میان به‌هم وصل می‌شوند. از برخورد این خطها با یکدیگر یک شش‌ضلعی منتظم به‌دست می‌آید. اندازهٔ ضلع این شش‌ضلعی را حساب کنید.

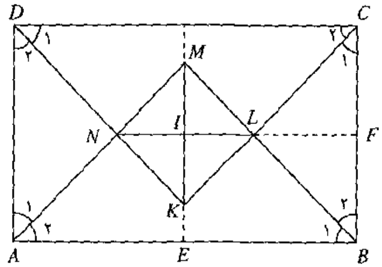
۵ـ۲ـ۶ بهره‌گیری از مجموع یا تفاضل دو پاره‌خط کمکی

برای محاسبهٔ اندازهٔ یک پاره‌خط، گاه باید آن را به پاره‌هایی کوچکتر تقسیم کرد و اندازه‌های این پاره‌خطها را به‌دست آورد و گاه باید اندازه‌های دو پاره‌خط دیگر و تفاضل آنها را حساب کرد.

مسألهٔ ۵ـ۲ـ۶. ثابت کنید چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های یک مستطیل، مربع است و اندازهٔ قطر آن را برحسب اندازه‌های ضلعهای مستطیل حساب کنید.

$$\text{داده‌ها} : \left\{\begin{array}{r} ABCD \text{ مستطیل} \\ \angle A_۱ = \angle A_۲ \,,\, \angle B_۱ = \angle B_۲ \\ \angle C_۱ = \angle C_۲ \,,\, \angle D_۱ = \angle D_۲ \\ AB = a \,,\, BC = b \end{array}\right.$$

$$\text{خواسته‌ها} : \left\{\begin{array}{r} KLMN \text{ مربع است.} \\ LN = ? \end{array}\right.$$



شکل۵-۷

حل. نیمساز هر زاویه از مستطیل آن زاویه را به دو زاویهٔ ۴۵ درجه تقسیم می‌کند. از این‌رو هر یک از مثلثهای MAB، LBC، KCD و NDA قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. نخستین نتیجه این است که زاویه‌های چهارضلعی $KLMN$ قائمه‌اند. نتیجهٔ دیگر این است که نیمسازهای زاویه‌های M و K عمودمنصف‌های AB و CD هستند و بر هم واقع می‌شوند و بنابراین قطر MK از مستطیل $KLMN$ نیمساز زاویه‌های روبه‌رو است و در نتیجه این مستطیل مربع است.

مرکز مربع $KLMN$ را با I، وسط AB را با E و وسط BC را با F نشان می‌دهیم. داریم:

$$ME = EB = \frac{a}{۲} \,,\, IE = BF = \frac{b}{۲}$$

$$IM = ME - IE = \frac{a}{۲} - \frac{b}{۲} = \frac{a-b}{۲}$$

$$MK = LN = ۲IM = a - b$$

تمرین ۵ـ۲ـ۶

۱ـ قاعده‌های بزرگ و کوچک یک ذوزنقه به اندازه‌های a و b هستند. وسطهای دو قطر این ذوزنقه به چه فاصله از یکدیگرند؟ مثال عددی: $a = ۱۴۸$، $b = ۶۴$.

۲ـ روی ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ A از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و در خارج آن، مثلثهایی متساوی‌الاضلاع رسم می‌شوند. اگر زاویهٔ B به اندازهٔ ۳۰ درجه و اندازهٔ BC برابر با $۲a$ باشد، اندازه‌های

پاره‌خطهایی را حساب کنید که رأسهای مثلثهای ساخته شده را به وسط BC وصل می‌کنند. مثال عددی: $a = ۷$.

۳ـ ارتفاع AH و نیمساز AD از مثلث قائم‌الزاویه ABC رسم شده‌اند. با فرض $BC = a$ و $AC = \frac{۳a}{۵}$، اندازهٔ DH را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۸$.

۴ـ مثلث متساوی‌الاضلاع AEF در مربع $ABCD$ به ضلع a محاط شده است و E روی BC و F روی CD قرار دارد. اندازهٔ ضلع این مثلث را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۵$.

۵ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$، قاعدهٔ بزرگتر برابر با a و قاعدهٔ کوچکتر برابر با b است. از یک چهارم ارتفاع ذوزنقه ابتدا از قاعدهٔ بزرگتر خطی موازی با دو قاعده رسم می‌شود. اندازهٔ بخشی از این خط را که به دو ساق محدود است، حساب کنید. مثال عددی: $a = ۱۵۲$ و $b = ۷۵$.

۶ـ مسألهٔ پیش را در حالتی حل کنید که خط موازی با دو قاعده ارتفاع را با نسبت m به n تقسیم کند.

۵ـ۲ـ۷ محاسبهٔ اندازهٔ کمانی از دایره

اگر کمانی از دایره از حالت خمیدگی بیرون آورده شود و به‌صورت یک پاره‌خط درآید، اندازهٔ این پاره‌خط را اندازهٔ آن کمان تعریف می‌کنند. محیط دایره، یعنی اندازهٔ کمان ۳۶۰ درجه، برابر با حاصلضرب قطر آن در عدد π است که اگر R اندازهٔ شعاع دایره و C اندازهٔ محیط آن باشد، مقدار C از فرمول $C = ۲\pi R$ به‌دست می‌آید. نسبت اندازهٔ کمانی از یک دایره به محیط آن برابر با نسبت اندازهٔ آن کمان برحسب درجه به ۳۶۰ درجه است. چنانچه یک کمان از دایره به اندازهٔ n درجه و اندازهٔ آن l و شعاع دایره R باشد، این تناسب و دستور اندازهٔ کمان چنین می‌شود:

$$\frac{l}{۲\pi R} = \frac{n}{۳۶۰} \Longrightarrow l = \frac{nR\pi}{۱۸۰}$$

و اگر n برحسب گراد یا برحسب رادیان باشد، مقدار l می‌شود:

$$l = \frac{nR\pi}{۲۰۰} \quad (\text{بر حسب گراد}) \qquad , \qquad l = Rn \quad (\text{بر حسب رادیان})$$

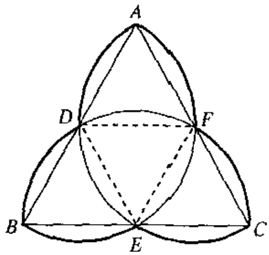
در هر صورت برای محاسبهٔ اندازهٔ کمانی از یک دایره، دو عامل شعاع دایره و اندازهٔ کمان باید در دست باشند یا اینکه بتوان آنها را به‌دست آورد.

هرگاه محاسبهٔ اندازهٔ یک خم پدید آمده از چند کمان دایره‌ای خواسته شده باشد، باید اندازهٔ هر یک از کمانها را جداگانه به‌دست آورد و با هم جمع کرد. همچنین است هرگاه اندازهٔ خطی پدید آمده از کمانهایی از دایره و از پاره‌خطها خواسته شده باشد.

مسألهٔ ۵ـ۲ـ۷. به قطر هر یک از ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۲a$ و در جهت داخل مثلث، نیمدایره‌هایی رسم شده‌اند و یک گلباد سه‌پر پدید آمده است. محیط آن را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۹\text{cm}$.

داده‌ها :
$AB = BC = CA = ۲a$
$\widehat{AD}$ و $\widehat{CE}$ بخشهایی از نیمدایرهٔ به‌قطر AC هستند.
$\widehat{BD}$ و $\widehat{CF}$ بخشهایی از نیمدایرهٔ به‌قطر BC هستند.
$\widehat{BE}$ و $\widehat{AF}$ بخشهایی از نیمدایرهٔ به‌قطر AB هستند.

خواسته‌ها : محیط منحنی $ADBECFA$



شکل۵-۸

حل. شعاع هر یک از دایره‌ها نصف یک ضلع مثلث است و چون خطی که وسطهای دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند برابر با نصف ضلع دیگر است، نقطه‌های برخورد دوبه‌دوی نیمدایره‌ها عبارت‌اند از نقطه‌های D، E و F وسطهای ضلعهای مثلث. مثلثهای ADF، BDF و CEF متساوی‌الاضلاع‌اند و بنابراین محیط منحنی گلباد رسم شده از شش کمان دایره‌ای برابر تشکیل شده است و اگر این محیط را به p نشان دهیم داریم:

$$p = ۶(\text{اندازهٔ } \widehat{AD})$$

چون زاویهٔ مرکزی کمان AD یعنی زاویهٔ AFD به اندازهٔ ۶۰ درجه است، بنابراین:

$$p = ۶\left(\frac{۶۰ \times a \times \pi}{۱۸۰}\right) = ۲\pi a$$

و در حالت $a = ۹\text{cm}$ مقدار p برابر با ۱۸π سانتیمتر یا تقریباً برابر با ۵۶٫۵ سانتیمتر است.

تمرین ۵ـ۲ـ۷

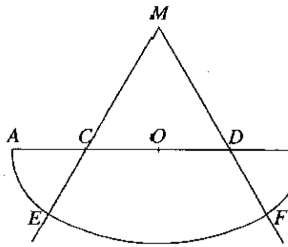
۱ـ به قطر هر یک از ضلعهای یک مربع و داخل آن، نیمدایره‌هایی رسم می‌شوند که از برخورد آنها یک گلباد چهار پر پدید می‌آید. اگر ضلع مربع به اندازهٔ $۲a$ باشد، محیط گلباد را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۹$.

۲ـ محیط دایرهٔ به شعاع R به شش قسمت برابر تقسیم و به مرکز هر یک از نقطه‌های تقسیم و به شعاع R و در داخل دایرهٔ داده شده، کمانی دایره‌ای محدود به دو نقطه تقسیم مجاور رسم

می‌شود. به این ترتیب گلبادی شش‌پر به‌دست می‌آید. محیط آن را حساب کنید. مثال عددی، $R = ۲۴$.

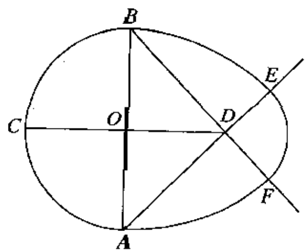
۳ـ به مرکزهای A و B، دو سر پاره‌خط AB به اندازهٔ a و در یک طرف آن، دو کمان دایره‌ای به شعاع a رسم می‌شوند که در C به هم می‌رسند. اندازهٔ خم ABC را، که *تاقی* نام دارد، حساب کنید، مثال عددی، $a = ۱۲$.

۴ـ نقطه‌های C، O و D پاره‌خط AB به درازای $۴a$ را به چهار پاره‌خط برابر تقسیم می‌کنند، مثلث متساوی‌الاضلاع CDM رسم می‌شود و به مرکزهای C و D و به شعاع a کمانهایی دایره‌ای رسم می‌شوند که با امتدادهای MC و MD در E و F برخورد می‌کنند. دو نقطهٔ E و F با کمانی دایره‌ای به مرکز M به هم وصل می‌شوند. اندازهٔ کمان $AEFB$ و بیشترین فاصلهٔ آن تا AB را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۲/۴$.



۵ـ نقطه‌های O و I پاره‌خط AB به اندازهٔ $۳a$ را به سه پاره‌خط برابر تقسیم کرده‌اند که O بین A و I واقع است. به مرکزهای O و I و به شعاع a دو دایره رسم می‌شود که در C و D با هم برخورد می‌کنند. به مرکزهای C و D و به شعاع $۲a$ نیز کمانهایی محدود به دایره‌های به مرکز O و I رسم می‌شوند. محیط خم بستهٔ پدید آمده (به نام شبه‌بیضی) را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۴$.

۶ـ به قطر $AB = ۲a$ نیمدایره‌ای رسم می‌شود و D قرینهٔ C وسط کمان AB نسبت به خط AB به‌دست می‌آید و خطهای AD و BD رسم می‌شوند. به مرکزهای A و B و به شعاع $۲a$ کمانهایی داخل زاویه‌های ABD و BAD رسم می‌شوند که با AD و BD در E و F برخورد می‌کنند. کمان EF به مرکز D نیز رسم می‌شود. محیط خم بستهٔ به‌دست آمده را که مرغانه نام دارد حساب کنید. مثال عددی: $a = ۳$.



۷ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$، زاویه‌های C و D قائمه، زاویهٔ B به اندازهٔ ۶۰ درجه، قاعدهٔ BC به اندازهٔ a و ساق CD به اندازهٔ b است. نیمساز زاویهٔ A با قاعدهٔ BC در O برخورد می‌کند. کمانی که به مرکز O و به شعاع b رسم شود در E بر AB و در F بر AD مماس می‌شود. نیمساز زاویهٔ B با OE در I برخورد می‌کند. به مرکز I و به شعاع IE کمانی رسم می‌شود که در E بر AB و در G بر BC مماس می‌شود. اندازهٔ خط شکستهٔ $DFEGC$ را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۲۱$ و $b = ۱۰$.

۸ـ در مربع به ضلع برابر با a، به مرکز هر یک از رأسها و به شعاع a و داخل مربع کمانی دایره‌ای رسم می‌شود. محیط گلباد به‌دست آمده را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۱۸$.

۳ـ۵ چگونگی محاسبهٔ مساحت یک شکل

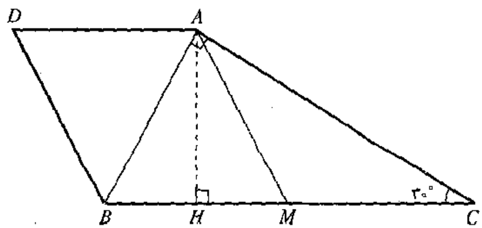
برای برخی از شکلهای هندسی مانند مثلث، متوازی‌الاضلاع ...، چندضلعی منتظم، دایره و بیضی، دستور محاسبهٔ مساحت معلوم است و در درس هندسه آموخته می‌شود. برای محاسبهٔ مساحت این‌گونه شکلها، کافی است اندازه‌های جزءهایی از شکل که در دستور مساحت به‌کار رفته است، داده شده باشد یا اینکه بتوان آنها را به‌دست آورد. برای محاسبهٔ مساحت شکلهای هندسی دیگر، یا باید آنها را به یکی از این شکلها تبدیل یا تجزیه کرد، یا ثابت کرد که بین مساحت آنها و مساحت یکی از این شکلها رابطه‌ای معلوم برقرار است.

۱ـ۳ـ۵ روش یکم: بهره‌گیری از دستورهای کلاسیک مساحت

مسألهٔ ۵ـ۳ـ۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، وتر BC به اندازهٔ $۲a$ و زاویهٔ C به اندازهٔ ۳۰ درجه است. میانهٔ AM از مثلث رسم شده است. از A خطی موازی با BC و از B خطی موازی با AM رسم می‌شود که این دو خط با هم در D برخورد می‌کنند. مساحت چهارضلعی $ACBD$ را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۵$.

$$\text{داده‌ها :}\left\{\begin{array}{ccc} \angle BAC = ۹۰^\circ & \text{و} & \angle C = ۳۰^\circ \\ BC = ۲a & \text{و} & BM = MC \\ AD \| BC & \text{و} & BD \| AM \end{array}\right.$$

خواسته‌ها : مساحت $ACBD$



شکل۵-۹

حل. شکل به‌دست آمده ذوزنقه و اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ آن معلوم است. پس باید اندازهٔ قاعدهٔ AD و اندازهٔ ارتفاع AH را حساب کنیم. در متوازی‌الاضلاع $ADBM$ داریم:

$$AD = BM = BC/۲ = a$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH که زاویهٔ C از آن ۳۰ درجه است ضلع AH نصف ضلع AC است. مثلث ABM متساوی‌الاضلاع است، زیرا میانهٔ AM با BM (نصف وتر) برابر است و زاویه B از آن ۶۰ درجه است. بنابراین H وسط BM است و داریم:

$$CH = \frac{۳ \times ۲a}{۴} = \frac{۳a}{۲}$$

$$\overline{AC}^{۲} = \overline{AH}^{۲} + \overline{CH}^{۲} \Longrightarrow ۴\,\overline{AH}^{۲} - \overline{AH}^{۲} = \overline{CH}^{۲}$$

$$۳\,\overline{AH}^{۲} = \left(\frac{۳a}{۲}\right)^{۲} \Longrightarrow AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

در نتیجه مساحت ذوزنقهٔ $ADBC$ برابر می‌شود با:

$$S = \frac{(BC + AD) \times AH}{۲} = \frac{۱}{۲}(۲a + a) \times \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$$

در حالت ویژهٔ $a = ۵\text{cm}$ داریم:

$$a = ۵\text{cm} \Longrightarrow S = \frac{۷۵\sqrt{۳}}{۴} \approx ۳۱/۸۷۵ \quad \text{سانتیمتر مربع}$$

تمرین ۵ـ۳ـ۱

۱ـ مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در هر یک از حالتهای زیر حساب کنید.

۱) اندازهٔ هر ضلع آن $a = ۱۰$ باشد.

۲) اندازهٔ ارتفاع آن $h = ۸$ باشد.

۳) شعاع دایرهٔ محاطی آن $r = ۳$ باشد.

۴) شعاع دایرهٔ محیطی آن $R = ۱۵$ باشد.

۲ـ مساحت مثلث متساوی‌الساقینی را حساب کنید که اندازهٔ قاعدهٔ آن $a = ۳۰$ و اندازهٔ هر ساق آن $b = ۲۵$ باشد.

۳ـ روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، در فاصلهٔ یک‌سوم a از هر رأس یک نقطه به‌دست آورید و آنها را پشت سرهم به یکدیگر وصل کنید. به این ترتیب یک شش‌ضلعی پدید می‌آید. مساحت آن را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۹$.

۴ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$، قاعده‌ها به اندازه‌های a و $۳a$ و یکی از دو ساق به اندازهٔ a است و با قاعدهٔ بزرگتر زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد. مساحت این ذوزنقه را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۵۸$.

۵ـ در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، هر یک از دو ساق به اندازهٔ $۳a$ و هر یک از دو قطر به اندازهٔ $۴a$ است و دو قطر بر دو ساق عمودند. مساحت این ذوزنقه را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۷۵$.

۶ـ در متوازی‌الاضلاعی یک زاویه به اندازهٔ ۶۰ درجه و یکی از ضلعها دو برابر ضلع دیگر است. نیمسازهای داخلی زاویه‌ها رسم می‌شوند که از برخورد آنها یک مستطیل پدید می‌آید. مساحت این مستطیل را بر حسب a اندازهٔ کوچکترین ضلع متوازی‌الاضلاع به‌دست آورید. مثال عددی: $a = ۱۲$.

۵ـ۳ـ۲ روش دوم: بهره‌گیری از سنجش مساحتها با یکدیگر

گاه می‌توان از راه سنجش با یک مساحت معلوم یا با مساحتی که به سادگی حساب می‌شود، مساحت خواسته شده‌ای را به‌دست آورد. ویژگیهایی که در این سنجش به‌کار می‌آیند عبارتند از:

۱) نسبت مساحتهای دو مثلث یا دو متوازی‌الاضلاع که در قاعده مشترک باشند برابر با نسبت ارتفاعهای آنهاست، با توجه به این نکته که لوزی، مستطیل و مربع هم متوازی‌الاضلاع به شمار می‌آیند.

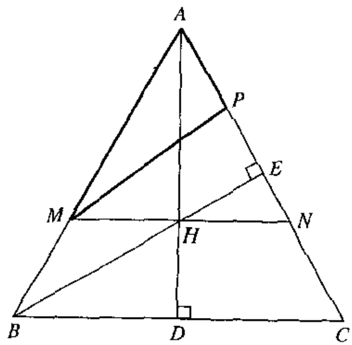
۲) نسبت مساحتهای دو شکل متشابه برابر با توان دوم نسبت تشابه آنهاست.

۳) اگر دو زاویه از دو مثلث با هم برابر یا مکمل هم باشند، نسبت مساحتهای آن دو مثلث برابر با نسبت حاصلضربهای دو ضلع این زاویه‌هاست.

مسألهٔ ۵ـ۳ـ۲. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a، از H مرکز ارتفاعی خطی موازی با BC رسم می‌شود که با AB و AC در M و N برخورد می‌کند. از نقطهٔ P به فاصلهٔ یک‌چهارم AC از A به M وصل می‌شود. مساحت مثلث AMP را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۱۲$.

داده‌ها :
- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a.
- H مرکز ارتفاعی مثلث است.
- $AP = \frac{AC}{۴}$ و $MN \| BC$

خواسته‌ها : مساحت AMP



شکل۵-۱۰

حل. دو مثلث AMP و ABC در زاویهٔ A مشترک‌اند، پس نسبت مساحتهای آنها برابر با نسبت حاصل‌ضربهای دو ضلع این زاویه از دو مثلث است:

$$\frac{S(AMP)}{S(ABC)} = \frac{AM \cdot AP}{AB \cdot AC}$$

در این رابطه اندازه‌های AB، AC و AP معلوم‌اند و باید اندازهٔ AM و مساحت ABC را حساب کنیم.

در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاعها و میانه‌ها بر هم واقع‌اند و مرکز ارتفاعی نقطهٔ برخورد میانه‌ها هم هست. بنابراین H به فاصلهٔ دوسوم AD از A واقع است و بنابر قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{۲}{۳} \Longrightarrow AM = \frac{۲}{۳}AB = \frac{۲a}{۳}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD داریم:

$$\overline{AD}^{۲} = \overline{AB}^{۲} - \overline{BD}^{۲} = a^{۲} - \frac{a^{۲}}{۴} = \frac{۳a^{۲}}{۴} \Longrightarrow AD = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

و مساحت مثلث ABC می‌شود:

$$S(ABC) = \frac{۱}{۲}BC \cdot AD = \frac{a}{۲} \times \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$$

و بنابراین:

$$\frac{S(AMP)}{a^{۲}\sqrt{۳}/۴} = \frac{۲a/۳ \times a/۴}{a \times a} \Longrightarrow S(AMP) = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۲۴}$$

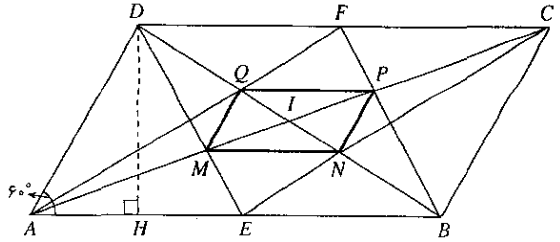
در حالت ویژهٔ $a = ۱۲$ داریم:

$$a = ۱۲ \Longrightarrow S(AMP) = \frac{۱۴۴\sqrt{۳}}{۲۴} = ۶\sqrt{۳} \approx ۱۰/۲$$

* **مسألهٔ ۵ـ۳ـ۳.** در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، ضلع AB اندازهٔ $۳a$، ضلع AD به اندازهٔ $۲a$، زاویهٔ A به اندازهٔ ۶۰ درجه، E وسط AB و F وسط CD است. رأسهای A و B به F و رأسهای C و D به E وصل می‌شوند. از برخورد این خطها با دو قطر، چهارضلعی $MNPQ$ پدید می‌آید. مساحت آن را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۳$.

