



# روشهای ریاضی

در

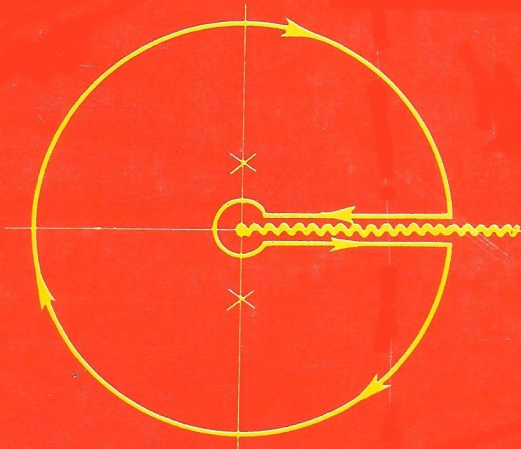
فیزیک

نوشته

یون ماتیوز آر. ال. واکر

ترجمه

علی اکبر عالم زاده حسین آقامحمدزاده



# روشهای ریاضی در فیزیک

نوشته

یون ماتیوز آر. ال. واکر

ترجمه

علی اکبر عالم زاده حسین آقا محمدزاده

### پیشگفتار مترجمان

در قرن هفده این فکر قوت گرفت که بخش اعظمی از طبیعت را می توان به ریاضیات تحویل کرد. در نیمه دوم این قرن که نیوتن با قانون ثقلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال خود سه قانون حرکت سماوی کپلر را ثابت کرد، این فکر توان تازه ای یافت. اثر این امر بر ریاضیات زیاد بود و بسیاری از ریاضیدانان به «ریاضی سازی» طبیعت پرداختند. در این راه علم فیزیک بیش از همه سود بُرد و پیوند بسیار عمیقی با ریاضیات یافت. این کتاب حاصل تزویج این دو علم است که هم ریاضیدان و هم فیزیکدان را از این همه ارتباط و کاربرد به اعجاب واداشته و درهای تازه ای به روی شیفندگان این دو علم خواهد گشود.

علی اکبر عالم زاده      حسین آقا محمدزاده

گروه ریاضی      گروه فیزیک

دانشگاه تربیت معلم

## پیشگفتار مؤلفان

در نوزده سال اخیر درس روشهای ریاضی در فیزیک توسط ما و سایر افراد در انستیتوی صنعتی کالیفرنیا داده شده است. این درس عمدتاً برای شاگردان سال اول فوق لیسانس فیزیک بوده ولی در سالهای اخیر اغلب شاگردان سال آخر لیسانس فیزیک و شاگردان فوق لیسانس سایر رشته‌ها نیز آن را گرفته‌اند. این کتاب حاصل یادداشتهایی است که در تدریس این امر به کار رفته‌اند.

در این درس سعی زیادی در تدریس فیزیک نمی‌کنیم، و تأکیدمان بر ارائه روشهایی در ریاضیات است که در تحلیل مسائل فیزیک مفید می‌باشند. فرض می‌کنیم شاگرد فیزیک دوره لیسانس را که عبارت است از مکانیک، الکتریسته و مغناطیس، مکانیک کوانتمی مقدماتی، و غیره، دیده باشد و ما آزادیم از این مباحث مثال بیاوریم.

به طور خلاصه، این کتابی است راجع به ریاضیات برای فیزیکدانان. انگیزه و نکات متعارف آن از فیزیک گرفته شده است؛ یعنی، سودمندی مطالب در فیزیک انتخاب آنها را دیکته کرده است، و سطح دقتش در سطح فیزیک نظری جاری می‌باشد.

فرض است که شاگرد با ریاضیات زیر آشنا می‌باشد:

۱. معادلات خطی همزمان و دترمینانها؛
۲. آنالیز برداری، به انضمام اعمال دیفرانسیل در مختصات منحنی الخط؛
۳. معادلات دیفرانسیل مقدماتی؛
۴. متغیرهای مختلط، تا قضیه کشی.

لیکن، اینها را نباید پیشینازهای الزامی تلقی کرد. از یک سو، اغلب بهتر است شاگرد زمینه بیشتری داشته باشد و، از سوی دیگر، برای شاگردی که با یکی از مباحث فوق آشنا نیست رفع این نقیصه با کار اضافی و/ یا مطالعه خارجی نباید چندان مشکل باشد. در واقع، معادلات دیفرانسیل که در فصل اول مطرح شده تا حدودی برای شروع با زمینه ای آشنا و تا حدودی برای بحث در مطالبی است که معمولاً در یک درس مقدماتی معادلات گفته نمی شوند.

شاگردان در نظریه توابع یک متغیر مختلط زمینه های مختلفی دارند. به این دلیل، معمولاً پیش از انتگرالگیری کنتوری (فصل ۳) این مبحث را سریعاً مرور می کنیم. این مرور در ضمیمه صورت یافته است. همچنین، چند کتاب ریاضی عالی و نسبتاً خلاصه در این مبحث برای شاگردان ناآشنا وجود دارند.

در آخر هر فصل تعداد زیادی مسئله گنجانده ایم. این مسائل بخش مهمی از کتاب را تشکیل می دهند. در سراسر کتاب تأکید ما بر تفهیم به وسیله مثالها خواهد بود.

راجع به جنبه های غیر رسمی کتاب به چند نکته اشاره می کنیم. اولاً، مطالب این کتاب لزوماً به صورت هموار و منطقی ظاهر نمی شوند. گاهی یک مطلب جدید، بی آنکه شاگرد کاملاً آماده پذیرفتنش باشد، معرفی می شود. این امر به خاطر بی منطقی و یا بدطبعی مؤلفان بوده و بلکه به خاطر خود فیزیک می باشد. شاگردان فیزیک نظری اغلب برای رسیدن به قلب یک مبحث ناآشنا نیاز به ترغیب قابل ملاحظه ای دارند؛ این درس برای دادن تمرین و اطمینانی است که شاگرد در برخورد با مسائلی که آماده آنها نیست بدان نیاز دارد.

نکته دیگر آن است که در ارائه مطالب عدم یکنواختی عمده زیادی به چشم می خورد. بعضی از مطالب به اختصار آمده اند در حالی که کاربردهای مشروح آنها در سایر زمینه ها دیده می شود. اگر درس تمرین در فیزیک است، باید شاگرد فرصت یافتن اطمینان به توان خود در محاسبات مشروح را داشته باشد. از آن سو،

این کتاب یک کتاب مرجع نیست، و مطالبش برای تدریس در یک سال تمام می باشد. لذا، بررسی عمیق همه چیز آنطور که شخص می خواهد میسر نیست.

برنامه کتاب در این چاپ (چاپ دوم) تغییر نکرده است؛ چند بخش بازنویسی شده اند ولی تنها یک بخش (بخش ۶.۱۴) جدید است. سعی کرده ایم بعضی از مطالب مانند بحث علامت  $P$  ریمان در بخش ۳.۷ و معادله انتگرال وینر- هوف در بخش ۵.۱۱ را که برای شاگردان مشکل است روشتر سازیم.

در آخر فصلها چند مسئله جدید اضافه شده است، و چند مثال مشروح جدید، مانند سرطبل مثلثی شکل در بخش ۳.۸ و محاسبات بازگشتی توابع بسل در بخش ۳.۱۳، را گنجانده ایم.

درسی که این کتاب از آن ناشی شده مبتنی بر سخنرانیهای پروفیسور آر. پی. فاین من<sup>۱</sup> در دانشگاه کورنل است، و بخش اعظم فصل ۱۶ حاصل مباحثات ما با دکتر سیدنی کلمن<sup>۲</sup> می باشد و ما آنها را ارج می نهیم. همچنین از خانم جولی کورسیو<sup>۳</sup> به خاطر آنکه ویرایشهای چندگانه کتاب را سریع، دقیق، و به طور قابل ملاحظه ای تمیز ماشین کرده است سپاسگزاریم.

یون ماتیوز آر. ال. واکر

پاسادنا، کالیفرنیا

مه ۱۹۶۹

---

1- Professor R. P. Feynman

2- Dr. Sidney Coleman.

3- Julie Curcio

## فهرست مطالب

۱	.....	معادلات دیفرانسیل معمولی	فصل ۱
۱	.....	جواب به شکل بسته	۱.۱
۱۳	.....	جوابها به صورت سری توانی	۲.۱
۲۳	.....	روشهای گوناگون تقریب	۳.۱
۲۷	.....	روش WKB	۴.۱
۳۹	.....		مراجع
۳۹	.....		مسائل
۴۶	.....	سریهای نامتناهی	فصل دوم
۴۶	.....	همگرایی	۱.۲
۵۰	.....	سریهای آشنا	۲.۲
۵۲	.....	تبدیل سریها	۳.۲
۵۸	.....		مراجع
۵۸	.....		مسائل
۶۱	.....	محاسبه انتگرالها	فصل سوم
۶۱	.....	روشهای مقدماتی	۱.۳
۶۴	.....	استفاده از استدلالهای تقارنی	۲.۳
۶۸	.....	انتگرالگیری کنتوری	۳.۳

۷۸	.....	انتگرالهای جدولی	۴.۳
۸۳	.....	بسطهای تقریبی	۵.۳
۸۶	.....	روشهای نقطه‌زینی	۶.۳
۹۳	.....		مراجع
۹۴	.....		مسائل

۹۹	.....	تبدیلات انتگرال	فصل چهارم
۹۹	.....	سریهای فوریه	۱.۴
۱۰۴	.....	تبدیلات فوریه	۲.۴
۱۱۰	.....	تبدیلات لاپلاس	۳.۴
۱۱۳	.....	کاربردهای تبدیلات انتگرال	۵.۴
۱۲۳	.....		مراجع
۱۲۴	.....		مسائل

۱۲۸	.....	کاربردهای دیگری از متغیرهای مختلط	فصل پنجم
۱۲۸	.....	تبدیلات هم‌مدیس	۱.۵
۱۳۴	.....	روابط پراکنندگی	۲.۵
۱۴۰	.....		مراجع
۱۴۱	.....		مسائل

۱۴۶	.....	بردارها و ماتریسها	فصل ششم
۱۴۶	.....	فضاهای برداری خطی	۱.۶
۱۴۷	.....	عملگرهای خطی	۲.۶
۱۵۰	.....	ماتریسها	۳.۶



۱۵۳	تبدیلات مختصات	۴.۶
۱۵۷	مسائل ویژه مقدار	۵.۶
۱۶۴	قطری سازی ماتریسها	۶.۶
۱۶۶	فضاها با بُعد نامتناهی	۷.۶
۱۶۹	مراجع	
۱۷۰	مسائل	

۱۷۴	فصل هفتم توابع خاص	
۱۷۴	توابع لژاندر	۱.۷
۱۸۵	توابع بسل	۲.۷
۱۹۴	توابع فوق هندسی	۳.۷
۲۰۱	توابع فوق هندسی همشار	۴.۷
۲۰۵	توابع ماتیو	۵.۷
۲۱۱	توابع بیضوی	۶.۷
۲۱۸	مراجع	
۲۱۸	مسائل	

۲۲۵	فصل هشتم معادلات دیفرانسیل جزئی	
۲۲۵	چند مثال	۱.۸
۲۲۷	بحث کلی	۲.۸
۲۳۴	جداسازی متغیرها	۳.۸
۲۴۸	روشهای تبدیل انتگرال	۴.۸
۲۵۴	روش وینر- هوپف	۵.۸
۲۶۱	مراجع	

۲۶۹	فصل نهم	ویژه توابع، ویژه مقادیر، و توابع گرین
۲۶۹	۱.۹	چند مثال ساده از مسائل ویژه مقداری
۲۷۱	۲.۹	بحث کلی
۲۷۵	۳.۹	جوابهای مسائل مقدار مرزی به عنوان بسطهای ویژه تابعی
۲۷۶	۴.۹	مسائل غیرهمگن. توابع گرین
۲۸۶	۵.۹	توابع گرین در الکتروستاتیک
۲۹۱	مراجع	
۲۹۱	مسائل	
۲۹۵	فصل دهم	نظریه اختلال
۲۹۵	۱.۱۰	نظریه ناواگن مرسوم
۳۰۱	۲.۱۰	یک سری با آرایش مجدد
۳۰۲	۳.۱۰	نظریه اختلال واگن
۳۰۵	مراجع	
۳۰۵	مسائل	
۳۰۸	فصل یازدهم	معادلات انتگرال
۳۰۸	۱.۱۱	رده بندی
۳۰۹	۲.۱۱	هسته های واگن
۳۱۱	۳.۱۱	سریهای نویمان و فردهولم
۳۱۴	۴.۱۱	نظریه اشمیت - هیلبرت
۳۱۹	۵.۱۱	طرحهای گوناگون

