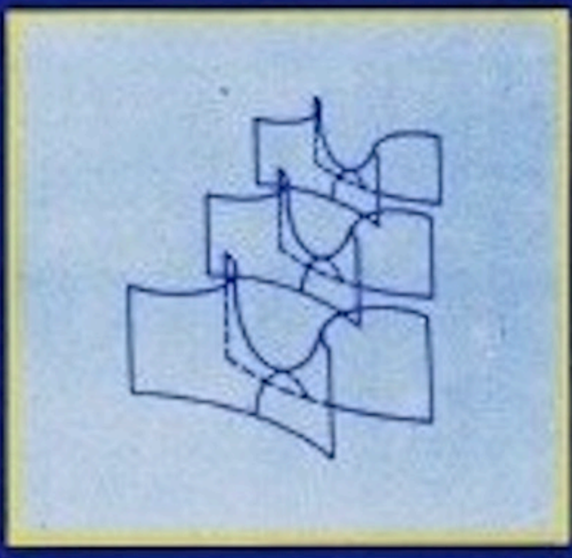
مری ال . بوس

روشهای ریاضی در علوم فیزیکی

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، شمارهٔ ۱۷۹



ترجمه

حمید قنبری ـ رحیم کوهی فائق ـ محمد هادی هادی‌زاده یزدی

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، شمارهٔ ۲۲۲

روشهای ریاضی در علوم فیزیکی

ویرایش دوم

تألیف

مری اِل. بُوْس

ترجمه

جمشید قنبری - رحیم کوهی فائق - محمدهادی هادی‌زاده یزدی

۱۳۷۶

Boas, Mary L.
بُژس ، مری اِل .
روشهای ریاضی درعلوم فیزیکی / تألیف مری ال . بُژس ؛ ترجمهٔ جمشید قنبری ، رحیم کوهی فائق ، محمدهادی هادی‌زاده یزدی . ـ مشهد : دانشگاه فردوسی (مشهد) ، ۱۳۷۴ - ۱۳۷۶ .
۲ ج. (۱۱۷۵ص). : مصور، جدول، نمودار . ـ (انتشارات‌دانشگاه‌فردوسی‌مشهد ؛ ۱۷۹ ، ۲۲۲) .
بها : ۹۱۰۰ ریال (ج . ۱) .
ISBN 964-6335-03-9
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار) .
عنوان اصلی : Mathematical Methods in the Physical Sciences
واژه‌نامه .
کتابنامه .
۱. ریاضیات . الف . قنبری، جمشید . مترجم . ب . کوهی‌فائق ، رحیم . مترجم . ج . هادی‌زاده ، محمدهادی . ۱۳۲۶ ـ ، مترجم . د . دانشگاه فردوسی (مشهد) . هـ . عنوان
۹ ر ۸۷ ب/۳۷/۲/QA ۵۱۰
۱۳۷۶
کتابخانه ملی ایران ۶۹۲۱ ۷۴۰ م

شناسنامهٔ کتاب

نام : روشهای ریاضی در علوم فیزیکی (جلد دوم)

تألیف : مری اِل بُژس

ترجمهٔ : دکتر جمشید قنبری ، دکتر رحیم کوهی فائق ، دکتر محمدهادی هادی‌زاده یزدی

ناشر : انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ انتشار : پاییز ۱۳۷۶

تعداد : ۲۰۰۰ نسخه ـ چاپ اوّل

امور فنّی و چاپ : مؤسّسهٔ چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

قیمت : ۱۱۰۰۰ ریال

شابک : ۹ ـ ۰۳ ـ ۶۳۳۵ ـ ۹۶۴ (ISBN: 964 - 6335 - 03 - 9)

فهرست

پیشگفتار مؤلف

این کتاب مختصّ دانشجویانی است که با معلومات حساب انتگرال و دیفرانسیل سال اوّل می‌خواهند در مدّت کوتاهی در هر یک از موضوعات ریاضی مورد نیاز در درسهای سالهای سوّم تا چهارم دورهٔ کارشناسی، یا سال اوّل کارشناسی ارشد فیزیک، شیمی، و مهندسی، تبحرّی مقدماتی کسب کنند. بنابراین، سطح آن طوری در نظر گرفته شده است که برای دانشجویان سال دوّم (یا آن دسته از دانشجویان سال اوّل که درس جبر دبیرستان را گذرانده‌اند) قابل استفاده باشد. دانشجویان رده‌های بالاتر نیز می‌توانند به نحو مؤثری برای مرور موضوعات نیمه فراموش شده و آموختن موضوعات جدید، چه به صورت مطالعهٔ آزاد و چه به صورت رسمی، از این کتاب استفاده کنند. اگر چه کتاب مخصوصاً برای دانشجویان علوم فیزیکی نوشته شده است، ولی دانشجویان رشته‌های دیگر (مثلاً، ریاضی، یا ریاضی دبیری) نیز ممکن است آن را برای مطالعهٔ عمومی بسیاری از موضوعات، یا برای کسب معلومات در زمینه‌هایی که وقت کافی برای مطالعهٔ عمیق آنها ندارند، مفید بیابند. چون قضیّه‌ها به دقّت بیان می‌شوند، این گونه دانشجویان در کارهای بعدی‌شان نیاز به بازآموزی نخواهند داشت.

موضوع آموزش صحیح ریاضیات به دانشجویان علوم فیزیکی، هم برای ریاضیدانان و هم برای آنهایی که ریاضیات را در کاربست آن مورد استفاده قرار می‌دهند، حائز اهمیت است. ریاضیدانان، کم و بیش بر این عقیده‌اند که اگر دانشجو قرار است ریاضی بخواند، بهتر است با جزئیات دقیق و مفصّل بخواند. برای دانشجوی کارشناسی فیزیک، شیمی، یا مهندسی این بدان معناست که یا (۱) بیش از یک دانشجوی رشتهٔ ریاضی، ریاضی یاد بگیرد، یا (۲) تعداد معدودی

از موضوعات ریاضی را دقیق فرا بگیرد و بقیّه را صرفاً به صورت منقطع از درسهای علوم دست چین کند. اغلب اوقات، راه دوّم طرفداران بیشتری دارد، اما بگذارید بگویم چرا به نظر من این تصوّر قانع کننده نیست. مسلماً این درست است که با کاربست سریع یک تکنیک ریاضی، انگیزه بالا می‌رود، اما زیانهایی نیز به بار می‌آید:

۱- مباحث ریاضی در خطر سطحی نگری قرار خواهند گرفت، زیرا علاقهٔ اصلی متوجه آنها نیست.

۲- دانشجویان به طور همزمان با فراگرفتن یک روش جدید ریاضی و کاربست آن در زمینه‌ای علمی که آن نیز برایشان جدید است، مواجه‌اند. اکثر اوقات، مشکل درک زمینهٔ علمی جدید، بیشتر در آشفتگی فکری ناشی از فهم ناقص ریاضیات نهفته است تا در ایده‌های علمی جدید.

۳- دانشجویان ممکن است در دو درس مختلف علوم، به آنچه که در واقع یک اصل ریاضی است بربخورند بدون اینکه ارتباط آنها را تشخیص بدهند، یا حتی قضیّه‌های ظاهراً متناقضی را در دو درس مختلف فرا بگیرند! برای مثال، در ترمودینامیک دانشجو می‌آموزد که انتگرال یک دیفرانسیل کامل روی یک مسیر بسته همیشه صفر است، اما در الکتریسیته یا در هیدرودینامیک با $\int_{۰}^{۲\pi} d\theta$ مواجه می‌شود که مسلماً انتگرال یک دیفرانسیل کامل روی یک مسیر بسته است اما صفر نیست!

حال خوب بود اگر هر دانشجوی علوم می‌توانست درسهای ریاضی جداگانه‌ای در معادلات دیفرانسیل (معمولی و با مشتقّات جزئی)، حساب انتگرال و دیفرانسیل پیشرفته، جبر خطی، آنالیز برداری و تانسوری، اعداد مختلط، رشتهٔ فوریه، احتمال، حساب وردشها، توابع خاصّ، و غیره بگذارند. اما اکثر دانشجویان علوم نه وقت و نه تمایل برای آموزش این همه ریاضیات دارند، هر چند که همواره به علت عدم تسلّط کافی بر تکنیکهای بنیادین این موضوعات، در درسهای علوم‌شان لنگ می‌زنند. هدف این کتاب این است که به این قبیل دانشجویان زمینهٔ کافی در هر یک از قلمروهای مورد نیاز بدهد تا آنها بتوانند با موفقیّت از عهدهٔ درسهای سالهای سوم و چهارم کارشناسی، و آغاز کارشناسی ارشد علوم فیزیکی برآیند. همچنین امیدآن است که برخی

دانشجویان چنان مجذوب یک یا چند شاخه در ریاضیات بشوند که بیشتر آن را دنبال کنند.

روشن است که اگر قرار باشد این همه موضوع در یک درس گنجانده شوند، باید مطالبی را حذف کرد. من بر این باورم که در این مرحله از کار دانشجو، بدون ضرری جدّی، دو چیز را می‌توان کنار گذاشت: عمومیّت، و اثباتهای مفصّل. بیان و اثبات یک قضیه در عمومی‌ترین شکل آن برای ریاضیدانان و دانشجویان سالهای بالاتر مهم است، اما در مورد دانشجویان مبتدی‌تر، اغلب اوقات غیر ضروری و احتمالاً گیج کننده است. این ابداً به معنای آن نیست که ریاضیات دقیق به کار دانشجوی علوم نمی‌آید. دانش پیشگان علوم، حتی بیش از ریاضیدانان به بیانهای دقیق دربارهٔ حدود اعتبار کاربست فرایندهای ریاضی نیاز دارند تا بتوانند با اطمینان و بدون توسّل به اثبات اعتبار آنها، از آنها استفاده کنند. در نتیجه، سعی شده است بیانهای دقیقی از قضیه‌های مورد نیاز، هر چند اغلب برای حالتهای خاصّ و بدون اثبات، ارائه گردد. دانشجویان علاقه‌مند به آسانی می‌توانند جزئیّات بیشتر را در کتابهای درسی شاخه‌های خاصّ پیدا کنند؛ به لیست مراجع در آخر کتاب مراجعه کنید.

کتابهای درسی دیگر در این زمینه، تقریباً بالاتفاق، درجه‌ای از ریاضی ثقیل را در فیزیک پیشرفته مطرح می‌کنند که دانشجویان در سطح سال دوم هنوز به آن دست نیافته‌اند. با این همه اگر به این قبیل دانشجویان توضیحات ساده و روشن داده شود، می‌توانند سریعاً مهارت لازم را پیدا کنند (نه تنها می‌توانند، بلکه اگر قرار باشد درسهای فیزیک سالهای سوّم و چهارم رابگذرانند، خواه ناخواه، مجبور خواهند بود!) این دانشجویان آمادگی ریزه‌کاریهای کاربردی را ندارند - در درسهای علوم‌شان به این مطالب خواهند پرداخت - اما به ارائهٔ ایده‌هایی دربارهٔ کاربست روشها و بعضی کاربردهای ساده نیاز دارند. سعی شده است این نکته در هر موضوع تازه‌ای مراعات گردد. بسیاری از کتابهای دیگر متمایل به شاخهٔ خاصّی هستند و فصل‌های متعدّدی را دربارهٔ موضوعات پیشرفتهٔ آن شاخهٔ خاصّ دربردارند. منظور از این کتاب، پوشاندن روشهای صرفاً مقدماتی، به گونه‌ای ساده است.

طی ۱۷ سال پس از چاپ ویرایش اول این کتاب، بیش از همیشه به ارزش ارائهٔ این مواد در سطح سال دوّم به دانشجویان علوم فیزیکی متقاعد شده‌ام. در غیر این صورت، دانشجویان باید برای آموختن معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، توابع خاصّ، رشته و تبدیلات فوریه، احتمال، حساب وردشها، قطری کردن ماتریسها، و غیره، در خلال برخورد با این موضوعات در

درسهای سالهای سوم و چهارم مکانیک کوانتومی، الکترودینامیک، مکانیک کلاسیک، اپتیک، و غیره تلاش نمایند. بنابراین، بافت اصلی کتاب تغییری نکرده است. تغییرات عمده در ویرایش دوّم به شرح زیر است:

۱- فصل ۳ کاملاً بازنویسی شده است تا روش کاهش سطری در حل مجموعه معادلات همزمان، و وارون کردن ماتریسها را نیز در بر بگیرد؛ جبر برداری نیز به این فصل منتقل شده است. با این همه، من قویاً با کسانی که دترمینانها، قاعدهٔ کرامر، و فرمول وارون یک ماتریس را، به نفع روش کاهش سطر، حذف می‌کنند مخالف هستم. علیرغم اهمیّت کامپیوتر، ریاضی فیزیک مقوله‌ای است خیلی فراتر از حساب، و فرمولها در فیزیک نظری اهمیت خود را حفظ می‌کنند. بنابراین، من هر دو روش محاسباتی و فرمولی را ارائه داده‌ام و اهمیت آنها را برای مقاصد مختلف بیان کرده‌ام.

۲- تعداد مسائل تقریباً دو برابر شده است. دانشجو باید خیلی مسأله حل کند تا در این مطالب مهارت پیدا نماید و روشهای خوب مسأله حل کردن را بیاموزد. مسائل مناسب اکنون در هر یک از بخشها گنجانده شده‌اند؛ همچنین آخرین بخش هر فصل شامل مجموعه‌ای از مسائل متفرقه است. به سیستم شماره گذاری مسائل توجه کنید: مسألهٔ ۷-۲ به معنای مسألهٔ ۲ از بخش ۷ است، اما، در بخش ۷ صرفاً آن را مسألهٔ ۲ می‌خوانیم. همچنین توجه کنید که شماره‌های معادلات در پرانتز می‌آیند؛ یعنی، (۷-۲) به معنای معادلهٔ (۷-۲) است.

۳- فرمولهای مهم، تعاریف، قضیه‌ها، و غیره، در داخل کادر قرار داده شده‌اند تا پیدا کردن آنها ساده‌تر باشد.

۴- فصل ۴ قدیمی (مشتقات جزئی و انتگرالهای چندگانه) به دو فصل (۴ و ۵) تقسیم شده است. در فصل ۵ جدید (انتگرالهای چندگانه)، مطالب مقدماتی مربوط به انتگرالهای دوگانه و سه‌گانه اضافه شده است، و انتگرالهای سطحی (روش $sec\ \gamma$) به این فصل منتقل شده است. ترتیب برخی از فصل‌های آخر نیز عوض شده است. همچنین، بخشهای جدیدی به توابع هرمیت و لاگر (فصل ۱۲ ، بخش ۲۲) و توابع گرین (فصل ۱۵ ، بخش ۸) اضافه شده است.

مطالب کتاب طوری مرتب شده است که دانشجویانی که فصل‌های آن را به ترتیب مطالعه می‌کنند در هر مرحله، زمینهٔ لازم را داشته باشند. با این همه، دنبال کردن ترتیب کتاب همیشه ضروری یا مطلوب نیست. بگذارید بعضی از بازآرایشهایی را که مفید یافته‌ام پیشنهاد کنم: بـا مشکلات اندکی می‌توان به جای فصل ۱، از فصل ۳ یا فصل ۴ یا فصل ۵ شروع کرد. اگر فصل ۴ بر فصل ۱ مقدم شود، بخش رشته‌های توانی دومتغیّره را می‌توان به بعد موکول کرد. با فرض اینکه کلاس، با جبر برداری و دترمینانها از فصل ۳ آشنا باشد، و راجع به مشتقات جزئی هم از فصل ۴ اندکی اطلاع داشته باشد، هیچ مشکلی برای شروع کردن از فـصل ۶ وجـود نـخواهـد داشت. این امر، انگیزهٔ کاربردهای فیزیکی بسیاری را فراهم می‌کند. کلاس باید قبل از پرداختن به فصل‌های ۷ و ۸، به فصل‌های ۱ و ۲ برگردد. اگر دانشجویان قبلاً مطالب هر یک از فصل‌های ۱، ۳، ۴، ۵، ۶، یا ۸ را (در درسهایی مانند حساب انتگرال و دیفرانسیل سال دوّم، مـعادلات دیفرانسیل، جبر خطی) فرا گرفته باشند، در آن صورت فـصل (فـصل‌های) مشـابه را مـی‌توان حذف کرد، و از آنها به عنوان مرجع استفاده نمود، یا، ترجیحاً، به اجمال و با تأکید بیشتر بر حل مسائل، آنها را مرور کرد. دانشجویان ممکن است، مثلاً، با قضیهٔ تیلور آشنا باشند، اما نتوانند به سرعت و مهارت رشتهٔ مک‌لورن $x^{-1} \sin (x^2)$ را پیداکنند، ممکن است نظریهٔ انتگرالهای چندگانه را بدانند، اما برای‌شان مشکل باشد که انتگرال دوگانهٔ گشتاور لَخت یک پوستهٔ کروی را تنظیم کنند، ممکن است با قضیه‌های معادلات دیفرانسیل آشنا باشند، اما مهارت کمی در حل، مثلاً، $y'' + y = x \sin x$ داشته باشند.

پس از فصل ۷ (رشتهٔ فوریه)، خوب است چهار بخش اوّل فصل ۱۳ (معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی) و چهار بخش اوّل فصل ۱۵ (تبدیلات لاپلاس و فوریه) تدریس شود. اگر چه بخشهای بعدی فصل‌های ۱۳ و ۱۵ مستلزم زمینهٔ علمی بیشتری هستند، اما این بخشهای اولیه، به دنبال فصل ۷ به خوبی کارساز اند. در مراحل بعد، تکمیل تدریس فصل ۱۳ پس از فصل ۱۲، و فصل ۱۵ پس از فصل ۱۴ توصیه می‌شود. فصل ۱۶ تقریباً مستقل از بقیهٔ کتاب است؛ مطالب آن را در هر جایی از ابتدا تا انتهای یک درس یکساله می‌توان ارائه کرد. پیش نیازهای زیـر در فصل‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

برای فصل ۹: معادلات دیفرانسیل (فصل ۸).

برای فصل ۱۰: ماتریسها (فصل ۳)؛ بردارها (فصل‌های ۳ و ۶)؛ معادلات لاگرانژ (فصل ۹).

برای فصل ۱۱: رشتهٔ توانی (فصل ۱)؛ مشتق‌گیری از انتگرال (فصل ۴)؛ معادلات لاگرانژ (فصل ۹)، که در یک مثال به کار رفته است.

برای فصل ۱۲: رشتهٔ توانی (فصل ۱)؛ اعداد مختلط (فصل ۲)؛ مشتقات جزئی (فصل ۴)؛ معادلات دیفرانسیل (فصل ۸)؛ تابع گاما (فصل ۱۱)؛ زمینهٔ فصل‌های ۳ ، ۶ ، ۷ ، ۱۰ که در مبحث ویژه مقدارها و توابع متعامد به کار می‌رود.

برای فصل ۱۴: رشتهٔ توانی (فصل ۱)؛ اعداد مختلط (فصل ۲)؛ مشتقات جزئی (فصل ۴)؛ بردارها و قضیّه‌های برداری (فصل ۶)؛ تبدیلات (فصل ۱۰)، که در یک مبحث به کار رفته است.

با استفاده از مطالب این کتاب، می‌توان درسهای مختلف دیگری نیَز به شرح زیر ارائه کرد:

۱- یک درس یکساله در روشهای ریاضی برای دانشجویانی با زمینهٔ قبلی یک سال (یا یک سال و نیم) در حساب انتگرال و دیفرانسیل. با این قبیل دانشجویان، و با سه جلسه در هفته، حدود ۱۳ یا ۱۴ فصل کتاب را می‌توان در خلال یک درس یکساله تدریس کرد.

۲- یک درس یک ترمی نیمساله یا یک ثلثی برای دانشجویان با زمینهٔ علمی بیشتر (دانشجویان سالهای بالای دورهٔ کارشناسی یا دانشجویان کارشناسی ارشد که نیاز به یک درس بازآموزی در موضوعات پیشرفته‌تر دارند). برای این گونه دانشجویان، می‌توان از فصل ۹ (یا هر فصل بعدی مورد نظر) شروع و بر حسب نیاز به فصل‌های قبل رجوع کرد.

۳- معادلات دیفرانسیل برای این درس. مطالب این کتاب بیش از اکثر کتابهای درسی معادلات دیفرانسیل است. فصل ۸ به عنوان مطالب پایه و فصل ۲ به عنوان مرجع، و سپس، برای دانشجویان بهتر، مطالب فصل‌های ۷ ، ۱۲ ، ۱۳ و ۱۵ برای جوابهای رشته‌ای، استفاده از تبدیلات لاپلاس، و مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار می‌رود.

۴- رشتهٔ فوریه و مسائل مقدار مرزی. مطالب فراوانی در فصل‌های ۷ ، ۱۲ و ۱۳ برای این درس وجود دارد.

لطفاً به دو موضوع مفید در انتهای کتاب توجه کنید: مراجع و کتابشناسی، و جواب مسائل برگزیده.

مایل هستم از دانشجویانم در طی سال‌های گذشته و همچنین سایر خوانندگان به خاطر پیشنهادهای مفیدشان در مورد بهبود کیفیت کتاب تشکر کنم؛ از پیشنهادهای دیگر نیز استقبال می‌کنم. از عکس‌العملهای صمیمانه نسبت به ویرایش اول کتاب بسیار سپاسگزارم و امیدوارم که ویرایش دوم حتی مفیدتر باشد.

ژانویه ۱۹۸۳/ زمستان ۱۳۶۱ — مری . اِل . بُؤس

سخنی با دانشجو

وقتی مبحثی را در این کتاب شروع می‌کنید شاید با تعجب از خود بپرسید اصلاً چرا باید آن موضوع را مطالعه کنید و کاربردهای آن چیست؟ داستانی راجع به یک معلم جوان ریاضی نقل می‌شود که از استاد مسن‌تر خود پرسید «وقتی دانشجویان راجع به کاربردهای عملی بعضی مباحث ریاضی از شما سؤال می‌کنند، چه می‌گویید؟» استاد با تجربه گفت «جوابشان را می‌دهم!» این کتاب تلاش دارد آن نصیحت را دنبال کند. با این همه، شما باید به سهم خود در خواسته‌هایتان منطقی باشید. امکان ندارد بتوان در یک کتاب یا درس، هم روشهای ریاضی و هم کاربردهای فراوان و مفصّل آنها را مطرح کرد. شما باید به برخی اطلاعات پیرامون زمینه‌های کاربرد هر موضوع، و بعضی کاربردهای ساده‌تر آن راضی باشید، و سپس در درسهای بعدی‌تان از این فنون در کاربردهای پیشرفته استفاده کنید.

به یک نکته دربارهٔ مطالعهٔ این مطالب نمی‌توان خیلی تکیه کرد: برای کاربست مؤثر ریاضیات، تنها به معلومات احتیاج ندارید، بلکه مهارت نیز لازم است. مهارت را فقط در سایهٔ تمرین می‌توان کسب کرد. شما می‌توانید با گوش دادن به سخنرانی‌ها قدری ***معلومات سطحی*** به دست آورید، اما نمی‌توانید به این طرق مهارت کسب کنید. از بسیاری دانشجویان شنیده‌ام که می‌گویند «وقتی شما کاری را انجام می‌دهید بسیار ساده به نظر می‌رسد» یا «من آن را می‌فهمم ولی نمی‌توانم مسأله حل کنم!» چنین اظهاراتی حاکی از فقدان تمرین و نتیجتاً فقدان مهارت است. تنها راه تأمین مهارت لازم برای کاربست این مطالب در درسهای بعدی‌تان این است که با حل مسائل، زیاد تمرین کنید. همیشه هنگام مطالعه، قلم و کاغذ در دسترس داشته باشید. تنها به

مرور کردن مسائل حل شده اکتفا نکنید - سعی کنید خودتان آن را حل کنید! سپس چند مسألهٔ مشابه از مجموعه مسائل آن بخش را با سعی بر انتخاب مناسبترین روش از مسائل حل شده، حل کنید. ***جوابهای مسائل برگزیده*** را در آخر کتاب ملاحظه کنید و پاسخهایتان را با مسائل مندرج در آن مقابله کنید. اگر با اصطلاح ناآشنایی روبرو شدید، آن را در فهرست راهنمای کتاب، یا، اگر غیر فنی است، در یک فرهنگ لغت جستجو کنید.

دانشجویانم به من می‌گویند که یکی از ایرادات مکرّر من به آنها این است «شما دارید کارِ اضافی می‌کنید». صرف چند ساعت وقت برای نوشتن یک حل چند صفحه‌ای برای مسأله‌ای که با یک روش بهتر می‌توان آن را در چند خط حل کرد، چندان مزیّتی ندارد. لطفاً به کسانی که به فنون حل مسائل عنوانِ «کلک» یا «میان بر» می‌دهند و ارزش آنها را کم می‌کنند وقعی نگذارید. خواهید دید که هر چه در انتخاب روشهای مؤثر حل مسائل در درسهای علومتان تواناتر باشید، تسلّط بر مطالب جدید برایتان آسانتر خواهد بود. اما این تسلط وقتی حاصل می‌شود که تمرین کنید، تمرین کنید، تمرین کنید! تنها راه فراگرفتن هنر حل کردن مسائل، حل مسائل است. در این کتاب، هم مسائل ساده وجود دارند، و هم مسائل مشکل که تلاش بیشتری می‌طلبند. شما از مطالعهٔ یک فصل نباید راضی باشید مگر اینکه بتوانید تعداد قابل قبولی از این مسائل را حل کنید.

اِم . اِل . بی

پیشگفتار مترجمان

ریاضی فیزیک ۱ و ***ریاضی فیزیک ۲***، از جمله درسهای تخصصی و الزامی رشته‌های کارشناسی فیزیک دانشگاههای معتبر ایران و جهان اند. کتاب حاضر، که ترجمهٔ ۷ فصل آخر کتاب *Mathematical Methods in the Physical Sciences* تألیف ***خانم بوس*** - فصلهای ۱۰ تا ۱۶ - است، جلد دوم برگردان فارسی کتاب یاد شده است که جلد اول آن در سال ۱۳۷۴ توسط ***انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد*** به شمارهٔ ۱۷۹ چاپ شده و اینک ماندهٔ آن تحت همان عنوان به زیور طبع آراسته می‌گردد. بدیهی است که مطالب این جلد، عمدتاً سرفصلهای ***ریاضی فیزیک ۲*** را در بر دارد.

در ترجمهٔ این بخش از مطالب، سعی شده است حتی‌الامکان ***فُرمتِ*** نگارش، ویرایش، و حروفچینی جلد اول کتاب حفظ شود و در این راه، زحمات با ارزش ***آقای محمود گرامی*** فارغ‌التحصیل رشتهٔ فیزیک دانشگاه فردوسی سزاوار همه گونه تمجید و سپاسگزاری است. مترجمان معترف‌اند که در دورهٔ حروفچینی کتاب حاضر، ایرادهایشان گاهی فراتر از «جور استاد» بوده است و از این رو صبر و حوصلهٔ آقای گرامی را صمیمانه پاس می‌دارند.

از زحمات ***مؤسسهٔ چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد*** نیز که با همت خود زمینهٔ چاپ جلد دوم را فراهم آورده‌است، صمیمانه سپاسگزاریم.

تابستان ۱۳۷۶، مشهد

جمشید قنبری
رحیم کوهی فائق
محمد هادی هادی زاده یزدی

۱۰

تبدیل مختصات، حساب تانسورها

۱ - مقدمه

یکی از نخستین اقدامها در حل مسائل فیزیکی، انتخاب یک دستگاه مختصات مناسب است؛ انتخاب ماهرانهٔ این دستگاه مرجع اغلب اوقات کار را ساده می‌کند. به بیان دیگر باید مجموعه متغیرهایی را انتخاب کنیم که مناسب مسألهٔ مورد نظر ما باشد. به یاد دارید که در نوشتن انتگرالهای چندگانه برای حجمها، گشتاورها، و غیره، معمولاً در دستگاه مختصات "مناسب"، کار آسان‌تر است. در حل معادلات دیفرانسیل، ما غالباً به تغییر متغیر متوسل می‌شویم تا حل مسأله را ساده‌تر کنیم. در توصیف حرکت یک پرتابه در نزدیک زمین، احتمالاً مختصات دکارتی را به کار می‌بریم و می‌نویسیم

$$\ddot{x}=0 \quad , \quad \ddot{y}=0 \quad , \quad \ddot{z}=-g$$

امّا برای جا به جایی ذره‌ای که بر روی یک دایره حرکت می‌کند از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$r = \text{ثابت} \qquad , \quad \ddot{\theta} = \text{شتاب زاویه‌ای}$$

در این فصل می‌خواهیم تبدیلهای از یک دستگاه مختصات را به دستگاهی دیگر بررسی کنیم. چه، زبان هندسی به کار برده، بگوییم "تغییر دستگاه مختصات" و چه زبان جبری و بگوییم "تغییر متغیرها"، اساس ریاضی به کار برده شده یکی است.

در اینجا نکتهٔ مهم دیگری وجود دارد. واقعیتهای فیزیکی توصیف شده توسط جواب یک مسألهٔ فیزیکی، به دستگاه مختصاتی که از آن استفاده می‌کنیم بستگی ندارند. برای مثال، دما در یک نقطه یکی است خواه ما از مختصات دکارتی برای تعیین مکان آن نقطه استفاده کنیم و خواه از مختصات کروی ، هر چند که، مطمئناً، دما همان تابعی از x و y و z نیست که که از r و θ و ϕ است. یا، اگر جسمی را در نظر بگیریم که بر سطح شیبداری می‌لغزد و پایین می‌آید، معادلهٔ

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ درست است خواه ما محور xرا افقی در نظر بگیریم و خواه در امتداد سطح شیبدار؛ البته مؤلفه‌های x بردارهای $\mathbf{F}$ و $\mathbf{a}$ در دو مورد یاد شده متفاوت اند. در واقع، بردارها به این جهت در کاربردها مفید و مهم‌اند که یک معادلهٔ برداری در هر دستگاه مختصاتی برقرار است. ملاحظه خواهیم کرد که این مطلب در مورد تانسورها، که تعمیمی از بردارها هستند، نیز صحیح است.

برای فهم دقیق این مطلب، و برای این که بتوانیم معادلات برداری را در دستگاههایی به غیر از دستگاه مختصات دکارتی بیان کنیم، در این فصل تبدیلهای از یک دستگاه مختصات را به دستگاهی دیگر و همچنین برخی از ویژگیهای اساسی دستگاههای مختصاتی را که بیشتر متداول اند بررسی می‌کنیم. سپس با استفاده از آنچه آموخته‌ایم تانسورها را تعریف می‌کنیم و برخی از کاربردهای آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم.

کار ما با استفاده از ماتریسها خیلی ساده‌تر خواهد بود، بنابراین خوب است که مختصراً به حاشیه رفته، کار با ماتریسها و اثباتهای مربوطه را بررسی کنیم. (همچنین رک فصل ۳، بخشهای ۶ تا ۹، مخصوصاً بخش ۹ برای تعاریف مفاهیم نامأنوس.)

برای نشان دادن حاصلضرب دو ماتریس، از یکی از دو رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$C = AB \quad \text{یا} \quad C_{ik} = \sum_j A_{ij}B_{jk} \tag{۱-۱}$$

به دقت، حاصلضرب «سطر در ستون» را در نظر بگیرید. ما سطر i از Aرا در ستون k از B ضرب کرده‌ایم تا عنصر واقع در سطر iو ستون kحاصلضرب $C = AB$ را به دست آوریم. به j ها (جمع بر روی jاست) که در کنار یکدیگر قرار دارند توجه کنید؛ اگر برحسب اتفاق داشته باشیم، $\sum_j B_{jk}A_{ij}$، باید آنرا به صورت $\sum_j A_{ij}B_{jk}$ (که jها در کنار یکدیگر اند) بازنویسی کنیم تا عنصری از ماتریس ABبه دست آید (و نه BA). اکنون به اثبات چند نتیجهٔ مفید می‌پردازیم.

ترانهادهٔ حاصلضرب دو ماتریس را پیدا می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که $A^{\mathrm{T}}{}_{ik} = A_{ki}$. در این صورت،

$$(AB)_{ik}^{\mathrm{T}}=(AB)_{ki}=\sum_j A_{kj}B_{ji}=\sum_j A_{jk}^{\mathrm{T}}B_{ij}^{\mathrm{T}}$$
$$=\sum_j B_{ij}^{\mathrm{T}}A_{jk}^{\mathrm{T}}=(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})_{ik}$$

بنابراین

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \qquad (۱-۲)$$

ترانهادهٔ حاصل‌ضرب دو ماتریس مساوی با حاصل‌ضرب ترانهاده‌های آنها با ترتیب وارون است.

اکنون می‌خواهیم نتیجهٔ مشابهی را برای وارون یک حاصل‌ضرب، یعنی

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \qquad (۱-۳)$$

ثابت کنیم. این کار آسانی است. بنا به تعریف وارون، $C^{-1}C=I$ است، که I ماتریس واحد می‌باشد. از آن جا که

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}B=I$$

نتیجه می‌گیریم $B^{-1}A^{-1}$، مطابق آنچه که در (۱-۳) بیان شده است، وارون AB است.

مسائل ، بخش ۱

۱- با استفاده از (۱-۲) و (۱-۳)، $(AB^{\mathrm{T}}C)^{\mathrm{T}}$، $(C^{-1}MC)^{-1}$ ، و $(AH)^{-1}(AHA^{-1})^{3}(HA^{-1})^{-1}$ را ساده کنید.

۲- اگر A و B ماتریسهای متقارنی باشند $(A^{\mathrm{T}}=A)$ و $C=AB-BA$ باشد، نشان دهید که C پاد متقارن $(C^{\mathrm{T}}=-C)$ است.

۳- نشان دهید حاصل‌ضرب AA^{T} یک ماتریس متقارن است.

۴- ردّ یک ماتریس (Tr)، حاصل جمع عناصر قطر اصلی آن است. نشان دهید که ردّ بر اثر جایگشت چرخه‌ای ماتریسها تغییری نمی‌کند، یعنی

$Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$ [**هشــــــدار**: در حـــــالت کـــلی $Tr(ABC) \neq Tr(ACB)$.]

۵- اگر S یک ماتریس متقارن و A یک ماتریس پاد متقارن (مسأله ۲) باشد، نشان دهید $Tr(SA) = 0$. **راهنمایی**: ثابت کنید $Tr(SA) = -Tr(SA)$.

۲- تبدیلهای خطی

تبدیل خطی، تبدیلی است که در آن هر متغیر جدید یک ترکیب خطی از متغیرهای قدیم باشد.معادلات تبدیل خطی در دو بعد عبارت اند از

$$X = ax + by \qquad (1-2)$$
$$Y = cx + dy$$

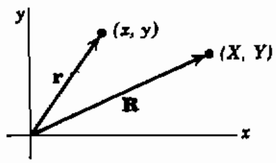
که در آن a، b، c و d مقادیر ثابتی هستند. به عنوان یک مثال عددی صریح، معادلات زیر را در نظر می‌گیریم

$$X = 5x - 2y \qquad (2-2)$$
$$Y = -2x + 2y,$$

این معادلات را می‌توان به دو راه تعبیر هندسی کرد.

راه اوّل (شکل ۲-۱). فرض کنیم $\mathbf{r}$ و $\mathbf{R}$ بردارهای زیر باشند:

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \qquad (3-2)$$
$$R = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$$



شکل ۲-۱

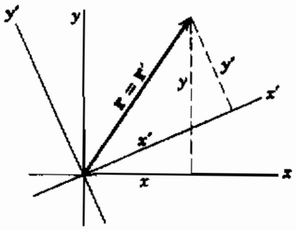
در این صورت معادلات (۲-۱) و (۲-۲) بیان می‌کنند که چگونه بردار $\mathbf{R}$ را وقتی $\mathbf{r}$ معلوم است

به دست آوریم. معادلات (۲-۱) را می‌توان در نمادگذاری ماتریسی به صورت زیر نوشت

$$R = Mr \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (۲-۴)$$

که در آن R، M و r ماتریس‌اند.[۱] ماتریس M، که ماتریس تبدیل خوانده می‌شود، همهٔ اطلاعات لازم برای به دست آوردن R از r را در بردارد. می‌توانیم بگوییم که ضرب r در ماتریس M آن را به بردار دیگری تبدیل می‌کند. (بعداً خواهیم دید که یک تانسور مرتبهٔ دوم همین اثر را دارد.)

راه دوّم تعبیر (۲-۱) و (۲-۲)، (شکل ۲-۲) به منظور جلوگیری از سردرگمیهای بعدی، در این جا متغیرهای جدید را به جای X و Y، x' و y' می‌نامیم. در این صورت معادلات (۲-۱) خواهند شد



شکل ۲-۲

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \qquad (۲-۵)$$

در این جا ما دو مجموعه محورهای مختصات (x, y) و (x', y')، و یک بردار $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ را با مختصاتِ نسبت به هریک از مجموعه محورها در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' \qquad (۲-۶)$$

۱- توجه کنید که مؤلفه‌های x و y هر بردار را می‌توان در شکل برداری به صورت $\mathbf{i}x + \mathbf{j}y$، یا در شکل ماتریسی به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$، یا در شکل هندسهٔ تحلیلی به صورت (x,y) نوشت. با دنبال کردن نمادگذاری متداول، ما $\mathbf{r}$ را برای بیان $\mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ یا (x,y)، و r را برای بیان ماتریس ستونی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ به‌کار خواهیم برد. دقت کنید که r به کار برده شده دراین جا بر خلاف فصل ۶ مساوی $|\mathbf{r}|$ نیست، بلکه معّرف ماتریس ستونی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ است.

که $\mathbf{i}'$ و $\mathbf{j}'$ بردارهای یکهٔ در امتداد محورهای x' و y' هستند. این بار ماتریس تبدیل M به ما می‌گوید که چگونه مؤلفه‌های بردار $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ نسبت به محورهای x' و y' را، وقتی که مؤلفه‌های آن را نسبت به محورهای x و y می‌دانیم، به دست آوریم.

۳- تبدیلهای متعامد

در حالت کلّی، محورهای x' و y' در (۲-۵) و شکل ۲-۲ عمود بر یکدیگر نیستند. وقتی که عمود باشند، معادلات (۲-۵) معادلات چرخش (یا دوران)اند و a، b، c، d را می‌توان بر حسب زاویهٔ چرخش θ نوشت، به طوری که معادلات (۲-۵) تبدیل می‌شوند به

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \qquad (۱-۳)$$

ما مخصوصاً علاقه‌مند به این مورد خاص تبدیل خطی، که ***تبدیل متعامد*** خوانده می‌شود، هستیم. بنا به تعریف، تبدیل متعامد، تبدیلی خطی از x، y به x'، y' است، به گونه‌ای که

$$x^2+y^2 = x'^2+y'^2 \qquad (۲-۳)$$

یا، در شکل ۲-۱، معادلات (۲-۱) در صورتی معرف یک تبدیل متعامد اند که

$$x^2+y^2 = X^2+Y^2 \qquad (۳-۳)$$

شما از شکلها می‌توانید ملاحظه کنید که شرایط (۳-۲) و (۳-۳) بیان می‌دارند که طول یک بردار بر اثر تبدیل متعامد تغییر نمی‌کند. در شکل ۲-۱، بردار مورد نظر در حالی که طولش ثابت نگهداشته می‌شود چرخانده (یا شاید منعکس) می‌شود. در شکل ۲-۲، محورها چرخانده (یا منعکس) می‌شوند، در حالی که بردار ثابت می‌ماند. ماتریس M مربوط به یک تبدیل متعامد را ***ماتریس متعامد*** می‌خوانند. می‌خواهیم شرط ساده‌ای راکه توسط هر ماتریس متعامد دلخواهی برقرار می‌شود پیدا کنیم. ثابت خواهیم کرد که وارون یک ماتریس متعامد مساوی با ترانهادهٔ آن است؛ به طور نمادی [رک (۹-۶)از فصل ۳]

$$\boxed{M^{\mathrm{T}}=M^{-1} \qquad (M \text{ متعامد}) \qquad (۴-۳)}$$

از (۳-۲) و (۲-۵) داریم

$$\begin{aligned} x'^{۲}+y'^{۲} &= (ax+by)^{۲}+(cx+dy)^{۲} \\ &= (a^{۲}+c^{۲})x^{۲}+۲(ab+cd)xy+(b^{۲}+d^{۲})y^{۲} \\ &\equiv x^{۲}+y^{۲} \end{aligned}$$

در این صورت باید داشته باشیم

$$a^{۲}+c^{۲}=۱\,,\ \ ab+cd=۰\,,\ \ b^{۲}+d^{۲}=۱$$

از اینرو به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} M^T M &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{۲}+c^{۲} & ab+cd \\ ab+cd & b^{۲}+d^{۲} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین $M^{\mathrm{T}}M$ ماتریس واحد است، و لذا M^{T} و M، همان گونه که در (۳-۴) عنوان شد، ماتریسهای وارون یکدیگر اند.

ما تبدیل متعامد را در دو بعد تعریف کرده‌ایم [اگر (۳-۲) برقرار باشد، (۲-۵) یک تبدیل متعامد است]، و (۳-۴) را برای مورد دو بعدی ثابت نموده‌ایم. با این همه، یک ماتریس مربعی از هر مرتبه‌ای باشد در صورتی که در شرط (۳-۴) صدق کند متعامد خوانده می‌شود. (برای بحث مورد سه بعدی، رک مسائل ۱ تا ۳ و ۱۱-۱)

در سه بعد، مانند وضعیت دو بعدی، می‌توانیم تبدیل متعامد را به صورت چرخش محورها در نظر بگیریم. با این همه، همان طور که در فصل ۳، آخر بخش ۸، بحث کردیم، مسائل بسیاری در ریاضی فیزیک وجود دارند که شامل بیش از سه متغیر اند. در چنین مسائلی، نمی‌توانیم متغیرها را به عنوان مختصات یک نقطه در فضای ***فیزیکی*** نشان بدهیم زیرا فضای فیزیکی فقط سه بعد دارد. امّا به هر حال، مناسب و مرسوم است که ***اصطلاحات*** هندسی را تعمیم بدهیم. بنابراین عبارتهای ***متغیرها*** و ***مختصات*** را متناوباً به کار می‌بریم و، به عنوان مثال، از یک "نقطه" در فضای پنج بعدی صحبت می‌کنیم، که به معنای مجموعه‌ای از مقادیر پنج متغیر است؛

متشابهاً برای هر تعداد متغیری می‌توان این کار راکرد. در سه بعد، ما اکثراً مختصات یک نقطه را به صورت مؤلفه‌های برداری که از مبدأ تا آن نقطه رسم می‌شود در نظر می‌گیریم، بنابراین می‌توانیم یک مجموعهٔ منظم از سه عدد را یک بردار در فضای سه بعدی بنامیم. به طور مشابه، می‌توانیم یک مجموعهٔ منظم از پنج عدد را یک "بردار در فضای پنج بعدی" یا یک مجموعهٔ منظم از n عدد را "یک بردار در فضای n- بعدی" بنامیم. (برای بحث دقیق‌تر معنای بردار، رک بخش ۱۱.) مقدار زیادی از اصطلاحات هندسی راکه در دو بعد و سه بعد با آن آشنا هستیم می‌توان با استفاده از جبری که به موازات هندسه است به مسائل n- بعدی (یعنی، n- متغیری) تعمیم داد. به عنوان مثال، فاصلهٔ بین مبدأ تا نقطهٔ (x, y, z) مساوی $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ است. به طور مشابه، در مسأله‌ای با پنج متغیر x ، y ، z، u ، v ، "فاصلهٔ "مبدأ" $(0,0,0,0,0)$ را از"نقطهٔ " (x,y,z,u,v) به صورت $\sqrt{x^2+y^2+z^2+u^2+v^2}$ تعریف می‌کنیم. با استفاده از جبرِ همساز با هندسه، می‌توانیم به آسانی ایده‌هایی مثل طول یک بردار، ضرب نقطه‌ای دو بردار (و بنابراین زاویهٔ بین بردارها و ایدهٔ تعامد)، و غیره را تعمیم دهیم. (مسائل ۴ تا ۹). در بالا دیدیم که یک تبدیل متعامد در دو یا سه بعد مترادف با چرخش بردارهاست. بنابراین در یک مسألهٔ n-بعدی می‌توانیم بگوییم که یک تبدیل خطی (یعنی، یک تبدیل خطی متغیرها) که شرط "حاصل جمع مربعات متغیرهای جدید = حاصل جمع مربعات متغیرهای قدیم" را برقرار می‌سازد، مترادف با یک "چرخش در فضای n- بعدی" است.

مسائل ، بخش ۳

۱- معادلهٔ (۳-۴) را برای سه بعد ثابت کنید؛ یعنی، نشان دهید اگر Mماتریس یک تبدیل خطی از x، y، z به x'، y'، z' باشد که بر اثر آن $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$است، M در (۳-۴) صدق می‌کند.

۲- وارون مسألهٔ ۱ را ثابت کنید، یعنی، اگر $M^{\mathrm{T}} = M^{-1}$باشد، در آن صورت طول یک بردار بر اثر تبدیل M تغییر نمی‌کند. ***راهنمایی:*** ماتریس r و ترانهادهٔ آن r^{T} عبارت اند از:

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad r^T = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

نشان دهید $r^{\mathrm{T}}r= x^2 + y^2 + z^2$؛ سپس $r' = Mr$ و (۱-۲) را به کار ببرید.

۳- از (۳-۴) نشـان دهید اگر M متعامد باشد، در آن صورت ۱+ یا ۱- $=detM$ (هنگامی که ۱ $=detM$ است، تبدیل را یک چرخش **عادی** می‌نامند؛ هنگامی که ۱- $=detM$ است، یک یا همهٔ محورها علاوه بر چرخش، منعکس نیز شده‌اند.) ***راهنمایی:*** $det(MM^{\mathrm{T}})$ را پیدا کنید؛ با تعویض جای سطرها و ستونها، دترمینان چه تغییری می‌کند؟

مسائل ۴ تا ۹ را با تعمیم تعاریف آشنای فضای دو و سه بعدی به تعداد ابعاد مورد نظر، حل کنید.

۴- "فاصلهٔ" بین "نقاط" زیر را پیدا کنید:

(الف) (۴، ۱-، ۲، ۷) و (۲، ۳، ۱، ۹)

(ب) (۴، ۲، ۳-، ۵، ۱-) و (۲، ۶، ۲، ۷، ۶)

۵- "طول" بردارهای زیر را پیدا کنید:

(الف) (۲، ۰، ۴، ۶، ۵)   ،   (ب) (۵-، ۱، ۵، ۳، ۲-)

۶- "کسینوس زاویهٔ" بین دو "بردار" مسألهٔ ۵ را پیدا کنید. ***راهنمایی:*** ضرب نقطه‌ای را تعمیم دهید.

۷- نشان دهید "بردارهای" زیر متعامد اند:

(۱، ۲-، ۷، ۱) و (۲، ۱، ۵-، ۷، ۲، ۳، ۱-)

(***راهنمایی:*** "ضرب نقطه‌ای" را در نظر بگیرید.)

۸- در فضای سه بعدی، بردارهای $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ دارای مؤلفه‌های (۰، ۰، ۱)، (۰، ۱، ۰)، و (۱، ۰، ۰) می‌باشند. مثلاً در فضای پنج بعدی، می‌توانیم بردارهای یکّهٔ پایه را با مؤلفه‌های (۰، ۰، ۰، ۰، ۱)، (۰، ۰، ۰، ۱، ۰)، (۰، ۰، ۱، ۰، ۰)، ... تعریف کنیم. نشان دهید که این پنج بردار پایه در فضای پنج بعدی دو به دو بر هم عمودند. مطلب را به n بعد تعمیم دهید. نشان دهید هر برداری را در فضای n بعدی می‌توان برحسب n بردار پایه نوشت.

۹- نشان دهید هر $n+1$ بردار در فضای n بعدی به طور خطی به یکدیگر وابسته اند. ***راهنمایی:*** رک فصل ۳، بخش ۸.

۴- ویژه مقدارها و ویژه‌بردارها؛ قطری کردن ماتریسها

می‌توان تعبیر فیزیکی زیر را از شکل ۲-۱ و معادلات (۲-۱) یا (۲-۴) ارائه کرد. فرض کنید صفحهٔ (x, y) توسط غشاء کشسانی که می‌توان آن را (با ثابت نگهداشتن مبدأ) کشید، فشرد، یا چرخاند، پوشیده شده باشد. در این صورت هر نقطهٔ (x, y) از غشاء پس از تغییر شکل تبدیل به نقطه‌ای مانند (X, Y) می‌شود، و می‌توانیم بگوییم که ماتریس M، تغییر شکل را توصیف می‌کند. توجه کنید که ما متناوباً تعابیر "نقطهٔ (x,y)" و "بردار $\mathbf{r}$" را به کار می‌بریم؛ برای $\mathbf{R}$ نیز چنین است [رک (۲-۳)]. اکنون ببینیم آیا بردارهایی وجود دارند که در اثر تغییر شکل، امتدادشان تغییر نکند، یعنی، آیا بردارهایی به صورت $\mathbf{R} = \mu\mathbf{r}$ که در آن ثابت $= \mu$ است وجود دارند؟ این گونه بردارها را **ویژه بردار** (یا بردار **سرشتی** [مشخّصه]) تبدیل، و مقادیر μ را **ویژه مقدارها** (یا مقادیر سرشتی) ماتریس M مربوط به تبدیل می‌نامند.

ویژه مقدارها برای نشان دادن چگونگی پیدا کردن ویژه مقدارها از معادلات (۲-۲) استفاده می‌کنیم که در شکل ماتریسی تبدیل می‌شوند به

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۵ & -۲ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{۱-۴}$$

شرط ویژه برداری $\mathbf{R} = \mu\mathbf{r}$ در نمادگذاری ماتریسی عبارت است از

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۵ & -۲ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix}$$

یا اگر آن را به شکل معادله‌ای بنویسیم

$$\begin{array}{l} ۵x - ۲y = \mu x \\ -۲x + ۲y = \mu y \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (۵-\mu)\,x - ۲y = ۰ \\ -۲x + (۲-\mu)\,y = ۰ \end{array} \tag{۲-۴}$$

اگر با استفاده از دترمینان در پی حلّ چنین معادلات همگنی برآییم می‌بینیم $x=۰$، $y=۰$ (زیرا ثابتهای طرف راست صفر اند) مگر این که دترمینان ضرایب صفر باشد [رک فصل ۳، معادلهٔ (۸-۱۱)]. در مورد اخیر معادلات به یکدیگر وابسته خواهند بود و ما بینهایت جواب خواهیم

داشت. بنابراین شرط این که (۴-۲) جوابهایی غیر از $x=y=0$ داشته باشند این است که

$$\begin{vmatrix} 5-\mu & -2 \\ -2 & 2-\mu \end{vmatrix} = 0 \qquad (۴-۳)$$

این را **معادلهٔ سرشتی** ماتریس M می‌نامیم.

برای به دست آوردن معادلهٔ سرشتی ماتریس M، از عناصر قطر اصلی M، ثابت μ را کم می‌کنیم و سپس دترمینان ماتریس حاصل را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

از حلّ (۴-۳) برای μ، مقادیر سرشتی M پیدا می‌شود:

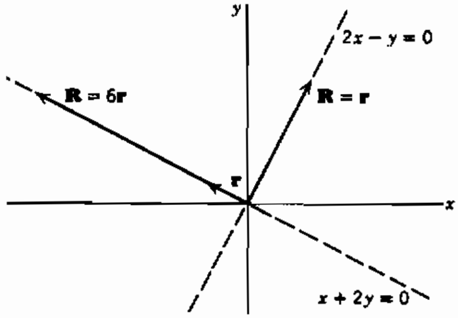
$$(5-\mu)(2-\mu) - 4 = \mu^2 - 7\mu + 6 = 0$$
$$\mu = 1 \quad \text{یا} \quad \mu = 6 \qquad (۴-۴)$$

ویژه بردارها با جایگزینی مقادیر μ از (۴-۴) در (۴-۲)، داریم

$2x - y = 0$، از یکی از معادلات (۴-۲) وقتی $\mu = 1$ است.

$x + 2y = 0$، از یکی از معادلات (۴-۲) وقتی $\mu = 6$ است. (۴-۵)

ما به دنبال بردارهای $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ به گونه‌ای بوده‌ایم که تبدیل (۲-۲) بردار $\mathbf{R}$ را موازی $\mathbf{r}$ بدهد. آنچه یافته‌ایم این است که هر بردار $\mathbf{r}$ که مؤلفه‌های x و y آن در یکی از معادلات (۴-۵) صدق کنند دارای این ویژگی است. چون معادلات (۴-۵)، معادلات خطوط راستی هستند که از مبدأ می‌گذرند، این بردارها در امتداد این خطوط قرار می‌گیرند (شکل ۴-۱). پس معادلات (۴-۵) نشان می‌دهند که هر بردار $\mathbf{r}$ از مبدأ تا یک نقطهٔ واقع بر $x+2y=0$، در اثر تبدیل (۲-۲) به برداری در همان راستا امّا شش بار درازتر تبدیل می‌شود، و هر بردار از مبدأ تا یک نقطهٔ واقع بر $2x - y = 0$، در اثر تبدیل (۲-۲) تغییری نمی‌کند. این بردارها (در امتداد $x + 2y = 0$ و $2x - y = 0$) ویژه بردارهای تبدیل (۲-۲)اند. در راستای این امتدادها (و فقط همین امتدادها)، تغییر شکل غشاء کشسان، یک کشش خالص بدون برش (چرخش) است.



شکل ۴-۱

قطری کردن ماتریسها اکنون (۴-۲) را یک بار با $\mu = ۱$، و بار دیگر با $\mu = ۶$ می‌نویسیم، و از شاخصهای پایین ۱ و ۲ برای مشخص کردن ویژه بردارهای همخوان با آنها استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ۵x_۱ - ۲y_۱ &= x_۱ \qquad & ۵x_۲ - ۲y_۲ &= ۶x_۲ \\ -۲x_۱ + ۲y_۱ &= y_۱ \qquad & -۲x_۲ + ۲y_۲ &= ۶y_۲ \end{aligned} \tag{۴-۶}$$

این چهار معادله را می‌توان به آسانی به صورت یک معادلهٔ ماتریسی نوشت (مسألهٔ ۱):

$$\begin{pmatrix} ۵ & -۲ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{pmatrix} \tag{۴-۷}$$

آنچه واقعاً می‌توانیم دربارهٔ $(x_۱, y_۱)$ بگوییم این است که $۲x_۱ - y_۱ = ۰$؛ با این همه، بهتر است مقادیری از $x_۱$ و $y_۱$ را انتخاب کنیم که $\mathbf{r}_۱ = (x_۱, y_۱)$ را تبدیل به یک بردار یکّه کنند، و به طور مشابه برای $\mathbf{r}_۲ = (x_۲, y_۲)$ نیز همین کار را می‌کنیم. بنابراین داریم

$$x_۱ = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \;,\; y_۱ = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \;,\; x_۲ = \frac{-۲}{\sqrt{۵}} \;,\; y_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \tag{۴-۸}$$

و (۴-۷) تبدیل می‌شود به:

$$\begin{pmatrix} ۵ & -۲ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۵}} & -\frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۵}} & -\frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{pmatrix} \tag{۴-۹}$$

با نشان دادن این ماتریسها با حروف می‌توانیم بنویسیم

$$MC=CD$$

که در آن

$$M=\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۵}} & -\frac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}. \qquad (۱۰-۴)$$

اگر، مانند این جا، دترمینان C صفر نباشد، در آن صورت C دارای وارون $C^{-۱}$ است؛ (۴-۱۰) را در $C^{-۱}$ ضرب می‌کنیم و یادآوری می‌کنیم که $C^{-۱}C$ مساوی ماتریس یکّه است، بنابراین $C^{-۱}MC=C^{-۱}CD=D$.

$$C^{-۱}MC = D \qquad (۱۱-۴)$$

ماتریس D فقط در قطر اصلی دارای عناصر غیر صفر است؛این ماتریس را ***ماتریس قطری*** می‌نامیم. ماتریس D **مشابه** با M نامیده می‌شود، و وقتی با داشتن M ، D را به دست می‌آوریم، می‌گوییم که با یک **تبدیل مشابهتی**، M را ***قطری کرده‌ایم***.

به زودی خواهیم دید که از نظر فیزیکی این کار مترادف با ساده کردن مسأله در نتیجهٔ انتخاب متغیرهای بهتر است. به عنوان مثال، در مسألهٔ غشاء، خواهیم دید که اگر محورها را در امتداد ویژه‌بردارها بگیریم توصیف تغییر شکل ساده‌تر است. بعدها چند مثال دیگر از کاربرد فرایند قطری کردن خواهیم دید.

ملاحظه کنید که پیدا کردن D کار آسانی است، ما فقط باید معادلهٔ سرشتی M را حل کنیم. آنگاه D ماتریسی است که این مقادیر سرشتی اجزای قطر اصلی آن بوده و سایر عناصر آن صفر اند. همچنین می‌توانیم (با کمی زحمت) C را نیز پیدا کنیم، امّا برای اکثر منظورها فقط به D نیاز داریم.

توجه کنید که ترتیب ویژه مقادیر در قطر اصلی D دلخواه است؛به عنوان مثال، می‌توانستیم (۴-۶) را به صورت زیر بنویسیم

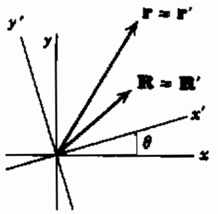
$$\begin{pmatrix} ۵ & -۲ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۲ & x_۱ \\ y_۲ & y_۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_۲ & x_۱ \\ y_۲ & y_۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \qquad (۱۲-۴)$$

تا به صورت (۴-۷). در این صورت (۴-۱۱) هنوز برقرار است، البته، با یک C متفاوت، و با

$$D= \begin{pmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

که به جای (۴-۱۰) می‌نشیند (مسألهٔ ۱).

معنای C و D برای این که بهتر به معنای (۴-۱۱) پی ببریم، ببینیم ماتریسهای C و D از نظر فیزیکی چه معنایی دارند. دو مجموعه مختصات (x,y) و (x',y') را که در آن (x',y') از چرخش (x,y) به اندازهٔ θ به دست می‌آید، در نظر می‌گیریم (شکل ۴-۲) مختصات (x,y) و (x',y')) یک نقطه (یا مؤلفه‌های یک بردار $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$) نسبت به دو دستگاه مختصات طبق معادلهٔ (۳-۱) با هم مرتبط اند. از محاسبهٔ x و y از (۳-۱) داریم



شکل ۴-۲

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned} \qquad (۱۳-۴)$$

یا در نمادگذاری ماتریسی

$$C= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{که در آن} \quad r = C\,r' \qquad (۱۴-۴)$$

این معادله برای **هر** تک بردار با مؤلفه‌های داده شده در دو دستگاه صادق است. فرض کنید بردار دیگر $\mathbf{R}=\mathbf{R}'$ (شکل ۴-۲) را با مؤلفه‌های X، Y، X'، Y' داشته باشیم، این مؤلفه‌ها طبق رابطهٔ

$$R = C\,R' \qquad (۴-۱۵)$$

با هم مرتبط اند . فرض کنید M ماتریسی باشد که تغییر شکل صفحه را در دستگاه (x,y) توصیف می‌کند. به این ترتیب معادلهٔ

$$R = M\,r \qquad (۴-۱۶)$$

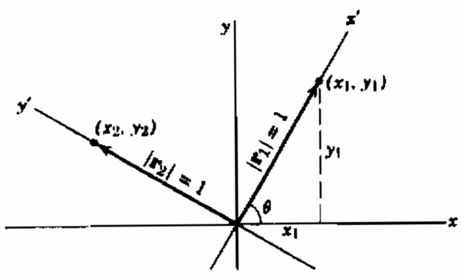
می‌گوید که بردار $\mathbf{r}$ پس از تغییر شکل تبدیل به $\mathbf{R}$ می‌شود، و هر دو بردار نسبت به محورهای (x,y) داده می‌شوند. حال ببینیم چگونه می‌توانیم تغییر شکل را در دستگاه (x',y') توصیف کنیم، یعنی، چه ماتریسی $\mathbf{r}$ را به $\mathbf{R}'$ تبدیل می‌کند؟ (۴-۱۴) و (۴-۱۵) را در (۴-۱۶) جایگزین می‌کنیم و $C\,R' = MCr'$ یا

$$R' = C^{-1}MCr' \qquad (۴-۱۷)$$

را پیدا می‌کنیم. بنابراین پاسخ سؤال ما این است که

> $D = C^{-1}MC$ ماتریسی است که در دستگاه (x',y') همان تغییر شکلی را توصیف می‌کند که M در دستگاه (x,y) توصیف می‌نماید.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که اگر ماتریس C طوری انتخاب شود که $D = C^{-1}MC$ را قطری کند، در آن صورت محورهای جدید (x',y') در امتداد راستاهای ویژه بردارهای M اند. از (۴-۱۰) به خاطر دارید که ستونهای C، مؤلفه‌های ویژه بردارهای یکّه هستند. اگر ویژه بردارها، مانند مثال مورد نظر، بر هم عمود باشند (رک مسألهٔ ۲) در آن صورت محورهای جدید (x',y') در امتداد راستاهای ویژه بردارها، مجموعه‌ای از محورهای عمود برهم اند که از چرخش محورهای (x,y) به اندازهٔ زاویه‌ای مانند θ به وجود می‌آیند (شکل ۴-۳). ویژه بردارهای یکّه $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ (یکّه به معنای $|\mathbf{r}_1| = ۱$، $|\mathbf{r}_2| = ۱$ است) در شکل ۴-۳ نشان داده شده‌اند؛ از شکل پی می‌بریم



شکل ۴-۳

$$x_1 = |\mathbf{r}_1| \cos\theta = \cos\theta, \qquad x_2 = -|\mathbf{r}_2| \sin\theta = -\sin\theta$$
$$y_1 = |\mathbf{r}_1| \sin\theta = \sin\theta, \qquad y_2 = |\mathbf{r}_2| \cos\theta = \cos\theta \tag{۱۸-۴}$$

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

بنابراین، ماتریس C که M را قطری می‌کند، ماتریس چرخش C در (۴-۱۴) است وقتی که محورهای (x', y') در امتداد راستاهای ویژه بردارهای M باشند.

نسبت به این محورهای جدید، ماتریس قطری D تغییر شکل را توصیف می‌کند. در مورد مثال مورد نظر داریم

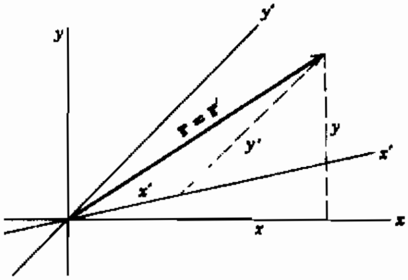
$$R' = Dr' \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{یا} \tag{۱۹-۴}$$

$$X' = x' \ ، \ Y' = 6y'$$

در قالب کلمات، (۴-۱۹) بیان می‌دارد که [در دستگاه (x', y')] مؤلفهٔ x' هر نقطهٔ (x', y') در اثر تغییر شکل، تغییری نمی‌کند و مؤلفهٔ y' آن در ۶ ضرب می‌شود، یعنی، تغییر شکل صرفاً عبارت است از یک کشش در راستای y'. این توصیف ساده‌تری از تغییر شکل است و از نظر فیزیکی روشن‌تر از توصیف داده شده در (۴-۱) است.

اکنون ملاحظه می‌کنید که چرا ترتیب ویژه مقدارها در قطر اصلی D دلبخواه است و چرا (۴-۱۲) به همان اندازه رضایت بخش است که (۴-۷). محورهای جدید (x', y') در امتداد ویژه بردارها هستند، امّا اهمیتی ندارد که ما کدام ویژه بردار را x' و کدام را y' بنامیم. در حّل مسائل، به آسانی یک D انتخاب می‌کنیم که ویژه مقدارهای M با یک ترتیب (دلبخواه) اجزای قطر اصلی آن باشند. انتخاب D سپس تعیین می‌کند که کدام راستای ویژه بردار محور x' نامیده می‌شود و کدام راستا y'.

در بحث بالا لزومی نداشت که محورهای x' و y' بر هم عمود باشند، هر چند که مفیدترین وضع آن است که عمود باشند. اگر $r=CR$، امّا C صرفاً یک ماتریس دلبخواه (غیر تکین)[نه لزوماً ماتریس چرخش متعامد (۴-۱۴)] باشد، در آن صورت باز می‌رسیم به (۴-۱۷) . یعنی، $C^{-1}MC$ تغییر شکل را با استفاده از محورهای (x',y') توصیف می‌کند. امّا اگر C یک ماتریس متعامد نباشد، در آن صورت محورهای (x',y') عمود بر هم نیستند (شکل ۴-۴) و $x^2+y^2 \neq x'^2+y'^2$، یعنی تبدیل حاصل، چرخش محورها نیست. به خاطر دارید که C ماتریس ویژه بردارهای یکّه است؛ اگر این ویژه بردارها بر هم عمود باشند، در آن صورت C یک ماتریس متعامد است (رک مسألهٔ ۶). می‌توان نشان داد که این مورد وقتی تأمین می‌شود که فقط و فقط ماتریس M متقارن باشد (رک مسائل ۳۳ تا ۳۵، و مسألهٔ ۱۵-۸).



شکل ۴-۴

مسائل ، بخش ۴

۱- معادلهٔ (۴-۷) را ثابت کنید. همچنین (۴-۱۲) را ثابت کنید و C متفاوت همخوان را در (۴-۱۱) پیدا نمایید. *راهنمایی* برای پیداکردن C : به جای (۴-۷) از (۴-۱۲) شروع کنید و روش به دست آوردن (۴-۱۰) را از (۴-۷) دنبال کنید.

۲- ثابت کنید دو ویژه بردار واقع در (۴-۸) بر هم عمود اند، و C در (۴-۱۰) شرط (۳-۴) را برای یک ماتریس متعامد برقرار می‌سازد.

۳- ثابت کنید ماتریس تبدیل (۳-۱) (موسوم به ماتریس چرخش) متعامد است، یعنی، در (۳-۴) صدق می‌کند. *راهنمایی:* MM^{T} در (۳-۴) چیست؟

۴- وارون ماتریس چرخش را در (۳-۱) پیداکنید (رک فصل ۳، بخش ۶)؛ باید C را در (۴-۱۴) به دست آورید. در (۳-۱) θ را با $-\theta$ جایگزین کنید تا ببینید ماتریس C همخوان با یک چرخش به اندازهٔ $-\theta$ است.

۵- با پیدا کردن زاویهٔ چرخش ، نشان دهید ماتریس C در (۴-۱۰) معرف یک چرخش است. معادلات (۳-۱) و (۴-۱۳) را برای این چرخش بنویسید.

۶- نشان دهید اگر C ماتریسی باشد که ستونهای آن مؤلفه‌های (x_1,y_1) و (x_2,y_2) دو بردار عمود بر هم به طول واحد باشند، در آن صورت C یک ماتریس متعامد است. ***راهنمایی:*** $C^{\mathrm{T}}C$ را پیدا کنید.

۷- مسألهٔ ۶ را به سه بعد، و n بعد تعمیم دهید.

۸- نشان دهید تحت تبدیل (۴-۱)، تمام نقاط (x,y) واقع بر خط راست مفروضی که از مبدأ می‌گذرد، به نقاط (X,Y) واقع بر خط راست دیگری که از مبدأ می‌گذرد تبدیل می‌شوند. ***راهنمایی:*** در (۴-۱)، x و y را برحسب X و Y به دست آورید و در معادلهٔ $y = mx$ قرار دهید تا یک معادله به صورت $Y = kX$ به دست آید، که در آن k یک مقدار ثابت است.

راهنمایی بیشتر: اگر $R = Mr$ باشد، در آن صورت $r = M^{-1}R$

۹- دنباله‌ای از تبدیلهای خطی [مانند (۲-۵)] را از x، y به x'، y' و از x'، y' به x''، y''، مثلاً $x'' = a'x' + b'y'$، $y'' = c'x' + d'y'$، در نظر بگیرید. نشان دهید که تبدیل منتجهٔ از x ، y به x'' ، y'' تبدیلی است خطی که ماتریس آن حاصل‌ضرب ماتریسهای تبدیلهای تکی است.

۱۰- ثابت کنید حاصل‌ضرب دو ماتریس متعامد، خود متعامد است . در این صورت از مسألهٔ ۹ معلوم می‌شود که نتیجهٔ خالص دو تبدیل متعامد پیاپی یک تبدیل متعامد است. توجه کنید که بیان هندسی همخوان با این موضوع این است که دو چرخش پیاپی هم ارز با یک چرخش تنها می‌باشند. ***راهنمایی*** (۱-۲) و (۱-۳) را به کار ببرید.

۱۱- وارون تبدیل زیر را پیدا کنید:

$$x' = 2x - 3y$$
$$y' = x + y$$

یعنی ، x، y را برحسب x' ، y' به دست آورید. (***راهنمایی:*** از ماتریس استفاده کنید). آیا این تبدیل متعامد است؟

ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریسهای زیر را پیدا کنید.

۱۲- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

۱۳- $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

۱۴- $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

۱۵- $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

۱۶- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

۱۷- $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

۱۸- $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

۱۹- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

۲۰- $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

۲۱- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

۲۲- $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

۲۳- $\begin{pmatrix} 13 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

۲۴- $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

۲۵- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

۲۶- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

فرض کنید هر یک از ماتریسهای M زیر، یک تغییر شکل صفحهٔ (x, y) را توصیف کند. برای هر یک از Mها مطلوب است: ویژه مقدارها و ویژه بردارهای تبدیل، ماتریس C که M را قطری می‌کند و چرخش به محورهای جدید (x', y') را در امتداد ویژه بردارها مشخص می‌سازد، و ماتریس D که تغییر شکل را نسبت به محورهای جدید به دست می‌دهد. تغییر شکل را نسبت به محورهای جدید توصیف کنید.

۲۷- $\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$ ۲۸- $\begin{pmatrix} ۵ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix}$ ۲۹- $\begin{pmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۹ \end{pmatrix}$

۳۰- $\begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ ۳۱- $\begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ ۳۲- $\begin{pmatrix} ۶ & -۲ \\ -۲ & ۳ \end{pmatrix}$

۳۳- ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریس متقارن حقیقی $M= \begin{pmatrix} A & H \\ H & B \end{pmatrix}$ را پیدا کنید. نشان دهید که ویژه مقدارها حقیقی اند و ویژه بردارها بر هم عمود اند (ضرب نقطه‌ای = ۰).

۳۴- با محاسبهٔ حاصل‌ضرب $M=CDC^{-۱}$ که در آن C ماتریس چرخش (۴-۱۴) و D ماتریس قطری

$$\begin{pmatrix} \mu_۱ & ۰ \\ ۰ & \mu_۲ \end{pmatrix}$$

است، نشان دهید که اگر M را بتوان با یک چرخش قطری کرد، در آن صورت M متقارن است.

۳۵- معادلهٔ سرشتی ماتریس مرتبهٔ دوّم M یک معادلهٔ درجهٔ دوّم است. ما به تفصیل موردی را که در آن M یک ماتریس متقارن حقیقی است و ریشه‌های معادلهٔ سرشتی (ویژه مقدارها) حقیقی، مثبت، و نامساوی‌اند، در نظر گرفته‌ایم. امکانهای دیگر را به قرار زیر بررسی کنید:

(الف) M، حقیقی و متقارن، ویژه مقدارها حقیقی، یکی مثبت و یکی منفی. نشان دهید که صفحه در یکی از خطوط ویژه برداری منعکس (همچنین کشیده یا فشرده) می‌شود. به عنوان یک مورد ساده

$$M= \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید.

(ب) M، حقیقی و متقارن، ویژه مقدارها مساوی (و بنابراین حقیقی). نشان دهید که M باید مضربی از ماتریس واحد باشد. به این ترتیب نشان دهید که تغییر شکل حاصل مشتمل بر کشیدگی یا فشردگی در امتداد شعاع (در تمام جهات، یکسان)، و بدون هیچ

چرخشی (و در صورتی که ریشه منفی باشد هیچ انعکاسی نسبت به مبدأ) است.

(ج) M، حقیقی، **نامتقارن**، ویژه مقدارها حقیقی و نامتساوی. نشان دهید که در این مورد ویژه بردارها متعامد نیستند. ***راهنمایی:*** ضرب نقطه‌ای آنها را پیدا کنید.

(د) M، حقیقی، **نامتقارن** ، ویژه مقدارها **مختلط**. نشان دهید که همهٔ بردارها می‌چرخند، یعنی، هیچ ویژه بردار (حقیقی) وجود ندارد که در اثر این تبدیل جهتش تغییر نکند. معادلهٔ سرشتی یک ماتریس چرخش را به عنوان یک مورد خاص در نظر بگیرید.

۳۶-(الف) اگر C متعامد و M متقارن باشد، نشان دهید که $C^{-1}MC$ متقارن است.

(ب) اگر C متعامد و M پاد متقارن باشد، نشان دهید که $C^{-1}MC$ پاد متقارن است.

در مسائل زیر فرض کنید که M متقارن، C متعامد، و $D = C^{-1}MC$ قطری است.

۳۷- نشان دهید که $det\ M$ مساوی حاصل‌ضرب ویژه مقدارهای M است. ***راهنمایی:*** نشان دهید که $det\ D = det\ M$.

۳۸- نشان دهید $Tr\ M$ مساوی حاصل جمع ویژه مقدارهای M است. ***راهنمایی:*** نشان دهید $Tr\ M = Tr\ D$ (رک مسألهٔ ۱-۴).

۵- کاربردهای قطری کردن

اکنون چند مثال ساده از کاربرد فرایند قطری کردن را در نظر می‌گیریم. یک مقطع مخروطی مرکزی (بیضی یا هذلولی) که مرکز آن مبدأ مختصات است دارای معادلهٔ

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 = K, \qquad (۱-۵)$$

می‌باشد، که در آن A، B، H، و K مقادیر ثابتی هستند. در شکل ماتریسی، این معادله را می‌توان به صورت

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & H \\ H & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K$$

یا

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K \qquad (۲-۵)$$

نوشت که در آن

$$\begin{pmatrix} A & H \\ H & B \end{pmatrix} = M$$

است. (می‌توانید با ضرب کردن ماتریسها در هم، روابط را تحقیق کنید). می‌خواهیم محورهای اصلی مقطع مخروطی را به عنوان محورهای مرجع انتخاب کنیم تا بتوانیم معادله را به شکل ساده‌تری بنویسیم. شکل ۴-۲ را در نظر بگیرید؛ فرض کنید محورهای (x',y') از چرخش (x,y) به اندازهٔ زاویهٔ θ به وجود آمده باشند. در این صورت مختصات (x,y) و (x',y') یک نقطه طبق (۴-۱۳) یا (۴-۱۴) با یکدیگر مرتبط اند؛

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad (۵-۳)$$

طبق (۲-۱)، ماتریس ترانهادهٔ (۵-۳) عبارت است از

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (۵-۴)$$

یا

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^{-۱}$$

زیرا C یک ماتریس متعامد است. با جایگذاری (۵-۳) و (۵-۴) در (۵-۲)، داریم

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^{-۱} M C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = K \qquad (۵-۵)$$

اگر C ماتریسی باشد که M را قطری می‌کند، در آن صورت (۵-۵) معادلهٔ مقطع مخروطی نسبت به محورهای اصلی آن است.

مثال ۱- مقطع مخروطی

$$۵x^۲ - ۴xy + ۲y^۲ = ۳۰ \qquad (۵-۶)$$

را در نظر بگیرید. در شکل ماتریسی، این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۵ & -۲ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ۳۰ \qquad (۵-۷)$$

در اینجا ما همان ماتریس

$$M = \begin{pmatrix} ۵ & -۲ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix}$$

را داریم که در بخش ۴ ویژه مقدارهای آن را پیدا کردیم. در آن بخش C را طوری پیدا کردیم که

$$C^{-1}MC = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

بنابراین معادلهٔ (۵-۵) مقطع مخروطی نسبت به محورهای اصلی عبارت است از

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'^2 + 6y'^2 = 30 \qquad (۸-۵)$$

دقت کنید که عوض کردن ترتیب ۱ و ۶ در D، معادلهٔ $6x'^2 + y'^2 = 30$ را به عنوان معادلهٔ جدید بیضی به جای (۵-۸) می‌دهد. به زبان ساده، این مترادف است با عوض کردن جای محورهای x' و y'.

از مقایسهٔ ماتریس C ویژه بردارهای یکّه در (۴-۱۰) با ماتریس چرخش واقع در (۴-۱۴)، ملاحظه می‌کنیم که زاویهٔ چرخش θ (شکل ۴-۳) از محورهای اولیهٔ (x,y) به محورهای اصلی (x',y') عبارت است از

$$\theta = arc\ cos \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad (۹-۵)$$

توجه کنید که در نوشتن معادلهٔ مقطع مخروطی به شکل ماتریسی (۵-۲) و (۵-۷)، ما جملهٔ xy را به تساوی بین دو عنصر غیر قطری ماتریس تقسیم کردیم؛ این کار M را قطری کرد. به خاطر آورید (پایان بخش ۴) که M را فقط در صورتی می‌توان با یک تبدیل مشابهتی $C^{-1}MC$، که در آن C یک ماتریس متعامد است (یعنی، با یک چرخش محورها)، قطری کرد که M متقارن باشد. ما M را (با نصف کردن جملهٔ xy) متقارن انتخاب می‌کنیم تا فرایند مورد نظر ما مؤثر افتد.

هر چند که برای سادگی ما تاکنون در دو بعد کار می‌کرده‌ایم، امّا همین ایده‌ها در مورد سه بعد (یا بیشتر) (یعنی، سه متغیر یا بیشتر) نیز برقرار اند. همان گونه که (در پایان بخش ۳) متذکر شدیم، هر چند که ما فقط می‌توانیم سه بعد را در فضای فیزیکی نمایش بدهیم، ولی استفاده از اصطلاحات هندسی مشابه حتی اگر تعداد متغیرها بیش از سه باشد نیز بسیار مناسب است. بنابراین اگر ماتریسی با هر مرتبه را قطری کنیم، باز از اصطلاحات ویژه مقدارها، ویژه بردارها، محورهای اصلی، چرخش به محورهای اصلی، و غیره استفاده خواهیم کرد.

مثال ۲- سطح درجهٔ دوّم

$$x^{۲} + ۶xy - ۲y^{۲} - ۲yz + z^{۲} = ۲۴$$

را به محورهای اصلی چرخش دهید. در شکل ماتریسی، این معادله عبارت است از

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۳ & -۲ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ۲۴$$

معادلهٔ سرشتی این ماتریس عبارت است از

$$\begin{vmatrix} ۱-\mu & ۳ & ۰ \\ ۳ & -۲-\mu & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱-\mu \end{vmatrix} = ۰ = -\mu^{۳} + ۱۳\mu - ۱۲$$

$$= -(\mu-۱)(\mu+۴)(\mu-۳)$$

مقادیر سرشتی عبارت اند از

$$\mu = ۱ \quad \text{و} \quad \mu = -۴ \quad \text{و} \quad \mu = ۳$$

نسبت به محورهای اصلی (x',y',z')، معادلهٔ سطح درجهٔ دوّم تبدیل می‌شود به

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = ۲۴$$

یا

$$x'^{۲} - ۴y'^{۲} + ۳z'^{۲} = ۲۴$$

از این معادله می‌توانیم سطح درجهٔ دوّم را مشخص کنیم (هذلولیوار یک ورقه) و اندازه و شکل آن را با استفاده از محورهای (x',y',z') بدون پیدا کردن رابطهٔ آنها با محورهای اولیهٔ (x,y,z) رسم کنیم. با این همه، اگر بخواهیم رابطهٔ بین دو مجموعه محورها را بدانیم، ماتریس C را به روش زیر پیدا می‌کنیم. از بخش ۴ به یاد دارید که C ماتریسی است که ستونهای آن مؤلفه‌های ویژه بردارهای یکّه هستند. یکی از ویژه بردارها را می‌توان با جایگذاری ویژه مقدار $\mu = ۱$ در معادلات

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۳ & -۲ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \\ \mu z \end{pmatrix}$$

و به دست آوردن جوابهای x ، y، z پیداکرد. به این ترتیب $\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ یک ویژه بردار همخوان با $\mu = ۱$است، و از تقسیم آن بر بزرگیش یک ویژه بردار یکّه به دست می‌آید. با تکرار کردن این فرایند برای هریک از مقادیر دیگر μ ، سه ویژه بردار یکّه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\mu = ۱ \qquad \text{وقتی} \qquad \left(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}, ۰, \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right)$$

$$\mu = -۴ \qquad \text{وقتی} \qquad \left(\frac{-۳}{\sqrt{۳۵}}, \frac{۵}{\sqrt{۳۵}}, \frac{۱}{\sqrt{۳۵}}\right)$$

$$\mu = ۳ \qquad \text{وقتی} \qquad \left(\frac{-۳}{\sqrt{۱۴}}, \frac{-۲}{\sqrt{۱۴}}, \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\right)$$

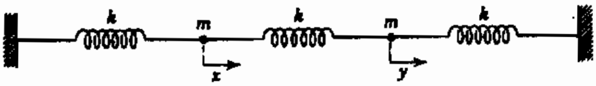
به این ترتیب ماتریس چرخش C عبارت است از

$$C=\begin{pmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} & -\frac{۳}{\sqrt{۳۵}} & -\frac{۳}{\sqrt{۱۴}} \\ ۰ & \frac{۵}{\sqrt{۳۵}} & -\frac{۲}{\sqrt{۱۴}} \\ \frac{۳}{\sqrt{۱۰}} & \frac{۱}{\sqrt{۳۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۱۴}} \end{pmatrix}$$

اعداد موجود در C ، کسینوسهای ۹ زاویهٔ بین محورهای (x,y,z) و (x',y',z')اند. (مقایسه کنید با شکل ۴-۳ و بحث مربوط به آن.)

یک کاربرد فیزیکی مفید این روش در بحث مربوط به ارتعاشات پیش می‌آید. این مطلب را با یک مسألهٔ ساده نشان می‌دهیم.

مثال ۳- فرکانسهای ارتعاشی سرشتی را برای سیستم جرمها و فنرهای نشان داده شده در شکل ۵-۱ پیدا کنید.



شکل ۵-۱

فرض کنید x و y مختصات دو جرم نسبت به مکانهای تعادلی‌شان در لحظهٔ t باشد. در این صورت انرژی جنبشی T و انرژی پتانسیل V سیستم عبارت اند از:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \\ V &= \tfrac{1}{2} kx^2 + \tfrac{1}{2} ky^2 + \tfrac{1}{2} k(x-y)^2 \\ &= \tfrac{1}{2} k\,(2x^2 + 2y^2 - 2xy) \end{aligned} \tag{۱۰-۵}$$

می‌توانیم T و V در(۵-۱۰) را به شکلهای ماتریسی زیر بنویسیم [مقایسه کنید با نوشتن (۵-۶) به صورت (۵-۷)]:

$$T = \tfrac{1}{2} m \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix},$$

(۱۱-۵)

$$V = \tfrac{1}{2} k \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

ویژه مقدارهای ماتریس مربعی واقع در V را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 2-\mu & -1 \\ -1 & 2-\mu \end{vmatrix} = \mu^2 - 4\mu + 3 = (\mu - 1)(\mu - 3) = 0 \quad , \quad \mu = 1 \quad , \quad \mu = 3$$

اگر[مطابق (۴-۱۴)] تغییر متغیر

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{۱۲-۵}$$

را در نظر بگیریم که در آن C یک ماتریس متعامد به گونه‌ای است که

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{۱۳-۵}$$

در آن صورت انرژی پتانسیل بر حسب متغیرهای جدید عبارت است از

$$V=\frac{1}{2}k\,(x'^2+3y'^2) \tag{۵-۱۴}$$

ما T را نیز برحسب متغیرهای جدید می‌خواهیم. چون C ماتریسی از مقادیر ثابت است، از (۵-۱۲) داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{bmatrix},$$

یعنی، معادلات تبدیل مربوط به $\dot{x}$ و $\dot{y}$ همان معادلات مربوط به x و y هستند. ماتریس مربعی واقع در T در (۵-۱۱)، ماتریس واحد U است؛ این ماتریس در اثر تبدیل تغییر نمی‌کند زیرا

$$C^{-1}UC = C^{-1}C = U$$

بنابراین در متغیرهای جدید انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2)$$

به این ترتیب معادلات حرکت توسط معادلات لاگرانژ داده می‌شوند:

$$m\ddot{x}' = -kx',$$
$$m\ddot{y}' = -3ky'$$

جوابهای این معادلات عبارت اند از

$$\begin{aligned} x' &= A\sin(\omega_1 t+\alpha), \\ y' &= B\sin(\omega_2 t+\beta), \end{aligned} \tag{۵-۱۵}$$

که A، B، α و β مقادیر ثابتی هستند که به شرایط اولیه بستگی دارند، و بسامدهای زاویه‌ای ارتعاشات عبارت اند از

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}\,, \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}\,. \tag{۵-۱۶}$$

با پیداکردن ماتریس تبدیل متعامد C (رک مسألهٔ ۱۰) و استفاده از (۵-۱۲)، داریم

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{aligned} \tag{۵-۱۷}$$

معمولاً، حرکت هر یک از جرمها ترکیبی است از دو ارتعاش با بسامدهای ω_1 و ω_2. با این همه، فرض کنید از شرایط اولیه داریم $B=0$؛ در این صورت از (۵-۱۵) و (۵-۱۷) داریم $y'=0$ و

$$x = y = \frac{x'}{\sqrt{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} sin(\omega_1 t + \alpha) \qquad (۱۸-۵)$$

معادلات (۵-۱۸) نشان می‌دهند که در این مورد دو جرم یاد شده با بسامد ω_1 و همراه با هم به صورت $\rightarrow\rightarrow$ و سپس $\leftarrow\leftarrow$ به عقب و جلو نوسان می‌کنند. همچنین فرض کنید بر اثر شرایط اولیه $A=0$ باشد، در این صورت داریم $x'=0$، و

$$x=-y=-\frac{y'}{\sqrt{2}}=-\frac{B}{\sqrt{2}} sin(\omega_2 t+\beta) \qquad (۱۹-۵)$$

در این مورد، دو جرم گفته شده به صورت $\leftarrow\ \rightarrow$، و سپس $\rightarrow\ \leftarrow$، در خلاف جهت هم، با بسامد ω_2، نوسان می‌کنند. این دو راه مخصوصاً ساده‌ای که سیستم می‌تواند مطابق آنها ارتعاش کند، و هر یک شامل فقط یک بسامد ارتعاش است، ***مدهای سرشتی*** (یا ***متعارف***) ارتعاش نامیده می‌شوند، و بسامدهای همخوان با آنها (۵-۱۶)، ***بسامدهای سرشتی*** (یا ***متعارف***) نام دارند.

مسأله‌ای که هم اکنون حل کردیم روش مهمی را نشان می‌دهد که می‌توان آن را در کاربستهای مختلف بسیاری به کار برد. مثالهای بسیاری از مسائل ارتعاشی در فیزیک وجود دارند – در صوت: ارتعاشات تارهای آلات موسیقی، طبل، هوای داخل سازهای بادی یا داخل یک اتاق؛ در مکانیک و کاربستهای مهندسی آن: ارتعاشات سیستمهای مکانیکی از پاندول ساده گرفته تا ساختارهای پیچیده نظیر پلها و هواپیماها؛ در الکتریسیته: ارتعاشات امواج رادیویی، ارتعاشات جریانها و ولتاژهای الکتریکی در یک رادیوی تنظیم شده؛ و غیره. در این گونه مسائل اغلب مفید است که بسامدهای ارتعاشی سرشتی و مدهای ارتعاشی سرشتی سیستم تحت مطالعه را پیدا کنیم. در این صورت، ارتعاشات پیچیده‌تر را می‌توان به صورت ترکیبهایی از این مدهای ارتعاشی متعارف مورد بررسی قرار داد.

مسائل، بخش ۵

۱- ثابت کنید که (۵-۲) مساوی (۵-۱) است.

هر یک از مقاطع مخروطی و سطوح درجه دوّم زیر را به محورهای اصلی آنها چرخش دهید.

۲- $2x^2 + 4xy - y^2 = 24$

۳- $8x^2 + 8xy + 2y^2 = 35$

۴- $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 8$

۵- $۵x^{۲} + ۳y^{۲} + ۲z^{۲} + ۴xz = ۱۴$

۶- $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} + ۴xy + ۲xz - ۲yz = ۱۲$

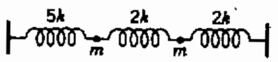
۷- $x^{۲} + ۳y^{۲} + ۳z^{۲} + ۴xy + ۴xz = ۶۰$

۸- مسائل ۲ تا ۶ از بخش ۱۰، فصل ۴ را با چرخش دادن آنها به محورهای اصلی‌شان حل کنید.

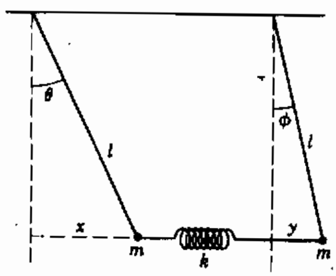
۹- مثال ۲، در این بخش ، را به تفصیل دنبال کرده، ویژه بردارهای یکّه را پیدا کنید. ثابت کنید که ماتریس چرخش حاصل متعامد است. ***راهنمایی:*** CC^{T} را پیدا کنید.

۱۰- در مثال ۳ ماتریس C را پیدا کرده، (۵-۱۷) را ثابت کنید. ***راهنمایی:*** ویژه بردارهای یکّه را پیدا کنید و از آنها C را به دست آورید. با توجه به این که C متعامد است، $C^{-۱}$ را پیدا کنید.

۱۱- در صورتی که در شکل ۵-۱ ثابت فنر میانی $۲k$ باشد، بسامدهای سرشتی و دو مد ارتعاشی سرشتی را پیدا کنید.



۱۲- برای سیستم جرمهای نشان داده شده، بسامدهای سرشتی و مدهای ارتعاشی سرشتی را پیدا کنید.



۱۳- فرکانسهای سرشتی و مدهای ارتعاشی سرشتی نوسانهای کوچک پاندولهای جفت شدهٔ نشان داده شده را پیدا کنید. برای ساده شدن عملیات جبری، فرض کنید وقتی پاندولها در حالت عمودی هستند فنر کشیده نیست و ثابت فنر را $k = mg/l$ بگیرید.

راهنمایی: برای نوسانهای کوچک، $x = l\sin\theta = l\theta$، $۱ - \cos\theta = \frac{۱}{۲}\theta^{۲}$ و برای ϕ و y نیز معادلات مشابهی وجود دارد.

۱۴- مسألهٔ ۱۳ را در صورتی که ثابت فنر $k = ۳mg/l$ باشد حل کنید.

۶- مختصات منحنی‌الخط

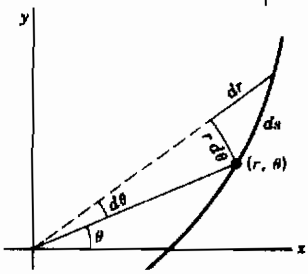
پیش از ادامهٔ بیشتر بحث تغییر متغیرها یا تبدیلهای مختصات، باید دربارهٔ بعضی ویژگیهای یک سیستم مختصات تنها، چند کلمه‌ای بیان کنیم.ایده‌های مورد نظر را با استفاده از دو سیستم

مختصات آشنا - سیستم دکارتی و متداول (x,y,z) و سیستم استوانه‌ای (r,θ,z) - به نمایش می‌گذاریم. عناصر طول کمان در مختصات دکارتی و استوانه‌ای عبارت اند از

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad \text{(مختصات دکارتی)}$$
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \qquad \text{(مختصات استوانه‌ای)} \qquad (۱-۶)$$

این عبارتهای ds مثالهایی هستند از آنچه که هندسه‌دانان آن را عنصر خط می‌نامند؛ اهمّیت این عبارت خیلی بیش از کاربرد صِرف آنها در محاسبهٔ عناصر طول کمان است. ابتدا در نظر بگیرید که چگونه می‌توانیم ds^2 را برای یک سیستم مختصات مفروض به دست آوریم. در مورد یک سیستم مختصات کاملاً شناخته شده، ممکن است جواب از هندسهٔ مسأله بدیهی باشد. مثلاً در مختصات قطبی در صفحه (از شکل ۶-۱ و قضیهٔ فیثاغورث) داریم

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2 \qquad (۲-۶)$$



شکل ۶-۱

با این همه، برای تغییر متغیرهای نامتداول یا پیچیده ما به یک روش سیستماتیک برای یافتن ds نیاز داریم؛ این روش را با پیدا کردن مقدار ds^2 برای مختصات استوانه‌ای که در(۶-۱) داده شده است بیان می‌کنیم. از معادلات

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \\ z &= z \end{aligned} \qquad (۳-۶)$$

داریم

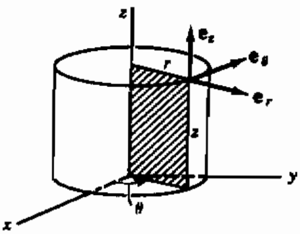
$$\begin{aligned} dx &= \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ dy &= \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \\ dz &= dz \end{aligned} \qquad (۴-۶)$$

با مجذور کردن هر یک از معادلات (۶-۴) و جمع کردن نتایج، داریم

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + dz^2 \qquad (۵-۶)$$

مخصوصاً توجه کنید که در این جا تمام جملات ضربی ($dr\, d\theta$ و غیره) حذف می‌شوند. این امر همیشه اتفاق نمی‌افتد، امّا اکثراً رخ می‌دهد؛ در این صورت، سیستم مختصات را **متعامد**

می‌نامیم. این گونه سیستمهای مختصات دارای برخی ویژگیهای مخصوصاً ساده و مفید می‌باشند. از نظر هندسی، سیستم متعامد به معنای این است که سطوح مختصات دو به دو بر هم عمود اند. برای مختصات استوانه‌ای (شکل ۶-۲)، سطوح مختصات عبارت اند از ثابت $= r$ (مجموعه استوانه‌های هم مرکز)، ثابت $= \theta$ (مجموعهٔ نیم - صفحات)، و ثابت $= z$ (مجموعهٔ صفحات). سه سطح مختصات مارّ بر یک نقطهٔ مفروض، یکدیگر را به طور عمودی قطع می‌کنند. سه منحنی تقاطع سطوح مختصات، دو به دو بر هم عمودند؛ این منحنی‌ها را *"خطوط"* یا جهتهای ***مختصات*** می‌نامند. بردارهای یکّهٔ پایه را مماس بر جهتهای مختصات رسم می‌کنیم؛ برای سیستم استوانه‌ای (شکل ۶-۲) این بردارهای یکّه را e_r، e_θ، e_z (e_z همان $\mathbf{k}$ است) می‌نامیم. این بردارهای یکّه نظیر $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ یک "سه - کنج" متعامد می‌سازند. این گونه سیستمهای مختصات را هنگامی که سطوح مختصات (یا بعضی از آنها) صفحه نیستند و خطوط مختصات به جای خط راست منحنی می‌باشند، ***سیستم مختصات منحنی‌الخط*** می‌نامیم. ما علی‌الاصول به سیستم مختصات منحنی‌الخط متعامد علاقه‌مندیم.



شکل ۶-۲

۷- ضرایب مقیاس و بردارهای پایه برای سیستمهای متعامد

در سیستم دکارتی، اگر x، y، z مختصات یک ذرّه باشند و x به اندازهٔ dx تغییر کند ولی y و z ثابت بمانند، مسافتی که ذرّه می‌پیماید $ds = dx$ است. با این همه، در سیستم استوانه‌ای اگر θ به اندازهٔ $d\theta$ تغییر کند و r و z ثابت بمانند، مسافتی که ذره می‌پیماید مساوی $d\theta$ نیست، بلکه $ds = r\,d\theta$ است. ضرایبی نظیر r در $r\,d\theta$ که باید در دیفرانسیلهای مختصات ضرب شوند تا مسافتها را به دست بدهند به ***ضرایب مقیاس*** مشهور اند و همان گونه که خواهیم دید فوق‌العاده حائز اهمیت اند. راه سر راست به دست آوردن آنها محاسبهٔ ds^2 است که در (۶-۵) انجام دادیم؛ اگر تبدیل متعامد باشد، ضرایب مقیاس را می‌توان فوراً از ds^2 به دست آورد. از (۶-۵)، مشاهده می‌کنیم که ضرایب مقیاس برای مختصات استوانه‌ای عبارت اند از ۱ ، r ، ۱ .

همچنین مفید است که برداری مانند $d\mathbf{s}$ را در نظر بگیریم که دارای مؤلفه‌های dr، $r\,d\theta$ و dz در جهتهای مختصات، یعنی در جهتهای e_r، e_θ، e_z است:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_r\,dr + \mathbf{e}_\theta\,r\,d\theta + \mathbf{e}_z\,dz \tag{۱-۷}$$

در این صورت $ds^2 = d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s}$ است که (۶-۱) را می‌دهد، زیرا بردارهای $\mathbf{e}$ متعامد و به طول واحد اند.

می‌توانیم روابط بین بردارهای پایهٔ یک سیستم مختصات منحنی‌الخط ($\mathbf{e}_r$، $\mathbf{e}_\theta$، $\mathbf{e}_z$ در مختصات استوانه‌ای) و $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ را پیدا کنیم. این هنگامی مفید است که بخواهیم از برداری که برحسب بردارهای پایهٔ سیستم مختصات منحنی‌الخط بیان شده است مشتق بگیریم؛ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ هم از نظر بزرگی و هم از نظر **جهت** ثابت‌اند، امّا $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$ از نظر جهت ثابت نیستند، بنابراین مشتقات آنها صفر نیستند. یک روش جبری برای پیدا کردن روابط بین دو مجموعه بردار پایه را با پیدا کردن آنها برای سیستم استوانه‌ای، نمایش می‌دهیم. (مقایسه کنید با روش هندسی نشان داده شده در فصل ۶، بخش ۴). می‌نویسیم

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} &= \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta\right) + \mathbf{k}\,dz \end{aligned} \tag{۲-۷}$$

از مقایسهٔ (۷-۲) با (۷-۱)، و استفاده از $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \mathbf{j}\,\frac{\partial y}{\partial r} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta \\ r\,\mathbf{e}_\theta &= \mathbf{i}\,\frac{\partial x}{\partial \theta} + \mathbf{j}\,\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\mathbf{i}\,r\sin\theta + \mathbf{j}\,r\cos\theta, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k} \end{aligned} \tag{۳-۷}$$

توجه کنید که $\mathbf{e}_r$ یک بردار یکّه است زیرا $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. با این همه، $r\,\mathbf{e}_\theta$ که از فرمول مشابهی به دست می‌آید باید بر ضریب مقیاس r تقسیم شود تا بردار یکّهٔ $\mathbf{e}_\theta$ به دست آید. اغلب اوقات بهتر است از بردارهای پایه‌ای که ما آنها را $\mathbf{a}_r$، $\mathbf{a}_\theta$ می‌نامیم و لزوماً دارای طول واحد نیستند و با طرف راست (۷-۳) داده می‌شوند استفاده کنیم. در این صورت دیگر لزومی ندارد که برای به دست آوردن بردارهای $\mathbf{e}$ به (۷-۱) برگردیم؛ فقط باید هر یک از بردارهای $\mathbf{a}$ را بر بزرگی آن تقسیم کنیم تا بردار $\mathbf{e}$ مترادف با آن به دست آید. به این ترتیب از (۷-۳):

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{e}_r \qquad \text{بردار یکه}$$

دارای بزرگی $|\mathbf{a}_\theta| = r$ ، $\mathbf{a}_\theta = -\mathbf{i}\, r\sin\theta + \mathbf{j}\, r\cos\theta$

بنابراین

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\mathbf{a}_\theta = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta$$

می‌توانیم این فرمولها را برای پیدا کردن سرعت و شتاب یک ذرّه در مختصات استوانه‌ای، و فرمولهای مشابهی را برای هر سیستم مختصاتی به کار ببریم. جا به جایی یک ذرّه از مبدأ در مدت زمان t ، در مختصات استوانه‌ای (شکل ۷-۱)، عبارت است از

$$\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$$

آنگاه

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_r) + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z$$

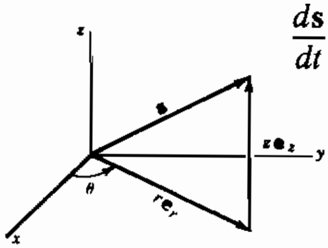
با استفاده از (۷-۳)،

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_r) = -\mathbf{i}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + \mathbf{j}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{e}_\theta\frac{d\theta}{dt},$$

بنابراین

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

با مشتق گرفتن دوباره نسبت به t و استفاده از (۷-۳) برای پیدا کردن $\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_\theta)$، می‌توانیم شتاب $d^2\mathbf{s}/dt^2$ را در مختصات استوانه‌ای پیدا کنیم (مسألهٔ ۸-۲).



شکل ۷-۱

۸- مختصات منحنی‌الخط عام

در حالت کلّی، فرض کنید x_1، x_2، x_3 مجموعه مختصات مورد نظر اند (مثلاً، برای سیستم دکارتی $x_1 = x$ ، $x_2 = y$ ، $x_3 = z$ ؛ برای سیستم استوانه‌ای $x_1 = r$ ، $x_2 = \theta$ ، $x_3 = z$). در این صورت سه مجموعه سطح مختصات عبارت اند از ثابت $= x_1$ ، ثابت $= x_2$ ، ثابت $= x_3$. سه سطح مختصات مارّ بر یک نقطهٔ مفروض، در سه خط مختصات یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر x ، y ، z به صورت توابعی از x_1، x_2، x_3 داده شده باشند، ابتدا ds^2 را همانطور که برای سیستم استوانه‌ای پیدا کردیم، حساب می‌کنیم [چگونگی به دست آوردن (۶-۵) را از (۶-۳) ملاحظه کنید]. اگر سیستم متعامد باشد، ds^2 به شکل زیر خواهد بود:

$$ds^2 = h_1^2\ dx_1^2 + h_2^2\ dx_2^2 + h_3^2\ dx_3^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2\ dx_i^2 \qquad (۱-۸)$$

h ها همان ضرایب مقیاس هستند. می‌توانیم بردار جا به جایی $d\mathbf{s}$ را به صورت زیر بنویسیم [مقایسه کنید با (۷-۱)].

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_1 h_1 dx_1 + \mathbf{e}_2 h_2 dx_2 + \mathbf{e}_3 h_3 dx_3 = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i h_i dx_i \qquad (۲-۸)$$

که در آن $\mathbf{e}$ ها بردارهای یکّهٔ در جهتهای مختصات می‌باشند. توجه به این نکته نیز ارزنده است که عنصر حجم در یک سیستم متعامد مساوی $h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3$ است (حجم یک متوازی‌السطوح قائم کوچک با یالهای $h_1 dx_1$، $h_2 dx_2$، $h_3 dx_3$، نظیر $dx\ dy\ dz$). به عنوان مثال، در مختصات استوانه‌ای عنصر حجم عبارت است از $d\theta\ dr . r . dz = r\ dr\ d\theta\ dz$.

اگر سیستم مختصات متعامد نباشد، در آن صورت ds^2 شکل سادهٔ (۸-۱) را نخواهد داشت. در حالت کلّی (یعنی، بدون فرض یک سیستم متعامد) ds^2 دارای این شکل خواهد بود:

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{11} dx_1^2 + g_{12} dx_1 dx_2 + g_{13} dx_1 dx_3 \\ & + g_{21} dx_2 dx_1 + g_{22} dx_2^2 + g_{23} dx_2 dx_3 \\ & + g_{31} dx_3 dx_1 + g_{32} dx_3 dx_2 + g_{33} dx_3^2 , \end{aligned} \qquad (۳-۸)$$

که g_{ij} ها معرف ضرایبی هستند که در محاسبهٔ $dx^2+dy^2+dz^2$ به وجود می‌آیند. این فرمول را معمولاً با علایم جمعیابی به صورت جمع و جورتری می‌نویسند:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

نوشتن این فرمول به شکل ماتریسی نیز مفید است:

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \qquad (۴-۸)$$

بعداً خواهیم دید که کمیتهای g_{ij} یک تانسور به نام **تانسور متریک** تشکیل می‌دهند. حال اگر سیستم مختصات متعامد باشد،

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^{\ 2} + g_{22}\,dx_2^{\ 2} + g_{33}\,dx_3^{\ 2} \qquad (۵-۸)$$

(به زبان ماتریسی، g_{ij} یک ماتریس قطری است). برحسب ضرایب مقیاس، از (۸-۱) برای یک سیستم مختصات متعامد داریم

$$g_{11}=h_1^{\ 2} \quad g_{22}=h_2^{\ 2} \quad g_{33}=h_3^{\ 2},$$

(۶-۸)

$$g_{12}=g_{21}=g_{13}=g_{31}=g_{23}=g_{32}=0$$

مسائل ، بخش ۸

۱- با استفاده از معادلات x، y، z برحسب مختصات کروی r، θ، ϕ، ds^2 را در مختصات کروی با روش به‌کار رفته در (۶-۵) پیدا کنید. با استفاده از ds^2، ضرایب مقیاس، بردار $d\mathbf{s}$، عنصر حجم، بردارهای پایهٔ $\mathbf{a}_r$، $\mathbf{a}_\theta$، $\mathbf{a}_\phi$، و بردارهای پایهٔ یکّهٔ $\mathbf{e}_r$، $\mathbf{e}_\theta$، $\mathbf{e}_\phi$ مربوط را پیدا کنید.

۲- در مسألهٔ پایان بخش ۷، توجه کنید که راه ساده‌تر پیدا کردن سرعت $\dfrac{d\mathbf{s}}{dt}$ این است که بردار $d\mathbf{s}$ را در (۷-۱) بر dt تقسیم کنیم. مسأله را با پیدا کردن مؤلفه‌های شتاب در مختصات استوانه‌ای تکمیل کنید.

۳- با استفاده از نتایج مسألهٔ ۱، مؤلفه‌های سرعت و شتاب را در مختصات کروی پیدا کنید. سرعت را به دو راه پیدا کنید: یکی با شروع از $d\mathbf{s}$ و دیگری با شروع از $\mathbf{s} = r\mathbf{e}_r$.

۴- در متن کتاب و مسائل تاکنون بردارهای $\mathbf{e}$ را برای سیستمهای مختصات گوناگون برحسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ (یا $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ در سه بعد) پیدا کرده‌ایم. می‌توانیم برای پیدا کردن $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ برحسب بردارهای $\mathbf{e}$، این معادلات را حل کنیم، و به این ترتیب برداری را که در شکل دکارتی آن داده شده است برحسب بردارهای پایهٔ سیستم مختصات دیگری بیان کنیم. با استفاده از این فرایند، بردار $\mathbf{V} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ را در مختصات استوانه‌ای بیان کنید. ***راهنمایی:*** برای حل مجموعه معادلات مربوط به $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ از ماتریس (مانند فصل ۳) استفاده کنید.

۵- با استفاده از نتایج مسألهٔ ۱، بردار مسألهٔ ۴ را در مختصات کروی بیان کنید.

مانند مسألهٔ ۱، ds^2، ضرایب مقیاس، بردار $d\mathbf{s}$، عنصر حجم (یا سطح)، بردارهای $\mathbf{a}$، و بردارهای $\mathbf{e}$ را برای هر یک از سیستم مختصات زیر پیدا کنید.

۶- مختصات استوانه‌ای سهموی u، v، z:

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),$$
$$y = uv,$$
$$z = z$$

۷- مختصات استوانه‌ای بیضوی u، v، z:

$$x = a \cosh u \cos v$$
$$y = a \sinh u \sin v$$
$$z = z$$

۸- مختصات سهمیوار u، v، ϕ:

$$x = uv \cos \phi,$$
$$y = uv \sin \phi,$$
$$z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2).$$

۹- مختصات دو قطبی u، v:

$$x = \frac{a \sinh u}{\cosh u + \cos v}$$
$$y = \frac{a \sin v}{\cosh u + \cos v}$$

۱۰- سطوح مختصات مسائل ۶ تا ۹ را رسم یا توصیف کنید.

با استفاده از عبارتهایی که برای ds، و برای بردارهای $\mathbf{e}$ پیدا کرده‌اید، مؤلفه‌های سرعت و شتاب را در مختصات زیر پیدا کنید.

۱۱- استوانه‌ای سهموی
۱۲- استوانه‌ای بیضوی
۱۳- سهمیوار
۱۴- دو قطبی

۹- عملگرهای برداری در مختصات منحنی‌الخط متعامد

پیش از این (فصل ۶، بخشهای ۶ و ۷) شیب (∇u)، واگرایی $(\nabla \cdot \mathbf{V})$، چرخش $(\nabla \times \mathbf{V})$،

و لاپلاسی $(\nabla^2 u)$ را در مختصات مستطیلی x، y ، z تعریف کرده‌ایم. چون در بسیاری از مسائل عملی بهتر است که سیستم مختصات دیگری (مثلاً، استوانه‌ای یا کروی) را به کار ببریم، احتیاج داریم ببینیم چگونه باید عملگرهای برداری را برحسب مختصات متعامد عمومی x_1 ، x_2، x_3 بیان کنیم. (در این جا فقط سیستمهای مختصات متعامد را در نظر می‌گیریم؛ برای مورد کلی‌تر، رک بخش ۱۴.) ما فقط خلاصهٔ اثبات فرمولها را ذکر می‌کنیم؛ برخی از تفصیلات اثباتها را می‌گذاریم برای قسمت مسائل.

شیب، ∇u . در فصل ۶ ، بخش ۶ ، نشان دادیم که مشتق جهتی du/ds در یک جهت معین، مؤلفهٔ ∇u در آن جهت است. در مختصات استوانه‌ای، اگر در جهت r برویم (θ و z ثابت)، در این صورت طبق (۶-۵) داریم $ds=dr$. بنابراین مؤلفهٔ r شیب ∇u مساوی du/dr به ازای $ds = dr$ ، یعنی، $\partial u/\partial r$ است. به طور مشابه، مؤلفهٔ θ مربوط به ∇u مساوی du/dr به ازای $ds = rd\theta$ ، یعنی، $(1/r)(\partial u/\partial\theta)$ است. بنابراین در مختصات استوانه‌ای، ∇u عبارت است از

$$\nabla u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \qquad (۹-۱)$$

اینک در مختصات متعامد عمومی x_1 ، x_2، x_3، مؤلفهٔ ∇u در جهت x_1(x_2و x_3 ثابت) مساوی du/ds است در صورتی که $ds = h_1 dx_1$ باشد [از معادلهٔ (۸-۱)]؛ یعنی، مؤلفهٔ ∇u در جهت $\mathbf{e}_1$ مساوی $(\partial u/\partial x_1)$ $(1/h_1)$ است. برای سایر مؤلفه‌ها نیز روابط مشابهی برقرار است و داریم

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla u &= \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial u}{\partial x_3} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathbf{e}_i}{h_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\end{aligned} \qquad (۹-۲)}$$

واگرایی، $\nabla\cdot\mathbf{V}$. فرض کنید

$$\mathbf{V}=\mathbf{e}_1 V_1+\mathbf{e}_2 V_2+\mathbf{e}_3 V_3 \qquad (۹-۳)$$

برداری با مؤلفه‌های V_1 ، V_2 ، V_3 در یک سیستم متعامد باشد. می‌توانیم ثابت کنیم (مسألهٔ ۱) که

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2}\right)=0 \quad ،\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3}\right)=0 \quad ،\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3}\right)=0 \qquad (۹-۴)$$

معادلهٔ (۹-۳) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}(h_2h_3V_1)+\frac{\mathbf{e}_2}{h_1h_3}(h_1h_3V_2)+\frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}(h_1h_2V_3) \qquad (۹-۵)$$

$\nabla\cdot\mathbf{V}$ را با گرفتن واگرایی هر جملهٔ طرف راست (۹-۵) پیدا می‌کنیم. با استفاده از معادلهٔ (۶-۷) در فصل ۶، یعنی،

$$\nabla\cdot(\phi\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot(\nabla\phi)+\phi\ \nabla\cdot\mathbf{v}, \qquad (۹-۶)$$

به ازای $\phi=h_2h_3V_1$ و $\mathbf{v}=\frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}$، می‌بینیم که واگرایی جملهٔ اول طرف راست (۹-۵) عبارت است از

$$\nabla\cdot\left(h_2h_3V_1\frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\right)=\frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\cdot\nabla(h_2h_3V_1)+h_2h_3V_1\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\right). \qquad (۹-۷)$$

بنا بر (۹-۴)، جملهٔ دوّم رابطهٔ (۹-۷) صفر است. در جملهٔ اوّل (۹-۷)، ضرب نقطه‌ای $\mathbf{e}_1$ در $\nabla(h_2h_3V_1)$ مؤلفهٔ اوّل $\nabla(h_2h_3V_1)$ است. بنا بر (۹-۲)، این مؤلفه عبارت است از

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3V_1)$$

با محاسبهٔ واگرایی سایر جملات (۹-۵) به روش مشابه، داریم

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{1}{h_2h_3h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3V_1)+\frac{1}{h_1h_3h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1h_3V_2)+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2V_3)$$

یا

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3V_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1h_3V_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2V_3)\right] \quad (۹-۸)}$$

در مختصات استوانه‌ای، $h_1=1$ ، $h_2=r$ ، $h_3=1$؛ بنا بر (۹-۸)، واگرایی در مختصات استوانه‌ای عبارت است از

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(rV_z)\right] \qquad (۹-۹)$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

لاپلاسی، ∇^2u . از آنجا که $\nabla^2u=\nabla\cdot\nabla u$ است، می‌توانیم ∇^2u را با محاسبهٔ (۹-۲) و

(۹-۸) به ازای $\mathbf{V}=\nabla u$ پیدا کنیم. به این ترتیب داریم

$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\right] \quad (۹-۱۰)}$$

بنابراین در مختصات استوانه‌ای، لاپلاسی عبارت است از

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

چرخش، $\nabla\times\mathbf{V}$. با روشهایی که در پیدا کردن $\nabla\cdot\mathbf{V}$ به کار بردیم می‌توانیم $\nabla\times\mathbf{V}$ را پیدا کنیم (مسألهٔ ۲). نتیجه عبارت است از

$$\nabla\times\mathbf{V} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1V_1 & h_2V_2 & h_3V_3 \end{vmatrix} \quad (۹-۱۱)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3V_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2V_2)\right]$$

$$+ \frac{\mathbf{e}_2}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1V_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(h_3V_3)\right]$$

$$+ \frac{\mathbf{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2V_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1V_1)\right]$$

در مختصات استوانه‌ای داریم

$$\nabla\times\mathbf{V} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_r & rV_\theta & V_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\,\mathbf{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)$$

مسائل ، بخش ۹

۱- معادلهٔ (۹-۴) را با روش زیر ثابت کنید. با استفاده از (۹-۲) به ازای $u = x_1$، نشان دهید که $\nabla x_1 = \mathbf{e}_1/h_1$. همچنین، نشان دهید $\nabla x_2 = \mathbf{e}_2/h_2$ و $\nabla x_3 = \mathbf{e}_3/h_3$. فرض کنید $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، $\mathbf{e}_3$ با همین ترتیب یک سه کنج راستگرد تشکیل دهند (به طوری که $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ و غیره) و نشان دهید $\nabla x_1\times\nabla x_2 = \mathbf{e}_3/(h_1h_2)$. واگرایی این معادله را حساب کنید و، با استفاده از اتحادهای برداری (ح) و (ب) از فصل ۶، نشان دهید $\nabla\cdot(\mathbf{e}_3/h_1h_2)$. سایر قسمتهای (۹-۴) به روش مشابهی ثابت می‌شوند.

۲- عبارت (۹-۱۱) را برای چرخش $\mathbf{V}$ به روش زیر به دست آورید. نشان دهید $\nabla x_1 = \mathbf{e}_1/h_1$ و $\nabla\times(\nabla x_1) = \nabla\times(\mathbf{e}_1/h_1) = 0$. سپس V را به شکل زیر بنویسید

$$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{e}_1}{h_1}(h_1V_1)+\frac{\mathbf{e}_2}{h_2}(h_2V_2)+\frac{\mathbf{e}_3}{h_3}(h_3V_3)$$

و اتحادهای برداری فصل ۶ را برای تکمیل اثبات فرمول به کار ببرید.

۳- با استفاده از مختصات استوانه‌ای ، معادلات لاگرانژ حرکت ذره‌ای را که تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}=-\nabla V$ است بنویسید؛ V انرژی پتانسیل است. هر یک از معادلات لاگرانژ را بر ضریب مقیاس همخوان آن تقسیم کنید به طوری که مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ (یعنی، مؤلفه‌های $-\nabla V$) در معادله‌ها ظاهر شوند. به این ترتیب معادلات را به صورت معادلات مؤلفه‌ای $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ بنویسید، و مؤلفه‌های شتاب $\mathbf{a}$ را پیدا کنید. نتیجه را با معادلهٔ ۸-۲ مقایسه کنید.

۴- مسألهٔ ۳ را در مختصات استوانه‌ای حل کنید؛ نتیجه را با مسألهٔ ۸-۳ مقایسه کنید.

۵- ∇U ، $\nabla\cdot\mathbf{V}$ ، $\nabla^2 U$ و $\nabla\times\mathbf{V}$ را در مختصات استوانه‌ای بنویسید.

مسألهٔ ۳ را برای سیستمهای مختصاتی که در مسائل ۶ تا ۹ به آنها اشاره شده است حل کنید. نتایج را با مسائل ۸-۱۱ تا ۸-۱۴ مقایسه کنید.

۶- استوانه‌ای سهموی ۷- استوانه‌ای بیضوی

۸- سهمیوار ۹- دو قطبی

مسألهٔ ۵ را برای سیستمهای مختصاتی که در مسائل ۱۰ تا ۱۳ به آنها اشاره شده است حل کنید.

۱۰- استوانه‌ای سهموی ۱۱- استوانه‌ای بیضوی

۱۲- سهمیوار ۱۳- دو قطبی

در هر یک از سیستمهای مختصات زیر، ضرایب مقیاس h_u و h_v؛ بردارهای پایهٔ $\mathbf{e}_u$ و $\mathbf{e}_v$؛ معادلات لاگرانژ u و v را پیدا کنید و با استفاده از آنها مؤلفه‌های شتاب را به دست آورید (رک مسألهٔ ۳).

۱۴- $\begin{cases} x = u - v \\ y = ۲\sqrt{uv} \end{cases}$

۱۵- $\begin{cases} x = uv \\ y = u\sqrt{۱ - v^۲} \end{cases}$

با استفاده از معادلات (۹-۲)، (۹-۸)، و (۹-۱۱)، عبارتهای زیر را حساب کنید:

۱۶- در مختصات استوانه‌ای، $\nabla\cdot\mathbf{e}_r$ ، $\nabla\cdot\mathbf{e}_\theta$ ، $\nabla\times\mathbf{e}_r$ ، $\nabla\times\mathbf{e}_\theta$.

۱۷- در مختصات کروی، $\nabla\cdot\mathbf{e}_r$ ، $\nabla\cdot\mathbf{e}_\theta$ ، $\nabla\times\mathbf{e}_\theta$ ، $\nabla\times\mathbf{e}_\phi$.

۱۸- در مختصات استوانه‌ای، $\nabla\times\mathbf{k}\ ln\ r$ ، $\nabla\ ln\ r$ ، $\nabla\cdot(r\mathbf{e}_r+z\mathbf{e}_z)$.

۱۹- در مختصات کروی، $\nabla\times(r\mathbf{e}_\theta)$ ، $\nabla(r\cos\theta)$ ، $\nabla\cdot\mathbf{r}$.

۲۰- در مختصات استوانه‌ای، $\nabla^۲ r$ ، $\nabla^۲(\frac{۱}{r})$ ، $\nabla^۲\ ln\ r$.

۲۱- در مختصات کروی، $\nabla^۲ r$ ، $\nabla^۲(r^۲)$ ، $\nabla^۲(\frac{۱}{r^۲})$ ، $\nabla^۲ e^{ikr}\cos\theta$.

۱۰- حساب تانسورها ـ مقدّمه

تانسورها تعمیم اسکالرها و بردارها هستند؛ به چند مثال توجه می‌کنیم. تانسورهای مرتبهٔ صفر صرفاً اسکالر اند، و تانسورهای مرتبهٔ یک همان بردارها هستند؛ شما با این دو مقوله آشنایید. در فضای سه بعدی یک اسکالر دارای یک (یا $۳^۰$) "مؤلفه" و یک بردار دارای ۳ (یا $۳^۱$) مؤلفه است؛ یک تانسور مرتبهٔ دوّم دارای ۹ (یا $۳^۲$) مؤلفه است؛ و در حالت کلّی یک تانسور مرتبهٔ n دارای ۳^n مؤلفه است . پس از اسکالرها و بردارها،تانسورهای مرتبهٔ دوّم مفیدترین کاربردها را دارند، بنابراین مثالی فیزیکی از این گونه تانسورها را بررسی می‌کنیم.

میلهٔ حامل باری را در نظر بگیرید؛ در این میله نیروهای تنشی و کرنشی وجود دارند. اگر میله

را با یک صفحهٔ فرضی عمود بر راستای x به دو نیم تقسیم کنیم، متوجه می‌شویم که از سوی مادهٔ واقع در یک طرف برش فرضی ما نیروی بر واحد سطحی وجود دارد که بر مادهٔ طرف دیگر وارد می‌شود. این نیرو یک بردار است، بنابراین دارای سه مؤلفهٔ P_{xx}، P_{xy}، P_{xz} می‌باشد، که شاخص پایین اوّل، یعنی x، برای تأکید این نکته است که این نیرو نیرویی است که بر یک صفحهٔ عمود بر راستای x وارد می‌شود. به طور مشابه، اگر یک صفحهٔ عمود بر راستای y در نظر بگیریم، یک نیروی وارد بر سطح این صفحه نیز وجود دارد که مؤلفه‌های آن P_{yx}، P_{yy}، P_{yz} است؛ و بالاخره در مورد یک صفحهٔ عمود بر راستای z، یک نیروی وارد بر واحد سطح با مؤلفه‌های P_{zx}، P_{zy}، P_{zz} وجود دارد. به این ترتیب، در یک نقطهٔ داخل میله، مجموعه‌ای از ۹ کمیت داریم که می‌توانیم آن را با یک ماتریس نمایش بدهیم:

$$\begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} \qquad (۱-۱۰)$$

این یک تانسور مرتبهٔ دوّم موسوم به تانسور تنش است. نیروهای (بر واحد سطح) P_{xx}، P_{yy}، P_{zz} فشار یا کشش‌اند؛ بقیّه، نیروهای برشی (بر واحد سطح)اند. مثلاً، P_{zy} نیروی بر واحد سطحی است در راستای y که بر یک صفحهٔ عمود بر راستای z وارد می‌شود؛ این نیرو سعی به بریدن میله دارد.

تاکنون ما فقط به تعداد مؤلفه‌های تانسورهای با مرتبه‌های مختلف اشاره کرده‌ایم. این تمام داستان نیست. برای این که ببینیم به چه چیزهای دیگری نیاز داریم، ابتدا به بررسی تانسورهای مرتبهٔ اوّل، یعنی بردارها می‌پردازیم، که تا حدودی با آنها آشناییم. در کارهای مقدماتی، بردار معمولاً یا به صورت یک بزرگی و یک راستا، یا به صورت مجموعه‌ای از سه مؤلفه تعریف می‌شود. برای پی بردن به این نکته که ما به تعریف دقیق‌تری نیاز داریم، مثال زیر را در نظر بگیرید. پیکانی رسم می‌کنیم که نشان دهندهٔ چرخش معینی به یک جسم صلب به طریق زیر باشد. پیکان را در امتداد محور چرخش رسم کنید، طول آن را مساوی زاویهٔ چرخش برحسب رادیان قرار دهید، و جهت آن را بر طبق قاعدهٔ دست راست انتخاب کنید. در این صورت، ظاهراً، طبق تعریف "بزرگی و راستا"، چرخش یک بردار است. امّا چنین نیست! کتابی را برداشته آن را به اندازهٔ 90° حول محور x ها، و سپس 90° حول محور y ها بچرخانید. این کار را تکرار کنید، امّا

این بار ابتدا آن را حول محور yها و سپس حول محور xها بچرخانید. وضعیتهای نهایی کتاب متفاوت‌اند. امّا حاصل جمع دو بردار بستگی به ترتیب آنها ندارد (در زبان ریاضی، جمع برداری جا به جا پذیر است). بنابراین، پیکانهای وابسته به چرخشها بردار نیستند.

حال ایدهٔ یک بردار را به صورت مجموعه‌ای از سه مؤلفه در نظر بگیریم. برای صحبت از مؤلفه‌ها، باید یک دستگاه مختصات داشته باشیم. بینهایت دستگاه مختصات وجود دارد [حتی برای محورهای دکارتی (x,y,z) تعداد بینهایت محور وجود دارد که با چرخاندن یک مجموعه به دست می‌آیند]؛ بنابراین باید بگوییم یک بردار متشکل است از یک مجموعهٔ سه مؤلفه‌ای در ***هریک از دستگاههای مختصات***. اگر مؤلفه‌های یک بردار نسبت به یک مجموعه محور معلوم باشند، از تحلیل برداری مقدماتی می‌دانیم که مؤلفهٔ بردار مورد نظر در هر راستا، یا مؤلفه‌های آن نسبت به هر مجموعه محور چرخش یافته‌ای، را می‌توان با گرفتن تصاویر آن پیدا کرد. به این ترتیب مؤلفه‌های جدید ترکیبات معینی از مؤلفه‌های قدیم‌اند. این واقعیت به ما اجازه می‌دهد که ببینیم آیا یک کمیت فیزیکی واقعاً یک بردار است یا نه. برای تانسورها، مثلاً تانسور مرتبهٔ دوّم تنش که پیش از این توصیف کردیم، نیز شرط مشابهی وجود دارد. برش میله را می‌توانستیم با صفحه‌ای سمت گرفته در هر راستای مفروضی در نظر بگیریم و نیروی وارد بر واحد سطح این صفحه را مورد سؤال قرار دهیم. می‌توان نشان داد که هر مؤلفهٔ این نیرو ترکیب خطی معینی از ۹ مؤلفهٔ تانسور تنش (۱۰-۱)است. بنابراین مؤلفه‌های تانسور تنش در هر دستگاه مختصات دیگر ترکیبات معینی از ۹ مؤلفهٔ تانسور تنش نسبت به محورهای (x,y,z) می‌باشند. به عبارت دیگر، تانسورهای با همهٔ مرتبه‌ها، شبیه بردارها، معنایی فیزیکی دارند که مستقل از دستگاه مختصات مرجع است و قوانین ریاضی معینی وجود دارد که مؤلفه‌های آنها را در دو دستگاه به هم مربوط می‌سازد.

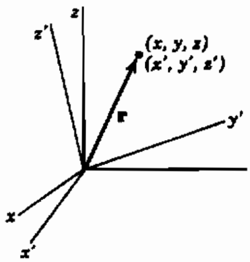
ممکن است تعجب کنید چرا نمی‌توانیم صرفاً هر مجموعهٔ دلخواهی (۳ برای یک بردار، ۹ برای یک تانسور مرتبهٔ دوّم، و غیره) را، که در **یک** دستگاه مختصات داده شده است، با **تعریف** مؤلفه‌های آن در سایر دستگاهها بر طبق قوانین صحیح تبدیل، یک تانسور بنامیم. از نظر ریاضی می‌توانیم! امّا اگر بحث ما پیرامون یک پدیدهٔ فیزیکی است، این آزادی را نداریم که مؤلفه‌های آن را در دستگاههای مختصات گوناگون تعریف کنیم؛ این مؤلفه‌ها بر طبق واقعیتهای فیزیکی تعیین می‌شوند. ما صرفاً یک توصیف ریاضی از پدیده را به دست می‌دهیم و آن را به عنوان یک

اسکالر، یک بردار، یک تانسور مرتبهٔ دوّم، و غیره (یا شاید هیچکدام از اینها) معرفی می‌کنیم. اکنون دوباره ملاحظه می‌کنیم که چرا یک پیکان وابسته به یک چرخش، بردار نیست. اگر پیکان یاد شده را به عنوان یک بردار تلقی کنیم و مؤلفه‌های آن را به دست آوریم، بردارهای این مؤلفه‌ها معرف چرخشهایی نیستند که بتوانند با هم ترکیب شوند و چرخش اصلی را بدهند. بنابراین، برداری که به طور مصنوعی شبیه پیکانی است که ما تعریف کرده‌ایم یک نمایش ریاضی صحیح از یک پدیدهٔ فیزیکی (یک چرخش) که ما به دنبال توصیف آن هستیم نیست.

رابطهٔ بین بردارهایی که ما در این جا می‌خواهیم تعریف کنیم و بردارهای یک فضای برداری خطی (فصل ۳، پایان بخش ۸) چیست؟ ایده‌های فضای برداری مجرّد، از هندسهٔ بردارهای جابه‌جایی سه بعدی پا گرفته‌اند. یک تغییر دستگاه مختصات (مثلاً، چرخش محورها) همخوان است با یک تغییر پایه در یک فضای برداری. از آن جا که تعاریف یک فضای برداری طوری پا می‌گیرند که به موازات هندسه باشند، بردارهای جابجایی از دیدگاه فضای برداری، بردارند. پس بردار بودن یا نبودن کمیتهای فیزیکی دیگر (نیرو، تنش، و غیره) بستگی به این دارد که این کمیتها تحت یک تغییر دستگاه مختصات (یعنی،تغییر پایه) مانند بردارهای جابجایی تبدیل بشوند یا نه. در این فصل، مراد ما از واژهٔ "بردار" تمام کمیتهایی هستند که به نحو مناسب تبدیل می‌یابند. می‌توانستیم بگوییم که یک کمیت فیزیکی در صورتی بردار است که یک بردار باشد (از دیدگاه فضای برداری)، امّا این تعریف خیلی جالبی نیست! در عوض، قانون تبدیل را برای بردار جابه‌جایی پیدا می‌کنیم، و آن گاه هر کمیتی را که از این قانون پیروی کند یک بردار می‌نامیم.

۱۱- تانسورهای دکارتی

اکنون اثر تبدیلهای مختصات را بر بردارهای جابه‌جایی بررسی می‌کنیم (یعنی، پیدا می‌کنیم که مؤلفه‌ها در یک دستگاه مختصات چه رابطه‌ای با مؤلفه‌ها در دستگاههای دیگر دارند) و آنگاه نتایج به دست آمده را برای تعریف تانسورها به کار می‌بریم . چرخش محورها ، مثال سادهٔ مفیدی است برای نمایاندن ایده‌های ذیربط . فرض کنیم (x,y,z) یک مجموعه محور دکارتی و (x',y',z') مجموعهٔ دیگری باشد که از ثابت گرفتن مبدأ و چرخش محورها به هر نحو دلبخواه به دست آمده است (شکل ۱۱-۱). در جدول (۱۱-۱) کسینوسهای ۹ زاویهٔ بین محورهای (x,y,z) و محورهای (x',y',z') درج شده است:



شکل ۱۱-۱

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x' & l_1 & m_1 & n_1 \\ y' & l_2 & m_2 & n_2 \\ z' & l_3 & m_3 & n_3 \end{array} \qquad (۱-۱۱)$$

(در این جدول ، l_2 به معنای کسینوس زاویهٔ بین محور x و محور y' است، و الخ). بردار $\mathbf{r}$ (شکل ۱۱-۱) دارای مؤلفه‌های x ، y ، z یا x' ، y' ، z' نسبت به دو دستگاه مختصات است؛ می‌خواهیم روابط بین دو مجموعه مؤلفه را پیداکنیم. فرض‌کنید $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ بردارهای پایهٔ یکه در امتداد محورهای (x,y,z) و $\mathbf{i}'$ ، $\mathbf{j}'$ ، $\mathbf{k}'$ بردارهای پایهٔ یکه در امتداد محورهای (x',y',z') باشند. به این ترتیب بردار $\mathbf{r}$ را می‌توان برحسب هر یک از مجموعه مؤلفه‌ها و بردارهای پایه به طریق زیر نوشت:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z = \mathbf{i}'x' + \mathbf{j}'y' + \mathbf{k}'z' \qquad (۲-۱۱)$$

از ضرب نقطه‌ای این معادله در $\mathbf{i}'$ داریم

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}' = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}'x + \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}'y + \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}'z = x' \qquad (۳-۱۱)$$

(زیرا $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 1$ و $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}' = 0$). اکنون $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}'$ عبارت است ازکسینوس زاویهٔ بین $\mathbf{i}$ و $\mathbf{i}'$ ، یعنی، بین محور x و x' محور است، زیرا $\mathbf{i}$ و $\mathbf{i}'$ بردارهای یکه‌اند؛ بنابراین از جدول (۱۱-۱) داریم $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' = l_1$. همچنین، $\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' = m_1$ و $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}' = n_1$ و (۱۱-۳) تبدیل می‌شود به

$$x' = l_1 x + m_1 y + n_1 z \qquad (۴-۱۱)$$

به طور مشابه، از ضرب نقطه‌ای $\mathbf{r}$ در $\mathbf{j}'$ و $\mathbf{k}'$ ، و با استفاده از (۱۱-۱) داریم

$$\begin{aligned} y' &= l_2 x + m_2 y + n_2 z \\ z' &= l_3 x + m_3 y + n_3 z \end{aligned} \qquad (۵-۱۱)$$

معادله‌های (۱۱-۴) و (۱۱-۵)، معادله‌های تبدیل از دستگاه مختصات (x,y,z) به (x',y',z') نامیده می‌شوند.

به همین ترتیب، به نوبت از ضرب نقطه‌ای $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ در $\mathbf{r}$ ، معادله‌های x ، y ، z برحسب x' ، y' ، z' به دست می‌آیند:

$$x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z',$$
$$y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \qquad (۶-۱۱)$$
$$z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'.$$

این معادله‌های تبدیل را می‌توان در نمادگذاری ماتریسی به شکل جمع و جورتری نوشت. معادله‌های (۱۱-۴) و (۱۱-۵) تبدیل به معادلهٔ ماتریسی زیر می‌شوند:

$$r' = A\,r \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (۷-۱۱)$$

که در آن r'، A و r نمایشگر ماتریسهای (۱۱-۷) اند. [برای مورد ۲ بعدی مقایسه کنید با (۳-۱)] همچنین، (۱۱-۶) تبدیل می‌شود به

$$r = A^T r'$$

که A^T ترانهادهٔ A است.

معادلهٔ (۱۱-۷) بیان می‌کند که بردارهای جا به جایی چگونه تحت چرخش محورها تبدیل می‌شوند. اکنون از این نتیجه برای تعریف بردارها و تانسورها استفاده می‌کنیم. چون در اینجا ما فقط دستگاههای مختصات مستطیلی (که غالباً دکارتی خوانده می‌شوند) را در نظر داریم، بردارها و تانسورهایی را که تعریف می‌کنیم می‌توانیم بردارها و تانسورهای **دکارتی** بنامیم.

تعریف بردارهای دکارتی بردار دکارتی $\mathbf{V}$ مشتمل است بر مجموعه‌ای از سه مؤلفه (عدد) در هر دستگاه مختصات مستطیلی؛ اگر V_x ، V_y ، V_z مؤلفه‌ها در یک دستگاه و V'_x، V'_y، V'_z مؤلفه‌ها در یک دستگاه چرخیده باشند، این دو مجموعه مؤلفه با معادله‌ای شبیه (۱۱-۷) با یکدیگر مربوط اند، یعنی،

$$V' = AV \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \qquad (۹-۱۱)$$

که A همان ماتریس چرخش است که در (۱۱-۷) آمده است.

با تغییرات زیر می‌توانیم نمادگذاری‌مان را ساده کنیم:

$$(۱۱-۱۰)\quad \begin{array}{llll} x\text{، }y\text{، }z & \text{را با} & x_۱\text{، }x_۲\text{، }x_۳ & \text{جایگزین کنید} \\ x'\text{، }y'\text{، }z' & \text{را با} & x'_۱\text{، }x'_۲\text{، }x'_۳ & \text{جایگزین کنید} \\ V_x\text{، }V_y\text{، }V_z & \text{را با} & V_۱\text{، }V_۲\text{، }V_۳ & \text{جایگزین کنید} \\ V'_x\text{، }V'_y\text{، }V'_z & \text{را با} & V'_۱\text{، }V'_۲\text{، }V'_۳ & \text{جایگزین کنید} \end{array}$$

A در (۱۱–۷) را با $\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{pmatrix}$ جایگزین کنید.

با این نمادگذاری، (۱۱–۷) تبدیل می‌شود به

$$x'_i=\sum_{j=۱}^{۳} a_{ij}x_j,\qquad i=۱،۲،۳ \tag{۱۱-۱۱}$$

و (۱۱–۹) تبدیل می‌شود به

$$V'_i=\sum_{j=۱}^{۳} a_{ij}V_j,\qquad i=۱،۲،۳ \tag{۱۱-۱۲}$$

با استفاده از این نمادگذاری جمع و جورتر، تعریف تانسورها آسان است.

تعریف تانسورهای دکارتی تانسور مرتبهٔ اول همان بردار است. یک تانسور دکارتی مرتبهٔ دوّم در هر دستگاه مختصات دکارتی (سه بُعدی) دارای ۹ مؤلفه است؛ اگر مؤلفه‌ها را در یک دستگاه T_{ij} بنامیم، که i و j هر یک مقادیر ۱،۲،۳ را می‌پذیرند، مؤلفه‌های T'_{ij} در یک دستگاه چرخیده عبارت اند از

$$T'_{kl}=\sum_{i=۱}^{۳}\sum_{j=۱}^{۳} a_{ki}a_{lj}T_{ij},\qquad k،l=۱،۲،۳ \tag{۱۱-۱۳}$$

که a ها کسینوسهای هادی در ماتریس چرخش M اند.

مثال بسیار ساده‌ای از یک تانسور مرتبهٔ دوّم می‌توانیم بیان بکنیم. فرض کنید U و V دو بردار باشند؛ آرایهٔ زیر را (در هر دستگاه مختصات) از مؤلفه‌های $U_۱$ ، $U_۲$ ، $U_۳$ و $V_۱$ ، $V_۲$ ، $V_۳$ بردارهای U و V (در همان دستگاه مختصات) تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{matrix} U_1V_1 & U_1V_2 & U_1V_3 \\ U_2V_1 & U_2V_2 & U_2V_3 \\ U_3V_1 & U_3V_2 & U_3V_3 \end{matrix} \qquad (۱۴-۱۱)$$

می‌توانیم نشان بدهیم که این ۹ کمیّت مؤلفه‌های یک تانسور مرتبهٔ دوّم اند که آن را با UV مشخص می‌کنیم (**توجه:** هیچ علامت نقطه یا × وجود ندارد). چون U و V بردار اند، مؤلفه‌های آنها در یک دستگاه مختصات چرخیده، طبق (۱۱-۱۲)، عبارت اند از

$$U'_k = \sum_{i=1}^{3} a_{ki}U_i\,, \qquad V'_l = \sum_{j=1}^{3} a_{lj}V_j$$

بنابراین مؤلفه‌های تانسور مرتبه دوم UV عبارت اند از

$$U'_kV'_l = \sum_{i=1}^{3} a_{ki}U_i \sum_{j=1}^{3} a_{lj}V_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ki}a_{lj}U_iV_j \qquad (۱۵-۱۱)$$

که همان (۱۱-۱۳) با $T_{ij}=U_iV_j$ و $T'_{kl}=U'_kV'_l$ است.

معادلهٔ (۱۱-۱۳) بلافاصله تعمیم می‌یابد. مثلاً، یک تانسور مرتبهٔ چهارم دکارتی، در هر دستگاه مختصات استوانه‌ای، به صورت یک مجموعهٔ 3^4 یا ۸۱ مؤلفه‌ای T_{ijkl} تعریف می‌شود، که طبق معادله‌های

$$T'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{i,j,k,l} a_{\alpha i}\, a_{\beta j}\, a_{\gamma k}\, a_{\delta l}\, T_{ijkl}$$

به یک دستگاه چرخیده تبدیل می‌یابند، و در آنها i,j,k,l مقادیر ۱،۲،۳ را می‌پذیرند.

تانسورهای مرتبهٔ صفر در تشابه با معادله‌های تبدیل تانسور (۱۱-۱۲) برای مرتبهٔ اوّل، (۱۱-۱۳) برای مرتبهٔ دوّم و (۱۱-۱۶) برای مرتبهٔ چهارم، معادلهٔ تبدیل برای تانسور مرتبهٔ صفر S عبارت است از

$$S' = S \qquad (۱۷-۱۱)$$

به عبارت دیگر، تانسور مرتبهٔ صفر دارای یک مؤلفه است که بر اثر چرخش محورها تغییری نمی‌کند؛ این تانسور موسوم است به ***ناوردا*** یا ***اسکالر***. مثالهای ساده در این مورد عبارت اند از طول یک بردار، و حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار.

قرار داد جمع به عنوان گامی دیگر در ساده کردن نمادگذاریها، رسم بر این است که علائم

جمع را در معادله‌هایی نظیر (۱۱-۱۲)، (۱۱-۱۳)، (۱۱-۱۵)، (۱۱-۱۶) حذف می‌کنند و صرفاً هر جا که یک شاخص پایین **مکرّر** وجود دارد، عمل جمع بر روی آن استنباط می‌شود. مثلاً، بنابراین قرارداد:

$$a_i a_i \text{ یا } a_j a_j \text{ یا } a_k a_k \text{ به معنای } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\text{؛}$$

$$a_{ij}\, b_{jk} \text{ به معنای } a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k}\text{؛}$$

و غیره است. شاخص مکرّر که جمع بر روی آن صورت می‌گیرد به شاخص **کمکی** موسوم است؛ مانند متغیر انتگرال گیری، فرقی نمی‌کند که چه حرفی را برای آن به کار ببریم.

بردارها و تانسورهای n-بُعدی اکنون‌که تعریف دقیق‌تری از بردار را در سه بعد به دست داده‌ایم [(۱۱-۹) و جملهٔ مستتر در آن]، می‌توانیم به بحث nبعدی برگردیم (بخشهای ۳ و ۵) و تعریف (۱۱-۹) را به برداری با n مؤلفه تعمیم بدهیم. مخصوصاً استفاده از نمادگذاری جدید معرفی شده در (۱۱-۱۰) مناسب خواهد بود. ما در اینجا با مسأله‌ای با n متغیر روبرو هستیم که، به زبان هندسی، آنها را n مختصه می‌خوانیم؛ این مختصات را x_1، x_2، x_3، ... ، x_n می‌نامیم. فرض کنید یک تغییر متغیر انجام بدهیم - به زبان هندسی، تغییر به یک دستگاه مختصات جدید. مختصات (متغیرهای) جدید را x'_1، x'_2، x'_3، ... ، x'_n می‌نامیم. در تشابه با (۱۱-۷)، در حال حاضر فقط تغییرات خطی‌ای را در نظر می‌گیریم که برای آنها ماتریس تبدیل A یک ماتریس متعامد است. به خاطر دارید (بخش ۳) که ماتریس A، با هر مرتبه‌ای، در صورتی متعامد خوانده می‌شود که $A^T = A^{-1}$ باشد. در این صورت می‌توانیم n معادلهٔ به دست دهندهٔ تغییر متغیرهای از مختصات x به مختصات x' را درست به شکل اختصاری ماتریسی (۱۱-۷) که در مورد فضای سه بعدی به کار برده شد، یعنی $r' = Ar$، بنویسیم. در نمادگذاری جدید (۱۱-۱۰)، می‌توانیم تغییر متغیرهای n بعدی را به همان شکل (۱۱-۱۱) که برای مورد سه بعدی به کار بردیم بنویسیم؛ فقط باید در (۱۱-۱۱) جمع بر روی j را که از ۱ تا ۳ بود با یک جمع از ۱ تا n جایگزین کنیم. توجه داشته باشید که، درست مانند مورد سه بعدی، تعداد بینهایت مجموعه متغیر وجود دارند که هر دو مجموعه‌ای از آنها با یک ماتریس متعامد به هم مربوط اند؛ مجموعه متغیرهای x_1، x_2، x_3، ... ، x_n و x'_1، x'_2، x'_3، ... ، x'_n معرف دو مجموعه متغیّر *دلبخواه* (به زبان هندسی، دو دستگاه مختصات دلبخواه) اند. اکنون

که دیدیم تعمیم (۱۱-۱۱) به n بعد چقدر آسان است، به آسانی می‌توانیم (۱۱-۱۲) را به n بعد تعمیم دهیم و به این ترتیب یک بردار n بعدی را تعریف کنیم. بنابراین یک بردار n بعدی مشتمل است بر یک مجموعهٔ منظم از n عدد در هر دستگاه مختصات (یعنی، یک مجموعه مؤلفه بردارهای V_1، V_2 ، V_3، ... ، V_n به هریک از مجموعه متغیرهای x_1 ، x_2 ، x_3، ...،x_n)؛ مؤلفه‌های بردار در دو دستگاه مختصات باید با معادلهٔ ماتریسی $V'=AV$ با هم مرتبط باشند که در آن A همان ماتریسی است که مختصات را در معادلهٔ $r'=Ar$ به هم ربط می‌دهد. همین مطلب به بیانی دیگر با (۱۱-۱۲) و (۱۱-۱۱) داده می‌شود که در آنها جمع بر روی j از ۱ تا n است. توجه کنید که چگونه "جبر" با زحمتی نه بیشتر از جایگزینی ۳ با n، به فراتر از سه متغیر می‌رود؛ صرفاً به خاطر راحتی است که به استفاده از اصطلاحات هندسی ادامه می‌دهیم. معادلات معرّف تانسورها را با هر مرتبه‌ای می‌توان به طور مشابه و صرفاً با جمع کردن از ۱ تا n به جای از ۱ تا ۳ به هر تعداد بعدی تعمیم داد. البته این بدان معناست که در کاربرد قرارداد جمع، باید تعداد ابعادی را که در آن کار می‌کنیم مشخص کنیم.

مسائل ، بخش ۱۱

۱- هر چرخش محورهای سه بعدی را می‌توان با مشخص کردن ۹ کسینوس هادی زوایای بین محورهای (x, y, z) و (x', y', z') توصیف کرد. نشان دهید که ماتریس ۳×۳ این کسینوسهای هادی [که مطابق جدول (۱۱-۱) آرایش می‌یابند] یک ماتریس متعامد است. ***راهنمایی:*** AA^T را پیدا کنید.

۲- معادله‌های (۱۱-۶) را ثابت کنید.

۳- با استفاده از (۱۱-۹) یا (۱۱-۱۲) نشان دهید که حاصل جمع دو بردار، خود یک بردار است.

۴- نشان دهید که حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار، یک اسکالر، یعنی،یک عدد مجرد است که در دستگاههای پریمدار و بدون پریم یکی است. ***راهنمایی:*** حاصل‌ضرب نقطه‌ای عبارت از $\sum_i U_i V_i$ است که می‌توانید در شکل ماتریسی آن را به صورت

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

بنویسید. با استفاده از (۱۱-۹) یا (۱۱-۱۲)، $\sum_i U'_i V'_i$ را پیدا کنید، و به یاد داشته باشید که A متعامد است.

۵- معادلهٔ تبدیل یک تانسور مرتبهٔ سوّم را بنویسید. با استفاده از این معادله نشان دهید که حاصل جمع دو تانسور مرتبهٔ سوّم یک تانسور مرتبهٔ سوّم است.

۶- عبارتهای زیر را که با استفاده از قرارداد جمع نوشته شده‌اند به تفصیل بنویسید:

(الف) $\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$ (ب) $a_j x^j$ (ج) $a_{ij} x_i x_j$ (د) $a_{ij} b_{jk} = a_{ij} c_{jk}$

دقت کنید که در (د) نمی‌توانیم a_{ij} را حذف کنیم؛ این مثال نشان می‌دهد که در کاربرد قرارداد جمع چقدر باید مراقب بود.

۱۲- کاربرد تانسورها ، دیادیکها

اگر یک جسم صلب حول محور ثابتی بچرخد، $\mathbf{L}=I\omega$ یک معادلهٔ برداری صحیح است که در آن $\mathbf{L}$ گشتاور زاویه‌ای، I گشتاور لختی جسم حول محور چرخش، و ω سرعت زاویه‌ای است. همان گونه که از معادله مشهود است، $\mathbf{L}$ و ω بردارهایی متوازی هستند، و I یک اسکالر است. امّا، در حالت کلّی، وقتی محور چرخش ثابت نیست، سرعت زاویه‌ای و گشتاور زاویه‌ای با یکدیگر موازی نیستند. اگر قرار است معادلهٔ $\mathbf{L}=I\omega$ برقرار باشد، I نمی‌تواند یک اسکالر باشد، بلکه باید کمیتی باشد که وقتی در ω ضرب می‌شود برداری در یک راستای متفاوت بدهد. خواهیم دید که در واقع I یک تانسور مرتبهٔ دوّم است. ابتدا نگاهی به چند مثال فیزیکی مشابه بیندازیم. در یک محیط همسانگرد، قطبش الکتریکی $\mathbf{P}$ برداری است به موازات میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ ، یعنی ، $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$ که χ مقداری است ثابت. در یک محیط ناهمسانگرد ممکن است چنین رابطه‌ای دیگر درست نباشد، و بار دیگر ما به یک کمیت ریاضی نیاز داریم که وقتی در یک بردار ضرب می‌شود، بردار دیگری در یک جهت متفاوت بدهد. معادلهٔ مشابهی، قطبش مغناطیسی و میدان مغناطیسی را به هم ربط می‌دهد. به عنوان یک مثال دیگر: در فیزیک مقدماتی، می‌گوییم که برای مواد در محدودهٔ کشسانی، تنش = مدول یانگ ×کرنش، که تنش و کرنش با یکدیگر موازی‌اند و Y یک اسکالر است. در حالت کلّی، نه تنها تنش و کرنش با هم موازی نیستند، که حتی بردار هم نیستند، بلکه خود تانسور مرتبهٔ دوّم اند (تانسور تنش در بخش ۱۰ را به خاطر آورید)، و کمیتی که جایگزین Y می‌شود یک تانسور مرتبهٔ چهارم است (نگاه

کنید به مسألهٔ ۱۰)

حال ببینیم با ضرب کردن یک بردار در چه چیزی می‌توانیم آن را به یک بردار دیگر تبدیل کنیم. (شما ممکن است ابتدا به فکر ضرب برداری بیفتید، امّا این فقط بردارهایی را به دست می‌دهد که عمود بر بردار اولیه اند). ابتدا به خاطر آورید (بخش ۱۱)که **UV** یک تانسور مرتبهٔ دوّم است. در آنالیز برداری مقدماتی، ما اکثراً بردارها را برحسب **i** ، **j** و **k** مثلاً **V=i−j** ، و **U=i+۲k** می‌نویسیم. حال تانسورها را نیز می‌توانیم به شکل مشابهی بنویسیم. دقت کنید که **UV** یک ضرب نقطه‌ای یا برداری نیست؛ معنای آن این است [مقایسه کنید با (۱۱-۱۴)]:

$$\mathbf{UV}=(\mathbf{i}+۲\mathbf{k})(\mathbf{i}-\mathbf{j})=\mathbf{ii}-\mathbf{ij}+۲\mathbf{ki}-۲\mathbf{kj} \qquad (۱\text{-}۱۲)$$

چنین عبارتی **دیادیک** نامیده می‌شود. این صرفاً یک راه نوشتن یا مشخص کردن مؤلفه‌های تانسورهای مرتبهٔ دوّم است. راه مناسب دیگر نمایش مؤلفه‌های یک تانسور مرتبهٔ دوّم استفاده از ماتریس است. از آنجاکه یک تانسور مرتبهٔ دوّم تعداد مؤلفه‌هایش چنان است که درست یک ماتریس ۳×۳ را پر می‌کند، همخوانی نزدیکی بین ریاضی ماتریسها و تانسورهای مرتبهٔ دوّم وجود دارد. دیادیک (۱۲-۱) را می‌توانیم به صورت ماتریس

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳ & -۳ & ۰ \end{pmatrix} \qquad (۲\text{-}۱۲)$$

بنویسیم.

حال فرض کنید که حاصل‌ضرب تانسور (دیادیک) (۱۲-۱) را در یک بردار، مثلاً **i** ، به دست آوریم. فرق می‌کند که ما عمل ضرب در **i** را از راست انجام بدهیم یا از چپ ـ صحبت از " پیش ـ ضرب " یا " پس ـ ضرب " می‌کنیم. نتیجه عبارت است از

$$\begin{aligned}(\mathbf{UV})\cdot\mathbf{i} &= (\mathbf{ii}-\mathbf{ij}+۲\mathbf{ki}-۲\mathbf{kj})\cdot\mathbf{i}\\ &= \mathbf{i}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})-\mathbf{i}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})+۲\mathbf{k}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})-۲\mathbf{k}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})\\ &= \mathbf{i}+۲\mathbf{k}\\ \mathbf{i}\cdot(\mathbf{UV}) &= \mathbf{i}\cdot(\mathbf{ii}-\mathbf{ij}+۲\mathbf{ki}-۲\mathbf{kj})\\ &= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}-(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\mathbf{j}+۲(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\mathbf{i}-۲(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\mathbf{j}\\ &= \mathbf{i}-\mathbf{j}\end{aligned} \qquad (۳\text{-}۱۲)$$

[همچنین می‌توانیم (۱۲-۳) را به شکل ماتریسی بنویسیم؛ رک مسألهٔ ۲.] به این ترتیب یک کمیت ریاضی یافته‌ایم که می‌تواند یک بردار را به بردار دیگری تبدیل کند، و ملاحظه می‌کنیم که این کمیت یک تانسور مرتبهٔ دوّم یا دیادیک است.

از آنجا که تانسورهای مرتبهٔ دوّم (پس از بردارها) از نظر کاربرد دارای اهمیت ویژه‌ای هستند، خوب است بتوانیم به همان سهولت که در شکل مؤلفه‌ای با آنها کار می‌کنیم در شکل دیادیک یا ماتریسی نیز کار کنیم (رک مسائل ۱ تا ۵). به یاد دارید که در بخش ۱۱، با برداری شروع کردیم که با استفاده از نمادگذاری بردارهای پایهٔ یکّه نوشته شده بود (۱۱-۲)، و معادله‌های تبدیل را ابتدا در شکل ماتریسی (۱۱-۹) و سپس در شکل مؤلفه‌ای (۱۱-۱۲) نوشتیم. برای تانسورهای مرتبهٔ دوّم نیز می‌توانیم به محاسبهٔ مشابهی دست بزنیم. اگر دیادیک $\mathbf{T}$ را در دو دستگاه مختصات برحسب مؤلفه‌های آن و بردارهای پایهٔ یکّه بنویسیم [با معادلهٔ (۱۱-۲) که مربوط به بردارهاست مقایسه کنید]،

$$\mathbf{T}=\mathbf{ii}T_{11}+\mathbf{ij}T_{12}+\mathbf{ik}T_{13}+\mathbf{ji}T_{21}+\mathbf{jj}T_{22}+\cdots \qquad (۱۲-۴)$$
$$=\mathbf{i}'\mathbf{i}'T'_{11}+\mathbf{i}'\mathbf{j}'T'_{12}+\mathbf{i}'\mathbf{k}'T'_{13}+\mathbf{j}'\mathbf{i}'T'_{21}+\mathbf{j}'\mathbf{j}'T'_{22}+\cdots,$$

می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۶) که مؤلفه‌ها در (۱۱-۱۳) صدق می‌کنند؛ یعنی، $\mathbf{T}$ یک تانسور مرتبهٔ دوّم است. همچنین پی می‌بریم (مسألهٔ ۷) که شکل ماتریسی معادله‌های تبدیل (۱۱-۱۳) برای یک تانسور مرتبهٔ دوّم [مقایسه کنید با (۱۱-۹) برای بردارها] عبارت است از

$$T'=ATA^{-1} \qquad (۱۲-۵)$$

که T و T' ماتریسهایی هستند که عناصر آنها مؤلفه‌های $\mathbf{T}$ در دو دستگاه مختصات‌اند، و A ماتریس چرخش مندرج در (۱۱-۱۰) است. توجه کنید که (۱۲-۵) همان شکل (۱۱-۴) را دارد (با $M=T$ و $C=A^{-1}$). اگر ماتریس T متقارن باشد، $\mathbf{T}$ را تانسور مرتبهٔ دوّم متقارن می‌نامند. در آن صورت می‌توانیم محورهای چرخشی را پیدا کنیم که $\mathbf{T}$ در آن قطری است؛ این محورهای جدید، محورهای اصلی $\mathbf{T}$ خوانده می‌شوند.

مسائل، بخش ۱۲

۱- فرض کنید آرایهٔ (۱۱-۱۴) یک ماتریس ۳×۳ باشد؛ نشان دهید این ماتریس مساوی با UV^T است، که U و V مانند (۱۱-۹) ماتریسهای ستونی اند (بنابراین V^T یک ماتریس

سطری است). معادله‌های تبدیل بردارهای $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ را در شکل ماتریسی (۱۱-۹) بنویسید و (۱۱-۱۵) را در شکل ماتریسی به دست آورید. نتایج شما باید با (۱۲-۵) بخوانند. ***راهنمایی:*** نگاه کنید به معادلهٔ (۱-۲).

۲- در (۱۲-۳) مقادیر $\mathbf{UV}\cdot\mathbf{i}$ و $\mathbf{i}\cdot\mathbf{UV}$ را پیدا کردیم. این دو مسأله را در نمادگذاری ماتریسی بنویسید. (رک مسألهٔ ۱)

۳- عبارت $\mathbf{1}=\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk}$ دیادیک یکّه نامیده می‌شود. نشان دهید که به ازای هر بردار دلبخواه $\mathbf{V}$ داریم $\mathbf{1}\cdot\mathbf{V}=\mathbf{V}\cdot\mathit{1}=\mathbf{V}$.این را در نمادگذاری ماتریسی بنویسید.

۴- فرض کنید $\mathbf{\Phi}$ دیادیک $\mathbf{ii}a^{2}+\mathbf{jj}b^{2}+\mathbf{kk}c^{2}$ باشد. $\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{r}$ را پیدا کنید. از نظر هندسی $\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{r}$ چه چیزی را بیان می‌کند؟ معادلهٔ $\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{r}=1$ را در نمادگذاری ماتریسی بنویسید.

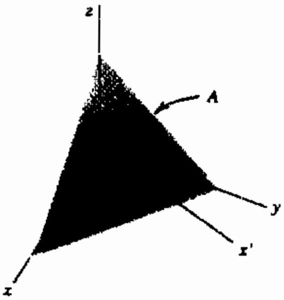
۵- فرض کنید $\mathbf{T}$ یک تانسور مرتبهٔ دوّم (دیادیک) و $\mathbf{V}$ یک بردار باشد. در این صورت دیده‌ایم که $\mathbf{T}\cdot\mathbf{V}$ بردار دیگری، مانند $\mathbf{U}$ است. معادله‌هایی را بنویسید که هر یک از سه مؤلفهٔ $\mathbf{U}$ را به صورت ترکیباتی خطی از سه مؤلفهٔ $\mathbf{V}$ به دست می‌دهند؛ این معادله‌ها را در شکل ماتریسی، شکل دیادیک، و شکل جمعی بنویسید. توجه کنید که ۹ ضریب موجود در این ترکیبات خطی، همان ۹ مؤلفهٔ $\mathbf{T}$ هستند.

۶- نشان دهید که هر دیادیک، یک بردار مرتبهٔ دوّم است؛ یعنی نشان دهید اگر $\mathbf{T}$ در دو دستگاه مختصات با (۱۲-۴) داده شود، در آن صورت مؤلفه‌های $\mathbf{T}$ در دو دستگاه مختصات مطابق (۱۱-۱۳) با یکدیگر مرتبط اند. ***راهنمایی:*** به عنوان مثال $\mathbf{i}'\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{j}'$ را با استفاده از هر دو عبارت مربوط به $\mathbf{T}$ در (۱۲-۴) حساب کنید؛ شما باید T'_{12} را از دوّمین خط (۱۲-۴) و حاصل جمع ۹ جمله را از خط اوّل به دست آورید [مقایسه کنید با (۱۱-۳) برای بردارها]. حاصل‌ضربهای نقطه‌ای $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}'$ ، و غیره، را همان گونه که در پیدا کردن (۱۱-۴) و (۱۱-۵) دیدیم [امّا با استفاده از نمادگذاری (۱۱-۱۰)]، حساب کنید. همچنین تمام حاصل‌ضربهای نقطه‌ای دوگانهٔ $\mathbf{i}'\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{i}'$، و غیره را حساب کنید.

۷- نشان دهید که (۱۱-۱۳) را می‌توان به صورت $T'=ATA^{T}$ نوشت که A^{T} ترانهادهٔ A است، یا، چون A متعامد است، مانند آنچه در (۱۲-۵) دیدیم $T'=ATA^{-1}$ است. ***راهنمایی:*** بحث پس از معادلهٔ (۱-۱) را ملاحظه کنید.

۸- عناصر ماتریسهای مسائل ۴-۱۸ تا ۴-۲۰ را به صورت مؤلفه‌های تانسورهای تنش تعبیر کنید. در هر مورد، ماتریس را قطری کنید و به این ترتیب محورهای اصلی تنش (که در امتداد آنها تنش، کشش یا تراکم خالص است) را پیدا نمایید. تنش را نسبت به این محورها توصیف کنید.

۹- نشان دهید تانسور تنش $\mathbf{P}$ که در (۱۰-۱) تعریف شده است یک تانسور مرتبهٔ دوّم است، یعنی، از قانون تبدیل (۱۱-۱۳) پیروی می‌کند. راه حل پیشنهادی: مسأله، پیدا کردن مؤلفه‌های $\mathbf{P}$ نسبت به محورهای چرخش یافتهٔ (x', y', z')، برحسب مؤلفه‌های $\mathbf{P}$ نسبت به (x,y,z)، و ملاحظهٔ این است که نتیجه‌ها با (۱۱-۱۳) توافق دارند.



یک صفحهٔ مورّب به مساحت A ، مطابق شکل، عمود بر محور x' (یعنی، عمود بر بردار یکهٔ $\mathbf{i}'$) رسم کنید و نیروهای وارد بر حجم کوچک محدود به صفحات مختصات و صفحهٔ مورب را در نظر بگیرید. مثلاً، نیروی *وارد* بر عنصر حجم از طریق رویهٔ (x,y) عبارت است از [به تعریف $\mathbf{P}$ در (۱۰-۱) توجه کنید]

$$(\text{نیروی بر واحد سطح})\,(\text{مساحت رویه}) = (\mathbf{i}P_{zx}+\mathbf{j}P_{zy}+\mathbf{k}P_{zz})(A\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}')$$

به طور مشابه، نیروهای وارد بر رویه‌های (x,z) و (y,z) را بنویسید. برای تعادل حجم مورد نظر، نیروی برداری کل وارد بر این سه رویه باید مساوی با نیروی برداری وارد بر مادهٔ اطراف، از طریق رویهٔ مورب باشد. نیروی اخیر را به صورت حاصل‌ضرب فشار در مساحت رویهٔ مورب بنویسید. اکنون [با استفاده از کسینوسهای زوایای بین محورهای قدیم و جدید، یعنی، a_{ij} ها در (۱۱-۱۰)] مؤلفه‌های این نیرو از طریق A را در راستاهای x' ، y' ، z' برای پیداکردن $P_{x'x'}$ ، $P_{x'y'}$ ، $P_{x'z'}$ به دست آورید.

۱۰- فرض کنید $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ تانسورهای مرتبهٔ دوّمی باشند و نشان دهید که به ۸۱ ضریب برای نوشتن هر یک از مؤلفه‌های $\mathbf{P}$ به صورت ترکیبی خطی از مؤلفه‌های $\mathbf{Q}$ نیاز داریم. نشان دهید که ۸۱ مساوی تعداد مؤلفه‌های یک تانسور مرتبهٔ چهارم (در فضای سه بعدی) است.

اگر مؤلفه‌های تانسور مرتبهٔ چهارم به صورت A_{ijkl} باشند، در آن صورت معادله‌های

$$P_{ij}=\sum_{k,l}A_{ijkl}Q_{kl}$$

مؤلفه‌های تانسور مرتبهٔ دوّم $\mathbf{P}$ را برحسب مؤلفه‌های مرتبهٔ دوّم $\mathbf{Q}$ می‌دهند. نشان دهید که اگر $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ هر دو متقارن باشند، فقط ۳۶ مؤلفهٔ مستقل غیر صفر A_{ijkl}، به جای ۸۱ مؤلفه، وجود خواهد داشت. ***راهنمایی***: تعداد مؤلفه‌های مستقل $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ را وقتی این تانسورها متقارن‌اند در نظر بگیرید. **نکته**: اگر $\mathbf{P}$ تانسور تنش (۱۰-۱) و $\mathbf{Q}$ یک تانسور مرتبهٔ دوم موسوم به تانسور کرنش باشد که تغییر شکل یک جسم تحت تنش را توصیف می‌کند، معادلهٔ بالا که $\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}$ را به هم مربوط می‌سازد شکل تعمیم یافتهٔ قانون هوک است. مؤلفه‌های تانسور مرتبهٔ چهارم A_{ijkl} به نوع مادهٔ تحت تنش بستگی دارند و ضرایب کشسان مادهٔ مورد نظر نامیده می‌شوند. تانسورهای تنش و کرنش، هر دو، متقارن‌اند.

۱۱- (الف) اگر جسمی حول یک محور ثابت بچرخد، گشتاور زاویه‌ای $\mathbf{L}$ و سرعت زاویه‌ای ω ی آن بردارهایی متوازی‌اند و $\mathbf{L}=I\omega$، که I گشتاور لختی (اسکالر) جسم حول محور یاد شده است. با این همه، در حالت کلّی، $\mathbf{L}$ و ω متوازی نیستند و I در معادلهٔ پیش‌گفته باید یک تانسور مرتبهٔ دوّم باشد؛ آن را $\mathbf{I}$ می‌نامیم. به روش زیر شکل دیادیک $\mathbf{I}$ را پیدا کنید: برای سهولت، ابتدا جرم نقطه‌ای m را در نقطهٔ $\mathbf{r}$ در نظر بگیرید. طبق تعریف، گشتاور زاویه‌ای m حول مبدأ $m\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ است، که $\mathbf{v}$ سرعت خطی است. از فصل ۶، $\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}$. حاصلضرب برداری سه‌گانهٔ $\mathbf{L}$ را نوشته و با استفاده از آن هر یک از مؤلفه‌های $\mathbf{L}$ را برحسب سه مؤلفهٔ ω بنویسید. نتایج خود را به شکل ماتریسی

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

و به شکل دیادیک

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\cdot\omega = (\mathbf{ii}I_{xx} + \mathbf{ij}I_{xy} + \cdots)\cdot\omega.$$

بیان کنید. باید داشته باشید

$$I_{xx} = m(y^2 + z^2), \quad I_{xy} = -mxy, \quad \text{و غیره}$$

برای یک مجموعه نقطهٔ m_i یا یک جسم گسترده، عبارتهای مربوط به I_{xx} و غیره را

با حاصل‌جمعها یا انتگرالهای همخوان جایگزین کنید:

$$I_{xx} = \sum m_i(y_i^{۲} + z_i^{۲}) \qquad \text{یا} \qquad \int (y^{۲}+z^{۲})\, dm,$$

$$I_{xy} = -\sum m_i x_i y_i \qquad \text{یا} \qquad -\int xy\, dm,$$ ، و غیره

(ب) با استفاده از (۱۱-۷) یا (۱۱-۱۱) و با بیان مؤلفه‌های $\mathbf{I}$ نسبت به یک دستگاه مختصات چرخیده [$I_{x'x'} = m(y'^{۲}+z'^{۲})$ و غیره] بر حسب x ، y و z لذا برحسب I_{xx} ، و غیره، نشان دهید $\mathbf{I}$ یک تانسور (دکارتی) مرتبهٔ دوّم است و از معادله‌های تبدیل (۱۱-۱۳) پیروی می‌کند.

(ج) نشان دهید اگر $\mathbf{n}$ یک بردار یکّه باشد، عبارت $\mathbf{n}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{n}$ معرف گشتاور لختی حول محوری موازی با $\mathbf{n}$ و مارّ بر مبدأ است. ***راهنمایی:*** $\mathbf{I}$ را نسبت به دستگاهی در نظر بگیرید که یکی از محورهای آن در امتداد $\mathbf{n}$ است.

(د) توجه کنید که ماتریس $\mathbf{I}$ متقارن است و به یاد آورید که یک ماتریس متقارن را می‌توان با چرخش محورها قطری کرد. ویژه مقدارهای ماتریس $\mathbf{I}$، گشتاورهای لختی اصلی نامیده می‌شوند. با استفاده از قسمت (ج) نشان دهید که این ویژه مقدارها گشتاورهای لختی حول محورهای جدید (x',y',z') اند که $\mathbf{I}$ نسبت به آن قطری است. این محورهای جدید را محورهای اصلی لختی می‌نامند. برای توزیع جرم مشتمل بر جرمهای نقطه‌ای m واقع بر (۱، ۱، ۱) و (۱-، ۱، ۱)، ۹ مؤلفهٔ $\mathbf{I}$ ، گشتاورهای لختی اصلی، و محورهای اصلی را پیدا کنید.

۱۲- (الف) در مختصات سه بعدی دکارتی

$$ds^{۲} = dx^{۲} + dy^{۲} + dz^{۲}$$

نشان دهید که $ds^{۲}$ تحت چرخش محورها ناورداست، یعنی، نشان دهید که با تغییر متغیر $r'=Ar$، که A ماتریس چرخش است، داریم

$$ds^{۲} = dx'^{۲} + dy'^{۲} + dz'^{۲}$$

راهنمایی: از (۱۱-۶) دیفرانسیل بگیرید و $ds^{۲}$ را پیدا کنید.

(ب) قسمت (الف) را با نمادگذاری (۱۱-۱۰) برای نشان دادن این که

$ds^2 = \sum dx_i^2 = \sum dx'^2_i$. تکرار کنید. از نمادگذاری ماتریسی استفاده کنید؛ اگر

$$dr = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad dr' = Adr \text{،} \quad dr = A^T dr' \text{، و غیره}$$

در آن صورت $ds^2 = dr^T\, dr$.

۱۳- مسألهٔ ۱۲ با گنجاندن متغیر چهارم x_4 به آسانی به چهار بعد تعمیم می‌یابد. جزئیات را به تفصیل بنویسید. A یک ماتریس متعامد ۴×۴ است؛ در تشابه با سه بعد، می‌توانیم تبدیل $r' = Ar$ را به عنوان چرخش محورها در فضای چهاربعدی تلقی کنیم.

۱۴- (الف) در نسبیت خاص، کمیت

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2$$

(x، y، z = مختصات فضایی، t = زمان، c = سرعت نور) تحت تغییر متغیرهای مجاز در نسبیت خاصّ ناوردا است. (تغییر متغیرهای مجاز، تبدیلهای لورنتس خوانده می‌شوند، و $d\sigma$ فاصلهٔ فضا- زمانی نامیده می‌شود.) در نسبیت خاص مرسوم است که متغیرها را به صورت $x_1 = x$، $x_2 = y$ ، $x_3 = z$ ، $x_4 = ict$ ($i = \sqrt{-1}$) می‌نویسند. نشان دهید که برحسب متغیرهای x_i؛ $d\sigma$ همسان با ds چهاربعدی مسألهٔ ۱۳ می‌شود. به این ترتیب می‌توانیم بگوییم که تبدیلهای لورنتس همخوان با چرخشهایی در فضای چهاربعدی اند (این فضا را در با توجّه این واقعیت که $x_4 = ict$ است، فضا- زمان چهاربعدی نیز می‌خوانند).