داده‌ها :
$$\left.\begin{array}{r} AD \| BC,\ AB \| CD \\ AD = ۲a,\ AB = ۳a \\ \angle A = ۶۰^{\circ} \\ \text{وسط } CD \text{ است.} F \text{ و } AB \text{ وسط } E \end{array}\right\}$$

خواسته‌ها :
$$\left.\begin{array}{r} \text{نوع چهارضلعی } MNPQ \\ \text{مساحت چهارضلعی } MNPQ \end{array}\right\}$$



شکل۵-۱۱

حل. دو قطر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. از این‌رو نقطهٔ M نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABD است. نقطه‌های N، P و Q نیز همین وضع را در مثلثهای ABC، BCD و CDA دارند. بنابر قضیهٔ تالس و بنابر ویژگی نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث و مطابق با شکل ۵-۱۱ داریم:

$$\frac{IM}{IA} = \frac{IN}{IB} = \frac{IP}{IC} = \frac{IQ}{ID} = \frac{۱}{۳}$$

از این نتیجه می‌شود که ضلعهای چهارضلعی $MNPQ$ با ضلعهای متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نظیر به نظیر موازی و به نسبت یک‌سوم‌اند. از این‌رو چهارضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاعی متشابه با متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با نسبت تشابه یک‌سوم است و در نتیجه نسبت مساحتهای آنها یک‌نهم است:

$$\frac{S(MNPQ)}{S(ABCD)} = \frac{۱}{۹}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD که در آن زاویهٔ A به اندازهٔ ۶۰ درجه است، زاویهٔ D از آن به اندازهٔ ۳۰ درجه است و داریم:

$$AH = AD/۲ = a,$$

$$\overline{DH}^۲ = \overline{AD}^۲ - \overline{AH}^۲ = ۴a^۲ - a^۲ = ۳a^۲ \Longrightarrow DH = a\sqrt{۳}$$

$$S(ABCD) = AB \cdot DH = ۳a \times a\sqrt{۳} = ۳a^۲\sqrt{۳}$$

$$S(MNPQ) = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۹} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۳}$$

در حالت ویژهٔ $a = ۳$ داریم:

$$a = ۳ \Longrightarrow S(MNPQ) = ۳\sqrt{۳} \approx ۵/۱$$

تمرین ۵-۳-۲

۱ـ در مثلث ABC، زاویهٔ A قائمه، AB به اندازهٔ $۴a$ و AC به اندازهٔ $۳a$ است. از G نقطهٔ برخورد میانه‌ها خطهایی موازی با AB و AC رسم می‌شوند که با BC در D و E برخورد می‌کنند. مساحت مثلث GDE را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۷۲$.

۲ـ روی ضلعهای AB، BC و CA از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a، نقطه‌های D، E و F به ترتیب به فاصلهٔ یک‌چهارم a از A، B و C به دست می‌آیند و از آنها خطهایی به ترتیب موازی با CA، AB و BC رسم می‌شوند که از برخورد دوبه‌دوی آنها با هم یک مثلث پدید می‌آید. مساحت این مثلث را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۱۲$.

۳ـ در مثلث ABC، زاویهٔ A قائمه، AB به اندازهٔ c و AC به اندازهٔ b، نقطهٔ M روی AC به فاصلهٔ یک‌چهارم از A و نقطهٔ N روی BM به فاصلهٔ یک‌سوم از B واقع است. مساحت مثلث BNC را حساب کنید.

۴ـ در مثلث ABC، زاویهٔ A به اندازهٔ ۶۰ درجه، AB به اندازهٔ $۴a$ و AC به اندازهٔ $۳a$ است. از G نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث به B و به C وصل می‌شود. مساحت مثلث BCG را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۹$.

۵ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع $۳a$، از رأس A به نقطهٔ D واقع بر BC وصل می‌شود. با فرض $CD = a$، مساحت مثلث ABD را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۴$.

۶ـ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ دو قطر بر دو ساق عمودند و قاعدهٔ AB به اندازهٔ $۲a$، قاعدهٔ کوچکتر به اندازهٔ a و O نقطهٔ برخورد دو قطر است. مساحت هر یک از دو مثلث AOB و COD را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۱۸$.

۷ـ در مسألهٔ ۴ از تمرین ۵-۲-۴، اگر O مرکز دایره باشد مساحت مثلث DOE را حساب کنید.

۸ـ در مسألهٔ ۳ از تمرین ۵-۲-۵، مساحت هشت‌ضلعی به‌دست آمده را حساب کنید.

۹ـ در مسألهٔ ۴ از تمرین ۵-۲-۵، مساحت مثلث را حساب کنید.

۱۰ـ در مسألهٔ ۵ از تمرین ۵-۲-۵، مساحت شش‌ضلعی به‌دست آمده را حساب کنید.

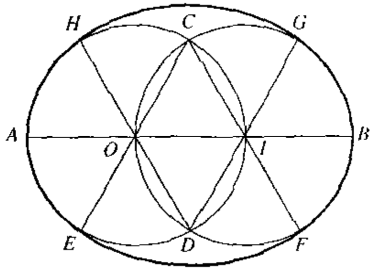
۵ـ۳ـ۳ روش سوم: بهره‌گیری از مجموع یا تفاضل دو مساحت محاسبه‌پذیر

در متن درس هندسه، دستور مربوط به مساحت ذوزنقه، یک قطعه از دایره، تاج دایره (= ناحیهٔ واقع بین دو دایرهٔ هم‌مرکز)، و شکلهایی دیگر، از این راه به‌دست می‌آید که ثابت می‌شود مساحت هر یک از این شکلها برابر است با مجموع یا تفاضل مساحتهای دو شکل دیگری که دستور مساحت آنها پیش از آن به‌دست آمده است. در برخی از مسأله‌ها نیز می‌توان همین روش را به‌کاربرد.

مسألهٔ ۵ـ۳ـ۴. مساحت شبه‌بیضی شکل ۵-۱۲ را حساب کنید. چگونگی ترسیم شکل در مسألهٔ ۵ از تمرین ۵-۲-۷ بیان شده است.

داده‌ها :
- $\widehat{EAH}$ به مرکز O به شعاع a است.
- $\widehat{FBG}$ به مرکز I به شعاع a است.
- $\widehat{EF}$ به مرکز C به شعاع $۲a$ است.
- $\widehat{GH}$ به مرکز D و به شعاع $۲a$ است.

خواسته‌ها : مساحت شبه‌بیضی



شکل۵-۱۲

حل. مساحت شبه‌بیضی که آن را با S نشان می‌دهیم برابر است با مجموع مساحتهای چهار قطاع OHE، IFG، CEF و DGH که از این مجموع باید مساحت چهارضلعی $OCID$ را کم کنیم. اما دو قطاع OHE و IFG با هم و دو قطاع CEF و DGH نیز با هم برابرند و چهارضلعی $OCID$ از دو مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است. بنابراین اگر مساحت قطاع OEH را با $S_۱$، مساحت قطاع CEF را با $S_۲$ و مساحت مثلث OIC را با $S_۳$ نشان دهیم داریم:

$$S = ۲(S_۱ + S_۲ - S_۳)$$

اگر قطاعی از دایرهٔ به شعاع R به زاویهٔ مرکزی به اندازهٔ α درجه باشد، دستور مساحت آن عبارت است از:

$$S = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰}$$

زاویهٔ OCI به اندازهٔ ۶۰ درجه و زاویهٔ COD و زاویهٔ EOH که با آن برابر است، به اندازهٔ ۱۲۰ درجه است. بنابراین:

$$S_۱ = \frac{\pi a^۲ \times ۱۲۰}{۳۶۰} = \frac{\pi a^۲}{۳}$$

$$S_۲ = \frac{\pi (۲a)^۲ \times ۶۰}{۳۶۰} = \frac{۲\pi a^۲}{۳}$$

در مثلث متساوی‌الاضلاعی که ضلع آن a باشد، اندازهٔ ارتفاع آن $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است و از این‌رو:

$$S_۳ = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

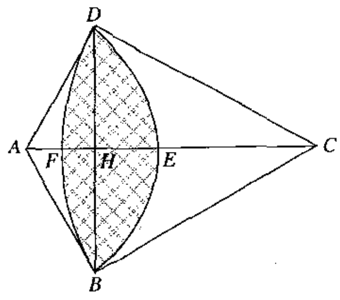
سرانجام داریم:

$$S = ۲\left(\frac{\pi a^۲}{۳} + \frac{۲\pi a^۲}{۳} - \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}\right) = \frac{a^۲(۴\pi - \sqrt{۳})}{۲}$$

* **مسألهٔ ۵-۳-۵.** در چهارضلعی $ABCD$، زاویه‌های B و D قائمه‌اند، قطر AC عمودمنصف قطر BD و به اندازهٔ $۲a$، و ضلع AB به اندازهٔ a است. دوکمان واقع بین B و D یکی از دایرهٔ به مرکز A و دیگری از دایرهٔ به مرکز C رسم می‌شوند. مساحت سطح محدود به این دوکمان را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۶$.

داده‌ها :
- چهارضلعی $ABCD$
- $\angle B = ۹۰^\circ$ و $\angle D = ۹۰^\circ$
- $AC \perp BD$ و $DH = HB$
- $AC = ۲a$ و $AB = a$
- $\widehat{BED}$ کمانی به مرکز A است.
- $\widehat{BFD}$ کمانی به مرکز C است.

خواسته‌ها : مساحت $BEDF$



شکل۵-۱۳

حل. مساحتی که باید محاسبه شود مجموع مساحتهای دو قطعه دایره است که در وتر BD مشترک‌اند و BED کمان یکی از آنها و BFD کمان دیگری است. مساحت قطعهٔ یکمی را با $S_۱$ و مساحت قطعهٔ دومی را با $S_۲$ و مساحت خواسته شده را با S نشان می‌دهیم. اما $S_۱$ برابر است با تفاضل مساحتهای قطاع $ABED$ و مثلث ABD و $S_۲$ برابر است با تفاضل مساحتهای قطاع $CDFB$ و مثلث CDB. برای محاسبهٔ این مساحتها باید اندازهٔ شعاع و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی هر یک از قطاعها و اندازه‌های قاعده و ارتفاع هر یک از مثلثها حساب شود.

چون AC عمودمنصف BD است، AB با AD و BC با CD برابر است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$\overline{BC}^{۲} = \overline{AC}^{۲} - \overline{AB}^{۲} = ۴a^{۲} - a^{۲} = ۳a^{۲} \Longrightarrow BC = a\sqrt{۳}$$

و چون در همین مثلث ضلع AB نصف وتر AC است، زاویهٔ ACB به اندازهٔ ۳۰ درجه و زاویهٔ BAC به اندازهٔ ۶۰ درجه است. بنابراین، زاویهٔ BCD به اندازهٔ ۶۰ درجه، زاویهٔ BAD به اندازهٔ ۱۲۰ درجه و در نتیجه مثلث BCD متساوی‌الاضلاع و BD به اندازهٔ $a\sqrt{۳}$ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH زاویهٔ B به اندازهٔ ۳۰ درجه است و بنابراین، AH نصف AB و برابر با $\frac{a}{۲}$ و CH برابر $\frac{۳a}{۲}$ است و به ترتیب خواهیم داشت:

$$s(ABED) = \frac{\pi \overline{AB}^{۲} \times ۱۲۰}{۳۶۰} = \frac{\pi a^{۲}}{۳}$$

$$S(ABD) = \frac{BD \cdot AH}{۲} = \frac{a\sqrt{۳} \times a}{۲ \times ۲} = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{۱} = \frac{\pi a^{۲}}{۳} - \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴} = \frac{a^{۲}(۴\pi - ۳\sqrt{۳})}{۱۲}$$

به همین ترتیب داریم:

$$S(CBFD) = \frac{\pi \overline{BC}^{۲} \times ۶۰}{۳۶۰} = \frac{\pi a^{۲}}{۲}$$

$$S(CBD) = \frac{BD \cdot CH}{۲} = \frac{a\sqrt{۳} \times ۳a}{۲ \times ۲} = \frac{۳a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{۲} = \frac{\pi a^{۲}}{۲} - \frac{۳a^{۲}\sqrt{۳}}{۴} = \frac{a^{۲}(۲\pi - ۳\sqrt{۳})}{۴}$$

بنابراین:

$$S = S_{۱} + S_{۲} = \frac{a^{۲}(۴\pi - ۳\sqrt{۳})}{۱۲} + \frac{a^{۲}(۲\pi - ۳\sqrt{۳})}{۴} = \frac{a^{۲}(۵\pi - ۶\sqrt{۳})}{۶}$$

در حالت ویژهٔ $a = ۶\text{cm}$ داریم:

$$a = ۶\text{cm} \Longrightarrow S = ۶(۵\pi - ۶\sqrt{۳}) \approx ۵{,}۳ \quad \text{سانتیمتر مربع}$$

تمرین ۵ـ۳ـ۳

۱ـ هر یک از ضلعهای یک مربع به ضلع a از هر طرف به اندازهٔ نصف ضلع امتداد می‌یابند و نقطه‌های به‌دست آمده پشت سرهم به یکدیگر وصل می‌شوند. مساحت هشت‌ضلعی پدید آمده را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۱۲$.

۲ـ روی هر یک از ضلعهای یک شش‌ضلعی منتظم و در خارج آن مربعی رسم می‌شود. از وصل کردن پشت سرهم این رأسها به یکدیگر یک دوازده‌ضلعی منتظم پدید می‌آید. به فرض آنکه شعاع دایرهٔ محیطی شش‌ضلعی R باشد، مساحت دوازده‌ضلعی را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۵$.

۳ـ روی هر یک از ضلعهای یک شش‌ضلعی منتظم و در خارج آن مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم می‌شود و رأسهای خارجی آنها یکی پس از دیگری به هم وصل می‌شوند. مساحت شش‌ضلعی حاصل را برحسب R شعاع دایرهٔ محیطی شش‌ضلعی حساب کنید. مثال عددی: $R = ۱۸$.

۴ـ در دایرهٔ به شعاع R، دو وتر موازی با هم چنان رسم می‌شوند که یکی از آنها ضلع شش‌ضلعی منتظم و دیگری ضلع سه‌ضلعی منتظم باشد. مساحت سطح واقع بین دایره و دو وتر رسم شده را در دو حالت ممکن حساب کنید. مثال عددی: $R = ۶$.

۵ـ بر دایرهٔ به شعاع R دو مماس چنان رسم می‌شوند که با هم زاویهٔ ۶۰ درجه بسازند. مساحت سطح واقع بین دایره و دو مماس را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۳۲$.

۶ـ در دایرهٔ به شعاع R دو قطر عمود بر هم AB و CD رسم می‌شوند. به مرکز A و به شعاع AC کمانی دایره‌ای و محدود به C و D نیز رسم می‌شود که با AB در E برخورد می‌کند، مساحت هلالی محدود به دو کمان CBD و CED را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۱۲۵$.

۷ـ دو دایره به شعاعهای R و r مماس خارج‌اند. یکی از مماسهای مشترک خارجی آنها رسم می‌شود. مساحت سطح واقع بین این مماس مشترک و دو دایره را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۷$ و $r = ۲۱$.

۸ـ در مسألهٔ ۳ از تمرین ۵-۲-۷، مساحت سطح تاقی رسم شده را حساب کنید.

۹ـ در مسألهٔ ۴ از تمرین ۵-۲-۷، مساحت سطح واقع بین خم رسم شده و خط AB را حساب کنید.

۱۰ـ در مسألهٔ ۶ از تمرین ۵-۲-۷، مساحت مرغانهٔ رسم شده را حساب کنید.

۱۱ـ در مسألهٔ ۷ از تمرین ۵-۲-۷، مساحت سطح واقع بین خم رسم شده و خطهای FD، GC و CD را حساب کنید.

تمرین پایانی فصل ۵

۱ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$، زاویه‌های A و D قائمه‌اند، قاعدهٔ CD به اندازهٔ a، قاعدهٔ AB به اندازهٔ $2a$، ساق AD به اندازهٔ a و I نقطهٔ برخورد دو قطر است. اندازهٔ هر یک از دو قطر و فاصله‌های I تا چهار رأس را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۴۵$.

۲ـ در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه، AB به اندازهٔ a و AC به اندازهٔ b است. نیمدایرهٔ به قطر BC که بر A می‌گذرد و نیمدایره‌هایی به قطرهای AB و AC در خارج مثلث رسم می‌شوند. مساحت دو هلالی حاصل را حساب کنید. مثال عددی: $a = ۶$ و $b = ۸$.

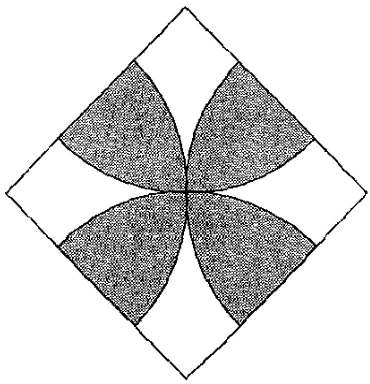
۳ـ دو قطر یک لوزی به اندازه‌های $2a$ و $2b$ هستند. مساحت دایرهٔ محاط در آن را حساب کنید. مثال عددی: $a = \sqrt{۳} + ۱, b = \sqrt{۳} - ۱$.

۴ـ دو دایرهٔ به مرکزهای O و I بر یکدیگر عمودند. شعاع دایرهٔ O برابر با R و پاره‌خط OI به اندازهٔ $2R$ است. مساحت سطح مشترک دو دایره را حساب کنید. مثال عددی: $R = ۱۵$.

۵ـ دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R و دایرهٔ به مرکز I و به شعاع $7R$ در بیرون یکدیگر واقع‌اند و OI به اندازهٔ $12R$ است. مماسهای مشترک خارجی دو دایره رسم می‌شوند. محیط شکل پدید آمده را حساب کنید. مثال عددی: $R = 7{,}5$.

۶ـ مسألهٔ پیش را در حالتی حل کنید که به جای مماسهای مشترک خارجی مماسهای مشترک داخلی رسم شوند و شعاعها R و $4R$ و اندازهٔ OI برابر با $10R$ باشد.

۷ـ به مرکز هر یک از رأسهای مربعی به ضلع a، کمانهایی محدود به دو ضلع آن به گونه‌ای رسم می‌شوند که از مرکز مربع نیز بگذرند. چهار ناحیه‌ای را که به دوبه‌دو از این کمانها و به قسمتهای میانی ضلعهای مربع محدود می‌شوند هاشور بزنید. به این ترتیب، مربع به دو ناحیهٔ هاشورخورده و هاشور نخورده تقسیم می‌شود. محیط و مساحت هر یک از دو ناحیه را حساب کنید. مثال عددی: $a = \sqrt{2}$.



۸ـ در دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R، دو قطر عمود بر هم AB و CD، و دایره‌هایی به قطر هر یک از شعاعهای AO، BO، CO و DO رسم می‌شوند. مساحت سطح واقع بین این دایره‌ها و دایرهٔ O را حساب کنید. مثال عددی: $R = 12$.

۹ـ روی پاره‌خط AB به اندازهٔ a، نقطهٔ C چنان به‌دست آمده که AC دوبرابر BC است. روی هر یک از پاره‌خطها و در یک طرف AB مثلثهای متساوی‌الاضلاع ACD و BCE و پاره‌خط DE رسم می‌شوند. اندازهٔ DE و مساحت چهارضلعی $ADEB$ را حساب کنید. مثال عددی: $a = 15$.

۶ بررسی فشردهٔ مسأله‌های مکان‌هندسی و مسأله‌های ترسیمی

۶ـ۱ مسأله‌های مکان‌هندسی

همان‌گونه که در سرآغاز کتاب یادآوری شد، هر مسألهٔ مکان هندسی به حل دو مسأله می‌انجامد: در یک مسأله باید ثابت شود که همهٔ نقطه‌های دارای شرط داده شده بر شکلی معین واقع‌اند و در مسألهٔ دیگر ثابت شود که هر نقطه از این شکل شرط داده شده را داراست. دشواری عمده، شناخت آن شکل معین است. یعنی نامشخص بودن حکمی است که باید ثابت شود. در همهٔ مسأله‌هایی که پیش از این با آنها سروکار داشتیم، حکم، یعنی آنچه باید ثابت شود، از همان آغاز معلوم بود، اما در مسأله‌های مکان هندسی چنین نیست. نخست باید پی برد که چه چیز را باید ثابت کرد و آنگاه به اثبات آن و به اثبات عکس آن روی آورد.

مثال ۲ از بخش ۱-۴ را که در آغاز کتاب برای نمونه بیان کردیم، درنظر می‌گیریم: مثلث ABC با زاویه‌های حاده در دایرهٔ O محاط است. ضلع BC از آن ثابت است اما رأس A از آن روی دایره تغییر جا می‌دهد. مکان هندسی H مرکز ارتفاعی مثلث چیست؟

در آغاز که به حل این مسأله روی می‌آوریم نمی‌دانیم چه چیز را باید ثابت کنیم و حکم مسأله برایمان یک معماست. اما هنگامی که پی ببریم مکان H قرینهٔ کمان کوچکتر BC نسبت به ضلع BC است (شکل ۱-۵)، مسأله دیگر یک معما نیست و می‌توانیم آن را چنین بیان کنیم:

مثلث ABC با زاویه‌های حاده در دایرهٔ O محاط و ضلع BC از آن ثابت است و رأس A روی دایره تغییر جا می‌دهد. ثابت کنید مکان هندسی H مرکز ارتفاعی مثلث، کمانی دایره‌ای است که قرینهٔ کمان کوچکتر BC نسبت به ضلع BC است. اکنون می‌دانیم که چه مسأله‌ای و عکس آن را باید

ثابت کنیم. اگر کمان مربوط به مکان H را با Γ نشان دهیم، بنابر روشی که تاکنون داشته‌ایم نخست فرض و حکم این مسأله و عکس آن را بیان می‌کنیم.

مسأله :

فرض :
- مثلث ABC محاط در دایرهٔ O است.
- $\angle C < ۹۰^\circ, \angle B < ۹۰^\circ, \angle A < ۹۰^\circ$
- H مرکز ارتفاعی مثلث است.
- BC ثابت است.
- رأس A نقطه‌ای متغیر از دایره است.
- کمان Γ قرینهٔ $\widehat{BC}$ نسبت به ضلع BC است.

حکم : H روی Γ است.

مسألهٔ عکس :

فرض :
- مثلث ABC محاط در دایرهٔ O است.
- $\angle C < ۹۰^\circ, \angle B < ۹۰^\circ, \angle A < ۹۰^\circ$
- BC ثابت است.
- A نقطه‌ای متغیر از دایره است.
- کمان Γ قرینهٔ $\widehat{BC}$ نسبت به ضلع BC است.
- H نقطه‌ای واقع بر Γ است.

حکم : H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.

اکنون آنچه را باید انجام دهیم این است که، بنابر آنچه تاکنون دانسته‌ایم، چه روشی را برای حل هر کدام از این دو مسأله به‌کار ببریم.

در یک مسألهٔ مکان هندسی، اگر مکان نموده شده و اثبات آن خواسته شده باشد، فرض و حکم مسأله و عکس آن معلوم است و تنها آنچه را باید انجام داد پی بردن به روش حل و به‌کار بردن آن است، اما اگر مکان نموده نشده باشد، نخستین گام کشف و شناخت مکان است. برای این کار، رسم شکل صحیح و بررسی دقیق آن و توانایی در استدلال، از عاملهای کمک‌کننده و اثربخش‌اند. اما ورزیدگی و کارایی در حل این‌گونه مسأله‌هاست که عامل مهم به شمار می‌آید. قضیه‌هایی از متن هندسه دربارهٔ مکانهای هندسی‌اند. دانستن و به یاد سپردن این قضیه‌ها، و افزون بر آن، تمرینهایی هرچه بیشتر را

حل کردن، آمادگی و ورزیدگی در حل این‌گونه مسأله‌ها را به دنبال خواهد داشت.