۳۲۳	.....	معادلات انتگرال در نظریهٔ پراکنندگی	۶.۱۱
۳۲۵	.....	مراجع	
۳۲۵	.....	مسائل	
۳۲۹	.....	فصل دوازدهم حساب تغییرات	
۳۲۹	.....	معادلهٔ اویلر— لاگرانژ	۱.۱۲
۳۳۳	.....	تعمیمهای مسئلهٔ اصلی	۲.۱۲
۳۳۹	.....	روابط بین مسائل ویژه مقداری و حساب تغییرات	۳.۱۲
۳۴۵	.....	مراجع	
۳۴۶	.....	مسائل	
۳۵۰	.....	فصل سیزدهم روشهای عددی	
۳۵۰	.....	درونیابی	۱.۱۳
۳۵۴	.....	انتگرالگیری عددی	۲.۱۳
۳۵۸	.....	حل عددی معادلات دیفرانسل	۳.۱۳
۳۶۳	.....	ریشه‌های معادلات	۴.۱۳
۳۶۸	.....	جمع‌بندی سریها	۵.۱۳
۳۷۳	.....	مراجع	
۳۷۳	.....	مسائل	
۳۷۷	.....	فصل چهاردهم احتمال و آمار	
۳۷۷	.....	آشنایی	۱.۱۴
۳۷۸	.....	قوانین اساسی احتمال	۲.۱۴
۳۸۰	.....	ترکیبات و جایگشتها	۳.۱۴

۳۸۲	..... توزیعهای دو جمله‌ای، پواسون، و گاوسی	۴.۱۴
۳۸۵	..... خواص کلی توزیعیها	۵.۱۴
۳۸۹	..... توزیعهای گاوسی چندمتغیره	۶.۱۴
۳۹۲	..... برآزش داده‌های تجربی	۷.۱۴
۴۰۱	.....	مراجع
۴۰۱	.....	مسائل
۴۰۸	..... فصل پانزدهم آنالیز تانسوری و هندسهٔ دیفرانسیل	
۴۰۸	..... تانسورهای دکارتی در فضای سه بُعدی	۱.۱۵
۴۱۴	..... منحنیها در فضای سه بُعدی؛ فرمولهای فرنه	۲.۱۵
۴۱۶	..... آنالیز تانسوری کلی	۳.۱۵
۴۲۸	.....	مراجع
۴۲۸	.....	مسائل
۴۳۱	..... فصل شانزدهم آشنایی با گروهها و نمایشهای گروه	
۴۳۱	..... آشنایی؛ چند تعریف	۱.۱۶
۴۳۴	..... زیرگروهها و رده‌ها	۲.۱۶
۴۳۷	..... نمایشهای گروه	۳.۱۶
۴۴۰	..... مشخصه‌ها	۴.۱۶
۴۴۸	..... کاربردهای فیزیکی	۵.۱۶
۴۵۶	..... گروههای نامتناهی	۶.۱۶
۴۶۵	..... نمایشهای تحویل ناپذیر $SU(2)$ ، $SU(3)$ ، و $O(3)$	۷.۱۶
۴۷۵	.....	مراجع
۴۷۵	.....	مسائل

۴۸۰	.....	ضمیمه چند خاصیت از توابع یک متغیر مختلط
۴۸۰	.....	ض ۱ توابع یک متغیر مختلط. نگاشت
۴۸۵	.....	ض ۲ توابع تحلیلی
۴۹۲	.....	مراجع
۴۹۲	.....	مسائل
۴۹۴	.....	واژه نامه فارسی به انگلیسی
۵۱۲	.....	واژه نامه انگلیسی به فارسی
۵۳۲	.....	فهرست راهنما
۵۵۲	.....	کتابنامه

## معادلات دیفرانسیل معمولی

این فصل را با مرور کوتاهی بر چند روش تعیین جوابهای معادله دیفرانسیل معمولی به شکل بسته آغاز می‌کنیم. جوابها به شکل سری توانی در بخش ۲.۱، و بعضی از روشهای به دست آوردن جوابهای تقریبی در بخشهای ۳.۱ و ۴.۱ بحث خواهند شد. استفاده از تبدیلات انتگرال در حل معادلات دیفرانسیل بعداً" در فصل ۴ مطرح می‌شود. کاربردهای روشهای تابع گرین<sup>۱</sup> و ویژه تابع در فصل ۹ و روشهای عددی در فصل ۱۳ مطرح خواهند شد.

## ۱.۱ جواب به شکل بسته

مرتبه و درجه یک معادله دیفرانسیل اشاره بر بالاترین مرتبه مشتق پس از گویاسازی معادله دارد. مثلاً، " معادله"

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + x \sqrt{\frac{dy}{dx}} + x^2 y = 0$$

از مرتبه سوم و درجه دوم است، زیرا وقتی گویا شود، شامل جمله  $(d^3 y/dx^3)^2$  می‌باشد. ابتدا چند روش را یادآور می‌شویم که بخصوص در معادلات مرتبه اول به کار می‌روند. اگر معادله را بتوان به شکل زیر نوشت:

$$(1.1) \quad A(x) dx + B(y) dy = 0$$

گوییم معادله جدایی‌پذیر است؛ و جواب فوراً" با انتگرالگیری به دست می‌آید.

مثال

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$$

$$(۲.۱) \quad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\sin^{-1} y + \sin^{-1} x = C$$

یا ، با گرفتن سینوس از طرفین ،

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \sin C = C'$$

بهطورکلی ، ممکن است بتوان از معادله‌ای به شکل

$$(۳.۱) \quad A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$$

فورا "انتگرال گرفت . هرگاه سمت چپ (۳.۱) دیفرانسیل  $du$  تابعی چون  $u(x, y)$  باشد ، آنگاه می‌توان انتگرال گرفت و جواب

$$u(x, y) = C$$

را به دست آورد . یک چنین معادله را کامل می‌گویند . شرط لازم و کافی برای آنکه معادله (۳.۱) کامل باشد آن است که

$$(۴.۱) \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

مثال

$$(x + y) dx + x dy = 0$$

$$A = x + y \quad B = x$$

$$(۵.۱) \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} = 1$$

جواب خواهد بود

$$xy + \frac{1}{2}x^2 = C$$

گاهی می‌توان تابع  $\lambda(x, y)$  را طوری یافت که

$$\lambda(A dx + B dy)$$

دیفرانسیل کامل باشد ، هرچند  $A dx + B dy$  این ویژگی را نداشته باشد . یک چنین تابع  $\lambda$  را عامل انتگرالگیری می‌نامند . می‌توان نشان داد که چنین عواملی ( برای یک معادله مرتبه اول ) وجود دارند ، ولی راهی کلی برای یافتن آنها وجود ندارد .

معادله مرتبه اول خطی کلی

$$(۶.۱) \quad \frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$$

را در نظر می‌گیریم . سعی می‌کنیم عامل انتگرالگیری  $\lambda(x)$  را بیابیم . یعنی ، قرار است

$$\lambda(x)[dy + f(x)y dx] = \lambda(x)g(x) dx$$

کامل باشد . طرف راست فوراً " انتگرالگیری می‌شود ، و محک (۴.۱) که طرف چپ کامل باشد عبارت است از

$$\frac{d\lambda(x)}{dx} = \lambda(x)f(x)$$

این معادله جدایی پذیر است ، و جوابش

$$(۷.۱) \quad \lambda(x) = \exp \left[ \int f(x) dx \right]$$

عامل انتگرالگیری است که در جستجویش بودیم .

مثال

$$(۸.۱) \quad \begin{aligned} xy' + (1+x)y &= e^x \\ y' + \left(\frac{1+x}{x}\right)y &= \frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

عامل انتگرالگیری عبارت است از  $\exp \{ \int [(1+x)/x] dx \} = xe^x$  ؛

$$xe^x \left[ y' + \left(\frac{1+x}{x}\right)y \right] = e^{2x}$$

حال معادله ما کامل است ؛ با انتگرالگیری از طرفین به دست می‌آید

$$xe^x y = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$y = \frac{e^x}{2x} + \frac{C}{x} e^{-x}$$

اغلب می‌توان معادله دیفرانسیل را با تغییر متغیر مناسبی ساده کرد . مثلاً ، در

معادله

$$(۹.۱) \quad y' = f(ax + by + c)$$

اگر متغیر وابسته جدید

$$v = ax + by + c$$



را وارد کنیم معادله جدایی پذیر می شود. به عنوان مثالی دیگر، معادله برنولی<sup>۱</sup>

$$(10.1) \quad y' + f(x)y = g(x)y^n$$

با فرض  $v = y^{1-n}$  به صورت خطی درمی آید. (اگر ابتدا معادله بر  $y^n$  تقسیم شود، این جانشانی "روشن" خواهد شد.)

تابع  $f(x, y, \dots)$  با هر تعداد متغیر را همگن از درجه  $r$  نسبت به این متغیرها گوئیم

اگر

$$f(ax, ay, \dots) = a^r f(x, y, \dots)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$(11.1) \quad A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$$

را همگن گوئیم اگر  $A$  و  $B$  توابعی همگن از درجه یکسان باشند. جانشانی  $y = vx$  معادله همگن (11.1) را جدایی پذیر می سازد.

مثال

$$(12.1) \quad \begin{aligned} y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy &= 0 \\ y = vx \quad dy &= v dx + x dv \\ vx dx + (2x\sqrt{v} - x)(v dx + x dv) &= 0 \\ 2v^{3/2} dx + (2\sqrt{v} - 1)x dv &= 0 \end{aligned}$$

این معادله بوضوح جدایی پذیر بوده و جوابش بدیهي می باشد.

توجه کنید که این روش به بحثهای بعدی آشنا از فیزیک ارتباط دارد. یک تابع همگن وقتی از حیث بعد سازگار است که  $x, y, \dots$  همه یک بعد (مثلاً، طول) داشته باشند. در این صورت،  $v = y/x$  یک متغیر "بی بعد" است.

این امر تعمیم ایده همگنی را پیشنهاد می کند. فرض کنیم معادله

$$A dx + B dy = 0$$

وقتی بعد  $y$  توان  $m$  از بعد  $x$  است از حیث بعد سازگار باشد. یعنی، فرض کنیم

$$(13.1) \quad \begin{aligned} A(ax, a^m y) &= a^r A(x, y) \\ B(ax, a^m y) &= a^{r-m+1} B(x, y) \end{aligned}$$

این معادلات را همفشار می نامند. جانشانی  $y = vx^m$  معادله را به یک معادله جدایی پذیر

تحویل می‌کند.

مثال

$$(14.1) \quad xy^2(3y dx + x dy) - (2y dx - x dy) = 0$$

ببینیم این معادله همفشار است یا نه. به  $x$  "وزن 1" و به  $y$  وزن  $m$  می‌دهیم. جمله اول دارای وزن  $3m + 2$  و جمله دوم دارای وزن  $m + 1$  است. لذا، معادله با وزن  $m = -\frac{1}{2}$  همفشار است.

این امر متغیر "بی‌بعد"  $v = y\sqrt{x}$  را پیشنهاد می‌کند. برای احتراز از توانهای کسری در عوض قرار می‌دهیم

$$v = y^2x \quad x = \frac{v}{y^2} \quad dx = \frac{dv}{y^2} - \frac{2v dy}{y^3}$$

معادله (14.1) به

$$(3v - 2)y dv + 5v(1 - v) dy = 0$$

تحویل می‌شود، که جدایی‌پذیر است.

هر معادله به شکل

$$(15.1) \quad (ax + by + c) dx + (ex + fy + g) dy = 0$$

را که در آن  $a, \dots, g$  ثابت‌اند، می‌توان با جانشانی

$$x = X + \alpha \quad y = Y + \beta$$

همگن ساخت، که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  ثابتهای انتخابی مناسبی می‌باشند. [مشروط بر اینکه  $af \neq be$ ؛ اگر  $af = be$ ، معادله (15.1) حتی بدیهی‌تر است].

هر معادله به شکل

$$(16.1) \quad y - xy' = f(y')$$

یک معادله کلووا نام دارد. برای حل آن از طرفین معادله نسبت به  $x$  مشتق می‌گیریم. نتیجه می‌شود که

$$y''[f'(y') + x] = 0$$

لذا، دو حالت وجود دارد. اگر  $y'' = 0$ ،  $y = ax + b$ ، و با گذاردن در معادله اصلی (16.1) نتیجه می‌شود که  $b = f(a)$ . لذا،  $y = ax + f(a)$  جواب عمومی است. اما ممکن

است

$$f'(y') + x = 0$$

نیز برقرار باشد. با حذف  $y'$  بین این معادله و معادله دیفرانسیل اصلی (۱۶.۱) جوابی بدون ثابت دلخواه به دست می‌آید. یک چنین جواب جواب منفرد نام دارد.