(ب) مورد خاصّی از یک چرخش چهاربعدی $r' = Ar$ را که در آن $x_2 = x'_2$ و $x_3 = x'_3$ است، و محورهای (x'_1, x'_4) به اندازهٔ زاویهٔ θ نسبت به محورهای (x_1, x_4) چرخیده‌اند در نظر بگیرید. ماتریس A را برحسب θ بنویسید. نشان دهید که اگر وقتی $x_1 = -i\left(\frac{v}{c}\right)x_4$ است، $x' = 0$ باشد، خواهیم داشت

$$\cos\theta = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \sin\theta = \frac{iv}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

(البته θ موهومی است، امّا این نکته نباید ما را نگران کند؛ جبر، بار اثبات را به دوش

می‌کشد، و زبان هندسی کاملاً در تشابه با سه بعد به‌کار می‌رود). ماتریس A ، و چهار معادلهٔ تبدیل را برای x'_i برحسب x_i بنویسید. x_iو x'_iرا با مقادیرشان برحسب x ، y ، z ، t جایگزین کنید و روابط زیر را به دست آورید

$$x'=(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2}\ (x-vt), \qquad t'=(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2}\ (t-\frac{vx}{c^2}),$$

$$y'=y, \qquad z'=z$$

(اینها معادله‌های تبدیل لورنتس اند.)

۱۵- یک تانسور مرتبهٔ دوّم در صورتی که $T_{ij}=T_{ji}$ باشد، ***متقارن***، و در صورتی که $T_{ij}=-T_{ji}$ باشد، ***پاد متقارن*** است. توجه کنید که این تعاریف، همان تعاریف مربوط به ماتریسهای با عناصر T_{ij} اند. نشان دهید که یک تانسور پاد متقارن در دو بعد دارای یک مؤلفهٔ غیر صفر مستقل، و در سه بعد دارای سه مؤلفهٔ غیر صفر مستقل است. توجه کنید که این درست همان تعداد مؤلفهٔ لازم برای تشکیل یک بردار در سه بعد است. فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار داده شده در سه بعد باشند. ۹ مؤلفهٔ T_{ij} را با معادله‌های $T_{ij}=A_iB_j-A_jB_i$ تعریف کنید. نشان دهید که T_{ij} یک تانسور پاد متقارن است و سه مؤلفهٔ غیر صفر آن همان مؤلفه‌های $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ اند. بنابراین حاصل‌ضرب برداری دو بردار در واقع یک تانسور مرتبهٔ دوّم پاد متقارن است؛ اکثراً این بردار را ***شبه بردار*** یا ***بردار محوری*** می‌نامند. این بردار مانند یک ***بردار واقعی*** رفتار می‌کند (بردار ***قطبی*** نیز نامیده می‌شود) مگر اینکه از یک دستگاه راستگرد به یک دستگاه چپگرد برویم، که در نتیجهٔ آن یک اختلاف علامت بین بردار واقعی و شبه بردار وجود خواهد داشت. به عنوان مثال، اگر محور zرا معکوس کنیم (بدون اینکه به x و y دست بزنیم)، بردار واقعی $\mathbf{k}$ معکوس می‌شود، امّا شبه بردار $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ تغییری نمی‌کند و دیگر $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$ نیست. نشان دهید اگر محور xرا معکوس کنیم بر سر بردارهای$\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ (بردارهای واقعی) چه می‌آید؛ اگر همهٔ محورها را معکوس کنیم چه اتفاقی می‌افتد؟

۱۳ دستگاههای مختصات عام

تاکنون ما فقط تبدیل مختصات خیلی خاصی، یعنی چرخش محورهای دکارتی، را در نظر گرفته‌ایم؛ در اینجا می‌خواهیم مطلب را تعمیم بدهیم تا هر نوع تغییر متغیری، مثلاً مختصات

کروی r، θ، ϕ را که به صورت

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \qquad (۱-۱۳)$$
$$z = r\cos\theta$$

است، در بر بگیرد. این یک تبدیل خطی نیست، و ما نمی‌توانیم معادله‌هایی شبیه (۱۱-۴) تا (۱۱-۹) برای روابط بین **متغیرها** بنویسیم. با این همه، می‌توانیم این گونه معادله‌ها را برای روابط بین ***دیفرانسیلهای*** متغیرها بنویسیم. از (۱۳-۱)، dx، dy و dz را برحسب dr، $d\theta$، $d\phi$ پیدا می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\theta & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \qquad (۲-۱۳)$$

برای مختصات عام x_1، x_2، x_3 و x'_1، x'_2، x'_3، اگر روابط [شبیه (۱۳-۱)] بین دو مجموعه متغیر را داشته باشیم، می‌توانیم روابط بین دو مجموعه دیفرانسیل را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{pmatrix} dx'_1 \\ dx'_2 \\ dx'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \qquad (۳-۱۳)$$

در نمادگذاری ساده‌تر، (۱۳-۳) تبدیل می‌شود به

$$dr' = J\,dr \qquad (۴-۱۳)$$

که dr'، J و dr معرف ماتریسهای مندرج در (۱۳-۳)اند. دترمینان J را ژاکوبی تبدیل می‌نامند (رک فصل ۵،بخش ۴) و اغلب به صورت زیر می‌نویسند[۱]

۱ـ در فصل ۵، J را برای نشان دادن ژاکوبی به کار بردیم؛ در اینجا J ماتریسی است که دترمینان

$$\det J = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$$

معادله‌های (۱۳-۳) و (۱۳-۴) را می‌توانیم به صورت زیر نیز بنویسیم

$$dx'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j \qquad (۱۳-۵)$$

از معادله‌های (۱۱-۴) تا (۱۱-۱۲)،ملاحظه می‌کنیم که برای تبدیلهای بین محورهای دکارتی (یعنی، چرخش)

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = a_{ij}$$

است، زیرا هر دو مشتق جزئی مساوی با کسینوس زاویهٔ بین محور x'_i و محور x_jاند. بنابراین، برای دستگاههای دکارتی، با استفاده از $a_{ij} = \partial x'_i/\partial x_j$ یا $a_{ij} = \partial x_j/\partial x'_i$ می‌توانیم (۱۱-۱۲) را به دو شکل جدید بنویسیم. این دو شکل برای مختصات دکارتی یکسان‌اند، امّا برای مختصات عمومی‌تر متفاوت اند. مثلاً، از (۱۳-۱) می‌توانید نشان دهید که $\partial x/\partial\theta \neq \partial\theta/\partial x$ است (مسألهٔ ۲). بنابراین به طور کلّی دو تعریف ممکن برای یک بردار وجود دارد، که فقط وقتی تبدیلهای بین دستگاههای مختصات دکارتی را در نظر بگیریم، مانند بخش ۱۱، این تعاریف یکسان می‌شوند.

بردارهای هموردا و پادوردا بنا به تعریف، $\mathbf{V}$ یک ***بردار هموردا*** است در صورتی که مؤلفه‌های آن به شکل زیر تبدیل بشوند:

$$V'_i = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} V_j \qquad (۱۳-۶)$$

و $\mathbf{V}$ یک ***بردار پادورداست*** در صورتی که مؤلفه‌های آن به شکل زیر تبدیل بشوند:

$$V'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V_j \qquad (۱۳-۷)$$

از مقایسهٔ (۱۳-۵) و (۱۳-۷)، ملاحظه می‌کنید که دیفرانسیلهای مختصات، مؤلفه‌های یک بردار پادوردایند. نمونه‌ای از یک بردار هموردا، شیب ∇u است (مسألهٔ ۷).

← آن ژاکوبی است.

جالب است ببینیم معنای فیزیکی یا هندسی بردارهای پادوردا و هموردا چیست. به سخن دقیق، ما باید به جای بردارها از ***مؤلفه‌های*** پادوردا و هموردا صحبت کنیم، امّا اصطلاحات قبلی متداول است. در دستگاههای مختصات منحنی‌الخط متعامد، تمام بردارها دارای سه نوع مؤلفه اند: پادوردا، هموردا، و آنچه که می‌توانیم مؤلفه‌های معمولی بنامیم. بحث این مطلب در دو بعد خیلی آسان‌تر است. یک تبدیل از مختصات دکارتی x ، yبه مختصات قطبی r ، θ در نظر می‌گیریم. می‌توانیم بنویسیم

$$d\mathbf{s} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy = \mathbf{e}_r\,dr + \mathbf{e}_\theta\,r d\theta = \mathbf{a}_r\,dr + \mathbf{a}_\theta\,d\theta \quad (\text{۸-۱۳})$$

از (۱۳-۵) و (۱۳-۷) می‌دانیم که dr و $d\theta$ (نه $rd\theta$)یک بردار پادوردا تشکیل می‌دهند، یا به عبارت دیگر مؤلفه‌های پادوردای $d\mathbf{s}$ اند؛ با به کار بردن بردارهای $\mathbf{a}$ به عنوان بردارهای پایه، بردار $d\mathbf{s}$را برحسب مؤلفه‌های پادوردای آن نوشته‌ایم. بنابراین به روش مشابهی می‌توانیم بردار دیگری مثل $\mathbf{V}$ را برحسب مؤلفه‌های معمولی آن و بردارهای یکهٔ $\mathbf{e}$ ، یا برحسب مؤلفه‌های پادوردای آن و بردارهای $\mathbf{a}$ بنویسیم:

$$\mathbf{V} = V_r\,\mathbf{e}_r + V_\theta\,\mathbf{e}_\theta = V_r\,\mathbf{a}_r + \frac{V_\theta}{r}\,\mathbf{a}_\theta$$

(که V_r و V_θ مؤلفه‌های معمولی اند). بنابراین مؤلفه‌های پادوردا عبارت اند از مؤلفه‌های معمولی تقسیم بر ضرایب مقیاس. با در نظر گرفتن شیب u، می‌توانیم نشان بدهیم که مؤلفه‌های هموردا عبارت اند از مؤلفه‌های معمولی ضربدر ضرایب مقیاس؛ بنابراین می‌توانیم یک بردار را برحسب مؤلفه‌های هموردای آن و بردارهای پایهٔ $\mathbf{e}_r$ و $(1/r)\mathbf{e}_\theta$ بنویسیم (مسألهٔ ۸). توجه کنید که بردارهای $\mathbf{a}$ عبارت اند از بردارهای یکّه ضربدر ضرایب مقیاس، و مؤلفه‌های هموردای یک بردار عبارت اند از مؤلفه‌های معمولی ضربدر ضرایب مقیاس. بردارهای $\mathbf{a}$ به عنوان پایه تلقی می‌شوند و اصطلاح هموردا (تغییر *با*) برای تفهیم " تغییر هم جهت با بردارهای $\mathbf{a}$ " به کار می‌رود. بنابراین پادوردا به معنای تغییر کردن در خلاف جهت است؛ مؤلفه‌های پادوردا عبارت اند از مؤلفه‌های معمولی تقسیم بر ضرایب مقیاس. مؤلفه‌های بردار و بردارهای پایه‌ای که با آنها به کار برده می‌شوند همواره در خلاف جهت هم تغییر می‌کنند به طوری که ضرایب مقیاس حذف می‌شوند.

تعریف تانسور اکنون تعریف انواع تانسورها خیلی سر راست است. تانسورها می‌توانند هموردا و با هر مرتبه، پادوردا و با هر مرتبه، یا مخلوطی از این دو باشند. ذکر یک نکتهٔ دیگر در مورد نمادگذاری در اینجا الزامی است. رسم بر این است که شاخصهای مربوط به بردارها و تانسورهای پادوردا را به جای اینکه در پایین بنویسند به صورت شاخص بالا می‌نویسند؛ آنها را نباید با "نما" اشتباه کرد. ما تاکنون به چنین کاری دست نزده‌ایم و در واقع برای بردارها چندان ضرورتی ندارد؛ با این همه در این نمادگذاری، شرط (۱۳-۷) برای بردار پادوردا تبدیل می‌شود به

$$V'^{i} = \sum_{j} \frac{\partial x'_{i}}{\partial x_{j}} V^{j} \qquad (۱۳-۹)$$

(در واقع، برای حفظ سازگاری، از آنجا که دیفرانسیلهای dx_i پادوردا هستند، باید بنویسیم dx^i و $\partial x^i/\partial x'^j$ ؛ برای مقاصد ما این لازم به نظر نمی‌رسد، بنابراین نمادگذاری را به همین صورت باقی می‌گذاریم.) در اینجا چند نمونه از تعاریف تانسورها را ذکر می‌کنیم؛ شما باید بتوانید به روشی مشابه تعاریف همخوان را برای تانسورهای از هر مرتبه یا از هر نوع بنویسید.

$$T'_{ij} = \sum_{k,l} T_{kl} \frac{\partial x_{k}}{\partial x'_{i}} \frac{\partial x_{l}}{\partial x'_{j}}$$ (تانسور هموردای مرتبهٔ دوّم)

$$T'^{ijk} = \sum_{l,m,n} T^{lmn} \frac{\partial x'_{i}}{\partial x_{l}} \frac{\partial x'_{j}}{\partial x_{m}} \frac{\partial x'_{k}}{\partial x_{n}}$$ (تانسور پادوردای مرتبهٔ سوّم)

(تانسور مخلوط مرتبهٔ سوّم با یک شاخص هموردا و دو شاخص پادوردا)

$$T'^{\,ij}_{\ \ k} = \sum_{l,m,n} T^{lm}_{\ \ n} \frac{\partial x'_{i}}{\partial x_{l}} \frac{\partial x'_{j}}{\partial x_{m}} \frac{\partial x_{n}}{\partial x'_{k}}$$

مؤلفه‌های پادوردا و هموردای یک بردار (یا تانسور) ممکن است دارای یکاهای خیلی ویژه‌ای باشند. به عنوان مثال، در مختصات قطبی، مؤلفهٔ پادوردای θ مربوط به جابه‌جایی ds، یعنی $d\theta$ ، بدون یکاست، و مؤلفهٔ هموردای ds، یعنی $r^2 d\theta$، دارای یکای ^{2}(طول) است. ممکن است تعجب کنید چرا به این مؤلفه‌های خاص علاقه نشان می‌دهیم و چرا نباید همیشه مؤلفه‌های معمولی را به کار ببریم. دلیل آن در سادگی معادله‌های تبدیل (۱۳-۶) و (۱۳-۹) نهفته است؛ یک بردار معمولاً برحسب مؤلفه‌های پادوردا یا هموردایش دارای شکل ساده‌تر و

معادله‌های تبدیل ساده‌تری است. وقتی می‌گوییم یک بردار هموردا (یا پادوردا) است، مقصود ما در واقع این است که مؤلفه‌های هموردا (یا مؤلفه‌های پادوردا) ساده‌ترین اند. برای مثال، در مختصات قطبی مؤلفه‌های پادوردای ds عبارت اند از؛ dr و $d\theta$؛ مؤلفه‌های معمولی عبارت اند از dr و $rd\theta$؛ مؤلفه‌های هموردا عبارت اند از dr و $rd\theta$. بنابراین ds را پادوردا می‌نامیم، و مؤلفه‌های (پادوردای) آن از معادله‌های سادهٔ تبدیل (۱۳-۹) پیروی می‌کنند. پس از انجام عملیات ریاضی لازم در شکل سادهٔ آن، کافی است معادله‌های تانسوری را به معادله‌های شامل مؤلفه‌های معمولی برگردانیم تا تعبیر فیزیکی لازم را از نتایج به دست آوریم.

در این بخش ما به گسترهٔ جمعها اشاره‌ای نکرده‌ایم. معادله‌های (۱۳-۶)، (۱۳-۷)، (۱۳-۹)، و (۱۳-۱۰) در صورتی که از ۱ تا ۳ جمع کنیم مربوط به مسائل سه بعدی، و در صورتی که از ۱ تا n جمع کنیم مربوط به مسائل n- بعدی اند. در بخش ۱۱ بردارها و تانسورهای دکارتی را در سه بعد یا بیشتر تعریف کردیم. معادله‌های این بخش (۱۳) اکنون تعاریف کلی‌تری از بردارها و تانسورها به دست می‌دهند زیرا دیگر محدودیت به تبدیلهای خطی وجود ندارد. بنابراین تعاریف این بخش، تعاریف بخش ۱۱ را به عنوان موردی خاص در بر دارند.

مسائل ، بخش ۱۳

۱- نشان دهید که برای یک تبدیل خطی، معادله‌ای شبیه (۱۱-۷)، تلویحاً معادله‌ای شبیه (۱۳-۳) را برای روابط بین دیفرانسیلها نیز در بر دارد. بنابراین (۱۳-۳)، معادله‌ای است کلی برای هر نوع تبدیلی، خواه خطی و خواه غیر خطی. نشان دهید که برای تبدیل خطی داده شده با (۱۱-۱۱)، هر دو معادلهٔ (۱۳-۶) و (۱۳-۷) تبدیل به (۱۱-۱۲) می‌شوند، و نخستین معادله از معادله‌های (۱۳-۱۰) تبدیل به (۱۱-۱۳) می‌گردد. چند معادلهٔ کلی برای تعریف یک تانسور مرتبهٔ چهارم (با ترکیبات گوناگون شاخصهای پادوردا و هموردا) بنویسید و نشان دهید که همهٔ آنها برای مورد خاص تبدیل خطی (۱۱-۱۱)، به (۱۱-۶) تقلیل می‌یابند.

۲- از (۱۳-۱)، $\partial\theta/\partial x = (۱/r)\ \cos\theta\ \cos\phi$ را پیدا کنید و نشان دهید $\partial x/\partial\theta \neq \partial\theta/\partial x$ است. با دقت توجه کنید که $\partial x/\partial\theta$ به معنای این است که r و ϕ ثابت‌اند، امّا $\partial\theta/\partial x$ به معنای این است که y و z ثابت می‌باشند (برای بحث بیشتر رک فصل ۴).

۳- اگر J معرف ماتریس ۳×۳ موجود در (۱۳-۲) باشد، نشان دهید $det\ J = r^2 \sin\theta$.
دترمینان J را ژاکوبی تبدیل (۱۳-۱) می‌نامیم. ملاحظه کنید که عنصر حجم در مختصات کروی $(det\ J)\ dr\ d\theta\ d\phi$ است (فصل ۵، بخش ۴). **راهنمایی:** نشان دهید که

$$J^T J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

است، که در آن J^T ترانهادهٔ J است.

۴- در معادلهٔ (۱۳-۳)، اگر x'_1، x'_2، x'_3 مختصات دکارتی معمولی، و x_1 ، x_2 ، x_3 مختصات متعامدی باشند، به گونه‌ای که

$$ds^2 = dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2$$

نشان دهید که $det\ J$ مساوی $h_1 h_2 h_3$ است. **راهنمایی:** $J^T J$ را مانند مسألهٔ ۳ پیدا کنید. برای محاسبهٔ عبارتهای مشتقات جزئی به دست آمده، ملاحظه کنید که همان عبارتها در ds^2 ظاهر می‌شوند. بنابراین نشان دهید

$$J^T J = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}$$

۵- به طور کلّی وقتی شما در یک انتگرال چندگانه دست به تغییر متغیرها می‌زنید، حاصل‌ضرب دیفرانسیلهای متغیرهای قدیم تبدیل می‌شود به حاصل‌ضرب دیفرانسیلهای جدید ضربدر ژاکوبی تبدیل. شما این نکته را برای یک مورد خاص در مسألهٔ ۳ ثابت کرده‌اید. اکنون با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۴، این نکته را برای یک تغییر متغیر از مختصات دکارتی به هر دستگاه متعامد دلبخواه ثابت کنید. **راهنمایی:** به یاد آورید که عنصر حجم در یک دستگاه متعامد عبارت است از $h_1 h_2 h_3 dx_1\ dx_2 dx_3$.

۶- نشان دهید که مؤلفه‌های سرعت dx_i/dt، یک بردار پادوردا تشکیل می‌دهند. **راهنمایی:** نگاه کنید به (۱۳-۵) و (۱۳-۷).

۷- نشان دهید که مؤلفه‌های $\partial u/\partial x_j$ ی ∇u، یک بردار هموردا تشکیل می‌دهند. **راهنمایی:** با

مشتق‌گیری جزئی، $\partial u/\partial x'_i$ را برحسب مشتقات جزئی u نسبت به x_jها پیدا کنید و نتایج خود را با (۱۳-۶) مقایسه نمایید.

۸- ∇u را در یک دستگاه مختصات متداول (مثلاً مختصات قطبی) برحسب مؤلفه‌های معمولی آن و برحسب مؤلفه‌های هموردای آن بنویسید (نگاه کنید به مسألهٔ ۷). رابطهٔ بین مؤلفه‌های معمولی و هموردای یک بردار را (در دستگاههای متعامد) به دست آورید؛ این کار را برای مؤلفه‌های معمولی و پادوردا، با استفاده از (۱۳-۸)، انجام دادیم.

۹- اگر U_i مؤلفه‌های یک بردار هموردا و V^j مؤلفه‌های یک بردار پادوردا باشند، ثابت کنید U_iV^j مؤلفه‌های یک تانسور مرتبهٔ دوّم مخلوط ، با یک شاخص هموردا و یک شاخص پادوردا، می‌باشند. ***راهنمایی***: معادله‌های تبدیل مناسب را برای U_i و V^j بنویسید؛ سپس به اثبات (۱۱-۱۵) نگاه کنید.

۱۰- دلتای کرونکر عبارت است از

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j \end{cases}$$

ثابت کنید که این یک تانسور مرتبهٔ دوّم مخلوط با یک شاخص پادوردا و یک شاخص هموردااست.

۱۱- با استفاده از این واقعیت که ds^2 ناورداست، ثابت کنید که g_{ij} یک تانسور مرتبهٔ دوّم هموردااست.

۱۲- نشان دهید که ۹ کمیّت $T_{ij} = \partial V_i/\partial x_j$ (که مؤلفه‌های دکارتی $\nabla\mathbf{V}$ هستند و $\mathbf{V}$ یک بردار است) در معادله‌های تبدیل (۱۱-۱۲) برای یک تانسور مرتبهٔ دوّم دکارتی صدق می‌کنند. نشان دهید که این کمیتها در معادله‌های تبدیل تانسور عام صدق **نمی‌کنند** (بخش ۱۳). ***راهنمایی***: از معادله‌های (۱۳-۶) یا (۱۳-۷) نسبت به، مثلاً، x'_k مشتق جزئی بگیرید و $\partial V'_i/\partial x'_k$ را برحسب $\partial V_i/\partial x_l$ پیدا کنید. شما باید علاوه بر جملاتی که انتظار دارید[مانند جملات (۱۳-۱۰)] چند جملهٔ اضافی به دست آورید؛ این جملات اضافی نشان می‌دهند که $\partial V_i/\partial x_j$ تحت تبدیلهای عام، یک تانسور نیست. **نکته**: می‌توان، مانند بخش ۹ ؛ مؤلفه‌های $\nabla\mathbf{V}$ را در مختصات منحنی‌الخط با احتساب تغییرات بردارهای یکّه و ضرایب مقیاس به درستی بیان کرد. (به عنوان مثال رک کتاب مورس و فشباخ، صفحهٔ ۴۸).

۱۳- اگر $\mathbf{u}$ برداری باشد که جا به جایی تحت تنش هر نقطه از یک محیط تغییر شکل پذیر را مشخص می‌کند، $\nabla\mathbf{u}$ تانسور مرتبهٔ دوّم (دکارتی)ای است که کرنش را در هر نقطه توصیف می‌نماید. مؤلفه‌های $\nabla\mathbf{u}$ را در شکل دیادیک بنویسید. نشان دهید که هر دیادیک را می‌توان به صورت حاصل جمع یک دیادیک متقارن و یک دیادیک پاد متقارن نوشت و $\nabla\mathbf{u}$ را به صورت چنین جمعی بنویسید. بخش متقارن $\nabla\mathbf{u}$ ***تانسور کرنش***، و بخش پاد متقارن آن ***تانسور چرخش*** نامیده می‌شود. **نکته:** اینها تانسورهای دکارتی هستند، یعنی، از معادلات تبدیل تانسوری بر اثر چرخش محورهای قائم پیروی می‌کنند؛ این تانسورها (در این شکل ساده) از معادلات تبدیل عام بخش ۱۳ پیروی نمی‌کنند ـ رک مسألهٔ ۱۲.

۱۴- نشان دهید که اگر برای هر بردار V_j، کمیتهای $U_i = \sum_j T_{ij}V_j$ مؤلفه‌های یک بردار باشند، در آن صورت کمیتهای T_{ij} مؤلفه‌های یک تانسور مرتبهٔ دوّم اند. (این واقعیت، مثالی است از ***قاعدهٔ خارج قسمت***). ***راهنمایی:*** تبدیل (۱۱-۱۲) را برای یک بردار به کار ببرید و نشان بدهید که T_{ij} از تبدیل (۱۱-۱۳) پیروی می‌کند. همچنین نشان دهید که A_{ijkl} در معادلهٔ مسأله ۱۲-۱۰ در صورتی یک تانسور (دکارتی) مرتبهٔ چهارم است که به ازای هر تانسور (دکارتی) مرتبهٔ دوّم Q_{kl}، P_{ij} یک تانسور (دکارتی) مرتبهٔ دوّم باشد. این اثبات را تعمیم بدهید و نشان دهید که اگر $U_i = \sum_j T_{ij}V^j$ باشد، U_i بردار هموردایی است که از (۱۳-۶) پیروی می‌کند و V^j بردار پادوردای دلبخواهی است که از (۱۳-۷) پیروی می‌نماید، در آن صورت T_{ij} یک تانسور مرتبهٔ دوّم همورداست. مسأله را به تانسورهایی از هر مرتبه و از هر نوع تعمیم بدهید.

۱۵- S_0 یک دستگاه مختصات دکارتی مفروض است. در هر دستگاه چرخش یافتهٔ S، فرض کنید a_{ij} عناصر ماتریس چرخش (۱۱-۱۰) باشند که S و S_0 را به یکدیگر ربط می‌دهند. با استفاده از نتایج مسألهٔ ۱۴ نشان دهید a_{ij} یک تانسور (دکارتی) مرتبهٔ دوّم است.

۱۴- عملیات برداری در نمادگذاری تانسوری

در (۸-۳) و (۸-۴)، g_{ij} را برای نشان دادن ضرایب موجود در ds^2 برای یک دستگاه مختصات عام معرفی کردیم. همچنین [در (۸-۴)] ماتریسی را به کار بردیم که عناصر آن g_{ij} بودند. اگر ماتریس g_{ij} داده شده باشد، می‌توانیم ماتریسی پیدا کنیم که وارون آن باشد؛ فرض کنید g^{ij}

معرف عناصر این ماتریس وارون باشند. همچنین فرض کنید g معرف دترمینان ماتریس g_{ij} باشد. به آسانی می‌توان ثابت کرد که برای دستگاههای متعامد با ضرایب مقیاس h_1، h_2، h_3، روابط زیر برقرار اند:

$$g_{ij} = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ h_i^2, & i=j \end{cases} \qquad g^{ij} = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ \dfrac{1}{h_i^2}, & i=j \end{cases}$$
$$g = h_1^2 h_2^2 h_3^2, \qquad \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \tag{۱-۱۴}$$

[رک (۸-۶) و مسألهٔ ۱]. از تعاریف کلی تانسورها[(۱۳-۱۰) و فرمولهای مشابه آن]، می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۱۳-۱۱) که کمیتهای g_{ij} مؤلفه‌های یک تانسور هموردای مرتبهٔ دوم (به نام تانسور متریک)، و کمیتهای g^{ij} مؤلفه‌های یک تانسور پادوردای مرتبهٔ دوم اند.

بدون اثبات، عبارتهای تانسوری زیر را که جمع و جورند و به خاطر سپردن آنها آسان است برای ∇u ، $\nabla.\mathbf{V}$ ، و $\nabla^2 u$ می‌نویسیم. این عبارتها برای هر دستگاه مختصاتی، چه متعامد باشد و چه نباشد، برقرار اند. شما می‌توانید به سادگی آنها را به دستگاههای مختصات متعامد تخصیص دهید و عبارتهای داده شده در بخش ۹ را به دست آورید. برای این منظور از (۱۴-۱) و روابط (برحسب ضرایب مقیاس) بین مؤلفه‌های پادوردا، هموردا، و معمولی یک بردار در دستگاههای متعامد استفاده کنید. (رک بخش ۱۳)

(۱۴-۲) مؤلفه‌های هموردای ∇u عبارت اند از $\partial u/\partial x_i$ ،

(۱۴-۳) $\nabla.\mathbf{V} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{g}\,V^i)$ ، که V^i مؤلفه‌های پادوردای $\mathbf{V}$ اند؛

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right). \tag{۱۴-۴}$$

مسائل، بخش ۱۴

۱- کمیتهای g^{ij} به عنوان عناصر ماتریسی تعریف می‌شوند که وارون ماتریس g_{ij} است. نشان دهید که برای دستگاههای مختصات متعامد با ضرایب مقیاس h_1، h_2، h_3 ، g_{ij} قطری است و در آن $g_{ij}=h_i^2$ ، و g^{ij} نیز قطری است و در آن $g^{ij}=1/h_i^2$. همچنین نشان دهید $g = \det g_{ij} = h_1^2 h_2^2 h_3^2$ به طوری که $\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3$.

۲- V_i و V^j ، که مؤلفه‌های هموردا و پادوردای یک بردار اند، ***بردارها (یا تانسورها)ی وابسته***

نامیده می‌شوند و فرایند به دست آوردن یکی از دیگری، **بالا بردن** یا **پایین آوردن شاخصها** نامیده می‌شود. در حالت کلّی $V^i = \sum_j g^{ij} V_j$ و $V_i = \sum_j g_{ij} V^j$. نشان دهید که، برای مورد مختصات منحنی‌الخط متعامد، این معادله‌ها همان رابطه‌ای را می‌دهند که ما در بخش ۱۳ بین مؤلفه‌های پادوردا و هموردای یک بردار داشتیم. ***راهنمایی:*** g_{ij} و g^{ij} را برحسب ضرایب مقیاس بنویسید.

۳- ثابت کنید که عبارتهای تانسوری مربوط به شیب u، واگرایی $\mathbf{V}$ و $\nabla^2 u$ در (۱۴-۲) تا (۱۴-۴)، برای دستگاههای متعامد، مثل همان عبارتهایی است که در بخش ۹ داده شده‌اند.

۱۵- مسائل متفرّقه

ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریسهای مسائل ۱ تا ۷ را پیدا کنید:

۱- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ۲- $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ۳- $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ ۴- $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

۵- $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ۶- $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ۷- $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

۸- ماتریس C که ماتریس M مسألهٔ ۱ را قطری می‌کند پیدا کنید. ملاحظه کنید که M متقارن نیست، و C متعامد نیست (پایان بخش ۴ را ملاحظه کنید). با این همه، C دارای وارون است؛ C^{-1} را پیدا کنید و نشان دهید $C^{-1}MC = D$

۹- مسألهٔ ۸ را برای مسألهٔ ۲ تکرار کنید.

در مسائل ۱۰ تا ۱۳، سطح درجهٔ دوّم داده شده را به محورهای اصلی آن چرخش دهید. نام سطح چیست؟ کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین مبدأ تا سطح چقدر است؟

۱۰- $x^2+y^2-5z^2+4xy = 15$

۱۱- $7x^2+4y^2+z^2-8xz = 36$

۱۲- $3x^2+5y^2-3z^2+6yz = 54$

۱۳- $7x^2+7y^2+7z^2+10xz-24yz=20$

۱۴- بسامدهای ارتعاشی مشخصهٔ سیستم جرمها و فنرهای شکل ۵-۱ را در صورتی که ثابتهای فنر k، $3k$، و k باشند، پیدا کنید.

۱۵- مسألهٔ ۱۴ را در صورتی که ثابتهای فنر $6k$، $2k$، و $3k$ باشند حل کنید.

۱۶- برای دستگاه مختصات $x = u(1-v)$، $y = u\sqrt{2v-v^2}$، مطلوب است محاسبهٔ ds^2، ضرایب مقیاس، عنصر مساحت، بردارهای $d\mathbf{s}$، و بردارهای $\mathbf{e}$.

۱۷- مسألهٔ ۱۶ را برای دستگاه مختصات $x = u\sqrt{1-v^2}$، $y = v\sqrt{u^2-1}$ تکرار کنید.

۱۸- برای دستگاه مختصات مسألهٔ ۱۶، معادلات لاگرانژ را بنویسید و آنها را برای پیدا کردن مؤلفه‌های u و vی شتاب به کار ببرید.

۱۹- مسألهٔ ۱۸ را برای دستگاه مختصات مسألهٔ ۱۷ تکرار کنید.

۲۰- برای دستگاه مختصات مسألهٔ ۱۶، ∇u، $\nabla . \mathbf{V}$، و $\nabla^2 u$ را بنویسید.

۲۱- مسألهٔ ۲۰ را برای دستگاه مختصات مسألهٔ ۱۷ تکرار کنید.

۲۲- در دستگاه مختصات مسألهٔ ۱۶، $\nabla . \mathbf{e}_u$، $\nabla \times \mathbf{e}_v$، و $\nabla^2 \ln u$ را حساب کنید.

۲۳- با فرض $\mathbf{T} = 2\mathbf{ii}-3\mathbf{ij}+5\mathbf{jk}$ و $\mathbf{V} = \mathbf{i}-\mathbf{k}$، عبارتهای $\mathbf{T.V}$ و $\mathbf{V.T}$ را در شکل دیادیک و در شکل ماتریسی پیدا کنید.

۲۴- با فرض $\mathbf{V} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ و $\mathbf{U} = \mathbf{i}+2\mathbf{k}$، دیادیکهای $\mathbf{UV}$ و $\mathbf{VU}$ را در شکل دیادیک و در شکل ماتریسی بنویسید. $\mathbf{W} = (\mathbf{UV}).\mathbf{U}$ را پیدا کنید و این معادله را در شکل ماتریسی بنویسید.

۲۵- برای دو ماتریس A و B که لزوماً جا به جا نمی‌شوند، نشان دهید $T_r(AB)=T_r(BA)$. (مسألهٔ ۱-۴ را ببینید.)

۲۶- اگر A و B در مسألهٔ ۲۵ ماتریسهای ۲×۲ باشند، نشان دهید که AB و BA دارای ویژه مقدارهای مشابهی هستند. ***راهنمایی:*** معادلهٔ مشخصهٔ یک ماتریس ۲×۲ را برحسب ردّ و دترمینان آن بنویسید. نشان دهید $\det AB = \det BA$ و مسألهٔ ۲۵ را به کار ببرید.

۲۷- فرض کنید M متقارن، C متعامد، و $D=C^{-1}MC$ قطری است. نشان دهید که حاصل‌جمع مربعات عناصر M مساوی با حاصل‌جمع مربعات ویژه مقدارهای آن است. ***راهنمایی:*** $T_r(D^2)$ را در نظر بگیرید.

۲۸- نشان دهید $C(C^{-1}MC)^n C^{-1} = M^n$

۲۹- فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A^2، A^3 و A^4 را پیدا کنید. به تشابه با توانهای $i = \sqrt{-1} = e^{i\pi/2}$ دقت کنید. این تصادفی نیست؛ اگر A ماتریس چرخش (۳-۱) باشد، زاویهٔ چرخش چیست؟ A^{25} و A^{102} چه هستند؟

۳۰- معمولاً پیدا کردن توان بالایی از یک ماتریس به آسانی آنچه که در مسألهٔ ۲۹ دیدیم نیست. آنرا با

$$M = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

تجربه کنید. مسألهٔ ۲۸ روش کارساز پیدا کردن M^n را بیان می‌کند. ابتدا M را قطری کنید تا $D = C^{-1}MC$ به دست آید. ثابت کنید که اگر

$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$ باشد، در آن صورت $D^n = \begin{pmatrix} \mu_1^n & 0 \\ 0 & \mu_2^n \end{pmatrix}$ است.

آنگاه طبق مسألهٔ ۲۸، $M^n = CD^nC^{-1}$. با استفاده از این روش M^{10} را برای M بالا پیدا کنید.

۳۱- مسألهٔ ۳۰ را برای $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ تکرار کنید.

یک ماتریس چرخش در فضای سه بعدی همیشه حداقل دارای یک ویژه مقدار مساوی ۱ است (دو ویژه مقدار دیگر معمولاً مختلط اند). ویژه بردار همخوان با $\mu = 1$، محور چرخش است. زاویهٔ چرخش θ است که $2\cos\theta + 1 = Tr\ C$. در مسائل ۳۲ و ۳۳، نشان دهید که ماتریس داده شده متعامد است و محور و زاویهٔ چرخش را پیدا کنید.

-۳۲ $\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & -\sqrt{\frac{۱}{۲}} \\ -\sqrt{\frac{۱}{۲}} & \sqrt{\frac{۱}{۲}} & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \sqrt{\frac{۱}{۲}} \end{pmatrix}$

-۳۳ $\begin{pmatrix} ۰ & -\sqrt{\frac{۱}{۲}} & \sqrt{\frac{۱}{۲}} \\ \frac{۴}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۲}} & -\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۲}} & -\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۲}} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{pmatrix}$

۳۴- ثابت کنید که $\mathbf{v} = \omega\times\mathbf{r}$ (فصل ۶،بخش ۲) را می‌توان در شکل تانسوری به صورت $v = \Omega.\mathbf{r}$ نوشت که در آن $\Omega = \omega_x(\mathbf{kj}-\mathbf{jk}) + \omega_y(\mathbf{ik}-\mathbf{ki}) + \omega_z(\mathbf{ji}-\mathbf{ij})$. در شکل ماتریسی، Ω و $\mathbf{v} = \omega\times\mathbf{r}$ به چه صورتی در می‌آیند؟ با مسألهٔ ۱۲-۱۵ مقایسه کنید، و ثابت کنید ω یک شبه بردار است، یعنی، Ω پاد متقارن است.

ثابت می‌شود که یک ماتریس هرمیتی (رک فصل ۳، بخش ۹) را می‌توان با یک تبدیل مشابهتی یکانی (رک کتابهای مکانیک کوانتومی یا جبر خطی) قطری کرد. این مانستهٔ مختلط قطری کردن یک ماتریس متقارن با یک تبدیل متعامد است. ثابت کنید که ماتریسهای مسائل ۳۵ و ۳۶ هرمیتی اند. ویژه مقدارها (حقیقی) و ویژه بردارها (مختلط) را پیدا کنید. مربع طول (یا نُرم) یک بردار با مؤلفه‌های مختلط، به صورت ضرب نقطه‌ای بردار و همیوغ مختلط آن تعریف می‌شود. بنابراین، ویژه بردارهای یکّه را پیدا کنید و ماتریس قطری کننده را بسازید (شبیه C در بخش ۴). ثابت کنید که این ماتریس یکانی است.

-۳۵ $\begin{pmatrix} ۲ & i \\ -i & ۲ \end{pmatrix}$ -۳۶ $\begin{pmatrix} ۳ & ۱-i \\ ۱+i & ۲ \end{pmatrix}$

۳۷- ثابت کنید حاصلضرب دو ماتریس یکانی، خود یکانی است. (با مسألهٔ ۴-۱۰ مقایسه کنید)

۳۸- (الف) ثابت کنید حاصلضرب دو ماتریس متقارن فقط در صورتی متقارن است که آن دو ماتریس جابجا شوند.

(ب) چه وقت حاصلضرب دو ماتریس هرمیتی، خود هرمیتی است؟

۱۱

توابع گاما، بتا، و خطا؛ رشته‌های مجانبی؛ فرمول استرلینگ؛ انتگرالها و توابع بیضوی

۱- مقدمه

انتگرالها و رشته‌ها و توابع این فصل در مسائل فیزیکی گوناگونی ظاهر می‌شوند. درست همان گونه که راجع به توابع مثلثاتی و لگاریتمها، و غیره، مطالبی می‌آموزید، و آنها را در مسائل کاربردی به‌کار می‌برید، دربارهٔ این توابع خاص نیز باید مطالبی را فرا بگیرید تا بتوانید آنها را به کار ببرید و موارد استفادهٔ آنها را وقتی در کارهای پیشرفته‌ترتان ظاهر می‌شوند، درک کنید. جزئیات مفصّلی دربارهٔ این توابع شناخته شده است، و فرمولهای زیادی شامل آنها وجود دارد که می‌توان آنها را در جدولهای ریاضی پیدا کرد. هدف ما، مطالعهٔ دقیق آنها نیست، بلکه می‌خواهیم تعاریف و برخی روابط ساده‌تر را ارائه دهیم تا چنانچه احتیاج داشتید بتوانید فرمولهای پیچیده‌تر را پیدا کنید و به کار ببرید.

۲- تابع فاکتوریل

بیایید مقادیر بعضی از انتگرالها را حساب کنیم. به ازای $\alpha > ۰$،

$$\int_۰^\infty e^{-\alpha x}\,dx = -\frac{۱}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_۰^\infty = \frac{۱}{\alpha} \qquad (۱-۲)$$

از طرفین این معادله متوالیاً نسبت به α مشتق می‌گیریم (بخش ۱۲ از فصل ۴ را ملاحظه کنید):

$$\int_۰^\infty -x\,e^{-\alpha x}\,dx = -\frac{۱}{\alpha^۲} \quad \text{یا} \quad \int_۰^\infty x\,e^{-\alpha x}\,dx = \frac{۱}{\alpha^۲}$$

$$\int_۰^\infty x^۲\,e^{-\alpha x}\,dx = \frac{۲}{\alpha^۳}$$

$$\int_{\circ}^{\infty} x^{۳} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{۳!}{\alpha^{۴}} \;.$$

یا به طور کلّی

$$\int_{\circ}^{\infty} x^{n} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{n!}{\alpha^{n+۱}} \qquad (۲-۲)$$

با قرار دادن $\alpha = ۱$، داریم

$$\int_{\circ}^{\infty} x^{n} e^{-x}\, dx = n!\,, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots \qquad (۳-۲)$$

بنابراین، انتگرال معینی داریم که مقدار آن به ازای عدد صحیح و مثبت n مساوی $n!$ است. می‌توانیم از (۲-۳) برای تعبیر $\circ!$ استفاده کنیم. با قرار دادن $n = \circ$ در (۲-۳)، داریم

$$\circ! = \int_{\circ}^{\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x} \Big|_{\circ}^{\infty} = ۱ \qquad (۴-۲)$$

(این در توافق با تعریف قبلی ما از $\circ!$ در فصل ۱ است.)

مسائل، بخش ۲

مسائل ۱۴ تا ۱۷ از بخش ۱۲، فصل ۴ را حل کنید.

۳- تعریف تابع گاما؛ رابطهٔ بازگشتی

تاکنون n یک عدد صحیح غیر منفی بوده است؛ طبیعی است که تابع فاکتوریل را برای عدد غیرصحیح n نیز توسط انتگرال معین (۲-۳) **تعریف** کنیم. ایراد واقعی بر نماد $n!$ برای عدد غیرصحیح n وجود ندارد (وگاه و بیگاه از آن استفاده می‌کنیم)، اما معمول چنین است که نماد فاکتوریل را برای عدد صحیح n نگه بداریم و تابع مربوط به عدد غیرصحیح n را تابع گاما (Γ) بنامیم. همچنین وقتی مراد ما لزوماً یک عدد صحیح نیست، معمولاً n را با حرف p جایگزین می‌کنیم. پیرو این قراردادها به ازای هر $p > \circ$ چنین تعریف می‌کنیم.

$$\boxed{\Gamma(p) = \int_{\circ}^{\infty} x^{p-۱} e^{-x}\, dx\,, \qquad p > \circ \qquad (۱-۳)}$$

به ازای $0 < p < 1$، این یک انتگرال نامعین است زیرا x^{p-1} در حد پایین نامتناهی می‌شود. با این همه، این انتگرال به ازای $p > 0$ همگراست (مسألهٔ ۱). به ازای $p \leq 0$، انتگرال واگرا می‌شود و بنابراین نمی‌تواند برای تعریف $\Gamma(p)$ به کار رود؛ بعداً خواهیم دید که چگونه $\Gamma(p)$ را برای $p \leq 0$ تعریف می‌کنیم. به این ترتیب، از (۳-۲) داریم

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx = (n-1)!$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n! \qquad (۳-۲)$$

بنابراین

$$\Gamma(1) = 0! = 1 ،\Gamma(2) = 1! = 1 ،\Gamma(3) = 2! = 2 ،\Gamma(4) = 3! = 6 ، \ldots$$

با همان معنای متعارف فاکتوریل برای عدد صحیح n. این مطلب که $\Gamma(n) = (n-1)!$ است و نه $n!$، چندان مطلوب نیست، اما برای استفاده از کتابها و جداول موجود باید آن را به همین شکل فراگرفت. با قرار دادن $p+1$ به جای p در (۳-۱)، می‌توانیم بنویسیم

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\, dx = p!\,, \quad p > -1 \qquad (۳-۳)$$

بعضی از مؤلفان نماد فاکتوریل $p! = \Gamma(p+1)$ را حتی اگر p عدد صحیح هم نباشد به کار می‌برند؛ در این صورت می‌توان از دردسر $p + 1$ حذر کرد.

بگذارید از (۳-۳) به روش جزء به جزء انتگرال بگیریم، و فرض کنیم $x^p = u$، $e^{-x}\, dx = dv$ ؛ در نتیجه داریم

$$du = px^{p-1}\, dx \quad ، \quad v = -e^{-x}$$

$$\Gamma(p+1) = -x^p e^{-x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x})\, p\, x^{p-1}\, dx$$

$$= p \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx = p\,\Gamma(p)$$

این معادله

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \qquad (۳-۴)}$$

رابطه بازگشتی برای تابع Γ نامیده می‌شود. اگر Γ برای هر عدد $p > ۰$ معلوم باشد، با استفاده از آن می‌توان $\Gamma(p + ۱)$ را یافت. تابع Γ معمولاً برای p بین ۱ و ۲ جدول‌بندی شده است. پس با استفاده از رابطهٔ بازگشتی (۳-۴) می‌توانیم $\Gamma(p)$ را برای p بین ۲ و ۳ پیدا کنیم؛ مثلاً، $\Gamma(۲٫۵) = ۱٫۵\Gamma(۱٫۵)$. به همین ترتیب، داریم $\Gamma(۳٫۵) = ۲٫۵\Gamma(۲٫۵) = (۲٫۵)(۱٫۵)\Gamma(۱٫۵)$، و اِلخ. برای پیدا کردن $\Gamma(p)$ به ازای p بین ۰ و ۱ از مقادیر جدول‌بندی شدهٔ بین ۱ و ۲، معادلهٔ بازگشتی را به صورت $\Gamma(p) = (۱/p)\,\Gamma(p + ۱)$ می‌نویسیم. در نتیجه، مثلاً، $\Gamma(۰٫۵) = (۱/۰٫۵) \times \Gamma(۱٫۵)$

مسائل، بخش ۳

۱- انتگرال رابطهٔ (۳-۱) به علت حد بالای نامتناهی، نامعین است و به ازای $۰ < p < ۱$ نیز نامعین است زیرا $x^{p-۱}$ در حد پایین نامتناهی می‌شود. با این همه، انتگرال مزبور برای هر $p > ۰$ همگراست. این موضوع را ثابت کنید.

با استفاده از جداول و رابطهٔ بازگشتی (۳-۴)، توابع Γ زیر را حساب کنید.

۲- $\Gamma(۱٫۷)$ ۳- $\Gamma(۲٫۷)$ ۴- $\Gamma(۵٫۷)$ ۵- $\Gamma(۰٫۷)$ ۶- $\Gamma(۳٫۳)$ ۷- $\Gamma(۰٫۳)$

انتگرالهای زیر را به صورت توابع Γ بیان، و آنها را با استفاده از جدول توابع Γ، حساب کنید.

۸- $\int_۰^\infty x^{۲/۳} e^{-x}\, dx$ ۹- $\int_۰^\infty \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx$

۱۰- $\int_۰^\infty x^{-۱/۲} e^{-x}\, dx$

۱۱- $\int_۰^\infty x^۲ e^{-x^۲}\, dx$ **راهنمایی:** فرض کنید $x^۲ = u$

۱۲- $\int_۰^\infty x\, e^{-x^۳}\, dx$

۱۳- $\int_۰^۱ x^۲ \left(ln\, \frac{۱}{x}\right)^۳ dx$ **راهنمایی:** فرض کنید $x = e^{-u}$

۱۴- $\int_۰^۱ \sqrt[۳]{ln\, x}\, dx$ ۱۵- $\int_۰^\infty x^{-۱/۳} e^{-۸x}\, dx$

۱۶- ذره‌ای از حال سکون از نقطهٔ $x = ۱$ و در امتداد محور x به طرف مبدأ شروع به حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل آن $V = \frac{۱}{۲} m \ ln \ x$ است. معادلهٔ لاگرانژ را بنویسید و از آن انتگرال بگیرید تا زمان لازم برای رسیدن ذره به مبدأ پیدا شود. **توجه**: $dx/dt < ۰$

جواب: $\Gamma(\frac{۱}{۲})$.

۱۷- انتگرال زیر را به صورت یک تابع Γ بیان کنید:

$$\int_{۰}^{۱} \left[ln \ \left(\frac{۱}{x}\right)\right]^{p-۱} dx$$

مسألهٔ ۱۳ را ملاحظه کنید.

۴- تابع گامای اعداد منفی

تاکنون $\Gamma(p)$ را برای $p \leq ۰$ تعریف نکرده‌ایم. برای این کار، با استفاده از رابطهٔ بازگشتی (۳-۴) $\Gamma(p)$ را پیدا می‌کنیم:

$$\boxed{\Gamma(P) = \frac{۱}{P}\Gamma(P + ۱) \qquad (۴-۱)}$$

این رابطه، $\Gamma(p)$ را برای $p < ۰$ تعریف می‌کند. مثلاً،

$$\Gamma(-۰{,}۵) = \frac{۱}{-۰{,}۵}\Gamma(۰{,}۵) \qquad \Gamma(-۱{,}۵) = \frac{۱}{-۱{,}۵}\frac{۱}{-۰{,}۵}\Gamma(۰{,}۵)$$

و الخ. چون $\Gamma(۱) = ۱$، می‌بینیم که

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p + ۱)}{p} \to \infty \quad \text{وقتی که} \quad p \to ۰$$

با توجه به این رابطه و استفادهٔ پیاپی از (۴-۱)، نتیجه می‌شود که $\Gamma(p)$ نه تنها در صفر، بلکه در تمام اعداد صحیح منفی، نامتناهی می‌شود. بررسی منحنی تابع Γ به بخش مسائل موکول می‌شود. به ازای p مثبت، $\Gamma(p)$ تابع پیوسته‌ای است که از نقاط $p = n$ عبور می‌کند، و $\Gamma(p) = (n - ۱)!$. به ازای p منفی، همانطور که دیده‌ایم، $\Gamma(p)$ در اعداد صحیح منفی ناپیوسته است. بازه‌های بین اعداد صحیح تابع به طور متناوب مثبت و منفی است: از ۰ تا ۱- منفی است، از ۱- تا ۲- مثبت، و الخ ، این از محاسباتی نظیر آنچه در بالا برای $\Gamma(-۰{,}۵)$ و $\Gamma(-۱{,}۵)$ دیدیم نیز مشهود است.

مسائل، بخش ۴

با استفاده از (۴-۱) و جداول ذیربط، توابع Γ زیر را حساب کنید.

۱- $\Gamma(۰٫۶)$ ۲- $\Gamma(-۰٫۴)$ ۳- $\Gamma(-۱٫۴)$

۴- $\Gamma(-۱٫۶)$ ۵- $\Gamma(-۲٫۳)$ ۶- $\Gamma(-۳٫۷)$

۷- با استفاده از جدول توابع Γ، تابع Γ را بین ۱ و ۲ رسم کنید؛ سپس چند نقطه را محاسبه و آنها را از ۴- تا ۴+ رسم کنید.

۵- چند فرمول مهم شامل توابع گاما

ابتدا $\Gamma(\frac{۱}{۲})$ را حساب می‌کنیم. بنا به تعریف

$$\Gamma(\tfrac{۱}{۲}) = \int_۰^\infty \frac{۱}{\sqrt{t}}\, e^{-t}\, dt \qquad (۱-۵)$$

(توجه کنید که اهمیتی ندارد از چه متغیر کمکی در انتگرال گیری یک انتگرال معیّن استفاده شود.) در (۵-۱) قرار دهید $t = y^۲$؛ در آن صورت $dt = ۲y\, dy$، و (۵-۱) تبدیل می‌شود به

$$\Gamma(\tfrac{۱}{۲}) = \int_۰^\infty \frac{۱}{y}\, e^{-y^۲}\, ۲y\, dy = ۲\int_۰^\infty e^{-y^۲}\, dy$$

یا، اگر بخواهیم،

$$\Gamma(\tfrac{۱}{۲}) = ۲\int_۰^\infty e^{-x^۲}\, dx \qquad (۲-۵)$$

حالا این دو انتگرالِ مربوط به $\Gamma(\frac{۱}{۲})$ را در هم ضرب کنیم و نتیجه را به صورت یک انتگرال دوگانه بنویسیم:

$$[\,\Gamma(\tfrac{۱}{۲})\,]^۲ = ۴\int_۰^\infty\int_۰^\infty e^{-(x^۲+y^۲)}\, dx\, dy$$

این یک انتگرال در ربع اول است که در مختصات قطبی ساده‌تر می‌توان آنرا حساب کرد:

$$[\,\Gamma(\tfrac{۱}{۲})\,]^۲ = ۴\int_{\theta=۰}^{\pi/۲}\int_{r=۰}^{\infty} e^{-r^۲}\, r\, dr\, d\theta = ۴\cdot\frac{\pi}{۲}\cdot\frac{e^{-r^۲}}{-۲}\Big|_۰^\infty = \pi$$

بنابراین

$$\boxed{\Gamma(\tfrac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi} \qquad (۳-۵)}$$

بدون اثبات، فرمول مهم دیگری شامل توابع Γ را بیان می‌کنیم (مثال ۵ از بخش ۷، فصل ۱۴ را ملاحظه کنید):

$$\boxed{\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \qquad (۴-۵)}$$

توجه داشته باشید که اگر قرار دهیم $p = \frac{1}{2}$، (۵-۴) نیز نتیجه می‌دهد $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

مسائل، بخش ۵

۱- ثابت کنید، به ازای اعداد مثبت n:

$$\Gamma(n + \tfrac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\sqrt{\pi}$$

۲- با استفاده از (۵-۴) ثابت کنید که

(الف) اگر n= یک عدد صحیح مثبت باشد، $\Gamma(\frac{1}{2} - n)\,\Gamma(\frac{1}{2} + n) = (-1)^n\pi$

(ب) $(z!)(-z)! = \pi z/\sin \pi z$، که z الزاماً یک عدد صحیح نیست؛ توضیح بعد از معادلهٔ (۳-۳) را ملاحظه کنید.

۳- ثابت کنید که

$$\frac{d}{dp} = \Gamma(p)\int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-x} \ln x\, dx\,,$$

$$\frac{d^n}{dp^n} = \Gamma(p)\int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-x} (\ln x)^n\, dx\,.$$

۶- توابع بتا

تابع بتا نیز توسط یک انتگرال معین تعریف می‌شود:

$$\boxed{B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\,, \quad p > 0\,,\; q > 0 \qquad (۱-۶)}$$

تبدیلهای ساده‌ای از (۶-۱) وجود دارند که دانستن آنها مفید است [(۶-۳)، (۶-۴)،(۶-۵) را ملاحظه کنید]. به آسانی می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۱) که

$$B(p,q) = B(q,p) \tag{۶-۲}$$

بازه انتگرال گیری در (۶-۱) را می‌توان با قرار دادن $x = y/a$ تغییر داد؛ در آن صورت $x = ۱$ همخوان است با $y = a$، و (۶-۱) تبدیل می‌شود به

$$\boxed{\begin{aligned} B(p,q) &= \int_{۰}^{a} \left(\frac{y}{a}\right)^{p-۱} \left(۱ - \frac{y}{a}\right)^{q-۱} \frac{dy}{a} \\ &= \frac{۱}{a^{p+q-۱}} \int_{۰}^{a} y^{p-۱} (a-y)^{q-۱}\, dy \end{aligned}} \tag{۶-۳}$$

برای به دست آوردن شکل مثلثاتی تابع بتا، فرض کنید $x = \sin^{۲}\theta$؛ در آن صورت

$$dx = ۲\sin\theta\cos\theta\, d\theta ,\quad (۱-x) = ۱ - \sin^{۲}\theta = \cos^{۲}\theta$$

$x = ۱$ همخوان است با $\theta = \pi/۲$

با این جایگذاری‌ها، (۶-۱) تبدیل می‌شود به

$$B(p,q) = \int_{۰}^{\pi/۲} (\sin^{۲}\theta)^{p-۱}\, (\cos^{۲}\theta)^{q-۱}\, ۲\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

یا

$$\boxed{B(p,q) = ۲\int_{۰}^{\pi/۲} (\sin\theta)^{۲p-۱}\, (\cos\theta)^{۲q-۱}\, d\theta} \tag{۶-۴}$$

سرانجام، اگر قرار دهیم $x = y/(۱+y)$، نتیجه می‌گیریم (مسألهٔ ۲)

$$\boxed{B(p,q) = \int_{۰}^{\infty} \frac{y^{p-۱}\, dy}{(۱+y)^{p+q}}} \tag{۶-۵}$$

مسائل، بخش ۶

۱- ثابت کنید $B(p,q) = B(q,p)$. **راهنمایی:** فرض کنید $x = ۱ - y$.

۲- معادلهٔ (۶-۵) را ثابت کنید.

۳- نشان دهید به ازای اعداد صحیح n و m،

$$B(n,m) = \frac{۱}{mC(n+m-۱,\, n-۱)} = \frac{۱}{nC(n+m-۱,\, m-۱)}$$

که C ها ضرایب دو جمله‌ای می‌باشند [معادلهٔ (۴-۵)، از فصل ۱۶ را ملاحظه کنید].

۷- رابطهٔ بین توابع بتا و گاما

برخلاف توابع Γ، برای توابع B هیچ جدولی پیدا نخواهیم کرد. دلیل آن این است که توابع B را می‌توان به سهولت بر حسب توابع Γ بیان کرد. نشان خواهیم داد که

$$\boxed{B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(P+q)}} \qquad (۱-۷)$$

هر موقع می‌خواهید یک تابع B را حساب کنید، ابتدا (۷-۱) را به کار ببرید و سپس برای توابع Γ به جدولها مراجعه کنید.

برای اثبات (۷-۱)، از

$$\Gamma(p) = \int_۰^\infty t^{p-۱}\, e^{-t}\, dt$$

شروع می‌کنیم و قرار می‌دهیم $t = y^۲$. سپس داریم

$$\Gamma(p) = ۲\int_۰^\infty y^{۲p-۱}\, e^{-y^۲}\, dy \qquad (۲-۷)$$

به همین ترتیب (متغیر کمکی انتگرال گیری می‌تواند هر حرفی باشد)،

$$\Gamma(q) = ۲\int_۰^\infty x^{۲q-۱}\, e^{-x^۲}\, dx$$

سپس این دو معادله را در هم ضرب می‌کنیم و به مختصات قطبی تغییر متغیر می‌دهیم

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\,\Gamma(q) &= ۴\int_۰^\infty\int_۰^\infty x^{۲q-۱}\, y^{۲p-۱}\, e^{-(x^۲+y^۲)}\, dx\, dy\\ &= ۴\int_۰^\infty\int_۰^{\pi/۲}(r\cos\theta)^{۲q-۱}\,(r\sin\theta)^{۲p-۱}\, e^{-r^۲}\, r\, dr\, d\theta \qquad (۳-۷)\\ &= ۴\int_۰^\infty r^{۲p+۲q-۱}\, e^{-r^۲}\, dr\int_۰^{\pi/۲}(\cos\theta)^{۲q-۱}\,(\sin\theta)^{۲p-۱}\, d\theta\end{aligned}$$

با توجه به (۷-۲)، انتگرال r در (۷-۳) برابر است با $\frac{۱}{۲}\,\Gamma(p+q)$. و با توجه به (۶-۴)، انتگرال θ در (۷-۳) برابر است با $\frac{۱}{۲}B(p,q)$. پس $\Gamma(p)\,\Gamma(q) = ۴\times\frac{۱}{۲}\,\Gamma(p+q)\,.\,\frac{۱}{۲}B(p,q)$، و (۷-۱) نتیجه می‌شود.

مثال - انتگرال زیر را پیدا کنید:

$$I = \int_{۰}^{\infty} \frac{x^{۳}\, dx}{(۱ + x)^{۵}}$$

این همان (۶-۵) است به ازای $(p + q) = ۵$ ، $p - ۱ = ۳$ یا $p = ۴$ ، $q = ۱$. پس $I = B(۴, ۱)$ که با توجه به (۷-۱) خواهیم داشت:

$$\frac{\Gamma(۴)\Gamma(۱)}{\Gamma(۵)} = \frac{۳!}{۴!} = \frac{۱}{۴}$$

مسائل، بخش ۷

انتگرالهای زیر را به صورت توابع B و بنابراین برحسب توابع Γ بیان، و آنها را با استفاده از جدول توابع Γ حساب کنید.

۱- $\displaystyle\int_{۰}^{۱} \frac{x^{۴}\, dx}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$

۲- $\displaystyle\int_{۰}^{\pi/۲} \sqrt{\sin^{۳} x \cos x}\, dx$

۳- $\displaystyle\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^{۳}}}$

۴- $\displaystyle\int_{۰}^{۱} x^{۲}(۱ - x^{۲})^{۳/۲}\, dx$

۵- $\displaystyle\int_{۰}^{\infty} \frac{y^{۲}\, dy}{(۱ + y)^{۶}}$

۶- $\displaystyle\int_{۰}^{\infty} \frac{y\, dy}{(۱ + y^{۳})^{۲}}$

۷- $\displaystyle\int_{۰}^{\pi/۲} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}}$

۸- $\displaystyle\int_{۰}^{۲} \frac{x^{۲}\, dx}{\sqrt{۲ - x}}$

۹- ثابت کنید $B(n ، n) = B(n ، \frac{۱}{۲})/۲^{۲n-۱}$. ***راهنمایی:*** در (۶-۴) از اتحاد $۲ \sin \theta \cos \theta = \sin ۲\theta$ استفاده کنید و قرار دهید $۲\theta = \phi$. با استفاده از این نتیجه و رابطهٔ (۵-۳)، فرمول **شناسهٔ مضاعف** را برای توابع Γ به دست آورید:

$$\Gamma(۲n) = \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\, ۲^{۲n-۱}\, \Gamma(n)\, \Gamma(n + \frac{۱}{۲})$$

این فرمول را با استفاده از (۵-۴)، برای مورد $n = \frac{۱}{۴}$ امتحان کنید.

منحنی $x^۳ + y^۳ = ۸$ را رسم کنید. انتگرالها را برای کمیتهای زیر بنویسید و آنها را به صورت توابع B حساب کنید:

۱۰- سطح ربع اول که توسط منحنی محدود شده است.

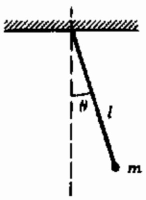
۱۱- مرکز جرم این سطح.

۱۲- حجم حاصل از دوران سطح حول محور y.

۱۳- گشتاور لختی این حجم حول محورش.

۸- آونگ ساده

آونگ ساده به معنای یک جرم m است که توسط یک نخ (یا میلهٔ بدون وزن) به طول l آویزان شده است به طوری که می‌تواند در یک صفحه، همانگونه که در شکل ۸-۱ نشان داده شده است، نوسان کند. به این ترتیب، انرژی جنبشی m عبارت است از



شکل ۸-۱

$$T = \frac{۱}{۲} mv^۲ = \frac{۱}{۲} m\ (l\theta)^۲ \qquad (۸-۱)$$

اگر انرژی پتانسیل وقتی نخ افقی است برابر صفر باشد، در آن صورت در زاویهٔ θ داریم:

$$V = -mgl \cos \theta$$

در نتیجه، لاگرانژی (بخش ۵ از فصل ۹ را ملاحظه کنید) برابر است با

$$L = T - V = \frac{۱}{۲} ml^۲\theta^۲ + mgl \cos \theta$$

و معادلهٔ لاگرانژ حرکت عبارت است از

$$\frac{d}{dt}(ml^۲\theta) + mgl \sin \theta = ۰$$

یا

$$\theta = -\frac{g}{l} \sin \theta \qquad (۸-۲)$$

فرض کنید که نوسانهای آونگ چنان کوچک است که می‌توان $\sin \theta$ را به θ تقریب زد. در این

صورت، (۸-۲) تبدیل به معادلهٔ معمول برای حرکت نوسانی سادهٔ یک آونگ با نوسانات کوچک می‌شود، یعنی

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\,\theta \qquad (۸-۳)$$

جوابهای (۸-۳) عبارت‌اند از $sin\ \omega t$ و $cos\ \omega t$ که $\omega = 2\pi\nu = \sqrt{g/l}$؛ پس دورهٔ تناوب حرکت برابر است با

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{l/g} \qquad (۸-۴)$$

اکنون می‌خواهیم این جواب تقریبی را با جوابی که حتی برای θهای بزرگ نیز دقیق و تحقیقی است، جایگزین کنیم. با بازگشت به معادلهٔ دیفرانسیل حرکت (۸-۲)، دو طرف آن را در $\dot{\theta}$ ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم، بنابراین خواهیم داشت

$$\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta\,\dot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta\,d\theta$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^{2} = \frac{g}{l}\cos\theta + const \qquad (۸-۵)$$

جواب عمومی این معادله را در بحث انتگرالهای بیضوی، مطرح خواهیم‌کرد؛ فعلاً دورهٔ تناوب را برای نوسانهای 180° (پس و پیش رفتن از -90° تا $+90^\circ$) پیدا می‌کنیم. برای این مورد، وقتی $\theta = 90^\circ$ است، $\dot{\theta} = 0$، بنابراین مقدار ثابت در (۸-۵) صفر است، و داریم

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^{2} = \frac{g}{l}\cos\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta}$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt$$

از $\theta = 0$ تا $\theta = 90^\circ$، یک چهارم دورهٔ تناوب است؛ بنابراین دورهٔ تناوب برای نوسانهای 180°، توسط T در معادلهٔ زیر داده می‌شود

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\int_0^{T/4}dt = \sqrt{\frac{2g}{l}}\cdot\frac{T}{4}$$

پس دورهٔ تناوب عبارت است از

$$T = ۴\sqrt{\frac{l}{۲g}}\int_{۰}^{\pi/۲}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

از (۶-۴) ملاحظه می‌کنیم که این یک تابع B است؛ محاسبهٔ عددی آن به بخش مسائل موکول می‌شود. دورهٔ تناوب تنها برای این مورد خاص (نوسانهای ۱۸۰°) توسط توابع B پیدا می‌شود؛ مورد عام، یک انتگرال بیضوی به دست می‌دهد (بخش ۱۲).

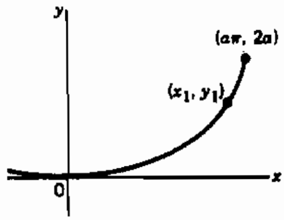
مسائل، بخش ۸

۱- مسألهٔ آونگ را با پیدا کردن دورهٔ تناوب برای نوسانهای ۱۸۰° به صورت مضربی از $\sqrt{l/g}$ کامل کنید [یعنی، انتگرال در (۸-۶) را حساب کنید].

۲- فرض کنید اتومبیلی را که یک در آن باز و عمود ($\theta = ۹۰^{\circ}$) بر بدنه آن است روشن کرده و با شتاب $a = ۱\ mph/sec$ شروع به حرکت کنیم. معادلهٔ دیفرانسیل برای $\theta(t)$ به صورت $\ddot{\theta} = -A\sin\theta$ است که برای یک در یکنواخت به پهنای w، $A = ۳a/۲w$ می‌باشد. اگر $w = ۳٫۵\ ft$ باشد، چه مدت طول می‌کشد تا در بسته شود؟

۳- شکل مقابل قسمتی از یک سیکلوئید با معادلات پارامتری

$$x = a(\theta + \sin\theta) \quad ,y = a(۱ - \cos\theta)$$



است. (منحنی نشان داده شده شبیه شکل ۴-۴ از فصل ۹ است که مبدأ آن به $p_۲$ انتقال یافته است.) نشان دهید که زمانِ سُرخوردن بدون اصطکاک یک ذره در امتداد منحنی از $(x_۱,y_۱)$ تا مبدأ با رابطهٔ

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{۰}^{y_۱}\frac{dy}{\sqrt{y(y_۱ - y)}}$$

داده می‌شود. ***راهنمایی:*** نشان دهید که عنصر طول قوس برابر است با $ds = \sqrt{۲a/y}\,dy$. انتگرال را حساب کنید تا نشان دهید که زمان مستقل از ارتفاع $y_۱$ نقطه شروع است.

۹- تابع خطا

به این تابع در نظریهٔ احتمال (بخش ۸، از فصل ۱۶)، و در نتیجه در مکانیک آماری و دیگر کاربردهای نظریهٔ احتمال برخورد خواهید کرد. شاید اصطلاح "روی منحنی بردن نمرات" را شنیده باشید. مقصود از "منحنی" در اینجا، منحنی زنگی شکل $y = e^{-x^2}$ است (آنرا رسم کنید)؛ تابع خطا، مساحت زیر بخشی از این منحنی است. تابع خطا را به صورت

$$erf\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \tag{۹-۱}$$

تعریف می‌کنیم. اگرچه این تعریف متداول $erf\,(x)$ است، اما انتگرالهای وابستهٔ نزدیک دیگری هم وجود دارند که اغلب به‌کار می‌روند و جدول‌بندی نیز شده‌اند و حتی گاهی اوقات به عنوان تابع خطا معرفی می‌شوند. لذا، شما همواره باید به دقت به شکل انتگرال در کتاب یا مجموعهٔ جداول خاصّی که به‌کار می‌برید، توجه کنید. در اینجا به چند مورد از این انتگرالها و رابطه‌شان با (۹-۱) اشاره می‌کنیم. (مسألهٔ ۲ را ملاحظه کنید).

(۹-۲) الف- تابع توزیع بهنجار یا گاؤسی (بخش ۸ از فصل ۱۶):

$$P(-\infty,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

ب-
$$P(0,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{2}\,erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

(۹-۳) الف- تابع خطای مکمل:

$$erfc\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt = 1 - erf\,(x)$$

ب-
$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2/2}\,dt = erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

چون توزیع بهنجار زیاد جدول‌بندی شده است، خوب است $erf\,(x)$ را با استفاده از (۹-۲) بنویسیم:

$$erf\ (x) = ۲P(۰, x\sqrt{۲}) = ۲P(-\infty, x\sqrt{۲}) - ۱ \qquad (۴-۹)$$

اکنون چند نکتهٔ مفید راجع به تابع خطا را بررسی می‌کنیم. به سهولت می‌توانید ثابت کنید که تابع خطا فرد است؛ یعنی، $erf\ (-x) = -erf\ (x)$ (مسألهٔ ۳). همچنین به آسانی می‌توانیم $erf\ (\infty)$ را با استفاده از (۵-۲) و (۵-۳) حساب کنیم:

$$erf\ (\infty) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_۰^{\infty} e^{-t^۲}dt = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi} = ۱ \qquad (۵-۹)$$

برای مقادیر بسیار کوچک x (زیر گسترهٔ جداولی که دارید)، $erf\ (x)$ را می‌توان با بسط $e^{-t^۲}$ به صورت یک رشتهٔ نمایی و انتگرال‌گیری جمله به جملهٔ آن حساب کرد. نتیجه عبارت است از

$$erf\ (x) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_۰^{x} e^{-t^۲}dt = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_۰^{x}\left(۱ - t^۲ + \frac{t^۴}{۲!} - \cdots\right)dt$$
$$= \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵\cdot ۲!} - \cdots\right) \qquad (۶-۹)$$

[این را موقعی به‌کار ببرید که $|x| << ۱$. با (۱۰-۴) مقایسه کنید.]

برای مقادیر بزرگ x، مثلاً حدود $x > ۳$، $erf\ (x)$ (تا چهار رقم یا بیشتر) دارای همان مقدار $erf\ (\infty) = ۱$ است که از (۹-۵) به دست می‌آید. به همین دلیل است که ما معمولاً علاقه‌مند به محاسبهٔ $erfc\ (x) = ۱ - erf\ (x)$ هستیم. بهترین راه به دست آوردن این مقدار، استفاده از رشته‌های مجانبی است؛ این بسطها را در بخش ۱۰ بررسی خواهیم کرد.

مسائل، بخش ۹

۱- منحنی تابع $y = e^{-x^۲}$ را رسم کنید.

۲- درستی معادلات (۹-۲)، (۹-۳)، و (۹-۴) را تحقیق کنید. ***راهنمایی:*** در (۹-۲) الف، $P(-\infty, x)$ را برحسب یک تابع خطا بنویسید. تغییر متغیر $t = u\sqrt{۲}$ را در انتگرال $P(-\infty, x)$ اعمال کنید. ***هشدار:*** تنظیم حدود را فراموش نکنید؛ وقتی $t = x$،

$u = x/\sqrt{۲}$ است.

۳- ثابت کنید که $erf\ (x)$ تابعی فرد از x است. *راهنمایی:* در (۹-۱)، قرار دهید $t = -s$.

۴- با شرایط زیر نشان دهید $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^۲/۲}\,dy = \sqrt{۲\pi}$

(الف) با استفاده از (۹-۵) و (۹-۲ الف).

(ب) با تبدیل آن به یک تابع Γ و استفاده از (۵-۳).

۱۰- رشته‌های مجانبی

چون مدتی را صرف آموختن چگونگی آزمودن همگرایی رشته‌ها کرده‌اید، ممکن است باعث تعجب شما شود که بدانید رشته‌های واگرایی وجود دارند که می‌توانند کاربرد عملی داشته باشند. بهترین راه نشان دادن این موضوع، ذکر یک مثال است. از (۹-۳ الف)

$$erfc\ (x) = ۱ - erf\ (x) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^۲}\,dt \qquad (۱\text{-}۱۰)$$

می‌خواهیم انتگرال (۱۰-۱) را به شکل یک رشتهٔ توانی معکوس از x بسط دهیم. برای انجام این کار می‌نویسیم

$$e^{-t^۲} = \frac{۱}{t}\,te^{-t^۲} = \frac{۱}{t}\,\frac{d}{dt}\left(-\frac{۱}{۲}\,e^{-t^۲}\right) \qquad (۲\text{-}۱۰)$$

و به روش جزء به جزء به صورت زیر انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} e^{-t^۲}\,dt &= \int_x^{\infty} \frac{۱}{t}\,\frac{d}{dt}\left(-\frac{۱}{۲}\,e^{-t^۲}\right) dt \\ &= \frac{۱}{t}\left(-\frac{۱}{۲}\,e^{-t^۲}\right)\Bigg|_x^{\infty} - \int_x^{\infty}\left(-\frac{۱}{۲}\,e^{-t^۲}\right)\left(-\frac{۱}{t^۲}\right) dt \qquad (۳\text{-}۱۰) \\ &= \frac{۱}{۲x}\,e^{-x^۲} - \frac{۱}{۲}\int_x^{\infty} \frac{۱}{t^۲}\,e^{-t^۲}\,dt \end{aligned}$$

اکنون در آخرین انتگرال (۱۰-۳)، می‌نویسیم $(۱/t^۲)\,e^{-t^۲} = (۱/t^۳)(d/dt)(-\frac{۱}{۲}e^{-t^۲})$، و مجدداً به روش جزء به جزء انتگرال می‌گیریم:

$$\int_x^\infty \frac{۱}{t^۲} e^{-t^۲} dt = \int_x^\infty \frac{۱}{t^۳} \frac{d}{dt}\left(-\frac{۱}{۲} e^{-t^۲}\right) dt$$
$$= \frac{۱}{t^۳}\left(-\frac{۱}{۲} e^{-t^۲}\right)\Big|_x^\infty - \int_x^\infty \left(-\frac{۱}{۲} e^{-t^۲}\right)\left(-\frac{۳}{t^۴}\right) dt$$
$$= \frac{۱}{۲x^۳} e^{-x^۲} - \frac{۳}{۲}\int_x^\infty \frac{۱}{t^۴} e^{-t^۲} dt$$

با ادامهٔ این فرایند، و جایگذاری (۱۰-۳) و مراحل بعد از آن در (۱۰-۱) (مسألهٔ ۱)، رشتهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$erfc\,(x) = ۱ - erf\,(x) \sim \frac{e^{-x^۲}}{x\sqrt{\pi}}\left(۱ - \frac{۱}{۲x^۲} + \frac{۱.۳}{(۲x^۲)^۲} - \frac{۱.۳.۵}{(۲x^۲)^۳} + \cdots\right) \quad (۱۰\text{-}۴)$$

[این را هنگامی به‌کار ببرید که ۱ $<<$ $|x|$. با (۹-۶) مقایسه کنید.]

(معنای دقیق علامت $\sim$ را بزودی توضیح خواهیم داد.) به علت جملات صورت، این رشته به ازای تمام مقادیر x واگراست. با این همه، فرض کنید بعد از چند جمله توقف کرده و انتگرال آخر را نگه بداریم تا یک معادلهٔ کامل داشته باشیم. اگر بعد از جمله دوم توقف کنیم، داریم

$$erfc\ (x) = \frac{e^{-x^۲}}{x\sqrt{\pi}}\left(۱ - \frac{۱}{۲x^۲}\right) + \frac{۳}{۲\sqrt{\pi}}\int_x^\infty t^{-۴} e^{-t^۲} dt \quad (۱۰\text{-}۵)$$

هیچ تقریبی در اینجا وجود ندارد. این یک رشتهٔ نامتناهی نیست بنابراین هیچ سؤالی در مورد همگرایی وجود ندارد. با این همه، نشان خواهیم داد که انتگرال آخر برای x های به اندازهٔ کافی بزرگ قابل صرفنظر کردن است؛ لذا این امکان را به وجود می‌آورد که بقیهٔ (۱۰-۵) [یعنی، دو جملهٔ اوّل (۱۰-۴)] را به عنوان تقریب خوبی برای $erfc\ (x)$ برای x های بزرگ به کار ببریم. این معنای یک رشتهٔ مجانبی است. اگر رشتهٔ مجانبی نامتناهی باشد ممکن است واگرا شود، اما ما رشتهٔ نامتناهی را به کار نمی‌بریم. در عوض، با استفاده از یک معادلهٔ دقیق [مانند (۱۰-۵) برای این مثال] ، نشان می‌دهیم که چند جملهٔ اوّلی که به کار می‌بریم، در صورتی که x بزرگ باشد، منجر به تقریب خوبی خواهند شد.

اکنون نگاهی بیندازیم به انتگرال حاضر در (۱۰-۵)؛ می‌خواهیم اندازهٔ آن را برای x بزرگ

تخمین بزنیم. t در انتگرالده مقادیر x تا ∞ را می‌پذیرد؛ بنابراین برای تمام مقادیر t از x تا ∞، $t \geq x$ یا $1/t \leq 1/x$. انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_x^\infty t^{-4} e^{-t^2}\, dt = \int_x^\infty \frac{1}{t^5}(t e^{-t^2})\, dt$$

اگر $1/t^5$ را با $1/x^5$ جایگزین کنیم مقدار این انتگرال ***افزایش می‌یابد*** زیرا $1/t \leq 1/x$ است. بنابراین

$$\int_x^\infty t^{-4} e^{-t^2}\, dt < \int_x^\infty \frac{1}{x^5}(t e^{-t^2})\, dt = \frac{1}{x^5}\int_x^\infty t e^{-t^2}\, dt$$
$$= \frac{1}{x^5}\left(-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right)\Big|_x^\infty = \frac{e^{-x^2}}{2x^5}$$

وقتی در (۱۰-۵) در جملهٔ شامل e^{-x^2}/x^3 توقف کنیم، خطا از مرتبهٔ e^{-x^2}/x^5 است، که با افزایش x بسیار کوچک‌تر از e^{-x^2}/x^3 می‌شود. مثلاً، اگر $x = 10$ باشد، از رابطهٔ (۱۰-۵) یا از دو جملهٔ اوّل (۱۰-۴) خواهیم داشت

$$erfc\ (10) = \frac{e^{-100}}{10\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{200}\right) = 2{,}08833 \times 10^{-45}$$
$$\text{با خطای} < \frac{3e^{-100}}{4\sqrt{\pi}\,10^5} = 0{,}00016 \times 10^{-45}$$

این خطا کمتر از $\frac{1}{100}$ آخرین جمله‌ای که نگه داشته‌ایم، و کمتر از $\frac{1}{10000}$ مقدار $erfc\ (10)$ است.

بررسی محاسبهٔ، مثلاً $erf\ (10) = 1 - erfc\ (10)$، از (۱۰-۴) و از (۹-۶) جالب توجه است. (مسألهٔ ۲ را ملاحظه کنید.) رشتهٔ موجود در (۹-۶) همگرا می‌شود، و جواب را با هر دقت مطلوبی (بعد از زحمت بسیار!) به دست می‌دهد. امّا (۱۰-۴) – هر چند که رشتهٔ نامتناهی واگرا می‌شود – سریعاً دقتی خیلی بیش از آنچه را که شخص در کار عملی به آن نیاز دارد به دست می‌دهد:

$erf\ (10) = 1$، با خطایی از مرتبهٔ $\frac{e^{-100}}{10}$، یا دقتی حدود ۴۵ رقم اعشار!

بحث بالا را می‌توان دقیق‌تر کرد. در مورد (۱۰-۴)، دیدیم که اگر بعد از جملهٔ $x^{-۳}e^{-x^۲}$ توقف کنیم، خطا از مرتبهٔ $x^{-۵}e^{-x^۲}$ است. پس نسبت خطا به آخرین جملهٔ نگه داشته شده (یعنی $x^{-۲} = x^{-۳}e^{-x^۲} \div x^{-۵}e^{-x^۲}$) با میل کردن x به سمت بی‌نهایت، به سمت صفر میل می‌کند، یعنی، همانطور که متذکر شدیم، تقریب به طور فزاینده‌ای با x های بزرگتر بهتر می‌شود. "خطا" در بسط مجانبی عموماً به معنای تفاضل بین تابعی که بسط داده می‌شود و یک جمع جزئی (N جملهٔ اوّل) رشته می‌باشد. رشته‌ای را بسط مجانبی (حول ∞) تابع $f(x)$ می‌نامیم‌که، به ازای هر N ثابت، نسبت خطا به آخرین جملهٔ (غیر صفر) نگه داشته شدهٔ آن، وقتی $x\to\infty$ ، به سمت صفر میل کند. به صورت نمادی

$$f(x) \sim \sum_{n=۰}^{\infty}\phi_n(x)$$

(۱۰-۶) (بخوانید $\sum_{n=۰}^{\infty}\phi_n(x)$ یک بسط مجانبی $f(x)$ است)

اگر به ازای هر N ثابت، وقتی $x \to \infty$

$$\left|f(x) - \sum_{n=۰}^{N}\phi_n(x)\right| \div \phi_N(x) \to ۰$$

غالباً، جملات یک رشتهٔ مجانبی (حول ∞) توانهای معکوس x هستند. [می‌توانستیم (۱۰-۴) را با ضرب در $e^{x^۲}$ به این صورت بنویسیم.] پس (۱۰-۶) تبدیل می‌شود به

$$f(x) \sim \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}$$

(۱۰-۷) اگر به ازای هر N ثابت، وقتی $x \to \infty$

$$\left|f(x) - \sum_{n=۰}^{N}\frac{a_n}{x^n}\right| \cdot x^N \to ۰$$

همچنین می‌توانیم رشته‌های مجانبی حول مبدأ (یا هر نقطهٔ دیگر - با رشتهٔ تیلور مقایسه کنید) داشته باشیم. این مورد را چنین بیان می‌کنیم:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(۱۰-۸) اگر به ازای هر N ثابت، وقتی $x \to 0$

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right| \div x^N \to 0$$

اگرچه مورد جالب و خاص یک رشتهٔ مجانبی ***واگرا*** را بررسی کرده‌ایم، اما الزاماً این چنین رشته‌هایی نباید واگرا شوند. توجه کنید که برای آزمودن همگرایی یک رشته، x را ثابت می‌گیریم و n را به سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم؛ برای این که ببینیم آیا یک رشته مجانبی است، n را ثابت نگه می‌داریم و x را به حدّی میل می‌دهیم. یک رشته ممکن است هر دو آزمون، یا فقط یکی از آنها را برآورد.

مسائل، بخش ۱۰

۱- برای به دست آوردن معادلهٔ (۱۰-۴)، محاسبات جبری لازم را انجام دهید.

۲- مقدار $erf(2) = 1 - erfc(2)$ تا چهار رقم اعشار برابر است با ۰٫۹۹۵۳. کار انجام شده در محاسبهٔ این مقدار را از رشتهٔ توانی همگرای (۹-۶) با کار مشابه در محاسبهٔ آن از رشته مجانبی (۱۰-۴) مقایسه کنید. خطا را در هر مورد بعد از دو جمله؛ بعد از چهار جمله؛ و بعد از ده جمله تقریب بزنید. ***راهنمایی:*** (۹-۶) یک رشته متناوب است؛ معادلهٔ (۱۴-۳) از فصل ۱ را ملاحظه کنید.

با استفاده از رشتهٔ توانی، جدول توابع خطا، یا رشتهٔ مجانبی، هر کدام که مناسب است، عبارتهای زیر را حساب کنید.

۳- $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$

۴- $\int_{0.001}^{0.002} e^{-x^2}\,dx$

۵- $1 - erf(5) = erfc(5)$

۶- $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1.5}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

۷- $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_5^{10} e^{-x^2}\,dx$

۸- $1 - erf(100) = erfc(100)$

۹- $erf(0.7)$

۱۰- $\int_1^{1.5} e^{-x^2/2}\,dx$

۱۱- $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{1}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$ ۱۲- $\int_{-\infty}^{0.003} e^{-x^2}\,dx$

۱۳- با انتگرال گیریهای جزء به جزء پیاپی، چند جمله از رشتهٔ مجانبی را برای

$$\int_{x}^{\infty} t^{n-1} e^{-t}\,dt$$

پیدا کنید. [توجه کنید که اگر $x = 0$ باشد، این انتگرال $\Gamma(n)$ است؛ به ازای $x \neq 0$، این انتگرال تابع Γ ***ناکامل*** خوانده می‌شود، $\Gamma(n, x)$.]

۱۴- تابع خطا را به صورت یک تابع Γ ناکامل بیان کنید (مسألهٔ ۱۳) و نشان دهید که بسط مجانبی (۱۰-۴) با نتیجه شما در مسأله ۱۳ سازگار است.

۱۵- انتگرال $\int_{x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ یک ***انتگرال نمایی*** خوانده می‌شود.

(الف) رشتهٔ مجانبی انتگرال نمایی را بیابید.

(ب) انتگرال نمایی را به صورت یک تابع Γ ناکامل (مسألهٔ ۱۳) بیان کنید.

(ج) $\int_{0}^{x} \frac{dt}{\ln(1/t)}$ را برحسب انتگرال نمایی بیان کنید.

۱۱- فرمول استرلینگ

فرمولهای شامل $n!$ یا $\Gamma(p)$ برای اَعمال جبری یا مشتق گیری خیلی مناسب نیستند. یک فرمول تقریبی برای فاکتوریل یا تابع Γ وجود دارد که به فرمول استرلینگ مشهور می‌باشد و می‌توان آنرا برای ساده کردن فرمولهای شامل فاکتوریلها به کار برد. فرمول استرلینگ بدین صورت است

(۱۱-۱) فرمول استرلینگ $\Gamma(p+1) \sim p^p e^{-p}\sqrt{2\pi p}$ یا $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

علامت $\sim$ (بخوانید "میل می‌کند به") بدین معناست که نسبت دو طرف

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$$

وقتی $n \to \infty$، به سمت ۱ میل می‌کند. بنابراین، وقتی n بزرگ می‌شود تقریبهای بهتری برای

$n!$ حاصل می‌شود. در واقع، خطای مطلق (اختلاف بین تقریب استرلینگ و مقدار درست) **افزایش** می‌یابد، امّا خطای نسبی (نسبت خطا با مقدار $n!$) وقتی n افزایش می‌یابد به سمت صفر میل می‌کند. برای پی بردن به چگونگی پیدا شدن این فرمول، نکات عمدهٔ آنچه را که می‌توان، با اندکی تفصیل بیشتر، نحوهٔ کلّی دست یافتن به آن تلقی کرد، فهرست وار عنوان می‌کنیم. (برای جزئیات بیشتر رک کتاب باک ، صفحهٔ ۳۰۰). با فرمول زیر شروع می‌کنیم:

$$\Gamma(p+1) = p! = \int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{p\ln x - x}\,dx \qquad (۱۱-۲)$$

متغیّر جدید y را طوری جایگزین می‌کنیم که

$$x = p + y\sqrt{p}$$

به این ترتیب،

$$dx = \sqrt{p}\,dy$$

$x = 0$ ، مترادف با $y = -\sqrt{p}$ است

و (۱۱-۲) تبدیل می‌شود به

$$p! = \int_{-\sqrt{p}}^\infty e^{p\ln(p+y\sqrt{p}) - p - y\sqrt{p}}\sqrt{p}\,dy \qquad (۱۱-۳)$$

به ازای مقادیر بزرگ p، لگاریتم را به صورت رشتهٔ توانی زیر بسط می‌دهیم:

$$\ln(p+y\sqrt{p}) = \ln p + \ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{p}}\right) = \ln p + \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{y^2}{2p} + \cdots \qquad (۱۱-۴)$$

با جایگذاری (۱۱-۴) در (۱۱-۳)، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} p! &\sim \int_{-\sqrt{p}}^\infty e^{p\ln p + y\sqrt{p} - (y^2/2) - p - y\sqrt{p}}\sqrt{p}\,dy \\ &= e^{p\ln p - p}\sqrt{p}\int_{-\sqrt{p}}^\infty e^{-y^2/2}\,dy \\ &= p^p e^{-p}\sqrt{p}\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/2}\,dy - \int_{-\infty}^{-\sqrt{p}} e^{-y^2/2}\,dy\right] \end{aligned}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که اولین انتگرال برابر است با $\sqrt{2\pi}$ (مسألهٔ ۹-۴). وقتی $p \to \infty$ ، دومین انتگرال به سمت صفر میل می‌کند، و داریم

$$p! \sim p^p e^{-p}\sqrt{2\pi p}$$

که همان (۱۱-۱) می‌باشد. با کمی عملیات جبری بیشتر، می‌توان یک بسط مجانبی برای $\Gamma(p+1)$ به دست آورد:

$$\Gamma(p+1) = p! = p^p e^{-p}\sqrt{2\pi p}\left(1 + \frac{1}{12p} + \frac{1}{288p^2} + \cdots\right) \quad (11\text{-}5)$$

این مثال دیگری از یک رشتهٔ مجانبی است که اگر تعداد جمله‌های آن نامتناهی باشد واگرا می‌شود؛ با این همه، جملهٔ اوّل به تنهایی (که همان فرمول استرلینگ است) تقریب خوبی برای p بزرگ است، و جملهٔ دوم را می‌توان برای تخمین خطای نسبی (مسألهٔ ۱) مورد استفاده قرار داد.

مسائل، بخش ۱۱

۱- با استفاده از جملهٔ $1/12p$ در (۱۱-۵)، نشان دهید که خطا در فرمول استرلینگ (۱۱-۱) برای $p > 1$، کمتر از ۱۰٪، و برای $p > 10$ کمتر از ۱٪؛ و برای $p > 100$ کمتر از ۰٫۱٪ است.

۲- مقادیر دقیق $n!$ و تقریب فرمول استرلینگ را برای $n = 2, 5, 10, 50, 100$ مقایسه کنید. درصد خطا را بیابید.

$$(50! = 3.04141\times10^{64}\ ،\ 100! = 9.33262\times10^{157})$$

۳- در مکانیک آماری، از فرمول $\ln N! = N\ln N - N$ زیاد استفاده می‌شود، که N از مرتبهٔ عدد آووگادرو است. با استفاده از فرمول استرلینگ، $\ln N!$ را به دست آورید، مقدار تقریبی هر جمله را به ازای $N = 10^{26}$ محاسبه، و لذا تقریب بالا را توجیه کنید.

۴- با استفاده از فرمول استرلینگ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!\sqrt{n}}{2^{2n}(n!)^2}$ را حساب کنید.

۵- با استفاده از فرمول استرلینگ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Gamma(n+3/2)}{\sqrt{n}\,\Gamma(n+1)}$ را حساب کنید.

۶- با استفاده از معادلات (۳-۴) و (۱۱-۱)، نشان دهید $\Gamma(p) \sim p^p e^{-p}\sqrt{2\pi/p}$.

۷- با استفاده از مسألهٔ ۶، $\dfrac{d}{dp}\ln\Gamma(p) \sim \ln p - \dfrac{1}{2p}$ را به دست آورید.

۸- منحنی $y = \ln x$ را رسم کنید. نشان دهید $\ln n!$ بین مقادیر انتگرالهای $\int_2^{n+1}\ln x\,dx$

و $\int_1^n \ln x\,dx$ است. (*راهنمایی:* $\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots$ حاصل جمع مساحتهای مستطیلهایی با عرض ۱ و ارتفاع تا منحنی $\ln x$ در $x = 1, 2, \cdots$ می‌باشد). با توجه به مقادیر دو انتگرال به ازای n های خیلی بزرگ مانند مسألهٔ ۳، نشان دهید برای n بزرگ به طور تقریبی $\ln n! = n \ln n - n$ است.

۹- در مکانیک آماری به عبارت زیر بر می‌خوریم:

$$P = \frac{n!}{(np+u)!\,(nq-u)!} p^{np+u} q^{nq-u}$$

از فرمول استرلینگ استفاده کنید و نشان دهید

$$\frac{1}{P} \sim x^{npx} y^{nqy} \sqrt{2\pi npqxy}$$

که در آن $x = 1 + \frac{u}{np}$، $y = 1 - \frac{u}{nq}$ و $p + q = 1$. *راهنمایی:* نشان دهید

$$(np)^{np+u} (nq)^{nq-u} = n^n p^{np+u} q^{nq-u}$$

و صورت و مخرج P را بر این عبارت تقسیم کنید.

۱۲- انتگرالها و توابع بیضوی

اینها گروه دیگری از انتگرالها و توابع وابسته هستند که به طور گسترده‌ای مطالعه و جدول‌بندی شده‌اند، و چون ممکن است در مسائل کاربردی به آنها بر بخوریم، خوب است به اندازهٔ کافی راجع به آنها اطلاع داشته باشیم تا بتوانیم از جداول آماده استفاده کنیم، تشخیص بدهیم چه وقت احتمالاً یک انتگرال بیضوی داریم، و وقتی به آنها احتیاج داریم خصوصیات و تبدیلهای شناخته شدهٔ آنها را پیدا کرده و از آنها استفاده نماییم. در اینجا فقط به اختصار تعاریف و خصوصیات اساسی را خلاصه می‌کنیم - کتابهایی وجود دارند که اختصاصاً به بررسی این موضوع می‌پردازند!

شکلهای لژاندر *شکلهای لژاندر* انتگرالهای بیضوی مرتبه اوّل و دوّم عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} F(k,\phi) &= \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}} \\ E(k,\phi) &= \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}\, d\phi \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \le k \le 1 \\ \text{یا} \\ k = \sin\theta ,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \qquad (1-12)$$

(یک انتگرال بیضوی مرتبهٔ سوم نیز وجود دارد، اما این بندرت به کار می‌آید.) در اینجا k ***مدول*** و ϕ ***دامنه*** انتگرال بیضوی نامیده می‌شود. کمیت $k' = \sqrt{1 - k^2}$ را ***مدول متمّم*** می‌نامند. این انتگرالها برای مقادیر $\theta = arc\ sin\ k$ و ϕ بین ۰ و $\pi/2$ جدول‌بندی شده‌اند؛ به ازای مقدار مفروضی از k^2 در انتگرالی که می‌خواهید آنرا حساب کنید، باید ابتدا $\theta = arc\ sin\ k$ را حساب، و سپس $F(k,\phi)$ یا $E(k,\phi)$ را از جداول انتگرالهای بیضوی پیدا کنید.

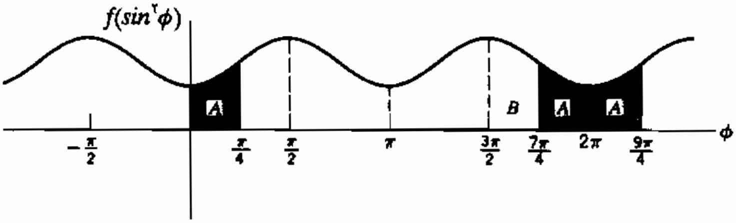
انتگرالهای بیضوی کامل انتگرالهای بیضوی ***کامل*** مرتبه اوّل و دوّم عبارت‌اند از مقادیر F و E (به صورت توابعی از k) به ازای $\phi = \pi/2$؛ بنا به تعریف

$$\begin{aligned} K \quad \text{یا} \quad K(k) &= F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \\ E \quad \text{یا} \quad E(k) &= E\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}\ d\phi \end{aligned} \qquad (2\text{-}12)$$

اینها معمولاً به طور جداگانه و با دقتی بیشتر از $F(k,\phi)$ و $E(k,\phi)$ جدول‌بندی شده‌اند. (جداول NBS نیز آنها را برحسب $m = k^2$ جدول‌بندی می‌کند.)

چون k محدود به بازهٔ (۰,۱) است، θ لزوماً فقط مقادیر واقع در بازهٔ $(0,\pi/2)$ را خواهد پذیرفت. اما ϕ چنین محدودیتی ندارد و می‌تواند هر مقدار منفی یا مثبتی را داشته باشد. چون جداول فقط مقادیر ϕ بین ۰ و $\pi/2$ را فهرست می‌کند، باید بدانیم چگونه انتگرالهایی را با مقادیر دیگر ϕ پیدا کنیم. برای پی بردن به این موضوع، ***انتگرالهای*** $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$ یا $1/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$ را در نظر بگیرید؛ اینها هر دو توابعی از $\sin^2 \phi$ هستند، بنابراین ما صرفاً $f(\sin^2 \phi)$ را بررسی خواهیم کرد، که f یک تابع دلبخواه است. فرض کنید یک منحنی از $f(\sin^2 \phi)$ (مثلاً مانند شکل ۱۲-۱) بین ۰ و $\pi/2$ در دست است. در این صورت، چون $\sin \phi$ همان مقادیری را در ربع دوم می‌گیرد که در ربع اول هم می‌گیرد، منحنی $f(\sin^2 \phi)$ از $\pi/2$ تا π درست انعکاس (نسبت به خط $\phi = \pi/2$) منحنی از ۰ تا $\pi/2$ است. بازهٔ از ۰ تا π یک دورهٔ تناوبِ $\sin^2 \phi$، و لذا یک دورهٔ تناوب $f(\sin^2 \phi)$ است؛ بنابراین بقیهٔ منحنی درست تکرار قسمت از $\phi = 0$ تا $\phi = \pi$ می‌باشد. اکنون مساحت زیر منحنی، $\int f(\sin^2 \phi)\ d\phi$ است؛ برای $F(k,\phi)$ یا $E(k,\phi)$، انتگرال به ازای $\phi > \pi/2$ می‌تواند از یک یا تعداد بیشتری مساحت تشکیل شده باشد که مساوی است با مساحت از ۰ تا π بعلاوهٔ

(یا منهای) مساحتی که معادل با یک انتگرال از ۰ تا زاویه‌ای کمتر از $\pi/۲$ است. مثلاً (شکل ۱۲-۱ را ملاحظه کنید)،



شکل ۱۲-۱

$$\int_۰^{۹\pi/۴} = \int_۰^{۲\pi} + A\ \text{مساحت} = \int_۰^{۲\pi} + \int_۰^{\pi/۴} = ۴\int_۰^{\pi/۲} + \int_۰^{\pi/۴}$$

و

$$\int_۰^{۷\pi/۴} = \int_۰^{۲\pi} - A\ \text{مساحت} = ۴\int_۰^{\pi/۲} - \int_۰^{\pi/۴}$$

امّا، به دقت توجه کنید (شکل ۱۲-۱) که $\int_۰^{۷\pi/۴}$ برابر با $\int_۰^{\pi/۴} + \int_۰^{۳\pi/۴}$ نیست، زیرا مساحتهای A و B برابر نیستند. همیشه باید روی بازه‌هایی متشکل از چند π (نه $\pi/۲$) انتگرال گرفت و سپس انتگرال مناسب روی بازه‌ای با طول کمتر از $\pi/۲$ را به آن اضافه یا از آن کم کرد. با استفاده از تعاریف انتگرالهای بیضوی کامل، داریم:

$$F(k,n\pi \pm \phi) = ۲nK \pm F(k,\phi)$$

(۱۲-۳)

$$E(k,n\pi \pm \phi) = ۲nE \pm E(k,\phi)$$

اگر حد پایین صفر نباشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\int_{\phi_۱}^{\phi_۲} \frac{d\phi}{\sqrt{۱ - k^۲ sin^۲\phi}} = \int_۰^{\phi_۲} \frac{d\phi}{\sqrt{۱ - k^۲ sin^۲\phi}} - \int_۰^{\phi_۱} \frac{d\phi}{\sqrt{۱ - k^۲ sin^۲\phi}}$$

$$= F(k,\phi_۲) - F(k,\phi_۱)$$

و فرمول مشابهی نیز برای $E(k,\phi)$ خواهیم داشت. اگر یکی از حدود منفی باشد، می‌توانیم از این حقیقت استفاده کنیم که $F(k,\phi)$ و $E(k,\phi)$ توابعی فرد از ϕ هستند، یعنی

$$F(k,-\phi)=\int_{0}^{-\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\phi}}=-\int_{0}^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\phi}}=-F(k,\phi)$$

و $E(k,-\phi)=-E(k,\phi)$. می‌توانید این را از شکل ۱۲-۱ نیز ببینید؛ انتگرالده تغییر نکرده است، امّا در $\int_{0}^{-\phi}$، ما در جهت منفی انتگرال می‌گیریم.

چون $k^{2}\sin^{2}\phi<1$ (به ازای $k<1$)، با بسط انتگرالده‌ها توسط قضیهٔ دو جمله‌ایها و انتگرال‌گیری جمله به جمله (مسألهٔ ۱)، رشته‌های نامتناهی همگرایی برای انتگرالهای بیضوی به دست می‌آیند. برای k کوچک، این رشته‌ها به سرعت همگرا می‌شوند و روش خوبی برای محاسبهٔ انتگرالهای بیضوی به ازای مقادیر k زیر بازه جداول ارائه می‌دهند.

شکلهای ژاکوبی اگر در شکلهای *لژاندر* (۱۲-۱)، قرار دهیم $\sin\phi=x$، شکلهای ژاکوبی انتگرالهای بیضوی مرتبهٔ اول و دوم به دست می‌آیند:

$$x=\sin\phi$$

$$dx=\cos\phi\, d\phi \quad \text{یا} \quad d\phi=\frac{dx}{\cos\phi}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$\phi=\pi/2$ مترادف است با $x=1$.

و آنگاه

$$F(k,\phi)=\int_{0}^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\phi}}=\int_{0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{2})(1-k^{2}x^{2})}}$$

$$E(k,\phi)=\int_{0}^{\phi}\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\phi}\, d\phi=\int_{0}^{x}\sqrt{\frac{1-k^{2}x^{2}}{1-x^{2}}}\, dx \tag{۱۲-۴}$$

$$K=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{2})(1-k^{2}x^{2})}}$$

$$E=\int_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-k^{2}x^{2}}{1-x^{2}}}\,dx$$

بسیاری از انتگرالها را می‌توان به یکی یا ترکیبی از این شکلها تبدیل کرد. تبدیلهای لازم برای بسیاری موارد را می‌توان در کتابهای مراجع پیدا نمود؛ یک مثال در مسألهٔ ۱۷ مطرح شده است. از جدول انتگرالها می‌دانید که وقتی انتگرالده ریشهٔ دوم یک عبارت درجهٔ دوم است، انتگرال

نامعین برحسب توابع ابتدائی داده می‌شود. وقتی که انتگرالده شامل ریشهٔ دوم یک عبارت درجه سوم یا چهارم باشد، انتگرال احتمالاً شامل توابع بیضوی خواهد بود. بعضی تبدیلهای سادهٔ اینگونه انتگرالها آنها را به شکلهای (۱۲-۱) یا (۱۲-۴) درمی‌آورند، و شما خود باید بتوانید این تبدیلهای را انجام دهید؛ در سایر موارد، بهترین کار، مراجعه به جدول است. مثلاً،

$$\int_{۰}^{x} \sqrt{\frac{۱۰ - ۵x^{۲}}{۱ - x^{۲}}}\, dx$$

به آسانی با خارج کردن ضریب $\sqrt{۱۰}$ پیدا می‌شود؛ می‌بینیم که این انتگرال مطابق (۱۲-۴) عبارت از $\sqrt{۱۰}\, E(k,\phi)$ با $k^{۲} = \frac{۱}{۲}$ است.

مثال ۱ – طول قوس یک بیضی را پیدا کنید. این مسأله وجه تسمیهٔ انتگرالهای بیضوی را روشن می‌سازد! معادلهٔ بیضی را برای مورد $a > b$ به شکل پارامتری می‌نویسیم

$$x = a \sin \phi$$

$$y = b \cos \phi$$

(اگر $b > a$، از شکل $x = a \cos \phi$، $y = b \sin \phi$ استفاده کنید؛ مسألهٔ ۱۵ را ملاحظه کنید.) پس برای $a > b$، داریم

$$ds^{۲} = dx^{۲} + dy^{۲} = (a^{۲} \cos^{۲} \phi + b^{۲} \sin^{۲} \phi)\, d\phi^{۲}$$

چون $a^{۲} - b^{۲} > ۰$، می‌توانیم بنویسیم

$$\int ds = \int \sqrt{a^{۲} - (a^{۲} - b^{۲}) \sin^{۲} \phi}\, d\phi = a \int \sqrt{۱ - \frac{a^{۲} - b^{۲}}{a^{۲}} \sin^{۲} \phi}\, d\phi$$

این یک انتگرال بیضوی مرتبهٔ دوم اسمت که در آن $k^{۲} = (a^{۲} - b^{۲})/a^{۲} = e^{۲}$ (در هندسهٔ تحلیلی، e را خروج از مرکز می‌نامند). اگر کل محیط را بخواهیم، ϕ از ۰ تا ۲π تغییر می‌کند، و جواب $۴aE(k,\pi/۲)$ است. برای قوس کوچک‌تر، می‌توانیم حدود مناسب $\phi_{۱}$ و $\phi_{۲}$ را روی انتگرال گذاشته و $E(k,\phi_{۲}) - E(k,\phi_{۱})$ را به دست آوریم. برای هر بیضی مفروضی (یعنی، a و b مفروض)، می‌توانیم مقدار عددی طول قوس مطلوب را با استفاده از جدول انتگرالهای بیضوی $E(k,\phi)$ به دست آوریم.

مثال ۲ – اکنون مسألهٔ حرکت آونگ ساده را برای زوایای بزرگ ادامه می‌دهیم. در بخش ۸

داشتیم

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + const \qquad (۵-۱۲)$$

و در بحث قبلی‌مان داشتیم $\dot{\theta} = 0$ در $\theta = \pi/4$، بنابراین ثابت انتگرال برابر صفر بود (این همخوان بود به نوسانهای 180°، یعنی، دامنهٔ 90°). اکنون می‌خواهیم نوسانهای با هر دامنه‌ای، مثل α، را بررسی کنیم؛ بنابراین، $\dot{\theta} = 0$ وقتی $\theta = \alpha$، و (۱۲-۵) تبدیل می‌شود به

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) \qquad (۶-۱۲)$$

با انتگرال گیری از (۱۲-۶)، نتیجه می‌گیریم

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} \quad \sqrt{\frac{2g}{l}}\,\frac{T_\alpha}{4}$$

که T_α دورهٔ تناوب برای نوسانهای از $-\alpha$ تا $+\alpha$ و بالعکس می‌باشد. این انتگرال را می‌توان به صورت یک انتگرال بیضوی نوشت؛ مقدار آن برابر است با (مسألهٔ ۱۷)

$$\sqrt{2}\,K\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (۸-۱۲)$$

پس دورهٔ تناوب از رابطهٔ (۱۲-۷) به دست می‌آید:

$$T_\alpha = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\sqrt{2}\,K\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

اگر α خیلی بزرگ نباشد (مثلاً $\alpha < 90^\circ$، $\frac{1}{2}\alpha < 45^\circ$، بنابراین $\sin^2(\alpha/2) < \frac{1}{2}$)، می‌توانیم با استفاده از تقریب خوبی T_α را به دست آوریم (مسألهٔ ۱):

$$T_\alpha = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2} + \cdots\right) \qquad (۹-۱۲)$$

اگر α به قدر کافی کوچک باشد که بتوان $\sin(\alpha/2)$ را با $\alpha/2$ تقریب زد، خواهیم داشت

$$T_\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \cdots\right) \qquad (۱۰-۱۲)$$

اگر α خیلی کوچک باشد، فرمول آشنای حرکت نوسانی ساده را نتیجه می‌گیریم، $T = 2\pi\sqrt{l/g}$، که مستقل از α است. برای α نسبتاً بزرگتر، مثلاً رادیان $\alpha = \frac{1}{2}$،

(حدود 30°)، نتیجه می‌گیریم

$$T_{\alpha = 1/2} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{64} + \cdots\right) \qquad (۱۲-۱۱)$$

این بدان معناست که آونگی که در 30° شروع به نوسان کرده باشد، پس از حدود 32° تناوب کاملاً با آونگی که دارای دامنهٔ نوسان خیلی کوچکی است خارج از فاز می‌شود.

توابع بیضوی به خاطر بیاورید که

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = sin^{-1} x$$

u را به صورت تابعی از x، یا x را به صورت تابعی از u تعریف می‌کند؛ در حقیقت؛ $x = sin\, u$. به طریقی مشابه، $u = F(k,\phi)$ در (۱۲-۴)، u را به صورت تابعی از ϕ (یا از $x = sin\, \phi$) تعریف می‌کند یا x یا ϕ را به صورت توابعی از u (فرض می‌کنیم k ثابت باشد) تعریف می‌نماید. می‌نویسیم

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = sn^{-1} x \qquad (۱۲-۱۲)$$

$x = sn\, u$ (بخوانید اِس اِن یو)

چون $\phi = amp\, u$ دامنهٔ انتگرال بیضوی $u = F(k,\phi)$، و $x = sin\, \phi$، است داریم

$$sn\, u = sin\, \phi = sin\, (amp\, u) \qquad (۱۲-۱۳)$$

تابع $sn\, u$ یک تابع بیضوی است. توابع بیضوی دیگری هم وجود دارند که به $sn\, u$ وابسته اند؛ با توجه به [(۱۲-۱۴)] می‌بینید که این توابع دارای شباهتهایی با توابع مثلثاتی اند. تعریف می‌کنیم

$$cn\, u = cos\, \phi = cos\, (amp\, u) = \qquad (۱۲-۱۴)$$

$$\sqrt{1 - sin^2 (amp\, u)} = \sqrt{1 - sn^2 u} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$dn\ u = \frac{d\phi}{du} = \frac{۱}{\dfrac{du}{d\phi}} = \sqrt{۱ - k^۲ sin^۲ \phi} = \sqrt{۱ - k^۲ sn^۲ u} = \sqrt{۱ - k^۲ x^۲}$$

[مقدار $du/d\phi$ از $u = F(k,\phi)$ در (۱۲-۱) یا (۱۲-۱۴) پیدا می‌شود.] فرمولهای فراوانی وجود دارند که این توابع را به هم مربوط می‌سازند، مثلاً، فرمولهای جمع، انتگرالها، مشتقات و غیره. اینها را می‌توان در مراجع داده شده ملاحظه کرد، یا در بعضی موارد به سادگی حساب کرد. مثلاً، چون $sn\ u = sin\ \phi$، داریم

$$\frac{d}{du}(sn\ u) = \frac{d}{du}(sin\ \phi) = cos\ \phi\ \frac{d\phi}{du} = cn\ u\ dn\ u$$

مسائل، بخش ۱۲

۱- $F(k,\phi)$ و $E(k,\phi)$ را به صورت رشتهٔ توانی برحسب $k^۲ sin^۲ \phi$ برای k کوچک بسط دهید و جمله به جمله انتگرال بگیرید. با استفاده از این رشته‌ها، رشته‌های مربوط به انتگرالهای بیضوی کامل K و E را پیدا کنید.

با استفاده از جداول یا (در مواردی که k کوچک است) استفاده از رشتهٔ توانی مسألهٔ ۱، مقادیر انتگرالهای بیضوی مسائل ۲ تا ۱۳ را پیدا کنید.

۲- $K(۰٫۱۳)$

۳- $E(۰٫۰۰۱)$

۴- $F\left(۰٫۱۳, \frac{\pi}{۳}\right)$

۵- $E\left(۰٫۱۳, \frac{۷\pi}{۳}\right)$

۶- $\int_{-۱/۲}^{۳/۴} \sqrt{\frac{۹ - ۴x^۲}{۱ - x^۲}}\, dx$

۷- $\int_۰^{\pi/۴} \frac{d\phi}{\sqrt{۱ - ۰٫۲۵\ sin^۲\phi}}$

۸- $\int_۰^{۵\pi/۴} \sqrt{۱ - ۰٫۰۳۷\ sin^۲\phi}\ d\phi$

۹- $\int_۰^{۰٫۸} \frac{dx}{\sqrt{(۱ - x^۲)(۱ - ۰٫۱۶x^۲)}}$

۱۰- $\int_{-\pi/۲}^{۳\pi/۸} \frac{d\phi}{\sqrt{۱ - ۰٫۸۷\ sin^۲\phi}}$

۱۱- $\int_{-۷\pi/۸}^{۱۱\pi/۴} \sqrt{۱ - ۰٫۶۴\ sin^۲\phi\ d\phi}$

۱۲- $\int_۰^{۱/۲} \sqrt{\frac{۱۰۰ - x^۲}{۱ - x^۲}}\, dx$

۱۳- $\int_{-۱/۲}^{۱/۲} \frac{dx}{\sqrt{(۱ - x^۲)(۴ - ۳x^۲)}}$

۱۴- محیط بیضی $۴x^۲ + ۹y^۲ = ۳۶$ را پیدا کنید.

۱۵- طول قوس بیضی $x^۲ + (y^۲/۴) = ۱$ را بین $(۲, ۰)$ و $(\sqrt{۳}, \frac{۱}{۲})$ پیدا کنید. (توجه کنید که در اینجا $b > a$؛ مثال ۱ را ملاحظه کنید.)

۱۶- طول قوسِ یک کمانِ $y = sin\ x$ را پیدا کنید.

۱۷- انتگرالِ معادلهٔ (۱۲-۷) را به صورت یک انتگرال بیضوی بنویسید و نشان دهید که (۱۲-۸) مقدار آن را به دست می‌دهد. ***راهنمایی:*** اتّحاد $cos\ \theta = ۱ - ۲\, sin^۲\ (\theta/۲)$، و اتحاد مشابه آن برای $cos\ \alpha$ را بنویسید. سپس تغییر متغیر $x = sin\ (\theta/۲)/sin\ (\alpha/۲)$ را به کار ببرید.

۱۸- منحنی $sn\ u$ را به صورت تابعی از u به ازای $k = \frac{۱}{۲}$ رسم کنید. از جدول برای انتگرال بیضوی

$$\int_۰^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{۱ - k^۲ sin^۲ \phi}}$$

استفاده کنید و به خاطر داشته باشید $sn\ u = sin\ \phi$. توجه کنید که شما سینوس حد بالا را به صورت تابعی از مقدار انتگرال رسم می‌کنید. با استفاده از منحنی $sn\ u$، منحنی‌های تقریبی $cn\ u$ و $dn\ u$ را رسم کنید.

۱۹- اگر $u = ln\ (sec\,\phi + tan\ \phi)$ باشد، در آن صورت ϕ تابعی است از u و ***گودِرمانیِ*** u خوانده می‌شود، یعنی $\phi = gd\ u$. ثابت کنید

$$\frac{d}{du} gd\, u = sech\, u \text{ ، } sin\, gd\, u = tanh\, u \text{ ، } tan\, gd\, u = sinh\, u \text{ ، } u = ln\, tan\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\phi}{۲}\right)$$

۲۰- نشان دهید که به ازای $k = ۰$:

$$dn\, u = ۱ \text{ ، } cn\, u = cos\, u \text{ ، } sn\, u = sin\, u \text{ ، } u = F(۰, \phi) = \phi$$

و به ازای $k = ۱$:

$$u = F(۱, \phi) = ln\ (sec\,\phi + tan\ \phi) \quad \text{یا} \quad \phi = gd\, u \quad \text{(مسألهٔ ۱۹)}$$

$$sn\ u = tanh\ u$$

$$cn\ u = dn\ u = sech\ u$$

۲۱- با تبدیل

$$\int_{\circ}^{\pi/۲} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\ \phi}}$$

به یکی از اَشکال استاندارد انتگرال بیضوی نوع اول، نشان دهید که

$$B\left(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}\right) = ۲\sqrt{۲}\, F\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{\pi}{۲}\right) = ۲\sqrt{۲}\, K\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$$

و بنابراین

$$K\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = \frac{۱}{۴\sqrt{\pi}}\left[\Gamma(\tfrac{۱}{۴})\right]^{۲}$$

این عبارتها را، برای کنترل نتیجه، با استفاده از جدولهای K و Γ حساب کنید.

۲۲- در مسألهٔ آونگ، $\theta = \alpha \sin \sqrt{g/l}\, t$ یک جواب برای هنگامی است که دامنهٔ α به قدری کوچک است که حرکت را می‌توان هماهنگ ساده تلقی کرد. نشان دهید که جواب دقیق برای هنگامی که α کوچک نیست به صورت

$$\sin\frac{\theta}{۲} = \sin\frac{\alpha}{۲}\, sn\ \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

در می‌آید که در آن $k = \sin\ (\alpha/۲)$ مدول تابع بیضوی می‌باشد. نشان دهید که وقتی دامنهٔ α کوچک شود، این جواب به جواب حرکت نوسانی ساده تقلیل می‌یابد.

۲۳- یک کرهٔ توپُر یکنواخت با چگالی $\frac{۱}{۲}$ در آب شناور است. (با مسألهٔ ۵-۳۷ از فصل ۸ مقایسه کنید.) آن را به زیر آب رانده و سپس رها می‌کنیم. معادله دیفرانسیلی حرکت را بنویسید (با چشم پوشی از اصطکاک) و آن را حل کنید و دورهٔ تناوب را برحسب $K(۵^{-۱/۲})$ به دست آورید. نشان دهید که این دورهٔ تناوب تقریباً ۱۶ر۱ برابر دورهٔ تناوب برای نوسانهای کوچک می‌باشد.

۱۳- مسائل متفرقه

۱- نشان دهید که به ازای اعداد صحیح و مثبت m و n، ($n > m$)

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{y^{m}dy}{(۱+y)^{n+۱}} = \frac{۱}{(n-m)C(n, m)}$$

۲- نشان دهید که $B(m, n)\ B(m+n, k) = B(n, k)\ B(n+k, m)$.

۳- از فرمول استرلینگ استفاده کنید و نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} n^{x} B(x, n) = \Gamma(x)$$

۴- درستی رشتهٔ مجانبی

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{(۱ + xt)} \sim \sum (-۱)^{n}\, n!\, x^{n}$$

را تحقیق کنید. [معادلهٔ (۱۰-۸) را ملاحظه کنید]. ***راهنمایی:*** به دفعات، انتگرال جزء به جزء بگیرید، از $e^{-t}dt$ انتگرال بگیرید و از توانهای $(۱ + xt)^{-۱}$ مشتق گیری کنید.

هریک از انتگرالها یا عبارتهای زیر را به صورت یکی از توابع این فصل بیان کنید و سپس آن را با استفاده از فرمولها و یا جداول مناسب حساب کنید.

۵- $erf\,(۰٫۰۰۳)$

۶- $\Gamma(-\frac{۵}{۲})$

۷- $\int_{۰}^{\infty} x^{۳} e^{-x}\, dx$

۸- $erf\,(\frac{۱}{۲})$

۹- $\int_{۰}^{۱} \sqrt{\frac{۴ - ۳x^{۲}}{۱ - x^{۲}}}$

۱۰- $\int_{-\pi/۴}^{۳\pi/۴} \frac{d\phi}{\sqrt{۱ + \cos^{۲}\phi}}$

۱۱- $\int_{۰}^{\pi/۲} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$

۱۲- $\int_{۰}^{\pi/۲} \frac{dx}{\sqrt{۲ - \sin^{۲} x}}$

۱۳- $\frac{d}{du}\,(cn\, u)$

۱۴- $۱ - erf\,(۳)$

۱۵- $\int_{۰}^{\infty} x^{۵/۲} e^{-x}\, dx$

۱۶- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{۲}}\, dx$

۱۷- $\int_{۰}^{\pi/۲} \sqrt{\sin^{۳}\theta \cos^{۵}\theta\, d\theta}$

۱۸- $\int_{۰}^{\infty} \frac{e^{-x}\, dx}{x^{۱/۴}}$

۱۹- $\int_{۵}^{\infty} e^{-x^{۲}}\, dx$

۲۰- $\int_{۰}^{\pi/۲} (\cos x)^{۵/۲}\, dx$

۲۱- $\int_{۰}^{۵} x^{-۱/۳} (۵ - x)^{۱۰/۳}\, dx$

۲۲- $\int_{۰}^{۷\pi/۸} \sqrt{۴ - \sin^{۲} x}\, dx$

۲۳- $\Gamma(۵۵٫۵)$. ***راهنمایی:*** مسألهٔ ۱۱-۶ را ملاحظه کنید.

۲۴- $\Gamma(-۵۴٫۵)$. ***راهنمایی:*** مسألهٔ ۲۳ و معادلهٔ (۵-۴) را ملاحظه کنید.

۲۵- $\Gamma(-۲۷٫۳)$. ***راهنمایی:*** مسائل ۲۳ و ۲۴ را ملاحظه کنید.

۱۲

حل رشته‌ای معادلات دیفرانسیل چندجمله‌ایهای لژاندر؛ توابع بسل؛ مجموعه توابع متعامد

۱- مقدمه

تاکنون به خوبی متوجه شده‌اید که مسائل فیزیکی در بسیاری از حوزه‌ها منجر به معادلات دیفرانسیلی می‌شوند که باید آنها را حل کنیم. بعضی از این مسائل را می‌توان با روشهای ابتدایی حل کرد، امّا هنگامی که این روشها به کار نیایند می‌توانیم به جوابهای رشته‌ای متوسل شویم. اجازه دهید روش حل رشته‌ای را برای معادلهٔ ساده زیر (که با روشهای ابتدائی نیز به سادگی حل می‌شود!) نمایش دهیم:

$$y' = ۲xy \qquad (۱-۱)$$

فرض می‌کنیم که این معادلهٔ دیفرانسیل جوابی به صورت رشتهٔ توانی، مثلاً

$$\begin{aligned} y &= a_۰ + a_۱ x + a_۲ x^۲ + a_۳ x^۳ + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n \end{aligned} \qquad (۲-۱)$$

دارد، که aها باید پیدا شوند. با مشتق‌گیری جمله به جمله از (۱-۲)، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} y' &= a_۱ + ۲a_۲ x + ۳a_۳ x^۲ + \cdots + na_n x^{n-۱} + \cdots \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} na_n x^{n-۱} \end{aligned} \qquad (۳-۱)$$

(۱-۲) و (۱-۳) را در معادلهٔ دیفرانسیل (۱-۱) قرار می‌دهیم؛ در آن صورت دو رشتهٔ توانی داریم که با هم برابر اند. اکنون معادلهٔ دیفرانسیل اصلی باید به ازای کلیهٔ مقادیر x برقرار باشد، یعنی، y' و $2xy$ باید تابع مشابهی از x باشند. چون یک تابع مفروض فقط **یک** بسط رشته‌ای برحسب توانهای x دارد (فصل ۱، بخش ۱۱ را ملاحظه کنید)، لذا دو رشتهٔ مزبور باید یکی باشند، یعنی، ضرایب توانهای متناظر x باید متساوی باشند. مجموعهٔ معادلات زیر را برای a ها داریم:

$$a_1 = 0 \quad ،a_2 = a_0 \quad ،a_3 = \frac{2}{3}a_1 = 0 \quad ،a_4 = \frac{1}{2}a_0 \tag{۱-۴}$$

یا به طور کلی

$$na_n = 2a_{n-2} \qquad a_n = \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ \frac{2}{n}a_{n-2} & \text{زوج } n \end{cases} \tag{۱-۵}$$

با فرض $n = 2m$ (چون فقط جملات زوج در این رشته ظاهر می‌شوند)، نتیجه می‌گیریم

$$a_{2m} = \frac{2}{2m}a_{2m-2} = \frac{1}{m}a_{2m-2} = \frac{1}{m}\,\frac{1}{m-1}a_{2m-4} = \cdots = \frac{1}{m!}a_0 \tag{۱-۶}$$

با جایگذاری این مقادیر برای ضرایب در جواب فرضی (۱-۲)، جواب زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_0x^2 + \frac{1}{2!}a_0x^4 + \cdots + \frac{1}{m!}a_0x^{2m} + \cdots \\ &= a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{m!} \end{aligned} \tag{۱-۷}$$

اکنون این را با جواب حاصل از یک روش ابتدایی مقایسه می‌کنیم (در این مورد، روش جداسازی متغیرها):

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

$$\ln y = x^2 + \ln c$$

$$y = ce^{x^2}$$

با بسط این جواب به یک رشته از توانهای x^2، نتیجه می‌گیریم:

$$y = c\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots\right) = c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$$

که، به ازای $c = a_0$، با جواب رشته‌ای (۱-۷) یکسان است. انتظار نداشته باشید که همیشه بتوانید شکل بستهٔ یک جواب رشته‌ای توانی را به دست آورید (یعنی، یک تابع ابتدایی که جواب رشته‌ای شما بسط توانی آن باشد)، اما در موارد ساده ممکن است به چنین جوابی برسید. البته، در آن مورد نیز ممکن است مسأله بدون استفاده از روش رشته‌ای حل شود؛ نیاز واقعی به جواب رشته‌ای در مسائلی است که شکل بسته‌ای برحسب توابع ابتدائی وجود نداشته باشد. همچنین باید توجه داشته باشید که تمام جوابها دارای بسطهای رشته‌ای برحسب توانهای x نیستند؛ از جمله، $ln\ x$ یا $1/x^2$. آنچه می‌توانیم بگوییم این است که اگر جوابی وجود داشته باشد که بتوان آنرا با یک رشتهٔ توانی همگرا نمایش داد، می‌توان با این روش آن را پیدا کرد. بعداً راجع به قضایایی بحث خواهیم کرد (بخش ۲۱ ب) که به ما خواهند گفت چه موقع می‌توانیم چنین جوابی را انتظار داشته باشیم.

در بخشهای بعد به بررسی بعضی از معادلات دیفرانسیل خواهیم پرداخت که به کرّات در مسائل کاربردی مطرح و معمولاً توسط روشهای رشته‌ای حل می‌شوند.

مسائل، بخش ۱

معادلات دیفرانسیل زیر را با روش رشتهٔ توانی و همچنین با یک روش ابتدایی حل کنید. تحقیق کنید که جواب رشته‌ای با بسط رشتهٔ توانی جواب دیگر شما برابر است.

۱- $y'' = -4y$

۲- $y' = xy + x$

۳- $xy' = xy + y$

۴- $y'' + y = 4\sin 3x$

۵- $y'' - 2y' + y = 0$

۶- $xy' - y = x^2$

۷- $y' = 3x^2y$

۸- $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$

۹- $y'' + y = 4x\sin x$

۱۰- $y' = x + y - 1$

معادلات دیفرانسیل زیر را با روش رشتهٔ توانی حل کنید

۱۱- $y'' - x^2y' - xy = 0$

۱۲- $y'' - (x^2 + 1)y = 0$

۱۳- $y'' + xy = 0$

۱۴- $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$

۱۵- $(x^2 + 2x)y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$ ۱۶- $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$

۱۷- $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ ۱۸- $y'' + xy' + y = 0$

۲- معادلهٔ لژاندر.

معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر به صورت

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \qquad (2-1)$$

است که l یک مقدار ثابت می‌باشد. این معادله در حل معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مختصات کروی (مسائل ۱۰-۲ و بخش ۷ از فصل ۱۳ را ملاحظه کنید) و بنابراین در مسائل با تقارن کروی در مکانیک، مکانیک کوانتومی، نظریهٔ الکترومغناطیس، حرارت، و غیره پیدا می‌شود. همچنین کاربردی از این معادله را در بخش ۵ ملاحظه کنید.

گرچه مفیدترین جوابهای این معادله چندجمله‌ای‌هایی موسوم به ***چندجمله‌ای‌های لژاندر*** هستند، اما یک روش برای پیدا کردن آنها این است که یک جواب رشته‌ای برای معادلهٔ دیفرانسیل فرض کنیم، و نشان دهیم که رشته بعد از تعداد محدودی جمله متوقف می‌شود. [بعداً روشهای دیگر پیدا کردن چندجمله‌ایهای لژاندر را خواهیم دید (بخشهای ۴ و ۵).] جواب رشته‌ای (۲-۱) را برای y فرض می‌کنیم و از آن جمله به جمله دو بار مشتق می‌گیریم تا y' و y'' به دست آیند:

$$\left.\begin{aligned} y &= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n+\cdots \\ y' &= a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \\ y'' &= 2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots \end{aligned}\right\} \quad (2-2)$$

(۲-۲) را در (۲-۱) جایگزین می‌کنیم و از ضرایب توانهای مختلف x فاکتور می‌گیریم؛ بهتر است آنها را به صورت زیر جدول‌بندی کنیم:

	ثابت	x	x^2	x^3	$\cdots\ x^n\ \cdots$
y''	$2a_2$	$6a_3$	$12a_4$	$20a_5$	$(n+2)(n+1)a_{n+2}$
$-x^2y''$			$-2a_2$	$-6a_3$	$-n(n-1)a_n$
$-2xy'$		$-2a_1$	$-4a_2$	$-6a_3$	$-2na_n$
$l(l+1)y$	$l(l+1)a_0$	$l(l+1)a_1$	$l(l+1)a_2$	$l(l+1)a_3$	$l(l+1)a_n$

سپس ضریب کلّ هر توانی از x را برابر صفر قرار می‌دهیم [زیرا، همانطور که در بخش ۱ بحث کردیم، y باید به صورت اتّحاد در (۲-۱) صدق کند.] برای چند توان اوّل x نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} 2a_2 + l(l+1)a_0 &= 0 \quad \text{یا} \quad a_2 = -\frac{l(l+1)}{2}a_0 \\ 6a_3 + (l^2+l-2)a_1 &= 0 \quad \text{یا} \quad a_3 = -\frac{(l-1)(l+2)}{6}a_1 \\ 12a_4 + (l^2+l-6)a_2 &= 0 \quad \text{یا} \quad a_4 = -\frac{(l-2)(l+3)}{12}a_2 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = \frac{l(l+1)(l-2)(l+3)}{4!}a_0 \end{aligned} \tag{۲-۳}$$

و از ضریب x^n داریم

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (l^2+l-n^2-n)a_n = 0 \tag{۲-۴}$$

ضریب a_n در (۲-۴) را می‌توان تجزیه کرد و نتیجه گرفت

$$l^2 - n^2 + l - n = (l+n)(l-n) + (l-n) = (l-n)(l+n+1) \tag{۲-۵}$$

آنگاه می‌توانیم یک فرمول عمومی برای a_{n+2} برحسب a_n بنویسیم. فرمول (۲-۶) شامل فرمولهای (۲-۳) برای a_2، a_3، و a_4 است، و می‌توان هر ضریب زوجی را به صورت مضربی از a_0، و هر ضریب فردی را به صورت مضربی از a_1 پیدا کرد. با حل (۲-۴) برای a_{n+2} و استفاده از (۲-۵)، داریم

$$a_{n+2} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \tag{۲-۶}$$

به این ترتیب، جواب عمومی (۲-۱) حاصل‌جمع دو رشته، شامل (همانطور که جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دو باید چنین باشد) دو ثابت a_0 و a_1 است که با شرایط اولیهٔ داده شده، تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} y = a_0&\left[1 - \frac{l(l+1)}{2!}x^2 + \frac{l(l+1)(l-2)(l+3)}{4!}x^4 - \cdots\right] \\ &+ a_1\left[x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3 + \frac{(l-1)(l+2)(l-3)(l+4)}{5!}x^5 - \cdots\right] \end{aligned} \tag{۲-۷}$$

از معادلهٔ (۲-۶) با استفاده از آزمون خارج قسمت می‌توانید ببینید که این رشته‌ها بـه ازای

$x^2 < 1$ همگرایند. می‌توان نشان داد که این رشته‌ها در حالت کلی به ازای $x^2 = 1$ همگرا نیستند. به عنوان مثالی در این مورد، رشتهٔ a_1 را به ازای $l = 0$ در نظر بگیرید. اگر $x^2 = 1$، این رشته عبارت است از $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ...$، که رشتهٔ هماهنگ و واگراست. در بسیاری از کاربردها x کسینوس زاویه‌ای مانند θ و l یک عدد صحیح (غیر منفی) است، و ما به دنبال جوابی هستیم که برای کلیه θ ها همگرا شود، یعنی، جوابی که در $x = \pm 1$ و همچنین به ازای $|x| < 1$ همگرا شود. همواره می‌توان یک (اما نه دو) جواب از این نوع را به ازای مقادیر صحیح l پیدا کرد؛ ببینیم چگونه.

چندجمله‌ایهای لژاندر قبلاً دیده‌ایم که به ازای $l = 0$ رشتهٔ a_1 در (۲-۷) واگراست. اما به رشتهٔ a_0 نگاه کنید؛ به ازای $l = 0$ فقط $y = a_0$ به دست می‌آید زیرا تمام جملات دیگر شامل ضریب l می‌باشند. اگر $l = 1$، رشتهٔ a_0 در $x^2 = 1$ واگرا می‌شود، اما رشتهٔ a_1 در جملهٔ $y = a_1 x$ متوقف می‌شود [چون تمام جملات دیگر در رشتهٔ a_1 شامل ضریب $(l-1)$ می‌باشند]. به ازای هر عدد صحیح l، یک رشته متوقف می‌شود و یک جواب چندجمله‌ای به دست می‌آید؛ رشتهٔ دیگر در $x^2 = 1$ واگراست. (مقادیر صحیح منفی l صرفاً به جوابهایی منتهی می‌شوند که هم اکنون برای l های مثبت به دست آورده‌ایم؛ مثلاً، $l = -2$ جواب چندجمله‌ای $y = a_1 x$ را می‌دهد که مشابه جواب $l = 1$ است. از اینرو، مرسوم چنین است که l را به مقادیر غیر منفی محدود می‌کنند.) بنابراین، یک مجموعه جواب چندجمله‌ای برای معادلهٔ لژاندر به دست می‌آوریم، یعنی به ازای هر مقدار صحیح غیر منفی l، یک جواب. هر جواب، شامل یک ضریب ثابت اختیاری (a_0 یا a_1) است؛ به ازای $l = 0$، $y = a_0$؛ به ازای $l = 1$، $y = a_1 x$، و الی آخر. اگر مقدار a_0 یا a_1 در هر چندجمله‌ای طوری انتخاب شود که به ازای $x = 1$، $y = 1$ گردد، چندجمله‌ای‌های حاصل را ***چندجمله‌ای‌های لژاندر*** می‌نامند، و به صورت $P_l(x)$ می‌نویسند، از (۲-۶) و (۲-۷) و شرط $P_l(1) = 1$، عبارتهای زیر را برای تعدادی از چندجمله‌ای‌های لژاندر پیدا می‌کنیم:

$$P_0(x) = 1 \,،\, P_1(x) = x \,،\, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad (۲-۸)$$

پیدا کردن چند تای دیگر از چندجمله‌ایهای لژاندر را با این روش و روشهای دیگر، به عنوان

مسأله باقی می‌گذاریم. اگرچه $P_l(x)$ را می‌توان به ازای هر عدد صحیح l با استفاده از این روش پیدا کرد، اما روشهای ساده‌تری را برای به دست آوردن چندجمله‌ایها به ازای مقادیر بزرگتر l در بخشهای ۴ و ۵ مطرح کرده‌ایم.

مسائل ویژه مقداری در پیدا کردن چندجمله‌ایهای لژاندر به عنوان جوابهای معادلهٔ لژاندر (۲-۱)، در واقع یک ***مسألهٔ ویژه مقداری*** را حل کرده‌ایم. (بخش ۴ از فصل ۱۰ را ملاحظه کنید.) به یاد بیاورید که در یک مسألهٔ ویژه مقداری، یک معادله یا مجموعه‌ای از معادلات شامل یک پارامتر داده می‌شود، و ما جوابهایی را می‌خواهیم که شرایط خاصّی را برآورده سازند؛ برای به دست آوردن چنین جوابهایی باید مقادیر خاصی (به نام ویژه مقدار) را برای پارامتر مسأله انتخاب کنیم. در پیدا کردن چندجمله‌ایهای لژاندر، جوابهای رشته‌ای مورد نظر ما برای معادلهٔ لژاندر (۲-۱) آنهایی بودند که در $x = \pm ۱$ همگرا شوند. دیدیم که چنین جوابهایی را در صورتی می‌توان پیدا کرد که پارامتر l بتواند هر مقدار صحیحی را بپذیرد. مقادیر l، یعنی ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، ***ویژه مقدار*** (یا ***مقدار مشخّصه***)، و جوابهای همخوان $P_l(x)$، ***ویژه تابع*** (یا ***تابع مشخّصه***) نامیده می‌شوند. بخش ۲۲ و فصل ۱۳ را برای مثالهای بیشتری از ویژه مقادیر و ویژه توابع ملاحظه کنید.

چندجمله‌ایهای لژاندر، توابع لژاندر نوع اول نیز نامیده می‌شوند. جواب دوم به ازای هر l را، که یک رشتهٔ نامتناهی است (به ازای $x^2 < ۱$ همگراست)، تابع لژاندر نوع دوم می‌نامند که به صورت $Q_l(x)$ نشان داده می‌شود. توابع $Q_l(x)$ به اندازهٔ چندجمله‌ای‌های $P_l(x)$ کاربرد ندارند. به ازای مقادیر کسری l هر دو جواب، رشته‌هایی نامتناهی هستند؛ این جوابها نیز در عمل به ندرت مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مسائل، بخش ۲

۱- با استفاده از (۲-۶) و (۲-۷) و شرط $P_l(۱) = ۱$، توابع $P_۲(x)$، $P_۳(x)$، $P_۴(x)$ را پیدا کنید.

۲- نشان دهید که $P_l(-۱) = (-۱)^l$. ***راهنمایی:*** $P_l(x)$ چه وقت یک تابع زوج و چه وقت یک تابع فرد است؟

۳- منحنی‌های $P_۰(x)$، $P_۱(x)$، $P_۲(x)$، $P_۳(x)$ را از $x = -۱$ تا $x = ۱$ رسم

کنهد. *راهنمایی:* مسألهٔ ۲ را ملاحظه کنید.

۳- قاعدهٔ لایب نیتز برای مشتق‌گیری از حاصلضرب

اجازه دهید برای چند لحظه به حاشیه رفته و یک روش بسیار مفید برای پیدا کردن مشتق مرتبهٔ بالای یک حاصلضرب را ذکر کنیم. این روش را با یک مثال نشان می‌دهیم (همچنین مسائل ۱ و ۶ را ملاحظه کنید.)

مثال: $(d^9/dx^9)\ (x \sin x)$ را پیدا کنید.

البته می‌توانیم ۹ بار مشتق بگیریم، اما این کار پرزحمتی خواهد بود. قاعدهٔ لایب نیتز بیان می‌کند که جواب بدین صورت است

$$x\frac{d^9}{dx^9}(\sin x) + 9\frac{d}{dx}(x)\frac{d^8}{dx^8}(\sin x) + \frac{9 \times 8}{2!}\frac{d^2}{dx^2}(x)\frac{d^7}{dx^7}(\sin x) + \cdots \quad (1\text{-}3)$$

این عبارت یادآور یک بسط دوجمله‌ای است:

$$(a + b)^9 = a^0 b^9 + 9ab^8 + \frac{9 \times 8}{2!} a^2 b^7 + \cdots$$

در حقیقت ضرایب موجود در (۳-۱) ضرایب دوجمله‌ای هستند و حاصل‌جمع مرتبه‌های دو مشتق در هر جمله برابر ۹ است. (دومین راهنمایی در مسألهٔ ۶ برای درک و به خاطر سپردن این نکته مفید است.) حال اگر، نظیر مثال حاضر، مشتقات یک عامل بعد از چند مشتق اولیه صفر شود، استفاده از قاعدهٔ مزبور کار را بسیار ساده خواهد کرد. در مثال بالا $(d^2/dx^2)\ (x) = 0$ و تمام مشتقات مرتبهٔ بالاتر نیز صفر هستند. به این ترتیب خواهیم داشت

$$\frac{d^9}{dx^9}(x \sin x) = x\frac{d^9}{dx^9}(\sin x) + 9\frac{d^8}{dx^8}(\sin x)$$

$$= x \cos x + 9 \sin x$$

مسائل، بخش ۳

۱- با استفاده از قاعدهٔ لایب نیتز فرمول مربوط به $(d^n/dx^n)\ (uv)$ را بنویسید مسألهٔ ۱ را برای پیدا کردن مشتقات زیر به کار ببرید.

۲- $(d^{10}/dx^{10})\,(x\,e^{x})$ ۳- $(d^{6}/dx^{6})\,(x^{2}\sin x)$

۴- $(d^{25}/dx^{25})\,(x\cos x)$ ۵- $(d^{100}/dx^{100})\,(x^{2}e^{-x})$

۶- مسألهٔ ۱ را ثابت کنید. **راهنمایی:** یک روش، استفاده از استقرای ریاضی است. روش دیگر این است که بنویسیم

$$\frac{d}{dx}(uv) = D(uv) = (D_u + D_v)(uv)$$

که D_u تنها روی u و D_v فقط روی v عمل می‌کند، یعنی $D_u(uv)$ به معنای $v(du/dx)$ است، و الخ. بنابراین

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = (D_u + D_v)^n(uv)$$

$(D_u + D_v)^n$ را با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای بسط دهید و با تعبیر جملات، قاعدهٔ لایب نیتز را به دست آورید.

۴- فرمول رُدریگس

چندجمله‌ایهای لژاندر را به عنوان جوابهای معادلهٔ لژاندر به ازای عدد صحیح l به دست آوردیم؛ روشهای دیگری نیز برای به دست آوردن این جوابها وجود دارد. ثابت خواهیم کرد که فرمول ردریگس

$$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \qquad (۱-۴)}$$

چندجمله‌ایهای لژاندر $P_l(x)$ را به طور صحیح به دست می‌دهد. این اثبات، شامل دو قسمت است. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر

$$v = (x^2-1)^l \qquad (۲-۴)$$

در آن صورت $d^l v/dx^l$ یک جواب معادلهٔ لژاندر است؛ سپس نشان می‌دهیم که در (۴-۱)، $P_l(1) = 1$ است. برای اثبات قسمت اول، dv/dx در (۴-۲) را پیدا می‌کنیم و آن را در $x^2 - 1$ ضرب می‌کنیم:

$$(x^2-1)\frac{dv}{dx} = (x^2-1)\,l(x^2-1)^{l-1}\cdot 2x = 2lxv \qquad (۳-۴)$$

از (۴-۳) طبق قاعدهٔ لایب نیتز $l+1$ بار مشتق می‌گیریم

$$(x^{۲}-۱)\frac{d^{l+۲}v}{dx^{l+۲}}+(l+۱)(۲x)\frac{d^{l+۱}v}{dx^{l+۱}}+\frac{(l+۱)l}{۲!}\cdot ۲\cdot\frac{d^{l}v}{dx^{l}} = ۲lx\frac{d^{l+۱}v}{dx^{l+۱}}+۲l(l+۱)\frac{d^{l}v}{dx^{l}} \quad (۴-۴)$$

با خلاصه کردن (۴-۴)، نتیجه می‌گیریم (مسألهٔ ۱)

$$(۱-x^{۲})\Big(\frac{d^{l}v}{dx^{l}}\Big)''-۲x\Big(\frac{d^{l}v}{dx^{l}}\Big)'+l(l+۱)\frac{d^{l}v}{dx^{l}}=۰ \quad (۵-۴)$$

این صرفاً همان معادلهٔ لژاندر (۲-۱) به ازای $y = d^{l}v/dx^{l}$ است؛ بنابراین، همانگونه که ادعا کردیم، $d^{l}v/dx^{l} = (d^{l}/dx^{l})(x^{۲}-۱)^{l}$ یک جواب معادلهٔ لژاندر است. این جواب یک چندجمله‌ای درجهٔ l است، و چون قبلاً جواب چندجمله‌ای درجهٔ l را چندجمله‌ای لژاندر $P_l(x)$ نامیده‌ایم، لذا جواب مزبور بایستی همین چندجمله‌ای لژاندر باشد با احتمال این تفاوت که ضریب عددی آن را باید طوری تعیین کنیم که $P_l(۱) = ۱$ گردد. یک روش ساده برای نشان دادن اینکه توابع $P_l(x)$ در معادلهٔ (۴-۱) همه به ازای $x = ۱$ مساوی واحد می‌گردند، در مسألهٔ ۲ خلاصه شده است.

مسائل، بخش ۴

۱- معادلات (۴-۴) و (۴-۵) را ثابت کنید.

۲- به روش زیر نشان دهید که با $P_l(x)$ داده شده توسط (۴-۱)، $P_l(۱) = ۱$ است: $(x^{۲}-۱)^{l}$ را به صورت $(x-۱)^{l}(x+۱)^{l}$ بنویسید و از آن طبق قاعدهٔ لایب نیتز l بار مشتق بگیرید. بدون نوشتن تعداد زیادی از جملات ملاحظه می‌کنید که همه جملات به استثنای یکی شامل سازهٔ $(x-۱)$ اند که به ازای $x = ۱$ صفر خواهند شد. با استفاده از این مطلب $P_l(x)$ داده شده در (۴-۱) را به ازای $x = ۱$ حساب کرده و نتیجه بگیرید که $P_l(۱) = ۱$.

۳- از فرمول ردریگس (۴-۱)، $P_۰(x)$، $P_۱(x)$، $P_۲(x)$، $P_۳(x)$، $P_۴(x)$ را پیدا کنید. نتایج خود را با (۲-۸) و مسألهٔ ۲-۱ مقایسه کنید.

۴- نشان دهید که اگر $m < l$ باشد، $\int_{-۱}^{۱} x^{m} P_l(x)\,dx = ۰$ است. *راهنمایی:* از فرمول

ردریگس (۴-۱) استفاده کنید و متوالیاً از آن به روش جزء به جزء انتگرال بگیرید؛ یعنی هر بار از توان x مشتق گرفته و از مشتق، انتگرال بگیرید.

۵- تابع مولّد برای چندجمله‌ایهای لژاندر

عبارت

$$\boxed{\Phi(x,h) = (1 - 2xh + h^2)^{-1/2} \qquad |h| < 1 \qquad (۱-۵)}$$

تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندر نامیده می‌شود. نشان خواهیم داد که

$$\boxed{\Phi(x,h) = P_0(x) + hP_1(x) + h^2P_2(x) + \cdots = \sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x) \qquad (۲-۵)}$$

که در آن توابع $P_l(x)$ چندجمله‌ایهای لژاندر هستند. (مسألهٔ ۲-۴۳ فصل ۱۴ را برای بحث همگرایی رشته‌ها ملاحظه کنید.) بگذارید ابتدا چند جمله از (۵-۲) را بررسی کنیم. برای سادگی $y = 2xh - h^2$ را جایگزین می‌کنیم و توانهای h را جمع می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم:

$$\Phi = (1 - y)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}{2!} y^2 + \cdots \qquad (۳-۵)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(2xh - h^2) + \frac{3}{8}(2xh - h^2)^2 + \cdots$$

$$= 1 + xh - \frac{1}{2}h^2 + \frac{3}{8}(4x^2h^2 - 4xh^3 + h^4) + \cdots$$

$$= 1 + xh + h^2(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}) + \cdots$$

$$= P_0(x) + hP_1(x) + hP_2(x) + \cdots$$

این ثابت نمی‌کند که توابع $P_l(x)$ در (۵-۲) واقعاً چندجمله‌ایهای لژاندر هستند، بلکه صرفاً تحقیقی است در مورد چند جملهٔ اول آن. برای اثبات این که به طور کلی چندجمله‌ایهای $P_l(x)$

در (۵-۲)، چندجمله‌ایهای لژاندر هستند باید نشان دهیم که در معادلهٔ لژاندر صدق می‌کنند و دارای خاصیت $P_l(1) = 1$ می‌باشند. اثبات موضوع آخر ساده است؛ با قرار دادن $x = 1$ در (۵-۱) و (۵-۲)، داریم

$$\Phi(1,h) = (1 - 2h + h^2)^{-1/2} = \frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + \cdots \quad (۵\text{-}۴)$$
$$\equiv P_0(1) + P_1(1)h + P_2(1)h^2 + \cdots$$

چون این یک اتحاد برحسب h است، لذا توابع $P_l(x)$ در (۵-۲) دارای خاصیت $P_l(1) = 1$ می‌باشند. برای اینکه نشان دهیم چندجمله‌ایهای مزبور در معادلهٔ لژاندر صدق می‌کنند، از اتحاد زیر، که می‌توان آنرا با مشتق‌گیری مستقیم و مقداری عملیات جبری از (۵-۱) به دست آورد (مسألهٔ ۲)، استفاده می‌کنیم:

$$(1 - x^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + h\frac{\partial^2}{\partial h^2}(h\Phi) = 0 \quad (۵\text{-}۵)$$

با جایگذاری رشتهٔ (۵-۲) به جای Φ در (۵-۵)، نتیجه می‌گیریم

$$(1 - x^2)\sum_{l=0}^{\infty} h^l P''_l(x) - 2x\sum_{l=0}^{\infty} h^l P'_l(x) + \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)h^l P_l(x) = 0 \quad (۵\text{-}۶)$$

این اتحاد برحسب h است، بنابراین ضریب هر توان h باید صفر باشد. با مساوی صفر قرار دادن ضریب h^l، نتیجه می‌گیریم

$$(1 - x^2)P''_l(x) - 2xP'_l(x) + l(l+1)P_l(x) = 0 \quad (۵\text{-}۷)$$

این معادلهٔ لژاندر است، بنابراین ثابت کرده‌ایم که توابع $P_l(x)$ در (۵-۲) همانطور که ادعا کردیم، در آن صدق می‌کنند.

روابط بازگشتی تابع مولّد برای به دست آوردن ***روابط بازگشتی*** چندجمله‌ایهای لژاندر مفید است. این روابط بازگشتی، اتحادهایی برحسب x هستند و (همچون اتحادهای مثلثاتی) برای ساده کردن کار و کمک به اثباتها و نتیجه‌گیریها به کار می‌روند. بعضی از مثالهای روابط بازگشتی عبارت اند از:

$$
\begin{array}{lll}
l P_l(x) = (2l-1)\, x\, P_{l-1}(x) - (l-1) P_{l-2}(x) & \text{(الف)} & \\
x P'_l(x) - P'_{l-1}(x) = l P_l(x) & \text{(ب)} & \\
P'_l(x) - x P'_{l-1}(x) = l P_{l-1}(x) & \text{(ج)} & (8-5) \\
(1-x^2) P'_l(x) = l P_{l-1}(x) = l x P_l(x) & \text{(د)} & \\
(2l+1) P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) & \text{(ه)} &
\end{array}
$$

اکنون (۵-۸ الف) را به دست می‌آوریم؛ در قسمت مسائل، نحوهٔ به دست آوردن معادلات دیگر خلاصه شده است.

از (۵-۱) داریم

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \Phi}{\partial h} = -\frac{1}{2}(1 - 2xh + h^2)^{-3/2}(-2x + 2h) \\
(1 - 2xh + h^2)\frac{\partial \Phi}{\partial h} = (x - h)\,\Phi
\end{gathered} \qquad (9-5)
$$

با جایگذاری رشتهٔ (۵-۲) و مشتق آن نسبت به h در (۵-۹)، نتیجه می‌گیریم

$$(1 - 2xh + h^2)\sum_{l=1}^{\infty} l h^{l-1} P_l(x) = (x - h)\sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x)$$

این یک اتحاد برحسب h است، بنابراین ضرایب h^{l-1} را برابر قرار می‌دهیم. به این ترتیب، با تنظیم دقیق شاخصها به منظور گزینش جملهٔ h^{l-1} در هر بار، خواهیم داشت

$$l P_l(x) - 2x(l-1) P_{l-1}(x) + (l-2) P_{l-2}(x) = x P_{l-1}(x) - P_{l-2}(x) \qquad (10-5)$$

که به صورت (۵-۸ الف) ساده می‌شود. وقتی چندجمله‌ای‌های لژاندر برای l های کوچک‌تر معلوم باشند، رابطهٔ بازگشتی (۵-۸ الف) ساده‌ترین روش برای پیدا کردن چندجمله‌ایهای لژاندر دیگر است. (مسألهٔ ۳)

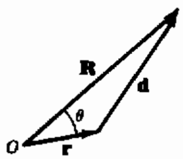
بسط پتانسیل تابع مولد در حل مسائلی مربوط به پتانسیل با نیروی عکس مجذور، مفید است. به خاطر دارید که نیروی گرانشی بین دو جرم نقطه‌ای که به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار

گرفته‌اند، متناسب با $۱/d^۲$ ، و انرژی پتانسیل همخوان با آن متناسب با $۱/d$ است. همچنین، نیروی الکتروستاتیکی بین دو بار الکتریکی به فاصلهٔ d از یکدیگر متناسب با $۱/d^۲$ و انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی همخوان با آن متناسب با $۱/d$ است. در هر دو حالت می‌توانیم پتانسیل را به صورت زیر بنویسیم

$$V = \frac{K}{d} \qquad (۱۱-۵)$$

که K یک ثابت مناسب است. فرض کنید دو جرم (یا دو بار) در شکل ۵-۱ در نوک بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{R}$ هستند. به این ترتیب فاصلهٔ بین آنها طبق قانون کسینوسها عبارت است از

$$\begin{aligned} d &= |\mathbf{R} - \mathbf{r}| \qquad (۱۲-۵) \\ &= \sqrt{R^۲ - ۲Rr \cos\theta + r^۲} \\ &= R\sqrt{۱ - ۲\frac{r}{R}\cos\theta + \left(\frac{r}{R}\right)^۲} \end{aligned}$$



شکل ۵-۱

و پتانسیل گرانشی یا الکتریکی برابر است با

$$V = \frac{K}{R}\left[۱ - \frac{۲r}{R}\cos\theta + \left(\frac{r}{R}\right)^۲\right]^{-۱/۲} \qquad (۱۳-۵)$$

به ازای $|\mathbf{R}| > |\mathbf{r}|$ ، تغییر متغیرهای

$$\begin{aligned} h &= \frac{r}{R} \\ x &= \cos\theta \end{aligned} \qquad (۱۴-۵)$$

را در نظر می‌گیریم. (**توجه کنید:** x یک مختصه نیست بلکه یک متغیر جدید است که به جای $\cos\theta$ می‌نشیند.) به این ترتیب داریم

$$\begin{aligned} d &= R\sqrt{۱ - ۲hx + h^۲} \\ V &= \frac{K}{R}(۱ - ۲hx + h^۲)^{-۱/۲}\, \frac{K}{R}\Phi \end{aligned} \qquad (۱۵-۵)$$

که Φ تابع مولّد (۵-۱) است. سپس با استفاده از (۵-۲)، می‌توانیم پتانسیل V را به صورت

رشتهٔ نامتناهی

$$V = \frac{K}{R}\sum_{l=0}^{\infty} h^l P_l(x) \qquad (۱۶-۵)$$

یا برحسب r و θ [با استفاده از (۵-۱۴)] به صورت زیر بنویسیم

$$V = \frac{K}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l P_l(\cos\theta)}{R^l} = K\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l P_l(\cos\theta)}{R^{l+1}} \qquad (۱۷-۵)$$

در بسیاری از کاربردها فاصلهٔ $|\mathbf{R}|$ خیلی بزرگتر از $|\mathbf{r}|$ است. از اینرو جملات رشتهٔ (۵-۱۷) به علت وجود عامل $(r/R)^l$ به سرعت کاهش می‌یابند و پتانسیل را می‌توان تنها با به کار بردن چند جملهٔ رشته تقریب زد.

با توجه به مسألهٔ زیر، می‌توانیم (۵-۱۷) را به شکل عمومی‌تر و مفیدتری درآوریم. (برای صراحت بیشتر، مورد پتانسیل الکتریکی را بررسی خواهیم کرد - مورد پتانسیل گرانشی را می‌توان با روشی مشابه بررسی کرد.) فرض کنید تعداد زیادی بار q_i در نقاط $\mathbf{r}_i$ وجود دارند. پتانسیل الکتروستاتیکی V_i در نقطهٔ $\mathbf{R}$ ناشی از بار q_i در $\mathbf{r}_i$ به معنای انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی یک جفت بار است، یعنی، بار **واحد** واقع در $\mathbf{R}$ و بار q_i واقع در $\mathbf{r}_i$؛ این پتانسیل با (۵-۱۱) و (۵-۱۲)، یا (۵-۱۷) به ازای $r = r_i$، $\theta = \theta_i$، و $K = q_i \times 1 \times K'$ داده می‌شود که K' یک ثابت عددی است که به انتخاب واحدها بستگی دارد:

$$V_i = K' q_i \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_i^l P_l(\cos\theta_i)}{R^{l+1}} \qquad (۱۸-۵)$$

به این ترتیب پتانسیل کل V در $\mathbf{R}$ بر اثر بارهای q_i برابر است با حاصل‌جمع روی i در تمامی رشتهٔ (۵-۱۸)، یعنی

$$V = \sum_i V_i = K'\sum_i q_i \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_i^l P_l(\cos\theta_i)}{R^{l+1}} = K'\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\sum_i q_i r_i^l P_l(\cos\theta_i)}{R^{l+1}} \qquad (۱۹-۵)$$

اگر به جای مجموعه‌ای از بارهای گسسته یک توزیع بار پیوسته داشته باشیم، در آن صورت جمع بر روی i به یک انتگرال تبدیل می‌شود، یعنی

$$\int r^l P_l(\cos\theta)\, dq \quad \text{یا} \quad \iiint r^l P_l(\cos\theta)\rho\, d\tau \qquad (۲۰-۵)$$

که ρ چگالی بار است و انتگرال روی فضای اشغال شده توسط بار گرفته می‌شود. به این ترتیب (۵-۱۹) تبدیل می‌شود به

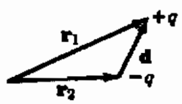
$$V_i = K' \sum_l \frac{1}{R^{l+1}} \iiint r^l P_l(\cos\theta)\rho\, d\tau \qquad (۵\text{-}۲۱)$$

جملات رشتهٔ (۵-۲۱) را می‌توان تعبیر فیزیکی کرد. جملهٔ $l = 0$ برابر است با

$$\frac{1}{R}\iiint \rho\, d\tau = \frac{1}{R} \times (\text{بار کل}) \qquad (۵\text{-}۲۲)$$

بنابراین اگر R در مقایسه با کلیهٔ r_iها یا تمام مقادیر r در نقاط توزیع بار به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، پتانسیل توزیع را می‌توانیم به صورت یک بار منفرد واقع در مبدأ و مساوی با کل بار توزیع تقریب بزنیم. جملهٔ $l = 1$ در (۵-۲۱) برابر است با

$$\frac{1}{R^2}\iiint r\cos\theta\, \rho\, d\tau \qquad (۵\text{-}۲۳)$$



شکل ۵-۲

برای تعبیر این جمله به یاد بیاورید که **گشتاور دو قطبی الکتریکی** یک زوج بار $+q$ و $-q$ که به فاصله d از یکدیگر واقع‌اند (مانند شکل ۵-۲) به صورت بردار $q\mathbf{d}$ تعریف می‌شود، که $\mathbf{d}$ برداری است از $-q$ به $+q$. چون بردار $q\mathbf{d}$ برابر با $q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = q\mathbf{r}_1 - q\mathbf{r}_2$ است، لذا اغلب اوقات $q\mathbf{r}_1$ و $-q\mathbf{r}_2$ را گشتاورهای دوقطبی $+q$ و $-q$ حول O می‌نامیم؛ به این ترتیب، کل گشتاور دوقطبی حاصل از دو "بار" درست برابر با جمع دو گشتاور است. فرض کنید گشتاور دوقطبی کلیهٔ بارهای q_i را حول O حساب کنیم؛ این گشتاور برابر با جمع برداری $\sum_i q_i\mathbf{r}_i$ است. مؤلفهٔ این گشتاور دوقطبی در جهت $\mathbf{R}$ برابر است با $\sum q_i r_i \cos\theta_i$، زیرا θ_i زاویهٔ بین $\mathbf{R}$ و $\mathbf{r}_i$ می‌باشد. در مورد توزیع بار پیوسته، این جمع تبدیل می‌شود به

$$\iiint r\cos\theta\, \rho\, d\tau \qquad (۵\text{-}۲۴)$$

بنابراین از (۵-۲۳) و (۵-۲۴) می‌بینیم که جملهٔ دوم رشتهٔ (۵-۲۱) عبارت است از حاصلضرب $1/R^2$ در مؤلفهٔ گشتاور دوقطبی توزیع بار در جهت $\mathbf{R}$. اگر این واقعیت را در نظر بگیریم که جملهٔ اول (۵-۲۱) شامل کل بار (یک کمیت نرده‌ای، یعنی یک تانسور مرتبهٔ صفر)، و جملهٔ

دوم شامل گشتاور دوقطبی (یک بردار، یعنی یک تانسور مرتبهٔ یک) است، تعجب نخواهید کرد که پی ببرید جملهٔ سوم شامل یک تانسور مرتبهٔ دوم موسوم به گشتاور چارقطبی توزیع بار، جملهٔ چهارم شامل یک تانسور مرتبهٔ سوم موسوم به گشتاور هشت قطبی و الی آخر است. (برای جزئیات بیشتر رک مسألهٔ ۱۵.)

با داشتن یک توزیع بار یا جرم، گشتاورهای مرتبه‌های مختلف و جمله‌های (۵-۲۱) را می‌توان حساب کرد. فرایند معکوس غالباً در مسائل کاربردی حائز اهمیت است. یک ماهواره را در حال گردش به دور زمین در نظر بگیرید؛ این ماهواره در میدان گرانشی جرم زمین در حال حرکت است. اگر توزیع جرم زمین دارای تقارن کروی می‌بود، تنها جملهٔ اول در رشتهٔ پتانسیل گرانشی ظاهر می‌شد [این رشته، همان معادلهٔ (۵-۲۱) خواهد بود که در آن ρ به جای چگالی بار، چگالی جرم است.] اما چون زمین یک کرهٔ کامل نیست (برآمدگی استوا، و الخ)، جمله‌های دیگری هم در (۵-۲۱) حضور دارند و نیروهای همخوان با آنها بر حرکت ماهواره‌ها اثر می‌گذارند. با استفاده از اندازه‌گیریهای دقیق مدارهای ماهواره‌ها اکنون می‌توان جمله‌های زیادی از رشتهٔ (۵-۲۱) را حساب کرد. همچنین، در وضعیت الکتریکی، اندازه‌گیریهای تجربی اطلاعاتی راجع به توزیع بار الکتریکی در داخل اتمها و هسته‌ها به ما می‌دهند؛ بحث حاضر و معادلهٔ (۵-۲۱)، پایهٔ تعبیر این‌گونه اندازه‌گیریها و اصطلاحات به کار رفته در بررسی آنها را فراهم می‌آورند.

مسائل، بخش ۵

۱- $P_3(x)$ را با به دست آوردن یک جملهٔ بیشتر در بسط تابع مولد (۵-۳) پیدا کنید.

۲- (۵-۵) را با استفاده از (۵-۱) ثابت کنید.

۳- با استفاده از رابطهٔ بازگشتی (۵-۸ الف) و مقادیر $P_0(x)$ و $P_1(x)$، توابع $P_2(x)$، $P_3(x)$، $P_4(x)$، $P_5(x)$، و $P_6(x)$ را پیدا کنید. [بعد از اینکه $P_2(x)$ را پیدا کردید، آنرا برای پیدا کردن $P_3(x)$، و غیره به کار ببرید]

۴- با استفاده از (۵-۱) نشان دهید که

$$(x - h)\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} = h\,\frac{\partial \Phi}{\partial h}$$

رشتهٔ (۵-۲) را جایگزین Φ، و سپس رابطهٔ بازگشتی (۵-۸ ب) را ثابت کنید.

۵- از رابطهٔ بازگشتی(۵-۸ الف) مشتق بگیرید و با استفاده از رابطهٔ بازگشتی (۵-۸ ب) و قرار دادن $l-1$ به جای l، رابطهٔ بازگشتی (۵-۸ ج) را ثابت کنید.

۶- با استفاده از (۵-۸ ب) و (۵-۸ ج)، رابطهٔ (۵-۸ د) را به دست آورید. سپس از (۵-۸ د) نسبت به x مشتق بگیرید و با استفاده از (۵-۸ ب)، $P'_{l-1}(x)$ را حذف کنید. نتیجه باید معادلهٔ لژاندر باشد. راه حلّ مسائل ۴ تا ۶ اثبات دیگری است [به جای معادلات (۵-۵) تا (۵-۷)] بر اینکه توابع $P_l(x)$ در (۵-۲) چندجمله‌ایهای لژاندر هستند.

۷- در رابطهٔ (۵-۸ ج) l را با $l + 1$ جایگزین کرده و با استفاده از آن جمله $x\,P'_l(x)$ را در (۵-۸ ج) حذف کنید. شما با این کار باید (۵-۸ هـ) را به دست آورید.

هریک از چندجمله‌ایهای زیر را به صورت ترکیباتی خطی از چندجمله‌ایهای لژاندر بیان کنید. ***راهنمایی:*** از بالاترین توان x شروع، و ترکیبات صحیح را پیدا کنید.

۸- $5 - 2x$ ۹- $3x^2 + x - 1$ ۱۰- x^4

۱۱- $x - x^3$ ۱۲- $7x^4 - 3x + 1$ ۱۳- x^5

۱۴- نشان دهید که هر چندجمله‌ای درجهٔ n را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از چندجمله‌ایهای لژاندر با $n \geq l$ نوشت.

۱۵- پتانسیل $V = K/d$ در (۵-۱۱) را به روش زیر بسط دهید و ملاحظه کنید که چگونه جمله‌های آن به تانسورهای اشاره شده در فوق بستگی دارند. فرض کنید در شکل (۵-۱)، $\mathbf{R}$ دارای مختصات X ، Y ، Z و $\mathbf{r}$ دارای مختصات x ، y ، z است. [*توجّه:* مختصهٔ x در اینجا همان x رابطهٔ (۵-۱۴) **نیست.**] به این ترتیب

$$V = \frac{K}{d} = K\left[\,(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2\right]^{-1/2}$$

X ، Y ، Z را ثابت بگیرید و $V(x, y, z)$ را برحسب یک رشتهٔ توانی سه‌متغیره حول مبدأ بسط دهید. (بخش ۲ از فصل ۴ را برای بحث رشتهٔ توانی دو متغیره ملاحظه کنید و روش را تعمیم دهید.) با این کار شما باید نتیجهٔ زیر را پیداکنید

$$V = \frac{K}{R} + \frac{K}{R^2}\left(\frac{X}{R}x + \cdots\right) + \frac{K}{R^3}\left[\left(\frac{3}{2}\frac{X^2}{R^2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \cdots + \frac{3}{2}\frac{X}{R}\frac{Y}{R}\,2xy + \cdots\right] + \cdots$$

و جمله‌های مشابهی برحسب y، z، y^2، xz و الی آخر. اکنون با فرض $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ و $K = K'\,q_i$ برای یک توزیع بار نظیر (۵-۱۸)، و جمعیابی (یا انتگرالگیری) روی توزیع بار نشان دهید که: اولین جمله صرفاً مساوی (K'/R×کلّ بار) است؛ گروه بعدی جملات (برحسب x ، y ، z) شامل سه مؤلفهٔ گشتاور دوقطبی الکتریکی می‌باشند؛ حاصل‌جمع این جمله‌ها برابر است با (K'/R^2× مؤلفهٔ گشتاور دوقطبی الکتریکی در جهت $\mathbf{R}$)؛ گروه بعدی (جمله‌های مرتبهٔ دوم) شامل شش کمیت به شکل زیر هستند

$$\iiint x^2 \rho\, d\tau$$ و انتگرالهای مشابه برای y و z

$$\iiint 2xy\rho\, d\tau$$ و انتگرالهای مشابه برای xz، yz

اگر جملهٔ $2xy$ را به صورت $xy + yx$ بنویسیم، این ۶ جمله، ۹ مؤلفهٔ یک تانسور مرتبهٔ دوم را می‌دهند که گشتاور چارقطبی نامیده می‌شود. روش مسألهٔ ۱۲-۱۱ ب در فصل ۱۰ را به کار ببرید و نشان دهید که این یک تانسور مرتبهٔ دوم *است*. درست همانگونه که دو بارِ $+q$ و $-q$ یک دوقطبی الکتریکی می‌سازند، چهار بار مثل یک چـــارقطبی الکتریکی تشکیل می‌دهند و جمله‌های مرتبهٔ دوم در رشتهٔ V ، پتانسیل چنین آرایشی از بارها را می‌دهند. بدون محاسبهٔ ضرایب رشته، نشان دهید که جمله‌های مرتبه سوم برحسب x، y، z شامل تعداد درست جمله‌های یک تانسور مرتبهٔ سوم خواهند بود؛ این به عنوان گشتاور هشت قطبی شناخته می‌شود و از نظر فیزیکی می‌توان آنرا با دو چارقطبی کنار هم نمایش داد درست همانگونه که چارقطبی بالا از دو دوقطبی کنار هم تشکیل شده است.

۶- مجموعه‌های کامل توابع متعامد

برای پی بردن به دلیل اصطلاحاتی که به کار خواهیم برد، به یاد دارید که دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در صورتی متعامد اند که حاصلضرب داخلی آنها صفر باشد. یعنی

$$A_x B_x + A_y B_y = ۰ \quad \text{در دو بعد}$$
$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = ۰ \quad \text{در سه بعد} \qquad (۶-۱)$$

در فصل ۱۰ دیدیم که استفاده از نماد کلی‌تر

$$A_x = A_۱ \qquad A_y = A_۲ \qquad A_z = A_۳$$

برای $\mathbf{A}$ ، و همچنین نماد مشابهی برای $\mathbf{B}$ ،مناسب‌تر است. با این نمادگذاری، شرایط تعامد (۶-۱) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$A_۱ B_۱ + A_۲ B_۲ = \sum_{i=۱}^{۲} A_i B_i = ۰$$
$$A_۱ B_۱ + A_۲ B_۲ + A_۳ B_۳ = \sum_{i=۱}^{۳} A_i B_i = ۰ \qquad (۶-۲)$$

همچنین به یاد دارید (فصل ۳، انتهای بخش ۸ و فصل ۱۰، بخش ۳) که، در مسائل با بیش از سه متغیر، بهتر است استفاده از زبان هندسی را ادامه دهیم و بردارهای n بعدی را تعریف کنیم. در این صورت می‌گوییم دو بردار در n بعد متعامد اند اگر

$$\sum_{i=۱}^{n} A_i B_i = ۰ \qquad (۶-۳)$$

حال بگذارید دو تابع $A(x)$ و $B(x)$ را در نظر بگیریم که برای آنها رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\int_a^b A(x)\, B(x)\, dx = ۰ \qquad (۶-۴)$$

اغلب اوقات می‌توان یک انتگرال را به صورت نوعی جمع در نظر گرفت که در آن متغیر جمعیابی (متغیر انتگرال‌گیری) به جای مقادیر گسسته، مقادیر پیوسته‌ای را می‌پذیرد. بنابراین، شباهت نزدیکی بین معادلات (۶-۳) و (۶-۴) وجود دارد. به علت این شباهت می‌گوییم $A(x)$ و $B(x)$ در بازهٔ (a, b) متعامد اند در صورتی که شرط (۶-۴) را برقرار کنند. این یک **تعریف** برای اصطلاح ***توابع متعامد*** است؛ همین شباهت به روشنی توضیح می‌دهد که چرا این اصطلاح را به کار می‌بریم. اگر توابع $A(x)$ و $B(x)$ مختلط باشند، تعریف تعامد اندکی با (۶-۴) متفاوت است:

$A(x)$ و $B(x)$ در بازهٔ (a, b) متعامد اند اگر

$$\int_a^b A^*(x)\, B(x)\, dx = ۰ \qquad (۶-۵)$$

که $A^*(x)$ مزدوج **مختلط** $A(x)$ است (مسألهٔ ۱ را ملاحظه کنید.)