خط راست و دایره ساده‌ترین مکانهای هندسی‌اند و بیشترین مسأله‌های مقدماتی مکانهای هندسی دربارهٔ آنهاست. اگر نظیر سه وضع مختلف از نقطهٔ متغیر، سه نقطه از مکان با رسم دقیق به‌دست آیند به گونه‌ای که به اندازهٔ کافی از هم فاصله داشته باشند، از وضع آنها نسبت به هم می‌توان پی برد که *آیا بر یک خط راست واقع‌اند یا نه*، یعنی *آیا مکان هندسی آنها خط راست است یا دایره*. خط راست یا با دو نقطهٔ آن یا با یک نقطه و راستای آن، و دایره با مرکز و شعاع آن یا با سه نقطهٔ آن مشخص می‌شود. اگر مکان هندسی خط راست باشد، با توجه به جزءهای ثابت شکل باید معلوم کرد که آیا بر دو نقطهٔ ثابت از شکل می‌گذرد؟ آیا با خط ثابتی از شکل موازی است؟ آیا با خط ثابتی از شکل زاویه‌ای ثابت می‌سازد؟ و بر کدام نقطهٔ ثابت از شکل می‌گذرد؟ اگر مکان هندسی دایره باشد، باید معلوم کرد که کدام نقطهٔ ثابت شکل می‌تواند مرکز آن باشد؟ شعاع آن با چه فاصلهٔ ثابت موجود در شکل می‌تواند برابر باشد؟ به این نکتهٔ مهم نیز باید توجه داشت که یک مکان هندسی ممکن است بخشی از یک خط راست یا بخشی از یک دایره باشد و در این صورت باید مرزهای آن را نیز معلوم کرد.

بحث کامل دربارهٔ مسأله‌های مکانهای هندسی و بررسی همه‌جانبهٔ آنها زمینهٔ کتابی جداگانه خواهد بود. در اینجا به بیان و حل چند مسألهٔ نمونه از سه‌گونهٔ آن بسنده می‌شود.

۶ـ۱ـ۱ گونهٔ یکم: مکان هندسی یک خط راست است

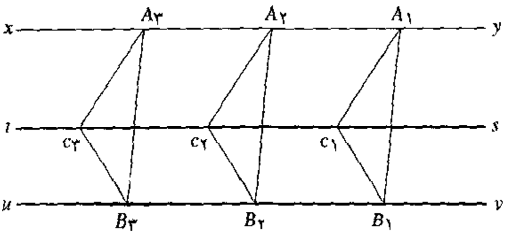
قضیه‌هایی از متن درس هندسه که دانستن آنها لازم است: مکان هندسی نقطه‌هایی که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله‌اند عمودمنصف آن پاره‌خط است؛ مکان هندسی نقطه‌هایی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند نیمساز آن زاویه است؛ مکان هندسی نقطه‌هایی که تفاضل توانهای دوم فاصله‌هایشان از دو سر یک پاره‌خط برابر با مقدار ثابت باشد، خطی است عمود بر آن پاره‌خط؛ مکان هندسی نقطه‌هایی که نسبت به دو دایره توانهای برابر داشته باشند، خطی است عمود بر خط مرکزهای آن دو دایره، و قضیه‌هایی دیگر که از نام بردن آنها چشم‌پوشی می‌شود.

الف) مکان خطی است موازی با یک خط ثابت.

مسألهٔ ۶ـ۱ـ۱. مثلث ABC در حالی که همهٔ اندازه‌هایش ثابت می‌مانند در صفحه و در یک طرف خط ثابت xy تغییر جا می‌دهد به گونه‌ای که رأس A همواره بر xy تکیه دارد و ضلع AB همواره با خطی ثابت موازی است. مکان هندسی رأس B و مکان هندسی رأس C چیست؟

۱) **جستجوی مکان.** سه وضع مختلف از مثلث را رسم می‌کنیم. می‌بینیم که سه نقطهٔ B_1، B_2 و B_3 بر یک خط موازی با xy و سه نقطهٔ C_1، C_2 و C_3 نیز بر یک خط موازی با xy واقع‌اند. بنابراین، مسأله به‌صورت زیر در می‌آید:

مثلث ABC آن‌گونه که بیان شده است در صفحه تغییر جا می‌دهد. ثابت کنید مکان هندسی رأس B خط uv موازی با xy و مکان هندسی رأس C خط ts موازی با xy است. اکنون مسأله‌ای را



شکل ۶-۱

که باید ثابت کنیم این است که مثلث ABC در هر وضع که باشد رأس B از آن بر uv و رأس C از آن بر ts واقع است. عکس این مسأله را هم باید ثابت کنیم که چنین است: هر نقطه از uv و هر نقطه از ts رأس یک وضع از مثلث ABC در تغییر جای آن است.

۲) حل مسأله. اگر $A_۱B_۱C_۱$ یک وضع از مثلث ABC باشد، از اینکه $A_۱B_۱$ با AB موازی و با آن برابر است برمی‌آید که چهارضلعی $ABB_۱A_۱$ متوازی‌الاضلاع است و خط $BB_۱$ با xy موازی است یعنی $B_۱$ بر uv واقع است که از B می‌گذرد و با xy موازی است. از برابری دو مثلث ABC و $A_۱B_۱C_۱$ با هم نیز برمی‌آید که $A_۱C_۱$ با AC برابر و موازی باشد و به همان دلیل ثابت می‌شود که $C_۱$ بر ts واقع است.

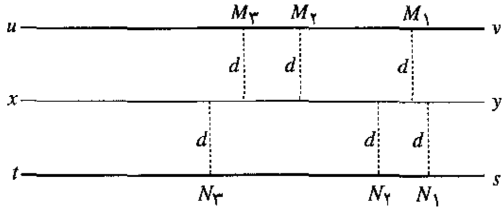
۳) حل عکس مسأله. اگر $B_۱$ نقطه‌ای دلخواه از uv باشد، چون از آن خطی موازی با AB رسم شود تا با xy در $A_۱$ برخورد کند و اگر از $A_۱$ و $B_۱$ خطهایی موازی با AC و با BC رسم شوند تا در $C_۱$ برخورد می‌کنند، مثلث $A_۱B_۱C_۱$ تشکیل می‌شود که همهٔ شرطهای مربوط به مثلث ABC را داراست و وضعی از آن است. برای هر نقطه از ts نیز اثبات به همین ترتیب خواهد بود.

یک مکان هندسی ممکن است مجموعه‌ای از دو یا چند خط و یا چند پاره‌خط باشد.

*** مسألهٔ ۶ـ۱ـ۲.** مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه را بیابید که از خط ثابت واقع در آن صفحه به فاصلهٔ ثابت و معلوم d باشند و با بهره‌گیری از این مکان، در داخل زاویهٔ معلوم xOy نقطه‌ای را به‌دست آورید که از Ox به فاصلهٔ معلوم d و از Oy به فاصلهٔ معلوم e باشد.

۱) جستجوی مکان. خط xy صفحه را به دو نیم‌صفحه بخش می‌کند و در هر کدام از بخشها می‌توانیم نقطه‌هایی به فاصلهٔ d از xy را برگزینیم. اگر $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ سه نقطهٔ واقع در یک طرف xy و $N_۱$، $N_۲$ و $N_۳$ سه نقطهٔ واقع در طرف دیگر xy و همه از این خط به فاصلهٔ d باشند، می‌بینیم که $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ بر یک خط uv و $N_۱$ و $N_۲$ و $N_۳$ بر یک خط ts واقع‌اند.

۲) حل مسأله و عکس آن. به سادگی ثابت می‌شود که پاره‌خطهای $M_۱M_۲$، $M_۱M_۳$، $N_۲N_۱$ و $N_۳N_۱$ هر کدام ضلع مستطیلی هستند که ضلع روبه‌روی آن بر xy واقع است. بنابراین سه نقطهٔ $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ بر یک خط uv موازی با xy و سه نقطهٔ $N_۱$، $N_۲$ و $N_۳$ بر یک خط ts موازی با xy



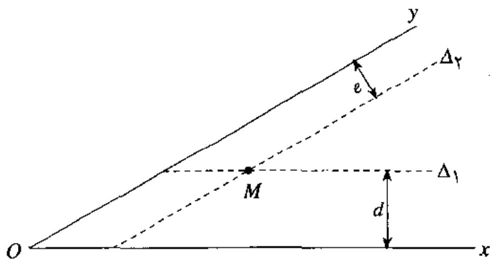
شکل ۶-۲

واقع‌اند. عکس این مطلب نیز به سادگی ثابت می‌شود که هر نقطهٔ دلخواه از uv و همچنین هر نقطهٔ دلخواه از ts از خط xy به فاصلهٔ d است. بنابراین:

مکان هندسی نقطه‌هایی که از خط معلوم به فاصلهٔ معین باشند دو خط راست است که هرکدام با آن خط معلوم موازی و از آن به فاصلهٔ معین داده شده‌اند.

با توجه به اینکه در هر یک از دو نیم‌صفحهٔ نظیر هر خط همواره می‌توان نقطه‌هایی را یافت که از آن به فاصلهٔ معلوم باشند، به ازای هر مقدار d مسأله همواره ممکن است و دو جواب دارد.

۳) یک کاربرد. به‌دست آوردن نقطه‌ای واقع در داخل زاویهٔ xOy که از Ox به فاصلهٔ d و از Oy به فاصلهٔ e باشد.



شکل ۶-۳

با توجه به اینکه مکان هندسی نقطه‌هایی که از Ox به فاصلهٔ d هستند دو خط راست موازی با آن است، آن خط را که داخل زاویهٔ xOy است رسم می‌کنیم و $\Delta_۱$ می‌نامیم. همچنین $\Delta_۲$ را که یکی از دو مکان هندسی نقطه‌های به فاصلهٔ e از Oy است و داخل زاویهٔ xOy قرار دارد، رسم می‌کنیم. دو خط $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ در یک نقطهٔ M برخورد می‌کنند که همان نقطهٔ خواسته شده است. مسأله آنگاه جواب دارد که $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ موازی نباشند یعنی xOy زاویهٔ صفر یا زاویهٔ تخت نباشد.

تمرین ۶ـ۱ـ۱

۱ ـ نقطهٔ ثابت O واقع در بیرون خط ثابت xy به نقطهٔ A از این خط وصل می‌شود. هرگاه A روی xy حرکت کند مکان هندسی نقطهٔ M وسط OA چیست؟

۲ـ دو خط xy و uv ثابت و با هم موازی‌اند. نقطهٔ M بر xy و نقطهٔ N بر uv حرکت می‌کند. مکان هندسی I وسط MN چیست؟

۳ـ قاعدهٔ BC از مثلث ABC ثابت است و رأس A از آن بر خط ثابت xy حرکت می‌کند. مکان هندسی G نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث چیست؟

۴ـ زاویهٔ قائمهٔ xIy و دایرهٔ به مرکز O در یک صفحه واقع‌اند و هر دو وضع ثابت دارند. دو شعاع عمود بر هم OA و OB از دایره و خطهایی از A و B موازی با Ix و Iy رسم می‌شوند که این دو خط در M برخورد می‌کنند. هرگاه زاویهٔ AOB دور نقطهٔ O بچرخد مکان هندسی M چیست؟

*۵ـ دو خط xy و uv با هم برخورد می‌کنند. همهٔ نقطه‌های واقع در صفحهٔ این دو خط را بیابید که از xy به فاصلهٔ d و از uv به فاصلهٔ e باشند.

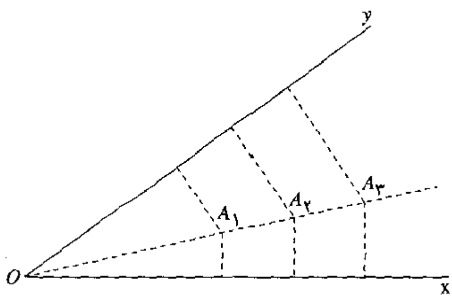
*۶ـ داخل زاویهٔ xOy نقطه‌ای را بیابید که از Ox و Oy به یک فاصله و از خط معلوم uv به فاصلهٔ d باشد.

*۷ـ در یک صفحه، خط ثابت xy و دو نقطهٔ A و B در خارج آن داده شده‌اند. نقطهٔ M را به‌دست آورید به‌گونه‌ای که از A و B به یک فاصله و از xy به فاصلهٔ d باشد. مسأله چه موقع جواب دارد؟ کمترین و بیشترین تعداد جوابهای آن چقدر می‌تواند باشد؟

ب) مکان خطی است که با خطی ثابت زاویه‌ای ثابت می‌سازد. هرگاه ثابت شود که مکان چنین وضعی را دارد کافی است ثابت شود که با آن خط ثابت در نقطه‌ای ثابت برخورد می‌کند.

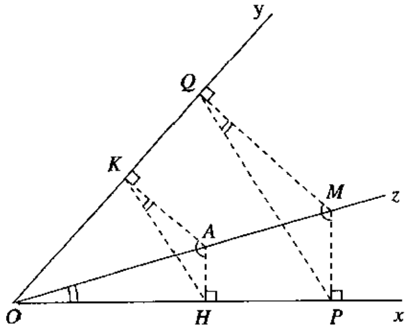
مسألهٔ ۶ـ۱ـ۳. مکان هندسی نقطه‌هایی را به‌دست آورید که فاصلهٔ آنها از یک ضلع زاویه‌ای داده شده دو برابر فاصلهٔ آنها از ضلع دیگر آن زاویه باشد.

۱) **جستجوی مکان.** به فرض $e = 2d$ و انتخاب سه مقدار دلخواه برای d، بر پایهٔ مسألهٔ ۶-۱-۲ سه نقطهٔ A_1، A_2 و A_3 را داخل زاویهٔ xOy چنان به‌دست می‌آوریم که هرکدام از آنها از Ox به فاصلهٔ d و از Oy به فاصلهٔ e باشد. می‌بینیم که این سه نقطه بر خطی راست واقع‌اند که از O می‌گذرد. اکنون باید از راه استدلال این گمان را به اثبات برسانیم.



شکل ۶-۴

۲) حل مسأله. روش عمومی اثبات مسأله‌های مکان‌هندسی را به‌کار می‌بریم: اگر نقطهٔ A واقع در داخل زاویهٔ xOy چنان باشد که چون عمود AH بر Ox و عمود AK بر Oy رسم شود AK دو برابر AH باشد، باید ثابت کنیم خط Oz که بر A می‌گذرد مکان هندسی نقطه‌هایی است که فاصلهٔ آنها از Oy دو برابر فاصلهٔ آنها از Ox است. نخست ثابت می‌کنیم هر نقطهٔ دلخواه M که چنین ویژگی را داشته باشد بر Oz واقع است.



شکل۶-۵

اگر عمودهای MP و MQ بر Ox و Oy رسم شوند و MQ دو برابر MP باشد، داریم:

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{۱}{۲} = \frac{AH}{AK} \Longrightarrow \frac{MP}{AH} = \frac{MQ}{AK}$$

دو زاویهٔ هم‌جهت HAK و PMQ که ضلعهایشان نظیر به نظیر با هم موازی‌اند، با هم برابرند و نتیجه می‌شود که دو مثلث AHK و MPQ در حالت تناسب دو ضلع و برابری زاویه‌های بین این دو ضلع با هم مشابه‌اند و در نتیجه دو زاویهٔ AKH و MQP با هم برابرند. از سوی دیگر چهارضلعی $OHAK$ محاطی است زیرا دو زاویهٔ روبه‌روی H و K از آن قائمه‌اند و بنابراین دو زاویهٔ AKH و AOH با هم برابرند. چهار ضلعی $OPMQ$ نیز محاطی است و در نتیجه دو زاویهٔ MQP و MOP با هم برابرند. از برابری دو زاویهٔ AKH و MQP نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ AOH و MOP نیز با هم برابرند و از این‌رو OA و OM در امتداد یکدیگرند و در نتیجه M روی Oz واقع است.

۳) حل عکس مسأله. باید ثابت کنیم هر نقطهٔ M که روی Oz باشد فاصلهٔ آن از Oy دو برابر فاصله‌اش از Ox است. اگر عمودهای MP و MQ بر Ox و Oy رسم شوند، از تشابه دو مثلث OAH و OMP با هم و دو مثلث OAK و OMQ با هم به‌دست می‌آید:

$$\frac{AH}{MP} = \frac{OA}{OM}, \frac{AK}{MQ} = \frac{OA}{OM} \Longrightarrow \frac{AH}{MP} = \frac{AK}{MQ}$$

$$\frac{MQ}{MP} = \frac{AK}{AH} = ۲ \Longrightarrow MQ = ۲MP$$

از حل مسأله و عکس آن نتیجه می‌شود که خط Oz مکان هندسی خواسته شده است.

تمرین ۶ـ۱ـ۲

۱ـ پاره‌خط به اندازهٔ متغیر AB در یک صفحه چنان تغییر جا می‌دهد که همواره با خطی ثابت موازی است و دو سر آن روی دو ضلع زاویهٔ ثابت xOy واقع‌اند. مکان هندسی وسط AB چیست؟

۲ـ نقطهٔ ثابت A روی ضلع Oy از زاویهٔ ثابت xOy واقع است. دایره‌ای با شعاع متغیر در A بر Oy مماس است و مرکز آن در همان طرف از Oy قرار دارد که Ox واقع است. خطی موازی با Ox در یک نقطهٔ M بر دایره مماس می‌شود. مکان هندسی نقطهٔ M را به‌دست آورید.

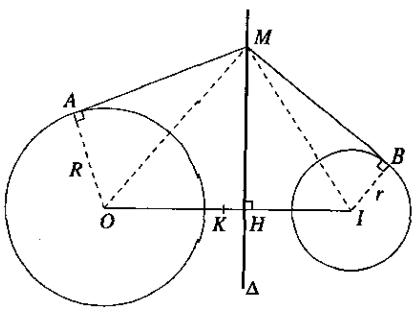
* ج) مکان هندسی خطی است که بر خط ثابتی عمود است.
در چنین حالتی کافی است ثابت شود که پای عمود نقطه‌ای ثابت است.

* **مسألهٔ ۶ـ۱ـ۴.** مکان هندسی نقطه‌هایی را به‌دست آورید که از آنها بتوان دو مماس برابر را بر دو دایرهٔ داده شده رسم کرد.

۱) **جستجوی مکان.** مسأله برای وضع ویژه‌ای از دو دایره بیان نشده است و از این‌رو باید همهٔ حالتهای نسبی دو دایره را شامل باشد. هرگاه دو دایره بیرون از هم باشند نقطه‌های وسط هر یک از مماسهای مشترک خارجی یا داخلی نقطه‌هایی از مکان‌اند و چنانکه در مسأله‌های پیشین ثابت شده است این چهار نقطه بر خطی عمود بر خط مرکزهای دو دایره واقع‌اند. بنابراین باید ثابت کنیم مکان خواسته شده خطی است که در نقطه‌ای ثابت از خط مرکزهای دو دایره بر این خط عمود است.

۲) **حل مسأله.** دو دایرهٔ ثابت، یکی به مرکز O و به شعاع R و دیگری به مرکز I و به شعاع r داده شده‌اند و M نقطهٔ دلخواهی است که از آن دو مماس برابر MA بر دایرهٔ به مرکز O و MB بر دایره به مرکز I رسم شده است. خطهای OI ، OM، OA، IM و IB و خط Δ را که از M می‌گذرد و در H بر OI عمود است رسم می‌کنیم. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ MAO و MBI داریم:

$$\overline{MA}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{OA}^2 , \overline{MB}^2 = \overline{MI}^2 - \overline{IB}^2 \qquad (1)$$



شکل۶-۶

و چون MA و MB با هم برابرند، نتیجه می‌شود:

$$\overline{MO}^{2} - \overline{OA}^{2} = \overline{MI}^{2} - \overline{IB}^{2} \Longrightarrow \overline{MO}^{2} - \overline{MI}^{2} = R^{2} - r^{2} \qquad (۲)$$

اگر K نقطهٔ وسط OI باشد، بنابر قضیهٔ تفاضل توانهای دوم دو ضلع مثلث، در مثلث MOI داریم:

$$\overline{MO}^{2} - \overline{MI}^{2} = 2OI \cdot KH \qquad (۳)$$

از دو رابطهٔ (۲) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$2OI \cdot KH = R^{2} - r^{2} \Longrightarrow KH = \frac{R^{2} - r^{2}}{2OI} \qquad (۴)$$

در این رابطه، R، r و OI مقدارهای ثابت‌اند و K وسط OI نیز نقطه‌ای ثابت است. پس H نیز نقطه‌ای ثابت است.

۳) حل عکس مسأله. اگر M نقطهٔ دلخواهی از خط Δ باشد و از آن مماس MA بر دایرهٔ O و مماس MB بر دایرهٔ I رسم شود، چون به ترتیب عکس عمل کنیم، نتیجه خواهد شد $\overline{MA}^{2}$ با $\overline{MB}^{2}$ و بنابراین MA با MB برابر است.

از اثبات مسأله و عکس آن نتیجه می‌شود خط Δ که در نقطهٔ ثابت H بر خط مرکزهای OI عمود است مکان هندسی نقطه‌هایی است که اگر از آنها مماسی بر دایرهٔ O و مماسی بر دایرهٔ I رسم شود، این دو مماس با هم برابرند.

یادداشت. خط Δ مکان هندسی نقطه‌هایی است که نسبت به دو دایره توانهای برابر دارند و آن را محور اصلی دو دایره می‌نامند.

*** تمرین ۶ـ۱ـ۳**

۱ـ دو نیم‌خط ثابت Ox و Oy بر هم عمودند و A نقطه‌ای ثابت از Ox و M نقطهٔ متغیری است که روی Oy حرکت می‌کند. مکان هندسی وسط AM را به‌دست آورید.

۲ـ در مثلث ABC، ضلع BC ثابت است و رأس A روی خطی حرکت می‌کند که در نقطهٔ ثابت H بر BC عمود است. مکان هندسی G نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث را به‌دست آورید.

۳ـ اگر یک دایره از دو سر قطری از دایرهٔ دیگر بگذرد، محیط این دایره را نصف می‌کند. چه رابطه‌ای بین شعاعها و فاصلهٔ مرکزهای این دو دایره برقرار است؟ دایره‌ای متغیر محیط دو دایرهٔ ثابت را نصف می‌کند. ثابت کنید مکان هندسی مرکز آن دایرهٔ متغیر خطی است که در نقطهٔ ثابتی بر خط مرکزهای دو دایرهٔ ثابت عمود است.

۶ـ۱ـ۲ گونهٔ دوم: مکان هندسی یک دایره یا کمانی از یک دایره است

قضیه‌هایی که به‌کار می‌روند عبارت‌اند از: دایره مکان هندسی نقطه‌هایی است که از نقطه‌ای ثابت به فاصلهٔ ثابت‌اند؛ مکان هندسی نقطه‌هایی که از آنها پاره‌خطی ثابت به زاویه‌ای ثابت دیده شود کمانی

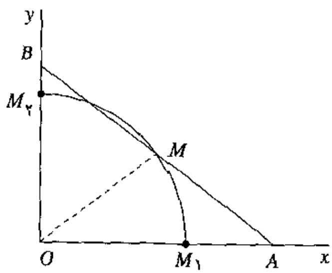
از دایره‌ای است که بر آن دو نقطه می‌گذرد و کمانِ درخور آن زاویه نام دارد: کمان درخور زاویهٔ قائمه و گذرنده بر دو نقطهٔ ثابت، دایره‌ای است که این دو نقطه دو سر قطری از آن‌اند؛ مکان هندسی رأس مثلثهایی که مجموع توانهای دوم دو ضلع این رأس آنها مقداری ثابت باشد دایره‌ای است که مرکز آن وسط ضلع سوم مثلث است و قضیه‌هایی دیگر که در اینجا از نام بردن آنها چشم‌پوشی می‌شود.