مثال

$$(17.1) \quad y = xy' + (y')^2$$

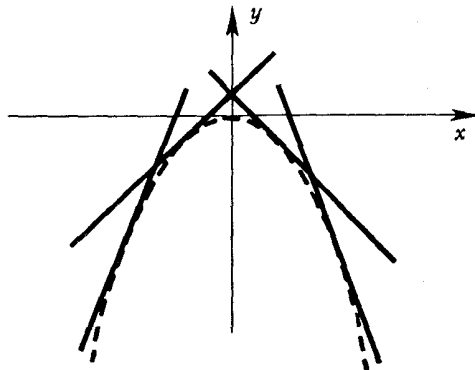
این یک معادله کلرو با جواب عمومی

$$y = cx + c^2$$

است. با اینحال، باید احتمال  $2y' + x = 0$  را نیز بدهیم، که نتیجه می‌دهد

$$x^2 + 4y = 0$$

این جواب منفرد پوش خانواده منحنیهای حاصل از جواب عمومی است مثل شکل ۱۰.۱. سهمی منقطع جواب منفرد است، و خطوط مستقیم مماس بر سهمی جواب عمومی می‌باشند.



شکل ۱۰.۱ جوابهای معادله دیفرانسیل (۱۷.۱) و پوش آنها

انواع متعدد دیگری از جوابهای منفرد وجود دارند، ولی ما آنها را در اینجا مورد بحث قرار نمی‌دهیم. برای بحث کاملتر و مراجع بیشتر، ر.ک. کوهن<sup>۱</sup> (C4) یا اینس<sup>۲</sup>

(I2).

حال چند روش را که برای معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر مفیدند مرور می‌کنیم .  
یک نوع مهم ، معادله خطی با ضرایب ثابت است :

$$(18.1) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

اگر  $f(x) = 0$  ، گوئیم معادله همگن است . در غیر این صورت ، آن را غیرهمگن می‌نامیم .  
توجه کنید که اگر یک معادله خطی همگن باشد ، مجموع دو جواب نیز یک جواب است ،  
حال آنکه اگر معادله غیرهمگن باشد این درست نیست .

جواب عمومی یک معادله غیرهمگن مجموع جواب عمومی معادله همگن نظیر (به نام تابع مکمل ) و هر جواب معادله غیرهمگن ( به نام انتگرال خصوصی ) است . این در واقع برای هر معادله دیفرانسیل خطی ، با ضرایب ثابت و یا غیر ثابت ، درست است .

جوابهای معادله همگن [ معادله (18.1) با  $f(x) = 0$  ] عموماً " به شکل زیر است :

$$y = e^{mx}$$

با گذاردن این در معادله همگن نتیجه می‌شود

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

اگر  $n$  ریشه عبارت باشند از  $m_1, m_2, \dots, m_n$  ، تابع مکمل مساوی است با

$$c_1 e^{m_1 x} + \dots + c_n e^{m_n x} \quad (c_i \text{ ها ثابتهای دلخواهی هستند})$$

فرض کنیم دو ریشه یکسان باشند ،  $m_1 = m_2$  . در این صورت ، فقط  $n-1$  جواب داشته و به جوابی دیگر نیاز خواهیم داشت . یک روند حدی تصور کنید که در آن  $m_2$  به  $m_1$  نزدیک می‌شود . در این صورت ،

$$\frac{e^{m_2 x} - e^{m_1 x}}{m_2 - m_1}$$

یک جواب است ، و وقتی  $m_2$  به  $m_1$  نزدیک شود ، این جواب خواهد شد

$$\left. \frac{d}{dm} e^{mx} \right|_{m=m_1} = x e^{m_1 x}$$

این جواب اضافی ماست . هرگاه سه ریشه مساوی باشند ،  $m_1 = m_2 = m_3$  ، آنگاه سه جواب عبارتند از

$$e^{m_1 x} \quad x e^{m_1 x} \quad x^2 e^{m_1 x}$$

و همین‌طور تا آخر .

استدلالات مستلزم روندهای حدی مشابه اغلب مفید واقع می‌شوند ؛ مثلاً " ، ر. ک .

بحث صفحات ۱۷ و ۱۸ .

یافتن انتگرال خصوصی معمولاً " سختتر است . هرگاه  $f(x)$  فقط تعدادی متناهی مشتق

مستقل خطی داشته باشد، یعنی ترکیبی خطی از جملات به شکل  $x^n$ ،  $e^{ax}$ ،  $\sin kx$ ،  $\cos kx$ ، یا، به طور کلی،

$$x^n e^{mx} \cos \alpha x \quad x^n e^{mx} \sin \alpha x$$

آنگاه روش ضرایب نامعین کاملاً "سراست" است. برای  $y(x)$  ترکیبی خطی از  $f(x)$  و مشتقات مستقل آن را گرفته و ضرایب را با این شرط که  $y(x)$  از معادله دیفرانسیل تبعیت می‌کند تعیین می‌کنیم.

### مثال

(۱۹۰۱)

$$y'' + 3y' + 2y = e^x$$

تابع مکمل:

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

$$m = -1, -2$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

انتگرال خصوصی:  $y = Ae^x$  را امتحان می‌کنیم. با گذاردن این در معادله دیفرانسیل (۱۹۰۱) نتیجه می‌شود که

$$6A = 1 \quad A = \frac{1}{6}$$

لذا، جواب عمومی عبارت است از

$$y = \frac{1}{6}e^x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

اگر  $f(x)$  یا جمله‌ای در  $f(x)$  قسمتی از تابع مکمل نیز باشد، انتگرال خصوصی ممکن است شامل این جمله و مشتقات آن ضربدر توانی از  $x$  باشد. برای مشاهده این امر، مثال (۱۹۰۱) فوق را با طرف راست  $e^{-x}$  به جای  $e^x$  حل می‌کنیم. روشهای صوری متعددی برای به دست آوردن انتگرالهای خصوصی وجود دارند. هرگاه  $D$  به معنی  $d/dx$  باشد، آنگاه می‌توان معادله (۱۸۰۱) را به صورت زیر نوشت:

(۲۰۰۱)

$$(D - m_1)(D - m_2) \cdots (D - m_n)y = f(x)$$

جواب صوری (۲۰۰۱) عبارت است از

$$y = \frac{f(x)}{(D - m_1) \cdots (D - m_n)}$$

یا، با بسط به وسیله تکنیکهای کسر جزئی،

(۲۱۰۱)

$$y = A_1 \frac{f(x)}{D - m_1} + \cdots + A_n \frac{f(x)}{D - m_n}$$

معنی  $f(x)/(D - m)$  چیست؟ این جواب  $(D - m)y = f(x)$  است، که یک معادله خطی مرتبه اول با جواب بدیهی است [ ر. ک. (۶.۱) ] .

به بیان دیگر، می توان در (۲۰.۱) عوامل را یکی یکی جدا کرد. یعنی،

$$(22.1) \quad (D - m_2)(D - m_3) \cdots (D - m_n)y = \frac{f(x)}{D - m_1}$$

طرف راست را حساب کرده، بر  $D - m_2$  تقسیم نموده، مجدداً محاسبه کرده، و همین طور ادامه می دهیم .

حال روش بسیار مهمی معروف به تغییر پارامتر برای به دست آوردن یک انتگرال خصوصی در نظر می گیریم . این روش ویژگی مفیدی دارد و آن این است که در مورد معادلات خطی با ضرایب غیر ثابت نیز به همین خوبی به کار می رود . پیش از بحث کلی روش و اعمال آن در یک مثال، کمی منحرف شده و به مبحث پارامترهای بوسان می پردازیم .

فرض کنیم دو تابع مستقل خطی  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  داده شده باشند. با این توابع می توان خانواده دو پارامتری از توابع

$$(23.1) \quad c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

را تعریف کرد . حال تابع دلخواه  $y(x)$  را در نظر می گیریم . آیا می توان با انتخاب مناسب  $c_1$  و  $c_2$  در (۲۳.۱) آن را نمایش داد؟ واضح است جواب در حالت کلی منفی است . سعی می کنیم روش متواضعانه تر تقریب  $y(x)$  در همسایگی نقطه ثابت  $x = x_0$  به وسیله یک منحنی از خانواده (۲۳.۱) را در پیش بگیریم . چون دو پارامتر در اختیار ماست ، یک انتخاب طبیعی برآزش دقیق مقدار  $y(x_0)$  و شیب  $y'(x_0)$  است . یعنی،  $c_1$  و  $c_2$  از دو معادله همزمان

$$(24.1) \quad \begin{aligned} y(x_0) &= c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) \\ y'(x_0) &= c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) \end{aligned}$$

تعیین می شوند .  $c_1$  و  $c_2$  ای که به این طریق به دست آیند از یک نقطه به نقطه دیگر منحنی  $y(x)$  تغییر می کنند ( یعنی ، وقتی  $x_0$  تغییر کند ) . اینها را پارامترهای بوسان می نامند ، زیرا منحنی معین شده به وسیله آنها در نقطه مورد بحث حتی الامکان به منحنی  $y(x)$  برآزش دارد .

البته، می توان این را به  $N$  تابع  $y_i$  و پارامترهای  $c_i$  تعمیم داد .  $c_i$  ها را طوری اختیار می کنیم که تابع  $y(x)$  و  $N - 1$  مشتق اول آن در نقطه  $x_0$  تولید شوند .

حال به حل معادلات دیفرانسیل خطی باز می گردیم . برای سادگی، خود را به

معادلات مرتبه دوم محدود می کنیم . معادله غیر همگن

$$(25.1) \quad p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = s(x)$$

را در نظر گرفته، و فرض می‌کنیم

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

تابع مکمل است. جوابی از (25.1) به شکل

$$(26.1) \quad y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

جستجو می‌کنیم که در آن  $u_i(x)$  ها توابعی هستند که باید تعیین شوند. برای گذاردن

(26.1) در (25.1) باید  $y'$  و  $y''$  را حساب کنیم. از (26.1) داریم

$$(27.1) \quad y' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_1' y_1 + u_2' y_2$$

پیش از محاسبه  $y''$  می‌بینیم مناسب است این شرط را قایل شویم که مجموع دو جمله آخر

(27.1) صفرند؛ یعنی،

$$(28.1) \quad u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

این از ظاهر شدن مشتقات دوم  $u_i$  ممانعت می‌کند، چرا که اکنون داریم

$$(29.1) \quad y' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

و مشتقگیری نتیجه می‌دهد که

$$(30.1) \quad y'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2'$$

توجه کنید که شرط (28.1) نه فقط اعمال جبری بعدی را ساده می‌کند بلکه تضمین نیز

می‌کند که  $u_1$  و  $u_2$  پارامترهای بوسان مطرح شده در فوقند؛ (26.1) و (29.1) را با

(24.1) مقایسه کنید.

بقیه روند سراسر است. اگر (26.1)، (29.1)، و (30.1) را در معادله

دیفرانسیل اصلی (25.1) قرار داده و از این امر که  $y_1$  و  $y_2$  جوابهای معادله همگن اند

استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$(31.1) \quad p(x)(u_1' y_1' + u_2' y_2') = s$$

حال (28.1) و (31.1) معادلات خطی همزمان نسبت به  $u_i'$  هستند که حلشان سراسر است

است. از شاگرد می‌خواهیم حل را به اتمام برساند؛ ر.ک. مسئله 26.1.

مثال. معادله دیفرانسیل

$$(32.1) \quad x^2 y'' - 2y = x$$

را در نظر می‌گیریم. تابع مکمل، یعنی جواب عمومی

$$(33.1) \quad x^2 y'' - 2y = 0$$

را می‌توان، با توجه به اینکه  $y = x^m$  یک جواب امتحانی طبیعی است، به ساده‌ترین وجه به

دست آورد<sup>۱</sup>. با گذاردن در (۳۳.۱) معلوم می شود که 2 یا  $m = -1$ : در نتیجه، تابع مکمل خواهد بود

$$c_1 x^2 + \frac{c_2}{x}$$

لذا، سعی می کنیم جوابی از (۳۲.۱) به شکل

$$(۳۴.۱) \quad y = u_1 x^2 + \frac{u_2}{x}$$

جستجو کنیم. با مشتقگیری خواهیم داشت

$$y' = 2xu_1 - \frac{1}{x^2}u_2 + x^2u_1' + \frac{1}{x}u_2'$$

و با اعمال شرط

$$(۳۵.۱) \quad x^2u_1' + \frac{1}{x}u_2' = 0$$

به دست می آوریم

$$(۳۶.۱) \quad y' = 2xu_1 - \frac{1}{x^2}u_2$$

و

$$(۳۷.۱) \quad y'' = 2u_1 + \frac{2}{x^3}u_2 + 2xu_1' - \frac{1}{x^2}u_2'$$

با گذاردن (۳۴.۱) و (۳۷.۱) در معادله دیفرانسیل (۳۲.۱)، به دست می آوریم

$$2x^3u_1' - u_2' = x$$

اگر این معادله را همراه با (۳۵.۱) حل کنیم، نتیجه می شود که

$$u_1' = \frac{1}{3x^2} \quad u_2' = -\frac{x}{3}$$

$$u_1 = -\frac{1}{3x} + c_1 \quad u_2 = -\frac{x^2}{6} + c_2$$

۱. در واقع،  $y = x^m$  یک جواب امتحانی واضحی برای هر معادله دیفرانسیل خطی به شکل

$$c_n x^n y^{(n)} + c_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + c_1 x y' + c_0 y = 0$$

می باشد.