اگر $A(x)$ و $B(x)$ حقیقی باشند، (۶-۵) با (۶-۴) یکی است، لذا می‌توانیم (۶-۵) را به عنوان تعریف اساسی تعامد $A(x)$ و $B(x)$ در بازهٔ (a, b) بگیریم.

اگر مجموعه توابع $A_n(x)$ را داشته باشیم که در آن $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ و

$$\int_a^b A^*_n(x)\, A_m(x)\, dx = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } m \neq n \\ \text{ثابت} \neq ۰ & \text{اگر } m = n \end{cases} \qquad (۶-۶)$$

توابع $A_n(x)$ را یک ***مجموعه توابع متعامد*** می‌نامیم. این‌گونه مجموعه توابع را پیش از این در رشتهٔ فوریه به‌کار برده‌ایم. به خاطر بیاورید که

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } m \neq n \\ \pi & \text{اگر } m = n \neq ۰ \end{cases} \qquad (۷-۶)$$

بنابراین $\sin nx$ یک مجموعه توابع متعامد در بازهٔ $(-\pi, \pi)$، یا در حقیقت در هر بازهٔ به طول ۲π است. به طور مشابه، توابع $\cos nx$ در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ متعامد اند. همچنین کلّ مجموعهٔ شامل $\sin nx$ و $\cos nx$ یک مجموعه توابع متعامد در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ است زیرا

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = ۰ \qquad \text{به ازای هر مقدار } m \text{ و } n$$

از توابع مختلط یعنی مجموعه e^{inx} نیز استفاده کرده‌ایم. برای این مجموعه، ویژگی تعامد با (۶-۶) داده می‌شود، یعنی

$$\int_{-\pi}^{\pi} (e^{inx})^* e^{imx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{imx}\, dx = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } m \neq n \\ ۲\pi & \text{اگر } m = n \end{cases} \qquad (۸-۶)$$

به یاد بیاورید که $\sin nx$ و $\cos nx$ (یا e^{inx}) توابعی بودند که در بسط رشتهٔ فوریه در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ به‌کار می‌رفتند. حالا باید توجه کرده باشید که این خاصیت تعامد بودکه برای تعیین ضرایب مورد استفاده قرار دادیم. وقتی که معادلهٔ $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}$ را در e^{-inx} ضرب کردیم و انتگرال گرفتیم، انتگرالهای تمام جملات رشته به جز جملهٔ c_n به علت خاصیت تعامد (۶-۸) صفر بودند. علاوه بر توابع مثلثاتی و نمایی، مجموعه توابع متعامد بسیار دیگری

هم وجود دارند. درست همانگونه که مجموعهٔ سینوس -کسینوس یا نمایی را برای بسط یک تابع به صورت رشتهٔ فوریه به کار بردیم، می‌توانیم یک تابع را با استفاده از مجموعه توابع متعامد دیگر نیز بسط دهیم. این موضوع را برای توابع $P_l(x)$ پس از اثبات متعامد بودنشان نشان خواهیم داد.

نکتهٔ مهم دیگری وجود دارد که باید به هنگام بسط یک تابع برحسب مجموعه توابع متعامد مورد توجه قرار داد. باز هم بگذارید ابتدا شباهت برداری را مورد بررسی قرار دهیم. بردارها را برحسب مؤلفه‌هایشان و بردارهای پایه $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ می‌نویسیم. در دو بعد تنها به دو بردار پایه نیاز داریم، مثلاً $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$. اما اگر سعی می‌کردیم بردارهای سه بعدی را تنها برحسب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ بنویسیم، بردارهایی پیدا می‌شدند که نمی‌توانستیم آنها را نمایش دهیم؛ لذا می‌گوییم که (در سه بعد) $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ یک مجموعهٔ ***کامل*** پایه نیستند. روش سادهٔ بیان این نکته (که به n بعد قابل تعمیم است) این است که بگوییم بردار دیگری (یعنی $\mathbf{k}$) وجود دارد که بر هر دو بردار $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ عمود است. بنابراین یک مجموعه پایهٔ متعامد را ***کامل*** می‌گوییم در صورتی که بردار دیگری عمود بر همهٔ آنها وجود نداشته باشد (در فضای چند بعدی که بررسی می‌کنیم). به طور مشابه، مجموعه توابعی را در یک بازهٔ معین ***کامل*** می‌گوییم که هیچ تابع دیگری عمود بر تمام آنها در آن بازهٔ مورد نظر موجود نباشد. اکنون به آسانی ملاحظه می‌کنیم که بعضی بردارها در فضای سه بعدی وجود دارند که نمی‌توانیم آنها را فقط با استفاده از $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ نمایش بدهیم. به طور مشابه، توابعی وجود دارند که نمی‌توان آنها را با استفاده از یک مجموعهٔ توابع متعامد ناکامل، به صورت یک رشته نمایش داد. مثالی از این نوع را در مبحث رشتهٔ فوریه بررسی کرده‌ایم (فصل ۷، بخش ۱۱). اگر بخواهیم یک موج صوتی را توسط یک رشتهٔ فوریه نمایش بدهیم. نباید هیچ یک از هماهنگهای آن را از قلم بیندازیم؛ یعنی، اگر بعضی از مقادیر n را از قلم بیندازیم مجموعه توابع $\sin nx$، $\cos nx$ در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ کامل نخواهند بود. به عنوان یک مثال دیگر، مجموعه توابع $\sin nx$ در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ یک مجموعهٔ متعامد است. اما، این مجموعه کامل نیست؛ برای داشتن یک مجموعهٔ کامل باید توابع $\cos nx$ را نیز به آن بیفزاییم، و این کاری است که در مورد رشتهٔ فوریه انجام دادیم. از طرف دیگر، $\sin nx$ در بازهٔ $(0, \pi)$ یک مجموعهٔ کامل است؛ این واقعیت را هنگام شروع با یک تابع مفروض در بازهٔ $(0, \pi)$، به این ترتیب اعمال کردیم که آنرا در بازهٔ $(-\pi, 0)$ تعریف کردیم تا فرد شود، و سپس آنرا به صورت یک رشتهٔ

سینوسی بسط دادیم. به طور مشابه، $\cos nx$ در بازهٔ $(\circ\,,\pi)$ یک مجموعهٔ کامل است. در این فصل، به ویژه به این واقعیت (بدون ذکر اثبات) علاقه‌مندیم که چندجمله‌ایهای لژاندر در بازهٔ $(-۱,۱)$ یک مجموعهٔ کامل‌اند.

مسائل، بخش ۶

۱- نشان دهید که اگر $\int_a^b A^*(x)\, B(x)\, dx = \circ$ باشد [(۶-۵) را ملاحظه کنید]، در آن صورت $\int_a^b A(x)\, B^*(x)\, dx = \circ$ است، و بالعکس.

۲- نشان دهید که توابع $e^{in\pi x/l}$، به ازای $n = \circ\,،\, \pm ۱\,،\, \pm ۲\,،\, \ldots$، در بازهٔ $(-l\,,l)$ یک مجموعه توابع متعامد اند.

۳- نشان دهید که توابع $x^۲$ و $\sin x$ در بازهٔ $(-۱,۱)$ متعامد اند. ***راهنمایی:*** بخش ۹ از فصل ۷ را ملاحظه کنید.

۴- نشان دهید که اگر $f(x)$ زوج و $g(x)$ فرد باشد توابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازهٔ $(-a\; a)$، متعامد اند. (مسألهٔ ۳ را ملاحظه کنید.)

۵- با محاسبهٔ $\int_{-۱}^{۱} P_\circ(x)\, P_۲(x)\, dx$ نشان دهید این توابع در بازهٔ $(-۱,۱)$ متعامد اند.

۶- به دو طریق نشان دهید که $P_l(x)$ و $P'_l(x)$ در بازهٔ $(-۱,۱)$ متعامد اند. ***راهنمایی:*** مسألهٔ ۴ و مسألهٔ ۴-۴ را ملاحظه کنید.

۷- با سعی بر بسط تابع $f(x) = ۱$ در بازهٔ $(-\pi\,,\pi)$ برحسب $\sin nx$، نشان دهید که مجموعه $\sin nx$ در فاصله $(-\pi\,,\pi)$ یک مجموعهٔ کامل نیست.

۸- نشان دهید که توابع $\cos\,(n+\frac{۱}{۲})x$ به ازای، $n = \circ\,،\,۱\,،\,۲\,،\,\ldots$ در بازهٔ $(\circ\,,\pi)$ متعامد اند. تابع $f(x) = ۱$ را در بازهٔ $(\circ\,,\pi)$ برحسب این جملات بسط دهید.

۹- به دو طریق نشان دهید که $\int_{-۱}^{۱} P_{۲n+۱}(x)\, dx = \circ$.

۷- تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر

می‌خواهیم نشان دهیم که چندجمله‌ایهای لژاندر در بازهٔ $(-۱,۱)$ یک مجموعهٔ متعامد اند، یعنی

$$\boxed{(۱-۷)\qquad \int_{-۱}^{۱} P_l(x)\, P_m(x)\, dx = \circ \quad \text{مگر اینکه } l = m \text{ باشد}}$$

برای اثبات این مطلب، معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر (۲-۱) را مجدداً به شکل زیر می‌نویسیم

$$\frac{d}{dx}[(۱-x^۲)P'_l(x)] + l(l+۱)\,P_l(x) = ۰ \qquad (۷-۲)$$

(۷-۲) را برای $P_l(x)$ و $P_m(x)$ بنویسید؛ معادلهٔ $P_l(x)$ را در $P_m(x)$ و معادلهٔ $P_m(x)$ را در $P_l(x)$ ضرب و از هم کم کنید تا نتیجه شود

$$P_m(x)\frac{d}{dx}[(۱-x^۲)P'_l(x)] - P_l(x)\frac{d}{dx}[(۱-x^۲)P'_l(x)] \qquad (۷-۳)$$
$$+ [l(l+۱) - m(m+۱)]\,P_m(x)\,P_l(x) = ۰$$

دو جملهٔ (۷-۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dx}[(۱-x^۲)(P_m P'_l - P_l P'_m)] \qquad (۷-۴)$$

که، برای سهولت، نوشته‌ایم $P = P_l(x)$، و الی آخر. با انتگرال گرفتن از (۷-۳) بین ۱- و ۱ و استفاده از (۷-۴)، نتیجه می‌گیریم

$$(۱-x^۲)(P_m P'_l - P_l P'_m)\Big|_{-۱}^{۱} + [l(l+۱)-m(m+۱)]\int_{-۱}^{۱} P_m(x)P_l(x)dx = ۰ \qquad (۷-۵)$$

جملهٔ انتگرال گرفته شده صفر است زیرا $(۱-x^۲)$ در $x = \pm۱$ صفر است، و $P_m(x)$ و $P_l(x)$ متناهی‌اند. کروشهٔ جلوِ انتگرال صفر نیست مگر اینکه $l = m$ باشد. بنابراین، به ازای $l \neq m$ انتگرال باید صفر باشد و (۷-۱) محقق می‌شود.

روشی که در اینجا به کار می‌بریم یک روش استاندارد است که می‌تواند برای اثبات خاصیت تعامد مجموع توابع متعامد دیگر نیز با استفاده از معادلهٔ دیفرانسیلی که توابع در آن صدق می‌کنند، مورد استفاده قرار گیرد. (مسائل ۱ و ۲، مسألهٔ ۱۰-۳، و بخش ۱۹ را ملاحظه کنید.)

به یاد بیاورید (مسائل ۸ تا ۱۴ از بخش ۵) که هر چندجمله‌ای درجه n را می‌توانیم به صورت ترکیبی خطی از چندجمله‌ایهای لژاندر با درجهٔ کوچک‌تر یا مساوی n بنویسیم. بنابراین، با استفاده از (۷-۱) نتیجه می‌گیریم که تمام چندجمله‌ای‌های با درجهٔ کوچک‌تر از l بر $P_l(x)$ عمودند:

$$\boxed{\int_{-۱}^{۱} P_l(x) \times (\text{هر چندجمله‌ای با درجهٔ کوچک‌تر از } l)\, dx = ۰ \qquad (۷-۶)}$$

مسائل، بخش ۷

۱- با روشی مشابه با آنچه که نشان دادیم P_lها در بازهٔ (۱ ،۱-) مجموعه توابع متعامدی هستند، نشان دهید که جوابهای معادلهٔ $y''_n = -n^2 y_n$ در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ مجموعه‌ای متعامد است. ***راهنمایی:*** باید بدانید که جوابهای y_n چه توابعی هستند؛ از خود توابع استفاده نکنید، اما می‌توانید از مقادیر آنها و مقادیر مشتقات آنها در $-\pi$ و π برای محاسبهٔ قسمت انتگرال‌گیری شدهٔ معادله‌تان استفاده کنید.

۲- با استفاده از روش به کار رفته در (۷-۲) تا (۷-۵)، نشان دهید که جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + [l(l+1) - (1 - x^2)^{-1}]y = 0$$

در بازهٔ (۱ ،۱-) مجموع توابع متعامدی هستند.

۳- با استفاده از مسألهٔ ۴-۴ نشان دهید که اگر $m < l$ باشد، $\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_l(x)\, dx = 0$

تذکر: این روش، اثبات متفاوتی برای تعامد است - با استفاده از فرمول ردریگس به جای استفاده از معادلهٔ دیفرانسیل.

۴- با استفاده از معادلهٔ (۷-۶) نشان دهید $\int_{-1}^{1} P_l(x)\, P'_{l-1}(x)\, dx = 0$.

راهنمایی: درجهٔ $P'_{l-1}(x)$ چیست؟ همچنین نشان دهید که

$$\int_{-1}^{1} P'_l(x) P_{l+1}(x)\, dx = 0$$

۵- نشان دهید که به ازای $l > 0$، $\int_{-1}^{1} P_l(x)\, dx = 0$.

راهنمایی: $\int_{-1}^{1} P_l(x)\, P_0(x)\, dx = 0$ را در نظر بگیرید.

۶- نشان دهید که $P_1(x)$ در بازهٔ (۱ ،۱-) بر $[P_l(x)]^2$ عمود است. ***راهنمایی:*** مسألهٔ ۴-۴ را ملاحظه کنید.

۸- بهنجار ساختن چندجمله‌ایهای لژاندر

معادلات (۶-۳) و (۶-۴) یا (۶-۵) از بخش ۶ را به خاطر بیاورید که طیّ آن مقایسه‌ای بین ضرب نقطه‌ای دو بردار و انتگرال حاصلضرب دو تابع به عمل آوردیم. اگر ضرب نقطه‌ای یک بردار در خودش، یعنی $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2$، را در نظر بگیریم مربع طول (نُرم) بردار به دست می‌آید.

اگر $\mathbf{A}$ را بر طول آن تقسیم کنیم، یک بردار یکّه به دست می‌آید. به طور مشابه، اگر

$$\int_a^b A^*(x)\,A(x)\,dx = \int_a^b |A(x)|^2\,dx = N^2$$

N را نُرم تابع $A(x)$ در بازهٔ $(a\,,b)$ می‌نامیم. همچنین اصطلاحاً می‌گوییم که تابع $N^{-1}A(x)$ **بهنجار** شده است؛ نظیر یک بردار یکّه، تابع بهنجار شده دارای نرمِ واحد است. ضریب N^{-1} را ضریب **بهنجارش** می‌نامیم. برای مثال، $\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi/2$. در این صورت نرم $\sin nx$ در بازهٔ $(0\,,\pi)$ برابر $\sqrt{\pi/2}$ است و توابع $\sqrt{2/\pi}\,\sin nx$ در بازهٔ $(0\,,\pi)$ دارای نرم واحد می‌باشند، یعنی توابعی بهنجار شده‌اند. یک مجموعهٔ توابع متعامد بهنجار شده (با ترکیب این دو کلمه) ***متعامد بهنجار*** نامیده می‌شود. برای مثال، $\sqrt{2/\pi}\,\sin nx$ در بازهٔ $(0\,,\pi)$ یک مجموعهٔ متعامد بهنجار است.

چنین مجموعه توابع متعامد بهنجاری ممکن است ما را به یاد بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ بیندازد؛ نظیر این بردارهای یکّه، توابع مزبور متعامد اند و دارای نرم ۱ می‌باشند. در ادامهٔ مقایسهٔ بین بردارها و توابع، خوب است که توابع را به صورت بردارهای یک فضای برداری در نظر بگیریم. در آن صورت می‌توانیم یک مجموعه توابع متعامد بهنجار را به عنوان بردارهای پایهٔ فضا تلقی کنیم، و توابع دیگر را برحسب آنها (در تشابه با نوشتن یک بردار سه بعدی برحسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$)بسط دهیم. برای مثال، فرض کنید تابع مفروض $f(x)$ را در بازهٔ $(0\,,\pi)$ به صورت یک رشتهٔ سینوسی بسط داده باشیم:

$$f(x) = \sum B_n \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin nx$$

$f(x)$ را برداری با مؤلفه‌های B_n برحسب بردارهای پایهٔ $\sqrt{2/\pi}\,\sin nx$ می‌نامیم. به همین دلیل است که در مکانیک کوانتومی، اغلب به تابعی که حالت یک سیستم فیزیکی را توصیف می‌کند تابع حالت یا بردار حالت می‌گوییم. درست همانگونه که می‌توانیم بردار سه بعدی را برحسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ یا برحسب پایه‌های دیگری، مثل $\mathbf{e}_r$، $\mathbf{e}_\theta$، $\mathbf{e}_\phi$، بنویسیم، می‌توانیم تابع مفروض $f(x)$ را نیز برحسب مجموعهٔ توابع متعامد بهنجار دیگری بسط داده و مؤلفه‌های آنرا نسبت به این پایه‌های جدید پیدا کنیم. در بخش ۹، خواهیم دید که چگونه توابع را برحسب رشتهٔ لژاندر بسط دهیم.

همانطور که در رشتهٔ فوریه به نرم $\sin nx$ نیاز داشتیم، در بسط توابع به رشتهٔ لژاندر نیز به

نرم $P_l(x)$ نیاز خواهیم داشت. ثابت خواهیم کرد که

$$\boxed{\int_{-1}^{1} [P_l(x)]^2\, dx = \frac{2}{2l+1} \qquad (۸-۱)}$$

به این ترتیب توابع $\sqrt{(2l+1)/2}\; P_l(x)$ در بازهٔ $(-1, 1)$ یک مجموعهٔ متعامد بهنجار تشکیل می‌دهند.

برای اثبات (۸-۱)، از رابطهٔ بازگشتی (۵-۸ ب) استفاده می‌کنیم، یعنی،

$$l P_l(x) = x P'_l(x) - P'_{l-1}(x) \qquad (۸-۲)$$

از ضرب کردن (۸-۲) در $P_l(x)$ و انتگرالگیری، نتیجه می‌شود

$$l \int_{-1}^{1} [P_l(x)]^2\, dx = \int_{-1}^{1} x P_l(x) P'_l(x)\, dx - \int_{-1}^{1} P_l(x) P'_{l-1}(x)\, dx \qquad (۸-۳)$$

که آخرین انتگرال با توجه به مسألهٔ ۷-۴ صفر است. برای محاسبهٔ انتگرال دوم در (۸-۳)، انتگرال جزء به جزء می‌گیریم:

$$\int_{-1}^{1} x P_l(x) P'_l(x)\, dx = \frac{x}{2} [P_l(x)]^2 \Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [P_l(x)]^2\, dx$$
$$= 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [P_l(x)]^2\, dx$$

(مسألهٔ ۲-۲ را ملاحظه کنید). به این ترتیب (۸-۳) نتیجه می‌دهد

$$l \int_{-1}^{1} [P_l(x)]^2\, dx = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [P_l(x)]^2\, dx$$

که به صورت (۸-۱) خلاصه می‌شود.

مسائل، بخش ۸

نرم هر یک از توابع زیر را در بازهٔ داده شده پیدا و تابع متعامد بهنجار را مشخص کنید.

۱- $\cos nx$ در بازهٔ $(0, \pi)$ ۲- $p_2(x)$ در بازهٔ $(-1, 1)$

۳- $x\, e^{-x/2}$ در بازهٔ $(0, \infty)$ ۴- $e^{-x^2/2}$ در بازهٔ $(-\infty, \infty)$

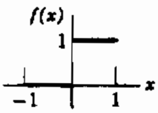
۵- $x\, e^{-x^2/2}$ ، در بازهٔ $(0\,,\infty)$. **راهنمایی:** بخش ۱۲ از فصل ۴ را ملاحظه کنید.

۶- رابطهٔ (۸-۱) را به صورت زیر نیز می‌توان ثابت کرد: (۵-۸ هـ) را در $P_l(x)$ ضرب کنید و از ۱- تا ۱ انتگرال بگیرید. برای محاسبهٔ جملهٔ میانی، جزء به جزء انتگرال بگیرید. سپس از مسألهٔ ۷-۴ استفاده کنید.

۹- رشتهٔ لژاندر

چون چندجمله‌ایهای لژاندر مجموعهٔ متعامد کاملی را در بازهٔ (۱,۱-) تشکیل می‌دهند، لذا می‌توانیم توابع را برحسب رشتهٔ لژاندر نیز بسط دهیم، درست همانطور که آنها را برحسب رشتهٔ فوریه بسط دادیم.

مثال . تابع $f(x)$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود برحسب رشتهٔ لژاندر بسط دهید



$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad (۹-۱)$$

شکل ۹-۱

شکل (۹-۱) را ملاحظه کنید). قرار می‌دهیم

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x) \qquad (۹-۲)$$

مسأله این است که ضرایب c_l را پیدا کنیم. این کار را با روشی نظیر روشی که در پیدا کردن فرمولهای ضرایب رشتهٔ فوریه به کار بردیم، انجام می‌دهیم. طرفین (۹-۲) را در $P_m(x)$ ضرب می‌کنیم و از ۱- تا ۱+ انتگرال می‌گیریم. چون چندجمله‌ایهای لژاندر متعامد اند، لذا تمام انتگرالهای طرف راست به استثنای انتگرال شامل c_m ، مساوی صفر هستند، که آنرا هم می‌توانیم به کمک رابطهٔ (۸-۱) حساب کنیم. بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, P_m(x)\, dx = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \int_{-1}^{1} P_l(x)\, P_m(x)\, dx = c_m \cdot \frac{2}{2m+1} \qquad (۹-۳)$$

با استفاده از این نتیجه در مثال (۹-۱)، خواهیم داشت

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, P_0(x)\, dx = c_0 \int_{-1}^{1} [P_0(x)]^2\, dx \quad \text{یا} \quad \int_{0}^{1} dx = c_0 \times 2 \;،\; c_0 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,P_1(x)\,dx = c_1 \int_{-1}^{1} [P_1(x)]^2\,dx \text{ یا } \int_0^1 x\,dx = c_1 \times \frac{2}{3}\,,\ c_1 = \frac{3}{4}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,P_2(x)\,dx = c_2 \int_{-1}^{1} [P_2(x)]^2\,dx \text{ یا } \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) dx = c_2 \times \frac{2}{5}\,,\ c_2 = 0$$

با ادامهٔ این روش، برای تابع داده شده در (۹-۱) داریم

$$f(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{3}{4} P_1(x) - \frac{7}{16} P_3(x) + \frac{11}{32} P_5(x) + \cdots \qquad (۹-۴)$$

لازم نیست آنگونه که برای بسط برحسب رشتهٔ مک‌لورن الزامی است، $f(x)$ در اینجا پیوسته باشد. مانند رشتهٔ فوریه، شرایط دریشلت (بخش ۶ از فصل ۷ را ملاحظه کنید) مجموعه شرایط کافی مناسبی برای قابل بسط بودن تابع $f(x)$ برحسب رشتهٔ لژاندر می‌باشند. اگر $f(x)$ در بازهٔ (۱ ,۱-) شرایط دریشلت را داشته باشد، آنگاه در نقاط بین (۱ ,۱-) (نه الزاماً در نقاط انتهایی)، رشتهٔ لژاندر در هر جا که $f(x)$ پیوسته باشد به $f(x)$، و در ناپیوستگی‌ها به نقطهٔ وسطِ جهش، می‌گراید.

در اینجا به نکتهٔ جالبی دربارهٔ رشتهٔ لژاندر اشاره می‌کنیم. گاهی اوقات می‌خواهیم یک منحنی مفروض را حتی‌الامکان بر یک چندجمله‌ای با درجهٔ معلوم، مثلاً درجهٔ سه، برازش بدهیم. غالباً معیار "حداقل مربعات" را برای تعیین بهترین برازش به کار می‌برند. این بدان معناست که اگر، مثلاً، بخواهیم منحنی معلوم $f(x)$ را در بازهٔ (۱ ,۱-) بر یک چندجمله‌ای درجهٔ سوم برازش دهیم، باید a ، b ، c و d را طوری پیدا کنیم که

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)]^2\,dx \qquad (۹-۵)$$

هرچه ممکن است کوچک باشد. در آن صورت

$$f(x) \cong ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (۹-۶)$$

بهترین تقریب (نسبت به یک چندجمله‌ای درجهٔ سه) در مفهوم حداقل مربعات نامیده می‌شود. می‌توان ثابت کرد که یک بسط (تا درجهٔ مطلوب تقریب چندجمله‌ای) برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر، بهترین تقریب حداقل مربعاتی را می‌دهد (مسألهٔ ۱۶).

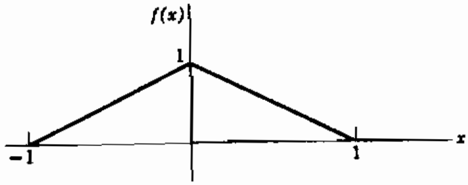
مسائل، بخش ۹

توابع زیر را برحسب رشتهٔ لژاندر بسط دهید.

۱- $f(x) = \begin{cases} -۱ & -۱ < x < ۰ \\ ۱ & ۰ < x < ۱ \end{cases}$ ۲- $f(x) = \begin{cases} ۰ & -۱ < x < ۰ \\ x & ۰ < x < ۱ \end{cases}$

۳- $f(x) = P'_۳(x)$ ۴- $f(x) = arc\ sin\ x$

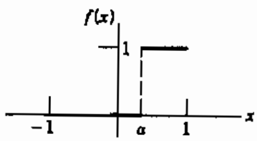
۵-



۶- $f(x) = \begin{cases} ۰ & \text{در بازهٔ } (-۱, ۰) \\ \left(ln \frac{۱}{x}\right)^۲ & \text{در بازهٔ } (۰, ۱) \end{cases}$ ***راهنمایی:*** مسألهٔ ۱۳، از بخش ۳، فصل ۱۱ را ملاحظه کنید.

۷- $f(x) = \begin{cases} ۰ & \text{در بازهٔ } (-۱, ۰) \\ \sqrt{۱ - x} & \text{در بازهٔ } (۰, ۱) \end{cases}$ ***راهنمایی:*** بخشهای ۶ و ۷ از فصل ۱۱ را ملاحظه کنید.

۸-



راهنمایی: رابطهٔ بازگشتی (۵-۸ هـ) را برای $P_l(x)$ ثابت کنید و نشان دهید که

$$\int_a^۱ P_l(x)\, dx = \frac{۱}{۲l + ۱}[P_{l-۱}(a) - P_{l+۱}(a)]$$

۹- $f(x) = P'_n(x)$. ***راهنمایی:*** به ازای $l \geq n$، $\int_{-۱}^{۱} P'_n(x) P_l(x)\, dx = ۰$ (چرا؟)؛ به ازای $n > l$ جزء به جزء انتگرال بگیرید.

هر یک از چندجمله‌ایهای زیر را برحسب یک رشتهٔ لژاندر بسط دهید. نتایجی که به دست می‌آورید باید با آنچه که با استفاده از روشی متفاوت برای همین مسائل در بخش ۵ پیدا کردید، یکی باشد.

۱۰- $۳x^۲ + x - ۱$ ۱۱- $۷x^۴ - ۳x + ۱$ ۱۲- $x - x^۳$

بهترین (در مفهوم حداقل مربعات) تقریب چندجمله‌ای درجهٔ دوّم را برای هر یک از توابع زیر در بازهٔ $1 > x > -1$ پیدا کنید. (مسألهٔ ۱۶ را ملاحظه کنید.)

۱۳- x^4 ۱۴- $|x|$ ۱۵- $\cos \pi x$

۱۶- خاصیت تقریب حداقل مربعاتی چندجمله‌ایهای لژاندر [(۹-۵) و (۹-۶) را ملاحظه کنید] را به شرح زیر ثابت کنید. فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد که می‌خواهیم تقریب بزنیم. توابع $P_l(x)$ را چندجمله‌ایهای لژاندر بهنجار شده در نظر بگیرید، یعنی:

$$p_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x) \quad \text{به طوری که} \quad \int_{-1}^{1} [p_l(x)]^2 \, dx = 1$$

نشان دهید که رشتهٔ لژاندر برای $f(x)$ تا جملهٔ $p_2(x)$ عبارت است از

$$f(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) \quad \text{با} \quad c_l = \int_{-1}^{1} f(x) \, p_l(x) \, dx$$

چندجمله‌ای درجه دومی را که در شرط حداقل مربعاتی صدق می‌کند به صورت $b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x)$ بنویسید (با توجه به مسألهٔ ۵-۱۴ هر چندجمله‌ای درجه دوم را می‌توان به این شکل نوشت). مسأله این است که b_0، b_1، و b_2 را طوری پیدا کنید که

$$I = \int_{-1}^{1} [f(x) - (b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x))]^2 \, dx$$

کمینه باشد. کروشه را به توان دو برسانید و I را به صورت مجموع انتگرالهایی از جملات مجزا بنویسید. نشان دهید که طبق شرط تعامد، بعضی از انتگرالها صفر اند، برخی مساوی ۱ اند چون p_l ها بهنجار شده‌اند، و بقیه برابر با ضرایب c_l می‌باشند. $c_0^2 + c_1^2 + c_2^2$ را اضافه و کم کنید و نشان دهید که

$$I = \int_{-1}^{1} [f^2(x) + (b_0 - c_0)^2 + (b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2 - c_0^2 - c_1^2 - c_2^2] \, dx$$

اکنون مقادیر bها را طوری تعیین کنید که I کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. (***راهنمایی:*** کمترین مقداری که مربع یک عدد حقیقی می‌تواند داشته باشد، صفر است.) اثبات را به چندجمله‌ایهای درجهٔ n تعمیم دهید.

۱۰- توابع وابستهٔ لژاندر

معادلهٔ دیفرانسیلی که به ازای $m^۲ \le l^۲$ با معادلهٔ لژاندر ارتباط نزدیک دارد به صورت

$$(۱-x^۲)y'' - ۲xy' + \left[l(l+۱) - \frac{m^۲}{۱-x^۲}\right]y = ۰ \qquad (۱-۱۰)$$

است. این معادله را ***می‌توان*** به کمک رشته‌ها حل کرد؛ با وجود این، بهتر است بدانیم چگونه جوابها به چندجمله‌ایهای لژاندر مربوط اند، زیرا در آن صورت به سادگی جواب شناخته شده را جستجو خواهیم کرد. ابتدا

$$y = (۱-x^۲)^{m/۲}\,u \qquad (۲-۱۰)$$

را در (۱۰-۱) جایگزین می‌کنیم و به دست می‌آوریم (مسألهٔ ۱)

$$(۱-x^۲)u'' - ۲(m+۱)xu' + [l(l+۱) - m(m+۱)]u = ۰ \qquad (۳-۱۰)$$

این معادله به ازای $m = ۰$، معادلهٔ لژاندر با جوابهای $P_l(x)$ است. با مشتق گرفتن از (۱۰-۳)، نتیجه می‌شود (مسألهٔ ۱)

$$(۱-x^۲)(u')'' - ۲[(m+۱)+۱]x(u')' + [l(l+۱) - (m+۱)(m+۲)]u' = ۰ \qquad (۴-۱۰)$$

اما این درست همان (۱۰-۳) است که در آن u' به جای u، و $(m+۱)$ به جای m نشسته است. به بیان دیگر، اگر $P_l(x)$ یک جواب (۱۰-۳) به ازای $m = ۰$ باشد، $P'_l(x)$ جواب (۱۰-۳) به ازای $m = ۱$ است، $P''_l(x)$ جواب به ازای $m = ۲$ است، و به طور کلی به ازای هر عدد صحیح m، $۰ \le m \le l$، $(d^m/dx^m)\,P_l(x)$ یک جواب معادلهٔ (۱۰-۳) است. به این ترتیب

$$y = (۱-x^۲)^{m/۲}\,\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \qquad (۵-۱۰)$$

یک جواب (۱۰-۱) است. توابع (۱۰-۵) ***توابع وابستهٔ لژاندر*** نامیده می‌شوند و به صورت زیر نمایش داده می‌شوند

$$P_l^m(x) = (۱-x^۲)^{m/۲}\,\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \qquad \text{(۱۰-۶) توابع وابسته لژاندر}$$

[بعضی از مؤلفان، ضرب $(-1)^m$ را به تعریف $P_l^m(x)$ اضافه می‌کنند.]

مقدار منفی m در (۱۰-۱)، m^2 را تغییر نمی‌دهد، بنابراین جواب از (۱۰-۱) به ازای m مثبت، جواب به ازای m منفی نیز خواهد بود، و به همین دلیل در بسیاری از مراجع، $P_l^m(x)$ را به ازای $-l \leq m \leq l$ به صورت $P_l^{|m|}(x)$ تعریف می‌کنند، همچنین می‌توان از فرمول ردریگس (۴-۱) نیز برای $P_l(x)$ واقع در (۱۰-۶) استفاده کرد و نتیجه گرفت

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \tag{۱۰-۷}$$

می‌توان نشان داد که (۱۰-۷) به ازای m مثبت یا منفی یک جواب (۱۰-۱) است؛ اما در این صورت، $P_l^{-m}(x)$ و $P_l^m(x)$ متناسب‌اند و نه متساوی (مسألهٔ ۸ را ملاحظه کنید).

به ازای هر m، توابع $P_l^m(x)$ در بازهٔ (۱ ,۱-) مجموعه توابع متعامدی هستند (مسألهٔ ۳). ثابتهای بهنجارسازی را می‌توان حساب کرد؛ بر اساس تعریف (۱۰-۷)، ثابت می‌شود که (مسألهٔ ۱۰)

$$\int_{-1}^{1} [P_l^m(x)]^2 \, dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \tag{۱۰-۸}$$

توابع وابستهٔ لژاندر در بسیاری از همان مسائلی که چندجمله‌ایهای لژاندر ظاهر می‌شوند، بروز می‌کنند. (اولین پاراگراف بخش ۲ را ملاحظه کنید)؛ در واقع، چندجمله‌ایهای لژاندر درست حالت خاص توابع $P_l^m(x)$ به ازای $m = 0$ هستند.

مسائل، بخش ۱۰

۱- معادلات (۱۰-۳) و (۱۰-۴) را ثابت کنید.

۲- معادلهٔ دیفرانسیل برای توابع وابستهٔ لژاندر (و برای توابع لژاندر وقتی که $m = 0$ است) معمولاً به شکل زیر نوشته می‌شود (برای مثال، بخش ۷ از فصل ۱۳ را ملاحظه کنید)

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dy}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] y = 0$$

تغییر متغیر $x = \cos\theta$ را به کار ببرید و (۱۰-۱) را به دست آورید.

۳- نشان دهید که به ازای هر مقدار m توابع $P_l^m(x)$ در فاصلهٔ (۱ ,۱-) مجموعه توابع متعامدی هستند، یعنی نشان دهید که،

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)\, P_n^m(x)\, dx = 0 \quad ,l \neq n$$

راهنمایی: معادلات دیفرانسیل (۱۰-۱) را به کار ببرید و روش بخش ۷ را دنبال کنید.

$P_l(x)$ پیدا شده در مسائل ۴-۳ یا ۵-۳ را در معادلهٔ (۱۰-۶) جایگزین کنید و با استفاده از آن، $P_l^m(x)$ را پیدا نمایید؛ سپس با قرار دادن $x = \cos\theta$، عبارتهای زیر را به دست آورید:

۴- $P_1^1(\cos\theta)$ ۵- $P_2^1(\cos\theta)$ ۶- $P_2^2(\cos\theta)$

۷- نشان دهید که

$$\frac{d^{\,l-m}}{dx^{\,l-m}}(x^2-1)^l = \frac{(l-m)!}{(l+m)!}(x^2-1)^m \frac{d^{\,l+m}}{dx^{\,l+m}}(x^2-1)^l$$

راهنمایی: بنویسید $(x^2-1)^l = (x-1)^l(x+1)^l$ و مشتقات را با استفاده از قاعدهٔ لایب نیتز پیدا کنید.

۸- در رابطهٔ (۱۰-۷)، m را با $-m$ جایگزین کنید؛ سپس مسألهٔ ۷ را به کار ببرید و نشان دهید که

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

تذکر: این نشان می‌دهد که وقتی m منفی است، (۱۰-۷) جوابی از (۱۰-۱) است.

۹- مسألهٔ ۷ را به کار ببرید و نشان دهید که

$$P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{(1-x^2)^{-m/2}}{2^l\, l!} \frac{d^{\,l-m}}{dx^{\,l-m}}(x^2-1)^l$$

۱۰- (۱۰-۸) را به شرح زیر پیدا کنید: دو فرمولی را که در (۱۰-۷) و مسألهٔ ۹ برای $P_l^m(x)$ داده شده‌اند در هم ضرب کنید. سپس به روش جزء به جزء انتگرال بگیرید و با تکرار این کار مشتق مرتبهٔ $l+m$ را پایین بیاورید و مشتق مرتبهٔ $l-m$ را بالا ببرید تا هر دو مشتق به مرتبهٔ l برسند. آنگاه (۸-۱) را به کار ببرید.

۱۱- رشتهٔ توانی تعمیم یافته یا روش فروبنیوس

ممکن است گاهی اوقات جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل، رشتهٔ توانی $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n$ نباشد، بلکه

(الف) شامل بعضی از توانهای منفی x، مثل

$$y = \frac{\cos x}{x^۲} = \frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \cdots$$

یا

(ب) دارای ضریبی از یک توان کسری x، به صورت زیر باشد

$$y = \sqrt{x} \sin x = x^{۱/۲} \left(x - \frac{x^۳}{۳!} + \cdots \right)$$

هر دوی این موارد (و موارد دیگر - بخش ۲۱ را ملاحظه کنید) را می‌توان با یک رشته به شکل زیر نمایش داد.

$$y = x^s \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^{n+s} \qquad (۱-۱۱)$$

که s عددی است که برحسب نوع مسأله باید پیدا شود؛ این عدد ممکن است مثبت یا منفی و درست یا کسری باشد. (در واقع، حتی ممکن است مختلط هم باشد، اما ما این مورد را بررسی نخواهیم کرد.) چون $a_\circ x^s$ باید اولین جملهٔ رشته باشد، فرض می‌کنیم $a_\circ$ صفر نیست. رشتهٔ (۱۱-۱) یک ***رشتهٔ توانی تعمیم یافته*** نامیده می‌شود. برخی از معادلات دیفرانسیلی را که با انتخاب یک رشته نظیر (۱۱-۱) می‌توانند حل شوند، مورد بررسی قرار خواهیم داد؛ این روش حل معادلات دیفرانسیل، ***روش فروبنیوس*** نامیده می‌شود.

برای روشن ساختن این روش، معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل می‌کنیم:

$$x^۲ y'' + ۴xy' + (x^۲ + ۲)y = \circ \qquad (۲-۱۱)$$

از (۱۱-۱)، داریم

$$y = a_\circ x^s + a_۱ x^{s+۱} + a_۲ x^{s+۲} + \cdots = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^{n+s} \qquad (۱-۱۱)$$

$$y' = s a_\circ x^{s-۱} + (s+۱) a_۱ x^s + (s+۲)\, a_۲ x^{s+۱} + \cdots$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty} (n+s)\, a_n x^{n+s-۱} \qquad (۳-۱۱)$$

$$y'' = s(s-۱)a_۰ x^{s-۲} + (s+۱)\, s a_۱ x^{s-۱} + (s+۲)(s+۱)\, a_۲ x^{s} + \cdots$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty} (n+s)(n+s-۱)\, a_n x^{n+s-۲}$$

(۱۱-۳) را در (۱۱-۲) جایگزین، و جدولی از توانهای x را برای معادلهٔ لژاندر تنظیم می‌کنیم:

	x^{s}	$x^{s+۱}$	$x^{s+۲}$	$\cdots$	x^{n+s}
$x^۲y''$	$s(s-۱)a_۰$	$(s+۱)sa_۱$	$(s+۲)(s+۱)a_۲$		$(n+s)(n+s-۱)a_n$
$۴xy'$	$۴sa_۰$	$۴(s+۱)\,a_۱$	$۴(s+۲)\,a_۲$		$۴(n+s)a_n$
$x^۲y$			$a_۰$		$a_{n-۲}$
$۲y$	$۲a_۰$	$۲a_۱$	$۲a_۲$		$۲a_n$

ضریب کلّ هر توانی از x باید صفر شود. از ضرایب x^s نتیجه می‌گیریم $(s^۲+۳s+۲)a_۰=۰$، یا چون بنا به فرض $a_۰ \neq ۰$،

$$s^۲ + ۳s + ۲ = ۰ \qquad (۴-۱۱)$$

این معادله برای s، معادلهٔ **شاخصی** نامیده می‌شود. با حل آن داریم:

$$s = -۲ \quad ، \quad s = -۱$$

از اینجا به بعد، دو مسألهٔ جداگانه را حل می‌کنیم؛ یکی برای $s = -۲$ و یکی دیگر برای $s = -۱$؛ بنابراین، یک ترکیب خطی از دو جوابی که به این روش به دست می‌آیند جواب عمومی است، درست نظیر $A \sin x + B \cos x$ که جواب عمومی $y'' + y = ۰$ است.

به ازای $s = -۱$، ضریب $x^{s+۱}$ در جدول منجر به $a_۱ = ۰$ می‌شود. از ستون $x^{s+۲}$ به بعد، می‌توانیم از فرمول عمومی ستون آخر استفاده کنیم. با وجود این، توجه کنید که دو ستون اول جدول شامل جملهٔ $a_{n-۲}$ نیستند، بنابراین بایستی از ابتدا در استفاده از جملهٔ عمومی مواظب این نکته باشید (مسائل ۱۳ و ۱۴). از ستون عمومی به ازای $s = -۱$، داریم

$$a_n\left[(n-۱)(n+۲) + ۲\right] = -\,a_{n-۲}$$

یا

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n+1)} \quad n \geq 2 \text{ به ازای }$$

چون $a_1 = 0$، نتیجه می‌گیریم که تمام a های فرد صفر هستند. برای a های زوج داریم:

$$a_2 = -\frac{a_0}{3!} \quad \text{،} \; a_4 = \frac{a_0}{5!} \quad \text{،} \; a_6 = -\frac{a_0}{7!} \tag{۵-۱۱}$$

پس یک جواب (۱۱-۲) برابر است با

$$y = a_0 x^{-1} - \frac{a_0}{3!}x + \frac{a_0}{5!}x^3 - \cdots \tag{۶-۱۱}$$

$$= a_0 x^{-2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = \frac{a_0 \sin x}{x^2}$$

جواب دیگر به ازای $s = -2$ به صورت مسألهٔ ۱ مطرح خواهد شد.

مسائل، بخش ۱۱

۱- حلِ معادلهٔ (۱۱-۲) را به ازای $s = -2$ تکمیل کنید. جوابتان را به شکل بستهٔ (۱۱-۶) بنویسید. برای اجتناب از اشتباه با مقادیر a_n مربوط به $s = -1$، شاید بهتر باشد که ضرایب رشتهٔ مربوط به این مسأله را a'_n یا b_n بنامید؛ با این همه، مادامی که به این نکته توجه داشته باشید که دو مسألهٔ جداگانه وجود دارد، یکی به ازای $s = -1$ و یکی به ازای $s = -2$، و هر رشته هم ضریب خودش را دارد، این کار چندان ضروری نیست.

معادلات دیفرانسیل زیر را به روش فروبنیوس (رشتهٔ توانی تعمیم یافته) حل کنید.

۲- $x^2y'' + xy' - 9y = 0$

۳- $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$

۴- $x^2y'' - 6y = 0$

۵- $2xy'' + y' + 2y = 0$

۶- $3xy'' + (3x + 1)y' + y = 0$

۷- $x^2y'' - (x^2 + 2)y = 0$

۸- $x^2y'' + 2x^2y' - 2y = 0$

۹- $xy'' - y' + 9x^5y = 0$

۱۰- $2xy'' - y' + 2y = 0$

۱۱- $36x^2y'' + (5 - 9x^2)y = 0$

۱۲- $3xy'' - 2(3x-1)y' + (3x-2)y = 0$

هر یک از مسائل زیر، مثالی است از این هشدار که چگونه در کاربست رابطهٔ عمومی بازگشتی بین ضرایب جواب رشتهٔ توانی برای چند جملهٔ اول رشته، باید با احتیاط عمل کرد.

۱۳- معادلهٔ $y'' + y'/x^۲ = ۰$ را با استفاده از رشتهٔ توانی حل کنید و نشان دهید:

$$a_{n+۱} = -\frac{n(n-۱)}{n+۱}\, a_n$$

اگر، بدون تأمل دقیق همگرایی، رشتهٔ $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ را با آزمون خارج قسمت امتحان کنیم، ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+۱}\, x^{n+۱}|}{|a_n x^n|} = \infty$$ (این نتیجه را نشان دهید.)

بنابراین ممکن است چنین نتیجه‌گیری کنیم که رشته واگراست و لذا هیچ جواب رشتهٔ توانی برای این معادله وجود ندارد. نشان دهید این نتیجه‌گیری غلط است، و جواب رشتهٔ توانی عبارت است از $y =$ ثابت.

۱۴- با روش فروبنیوس، معادلهٔ $y'' = -y$ را حل کنید. باید ریشه‌های $s = ۰$ و $s = ۱$ معادلهٔ شاخصی را به دست آورید. مقدار $s = ۰$، همانطور که انتظار دارید، به جوابهای $\cos x$ و $\sin x$ منجر می‌شود. به ازای $s = ۱$، رشته را $y = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n+۱}$ بنامید، و رابطهٔ زیر را پیدا کنید.

$$b_{n+۲} = -\frac{b_n}{(n+۳)(n+۲)}$$

نشان دهید که رشتهٔ $b_۰$ که از این رابطه به دست می‌آید صرفاً همان $\sin x$ است، اما رشتهٔ $b_۱$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل **نیست**. اشتباه در کجاست؟

۱۲- معادلهٔ بسل.

این معادله (نظیر معادلهٔ لژاندر) یکی دیگر از معادلات "اسم‌دار" است که به طور گسترده مطالعه و جوابهای آن جدول‌بندی شده است. کتابهای کاملی راجع به توابع بسل وجود دارند و تقریباً هر کتاب راهنما یا کتاب ریاضیات کاربردی مطالبی راجع به آنها در بر دارد (فرمولها و یا جداول عددی). توابع بسل را می‌توان چیزی شبیه به سینوسها و کسینوسهای میرا تصور کنید. در حقیقت، اگر از اول به جای روالی که در مثلثات مقدماتی به معرفی $\sin nx$ و $\cos nx$

می‌پردازند، آنها را به عنوان جوابهای رشتهٔ توانی معادلهٔ $y'' = -n^2y$ می‌شناختید، احساس نمی‌کردید که توابع بسل خیلی مشکل‌تر یا عجیب‌تر از توابع مثلثاتی هستند. توابع بسل نیز مانند سینوسها و کسینوسها، جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل هستند؛ آنها نیز جدول‌بندی شده‌اند و منحنی‌های آنها را می‌توان رسم کرد؛ آنها را می‌توان به صورت رشته نمایش داد؛ و تعداد زیادی فرمول شامل آنها شناخته شده است. مخصوصاً توجه دانشجویان علوم را از این جهت به توابع بسل جلب می‌کنیم که این توابع در کاربردهای زیادی نقش دارند. فهرست زیر از برخی مسائلی که این توابع در آنها خودنمایی می‌کنند، میزانی از گسترهٔ بزرگ موضوعاتی را که ممکن است شامل توابع بسل باشند به دست خواهد داد: مسائلی در الکتریسیته، گرما، هیدرودینامیک، کشسانی، حرکت موج، و غیره، که دارای تقارن استوانه‌ای هستند (به این دلیل، توابع بسل را گاهی توابع استوانه‌ای می‌نامند)؛ حرکت آونگی که طول آن دائماً زیاد می‌شود؛ نوسانات کوچک یک زنجیر قابل انعطاف، منحنی‌های تغییر حالت ریلهای راه‌آهن؛ پایداری یک میلهٔ قائم؛ انتگرالهای فرنل در اپتیک؛ توزیع جریان در یک رسانا؛ رشتهٔ فوریه برای کمان یک دایره. بعضی از این کاربردها را بعداً بررسی خواهیم کرد.

معادلهٔ بسل در شکل استاندارد و معمول آن عبارت است از

$$\boxed{x^2y'' + xy' + (x^2-p^2)\,y = 0 \qquad (۱-۱۲)}$$

که p ثابتی است (نه لزوماً یک عدد صحیح) موسوم به ***مرتبهٔ تابع بسل*** y که جواب (۱۲-۱) است. به سهولت می‌توانید تحقیق کنید $x(xy')' = x^2y'' + xy'$، بنابراین می‌توانیم (۱۲-۱) را به شکل ساده‌تر زیر بنویسیم

$$x(xy')' + (x^2-p^2)\,y = 0 \qquad (۲-۱۲)$$

یک جواب رشتهٔ توانی تعمیم یافته برای (۱۲-۲) به همان طریق که (۱۱-۲) را حل کردیم، پیدا می‌کنیم. (در حقیقت، (۱۱-۲) شکل دیگری از معادلهٔ بسل است! مسائل ۱۶-۱ و ۱۷-۱ را ملاحظه کنید). تنها با نوشتن جملات عمومی رشتهٔ y و مشتقاتی که در (۱۲-۲) به آنها نیازمندیم، داریم

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s-1}$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s} \qquad (۳-۱۲)$$

$$(xy')' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)^2 x^{n+s-1}$$

$$x(xy')' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)^2 x^{n+s}$$

(۱۲-۳) را در (۱۲-۲) جایگزین، و ضرایب توانهای x را جدول‌بندی می‌کنیم:

	x^s	x^{s+1}	x^{s+2}	$\cdots$	x^{s+n}
$x(xy')'$	$s^2 a_0$	$(1+s)^2 a_1$	$(2+s)^2 a_2$		$(n+s)^2 a_n$
$x^2 y$			a_0		a_{n-2}
$-p^2 y$	$-p^2 a_0$	$-p^2 a_1$	$-p^2 a_2$		$-p^2 a_n$

ضریب x^s، معادلهٔ شاخصی و دو مقدار s را به دست می‌دهد:

$$s^2 - p^2 = 0 \quad ، s = \pm p$$

ضریب x^{s+1} نتیجه می‌دهد $a_1 = 0$. ضریب x^{s+2}، a_2 را برحسب a_0 می‌دهد، و الخ، اما در این مرحله می‌توان فرمول عمومی را از ستون آخر نیز نوشت. نتیجه اینکه:

$$[(n+s)^2 - p^2]a_n + a_{n-2} = 0$$

یا

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2 - p^2} \qquad (۴-۱۲)$$

ابتدا ضرایب را برای مورد $s = p$ پیدا می‌کنیم. از (۱۲-۴) داریم

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+p)^2 - p^2} = -\frac{a_{n-2}}{n^2+2np} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)} \qquad (۵-۱۲)$$

چون $a_۱ = ۰$، لذا تمام a های فرد صفر هستند. برای a های زوج بهتر است که n را با $۲n$ جایگزین کنیم؛ به این ترتیب از (۱۲-۵) داریم

$$a_{۲n} = -\frac{a_{۲n-۲}}{۲n(۲n+۲p)} = -\frac{a_{۲n-۲}}{۲^۲ n(n+p)} \qquad (۱۲\text{-}۶)$$

فرمولهای ضرایب را می‌توان به کمک نمادگذاری تابع Γ (بخشهای ۲ تا ۵ فصل ۱۱)، مثل آنچه که ذیلاً در (۱۲-۷) قابل بررسی است، ساده کرد. به خاطر بیاورید که به ازای تمام مقادیر p، داریم $\Gamma(p+۱) = p\,\Gamma(p)$، بنابراین

$$\Gamma(p+۲) = (p+۱)\Gamma(p+۱)$$
$$\Gamma(p+۳) = (p+۲)\Gamma(p+۲) = (p+۲)(p+۱)\Gamma(p+۱)$$

و الی آخر. سپس از (۱۲-۶) داریم

$$\begin{aligned}
a_۲ &= -\frac{a_۰}{۲^۲(۱+p)} = -\frac{a_۰\Gamma(۱+p)}{۲^۲\,\Gamma(۲+p)}\\
a_۴ &= -\frac{a_۲}{۲^۳(۲+p)} = \frac{a_۰}{۲!۲^۴(۱+p)(۲+p)} = \frac{a_۰\Gamma(۱+p)}{۲!۲^۴\,\Gamma(۳+p)}\\
a_۶ &= -\frac{a_۴}{۳!۲(۳+p)} = -\frac{a_۰}{۳!۲^۶(۱+p)(۲+p)(۳+p)}\\
&= -\frac{a_۰\,\Gamma(۱+p)}{۳!۲^۶\,\Gamma(۴+p)}
\end{aligned} \qquad (۱۲\text{-}۷)$$

و الی آخر. به این ترتیب، جواب رشته‌ای (برای مورد $s = p$) برابر است با

$$\begin{aligned}
y &= a_۰\, x^p\,\Gamma(۱+p)\Big[\frac{۱}{\Gamma(۱+p)} - \frac{۱}{\Gamma(۲+p)}\Big(\frac{x}{۲}\Big)^۲\\
&\qquad + \frac{۱}{۲!\,\Gamma(۳+p)}\Big(\frac{x}{۲}\Big)^۴ - \frac{۱}{۳!\,\Gamma(۴+p)}\Big(\frac{x}{۲}\Big)^۶ + \cdots\Big]\\
&= a_۰\,۲^p\Big(\frac{x}{۲}\Big)^p\,\Gamma(۱+p)\Big[\frac{۱}{\Gamma(۱)\Gamma(۱+p)} - \frac{۱}{\Gamma(۲)\Gamma(۲+p)}\Big(\frac{x}{۲}\Big)^۲\\
&\qquad + \frac{۱}{\Gamma(۳)\Gamma(۳+p)}\Big(\frac{x}{۲}\Big)^۴ - \frac{۱}{\Gamma(۴)\Gamma(۴+p)}\Big(\frac{x}{۲}\Big)^۶ + \cdots\Big]
\end{aligned} \qquad (۱۲\text{-}۸)$$

$\Gamma(۱)$ و $\Gamma(۲)$ (که هر دو برابر ۱ هستند) را در دو جمله اول وارد کرده و نوشته‌ایم $x^p = ۲^p(x/۲)^p$ تا رشته سیستماتیک‌تر به نظر برسد. اگر فرض کنیم

$$a_۰ = \frac{۱}{۲^p\,\Gamma(۱+p)} \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{۲^p p!}$$

آنگاه y تابع بسل از نوع اول و مرتبهٔ p نامیده می‌شود، و به صورت $J_p(x)$ نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} J_p(x) &= \frac{۱}{\Gamma(۱)\Gamma(۱+p)}\left(\frac{x}{۲}\right)^p - \frac{۱}{\Gamma(۲)\Gamma(۲+p)}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲+p} \\ &\quad + \frac{۱}{\Gamma(۳)\Gamma(۳+p)}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۴+p} - \frac{۱}{\Gamma(۴)\Gamma(۴+p)}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۶+p} + \cdots \\ &= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{\Gamma(n+۱)\Gamma(n+p+۱)}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲n+p} \end{aligned} \tag{۹-۱۲}$$

مسائل، بخش ۱۲

۱- به کمک آزمون خارج قسمت نشان دهید که رشتهٔ نامتناهی (۱۲-۹) برای $J_p(x)$ به ازای جمیع مقادیر x همگراست.

با استفاده از (۱۲-۹) نشان دهید که:

۲- $J_۲(x) = (۲/x)J_۱(x) - J_۰(x)$

۳- $J_۱(x) + J_۳(x) = (۴/x)\,J_۲(x)$

۴- $(d/dx)\,J_۰(x) = -J_۱(x)$

۵- $(d/dx)\,[xJ_۱(x)] = xJ_۰(x)$

۶- $J_۰(x) - J_۲(x) = ۲(d/dx)J_۱(x)$

۷- $\lim_{x\to ۰} J_۱(x)/x = \frac{۱}{۲}$

۸- $\lim_{x\to ۰} x^{-۳/۲}J_{۳/۲}(x) = ۳^{-۱}\sqrt{۲/\pi}$

۹- $\sqrt{\pi x/۲}\,J_{۱/۲}(x) = \sin x$

راهنمایی: معادلات (۳-۴) و (۳-۵) از فصل ۱۱ را ملاحظه کنید.

۱۳- جواب دوم معادلهٔ بسل

تاکنون فقط یکی از دو جواب معادلهٔ بسل را پیدا کرده‌ایم، یعنی جواب مربوط به $s = p$؛ در

گام بعد باید جواب را برای موقعی که $s = -p$ است، نیز پیدا کنیم. ضرورتی ندارد مجدداً وارد جزئیات محاسبه بشویم؛ فقط در (۱۲-۹) p را با $-p$ جایگزین می‌کنیم. در واقع، جواب مربوط به $s = -p$ را معمولاً به صورت J_{-p} می‌نویسند. از (۱۲-۹) داریم

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} \qquad (13\text{-}1)$$

اگر p یک عدد صحیح نباشد، $J_p(x)$ رشته‌ای است که با x^p، و $J_{-p}(x)$ رشته‌ای است که با x^{-p} شروع می‌شود. به این ترتیب، $J_p(x)$ و $J_{-p}(x)$ دو جواب مستقل و ترکیب خطی آنها یک جواب عمومی خواهد بود. اما اگر p یک عدد صحیح باشد، آنگاه چند جملهٔ اول J_{-p} صفر هستند زیرا $\Gamma(n-p+1)$ در مخرج، وابسته به یک عدد صحیح منفی است، که نامتناهی است. می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۲) که در $J_{-p}(x)$، درست مثل $J_p(x)$، با جملهٔ x^p (برای عدد صحیح p) شروع می‌شود، و داریم:

$$J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x) \qquad \text{به ازای عدد صحیح } p \qquad (13\text{-}2)$$

بنابراین $J_{-p}(x)$ وقتی که p یک عدد صحیح است، یک جواب مستقل نیست. در این مورد، جواب دوم، رشتهٔ فروبنیوس (۱۱-۱) نیست، بلکه شامل یک لگاریتم است. $J_p(x)$ در مبدأ متناهی است، اما جواب دوم نامتناهی است و بنابراین فقط درکاربردهایی که در آنها $x \neq 0$ است، مفید می‌باشد.

اگرچه وقتی p عدد صحیحی نباشد، $J_{-p}(x)$ جواب دوم مطلوبی است، اما معمولاً شما آنرا در جداول پیدا نخواهید کرد. آنچه که جدول‌بندی **شده است** ترکیبی از $J_p(x)$ و $J_{-p}(x)$ است. این خیلی شبیه آن است که مثلاً $\sin x$ و $(2\sin x - 3\cos x)$ جدول‌بندی شده باشند، اما $\cos x$ نشده باشد. برای مسائل عملی شامل معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + y = 0$، به ترکیبی خطی از $\sin x$ و $\cos x$ با ضرایب اختیاری احتیاج داریم. اما

$$A \sin x + B(2\sin x - 3\cos x)$$

درست همان مزایای ترکیب خطی $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ را دارد. همچنین، هر ترکیبی از $J_p(x)$ و $J_{-p}(x)$ جواب دوم مطلوبی برای معادلهٔ بسل خواهد بود. ترکیبی که جدول‌بندی شده است تابع نیومن یا تابع وبر نامیده می‌شود و با N_p یا Y_p نمایش داده می‌شود:

$$\boxed{N_p(x) = Y_p(x) = \frac{\cos(\pi p)\, J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin \pi p}} \qquad (13\text{-}3)$$

این عبارت به ازای عدد صحیح p، به شکل مبهم $\frac{0}{0}$ درمی‌آید، اما اگر $x \neq 0$ باشد، دارای حدّی است که همان شکل درستِ جواب دوم به ازای pی صحیح می‌باشد. (برای مثال، صفحه ۷۸ کتاب رِلتُن را ملاحظه کنید.) به همین دلیل است که شکل خاص (۱۳-۳) به کار می‌رود؛ p هرچه باشد این رابطه معتبر است. به این ترتیب، جواب عمومی معادلهٔ بسل (۱۲-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y = A\,J_p(x) + B\,N_p(x) \qquad (۱۳-۴)$$

که A و B ثابتهای دلبخواهی هستند.

مسائل، بخش ۱۳

۱- با استفاده از معادلات (۱۲-۹) و (۱۳-۱)، چند جملهٔ اول $J_0(x)$، $J_1(x)$، $J_{-1}(x)$ و $J_2(x)$، $J_{-2}(x)$ را به تفصیل بنویسید. نشان دهید $J_{-1}(x) = -J_1(x)$ و $J_{-2}(x) = J_2(x)$.

۲- نشان دهید که در حالت کلی برای عدد صحیح n، $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ و $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$

با استفاده از معادلات (۱۲-۹) و (۱۳-۱) نشان دهید:

۳- $\sqrt{\pi x/2}\,J_{-1/2}(x) = \cos x$

۴- $J_{3/2}(x) = x^{-1}J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x)$

۵- با استفاده از معادلهٔ (۱۳-۳) نشان دهید $N_{1/2}(x) = -J_{-1/2}(x)$؛ $N_{3/2}(x) = J_{-3/2}(x)$.

۶- با استفاده از (۱۳-۳) نشان دهید $N_{(2n+1)/2}(x) = (-1)^{n+1}J_{-(2n+1)/2}(x)$.

۱۴- جداول، نمودارها و صفرهای توابع بسل

نظیر توابع مثلثاتی، توابع بسل نیز (برای مقادیر متفاوت بسیاری از p) جدول‌بندی شده‌اند. مقادیر $J_0(x)$ و $J_1(x)$ را می‌توانید در کتابهای راهنمای عمومی پیدا کنید، اما برای یافتن مقادیر $J_p(x)$ و $N_p(x)$ به ازای مقادیر دیگر p باید به کتب مرجع خاص مراجعه کنید (برای مثال، کتاب راهنمای NBS، یا کتاب جاکی - امدِ یا واتسون). نمودارهای توابع

بسل را می‌توانید با استفاده از مقادیر جدول‌بندی شده رسم کنید، اما بعضی از آنها را در کتابهای مختلف نیز پیدا خواهید کرد. به استثنای $J_0(x)$، کلیهٔ J ها از مبدأ شروع می‌شوند و شبیه $\sin x$، اما با دامنهٔ رو به کاهش، نوسان می‌کنند. $J_0(x)$ در $x = 0$ مساوی ۱ است و بنابراین چیزی شبیه به کسینوس میراست. کلیهٔ N ها در مبدأ برابر $\pm\infty$ هستند، اما در نواحی دور از مبدأ آنها نیز با دامنهٔ رو به کاهش نوسان می‌کنند.

مقادیری از x که به ازای آنها $\sin x = 0$ است (موسوم به صفرهای $\sin x$) احتیاجی به جدول‌بندی ندارند زیرا به ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ صرفاً عبارت از $x = n\pi$ هستند. لکن، صفرهای توابع بسل در بازه‌های منظم رخ نمی‌دهند؛ بلکه آنها را باید به طور عددی محاسبه و جدول‌بندی کرد. همانگونه که خواهید دید، صفرها در کاربردها بسیار حائز اهمیت‌اند؛ مقادیر آنها را، همراه با مقادیر خود توابع، می‌توانید در جداول پیدا کنید. شایان ذکر است که اختلاف بین دو صفر متوالی هنگامی که x بزرگ است تقریباً مساوی π است. (همانطور که برای $\sin x$ و $\cos x$ چنین است). این مطلب را می‌توانید از جداول و همچنین از فرمولهای تقریبی توابع بسل به ازای x های بزرگ ملاحظه کنید (رک بخش ۲۰)

مسائل، بخش ۱۴

با استفاده از جداول، نمودارهای توابع زیر را رسم و سه صفر اولِ آنها را پیدا کنید:

۱- $J_0(x)$ ۲- $J_1(x)$ ۳- $N_0(x)$ ۴- $J_2(x)$ ۵- $N_1(x)$ ۶- $J_3(x)$

۱۵- روابط بازگشتی

روابط مفید زیر بین توابع بسل و مشتقات آنها برقرار اند. اگرچه این روابط را برای $J_p(x)$ بیان می‌کنیم و اثبات آنها را به اجمال توضیح می‌دهیم، اما برای $N_p(x)$ نیز همین روابط برقرار اند.

$$\frac{d}{dx}\left[x^{p}J_{p}(x)\right]=x^{p}J_{p-1}(x) \qquad (15\text{-}1)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p}J_{p}(x)\right]=-x^{-p}J_{p+1}(x) \qquad (15\text{-}2)$$

$$J_{p-1}(x)+J_{p+1}(x)=\frac{2p}{x}J_{p}(x) \qquad (15\text{-}3)$$

$$J_{p-1}(x)-J_{p+1}(x)=2J'_{p}(x) \qquad (15\text{-}4)$$

$$J'_{p}(x)=-\frac{p}{x}J_{p}(x)+J_{p-1}(x)=\frac{p}{x}J_{p}(x)-J_{p+1}(x) \qquad (15\text{-}5)$$

برای اثبات (۱۵-۱)، ابتدا (۱۲-۹) را در x^p ضرب کنید و مشتق بگیرید:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{p}J_{p}(x)\right]=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)}\frac{x^{2n+2p}}{2^{2n+p}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n+2p)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)}\frac{x^{2n+2p-1}}{2^{2n+p}}$$

با توجه به $\Gamma(n+p+1)=(n+p)\,\Gamma(n+p)$ و حذف ضرایب ۲ و $(n+p)$ نتیجه می‌گیریم

$$\frac{d}{dx}\left[x^{p}J_{p}(x)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p)}\frac{x^{2n+2p-1}}{2^{2n+p-1}}$$

و از تقسیم بر x^p و مقایسهٔ با (۱۲-۹) خواهیم داشت

$$\frac{1}{x^{p}}\frac{d}{dx}\left[x^{p}J_{p}(x)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}=J_{p-1}(x)$$

زیرا این رشته همان (۱۲-۹) است که در آن p با $(p-1)$ جایگزین شده است. اثبات سایر روابط در مسائل ۱ تا ۳ خلاصه شده است.

مسائل، بخش ۱۵

۱- معادلهٔ (۱۵-۲) را با روشی مشابه با آنچه در متن درس برای اثبات (۱۵-۱) به کار رفت، ثابت کنید.

۲- معادلات (۱۵-۱) و (۱۵-۲) را برای $J_{p+1}(x)$ و $J_{p-1}(x)$ حل کنید. این دو معادله را به ترتیب با هم جمع و از هم کم کنید تا (۱۵-۳) و (۱۵-۴) نتیجه شوند.

۳- با مشتق گرفتن از معادلات (۱۵-۱) و (۱۵-۲)، معادلهٔ (۱۵-۵) را به دست آورید.

۴- با استفاده از معادلات (۱۵-۱) تا (۱۵-۵)، مسائل ۱۲-۲ تا ۱۲-۶ را حل کنید.

۵- با استفاده از معادلات (۱۵-۴) و (۱۵-۵) نشان دهید که در هر بیشینه یا کمینهٔ $J_1(x)$، $J_0(x) = J_2(x)$، و در هر صفر مثبت $J_1(x)$، $J'_1(x) = -J_2(x) = J_0(x)$. با به خاطر سپردن این نتایج، J_0، J_1 و J_2 را روی یک محور رسم کنید.

۶- مانند مسألهٔ ۵، نشان دهید که در هر بیشینه یا کمینهٔ $J_p(x)$، $J_{p+1}(x) = J_{p-1}(x)$، و در هر صفر J_p، $J'_p = -J_{p+1} = J_{p-1}$.

۷- با استفاده از (۱۵-۲) نشان دهید

$$\int_0^\infty J_1(x)\,dx = -J_0(x)\Big|_0^\infty = 1$$

۸- از معادلهٔ (۱۵-۴)، نشان دهید که

$$\int_0^\infty J_1(x)\,dx = \int_0^\infty J_3(x)\,dx = \cdots = \int_0^\infty J_{2n+1}(x)\,dx$$

و

$$\int_0^\infty J_0(x)\,dx = \int_0^\infty J_2(x)\,dx = \cdots = \int_0^\infty J_{2n}(x)\,dx$$

سپس به کمک مسألهٔ ۷، و مسألهٔ ۲-۲۸ یا ۱۰-۱۳ از فصل ۱۵ نشان دهید که به ازای کلیهٔ اعداد صحیح n

$$\int_0^\infty J_n(x)\,dx = 1$$

۱۶- یک معادلهٔ دیفرانسیل عام که توابع بسل جوابهای آن هستند

در عمل به معادلات دیفرانسیل بسیاری بر می‌خوریم که به شکل استاندارد (۱۲-۱) نیستند، اما

جوابهای آنها را می‌توان برحسب توابع بسل نوشت. می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۱۳) که معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' = \frac{1-2a}{x}y' + \left[(bcx^{c-1})^2 + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2}\right]y = 0 \qquad (۱-۱۶)$$

دارای جواب زیر است

$$y = x^a Z_p(bx^c) \qquad (۲-۱۶)$$

که Z نمایشگر J یا N یا هر ترکیب خطی از آنهاست، و a، b، c، p مقادیر ثابتی هستند. برای پی بردن به این مطلب، معادلهٔ دیفرانسیل زیر را "حل" می‌کنیم:

$$y'' + 9xy = 0 \qquad (۳-۱۶)$$

اگر (۱۶-۳) از نوع (۱۶-۱) باشد، باید داشته باشیم

$$1 - 2a = 0 \quad ، (bc)^2 = 9 \quad ، 2(c-1) = 1 \quad ، a^2 - p^2c^2 = 0$$

از این معادلات داریم

$$a = \frac{1}{2} \quad ، c = \frac{3}{2} \quad ، b = 2 \quad ، p = \frac{a}{c} = \frac{1}{3}$$

پس جواب (۱۶-۳) برابر است با

$$y = x^{1/2} Z_{1/3}(2x^{3/2}) \qquad (۴-۱۶)$$

این بدان معناست که جواب عمومی (۱۶-۳) عبارت است از

$$y = x^{1/2}[AJ_{1/3}(2x^{3/2}) + BN_{1/3}(2x^{3/2})]$$

که A و B ثابتهای دلبخواهی هستند.

مسائل، بخش ۱۶

جوابهای معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از معادلات (۱۶-۱) و (۱۶-۲) برحسب توابع بسل پیدا کنید.

۱- معادلهٔ (۱۱-۲) ‏ ‏ ‏ ۲- $y'' + 4x^2y = 0$

۳- $xy'' + 2y' + 4y = 0$ ۴- $3xy'' + 2y' + 12y = 0$

۵- $y'' - \frac{1}{x}y' + \left(4 + \frac{1}{x^2}\right)y = 0$ ۶- $4xy'' + y = 0$

۷- $xy'' + 3y' + x^3y = 0$ ۸- $y'' + xy = 0$

۹- $3xy'' + y' + 12y = 0$ ۱۰- $xy'' - y' + 9x^2y = 0$

۱۱- $xy'' + 5y' + xy = 0$ ۱۲- $4xy'' + 2y' + y = 0$

۱۳- با جایگذاری مستقیم تحقیق کنید که جوابی که در متن برای معادلهٔ (۱۶-۳) داده شده است و جوابهای شما در مسائل بالا صحیح هستند. همچنین به طور کلی ثابت کنید که جواب (۱۶-۲) داده شده برای (۱۶-۱)، درست است. ***راهنمایی:*** اینها تمرینهایی از مشتق‌گیری جزئی هستند. برای نشان دادن اینکه (۱۶-۴) جواب (۱۶-۳) است، متغیرها را از x، y به مثلاً z، u تغییر دهید، به طوری که

$$y = x^{1/2}u \quad , u = J_{1/3}(z) \quad , z = 2x^{3/2}$$

و نشان دهید اگر x، y در (۱۶-۳) صدق کنند، آنگاه u، z در (۱۲-۱) صدق می‌کنند، یعنی

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right)u = 0$$

۱۷- انواع دیگر توابع بسل

$J_p(x)$ و $N_p(x)$ را که، به ترتیب، ***توابع بسل نوع اول و دوم*** نامیده می‌شوند، بررسی کرده‌ایم. چون معادلهٔ بسل از مرتبهٔ دوم است، بدیهی است تنها دو جواب مستقل برای آن وجود دارد. با وجود این، تعدادی توابع وابسته نیز وجود دارند که توابع بسل نامیده می‌شوند. در اینجا هم باز شباهت نزدیکی با سینوس و کسینوس وجود دارد. ممکن است $\cos x$ و $\sin x$ را به عنوان جوابهای اصلی $y'' + y = 0$ تلقی کنیم، اما $\cos x \pm i \sin x$ هم که معمولاً آنرا به صورت $e^{\pm ix}$ می‌نویسیم، جوابهایی برای این معادله هستند. اگر x را با ix جایگزین کنیم، توابع e^x، e^{-x}، $\cosh x$ و $\sinh x$ به دست می‌آیند که جوابهای $y'' - y = 0$ هستند. تعدادی از توابع بسل را که زیاد کاربرد دارند، همراه با مانسته‌های مثلثاتی آنها ذیلاً می‌آوریم:

توابع هانکل یا توابع بسل نوع سوم

$$
\boxed{\begin{aligned} H_p^{(1)}(x) &= J_p(x) + i\,N_p(x) \\ H_p^{(2)}(x) &= J_p(x) - i\,N_p(x) \end{aligned} \qquad (17\text{-}1)}
$$

(با $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ مقایسه کنید.)

توابع هذلولوی یا تغییر یافتهٔ بسل جوابهای معادلهٔ

$$x^2y'' + xy' - (x^2+p^2)y = 0 \qquad (17\text{-}2)$$

با توجه به (۱۶-۱)، عبارت اند از $Z_p(ix)$. (این را با معادلهٔ بسل استاندارد مقایسه کنید و در تشابه با آنها، رابطهٔ بین $y'' + y = 0$ و $y'' - y = 0$ را در نظر بگیرید.) دو جواب مستقل معادلهٔ (۱۷-۲) که معمولاً به کار می‌روند عبارت اند از

$$
\boxed{\begin{aligned} I_p(x) &= i^{-p} J_p(ix) \\ K_p(x) &= \frac{\pi}{2}\, i^{p+1} H_p^{(1)}(ix) \end{aligned} \qquad (17\text{-}3)}
$$

اینها باید با $\sinh x = -i \sin (ix)$ و $\cosh x = \cos (ix)$ مقایسه شوند؛ به علت تشابه، I و K توابع بسل هذلولوی نامیده می‌شوند. ضرایب i طوری تنظیم می‌شوند که وقتی x حقیقی است، I و K نیز حقیقی باشند.

توابع کروی بسل اگر به ازای عدد صحیح n، $p = (2n+1)/2 = n + (1/2)$ باشد، در آن صورت $J_p(x)$ و $N_p(x)$ را توابع بسل از مرتبهٔ نیمه صحیح می‌نامند؛ این توابع را می‌توان برحسب $\sin x$، $\cos x$ و توانهای x بیان کرد. همانطور که ذیلاً از فرمولهای (۱۷-۴) می‌بینید، توابع بسل به تابعهای اخیرالذکر بستگی دارند. توابع کروی بسل در انواع مسائل مربوط به ارتعاشات، بخصوص موقعی که از مختصات کروی استفاده می‌شود، ظاهر می‌شوند.

توابع کروی بسل $j_n(x)$، $y_n(x)$، $h_n^{(1)}(x)$، $h_n^{(2)}(x)$ را برای $n = 0, 1, 2, \dots$ تعریف، و مقادیر آنها را بدون اثبات برحسب توابع ابتدایی بیان می‌کنیم:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{(2n+1)/2}(x) = x^n \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, Y_{(2n+1)/2}(x) = -x^n \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i y_n(x) \qquad (۴-۱۷)$$

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - i y_n(x)$$

توابع ber ، bei ، ker ، kei یک روش استاندارد حل مسائل ارتعاشی این است که جوابی شامل $e^{i\omega t}$ برای آنها در نظر بگیریم؛ معادلهٔ حاصل ممکن است شامل جملات مجازی باشد. به عنوان مثال، معادلهٔ زیر در مسألهٔ توزیع جریان متناوب در سیمها (اثر پوسته) ظاهر می‌شود (کتاب رِلتّن، صفحهٔ ۱۷۷):

$$y'' + \frac{1}{x}y' - iy = 0 \qquad (۵-۱۷)$$

اگر این معادله را با (۱۶-۱) مقایسه کنیم، می‌بینیم که

$$a = 0 \quad ،c = 1 \quad ،(bc)^2 = -i \quad ،a^2 = p^2c^2$$

$$p = 0 \quad ،b = \sqrt{-i} = i^{3/2} \quad \text{زیرا} \quad i^3 = -i$$

پس جواب معادلهٔ (۱۷-۵)، با توجه به (۱۶-۲) عبارت است از

$$y = Z_0\,(i^{3/2}x) \qquad (۶-۱۷)$$

که جوابی است مختلط و معمول است که آن را به قسمتهای حقیقی و مجازی، *ber* و *bei* (برای $Z = J$)، جدا می‌کنند؛ *ber*، معرف *Bessel-real* (بسل - حقیقی)، و *bei*، معرف *Bessel-imaginary* (بسل - مجازی) است. توابع *ber*، *bei*، *ker*، *kei* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$J_0(i^{3/2}x) = ber\, x + i\, bei\, x$$
$$K_0(i^{1/2}x) = ker\, x + i\, kei\, x \qquad (۷-۱۷)$$

توابع مشابهی نیز برای $n \neq 0$ وجود دارند. این توابع در مسائل شارش گرما و در نظریهٔ شاره‌های چسبنده، و همچنین در الکتریسیته بروز می‌کنند.

مسائل، بخش ۱۷

۱- جوابهای مسألهٔ ۱۶-۱ را با استفاده از تعاریف (۱۷-۴) توابع $j_n(x)$ و $y_n(x)$ برحسب $J_{(2n+1)/2}(x)$ و $Y_{(2n+1)/2}(x)$، به صورت توابع بسل کروی بنویسید. سپس، با استفاده از (۱۷-۴)، جوابها را برحسب $sin\ x$ و $cos\ x$ به دست آورید و با جوابهای (۱۱-۶) و مسألهٔ ۱۱-۱ مقایسه کنید.

۲- از مسألهٔ ۱۲-۹ داریم $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}\ sin\ x$. با استفاده از (۱۵-۲)، $J_{3/2}(x)$، $J_{5/2}(x)$ را به دست آورید. نتایج خود را در (۱۷-۴) به جای J بگذارید و فرمولهای j_0، j_1 و j_2 را که برحسب $sin\ x$ و $cos\ x$ بیان شده‌اند، ثابت کنید.

۳- از مسائل ۱۳-۳ و ۱۳-۵ داریم $Y_{1/2}(x) = -\sqrt{2/\pi x}\ cos\ x$. مانند مسألهٔ ۲، $Y_{3/2}$ و $Y_{5/2}$ را به دست آورید و فرمولهای (۱۷-۴) را برای y_0، y_1 و y_2 برحسب $sin\ x$ و $cos\ x$ ثابت کنید.

۴- از نتایج مسائل ۲ و ۳ یا مستقیماً از رشتهٔ مربوط به $I_p(x)$ نشان دهید که

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{sinh\ x}{\sqrt{x}} \quad \text{و} \quad I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{cosh\ x}{\sqrt{x}}$$

۵- از (۱۷-۴) نشان دهید $h_n^{(1)}(x) = -i x^n \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{e^{ix}}{x}\right)$.

۶- با استفاده از (۱۶-۱) و (۱۷-۴) نشان دهید توابع کروی بسل در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کنند

$$x^2y'' + 2xy' + [x^2 - n(n+1)]\,y = 0$$

۷- معادلهٔ دیفرانسیل $xy'' = y$ را با استفاده از (۱۶-۱) حل کنید، و سپس جواب را به کمک (۱۷-۳) برحسب تابع I_p بیان کنید

۸- نظیر مسألهٔ ۷، یک جواب برای $y'' - x^{۴}y = ۰$ پیدا کنید.

۹- با استفاده از (۱۷-۳) و (۱۵-۱) تا (۱۵-۵)، روابط بازگشتی را برای $I_p(x)$ پیدا کنید. به ویژه نشان دهید $I_{۰}{}' = I_{۱}$.

۱۰- با استفاده از مقادیر جدول‌بندی شده، منحنی تابع هذلولوی بسل $I_{۰}(x)$ را رسم کنید.

۱۱- از (۱۷-۴)، نشان دهید $h_{۰}^{(۱)}(ix) = -e^{-x}/x$.

برای به دست آوردن روابط بازگشتی توابع کروی بسل، از روابط بازگشتی بخش ۱۵ و (۱۷-۴) استفاده کنید:

۱۲- $j_{n-۱}(x) + j_{n+۱}(x) = (۲n+۱)\, j_n(x)/x$

۱۳- $(d/dx)\, j_n(x) = n\, j_n(x)/x - j_{n+۱}(x)$

۱۴- $(d/dx)\, j_n(x) = j_{n-۱}(x) - (n+۱)\, j_n(x)/x$

۱۵- $(d/dx)\, [x^{n+۱} j_n(x)] = x^{n+۱} j_{n-۱}(x)$

۱۶- $(d/dx)\, [x^{-n} j_n(x)] = -x^{-n} j_{n+۱}(x)$

۱۸- آونگ دراز شونده

به عنوان مثالی از موارد استفادهٔ توابع بسل، مسألهٔ زیر را بررسی می‌کنیم. فرض کنید یک آونگ ساده (بخش ۸، فصل ۱۱) دارای طول l است و نخ آن با آهنگ یکنواختی افزایش می‌یابد (مثل وزنه‌ای که هنگام فرود از یک جرثقیل، تاب می‌خورد). (این مسأله در سال ۱۷۰۷ میلادی / ۱۸۰۶ هـ. ش برای اولین بار بررسی شده است. رک: L.LeCornu, *Acta Mathematica* 19 (1895), 201-249 همچنین کتاب رِلتُن، و مسألهٔ ۸ را نیز ملاحظه کنید.). معادله حرکت را نوشته و جواب آنرا برای نوسانهای کوچک پیدا کنید.

از بخش ۸، فصل ۱۱، معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$\frac{d}{dt}\,(ml^{۲}\dot{\theta}) + mgl\sin\theta = ۰ \qquad (۱-۱۸)$$

فرض کنید طول سیم در لحظهٔ t برابر است با

$$l = l_{۰} + vt \qquad (۲-۱۸)$$

و متغیر مستقل را از t به l تغییر دهید. برای نوسانهای کوچک، می‌توان $\sin\theta$ را با θ جایگزین کرد. در این صورت (۱۸-۱) تبدیل می‌شود به (مسألهٔ ۱):

$$l\frac{d^2\theta}{dl^2} + 2\frac{d\theta}{dl} + \frac{g}{v^2}\theta = 0 \tag{۱۸-۳}$$

(این معادله همچنین می‌تواند نوسان میرای یک جرم متغیر، یا یک مدار RLC با L متغیر را توصیف کند.)

(۱۸-۳) را با مقایسهٔ آن با معادلهٔ استاندارد (۱۶-۱) حل می‌کنیم (مسألهٔ ۲):

$$\theta = l^{-1/2} Z_1(b\,l^{1/2}) \quad \text{که در آن،} \quad b = 2g^{1/2}/v \tag{۱۸-۴}$$

برای ساده کردن نمادگذاری، فرض کنید

$$u = b\,l^{1/2} = (2g^{1/2}/v)\,l^{1/2} \tag{۱۸-۵}$$

به این ترتیب، جواب عمومی معادلهٔ (۱۸-۳) عبارت است از

$$\theta = A\,u^{-1}J_1(u) + B\,u^{-1}N_1(u) \tag{۱۸-۶}$$

با استفاده از (۱۵-۲)، می‌توانیم $d\theta/du$ را از (۱۸-۶) پیدا کنیم:

$$\frac{d\theta}{du} = -[A\,u^{-1}J_2(u) + B\,u^{-1}N_2(u)] \tag{۱۸-۷}$$

ثابتهای A و B را باید مثل آونگ سادهٔ با طول ثابت l، از شرایط شروع حرکت پیدا کنیم. برای مثال، در مورد آونگ سادهٔ معمولی، اگر در $t = 0$، $\theta = \theta_0$ و $\dot{\theta} = 0$ باشد، آنگاه جواب عمومی $\theta = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ به صورت $\theta = \theta_0\cos\omega t$ در می‌آید. همین شرایط اولیهٔ ساده را برای آونگ دراز شونده نیز انتخاب می‌کنیم، یعنی در $t = 0$، $\theta = \theta_0$ و $\dot{\theta} = 0$. برای این شرایط اولیه، داریم (بعد از مقداری محاسبه - مسائل ۳ تا ۶ را ملاحظه کنید)

$$A = -\frac{\pi u_0^2}{2}\theta_0 N_2(u_0) \quad ، B = \frac{\pi u_0^2}{2}\theta_0 J_2(u_0) \tag{۱۸-۸}$$

اگر ثابتهای v و l_0 را طوری تنظیم کنیم که

$$u_0 = 2(g\,l_0)^{1/2}/v \quad \text{صفری از } J_2(u) \text{ باشد}$$

در آن صورت، $B = 0$ و دومین جملهٔ (۱۸-۶) صفر خواهد بود، و بنابراین خواهیم داشت

$$\theta = A u^{-1} J_1(u) = C l^{-1/2} J_1(b l^{1/2}) \qquad (۱۰-۱۸)$$

که (مسألهٔ ۷)

$$b = \frac{2g^{1/2}}{v} = \frac{u_0}{l_0^{1/2}} \quad ، C = \frac{\theta_0 l_0^{1/2}}{J_1(u_0)} \qquad (۱۱-۱۸)$$

برای این مورد ساده، $\dot{\theta}$ مضربی از $J_2(u)$ است (مسألهٔ ۸)؛ بنابراین، وضعیت $\theta = 0$ همخوان با صفرهای $J_1(u)$، و وضعیت $\dot{\theta} = 0$ همخوان با صفرهای $J_2(u)$ است. "ربع" دورهٔ تناوب، همخوان است با مدت زمانِ از $\theta = 0$ تا $\dot{\theta} = 0$، یا $\dot{\theta} = 0$ تا $\theta = 0$. این ربع دوره‌های تناوب را می‌توان از صفرهای $J_1(u)$ و $J_2(u)$ پیدا کرد (مسألهٔ ۸).

مسائل، بخش ۱۸

۱- معادلهٔ (۱۸-۳) را به دست آورید. ***راهنمایی:*** از معادلهٔ (۱۸-۲) می‌بینیم که $dl = v\, dt$ است، بنابراین

$$\frac{d}{dt} = v \frac{d}{dl}$$

۲- معادلهٔ (۱۸-۳) را حل کنید، و با استفاده از آن، (۱۸-۴) را به دست آورید.

۳- به طریق زیر ثابت کنید

$$J_p(x) J'_{-p}(x) - J_{-p}(x) J'_p(x) = -\frac{2}{\pi x} \sin p\pi$$

معادلهٔ بسلِ (۱۲-۱) را با فرض $y = J_p$ و $y = J_{-p}$ بنویسید؛ معادلهٔ J_p را در J_{-p} و معادلهٔ J_{-p} را در J_p ضرب و از هم کم کنید تا نتیجه شود

$$\frac{d}{dx}[x(J_p J'_{-p} - J_{-p} J'_p)] = 0$$

به این ترتیب، $J_p J'_{-p} - J_{-p} J'_p = c/x$. برای پیدا کردن c، معادلهٔ (۱۲-۹) را برای هر یک از چهار تابع به کار ببرید و جملات $1/x$ را از حاصل‌ضربها انتخاب کنید. آنگاه معادلهٔ (۵-۴) از فصل ۱۱ را به کار ببرید.

۴- با استفاده از معادلهٔ (۱۳-۳) و مسألهٔ ۳، نشان دهید

$$J_p(x) N'_p(x) - J'_p(x) N_p(x) = \frac{J'_p(x) J_{-p}(x) - J_p(x) J'_{-p}(x)}{\sin p\pi} = \frac{2}{\pi x}$$

۵- با استفاده از روابط بازگشتی بخش ۱۵ (برای N ها و همچنین برای J ها) و مسألهٔ ۴، نشان دهید

$$J_n(x)\,N_{n+1}(x) - J_{n+1}(x)\,N_n(x) = -\frac{2}{\pi x}$$

راهنمایی: ابتدا مسأله را برای $n = 0$ حل کنید؛ سپس نتیجه را برای اثبات مورد $n = 1$ به کار ببرید، و الی آخر.

۶- برای شرایط اولیهٔ $\theta = \theta_0$، $\dot{\theta} = 0$ نشان دهید که ثابتهای A و B در معادلات (۱۸-۶) و (۱۸-۷) همانهایی هستند که در (۱۸-۸) داده شده‌اند. *راهنمایی:* نشان دهید که اگر $\dot{\theta} = 0$ باشد، $d\theta/du = 0$ است. در معادلات (۱۸-۶) و (۱۸-۷)، فرض کنید وقتی $u = u_0$ است، $\theta = \theta_0$ و $d\theta/du = 0$ و سپس A و B را به دست آورید. آنگاه فرمول مسألهٔ ۵ را برای ساده کردن نتایجتان به کار ببرید تا معادلهٔ (۱۸-۸) به دست آید.

۷- مقادیر b و C داده شده در معادلهٔ (۱۸-۱۱) را به دست آورید. توجه کنید که C می‌تواند به دو طریق پیدا شود: (۱) در معادلهٔ (۱۸-۱۰)، $u = b\,l^{1/2}$، بنابراین $Au^{-1} = (A/b)\,l^{-1/2}$، $C = A/b$. مسألهٔ ۵ را برای ساده کردن این معادله به کار ببرید. (۲) در معادلهٔ (۱۸-۱)، قرار دهید $\theta = \theta_0$، $u = u_0$، $l = l_0$ و C را پیدا کنید.

۸- از معادلات (۱۸-۱۰) و (۱۵-۲) یا از معادلهٔ (۱۸-۷)

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{du}\,\frac{du}{dl}\,\frac{dl}{dt}$$

را به ازای $B = 0$ پیدا کنید. آنگاه نشان دهید وقتی $J_1(u) = 0$ است، $\theta = 0$ و وقتی $J_2(u) = 0$ است، $\dot{\theta} = 0$ می‌باشد. نشان دهید که ربع دوره‌های تناوب متوالی (متغیر) آونگ دراز شونده برابرند با $(v/4g)\,(r_1{}^2 - r_2{}^2)$ یا $(v/4g)\,(r_2{}^2 - r_1{}^2)$، که r_1 و r_2 صفرهای متوالی J_1 و J_2 هستند. چند ربع دورهٔ تناوب را حساب، و از جداول نیز پیدا، کنید (به صورت مضاربی از $v/(4g)$)، و ملاحظه کنید که یک تاب به طرف داخل، از تابی که پیش یا پس از آن به طرف خارج صورت می‌گیرد، بیشتر طول می‌کشد. [این نتیجه توسط Ll. G. Chambers در *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* (2) 12, 17-18 (1960) ثابت شده است.]

۹- مسألهٔ "آونگ کوتاه شده" را بررسی کنید. روش متن کتاب را دنبال کنید اما با $l = l_{\circ} - vt$.
آیا دامنهٔ نوسان، θ، به هنگام کوتاه شدن آونگ، زیاد می‌شود یا کم؟ نتیجهٔ مسألهٔ ۸ را در مورد ربع دوره‌های تناوب برای این مورد بیان کنید.

۱۰- معادلهٔ دیفرانسیل نوسانات عرضی یک نخ که چگالی آن به طور خطی از یک سر به سر دیگر زیاد می‌شود عبارت است از $y'' + (Ax + B)\,y = \circ$، که A و B مقادیر ثابتی هستند. جواب عمومی این معادله را برحسب توابع بسل به دست آورید.
راهنمایی: تغییر متغیر $Ax + B = Au$ را اعمال کنید.

۱۱- یک سیم راست که در سر تحتانی‌اش به طور قائم محکم شده است، اگر کوتاه باشد به‌طور قائم می‌ایستد، اما اگر دراز باشد در اثر وزن خودش خم می‌شود. می‌توان نشان داد که بیشترین طول برای تعادل قائم برابر است با l، که $k\,l^{۳/۲}$ اولین صفر $J_{-۱/۳}$ است و

$$k = \frac{۴}{۳r^{۲}}\sqrt{\frac{\rho g}{\pi Y}}$$

شعاع سیم = r، چگالی خطی = ρ، شتاب گرانش = g، مدول یانگ = Y. طول l را برای یک سیم فولادی به شعاع ۱ میلیمتر و برای یک سیم سربی با همان شعاع پیدا کنید.

۱۹- تعامد توابع بسل

در اینجا ممکن است تصور کنید می‌خواهیم ثابت کنیم دو تابع J_p به ازای مقادیر متفاوت p متعامد هستند. اما چنین نیست - در واقع، تصور شما غلط است! برای این که ببینید چه چیزی را ***می‌خواهیم*** اثبات کنیم، به مقایسهٔ زیر بین توابع بسل و سینوسها و کسینوسها توجه کنید.

	دو تابع: $\sin x$ و $\cos x$	دو تابع به ازای یک مقدار p: $J_p(x)$ و $N_p(x)$
(۱-۱۹)	فقط $\sin x$ را در نظر بگیرید.	فقط $J_p(x)$ را برای یک مقدار p در نظر بگیرید.
	در صفرهای $\sin x$، یعنی،	در صفرهای $J_p(x)$، مثلاً، $x = a$، b، ...،
	$x = n\pi$، $\sin x = \circ$	$J_p(x) = \circ$
	در $x = ۱$، $\sin n\pi x = \circ$	در $x = ۱$، $J_p(ax) = \circ$، $J_p(bx) = \circ$، ...
	معادلهٔ دیفرانسیلی که $y = \sin n\pi x$ در آن صدق می‌کند عبارت است	معادلهٔ دیفرانسیلی که $J_p(ax)$ در آن صدق می‌کند عبارت است از $x\,(x y')' + (a^{۲}x^{۲} - p^{۲})\,y = \circ$

از $y'' + (n\pi)^2 y = 0$ [(۲-۱۹) را در زیر ملاحظه کنید].

(در مقایسهٔ معادلات دیفرانسیل به خاطر داشته باشید که p ثابت نگهداشته می‌شود. همخوانی، بین صفرهای $\sin x$، یعنی $n\pi$، و صفرهای $J_p(x)$، یعنی a، b، و غیره است.)

ثابت کرده‌ایم:	ثابت خواهیم کرد:
$\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x \, dx = 0$	$\int_0^1 x J_p(ax) J_p(bx)\, dx = 0$
برای $n \neq m$	برای $a \neq b$

ابتدا ثابت می‌کنیم $J_p(ax)$ در معادلهٔ دیفرانسیلی که در (۱۹-۱) به آن اشاره کردیم صدق می‌کند. می‌دانیم که $y = J_p(ax)$ در معادلهٔ دیفرانسیل (۱۲-۲) صدق می‌کند. اگر x را با ax جایگزین کنیم، در آن صورت $x\,(dy/dx)$ تبدیل می‌شود به $ax\,[dy/d(ax)] = x\,(dy/dx)$ و $x\,(xy')'$ نیز بدون تغییر باقی می‌ماند. پس (۱۲-۲) تبدیل می‌شود به

$$x\,(xy')' + (a^2x^2 - p^2)\,y = 0 \tag{۱۹-۲}$$

و جواب معادلهٔ (۱۹-۲)، $J_p(ax)$ است. به طریق مشابه، معادلهٔ دیفرانسیلی که $J_p(bx)$ در آن صدق می‌کند عبارت است از

$$x\,(xy')' + (b^2x^2 - p^2)\,y = 0 \tag{۱۹-۳}$$

حال برای سهولت، قرار می‌دهیم $u = J_p(ax)$ و $v = J_p(bx)$؛ آنگاه (۱۹-۲) و (۱۹-۳) تبدیل می‌شوند به

$$\begin{aligned} x\,(xu')' + (a^2x^2 - p^2)\,u &= 0 \\ x\,(xv')' + (b^2x^2 - p^2)\,v &= 0 \end{aligned} \tag{۱۹-۴}$$

حال به روشی شبیه آنچه برای اثبات تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر در (بخش ۷) به کار بردیم، با استفاده از معادلات (۱۹-۴)، آخرین معادلهٔ (۱۹-۱) را ثابت می‌کنیم: اولین معادلهٔ (۱۹-۴) را در v و دومین معادله را در u ضرب و دو معادله را از هم کم می‌کنیم و با حذف یک x نتیجه می‌گیریم

$$v(xu')' - u(xv')' + (a^2 - b^2)xuv = 0 \qquad (۱۹-۵)$$

دو جملهٔ اول (۱۹-۵) برابرند با

$$\frac{d}{dx}(vxu' - uxv') \qquad (۱۹-۶)$$

با استفاده از (۱۹-۶) و انتگرالگیری از (۱۹-۵)، نتیجه می‌گیریم

$$(vxu' - uxv')\Big|_0^1 + (a^2 - b^2)\int_0^1 xuv\,dx = 0 \qquad (۱۹-۷)$$

جملهٔ انتگرال گرفته شده به ازای حد پایین صفر است، زیرا $x = 0$ و u، v، u'، v' متناهی هستند. برای محاسبهٔ جملهٔ مزبور به ازای حد بالا، به یاد بیاورید که $u = J_p(ax)$ و $v = J_p(bx)$؛ پس، در $x = 1$، $u = J_p(a) = 0$ و $v = J_p(b) = 0$ زیرا a و b صفرهای J_p می‌باشند. بنابراین جمله انتگرال گرفته شده در حد بالا نیز صفر است، و در نتیجه، (۱۹-۷) می‌شود

$$(a^2 - b^2)\int_0^1 xuv\,dx = 0 \qquad (۱۹-۸)$$

یا

$$(a^2 - b^2)\int_0^1 xJ_p(ax)\,J_p(bx)\,dx = 0 \qquad (۱۹-۹)$$

اگر $a \neq b$، یعنی، اگر a و b صفرهای متفاوت J_p باشند، انتگرال باید صفر شود. اگر $a = b$، انتگرال صفر نیست؛ آنرا می‌توان حساب کرد، اما ما فقط پاسخ را بیان می‌کنیم (مسألهٔ ۱ را ملاحظه کنید):

$$\int_0^1 xJ_p(ax)J_p(bx)dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } a \neq b \\ \frac{1}{2}J_{p+1}^2(a) = \frac{1}{2}J_{p-1}^2(a) = \frac{1}{2}J_p'^2(a) & \text{اگر } a = b \end{cases} \qquad (۱۹-۱۰)$$

که a و b صفرهای $J_p(x)$ هستند.

[با توجه به معادلات (۱۵-۳) تا (۱۵-۵)، و اینکه a، یکی از صفرهای J_p است، می‌توان

پی برد که سه جواب مربوط به مورد $a = b$ با هم برابر اند.]

در قالب کلمات، (۱۹-۱۰) را می‌توانیم به دو روش متفاوت بیان کنیم: اگر a_n، به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، صفرهای $J_p(x)$ باشند، در آن صورت می‌توان ادعا کرد که

(الف) توابع $\sqrt{x}\,J_p(a_n x)$ در بازهٔ $(0, 1)$ متعامد اند؛

یا اینکه

(ب) توابع $J_p(a_n x)$ در بازهٔ $(0, 1)$ **نسبت به تابع وزن** x متعامد اند.

مجموعه توابع دیگری هم ممکن است وجود داشته باشند که نسبت به یک تابع وزن متعامد باشند (رک، مثلاً، بخش ۲۲.) به طور کلی، $y_n(x)$ را یک مجموعه توابع متعامد در بازهٔ (x_1, x_2) نسبت به تابع وزن $w(x)$ می‌خوانیم، در صورتی که

$$\int_{x_1}^{x_2} y_n(x)\, y_m(x)\, w(x)\, dx = 0 \qquad \text{به ازای } n \neq m$$

این واقعیت که توابع بسل از (۱۹-۱۰) تبعیّت می‌کنند، امکان بسط یک تابع مفروض را به صورت یک رشته از توابع بسل فراهم می‌کند، درست مثل بسط توابع برحسب رشتهٔ فوریه و لژاندر. ما در فصل ۱۳، هنگامی که در یک مثال فیزیکی به آن نیاز داریم، این مطلب را پیگیری خواهیم کرد.

مسائل، بخش ۱۹

۱- معادلهٔ (۱۹-۱۰) را به روش زیر ثابت کنید: ابتدا توجه کنید که (۱۹-۲) و (۱۹-۳)، و بنابراین (۱۹-۷)، خواه a و b صفرهای $J_p(x)$ باشند خواه نباشند، همواره برقرار اند. فرض کنید a یکی از صفرها اما b یک عدد دلبخواه باشد. به این ترتیب با استفاده از (۱۹-۷) نشان دهید

$$\int_0^1 x\,u\,v\,dx = \frac{J_p(b)\; a\; J'_p(a)}{b^2 - a^2}$$

اکنون فرض کنید $b \to a$، و با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال آنرا حساب کنید (یعنی، از صورت و مخرج نسبت به b مشتق بگیرید و b را به سمت a میل دهید). در نتیجه، به ازای $a = b$، یعنی، $u = v = J_p(ax)$، مطابق (۱۹-۱۰)، خواهید داشت

$$\int_0^1 x u v \, dx = \frac{1}{2} J_p'^2(a)$$

با استفاده از (۱۵-۳) تا (۱۵-۵) نشان دهید که دو عبارت دیگری که در (۱۹-۱۰) داده شده‌اند معادل یکدیگر می‌باشند.

۲- با فرض اینکه

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

و استفاده از (۱۹-۱۰)، ثابت کنید

$$\int_0^1 \left(\frac{\sin ax}{ax} - \cos ax\right)^2 dx$$

که در آن a یک ریشهٔ معادلهٔ $\tan x = x$ است.

۳- با استفاده از (۱۷-۴) و (۱۹-۱۰)، شرط تعامد و انتگرال بهنجارش را برای توابع کروی بسل $j_n(x)$ بنویسید.

۴- در تابع توانی (۱۲-۹)، x را با عدد مختلط z جایگزین و، به این ترتیب، $J_p(z)$ را برای اینگونه اعداد تعریف کنید. (بنابر مسألهٔ ۱۲-۱، رشتهٔ حاصل به ازای جمیع مقادیر z همگراست.) با استفاده از (۱۹-۱۰) ثابت کنید که تمام صفرهای $J_p(z)$ حقیقی اند. ***راهنمایی:*** فرض کنید a و b در (۱۹-۱۰) مزدوج یکدیگرند؛ در این صورت انتگرالده مثبت بوده و در نتیجه انتگرال نمی‌تواند صفر باشد.

۵- رابطهٔ (۱۹-۱۰) را برای $J_p(x)$ به ازای $p \geq 0$ به دست آوردیم. با این همه، رابطهٔ مزبور برای $p > -1$، یعنی برای $N_p(x)$، $0 \leq p < 1$، نیز معتبر است. مشکل در اثبات، درست پس از (۱۹-۷) بروز می‌کند؛ گفتیم که u، v، u'، v' در $x = 0$ متناهی‌اند که این برای $N_p(x)$ درست نیست. با این همه اگر $p < 1$ باشد، توانهای منفی x حذف می‌شوند. این نکته را برای $p = \frac{1}{2}$ با استفاده از دو جمله از رشتهٔ توانی (۱۲-۹) یا (۱۳-۱) برای تابع $N_{1/2}(x) = -J_{-1/2}(x)$ نشان بدهید [مسألهٔ ۱۳-۳ را ملاحظه کنید].

۶- طبق مسألهٔ ۵، اگر a و b صفرهای متفاوتی از $N_{1/2}(x)$ باشند، $\int_0^1 x\, N_{1/2}(ax)\, N_{1/2}(bx)\, dx = 0$ است. با استفاده از (۱۷-۴)، $N_{1/2}(x)$ را برحسب $\cos x$ نوشته و در پی آن صفرهای $N_{1/2}(x)$ را پیدا کنید. ثابت کنید توابع

$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$ در بازهٔ (۱ ,۰) مجموعهٔ متعامدی هستند. با استفاده از (۱۹-۱۰)، ثابت بهنجارش را پیدا کنید (مقایسه کنید با مسألهٔ ۶-۸).

۲۰- فرمولهای تقریبی برای توابع بسل

اغلب اوقات با مواردی روبرو می‌شویم که داشتن یک فرمول تقریبی برای بیان رفتار یک تابع بسل به ازای مقادیر نزدیک به صفر x یا مقادیر خیلی بزرگ آن، مفید خواهد بود. برخی از این فرمولها را به عنوان مرجع در جدول زیر درج کرده‌ایم. نماد $O(x^n)$ به صورت "جملات از مرتبهٔ x^n یا کمتر" خوانده می‌شود، و به معنای این است که خطا در تقریب داده شده کمتر از حاصل‌ضرب یک مقدار ثابت در x^n است؛ بنابراین، $O(1)$ به معنای جملات کراندار است.

توجه داشته باشید که $p \geq 0$.

تابع		مقادیر کوچک x	مقادیر بزرگ x (فرمولهای مجانبی)
$J_p(x)$		$\frac{1}{\Gamma(p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^p+O(x^{p+2})$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{2p+1}{4}\pi\right)+O(x^{-3/2})$
$N_p(x)$	$p=0$	$\frac{2}{\pi}\ln x+O(1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{2p+1}{4}\pi\right)+O(x^{-3/2})$
	$p>0$	$-\frac{\Gamma(p)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^p+O\left(\frac{1}{x^{p-2}}\right)^p$	
$H_p^{(1)\text{یا}(2)}(x)$		$\pm iN_p(x)\,O(x^p)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{\pm i[x-(2p+1)\pi/4]}+O(x^{-3/2})$
$I_p(x)$		درست مثل $J_p(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{x}+O\left(\frac{e^{x}}{x}\right)$
$K_p(x)$	$p=0$	$-\ln x+O(1)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}+O\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$
	$p>0$	$\frac{1}{2}\Gamma(p)\left(\frac{2}{x}\right)^p+\begin{cases}O(x^p) & 0<p<1\\ O(x^{2-p}) & p>1\end{cases}$	
$j_n(x)$		$\frac{x^n}{(2n+1)!!}+O(x^{n+2})$	$\frac{1}{x}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)+O(x^{-2})$
$y_n(x)$		$\frac{-(2n-1)!!}{x^{n+1}}+O(x^{1-n})$	$-\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)+O(x^{-2})$

توجه: $(2n+1)!!$ به معنای $\frac{(2n+1)!!}{2^n\, n!} = (2n+1)\ldots 1\times 3\times 5\times 7$ است.

مسائل، بخش ۲۰

با استفاده از جدول بالا حدهای زیر را حساب کنید:

۱- $\lim\limits_{x\to 0} J_4(x)/[J_2(x)]^2$ ۲- $\lim\limits_{x\to\infty} I_3(x)/I_5(x)$ ۳- $\lim\limits_{x\to 0} N_0(x^2)/\ln(x)$

۴- $\lim\limits_{x\to 0} J_p(x)\,N_p(x)$ ۵- $\lim\limits_{x\to\infty} xI_p(x)\,K_p(x)$ ۶- $\lim\limits_{x\to 0} x\,j_n(x)\,y_n(x)$

با استفاده از جدول بالا و تعاریف بخش ۱۷، فرمولهای تقریبی توابع زیر را به ازای xهای بزرگ پیدا کنید:

۷- $h_n^{(1)}(x)$ ۸- $h_n^{(2)}(x)$

۹- $h_n^{(1)}(ix)$ ۱۰- $h_n^{(2)}(ix)$

۲۱- چند نکتهٔ کلّی پیرامون جوابهای رشته‌ای

تا به حال در مورد دو مثال از معادلات دیفرانسیل که می‌توان آنها را به کمک روش فروبنیوس حل کرد (معادلات لژاندر و بسل) بحث کرده‌ایم. تعداد خیلی بیشتری معادلات "اسم‌دار" هست، و توابع همخوان "اسم‌داری" هم وجود دارند که جواب آنها هستند. (مثالهای بیشتر را در بخش ۲۳ ملاحظه کنید، اما مثالهای باز هم بیشتری وجود دارند.) تمام این معادلات با دو مثال ما وجوه اشتراک زیادی دارند و شما علی‌رغم معرفی آنها در این کتاب، نباید در یافتن و استفادهٔ از آنها تردید کنید. شما ممکن است خود تمام یا هر یک از مطالب زیر را دربارهٔ چنین مجموعه توابع جدیدی (البته جدید برای شما) کشف کنید: اینکه این توابع مجموعه جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل با یک یا تعداد بیشتری پارامتر (نظیر p در معادلهٔ بسل) هستند؛ اینکه مقادیر توابع، مشتقات آنها، صفرهای آنها، و غیره، را می‌توان جدول‌بندی کرد؛ اینکه روابط بازگشتی و مشتقی و فرمولهای معلوم بسیاری وجود دارند که می‌توان آنها را از مراجع مختلف یافت و به کار بست؛ اینکه این توابع دارای ویژگیهای تعامدی، شاید نسبت به یک تابع وزن، هستند، و در نتیجه توابع با محدودیتهای مناسب را می‌توان به صورت رشته‌ای از آنها بسط داد؛ اینکه یک تابع مولد برای مجموعه توابع یا بعضی از آنها وجود دارد؛ اینکه بعضی مسائل فیزیکی وجود دارند که جوابهای

آنها، اغلب از طریق حل یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی شامل این توابع هستند؛ و غیره.

علاوه بر معادلات مشهور، روش جوابهای رشته‌ای برای حل هر معادلهٔ دیفرانسیلی که یک جواب رشته‌ای فروبنیوس *دارد* و به طریقهٔ دیگری حل نمی‌شود، نیز مفید است. برای کاربرد هوشمندانهٔ جوابهای رشته‌ای، باید بدانیم

(الف) در چه مواردی به دنبال روشهای جایگزین بگردیم؛

(ب) چگونه با توجه به معادلهٔ دیفرانسیل بگوییم که آیا روش فروبنیوس به یک حل کامل می‌انجامد یا نه؛

(ج) چگونه وقتی که یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم را به دست آورده‌ایم، جواب کامل آنرا پیدا کنیم.

ذیلاً به ترتیب به بررسی این سؤالات خواهیم پرداخت.

(الف) روشهای جایگزین مجموعهٔ بسیار کاملی از انواع معادلات دیفرانسیل در کتاب کامک وجود دارد. وقتی نمی‌توانید یک معادلهٔ دیفرانسیل را به روشهای ابتدایی حل کنید، بی‌فایده نیست که قبل از اینکه به حل رشته‌ای متوسل شوید، در کامک به جستجوی آن بپردازید.

(ب) قضیهٔ فوکس یک قضیهٔ عام منتسب به فوکس، بیان می‌دارد که چه وقت روش فروبنیوس کارایی خواهد داشت؛ ما این قضیه را برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم، که بیشترین اهمیتهای کاربردی را دارند، بررسی خواهیم کرد. معادلهٔ دیفرانسیل را به صورت زیر بنویسید

$$\boxed{y'' + f(x)\, y' + g(x)\, y = 0 \qquad (۱-۲۱)}$$

اگر $x f(x)$ و $x^2 g(x)$ به صورت رشتهٔ توانی همگرای $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ قابل بسط باشند، می‌گوییم که معادلهٔ دیفرانسیل (۲۱-۱) در مبدأ منظم است (یا یک تکینگی غیر اساسی دارد). این شرایط را شرط فوکس می‌نامیم. قضیهٔ فوکس بیان می‌دارد که این شرایط برای اینکه جواب عمومی معادلهٔ (۲۱-۱)، متشکّل از:

(۱) دو رشتهٔ فروبنیوس، یا

(۲) یک جواب $S_1(x)$، که یک رشتهٔ فروبنیوس است، و یک جواب دوم $S_1(x)\ ln\ x + S_2(x)$، که در آن $S_2(x)$ رشتهٔ فروبنیوس دیگری است، باشد، لازم و کافی هستند. مورد (۲) نه همیشه، بلکه فقط وقتی رخ می‌دهد که ریشه‌های معادلهٔ شاخصی، متساوی، یا به اندازهٔ یک عدد صحیح با هم متفاوت باشند. برای توضیح بیشتر در این مورد، بحث قبل از مسألهٔ ۱۱ را ملاحظه کنید.

به شرط **لازم** توجه کنید: اگر شرایط فوکس تحقق پیدا نکنند، یکی از جوابها ممکن است یک رشتهٔ فروبنیوس باشد، اما جواب دیگر نخواهد بود. مثلاً، معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^4y'' + y = 0 \quad \text{یا} \quad y'' + \frac{1}{x^4}y = 0$$

را در نظر بگیرید. در اینجا $g(x) = 1/x^4$، و $x^2 g(x) = 1/x^2$ است که نمی‌توان آنرا برحسب یک رشته با توانهای غیر منفی x بسط داد. پس این معادله، معادلهٔ فوکس نیست و بنابه قضیهٔ فوکس برای آن **بیش *از* یک** جواب رشته‌ای فروبنیوس وجود ندارد. در حقیقت، روشهای رشته‌ای منجر به $y = 0$ می‌شوند. جواب چنین است (از کتاب کامک)

$$y = x\left(c_1\ cos\ \frac{1}{x} + c_2\ sin\ \frac{1}{x}\right)$$

روش فروبنیوس از آن جهت با شکست مواجه می‌شود که این جواب را نمی‌توان به صورت عام رشتهٔ توانی (۱۱-۱) بسط داد.

(ج) پیدا کردن جواب دوم گاهی اوقات ممکن است (با جستجو در کتابهای مرجع، جواب رشته‌ای و غیره.) یک جواب از یک معادلهٔ مرتبه دوم را بدانیم. ببینیم با داشتن چنین جوابی، چگونه می‌توان جواب دوم را به دست آورد. در مورد معادلهٔ فوکس، ممکن است که دو ریشهٔ معادلهٔ شاخصی به دو جواب مستقل منجر شوند. با وجود این، گاهی اوقات (مثلاً برای توابع بسل با مرتبهٔ صحیح) دو مقدار s فقط به یک جواب منجر می‌شوند. در این حالت قضیهٔ فوکس چنین بیان می‌کند که جواب دوم برابر است با $ln\ x$ ضربدر جواب اول به اضافهٔ یک رشتهٔ فروبنیوس دیگر. یک روش کلی (که برای مورد غیر فوکسی نیز به کار می‌رود) به صورت زیر است:

برای پیدا کردن جواب دوم معادلهٔ (۲۱-۱) که جواب اول آن $u(x)$ داده شده است،

$$y(x) = u(x)\,v(x) \tag{۲-۲۱}$$

را در معادلهٔ (۱۲-۲) جایگزین کنید و از آن $v(x)$ را به دست آورید.

برای تبیین این دو روش، به حل معادلهٔ دیفرانسیلِ

$$۴x^۲y'' + y = ۰ \tag{۳-۲۱}$$

می‌پردازیم: یا به کمک یک جواب رشته‌ای فروبنیوس، و یا با آزمون و خطا، می‌توان دریافت که یک جواب معادلهٔ (۲۱-۳)، $y = x^{۱/۲}$ است. به این ترتیب، با توجه به اینکه (۱۲-۳) فوکسی است، می‌دانیم که یک جواب دوم عبارت است از

$$y = x^{۱/۲}\,ln\,x + \sum_{n=۰}^{\infty} b_n\,x^{n+s} \tag{۴-۲۱}$$

y' و y'' را از (۲۱-۴) حساب می‌کنیم:

$$y' = \frac{۱}{۲}x^{-۱/۲}\,ln\,x + \frac{x^{۱/۲}}{x}\sum_{n=۰}^{\infty} b_n\,(n+s)\,x^{n+s-۱}$$

(۲۱-۵)

$$y'' = -\frac{۱}{۴}x^{-۳/۲}\,ln\,x + \frac{۱}{۲}x^{-۳/۲} - \frac{۱}{۲}x^{-۳/۲} + \sum_{n=۰}^{\infty} b_n\,(n+s)(n+s-۱)\,x^{n+s-۲}$$

با جایگزینی (۲۱-۵) و (۲۱-۴) در (۲۱-۳)، نتیجه می‌گیریم

$$-x^{۱/۲}\,ln x + ۴\sum_{n=۰}^{\infty} b_n(n+s)(n+s-۱)x^{n+s} + x^{۱/۲}ln x + \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n+s} = ۰ \tag{۶-۲۱}$$

به ازای $n = ۰$، معادلهٔ شاخصی را به دست می‌آوریم

$$۴b_۰\,s(s-۱) + b_۰ = ۰ \quad \text{یا} \quad ۴s^۲ - ۴s + ۱ = ۰$$

(۲۱-۷)

$$(۲s - ۱)^۲ = ۰ \quad \text{بنابراین} \quad s = \frac{۱}{۲}$$

برای هر $n > ۰$، از (۲۱-۶) داریم

$$b_n\,[۴(n + s)(n + s - ۱) + ۱] = ۰ \tag{۸-۲۱}$$

یا $b_n = 0$، زیرا به ازای $s = \frac{1}{2}$ و $n > 0$ کروشه مخالف صفر است. پس یک جواب دوم معادلهٔ (۲۱-۳) عبارت است از

$$y = x^{1/2} \ln x + b_0 x^{1/2}$$

و جواب عمومی به صورت

$$y = c_1 x^{1/2} + c_2 (x^{1/2} \ln x + b_0 x^{1/2})$$

یا به صورت بسیار ساده‌تر زیر است:

$$y = A\, x^{1/2} + B\, x^{1/2} \ln x \tag{۲۱-۹}$$

روش عمومی‌تر را نیز می‌توان با استفاده از معادلهٔ دیفرانسیل (۱۲-۳) نمایش داد. با توجه به اینکه $x^{1/2}$ یک جواب است، جایگزینی (۲۱-۲) را که در آن $u = x^{1/2}$ است، انجام دهید، یعنی،

$$y = x^{1/2}\, v \tag{۲۱-۱۰}$$

طبق قاعدهٔ لایب‌نیتز،

$$y'' = x^{1/2} v'' + 2 \times \frac{1}{2} x^{-1/2} v' - \frac{1}{4} x^{-3/2} v$$

با جایگزینی این عبارت در (۲۱-۳) و تقسیم آن بر $x^{1/2}$، داریم

$$4x^2 v'' + 4x v' - v + v = 0$$

$$x v'' + v' = 0$$

این یک معادلهٔ مرتبهٔ اول (تفکیک‌پذیر) برحسب v' است؛ آنرا به صورت زیر حل می‌کنیم؛

$$\frac{dv'}{v'} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad ، v' = \frac{1}{x} \qquad ، v = \ln x$$

به این ترتیب، جواب دوم معادلهٔ (۲۱-۳)، یعنی (۲۱-۱۰)، می‌شود $y = x^{1/2} \ln x$ و جواب عمومی مانند قبل به صورت (۲۱-۹) می‌باشد.

مسائل، بخش ۲۱

جوابهای عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را با مراجعه به کتاب کامک پیدا کنید.

۱- $y'' - (x^2 + 1)y = 0$ ۲- $y'' + y' + 4e^{-2x}y = 0$

۳- $xy'' - y' + x^3(e^{x^2} - p^2)y = 0$ ۴- $x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0$

۵- $x^{2}y'' - 2xy' + (9x^{2}+2)y = 0$ ۶- $(x^{2}+1)y'' - xy' + y = 0$

۷- $x(x-1)^{2}y'' - 2y = 0$ ۸- $(x^{2}-1)y'' + 8xy' + 12y = 0$

۹- $x^{2}y'' + (x+1)y' - y = 0$ ۱۰- $x^{2}y'' + x^{2}y' - 2y = 0$

هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را به دو روش فربنیوس حل کنید؛ توجه کنید که تنها یک جواب به دست می‌آورید. (همچنین توجه کنید که دو مقدار s یا متساوی‌اند یا به اندازهٔ یک عدد صحیح با هم تفاوت دارند، و در مورد اخیر، sبزرگتر، آن یک جواب را می‌دهد.) نشان دهید که شرایط قضیهٔ فوکس برقرار است. با توجه به اینکه جواب دوم مساوی است با حاصل‌ضرب $\ln x$ در جوابی که دارید به اضافهٔ یک رشتهٔ فروبنیوس دیگر، جواب عمومی را به دست آورید. (خوب است توجه کنید که مقدار s در دومین رشتهٔ فروبنیوس همیشه همان دومین مقدار s است که در قسمت اول مسأله منجر به جواب نمی‌شود.)

۱۱- $xy'' + y' = 0$ ۱۲- $x(x+1)y'' - (x-1)y' + y = 0$

۱۳- $x^{2}y'' - xy' + y = 0$ ۱۴- $x(x-1)^{2}y'' - 2y = 0$

۱۵- $xy'' + xy' - 2y = 0$ ۱۶- $x^{2}y'' + (x^{3}-3x)y' + (4-2x)y = 0$

در هریک از معادلات زیر، یک جواب u داده شده است. جواب دیگر را با فرض اینکه شکل آن به صورت $y = uv$ است، به دست آورید.

۱۷- $xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ ؛ $u = e^{x}$

۱۸- $x^{2}y'' - 3xy' + 4y = 0$ ؛ $u = x^{2}$

۱۹- $x^{3}y'' + xy' - y = 0$ ؛ $u = x$

۲۰- $(x^{2}+1)y'' - xy' + y = 0$ ؛ $u = x$

۲۱- $3xy'' - 2(3x-1)y' + (3x-2)y = 0$ ؛ $u = e^{x}$

۲۲- $x^{2}(2-x)y'' + 2xy' - 2y = 0$ ؛ $u = x$

۲۳- $(x^{2}+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ؛ $u = x$

۲۲- توابع هرمیت؛ توابع لاگر؛ عملگرهای نردبانی.

در این بخش، بعضی از فرمولهای مهم را برای دو مجموعهٔ دیگر از توابع مشهور به اختصار شرح خواهیم داد. توابع هرمیت و لاگر هر دو در مکانیک کوانتومی و در مواردی که به صورت جوابهای مسائل ویژه مقداری ظاهر می‌شوند، مورد توجه هستند (مسائل ۵، ۱۱، ۱۵ و ۲۶ را ملاحظه کنید). ما همچنین یک روش عملگری را که می‌توان آنرا به عنوان جایگزین جواب رشته‌ای بعضی از معادلات دیفرانسیل به کار برد، بررسی خواهیم کرد.

توابع هرمیت معادلهٔ دیفرانسیل برای توابع هرمیت عبارت است از

$$\boxed{y''_n - x^2 y_n = -(2n+1)y_n \quad n = 0, 1, 2, \ldots} \qquad (۲۲-۱)$$

این معادله را می‌توان با رشتهٔ توانی (مسألهٔ ۵) حل کرد، اما در اینجا، به بررسی یک روش عملگری می‌پردازیم که به ویژه برای حل این معادله سودمند است. عملگر D را به معنای d/dx تلقی می‌کنیم؛ آنگاه (مسألهٔ ۵-۳۱ فصل ۸ را ملاحظه کنید)

$$\left.\begin{aligned} &(D-x)(D+x)y = \left(\frac{d}{dx} - x\right)(y' + xy) = y'' - x^2 y + y \\ &\qquad\qquad \text{و به طور مشابه} \\ &(D+x)(D-x)y = y'' - x^2 y - y \end{aligned}\right\} \qquad (۲۲-۲)$$

با استفاده از (۲۲-۲)، می‌توانیم (۲۲-۱) را به دو طریق بنویسیم:

$$(D-x)(D+x)y_n = -2ny_n \quad \text{یا} \qquad (۲۲-۳)$$

$$(D+x)(D-x)y_n = -2(n+1)y_n \qquad (۲۲-۴)$$

اکنون $(D+x)$ را روی (۲۲-۳) و $(D-x)$ را روی (۲۲-۴) اعمال می‌کنیم، و n را به m تبدیل می‌کنیم:

$$(D+x)(D-x)[(D+x)y_m] = -2m[(D+x)y_m] \qquad (۲۲-۵)$$

$$(D-x)(D+x)[(D-x)y_m] = -2(m+1)[(D-x)y_m] \qquad (۲۲-۶)$$

(وارد کردن کروشه‌ها برای روشن شدن گام بعدی ماست.)

اکنون (۲۲-۳) و (۲۲-۶) را با هم مقایسه کنید؛ اگر $y_n = [(D - x)y_m]$ و $n = m + ۱$ باشد، معادلات یکسان خواهند بود. حال می‌نویسیم

$$y_{m+۱} = (D - x)y_m \qquad (۷-۲۲)$$

و می‌بینیم که اگر جواب y_m معادلهٔ (۲۲-۱) به ازای یک مقدار n، یعنی $n = m$، معلوم باشد، می‌توان جواب مربوط به $n = m + ۱$ را با اعمال "عملگر بالا برندهٔ" $(D - x)$ بر y_m پیدا کرد. به طور مشابه، از (۲۲-۴) و (۲۲-۵) ملاحظه می‌کنیم که (مسألهٔ ۱)

$$y_{m-۱} = (D + x)y_m \qquad (۸-۲۲)$$

$(D + x)$ را می‌توان یک "عملگر پایین آورنده" نامید؛ این عملگرها در مکانیک کوانتومی، عملگرهای ***آفرینش و نابودی*** نامیده می‌شوند. این نوع عملگرها را (مسأله ۲۳-۲۷ را به عنوان مثالی دیگر ملاحظه کنید)، ***عملگرهای نردبانی*** می‌نامیم زیرا، شبیه پله‌های یک نردبان، به ما امکان می‌دهند که در یک مجموعه تابع به بالا یا پایین برویم.

اکنون اگر $n = ۰$ باشد، یک جواب معادلهٔ (۲۲-۳) [و بنابراین معادلهٔ (۲۲-۱)] را با شرط

$$(D + x)y_۰ = ۰ \qquad (۹-۲۲)$$

پیدا می‌کنیم. از حلّ این معادله (مسألهٔ ۲) داریم

$$y_۰ = e^{-x^۲/۲} \qquad (۱۰-۲۲)$$

و با استفاده از (۲۲-۷)، $y_n = (D - x)^n e^{-x^۲/۲}$. اینها توابع هرمیت هستند؛ توابع هرمیت را می‌توان به شکل ساده‌تری نیز نوشت (مسألهٔ ۳):

$$\boxed{y_n = e^{x^۲/۲} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^۲} \qquad \text{توابع هرمیت} \qquad (۱۱-۲۲)}$$

اگر (۲۲-۱۱) را در $(-۱)^n e^{x^۲/۲}$ ضرب کنیم، ***چندجمله‌ای‌های هرمیت*** را به دست می‌آوریم؛ (۲۲-۱۲) را فرمول رُدیگس برای چندجمله‌ای‌های هرمیت می‌نامند:

$$\boxed{H_n(x) = (-۱)^n e^{x^۲} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^۲} \qquad \text{چندجمله‌ای‌های هرمیت} \qquad (۱۲-۲۲)}$$

ملاحظه می‌کنیم که (مسائل ۴ و ۵)

$$H_0(x) = 1 \quad , H_1(x) = 2x \quad , H_2(x) = 4x^2 - 2 \qquad (۱۳-۲۲)$$

چندجمله‌ای‌های هرمیت در معادلهٔ دیفرانسیل زیر (مسألهٔ ۶) صدق می‌کنند:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad \text{معادلهٔ هرمیت} \qquad (۱۴-۲۲)$$

با استفاده از این معادلهٔ دیفرانسیل، می‌توانیم ثابت کنیم (مسألهٔ ۷) که چندجمله‌ای‌های هرمیت در بازهٔ $(-\infty, \infty)$ نسبت به تابع وزن e^{-x^2} متعامد اند. انتگرال بهنجارش را می‌توان حساب کرد (مسألهٔ ۱۰). بنابراین داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)\, H_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \sqrt{\pi}\, 2^n n! & n = m \end{cases} \qquad (۱۵-۲۲)$$

تابع مولّد برای چندجمله‌ای‌های هرمیت عبارت است از (مسألهٔ ۸):

$$\Phi(x,h) = e^{2xh-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{h^n}{n!} \qquad (۱۶-۲۲)$$

از تابع مولد می‌توان برای به دست آوردن روابط بازگشتی چندجمله‌ای‌های هرمیت استفاده کرد. دو رابطهٔ مفید عبارت اند از (مسألهٔ ۹):

$$\begin{aligned} &H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x) && \text{(الف)} \\ &H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x) && \text{(ب)} \end{aligned} \qquad (۱۷-۲۲)$$

توابع لاگر چندجمله‌ای لاگر را می‌توان توسط فرمول ردریگس تعریف کرد:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \qquad (۱۸-۲۲)$$

با گرفتن مشتق (مسألهٔ ۱۲)، داریم:

$$L_n(x) = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \qquad (۱۹-۲۲)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \frac{x^m}{m!} \quad \text{چندجمله‌ای‌های لاگر}$$

نماد $\binom{n}{m}$ یک ضریب دوجمله‌ای است (بخش ۴ از فصل ۱۶ را ملاحظه کنید). بعضی از مؤلفان ضریب $1/n!$ را در (۲۲-۱۸) حذف می‌کنند؛ در این صورت رشتهٔ (۲۲-۱۹) در $n!$ ضرب می‌شود. شایان توجه است که رشتهٔ (۲۲-۱۹) شبیه به بسط دوجمله‌ای $(1-x)^n$ است با این تفاوت که هر توان x، مثلاً x^m، بر یک ضریب اضافی $m!$ تقسیم شده است. می‌توان ملاحظه کرد (مسألهٔ ۱۳) که:

$$L_0(x) = 1 ,\ L_1(x) = 1 - x ,\ L_2(x) = 1 - 2x + x^2/2 \qquad (۲۰-۲۲)$$

چندجمله‌ای‌های لاگر جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل زیر هستند (مسائل ۱۴ و ۱۵):

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 ,\ y = L_n(x) \qquad (۲۱-۲۲)$$

با استفاده از این معادلهٔ دیفرانسیل می‌توانیم ثابت کنیم (مسألهٔ ۱۶) که چندجمله‌ای‌های لاگر در بازهٔ $(0, \infty)$ نسبت به تابع وزن e^{-x} متعامد هستند. در حقیقت، با توجه به تعریف (۲۲-۱۸) در می‌یابیم (مسأله ۱۹) که توابع $e^{-x/2} L_n(x)$ در بازهٔ $(0, \infty)$ یک مجموعهٔ متعامد بهنجار

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x)\, L_k(x)\, dx = \delta_{nk} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & n = k \end{cases}$$

هستند.

(بخش ۹ از فصل ۳ را برای تعریف δ_{nk} ملاحظه کنید.)

تابع مولد برای چندجمله‌ای‌های لاگر عبارت است از (مسألهٔ ۱۷):

$$\Phi(x,h) = \frac{e^{-xh/(1-h)}}{1-h} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)h^n \qquad (۲۲-۲۳)$$

با به کاربردن این تابع، می‌توانیم روابط بازگشتی را به دست آوریم؛ به عنوان مثال (مسألهٔ ۱۸):

$$L'_{n+1}(x) - L'_n(x) + L_n(x) = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$(n+1)L_{n+1} - (2n+1-x)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0 \quad \text{(ب)} \quad (۲۲-۲۴)$$

$$xL'_n(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0 \quad \text{(ج)}$$

هشدار: در صورت حذف ضریب $1/n!$ در تعریف (۲۲-۱۸)، این فرمولها به صورتی دیگر در می‌آیند، بنابراین باید به نمادگذاری هر کتاب توجه کرد.

مشتقات چندجمله‌ای‌های لاگر، چندجمله‌ای‌های وابستهٔ لاگر نامیده می‌شوند؛ که می‌توان آنها را با مشتق‌گیری از (۲۲-۱۸)، (۲۲-۱۹) یا (۲۲-۲۰) (مسأله ۲۰) پیدا کرد. بنا به تعریف:

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) \quad \text{چندجمله‌ای‌های وابستهٔ لاگر} \quad (۲۲-۲۵)$$

هشدار: نمادگذاریهای کتب مختلف ممکن است ابهام‌انگیز باشد؛ بعضی از مؤلفان $L_n^k(x)$ را به صورت $(d^k/dx^k)L_n(x)$ تعریف می‌کنند، بنابراین به دقّت به تعریفی که در کتاب مورد مطالعه‌تان ارائه شده است، توجه کنید. مثلاً، چندجمله‌ای‌های وابستهٔ لاگر در نظریهٔ اتم هیدروژن در مکانیک کوانتومی به کار می‌روند. در کتابهای مختلف در خواهید یافت که این

چندجمله‌ای‌ها به صورت $L_{n+1}^{2l+1}(x)$ و $L_{n-l-1}^{2l+1}(x)$ نشـان داده مـی‌شوند؛ هـر دوی ایـن نمادگذاری‌ها (به استثنای علامت) به معنای $(d^{2l+1}/dx^{2l+1})L_{n+l}(x)$ هستند. (مسائل ۲۶ تا ۲۸ را ملاحظه کنید.)

بـا مشـتق‌گیری از مـعادلهٔ لاگـر (۲۲-۲۱)، مـعادلهٔ دیـفرانسیلی پـیدا خـواهـیم کـرد کـه چندجمله‌ای‌های $L_n^k(x)$ در آن صدق می‌کند (مسأله ۲۱):

$$xy'' + (k + 1 - x)y' + ny = 0 \quad ، y = L_n^k(x) \qquad (۲۶-۲۲)$$

چندجمله‌ایهای $L_n^k(x)$ را می‌توان از فرمول ردریگس نیز پیدا کرد (مسألهٔ ۲۲):

$$L_n^k(x) = \frac{x^{-k}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+k}e^{-x}) \qquad (۲۷-۲۲)$$

توجه کنید که در این فرمول نیازی نیست که k یک عدد صحیح باشد؛ در حقیقت، (۲۲-۲۷) برای تعریف $L_n^k(x)$ به ازای $k > -1$ به‌کار می‌رود.

روابط بازگشتی برای چندجمله‌ای‌های $L_n^k(x)$ را می‌توان با مشتق‌گیری از روابط بازگشتی چندجمله‌ای‌های لاگر به دست آورد. به عنوان مثال (مسألهٔ ۲۳):

(۲۸-۲۲)

$$(n+1)L_{n+1}^k(x) - (2n+k+1-x)L_n^k(x) + (n+k)L_{n-1}^k(x) = 0 \qquad \text{(الف)}$$

$$x\frac{d}{dx}L_n^k(x) - nL_n^k(x) + (n+k)L_{n-1}^k(x) = 0 \qquad \text{(ب)}$$

با استفاده از معادلهٔ دیفرانسیل (۲۲-۲۶)، می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۲۴) که توابع $L_n^k(x)$ در بازهٔ $(0, \infty)$ نسبت به تابع وزن $x^k e^{-x}$ متعامد اند. از جمله (مسألهٔ ۲۵):

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} L_n^k(x) L_m^k(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{(n+k)!}{n!} & m = n \end{cases} \qquad (۲۹-۲۲)$$

انتگرال بهنجارشی که در اتم هیدروژن به آن نیاز داریم، (۲۲-۲۸) نیست، بلکه دارای ضریب x^{k+1} می‌باشد. می‌توان ملاحظه کرد (مسائل ۲۵ تا ۲۷ را ملاحظه کنید) که:

$$\int_0^\infty x^{k+1} e^{-x} [L_n^k (x)]^2 dx = (2n + k + 1) \frac{(n+k)!}{n!} \qquad (۲۲\text{-}۳۰)$$

هشدار مجدد: فرمولهای (۲۲-۲۸)، (۲۲-۲۹) و (۲۲-۳۰) درکتابهایی که ضریب $1/n!$ را در (۲۲-۱۸) حذف کرده و / یا تعریف متفاوتی از $L_n^k (x)$ را در (۲۲-۲۵) به کار برده‌اند، به صورتی دیگر خواهند بود.

مسائل، بخش ۲۲

۱- روابط (۲۲-۲)، (۲۲-۳)، (۲۲-۴) و (۲۲-۸) را ثابت کنید.

۲- (۲۲-۹) را حل کنید و جواب (۲۲-۱۰) را به دست آورید. در صورت لزوم، بخش ۲ از فصل ۸ را ملاحظه کنید.

۳- نشان دهید $e^{x^2/2} D[e^{-x^2/2} f(x)] = (D - x) f(x)$. سپس قرار دهید

$$f(x) = (D - x)\, g(x) = e^{x^2/2} D[e^{-x^2/2} g(x)]$$

تا نتیجه شود

$$(D - x)^2 g(x) = e^{x^2/2} D^2[e^{-x^2/2} g(x)]$$

این فرآیند را ادامه داده، و نشان دهید که

$$(D - x)^n F(x) = e^{x^2/2} D^n[e^{-x^2/2} F(x)]$$

برای هر $F(x)$ برقرار است. آنگاه با فرض $F(x) = e^{-x^2/2}$، (۲۲-۱۱) را به دست آورید.

۴- با استفاده از (۲۲-۱۲)، چندجمله‌ای‌های هرمیت داده شده در (۲۲-۱۳) را پیدا کنید. سپس با استفاده از (۲۲-۱۷ ب)، $H_3(x)$ و $H_4(x)$ را به دست آورید.

۵- معادلهٔ دیفرانسیل هرمیت

$$y'' - 2xy' + 2py = 0$$

را با رشتهٔ توانی حل کنید. شما باید، مثل معادلهٔ لژاندر در بخش۲، یک رشتهٔ a_0 و یک رشتهٔ a_1 پیدا کنید. نشان دهید که رشتهٔ a_0 وقتی p یک عدد صحیح زوج است، و رشتهٔ a_1

وقتی p یک عدد صحیح فرد است دارای تعداد محدودی جمله می‌باشند. به این ترتیب، به ازای هر عدد صحیح n، معادلهٔ دیفرانسیل (۲۲-۱۴) یک جواب چندجمله‌ای درجهٔ n دارد. اگر a_0 یا a_1 طوری انتخاب شود که جملهٔ با بالاترین مرتبه $(2x)^n$ باشد، چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای‌های هرمیت هستند. $H_0(x)$، $H_1(x)$ و $H_2(x)$ را پیدا کنید. توجه کنید که در اینجا شما یک مسأله ویژه مقداری را حل می‌کنید (آخر بخش ۲ را ملاحظه کنید)، یعنی مقادیری از p را پیدا می‌کنید که به ازای آنها معادلهٔ دیفرانسیل داده شده دارای جوابهای چندجمله‌ای است، و سپس جوابهای مربوطه (ویژه توابع) را می‌یابید.

۶- $y_n = e^{-x^2/2} H_n(x)$ را در (۲۲-۱) جایگزین کنید و نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیلی که $H_n(x)$ در آن صدق می‌کند، (۲۲-۱۴) است.

۷- ثابت کنید توابع $H_n(x)$ در بازهٔ $(-\infty, \infty)$ نسبت به تابع وزن e^{-x^2} متعامد هستند. ***راهنمایی:*** معادلهٔ دیفرانسیل (۲۲-۱۴) را به صورت زیر بنویسید

$$e^{x^2} \frac{d}{dx} (e^{-x^2} y') + 2ny = 0$$

و بخشهای ۷ و ۱۹ را ملاحظه کنید.

۸- در تابع مولد (۲۲-۱۶)، قسمت نمایی را برحسب رشتهٔ توانی بسط دهید و با گردآوری توانهای h، تعدادی از چندجمله‌ای‌های اوّل هرمیت را به دست آورید. درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2h \frac{\partial \Phi}{\partial h} = 0$$

رشتهٔ (۲۲-۱۶) را در این اتحاد قرار دهید و ثابت کنید که توابع $H_n(x)$ در رابطهٔ مزبور، معادلهٔ (۲۲-۱۴) را برقرار می‌سازند. تحقیق کنید که بالاترین جملهٔ $H_n(x)$ در (۲۲-۱۶)، جملهٔ $(2x)^n$ است. [در این صورت شما ثابت کرده‌اید که توابع $H_n(x)$ در (۲۲-۱۶) حقیقتاً چندجمله‌ای‌های هرمیت هستند زیرا، با توجه به مسألهٔ ۵، (۲۲-۱۴) تنها یک جواب چندجمله‌ای درجهٔ n دارد.]

۹- با استفاده از تابع مولد، روابط بازگشتی (۲۲-۱۷) را ثابت کنید. ***راهنمایی برای (الف):*** از (۲۲-۱۶) نسبت به x مشتق بگیرید و ضرایب h^n را مساوی هم قرار دهید. ***راهنمایی برای (ب):*** از (۲۲-۱۶) نسبت به h مشتق بگیرید و ضرایب h^n را مساوی هم قرار دهید.

۱۰- انتگرال بهنجارش در (۲۲-۱۵) را حساب کنید. ***راهنمایی:*** (۲۲-۱۲) را برای یکی از ضرایب $H_n(x)$ به کار ببرید، به طور جزء به جزء انتگرال بگیرید، و از (۲۲-۱۷ الف) استفاده کنید؛ سپس نتیجه را به دفعات به کار ببرید.

۱۱- مسألهٔ ویژه مقداری زیر را حل کنید (انتهای بخش ۲ و مسألهٔ ۵ را ملاحظه کنید): معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + (\varepsilon - x^{۲})y = ۰$ داده شده است؛ مقادیر ممکن ε (ویژه مقادیر) را چنان پیدا کنید که جوابهای $y(x)$ معادله دیفرانسیل داده شده وقتی که $x \to \pm\infty$، به سمت صفر میل کنند، برای این مقادیر ε، ویژه توابع $y(x)$ را پیدا کنید. ε چقدر است، و ویژه توابع چه هستند؟

۱۲- با استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتز (بخش ۳)، از (۲۲-۱۸) مشتق بگیرید و (۲۲-۱۹) را به دست آورید

۱۳- با استفاده از (۲۲-۱۹)، درستی رابطهٔ (۲۲-۲۰) را تحقیق کرده، $L_{۳}(x)$ و $L_{۴}(x)$ را پیدا کنید.

۱۴- نشان دهید که $y = L_n(x)$ داده شده در (۲۲-۱۸)، در (۲۲-۲۱) صدق می‌کند. ***راهنمایی:*** روشی مشابه با آنچه که در بخش ۴ به کار بردید را دنبال کنید. با فرض $v = x^n e^{-x}$، نشان دهید که $xv' = (n-x)v$. با استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتز، از معادلهٔ آخر $(n + ۱)$ بار مشتق بگیرید و $d^n v/dx^n = n!\, e^{-x} L_n(x)$ را از (۲۲-۱۸) به کار ببرید.

۱۵- معادلهٔ دیفرانسیل لاگر

$$xy'' + (۱ - x)y' + py = ۰$$

را با رشتهٔ توانی حل کنید. نشان دهید که تعداد جملات رشتهٔ a_n اگر p یک عدد صحیح باشد، محدود خواهد بود. بنابراین به ازای هر عدد صحیح n معادلهٔ دیفرانسیل (۲۲-۲۱) یک جواب دارد که یک چندجمله‌ای درجهٔ n است. این چندجمله‌ای‌ها به ازای $a_{۰} = ۱$ چندجمله‌ای‌های لاگر $L_n(x)$ می‌باشند. $L_{۰}(x)$، $L_{۱}(x)$، $L_{۲}(x)$، و $L_{۳}(x)$ را پیدا کنید. (این یک مسألهٔ ویژه مقداری است - مسألهٔ ۵ و بخش ۲ را مقایسه کنید.)

۱۶- ثابت کنید که توابع $L_n(x)$ در بازهٔ $(۰, \infty)$ نسبت به تابع وزن e^{-x} متعامد اند. ***راهنمایی:*** معادلهٔ دیفرانسیل (۲۲-۲۱) را به صورت زیر بنویسید

$$e^x \frac{d}{dx}\,(x\,e^{-x}y') + ny = ۰$$

و بخشهای ۷ و ۱۹ را ملاحظه کنید.

۱۷- در (۲۲-۲۳)، ضمن نوشتن رشتهٔ نمائی و جمع‌آوری توانهای h، چند جملهٔ اول رشته را بررسی کنید. درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید.

$$x\,\frac{\partial^۲\Phi}{\partial x^۲} + (۱-x)\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} + h\,\frac{\partial\Phi}{\partial h} = ۰$$

رشتهٔ (۲۲-۲۳) را در اتحاد اخیر جایگزین کنید و نشان دهید که توابع $L_n(x)$ رابطهٔ (۲۲-۲۳) در معادلهٔ لاگر (۲۲-۲۱) صدق می‌کنند. با قرار دادن $x = ۰$ در تابع مولد تحقیق کنید که جملهٔ ثابت برابر ۱ است. [به این ترتیب ثابت کرده‌اید که توابع $L_n(x)$ در (۲۲-۲۳) واقعاً چندجمله‌ای‌های لاگر هستند. چه، با توجه به مسألهٔ ۱۵، (۲۲-۲۱) تنها یک جواب چندجمله‌ای درجه n دارد.]

۱۸- روابط بازگشتی (۲۲-۲۴) را به شرح زیر ثابت کنید:

(الف) از (۲۲-۲۳) نسبت به x مشتق بگیرید و $h\,\Phi = (h-۱)\,(\partial\Phi/\partial x)$ را به دست آورید؛ ضرایب $h^{n+۱}$ را مساوی هم قرار دهید.

(ب) از (۲۲-۲۳) نسبت به h مشتق بگیرید و $(۱-h)^۲\,(\partial\Phi/\partial h) = (۱-h-x)\Phi$ را به دست آورید؛ ضرایب h^n را مساوی هم قرار دهید.

(ج) قسمتهای (الف) و (ب) را با هم ترکیب کنید و

$$x(\partial\Phi/\partial h) + h\,\Phi - h(۱-h)\;\partial\Phi/\partial h = ۰$$

را به دست آورید. رشتهٔ Φ را جایگزین کنید و ضرایب h^n را مساوی هم قرار دهید.

۱۹- انتگرال بهنجارش را در (۲۲-۲۲) حساب کنید. ***راهنمایی:*** (۲۲-۱۸) را برای یکی از ضرایب $L_n(x)$ به کار ببرید؛ به روش جزء به جزء n بار انتگرال بگیرید. از (۲۲-۱۹) برای پیدا کردن $(d^n/dx^n)\;L_n(x)$، و از بخش ۳ از فصل ۱۱ برای پیدا کردن $\int_۰^\infty x^n e^{-x}dx$ استفاده کنید.

۲۰- با استفاده از (۲۲-۲۵)، (۲۲-۲۰) و مسألهٔ ۱۳، $L_n^k\,(x)$ را به ازای ۲ ، ۱ ، ۰ $= n$ و ۲ ، ۱ $= k$ پیدا کنید.

۲۱- تحقیق کنید که چندجمله‌ای‌های $L_n^k\,(x)$ مذکور در (۲۲-۲۵)، در (۲۲-۲۶) صدق

می‌کنند. ***راهنمایی:*** (۲۲-۲۱) را با جایگزین کردن n با $n + k$ بنویسید و با استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتز، kبار مشتق بگیرید.

۲۲- تحقیق کنید که چندجمله‌ای‌هایی که با (۲۲-۲۷) داده می‌شوند، همان $L_n^k (x)$ تعریف شده در (۲۲-۲۵) هستند. ***راهنمایی:*** نشان دهید که توابع (۲۲-۲۷) در (۲۲-۲۶) به شرح زیر صدق می‌کنند. فرض کنید $v = e^{-x} x^{n+k}$ و نشان دهید که $xv' = (n + k - x)v$ (با مسألهٔ ۱۴ مقایسه کنید.) از این معادله طبق قاعده لایب‌نیتز $n + ۱$ بار مشتق بگیرید و $d^n v/dx^n = n!\, e^{-x} x^k L_n^k (x)$ را از (۲۲-۲۷) به کار ببرید. همچنین نشان دهید که ضریب x^n در هر دو رابطهٔ (۲۲-۲۵) و (۲۲-۲۷) مساوی $(-۱)^n/n!$ است [بنابراین، با فرض اینکه (۲۲-۲۶) به ازای یک k، فقط یک جواب چندجمله‌ای درجهٔ n دارد (که این نکته را با حل رشته‌ای می‌توان نشان داد)، (۲۲-۲۷) همان چندجمله‌ای‌های (۲۲-۲۵) را به ازای k صحیح به دست می‌دهد.]

۲۳- درستی روابط بازگشتی (۲۲-۲۸) را به شرح زیر تحقیق کنید:

(الف) در (۲۲-۲۴ ب)، n را با $n + k$ جایگزین کنید و با استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتز k بار مشتق بگیرید؛ در (۲۲-۲۴ الف)، k را با $n + k$ جایگزین کنید و $k - ۱$ بار مشتق بگیرید. حاصل‌ضرب k در نتیجهٔ دوم را از نتیجهٔ اول کم کنید.

(ب) در (۲۲-۲۴ ج)، n را با $n + k$ جایگزین کنید و k بار مشتق بگیرید.

۲۴- نشان دهید که توابع $L_n^k (x)$ در بازهٔ $(۰ , \infty)$ نسبت به تابع وزن $x^k e^{-k}$ متعامد هستند. ***راهنمایی:*** معادلهٔ دیفرانسیل (۲۲-۲۶) را به صورت زیر بنویسید.

$$x^{-k} e^x \frac{d}{dx} (x^{k+۱} e^{-x} y') + ny = ۰$$

و بخشهای ۷ و ۱۹ را ملاحظه کنید.

۲۵- انتگرالهای بهنجارش (۲۲-۲۹) و (۲۲-۳۰) را حساب کنید. ***راهنمایی:*** (۲۲-۲۷) را برای یکی از ضرایب $L_n^k (x)$ در (۲۲-۲۹) به کار ببرید؛ n بار به روش جزء به جزء انتگرال بگیرید. با استفاده از (۲۲-۲۵) و سپس (۲۲-۱۹)، $d^n/dx^n\, L_n^k (x)$ را پیدا کنید. این نتیجه را با مسألهٔ ۱۹ مقایسه کنید. برای پیدا کردن (۲۲-۳۰)، (۲۲-۲۸ الف) را در $x^k e^{-x}$ضرب کنید و انتگرال بگیرید؛ (۲۲-۲۹) را برای هر دو حالت $m \neq n$ و $m = n$ به کار ببرید.

۲۶- مسألهٔ ویژه مقداری زیر را حل کنید (پایان بخش ۲ و مسألهٔ ۱۱ را ملاحظه کنید): معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + \left(\frac{\lambda}{x} - \frac{۱}{۴} - \frac{l(l+۱)}{x^۲}\right)y = ۰$$

که در آن l یک عدد صحیح بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشد، داده شده است. مقادیر λ را طوری تعیین کنید که وقتی $x \to \infty$، $y \to ۰$، و ویژه توابع مربوطه را بیابید. ***راهنمایی:*** فرض کنید $y = x^{l+۱} e^{-x/۲} v(x)$ و نشان دهید که $v(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$x v'' + (۲l + ۲ - x)v' + (\lambda - l - ۱)v = ۰$$

صدق می‌کند. از مقایسه با (۲۲-۲۶) نشان دهید که اگر λ یک عدد صحیح بزرگتر از l باشد، یک جواب چندجمله‌ای به صورت $L_{\lambda-l-۱}^{۲l+۱}(x)$ وجود دارد.

۲۷- توابعی که در نظریهٔ اتم هیدروژن حائز اهمیت‌اند، عبارت اند از

$$f_n(x) = x^{l+۱}\, e^{-x/۲n}\, L_{n-l-۱}^{۲l+۱}\left(\frac{x}{n}\right)$$

که n و l اعداد صحیحی هستند به طوری که $۰ \le l \le n - ۱$. (توجه کنید که در اینجا $k = ۲l + ۱$ است و n را با $n - l - ۱$ جایگزین کرده‌ایم؛ در این مسأله، مثلاً $L_۲^۳$ بدین معناست که $l = ۱$، $n = ۴$.) به ازای $l = ۱$ نشان دهید که

$$f_۲(x) = x^۲ e^{-x/۴} \quad ,f_۳(x) = x^۲ e^{-x/۶}\left(۴ - \frac{x}{۳}\right)$$

$$f_۴(x) = x^۲ e^{-x/۸}\left(۱۰ - \frac{۵x}{۴} + \frac{x^۲}{۳۲}\right)$$

راهنمایی: چندجمله‌ای‌های $L_۰^۳$ ، $L_۱^۳$ ، و $L_۲^۳$ را نظیر مسألهٔ ۲۰ (به ازای $k = ۳$) پیدا کنید و سپس x را با x/n جایگزین کنید. توابع $f_n(x)$ با توابع (۲۲-۲۹) تفاوت بسیار دارند زیرا x/n از یک تابع به تابع بعد تغییر می‌کند. با این همه، می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۲۳-۲۵) که به ازای یک l ثابت، مجموعهٔ توابع $f_n(x)$، $n \ge l + ۱$، در بازهٔ $(۰, \infty)$ یک مجموعهٔ متعامد است. این موضوع را برای این سه تابع تحقیق کنید. ***راهنمایی:*** انتگرالها، توابع Γ هستند - بخش ۳ از فصل ۱۱ را ملاحظه کنید.

۲۸- مسألهٔ ۲۷ را به ازای $l = ۰$ و $n = ۱، ۲، ۳$ تکرار کنید.

۲۳- مسائل متفرقه

۱- با استفاده از تابع مولد (۵-۱۵)، ضریب بهنجارش چندجمله‌ای‌های لژانـدر را پیدا کـنید. ***راهنمایی:*** معادلهٔ (۵-۲) را، با استفاده از رابطهٔ (۵-۱) برای Φ، مجذور کنید و از ۱- تا ۱+ انتگرال بگیرید. انتگرال $\Phi^{۲}$ را (پس از انتگرال‌گیری) برحسب توانـهای h بسـط دهـید و ضرایب توانهای مشابه را مساوی قرار دهید.

۲- با استفاده از تابع مولد نشان دهید

$$P_{۲n+۱}(\circ) = \circ \quad و \quad P_{۲n}(\circ) = \frac{(-۱)^n(۲n-۱)!!}{۲^n\, n!}$$

(برای ملاحظهٔ مفهوم !! ، رک بخش ۲۰). ***راهنمایی:*** (۵-۱) را به ازای $x = \circ$ برحسب توانهای h بسط دهید و ضرایب توانهای مشابه h در (۵-۲) را مساوی قرار دهید.

۳- با استفاده از (۵-۸ هـ) نشان دهید که $\int_\circ^۱ P_l(x)\,dx = [P_{l-۱}(\circ) - P_{l+۱}(\circ)]/(۲l+۱)$ سپس با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۲ نشان دهید

$$\int_\circ^۱ P_{۲n}(x)\,dx = \circ \quad ،n > \circ \quad و \quad \int_\circ^۱ P_{۲n+۱}(x)\,dx = \frac{(-۱)^n(۲n-۱)!!}{۲^{n+۱}(n+۱)!}$$

۴- نتیجهٔ مسألهٔ ۳ را مستقیماً با انتگرال‌گیری تابع مولد از ∘ تا ۱ و بسط نتیجه برحسب توانهای h به دست آورید. ضرایب h^l را در اتحاد به دست آمده از انتگرال‌گیری (۵-۲) در فاصلهٔ ∘ تا ۱ ، مساوی قرار دهید.

۵- نشان دهید $\sum_\circ^n (۲l+۱)P_l(x) = P'_n(x) + P'_{n+۱}(x)$. ***راهـــــنمایی:*** از روش استقرای ریاضی استفاده کنید:

(الف) درستی فرمول را به ازای $n = \circ$ تحقیق کنید.

(ب) با فرض اینکه فرمول به ازای $l = n - ۱$ برقرار است، نشان دهـید [بـا اسـتفاده از (۵-۸ هـ)] که به ازای $l = n$ نیز برقرار می‌باشد.

۶- با استفاده از (۱۰-۶)، (۵-۸)، و مسألهٔ ۲، $P^l_{۲n+۱}(\circ)$ را حساب کنید.

۷- نشان دهید که، به ازای $l > \circ$، اگر a و b دو نقطهٔ بیشینه و یا کمینهٔ $P_l(x)$، یا ۱ ± ، باشند، $\int_a^b P_l(x)\,dx = \circ$ است. ***راهنمایی:*** از (۷-۲) انتگرال بگیرید.

۸- نشان دهید $(۲l+۱)(x^۲-۱)P_l'(x) = l(l+۱)[P_{l+۱}(x) - P_{l-۱}(x)]$.

راهنمایی: از (۵-۸ هـ) و (۷-۲) انتگرال بگیرید و نتایج را با هم ترکیب کنید. به این ترتیب نشان دهید که در نقاط بیشینه یا کمینهٔ $P_l(x)$ و در ۱ ±، $P_{l+1}(x) = P_{l-1}(x)$ است.

۹- انتگرال $\int_0^1 x\, P_l(x)\, P_n(x)\, dx$ را به ازای $l \ge n$ حساب کنید. ***راهنمایی:*** در (۵-۸الف)، l را با $l+1$ جایگزین کنید، آنرا در $P_n(x)$ ضرب کنید، و انتگرال بگیرید.

با استفاده از روابط بازگشتی بخش ۱۵ (و، به هنگام نیاز، بخشهای ۱۲، ۱۳، ۱۷ و ۲۰)، درستی فرمولهای مسائل ۱۰ تا ۱۴ را تحقیق کنید.

۱۰- $$\int_0^\infty x^{-p} J_{p+1}(x)\, dx = \frac{1}{2^p \Gamma(1+p)}$$

۱۱- $$\int_0^\infty x^{-n} j_{n+1}(x)\, dx = \frac{1}{(2n+1)!!}$$

۱۲- $$\frac{d}{dx} K_p(x) = -\frac{1}{2}\left[K_{p-1}(x) + K_{p+1}(x)\right]$$

۱۳- $$\frac{d}{dx} j_n(x) = \left[n j_{n-1}(x) - (n+1)\, j_{n+1}(x)\right]/(2n+1)$$

۱۴- $$\int x^3 J_0(x)\, dx = x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x)$$

۱۵- با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۱۸-۴ و معادلات (۱۷-۴)، نشان دهید که

$$j_n(x)\, y'_n(x) - y_n(x)\, j'_n(x) = \frac{1}{x^2}$$

سپس از مسألهٔ ۱۷-۱۴ استفاده کنید (برای yها و همچنین jها) و نشان دهید که

$$j_n(x)\, y_{n-1}(x) - y_n(x)\, j_{n-1}(x) = \frac{1}{x^2}$$

۱۶- با استفادهٔ مکرّر از (۱۵-۲)، نشان دهید که

$$J_1(x) = x\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)J_0(x) \quad \text{،} \quad J_2(x) = x^2\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^2 J_0(x)$$

و، به طور کلی،

$$J_n(x) = x^n\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n J_0(x)$$

۱۷- اگر a اولین صفر $J_۱(x)$ باشد، مقدار x را در اولین بیشینهٔ $y = xJ_۱(ax)$ پیدا کنید. با استفاده از جدول، y را در بیشینهٔ مزبور پیدا کنید.

۱۸- تغییر متغیر $z = e^x$ را در معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + e^{۲x}y = ۰$ اعمال کنید و بدین ترتیب یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل را برحسب توابع بسل به دست آورید.

۱۹- (الف) تابع مولد برای توابع بسل با مرتبهٔ صحیح $p = n$ عبارت است از

$$\Phi(x, h) = e^{(۱/۲)x(h - h^{-۱})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^n J_n(x)$$

با بسط قسمت نمایی برحسب توانهای $x(h - h^{-۱})$ نشان دهید که جملهٔ $n = ۰$ همانگونه که ادعا شده برابر $J_۰(x)$ است.

(ب) نشان دهید

$$x^۲ \frac{\partial^۲\Phi}{\partial x^۲} + x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + x^۲\Phi - \left(h\frac{\partial}{\partial h}\right)^۲\Phi = ۰$$

از این نتیجه و $\Phi(x, h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^n J_n(x)$ استفاده کنید و نشان دهید که توابع $J_n(x)$ در معادلهٔ بسل صدق می‌کنند. با بررسی جملات h^n در بسط $e^{(۱/۲)x(h-h^{-۱})}$ در قسمت (الف)، نشان دهید که ضریب h^n رشته‌ای است که با جملهٔ $(۱/n!)(x/۲)^n$ شروع می‌شود. (به این ترتیب ثابت کرده‌اید که توابع $J_n(x)$ در بسط $\Phi(x, h)$ در واقع توابع بسل با مرتبهٔ صحیح هستند که قبلاً توسط (۱۲-۹) و (۱۳-۱) به ازای $p = n$ تعریف شده‌اند.)

۲۰- در تابع مولد مسألهٔ ۱۹، قرار دهید $h = e^{i\theta}$ و قسمتهای حقیقی و مجازی را جدا کنید و معادلات زیر را نتیجه بگیرید.

$$\cos(x\sin\theta) = J_۰(x) + ۲J_۲(x)\cos ۲\theta + ۲J_۴(x)\cos ۴\theta + \dots$$

$$= J_۰(x) + ۲\sum_{n=۱}^{\infty} J_{۲n}(x)\cos ۲n\theta$$

$$\sin(x\sin\theta) = ۲[J_۱(x)\sin\theta + J_۳(x)\sin ۳\theta + \dots]$$

$$= ۲\sum_{n=۰}^{\infty} J_{۲n+۱}(x)\sin(۲n+۱)\theta$$

اینها رشته‌های فوریه‌ای هستند که توابع بسل ضرایب آنها می‌باشند. (در واقع J_nها را به ازای مقادیر صحیح n غالباً ضرایب بسل می‌نامند زیرا در رشته‌های بسیاری نظیر اینها بروز می‌کنند.) با استفاده از فرمولهای ضرایب رشتهٔ فوریه، انتگرالهای معرف J_n را به ازای n زوج، و به ازای n فرد پیدا کنید. نشان دهید که با ترکیب این نتایج، برای جمیع مقادیر صحیح n، خواهیم داشت

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\,(n\theta - x\sin\,\theta)\,d\theta$$

این رشته‌ها و انتگرالها در نجوم و در نظریهٔ مدوله‌سازی بسامدی امواج مورد استفاده‌اند.

۲۱- در معادلهٔ تابع مولد، مسألهٔ ۱۹، قرار دهید $x = iy$ و $h = -ik$ و نشان دهید که

$$e^{(1/2)y(k+k^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k^n I_n(y)$$

۲۲- در رشتهٔ $\cos\,(x\sin\,\theta)$ مسألهٔ ۲۰، فرض کنید $\theta = 0$ و سپس $\theta = \pi/2$ و نتایج را با هم جمع کنید و نشان دهید (مسألهٔ ۱۳-۲ را به یاد بیاورید)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{4n}(x) = \frac{1}{2}\,(1 + \cos\,x)$$

۲۳- معادلهٔ دیفرانسیل $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ را با رشتهٔ توانی حل کنید. جوابهای چندجمله‌ای این معادله که ضرایب آنها با شرط $y(1) = 1$ تعیین می‌شوند، چندجمله‌ای‌های چبیشف $T_n(x)$ نامیده می‌شوند، T_0، T_1، و T_2 را پیدا کنید.

۲۴- (الف) معادلهٔ دیفرانسیل زیر، غالباً معادلهٔ استورم - لیوویل نامیده می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\,[A(x)y'] + [\lambda B(x) + C(x)]y = 0$$

(λ یک پارامتر ثابت است). این معادله، بسیاری از معادلات دیفرانسیل ریاضی فیزیک را به صورت موارد خاص در بر می‌گیرد. نشان دهید که معادلات زیر را می‌توان به صورت استورم - لیوویل نوشت: معادلهٔ لژاندر (۷-۲)؛ معادلهٔ بسل (۱۹-۲) **به ازای یک** p ی ثابت، یعنی، با پارامتر λ مربوط به a^2؛ معادلهٔ نوسانگر هماهنگ ساده $y'' = -n^2y$ ؛معادلهٔ هرمیت (۲۲-۱۴)؛ معادلات لاگر (۲۲-۲۱) و (۲۲-۲۶).

(ب) با دنبال کردن روشهای اثبات تعامد در بخشهای ۷ و ۱۹، نشان دهید که اگر y_1 و y_2 دو جواب معادلهٔ استورم - لیوویل باشند (مربوط به دو مقدار λ_1 و λ_2 از پارامتر λ)، در این صورت y_1 ، y_2 در بازهٔ (a, b) نسبت به تابع وزن $B(x)$ با شرط $A(x)\,(y'_1 y_2 - y'_2 y_1)\Big|_a^b$ متعامد هستند.

۲۵- در مسألهٔ ۲۲-۲۶، در معادلهٔ دیفرانسیل y ، x را با x/n جایگزین کنید، و قرار دهید $\lambda = n$ و نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیلی که توابع $f_n(x)$ مسألهٔ ۲۲-۲۷ در آن صدق می‌کنند به صورت زیر است

$$y'' + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4n^2} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)y = 0$$

بنابراین با استفاده از مسألهٔ ۲۴ نشان دهید که توابع $f_n(x)$ در بازهٔ $(0, \infty)$ متعامد هستند.

۲۶- ***فرمول باوئر***، یعنی $e^{ixw} = \sum_0^\infty (2l+1)\, i^l\, j_l(x)\, P_l(w)$ را به شرح زیر اثبات کنید. انتگرال مربوط به ضرایب C_l در رشتهٔ لژاندر را برای $e^{ixw} = \sum C_l\, P_l(w)$ بنویسید. باید ثابت کنید که $C_l(x) = (2l+1)\, i^l\, j_l(x)$. ابتدا نشان دهید که $y = C_l(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل توابع کروی بسل صدق می‌کند (مسألهٔ ۱۷-۶). ***راهنمایی:*** برای پیدا کردن y' و y''، از عبارت زیر علامت انتگرال نسبت به x مشتق بگیرید و در سمت چپ معادلهٔ دیفرانسیل جایگزین کنید. اکنون به روش جزء به جزء نسبت به w انتگرال بگیرید و نشان دهید که عبارت زیر انتگرال صفر می‌شود ***زیرا $P_l(w)$ در معادلهٔ*** لژاندر صدق می‌کند. بنابراین $C_l(x)$ باید ترکیبی خطی از $j_l(x)$ و $n_l(x)$ باشد. اکنون انتگرال $C_l(x)$ را به ازای مقادیر کوچک x در نظر بگیرید؛ e^{ixw} را به صورت رشته بسط دهید و کم مرتبه‌ترین جمله را (که x^l است زیرا به ازای $l > n$، $\int_{-1}^{1} w^n\, P_l(w)\, dw = 0$) حساب کنید. نتیجه را با فرمولهای مربوط به $j_l(w)$ و $n_l(w)$ در بخش ۲۰ مقایسه کنید.

۲۷- تحقیق کنید که معادلهٔ لژاندر (۲-۱) را می‌توان به یکی از صورتهای زیر نوشت که y_l به معنای $P_l(x)$ و R و L عملگرهای زیر می‌باشند:

$$RLy_l = -l^2 y \quad \text{یا} \quad RLy_{l-1} = -l^2 y_{l-1}$$

$$R = (1-x^2)D - lx \quad \text{و} \quad L = (1-x^2)D + lx$$

با دنبال کردن روش به کار رفته برای توابع هرمیت [معادلات (۲۲-۱) تا (۲۲-۱۰)]، نشان دهید که R و L عملگرهای بالا برنده و پایین آورنده هستند. در حقیقت، نشان دهید [با بررسی عملگرها وقتی ۱ $= x$ و شرط ۱ $= (1)y_l$ برقرار است] که $Ly_l = ly_{l-1}$ و $Ry_{l-1} = -ly_l$. معادلهٔ $Ly_0 = 0$ را با فرض ۱ $= (1)y_0$ برای پیدا کردن $y_0 = P_0(x) = 1$ حل کنید. برای پیدا کردن $P_1(x)$ و $P_2(x)$ از معادلهٔ عملگر بالا برنده $Ry_{l-1} = -ly_l$ استفاده کنید.

۱۳

معادلات دیفرانسیل جزئی

۱- مقدمه

بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک شامل حل معادلات دیفرانسیل جزئی هستند. یک معادلهٔ دیفرانسیل ممکن است در مورد مسائل فیزیکی متنوعی به‌کار رود؛ بنابراین روشهای ریاضی‌ای که در این فصل خواهید آموخت، در مسائلی بیشتر از آنچه‌که در قالب مثالهای نمایشی بررسی خواهیم کرد، کاربرد دارند. در اینجا فهرست معادلات دیفرانسیل جزئی‌ای را که بررسی خواهیم کرد، و انواع مسائل فیزیکئی راکه به هر یک از آنها منجر می‌شوند، بیان می‌کنیم.

(۱-۱) ***معادلهٔ لاپلاس*** $$\nabla^2 u = 0$$

تابع u ممکن است پتانسیل گرانشی در ناحیه‌ای فاقد مادّه، پتانسیل الکتروستاتیکی در ناحیه‌ای عاری از بار، دمای حالت پایا (یعنی، دمایی که با زمان تغییر نمی‌کند) در ناحیه‌ای فاقد منبع گرما، یا پتانسیل سرعت برای یک سیال تراکم ناپذیر بدون هیچ گرداب و منبع یا چاهک باشد.

(۱-۲) ***معادلهٔ پواسون*** $$\nabla^2 u = f(x, y, z)$$

تابع u ممکن است همان کمیتهای فیزیکی مذکور در معادلهٔ لاپلاس، اما، به ترتیب، در ناحیه‌ای شامل ماده، بار الکتریکی، یا منابع گرما یا سیال برای موارد گوناگون باشد. تابع $f(x, y, z)$ چگالی منبع نامیده می‌شود؛ مثلاً، در الکتریسیته این تابع متناسب با چگالی بار الکتریکی است.

(۱-۳) ***معادله پخش یا شارش گرما*** $$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

در اینجا u ممکن است دمای حالت غیر پایا (یعنی، دمای متغیر با زمان) در ناحیه‌ای بدون

منبع گرما، یا تراکم یک مادهٔ پخش شونده (مثلاً، یک مادهٔ شیمیایی یا ذراتی نظیر نوترون) باشد. کمیت α^2 یک ثابت موسوم به ضریب پخش است.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{معادلهٔ موج} \qquad (۱-۴)$$

در اینجا u ممکن است معرّف جا به جایی از حالت تعادل یک سیم یا غشاء مرتعش یا (در صوت) محیط مرتعش (گاز، مایع، یا جامد) باشد؛ در الکتریسیته، u می‌تواند جریان یا پتانسیل در طول یک خط انتقال باشد، یا u ممکن است مؤلفه‌ای از $\mathbf{E}$ یا $\mathbf{H}$ در یک موج الکترومغناطیسی (نور، امواج رادیویی، و غیره) باشد. کمیت v تندی انتشار امواج است؛ که مثلاً، برای امواج نوری در خلأ عبارت از c، سرعت نور، و برای امواج صوتی تندی حرکت صوت در محیط مورد نظر است.

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \qquad \text{معادلهٔ هلمهولتز} \qquad (۱-۵)$$

همانگونه که بعداً خواهید دید، در اینجا F بخش فضایی (یعنی، بخش مستقل از زمان) جواب معادلهٔ پخش یا معادلهٔ موج است.