الف) مکان یک دایره است. هرگاه پی ببریم که مکان هندسی نقطهٔ متغیر یک دایره است، باید ثابت کنیم که آن نقطه از یک نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ ثابتی است.

مسألهٔ ۶ـ۱ـ۵. پاره‌خط AB به اندازهٔ ثابت l داخل زاویهٔ قائمهٔ xOy چنان تغییر جا می‌دهد که همواره A بر Ox و B بر Oy واقع است. مکان هندسی نقطهٔ M وسط AB چیست؟

۱) **جستجوی مکان.** با رسم دقیق شکل در سه وضع مختلف می‌بینیم که مکان M خطی راست نیست و باید یک دایره باشد. پس به دنبال آن خواهیم بود تا نقطهٔ ثابتی را بیابیم که M از آن به فاصلهٔ ثابتی است.

۲) **حل مسأله.** در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وتر با نصف وتر برابر است. اگر میانهٔ OM از مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB را رسم کنیم، اندازهٔ آن نصف اندازهٔ AB و برابر با مقدار ثابت $\frac{l}{2}$ است. نقطهٔ O نیز ثابت است، پس نقطهٔ M بر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع $\frac{l}{2}$ قرار دارد.



شکل ۶-۷

۳) **حل عکس مسأله.** اگر نقطهٔ دلخواه M را که داخل زاویهٔ xOy و روی دایرهٔ به مرکز O و به شعاع $\frac{l}{2}$ درنظر بگیریم و به مرکز M و به شعاع $\frac{l}{2}$ دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از O می‌گذرد و با Ox در نقطهٔ A برخورد می‌کند. اگر خط AM امتداد یابد، با Oy در نقطهٔ B برخورد می‌کند. چون زاویهٔ O از مثلث AOB قائمه و OM با AM برابر است، OM با BM نیز برابر خواهد بود و AB به اندازهٔ l و M وسط آن خواهد بود.

۴) **کرانهای مکان هندسی.** نظیر هر وضع از پاره‌خط AB، وسط آن از O به فاصلهٔ $\frac{l}{2}$ است و نظیر هر نقطهٔ M داخل زاویهٔ xOy و به فاصلهٔ $\frac{l}{2}$ از O، یک وضع از پاره‌خط AB وجود دارد که M

وسط آن است. اما اینکه پاره‌خط AB و M وسط آن همواره داخل زاویهٔ xOy است، مکان M دارای دو کران M_1 و M_2 است؛ M_1 در حالتی است که AB بر Ox (یعنی B بر O) واقع باشد و M_2 در حالتی است که AB بر Oy (یعنی A بر O) واقع باشد. بنابراین:

مکان هندسی نقطهٔ M وسط AB کمان ربع دایرهٔ M_1M_2 به مرکز O و به شعاع $\frac{l}{2}$ و واقع در داخل زاویهٔ xOy است.

تمرین ۶ـ۱ـ۴

۱ـ در نقطهٔ A واقع بر دایرهٔ به مرکز O، مماسی بر این دایره رسم و روی آن نقطهٔ B به فاصلهٔ ثابت l از A به‌دست می‌آید. هرگاه M محیط دایره را بپیماید، مکان هندسی B چه خواهد بود؟

۲ـ در دایرهٔ ثابت به مرکز O، وتر متغیر اما به اندازهٔ ثابت l تغییر جا می‌دهد. مکان هندسی M وسط AB را به‌دست آورید.

۳ـ از هر نقطهٔ A واقع بر دایرهٔ ثابت به مرکز O، پاره‌خط AB به اندازهٔ ثابت و در امتداد و در جهت ثابت رسم می‌شود. مکان هندسی نقطهٔ B را به‌دست آورید.

۴ـ نقطهٔ متغیر M از دایره‌ای ثابت به نقطهٔ ثابت I واقع در بیرون دایره وصل می‌شود و به اندازهٔ خود تا P امتداد می‌یابد. مکان هندسی نقطهٔ P چیست؟

۵ـ زاویه‌ای قائمه چنان تغییر جا می‌دهد که همواره یک ضلعش بر یکی از دو دایرهٔ ثابت هم‌مرکز و ضلع دیگرش بر دایرهٔ دیگر مماس باشد. مکان هندسی رأس این زاویه چیست؟

۶ـ پاره‌خط AB به اندازهٔ ثابت l داده شده است. دو دایرهٔ متغیر در نقطهٔ M بر هم مماس‌اند و یکی از آنها در A و دیگری در B بر AB مماس اُست. با تغییر شعاعهای دو دایره، مکان هندسی نقطهٔ M چه خواهد بود؟

۷ـ دایره‌ای به مرکز ثابت O و به شعاع R داده شده است. دایره‌ای به مرکز متغیر I و به شعاع $2R$ محیط دایرهٔ O را نصف می‌کند. مکان هندسی نقطهٔ I را به‌دست آورید.

ب) مکان کمان درخور یک زاویهٔ ثابت است. اگر نقطهٔ متغیر M و دو نقطهٔ ثابت A و B روی یک دایره باشند، زاویهٔ M محاطی و اندازهٔ آن نصف اندازهٔ کمان AB روبه‌رو به M است و با حرکت نقطهٔ M روی کمانی از دایره که در آن جا دارد، اندازهٔ زاویهٔ M ثابت می‌ماند. هرگاه α این اندازهٔ ثابت باشد، کمان AB را که دربردارندهٔ نقطهٔ M است کمان‌درخور زاویهٔ به اندازهٔ α و گذرنده بر A و B می‌نامند. این کمان را همچنین مکان هندسی نقطه‌هایی می‌نامند که از آنها پاره‌خط AB (= وتر کمان AB) به زاویهٔ ثابت α دیده می‌شود.

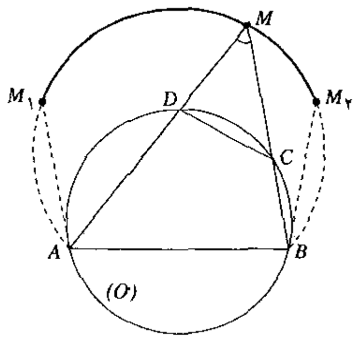
برای آنکه ثابت شود مکان یک نقطهٔ M کمان درخور زاویه‌ای ثابت است، باید ثابت شود نقطهٔ متغیر M رأس زاویه‌ای به اندازهٔ ثابت است که دو ضلع آن بر دو نقطهٔ ثابت می‌گذرند.

مسألهٔ ۶ـ۱ـ۶. در یک دایرهٔ ثابت O، وتر AB ثابت است و وتر CD که کوچکتر از AB است اندازهٔ ثابت دارد اما در یک طرف AB تغییر وضع می‌دهد. دو خط AD و BC در یک نقطهٔ M برخورد می‌کنند. مکان هندسی نقطهٔ M را به‌دست آورید.

۱) **جستجوی مکان.** با رسم دقیق شکل در سه وضع مختلف از CD، می‌بینیم که سه نقطهٔ به‌دست آمده برای M روی یک خط راست نیستند. پس گمان می‌بریم که باید بر یک دایره واقع باشند. اما در روی شکل نقطه‌ای ثابت نمی‌بینیم که از آن نقطه به یک فاصله باشد. اما از اینکه A و B نقطه‌هایی ثابت‌اند و M رأس زاویه‌ای است که یک ضلعش از نقطهٔ ثابت A و ضلع دیگرش از نقطهٔ ثابت B می‌گذرد، پی می‌بریم که مکان M باید یک کمان درخور زاویهٔ ثابتی باشد. برای این کار باید ثابت کنیم زاویهٔ AMB، که آن را زاویهٔ M می‌نامیم، به اندازهٔ ثابتی است و پس از آن، دو کران کمان مربوط به مکان هندسی را به‌دست آوریم.

۲) **حل مسأله.** زاویهٔ M نسبت به دایرهٔ O یک زاویهٔ خارجی است و اندازهٔ آن برابر است با:

$$\angle M = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{CD})$$



شکل ۶-۸

چون AB وتری ثابت است اندازهٔ کمان AB مقداری ثابت است و چون وتر متغیر CD اندازهٔ ثابتی دارد، اندازهٔ کمان CD نیز مقداری ثابت است. بنابراین، اندازهٔ زاویهٔ M مقدار ثابتی است که آن را با α نشان می‌دهیم و مکان هندسی M کمان درخور زاویهٔ α از دایره‌ای است که بر A و B می‌گذرد.

زاویهٔ M باید همواره وتر به اندازهٔ ثابت را در بر داشته باشد. مکان این وتر دو حالت کرانی دارد. یک حالت کرانی وقتی است که D بر A واقع باشد. در این حالت MA به وضع مماس بر دایرهٔ O در A و M به وضع M_1 است. در حالت کرانی دیگر C بر B واقع است و MB به وضع مماس در B بر دایرهٔ O و M به وضع M_2 است. بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ M کمان M_1M_2 از کمان درخور زاویهٔ α از دایره‌ای است که بر A و B می‌گذرد.

تمرین ۶ـ۱ـ۵

۱ـ از نقطهٔ A واقع در خارج یک دایرهٔ ثابت، خطی متغیر می‌گذرد و با دایره در دو نقطهٔ B و C برخورد می‌کند. مکان هندسی وسط کمان BC را به‌دست آورید.

۲ـ مثلث ABC در یک دایره محاط است. ضلع BC ثابت است اما رأس A روی دایره حرکت می‌کند. مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث را به‌دست آورید.

۳ـ در مسألهٔ پیش، مکان هندسی مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث را بیابید.

۴ـ در دایرهٔ به قطر AB وتر AC رسم می‌شود و تا نقطهٔ M امتداد می‌یابد که CM برابر با CB باشد. هرگاه C روی دایره حرکت کند، مکان هندسی نقطهٔ M چه خواهد بود؟

۵ـ از نقطهٔ A واقع در بیرون یک دایره، خطی متغیر می‌گذرد و با دایره در دو نقطهٔ B و D برخورد می‌کند. در نقطهٔ M وسط BC عمود MD برابر با MA بر BC رسم می‌شود. مکان هندسی نقطهٔ D را به‌دست آورید.

۶ـ۱ـ۳ گونهٔ سوم: مکانهای دیگر

در اینجا به بیان چند قضیه و چند مسأله بسنده می‌شود: مکان هندسی نقطه‌هایی که نسبت فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت k باشد دایره‌ای به قطر CD است که C و D پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کنند؛ مکان هندسی نقطه‌هایی که مجموع توانهای دوم فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ ثابت A و B مقداری ثابت باشد، دایره‌ای است که مرکز آن وسط AB است؛ مکان هندسی نقطه‌هایی که فاصله‌های آنها از یک نقطهٔ ثابت و از یک خط ثابت به نسبت ثابت k باشد، یک منحنی به نام مقطع مخروطی است که دایره، بیضی، هذلولی یا سهمی نامیده می‌شود؛ هرکدام از این چهار منحنی نیز جداگانه به‌عنوان یک مکان هندسی تعریف می‌شود: دایره مکان هندسی نقطه‌هایی است که از نقطه‌ای ثابت به فاصلهٔ ثابتی هستند، بیضی مکان هندسی نقطه‌هایی است که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ ثابت مقدار ثابتی است، هذلولی مکان هندسی نقطه‌هایی است که تفاضل فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ ثابت مقدار ثابتی است؛ سهمی مکان هندسی نقطه‌هایی است که از یک نقطهٔ ثابت و از یک خط ثابت به یک فاصله‌اند.

۶ـ۲ مسأله‌های ترسیمی

در بخش سرآغاز کتاب از مسأله‌های ترسیمی نیز نام بردیم. این دسته از مسأله‌های هندسه را می‌توان پیچیده‌ترین آنها به شمار آورد و برای حل آنها باید در حل مسأله‌های از دسته‌های دیگر توانایی و کارایی لازم به‌دست آمده باشد و به ویژه با مکانهای هندسی به خوبی آشنایی داشت. در این بخش از کتاب، روش کلی حل این دسته از مسأله‌ها بیان، مسأله‌های نمونهٔ ساده‌ای حل، و نکته‌هایی بازگو می‌شود و خواننده به حل مسأله‌های پیچیده‌تر رهبری خواهد شد.

۶ـ۲ـ۱ روش کلی حل مسأله‌های ترسیمی

گامهایی را یکی پس از دیگری و به ترتیب زیر باید پیمود:

گام یکم: مسأله را حل شده فرض کنیم؛ به این معنی که شکلی ابتدایی رسم می‌کنیم که تقریباً به شکل اصلی نزدیک باشد و شرطهای آن را به‌صورت فرضی دارا باشد.

گام دوم: شکل رسم شده را بررسی می‌کنیم؛ یعنی معلوم می‌کنیم بین جزءهای آن، مانند: نقطه‌ها، پاره‌خطها، خمها و زاویه‌ها، چه رابطه‌هایی از ویژگیهای ناب هندسی و چه رابطه‌هایی از ویژگیهای هندسی برقرار است.

گام سوم: راه ترسیم صحیح شکل را می‌یابیم؛ یعنی از روی رابطه‌های به‌دست آمده پی می‌بریم که هر جزء شکل از روی جزءهای داده شده یا از روی جزءهایی که پیش از آن به‌دست آمده‌اند چگونه و با رسم چه مکانهای هندسی به‌دست می‌آید.

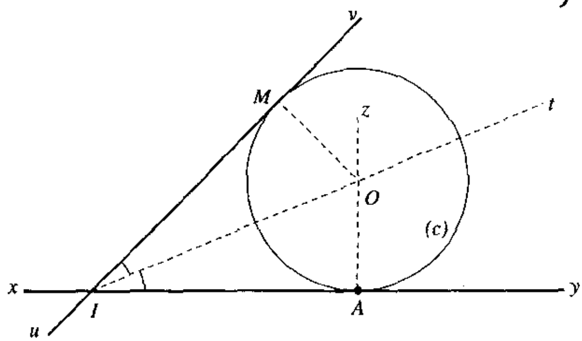
گام چهارم: چگونگی ترسیم شکل را توضیح می‌دهیم؛ شکلی را که دقیقتر و گویاتر باشد رسم و نشانه‌گذاری می‌کنیم و چگونگی ترسیم جزء به جزء آن را شرح می‌دهیم.

یادداشت. توضیح دادن چگونگی ترسیم شکل، ویژهٔ مسأله‌هایی است که در تمرینها و در آزمونها داده می‌شوند. در موردهای دیگر، مثلاً به هنگام کشیدن یک رسم فنی، یک نقشهٔ فنی، یا یک شکل دقیق برای یک کتاب در حال چاپ، در گام چهارم با به‌کارگرفتن ابزارهای فنی، به رسم شکلی دقیق و گویا بسنده می‌شود.

مسألهٔ ۶ـ۲ـ۱. خط xy و نقطهٔ A واقع بر ان و خط uv داده شده‌اند. دایره‌ای رسم کنید که بر uv و در A بر xy مماس باشد.

دادهها : خط xy
خط uv
نقطهٔ A روی xy

خواسته‌ها : یافتن O مرکز دایره‌ای که در A بر xy و در یک نقطهٔ M بر uv مماس باشد.



شکل ۶-۹

حل. مسأله را حل‌شده می‌گیریم و فرض می‌کنیم دایرهٔ (C) همان دایرهٔ خواسته شده باشد. چون مماس بر دایره بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (C) روی خطی واقع است که در A بر xy عمود است. این خط که آن را Az می‌نامیم یک مکان هندسی نقطهٔ O است و با معلوم بودن A و خط xy خطی معلوم است. همچنین می‌دانیم که شعاعهای یک دایره همه با هم برابرند. بنابراین OA و OM باید با هم برابر باشند، یعنی نقطهٔ O از دو خط xy و uv به یک فاصله است. مکان هندسی نقطه‌هایی که از دو خط به یک فاصله باشند نیمساز زاویهٔ بین این دو خط است. پس اگر I نقطهٔ برخورد xy با uv باشد نیمساز زاویهٔ I که آن را It می‌نامیم مکان دیگر نقطهٔ O است و با معلوم بودن دو خط xy و uv خط It نیز معلوم می‌شود.

بنابراین برای رسم دایرهٔ (C)؛ عمود Az را بر xy و It نیمساز زاویهٔ بین دو خط xy و uv را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد Az و It نقطهٔ O مرکز دایره است و این دایره به مرکز O و به شعاع OA رسم می‌شود.

۶ـ۲ـ۲ بحث مسأله‌های ترسیمی

یک مسألهٔ ترسیمی با پی بردن به چگونگی رسم شکل خواسته شده پایان نمی‌یابد بلکه به دنبال آن باید دربارهٔ دو چیز بحث کرد: یکی اینکه آیا حل مسأله ممکن است یا نه؛ دیگر اینکه اگر مسأله ممکن است برای آن چند جواب وجود دارد.

در بحث مربوط به ممکن بودن مسأله، شرطهایی جستجو می‌شوند تا بنابر آنها از روی داده‌های مسأله بتوان شکل خواسته شده را رسم کرد.

پس از آنکه شرط یا شرطهای ممکن بودن مسأله دانسته شدند، باید معلوم کرد مسأله چند جواب می‌تواند داشته باشد، یعنی چند شکل را مطابق با آنچه خواسته شده است می‌توان رسم کرد.

برای بحث در یک مسألهٔ ترسیمی چنین عمل می‌کنند:

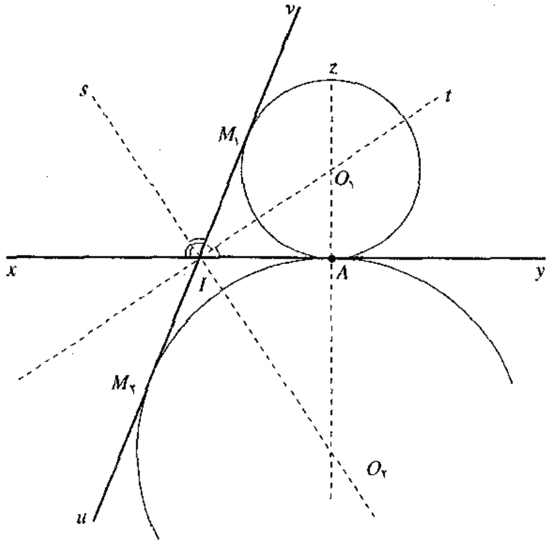
۱) با توجه به‌صورت مسأله، عنصرهایی هندسی (معمولاً مکانهایی هندسی) را می‌یابند که معلوم شدن آنها برای حل مسأله لازم است. سپس معلوم می‌کنند که این عنصرها نسبت به هم چه وضعی باید داشته باشند تا مسأله ممکن باشد، چنانکه اگر برای به‌دست آوردن یک نقطه از شکل رسم دو مکان هندسی لازم است، این دو مکان باید نسبت به هم در چه وضعی باشند تا نقطهٔ مشترک وجود داشته باشد.

۲) هنگامی که عنصرهای لازم برای حل مسأله معلوم شدند، این پرسش پیگیری می‌شود که آیا هر کدام از این عنصرها تنها به یک صورت رسم می‌شوند یا به چند صورت، و اگر باید نقطهٔ مشترک داشته باشند تعداد نقطه‌های مشترک آنها چندتاست.

بحث مسألهٔ ۶-۱-۱. رسم دایرهٔ (C) وقتی ممکن است که O مرکز آن به‌دست آید. این مرکز نقطهٔ برخورد Az با دست کم یکی از دو نیمساز زاویهٔ بین دو خط xy و uv است و وقتی وجود نخواهد داشت که Az با هر دو نیمساز موازی باشد و این ممکن نیست. زیرا دو نیمساز بر هم عمودند و اگر

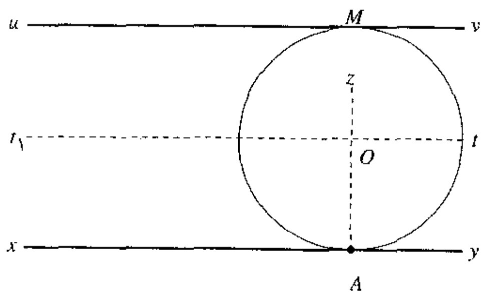
یکی از آنها با Az موازی باشد دیگری بر آن عمود و با آن برخورد می‌کند. بنابراین رسم دایره همواره ممکن است و مسأله جواب دارد.

هرگاه xy و uv با هم موازی نباشند، مطابق با شکل ۶-۱۰، خط Az با هر دو نیمساز زاویهٔ بین دو خط xy و uv برخورد می‌کند و دو نقطهٔ O_1 و O_2 برای مرکز دایره به‌دست می‌آید و مسأله دو جواب دارد.



شکل۶-۱۰

هرگاه مطابق با شکل ۶-۱۱، دو خط xy و uv با هم موازی باشند، زاویهٔ بین آنها صفر است و تنها یکی از نیمسازها به‌صورت خط t_1t وجود خواهد داشت که با هر دو خط موازی و از آنها به یک فاصله است. در این حالت Az با t_1t یک نقطهٔ برخورد دارد و مسأله دارای یک جواب است.



شکل۶-۱۱

هرگاه xy و uv بر هم واقع باشند، هر دایره که در A بر xy مماس شود در همان نقطه بر uv نیز مماس است و چون چنین دایره‌هایی را به تعداد بی‌شمار می‌توان رسم کرد، مسأله جوابهای بی‌شمار دارد.

یادداشت. در مسأله‌های ترسیمی که داده‌های آنها اندازه‌های زاویه‌هاست، بحث مسأله عموماً بسیار دشوار است و مگر به کمک مثلثات به گونهٔ کامل عملی نیست. در این‌گونه مسأله‌ها به این بسنده می‌شود که مسأله چه موقع شدنی است و چند جواب می‌تواند داشته باشد بدون آنکه رابطه‌های لازم بین داده‌ها را به‌دست آورند و شرطها را بررسی کنند.

۶ـ۲ـ۳ نکته‌هایی دربارهٔ شکل

الف) در رسم شکل باید همهٔ داده‌ها به‌کار رفته و نموده شده باشند. برای مثال اگر باید مثلثی رسم شود که از آن یک ضلع، زاویهٔ روبه‌روی آن و میانهٔ نظیر آن ضلع معلوم باشد، باید روی شکلی که فرض می‌شود مسأله حل شده است میانه نیز رسم شده باشد. یا اگر خواسته باشند مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم شود که از آن اندازهٔ وتر و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی معلوم است، باید دایرهٔ محاطی و خطهایی که مرکز آن را به‌دست می‌دهند رسم شده باشند. یا اگر رسم مثلثی خواسته شده باشد که یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر و زاویهٔ بین آنها معلوم باشد، در شکل فرضی باید پاره‌خطی که مجموع دو ضلع باشد نیز نموده شود، مثلاً باید یک ضلع را به اندازهٔ ضلع دیگر امتداد داد.