در این صورت، جواب عمومی (۳۲.۱) خواهد بود

$$y = -\frac{x}{2} + c_1 x^2 + \frac{c_2}{x}$$

گاهی تغییر متغیر به ما کمک می‌کند. یک تبدیل عمومی را که بخصوص مفید است مورد بحث قرار می‌دهیم. معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم

$$(38.1) \quad y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

را در نظر می‌گیریم. جانمایی

$$(39.1) \quad y = v(x)p(x)$$

معادلهٔ خطی دیگری نسبت به  $v(x)$  را نتیجه می‌دهد که ممکن است حلش به‌ازای انتخابهای خاصی از  $p(x)$  آسانتر باشد. معادلهٔ حاصل عبارت است از

$$(40.1) \quad v'' + \left(2\frac{p'}{p} + f\right)v' + \left(\frac{p'' + fp' + gp}{p}\right)v = 0$$

اگر یک جواب معادلهٔ اصلی (۳۸.۱) را بدانیم، می‌توانیم  $p$  را آن جواب گرفته و بدین ترتیب جملهٔ شامل  $v$  در (۴۰.۱) را حذف کنیم. این کار بسیار مفیدی است، زیرا در این صورت می‌توان جواب عمومی را با دو انتگرالگیری سراسر پیدا کرد. به بیان دیگر، می‌توان

$$(41.1) \quad p = \exp\left[-\frac{1}{2}\int f(x) dx\right]$$

را انتخاب و جملهٔ مشتق اول (۴۰.۱) را حذف کرد. این روند به عنوان کمکی در شناخت معادلات یاری‌دهنده است، و بخصوص در رابطه با روشهای تقریب جواب مفید خواهد بود.

مثال. معادلهٔ بسل<sup>۱</sup> عبارت است از

$$(42.1) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

با جانمایی  $y = u(x)p(x)$  به ازای  $p(x) = x^{-1/2}$  نتیجه می‌شود که

$$(43.1) \quad u'' + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)u = 0$$

این معادله، که فاقد جملهٔ مشتق اول است، در یافتن رفتار تقریبی توابع بسل به ازای  $x$  های بزرگ، مثلاً "به‌وسیلهٔ روش WKB (بخش ۴.۱)، بسیار مناسب است. شرح مطلب

به عنوان تمرین باقی می ماند ( مسئله ۴۱.۱ ).

در خاتمه، چند طرح دیگر برای حل معادلات دیفرانسیل را به اختصار ذکر می کنیم. جزئیات امر را می توان در یک کتاب درسی راجع به معادلات دیفرانسیل یافت.

اگر متغیر وابسته  $y$  غایب باشد،  $y' = p$  را متغیر وابسته جدید می گیریم. با این کار مرتبه معادله یکی کم می شود.

اگر متغیر مستقل  $x$  غایب باشد، فرض می کنیم  $y$  متغیر مستقل جدید و  $y' = p$  متغیر وابسته جدید باشد. این نیز مرتبه معادله را یکی کم می کند.

اگر معادله نسبت به  $y$  همگن باشد،  $v = \log y$  را متغیر وابسته جدید می گیریم. معادله حاصل شامل  $v$  نخواهد بود، و جانشانی  $v' = p$  مرتبه معادله را یکی کم خواهد کرد.

اگر معادله هم فشار باشد، چنانچه به  $x$  وزن 1 و به  $y$  وزن  $m$  بدهیم، تغییر متغیر وابسته  $v = vx^m = y$  و سپس تغییر متغیر مستقل  $u = \log x$  معادله ای به دست می دهند که در آن متغیر مستقل جدید  $u$  وجود ندارد.

امکان کامل بودن یک معادله همیشه باید مورد توجه قرار گیرد. همچنین، امکان یافتن یک عامل انتگرال گیری باید در نظر گرفته شود. مثلاً، معادله متداول  $y'' = f(y)$  را می توان با ضرب طرفین آن در  $y'$  فوراً "انتگرال گیری کرد".

### ۲.۱ جوابها به صورت سری توانی

پیش از آنکه جوابها به صورت سری را به طور کلی مورد بحث قرار دهیم، یک مثال ساده (اگرچه غیرخطی) در نظر می گیریم:

$$(44.1) \quad y'' = x - y^2$$

جواب

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

را امتحان می کنیم. در این صورت، (44.1) به شکل زیر درمی آید:

$$2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \dots = x - c_0^2 - 2c_0 c_1 x - (c_1^2 + 2c_0 c_2)x^2 - \dots$$

با متحد گرفتن ضرایب توانهای مساوی  $x$ ، نتیجه می شود که

$$c_2 = -\frac{1}{2}c_0^2$$

$$c_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}c_0 c_1$$

$$c_4 = -\frac{1}{12}c_1^2 + \frac{1}{12}c_0^3, \text{ etc.}$$

مثلاً، فرض کنید جوابی را بخواهیم که در  $x=0$ ،  $y=0$ ،  $y'=1$ ، در این صورت،

$$(۴۵.۱) \quad c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{6}, c_4 = -\frac{1}{12}, \dots$$

این روش حل روش بسیار مفیدی است، ولی ما در توجیه آن، اثبات همگرایی سری، و غیره محتاط نبوده‌ایم. حال نظریهٔ عمومی جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی به صورت سری را به اختصار مطرح می‌کنیم.<sup>۱</sup>

معادلهٔ

$$(۴۶.۱) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + f_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + f_0(x)y = 0$$

را در نظر می‌گیریم. اگر  $f_0(x), \dots, f_{n-1}(x)$  در نقطهٔ  $x = x_0$  (به معنی نظریهٔ متغیر مختلط؛ ر.ک. ضمیمه، بخش آ. ۲) منتظم باشند، گوییم  $x_0$  یک نقطهٔ معمولی معادلهٔ دیفرانسیل است. جواب عمومی یک معادلهٔ دیفرانسیل را می‌توان در مجاورت یک نقطهٔ معمولی به صورت سری تیلور<sup>۲</sup> نوشت که شعاع همگرایی آن فاصلهٔ تانژن دیکترین افراد معادلهٔ دیفرانسیل است؛ البته، منظور از افراد نقطه‌ای است که معمولی نباشد.

سری تیلور یک سری توانی معمولی

$$(۴۷.۱) \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m$$

است که ضرایب  $c_m$  آن را می‌توان نظیر مثال فوق با جانشانی در معادلهٔ دیفرانسیل به راحتی یافت.

اگر  $x_0$  یک نقطهٔ معمولی نباشد ولی  $f_0(x), \dots, f_{n-1}(x)$  در  $x_0$  منتظم باشند،  $x_0$  را یک نقطهٔ منفرد منتظم معادلهٔ دیفرانسیل می‌نامیم. در مجاورت یک نقطهٔ منفرد منتظم همیشه می‌توان دست‌کم یک جواب به شکل

$$(۴۸.۱) \quad c_0 \neq 0 \quad \text{با} \quad y = (x - x_0)^s \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m$$

یافت که در آن نمای  $s$  جملهٔ پیشرو لزوماً عددی صحیح نیست. این سری جز در  $x_0$  در هر دایره که شامل افراد نباشد همگراست.

اگر  $x_0 = 0$ ، اعمال جبری مربوط به جانشانی سری (۴۷.۱) یا (۴۸.۱) در یک معادلهٔ دیفرانسیل ساده خواهد شد. لذا، عموماً "شایسته است ابتداءً مبدا را به  $x_0$

۱. شرح کاملتر این نظریه را می‌توان، مثلاً، در کتاب کاپسون (C8) فصل ده یا جفریز و جفریز (J4) فصل شانزده یافت.

منتقل کنیم؛ یعنی، معادله را برحسب متغیر مستقل جدید  $z = x - x_0$  بنویسیم. اگر یک نقطه نه نقطه‌ای معمولی و نه انفراد منتظم باشد، یک نقطه منفرد غیر منتظم می‌باشد.

مثال. ابتدا مثالی راجع به بسط حول یک نقطه معمولی را در نظر می‌گیریم:  
معادله دیفرانسیل لژاندر<sup>۱</sup> عبارت است از

$$(49.1) \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

نقاط  $x = \pm 1$  نقاط منفرد منتظم می‌باشند. حول نقطه معمولی  $x = 0$  بسط می‌دهیم.

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

را امتحان می‌کنیم. با گذاردن این در معادله دیفرانسیل (۴۹.۱)، نتیجه می‌شود که

$$c_2 = -\frac{n(n+1)}{2} c_0$$

$$c_3 = \frac{2 - n(n+1)}{6} c_1$$

$$c_4 = -\frac{n(n+1)[6 - n(n+1)]}{24} c_0$$

$$c_5 = \frac{[2 - n(n+1)][12 - n(n+1)]}{120} c_1$$

...

رابطه بازگشتی کلی عبارت است از

$$(50.1) \quad \frac{c_{i+2}}{c_i} = \frac{i(i+1) - n(n+1)}{(i+1)(i+2)} = \frac{(i+n+1)(i-n)}{(i+1)(i+2)}$$

توجه کنید که این یک رابطه بازگشتی دو جمله‌ای است؛ یعنی، فقط دو ضریب را به هم ربط می‌دهد. اندیسهای این دو جمله دوتا باهم فرق دارند. با بررسی معادله دیفرانسیل می‌توان از ابتدا به این نکات پی برد.

لذا، جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۴۹.۱) مساوی است با

$$y = c_0 \left[ 1 - n(n+1) \frac{x^2}{2!} + n(n+1)(n-2)(n+3) \frac{x^4}{4!} - + \dots \right] \\ + c_1 \left[ x - (n-1)(n+2) \frac{x^3}{3!} \right]$$

$$(51.1) \quad + (n-1)(n+2)(n-3)(n+4) \frac{x^5}{5!} - + \dots \left. \right]$$

در کاربردهای فیزیکی لازم است رفتار سریهای نامتناهی آمده در (۵۱.۱) را در مجاورت نقاط منفرد  $x = \pm 1$  در نظر بگیریم. اگر در رابطه بازگشتی (۵۰.۱) فرض کنیم  $i \rightarrow \infty$ ، می بینیم که

$$\frac{c_{i+2}}{c_i} \rightarrow 1$$

لذا، اگر در هر یک از سریها جلو برویم، شباهت هرچه بیشتر آنها را با یک سری هندسی که نسبت جملات متوالی اش  $x^2$  است حس می کنیم. واضح است که مجموع این سری، وقتی  $x^2$  به 1 نزدیک شود، به بی نهایت نزدیک می شود<sup>۱</sup>.

اما در حالاتی که مورد توجه فیزیک است، اغلب جوابهایی مانند  $y(x)$  لازمند که به ازای  $-1 \leq x \leq +1$  متناهی باشند. به دو طریق می توان ترتیب این امر را داد:

(۱) فرض کنیم  $c_1 = 0$ ، و  $n$  یکی از اعداد صحیح  $0, 2, 4, \dots, -1, -3, -5, \dots$  باشد. در این صورت، سری اول در (۵۱.۱) مختوم بوده و سری دوم وجود ندارد.

(۲) فرض کنیم  $c_0 = 0$ ، و  $n$  یکی از اعداد صحیح  $1, 3, 5, \dots, -2, -4, -6, \dots$  باشد. در این صورت، سری دوم در (۵۱.۱) مختوم بوده و سری اول وجود ندارد.

می بینیم که اگر جوابی از معادله دیفرانسیل لژاندر (۴۹.۱) را بخواهیم که بر بازه  $-1 \leq x \leq +1$  متناهی باشد،  $n$  باید یک عدد صحیح باشد. جواب  $y(x)$  حاصل یک چند جمله ای است که، وقتی با شرط  $y(x) = 1$  نرمالی شود، به چند جمله ای لژاندر  $P_n(x)$  معروف است<sup>۲</sup>.

برای مشاهده مسائلی که در یک نقطه منفرد منتظم رخ می دهند، معادله بسل را در نظر می گیریم:

$$(52.1) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$$

این معادله یک نقطه منفرد منتظم در  $x = 0$  دارد. لذا، به طور حتم جوابی به شکل

$$y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (c_0 \neq 0)$$

۱. این بحث ناقص است. در فصل ۲ سریهای نامتناهی به تفصیل مطرح می شوند، و در ص ۴۹ سری (۵۱.۱) به عنوان حالتی خاص مورد مطالعه قرار می گیرد. در واقع، این سری با نزدیک شدن  $x^2$  به 1 "تقریباً" همگرا می شود؛ مجموعهای آنها به طور

لگاریتمی به بی نهایت می روند  $[y \sim \ln(1 - x^2)]$ .