علی‌الاصول، نظر ما بیشتر متوجه حلّ این معادلات است تا به دست آوردن خود آنها. اگر بخواهید می‌توانید این نکته را اینگونه بیان کنید که هر چند از نظر تجربی این درست است که کمیتهای فیزیکی فوق‌الذکر در معادلات داده شده صدق می‌کنند، اما این نیز درست است که معادلات را می‌توان از فرضیات تجربی تا حدّی ساده‌تر نیز به دست آورد. برای بیان این مطلب، در اینجا اجمالاً به ذکر یک مثال می‌پردازیم. در بخشهای ۱۰ و ۱۱ از فصل ۶، شارش سیال را مورد بررسی قرار دادیم. برای یک سیال (مسألهٔ ۱۰-۱۵ از فصل ۶) تراکم ناپذیر در ناحیه‌ای بدون منبع یا چاهک نشان دادیم که $\nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = 0$. تابع u پتانسیل سرعت نامیده می‌شود و می‌بینیم (تحت شرایط داده شده) همانگونه که ادعا کردیم، در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. مثالهای بیشتری از اینگونه مشتقات، به صورت مسأله مطرح خواهد شد.

در بخشهای زیر، چند مسألهٔ فیزیکی را برای نمایش روش بسیار مفید حل معادلات دیفرانسیل جزئی، موسوم به ***جدا سازی متغیرها***، (بدون اینکه با این اصطلاح در معادلات دیفرانسیل معمولی، فصل ۸ ارتباطی داشته باشد) بررسی می‌کنیم. در بخشهای ۲ تا ۴، ما

مسائل را در مختصات دکارتی که منجر به جوابهای رشتهٔ فوریه می‌شوند، بررسی خواهیم کرد - مسائلی مشابه با آنچه که فوریه حل کرده است. در بخشهای بعد، کاربَست دستگاههای مختلف دیگر (استوانه‌ای، کروی) را بررسی خواهیم کرد که منجر به جوابهای از نوع رشته‌های لژاندر یا بسل می‌شوند.

مسائل، بخش ۱

۱- معادلات $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$ (جا به جایی الکتریکی = $\mathbf{D}$ و چگالی بار الکتریکی = ρ) و $\mathbf{D} = -\varepsilon\nabla\phi$ (پتانسیل الکتریکی = ϕ و ثابت دی‌الکتریک = ε) را در مبحث الکتریسیته در نظر بگیرید. نشان دهید که پتانسیل الکتروستاتیکی در یک ناحیهٔ بدون بار در معادلهٔ لاپلاس (۱-۱)، و در یک ناحیهٔ با چگالی بار ρ، در معادلهٔ پواسون (۱-۲) صدق می‌کند.

۲- نشان دهید عبارت $u = \sin(x - vt)$ که معرّف یک موج سینوسی است در معادلهٔ موج صدق می‌کند. به طور کلی نشان دهید که

$$u = f(x - vt) \quad \text{و} \quad u = f(x + vt)$$

در معادلهٔ موج (۱-۴) صدق خواهد کرد، که در آن f یک تابع دلبخواه با مشتق مرتبهٔ دوم است.

۳- از الکترومغناطیس می‌دانیم که معادلات زیر (موسوم به معادلات ماکسول) در فضای آزاد معتبر اند:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \quad ، \nabla\cdot\mathbf{H} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \quad ، \nabla\times\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

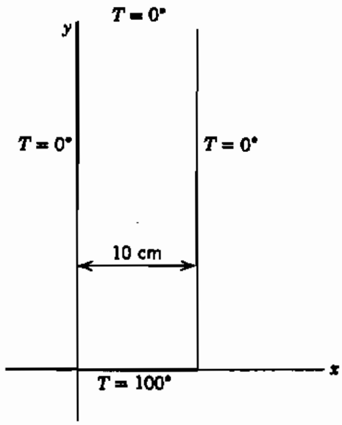
نشان دهید که هر مؤلفهٔ $\mathbf{E}$ یا $\mathbf{H}$ با فرض $v = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ در معادلهٔ موج (۱-۴) صدق می‌کند. ***راهنمایی:*** از اتحاد برداری (ه) در جدول پایان فصل ۶ استفاده کنید.

۴- معادلهٔ شارش گرمای (۱-۳) را به صورت زیر به دست آورید: مقدار گرمای Q که از یک سطح می‌گذرد با مؤلفهٔ قائم (منفی) شیب دما، $(-\nabla T)\cdot\mathbf{n}$ متناسب است. معادلهٔ (۱۰-۴) از فصل ۶ را در نظر گرفته و بحث شارش آب در آنجا را برای شارش گرما به کار

ببرید. به این ترتیب نشان دهید که آهنگ افزایش گرما در واحد حجم و در واحد زمان متناسب است با $\nabla \cdot \nabla T$. اما $\partial T/\partial t$ متناسب با این افزایش گرماست؛ بنابراین نشان دهید که T در (۱-۳) صدق می‌کند.

۲- معادلهٔ لاپلاس؛ دمای حالت پایا در یک تیغهٔ مستطیلی

می‌خواهیم مسألهٔ زیر را حلّ کنیم: دو طول و سر دوردست یک تیغهٔ مستطیلی دراز فلزی در دمای ${}^\circ$۰ و سر دیگر آن در ${}^\circ$۱۰۰ قرار دارد (شکل ۲-۱). پهنای تیغه cm ۱۰ است. توزیع دمای حالت پایا را در تیغه پیدا کنید. (این مسأله از نظر ریاضی با مسألهٔ پیدا کردن پتانسیل الکتروستاتیکی در ناحیهٔ $0 < x < 10$ و $0 < y$ معادل است، به شرطی که دماهای داده شده با پتانسیلها جایگزین شوند - برای مثال، صفحه ۷۲ کتاب جکسون را ملاحظه کنید.)



شکل ۲-۱

برای ساده کردن مسأله، ابتدا فرض می‌کنیم که تیغه در مقایسه با پهنایش آن قدر دراز است که می‌توانیم این تقریب ریاضی را بپذیریم که در راستای y تا بینهایت ادامه می‌یابد. در این صورت تیغه نیمه - متناهی نامیده می‌شود. اگر دماهای خیلی نزدیک به سر دوردست تیغه، مورد نظر نباشند، تقریب فوق، تقریب خوبی است.

در داخل تیغه که هیچ منبع گرمایی وجود ندارد، دمای T در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند، یعنی،

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{۲-۱}$$

چون مرز تیغه، مستطیلی است، ∇^2 را در مختصات دکارتی نوشته‌ایم و z را هم به علت اینکه تیغه دارای دو بعد است، حذف کرده‌ایم. برای حل این معادله، جوابی به شکل زیر را ***آزمایش*** می‌کنیم

$$T(x, y) = X(x)\, Y(y) \qquad (۲-۲)$$

که، همانگونه که مشخص شده است، X تنها تابعی از x و Y تنها تابعی از y است. شاید بلافاصله این سؤال را عنوان کنید: چگونه می‌دانیم که جواب به این شکل است؟ پاسخ این است که جواب مسأله این نیست! اما، همانطور که خواهید دید، همین که جوابهایی به شکل (۲-۲) داشته باشیم، می‌توانیم آنها را ترکیب کنیم تا جوابی را که می‌خواهیم به دست آوریم. [توجه کنید که حاصل‌جمعی از جوابهای (۲-۱)، جوابی از (۲-۱) است.] با جایگزینی (۲-۲) در (۲-۱)، داریم

$$Y \frac{d^2X}{dx^2} + X \frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \qquad (۳-۲)$$

(حال دیگر مشتقات معمولی به جای مشتقات جزئی صحیح هستند زیرا X تنها به x بستگی دارد و غیره.) (۲-۳) را بر XY تقسیم کنید تا نتیجه بگیرید

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \qquad (۴-۲)$$

در واقع گام بعد کلید فرایند ***جدا سازی متغیرها*** می‌باشد. حال بیان می‌کنیم که هر یک از جملات (۲-۴) یک مقدار ثابت است زیرا جمله اول به تنهایی تابعی از x و جمله دوم به تنهایی تابعی از y است. چرا چنین است؟ به یاد بیاورید وقتی که می‌گوییم $u = \sin t$ یک **جواب** معادلهٔ $\ddot{u} = -u$ است، منظورمان این است که اگر $u = \sin t$ را در معادلهٔ دیفرانسیل جایگزین کنیم، یک اتحاد به دست می‌آوریم ($\ddot{u} = -u$ می‌شود $-\sin t = -\sin t$)، که برای تمام مقادیر t صحیح است. اگرچه به هنگام جایگزینی جواب در یک معادلهٔ دیفرانسیل ما از **معادله** صحبت می‌کنیم، اما نسبت به متغیر مستقل ما یک ***اتحاد*** داریم. (از این واقعیت در جوابهای رشته‌ای معادلات دیفرانسیل در بخشهای ۱ و ۲، فصل ۱۲، استفاده کردیم.) در (۳-۱) تا (۲-۴) دو متغیر مستقل x و y داریم. این گفته که (۲-۲) جوابی از (۲-۱) است بدین معناست که (۲-۴) نسبت به دو متغیر مستقل x و y یک اتحاد می‌باشد [به یاد بیاورید که (۲-۴) از جایگزینی (۲-۲) در (۲-۱) به دست آمده است]. به بیان دیگر، اگر (۲-۲) جوابی از (۲-۱) باشد، آنگاه (۲-۴) باید به ازای کلیه مقادیر دو متغیر مستقل x و y برقرار باشد. چون X تنها تابعی از x و Y تابعی از y است، جملهٔ اول (۲-۴) تنها تابعی از x و جملهٔ دوم فقط تابعی از y است. فرض کنید x خاصی را در جملهٔ اوّل جایگزین کنیم؛ در این صورت این جمله یک

ثابت عددی است. برای برقراری (۲-۴)، جملهٔ دوم باید برابر با منهای همان مقدار ثابت باشد. بگذارید در حالی که x را ثابت نگه می‌داریم، y را تغییر بدهیم (به خاطر داشته باشید که x و y مستقل هستند). گفتیم که (۲-۴) یک اتحاد است؛ پس باید به ازای این x ثابت و هر مقدار y برقرار باشد. بنابراین جملهٔ دوم با تغییر y، ثابت باقی می‌ماند. همچنین، اگر y را ثابت نگهداریم و اجازه دهیم x تغییر کند، می‌بینیم که جملهٔ اول (۲-۴) ثابت می‌ماند. به بیان دقیق، معادلهٔ $f(x) = g(y)$ نسبت به متغیرهای مستقل x و y فقط در صورتی یک اتحاد است که هر دو تابع، مقدار ثابت یکسانی باشند؛ این اساس فرایند جدا سازی متغیرهاست. به این ترتیب می‌توانیم با استفاده از (۲-۴) بنویسیم

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = const = -k^2 \quad ، k \geq 0 \quad \text{یا}$$

$$X'' = -k^2X \quad \text{و} \quad Y'' = -k^2Y \tag{۲-۵}$$

ثابت k^2، ***ثابت جدا سازی*** نامیده می‌شود. جوابهای معادلهٔ (۲-۵) عبارت اند از

$$X = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{cases} \tag{۲-۶}$$

و جوابهای معادلهٔ (۲-۱) به شکل (۲-۲) بدین صورت نوشته می‌شوند

$$\boxed{T = XY = \begin{cases} e^{ky}\sin kx \\ e^{-ky}\sin kx \\ e^{ky}\cos kx \\ e^{-ky}\cos kx \end{cases} \tag{۲-۷}}$$

هیچ یک از این چهار جواب پایه‌ای، دماهای مرزی داده شده را به دست نمی‌دهند. آنچه که اکنون باید انجام دهیم این است که ترکیبی از جوابهای (۲-۷) را با انتخاب مناسب ثابت k طوری اختیار کنیم که شرایط مرزی داده شده را تأمین نماید. [هر ترکیب خطی از جوابهای معادلهٔ

(۲-۱) جوابی از معادلهٔ (۲-۱) است، زیرا معادلهٔ دیفرانسیل (۲-۱) **خطی** است؛ بخش ۷ از فصل ۳ و بخشهای ۱ و ۶ از فصل ۸ را ملاحظه کنید.] ابتدا جوابهای شامل e^{ky} را کنار می‌گذاریم، زیرا وقتی $y \to \infty$، الزاماً باید $T \to ۰$. (فرض می‌کنیم $k > ۰$؛ مسألهٔ ۵ را ملاحظه کنید.) سپس جوابهای شامل $\cos kx$ را کنار می‌گذاریم، زیرا وقتی $x = ۰$ است، باید $T = ۰$ باشد. به این ترتیب، فقط $e^{-ky} \sin kx$ برای ما باقی می‌ماند، اما مقدار k هنوز باید تعیین شود. وقتی $x = ۱۰$، باید داشته باشیم $T = ۰$؛ این در صورتی درست است که $\sin(۱۰k) = ۰$، یعنی، به ازای ...، ۲، ۱ $= n$، $k = n\pi/۱۰$ باشد. بنابراین برای هر عدد صحیح n، جواب

$$T = e^{-n\pi y/۱۰} \sin \frac{n\pi x}{۱۰} \qquad (۸-۲)$$

در شرایط مرزی داده شده در سه ضلعی که در آن $T = ۰$ است، صدق می‌کند.

سرانجام، باید موقعی که $y = ۰$ است داشته باشیم $T = ۱۰۰$؛ این شرط توسط (۲-۸) به ازای هر n برآورده نمی‌شود. اما از آنجاکه یک ترکیب خطی از جوابهایی نظیر (۲-۸) جوابی از (۲-۱) است؛ بیایید ترکیب مزبور را برای تأمین شرط $T = ۱۰۰$ وقتی $y = ۰$ است، پیدا کنیم. برای اینکه تمام n های ممکن را منظور کنیم، یک رشتهٔ نامتناهی برای T می‌نویسیم، یعنی،

$$T = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n e^{-n\pi y/۱۰} \sin \frac{n\pi x}{۱۰} \qquad (۹-۲)$$

به ازای $y = ۰$، باید داشته باشیم $T = ۱۰۰$؛ از (۲-۹) به ازای $y = ۰$ داریم

$$T_{y=۰} = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{۱۰} = ۱۰۰ \qquad (۱۰-۲)$$

اما این درست رشتهٔ سینوسی فوریه (بخش ۹ از فصل ۷) برای $f(x) = ۱۰۰$ با $l = ۱۰$ می‌باشد. ضرایب b_n را می‌توانیم همانگونه که در فصل ۷ پیدا کردیم به دست آوریم؛ نتیجه اینکه

$$b_n = \frac{۲}{l}\int_۰^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{۲}{۱۰}\int_۰^{۱۰} ۱۰۰ \sin \frac{n\pi x}{۱۰}\, dx \qquad (۱۱-۲)$$

$$= ۲۰ \cdot \frac{۱۰}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi x}{۱۰}\right)\Bigg|_۰^{۱۰} = -\frac{۲۰۰}{n\pi}\left[(-۱)^n - ۱\right] = \begin{cases} \frac{۴۰۰}{n\pi} & n \text{ فرد} \\ ۰ & n \text{ زوج} \end{cases}$$

به این ترتیب، (۲-۹) تبدیل می‌شود به

$$T = \frac{۴۰۰}{\pi}\left(e^{-\pi y/۱۰}\sin\frac{\pi x}{۱۰} + \frac{۱}{۳}e^{-۳\pi y/۱۰}\sin\frac{۳\pi x}{۱۰} + \cdots\right) \quad (۱۲-۲)$$

اگر $\pi y/۱۰$ خیلی کوچک نباشد، معادلهٔ (۲-۱۲) را می‌توان برای محاسبه به کار برد، زیرا در آن صورت رشته به سرعت همگرا می‌شود. (همچنین مسألهٔ ۶ را ملاحظه کنید.) مثلاً، در $x = ۵$ (خط مرکزی تیغه) و $y = ۵$، داریم

$$\begin{aligned} T &= \frac{۴۰۰}{\pi}\left(e^{-\pi/۲}\sin\frac{\pi}{۲} + \frac{۱}{۳}e^{-۳\pi/۲}\sin\frac{۳\pi}{۲} + \cdots\right) \\ &= \frac{۴۰۰}{\pi}(۰٫۲۰۸ - ۰٫۰۰۳ + \cdots) = ۲۶٫۱^\circ \end{aligned} \quad (۱۳-۲)$$

اگر دما در لبهٔ پایینی به جای ۱۰۰°، تابع دلخواه $f(x)$ باشد (و سه لبه دیگر مانند قبل در ۰° باشد)، مسأله را می‌توانیم با روش مشابهی حل کنیم. فقط تابع داده شدهٔ $f(x)$ را باید برحسب یک رشتهٔ سینوسی فوریه بسط دهیم و ضرایب را در (۲-۹) جایگزین کنیم.

حال، اجازه دهید یک تیغهٔ متناهی به ارتفاع $۳۰\ cm$ را با لبهٔ بالایی واقع در $T = ۰^\circ$، و سایر ابعاد و دماها مانند شکل ۲-۱ بررسی کنیم. دیگر دلیلی برای کنار گذاشتن جواب e^{ky} نداریم، زیرا y نامتناهی نمی‌شود. اکنون e^{-ky} را با ترکیب خطی $a\ e^{-ky} + b\ e^{ky}$ که به ازای $y = ۳۰$ برابر صفر است، جایگزین می‌کنیم. مناسب‌ترین راه برای انجام این کار این است که ترکیب زیر را به کار ببریم

$$\frac{۱}{۲}e^{k(۳۰-y)} - \frac{۱}{۲}e^{-k(۳۰-y)} \quad (۱۴-۲)$$

(یعنی، فرض کنیم $a = \frac{۱}{۲}e^{۳۰k}$ و $b = -\frac{۱}{۲}e^{-۳۰k}$). آنگاه، وقتی $y = ۳۰$، همانطور که می‌خواستیم خواهیم داشت $e^۰ - e^۰ = ۰$. اکنون (۲-۱۴) صرفاً عبارت از $\sinh k(۳۰-y)$ است (بخش ۱۲ از فصل ۲ را ملاحظه کنید)، بنابراین برای صفحهٔ متناهی، می‌توانیم جواب را به صورت زیر بنویسیم [با (۲-۹) مقایسه کنید.]

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi}{10}(30 - y) \sin \frac{n\pi x}{10} \qquad (۱۵\text{-}۲)$$

هر جملهٔ این رشته در سه ضلع تیغه که در آن $T = 0$ است، صفر می‌باشد. وقتی $y = 0$، است می‌خواهیم $T = 100$ باشد:

$$T_{y=0} = 100 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(3n\pi) \sin \frac{n\pi x}{10} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{10} \qquad (۱۶\text{-}۲)$$

که در آن، $b_n = B_n \sinh 3n\pi$ یا $B_n = b_n / \sinh 3n\pi$. با پیداکردن b_n، و متعاقباً B_n، و جایگذاری آن در (۲-۱۵) توزیع دما در تیغهٔ متناهی به دست می‌آید:

$$T = \sum_{n \text{ فرد}} \frac{400}{n\pi \sinh 3n\pi} \sin \frac{n\pi}{10}(30 - y) \sin \frac{n\pi x}{10} \qquad (۱۷\text{-}۲)$$

در (۲-۱۲) و (۲-۱۷)، توابع $T(x,y)$ راکه در (۲-۱) و کلیهٔ شرایط مرزی داده شده صدق می‌کنند، پیداکرده‌ایم. برای یک ناحیهٔ کراندار با دماهای مرزی داده شده، این یک واقعیت تجربی است (و همچنین به طریقهٔ ریاضی نیز می‌توان نشان داد - مسألهٔ ۱۶ و مسألهٔ ۱۱-۳۸ از فصل ۱۴ را ملاحظه کنید) که تنها یک $T(x,y)$ وجود دارد که در معادلهٔ لاپلاس در شرط مرزی داده شده صدق می‌کند. بنابراین (۲-۷) جواب مطلوب برای تیغهٔ مستطیلی است. همچنین می‌توان نشان داد که تنها یک جواب برای صفحهٔ نیم متناهی وجود دارد به شرطی که در ∞، T به سمت صفر میل کند؛ بنابراین (۲-۱۲) جوابی برای آن مورد است.

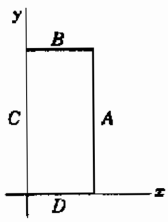
شاید تعجب کرده باشید که چرا مقدار ثابتِ رابطهٔ (۲-۵) را $-k^2$ گرفتیم و اگر به جای آن $+k^2$ می‌گرفتیم، چه اتفاقی می‌افتاد. تا جایی که به یافتن جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل مربوط می‌شود، کاربرد $+k^2$ کاملاً درست است و به جای (۲-۷)، نتیجه می‌گرفتیم:

$$T = XY = \begin{cases} e^{kx} \sin ky \\ e^{-kx} \sin ky \\ e^{kx} \cos ky \\ e^{-kx} \cos ky \end{cases} \qquad (۱۸\text{-}۲)$$

[فرض بر این است که k حقیقی است؛ k مجازی در (۲-۱۸) مجدداً ترکیباتی از جوابهای

(۲-۷) را می‌دهد. مسألهٔ ۵ را ملاحظه کنید.] جوابهای (۲-۱۸) هیچ فایده‌ای برای مسألهٔ تیغهٔ نیم متناهی ندارند، چون هیچ یک از آنها وقتی $y \to \infty$ ، به سمت صفر میل نمی‌کنند، و یک ترکیب خطی از e^{kx} و e^{-kx} نمی‌تواند هم در $x = ۰$ و هم در $x = ۱۰$ صفر باشد. با این همه، اگر یک تیغهٔ نیم متناهی در نظر می‌گرفتیم که طولهایش به جای اینکه موازی محور y باشند، موازی محور x می‌بودند و یک ضلع کوتاه آن روی محور y و در آنجا $T = ۱۰۰^\circ$ می‌بود، به جوابهای (۲-۱۸) می‌رسیدیم. یا، در مورد تیغهٔ متناهی، اگر ضلع واقع در ۱۰۰° در امتداد محور y می‌بود، باز (۲-۱۸) جواب مطلوب می‌بود.

بالاخره، ببینیم چگونه توزیع دما را در داخل تیغه‌ای که دو ضلع مجاورش به دمای ۱۰۰° و دو ضلع دیگرش به ۰° برده شده‌اند (یا، به طور کلی، به ازای هر مقدار دلخواهی برای چهار ضلع) پیدا کنیم. جواب این مسأله را می‌توان از ترکیب نتایجی که تاکنون به دست آورده‌ایم، پیدا کرد. بدین منظور، اضلاع تیغهٔ مستطیلی را A، B، C، و D می‌نامیم (شکل ۲-۲). اگر اضلاع A، B، و C در ۰°، و ضلع D در ۱۰۰° نگه داشته شوند و محور x را در امتداد D بگیریم، می‌توانیم توزیع دما را به همان روشی که در پیدا کردن (۲-۱۷) به کار بردیم پیدا کنیم.



شکل ۲-۲

حال فرض کنید که با همین تیغه، (شکل ۲-۲) اضلاع A، Bو D در ۰° و ضلع C در ۱۰۰° نگه داشته شوند. این هم باز همان نوع مسأله است، اما این بار می‌خواهیم جوابهای پایه‌ای (۲-۱۸) را به کار ببریم. [یا برای میان‌بُر زدن، می‌توان جوابی مشابه (۲-۱۷) را با انتخاب محور x در امتداد C نوشت و سپس در حاصل کار، جای x و y را با هم عوض کرد تا نتیجه با شکل ۲-۲ بخواند.] پس از به دست آوردن دو جواب (یکی برای C در ۱۰۰° و یکی برای D در ۱۰۰°)، این دو را با هم جمع می‌کنیم. نتیجه، جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۲-۱) است (خاصیت خطی: حاصل‌جمع دو جواب، خود یک جواب است). دماها در مرز (همچنین در داخل) حاصل‌جمع دماهای دو جوابی هستند که آنها را با هم جمع می‌کنیم، یعنی، ۰ روی B، $۱۰۰^\circ + ۰^\circ$ روی C، و $۰^\circ + ۱۰۰^\circ$ روی D. اینها شرایط مرزی داده شده‌ای است که می‌خواستیم برقرار باشند. بنابراین، حاصل‌جمع جوابهای دو مسأله ساده، جواب مسأله پیچیده‌تر است (مسائل ۱۱ تا ۱۳ را ملاحظه کنید).

پیش از حلّ مسائل بیشتر، اجازه دهید اندکی درنگ کنیم و این فرایند جدا سازی متغیرها راکه اساساً برای کلیهٔ معادلات دیفرانسیلی که بررسی خواهیم کرد یکسان است، خلاصه کنیم. ابتدا جوابی را فرض می‌کنیم که حاصلضرب توابعی از متغیرهای مستقل است [نظیر (۲-۲)]، و معادلهٔ دیفرانسیلی جزئی را به چند معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کنیم. این معادلات دیفرانسیل معمولی را حل می‌کنیم؛ جوابها ممکن است توابع نمایی، توابع مثلثاتی، توانی (مثبت یا منفی)، توابع بسل، چندجمله‌ای‌های لژاندر و غیره باشند. هر ترکیب خطی از این جوابهای پایه‌ای، به ازای هر مقداری از ثابتهای جدا سازی، جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل است. حالا مسأله، تعیین مقادیر ثابتهای جدا سازی و ترکیب خطی درست برای تطبیق با شرایط مرزی یا شرایط اولیهٔ مفروض می‌باشد.

مسألهٔ پیدا کردن جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل مفروض با شرایط مرزی معلوم، ***مسألهٔ مقدار مرزی*** نامیده می‌شود. اینگونه مسائل، اغلب به مسائل ***ویژه مقداری*** منجر می‌شوند. به خاطر بیاورید (بخش ۴ از فصل ۱۰ و انتهای بخش ۲ از فصل ۱۲) که در یک مسأله ویژه مقداری (یا مقدار مشخصه‌ای)، پارامتری وجود دارد که مقادیر آن باید طوری انتخاب شوند که جوابهای مسأله شرایط مفروضی را برآورند. ثابتهای جدا سازی‌ای که ما به کار برده‌ایم درست همین پارامترها هستند؛ مقادیر آنها با الزام اینکه جوابها برخی از شرایط مرزی را برقرار سازند تعیین می‌شوند. [مثلاً، $k = n\pi/۱۰$ را درست قبل از (۲-۸) با این شرط که وقتی $x = ۰$ است، $T = ۰$ باشد، به دست آوردیم.] مقادیر ثابتهای جدا سازی، ***ویژه مقدار*** و جوابهای پایه‌ای معادلهٔ دیفرانسیل [مثلاً، (۲-۸)] همخوان با ویژه مقدارها ***ویژه توابع*** نامیده می‌شوند. گاهی ممکن است علاوه بر ثابتهای جدا سازی، پارامتر دیگری در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی اولیه وجود داشته باشد (مثلاً، ε در معادلهٔ شرودینگر مسألهٔ ۷-۱۷). بار دیگر، مقادیر ممکن این پارامتر را که به ازای آنها معادله دارای جوابهایی است که شرایط مشخصی را برآورده می‌سازند، ویژه مقدار، و جوابهای همخوان با آنها را ویژه تابع می‌نامیم.

مسائل، بخش ۲

۱- توزیع دمای حالت پایا را برای مسألهٔ تیغهٔ نیم متناهی که دمای لبهٔ پایین آن $T = f(x) = x$ (برحسب درجه، یعنی، دما در x سانتیمتری، x درجه است)، دمای

اضلاع دیگر $^\circ$۰ و پهنای تیغه ۱۰ cm است، پیدا کنید.

جواب: $$T = \frac{۲۰}{\pi} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} e^{-n\pi y/۱۰} \sin(n\pi x/۱۰)$$

۲- مسألهٔ تیغهٔ نیم - متناهی را در صورتی که لبهٔ تحتانی به پهنای ۲۰ ، در دمای

$$T = \begin{cases} ۰^\circ & ۰ < x < ۱۰ \\ ۱۰۰^\circ & ۱۰ < x < ۲۰ \end{cases}$$

و اضلاع دیگر در $^\circ$۰ نگه داشته شوند، حل کنید

۳- مسألهٔ تیغهٔ نیم - متناهی را در صورتی که لبهٔ تحتانی به پهنای π، در $T = \cos x$، و اضلاع دیگر در $^\circ$۰ نگه داشته شوند، حل کنید.

جواب: $$T = \frac{۴}{\pi} \sum_{\text{زوج } n} \frac{n}{n^۲ - ۱} e^{-ny} \sin nx$$

۴- مسألهٔ تیغهٔ نیم - متناهی را در صورتی که لبهٔ تحتانی به پهنای ۳۰، در دمای

$$T = \begin{cases} x & ۰ < x < ۱۵ \\ ۳۰ - x & ۱۵ < x < ۳۰ \end{cases}$$

و اضلاع دیگر در $^\circ$۰ نگه داشته شوند، حل کنید.

۵- نشان دهید که جوابهای معادلهٔ (۲-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X = \begin{cases} e^{ikx} \\ e^{-ikx} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} \sinh ky \\ \cosh ky \end{cases}$$

همچنین نشان دهید که این جوابها اگر k حقیقی باشد با (۲-۷) و اگر k مجازی محض باشد با (۲-۸) هم‌ارزند. (بخش ۱۲ از فصل ۲ را ملاحظه کنید.) همچنین نشان دهید که $X = \sin k(x-a)$ و $Y = \sin k(y-b)$ جوابهای معادلهٔ (۲-۵) هستند.

۶- نشان دهید که حاصل‌جمع رشتهٔ (۲-۱۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$T = \frac{۲۰۰}{\pi} \arctan \left(\frac{\sin(\pi x/۱۰)}{\sinh(\pi y/۱۰)}\right)$$

($arc\ tangent$ بر حسب رادیان) . با استفاده از این فرمول، نشان دهید در $x = y = ۵$،

$T =$ ۲۶٫۱°. **راهنمایی برای جمعیابی رشته:** از $\sin(n\pi x/۱۰) = Im\ e^{in\pi x/۱۰}$ برای نوشتن رشته به صورت $Im \sum_{n\ \text{فرد}} z^n/n$ استفاده کنید. (z چیست؟) این نتیجه را با رشتهٔ مربوط به $ln\ [(۱ + z)/(۱ - z)]$ مقایسه کنید (مسأله ۱۳-۲۲ از فصل ۱ را ملاحظه کنید). سپس (۱۳-۵) از فصل ۲ را به کار ببرید.

۷- مسألهٔ ۳ را برای موردی که تیغه در ارتفاع ۱ بریده شود و دما در $y = ۱$ در °۰ نگه داشته شود، حل کنید.

جواب:
$$T = \frac{۴}{\pi} \sum_{n\ \text{زوج}} \frac{n}{(n^۲ - ۱)\sinh n} \sinh n(۱ - y) \sin nx$$

۸- توزیع دمای حالت پایا را در تیغهٔ مستطیلی ۳۰ cm در ۴۰ cm با این شرط که دما در امتداد دو طول و یک پهنا °۰ باشد، پیدا کنید؛ پهنای دیگر که در امتداد محور xهاست دارای دمای

$$T = \begin{cases} ۱۰۰^\circ & ۰ < x < ۱۰ \\ ۰^\circ & ۱۰ < x < ۳۰ \end{cases}$$

می‌باشد.

۹- مسألهٔ ۲ را برای موردی که تیغه در ارتفاع ۱۰ بریده شده و دمای لبهٔ بالایی آن در °۰ نگه داشته شود، حل کنید.

۱۰- توزیع دمای حالت پایا را در یک تیغه فلزی به مساحت ۱۰ سانتیمتر مربع که یک طرف آن در °۱۰۰ و سه طرف دیگر آن در °۰ نگه داشته شده‌اند، پیدا کنید. دما را در مرکز تیغه پیدا کنید.

جواب:
$$T = \sum_{n\ \text{فرد}} \frac{۴۰۰}{n\pi \sinh n\pi} \sinh \frac{n\pi}{۱۰}(۱۰ - y) \sin \frac{n\pi x}{۱۰}$$

$$T(۵, ۵) \cong ۲۵^\circ$$

۱۱- توزیع دمای حالت پایا در تیغهٔ مسألهٔ ۱۰ را در صورتی که دو ضلع مجاور در °۱۰۰ و دو ضلع دیگر آن در °۰ نگه داشته شوند، پیدا کنید. **راهنمایی:** از جواب مسأله ۱۰ استفاده کنید. لازم نیست محاسبه‌ای انجام دهید - تنها جواب را بنویسید!

۱۲- توزیع دما را در یک تیغهٔ مستطیلی ۱۰ سانتیمتر در ۳۰ سانتیمتر در صورتی که دو ضلع مجاور در °۱۰۰ و دو ضلع دیگر در °۰ نگه داشته شده باشند، پیدا کنید.

۱۳- توزیع دمای حالت پایا را در یک تیغهٔ مستطیلی محدود به $۰ < x < ۱۰$ ، $۱۰ < y < ۲۰$ ، که دو ضلع مجاور آن در امتداد محورها در دماهای $T = x$ و $T = y$ و دو ضلع دیگر در ۰° نگه داشته شده‌اند، پیدا کنید

۱۴- تا به حال در مسألهٔ تیغهٔ مستطیلی، دما را روی مرزهای آن مشخص می‌کردیم. حال آنکه می‌توانستیم بعضی از لبه‌ها را عایق‌بندی شده در نظر بگیریم. شارش گرما از یک لبه با $\partial T/\partial n$ متناسب است، که n متغیری است در جهت عمود بر این لبه (مشتقات قائم را در بخش ۶ از فصل ۶ ملاحظه کنید). مثلاً، شارش گرما از یک لبه که در امتداد محور x قرار دارد با $\partial T/\partial y$ متناسب است. چون شارش گرما از یک لبهٔ عایق‌بندی شده صفر است، لذا در روی چنین مرزی باید یک مشتق جزئی T ، نه خود T ، برابر صفر باشد. با استفاده از این واقعیت، توزیع دمای حالت پایا در یک تیغهٔ نیم - متناهی به پهنای ۱۰ سانتیمتر را که دو طول آن عایق‌بندی، انتهای دوردست آن (واقع در ∞ ، مانند بخش ۲) در ۰° ، و لبهٔ پایین آن در $T = f(x) = x - ۵$ است، پیدا کنید.

توجه داشته باشید که شرط $T \to ۰$ وقتی $y \to \infty$ را فقط برای حذف جوابهای e^{ky} به کار می‌بردیم؛ این شرط را این طور نیز می‌توان بیان کرد که وقتی $y \to \infty$ ، T نامتناهی‌نمی‌شود. در واقع، دما (که متناهی فرض شده است) در این مسأله وقتی $y \to \infty$، توسطدمای داده شده در $y = ۰$ تعیین می‌شود. فرض کنید در $y = ۰$، $T = f(x) = x$ باشد؛محاسبات بالا را برای پیدا کردن توزیع دما تکرار و مقدار T را برای مقادیر بزرگ y پیداکنید. جملهٔ $k = ۰$ را در رشته فراموش نکنید!

۱۵- یک تیغهٔ متناهی ۱۰ سانتیمتر در ۳۰ سانتیمتر را با دو ضلع عایق‌بندی شده، یک سر در ۰° و سر دیگر در دمای معلوم $T = f(x)$ در نظر بگیرید. موارد $f(x) = ۱۰۰^\circ$ و $f(x) = x$ را امتحان کنید. باید متقاعد شوید که این مسأله را نمی‌توان صرفاً با استفاده از جوابهای (۲-۷) حل کرد. برای اینکه ببینید اشتباه در کجاست، به معادلات دیفرانسیل (۲-۵) برگردید و آنها را به ازای $k = ۰$ حل کنید. شما باید x ، y ، xy و مقدار ثابت را پیداکنید [مقدار ثابت هم اکنون به ازای $k = ۰$ در (۲-۷) مستتر است، اما سه جواب دیگر چنین نیستند] . اکنون به هر یک از مسائلی که تاکنون حل کرده‌ایم برگردید و ببینید چرا توانستیم جوابهای $k = ۰$ را نادیده بگیریم؛ سپس با شمول جوابهای $k = ۰$، مسألهٔ تیغهٔ

متناهی با اضلاع عایق‌بندی شده را تمام کنید.

برای مورد $f(x) = x$، جواب عبارت است از:

جواب: $T=\frac{۱}{۶}(۳۰-y)-\frac{۴۰}{\pi^۲}\sum_{\text{فرد } n}\frac{۱}{n^۲ \sinh ۳n\pi}\sinh\frac{n\pi}{۱۰}(۳۰-y)\cos\frac{n\pi x}{۱۰}$

۱۶- نشان دهید که تنها یک تابع u وجود دارد که مقادیر معلوم روی مرز (بسته) یک ناحیه را می‌پذیرد و در معادلهٔ لاپلاس $\nabla^۲ u = ۰$ در داخل ناحیه صدق می‌کند. ***راهنمایی:*** فرض کنید $u_۱$ و $u_۲$ هر دو جوابهایی با شرایط مرزی یکسان هستند به طوری که روی مرز $U = u_۱ - u_۲ = ۰$. در اولین اتحاد گرین (مسألهٔ ۱۰-۱۶ از فصل ۶)، فرض کنید $\phi = \psi = U$ و نشان دهید $\nabla U = ۰$. به این ترتیب نشان دهید همه جا در داخل ناحیهٔ مورد نظر $U = ۰$ است.

۳- معادله پخش یا شارش گرما؛ شارش گرما در یک میله یا بُره

معادلهٔ شارش گرما عبارت است از

$$\nabla^۲ u = \frac{۱}{\alpha^۲}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{۳-۱}$$

که u دما، و $\alpha^۲$ یک مقدار ثابت، مشخصهٔ ماده‌ای است که گرما در آن شارش می‌کند. بجاست که ابتدا معادلهٔ (۳-۱) را به یک معادلهٔ فضایی و یک معادلهٔ زمانی تفکیک کنیم؛ معادلهٔ فضایی در بیش از یک بعد را باید متعاقباً به معادلات دیفرانسیل معمولی برحسب x و y، یا x، y، z، یا r، θ، ϕ و غیره تفکیک کنیم. یک جواب معادلهٔ (۳-۱) را به شکل زیر فرض می‌کنیم

$$u = F(x, y, z)\, T(t) \tag{۳-۲}$$

(به تغییر معنای T توجه کنید؛ قبلاً آن را برای دما به کار می‌بردیم؛ در اینجا u دما و T ضریب وابسته به زمان در u است.) (۳-۲) را در (۳-۱) جایگزین کنید؛ نتیجه می‌گیریم

$$T\,\nabla^۲ F = \frac{۱}{\alpha^۲} F \frac{dT}{dt} \tag{۳-۳}$$

سپس (۳-۳) را بر FT تقسیم کنید تا نتیجه شود

$$\frac{۱}{F}\nabla^۲ F = \frac{۱}{\alpha^۲}\frac{۱}{T}\frac{dT}{dt} \tag{۳-۴}$$

طرف چپ این اتحاد تنها تابعی از متغیرهای فضایی x، y، z و طرف راست تنها تابع زمان است. بنابراین هر دو طرف ثابت یکسانی هستند و می‌توانیم بنویسیم

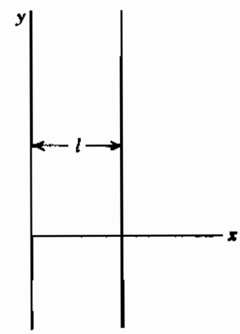
$$\frac{1}{F}\nabla^2 F = -k^2 \quad \text{یا} \quad \nabla^2 F + k^2 F = 0 \qquad \text{و}$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -k^2 \quad \text{یا} \quad \frac{dT}{dt} = -k^2\alpha^2 T \tag{۵-۳}$$

معادلهٔ زمانی را می‌توان انتگرال‌گیری کرد:

$$T = e^{-k^2\alpha^2 t} \tag{۶-۳}$$

در اینجا یک دلیل فیزیکی برای انتخاب ضریب جدا سازی منفی $(-k^2)$ مشاهده می‌کنیم. وقتی t افزایش می‌یابد، دمای جسم، مانند آنچه در (۳-۶) ملاحظه می‌کنیم، باید به صفر کاهش پیدا کند، و حال آنکه اگر ثابت $+k^2$ را در (۳-۵) و (۳-۶) به کار برده بودیم، دما باید بینهایت می‌شد! معادلهٔ فضایی در (۳-۵)، همانگونه که وعده کردیم، معادلهٔ هلمهولتز (۱-۵) است. ضمناً در خواهید یافت (مسألهٔ ۱۰) که قسمت فضایی معادلهٔ موج نیز معادلهٔ هلمهولتز است.



شکل ۳-۱

حال بیایید شارش گرما را در بُره‌ای به ضخامت l بررسی کنیم (مثلاً، دیوارهٔ یک یخچال). فرض می‌کنیم که وجوه بُره آن قدر بزرگ هستند که می‌توانیم از آثار لبه‌ها صرفنظر و فرض کنیم که گرما تنها در جهت x جریان می‌یابد (شکل ۳-۱). به این ترتیب، این مسأله با مسألهٔ شارش گرما در میلهٔ به طول l که اطراف آن عایق‌بندی شده است یکی است، زیرا در هر دو مورد، شارش گرما صرفاً در جهت x است. فرض کنید بُره در ابتدا دارای یک توزیع دمای حالت پایا با دیوارهٔ $x = 0$ در 0° و دیوارهٔ $x = l$ در 100° است. فرض کنید از لحظهٔ $t = 0$ به بعد، دیوارهٔ $x = l$ (و همچنین دیوارهٔ $x = 0$) در 0° نگهداری شود. می‌خواهیم دما را در یک x دلبخواه (در بُره) و در یک زمان دلبخواه پیدا کنیم.

ابتدا، توزیع دمای حالت پایای اولیه را پیدا می‌کنیم. احتمالاً شاید خود حدس بزنید که این توزیع خطی است، اما جالب است که این مطلب را با توجه به معادلات نتیجه بگیرید. دمای

حالت پایای اولیهٔ u_0 در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند، که در این مورد یک بعدی عبارت است از $d^2u_0/dx^2 = 0$. جواب این معادله، $u_0 = ax + b$ است، که a و b ثابتهایی هستند که باید طوری تعیین شوند که با شرایط مفروض بخوانند. چون در $x = 0$ داریم $u_0 = 0$، و در $x = l$، $u_0 = 100$، لذا

$$u_0 = \frac{100}{l}x \tag{۷-۳}$$

از لحظهٔ $t = 0$ به بعد، u در معادلهٔ شارش گرمای (۳-۱) صدق می‌کند. ما پیش از این، این معادله را جدا سازی کرده‌ایم؛ جوابها همان (۳-۲) هستند که در آن $T(t)$ با (۳-۶) داده می‌شود و $F(x)$ در اولین معادلهٔ (۳-۵) صدق می‌کند، یعنی،

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{d^2F}{dx^2} + k^2 F = 0 \tag{۸-۳}$$

(برای این معادلهٔ یک بعدی، F تنها تابعی از x است.) جوابهای معادلهٔ (۳-۸) عبارت اند از

$$F(x) = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} \tag{۹-۳}$$

و جوابهای پایه‌ای (۳-۲) عبارت اند از

$$\boxed{u = \begin{cases} e^{-k^2a^2t}\sin kx \\ e^{-k^2a^2t}\cos kx \end{cases} \qquad (۱۰-۳)}$$

از جواب $\cos kx$ برای این مسأله چشم می‌پوشیم زیرا بنا به فرض، در $x = 0$، $u = 0$ است. همچنین می‌خواهیم در $x = l$، $u = 0$ باشد. این در صورتی تحقق خواهد یافت که $\sin kl = 0$، یعنی، $lk = n\pi$، یا $k = n\pi/l$ (ویژه مقادیر) باشد. بنابراین، جوابهای پایه‌ای ما (یا ویژه توابع) عبارت اند از

$$u = e^{-(n\pi a/l)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{۱۱-۳}$$

و جواب مسألهٔ ما رشته زیر خواهد بود

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-(n\pi a/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (12\text{-}3)$$

در $t = 0$، می‌خواهیم، مانند (۳-۷)، $u = u_0$ باشد، یعنی،

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = u_0 = \frac{100}{l} x \qquad (13\text{-}3)$$

این به معنای پیدا کردن رشتهٔ سینوسی فوریه برای $x(100/l)$ در بازهٔ $(0, l)$ است؛ نتیجه (از مسألهٔ ۱) برای ضرایب عبارت است از

$$b_n = \frac{100}{l}\,\frac{2l}{\pi}\,\frac{1}{n}\,(-1)^{n-1} = \frac{200}{\pi}\,\frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad (14\text{-}3)$$

سپس جواب نهایی را با جایگذاری (۳-۱۴) در (۳-۱۲) به دست می‌آوریم:

$$u = \frac{200}{\pi}\Big[e^{-(\pi a/l)^2 t} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2} e^{-(2\pi a/l)^2 t} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3} e^{-(3\pi a/l)^2 t} \sin \frac{3\pi x}{l} + \cdots \Big] \qquad (15\text{-}3)$$

اکنون می‌توانیم تغییراتی در این مسأله بدهیم. فرض کنید دماهای نهایی وجوه به صورت دو مقدار ثابت متفاوتِ غیر صفر داده شده‌اند. پس، مثل حالت پایای اولیه، حالت پایای نهایی تابعی خطی از فاصله است. رشتهٔ (۳-۱۲) به یک حالت پایای نهایی صفر میل می‌کند؛ برای به دست آوردن جوابی که به یک حالت پایای نهایی دیگر میل می‌کند، تابع خطی u_f را که معرّف حالت پایای نهایی مورد نظر است به (۳-۱۲) می‌افزاییم. بنابراین به جای (۳-۱۲) می‌نویسیم

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-(n\pi a/l)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} + u_f \qquad (16\text{-}3)$$

به این ترتیب به ازای $t = 0$، معادلهٔ همخوان با (۳-۱۳) عبارت است از

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} + u_f \qquad (17\text{-}3)$$

یا

$$u_0 - u_f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (18\text{-}3)$$

بنابراین هنگامی که $u_f \neq ۰$ است، باید $u_f - u_۰$ را به جای $u_۰$ به یک رشتهٔ فوریه بسط داد.

تاکنون دماهای مرزی معلوم بوده‌اند. به جای آن، وجوه جسم می‌توانستند عایق‌بندی شده باشند؛ در آن صورت، هیچ گرمایی به داخل یا خارج جسم جریان پیدا نمی‌کند. این در صورتی درست است که مشتق عمودی $\partial u/\partial n$ دما (مسألهٔ ۲-۱۴ را ملاحظه کنید) در مرز صفر باشد. (هنگامی که مقادیر مرزی u داده شده باشند، مسأله را **مسألهٔ دریشلت**، و اگر مقادیر مرزی مشتق قائم $\partial u/\partial n$ داده شوند، مسأله را **مسألهٔ نیومن** می‌نامند.) برای حالت یک بعدی‌ای که بررسی کردیم، شرط $u = ۰$ در $x = ۰$ و $x = l$ را با شرط $\partial u/\partial x = ۰$ در $x = ۰$ و $x = l$ برای حالتی که وجوه عایق‌بندی شده باشند، جایگزین می‌کنیم. این بدان معناست که جواب پایه‌ای مفید در (۳-۱۰) اکنون جوابی است که شامل $\cos kx$ می‌باشد؛ به دقت توجه کنید که باید جملهٔ ثابت (همخوان با $k = ۰$) را نیز منظور کنیم. مسألهٔ ۷ را ملاحظه کنید.

مسائل، بخش ۳

۱- درستی ضرایب معادلهٔ (۳-۱۴) را تحقیق کنید.

۲- میله‌ای به طول ۱۰ سانتیمتر که اطراف آن عایق‌بندی شده است، ابتدا در ۱۰۰° است. درلحظهٔ $t = ۰$، دو سر آنرا در ۰° قرار می‌دهیم. توزیع دما را در میله در لحظهٔ t پیدا کنید.

جواب:
$$u = \frac{۴۰۰}{\pi} \sum_{\text{فرد}\, n} \frac{۱}{n} e^{-(n\pi a/۱۰)^۲ t} \sin \frac{n\pi x}{۱۰}$$

۳- در حالت پایای اولیهٔ یک بُره نامتناهی به ضخامت l، وجه $x = ۰$ در ۰° و وجه $x = l$ در ۱۰۰° است. از لحظهٔ $t = ۰$ به بعد، وجه $x = ۰$ در ۱۰۰° و وجه $x = l$ در ۰° قرار می‌گیرد. توزیع دما را در لحظهٔ t پیدا کنید.

جواب:
$$u = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰x}{l} - \frac{۴۰۰}{\pi} \sum_{\text{زوج}\, n} \frac{۱}{n} e^{-(n\pi a/l)^۲ t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

۴- در لحظهٔ $t = ۰$، دو بُرهٔ تخت، هر یک به ضخامت ۵ سانتیمتر، یکی در ۰° و دیگری در ۲۰° را روی هم قرار می‌دهیم، و سپس سطوح آنها را در ۰° نگه می‌داریم. دما را به صورت تابعی از x و t در $t > ۰$ پیدا کنید.

۵- دو بُره، هر یک به ضخامت ۱ اینچ، یک سطح هر کدام در ۰° و سطح دیگر هر کدام در ۱۰۰°،

در اختیار داریم. در لحظهٔ $t = ۰$، دو بُره را از سمت وجه ۱۰۰° شان روی هم قرار می‌دهیم و سپس سطوح بیرونی آنها را در ۱۰۰° نگه می‌داریم. $u(x, t)$ را در $t > ۰$ پیدا کنید.

۶- نشان دهید که مسألهٔ زیر با استفاده از (۳-۱۵) به سهولت حل می‌شود: در ابتدا دو سر یک میله در ۲۰° و ۱۵۰° هستند؛ در لحظهٔ $t = ۰$ سر ۱۵۰° را به ۵۰° تغییر می‌دهیم. توزیع دمای وابسته به زمان را پیدا کنید.

۷- دو سرِ میله‌ای به طول l که اطراف آن عایق‌بندی شده است را نیز از لحظهٔ $t = ۰$ به بعد عایق‌بندی می‌کنیم. در ابتدا دما $u = x$ است، که x فاصله از یک سر می‌باشد. توزیع دما در درون میله را در زمان t تعیین کنید. ***راهنمایی و تذکر:*** آخرین پاراگراف این بخش را در بالا، و همچنین مسألهٔ ۲-۱۴ را ملاحظه کنید. نشان دهید که جوابهای $k = ۰$ عبارت از x و ثابت (مستقل از زمان) هستند. توجه کنید که در اینجا (برخلاف مسألهٔ ۲-۱۵) به جواب اضافی (یعنی x) برای $k = ۰$ نیاز ندارید زیرا حالت پایای نهایی یک ثابت است و این در جوابهای (۳-۱۰) مستتر است. همچنین توجه کنید که در بحث ذیل (۳-۱۵) ما به جوابهای $k = ۰$ ***احتیاج داشتیم*** اما می‌توانستیم کار را با ملاحظهٔ اینکه این جوابهای خطی به سهولت حالت پایای نهایی را می‌دهند، ساده کنیم.

جواب: $$u = \frac{l}{۲} - \frac{۴l}{\pi^۲} \sum_{n\,\text{فرد}} \frac{۱}{n^۲} \cos \frac{n\pi x}{l}\, e^{-(n\pi\alpha/l)^۲ t}$$

۸- میله‌ای به طول ۲ در ابتدا در ۰° است. از لحظهٔ $t = ۰$ به بعد، سر $x = ۰$ در ۰° و سر $x = ۲$ در ۱۰۰° نگه داشته می‌شود. توزیع دمای وابسته به زمان را پیدا کنید.

۹- مسألهٔ ۸ را برای $t > ۰$ و در صورتی که سر $x = ۰$ میله عایق‌بندی شده باشد و سر $x = ۲$ در ۱۰۰° نگهداری شود، حل کنید. مسألهٔ ۷ در بالا و مسألهٔ ۶-۸ از فصل ۱۲ را ملاحظه کنید.

۱۰- معادلهٔ موج (۱-۴) را، مطابق آنچه که در مورد معادلهٔ شارش گرما انجام دادیم، به یک معادلهٔ فضایی و یک معادلهٔ زمانی تفکیک کنید و نشان دهید که معادلهٔ فضایی برای این مورد نیز معادلهٔ هلمهولتز است.

۴- معادلهٔ موج؛ سیم (تار) مرتعش

فرض کنید سیمی (مثل، سیم یک پیانو یا ویولون) را محکم کشیده و دو سر آنرا در پایه‌هایی واقع در $x = ۰$ و $x = l$ ببندیم. هنگامی که سیم در حال ارتعاش است، جا به جایی قائم y آن از موقعیت تعادلش در امتداد محور x، به x و t بستگی دارد. فرض می‌کنیم که جا به جایی y همیشه خیلی کوچک است و شیب $\partial y/\partial x$ سیم همیشه و در همه جا کوچک است. به بیان دیگر، فرض می‌کنیم که سیم هرگز از موقعیت کشیده و تعادلی‌اش خیلی دور نمی‌شود؛ در حقیقت، بین طول سیم و فاصلهٔ بین پایه‌ها تفاوتی قائل نمی‌شویم، اگرچه واضح است که سیم به هنگام ارتعاش و خروج از وضعیت تعادلی‌اش، باید اندکی کشیده شود. تحت این فرضها، جا به جایی y در معادلهٔ موج (یک بعدی) صدق می‌کند:

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} = \frac{۱}{v^۲}\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲} \tag{۱-۴}$$

ثابت v به کشش و چگالی خطی سیم بستگی دارد و سرعت موج نامیده می‌شود زیرا سرعتی است که یک آشفتگی در نقطه‌ای از سیم، با آن، در امتداد سیم حرکت می‌کند. برای جدا سازی متغیرها، عبارت

$$y = X(x)\ T(t) \tag{۲-۴}$$

را در (۴-۱) جایگزین می‌کنیم، و نتیجه می‌گیریم (مسألهٔ ۳-۱۰)

$$\frac{۱}{X}\frac{d^۲X}{dx^۲} = \frac{۱}{v^۲}\frac{۱}{T}\frac{d^۲T}{dt^۲} = -k^۲$$

یا

$$\begin{aligned} X'' + k^۲X &= ۰ \\ \ddot{T} + k^۲v^۲T &= ۰ \end{aligned} \tag{۳-۴}$$

از فیزیک مسأله می‌بینیم که چرا در اینجا از ثابت جدا سازی منفی استفاده می‌کنیم؛ جوابها باید ارتعاشاتی راکه با جملات سینوسی و کسینوسی، نه نماهای حقیقی، نمایش داده می‌شوند توصیف کنند. البته اگر $+k^۲$ را برمی‌گزیدیم، به طور ریاضی درمی‌یافتیم که نمی‌توانیم شرایط مرزی را برای k حقیقی برقرار سازیم.

نمادگذاری زیر راکه در بحث پدیده‌های موجی به کار بردیم، به خاطر بیاورید (مسألهٔ ۲-۱۷

از فصل ۷ را ملاحظه کنید):

$\nu =$ بسامد (sec^{-1})	$\omega = 2\pi\nu =$ (رادیان) بسامد زاویه‌ای
$\lambda =$ طول موج	$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{\omega}{v} =$ عدد موج
$v = \lambda\nu$	

جوابهای دو معادلهٔ (۴-۳) عبارت اند از

$$X = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} \qquad T = \begin{cases} \sin kvt = \sin \omega t \\ \cos kvt = \cos \omega t \end{cases} \tag{۴-۴}$$

جوابهای پایه‌ای (۴-۲) برای y عبارت اند از

$$y = \begin{cases} \sin kx \sin \omega t \\ \sin kx \cos \omega t \\ \cos kx \sin \omega t \\ \cos kx \cos \omega t \end{cases} \quad \text{که } \omega = kv \tag{۵-۴}$$

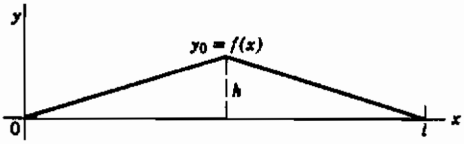
چون سیم در $x = 0$ و $x = l$ بسته شده است، باید برای این مقادیر x و تمام مقادیر t، $y = 0$ باشد. این بدین معناست که فقط جملات $\sin kx$ در (۴-۵) مطلوب هستند، و همچنین k را طوری انتخاب می‌کنیم که $\sin kl = 0$ یا $k = n\pi/l$. پس جوابهای (۴-۵) به این صورت درمی‌آیند

$$y = \begin{cases} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \end{cases} \tag{۶-۴}$$

ترکیب خاصی از جوابهای (۴-۶) که باید برای حل مسألهٔ مورد نظر انتخاب شود به شرایط اولیه بستگی دارد. مثلاً، فرض کنید با پایین کشیدن سیم به اندازهٔ فاصله کوچک h در وسط، و سپس

رها کردن آن، سیم شروع به ارتعاش کند. در آن صورت، در لحظهٔ $t = ۰$، شکل سیم، یعنی $y_۰ = f(x)$، به صورت شکل ۴-۱، و سرعت $\partial y/\partial t$ نقاط روی آن صفر خواهد بود. ($\partial y/\partial t$ را با سرعت موج v اشتباه نکنید، هیچ رابطه‌ای بین آنها وجود ندارد.) به این ترتیب، در (۴-۶) ما باید جملهٔ شامل $\sin(n\pi vt/l)$ را نادیده بگیریم زیرا مشتق زمانی آن به ازای $t = ۰$، صفر نخواهد شد. پس جواب این مسأله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \qquad (۴-۷)$$



شکل ۴-۱

ضرایب b_n طوری باید تعیین شوند که در $t = ۰$ داشته باشیم $y_۰ = f(x)$، یعنی

$$y_۰ = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x) \qquad (۴-۸)$$

مانند مسائل قبل، ضرایب رشتهٔ سینوسی فوریه را برای $f(x)$ داده شده پیدا، و آنها را در (۴-۷) جایگذاری می‌کنیم. نتیجه عبارت است از (مسألهٔ ۱)

$$y = \frac{۸h}{\pi^۲}\left(\sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi vt}{l} - \frac{۱}{۹} \sin \frac{۳\pi x}{l} \cos \frac{۳\pi vt}{l} + \cdots\right) \qquad (۴-۹)$$

راه دیگر به ارتعاش درآوردن، سیم ضربه زدن (مضراب) به آن است (مثل سیم پیانو). در این مورد، شرایط مرزی به صورت $y = ۰$ در $t = ۰$ است، و سرعت $\partial y/\partial t$ در $t = ۰$ به صورت تابعی از x داده می‌شود (یعنی، سرعت هر نقطه از سیم در $t = ۰$ داده می‌شود). این بار، جملهٔ شامل $\cos(n\pi vt/l)$ را در (۴-۶) کنار می‌گذاریم زیرا در $t = ۰$ این جمله صفر نیست. در این صورت جواب مسأله به شکل زیر است:

$$y = \sum_{n=۱}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \qquad (۴-۱۰)$$

در اینجا ضرایب باید طوری تعیین شوند که

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = V(x) \qquad (۱۱-۴)$$

یعنی، $V(x)$ ، سرعت اولیهٔ داده شده باید برحسب یک رشتهٔ سینوسی فوریه بسط داده شود (مسائل ۵ تا ۸ را ملاحظه کنید).

فرض کنید سیم طوری ارتعاش می‌کند که به جای یک رشتهٔ نامتناهی برای y، فقط یکی از جوابهای (۴-۶) را به ازای یک مقدار n داریم؛ یعنی، مثلاً

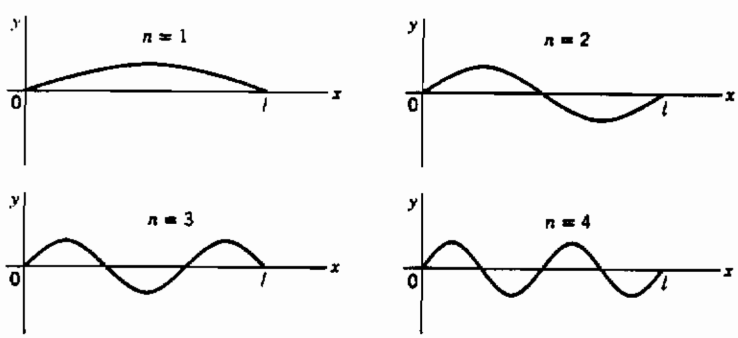
$$y = \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \qquad (۱۲-۴)$$

بیشترین مقدار $\sin\ (n\pi vt/l)$، به ازای هر t، برابر ۱ است و از اینرو شکل سیم عبارت است از

$$y = \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (۱۳-۴)$$

نمودارهای (۴-۱۳) به ازای ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱ $= n$ در شکل ۴-۲ نمایش داده شده‌اند. (نمودارها با اغراق رسم شده‌اند! به خاطر بیاورید که جا به جایی‌ها حقیقتاً خیلی کوچک‌اند.) نقطهٔ x را روی سیم در نظر بگیرید؛ برای این نقطه، $\sin\ (n\pi x/l)$ یک عدد مثلاً A است. بنابراین جا به جایی این نقطه در لحظهٔ t عبارت است از [از (۴-۱۲)]

$$y = A \sin \frac{n\pi vt}{l} \qquad (۱۴-۴)$$



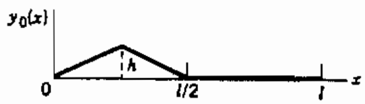
شکل ۴-۲

با گذشت زمان، این نقطه از سیم با بسامد ν_n که با رابطهٔ $\omega_n = n\pi v/l$ یا $\nu_n = nv/(2l)$ داده مـی‌شود بـه بـالا و پـایین نـوسان مـی‌کند؛ دامـنهٔ نـوسان در ایـن نـقطه بـرابـر است بـا $A = sin\ (n\pi x/l)$ (شکل ۴-۲ را ملاحظه کنید). نقاط دیگر سیم با دامنه‌های متفاوت اما با **همین** بسامد نوسان می‌کنند. این بسامد نت موسیقی است که سیم تولید می‌کند. اگر $n = 1$ (شکل ۴-۲ را ملاحظه کنید)، بسامد، $v/(2l)$ است؛ در موسیقی این تُن (طنین)، هماهنگ اصلی یا اول نامیده می‌شود. اگر $n = 2$ باشد، بسامد صرفاً دو برابر بسامد اصلی است؛ این تُن، اولین تُن فرعی یا هماهنگ دوم نامیده می‌شود؛ و غیره. تمام بسـامدهایی کـه ایـن سـیم می‌تواند تولید کند مضاربی از بسامد اصلی هستند. این بسامدها، ***بسامدهای مشـخصهٔ*** سـیم نامیده می‌شوند. (که با **مقادیر مشخصه** یا **ویژه مقادیر**، $k = n\pi/l$، متناسب‌اند.) راههایی که سیم ممکن است ارتعاش کند و فقط یک تن خالص با یک بسامد تولید نماید [یعنی، با y داده شده توسط (۴-۱۲) به ازای یک مقدار n]، ***مدهای طبیعی ارتعاش*** نامیده می‌شوند. چهار مد طبیعی اول در شکل ۴-۲ مشخص شده‌اند. هر ارتعاش ترکیبی از این مدهای طبیعی است [مثلاً، (۴-۹) یا (۴-۱۰)]. جواب (۴-۱۲) (**برای یک** n) که یک مد طبیعی را توصیف می‌کند، یک ***تابع مشخصه*** یا ***ویژه تابع*** است.

مسائل، بخش ۴

۱- مسألهٔ سیم کشیده شده را برای به دست آوردن معادلهٔ (۴-۹) کامل کنید.

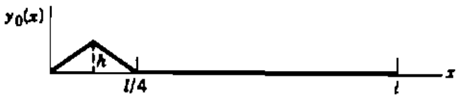
۲- سیمی به طول l دارای سرعت اولیه صفر و جا به جایی $y_0(x)$ مطابق شکل است. (این جا به جایی اولیه را می‌توان با تثبیت سیم در مرکز آن، و کشیدن نیمهٔ دیگر آن ایـجاد کرد.) جا به جایی را به صورت تابعی از x و t پیدا کنید.



جواب:
$$y = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi vt}{l}$$

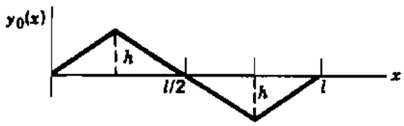
که $B_n = (2\ sin\ n\pi/4 - sin\ n\pi/2)/n^2$

۳- مسألهٔ ۲ را در صورتی که جا به جایی اولیهٔ آن به شکل:



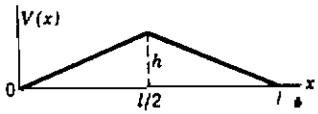
باشد حل کنید.

۴- مسألهٔ ۲ را در صورتی که جا به جایی اولیهٔ آن به شکل:



باشد حل کنید.

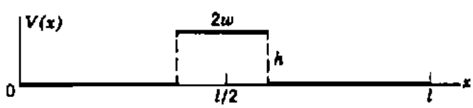
۵- سیمی به طول l در ابتدا به طور مستقیم کشیده شده است؛ دو سر آن در تمام لحظات t محکم بسته شده‌اند. مطابق نمودار، در لحظهٔ $t = ۰$ به تمام نقاط آن سرعت $V(x) = (\partial y/\partial t)_{t=۰}$، داده می‌شود (مثلاً، با ضربه زدن به سیم). شکل سیم را در زمان t تعیین کنید، یعنی جا به جایی y را به صورت تابعی از x و t به شکل رشته‌ای شبیه (۴-۹) پیدا کنید. **هشدار:** در اینجا به چه توابعی نیاز دارید؟



جواب:

$$y = \frac{۸hl}{\pi^۳ v}\left(\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi vt}{l} - \frac{۱}{۳^۳}\sin\frac{۳\pi x}{l}\sin\frac{۳\pi vt}{l} + \frac{۱}{۵^۳}\sin\frac{۵\pi x}{l}\sin\frac{۵\pi vt}{l} - \cdots\right)$$

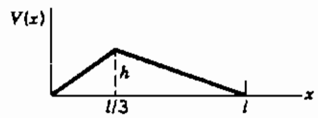
۶- مسألهٔ ۵ را وقتی سرعت اولیه $V(x) = (\partial y/\partial t)_{t=۰}$ مطابق آنچه ذیلاً نشان داده است باشد، حل کنید.



جواب:

$$y = \frac{8hl}{\pi^2 v}\left(\sin\frac{\pi w}{l}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi vt}{l} - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi w}{l}\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{3\pi vt}{l} + \cdots\right)$$

۷- مسألهٔ ۵ را با این فرض حل کنید که سرعت اولیه به صورت زیر باشد:

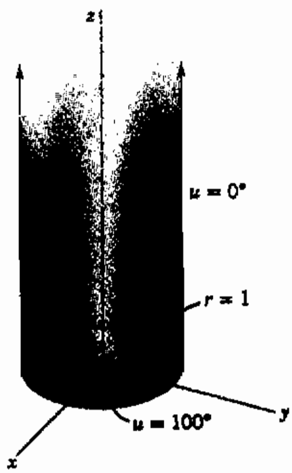


۸- مسألهٔ ۵ را وقتی سرعت اولیه به صورت زیر است، حل کنید

$$V(x) = \begin{cases} \sin 2\pi x/l & \text{به ازای } 0 < x < l/2 \\ 0 & \text{به ازای } l/2 < x < l \end{cases}$$

۹- بسامد مهم‌ترین هماهنگ را در هر یک از مسائل ۱ تا ۸ پیدا کنید.

۵- دمای حالت پایا در یک استوانه



شکل ۵-۱

مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید. توزیع دمای حالت پایای u در یک استوانهٔ توپُر نیم - متناهی (شکل ۵-۱) به شعاع ۱ را در صورتی که قاعدهٔ آن در $100°$ و سطح جانبی آن در $0°$ باشد، پیدا کنید. این بسیار شبیه به مسألهٔ توزیع دما در تیغهٔ نیم - متناهی به نظر می‌رسد. با این همه، در اینجا مناسب نیست که جوابها را در مختصات دکارتی جستجو کنیم، زیرا شرط مرزی $u = 0$ برای $r = 1$ داده شده است، و نه برای مقادیر ثابت x و y. متغیرهای طبیعی برای مسأله، مختصات استوانه‌ای r و θ و z می‌باشند. دمای u در داخل

استوانه، در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند زیرا منبع گرما در آنجا وجود ندارد.

معادلهٔ لاپلاس در مختصات استوانه‌ای بدین صورت است (بخش ۹ از فصل ۱۰ را ملاحظه کنید)

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (۵-۱)$$

برای جدا سازی متغیرها، جوابی به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = R(r)\,\Theta(\theta)\,Z(z) \qquad (۵-۲)$$

(۵-۲) را در (۵-۱) جایگذاری کرده بر $R\Theta Z$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \qquad (۵-۳)$$

جملهٔ آخر فقط تابعی از z است، در صورتی که دو جملهٔ دیگر شامل z نیستند. بنابراین جملهٔ آخر ثابت است و **مجموع** دو جملهٔ اول برابر منهای آن مقدار ثابت می‌باشد. توجه کنید که هیچ یک از دو جملهٔ اول به تنهایی ثابت نیستند چون هر دو شامل r می‌باشند.

برای اینکه بگوییم یک جمله ثابت است، باید مطمئن باشیم که: (الف) آن جمله تنها تابعی از یک متغیر است، و (ب) آن متغیر جای دیگری در معادله ظاهر نمی‌شود.

بنابراین داریم

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 \qquad Z = \begin{cases} e^{kz} \\ e^{-kz} \end{cases} \qquad (۵-۴)$$

چون می‌خواهیم وقتی z به سمت بینهایت میل می‌کند دمای u به سمت صفر میل کند، ثابت جدا سازی را $+k^2$ ($k > 0$) می‌نامیم و آنگاه فقط جواب e^{-kz} را به کار می‌بریم. سپس (۵-۳) را با تعویض جملهٔ آخر آن با k^2 می‌نویسیم - (۵-۴) را ملاحظه کنید:

$$\frac{1}{R}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k^2 = 0$$

با ضرب در r^2 متغیرها از هم جدا می‌شوند:

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+k^2r^2=0 \tag{۵-۵}$$

در (۵-۵)، جملهٔ دوم تنها تابعی از θ است، و جملات دیگر مستقل از θ هستند. بنابراین داریم

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-n^2 \qquad \Theta=\begin{cases}\sin n\theta\\ \cos n\theta\end{cases} \tag{۶-۵}$$

در اینجا باید $-n^2$ را به عنوان ثابت جدا سازی به کار ببریم و آنگاه شرط کنیم که n، به دلیلی که ذیلاً می‌آید، عددی صحیح باشد. وقتی نقطه‌ای را با استفاده از مختصات قطبی مشخص می‌کنیم، می‌توانیم زاویه را به صورت θ یا $\theta + 2m\pi$ انتخاب کنیم که در آن m عددی صحیح است. اما صرفنظر از اینکه مقدار m چه باشد، در آنجا **یک** نقطه فیزیکی و **یک** دما وجود دارد. فرمول ریاضی برای دما در نقطهٔ مورد نظر باید مقدار یکسانی در θ و $\theta + 2m\pi$ بدهد، یعنی، دما باید تابعی متناوب از θ با دورهٔ تناوب 2π باشد. این تنها وقتی درست است که جوابهای θ، به جای توابع نمایی، به صورت سینوس یا کسینوس باشند (بنابراین ثابت جدا سازی باید منفی باشد) و ثابت n یک عدد صحیح باشد (برای به دست دادن دوره تناوب 2π).

سرانجام، معادلهٔ r بدین صورت است

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-n^2+k^2r^2=0$$

یا

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+(k^2r^2-n^2)R=0 \tag{۷-۵}$$

این یک معادلهٔ بسل با جوابهای $J_n(kr)$ و $N_n(kr)$ می‌باشد [معادلهٔ (۱۹-۲) از فصل ۱۲ را ملاحظه کنید؛ قرار دهید $x = r$ و $a = k$]. چون قاعدهٔ استوانهٔ مورد نظر شامل مبدأ است، تنها می‌توانیم از جوابهای J_n استفاده کنیم و نه N_n زیرا N_n در مبدأ نامتناهی می‌شود. بنابراین داریم

$$R(r)=J_n(kr) \tag{۸-۵}$$

مقادیر ممکن k را می‌توانیم از شرط $u = ۰$ در روی سطح جانبی استوانه تعیین کنیم، یعنی، وقتی $r = ۱$ است (به ازای جمیع مقادیر θ ، z)، $u = ۰$ یا $R(r) = ۰$. از (۵-۸)، داریم

$$R_{r=۱} = J_n(k) = ۰ \tag{۹-۵}$$

بنابراین مقادیر ممکن k، صفرهای J_n هستند. در این صورت جوابهای پایه‌ای u عبارت اند از

$$u = \begin{cases} J_n(kr)\ sin\ n\theta\ e^{-kz} \\ J_n(kr)\ cos\ n\theta\ e^{-kz} \end{cases} \tag{۱۰-۵}$$

که k یک صفر J_n است.

در این مسأله، قاعدهٔ استوانه در دمای ثابت ۱۰۰° است. اگر استوانه را هر اندازه بچرخانیم، شرایط مرزی تغییر نمی‌کنند؛ بنابراین، جواب به زاویهٔ θ بستگی ندارد. این بدان معناست که در (۵-۱۰) $cos\ n\theta$ را به ازای $n = ۰$، به کار می‌بریم. مقادیر ممکن k، صفرهای $J_۰$ هستند، این صفرها را k_m می‌نامیم، که در آن $m = ۱ ، ۲ ، ۳ ، ...$. پس تعداد بینهایت جواب به شکل (۵-۱۰) وجود دارند (به ازای هر صفر $J_۰$، یکی) و جواب مسأله را به صورت رشته‌ای از این جوابها (ویژه توابع) می‌نویسیم:

$$u = \sum_{m=۱}^{\infty} c_m\, J_۰(k_m r)\ e^{-k_m z} \tag{۱۱-۵}$$

وقتی $z = ۰$ است، باید $u = ۱۰۰$ باشد، یعنی

$$u_{z=۰} = \sum_{m=۱}^{\infty} c_m\, J_۰(k_m r) = ۱۰۰ \tag{۱۲-۵}$$

این باید شما را به یاد رشته فوریه بیندازد؛ در اینجا می‌خواهیم ۱۰۰ را به جای رشته‌ای از سینوسها و کسینوسها به یک رشته از توابع بسل بسط دهیم. ثابت کردیم (بخش ۱۹ از فصل ۱۲ را ملاحظه کنید) که توابع $J_۰(k_m r)$ در بازهٔ (۰ , ۱) نسبت به تابع وزن r متعامد اند. پس می‌توانیم ضرایب c_m در (۵-۱۲) را با همان روشی که در پیدا کردن ضرایب رشته

فوریه سینوسی یا کسینوسی به کار بردیم، پیدا کنیم. (به این دلیل، رشته‌هایی نظیر (۵-۱۲) اغلب رشته‌های فوریه - بسل نامیده می‌شوند). (۵-۱۲) را در $r\,J_0(k_\mu r)$ ضرب کنید، ... ، ۳ ، ۲ ، ۱ = μ، و جمله به جمله از $r = 0$ تا $r = 1$ انتگرال بگیرید. به علت خاصیت تعامد [معادلهٔ (۱۹-۱۰) از فصل ۱۲ را ملاحظه کنید] ، تمام جملات رشته به استثنای جملهٔ $m = \mu$ حذف می‌شوند، و داریم

$$c_\mu \int_0^1 r\,[J_0(k_\mu r)]^2\,dr = \int_0^1 100\,r\,J_0(k_\mu r)\,dr \qquad (۵\text{-}۱۳)$$

به ازای هر مقدار ... ، ۳ ، ۲ ، ۱ = μ، (۵-۱۳) یکی از ضرایب در (۵-۱۱) و (۵-۱۲) را می‌دهد؛ بنابراین هر c_m در (۵-۱۱)، توسط (۵-۱۳) داده می‌شود به شرطی که μ را با m جایگزین کنیم.

ما باید انتگرالهای (۵-۱۳) را حساب کنیم. از معادلهٔ (۱۹-۱۰) فصل ۱۲ داریم:

$$\int_0^1 r\,[J_0(k_m r)]^2\,dr = \frac{1}{2} J_1^2(k_m) \qquad (۵\text{-}۱۴)$$

طبق معادلهٔ (۱۵-۱) از فصل ۱۲

$$\frac{d}{dx}\,[x\,J_1(x)] = x\,J_0(x)$$

اگر در این فرمول قرار بدهیم $x = k_m r$، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{1}{k_m}\frac{d}{dr}\,[\,k_m\,r\,J_1(k_m r)] = k_m\,r\,J_0(k_m\,r)$$

با حذف یک ضریب k_m و انتگرال‌گیری، داریم

$$\int_0^1 r\,J_0(k_m r)\,dr = \frac{1}{k_m}\,r\,J_1(k_m r)\,\Big|_0^1 = \frac{1}{k_m}\,J_1(k_m) \qquad (۵\text{-}۱۵)$$

اکنون (۵-۱۳) را برای c_m می‌نویسیم، مقادیر انتگرالها را از (۵-۱۴) و (۵-۱۵) جایگزین می‌کنیم و c_m را به دست می‌آوریم. نتیجه عبارت است از

$$c_m = \frac{100\,J_1(k_m)}{k_m}\cdot\frac{2}{J_1^2(k_m)} = \frac{200}{k_m\,J_1(k_m)} \qquad (۵\text{-}۱۶)$$

هشدار: یادآور می‌شویم که k_m یک صفرِ J_0 است نه J_1. در بعضی از جداول ممکن است

مقادیر جدول‌بندی شدهٔ J_1 (یا $J_0{}' = -J_1$) را در صفرهای J_0 ملاحظه کنید؛ در غیر این صورت، ابتدا می‌توانید مقادیر k_m (صفرهای J_0) را پیدا کنید و سپس در یک جدولِ مقادیر J_1، با درونیابی، مقادیر $J_1(k_m)$ را بیابید. با c های (۵-۱۶)، (۵-۱۱) جواب مسألهٔ ماست. مقدار عددی دما در هر نقطه با محاسبهٔ چند جمله از رشته پیدا می‌شود (مسألهٔ ۱).

فرض کنید دمای قاعدهٔ استوانه، پیچیده‌تر از یک مقدار ثابت، مثلاً به صورت $f(r, \theta)$، تابعی از r و θ باشد. تا (۵-۱۰)، مانند قبل جلو می‌رویم. اما اکنون جواب رشته‌ای، از (۵-۱۱) پیچیده‌تر است چون باید به جای J_0، تمام J_nها را منظور کنیم. به شاخص پایین دوگانه‌ای روی اعداد k، که صفرهای توابع بسل هستند، نیاز داریم؛ منظورمان از k_{mn}، صفر مثبت mاُم J_n است که ... ، ۲ ، ۱ ، ۰ $= n$ و ... ، ۳ ، ۲ ، ۱ $= m$. دمای u یک رشتهٔ نامتناهی دوگانه است که روی شاخصهای پایین m و n تمام صفرهای همهٔ J_nها جمعیابی می‌شود:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{mn} r)(a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta)\, e^{-k_{mn} z} \qquad (۵\text{-}۱۷)$$

در $z = 0$، باید $u = f(r, \theta)$ باشد. بنابراین می‌نویسیم

$$u_{z=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k_{mn} r)(a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta) = f(r, \theta) \qquad (۵\text{-}۱۸)$$

برای تعیین ضرایب a_{mn}، این معادله را در $J_\nu(k_{\mu\nu} r) \cos \nu\theta$ ضرب کنید و روی تمام قاعدهٔ استوانه (صفر تا 2π برای θ، صفر تا ۱ برای r) انتگرال بگیرید. به علت تعامد توابع $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$، تمام جملات b_{mn} حذف می‌شوند و تنها جملات a_{mn} برای $n = \nu$ باقی می‌مانند. به علت تعامد توابع $J_n(k_{mn} r)$ (یک n، تمام مقادیر m)، فقط جملهٔ $a_{\mu\nu}$ باقی می‌ماند. بنابراین داریم

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta)\, J_\nu(k_{\mu\nu} r) \cos \nu\theta\, r\, dr\, d\theta \qquad (۵\text{-}۱۹)$$

$$= a_{\mu\nu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} J_\nu^2(k_{\mu\nu} r) \cos^2 \nu\theta\, r\, dr\, d\theta = a_{\mu\nu} \cdot \frac{1}{2} J^2_{\nu+1}(k_{\mu\nu}) \cdot \pi$$

[انتگرال r از رابطهٔ (۱۰-۱۹) از فصل ۱۲، و انتگرال θ، از بخش ۴، فصل ۷ به دست می‌آید.]

توجه کنید که چگونه تابع وزن r در انتگرال تابع بسل، در اینجا به صورت بخشی از عنصر

مساحت در مختصات قطبی ظاهر می‌شود. همچنین برای $b_{\mu\nu}$ خواهیم داشت:

$$b_{\mu\nu} = \frac{2}{\pi J_{\nu+1}^2(k_{\mu\nu})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r,\theta)\, J_\nu(k_{\mu\nu} r)\, \sin \nu\theta \; r\, dr\, d\theta \qquad (۵-۲۰)$$

با جایگذاری مقادیر ضرایب a و b از (۵-۱۹) و (۵-۲۰) در (۵-۱۷)، جواب مسأله را پیدا می‌کنیم.

مسائل، بخش ۵

۱- مقدار عددی ضرایب (۵-۱۶) متعلق به سه جملهٔ اول رشتهٔ (۵-۱۱) را برای دمای حالت پایا در یک استوانهٔ توپُر نیم - متناهی، هنگامی که در $r = 1$، $u = 0$، و در $z = 0$، $u = 100$ است، حساب کنید. در $r = \frac{1}{2}$ و $z = 1$، u چقدر است؟

۲- توزیع دمای حالت پایا را در استوانهٔ توپُر نیم - متناهی، در صورتی که دماهای مرزی در $r=1$ و $z = 0$، به ترتیب، $u = 0$ و $u = y = r \sin \theta$ باشند، پیدا کنید. ***راهنمایی:*** در (۵-۱۰)، شما باید جواب سینوسی را در نظر بگیرید؛ بنابراین توابع J_1 مطلوب هستند. برای این منظور باید از $r^2 J_1$ انتگرال بگیرید؛ روش متن کتاب را برای انتگرال‌گیری rJ_0 درست قبل از (۵-۱۵) دنبال کنید.

جواب: $u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{k_m J_2(k_m)} J_1(k_m r)\, e^{-k_m z} \sin \theta$ ، $k_m = J_1$ صفرهای

۳- توزیع دمای حالت پایا را در یک استوانهٔ توپر به ارتفاع ۱۰ و شعاع ۱ در صورتی که قاعدهٔ بالا و سطح جانبی آن در 0°، و قاعدهٔ پایین آن در 100° باشند، پیدا کنید.

۴- یک تیغهٔ دایره‌ای تخت به شعاع ۱، ابتدا در دمای 100° است. از لحظهٔ $t = 0$ به بعد، فقط محیط تیغه در 0° قرار می‌گیرد. توزیع دمای وابسته به زمان $u(r, \theta, t)$ را پیدا کنید. ***راهنمایی:*** متغیرهای معادلهٔ (۳-۱) را در مختصات قطبی جدا سازی کنید.

۵- مسألهٔ ۴ را برای موردی که توزیع دمای اولیه $u(r, \theta, t=0) = 100\, r \sin \theta$ است، حل کنید.

۶- مسألهٔ ۴ را برای موردی در نظر بگیرید که دمای اولیه به صورت تابع $f(r, \theta)$ داده شده است. عموماً جواب این مسأله یک رشتهٔ نامتناهی دوگانه نظیر (۵-۱۷) است. فرمولهای ضرایبِ رشته را پیدا کنید.

۷- توزیع دمای حالت پایا را در استوانهٔ توپُری به ارتفاع ۲۰ و شعاع ۳ در صورتی پیدا کنید که دو قاعدهٔ آن در $^\circ$۰ و سطح جانبی آن در $^\circ$۱۰۰ باشند. ***راهنمایی:*** در (۵-۴)، $-k^۲$ به کار ببرید. همچنین بخشهای ۱۷ و ۲۰ از فصل ۱۲ را ملاحظه کنید.

۸- در یک لولهٔ دراز به شعاع ۱، آب $^\circ$۱۰۰ با سرعت جریان دارد، به طوری که می‌توان فرض کرد دما در تمام نقاط $^\circ$۱۰۰ است، در $t = ۰$، آب قطع می‌شود و سطح لوله از آن به بعد در $^\circ$۴۰ نگه داشته می‌شود (از ضخامت دیوارهٔ لوله صرفنظر کنید). توزیع دما در آب را به صورت تابعی از r و t پیدا کنید. توجه کنید که کافی است فقط یک سطح مقطع از لوله را در نظر بگیرید.

جواب:
$$u = ۴۰ + \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{۱۲۰}{k_m J_۱(k_m)} J_۰(k_m r)\, e^{-(\alpha k_m)^۲ t}$$
که $J_۰(k_m) = ۰$

۹- توزیع دمای حالت پایا را در مکعبی به ضلع ۱۰، و در صورتی که در وجه $z = ۰$ دما $^\circ$۱۰۰ و در پنج وجه دیگر $^\circ$۰ باشد، پیدا کنید. ***راهنمایی:*** معادلهٔ سه بُعدی لاپلاس را در مختصات دکارتی جدا سازی، و روشهای بخش ۲ را دنبال کنید. باید عدد ۱۰۰ را به صورت رشتهٔ فوریه دوگانهٔ

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \sum_{m=۱}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi y}{l}$$

بسط دهید. ضرایب a_{mn} با استفاده از تعامد توابع $\sin(n\pi x/l)\sin(m\pi y/l)$ روی مربع تعیین می‌شوند، یعنی

$$\int_۰^l \int_۰^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi y}{l} \sin \frac{p\pi x}{l} \sin \frac{q\pi y}{l}\, dx\, dy = ۰$$

مگر $\begin{cases} n = p \\ m = q \end{cases}$

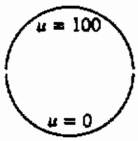
۱۰- یک مکعب، ابتدا در $^\circ$۱۰۰ است. از لحظهٔ $t = ۰$ به بعد، وجوه آن در $^\circ$۰ قرار می‌گیرند. توزیع دمای وابسته به زمان را پیدا کنید. ***راهنمایی:*** این مسأله به یک رشتهٔ فوریه سه‌گانه منجر می‌شود، رشتهٔ فوریهٔ دوگانه در مسألهٔ ۹ را ملاحظه کنید و آنرا به سه بعد تعمیم دهید.

۱۱- دو معادلهٔ $R(r)$ زیر در مسائل گوناگون جدا سازی متغیرها در مختصات قطبی، استوانه‌ای، یا کروی ظاهر می‌شوند:

$$r\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dR}{dr}\right) = n^{۲}R$$
$$\frac{d}{dr}\left(r^{۲}\,\frac{dR}{dr}\right) = l(l+۱)R$$

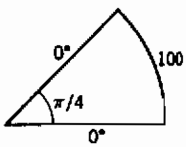
راههای گوناگونی برای حل این معادلات وجود دارد: اینها معادلات استانداردی هستند (غالباً معادلات اولر یا کوشی نامیده می‌شوند - بخش ۷-د از فصل ۸ را ملاحظه کنید)؛ می‌توانید از روشهای رشتهٔ توانی استفاده کنید؛ با توجه به این واقعیت که جوابها فقط توانهایی از r هستند، پیدا کردن توانها ساده است. هر روشی راکه دوست دارید، انتخاب، و دو معادله را برای مراجعات آتی حل کنید. مورد $n = ۰$ را جداگانه بررسی کنید. آیا این برای $l = ۰$ نیز ضروری است؟

۱۲- معادلهٔ لاپلاس دوبعدی را در مختصات قطبی جدا سازی کنید و معادلات r و θ را حل کنید. (مسألهٔ ۱۱ را ملاحظه کنید.) به خاطر بیاورید که برای معادلهٔ θ، تنها جوابهای تناوبی جالب توجه‌اند. نتایجتان را برای حل مسألهٔ دمای حالت پایای در یک تیغهٔ دایره‌ای، در صورتی که مرز نیم دایرهٔ فوقانی در ۱۰۰° و تحتانی در ۰° قرار داشته باشد، به کار ببرید.



تذکر: مسألهٔ فیزیکی دیگری که حل ریاضی آن با مسألهٔ دما یکی می‌باشد، چنین است: پتانسیل الکتروستاتیکی را در داخل یک خازن، که از دو نیم استوانهٔ واقع در پتانسیلهای ۰ و ۱۰۰، و عایق‌بندی شده از هم، تشکیل شده است، پیدا کنید.

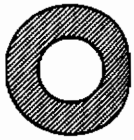
جواب: $$u = ۵۰ + \frac{۲۰۰}{\pi}\sum_{\text{فرد } n}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\frac{\sin n\theta}{n}$$



۱۳- توزیع دمای حالت پایا را در قطاع یک تیغهٔ دایره‌ای به شعاع ۱۰ و زاویه $\pi/۴$، در صورتی که دما در امتداد شعاع در ۰° و در امتداد لبهٔ منحنی در ۱۰۰° نگه داشته شود، پیدا کنید. ***راهنمایی:*** مسألهٔ ۱۲ را ملاحظه کنید.

۱۴- توزیع دمای حالت پایا را در یک طوق دایره‌ای (مساحت هاشور خورده) به شعاع داخلی ۱ و شعاع خارجی ۲، در صورتی که دایرهٔ داخلی در ۰° و نصف محیط دایرهٔ خارج در ۰° و

نــصف دیگـر آن در 100° نگـه داشـته شـود، پـیدا کـنید.
راهنمایی: جوابهای r مربوط به $k = 0$ را فراموش نکنید.



۱۵- مسألهٔ ۱۴ را در صورتی که دماهای دو دایره تعویض شوند، حل کنید.

۶- ارتعاش غشاء دایره‌ای.

یک غشاء دایره‌ای (مثلاً، پوست طبل) در طول محیطش بـه یک پـایهٔ سـخت مـتصل است. بسامدهای ارتعاشی مشخصه و مدهای بهنجار طبیعی آنرا پیدا کنید.

صفحهٔ (x, y) را صفحهٔ پایهٔ دایره‌ای، و مبدأ را در مرکز آن انتخاب کنید. فرض کنید $z(x,y,t)$ جا به جایی غشاء از صفحهٔ (x, y) باشد. به این ترتیب، z در معادلهٔ موجِ

$$\nabla^2 z = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{۱-۶}$$

صدق می‌کند. با انتخاب

$$z = F(x, y)\, T(t) \tag{۲-۶}$$

(۶-۱) را به یک معادلهٔ فضایی (هلمهولتز) و یک معادلهٔ زمانی (مسألهٔ ۳-۱۰ و بـخش ۳ را ملاحظه کنید) تفکیک می‌کنیم. دو معادلهٔ مزبور عبارت اند از:

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad \text{و} \quad \ddot{T} + k^2 v^2 T = 0 \tag{۳-۶}$$

چون غشاء دایره‌ای است، لذا ∇^2 را در مختصات قطبی می‌نویسیم (بخش ۹ از فـصل ۱۰ را ملاحظه کنید)؛ در آن صورت معادلهٔ F عبارت است از

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + k^2 F = 0 \tag{۴-۶}$$

هنگامی که قرار دهیم

$$F = R(r)\Theta(\theta) \tag{۵-۶}$$

(۶-۴) به صورت (۵-۵) درمی‌آید و معادلاتِ جدا شده و جوابهای آنها صرفاً (۵-۶)، (۵-۷)،

و (۵-۸) هستند. معادلهٔ زمانی در (۶-۳) مانند (۴-۳) است و جوابهای T همانند (۴-۴) هستند. بدین ترتیب جوابهای پایه‌ای برای z عبارت اند از

$$z = J_n(kr) = \begin{cases} \sin n\theta \sin kvt \\ \sin n\theta \cos kvt \\ \cos n\theta \sin kvt \\ \cos n\theta \cos kvt \end{cases} \qquad (۶-۶)$$

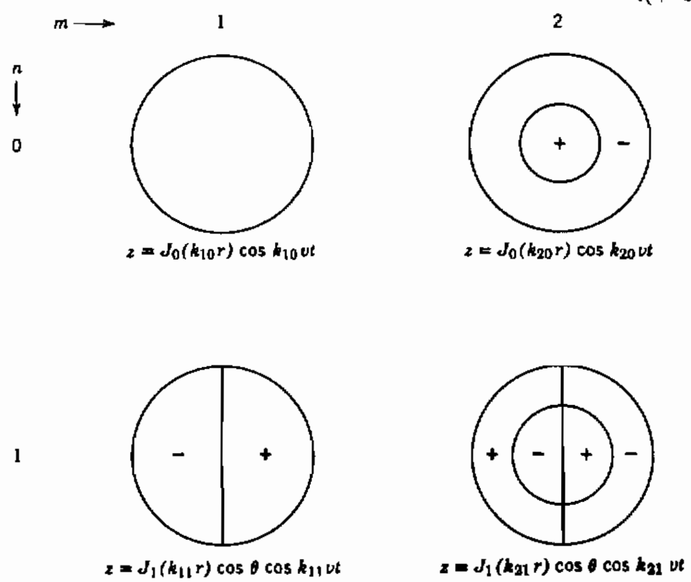
درست مانند بخش ۵ ، n باید یک عدد صحیح باشد. برای پیدا کردن مقادیر ممکن k، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که غشاء در $r = ۱$ به یک چارچوب سخت متصل است، بنابراین باید، به ازای کلیهٔ مقادیر θ و t، در $r = ۱$ داشته باشیم $z = ۰$. بنابراین $J_n(k) = ۰$، و می‌بینیم که مقادیر ممکن k (ویژه مقادیر) برای هر J_n، k_{mn}، یعنی صفرهای J_n هستند. به ازای یک جا به جایی با سرعت اولیهٔ مفروض غشاء، می‌توانیم z را به صورت یک رشتهٔ دوگانه، همانگونه که (۵-۱۷) را در مسألهٔ دمای استوانه پیدا کردیم، بیابیم. با این همه، در اینجا کار دیگری می‌کنیم، یعنی مدهای طبیعی ارتعاشیِ متمایز و بسامدهای آنها را جستجو می‌کنیم.

به خاطر بیاورید که برای سیم در حال ارتعاش (بخش ۴)، هر n به یک بسامد متفاوت و یک مد طبیعی ارتعاش منجر می‌شود (شکل ۴-۲). بسامدها، $\nu_n = nv/(۲l)$ هستند؛ تمام بسامدها، مضارب صحیحی از بسامد اصلی $\nu_۱ = v/(۲l)$ هستند. برای غشاء دایره‌ای، بسامدها عبارت اند از [از (۶-۶) یا (۴-۴)]

$$\nu = \frac{\omega}{۲\pi} = \frac{kv}{۲\pi}$$

مقادیر ممکن k، صفرهای k_{mn} توابع بسل هستند. هر مقدار k_{mn}، منجر به یک بسامد $\nu_{mn} = k_{mn}v/(۲\pi)$ می‌شود، بنابراین ما یک مجموعهٔ نامتناهی دوگانه از بسامدهای مشخصه و مدهای طبیعی ارتعاشی مربوطه داریم. تمام این بسامدها متفاوت هستند و برخلاف مورد سیم، مضارب صحیحی از بسامد اصلی نمی‌باشند. به این دلیل است که طبل، به خوش‌آهنگی ویولون نیست. با استفاده از جدول، می‌توان چند مقدار k_{mn} را انتخاب

(مسألهٔ ۲)، و بسامدها را به صورت مضارب (غیرصحیح) از بسامد اصلی (که همخوان با k_{10}، اولین صفرِ J_0، است) پیداکرد. اجازه دهید چند نمودار (شکل ۶-۱) از مدهای ارتعاش طبیعی همخوان با مدهای شکل ۴-۲ را، که مربوط به سیم است، رسم کنیم، و فرمولهای همخوان (ویژه توابع) را برای جا به جایی z داده شده در (۶-۶) بنویسیم. (برای سهولت، فقط جوابهای $\cos n\theta \cos kvt$ را در شکل ۶-۱ به کار بردهایم.) در مد اصلی ارتعاش که همخوان با k_{10} است، غشاء به صورت یک کُل، ارتعاش میکند. در مد k_{20} ، غشاء، مطابق شکل، ارتعاش میکند، قسمت + در حال ارتعاش به طرف بالاست در صورتی که قسمت − به طرف پایین ارتعاش میکند، و بالعکس، و دایرهٔ بین آنها در حال سکون است. میتوان نشان داد که چنین دایرهای (موسوم به خط گِرهی) وجود دارد و شعاع آن را نیز پیداکرد. چون $k_{20} > k_{10}$، دایرهٔ $r = k_{10} / k_{20}$ ، دایرهای به شعاع کمتر از ۱ است؛ پس بر روی غشاء واقع است. برای این مقدار r ، $J_0(k_{20}r) = J_0(k_{20}k_{10} / k_{20}) = J_0(k_{10}r) = 0$، بنابراین نقاط واقع بر این دایره جابجا نمیشوند. برای مد k_{11}، به ازای $\theta = \pm\pi/2$، $\cos\theta = 0$ و همانطور که نشان داده شده مثبت یا منفی است. با ادامهٔ این روش، شما میتوانید هر مد طبیعی را رسم کنید (مسألهٔ ۱).



شکل ۶-۱

از نظر تجربی مشکل است مدهای طبیعی خالص یک جسم مرتعش را به دست آورد. با وجود این یک ارتعاش پیچیده دارای نوعی خطوط گرهی خواهد بود که مشاهدهٔ آنها ساده است. ماسه‌های نرمی که روی یک جسم مرتعش پاشیده شده باشند، در امتداد خطوط گرهی (که در آن هیچ ارتعاشی وجود ندارد) جمع خواهند شد، بنابراین می‌توانید آنها را به وضوح ببینید. [برای ملاحظهٔ یک کار تجربی روی غشاء دایره‌ای ارتعاش‌کننده، رک: American Journal of Physics, Vol. 35 (1967), p. 1029, و Vol. 40 (1972), p. 186]

مسائل، بخش ۶

۱- شکل ۶-۱ را برای نشان دادن مدهای اصل ارتعاش یک غشاء دایره‌ای به ازای ۰،۱،۲ $n=$ و $m=$ ۱،۲،۳ ادامه دهید. مانند شکل ۶-۱، فرمول جا به جایی z را زیر هر نمودار بنویسید.

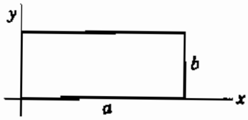
۲- سه صفر اول k_{mn} هر یک از توابع $J_۰$، $J_۱$، $J_۲$ و $J_۳$ را از جداول به دست آورید. شش بسامد اول یک غشاء مرتعش دایره‌ای را به صورت مضاربی از بسامد اصلی پیدا کنید.

۳- معادلهٔ موج را در مختصات دکارتی دوبعدی x و y تفکیک کنید. یک غشاء مستطیلی شکل را که مطابق شکل در امتداد اضلاعش به یک چارچوب محکم شده است، در نظر بگیرید. نشان دهید که بسامدهای مشخصهٔ آن عبارت اند از

$$\nu_{nm} = (v/۲)\sqrt{(n/a)^۲ + (m/b)^۲}$$

که در آن n و m اعداد صحیح مثبتی هستند، و مدهای طبیعی ارتعاش همخوان با چند بسامد اول را رسم کنید. یعنی، خطوط گرهی را مثل آنچه که برای غشاء دایره‌ای در شکل ۶-۱ و مسألهٔ ۱ انجام دادیم، مشخص کنید.

سپس فرض کنید غشاء به شکل مربع است. در این مورد نشان دهید که ممکن است دو یا تعداد بیشتری مد طبیعی ارتعاشِ همخوان با یک بسامد وجود داشته باشد. (***راهنمایی برای یک مثال:*** $۵^۲ + ۵^۲ = ۷^۲ + ۱^۲ = ۱^۲ + ۷^۲$). این مثالی است از آنچه که ***واگنی*** خوانده می‌شود؛ وقتی چند جوابِ متفاوت معادلهٔ موج، با یک فرکانس همخوان باشند، می‌گوییم واگنی وجود دارد. چند مد طبیعی را که به یک بسامد منجر می‌شوند، رسم کنید.



۴- بسامدهای مشخصهٔ ارتعاش صوتی را در یک جعبهٔ متوازی‌السطوح (مثلاً یک اطاق) به ابعاد a ، b ، c پیدا کنید. *راهنمایی:* معادلهٔ سه‌بعدی موج را در مختصات دکارتی تفکیک کنید. این مسأله نظیر مسألهٔ ۳ است اما به جای دو بعد در سه بعد. واگنی را بررسی کنید (مسألهٔ ۳ را ملاحظه کنید).

۵- یک غشاء مربعی به ضلع l، به صورت

$$f(x,y) = xy\ (l-x)(l-y)$$

واپیچیده، و رها می‌شود. شکل آن را نسبت به زمان، به صورت یک رشتهٔ نامتناهی بیان کنید. *راهنمایی:* از رشتهٔ فوریهٔ دوگانه نظیر مسألهٔ ۵-۹ استفاده کنید.

۷- دمای حالت پایا در یک کُره.

دمای حالت پایا را درون کره‌ای به شعاع ۱ ، در صورتی که سطح نیمهٔ بالاًی آن در °۱۰۰ و سطح نیمهٔ پایین آن در صفر درجه نگه داشته شود، پیدا کنید.

داخل کره، دمای u در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. در مختصات کروی داریم (بخش ۹ از فصل ۱۰ را ملاحظه کنید).

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \quad (۱-۷)$$

این معادله را به روش استاندارد جدا سازی می‌کنیم. ابتدا

$$u = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi) \quad (۲-۷)$$

را در (۷-۱) قرار می‌دهیم و آنرا در $r^2/(R\Theta\Phi)$ ضرب می‌کنیم تا نتیجه شود

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0 \quad (۳-۷)$$

اگر (۷-۳) را در $\sin^2\theta$ ضرب کنیم، جملهٔ آخر تنها تابعی از ϕ می‌شود و دو جملهٔ دیگر شامل ϕ نخواهند بود. بنابراین، معادلهٔ ϕ و جوابهای آن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2 \qquad ، \Phi = \begin{cases}\sin m\phi \\ \cos m\phi\end{cases} \quad (۴-۷)$$

ثابت جدا سازی باید منفی و m یک عدد صحیح باشد تا Φ تابعی متناوب از ϕ گردد. [بحث بعد از (۵-۶) را ملاحظه کنید].

اکنون معادلهٔ (۷-۳) را می‌توان به صورت زیر نوشته شود

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=0 \quad (۵-۷)$$

جملهٔ اول تابعی از r و دو جملهٔ آخر توابعی از θ هستند، بنابراین دو معادله داریم

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=k \quad (۶-۷)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta+k\Theta=0 \quad (۷-۷)$$

اگر (۷-۷) را با معادلهٔ مسألهٔ ۱۰-۲ در فصل ۱۲ مقایسه کنید، خواهید دید که (۷-۷) معادلهٔ مربوط به توابع وابستهٔ لژاندر است در صورتی که $k=l(l+1)$ باشد. به خاطر بیاورید که شرط اینکه جواب معادلهٔ لژاندر در $x=\cos\theta=\pm 1$ ، یعنی در $\theta=0$ یا $\theta=\pi$، متناهی باشد این است که l یک عدد صحیح باشد؛ همین بیان برای معادلهٔ توابع وابستهٔ لژاندر هم درست است. نتیجهٔ همخوان برای (۷-۷) این است که k باید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی باشد؛ پس بهتر است که k را با $l(l+1)$ جایگزین کنیم، که l یک عدد صحیح است. بدین ترتیب جوابهای معادلهٔ (۷-۷)، توابع وابستهٔ لژاندر هستند (مسألهٔ ۱۰-۲ از فصل ۱۲ را ملاحظه کنید)

$$\Theta=P_l^m(\cos\theta) \quad (۸-۷)$$

در (۷-۶)، قرار می‌دهیم $k=l(l+1)$؛ به این ترتیب می‌توانید به سهولت ملاحظه کنید (مسألهٔ ۵-۱۱) که جوابهای معادلهٔ (۷-۶) عبارت اند از

$$R=\begin{cases} r^l \\ r^{-l-1}\end{cases} \quad (۹-۷)$$

چون می‌خواهیم درون کره را بررسی کنیم، جوابهای r^{-l-1} را به علت اینکه در مبدأ نامتناهی می‌شوند، کنار می‌گذاریم. اگر قرار بود مسأله‌ای خارج از کره را بررسی کنیم (مثلاً دربارهٔ جریان

آب یا پتانسیل الکتروستاتیکی)، این جوابها را به کار می‌بردیم و جوابهای r^l راکنار می‌گذاشتیم زیرا این توابع در بینهایت نامتناهی می‌شوند.

پس جوابهای پایه‌ای برای مسألهٔ ما به این صورت هستند:

$$\boxed{u = r^l P_l^m(\cos\theta) \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases} \qquad (۱۰-۷)}$$

[توابع $P_l^m(\cos\theta)\ \sin m\phi$ و $P_l^m(\cos\theta)\ \cos m\phi$ ***هماهنگهای کروی*** نامیده می‌شوند؛ همچنین مسائل ۱۶ و ۱۷ را ملاحظه کنید.] اگر دمای سطح در $r = ۱$ به صورت تابعی از θ و ϕ داده شده بود، مثل بخش ۵، یک رشتهٔ دوگانه (جمعیابی شده روی l و m) می‌داشتیم. برای دماهای سطحی داده شده در این مسأله (۱۰۰° روی نیمکرهٔ بالایی و ۰° روی نیمکرهٔ پایینی)، دما مستقل از ϕ است؛ بنابراین در (۷-۱۰) باید داشته باشیم $m = ۰$، $\cos m\phi = ۱$. پس جوابهای (۷-۱۰) به $r^l P_l(\cos\theta)$ کاهش می‌یابند. جواب مسأله را به صورت رشته‌ای از این جوابها می‌نویسیم:

$$u = \sum_{l=۰}^{\infty} c_l\, r^l\, P_l(\cos\theta) \qquad (۱۱-۷)$$

ضرایب c_l را با استفاده از دماهای داده شده در $r = ۱$ تعیین می‌کنیم؛ یعنی، باید داشته باشیم

$$u_{r=۱} = \sum_{l=۰}^{\infty} c_l P_l(\cos\theta) = \begin{cases} ۱۰۰ & ۰<\theta<\frac{\pi}{۲} \text{ یعنی } ۰<\cos\theta<۱ \\ ۰ & \frac{\pi}{۲}<\theta<\pi \text{ یعنی } -۱<\cos\theta<۰ \end{cases} \qquad (۱۲-۷)$$

یا

$$u_{r=۱} = \sum_{l=۰}^{\infty} c_l\, P_l(x) = ۱۰۰\, f(x) \qquad (۱۳-۷)$$

که

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & -۱ < x < ۰ \\ ۱ & ۰ < x < ۱ \end{cases}$$

(توجه کنید که در اینجا x فقط به جای $\cos\theta$ می‌نشیند و مختصهٔ x نیست.) در بخش ۹ از فصل ۱۲، این $f(x)$ را به یک رشته از چندجمله‌ایهای لژاندر بسط دادیم و به دست آوردیم:

$$f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) + \cdots \qquad (۱۴-۷)$$

ضرایب c_l در (۷-۱۳) درست برابر با این ضرایب ضربدر ۱۰۰ هستند. با جایگذاری c ها در (۷-۱۱)، جواب نهایی به دست می‌آید:

$$u = 100\left[\frac{1}{2}P_0(\cos\theta) + \frac{3}{4}rP_1(\cos\theta) - \frac{7}{16}r^3P_3(\cos\theta) + \frac{11}{32}r^5P_5(\cos\theta) + \cdots\right] \qquad (۱۵-۷)$$

می‌توانیم تغییراتی در این مسأله بدهیم. توجه کنید که تاکنون حتی از اینکه از چه مقیاس دمایی استفاده می‌کنیم سخنی به میان نیاورده‌ایم (سلسیوس، فارنهایت، مطلق، و غیره). همین که جوابی را در هر مقیاس داشته باشیم، تطبیق آن با مقیاسهای دیگر به سادگی انجام می‌شود. برای ملاحظهٔ این امر، توجه کنید که اگر u جوابی از معادلهٔ لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ یا معادلهٔ شارش گرما $\nabla^2 u = (1/\alpha^2)(\partial u/\partial t)$ باشد، آنگاه $u + c$ و cu نیز به ازای هر ثابت دلخواه c جوابهای معادله‌اند. مثلاً، اگر به جواب (۷-۱۵)، 50° بیفزائیم، با توزیع دما در درون کره‌ای روبرو هستیم که سطح نیمهٔ بالایی آن در 150° و نیمهٔ پایینی آن در 50° است. اگر جواب (۷-۱۵) را در ۲ ضرب کنیم، توزیع دما به ازای دماهای سطحی 200° و 0° پیدا می‌شود، و الی آخر.

دمای صفحه استوایی $\theta = \pi/2$ یا $\cos\theta = 0$ که توسط معادلات (۷-۱۱) تا (۷-۱۵) به دست می‌آید، میانگین بین دماهای سطحی بالا و پایین است، زیرا رشته‌های لژاندر، نظیر رشته‌های فوریه، به نقطهٔ میانی جهش در تابعی که برای به دست آوردن رشته بسط داده می‌شود، می‌گراید. برای حل مسأله دما در یک نیمکره که دماهای سطح کروی و صفحهٔ استوایی آن معلوم‌اند، فقط باید این طور تصور کنیم که نیمکره پایینی در جای خود و در دمای مناسبی است تا میانگین مطلوب را روی صفحهٔ استوایی بدهد. وقتی دمای صفحهٔ استوایی 0° است، تابع $f(x)$ در (۷-۱۳) را باید در بازهٔ (۰ ,۱-) تعریف کرد به صورت یک تابع فرد درآید.

مسائل، بخش ۷

توزیع دمای حالت پایای درون کره‌ای به شعاع ۱ را وقتی دماهای سطحی مطابق مسائل ۱ تا ۱۰ هستند، پیدا کنید.

۱- $۳۵(\cos\theta)^۴$

۲- $\cos\theta - (\cos\theta)^۳$

۳- $\cos\theta - ۳\sin^۲\theta$

۴- $۵\cos^۳\theta - ۳\sin^۲\theta$

۵- $|\cos\theta|$

۶- $\pi/۲ - \theta$ **راهنمایی:** مسألهٔ ۹-۴ از فصل ۱۲ را ببینید

۷- $\begin{cases} \cos\theta & ۰<\theta<\pi/۲ \quad \text{یعنی، نیمکرهٔ بالایی} \\ ۰ & \pi/۲<\theta<\pi \quad \text{یعنی، نیمکرهٔ پایینی} \end{cases}$

۸- $\begin{cases} ۱۰۰^\circ & ۰<\theta<\pi/۳ \\ ۰^\circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ **راهنمایی:** مسألهٔ ۹-۸ از فصل ۱۲ را ملاحظه کنید.

۹- $۳\sin\theta\cos\theta\sin\phi$ **راهنمایی:** معادلهٔ (۷-۱۰) و معادلهٔ (۶-۱۰) از فصل ۱۲ را ملاحظه کنید

۱۰- $\sin^۲\theta\cos\theta\cos ۲\phi - \cos\theta$ (مسألهٔ ۹ را ملاحظه کنید)

۱۱- توزیع دمای حالت پایای درون یک نیمکره را در صورتی که سطح کروی آن در ۱۰۰° و صفحه استوایی آن در ۰° باشد، پیدا کنید. **راهنمایی:** آخرین پاراگراف از این بخش را در بالا ملاحظه کنید.

۱۲- مسألهٔ ۱۱ را برای حالتی که سطح کروی در $\cos^۲\theta$ و صفحهٔ استوایی در صفر باشد، حل کنید. **توجه:** جواب شامل $P_۲$ نیست؛ آخرین جملهٔ این بخش را بخوانید.

۱۳- پتانسیل الکتروستاتیکی خارج یک کرهٔ رسانا به شعاع a را که در یک میدان الکتریکی ابتداءً یکنواخت قرار گرفته، و در پتانسیل صفر نگه داشته می‌شود پیدا کنید. **راهنمایی:** $\mathbf{E}$ را در جهت منفی z بگیرید به طوری که $\mathbf{E} = -E_۰\mathbf{k}$. آنگاه چون $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ، که Φ

پتانسیل است، برای پتانسیل اولیه داریم $\Phi = E_\circ z = E_\circ r \cos\theta$ (این را تحقیق کنید!). به این ترتیب، جوابی از معادلهٔ لاپلاس $\nabla^۲ u = ۰$ مطلوب ماست که در $r = a$ صفر است و در r بزرگ (یعنی، بسیار دور از کره) $u \sim \Phi$ می‌شود. جوابهایی از معادلهٔ لاپلاس را در مختصات کروی انتخاب کنید که وابستگی درستی به θ و ϕ دارند (فقط دو نمونه از چنین جوابهایی وجود دارد) و ترکیبی را پیدا کنید که به ازای $r = a$ به صفر کاهش می‌یابد.

۱۴- توزیع دمای حالت پایا را در پوسته‌ای به شعاع داخلی ۱ و شعاع بیرونی ۲ پیدا کنید در صورتی که سطح داخلی در ۰°، و نیمهٔ بالایی سطح بیرونی در ۱۰۰°، و نیمه پایینی آن در ۰° باشد. ***راهنمایی:*** $r = ۰$، در ناحیهٔ مورد نظر نیست، بنابراین باید جوابهای $r^{-l-۱}$ در (۷-۹) نیز منظور شوند. $c_l r^l$ در (۷-۱۱) را با $(a_l r^l + b_l r^{-l-۱})$ جایگزین کنید.

۱۵- یک کره، ابتدا در ۰° است؛ از $t = ۰$ به بعد، سطح آنرا به ۱۰۰° می‌بریم (مثلاً، یک سیب زمینی یخ زده را داخل آب جوش می‌اندازیم!). توزیع دمای وابسته به زمان را پیدا کنید. ***راهنمایی:*** از تمام دماها، ۱۰۰° درجه کم کنید و مسأله را حل نمایید؛ سپس به جواب مسأله ۱۰۰° بیفزایید. آیا می‌توانید این روش را توجیه کنید؟ نشان دهید که تابع لژاندر مورد نیاز برای این مسأله، $P_\circ$ است و جواب r به صورت $(۱/\sqrt{r})J_{۱/۲}$ یا $j_\circ$ است [(۱۷-۴) در فصل ۱۲ را ملاحظه کنید]. چون توابع کروی بسل را می‌توان برحسب توابع ابتدایی بسط داد، لذا رشته را در این مسأله می‌توان به صورت رشتهٔ بسل و یا رشتهٔ فوریه در نظر گرفت. نشان دهید که نتایج یکی هستند.

۱۶- معادلهٔ موج را در مختصات کروی تفکیک کنید و نشان دهید که جوابهای θ و ϕ هماهنگهای کروی $P_l^m(\cos\theta)\, e^{\pm im\phi}$ هستند و جوابهای r توابع کروی بسل $j_l(kr)$ و $y_l(kr)$ می‌باشند [معادلات (۱۷-۴) از فصل ۱۲ را ملاحظه کنید].

۱۷- معادلهٔ شرودینگر (مستقل از زمان) در مکانیک کوانتومی بدین صورت است

$$\nabla^۲\psi + (\varepsilon - bV)\psi = ۰$$

که ε و b مقادیر ثابتی هستند و V در هر مسأله تابعی معلوم از r، θ و ϕ است. در بسیاری از موارد ساده، V تنها تابعی از r (بدون وابستگی به θ و ϕ) است. (از نظر فیزیکی، V انرژی پتانسیل است و اینکه تنها به r بستگی دارد حاکی از این است که با نیرویی مرکزی سروکار داریم، و مثلاً، نیروهای الکتروستاتیکی یا گرانشی.) معادلهٔ شرودینگر را در

مختصات کروی برای مورد $V = V(r)$ تفکیک کنید و نشان دهید که جوابهای θ و ϕ هماهنگهای کروی می‌باشند (مسألهٔ ۱۶ را ملاحظه کنید).

۸- معادلهٔ پواسون

می‌خواهیم معادلهٔ پواسون را برای مسألهٔ ساده‌ای که جواب آن را از پیش می‌دانیم، به دست آوریم با استفاده از جواب معلوم، به یک روش برای حل مسائل پیچیده‌تر پی خواهیم برد.

در بخش ۸، از فصل ۶ یادآور می‌شویم که میدان گرانشی پایستار است، یعنی، $\nabla\times\mathbf{F} = 0$ و تابع پتانسیلی مانند V وجود دارد به طوری که $\mathbf{F} = -\nabla V$. اگر میدان گرانشی را در نقطهٔ P ناشی از جرم نقطه‌ای m در فاصلهٔ r در نظر بگیریم، داریم

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm}{r^2}\mathbf{u} \quad \text{و} \quad V = -\frac{Gm}{r} \tag{۸-۱}$$

که $\mathbf{u}$ یک بردار واحد در امتداد r به طرف P است. به آسانی می‌توان نشان داد که $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$ و V در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند (مسألهٔ ۱)، یعنی،

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = -\nabla\cdot\nabla V = -\nabla^2 V = 0 \tag{۸-۲}$$

حال فرض کنید جرمهای m_i زیادی در فواصل r_i از P وجود دارند. پتانسیل کل در P، حاصل‌جمع پتانسیلهای ناشی از جرمهای جداگانهٔ m_i است، یعنی،

$$V = \sum_i V_i = -\sum_i \frac{Gm_i}{r_i}$$

و میدان گرانشی کل در P، حاصل‌جمع برداری میدانهای $\mathbf{F}_i$ است، یعنی،

$$\mathbf{F} = -\sum_i \nabla V_i = -\nabla V$$

توجه کنید که ما فرض کرده‌ایم هیچ یک از جرمهای m_i در P نیستند، یعنی، هیچ r_i صفر نیست. چون

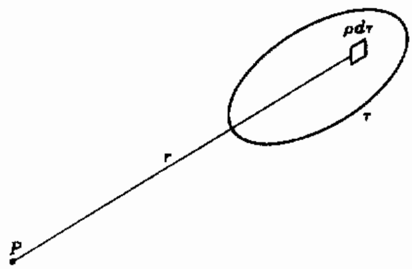
$$\nabla\cdot\mathbf{F}_i = -\nabla^2 V_i = 0$$

همچنین داریم

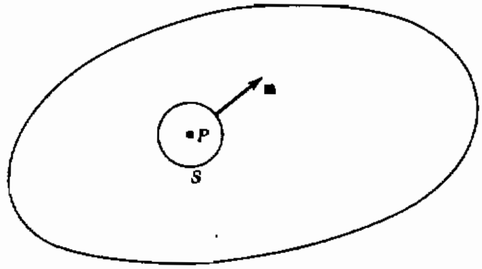
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\nabla^2 V = 0$$

به جای تعدادی جرم m_i، می‌توانیم توزیع جرم پیوسته‌ای در داخل یک حجم τ در نظر بگیریم (شکل ۸-۱). اگر ρ، چگالی توزیع جرمی باشد، آنگاه جرم موجود در عنصر حجم $d\tau$ عبارت است از $\rho\, d\tau$. پتانسیل گرانشی در P در اثر جرم $\rho\, d\tau$ برابر است با $-(G\rho/r)\, d\tau$. به این ترتیب، پتانسیل گرانشی کل در P در اثر تمام توزیع جرم، یک انتگرال سه‌گانه روی حجم τ است:

$$V = -\iiint_{\text{حجم } \tau} \frac{G\rho\, d\tau}{r} \qquad (۸-۳)$$



شکل ۸-۱



شکل ۸-۲

مانند قبل، سهم هر جزء از جرم در V ، در نقطهٔ P ، در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند و بنابراین V در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. همچنین کل میدان $\mathbf{F}$ در P برابر است با حاصل‌جمع برداری میدانهای ناشی از عناصر جرم، و مانند قبل داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\nabla^2 V = 0$$

مجدداً توجه کنید که به طور ضمنی فرض می‌کنیم که هیچ قسمت از توزیع جرم بر P منطبق نیست، یعنی، $r \neq 0$، که بدین معناست که نقطهٔ P، نقطه‌ای از ناحیهٔ τ نیست.

حال بگذارید ببینیم، اگر P نقطه‌ای از τ ***باشد*** ، چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا می‌توانیم V را از (۸-۳) پیدا کنیم و آیا V در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند؟ فرض کنید S کره‌ای کوچک به شعاع a حول P باشد و تمام جرم را از S بیرون کشیده باشیم (شکل ۸-۲). به این ترتیب، بحث قبلی ما برای نقاط داخل S معتبر است، زیرا این نقاط در توزیع جرم مشارکت ندارند. اگر $\mathbf{F}'$ و V' میدان و پتانسیل جدید باشند (با حذف جرم داخل S)، در نقاط S، $\nabla \cdot \mathbf{F} = -\nabla^2 V' = 0$. اکنون جرم را به S برمی‌گردانیم؛ اگر $\mathbf{F}$ و V میدان و پتانسیل مربوط به تمام توزیع جرم، و $\mathbf{F}_s$ و V_s میدان و پتانسیل فقط داخل کرهٔ S باشند، داریم

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' + \mathbf{F}_s$$

و در نقاط داخل S

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}' + \nabla \cdot \mathbf{F}_s = \nabla \cdot \mathbf{F}_s \qquad (۸-۴)$$

زیرا در S، $\nabla \cdot \mathbf{F}' = 0$.

با استفاده از قضیهٔ واگرای (شکل ۸-۲ و بخش ۱۰ از فصل ۶ را ملاحظه کنید)

$$\iiint\limits_{S \text{ حجم}} \nabla \cdot \mathbf{F}_s \, d\tau = \iint\limits_{S \text{ سطح}} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \qquad (۸-۵)$$

اگر شعاع a کرهٔ S به سمت صفر میل کند، چگالی ρ مادهٔ داخل S به مقدار آن در P میل می‌کند؛ بنابراین به ازای مقادیر کوچک a، S شامل جرم کلِ M است که تقریباً برابر $\frac{4}{3}\pi a^3 \rho$ می‌باشد، که ρ در P حساب می‌شود. مقدار میدان گرانشی در سطح S در اثر این جرم عبارت است از

$$F_s = \frac{GM}{a^{۲}} = G\,\frac{۴}{۳}\,\pi a \rho$$

که **رو به سوی** P است. بنابراین در (۸-۵)، $\mathbf{F}_s \cdot \mathbf{n} = -\frac{۴}{۳}\pi\, Ga\rho$ زیرا $\mathbf{F}_s$ و $\mathbf{n}$ پاد موازی یکدیگر اند. چون $\mathbf{F}_s$ روی سطح S ثابت است، لذا طرف راست (۸-۵) مساوی حاصل‌ضرب $\mathbf{F}_s \cdot \mathbf{n}$ در مساحت کره است. برای a کوچک، طرف چپ تقریباً برابر با مقدار $\nabla \cdot \mathbf{F}_s$ در P، ضربدر حجم S است. لذا داریم

$$(\nabla \cdot \mathbf{F}_s)\left(\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}\right) = \left(-\frac{۴}{۳}\, G\pi a\rho\right)(۴\pi a^{۲})$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_s = -۴\pi G\rho \qquad \text{در } P \qquad (۸\text{-}۶)$$

چون

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_s = \nabla \cdot \mathbf{F} = -\nabla \cdot \nabla V = -\nabla^{۲} V$$

داریم

$$\nabla^{۲} V = ۴\pi G\rho \qquad (۸\text{-}۷)$$

این معادلهٔ پواسون است؛ می‌بینیم، همانطور که در (۱-۲) ادعا کردیم، پتانسیل گرانشی در ناحیهٔ شامل ماده در معادلهٔ پواسون صدق می‌کند. توجه کنید اگر $\rho = ۰$، (۸-۷)، همانگونه که باید، تبدیل به (۸-۲) می‌شود.

حال باید بررسی کنیم آیا وقتی P نقطه‌ای از توزیع جرم است باز هم رابطهٔ (۸-۳) برای V برقرار می‌باشد؟ به نظر می‌رسد که انتگرال در $r = ۰$ واگرا شود، اما واقعاً اینطور نیست. این مطلب را می‌توان به سهولت با استفاده از مختصات کروی مشاهده کرد. از (۸-۳) داریم:

$$V = -\iiint_{\text{حجم } \tau} \frac{G\rho}{r}\, r^{۲} \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

و می‌بینیم که وقتی $r = ۰$ است، هیچ مشکلی پیش نمی‌آید. بنابراین، (۸-۳) به طور کلی برقرار است و جواب معادلهٔ (۸-۷) را به دست می‌دهد.

با استفاده از نمادگذاری (۱-۲) برای معادلهٔ پواسون [یعنی، جایگزین کردن $۴\pi G\rho$ با f و V با u در (۸-۷) و (۸-۳)] می‌توانیم بنویسیم

$$u = -\frac{۱}{۴\pi}\iiint \frac{f\,d\tau}{r} \qquad (۸\text{-}۸)$$

جوابی از معادلهٔ $\nabla^{۲} u = f$ است.

در نمادگذاری مفصل‌تر، که وقتی این جواب را در یک مسأله به کار می‌بریم بدان نیاز داریم، (۸-۸) تبدیل می‌شود به (شکل ۸-۳ را ملاحظه کنید):

$$u(x,y,z)=-\frac{۱}{۴\pi}\iiint \frac{f(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^۲+(y-y')^۲+(z-z')^۲}}\,dx'\,dy'\,dz' \quad (۹-۸)$$

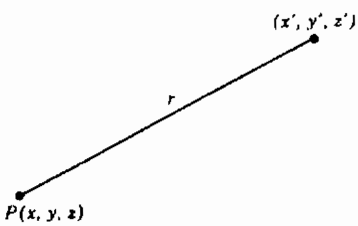
که جواب معادلهٔ زیر است:

$$\nabla^۲ u(x,y,z) = f(x,y,z)$$

در (۸-۹) و شکل ۸-۳، نقطهٔ (x, y, z) نقطه‌ای است که در آن، پتانسیل u را حساب می‌کنیم؛ نقطهٔ $u(x', y', z')$ نقطه‌ای در توزیع جرم است که روی آن انتگرال می‌گیریم؛ r در (۸-۸) فاصلهٔ بین این دو نقطه است و در (۸-۹) به تفصیل نوشته شده است.

در واقع معادلات (۸-۸) یا (۸-۹) یک جواب خیلی خاص از معادلهٔ پواسون را می‌دهند. یادآور می‌شویم که رسم بر این است که نقطهٔ صفر برای انرژی پتانسیل گرانشی (یا الکتروستاتیکی) را در بینهایت می‌گیرند، و این کاری است که ما هم انجام داده‌ایم. بنابراین (۸-۸) یا (۸-۹) یک جواب معادلهٔ پواسون را می‌دهد که در بینهایت به سمت صفر میل می‌کند. در یک مسألهٔ دیگر ممکن است این مطلوب ما نباشد. مثلاً، فرض کنید یک توزیع بار الکتریکی در نزدیک یک صفحهٔ متصل به زمین داریم. پتانسیل الکتروستاتیکی در معادلهٔ پواسون صدق می‌کند، اما در اینجا ما جوابی را می‌خواهیم که روی صفحهٔ متصل به زمین صفر باشد نه در بینهایت. برای پیدا کردن این جواب، ملاحظه کنید که اگر u یک جواب معادلهٔ پواسون، و w جواب دلبخواهی از معادلهٔ لاپلاس ($\nabla^۲ w = ۰$) باشد، آنگاه

$$\nabla^۲(u+w) = \nabla^۲ u + \nabla^۲ w = \nabla^۲ u = f \qquad (۱۰-۸)$$



شکل ۸-۳

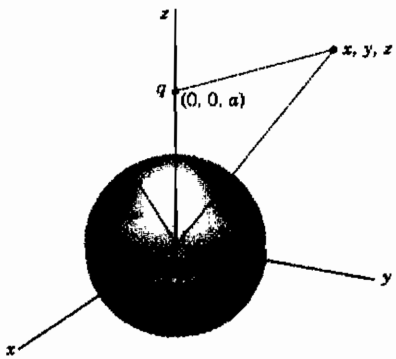
بنابراین $u + w$ یک جواب معادلهٔ پواسون است. پس می‌توانیم به جواب (۸-۹) هر جوابی از معادلهٔ لاپلاس را بیفزاییم؛ ترکیب انتخابی باید برای انطباق با شرایط مرزی مفروض تنظیم شود، درست همانگونه که در مسائل پاراگرافهای قبل انجام داده‌ایم.

مثال ۱ - مسألهٔ سادهٔ زیر را برای نمایش این فرایند حل می‌کنیم. در شکل ۸-۴، بار نقطه‌ای q در $(\circ, \circ, a)$، خارج از کرهٔ متصل به زمینی به شعاع R و مرکز واقع در مبدأ، قرار دارد. مسألهٔ ما پیدا کردن پتانسیل الکتروستاتیکی V در نقاط خارجِ کره است. پتانسیل V و چگالی بار ρ توسط معادلهٔ پواسون با هم مرتبط اند:

$$\nabla^{۲} V = -۴\pi\rho \quad \text{(در دستگاه گاؤسی)} \qquad (۸\text{-}۱۱)$$

پتانسیل ناشی از توزیع بار مفروض ρ در نقطهٔ (x, y, z)، توسط (۸-۸) یا (۸-۹) با $f = -۴\pi\rho$ داده می‌شود.

$$V(x,y,z) = -\frac{۱}{۴\pi}\iiint \frac{-۴\pi\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^{۲}+(y-y')^{۲}+(z-z')^{۲}}}\,dx'\,dy'\,dz' \qquad (۸\text{-}۱۲)$$



شکل ۸-۴

برای یک توزیع بار فضایی معلوم، باید این انتگرال را حساب کنیم. برای بار نقطه‌ای منفرد q، داریم $(x', y', z') = (\circ, \circ, a)$ و $\iiint \rho\, dx'dy'dz'$ (که صرفاً کلِّ بار است) را با q جایگزین می‌کنیم تا نتیجه شود

$$V = \frac{q}{\sqrt{x^{۲} + y^{۲} + (z - a)^{۲}}} \qquad (۱۳-۸)$$

[البته به سادگی می‌توانستیم (۸-۱۳) را بدون استفاده از (۸-۸) بنویسیم؛ (۸-۱۳) درست فرمول الکتروستاتیکی همخوان با فرمول گرانشی (۸-۱) است که با آن شروع کردیم.]

اکنون می‌خواهیم به (۸-۱۳) یک جواب معادلهٔ لاپلاس را به گونه‌ای بیفزاییم کـه تـرکیب حاصل روی کرهٔ مورد نظر صفر باشد (شکل ۸-۴). بهتر است مختصات را به مختصات کروی تغییر بدهیم و جوابهای معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی را به کار ببریم. [از این پس، به تغییر معنای r توجه کنید. تاکنون r را به معنای فاصلهٔ q واقع در (x', y', z') تا (x, y, z) به کار برده‌ایم؛ اما از این پس می‌خواهیم آن را به معنای فاصلهٔ از (۰ ,۰ ,۰) تا (x, y, z) به کار ببریم. برای مثال، شکلهای ۸-۳ و ۸-۴ را ملاحظه کنید.] با نوشتن V_q به جای V در (۸-۱۳) (برای تمیز آن از جواب نهایی که حاصل‌جمع V_q و جواب معادلهٔ لاپلاس خـواهـد بـود) و تـغییر مختصات به مختصات کروی، خواهیم داشت

$$V_q = \frac{q}{\sqrt{r^{۲} - ۲\,ar\cos\theta + a^{۲}}} \qquad (۱۴-۸)$$

جوابهای پایه‌ای معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی عبارت اند از (بخش ۷):

$$\begin{Bmatrix} r^{l} \\ r^{-l-۱} \end{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix} \qquad (۱۵-۸)$$

چون ناحیهٔ خارج کره مورد نظر ماست، جوابهایی از r را می‌خواهیم که در بینهایت نامتناهی نشوند؛ بنابراین $r^{-l-۱}$ را انتخاب می‌کنیم و جوابهای r^{l} راکنار می‌گذاریم. چون مسألهٔ فیزیکی نسبت به محور z متقارن است، لذا باید به دنبال جوابهای مستقل از ϕ باشیم؛ یعنی، $m = ۰$، $\cos m\phi = ۱$ را انـتخاب مـی‌کنیم. بـه ایـن تـرتیب جـوابـهای پـایه‌ای بـرای مسألهٔ مـا $r^{-l-۱}\,P_l(\cos\theta)$ هستند و سعی می‌کنیم جوابی به شکل زیر پیدا کنیم

$$V = V_q + \sum_l c_l\, r^{-l-۱}\, P_l(\cos\theta) \qquad (۱۶-۸)$$

باید شرط مرزی $V = ۰$ به ازای $r = R$ را برقرار کنیم. در نتیجه داریم

$$V_{r=R} = \frac{q}{\sqrt{R^۲ - ۲aR\cos\theta + a^۲}} + \sum_l c_l R^{-l-۱} P_l(\cos\theta) = ۰ \quad (۱۷\text{-}۸)$$

بنابراین می‌خواهیم V_q را به صورت رشتهٔ لژاندر بسط دهیم. چون V_q اساساً تابع مولد چندجمله‌ای‌های لژاندر است، این کار بسیار ساده است. با مقایسهٔ (۸-۱۷) و فرمولهای بخش ۵ از فصل ۱۲ [(۵-۱) و (۵-۲)، یا بسیار ساده‌تر، (۵-۱۲) و (۵-۱۷)] ، داریم

$$\frac{q}{\sqrt{R^۲ - ۲aR\cos\theta + a^۲}} = q\sum_l \frac{R^l P_l(\cos\theta)}{a^{l+۱}} \quad (۱۸\text{-}۸)$$

بنابراین ضرایب c_l در (۸-۱۷) عبارت اند از:

$$c_l R^{-l-۱} = -\frac{qR^l}{a^{l+۱}} \quad \text{یا} \quad c_l = -\frac{qR^{۲l+۱}}{a^{l+۱}} \quad (۱۹\text{-}۸)$$

با جایگذاری (۸-۱۹) در (۸-۱۶)، جواب نهایی را برای V پیدا می‌کنیم:

$$V = \frac{q}{\sqrt{r^۲ - ۲ar\cos\theta + a^۲}} - q\sum_l \frac{R^{۲l+۱} r^{-l-۱} P_l(\cos\theta)}{a^{l+۱}} = ۰ \quad (۲۰\text{-}۸)$$

چون جملهٔ دوم در (۸-۲۰) به همان شکل کلی (۸-۱۸) است، لذا می‌توانیم (۸-۲۰) را با جمعیابی رشته ساده کنیم تا نتیجه شود (مسألهٔ ۲)

$$V = \frac{q}{\sqrt{r^۲ - ۲ar\cos\theta + a^۲}} - \frac{(R/a)q}{\sqrt{r^۲ + (R^۲/a)^۲ - ۲r(R^۲/a)\cos\theta}} \quad (۲۱\text{-}۸)$$

فرمول (۸-۲۱) دارای یک تغییر فیزیکی بسیار جالب است. جملهٔ دوم، پتانسیل بار $-(R/a)q$ در نقطهٔ $(۰ , ۰ , R^۲/a)$ است؛ بنابراین می‌توانستیم کرهٔ متصل به زمین را با این بار جایگزین کنیم و به ازای $r > R$ به همین پتانسیل برسیم. این نتیجه را می‌توان با هندسهٔ تحلیلی مقدماتی نیز به دست آورد که موسوم به "روش تصاویر" است. برای مسائل با هندسهٔ ساده (شامل صفحه، کره، استوانهٔ دوّار)، این روش ممکن است راه حلی ساده‌تر از آنچه که ما بحث کرده‌ایم ارائه دهد؛ با وجود این، هدف ما این بود که روش عمومی‌تر را نمایش دهیم. (همچنین بخش ۸ از فصل ۱۵ را ملاحظه کنید.)

مسائل، بخش ۸

۱- نشان دهید که پتانسیل گرانشی $V = -Gm/r$ در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند؛ یعنی،

نشان دهید $\nabla^2(1/r) = 0$ که در آن، $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ، $r \neq 0$. (بخش ۸ از فصل ۱۵ را ملاحظه کنید.)

۲- با استفاده از فرمولهای بخش ۵ از فصل ۱۲، رشتهٔ (۸-۲۰) را جمعیابی کنید و (۸-۲۱) را نتیجه بگیرید.

۳- مسألهٔ مثال ۱ را برای موردی که در آن بار q در داخل کرهٔ متصل به زمین است حل کنید و پتانسیل V را در داخل کره به دست آورید. حاصل‌جمع جواب رشته‌ای را پیدا، و روش تصویری حل این مسأله را بیان کنید.

۴- مانستهٔ دوبعدی مسألهٔ مثال ۱ را حل کنید. یک "بار نقطه‌ای" در یک صفحه، از نظر فیزیکی به معنای یک بار یکنواخت در امتداد یک خط نامتناهی عمود بر صفحه است؛ یک "دایره" در پتانسیل صفر به معنای یک استوانه بینهایت بلند عمود بر صفر می‌باشد. با این همه، چون تمام مقاطع عرضی خط و استوانه موازی یکسان هستند، مسأله، یک مسألهٔ دوبعدی است. ***راهنمایی:*** پتانسیل باید در نواحی عاری از بار در معادلهٔ لاپلاس صدق کند. جوابهای معادلهٔ لاپلاس دوبعدی چه هستند؟

۵- روش تصاویر را برای مسألهٔ ۴ پیدا کنید.

۹- مسائل متفرقه

۱- توزیع دمای حالت پایا را در یک صفحهٔ مستطیلی که مساحت $0 < x < 1$ ، $0 < y < 2$ را می‌پوشاند با شرایط مرزی $T = 0$ به ازای $x = 0$، $x = 1$، $y = 2$ و $T = 1 - x$ به ازای $y = 0$ پیدا کنید.

۲- مسألهٔ ۱ را در صورتی که به ازای $x = 0$، $x = 1$، $y = 0$، داشته باشیم $T = 0$، و به ازای $y = 2$، داشته باشیم $T = 1 - x$ ، حل کنید. ***راهنمایی:*** $\sinh ky$ را به عنوان جواب y به کار ببرید؛ لازم است وقتی $y = 0$ ؛ $T = 0$ باشد.

۳- مسألهٔ ۱ در صورتی که اضلاع $x = 0$ و $x = 1$ عایق‌بندی شده باشند (مسائل ۲-۱۴ و ۲-۱۵ را ملاحظه کنید) و در $y = 2$، $T = 0$ و در $y = 0$، $T = 1 - x$ باشد، حل کنید.

۴- توزیع دمای حالت پایا را در صفحه‌ای با دماهای مرزی $T = 30^\circ$ در $x = 0$ و $y = 3$،

$T = ۲۰^\circ$ در $y = ۰$ و $x = ۵$ پیدا کنید. ***راهنمایی:*** از کلیه دماها ۲۰ درجه کم کرده، مسأله را حل کنید؛ آنگاه ۲۰° را به جواب اضافه کنید. (مسأله ۲ را ملاحظه کنید.)

۵- میله‌ای به طول l ابتدا در ۰° است. از لحظهٔ $t = ۰$ به بعد، دو سر آنرا در ۲۰° قرار می‌دهیم، $u(x, t)$ را برای $t > ۰$ پیدا کنید.

۶- مسألهٔ ۵ را در صورتی که سرِ $x = ۰$ عایق‌بندی شده و سر $x = l$ در ۲۰° نگه داشته شود، برای $t > ۰$ حل کنید. (مسألهٔ ۳-۹ را ملاحظه کنید.)

۷- مسألهٔ ۲ را در صورتی که اضلاع $x = ۰$ و $x = ۱$ عایق‌بندی شده باشند، حل کنید.

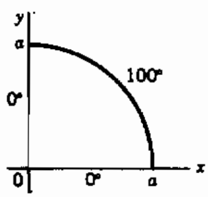
۸- دو وجه تُره‌ای به ضخامت ۱۰ سانتیمتر در ۱۰° و ۲۰° واقع‌اند. در $t = ۰$، دماهای وجوه را تعویض می‌کنیم. $u(x, t)$ را برای $t > ۰$ پیدا کنید.

۹- سیمی به طول l دارای جا به جایی اولیهٔ $y_۰ = x(l - x)$ است. جا به جایی را به صورت تابعی از x و t پیدا کنید.

۱۰- مسألهٔ ۵-۷ را اگر نیمی از سطح جانبی استوانه در ۱۰۰° و نیمهٔ دیگر آن در -۱۰۰° و دو قاعدهٔ آن در ۰° باشند، حل کنید.

۱۱- رشتهٔ مسألهٔ ۵-۱۲ را می‌توان جمع بست (مسألهٔ ۲-۶ را ملاحظه کنید). نشان دهید

$$u = ۵۰ + \frac{۱۰۰}{\pi} \arctan \frac{۲ar \sin \theta}{a^۲ - r^۲}$$



۱۲- تیغه‌ای به شکل ربع دایره، دارای دماهای مرزی مطابق شکل است. دمای حالت پایای داخلی $u(r, \theta)$ را پیدا کنید. (مسألهٔ ۵-۱۲ را ملاحظه کنید.)

۱۳- رشتهٔ مسألهٔ ۱۲ را جمع ببندید و نتیجه بگیرید:

$$u = \frac{۲۰۰}{\pi} \arctan \frac{۲a^۲r^۲ \sin ۲\theta}{a^۴ - r^۴}$$

راهنمایی. مسألهٔ ۲-۶ را ملاحظه کنید.

۱۴- استوانه طویلی به چهار ربع استوانه که از یکدیگر عایق‌بندی شده‌اند، بریده شده است؛ ربع

استوانه‌ها یک در میان در پتانسیلهای ۱۰۰+ و ۱۰۰- نگهداری می‌شوند. پتانسیل الکتروستاتیکی را در داخل استوانه پیدا کنید. ***راهنمایی:*** آیا رابطه‌ای با مسألهٔ ۱۲ می‌بینید؟ مسألهٔ ۵-۱۲ را نیز ملاحظه کنید.

۱۵- مسائل ۱۲ و ۱۳ را برای تیغه‌ای به شکل یک قطاع دایره‌ای به زاویه ۳۰° و شعاع ۱۰ که دماهای مرزی روی اضلاع مستقیم آن ۰° و روی قوس دایره‌ای ۱۰۰° می‌باشند، تکرار کنید. آیا سپس می‌توانید مسأله‌ای نظیر ۱۴ طرح و آنرا حل کنید؟

۱۶- مدهای طبیعی ارتعاش را برای یک غشاء مربعی به ضلع π در نظر بگیرید (مسألهٔ ۶-۳ را ملاحظه کنید). مدهای ۱، ۲ و ۲، ۱ را رسم کنید. نشان دهید که ترکیب $\sin x \sin ۲y - \sin ۲x \sin y$ از این دو مد، دارای یک خط گرهی در امتداد $y = x$ است. سپس بسامد ارتعاش یک غشاء به شکل مثلث قائم‌الزاویهٔ ۴۵° را پیدا کنید.

۱۷- برخی از مدهای طبیعی ارتعاش پوستهٔ یک طبل نیم دایره‌ای را رسم کنید و بسامدهای ارتعاشی مشخصه را به صورت مضاربی از مد اصلی پوستهٔ طبل دایره‌ای همخوان به دست آورید.

۱۸- مسألهٔ ۱۷ را برای یک غشاء به شکل یک قطاع دایره‌ای با زاویهٔ ۶۰° تکرار کنید.

۱۹- یک میدان الکتریکی یکنواخت در امتداد محور منفی x مفروض است. یک استوانهٔ رسانای دراز را که در پتانسیل صفر نگه داشته می‌شود، به موازات محور z ها قرار می‌دهیم. پتانسیل را در ناحیهٔ خارجِ استوانه پیدا کنید. ***راهنمایی:*** مسألهٔ ۷-۱۳ را ملاحظه کنید. شما به جوابهای معادلهٔ لاپلاس در مختصات قطبی نیاز دارید (مسألهٔ ۵-۱۲).

۲۰- با استفاده از مسألهٔ ۷-۱۶، بسامدهای ارتعاشی مشخصهٔ صوت را در یک کاواک کروی پیدا کنید.

۲۱- دمای سطحی کره‌ای به شعاع ۱ در $u = \sin^۲\theta + \cos^۳\theta$ نگهداشته می‌شود. دمای داخلی $u(r, \theta, \phi)$ را پیدا کنید.

۲۲- دمای داخلی یک نیمکره را که سطح خمیدهٔ آن در $u = \cos\theta$ و صفحهٔ استوایی آن در $u = ۱$ نگهداشته می‌شود، پیدا کنید.

۲۳- دمای حالت پایا را در ناحیهٔ بین دو کرهٔ $r = ۱$ و $r = ۲$ که نیمهٔ بالایی سطح کره بیرونی در ۱۰۰° و نیمه پایینی آن در -۱۰۰° نگه داشته می‌شود و این دماها برای کرهٔ داخلی نیز

حفظ شوند، پیدا کنید. *راهنمایی:* مسألهٔ ۷-۱۴ را ملاحظه کنید. در اینجا شما باید دو رشتهٔ لژاندر (به ازای $r = ۱$ و $r = ۲$) پیدا کنید و a_l و b_l را به دست آورید.

۲۴- جواب عمومی برای دمای حالت پایا در شکل ۲-۲ را در صورتی که دماهای مرزی روی چهار ضلع، مقادیر ثابت $T = A$، $T = B$ و غیره باشند، و مستطیل، مساحت $۰ < x < a$ و $۰ < y < b$ را بپوشاند، پیدا کنید. *راهنمایی:* می‌توانید، مثلاً، A را از تمام چهار دما کم کنید، مسأله را حل نمایی، و سپس مجدداً A را به جواب بیفزایید. بنابراین جوابی، با یک ضلع در $T = ۰$ و سه ضلع دیگر در دماهای داده شده، مسألهٔ عمومی را حل می‌کند. قبلاً مسائلی را (بخش ۲) با دماهای معلوم C و D حل کرده‌اید. برای B، مسألهٔ ۲ را ملاحظه کنید.

۲۵- معادلهٔ کلاین -گوردن عبارت است از $\nabla^۲ u = (۱/v^۲)\, \partial^۲ u/\partial t^۲ + \lambda^۲ u$. این معادله در مکانیک کوانتومی حائز اهمیت است، اما دارای یک کاربرد ساده‌تر هم هست. مثلاً، ارتعاش یک سیم کشیده شده را که در یک محیط کشسان فرو برده شده است، توصیف می‌کند. معادلهٔ یک بعدی کلاین -گوردن را جدا سازی، و بسامدهای مشخصهٔ چنین سیمی را پیدا کنید.

جواب: $$\nu_n = \frac{v}{۲}\sqrt{(n/l)^۲ + (\lambda/\pi)^۲}$$

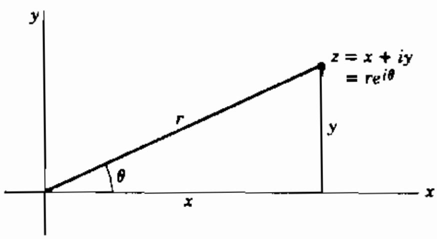
۲۶- بسامدهای مشخصهٔ یک غشاء دایره‌ای را که در معادلهٔ کلاین -گوردن صدق می‌کند (مسألهٔ ۲۵) پیدا کنید. *راهنمایی:* معادله را در دو بعد و در مختصات کروی جدا سازی کنید.

۲۷- مسألهٔ ۲۶ را برای یک غشاء مستطیلی حل کنید.

۱۴

توابع مختلط

۱- مقدمه



شکل ۱-۱

در فصل ۲، ترسیم اعداد مختلط $z = x + iy$ را در صفحهٔ مختلط (شکل ۱-۱) و پیدا کردن مقادیر توابع سادهای از z مانند ریشهها، توابع مثلثاتی، و غیره، را مورد بحث قرار دادیم. اکنون میخواهیم حساب توابع z، مشتق گیری، انتگرال گیری، رشتهٔ توانی، و غیره را بررسی کنیم. همان گونه که از موضوعهایی مانند معادلات دیفرانسیل، رشتهها و انتگرالهای فوریه، مکانیک، الکتریسیته، و غیره، میدانید، اکثر اوقات استفاده از عبارتهای مختلط خیلی مفید است. نکات و قضایای اساسی راجع به توابع یک متغیر مختلط نه تنها بسیاری از محاسبات را ساده میکنند بلکه اکثراً منتهی به درک بهتری از مسائل و در نتیجه به روش کارسازتری در حلّ آنها میشوند. ما در این فصل برخی از تعاریف و قضایای موضوع را (با حذف اثباتهای طولانی) عنوان میکنیم، و بعضی از کاربردهای آنها را نشان میدهیم.

همان گونه که در فصل ۲ دیدیم، مقدار تابعی از z به ازای یک z معلوم، عددی است مختلط. تابع سادهای از z، مانند $f(z) = z^{۲}$ را در نظر بگیرید. میتوانیم بنویسیم

$$f(z) = z^{۲} = (x+iy)^{۲} = x^{۲} - y^{۲} + ۲ixy = u(x,y) + iv(x,y)$$

که در آن $u(x,y) = x^{۲} - y^{۲}$ و $v(x,y) = ۲xy$. در فصل ۲، ملاحظه کردیم که عدد مختلط $z = x+iy$ هم‌ارز با یک زوج تابع حقیقی $u(x,y)$ و $v(x,y)$، از متغیرهای حقیقی x و y

است. به طور کلّی می‌نویسیم

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (۱-۱)$$

که مفهوم آن این است که u و v توابعی حقیقی از متغیرهای حقیقی x و yاند.

به خاطر آورید که توابع عموماً **تک - مقداری** اند، یعنی، $f(z)$به ازای هر zفقط دارای یک مقدار (مختلط) است. آیا این بدان معناست که ما نمی‌توانیم تابعی را با یک فرمول مانند $ln\ z$ یا $arc\ tan\ z$ تعریف کنیم؟ از فصل ۲ داریم

$$ln\ z = ln\ |z| + i(\theta + ۲n\pi)$$

که در آن $tan\ \theta = y/x$است. به ازای هر مقدار z، $ln\ z$دارای بینهایت مقدار است. امّا اگر θ فقط گستره‌ای مساوی ۲π داشته باشد، در آن صورت $ln\ z$ به ازای هر مقدار zفقط یک مقدار دارد و این تابع تک - مقداری، ***انشعابی*** از $ln\ z$خوانده می‌شود. بنابراین، درکاربرد فرمولهایی مانند $\sqrt{z}$ ، $ln\ z$، $arc\ tan\ z$، برای تعریف توابع، هر بار یک انشعاب تنها را مورد بحث قرار می‌دهیم به طوری که همیشه با یک تابع تک - مقداری روبرو هستیم. (با این همه نباید فراموش کرد که تمام مجموعهٔ انشعابها را اصطلاحاً یک " تابع چند مقداری " می‌نامند.)

مسائل، بخش ۱

بخشهای حقیقی و موهومی $u(x,y)$و $v(x,y)$ توابع زیر را پیدا کنید.

۱- $z^۳$ ۲- z ۳- $\bar{z}$

۴- $|z|$ ۵- $Re\ z$ ۶- e^z

۷- $cosh\ z$ ۸- $sin\ z$ ۹- $\frac{۱}{z}$

۱۰- $\frac{۲z+۳}{z+۲}$ ۱۱- $\frac{۲z-i}{iz+۲}$ ۱۲- $\frac{z}{z^۲+۱}$

۱۳- $ln\ |z|$ ۱۴- $z^۲\ \bar{z}$ ۱۵- $\overline{e^z}$

۱۶- $z^۲ - \overline{z^۲}$ ۱۷- $cos\ \bar{z}$ ۱۸- $\sqrt{z}$

۱۹- $ln\ z$ ، $(۰ < \theta < ۲\pi)$ ۲۰- $(۱+۲i)z^۲ + (i-۱)z + ۳$

۲۱- e^{iz}(مراقب باشید؛ $cos\ z$و $sin\ z$ مساوی u و v **نیستند**.)

۲- توابع تحلیلی

تعریف مشتق $f(z)$(درست مانند تابعی از یک متغیر حقیقی) با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \tag{۱-۲}$$

که در آن

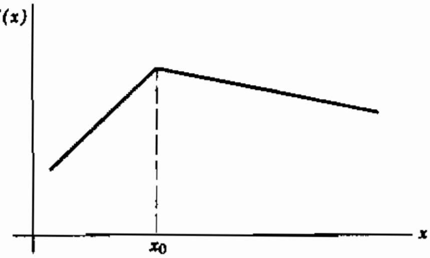
$$\Delta f = f(z+\Delta z) - f(z)$$
$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

تعریف: تابع $f(z)$ در ناحیه‌ای [۱] از صفحهٔ مختلط، **تحلیلی** (یا **منظّم** یا ***هولومورف*** یا ***تکزاد***) است در صورتی که در هر نقطه‌ای از آن ناحیه دارای یک مشتق (منحصر به فرد) باشد. بیان " $f(z)$ ***در نقطهٔ*** $z = a$ تحلیلی است " به معنای این است که $f(z)$ در تمام نقاط داخل دایرهٔ کوچکی در اطراف $z = a$ دارای مشتق است.

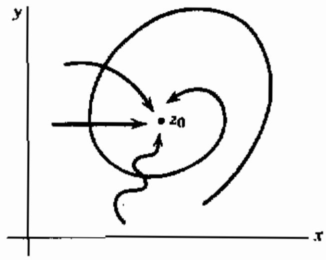
ببینیم معنای داشتن مشتق برای $f(z)$ چیست. ابتدا در مورد تابع $f(x)$ از یک متغیر حقیقی فکر کنید؛ همان گونه که در شکل ۲-۱ نشان داده شده است حدّ $\Delta f/\Delta x$ در نقطهٔ x_0 ممکن است ۲ مقدار داشته باشد - یکی وقتی از طرف چپ به x_0 نزدیک می‌شویم و مقدار متفاوت دیگر وقتی از طرف راست به x_0 نزدیک می‌شویم. وقتی می‌گوییم که $f(x)$ در $x = x_0$ دارای مشتق است، مقصود ما این است که این دو مقدار با هم مساوی اند. با این همه، برای یک تابع $f(z)$ از متغیر مختلط z، تعداد بینهایت راه وجود دارد که می‌توانیم به یک نقطهٔ z_0 نزدیک شویم؛ چند تا از این راهها در شکل ۲-۲ نشان داده شده است. وقتی می‌گوییم $f(z)$ در $z = z_0$ دارای مشتق است، مقصود ما این است که $f'(z)$ [آن گونه که با ۲-۱ تعریف شده است] صرف نظر از اینکه چگونه به z_0 نزدیک شویم دارای مقدار ثابتی است. این، شرط واقعاً سختی است و ما ممکن است متحیّر بمانیم که آیا اصلاً توابع تحلیلی وجود *دارند* یا نه، به عبارت دیگر، تصوّر اینکه بتوانیم در حساب انتگرال و دیفرانسیل پیش برویم بدون اینکه بتوانیم مشتق پیدا کنیم،

۱- نقطه‌ها و منحنی‌های منزوی، ناحیه نیستند؛ هر ناحیه باید دو بعدی باشد.

مشکل است!



شکل ۲-۱



شکل ۲-۲

بیایید با استفاده از تعریف (۲-۱) برای پیدا کردن مشتقهای چند تابع ساده، مطمئن شویم که توابع تحلیلی وجود *دارند*. برای مثال، نشان بدهیم که $(d/dz)(z^۲) = ۲z$. بنابر (۲-۱) داریم

$$\frac{d}{dz}(z^۲) = \lim_{\Delta z \to ۰} \frac{(z+\Delta z)^۲ - z^۲}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to ۰} \frac{z^۲ + ۲z\,\Delta z + (\Delta z)^۲ - z^۲}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to ۰} (۲z + \Delta z) = ۲z$$

مشاهده می‌کنیم که نتیجه، مستقل از **چگونگی** میل Δz به صفر است؛ بنابراین $z^۲$ یک تابع تحلیلی است. به همین روش نتیجه می‌شود که اگر n یک عدد درست مثبت باشد $(d/dz)(z^n) = nz^{n-۱}$ است (مسألهٔ ۳۰).

حال، آنچه که ما هم اکنون انجام دادیم چیزی نیست جز فرایند آشنای Δ! ملاحظه می‌کنیم که تعریف (۲-۱) برای مشتق، درست همان شکلی را دارد که تعریف همخوان آن برای تابعی از یک متغیر حقیقی داراست. به خاطر این شباهت، همان گونه که در مشتق گرفتن از $z^۲$ دیدیم، بسیاری از فرمولهای آشنا را می‌توان با استفاده از همان روشهایی که در مورد توابع حقیقی به کار می‌روند ثابت کرد. به آسانی می‌توانید نشان بدهید (مسائل ۲۵ تا ۲۸) که مشتقهای حاصل جمع، حاصلضرب، و خارج قسمت از قواعد آشنا پیروی می‌کنند و قاعدهٔ زنجیره برقرار است [اگر $f = f(g)$ و $g = g(z)$ باشد، در آن صورت $df/dz = (df/dg)(dg/dz)$ است].

به این ترتیب مشتقهای توابع گویای z، از فرمولهای آشنای مربوط به متغیر حقیقی پیروی می‌کنند. اگر تعاریف و قضایای فصلهای ۱ و ۲ را معتبر فرض کنیم، مشاهده می‌کنیم که مشتقهای سایر توابع مقدماتی (بنیادی) نیز از فرمولهای آشنا پیروی می‌کنند؛ به عنوان مثال، $(d/dz)(\sin z) = \cos z$، و غیره. (مسائل ۲۹ تا ۳۳).

اکنون شاید تعجب کنید که چه چیزی در اینجا تازگی دارد زیرا به نظر می‌رسد که تا به حال همهٔ نتیجه‌های ما درست مانند نتایج مربوط به توابع یک متغیر حقیقی باشند.[دلیل آن این است که ما فقط توابع $f(z)$ **دارای** مشتق را بررسی کرده‌ایم.] در شکلهای ۲-۱ و ۲-۲، ما به تفاوت عمدهٔ بین پیدا کردن $(d/dx)f(x)$ و پیدا کردن $(d/dz)f(z)$، که همانا وجود تعداد بینهایت راه در شکل ۲-۲ برای نزدیک شدن ما به z_0 است، اشاره کرده‌ایم. برای ملاحظهٔ مثالی در این مورد، به محاسبهٔ $(d/dz)(|z|^2)$ می‌پردازیم. (توجه کنید که $|x|^2 = x^2$، و مشتق آن $2x$ است.) اگر $|z|^2$ مشتق داشته باشد، طبق معادلهٔ (۲-۱) داریم

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}$$

صورت این کسر همواره حقیقی است (زیرا مقادیر مطلق، حقیقی اند - به خاطر آورید که $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$). مخرج $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ را در نظر بگیرید. وقتی در شکل ۲-۲ به z_0 نزدیک می‌شویم (یعنی اجازه می‌دهیم $\Delta z \to 0$)، بسته به چگونگی نزدیک شدن ما، Δz مقادیر مختلفی دارد. به عنوان مثال، اگر در امتداد یک خط افقی نزدیک شویم، در آن صورت $\Delta y = 0$ و $\Delta z = \Delta x$؛ در امتداد یک خط عمودی، $\Delta x = 0$ و بنابراین $\Delta z = i\Delta y$، و در امتداد راستاهای دیگر Δz یک عدد مختلط است؛ در حالت کلّی، Δz نه حقیقی است و نه موهومی محض. چون صورت $\Delta f/\Delta z$ حقیقی است و مخرج آن ممکن است حقیقی یا موهومی باشد (در حالت کلّی، مختلط)، ملاحظه می‌کنیم که $\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f/\Delta z$ برای راستاهای متفاوت نزدیک شدن به z_0 دارای مقادیر متفاوتی است، یعنی، $|z|^2$ تحلیلی نیست.

اکنون، هم مثالهای توابع تحلیلی را دیده‌ایم و هم مثالهای توابع غیر تحلیلی را، امّا هنوز نمی‌دانیم چگونه مشخص کنیم آیا یک تابع دارای مشتق هست یا خیر [مگر رجوع به (۲-۱)].

قضایای زیر به این پرسش، پاسخ می‌دهند.

قضیهٔ I (که ذیلاً ثابت خواهیم کرد). اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$، در یک ناحیه، تحلیلی باشد، در آن صورت، در آن ناحیه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{۲-۲}$$

این معادلات را ***شرایط کوشی - ریمان*** می‌نامیم.

اثبات. با یاد آوری اینکه $f = f(z)$، که در آن $z = x + iy$ است، با استفاده از قاعدهٔ مشتق گیری جزئی (رک مسألهٔ ۲۸ و همچنین فصل ۴) داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz} \times ۱$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{dz} \times i \tag{۳-۲}$$

چون طبق رابطهٔ (۱-۱) داریم $f = u(x,y) + iv(x,y)$، همچنین می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \tag{۴-۲}$$

توجه کنید که اگر f نسبت به z مشتق داشته باشد، در آن صورت طبق روابط (۲-۳) نسبت به x و y نیز دارای مشتقهای جزئی است. از آنجا که یک تابع مختلط فقط در صورتی نسبت به یک متغیر حقیقی دارای مشتق است که بخشهای حقیقی و موهومی آن دارای مشتق باشند [رک (۱-۱)]، بنابراین طبق (۲-۴)، u و v نیز نسبت به x و y دارای مشتقهای جزئی می‌باشند. با ترکیب (۲-۳) و (۲-۴) داریم

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{۱}{i}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{۱}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

چون فرض کردیم که df/dz وجود دارد و منحصر به فرد است (معنای تحلیلی بودن)، این دو عبارت برای df/dz باید با هم مساوی باشند. با متحد قرار دادن بخشهای حقیقی و موهومی، معادلات کوشی - ریمان به دست می‌آیند.

قضیهٔ II (که بدون اثبات، عنوان می‌کنیم). اگر $u(x,y)$ و $v(x,y)$ و مشتقهای جزئی آنها نسبت به x و y پیوسته باشند و در ناحیه‌ای شرایط کوشی - ریمان را برقرار سازند، در آن صورت $f(z)$ در تمام نقاط داخل آن ناحیه (نه لزوماً بر روی مرز) تحلیلی است.

هر چند که ما این قضیه را اثبات نخواهیم کرد (برای مشاهدهٔ اثبات، رک کتابهای درسی در زمینهٔ توابع مختلط) ولی می‌توانیم با نشان دادن صحّت آن به هنگامی که بر روی یک خط راست دلخواه به $z_\circ$ نزدیک می‌شویم آنرا توجیه کنیم. df/dz را با فرض اینکه بر روی خط راستی به شیب m به $z_\circ$ نزدیک می‌شویم حساب می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در صورتی که u و v در روابط (۲-۲) صدق کنند، df/dz به m بستگی ندارد. معادلهٔ خط راست به شیب m که از نقطه $z_\circ = x_\circ + iy_\circ$ می‌گذرد عبارت است از

$$y - y_\circ = m(x - x_\circ)$$

و در امتداد این خط داریم $dy/dx = m$. سپس پیدا می‌کنیم

$$\frac{df}{dz} = \frac{du+idv}{dx+idy} = \frac{(\partial u/\partial x)dx + (\partial u/\partial y)\,dy + i\left[(\partial v/\partial x)\,dx + (\partial v/\partial y)\,dy\right]}{dx + idy}$$

$$= \frac{(\partial u/\partial x) + (\partial u/\partial y)\,m + i\left[(\partial v/\partial x) + (\partial v/\partial y)m\right]}{1 + i\,m}$$

با به کار بردن معادلات کوشی - ریمان (۲-۲)، خواهیم داشت

$$\frac{df}{dz} = \frac{(\partial u/\partial x) - (\partial v/\partial x)\,m + i\left[(\partial v/\partial x) + (\partial u/\partial x)m\right]}{1 + i\,m}$$

$$= \frac{(\partial u/\partial x)\,(1 + im) + i(\partial v/\partial x)\,(1 + im)}{1 + i\,m} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

بنابراین df/dz وقتی برای نزدیک شدن بر روی هر خط راستی حساب می‌شود دارای مقدار

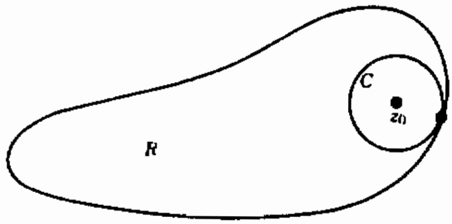
ثابتی است. این قضیه عنوان می‌کند که این مقدار، برای نزدیک شدن بر روی **هر منحنی** نیز همین است.

چند تعریف:

نقطهٔ منظّم $f(z)$ نقطه‌ای است که در آن $f(z)$ تحلیلی است.

نقطهٔ تکین یا **تکینگی** $f(z)$ نقطه‌ای است که در آن $f(z)$ تحلیلی نیست. اگر $f(z)$ در هر جای دیگری در داخل یک دایرهٔ کوچک در اطراف نقطهٔ تکین تحلیلی باشد، آن نقطه را نقطهٔ تکین **منزوی** می‌نامند.

قضیهٔ III (که بدون اثبات عنوان می‌کنیم). اگر $f(z)$ در ناحیه‌ای (ناحیهٔ R در شکل ۲-۳) تحلیلی باشد، در آن صورت در تمام نقاط داخل آن ناحیه دارای مشتقهای از همهٔ مرتبه‌هاست و می‌توان آنرا در اطراف هر نقطهٔ z_0 واقع در داخل ناحیه برحسب رشتهٔ تیلور بسط داد. رشتهٔ توانی در داخل دایرهٔ حول z_0 که تا نزدیک‌ترین نقطهٔ تکین ادامه می‌یابد (دایرهٔ C در شکل ۲-۳) همگراست.



شکل ۲-۳

بار دیگر توجه کنید که مشتق داشتن $f(z)$ مستلزم چه شرط بزرگی است. برای $f(x)$ که تابعی است از یک متغیر حقیقی، خیلی امکان دارد که مشتق مرتبهٔ اوّل داشته باشیم امّا مشتقهای بالاتر نداشته باشیم. امّا اگر $f(z)$ اولین مشتق نسبت به z را داشته باشد، مشتقهای تمام مرتبه‌های دیگر را نیز دارد.

این قضیه، واقعیتی را دربارهٔ رشتهٔ توانی توضیح می‌دهد که ممکن است شما را به تعجب

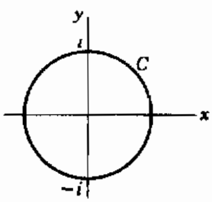
واداشته باشد. تابع $f(x) = ۱/(۱+x^۲)$ هیچ رفتار خاصّی در $x = \pm ۱$ ندارد. امّا اگر آنرا برحسب رشتهٔ توانی بسط بدهیم، یعنی

$$\frac{۱}{۱+x^۲} = ۱ - x^۲ + x^۴ - x^۶ \qquad (۵-۲)$$

ملاحظه می‌کنیم که این رشته فقط به ازای $|x| < ۱$ همگراست. برای توجیه این رویداد باید رابطهٔ زیر را در نظر بگیریم.

$$f(z) = \frac{۱}{۱+z^۲} = ۱ - z^۲ + z^۴ - z^۶ + \cdots \qquad (۶-۲)$$

هنگامی که $z = \pm i$ باشد، $f(z)$ و مشتقهای آن نامتناهی می‌شوند؛ یعنی، $f(z)$ در هر ناحیه‌ای که شامل $z = \pm i$ باشد تحلیلی نیست. نقطهٔ $z_۰$ قضیّه، مبدأ مختصات است و دایرهٔ همگرایی رشته (دایرهٔ C در شکل ۲-۴)، تا نزدیک‌ترین نقاط تکین $\pm i$ ادامه می‌یابد. این رشته، در **داخل** C همگراست. از آنجا که یک رشتهٔ توانی برحسب z همواره در داخل دایرهٔ همگرائی‌اش همگرا و در خارج آن واگراست (فصل ۲، مسألهٔ ۶-۱۴)، مشاهده می‌کنیم که (۲-۵) [که به ازای $y=۰$ مساوی (۲-۶) است] فقط به ازای $|x| < ۱$ می‌تواند همگرا باشد.



شکل ۲-۴

تابع $\phi(x,y)$ که در معادلهٔ لاپلاس، یعنی $\nabla^۲\phi = \partial^۲\phi/\partial x^۲ + \partial^۲\phi/\partial y^۲ = ۰$، صدق می‌کند، تابع **هماهنگ** خوانده می‌شود. تعداد بسیاری از مسائل فیزیکی منتهی به معادلهٔ لاپلاس می‌شوند، و در نتیجه ما علاقهٔ زیادی به پیداکردن جوابهای آن داریم. (رک بخش ۱۰ و فصل ۱۳). بنابراین، قضیهٔ زیر باید سرنخی دربارهٔ یک دلیل اینکه چرا توابع مختلط دارای کاربردهای مهمّی هستند، به دست دهد.

قضیهٔ IV بخش ۱ (در مسألهٔ ۴۴ ثابت خواهد شد). اگر $f(z) = u + iv$ در ناحیه‌ای تحلیلی باشد، در آن صورت u و v در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کنند (یعنی، u و v توابع هماهنگی می‌باشند).

قسمت ۲ (که بدون اثبات عنوان می‌کنیم). هر تابع u (یا v) که در یک ناحیهٔ همبند ساده در معادلهٔ لاپلاس صدق کند، بخش حقیقی یا موهومی یک تابع تحلیلی $f(z)$ است.

بنابراین جوابهای معادلهٔ لاپلاس را می‌توانیم به سادگی با انتخاب بخشهای حقیقی یا موهومی یک تابع تحلیلی از z پیدا کنیم. همچنین اغلب اوقات ممکن است، با شروع با تابع ساده‌ای که در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند، تابع صریح $f(z)$ را که تابع سادهٔ پیش گفته، مثلاً بخش حقیقی آن است، پیدا کرد.

مثال- تابع $u(x,y) = x^۲ - y^۲$ را در نظر بگیرید. ملاحظه می‌کنیم که

$$\nabla^۲ u = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۲ - ۲ = ۰$$

یعنی، u در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند (یا u یک تابع هماهنگ است). تابع $v(x,y)$ را طوری پیدا می‌کنیم که $u + iv$ تابع تحلیلی از z باشد. بنا بر معادلات کوشی ـ ریمان

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = ۲x$$

با انتگرال جزئی گرفتن نسبت به y، خواهیم داشت

$$v(x,y) = ۲xy + g(x)$$

که $g(x)$ تابعی است از x که باید آنرا پیدا کنیم. با مشتق جزئی گرفتن نسبت به x و استفادهٔ مجدّد از معادلات کوشی ـ ریمان، داریم

$$\frac{\partial v}{\partial x} = ۲y + g'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = ۲y$$

به این ترتیب به دست می‌آوریم

$$g'(x) = ۰ \quad \rightarrow \quad g = \text{ثابت}$$

لذا

$$f(z) = u + iv = x^۲ - y^۲ + ۲ixy + \text{ثابت} = z^۲ + \text{ثابت}$$

زوج تابع u ، v **توابع هماهنگ همیوغ** نامیده می‌شوند. (همچنین ر ک مسألهٔ ۶۴)

مسائل، بخش ۲

۱ تا ۲۱- با استفاده از شرایط کوشی ـ ریمان تعیین کنید کدام یک از توابع مسائل ۱-۱ تا ۱-۲۱ تحلیلی اند. همچنین، تحقیق کنید توابع زیر تحلیلی اند یا خیر

-۲۲ $y + ix$ -۲۳ $\frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ -۲۴ $\frac{y - ix}{x^2 + y^2}$

با استفاده از تعریف (۲-۱) برای $(d/dz)\ f(z)$ ، نشان دهید فرمولهای آشنای زیر برقرارند. ***راهنمایی:*** از روشهای مربوط به توابع حقیقی استفاده کنید.