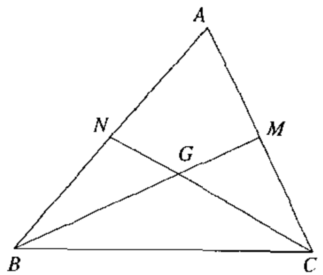
ب) نخست آن جزءهایی از شکل را معلوم کرد که رسم آنها ساده است. اگر این جزءها رسم شوند، کمک می‌کنند تا رسم جزءهای دیگر ممکن گردد و در واقع پایه‌ای برای رسم همهٔ شکل‌اند. این جزءها گاه از داده‌ها هستند و گاه رابطه‌ای نزدیک با داده‌ها دارند.

مثال ۱. رسم مثلثی که یک ضلع و میانه‌های دو ضلع دیگر آن داده شده‌اند.

با توجه به این ویژگی که میانه‌ها یکدیگر را به نسبت دو به یک تقسیم می‌کنند و با توجه به شکلی که با فرض حل شدن مسأله رسم کرده‌ایم، درمی‌یابیم که سه جزء

$$BC,\ BG = \frac{۲}{۳}BM,\ CG = \frac{۲}{۳}CN$$

که سه ضلع مثلث BGC هستند، معلوم‌اند و رسم این مثلث ساده است. پس نخست این مثلث را رسم می‌کنیم و از روی آن رسم مثلث ABC به سادگی انجام می‌گیرد.

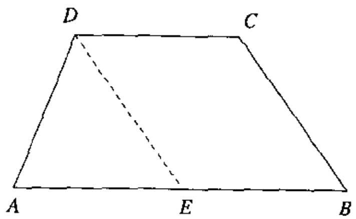


شکل ۶-۱۲

مثال ۲. رسم ذوزنقه‌ای که اندازه‌های چهارضلع آن معلوم‌اند. با رسم DE موازی با BC درمی‌یابیم که سه جزء

$$AD,\ DE = BC,\ AE = AB - CD$$

که سه ضلع مثلث ADE هستند معلوم‌اند. پس نخست رسم این مثلث را انجام می‌دهیم و از روی آن شکل ذوزنقه را کامل می‌کنیم.

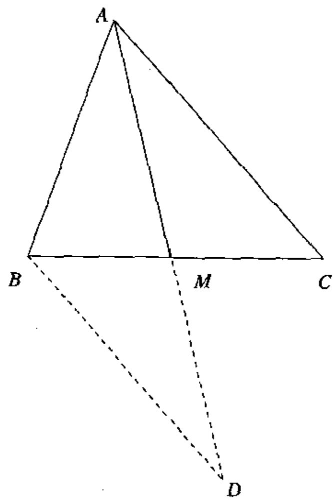


شکل ۶-۱۳

مثال ۳. رسم مثلثی که اندازه‌های دو ضلع و اندازهٔ میانهٔ نظیر ضلع سوم آن معلوم‌اند. هر سه جزء داده شده مجاور رأس A هستند و رابطه‌ای بین آنها به چشم نمی‌خورد. اما اگر میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش تا D امتداد دهیم با توجه به برابری دو مثلث AMC و BMD، سه جزء

$$AB,\ BD = AC,\ AD = ۲AM$$

معلوم‌اند و مثلث ABD با معلوم بودن سه ضلعش به سادگی رسم می‌شود و از روی آن رسم مثلث ABC به آسانی انجام می‌شود.



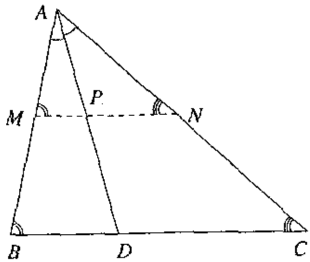
شکل ۶-۱۴

۶ـ۲ـ۴ جانشین کردن یک شکل با شکلی مشابه

اگر نسبت تشابه دو شکل معلوم باشد، از روی یکی از آنها می‌توان دیگری را به آسانی به‌دست آورد. با توجه به این ویژگی، نخست شکلی را رسم می‌کنیم که با شکل خواسته شده مشابه باشد و رسم آن آسانتر باشد. سپس از روی آن، شکل خواسته شده را رسم می‌کنیم.

مثال ۱. رسم مثلثی که اندازه‌های دو زاویه و اندازهٔ نیمساز زاویهٔ سوم آن داده شده‌اند.

دو مثلث که دو زاویهٔ آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند، متشابه‌اند. از این‌رو نخست مثلثی مشابه با مثلث خواسته شده که اندازهٔ نیمساز زاویهٔ سومش دلخواه باشد رسم می‌کنیم. برای این کار، پاره‌خط MN را به اندازهٔ دلخواه رسم می‌کنیم و روی آن دو زاویهٔ M و N را برابر با اندازه‌های داده شده می‌سازیم که به این ترتیب مثلث AMN به‌دست می‌آید. AP نیمساز زاویهٔ A از این مثلث را رسم می‌کنیم و روی آن AD را به اندازهٔ داده شده جدا می‌کنیم. اکنون اگر از D خطی موازی با MN رسم کنیم، از برخورد آن با خطهای AM و AN مثلث ABC به‌دست می‌آید.



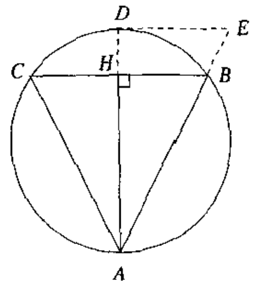
شکل ۶-۱۵

مثال ۲. رسم مثلثی متساوی‌الساقین در دایرهٔ به شعاع معلوم R به‌گونه‌ای که قاعده‌اش با ارتفاعش برابر باشد.

به فرض آنکه مثلث ABC جواب مسأله باشد، از برابری AH با BC و با توجه به اینکه در مثلث متساوی الساقین ارتفاع و میانهٔ نظیر قاعده بر هم واقع‌اند، نتیجه می‌شود که نسبت AH به HB برابر با نسبت ۲ به ۱ است و مثلث قائم‌الزاویه‌ای که دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن بر این نسبت باشند با مثلث AHB مشابه است. با پی بردن به این ویژگی راهنمایی می‌شویم و چنین عمل می‌کنیم:

قطر دلخواه AD از دایره و مماس DE بر دایره را چنان رسم می‌کنیم که DE نصف AD باشد. از E به A وصل می‌کنیم که با دایره در B برخورد می‌کند و از B عمودی بر AD رسم می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا از برخورد آن با دایره رأس C از مثلث به‌دست آید.

(در این مسأله، به جای مثلث ADE می‌توانیم مثلث AOM را رسم کنیم که O مرکز دایره و OM بر AO عمود و با نصف AO برابر باشد).



شکل۶-۱۶

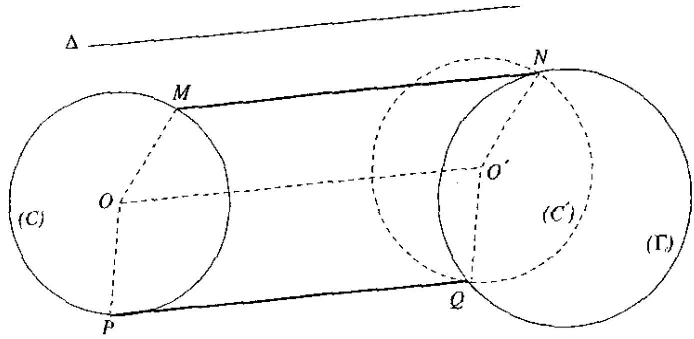
* ۶ـ۲ـ۵ بهره‌گیری از تبدیلهای هندسی

هر تبدیل هندسی تابعی است که روی مجموعهٔ نقطه‌های صفحه یا فضا تعریف می‌شود و به کمک آن می‌توان یک شکل هندسی را به شکل هندسی دیگر تبدیل کرد. انتقال، دوران، تقارن مرکزی و محوری از جمله تبدیلهای هندسی‌اند که هر شکل را به شکلی برابر با خودش تبدیل می‌کنند. تجانس تبدیلی است که هر شکل را به شکلی مشابه با آن تبدیل می‌کند. در تبدیل قطب و قطبی نقطه‌ها و خطها به یکدیگر تبدیل می‌شوند. تبدیلهای دیگر مانند انعکاس، تصویر و . . . را نیز می‌توان نام برد.

بیشتر تبدیلهای هندسی هم در صفحه و هم در فضا تعریف می‌شوند و بر پایهٔ تعریف آنها در صفحه، حل بسیاری از مسأله‌های ترسیمی به سادگی انجام می‌گیرد. همانند آنچه که در ۶-۲-۴ در بهره‌گیری از تشابه یادآوری شد می‌توان با به‌کار بردن یک تبدیل هندسی به چگونگی ترسیم یک شکل دست یافت.

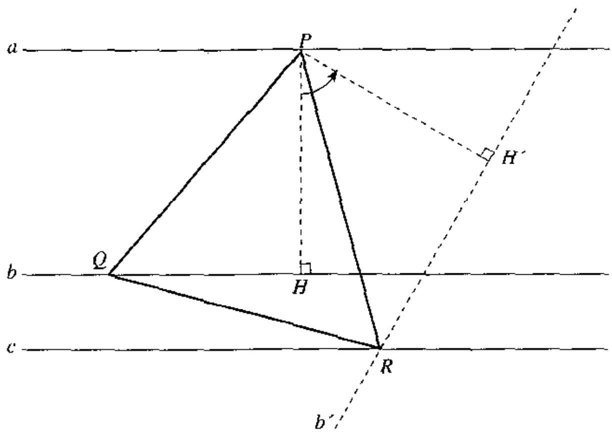
مثال ۱. رسم پاره‌خطی به اندازهٔ معلوم l و در امتداد معلوم Δ که یک سر آن روی دایرهٔ داده شدهٔ (C) و سر دیگر آن روی دایرهٔ داده شدهٔ (Γ) باشد.

دایرهٔ (C) را در امتداد Δ و به اندازهٔ l انتقال می‌دهیم (از O مرکز دایره موازی با Δ رسم و روی آن O' را به فاصلهٔ l از O به‌دست می‌آوریم و به مرکز O' دایره‌ای برابر با دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم). هرگاه دایرهٔ (C') با دایرهٔ (Γ) برخورد کند نقطهٔ برخورد یک سر پاره‌خط خواسته شده است که اگر از آن موازی با Δ رسم شود با دایرهٔ (C) برخورد می‌کند و سر دیگر پاره‌خط به‌دست می‌آید. بنابر آنکه دایرهٔ (C') با دایرهٔ (Γ) در دو نقطه برخورد کند، بر آن مماس شود یا با آن برخورد نکند، مسأله دو جواب دارد، یک جواب دارد، یا بدون جواب است.



شکل۶-۱۷

مثال ۲. سه خط با هم موازی a، b و c و نقطهٔ P روی a داده شده‌اند. به رأس P مثلثی متساوی‌الاضلاع چنان رسم کنید که دو رأس دیگرش یکی روی b و دیگری روی c واقع باشد.



شکل۶-۱۸

اگر مسأله حل شده و PQR جواب آن باشد، در دوران به مرکز P و به زاویهٔ ۶۰ درجه رأس Q از مثلث روی رأس R از آن واقع خواهد شد و در همین دوران، خط b به خط b' تبدیل می‌شود که از نقطهٔ R می‌گذرد و در همین نقطه با خط C برخورد می‌کند. بنابراین پی می‌بریم که از این راه می‌توانیم به رأس R دست یابیم و مثلث را رسم کنیم. از این‌رو نخست خط b را دور نقطهٔ P به اندازهٔ زاویهٔ ۶۰ درجه دوران می‌دهیم. برای این کار PH را بر خط b عمود می‌کنیم و PH' را برابر با PH چنان رسم می‌کنیم که زاویهٔ HPH' به اندازهٔ ۶۰ درجه باشد و خط b' را از H' و عمود بر PH' رسم می‌کنیم. از برخورد خط b' با خط c نقطهٔ R و

از روی آن نقطهٔ Q به‌دست می‌آید. بحث دربارهٔ مسأله و در تعداد جوابهای آن به خواننده واگذار می‌شود.

هندسه مسأله‌های ترسیمی بسیار زیادی را در بر دارد که یکی پس از دیگری پیچیده‌تر و حل آنها دشوارتر می‌شود. در اینجا از بیان اینکه این مسأله‌ها بر چند گونه‌اند و روش حل هرگونه چیست، خودداری می‌شود. اما راهنماییهایی که گوشزد شد در حل همهٔ آنها سودمند خواهد بود.

* پیوست ۱

مسأله‌هایی از هر گونه

۱ـ در داخل مربع $ABCD$ مثلث متساوی‌الساقین PAB چنان رسم می‌شود که هر یک از دو زاویهٔ A و B از آن به اندازهٔ ۱۵ درجه باشد. ثابت کنید P، C و D سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

۲ـ ثابت کنید در هر مثلث، نه نقطه‌ای که عبارت‌اند از وسطهای سه ضلع، پاهای سه ارتفاع، و وسطهای پاره‌خطهایی که سه رأس را به مرکز ارتفاعی وصل می‌کنند، همه بر یک دایره (به نام دایرهٔ نه نقطه) واقع‌اند.

۳ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، زاویهٔ رأس A به اندازهٔ ۲۰ درجه و D نقطه‌ای از ساق AB است به‌گونه‌ای که پاره‌خط AD با قاعدهٔ BC برابر است. ثابت کنید زاویهٔ BDC به اندازهٔ ۳۰ درجه است.

۴ـ روی هر یک از ضلعهای مثلث ABC و در خارج آن، مثلثهای متساوی‌الاضلاع PBC، QCA و RAB رسم می‌شوند. ثابت کنید سه خط AP، BQ و CR با هم برابرند و با هم در یک نقطه برخورد می‌کنند.

۵ـ ثابت کنید اگر در یک مثلث دو نیمساز داخلی با هم برابر باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

۶ـ دو وتر CD و EF از یک دایره هر دو از نقطهٔ M وسط وتر دیگر AB از همان دایره گذشته‌اند و C و E در یک طرف AB واقع‌اند. وترهای CF و DE با وتر AB به ترتیب در P و Q برخورد می‌کنند. ثابت کنید P و Q از M به یک فاصله‌اند.

۷ـ در شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$، خطی که از رأس A به یک نقطهٔ M واقع بر ضلع CD وصل شود با قطر CF از شش‌ضلعی در یک نقطهٔ P برخورد می‌کند. ثابت کنید برای آنکه M وسط CD باشد لازم و کافی است که CP یک سوم CF باشد.

۸ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، اندازهٔ هر یک از زاویه‌های B و C برابر با ۸۰° درجه است. از B خطی رسم می‌شود که با AC در D برخورد کند و زاویهٔ DBC به اندازهٔ ۵۰° درجه باشد. از C نیز خطی رسم می‌شود که با AB در E برخورد کند و زاویهٔ ECB به اندازهٔ ۶۰° درجه باشد. اندازهٔ زاویهٔ DEC را به‌دست آورید.

۹ـ تنها با بهره‌گیری از ویژگیهای ناب هندسی مثلثها، خطهای موازی و چهارضلعیها، ثابت کنید اگر اندازه‌های ضلعهای مثلثی برحسب یک یکا (= واحد) برابر با ۳ و ۴ و ۵ باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

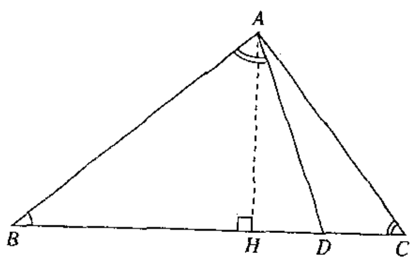
۱۰ـ از رأس A از چهارضلعی $ABCD$ خطی چنان رسم کنید که چهارضلعی را به دو بخش هم‌مساحت تقسیم کند.

۱۱ـ در مثلث داده شدهٔ ABC، نقطهٔ D را بر AB و نقطهٔ E را بر AC چنان به‌دست آورید که AD با CE برابر و DE با BC موازی باشد.

۱۲ـ چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک خط xy واقع‌اند. مربعی را چنان رسم کنید که هر ضلع یا امتداد هر ضلع آن بر یکی از این چهار نقطه بگذرد.

۱۳ـ در مثلث ABC زاویهٔ B حاده و زاویهٔ A بزرگتر از زاویهٔ C است. از A و در داخل مثلث، خطی را چنان رسم می‌کنیم که با AB زاویه‌ای برابر با زاویهٔ C بسازد. این خط با BC در D برخورد می‌کند. ارتفاع AH از مثلث را نیز رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ABD که در زاویهٔ B مشترک‌اند و زاویهٔ C از یکمی با زاویهٔ A از دومی برابر است، متشابه‌اند و نسبت مساحتهای آنها با توان دوم نسبت تشابه آنها برابر است. پس:

$$\frac{S(ABC)}{S(ABD)} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2} \qquad (1)$$



از سوی دیگر، چون این دو مثلث در ارتفاع AH مشترک‌اند، نسبت مساحتهای آنها با نسبت قاعده‌های آنها نیز برابر است پس:

$$\frac{S(ABC)}{S(ABD)} = \frac{BC}{BD} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$\frac{\overline{AC}^{۲}}{\overline{AD}^{۲}} = \frac{BC}{BD} \Longrightarrow \frac{\overline{AC}^{۲}}{BC} = \frac{\overline{AD}^{۲}}{BD} \qquad (۳)$$

اما بنابر قضیه‌های رابطه‌های اندازه‌ای در مثلث نامشخص، در دو مثلث یاد شده داریم:

$$\begin{aligned} \overline{AC}^{۲} &= \overline{AB}^{۲} + \overline{BC}^{۲} - ۲BC \cdot BH \\ \overline{AD}^{۲} &= \overline{AB}^{۲} + \overline{BD}^{۲} - ۲BD \cdot BH \end{aligned} \qquad (۴)$$

در رابطهٔ (۳) چون به‌جای $\overline{AC}^{۲}$ و $\overline{AD}^{۲}$ عبارتهای برابر با آنها را از رابطه‌های (۴) قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\overline{AB}^{۲}}{BC} + BC - ۲BH = \frac{\overline{AB}^{۲}}{BD} + BD - ۲BH$$

و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\frac{\overline{AB}^{۲}}{BC} - BD = \frac{\overline{AB}^{۲}}{BD} - BC \\ &\frac{\overline{AB}^{۲} - BC \cdot BD}{BC} = \frac{\overline{AB}^{۲} - BC \cdot BD}{BD} \end{aligned} \qquad (۵)$$

در این برابری چون صورتها با هم برابرند، مخرجها نیز باید با هم برابر باشند و نتیجه می‌شود BC با BD برابر است. اما BD پاره‌ای از BC است و نمی‌تواند با آن برابر باشد. **معلوم کنید در کجا و به چه دلیل اشتباه شده است.**

۱۴ـ مردی در بین نوشته‌های به یادگار مانده از گذشتگان خود به گنجنامه‌ای دست یافت که در آن چنین نوشته شده بود:

«در جزیرهٔ ... چمنزار گسترده‌ای است که در آن یک درخت بلوط، یک درخت نارون و یک تیرچوبی برپا شده خواهی دید. از تیرچوبی به‌سوی درخت بلوط برو و در آنجا ۹۰ درجه به سمت چپ بپیچ و به اندازهٔ فاصلهٔ تیرچوبی تا بلوط پیش برو و به نقطه‌ای که رسیدی یک نشانه بگذار. پس از آن به کنار تیرچوبی برگرد. از آنجا به سوی درخت نارون برو و در آنجا ۹۰ درجه به سمت راست بپیچ و برابر با فاصلهٔ تیرچوبی تا نارون پیش برو و به نقطه‌ای که رسیدی نشانه‌ای دیگر را بگذار. اکنون جایی را که درست بین دو نشانه باشد بیاب که گنج در آنجا نهفته است.»

مرد خود را به جزیره رساند. درختهای بلوط و نارون برجای بودند اما از تیر چوبی هیچ نشانه‌ای نبود. آیا او می‌تواند به کمک هندسه جای گنج را بیابد؟ چگونه؟

* پیوست ۲

خودآزمایی

یک یادداشت

در آزمونهای ورودی دانشگاهها، مدرسه‌های عالی، دبیرستانهای ویژه، و در بیشتر مسابقه‌های درسی، سروکار دانش‌آموزان با پرسشهای چهارگزینه‌ای است. هر یک از این پرسشها درواقع مسألهٔ ساده‌ای است که جواب آن همراه با سه شبه‌جواب نموده شده است و دانش‌آموز باید دریابد که از چهار جواب نموده شده کدام سره است وکدام ناسره‌اند. دانش‌آموزان از راههای گوناگون و بیشتر از راه به‌دست آوردن انواع مجموعه پرسشهای چهارگزینه‌ای و تمرین با آنها می‌کوشند تا برای کامیابی در چنین آزمونهایی ورزیدگی لازم را به‌دست آورند. این دانش‌آموزان به یک نکتهٔ مهم باید توجه داشته باشند و آن این است که در روبه‌رویی با پرسشهای چندگزینه‌ای آنگاه کامیاب خواهند بود که پیش از آن، در حل مسأله‌های ساده ورزیدگی لازم را به‌دست آورده باشند.

اگر به روشهایی که در بخشهای این کتاب برای حل مسأله‌های مقدماتی هندسه گوشزد شده است به خوبی توجه کرده باشید و تمرینهای آن را نادیده نگرفته و برای حل آنها اندیشهٔ خود را به کار انداخته باشید، توانایی و ورزیدگی لازم را دارید تا پرسشهای چندگزینه‌ای در همان زمینه‌ها را به درستی پاسخ دهید و از عهده برآیید. پرسشهای چهارگزینه‌ای زیر، که برای خودآزمایی شما فراهم آمده‌اند، بیشترشان برگرفته از پرسشهایی هستند که یا در ایران و یا در کشورهای دیگر، در آزمونها و در مسابقه‌ها داده شده‌اند و از این‌رو، شما را با نوع پرسشهای هندسهٔ مقدماتی این آزمونها نیز آشنا می‌سازند.

یک پیشنهاد

تعداد پرسشهای این خودآزمایی ۶۰ است. برای آنکه در روبه‌رویی با آنها خود را بیازمایید و تجربهٔ لازم را به‌دست آورید می‌توانید روش پیشنهادی زیر را به‌کار ببرید:

۱ـ جدولی به‌گونهٔ زیر را در چند نسخه فراهم آورید:

شمارهٔ پرسش	گزینه‌ها				نوع انتخاب	
	الف	ب	ج	د	درست	نادرست
۱ ۲ ۳ ⋮ ۵۹ ۶۰						
تعداد پاسخهای درست و نادرست						

۲ـ مدت آزمون را دو ساعت در نظر بگیرید. همانند آنکه در یک جلسهٔ آزمون هستید، سرِ ساعت آغاز به‌کار کنید؛ با خواندن هر پرسش، شکل مربوط به آن را با دقتی که زیاد وقتگیر نباشد رسم کنید، اندیشهٔ خود را برای حل مسأله به‌کار اندازید و چون دریافتید کدام گزینه پاسخ درست است در جدول در برابر شمارهٔ آن پرسش و زیر پلاک آن گزینه یک نشانهٔ × بگذارید. اگر دستیابی به پاسخ درست را مشکل می‌بینید آن پرسش را رها کنید و به پرسش پس از آن بپردازید. هرگاه به آخرین پرسش رسیدید و هنوز وقت داشته باشید آن پرسشها را که رها کرده‌اید بار دیگر بررسی کنید و بکوشید به پاسخ آن دست یابید. وقت که پایان یافت کار را هر جا که هست رها کنید.