۲. توجه کنید که  $P_n(x) = P_{-1-n}(x)$ .

وجود دارد، و از معادله دیفرانسیل دیده می شود که یک رابطه بازگشتی دو جمله ای می توان به دست آورد. اگر این جواب را در معادله دیفرانسیل بگذاریم، ضریب  $x^s$  عبارت است از

$$\begin{aligned} c_0(s^2 - m^2) &= 0 \\ s^2 - m^2 &= 0 \end{aligned} \quad (53.1)$$

این معادله به معادله اندیسی معروف است. ریشه های آن عبارتند از  $s = \pm m$ . حال ضریب  $x^{s+1}$  را در نظر می گیریم. این ضریب به صورت زیر است

$$c_1[(s+1)^2 - m^2] = 0$$

لذا،  $c_1 = 0$  جز در تنها حالت  $m = 1/2, s = -m = -1/2$ ، و در آن حالت می توان قرار داد  $c_1 = 0$ ، زیرا جملاتی که به این وسیله حذف می شوند معادلند با جملاتی که به ازای  $s = +m = +1/2$  جواب دیگر را می سازند.

بنابراین ما خود را در داخل مجموع به مقادیر زوج  $n$  محدود کرده، می نویسیم

$$y = x^{\pm m}(c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \dots)$$

رابطه بازگشتی به صورت زیر درمی آید

$$\frac{c_{n+2}}{c_n} = \frac{-1}{(s+n+2)^2 - m^2} = \frac{-1}{(n+2)(2s+n+2)} \quad (54.1)$$

لذا جواب خواهد بود

$$y = c_0 x^s \left[ 1 - \frac{x^2}{(4s+1)} + \frac{x^4}{4 \times 8(s+1)(s+2)} - \dots \right] \quad (55.1)$$

این سری که به طور مناسبی نرمالی شده یک تابع بسط نامیده می شود؛ در فصل ۷ توابع بسط را با تفصیل بیشتری مطرح خواهیم کرد.

اگر  $m$  عدد صحیحی نباشد، معادله ما دو جواب مستقل دارد؛ یعنی، (۵۵.۱) به ازای  $s = \pm m$ ، اگر  $m$  عددی صحیح باشد (که می توان آن را مثبت یا صفر گرفت)، فقط می توان  $s = +m$  را اختیار کرد؛ به ازای  $s = -m$ ، تمام مخرجهای (۵۵.۱) از جمله ای به بعد صفر می شوند. به آسانی معلوم می شود که اگر پیش از قرار دادن  $s = -m$  "کلا" در  $(s+m)$  برای از بین بردن عوامل مزاحم ضرب کنیم، مضربی از جواب با  $s = +m$  به دست می آوریم.

این وضعیت یادآور مشکل ما در ص ۹ در به دست آوردن جوابهای مستقل یک معادله

دیفرانسیل با ضرایب ثابت است. حل این مشکل کاملاً مشابه می باشد. با فرض

$$y(x, s) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

با  $c_1 = 0$  ،  $c_0 = 1$  ، و اینکه سایر ضرایب از (۵۴.۱) به دست می‌آیند شروع می‌کنیم ولی از معادله اندیسی (۵۳.۱) استفاده نمی‌کنیم . یعنی ، قرار می‌دهیم

$$y(x, s) = x^s \left[ 1 - \frac{x^2}{(s+2+m)(s+2-m)} + \frac{x^4}{(s+2+m)(s+2-m)(s+4+m)(s+4-m)} - + \dots \right] \quad (56.1)$$

هرگاه عملگر دیفرانسیل بسل را با  $L$  نشان دهیم :

$$L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - m^2)$$

آنگاه سری  $Ly(x, s)$  فقط شامل یک جمله از  $x^s$  است ، زیرا رابطه بازگشتی ضرایب تمام توانهای بالاتر را صفر می‌کند . خواهیم داشت [قس (۵۳.۱)]

$$Ly(x, s) = (s-m)(s+m)x^s$$

(مجدداً) می‌بینیم که  $s$  باید مساوی  $m \pm$  باشد تا  $y(x, s)$  جوابی از معادله بسل

$Ly = 0$  گردد . اما اگر  $m$  عدد صحیح مثبتی باشد ، گفتیم که

$$[(s+m)y(x, s)]_{s=-m}$$

مضرب ثابتی از  $y(x, m)$  است و باید جواب دومی بیابیم . برای این کار ، حاصل جانشانی  $(s+m)y(x, s)$  در معادله بسل را در نظر می‌گیریم . خواهیم داشت

$$L[(s+m)y(x, s)] = (s+m)^2(s-m)x^s$$

مشتق طرف راست نسبت به  $s$  به ازای  $s = -m$  صفر است . بنابراین ،

$$\left. \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [(s+m)y(x, s)] \right\} \right|_{s=-m} \quad (57.1)$$

یک جواب معادله بسل است . و در واقع ، جواب دومی است که در جستجویش بودیم .

مثال . جواب دوم معادله بسل را به ازای  $m = 2$  می‌یابیم .

$$y(x, s) = x^s \left[ 1 - \frac{x^2}{s(s+4)} + \frac{x^4}{s(s+2)(s+4)(s+6)} - + \dots \right]$$

$$(58.1) \quad (s+2)y(x, s) = x^s \left[ (s+2) - \frac{s+2}{s(s+4)} x^2 + \frac{x^4}{s(s+4)(s+6)} - \frac{x^6}{s(s+4)(s+4)(s+6)(s+8)} + - \dots \right]$$

با به خاطر آوردن  $(d/ds)x^s = x^s \ln x$  و

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{uv \cdots}{w \cdots} \right) = \frac{uv \cdots}{w \cdots} \left( \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \cdots - \frac{w'}{w} - \cdots \right)$$

به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial}{\partial s} [(s+2)y(x, s)] = (s+2)y(x, s) \ln x$$

$$+ x^s \left[ 1 - \frac{s+2}{s(s+4)} \left( \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} \right) x^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{s(s+4)(s+6)} \left( -\frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} - \frac{1}{s+6} \right) x^4 - + \cdots \right]$$

با فرض اینکه  $s = -2$  و توجه به این امر که  $[(s+2)y(x, s)]_{s=-2} = -\frac{1}{16}y(x, 2)$  خواهیم داشت

$$\left. \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [(s+2)y(x, s)] \right\} \right|_{s=-2} \\ (59.01) \quad = -\frac{1}{16}y(x, 2) \ln x + x^{-2} \left( 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \cdots \right)$$

این جواب و  $y(x, 2)$  دو جواب مستقل معادلهٔ بسل به ازای  $m = 2$  می‌باشند.

حال معادلهٔ دیفرانسیل

$$(60.01) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - x^2)\psi = 0$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله شرو دینگر<sup>۱</sup> برای یک نوسانگر هماهنگ یک بعدی مکانیک کوانتومی در واحدهای مناسب است. اگر مستقیماً "جواب به صورت سری توانی (60.01) حول  $x = 0$  امتحان شود، یک رابطهٔ بازگشتی سه جمله‌ای به دست می‌آید. این روابط کمی نامناسب اند<sup>۲</sup>؛ لذا، بهتر است به دنبال تبدیلی از متغیرها باشیم که به معادلهٔ ساده‌تری بیانجامد.

ترفندی که اغلب در این مواقع کمک می‌کند "حذف" رفتار در مجاورت انفراد یا انفرادها می‌باشد. انفرادهای این معادله کجا هستند؟ در صفحهٔ  $z$  متناهی انفرادی وجود ندارد، ولی باید لحظه‌ای منحرف شده به انفرادها در بی‌نهایت بپردازیم.

### 1- Schrödinger

۲. روابط بازگشتی سه جمله‌ای را اغلب می‌توان به روش کسرهای مسلسل سامان داد (ر.ک. بخش ۵.۷).



معادله دیفرانسیل

$$(۶۱.۱) \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

را در نظر می‌گیریم. به یاد آورید که

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ یک نقطهٔ معمولی است اگر } P \text{ و } Q \text{ در آن منتظم باشند} \\ x=0 \text{ یک نقطهٔ منفرد منتظم است اگر } xP \text{ و } x^2Q \text{ در آن منتظم باشند} \end{aligned} \right\}$$

فرض کنیم  $z = 1/x$ . معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۶۲.۱) \quad \frac{d^2y}{dz^2} + \left[ 2 - \frac{1}{z^2} p(z) \right] \frac{dy}{dz} + \frac{1}{z^4} q(z)y = 0$$

که در آن

$$p(z) = P(x) \quad q(z) = Q(x)$$

در این صورت،  $x = \infty$ ، بسته به اینکه  $z = 0$  یک نقطهٔ معمولی یا انفراد معادله (۶۲.۱) باشد، یک نقطهٔ معمولی یا انفراد معادله (۶۱.۱) است. یعنی،  $x = \infty$  در صورتی یک نقطهٔ معمولی است که  $2x - x^2P(x)$  و  $x^4Q(x)$  در آن منتظم باشند، و  $x = \infty$  در صورتی یک نقطهٔ منفرد منتظم است که  $xP(x)$  و  $x^2Q(x)$  در آن منتظم باشند. حال به بحث اصلی باز می‌گردیم.

با استفاده از این محکها، می‌بینیم که معادلهٔ دیفرانسیل (۶۰.۱) در  $x = \infty$  قویا منفرد است. به ازای  $x$  های بزرگ، معادله تقریباً "مساوی است با

$$(۶۳.۱) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} - x^2\psi = 0$$

و جوابها تقریباً "خواهند بود

$$(۶۴.۱) \quad \psi \sim e^{\pm x^2/2}$$

که در آن اگر هر یک از توابع را در معادلهٔ دیفرانسیل (۶۳.۱) بگذاریم، جملاتی که در بی‌نهایت غالباند حذف خواهند شد.

در مکانیک کوانتمی، جوابهای قابل قبول فیزیکی نباید وقتی  $|x| \rightarrow \infty$  بی‌نهایت شوند؛ بنابراین،

$$(۶۵.۱) \quad \psi = ye^{-x^2/2}$$

را امتحان می‌کنیم. البته این تغییر متغیر رفتار مطلوب در بی‌نهایت را تضمین نمی‌کند، و هنوز باید جوابهای  $y(x)$  را اختیار کرد که این رفتار را به دست دهند. در واقع، می‌توان به‌طور کلی انتظار داشت که  $e^{-x^2} \rightarrow y(x)$  و بدین ترتیب جواب واگرای  $e^{+x^2/2} \rightarrow \psi$  به دست آید.

معادله دیفرانسیل (۶۰.۱) به صورت زیر درمی آید:

$$(66.1) \quad y'' - 2xy' + (E - 1)y = 0$$

[ اگر بنویسیم  $E - 1 = 2n$  ، (۶۶.۱) معادله دیفرانسیل هرمیت خواهد بود. ] جواب عمومی این معادله را می توان به شکل سری توانی به دست آورد که در همه جا همگرا می باشد، و رابطه بازگشتی برای ضرایب فقط شامل دو جمله می باشد. رابطه بازگشتی عبارت است از

$$\frac{c_{m+2}}{c_m} = \frac{(2m + 1) - E}{(m + 1)(m + 2)}$$

و جواب عبارت است از

$$(67.1) \quad y = c_0 \left[ 1 + (1 - E) \frac{x^2}{2!} + (1 - E)(5 - E) \frac{x^4}{4!} + \dots \right] + c_1 \left[ x + (3 - E) \frac{x^3}{3!} + (3 - E)(7 - E) \frac{x^5}{5!} + \dots \right]$$

اگر  $E = 2n + 1$  که در آن  $n$  عددی صحیح است، یکی از سریها پس از جمله شامل  $x^n$  مختوم می شود (سری زوج یا فرد، بسته به  $n$ ). چند جمله ای حاصل، اگر به طور مناسب نرمالی شود، یک چند جمله ای هرمیت  $H_n(x)$  از مرتبه  $n$  نام دارد. سری دیگر را می توان با مساوی صفر قرار دادن یکی از ضرایب  $c_0$  یا  $c_1$  آن حذف کرد، و جواب حاصل (۶۵.۱) در بی نهایت به صفر می رود.