-۲۵ $$\frac{d}{dz}[Af(z) + Bg(z)] = A\frac{df}{dz} + B\frac{dg}{dz}$$

-۲۶ $$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f(z)\frac{dg}{dz} + g(z)\frac{df}{dz}$$

-۲۷ $$\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{gf' - fg'}{g^2}\ ,\ \ g(z) \neq 0$$

-۲۸ $$\frac{d}{dz}f[g(z)] = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dz}$$ (به راهنمایی زیر توجه کنید.)

مسألهٔ ۲۸، قاعدهٔ زنجیره برای مشتق تابعی از یک تابع است. ***راهنمایی:*** فرض کنید که df/dg و dg/dz وجود دارند، و معادله‌هایی مانند(۳-۵) از فصل ۴ برای Δf و Δg بنویسید؛ Δg را در Δf جایگزین کنید؛ نتیجه را بر Δz تقسیم کنید، و حدّ بگیرید.

-۲۹ $\frac{d}{dz}(z^3) = 3z^2$ -۳۰ $\frac{d}{dz}(z^n) = n\,z^{n-1}$

-۳۱ $\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}$ ، $z \neq 0$. ***راهنمایی:*** بسط رشته‌ای $\ln\left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right)$ را بنویسید.

-۳۲ با استفاده از تعریف e^z برحسب رشتهٔ توانی آن [معادلهٔ (۸-۱) از فصل ۲]، و این قضیه (فصلهای ۱ و ۲) که از رشتهٔ توانی می‌توان جمله به جمله (در داخل دایرهٔ همگرایی) مشتق گرفت، و نتیجهٔ مسألهٔ ۳۰، نشان دهید که $(d/dz)(e^z) = e^z$ است.

-۳۳ با استفاده از تعاریف $\sin z$ و $\cos z$ [فصل ۲، معادلهٔ (۱۱-۴)] ، مشتقهای آنها را پیدا کنید. سپس با استفاده از مسألهٔ ۲۷، $(d/dz)\ (\cot z)$ را پیدا کنید، $z \neq n\pi$.

با استفاده از رشته‌هایی که از فصل ۱ می‌شناسید، رشته‌های توانی (حول مبدأ) توابع زیر را بنویسید. قضیهٔ III را به کار ببرید و دایرهٔ همگرایی هر رشته را پیدا کنید. آنچه که باید بجویید نزدیک‌ترین نقطه (در هر کجای صفحهٔ مختلط) به مبدأ است، که تابع در آن مشتق ندارد. در آن

صورت، دایرهٔ همگرایی مرکزش در مبدأ است و تا نقطهٔ یاد شده ادامه می‌یابد. رشته، در ***داخل*** دایره همگراست.

۳۴- $ln\,(۱ - z)$ ۳۵- $cos\,z$ ۳۶- $\sqrt{۱ + z^۲}$

۳۷- $tanh\,z$ ۳۸- $\dfrac{۱}{۲i + z}$ ۳۹- $\dfrac{z}{z^۲ + ۹}$

۴۰- $(۱ - z)^{-۱}$ ۴۱- e^{iz} ۴۲- $sinh\,z$

۴۳- در فصل ۱۲، معادله‌های (۵-۱) و (۵-۲)، تابع $\Phi(x,h)$ را به صورت رشته‌ای از توانهای h بسط دادیم. با استفاده از قضیهٔ III (رک راهنمایی‌های مسائل ۳۴ تا ۴۲ در بالا) نشان دهید به ازای $|h| < ۱$ و $-۱ \le x \le ۱$ رشتهٔ مزبور همگراست. در اینجا h، متغیر و x یک پارامتر است؛ شما باید آن مقدار (مختلط) h که Φ را نامتناهی می‌سازد پیدا کنید، و نشان دهید که مقدار مطلق این عدد مختلط (مستقل از x به هنگامی کـه $x^۲ \le ۱$ است) مساوی ۱ است. این ثابت می‌کند که اگر h حقیقی باشد رشتهٔ یاد شده به ازای $|h| < ۱$ همگراست.

۴۴- قسمت ۱ قضیهٔ IV را ثابت کنید. ***راهنمایی:*** تساوی مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوّم ضربدری را در نظر بگیرید؛ رک فصل ۴، انتهای بخش ۱.

۴۵- فرض کنید $f(z) = u + iv$ یک تابع تحلیلی، و $\mathbf{F}$ بردار $\mathbf{F} = v\mathbf{i} + u\mathbf{j}$ باشد. نشان دهید که معادله‌های $div\,\mathbf{F} = ۰$ و $curl\,\mathbf{F} = ۰$ هم‌ارز با معادله‌های کوشی - ریمان هستند.

۴۶- معادله‌های کوشی - ریمان را در مختصات قطبی پیدا کنید. ***راهنمایی:*** $z = re^{i\theta}$، $f(z) = u(r, \theta) + iv(r,\theta)$. روش معادله‌های (۲-۳) و (۲-۴) را دنبال کنید.

۴۷- با استفاده از نتایج مسألهٔ ۴۶ و روش مسألهٔ ۴۴، نشان دهید که u و v در صورتی در معادلهٔ لاپلاس در مختصات قطبی صدق می‌کنند (نگاه کنید به فصل ۱۰، بخش ۹) کـه $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد.

بـا استفاده از مختصات قطبی (مسألهٔ ۴۶)، تحقیق کنید آیا توابع زیر در معادله‌های کوشی - ریمان صدق می‌کنند یا خیر

۴۸- $\sqrt{z}$ ۴۹- $|z|$ ۵۰- $ln\,z$

۵۱- z^n ۵۲- $|z|^۲$ ۵۳- $|z|^{۱/۲}\, e^{i\theta/۲}$

نشان دهید که توابع زیر هماهنگ اند، یعنی، در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کنند، و برای هر یک از آنها $f(z)$ را طوری پیدا کنید که تابع داده شده بخش حقیقی آن باشد. نشان دهید که تابع $v(x, y)$ که پیدا می‌کنید نیز در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند.

۵۴- y ۵۵- $۳x^۲y - y^۳$ ۵۶- xy

۵۷- $x + y$ ۵۸- $\cosh y \cos x$ ۵۹- $e^x \cos y$

۶۰- $\ln (x^۲ + y^۲)$ ۶۱- $\dfrac{x}{x^۲ + y^۲}$ ۶۲- $e^{-y} \sin x$

۶۳- $\dfrac{y}{(۱-x)^۲ + y^۲}$

۶۴- می‌توان نشان داد که، اگر $u(x,y)$ تابع هماهنگی باشد که در $z_۰ = x_۰ + iy_۰$ تعریف شده است، در آن صورت تابع تحلیلی‌ای که $u(x,y)$ قسمت حقیقی آن است عبارت است از

$$f(z) = ۲u\left(\frac{z+\bar{z}_۰}{۲}, \frac{z-\bar{z}_۰}{۲i}\right) + \text{ثابت}$$

[رک مقالهٔ Stuble و Quart در مجلهٔ *Appl. Math.*، شمارهٔ ۳۷ (سال ۱۹۷۹)، صفحات ۷۹ تا ۸۱]. با استفاده از این فرمول، $f(z)$ را در مسائل ۵۴ تا ۶۳ پیدا کنید.

راهنمایی: اگر $u(۰,۰)$ تعریف شده باشد، $z_۰ = ۰$ را اختیار کنید.

۳- انتگرالهای پَربَندی

قضیهٔ V. **قضیهٔ کوشی** (که ذیلاً ثابت خواهیم کرد). فرض کنید C منحنی بستهٔ ساده‌ای[۱] است که در همه جا به جز احتمالاً در چند نقطهٔ معدود، حرکت خط مماس روی منحنی پیوسته است (یعنی، احتمالاً چند تا گوشه وجود دارد)، و در سایر جاها منحنی "هموار" می‌باشد). اگر $f(z)$ در داخل و بر روی C تحلیلی باشد، در آن صورت

$$\oint_{\text{بر روی } C} f(z)\, dz \qquad (۳-۱)$$

۱- منحنی ساده، منحنی‌ای است که خود را قطع نمی‌کند.

(این مانند آنچه در آنالیز برداری دیدیم یک انتگرال خطی است؛ در نظریهٔ متغیرهای مختلط، این انتگرال را ***انتگرال پربندی*** می‌نامند.)

اثبات:

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_C (u + iv)(dx + idy) \qquad (۲-۳)$$
$$= \oint_C (udx - v\, dy) + i \oint_C (vdx + udy)$$

بنا بر قضیهٔ گرین در صفحه (رک فصل ۶، بخش ۹)، اگر $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ و مشتقهای جزئی آنها در ناحیهٔ با اتصال سادهٔ R پیوسته باشند، داریم

$$\oint_C P\, dx + Q\, dy = \iint_{\text{مساحت داخل } C} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy \qquad (۳-۳)$$

که C منحنی سادهٔ بسته‌ای است در داخل R. منحنی C در راستایی پیموده می‌شود که مساحت در بر گرفته شده همیشه در طرف چپ باشد. انتگرال سطحی بر روی مساحت داخل C است، که C و مساحت تماماً در داخل R قرار دارند. با اعمال (۳-۳) بر اولین انتگرال (۳-۲)، داریم

$$\oint_C (u\, dx - v\, dy) = \iint_{\text{مساحت داخل } C} \left(- \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\, dy \qquad (۴-۳)$$

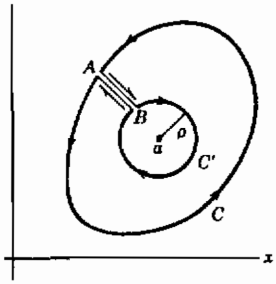
چون $f(z)$ تحلیلی است، u و v و مشتقهای آنها پیوسته‌اند؛ بنا بر معادله‌های کوشی - ریمان، انتگرالده طرف راست (۳-۴) در تمام نقاط مساحت انتگرال‌گیری صفر است، بنابراین انتگرال مساوی با صفر است. به همین ترتیب، دومین انتگرال (۳-۲) نیز صفر است؛ بنابراین (۳-۱) ثابت شده است.

قضیهٔ VI فرمول انتگرال کوشی (که ذیلاً ثابت خواهیم کرد). اگر $f(z)$ در داخل و بر روی منحنی بستهٔ سادهٔ C تحلیلی باشد، مقدار $f(z)$ در یک نقطهٔ $z = a$ واقع در داخل C با انتگرال پربندی زیر در امتداد C داده می‌شود:

$$f(a) = \frac{۱}{۲\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - a}\, dz$$

اثبات: فرض کنید a یک نقطهٔ ثابت در داخل منحنی بستهٔ سادهٔ C باشد و تابع

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{z - a} \tag{۵-۳}$$



شکل ۳-۱

راکه در آن $f(z)$ در داخل و بر روی C تحلیلی است در نظر بگیریم. فرض کنید C' دایرهٔ کوچکی به مرکز a و شعاع ρ (در داخل C) است. بُرِشی بین C و C' در امتداد AB ایجاد کنید (شکل ۳-۱)؛ برای روشن ساختن شکل، دو برش نشان داده شده است، امّا بعداً آنها را بر هم منطبق خواهیم کرد. اکنون در امتداد مسیر نشان داده شده در شکل ۳-۱ (در راستای نشان داده شده با پیکانها) از A، بر روی C، تا B، بر روی C'، و سپس برگشت به نقطهٔ A، انتگرال می‌گیریم. توجه داشته باشید که مساحت بین منحنی‌های C و C' همیشه در طرف چپ مسیر انتگرال‌گیری است و توسط آن در بر گرفته می‌شود. در این مساحت بین C و C'، تابع $\phi(z)$ تحلیلی است؛ قرص کوچک حول نقطهٔ $z = a$ راکه $\phi(z)$ در آن تحلیلی نیست حذف کرده‌ایم. به این ترتیب، قضیهٔ کوشی بر انتگرال بر روی مسیری متشکل از C (پاد ساعتگرد)، C' (ساعتگرد)، و دو بُرش یاد شده، اعمال می‌شود. وقتی دو برش را بر هم منطبق کنیم، دو انتگرال در راستاهای متضاد در امتداد برشها حذف می‌شوند. بنابراین داریم

$$\oint_{C\text{، پاد ساعتگرد}} \phi(z)\, dz + \oint_{C'\text{، ساعتگرد}} \phi(z)\, dz = ۰$$

یا

$$\oint_C \phi(z)\, dz = \oint_{C'} \phi(z)\, dz \tag{۶-۳}$$

که هر دو پاد ساعتگرد اند. در امتداد دایرهٔ C'، $z = a + \rho e^{i\theta}$، $dz = \rho i e^{i\theta} d\theta$، و (۳-۶) تبدیل می‌شود به

$$\oint_C \phi(z)\,dz = \oint_{C'} \phi(z)\,dz = \oint_{C'} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \qquad (۳\text{-}۷)$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{\rho e^{i\theta}} \rho i e^{i\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} f(z) i\,d\theta$$

چون محاسبهٔ ما برای هر مقدار (به اندازهٔ کافی کوچک) ρ معتبر است، برای ساده کردن فرمول فرض می‌کنیم $\rho \to 0$ (یعنی، $z \to a$). چون $f(z)$ در $z = a$ پیوسته است (این تابع در داخل C تحلیلی است)، $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$. آنگاه (۳-۷) تبدیل می‌شود به

$$\oint_C \phi(z)dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} f(z) i d\theta = \int_0^{2\pi} f(a) i d\theta = 2\pi i f(a) \qquad (۳\text{-}۸)$$

یا

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz \qquad a \text{ در داخل } C \qquad (۳\text{-}۹)$$

این فرمول انتگرال کوشی است. به دقت توجه کنید که نقطهٔ a داخل C است؛ اگر a خارج C می‌بود، در آن صورت $\phi(z)$ در همه جای داخل C تحلیلی بود و طبق قضیهٔ کوشی انتگرال صفر می‌شد. یک راه مفید نگاه کردن به (۳-۹) این است: اگر مقادیر $f(z)$ بر روی مرز یک ناحیه (منحنی C) داده شده باشند، در آن صورت (۳-۹) مقدار $f(z)$ را در هر نقطهٔ a واقع در داخل C به دست می‌دهد. با این تعبیر شما می‌توانید در فرمول انتگرال کوشی a را با z، و z را با یک متغیر کمکی متفاوت انتگرال‌گیری، مثلاً w، جایگزین کنید:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad z \text{ در داخل } C \qquad (۳\text{-}۱۰)$$

برای برخی از کاربردهای مهم این قضیه، مسائل ۱۱-۳ و ۱۱-۳۶ تا ۱۱-۳۸ را نگاه کنید.

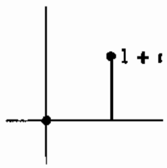
مسائل، بخش ۳

انتگرالهای خطی زیر را در صفحهٔ مختلط با انتگرال‌گیری مستقیم، یعنی، مانند فصل ۶، بخش ۸، **بدون** استفاده از قضیه‌های این فصل، حساب کنید. (اگر می‌بینید که می‌توان از قضیه‌ای استفاده

کرد، برای امتحان کردن نتیجه‌ای که به دست آورده‌اید آنرا به کار ببرید.)

۱- $\int_i^{۱+i} z\,dz$ در امتداد یک خط راست موازی با محور xها.

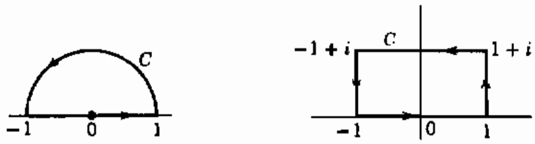
۲- $\int_{۰}^{۱+i} (z^{۲} - z)\,dz$



(الف) در امتداد خط $y = x$؛

(ب) در امتداد خط شکستهٔ شکل روبرو

۳- $\oint_C z^{۲}\,dz$ در امتداد مسیرهای نشان داده شده:



(ب) (الف)

۴- $\int dz/(۱ - z^{۲})$ در امتداد تمامی محور موهومی مثبت، یعنی، محور y؛ این مسیر را بیشتر به صورت $\int_{۰}^{i\infty} dz/(۱ - z^{۲})$ می‌نویسند.

۵- $\int e^{-z}\,dz$ در امتداد قسمت مثبت خط $y = \pi$؛ این مسیر را بیشتر به صورت $\int_{i\pi}^{\infty+i\pi} e^{-z}\,dz$ می‌نویسند.

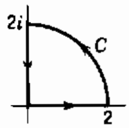
۶- $\int_{۱}^{i} z\,dz$ در امتداد مسیرهای نشان داده شده:

(ب) (الف)

۷- $\int \dfrac{dz}{۸i + z^{۲}}$ در امتداد خط $y = x$ از ۰ تا ∞ .

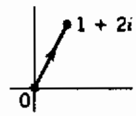
۸- $\int_{\pi}^{۲\pi+i\infty} e^{۲iz}\,dz$ ۹- $\int_{۱+۲i}^{\infty+۲i} \dfrac{dz}{(z - ۲i)^{۲}}$ ۱۰- $\int_{۲}^{۲+i\infty} ze^{iz}\,dz$

۱۱- $\oint_C (\bar{z} - ۳)\,dz$، که در آن C منحنی بستهٔ نشان داده شده در امتداد

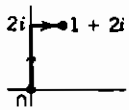


ربع اوّل دایرهٔ ۲ = $|z|$ ، و قسمتهای نشان داده شدهٔ محورهای x و y است. ***راهنمایی:*** سعی نکنید که قضیهٔ کوشی را به کار ببرید! (چرا نه؟ ***راهنمایی بیشتر:*** مسألهٔ ۲-۳ را ببینید.)

۱۲- $\int_0^{1+2i} |z|^2\, dz$ در امتداد مسیرهای نشان داده شده.



(الف)



(ب)

۱۳- در فصل ۶، بخش ۱۱، نشان دادیم که شرط لازم برای اینکه $\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ مستقل از مسیر انتگرال‌گیری، یعنی $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ بر روی یک منحنی بستهٔ سادهٔ C صفر باشد، این است که $curl\ \mathbf{F} = 0$، یا در دو بعد، $\partial F_y/\partial x = \partial F_x/\partial y$ باشد. با در نظر گرفتن (۳-۲)، نشان دهید که شرط همخوان برای اینکه $\oint_C f(z)\, dz$ صفر باشد این است که شرایط کوشی - ریمان برقرار باشد.

۱۴- در یافتن رشتهٔ فوریهٔ مختلط در فصل ۷، نشان دادیم که

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}\, e^{-imx}\, dx = 0 \quad ، \quad n \neq m$$

این مطلب را با اعمال قضیهٔ کوشی برای

$$\oint_C z^{\,n-m-1}\, dz \quad ، \quad n > m$$

که در آن C دایرهٔ ۱ = $|z|$ است، ثابت کنید. (توجه کنید که گرچه برای تحلیلی ساختن $z^{\,n-m-1}$ در $z = 0$ فرض می‌کنیم $n > m$ باشد، اثبات مشابهی با به کار بردن $z^{\,m-n-1}$ به ازای $n < m$، اثبات را برای تمام $n \neq m$ تکمیل می‌کند.)

۱۵- اگر $f(z)$ در داخل و بر روی دایرهٔ ۱ = $|z|$ تحلیلی باشد، نشان دهید

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} f(e^{i\theta})\, d\theta = 0$$

۱۶- اگر $f(z)$ در قرص ۲ ≥ $|z|$ تحلیلی باشد، $\int_0^{2\pi} e^{2i\theta} f(e^{i\theta})\, d\theta$ را حساب کنید.

با استفاده از قضیه یا فرمول انتگرال کوشی، انتگرالهای مسائل ۱۷ تا ۲۰ را حساب کنید.

۱۷- $\oint_C \frac{\sin z\, dz}{2z - \pi}$ ، کــه در آن: (الف) C ، دایــرهٔ $|z| = 1$ است. (ب) C ، دایــرهٔ $|z| = 2$ است.

۱۸- $\oint_C \frac{\sin 2z\, dz}{6z - \pi}$ ، که C دایرهٔ $|z| = 3$ است.

۱۹- $\oint_C \frac{e^{3z}\, dz}{z - \ln 2}$ ، در صورتی که C مربع با رؤوس $\pm 1 \pm i$ باشد.

۲۰- $\oint_C \frac{\cosh z\, dz}{2\ln 2 - z}$ ، در صورتی کـه C دایـرهٔ (الف) $|z| = 1$ ، و (ب) $|z| = 2$ باشد.

۲۱- با مشتق گرفتن از فرمول کوشی (۳-۹) یا (۳-۱۰)، مطلوب است

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)dw}{(w - z)^2} \quad \text{یا} \quad f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z - a)^2}$$

با n بار مشتق گرفتن، روابط زیر را به دست آورید:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)dw}{(w - z)^{n+1}} \quad \text{یا} \quad f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z - a)^{n+1}}$$

با استفاده از مسألهٔ ۲۱، انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۲۲- $\oint_C \frac{\sin 2z\, dz}{(6z - \pi)^3}$ ، که C دایرهٔ $|z| = 3$ است.

۲۳- $\oint_C \frac{e^{3z}\, dz}{(z - \ln 2)^4}$ ، که C مربع مسألهٔ ۱۹ است.

۲۴- $\oint_C \frac{\cosh z\, dz}{(2\ln 2 - z)^5}$ ، که C دایرهٔ $|z| = 2$ است.

۴- رشتهٔ لورن

قضیهٔ VII. ***قضیهٔ لورن*** [معادلهٔ (۴-۱)] (که بدون اثبات آنرا عنوان می‌کنیم). فرض کنید C_1 و C_2 دایره‌هایی به مرکز z_0 باشند، و $f(z)$ در ناحیهٔ R بین دایره‌ها تحلیلی باشد. در آن صورت $f(z)$ را می‌توان به شکل یک رشته به صورت زیر بسط داد

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots \quad (۴-۱)$$

که در ناحیه R همگراست.

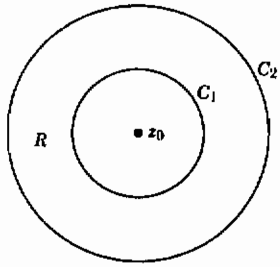
این رشته را ***رشتهٔ لورن*** می‌نامیم. رشتهٔ " b " در (۴-۱) ***بخش اصلی*** رشتهٔ لورن نامیده می‌شود.

مثال ۱ – رشته لورن زیر را در نظر بگیرید:

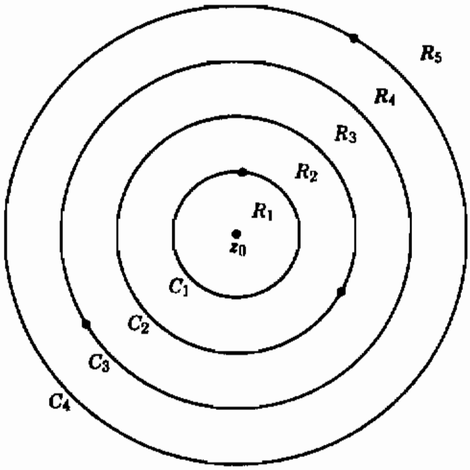
$$f(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \cdots + \left(\frac{z}{2}\right)^n + \cdots \quad (۴-۲)$$
$$+ \frac{2}{z} + 4\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{z^n} + \cdots\right)$$

ببینیم این رشته در کجا همگراست. نخست رشتهٔ با توانهای مثبت را در نظر بگیرید؛ با آزمون خارج قسمت (ر ک فصلهای ۱ و ۲)، این رشته به ازای $|z/2|<1$ ، یعنی $|z|<2$، همگراست. همچنین، رشتهٔ با توانهای منفی به ازای $|1/z|<1$ ، یعنی $|z|>1$ ، همگراست. به این ترتیب هر دو رشته به ازای $|z|$ بین ۱ و ۲، یعنی، در حلقهٔ بین دو دایرهٔ با شعاعهای ۱ و ۲ همگرایند (و بنابراین رشتهٔ لورن نیز همگراست).

ما به طور کلّی انتظار این نتیجه را داریم. رشتهٔ " a " یک رشتهٔ توانی است، و در ***داخل*** یک دایره (مثلاً دایرهٔ C_2 در شکل ۴-۱) همگراست. رشتهٔ " b "، رشته‌ای است از توانهای وارون z ، و به این ترتیب به ازای ثابت $>|1/z|$ همگراست؛ بنابراین رشتهٔ " b " در ***خارج*** یک دایره (مثلاً C_1 در شکل ۴-۱) همگراست. پس رشتهٔ لورن (در صورتی که اصلاً همگرا باشد) بین دو دایره همگراست. (توجه کنید که دایرهٔ داخل ممکن است یک نقطه و دایرهٔ خارجی ممکن است دارای شعاع نامتناهی باشد).



شکل ۴-۱



شکل ۴-۲

فرمولهای مربوط به ضرایب رابطهٔ (۴-۱) عبارت اند از (رک مسألهٔ ۵-۲)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_\circ)^{n+1}} \ ، \ b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_\circ)^{-n+1}} \qquad (۴-۳)$$

که C هر منحنی بستهٔ سادهٔ محیط بر $z_\circ$ و واقع در R است. با این همه، معمولاً این آسان‌ترین راه پیدا کردن یک رشتهٔ لورن نیست. مانند رشتهٔ توانی حول یک نقطه، رشتهٔ لورن (حول $z_\circ$) برای یک تابع در یک حلقهٔ مفروض (حول $z_\circ$) که تابع مورد نظر در آنجا تحلیلی است منحصر به فرد است، و ما می‌توانیم آنرا با هر روشی که می‌خواهیم پیدا کنیم. (مثالهای زیر را نگاه کنید.)
هشدار: اگر $f(z)$ دارای چند تکینگی منزوی باشد (شکل ۴-۲)، چندین حلقهٔ R_1، R_2، ... وجود دارد که $f(z)$ در آنها تحلیلی است؛ بنابراین چند رشتهٔ لورن متفاوت، به ازای هر حلقه یکی، برای $f(z)$ وجود دارد. رشتهٔ لورنی که ما معمولاً به دنبال آن هستیم رشته‌ای است که در نزدیکی $z_\circ$ همگراست. اگر هر گونه شکی دربارهٔ حلقهٔ همگرایی یک رشتهٔ لورن دارید، می‌توانید با آزمودن رشتهٔ "a" و رشتهٔ "b" به طور جداگانه آنرا برطرف کنید.

مثال ۲ – تابعی که ما رابطهٔ (۴-۲) را از آن به دست آوردیم عبارت بود از

$$f(z) = \frac{۱۲}{z(۲ - z)(۱ + z)} \qquad (۴-۴)$$

این تابع سه نقطهٔ تکین در $z=۰$، $z=۲$، و $z=-۱$ دارد. به این ترتیب دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ حول نقطهٔ $z_۰ = ۰$ در شکل ۴-۲، و سه رشتهٔ لورن حول نقطهٔ $z_۰ = ۰$ وجود دارد؛ یعنی در هر یک از سه ناحیهٔ $R_۱$ $(۰< |z| <۱)$، $R_۲$ $(۱< |z| <۲)$، $R_۳$ $(|z| > ۲)$ یک رشته معتبر است. برای پیدا کردن این رشته‌ها، با استفاده از کسرهای جزئی (مسألهٔ ۲) ابتدا $f(z)$ را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(z) = \frac{۴}{z}\left(\frac{۱}{۱+z} + \frac{۱}{۲-z}\right) \qquad (۵-۴)$$

اکنون، برای $۰ < |z| < ۱$، هر یک از کسرهای داخل پرانتز معادلهٔ (۴-۵) را برحسب توانهای z بسط می‌دهیم. با این کار خواهیم داشت (مسألهٔ ۲):

$$f(z) = -۳ + \frac{۹z}{۲} - \frac{۱۵z^۲}{۴} + \frac{۳۳z^۳}{۸} + \cdots + \frac{۶}{z} \qquad (۶-۴)$$

این رشتهٔ لورنی است برای $f(z)$ که در ناحیهٔ $۰<|z|<۱$ معتبر است. برای بـه دست آوردن رشتهٔ معتبر در ناحیهٔ $|z| > ۲$، کسرهای معادلهٔ (۴-۵) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{۱}{۱+z} = \frac{۱}{z}\,\frac{۱}{۱+۱/z} \quad ، \quad \frac{۱}{۲-z} = -\frac{۱}{z}\,\frac{۱}{۱-۲/z} \qquad (۷-۴)$$

و هر یک را برحسب توانهای $۱/z$ بسط می‌دهیم. با این کار، رشتهٔ لورنی که در $|z| > ۲$ معتبر است به دست می‌آید (مسألهٔ ۲):

$$f(z) = -\left(\frac{۱۲}{z^۳}\right)\left(۱ + \frac{۱}{z} + \frac{۳}{z^۲} + \frac{۵}{z^۳} + \frac{۱۱}{z^۴} + \cdots\right) \qquad (۸-۴)$$

بالأخره، برای به دست آوردن (۴-۲)، کسر $۱/(۲-z)$ را برحسب توانهای z بسط می‌دهیم، و کسر $۱/(۱+z)$ را برحسب توانهای $۱/z$ ؛ این کار رشتهٔ لورنی را به دست می‌دهد که به ازای $۱<|z|<۲$ همگراست. بنابراین، رشته‌های لورن (۴-۶)، (۴-۲)، و (۴-۸) همه معرف $f(z)$ در رابطهٔ (۴-۴)، امّا در سه ناحیه مختلف اند.

فرض کنید $z_۰$ در شکل ۴-۲ یک نقطهٔ منظّم یا یک نقطهٔ تکین منزوی باشد و هیچ نقطهٔ تکین دیگری در داخل $C_۱$ وجود نداشته باشد. $f(z)$ را حول $z_۰$ برحسب رشتهٔ لورن، که در داخل

C_1 همگراست (به جز احتمالاً در z_0)، بسط می‌دهیم؛ می‌گوییم $f(z)$ را به صورت رشتهٔ لورنی بسط داده‌ایم که در نزدیکی z_0 همگراست. سپس تعاریف زیر را داریم.

تعاریف

اگر همهٔ bها صفر باشند، $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی است، و z_0 را یک **نقطهٔ منظّم** می‌نامیم (مسألهٔ ۴-۱ را ملاحظه کنید.)

اگر $b_n \neq 0$، امّا همهٔ bهای بعد از b_n صفر باشند، گفته می‌شود $f(z)$ دارای یک **قطب مرتبهٔ** n در $z = z_0$ است. اگر $n = 1$ باشد، می‌گوییم $f(z)$ دارای یک **قطب ساده** است.

اگر تعداد bهایی که صفر نیستند نامتناهی باشد، $f(z)$ دارای یک ***تکینگی اساسی*** در $z = z_0$ است.

مثال ۳-

(الف)
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

در $z = 0$ تحلیلی است؛ ماندهٔ e^z در $z = 0$ صفر است.

(ب)
$$\frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

دارای یک قطب مرتبهٔ ۳ در $z = 0$ است؛ ماندهٔ e^z/z^3 در $z = 0$ مساوی $1/2!$ است.

(ج)
$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots$$

دارای یک تکینگی اساسی در $z = 0$ است؛ ماندهٔ $e^{1/z}$ در $z = 0$ مساوی ۱ است.

بیشتر توابعی که درنظر خواهیم گرفت تحلیلی خواهند بود مگر در محل قطبها - اینگونه توابع، توابع **مرومورف** خوانده می‌شوند. اگر $f(z)$ در $z = z_0$ دارای یک قطب باشد، در آن صورت وقتی $z \to z_0$، $|f(z)| \to \infty$. یک نمودار ۳ بعدی که در آن $|f(z)|$ به صورت عمودی بر روی یک صفحهٔ مختلط افقی رسم شود، در $z = z_0$ شبیه به یک قطب مخروطی شکل خواهد بود. اکثراً بدون پیداکردن رشتهٔ لورن می‌توان پی برد که یک تابع دارای قطب است

و مرتبهٔ قطب را نیز پیدا کرد.

مثال ۴-

(الف) $$\frac{z+3}{z^2(z-1)^3(z+1)}$$

دارای یک قطب مرتبهٔ ۲ در $z = 0$، یک قطب مرتبهٔ ۳ در $z = 1$، و یک قطب ساده در $z = -1$ است.

(ب) $\frac{\sin^2 z}{z^3}$ دارای یک قطب ساده در $z = 0$ است.

برای اینکه ببینیم این نتیجه‌ها درست‌اند، پیدا کردن رشتهٔ لورن را برای $f(z)=g(z)/(z-z_0)^n$ در نظر می‌گیریم. می‌نویسیم $g(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$، در این صورت رشتهٔ لورن برای $f(z)$ با جملهٔ $(z-z_0)^{-n}$ شروع می‌شود مگر اینکه $a_0 = 0$ باشد، یعنی مگر $g(z_0) = 0$. به این ترتیب مرتبهٔ قطب $f(z)$ مساوی n است مگر اینکه بعضی فاکتورها حذف شوند. در مثال ۴، رشتهٔ $\sin z$ با z شروع می‌شود، بنابراین $\sin^2 z$ دارای فاکتور z^2 است؛ بنابراین $(\sin^2 z)/z^3$ دارای یک قطب ساده در $z = 0$ است.

مسائل، بخش ۴

۱- نشان دهید که حاصل جمع یک رشتهٔ توانی که در یک دایرهٔ C همگراست، در داخل C تحلیلی است. ***راهنمایی:*** رک فصل ۲، بخش ۷، و فصل ۱، بخش ۱۱، و تعریف تابع تحلیلی.

۲- نشان دهید که معادلهٔ (۴-۴) را می‌توان به صورت (۴-۵) نوشت. سپس هر یک از کسرهای داخل پرانتز را در (۴-۵) برحسب توانهای z و توانهای $1/z$ بسط دهید [معادلهٔ (۴-۷) را ملاحظه کنید] و با ترکیب رشته‌ها، (۴-۶)، (۴-۸)، و (۴-۲) را به دست آورید.

برای هر یک از توابع زیر، چند جملهٔ اوّل هر یک از رشته‌های لورن حول مبدأ را پیدا کنید، یعنی، برای هر حلقهٔ بین نقاط تکین، یک رشته. ماندهٔ هر تابع را در مبدأ پیدا کنید. (***هشدار:*** برای پیدا کردن مانده، شما باید رشتهٔ لورنی را به کار ببرید که در نزدیکی مبدأ همگراست.) ***چند راهنمایی:*** مسألهٔ ۲ را ملاحظه کنید. مانند معادله‌های (۴-۵) و (۴-۷)، ازکسرهای جزئی استفاده

کنید. جملهٔ $1/(z-a)$ را برحسب توانهای z بسط دهید تا یک رشتهٔ همگرا برای $|z|<a$ به دست آید؛ و برحسب $1/z$ بسط دهید تا یک رشتهٔ همگرا برای $|z|>a$ به دست آید.

۳- $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ ۴- $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)^2}$ ۵- $\dfrac{z-1}{z^3(z-2)}$

۶- $\dfrac{1}{z^2(1+z)^2}$ ۷- $\dfrac{2-z}{1-z^2}$ ۸- $\dfrac{30}{(1+z)(z-2)(3+z)}$

در هر یک از توابع زیر، بیان کنید نقطهٔ مورد نظر منظّم است، تکینگی اساسی است، یا قطب است، و اگر قطب است از چه مرتبه‌ای است.

۹- (الف) $\dfrac{\sin z}{z}$ ، $z=0$ (ب) $\dfrac{\cos z}{z^3}$ ، $z=0$

(ج) $\dfrac{z^3-1}{(z-1)^3}$ ، $z=1$ (د) $\dfrac{e^z}{z-1}$ ، $z=1$

۱۰- (الف) $\dfrac{e^z-1}{z^2+4}$ ، $z=2i$ (ب) $\tan^2 z$ ، $z=\dfrac{\pi}{2}$

(ج) $\dfrac{1-\cos z}{z^4}$ ، $z=0$ (د) $\cos\left(\dfrac{\pi}{z-\pi}\right)$ ، $z=\pi$

۱۱- (الف) $\dfrac{e^z-1-z}{z^2}$ ، $z=0$ (ب) $\dfrac{\sin z}{z^3}$ ، $z=0$

(ج) $\dfrac{z^2-1}{(z-1)^2}$ ، $z=1$ (د) $\dfrac{\cos z}{(z-\pi/2)^4}$ ، $z=\dfrac{\pi}{2}$

۱۲- (الف) $\dfrac{\sin z-z}{z^6}$ ، $z=0$ (ب) $\dfrac{z^2-1}{(z^2+1)^2}$ ، $z=i$

(ج) $z\,e^{1/z}$ ، $z=0$

(د) $\Gamma(z)$ ، $z=0$ [رک فصل ۱۱، معادلهٔ (۱-۴)]

۵- قضیهٔ مانده‌ها

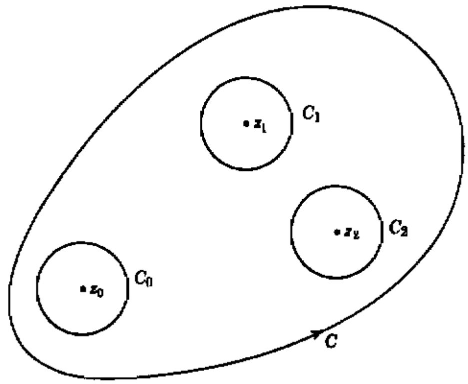
فرض کنید z_0 یک نقطهٔ تکین منزوی متعلق به $f(z)$ باشد. می‌خواهیم مقدار $\oint_C f(z)\,dz$ را حول یک منحنی بستهٔ سادهٔ محیط بر z_0 که هیچ تکینگی دیگری در بر ندارد پیدا کنیم. $f(z)$

را برحسب رشتهٔ لورن (۴-۱) حول $z = z_{\circ}$ که در نزدیکی $z = z_{\circ}$ همگراست بسط می‌دهیم. طبق قضیهٔ کوشی (V)، انتگرال رشتهٔ " a " صفر است زیرا این قسمت تحلیلی است. برای محاسبهٔ انتگرالهای جملات رشتهٔ " b " در (۴-۱)، مانند (۳-۶)، (۳-۷)، و شکل ۳-۱، انتگرالهای حول C را با انتگرالهای حول دایرهٔ C' به مرکز $z_{\circ}$ و شعاع ρ جایگزین می‌کنیم. بر روی C'، $z = z_{\circ} + \rho e^{i\theta}$؛ از محاسبهٔ انتگرال جملهٔ b_1 در (۴-۱)، داریم

$$\oint_C \frac{b_1\, dz}{(z-z_{\circ})} = b_1 \int_{\circ}^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\theta} d\theta}{\rho e^{i\theta}} = 2\pi i b_1 \qquad (۵-۱)$$

به طور خیلی سر راست (مسألهٔ ۱) می‌توان نشان داد که انتگرالهای همهٔ جملات b_n دیگر صفرند. بنابراین $\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i b_1$ ، یا چون b_1ماندهٔ $f(z)$ در $z = z_{\circ}$ نامیده می‌شود می‌توانیم بگوییم

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \times (\text{ماندهٔ } f(z) \text{ در نقطهٔ تکین داخل } C)$$



شکل ۵-۱

تنها جمله‌ای از رشتهٔ لورن که در فرایند انتگرال‌گیری جان سالم به در برده است جملهٔ b_1 است؛ دلیل اصطلاح " مانده " را می‌بینید چیست. اگر چند نقطهٔ تکینگی منزوی در داخل C، مثلاً در $z_{\circ}$، z_1، z_2، ... وجود داشته باشد، مانند شکل ۵-۱ دایره‌های کوچکی در اطراف هر یک رسم می‌کنیم به طوری که $f(z)$ در ناحیهٔ بین C و دایره‌ها تحلیلی باشد. سپس با معرفی برشهایی مانند آنچه که در اثبات فرمول انتگرال کوشی دیدیم، پی می‌بریم که انتگرال ساعتگرد بر روی C، به اضافهٔ انتگرالهای پاد ساعتگرد بر روی دایره‌ها، صفر است (زیرا انتگرالهای روی

برشها یکدیگر را حذف می‌کنند)، یا انتگرال بر روی C حاصل‌جمع انتگرالهای روی دایره‌هاست (همه پاد ساعتگرد). امّا طبق (۵-۱)، انتگرال بر روی هر دایره مساوی است با $2\pi i$ ضربدر ماندهٔ $f(z)$ در نقطهٔ تکین داخل. به این ترتیب **قضیهٔ مانده‌ها** را داریم:

(۵-۲) $$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \times (\text{حاصل‌جمع مانده‌های } f(z) \text{ در داخل } C)$$
که انتگرال روی C پاد ساعتگرد است.

قضیهٔ مانده‌ها در محاسبهٔ بسیاری از انتگرالهای معین مفید است؛ این را در بخش ۷ دنبال خواهیم کرد. امّا ابتدا، در بخش ۶، باید چند روش برای پیداکردن مانده‌ها ارائه کنیم.

مسائل، بخش ۵

۱- اگر C دایره‌ای به شعاع ρ حول z_0 باشد، نشان دهید

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 2\pi i \quad \text{اگر } n = 1 \text{ ،}$$

امّا به ازای سایر مقادیر درست n ، چه مثبت و چه منفی، انتگرال صفر است. ***راهنمایی***: از این واقعیت استفاده کنید که بر روی C ، $z = z_0 + \rho\, e^{i\theta}$.

۲- فرمولهای (۴-۳) را برای ضرایب رشتهٔ لورن ثابت کنید. ***راهنمایی***: برای به دست آوردن a_n ، معادلهٔ (۴-۱) را بر $(z-z_0)^{n+1}$ تقسیم کنید و نتایج مسألهٔ ۱ را برای محاسبهٔ انتگرالهای جملات رشته به کار ببرید. برای پیداکردن b_n نیز از روش مشابهی استفاده کنید.

۳- فرمول انتگرال کوشی (۳-۹) را از قضیهٔ مانده‌ها (۵-۲) به دست آورید.

۶- روشهای پیداکردن مانده‌ها

الف - رشتهٔ لورن اگر نوشتن رشتهٔ لورن مربوط به $f(z)$ حول $z = z_0$ که در نزدیکی z_0 معتبر است آسان باشد، مانده، صرفاً ضریب b_1 جملهٔ $1/(z-z_0)$ است. **هشدار**: اطمینان حاصل کنید که بسط حول $z = z_0$ را بنویسید؛ رشته‌هایی را که برای e^z ، $\sin z$ ، و غیره به خاطر سپرده‌اید، بسطهای حول $z = 0$ اند و بنابراین فقط برای پیداکردن مانده‌ها در مبدأ می‌توانند به

کار روند (رک بخش ۴، مثال ۳). مثال دیگری ارائه کنیم: با فرض $f(z) = e^z/(z-۱)$، ماندهٔ $R(۱)$ مربوط به $f(z)$را در $z=۱$ پیدا کنید. می‌خواهیم e^z را برحسب توانهای $z-۱$ بسط بدهیم؛ می‌نویسیم

$$\frac{e^z}{z-۱} = \frac{e \cdot e^{z-۱}}{z-۱} = \frac{e}{z-۱}\left[۱ + (z-۱) + \frac{(z-۱)^۲}{۲!} + \cdots\right]$$
$$= \frac{e}{z-۱} + e + \cdots$$

بنابراین ماندهٔ مورد نظر ضریب $۱/(z-۱)$ ، یعنی

$$R(۱) = e$$

است.

ب - قطب ساده اگر $f(z)$ در $z = z_\circ$ دارای یک قطب ساده باشد، مانده را با ضرب کردن $f(z)$در $(z-z_\circ)$ و محاسبهٔ نتیجه در $z = z_\circ$ پیدا می‌کنیم (مسألهٔ ۱۰)

مثال ۱- $R(-\frac{۱}{۲})$ و $R(۵)$ را برای

$$f(z) = \frac{z}{(۲z+۱)(۵-z)}$$

پیدا کنید.

$f(z)$ را در $(z+\frac{۱}{۲})$ ، [**هشدار**: نه در $(۲z+۱)$] ، ضرب کنید و نتیجه را در $z = -\frac{۱}{۲}$ حساب کنید:

$$(z+\frac{۱}{۲})f(z) = (z+\frac{۱}{۲})\frac{z}{(۲z+۱)(۵-z)} = \frac{z}{۲(۵-z)}$$
$$R(-\frac{۱}{۲}) = \frac{-۱/۲}{۲(۵+۱/۲)} = -\frac{۱}{۲۲}$$

همچنین،

$$(z-۵)f(z) = (z-۵)\frac{z}{(۲z+۱)(۵-z)} = -\frac{z}{۲z+۱}$$
$$R(۵) = -\frac{۵}{۱۱}$$

مثال ۲- $R(\circ)$ مربوط به $f(z) = (\cos z)/z$ را پیدا کنید.

چون $z f(z) = \cos z$ است، داریم

$$R(\circ) = (\cos z)_{z=\circ} = \cos \circ = 1$$

برای به کار بردن این روش، ممکن است در بعضی مسائل مجبور شویم یک شکل واسط را حساب کنیم، بنابراین در حالت کلّی می‌نویسیم

(۶-۱) وقتی که $z_\circ$ یک قطب ساده باشد $\quad R(z_\circ) = \lim\limits_{z \to z_\circ} (z - z_\circ) f(z)$

مثال ۳- ماندهٔ $\cot z$ را در $z = \circ$ پیدا کنید.

طبق (۶-۱)

$$R(\circ) = \lim_{z \to \circ} \frac{z \cos z}{\sin z} = \cos(\circ) \cdot \lim_{z \to \circ} \frac{z}{\sin z} = 1 \times 1 = 1$$

اگر، چنانکه اغلب اتفاق می‌افتد، $f(z)$ را بتوان به صورت $g(z)/h(z)$ نوشت، که $g(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی و مخالف صفر است و $h(z_\circ) = \circ$ می‌باشد، در آن صورت (۶-۱) طبق قاعدهٔ هوپیتال یا تعریف $h'(z)$ (مسألهٔ ۱۱) تبدیل می‌شود به

(۶-۲) $\quad R(z_\circ) = \dfrac{g(z_\circ)}{h'(z_\circ)}$ در صورتی که $\begin{cases} f(z) = g(z)/h(z) & \text{و،} \\ g(z_\circ) = \text{ثابت متناهی} \neq \circ & \text{و،} \\ h(z_\circ) = \circ \ \text{و} \ h'(z_\circ) \neq \circ \end{cases}$

بیشتر اوقات (۶-۲) مناسب‌ترین راه پیدا کردن مانده را در یک قطب ساده بیان می‌کند.

مثال ۴- ماندهٔ $(\sin z)/(1 - z^4)$ را در $z = i$ پیدا کنید.

مطابق (۶-۲) داریم

$$R(i) = \left.\frac{\sin z}{-4z^3}\right|_{z=i} = \frac{\sin i}{-4i^3} = \frac{e^{-1} - e}{(2i)(4i)} = \frac{1}{8}(e - e^{-1}) = \frac{1}{4}\sinh 1$$

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم که، بدون پیدا کردن رشتهٔ لورن، از کجا می‌دانید که یک تابع دارای یک قطب ساده است. شاید ساده‌ترین جواب این باشد که اگر حدّ به دست آمده از (۶-۱) مقدار ثابتی (مخالف صفر یا ∞) باشد، در آن صورت $f(z)$ دارای یک قطب ساده **هست** و مقدار ثابت همان «مانده» است. [اگر حدّ مساوی صفر باشد، تابع تحلیلی و مانده مساوی صفر است؛ اگر حدّ بینهایت باشد، مرتبهٔ قطب بالاتر است.] با این همه، اغلب می‌توانید پیشاپیش مرتبهٔ قطب را تشخیص بدهید. [رک پایان بخش ۴، برای مورد ساده‌ای که در آن $(z-z_\circ)^n$ ضریبی از مخرج است.] فرض کنید $f(z)$ را به شکل $g(z)/h(z)$ بنویسیم، که $g(z)$ و $h(z)$ تحلیلی اند. در آن صورت شما می‌توانید $g(z)$ و $h(z)$ را به صورت رشتهٔ توانی برحسب $(z-z_\circ)$ در نظر بگیرید. اگر توان $(z-z_\circ)$ در مخرج **یک** بار بیش از صورت باشد، در این صورت $f(z)$ دارای یک قطب ساده در $z_\circ$ است. به عنوان مثال،

$$z \cot^{\text{۲}} z = \frac{z \cos^{\text{۲}} z}{\sin^{\text{۲}} z} = \frac{z(\text{۱}-z^{\text{۲}}/\text{۲}+\cdots)^{\text{۲}}}{(z-z^{\text{۳}}/\text{۳}!+\cdots)^{\text{۲}}} = \frac{z(\text{۱}+\cdots)}{z^{\text{۲}}(\text{۱}+\cdots)}$$

دارای یک قطب ساده در $z = \circ$ است. با همین روش می‌توانیم پی ببریم که آیا یک تابع دارای قطبی از هر مرتبه هست یا خیر.

ج - ***قطبهای چندگانه*** وقتی $f(z)$ دارای یک قطب از مرتبهٔ n باشد، از روش زیر می‌توان برای پیدا کردن مانده‌ها استفاده کرد.

> $f(z)$ را در $(z-z_\circ)^m$ ضرب کنید، که در آن m عدد درستی است بزرگتر یا مساوی با مرتبهٔ n قطب، از نتیجه $(m-\text{۱})$ بار مشتق بگیرید، تقسیم بر $(m-\text{۱})!$ کنید، و عبارت حاصل را به ازای $z = z_\circ$ حساب کنید.

با استفاده از رشتهٔ لورن (۴-۱) برای $f(z)$ و نشان دادن اینکه نتیجهٔ فرایند خلاصه شده در بالا مساوی $b_\text{۱}$ است می‌توان به آسانی قاعدهٔ بالا را ثابت کرد.

مثال ۵- ماندهٔ $f(z) = (z \sin z)/(z-\pi)^{\text{۳}}$ را در $z = \pi$ پیدا کنید.

m را مساوی با ۳ اختیار می‌کنیم تا مخرج را پیش از مشتق گرفتن حذف کنیم؛ این برای m، انتخاب مجازی است زیرا مرتبهٔ قطب $f(z)$ در π بزرگتر از ۳ نیست چون $z \sin z$ در π متناهی

است. (در واقع قطب از مرتبهٔ ۲ است، امّا ما به این واقعیت نیازی نداریم.) به این ترتیب با دنبال کردن قاعدهٔ بالا خواهیم داشت

$$R(\pi) = \frac{۱}{۲!}\frac{d^۲}{dz^۲}(z\,sin\,z)\bigg|_{z=\pi} = \frac{۱}{۲}\left[-z\,sin\,z + ۲\,cos\,z\right]_{z=\pi} = -۱$$

(برای محاسبهٔ سریع مشتق، از قاعدهٔ لایب‌نیز برای مشتق گرفتن از یک حاصل‌ضرب استفاده کنید؛ ر ک فصل ۱۲، بخش ۳.)

مسائل، بخش ۶

رشتهٔ لورن را برای توابع زیر، حول نقاط مورد نظر پیدا کنید؛ سپس ماندهٔ تابع را در آن نقطه حساب کنید. (مطمئن شوید رشتهٔ لورنی را دارید که در نزدیکی نقطه همگراست.)

۱- $\frac{۱}{z(z+۱)}$ ، $z=۰$ ۲- $\frac{۱}{z(z-۱)}$ ، $z=۱$ ۳- $\frac{sin\,z}{z^۴}$ ، $z=۰$

۴- $\frac{cosh\,z}{z^۲}$ ، $z=۰$ ۵- $\frac{e^z}{z^۲-۱}$ ، $z=۱$ ۶- $sin\,\frac{۱}{z}$ ، $z=۰$

۷- $\frac{sin\,\pi z}{۴z^۲-۱}$ ، $z=\frac{۱}{۲}$ ۸- $\frac{۱+cos z}{(z-\pi)^۲}$ ، $z=\pi$ ۹- $\frac{۱}{z^۲-۵z+۶}$ ، $z=۲$

۱۰- با اعمال قاعدهٔ (ب) بر (۴-۱) ثابت کنید که این قاعده درست است.

۱۱- رابطهٔ (۶-۲) را با به‌کار بردن تعریف حدّی مشتق $h'(z)$ به جای قاعدهٔ هوپیتال به دست آورید. به یاد آورید که $h(z_۰) = ۰$ است زیرا فرض ما بر این است که $f(z)$ در $z_۰$ دارای یک قطب ساده است.

۱۲- قاعدهٔ (ج) را برای پیداکردن مانده در یک قطب چندگانه، با اعمال آن بر (۴-۱) ثابت کنید. توجه کنید که این قاعده برای $n = ۱$ (قطب ساده) نیز معتبر است هر چند که ما به ندرت آنرا برای این منظور به کار می‌بریم.

۱۳- با استفاده از (۳-۹) قاعدهٔ (ج) را ثابت کنید. **چند راهنمایی:** اگر $f(z)$ در $z = a$ دارای قطبی از مرتبهٔ n باشد، در آن صورت با $g(z)$ تحلیلی در $z = a$، $f(z) = g(z)/(z-a)^n$. طبق (۳-۹)،

$$\int_C \frac{g(z)}{(z-a)}\,dz = ۲\pi i g(a)$$

که C پربندی است که a را در بر دارد امّا هیچ تکینگی دیگری را شامل نیست. از این معادله $(n-1)$ بار نسبت به a مشتق بگیرید. (یا، مسألهٔ ۳-۲۱ را به کار ببرید.)

مانده‌های توابع زیر را در نقاط مورد نظر پیدا کنید. سعی کنید از آسان‌ترین روش استفاده نمایید.

۱۴- $\dfrac{1}{(3z+2)(2-z)}$ در $z=-\dfrac{2}{3}$ و در $z=2$

۱۵- $\dfrac{1}{(1-2z)(5z-4)}$ در $z=\dfrac{1}{2}$ و در $z=\dfrac{4}{5}$

۱۶- $\dfrac{z-2}{z(1-z)}$ در $z=0$ و در $z=1$

۱۷- $\dfrac{z+2}{4z^2-1}$ در $z=\dfrac{1}{2}$ و در $z=-\dfrac{1}{2}$

۱۸- $\dfrac{z+2}{z^2+9}$ در $z=3i$

۱۹- $\dfrac{\sin^2 z}{2z-\pi}$ در $z=\dfrac{\pi}{2}$

۲۰- $\dfrac{z}{1-z^4}$ در $z=i$

۲۱- $\dfrac{z^2}{z^4+16}$ در $z=\sqrt{2}(1+i)$

۲۲- $\dfrac{e^{2z}}{1+e^z}$ در $z=i\pi$

۲۳- $\dfrac{e^{iz}}{9z^2+4}$ در $z=\dfrac{2i}{3}$

۲۴- $\dfrac{1-\cos 2z}{z^3}$ در $z=0$

۲۵- $\dfrac{e^{2z}-1}{z^2}$ در $z=0$

۲۶- $\dfrac{e^{2\pi iz}}{1-z^3}$ در $z=e^{2\pi i/3}$

۲۷- $\dfrac{\cos z}{1-2\sin z}$ در $z=\dfrac{\pi}{6}$

۲۸- $\dfrac{z+2}{(z^2+9)(z^2+1)}$ در $z=3i$

۲۹- $\dfrac{e^{2z}}{4\cosh z-5}$ در $z=\ln 2$

۳۰- $\dfrac{\cosh z-1}{z^7}$ در $z=0$

۳۱- $\dfrac{e^{3z}-3z-1}{z^4}$ در $z=0$

۳۲- $\dfrac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}$ در $z=2i$

۳۳- $\dfrac{1+\cos z}{(\pi-z)^3}$ در $z=\pi$

۳۴- $\dfrac{z-2}{z^2(1-2z)^2}$ در $z=0$ و در $z=\dfrac{1}{2}$

۳۵- $\dfrac{z}{(z^۲+۱)^۲}$ در $z=i$

۱۴´ تا ۳۵´. با استفاده از قضیهٔ مانده‌ها، انتگرالهای پربندی هر یک از توابع مسائل ۱۴ تا ۳۵ را بر روی دایره‌ای به شعاع $\frac{۳}{۲}$ و به مرکز مبدأ حساب کنید. به دقت بررسی کنید و ببینید کدام نقاط تکین در داخل دایره اند. شما می‌توانید تا آنجا که ممکن است از نتایج مسائل قبل استفاده کنید، امّا ممکن است مجبور باشید چند ماندهٔ بیشتر حساب کنید.

۳۶- به ازای z مختلط، $J_p(z)$ را می‌توان با رشتهٔ (۱۲-۹) در فصل ۱۲ تعریف کرد. با استفاده از این تعریف، رشتهٔ لورن حول $z = ۰$ را برای $z^{-۳}J_۰(z)$ پیدا کنید. ماندهٔ تابع را در $z = ۰$ پیدا کنید.

۷- محاسبهٔ انتگرالهای معین با استفاده از قضیهٔ مانده‌ها

می‌خواهیم با استفاده از (۵-۲) و روشهای بخش ۶، چند نوع مختلف از انتگرالهای معین را حساب کنیم. بهترین راه نشان دادن روشها، ذکر چند مثال است.

مثال ۱- مطلوب است محاسبهٔ
$$I = \int_۰^{۲\pi} \frac{d\theta}{۵+ ۴\cos\theta}$$

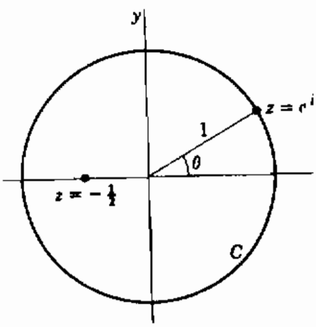
اگر تغییر متغیر $z = e^{i\theta}$ را در نظر بگیریم، در آن صورت وقتی θ از ۰ تا ۲π تغییر می‌کند، z دایرهٔ واحد $|z| = ۱$ (شکل ۷-۱) را در جهت پاد ساعتگرد می‌پیماید، و ما با یک انتگرال پربندی روبرو هستیم.

این انتگرال را با استفاده از قضیهٔ مانده‌ها حساب می‌کنیم. اگر $z = e^{i\theta}$ باشد، داریم

$$dz = ie^{i\theta}\, d\theta = iz\, d\theta \quad \text{یا} \quad d\theta = \frac{۱}{iz}\, dz،$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{۲} = \frac{z+(۱/z)}{۲}$$

با جایگذاری در I، داریم



شکل ۷-۱

$$I = \oint_C \frac{(۱/iz)\,dz}{۵ + ۲(z + ۱/z)} = \frac{۱}{i} \oint_C \frac{dz}{۵z + ۲z^۲ + ۲}$$
$$= \frac{۱}{i} \oint_C \frac{dz}{(۲z+۱)(z+۲)}$$

که C دایرهٔ واحد است. انتگرالده دارای قطبهایی در $z = -\frac{۱}{۲}$ و $z = -۲$ است؛ فقط $z = -\frac{۱}{۲}$ در داخل پربند C است. ماندهٔ $۱/[(۲z+۱)(z+۲)]$ در $z = -\frac{۱}{۲}$ عبارت است از

$$R(-\tfrac{۱}{۲}) = \lim_{z \to -۱/۲} (z+\tfrac{۱}{۲}) \cdot \frac{۱}{(۲z+۱)(z+۲)} = \left.\frac{۱}{۲(z+۲)}\right|_{z=-۱/۲} = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین مطابق قضیهٔ مانده‌ها

$$I = \frac{۱}{i}\, ۲\pi i R\,(-\tfrac{۱}{۲}) = ۲\pi \cdot \frac{۱}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}$$

این روش را می‌توان برای محاسبهٔ انتگرال هر تابع گویایی از $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بین صفر و ۲π به کار برد، مشروط بر اینکه مخرج هیچ گاه به ازای هیچ مقداری از θ صفر نشود. اگر انتگرالده زوج باشد شما می‌توانید انتگرال را از صفر تا π پیدا کنید، زیرا انتگرال از صفر تا ۲π یک تابع تناوبی زوج، دو برابر انتگرال از صفر تا π همان تابع است. (رک فصل ۷، بخش ۹: مبحث توابع فرد و زوج.)

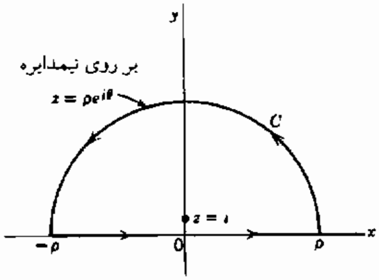
مثال ۱ – انتگرال $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{۱+x^۲}$ را حساب کنید.

در اینجا می‌توانستیم به آسانی انتگرال نامعین را پیدا کنیم و با استفاده از آن به کمک روشهای ابتدایی I را حساب نماییم. با این همه، این مسألهٔ ساده را با انتگرال‌گیری پربندی حل خواهیم کرد تا روشی را نشان بدهیم که برای مسائل مشکل‌تر مفید است.

این بار در پی تغییر متغیر در I بر نمی‌آییم. با انتگرال متفاوتی شروع می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان I را از آن پیدا کرد. انتگرالِ

$$\oint_C \frac{dz}{۱+z^۲}$$

را در نظر بگیرید که در آن C محیط بستهٔ نیمدایرهٔ نشان داده شده در شکل ۷-۲ است. به ازای $\rho > ۱$، نیمدایره فقط نقطهٔ تکین $z = i$ را در بر می‌گیرد؛ ماندهٔ انتگرالده در $z = i$ عبارت است از



شکل ۷-۲

$$R(i) = \lim_{z \to i} (z-i)\frac{۱}{(z-i)(z+i)} = \frac{۱}{۲i}$$

به این ترتیب مقدار انتگرال پربندی عبارت است از $\pi = (۱/۲i)$ $۲\pi i$ است. انتگرال را دو پاره می‌کنیم: (۱) یک انتگرال بر روی محور xها از $-\rho$ تا ρ؛ برای این پاره $z = x$؛ (۲) و یک انتگرال بر روی نیمدایره، که در آن $z = \rho e^{i\theta}$ است. در این صورت داریم

$$\int_C \frac{dz}{۱ + z^۲} = \int_{-\rho}^{\rho} \frac{dx}{۱+x^۲} + \int_{۰}^{\pi} \frac{\rho i e^{i\theta}\, d\theta}{۱+\rho^۲ e^{۲i\theta}} \qquad (۱-۷)$$

می‌دانیم که مقدار انتگرال پربندی، صرف نظر از اینکه e چقدر بزرگ شود، مساوی π است زیرا در نیم ـ صفحهٔ فوقانی غیر از $z = i$ نقطهٔ تکین دیگری وجود ندارد. فرض کنید $\rho \to \infty$، در این صورت دومین انتگرال در طرف راست (۷-۱) به سمت صفر میل می‌کند زیرا صورت کسر شامل ρ و مخرج آن شامل $\rho^۲$ است. بنابراین اوّلین جمله در طرف راست به ازای $\rho \to \infty$، به سمت π (مقدار انتگرال پربندی) میل می‌کند، و داریم

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{۱ + x^۲} = \pi$$

این روش را می‌توان برای محاسبهٔ هر انتگرالی به شکل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای هستند و درجهٔ Q حداقل دو درجه بزرگتر از درجهٔ P است، و Q هیچ صفر حقیقی (یعنی، صفرهای واقع بر محور xها) ندارد، به کاربرد. اگر انتگرالده

$P(x)/Q(x)$ یک تابع زوج باشد، می‌توانیم انتگرال را از صفر تا ∞ نیز پیدا کنیم.

مثال ۳- انتگرال $I = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{1+x^2}$ را حساب کنید.

انتگرال پربندی

$$\oint_C \frac{e^{iz}\, dz}{1+z^2}$$

را که در آن C همان پربند نیمدایرهٔ مثال ۲ است در نظر می‌گیریم. نقطهٔ تکین در بر گرفته شده بار دیگر $z = i$ است، و مانده در آنجا عبارت است از

$$\lim_{z\to i} (z - i) \frac{e^{iz}}{(z - i)(z + i)} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2ie}$$

مقدار انتگرال پربندی عبارت است از $2\pi i(1/2ie) = \pi/e$. مانند مثال ۲، انتگرال پربندی را به صورت حاصل جمع دو انتگرال می‌نویسیم:

$$\oint_C \frac{e^{iz}dz}{1+z^2} = \int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{ix}dx}{1+x^2} + \int_{\substack{\text{بر روی نیمهٔ فوقانی} \\ z=\rho e^{i\theta}}} \frac{e^{iz}dz}{1+z^2} \qquad (۷-۲)$$

مثل قبل، می‌خواهیم نشان بدهیم که دوّمین انتگرال طرف راست (۷-۲) وقتی $\rho \to \infty$، به سمت صفر میل می‌کند. این انتگرال مانند انتگرال همخوان در (۷-۱) است با تفاوت ضریب e^{iz} . اکنون

$$|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = |e^{ix}|\ |e^{-y}| = e^{-y} \leq 1$$

زیرا بر روی پربند مورد نظر ما $y \geq 0$ است. چون $|e^{iz}| \leq 1$ است، این ضریب در اثبات ارائه شده در مثال ۲ مبنی بر این که انتگرال بر روی نیمدایره وقتی $\rho \to \infty$، به سمت صفر میل می‌کند، تغییری ایجاد نمی‌کند. به این ترتیب داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e}$$

یا با اختیار کردن قسمت حقیقی دو طرف این معادله،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}$$

چون انتگرالده $(\cos x)/(1+x^2)$ تابع زوجی است، انتگرال از صفر تا ∞ مساوی نصف انتگرال از $-\infty$ تا ∞ است. بنابراین داریم

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2e}$$

توجه کنید که اگر در انتگرالهای بالا e^{iz} را با e^{imz} $(m > 0)$ جایگزین می‌کردیم راه حل مسأله هیچ فرقی نمی‌کرد. در آن صورت در جایی که گفتیم $e^{-y} \leq 1$ (چون $y \geq 0$)، باید شرط می‌کردیم $e^{-my} \leq 1$ (به ازای $y \geq 0$)، که اگر $m > 0$ باشد، درست است. [برای $m < 0$، **می‌توانستیم** یک نیمدایره در نیم صفحهٔ تحتانی ($y < 0$) به کار ببریم؛ در آن صورت به ازای $y \leq 0$، $e^{my} \leq 1$ می‌بود. با این همه، این یک مشکل آفرینی غیر ضروری در محاسبهٔ انتگرالهای شامل $\sin mx$ یا $\cos mx$ است زیرا **می‌توانیم** در آن صورت m را مثبت انتخاب کنیم.] گرچه در اینجا فرض کرده‌ایم (مانند مثال ۲) که $Q(x)$ حداقل ۲ درجه بالاتر از $P(x)$ است، ولی اثبات جامع‌تر (رک کتابهای متغیرهای مختلط) نشان می‌دهد که درجهٔ حداقل یکی بالاتر برای اینکه انتگرال

$$\int \frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{imz}\, dz$$

را بر روی نیمدایرهٔ گفته شده، وقتی که $\rho \to \infty$، صفر کند، کافی است. بنابراین، به شرطی در نیم - صفحهٔ فوقانی

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{imx}\, dx = 2\pi i \times (\text{حاصل جمع مانده‌های } \frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{imz})$$

است که:

$P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای باشند، و

$Q(x)$ هیچ صفر حقیقی نداشته باشد، و

درجهٔ $Q(x)$ حداقل یکی بیش از درجهٔ $P(x)$ باشد، و $m > 0$ باشد.

سپس، با اختیار کردن قسمتهای حقیقی و موهومی، انتگرالهای

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos mx \, dx \quad ، \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin mx \, dx$$

را پیدا می‌کنیم.

مثال ۴- انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ را حساب کنید.

در اینجا ما شرط مثالهای ۲ و ۳ را مبنی بر اینکه $Q(x)$ هیچ صفر حقیقی‌ای نداشته باشد بر می‌داریم. مانند مثال ۳ انتگرال

$$\int \frac{e^{iz}}{z} dz$$

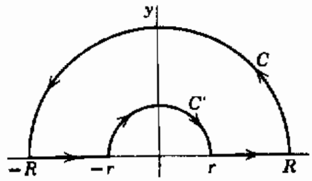
را در نظر می‌گیریم. برای حذف‌کردن از نقطهٔ تکین $z=$ ۰، بر روی پربند نشان داده شده در شکل ۷-۳ انتگرال می‌گیریم. سپس اجازه می‌دهیم شعاع r به صفر میل کند، به طوری که، در واقع، مستقیماً با گذر از قطب سادهٔ واقع در مبدأ انتگرال می‌گیریم. می‌خواهیم نشان بدهیم (بعداً در همین بخش و معادلهٔ ۲۱) که نتیجهٔ کلّی انتگرال گرفتن در جهت پاد ساعتگرد بر روی پربند بسته‌ای که مستقیماً [۱] از یک یا چند قطب ساده می‌گذرد عبارت است از $۲\pi i \times$ (حاصل جمع مانده‌ها در نقاط داخلی، به اضافهٔ نصف حاصل جمع مانده‌ها در قطبهای سادهٔ واقع بر مرز). (*هشدار*: این قاعده در حالت کلّی برای یک قطب چندگانه بر روی مرز معتبر نیست.) شما احتمالاً انتظار این نتیجه را دارید. اگر قطبی در داخل یک پربند باشد، به اندازهٔ (مانده) $۲\pi i \times$ در انتگرال سهم خواهد داشت، و اگر خارج آن باشد هیچ سهمی نخواهد داشت؛ اگر قطب بر روی خط مستقیم مرز باشد، سهم آن صرفاً بینابین صفر و (مانده) $۲\pi i \times$ است. با استفاده از این واقعیت، و توجه به این نکته که، مانند مثال ۳، انتگرال بر روی نیمدایرهٔ بزرگ وقتی $R \to \infty$ ، به سمت صفر میل می‌کند، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = ۲\pi i \times \frac{۱}{۲}\left(z = ۰ \text{ در } \frac{e^{iz}}{z} \text{ ماندهٔ}\right) = ۲\pi i \times \frac{۱}{۲} \times ۱ = i\pi$$

۱- مقصود ما از ذکر کلمهٔ " مستقیم " این است که منحنی پربند در محل قطب دارای یک خط مماس است، یعنی در آنجا هیچ زاویه‌ای ایجاد نمی‌کند.

با اختیار کردن قسمتهای موهومی در دو طرف، خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$$



شکل ۷-۳

برای اینکه با دقت بیشتری نشان بدهیم نتیجهٔ ما درست است، به پربند شکل ۷-۳ برمی‌گردیم. چون e^{iz}/z در داخل این پربند تحلیلی است، مقدار انتگرال بر روی تمامی پربند صفر است. همان گونه که گفته‌ایم، بنا بر قضیهٔ پایان مثال ۳، مقدار انتگرال بر روی C وقتی که $R \to \infty$، به سمت صفر میل می‌کند. بر روی نیمدایرهٔ کوچک C'، داریم

$$z = re^{i\theta} \quad ، \quad dz = r^{i\theta} i\, d\theta \quad ، \quad \frac{dz}{z} = i\, d\theta$$

$$\oint_{C'} \frac{e^{iz}dz}{z} = \oint_{C'} e^{iz}\, i\, d\theta$$

وقتی $r \to ۰$، $Z \to ۰$، $e^{iz} \to ۱$، و انتگرال (بر روی C' و در جهت نشان داده شده در شکل ۷-۳) میل می‌کند به

$$\int_{\pi}^{۰} i\, d\theta = -i\pi$$

پس وقتی $R \to \infty$، و $r \to ۰$، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx - i\pi = ۰$$

یا، مثل قبل،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = i\pi$$

مقدار اصلی با اختیار کردن قسمتهای حقیقی و موهومی این معادله (و با استفاده از فرمول اولر $e^{ix} = \cos x + i \sin x$)، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = ۰ \quad ، \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$$

چون $(\sin x)/x$ تابع زوجی است، داریم

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{۲}$$

با این همه،

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$$

یک انتگرال واگراست زیرا انتگرالده $(\cos x)/x$ در نزدیکی $x = \circ$ تقریباً مساوی $۱/x$ است.

مقدار صفری که ما برای $I = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos x)/x\,dx$ پیدا کردیم ***مقدار اصلی*** (یا مقدار اصلی کوشی) I خوانده می‌شود.

برای پی بردن به معنای این (مقدار اصلی)، انتگرال ساده‌تری مثل

$$\int_{\circ}^{۵} \frac{dx}{x-۳}$$

را در نظر بگیرید. انتگرالده بـه ازای $x = ۳$ نـامتناهی مـی‌شود، و $\int_{\circ}^{۳} dx\,/\,(x-۳)$ و $\int_{۳}^{۵} dx/(x-۳)$ ، هر دو، واگرا هستند. فرض کنید بازهٔ متقارن کـوچکی را حـول $x = ۳$ بریده، و از صفر تا $r - ۳$ و از $r + ۳$ تا ۵ انتگرال بگیریم. در نتیجه خواهیم داشت

$$\int_{\circ}^{۳-r} \frac{dx}{x-۳} = \Big[\ln\ |x-۳|\Big]_{\circ}^{۳-r} = \ln r - \ln ۳$$

$$\int_{۳+r}^{۵} \frac{dx}{x-۳} = \ln ۲ - \ln r$$

حاصل جمع این دو انتگرال عبارت است از

$$\ln ۲ - \ln ۳ = \ln \frac{۲}{۳}$$

این جمع، مستقل از r است. بنابراین اگر اجازه دهیم $r \to \circ$، مقدار $\ln \frac{۲}{۳}$ را به دست می‌آوریم که مقدار اصلی انتگرال

$$\int_{\circ}^{۵} \frac{dx}{x-۳} \text{ (بیشتر اوقات به صورت) } PV\int_{\circ}^{۵} \frac{dx}{x-۳} = \ln\frac{۲}{۳} \text{ (نوشته می‌شود)}$$

خوانده می‌شود. جملات $\ln r$ و $-\ln r$ یکدیگر را خنثی کرده‌اند؛ به طور نموداری، یک ناحیهٔ

نامتناهی در بالای محور xها و یک ناحیهٔ همخوان نامتناهی در زیر آن محور، حذف شده‌اند. در محاسبهٔ انتگرال پذیری، ما بر روی محور xها از $-\infty$ تا $-r$، و از $+r$ تا $+\infty$ انتگرال گرفته، سپس اجازه دادیم $r \to 0$، این درست همان فرایندی است که برای یافتن مقدارهای اصلی توصیف کرده‌ایم، بنابراین، نتیجه‌ای که برای انتگرال نامتعارف $\int_{-\infty}^{\infty} (\cos x)/x \, dx$ پیدا کردیم، یعنی صفر، مقدار اصلی این انتگرال بود.

مثال ۵- انتگرال

$$\int_0^\infty \frac{r^{p-1}}{1+r}\, dr \qquad ، \quad 0<p<1$$

را حساب کنید و از نتیجهٔ آن، (۵-۴) را از فصل ۱۱ ثابت کنید.

ابتدا بر روی C از شکل ۷-۴، انتگرال

$$\oint \frac{z^{p-1}}{1+z}\, dz \qquad 0<p<1 \tag{۳-۷}$$

را پیدا می‌کنیم. پیش از اینکه این انتگرال را بتوانیم حساب کنیم، باید بپرسیم معنای z^{p-1} چیست، زیرا به ازای هر مقدار z ممکن است بیش از یک مقدار برای z^{p-1} وجود داشته باشد (بحث انشعابها را در پایان بخش ۱ ملاحظه کنید.) مثلاً، مورد $p = 1/2$ را در نظر بگیرید؛ در این صورت $z^{p-1} = z^{-1/2}$. از فصل ۲، بخش ۱۰، به یاد آورید که برای هر عدد مختلط دو ریشهٔ مربعی وجود دارد. در، مثلاً، نقطه‌ای که $\theta = \pi/4$ است، داریم

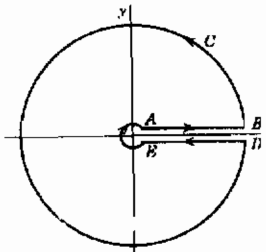
$$z = r\, e^{i\pi/4}, \quad z^{-1/2} = r^{-1/2}\, e^{-i\pi/8}$$

امّا اگر θ به اندازهٔ 2π افزایش پیدا کند (تصوّر کنیم که دایره‌ای را حول مبدأ دور می‌زنیم و به نقطهٔ شروع می‌رسیم)، داریم

$$z = re^{i(\pi/4 + 2\pi)} \quad ، z^{-1/2} = r^{-1/2}\, e^{-i(\pi/8 + \pi)} = -\, r^{-1/2}\, e^{-i\pi/8}$$

به طور مشابه، برای هر نقطهٔ شروعی (با $r \neq 0$)، ملاحظه می‌کنیم که $z^{-1/2}$ یا z^{p-1}، وقتی θ به اندازهٔ 2π افزایش پیدا می‌کند و ما به نقطهٔ شروع برمی‌گردیم، به مقدار متفاوتی (انشعاب متفاوتی) باز می‌گردد. اگر بخواهیم با استفاده از فرمول z^{p-1} یک تابع (تک مقداری) تعریف

کنیم، باید بازه‌ای به طول 2π را برای θ انتخاب کنیم (یعنی، باید یک انشعاب z^{p-1} را انتخاب نماییم). فرض کنید برای محاسبهٔ انتگرال پربندی (۷-۳)، θ را به مقادیر صفر تا 2π محدود کرده باشیم. می‌توانیم یک سدّ یا یک برش مصنوعی بر روی محور مثبت x ها در نظر بگیریم (که بنا به توافق آنرا قطع نکنیم)؛ این یک **برش انشعاب** خوانده می‌شود. نقطه‌ای که نتوانیم آن را بدون قطع کردن یک برش انشعاب (و در نتیجه رفتن به یک انشعاب دیگر) دور بزنیم (بر روی یک دایرهٔ کوچک دلخواه)، **نقطهٔ انشعاب** خوانده می‌شود؛ در اینجا مبدأ مختصات یک نقطهٔ انشعاب است



شکل ۷-۴

بنابراین، در شکل ۷-۴ بر روی AB (طرف بالای محور مثبت xها)، $\theta = 0$ است. وقتی که بر روی C حرکت کنیم و با دور زدن آن به DE برسیم، θ به اندازهٔ 2π افزایش می‌یابد، و لذا بر روی طرف پایین محور مثبت xها، $\theta = 2\pi$ است. توجه کنید که پربند شکل ۷-۴ هیچ‌گاه ما را به بیرون بازهٔ صفر تا 2π نمی‌برد، بنابراین ضریب z^{p-1} در (۷-۳) یک تابع تک - مقداری است. انتگرالده موجود در (۷-۳)، یعنی $z^{p-1}/(1+z)$، اکنون در داخل منحنی بستهٔ شکل ۷-۴ یک تابع تحلیلی است مگر در قطب $z = -1 = e^{i\pi}$. مقدار مانده در آنجا عبارت است از $(e^{i\pi})^{p-1} = -e^{i\pi p}$ بنابراین داریم

$$\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = -2\pi i\, e^{i\pi p} \quad , \quad 0<p<1 \qquad (۷\text{-}۴)$$

بر روی هریک از دو دایرهٔ شکل ۷-۴ داریم $z = re^{i\theta}$ و انتگرال عبارت است از

$$\int \frac{r^{p-1}e^{i(p-1)\theta}}{1+re^{i\theta}}\, ri\,e^{i\theta}\,d\theta = i\int \frac{r^p e^{ip\theta}}{1+re^{i\theta}}\,d\theta$$

اگر $r \to 0$، یا اگر $r \to \infty$، این انتگرال به صفر میل می‌کند (این نکته را تحقیق کنید؛ توجه داشته باشید که به ازای مقادیر کوچک r، مخرج تقریباً ۱ است، و به ازای مقادیر بزرگ r، تقریباً $re^{i\theta}$ است.) به این ترتیب انتگرالها بر روی قسمتهای دایره‌ای پربند وقتی دایرهٔ کوچک به سمت یک نقطه میل می‌کند و دایرهٔ بزرگ به بینهایت گسترش می‌یابد، به سمت صفر میل می‌کنند و ما می‌مانیم با دو انتگرال بر روی محور مثبت xها که اکنون AB از صفر تا ∞، و DE از ∞ تا

صفر کشیده می‌شوند. دیدیم که بر روی AB، $\theta = 0$ است، بنابراین $z = re^{i\times 0} = r$، و این انتگرال عبارت است از

$$\int_{r=0}^{\infty} \frac{r^{p-1}}{1+r}\, dr$$

بر روی DE، داریم $\theta = 2\pi$، بنابراین $z = re^{2\pi i}$ و این انتگرال عبارت است از

$$\int_{r=\infty}^{0} \frac{(re^{2\pi i})^{p-1}}{1 + re^{2\pi i}}\, e^{2\pi i}\, dr = -\int_{0}^{\infty} \frac{r^{p-1} e^{2\pi i p}}{1+r}\, dr$$

از جمع کردن انتگرالهای AB و DE، بنابر (۷-۴)، داریم

$$(1-e^{2\pi i p}) \int_{0}^{\infty} \frac{r^{p-1}}{1+r}\, dr = -\ 2\pi i\, e^{i\pi p}$$

به این ترتیب انتگرال مطلوب عبارت است از

$$\int_{0}^{\infty} \frac{r^{p-1}}{1+r}\, dr = \frac{-2\pi i\ e^{i\pi p}}{1 - e^{2\pi i p}} = \frac{\pi \times 2i}{e^{\pi i p} - e^{-\pi i p}} = \frac{\pi}{\sin \pi p} \qquad (۷-۵)$$

بیایید با استفاده از (۷-۵)، رابطهٔ (۵-۴) از فصل ۱۱ را به دست آوریم. با قرار دادن $q = 1 - P$ در رابطهٔ (۶-۵) و (۷-۱) از فصل ۱۱، داریم

$$B(p, 1-p) = \int_{0}^{\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y}\, dy$$

(۷-۶)

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p)\, \Gamma(1-p) \qquad \Gamma(1) = 1$$ زیرا

از ترکیب (۷-۵) و (۷-۶) می‌رسیم به رابطهٔ (۵-۴) فصل ۱۱، یعنی

$$\Gamma(p)\, \Gamma(1-p) = B(p, p-1) = \int_{0}^{\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y}\, dy = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

اصل شناسه چون به ازای هر z، $W = f(z)$ یک عدد مختلط است، می‌توانیم بنویسیم $W = Re^{i\Theta}$ (درست همان گونه که می‌نویسیم $z = re^{i\theta}$) که در آن $R = |W|$ و Θ زاویهٔ متعلق به W است [یا می‌توانیم بگوییم زاویهٔ متعلق به $f(z)$]. وقتی z تغییر می‌کند،

$W = f(z)$ نیز تغییر می‌کند و در نتیجه وقتی در صفحهٔ مختلط (x,y) از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر می‌رویم R و Θ تغییر می‌کنند. می‌خواهیم نشان بدهیم که

(الف) اگر $f(z)$ بر رو و داخل منحنی سادهٔ C تحلیلی باشد و بر روی C، $f(z) \neq 0$ باشد، در آن صورت تعداد صفرهای $f(z)$ در داخل C مساوی است با $(1/2\pi) \times$ (تغییر در زاویهٔ متعلق به $f(z)$ وقتی منحنی C را می‌پیماییم)؛

(ب) اگر $f(z)$ دارای تعدادی متناهی قطب باشد، امّا در غیر این صورت تمام شرایط عنوان شده [1] را داشته باشد، تغییر در زاویهٔ متعلق به $f(z)$ در اطراف C مساوی است با $(1/2\pi) \times$ (تعداد صفرها منهای تعداد قطبها).

(درست همان گونه که می‌گوییم یک معادلهٔ درجهٔ دوّم با ریشه‌های مساوی دارای دو ریشه است، در اینجا نیز مقصود ما از یک صفر مرتبهٔ n به معنای n صفر و یک قطب مرتبهٔ n به معنای n قطب است.)

برای اثبات این مطلب، انتگرال

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

را در نظر می‌گیریم. بنا بر قضیهٔ مانده‌ها، انتگرال مساوی است با $2\pi i \times$ (حاصل جمع مانده‌ها در نقاط تکین داخل C). به طور سر راست می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۴۲) که ماندهٔ $F(z) = f'(z)/f(z)$ در یک صفر مرتبهٔ n از $f(z)$ مساوی n، و ماندهٔ $F(z)$ در یک قطب مرتبهٔ p از $f(z)$ مساوی $-p$ است. بنابراین اگر تعداد صفرها و قطبهای $f(z)$ در داخل C، به ترتیب، N و P باشد، انتگرال عبارت است از $2\pi i(N-P)$. اکنون با انتگرال گیری مستقیم داریم

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \ln f(z)\,\Big|_C = \ln Re^{i\Theta}\,\Big|_C = Ln\,R\,\Big|_C + i\Theta\,\Big|_C \qquad (7\text{-}7)$$

که در آن $R = |f(z)|$ و Θ زاویهٔ $f(z)$ است. از فصل ۲، بخش ۱۳ به خاطر دارید که $Ln\,R$ به معنای لگاریتم حقیقی معمولی (در مبنای e) عدد مثبت R، و تک - مقداری است؛ $\ln f(z)$ چند مقداری است زیرا Θ چند مقداری است. بنابراین اگر از یک نقطهٔ A واقع بر C

۱- تابعی که فقط در قطبها تحلیلی نباشد مروموروف خوانده می‌شود.

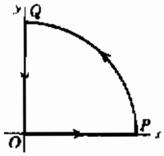
در سرتاسر دور منحنی انتگرال بگیریم و به نقطهٔ A برگردیم، $Ln\ R$ در نقطهٔ A هم در آغاز و هم در پایان دارای یک مقدار است، لذا جملهٔ $Ln\ R\Big|_C$ عبارت است از $Ln\ R$ در A منهای $Ln\ R$ در A است؛ این جمله صفر است. همین نتیجه ممکن است برای Θ درست نباشد؛ یعنی، وقتی از A حرکت می‌کنیم و پس از پیمودن منحنی C به A برمی‌گردیم ممکن است زاویه تغییر کرده باشد. (برای مثال، زاویهٔ مربوط به z را وقتی از ۱ $= z$ بر روی دایرهٔ واحد حرکت می‌کنیم و به ۱ $= z$ برمی‌گردیم در نظر بگیرید؛ زاویهٔ مربوط به z از ۰ به ۲π افزایش یافته است.) با جمعبندی نتایج داریم

$$N - P = \frac{۱}{۲\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{۱}{۲\pi i}\, i\Theta_C \qquad (۸-۷)$$
$$= \frac{۱}{۲\pi} \times (\text{تغییر زاویهٔ } f(z) \text{ بر روی } C)$$

که در آن N تعداد صفرها و P تعداد قطبهای $f(z)$ در داخل C است، و قطبهای مرتبهٔ n به عنوان n قطب و صفرهای مرتبهٔ n نیز به عنوان n صفر به حساب می‌آیند. معادلهٔ ۷-۸ به ***اصل شناسه*** مشهور است (از فصل ۲ به خاطر دارید که **شناسه** به معنای **زاویه** است).

اغلب اوقات از این اصل برای پی بردن به تعداد صفرها (یا قطبها) ی یک تابع مفروض در یک ناحیهٔ مورد نظر استفاده می‌شود. (یافتن صفرهای یک تابع کاربردهای مهمّی در تعیین ثبات سیستمهای خطی مثل مدارهای الکتریکی و سرومکانیسمها دارد. برای مثال رک، کتاب کائو، صفحهٔ ۳۶۱ ، یا کتاب روشهای عملگری، کاپلان، فصل ۷.)

مثال ۶- نشان می‌دهیم که دقیقاً در یک نقطه در ربع اوّل $f(z) = z^۳ + ۴z + ۱ = ۰$ است. منحنی بستهٔ C در معادلهٔ (۷-۸)، برای این مسأله، پربند OPQ در شکل ۷-۵ است، که PQ یک ربع دایرهٔ بزرگ است. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که به ازای $x > ۰$، $x^۳ + ۴x + ۱ > ۰$، و به ازای جمیع مقادیر y، $(iy)^۳ + ۴iy + ۱ \neq ۰$ است (زیرا قسمت حقیقی آن، یعنی ۱، مخالف صفر است)؛ بنابراین بر روی OP یا OQ ، $f(z) \neq ۰$. همچنین اگر یک دایرهٔ به اندازه کافی



شکل ۷-۵

بزرگ چنان انتخاب کنیم که تمام صفرها را در بر بگیرد، بر روی PQ نیز $f(z) \neq 0$ است. اکنون می‌خواهیم تغییر زاویهٔ Θ را در $f(z) = Re^{i\Theta}$ وقتی C را دور می‌زنیم پیدا کنیم. در امتداد OP، $z = x$؛ پس $f(z) = f(x)$ حقیقی است و لذا $\Theta = 0$ است. در امتداد PQ، $z = re^{i\theta}$، و r خیلی بزرگ و ثابت است. به ازای مقادیر خیلی بزرگ r، جملهٔ z^3 در $f(z)$ خیلی بر جمله‌های دیگر برتری پیدا می‌کند، و داریم $f(z) \cong z^3 = r^3 e^{3i\theta}$. وقتی بر روی PQ زاویهٔ θ از صفر به $\pi/2$ می‌رود، $\Theta = 3\theta$ از صفر به $3\pi/2$ خواهد رفت. بر روی QO، $z = iy$، $f(z) = -iy^3 + 4iy + 1$؛ به این ترتیب،

$$tan\ \Theta = \frac{f(z)\ \text{قسمت موهومی}}{f(z)\ \text{قسمت حقیقی}} = \frac{4y - y^3}{1}$$

به ازای y خیلی بزرگ (یعنی، در Q)، داشتیم $\Theta \cong 3\pi/2$ (به ازای $y = \infty$، $tan\Theta = -\infty$، و Θ دقیقاً مساوی $3\pi/2$ خواهد بود. حال وقتی y بر روی QO کاهش می‌یابد، مقدار $tan\ \Theta = 4y - y^3$ از نظر بزرگی کاهش پیدا می‌کند امّا منفی باقی می‌ماند تا در $y = 2$ به صفر می‌رسد. این بدان معناست که Θ از $3\pi/2$ به 2π تغییر می‌کند. بین $y = 2$ و $y = 0$، تانژانت مثبت می‌شود، امّا سپس دوباره به صفر کاهش می‌یابد بدون اینکه نامتناهی بشود. این بدان معناست که زاویهٔ Θ فراتر از 2π افزایش می‌یابد امّا مقدار آن به $2\pi + \pi/2$ نمی‌رسد، و سپس دوباره به 2π کاهش می‌یابد. بنابراین، تغییرات کلّ Θ بر روی C مساوی 2π است، و طبق (۷-۸)، تعداد صفرهای $f(z)$ در ربع اوّل عبارت است از $(1/2\pi) \times 2\pi = 1$. اگر توجه کنیم که (برای یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی) صفرهای خارج از محور حقیقی همیشه به صورت زوجهای همیوغ ظاهر می‌شوند، ملاحظه می‌کنیم که باید یک صفر هم برای z در ربع چهارم وجود داشته باشد، و صفر سوّم باید بر محور منفی xها باشد.

مسائل، بخش ۷

با استفاده از روشهای مورد بحث در مثالهای ۱، ۲، و ۳، انتگرالهای معین زیر را حساب کنید.

۱- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 + 5\sin\theta}$

۲- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}$

۳- $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\sin\theta}$

۴- $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{5 + 3\cos\theta}$

۵- $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \quad (0 \le r < 1)$

۶- $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos\theta)^2}$

۷- $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta\, d\theta}{5 + 4\cos\theta}$

۸- $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{13 - 12\cos\theta}$

۹- $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin\theta\cos\alpha}$ ($\alpha =$ ثابت)

۱۰- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

۱۱- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(4x^2 + 1)^3}$

۱۲- $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 16}$

۱۳- $\int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$

۱۴- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2 + 4x + 5}$

۱۵- $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x\, dx}{9x^2 + 4}$

۱۶- $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x\, dx}{9x^2 + 4}$

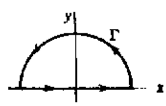
۱۷- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x\, dx}{x^2 + 4x + 5}$

۱۸- $\int_0^{\infty} \frac{\cos \pi x\, dx}{1 + x^2 + x^4}$

۱۹- $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x\, dx}{(4x^2 + 9)^2}$

۲۰- $\int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(1 + 9x^2)^2}$

۲۱- در مثال ۴ قاعده‌ای را برای محاسبهٔ یک انتگرال پربندی به هنگامی که پربند از **قطبهای** ساده عبور می‌کند بیان کردیم. ما ثابت کردیم که نتیجه برای



$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz$$

بر روی پربند Γ که اینجا نشان داده شده است درست است.

(الف) با دنبال کردن روش مشابه (یعنی با انتگرال گرفتن بر روی C' از شکل ۷-۳ و میل دادن r به صفر) نشان دهید که اگر e^{iz} را با هر $f(z)$ تحلیلی در $z = 0$ جایگزین کنیم نتیجه تغییری نخواهد کرد.

(ب) اثباتِ قسمت (الف) را برای

a حقیقی است $\qquad \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)}\,dz$

تکرار کنید (یعنی، یک قطب بر محور xها)، با $f(z)$ تحلیلی در $z = a$.

با استفاده از قاعدهٔ مثال ۴ (همچنین ر ک مسألهٔ ۲۱)، انتگرالهای زیر را حساب کنید. در صورت لزوم مقادیر اصلی را پیدا کنید.

۲۲- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$ $\qquad$ ۲۳- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(2-x)}$

۲۴- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{1-x^2}\,dx$ $\qquad$ ۲۵- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{9x^2-\pi^2}\,dx$

۲۶- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x-1)^4-1}$ $\qquad$ ۲۷- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos \pi x}{1-4x^2}\,dx$

۲۸- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1-x^4}$ $\qquad$ ۲۹- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx$

۳۰- (الف) با روش مثال ۲، انتگرال $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ را حساب کنید.

(ب) همین انتگرال را با استفاده از جدول انتگرالها برای پیدا کردن انتگرال نامعین حساب کنید؛ در صورتی که خیلی مواظب نباشید ممکن است به جواب صفر برسید. علت را توضیح دهید.

(ج) با تغییر متغیر $u = x^4$ در انتگرال قسمت (الف) و با استفاده از معادلهٔ (۷-۵)، انتگرال u را حساب کنید.

۳۱- با استفاده از روش مسألهٔ ۳۰ (ج) انتگرال $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$ را حساب کنید.

۳۲- با استفاده از روش مسألهٔ ۳۰ (ج) و پربند و روش مثال ۵، انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^2}$$

را حساب کنید.

با استفاده از روش مثال ۵ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

۳۳- $\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{۱ + x^{۲}}$

۳۴- $\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{(۱ + x)^{۲}}$

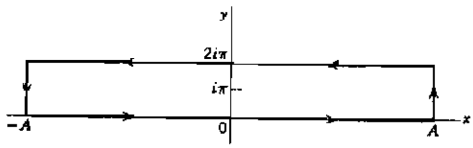
۳۵- $\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{۱/۳}\, dx}{(۱+x)(۲+x)}$

۳۶- $\int_{\circ}^{\infty} \frac{\ln x}{x^{۳/۴}\,(۱+x)}\, dx$

۳۷- (الف) نشان دهید که به ازای $\circ < p < ۱$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{۱ + e^{x}}\, dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

راهنمایی: انتگرال $\int e^{pz}\, dz/(۱+e^{z})$ را بر روی پربندی مستطیلی



پیدا کنید. نشان دهید که وقتی $A \to \infty$، انتگرالهای بر روی اضلاع عمودی به سمت صفر میل می‌کنند. توجه کنید که انتگرال بر روی ضلع فوقانی مستطیل مضربی است از انتگرال بر روی محور x ها.

(ج) با تغییر متغیر $y = e^{x}$ در انتگرال قسمت (الف)، و با استفاده از معادلهٔ (۶-۵) فصل ۱۱، نشان دهید که این انتگرال تابع بتای $B(p,\ ۱-p)$ است. سپس با استفاده از معادلهٔ (۱-۷) فصل ۱۱ نشان دهید که $\Gamma(p)\ \Gamma(۱-p) = \pi/\sin \pi p$ است.

۳۸- با استفاده از پربند و روش مسألهٔ ۳۷-الف، انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{۱ - e^{x}}\, dx \qquad \circ < p < ۱$$

را حساب کنید. *راهنمایی:* تنها تفاوت بین این مسأله و مسألهٔ ۳۷ - الف این است که حالا شما به جای یک قطب در داخل پربند، دو قطب ساده بر روی آن دارید. از قاعدهٔ مثال ۴ استفاده کنید.

۳۹- انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{۲\pi x/۳}}{\cosh \pi x}\, dx$$

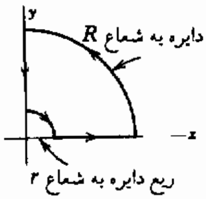
را حساب کنید. ***راهنمایی:*** مانند مسألهٔ ۳۷-الف، یک مستطیل به کار ببرید امّا عرض آن را به جای اینکه 2π باشد ۱ انتخاب کنید. دقت کنید که در $i/2$ یک قطب وجود دارد.

۴۰- انتگرال

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sinh x}$$

را حساب کنید. ***راهنمایی:*** ابتدا انتگرال را از $-\infty$ تا $+\infty$ پیدا کنید. مستطیلی به عرض π به کار ببرید و دقت کنید که $i\pi$ بر روی پربند یک قطب ساده وجود دارد.

۴۱- انتگرالهای فرنل $\int_0^u \sin u^2\, du$ و $\int_0^u \cos u^2\, du$ در اپتیک مهم هستند. برای مورد حدّهای بالای نامتناهی، این انتگرالها را به صورت زیر حساب کنید: تغییر متغیر $x = u^2$ را به کار ببرید. برای محاسبهٔ انتگرالهای حاصل، انتگرال $\oint z^{-1/2}\, e^{iz}\, dz$ را بر روی پربند نشان داده شده پیدا کنید. بگذارید $r \to 0$ و $R \to \infty$ و نشان دهید که انتگرالهای بر روی ای ربع دایره‌ها به سمت صفر میل می‌کنند. توجه کنید که انتگرال بر روی محور yها یک تابع Γ است و بنابراین آنرا حساب کنید. با استفاده از این مطلب، انتگرال بر روی محور x ها را حساب کنید؛ قسمتهای حقیقی و موهومی این انتگرال، انتگرالهایی هستند که شما سعی به پیدا کردن آنها دارید.



۴۲- اگر $F(z) = f'(z)/f(z)$ باشد،

(الف) نشان دهید که ماندهٔ $F(z)$ در یک صفر مرتبهٔ nاُم $f(z)$ مساوی n است. ***راهنمایی:*** اگر $f(z)$ دارای یک صفر مرتبهٔ n در $z = a$ باشد، در آن صورت

$$f(z) = a_n\,(z-a)^n + a_{n+1}\,(z-a)^{n+1} + \cdots$$

(ب) همچنین نشان دهید که ماندهٔ $F(z)$ در یک قطب مرتبهٔ p ی $f(z)$، مساوی $-p$ است. ***راهنمایی:*** رک تعریف قطب مرتبهٔ p در آخر بخش ۴.

۴۳- با استفاده از قضیهٔ (۷-۸)، نشان دهید که $z^3 + z^2 + 9 = 0$ دقیقاً یک ریشه در ربع اوّل دارد. به خاطر آورید که ریشه‌های یک معادلهٔ چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی یا حقیقی اند و یا به صورت زوجهای همیوغ $a \pm bi$ وجود دارند (مثلاً، فرمول معادلهٔ درجهٔ

دوّم را در نظر بگیرید). از این نکته استفاده کنید و نشان دهید که چون $z^{۳} + z^{۲} + ۹ = ۰$ دارای یک ریشه در ربع اوّل است، یک ریشه نیز در ربع چهارم و یک ریشه بر روی محور x های منفی حقیقی دارد.

۴۴- **قضیهٔ اساسی جبر** بیان می‌دارد که هر معادلهٔ به شکل

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-۱} z^{n-۱} + \cdots + a_۰ = ۰ \,, \; a_n \neq ۰ \,, \; n \geq ۱$$

حداقل دارای یک ریشه است، که از آن نتیجه می‌شود که یک معادلهٔ درجهٔ n ام دارای n ریشه است. این قضیه را با استفاده از " اصل شناسه " ثابت کنید. **راهنمایی:** افزایش زاویهٔ متعلق به $f(z)$ را بر روی یک دایرهٔ بزرگ $z = re^{i\theta}$ دنبال کنید؛ اگر r به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، تمام ریشه‌ها در بر گرفته می‌شوند، و $f(z)$ تقریباً $a_n z^n$ است.

مانند مسألهٔ ۴۳، تعیین کنید ریشه‌های معادله‌های زیر در کدام ربعها قرار دارند:

۴۵- $z^{۳} + z^{۲} + z + ۴ = ۰$ ۴۶- $z^{۳} + ۳z^{۲} + ۴z + ۲ = ۰$

۴۷- $z^{۳} + ۴z^{۲} + ۱۲ = ۰$ ۴۸- $z^{۴} - z^{۳} + ۶z^{۲} - ۳z + ۵ = ۰$

۴۹- $z^{۴} - ۴z^{۳} + ۱۱z^{۲} - ۱۴z + ۱۰ = ۰$ ۵۰- $z^{۴} + z^{۳} + ۴z^{۲} + ۲z + ۳ = ۰$

۵۱- با استفاده از (۷-۸)، انتگرال

$$\oint \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

را که در آن

$$f(z) = \frac{z^{۳}(z+۱)^{۲} \sin z}{(z^{۲}+۱)^{۲}(z-۳)}$$

است، بر روی دایرهٔ $|z| = ۲$ ، و بر روی $|z| = ۱/۲$ ، حساب کنید.

۵۲- با استفاده از (۷-۸)، انتگرال $\oint \frac{z^{۳}dz}{۱+۲z^{۴}}$ را بر روی $|z| = ۱$ حساب کنید.

۵۳- با استفاده از (۷-۸)، انتگرال $\oint \frac{z^{۳}+۴z}{z^{۴}+۸z^{۲}+۱۶}$ را بر روی دایرهٔ $|z-۲i| = ۲$ حساب کنید.

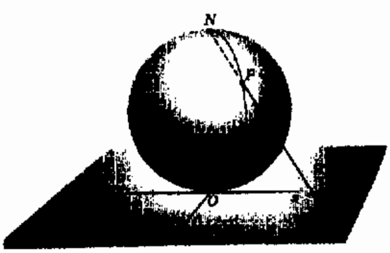
۵۴- با استفاده از (۷-۸)، انتگرال

$$\oint_C \frac{sec^{۲}(z/۴)\ dz}{۱-tan\ (z/۴)}$$

راکه در آن C مستطیل حاصل از خطهای $y = \pm ۱$ و $x = \pm \frac{۵}{۲}\pi$ است، حساب کنید.

۸- نقطه در بینهایت؛ مانده در بینهایت

بیشتر اوقات مفید است که صفحهٔ مختلط را به صورت زیر با سطح یک کره همخوان بگیریم. در شکل ۸-۱، کره در مبدأ O بر صفحه مماس است. فرض کنید O قطب جنوب، و N قطب شمال کره باشد. اگر خطی که از N می‌گذرد کره را در P و صفحه را در Q قطع کند، می‌گوییم که نقطهٔ P بر روی کره و نقطهٔ Q بر روی صفحهٔ نقاط همخوان اند. به این ترتیب ما یک همخوانی یک - به - یک بین نقاط واقع بر کره (به غیر از N) و نقاط صفحه (به فواصل متناهی از O) داریم. حال اگر نقطه Q از O دورتر و دورتر شود، نقطهٔ P به N نزدیک‌تر و نزدیک‌تر خواهد شد. اگر $z = x + iy$ مختصهٔ مختلط نقطهٔ Q باشد، وقتی Q از O دور می‌شود، می‌گوییم $z \to \infty$. رسم بر این است که اصطلاحاً گفته می‌شود نقطهٔ N با ***نقطهٔ واقع در بینهایت*** در صفحهٔ مختلط همخوان است. دقت کنید که خطهای راستی که بر روی صفحه از مبدأ می‌گذرند همخوان با نصف‌النهارهای کره‌اند. نصف‌النهارها همه از قطبهای شمال و جنوب می‌گذرند. همخوان با این، خطهای راستی که در صفحهٔ مختلط از مبدأ می‌گذرند، از نقطهٔ بینهایت خواهند گذشت. دایره‌های به مرکز O و واقع در صفحهٔ مختلط، همخوان با مدارهای کره‌اند. این نگاشت صفحهٔ مختلط بر یک کره (یا نگاشت کره بر یک صفحهٔ مماس) را اصطلاحاً ***تصویر برجسته نما*** می‌نامند.



شکل ۸-۱

برای بررسی رفتار یک تابع در بینهایت، z را با $۱/z$ جایگزین می‌کنیم و رفتار تابع جدید را در مبدأ در نظر می‌گیریم. آنگاه، بسته به اینکه تابع جدید چگونه رفتاری در مبدأ داشته باشد، می‌گوییم که بینهایت یک نقطهٔ معمولی، یک قطب، و غیره است. بـه

عنوان مثال، $z^{۲}$ را در بینهایت در نظر بگیرید؛ $۱/z^{۲}$ دارای یک قطب مرتبهٔ ۲ در مبدأ است، بنابراین $z^{۲}$ دارای یک قطب مرتبهٔ ۲ در بینهایت است. یا $e^{۱/z}$ را در نظر بگیرید؛ چون e^{z} در $z = ۰$ تحلیلی است، $e^{۱/z}$ در ∞ تحلیلی است.

حال ببینیم چگونه می‌توان ماندهٔ یک تابع را در ∞ پیدا کرد؟ برای این کار، z را با $۱/z$ جایگزین کرده، در اطراف مبدأ کار می‌کنیم. برای روشن بودن وضع نمادگذاری، دو متغیر به کار می‌بریم، یکی Z که مقادیر نزدیک ∞ را می‌پذیرد، و دیگری $z = 1/Z$ که مقادیر نزدیک صفر را قبول می‌کند. ماندهٔ یک تابع در ∞ به گونه‌ای تعریف می‌شود که قضیهٔ مانده‌ها برقرار بماند، یعنی،

$$\oint_{C} f(Z)\, dZ = ۲\pi i \times (\text{ماندهٔ } f(Z) \text{ در } Z=\infty) \qquad (۱-۸)$$

در صورتی که C مسیر بسته‌ای باشد در اطراف نقطهٔ واقع در ∞ که هیچ نقطهٔ تکین دیگری را در بر ندارد. حال ببینیم معنای انتگرال گرفتن "در اطراف ∞" چیست؟ به خاطر آورید که قرار ما این بود که پربند را طوری بپیماییم که مساحت در بر گرفته شده همیشه در سمت چپ ما باشد. مساحتی را که می‌خواهیم "در بر بگیریم" مساحت "اطراف ∞" است؛ اگر C یک دایره باشد، بر طبق مجموعه اصطلاحات متداول، این مساحت **خارج** از دایره قرار خواهد گرفت. شکل ۸-۱ ممکن است این نکته را روشن کند. دایرهٔ کوچکی را در اطراف مبدأ در نظر بگیرید؛ مساحت داخل دایره (یعنی، مساحت شامل N) همخوان با نقاطی از صفحه است که خارج از یک دایرهٔ بزرگ C اند. برای اینکه مساحت "اطراف ∞" را در سمت چپ خود داشته باشیم باید بر روی C در جهت ساعتگرد حرکت کنیم. این نکته با پیکان روی علامت انتگرال در شکل (۸-۱) مشخص شده است. توجه کنید که اگر $Z = Re^{i\theta}$ باشد، در آن صورت وقتی در جهت ساعتگرد بر روی C حرکت می‌کنیم، حرکت ما در جهت **کاهش** Θ است. تغییر متغیر

$$Z = \frac{۱}{z} \qquad ، \quad dZ = -\frac{۱}{z^{۲}}\, dz$$

را در انتگرال (۸-۱) در نظر می‌گیریم. اگر $Z = Re^{i\Theta}$ یک دایرهٔ C به شعاع R را در جهت کاهش Θ بپیماید، در آن صورت $z = ۱/Z = (۱/R)e^{-i\Theta} = re^{i\theta}$ یک دایرهٔ C' به شعاع $r = ۱/R$ را در جهت پاد ساعتگرد (یعنی، $\theta = -\Theta$ با کاهش Θ افزایش می‌یابد) خواهد

پیمود. بنابراین (۸-۱) تبدیل می‌شود به

$$\oint_{C'} -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \times (\text{ماندهٔ } f(Z) \text{ در } Z = \infty) \qquad (۸-۲)$$

انتگرال (۸-۲) انتگرالی است حول مبدأ و بنابراین می‌توان آنرا با به دست آوردن ماندهٔ $(-1/z^2)f(1/z)$ در مبدأ حساب کرد. (هیچ نقطهٔ تکین دیگری از $f(1/z)$ در داخل C' وجود ندارد زیرا فرض کردیم که هیچ نقطهٔ تکین دیگری از $f(Z)$ در خارج C به غیر از احتمالاً ∞ وجود ندارد.) بنابراین داریم

$$(\text{ماندهٔ } f(Z) \text{ در } Z = \infty) = -\left(\text{ماندهٔ } \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \text{ در } z = 0\right) \qquad (۸-۳)$$

و می‌توانیم از روشهایی که پیش از این برای محاسبهٔ مانده‌ها در مبدأ آموخته‌ایم استفاده کنیم.

توجه کنید که یک تابع ممکن است در ∞ تحلیلی باشد و در آنجا مانده هم داشته باشد. برای مثال، $f(Z) = 1/Z$ در ∞ تحلیلی است زیرا z در مبدأ تحلیلی است. امّا ماندهٔ $f(Z) = 1/Z$ در $Z = \infty$ عبارت است از

$$-\left(\text{ماندهٔ } \frac{1}{z^2} \cdot z \text{ در } z = 0\right) = -1$$

مسائل، بخش ۸

۱- فرض کنید $f(z)$ را به صورت یک رشتهٔ لورن که برای تمام z های ***خارج*** یک دایره، یعنی $|z| > M$ معتبر است بسط داده باشیم (رک بخش ۴). این رشته را رشتهٔ لورن "حول بینهایت" می‌نامند. نشان دهید که نتیجهٔ انتگرال‌گیری جمله به جملهٔ رشتهٔ لورن بر روی یک دایرهٔ خیلی بزرگ (به شعاع بزرگتر از M) در جهت مثبت، $2\pi i b_1$ است (درست مثل اثبات اولیهٔ قضیهٔ مانده‌ها در بخش ۵). به خاطر داشته باشید که انتگرال "در اطراف ∞" در جهت منفی گرفته می‌شود، و مساوی است با

$$2\pi i \times (\text{مانده در } \infty)$$

نتیجه بگیرید که $R(\infty) = -b_1$. **هشدار:** در این روش محاسبهٔ $R(\infty)$، شما باید اطمینان حاصل کنید که رشتهٔ لورنی دارید که به ازای جمیع مقادیر بزرگ z همگراست.

۲- (الف) نشان دهید که اگر وقتی z به بینهایت میل می‌کند، $f(z)$ به حدّی متناهی میل کند، در

آن صورت ماندهٔ $f(z)$ در بینهایت عبارت است از $\lim_{z\to\infty} zf'(z)$.

(ب) همچنین نشان دهید که اگر وقتی z به بینهایت میل می‌کند، $f(z)$ به صفر میل کند، در آن صورت ماندهٔ $f(z)$ در بینهایت عبارت است از $-\lim_{z\to\infty} zf(z)$.

در هر یک از توابع زیر تحقیق کنید که آیا بینهایت یک نقطهٔ معمولی است، یک تکینگی اساسی است، یا یک قطب است (و اگر قطب است، مرتبهٔ آن چیست)؟ با استفاده از مسألهٔ ۱، یا مسألهٔ ۲، یا معادلهٔ (۸-۳)، ماندهٔ هر تابع را در بینهایت پیدا کنید.

۳- $\dfrac{z}{z^2+1}$ ۴- $\dfrac{2z+3}{(z+2)^2}$ ۵- $\sin\dfrac{1}{z}$

۶- $\dfrac{z^2+5}{z}$ ۷- $\dfrac{4z^3+2z+3}{z^2}$ ۸- $\dfrac{z^2+2}{3z^2}$

۹- $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ ۱۰- $\dfrac{1+z}{1-z}$ ۱۱- $\tan\dfrac{1}{z}$

۱۲- $\ln\dfrac{z+1}{z-1}$

۱۳- قضیهٔ اساسی جبر (رک مسألهٔ ۷-۴۴) را به صورت زیر به نحو دیگری ثابت کنید: فرض کنید در اطراف بینهایت، یعنی در جهت منفی بر روی یک دایرهٔ بزرگ C، $I = \oint f'(z)/f(z)\,dz$. اصل شناسه (۷-۸) را به کار ببرید، و همچنین I را با پیدا کردن ماندهٔ $f'(z)/f(z)$ در بینهایت حساب کنید؛ به این ترتیب نشان دهید که $f(z)$ در داخل دارای n صفر است.

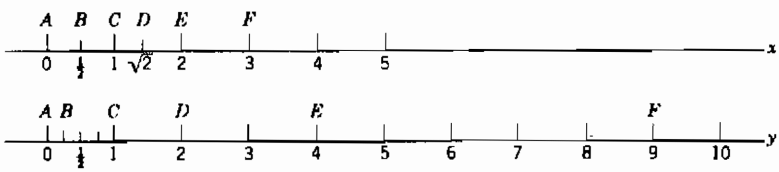
با محاسبهٔ مانده‌ها در بینهایت، انتگرالهای زیر را به دست آورید. جوابهای خود را با محاسبهٔ مانده‌ها در تمام قطبهای متناهی امتحان کنید. (مقصود از $\oint$، انتگرال گیری در جهت مثبت است.)

۱۴- $\oint \dfrac{1-z^2}{1+z^2}\dfrac{dz}{z}$ بر روی $|z|=2$ ۱۵- $\oint \dfrac{z^2\,dz}{(2z+1)(z^2+9)}$ بر روی $|z|=5$

۱۶- ملاحظه کنید که در مسائل ۱۴ و ۱۵ حاصل جمع مانده‌ها در نقاط متناهی و مانده در بینهایت صفر است. ثابت کنید که این مطلب در مورد هر تابعی که دارای تعدادی متناهی تکینگی باشد همواره درست است.

۹ـ نگاشت

می‌دانیم که اکثر اوقات رسم نمودار تابع $y = f(x)$ از متغیر حقیقی x می‌تواند خیلی مفید باشد. اگر سعی کنیم نمودار مشابهی را برای تابع $w = f(z)$، از یک متغیر مختلط z رسم کنیم چه وضعی پیش می‌آید؟ ما به صفحه‌ای برای رسم مقادیر z و به صفحهٔ دیگری برای رسم مقادیر $w = f(z)$، یعنی، کلاً به یک فضای چهار بعدی نیاز داریم. چون به چنین فضایی دسترسی نداریم، باید به روش دیگری متوسّل شویم. در نظر بگیرید که سعی کنیم $y = f(x)$ را فقط با استفاده از دو خط راست، و نه یک صفحه، " رسم " نماییم. "نموداری" از $y = x^2$ ممکن است شبیه به شکل ۹-۱ باشد. اگر نقطه‌ای بر محور xها داده شود، می‌توانیم نقطهٔ همخوانِ $y = f(x)$ را بر روی محور yها پیدا کنیم و هر نقطه را با یک حرف برچسب بزنیم تا معرف این همخوانی باشد. (توجه داشته باشید که برای تکمیل "نمودار"، ما در واقع به محور y های مثبت دیگری برای نشان دادن نقاط y همخوان با مقادیر منفی x نیز احتیاج داریم.)

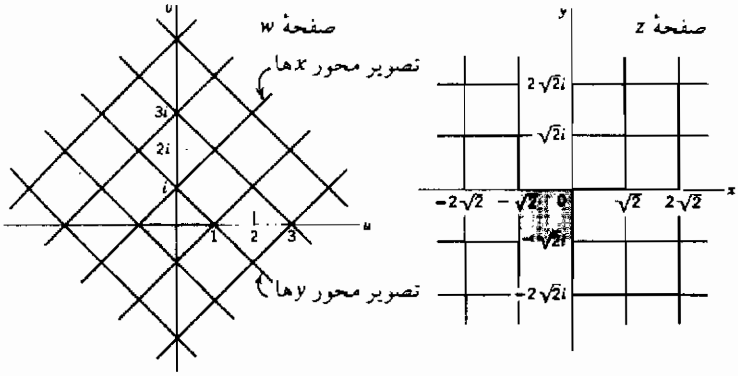


شکل ۹-۱

اکنون روش مشابهی را برای نشان دادن تابع مختلط $w = f(z)$ در نظر بگیرید. یک صفحهٔ z و یک صفحهٔ w به کار می‌بریم؛ یک نقطهٔ مفروض در صفحهٔ z (یعنی یک مقدار از z) مقدار همخوانی از w را تعیین می‌کند. این زوج نقطه، یک z و یک w، ***تصویرهای*** یکدیگر خوانده می‌شوند. هر چند ***می‌توانیم*** زوجهای همخوان z و w را برچسب بزنیم (همان گونه که نقاط x و y را در شکل ۹-۱ زدیم)، ولی معمولاً جالب‌تر است که منحنی‌ها یا ناحیه‌های همخوان را در دو صفحهٔ مذکور رسم کنیم. همخوانی بین یک نقطه (یا یک منحنی یا یک ناحیه) در صفحهٔ z، و نقطه (یا منحنی یا ناحیهٔ) تصویر در صفحهٔ w، ***نگاشت*** یا ***تبدیل*** خوانده می‌شود.

مثال ۱ - تابع $w = i + ze^{i\pi/4}$ را در نظر می‌گیریم و نگاشت شبکهٔ خطوط ثابت $= x$ و ثابت $= y$ (صفحهٔ z در شکل ۹-۲) را بر صفحهٔ w به دست می‌آوریم. شما ممکن است

بلافاصله متوجه شوید که این تبدیل مترادف است با یک چرخش شبکه به اندازهٔ زاویهٔ $\pi/۴$ (زیرا $z\,e^{i\pi/۴} = re^{i(\theta+\pi/۴)}$) به اضافهٔ یک انتقال i (تصویر $z = ۰$ عبارت از $w = i$ است)، که نتیجهٔ نشان داده شده در صفحهٔ w را در شکل ۹-۲ می‌دهد. همچنین، می‌توانیم u و v را به صورت زیر نیز حساب کنیم:



شکل ۹-۲

$$w = i + ze^{i\pi/۴} = i + (x + iy)\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$= i + (x + iy)\left(\frac{۱ + i}{\sqrt{۲}}\right) = \frac{x - y}{\sqrt{۲}} + i\left(۱ + \frac{x + y}{\sqrt{۲}}\right)$$

چون $w = u + iv$ است، داریم

$$u = \frac{x - y}{\sqrt{۲}} \quad ، \quad v = ۱ + \frac{x + y}{\sqrt{۲}} \tag{۹-۱}$$

آنگاه (با حذف xو yبه نوبت)، داریم

$$u - v = -۱ - y\sqrt{۲} \quad ، \quad u + v = ۱ + x\sqrt{۲} \tag{۹-۲}$$

تصویر محور xها ($y = ۰$)، از معادلهٔ اوّل (۹-۲)، عبارت است از $u - v = -۱$؛ تصویر محور yها ($x = ۰$)، از معادلهٔ دوّم (۹-۲)، عبارت است از $u + v = ۱$. با رسم این خطوط در صفحهٔ w، و همچنین رسم تصویرهای $x = \pm\sqrt{۲}$، $x = \pm ۲\sqrt{۲}$، $y = \pm\sqrt{۲}$، $y = \pm ۲\sqrt{۲}$ [با استفاده از معادلات (۹-۲)]، شکل ۹-۲ را به دست می‌آوریم (تحقیق کنید که مربعهای سایه‌دار تصویرهای یکدیگرند).

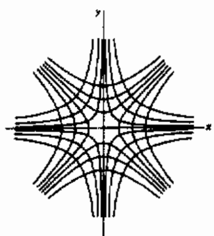
اگر عملیات حذف [برای به دست آوردن (۹-۲)] ساده نباشد، می‌توانیم مستقیماً معادلات (۹-۱) را به کار ببریم. فرض کنید تصویر $y = \circ$ را بخواهیم. به ازای $y = \circ$، معادلات (۹-۱) تبدیل می‌شوند به $u = x/\sqrt{۲}$، $v = ۱ + x/\sqrt{۲}$؛ اینها یک زوج معادلهٔ پارامتری یک منحنی در صفحهٔ (u, v) هستند که پارامتر آنها x است. به طور مشابه، برای پیدا کردن تصویر ثابت $= x$، مقدار x را در (۹-۱) جایگزین می‌کنیم؛ در آن صورت یک زوج معادلهٔ پارامتری خواهیم داشت که پارامتر آنها y است.

توجه داشته باشید که به همین آسانی می‌توانستیم تصویرهای خطوط ثابت $= u$ و ثابت $= v$ را در صفحهٔ z پیدا کنیم. به عنوان مثال، با فرض $u = \circ$ در (۹-۱)، داریم $x - y = \circ$؛ تصویر محور vها ($u = \circ$) خط ۴۵° در صفحهٔ (x, y) است. (ممکن است حدس زده باشیم که برگشتن به صفحهٔ z مستلزم چرخشی به اندازهٔ -۴۵° است.) در هر مسأله، می‌توانیم با منحنی‌های (یا نواحی) ساده در صفحهٔ z یا صفحهٔ w شروع کنیم، و تصویرهای آنها را در صفحهٔ دیگر به دست آوریم.

مثال ۲– می‌خواهیم نگاشت شبکه مختصات ثابت $=u$، ثابت $= v$ را بر صفحهٔ z توسط تابع $w = z^۲$ به دست آوریم. داریم

$$\begin{aligned} w &= z^۲ = (x + iy)^۲ = x^۲ - y^۲ + ۲ixy \\ u &= x^۲ - y^۲ \quad ، \quad v = ۲xy \end{aligned} \qquad (۹\text{-}۳)$$

به این ترتیب، تصویرهای ثابت $= u$ عبارت اند از هذلولیهای ثابت $= x^۲ - y^۲$، و تصویرهای ثابت $= v$ نیز عبارت اند از هذلولیهای ثابت $= xy$ (شکل ۹-۳). همچنین، می‌توانستیم نگاشت خطهای ثابت $= x$، ثابت $= y$ را بر صفحهٔ w به دست آوریم (مسألهٔ ۱)؛ این منجر می‌شود به دو مجموعه سهمی در صفحهٔ (u, v)

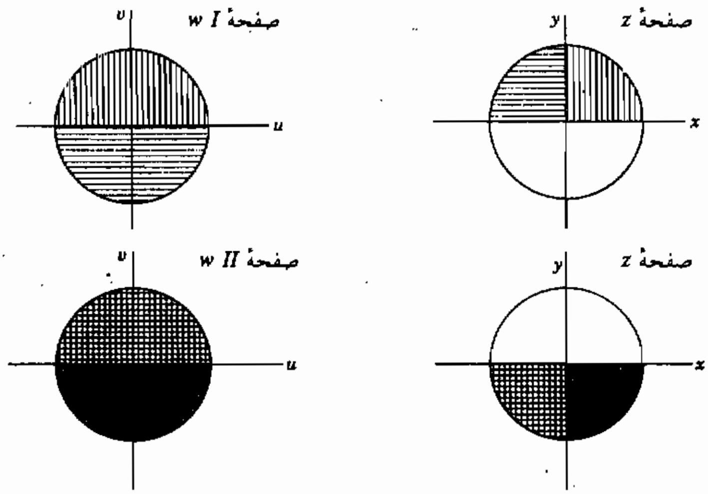


شکل ۹-۳

مثال ۳- راه مفید دیگری برای بررسی نگاشت با $w = z^2$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از مختصات قطبی، داریم

$$z = re^{i\theta} \qquad ، w = z^2 = r^2 e^{2i\theta} \tag{۴-۹}$$

ناحیهٔ داخل دایرهٔ $r = 1$ را در صفحهٔ (x, y) در نظر بگیرید. اگر در (۹-۴)، $r = 1$ باشد، داریم $z = e^{i\theta}$ و $w = e^{2i\theta}$. زاویهٔ مربوط به w دو برابر زاویهٔ z است؛ در این صورت، همان گونه که با ناحیهٔ سایه‌دار در شکل ۹-۴ نشان داده شده است، قسمت ربع اوّل دایرهٔ $r = 1$ در صفحهٔ z به نیمدایرهٔ واقع در صفحهٔ w نگاشته می‌شود. ربع دوّم دایرهٔ صفحهٔ z (θ بین $\pi/2$ و π) به نیمهٔ پایین دایرهٔ واقع در صفحهٔ w (زاویهٔ w بین π و 2π)، مطابق شکل، نگاشته می‌شود. ما اکنون تمامی صفحهٔ w و فقط نصف صفحهٔ z را به کار برده‌ایم (مقایسه کنید با شکل ۹-۱ و اشاره به یک محور y دیگر.) برای داشتن یک همخوانی یک - به - یک بین نقاط واقع در صفحهٔ z و تصویرهای آنها در صفحهٔ w، یک صفحهٔ w دیگر رسم می‌کنیم (صفحهٔ دوّم w در شکل ۹-۴) تا تصویرهای نقاط واقع در نیمهٔ پایین صفحهٔ z را در بر بگیرد. (خود را قانع کنید که دو ربع دایرهٔ تحتانی در صفحهٔ z و تصویرهای آنها در صفحهٔ $w\ II$ به درستی با سایه نشان داده شده‌اند.) قبول می‌کنیم که وقتی در صفحهٔ $w\ I$ به زاویهٔ 2π می‌رسیم، وارد صفحهٔ $w\ II$ می‌شویم، و وقتی در صفحهٔ $w\ II$ به زاویهٔ 4π می‌رسیم، به صفحهٔ $w\ I$



شکل ۹-۴

برمی‌گردیم. دو صفحهٔ w که به این ترتیب به یکدیگر متصل می‌شوند یک **سطح ریمان** تشکیل می‌دهند؛ هر یک از دو صفحه را یک **ورقهٔ** سطح ریمان می‌نامیم. توجه کنید که خطی که در امتداد آن و ورقه‌های سطح ریمان به یکدیگر متصل می‌شوند (در اینجا، محور حقیقی مثبت) یک برش انشعاب است، و مبدأ یک نقطهٔ انشعاب می‌باشد (رک مثال ۵، بخش ۷). در اینجا برش انشعاب و سطح ریمان در صفحهٔ w واقع اند زیرا $z = \sqrt{w}$ دارای دو انشعاب است. به ازای $w = \sqrt{z}$، سطح ریمان (مانند بخش ۷) در صفحهٔ z خواهد بود.

نگاشت همدیس ما در حال بررسی نگاشتها یا تبدیلها هستیم. در فصل ۱۰، اصطلاح ***تبدیل*** را برای تغییر متغیر یا تغییر دستگاه مختصات به کار بردیم؛ می‌خواهیم ببینیم ارتباط بین این دو مقوله چیست. در فصل ۱۰ ما فقط یک صفحه [صفحهٔ (x, y)] به کار بردیم و برای مشخص کردن جای یک نقطه در صفحهٔ (x, y)، مختصات قائم (x, y)، یا مختصات قطبی (r, θ)، یا مختصات دیگری مثل (u, v) از آن نقطه را دادیم. دایره‌های ثابت $= r$ و شعاعهای ثابت $= \theta$ را در صفحهٔ (x, y) رسم کردیم. همچنین برای هر نوع دستگاه مختصاتی مثل (u, v)، (در فصل ۱۰، رک بخشهای ۶ تا ۸، از جملهٔ مسائل بخش ۸)، منحنی‌های ثابت $= u$ و ثابت $= v$ را در صفحهٔ (x, y) رسم کردیم. در زبان "متغیر مختلط" که اینک داریم به کار می‌بریم، این مترادف است با نگاشت خطهای ثابت $= u$ و ثابت $= v$ از صفحهٔ w به صفحهٔ z. در فصل ۱۰، ما مخصوصاً به تبدیلهای به مختصات منحنی‌الخط متعامد علاقه‌مند بودیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که هر تابع تحلیلی $w = f(z) = u + iv$ منجر می‌شود به یک تبدیل به دستگاه متعامد (u, v). داریم

$$\begin{aligned} dz &= dx + i\,dy, \qquad & dw &= du + i\,dv \\ |dz|^2 &= dx^2 + dy^2, \qquad & |dw|^2 &= du^2 + dv^2 \end{aligned} \tag{۵-۹}$$

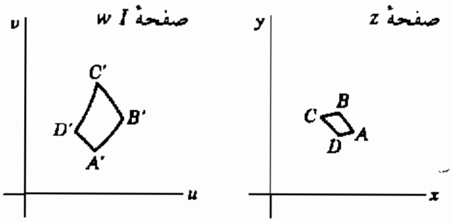
به این ترتیب، مربع طول عنصر کمان در صفحهٔ (x,y) عبارت است از

$$ds^2 = dx^2+dy^2 = |dz|^2 = \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 |dw|^2 = \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 (du^2+dv^2) \tag{۶-۹}$$

چون هیچ جملهٔ $du\ dv$ در ds^2 وجود ندارد، بنابراین دستگاه مختصات (u, v) متعامد است (فصل ۱۰، بخش ۶). مقصود ما از بیان این مطلب این است که اگر $u(x, y)$ و $v(x, y)$ را از

$f(z) = u+iv$ به دست آوریم و منحنی‌های ثابت $= u(x, y)$ و ثابت $= v(x, y)$ را در صفحهٔ (x, y) رسم کنیم، دو مجموعهٔ متعامد خواهیم داشت. اینها منحنی‌های مختصات مربوط به دستگاههای مختصات (u, v) در فصل ۱۰ خواهند بود. اگر معادلات $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ را حل کنیم و x و y را برحسب u و v به دست آوریم، معادلات تبدیل از متغیرهای x و y، به متغیرهای u و v را خواهیم یافت (مانند مسائل ۸-۶ و ۸-۹ از فصل ۱۰)، و طبق رابطهٔ (۹-۶) می‌دانیم که (اگر $f(z)$ تحلیلی باشد) دستگاه مختصات (u, v) متعامد است. مثالی در این زمینه را می‌توان در شکل ۹-۳ دید (دو مجموعه هذلولی متعامد). از (۹-۶) ملاحظه می‌کنید که دو ضریب مقیاسی که به این ترتیب در دستگاه مختصات (u, v) به دست می‌آیند مساوی‌اند.

هر چند ما در فصل ۱۰ فقط یک صفحه به کار بردیم، امّا برای متغیرهای مختلط بهتر است هم صفحهٔ z [یعنی، صفحهٔ (x, y)] و هم صفحهٔ w [یعنی، صفحهٔ (u, v)] را در نظر بگیریم. در صفحهٔ (x, y)، طول عنصر کمان ds با $ds^2 = dx^2 + dy^2$ داده می‌شود. همچنین در صفحهٔ (u, v)، طول عنصر کمان (که آنرا با dS نمایش می‌دهیم) با $dS^2 = du^2 + dv^2$ داده می‌شود. از (۹-۵) می‌بینیم که $ds = |dz|$ و $dS = |dw|$. بنابراین نسبت dS به ds عبارت است از $|dw/dz|$. نقطهٔ z (و تصویر آن w) را که در آن $w(z)$ تحلیلی است و dw/dz صفر نیست در نظر بگیرید. اگر نزدیک z بمانیم، مقدار dw/dz تقریباً ثابت است، و نسبت dS/ds نیز تقریباً ثابت می‌باشد. به این ترتیب اگر مساحت کوچکی در صفحهٔ z ($ABCD$ در شکل ۹-۵) و تصویر آن ($A'B'C'D'$ در شکل ۹-۵) در صفحهٔ w را در نظر بگیریم خواهیم داشت



شکل ۹-۵

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = \frac{dS}{ds} = \left|\frac{dw}{dz}\right| \quad (۹-۷)$$

یعنی، دو مساحت کوچک، شکلهای مشابهی هستند (زیرا اضلاع همخوان متناسب اند). به

علّت این ویژگی هر گونه نگاشت توسط یک تابع تحلیلی، این نگاشت یا تبدیل را **همدیس** (به معنای همشکل یا همریخت) می‌نامیم. زاویه‌های همخوان مساوی‌اند ($A = A'$ و غیره) و نتیجهٔ کلّی تبدیل، بزرگ کردن (یا کوچک کردن) و چرخاندن هر مساحت بینهایت کوچک است. توجه کنید که ویژگی همدیسی "موضعی" است؛ از آنجا که مقدار dw/dz از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند، هر قسمت کوچکی از یک شکل بـه مـقدار مـتفاوتی بـزرگ و چـرخانده می‌شود، و در نتیجه یک شکل بزرگ پس از نگاشت، همان شکل را نخواهد داشت. همچنین توجه کنید که در همسایگی نقطه‌ای که در آن $dw/dz = 0$ است، همدیسی نداریم؛ برای مثال، در شکل ۹-۴ یک ربع دایرهٔ کوچک در اطراف مبدأ در صفحهٔ z، به نیمدایرهٔ کوچکی در صفحهٔ w نگاشته می‌شود.

مسائل، بخش ۹

۱- در معادله‌های (۹-۳)، x و y را برحسب u و v پیدا کنید. با استفاده از معادله‌های به دست آمده، تصویر صفحهٔ z را که شامل خطهای ثابت $= x$ (به ازای چـند مـقدار x) و نـیز ثابت $= y$ است بر صفحهٔ w رسم کنید.

برای هر یک از توابع $w = f(z) = u + iv$ که در زیر می‌آید، u و v را به صورت توابعی از x و y پیدا کنید. نمودارهای تصاویر ثابت $= u$ و ثابت $= v$ را به ازای چند مقدار u و v، مثل آنچه که در شکل ۹-۳ برای $w = z^2$ انجام شد، در صفحهٔ (x, y) رسم کنید. منحنی‌های ثابت $= u$ باید با منحنی‌های ثابت $= v$ متعامد باشند.

۲- $w = \frac{z+1}{2i}$ ۳- $w = \frac{1}{z}$ ۴- $w = e^z$ ۵- $w = \frac{z-i}{z+i}$

۶- $w = \sqrt{z}$. ***راهنمایی:*** این معادل است با $z = w^2$؛ x و y را برحسب u و v پیدا کنید و سپس زوج معادلهٔ مربوط به u و v را، که برحسب x و y است، حل کنید. توجه کنید که در واقع این مسأله مانند مسألهٔ ۱ است که در آن جای صفحات z و w عوض شده است.

۷- $w = \sin z$ ۸- $w = \cosh z$

سطح ریمان را برای موارد زیر پیدا کنید:

۹- $w = z^{۳}$ ۱۰- $w = \sqrt{z}$ ۱۱- $w = ln\ z$

۱۲- اگر $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$، که در آن $f(z)$ تحلیلی است، معرّف یک تبدیل از متغیرهای x ، y به متغیرهای u و v باشد، نشان دهید که ژاکوبی تبدیل (رک فصل ۱۰، بخش ۱۳) عبارت است از $\partial(u, v)/\partial(x, y) = |f'(z)|^{۲}$. ***راهنمایی:*** برای ساده کردن دترمینان، معادلات کوشی - ریمان و معادلات (بخش ۲) به کار برده شده برای یافتن آنها را به کار ببرید.

۱۳- معادلهٔ ماتریسی

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (J) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

را که در آن (J) ماتریسی است که دترمینان آن ژاکوبی معادلهٔ ۱۲ است، ثابت کنید. (همچنین رک فصل ۱۰، بخش ۱۳.) معادلهٔ ماتریسی را در ترانهادهٔ آن ضرب کنید و با استفاده از مسألهٔ ۱۲، $dS/ds = |dw/dz|$ را مثل آنچه که در (۹-۷) آمده است به دست آورید.

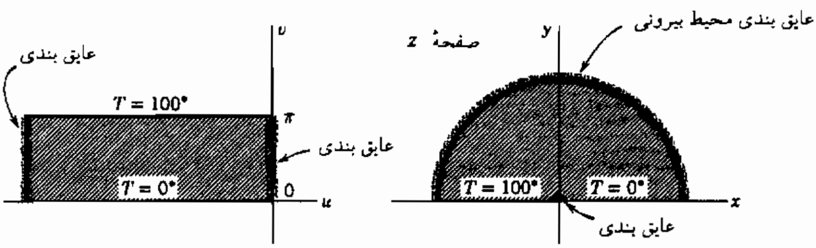
۱۴- این واقعیت را که یک تبدیل همدیس، شکل هندسی بینهایت کوچکی را بزرگ می‌کند و می‌چرخاند مورد بررسی قرار دادیم. ثابت کردیم که $|dw/dz|$ ضریب بزرگنمایی است. نشان دهید که زاویهٔ مربوط به dw/dz، زاویهٔ چرخش است. ***راهنمایی:*** چرخش و بزرگ شدن یک کمان $dz = dx + idy$ (به طول ds و زاویهٔ $arc\ tan\ dy/dx$) را که برای به دست آوردن تصویر dz، یعنی dw، لازم است در نظر بگیرید.

۱۵- مشتق جهتی $d\phi/ds$ (فصل ۶، بخش ۶) را در یک نقطه و در جهت داده شده با dz در صفحهٔ z، با مشتق جهتی $d\phi/dS$ در جهت داده شده با تصویر dw ی dz در صفحهٔ w مقایسه کنید. با استفاده از این مطلب، نشان دهید که میزان تغییر T در یک جهت مفروض در صفحهٔ z متناسب است با میزان تغییر همخوان T در جهت تصویر در صفحهٔ w. (رک بخش ۱۰، مثال ۲). نشان دهید که ضریب تناسب عبارت است از $|dw/dz|$. ***راهنمایی:*** معادلات (۹-۶) و (۹-۷) را ملاحظه کنید.

۱۰- کاربردهای نگاشت همدیس

مسائل گوناگون بسیاری در فیزیک، مستلزم حلّ معادلهٔ لاپلاس هستند. می‌خواهیم ببینیم چگونه می‌توان با استفاده از نگاشت همدیس چند نمونه از این مسائل را حل کرد. ابتدا مسألهٔ بسیار ساده‌ای را در نظر بگیرید که جواب آنرا از فیزیک مقدماتی می‌دانیم.

مثال ۱- در شکل ۱۰-۱، ناحیهٔ سایه‌دار در صفحهٔ (u, v) معرّف یک تیغهٔ مستطیلی است. دو سر و دو طرف تیغه عایق بندی شده‌اند، لبهٔ پایین در دمای $T = ۰^\circ$ و لبهٔ بالا در دمای $T = ۱۰۰^\circ$ قرار دارد. از فیزیک مقدماتی می‌دانیم که دما به طور خطی از لبهٔ پایین $(v = ۰)$ تا لبهٔ بالا $(v = \pi)$ افزایش می‌یابد، یعنی در هر نقطهٔ تیغه $T = (۱۰۰/\pi)\, v$ است. این جواب را با استفاده از روش پیشرفته‌تری نیز پیدا می‌کنیم. از نظریهٔ گرما می‌دانیم که دمای T ی یک جسم در مناطقی که هیچ چشمهٔ گرما وجود ندارد در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. در این مسأله، برای معادلهٔ لاپلاس جوابی می‌خواهیم که با **_شرایط مرزی_** بخوانند، یعنی وقتی $v = \pi$ است $T = ۱۰۰^\circ$، وقتی $v = ۰$ است $T = ۰^\circ$، و در دو سر $\partial T/\partial u = ۰$. شرط آخر، راه ریاضی بیان این است که سطح عایق بندی است. در نظریهٔ گرما، آهنگ شارش گرما از یک سطح متناسب با آهنگ تغییر دما در راستای خط عمود بر آن سطح است. در اینجا راستای عمود در راستای u است، و آهنگ شارش گرما از یک سطح عایق بندی شده صفر است. شما باید تحقیق کنید که $T = ۱۰۰v/\pi$ در معادلهٔ $\partial^۲T/\partial u^۲ + \partial^۲T/\partial v^۲ = ۰$ و در تمام شرایط مرزی صدق می‌کند. همچنین توجه کنید که یک راه آسان برای پی بردن به اینکه v در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند این است که ببینیم مساوی قسمت موهومی $w = u + iv$ است، و قضیهٔ IV از بخش ۲ را به کار ببریم که می‌گوید قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی از یک متغیر مختلط در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کنند.



شکل ۱۰-۱

حال از نتایج حاصل، مسألهٔ مشکل‌تری را حل می‌کنیم.

مثال ۲- نگاشت مستطیل صفحهٔ w را به صفحهٔ z توسط تابع $w = ln\ z$ در نظر بگیرید (شکل ۱۰-۱، صفحهٔ z). داریم

$$w = ln\ z = ln\ (re^{i\theta}) = ln\ r + i\theta = u + iv$$
$$u = ln\ r \quad ، v = \theta \tag{۱-۱۰}$$

پس $v = ۰$ به $\theta = ۰$، یعنی محور مثبت xها، و $v = \pi$ به $\theta = \pi$، یعنی محور منفی x ها، نگاشته می‌شود (صفحهٔ z، شکل ۱۰-۱). سر عایق بندی شدهٔ مستطیل در $u = ۰$، به $ln\ r = ۰$ یا $r = ۱$، و سر سمت چپ مستطیل به نیمدایرهٔ کوچکی در اطراف مبدأ نگاشته می‌شود که می‌توانیم آنرا به صورت عایق بندی کوچکی در مبدأ در نظر بگیریم که قسمتهای $°۰$ و $°۱۰۰$ محور xها را از هم جدا می‌کند. (اگر سر سمت چپ مستطیل در $u = -\infty$ قرار داشته باشد، داریم $ln\ r = -\infty$، $r = ۰$، و تصویر چیزی نیست جز مبدأ؛ به ازای مقادیر منفی و متناهی u، تصویر نیمدایره‌ای است با $r < ۱$.) اکنون می‌توانیم مسألهٔ نشان داده شده در صفحهٔ z شکل ۱۰-۱ را حلّ کنیم. دو طرف یک تیغهٔ نیمدایره‌ای و کرانهٔ خمیدهٔ آن عایق بندی شده، و نیمی از کرانهٔ تخت آن در $°۰$ و نیمهٔ دیگر آن در $°۱۰۰$ قرار دارد (با کمی عایق بندی در مبدأ). دمای T نقاط تیغه را پیدا کنید. برای حل این مسأله فقط باید جواب خود در صفحهٔ (u, v) را با استفاده از (۱۰-۱) به متغیرهای x و y تبدیل کنیم. بنابراین داریم

$$T = \frac{۱۰۰}{\pi} v = \frac{۱۰۰}{\pi} \theta = \frac{۱۰۰}{\pi} arc\ tan \frac{y}{x} \quad ، ۰ \leq \theta \leq \pi \tag{۲-۱۰}$$

توجیه این روش مشکل نیست. باید ثابت کنیم که جواب ما در معادلهٔ لاپلاس و شرایط مرزی صدق می‌کند. به طور خیلی سرراست (مسألهٔ ۱) می‌توان نشان داد که اگر تابع $\phi(u, v)$ در معادلهٔ لاپلاس $\partial^۲\phi/\partial u^۲ + \partial^۲\phi/\partial v^۲ = ۰$ صدق کند، تابعی از x و y که از جایگزینی $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ در ϕ به دست می‌آید در معادلهٔ لاپلاس بر حسب x و y صدق خواهد کرد، که در آن u و v قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی $w = f(z)$ می‌باشند. به این ترتیب می‌دانیم که (۱۰-۲) در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند (یا در این مورد می‌توانید این موضوع را مستقیماً ثابت کنید). همچنین باید بدانیم که T تبدیل یافته در شرایط

مرزی صدق می‌کند؛ این همان جایی است که نگاشت همدیس مفید بودن خود را نشان می‌دهد. ملاحظه کنید که در شکل ۱۰-۱ تبدیلی داشتیم که مرزهای یک ناحیهٔ ساده (یک مستطیل) را که برای آن جواب مسألهٔ دما را می‌دانستیم به مرزهای ناحیهٔ پیچیده‌تری می‌برد که برای آن دنبال جواب می‌گشتیم. این همان روش بنیادی نگاشت همدیس است - رفتن از ناحیهٔ ساده‌ای که در آن جواب مسأله‌ای را می‌دانید، به ناحیه‌ای که در آن جواب را می‌خواهید. دما در هر نقطهٔ (x, y) مساوی دما در نقطهٔ تصویر $(u\ , v)$ است، زیرا دما به صورت تابعی از x و y را با همان جایگذاری $u = u(x, y)$، $v = v(x, y)$ که برای پیدا کردن نقاط تصویر به کار می‌بریم، به دست می‌آوریم. بنابراین، دماهای روی مرزهای ناحیهٔ تبدیل یافته مساوی دماهای روی مرزهای همخوان ناحیهٔ ساده‌تر $(u\ , v)$ می‌باشند. به همین ترتیب همدماها (منحنی‌های با دمای ثابت) به همدماها تبدیل می‌شوند. در این مسأله همدماهای $(u\ , v)$ عبارت اند از خطهای ثابت $= v$، و بنابراین همدماهای (x, y) عبارت اند از ثابت $= \theta$. می‌توانید ثابت کنید که آهنگ تغییر T در راستایی عمود بر یک مرز در صفحهٔ (u, v) متناسب است با آهنگ تغییر همخوان T در راستایی عمود بر مرز تصویر در صفحهٔ $(x\ , y)$ (مسألهٔ ۹-۱۵). بنابراین مرزهای عایق بندی شده (که آهنگ تغییر T در آنها صفر است) به مرزهای عایق بندی شده نگاشته می‌شوند. خطها (یا منحنی‌ها) ی عمود بر همدماها، جهت شارش گرما را می‌دهند. در شکل ۱۰-۱، گرما در امتداد خطهای ثابت $= u$ در صفحهٔ w، و در امتداد دایره‌های ثابت $= r$ (که تصویرهای ثابت $= u$ می‌باشند) در صفحهٔ z شارش می‌یابند.

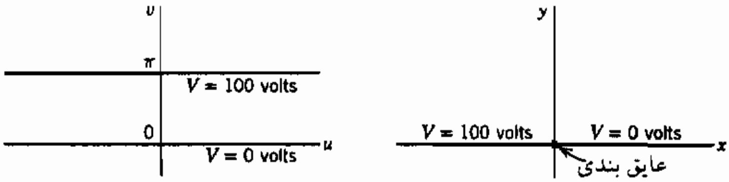
با به کار بردن همین تابع نگاشت $w = ln\ z$، می‌توانیم تعداد دیگری از مسائل فیزیکی را حل کنیم. ابتدا ملاحظه کنید که اگر شکل ۱۰-۱ را معرّف سطح مقطعی از یک مسألهٔ ۳ بعدی در نظر بگیریم (تمام سطح مقطعهای موازی، همسان یکدیگر)، در آن صورت (۱۰-۲) نیز جواب مسألهٔ ۳ بعدی را خواهد داد. در شکل ۱۰-۱، نمودار $(u\ , v)$ سطح مقطع بُره‌ای خواهد بود که دو طرف آن در $T = ۱۰۰^\circ$ و $T = ۰^\circ$ بوده و سایر سطوح آن عایق بندی (یا کشیده شده به بینهایت) می‌باشند. به طور مشابه، نمودار (x, y) معرف یک نیم استوانه خواهد بود. اکنون یک مسألهٔ ۳ بعدی را در الکتروستاتیک حل کنیم.

مثال ۳- در شکل ۱۰-۲، نمودار $(u\ , v)$ معرف (سطح مقطع) دو تیغهٔ موازی نامتناهی،

یکی در پتانسیل $V = ۰$ ولت و دیگری در پتانسیل $V = ۱۰۰$ ولت است. نمودار (x, y) نیز معرّف (سطح مقطع) صفحه‌ای است که نیمهٔ راست آن در پتانسیل $V = ۰$ ولت و نیمهٔ چپ آن در پتانسیل $V = ۱۰۰$ ولت قرار دارد. از الکتریسیته می‌دانیم که پتانسیل الکتروستاتیکی V معادلهٔ لاپلاس را در مناطقی که در آن بار آزاد وجود ندارد برقرار می‌سازد. شما باید ثابت کنید که نگاشت با (۱۰-۱) نتیجهٔ نشان داده شده در شکل ۱۰-۲ را می‌دهد، و پتانسیل نیز، مانند (۱۰-۲)، از رابطهٔ

$$V = \frac{۱۰۰}{\pi} v = \frac{۱۰۰}{\pi} \theta = \frac{۱۰۰}{\pi} \arctan \frac{y}{x} \quad ، ۰ \leq \theta \leq \pi$$

به دست می‌آید. هم پتانسیلهای (ثابت $= V$) واقع در صفحهٔ (x, y) عبارت اند از خطهای ثابت $= \theta$. به یاد آوریم که میدان الکتریکی با $\mathbf{E} = -\nabla V$ داده می‌شود، و شیب V عمود بر ثابت $= V$ است. (فصل ۶، بخش ۶). بنابراین جهت میدان الکتریکی در هر نقطه عمود بر

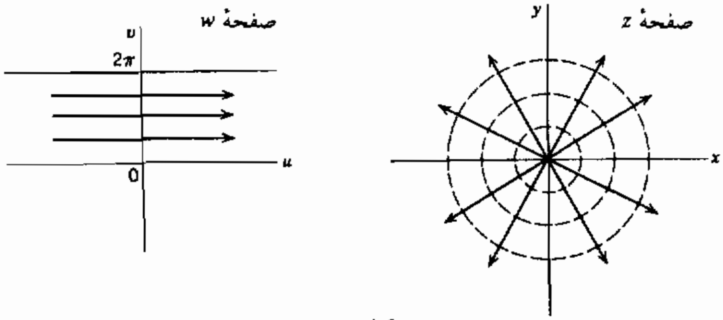


شکل ۱۰-۲

هم پتانسیلی است که از آن نقطه می‌گذرد. به این ترتیب اگر منحنی‌های ثابت $= r$ عمود بر هم پتانسیلهای ثابت $= \theta$ را رسم کنیم، خط مماس بر یک دایره در یک نقطه جهت میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در آن نقطه می‌دهد. به همخوانی بین همدماهای مسألهٔ دما و هم پتانسیلها در اینجا، و بین خطهای شار الکتریکی (منحنی‌های مماس بر $\mathbf{E}$) و خطها یا منحنی‌هایی که گرما در امتداد آنها جریان می‌یابد توجه کنید.

مسائل هیدرودینامیک (بخش ۱۰ از فصل ۶ را ملاحظه کنید) را نیز می‌توانیم به کمک نگاشت همدیس حل کنیم. شارشی دوبعدی از آب را در نظر می‌گیریم، به این معنا که فرض می‌کنیم یا آب در ورقهٔ نازکی بر روی صفحهٔ (x, y) [یا (u, v)] جریان دارد، و یا اگر ورقه دارای عمق است، جریان آب بر روی تمام صفحات موازی با صفحهٔ (x, y) [یا (u, v)] یکسان است. هر چند که سخن گفتن از آب راحت‌تر است، امّا آنچه منظور نظر ماست در واقع

جریان بی‌گردشی (رک فصل ۶، بخش ۱۱) از یک شارهٔ نا چسبندهٔ تراکم ناپذیر است؛ زیرا در آن صورت (مسألهٔ ۲ را ملاحظه کنید) سرعت $\mathbf{V}$ ی مایع با $\mathbf{V} = \nabla\Phi$ داده می‌شود، که Φ (موسوم به **پتانسیل سرعت**) در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. آب تقریباً دارای این شرایط هست.



شکل ۱۰-۳

مثال ۴- شکل ۱۰-۳ دو طرحوار سادهٔ جریان را نشان می‌دهد که با همان تبدیلی که در مسألهٔ گرما و مسألهٔ الکتروستاتیک به کار بردیم، یعنی $w = \ln z$، به یکدیگر مربوط می‌شوند. در صفحهٔ w در شکل ۱۰-۳ فرض می‌کنیم آب در راستای u با سرعت ثابت $V_\circ$ از کانالی که دو حدّ آن $v = \circ$ و $v = ۲\pi$ است می‌گذرد. (توجه کنید که v قسمت موهومی $w = u + iv$ است و هیچ ربطی به سرعت ندارد.) پتانسیل سرعت عبارت است از $\Phi = V_\circ u$، زیرا در آن صورت سرعت، $\mathbf{V} = \nabla\Phi$، دارای مؤلفه‌های $\partial\Phi/\partial u = V_\circ$ در جهت u و $\partial\Phi/\partial v = \circ$ در جهت v، همانگونه که فرض کرده‌ایم، می‌باشد. تابع $\Phi + i\Psi = V_\circ w = V_\circ(u+iv)$، ***پتانسیل مختلط***، و تابع Ψ (همیوغ Φ؛ بخش ۲ را ملاحظه کنید)، ***تابع جریان*** خوانده می‌شود. خطهای ثابت $= \psi$ (یعنی، ثابت $= v$ در صفحهٔ w) خطهایی هستند که آب در امتداد آنها جریان دارد و ***خطوط جریان*** خوانده می‌شوند. توجه داشته باشید که خطهای ثابت $= \Phi$ و ثابت $= \Psi$ مجموعه خطهای متعامدی هستند. آب از خطهای با Φ ثابت و در امتداد خطهای جریان (با Ψ ثابت) می‌گذرد؛ مرزهای کانال ($v = \circ$ و $v = ۲\pi$) به این ترتیب باید خطهای جریان باشند. آب از سمت چپ وارد (شکل ۱۰-۳، صفحهٔ w) و از سمت راست خارج می‌شود؛ اصطلاحاً می‌گوییم که در طرف چپ یکی **چشمه** و در طرف راست یک **چاهک**

وجود دارد.

اکنون نگاشت صفحهٔ جریان w در شکل ۱۰-۳ را به صفحهٔ z توسط تابع $w = ln\ z$ در نظر بگیرید. پتانسیل مختلط عبارت است از

$$\Phi + i\Psi = V_\circ w = V_\circ ln\ z = V_\circ (ln\ r + i\theta)$$

خطهای جریان عبارت اند از ثابت $= \Psi$، یا ثابت $= \theta$، که همان خطهای شعاعی می‌باشند. منحنی‌های ثابت $= \Phi$، دایره‌های ثابت $= r$ هستند و بر خطهای جریان عمودند. سرعت با

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi = V_\circ \nabla(ln\ r) = V_\circ \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) ln\ r = \mathbf{e}_r \frac{V_\circ}{r}$$

داده می‌شود. به این ترتیب،آنچه که ما در حال توصیف آن هستیم، شارش آب از چشمه‌ای واقع در مبدأ و در امتداد خطهای شعاعی به طرف بیرون است. چون مقدار آبی که یک دایرهٔ کوچک (در اطراف مبدأ) یا یک دایرهٔ بزرگ را قطع می‌کند یکی است، سرعت آب، همان گونه که پیدا کرده‌ایم ($|\mathbf{V}| = V_\circ/r$)، با r کاهش می‌یابد.

می‌توانیم با تعویض هم پتانسیلها و خطهای جریان، از هر نقش شارش، شارش دیگری به دست آوریم. در شکل ۱۰-۳، صفحهٔ z، خطهای جریان این شارش جدید دایره‌های ثابت $= r$ هستند که همخوان با یک حرکت گردابی آب حول مبدأ (موسوم به **گرداب**) می‌باشند. کاربردهای دیگری از این نمودار نیز وجود دارد. دایره‌های ثابت $= r$ جهت میدان مغناطیسی حول یک سیم دراز حامل جریان را که عمود بر صفحهٔ (x, y) است و از مبدأ می‌گذرد به دست می‌دهند. خطهای شعاعی ثابت $= \theta$ جهت میدان الکتریکی را حول سیم دراز مشابهی که یک بار ساکن بر روی آن توزیع شده است مشخص می‌کنند. خطهای شعاعی، جهت شارش گرما را از یک جسم کوچک واقع در مبدأ به دست می‌دهند، و به این ترتیب دایره‌های ثابت $= r$ معرف منحنی‌های همدما می‌باشند. با شروع از مسائلی شبیه به اینها که جواب آنها را می‌دانیم و استفاده از تبدیلهای همدیس مختلف، می‌توانیم مسائل بسیار دیگری را که شامل شارش سیال، الکتریسیته، گرما، و غیره است حل کنیم. مثالهایی چند در ضمن مسائل ذکر خواهند شد و برای مثالهای بیشتر باید به کتابهای پیرامون متغیرهای مختلط مراجعه کرد.

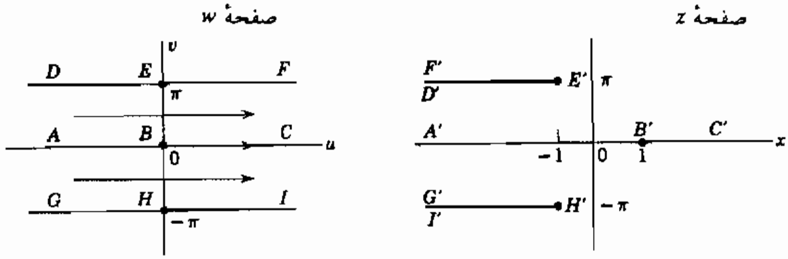
مثال ۵- مثال نسبتاً مشکل‌تری از کاربرد نگاشت همدیس را در نظر می‌گیریم. در این مثال خواهیم توانست دو مسألهٔ فیزیکی جالب را حل کنیم: (۱) پیدا کردن نقش شارش آب وقتی که از انتهای یک کانال مستقیم وارد محیط بازی می‌شود، و (۲) پیدا کردن اثر لبه (فریزش) در دو انتهای یک خازن با جوشنهای موازی.

تابع نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$z = w + e^{w} = u + iv + e^{u} e^{iv} = u + iv + e^{u} (\cos v + i \sin v) \tag{۳-۱۰}$$

$$x = u + e^{u} \cos v \qquad ، y = v + e^{u} \sin v$$

در شکل ۱۰-۴، صفحهٔ w، یک شارش موازی آب با سرعت ثابت را در ناحیهٔ بین خطهای DEF و GHI در نظر می‌گیریم. این شارش درست شبیه شارش شکل ۱۰-۳، صفحهٔ w،



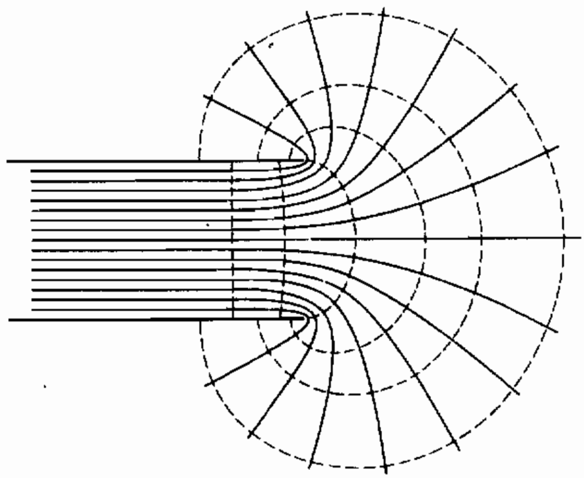
شکل ۱۰-۴

است. اکنون با استفاده از (۱۰-۳)، خطهای جریان صفحهٔ w را به صفحهٔ z می‌بریم. بر روی محور xها، $v = ۰$ است. با قرار دادن $v = ۰$ در (۱۰-۳)، می‌بینیم $y = ۰$، و $x = u+e^{u}$. لذا محور u به محور x ها ($y = ۰$) نگاشته می‌شود به طوری که $u = -\infty$ همخوان با $x = -\infty$، $u = ۰$ همخوان با $x = ۱$، و $u = +\infty$ همخوان با $x = +\infty$ است که در شکل ۱۰-۴ نشان داده شده است (خط ABC به $A'B'C'$ نگاشته می‌شود). حال می‌بینیم که بر روی DEF، $v = \pi$ است. با جایگذاری $v = \pi$ در (۱۰-۳)، ملاحظه می‌کنیم $y = \pi$، $x = u + e^{u} \cos \pi = u - e^{u}$. با این همه، تصویر $v = \pi$ تمامی خط $y = \pi$ نیست. برای پی بردن به این نکته $x = u-e^{u}$ را در نظر بگیرید. بیشینه مقدار x را

به ازای $u = \circ$ و $dx/du = 1-e^u = \circ$، $d^2x/du^2 = -e^u < \circ$ پیدا می‌کنیم. این معادلات به ازای $u = \circ$ و $x = -1$ برقرارند. نقطهٔ $E\,(u=\circ\,,\,v=\pi)$ به نقطهٔ $E'(x=-1\,,y=\pi)$ نگاشته می‌شود. بنابراین DE از صفحهٔ w به آن بخش از خط $y = \pi$ در صفحهٔ z نگاشته می‌شود که منتهی به $x = -1$ است و $u = -\infty$ همخوان با $x = -\infty$، و $u = \circ$ همخوان با $x = -1$ است. برای پی بردن به چگونگی نگاشت EF، ملاحظه می‌کنیم که بیشترین مقدار x در $u = \circ$ است و بنابراین وقتی u افزایش می‌یابد، x کاهش پیدا می‌کند. به ازای مقادیر خیلی بزرگ و مثبت u، $x = u - e^u$ منفی و دارای قدر مطلق بزرگی است زیرا $e^u >> u$. به این ترتیب بخش مثبت $v = \pi$ (یعنی EF) به همان خطی ($y=\pi\,,\ x \leq -1$) نگاشته می‌شود که برای نگاشت بخش منفی آن (DE) به دست آوردیم، امّا این بار نگاشتِ خط ($E'F'$، صفحهٔ z) در جهت عکس طی می‌شود. مثل این می‌ماند که خط $y = \pi$ در $x = -1$ شکسته شده و با یک چرخش 180° بر روی خودش تا شده باشد. با استدلالی مشابه در مورد خط GHI، ملاحظه می‌کنیم که این خط مطابق شکل ۱۰-۴ به خط $G'H'I'$ نگاشته می‌شود. سایر خطهای جریان در صفحهٔ w توسط $v =$ ثابت و به ازای تمام v های بین $-\pi$ و π داده می‌شوند. اگر $v =$ ثابت را در معادلات x و y در (۱۰-۳) جایگزین کنیم، معادلاتی پارامتری (که در آنها u نقش پارامتر را دارد) برای خطهای جریان در صفحهٔ z به دست می‌آوریم. به ازای هر مقدار v، این خطهای جریان را می‌توان در صفحهٔ z رسم کرد:
بعضی از آنها با خطهای پیوسته در شکل ۱۰-۵ نشان داده شده‌اند. فرض کنید $D'E'$ و $G'H'$ مرزهای یک کانال (در صفحهٔ z) باشند که در آن آب از $x = -\infty$ جریان دارد. مرزها در $x = -1$ تمام می‌شوند و آب به خارج جریان پیدا کرده، بر روی تمامی صفحه از جمله در پشت مرزها ($E'F'$ و $H'I'$) منتشر می‌شود. بر طبق نگاشت ما این درست است، زیرا خط جریان مرزی DEF به خط شکسته و تا خوردهٔ $D'E'F'$، و نیز خط GHI به $G'H'I'$ نگاشته شده است.

برای کاربرد الکتریکی، فرض کنید DEF و GHI معرف (سطح مقطع) های یک خازن بزرگ با جوشنهای موازی باشند. در این صورت خطهای ثابت $= v$ معرف هم پتانسیلها و خطهای ثابت $= u$ معرف جهت میدان الکتریکی E خواهند بود. تصویر در صفحهٔ z نشان دهندهٔ (یک سطح مقطع) انتهای یک خازن با صفحات موازی است. تصاویر هم

پتانسیلهای ثابت $= v$، هم پتانسیلهای واقع در صفحهٔ z اند. (همانند خطهای جریان، که به صورت خطهای پیوسته در شکل ۱۰-۵ نشان داده شده‌اند). تصاویر خطهای ثابت $= u$(که به صورت خط ـ چین در شکل ۱۰-۵ نشان داده شده‌اند)، جهت میدان الکتریکی را در انتهای یک خازن با صفحات موازی به دست می‌دهند. کاملاً در داخل و بین صفحات، خطهای E عمودی اند، امّا در انتهای خازن این خطها به بیرون شکم می‌دهند؛ این اثر **فریزش** نامیده می‌شود.



شکل ۱۰-۵

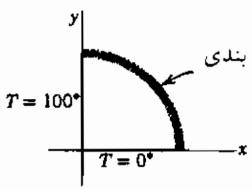
مسائل، بخش ۱۰

۱- قضیه‌ای را که درست پس از (۱۰-۲) بیان شده است به این ترتیب ثابت کنید. فرض کنید $\phi(u, v)$ یک تابع هماهنگ باشد (یعنی ϕ در $\partial^2\phi/\partial u^2 + \partial^2\phi/\partial v^2 = 0$ صدق کند). نشان دهید که در آن صورت یک تابع تحلیلی مانند $g(w) = \phi(u, v) + i\psi(u, v)$ وجود دارد (بخش ۲ را ملاحظه کنید). فرض کنید $w = f(z) = u + iv$ تابع تحلیلی دیگری (یعنی تابع نگاشت) باشد. ثابت کنید که تابع $h(z) = g(f(z))$ تحلیلی است. [**راهنمایی**: ثابت کنید $h(z)$ دارای مشتق است. مشتق تابعی از یک تابع، مثلاً $\ln \sin z$، را چگونه پیدا می‌کنید؟ در آن صورت (طبق بخش ۲)، قسمت حقیقی $h(z)$ هماهنگ است.

ثابت کنید که این قسمت حقیقی عبارت است از $(\phi(u(x,y),v(x,y))$].

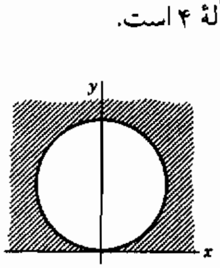
۲- شارش یک سیال در صورتی بی گردش خوانده می‌شود که $\nabla\times\mathbf{V} = 0$ و $\mathbf{V}$ مساوی سرعت سیال باشد (فصل ۶، بخش ۱۱)؛ در این صورت $\mathbf{V} = \nabla\phi$. با استفاده از مسألهٔ ۱۰-۱۵ از فصل ۶ نشان دهید که اگر سیال تراکم ناپذیر باشد، در آن صورت ϕ در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. (*هشدار:* در فصل ۶، داشتیم $\mathbf{V} = \mathbf{v}\rho$، که $\mathbf{v}$ سرعت بود؛ در اینجا $\mathbf{V}$ سرعت است.)

۳- با اختیار روابط $\nabla \cdot D = \rho$، $\mathbf{E} = -\nabla V$، $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ (که $\varepsilon =$ ثابت) از الکتریسیته، نشان دهید در ناحیه‌هایی که چگالی بار آزاد ρ صفر است، V در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند.



۴- دو رویه و مرز خمیدهٔ یک ربع دایرهٔ تخت، مطابق شکل، عایق بندی شده است، و دو لبهٔ مستقیم آن در °۰ و °۱۰۰ قرار دارند. توزیع $T(x, y)$ دما در این صفحه، و معادله‌های همدماها را پیدا کنید. *راهنمایی:* تابع نگاشت $w = \ln z$ را مانند شکل ۱۰-۱ به کار ببرید. چه خطی از صفحهٔ w به محور y نگاشته می‌شود؟

۵- خازنی را که از دو صفحهٔ بزرگ عمود بر هم تشکیل شده است در نظر بگیرید. (فرض کنید محورهای مثبت x و y در نمودار مسألهٔ ۴ معرف سطح مقطعی از این خازن باشند.) یک صفحه (محور x ها) در پتانسیل $V = 0$، و صفحهٔ دیگر (محور y ها) در پتانسیل $V = 100$ ولت قرار دارد. پتانسیل $V(x, y)$ را به ازای $x > 0$ و $y > 0$، و معادلات هم پتانسیلها را پیدا کنید. *راهنمایی:* این مسأله از نظر ریاضی شبیه مسألهٔ ۴ است.



۶- شکل مقابل معرّف (سطح مقطع) یک استوانهٔ داغ (مثلاً $T = 100°$) است که بر صفحهٔ سردی ($T = 0$) قرار گرفته است (صفحه و استوانه با مقداری عایق از هم جدا شده‌اند). دما را در ناحیهٔ سایه‌دار پیدا کنید. همچنین، فرض کنید که استوانه و صفحه در دو پتانسیل الکتریکی مختلف قرار دارند (با عایق بین آنها)، و پتانسیل الکتریکی را در ناحیهٔ سایه‌دار پیدا کنید. بعضی از همدماها (هم پتانسیلها) و

برخی از منحنی‌های عمود بر همدماها را که گرما در امتداد آنها جریان پیدا می‌کند (خطهای شار برای مورد الکتریکی) پیدا و رسم کنید. ***راهنمایی:*** تابع نگاشت $w = 1/z$ را بـه کـار ببرید و تصویر ناحیهٔ بین $v = 0$ و $v = -1$ را از صفحهٔ w در نظر بگیرید.

۷- با استفاده از تابع نگاشت $w = z^2$، خطهای جریان را برای شارش آب در داخل یک زانوی قائم پیداکنید. پتانسیل سرعت Φ، تابع جریان Ψ، و سرعت $\mathbf{V} = \nabla\Psi$ را نیز به دست آورید.

۸- ملاحظه کنید که بزرگی سرعت را در مسألهٔ ۷ می‌توان از $V_0\,|dw/dz|$ بـه دست آورد. ثابت کنید که به طور کلّی می‌توان این نتیجه را به شرح زیر بیان کرد: فرض کنید $w = f(z)$ یک تابع نگاشت تحلیلی باشد به گونه‌ای که خطهای $v =$ ثابت بـه خـطهای جـریان شارشی که می‌خواهید در صفحهٔ z در نظر بگیرید نگاشته می‌شوند. در آن صورت

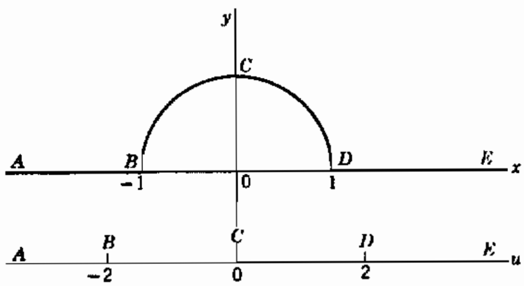
$$V_0 w = V_0\,(u+iv) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$$

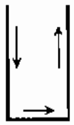
ثابت کنید

$$V_0\,\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y} = V_x - iV_y$$

(این عبارت **سرعت مختلط** نامیده می‌شود). به این ترتیب ثابت کنید $V=V_0\,|dw/dz|$.

۹- خطهای جریان شارش آب را بر روی یک برآمدگی نیمدایره‌ای (فرضاً یک تنهٔ درخت نیمه مدفون در بستر یک رودخانه) مطابق شکل پیدا و رسم کـنید. ***راهـنمایی:*** تـابع نگـاشت $w = z + z^{-1}$ را به کار ببرید. ثابت کنید محور u بر پربند $ABCDE$، با همخوانی نشان داده شده، نگاشته می‌شود.



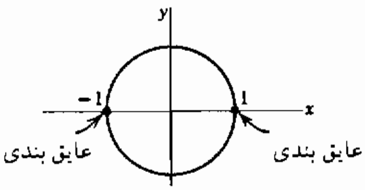


۱۰- خطهای جریان را برای شارش آب در داخل یک مسیر مستطیلی شکل، مطابق آنچه که نشان داده شده است، پیدا و رسم کنید. **راهنمایی:** تابع نگاشت $w = \sin z$ را در نظر بگیرید؛ محور u را به مرز مستطیل بنگارید.

۱۱- نشان دهید که برای $w = \ln[(z + ۱)/(z - ۱)]$ تصاویر ثابت $= u$ و ثابت $= v$ دو مجموعه دایرهٔ متعامد اند. مراکز و شعاعهای ۵ یا ۶ دایره از هر مجموعه را پیدا و آنها را رسم کنید. دایره‌ای که مرکزش بر مبدأ منطبق است را نیز در نظر بگیرید.

با استفاده از نتایج مسألهٔ ۱۱، مسائل فیزیکی زیر را حل کنید.

۱۲- شکل مقابل معرف سطح مقطع یک استوانهٔ دراز (فرض کنید درازی آن بینهایت است) است که دو نیم شده، و دو نیمهٔ آن با یک عایق از هم جدا شده‌اند. فرض کنید سطح نیمهٔ بالا در دمای $T = ۳۰^\circ$ و سطح نیمهٔ پایین در دمای $T = ۱۰^\circ$ قرار داشته باشد. دمای $T(x, y)$ را در داخل استوانه پیدا کنید.