۳ـ با مراجعه به جدول پاسخنامه، معلوم کنید برای هر پرسش انتخاب شما درست است یا نادرست و در ستون نوع انتخاب از جدول در ستون درست یا نادرست و در ردیف شمارهٔ آن پرسش یک نشانهٔ + بگذارید. به پایان جدول که رسیدید نشانه‌های + واقع در هر ستون را بشمارید و تعداد آنها را در زیر آن ستون یادداشت کنید. تعداد پاسخهای درست را در ۳ ضرب کنید و از حاصل‌ضرب تعداد پاسخهای نادرست را کم کنید. عدد به‌دست آمده را در ۱۰۰ ضرب و بر ۱۸۰ تقسیم کنید. آنچه به‌دست می‌آید درصد نمرهٔ شما در این خودآزمایی است.

برای نمونه، اگر ۳۶ پرسش را پاسخ درست، ۱۴ پرسش را پاسخ نادرست داده و ۱۰ پرسش را پاسخ نداده باشید، حاصل‌ضرب ۳۶ در ۳ می‌شود ۱۰۸ که چون ۱۴ را از آن کم کنید ۹۴

به‌دست می‌آید. عدد ۹۴ را در ۱۰۰ ضرب و حاصل را بر ۱۸۰ تقسیم می‌کنید می‌شود ۵۲٫۲۲ و این بدان‌معنی است که از ۱۰۰ نمره ۵۲٫۲۲ نمره آورده‌اید.

۴ـ در فرصتی مناسب، راهنماییها و راه‌حلها، و به‌ویژه راه‌حلهای آن پرسشهایی را که به حل آنها دست نیافته‌اید با حوصله و با دقت بررسی کنید و به ذهن بسپارید. در هر مورد دریابید که به چه نکته‌هایی توجه نداشته‌اید.

۵ـ خودآزمایی را به همان گونهٔ قبلی تکرار کنید اما این بار وقت را یک ساعت بگیرید و نمرهٔ جدید خود را به همان ترتیب به‌دست آورید.

۶ـ چنانچه باز هم نمره‌ای ناخوشایند به‌دست آورده باشید مرحله‌های ۴ و ۵ را بار دیگر تکرار کنید.

این روش پیشنهادی را می‌توانید دربارهٔ هر مجموعه پرسشهای چندگزینه‌ای به‌کار ببرید. در این کار، سه برابر تعداد پرسشهای مجموعه را به جای ۱۸۰ به‌کار ببرید.

پرسشهای چهارگزینه‌ای

۱ـ در مثلث ABC که هر سه زاویه‌اش حاده‌اند، ارتفاعهای AD، BE و CF را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا به ترتیب با دایرهٔ محیطی مثلث در P، Q و R برخورد کنند. اگر:

$$T = AB \cdot FR + BC \cdot DP + CA \cdot EQ$$

و S مساحت مثلث باشد؛

الف) $S = ۳T$ ب) $S = ۲T$

ج) $T = ۲S$ د) $T = S$

۲ـ روی خط $\triangle$ دو نقطهٔ A و B را به دلخواه برمی‌گزینیم. دایرهٔ به قطر AB و وتر PQ از این دایره را عمود بر $\triangle$ رسم می‌کنیم. نقطهٔ M را روی دایره انتخاب می‌کنیم که بر A و B و بر P و Q واقع نباشد. خطهای MP و MQ و نیمساز زاویهٔ PMQ را نیز رسم می‌کنیم که این نیمساز با $\triangle$ در I برخورد می‌کند. نقطهٔ I در چه جایی از $\triangle$ واقع می‌شود؟

الف) در خارج پاره‌خط AB.

ب) روی یکی از دو نقطهٔ A یا B.

ج) بر نقطهٔ برخورد PQ با AB.

د) بین دو نقطهٔ A و B اما نه بر نقطهٔ برخورد PQ با AB.

۳ـ در چهارضلعی $ABCD$، هر یک از دو زاویهٔ A و C قائمه‌اند و هیچ‌یک از دو زاویهٔ B یا D قائمه نیست و نقطهٔ I وسط قطر AC و نقطهٔ J وسط قطر BD است. ازگزاره‌های:

(۱) مثلث IBD متساوی‌الساقین است.

(۲) مثلث JAC متساوی‌الساقین است.

(۳) دو زاویهٔ B و D مکمل یکدیگرند.

کدامها گزارهٔ درست‌اند؟

الف) هر سه　　ب) (۱) و (۳)

ج) (۲) و (۳)　　د) (۱) و (۲)

۴ـ در مثلث ABC، ضلع AB به اندازهٔ a، ضلع BC به اندازهٔ $2a$، ضلع CA به اندازهٔ $a\sqrt{5}$، نقطهٔ I وسط AC و نقطهٔ H پای ارتفاع نظیر رأس B است. اندازهٔ پاره‌خط IH کدام مقدار زیر است؟

الف) $\frac{3a\sqrt{5}}{10}$　　ب) $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$

ج) $\frac{13a\sqrt{5}}{5}$　　د) $\frac{7a\sqrt{5}}{10}$

۵ـ در مثلث ABC از نقطهٔ H پای ارتفاع AH و در داخل مثلث دو خط چنان رسم می‌کنیم که با AH زاویه‌های برابر بسازند. این دو خط با AB و AC به ترتیب در D و E برخورد می‌کنند. خط DE را نیز رسم می‌کنیم که با AH در I برخورد می‌کند. از سه گزارهٔ:

(۱) اگر قرینهٔ HD را نسبت به خط BC به‌دست آوریم در امتداد EH واقع می‌شود.

(۲) اگر دو ضلع AB و AC با هم برابر باشند نقطهٔ I وسط DE است.

(۳) اگر دو ضلع AB و AC با هر برابر نباشند خط DE با امتداد BC در J برخورد می‌کند و داریم:

$$ID \cdot JE = JD \cdot IE$$

از این سه گزاره کدام یا کدامها گزارهٔ درست‌اند؟

الف) هر سه　　ب) (۱) و (۲)

ج) (۲) و (۳)　　د) (۱) و (۳)

۶ـ چهارضلعی $ABCD$ محاطی است و دو قطر آن در I برخورد کرده‌اند. عمود IH را بر ضلع CD، و از نقطهٔ دلخواه M واقع بر امتداد IH عمود MK را بر BD رسم می‌کنیم. زاویهٔ IMK (و یا مکمل آن) با کدام‌یک از زاویه‌های زیر برابر است؟

الف) $\angle ABC$　　ب) $\angle ADC$

ج) $\angle BIC$　　د) $\angle BAC$

۷ـ در مثلث ABC زاویهٔ C قائمه است و دو ضلع CA و CB نابرابرند. نقطهٔ H پای ارتفاع CH و نقطهٔ دیگر D روی AB چنان به‌دست آمده است که $\overline{AC}^2 = AB \cdot BD$. اگر عمودمنصف پاره‌خط DH رسم شود از کدام‌یک از نقطه‌های داده شده می‌گذرد؟

الف) نقطهٔ وسط میانهٔ AM ب) مرکز دایرهٔ محاطی مثلث

ج) مرکز دایرهٔ محیطی مثلث د) نقطهٔ وسط BC

۸ـ نیمساز داخلی زاویهٔ A از مثلث غیر متساوی‌الساقین ABC با ضلع BC در I و با دایرهٔ محیطی مثلث در D برخورد می‌کند. قطر $\overline{DE}$ از این دایره را رسم می‌کنیم. از I نیز خطی موازی با AB رسم می‌کنیم که با AC در J برخورد می‌کند. روی این خط نقطهٔ K را که قرینهٔ I نسبت به J باشد نشان می‌کنیم. از حکمهای زیر کدام‌یک ثابت می‌شود؟

الف) سه نقطهٔ A، E و K بر یک خط راست واقع‌اند.

ب) خط AK با BC موازی است.

ج) خط AD بر BC عمود است.

د) نقطهٔ J وسط AC واقع است.

۹ـ نیمدایرهٔ به قطر AB و نقطهٔ دلخواه M واقع بر آن داده شده‌اند. مماسهایی در B و M بر نیمدایره رسم می‌شوند که در C برخورد می‌کنند. دو خط AM و BC نیز در D برخورد می‌کنند. از گزاره‌های زیر کدام‌یک نادرست است؟

الف) مثلث MCD متساوی‌الساقین است.

ب) نقطهٔ C وسط BD واقع است.

ج) روی نیمدایره تنها یک نقطه یافت می‌شود که اگر M آنجا باشد مثلث MCD متساوی‌الاضلاع است.

د) هیچ نقطه‌ای روی نیمدایره یافت نمی‌شود که اگر M آنجا باشد مثلث MBC متساوی‌الاضلاع است.

۱۰ـ از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع AB برابر با m، اندازهٔ ضلع BC برابر با n، و اندازهٔ زاویهٔ C برابر با α داده شده است. برای رسم این مثلث؛

(۱) پاره‌خط AB را به اندازهٔ m، دایره‌ای را به مرکز B و به شعاع n، و کمان درخور زاویهٔ α را که بر A و B بگذرد رسم می‌کنیم. اگر این کمان و دایره با هم برخورد کنند نقطهٔ برخورد آنها رأس C از مثلث است و آن را به A و به B وصل می‌کنیم.

(۲) پاره‌خط BC را به اندازهٔ n، خطی را که از C بگذرد و با BC زاویهٔ به اندازهٔ α بسازد، و دایرهٔ به مرکز A و به شعاع m را رسم می‌کنیم. اگر این دایره و خط رسم شده با هم برخورد کنند نقطهٔ برخورد آنها رأس C است و آن را به A و به B وصل می‌کنیم.

از دو روش بالا کدام‌یک را می‌توان ثابت کرد که نادرست است؟

الف) تنها (۱) ب) تنها (۲)

ج) هر دو روش د) هیچ‌یک از دو روش

۱۱ـ در هر مثلث که متساوی‌الساقین نباشد، ارتفاع، میانه و نیمساز نظیر هر رأس نسبت به هم کدام وضع زیر را دارند؟

الف) میانه بین نیمساز و ارتفاع قرار دارد.
ب) ارتفاع بین نیمساز و میانه قرار دارد.
ج) نیمساز بین ارتفاع و میانه واقع است.
د) ارتفاع از میانه و میانه از نیمساز کوچکتر است.

۱۲ـ در امتداد شعاع OA از دایرهٔ به مرکز O و در بیرون دایره نقطهٔ B را چنان نشان می‌کنیم که A وسط OB باشد و در نقطهٔ C از دایره مماسی بر دایره و از نقطهٔ B عمود BD را بر این مماس رسم می‌کنیم. نقطهٔ C در چه جای دایره واقع باشد تا زاویهٔ OAD سه برابر زاویهٔ ADB باشد؟

الف) در هیچ‌جای از دایره
ب) تنها در جایی از دایره که کمان AC به اندازهٔ ۱۲۰ درجه باشد.
ج) تنها در جایی از دایره که OC بر OA عمود باشد.
د) در هر جایی از دایره مگر آنکه C در امتداد OA باشد و مگر در جایی که کمان AC به‌اندازهٔ ۶۰ درجه باشد.

۱۳ـ در مثلث ABC زاویهٔ A به اندازهٔ ۳۰ درجه و هر یک از دو ضلع AB و AC به اندازهٔ a است. ضلع BC را از طرف C تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم که CD نصف BC باشد. مساحت مثلث ABD برابر است با:

الف) $\frac{۳a^۲}{۴}$ ب) $\frac{۳a^۲}{۸}$
ج) $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۸}$ د) $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$

۱۴ـ در مثلث ABC زاویهٔ A به اندازهٔ ۳۰ درجه و هر یک از دو ضلع AB و AC به اندازهٔ a است. از نقطهٔ A و در خارج مثلث خطی رسم می‌کنیم که با AC زاویهٔ به اندازهٔ ۳۰ درجه بسازد. این خط با امتداد BC در D برخورد می‌کند. مساحت مثلث ABD برابر است با:

الف) $\frac{a^۲(۳+\sqrt{۳})}{۸}$ ب) $\frac{a^۲(۳+۳\sqrt{۳})}{۴}$
ج) $\frac{a^۲(۲+\sqrt{۳})}{۴}$ د) $\frac{a^۲(۲+\sqrt{۳})}{۸}$

۱۵ـ زاویهٔ دلخواه xOy داده شده است. نقطهٔ M نیم‌خط Ox را می‌پیماید و فاصلهٔ آن از نقطهٔ O مقدار متغیر m است. نقطهٔ N نیز نیم‌خط Oy را می‌پیماید به‌گونه‌ای که همواره $ON = m + a$ که a طول ثابت است. مکان هندسی نقطهٔ P وسط پاره‌خط MN کدام شکل زیر است؟

الف) نیم‌خطی که از O آغاز می‌شود و یک نقطهٔ ثابت دیگر آن از Oy به فاصلهٔ ۱ و از Ox به فاصلهٔ $a+۱$ است.

ب) نیم‌خطی موازی با Ox که با Oy در نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ a از O برخورد می‌کند.
ج) نیم‌خطی موازی با نیمساز زاویهٔ xOy که با Oy در نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ a از O برخورد می‌کند.
د) نیم‌خطی موازی با نیمساز زاویهٔ xOy که با Oy در نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ $\frac{a}{2}$ از O برخورد می‌کند.

۱۶ـ دو نقطهٔ ثابت A و B و نقطهٔ متغیر M را که بر خط AB واقع نیست در نظر می‌گیریم. از A خطی را عمود بر BM و از B خطی را عمود بر AM رسم می‌کنیم که این دو خط در N با هم برخورد می‌کنند. خط MN را نیز رسم می‌کنیم که با خط AB در I برخورد می‌کند. اکنون اگر گزاره‌های زیر را بیان کنیم:

(۱) نقطهٔ I وسط MN است.

(۲) خط MN در I بر خط AB عمود است.

(۳) دایرهٔ محیطی مثلث ABM در M بر IM مماس است.

(۴) حاصل‌ضرب $IA \cdot IB$ با حاصل‌ضرب $IM \cdot IN$ برابر است.

از چهار گزارهٔ بالا کدام یا کدامها گزارهٔ درست است؟

الف) تنها (۱) ب) (۱) و (۲) و (۳)
ج) (۲) و (۳) د) (۲) و (۴)

۱۷ـ در چهارضلعی $ABCD$ زاویه‌های A و C هر دو قائمه‌اند. اگر قطر AC به اندازهٔ a و قطر BD به اندازهٔ b باشد، بین a و b کدام رابطهٔ زیر برقرار است؟

الف) $a > b$ ب) $a \geqslant b$
ج) $a \leqslant b$ د) $a < b$

۱۸ـ اگر در یک مثلث، پای یکی از ارتفاعها از رأس نظیر آن ارتفاع و از نقطهٔ برخورد آن ارتفاع با دایرهٔ محیطی مثلث به یک فاصله باشد آنگاه:

(۱) یکی از زاویه‌های آن مثلث قائمه است.

(۲) برای هر یک از دو ارتفاع دیگر مثلث نیز همان ویژگی برقرار است.

کدام‌یک از دو گزارهٔ (۱) و (۲) گزارهٔ درست است؟

الف) هیچ‌کدام ب) هر دو
ج) تنها (۱) د) تنها (۲)

۱۹ـ در مثلث ABC دایره‌ای رسم می‌شود که بر ضلعهای AB و AC به ترتیب در T و S مماس باشد و با ضلع BC در دو نقطهٔ D و E برخورد کند. برای آنکه پاره‌خطهای BD و CE با هم برابر باشند لازم و کافی است که:

الف) زاویهٔ A از مثلث قائمه باشد.

ب) دو ضلع AB و AC با هم برابر و بر هم عمود باشند.

ج) دو ضلع AB و AC با هم برابر باشند.

د) مرکز دایره بر ضلع BC واقع باشد.

۲۰ـ برای آنکه از نقطهٔ M واقع در داخل زاویهٔ داده شدهٔ xOy خطی رسم کنیم که اگر با Ox در A و با Oy در B برخورد کند M وسط AB باشد؛

(۱) پاره‌خط PQ را رسم می‌کنیم که P بر Ox و Q بر Oy واقع باشد و از O نیم‌خط Ot را رسم می‌کنیم که از وسط PQ بگذرد. هر پاره‌خط دیگر که موازی با PQ رسم شود که دو سرش بر Ox و Oy واقع باشند در برخورد با Ot نصف می‌شود. پس اگر از M موازی با PQ رسم کنیم تا با Ox در A و با Oy در B برخورد کند، AB جواب مسأله است.

(۲) از M خطی موازی با Oy و خطی موازی با Ox رسم می‌کنیم که با Ox در P و با Oy در Q برخورد کنند و از M موازی با PQ رسم می‌کنیم تا با Ox و Oy در A و B برخورد کند. پاره‌خط AB جواب مسأله است.

(۳) از P واقع بر Ox به M وصل می‌کنیم و آن را به اندازهٔ خودش تا Q امتداد می‌دهیم. از Q موازی با Ox رسم می‌کنیم تا با Oy در B برخورد کند. از B به M وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا با Ox در A برخورد کند. پاره‌خط AB جواب مسأله است.

کدام یک از سه روش (۱) و (۲) و (۳) جواب صحیح مسأله را به‌دست می‌دهد؟

الف) تنها (۳) ب) (۳) و (۲)

ج) (۳) و (۱) د) تنها (۱)

۲۱ـ در مثلث ABC، خطی از B و از D وسط میانهٔ AM می‌گذرد و با AC در E برخورد می‌کند. خطی نیز از M موازی با AE رسم می‌شود که با AC در F برخورد می‌کند. اگر N وسط ضلع AC باشد، AN چند برابر FN است؟

الف) سه برابر ب) دو برابر

ج) چهار برابر د) یک‌ونیم برابر

۲۲ـ دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط $\triangle$ و به ترتیب به فاصلهٔ a و b از آن قرار دارند. عمودهای AP و BQ بر $\triangle$ رسم می‌شوند. اگر M نقطه‌ای از PQ باشد که دو مثلث APM و BQM مساحتهای برابر داشته باشند، در این صورت:

الف) M از A و B به یک فاصله است.

ب) PM به اندازهٔ b و QM به اندازهٔ a است.

ج) $\frac{PM}{QM}=\frac{a}{b}$ د) $\frac{PM}{QM}=\frac{b}{a}$

۲۳ـ قطر AB از دایره‌ای را از طرف B امتداد می‌دهیم و روی این امتداد نقطهٔ C را نشان می‌کنیم. در C عمودی بر AC رسم می‌کنیم و از نقطهٔ D واقع بر این عمود به نقطهٔ A وصل می‌کنیم که این خط در نقطهٔ دیگر E با دایره برخورد می‌کند. اگر CD دو برابر BE باشد، مساحت چهارضلعی $BCDE$ چند برابر مساحت مثلث ABE است؟

الف) دو برابر ب) چهار برابر
ج) یک برابر د) سه برابر

۲۴ـ در مثلث ABC ضلع AB از ضلع AC بزرگتر است. نیمساز داخلی زاویهٔ A با BC در D برخورد می‌کند. دایره‌ای که بر M وسط BC و بر A و D بگذرد با AB در E و با AC در F برخورد می‌کند. دو پاره‌خط BE و CF نسبت به هم کدام وضع زیر را دارند؟

الف) $BE > CF$ ب) $BE < CF$
ج) $BE = CF$ د) هر یک از سه وضع الف، ب، ج ممکن است.

۲۵ـ در مثلث AB دو دایره یکی به قطر AB و دیگری به قطر AC رسم شده‌اند. اگر D نقطهٔ برخورد دیگر این دو دایره باشد، برای آنکه D روی BC و نه در امتداد آن واقع باشد لازم و کافی است که:

الف) مثلث ABC از هرگونه که باشد رسم شده باشد.
ب) زاویهٔ A از مثلث منفرجه نباشد.
ج) هیچ‌یک از دو زاویهٔ A یا B منفرجه نباشد.
د) ضلع AB بزرگترین ضلع مثلث نباشد.

۲۶ـ در مثلث ABC وسطهای ضلعهای AB، BC و CA را به ترتیب با K، L و M، و پای ارتفاع وارد بر ضلع BC را با D نشان می‌دهیم. دو دایره یکی به قطر AB و دیگری به قطر AC رسم می‌کنیم. برای آنکه این دو دایره بر هم عمود باشند کدام‌یک از شرطهای:

(۱) زاویهٔ A از مثلث قائمه باشد.
(۲) زاویهٔ KDM قائمه باشد.
(۳) زاویهٔ KLM قائمه باشد.

لازم و کافی است؟

الف) هرکدام از آنها ب) هیچ‌کدام از آنها
ج) تنها (۱) د) (۱) و (۲)

۲۷ـ هرگاه از نقطهٔ داده شدهٔ I واقع در بیرون دایرهٔ (C) دو مماس بر دایره رسم کنیم و زاویهٔ بین دو مماس به اندازهٔ α باشد گفته می‌شود که دایرهٔ (C) از نقطهٔ I به زاویهٔ α دیده می‌شود. به

سادگی ثابت می‌شود که مکان هندسی نقطه‌هایی که از آنها یک دایرهٔ ثابت به زاویهٔ معلوم α دیده شود دایره‌ای است هم مرکز با دایرهٔ داده شده. هرگاه دایرهٔ ثابت به شعاع R باشد، شعاع دایرهٔ مکان نقطه‌هایی که از آنها دایرهٔ ثابت به زاویهٔ ۱۲۰ درجه دیده شود کدام مقدار زیر است:

الف) $R\sqrt{۳}$ ب) $۲R\sqrt{۳}$

ج) $۲R$ د) $R(۱+\sqrt{۳})$

۲۸ـ در مثلث ABC دو رأس B و C ثابت‌اند و رأس A در صفحه چنان تغییر می‌کند که مجموع دو ضلع AB و AC همواره برابر با مقدار ثابت a است. مکان هندسی نقطهٔ برخورد میانه‌ها کدام شکل زیر است؟

الف) خطی موازی با BC

ب) دایره‌ای به مرکز I وسط BC

ج) بیضی که B و C دو کانون آن هستند.

د) بیضی که I مرکز آن و دو کانونش بر BC واقع‌اند.

۲۹ـ در مثلث ABC اگر α دایرهٔ محیطی مثلث و β دایره‌ای باشد که بر وسطهای سه ضلع می‌گذرد؛

الف) شعاع دایرهٔ α چهار برابر شعاع دایرهٔ β است.

ب) شعاع دایرهٔ α سه برابر شعاع دایرهٔ β است.

ج) مساحت دایرهٔ α دو برابر مساحت دایرهٔ β است.

د) مساحت دایرهٔ α چهار برابر مساحت دایرهٔ β است.

۳۰ـ در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه و ضلع AC بزرگتر از ضلع AB است. خط $\triangle$ نیز از رأس A موازی با BC رسم شده است. اگر بنا باشد بر خط $\triangle$ نقطه‌ای به‌دست آید که فاصلهٔ آن تا نقطهٔ C برابر با BC باشد. از گزاره‌های:

(۱) همواره دو نقطهٔ D و E به‌دست می‌آید که در دو طرف A واقع‌اند.

(۲) همواره دو نقطهٔ D و E به‌دست می‌آید که ممکن است در دو طرف A و ممکن است هر دو در یک طرف A واقع باشند.

(۳) در حالتهایی دو نقطهٔ D و E و در حالتی یک نقطهٔ T به‌دست می‌آید و در حالتهایی مسأله جواب ندارد.