اگر هیچیک از سریهای (۶۷.۱) مختوم نباشد، رفتار آن در  $x$  های بزرگ به وسیله جملات دور آن با رابطه بازگشتی تقریبی

$$\frac{c_{m+2}}{c_m} \approx \frac{2}{m}$$

معین می شود. لذا، رفتار هر یک از سریها به ازای  $x$  های بزرگ شبیه  $e^{x^2}$  بوده و، همانطور که انتظار می رود،  $e^{x^2/2} \rightarrow \psi$ . بنابراین، جواب  $\psi$ ، که به ازای  $x \rightarrow \pm \infty$  کراندار می ماند، فقط وقتی ممکن است که  $E = 2n + 1$  و  $n$  صحیح باشد؛ یعنی،

$$\psi = \psi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$$

به ازای

$$(68.1) \quad E = E_n = 2n + 1$$

این مثال دیگری است از اینکه چگونه شرایط مرزی بر مقادیر قابل قبول ثابت آمده

در یک معادلهٔ دیفرانسیل محدود دیتهمایی ایجاد می‌کند. جوابهای قابل قبول  $\psi_n$  ویژه توابع عملگر دیفرانسیل  $x^2 + (d^2/dx^2) -$  متعلق به ویژه مقادیر  $E_n$  نامیده می‌شوند (ر. ک. فصل ۹) به عنوان مثالی دیگر از جوابها به صورت سری، معادلهٔ لژاندر مربوطه

$$(69.1) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

را به اختصار در نظر می‌گیریم. توجه کنید که این معادله به ازای  $m=0$  به معادلهٔ لژاندر تحویل می‌یابد. مبدأ یک نقطهٔ معمولی بوده، و  $x = \pm 1$  انفرادهای منتظم می‌باشند. امتحان مستقیم یک جواب به صورت سری توانی حول  $x=0$  باز به یک رابطهٔ بازگشتی سه جمله‌ای منتهی می‌شود. حال رفتار در  $x = \pm 1$  را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم  $x = \pm 1 + z$  و شکل تقریبی معادلهٔ دیفرانسیل را که به ازای  $|z| \ll 1$  معتبر است می‌نویسیم. این معادله در مجاورت هر یک از انفرادها به صورت زیر است:

$$zy'' + y' - \frac{m^2}{4z} y = 0$$

این معادله دارای جوابهای  $y = z^{+m/2}$  و  $y = z^{-m/2}$  است، که اولی با فرض  $m \geq 0$ ، در صورتی که خللی به کلیت وارد نکند، خوش رفتار است.

لذا، با تغییر متغیر  $y = v(1-x^2)^{m/2}$  در (69.1) رفتار معادله در هر دو انفراد به طور همزمان بررسی شده و معادله به صورت زیر در خواهد آمد

$$(70.1) \quad (1-x^2)v'' - 2(m+1)xv' + [n(n+1) - m(m+1)]v = 0$$

که جوابی به صورت سری حول  $x=0$  دارد. رابطهٔ بازگشتی برای ضرایب عبارت است از

$$\frac{c_{r+2}}{c_r} = \frac{(r+m)(r+m+1) - n(n+1)}{(r+1)(r+2)}$$

$$(71.1) \quad = \frac{(r+m-n)(r+m+n+1)}{(r+1)(r+2)}$$

مجدداً، برای  $v(x)$  جوابهایی به صورت سریهای زوج و فرد به دست می‌آیند، که اگر مختوم نباشند، هر دو در مجاورت  $x = \pm 1$  شبیه  $x^{-m}(1-x^2)$  رفتار می‌کنند<sup>۱</sup>.

جواب کراندار فقط وقتی وجود دارد که  $n$  و  $m$  چنان باشند که یکی از سریها پس از جمله‌ای مانند  $x^m$  مختوم شود. از (71.1) معلوم می‌شود که شرط مربوطه عبارت است از

$$(72.1) \quad (n-m) = r = \text{عدد صحیحی} \geq 0$$

در کاربردهای فیزیکی معمولاً "  $n$  و  $m$  هر دو صحیح اند. در این صورت، می توان تحقیق کرد که لا چیزی نیست جز یک ثابت ضرب در

$$(۷۳.۱) \quad (1 - x^2)^{m/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^m P_n(x)$$

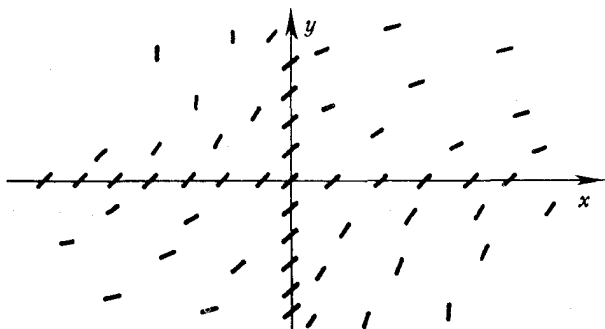
که یک تابع لژاندر مربوطه نام دارد. در فصل ۷، این توابع با تفصیل بیشتر مورد بحث قرار خواهند گرفت.

### ۳.۱ روشهای گوناگون تقریب

اغلب می توان با رسم شکل تصویری کیفی از جوابهای یک معادله دیفرانسیل به دست آورد. مثلاً، معادله مرتبه اول زیر را در نظر می گیریم:

$$(۷۴.۱) \quad \frac{dy}{dx} = e^{-2xy}$$

در صفحه  $xy$  می توان خطوط کوچکی به نشانه شیب جواب مار بر آن نقطه، مانند شکل ۲.۱، رسم کرد. شکل تقریبی جوابها واضح می باشد.



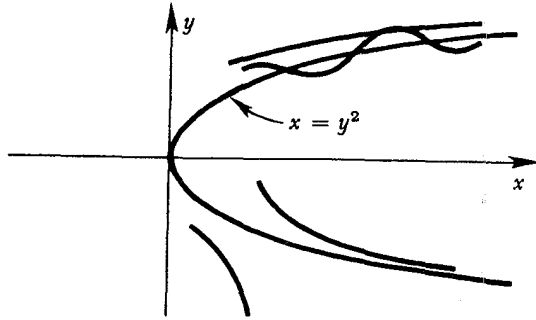
شکل ۲.۱ شیب جوابهای (۷۴.۱)

به عنوان مثال دوم، معادله غیرخطی مرتبه دوم

$$(۷۵.۱) \quad y'' = x - y^2$$

را در نظر می گیریم. اگر سهمی  $x = y^2$  را مثل شکل ۳.۱ رسم کنیم، می بینیم که "  $y$  داخل سهمی مثبت و خارج آن منفی است. اگر خود را به جوابهایی محدود کنیم که از مجاورت مبدا شروع شده و به راست می روند، می توان چند نوع از آنها را که در شکل ۳.۱ رسم شده شناسایی کرد:

۱. جوابهایی که حول شاخه بالایی سهمی نوسان می کنند؛



شکل ۳.۱ چند نوع جواب معادله  $y'' = x - y^2$

۲. یک جواب غیرنوسانی بحرانی که از بالا به شاخه بالایی سهمی نزدیک می‌شود؛

۳. جوابهایی که به  $y = -\infty$  می‌روند؛

۴. یک جواب غیرنوسانی بحرانی که از بالا به شاخه پایینی سهمی نزدیک می‌شود.

جواب به صورت سری (۴۵.۱) که قبلاً "یافتیم" [با  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ ] از نوع 1

است. عبارت (۸۵.۱) یک تقریب به جواب 2 می‌باشد.

به عنوان سومین مثال، معادله شرودینگر یک بعدی را برای ذره‌ای به جرم  $m$  در

پتانسیل  $V(x)$  در نظر می‌گیریم:

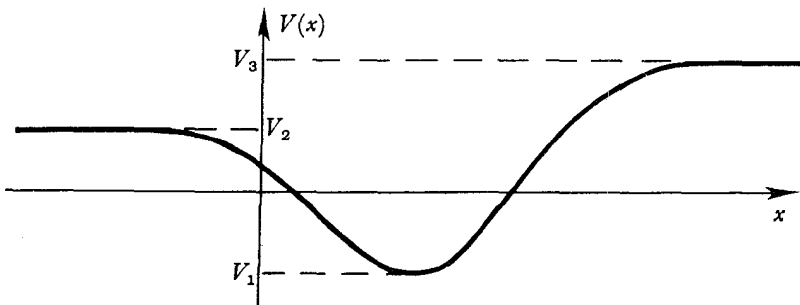
$$(۷۶.۱) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi$$

هرگاه  $E > V(x)$ ، آنگاه  $\psi''/\psi < 0$ ، و  $\psi$  به سمت محور  $x$  خم می‌شود؛ یعنی  $\psi$  دارای

سرشت نوسانی یا "سینوسی" می‌باشد. هرگاه  $E < V(x)$ ، آنگاه  $\psi''/\psi > 0$ ، و  $\psi$  از محور

$x$  دور می‌شود؛ یعنی،  $\psi$  دارای سرشت "نمایی" است. هرگاه این شرط مرزی اعمال شود

که  $\psi$  همه جا متناهی بماند، آنگاه یک جواب با رفتار نمایی بی‌کران غیرقابل قبول می‌باشد.

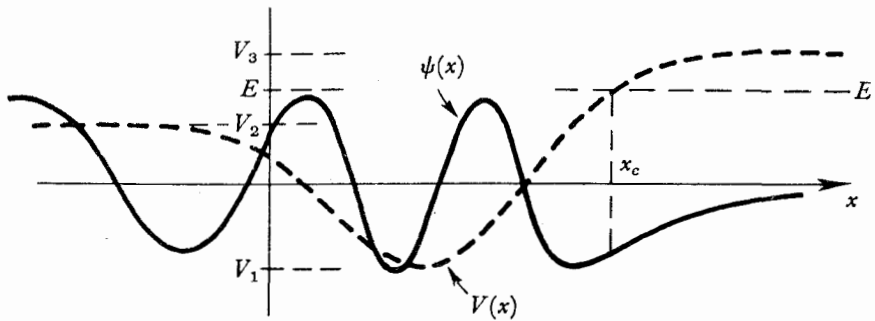


شکل ۴.۱ پتانسیل  $V(x)$  برای معادله شرودینگر

فرض کنیم  $V(x)$  همانند شکل ۴.۱ باشد.

اگر  $E > V_3$ ، تمام جوابها همه جا نوسانی بوده و همه قابل قبول می باشند؛ یعنی، هیچیک بی نهایت نمی شود.

اگر  $V_2 < E < V_3$ ، "اکثر" جوابها به ازای  $x \rightarrow +\infty$  بی نهایت می شوند. با اینحال اگر به موقع شروع کنیم، می توانیم جوابی بیابیم که وقتی  $x \rightarrow +\infty$ ، به طور نمایی کاهش یابد. این، جواب قابل قبول را (جز در دامنه) به طور منحصر به فرد تعریف کرده و، بخصوص، فاز را در ناحیه چپ که جواب نوسانی است تثبیت خواهد کرد. یک چنین جواب در شکل ۵.۱ به طور کیفی شرح داده شده است.



شکل ۵.۱ یک جواب قابل قبول فیزیکی معادله شرودینگر به ازای  $V_2 < E < V_3$

اگر  $V_1 < E < V_2$ ، مطالب واقعا "مشکل اند"،  $\psi$  در دو انتها "به طور نمایی" رفتار می کند. اگر آن را طوری تعدیل کنیم که سمت چپ بی نهایت نشود، تقریباً "مطمئنیم" که سمت راست بی نهایت می شود. تنها به ازای مقادیر معینی از  $E$  می توان جوابهای قابل قبولی به دست آورد. این مقادیر ویژه مقادیر می باشند؛ با (۶۸.۱) قیاس کنید. اگر  $E < V_1$ ، جواب قابل قبولی وجود ندارد.

روش دیگری که اغلب جوابهای تقریبی مفیدی به ما می دهد عبارت است از آزمایش معادله؛ یعنی، حذف جملات کوچک، تکرار، و از این قبیل کارها.

مثال

$$(۷۷.۱) \quad \frac{dy}{dx} = e^{-2xy}$$

در جستجوی جوابی در مجاورت  $x \rightarrow \infty$  هستیم، فرض کنیم  $y > 0$ ، لذا،

$$\frac{dy}{dx} \approx 0 \rightarrow y \approx a \quad (= \text{ثابت})$$

را امتحان می‌کنیم. حال این جواب حدسی را در (۷۷.۱) می‌گذاریم:

$$\frac{dy}{dx} \approx e^{-2ax}$$

بنابراین،

$$y \approx a - \frac{e^{-2ax}}{2a}$$

بار دیگر تکرار می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx} \approx \exp \left[ -2x \left( a - \frac{e^{-2ax}}{2a} \right) \right]$$

$$\approx e^{-2ax} \left( 1 + \frac{x}{a} e^{-2ax} + \dots \right)$$

$$(۷۸.۱) \quad y \approx a - \frac{e^{-2ax}}{2a} - \frac{1}{4a^2} \left( x + \frac{1}{4a} \right) e^{-4ax} + \dots \quad \text{و غیره}$$

اگر روند همگرا باشد، احتمالاً "جوابی به ما می‌دهد. ولی گاهی اوقات همگرا نیست.