راهنمایی: ثابت کنید خط $v = \pi/۲$ به نیمهٔ پایین دایرهٔ $|z| = ۱$، و خط $v = ۳\pi/۲$ به نیمهٔ بالای دایره نگاشته می‌شود.

۱۳- فرض کنید شکل مربوط مسألهٔ ۱۲ معرّف (سطح مقطع) خازنی باشد که نیمهٔ پایین آن در پتانسیل $V_۱$ و نیمهٔ بالای آن در پتانسیل $V_۲$ است. پتانسیل $V(x, y)$ را در بین جوشنها (یعنی، داخل دایره) پیدا کنید. **راهنمایی:** این تقریباً شبیه مسألهٔ ۱۲ است. توجه داشته باشید که در متن درس و در مسألهٔ ۱۲، دمای صفحهٔ w به صورت Av است، که A مقدار ثابتی است. در اینجا شما باید پتانسیل را به صورت $Av + B$ بنویسید، که A و B هر دو مقادیر ثابتی هستند.

۱۴- در شکل مربوط به مسألهٔ ۱۲، فرض کنید $z = -۱$ یک چشمه و $z = +۱$ یک چاهک باشد و آب به داخل کرانهٔ دایره‌ای جریان یابد. Φ ، Ψ ، و $\mathbf{V}$ را پیدا کنید. خطهای جریان را رسم کنید.

۱۵- در مسألهٔ ۱۴، خطهای جریان تصویرهای ثابت $= v$ بودند. شارش (بر روی تمامی

صفحه، یعنی بدون هیچگونه مرز) با خطهای جریان ثابت $= u$ را در نظر بگیرید. این شارش را می‌توان به صورت دو گردابی که در خلاف جهت هم می‌چرخند توصیف کرد. چند خط جریان را رسم و جهت سرعت را با پیکان مشخص کنید. چون هر کران (مرز) خود یک خط جریان است، با وارد کردن آن در امتداد خط جریان، شارش دستخوش آشفتگی نمی‌شود. دو کران دایره‌ای مربوط به $u = a$ و $u = -a$ را وارد کنید. نشان دهید که سرعت عبور از گلوی باریک (مثلاً در $z = ۰$) بیش از سرعت در هر جای دیگر (مثلاً در $z = i$) است. شما می‌توانید با نشان دادن اینکه نتیجهٔ مسألهٔ ۸ در اینجا نیز برقرار است، محاسبات سرعت را خیلی ساده کنید.

۱۶- دو استوانهٔ دراز موازی تشکیل یک خازن داده‌اند. (فرض کنید سطوح مقطع آنها تصویرهای $u = a$ و $u = -a$ است.) اگر این دو استوانه در پتانسیلهای $V_۰$ و $-V_۰$ قرار داشته باشند، پتانسیل $V(x, y)$ را در نقاط بین آنها پیدا کنید. با فرض اینکه بار (بر واحد طول) بر روی یک استوانه $q = V_۰/۲a$ باشد، ثابت کنید که ظرفیت (بر واحد طول)، یعنی، $q/۲V_۰$، با $۱/(۴\ arc\ cosh\ d/۲r)$ داده می‌شود، که d فاصلهٔ بین مراکز آنها، و r شعاع آنهاست.

۱۷- مسائل دیگری برای در نظر گرفتن و کاربرد تابع نگاشت مسألهٔ ۱۱: (الف) یک خازن تشکیل شده است از دو استوانهٔ دراز تو در تو، امّا غیر هم محور؛ (ب) میدان مغناطیسی در یک صفحهٔ عمود بر دو سیم دراز موازی حامل جریانهای مساوی امّا مخالف هم؛ (ج) میدان الکتریکی در یک صفحهٔ عمود بر دو سیم دراز موازی، که یکی دارای بار مثبت و دیگری دارای بار منفی است؛ (د) مسائل شارش دیگری که با وارد کردن کرانهایی در امتداد خطهای جریان به دست می‌آیند.

۱۱- مسائل متفرّقه

در مسائل ۱ و ۲، تحقیق کنید که تابع داده شده هماهنگ است، و تابع $f(z)$ را طوری پیدا کنید که تابع داده شده قسمت حقیقی آن باشد. ***راهنمایی:*** از مسألهٔ ۲-۶۴ استفاده کنید. برای مسألهٔ ۲، رک فصل ۲، بخش ۱۷، مسألهٔ ۱۹.

۱- $\ln \sqrt{(۱+x)^۲+y^۲}$ ۲- $arc\ tan\ \dfrac{y}{x+۱}$

۳- قضیهٔ لیوویل: فرض کنید $f(z)$ به ازای تمام مقادیر z (به جز ∞) تحلیلی و کراندار است [یعنی، به ازای تمام مقادیر z و یک مقدار M، $|f(z)| \leq M$]. ثابت کنید $f(z)$ یک مقدار ثابت است. ***راهنمایی:*** اگر $f'(z) = ۰$ باشد، در آن صورت ثابت $= f(z)$. برای اثبات این مطلب، $f'(z)$ را مانند مسألهٔ ۳-۲۱ بنویسید که در آن C دایره‌ای به شعاع R و مرکز z است، یعنی $w = z + Re^{i\theta}$. ثابت کنید $|f'(z)| \leq M/R$، و بگذارید $R \to \infty$

۴- با استفاده از قضیهٔ لیوویل (مسألهٔ ۳)، قضیهٔ اساسی جبر (رک مسألهٔ ۷-۴۴) را ثابت کنید. ***راهنمایی:*** فرض کنید $P(z)$ یک چند جمله‌ای با درجهٔ بزرگتر از ۱ باشد. در آن صورت $f(z) = ۱/P(z)$ در ناحیه‌ای که شامل هیچ صفری از $P(z)$ نباشد یک تابع تحلیلی کراندار است. این فرض را که $P(z)$ در هیچ جا دارای صفر نیست، رد کنید.

در مسائل ۵ تا ۸، مانده‌های توابع داده شده را در تمام قطبها پیدا کنید. فرض کنید $z = re^{i\theta}$، $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$

۵- $\dfrac{z^{۱/۳}}{۱+z^۲}$ ۶- $\dfrac{\sqrt{z}}{۱+۸z^۳}$ ۷- $\dfrac{ln\, z}{۱+z^۲}$ ۸- $\dfrac{ln\, z}{(۲z-۱)^۲}$

در مسائل ۹ و ۱۰، با استفاده از رشتهٔ لورن مانده‌های توابع داده شده را در مبدأ پیدا کنید.

۹- $\dfrac{sin\, z^۲}{z^۷}$ ۱۰- $\dfrac{ln(۱-z)}{sin^۲ z}$

۱۱- رشتهٔ لورن مربوط به $f(z) = e^z/(۱-z)$ را به ازای $|z| < ۱$ و $|z| > ۱$ پیدا کنید. ***راهنمایی:*** به ازای $|z| < ۱$، دو رشتهٔ توانی را در هم ضرب کنید؛ باید $f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n$ را که در آن $a_n = \sum_{k=۰}^{n} ۱/k!$ است، پیدا کنید. به ازای $|z| > ۱$، (۳-۴) را به کار ببرید که در آن C دایرهٔ $|z| = a$ با $a > ۱$ است. انتگرالها را با پیدا کردن مانده‌ها در ۱ و ۰ به دست آورید. باید $f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n z^{-n}$ را که در آن $b_n = -e$ و $a_n = -e + \sum_{k=۰}^{\infty} ۱/k!$ است پیدا کنید.

۱۲- فرض کنید $f(z)$ شاخهٔ $\sqrt{z^۲-۱}$، که به ازای مقادیر حقیقی مثبت بزرگ z مثبت است، باشد. رادیکال را برحسب توانهای $۱/z$ بسط دهید تا رشتهٔ لورن مربوط به $f(z)$ در حول ∞ به دست آید. سپس با استفاده از مسألهٔ ۸-۱، ماندهٔ $f(z)$ را در ∞ پیدا کنید. با به کار بردن

معادلهٔ (۸-۲) نتیجه‌ای را که به دست آورده‌اید امتحان کنید.

در مسائل ۱۳ و ۱۴، مانده‌ها را در نقاط داده شده پیدا کنید.

۱۳- (الف) $\frac{\cos z}{(۲z-\pi)^۴}$ در $\frac{\pi}{۲}$ (ب) $\frac{۲z^۲+۳z}{z-۱}$ در ∞

(ج) $\frac{z^۳}{۱+۳۲z^۵}$ در $z=-\frac{۱}{۲}$ (د) $\csc(۲z-۳)$ در $z=\frac{۳}{۲}$

۱۴- (الف) $\frac{\ln(۱+۲z)}{z^۲}$ در $z=۰$ (ب) $\frac{۱}{z}\sin(۲z+۵)$ در ∞

(ج) $\frac{z^۳}{۴z^۴+۱}$ در $\frac{۱}{۲}(۱+i)$ (د) $\frac{z\sin ۲z}{(z+\pi)^۲}$ در $-\pi$

در مسائل ۱۵ تا ۲۰، انتگرالها را با استفاده از انتگرال گیری پربندی حساب کنید.

۱۵- $\int_۰^{\pi}\frac{\cos\theta\, d\theta}{۵-۴\cos\theta}$ ۱۶- $\int_۰^{۲\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{۵+۳\sin\theta}$

۱۷- $\int_۰^{\infty}\frac{\cos x\, dx}{(۴x^۲+۱)(x^۲+۹)}$ ۱۸- $\int_۰^{\infty}\frac{x\sin(\pi x/۲)}{x^۴+۴}dx$

۱۹- $PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\, dx}{(۲x-\pi)(x^۲+\pi^۲)}$ ۲۰- $PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\, dx}{x(۱-x)(x^۲+۱)}$

فرمولهای مسائل ۲۱ تا ۲۷ را با استفاده از انتگرال گیری پربندی یا آن گونه که اشاره شده است ثابت کنید. فرض کنید $a>۰$، $m>۰$.

۲۱- $|b|<a$، $\int_۰^{۲\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta}=\int_۰^{۲\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{۲\pi}{\sqrt{a^۲-b^۲}}$

۲۲- $|b|<a$، $\int_۰^{۲\pi}\frac{d\theta}{(a+b\sin\theta)^۲}=\int_۰^{۲\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^۲}=\frac{۲\pi a}{(a^۲-b^۲)^{۳/۲}}$

راهنمایی: شما می‌توانید این کار را مستقیماً با انتگرال گیری پربندی انجام بدهید، امّا آسان‌تر است که از مسألهٔ ۲۱ نسبت به a مشتق بگیرید.

۲۳- $|b|<a$، $\int_۰^{۲\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{a+b\sin\theta}=\int_۰^{۲\pi}\frac{\cos\theta\, d\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{۲\pi}{b}\left(۱-\frac{a}{\sqrt{a^۲-b^۲}}\right)$

۲۴- $\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}$ ۲۵- $PV\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{x^2-a^2} = -\frac{\pi}{2a}\sin ma$

۲۶- $\int_0^\infty \frac{x\sin mx\,dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ma}$ ۲۷- $PV\int_0^\infty \frac{x\sin mx\,dx}{x^2-a^2} = \frac{\pi}{2}\cos ma$

راهنمایی برای مسائل ۲۶ و ۲۷: از مسائل ۲۴ و ۲۵ نسبت به m مشتق بگیرید.

۲۸- انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,\ln x\,dx}{(1+x)^2}$ را با استفاده از پربند شکل ۷-۴ حساب کنید.

راهنمایی: در امتداد DE، $z = re^{2\pi i}$. بنابراین $\ln z = \ln r + 2\pi i$.

۲۹- انتگرال $\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}$ را با استفاده از پربند شکل ۷-۳ حساب کنید.

نکته: توجه داشته باشید که کار شما، همچنین نشان می‌دهد $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0$

۳۰- با انتگرال گرفتن $e^{i\ln z}/(z^2-1)$ بر روی پربندی شبیه شکل ۷-۳ که به اندازهٔ 90° به طور ساعتگرد چرخانده شده است به طوری که ضلع مستقیم آن در امتداد محور yهاست، نشان دهید

$$PV\int_0^\infty \frac{\cos(\ln x)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2\cosh(\pi/2)}$$

مانند بخش ۷، تعداد ریشه‌های معادلات مسائل ۳۱ تا ۳۴ را در هر یک از ربع دایره‌ها پیدا کنید.

۳۱- $z^4 + 3z + 5 = 0$ ۳۲- $z^3 + 2z^2 + 5z + 6 = 0$

۳۳- $z^6 + z^3 + 9z + 64 = 0$ ۳۴- $z^8 + 5z^3 + 3z + 4 = 0$

(بدون ریشهٔ حقیقی) (دو ریشهٔ حقیقی منفی)

۳۵- ثابت کنید معادلات کوشی ـ ریمان [رک معادلهٔ (۲-۲) و مسألهٔ ۲-۴۶] در یک دستگاه مختصات منحنی‌الخط متعامد [رک فصل ۱۰، بخشهای ۶ و ۷] عبارت اند از

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \quad ، \quad \frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} = -\frac{1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

که، مانند فصل ۱۰، بخش ۸، x_1، x_2متغیرها، و h_1 ، h_2ضرایب مقیاس هستند.

راهنمایی: مشتقهای جهتی (فصل ۶، بخش ۶) را در دو جهت عمود بر هم در نظر بگیرید. (با مسألهٔ ۲-۴۶ مقایسه کنید.) همچنین نشان دهید که u و v در معادلهٔ لاپلاس، فصل ۱۰،

معادلهٔ (۹-۱۰)، صدق می‌کنند ($x_۲$ را حذف و $h_۲$ را مساوی ۱ اختیار کنید).

۳۶- نشان دهید که تابع هماهنگ $u(x,y)$ در هر نقطهٔ a برابر است با مقدار میانگین آن بر روی هر دایرهٔ اختیاری به مرکز a [و واقع در ناحیه‌ای که $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در آن تحلیلی است]. **راهنمایی:** در (۳-۹)، فرض کنید $z = a + re^{i\theta}$ (یعنی، C دایره‌ای است به مرکز a)؛ و نشان دهید مقدار میانگین $f(z)$ بر روی دایره برابر با $f(a)$ است (برای بحث دربارهٔ مقدار میانگین یک تابع، رک فصل ۷، بخش ۴). قسمتهای حقیقی و موهومی $f(a) = [u(x,y) + iv(x,y)]$ را اختیار کنید.

۳۷- مقدار بیشینه و مقدار کمینهٔ یک تابع هماهنگ (غیر ثابت)، بر مرز یک ناحیه قرار دارند (نه در یک نقطهٔ داخلی). به این ترتیب، مثلاً، پتانسیل الکتروستاتیکی V در ناحیه‌ای که شامل هیچ بار آزادی نیست، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار خود را بر مرز ناحیه دارد، و دمای T یک جسم که در بردارندهٔ هیچ منبع گرمایی نیست بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدارش را در سطح جسم دارد. این واقعیت را (برای نواحی دوبعدی) به این ترتیب ثابت کنید: فرض کنید ادّعا شود $u(x,y)$ بیشترین مقدارش را در یک نقطهٔ داخلی a دارد. این بدان معناست که در تمام نقاط یک قرص کوچک حول a، مقادیر $u(x,y)$ بزرگتر از مقدار آن در نقطهٔ a هستند. با استفاده از معادلهٔ ۳۶ نشان دهید که چنین ادّعایی به تناقض می‌انجامد (مگر اینکه $u =$ ثابت باشد). به طور مشابه نشان دهید که $u(x,y)$ نمی‌تواند کمترین مقدارش را در یک نقطهٔ داخلی داشته باشد.

۳۸- نشان دهید که یک مسألهٔ دریشلت (رک فصل ۱۳، آخرین پاراگراف بخش ۳) برای معادلهٔ لاپلاس در یک ناحیهٔ متناهی فقط یک جواب دارد؛ یعنی دو جواب $u_۱$ و $u_۲$ با مقادیر مرزی مساوی، با یکدیگر همسانند. **راهنمایی:** $u_۲ - u_۱$ را در نظر بگیرید و از مسألهٔ ۳۷ استفاده کنید. [همچنین فصل ۱۳، بحث پس از معادلهٔ (۲-۱۷) را ملاحظه کنید.]

۳۹- با استفاده از نگاشتهای پیاپی زیر، حالت دمایی پابرجای $T(x,y)$ را در نوار نیمه متناهی $y \geq ۰$، $۰ \leq x \leq \pi$ در صورتی‌که $T(x,۰) = ۱۰۰^\circ$، $T(۰,y) = T(\pi,y) = ۰$ باشد، و وقتی $y \to \infty$، $T(x,y) \to ۰$، پیداکنید. (رک فصل ۱۳، بخش ۲ و مسألهٔ ۲-۶).

(الف) $w = (z' - ۱)/(z' + ۱)$ برای نگاشت نیم صفحهٔ $v \geq ۰$ بر نیمهٔ بالای صفحهٔ $y' > ۰$ که در آن محور مثبت u همخوان با دو شعاع $x' > ۱$ و $x' < -۱$، و محور

منفی u همخوان با بازهٔ $-۱ \leq x \leq ۱$ از محور x' است.

(ب) $z' = -\cos z$ برای نگاشت نیم نوار $۰ < x < \pi$ ، $y > ۰$ بر نیم صفحهٔ z' موصوف در (الف). بازهٔ $-۱ \leq x' \leq ۱$ ، $y' = ۰$ همخوان است با قاعدهٔ $۰ < x < \pi$ ، $y = ۰$ از نوار.

چند نکته: مسألهٔ دما در صفحهٔ $u(x, y)$ شبیه مسائل نشان داده شده در صفحهٔ z شکلهای ۱۰-۱ و ۱۰-۲ است، و بنابراین با $T = (۱۰۰/\pi)\ arc\ tan\ (v/u)$ داده می‌شود. در صفحهٔ z شما خواهید دید

$$T(x, y) = \frac{۱۰۰}{\pi}\ arc\ tan\ \frac{۲\ sin\ x\ sinh\ y}{sinh^۲\ y - sin^۲\ x}$$

با قرار دادن $tan\ \alpha = \dfrac{sin\ x}{sinh\ y}$ و استفاده از فرمول $tan\ ۲\alpha$، می‌رسید به

$$T(x, y) = \frac{۲۰۰}{\pi}\ arc\ tan\ \frac{sin\ x}{sinh\ y}$$

توجه کنید که اگر ۱۰ را با π جایگزین کنیم، این همان جواب مسألهٔ ۲-۶ از فصل ۱۳ است.

۱۵

تبدیلهای انتگرالی

۱ - مقدمه

اگر $f(t) = e^{-t}$ باشد، انتگرال

$$\int_0^\infty f(t)\, t^p\, dt = \int_0^\infty t^p\, e^{-t}\, dt = F(p)$$

تابعی از p خواهد بود [در واقع طبق رابطهٔ (۳-۳) از فصل ۱۱ داریم $f(p) = p!$ یا $\Gamma(p+1)$]. با شروع از تابعی از t ، آن را در تابعی از t و p ضرب کرده، از حاصل‌ضرب، نسبت به t انتگرال معیّن گرفته، و به این ترتیب تابعی از p به دست آورده‌ایم. تابع $F(p)$، تبدیل انتگرالی $f(t)$ خوانده می‌شود. تبدیلهای انتگرالی کاربردهای مختلفی دارند، مثلاً، در حل معادلات دیفرانسیل معمولی (بخش ۳) یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (بخش ۹). بسته به اینکه چه تابعی از p و t را در ضرب پیش‌گفته به کار ببریم و گسترهٔ انتگرال‌گیری چه باشد، تبدیلهای انتگرالی مختلفی با نامهای مختلف وجود خواهند داشت. (مثال بالا، تبدیل مِلین خوانده می‌شود). در این فصل دو تبدیل انتگرالی (لاپلاس و فوریه) را که اهمیّت کاربردی زیادی دارند همراه با بعضی موارد کاربرد آنها بررسی می‌کنیم.

در زیر، جدولی از تبدیلهای لاپلاس را ملاحظه می‌کنید، و در بخش بعد، روش اثبات هر یک از تبدیلهای جدول را توضیح می‌دهیم و اگر لازم شد تبدیلهای بیشتری را پیدا می‌کنیم. سپس، در بخشهای بعد از آن کاربردهای تبدیل لاپلاس را در حل مسائل بررسی خواهیم کرد. حال به بخش بعد بروید و هر وقت لازم شد به جدول مراجعه کنید. توجه داشته باشید که اعدادی که بعد از حرف L می‌آیند (مثلاً L۱، L۲ و ... ، L۳۵) مشخص‌کنندهٔ ردیفهای جدول تبدیل لاپلاس هستند.

«جدول کوتاه تبدیلهای لاپلاس»

$y=f(t)$ ،$t>0$ $[y=f(t)=0$ ،$t<0]$		$Y=L(y)=F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$	
L_1	1	$\frac{1}{p}$	$Re\,p>0$
L_2	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$Re\,(p+a)>0$
L_3	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$Re\,p>\lvert Im\,a\rvert$
L_4	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$Re\,p>\lvert Im\,a\rvert$
L_5	t^k ،$k>-1$	$\frac{k!}{p^{k+1}}$ یا $\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}$	$Re\,p>0$
L_6	$t^k e^{-at}$ ،$k>-1$	$\frac{k!}{(p+a)^{k+1}}$ یا $\frac{\Gamma(k+1)}{(p+a)^{k+1}}$	$Re\,(p+a)>0$
L_7	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$Re\,(p+a)>0$ و
L_8	$\frac{ae^{-at}-be^{-bt}}{a-b}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$Re\,(p+b)>0$
L_9	$\sinh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$Re\,p>\lvert Re\,a\rvert$
L_{10}	$\cosh at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$Re\,p>\lvert Re a\rvert$
L_{11}	$t\sin at$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$	$Re\,p>\lvert Im\,a\rvert$
L_{12}	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$Re\,p>\lvert Im\,a\rvert$
L_{13}	$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$Re\,(p+a)>\lvert Im\,b\rvert$

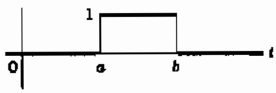
	$y=f(t)$ ،$t>0$ $[y=f(t)=0$ ،$t<0]$	$Y=L(y)=F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$	
L_{14}	$e^{-at}\cos bt$	$\dfrac{P+a}{(p+a)^2+b^2}$	$Re\,(p+a)>\lvert Im\,b\rvert$
L_{15}	$1-\cos at$	$\dfrac{a^2}{p(p^2+a^2)}$	$Re\,p>\lvert Im\,a\rvert$
L_{16}	$at-\sin at$	$\dfrac{a^3}{p^2(p^2+a^2)}$	$Re\,p>\lvert Im\,a\rvert$
L_{17}	$\sin at-at\cos at$	$\dfrac{2a^3}{(p^2+a^2)^2}$	$Re\,p>\lvert Im\,a\rvert$
L_{18}	$e^{-at}(1-at)$	$\dfrac{p}{(p+a)^2}$	$Re\,(p+a)>0$
L_{19}	$\dfrac{\sin at}{t}$	$\arctan\dfrac{a}{p}$	$Re\,p>\lvert Im\,a\rvert$
L_{20}	$\dfrac{1}{t}\sin at\cos bt$ $a>0$ ،$b>0$	$\dfrac{1}{2}\left(\arctan\dfrac{a+b}{p}+\arctan\dfrac{a-b}{p}\right)$	$Re\,p>0$
L_{21}	$\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$	$\ln\dfrac{p+b}{p+a}$	$Re\,(p+a)>0$ و $Re\,(p+b)>0$
L_{22}	$1-erf\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$ ،$a>0$	$\dfrac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}$	$Re\,p>0$
L_{23}	$J_0(at)$	$(p^2+a^2)^{-1/2}$	$Re\,p>\lvert Im\,a\rvert$ ، یا برای a حقیقی مخالف صفر $Re\,p\geq 0$

$y = f(t)$ ،$t>$۰ $[y = f(t) =$ ۰ ،$t<$۰$]$	$Y = L(y) = F(p) = \int_۰^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$

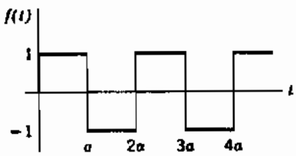
L۲۴ $f(t)=\begin{cases} ۱ & ، t>a>۰ \\ ۰ & ، t<a \end{cases}$ $\frac{۱}{p} e^{-pa}$ $Re\ p >$ ۰

[پلّهٔ واحد، که معمولاً به صورت $f(t) = u(t-a)$ نوشته می‌شود]

L۲۵ $f(t) = u(t-a) - u(t-b)$ $\frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$ تمام pها



L۲۶ $\frac{۱}{p} \tanh \frac{۱}{۲} ap$ $Re\ p >$ ۰



L۲۷ $\delta(t-a)$ ، $a \geq$ ۰ e^{-pa}

(رک بخش ۷)

L۲۸ $f(t)=\begin{cases} g(t-a)\ ، & t>a>۰ \\ ۰\ ، & t<a \end{cases}$ $e^{-pa}\, G(p)$

$= g(t-a)\, u(t-a)$ [$G(p)$ به معنی $L(g)$ است]

L۲۹ $e^{-at} g(t)$ $G(p+a)$

L۳۰ $g(at)$ ،$a \geq$ ۰ $\frac{۱}{a} G\left(\frac{p}{a}\right)$

L۳۱ $\frac{g(t)}{t}$ (اگر قابل انتگرال گیری باشد) $\int_p^{\infty} G(u)\, du$

$y=f(t)$ ، $t>0$ $[y=f(t)=0$ ، $t<0]$	$Y=L(y)=F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$

$L32$ $\quad t^n g(t) \qquad (-1)^n \dfrac{d^nG(p)}{dp^n}$

$L33$ $\quad \int_0^t g(\tau)\,d\tau \qquad \dfrac{1}{p}G(p)$

$L34$ $\quad \int_0^t g(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau=\int_0^t g(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau \qquad G(p)\,H(p)$

(همگردش توابع y و h که معمولاً به صورت $g+h$ نوشته می‌شود، رک بخش ۵)

$L35$ (تبدیل مشتقات y (رک بخش ۳)

$L(y')=pY-y_0$

$L(y'')=p^2Y-py_0-y'_0$

$L(y''')=p^3Y-p^2y_0-py'_0-y''_0$ ، غیره ،

$L(y^{(n)})=p^nY-p^{n-1}y_0-p^{n-2}y'_0-\cdots-y_0^{(n-1)}$

۲- تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس تابع $L(f(t))$ (بعضی اوقات به صورت $F(p)$ هم نوشته می‌شود چراکه تابعی است از p) با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$L(f)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt=F(p) \qquad (1-2)$$

در بعضی از کتابها و جدولها، $L(f)$ به صورت حاصلضرب p در انتگرال (۲-۱) تعریف می‌شود؛ هنگام استفاده از کتابهای دیگر باید مواظب این اختلاف باشید. در نوشتن رابطهٔ (۲-۱)، نمادهای مختلفی به کار می‌روند؛ غالباً به جای متغیرهای t و p، متغیرهای p و x یا

t و s، و به جای f و F نیز حروف دیگری به کار می‌روند. نمادگذاری، پیوسته به این صورت است که تابع t را با حرف کوچک، و تبدیل آن را که تابعی از p است با حرف بزرگ نظیر آن نمایش خواهیم داد. مثلاً $f(t)$ و $F(p)$ یا $g(t)$ و $G(p)$، و غیره. از (۲-۱) توجه دارید که چون ما از ۰ تا ∞ انتگرال می‌گیریم، $f(t)$ برای tهای منفی هر طور تعریف بشود $L(f)$ فرقی نخواهد کرد. با وجود این، همان طور که بعداً (بخش ۶) خواهیم دید بهتر است برای $t < 0$ تابع $f(t)$ را مساوی صفر تعریف کنیم.

هنگام حل مسائل با استفاده از تبدیل لاپلاس، داشتن جدولی از $f(t)$ و $F(p)$های وابسته بسیار مفید است. اکنون بعضی از فرمولهای جدول کوتاه تبدیلهای لاپلاس را پیدا می‌کنیم. برای محاسبهٔ $L1$ در جدول مزبور، $f(t) = 1$ را در فرمول (۲-۱) جایگزین می‌کنیم

$$F(p) = \int_0^\infty 1 \times e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p} \quad ، p > 0 \qquad (۲-۲)$$

فرض کرده‌ایم $p > 0$ تا e^{-pt} به ازای حد بالای انتگرال صفر شود. اگر p مختلط باشد، که ممکن است باشد، قسمت حقیقی p $(Re\ p)$ باید مثبت باشد. این همان قیدی است که در جدول برای $L1$ ذکر کرده‌ایم. در مورد $L2$ داریم

$$f(t) = e^{-at}$$

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-(a+p)t}\, dt = \frac{1}{p+a} \quad ، Re\ (p+a) > 0 \qquad (۲-۳)$$

به همین ترتیب می‌توان $F(p)$ را برای هر $f(t)$ با استفاده از رابطهٔ (۲-۱) و محاسبهٔ انتگرال به دست آورد. با این همه، روشهای ساده‌تری وجود دارند که اکنون توضیح می‌دهیم. ابتدا توجه کنید که تبدیل لاپلاس حاصل‌جمع دو تابع برابر با مجموع تبدیل لاپلاس آنهاست، به همین ترتیب، تبدیل لاپلاس $cf(t)$، که c مقدار ثابتی است، برابر $cL(f)$ است:

$$L[f(t) + g(t)] = \int_0^\infty [f(t) + g(t)]\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt + \int_0^\infty g(t)\, e^{-pt}\, dt = L(f) + L(g) \qquad (۲-۴)$$

$$L[cf(t)] = \int_0^\infty cf(t)\, e^{-pt}\, dt = c\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = cL(f)$$

به زبان ریاضی، می‌گوییم تبدیل لاپلاس **خطی** است (یا یک **عملگر خطی** است - رک فصل ۳، بخش ۷).

اکنون $L3$ را بررسی می‌کنیم. در رابطهٔ (۲-۳)، a را با $-ia$ جایگزین کنید؛ در آن صورت داریم

$$f(t) = e^{iat} = \cos at + i \sin at$$

$$F(p) = \frac{1}{p-ia} = \frac{p+ia}{p^2+a^2} \quad ، Re\ (p-ia)>0 \tag{۵-۲}$$

با در نظر داشتن (۲-۴)، می‌توان (۲-۵) را به شکل زیر نوشت

$$L(\cos at + i \sin at) = L(\cos at) + iL(\sin at) = \frac{p}{p^2+a^2} + i\frac{a}{p^2+a^2} \tag{۶-۲}$$

به همین ترتیب، با جایگزین کردن a با ia در رابطهٔ (۲-۳)، خواهیم داشت

$$L(\cos at - i \sin at) = \frac{p}{p^2+a^2} - i\frac{a}{p^2+a^2} \quad ، Re\ (p+ia)>0 \tag{۷-۲}$$

از جمع دو رابطهٔ (۲-۶) و (۲-۷)، $L4$ به دست می‌آید، و از تفاضل آنها $L3$ حاصل می‌شود.

برای اثبات $L11$، از $L4$ شروع می‌کنیم، یعنی

$$L(\cos at) = \int_0^\infty e^{-pt} \cos at\, dt = \frac{p}{p^2+a^2} \tag{۸-۲}$$

اگر از رابطهٔ (۲-۸) نسبت به a مشتق بگیریم داریم

$$\int_0^\infty e^{-pt} (-t \sin at)\, dt = \frac{p\,(-2a)}{(p^2+a^2)^2}$$

یا

$$\int_0^\infty e^{-pt}\, t \sin at\, dt = \frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$$

که همان رابطهٔ $L11$ است. روشهای به دست آوردن سایر فرمولهای جدول، در مسائل ذکر شده‌اند.

مسائل، بخش ۲

۱- با استفاده از تعریف تابع Γ (فصل ۱۱، بخش ۳)، رابطه‌های $L5$ و $L6$ جدول تبدیل لاپلاس را ثابت کنید. نشان دهید $L(1/\sqrt{t}\ ) = \sqrt{\pi/p}$.

۲- با استفاده از $L2$، $L7$ و $L8$ در جدول تبدیل لاپلاس را ثابت کنید.

۳- با استفاده از $L2$، یا $L3$و $L4$، رابطه‌های $L9$ و $L10$ را ثابت کنید.

۴- با مشتق‌گیری نسبت به a از یک فرمول مناسب، $L12$ را ثابت کنید.

۵- با انتگرال‌گیری نسبت به a از فرمول مناسب، $L19$ را ثابت کنید.

۶- با جایگزینی a در رابطهٔ $L2$ با $a + ib$ و سپس با $a - ib$، و جمع و تفریق نتایج حاصل [مانند (۲-۶)، (۲-۷)] $L13$ و $L14$ را ثابت کنید.

۷- با استفاده از (۲-۴) و ترکیب فرمولهای مناسب پیش از آنها، فرمولهای $L15$ و $L16$ و $L17$ و $L18$ را ثابت کنید.

در مسائل ۸ تا ۱۳ تبدیل لاپلاس معکوس $F(p)$ را پیدا کنید.

۸- $\dfrac{1+p}{(p+2)^2}$ ***راهنمایی:*** از $L6$ و $L18$ استفاده کنید.

۹- $\dfrac{5-2p}{p^2+p-2}$ ***راهنمایی:*** از $L7$ و $L8$ استفاده کنید.

۱۰- $\dfrac{2p-1}{p^2-2p+1}$ ***راهنمایی: می‌توانید*** از $L7$ و $L8$ با a و b مختلط استفاده کنید، امّا استفاده از $L13$ و $L14$ سرراست‌تر است.

۱۱- $\dfrac{3p+2}{3p^2+5p-2}$ ۱۲- $\dfrac{3p+10}{p^2-25}$ ۱۳- $\dfrac{6-p}{p^2+4p+20}$

۱۴- نشان دهید که با ترکیب $L3$ تا $L10$، $L13$، $L14$ و $L18$ از جدول، می‌توان تبدیل معکوس هر تابعی به شکل زیر را حساب کرد:

$$\frac{(Ap + B)}{(Cp^2 + Dp + E)}$$

۱۵- $L32$ را به ازای $n = 1$ ثابت کنید. ***راهنمایی:*** از معادلهٔ (۲-۱) نسبت به p مشتق بگیرید.

۱۶- با استفاده از $L32$ و $L3$، $L11$ را به دست آورید.

۱۷- با استفاده از $L32$ و $L11$، تبدیل $L(t^2 \sin at)$ را به دست آورید.

۱۸- با استفاده از $L31$، $L21$ را پیدا کنید.

فرمولهای $L28$ و $L29$ به قضایای **جا به جایی** یا **انتقال** معروف‌اند. مسائل ۱۹ تا ۲۷ را، که مرتبط با آنها هستند، حل کنید.

۱۹- با استفاده از رابطهٔ (۲-۱) فرمول کلّی $L29$ را ثابت کنید.

۲۰- با استفاده از $L29$ رابطه‌های $L6$، $L13$، $L14$، و $L18$ را پیدا کنید.

۲۱- با استفاده از $L29$ و $L11$ تبدیل $L(te^{-at} \sin bt)$ راکه در جدول نیست پیدا کنید.

۲۲- تبدیل $L(te^{-at} \cos bt)$ را همانند مسأله ۲۱ پیدا کنید.

۲۳- با استفاده از نتایجی که در مسائل ۲۱ و ۲۲ پیدا کردید تبدیل معکوس $(p^2+2p-1) / (p^2+4p+5)^2$ را پیدا کنید.

۲۴- روی یک شکل، نمودارهای $\sin t$ و $\sin (t-\pi/2)$ و $\sin (t+\pi/2)$ را رسم کنید و ببینید نمودار در چه راستایی جا به جا می‌شود.

۲۵- با استفاده از $L28$ تبدیل لاپلاس زیر را پیدا کنید:

$$f(t) = \begin{cases} \sin (t-\pi/2) & ، t > \pi/2 \\ & ، t < \pi/2 \end{cases}$$

۲۶- با استفاده از $L28$ و $L4$ تبدیل معکوس تابع $pe^{-p\pi}/(p^2+1)$ را پیدا کنید.

۲۷- تبدیل تابع زیر را، که در آن x و v مقادیر ثابتی هستند، پیدا کنید:

$$f(t) = \begin{cases} \sin (x-vt) & ، t > x/v \\ & ، t < x/v \end{cases}$$

۲۸- با استفاده از $L23$ نشان دهید که $\int_0^\infty J_0(t)\, dt = 1$ (رک فصل ۱۲، مسأله ۱۵-۸).

۳- حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیلهای لاپلاس

می‌خواهیم حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت (رک فصل ۸، بخشهای ۵ و ۶) را

بررسی کنیم. از قبل می‌دانیم که این معادلات را چگونه حل کنیم؛ بنابراین چرا به دنبال آموختن یک راه دیگر هستیم؟ دو نکته را باید به خاطر داشت: (۱) وقتی طرف راست یک معادلهٔ دیفرانسیل صفر نباشد، بعضی اوقات پیدا کردن جواب خاص آن مستلزم کار زیادی است. (۲) آنچه که با روشهای استاندارد به دست می‌آورید یک جواب عمومی است که شامل ضرایب ثابت هم هست؛ برای حلّ یک مسألهٔ خاص شما باید محاسبات دیگری نیز انجام دهید و ضرایب را طوری تعیین کنید که در شرایط اولیهٔ مورد نظر صدق کنند. روش تبدیل لاپلاس این هر دو مشکل را ساده می‌کند. وقتی از یک جدول تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم (مانند کاربست جدول انتگرالها)، ممکن است از بعضی محاسبات جبری حذر کنیم؛ همچنین، روش تبدیل لاپلاس مستقیماً جواب نهایی را که در شرایط اولیه صدق می‌کند، به دست می‌دهد. بنابراین، گرچه *می‌توان* معادلات دیفرانسیل را بدون استفاده از تبدیلهای لاپلاس حل کرد، ولی عملاً استفاده از آنها خیلی مفید است:

می‌خواهیم تبدیلهای لاپلاس جملات یک معادلهٔ دیفرانسیل را پیدا کنیم؛ برای این کار باید تبدیلهای لاپلاس مشتقات $y' = dy/dt$ ، $y'' = d^2y/dt^2$، و غیره را بدانیم. برای پیدا کردن $L(y')$، از تعریف (۲-۱) استفاده می‌کنیم و به روش زیر انتگرال جزء به جزء می‌گیریم:

$$L(y')=\int_0^\infty y'(t)\,e^{-pt}\,dt = e^{-pt}y(t)\Big|_0^\infty -(-p)\int_0^\infty y(t)\,e^{-pt}\,dt \quad (۳\text{-}۱)$$

$$= -y(0) + p\,L(y) = pY - y_0$$

که برای سادگی نمادگذاری $L(y) = Y$ و $y(0) = y_0$ را به کار برده‌ایم. برای پیدا کردن $L(y'')$، y'' را به صورت $(y')'$ در نظر می‌گیریم، و در (۳-۱) به جای y قرار می‌دهیم y' تا رابطهٔ زیر به دست آید:

$$L(y'') = pL(y') - y'(0)$$

با استفادهٔ مجدّد از (۳-۱) برای حذف $L(y')$، نهایتاً می‌رسیم به

$$L(y'') = p^2L(y) - py(0) - y'(0) = p^2Y - py_0 - y'_0 \quad (۳\text{-}۲)$$

با ادامهٔ این فرایند، تبدیلهای مشتقات مرتبهٔ بالاتر را پیدا می‌کنیم (مسأله ۱ و فرمول L۳۵).

حال آماده‌ایم که معادلات دیفرانسیل را حل کنیم. روش را با بیان چند مثال نمایش می‌دهیم.

مثال ۱- جواب معادلهٔ

$$y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}$$

را با شرایط اولیهٔ $y_0 = 0$ و $y'_0 = 0$، پیدا کنید.

با استفاده از $L35$ و $L6$ در جدول تبدیلهای لاپلاس، تبدیلهای هر یک از جمله‌های معادله را می‌نویسیم. نتیجه عبارت است از

$$p^2Y - py_0 - y'_0 + 4pY - 4y_0 + 4Y = L(t^2 e^{-2t}) = \frac{2}{(p+2)^3}$$

اما شرایط اولیه عبارت اند از $y_0 = y'_0 = 0$. بنابراین داریم

$$(p^2 + 4p + 4)Y = \frac{2}{(p+2)^3} \quad \text{یا} \quad Y = \frac{2}{(p+2)^5}$$

حال ما به دنبال y هستیم که تبدیل لاپلاس معکوس Y است. برای پیدا کردن تبدیل معکوس $2/(p+2)^5$ به جدول مراجعه می‌کنیم. طبق $L6$ داریم

$$y = \frac{2\,t^4 e^{-2t}}{4!} = \frac{t^4 e^{-2t}}{12}$$

این خیلی ساده‌تر از پیدا کردن جواب عمومی است؛ ما صرفاً جوابی را به دست آورده‌ایم که در شرایط اولیهٔ مفروض صدق کند.

مثال ۲- معادلهٔ $y'' + 4y = \sin 2t$ را با شرایط اولیهٔ $y_0 = 10$ و $y'_0 = 0$ حل کنید.

با استفاده از جدول، تبدیل لاپلاس هر جمله را می‌نویسیم. نتیجه به شکل زیر است

$$p^2Y - py_0 - y'_0 + 4Y = L(\sin 2t) = \frac{2}{p^2+4}.$$

سپس شرایط اولیه را اعمال و Y را پیدا می‌کنیم:

$$(p^2+4)Y - 10p = \frac{2}{p^2+4}$$

$$Y = \frac{10p}{p^2+4} + \frac{2}{(p^2+4)^2}$$

سرانجام، با استفاده از $L4$ و $L17$ و نوشتن تبدیل معکوس، جواب مطلوب به شکل زیر به

دست می‌آید:

$$y = 10\cos 2t + \frac{1}{8}(\sin 2t - 2t\cos 2t)$$
$$= 10\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t$$

فرایند پیدا کردن y از Y همیشه مانند دو مثال بالا آسان نیست. در بخشهای ۵ و ۶ روشهای پیشرفته‌تری را برای پیدا کردن تبدیل معکوس بررسی خواهیم کرد، امّا در اینجا موارد نسبتاً ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که تبدیل معکوسشان در جدول نیست. اگر Y شامل چند جمله باشد، سعی می‌کنیم تبدیلهای معکوس تک‌تک جمله‌ها را پیدا کنیم؛ یا این که اوّل سعی می‌کنیم جمله‌ها را با هم ترکیب کنیم. مثلاً، فرض کنید، دو جملهٔ کسری واقع در Y را در مثال ۲ با هم جمع کرده و داشته باشیم $Y = (10p^3 + 40p + 2)/(p^2 + 4)^2$. تبدیل معکوس این عبارت در جدول نیست و واضح است که نباید آنها را با هم ترکیب کرد، بلکه باید، مانند مثال ۲، آنها را جدا از هم نگه داشت. از طرف دیگر، بعضی اوقات از ترکیب جمله‌ها عبارت ساده‌تری برای Y به دست می‌آید. مثلاً عبارت زیر را در نظر بگیرید.

$$Y = \frac{1}{p^2-1}\left(\frac{4}{p+3} - 1\right) = \frac{1}{p^2-1}\left(\frac{4-p-3}{p+3}\right)$$
$$= \frac{1}{(p-1)(p+1)}\,\frac{1-p}{p+3} = \frac{-1}{(p+1)(p+3)}$$

در اینجا به علت حذف $(p-1)$، Y ساده‌تر می‌شود و تبدیل معکوس آن در جدول هست. (عموماً، Y به این ترتیب ساده نمی‌شود، امّا اگر شد، ساده‌ترین راه تکمیل مسأله همین است). با این همه، بگذارید فرض کنیم Y شامل یک کسر پیچیده است (که به طور طبیعی در **مسأله** پیش می‌آید: نه به این علّت که کسرهای ساده‌تر را با هم ترکیب کردیم) و ترکیب جمله‌های واقع در Y آن را ساده‌تر نمی‌کند. با روش کسرهای جزئی (رک یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال) ممکن است بتوان کسر پیچیده را به کسرهای ساده‌تری تجزیه کرد که تبدیلهای معکوس آنها در جدول وجود دارد. با این همه، استفاده از یک بسط کسرهای جزئی با مخرجهای خطی ضرورتی ندارد زیرا تبدیل معکوس هر کسر با مخرج درجهٔ دوّم را می‌توان از جدول پیدا کرد (رک مسألهٔ ۲-۱۴). می‌توان هنگامی که مخرج کسر به صورت ***حاصلضرب*** خطی در درجهٔ دوّم یا درجهٔ

دوم در درجهٔ دوم است نیز از کسرهای جزئی استفاده کرد.

مثال ۳- معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 4y' + 13y = 20e^{-t}$ را با شرایط $y_0 = 1$ و $y'_0 = 3$ حل کنید. تبدیل هر جمله را می‌نویسیم و Y را به شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$p^2Y - p - 3 + 4pY - 4 + 13Y = \frac{20}{p+1}$$

$$Y = \frac{1}{p^2+4p+13}\left(\frac{20}{p+1} + p + 7\right) = \frac{p^2+8p+27}{(p+1)(p^2+4p+13)}$$

با استفاده از کسرهای جزئی، می‌نویسیم

$$\frac{p^2+8p+27}{(p+1)(p^2+4p+13)} \equiv \frac{A}{p+1} + \frac{Bp+C}{p^2+4p+13}$$

یا، پس از حذف کسرها،

$$p^2+8p+27 \equiv (A+B)p^2 + (4A+B+C)p + (13A+C).$$

چون این یک اتحاد است، ضرایب توانهای مختلف p را مساوی قرار می‌دهیم

$$A + B = 1, \quad 4A + B + C = 8, \quad 13A + C = 27$$

با حل همزمان این معادلات داریم $A = 2$، $B = -1$ و $C = 1$. پس

$$Y = \frac{2}{p+1} + \frac{-p+1}{p^2+4p+13} = \frac{2}{p+1} + \frac{3}{(p+2)^2+9} - \frac{p+2}{(p+2)^2+9}$$

و طبق $L2$، $L13$، و $L14$

$$y = 2e^{-t} + e^{-2t}\sin 3t - e^{-2t}\cos 3t.$$

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را هم می‌توان با استفاده از تبدیلهای لاپلاس حل کرد (اگر جوابی وجود داشته باشد، رک کتاب روشهای عملگری، کاپلان، صفحه ۱۰). به ذکر یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۴- دستگاه معادلات زیر را با شرایط اولیهٔ $y_0 = 0$ و $z_0 = 0$ حل کنید.

$$y' - 2y + z = 0$$
$$z' - y - 2z = 0$$

مانند قبل فرض می‌کنیم $L(y) = Y$ و $L(z) = Z$. اگر تبدیل لاپلاس از هر یک از معادلات را بنویسیم، خواهیم داشت

$$pY - y_0 - 2Y + Z = 0$$
$$pZ - z_0 - Y - 2Z = 0$$

بعد از جایگزینی شرایط اولیه، داریم

$$(p - 2)Y + Z = 1$$
$$Y - (p - 2)Z = 0$$

این دستگاه معادلات جبری را برای Y و Z حل می‌کنیم (به هر روشی که معمولاً برای حل یک جفت معادلهٔ جبری به کار می‌رود - حذفی، دترمینانی، غیره). مثلاً، می‌توان معادلهٔ اوّل را در $(p - 2)$ ضرب و با معادلهٔ دوّم جمع کرد

$$[(p - 2)^2 + 1]Y = p - 2 \qquad \text{یا} \qquad Y = \frac{p - 2}{(p-2)^2 + 1}$$

y را با نوشتن تبدیل معکوس Y، با استفاده از $L14$، پیدا می‌کنیم

$$y = e^{2t} \cos t.$$

به همین ترتیب، اگر Z را پیداکنیم و تبدیل معکوس آن را بنویسیم داریم

$$Z = \frac{1}{(p - 2)^2 + 1}$$
$$z = e^{2t} \sin t$$

می‌توانستیم z را با جایگزینی y در معادلهٔ دیفرانسیل اوّل هم به دست آوریم:

$$z = 2y - y' = 2e^{2t} \cos t + e^{2t} \sin t - 2e^{2t} \cos t = e^{2t} \sin t$$

حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت تنها فایدهٔ تبدیلهای لاپلاس نیست. همان طور که در بخش ۹ خواهیم دید، بعضی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را هم می‌توان با استفاده از تبدیلهای لاپلاس حل کرد. همچنین می‌توان از جدول تبدیلهای لاپلاس برای محاسبهٔ انتگرالهای معینی به شکل $\int_{\circ}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$ نیز استفاده کرد. مثلاً، طبق $L۱۵$ به ازای $a = ۳$ و $p = ۲$، داریم

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{-۲t} (۱ - \cos ۳t)\, dt = \frac{۳^۲}{۲(۲^۲ + ۳^۲)} = \frac{۹}{۲۶}$$

در واقع، موضوع گسترده‌تر از این است. اگرچه کاربرد تبدیلهای لاپلاس در این فصل بیشتر به عنوان یک ابزار مورد نظر اند، امّا در مسائل کاربستی این تبدیلها می‌توانند نقش نظری بیشتری داشته باشند. اغلب اوقات می‌توان اطلاعات مورد نظر پیرامون یک مسأله را از تبدیل لاپلاس جواب و بدون یافتن جواب به دست آورد. بنابراین استفاده از تبدیلهای لاپلاس ممکن است منجر به درک بهتر یک مسأله یا حل ساده‌تر آن بشود (مثلاً، مقایسه کنید با روش استفاده از ماتریسها، یا استفاده از کاغذ رسم *log-log*).

مسائل، بخش ۳

۱- با ادامهٔ روشی که برای اثبات (۳-۱) و (۳-۲) به کار رفت، تبدیلهای لاپلاس مشتقات مرتبهٔ بالاتر y را که در جدول داده شده‌اند ($L۳۵$) تحقیق کنید.

با استفاده از تبدیلهای لاپلاس، معادلات دیفرانسیل زیر را با شرایط اولیهٔ داده شده حل کنید.

۲- $y' - y = ۲e^{t}$ ، $y_{\circ} = ۳$

۳- $y'' + ۴y' + ۴y = e^{-۲t}$ ، $y_{\circ} = \circ$ ، $y'_{\circ} = ۴$

۴- $y'' + y = \sin t$ ، $y_{\circ} = ۱$ ، $y'_{\circ} = \circ$

۵- $y'' + y = \sin t$ ، $y_{\circ} = \circ$ ، $y'_{\circ} = -\frac{۱}{۲}$

۶- $y'' - ۶y' + ۹y = te^{۳t}$ ، $y_{\circ} = \circ$ ، $y'_{\circ} = ۵$

۷- $y'' - 4y' + 4y = 4$ ، $y_0 = 0$ ، $y'_0 = -2$

۸- $y'' + 16y = 8\cos 4t$ ، $y_0 = y'_0 = 0$

۹- $y'' + 16y = 8\cos 4t$ ، $y_0 = 0$ ، $y'_0 = 8$

۱۰- $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2t}$ ، $y_0 = y'_0 = 0$

۱۱- $y'' - 4y = 4e^{2t}$ ، $y_0 = 0$ ، $y'_0 = 1$

۱۲- $y'' - y = e^{-t} - 2t\,e^{-t}$ ، $y_0 = 1$ ، $y'_0 = 2$

۱۳- $y'' + y = 5\sinh 2t$ ، $y_0 = 0$ ، $y'_0 = 2$

۱۴- $y'' - 4y' = -4te^{2t}$ ، $y_0 = 0$ ، $y'_0 = 1$

۱۵- $y'' + 9y = \cos 3t$ ، $y_0 = 0$ ، $y'_0 = 6$

۱۶- $y'' + 9y = \cos 3t$ ، $y_0 = 2$ ، $y'_0 = 0$

۱۷- $y'' + 5y' + 6y = 12$ ، $y_0 = 2$ ، $y'_0 = 0$

۱۸- $y'' - 4y = 3e^{-t}$ ، $y_0 = 1$ ، $y'_0 = -3$

۱۹- $y'' + y' - 5y = e^{2t}$ ، $y_0 = 1$ ، $y'_0 = 2$

۲۰- $y'' - 8y' + 16y = 32t$ ، $y_0 = 1$ ، $y'_0 = 2$

۲۱- $y'' + 4y' + 5y = 26e^{3t}$ ، $y_0 = 1$ ، $y'_0 = 5$

۲۲- $y'' + 2y' + 5y = 10\cos t$ ، $y_0 = 2$ ، $y'_0 = 1$

۲۳- $y'' + 2y' + 5y = 10\cos t$ ، $y_0 = 0$ ، $y'_0 = 3$

۲۴- $y'' - 2y' + y = 2\cos t$ ، $y_0 = 5$ ، $y'_0 = -2$

۲۵- $y'' + 4y' + 5y = 2e^{-2t}\cos t$ ، $y_0 = 0$ ، $y'_0 = 3$

۲۶- $y'' + 2y' + 10y = -6e^{-t}\sin 3t$ ، $y_0 = 0$ ، $y'_0 = 1$

با روش تبدیل لاپلاس، دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۲۷- $y' + z' - 3z = 0$ ، $y'' + z' = 0$ ، $y_0 = y'_0 = 1$ ، $z_0 = \frac{4}{3}$

۲۸- $y' + z = 2\cos t$ ، $z' - y = 1$ ، $y_0 = -1$ ، $z_0 = 1$

۲۹- $y' + z' - 2y = 1$ ، $z - y' = t$ ، $y_0 = z_0 = 1$

۳۰- $y' + 2z = 1$ ، $2y - z' = 2t$ ، $y_0 = 0$ ، $z_0 = 1$

۳۱- $y'' + z'' - z' = 0$ ، $y' + z' - 2z = 1 - e^t$ ، $y_0 = 0$ ، $y'_0 = 1$ ، $z_0 = 1$ ، $z'_0 = 1$

۳۲- $z' + 2y = 0$ ، $y' - 2z = 2$ ، $y_0 = 0$ ، $z_0 = 0$

۳۳- $y' - z' - y = \cos t$ ، $y' + y - 2z = 0$ ، $y_0 = -1$ ، $z_0 = 0$

هر یک از انتگرالهای معین زیر را با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس حساب کنید.

۳۴- $\int_0^\infty e^{-2t}\sin 3t\,dt = \frac{3}{13}$ ***راهنمایی:*** این همان رابطهٔ (۲-۱) به ازای $p = 2$، $f(t) = \sin 3t$ است؛ $L3$ را به ازای $a = 3$ به کار ببرید.

۳۵- $\int_0^\infty t\, e^{-t} \sin 5t\, dt$

۳۶- $\int_0^\infty \frac{e^{-3t} \sin 2t}{t}\, dt$

۳۷- $\int_0^\infty t^5\, e^{-2t}\, dt$

۳۸- $\int_0^\infty e^{-t}\, (1 - \cos 2t)\, dt$

۳۹- $\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$

۴۰- $\int_0^\infty \frac{e^{-2t} - e^{-2et}}{t}\, dt$

۴۱- $\int_0^\infty \frac{1}{t}\, e^{-2t} \sin\left(t\sqrt{2}\right) dt$

۴۲- $\int_0^\infty \frac{1}{t}\, e^{-t\sqrt{3}} \sin 2t \cos t\, dt$

۴۳- $\int_0^\infty t\, J_0(2t)\, e^{-t}\, dt$

راهنمایی: $L23$ و $L32$ را به کار ببرید. برای تعریف J_0، رک بخش ۱۲ فصل ۱۲.

۴- تبدیلهای فوریه

در فصل ۷، توابع متناوب را به صورت رشته‌هایی از سینوس، کسینوس، یا توابع نمایی مختلط بسط دادیم. از نظر فیزیکی، می‌توانیم جمله‌های این رشته‌های فوریه را به عنوان مجموعه‌ای از هماهنگها در نظر بگیریم. در موسیقی، این جمله‌ها مجموعه‌ای نامتناهی از بسامدهای $n\nu$، به ازای $n = 1، 2، 3، \ldots$ هستند؛ توجه کنید که این مجموعه، گرچه نامتناهی است، امّا بـه هیچ وجه شامل همهٔ بسامدهای ممکن نیست. در الکتریسیته، رشتهٔ فوریه می‌تواند بیانگر یک ولتاژ متناوب باشد؛ دوباره می‌توان تصور کرد که این ولتاژ از جـمع تـعدادی نامتناهی، ولی گسسته (یعنی ناپیوسته)، ولتاژ a-c با بسامدهای $n\omega$ ساخته شده است. به همین ترتیب، در مبحث نور، رشتهٔ فوریه را می‌توان نمایشگر نوری مشتمل بـر مـجموعه‌ای گسسـته از طـول موجهای λ/n، به ازای $n = 1، 2، 3، \ldots$، تلقی کرد، یعنی، مجموعهٔ گسسته‌ای از رنگها. در اینجا ممکن است دو سؤال وابسته به هم پیش بیاید. اولاً، آیا می‌توان تابعی راکه تناوبی نیست با چیزی شبیه رشتهٔ فوریه نمایش داد؟ ثانیاً آیا به گونه‌ای می‌توان رشتهٔ فوریه را طوری تعمیم یا تغییر داد تا بتواند مورد یک طیف پیوسته از طول موجهای نوری، یا یک موج صوتی شامل مجموعهٔ پیوسته‌ای از بسامدها را در بر بگیرد؟

اگر به خاطر آورید که انتگرال حدّ یک حاصل جمع است، چندان تعجب نخواهید کرد که

ببینید **رشتهٔ** فوریه (یعنی، **حاصل جمعی** از جمله‌ها) موارد بالا با یک ***انتگرال*** فوریه جایگزین می‌شود. انتگرال فوریه را می‌توان برای نمایش توابع غیر تناوبی مانند یک تک تپ ولتاژ، یک درخش نور، یا صدایی که تکرار نمی‌شود به کار برد. انتگرال فوریه، همچنین یک مجموعهٔ پیوسته (طیف) از بسامدها، مثلاً یک گسترهٔ کامل از طنینهای موسیقی یا رنگهای نور، را، به جای یک مجموعهٔ گسسته، نمایش می‌دهد.

از فصل ۷، معادلات (۸-۲) و (۸-۳)، فرمولهای رشتهٔ فوریهٔ مختلط زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\pi x/l}$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-in\pi x/l}\, dx \qquad (۴-۱)$$

دورهٔ تناوب $f(x)$ برابر $2l$ و بسامدهای جمله‌های این رشته $n/(2l)$ اند. حال می‌خواهیم مورد بسامدهای پیوسته را بررسی کنیم.

تعریف تبدیلهای فوریه بدون اثبات، فرمولهای همخوان با (۴-۱) را برای گسترهٔ پیوسته‌ای از بسامدها بیان می‌کنیم.

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha \\ g(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx \end{aligned}} \qquad (۴-۲)$$

(۴-۲) و (۴-۱) را با هم مقایسه کنید؛ $g(\alpha)$ همخوان است با c_n، α همخوان است با n، $\int_{-\infty}^{\infty}$ همخوان است با $\sum_{-\infty}^{\infty}$. این با بحث قبلی ما در مورد معنای فیزیکی و کاربرد انتگرالهای فوریه مطابقت دارد. کمیّت α مانستهٔ پیوستهٔ عدد صحیح n است، و در نتیجه مجموعه ضرایب c_n تبدیل به تابع $g(\alpha)$ شده است؛ حاصل جمع بر روی n تبدیل به انتگرال روی α شده است. دو تابع $f(x)$ و $g(\alpha)$ را یک زوج تابع تبدیلهای فوریه می‌نامند. معمولاً، $g(\alpha)$ را تبدیل فوریهٔ $f(x)$، و $f(x)$ را تبدیل معکوس فوریهٔ $g(\alpha)$ می‌نامند، امّا چون شکل

دو انتگرال فقط در علامت توان جملهٔ نمایی اختلاف دارد، اصطلاحاً هر یک را تبدیل فوریهٔ دیگری می‌خوانند. بدیهی است به هنگام استفاده از هر کتاب، باید به نمادگذاری آن توجه کرد. نکتهٔ دیگری که ممکن است از یک کتاب به کتاب دیگر فرق کند، محل ضریب $۱/(۲\pi)$ در رابطهٔ (۴-۲) است؛ می‌توان آن را به جای قرار دادن در انتگرال $g(\alpha)$ در انتگرال $f(x)$ قرار داد؛ یا می‌توان هر یک از دو انتگرال را در ضریب $۱/\sqrt{۲\pi}$ ضرب کرد.

قضیهٔ انتگرال فوریه این موضوع را بیان می‌کند که، اگر تابع $f(x)$ در هر بازهٔ متناهی در شرایط دریشلت (فصل ۷، بخش ۶) صدق کند، و اگر $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ متناهی باشد، در آن صورت رابطهٔ (۴-۲) برقرار است. یعنی، اگر $g(\alpha)$ را محاسبه و در انتگرال مربوط به $f(x)$ جایگزین کنیم [این را با روش محاسبهٔ c_n ها برای یک رشتهٔ فوریه و جایگزینی آن در رشتهٔ مربوط به $f(x)$ مقایسه کنید]، در آن صورت انتگرال، مقدار $f(x)$ را هر جا که $f(x)$ پیوسته باشد به دست می‌دهد؛ در پَرِشهای $f(x)$، انتگرال، مقدار نقطهٔ میانی پرش را می‌دهد (باز با رشتهٔ فوریه، فصل ۷، بخش ۶ مقایسه کنید). بحثی که به دنبال می‌آید اثبات ریاضی این قضیه نیست (برای اثبات رک کتاب اسنِدان) بلکه به درک بهتر ارتباط بین رشتهٔ فوریه و انتگرال فوریه کمک می‌کند.

ممکن است منطقی به نظر برسد که سعی کنیم تابعی را که تناوبی نیست با انتخاب دورهٔ تناوب $(-l \,،\, l)$ و فرض گسترش آن به صورتِ $(-\infty \,،\, +\infty)$، تناوبی فرض کنیم. بگذارید این کار را با شروع از رابطهٔ (۴-۱) انجام بدهیم. اگر فرض کنیم $n\pi/l = \alpha_n$ و $\alpha_{n+۱} - \alpha_n = \pi/l = \Delta\alpha$، در آن صورت داریم $۱/(۲l) = \Delta\alpha/(۲\pi)$ و (۴-۱) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\alpha_n x} \tag{۴-۳}$$

$$c_n = \frac{۱}{۲l} \int_{-l}^{l} f(x)\, e^{i\alpha_n x}\, dx = \frac{\Delta\alpha}{۲\pi} \int_{-l}^{l} f(u)\, e^{-i\alpha_n u}\, du\,. \tag{۴-۴}$$

(متغیر کمکی انتگرال‌گیری x در c_n را به u تبدیل کرده‌ایم تا از سردرگمیهای بعدی جلوگیری شود.) اگر (۴-۴) را در (۴-۳) جایگزین کنیم خواهیم داشت

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(u)\, e^{-i\alpha_n u}\, du \right] e^{i\alpha_n x} \qquad (۴-۵)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(u)\, e^{i\alpha_n(x-u)}\, du = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} F(\alpha_n)\, \Delta\alpha$$

که در آن

$$F(\alpha_n) = \int_{-l}^{l} f(u)\, e^{i\alpha_n(x-u)}\, du. \qquad (۴-۶)$$

اکنون $\sum_{-\infty}^{\infty} F(\alpha_n)\, \Delta\alpha$ شبیه فرمول حاصل جمع در حساب انتگرال و دیفرانسیل است که حد آن وقتی $\Delta\alpha$ به سمت صفر میل می‌کند به انتگرال تبدیل می‌شود. اگر l را به سمت بینهایت میل دهیم [یعنی اگر بگذاریم دورهٔ تناوب $f(x)$ به سمت بینهایت میل کند]، $\Delta\alpha = \pi/l \to 0$، و حاصل جمع $\sum_{-\infty}^{\infty} F(\alpha_n)\, \Delta\alpha$ به انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, d\alpha$ تبدیل می‌شود؛ حال که α متغیر پیوسته‌ای است شاخص پایین آن را حذف کرده‌ایم. همچنین اگر بگذاریم l به سمت بینهایت میل کند و $\alpha_n = \alpha$ را در (۴-۶) جایگزین کنیم خواهیم داشت

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha(x-u)}\, du. \qquad (۴-۷)$$

اگر در رابطهٔ (۴-۵)، $\sum_{-\infty}^{\infty} F(\alpha_n)\, \Delta\alpha$ را با $\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, d\alpha$ جایگزین کنیم و به جای $F(\alpha)$ از (۴-۷) عبارت معادل آن را قرار بدهیم خواهیم داشت

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha(x-u)}\, du\, d\alpha \qquad (۴-۸)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\alpha u}\, du$$

اگر $g(\alpha)$ را به صورتِ

$$g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\alpha u}\, du \qquad (۴-۹)$$

تعریف کنیم، در آن صورت از رابطهٔ (۴-۸) نتیجه می‌گیریم که

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha \qquad (۴-۱۰)$$

این معادلات همان معادلات (۴-۲) هستند. توجه کنید که شرط واقعی در مورد ضریب $1/(2\pi)$ این است که **حاصل ضرب** ضرایب دو انتگرال $g(\alpha)$ و $f(x)$ باید برابر با $1/(2\pi)$ شود؛ به همین دلیل است که در کتابهای مختلف، همانطور که قبلاً اشاره کردیم، ضرایب را به شکلهای متفاوت می‌نویسند.

درست همان طور که رشتهٔ سینوسی نمایشگر توابع فرد و رشتهٔ کسینوسی نمایشگر توابع زوج است (فصل ۷، بخش ۹)، انتگرالهای سینوسی و کسینوسی فوریه هم داریم که، به ترتیب، نمایشگر توابع فرد و زوج هستند. اکنون ثابت می‌کنیم که اگر $f(x)$ فرد باشد، $g(\alpha)$ هم فرد است، و نشان می‌دهیم که در این مورد رابطهٔ (۴-۲) تبدیل به یک زوج تبدیل سینوسی می‌شود. اثباتِ مربوط به $f(x)$ زوج هم شبیه همین اثبات است (مسألهٔ ۱). عبارتِ

$$e^{-i\alpha x} = \cos \alpha x - i \sin \alpha x$$

را در رابطهٔ (۴-۸) جایگزین می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, (\cos \alpha x - i \sin \alpha x)\, dx. \qquad (۴-۱۱)$$

چون $\cos \alpha x$ تابع زوجی است، و بنا به فرض، $f(x)$ فرد است، حاصل‌ضرب $f(x) \cos \alpha x$ فرد خواهد بود. به یاد آورید که انتگرالِ یک تابع فرد بر روی یک بازهٔ متقارن نسبت به مبدأ مختصات (در اینجا، $-\infty$ تا $+\infty$) صفر است، بنابراین جملهٔ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx$ در رابطهٔ (۴-۱۱) صفر است؛ همین طور به خاطر بیاورید که انتگرال یک تابع فرد بر روی یک بازهٔ متقارن، دو برابر انتگرال آن روی xهای مثبت است. با جایگذاری این نتایج در (۴-۱۱) خواهیم داشت

$$g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, (-i \sin \alpha x)\, dx = -\frac{i}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin \alpha x\, dx \qquad (۴-۱۲)$$

از (۴-۱۲) ملاحظه می‌شود که اگر α را به $-\alpha$ تبدیل کنیم، علامت $\sin \alpha x$ عوض می‌شود و این علامت $g(\alpha)$ را تغییر می‌دهد. یعنی، $g(-\alpha) = -g(\alpha)$، یا به عبارت دیگر همان گونه

که ادّعا کردیم، $g(\alpha)$ یک تابع فرد است. حال با بسط تابع نمای رابطهٔ (۴-۱۰) و استدلالی شبیه آنچه که منجر به (۴-۱۱) شد، خواهیم داشت

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\,(\cos \alpha x + i \sin \alpha x)\, d\alpha \quad (۱۳\text{-}۴)$$
$$= ۲i \int_{۰}^{\infty} g(\alpha) \sin \alpha x\, d\alpha$$

اگر $g(\alpha)$را از (۴-۱۲) در رابطهٔ (۴-۱۳) جایگزین و رابطه‌ای شبیه (۴-۸) پیدا کنیم، ضریب عددی عبارت خواهد بود از $(-i/\pi)(۲i) = ۲/\pi$؛ بنابراین به ضرایب موهومی نیازی نیست. ضریب $۲/\pi$ را می‌توان در یکی از دو انتگرال، و یا هر انتگرال را در $\sqrt{۲/\pi}$ ضرب کرد. در تعریف زیر از انتخاب دوم استفاده می‌کنیم.

تبدیلهای سینوسی فوریه $f_s(x)$ و $g_s(\alpha)$، یک **زوج تبدیل سینوسی فوریه** که نمایشگر **توابع فرد** هستند، را با معادله‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$f_s(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{\infty} g_s(\alpha) \sin \alpha x\, d\alpha$$
$$(۱۴\text{-}۴)$$
$$g_s(\alpha) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{\infty} f_s(x) \sin \alpha x\, dx$$

توابع زوج را هم می‌توان به روش مشابهی مورد بررسی قرار داد (مسألهٔ ۱).

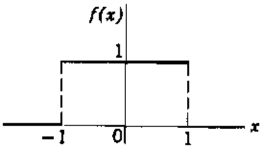
تبدیلهای کسینوسی فوریه $f_c(x)$ و $g_c(\alpha)$، یک **زوج تبدیل کسینوسی فوریه** که نمایشگر **توابع زوج** هستند، را با معادله‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$f_c(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{\infty} g_c(\alpha) \cos \alpha x\, d\alpha$$
$$(۱۵\text{-}۴)$$
$$g_c(\alpha) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{\infty} f_c(x) \cos \alpha x\, dx.$$

مثال: بگذارید یک تابع غیر تناوبی را به صورت یک انتگرال فوریه نمایش دهیم. تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ \ ، & -۱ < x < ۱ \\ ۰ & ، |x| > ۱ \end{cases}$$

که در شکل ۴-۱ نمایش داده شده است می‌تواند نمایش دهندهٔ یک ضربهٔ مکانیکی (یعنی، نیرویی که فقط در مدت زمان کوتاهی اعمال می‌شود مانند ضربهٔ چوب بیسبال به توپ)، یا یک خیزش ناگهانی و کوتاه جریان الکتریکی، یا یک تپ کوتاه صوت یا نور باشد که تکرار نمی‌شود. چون تابع داده شده تناوبی نیست، نمی‌توان آن را با **رشتهٔ فوریه** نمایش داد، زیرا رشتهٔ فوریه همیشه نمایشگر یک تابع **تناوبی** است. در عوض، $f(x)$را به صورت یک انتگرال فوریه به شکل زیر نمایش می‌دهیم. با استفاده از (۴-۹)، $g(\alpha)$ را حساب می‌کنیم؛ این فرایند شبیه محاسبهٔ c_nها برای یک رشتهٔ فوریه است، داریم



شکل ۴-۱

$$g(\alpha) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-۱}^{۱} e^{-i\alpha x}\, dx \qquad (۴\text{-}۱۶)$$

$$= \frac{۱}{۲\pi}\frac{e^{-i\alpha x}}{-i\alpha}\Bigg|_{-۱}^{۱} = \frac{۱}{\pi\alpha}\ \frac{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}}{-۲i} = \frac{\sin\alpha}{\pi\alpha}$$

$g(\alpha)$ را از (۴-۱۶) در فرمول (۴-۱۰) برای $f(x)$ جایگزین می‌کنیم (این شبیه جایگزینی ضرایب محاسبه شده در یک رشتهٔ فوریه است). خواهیم داشت

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha}{\pi\alpha}\, e^{i\alpha x}\, d\alpha \qquad (۴\text{-}۱۷)$$

$$= \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha\,(\cos\alpha x + i\sin\alpha x)}{\alpha}\, d\alpha = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin\alpha\cos\alpha x}{\alpha}\, d\alpha$$

زیرا $(\sin\alpha)/\alpha$ یک تابع زوج است. بنابراین انتگرالی به دست آورده‌ایم که نمایشگر تابع $f(x)$ نشان داده شده در شکل (۴-۱) است.

(۴-۱۷) را می‌توان برای محاسبهٔ یک انتگرال معین به کار برد. داریم

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \alpha \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2} f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{برای} \quad |x| < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{برای} \quad |x| = 1 \\ 0 & \text{برای} \quad |x| > 1 \end{cases} \qquad (18\text{-}4)$$

توجه کنید که از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که انتگرال فوریه بیانگر نقطهٔ میانی پرشِ $f(x)$ در $|x| = 1$ است. اگر فرض کنیم $x = 0$، می‌رسیم به

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad (19\text{-}4)$$

(برای ملاحظهٔ روش دیگر محاسبهٔ این انتگرال، رک فصل ۱۴، بخش ۷، مثال ۴). توجه کنید که این مسأله را با ملاحظه این که $f(x)$ تابع زوجی است و در نتیجه می‌توان آن را یک تبدیل کسینوسی نمایش داد نیز می‌توانستیم حل کنیم. نتایج نهایی (۴-۱۷) تا (۴-۱۹) فرقی نمی‌کردند (مسألهٔ ۲).

در فصلهای ۷ و ۱۳ بعضی اوقات مسأله را با تابعی که فقط به ازای $x \geq 0$ تعریف شده بود شروع می‌کردیم و آن را طوری تعمیم می‌دادیم که زوج یا فرد باشد تا بتوانیم آن را با یک رشتهٔ کسینوسی یا یک رشتهٔ سینوسی نمایش دهیم. به همین ترتیب، برای تبدیلهای فوریه، می‌توانیم تابعی را که به ازای $x \geq 0$ تعریف شده است، یا با یک انتگرال سینوسی فوریه و یا با یک انتگرال کسینوسی فوریه (یا با یک انتگرال فوریهٔ نمایی، در صورتی که تابع را به ازای $x < 0$ مساوی صفر تعریف کنیم) نمایش بدهیم. (رک مسائل ۲۷ تا ۳۰)

مسائل، بخش ۴

۱- با دنبال کردن روشی شبیه آنچه که برای پیدا کردن معادله‌های (۴-۱۱) و (۴-۱۴) به کار رفته است، ثابت کنید که اگر $f(x)$ زوج باشد، $g(\alpha)$ هم زوج است. نشان دهید که در این مورد $f(x)$ و $g(\alpha)$ را می‌توان به صورت تبدیلهای فوریه کسینوسی نوشت، و سپس (۴-۱۵) را پیدا کنید.

۲- مثال بالا را با استفاده از تبدیلهای کسینوسی (۴-۱۵) حل کنید. (۴-۱۷) را پیدا کنید؛ به ازای $x > 0$، انتگرال از ۰ تا ∞ نمایشگر تابع زیر است

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰< x <۱ \\ ۰ & x >۱ \end{cases}$$

همین تابع را با انتگرال سینوسی فوریه هم نشان دهید (رک آخرین بند (پاراگراف) این بخش).

در مسائل ۳ تا ۱۲، تبدیل فوریه نمایی تابع $f(x)$ داده شده را پیدا کنید و $f(x)$ را به صورت انتگرال فوریه بنویسید [یعنی، $g(\alpha)$ در معادلهٔ (۴-۲) را پیدا کنید و نتیجهٔ حاصل را در معادلهٔ اول (۴-۲) قرار دهید].

-۳ $$f(x) = \begin{cases} -۱ & -\pi< x <۰ \\ ۱ & ۰< x <\pi \\ ۰ & |x| >\pi \end{cases}$$

-۴ $$f(x) = \begin{cases} ۱ & \pi/۲< |x| <\pi \\ ۰ & \text{و إلاّ} \end{cases}$$

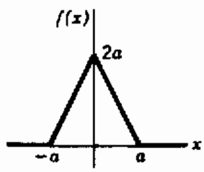
-۵ $$f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰< x <۱ \\ ۰ & \text{و إلاّ} \end{cases}$$

-۶ $$f(x) = \begin{cases} x & |x| <۱ \\ ۰ & |x| >۱ \end{cases}$$

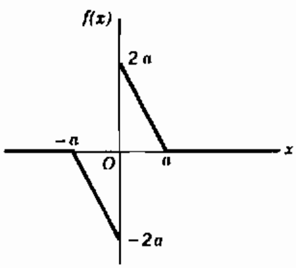
-۷ $$f(x) = \begin{cases} |x| & |x| <۱ \\ ۰ & |x| >۱ \end{cases}$$

-۸ $$f(x) = \begin{cases} x & ۰< x <۱ \\ ۰ & \text{و إلاّ} \end{cases}$$

-۹



-۱۰



-۱۱ $$f(x) = \begin{cases} \cos x & -\pi/۲< x <\pi/۲ \\ ۰ & |x| >\pi/۲ \end{cases}$$

-۱۲ $$f(x) = \begin{cases} \sin x & |x| <\pi/۲ \\ ۰ & |x| >\pi/۲ \end{cases}$$

راهنمایی: در مسائل ۱۱ و ۱۲، از توابع نمایی مختلط استفاده کنید.

در مسائل ۱۳ تا ۱۶، تبدیل فوریهٔ کسینوسی تابع داده شده در هر مسأله را پیدا کنید، و $f(x)$ را به

صورت یک انتگرال فوریه بنویسید [از معادلهٔ (۴-۱۵) استفاده کنید]. نشان دهید که انتگرال کسینوسی مربوط به $f(x)$ برابر انتگرال نمایی است که قبلاً پیدا کرده‌اید.

۱۳- مسألهٔ ۴. ۱۴- مسألهٔ ۷.

۱۵- مسألهٔ ۹. ۱۶- مسألهٔ ۱۱.

در مسائل ۱۷ تا ۲۰، تبدیل فوریهٔ سینوسی تابع داده شده در هر مسأله را پیدا کنید، و $f(x)$ را به صورت یک انتگرال فوریه بنویسید [از معادلهٔ (۴-۱۴) استفاده کنید]. نشان دهید که انتگرال سینوسی $f(x)$ برابر انتگرال نمایی است که قبلاً پیدا کرده‌اید.

۱۷- مسألهٔ ۳. ۱۸- مسألهٔ ۶.

۱۹- مسألهٔ ۱۰. ۲۰- مسألهٔ ۱۲.

۲۱- تبدیل فوریهٔ تابع $f(x) = e^{-x^۲/(۲\sigma^۲)}$ را پیدا کنید. ***راهنمایی***: در توان تابع نمایی جملات شامل x را به صورت مربع کامل در آورید و از تغییر متغیر $y = x + \sigma^۲ i\alpha$ استفاده کنید. برای محاسبهٔ انتگرال معین حاصل رک فصل ۱۱، معادلهٔ (۹-۵).

۲۲- با استفاده از مسألهٔ ۱۸ و معادلهٔ (۴-۱۷) از فصل ۱۲، نشان دهید

$$\int_۰^\infty j_۱(\alpha)\, sin\ \alpha x\, d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi x}{۲} & -۱ < x < ۱ \\ ۰ & |x| > ۱ \end{cases}$$

۲۳- با استفاده از مسألهٔ ۱۷، نشان دهید

$$\int_۰^\infty \frac{۱ - cos\ \pi\alpha}{\alpha} sin\ \alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{۲}$$
$$\int_۰^\infty \frac{۱ - cos\ \pi\alpha}{\alpha} sin\ \pi\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{۴}$$

۲۴- (الف) تبدیل فوریهٔ نمایی تابع $f(x) = e^{-|x|}$ را پیدا کنید و تبدیل معکوس آن را بنویسید. باید نتیجه بگیرید که

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\alpha^{۲}+۱}\, d\alpha = \frac{\pi}{۲}\, e^{-|x|}$$

(ب) نتیجهٔ قسمت (الف) را با استفاده از معادله‌های تبدیل فوریهٔ کسینوسی (۴-۱۵) نیز پیدا کنید.

(ج) تبدیل فوریهٔ تابع $f(x) = ۱/(۱+x^{۲})$ را پیدا کنید. ***راهنمایی***: در نتیجه‌ای که در فرض (ب) به دست آورده‌اید، جای x و α را تعویض کنید.

۲۵- (الف) تابع زیر را با انتگرال فوریهٔ نمایی نمایش دهید:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \circ < x < \pi \\ \circ & \text{و إلاّ} \end{cases}$$

راهنمایی: $\sin x$ را به شکل نمایی مختلط بنویسید.

(ب) نشان دهید که جواب را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\infty} \frac{\cos \alpha x + \cos \alpha(x-\pi)}{۱-\alpha^{۲}}\, d\alpha$$

۲۶- با استفاده از مسألهٔ ۱۵، نشان دهید

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{۱-\cos \alpha}{\alpha^{۲}}\, d\alpha = \frac{\pi}{۲}$$

هر یک از توابع زیر را (الف) با انتگرال کسینوسی فوریه، (ب) با انتگرال سینوسی فوریه نمایش دهید. ***راهنمایی***: رک آخرین بند این بخش.

۲۷- $$f(x) = \begin{cases} ۱ & \circ < x < \pi/۲ \\ \circ & x > \pi/۲ \end{cases}$$

۲۸- $$f(x) = \begin{cases} ۱ & ۲ < x < ۴ \\ \circ & \circ < x < ۲ \text{ ، } x > ۴ \end{cases}$$

۲۹- $$f(x) = \begin{cases} -۱ & \circ < x < ۲ \\ ۱ & ۲ < x < ۳ \\ \circ & x > ۳ \end{cases}$$

۳۰- $$f(x) = \begin{cases} ۱ - x/۲ & \text{،} \circ < x < ۲ \\ \circ & x > ۲ \end{cases}$$

۵- قضیهٔ پارسوال؛ همگردش

در بخش ۳، برای حلّ معادلات دیفرانسیل، ابتدا Y را پیدا می‌کردیم و سپس معکوس آن، y، را در جدول جستجو می‌نمودیم. اگر شانس می‌آوردیم، آن را در جدول پیدا می‌کردیم؛ در غیر این صورت، و اگر باهوش می‌بودیم، می‌توانستیم آن را با ترکیب چند تبدیل معکوس پیدا کنیم. در هر صورت، برای پیداکردن تبدیل معکوس راهی جز برگشتن به تبدیلهای مستقیم محاسبه شده نداشتیم. در این بخش (و بخش بعدی) می‌خواهیم راههای کلّی‌تر پیداکردن تبدیلهای معکوس را بررسی کنیم.

اوّل ببینیم چرا روشی که می‌خواهیم در این بخش بررسی کنیم مفید است. معادلات دیفرانسیلی از نوع آنچه راکه در فصل ۸، بخشهای ۵ و ۶، بررسی کردیم، یعنی معادلات مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت، در نظر بگیرید. به یاد داشته باشید که چنین معادلاتی ارتعاشات یا نوسانات سیستمهای مکانیکی یا الکتریکی را بیان می‌کنند، اگر طرف راست معادله تابعی از t، موسوم به تابع *وادارنده*، باشد، در آن صورت معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه ارتعاشات زوری را بیان می‌کند. بگذارید معادلهٔ نمونهٔ زیر را با تبدیل لاپلاس حل کنیم. فرض می‌کنیم سیستم ابتدا در حال سکون است و نیروی $f(t)$ از لحظهٔ $t = ۰$ اعمال می‌شود

$$Ay'' + By' + Cy = f(t) \quad ، y_۰ = y'_۰ = ۰ \qquad (۱-۵)$$

تبدیل لاپلاس هر جمله را می‌نویسیم، شرایط اولیه را اعمال، و Y را به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$Ap^۲Y + BpY + CY = L(f) = F(p)$$
$$Y = \frac{۱}{Ap^۲ + Bp + C} F(p) \qquad (۲-۵)$$

توجه کنید که Y حاصلضرب دو تابع از p است. تبدیل معکوس $F(p)$، یعنی $f(t)$، را می‌شناسیم. ضریبِ

$$T(p) = \frac{۱}{Ap^۲ + Bp + C}$$

(که تابع *انتقال* خوانده می‌شود) را می‌توان همیشه با تجزیهٔ عبارت درجهٔ دوم مخرج به شکل زیر نوشت

$$T(p) = \frac{1}{A(p+a)(p+b)}$$

بنابراین، طبق $L7$ (یا اگر $a = b$، $L6$) تبدیل معکوس ضریب $T(p)$ را می‌توانیم برای هر مسأله پیدا کنیم. در این صورت y [تبدیل معکوس Y در معادلهٔ (۵-۲)] تبدیل معکوس حاصل‌ضرب دو تابع است که تبدیل معکوس آنها را می‌دانیم. حال می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه می‌توان y را به صورت یک انتگرال نوشت (یعنی، می‌خواهیم رابطهٔ $L34$ جدول را ثابت کنیم).

فرض کنید $G(p)$ و $H(p)$ تبدیلهای $g(t)$ و $h(t)$ باشند. می‌خواهیم تبدیل معکوس حاصل‌ضرب $G(p)H(p)$ را پیدا کنیم. طبق تعریف (۲-۱) داریم

$$G(p)H(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, g(t)\, dt \cdot \int_0^\infty e^{-pt}\, h(t)\, dt \qquad (۵\text{-}۳)$$

اکنون در رابطهٔ (۵-۳)، t را با متغیّرهای ظاهری متفاوتی جایگزین می‌کنیم تا که بتوانیم حاصل‌ضرب دو انتگرال را به صورت یک انتگرال دوگانه بنویسیم. در این صورت داریم

$$G(p)H(p) = \int_0^\infty e^{-p\sigma}\, g(\sigma)\, d\sigma \cdot \int_0^\infty e^{-p\tau}\, h(\tau)\, d\tau \qquad (۵\text{-}۴)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(\sigma+\tau)}\, g(\sigma)\, h(\tau)\, d\sigma\, d\tau$$

حال تغییر متغیر می‌دهیم؛ در انتگرال روی σ (یعنی، τ ثابت)، فرض می‌کنیم $t = \tau + \sigma$. در این صورت $\sigma = t - \tau$ و $d\sigma = dt$ و گسترهٔ انتگرال‌گیری از $t = \tau$ همخوان با $\sigma = 0$) تا $t = \infty$ (همخوان با $\sigma = \infty$) خواهد بود. با اعمال این جایگزینیها در (۵-۴)، خواهیم داشت

$$G(p)H(p) = \int_{\tau=0}^\infty \int_{t=0}^\infty e^{-pt}\, g(t-\tau)\, h(\tau)\, dt\, d\tau \qquad (۵\text{-}۵)$$

اکنون ترتیب انتگرال گیری را عوض می‌کنیم. طبق شکل ۵-۱، ملاحظه می‌شود که انتگرال دوگانهٔ (۵-۵) روی مثلث واقع در ربع اول و زیر خط $t = \tau$ است. انتگرال‌گیری روی t از خط $t = \tau$ تا $t = \infty$ (که با نواری به عرض $d\tau$ از $t = \tau$ تا ∞ مشخص شده) است و انتگرال گیری روی τ حاصل‌جمع نوارهای افقی را از $\tau = 0$ تا $\tau = \infty$ در بر می‌گیرد و تمام

سطح مثلث تا بینهایت را می‌پوشاند. ابتدا نسبت به τ انتگرال می‌گیریم؛ در این صورت τ از $\tau = ۰$ تا $\tau = t$ تغییر می‌کند (که در شکل ۵-۱ با یک نوار عمودی مشخص شده است) و سپس انتگرال روی τ حاصل‌جمع نوارهای عمودی از $t = ۰$ تا ∞ را در بر می‌گیرد. با اعمال این تغییر در (۵-۵) خواهیم داشت

$$G(p)H(p) = \int_{t=0}^{\infty} \int_{\tau=0}^{t} e^{-pt}\, g(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau\, dt \qquad (۵-۶)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[\int_0^{t} g(t-\tau)\, h(\tau)\, dt \right] d\tau$$

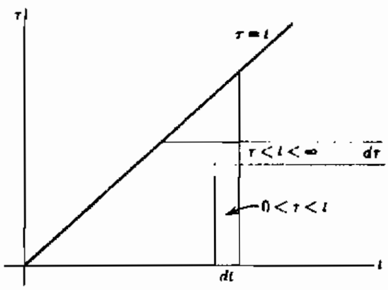
$$= L \left[\int_0^{\infty} g(t-\tau)\, h(\tau)\, dt \right] \qquad (\text{ر.ک } L۳۴)$$

آخرین مرحله از تعریف (۲-۱) تبدیل لاپلاس نتیجه می‌شود.

تعریف همگردش بنا به تعریف، انتگرالِ

$$\int_0^{t} g(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau = g * h \qquad (۵-۷)$$

را **همگردش** (یا **برآیند**) g و h می‌نامند؛ به علامت اختصاری $g * h$ انتگرال همگردش توجه داشته باشید، و علامت * را، که **روی** خط نوشته می‌شود، با ستاره‌ای که به صورت شاخصِ بالا به کار می‌رود و به معنی مزدوج مختلط است اشتباه نکنید. به سادگی می‌توان نشان داد که $g * h = h * g$ (مسألهٔ ۱)؛ این نتیجه و روابط (۵-۶) و (۵-۷) رابطهٔ $L۳۴$ جدول را به دست می‌دهند.



شکل ۵-۱

حال ببینیم چگونه می‌توان از (۵-۶) یا L۳۴ برای حل مسأله‌ای از نوع آنچه که در (۵-۱) و (۵-۲) آمده است استفاده کرد.

مثال - معادلهٔ $y'' + ۳y' + ۲y = e^{-t}$ را با شرایط اوّلیهٔ $y_۰ = y'_۰ = ۰$ حلّ کنید.

تبدیل لاپلاس هر جمله را می‌نویسیم، شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم، و Y را به دست می‌آوریم،

$$p^۲Y + ۳pY + ۲Y = L(e^{-t})$$

$$Y = \frac{۱}{p^۲ + ۳p + ۲} L(e^{-t})$$

چون می‌خواهیم از انتگرال همگردش استفاده کنیم لزومی ندارد که دنبال تبدیل لاپلاس e^{-t} بگردیم. اما به تبدیل معکوس عبارت $۱/(p^۲ + ۳p + ۲)$ نیاز داریم؛ طبق L۷، این تبدیل برابر است با $e^{-t} - e^{-۲t}$، در نتیجه

$$Y = L(e^{-t} - e^{-۲t})L(e^{-t}) = G(p)H(p)$$

که در آن $g(t) = e^{-t} - e^{-۲t}$ و $h(t) = e^{-t}$ است. حال L۳۴ را به کار می‌بریم و y را پیدا می‌کنیم. با توجه به L۳۴ می‌بینیم که در انتگرال می‌توان یا از $g(t-\tau)\ h(\tau)$ استفاده کرد و یا از $g(\tau)\ h(t-\tau)$. آن انتخابی بهتر است که انتگرال‌گیری را راحت‌تر می‌کند؛ معمولاً آسان‌تر است که $(t - \tau)$ را در تابع ساده‌تر [در اینجا $h(\tau)$] قرار دهیم. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} y &= \int_۰^t g(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau = \int_۰^t (e^{-\tau} - e^{-۲\tau})\ e^{-(t-\tau)}\ d\tau \\ &= e^{-t}\int_۰^t (۱-e^{-\tau})\ d\tau = e^{-t}\ (\tau+e^{-\tau})\ \Big|_۰^t \\ &= e^{-t}\ (t+ e^{-t} - ۱) = te^{-t} + e^{-۲t} - e^{-t} \end{aligned}$$

محاسبهٔ انتگرال همگردش همیشه به سادگی این مثال نیست. با وجود این، در بدترین حالت، همیشه می‌توان جواب یک مسألهٔ ارتعاشات زوری [معادلهٔ (۵-۱)] را به صورت یک انتگرال نوشت (که در صورت لزوم، می‌توان آنرا به طور عددی حساب کرد). این گفته به این دلیل

درست است که همانطور که بعد از (۵-۲) نشان دادیم، همیشه می‌توان تبدیل معکوس تابع $T(p)$ را پیدا کرد، و در نتیجه Y را به صورت حاصل‌ضرب دو تابع که تبدیل معکوس آنها معلوم است نوشت. در آن صورت y با همگردش (۵-۷) تابع وادارندهٔ $f(t)$ و تبدیل معکوس تابع انتقال داده می‌شود. همچنین توجه کنید (مسألهٔ ۱۶) که اگر شرایط اولیهٔ غیر صفر باشند ترکیبی از L۶، L۷، L۸ و L۱۸ مسأله را حل می‌کند.

تبدیل فوریهٔ یک همگردش نشان داده‌ایم که تبدیل لاپلاس همگردش دو تابع برابر حاصل‌ضرب تبدیلهای لاپلاس آنهاست. قضیهٔ مشابهی هم در مورد تبدیلهای فوریه وجود دارد. فرض کنید $g_1(\alpha)$ و $g_2(\alpha)$ تبدیلهای فوریهٔ $f_1(x)$ و $f_2(x)$ باشند. در تشابه با معادله‌های (۵-۳)، (۵-۴)، (۵-۵)، (۵-۶)، انتظار داریم که حاصل‌ضرب $g_1(\alpha)\cdot g_2(\alpha)$ تبدیل فوریهٔ "چیزی" باشد. بگذارید این نکته را امتحان کنیم. با فرض اینکه $\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)\, f_2(x)|\, dx$ متناهی باشد، طبق تعریف (۴-۲) تبدیل فوریه،

$$g_1(\alpha)\cdot g_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(v)\, e^{-i\alpha v}\, dv \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u)\, e^{-i\alpha u}\, du \quad (۵\text{-}۸)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(v+u)}\, f_1(v)\, f_2(u)\, dv\, du$$

[مانند (۵-۴)، متغیرهای ظاهری متفاوتی به کار برده‌ایم]. حال تغییر متغیر $x = v + u$ و $dx = dv$ را در انتگرالِ شامل v به کار می‌بریم:

$$g_1(\alpha)\, g_2(\alpha) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\, f_1(x-u)\, f_2(u)\, dx\, du \quad (۵\text{-}۹)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-u)\, f_2(u)\, du\right] dx$$

اگر همگردش دو تابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-u)\, f_2(u)\, du \quad (10\text{-}5)$$ [1]

رابطهٔ (۵-۹) به شکل زیر در می‌آید

$$g_1 \cdot g_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1 * f_2 e^{-i\alpha x} dx\right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\text{تبدیل فوریهٔ } f_1 * f_2\right) \quad (11\text{-}5)$$

به عبارت دیگر،

(۵-۱۲) $g_1 \cdot g_2$ و $\frac{1}{2\pi} f_1 * f_2$ یک زوج تبدیل فوریه‌اند.

به علت تقارنِ انتگرالهای $f(x)$ و $g(\alpha)$، نتیجهٔ مشابهی هم $f_1 \cdot f_2$ و همگردش g_1 و g_2 را به هم مربوط می‌کند. در این حالت داریم (مسألهٔ ۱۹)

(۵-۱۳) $g_1 * g_2$ و $f_1 \cdot f_2$ یک زوج تبدیل فوریه‌اند.

[همانطور که در بحث متعاقب روابط (۴-۲) و (۴-۱۰) اشاره کردیم، محل ضریب $1/2\pi$ در کتابهای مختلف فرق می‌کند. بعضی مؤلفان ضریبهای $1/2\pi$ یا $1/\sqrt{2\pi}$ را در تعریف همگردش (۵-۱۰) می‌گنجانند؛ این تعریف مثل تعریف (۴-۲) بر (۵-۱۲) و (۵-۱۳) تأثیر می‌گذارد. نمادگذاری کتابی را که می‌خوانید کنترل کنید.]

قضیهٔ پارسوال می‌خواهیم با استفاده از نتایج به دست آمده قضیهٔ پارسوال را ثابت کنیم. به خاطر بیاورید (فصل ۷، بخش ۱۱) که قضیهٔ پارسوال برای رشتهٔ فوریهٔ $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l}$، دو عبارت $\int_{-l}^{l} |f|^2\, dx$ و $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ را به هم مربوط می‌کند. در کاربردهای فیزیکی (رک فصل ۷، بخش ۱۱)، قضیهٔ پارسوال می‌گوید که

۱- توجه کنید که (۵-۱۰) در واقع همان (۵-۷) است زیرا در بحث تبدیلهای لاپلاس قرار شد که توابع ما به ازای $t < 0$ صفر باشند؛ بنابراین در (۵-۷)، به ازای $\tau < 0$، $h(\tau) = 0$ است و به ازای $\tau > t$، $g(t-\tau) = 0$ می‌باشد، بنابراین اگر حدود انتگرال بینهایت می‌بود، مقدار آن تفاوتی نمی‌کرد (در واقع، انتگرال را گاهی به آن صورت می‌نویسند).

انرژی کلّ (مثلاً در یک موج صوتی، یا در یک علامت الکتریکی) برابر با مجموع انرژیهای تک‌تک هماهنگهاست. به خاطر داریم که انتگرال فوریه نمایشگر طیف پیوسته از بسامدهاست و $g(\alpha)$ همخوان با c_n است. در این شرایط ممکن است انتظار داشت که $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ را بتوان با $\int_{-\infty}^{\infty} |g(\alpha)|^2 d\alpha$ جایگزین کرد (یعنی، "حاصل‌جمع" بسامدهای پیوسته، به جای حاصل‌جمع بسامدهای گسسته) و قضیهٔ پارسوال دو عبارت $\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} |g|^2 d\alpha$ را به هم مربوط کند. این در صورتی درست است که انتگرالها متناهی باشند؛ بگذارید این ارتباط را پیدا کنیم.

اگر $g(\alpha)$ تبدیل فوریهٔ $f(x)$ باشد، اولین چیزی که نیاز داریم تبدیل فوریهٔ $\bar{f}(x)$ [مزدوج مختلط $f(x)$] است. طبق (۴-۲) داریم

$$g(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x} dx \tag{۱۴-۵}$$

اگر مزدوج مختلط (۵-۱۴) را حساب کنیم داریم

$$\bar{g}(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)\, e^{i\alpha x} dx$$

حال اگر α را به $-\alpha$ تبدیل کنیم داریم

$$\bar{g}(-\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)\, e^{-i\alpha x} dx \tag{۱۵-۵}$$

که با استفاده از (۵-۱۴) می‌بینیم که این تبدیل فوریه $\bar{f}(x)$ است. بنابراین تبدیل فوریه $\bar{f}(x)$ برابر $\bar{g}(-\alpha)$ است. بگذارید در (۵-۱۳)، $f_1(x)$ را با $\bar{f}_1(x)$ و $g_1(\alpha)$ را با تبدیل $\bar{f}_1(x)$ یعنی [طبق (۵-۱۵)] $\bar{g}_1(-\alpha)$ جایگزین کنیم. در این صورت بنا بر (۵-۱۳) اگر

$$f(x) = \bar{f}_1(x)\, f_2(x) \quad \text{و} \quad g(\alpha) = \bar{g}_1(-\alpha) * g_2(\alpha)$$

دو تابع $f(x)$ و $g(\alpha)$ یک زوج تبدیل فوریه‌اند. با استفاده از (۵-۱۴) و تعریف (۵-۱۰) برای همگردش، داریم

$$g(\alpha) = \bar{g}_1(-\alpha) * g_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}_1[-(\alpha-\beta)]\, g_2(\beta)\, d\beta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_1(x)\, f_2(x)\, e^{-i\alpha x} dx$$

حال اگر $\alpha = ۰$ را در آن قرار دهیم نتیجه می‌گیریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}_۱(\beta)\, g_۲(\beta)\, d\beta = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_۱(x)\, f_۲(x)\, dx \qquad (۱۶\text{-}۵)$$

این شکل تعمیم یافتهٔ قضیهٔ پارسوال است (رک فصل ۱۰، بخش ۱۱، مسألهٔ ۱۰). اگر $f_۱ = f_۲ = f$ و $g_۱ = g_۲ = g$، نتیجه‌ای که انتظارش را داشتیم به دست می‌آید، یعنی

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |g(\alpha)|^۲\, d\alpha = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^۲\, dx \qquad (۱۷\text{-}۵)}$$

مسائل، بخش ۵

۱- با جایگزینی $u = t - \tau$ در رابطهٔ (۵-۷) نشان دهید که همانطور که در $L۳۴$ ادعا شده است، $g*h = h*g$.

۲- با استفاده از $L۳۴$ و $L۲$ تبدیل معکوس $G(p)H(p)$ را برای $G(p) = ۱/(p+a)$ و $H(p) = ۱/(p+b)$ پیدا کنید، نتیجهٔ حاصل باید رابطهٔ $L۷$ باشد.

با استفاده از قضیهٔ همگردش، تبدیل معکوس عبارتهای زیر را به دست آورید.

۳- $\dfrac{p}{(p^۲-۱)^۲} = \dfrac{p}{p^۲-۱} \cdot \dfrac{۱}{p^۲-۱}$ ۴- $\dfrac{۱}{(p+a)(p+b)^۲}$

۵- $\dfrac{p}{(p+a)(p+b)^۲}$ ۶- $\dfrac{۱}{(p+a)(p^۲-b^۲)}$

۷- $\dfrac{p}{(p+a)(p^۲-b^۲)}$ ۸- $\dfrac{۱}{(p+a)(p+b)(p+c)}$

۹- $\dfrac{۲}{p^۳(p+۲)}$ ۱۰- $\dfrac{۱}{p(p^۲+a^۲)^۲}$

۱۱- $\dfrac{p}{(p^۲+a^۲)(p^۲+b^۲)}$ ۱۲- $\dfrac{۱}{p(p^۲+a^۲)(p^۲+b^۲)}$

راهنمایی: در مسائل ۱۱ و ۱۲ از رابطهٔ $۲ \sin\theta \cos\phi = \sin(\theta+\phi) + \sin(\theta-\phi)$ استفاده کنید.

۱۳- با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس انتگرال زیر را حساب کنید.

$$f(t) = \int_۰^t e^{-\tau} \sin (t - \tau) \, d\tau$$

راهنمایی: در رابطهٔ L۳۴، فرض کنید $g(t) = e^{-t}$ و $h(t) = \sin t$، و $G(p) \, H(p)$ را پیدا کنید. این حاصل‌ضرب برابر تبدیل لاپلاس انتگرالی است که می‌خواهید حساب کنید. کسر حاصل را به کسرهای جزئی تجزیه کنید و تبدیلهای معکوس آنها را از جدول به دست آورید.

معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از انتگرال همگردش، همانند مثال، حل کنید.

۱۴- $y'' + ۵y' + ۶y = e^{-۲t}$ ، $y_۰ = y'_۰ = ۰$

۱۵- $y'' + ۳y' - ۴y = e^{۳t}$ ، $y_۰ = y'_۰ = ۰$

۱۶- فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ دیفرانسیلی شبیه (۵-۱)، ولی بدون شرایط اولیهٔ صفر، را حل کنیم.

(الف) شکل صحیح (۵-۲) را بنویسید و تابع تبدیل را به صورت فاکتورگیری شده که بعد از رابطهٔ (۵-۲) آمده بنویسید. جمله‌های اضافی Y را که از شرایط اولیه حاصل شده‌اند در نظر بگیرید و نشان دهید که تبدیل معکوس این جمله‌ها را همیشه می‌توان از روابط L۶ ، L۷، L۸، L۱۸ به دست آورد.

(ب) شکل صریح تبدیل معکوس تابع انتقال را برای $a \neq b$ پیدا کنید (از L۷ استفاده کنید)، و بنابراین شکل جواب عمومی (۵-۲) با شرایط اولیه غیر صفر را به صورت یک انتگرال همگردش به اضافهٔ جمله‌ای که در (الف) پیدا کردید بنویسید.

۱۷- معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - a^۲ y = f(t)$، را برای تابع زیر حل کنید

$$f(t) = \begin{cases} ۰ & t < ۰ \\ ۱ & t > ۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad y_۰ = y'_۰ = ۰$$

راهنمایی: همانند مثال از قضیهٔ همگردش استفاده کنید.

۱۸- یک سیستم مکانیکی یا الکتریکی با معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + \omega^۲ y = f(t)$ توصیف می‌شود. با شرایط زیر y را پیدا کنید

$$f(t) = \begin{cases} ۱ & ۰ < t < a \\ ۰ & \text{و اِلاّ} \end{cases} \quad \text{و} \quad y_۰ = y'_۰ = ۰$$

راهنمایی: با دقت از انتگرال همگردش استفاده کنید. $t<a$ و $t>a$ را جداگانه بررسی کنید و به یاد داشته باشید که به ازای $t > a$ داریم $f(t) = ۰$. نشان دهید که

$$y = \begin{cases} \frac{۱}{\omega^۲}(۱ - \cos \omega t) & t<a \\ \frac{۱}{\omega^۲}[\cos \omega(t-a) - \cos \omega t] & t>a \end{cases}$$

حرکت را برای حالتهای $a = \frac{۱}{۳}T$، $a = \frac{۳}{۲}T$، $a = \frac{۱}{۱۰}T$ رسم کنید، T دورهٔ تناوب ارتعاشات آزاد سیستم است.

۱۹- با استفاده از روش معادله‌های (۵-۸) و (۵-۱۲) نشان دهید که $f_۱ f_۲$ و $g_۱ * g_۲$ یک زوج تبدیل فوریه‌اند.

در مسائل ۲۰ تا ۲۲ قضیهٔ پارسوال را برای حالتهای خاص تحقیق کنید.

۲۰- $f(x)$ تابعی است که در شکل ۴-۱ رسم شده است. ***راهنمایی***: با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء و (۴-۱۸) عبارت زیر را حساب کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\alpha)|^۲ \, d\alpha$$

۲۱- $f(x)$ و $g(\alpha)$ مسألهٔ ۴-۲۱.

۲۲- $f(x)$ و $g(\alpha)$ مسألهٔ ۴-۲۴ (الف).

۲۳- نشان دهید که اگر در (۴-۲) هر انتگرال را با ضریب $۱/\sqrt{۲\pi}$ بنویسیم، در آن صورت قضیهٔ پارسوال مربوطه (۵-۱۷) به شکل زیر در خواهد آمد

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^۲ \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\alpha)|^۲ \, d\alpha$$

۲۴- با شروع از انتگرالهای متقارن شده مانند انتگرالهای مسألهٔ ۲۳، و جایگزینیهای $\alpha = ۲\pi p/h$ (که p یک متغیر جدید و h یک مقدار ثابت است)، $f(x) = \psi(x)$، $g(\alpha) = \sqrt{h/۲\pi}\,\phi(p)$؛ نشان دهید که

$$\psi(x) = \frac{۱}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p)\, e^{۲\pi ipx/h}\, dp$$

$$\phi(p) = \frac{۱}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-۲\pi ipx/h}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^۲\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(p)|^۲\, dp$$

در مکانیک کوانتومی معمولاً از این نمادگذاری استفاده می‌شود.

۲۵- در مسألهٔ ۴-۲۱، $f(x)$ را بهنجار کنید، یعنی ضریب N را طوری پیدا کنید که $\int_{-\infty}^{\infty} |Nf(x)|^۲\, dx = ۱$. فرض کنید $\psi(x) = Nf(x)$ و طبق مسألهٔ ۲۴، $\psi(p)$ را پیدا کنید. قضیهٔ پارسوال را تحقیق کنید، یعنی نشان دهید $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(p)|^۲\, dp = ۱$.

۶- تبدیل لاپلاس معکوس (انتگرال برومویچ)

در بخش ۳ ، برای پیدا کردن تبدیل معکوس کاملاً به جدول تبدیل لاپلاس وابسته بودیم. در بخش ۵ ، یک روشِ پیدا کردنِ تبدیل معکوس را بررسی کردیم، امّا این فقط منحصر به حالت خاص حاصل‌ضرب دو تابع بود که تبدیل معکوس آنها را می‌دانستیم. در تشابه با تبدیلهای فوریه، که انتگرالهای مشابهی برای تبدیل مستقیم و معکوس داریم، منطقی به نظر می‌رسد که سؤال کنیم آیا تبدیل معکوس لاپلاس را هم می‌توان با یک انتگرال حساب کرد. چنانچه تبدیل لاپلاس (۲-۱) را با تبدیل فوریهٔ $[g(\alpha)$ در (۴-۲)] مقایسه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که اگر p موهومی می‌بود، انتگرالها تقریباً یکی می‌شدند. این نکته پیشنهاد می‌کند که باید p را مختلط در نظر بگیریم، و انتگرال تبدیل لاپلاس معکوس ممکن است انتگرالی در صفحه مختلط p (یعنی یک انتگرال پربندی) باشد. بگذارید این نکته را بررسی کنیم.

در تعریف (۲-۱) تبدیل لاپلاس، فرض می‌کنیم p مختلط باشد، مثلاً $p = z = x + iy$. (توجه کنید که این امکان قبلاً در بخش ۲ بررسی شده است). در این صورت (۲-۱) به شکل زیر در می‌آید.

$$F(p) = F(z) = F(x+iy) = \int_{۰}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \qquad (۱-۶)$$

$$= \int_{\circ}^{\infty} e^{-(x+iy)t} f(t)\, dt = \int_{\circ}^{\infty} e^{-xt} f(t)\, e^{-iyt}\, dt \text{ ، } x = Re\, p > k$$

[یادآور می‌شویم که برای اینکه انتگرال در بینهایت همگرا شود باید محدودیتی بر $Re\, p$ داشته باشیم - مثلاً رجوع کنید به (۲-۲) و (۲-۳). محدودیّت مزبور بستگی به تابع $f(t)$ دارد، اما همان طور که در جدول تبدیل لاپلاس ملاحظه می‌شود همیشه به شکل $Re\, p > k$ است، که در آن k یک عدد حقیقی است]. حال (۶-۱) به شکل تبدیل فوریه است. برای ملاحظهٔ این مطلب، و با در نظر گرفتن همخوانیهایی که به دنبال می‌آیند، (۶-۱) را با (۴-۲) مقایسه کنید: $e^{-iyt}\, dt$ همخوان است با $e^{-i\alpha x}\, dx$، یعنی، y همخوان است با α و t همخوان است با x [x در (۶-۱)، در این بحث صرفاً یک پارامتر ثابت است]؛ تابع

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-xt} f(t) & t > \circ \\ \circ & t < \circ \end{cases} \qquad (۶-۲)$$

همخوان با $f(x)$ در رابطهٔ (۴-۲)، و $F(p) = F(x+iy)$ همخوان با $g(\alpha)$ است؛ و بالاخره به یاد آورید که ضریب $۱/(۲\pi)$ را می‌توان در یکی از دو انتگرال (۴-۲) نوشت. حال با این فرض که $\phi(t)$ شرایط لازم برای اینکه دارای تبدیل فوریه باشد را داراست (رک بخش ۴: شرایط دریشلت، متناهی بودن $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|\, dt$) می‌توان تبدیل معکوس را به شکل زیر نوشت

$$\phi(t) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy)\, e^{iyt}\, dy \qquad (۶-۳)$$

با استفاده از تعریف (۶-۲) برای $\phi(t)$، به ازای $t > \circ$ داریم

$$f(t) = e^{xt} \cdot \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy)\, e^{iyt}\, dy = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy)\, e^{(x+iy)t}\, dy \qquad (۶-۴)$$

چون x ثابت است، مثلاً $x = c$، داریم $dz = d(x+iy) = i\, dy$ و می‌توان (۶-۴) را به صورت زیر نوشت

$$\boxed{f(t) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)\, e^{zt}\, dz \quad \text{،} t > \circ \qquad (۶-۵)}$$

که نمادگذاری مزبور به معنای آن است که (رک فصل ۱۴، مسألهٔ ۳-۴) در صفحهٔ z روی خط

قائم $x = c$ انتگرال را حساب می‌کنیم. [این کار را می‌توان روی هر خط قائمی که روی آن $x = c > k$] باشد انجام داد؛ این شرط مربوط به محدودیت $Re\, p$ در (۶-۱) است] انتگرال (۶-۵) برای تبدیل لاپلاس معکوس، مشهور به ***انتگرال برومویچ*** است.

حال بگذارید مثالی از کاربرد (۶-۵) را برای محاسبهٔ $f(t)$ برای یک $F(p)$ معین بررسی کنیم. [چون p را مختلط در نظر می‌گیریم، $F(p)$ را با $F(z)$ نمایش می‌دهیم] از فصل ۱۴ به خاطر داریم که معمولاً محاسبهٔ انتگرالها در صفحهٔ مختلط با استفاده از قضیهٔ مانده‌ها راحت‌تر است. انتگرال (۶-۵) در امتداد یک خط قائم است. در فصل ۱۴، بخش ۷، مثالهای ۲ و ۳، انتگرالها را در امتداد یک خط مستقیم، یعنی محور xها، با در نظر گرفتن پربند متشکل از محور xها و نیمدایرهٔ بزرگی که نیم صفحهٔ بالای محور xها را در بر می‌گیرد حساب کردیم. اگر این پربند را 90° بچرخانیم پربندی خواهیم داشت متشکل از یک خط مستقیم قائم و نیمدایره‌ای که نیم صفحهٔ سمت چپ را در بر می‌گیرد (یعنی مساحت سمت چپ $x = c$). حال می‌خواهیم محاسبهٔ (۶-۵) را با استفاده از این پربند بررسی کنیم. بگذارید $F(z)$ را منحصر به شکل $P(z)/Q(z)$ در نظر بگیریم، که در آن $P(z)$ و $Q(z)$ چند جمله‌ایهایی از z بوده و مرتبهٔ $Q(z)$ حداقل یکی بیشتر از درجهٔ $P(z)$ است. (مقایسه کنید با شرایط مثال ۳، بخش ۷، فصل ۱۴). در چنین شرایطی می‌توان نشان داد، مانند مثالهای فصل ۱۴، که وقتی شعاع نیمدایره به سمت بینهایت میل می‌کند انتگرال در امتداد آن به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین، انتگرال در امتداد خط قائم $2\pi i$ برابر مجموع مانده‌های $F(z)\, e^{zt}$ در قطبهای آن خواهد بود، یا، با حذف ضریب $2\pi i$ در (۶-۵) داریم

$$f(t) = \text{مجموع مانده‌های } F(z)\, e^{zt} \text{ در تمام قطبها} \tag{۶-۶}$$

باید ***تمام*** قطبها را در نظر بگیریم؛ برای پی بردن به این نکته، به استدلال زیر توجه کنید. می‌دانیم که (۶-۶) به ازای هر مقدار $c > k$ صحیح است. فرض کنید مقداری برای c به کار ببریم که به حدّ کافی بزرگ باشد که تمام قطبها در سمت چپ خط $x = c$ قرار گیرند؛ در این صورت می‌دانیم که جوابمان صحیح است. حال اگر بحث را معکوس کنیم می‌توان گفت که چنانچه خط $x = c$ را در سمت راست تمام قطبها انتخاب نمی‌کردیم جواب دیگری به دست می‌آوریم، لذا

باید در امتداد خطی انتگرال بگیریم که تمام قطبهای $F(z)e^{zt}$ در داخل پربند سمت چپ خط قرار گیرند.

مثال - تبدیل لاپلاس معکوس $F(p) = 1/[(p+a)(p^2+b^2)]$ را به دست آورید.
اول قطبهای $F(z)\,e^{zt}$ را با تجزیه مخرج آن تعیین می‌کنیم.

$$F(z)\,e^{zt} = \frac{e^{zt}}{(z+a)(z+ib)(z-ib)}$$

مانده‌های تابع را در این سه قطب ساده حساب می‌کنیم [رک فصل ۱۴، بخش ۶، روش (ب)]

در قطب $z = -a$، مانده برابر است با $\dfrac{e^{-at}}{a^2+b^2}$

در قطب $z = ib$، مانده برابر است با $\dfrac{e^{ibt}}{(a+ib)(2ib)}$

در قطب $z = -ib$، مانده برابر است با $\dfrac{e^{-ibt}}{(a-ib)(-2ib)}$

در این صورت طبق (۶-۶) داریم

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{-at}}{a^2+b^2} + \frac{a(e^{ibt}-e^{-ibt}) - ib(e^{ibt}+e^{-ibt})}{(a^2+b^2)(2ib)} \\ &= \frac{e^{-at}}{a^2+b^2} + \frac{a\sin bt}{b(a^2+b^2)} - \frac{\cos bt}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

مسائل، بخش ۶

با استفاده از (۶-۶) تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را به دست آورید.

۱- $\dfrac{p^3}{p^2+4}$ ***راهنمایی:*** از رابطهٔ (۶-۲) فصل ۱۴ استفاده کنید.

۲- $\dfrac{1}{p^4-1}$ ۳- $\dfrac{p+1}{p(p^2+1)}$ ۴- $\dfrac{p^3}{p^4-16}$

۵- $\dfrac{3p^2}{p^3+8}$ ۶- $\dfrac{1}{p^2(p+1)}$ ۷- $\dfrac{p^5}{p^6-64}$

۸- $\dfrac{(p-۱)^{۲}}{p(p+۱)^{۲}}$ ۹- $\dfrac{p}{p^{۴}-۱}$ ۱۰- $\dfrac{p^{۲}}{(p^{۲}-۱)(p^{۲}-۴)}$

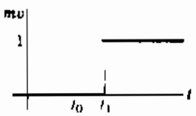
۱۱- $\dfrac{p}{(p+۱)(p^{۲}+۴)}$

۷- تابع دلتای دیراک

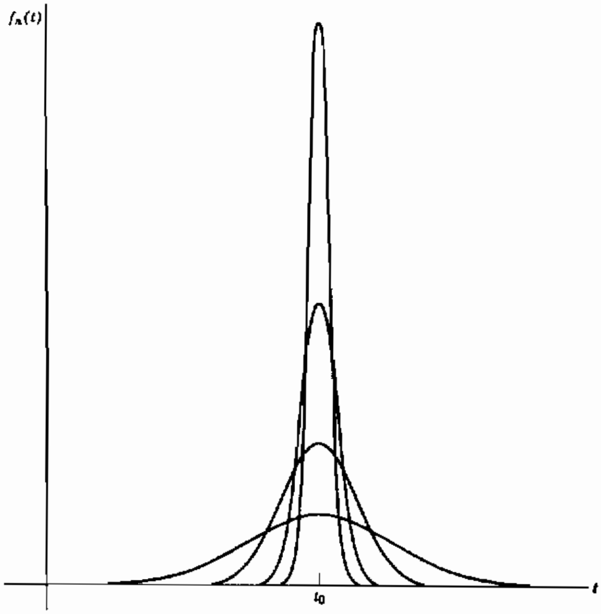
در مسائلی از مکانیک با نیروی ضربه‌ای، همچون ضربهٔ چکش، که فقط مدت کوتاهی دوام می‌آورد سروکار داریم. معمولاً شکل دقیق تابع نیروی $f(t)$ را هم نمی‌دانیم، و بنابراین به روش زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید نیروی ضربه‌ای $f(t)$ که از زمان $t = t_۰$ تا زمان $t = t_۱$ دوام می‌آورد، به جرم m اعمال شود؛ در این صورت طبق قانون دوم نیوتون داریم

$$\int_{t_۰}^{t_۱} f(t)\,dt = \int_{t_۰}^{t_۱} m\,\frac{dv}{dt}\,dt = \int_{v_۰}^{v_۱} m\,dv = m(v_۱ - v_۰)$$

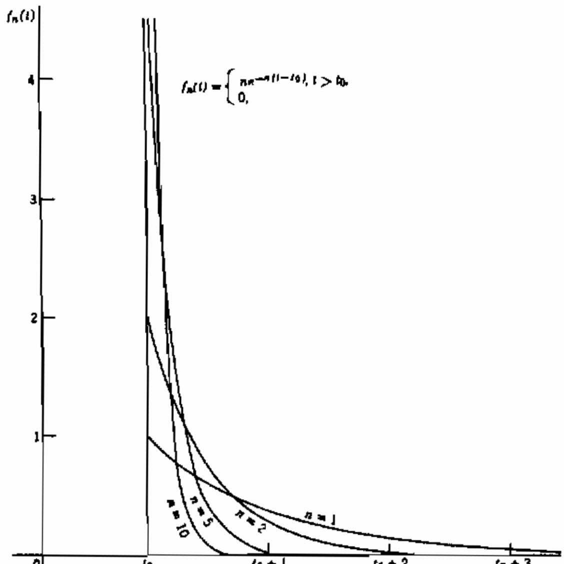
این رابطه بیان می‌کند که انتگرال $f(t)$ [موسوم به ضربهٔ $f(t)$] برابر با تغییر اندازه حرکت m است، و توجه داریم که این نتیجه مستقل از شکل $f(t)$ است و فقط بستگی به مساحت زیر منحنی $f(t)$ دارد. اگر این مساحت برابر ۱ باشد، ضربه را ***ضربهٔ واحد*** می‌خوانیم. اگر $t_۱-t_۰$ خیلی کوچک باشد، ممکن است از حرکت m در این مدت زمان کوتاه چشم پوشید و گفت که اندازه حرکت صرفاً در فاصلهٔ زمانی $t_۱-t_۰$ از $mv_۰$ به $mv_۱$ جهیده است. اگر $v_۰ = ۰$ باشد، منحنی تغییرات اندازه حرکت نسبت به زمان مثل شکل ۷-۱ است، که در آن به سادگی قسمت نامعلوم حرکت بین $t_۰$ و $t_۱$ را حذف کرده‌ایم. توجه کنید که اگر $t_۱-t_۰$ خیلی کوچک باشد، منحنی ۷-۱ تقریباً تابع پله‌ای واحد خواهد بود (L۲۴). حال تصور کنید که مادامی که جهش در mv همیشه ۱ است، $t_۱-t_۰$ را کوچک‌تر و کوچک‌تر کنیم.



شکل ۷-۱


$f_n(t)$
t
t_0

شکل ۷-۲


$f_n(t)$
4
3
2
1
0
$f_n(t) = \begin{cases} ne^{-n(t-t_0)}, & t > t_0 \\ 0, \end{cases}$
$n = 1$
$n = 2$
$n = 5$
$n = 10$
t_0
$t_0 + 1$
$t_0 + 2$
$t_0 + 3$

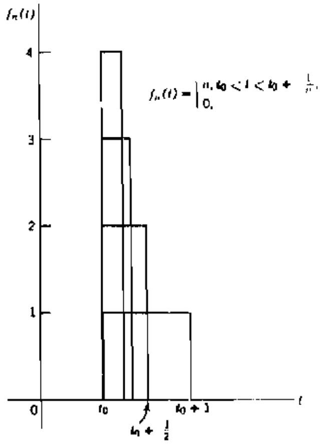
شکل ۷-۳

در شکلهای ۷-۲ و ۷-۳ و ۷-۴ دنباله‌ای از توابع $f_n(t)$ را با چنین رفتاری رسم کرده‌ایم. می‌توان مجموعهٔ نمودارهای مشابه دیگری را هم رسم کرد؛ شرط اصلی این است که $f(t)$ باید بلندتر و باریک‌تر شود (یعنی، نیرو قوی‌تر شود ولی در مدّت زمان کوتاه‌تری عمل کند) به طوری که اندازهٔ ضربه مساحت زیر منحنی $[f(t)]$ برابر واحد بماند. در این صورت می‌توان موردی حدّی را در نظر گرفت که در آن، شکل ۷-۱ دارای جهش ۱ در $t = ۰$ باشد؛ نیروی $f(t)$ که مستلزم تولید چنین جهشی است باید بینهایت باشد و در یک لحظه عمل کند. از معادلهٔ ۷-۱ همچنین ملاحظه می‌کنیم که تابع $f(t)$ شیب منحنی mv است؛ بنابراین ما داریم شرط می‌کنیم که $f(t)$ مشتق یک تابع پله‌ای در محل جهش باشد بلافاصله می‌بینیم که هیچ تابع معمولی دارای چنین خواصّی نیست. در عین حال توجه داریم که خود $f(t)$ به اندازهٔ نتایج حاصل از آن برای ما اهمیت ندارد. شکل ۷-۱ با جهشی در $t_۰$ از هر جهت مناسب است؛ به ازای هر $t > ۰$ می‌توان یک $f_n(t)$ی به حدّ کافی باریک و بلند انتخاب کرد به طوری که mv مقدار نهایی‌اش را داشته باشد. خواهیم دید که معرفی علامت $\delta(t-t_۰)$ به ***تابع دلتای دیراک*** مشهور است هر چند که همانطور که دیدیم یک تابع معمولی نیست. (مناسب است که آنرا یک تابع تعمیم یافته بخوانیم؛ این تابع یکی از یک ردهٔ کلی از چنین توابعی است، به عنوان نمونه رجوع کنید به کتابِ لایت هیل). معرفی و کاربرد این علامت خیلی شبیه معرفی و کاربرد علامت ∞ است. اگرچه نوشتن $۱/\infty = ۰$ مناسب است، امّا نباید بنویسیم $\infty/\infty = ۱$؛ یعنی این گونه معادلات نمادین باید علائم اختصاری برای فرایندهای حدّیِ درست باشند. بنابراین باید تحقیق کرد که چگونه می‌توان تابع δ را به درستی به کار برد.

معادلهٔ دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$y'' + \omega^۲ y = f(t) \quad ، y_۰ = y'_۰ = ۰ \tag{۷-۲}$$

این معادله نوسانات جرمی را که از انتهای فنری آویزان شده است، یا یک مدار الکتریکی سادهٔ سری با مقاومت ناچیز را توصیف می‌کند. فرض کنید سیستم در ابتدا در حال سکون است $(y_۰ = y'_۰ = ۰)$؛ حال فرض کنید که جرم m در لحظهٔ $t = t_۰$ ناگهان متحمل ضربه‌ای آنی شود، یا یک موج کوتاه و ناگهانی جریان به مدار الکتریکی وارد شود. تابع $f(t)$ می‌تواند یکی از توابع نمایش داده شده در شکلهای ۷-۲ و ۷-۴ یا شکلی مشابه آنها باشد.



شکل ۷-۴

بگذارید (۷-۲) را برای وقتی که $f(t)$ برابر یکی از توابع نمایش داده شده در شکل ۷-۳ است، یعنی، $f(t) = ne^{-n(t-t_\circ)}$ به ازای $t > t_\circ$، حل کنیم با استفاده از تبدیلهای لاپلاس، از L۲۸ و L۲ نتیجه می‌گیریم

$$(p^۲ + \omega^۲)Y = L\,(ne^{-n(t-t_\circ)}) = n \cdot \frac{e^{-pt_\circ}}{p+n}$$
$$Y = n \cdot \frac{e^{-pt_\circ}}{(p+n)(p^۲+\omega^۲)} \qquad (۷-۳)$$

مثال آخر بخش ۶ ، تبدیل معکوس را مشخص می‌کند (قرار بدهید $a = n$ و $b = \omega$، و L۲۸ را به کار ببرید):

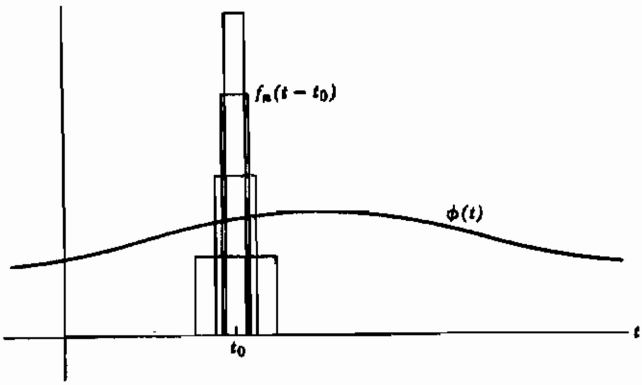
$$y = n\Big(\frac{e^{-n(t-t_\circ)}}{n^۲+\omega^۲} + \frac{n\sin\omega(t-t_\circ)}{(n^۲+\omega^۲)\omega} - \frac{\cos\omega(t-t_\circ)}{n^۲+\omega^۲}\Big) \quad ،t>t_\circ \quad (۷-۴)$$

(البته به ازای $t < \circ$، $y = \circ$). اگر $f(t)$ را به اندازهٔ کافی بلند و باریک بسازیم (یعنی n را به اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب کنیم) اولین و سومین جمله در y قابل اغماض می‌شوند، ضریب $\sin\,\omega(t-t_\circ)$ تقریباً برابر $۱/\omega$ می‌گردد. بنابراین جواب مسأله برای یک ضربهٔ واحد خیلی کوتاه در $t = t_\circ$ برابر

$$y = \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-t_\circ) \quad , t>t_\circ \qquad (۵-۷)$$

است. در اینجا جواب مسأله را فقط برای تابع نمایش داده شده در شکل ۷-۳ نشان داده‌ایم، امّا همین نتیجه را می‌توان برای توابع دیگر، مثلاً برای مجموعهٔ توابع شکل ۷-۴ هم به دست آورد، رجوع کنید به مسألهٔ ۵).

حال می‌خواهیم (۷-۵) را بدون پیداکردن (۷-۴)، در واقع بدون مشخص کردن توابع $f_n(t)$ به دست آوریم. بحث بالا پیشنهاد می‌کند که علامت $\delta(t-t_\circ)$ را در طرف راست معادلهٔ (۷-۲) به جای $f(t)$ به کار ببریم. پس در حل معادله باید تبدیل لاپلاس $\delta(t-t_\circ)$ را پیدا کنیم.



شکل ۷-۵

تبدیل لاپلاس تابع δ بگذارید ببینیم آیا برای تبدیل لاپلاس $\delta(t-t_\circ)$ مفهومی پیدا می‌کنیم یا نه. به بیان کلی‌تر بگذارید سعی کنیم معنایی به انتگرال $\int \phi(t)\, \delta(t-t_\circ)\, dt$ نسبت بدهیم، که در آن $\phi(t)$ هر تابع پیوستهٔ دلخواه و $\delta(t-t_\circ)$ علامتی است نشانگر یک ضربه در لحظهٔ $t_\circ$. انتگرالهای $\int \phi(t)\, f_n(t-t_\circ)\, dt$ را در نظر بگیرید که در آن توابع $f_n(t-t_\circ)$ وقتی n افزایش می‌یابد در $t_\circ$ تیزتر می‌گردند (شکل ۷-۵)، ولی مساحت زیر هر منحنی برابر واحد است. وقتی $f_n(t-t_\circ)$ آنقدر باریک باشد که $\phi(t)$ اساساً در عرض آن ثابت [مساوی $\phi(t_\circ)$] باشد، انتگرال تقریباً به صورت $\phi(t_\circ) \int f_n(t-t_\circ)\, dt = \phi(t_\circ) \cdot 1 = \phi(t_\circ)$ در خواهد آمد؛ یعنی دنباله - انتگرالهای $\int \phi(t)\, f_n(t-t_\circ)\, dt$ وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند به

سمت $\phi(t_\circ)$ میل می‌کند. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که بگوییم

$$\boxed{\int \phi(t)\ \delta(t-t_\circ)\ dt = \phi(t_\circ) \qquad (۶-۷)}$$

به شرط آنکه دامنهٔ انتگرال‌گیری شامل $t_\circ$ باشد. معادلهٔ (۷-۶) را می‌توان تعریف خاصیت تابع δ دانست، هرگاه بخواهیم از توابع δ استفاده کنیم، همیشه آنها را با استفاده از (۷-۶) در انتگرالها به کار می‌بریم.

حال به سادگی می‌توان تبدیل لاپلاس $\delta(t-t_\circ)$ را پیدا کرد. در نمادگذاری به کار رفته در L۲۷ (که می‌خواهیم آنرا ثابت کنیم)، با استفاده از (۲-۱)، داریم

$$L[\delta(t-a)] = \int_\circ^\infty \delta(t-a)\ e^{-pt}\ dt = e^{-pa} \quad ,a>\circ \qquad (۷-۷)$$

زیرا، طبق (۷-۶)، انتگرالِ حاصل‌ضرب $\delta(t-a)$ و یک تابع، مقدار آن تابع را در $t=a$ برمی‌گزینند. حال با استفاده از این نتایج، (۷-۵) را به روش ساده‌تری پیدا می‌کنیم.

مثال - معادلهٔ زیر را حل کنید

$$y'' + \omega^۲ y = \delta(t-t_\circ) \quad ,y_\circ = y'_\circ = \circ \qquad (۸-۷)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس و استفاده از (۷-۷)، داریم

$$(p^۲+\omega^۲)Y = L[\delta(t-a)] = e^{-pt_\circ} \qquad (۹-۷)$$

به این ترتیب

$$Y = \frac{e^{-pt_\circ}}{p^۲+\omega^۲} \qquad (۱۰-۷)$$

و طبق L۳ و L۲۸ داریم

$$y = \frac{۱}{\omega} \sin \omega(t-t_\circ) \quad ,t>t_\circ \qquad (۱۱-۷)$$

که همان رابطهٔ (۷-۵) است.

تبدیل فوریهٔ تابع δ با استفاده از (۷-۴) و (۷-۶) می‌توان نوشت

$$g(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)\, e^{-i\alpha x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\, e^{-i\alpha a} \qquad (۷\text{-}۱۲)$$

بنابراین، رابطهٔ (۲-۴) تبدیل معکوس را "علی‌الظّاهر" به صورت زیر خواهد داد

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-a)}\, d\alpha \qquad (۷\text{-}۱۳)$$

می‌گوییم "علی‌الظّاهر" زیرا انتگرال (۷-۱۳) همگرا نیست. با وجود این، اگر حدود $-\infty$ ، $+\infty$ را با $-n$ ، $+n$ جایگزین کنیم، مجموعه توابعی پیدا می‌کنیم (مسألهٔ ۱۲) که، مانند توابع $f_n(t)$ در شکلهای ۷-۲ تا ۷-۴، با افزایش n در نقطهٔ $x = a$ تیزتر می‌شوند، امّا همه دارای مساحت واحد اند. به این ترتیب، از این نظر (۷-۱۳) نمایش تابع δ است. معادلات (۷-۱۲) و (۷-۱۳) در مکانیک کوانتومی مفید اند.

مسائل، بخش ۷

۱- با استفاده از قضیهٔ همگردش در بخش ۵ و روابط L۲۷ و L۵، تبدیل لاپلاس معکوس e^{-2p}/p^2 را تعیین کنید.

۲- با استفاده از قضیهٔ همگردش، L۱ و L۲۷، رابطهٔ L۲۴ را ثابت کنید.

۳- با استفاده از قضیهٔ همگردش و L۲۷، رابطهٔ L۲۸ را ثابت کنید.

۴- برای توابع $f_n(t)$ در شکلهای ۷-۳ و ۷-۴، ثابت کنید که $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\, dt = 1$.

۵- معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + \omega^2 y = f(t)$، $y_0 = y'_0 = 1$ را وقتی $f(t)$ با توابع شکل ۷-۴ داده می‌شود حل کنید (رجوع کنید به راهنمایی مسألهٔ ۵-۱۸). فرض کنید $n \to \infty$ و نشان دهید که جواب شما به سمت همان جواب (۷-۵) که با به کار بردن توابع شکل ۷-۳ به دست آمده است میل می‌کند؛ یعنی هر یک از دو مجموعه توابع، در حدّ، همان جواب (۷-۱۱) را که با استفاده از تابع δ حاصل می‌شود، به دست می‌دهد.

۶- (الف) فرض کنید یک سیستم الکتریکی یا مکانیکی با معادلهٔ دیفرانسیل $Ay'' + By' + Cy = f(t)$ و $y_0 = y'_0 = 0$ توصیف شود. مانند مسألهٔ

۵-۱۶(ب)، جواب را به صورت یک همگردش بنویسید (فرض کنید $a \neq b$). فرض کنید $f(t)$ یکی از توابع شکل ۷-۴ و مسألهٔ ۵ باشد. y را پیدا کنید و سپس n را به بینهایت میل بدهید.

(ب) همچنین مسأله را برای $f(t) = \delta(t - t_0)$ حل کنید؛ نتیجه باید همان نتیجه قسمت (الف) باشد.

(ج) جواب قسمتهای (الف) و (ب) را **پاسخ** سیستم به ضربهٔ واحد می‌خوانند. نشان دهید که پاسخ یک سیستم به ضربهٔ واحد در $t = 0$ برابر تبدیل لاپلاس معکوس تابع انتقال است.

با استفاده از روش تابع δ، پاسخ (رجوع کنید به مسألهٔ ۶ ج) هر یک از سیستمهای زیر را به ضربهٔ واحد پیدا کنید.

۷- $y'' + 2y' + y = \delta(t - t_0)$

۸- $y'' + 4y' + 5y = \delta(t - t_0)$

۹- $y'' + 2y' + 10y = \delta(t - t_0)$

۱۰- $y'' - 9y = \delta(t - t_0)$

۱۱- $\dfrac{d^4y}{dt^4} - y = \delta(t - t_0)$

۱۲- توابع $f_n(x - a)$ را که با انتگرال (۷-۱۳) و حدود $-n$ ، $+n$ تعریف می‌شوند حساب کنید. نشان دهید که به ازای تمام مقادیر n، $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x - a)\, dx = 1$ است. نمودارهای چند f_n را رسم کنید و نشان دهید وقتی n افزایش می‌یابد توابع $f_n(x)$ به طور فزاینده‌ای در $x = a$ تیز می‌شوند. و وقتی $|x-a|$ افزایش می‌یابد دامنهٔ ارتعاشات آنها کاهش می‌یابد.

۸- توابع گرین

توابع گرین در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مفید اند. با این همه، این توابع را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی هم می‌توان به کار برد؛ ما این مسألهٔ ساده‌تر را بررسی می‌کنیم و سپس به اجمال خواهیم گفت که این ایده را چگونه می‌توان به معادلات با مشتقات جزئی تعمیم داد.

مثال ۱ - معادلهٔ دیفرانسیل (۷-۲) را دوباره در نظر می‌گیریم، یعنی

$$y'' + \omega^2 y = f(t) \quad ، y_0 = y'_0 = 0 \tag{۱-۸}$$

که در آن $f(t)$ تابع وادارندهٔ معینی است. با استفاده از (۷-۶) می‌توان نوشت

$$f(t) = \int_0^\infty f(t')\,\delta(t' - t)\,dt' \tag{۲-۸}$$

یعنی نیروی $f(t)$ را می‌توان به صورت (حالتِ حدی) دنباله‌ای از ضربه‌ها در نظر گرفت. (ممکن است این مطلب را این گونه تصور کرد که، در سطح مولکولی، فشار هوا نیروی وارد بر واحد سطحِ ناشی از تعداد بسیار زیاد ضربه‌های تک‌تک مولکولهاست). حال فرض کنید (۸-۱) را برای حالتی که $f(t)$ با $\delta(t' - t)$ جایگزین شده باشد حل کرده باشیم، یعنی پاسخ سیستم به یک ضربهٔ واحد در لحظهٔ t' را پیدا کرده باشیم. فرض کنید این پاسخ را $G(t ، t')$ بنامیم، یعنی $G(t, t')$ جواب معادلهٔ زیر باشد

$$\frac{d^2}{dt^2}\,G(t, t') + \omega^2 G(t, t') = \delta(t' - t) \tag{۳-۸}$$

در این صورت برای یک تابع وادارندهٔ $f(t)$، سعی می‌کنیم با "جمع" کردن پاسخهای چنین ضربه‌هایی جواب را پیدا کنیم. نشان خواهیم داد که این جواب عبارت است از

$$y(t) = \int_0^\infty G(t, t')\,f(t')\,dt' \tag{۴-۸}$$

با جایگذاری (۸-۴) در (۸-۱) و استفاده از (۸-۳) و (۸-۲) داریم

$$y'' + \omega^2 y = \left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right)y = \left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right)\int_0^\infty G(t, t')\,f(t')\,dt'$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right) G(t, t')\,f(t')\,dt' = \int_0^\infty \delta(t' - t)\,f(t')\,dt' = f(t)$$

بنابراین (۸-۴) جواب (۸-۱) است.

تابع $G(t , t')$ را **تابع گرین** می‌خوانند. تابع گرین، پاسخ سیستم به ضربهٔ واحد در لحظهٔ t' است. با حل (۸-۳) با شرایط اولیهٔ $G = 0$ و $dG/dt = 0$ در $t = 0$، خواهیم داشت (مسألهٔ ۱)

$$G(t,t') = \begin{cases} & 0 < t < t' \\ 1/\omega \sin \omega(t-t') & 0 < t' < t \end{cases} \qquad (۸-۵)$$

به این ترتیب، (۸-۴) جواب (۸-۱) با شرایط $y_0 = y'_0 = 0$ است، یعنی

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-t')\, f(t')\, dt' \qquad (۸-۶)$$

(حد بالا $t' = t$ است زیرا به ازای $t' > t$ داریم $G = 0$). بنابراین، برای هر تابع وادارندهٔ مفروض $f(t)$، پاسخ $y(t)$ در روابط (۸-۱) را می‌توان با انتگرال گیری (۸-۶) به دست آورد (رجوع کنید به مسائل ۲ تا ۵). به همین ترتیب برای معادلات دیفرانسیل دیگر هم جواب را می‌توان بر حسب یک تابع گرین مناسب پیدا کرد (رجوع کنید به مسائل ۶ و ۷).

مثال ۲ - در کاربرد توابع گرین در مسائل سه بُعدی، معمولاً به دنبال جوابی هستیم که در مرزهای ناحیه‌ای معین صفر شود. برای اینکه مسألهٔ مشابهی در اینجا داشته باشیم، جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + y = f(x) \qquad (۸-۷)$$

را جستجو می‌کنیم که در $x = 0$ و $x = \pi/2$، $y = 0$ باشد. یک تعبیر فیزیکی از این معادله می‌توان مفید باشد. اگر فنری را در امتداد محور xها از $x = 0$ تا $x = \pi/2$ بکشیم، و سپس بگذاریم توسط نیرویی متناسب با $-f(x) \sin \nu t$ به ارتعاش درآید، در آن صورت $|y(x)|$ در معادلهٔ (۸-۷) دامنهٔ ارتعاشات را به دست خواهد داد (رک مسألهٔ ۸).

اول جوابی از معادلهٔ [با (۸-۳) مقایسه کنید]

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x,x') + G(x,x') = \delta(x-x') \qquad (۸-۸)$$

را پیدا می‌کنیم که در شرایط $G(0,x') = G(\pi/2,x') = 0$ صدق کند؛ این جواب تابع گرین مسأله ما خواهد بود. در این صورت [با (۸-۴) مقایسه کنید]

$$y(x) = \int_0^{\pi/2} G(x,x')\, f(x')\, dx' \qquad (۸-۹)$$

جوابی است از معادلهٔ (۸-۷) که در شرایط $y(\circ) = y(\pi/۲) = \circ$ صدق می‌کند. (مسألهٔ ۹).

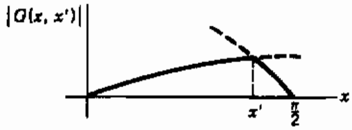
برای ساختن تابع گرین مطلوب، اول توجه داریم که به ازای هر $x' \neq x$، رابطهٔ (۸-۸) تبدیل می‌شود به

$$\frac{d^۲}{dx^۲} G(x, x') + G(x, x') = \circ \quad ,x' \neq x \qquad (۱۰-۸)$$

جوابهای (۸-۱۰) عبارت اند از $\sin x$ و $\cos x$؛ می‌بینیم که $\sin x$ در $x = \circ$ صفر می‌شود حال آنکه $\cos x$ در $x = \pi/۲$ صفر می‌شود. بنابراین سعی می‌کنیم تابع گرینی به شکل زیر پیدا کنیم

$$G(x, x') = \begin{cases} A(x') \sin x & \circ < x < x' < \pi/۲ \\ B(x') \cos x & \circ < x' < x < \pi/۲ \end{cases} \qquad (۱۱-۸)$$

گام بعدی با تأمل در مسألهٔ فنر روشن می‌شود. اگر فنر توسط نیرویی متمرکز در x' [رک (۸-۸)] به ارتعاش درآید، دامنهٔ نوسان، (۸-۱۱)، مطابق شکل (۸-۱) است. در $x = x'$، تابع $G(x, x')$ پیوسته است، یعنی، از (۸-۱۱) داریم



شکل ۸-۱

$$A(x') \sin x' = B(x') \cos x' \qquad (۱۲-۸)$$

با این همه، شیب در x' دفعهٔ تغییر می‌کند (شکل ۸-۱ را ببینید). از (۸-۱۱) داریم
(دفعتاً)

$$\frac{d}{dx} G(x, x') = \begin{cases} A(x') \cos x & x < x' \\ -B(x') \sin x & x > x' \end{cases}$$

(۸-۱۳) تغییر شیب dG/dx در x' برابر است با $-B(x') \sin x' - A(x') \cos x'$

این تغییر در dG/dx را می‌توان با انتگرال گرفتن رابطهٔ (۸-۸) از $x = x' - \varepsilon$ تا $x = x' + \varepsilon$ و سپس میل دادن ε به سمت صفر پیدا کرد. چون $\int d^۲G/dx^۲ = dG/dx$ است، خواهیم داشت

$$\frac{dG}{dx}\bigg|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} + \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} G(x,x')\,dx = \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} \delta(x'-x)\,dx = ۱$$

یا، وقتی $\varepsilon \to ۰$:

(تغییر شیب $\frac{dG}{dx}$ در x') برابر است با ۱

پس از (۸-۱۳) داریم

$$-B(x')\sin x' - A(x')\cos x' = ۱ \qquad (۸\text{-}۱۴)$$

با حل همزمان (۸-۱۲) و (۸-۱۴) برای $A(x')$ و $B(x')$ خواهیم داشت (مسألهٔ ۱۰)

$$A(x') = -\cos x' \quad ،B(x') = -\sin x' \qquad (۸\text{-}۱۵)$$

بنابراین داریم

$$G(x,x') = \begin{cases} -\cos x' \sin x & ۰ < x < x' < \pi/۲ \\ -\sin x' \cos x & ۰ < x' < x < \pi/۲ \end{cases} \qquad (۸\text{-}۱۶)$$

پس طبق (۸-۹)، جواب (۸-۷) با شرایط $y(۰) = y(\pi/۲) = ۰$ عبارت است از

$$y(x) = -\cos x \int_۰^x (\sin x') f(x')\,dx' - \sin x \int_x^{\pi/۲} (\cos x') f(x')\,dx' \qquad (۸\text{-}۱۷)$$

مثلاً، اگر $f(x) = \csc x$، از (۸-۱۷) خواهیم داشت:

$$y(x) = -\cos x \int_۰^x \sin x' \csc x'\,dx' - \sin x \int_x^{\pi/۲} \cos x' \csc x'\,dx'$$

$$= (-\cos x)(x) - (\sin x)(\ln \sin x')\bigg|_x^{\pi/۲} = -x\cos x + (\sin x)(\ln \sin x)$$

جالب توجّه اینکه با استفاده از روش توابع گرین می‌توان جواب خاص یک معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن (طرف راست غیر صفر) را از جواب معادلهٔ دیفرانسیل همگن (طرف راست صفر) همخوان با آن پیدا کرد. (رجوع کنید به فصل ۸، بخشهای ۵ و ۶.) در (۸-۱۷)، نتیجهٔ هر انتگرال برابر تابعی از x منهای یک ثابت است (از حدود ثابت)؛ حاصل‌ضربهای این مقادیر ثابت در $\sin x$ و $\cos x$ یک جواب معادلهٔ همگن را می‌دهند. بنابراین جمله‌های باقی‌مانده، یک

جواب خاص معادله را خواهند داد. با تغییر $\int_x^{\pi/2}$ به $-\int_{\pi/2}^x$ ، حذف حدود ثابت و نوشتن انتگرالهای نامعین می‌توان این جواب خاص را به شکل ساده‌ای نوشت. بنابراین یک جواب خاصِ $y_p(x)$ از معادلهٔ (۸-۷) عبارت است از

$$y_p(x) = -\cos x \int (\sin x)\, f(x)\, dx + \sin x \int (\cos x) f(x)\, dx \quad (۸-۱۸)$$

با روشهایی مشابه بالا، می‌توان ثابت کرد (مسألهٔ ۱۴) که جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (۸-۱۹)$$

با شرایط $y(a) = y(b) = 0$ با معادلهٔ زیر داده می‌شود

$$y(x) = y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(x')\, f(x')}{W(x')}\, dx' + y_1(x) \int_x^b \frac{y_2(x')\, f(x')}{W(x')}\, dx' \quad (۸-۲۰)$$

که در آن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای معادلهٔ همگن مربوطه به ازای $y_1(a) = 0$، $y_2(b) = 0$، و W رونسکین $y_1(x)$ و $y_2(x)$ است [رک فصل ۳، معادلهٔ (۸-۵)]. درست مثل معادلهٔ (۸-۱۸)، ملاحظه خواهیم کرد که یک جواب خاص، y_p، از معادلهٔ (۸-۱۹) عبارت است از

$$y_p(x) = y_2(x) \int \frac{y_1(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx - y_1(x) \int \frac{y_2(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx \quad (۸-۲۱)$$

جوابهای خاص (۸-۱۸) و (۸-۲۱) درست همانهایی هستند که با ***روش وردش پارامترها*** پیدا می‌شوند (رک کتابهای مرجع معادلات دیفرانسیل، مثلاً کتاب بویس و دیپریما، صفحهٔ ۱۱۵)، امّا روش تابع گرین ممکن است به نظر کمتر اختیاری بیاید.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بگذارید معادلهٔ پواسون (فصل ۱۳، بخش ۸)، یعنی

$$\nabla^2 u = f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) \quad (۸-۲۲)$$

را در نظر بگیریم. فرض کنید یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل [با (۸-۳) و (۸-۸) مقایسه کنید]

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(x-x')\, \delta(y-y')\, \delta(z-z') \quad (۸-۲۳)$$

را بدانیم. تابع δی سه بعدی دارای خاصیتِ

$$\iiint f(x',y',z')\ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\ d\tau' = f(x,y,z) \qquad (\text{۲۴-۸})$$

است به شرط اینکه حجم انتگرالگیری شامل نقطهٔ (x,y,z) باشد (و در غیر این صورت انتگرال صفر است). به خاطر بیاورید که طرف راست معادلهٔ پواسون متناسب با چگالی جرم یا چگالی بار است. انتگرال حجمی چگالی کل بار یا کل جرم را به دست می‌دهد. چون $\iiint\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\ d\tau' = 1$، طرف راست (۸-۲۳) همخوان با یک جرم یا بار نقطه‌ای می‌شود. یعنی، تابع گرین در (۸-۲۳) پتانسیل ناشی از یک چشمهٔ نقطه‌ای است. درست همانطور که نشان دادیم (۸-۴) یک جواب (۸-۱) است، می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۱۹) که یک جواب (۸-۲۲) عبارت است از

$$u(\mathbf{r}) = \iiint G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, f(\mathbf{r}')\ d\tau' \qquad (\text{۲۵-۸})$$

در فصل ۱۳، معادلهٔ (۸-۹)، دیدیم که یک جواب معادلهٔ (۸-۲۲) عبارت است از

$$u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\ d\tau' \qquad (\text{۲۶-۸})$$

از مقایسه (۸-۲۵) و (۸-۲۶)، نتیجه می‌گیریم که یک جواب (۸-۲۳) عبارت است از

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad (\text{۲۷-۸})$$

حال، (۸-۲۶) و (۸-۲۷) جوابهایی را می‌دهند که در بینهایت صفر هستند؛ ما معمولاً جوابهایی را می‌خواهیم که در سطح معینی صفر باشند (مثلاً، پتانسیل صفر در سطح یک کره یا صفحهٔ متصل به زمین). برای پیدا کردن چنین جوابی، یک جواب معادلهٔ لاپلاس، مثلاً $F(\mathbf{r},\mathbf{r}')$، را به (۸-۲۷) می‌افزاییم و آنرا طوری انتخاب می‌کنیم که تابع گرین جدید

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r},\mathbf{r}') \qquad (\text{۲۸-۸})$$

در شرایط مطلوب مرزی صفر صدق کند. در این صورت (۸-۲۵)، با $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ داده شده در

(۸-۲۸)، جوابی از (۸-۲۲) خواهد بود که در مرز صفر می‌شود. مثلاً، در فصل ۱۳ ، بخش ۸ ، معادلهٔ (۸-۲۱)، V پتانسیل در خارج کرهٔ متصل به زمین به شعاع $r = R$، در اثر یک بار نقطه‌ای واقع در $r = a > R$ است. اگر آن نتیجه را به صورت نمادگذاری فعلی بنویسیم تابع گرین (۸-۲۸) به دست می‌آید که در (۸-۲۳) صدق می‌کند و روی کره $r = R$ صفر است، یعنی (مسألهٔ ۲۰)

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{۱}{۴\pi\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{R/r'}{۴\pi\ |\mathbf{r}-R^{۲}\mathbf{r}'/r'^{۲}|} \qquad (۸-۲۹)$$

(همچنین رک مسائل ۲۱ و ۲۲).

مسائل، بخش ۸

۱- معادلهٔ (۸-۳) را با شرایط $G = ۰$ و $dG/dt = ۰$ در $t = ۰$ حل کنید و (۸-۵) را به دست آورید. ***راهنمایی***: برای به دست آوردن تبدیل معکوس از L۲۸ و L۳ استفاده کنید.

در مسائل ۲ و ۳ ، با استفاده از (۸-۶) معادلهٔ (۸-۱) را برای $f(t)$ داده شده حل کنید.

۲- $f(t) = sin\ \omega t$ ۳- $f(t) = e^{-t}$

۴- با استفاده از معادلهٔ (۸-۶)، مسألهٔ (۵-۱۸) را حل کنید.

۵- با استفاده از انتگرال همگردش معادلهٔ (۸-۱) را حل کنید و (۸-۶) را به دست آورید.

۶- در مسألهٔ (۵-۱۷) نشان دهید (مثل مسألهٔ ۱) که تابع گرین عبارت است از

$$G(t, t') = \begin{cases} ۰ & ۰ < t < t' \\ (۱/a)\ sinh\ a(t-t') & ۰ < t' < t \end{cases}$$

و بنابراین جواب (۵-۱۷) را به صورت یک انتگرال [مثل (۸-۶)] بنویسید و آنرا حساب کنید.

۷- با استفاده از تابع گرین مسألهٔ ۶ معادلهٔ زیر را حل کنید

$$y'' - a^{۲}y = e^{-t} \quad ،y_{۰} = y'_{۰} = ۰$$

۸- اگر نخ کشیده شده‌ای تحت تأثیر یک نیروی عرضی $F(x, t)$ (بر واحد طول) به ارتعاش در آید، معادلهٔ موج برای جا به جایی $y(x, t)$عبارت است از

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F(x, t)$$

که در آن ρ چگالی نخ (جرم بر واحد طول) و T کشش آن است. (مقایسه کنید با فصل ۱۳، بخش ۴، وقتی $F = 0$، $v^2 = T/\rho$). فرض کنید $F(x, t) = -T f(x) \sin \omega t$ و $y(x, t) = y(x) \sin \omega t$ و همچنین برای سادگی فرض کنید $\omega^2/v^2 = \omega^2\rho/T = 1$ و (۸-۷) را پیدا کنید.

۹- با استفاده از اثبات (۸-۴)، نشان دهید که (۸-۹) یک جوابِ معادلهٔ (۸-۷) است.

۱۰- با حل (۸-۱۲) و (۸-۱۴) معادلهٔ (۸-۱۵) را پیدا کنید. ***راهنمایی***: از قانون کرامر (فصل ۳، بخش ۳) استفاده کنید، توجه کنید که دترمینان مخرج، رونسکینِ [فصل ۳، معادلهٔ (۸-۵)] توابع $\sin x$ و $\cos x$ است.

در مسائل ۱۱ تا ۱۳، با استفاده از (۸-۱۷) جواب (۸-۷) را برای شرایط $y(0) = y(\pi/2) = 0$ و تابع نیروی وادارندهٔ داده شده پیدا کنید.

۱۱- $f(x) = \sin 2x$

۱۲- $f(x) = \sec x$

۱۳-
$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi/4 \\ \frac{1}{2}\pi - x & \pi/4 < x < \pi/2 \end{cases}$$

راهنمایی: برای $y(x)$، به ازای $x < \pi/4$ و $x > \pi/4$ فرمولهای جداگانه‌ای بنویسید.

۱۴- با فرض اینکه $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای معادلهٔ (۸-۱۹) با شرایط $f(x) = 0$ و $y_1(a) = 0$، $y_2(b) = 0$ باشند تابع گرین مربوطه را پیدا کنید [مثل (۸-۱۱) تا (۸-۱۶)] و در نتیجه جواب (۸-۲۰) را به دست آورید.

در مسائل ۱۵ تا ۱۸، با استفاده از روش تابع گرین و جوابهای داده شدهٔ معادلهٔ همگن، یک جواب خاص معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن را پیدا کنید.

۱۵- $y'' - y = \operatorname{sech} x$ ؛ $\sinh x$ ، $\cosh x$

۱۶- $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x \ln x$ ؛ x ، x^2

۱۷- $y'' - 2(\csc^2 x)y = \sin^2 x$ ؛ $\cot x$ ، $1 - x \cot x$

۱۸- $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 + 1)^2$ ؛ x ، $1 - x^2$

۱۹- با قرار دادن (۸-۲۵) در (۸-۲۲) و استفاده از (۸-۲۳) و (۸-۲۴) نشان دهید که (۸-۲۵) جواب (۸-۲۲) است.

۲۰- نشان دهید که تابع گرین در (۸-۲۹) به ازای $r = R$ صفر است. همچنین نشان دهید که نقطه‌ای که در آن جملهٔ دوم بینهایت می‌شود *داخل* کره است، و در نتیجه، همانطور که انتظار می‌رود، در خارج کره این جمله در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. به این ترتیب، برای معادلهٔ (۸-۲۲) در $r > R$ جوابی به صورت یک انتگرال سه‌گانه بنویسید که در $r = R$ صفر شود.

۲۱- نشان دهید که تابع گرین (۸-۲۸) که بر روی صفحهٔ $z = ۰$ صفر است، عبارت است از

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{۱}{۴\pi}\left[(x-x')^۲ + (y-y')^۲ + (z-z')^۲\right]^{-۱/۲} + \frac{۱}{۴\pi}\left[(x-x')^۲ + (y-y')^۲ + (z+z')^۲\right]^{-۱/۲}$$

به این ترتیب، برای معادلهٔ (۸-۲۲) برای $z > ۰$ جوابی به صورت یک انتگرال سه‌گانه بنویسید که در $z = ۰$ صفر شود.

۲۲- نشان دهید که با تعمیم نتایج حاصل می‌توان جواب زیر را، که در شرایط مرزی غیر صفرِ داده شده صدق می‌کند، برای (۸-۲۲) به دست آورد،

$$u(\mathbf{r}) = \iiint G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, f(\mathbf{r}')\, d\tau' + \iint u(\mathbf{r}')\, \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}\, d\sigma'$$

که در آن $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ تابع گرینی است که در روی سطح σ صفر می‌شود، و $\partial G/\partial n' = \nabla G \cdot \mathbf{n}'$ مشتق عمودی G است (رک فصل ۶، بخش ۶). *راهنمایی*: در اتحاد دوم گرین (فصل ۶، مسألهٔ ۱۰-۱۶) فرض کنید $\phi = u(\mathbf{r})$ و $\psi = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$، و با استفاده از (۸-۲۲) و (۸-۲۳)، $\nabla^۲\phi$ و $\nabla^۲\psi$ را پیدا کنید. *تذکر*: اگرچه قضیه واگرایی و اتحادهای گرین را فقط برای منطقه‌های کراندار ثابت کردیم، امّا اگر توابع مربوطه با سرعت کافی در بینهایت صفر شوند قضیه و اتحادها مزبور برای مناطق بیکران نیز صادق‌اند.

۹- حل معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از تبدیل انتگرالی

حل با استفاده از تبدیل لاپلاس دیدیم (بخش ۳) که اگر از یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل لاپلاس بگیریم، آن معادله به یک معادلهٔ جبری تبدیل می‌شود. اگر از یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی تبدیل لاپلاس بگیریم یکی از تعداد متغیرهای آن کم می‌شود، و در نتیجه یک معادلهٔ با مشتقات جزئی دومتغیره به یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌گردد. برای نمایش این مطلب، مسألهٔ زیر را حل می‌کنیم.

مثال ۱- یک مفتول نیمه متناهی (که از $x = 0$ تا $x = \infty$ ادامه دارد)، با اطراف عایق بندی شده، ابتدا در دمای یکنواخت $u = 0^\circ$ است. در لحظهٔ $t = 0$، سرِ واقع در $x = 0$ به دمای $u = 100^\circ$ برده می‌شود و در همان دما نگه داشته می‌شود، توزیع دمای مفتول را به صورت تابعی از x و t به دست آورید.

معادلهٔ دیفرانسیلی که u در آن صدق می‌کند عبارت است از

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{۹-۱}$$

می‌خواهیم از معادلهٔ (۹-۱) نسبت به t تبدیل لاپلاس بگیریم؛ در این فرایند، متغیر x صرفاً یک پارامتر خواهد بود. فرض کنید U تبدیل لاپلاس u باشد، یعنی

$$U(x, p) = \int_0^\infty u(x, t)\, e^{-pt}\, dt \tag{۹-۲}$$

طبق (۳-۱) داریم

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = pU - u_{t=0} = pU$$

زیرا وقتی $t = 0$، $u = 0$. همچنین

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(u) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

(به یاد داشته باشید که در اینجا، x فقط یک پارامتر است و تبدیل لاپلاس را نسبت به t می‌گیریم). بنابراین تبدیل (۹-۱) عبارت است از

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} pU \tag{۹-۳}$$

اگر در اینجا p را یک ثابت در نظر بگیریم، این یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی برای U به صورت تابعی از x است. جوابهای آن عبارت‌اند از

$$U = \begin{cases} e^{(\sqrt{p}/\alpha)x} \\ e^{-(\sqrt{p}/\alpha)x} \end{cases} \qquad (۹-۴)$$

برای پیدا کردن ترکیب درست این جوابها برای برآوردن شرایط مسألهٔ ما، به تبدیلهای لاپلاس شرایط مرزی روی u نیاز داریم زیرا این تبدیلها، شرایط روی U را تعیین می‌کنند. با استفاده از L۱ برای پیدا کردن تبدیلها داریم

$$\begin{array}{llll} u = ۱۰۰ & \text{در } x = ۰ & U = L(۱۰۰) = \dfrac{۱۰۰}{p} & \text{در } x = ۰ \\ u \to ۰ & \text{وقتی } x \to \infty & U \to L(۰) = ۰ & \text{وقتی } x \to ۰ \end{array} \qquad (۹-۵)$$

چون وقتی $x\to\infty$، $U\to ۰$، می‌بینیم که باید جواب $e^{-(\sqrt{p}/\alpha)x}$ از (۹-۴) را به کار ببریم و از تابع $e^{+(\sqrt{p}/\alpha)x}$ چشم بپوشیم. ضریب ثابت این جواب را طوری تعیین می‌کنیم که در $x = ۰$ داشته باشیم $U = ۱۰۰/p$. بنابراین جواب U که در شرایط مرزی داده شده صدق می‌کند عبارت است از

$$U = \frac{۱۰۰}{p}\, e^{-(\sqrt{p}/\alpha)x} \qquad (۹-۶)$$

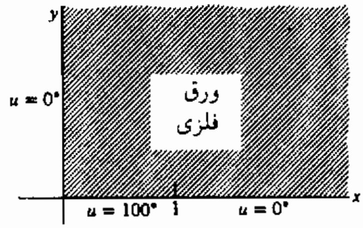
برای پیداکردن u، تبدیل معکوس (۹-۶) را پیدا می‌کنیم. طبق L۲۲ این تبدیل عبارت است از

$$u = ۱۰۰\left[۱ - erf\,\frac{x}{۲\alpha\sqrt{t}}\right] \qquad (۹-۷)$$

و این جواب مسأله است.

حل با استفاده از تبدیل فوریه در بسیاری از مثالهای فصل ۱۳، تابع مفروضی را بر حسب رشتهٔ فوریه بسط دادیم. دلیل امکان این کار آن بود که می‌خواستیم تابع مربوطه را فقط در یک بازهٔ متناهی نمایش دهیم. آن بازه را به عنوان دورهٔ تناوب اصلی رشتهٔ فوریه در نظر می‌گرفتیم. اگر با تابعی سروکار داشته باشیم که در بازه‌ای نامتناهی داده شده است (و دوره‌ای هم نباشد)، در آن صورت به جای نمایش آن با یک رشتهٔ فوریه آنرا با یک انتگرال فوریه نمایش می‌دهیم (بخش ۴). بگذارید این کار را برای مسأله خاصی انجام دهیم.

مثال ۲- یک ورق فلزی نامتناهی (شکل ۹-۱) در ربع اول صفحهٔ xy قرار دارد. لبهٔ منطبق بر محور yها در دمای $\circ^\circ$، و لبهٔ منطبق بر محور x ها در دمای



شکل ۹-۱

$$u(x,\circ)=\begin{cases}\text{۱۰۰}^\circ & \circ<x<\text{۱}\\ \circ^\circ & x>\text{۱}\end{cases} \qquad (\text{۸-۹})$$

است. توزیع دمای حالت پایای صفحه را به صورت تابعی از x و y پیدا کنید.

معادلهٔ دیفرانسیل و جوابهای اصلی آن همانهایی هستند که برای ورق نیمه متناهی در فصل ۱۳، بخش ۲، معادلات (۲-۱)، (۲-۶)، و (۲-۷) بررسی کردیم. مانند آن مسأله، فرض می‌کنیم وقتی $y\to\infty$، $u\to\circ$، و فقط جمله‌های e^{-ky} را به کار می‌بریم. چون به ازای $x=\circ$ داریم $u=\circ$، فقط از جوابهای سینوسی استفاده می‌کنیم. جوابهای اصلی در این صورت عبارت‌اند از $u=e^{-ky}\sin kx$. در اینجا، برخلاف فصل ۱۳، هیچ شرطی که k را تعیین کند نداریم. پس باید تمام kها را مجاز بشماریم و سعی کنیم جوابی به صورت یک انتگرال بر روی k پیدا نماییم. به جای ضرایب b_n در یک رشته، تابع ضریب $B(k)$ را باید پیدا کنیم. به یاد داشته باشید که $k>\circ$ زیرا e^{-ky} باید وقتی $y\to\infty$، به سمت صفر میل کند. بنابراین سعی می‌کنیم جوابی به شکل زیر پیدا کنیم

$$u(x,y)=\int_\circ^\infty B(k)\,e^{-ky}\sin kx\,dk \qquad (\text{۹-۹})$$

وقتی $y=\circ$، داریم

$$u(x,\circ)=\int_\circ^\infty B(k)\,e^{-ky}\sin kx\,dk \qquad (\text{۱۰-۹})$$

این معادل اولین معادله از معادلات (۴-۱۴) است، به شرط اینکه k را با α، $u(x,\circ)$ را با $f_s(x)$ و $B(k)$ را با $\sqrt{\text{۲}/\pi}\,g_s(\alpha)$ مساوی بگیریم. بنابراین دما در امتداد محور xها یک تبدیل فوریهٔ سینوسی تابع ضریب مطلوب است. بنابراین $B(k)$ را می‌توان با تبدیل معکوس پیدا کرد. با استفاده از دومین معادله از معادلات (۴-۱۴) داریم

$$B(k) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\, g_s(k) = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\infty} f_s(x)\, sin\ kx\, dx \qquad (۹-۱۱)$$
$$= \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\infty} u(x, ۰)\, sin\ kx\, dx$$

به ازای $u(x, ۰)$ داده شده در (۹-۸)، داریم

$$B(k) = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{۱} ۱۰۰\, sin\ kx\, dx \qquad (۹-۱۲)$$
$$= -\frac{۲۰۰}{\pi}\, \frac{cos\ kx}{k}\Big|_۰^۱ = \frac{۲۰۰}{\pi k}(۱ - cos\ k)$$

پیدا کردن $B(k)$ مثل تعیین ضرایب در رشتهٔ فوریه است. با جایگذاری (۹-۱۲) در (۹-۹)، جواب مسألهٔ مورد نظر را به جای یک رشته در فصل ۱۳، به صورت یک انتگرال پیدا می‌کنیم:

$$u(x, y) = \frac{۲۰۰}{\pi}\int_۰^{\infty} \frac{۱ - cos\ k}{k}\, e^{-ky}\, sin\ kx\, dk \qquad (۹-۱۳)$$

یک انتگرال را البته می‌توان به طور عددی حساب کرد درست همان طور که می‌توان مقدار تقریبی یک رشته را با محاسبهٔ تعداد محدودی از جمله‌ها به دست آورد. امّا از (۹-۱۳) می‌توان انتگرال گرفت؛ یک راه ساده برای این کار پی بردن به این نکته است که انتگرال مزبور تبدیل لاپلاس $f(x) = [(۱ - cos\ k)\ sin\ kx]/k$ است، که در آن x صرفاً یک پارامتر و y همخوان با p، و k همخوان با t است. از $L۱۹$ و $L۲۰$

$$u(x, y) = \frac{۲۰۰}{\pi}\left[arc\ tan\,\frac{x}{y} - \frac{۱}{۲}\,arc\ tan\,\frac{x+۱}{y} - \frac{۱}{۲}\,arc\ tan\,\frac{x-۱}{y}\right] \quad (۹-۱۴)$$

این جواب را بر حسب مختصات قطبی هم می‌توان نوشت (مسألهٔ ۱)

$$u = \frac{۱۰۰}{\pi}\left(\frac{\pi}{۲} - arc\ tan\,\frac{r^۲ - cos\ ۲\theta}{sin\ ۲\theta}\right) \qquad (۹-۱۵)$$

مسائل، بخش ۹

۱- ثابت کنید که (۹-۱۵) را می‌توان از (۹-۱۴) به دست آورد. ***راهنمایی:*** با استفاده از فرمولهای $tan\ (\alpha\pm\beta)$، $tan\ ۲\alpha$ و غیره، (۹-۱۴) را خلاصه کنید و سپس به مختصات قطبی تغییر

متغیر دهید. ممکن است به رابطهٔ زیر برسید

$$u = \frac{۱۰۰}{\pi} \arctan \frac{\sin ۲\theta}{r^۲ - \cos ۲\theta}$$

نشان دهید که اگر مقدارهای اصلی $\arctan$ را به کار ببریم، این رابطه شرایط مرزی صحیح روی محور xها به دست نمی‌دهد، حال آنکه (۹-۱۵) می‌دهد.

۲- یک ورق فلزی ربع اول صفحهٔ y-x را می‌پوشاند. لبهٔ منطبق بر محور yها عایق بندی و لبهٔ منطبق بر محور xها در دمای

$$u(x, ۰) = \begin{cases} ۱۰۰\ (۲-x) & \text{برای} \quad ۰ < x < ۲ \\ ۰ & \text{برای} \quad x > ۲ \end{cases}$$

قرار دارد. توزیع دمای حالت پایا را به صورت تابعی از x و y پیدا کنید. ***راهنمایی***: روش مثال ۲ را دنبال کنید، امّا از تبدیل کسینوسی استفاده کنید (زیرا به ازای $x = ۰$، $\partial u/\partial x = ۰$). جواب خود را به صورت انتگرالی، مشابه (۹-۱۳)، به دست آورید.

۳- مسألهٔ شارش گرمای فصل ۱۳، بخش ۳ را در نظر بگیرید. این مسأله را با تبدیلهای لاپلاس (نسبت به t)، با شروع مانند مثال ۱، حل کنید. جوابی که به دست می‌آورید باید به شکل زیر باشد

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲} - \frac{p}{\alpha^۲} U = -\frac{۱۰۰}{\alpha^۲ l} x \quad \text{و} \quad U(۰, p) = U(l, p) = ۰ \quad \text{(پیوسته)}$$

این معادله را حل و جواب زیر را پیدا کنید

$$U(x, p) = -\frac{۱۰۰ \sinh (p^{۱/۲}/\alpha)x}{p \sinh (p^{۱/۲}/\alpha)l} + \frac{۱۰۰}{pl} x$$

بسط زیر را در نظر بگیرید، و u را با جستجوی تبدیلهای معکوس تک‌تک جمله‌های U، پیدا کنید:

$$\frac{\sinh (p^{۱/۲}/\alpha)x}{p \sinh (p^{۱/۲}/\alpha)l} = \frac{x}{pl} - \frac{۲}{\pi} \Big[\frac{\sin(\pi x/l)}{p+(\pi^۲\alpha^۲/l^۲)} - \frac{\sin(۲\pi x/l)}{۲[p+(۴\pi^۲\alpha^۲/l^۲)} + \frac{\sin(۳\pi x/l)}{۳[p+(۹\pi^۲\alpha^۲/l^۲)} \cdots \Big]$$

جوابی که به دست می‌آورید باید رابطهٔ (۳-۱۵) از فصل ۱۳ باشد.