کدام یا کدامها نادرست‌اند؟

الف) (۲) و (۳) ب) تنها (۱)

ج) تنها (۳) د) (۱) و (۳)

۳۱ـ در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه و دو ضلع AB و AC با هم برابرند. از نقطهٔ A خط $\triangle$ موازی با BC رسم می‌شود و روی آن دو نقطهٔ D و E به‌دست می‌آیند که فاصله‌های آنها از C برابر با

BC باشد. این دو خط با خط AC زاویه‌هایی با چه اندازه‌هایی را می‌سازند؟

الف) 30° و 120° ب) 15° و 105°

ج) 15° و 75° د) 30° و 75°

۳۲ـ در هر مثلث متساوی‌الساقین، مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ قاعده از دو ساق برابر است با:

الف) ارتفاع وارد بر هر ساق ب) ارتفاع وارد بر قاعده

ج) میانهٔ هر ساق د) تیمساز هر زاویهٔ قاعده

۳۳ـ در مثلث ABC، زاویهٔ A قائمه و ضلع AC به اندازهٔ ۲۰۰ متر است. بر ضلع BC نقطهٔ P چنان به‌دست می‌آید که AM به اندازهٔ $100\sqrt{3}$ متر و زاویهٔ CAP به اندازهٔ ۶۰ درجه باشد. درازای AB برحسب متر کدام عدد زیر است؟

الف) $200\sqrt{3}$ ب) $\frac{600(4+\sqrt{3})}{3}$

ج) $\frac{600(4+\sqrt{3})}{13}$ د) $\frac{150(4+\sqrt{13})}{13}$

۳۴ـ در مثلث ABC، ضلع AB را به چهار پارهٔ برابر تقسیم و از نقطه‌های تقسیم خطهایی موازی با BC رسم می‌کنیم تا با ضلع AC برخورد کنند. مثلث به چهار بخش جدا از هم تقسیم می‌شود که یکی از آنها مثلث و سه تای دیگر ذوزنقه‌اند. مساحتهای این بخشها به ترتیب با کدام دسته از عددهای زیر متناسب‌اند؟

الف) ۱، ۲، ۳ و ۴ ب) ۱، ۳، ۵ و ۷

ج) ۱، ۲، ۴ و ۸ د) ۱، ۴، ۹ و ۱۶

۳۵ـ از نقطهٔ M واقع بر وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC عمودهای MH و MK را بر AB و AC رسم می‌کنیم. نقطهٔ M در چه جایی از BC باشد تا چهارضلعی $AHMK$ مربع باشد؟

الف) پای ارتفاع رأس A ب) وسط BC

ج) پای نیمساز زاویهٔ A د) نقطهٔ قرینهٔ وسط BC نسبت به پای نیمساز زاویهٔ A

۳۶ـ در مثلث ABC، زاویهٔ A به اندازهٔ 45° و زاویهٔ B به اندازهٔ 60° است. عمودهای CH، HK و HL را به ترتیب بر AB، بر AC و بر BC، و خط BK را نیز رسم می‌کنیم. از گزاره‌های زیر کدام‌یک نادرست است؟

الف) خط HK میانهٔ ضلع AHC است.

ب) خط BK میانهٔ ضلع AC است.

ج) درازای HL یک چهارم درازای BC است.

د) درازای BL یک چهارم درازای BC است.

۳۷ـ از نقطهٔ P واقع در درون دایرهٔ به مرکز O، وتر AC را به دلخواه و وتر BD را عمود بر AC رسم می‌کنیم. عمود OH را بر AB و عمود PK را بر CD نیز رسم می‌کنیم. هرگاه دو وتر به همان وضعی که نسبت به هم دارند دور نقطهٔ P بچرخند، کدام‌یک از گزاره‌های زیر در بعضی یا در همهٔ حالتها نمی‌تواند گزارهٔ درست باشد؟

الف) دو کمان AB و CD مکمل یکدیگرند.
ب) وسطهای دو کمان AB و CD دو سر یک قطر از دایره‌اند.
ج) سه نقطهٔ P و H و K بر یک خط راست واقع‌اند.
د) عمودمنصف وتر BD از مرکز دایره و از وسط کمان BAD می‌گذرد.

۳۸ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، دو رأس A و B ثابت‌اند و دو رأس دیگر در صفحه چنان حرکت می‌کنند که اندازهٔ هر یک از دو ضلع BC و AD همواره برابر با مقدار ثابت a است. خطی که از رأس A به وسط ضلع CD وصل می‌شود با قطر BD در M برخورد می‌کند. مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای است به مرکز I و به شعاع R. در کدام‌یک از دوتایی‌های زیر، نقطهٔ I و مقدار R به گونهٔ درست نموده شده‌اند؟

الف) I بر A واقع است و $R = \frac{۲a}{۳}$
ب) I وسط AB است و $R = \frac{a}{۳}$
ج) I بر AB واقع است به‌گونه‌ای که $AI = \frac{۲BC}{۳}$ و $R = \frac{a}{۳}$
د) I بر AB واقع است به‌گونه‌ای که $AI = \frac{AB}{۳}$ و $R = \frac{۲a}{۳}$

۳۹ـ مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. روی هر یک از ضلعهای این مثلث یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم. اگر مساحت مثلث به ضلع BC را با S و مساحتهای دو مثلث دیگر را به ترتیب با T و U نشان دهیم. کدام‌یک از رابطه‌های زیر یک برابری است؟

الف) $S^۲ = T^۲ + U^۲$ ب) $S^۴ = T^۴ + U^۴$
ج) $S^۲ = T \cdot U$ د) $S = T + U$

۴۰ـ از نقطهٔ A واقع بر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R دو وتر AB و AC از دایره چنان رسم می‌شوند که امتداد هر یک از آنها با خطی که در A بر دایره مماس است زاویهٔ به اندازهٔ ۶۰ درجه بسازد. مساحت مثلث ABC کدام مقدار زیر است؟

الف) $\frac{۳R^۲\sqrt{۳}}{۴}$ ب) $\frac{۳R^۲}{۴}$ ج) $۳R^۲\sqrt{۳}$ د) $۳R^۲$

۴۱ـ در مثلث ABC ضلع AB برابر با ۷۰ و M وسط AC است. عمودی که در M بر AC رسم شود با AB در P و عمودی که در P بر PM رسم شود با BC در Q برخورد می‌کند. هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{BC}{BQ - QC} = \frac{۵}{۲}$$

درازای AP برابر با کدام عدد زیر است؟

الف) ۲۱ ب) ۴۹ ج) ۲۰ د) ۵۰

۴۲ـ در مثلث ABC، میانهٔ ضلع AB بر میانهٔ ضلع AC عمود است. در این صورت $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ برابر است با:

الف) $3\overline{BC}^2$ ب) $4\overline{BC}^2$

ج) $5\overline{BC}^2$ د) $9\overline{BC}^2$

۴۳ـ اگر وسطهای ضلعهای چهارضلعی $ABCD$ رأسهای یک مربع باشند چهارضلعی $ABCD$؛

الف) به‌طور حتم یک مربع است.

ب) مربع نیست اما مستطیل است.

ج) مربع نیست اما لوزی است.

د) اگر مربع نباشد اما دو قطرش با هم برابر و بر هم عمودند.

۴۴ـ اگر خط $\triangle$ با دایرهٔ (C) برخورد کند و در نقطهٔ برخورد آنها مماسی بر دایره رسم شود، زاویهٔ بین خط $\triangle$ و این مماس را زاویهٔ بین خط $\triangle$ و دایرهٔ (C) می‌نامند. در حالتی که زاویهٔ بین خط و دایره قائمه باشد می‌گویند که خط بر دایره عمود است.

هرگاه بتوان خطهایی به تعداد نامتناهی را رسم کرد که همگی بر دو دایرهٔ داده شده عمود باشند، این دو دایره نسبت به هم کدام وضع زیر را دارند؟

الف) متخارج‌اند ب) هم‌مرکزند

ج) متداخل‌اند د) بر هم مماس‌اند

۴۵ـ در مثلث ABC، $\angle B - \angle C = 90°$، H پای ارتفاع نظیر رأس A است و D و E به ترتیب نقطه‌های برخورد نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A با ضلع BC و با امتداد آن می‌باشند.

اگر گزاره‌های زیر را دربارهٔ این مثلث بیان کنیم کدام‌یک از آنها گزارهٔ نادرست است؟

الف) ارتفاع AH واسطهٔ هندسی است بین BH و CH.

ب) HD با نصف AD برابر است.

ج) مثلث ADE متساوی‌الساقین است.

د) خطی که از A موازی با BC رسم شود بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد.

۴۶ـ دایرهٔ به مرکز O، نقطهٔ A واقع در درون یا بیرون آن، و زاویهٔ حادهٔ α داده شده‌اند.

(۱) هر خط که بر A بگذرد و با دایره در دو نقطهٔ M و N برخورد کند در این دو نقطه زاویه‌هایی برابر را با دایره می‌سازد.

(۲) اگر A بیرون دایره باشد کمان درخور زاویهٔ $\alpha + ۹۰^\circ$، و اگر A درون دایره باشد کمان درخور زاویهٔ $\alpha - ۹۰^\circ$، چنان رسم شود که بر A و O بگذرد و این کمان با دایرهٔ O برخورد کند، خطی که از A و نقطهٔ برخورد بگذرد با دایره زاویهٔ به اندازهٔ α می‌سازد.

(۳) از A حداکثر دو خط می‌توان رسم کرد که با دایرهٔ O زاویهٔ به اندازهٔ α بسازند.

از سه گزارهٔ بیان شده کدام یا کدامها گزارهٔ درست است؟

الف) هر سه ب) هیچ‌کدام

ج) (۱) و (۳) د) (۱) و (۲)

۴۷ـ در مثلث ABC دو ضلع AB و AC با هم برابرند و هر کدام به اندازهٔ a است. نیمسازهای داخلی AD، BC و CA رسم می‌شوند. هرگاه چهار نقطهٔ A، F، D و E بر یک دایره واقع باشند، درازای ضلع BC برابر با کدام‌یک از عددهای زیر است؟

الف) $\frac{a}{۲}(-۱ + \sqrt{۵})$ ب) $a(-۱ + \sqrt{۵})$

ج) $\frac{a}{۲}(-۱ + \sqrt{۱۷})$ د) $\frac{a}{۴}(-۱ + \sqrt{۱۷})$

۴۸ـ یک چندضلعی کوژ در دایرهٔ به شعاع R محاط است. مساحت این چندضلعی بیش از $۲R^۲$ و درازای هر ضلع آن بیش از R است. تعداد ضلعهای این چندضلعی کدام عدد زیر است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) بیش از ۵

۴۹ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$ دو ساق AD و BC با هم برابرند و دو قطر AC و BD در I برخورد می‌کنند و زاویهٔ AIB به اندازهٔ ۶۰ درجه است. اگر K وسط AI، L وسط BC و M وسط DI باشد، مثلث KLM؛

الف) متساوی‌الساقین است.

ب) قائم‌الزاویه است.

ج) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

د) متساوی‌الاضلاع است.

۵۰ـ دو دایره در A و B برخورد کرده‌اند. از A خطی رسم می‌کنیم که با دایرهٔ یکمی در C و با دایرهٔ دومی در D برخورد کند. مماسی که در C بر دایرهٔ یکمی رسم شود با مماسی که در D بر دایرهٔ دومی رسم شود با هم در E برخورد می‌کنند. چهارضلعی $BCED$؛

الف) محیطی است. ب) محاطی است.

ج) هم محیطی و هم محاطی است د) نه محیطی و نه محاطی است.

۵۱ـ در مثلث ABC اگر شعاع دایرهٔ محیطی با ضلع BC برابر باشد اندازهٔ زاویهٔ A برابر است با:

الف) ۱۵° ب) ۳۰° ج) ۴۵° د) ۶۰°

۵۲ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$ قاعدهٔ AB سه برابر قاعدهٔ CD است. اگر I نقطهٔ برخورد دو قطر ذوزنقه و S مساحت ذوزنقه باشد، مساحت مثلث IAB برابر است با:

الف) $\frac{S}{۳}$ ب) $\frac{S}{۹}$

ج) $\frac{۹S}{۱۳}$ د) $\frac{۹S}{۱۶}$

۵۳ـ سه دایرهٔ برابر به شعاع R دو به‌دو بر هم مماس خارج‌اند. مساحت ناحیهٔ واقع بین سه دایره برابر است با:

الف) $\frac{R^۲(۲\sqrt{۳}-\pi)}{۲}$ ب) $\frac{R^۲(۳\sqrt{۳}-\pi)}{۶}$

ج) $\frac{R^۲(۴\sqrt{۳}-\pi)}{۲}$ د) $\frac{R^۲(۱۲\sqrt{۳}-\pi)}{۶}$

۵۴ـ مربع $ABCD$ به ضلع برابر با ۸ داده شده است. ضلع AB را از طرف B تا I امتداد می‌دهیم که IB برابر با ۲ باشد. از I دو خط رسم می‌کنیم که یکی از آنها با AD در M و با BC در N، و دیگری با BC در K و با CD در L برخورد کند به‌گونه‌ای که IM برابر با $۴\sqrt{۷}$ و زاویهٔ ILC به اندازهٔ ۶۰ درجه باشد. مساحت پنج‌ضلعی $DMNKL$ برابر می‌شود با:

الف) $\frac{۱۴۴-۶۸\sqrt{۳}}{۳}$ ب) $۴۸-۱۶\sqrt{۳}$

ج) $\frac{۲۴۰-۷۹\sqrt{۳}}{۳}$ د) $\frac{۲۴۰-۶۸\sqrt{۳}}{۳}$

۵۵ـ روی ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC نقطه‌های D، E و F چنان به‌دست آمده‌اند که:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}=\frac{۱}{n}$$

نسبت مساحت مثلث DEF به مساحت ABC برابر است با:

الف) $\frac{n^۲-n+۱}{(n+۱)^۲}$ ب) $\frac{L}{(n+۱)^۲}$

ج) $\frac{n^۲}{(n+۱)^۲}$ د) $\frac{n^۲+۵n+۱}{(n+۱)^۲}$

۵۶ـ نیمدایرهٔ به‌قطر AB داده شده است و C نقطه‌ای دلخواه از AB است. به قطرهای AC و CB و داخل نیمدایرهٔ داده شده دو نیمدایره رسم می‌کنیم. مساحت ناحیهٔ محصور بین سه نیمدایره را با S نشان می‌دهیم. همچنین در C عمودی بر AB رسم می‌کنیم تا با نیمدایرهٔ داده شده در D برخورد کند. اگر T مساحت دایرهٔ به شعاع CD باشد، نسبت S به T برابر است با:

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۴}$ د) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$

۵۷ـ نیمدایرهٔ به‌قطر AB داده شده است. در A مماس Ax و در B مماس By را بر نیمدایره رسم می‌کنیم. نقطهٔ M را به دلخواه بر نیمدایره انتخاب و خطهای AM و BM را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا با By و Ax به ترتیب در C و D برخورد کنند. اگر $AD=a$ و $BC=b$،

قطر نیمدایره برابر است با:

الف) $\frac{a+b}{۲}$ ب) $\sqrt{ab}$

ج) $\frac{ab}{a+b}$ د) $\frac{ab}{۲(a+b)}$

۵۸ـ در مستطیل $ABCD$، ضلع بزرگتر $AB = a$ و ضلع کوچکتر $BC = b$ است. صفحهٔ مستطیل را یک بار چنان تا می‌کنیم که رأس A روی رأس C واقع شود. خط تا با AB در K و با CD در L برخورد می‌کند. صفحهٔ مستطیل را بار دیگر چنان تا می‌کنیم که رأس B روی رأس D واقع شود. خط این تا با AB در M و با CD در N برخورد می‌کند.

(۱) چهارضلعی $KMLN$ مستطیلی است مشابه با مستطیل $ABCD$.

(۲) در چهارضلعی $KMLN$، ضلع بزرگتر به اندازهٔ b است.

(۳) مساحت چهارضلعی $KMLN$ برابر است با $\frac{a^۳}{b}$.

از سه گزارهٔ (۱) و (۲) و (۳) کدام‌یک گزارهٔ نادرست است؟

الف) هیچ‌کدام ب) تنها (۳)

ج) تنها (۲) د) هر سه

۵۹ـ در مثلث ABC میانه‌های AM و BN را رسم می‌کنیم. اگر هر یک از دو زاویهٔ CAM و CBN به اندازهٔ ۳۰ درجه باشد؛

الف) دو ضلع CB و CA با هم برابرند و هر کدام آنها از AB کوچکتر است.

ب) دو ضلع CB و CA با هم برابرند و هر کدام آنها از AB بزرگتر است.

ج) هر سه ضلع مثلث با هم برابرند.

د) دو ضلع CB و CA در همهٔ حالتها نمی‌توانند با هم برابر باشند.

۶۰ـ مثلث ABC در زاویهٔ C منفرجه است. روی ضلع AB دو نقطهٔ D و E چنان به‌دست می‌آیند که AD با AC و BE با BC برابر باشد. همچنین نقطهٔ F روی ضلع AC و نقطهٔ G روی ضلع BC به‌دست می‌آیند که AF با AE و BG با BD برابر باشد. دایره‌ای را که از سه نقطهٔ C و D و E می‌گذرد Γ می‌نامیم. دو نقطهٔ F و G؛

الف) هر دو در خارج دایرهٔ Γ واقع‌اند.

ب) هر دو داخل دایرهٔ Γ واقع‌اند.

ج) یکی از آنها داخل دایرهٔ Γ و دیگری خارج آن دایره واقع است.

د) هر دو روی دایرهٔ Γ واقع‌اند.

پاسخنامهٔ پرسشهای چهارگزینه‌ای

۱ـج	۲ـب	۳ـج	۴ـالف	۵ـالف	۶ـد
۷ـج	۸ـالف	۹ـد	۱۰ـد	۱۱ـج	۱۲ـد
۱۳ـب	۱۴ـالف	۱۵ـد	۱۶ـد	۱۷ـج	۱۸ـب
۱۹ـج	۲۰ـب	۲۱ـالف	۲۲ـد	۲۳ـد	۲۴ـج
۲۵ـج	۲۶ـالف	۲۷ـالف	۲۸ـد	۲۹ـد	۳۰ـالف
۳۱ـب	۳۲ـالف	۳۳ـج	۳۴ـب	۳۵ـج	۳۶ـج
۳۷ـب	۳۸ـد	۳۹ـد	۴۰ـالف	۴۱ـالف	۴۲ـج
۴۳ـد	۴۴ـب	۴۵ـب	۴۶ـالف	۴۷ـج	۴۸ـج
۴۹ـد	۵۰ـب	۵۱ـب	۵۲ـد	۵۳ـالف	۵۴ـد
۵۵ـالف	۵۶ـج	۵۷ـب	۵۸ـب	۵۹ـج	۶۰ـد

راهنماییها و راه‌حلهای پرسشهای چهارگزینه‌ای

۱ ـ ج؛ اگر H مرکز ارتفاعی مثلث باشد، پاره‌خطهای FR، DP و EQ به ترتیب با HF، HD و HE برابرند و T برابر است با دو برابر مجموع مساحتهای سه مثلث ABH، BCH و CAH و برابر است با دو برابر مساحت مثلث ABC.

۲ ـ ب؛ در هر دایره قطر عمود بر هر وتر از وسط کمان روبه‌رو به آن وتر و نیمساز هر زاویهٔ محاطی نیز از وسط کمان روبه‌رو به آن زاویه می‌گذرد.

۳ ـ ج؛ در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD و CBD دو میانهٔ JA و JC با نصف وتر BD و بنابراین با هم برابرند.

۴ ـ الف؛ بنابر عکس قضیهٔ فیثاغورس مثلث ABC در زاویهٔ B قائمه است و BC واسطهٔ هندسی است با AC و HC. از این راه اندازهٔ HC و از روی آن اندازهٔ IH به‌دست می‌آید.

۵ ـ الف؛ در مثلث EHD دو خط HI و HJ نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ H هستند و ضلع روبه‌رو به این زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند.

۶ ـ د؛ دو زاویهٔ IMK و BDC ضلعهایشان بر هم عمودند پس یا برابر یا مکمل یکدیگرند. دو زاویهٔ BDC و BAC نیز با هم برابرند.

۷ ـ ج؛ بنابر رابطهٔ $\overline{AC}^{2} = AB \cdot AH$ برابری $BD = AH$ نتیجه می‌شود و عمودمنصف DH همان عمودمنصف AB است.

۸ ـ الف؛ دو زاویهٔ EAD و KAD هر دو قائمه‌اند و دو خط AE و AK بر هم واقع‌اند. زاویهٔ IAK از آن‌رو قائمه است که مثلث JAI متساوی‌الساقین و در نتیجه میانهٔ AJ از مثلث AIK با نصف ضلع IK برابر است.

۹ ـ د؛ مثلث BMD در زاویهٔ M قائمه است و از برابری $CB = CM$ نتیجه می‌شود که MC میانهٔ BD نیز باشد.

۱۰ ـ د؛ هر دو روش مثلث را مشخص می‌کنند (اما روش دوم ساده‌تر است).

۱۱ ـ ج؛ نیمساز، که ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند بین میانه و ضلع کوچکتر واقع است. ارتفاع از نیمساز کوچکتر است و بین نیمساز و ضلع کوچکتر قرار دارد.

۱۲ ـ د؛ خطی که از A عمود بر CD و خطی که از A به C رسم شود زاویهٔ OAD را به سه زاویهٔ برابر تقسیم می‌کنند و هر کدام از این زاویه‌ها با زاویهٔ ADB برابر است.

۱۳ ـ ب؛ ارتفاع AH که رسم شود سه مثلث ABH، AHC و ACD در قاعده برابر و در ارتفاع مشترک‌اند و مساحتهای برابر دارند. ارتفاع HK از مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB که رسم شود چون روبه‌رو به زاویهٔ ۱۵ درجه است با نصف وتر AB برابر می‌شود. مساحت مثلث ABD برابر می‌شود با سه برابر حاصل‌ضرب نصف a در یک چهارم a.

۱۴ ـ الف؛ ارتفاع BE از مثلث ABD که رسم شود، مثلث ABE قائم‌الزاویه و یک زاویهٔ حادهٔ آن به اندازهٔ ۳۰ درجه است و اندازه‌های AE و BE به‌سادگی به‌دست می‌آیند. مثلث BED هم قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. مساحت مثلث ABD برابر می‌شود با نصف حاصل‌ضرب BE در مجموع $BE + AE$.

۱۵ ـ د؛ در وضعی که M بر O واقع باشد N به فاصلهٔ a از O و P در نقطهٔ A از Oy به فاصلهٔ $\frac{a}{2}$ از O جای دارد و اگر پاره‌خط AB موازی و برابر با OM رسم شود به‌سادگی ثابت می‌شود که نیمساز زاویهٔ BAy از P می‌گذرد.

۱۶ ـ د؛ نقطهٔ N که جای برخورد دو ارتفاع از مثلث ABM است بر ارتفاع سوم مثلث جای دارد و MI بر AB عمود است. نقطهٔ A مرکز ارتفاعی مثلث BMN است و اگر دایرهٔ محیطی این مثلث را رسم کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با امتداد AB با C نشان دهیم I وسط AC است و بنابر رابطه‌های متری در دایره داریم:

$$IM \cdot IN = IC \cdot IB = IA \cdot IB$$

۱۷ ـ ج؛ اگر I وسط قطر BD باشد، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD و CBD که در وتر مشترک‌اند میانه‌های برابر دارند و اندازهٔ هر میانه برابر با $\frac{b}{2}$ است و بنابر آنکه I روی AC یا در خارج آن باشد AC با $BI + ID$ برابر یا از آن کوچکتر است.