مثال

$$(۷۹.۱) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = x - y^2$$

(ر.ک. بحث تصویری در صفحات ۲۳ تا ۲۴).  $y \approx \sqrt{x}$  را امتحان می‌کنیم. با گذاردن آن در طرف راست (۷۹.۱) نتیجه می‌شود  $y'' \approx 0$ ، که به نوبه خود  $y = ax + b$  را با  $a$  و  $b$  ثابت ایجاب می‌کند. این هیچ شباهتی به اولین امتحان ما ندارد. البته، اشتباه در گذاردن اولین جواب حدسی در جمله "بزرگ"  $y^2$  به جای جمله "کوچک"  $y$  بود. با اجتناب از این اشتباه نتیجه می‌شود که

$$y^2 = x - y'' \approx x - (\sqrt{x})'' = x(1 + \frac{1}{4}x^{-5/2})$$

$$y \approx \sqrt{x} + \frac{1}{8}x^{-2}$$

با تکرار مجدد نتیجه می‌شود که

$$(۸۰.۱) \quad y = \sqrt{x} + \frac{1}{8}x^{-2} - \frac{49}{128}x^{-9/2} + \dots$$

این همان جواب (۲) است که در ص ۲۴ به حساب آمد.

به صورت دیگر، می‌توان از روش متفاوتی استفاده کرد. می‌نویسیم

$$(۸۱.۱) \quad y = \sqrt{x} + \eta(x) \quad |\eta| \ll |\sqrt{x}|$$

با گذاردن در معادله دیفرانسیل (۷۹.۱)، نتیجه می‌شود

$$(۸۲.۱) \quad -\frac{1}{4}x^{-3/2} + \eta'' = -2\eta\sqrt{x} - \eta^2$$

از جمله آخر صرف نظر می کنیم ، ولی معادله هنوز پیچیده است . می توان از جمله اول یا جمله دوم نیز صرف نظر کرد . اگر فرض کنیم  $|2\eta\sqrt{x}| \ll |\eta''|$  ، خواهیم داشت

$$\eta \approx \frac{1}{8}x^{-2}$$

و جواب قبلی (۸۰.۱) را به دست می آوریم . البته ، باید سازگاری جواب و تقریبی که در یافتن آن به کار رفت تحقیق شود ؛ یعنی ، اینکه

$$(\frac{1}{8}x^{-2})'' \ll 2(\frac{1}{8}x^{-2})\sqrt{x}$$

این رابطه به ازای  $x$  های بزرگ برقرار است .

با چشم پوشی از جمله  $x^{-3/2}$  معادله (۸۲.۱) به جای " $\eta$ " ، می توان جواب دیگری به دست آورد . یعنی ، اگر فرض کنیم

$$|\eta''| \gg |-\frac{1}{4}x^{-3/2}|$$

معادله دیفرانسیل

$$(۸۳.۱) \quad \eta'' + 2\sqrt{x}\eta = 0$$

را به دست می آوریم . یک جواب تقریبی این معادله را می توان به روش WKB که در بخش بعد مورد بحث قرار می گیرد ، پیدا کرد . نتیجه به صورت زیر خواهد بود

$$(۸۴.۱) \quad \eta \approx \frac{A}{x^{1/8}} \sin\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}x^{5/4} + \delta\right)$$

که یک جواب نوسانی از نوع ۱ است که در ص ۲۳ ذکر شد . مجدداً ، بایستی برگشت و سازگاری فرض

$$|\eta''| \gg |\frac{1}{4}x^{-3/2}|$$

را تحقیق کرد :

چرا نمی توان از جمله اول سمت راست (۸۲.۱) چشم پوشید ؟

### ۴.۱ روش WKB

روش WKB جوابهای تقریبی معادلات دیفرانسیل به شکل

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)y = 0$$

را پیش بینی می کند مشروط براینکه  $f(x)$  در بعضی از فیود زیر ، که می توان آنها را در این عبارت خلاصه کرد که " $f(x)$  به کندی تغییر می کند" ، صدق نماید . به یاد آورید که هر معادله مرتبه دوم همگن خطی را می توان به وسیله تبدیل (۴۱.۱) به این شکل درآورد . معادله



شرو دینگر یک بعدی به این شکل است و این روش توسط ونتسل<sup>۱</sup>، کرامرز<sup>۲</sup>، و بریلوئن<sup>۳</sup> برای کاربردهای مکانیک کوانتومی عرضه شده است، و بدین سبب این نام را یافته است. این روش قبلاً "توسط جفریز ارائه شده بود"<sup>۴</sup>.

جوابهای معادله<sup>۵</sup> (۸۵.۱) با  $f(x)$  ثابت جانمایی

$$(۸۶.۱) \quad y = e^{i\phi(x)}$$

را پیشنهاد می کنند. معادله<sup>۶</sup> دیفرانسیل به صورت زیر درمی آید:

$$(۸۷.۱) \quad -(\phi')^2 + i\phi'' + f = 0$$

اگر  $\phi''$  را کوچک بگیریم، اولین تقریب عبارت است از

$$(۸۸.۱) \quad \phi' = \pm\sqrt{f} \quad \phi(x) = \pm \int \sqrt{f(x)} dx$$

شرط برقراری (که  $\phi''$  "کوچک" باشد) عبارت است از

$$(۸۹.۱) \quad |\phi''| \approx \frac{1}{2} \left| \frac{f'}{\sqrt{f}} \right| \ll |f|$$

از (۸۶.۱) و (۸۸.۱)، معلوم می شود که  $1/\sqrt{f}$  تقریباً  $1/(2\pi)$  برابر یک "طول موج" یا یک "طول نمایی" جواب  $y$  است. لذا، شرط برقراری تقریب ما این شرط شهوداً "معقول" است که تغییر  $f(x)$  در یک طول موج باید در مقایسه با  $|f|$  کوچک باشد.

تقریب دوم را می توان به آسانی با تکرار به دست آورد. از (۸۸.۱) داریم

$$\phi'' \approx \pm \frac{1}{2} f^{-1/2} f'$$

با گذاردن این تخمین به جای جمله<sup>۷</sup> کوچک  $\phi''$  در (۸۷.۱)، به دست می آوریم

$$(\phi')^2 \approx f \pm \frac{i}{2} \frac{f'}{\sqrt{f}}$$

$$\phi' \approx \pm \sqrt{f} + \frac{i}{4} \frac{f'}{f}$$

$$\phi(x) \approx \pm \int \sqrt{f(x)} dx + \frac{i}{4} \ln f$$

دو انتخاب برای علامت، دو جواب (تقریبی) به دست می دهند که می توان از تلفیق آنها جواب عمومی

1- Wentzel

۲. مثلاً، ر.ک. کرامرز (K5).

3- Brillouin

۴. ر.ک. جفریز و جفریز.

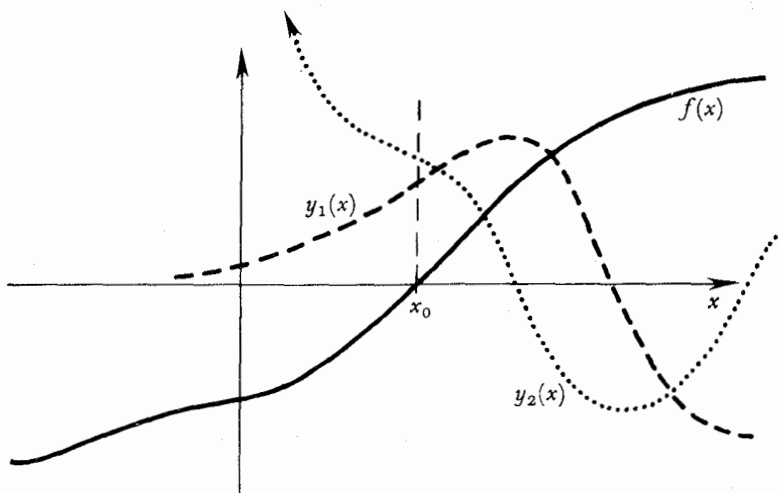
$$y(x) \approx \frac{1}{(f(x))^{1/4}} \left\{ c_+ \exp \left[ i \int \sqrt{f(x)} dx \right] + c_- \exp \left[ -i \int \sqrt{f(x)} dx \right] \right\} \quad (1-90)$$

(۹۰.۱)

را یافت، که در آن  $c_+$  و  $c_-$  ثابتهای دلخواهی هستند.

لذا، یک تقریب به جواب عمومی معادله اصلی (۸۵.۱) در هر ناحیه که شرط برقراری (۸۹.۱) را داشته باشیم به دست آمده است. اگر  $f(x)$  خیلی سریع تغییر کند یا  $f(x)$  از صفر بگذرد، این روش به کار نخواهد آمد. وضع اخیر یک مشکل جدی است، زیرا اغلب می‌خواهیم یک جواب نوسانی در یک ناحیه که  $f(x) > 0$  را به یک جواب "نمایی" در ناحیه‌ای که  $f(x) < 0$  وصل نماییم [مثلاً، ر. ک. بحث معادله (۷۹.۱)]. این مسئله را به تفصیل بررسی خواهیم کرد<sup>۱</sup> تا فرمولهای ارتباطی که ثابتهای  $c_+$  و  $c_-$  جوابهای WKB در هر طرف یک نقطه با  $f(x) = 0$  را به هم ربط می‌دهند به دست آوریم.

فرض کنیم، همانطور که در شکل ۶.۱ نشان داده شده،  $f(x)$  در  $x_0$  از صفر گذشته و



شکل ۶.۱ نمودار  $f(x)$  و دو جواب دقیق معادله (۸۵.۱). یکی از آنها، یعنی  $y_1(x)$ ، جواب خصوصی است که در سمت چپ به صفر نزول می‌کند.

در سمت راست مثبت باشد. همچنین، فرض می‌کنیم  $f(x)$  در هر دو ناحیه چپ و راست  $x_0$

۱. اگر در این کتاب از حروف نازک استفاده می‌کردیم، مطالب از اینجا تا معادله (۱۲۲.۱) باید این‌طور نموده می‌شد. بهرحال، فرمولهای (۱۱۳.۱) و (۱۲۲.۱) مهم بوده و حتی آنهایی که مایلند استدلالها را حذف کنند باید آنها را درک نمایند.

در شرط برقراری (۸۹.۱) صدق کند؛ به طوری که، هر جواب خاص  $y(x)$  را بتوان در این نواحی به صورت زیر تقریب کرد:

$$x \ll x_0, f(x) < 0:$$

$$(91.1) \quad y(x) \approx \frac{a}{\sqrt[4]{-f(x)}} \exp\left[+\int_x^{x_0} \sqrt{-f(x)} dx\right] + \frac{b}{\sqrt[4]{-f(x)}} \exp\left[-\int_x^{x_0} \sqrt{-f(x)} dx\right]$$

$$x \gg x_0, f(x) > 0:$$

$$(92.1) \quad y(x) \approx \frac{c}{\sqrt[4]{f(x)}} \exp\left[+i \int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx\right] + \frac{d}{\sqrt[4]{f(x)}} \exp\left[-i \int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx\right]$$

که در آنها علائم  $\sqrt{}$  و  $\sqrt[4]{}$  یعنی ریشه‌های حقیقی مثبت. اگر  $x$  حقیقی باشد، جوابی که در ناحیه چپ حقیقی باشد، در ناحیه راست نیز حقیقی است. این "شرط حقیقی بودن" می‌گوید که اگر  $a$  و  $b$  حقیقی باشند،  $d = c^*$ .

مسئله ما "ارتباط" تقریبها در طرفین  $x_0$  است به طوری که جواب دقیق یکسانی را بدهند؛ یعنی، یافتن  $c$  و  $d$  با معلوم بودن  $a$  و  $b$  و بالعکس. برای ایجاد این ارتباط لازم است از جوابی تقریبی استفاده کنیم که در تمام طول مسیری که نواحی  $x$  واقع در طرفین  $x_0$  را به هم وصل می‌کند و در آنها تقریبات WKB برقرارند معتبر باشد. یک روند<sup>۱</sup>، که کرامرز و جفریز آن را دنبال کرده‌اند، استفاده از جوابی است که بر محور حقیقی مار بر  $x_0$  معتبر است (ر.ک. مسئله ۳۶.۷ و نیز بحث آخر بخش ۵.۴).

روند دوم، که سوان<sup>۲</sup> و کمبل<sup>۳</sup> از آن استفاده کرده‌اند. عبارت است از اجتناب از محور حقیقی در مجاورت  $x_0$  و استفاده از مسیر مستدیری حول  $x_0$  در صفحه مختلط که در امتداد آنها خود تقریبات WKB برقرار بمانند. ما روند دوم را دنبال می‌کنیم، زیرا نه فقط فرمولهای ارتباط را به ما می‌دهند بلکه ابزار تخمین خطاها در تقریبات WKB نیز می‌باشند. همچنین، تکنیکهای به کار رفته عموماً "آموزنده‌ترند".

مسئله خطاها مهم است، زیرا می‌خواهیم از جوابهای تقریبی روی برد وسیعی از  $x$  که بسیاری از "طول موجها" یا "طولهای نمایی" را می‌پوشانند استفاده کنیم. لذا، باید

۱. برای این بحث و مراجع متعدد مربوطه، ر.ک. شیف (S2) بخش ۳۴.

2- Zwann

۳. ر.ک. کمبل (K1) بخش ۲۱.