۴- یک مفتول نیمه متناهی ابتدا در دمای ۱۰۰° برای $۰ < x < l$ و ۰° برای $x > ۱$ است. با شروع از $t = ۰$، سرِ $x = ۰$ در دمای ۰° نگه داشته می‌شود و اطراف میله عایق بندی شده است. دمای هر نقطهٔ میله را به صورت تابعی از t به روش زیر پیدا کنید. در معادلهٔ شارش گرما متغیرها را جدا کنید و جوابهای ابتدایی $e^{-\alpha^۲k^۲t}\sin kx$ و $e^{-\alpha^۲k^۲t}\cos kx$ را به دست آورید. چون در $x = ۰$، $u = ۰$ است از جمله‌های کسینوسی چشمپوشی کنید. دنبال جوابی به شکل

$$u(x, y) = \int_۰^\infty B(k)\, e^{-k^۲\alpha^۲t} \sin kx\, dk$$

باشید، و روش مثال ۲ را دنبال کنید. جواب را به صورت انتگرال به دست آورید.

۵- یک سیم طویل که در امتداد محور xها است ابتدا در حال سکون است. سرِ $x = ۰$ به بالا و پایین نوسان می‌کند به طوری که

$$y(۰, t) = ۲\sin ۳t \quad ، t > ۰$$

جا به جایی $y(x, t)$ را پیدا کنید. شرایط اولیه و مرزی عبارت اند از $y(۰, ۲) = ۲\sin ۳t$ $y(x, ۰) = ۰$، $\partial y/\partial t\,\big|_{t=۰} = ۰$. تبدیلهای لاپلاس این شرایط و معادلهٔ موج را، مثل مثال ۱، پیدا کنید. معادلهٔ دیفرانسیل حاصل را حلّ و جواب زیر را پیدا کنید.

$$Y(x, p) = \frac{۶e^{-(p/v)x}}{p^۲+۹}$$

با استفاده از $L۳$ و $L۲۸$ ثابت کنید

$$y(x, t) = \begin{cases} ۲\sin ۳\left(t - \frac{x}{v}\right) & x < vt \\ ۰ & x > vt \end{cases}$$

۶- مسألهٔ مثال ۲ را به روش زیر ادامه دهید: به جای استفاده از شکل صریح $B(k)$ از (۹-۱۲)، آنرا به صورت انتگرال رها کنید و (۹-۱۳) را به شکل زیر بنویسید

$$u(x, y) = \frac{۲۰۰}{\pi} \int_۰^\infty e^{-ky} \sin kx\, dk \int_۰^۱ \sin kt\, dt$$

ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنید و اول انتگرال نسبت به k را حساب کنید. (**راهنمایی**: حاصل‌ضرب سینوسها را به صورت تفاضل کسینوسها بنویسید.) حال انتگرال روی t را حساب کنید و (۹-۱۴) را نتیجه بگیرید.

۷- مسألهٔ ۴ را مثل مسألهٔ ۶ ادامه دهید.

۱۰- مسائل متفرقه

۱- با استفاده از $L15$ و $L31$، تبدیل لاپلاس $(1 - \cos at)/t$ را پیدا کنید.

۲- با استفاده از $L32$ و $L9$ تبدیل لاپلاس $t \sinh at$ را پیدا کنید. درستی نتایج حاصل را با یافتن تبدیل معکوس آن با استفاده از انتگرال برومویچ تحقیق کنید.

۳- با استفاده از $L13$ تبدیل لاپلاس $\sin at \sinh at$ را پیدا کنید. درستی نتیجهٔ حاصله را با یافتن تبدیل معکوس آن با استفاده از انتگرال برومویچ تحقیق کنید.

با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۴- $\displaystyle\int_0^\infty t^3 e^{-4t} \sinh 2t \, dt$ ۵- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_n^{n+1} t\, e^{-2t}\, dt$

تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را حساب کنید

۶- $\dfrac{p}{(p+a)^3}$ ۷- $\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$ ۸- $\dfrac{1}{(p^2+a^2)^3}$

۹- نشان دهید که توابع $J_0(t)$ و $J_0(\pi-t)$ در بازهٔ $(0, \pi)$ متعامد اند. (برای تعریف توابع بسل و تعریف توابع متعامد رجوع کنید به فصل ۱۲.) **راهنمایی**: $L23$ و $L24$ را با $g = h = J_0$ به‌کار ببرید. تبدیل معکوس $(p^2+a^2)^{-1}$ چیست؟

۱۰- با داشتن

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -2 < x < 0 \\ -1 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

تبدیل فوریهٔ نمایی $g(\alpha)$ و تبدیل فوریهٔ سینوسی $g_s(\alpha)$ را پیدا کنید. $f(x)$ را به صورت

یک انتگرال بنویسید و با استفاده از نتیجهٔ حاصل انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{(\cos ۲\alpha - ۱) \sin ۲\alpha}{\alpha} d\alpha$$

۱۱- با فرض

$$f(x) = \begin{cases} x & \circ \le x \le ۱ \\ ۲ - x & ۱ \le x \le ۲ \\ \circ & x \ge ۲ \end{cases}$$

تبدیل کسینوسی $f(x)$ را پیدا کنید و آنرا برای نوشتن $f(x)$ به صورت یک انتگرال به کار ببرید. از نتیجهٔ حاصل برای محاسبهٔ انتگرال زیر استفاده کنید:

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\cos^{۲}\alpha \sin^{۲}\alpha/۲}{\alpha^{۲}} d\alpha$$

۱۲- نشان دهید که تبدیل فوریهٔ $x^{-۱/۲}$مساوی $\alpha^{-۱/۲}$ است. ***راهنمایی:*** از تغییر متغیر $z = \alpha x$ استفاده کنید. انتگرال $\int_{\circ}^{\infty} z^{-۱/۲} \sin z\, dz$ را می‌توانید در فصل ۱۴، مسألهٔ ۷-۴۱ یا جدولهای انتگرال پیدا کنید.

۱۳- نشان دهید که تبدیل کسینوسی $J_{\circ}$ عبارت است از

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \frac{۱}{\sqrt{۱-\alpha^{۲}}} & \circ \le \alpha < ۱ \\ \circ & \alpha > ۱ \end{cases}$$

(راهنماییها را ببینید)

و در نتیجه نشان دهید که $\int_{\circ}^{\infty} J_{\circ}(x)\, dx = ۱$. ***راهنمایی:*** نشان دهید که از انتگرال فصل ۱۲، مسألهٔ ۲۳-۲۰ داریم که $J_{\circ}(x) = (۲/\pi) \int_{\circ}^{\pi/۲} \cos (x \sin \theta)\, d\theta$. (در انتگرال از $\pi/۲$ تا π، θ را با $\pi-\theta$ جایگزین کنید). برای پیدا کردن تبدیل کسینوسی $J_{\circ}$ فرض کنید $\sin \theta = \alpha$؛ تبدیل معکوس را بنویسید و سپس قرار دهید $\alpha = \circ$.

۱۴- فرض کنید $f(x)$ و $g(\alpha)$ یک زوج تبدیل فوریه‌اند. نشان دهید که df/dx و $i\alpha g(\alpha)$ هم یک زوج تبدیل فوریه هستند. ***راهنمایی:*** از اولین انتگرال در (۴-۲) نسبت به x مشتق بگیرید. با استفاده از (۵-۱۶) نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\,|g(\alpha)|^{2}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x)\, \frac{d}{dx} f(x)\, dx$$

تذکر: این نتیجه در مکانیک کوانتومی حائز اهمیت است. زیرا بر اساس نمادگذاری مسألهٔ ۵-۲۴ به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{-\infty}^{\infty} p\,|\phi(p)|^{2}\, dp = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{*}(x)\ \left(\frac{-ih}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)\, dx$$

۱۵- برای تبدیلهای فوریه، قضایای انتقال زیر را ثابت کنید. اگر $g(\alpha)$ تبدیل فوریهٔ $f(x)$ باشد، در آن صورت

(الف) تبدیل فوریهٔ $f(x-a)$ برابر $e^{-i\alpha a}\, g(\alpha)$ است.

(ب) تبدیل فوریهٔ $e^{i\beta x} f(x)$ برابر $g(\alpha-\beta)$ است.

این نتایج را با مسائل ۲-۱۹ تا ۲-۲۷ مقایسه کنید.

۱۶- با استفاده از جدول تبدیلهای لاپلاس، تبدیلهای فوریهٔ e^{-x} و $x\,e^{-x}$ را پیدا کنید.

۱۷- شکل قضیهٔ پارسوال (۵-۱۷) را برای تبدیل سینوسی (۴-۱۴) و تبدیل کسینوسی (۴-۱۵) پیدا کنید.

۱۸- با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۴-۱۸ و قضیهٔ پارسوال (مسألهٔ ۱۷) انتگرال $\int_0^\infty [j_1(\alpha)]^2 d\alpha$ را حساب کنید.

۱۹- (الف) با استفاده از قضیهٔ پارسوال و مسألهٔ ۴-۱۱ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^{2}(\alpha\pi/2)}{(1-\alpha^{2})^{2}}\, d\alpha$$

(ب) انتگرال قسمت (الف) را با انتگرال پربندی حساب کنید.

راهنمایی: $\cos^{2}(\alpha\pi/2) = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha\pi)$ انتگرال

$$\oint_C \frac{1+e^{i\pi z}}{(z-1)^{2}(z+1)^{2}}\, dz$$

را، که در آن C نیمهٔ بالایی صفحه مختلط است، حساب کنید. توجه کنید که قطبها در واقع قطبهای ساده اند (رک فصل ۱۴، بخش ۷، مثال ۴).

۲۰- تبدیل فوریهٔ نمایی تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۲a - |x| & |x| < ۲a \\ ۰ & |x| > ۲a \end{cases}$$

را پیدا کنید و با استفاده از این نتیجه و قضیهٔ پارسوال انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_۰^{\infty} \frac{sin^۴\, a\alpha}{\alpha^۴}\, d\alpha$$

۲۱- تابع $h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+۲k\pi)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که این رشته به تابعی میل می‌کند که در شرایط دریشلت صدق می‌کند (فصل ۷، بخش ۶). نشان دهید که $h(x)$ دارای دورهٔ تناوب ۲π است.

(الف) $h(x)$ را به صورت رشتهٔ فوریهٔ نمایی $h(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$ بسط دهید؛ نشان دهید که $c_n = g(n)$ که در آن، $g(\alpha)$ تبدیل فوریهٔ $f(x)$ است. ***راهنمایی:*** c_n را به صورت یک انتگرال از ۰ تا ۲π بنویسید و تغییر متغیر $u = x + ۲k\pi$ را به‌کار ببرید. توجه کنید که $e^{-۲ink\pi} = ۱$، و حاصل‌جمع روی k منتج به انتگرالی از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌شود.

(ب) با قرار دادن $x = ۰$ در (الف) ***فرمول جمع‌زنی پواسون*** $\sum_{-\infty}^{\infty} f(۲k\pi) = \sum_{-\infty}^{\infty} g(n)$ را پیدا کنید. این نتیجه کاربردهای فراوانی دارد؛ مثلاً در مکانیک آماری، نظریهٔ ارتباطات، نظریهٔ وسایل نوری، پراکندگی نور در مایع، و غیره. (رک مسألهٔ ۲۲).

۲۲- با استفاده از فرمول پواسون (مسألهٔ ۲۱ ب) و مسألهٔ ۲۰ نشان دهید که

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{sin^۲ n\theta}{n^۲} = n\theta \quad ، ۰ < \theta < \pi$$

(این حاصل‌جمع در نظریهٔ پراکندگی نور در یک مایع به کار می‌آید.) ***راهنمایی:*** $f(x)$ و $g(\alpha)$ را مانند مسألهٔ ۲۰ در نظر بگیرید. توجه کنید که $f(۲k\pi) = ۰$ جز برای $k = ۰$ وقتی $a < \pi$. قرار بدهید $\alpha = n$، $a = \theta$.

مسائل ۲۳ و ۲۴ را یا با تبدیل لاپلاس و قضیهٔ همگردش یا با توابع گرین حل کنید.

۲۳- $y'' + y = sec^۲ t$ ۲۴- $y'' + y = t\, sin\, t$

۲۵- دمای حالت پایا را در یک ورقهٔ نیمه متناهی که ناحیهٔ $۰ \le y \le ۱$ و $x > ۰$ را

در بر می‌گیرد، با این فرض که لبه‌های منطبق بر محورهای x و y عایق بندی شده‌اند، (رک فصل ۱۳ ، مسألهٔ ۲-۱۴) و لبهٔ بالایی در دمای

$$u(x, 1) = \begin{cases} 100^\circ & 0 < x < 1 \\ 0^\circ & x > 1 \end{cases}$$

قرار دارد، حساب کنید. ***راهنمایی***: دنبال جوابی به شکل انتگرال فوریه باشید. کافی است جواب را فقط به صورت انتگرال بنویسید. (درست همانطور که معمولاً جواب را فقط به صورت یک رشته می‌نویسیم).

۱۶

احتمال

۱- مقدمه؛ تعریف احتمال

نظریهٔ احتمال کاربردهای فراوانی در علوم فیزیکی دارد؛ از جمله در مکانیک کوانتومی، نظریهٔ جنبشی گازها، و مکانیک آماری از اهمیت خاصی برخوردار است. این نظریه، در هر مسأله‌ای که با تعداد زیادی ذره یا متغیر سروکار دارد و در آن اطلاع کامل از جزئیات، غیرممکن یا غیرعملی است، مثل نوفهٔ پرتاب در لامپهای خلأ، واپاشیِ پرتوزا، تلاطم در دینامیک شاره‌ها، برخی مسائل شبکهٔ الکتریکی، نظریهٔ اطلاعات، و غیره، مورد نیاز است. همچنین چون اندازه‌گیریهای فیزیکی همیشه با خطا همراه‌اند، نظریهٔ احتمال در نظریهٔ خطاها هم مورد نیاز است. در این فصل، بعضی ایده‌های اساسی را که کاربردهای بیشتری دارند مورد بحث قرار می‌دهیم.

از واژهٔ "احتمال" در زندگی روزمره زیاد استفاده می‌کنیم. می‌گوییم "امتحان احتمالاً مشکل خواهد بود"، "امروز احتمالاً برف خواهد آمد"، "احتمالاً بازی را خواهیم برد"، و غیره. چنین عبارتهایی همیشه بیان کنندهٔ عدم آگاهی نسبی در مورد نتیجهٔ یک رویداد هستند؛ در مورد رویدادی که نتیجه‌اش را می‌دانیم از کلمهٔ "احتمال" استفاده نمی‌کنیم. نظریهٔ احتمال سعی می‌کند که با دقت بیشتری عدم آگاهی ما را از نتیجهٔ یک رویداد بیان کند. می‌گوییم احتمال آمدنِ شیر در پرتاب یک سکه $\frac{1}{2}$ است، و به همین ترتیب برای خط آمدن. منظور از این عبارت آن است که نتیجهٔ آزمایش دو چیز است (اگر از امکان آنکه سکه روی لبه‌اش بایستد صرفنظر کنیم) و دلیلی مبنی بر اینکه انتظار وقوع یک رویداد نسبت به رویداد دیگر بیشتر باشد نداریم. در نتیجه، به دو رویداد ممکن احتمالهای مساوی نسبت می‌دهیم. (برای بحث بیشتر پیرامون این موضوع به آخر بخش ۲ مراجعه کنید).

مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید: من و شما هر یک، یک سکه پرتاب، و فقط به سکهٔ خود نگاه می‌کنیم. سؤال این است "احتمال آنکه هر دو سکه شیر باشد چیست؟" فرض کنید شما می‌بینید

که سکهٔ شما خط است؛ در این صورت می‌گویید احتمال اینکه هر دو سکه شیر باشد صفر است، زیرا شما **می‌دانید** که سکهٔ خودتان خط آمده است. از طرف دیگر فرض کنید من می‌بینم که سکهٔ خودم شیر آمده است؛ پس می‌گویم که احتمال داشتن ۲ شیر $\frac{1}{2}$ است زیرا نمی‌دانم که سکهٔ شما شیر آمده است یا خط. حال فرض کنید هیچکدام از ما به هیچ یک از سکه‌ها نگاه نکنیم، اما شخص سومی به هر دوی آنها نگاه کند و به ما اطلاع دهد که حداقل یکی از سکه‌ها شیر است. بدون این آگاهی، چهار امکان زیر وجود دارد، یعنی،

$$hh \qquad tt \qquad th \qquad ht \tag{۱-۱}$$

که به هر کدام در وضعیت عادی، احتمال $\frac{1}{4}$ را نسبت می‌دهیم (رجوع کنید به آخر بخش ۲، و بخش ۳). اطلاعِ "حداقل یک شیر" رویداد tt را حذف می‌کند اما اطلاعی از سه مورد دیگر نمی‌دهد. از آنجا که hh، ht ، th قبلاً همشانس بودند، هنوز هم آنها را همشانس تلقی کرده، می‌گوییم احتمال دو شیر $\frac{1}{3}$ است.

توجه کنید که در بحث بالا، جوابِ یک مسألهٔ احتمال بستگی به مقدار آگاهی (یا عدم آگاهی) شخص پاسخ دهنده دارد. همچنین توجه کنید که برای پیدا کردن احتمال یک رویداد، تمام امکانهای همشانس دیگر را که طبق اطلاعات ما میسر هستند در نظر می‌گیریم. اصطلاحاً می‌گوییم که احتمالها دو به دو ناسازگار اند (مثلاً، اگر سکه‌ای شیر بیاید نمی‌توانند خط هم بیاید)، فراگیر جمعی اند (باید **تمام** امکانات را در نظر بگیریم)، و همشانس هستند (اطلاعی که ما را وادار به انتظار وقوع بیشتر یکی نسبت به دیگری کند نداریم، در نتیجه برای تمام امکانات احتمالهای مساوی در نظر می‌گیریم). حال می‌خواهیم این اندیشهٔ احتمال را به صورت یک تعریف فرمولبندی کنیم (همچنین رجوع کنید به بخش ۲).

(۱-۲) اگر چند رویداد همشانس، دو به دو ناسازگار، و فراگیر جمعی برای نتیجهٔ یک آزمایش وجود داشته باشد، احتمال رویداد E عبارت است از

$$p = \frac{E \text{ تعداد برآمدهای مساعد}}{\text{تعداد کل برآمدها}}$$

مثال ۱– از یک دست ورق که خوب بُر خورده است، یک کارت می‌کشیم. احتمال اینکه این

ورق، شاه، خشت (یا هر دو) باشد، چیست؟

۵۲ برآمد ممکن مختلف وجود دارد، و چون ورقها بُر خورده‌اند آنها را همشانس فرض می‌کنیم. از ۵۲ ورق، ۱۶ ورق مساعد هستند (۱۳ خشت، و ۳ شاه)؛ در نتیجه طبق (۱-۲) احتمال مورد نظر برابر $\frac{۱۶}{۵۲}=\frac{۴}{۱۳}$ است.

مثال ۲ - یک عدد سه رقمی (یعنی عددی بین ۱۰۰ تا ۹۹۹) را به طور کتره‌ای انتخاب می‌کنیم ("به طور کتره‌ای" به معنی آن است که فرض کنیم احتمال انتخاب همهٔ اعداد یکی است). احتمال اینکه هر سه رقم مثل هم باشند چیست؟

۹۰۰ عدد سه رقمی وجود دارد، که ۹ تای آنها (یعنی ۱۱۱، ۲۲۲، ...، ۹۹۹) سه رقمشان مثل هم است. در نتیجه احتمال مورد نظر $\frac{۹}{۹۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$ است.

مسائل، بخش ۱

۱- احتمال آنرا پیداکنید که در انداختن یک تاس عددی کمتر از ۳؛ عددی زوج؛ و یا ۶ به دست آید.

۲- سه سکه را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه دو شیر و یک خط بیاید چیست؟ احتمال اینکه دو سکهٔ اول شیر و سکهٔ سوم خط باشد چیست؟ اگر حداقل دو سکه شیر باشند، احتمال اینکه همه شیر باشند چیست؟

۳- در جعبه‌ای ۲ مهره سفید، ۳ مهره سیاه، و ۴ مهره قرمز موجود است. اگر توپی را به طور کتره‌ای از جعبه خارج کنیم احتمال سیاه بودن آن چیست؟ احتمال اینکه **قرمز نباشد** چقدر است؟

۴- یک کارت را از یک دست ورق بُر خورده می‌کشیم. احتمال اینکه قرمز باشد چقدر است؟ احتمال اینکه تکِ دل باشد چقدر است؟ احتمال اینکه ۳ تا ۵ باشد چقدر است؟ احتمال اینکه تک یا قرمز و یا هر دو باشد چقدر است؟

۵- یک خانواده با دو بچه را در نظر بگیرید (فرض کنید پسر بودن و دختر بودن هم احتمال باشد، یعنی احتمال هرکدام $\frac{۱}{۲}$ است)، احتمال اینکه هر دو بچه پسر باشد چیست؟ احتمال اینکه حداقل یکی از بچه‌ها دختر باشد چیست؟ اگر یکی از آنها دختر باشد، احتمال اینکه

هر دو دختر باشند چقدر است؟ اگر بدانیم که دو بچهٔ اول دختر اند، احتمال اینکه بچهٔ سوم که انتظار تولدش می‌رود، پسر باشد چقدر است؟

۶- در یک دست ورق خاصّ تردستی، خالهای، خشت و دل، سیاه، و پیک و گشنیز، قرمز چاپ شده‌اند. از این دست ورق (بعد از بُر زدن) کارتی به طور کتره‌ای می‌کشیم. احتمال آنرا پیدا کنید که این کارت قرمز یا بی‌بیِ دل باشد. احتمال اینکه صورت قرمز یا گشنیز باشد چقدر است؟ احتمال اینکه تک قرمز یا خشت باشد چقدر است؟

۷- حرفی از حروف الفبای انگلیسی را به طور کتره‌ای انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این حرف یکی از حروف کلمهٔ "*probability*" باشد چیست؟ احتمال اینکه این حرف در نیمهٔ اول حروف الفبا باشد چقدر است؟ احتمال اینکه این حرف بعد از حرف x باشد چقدر است؟

۸- عدد صحیح N را بین ۱ و ۱۰۰ به طور کتره‌ای انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه N به ۱۱ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟ احتمال اینکه $N > ۹۰$ باشد چقدر است. احتمال $N \leq ۳$ چقدر است؟ احتمال اینکه N مربع کامل باشد چقدر است؟

۹- فرض کنید بخواهیم وسیلهٔ A را در آزمایشگاه پیداکنیم. متأسفانه، شخصی وسیله‌های A و وسیله‌های نوع دیگر (که ما آنها را B می‌نامیم) را به طور کتره‌ای در جعبه‌های مشابه و بدون هیچگونه علامتی در یک قفسه قرار داده است. می‌دانیم که آزمایشگاه دارای ۳ وسیلهٔ A و ۷ وسیلهٔ B است. اگر یکی از جعبه‌ها را برداریم، احتمال اینکه A در آن باشد چقدر است؟ اگر این جعبه از نوع B باشد و آنرا روی میز بگذاریم و جعبه دیگری برداریم، احتمال اینکه این دفعه A داشته باشیم چقدر است؟

۱۰- یک مرکز خرید دارای چهار در ورودی است، یکی در شمال یکی در جنوب، و دو تا در مشرق. اگر به طور کتره‌ای وارد مرکز خرید شده، بعد از خرید خارج شوید، احتمال اینکه از همان طرفی که وارد شده‌اید خارج شوید چقدر است؟

۲- فضای نمونه

اغلب اوقات خوب است که فهرستی از برآمدهای ممکن یک آزمایش تهیه کنیم [کاری که در (۱-۱) انجام دادیم]. چنین مجموعه‌ای از برآمدهای دو به دو ناسازگار را **فضای نمونه** می‌نامیم؛ هر یک از برآمدها، یک **نقطهٔ** این فضای نمونه خوانده می‌شود. برای هر مسأله معین، فضاهای

نمونهٔ متعدد و متفاوتی وجود دارد. مثلاً به جای (۱-۱)، می‌توانستیم بگوییم که یک مجموعه از تمام برآمدهای دو به دو ناسازگار در دو پرتاب یک سکه عبارت است از:

(۱-۲) هیچ شیر ، ۱ شیر ، ۲ شیر

با این همه، فضای نمونهٔ دیگری برای همین مسأله عبارت است از

(۲-۲) حداقل ۱ خط ، هیچ خط

(آیا می‌توانید مثالهای دیگری بزنید؟). از طرف دیگر، مجموعه برآمدهای

دقیقاً ۱ خط ، حداقل ۱ شیر ، ۲ شیر

را نمی‌توان به‌عنوان فضای نمونه به کار برد، زیرا این برآمدها دو به دو ناسازگار نیستند. "حداقل ۱ شیر" شامل "۲ شیر" و همچنین شامل "دقیقاً ۱ خط" (که به معنی "دقیقاً ۱ شیر" هم هست) نیز می‌شود.

برای استفاده از یک فضای نمونه در حل یک مسأله، باید احتمالهای مربوط به نقاط مختلف آن فضای نمونه را بدانیم. معمولاً به هر یک از برآمدهای مندرج در (۱-۱) احتمال $\frac{۱}{۴}$ را نسبت می‌دهیم. (رجوع کنید به آخر بخش ۲ ، و بخش ۳). چنین سیاهه‌ای از برآمدهای همشانس را فضای نمونه **یکنواخت** می‌خوانیم. با استفاده از فضای نمونهٔ یکنواخت (۱-۱) یا روشهای دیگر (رک بخشهای ۳ و ۴) می‌توان تحقیق کرد که احتمالهای مربوط به نقطه‌های (۱-۲) و (۲-۲) عبارت اند از:

(۱-۲)

هیچ h	۱ h	۲ h
$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

(۲-۲)

حداقل ۱ h	هیچ h
$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$

فضاهای نمونهٔ (۱-۲) و (۲-۲) را که نقاط مختلف آنها دارای احتمالهای متفاوت‌اند، فضاهای نمونهٔ **غیر یکنواخت** می‌نامیم. برای بعضی مسائل، ممکن است هم فضاهای نمونهٔ یکنواخت وجود داشته باشد و هم فضاهای نمونهٔ غیر یکنواخت؛ مثلاً، (۱-۱) یک فضای نمونهٔ یکنواخت و (۱-۲) و (۲-۲) فضاهای نمونهٔ غیر یکنواخت در پرتاب دو سکه‌اند. اما بعضی اوقات فضای نمونهٔ یکنواخت وجود *ندارد*؛ مثلاً، یک سکهٔ بی‌ریخت را در نظر بگیرید که

احتمال شیر آمدن آن $\frac{۱}{۳}$ و احتمال خط آمدن آن $\frac{۲}{۳}$ است. در اینگونه موارد نمی‌توان تعریف (۱-۲) را به کار برد، و ما به تعریف جامع‌تر زیر نیاز داریم

> **تعریف احتمال** در هر فضای نمونهٔ معین (یکنواخت یا غیر یکنواخت) و با داشتن احتمالهای مربوط به نقاط آن، احتمال یک رویداد، از حاصل‌جمع احتمالهای تمام نقاط نمونه که مساعد آن رویداد هستند به دست می‌آید

برای فضاهای نمونهٔ غیر یکنواخت، باید از این تعریف استفاده کنیم زیرا (۱-۲) قابل اعمال نیست. اگر فضای نمونهٔ داده شده یکنواخت باشد، یا اگر یک فضای نمونهٔ زیربنا وجود داشته باشد [مثلاً، (۱-۱) فضای نمونهٔ یکنواخت زیربنای (۱-۲) و (۲-۲) است]، در آن صورت این تعریف با تعریف (۱-۲) برای موارد همشانس سازگار خواهد شد (مسائل ۱۵ و ۱۶)، و می‌توان هر یک از آنها را به کار برد. برای مثال، می‌خواهیم از (۲-۱) احتمال حداقل یک خط را پیدا کنیم؛ این برابر است با احتمال یک شیر به اضافهٔ احتمال دو شیر یا $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$. از فضای نمونهٔ یکنواخت (۱-۱) هم با استفاده از (۱-۲) و یا تعریف بالا به همین نتیجه می‌رسیم.

اگر بتوان در یک مسألهٔ معین به آسانی چندین فضای نمونه ساخت، باید آن فضایی را به کار برد که مناسب سؤالی است که می‌خواهیم جواب بدهیم. فرض کنید سؤال کنیم: در پرتاب دو سکه، احتمال اینکه هر دو شیر بیایند چقدر است؟ از (۱-۱) یا (۲-۱) به جواب $\frac{۱}{۴}$ می‌رسیم؛ اما (۲-۲) فضای نمونهٔ مناسبی برای جواب دادن به این سؤال نیست (چرا؟). برای پیدا کردن احتمال اینکه هر دو خط باشند، می‌توان هر یک از فضاهای نمونهٔ اشاره شده را به کار برد، و برای پیدا کردن احتمال آنکه اولین پرتاب شیر و دومین پرتاب خط بیاید فقط می‌توان از (۱-۱) استفاده کرد، زیرا دو فضای نمونهٔ دیگر اطلاعات کافی به ما نمی‌دهند. حال مثالهای مشکل‌تری را بررسی می‌کنیم:

مثال ۱- سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. فضای یکنواخت این مسأله شامل هشت نقطه به شرح زیر است

$$\begin{array}{cccc} hhh & hth & ttt & tht \\ hht & thh & tth & htt \end{array}$$ (۲-۳)

و به هر یک احتمال $\frac{۱}{۸}$ را نسبت می‌دهیم. حال بگذارید با استفاده از این فضای نمونه به چند سؤال پاسخ دهیم.

احتمال حداقل دو خط پیاپی چقدر است؟ با شمارش، می‌بینیم که در سه مورد چنین شرطی برآورده می‌شود، بنابراین این احتمال $\frac{۳}{۸}$ است.

احتمال آنکه دو سکهٔ پیاپی مثل هم بیایند چقدر است؟ دوباره با شمردن حالتها ملاحظه می‌کنیم که در ۶ حالت این خواسته برآورده شده، در نتیجه این احتمال برابر $\frac{۶}{۸}$ یا $\frac{۳}{۴}$ است.

اگر بدانیم که حداقل یک خط آمده است، احتمال اینکه همه خط باشند چقدر است؟ نقطهٔ hhh حالا حذف می‌شود، و فضای نمونهٔ جدید دارای ۷ نقطه است. چون اطلاع جدید (حداقل یک خط) نکتهٔ جدیدی در مورد این هفت برآمد بیان نمی‌کند، آنها را همشانس فرض می‌کنیم. هر یک با احتمال $\frac{۱}{۷}$. بنابراین احتمال آنکه همه خط بیایند $\frac{۱}{۷}$ است.

(برای بحث بیشتر پیرامون این مسأله رجوع کنید به مسائل ۱۱ و ۱۲.)

مثال ۲ – دو تاس را می‌اندازیم؛ تاس اول می‌تواند یکی از اعداد ۱ تا ۶ را نشان بدهد و تاس دوم نیز چنین است. به این ترتیب، در یک فضای نمونهٔ یکنواخت این مسأله، ۳۶ نقطه یا برآمد وجود دارد، که به هر نقطهٔ آن احتمال $\frac{۱}{۳۶}$ را نسبت می‌دهیم. آمدنِ ۳ در تاس اول و ۲ در تاس دوم را می‌توان با نماد ۲ ، ۳ نمایش داد. در این صورت فضای نمونه مطابق (۲-۴) خواهد بود. (فعلاً از حروف الف و ب و خطوطی که بعضی از نقاط را در برگرفته‌اند چشمپوشی کنید؛ از اینها در مسائل زیر استفاده می‌شود.)

	۱ ، ۱	۱ ، ۲	۱ ، ۳	۱ ، ۴	۱ ، ۵	۱ ، ۶	
	۲ ، ۱	۲ ، ۲	۲ ، ۳	۲ ، ۴	۲ ، ۵	۲ ، ۶	
	۳ ، ۱	۳ ، ۲	۳ ، ۳	۳ ، ۴	۳ ، ۵	۳ ، ۶	
الف	۴ ، ۱	۴ ، ۲	۴ ، ۳	۴ ، ۴	۴ ، ۵	۴ ، ۶	ب
	۵ ، ۱	۵ ، ۲	۵ ، ۳	۵ ، ۴	۵ ، ۵	۵ ، ۶	
	۶ ، ۱	۶ ، ۲	۶ ، ۳	۶ ، ۴	۶ ، ۵	۶ ، ۶	

(۲-۴)

حال چند سؤال مطرح کرده و سعی می‌کنیم با استفاده از (۲-۴) به آنها پاسخ بدهیم.

(الف) احتمال اینکه حاصل‌جمع اعداد روی تاسها ۵ باشد چقدر است؟ نقاطی از فضای نمونهٔ (۲-۴) که داخل منحنی الف قرار دارند تمام مواردی هستند که منجر به حاصل‌جمع ۵ می‌شوند. این نقاط چهار تا هستند؛ بنابراین احتمال اینکه حاصل جمع ۵ باشد $\frac{۴}{۳۶}$ یا $\frac{۱}{۹}$ است.

(ب) احتمال اینکه حاصل‌جمع اعداد تاسها به ۵ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟ این بدان معناست که حاصل‌جمع، ۵ یا ۱۰ باشد، در نتیجه باید تعداد نقاطی از نمونه را که منجر به حاصل‌جمع ۵ یا ۱۰ می‌شوند بدانیم. چهار نقطه‌ای که در (۲-۴) با منحنی الف مشخص شده‌اند، حاصل‌جمع ۵، و سه نقطه‌ای که با منحنی ب محاصره شده‌اند حاصل‌جمع ۱۰ را می‌دهند. بنابراین در فضای نمونه، ۷ نقطه وجود دارد که مربوط به حاصل‌جمعهای بخش‌پذیر بر ۵ اند، بنابراین احتمال مورد نظر $\frac{۷}{۳۶}$ است (۷ مورد مساعد از ۳۶ مورد ممکن، یا ۷ ضربدر احتمال $\frac{۱}{۳۶}$ هر نقطهٔ نمونه).

(ج) فضای نمونه‌ای بسازید که نقاط آن حاصل‌جمعهای ممکنِ دو عدد تاسها باشند، و احتمالهای نقاط این فضای غیر یکنواخت را پیدا کنید. حاصل‌جمعهای ممکن در گسترهٔ ۲ (یعنی ۱ + ۱) تا ۱۲ (یعنی ۶ + ۶) هستند. از (۲-۴) می‌بینیم که نقاط همخوان با هر حاصل‌جمع در روی یک قطر قرار می‌گیرند (موازی عنصرهای قطری الف و ب). یک نقطهٔ همخوان با حاصل‌جمع ۲، دو نقطهٔ همخوان با حاصل‌جمع ۳، سه نقطهٔ همخوان با حاصل‌جمع ۴، و غیره، وجود دارد. بنابراین داریم:

فضای نمونه	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
احتمالهای همخوان	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

(۲-۵)

(د) محتمل‌ترین حاصل‌جمع در انداختن دو تاس چیست؟ گرچه می‌توان با استفاده از فضای نمونهٔ (۲-۴) به این سؤال پاسخ داد (این کار را بکنید)، اما استفاده از (۲-۵) خیلی ساده‌تر است. می‌بینیم که حاصل‌جمع ۷، دارای بیشترین احتمال یعنی $\frac{۱}{۶} = \frac{۶}{۳۶}$ است.

(ه) احتمال اینکه حاصل‌جمع اعداد روی تاسها بزرگ‌تر یا مساوی ۹ باشد چقدر است؟ با استفاده از (۲-۵)، احتمالهای مربوط به حاصل‌جمعهای ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ را با هم جمع

می‌کنیم. بنابراین احتمال مربوطه عبارت است از

$$\frac{۴}{۳۶}+\frac{۳}{۳۶}+\frac{۲}{۳۶}+\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

تا اینجا طوری صحبت می‌کرده‌ایم که گویی همشانس بودن شیر یا خط در پرتاب یک سکه، کاملاً واضح و غیرقابل تردید است. اگر در این مورد احساس تردید کرده‌اید کاملاً حق با شماست. نه تنها این مطلب **بدیهی نیست**، حتی لزوماً درست هم نیست، کما اینکه یک سکهٔ خمیده یا بی‌ریخت این مطلب را نشان خواهد داد. در اینجا باید بین نظریهٔ ریاضیاتی احتمال و کاربرد آن در یک مسأله در جهان فیزیکی تمیز قائل شویم. احتمال ریاضیاتی (مثل همهٔ ریاضیات) با یک رشته فرضیات شروع می‌شود و نشان می‌دهد که ***اگر*** آن فرضیات درست باشند، ***آنگاه*** نتیجه‌های مختلفی حاصل می‌شوند. فرضیات اساسی در یک مسأله احتمال ریاضیاتی، احتمالهای مربوط به نقطه‌های فضای نمونه‌اند. بنابراین در مسأله پرتاب سکه، **فرض می‌کنیم** که در هر پرتاب، احتمال آمدن شیر یا آمدن خط هر دو $\frac{۱}{۲}$ است، و سپس نشان می‌دهیم که احتمال آمدن دو شیر در دو پرتاب، $\frac{۱}{۴}$است. (بخش ۳). این سؤال که آیا این فرضها درست‌اند یا نه، سؤال ریاضی نیست. آنچه در اینجا باید سؤال کنیم این است که چه مسأله فیزیکی را می‌خواهیم حل کنیم. اگر با یک سکهٔ بی‌ریخت سروکار داریم، و اگر می‌دانیم یا به طور تجربی می‌توانیم حدس بزنیم که احتمال آمدن شیر p است (و در نتیجه احتمال خط p − ۱ است)، نظریهٔ ریاضی به جای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$ ، با این اعداد شروع می‌شود. در غیاب هر نوع اطلاع در مورد اینکه شیر محتمل‌تر است یا خط، ما به طور "طبیعی" یا "شهودی" هر دو احتمال را برابر$\frac{۱}{۲}$ فرض می‌کنیم. تنها جواب ممکن به این سؤال که آیا این فرض درست است یا نه را آزمایش تعیین می‌کند. اگر نتیجه‌هایی که بر مبنای این فرضها پیدا می‌شوند با آزمایش توافق داشته باشند، در آن صورت فرضها خوب هستند؛ در غیر این صورت باید در آنها تجدید نظر کنیم. (رک بخش ۴ ، مثال ۵).

در این فصل عمدهٔ روشهای ریاضی محاسبهٔ رویدادهای پیچیده را با فرض داشتن احتمالهای نقاط فضای نمونه بررسی می‌کنیم. برای سادگی، اغلب فرض می‌کنیم که این احتمالها، احتمالهای "طبیعی" هستند؛ با این همه، نظریهٔ ریاضی‌ای که تدوین می‌کنیم حتی اگر این مقادیر طبیعی ($\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۲}$ در مسألهٔ سکه، و غیره) را با مجموعه‌ای از کسرهای غیر منفی که

حاصل‌جمعشان ۱ است جایگزین کنیم نیز قابل اعمال است.

مسائل، بخش ۲

۱ تا ۱۰- برای هر یک از مسائل ۱-۱ تا ۱-۱۰ یک فضای نمونهٔ مناسب بسازید و با استفاده از آن مسأله را حل کنید. فضای نمونهٔ یکنواخت، یا غیر یکنواخت یا هردو را به کار ببرید.

۱۱- سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. چند فضای نمونهٔ غیر یکنواخت برای این مسأله بسازید (مثال ۱، بالا).

۱۲- با استفاده از مثال ۱ در بالا، یا یک یا تعداد بیشتری از فضاهای نمونه‌ای که در مسألهٔ ۱۱ ساخته‌اید، به سؤالهای زیر پاسخ دهید.

(الف) اگر تعداد شیرها از خطها بیشتر باشند، احتمال یک خط چقدر است؟

(ب) اگر دو شیر پیاپی نداشته باشیم، احتمال اینکه همه خط باشند چقدر است؟

(ج) اگر هر سه سکه مثل هم فرود نیایند احتمال آنکه دو تا پیاپی مثل هم باشند چیست؟

(د) اگر N_t = تعداد خطها و N_h = تعداد شیرها باشد، احتمال آنکه $|N_h - N_t| = ۱$ باشد چیست؟

(ه) اگر حداقل یک شیر آمده باشد، احتمال آنکه دقیقاً ۲ شیر بیاید چیست؟

۱۳- در مسألهٔ ۱-۵ دانشجویی ادعا می‌کند که اگر یک بچه دختر باشد، احتمال آنکه هر دو دختر باشند $\frac{۱}{۲}$ است. با استفاده از فضاهای نمونهٔ مناسب، نشان دهید که در استدلال زیر چه چیزی اشتباه است: مهم نیست که دختر مورد نظر، بچهٔ بزرگ‌تر باشد یا کوچک‌تر؛ در هر صورت احتمال آنکه بچهٔ دیگر دختر باشد $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۴- دو تاس را می‌اندازیم. با استفاده از فضای نمونهٔ (۲-۴) به سؤالهای زیر پاسخ دهید.

(الف) احتمال آنکه با دو عدد روی تاسها بتوانیم یک عدد دو رقمی بزرگ‌تر از ۳۳ بسازیم چیست؟ (توجه کنید که نقطهٔ ۴، ۱ فضای نمونه به عدد دو رقمی ۴۱ منجر می‌شود که بزرگ‌تر از ۳۳ است.)

(ب) قسمت (الف) را برای پیداکردن یک عدد دو رقمی بزرگ‌تر از یا مساوی با ۴۲ تکرار کنید.

(ج) آیا می‌توانید یک عدد (یا اعدادی) دو رقمی پیدا کنید که احتمال پدید آمدن اعداد بزرگ‌تر از آن مساوی احتمال پدید آمدن اعداد کوچک‌تر از آن باشد؟ (به تذکر قسمت

(الف) توجه کنید).

۱۵- با استفاده از فضای نمونهٔ (۴-۲) و رابطهٔ (۲-۵) به سؤالهای زیر در مورد انداختن دو تاس پاسخ دهید

(الف) احتمال آنکه حاصل‌جمع کوچک‌تر یا مساوی ۴ باشد چقدر است؟

(ب) احتمال آنکه حاصل‌جمع زوج باشد چقدر است؟

(ج) احتمال آنکه حاصل‌جمع به ۳ بخش‌پذیر باشد چیست؟

(د) اگر حاصل‌جمع فرد باشد، احتمال آنکه برابر ۷ باشد چقدر است؟

(ه) احتمال آنکه حاصل‌ضرب اعداد دو تاس، ۱۲ باشد چقدر است؟

۱۶- با داشتن فضای نمونهٔ غیر یکنواخت و احتمالهای مربوط به نقاط آن، احتمال وقوع رویداد A را برابر با حاصل‌جمع احتمالهای نقاطی که مساعد A هستند تعریف کردیم [این تعریف را در مسألهٔ ۱۵ با فضای نمونهٔ (۵-۲) به کار بردید] نشان دهید که این تعریف با موارد همشانس توافق دارد، مشروط بر آنکه فضای نمونهٔ یکنواختی هم برای مسألهٔ مورد نظر وجود داشته باشد (همانطور که برای مسألهٔ ۱۵ وجود داشت). ***راهنمایی:*** فرض کنید فضای نمونهٔ یکنواخت دارای N نقطه، هر یک با احتمال N^{-1}، است. فرض کنید فضای غیر یکنواخت دارای $n < N$ نقطه است، به طوری که اولین نقطهٔ آن همخوان با N_1 نقطهٔ فضای نمونه یکنواخت، دومین نقطهٔ آن همخوان با N_2 نقطه، و غیره می‌باشد. عبارت

$$N_1 + N_2 + \dots + N_n$$

معادل با چیست؟ احتمالهای p_1، p_2، ... وابسته به نقاط اول، دوم، و غیره، فضای نمونهٔ غیر یکنواخت چه هستند؟ $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ چیست؟ حال رویدادی را در نظر بگیرید که چندین نقطهٔ فضای غیر یکنواخت، مثل i، j، k برای آن مساعد اند. در این صورت با استفاده از فضای نمونهٔ غیر یکنواخت و طبق تعریف احتمال p یک رویداد داریم $p = p_i + p_j + p_k$. این را برحسب Nها بنویسید و نشان دهید که اگر از موارد همشانس فضای یکنواخت هم استفاده می‌کردیم به همین نتیجه می‌رسیدیم. در صورت لزوم، به‌عنوان یک مثال خاص به مسألهٔ ۱۵ مراجعه کنید.

۱۷- دو تاس را می‌اندازیم. اگر بدانیم عدد روی تاس اول زوج است، و عدد روی تاس دوم کوچک‌تر از ۴ است، فضای نمونهٔ مناسبی بسازید و به سؤالهای زیر پاسخ دهید.

(الف) حاصل‌جمعهای ممکن و احتمال هر یک چقدر است؟

(ب) محتمل‌ترین حاصل‌جمع کدام است؟

(ج) احتمال اینکه حاصل‌جمع فرد باشد چیست؟

۱۸- آیا آنچه در زیر می‌بینید، فضاهای نمونهٔ غیر یکنواختِ درست، در انداختن دو تاس هستند؟ اگر چنین است، احتمالهای نقاط نمونهٔ داده شده را پیدا کنید. اگر نه، نشان دهید که چه چیزی غلط است. ***پیشنهاد:*** فضای نمونهٔ (۲-۴) را بازنویسی کنید و دور نواحی همخوان با نقاط فضاهای غیر یکنواختِ پیشنهادی، خط بکشید.

(الف) اولین تاس یک عدد زوج نشان بدهد.

اولین تاس یک عدد فرد نشان بدهد.

(ب) حاصل‌جمع دو عدد روی تاسها زوج باشد.

اولین تاس زوج، و دومین تاس فرد باشد.

اولین تاس فرد و دومین تاس زوج باشد.

(ج) اولین تاس عددی کمتر از یا مساوی با ۳ نشان دهد.

حداقل یکی از تاسها عددی بزرگ‌تر از ۳ نشان دهد.

۳- قضیه‌های احتمال

استفادهٔ مستقیم از تعریف احتمال برای محاسبهٔ احتمالها همیشه آسان نیست. طبق تعریف (۱-۲)، ما باید فضای نمونهٔ یکنواختی برای یک مسأله پیدا کنیم، یعنی مجموعه‌ای از همهٔ ***برآمدهای همشانس***، دو به دو ناسازگار یک آزمایش را به دست آوریم، و سپس تعیین کنیم که چند تا از اینها مساعد رویداد مربوطه اند. به همین ترتیب تعریف بخش ۲ هم به فضای نمونه، یعنی سیاهه‌ای از برآمدهای ممکن و احتمالهای آنها نیاز دارد. این سیاهه ممکن است خیلی طولانی باشد، لذا می‌خواهیم قضایایی را بررسی کنیم که کارمان راکمتر کند.

فرض کنید در جعبه‌ای ۱۰ مهره سفید و ۵ مهره سیاه وجود دارد. از یک جعبه یک مهره را به طور "کتره‌ای" (این به معنی آن است که هر مهره با احتمال $\frac{۱}{۱۵}$ از جعبه خارج می‌شود)، خارج کرده، و سپس بدون جایگزین کردن آن مهره دیگری از جعبه خارج می‌کنیم. احتمال اینکه مهره اول سفید باشد $\frac{۱۰}{۱۵}$ (۱۰ تا از ۱۵ مهره جعبه سفید است) است. احتمال اینکه ***بعد از آن*** توپ

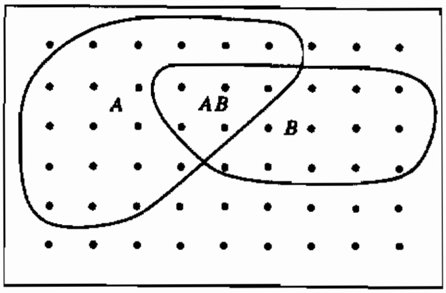
سیاهی بیرون آید $\frac{۵}{۱۴}$ است زیرا ۱۴ مهره در جعبه باقی مانده و ۵ تای آن سیاه است. می‌خواهیم نشان دهیم که احتمال اینکه دفعهٔ اول مهره سفید و (بدون جایگزین کردن آن) دفعهٔ دوم مهره سیاه بیرون آوریم برابر $\frac{۵}{۱۴} \times \frac{۱۰}{۱۵}$ است. استدلال ما با استفاده از فضای نمونهٔ یکنواخت چنین است: فرض کنید که مهره‌ها از ۱ تا ۱۵ شماره‌گذاری شده باشد. نماد (۳ ، ۵) به معنی آن است که مهره اول شمارهٔ ۵ و مهره دوم شمارهٔ ۳ است. در این زوج اعداد (مختلف) که بیانگر بیرون آوردن پیاپی دو مهره است، ۱۵ انتخاب برای عدد اول و ۱۴ انتخاب برای عدد دوم وجود دارد (مهره اول جایگزین نمی‌شود). بنابراین فضای نمونهٔ یکنواختی که نمایشگر تمام رویدادهای ممکن است یک آرایهٔ مستطیلی از نمادها (شبیه ۳ ، ۵) با ۱۵ ستون (برای ۱۵ انتخاب مختلف عدد اول) و ۱۴ سطر (مربوط به ۱۴ انتخاب مختلف عدد دوم) است. بنابراین در فضای نمونه ۱۴ × ۱۵ نقطه وجود دارد [همچنین رجوع کنید به (۱-۴)]. چند تا از این نقاط مربوط به این است که مهره اول سفید و مهره دوم سیاه باشد؟ ده عدد مربوط به مهره‌های سفید و ۵ تای دیگر مربوط به مهره‌های سیاه است. بنابراین برای پیدا کردن نقطه‌ای از این فضا که مربوط به در آمدن مهره سفید در سعی اول، و مهره سیاه در سعی دوم است، عدد اول را به ۱۰ راه مختلف می‌توانیم انتخاب کنیم، و سپس عدد دوم را به ۵ راه. پس این نقطهٔ نمونه را به ۵ × ۱۰ راه مختلف می‌توان انتخاب کرد؛ یعنی، ۵ × ۱۰ نقطه از فضای نمونه، مساعد خواستهٔ ماست. در این صورت طبق تعریف (۱-۲)، و همانطور که ادعا کردیم، احتمال مطلوب، $\frac{۱۰ \times ۵}{۱۵ \times ۱۴}$ است.

اکنون قضیه‌ای را که در بالا نمایش دادیم به طور عمومی بیان می‌کنیم. ما علاقه‌مند به دو رویداد پیاپی A و B هستیم. فرض کنید $P(A)$ احتمال وقوع A، $P(AB)$ احتمال وقوع هر دو رویداد A و B ، و $P_A(B)$ احتمال وقوع B، در صورتی که بدانیم A رخ داده است، باشد. در این صورت داریم

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) \qquad (۱-۳)$$

یا به صورت توصیفی، احتمال رویداد مرکّب "A و B" برابر حاصل‌ضرب احتمال وقوع A در احتمال وقوع B است به شرط اینکه A رخ داده باشد. با استفاده از ایدهٔ فضای نمونهٔ یکنواخت، می‌توان (۳-۱) را به همان روش مسألهٔ مهره‌ها ثابت کرد. فرض کنید N ، تعداد کل نقاط

در یک فضای نمونهٔ یکنواخت، $N(A)$ ، $N(B)$، به ترتیب، تعداد نقاط مربوط به رویدادهای A و B، و $N(AB)$ تعداد نقاط مربوط به رویداد مرکب A و B باشد. مرتب کردن فضای نمونه (شکل ۳-۱) به صورت یک آرایهٔ N نقطه‌ای [با فضای نمونهٔ (۲-۴) مقایسه کنید] مفید خواهد بود. در این صورت می‌توان دور تمام نقاطی که مربوط به A هستند خط کشید و آنرا ناحیهٔ A نامید؛ این ناحیه شامل $N(A)$ نقطه است. به همین روش می‌توان دور $N(B)$ نقطه را که مربوط به وقوع B هستند خط کشید و آنرا ناحیهٔ B نامید. ناحیهٔ متداخل (همپوش) را AB می‌نامیم؛ این ناحیه، بخشی از A و B، هر دو، است و شامل $N(AB)$ نقطه است که مربوط به رویداد مرکب A و B می‌باشند. پس طبق تعریف (۱-۲) داریم



$$P(AB) = \frac{N(AB)}{N}$$
$$P(A) = \frac{N(A)}{N} \qquad (۲-۳)$$
$$P_A(B) = \frac{N(AB)}{N(A)}$$

شکل ۳-۱

شاید آخرین فرمول که مربوط به $P_A(B)$ است نیاز به کمی توضیح داشته باشد. از بخش ۲ ، مثال ۱ ، فضای نمونهٔ یکنواخت (۲-۳) را برای سه پرتاب یک سکه به یاد بیاورید. برای به دست آوردن احتمال اینکه نتیجهٔ هر سه پرتاب خط باشد، به شرط آنکه بدانیم حداقل یک خط داریم، فضای نمونه را به هفت نقطه کاهش دادیم (با حذف hhh). سپس فرض کردیم که هفت نقطه دارای احتمال $\frac{1}{7}$ است. (این فرض بیشتر یا کمتر از فرض اولیه‌ای که در آن هر هشت نقطه هم‌احتمال هستند، "بدیهی" نیست؛ این فرضی است اضافی که در غیاب هر نوع اطلاعی که خلاف آنرا ثابت کند اتخاذ می‌کنیم؛ رجوع کنید به آخر بخش ۲). حال بگذارید به آخرین معادلهٔ (۳-۲) توجه کنیم. $N(A)$ تعداد نقاط نمونهٔ مربوط به رویداد A است؛ N نقطهٔ فضای نمونهٔ اولیه همه احتمالهای مساوی داشتند بنابراین حالا فرض می‌کنیم که وقتی تمام نقاط مربوط به

عدد وقوع A را حذف کنیم، $N(A)$ نقطهٔ باقی مانده نیز همشانس هستند. بنابراین فضای نمونهٔ جدیدی مشتمل بر $N(A)$ نقطه داریم. تعداد $N(AB)$ نقطه از این $N(A)$ نقطه، مربوط به رویداد B هستند (با فرض رخ دادن A). بنابراین طبق (۱-۲)، احتمال "B اگر A" برابر $N(AB)/N(A)$ است. به این ترتیب، از سه معادلهٔ (۳-۲)، معادلهٔ (۳-۱) را نتیجه می‌گیریم. به همین روش می‌توان نشان داد که

$$P(BA) = P(B) \cdot P_B(A) = P(AB) \qquad (۳-۳)$$

(رجوع کنید به مسأله ۱). [رابطهٔ (۳-۱) را با فرض یک فضای نمونهٔ یکنواخت ثابت کرده‌ایم. این فرض، ضروری نیست؛ صرفنظر از اینکه بتوانیم یک فضای نمونهٔ یکنواخت بسازیم یا نتوانیم، (۳-۱) صحیح است؛ رجوع کنید به مسألهٔ ۲.]

حالا فرض کنید، در مثال ۵ مهره سیاه و ۱۰ مهره سفید درون جعبه، اول یک مهره بیرون آوریم و آنرا به داخل جعبه برگردانیم و سپس مهره دوم را بیرون آوریم. در این صورت احتمال بیرون آوردن یک مهره سیاه در دفعه دوم $\frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۱۵}$ است؛ این دقیقاً همان نتیجه‌ای است که اگر مهره اول را بیرون نیاورده و جایگزین نمی‌کردیم، حاصل می‌شد. طبق نمادگذاری آخرین بند بالا داریم

$$P(B) = P_A(B) \qquad (۴-۳)$$ A و B مستقل‌اند.

وقتی (۳-۴) درست باشد، می‌گوییم B **مستقل** از A است و (۳-۱) به صورت زیر در خواهد آمد

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B) \qquad (۵-۳)}$$ A و B مستقل‌اند.

به علت تقارن (۳-۵) به سادگی می‌توان گفت که اگر (۳-۵) برقرار باشد، A و B مستقل‌اند. (همچنین رجوع کنید به مسألهٔ ۷).

مثال ۱ – (الف) در مسألهٔ سه پرتاب یک سکه، احتمال اینکه هر سه پرتاب شیر بیاید چیست؟ در بخش ۲ با ملاحظهٔ اینکه یکی از هشت نقطهٔ فضای نمونه مربوط به سه شیر بود،

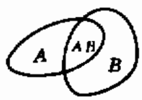
احتمال مربوطه را برابر $p = \frac{۱}{۸}$ پیدا کردیم. حال مسأله را راحت‌تر حل می‌کنیم، احتمال شیر در هر پرتاب $\frac{۱}{۲}$ است و پرتابها مستقل‌اند بنابراین

$$p = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$$

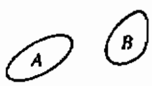
(ب) اگر احتمال اینرا بخواهیم که در ده بار پرتاب یک سکه همیشه شیر بیاید، فضای نمونه خیلی بدقواره خواهد شد؛ به جای استفاده از فضای نمونه، می‌توان گفت چون پرتابها مستقل از هم اند، احتمال مورد نظر برابر $p = (\frac{۱}{۸})^{۱۰}$ است.

(ج) برای پیدا کردن احتمال اینکه در ده پرتاب، حداقل یک خط داشته باشیم، ملاحظه می‌کنیم که این رویداد مربوط به همهٔ نقاط فضای نمونه جز نقطهٔ "همه شیر" است. چون جمع احتمالهای تمام نقاط فضای نمونه برابر ۱ است، احتمال مورد نظر برابر $۱ - (\frac{۱}{۲})^{۱۰}$ است.

در شکل (۳-۱) یا شکل (۳-۲) ناحیهٔ AB مربوط به وقوع هر دو رویداد A و B است. تمام ناحیهٔ متشکل از نقاط A یا B یا هر دو، مربوط به وقوع A یا B یا هر دو است. احتمال وقوع هر دو رویداد A و B را به صورت $P(AB)$ می‌نویسیم.



شکل ۳-۲



شکل ۳-۳

در این صورت می‌توان ثابت کرد که

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad (۶-۳)$$

برای پی بردن به درستی این رابطه، شکل ۳-۲ را در نظر بگیرید. برای پیدا کردن $P(A+B)$، احتمالهای تمام نقاط نمونه را که در ناحیهٔ مربوط به A یا B یا هر دو هستند، با هم جمع می‌کنیم. ولی اگر $P(A)$ و $P(B)$ را با هم جمع کنیم، احتمالهای نقاط ناحیهٔ AB را دوبار به حساب آورده‌ایم. [یک بار در $P(A)$ و یک بار در $P(B)$] بنابراین باید $P(AB)$، که حاصل‌جمع احتمالهای تمام نقاط واقع در AB است، را کم کنیم، و این درست چیزی است که

(۳-۶) بیان می‌کند.

اگر نمودار فضای نمونه به شکل ۳-۳ باشد، به طوری که $P(AB) = ۰$، می‌گوییم A و B دو به دو ناسازگار اند. در این صورت (۳-۶) به شکل زیر در می‌آید

(۳-۷)	$P(A + B) = P(A) + P(B)$ $\quad A$ و B دو به دو ناسازگار اند.

مثال ۲ – دو دانشجو به طور جداگانه روی مسأله‌ای کار می‌کنند. اگر احتمال حل کردن مسأله توسط دانشجوی اول برابر $\frac{۱}{۲}$ و توسط دانشجوی دوم $\frac{۳}{۴}$ باشد، احتمال اینکه حداقل یکی از آنها مسأله را حل کند چقدر است؟

فرض کنید A رویداد "موفقیت دانشجوی اول" و B رویداد "موفقیت دانشجوی دوم" باشد در این صورت $P(AB) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۸}$ (فرض کرده‌ایم که A و B مستقل‌اند، چرا که دانشجویان جداگانه کار می‌کنند). پس طبق (۳-۶)، احتمال اینکه یکی یا هر دوی آنها مسأله را حل کنند عبارت است از

$$P(A + B) = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۸} = \frac{۷}{۸}$$

احتمال شرطی، فرمول بیز اگر احتمال وقوع B را با شرط وقوع A بخواهیم [یعنی $P_A(B)$]، اغلب اوقات پیدا کردن آن از رابطهٔ زیر مفید است:

(۳-۸)	$P_A(B) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

معادلهٔ (۳-۸) را فرمول بیز می‌نامند (رجوع کنید به صفحهٔ ۹۱، کتاب گلدبرگ). در هر مسأله احتمال شرطی که جواب آن فوراً آشکار نیست، اول باید دید که آیا می‌توان $P(A)$ و $P(AB)$ را به سادگی پیدا کرد یا نه؛ اگر بتوان، در آن صورت $P_A(B)$ از معادلهٔ (۳-۸) به دست می‌آید.

مثال ۳ – معمولاً در ابتدای بعضی دروس، یک امتحان مقدماتی از دانشجویان گرفته می‌شود.

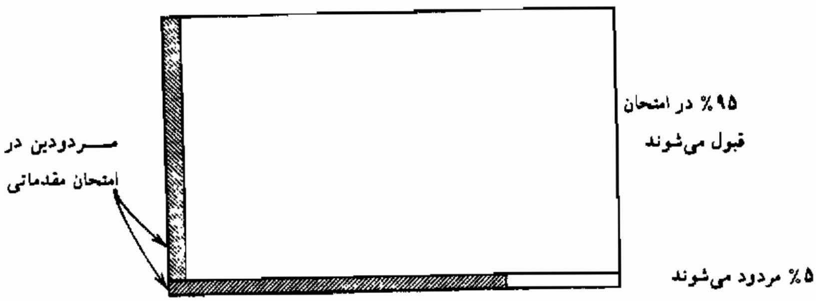
داده‌های زیر پس از چند سال جمع‌آوری شده‌اند.

۹۵٪ دانشجویان در امتحان قبول و ۵٪ مردود شده‌اند.

۹۶٪ دانشجویانی که در امتحان نهایی درس قبول شده‌اند در امتحان مقدماتی هم قبول شده‌اند.

۲۵٪ دانشجویانی که در امتحان نهایی مردود شده‌اند در امتحان مقدماتی قبول شده‌اند.

احتمال اینکه دانشجویی در امتحان مقدماتی مردود شود و امتحان نهایی را با موفقیت بگذراند چقدر است؟



شکل ۳-۴

فرض کنید A رویداد "مردودی امتحان مقدماتی" و B رویداد "قبولی نهایی" باشد. احتمالی که ما می‌خواهیم پیدا کنیم $P_A(B)$ در فرمول (۳-۸) است، بنابراین به $P(AB)$ و $P(A)$ نیاز داریم. $P(AB)$ احتمال آن است که دانشجو در امتحان مقدماتی مردود شود و در امتحان نهایی قبول شود. این عبارت است از $P(AB) =$ (۰٫۹۵)(۰٫۰۴) = ۰٫۰۳۸ (رجوع کنید به شکل ۳-۴ ، ۹۵٪ دانشجویان در امتحان نهایی قبول می‌شوند که از اینها ۴٪ در امتحان مقدماتی رد شده‌اند.) ما همچنین به $P(A)$، احتمال آنکه دانشجویی در امتحان مقدماتی رد شود، نیز نیاز داریم؛ این رویداد مربوط به سطح هاشور خورده در شکل ۳-۴ است. بنابراین $P(A)$ مجموع احتمالهای دو رویداد "قبولی نهایی بعد از رد شدن در امتحان مقدماتی" و "رد شدن نهایی بعد از رد شدن در امتحان مقدماتی" است. بنابراین

(رجوع کنید به شکل ۳-۴ ، از ۹۵٪ دانشجویانی که در امتحان نهایی قبول شده‌اند، ۴٪ در امتحان مقدماتی رد شده‌اند، از ۵٪ دانشجویانی که در امتحان نهایی رد شده‌اند ۷۵٪ در امتحان مقدماتی رد شده‌اند، زیرا می‌دانیم ۲۵٪ آنها قبول شده‌اند.) طبق (۳-۸) داریم

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{۰٫۰۳۸}{۰٫۰۷۵۵} = ٪۵۰$$

یعنی، نیمی از دانشجویانی که در امتحان مقدماتی مردود می‌شوند در امتحان نهایی قبول می‌گردند.

توجه کنید که در شکل ۳-۴ ، سطح هاشور خورده مربوط به رویداد A (مردودی در امتحان مقدماتی) است. ما علاقه‌مند به رویداد B (قبولی نهایی) به شرط وقوع رویداد A هستیم. بنابراین به جای فضای نمونهٔ اولیهٔ (تمام مستطیل شکل ۳-۴) فضای نمونهٔ کوچک‌تری (سطح هاشور خوردهٔ شکل ۳-۴) را در نظر می‌گیریم. سپس می‌خواهیم بدانیم چه قسمتی از این فضای نمونه مربوط به رویداد B (قبولی نهایی) است. این کسر برابر $P(AB)/P(A)$ است که حساب کردیم.

مسائل، بخش ۳

۱- (الف) یک فضای نمونه برای ۵ مهره سیاه و ۱۰ مهره سفید درون جعبه که در بالا مورد بحث قرار گرفت بسازید، با این فرض که اولین مهره را به داخل جعبه باز نگردانیم. **پیشنهاد:** مهره‌های سیاه را از ۱ تا ۵ و مهره‌های سفید را از ۶ تا ۱۵ شماره‌گذاری کنید. در این صورت نقاط نمونه آرایه‌ای شبیه (۲-۴) تشکیل می‌دهند ولی مثلاً نقطهٔ ۳، ۳ مجاز نیست. (چرا؟ چه نقاط دیگری مجاز نیستند.) شاید مفید باشد که اعداد مربوط به مهره‌های سیاه و سفید را با رنگهای مختلف بنویسید.

(ب) فرض کنید A ، رویداد "سفید بودن اولین توپ" و B، رویداد "سیاه بودن دومین توپ" باشند. دور آن قسمت از فضای نمونه راکه مساعد A است خط بکشید و آنرا ناحیهٔ A بنامید و به همین ترتیب ناحیهٔ B را هم مشخص کنید. تعداد نقاط ناحیه‌های A و B را بشمارید؛ این اعداد $N(A)$ و $N(B)$ هستند. ناحیهٔ AB، ناحیه‌ای است که هم در A باشد و هم در B؛ تعداد نقاط این ناحیه $N(AB)$ است. با استفاده از اعدادی

که پیدا کرده‌اید، (۳-۲) و (۳-۱) را اثبات کنید. همچنین $P(B)$ و $P_B(A)$ را پیدا کرده، (۳-۲) را به طور عددی ثابت کنید.

(ج) با استفاده از (۳-۱) و ایده‌های قسمت (ب)، رابطهٔ (۳-۳) را به طور کلی ثابت کنید.

۲- رابطهٔ (۳-۱) را برای یک فضای نمونهٔ غیر یکنواخت ثابت کنید. ***راهنمایی.*** به یاد داشته باشید که احتمال یک رویداد برابر حاصل‌جمع احتمالهای نقاط مساعد آن رویداد در فضای نمونه است. با استفاده از شکل ۳-۱ ، فرض کنید نقاطی که در A هستند ولی در AB نیستند دارای احتمالهای $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$، ... ، p_n ، و نقاط واقع در AB دارای احتمالهای $p_{n+۱}$، $p_{n+۲}$، ... ، p_{n+k}، و نقاطی که در B هستند اما در AB نیستند، دارای احتمالهای $p_{n+k+۱}$، $p_{n+k+۲}$، ... ، p_{n+k+l} باشند. هر یک از احتمالهای (۳-۱) را برحسب pها پیدا کنید و نشان دهید که به یک اتحاد می‌رسید.

۳- احتمال پیدا کردنِ ترتیب $hhhttt$ در شش بار پرتاب یک سکه چیست؟ اگر بدانید که سه سکه اول شیر آمده‌اند، احتمال آنکه سه تای آخری خط بیایند چقدر است؟ اگر اطلاعی در مورد سه پرتاب اول نداشته باشید، احتمال آنکه سه تای آخری خط باشند چقدر است؟

۴- (الف) یک سکهٔ بی‌ریخت، با احتمال $\frac{۲}{۳}$ شیر و با احتمال $\frac{۱}{۳}$، خط می‌آید. احتمال پیدا کردن hh ، ht ، th ، tt را در دو بار پرتاب این سکه پیدا کنید. فضای نمونه و احتمالهای مربوطه را مشخص کنید. آیا مجموع احتمالها آنطور که باید برابر واحد می‌شود؟ احتمال حداقل یک شیر چقدر است؟ احتمال دو شیر چقدر است به شرط اینکه بدانید حداقل یک شیر وجود دارد؟

(ب) برای سکهٔ فوق، فضای نمونهٔ سه پرتاب را مشخص کنید و احتمالهای مربوطه را پیدا کنید. با استفاده از این اطلاعات به مسألهٔ ۲-۱۲ جواب دهید.

۵- احتمال اینکه عدد n، $۱ \le n \le ۹۹$ هم به ۶ و هم به ۱۰ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟ احتمال اینکه عدد بالا به ۶ یا به ۱۰ یا به هر دو بخش‌پذیر باشد چیست؟

۶- یک ورق از یک دست ورق بُر خورده می‌کشیم. احتمال اینکه این ورق یا شاه باشد و یا گشنیز چیست؟ احتمال اینکه ورق شاهِ گشنیز باشد چیست؟

۷- (الف) دقت کنید که در (۳-۴) فرض شده است $P(A) \neq ۰$ زیرا اگر $P(A) = ۰$ باشد $P_A(B)$ بی‌معنی است. با فرض $P(A) \neq ۰$ و $P(B) \neq ۰$، نشان دهید اگر (۳-۴)

درست باشد، در آن صورت $P(A) = P_B(A)$؛ یعنی اگر B مستقل از A باشد، در آن صورت A مستقل از B خواهد بود. اگر $P(A)$ یا $P(B)$ صفر باشد، در آن صورت (۳-۵) را برای تعریف استقلالِ رویدادها به کار می‌بریم.

(ب) چه موقع رویداد E مستقل از خودش است. چه موقع E مستقل از "عدم E" است؟

۸- نشان دهید

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

راهنمایی: با شروع از شکل ۳-۲ ، ناحیهٔ C را طوری رسم کنید که بعضی نقاط A، B، و AB را شامل شود.

۹- دو ورق از یکْم دست ورق بُر خورده می‌کشیم و بدون اینکه به آنها نگاه کنیم آنها را کنار می‌گذاریم. سپس یک ورق دیگر می‌کشیم. نشان دهید که احتمال اینکه ورق سوم پیک باشد $\frac{1}{4}$، یعنی درست مثل احتمال ورق اول است. *راهنمایی:* تمام امکانهای (دو به دو ناسازگار) را بررسی کنید (دو ورق کنارگذاشته شده پیک باشند، ورق سوم پیک باشد یا نباشد، و غیره).

۱۰- (الف) سه نامهٔ تایپ شده و پاکتهای آنها روی میز قرار دارند. اگر شخصی نامه‌ها را به طور کتره‌ای داخل پاکتها قرار دهد (یک نامه در هر پاکت)، احتمال اینکه هر نامه در پاکت مربوط به خودش قرار گیرد چقدر است؟ پاکتها را A ، B ، C و نامه‌های همخوان را a ، b ، c نامگذاری کنید و فضای نمونهٔ مربوطه را بسازید. توجه کنید که "a در C، b در B، c در A" یک نقطه در فضای نمونه است.

(ب) احتمال اینکه حداقل یک نامه در پاکت خودش قرار گیرد چقدر است؟ *راهنمایی:* احتمال اینکه هیچ نامه‌ای در پاکت خودش قرار نگیرد چقدر است؟

(ج) فرض کنید A به معنای آن باشد که a در پاکت خودش قرار گیرد، و الخ. احتمال $P(A)$ که a در A قرار گیرد چقدر است؟ $P(B)$ و $P(C)$ را پیدا کنید. احتمال $P(A+B)$ که a یا b یا هر دو در پاکتهایشان باشند و احتمال $P(AB)$ که هر دو در پاکتهایشان قرار گیرند را پیدا کنید. معادلهٔ (۳-۶) را ثابت کنید.

۱۱- هنگام پرداخت یک قبض از طریق پست، می‌خواهیم قبض (که نشانی برگشت روی آن چاپ شده است) و چک پرداختی را در یک پاکت پنجره‌دار طوری قرار دهیم که آدرس دقیقاً در داخل پنجره قرار گیرد. اگر چک و قبض را به طور کتره‌ای در پاکت قرار دهیم، احتمال

اینکه نشانی به درستی در پنجره دیده شود چقدر است؟

۱۲- (الف) یک تاس مخدوش دارای احتمالهای $\frac{۱}{۲۱}$ ، $\frac{۲}{۲۱}$ ، $\frac{۳}{۲۱}$ ، $\frac{۴}{۲۱}$ ، $\frac{۵}{۲۱}$ ، $\frac{۶}{۲۱}$ برای نشان دادن اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ است. احتمال اینکه دو بار پیاپی ۳ بیاید چقدر است؟

(ب) احتمال اینکه تاس قسمت (الف)، بار اول ۴ بیاید و بار دوم ۴ نیاید چقدر است؟

(ج) اگر دو تاس قسمت (الف) را دو بار بیندازیم، و بدانیم که حاصل‌جمع اعداد دو تاس بزرگ‌تر از ۱۰ است، احتمال اینکه هر دو ۵ باشند چقدر است؟

(د) تاس مخدوش قسمت (الف) را چند بار بیندازیم تا احتمال آمدن ۱ بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۲}$ شود؟

(هـ) تاس قسمت (الف) را دو بار می‌اندازیم. احتمال اینکه عدد روی تاس، در بار اول زوج، و در بار دوم بزرگ‌تر از ۴ باشد چقدر است؟

۱۳- (الف) یک ماشین سکه‌ای فروش شکلات خراب است. احتمال گرفتن شکلات از این ماشین (با برگشت، یا بدون برگشت سکه) برابر $\frac{۱}{۲}$، احتمال برگشت سکه (با شکلات یا بدون شکلات) برابر $\frac{۱}{۳}$، و احتمال توأم برگشت سکه و گرفتن شکلات برابر $\frac{۱}{۱۲}$ است. احتمال آنکه نه سکه برگردد و نه شکلات بیرون بیاید چقدر است؟ **پیشنهاد**: یک نمودار هندسی مطابق شکل ۳-۱ رسم و ناحیه‌های نمایشگر امکانهای مختلف و احتمالهای آنها را مشخص کنید؛ سپس یک فضای نمونهٔ چهار - نقطه‌ای و احتمالهای مربوط به نقاط را بسازید.

(ب) فرض کنید یک سکه دیگر وارد ماشین شکلات قسمت (الف) بکنیم. فضای نمونهٔ ۱۶ نقطه‌ای مربوط به پیامدهای ممکن دو بار اقدام به خرید شکلات را ایجاد، و احتمال به دست آوردن دو شکلات (بدون برگشت هیچ پولی) را پیدا کنید؛ احتمال به دست نیاوردن شکلات و از دست دادن پول، در هر نوبت چقدر است؟ احتمال اینکه در هر دو نوبت فقط سکه‌ها برگردند چقدر است؟

۱۴- یک بازیکن بسکتبال در هر ۴ پرتاب، ۳ گُل می‌زند. چند بار باید مهره را پرتاب کند تا احتمالِ حداقل ۱ گل، بزرگ‌تر از ۹۹ر۰ باشد؟

۱۵- با استفاده از فرمول بیز (۳-۸)، این مسائل ساده را که قبلاً با استفاده از فضای کاهش یافته حل شده‌اند، حل کنید.

(الف) در یک خانوادهٔ دارای ۲ فرزند، اگر یکی از بچه‌ها دختر باشد، احتمال دختر بودن هر

دو فرزند، چقدر است؟

(ب) اگر بدانیم که در ۳ پرتاب ۱ سکه، حداقل یک بار شیر می‌آید، احتمال اینکه در هر سه نوبت شیر بیاید چقدر است؟

۱۶- فرض کنید ۳ سکهٔ ۵ ریالی و ۴ سکهٔ ۱۰ ریالی در جیب راست و ۲ سکهٔ ۵ ریالی و ۱ سکهٔ ۲۰ ریالی در جیب چپتان دارید. به طور کتره‌ای، دست در یکی از جیبها برده و از داخل آن یک سکه به طور کتره‌ای بیرون می‌آورید. اگر این سکه یک ۵ ریالی باشد احتمال اینکه از جیب راستتان آمده باشد چقدر است؟

۱۷- (الف) در یک جعبه ۳ مهره قرمز و ۵ مهره سیاه و در جعبه دیگر ۶ مهره قرمز و ۴ مهره سفید موجود است. اگر جعبه‌ای را به طور کتره‌ای انتخاب کنیم و از آن به‌طور کتره‌ای توپی بیرون آوریم با چه احتمالی این مهره قرمز خواهد بود؟ با چه احتمالی این مهره سفید خواهد بود؟ با چه احتمالی سفید یا قرمز خواهد بود؟

(ب) فرض کنید مهره اول قرمز باشد و بدون برگرداندن آن به جعبه مهره دیگری انتخاب شود. احتمال اینکه مهره دوم هم قرمز باشد چیست؟

(ج) اگر هر دو مهره قرمز باشند احتمال اینکه از یک جعبه باشند چقدر است؟

۱۸- از یک دست ورق بُر خورده، ۲ ورق به طور کتره‌ای می‌کشیم.

(الف) احتمال اینکه حداقل یکی از آنها دل باشد چقدر است؟

(ب) اگر بدانیم که حداقل یکی از ورقها دل است، احتمال اینکه هر دو دل باشند چیست؟

۱۹- فرض کنید بدانیم که ۱٪ افراد جامعه دارای سرطان خاصی هستند. همچنین می‌دانیم که نتیجهٔ آزمایش پزشکی این نوع سرطان روی کسانی که مبتلا به آن هستند با احتمال ۹۹٪ مثبت است و روی کسانی که مبتلا به آن نیستند نیز با احتمال ۲٪ مثبت می‌باشد. احتمال اینکه شخصی که نتیجهٔ آزمایشش مثبت است مبتلا به سرطان باشد چقدر است؟

۲۰- دو نوع ترانزیستور (مثلاً N و P) را در دو جعبه نگهداری می‌کنیم. می‌دانیم که در یک جعبه ۶ ترانزیستور نوع N و در جعبهٔ دیگر ۲ ترانزیستور نوع N و ۳ ترانزیستور نوع P وجود دارد، اما جعبه‌ها را هم نمی‌توان از هم تمیز داد. جعبه‌ای را به طور کتره‌ای انتخاب می‌کنیم و ترانزیستوری از آن برمی‌داریم، ملاحظه می‌کنیم که این ترانزیستور از نوع N است؛ احتمال اینکه ترانزیستور مزبور از جعبهٔ با ۶ ترانزیستور نوع N آمده باشد چقدر

است؟ احتمال اینکه از جعبهٔ دیگر آمده باشد چقدر است؟ اگر ترانزیستور دیگری از همان جعبه برداریم، احتمال اینکه دومی هم از نوع N باشد چیست؟

۲۱- دو نفر به نوبت یک جفت سکه را پرتاب می‌کنند؛ اولین کسی که دو شیر یا دو خط بیاورد برنده است. احتمال برنده شدن نفر اول و نفر دوم چیست؟ ***راهنمایی:*** اگر چه بینهایت امکان وجود دارد (برنده شدن در پرتاب اول، دوم، سوم، و غیره)، اما حاصل‌جمع احتمالها یک رشتهٔ هندسی است که می‌توان آنرا حساب کرد، در صورت لزوم رجوع کنید به فصل ۱ .

۲۲- مسألهٔ ۲۱ را برای حالتی که بازیکنها سعی کنند در انداختن دو تاس، جفت بیاورند (یعنی، دو تاس یک عدد را نشان بدهند)، تکرار کنید.

۲۳- یک سکهٔ ضخیم با احتمال $\frac{۳}{۷}$، شیر، و با احتمال، $\frac{۳}{۷}$، خط می‌آید، و با احتمال $\frac{۱}{۷}$ روی لبه‌اش می‌ایستد! نشان دهید که اگر به دفعات این سکه را پرتاب کِنیم، با احتمال ۱ بالاخره روی لبه‌اش خواهد ایستاد.

۴- روشهای شمارش

حال، کمی به حاشیه رفته و برخی ایده‌ها و فرمولهای محاسبهٔ احتمال را در مسائل پیچیده‌تر بررسی می‌کنیم.

بگذارید این سؤال را مطرح کنیم که چند عدد دو رقمی دارای دهگان ۵ یا ۷ و یکان ۳، ۴، یا ۶ هستند. اگر اعداد ممکن را به صورت یک مستطیل آرایش دهیم، جواب بدیهی خواهد شد.

۵۳	۵۴	۵۶
۷۳	۷۴	۷۶

که دو سطر، همخوان با دو امکان رقم دهگان، و سه ستون همخوان با سه امکان رقم یکان‌اند. این مثالی از ***اصل اساسی شمارش*** است.

(۴-۱) اگر کاری را بتوان به N_1 راه انجام داد، و بعد از آن کار دومی را بتوان به N_2 راه انجام داد، دو کار مزبور را به همان ترتیب ذکر شده می‌توان به N_1N_2 راه انجام داد. این را می‌توان به هر تعداد کار یکی پس از دیگری، اولی به N_1 و دومی به N_2 راه، سومی به N_3 راه، و الخ، تعمیم داد. تعداد کل ترتیبهایی که می‌توان این عمل را انجام داد برابر $N_1 N_2 N_3 \ldots$ خواهد بود.

حال یک مجموعه از n شیئ را که در یک ردیف قرار گرفته‌اند در نظر بگیرید؛ سؤال این است که به چند راه می‌توان آنها را کنار هم قرار داد. نتیجه را تعداد ***جایگشتهای n شیء، n به n*** می‌نامند، و به صورت ${}_nP_n$ یا $P(n ,n)$ یا P_n^n نمایش می‌دهند. برای پیدا کردن این عدد، فرض کنید n نفر را در یک ردیف روی n صندلی نشانده‌ایم. هر یک از نفرات را که بخواهیم می‌توانیم روی اولین صندلی بنشانیم، یعنی n امکان برای پر کردن صندلی اول وجود دارد. وقتی شخصی را برای صندلی اول انتخاب کردیم، $(n-۱)$ انتخاب برای صندلی دوم، $(n-۲)$ انتخاب برای صندلی سوم و الی آخر، وجود دارد. بنابراین، طبق اصل اساسی، $n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times۲\times۱=n!$ راه برای کنار هم قرار دادن n نفر در ردیف n صندلی داریم. تعداد جایگشتهای n شیئ، n به n، برابر است با

$$P(n,n)=n! \qquad (۲-۴)$$

حال فرض کنید که تعداد نفرات n، ولی تعداد صندلیها فقط r باشد که کوچک‌تر از n است و سؤال این است که به چند راه می‌توان گروههای r نفره را انتخاب کرده و آنها را روی r صندلی کنار هم نشاند. نتیجه را جایگشت n شیئ، r به r، می‌نامند و آنرا به صورت ${}_nP_r$ یا $P(n,r)$ یا P_r^n نمایش می‌دهند. با استدلالی مانند قبل، درمی‌یابیم که n راه برای پیدا کردن صندلی اول، $(n-۱)$ راه برای صندلی دوم و $(n-۲)$ راه برای صندلی سوم [توجه کنید که می‌توان این را به صورت $(n-۳+۱)$ نوشت]، و غیره، و بالأخره $(n-r+۱)$ راه برای صندلی rام وجود دارد. بنابراین برای جایگشت n شیئ، r به r، داریم

$$P(n,r)=n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)$$

که اگر آنرا در $(n-r)!$ ضرب و بر آن تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\boxed{P(n,r)=n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)\frac{(n-r)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!} \qquad (۳-۴)}$$

تا اینجا ما در مورد کنار هم قرار دادن اشیاء به ترتیبی معین صحبت می‌کرده‌ایم. حال فرض کنید، سؤال این باشد که از یک گروه n نفره، چند کمیتهٔ r نفره $(r\leq n)$ می‌توان انتخاب کرد. در اینجا ترتیب افراد در کمیته در نظر گرفته نمی‌شود؛ کمیتهٔ تشکیل شده از افراد A ، B ، C ،

همان کمیتهٔ تشکیل شده از افراد B ، A ، C است. تعداد چنین کمیته‌های r نفره را که می‌توان از n شخص انتخاب کرد **ترکیب** یا ***انتخاب*** n شیئ، r به r، می‌نامیم، و آنرا با $_nC_r$ یا $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم. برای پیدا کردن $C(n, r)$، به مسألهٔ انتخاب r نفر از n شخص و نشاندن آنها روی r صندلی برمی‌گردیم؛ دیدیم که تعداد راههایی که می‌توان این کار را کرد $P(n, r)$ است که طبق (۴-۳) داده می‌شود. برای انجام این کار ابتدا r نفر را از میان تعداد کل n نفر انتخاب می‌کنیم و سپس این r نفر را روی r صندلی کنار هم می‌نشانیم. انتخاب r نفر را به $C(n, r)$ راه مختلف می‌توان انجام داد (این همان عددی است که می‌خواهیم پیداکنیم)، و بعد از انتخاب r نفر، طبق (۴-۲) می‌توان آنها را به $P(n, r)$ راه روی r صندلی نشاند. طبق اصل اساسی (۴-۱)، تعداد کل راههای $P(n, r)$ انتخاب و نشاندن r نفر از میان n نفر، برابر حاصلضرب $C(n, r)\cdot P(r, r)$ است. بنابراین داریم

$$P(n, r) = C(n, r)\cdot P(r, r) \qquad (۴-۴)$$

با حل این معادله می‌توانیم $C(n, r)$ را که مطلوب است پیداکنیم. با جایگزین کردن مقادیر $P(r, r)$ و $P(n, r)$ از (۴-۳) و (۴-۲) در معادلهٔ (۴-۴) و حل آن برای $C(n, r)$، تعداد ترکیب‌های n شیئ، r به r را می‌توان پیدا کرد.

$$\boxed{C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!} = \binom{n}{r} \qquad (۴-۵)}$$

هر بار که r نفر را برای نشاندن روی صندلیها انتخاب می‌کنیم، $n - r$ نفر بدون صندلی می‌مانند. بنابراین دقیقاً تعداد ترکیب‌های n شیئ، $n - r$ به $n - r$، مساوی تعداد ترکیبهای n شیئ، r به r است.

$$C(n, n-r) = C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\, r!} \qquad (۴-۶)$$

(۴-۶) را می‌توان با جایگزین کردن r با $n - r$ در (۴-۵) هم پیدا کرد.

مثال ۱ – باشگاهی دارای ۵۰ عضو است. به چند راه می‌توان رئیس، معاون، منشی و

خزانه‌دار برای آن انتخاب کرد؟ به چند راه می‌توان یک کمیتهٔ چهار نفره از آن انتخاب کرد؟

برای انتخاب هیأت مدیره، نه تنها باید ۴ نفر را انتخاب کنیم، بلکه باید ببینیم چه کسی رئیس است و الخ؛ می‌توان تصور کرد که می‌خواهیم چهار نفر را روی صندلیهایی که برچسب رئیس، معاون، و غیره دارند، بنشانیم. بنابراین تعداد راههای انتخاب اعضای هیأت مدیره برابر است با

$$P(۵۰ ، ۴) = \frac{۵۰!}{(۵۰ - ۴)!} = \frac{۵۰!}{۴۶!} = ۵۰ \times ۴۹ \times ۴۸ \times ۴۷$$

با این همه، اعضای کمیته همه معادل هم هستند (از امکان اینکه یکی به عنوان رئیس انتخاب شود صرفنظر می‌کنیم)، بنابراین تعداد راههای انتخاب کمیتهٔ چهار نفره عبارت است

$$C(۵۰, ۴) = \frac{۵۰!}{۴۶!\ ۴!} = \frac{۵۰ \times ۴۹ \times ۴۸ \times ۴۷}{۲۴}$$

مثال ۲- ضریب جملهٔ $x^{۸}$ را در بسط $(۱ + x)^{۱۵}$ پیدا کنید.

ضرب زیر را در نظر بگیرید

$$(۱ + x)(۱ + x)(۱ + x) \cdots (۱ + x) \qquad \text{(با ۱۵ جمله)}$$

هر بار که ۱ های هفت تا از پرانتزها را در xهای هشت تا از پرانتزها ضرب کنیم، یک جملهٔ $x^{۸}$ پیدا می‌شود. تعداد راههای انتخاب ۸ پرانتز از ۱۵ پرانتز برابر است با

$$C(۱۵, ۸) = \frac{۱۵!}{۸!\ ۷!}$$

این ضریب مطلوب $x^{۸}$است.

با تعمیم این مثال، ملاحظه می‌شود که در بسط $(a + b)^n$، ضریب $a^{n-r}\, b^r$ برابر $C(n, r)$ است که معمولاً در بسط دوجمله‌ای به صورت $\binom{n}{r}$ نوشته می‌شود، بنابراین عبارتهای $C(n, r)$، ضرایب دوجمله‌ای اند، و می‌توان نوشت

$$(a + b)^n = \sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \qquad (۷-۴)$$

مثال ۳- یک مسألهٔ اساسی در مکانیک آماری این است: اگر N مهره و n جعبه، داشته باشیم به چند راه می‌توان مهره‌ها را در جعبه‌ها قرار داد به طوری که تعداد معینی مهره در هر جعبه قرار گیرد، مثلاً $N_۱$ مهره در جعبهٔ اول، $N_۲$ مهره در جعبهٔ دوم، $N_۳$ مهره در جعبه سوم،

و ... N_n مهره در جعبهٔ nام، و احتمال پیدا کردن چنین توزیعی چیست؟ در مکانیک آماری "مهره‌ها" ممکن است مولکول، الکترون، فوتون، و غیره باشند، و هر "جعبه" همخوان با گسترهٔ کوچکی از مقادیر مکان یا اندازه‌حرکت یک ذره است. مسائل زیاد دیگری را هم می‌توان با همین زبانِ قرار دادن مهره‌ها در جعبه‌ها بیان کرد. مثلاً در پرتاب یک سکه، می‌توانِ شیرها را جعبهٔ ۱ و خطها را جعبهٔ ۲ تلقی کرد؛ در انداختن یک تاس، ۶ "جعبه" وجود دارد. در قرار دادن نامه‌ها در پاکتها، نامه‌ها، توپ، و پاکتها جعبه می‌باشند. در تقسیم ورقهای بازی، ورقها، توپ، و بازیکنانی که آنها را دریافت می‌کنند جعبه‌اند. در آزمایش پراکندگی آلفا، ذرات آلفا، توپ، و جعبه‌ها مناطق صفحه آشکارسازند که ذرات آلفا بعد از پراکندگی به آنها بر می‌خورند. (همچنین رجوع کنید به مسائل ۱۴ و ۲۱ کتاب فِلِر صفحات ۱۰ و ۱۱).

اکنون مسألهٔ خاصی را حل کنیم که در آن ۱۵ مهره و ۶ جعبه داریم، و تعداد مهره‌هایی که می‌خواهیم در جعبه‌های مختلف قرار بدهیم عبارت اند از:

تعداد مهره‌ها:	۳	۱	۴	۲	۳	۲
شمارهٔ جعبه‌ها:	۱	۲	۳	۴	۵	۶

اول سؤال می‌کنیم که به چند راه می‌توان ۳ مهره را از میان ۱۵ مهره برای جعبه اول انتخاب کرد؛ این برابر $C(۱۵, ۳)$ است. (توجه کنید که ترتیب مهره‌ها در جعبه مهم نیست، این مثل مسألهٔ کمیته در مثال ۱ است). حال ۱۲ مهره برایمان باقی مانده‌است، که از آنها باید یکی را برای جعبهٔ ۲ انتخاب کنیم، این را به $C(۱۲, ۱)$ راه می‌توانیم انجام دهیم. سپس می‌توانیم از ۱۱ مهره باقی مانده، ۴ مهره برای جعبهٔ ۳ به $C(۱۱, ۴)$ راه، و ۲ مهره برای جعبهٔ ۴ به $C(۷, ۲)$ راه، ۳ مهره برای جعبهٔ ۵ به $C(۵, ۳)$ راه، و بالأخره، ۲ مهره برای جعبهٔ ۶ به $C(۲, ۲)$ راه (ثابت کنید که این برابر ۱ است)، انتخاب کنیم. طبق اصل اساسی، تعداد کل راههای قرار دادن تعداد مهره‌های مورد نظر برابر است با

$$C(۱۵, ۳)\cdot C(۱۲, ۱)\cdot C(۱۱, ۴)\cdot C(۷, ۲)\cdot C(۵, ۳)\cdot C(۲, ۲)$$

$$= \frac{۱۵!}{۳!\cdot ۱۲!}\cdot\frac{۱۲!}{۱!\cdot ۱۱!}\cdot\frac{۱۱!}{۴!\cdot ۷!}\cdot\frac{۷!}{۲!\cdot ۵!}\cdot\frac{۵!}{۳!\cdot ۲!}\cdot\frac{۲!}{۲!\cdot ۰!}$$

$$= \frac{۱۵!}{۳!\cdot ۱!\cdot ۴!\cdot ۲!\cdot ۳!\cdot ۲!}$$

(از فصلهای ۱ و ۱۱ به یاد آورید که $1 = !0$).

حال می‌خواهیم احتمال این توزیع خاص را بدانیم. فرض کنید مهره‌ها به طور "کتره‌ای" بین جعبه‌ها توزیع شده‌اند؛ منظور این است که هر مهره با احتمال $\frac{1}{6}$ می‌تواند در هر جعبه‌ای قرار بگیرید. یعنی، مهره اول را می‌توانیم در هر یک از ۶ جعبه قرار دهیم، مهره دوم را نیز همین طور و الی آخر. بنابراین طبق اصل اساسی، تعداد کل راههای توزیع ۱۵ مهره بین ۶ جعبه برابر $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times \dots \times 6 = 6^{15}$ است و فرض می‌کنیم که این توزیعها همشانس اند. به این ترتیب، احتمال اینکه، پس از توزیع کتره‌ای ۱۵ مهره در بین ۶ جعبه، ۳ مهره در جعبه ۱، ۱ مهره در جعبهٔ ۲، و غیره، باشد طبق رابطهٔ (۱-۲) (تعداد موارد مساعد تقسیم بر تعداد کل) برابر است با

$$\frac{15!}{3! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2!} \div 6^{15}$$

مثال ۴- در مثال ۳، فرض کردیم که تعداد 6^{15} راه ممکن توزیع ۱۵ مهره در ۶ جعبه، همشانس هستند. منطقی به نظر می‌رسد اگر فرض کنیم که برای قرار دادن هر مهره در جعبه‌ها از انداختن یک تاس استفاده کنیم؛ اگر تاس ۱ آمد مهره را در جعبهٔ ۱ قرار می‌دهیم و الی آخر. با این همه، می‌توان وضعیتهایی را در نظر گرفت که این روش و نتیجه قابل اعمال بر آنها نیست. مثلاً، فرض کنید بخواهیم نامه‌ها را در پاکتها قرار دهیم یا افراد را در صندلیها بنشانیم؛ در آن صورت منطقی است که قید کنیم در هر پاکت فقط یک نامه، و در هر صندلی نیز یک نفر قرار بگیرد، یعنی، یک مهره (یا هیچ توپ) در هر جعبه. مسألهٔ نشاندن ۴ نفر در ۶ صندلی، یعنی، قرار دادن ۴ مهره در ۶ جعبه، را در نظر بگیرید. اگر صندلیها را از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری کنیم و بگذاریم هر شخص با انداختن تاس صندلی خود را انتخاب کند، ممکن است دو نفر یا بیشتر یک صندلی را انتخاب کنند. در آن صورت، نتیجهٔ 6^4 (که از روشِ مثال ۳ در مورد مسألهٔ قرار دادن ۴ مهره در ۶ جعبه نتیجه می‌شود) در این مسأله قابل اعمال نیست. اما، بگذارید فضای نمونهٔ یکنواخت 6^4 نقطه را در نظر بگیریم و نقاطی از آنرا انتخاب کنیم که همخوان با قید اعمال شده از سوی ماست (یک مهره یا هیچ مهره در هر جعبه). فضای نمونهٔ جدید شامل $C(6, 4) \times 4!$ نقطه (تعداد راههای انتخاب ۴ صندلی برای اشغال، ضربدر تعداد ترتیبهای ۴ نفر در ۴ صندلی) است. چون این نقاط در فضای نمونهٔ اولیه (یکنواخت) همشانس بودند، حالا هم آنها را

همشانس در نظر می‌گیریم. حال بگذارید این سؤال را مطرح کنیم که احتمال اینکه ۲ صندلی اول بعد از نشستن ۴ نفر، خالی بمانند چقدر است؟ تعداد نقاط نمونهٔ همخوان با این رویداد !۴ (تعداد ترتیبهای ۴ نفر در ۴ صندلی آخر) است. بنابراین احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{۴!}{C(۶,\ ۴)\ \cdot\ ۴!} = \frac{۱}{C(۶,\ ۴)}$$

حال راه ساده‌تری برای حل مسائلی از این نوع مشاهده می‌کنیم. جملهٔ !۴ ، که در محاسبهٔ احتمال حذف می‌شود، تعداد باز-آرایشهای ۴ نفر در ۴ صندلی است. چون این تعداد برای هر مجموعهٔ ۴ تایی صندلی یکسان است، می‌توانیم همه نقاط فضای نمونهٔ مربوط به هر مجموعهٔ ۴ تایی صندلی معین را در هم ادغام کرده و فضای نمونهٔ کوچک‌تر (و هنوز یکنواخت) $C(۶,\ ۴)$ نقطه را داشته باشیم. حالا هر نقطه، همخوان با یک مجموعهٔ ۴ تایی صندلی اشغال شده است؛ کمیت $C(۶,\ ۴)$ صرفاً برابر تعداد راههای اشغال ۴ صندلی از میان ۶ صندلی است. احتمال اینکه وقتی ۴ نفر نشسته‌اند، ۲ صندلی اول خالی باشند برابر $۱/C(۶,\ ۴)$ است زیرا وقتی ۲ صندلی اول خالی‌اند، فقط یک راه برای اشغال ۴ صندلی وجود دارد.

راه مفید دیگر نگاه کردن به این مسأله، در نظر گرفتن یک مجموعه از ۴ مهره **مشابه** است که می‌خواهیم آنها را در ۶ جعبه قرار بدهیم. چون مهره‌ها مشابه‌اند، !۴ ترتیب ۴ توپ، در ۴ جعبهٔ مفروض، همه شبیه یکدیگرند. می‌توان گفت که تعداد $C(۶,\ ۴)$ ترتیب **تمیز پذیر** برای ۴ مهره مشابه، در ۶ جعبه وجود دارد (در هر جعبه یک مهره یا هیچ توپ). چون تمام این ترتیبها همشانس هستند، احتمال هر ترتیب (مثلاً، امکان خالی بودن دو جعبهٔ اول) برابر $۱/C(۶,\ ۴)$ است که قبلاً هم پیدا کرده بودیم.

مثال ۵– در مثال ۴ دیدیم که چه مهره‌ها را تمیز پذیر در نظر بگیریم و چه تمیز ناپذیر، احتمال خالی ماندن ۲ جعبهٔ خاص یکی است. علت این نتیجه آن بود که ترتیبهای تمیز پذیر مجاز، همشانس بودند. بدون قید یک مهره یا هیچ مهره در هر جعبه، همهٔ ترتیبهای تمیز پذیر طبق مثالهای ۳ و ۴ هم احتمال نخواهند بود. مثلاً احتمال آنکه همهٔ مهره‌ها در جعبهٔ اول باشند برابر $۱/۶^۴$ است؛ این را با احتمال آنکه دو جعبهٔ اول خالی باشند و یک مهره در هر یک از چهار جعبهٔ دیگر باشد، که برابر $۴!\ \div\ ۶^۴ = \frac{۱}{۵۴}$ است، مقایسه کنید. دیده می‌شود که ترتیبهای

متمرکز (تمام یا چندین مهره در یک جعبه) از ترتیبهای یکنواخت‌تر احتمال کمتری دارند.

حال می‌خواهیم وضعیتی را در نظر بگیریم که **تمام** ترتیبهای تمیز پذیر، هم احتمال **هستند.** فرض کنید که ۶ جعبه عبارت‌اند از ۶ نیمکت واقع در یک اتاق انتظار و ۴ مهره عبارت‌اند از افرادی که به داخل اتاق می‌آیند و روی نیمکتها می‌نشینند. اگر افراد با هم دوست باشند، تمایلی وجود خواهد داشت که نزدیک هم بنشینند و احتمالهایی که تاکنون محاسبه می‌کرده‌ایم قابل اعمال نیستند. احتمالهای ترتیبهای متمرکز، افزایش می‌یابند. مدل ریاضی زیر را در نظر بگیرید. (این تبدیلی است از مدلِ گلدان پولیا.) ۶ جعبه با برچسبهای ۱ تا ۶، و ۴ مهره داریم. از میان ۶ کارت که از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری شده‌اند، یکی را به طورکتره‌ای می‌کشیم و توپی را در جعبهٔ هم شمارهٔ این کارت قرار می‌دهیم. سپس کارت یاد شده را به دستهٔ کارتها برگردانده و کارت دیگری را نیز با همان شماره به کارتها می‌افزاییم به طوری که حالا ۷ کارت داریم که دو تای آنها شماره‌شان یکی است. حال کارتی را به طورکتره‌ای از میان این ۷ کارت می‌کشیم، و توپی را در جعبهٔ همخوان با آن قرار می‌دهیم و دوباره کارت مزبور را با کارت دیگری با همان شماره به دستهٔ کارت برمی‌گردانیم تا ۸ کارت داشته باشیم. این فرایند را دو بار دیگر تکرار می‌کنیم (تا همهٔ مهره‌ها توزیع شده باشند). به این ترتیب، احتمال آنکه تمام مهره‌ها در جعبهٔ اول باشند عبارت است از $\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}$. احتمال آنکه در هر یک از چهار جعبهٔ اول یک مهره باشد عبارت است از $4!\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{6}$ (در اینجا $\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{6}$ احتمال آن است که مهره اول در جعبهٔ ۱، مهره دوم در جعبهٔ ۲، و الی آخر باشد؛ ما باید به این احتمال، احتمال اینکه مهره اول در جعبهٔ ۳، مهره دوم در جعبهٔ ۱، و غیره، باشد را نیز بیفزاییم؛ تعداد !۴ از این ترتیبها وجود دارد که در همهٔ آنها هر یک از چهار جعبهٔ اول یک مهره قرار دارد). ملاحظه می‌شود که توزیعهای "تمام مهره‌ها در جعبهٔ ۱" و "یک مهره در هر یک از ۴ جعبهٔ اول" هم‌احتمال هستند. محاسبه‌های بیشتر (مسألهٔ ۲۰) نشان می‌دهد که تمام ترتیبهای تمیز پذیر، هم‌احتمال اند.

برای پیدا کردن تعداد ترتیبهای تمیز پذیر، تصویر زیر را برای ۴ مهره در ۶ جعبه در نظر بگیرید.

$$|\quad|\ \circ\ |\quad|\ \circ\circ\ |\quad|\ \circ\ |$$

شمارهٔ جعبه:	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد مهره‌ها:	۱	۰	۲	۰	۱	۰

خطوط عمودی نشانهٔ مرز جعبه‌ها و دایره‌های کوچک نشانهٔ مهره‌ها هستند؛ توجه کنید که برای ۶ جعبه، ۷ خط مرزی لازم است. این تصویر، یکی از چندین امکان مختلف قرار دادن چهار ۶ مهره جعبه را نشان می‌دهد. در هر یک از چنین تصویرهایی یک خط باید در ابتدا و یک خط در انتها وجود داشته باشد، اما ۵ خط دیگر و چهار دایره را می‌توان به هر ترتیبی قرار داد. هر ترتیبی از قرارگرفتن مهره‌ها در جعبه‌ها را می‌توان به این شکل نمایش داد. به این ترتیب، تعداد اینگونه ترتیبهای تمیز پذیر، صرفاً برابر تعداد راههایی است که می‌توانیم ۴ مکان برای ۴ دایره از میان ۹ مکان مربوط به ۵ خط و ۴ دایره، انتخاب می‌کنیم. بنابراین در این مسأله $C(۹ , ۴)$ ترتیب هم‌احتمال وجود دارد.

پس ملاحظه می‌شود که قرار دادن مهره‌ها در جعبه‌ها به آن سادگی هم که فکر می‌کردیم نیست، ***باید مشخص کنیم چگونه*** می‌خواهیم آنها را توزیع کنیم و حتی قبل ازآن باید فکر کنیم که چه مسأله عملی را می‌خواهیم حل کنیم؛ این چیزی است که فضای نمونه و احتمالهای نقاط آنرا مشخص می‌کند. متأسفانه ممکن است همیشه روشن نباشد که احتمالهای نقاط فضای نمونه چه هستند؛ در این صورت بهترین کاری که می‌توان کرد آن است که فرضهای مختلف را بررسی کنیم. در مکانیک آماری معلوم شده است که اگر فرض کنیم برخی ذرات (مثلاً مولکولهای یک گاز) مثل مهره‌های مثال ۳ عمل می‌کنند (تمام $۶^{۱۵}$ ترتیب، هم احتمال) توصیف درستی از رفتار آنها ارائه خواهد شد؛ در این صورت می‌گوییم این ذرات از توزیع ماکسول - بولتزمن پیروی می‌کنند. سایر ذرات (مثلاً الکترونها) رفتاری همانند افراد مثال ۴ دارند که باید کنار هم بنشینند (یک ذره یا هیچ ذره در هر جعبه)؛ در این صورت می‌گوییم که این ذرات از آمار فرمی - دیراک پیروی می‌کنند. بالأخره، بعضی ذرات (مثلاً فوتونها) شبیه دوستانی که می‌خواهند نزدیک هم بنشینند رفتار می‌کنند؛ در این صورت می‌گوییم این ذرات از آمار بوز - اینشتین پیروی می‌کنند. با این توضیحات، برای مسأله ۴ ذره در ۶ جعبه، $۶^{۴}$ ترتیب هم‌احتمال برای ذرات ماکسول - بولتزمن، $C(۶ , ۴)$ ترتیب برای ذرات فرمی - دیراک، و $C(۹ , ۴)$ ترتیب برای ذرات بوز - اینشتین وجود دارد. (رجوع کنید به مسائل ۱۵ تا ۲۰.)

مسائل، بخش ۴

۱- (الف) ۱۰ صندلی در یک ردیف قرار دارند و ۸ نفر می‌خواهند روی آنها بنشینند. به چند

روش می‌توان این کار را انجام داد؟

(ب) در یک برگهٔ امتحان، ۱۰ سؤال است که باید ۸ تای آنها را جواب داد. به چند روش می‌توان ۸ سؤال را انتخاب کرد؟

(ج) در قسمت (الف) احتمال اینکه دو صندلی اول خالی باشند، چیست؟

(د) در قسمت (ب)، احتمال اینکه دو سؤال اول حذف شود، چیست؟

(ه) توضیح دهید چرا جوابهای قسمت (الف) و (ب) با هم فرق دارند حال آنکه جوابهای (ج) و (د) یکسان اند.

۲- در بسط $(a+b)^n$ (رجوع کنید به مثال ۲)، فرض کنید $a = b = 1$ است، و با تعبیر جمله‌های آن نشان دهید که ترکیب n جسم ۱، ۲، ۳، ...، n، به n برابر $2^n - 1$ است.

۳- یک بانک به هر شخص اجازه می‌دهد که فقط یک حساب پس‌انداز بیمه شده تا مبلغ ۱۰۰،۰۰۰ تومان داشته باشد. اما، خانواده‌های بزرگ‌تر می‌توانند برای هر نفر یک حساب، و همچنین برای هر دو نفر یک حساب، هر سه نفر یک حساب و الی آخر، باز کنند. برای یک خانوادهٔ ۲ نفره، ۳ نفره، ۴ نفره، ۵ نفره، n نفره چند حساب می‌توان باز کرد؟ ***راهنمایی:*** رجوع کنید به مسألهٔ ۲ .

۴- پنج ورق از یک دست ورق بُر خورده انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه همهٔ آنها هم خال باشند چیست؟ احتمال اینکه همهٔ آنها خشت باشند چیست؟ احتمال اینکه همهٔ آنها صورت باشند چیست؟ احتمال اینکه ۵ ورق مزبور، ورقهای پیاپی از یک خال باشند چیست (مثلاً ۳، ۴، ۵ و ۶ دل)؟

۵- در یک خانوادهٔ دارای ۵ فرزند، احتمال اینکه دو تا پسر و سه تا دختر باشند چیست؟ احتمال اینکه دو فرزند مُسن‌تر پسر و ۳ تای دیگر دختر باشند چیست؟

۶- یک چراغ «به اصطلاح» ۷ - راهه، دارای سه لامپ ۶۰ واتی است که می‌توان در هر زمان، یک یا دو یا هر سه تای آنها را روشن کرد، و همچنین دارای یک لامپ بزرگ است که می‌توان آنرا به صورت ۱۰۰ وات، ۲۰۰ وات یا ۳۰۰ وات روشن نمود. اگر وضعیت کاملاً خاموش چراغ را به حساب نیاوریم، چند شدت نور متفاوت می‌توان با این لامپ به دست آورد؟ (جواب ۷ نیست).

۷- دریک دست ورق بُر خورده، احتمال اینکه ۲ و ۳ گشنیز کنار هم باشند چیست؟ ***راهنمایی:***

فرض کنید که دو کارت مزبور تصادفاً به هم چسبیده‌اند و به صورت یک کارت بُر می‌خورند.

۸- دو کارت از یک دست ورق بُر خورده کشیده می‌شوند. احتمال اینکه هر دو تک باشند چیست؟ اگر بدانید که یکی از آن دو تک است، احتمال اینکه هر دو تک باشد چقدر است؟ اگر یکی از آنها تک پیک باشد، احتمال آنکه هر دو تک باشند چیست؟

۹- دو کارت از یک دست ورق بُر خورده کشیده می‌شوند. احتمال اینکه هر دو تک باشند چیست؟ اگر بدانید که یکی از آن دو تک است، احتمال اینکه هر دو تک باشد چقدر است؟ اگر یکی از آنها تک پیک باشد، احتمال آنکه هر دو تک باشند چیست؟

۱۰- احتمال اینکه شما و دوستتان روزهای تولد مختلف داشته باشید چیست؟ (برای سادگی فرض کنید که یکسال ۳۶۵ روز است). احتمال اینکه سه نفر دارای روزهای تولد مختلف باشند چیست؟ نشان دهید که احتمال اینکه n نفر دارای روزهای تولد مختلف باشند برابر است با

$$p = \left(۱-\frac{۱}{۳۶۵}\right)\left(۱-\frac{۲}{۳۶۵}\right)\left(۱-\frac{۳}{۳۶۵}\right)\cdots\left(۱-\frac{n-۱}{۳۶۵}\right)$$

این احتمال را به ازای $n << ۳۶۵$ با محاسبهٔ $ln\ p$ تخمین بزنید. [به یاد آورید که $ln\ (۱+x)$ به ازای $x << ۱$ برابر x است.] کوچک‌ترین عدد صحیحی را پیدا کنید که برای آن $p < \frac{۱}{۲}$ است. بنابراین نشان دهید که برای یک گروه ۲۳ نفری یا بیشتر، احتمال اینکه دو نفر آنها دارای یک روز تولد باشند بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۲}$ است. (این مسأله را در مورد یک گروه از دوستانتان به کار ببرید).

۱۱- بازی زیر در یک خیابان شلوغ انجام می‌شود: دو رقم آخر شمارهٔ هر اتومبیل خوانده می‌شود. احتمال اینکه از بین ۵ اتومبیل اول، حداقل دو اتومبیل، دو رقم آخر نمره‌شان مثل هم باشد، چیست؟ همین احتمال برای ۱۰ اتومبیل، و ۱۵ اتومبیل چقدر است؟ نمرهٔ چند اتومبیل باید خوانده شود تا احتمال مشاهدهٔ دو نمره که دو رقم آخرشان یکی باشد بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۲}$ گردد؟

۱۲- مسأله ۱۰ را برای ماههای تولد مختلف در نظر بگیرید. کمترین تعداد افرادی را پیدا کنید که احتمال اینکه دو نفر آنها دارای یک ماه تولد باشند بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۲}$ باشد.

۱۳- مثال ۳ را برای قرار دادن N مهره در n جعبه تعمیم دهید و نشان دهید که تعداد راههای

مختلف قرار دادن N_1 مهره در جعبهٔ ۱ ، N_2 مهره در جعبهٔ ۲ ، و الی آخر برابر است با

$$\left(\frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdot N_3! \cdots N_n!}\right)$$

۱۴- (الف) احتمال اینکه در پرتاب دو سکه، یکی شیر و یکی خط بیاید چقدر است؟ احتمال اینکه در ۶ بار پرتاب یک تاس، همهٔ شش وجه مشاهده شوند چقدر است؟ احتمال اینکه در ۱۲ پرتاب یک تاس ۱۲ - وجهی همهٔ وجوه مشاهده شوند چیست؟ احتمال اینکه در n پرتاب یک تاس n وجهی همه وجوه را مشاهده کنیم چقدر است؟

(ب) قسمت آخر بخش (الف) معادلِ پیدا کردن احتمال آن است که، وقتی n مهره به طور کتره‌ای در n جعبه توزیع می‌شوند، هر جعبه دقیقاً دارای یک مهره باشد. نشان دهید که به ازای مقادیر بزرگ n، این احتمال برابر $e^{-n}\sqrt{2n\pi}$ است.

۱۵- فضاهای نمونهٔ مربوط به قرار دادن ۲ ذره در ۳ جعبه را برای: ذرات ماکسول - بولتزمن، ذرات فرمی - دیراک، و ذرات بوز - اینشتین تعیین کنید. رجوع کنید به مسألهٔ ۵ . (برای MB باید ۹ نقطه، برای FD ۳ نقطه، و برای BE، باید ۶ نقطه در فضای نمونه پیدا کنید.)

۱۶- مسألهٔ ۱۵ را برای ۲ ذره در ۲ جعبه حل کنید. با استفاده از مدل مورد بحث در مثال ۵ ، احتمال هر یک از سه نقطهٔ فضای نمونهٔ بوز - اینشتین را پیدا کنید. (باید نتیجه بگیرید که هر نقطه دارای احتمال $\frac{1}{3}$ است، یعنی نقاط هم‌احتمال اند).

۱۷- تعداد راههای ممکن قرار دادن ۲ ذره در ۴ جعبه را طبق سه نوع آمار مختلف پیدا کنید.

۱۸- تعداد راههای ممکن قرار دادن ۳ ذره در ۵ جعبه را طبق سه نوع آمار مختلف پیدا کنید.

۱۹- (الف) با دنبال کردن روشهای مثالهای ۳ ، ۴ ، و ۵ نشان دهید که تعداد راههای هم‌احتمال ممکن برای قرار دادن N ذره در n جعبه، $n > N$، برای ذرات ماکسول - بولتزمن برابر n^N، برای ذرات فرمی - دیراک برابر $C(n, N)$، و برای ذرات بوز - اینشتین $C(n-1+N, N)$ است.

(ب) نشان دهید که اگر n خیلی بزرگ‌تر از N باشد (مثلاً فرض کنید $n = 10^6$ و $N = 10$) در آن صورت نتایج توزیع بوز - اینشتین و فرمی - دیراک در قسمت (الف) شامل حاصل‌ضرب N عدد خواهند بود، که هر عدد تقریباً برابر n است. بنابراین نشان دهید که به ازای $n >> N$ ، نتایج هر دو توزیع BE و FD تقریباً برابر اند با

$n^N/N!$ که $1/N!$ برابر توزیع MB است.

۲۰- (الف) در مثال ۵ ، یک مدل ریاضی بررسی می‌شود که ادعا می‌کند توزیع مهره‌های همسان در جعبه‌ها را طوری تعیین می‌کند که همهٔ ترتیبهای تمیز پذیر هم‌احتمال هستند. (آمار بوز - اینشتین). با نشان دادن اینکه در توزیع N مهره در n جعبه (طبق این مدل) احتمال قرارگرفتن مهره N_1 در جعبه اول، N_2 در جعبهٔ دوم، N_3 در جعبهٔ سوم، ... N_n در جعبه nام، به ازای هر مجموعه اعداد N_i به گونه‌ای که $\sum_{i=1}^{n} N_i = N$ برابر $1/C(n-1+N, N)$ است مطلب بالا را ثابت کنید.

(ب) نشان دهید که مدل قسمت (الف) به شرطی که کارت کشیده شده مجدداً به دسته ورق برگردانده شود اما هیچ کارتی به دستهٔ ورق اضافه نشود) منجر به توزیع ماکسول - بولتزمن می‌شود، و اگر کارت کشیده شده برگردانده نشود منجر به توزیع فرمی - دیراک می‌گردد. ***راهنمایی:*** در هر مورد تعداد ترتیبهای قرار گرفتن مهره‌ها در جعبه‌ها را حساب کنید. اول، مثل آنچه که در مثال دیدیم، مسأله ۴ ذره در ۶ جعبه را حل کنید، و سپس مسألهٔ N ذره در n جعبه ($n > N$) را برای پیدا کردن نتایج مسأله ۱۹ حل کنید.

۲۱- مسألهٔ زیر در مکانیک کوانتومی پیش می‌آید. تعداد سه‌تایی‌های مرتبی از سه عدد درست نا منفی a ، b ، c را پیدا کنید که حاصل‌جمع آنها، $a + b + c$، مساوی یک عدد درست و مثبت مفروض n است. (مثال، اگر $n = 2$ باشد، می‌توانیم داشته باشیم $(a, b, c) = (2, 0, 0)$ یا $(0, 2, 0)$ یا $(0, 0, 2)$ یا $(1, 1, 0)$ یا $(1, 0, 1)$ یا $(0, 1, 1)$.
راهنمایی: نشان دهید که این همانند مسأله تعداد توزیعهای تمیز پذیر مهره n همسان در سه جعبه است، و روش مثال ۵ را دنبال کنید، یا از مسألهٔ ۱۹ (الف) استفاده کنید.

۵- متغیرهای کتره‌ای

در مسألهٔ پرتاب دو تاس (مثال ۲ ، بخش ۲) ممکن است حاصل‌جمع اعداد روی دو تاس بیشتر مورد توجه‌مان باشد تا اعداد روی هر یک از تاسها. اگر این حاصل‌جمع را x بنامیم؛ در این صورت در هر نقطه از فضای نمونهٔ (۲-۴)، x دارای مقداری خواهد بود. مثلاً، برای نقطهٔ ۱ ، ۲ داریم $x = 1 + 2 = 3$ ، برای نقطهٔ ۲ ، ۶ داریم $x = 8$ و الی آخر. متغیری مثل x را که به ازای هر نقطهٔ فضای نمونه دارای مقدار معینی است، ***متغیر کتره‌ای*** می‌نامیم. به سادگی می‌توان برای

فضای نمونهٔ (۲-۴) متغیرهای کتره‌ای دیگری هم ساخت؛ چند نمونه را در زیر ذکر می‌کنیم (آیا شما هم می‌توانید چند تای دیگر مثال بزنید؟)

$x =$ عدد روی تاس دوم - عدد روی تاس اول

$x =$ عدد روی تاس دوم

$x =$ احتمال مربوط به نقطهٔ فضای نمونه

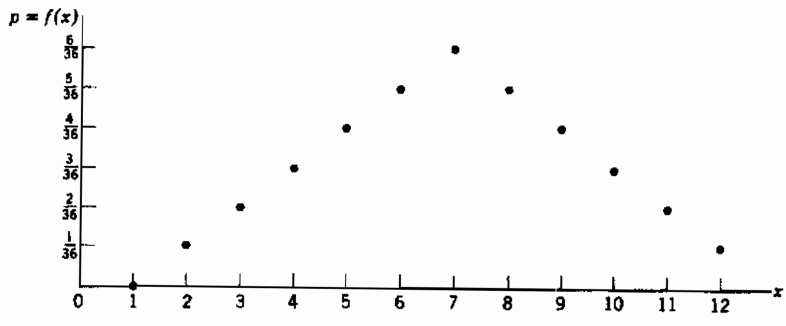
$$x = \begin{cases} ۱ & \text{اگر حاصل‌جمع، ۷ یا ۱۱ باشد} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای هر یک از این متغیرهای کتره‌ای x، می‌توان جدولی از تمام نقاط فضای نمونه (۲-۴) ساخت، و، درکنار هر نقطه، مقدار x مربوطه را ذکر کرد. این جدول ممکن است شما را به یاد جداولی بیندازد که معمولاً برای رسم یک تابع به کار می‌بریم. در هندسهٔ تحلیلی یا در یک مسألهٔ فیزیکی، دانستن x به صورت تابعی از t به این معنی است که به ازای هر t معین می‌توان مقدار x همخوان با آنرا پیدا کرد. در احتمال؛ نقطهٔ نمونه همخوان با متغیر مستقل t است؛ با داشتن نقطهٔ نمونه، اگر توصیف x را بدانیم (مثلاً $x =$ حاصل‌جمع اعداد روی تاسها) می‌توانیم مقدار متغیر کتره‌ای x همخوان با آن را پیدا کنیم. "توصیف"، همخوان است با فرمول $x(t)$ که در رسم یک نمودار در هندسهٔ تحلیلی به کار می‌بریم. بنابراین می‌توان گفت که یک ***متغیر کتره‌ای تابعی است که روی فضای نمونه تعریف می‌شود.***

توابع احتمال اگر متغیر کتره‌ای $x =$ "حاصل‌جمع اعداد روی تاسها "در پرتاب دو تاس [فضای نمونهٔ (۲-۴)] را بیشتر مورد بررسی قرار دهیم ملاحظه می‌کنیم که در فضای نمونه، نقاط متعددی، مثل آنهایی که با a نشان داده شده‌اند، وجود دارند، که برای آنها $x = ۵$ است. به همین ترتیب، برای بیشتر مقدارهای دیگر x هم نقاط متعددی وجود دارند. در این گونه موارد بهتر است که همهٔ نقاط مربوط به یک مقدار x را با هم ترکیب کرده، و فضای نمونهٔ جدیدی در نظر بگیریم که هر نقطهٔ آن مربوط به یک مقدار x است؛ فضای نمونهٔ (۲-۵)، چنین فضایی است. احتمال وابسته به هر نقطه از فضای نمونهٔ جدید، طبق بخش ۲ با جمع کردن احتمالهای تمام نقاط فضای نمونهٔ اصلی که همخوان با یک مقدار خاص x هستند به دست می‌آید. هر مقدار x، مثلاً x_i، دارای احتمال وقوع p_i است؛ می‌توان نوشت $p_i = f(x_i) =$ احتمال این

است که $x = x_i$ باشد، و $f(x)$ را ***تابع احتمال*** متغیر کتره‌ای x نامید. در (۲-۵)، در سطر اول مقدارهای x و در سطر دوم مقدارهای $f(x)$ فقط تعداد معینی مقادیر منفصل را خواهند پذیرفت؛ در بعضی مسائل آینده، مقادیر پیوسته را نیز بررسی خواهیم کرد. این مقادیر را در شکل (۱-۵) به صورت نموداری نیز نشان داده‌ایم.

حال که جدول مقادیر (۲-۵) یا نمودار شکل (۵-۱) را برای توصیف متغیر کتره‌ای x و تابع احتمال $f(x)$ آن داریم، می‌توانیم از فضای نمونهٔ اصلی (۲-۴) صرفنظر کنیم. با این همه، چون (۲-۴) را برای تعریف متغیر کتره‌ای به کار بردیم، تعریف دیگری نیز با استفاده از (۲-۵) یا شکل (۵-۱) بیان می‌کنیم. ***اگر x مقادیر مختلف x_i را با احتمالهای $p_i = f(x_i)$ بپذیرد می‌گوییم x یک متغیر کتره‌ای است.*** این تعریف ممکن است مفهوم متغیر کتره‌ای را توضیح دهد؛ x، متغیر خوانده می‌شود زیرا مقدارهای مختلفی را می‌پذیرد. فرایند کتره‌ای (یا اتفاقی) آن است که نتیجه‌اش از قبل معلوم نباشد. نحوه‌ای که دو تاس فرو می‌افتند، چنین برآمد نامعلومی است، و بنابراین مقدار x از قبل نامشخص است و x را متغیر کتره‌ای می‌خوانیم.



شکل ۵-۱

توجه داشته باشید که ما x را در ابتدا به صورت یک متغیر وابسته یا تابع، و نقطهٔ فضای نمونه را به صورت متغیر مستقل در نظر گرفتیم. اگرچه چیز زیادی در مورد آن نگفتیم، اما به هر نقطهٔ فضا مقدار احتمال p هم مربوط بود، یعنی p و x، هر دو تابعی از نقطهٔ فضای نمونه بودند. در پاراگراف آخر، x را به صورت متغیر مستقل و p را به صورت تابعی از x در نظر گرفته‌ایم. این کاملاً مثل آن است که x و p را به صورت تابعی از t در نظر بگیریم و با حذف t، p را

به صورت تابعی از x به دست آوریم. در اینجا ما نقطهٔ نمونه را از بحث خود حذف کرده‌ایم تا مستقیماً تابع احتمال $p = f(x)$ را در نظر بگیریم.

به‌عنوان مثال دوم، فرض کنید $x =$ تعداد شیرها در پرتاب سه سکه باشد. فضای نمونهٔ یکنواخت، همان (۲-۳) است و می‌توان مقدار x را برای هر نقطهٔ فضای نمونهٔ یکنواخت (۲-۳) نوشت. به جای این، بگذارید مستقیماً به جدولی از x و $p = f(x)$ مراجعه کنیم. [آیا می‌توانید با استفاده از (۲-۳)، یا با روش دیگر، این جدول را به دست آورید؟].

x	۰	۱	۲	۳	(۱-۵)
$p = f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	

تابع احتمال $p = f(x)$ یک متغیر کتره‌ای x را ***تابع بسامد***، یا ***چگالی احتمال***، یا ***توزیع احتمال*** نیز می‌نامند. (هشدار: **نه** تابع ***توزیع***، که معنای دیگری دارد؛ رجوع کنید به شکل ۵-۲). منشأ این اصطلاحات به مرور روشن خواهد شد (رجوع کنید به بخشهای ۶ و ۷)، اما با استفاده از (۵-۱) می‌توان ایده‌ای از اصطلاحات بسامد و توزیع به دست آورد. فرض کنید سه سکه را به دفعات پرتاب کنیم؛ منطقاً انتظار داریم که تقریباً در $\frac{۱}{۸}$ پرتابها، سه شیر، در $\frac{۳}{۸}$ پرتابها، دو شیر، و الی آخر بیاید، یعنی، هر مقدار $p = f(x)$ متناسب با **بسامد** وقوع آن x است - در نتیجه ریشهٔ اصطلاح ***تابع بسامد*** روشن می‌شود. (همچنین رجوع کنید به بخش ۷). دوباره در (۵-۱) فرض کنید که چهار جعبه با برچسبهای ۳ ، ۲ ، ۱ ، ۰ $= x$ در اختیار داریم. و به ازای هر بار پرتاب سه سکه یک تیله در جعبهٔ مربوطه قرار می‌دهیم. در این صورت $p = f(x)$ معرف آن است که تیله‌ها بعد از پرتابهای متعدد تقریباً چگونه در جعبه‌ها توزیع شده‌اند. و این منشأ اصطلاح **توزیع** است.

مقدار میانگین؛ انحراف معیار تابع احتمال $f(x)$ یک متغیر کتره‌ای x، اطلاعات مبسوطی دربارهٔ آن به دست می‌دهد، اما در بسیاری موارد ما به توصیف ساده‌ای نیاز داریم. مثلاً، فرض کنید x معرف اندازه‌گیری‌های تجربی یک میله، و N، تعداد زیاد اندازه‌گیری‌های x_i باشد. می‌توان منطقاً $p_i = f(x_i)$ را متناسب با تعداد N_i دفعاتی که x_i بروز کرده است دانست، یعنی $p_i = N_i/N$. دو عدد مورد توجه خاص ما هستند؛ یکی مقدار میانگین یا متوسط تمام

اندازه‌گیری‌ها، و دیگری عددی که پراکندگی مجموعهٔ اولیهٔ مقادیر را حول مقدار میانگین تعیین می‌کند. بگذارید دو تا از چنین کمیتهایی را که به طور سنتی برای توصیف یک متغیر کتره‌ای به کار می‌روند تعریف کنیم. برای محاسبهٔ میانگین N عدد، آنها را با هم جمع کرده، حاصل را بر N تقسیم می‌کنیم. به جای جمع کردن تعداد زیادی اندازه‌گیری، می‌توان هر اندازه‌گیری را در تعداد دفعات وقوع آن ضرب کرده، اعداد حاصل‌جمع را با هم جمع کرد. در نتیجه، برای میانگین اندازه‌گیریها، داریم

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_i N_i x_i = \sum_i p_i x_i$$

در تشابه با این محاسبه، ***مقدار متوسط یا میانگین μ متغیرکتره‌ای x*** راکه تابع احتمال آن $f(x)$ است با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu = \bar{x} \text{ مقدار متوسط } = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i f(x_i) \qquad (۵-۲)$$

برای پیدا کردن میزانی از پراکندگی اندازه‌گیریها، ممکن است ابتدا بکوشیم مقدار اختلاف هر اندازه‌گیری را با مقدار میانگین تعیین کنیم. بعضی از این انحرافها مثبت و بعضی منفی اند؛ و اگر متوسط این انحرافها را پیدا کنیم حاصل صفر خواهد شد (مسألهٔ ۱۰). در عوض، هر انحراف را مجذور می‌کنیم و از مربعات جمله‌ها متوسط می‌گیریم. ***واریانس*** متغیر x را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$Var(x) = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i) \qquad (۵-۳)$$

(بعضی اوقات واریانس را پراکندگی هم می‌خوانند). اگر اندازه‌گیریهای x_i خیلی به μ نزدیک باشند، $Var(x)$ کوچک خواهد بود، اگر اندازه‌گیریها به طور وسیعی گسترده شده باشند، $Var(x)$ بزرگ خواهد بود. بنابراین عددی داریم که تعیین‌کنندهٔ گستردگی اندازه‌گیری‌هاست، و این چیزی است که می‌خواستیم. غالباً، ریشهٔ دوم $Var(x)$ ، موسوم به ***انحراف معیار x***، را

به جای $Var(x)$ به کار می‌بریم.

$$\sigma_x = x \text{ انحراف معیار } = \sqrt{Var(x)} \qquad (۴-۵)$$

مقدار متوسط یا میانگین متغیر کتره‌ای x را مقدار ***انتظاری*** یا (مخصوصاً در مکانیک کوانتومی) ***مقدار چشمداشتی*** آن نیز می‌خوانند. برای نشان دادن مقدار میانگین x، به جای μ ممکن است نمادهای $\bar{x}$ یا $E(x)$ یا $<x>$ را به کار برد.

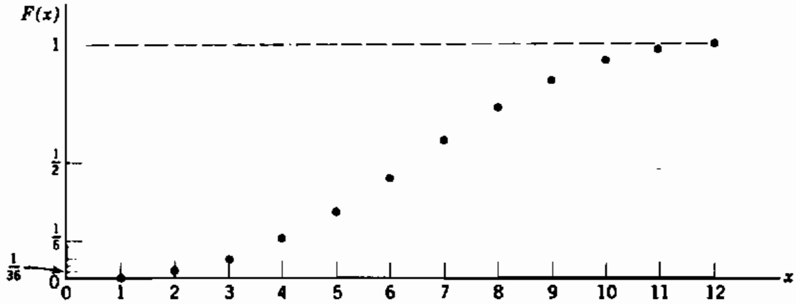
$$\bar{x} = E(x) = <x> = \mu = \sum_i x_i f(x_i) \qquad (۵-۵)$$

اصطلاح چشمداشتی از بازیهای شرطبندی گرفته شده است. فرض کنید اگر تاسی ۵ بیاید، ۵ تومان، و اگر ۲ و ۳ بیاید، ۲ تومان به شما پرداخت شود و در غیر این صورت چیزی به شما پرداخت نشود. اگر x نمایشگر درآمد شما در این بازی باشد، در آن صورت مقدارهای ممکن x و احتمالهای مربوطهٔ آنها عبارت اند از ۵ $= x$ با احتمال $p = \frac{۱}{۶}$، ۲ $= x$ با احتمال $p = \frac{۱}{۳}$، $x =$ ۰ با احتمال $p = \frac{۱}{۲}$. مقدار متوسط یا چشمداشتی x خواهد شد:

$$E(x) = \sum x_i p_i = ۵ \times \frac{۱}{۶} + ۲ \times \frac{۱}{۳} + ۰ \times \frac{۱}{۲} = ۱ \times ۵۰ \text{ تومان}$$

اگر چندین بار این بازی را تکرار کنید، این متوسط بُرد شما به ازای هر بازی خواهد بود؛ و این همان انتظار شماست. این مقدار همچنین ورودیهٔ مناسبی برای هر بازی است. اصطلاح مقدار ***چشمداشتی*** (که همان معنی انتظاری یا متوسط را دارد) در صورتی که در پی تعبیر آن بر اساس مفهوم عامیانه برآیید ممکن است تا اندازه‌ای گمراه کننده باشد. توجه کنید که مقدار چشمداشتی x (یعنی ۵۰ر۱ تومان) هیچ یک از مقدارهای ممکن x نیست، در نتیجه هرگز نباید "انتظار" داشته باشید که ۵ر۱ $= x$ هم یکی از پیامدها باشد! اگر مقدار چشمداشتی را به‌عنوان یک اصطلاح فنی شامل میانگین در نظر بگیرید، آن وقت مشکلی پیش نخواهد آمد. البته، در بعضی موارد، این اصطلاح با معنی عامیانه‌اش هم تطبیق می‌کند؛ مثلاً، اگر سکه‌ای n مرتبه پرتاب شود، تعداد چشمداشتی شیرها $n/۲$ خواهد بود. (مسألهٔ ۱۱) و منطقاً هم درست است

که انتظار چنین نتیجه‌ای را داشته باشیم (رجوع کنید به بخش ۷).



شکل ۵-۲

توابع توزیع تا اینجا احتمال (یا بسامد) $f(x)$ را که مبیّن احتمال $p_i = f(x_i)$ برای اینکه x دقیقاً برابر x_i باشد به کار می‌برده‌ایم. در بعضی مسائل ممکن است بیشتر به این نکته علاقه داشته باشیم که احتمال اینکه x کمتر از مقدار مشخصی باشد چقدر است. مثلاً، در یک انتخابات، می‌خواهیم بدانیم که احتمال اینکه کمتر از نصف رأی‌ها به کاندیدای مخالف داده شود، یعنی احتمال اینکه کاندیدای ما برنده شود چقدر است. در یک آزمایش با مواد رادیواکتیو، می‌خواهیم بدانیم که احتمال اینکه زمینه همیشه پایین‌تر از حد معینی باشد چقدر است. با داشتن تابع احتمال $f(x)$، می‌توان احتمال اینکه x کمتر از یا مساوی مقدار معین x_i باشد را با جمع کردن احتمالهای تمام مقادیر x کوچک‌تر یا مساوی با x_i پیدا کرد. مثلاً حاصل‌جمع اعداد روی دو تاس را در نظر بگیرید؛ تابع احتمال $p = f(x)$ در شکل ۵-۱ رسم شده است. احتمال اینکه، مثلاً، x کمتر یا مساوی ۴ باشد برابر با حاصل‌جمع احتمالهایی است که x مساوی ۲ یا ۳ یا ۴ باشد، یعنی، $\frac{۱}{۶} = \frac{۳}{۳۶} + \frac{۲}{۳۶} + \frac{۱}{۳۶}$ است. به همین ترتیب، احتمال اینکه x کوچک‌تر از هر عدد معینی باشد را می‌توان پیدا کرد. نتیجه که تابعی از x است در شکل ۵-۲ رسم شده است. چنین تابعی را با $F(x)$ نشان داده و **تابع توزیع** می‌نامیم؛ می‌توان نوشت

$$F(x_i) = (x \le x_i \text{ احتمال اینکه }) = \sum_{x_j \le x_i} f(x_j) \qquad (۶\text{-}۵)$$

دقت کنید که، گرچه تابع احتمال یا بسامد $f(x)$ بعضی اوقات تابع توزیع خوانده می‌شود، اما اصطلاح ***تابع توزیع*** همیشه به معنای $F(x)$ است.

مسائل، بخش ۵

فضاهای نمونهٔ مسائل ۱ تا ۷ را پیدا کنید و در کنار هر نقطه از فضای نمونه، مقدار متغیر کتره‌ای x ، و احتمال مربوط به آن نقطه را بنویسید. جدولی از مقادیر مختلف x_iی x و احتمالهای وابستهٔ $p_i = f(x_i)$ تهیه کنید. میانگین، واریانس، و انحراف معیار x را حساب کنید. تابع توزیع $F(x)$ را پیدا و آنرا رسم کنید.

۱- سه سکه را پرتاب می‌کنیم؛ $x =$ تعداد شیرها منهای تعداد خطها.

۲- دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ $x =$ حاصل‌جمع اعداد روی تاسها.

۳- سکه‌ای را به دفعات پرتاب می‌کنیم؛ $x =$ تعداد پرتابهای لازم برای ملاحظهٔ اولین شیر.

۴- فرض کنید تاسهای "مرّیخ" چهار وجهی (هرم چهار وجهی)اند و رؤوس آن با اعداد ۱ تا ۴ مشخص شده‌اند. دو تا از این نوع تاس را پرتاب، و حاصلضرب اعداد رؤوسی را که بالا می‌ایستند، در صورت فرد بودن، مساوی x و ، در غیر این صورت، مساوی صفر فرض می‌کنیم.

۵- متغیر کتره‌ای x مقادیر ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، را با احتمالهای $\frac{۵}{۱۲}$ ، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۱۲}$ ، $\frac{۱}{۶}$ می‌پذیرد.

۶- یک کارت از یک دست ورق بُر خورده می‌کشیم. اگر این کارت تک یا صورت باشد x را مساوی ۱۰ ، اگر ۲ باشد مساوی ۱- و در غیر این صورت مساوی صفر می‌گیریم.

۷- یک سکهٔ مخدوش راکه احتمال آمدن شیر در آن p است سه بار پرتاب می‌کنیم؛ $x =$ تعداد شیرها منهای تعداد خطها.

۸- اگر قرار باشد در پرتاب دو تاس معادل حاصل‌ضرب اعداد روی تاسها تومان دریافت کنید، آیا حاضرید به ازای هر پرتاب ۱۰ تومان بپردازید؟ ***راهنمایی:*** مقدار چشمداشتی شما چیست؟ اگر بیش از ۱۰ تومان است، بازی به نفع شماست.

۹- نشان دهید که مقدار چشمداشتی حاصل‌جمع دو متغیر کتره‌ای که روی یک فضای نمونه تعریف می‌شوند برابر با حاصل‌جمع مقادیر چشمداشتی آنهاست. ***راهنمایی:*** فرض کنید $p_۱$ ، $p_۲$ ، $p_۳$ ، ... ، p_n احتمالهای وابسته به n نقطهٔ نمونه؛ و $x_۱$ ، $x_۲$ ، $x_۳$ ، ... ، x_n؛ و

y_1، y_2، y_3، ...، y_n مقدارهای متغیرهای x و y برای n نقطهٔ نمونه باشند. مقدار $E(x)$ و $E(y)$ $E(x + y)$ را پیدا کنید.

۱۰- فرض کنید μ میانگین متغیر کترهای x باشد. به این ترتیب، مقادیر $(x_i - \mu)$ انحرافهای x از میانگین آناند. نشان دهید که میانگین این انحرافها صفر است. ***راهنمایی:*** از مسألهٔ ۹ استفاده کنید (میانگین و میانگین چشمداشتی یکی هستند).

۱۱- نشان دهید که تعداد چشمداشتی شیر در یک تک پرتاب یک سکه $\frac{1}{2}$ است. به دو روش نشان دهید که تعداد چشمداشتی شیرها در دو پرتاب یک سکه برابر ۱ است:

(الف) فرض کنید $x =$ تعداد شیرها در دو پرتاب است و $\bar{x}$ را پیدا کنید.

(ب) فرض کنید $x =$ تعداد شیرها در پرتاب ۱ و $y =$ تعداد شیرها در پرتاب دوم است، و متوسط $x + y$ را طبق مسألهٔ ۹ پیدا کنید.

با استفاده از (ب) نشان دهید که تعداد چشمداشتی شیرها در n پرتاب یک سکه برابر $\frac{1}{2} n$ است.

۱۲- با استفاده از مسألهٔ ۹ مقدار چشمداشتی حاصل‌جمع عددهای روی تاسهای مسأله ۲ را پیدا کنید.

۱۳- نشان دهید که اضافه کردن ثابت K به یک متغیر کترهای، میانگین آنرا به اندازهٔ K افزایش می‌دهد اما واریانس را تغییر نمی‌دهد. نشان دهید که با ضرب کردن یک متغیر کترهای در K، میانگین و انحراف معیار هم در Kضرب می‌شوند.

۱۴- مثل مسألهٔ ۱۱، نشان دهید که تعداد چشمداشتی ۵ ها در n پرتاب یک تاس برابر $n/6$ است.

۱۵- با استفاده از مسألهٔ ۹، مقدار $\bar{x}$ در مسألهٔ ۷ را پیدا کنید.

۱۶- نشان دهید که $\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$.

۱۷- با استفاده از مسألهٔ ۱۶، σ را در مسائل ۲، ۶، و ۷ پیدا کنید.

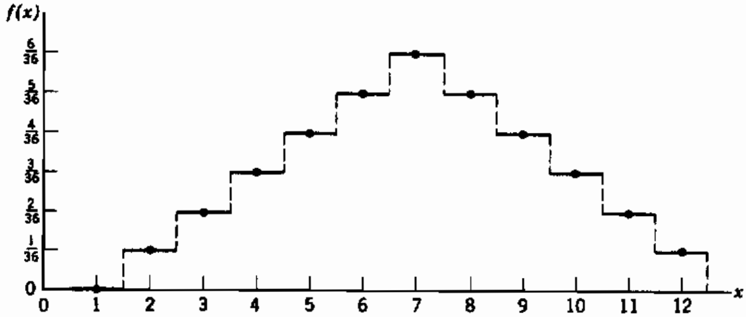
۶- توزیعهای پیوسته

در بخش ۵، متغیرهای کترهای x راکه مجموعهٔ گسستهای از مقادیر x_i را می‌پذیرفتند بررسی کردیم. تصور مواردی که در آن یک متغیر کترهای، مجموعهٔ پیوستهای از مقادیر را بگیرد

مشکل نیست.

مثال ۱ - ذره‌ای را در نظر بگیرید که در امتداد محور xها بین دو نقطهٔ $x = \circ$ و $x = l$ عقب و جلو می‌رود و در نقاط بازگشت به طور کشسان عقبگرد می‌کند به طوری که سرعتش ثابت می‌ماند. (این مدل ساده، می‌تواند حرکت ذرهٔ آلفا در درون یک هستهٔ رادیواکتیو، یا حرکت رفت و برگشت یک مولکول گاز بین دیواره‌های یک ظرف باشد). فرض می‌کنیم موقعیت x ذره، متغیر کتره‌ای باشد؛ در این صورت x مجموعه مقادیر پیوسته از $x = \circ$ تا $x = l$ را می‌پذیرد. حال فرض کنید، طبق بخش ۵ ، بخواهیم بدانیم احتمال اینکه ذره در نقطهٔ خاص x باشد چقدر است؛ این احتمال باید برای تمام نقاط یکی، مثلاً k، باشد (چرا که سرعت ذره ثابت است). اما بینهایت نقطهٔ x وجود دارد، بنابراین برای هر مقدار غیر صفر k، احتمال کل برای اینکه ذره در *یک جایی* مثل x باشد (k ضربدر تعداد مقدارهای x) آنطور باید برابر ۱ نخواهد بود، و ملاحظه می‌شود که k (احتمال اینکه ذره در نقطهٔ خاصی باشد) باید صفر باشد. اما این نتیجهٔ مفیدی نیست. بگذارید به جای این کار، چند بازهٔ کوچک dx را، که همه دارای طول یکسانی هستند در فاصلهٔ $(\circ , l)$ در نظر بگیریم؛ چون ذره دارای سرعت ثابتی است، زمانهای مساوی را در هر یک از بازه‌ها می‌گذراند، و می‌توان گفت که احتمال پیدا کردن ذره در هر dx متناسب با طول آن است. در واقع، چون ذره کسر dx/l از زمان را در بازهٔ مفروض dx می‌گذراند، احتمال پیدا کردن آن در بازهٔ dx مساوی dx/l است.

برای ملاحظهٔ چگونگی تعریف یک تابع احتمال برای مورد پیوسته و ربط دادن این بحث به مورد گسسته، موقتاً به شکل ۵-۱ باز می‌گردیم. در آنجا برای نمایش $p = f(x)$ برای هر مقدار x *یک فاصلهٔ عمودی* رسم کردیم. به جای استفاده از نقطه برای مشخص کردن p برای هر x (مثل شکل ۵-۱)، در اینجا یک قطعه خط افقی به طول ۱ که مرکز آن روی نقطهٔ مورد نظر است، مثل شکل ۶-۱ ، رسم می‌کنیم. به این ترتیب، مساحت زیر قطعه خط افقی در نقطهٔ خاص x_i عبارت است از $p_i = f(x_i) = ۱ \times f(x_i)$ زیرا طول هر قطعه خط افقی برابر ۱ است)، و می‌توان این *مساحت* را به جای عرض نقطه به‌عنوان میزانی از احتمال به کار برد. چنین نموداری را **هیستوگرام** (بافتنگار) می‌نامیم.

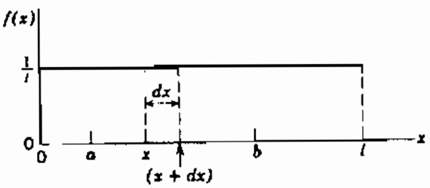


شکل ۶-۱

حال بگذارید این ایدهٔ استفاده از مساحت را بر مسألهٔ ذره متحرک که با سرعت ثابت بین ۰ و l حرکت می‌کند اعمال کنیم. شکل ۶-۲ را در نظر بگیرید. در این شکل، تابع زیر را رسم کرده‌ایم

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{l} & ۰ < x < l \\ ۰ & x < ۰ \ \text{و}\ x > l \end{cases}$$

اگر یک بازهٔ x تا $x + dx$ را در $(۰ , l)$ در نظر بگیریم، مساحت زیر منحنی $f(x) = ۱/l$ برای این بازه مساوی $dx\,(۱/l)$ یا $f(x)\,dx$ است، و این درست برابر احتمال وجود ذره در این بازه است.



شکل ۶-۲

احتمال اینکه ذره در "زیر - بازهٔ" بزرگ‌تری از $(۰ , l)$، مثلاً (a , b)، باشد، عبارت است از $\int_a^b f(x)\,dx$، یا $(b - a)/l$، یعنی مساحت زیر منحنی از a تا b است. اگر بازهٔ (a , b) خارج از $(۰ , l)$ باشد، در آن صورت $\int f(x)\,dx = ۰$ خواهد بود زیرا $f(x)$ صفر است، و باز این مقدار صحیحی برای احتمال پیدا کردن ذره در فاصلهٔ مزبور است.

وقتی $f(x)$ بر روی یک بازه، ثابت است (مانند شکل ۶-۲)، اصطلاحاً می‌گوییم که x در آن بازه به طور **یکنواخت** توزیع شده است. بگذارید مثالی را بررسی کنیم که در آن $f(x)$ ثابت نیست.

مثال ۲– این بار فرض کنید که ذرهٔ مثال قبل، از سطح شیبدار بدون اصطکاکی بالا و پایین می‌رود، و در اثر برخورد با فنری که در پایین سطح نصب شده است به طور کشسان (بدون اتلاف انرژی) به طرف بالا برمی‌گردد تا اینکه در ارتفاع $h = l$ سرعتش به صفر برسد (شکل ۶-۳). انرژی کل، یعنی، $\frac{1}{2}mv^2 + mgh$، ثابت و مساوی mgl است زیرا در $h = l$، $v = 0$ است. بنابراین داریم

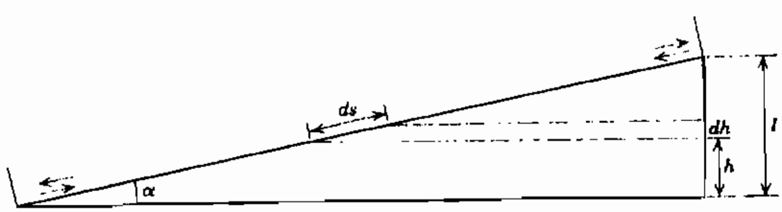
$$v^2 = \frac{2}{m}(mgl - mgh) = 2g(l - h) \qquad (۶-۱)$$

احتمال پیدا کردن ذره در بازهٔ dh در یک h معین، متناسب با زمان dt ای است که ذره در آن فاصله می‌گذراند. از $v = ds/dt$، داریم $dt = ds/v$؛ و از شکل ۶-۳، نتیجه می‌شود $ds = (dh)\ csc\ \alpha$. با جایگزین کردن v از معادلهٔ (۶-۱)، داریم

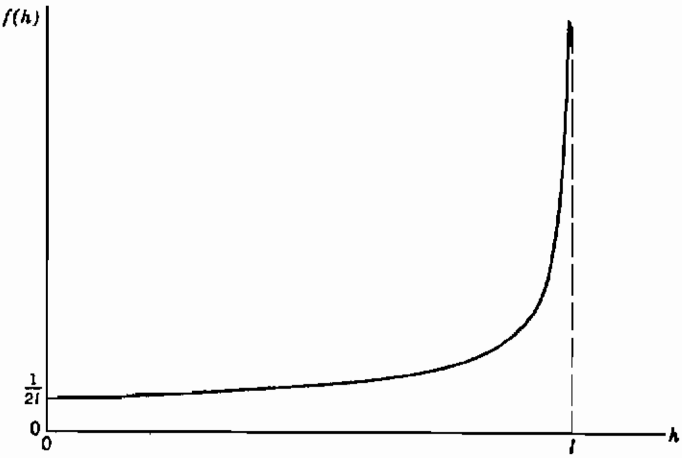
$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{dh\ csc\ \alpha}{v} = \frac{csc\ \alpha}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{1 - h}}$$

چون احتمال $f(h)\ dh$ پیدا کردن ذره در بازهٔ dh در ارتفاع معین h متناسب با dt است، می‌توان از ضریب ثابت $(csc\ \alpha)/\sqrt{2g}$ چشم پوشید و گفت $f(h)\ dh$ متناسب با $(dh)/\sqrt{l-h}$ است. برای پیدا کردن $f(h)$، باید ضریب تناسب را طوری انتخاب کنیم که احتمال کل $\int_0^l f(h)\ dh$ مساوی ۱ شود، زیرا این احتمالِ آن است که ذره در یک **جایی** باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که

$$f(h)\ dh = \frac{1}{2\sqrt{l}} \frac{dh}{\sqrt{l-h}} \quad \text{یا} \quad f(h) = \frac{1}{2\sqrt{l}\sqrt{l-h}}$$



شکل ۶-۳



شکل ۶-۴

نموداری از $f(h)$ در شکل ۶-۴ رسم شده است. توجه کنید که با اینکه $f(h)$ در $h = l$ بینهایت می‌شود، مساحت زیر منحنی $f(h)$ برای هر بازه‌ای متناهی است؛ این مساحت، مشخص کنندهٔ احتمال وجود ذره در آن بازهٔ ارتفاع است.

حال می‌توان ایده‌های میانگین چشمداشتی، واریانس، انحراف معیار، و تابع توزیع را به مورد پیوسته تعمیم داد. میانگین یک متغیر کتره‌ای x با تابع احتمال $f(x)$ عبارت است از

$$\mu = \bar{x} = E(x) = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \qquad (۶\text{-}۲)$$

(در نوشتن حدود $-\infty$ ، ∞ در اینجا، فرض می‌کنیم $f(x)$ در بازه‌هایی که احتمال صفر است، صفر تلقی می‌شود.) توجه کنید که رابطهٔ (۶-۲) تعمیم طبیعی حاصل‌جمع در (۵-۵) است. حال که میانگین را پیداکرده‌ایم، واریانس را مثل بخش ۵ به صورت میانگین $(x-\mu)^2$، یعنی،

$$Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \sigma_x^2 \qquad (۶\text{-}۳)$$

تعریف می‌کنیم. مثل قبل، انحراف معیار σ_x برابر ریشهٔ دوم واریانس است. بالاخره، تابع توزیع $F(x)$ به ازای هر x، احتمال این را می‌دهد که متغیر کتره‌ای کوچک‌تر یا مساوی با x باشد. اما این احتمال برابر است با مساحت زیر منحنی $f(x)$ از $-\infty$ تا نقطهٔ x. بنابراین داریم

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du \tag{۴-۶}$$

در بخش ۵ اشاره کردیم که تابع احتمال $f(x)$ را غالباً ***چگالی احتمال*** هم می‌خوانند؛ حال می‌توان دلیل این امر را توضیح داد. (۶-۲) را در نظر بگیرید؛ اگر $f(x)$ بیانگر چگالی (جرمِ واحد طول) یک میلهٔ باریک باشد، مرکز جرم میله با رابطهٔ زیر داده می‌شود [رجوع کنید به فصل ۵ ، (۳-۳)] .

$$\bar{x} = \int x\, f(x)\, dx \Big/ \int f(x)\, dx \tag{۵-۶}$$

که در آن انتگرالها روی طول میله، یا مانند (۶-۲) از $-\infty$ تا $+\infty$ هستند و خارج از میله، $f(x) = 0$ می‌باشد. اما در (۶-۲)، $\int f(x)\, dx$ احتمال کلی است که x دارای ***مقداری*** باشد، و در نتیجه این انتگرال مساوی ۱ است. پس (۶-۵) و (۶-۲) در واقع یکی هستند؛ مشاهده می‌کنیم که منطقی است که $f(x)$ را چگالی بخوانیم. و میانگین x نیز همخوان با مرکز جرم یک توزیع خطی جرم یا چگالی $f(x)$ باشد. رابطهٔ (۶-۳) را می‌توان به عنوان گشتاور لختی توزیع جرم حول مرکز جرم نیز تلقی کرد (رجوع کنید به فصل ۵ ، بخش ۳).

به سادگی می‌توان ایده‌ها و فرمولهای بالا را به فضای دو (یا چند) بُعدی تعمیم داد. فرض کنید x و y دو متغیر کتره‌ای باشند؛ تابع چگالی یا تابع احتمال مشترک را به صورت $f(x, y)$ تعریف می‌کنیم به طوری که $f(x_i, y_i)\, dx\, dy$ احتمال این است که نقطهٔ (x, y) در عنصر مساحت $dx\, dy$ در نقطهٔ $x = x_i$ و $y = y_i$ باشد. به این ترتیب، احتمال اینکه نقطهٔ (x, y) در ناحیهٔ معینی از صفحهٔ (x, y) باشد، برابر انتگرال $f(x, y)$ روی آن سطح است. مقادیر میانگین یا چشمداشتی x و y، و واریانس و انحراف معیار آنها با روابط زیر داده می‌شود.

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x, y)\, dx\, dy$$

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x, y)\, dx\, dy$$
$$Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})\, f(x, y)\, dx\, dy = \sigma_x^2 \qquad (۶-۶)$$
$$Var(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{y})\, f(x, y)\, dx\, dy = \sigma_y^2$$

ملاحظه می‌شود که اینها تعمیمهای (۶-۲) و (۶-۳) هستند؛ علاوه بر این، (۶-۶) را می‌توان این طور تعبیر کرد که مختصات مرکز جرم و گشتاورهای لختی توزیع جرم دوبعدی را به دست می‌دهد. فرمولهای مشابهی هم برای سه (یا بیشتر) متغیر کتره‌ای می‌توان نوشت (یعنی، سه بعدی یا بیشتر). همچنین توجه کنید که فرمولهای (۶-۶) را می‌توان برحسب مختصات قطبی r و θ نیز نوشت؛ به طور مشابه، در سه بعد، می‌توان مختصات استوانه‌ای یا کروی نیز به کار برد (رجوع کنید به مسائل ۶ تا ۸ و ۱۲).

مسائل، بخش ۶

۱- (الف) تابع احتمال $f(x)$ را برای مکان x ذره‌ای پیدا کنید که دارای حرکت هماهنگ ساده در بازهٔ $(-a, a)$ روی محور xها است. (برای بحث حرکت هماهنگ ساده، رجوع کنید به فصل ۷، بخش ۲). ***راهنمایی:*** مقدار x در لحظهٔ t عبارت است از $x = a \cos \omega t$. سرعت dx/dt را پیدا کنید؛ به این ترتیب، احتمال پیدا کردن ذره در یک بازهٔ معین dx متناسب با مدت زمانی است که ذره در آن بازه می‌گذراند که خود معکوساً متناسب با سرعت آن در آن بازه است. فراموش نکنید که احتمال پیدا کردن ذره در **یک جایی** باید ۱ باشد.

(ب) تابع احتمال $f(x)$ را که در (الف) پیدا کردید و همچنین تابع توزیع $F(x)$ را رسم کنید [رجوع کنید به معادلهٔ (۶-۴)].

(ج) میانگین و انحراف معیار x در (الف) را به دست آورید.

۲- در نظریهٔ جنبشی گازها نشان داده می‌شود که احتمال اینکه مولکولی بین دو برخورد متوالی مسافتی بین x و $x + dx$ را طی کند، متناسب با $e^{-x/\lambda}\, dx$ است، که در آن λ یک ثابت است. نشان دهید که میانگین مسافت بین برخوردها (که «مسیر آزاد میانگین» خوانده

می‌شود) برابر λ است. احتمال مربوط به یک مسیر آزاد به طول $\leq$ ۲λ را پیدا کنید.

۳- مهره‌ای مستقیماً به سمت بالا پرتاب می‌شود و مستقیماً به پایین باز می‌گردند. تابع احتمال $f(h)$ را طوری پیدا کنید که $f(h)\ dh$ احتمال یافتن مهره بین h و $h + dh$ باشد.

راهنمایی: به مثال ۲ نگاه کنید.

۴- در مسألهٔ ۱، تابع احتمال را برای یک نوسانگر هماهنگ کلاسیک پیدا کردیم. در مکانیک کوانتومی، تابع احتمال نوسانگر هماهنگ (در حالت پایه) متناسب با $e^{-\alpha^2 x^2}$ است، که در آن α یک ثابت است و x مقادیری بین $-\infty$ تا $+\infty$ را می‌پذیرد. $f(x)$ و میانگین و انحراف معیار x را پیدا کنید. (در مکانیک کوانتومی، انحراف معیار x را عدم قطعیت مکان می‌خوانند و با Δx نمایش می‌دهند.)

۵- احتمال اینکه یک ذرهٔ رادیواکتیو بین زمانهای t و $t + dt$ وا بپاشد متناسب با $e^{-\lambda t}$ است. تابع چگالی $f(t)$ و تابع توزیع $F(t)$ را پیدا کنید. عُمر چشمداشتی (موسوم به عمر میانگین) ذرهٔ رادیواکتیو را پیدا کنید. عمر میانگین را با "نیمه عمر" که برابر مدت زمانی است که در آن $e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$ گردد، مقایسه کنید.

۶- یک باغچه گرد به شعاع ۱ متر را می‌خواهیم طوری کشت کنیم که تعداد N بذر به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شوند: در این صورت است که می‌توان دربارهٔ n بذر در مساحت خاص A صحبت به میان آورد، یا n/N را احتمال اینکه هر بذر خاص در مساحت A باشد تلقی کرد. احتمال $F(r)$ که یک بذر (یعنی یک بذر خاص) در داخل دایره‌ای به شعاع r باشد چقدر است؟ $f(r)\ dr$، یا احتمال اینکه بذری در فاصله‌ای بین r و $r + dr$ از مرکز باشد، چقدر است؟ $\bar{r}$ و σ را پیدا کنید.

۷- (الف) مسألهٔ ۶ را برای موردی که مساحت دایره‌ای مورد بحث اکنون روی سطح خمیدهٔ کرهٔ زمین باشد، مثلاً در تمام نقاط به فاصلهٔ s از شهر شیکاگو (که در امتداد یک دایرهٔ عظیمه روی سطح زمین اندازه گرفته می‌شود) و با فرض $s \leq \pi R/۲$ که در آن $R =$ شعاع زمین است – تکرار کنید. بذرها را می‌توان با، مثلاً، ذرات رادیواکتیو که به سطح زمین سقوط می‌کنند جایگزین کرد (با فرض اینکه اینها به طور یکنواخت در سطح زمین توزیع شوند). $F(s)$ و $f(s)$ را پیدا کنید.

(ب) به ازای $R >> ۱ \geq l$ (مثلاً $s \leq ۱\ km$ و $R = ۴۰۰۰\ km$) نیز $F(s)$ و $f(s)$

را پیدا کنید. آیا به این ترتیب جوابهای شما به جوابهای مسألهٔ ۶ تبدیل می‌شوند؟

۸- ذره‌ای در داخل یک کره به شعاع ۱ واقع است، و احتمالهای پیدا کردن آن در دو عنصر حجم "هم اندازه"، یکی است. تابع توزیع $F(r)$ را برای مختصهٔ کروی r پیدا کنید، و با استفاده از آن تابع چگالی $f(r)$ را حساب کنید. *راهنمایی:* $F(r)$ احتمالی است که ذره در داخل کره‌ای به شعاع r باشد. $\bar{r}$ و σ را حساب کنید.

۹- مسألهٔ ۵-۹ را برای یک توزیع پیوسته حل کنید.

۱۰- مسألهٔ ۵-۱۰ را برای یک توزیع پیوسته حل کنید.

۱۱- مسألهٔ ۵-۱۳ را برای یک توزیع پیوسته حل کنید.

۱۲- اتم هیدروژن از یک پروتون و یک الکترون تشکیل شده است. طبق نظریهٔ بوهر، الکترون روی دایره‌ای به شعاع a (برای حالت پایه $a = 5 \times 10^{-9}\ cm$) حول پروتون می‌چرخد. طبق نظریهٔ مکانیک کوانتومی، الکترون ممکن است در هر فاصلهٔ r (از صفر تا ∞) از پروتون باشد؛ برای حالت پایه، احتمال اینکه الکترون در عنصر حجم dV، در فاصلهٔ بین r و $r + dr$ از پروتون باشد، متناسب با $e^{-2r/a}\ dV$ است، که در آن a شعاع بوهر است. dV را در مختصات کروی بنویسید (رجوع کنید به فصل ۵، بخش ۴) و تابع چگالی $f(r)$ را پیدا کنید به طوری که $f(r)\ dr$ احتمال وجود الکترون در فاصلهٔ بین r و $r + dr$ از پروتون باشد. (به خاطر داشته باشید که احتمال اینکه الکترون در یک جایی باشد، مساوی ۱ است). $f(r)$ را رسم کنید و نشان دهید که مقدار آن در $r = a$ بیشینه است؛ در این صورت می‌گوییم که محتمل‌ترین مقدار r مساوی a است. همچنین نشان دهید که میانگین r^{-1} مساوی a^{-1} است.

۷- توزیع دوجمله‌ای

مثال ۱- فرض کنید سکه‌ای را ۵ بار پرتاب کنیم، احتمال اینکه دقیقاً ۳ شیر در این ۵ پرتاب داشته باشیم چقدر است؟ هر دنباله‌ای از ۵ پرتاب را می‌توان با نمادی شبیه $thhth$ نشان داد. احتمال این ترتیب خاص (یا هر ترتیب خاص دیگر) برابر $(\frac{1}{2})^5$ است زیرا پرتابها مستقل از یکدیگرند (رجوع کنید به مثال ۱، بخش ۳). تعداد چنین ترتیبهایی که شامل ۳ شیر و ۲ خط هستند برابر تعداد راههایی است که می‌توان ۳ مکان از ۵ مکان برای شیرها (یا ۲ مکان برای

خط‌ها) انتخاب کرد؛ یعنی، $C(5, 3)$. بنابراین احتمال دقیقاً ۳ شیر از ۵ پرتاب یک سکه برابر $C(5, 3)\ (\frac{1}{2})^5$ است. فرض کنید سکه‌ای را به دفعات، مثلاً n بار، پرتاب می‌کنیم، و تعداد شیرها در n پرتاب، x باشد. می‌خواهیم تابع احتمال $p = f(x)$، را برای دقیقاً x شیر در n پرتاب پیدا کنیم. با تعمیم مورد ۳ شیر در ۵ پرتاب، می‌بینیم که

$$f(x) = C(n, x)\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{۷-۱}$$

مثال ۲- بگذارید مسألهٔ مشابهی را برای تاس حل کنیم. این بار سؤال این است که احتمال اینکه در ۵ پرتاب یک تاس دقیقاً ۳ تک بیاید چقدر است؟ اگر A به معنای تک و N به معنای غیر تک باشد، احتمال ترتیبی مثل $ANNAA$ برابر است با $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$، زیرا احتمال تک $\frac{1}{6}$ و احتمال غیر تک $\frac{5}{6}$ است و پرتابها مستقل‌اند. تعداد چنین ترتیبهایی که شامل ۳ تا A و ۲ تا N باشد برابر $C(5, 3)$ است؛ بنابراین احتمال اینکه در ۵ پرتاب دقیقاً ۳ تک بیاید برابر $C(5, 3)\ (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^2$ است. با تعمیم این مورد ملاحظه می‌شود که احتمال پیدا کردن x تک در پرتاب n تاس برابر است با

$$f(x) = C(n, x)\left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{n-x} \tag{۷-۲}$$

در دو مسألهٔ بالا، توجه ما معطوف به آزمایشهای مکرّر مستقل بوده است، که هر آزمایش دو برآمد (h یا t، A یا N) با احتمالهای معین دارد. مثالهای زیادی در این زمینه وجود دارند که چند تا را بررسی می‌کنیم. محصول یک کارخانه یا خوب است یا معیوب، با داشتن احتمال معیوب بودن، می‌خواهیم احتمال x محصول معیوب در تعداد n محصول را بدانیم. یک تیرانداز، با احتمال p، تیری را به هدف می‌زند؛ می‌خواهیم احتمال x برخورد به هدف را در n بار تیراندازی بدانیم. هر اتم یک مادهٔ رادیواکتیو با احتمال p در هر دقیقه یک ذرهٔ α گسیل می‌کند؛ می‌خواهیم احتمال اینکه در مدت یک دقیقه x ذرهٔ آلفا از n هستهٔ موجود در نمونه گسیل شود را پیدا کنیم. ذره‌ای با جهشهایی تک واحدی در امتداد محور xها عقب و جلو می‌رود؛ در هر جهش، احتمال جهش به جلو و احتمال جهش به عقب یکسان است. (این حرکت را اصطلاحاً **گردش کتره‌ای** می‌نامند؛ و می‌توان آنرا به عنوان مدلی در فرایند پخش به کار برد).

می‌خواهیم بدانیم که بعد از n جهش، احتمال اینکه ذره در فاصلهٔ

$$d = x \text{ تعداد جهشهای مثبت } - (n - x) \text{ تعداد جهشهای منفی}$$

از نقطهٔ شروعش باشد، چقدر است. این احتمال، احتمالِ x جهش مثبت در n جهش است.

توابع احتمال دوجمله‌ای در تمام این مسائل، چیزی به دفعات تکرار می‌شود، در هر سعی، دو پیامد ممکن با احتمالهای p (که معمولاً احتمال "موفقیت" خوانده می‌شود) و $q = ۱ - p$ ($q =$ احتمال "شکست") وجود دارد. این آزمونهای تکراری مستقلِ با احتمالهای ثابت p و q را ***آزمونهای برنولی*** می‌نامیم. بگذارید روابط (۷-۱) و (۷-۲) را تعمیم بدهیم و فرمولی به دست آوریم که بتواند برای هر مسأله‌ای از این نوع به کار رود؛ یعنی احتمال $f(x)$ برای دقیقاً x موفقیت از n آزمون. با همان استدلالی که برای به دست آوردن (۷-۱) و (۷-۲) به کار بردیم، خواهیم داشت

$$\boxed{f(x) = C(n, x)\, p^x\, q^{n-x}} \qquad (۷\text{-}۳)$$

همچنین ممکن است بخواهیم احتمال این را پیدا کنیم که در n آزمون تعداد موفقیتها بیشتر از x نباشد؛ این عبارت است از حاصل‌جمع احتمالهای ۰، ۱، ۲، ۳، ... x، یعنی، تابع توزیع $F(x)$ متغیر کتره‌ای x که تابع احتمال آن (۷-۳) است [رجوع کنید به (۶-۵)]. می‌توان نوشت

$$F(x) = f(۰) + f(۱) + \cdots + f(x) \qquad (۷\text{-}۴)$$

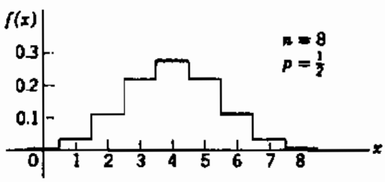
$$= C(n, ۰)p^۰ q^n + C(n, ۱)p^۱ q^{n-۱} + \cdots + C(n, x)\, p^x q^{n-x}$$

ملاحظه کنید که (۷-۳) یک جمله از بسط $(p + q)^n$ است و (۷-۴) حاصل‌جمع چندین جمله از این بسط است (رجوع کنید به مثال ۲، بخش ۴). به این دلیل، توابع $f(x)$ در (۷-۱)، (۷-۲)، یا (۷-۳) را ***توابع احتمال*** (یا ***بسامد*** یا ***چگالی***) دوجمله‌ای یا توزیعات دوجمله‌ای می‌نامند، و تابع $F(x)$ در (۷-۴)، ***تابع توزیع دوجمله‌ای*** خوانده می‌شود.

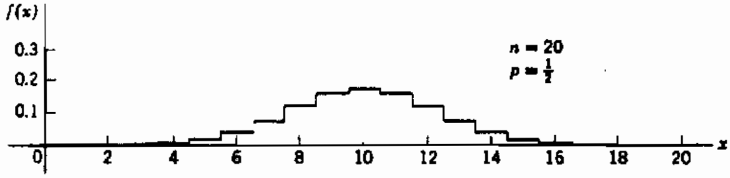
رسم تابع احتمال دوجمله‌ای $f(x)$ برای چند مقدار p و n مفید خواهد بود. (رجوع کنید به شکلهای ۷-۱، ۷-۲، ۷-۳ و مسائل ۱ تا ۸). مطابق شکل ۶-۱، به جای به کار بردن نقطه در $y = f(x)$ برای هر x، قطعه خطی افقی به طول واحد و به مرکز آن x رسم می‌کنیم؛

به این ترتیب، احتمالها به جای عرضهای نقاط، با مساحتهای زیر خط چینها مشخص می‌شوند.
از شکلهای ۷-۱ تا ۷-۳ و نمودارهای مشابه، می‌توان چند نتیجه گرفت. محتمل‌ترین مقدار x [همخوان با بزرگ‌ترین مقدار $f(x)$] تقریباً عبارت است از $x = np$ (مسائل ۱۰ و ۱۱)؛ مثلاً، به ازای $p = \frac{1}{2}$، محتمل‌ترین مقدار x برای n زوج، برابر $\frac{1}{2}n$ است؛ برای n فرد، دو مقدار متوالی، یعنی $\frac{1}{2}(n \pm 1)$، برای x وجود دارد که به ازای آنها احتمال بیشینه است. منحنی‌های مربوط به $p = \frac{1}{2}$ حول $x = \frac{1}{2}n$ قرینه‌اند. به ازای $p \neq \frac{1}{2}$، منحنی نامتقارن است و برای p های کوچک منحنی به سمت x های کوچک و برای p های بزرگ منحنی به سمت x های بزرگ‌تر تغییر می‌کند. با افزایش n، نمودار $f(x)$ پهن‌تر و پخ‌تر می‌شود (مساحت کل زیر نمودار باید برابر ۱ باقی بماند). احتمال محتمل‌ترین مقدار x با افزایش n کاهش می‌یابد. مثلاً، محتمل‌ترین تعداد شیرها در ۸ بار پرتاب یک سکه، ۴ با احتمال ۰ر۲۷ است؛ محتمل‌ترین تعداد شیرها در پرتاب ۲۰ سکه، ۱۰ با احتمال آن ۰ر۱۷ است؛ برای 10^6 پرتاب، احتمال به دست آوردن دقیقاً ۵۰۰،۰۰۰ شیر کمتر از 10^{-3} است.