۱۸ ـ ب؛ در هر مثلث، پای هر ارتفاع از نقطهٔ برخورد آن ارتفاع با دایرهٔ محیطی مثلث و از مرکز ارتفاعی مثلث به یک فاصله است. در مثلث یاد شده، مرکز ارتفاعی بر یکی از رأسها واقع می‌شود و زاویهٔ این رأس از مثلث قائمه است.

۱۹ ـ ج؛ مرکز دایره را با I و نقطهٔ برخورد AI با BC را با M نشان می‌دهیم. چون دایره بر دو ضلع AB و AC مماس است خط AM نیمساز زاویهٔ A است. اگر دو ضلع AB و AC با هم برابر باشند AM میانهٔ ضلع BC نیز هست و به‌سادگی ثابت می‌شود که BD با CE برابر است. برعکس، اگر BD با CE برابر باشد بنابر رابطه‌های

$$\overline{BT}^2 = BD \cdot BE, \quad \overline{CS}^2 = CE \cdot CD$$

برابری BT با CS نتیجه می‌شود و چون AT و AS نیز با هم برابرند نتیجه می‌شود که دو ضلع AB و AC با هم برابرند.

۲۰ ـ ب؛ در روش (۱) به واقع بودن M در وسط AB توجه نشده است. در روش (۲) این ویژگی به‌کار رفته که دو قطر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند و پاره‌خط AB که با PQ موازی است در M نصف می‌شود. در روش (۳) بنابر برابری دو مثلث PMA و QMB نتیجه می‌شود که M وسط AB است.

۲۱ ـ الف؛ AE دو برابر $EN = NF$ و در نتیجه AN سه برابر NF است.

۲۲ ـ د؛ نصف حاصل‌ضرب $AP \cdot PM$ با نصف حاصل‌ضرب $BQ \cdot QM$ باید برابر باشد.

۲۳ ـ د؛ دو مثلث ACD و ABE متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها ۲ است. پس مساحت مثلث ACD چهار برابر مساحت مثلث ABE، و مساحت چهارضلعی $BCDE$ سه برابر مساحت مثلث ABE است.

۲۴ ـ ج؛ بنابر ویژگی نیمساز زاویهٔ مثلث داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad (۱)$$

و بنابر رابطه‌های اندازه‌ای در دایره داریم:

$$BE \cdot BA = BM \cdot BD, \qquad CF \cdot CA = CM \cdot CD$$

دو طرف این دو برابری که نظیر به نظیر بر هم تقسیم شوند، با توجه به اینکه M وسط BC است و با توجه به تناسب (۱)، نتیجه خواهد شد که BE با CF برابر است.

۲۵ ـ ج؛ نقطهٔ D پای ارتفاع وارد از رأس A است و اگر یکی از دو زاویهٔ B یا C منفرجه باشد D در امتداد ضلع BC واقع می‌شود.

۲۶ ـ الف؛ دو دایره که بر هم عمود باشند شعاعهای آنها در هر یک از دو نقطهٔ برخوردشان بر هم عمودند. پس هم زاویهٔ A و هم زاویهٔ KDM باید قائمه باشد. دو خط KL و ML با دو ضلع زاویهٔ A موازی‌اند و از دو زاویهٔ A و KLM هر کدام که قائمه باشد دیگری نیز قائمه است.

۲۷ ـ الف؛ اگر M یک نقطه از مکان باشد مماس MT که بر دایره رسم شود، در مثلث قائم‌الزاویهٔ MTO زاویهٔ OMT به اندازهٔ ۶۰ درجه و ضلع OT برابر با R است و اندازهٔ MO برابر با $R\sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید.

۲۸ ـ د؛ دو خط که از G موازی با AB و AC رسم شوند با BC در P و Q برخورد می‌کنند و به‌سادگی ثابت می‌شود که $GP + GQ$ برابر با مقدار ثابت $\frac{a}{۳}$ است. پس مکان G یک بیضی است که P و Q کانونهای آن هستند.

۲۹ ـ د؛ مثلث ABC و مثلث میانه‌ای آن با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها دو به یک است. پس شعاع دایرهٔ α دو برابر شعاع دایرهٔ β و مساحت دایرهٔ α چهار برابر مساحت دایرهٔ β است.

۳۰ ـ *الف*؛ وتر مثلث قائم‌الزاویه از ارتفاع وارد بر آن و از هر ضلع مثلث بزرگتر است. پس دایرهٔ به مرکز C و به شعاع برابر با BC همواره با خط $\triangle$ در دو نقطهٔ واقع در دو طرف A برخورد می‌کند.

۳۱ ـ ب؛ اگر عمودهای DK و EL بر خط گذرندهٔ بر B و C رسم شوند با ارتفاع AH از مثلث و در نتیجه با نصف BC برابرند. پس هر یک از دو خط CD و CE با خط BC زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد و چون زاویهٔ C از مثلث ۴۵ درجه است و CA با یکی از دو خط CD یا CE زاویهٔ ۱۵° و با دیگری زاویهٔ ۱۰۵° می‌سازد.

۳۲ ـ الف؛ از هر نقطهٔ قاعده اگر دو عمود بر دو ساق و یک عمود بر ارتفاع وارد بر ساق رسم شود یک مستطیل و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ با هم برابر به‌دست می‌آید.

۳۳ ـ ج؛ اگر عمود PQ بر AB رسم شود درازای آن برابر با $۵۰\sqrt{۳}$ و درازای AQ برابر با ۱۵۰ به‌دست می‌آید. دو مثلث ABC و BPQ متشابه‌اند و با نوشتن تناسب آنها، درازای AB حساب می‌شود.

۳۴ ـ ب؛ اگر مساحت مثلث را S بگیریم، مثلث شامل سه بخش یکم و دوم و سوم با مثلث ABC به نسبت ۳ بر ۴ متشابه است. پس مساحتهای آنها بر نسبت ۹ بر ۱۶ هستند و مساحت مثلث شامل سه بخش $\frac{۹S}{۱۶}$ و مساحت ذوزنقه می‌شود:

$$S-\frac{۹S}{۱۶}=\frac{۷S}{۱۶}$$

اکنون اگر تشابه مثلث شامل دو بخش یکم و دوم را با مثلث شامل سه بخش یکم و دوم و سوم در نظر بگیریم، نسبت تشابه آنها ۲ بر ۳ و نسبت مساحتهای آنها ۴ بر ۹ است و مساحت بخش سوم برابر می‌شود با:

$$\frac{۹S}{۱۶}-\frac{۴S}{۱۶}=\frac{۵S}{۱۶}$$

مساحتهای بخشهای دوم و یکم هم به ترتیب برابر با $\frac{۳S}{۱۶}$ و $\frac{S}{۱۶}$ به‌دست می‌آیند و بنابراین، مساحتهای چهار بخش با عددهای ۱، ۳، ۵ و ۷ متناسب‌اند.

۳۵ ـ ج؛ چهارضلعی $AHMK$ در هر حال یک مستطیل است و برای آنکه مربع باشد کافی است که یک قطر آن نیمساز زاویهٔ نظیر باشد.

۳۶ ـ ج؛ مثلث AHC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین و زاویه‌های HCB و BHL هرکدام به اندازهٔ ۳۰ درجه‌اند.

۳۷ ـ ب؛ دو کمان AB و CD روبه‌رو به زاویهٔ داخلی قائمه‌اند و نصف مجموع آنها به اندازهٔ ۹۰ درجه و مجموع آنها به اندازهٔ ۱۸۰ درجه است. نصف کمان AB و نصف کمان CD متمم یکدیگرند و وسطهای AB و CD تنها هنگامی دو سر قطری از دایره‌اند که کمان BC به اندازهٔ ۹۰ درجه باشد یعنی P بر مرکز دایره واقع باشد. زاویهٔ CPK با زاویهٔ D، زاویهٔ D با زاویهٔ A، و زاویهٔ A با زاویهٔ APH برابر است و بنابراین، دو زاویهٔ CPK و APH با هم برابر و متقابل به رأس‌اند. عمودمنصف هر وتر از دایره از مرکز دایره و از وسطهای دو کمان روبه‌رو به آن وتر می‌گذرد.

۳۸ ـ د؛ اگر K وسط CD و O وسط AB باشد، M نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ACD است و نسبت AM به AK برابر با نسبت ۲ به ۳ است. خطی که از M موازی با KD رسم شود با AB در I برخورد می‌کند و داریم:

$$\frac{AI}{AO}=\frac{IM}{OK}=\frac{AM}{AK}=\frac{۲}{۳}$$

$$AI=\frac{۲AO}{۳}=\frac{AB}{۳},\quad R=IM=\frac{۲OK}{۳}=\frac{۲a}{۳}$$

۳۹ ـ د؛ در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مساحت برابر می‌شود با $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$. بنابراین:

$$S=\frac{\overline{AB}^۲\sqrt{۳}}{۴},\quad T=\frac{\overline{BC}^۲\sqrt{۳}}{۴},\quad U=\frac{\overline{CA}^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\overline{BC}^۲=\overline{AB}^۲+\overline{AC}^۲\implies S=T+U$$

۴۰ ـ الف؛ دو وتر AB و AC با هم برابرند و زاویهٔ بین آنها به اندازهٔ ۶۰ درجه است و درازای AB برابر با $R\sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و مساحت آن می‌شود:

$$\frac{\overline{AB}^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳R^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

۴۱ ـ الف؛ مثلث APC متساوی‌الساقین و PM نیمساز زاویهٔ APC است و PQ که بر PM عمود است نیمساز زاویهٔ BPC می‌شود. در مثلث PBC بنابر ویژگی نیمساز داخلی داریم

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{PB}{PC}$$

از سوی دیگر، رابطهٔ داده شده در صورت مسأله را چنین می‌نویسیم:

$$\frac{BQ+QC}{BQ-QC}=\frac{۵}{۲}\implies\frac{BQ}{QC}=\frac{۵+۲}{۵-۲}=\frac{۷}{۳}$$

بنابراین، نسبت PB بر PC برابر با نسبت ۷ بر ۳ است و از برابری PC با PA و از اینکه مجموع این دو پاره‌خط برابر با ۷۰ است، درازای PA برابر با ۲۱ به‌دست می‌آید.

۴۲ ـ ج؛ اگر M وسط AB و N وسط AC باشد بنابر رابطه‌های اندازه‌ای در هر مثلث داریم:

$$\overline{AB}^۲+\overline{BC}^۲=\frac{\overline{AC}^۲}{۲}+۲\overline{BN}^۲,\quad \overline{AC}^۲+\overline{BC}^۲=\frac{\overline{AB}^۲}{۲}+۲\overline{CM}^۲$$

از این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\overline{AB}^۲+\overline{AC}^۲=۴(\overline{BN}^۲+\overline{CM}^۲)-۴\overline{BC}^۲$$

و چنانچه G نقطهٔ برخورد میانه‌ها باشد خواهیم داشت:

$$\overline{AB}^۲+\overline{AC}^۲=۴(\frac{۹}{۴}\overline{BG}^۲+\frac{۹}{۴}\overline{CG}^۲)-۴\overline{BC}^۲$$

$$=۹(\overline{BG}^۲+\overline{CG}^۲)-۴\overline{BC}^۲$$

$$=۹\overline{BC}^۲-۴\overline{BC}^۲=۵\overline{BC}^۲$$

۴۳ ـ د؛ خطی که وسطهای دو ضلع چهارضلعی را به هم وصل می‌کند با قطر چهارضلعی موازی و با نصف آن برابر است. در چهارضلعی ABC دو قطر با ضلعهای مربع موازی و هر کدام دو برابر ضلع مربع است. پس دو قطر با هم برابر و بر هم عمودند و چهارضلعی ممکن است مربع باشد یا نباشد.

۴۴ ـ ب؛ برای آنکه یک خط بر یک دایره عمود باشد لازم و کافی است که از مرکز آن بگذرد. خط گذرنده بر مرکزهای دو دایره تنها خطی است که بر هر دوی آنها عمود است و در حالتی که دو دایره هم‌مرکز نباشند این خط یکتاست. در حالتی که دو دایره هم‌مرکز باشند هر شعاع آنها بر هر دوی آنها عمود است.

۴۵ ـ ب؛ دو زاویهٔ BAH و BCA با هم برابر و دو مثلث ABH و ACH متشابه‌اند و بنابر آن:

$$\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Longrightarrow \overline{AH}^{۲} = BH \cdot CH$$

زاویهٔ ADB زاویهٔ خارجی مثلث ACD است و در این مثلث و در مثلث ABD داریم:

$$\begin{cases} \angle D = \angle C + \frac{۱}{۲}\angle A \\ \angle D = ۱۸۰^\circ - \angle B - \frac{۱}{۲}\angle A \end{cases} \Longrightarrow \angle D = ۴۵^\circ$$

مثلث ADE که در آن زاویهٔ A قائمه و زاویهٔ D به اندازهٔ ۴۵° است متساوی‌الساقین است و HD برابر است با $\frac{AD\sqrt{۲}}{۲}$ و با نصف AD برابر نیست. بنابر گزارهٔ (الف)، دایرهٔ محیطی مثلث در A بر AH مماس است و شعاع AD از آن بر AH عمود و با BC موازی است.

۴۶ ـ الف؛ مماسهایی که در M و N بر دایره رسم شوند نسبت به خطی که از مرکز دایره بر MN عمود شود قرینهٔ یکدیگرند. اگر در نقطهٔ برخورد کمان درخور با دایره مماس بر دایره و همچنین خطی که از A و از آن نقطه می‌گذرد رسم شوند زاویهٔ حاده بین این خط و مماس برابر با α است. کمان درخور و دایره حداکثر دو نقطهٔ برخورد می‌توانند داشته باشند.

۴۷ ـ ج؛ نیمساز AD عمودمنصف ضلع BC و محور تقارن شکل است و بنابراین، دایره‌ای که بر چهار نقطهٔ A، F، D و E می‌گذرد به‌قطر AD است. درازای BC را $۲x$ می‌گیریم. در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{۲x}$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC که DE ارتفاع آن است داریم:

$$\frac{\overline{AD}^{۲}}{\overline{CD}^{۲}} = \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} \Longrightarrow \frac{\overline{AD}^{۲}}{x^{۲}} = \frac{a}{۲x}$$

$$\overline{AD}^{۲} = \overline{AC}^{۲} - \overline{CD}^{۲} = a^{۲} - x^{۲}$$

$$\frac{a^{۲} - x^{۲}}{x^{۲}} = \frac{a}{۲x} \Longrightarrow x = \frac{a}{۴}(-۱ + \sqrt{۱۷})$$

۴۸ ـ ج؛ چون هر ضلع بیش از R است تعداد ضلعها کمتر از ۶ است. تعداد ضلعها سه نمی‌تواند باشد زیرا از بین مثلهای محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را برابر با $\frac{۳\sqrt{۳}R^۲}{۴}$ دارد که از $۲R^۲$ کمتر است. به دلیل مشابه ثابت می‌شود که تعداد ضلعها ۴ هم نمی‌تواند باشد.

۴۹ ـ د؛ KM نصف AD و در نتیجه نصف BC است. هر یک از دو مثلث ABI و CDI متساوی‌الاضلاع است و اگر از B به K و از C به M وصل کنیم مثلثهای BCK و BCM قائم‌الزاویه‌اند و در آنها میانه‌های KL و ML با نصف وتر BC برابرند. سه پاره‌خط KM، KL و ML که هرکدام با نصف BC برابرند با یکدیگر برابرند.

۵۰ ـ ب؛ در دایرهٔ یکمی، زاویهٔ مماسی DCE و زاویهٔ محاطی ABC با هم برابرند. در دایرهٔ دومی هم دو زاویهٔ CDE و ABD با هم برابرند. بنابراین، زاویهٔ DBC برابر می‌شود با مجموع دو زاویهٔ ECD و EDC و در نتیجه مکمل زاویهٔ DEC است.

۵۱ ـ ب؛ اگر O مرکز دایرهٔ محیطی باشد مثلث OBC متساوی‌الاضلاع است و اندازهٔ کمان BC برابر با ۶۰° و اندازهٔ زاویهٔ محاطی A برابر با ۳۰° است.

۵۲ ـ د؛ دو مثلث IAB و ICD متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها ۳ است و IB سه برابر ID است. نسبت مساحت IAB به مساحت ICD برابر با $۹ = ۳^۲$، نسبت مساحت IAB به مساحت IAD برابر با نسبت IB به ID و برابر با ۳ است. نسبت مساحت IAB به مساحت IBC نیز برابر با ۳ است. اگر مساحت IAB را برابر با T بگیریم داریم:

$$T + \frac{T}{۹} + \frac{۲T}{۳} = S \Longrightarrow T = \frac{۹S}{۱۶}$$

۵۳ ـ الف؛ مرکزهای سه دایره یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۲R$ و نقطه‌های تماس دایره‌ها یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع R را می‌سازند. مساحت خواسته شده به این ترتیب به‌دست می‌آید که از مساحت متساوی‌الاضلاع به ضلع R، مساحتهای سه قطعه دایرهٔ به زاویهٔ مرکزی ۶۰° کم شود:

$$S = \frac{R^۲\sqrt{۳}}{۴} - ۳\left(\frac{\pi R^۲}{۶} - \frac{R^۲\sqrt{۳}}{۴}\right) = \frac{R^۲(۲\sqrt{۳} - \pi)}{۲}$$

۵۴ ـ د؛ درازاهای $AM = ۲\sqrt{۳}$، $IK = ۴$ و $BK = ۲\sqrt{۳}$ و $CK = ۸ - ۲\sqrt{۳}$ به‌سادگی حساب می‌شوند و از روی آنها و با استفاده از تشابه مثلثها، درازاهای $BN = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $CL = \frac{۸ - ۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$ به‌دست می‌آیند. مساحت ذوزنقهٔ $ABNM$ برابر با $۱۰\sqrt{۳}$ و مساحت مثلث CKL برابر با $\frac{۳۸\sqrt{۳} - ۴۸}{۳}$ حساب می‌شود و مجموع این دو مساحت از مساحت مربع یعنی از ۶۴ کم می‌شود.

۵۵ ـ الف؛ اشتباه است اگر گمان شود که باید تشابه دو مثلث را به‌کار برد. این قضیه را می‌توان به‌کار برد که اگر دو مثلث در یک زاویهٔ مشترک باشند نسبت مساحتهای آنها برابر است با نسبت

حاصل‌ضربهایِ دو ضلع آن زاویه. مساحت مثلث ABC را با S و مساحتهای مثلثهای ADF، BDE و CEF را به ترتیب با $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$، و مساحت مثلث DEF را با T نشان می‌دهیم. از تناسبهای داده شده به‌دست می‌آید:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{۱}{n+۱},\quad \frac{AF}{AC}=\frac{n}{n+۱},\quad \frac{S_۱}{S}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}=\frac{n}{(n+۱)^۲}$$

و به همین گونه خواهیم داشت:

$$\frac{S_۲}{S}=\frac{S_۳}{S}=\frac{n}{(n+۱)^۲}\implies\frac{S_۱+S_۲+S_۳}{۳S}=\frac{n}{(n+۱)^۲}$$

$$\frac{S-(S_۱+S_۲+S_۳)}{۳S}=\frac{(n+۱)^۲-۳n}{(n+۱)^۲}\implies\frac{T}{S}=\frac{n^۲-n+۱}{(n+۱)^۲}$$

۵۶ ـ ج؛ به ترتیب داریم:

$$T=\pi\cdot\overline{CD}^۲,\ \ S=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi\cdot\overline{AB}^۲}{۴}-\frac{\pi\cdot\overline{AC}^۲}{۴}-\frac{\pi\cdot\overline{BC}^۲}{۴}\right)$$

$$S=\frac{\pi}{۸}(\overline{AB}^۲-\overline{AC}^۲-\overline{BC}^۲)$$

مثلث ADB در زاویهٔ D قائمه و CD ارتفاع آن است و در آن داریم:

$$\overline{AC}^۲+\overline{BC}^۲=(\overline{AD}^۲-\overline{CD}^۲)+(\overline{BD}^۲-\overline{CD}^۲)$$

$$=\overline{AD}^۲+\overline{BD}^۲-۲\,\overline{CD}^۲=\overline{AB}^۲-۲\,\overline{CD}^۲$$

$$S=\frac{\pi}{۸}(\overline{AB}^۲-\overline{AB}^۲+۲\,\overline{CD}^۲)=\frac{\pi\cdot\overline{CD}^۲}{۴}\implies\frac{S}{T}=\frac{۱}{۴}$$

۵۷ ـ ب؛ اگر عمود MH بر AB رسم شود به‌دست می‌آید:

$$\frac{MH}{BC}=\frac{AH}{AB},\quad\frac{MH}{AD}=\frac{BH}{AB}\implies\frac{\overline{MH}^۲}{AD\cdot BC}=\frac{AH\cdot BH}{\overline{AB}^۲}$$

مثلث AMB در زاویهٔ M قائمه است و $\overline{MH}^۲=AH\cdot BH$. بنابراین:

$$\overline{AB}^۲=AD\cdot BC=ab$$

۵۸ ـ ب؛ هر یک از دو خط تا بر یکی از دو قطر مستطیل عمود است. دو پاره‌خط KL و MN با هم برابرند زاویهٔ بین آنها با زاویهٔ بین دو قطر مستطیل $ABCD$ برابر است. بنابراین، چهارضلعی $KMLN$ مستطیلی است متشابه با مستطیل $ABCD$ که ضلع بزرگتر آن با BC برابر و به اندازهٔ b است. نسبت تشابه دو مستطیل $\frac{a}{b}$ است و مساحت $KMLN$ برابر است با $\frac{b^۳}{a}$.

۵۹ ـ ج؛ درازای AM را $۳a$ و درازای BN را $۳b$ می‌گیریم. اگر G نقطهٔ برخورد میانه‌ها باشد، $GM=a$ و $GN=b$ می‌شود. عمود GH را بر BC و عمود CK را بر AC رسم می‌کنیم و

داریم:

$$GH = \frac{GB}{۲} = b, \quad GH \leqslant GM \Longrightarrow b \leqslant a$$
$$GK = \frac{GA}{۲} = a, \quad GK \leqslant GN \Longrightarrow a \leqslant b$$

از دو رابطهٔ $b \leqslant a$ و $a \leqslant b$ نتیجه می‌شود $a = b$ و بنابراین $AM = BN$ و بر پایهٔ آن: $CB = CA$.

در مثلث AMC ضلع CM که نصف CB است نصف AC هم هست و چون زاویهٔ روبه‌رو به آن به اندازهٔ ۳۰ درجه است، زاویهٔ M قائمه و زاویهٔ C به اندازهٔ ۶۰ درجه و مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۶۰ ـ د: هر یک از چهارضلعی‌های $CDEF$ و $CEDG$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است و بر چهار رأس آنها یک دایره می‌گذرد. اما این دو دایره در سه نقطهٔ C و D و E مشترک‌اند و بنابراین بر هم منطبق‌اند و پنج نقطهٔ C، G، D، E و F همه بر یک دایره واقع‌اند.