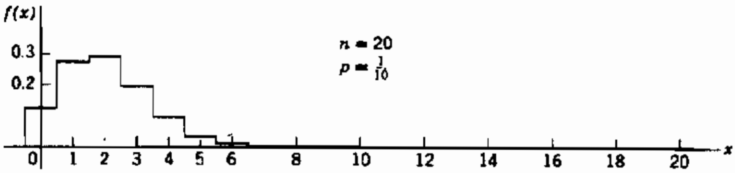
حال بگذارید شکلهای ۷-۱ و ۷-۲ را دوباره رسم کنیم و این بار $n\,f(x)$ را برحسب تعداد نسبی موفقیتها، x/n، رسم کنیم (شکلهای ۷-۴ و ۷-۵). چون این تغییر مقیاس (عرض در n ضرب شده و طول بر n تقسیم شده) مساحت را تغییر نمی‌دهد، هنوز هم می‌توان از مساحت برای نمایش احتمال استفاده کرد. توجه کنید که اکنون نمودارها



شکل ۷-۱



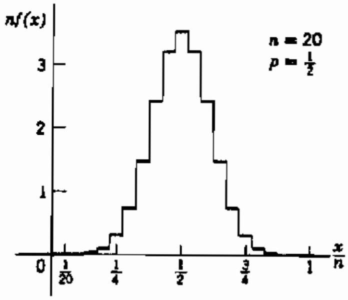
شکل ۷-۲



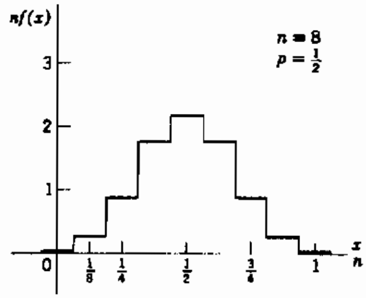
شکل ۳-۷

با افزایش n باریک‌تر و بلندتر می‌شوند. این بدان معناست که مقدارهای x/n در اطراف محتمل‌ترین مقدار خود، یعنی $np/n = p$، جمع می‌شوند. مثلاً، اگر سکه‌ای را به دفعات پرتاب کنیم، تفاضل "تعداد شیرها $-\frac{۱}{۲}$ تعداد پرتابها" بزرگ است و با افزایش n، افزایش می‌یابد (شکلهای ۷-۱ و ۷-۲)، ولی نسبت "تعداد شیرها بر تعداد پرتابها" با افزایش n به $\frac{۱}{۲}$ نزدیک‌تر می‌شود (شکلهای ۷-۴ و ۷-۵). به این دلیل است که می‌توان مقادیر تجربی x/n را به عنوان تخمینی منطقی از p به کار برد.

نمودارهای توزیع دوجمله‌ای $nf(x)$ برحسب x/n.



شکل ۷-۵



شکل ۷-۴

قانون اعداد بزرگ گزاره‌ها و برهانهایی که ایده‌های بخش پیش را دقیق‌تر می‌سازند به قوانین اعداد بزرگ مشهوراند. بگذارید یکی از این قوانین را بیان و آنرا ثابت کنیم. ابتدا، به یک نتیجهٔ ساده ولی خیلی مهم، به نام ***نامساوی چبیشف*** نیاز داریم. متغیر کتره‌ای x با تابع احتمال

$f(x)$را در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم μ میانگین و σ انحراف معیار x باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که به ازای عدد دلخواه t، احتمال اینکه اختلاف x با مقدار میانگین μ بیش از t باشد، کمتر از σ^2/t^2 است. این به آن معنی است که بعید است x بیش از چند انحراف معیار با μ اختلاف داشته باشد؛ مثلاً، اگر t دو برابر انحراف معیار σ باشد، پی خواهیم برد که احتمال اینکه x بیش از 2σ از μ فاصله داشته باشد کمتر از $\sigma^2/t^2 = \sigma^2/(2\sigma)^2 = \frac{1}{4}$ است.
اثبات این نکته، ساده است. طبق تعریف σ، داریم

$$\sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 f(x)$$

جمعیابی روی تمام xها است. پس اگر جمعیابی را فقط روی مقادیری از x که به ازای آنها $|x - \mu| \geq t$ است انجام دهیم، حاصل کوچک‌تر از σ^2 خواهد بود:

$$\sigma^2 > \sum_{|x-\mu| \geq t} (x - \mu)^2 f(x) \qquad (۷-۵)$$

اگر در (۷-۵)، هر $(x - \mu)$ را با t جایگزین کنیم، حاصل‌جمع کاهش خواهد یافت، و بنابراین داریم

$$\sigma^2 > \sum_{|x-\mu| \geq t} t^2 f(x) = t^2 \sum_{|x-\mu| \geq t} f(x) \quad \text{یا} \quad \sum_{|x-\mu| \geq t} f(x) < \frac{\sigma^2}{t^2} \qquad (۷-۶)$$

اما $\sum_{|x-\mu| \geq t} f(x)$ صرفاً عبارت است از حاصل‌جمع تمام احتمالهای مقادیری از xکه اختلافشان با μ بیش از t است، و (۷-۶) بیان می‌کند که این احتمال کمتر از σ^2/t^2 است، و این همان چیزی است که ادعا کرده بودیم.

اکنون نامساوی چبیشف را بر متغیر کتره‌ای x که تابع احتمال آن توزیع دوجمله‌ای (۷-۳) است، اعمال می‌کنیم. از مسائل ۹ و ۱۵ داریم $\mu = np$ و $\sigma = \sqrt{npq}$. پس طبق نامساوی چبیشف داریم:

(۷-۷) (احتمالِ $|x - np| \geq t$) کمتر از npq/t^2 است.

مقدار دلخواه t در (۷-۷) را متناسب با n فرض می‌کنیم، یعنی $t = n\varepsilon$، که حالا ε دلبخواه است. به این ترتیب (۷-۷) تبدیل می‌شود به

(۷-۸) (احتمالِ $|x - np| \geq n\varepsilon$) کمتر از $npq/n^2\varepsilon^2$ است.

یا، پس از تقسیم اولین نامساوی بر n،

$$\text{(۹-۷)} \qquad \text{احتمال}\left(\left| \frac{x}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \text{ کمتر از } \frac{pq}{n\varepsilon^2} \text{ است.}$$

یادآور می‌شویم که x/n تعداد نسبی موفقیت‌هاست؛ به طور شهودی انتظار داریم که به ازای nهای بزرگ، x/n نزدیک p باشد. اکنون (۷-۹) بیان می‌کند که، اگر ε عددی کوچک باشد، احتمال اینکه اختلاف x/n با p به اندازهٔ ε باشد، کوچک‌تر از $pq/n\varepsilon^2$ است؛ یعنی وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند، این احتمال به سمت صفر میل می‌کند. (با این همه، توجه کنید که نیازی نیست که x/n به سمت p میل کند.) این یک شکل از قانون اعداد بزرگ است و ایده‌های شهودی ما را توجیه می‌کند.

مسائل، بخش ۷

برای مقدارهای اشاره شدهٔ n در مسائل ۱ تا ۶:

(الف) احتمالهای x شیر را در n پرتاب یک سکه پیدا کنید و (مانند شکلهای ۷-۱ و ۷-۲) نمودار تابع بسامد $f(x)$ [معادلهٔ (۷-۱)] را رسم کنید.

(ب) نمودار $n\,f(x)$ را برحسب x/n (مانند شکلهای ۷-۴ و ۷-۵) رسم کنید.

(ج) نمودار تابع توزیع $F(x)$ در معادلهٔ (۷-۴) را رسم کنید.

(د) با استفاده از محاسبات و شکلهایی که به دست آورده‌اید به این سؤالها پاسخ دهید: احتمال دقیقاً ۳ شیر چیست؟ احتمال حداکثر ۳ شیر چیست؟ [***راهنمایی:*** $F(x)$ را در نظر بگیرید.] احتمال حداقل ۳ شیر چیست؟ محتمل‌ترین تعداد شیرها چند تاست؟ تعداد چشمداشتی شیرها چیست؟

۱- $n = ۳$ ۲- $n = ۴$ ۳- $n = ۵$

۴- $n = ۶$ ۵- $n = ۱۰$ ۶- $n = ۱۲$

۷- نمودار تابع فرکانس دوجمله‌ای را برای مورد $n = ۶$، $p = \frac{۱}{۶}$، $q = \frac{۵}{۶}$ که بیانگر احتمال، مثلاً، x تک در ۶ پرتاب یک تاس است، رسم کنید. همچنین نمودار $n\,f(x)$ را برحسب x/n، و نمودار $F(x)$ را رسم کنید. احتمال حداقل ۲ تک در ۶ پرتاب یک تاس چقدر است؟ ***راهنمایی:*** آیا می‌توانید احتمال حداکثر یک تک را از یکی از منحنی‌هایتان

به دست آورید؟

۸- منحنی‌های مسألهٔ ۷ را به ازای $n = ۵$، $p = \frac{۱}{۵}$ و $q = \frac{۴}{۵}$ رسم کنید.

۹- با استفاده از روش دوم مسألهٔ ۵-۱۱، نشان دهید که تعداد چشمداشتی موفقیتها در n آزمون برنولی با احتمال موفقیت p، مساوی با $\bar{x} = np$ است. ***راهنمایی:*** تعداد موفقیتهای چشمداشتی در یک آزمون چیست؟

۱۰- نشان دهید که در n پرتاب یک سکه، محتمل‌ترین تعداد شیرها اگر n زوج باشد برابر $n/۲$ [یعنی، $f(x)$ در (۷-۱)، بیشینه‌اش وقتی است که $x = n/۲$ باشد] و اگر n فرد باشد، دو مقدار "بیشینه" برای $f(x)$، در $x = \frac{۱}{۲}(n + ۱)$ و $x = \frac{۱}{۲}(n - ۱)$ وجود دارد. ***راهنمایی:*** کسر $f(x + ۱)/f(x)$ را ساده کنید و سپس مقدار xهایی را پیدا کنید که به ازای آنها این کسر بزرگ‌تر از ۱ [یعنی، $f(x + ۱) > f(x)$]، و کوچک‌تر یا مساوی ۱ [یعنی $f(x + ۱) \leq f(x)$] شود. به یاد داشته باشید که x باید یک عدد درست باشد.

۱۱- با استفاده از مسألهٔ ۱۰ نشان دهید که برای توزیع دوجمله‌ای (۷-۳)، محتمل‌ترین مقدار x تقریباً برابر np است (در حقیقت به فاصلهٔ ۱ از این مقدار).

۱۲- به یاد آورید که اگر $p(AB) = p(A) \cdot p(B)$ باشند، رویدادهای A ، B را مستقل می‌نامیم. به همین ترتیب، دو متغیر کتره‌ای x و y با توابع احتمال $f(x)$ و $g(y)$ را مستقل می‌نامیم مشروط بر اینکه به ازای هر زوج مقدار x و y احتمال $x = x_i$ و $y = y_i$ برابر $f(x_i) \cdot g(y_i)$ گردد، یعنی، تابع احتمال مشترک برای y و x، برابر $f(x)\ g(y)$ شود. نشان دهید اگر x ، y مستقل باشند، میانگین یا مقدار چشمداشتی xy برابر $E(xy) = E(x) \cdot E(y) = \mu_x \cdot \mu_y$ است.

۱۳- با استفاده از نتایج مسألهٔ ۱۲ و مسألهٔ ۵-۹ نشان دهید که برای دو متغیر کتره‌ای و مستقل x و y داریم

$$E\left[(x - \mu_x)(y - \mu_y)\right] = E(xy) - \mu_x E(y) - \mu_y E(x) + \mu_x \mu_y = ۰$$

و در نتیجه نشان دهید که

$$Var\,(x + y) = E\{[(x + y) - (\mu_x + \mu_y)]^۲\} = Var\,x + Var\,y$$

۱۴- فرض کنید $x =$ تعداد شیرها در پرتاب یک سکه باشد. مقدارهای ممکن x و احتمالهای

آنها چیست؟ μ_x چیست؟ نشان دهید که $\frac{۱}{۴} = [$ میانگین $(x-\mu)^۲] = Var\ x$، و در نتیجه انحراف معیار برابر $\frac{۱}{۲}$ است. اکنون با استفاده از اینکه "واریانس حاصل‌جمع متغیرهای کتره‌ای مستقل = حاصل‌جمع واریانس‌های آنهاست" نشان دهید که اگر x = تعداد شیرها در n پرتاب یک سکه باشد، $Var\ (x) = \frac{۱}{۴} n$ و انحراف معیار آن $\sigma_x = \frac{۱}{۲}\sqrt{n}$ است.

۱۵- با تعمیم مسألهٔ ۱۴ نشان دهید که برای توزیع دوجمله‌ای عمومی (۷-۳) داریم $Var\ (x) = npq$ و $\sigma = \sqrt{npq}$.

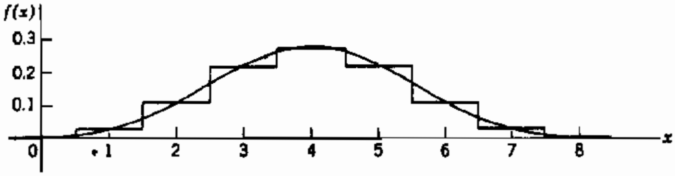
۸- توزیع گاؤسی یا بهنجار

همانطور که در حل برخی مسائل ملاحظه می‌کنید، در محاسبهٔ توزیعهای دوجمله‌ای، جز برای مقادیر خیلی کوچک n، میزان محاسبات واقعاً زیاد است. گرچه جدولهای محاسبه شده‌ای وجود دارند، اما معمولاً استفاده از یک تقریب برای توزیع دوجمله‌ای به ازای nهای بزرگ قانع کننده‌تر است. در این بخش و بخش ۹، دو نوع از اینگونه تقریبها را بررسی خواهیم کرد.

با استفاده از فرمول استرلینگ برای بسط فاکتوریلهای $C(n,x)$ در رابطهٔ (۷-۳) و به کار بردن تقریبهای مناسب دیگر برای nهای بزرگ، می‌توان نشان داد که وقتی n و np هر دو بزرگ باشند، فرمول زیر تقریب خوبی از توزیع دوجمله‌ای (۷-۳) را به دست می‌دهد:

$$\boxed{f(x) = C(n,x)\, p^x\, q^{n-x} \sim \frac{۱}{\sqrt{۲\pi n p q}}\, e^{-(x-np)^۲/(۲npq)} \quad (۱-۸)}$$

علامت $\sim$ (مانند فصل ۱۱، بخش ۱۱) به معنای این است که نسبت توزیع دوجمله‌ای دقیق (۷-۳) و طرف راست (۸-۱) وقتی $n \to \infty$ به سمت ۱ میل می‌کند [خلاصه‌ای از اثبات (۸-۱) در مسألهٔ ۱ آمده است]. طرف راست معادلهٔ (۸-۱) را ***تقریب بهنجار*** (یا ***گاؤسی***) توزیع دوجمله‌ای (۷-۳) می‌نامیم، و نمودار این تابع معمولاً ***منحنی خطای بهنجار*** خوانده می‌شود. گرچه گفتیم که این تقریب برای nهای بزرگ معتبر است، اما حتی در nهای نسبتاً کوچک هم توافق نسبتاً خوبی وجود دارد. نمودار (شکل ۸-۱)، این نکته را برای مورد $n = ۸$ نشان می‌دهد.

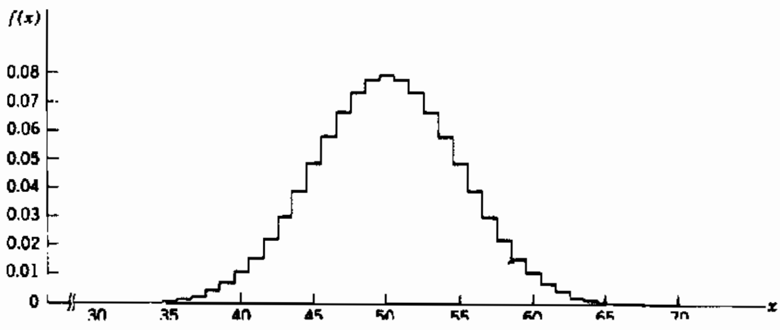


شکل ۸-۱ توزیع دوجمله‌ای برای $n = ۸$ و $p = \frac{۱}{۲}$، و تقریب بهنجار آن

توزیع دوجمله‌ای $f(x)$ فقط برای xهای صحیح تعریف می‌شود؛ مقدارهای $f(x)$ را باید با مقدارهای تقریب منحنی بهنجار در xهای صحیح مقایسه کرد. وقتی n خیلی بزرگ باشد شکل (۸-۲) نمودار توزیع دوجمله‌ای خیلی نزدیک به تقریب بهنجار است.

احتمال دقیقاً x موفقیت در n آزمون برنولی، برای nهای بزرگ تقریباً با رابطهٔ (۸-۱) داده می‌شود. ممکن است نظر ما بیشتر این باشد که احتمال اینکه تعداد موفقیتهای x بین $x_۱$ و $x_۲$ ($x_۱ \leq x \leq x_۲$) باشد را بدانیم؛ مثلاً احتمال اینکه در پرتاب ۱۰۰ سکه، تعداد شیرها بین ۴۵ و ۵۵ باشد. چنین احتمالی دقیقاً با بخشی از مساحت زیر منحنی دوجمله‌ای $f(x)$ (مانند شکلهای ۷-۱ ، ۷-۲ ، ۸-۱ ، و ۸-۲) تعیین می‌شود. به ازای n بزرگ، احتمال مورد نظر را می‌توان با پیدا کردن مساحت زیر منحنی تقریب بهنجار، خیلی ساده‌تر به دست آورد. پس داریم

$$(\text{احتمال اینکه } x_۱ \leq x \leq x_۲) \sim \frac{۱}{\sqrt{۲\pi npq}} \int_{x_۱}^{x_۲} e^{-(x-np)^۲/(۲npq)}\, dx \quad (۸\text{-}۲)$$



شکل ۸-۲ توزیع دوجمله‌ای به ازای $n = ۱۰۰$ و $p = \frac{۱}{۲}$

این گزاره که دو طرف معادلهٔ (۸-۲) وقتی $n \to \infty$، به سوی ۱ میل می‌کند، **قضیهٔ حدّ لاپلاس - دُمُوار** خوانده می‌شود (رجوع کنید به کتاب فِلِر، صفحهٔ ۱۸۲).

مقدار میانگین μ و انحراف معیار σی یک متغیر کتره‌ای که تابع احتمال آن توزیع دوجمله‌ای (۷-۳) است، عبارت اند از (مسائل ۷-۹ و ۷-۱۵)

$$\mu = np \quad ، \quad \sigma = \sqrt{npq} \qquad (۸-۳)$$

به سادگی می‌توان نشان داد (مسائل ۲ و ۳) که تقریب بهنجار، شرط لازم برای تابع چگالی احتمال، یعنی اینکه انتگرال آن از $-\infty$ تا $+\infty$ باید ۱ باشد، را برقرار می‌سازد، و اگر تابع چگالی احتمال یک متغیر کتره‌ای x باشد، میانگین و انحراف معیار x با (۸-۳) داده می‌شوند. با جایگزینی (۸-۳) در (۸-۱)، داریم

$$\text{تابع چگالی بهنجار برای یک متغیر کتره‌ای با میانگین } \mu \text{ و انحراف معیار } \sigma = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} e^{-(x-\mu)^۲/(۲\sigma^۲)} \qquad (۸-۴)$$

تابع توزیع بهنجار مربوطه عبارت است از

$$\text{تابع توزیع بهنجار} = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-\mu)^۲/(۲\sigma^۲)}\, dt \qquad (۸-۵)$$

در حل مسائل، می‌خواهیم از (۸-۱)، (۸-۲)، (۸-۴)، و (۸-۵) استفاده کنیم. با این همه، اینها توابعی نیستند که در جدولها پیدا شوند؛ مقدارهای جدول‌بندی شده فقط برای مورد $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ هستند، لذا باید ببینیم که برای حل مسائل واقعی چگونه باید از این جدولها کمک گرفت. تابع بهنجار (یا گاؤسی) **استاندارد** $\phi(t)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\phi(t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-t^۲/۲} \qquad (۸-۶)$$

البته مقدارهای این تابع را می‌توان با ماشین حساب به دست آورد؛ علاوه بر این، مقدارهای آن به ازای $t \geq ۰$ جدول‌بندی نیز شده‌اند [توجه کنید که $\phi(-t) = \phi(t)$]. علاوه‌بر نمادهای $\phi(t)$ یا $\phi(x)$، نمادهای مختلف دیگری نیز برای نمایش این تابع به کار می‌روند، مثلاً $f(x)$ یا $Z(x)$؛ یا ستونی از مقدارهای ϕ را ممکن است به عنوان "عرض" نامگذاری کرد. حال ببینیم چگونه باید جدول $\phi(t)$ را به کار برد. فرض کنید که محور عمودی را در نمودار تابع چگالی (۸-۴) جا به جا کنیم (مثلاً، در شکل ۸-۱)، به طوری که از قلهٔ منحنی $(x = \mu)$ عبور کند؛ در

این صورت منحنی نسبت به محورهای جدید متقارن است. این بدان معناست که $(x - \mu)$ را در (۸-۴) به عنوان یک متغیر جدید در نظر بگیریم. مقیاس روی محور xها را هم تغییر می‌دهیم به طوری که $(x - \mu)$ برحسب مضاربی از انحراف معیار σ بیان شود، یعنی، متغیر جدید را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad (۸\text{-}۷)$$

با جایگذاری (۸-۷) در (۸-۴) [یا در (۸-۱) با استفاده از (۸-۳)]، داریم

$$\boxed{t = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \text{که} \quad f(x) \sim \frac{۱}{\sigma}\,\phi(t) \qquad (۸\text{-}۸)}$$

مثال ۱ - احتمال تقریبی به دست آوردن دقیقاً ۵۲ شیر در پرتاب ۱۰۰ سکه چقدر است؟

با استفاده از (۸-۳)، داریم

$$\mu = np = ۱۰۰ \times \frac{۱}{۲} = ۵۰ \qquad ،\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{۱۰۰ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}} = ۵$$

و از (۸-۷)،

$$t = \frac{۵۲ - ۵۰}{۵} = ۰/۴$$

پس طبق (۸-۸)، احتمال مطلوب عبارت است از

$$\frac{۱}{\sigma}\,\phi(t) = \frac{۱}{۵}\,\phi(۰/۴) = \frac{۱}{۵}\,(۰/۳۶) = ۰/۰۷ \qquad \text{با استفاده از جدولها}$$

از سویی دیگر، با استفاده از (۸-۸) و (۸-۶) و به کمک ماشین حساب این احتمال برابر است با:

$$\frac{۱}{۵\sqrt{۲\pi}}\,e^{-(۰/۴)^۲/۲} = ۰/۰۷$$

حال تابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$P(a,b) = \int_a^b \phi(t)\,dt \qquad (۸-۹)$$

پس تابع بهنجار ***استاندارد*** عبارت است از

$$P(-\infty, x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\,dt = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^۲/۲}\,dt \qquad (۸-۱۰)$$

تابع مفید دیگر عبارت است از:

$$P(۰, x) = \int_۰^x \phi(t)\,dt = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_۰^x e^{-t^۲/۲}dt = P(-\infty, x) - \frac{۱}{۲} \qquad (۸-۱۱)$$

زیرا $P(-\infty, \infty) = ۱$ و $P(-\infty, ۰) = \frac{۱}{۲}$ (رجوع کنید به مسألهٔ ۲).

[هر دوی این توابع با تابع خطا مرتبط اند - رجوع کنید به فصل ۱۱، معادله‌های (۹-۲) و (۹-۴).] ***هشدار***: بعضی جدولها مقدارهای $P(-\infty, x)$ و بعضی دیگر مقدارهای $P(۰, x)$ را مشخص می‌کنند و این ممکن است گمراه کننده باشد. همچنین ممکن است نمادهایی مانند $P(x)$، $\phi(x)$، یا $F(x)$ توسط مؤلفان مختلف برای $P(-\infty, x)$ یا $P(۰, x)$ به کار روند. همیشه مقدار تابع را به ازای $x = ۰$ کنترل کنید تا متوجه شوید که کدام تابع جدول‌بندی شده است: از (۸-۱۱) می‌بینیم که $P(۰, ۰) = ۰$ در حالی که $P(-\infty, ۰) = \frac{۱}{۲}$.

حال برای آنکه از (۸-۲) استفاده کنیم، (۸-۳) و (۸-۷) را جایگزین می‌کنیم؛ توجه کنید که طبق (۸-۷)، $dx = \sigma\,dt$. بنابراین، طبق (۸-۹)، خواهیم داشت

$$(x_۱ \le x \le x_۲ \text{ احتمال اینکه}) \sim \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}\int_{t_۱}^{t_۲} e^{-t^۲/۲}\sigma\,dt = P(t_۱, t_۲) \qquad (۸-۱۲)$$

که $t_۲ = \dfrac{x_۲ - \mu}{\sigma}$ ، $t_۱ = \dfrac{x_۱ - \mu}{\sigma}$

مثال ۲ - می‌خواهیم با به کار بردن (۸-۱۲) این احتمال را تخمین بزنیم که در پرتاب ۱۰۰ سکه بین ۴۵ تا ۵۵ شیر بیاید، یعنی $۴۵ \le x \le ۵۵$، از مثال ۱ داریم، $\mu = ۵۰$ و $\sigma = ۵$ پس

$$t_1 = \frac{۴۵ - ۵۰}{۵} = -۱ \quad ، \quad t_2 = \frac{۵۵ - ۵۰}{۵} = ۱$$

طبق (۸-۱۲)، احتمال مطلوب با استفاده از جدولهای $P(0, x)$ تقریباً برابر است با

$$P(-1, 1) = P(-1, 0) + P(0, 1) = 2P(0, 1) = 2(0.34) = 0.68$$

از سوی دیگر، طبق (۸-۱۱) و با استفاده از جدولهای $P(-\infty, x)$ داریم:

$$P(-1, 1) = 2P(0, 1) = 2P(-\infty, 1) - 1 = 2(0.84) - 1 = 0.68$$

[با انتگرال‌گیری از ۴۴٫۵ تا ۵۵٫۵ ، می‌توانیم به نتیجهٔ دقیق‌تری برسیم - رک کتاب فِلِر، صفحهٔ ۱۸۵ ؛ این نتیجه، همخوانی بیشتری با مساحت مناسب زیر منحنی دقیق دوجمله‌ای در شکل ۸-۲ دارد که شامل تمامی سطح زیر پله‌ها در $x = ۴۵$ و $x = ۵۵$ است، مربوط می‌شود. با این کار می‌توان ثابت کرد که $2P(0, 1.1) = 0.73$.]

مسائل، بخش ۸

۱- با روش تفصیلی زیر، رابطهٔ (۸-۱) را ثابت کنید: از (۷-۳) شروع کنید، و به ازای n های بزرگ، رابطه‌ای تقریبی برای آن به دست آورید. ابتدا با استفاده از فرمول استرلینگ فاکتوریلهای موجود در $C(n, x)$ را تقریب بزنید (فصل ۱۱ ، بخش ۱۱) و با ساده کردن آن رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید.

$$f(x) \sim \left(\frac{np}{x}\right)^x \left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x} \sqrt{\frac{n}{2\pi x(n-x)}}$$

نشان دهید که اگر $\delta = x - np$ باشد، در آن صورت داریم $x = np + \delta$ و $n - x = nq - \delta$. این مقادیر را برای x و $n - x$ در رابطهٔ تقریبی $f(x)$ جایگزین کنید. برای محاسبهٔ دو ضریب اول در $f(x)$ (فعلاً جذر را فراموش کنید): از دو ضریب مزبور لگاریتم بگیرید؛ نشان دهید که

$$\ln \frac{np}{x} = -\ln\left(1 + \frac{\delta}{np}\right)$$

و فرمول مشابهی هم برای $\ln [nq/(n - x)]$ پیدا کنید؛ لگاریتمها را به صورت یک

رشتهٔ توانی از $\delta/(np)$ بسط دهید، فاکتورگیری کنید و پس از ساده کردن نتیجه بگیرید که

$$ln\ \left(\frac{np}{x}\right)^x\left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x} \sim -\frac{\delta^۲}{۲\,npq}\ \left(۱+\frac{\delta}{n}\text{ توانهایی از }\right)$$

در نتیجه برای nهای بزرگ

$$\left(\frac{np}{x}\right)^x\left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x} \sim e^{-\delta^۲/(۲npq)}$$

[در واقع δ/n باید کوچک، یعنی x به اندازهٔ کافی به مقدار میانگینش np نزدیک باشد به طوری که $\delta/n = (x-np)/n$ کوچک گردد. این بدان معناست که تقریب ما برای قسمت مرکزی نمودار (رک شکلهای ۷-۱ تا ۷-۳) و در اطراف $x = np$ که $f(x)$ بزرگ است، معتبر است. چون در هر صورت به ازای xهای دور از np، تابع $f(x)$ کوچک است، ما از این واقعیت که تقریب ما در آنجا ممکن است خوب نباشد، صرفنظر می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر در مورد این نکته، رک کتاب فِلِر، صفحه ۱۹۲] . حال برگردیم به ریشهٔ دوم در $f(x)$: x را با np و $n-x$ را با nq تقریب بزنید (با فرض اینکه nq یا np $\delta <<$) و رابطهٔ (۸-۱) را پیدا کنید.

۲- نشان دهید برای آنکه تقریب بهنجار بر توزیع دوجمله‌ای تبدیل به چگالی گردد. ضریب $۱/\sqrt{۲\pi\, npq}$ ضریبی درستی است، یعنی، با معرفی این ضریب، انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ احتمال کل ۱ را می‌دهد. ***راهنمایی:*** بعد از تغییر متغیر $t = (x-np)/\sqrt{npq}$ از فصل ۱۱، بخش ۵ استفاده کنید.

۳- در تقریب بهنجار [طرف راست (۸-۱)]، np و $\sqrt{npq}$ مقدار میانگین و انحراف معیار σ ی متغیر x برای توزیع دوجمله اند (مسائل ۷-۹ و ۷-۱۵). نشان دهید که این کمیتها، میانگین و انحراف معیار متغیر x برای تقریب بهنجار نیز هستند. (***راهنمایی:*** انتگرالهای مربوطه را بنویسید و محاسبه کنید.)

با اعمال تقریب بهنجار بر توزیع دوجمله‌ای، و استفاده از جدول [یا ماشین حساب برای $\phi(t)$] احتمال تقریبی هر یک از موارد زیر را حساب کنید.

۴- در پرتاب ۱۰۰ سکه دقیقاً ۵۰ شیر بیاید.

۵- در ریختن ۷۲۰ تاس دقیقاً ۱۲۰ تک بیاید.

۶- در ریختن ۷۲۰ تاس بین ۱۰۰ تا ۱۴۰ تک بیاید.

۷- در پرتاب 10^6 سکه دقیقاً بین ۴۹۹،۰۰۰ تا ۵۰۱،۰۰۰ شیر بیاید.

۸- در پرتاب ۴۰۰ سکه دقیقاً ۱۹۵ شیر بیاید.

۹- در پرتاب ۴۰۰ سکه بین ۱۹۵ تا ۲۰۵ شیر بیاید.

۱۰- در ریختن ۱۸۰ تاس دقیقاً ۳۱ ، ۴ بیاید.

۱۱- در ریختن ۱۸۰ تاس بین ۲۹ تا ۳۳ ، ۴ بیاید.

۱۲- در ۱۰۰ آزمون برنولی با احتمال موفقیت $\frac{1}{5}$، تعداد موفقیتها دقیقاً ۲۱ باشد.

۱۳- در ۱۰۰ آزمون برنولی با احتمال موفقیت $\frac{1}{5}$، بین ۱۷ تا ۲۱ موفقیت رخ دهد.

۱۴- نشان دهید که $P(0,x) = \frac{1}{2}\, erf\,(x/\sqrt{2})$ و $P(-\infty, x) = \frac{1}{2}[1 + erf\,(x/\sqrt{2})]$.

رک معادله‌های (۸-۱۰) و (۸-۱۱)، و فصل ۱۱ ، بخش ۹ .

۱۵- با استفاده از جدول یا ماشین حساب، نمودار $\phi(t)$ در معادلهٔ (۸-۶) را رسم کنید.

۱۶- در مسائل ۷-۴ و ۷-۷ فرمول تقریب بهنجار بر توزیع دوجمله‌ای را بنویسید. سپس، با استفاده از جدول یا ماشین حساب، مثل شکل ۸-۱ ، در یک دستگاه مختصات توزیع دوجمله‌ای و تقریب بهنجار آنرا رسم کنید.

۱۷- مسألهٔ ۱۶ را برای موارد مسائل ۷-۳ و ۷-۸ حل کنید.

۱۸- نامساوی چبیشف را برای مورد یک تابع احتمال پیوستهٔ $f(x)$ ثابت کنید.

۱۹- با به کار بردن مسألهٔ ۱۸ و تقریب بهنجار بر توزیع دوجمله‌ای، قانون اعداد بزرگ را ثابت کنید. ***راهنمایی:*** نشان دهید که احتمال $|(x - np)/n| \geq \varepsilon$ ، که همانند احتمال $|(x - np)/\sqrt{npq}| \geq \varepsilon\sqrt{n}/\sqrt{pq}$ است، تقریباً برابر $2p(\varepsilon\sqrt{n}/\sqrt{pq}, \infty)$ است که وقتی $n \to \infty$، به سمت صفر میل می‌کند.

۲۰- احتمالهایی را پیدا کنید که یک متغیر کتره‌ای با توزیع بهنجار، بیش از σ، 2σ ، 3σ ، 4σ با میانگینش اختلاف داشته باشد. جوابهایتان باید در نامساوی چبیشف صدق کنند. (مثلاً، احتمال انحرافِ بیش از 2σ کمتر از $\frac{1}{4}$ است). با این همه، در خواهید یافت که برای توزیع بهنجار، احتمالها خیلی کوچک‌تر از آن اند که نامساوی چبیشف پیش‌بینی می‌کند.

۲۱- معلمی که نمراتش را "روی منحنی" می‌برد میانگین و انحراف معیار نمرات را حساب می‌کند، و سپس، با فرض یک توزیع بهنجار با میانگین μ و انحراف معیار σ، خطوط مرزی

بین نمرات را به شرح زیر تعیین می‌کند:

از $\mu - \frac{۱}{۲}\sigma$ تا $\mu + \frac{۱}{۲}\sigma$ نمرهٔ ج، از $\mu + \frac{۱}{۲}\sigma$ تا $\mu + \frac{۳}{۲}\sigma$ نمرهٔ ب، از $\mu + \frac{۳}{۲}\sigma$ به بالا نمرهٔ الف و الی آخر. درصد دانشجویانی که نمرات مختلف را کسب می‌کنند چقدر است؟ خطوط مرزی باید چگونه تعیین شوند تا درصدهای زیر کسب شوند: نمرات الف و هـ، ۱۰٪، ب و د، ۲۰٪، و ج، ۴۰٪؟

۹- توزیع پواسون

آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن ذرات گسیل شده از یک مادهٔ رادیواکتیو را می‌شماریم. فرض می‌کنیم که مدت اندازه‌گیری خیلی کوتاه‌تر از نیمه عمر مادهٔ رادیواکتیو باشد، به طوری که آهنگ شمارش میانگین در طول آزمایش تغییر نمی‌کند. به این ترتیب، احتمال اینکه در یک بازهٔ زمانی کوچک Δt، یک ذره گسیل شود، به شرط آنکه Δt به حدی کوچک باشد که احتمال گسیل دو ذره در مدت Δt قابل چشمپوشی باشد، برابر $\mu\Delta t$ است که $\mu =$ مقدار ثابت. می‌خواهیم احتمال به دست آوردن دقیقاً n شمارش در مدت زمان t، $P_n(t)$، را پیدا کنیم. $P_n(t + \Delta t)$ برابر احتمال مشاهدهٔ n شمارش در بازهٔ زمانی $t + \Delta t$ است. به ازای $n > ۰$، این برابر حاصل‌جمع احتمالهای دو رویداد دو به دو ناسازگار، «n ذره در مدت t، و هیچ ذره در مدت Δt» و «$(n - ۱)$ ذره در مدت t و یک ذره در مدت Δt» است. به صورت نمادین:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)\, P_۰(\Delta t) + P_{n-۱}(t)\, P_۱(\Delta t) \qquad (۹-۱)$$

$P_۱(\Delta t)$ احتمال یک ذره در مدت Δt است؛ این، طبق فرض، برابر $\mu\Delta t$ است. پس احتمال هیچ ذره در مدت Δt برابر $۱ - P_۱(\Delta t) = ۱ - \mu\Delta t$ است. با جایگزین کردن این مقدارها در (۹-۱) داریم

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)\,(۱ - \mu\Delta t) + P_{n-۱}(t)\, \mu\Delta t \qquad (۹-۲)$$

یا

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \mu P_{n-۱}(t) - \mu P_n(t) \qquad (۹-۳)$$

حال اگر $\Delta t \to ۰$، داریم

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n-1}(t) - \mu P_n(t) \qquad (۹-۴)$$

به ازای $n = 0$، فرمول (۹-۱) ساده‌تر می‌شود، زیرا تنها رویداد ممکن، "هیچ ذره در t، و هیچ ذره در Δt" است، و به ازای $n = 0$ فرمول (۹-۴) تبدیل می‌شود به،

$$\frac{dP_0}{dt} = -\mu P_0 \qquad (۹-۵)$$

چون، $P_0(0) =$ "احتمال اینکه هیچ ذره‌ای در مدت زمان صفر گسیل نشود" $= 1$ است، با انتگرال‌گیری از رابطهٔ (۹-۵) خواهیم داشت

$$P_0 = e^{-\mu t} \qquad (۹-۶)$$

با جایگزین کردن (۹-۶) در (۹-۴) و به ازای $n = 1$ معادلهٔ دیفرانسیلی برای $P_1(t)$ به دست می‌آوریم که جواب آن (مسألهٔ ۱) عبارت است از $P_1(t) = \mu t\, e^{-\mu t}$. حال اگر معادلهٔ (۹-۴) را به طور پیاپی برای P_2، P_3، $\cdots$، P_n حل کنیم (مسألهٔ ۱)، خواهیم داشت

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} \qquad (۹-۷)$$

با قرار دادن $t = 1$، احتمال دقیقاً n شمارش در واحد زمان حاصل می‌شود:

$$\boxed{P_n = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \qquad (۹-۸)}$$

در کاربستهای این رابطه، معنی μ حائز اهمیت است؛ در مسألهٔ ۲، ثابت می‌شود که μ صرفاً برابر $\bar{n}$، یعنی میانگین شمارشها در واحد زمان، است. تابع احتمال (۹-۸) را **توزیع پواسون** می‌خوانند.

توزیع پواسون در مسائل زیادی که در آنها احتمال وقوع رویدادی کوچک و ثابت است خیلی مفید است (رک مسائل ۳ تا ۹، و فصل پنجم کتاب پرات).

مثال ۱ – تعداد ذره‌های گسیل شده از یک چشمهٔ رادیواکتیو در هر دقیقه را برای مدت ۱۰ ساعت ثبت می‌کنیم؛ در مجموع ۱۸۰۰ ذره شمرده شده‌اند. در چند بازه زمان یک دقیقه‌ای انتظار

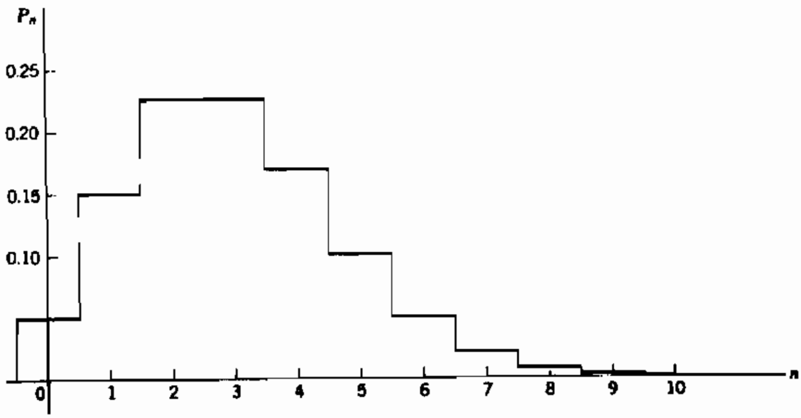
دارید که اصلاً ذره‌ای شمرده نشود؛ دقیقاً یک ذره، و الخ؟

میانگین شمارش ذره‌ها بر دقیقه برابر $\frac{۱۸۰۰}{۱۰ \times ۶۰} = ۳$ است؛ که این مقدار μ است. پس طبق (۹-۸) احتمال شمارش n ذره بر دقیقه عبارت است از

$$P_n = \frac{۳^n}{n!} e^{-۳}$$

نموداری از این تاب احتمال در شکل ۹-۱ نمایش داده شده است. به ازای $n = ۰$، داریم $P_۰ = e^{-۳} = ۰٫۰۵$؛ پس باید انتظار داشت که در حدود ۵٪ از ۶۰۰ شمارش‌های یک دقیقه‌ای، یعنی در ۳۰ بازهٔ یک دقیقه‌ای، شمارشی مشاهده نکنیم. به همین ترتیب می‌توان تعداد چشمداشتی دفعاتی را که در خلال آنها ۱، ۲، ...، ذره مشاهده می‌شوند، پیدا کرد.

در بخش ۸، توضیح دادیم که توزیع دوجمله‌ای را می‌توان به ازای n و npهای بزرگ با توزیع بهنجار تقریب زد. اگر p خیلی کوچک باشد به طوری که np خیلی کوچک‌تر از n شود (مثلاً $p = ۱۰^{-۳}$، $n = ۲۰۰۰$، $np = ۲$)، توزیع بهنجار مناسب نخواهد بود.



شکل ۹-۱ توزیع پواسون، $\mu = ۳$.

در این مورد می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۱۰) که توزیع پواسون تقریب خوبی برای توزیع دوجمله‌ای (۷-۳) است، یعنی

$$C(n,x)\, p^x q^{n-x} \sim \frac{(np)^x e^{-np}}{x!} \quad \text{برای } n \text{ بزرگ و } p \text{ کوچک} \qquad (۹-۹)$$

[معنای دقیق (۹-۹) این است که، برای هر x ثابت، نسبت دو طرف به ازای $n \to \infty$ و $p \to 0$، به طوری که np ثابت بماند، به سمت ۱ میل می‌کند.]

مثال ۲ – اگر از میان ۱۰۰۰ نفر، هر یک به طور کتره‌ای عددی بین ۱ تا ۵۰۰ انتخاب کنند، احتمال اینکه ۳ نفر عدد ۲۹ را انتخاب کنند چیست؟

جواب، با توزیع دوجمله‌ای به ازای $n = 1000$، $p = \frac{1}{500}$ و $x = 3$ داده می‌شود؛ نتیجه عبارت است از

$$\frac{1000!}{3!\,997!}\left(\frac{1}{500}\right)^{3}\left(\frac{499}{500}\right)^{997} = 0{,}1806$$

محاسبهٔ تقریب پواسون ساده‌تر است! طبق (۹-۹) داریم، $2^{3}\,e^{-2}/3! = 0{,}1804$.

توزیع پواسون عمدتاً برای مقدارهای کوچک $\mu = np$ به کار می‌رود. برای مقدارهای بزرگ μ، توزیع پواسون (و همچنین توزیع دوجمله‌ای) به خوبی با توزیع بهنجار به صورت (۹-۱۰) تقریب زده می‌شود:

$$\frac{\mu^{x}\,e^{-\mu}}{x!} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}\,e^{-(x-\mu)^{2}/(2\mu)}, \quad \text{بزرگ } \mu \qquad (۹\text{-}۱۰)$$

به خاطر داشته باشید که قلهٔ نمودارد پواسون در $x = \mu$ است، و توجه کنید که منحنی توزیع‌بهنجار در شکل (۹-۱۰) طوری تغییر مکان یافته است که مرکزش در $x = \mu$ باشد؛ (۹-۱۰) در منطقه مرکزی (حولِ $x = \mu$) که احتمال بزرگ است تقریب خوبی به دست می‌دهد. همچنین، از مسألهٔ ۲، توجه کنید که برای توزیع پواسون $\sigma^{2} = \mu$ است.

مسائل، بخش ۹

۱– رشته معادلات دیفرانسیلی (۹-۴) را برای مقدارهای متوالی n [همانطور که در (۹-۵) و (۹-۶) شروع کردیم] حل کنید و (۹-۷) را به دست آورید.

۲– نشان دهید که مقدار میانگین یک متغیر کتره‌ای n که تابع احتمال آن، توزیع پواسون (۹-۸)

است، عدد μ در (۹-۸) می‌باشد. همچنین نشان دهید که انحراف معیار متغیر مزبور $\sqrt{\mu}$ است. *راهنمایی:* رشتهٔ نامتناهی مربوط به e^x را بنویسید، از آن مشتق بگیرید و سپس در x ضرب کنید تا نتیجه بگیرید $x\,e^x = \sum(n\,x^n/n!)$؛ جایگزینی $x = \mu$ را اعمال کنید. برای به دست آوردن σ^2، از رشتهٔ $x\,e^x$ مشتق بگیرید، و الی آخر.

۳- در یک آزمایش شمارش ذره‌های آلفا، تعداد ذره‌های آلفا را در هر دقیقه به مدت ۵۰ ساعت ثبت می‌کنیم. تعداد کل ذره‌ها ۶۰۰۰ است. در چند بازهٔ یک - دقیقه‌ای انتظار هیچ شمارشی را ندارید؟ در چند بازهٔ یک - دقیقه‌ای انتظار دارید که دقیقاً $n =$ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ذره مشاهده کنید؟ نمودار توزیع پواسون را رسم کنید.

۴- فرض کنید به طور متوسط روزانه به شما چهار مرتبه تلفن شود. احتمال اینکه در یک روز کسی به شما تلفن نکند چقدر است؟ احتمال اینکه در یک روز فقط یک نفر به شما تلفن کند و احتمال اینکه دقیقاً ۴ نفر به شما تلفن کنند چیست؟

۵- فرض کنید در خلال ۵ روز هفتهٔ امتحانات، ۵ امتحان داشته باشید. احتمال اینکه در یک روز معین امتحانی نداشته باشید، احتمال اینکه در یک روز معین فقط یک امتحان، درست ۲ امتحان، و درست ۳ امتحان داشته باشید چیست؟

۶- اگر به طور متوسط در هر روز ۵ نامه داشته باشید، در چند روز سال انتظار دارید اصلاً نامه‌ای به شما نرسد؟ در چند روز سال دقیقاً ۵ نامه خواهید داشت؟ دقیقاً ۱۰ نامه چطور؟

۷- در باشگاهی که ۵۰۰ عضو دارد، احتمال اینکه روز تولد دو نفر ۱۳ تیرماه باشد چیست؟

۸- اگر در یک مجلهٔ ۴۰ صفحه‌ای تعداد ۱۰۰ اشتباه چاپی وجود داشته باشد، در چند صفحه انتظار دارید که اصلاً اشتباه چاپی پیدا نکنید؟ در چند صفحه انتظار دارید که دو اشتباه چاپی و ۵ اشتباه چاپی پیدا کنید؟

۹- اگر به طور متوسط، در هر اتومبیل نو ۷ نقص وجود داشته باشد، احتمال اینکه اتومبیل نوی شما فقط ۲ نقص داشته باشد چیست؟ احتمال اینکه اتومبیل دارای ۶ یا ۷ نقص باشد چقدر است؟ احتمال اینکه بیش از ۱۰ نقص وجود داشته باشد چقدر است؟

۱۰- معادلهٔ (۹-۹) را به این ترتیب ثابت کنید: در $C(n, x)$، نشان دهید که به ازای x ثابت و مقادیر بزرگ n، $n!/(n-x)! \sim n^x$ [$n!/(n-x)!$ را به صورت حاصل‌ضرب x جمله بنویسید، آنرا بر n^x تقسیم کنید، و نشان دهید که حد آن وقتی $n \to \infty$، برابر ۱

است]. سپس $q^{n-x} = (1-p)^{n-x}$ را به صورت $(1-p)^{n}(1-p)^{-x}$ $= (1-np/n)^{n}(1-p)^{-x}$ بنویسید؛ حد اولین جمله را به ازای $n \to \infty$ و np ی ثابت پیدا کنید؛ حد جملهٔ دوم وقتی $p \to 0$، برابر ۱ است. نتیجه‌ها را جمع‌آوری کنید تا معادلهٔ (۹-۹) را به دست آید.

۱۱- فرض کنید ۵۲۰ نفر هر یک دارای یک دست ورق بُر خورده می‌باشند و یک کارت از ورقهای خود می‌کشند. احتمال اینکه دقیقاً ۱۳ کارت از این ۵۲۰ کارت، تک پیک باشند چیست؟ توزیع دوجمله‌ای را بنویسید و آنرا تقریب بزنید. از بین دو توزیع پواسون و بهنجار، کدام یک بهتر است؟

۱۰- کاربرد در اندازه‌گیریهای تجربی

تا اینجا علی‌الاصول وضعیتهایی را بررسی کرده‌ایم که یا توابع چگالی را می‌شناختیم و یا می‌توانستیم با استدلال، یک تابع چگالی (بهنجار، پواسون، و غیره) در نظر بگیریم. حال در نظر بگیرید که به جای تابع چگالی، فقط از داده‌ها، مثلاً مجموعه‌ای از اندازه‌گیریهای یک کمیت فیزیکی را در اختیار داریم. فرضاً، اگر دقت بیشتری صرف می‌کردیم، می‌توانستیم این جدول را هر چقدر می‌خواستیم بزرگ کنیم. به این ترتیب، می‌توانیم مجموعه‌ای نامتناهی از اندازه‌گیری‌ها را در نظر بگیریم، که ما فقط نمونه‌ای از آنرا در اختیار داریم. مجموعهٔ نامتناهی را **جمعیت مادر** ***یا جهان*** می‌خوانیم. آنچه که ما واقعاً می‌خواهیم بدانیم تابع احتمال جمعیت مادر، یا حداقل، مقدار میانگین μ (که غالباً به عنوان مقدار "درست" کمیت مورد اندازه‌گیری تلقی می‌شود) و انحراف معیار σ برای جمعیت مادر است. باید سعی کنیم با استفاده از نمونهٔ داده شده، یعنی، مجموعه اندازه‌گیری‌هایی که خود به عمل آورده‌ایم، بهترین تخمین از کمیت‌های یاد شده را به دست آوریم.

ابتدا می‌خواهیم μ، میانگین جمعیت، را از نمونهٔ متناهی‌ای که در دسترس است تخمین بزنیم. به عنوان یک تخمین سریع می‌توان مقدار میانهٔ اندازه‌گیریها (مقداری که تعداد اندازه‌گیریهای کوچک‌تر و بزرگ‌تر از آن با هم برابرند)، یا **مُد** (اندازه‌گیری‌ای که بیشتر از همه پیدا کرده‌ایم، یعنی محتمل‌ترین اندازه‌گیری) را انتخاب کرد. با این همه، آنچه بیش از همه به عنوان تخمین μ به کار می‌رود ***متوسط حسابی*** (یا میانگین) اندازه‌گیریهاست. این انتخاب، به آسانی

برای مجموعه اندازه‌گیری‌های بزرگی قابل توجیه است. (مسألهٔ ۱ را نیز ببینید): هر اندازه‌گیری را به عنوان انتخاب یک عضو جمعیت مادر در نظر بگیرید. به این ترتیب، احتمال اینکه هر اندازه‌گیری مقدار خاصی را داشته باشد با تابع چگالی جمعیت مادر $f(x)$ داده می‌شود. یعنی، هر تک اندازه‌گیری x، یک متغیر کتره‌ای با تابع احتمال $f(x)$ است؛ مقدار چشمداشتی x برابر μ و واریانس آن $\sigma^۲$ است. فرض کنید $\bar{x} = (۱/n) \sum_{i=۱}^{n} x_i$، میانگین n اندازه‌گیری x_i باشد ($\bar{x}$ را میانگین نمونه می‌خوانیم تا تمایز آن با میانگین جمعیت، μ، مشخص شود). ما به دنبال مقدار چشمداشتی و واریانس این میانگین نمونه هستیم؛ اینها مقادیری نظری هستند که، با استفاده از تابع چگالی جمعیت $f(x)$ برای نمونه‌هایی که شامل n اندازه‌گیری می‌باشند محاسبه می‌شوند. به سادگی می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۲) که مقدار چشمداشتی $\bar{x}$ مساوی μ، و واریانس $\bar{x}$ مساوی $\sigma^۲/n$، و در نتیجه انحراف معیار آن $\sigma/\sqrt{n}$، است. حال طبق نامساوی چبیشف (بخش ۷) بعید است که یک متغیر کتره‌ای بیش از چند انحراف معیار از مقدار چشمداشتیش فاصله داشته باشد. در مسألهٔ ما، این به معنای آن است که بعید است $\bar{x}$ بیش از چند مضرب $\sigma/\sqrt{n}$، که با افزایش n کاهش می‌یابد، با μ اختلاف داشته باشد. بنابراین، با افزایش تعداد اندازه‌گیریها، n، $\bar{x}$ تخمین بهتر و بهتری از μ خواهد بود.

حال می‌خواهیم با استفاده از نمونهٔ خود، تخمینی برای ***واریانس جمعیت***، $\sigma^۲$، پیدا کنیم. اولین حدس ممکن است ***واریانس نمونه***، یعنی

$$s^۲ = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} (x_i - \bar{x})^۲ \qquad (۱-۱۰)$$

باشد. برای اینکه ببینیم این حدس منطقی است یا خیر، مقدار چشمداشتی واریانس نمونه را حساب می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که (مسألهٔ ۳) که $E(s^۲) = [(n-۱)/n]\sigma^۲$، و نتیجه اینکه تخمین منطقی $\sigma^۲$ عبارت است از

$$\sigma^۲ \cong \frac{n}{n-۱} s^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{n} (x_i - \bar{x})^۲}{n-۱} \qquad (۲-۱۰)$$

تنها تفاوت بین این مقدار و واریانس نمونه آن است که به جای تقسیم بـر n، بـر $(n-۱)$ تقسیم کنیم.

کمیت σ که اینک تخمین زده‌ایم، انحراف معیار جمعیت مادر است که تابع احتمال آن $f(x)$ می‌باشد. تک اندازه‌گیری x را در نظر بگیرید. تابع $f(x)$ (اگر آنرا می‌دانستیم) احتمال مقدارهای ممکن x را مشخص می‌کند، میانگین جمعیت μ تقریباً مقدار x را که به دنبال آن هستیم به دست می‌دهد، و انحراف معیار σ تقریباً میزان پراکندگی x را حول μ مشخص می‌سازد. چون σ اطلاعاتی در مورد یک تک اندازه‌گیری به دست می‌دهد، غالباً آنرا ***انحراف معیار یک تک اندازه‌گیری*** می‌خوانند.

به جای یک تک اندازه‌گیری، بگذارید مقدار متوسط (میانگین) یک مجموعه از n اندازه‌گیری، $\bar{x}$، را در نظر بگیریم. (این میانگین، $\bar{x}$، چیزی است که به عنوان نتیجهٔ n اندازه‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرد یا گزارش می‌شود). درست همانطور که در ابتدا نحوهٔ پیداکردن $f(x)$ را با انجام تعداد زیادی اندازه‌گیری حدس زدیم، می‌توانیم تابع احتمال $g(\bar{x})$ را نیز با تعداد زیادی از مجموعه‌های n اندازه‌گیری که هر مجموعه مقداری را برای $\bar{x}$ به ما می‌دهد، حدس بزنیم. تابع $g(\bar{x})$ (اگر آنرا می‌دانستیم) احتمال مقدارهای مختلف $\bar{x}$ را تعیین می‌کند. دیدیم (مسألهٔ ۲) که $Var(\bar{x}) = \sigma^۲/n$، بنابراین ***انحراف معیار در میانگین*** (یعنی، در $\bar{x}$) برابر است با

$$\sigma_m = \sqrt{Var(\bar{x})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (۳-۱۰)$$

کمیت σ_m را ***خطای استاندارد*** هم می‌گویند؛ این کمیت، تخمینی از پراکندگی مقدارهای $\bar{x}$ در اطراف μ را مشخص می‌کند. چون انحراف معیار $\sigma/\sqrt{n}$ خیلی از σ کوچک‌تر است، و ملاحظه می‌شود که قلهٔ تابع احتمال جدید $g(\bar{x})$ حول μ باید خیلی تیزتر از قلهٔ $f(x)$ باشد، با سر جمع کردن فرمولهای (۱۰-۲) و (۱۰-۳)، داریم

$$\sigma_m \cong \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\bar{x})^۲}{n(n-۱)}} \qquad (۴-۱۰)$$

دیدیم که چگونه می‌توان با استفاده از یک مجموعه اندازه‌گیری x_i مقدار μ (میانگین جمعیت) را با $\bar{x}$ (میانگین نمونه) و خطای استاندارد را با $\sigma_{mx} = \sqrt{Var(x)}$ [معادلهٔ (۱۰-۴) تخمین زد. حال فرض کنید این کار را در مورد دو کمیت، x و y، انجام داده، می‌خواهیم با استفاده از یک فرمول معلوم $w = w(x, y)$ مقدار w و خطای استاندارد w را تخمین بزنیم.

ابتدا مثال سادهٔ $w = x + y$ را در نظر می‌گیریم. به این ترتیب، طبق مسائل ۵-۹ و ۶-۹، داریم

$$E(w) = E(x) + E(y) = \mu_x + \mu_y \qquad (۱۰-۵)$$

که در آن μ_x و μ_y متوسطهای جمعیت‌اند. همانطور که در بالا دیدیم، μ_x و μ_y را با $\bar{x}$ و $\bar{y}$ تخمین می‌زنیم و نتیجه می‌گیریم که یک تخمین منطقی از w عبارت است از

$$\bar{w} = \bar{x} + \bar{y} \qquad (۱۰-۶)$$

حال فرض کنید که x و y کمیتهایی هستند که به طور مستقل اندازه‌گیری شده‌اند. به این ترتیب، طبق مسألهٔ ۷-۱۳ داریم

$$Var(\bar{w}) = Var(\bar{x}) + Var(\bar{y}) = \sigma_{mx}^{۲} + \sigma_{my}^{۲} \qquad (۱۰-۷)$$

$$\sigma_{mw}^{۲} = \sqrt{\sigma_{mx}^{۲} + \sigma_{my}^{۲}}$$

اکنون مورد $w = ۴ - ۲x + ۳y$ را در نظر بگیرید. مثل معادله‌های (۱۰-۵) و (۱۰-۶) داریم $\bar{w} = ۴ - ۲\bar{x} + ۳\bar{y}$. حال طبق مسائل ۵-۱۳ و ۶-۱۱، داریم $Var(x + K) = Var(x)$ و $Var(Kx) = K^{۲}\ Var(x)$، که در آنها K مقدار ثابتی است. پس

$$Var(\bar{w}) = Var(۴ - ۲\bar{x} + ۳\bar{y}) = Var(-۲\bar{x} + ۳\bar{y}) \qquad (۱۰-۸)$$

$$= (-۲)^{۲}\ Var(\bar{x}) + (۳)^{۲}\ Var(\bar{y}) = ۴\sigma_{mx}^{۲} + ۹\sigma_{my}^{۲}$$

$$\sigma_{mw} = \sqrt{۴\sigma_{mx}^{۲} + ۹\sigma_{my}^{۲}} \qquad (۱۰-۹)$$

حال ببینیم که چگونه $\bar{w}$ و σ_{mw} را برای هر تابع $w(x, y)$ که بتوان آنرا با جمله‌های خطی بسط تایلور آن حول نقطهٔ (μ_x, μ_y) تقریب زد، یعنی،

$$w(x,y) \cong w(\mu_x,\mu_y) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(x-\mu_x) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)(y-\mu_y) \quad (۱۰-۱۰)$$

پیدا نمود (رک فصل ۴، بخش ۲)، که در آن مشتقهای جزئی $x = \mu_x$ و $y = \mu_y$ حساب می‌شوند، و لذا مقادیر ثابتی هستند. [عملاً، این بدان معناست که مشتقهای جزئی مرتبهٔ اول نزدیک صفر نباشند - نزدیک بیشینه یا کمینهٔ w نتایج خوبی نمی‌توان انتظار داشت - و مشتقات مرتبهٔ بالاتر نباید بزرگ باشند، یعنی، نزدیک نقطهٔ (μ_x, μ_y)، w باید "هموار" باشد.] با فرض (۱۰-۱۰)، و به خاطر داشتن اینکه $w(\mu_x, \mu_y)$ و مشتقات جزئی مقادیر ثابتی هستند، داریم

$$E[w(x,y)] \cong w(\mu_x,\mu_y) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)[E(x)-\mu_x] + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)[E(y)-\mu_y] \quad (۱۱-۱۰)$$
$$= w(\mu_x,\mu_y)$$

چون قبول کرده‌ایم که μ_x و μ_y را با $\bar{x}$ و $\bar{y}$ تخمین بزنیم، نتیجه می‌گیریم که یک تخمین منطقی از w عبارت است از

$$\bar{w} = w(\bar{x},\bar{y}) \quad (۱۲-۱۰)$$

(این ممکن است بدیهی به‌نظر برسد، ولی رک به مسألهٔ ۷.)

به این ترتیب، با قرار دادن $x = \bar{x}$ و $y = \bar{y}$ در (۱۰-۱۰) و به یاد داشتن گزارهٔ قبل از (۱۰-۱۱)، مثل رابطهٔ (۱۰-۸)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} Var(\bar{w}) &= Var[w(\bar{x},\bar{y})] \\ &= Var\left[w(\mu_x,\mu_y) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(\bar{x}-\mu_x) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)(\bar{y}-\mu_y)\right] \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_{mx}^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_{my}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_{mw} = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_{mx}^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_{my}^2} \quad (۱۳-۱۰)$$

با استفاده از (۱۰-۱۲) و (۱۰-۱۳) می‌توان مقدار یک تابع معین w از دو کمیت اندازه‌گیری

شدهٔ x و y را تخمین زد و خطای استاندارد در w را پیدا کرد.

تا اینجا برای تابع چگالی $f(x)$ جمعیت مادر هیچ شکل خاصی (مثل بهنجار، و غیره) در نظر نگرفته‌ایم، تا نتایج ما برای محاسبهٔ مقادیر تقریبی μ، σ، و σ_m از یک مجموعه اندازه‌گیری درست باشند؛ خواه توزیع مادر بهنجار باشد و یا نباشد. (و، در واقع، در مسائل عملی ممکن است بهنجار نباشد؛ مثلاً، توزیعهای پواسون خیلی متداول‌اند.) با این همه، خواهیم دید که بیشتر بحثهای مربوط به خطاهای تجربی مبتنی بر یک توزیع بهنجار مفروض هستند. بگذارید توجیه این امر را بررسی کنیم. در بالا دیدیم که می‌توان

$$\bar{x} = (۱/n)\ \sum_{i=۱}^{n} x_i$$

را به عنوان یک متغیر کتره‌ای در نظر گرفت که متوسط آن μ و انحراف معیار آن $\sigma/\sqrt{n}$ است. گفتیم که می‌توان برای $\bar{x}$، یک تابع چگالی در نظر گرفت که قلهٔ این تابع در اطراف μ خیلی تیزتر از تابع چگالی $f(x)$ برای یک تک اندازه‌گیری است، ولی تاکنون دربارهٔ شکل این تابع چگالی جدید چیزی نگفته‌ایم. قضیه‌ای اساسی در احتمال وجود دارد (که آنرا بدون اثبات بیان می‌کنیم) که اطلاعاتی دربارهٔ تابع احتمال $\bar{x}$ به ما می‌دهد. **قضیهٔ حد مرکزی** [(۸-۳) مورد خاصی از این قضیه است] بیان می‌کند که تابع احتمال جمعیت $f(x)$ هر چه باشد (مشروط بر آنکه μ و σ وجود داشته باشد)، تابع احتمال مربوط به $\bar{x} = (۱/n)\ \sum_{i=۱}^{n} x_i$ برای nهای بزرگ تقریباً توزیع بهنجار با انحراف معیار $\sigma/\sqrt{n}$ است.

اگر فرض کنیم که توزیع خطاها بهنجار است، در آن صورت می‌توان برای σ_m (انحراف معیار در میانگین) معنایی دقیق‌تر از این بیان مبهم که "تخمینی از پراکندگی مقادیر $\bar{x}$ حول μ را به ما می‌دهد" تعریف کرد. چون برای متغیری با توزیع بهنجار، احتمال اینکه مقادیر آن بین $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$ باشد برابر ۶۸ر۰ = $P(۰ , ۱)$ ۲ است، می‌توان گفت که (برای خطاهای با توزیع بهنجار) احتمال اینکه در یک اندازه‌گیری، $\bar{x}$ بین $\mu - \sigma_m$ و $\mu + \sigma_m$ باشد برابر ۶۸٪ است. (این بازه را بازهٔ با ۶۸٪ اطمینان می‌خوانند). در گزارش داده‌های علمی، متداول این است که بازهٔ $\mu \pm r$ را طوری می‌دهند که احتمال قرارگرفتن یک اندازه‌گیری جدید در این بازه $\frac{۱}{۲}$ باشد (و در نتیجه با احتمال $\frac{۱}{۲}$ نیز در خارج از این بازه)؛ این یعنی یک بازهٔ با ۵۰٪ اطمینان. با فرض یک توزیع بهنجار، ملاحظه می‌شود که $r = $ ۶۷ر۰ σ_m (مسألهٔ ۴). کمیت r را **خطای محتمل** می‌خوانند. چون r صرفاً برابر حاصل‌ضرب یک مقدار ثابت در σ_m است، معادلهٔ (۱۰-۱۳) در

صورتی که تمام σ_mها را با r جایگزین کنیم نیز معتبر است، و داریم

$$r_w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 r_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 r_y^2} \qquad (۱۴-۱۰)$$

(همچنین، رک مسائل ۵ و ۶.)

مثال ۱ – اگر با استفاده از اندازه‌گیری داشته باشیم ۴ = $\bar{x}$، ۵ = $\bar{y}$، ۰٫۰۹ = σ_{mx} و ۰٫۱۵ = σ_{my}، مقدار میانگین و خطای محتمل $w = \sqrt{x}\, \ln y$ را پیدا کنید.

ابتدا r_x و r_y را حساب می‌کنیم: ۰٫۰۶ = ۰٫۶۷ σ_{mx} = r_x و ۰٫۱ = r_y، پس ۳٫۲۲ = ۲ $\ln$ ۵ = $\bar{w}$ و با استفاده از (۱۴-۱۰) داریم

$$r_w = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{4}} \ln 5\right)^2 (0.06)^2 + \left(\frac{\sqrt{4}}{5}\right)^2 (0.1)^2} = 0.05$$

نتیجه را باید به صورت ۰٫۰۵ ± ۳٫۲۲ = w گزارش کرد.

مسائل، بخش ۱۰

۱- فرض کنید m_1، m_2، m_3، ... ، m_n مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌ها باشند، و مقادیر x_i را به صورت $x_1 = m_1 - a$، $x_2 = m_2 - a$، ...، $x_n = m_n - a$ تعریف کنید که در آنها a یک عدد دلبخواه (هنوز نامشخص، اما برای همهٔ x_iها یکسان) است. نشان دهید برای اینکه $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ کمینه شود باید $a = (1/n)\sum_{i=1}^{n} m_i$ باشد. ***راهنمایی:*** از $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ نسبت به a مشتق بگیرید. ملاحظه کرده‌اید که از دیدگاه "حداقل مربعات"، متوسط حسابی "بهترین" میانگین است، یعنی اینکه اگر مجموع مربعات انحراف اندازه‌گیریها از "میانگین" آنها کمینه شود، "میانگین" همان متوسط حسابی است (نه، مثلاً، مُد یا میانه).

۲- فرض کنید x_1، x_2، x_3، ... ، x_n متغیرهایی کتره‌ای و مستقل، هر یک با تابع چگالی $f(x)$، مقدار چشمداشتی μ، و واریانس σ^2 باشند. میانگین نمونه را با $\bar{x} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$ تعریف کنید. نشان دهید که $E(\bar{x}) = \mu$، و $Var\ \bar{x} = \sigma^2/n$. (رک مسائل ۵-۹ ، ۵-۱۳ ، و ۷-۱۳).

۳- واریانس نمونه را با $s^2 = (1/n)\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ تعریف کنید. نشان دهید که مقدار

چشمداشتی $s^۲$ عبارت است از $[(n-۱)/n]\sigma^۲$. **چند راهنمایی**: بنویسید

$$(x_i-\bar{x})^۲ = [(x_i-\mu)-(\bar{x}-\mu)]^۲$$
$$= (x_i-\mu)^۲ - ۲(x_i-\mu)(\bar{x}-\mu) + (\bar{x}-\mu)^۲$$

مقدار میانگین جملهٔ اول را با استفاده از تعریف $\sigma^۲$، و مقدار میانگین جملهٔ سوم را با استفاده ازمسألهٔ ۲ پیداکنید. برای پیداکردن مقدار میانگین جملهٔ وسط، بنویسید

$$(\bar{x}-\mu)=\left(\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}-\mu\right)=\frac{۱}{n}[(x_۱-\mu)+(x_۲-\mu)+\cdots+(x_n-\mu)]$$

با استفاده از مسألهٔ ۷-۱۲ نشان دهید که

به ازای $i \neq j$، $E[(x_i-\mu)(x_j-\mu)] = E(x_i-\mu)E(x_j-\mu) = ۰$

و $E[(x_i-\mu)^۲]$ را حساب کنید (مانند جملهٔ اول). با سرجمع کردن جمله‌ها نتیجه بگیرید

$$E(s^۲) = \frac{n-۱}{n}\sigma^۲$$

۴- برای یک توزیع بهنجار و با استفاده از جدول، مقدار h را طوری پیداکنید که نصف مساحت زیر منحنی خطا بین $\mu - h$ و $\mu + h$ و نصف دیگر آن خارج از این بازه باشد. [رک معادلهٔ (۸-۱۲)]. باید نتیجه بگیرید $h = ۰٫۶۷۷\sigma$، که σ انحراف معیار است. کمیت $r = ۰٫۶۷۷\sigma_m$ که از انحراف معیار میانگین پیدا می‌شود را خطای محتمل می‌نامیم.

۵- نشان دهید اگر $w = xy$ یا $w = x/y$ باشد، در آن‌صورت (۱۰-۱۴) فرمول مناسبی برای خطای نسبی به دست می‌دهد:

$$\frac{r_w}{w} = \sqrt{\left(\frac{r_x}{x}\right)^۲ + \left(\frac{r_y}{y}\right)^۲}$$

۶- با بسط $w(x,y,z)$ به صورت یک رشتهٔ توانی سه-متغیری مشابه (۱۰-۱۰)، نشان دهید که

$$r_w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^۲ r_x^۲ + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^۲ r_y^۲ + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^۲ r_z^۲}$$

۷- معادلهٔ (۱۰-۱۲) فقط یک تقریب (اما معمولاً قابل قبول) است. اما، نشان دهید اگر در (۱۰-۱۰) جمله‌های درجهٔ دوم را نگه‌داریم، در آن صورت

$$\bar{w} = w(\bar{x},\bar{y}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\sigma_x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\sigma_y^2$$

۸- اندازه‌گیری‌های زیر را برای x و y داریم

x : ۵ر۱ ، ۴ر۸ ، ۵ر۰ ، ۴ر۹ ، ۵ر۲ ، ۵ر۰ ، ۴ر۹ ، ۵ر۱

y : ۰ر۹۹ ، ۱ر۰۰ ، ۱ر۰۱ ، ۰ر۹۹ ، ۰ر۹۵ ، ۱ر۰۲ ، ۱ر۰۰ ، ۰ر۹۶ ، ۱ر۰۵ ، ۱ر۰۳

$\bar{x}$ ، $\bar{y}$، s_x، s_y [رک رابطهٔ (۱۰-۱)]، مقدارهای تقریبی σ_x، σ_y [رک رابطهٔ (۱۰-۲)]، σ_m مربوط به x و مربوط به y [رک رابطهٔ (۱۰-۴)]، و خطای محتمل مربوط به x و y (رک مسألهٔ ۴) را پیدا کنید. مقدارهای میانگین $x + y$، xy، $x^3 \sin y$، و $\ln x$، و خطای محتمل هر یک از این توابع x و y را حساب کنید.

۹- با داشتن اندازه‌گیریهای

x : ۹۹ ، ۱۰۰ ، ۱۰۲ ، ۱۰۱ ، ۹۸

y : ۲۰ر۱ ، ۱۹ر۵ ، ۲۰ر۴ ، ۱۹ر۶ ، ۲۰ر۳ ، ۱۸ر۱ ، ۲۰ر۸ ، ۲۱ر۲

مقدار میانگین و خطای محتمل را برای $x - y$ و x/y ، x^2y^3، و $y \ln x$ پیدا کنید.

۱۰- با داشتن اندازه‌گیریهای

x : ۵ر۹ ، ۶ر۲ ، ۵ر۷ ، ۵ر۹ ، ۶ر۴ ، ۶ر۱ ، ۵ر۸

y : ۳ر۱ ، ۳ر۳ ، ۲ر۹ ، ۳ر۰ ، ۲ر۷

مقدار میانگین و خطای محتمل $2x - y$ ، $y^2 - x$ ، e^y ، x/y^2 را پیدا کنید.

۱۱- مسائل متفرقه

۱- (الف) فرض کنید دو سکهٔ ۱۰ ریالی و یک سکهٔ ۵ ریالی در جیب چپتان و دو سکهٔ ۵ ریالی و سه سکهٔ ۱۰ ریالی در جیب راستتان دارید. جیبی را به طور کتره‌ای انتخاب و سکه‌ای را به طور کتره‌ای از آن خارج می‌کنید. احتمال اینکه این سکه ۵ ریالی باشد چیست؟

(ب) فرض کنید x مقدار پولی باشد که انتخاب می‌کنید؛ $E(x)$ را پیدا کنید.

(ج) فرض کنید در قسمت (الف)، ۵ ریالی انتخاب کرده باشید. احتمال اینکه سکهٔ مزبور از

جیب راستتان آمده باشد چیست؟

(د) فرض کنید بدون آنکه ۵ ریالی انتخاب شده را به جیبتان برگردانید، سکهٔ دیگری را انتخاب کنید و آنهم ۵ ریالی باشد. احتمال اینکه سکهٔ دوم از جیب، راستتان انتخاب شده باشد چیست؟

۲- (الف) فرض کنید تاسهای "مریخ" هرمهای چهار وجهی منظمی هستند که رؤوس آنها با اعداد ۱ تا ۴ مشخص شده است. دو تا از این تاسها را پرتاب می‌کنیم و حاصل‌جمع اعداد ظاهر شده زوج است. فرض کنید این حاصل‌جمع ، x باشد. فضای نمونهٔ مربوط به x و احتمالهای مربوطه را تعیین کنید.

(ب) $E(x)$ و σ_x را پیدا کنید.

(ج) عبارت دقیق توزیع دوجمله‌ای مربوط به پیدا کردن پانزده ۲ در ۴۸ پرتاب یکی از این تاسها را بنویسید. آنرا با ماشین حساب محاسبه کنید.

(د) محاسبهٔ (ج) را با استفاده از تقریب بهنجار تکرار کنید.

(ه) محاسبهٔ (ج) را با استفاده از توزیع پواسون تکرار کنید.

۳- در جعبه‌ای ۳ گلولهٔ قرمز و ۲ گلولهٔ سفید و در جعبهٔ دیگری ۴ گلولهٔ قرمز و ۵ گلولهٔ سفید وجود دارد. جعبه‌ای را به طور کتره‌ای انتخاب و گلوله‌ای را به طور کتره‌ای از آن خارج می‌کنیم. اگر گلوله قرمز باشد، احتمال اینکه از جعبهٔ دوم آمده باشد چیست؟

۴- اگر ۴ نامه را به طور کتره‌ای در ۴ پاکت قرار دهیم، احتمال اینکه حداقل یک نامه در پاکت خودش قرار گیرد چیست؟

۵- دو دست ورق را با هم "جور" می‌کنیم. یعنی ترتیب کارتها را در دو دست با برگرداندن تک‌تک کارتها از دو دست، به طور همزمان مقایسه می‌کنیم؛ "جورشدگی" به معنی آن است که دو کارت همسانند. نشان دهید که احتمال حداقل یک "جورشدگی" تقریباً برابر $1 - 1/e$ است.

۶- تعداد راههای قرار دادن ۲ ذره در ۵ جعبه را طبق آمارهای مختلف حساب کنید.

۷- فرض کنید سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم، و x متغیر کتره‌ای باشد که مقدار آن وقتی تعداد شیرها به ۳ بخش‌پذیر است، ۱ ، و در غیر این صورت صفر است. فضای نمونهٔ x و احتمالهای مربوطه را پیدا کنید. $\bar{x}$ و σ را پیدا کنید.

۸- (الف) در یک سکهٔ معیوب احتمال آمدن شیر $\frac{۲}{۳}$ و احتمال خط آمدن $\frac{۱}{۳}$ است. چنین سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید x = تعداد شیرها باشد. فضای نمونهٔ مربوطه و احتمالهای آنها را پیدا کنید.

(ب) $\bar{x}$ و σ را پیدا کنید.

(ج) اگر در قسمت (الف) بدانید که حداقل یک خط آمده است، احتمال اینکه هر دو خط باشند چقدر است؟

۹- (الف) جعبه‌ای حاوی یک تاس و جعبهٔ دیگری حاوی دو تاس است. جعبه‌ای را به طور کتره‌ای انتخاب و هرچه در آن است را بیرون می‌آوریم و پرتاب می‌کنیم (یعنی، اگر جعبهٔ دوم انتخاب شد، **هر دو سکه** را پرتاب می‌کنیم). فرض کنید x = تعداد ۳ ها باشد. فضای نمونه و احتمالهای وابسته به x را پیدا کنید.

(ب) احتمال حداقل یک ۳ چیست؟

(ج) اگر حداقل یک ۳ بیاید، احتمال اینکه جعبهٔ اول را انتخاب کرده باشیم چیست؟

(د) $\bar{x}$ و σ را پیدا کنید.

۱۰- (الف) عبارت دقیق دوجمله‌ای را برای احتمال ۵۰۰۰ شیر در پرتاب $۱۰^۴$ سکه بنویسید.

(ب) با استفاده از تقریب بهنجار و جدول یا ماشین حساب، جواب (الف) را محاسبه کنید.

(ج) با استفاده از تقریب بهنجار و جدول، احتمال اینکه تعداد شیرها بین ۴۹۰۰ و ۵۰۷۵ باشد را پیدا کنید.

۱۱- (الف) فرمول توزیع دوجمله‌ای را برای احتمال اینکه در پرتاب ۷۲۰ تاس دقیقاً ۱۲۵ عدد ۳ بیاید بنویسید.

(ب) با استفاده از تقریب بهنجار و ماشین حساب یا جدول، جواب تقریبی قسمت (الف) را پیدا کنید.

(ج) با استفاده از تقریب بهنجار، احتمال اینکه تعداد ۳ ها بین ۱۱۵ و ۱۳۰ باشد را پیدا کنید.

۱۲- (الف) سکه‌ای معیوب با احتمال $\frac{۱}{۳}$ برای آمدن شیر و $\frac{۲}{۳}$ برای آمدن خط را در نظر بگیرید. فرمول دقیق دوجمله‌ای را برای احتمال آمدن دقیقاً ۳۲۰ خط در ۴۵۰ بار پرتاب این سکه بنویسید.

(ب) با استفاده از جدول، احتمال اینکه در ۴۵۰ بار پرتاب این سکه تعدا خطها بین ۳۰۰ و

۳۲۰ باشد را پیدا کنید.

۱۳- چشمهٔ رادیواکتیوی در مدت ۱۰ ساعت، ۱۸۰۰ ذرهٔ آلفا گسیل می‌کند. در چند بازهٔ یک - دقیقه‌ای انتظار دارید که آلفایی شمرده نشود؟ یا ۵ ذرهٔ آلفا شمرده شود؟

۱۴- فرض کنید به طور متوسط در هر ۱۰ صفحه از یک کتاب ۲۰۰ صفحه‌ای یک غلط چاپی وجود دارد. در تقریباً چند صفحه انتظار دارید ۲ غلط پیدا کنید؟

۱۵- احتمال دوجمله‌ای و پواسون، برای اینکه، دقیقاً ۲ نفر از میان ۱۰۹۵ نفر، روز تولدشان ۱۱ دی باشد، را بنویسید. فرض کنید هر سال ۳۶۵ روز است. هر کدام از دو جواب را که ساده‌تر است حساب کنید.

۱۶- فرمول دوجمله‌ای مربوط به احتمال x موفقیت را در ۱۰۰ آزمون برنولی با احتمال موفقیت $p = \frac{۱}{۵}$ بنویسید. تقریبهای بهنجار و پواسون را اگر $x =$ ۲۵، و اگر $x =$ ۲۱ باشد، مقایسه کنید. احتمال دقیق دوجمله‌ای برای $x =$ ۲۵ برابر ۰٫۰۴۳۹ و برای $x =$ ۲۱ برابر ۰٫۰۹۴۶ است).

۱۷- با داشتن اندازه‌گیریهای

x : ۱٫۲، ۱٫۷، ۱٫۸، ۱٫۲، ۲٫۳

y : ۰٫۹، ۱٫۱، ۱٫۰

مقدار میانگین و خطای محتمل $(x - y)$ ، xy ، $x/y^۳$ را پیدا کنید.

۱۸- با داشتن اندازه‌گیریهای

x : ۴٫۹، ۵٫۱، ۴٫۸، ۴٫۵، ۵٫۷

y : ۵۸٫۴، ۶۰٫۳، ۵۹٫۷، ۶۰٫۱، ۶۱٫۵

مقدار میانگین و خطای محتمل $x + y$ ، y/x ، $x^۲$ را پیدا کنید.

مراجع

ذیلاً سیاهه‌ای از مراجع مفید پیرامون موضوعات گوناگون مطرح شده در این کتاب را ملاحظه می‌کنید. به کتابهای درسی روشهای ریاضی مانند Arfken ، Butkov ، Harper ، Kreyszig ، Mathews - Walker ، Spiegel و Wyld نیز می‌توانید مراجعه کنید. برای جزئیات مفصّل دربارهٔ کتابهایی که ذکر کرده‌ایم و برخی کتابهای دیگر، رک کتابشناسی آخر کتاب.

جدولها و کتابهای راهنما:

Abramowitz - Stegun (جدولهای NBS ، AMS 55 ، توابع خاص)

Byrd - Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals.*

CRC Tables (جدول و فرمول)

Dwight (جدول انتگرال)

Erdelyi, *Higher Transcendental Functions.*

Erdelyi, *Tables of Integral Transforms.*

Jahnke-Emde-Lösch (توابع خاص)

Kamke (جواب معادلات دیفرانسیل)

Magnus-Oberhettinger-Soni, Special functions.

Oberhettinger (دو کتاب مختلف دربارهٔ تبدیلات فوریه)

Oberhettinger-Badii (تبدیلات لاپلاس)

Spiegel, *Schaum's Outline Mathematical Handbook.*

متغیر مختلط (فصل ۱۴)

Churchill-Brown-Verhey, Dettman, Kyrala, Saff-Snider, Spiegel

جبر خطی (فصل ۱۰)

رک کتابهای جبر خطی، مخصوصاً Strang

آنالیز برداری و تانسوری (فصل ۱۰)

Jeffreys, Lass, Sokolnikoff, Spain, Spiegel.

معادلات دیفرانسیل معمولی (فصل‌های ۱۲ و ۱۵)

رک کتابهای درسی دربارهٔ معادلات دیفرانسیل

برای دستیابی به مجموعه جوابهای معادلات دیفرانسیل، رک Kanke. (برای استفاده از فرمولها نیازی نیست که حتماً زبان آلمانی بدانید!)

توابع خاص (فصل‌های ۱۱ و ۱۲)

عمومی:

Erdélyi, *Asymptotic Expansions.*

Hochstadt, *Special Functions.*

MacRobert, *Spherical Harmonics.*

Morse-Feshbach, *Methods of Theoretical Physics.*

Rainville, *Special Functions.*

توابع بسل:

Gray-Matthews-MacRobert, Relton, Tranter, Watson.

همچنین رک:

جدولها و کتابهای راهنما " که در بالا آمده است.

کتابهای درسی دربارهٔ معادلات دیفرانسیل.

معادلات دیفرانسیل جزئی (فصل‌های ۱۳ و ۱۵)

Chester, Churchill, Smirnov, Stakgold (توابع گرین), Weinberger.

تبدیلهای انتگرالی (فصل ۱۵)

عمومی:

Churchill, Kaplan (روش‌های عملگری), Tranter.

تبدیلهای لاپلاس:

Holl-Maple-Vinograde, Rainville, Spiegel.

تبدیلهای فوریه:

Sneddon.

همچنین رک:

جدولها و کتابهای راهنما " که در بالا آمده است.

توابع تعمیم یافته (فصل ۱۵)

Jones, Lighthill, Stakgold (مسائل مقدار مرزی).

توابع گرین (فصل ۱۵)

Chester, Stakgold (توابع گرین), Wyld.

احتمال (فصل ۱۶)

Dwass, Feller, Goldberg, Meyer, Parratt, Parzen, Young.

کتابشناسی

Abramowitz, Milton, and Irene A. Stegun, editors, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 55, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.

Anton, Howard, *Elementary Linear Algebra*, Wiley, New York, 2nd ed., 1977.

Apostol, Tom M., *Calculus*, Vol. I, Blaisdell, Waltham, Mass., 2nd ed., 1967.

Arfken, George, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York, 2nd ed., 1970.

Bak, Thor A., and Jonas Lichtenberg, *Mathematics for Scientists*, Benjamin, New York, 1966.

Bartle, Robert G., *The Elements of Real Analysis*, Wiley, New York, 1964.

Bliss, Gilbert Ames, *Calculus of Variations*, Open Court, Chicago, 1925.

Boyce, William E., and Richard C. DiPrima, *Introduction to Differential Equations*, Wiley, New York, 1970.

Brauer, Fred, and John A. Nohel, *Differential Equations: A First Course*, Benjamin, Menlo Park, California, 2nd ed., 1973.

Buck, R. Creighton, and Ellen F. Buck, *Advanced Calculus*, McGraw-Hill, New York, 3rd ed., 1978.

Butkov, Eugene, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

Byrd, P. F., and Morris D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954.

Chester, Clive R., *Techniques in Partial Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1971.

Chisholm, J. S. R., and Rosa M. Morris, *Mathematical Methods in Physics*, North Holland, Amsterdam, 2nd ed., 1966.

Churchill, Ruel V., *Modern Operational Methods in Engineering*, McGraw-Hill, New York, 3rd ed., 1972.

Churchill, Ruel V., and James Ward Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York, 3rd ed., 1978.

Churchill, Ruel V., James W. Brown, and Roger F. Verhey, *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, New York, 3rd ed., 1974.

Courant, Richard, and Herbert Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1941.

CRC Standard Mathematical Tables, Chemical Rubber Co., Cleveland, any recent edition.

Dettman, John W., *Applied Complex Variables*, Macmillan, New York, 1965.

Dwass, Meyer, *Probability: Theory and Applications*, Benjamin, New York, 1970.

Dwight, Herbert Bristol, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, Macmillan, New York, 4th ed., 1961.

Erdélyi, A., *Asymptotic Expansions*, Dover, New York, 1956.

Erdélyi, A., editor, *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, New York, 1953, 3 vols.

Erdélyi, A., editor, *Tables of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1954, 2 vols.

Feller, William, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, Wiley, New York, 3rd ed., 1968.

Frazer, R. A., W. J. Duncan, and A. R. Collar, *Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations*, Cambridge University Press, 1946.

French, A. P., *Principles of Modern Physics*, Wiley, New York, 1958.

Goldberg, Samuel, *Probability: An Introduction*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1960.

Gray, A., G. B. Mathews, and T. M. MacRobert, *A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics*, Macmillan, London, 1922.

Harper, Charlie, *Introduction to Mathematical Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.

Hildebrand, Francis B., *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 2nd ed., 1976.

Hochstadt, Harry, *Special Functions of Mathematical Physics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.

Holl, Dio L., Clair G. Maple, and Bernard Vinograde, *Introduction to the Laplace Transform*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1959.

Jackson, John David, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 2nd ed., 1975.

Jahnke, E., F. Emde, and F. Lösch, *Tables of Higher Functions*, McGraw-Hill, New York, 1960. (See also earlier editions, often cited as "Jahnke-Emde.")

Jeffreys, Harold, *Cartesian Tensors*, Cambridge University Press, 1957.

Johnson, David E., and Johnny R. Johnson, *Mathematical Methods in Engineering and Physics, Special Functions and Boundary Value Problems*, Ronald, New York, 1965.

Jones, D. S., *The Theory of Generalised Functions*, Cambridge University Press, 2nd ed., 1982.

Kamke, E., *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Band I, Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 3rd ed., 1944.

Kaplan, Wilfred, *Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 2nd ed., 1973.

Kaplan, Wilfred, *Operational Methods for Linear Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.

Kraut, Edgar A., *Fundamentals of Mathematical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1967.

Kreyszig, Erwin, *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, New York, 3rd ed., 1972.

Kuo, Benjamin C., *Linear Networks and Systems*, McGraw-Hill, New York, 1967.

Kyrala, A., *Applied Functions of a Complex Variable*, Wiley-Interscience, New York, 1972.

Lass, Harry, *Vector and Tensor Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1950.

Lighthill, M. J., *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge University Press, 1958.

Lipschutz, Seymour, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra*, McGraw-Hill, New York, 1968.

Lovelock, David, and Hanno Rund, *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles*, Wiley, New York, 1975.

MacRobert, Thomas M., *Spherical Harmonics*, Methuen, London, 2nd ed., 1947.

Magnus, Wilhelm, Fritz Oberhettinger, and Raj Pal Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, New York, 1966.

Mathews, Jon, and R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, Benjamin, New York, 2nd ed., 1970.

Meyer, Paul L., *Introduction to Probability and Statistical Applications*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 2nd ed., 1970.

Morse, Philip M., and Herman Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.

NBS Tables. See Abramowitz and Stegun.

Oberhettinger, Fritz, *Fourier Transforms of Distributions and Their Inverses: A Collection of Tables*, Academic Press, New York, 1973.

Oberhettinger, Fritz, *Tabellen zur Fourier Transformation*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.

Oberhettinger, Fritz, and Larry Badii, *Tables of Laplace Transforms*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973.

Parratt, Lyman G., *Probability and Experimental Errors in Science*, Wiley, New York, 1961.

Parzen, Emanuel, *Modern Probability Theory and its Applications*, Wiley, New York, 1960.

Pipes, L. A., and L. R. Harvil, *Mathematics for Engineers and Physicists*, McGraw-Hill, New York, 3rd ed., 1970.

Rainville, Earl D., *The Laplace Transform: An Introduction*, Macmillan, New York, 1963.

Rainville, Earl D., *Special Functions*, Macmillan, New York, 1960.

Relton, F. E., *Applied Bessel Functions*, Blackie, London, 1946.

Saff, E. B., and A. D. Snider, *Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.

Schaum Outlines, see Spiegel; Lipschutz.

Seeley, Robert T., *An Introduction to Fourier Series and Integrals*, Benjamin, New York, 1966.

Smirnov, M. M., *Second-Order Partial Differential Equations*, Edired by S. Chomet, Noordhoff, Groningen, 1966.

Sneddon, I. N., *Fourier Series*, Routledge and Kegan Paul, London, 1961.

Sneddon, Ian N., *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1951.

Sokolnikoff, I. S., *Tensor Analysis, Theory and Applications*, Wiley, New York, 2nd ed., 1964.

Spain, Barry, *Tensor Calculus*, Wiley-Interscience, New York, 3rd ed., 1960.

Spiegel, Murray R., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Advanced Calculus*, Schaum, New York, 1963.

Spiegel, Murray R., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York, 1971.

Spiegel, Murray R., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Complex Variables*, Schaum, New York, 1964.

Spiegel, Murray R., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Fourier Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1974.

Spiegel, Murray R., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Laplace Transforms*, Schaum, New York, 1965.

Spiegel, Murray R., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis*, Schaum, New York, 1959.

Spiegel, Murray R., *Schaum's Outline Series, Handbook of Formulas and Tables*, McGraw-Hill, New York, 1968.

Stakgold, Ivar, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, 2 vols., Macmillan, New York, 1967, 1968.

Stakgold, Ivar, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, Wiley, New York, 1979.

Strang, Gilbert, *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, New York, 1976.

Thomas, G. B., Jr., and R. L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 5th ed., 1979.

Tranter, C. J., *Integral Transforms in Mathematical Physics*, Wiley, New York, 3rd ed., 1966.

Tranter, C. J., *Bessel Functions With Some Physical Applications*, English Universities Press, London, 1968.

Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 2nd ed., 1944.

Weinberger, H. F., *A First Course in Partial Differential Equations With Complex Variables and Transform Methods*, Blaisdell, New York, 1965.

Weinstock, Robert, *Calculus of Variations With Applications to Physics and Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1952.

Wilcox, L. R., and H. J. Curtis, *Elementary Differential Equations*, International Textbook, Scranton, Pa., 1961.

Wyld, H. W., *Mathematical Methods For Physics*, Benjamin, Reading, Mass., 1976.

Young, Hugh D., *Statistical Treatment of Experimental Data*, McGraw-Hill, New York, 1962.

جواب مسائل برگزیده

فصل ۱۰

۱-۱) H ، $C^{-1}M^{-1}C$ ، C^TBA^T

۳-۴) (الف) ۵   ۳-۵) (الف) ۹   ۳-۶) $\frac{۱}{۴}$

۴-۵) $\theta =$ ۱٫۱ $=$ ۶۳٫۴°

۴-۱۱) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۵} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ، نامتعامد

یک نکته در مورد جوابهای زیر: به ازای هر ویژه مقدار، مؤلفه‌های یک ویژه بردار همخوان در داخل پرانتز داده شده‌اند.

۴-۱۲) ۴ (۱, ۱)
-۱ (۳, -۲)

۴-۱۵) ۱ (۰, ۰, ۱)
-۱ (۱, -۱, ۰)
۵ (۱, ۱, ۰)

۱۸-۴)
۴ (۲, ۱, ۳)
۲ (۰, -۳, ۱)
-۳ (۵, -۱, -۳)

۲۰-۴)
۳ (۰, -۱, ۲)
۴ (۱, ۲, ۱)
-۲ (-۵, ۲, ۱)

۲۲-۴)
-۴ (-۴, ۱, ۱)
۵ (۱, ۲, ۲)
-۲ (۰, -۱, ۱)

۲۳-۴)
۱۸ (۲, ۲, -۱)
۹ (۱, -۱, ۰)
۹ (۱, ۱, ۴)

در مسألهٔ ۴-۲۳، دو ویژه بردار همخوان با ویژه مقدار ۹ می‌توانند دو بردار دلخواه متعامد باشند که بـر بـردار (۱- ,۲ ,۲) نیز عموداند.

۲۶-۴)
۴ (۱, ۱, ۱)
۱ (۱, -۱, ۰)
۱ (۱, ۱, -۲)

۲۷-۴) $D = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad C = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}$

۲۹-۴) $D = \begin{pmatrix} ۱۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad C = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix}$

۳۱-۴) $D = \begin{pmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad C = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$

۲-۵) $۳x'^{۲} - ۲y'^{۲} = ۲۴$

۳-۵) $۱۰x'^{۲} = ۳۵$

۶-۵) $۳x'^{۲} + \sqrt{۳}\, y'^{۲} - \sqrt{۳}\, z'^{۲} = ۱۲$

۱۲-۵) $y = ۲x$ با $\omega = \sqrt{۳k/m}$ ؛ $x = -۲y$ با $\omega = \sqrt{۸k/m}$

۱۳-۵) $x = y$ با $\omega = \sqrt{g/l}$ ؛ $x = -y$ با $\omega = \sqrt{۳g/l}$

۱-۸) $h_r = ۱$ ، $h_\theta = r$ ، $h_\phi = r \sin\theta$

$$ds = \mathbf{e}_r\, dr + \mathbf{e}_\theta\, r\, d\theta + \mathbf{e}_\phi\, r \sin\theta\, d\phi$$

$$dV = r^{۲} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{i} \sin\theta \cos\phi + \mathbf{j} \sin\theta \sin\phi + \mathbf{k} \cos\theta = \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{a}_\theta = \mathbf{i}r \cos\theta \cos\phi + \mathbf{j}r \cos\theta \sin\phi - \mathbf{k}r \sin\theta = r\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\mathbf{i}r \sin\theta \sin\phi + \mathbf{j}r \sin\theta \cos\phi = r \sin\theta \, \mathbf{e}_\phi$$

۸-۳)

$$d\mathbf{s}/dt = \mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\theta r \dot{\theta} + \mathbf{e}_\phi r \sin\theta \dot{\phi}$$

$$d^{۲}\mathbf{s}/dt^{۲} = \mathbf{e}_r (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲} - r \sin^{۲}\theta \dot{\phi}^{۲}) + \mathbf{e}_\theta (r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta} - r \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^{۲}) + \mathbf{e}_\phi (r \sin\theta \ddot{\phi} + ۲r \cos\theta \dot{\theta}\dot{\phi} + ۲ \sin\theta \dot{r} \dot{\phi})$$

۸-۵)

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_r \cos\theta - e_\theta \sin\theta - \mathbf{e}_\phi r \sin\theta$$

۸-۶)

$$h_u = h_v = (u^{۲} + v^{۲})^{۱/۲} \quad ، \quad h_z = ۱$$

$$d\mathbf{s} = (u^{۲} + v^{۲})^{۱/۲} (\mathbf{e}_u \, du + \mathbf{e}_v \, dv) + \mathbf{e}_z \, dz$$

$$dV = (u^{۲} + v^{۲}) \, du \, dv \, dz$$

$$\mathbf{a}_u = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v = (u^{۲} + v^{۲})^{۱/۲} \mathbf{e}_u$$

$$\mathbf{a}_v = -\mathbf{i}v + \mathbf{j}u = (u^{۲} + v^{۲})^{۱/۲} \mathbf{e}_v$$

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{k} = \mathbf{e}_z$$

۸-۹)

$$h_u = h_v = a(\cosh u + \cos v)^{-۱}$$

$$d\mathbf{s} = a(\cosh u + \cos v)^{-۱} (\mathbf{e}_u \, du + \mathbf{e}_v \, dv)$$

$$dA = a^{۲}(\cosh u + \cos v)^{-۲} \, du \, dv$$

$$\mathbf{a}_u = (h^{۲}{}_u/a) [\mathbf{i}(۱ + \cos v \cosh u) - \mathbf{j} \sin v \sinh u] = h_u \mathbf{e}_u$$

$$\mathbf{a}_v = (h^{۲}{}_v/a) [\mathbf{i} \sinh u \sin v + \mathbf{j}(۱ + \cos v \cosh u)] = h_v \mathbf{e}_v$$

۸-۱۱)

$$d\mathbf{s}/dt = (u^{۲} + v^{۲})^{۱/۲} (\mathbf{e}_u \dot{u} + \mathbf{e}_v \dot{v}) + \mathbf{e}_z \dot{z}$$

$$d^{۲}\mathbf{s}/dt^{۲} = \mathbf{e}_u(u^{۲} + v^{۲})^{-۱/۲} [(u^{۲} + v^{۲})\ddot{u} + u(\dot{u}^{۲} - \dot{v}^{۲}) + ۲v\dot{u}\dot{v}] + \mathbf{e}_v(u^{۲} + v^{۲})^{-۱/۲} [(u^{۲} + v^{۲})\ddot{v} + v(\dot{v}^{۲} - \dot{u}^{۲}) + ۲u\dot{u}\dot{v}] + \mathbf{e}_z \ddot{z}$$

۸-۱۴)
$$ds/dt = a(\cosh u + \cos v)^{-1}(\mathbf{e}_u \dot{u} + \mathbf{e}_v \dot{v})$$
$$d^2\mathbf{s}/dt^2 = \mathbf{e}_u a(\cosh u + \cos v)^{-2}[(\cosh u + \cos v)]\ddot{u} + (\dot{v}^2 - \dot{u}^2)\sinh u + 2\dot{u}\dot{v}\sin v] + \mathbf{e}_v a(\cosh u + \cos v)^{-2} [(\cosh u + \cos v)\ddot{v} + (\dot{v}^2 - \dot{u}^2)\sin v - 2\dot{u}\dot{v}\sinh u]$$

۹-۱۰) فرض کنید $h = h_u = h_v = (u^2 + v^2)^{1/2}$ معرف ضرایب مقیاس u و v باشد.

$$\nabla U = h^{-1}\left(\mathbf{e}_u \frac{\partial U}{\partial u} + \mathbf{e}_v \frac{\partial U}{\partial v}\right) + \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = h^{-2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(hV_u) + \frac{\partial}{\partial v}(hV_v)\right] + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$
$$\nabla^2 U = h^{-2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$
$$\nabla \times \mathbf{V} = \left(h^{-1}\frac{\partial V_z}{\partial v} - \frac{\partial V_v}{\partial z}\right)\mathbf{e}_u + \left(\frac{\partial V_u}{\partial z} - h^{-1}\frac{\partial V_z}{\partial u}\right)\mathbf{e}_v + h^{-2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(hV_v) - \frac{\partial}{\partial v}(hV_u)\right]\mathbf{e}_z$$

۹-۱۳) مانند ۹-۱۰ در صورتی که $h = a(\cosh u + \cos v)^{-1}$ و جمله‌های شامل مشتقات z یا V_z حذف شوند. با این حال، توجه کنید که $\nabla \times \mathbf{V}$ در صورتی که $\mathbf{V} = \mathbf{e}_u V_u + \mathbf{e}_v V_v$ باشد - V_u و V_v توابع u و v هستند - **فقط** دارای یک مؤلفهٔ z است.

۹-۱۵) $h_u = 1$ ، $h_v = u/\sqrt{1 - v^2}$
$$\mathbf{e}_u = \mathbf{i}v + \mathbf{j}\sqrt{1 - v^2} \quad ، \quad \mathbf{e}_v = \mathbf{i}\sqrt{1 - v^2} - \mathbf{j}v$$
$$m[\ddot{u} - u\dot{v}^2/(1 - v^2)] = -\partial V/\partial u = F_u$$
$$m[(u\ddot{v} + 2\dot{u}\dot{v})/(1 - v^2)^{1/2} + uv\dot{v}^2/(1 - v^2)^{3/2}] = -h_v^{-1}\,\partial V/\partial v = F_v$$

۹-۱۶) $r^{-1}\mathbf{e}_z$ ، ۰ ، ۰ ، r^{-1}

۹-۱۹) ۳ ، $\mathbf{e}_r \cos\theta - \mathbf{e}_\theta \sin\theta$ ، $2\mathbf{e}_\phi$

۹-۲۱) $-k^2 e^{ikr\cos\theta}$ ، $2r^{-4}$ ، ۶ ، $2r^{-1}$

۱۲-۴) بیضیوار

۱۱-۱۲) (د) محورهای اصلی: $y = x \quad y = -x \quad z$

گشتاورهای لختی همخوان: $I = ۲m \quad I = ۶m \quad I = ۴m$

۱-۱۵) $(۱, ۱) \quad ۱$ ۳-۱۵) $(۱, ۱) \quad ۱$

$(۰, ۱) \quad -۲$ $(۱, -۱) \quad ۹$

۵-۱۵) $(۱, ۰, ۱) \quad ۱۰$ ۷-۱۵) $(۰, ۴, ۳) \quad ۲$

$(۰, ۱, ۰) \quad ۴$ $(۵, -۳, ۴) \quad ۷$

$(۱, ۰, -۱) \quad ۵$ $(۵, ۳, -۴) \quad -۳$

۸-۱۵) $C^{-۱} = \begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad C = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix}$

۱۰-۱۵) $d = \sqrt{۵}$ ، $۳x'^{۲} - y'^{۲} - ۵z'^{۲} = ۱۵$

۱۲-۱۵) $d = ۳$ ، $۳x'^{۲} + ۶y'^{۲} - ۴z'^{۲} = ۵۴$

۱۴-۱۵) $(۷k/m)^{۱/۲}$ ، $\omega = (k/m)^{۱/۲}$

۱۷-۱۵) $ds^{۲} = h^{۲}_u\, du^{۲} + h^{۲}_v\, dv^{۲}$

$$h_u = (u^{۲}+v^{۲}-۱)^{۱/۲}(u^{۲}-۱)^{-۱/۲} \;،\; h_v = (u^{۲}+v^{۲}-۱)^{۱/۲}(۱-v^{۲})^{-۱/۲}$$

$$dA = (u^{۲}+v^{۲}-۱)^{۱/۲}(u^{۲}-۱)^{-۱/۲}(۱-v^{۲})^{-۱/۲}\,du\,dv$$

$$d\mathbf{s} = [\mathbf{i}(۱-v^{۲})^{۱/۲} + \mathbf{j}uv(u^{۲}-۱)^{-۱/۲}]du + [-\mathbf{i}uv(۱-v^{۲})^{-۱/۲} + \mathbf{j}(u^{۲}-۱)^{۱/۲}]dv$$

$$\mathbf{e}_u = (u^{۲}+v^{۲}-۱)^{-۱/۲}[\mathbf{i}(u^{۲}-۱)^{۱/۲}(۱-v^{۲})^{۱/۲} + \mathbf{j}uv]$$

$$\mathbf{e}_v = (u^{۲}+v^{۲}-۱)^{-۱/۲}[-\mathbf{i}uv + \mathbf{j}(u^{۲}-۱)^{۱/۲}(۱-v^{۲})^{۱/۲}]$$

۱۹-۱۵)
$$m\,[h_u\ddot{u} + \dot{u}^{۲}\,\partial h_u/\partial u + ۲\dot{u}\dot{v}\,\partial h_u/\partial v - \dot{v}^{۲} h_v h_u^{-۱}\,\partial h_v/\partial u] = -h_u^{-۱}\,\partial V/\partial u = F_u$$

$$m\,[h_v\ddot{v} + \dot{v}^{۲}\,\partial h_v/\partial v + ۲\dot{u}\dot{v}\,\partial h_v/\partial u - \dot{u}^{۲} h_u h_v^{-۱}\,\partial h_u/\partial v] = -h_v^{-۱}\,\partial V/\partial v = F_v$$

۲۱-۱۵) $\nabla U = h_u^{-۱}(\partial U/\partial u)\mathbf{e}_u + h_v^{-۱}(\partial U/\partial v)\mathbf{e}_v$ ، h_u و h_v مانند مسألهٔ ۱۵-۱۷

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = (h_u h_v)^{-۱}\,[(\partial/\partial u)(h_v V_u) + (\partial/\partial v)(h_u V_v)]$$

$$\nabla^{۲}U = (u^{۲}+v^{۲}-۱)^{-۱}\,[\sqrt{u^{۲}-۱}\;\partial/\partial u\,(\sqrt{u^{۲}-۱}\;\partial U/\partial u) + \sqrt{۱-v^{۲}}\;\partial/\partial v\,(\sqrt{۱-v^{۲}}\;\partial U/\partial v)]$$

۱۵-۲۳) $\mathbf{V}\cdot\mathbf{T} = ۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j}$ ، $\mathbf{T}\cdot\mathbf{V} = ۲\mathbf{i} - ۵\mathbf{j}$

۱۵-۲۹) $A^{۱۰۲} = -U$ ، $A^{۲۵} = A$

۱۵-۳۱) $M^{۱۰} = ۲^{۹}\begin{pmatrix} ۱۰۲۵ & -۱۰۲۳ \\ -۱۰۲۳ & ۱۰۲۵ \end{pmatrix}$

۱۵-۳۳) محور: $(۱-\sqrt{۲}, ۱-\sqrt{۲}, ۱)$ ، $\theta = ۱۰۶٫۵^\circ$

۱۵-۳۶) $C = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & (۱-i)\,e^{i\beta} \\ (-۱-i)\,e^{i\alpha} & e^{i\beta} \end{pmatrix}$ ، α و β مقادیر دلبخواه‌اند

فصل ۱۱

۳-۲) ۰٫۹۰۸۶۴ ۳-۴) ۷۲٫۵۲۸ ۳-۶) ۲٫۶۸۳۴

۳-۸) $\Gamma(\frac{۵}{۳}) = ۰٫۹۰۲۷۵$ ۳-۱۰) $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$

۳-۱۳) $۳^{-۴}\,\Gamma(۴) = \frac{۲}{۲۷}$ ۳-۱۵) $\frac{۱}{۴}\,\Gamma(\frac{۲}{۳}) = ۰٫۳۳۸۵۳$

۴-۱) ۱٫۴۸۹۲ ۴-۳) ۲٫۶۵۹۳ ۴-۵) ۱٫۴۴۷۱-

۷-۱) $\frac{۱}{۲}B(\frac{۵}{۲}, \frac{۱}{۲}) = \frac{۳\pi}{۱۶}$ ۷-۳) $\frac{۱}{۳}B(\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}) = ۱٫۴۰۲۱۸$

۷-۵) $B(۳, ۳) = \frac{۱}{۳۰}$ ۷-۷) $\frac{۱}{۲}B(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}) = ۲٫۶۲۲۱$

۷-۱۱) $۲\,B(\frac{۲}{۳}, \frac{۴}{۳})/B(\frac{۱}{۳}, \frac{۴}{۳}) = ۰٫۹۱۲۶۲$

۷-۱۳) $I_y/M = ۸\,B(\frac{۴}{۳}, \frac{۴}{۳})/B(\frac{۵}{۳}, \frac{۱}{۳}) = ۱٫۷۵۳۲$

۸-۱) $B(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴})\,\sqrt{۲l/g} = ۷٫۴۱۶۴\,\sqrt{l/g}$ (مقایسه کنید با $۲\pi\sqrt{l/g}$)

۸-۳) $t = \pi\sqrt{a/g}$

۱۰-۲) از (۹-۶): خطاهای ۲- جمله‌ای و ۴- جمله‌ای > مقدار تابع؛ خطای ۱۰- جمله‌ای = ۰٫۰۳ . از (۱۰-۴): خطای ۲- جمله‌ای = ۰٫۰۰۰۲۴ ؛ خطای ۴- جمله‌ای = ۰٫۰۰۰۰۱۳ (این بهترین دقتی است که از رشتهٔ مجانبی به دست می‌آید)؛ خطای ۱۰- جمله‌ای = ۰٫۰۰۳ .

۳-۱۰) 0.882 — ۱۰-۵) 1.5×10^{-12}

۸-۱۰) 6.4×10^{-4346} — ۱۱-۱۰) 0.3174

۱۳-۱۰) $x^{n-1}e^{-x}[1+(n-1)x^{-1}+(n-1)(n-2)x^{-2}+\cdots]$

۱۴-۱۰) $erf\,(x)=1-\Gamma(\frac{1}{2},x^{2})/\sqrt{\pi}$

۵-۱۱) ۱

۱-۱۲) $K=F(k,\pi/2)=(\pi/2)\,\{1+(\frac{1}{2})^{2}k^{2}+[(1\times 3)/(2\times 4)]^{2}k^{4}+\cdots\}$

$$E=E(k,\pi/2)=(\pi/2)\,\{1-(\tfrac{1}{2})^{2}k^{2}-[1/(2\times 4)^{2}]\times 3k^{4}$$
$$-[(1\times 3)/(2\times 4\times 6)]^{2}\times 5k^{6}\cdots\}$$

۲-۱۲) 1.58 — ۵-۱۲) 7.30

۶-۱۲) 3.96 — ۹-۱۲) 0.946

۱۰-۱۲) 3.95 — ۱۱-۱۲) 9.09

۱۵-۱۲) 0.585 — ۱۶-۱۲) 3.82

۶-۱۳) $-8\sqrt{\pi}/15$ — ۸-۱۳) 0.5205

۱۰-۱۳) $\sqrt{2}K(1/\sqrt{2})=2.622$ — ۱۱-۱۳) $\frac{1}{2}B(\frac{1}{2},\frac{1}{4})=2.622$

۱۳-۱۳) $-sn\,u\,dn\,u$ — ۱۵-۱۳) $15\sqrt{\pi}/8$

۱۷-۱۳) $\frac{1}{2}B(\frac{5}{4},\frac{7}{4})=3\pi\sqrt{2}/64=0.208$

۱۹-۱۳) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,erfc\,5=1.36\times 10^{-12}$

۲۱-۱۳) $(\frac{5}{3})^{5}\times 14\pi/\sqrt{3}=326.6$ — ۲۲-۱۳) 5.09

۲۴-۱۳) -1.8×10^{-72}

فصل ۱۲

۱-۱) $y=a_0\cos 2x+a_1\sin 2x$

۴-۱) $y=A\sin x+B\cos x-\frac{1}{2}\sin 3x$

۶-۱) $y=a_1x+x^{2}$

۷-۱) $y=a_0e^{x^{3}}$

۹-۱) $y = A \sin x + B \cos x + x \sin x - x^{۲} \cos x$

۱۱-۱) $y = a_{۰} (۱ + x^{۳}/۳! + ۴^{۲} x^{۶}/۶! + (۷ \times ۴)^{۲} x^{۹}/۹! \cdots)$
$+ a_{۱} (x + ۲^{۲} x^{۴}/۴! + (۵ \times ۲)^{۲} x^{۷}/۷! + (۸ \times ۵ \times ۲)^{۲} x^{۱۰}/۱۰! \cdots)$

۱۳-۱) $y = a_{۰} (۱ - x^{۳}/۶ + x^{۶}/۱۸۰ - \cdots) + a_{۱} (x - x^{۴}/۱۲ + x^{۷}/۵۰۴ - \cdots)$

۱۴-۱) $y = A \cosh (x\sqrt{۲}) + B \sinh (x\sqrt{۲}) + e^{x^{۲}}$

۱۶-۱) $y = a_{۰} (۱ - x^{۲}) + a_{۱} x$

۳-۳) $(۳۰ - x^{۲}) \sin x + ۱۲x \cos x$

۵-۳) $(x^{۲} - ۲۰۰x + ۹۹۰۰) e^{-x}$

۳-۵) $P_{۰}(x) = ۱$ $\quad P_{۳}(x) = (۵x^{۳} - ۳x)/۲$
$P_{۱}(x) = x$ $\quad P_{۴}(x) = (۳۵x^{۴} - ۳۰x^{۲} + ۳)/۸$
$P_{۲}(x) = (۳x^{۲} - ۱)/۲$ $\quad P_{۵}(x) = (۶۳x^{۵} - ۷۰x^{۳} + ۱۵x)/۸$
$P_{۶}(x) = (۲۳۱x^{۶} - ۳۱۵x^{۴} + ۱۰۵x^{۲} - ۵)/۱۶$

۹-۵) $۲P_{۲} + P_{۱}$

۱۱-۵) $\frac{۲}{۵} (P_{۱} - P_{۳})$

۱۲-۵) $\frac{۸}{۵} P_{۴} + ۴P_{۲} - ۳P_{۱} + \frac{۱۲}{۵} P_{۰}$

۲-۸) $N = \sqrt{\frac{۲}{۵}}$ ، $\sqrt{\frac{۵}{۲}} P_{۲}(x)$ $\qquad$ ۴-۸) $N = \pi^{۱/۴}$ ، $\pi^{-۱/۴} e^{-x^{۲}/۲}$

۱-۹) $\frac{۳}{۲} P_{۱} - \frac{۷}{۸} P_{۳} + \frac{۱۱}{۱۶} P_{۵} \cdots$

۴-۹) $\frac{۱}{۸} \pi (۳P_{۱} + \frac{۷}{۱۶} P_{۳} + \frac{۱۱}{۶۴} P_{۵} \cdots)$

۶-۹) $P_{۰} + \frac{۳}{۸} P_{۱} - \frac{۲۰}{۹} P_{۲} \cdots$

۸-۹) $\frac{۱}{۲}(۱-a)P_{۰} + \frac{۳}{۴}(۱-a^{۲})P_{۱} + \frac{۵}{۴}a(۱-a^{۲})P_{۲} + \frac{۷}{۱۶}(۱-a^{۲})(۵a^{۲}-۱)P_{۳} \cdots$

۱۱-۹) $\frac{۸}{۵} P_{۴} + ۴P_{۲} - ۳P_{۱} + \frac{۱۲}{۵} P_{۰}$

۱۲-۹) $\frac{۲}{۵} (P_{۱} - P_{۳})$

۱۴-۹) $\frac{1}{2}P_0 + \frac{5}{8}P_2 = \frac{3}{16}(5x^2 + 1)$

۵-۱۰) $\frac{1}{2}(\sin\theta)(35\cos^3\theta - 15\cos\theta)$

۲-۱۱) $y = Ax^{-3} + Bx^3$

۴-۱۱) $y = Ax^{-2} + Bx^3$

۶-۱۱) $y = Ae^{-x} + Bx^{2/3}[1 - 3x/5 + (3x)^2/(5\times 8) - (3x)^3/(5\times 8\times 11) + \cdots]$

۸-۱۱) $y = A(x^{-1} - 1) + Bx^2(1 - x + 3x^2/5 - 8x^3/21 + \cdots)$

۱۰-۱۱) $y = A[1 + 2x - (2x)^2/2! + (2x)^3/(3\times 3!) - (2x)^4/(3\times 5\times 4!) + \cdots]$
$+ Bx^{3/2}[1 - 2x/5 + (2x)^2/(5\times 7\times 2!) - (2x)^3/(5\times 7\times 9\times 3!) + \cdots]$

۱۱-۱۱) $y = Ax^{1/6}[1 + 3x^2/2^5 + 3^2x^4/(5\times 2^{10}) + \cdots]$
$+ Bx^{-1/6}[x + 3x^3/2^6 + 3^2x^5/(7\times 2^{11}) + \cdots]$

۱-۱۶) $y = x^{-3/2} Z_{1/2}(x)$ ۳-۱۶) $y = x^{-1/2} Z_1(4x^{1/2})$

۵-۱۶) $y = x Z_0(2x)$ ۷-۱۶) $y = x^{-1} Z_{1/2}(\frac{1}{2}x^2)$

۹-۱۶) $y = x^{1/3} Z_{2/3}(4\sqrt{x})$ ۱۱-۱۶) $y = x^{-2} Z_2(x)$

۱۷-۷) $y = x^{1/2} I_1(2x^{1/2})$. دقت کنید که نیازی به وارد کردن ضریب i نیست ، زیرا هر مضربی از y یک جواب است.

۱۱-۱۸) ۱٫۷ m را برای فولاد

۱-۲۰) $\frac{1}{6}$ ۳-۲۰) $4/\pi$ ۵-۲۰) $\frac{1}{2}$

۷-۲۰) $h_n^{(1)}(x) \sim x^{-1} e^{i[x - (n+1)\pi/2]}$ ۹-۲۰) $h_n^{(1)}(ix) \sim -i^{-N} x^{-1} e^{-x}$

۱-۲۱) $y = e^{x^2/2}(A + B\int e^{-x^2}dx)$

۳-۲۱) $y = Z_p(e^{x^2/2})$

۵-۲۱) $y = x^{3/2} Z_{1/2}(3x)$ یا $y = Ax\cos 3x + Bx\sin 3x$

۷-۲۱) $y = Ax/(1-x) + B[x + 1 + x(1-x)^{-1}\ln x^2]$

۹-۲۱) $y = xe^{1/x}(A + B\int x^{-3}e^{-1/x}dx)$

۱۳-۲۱) $y = (A + B\ln x)x$

۱۴-۲۱) $y = Ax/(1-x) + B[2x(1-x)^{-1}\ln x + 1 + x]$

۲۱-۱۵) $y = A(x^2 + 2x) + B[(x^2 + 2x)\ln x + 1 + 5x - x^3/6 + x^4/72 \cdots]$

۲۱-۱۸) $y = x^2 \ln x$

۲۱-۲۰) $y = x \ln [x + (x^2 + 1)^{1/2}] - (x^2 + 1)^{1/2}$

۲۱-۲۲) $x^{-1} - 1$

۲۲-۴)

$$H_0(x) = 1 \qquad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$
$$H_1(x) = 2x \qquad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2 \qquad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

۲۲-۱۳)

$$L_0(x) = 1$$
$$L_1(x) = 1 - x$$
$$L_2(x) = \frac{1}{2}(2 - 4x + x^2)$$
$$L_3(x) = \frac{1}{6}(6 - 18x + 9x^2 - x^3)$$
$$L_4(x) = \frac{1}{24}(24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4)$$
$$L_5(x) = \frac{1}{120}(120 - 600x + 600x^2 - 200x^3 + 25x^4 - x^5)$$

توجه: در بسیاری از کتابهای مکانیک کوانتومی، ضریب $1/n!$ حذف می‌شود اما در اینجا، و همچنین در بیشتر کتابهای مرجع، این ضریب به کار رفته است.

فصل ۱۳

۲-۱۲)

$$T = \sum_{n\ \text{فرد}} \frac{400}{n\pi \sinh 3n\pi} \sinh \frac{n\pi}{10} (30 - y) \sin \frac{n\pi x}{10}$$
$$+ \sum_{n\ \text{فرد}} \frac{400}{n\pi \sinh (n\pi/3)} \sinh \frac{n\pi}{30} (10 - x) \sin \frac{n\pi y}{30}$$

۲-۱۴) برای $f(x) = x - 5$، $T = -\frac{40}{\pi^2} \sum_{n\ \text{فرد}} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{10} e^{-n\pi y/10}$

برای $f(x) = x$، عدد ۵ را به جواب بالا بیفزایید.

۹-۳) $u = ۱۰۰ - \frac{۴۰۰}{\pi} \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۲n+۱} e^{-[(۲n+۱)\pi\alpha/۴]^۲ t} \cos\left(\frac{۲n+۱}{۴}\pi x\right)$

۸-۴) $y = \frac{۴l}{\pi^۲ v}\left[\frac{۱}{۳}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi vt}{l} + \frac{\pi}{۱۶}\sin\frac{۲\pi x}{l}\sin\frac{۲\pi vt}{l} - \sum_{n=۳}^{\infty}\frac{\sin n\pi/۲}{n(n^۲-۴)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi vt}{l}\right]$

۹-۴) مسألهٔ ۲: $n = ۲$، $\nu = v/l$

مسألهٔ ۳: $n = ۳$، $\nu = \frac{۳}{۲}v/l$ و $n = ۴$، $\nu = ۲v/l$ تقریباً دارای یک شدت هستند.

مسألهٔ ۵: $n = ۱$، $\nu = \frac{۱}{۲}v/l$

۱-۵) $u \cong ۹٫۷۶$

۴-۵) $u = ۲۰۰\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{k_m J_۱(k_m)} J_۰(k_m r)\, e^{-(k_m\alpha)^۲ t}$ ، $k_m =$ صفرهای $J_۰$

۱۰-۵)

$$u = \frac{۶۴۰۰}{\pi^۳}\sum_{n\,\text{فرد}}\sum_{m\,\text{فرد}}\sum_{p\,\text{فرد}}\frac{۱}{nmp}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi y}{l}\sin\frac{p\pi z}{l}e^{-(\alpha\pi/l)^۲(n^۲+m^۲+p^۲)t}$$

۱۱-۵) $n = ۰$، ثابت، $R = \ln r$ ؛ $n \neq ۰$، $R = r^n$ ، r^{-n}

$R = r^l$ ، $r^{-l-۱}$

۱۳-۵) $u = \frac{۴۰۰}{\pi}\sum_{n\,\text{فرد}}\frac{۱}{n}\left(\frac{r}{۱۰}\right)^{۴n}\sin ۴n\theta$

۱۴-۵) $u = \frac{۵۰\ln r}{\ln ۲} + \frac{۲۰۰}{\pi}\sum_{n\,\text{فرد}}\frac{r^n - r^{-n}}{n(۲^n - ۲^{-n})}\sin n\theta$

۵-۶) $z = \frac{۶۴ l^۴}{\pi^۶}\sum_{m\,\text{فرد}}\sum_{n\,\text{فرد}}\frac{۱}{n^۳ m^۳}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi y}{l}\cos\frac{\pi v(m^۲+n^۲)^{۱/۲}t}{l}$

۲-۷) $u = \frac{۲}{۵} r P_۱(\cos\theta) - \frac{۲}{۵} r^۳ P_۳(\cos\theta)$

۵-۷) $u = \frac{۱}{۲}P_۰(\cos\theta) + \frac{۵}{۸}r^۲ P_۲(\cos\theta) - \frac{۳}{۱۶}r^۴ P_۴(\cos\theta)\cdots$

۶-۷) $u = \frac{۱}{۸}\pi\left[۳rP_۱(\cos\theta) + \frac{۷}{۱۶}r^۳ P_۳(\cos\theta) + \frac{۱۱}{۶۴}r^۵ P_۵(\cos\theta)\cdots\right]$

۸-۷) $$u = 25\left[P_0(\cos\theta) + \frac{9}{4} r P_1(\cos\theta) + \frac{15}{8} r^2 P_2(\cos\theta) + \frac{21}{64} r^3 P_3(\cos\theta \cdots\right]$$

۱۰-۷) $$u = \frac{1}{15} r^3 P^2_3(\cos\theta)\cos 2\phi - rP_1(\cos\theta)$$

۱۲-۷) $$u = \frac{3}{4} r P_1(\cos\theta) + \frac{7}{24} r^3 P_3(\cos\theta) - \frac{11}{192} r^5 P_5(\cos\theta)\cdots$$

۱۳-۷) $$u = E_0 (r - a^3/r^2) P_1(\cos\theta)$$

۱۵-۷) $$u = 100 + \frac{200\,a}{\pi r}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi r}{a}\, e^{-(\alpha n\pi/a)^2 t}$$
$$= 100 + 200\sum_{n=1}^\infty (-1)^n j_0(n\pi r/a)\, e^{-(\alpha n\pi/a)^2 t}$$

۴-۸) فرض کنید K = بار خطی بر واحد طول باشد. در آن صورت
$$V = -K\ln(r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta) + K\ln a^2 - K\ln R^2$$
$$+ K\ln\left[r^2 + (R^2/a)^2 - 2(R^2/a)\, r\cos\theta\right]$$

۵-۸) $-K$ در R^2/a ، K در $(a, 0)$

۳-۹) $$T = \frac{1}{4}(2 - y)\frac{4}{\pi^2}\sum_{n\ \text{فرد}} \frac{1}{n^2\sinh 2n\pi}\sinh n\pi(2 - y)\cos n\pi x$$

۴-۹) $$T = 20 + \frac{40}{\pi}\sum_{n\ \text{فرد}}\frac{1}{n\sinh(3n\pi/5)}\sinh\frac{n\pi y}{5}\sinh\frac{n\pi x}{5}$$
$$+ \frac{40}{\pi}\sum_{n\ \text{فرد}}\frac{1}{n\sinh(5n\pi/3)}\sinh\frac{n\pi(5-x)}{3}\sinh\frac{n\pi y}{3}$$

۶-۹) $$u = 20 - \frac{80}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-[(2n+1)\pi\alpha/(2l)]^2 t}\cos\left(\frac{2n+1}{2l}\pi x\right)$$

۸-۹) $$u = 20 - x - \frac{40}{\pi}\sum_{n\ \text{زوج}}\frac{1}{n} e^{-(n\pi\alpha/10)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{10}$$

۱۰-۹) $$u = \frac{1600}{\pi^2}\sum_{n\ \text{فرد}}\sum_{m\ \text{فرد}}\frac{1}{nmI_n(3m\pi/20)} I_n\left(\frac{m\pi r}{20}\right)\sin n\theta\sin\frac{m\pi z}{20}$$

۱۶-۹) $$7\sqrt{5}/(2\pi)$$

۹-۱۸) ν_{mn} ، $n = ۳، ۶، ...$ ؛ پایین‌ترین بسامدها عبارت‌اند از:

$\nu_{۱۳} = ۲٫۶۵\nu_{۱۰}$ ، $\nu_{۲۳} = ۴٫۰۶\nu_{۱۰}$ ، $\nu_{۱۶} = ۴٫۱۳\nu_{۱۰}$ ، $\nu_{۳۳} = ۵٫۴\nu_{۱۰}$

۹-۲۰) $\nu = v\lambda_l/(۲\pi a)$ که در آن λ_l = صفرهای j_l، a = شعاع کره، v = سرعت صوت است.

۹-۲۲) $u = ۱ - \frac{۱}{۲} r P_۱(\cos\theta) + \frac{۷}{۸} r^۳ P_۳(\cos\theta) - \frac{۱۱}{۱۶} r^۵ P_۵(\cos\theta) \cdots$

۹-۲۶) $\nu = [v/(۲\pi)][(k_{mn}/a)^۲ + (\lambda)^۲]^{۱/۲}$ که در آن k_{mn} یک صفر J_n است.

فصل ۱۴

۱-۱) $u = x^۳ - ۳xy^۲$ ، $v = ۳x^۲y - y^۳$

۱-۳) $u = x$ ، $v = -y$ ۱-۴) $u = (x^۲ + y^۲)^{۱/۲}$ ، $v = ۰$

۱-۷) $u = \cos y \cosh x$ ، $v = \sin y \sinh x$

۱-۹) $u = x/(x^۲ + y^۲)$ ، $v = -y/(x^۲ + y^۲)$

۱-۱۱) $u = ۳x/[x^۲ + (y-۲)^۲]$ ، $v = (-۲x^۲ - ۲y^۲ + ۵y - ۲)/[x^۲ + (y-۲)^۲]$

۱-۱۳) $u = \ln (x^۲ + y^۲)^{۱/۲}$ ، $v = ۰$

۱-۱۷) $u = \cos x \cosh y$ ، $v = \sin x \sinh y$

۱-۱۸) $u = \pm ۲^{-۱/۲}[(x^۲+y^۲)^{۱/۲} + x]^{۱/۲}$ ، $v = \pm ۲^{-۱/۲}[(x^۲+y^۲)^{۱/۲} - x]^{۱/۲}$ ،
که در آن علامتهای $\pm$ طوری انتخاب می‌شوند که uv با y هم علامت باشد.

۱-۱۹) $u = \ln (x^۲+y^۲)^{۱/۲}$ ، $v = \arctan (y/x)$ [زاویه، در ربع مربوط به نقطهٔ $(x، y)$ واقع است.]

در مسائل ۲-۱ تا ۲-۲۳ ، A به معنای تحلیلی، و N به معنای غیرتحلیلی است.

۲-۱) A ۲-۳) N ۲-۴) N ۲-۷) A

۲-۹) A ، $z \neq ۰$ ۲-۱۱) A ، $z \neq ۲i$ ۲-۱۳) N ۲-۱۷) N

۲-۱۸) A ، $z \neq ۰$ ۲-۱۹) A ، $z \neq ۰$ ۲-۲۳) A ، $z \neq ۰$

۲-۳۴) $-z - \frac{۱}{۲}z^۲ - \frac{۱}{۳}z^۳ \ldots$ ، $|z| < ۱$

۲-۳۸) $-\frac{۱}{۲}i + \frac{۱}{۴}z + \frac{۱}{۸}iz^۲ - \frac{۱}{۱۶}z^۳ \ldots$ ، $|z| < ۲$

۲-۴۲) $z + z^{۳}/۳! + z^{۵}/۵! \dots$، به ازای جمیع مقادیر z

۲-۴۸) بلی، $z \neq ۰$ ۲-۵۲) خیر ۲-۵۳) بلی، $z \neq ۰$

۲-۵۴) $-iz$ ۲-۵۶) $-iz^{۲}/۲$ ۲-۵۹) e^{z}

۲-۶۰) $۲ \ln z$ ۲-۶۳) $-i/(۱-z)$

۳-۱) $\frac{۱}{۲} + i$ ۳-۳) ۰ ۳-۵) -۱

۳-۷) $\pi(۱-i)/۸$ ۳-۹) ۱ ۳-۱۲) (الف) $\frac{۵}{۳}(۱ + ۲i)$

۳-۱۷) (الف) ۰، (ب) $i\pi$ ۳-۱۹) $۱۶\, i\pi$ ۳-۲۳) $۷۲\, i\pi$

۴-۴) برای $۰ < |z| < ۱$:

$$-\frac{۱}{۴}z^{-۱} - \frac{۱}{۲} - \frac{۱۱}{۱۶}z - \frac{۱۳}{۱۶}z^{۲} \dots ، R(۰) = -\frac{۱}{۴}$$

برای $۱ < |z| < ۲$:

$$\dots + z^{-۳} + z^{-۲} + \frac{۳}{۴}z^{-۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۵}{۱۶}z + \frac{۳}{۱۶}z^{۲} \dots$$

برای $|z| > ۲$:

$$z^{-۴} + ۵z^{-۵} + ۱۷z^{-۶} + ۴۹z^{-۷} \dots$$

۴-۶) برای $۰ < |z| < ۱$:

$$z^{-۲} - ۲z^{-۱} + ۳ - ۴z + ۵z^{۲} \dots ؛ R(۰) = -۲$$

برای $|z| > ۱$:

$$z^{-۴} - ۲z^{-۵} + ۳z^{-۶} \dots$$

۴-۸) برای $|z| < ۱$:

$$-۵ + \frac{۲۵}{۶}z - \frac{۱۷۵}{۳۶}z^{۲} \dots ، R(۰) = ۰$$

برای $۱ < |z| < ۲$:

$$-۵(\dots + z^{-۳} - z^{-۲} + z^{-۱} + \frac{۱}{۶}z + \frac{۱}{۳۶}z^{۲} + \frac{۷}{۲۱۶}z^{۳} \dots)$$

برای $۲ < |z| < ۳$:

$$\ldots + ۳z^{-۳} + ۹z^{-۲} - ۳z^{-۱} + ۱ - \frac{۱}{۳}z + \frac{۱}{۹}z^{۲} - \frac{۱}{۲۷}z^{۳} \ldots$$

برای $|z| > ۳$:

$$۳۰\,(z^{-۳} - ۲z^{-۴} + ۹z^{-۵} \ldots)$$

۴-۹) (الف) منظم (ب) قطب مرتبهٔ ۳

۴-۱۰) (ب) قطب مرتبهٔ ۲ (د) تکینی اساسی

۴-۱۱) (ج) قطب ساده (د) قطب مرتبهٔ ۳

۴-۱۲) (ب) قطب مرتبهٔ ۲ (د) قطب مرتبهٔ ۱

۶-۱) $R = ۱$ ؛ $z^{-۱} - ۱ + z - z^{۲} \ldots$

۶-۳) $R = -\frac{۱}{۶}$ ؛ $z^{-۳} - z^{-۱}/۳! + z/۵! \ldots$

۶-۵) $R = \frac{۱}{۲}e$ ؛ $\frac{۱}{۲}e[(z-۱)^{-۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}(z-۱) \ldots]$

۶-۷) $R = \frac{۱}{۴}$ ؛ $\frac{۱}{۴}[(z-\frac{۱}{۲})^{-۱} - ۱ + (۱-\pi^{۲}/۲)(z-\frac{۱}{۲}) \ldots]$

۶-۹) $R = -۱$ ؛ $-[(z-۲)^{-۱} + ۱ + (z-۲) + (z-۲)^{۲} \ldots]$

۶-۱۴) $R(۲) = -\frac{۱}{۸}$ ، $R(-\frac{۲}{۳}) = \frac{۱}{۸}$

۶-۱۶) $R(۱) = ۱$ ، $R(۰) = -۲$

۶-۱۸) $R(۲i) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}i$

۶-۱۹) $R(\pi/۲) = \frac{۱}{۲}$

۶-۲۱) $R[\sqrt{۲}(۱+i)] = \sqrt{۲}(۱-i)/۱۶$

۶-۲۲) $R(i\pi) = -۱$

۶-۲۷) $R(\pi/۶) = -\frac{۱}{۲}$

۶-۲۸) $R(۲i) = -\frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۲۴}i$

۶-۳۱) $R(۰) = \frac{۹}{۲}$

(۶-۳۳) $R(\pi) = -\frac{۱}{۲}$

۶-۳۵) $R(i) = ۰$

۶-۱۴′) $\pi i/۴$

۶-۱۶′) $-۲\pi i$

۶-۱۸′) ۰

۶-۱۹′) ۰

۶-۲۷′) $-\pi i$

۶-۲۸′) $\frac{۱}{۴}\pi i$

۶-۳۱′) $۹\pi i$

۶-۳۳′) ۰

۶-۳۵′) ۰

۷-۱) $\pi/۶$

۷-۳) $۲\pi/۳$

۷-۵) $\pi/(۱-r^۲)$

۷-۷) $\pi/۶$

۷-۹) $۲\pi/|\sin \alpha|$

۷-۱۱) $۳\pi/۳۲$

۷-۱۳) $\pi/۱۰$

۷-۱۵) $\pi e^{-۴/۳}/۱۲$

۷-۱۷) $(\pi/e)(\cos ۲ + ۲\sin ۲)$

۷-۱۹) $\pi e^{-۳}/۵۴$

۷-۲۳) $\pi/۸$

۷-۲۴) π

۷-۲۶) $-\pi/۲$

۷-۲۸) $\pi/۴$

۷-۳۰) $\pi/(۲\sqrt{۲})$

۷-۳۲) $\frac{۳}{۱۶}\pi\sqrt{۲}$

۷-۳۳) $\frac{۱}{۲}\pi\sqrt{۲}$

۷-۳۶) $-\pi^۲\sqrt{۲}$

۷-۳۹) ۲

۷-۴۱) $(۲\pi)^{۱/۲}/۴$

۷-۴۵) یک ریشهٔ حقیقی منفی، در هر یک از ربعهای ۱ و ۴، یکی

۷-۴۸) در هر یک از ربعهای ۱ و ۴، دو تا

۷-۵۰) در هر یک از ربعهای ۲ و ۳، دو تا

۷-۵۲) πi

۷-۵۴) $۸\pi i$

۸-۳) منظم، $R = -۱$

۸-۵) منظم، $R = -۱$

۸-۷) قطب ساده، $R = -۲$

۸-۹) منظم، $R = ۰$

۸-۱۱) منظم، $R = -۱$

(۸-۱۴) $-۲\pi i$

۹-۳) $u = x/(x^۲ + y^۲)$ ، $v = -y/(x^۲ + y^۲)$

۹-۴) $u = e^x \cos y$ ، $v = e^x \sin y$

۹-۷) $u = \sin x \cosh y$ ، $v = \cos x \sinh y$

۱۰-۶) $T = ۱۰۰y/(x^۲ + y^۲)$ ؛ همدماها ثابت $= y/(x^۲ + y^۲)$؛ خطوط شارش ثابت $= x/(x^۲ + y^۲)$.

۱۰-۹) خطوط جریان ثابت $= y - y/(x^۲ + y^۲)$.

۱۰-۱۲) $T = (۲۰/\pi)\, \arctan\,[۲y/(۱ - x^۲ - y^۲)]$ ، $\arctan$ بین $\pi/۲$ و $۳\pi/۲$

۱۰-۱۴) $\Phi = \frac{۱}{۲} V_۰ \ln \{[(x+۱)^۲ + y^۲]/[(x-۱)^۲ + y^۲]\}$
$\Psi = V_۰ \arctan \{۲y/[۱ - x^۲ - y^۲]\}$ ، $\arctan$ بین $\pi/۲$ و $۳\pi/۲$

$$V_x = ۲V_\circ (۱ - x^۲ - y^۲)/[(x^۲ + y^۲ + ۱)^۲ - ۴x^۲]$$
$$V_y = -۴V_\circ xy/[(x^۲ + y^۲ + ۱)^۲ - ۴x^۲]$$

۲-۱۱) $-i \ln (۱ + z)$

۵-۱۱) $R(-i) = -\frac{۱}{۲}$ ، $R(i) = \frac{۱}{۴}(۱ - i\sqrt{۳})$

۸-۱۱) $R(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$

۱۰-۱۱) -۱

۱۲-۱۱) $\frac{۱}{۲}$

۱۴-۱۱) (الف) ۲، (ب) $-\sin ۵$، (ج) $\frac{۱}{۱۶}$، (د) -۲π

۱۶-۱۱) $-\pi/۶$

۱۸-۱۱) $\frac{۱}{۴}\pi e^{-\pi/۲}$

۲۰-۱۱) $\frac{۱}{۲}\pi (e^{-۱} + \sin ۱)$

۲۹-۱۱) $\pi^۳/۸$ هشدار: $-\pi^۳/۸$ غلط است.

۳۲-۱۱) یک ریشهٔ حقیقی منفی، در هر یک از ربعهای ۲ و ۳، یکی

۳۴-۱۱) در هر یک از ربعهای ۱ و ۴، دو تا، در هر یک از ربعهای ۲ و ۳، یکی

فصل ۱۵

۸-۲) $e^{-۲t} - te^{-۲t}$

۱۰-۲) $\frac{۱}{۳} e^t \sin ۳t + ۲e^t \cos ۳t$

۱۲-۲) $۳\cosh ۵t + ۲\sinh ۵t$

۲۱-۲) $۲b(p + a)/[(p + a)^۲ + b^۲]^۲$

۲۳-۲) $y = te^{-۲t}(\cos t - \sin t)$

۲۵-۲) $e^{-p\pi/۲}/(p^۲ + ۱)$

۳-۳) $y = e^{-۲t}(۴t + \frac{۱}{۲}t^۲)$

۴-۳) $y = \cos t + \frac{۱}{۲}(\sin t - t\cos t)$

۷-۳) $y = ۱ - e^{۲t}$

۹-۳) $y = (t + ۲)\sin ۴t$

۱۱-۳) $y = te^{۲t}$

۱۲-۳) $y = \frac{۱}{۲}(t^۲ e^{-t} + ۳e^t - e^{-t})$

۱۳-۳) $y = \sinh ۲t$

۱۷-۳) $y = ۲$

۱۹-۳) $y = e^{۲t}$

۲۱-۳) $y = e^{۳t} + ۲e^{-۲t}\sin t$

۲۳-۳) $y = \sin t + ۲\cos t - ۲e^{-t}\cos ۲t$

۲۵-۳) $y = (۳ + t)e^{-۲t}\sin t$

۳-۲۷) $\begin{cases} y = t + \frac{۱}{۴}(۱ - e^{۴t}) \\ z = \frac{۱}{۳} + e^{۴t} \end{cases}$

۳-۲۸) $\begin{cases} y = t \cos t - ۱ \\ z = \cos t + t \sin t \end{cases}$

۳-۳۰) $\begin{cases} y = t - \sin ۲t \\ z = \cos ۲t \end{cases}$

۳-۳۲) $\begin{cases} y = \sin ۲t \\ z = \cos ۲t - ۱ \end{cases}$

۳-۳۶) $\arctan \frac{۲}{۳}$

۳-۳۸) $\frac{۴}{۵}$

۳-۴۰) ۱

۳-۴۲) $\pi/۴$

۳-۴۳) $۵^{-۳/۲}$

۴-۲) $f_s(x) = \frac{۲}{\pi} \int_۰^\infty \frac{۱ - \cos \alpha}{\alpha} \sin \alpha x \, d\alpha$

۴-۴) $f(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \alpha\pi - \sin (\alpha\pi/۲)}{\alpha\pi} e^{i\alpha x} \, d\alpha$

۴-۶) $f(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{i\pi\alpha^۲} e^{i\alpha x} \, d\alpha$

۴-۸) $f(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{(i\alpha + ۱)e^{-i\alpha} - ۱}{۲\pi\alpha^۲} e^{i\alpha x} \, d\alpha$

۴-۱۰) $f(x) = ۲\int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha a - \sin \alpha a}{i\pi\alpha^۲} e^{i\alpha x} \, d\alpha$

۴-۱۱) $f(x) = \frac{۱}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(\alpha\pi/۲)}{۱ - \alpha^۲} e^{i\alpha x} \, d\alpha$

۴-۱۳) $f_c(x) = \frac{۲}{\pi} \int_۰^\infty \frac{\sin \alpha\pi - \sin (\alpha\pi/۲)}{\alpha} \cos \alpha x \, d\alpha$

۴-۱۶) $f_c(x) = \frac{۲}{\pi} \int_۰^\infty \frac{\cos(\alpha\pi/۲)}{۱ - \alpha^۲} \cos \alpha x \, d\alpha$

۴-۱۸) $f_s(x) = \frac{۲}{\pi} \int_۰^\infty \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^۲} \sin \alpha x \, d\alpha$

۴-۱۹) $f_s(x) = \frac{۴}{\pi} \int_۰^\infty \frac{\alpha a - \sin \alpha a}{\alpha^۲} \sin \alpha x \, d\alpha$

(۲۱-۴) $g(\alpha) = \sigma(2\pi)^{-1/2}\, e^{-\alpha^2\sigma^2/2}$

(۲۵-۴) (الف) $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1 + e^{-i\alpha\pi}}{1 - \alpha^2}\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$

(۲۸-۴) (الف) $f_c(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\cos 2\alpha \sin \alpha}{\alpha} \cos \alpha x\, d\alpha$

(۲۸-۴) (ب) $f_s(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\sin 2\alpha \sin \alpha}{\alpha} \sin \alpha x\, d\alpha$

(۳۰-۴) (الف) $f_c(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha^2} \cos \alpha x\, d\alpha$

(۳۰-۴) (ب) $f_s(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\alpha^2} \sin \alpha x\, d\alpha$

(۳-۵) $\dfrac{1}{2}\, t \sinh t$

(۵-۵) $\{b(b - a)\, t\, e^{-bt} + a[e^{-bt} - e^{-at}]\}/(b - a)^2$

(۷-۵) $(a \cosh bt - b \sinh bt - ae^{-at})/(a^2 - b^2)$

(۹-۵) $(2t^2 - 2t + 1 - e^{-2t})/4$

(۱۲-۵) $(b^2 - a^2)^{-1}(b^{-2} \cos bt - a^{-2} \cos at) + a^{-2} b^{-2}$

(۱۳-۵) $\dfrac{1}{2}(e^{-t} + \sin t - \cos t)$

(۱۵-۵) $\dfrac{1}{14} e^{3t} + \dfrac{1}{35} e^{-4t} - \dfrac{1}{10} e^{t}$

(۱۷-۵ $y = \begin{cases} (\cosh at - 1)/a^2, & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(۱-۶ $\cosh t \cos t$

(۳-۶ $1 + \sin t - \cos t$

(۶-۶ $t + e^{-t} - 1$

(۷-۶ $\dfrac{1}{3}(\cosh 2t + 2 \cosh t \cos t\sqrt{3})$

(۹-۶ $\dfrac{1}{2}(\cosh t - \cos t)$

(۱۱-۶ $(\cosh 2t + 2 \sin 2t - e^{-t})/5$

۷-۷) $y = \begin{cases} (t - t_۰)\, e^{-(t - t_۰)} & ، t > t_۰ \\ ۰ & t < t_۰ \end{cases}$

۹-۷) $y = \begin{cases} \frac{۱}{۳} e^{-(t - t_۰)} \sin ۳(t - t_۰) & ، t > t_۰ \\ ۰ & t < t_۰ \end{cases}$

۱۱-۷) $y = \begin{cases} \frac{۱}{۲}[\sinh (t - t_۰) - \sin (t - t_۰)] & ، t > t_۰ \\ ۰ & t < t_۰ \end{cases}$

۲-۸) $y = (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)/(۲\omega^۲)$

۱۱-۸) $y = -\frac{۱}{۳} \sin ۲x$

۱۳-۸) $y = \begin{cases} x - \sqrt{۲} \sin x & ، x < \pi/۴ \\ \frac{۱}{۲}\pi - x - \sqrt{۲} \cos x & ، x > \pi/۴ \end{cases}$

۱۶-۸) $y = -x \ln x - x - x (\ln x)^۲/۲$

۱۸-۸) $y = x^۲/۲ + x^۴/۶$

۲-۹) $u = ۲۰۰\, \pi^{-۱} \int_۰^\infty k^{-۲} (۱ - \cos ۲k)\, e^{-ky} \cos kx\, dk$

۷-۹) $u(x ، t) = ۱۰۰\, erf[x/(۲\alpha t^{۱/۲})] - ۵۰\, erf[(x - ۱)/(۲\alpha t^{۱/۲})]$
$- ۵۰\, erf[(x + ۱)/(۲\alpha t^{۱/۲})]$

۱-۱۰) $\frac{۱}{۲} \ln [(a^۲ + p^۲)/p^۲]$ ۳-۱۰) $۲a^۲p/(p^۴ + ۴a^۴)$

۵-۱۰) $\frac{۱}{۴} (\tanh ۱ - \text{sech}^۲ ۱) = ۰٫۰۸۵۴$

۷-۱۰) $(\sin at + at \cos at)/(۲a)$ ۱۰-۱۰) $-\pi/۴$

۱۶-۱۰) برای e^{-x}: $g_c(\alpha) = (۲/\pi)^{۱/۲}/(۱+\alpha^۲)$ ، $g_s(\alpha) = (۲/\pi)^{۱/۲}\alpha/(۱+\alpha^۲)$

۱۹-۱۰) $\pi^۲/۸$

۲۳-۱۰) $y = A \sin t + B \cos t + \sin t \ln (\sec t + \tan t) - ۱$

فصل ۱۶

۱-۲) $\frac{۳}{۸}$ ، $\frac{۱}{۸}$ ، $\frac{۱}{۴}$

۱-۵) $\frac{۱}{۴}$ ، $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۱}{۳}$ ، $\frac{۱}{۲}$

۱-۶) $\frac{۲۷}{۵۲}$ ، $\frac{۱۶}{۵۲}$ ، $\frac{۱۵}{۵۲}$

۱-۸) $\frac{۹}{۱۰۰}$ ، $\frac{۱}{۱۰}$ ، $\frac{۳}{۱۰۰}$ ، $\frac{۱}{۱۰}$

۲-۱۲) (الف) $\frac{۳}{۴}$ (ب) $\frac{۱}{۵}$ (ج) $\frac{۲}{۳}$ (د) $\frac{۳}{۴}$ (هـ) $\frac{۳}{۷}$

۲-۱۴) (الف) $\frac{۳}{۴}$ (ب) $\frac{۲۵}{۳۶}$ (ج) ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰

۲-۱۷) (الف) ۳ تا ۹ با $\frac{۲}{۹}$ = $p(۵) = p(۷)$؛ سایرین؛ $\frac{۱}{۹}$ = p. (ج) $\frac{۱}{۳}$

۳-۴) (الف) $\frac{۸}{۹}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ؛ (ب) $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۱}{۱۱}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۶}{۱۳}$

۳-۵) $\frac{۱}{۳۳}$ ، $\frac{۲}{۹}$

۳-۱۲) (الف) $\frac{۱}{۴۹}$ (ب) $\frac{۶۸}{۴۴۱}$ (ج) $\frac{۲۵}{۱۶۹}$ (د) ۱۵ بار (هـ) $\frac{۴۴}{۱۴۷}$

۳-۱۴) ۳٫۳ < n، بنابراین ۴ بار سعی لازم است.

۳-۱۶) $\frac{۹}{۲۳}$

۳-۱۷) (الف) $\frac{۳۹}{۸۰}$ ، $\frac{۵}{۱۶}$ ، $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۱۱}{۱۶}$ (ب) $\frac{۳۷۴}{۸۱۹}$ (ج) $\frac{۱۸۵}{۳۷۴}$

۳-۲۰) $\frac{۱۱}{۱۴}$ ، $\frac{۲}{۷}$ ، $\frac{۵}{۷}$

۳-۲۱) $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۱}{۳}$

۴-۱) (الف) $P(۱۰ ، ۸)$ (ب) $C(۱۰ ، ۸)$ (ج) $\frac{۱}{۴۵}$

۴-۴) $۱٫۹۸ \times ۱۰^{-۳}$ ، $۴٫۹۵ \times ۱۰^{-۴}$ ، $۳٫۰۵ \times ۱۰^{-۴}$ ، $۱٫۳۹ \times ۱۰^{-۵}$

۴-۵) $\frac{۵}{۱۶}$ ، $\frac{۱}{۳۲}$

۴-۷) $\frac{۱}{۲۶}$

۴-۸) $\frac{۱}{۲۲۱}$ ، $\frac{۱}{۳۳}$ ، $\frac{۱}{۱۷}$

۴-۱۱) ۰٫۰۹۷، ۰٫۳۷، ۰٫۶۷، ۱۳

۴-۱۷) MB : ۱۶ ، FD : ۶ ، BE : ۱۰

۵-۱) $\mu = 0$ ، $\sigma = \sqrt{3}$ ۵-۳) $\mu = 2$ ، $\sigma = \sqrt{2}$

۵-۵) $\mu = 1$ ، $\sigma = \sqrt{\frac{7}{6}}$ ۵-۷) $\mu = 3(2p - 1)$ ، $\sigma = 2\sqrt{3p(1-p)}$

۶-۱) (ج) $\bar{x} = 0$ ، $\sigma = 2^{-1/2}a$

۶-۴) $\bar{x} = 0$ ، $\sigma = (2^{1/2}\alpha)^{-1}$

۶-۵) $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ، $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ، $\bar{t} = 1/\lambda$ ، نیم عمر $= \bar{t}\, ln\, 2$

۶-۷) (الف) $f(s) = (2/R)\, sin\, (s/R)$ ، $F(s) = 2\, [1 - cos\, (s/R)]$

(ب) $F(s) = [1 - cos\, (s/R)]/[1 - cos\, (1/R)] \cong s^2$

$f(s) = R^{-1}\, [1 - cos\, (1/R)]^{-1}\, sin\, (s/R) \cong 2s$

	تعداد چشمداشتی شیرها	محتمل‌ترین تعداد شیرها	حداقل ۳ شیر	حداکثر ۳ شیر	دقیقاً ۳ شیر	n
۷-۱ (د)	$\frac{3}{2}$	۱، ۲	$\frac{1}{8}$	۱	$\frac{1}{8}$	۳
۷-۳ (د)	$\frac{5}{2}$	۲، ۳	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{5}{16}$	۵
۷-۵ (د)	۵	۵	$\frac{121}{128}$	$\frac{11}{64}$	$\frac{15}{128}$	۱۰

۷-۷) ۰٫۲۶۳

۸-۵) ۰٫۰۳۹۹ ۸-۷) ۰٫۹۵۴

۸-۱۰) ۰٫۰۷۸۲ ۸-۱۱) ۰٫۳۰۵

۸-۱۳) ۰٫۳۷۲ ۸-۲۰) ۰٫۳۲ ، ۰٫۰۵ ، ۰٫۰۰۳ ، ۰٫۰۰۰۰۶

۹-۳)

تعداد ذرات	۰	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد بازه‌ها	۴۰۶	۸۱۲	۸۱۲	۵۴۱	۲۷۱	۱۰۸

۹-۵) $P_0 = 0.37$ ، $P_1 = 0.37$ ، $P_2 = 0.18$ ، $P_3 = 0.06$

۹-۸) ۳ ، ۱۰ ، ۳

۹-۱۱) نرمال: ۰٫۰۸ ، پواسون: ۰٫۰۷۲۹ ، (دو جمله‌ای: ۰٫۰۷۳۲)

۸-۱۰) $\bar{x} = ۵$ ،$\bar{y} = ۱$ ،$s_x = ۰٫۱۲۲$ ،$s_y = ۰٫۰۲۹$

$\sigma_x = ۰٫۱۳۱$ ،$\sigma_y = ۰٫۰۳۰$ ،$\sigma_{mx} = ۰٫۰۴۶$ ،$\sigma_{my} = ۰٫۰۰۹۵$

$r_x = ۰٫۰۳۱$ ،$r_y = ۰٫۰۰۶۴$

$\overline{x+y} = ۶$ با $r = ۰٫۰۳$ ، $\overline{xy} = ۵$ با $r = ۰٫۰۴$

$\overline{x^۳ \sin y} = ۱۰۵$ با $r = ۲٫۰۰$ ، $\overline{\ln x} = ۱٫۶۱$ با $r = ۰٫۰۰۶$

۱۰-۱۰) $\bar{x} = ۶$ با $r = ۰٫۰۶۲$ ، $\bar{y} = ۳$ با $r = ۰٫۰۶۷$

$\overline{e^y} = ۲۰$ با $r = ۱٫۳$ ، $\overline{x/y^۲} = ۰٫۶۷$ با $r = ۰٫۰۳$

۳-۱۱) $\frac{۲۰}{۴۷}$

۷-۱۱) $\bar{x} = \frac{۱}{۴}$ ، $\sigma = \frac{۱}{۴}\sqrt{۳}$

۹-۱۱) (د) $\bar{x} = \frac{۱}{۴}$ ، $\sigma = \frac{۱}{۱۲}\sqrt{۳۱}$

۱۱-۱۱) (ب) ۰٫۰۳۵ ، (ج) ۰٫۵۳۳

۱۳-۱۱) ۳۰ ، ۶۰

۱۵-۱۱) ۰٫۲۲۴

۱۷-۱۱)

	x	y	$x-y$	xy	$x/y^۳$
میانگین	۲	۱	۱	۲	۲
r	۰٫۰۷۳	۰٫۰۳۹	۰٫۰۸	۰٫۱۱	۰٫۲۵

واژه‌نامهٔ فارسی - انگلیسی

آ

آونگ دراز شونده *Lengthening pendulum*

الف

اثر پوسته *Skin effect*

احتمال بهنجار *Normal probability*

احتمال پیوسته *Continuous probability*

احتمال دو جمله‌ای *Binomial probability*

احتمال شرطی *Conditional probability*

احتمال مشترک *Joint probability*

ارتعاشات زوری *Forced vibrations*

ارتعاش پوست طبل *Drumhead vibrating*

اسکالر *Scalar*

اصل اساسی شمارش *Fundamental principle of counting*

اصلِ "شناسه" *Argument principle*

امتحانهای برنولی *Bernoulli trials*

انتخابها *Selections*

انتگرال برومویچ *Bromwich integral*

ترکیب خطاها *Combination of errors*

انتگرالهای بیضوی *Elliptic integrals*

انتگرالهای پربندی *Contour integrals*

انتگرالهای خطی *Line integrals*

انتگرالهای مسیری *Contour integrals*

ب

بازهٔ اطمینان *Confidence interval*

بازهٔ همگرایی *Interval of convergence*

بافتنگار (هیستوگرام) *Histogram*

برآمدها (رویدادها)ی دو به دو ناسازگار *Mutually exclusive events*

برآمدهای همشانس *Equally likely events*

برآیند *Resultant*

بردار محوری *Axial vector*

بریدگی شاخه‌ای *Branch cut*

بسامدها (فرکانسها) ی مشخصه *Characteristic frequencies*

بهنجارش (نرمالسازی) *Normalization*

پ

پس - ضرب *Post-multiplication*

پلهٔ واحد *Unit step*

پولیا، مدل ِگلدان *Polya's urn model*

پیش - ضرب *Pre-multiplication*

ت

تابع وادارنده *Forcing function*

تانسور آمیخته *Mixed tensor*

تانسور دیادیک *Dyadic tensor*

تصویر برجسته‌نما *Stereographic projection*

تعامد *Orthogonality*

تکزاد *Monogenic*

تکینگی *Singularity*

تکینگی اساسی *Fundamental singularity*

تمیز پذیر *Distinguishable*

تنش *Stress*

تُن فرعی *Overtone*

توابع گویا *Rational functions*

توابع مقدماتی *Elementary functions*

توابع ناپیوسته *Discontinuous functions*

توابع هماهنگ *Harmonic functions*

توابع هماهنگ مزدوج *Conjugate harmonic functions*

توزیع بهنجار یا گاؤسی *Normal distribution*

ث

ثابت پخش *Dispersion*

ثابت جداسازی *Separation constant*

ج

جایگشت *Permutation*

جمع‌زنی پواسون *Poissons summation*

چ

چرخش	*Curl*
چرخش (دوران)	*Rotation*
چرخش به محورهای اصلی	*Rotation to principal axes*
چرخش عادی	*Proper rotation*

ح

حداقل مربعات	*Least squares*
قضیهٔ حد مرکزی	*Central limit theorem*
حرکت زوری	*Forced motion*
حلقهٔ طوقی	*Annular ring*

خ

خروج از مرکز	*Eccentricity*
خطای استاندارد (معیار)	*Standard error*
خطای محتمل	*Probable error*
خطای نسبی	*Relative error*
خط گرهی	*Nodal line*
خطوط جریان	*Streamlines*
خطهای مختصات	*Coordinate lines*

د

دایرهٔ واحد (یکه)	*Unit circle*
دایرهٔ همگرایی	*Circle of convergence*
دستگاه چپگرد	*Left-handed system*
دو به دو ناسازگار	*Mutually exclusive*
دو دویی	*Dyadic*
دیادیک	*Dyadic*
دیادیک واحد (یکه)	*Unit dyadic*

ر

ردّ	*Trace*
روابط بازگشتی	*Recursion relations*
روش تصاویر	*Method of images*
روش فروبنیوس	*Method of Frobenius*
رونسکین	*Wronskian*
رویداد	*Event*
رویدادهای مرکب	*Compound events*
رویدادهای مستقل	*Independent events*
روی منحنی بردن نمرات	*Grading "on a curve"*

ز

زاویهٔ چرخش (دوران)	*Angle of rotation*

ژ

ژاکوبی	*Jacobian*

س

سطح ریمان *Rieman surface*

سکهٔ معیوب *Weighted coin*

ش

شاخص کمکی *Dummy index*

شاخصهای بالا *Superscripts*

شاخصهای پایین *Subscripts*

شاخصهای پایین برنده *Lowering indices*

شاخه *Branch*

شبه بردار *Psedovector*

شرایط دریشلت *Dirichlet conditions*

شرایط مرزی *Boundary conditions*

شیب *Gradient*

ض

ضرایب مقیاس *Scale factors*

ضربه *Impulse*

ع

عملگر آفرینش *Creation operator*

عملگر بالا برنده *Raising operator*

عملگر برداری *Vector operator*

عملگر خطی *Linear operator*

عملگر نردبانی *Ladder operator*

عملگر نابودی *Annihilation operator*

غ

غشاء *Membrane*

ف

فراگیر جمعی *Collectively exhaustive*

فرایند کتره‌ای (یا اتفاقی) *Random process*

فضای نمونه *Sample space*

ق

قاعدهٔ خارج قسمت *Quotien rule*

قاعدهٔ زنجیری *Chain rule*

قانون اعداد بزرگ *Law of large numbers*

قرار داد جمع *Summation convention*

قضیهٔ اساسی جبر *Fundamental theorem of algebra*

قضیهٔ فوکس *Fuchss theorem*

قضیهٔ مانده *Residue theorem*

قطب چندگانه *Multiple pole*

قطب ساده *Simple pole*

قطری کردن *Diagonalization*

ک

کرنش *Strain*

کسرهای جزئی *Partial fractions*

گ

گرداب *Vortex*

گردش کتره‌ای *Random walk*

گودرمانی *Gudermannian*

م

ماتریسهای مشابه *Similar matrices*

ماتریس یکانی *Unitary matrix*

محورهای اصلی *Principal axes*

محیط کشسان *Elastic medium*

مختصات استوانه‌ای *Cylindrical coordinates*

مختصات استوانه‌ای بیضوی *Elliptic cylinder coordinates*

مختصات استوانه‌ای سهموی *Parabolic cylinder coordinates*

مختصات دوقطبی *Bipolar coordinates*

مختصات سهمیوار *Paraboloidal coordinates*

مختصات متعامد *Orthogonal coordinates*

مختصات منحنی‌الخط *Curvilinear coordinates*

مدل گلدان پولیا *Polya's urn model*

مدول انتگرال بیضوی *Modulus of an elliptic integral*

مدول متمم *Complementary modulus*

مدوله‌سازی بسامدی *Frequency modulation*

مدول یانگ *Young's modulus*

مدهای ارتعاشی متعارف *Normal modes of vibration*

مسائل مقدار مرزی *Boundary value problems*

مسیر آزاد میانگین *Mean free path*

معادلهٔ پخش *Diffusion equation*

مقدار چشمداشتی *Expected value*

منطقهٔ بیکران *Unbound region*

منبع و چاهک *Source and sink*

مهره در جعبه *Balls in boxes*

میانگین حسابی *Arithmetic mean*

میانه *Median*

ن

نا مساوی (نابرابری) چبیشف *Chebyshevs inequality*

ناوردا *Invariant*

نُرم *Norm*

نسبیت *Relativity*

نقطهٔ تکین *Singular point*

نقطهٔ تکین منزوی *Isolated singular point*

نقطهٔ شاخه *Branch point*

نقطهٔ منظم *Regular point*

نگاشت همدیس *Conformal mapping*

نیروهای برشی در تانسور تنش *Shear forces in stress tensor*

و

واگرایی *Divergence*

واگنی *Degeneracy*

وردش *Variation*

وردش پارامترها *Variation of parameters*

ه

هماهنگها *Harmonics*

هماهنگهای کروی *Spherical harmonics*

هم پتانسیلها *Equipotentials*

همدماها *Isothermals*

همشانس *Equally likely*

همگردش *Convolution*

هیستوگرام (بافتنگار) *Histogram*

واژه‌نامهٔ انگلیسی - فارسی

A

Angle of rotation زاویهٔ چرخش (دوران)

Annihilation operator عملگر نابودی

Annular ring حلقهٔ طوقی

Argument principle اصلِ "شناسه"

Arithmetic mean میانگین حسابی

Axial vector بردار محوری

B

Balls in boxes مهره در جعبه

Bernoulli trials امتحانهای برنولی

Binomial probability احتمال دو جمله‌ای

Bipolar coordinates مختصات دوقطبی

Boundary conditions شرایط مرزی

Boundary value problems مسائل مقدار مرزی

Branch شاخه

Branch cut بریدگی شاخه‌ای

Branch point نقطهٔ شاخه

Bromwich integral انتگرال برومویچ

C

Central limit theorem قضیهٔ حد مرکزی

Chain rule قاعدهٔ زنجیری

Characteristic frequencies بسامدها (فرکانسها) ی مشخصه

Chebyshev's inequality نامساوی (نابرابری) چبیشف

Circle of convergence دایرهٔ همگرایی

Collectively exhaustive فراگیر جمعی

Combination of errors ترکیب خطاها

Complementary modulus مدول متمم

Compound events رویدادهای مرکب

Conditional probability احتمال شرطی

Confidence interval بازهٔ اطمینان

Conformal mapping نگاشت همدیس

Conjugate harmonic functions توابع هماهنگ مزدوج

Continuous probability احتمال پیوسته

Contour integrals انتگرالهای پربندی (مسیری)

Convolution پیچش

Convolution همگردش

Coordinate lines خطهای مختصات

Creation operator عملگر آفرینش

Curl چرخش

Curvilinear coordinates مختصات منحنی‌الخط

Cylindrical coordinates مختصات استوانه‌ای

D

Degeneracy واگنی

Diagonalization قطری کردن

Diffusion equation معادلهٔ پخش

Dirichlet conditions شرایط دریشلت

Discontinuous functions توابع ناپیوسته

Dispersion ثابت پخش

Distinguishable تمیز پذیر

Divergence واگرایی

Drumhead vibrating ارتعاش پوست طبل

Dummy index شاخص کمکی

Dyadic دیادیک (دو دویی)

Dyadic tensor تانسور دیادیک

E

Eccentricity خروج از مرکز

Elastic medium محیط کشسان

Elementary functions توابع مقدماتی

Elliptic cylinder coordinates مختصات استوانه‌ای بیضوی

Elliptic integrals انتگرالهای بیضوی

Equally likely همشانس

Equally likely events برآمدهای همشانس

Equipotentials هم پتانسیلها

Event رویداد

Expected value مقدار چشمداشتی

F

Forced motion حرکت زوری

Forced vibrations ارتعاشات زوری

Forcing function تابع وادارنده

Frequency modulation مدوله‌سازی بسامدی

Fuchs's theorem قضیهٔ فوکس

Fundamental principle of counting اصل اساسی شمارش

Fundamental singularity تکینگی اساسی

Fundamental theorem of algebra قضیهٔ اساسی جبر

G

Gradient شیب

Grading "on a curve" روی منحنی بردن نمرات

Gudermannian گودرمانی

H

Harmonic functions توابع هماهنگ

Harmonics هماهنگها

Histogram هیستوگرام (بافتنگار)

I

Impulse ضربه

Independent events رویدادهای مستقل

Interval of convergence بازهٔ همگرایی

Invariant ناوردا

Isolated singular point نقطهٔ تکین منزوی

Isothermals همدماها

J

Jacobian ژاکوبی

Joint probability احتمال مشترک

L

Law of large numbers قانون اعداد بزرگ

Least squares حداقل مربعات

Left-handed system دستگاه چپگرد

Lengthening pendulum آونگ دراز شونده

Line integrals انتگرالهای خطی

Linear operator عملگر خطی

Lowering indices شاخصهای پایین برنده

M

Mean free path مسیر آزاد میانگین

Median میانه

Membrane غشاء

Method of Frobenius روش فروبنیوس

Method of images روش تصاویر

Mixed tensor تانسور آمیخته

Modulus of an elliptic integral مدول انتگرال بیضوی

Monogenic تکزاد

Multiple pole قطب چندگانه

Mutually exclusive دو به دو ناسازگار

Mutually exclusive events برآمدها (رویدادها)ی دو به دو ناسازگار

N

Nodal line خط گرهی

Norm نُرم

Normal distribution توزیع بهنجار یا گاؤسی

Normal modes of vibration مدهای ارتعاشی متعارف

Normal probability احتمال بهنجار

Normalization بهنجارش (نرمالسازی)

O

Orthogonal coordinates مختصات متعامد

Orthogonality تعامد

Overtone تُن فرعی

P

Parabolic cylinder coordinates مختصات استوانه‌ای سهموی

Paraboloidal coordinates مختصات سهمیوار

Partial fractions کسرهای جزئی

Permutation جابگشت

Poisson's summation جمع‌زنی پواسون

Polya's urn model مدل گلدان پولیا

Post-multiplication پس - ضرب

Pre-multiplication پیش - ضرب

Principal axes محورهای اصلی

Probable error خطای محتمل

Proper rotation چرخش عادی

Psedovector شبه بردار

Q

Quotien rule قاعدهٔ خارج قسمت

R

Raising operator عملگر بالا برنده

Random process فرایند کتره‌ای (یا اتفاقی)

Random walk گردش کتره‌ای

Rational functions توابع گویا

Recursion relations روابط بازگشتی

Regular point نقطهٔ منظم

Relative error خطای نسبی

Relativity	نسبیت
Residue theorem	قضیهٔ مانده
Resultant	برآیند
Rieman surface	سطح ریمان
Rotation	چرخش (دوران)
Rotation to principal axes	چرخش به محورهای اصلی

S

Sample space	فضای نمونه
Scalar	اسکالر
Scale factors	ضرایب مقیاس
Selections	انتخابها
Separation constant	ثابت جداسازی
Shear forces in stress tensor	برشی در تانسور تنش
Similar matrices	ماتریسهای مشابه
Simple pole	قطب ساده
Singular point	نقطهٔ تکین
Singularity	تکینگی
Skin effect	اثر پوسته
Source and sink	منبع و چاهک
Spherical harmonics	هماهنگهای کروی
Standard error	خطای استاندارد (معیار)
Stereographic projection	تصویر برجسته‌نما
Strain	کرنش
Streamlines	خطوط جریان
Stress	تنش
Subscripts	شاخصهای پایین
Summation convention	قرار داد جمع
Superscripts	شاخصهای بالا

T

Trace	ردّ

U

Unbound region	منطقهٔ بیکران
Unit circle	دایرهٔ واحد (یکه)
Unit dyadic	دیادیک واحد (یکه)
Unit step	پلهٔ واحد
Unitary matrix	ماتریس یکانی

V

Variation	وردش
Variation of parameters	وردش پارامترها
Vector operator	عملگر برداری
Vortex	گرداب

W

Weighted coin	سکهٔ معیوب

Wronskian رونسکین

Y

Young's modulus مدول یانگ

فهرست راهنما

ب

پ

ح

خ

د

س

ش

ص

ض

ن

و

ه

ی

FERDOWSI UNIVERSITY OF MASHHAD

Publication No. 222

Mathematical Methods in the Physical Sciences

Second Edition

by:

Mary L. Boas

Translated by:

J. Ghanbari

R. Koohi Fayegh

M. H. Hadizadeh Yazdi

FERDOWSI UNIVERSITY PRESS

1997