نگران خطاهایی باشیم که تدریجا " انباشته می شوند و جواب تقریبی را ، مثلا " در ناحیه‌ای که نوسانی است ، به طرز بدی " ناهمفاز می کنند .

توابع WKB مربوط به معادله<sup>۶</sup> (۸۵.۱) را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(93.1) \quad W_{\pm}(x) = [f(x)]^{-1/4} \exp \left[ \pm i \int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx \right]$$

اینها را باید توابعی از متغیر مختلط  $x$  در نظر گرفت ، و لازم است برای احتراز از ابهامات ناشی از ریشه‌های  $f(x)$  بریدگیهای شاخه‌ای مناسبی در صفحه<sup>۶</sup>  $x$  رسم کنیم (ر. ک. ضمیمه ، بخش ۱۰.آ). توابع (۹۳.۱) ( دقیقاً ) در یک معادله<sup>۶</sup> دیفرانسیل صدق می کنند که می توان آن را با مشتگیری به دست آورد :

$$W'_{\pm} = \left( \pm i \sqrt{f(x)} - \frac{1}{4} \frac{f'}{f} \right) W_{\pm}$$

$$(94.1) \quad W''_{\pm} + \left[ f(x) + \frac{1}{4} \frac{f''}{f} - \frac{5}{16} \left( \frac{f'}{f} \right)^2 \right] W_{\pm} = 0$$

هرگاه  $g(x)$  را به صورت زیر تعریف کنیم

$$(95.1) \quad g(x) = \frac{1}{4} \frac{f''}{f} - \frac{5}{16} \left( \frac{f'}{f} \right)^2$$

آنگاه  $W_{\pm}(x)$  جوابهای دقیق

$$(96.1) \quad W''_{\pm} + [f(x) + g(x)]W_{\pm} = 0$$

و جوابهای تقریبی

$$(97.1) \quad y'' + f(x)y = 0$$

با شرط  $|g(x)| \ll |f(x)|$  می باشند . معادله<sup>۶</sup> (۹۷.۱) در  $x_0$  منتظم است ، حال آنکه معادله<sup>۶</sup> (۹۶.۱) در آن انفراد دارد . عیناً ،  $y(x)$  در  $x_0$  منتظم است ولی  $W_{\pm}$  در آن منفرد می باشند .

حال توابع  $\alpha_{\pm}(x)$  را توسط

$$(98.1) \quad y(x) = \alpha_+(x)W_+(x) + \alpha_-(x)W_-(x)$$

$$(99.1) \quad y'(x) = \alpha_+(x)W'_+(x) + \alpha_-(x)W'_-(x)$$

تعریف می کنیم ، که در آن  $y(x)$  جوابی از (۹۷.۱) است .  $\alpha_{\pm}$  پارامترهای بوسان هستند که در ص ۹ در رابطه با روش تغییر پارامتر مورد بحث قرار گرفتند . تقریب WKB صرفاً " نظیر آن است که  $\alpha_+$  و  $\alpha_-$  را ثابت بگیریم .

با حل (۹۸.۱) و (۹۹.۱) نسبت به  $\alpha_{\pm}(x)$  ، داریم

$$\alpha_+ = \frac{yW'_- - y'W_-}{W_+ W'_- - W'_+ W_-} \quad \alpha_- = -\frac{yW'_+ - y'W_+}{W_+ W'_- - W'_+ W_-}$$

که در آن مخرجها رونسکی  $W_+$  و  $W_-$  می باشند. رونسکی یک ثابت است، و این را می توان از معادله دیفرانسیل (۹۶.۱) به آسانی دید. با توجه به شکل های صریح (۹۳.۱) رونسکی عبارت است از

$$W_+ W'_- - W'_+ W_- = -2i$$

در نتیجه،

$$(100.1) \quad \alpha_+ = \frac{i}{2}(yW'_- - y'W_-) \quad \alpha_- = -\frac{i}{2}(yW'_+ - y'W_+)$$

با مشتقگیری و استفاده از معادلات دیفرانسیل (۹۶.۱) و (۹۷.۱) در حذف  $y''$  و  $W''_{\pm}$ ، به دست می آوریم

$$(101.1) \quad \frac{d\alpha_{\pm}}{dx} = \pm \frac{i}{2}(yW''_{\mp} - y''W_{\mp}) = \mp \frac{i}{2}g(x)yW_{\mp}$$

یا، با به خاطر آوردن (۹۳.۱) و (۹۸.۱)،

$$(102.1) \quad \frac{d\alpha_{\pm}}{dx} = \mp \frac{i}{2} \frac{g(x)}{[f(x)]^{1/2}} \left\{ \alpha_{\pm} + \alpha_{\mp} \exp \left[ \mp 2i \int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx \right] \right\}$$

از عبارات (۱۰۱.۱) و (۱۰۲.۱) می توان برای تخمین خطایی که ممکن است در تقریب WKB روی برد طولی از  $x$  انباشته شود استفاده کرد.

مثال. توابع WKB مربوط به معادله

$$(103.1) \quad y'' + xy = 0$$

به ازای  $x \gg 0$  عبارتند از

$$(104.1) \quad W_{\pm}(x) = x^{-1/4} \exp \left( \pm i \int_0^x x^{1/2} dx \right) = x^{-1/4} \exp \left( \pm i \frac{2}{3} x^{3/2} \right)$$

این توابع دقیقاً در معادله (۹۶.۱) صدق می کنند:

$$W'' + \left(x - \frac{5}{16}x^{-2}\right)W = 0$$

یعنی،

$$f(x) = x \quad g(x) = -\frac{5}{16}x^{-2}$$

جواب (۱۰۳.۱) را می توان به شکل (۹۸.۱) نوشت:

$$y(x) = \alpha_+(x)W_+(x) + \alpha_-(x)W_-(x)$$

به ازای  $x$  های بزرگ، جواب عمومی (۱۰۳.۰۱) دقیقاً " با تقریب WKB توصیف می شود :

$$(105.01) \quad y(x) \approx Ax^{-1/4} \cos(\frac{2}{3}x^{3/2} + \delta), \quad x \rightarrow \infty$$

در نتیجه، به ازای  $x \rightarrow \infty$  ،  $\alpha_+ \rightarrow (A/2)e^{i\delta}$  ،  $\alpha_- \rightarrow (A/2)e^{-i\delta}$  ، می خواهیم خطای موجود در این جواب WKB را وقتی به ازای مقادیر کوچک  $x$  به دست آمده بررسی کنیم. این خطا به وسیله انحراف  $\alpha_+(x)$  و  $\alpha_-(x)$  از مقادیر ثابت فوق سنجیده می شوند. اگر  $\alpha_{\pm}(x)$  خیلی تغییر نکند، از (۱۰۲.۰۱) تقریباً داریم

$$\frac{d\alpha_{\pm}}{dx} \approx \mp \frac{i}{2} \left( -\frac{5}{16} x^{-2} \right) x^{-1/2} \left[ \frac{A}{2} e^{\pm i\delta} + \frac{A}{2} e^{\mp i\delta} \exp \left( \mp 2i \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right]$$

و  $\Delta\alpha_{\pm}$  ، یعنی تغییرات  $\alpha_{\pm}$  از  $x_1$  تا بی نهایت ، با

$$(106.01) \quad \begin{aligned} \frac{\Delta\alpha_{\pm}}{A/2} &\approx \frac{2}{A} \int_{x_1}^{\infty} \frac{d\alpha_{\pm}}{dx} dx \\ &= \pm i \frac{5}{32} e^{\pm i\delta} \left[ \frac{2}{3} x_1^{-3/2} + e^{\mp 2i\delta} \int_{x_1}^{\infty} x^{-5/2} \exp \left( \mp i \frac{4}{3} x^{3/2} \right) dx \right] \end{aligned}$$

داده می شود. جمله دوم گروه نسبت به جمله اول از اهمیت کمتری برخوردار است (چرا؟) و می بینیم که خطای نسبی  $|\Delta\alpha_{\pm}|/|\alpha_{\pm}|$  ، حتی به ازای مقداری از  $x$  به کوچکی  $x_1 = 1$  ، فقط در حدود 10 تا 20 درصد است ، و در  $x_1$  های بزرگ خطا خیلی کوچک می شود. بخصوص ، حتی پس از تعداد زیاد دلخواهی از " طول موجها " ، خطای مهمی در فاز انباشته نخواهد شد.

حال به مسئله تخمین تغییر توابع  $\alpha_{\pm}(x)$  در حالت کلی باز می گردیم. با انتگرالگیری از معادله (۱۰۲.۰۱) در امتداد مسیر  $\Gamma$  در صفحه مختلط از  $x_1$  تا  $x_2$  ، داریم

$$(107.01) \quad \Delta\alpha_{\pm} = \int_{\Gamma} \frac{d\alpha_{\pm}}{dx} dx = \mp \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}} \alpha_{\pm} dx \mp \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}} \alpha_{\mp} \left( \frac{W_{\mp}}{W_{\pm}} \right) dx$$

ما فقط مسیرهایی را در نظر می گیریم که

$$(108.01) \quad \int_{\Gamma} \left| \frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}} \right| ds \ll 1$$

که در آن  $ds = |dx|$  عنصر طول در امتداد  $\Gamma$  است. کمبل یک چنین مسیر را مسیر خوب می نامید.

در امتداد یک مسیر خوب، جمله اول طرف راست (۱۰۷.۰۱) سهم بسزایی در تغییر  $\Delta\alpha_{\pm}$  ندارد. جمله دوم فقط وقتی می تواند قابل توجه باشد که  $|W_{\mp}/W_{\pm}| \gg 1$  ، یعنی،  $\alpha_+$

در امتداد یک مسیر خوب می‌تواند فقط در ناحیه‌ای تغییر کند که تابع  $W_+$  "آن" از حیث اندازه نسبت به  $W_-$  کوچک باشد. حتی در این ناحیه، اگر  $\alpha_-$  صفر یا تقریباً صفر باشد،  $\alpha_+$  نمی‌تواند تغییر نماید. اگر  $+$  و  $-$  را همه‌جا با هم عوض کنیم، احکام مشابهی برای  $\alpha_-$  خواهیم داشت.

در نواحی که  $|W_-/W_+| \gg 1$  یا  $|W_+/W_-| \gg 1$ ، ضریب تابع کوچک ممکن است خیلی تغییر کند، و این رفتاری است که به پدیده استوکس معروف است.<sup>۱</sup> (این تغییر اثر ملموسی بر تابع  $y(x)$  در این ناحیه ندارد؛ در نتیجه، تناقضی با این امر که تقریب WKB با ثابتهای  $\alpha_+$  و  $\alpha_-$  برقرار است نخواهد داشت!)

حال از نتایج فوق برای به دست آوردن فرمولهای ارتباط WKB استفاده می‌کنیم. تعاریف (۹۳.۱) را به یاد آورده و یک خط شاخه‌ای از  $x_0$  به  $+\infty$  در امتداد محور حقیقی رسم می‌کنیم. ریشه‌های  $[f(x)]^{1/4}$  و  $[f(x)]^{1/2}$  را ریشه‌های حقیقی مثبت در قسمت بالای این برش شاخه‌ای می‌گیریم. در این صورت، به ازای  $x < x_0$ ،

$$(109.1) \quad W_{\pm}(x) = e^{-i(\pi/4)} [-f(x)]^{-1/4} \exp \left[ \pm \int_x^{x_0} \sqrt{-f(x)} dx \right] \quad x < x_0$$

با مراجعه به (۹۱.۱) و (۹۲.۱) داریم

$$(110.1) \quad \left. \begin{array}{lll} \alpha_+ \rightarrow ae^{i(\pi/4)} & \alpha_- \rightarrow be^{i(\pi/4)} & x \ll x_0 \\ \alpha_+ \rightarrow c & \alpha_- \rightarrow d & x \gg x_0 \end{array} \right\}$$

برای یافتن "نواحی استوکس"، که در آن  $|W_+/W_-| \gg 1$  یا  $|W_-/W_+| \gg 1$ ، توجه می‌کنیم<sup>۲</sup> که در مجاورت  $x_0$ ،  $f(x) \approx K(x - x_0)$ ، و مرزهای این نواحی از نظر کیفی شبیه مرزهای مربوط به  $f(x) = K(x - x_0)$  اند. در این مرزها  $\int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx$  حقیقی است، زیرا در این صورت  $|W_+| = |W_-|$ . به ازای  $f(x) = K(x - x_0)$ ، اگر قرار دهیم  $x - x_0 = re^{i\theta}$

$$(111.1) \quad \int_{x_0}^{x_0+r} \sqrt{f(x)} dx = K^{1/2} \int_0^1 \sqrt{r} dx = \frac{2}{3} K^{1/2} r^{3/2} = \frac{2}{3} K^{1/2} r^{3/2} e^{i(3\theta/2)}$$

این مقدار در جهت‌های  $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$  حقیقی است، و به آسانی از (۹۳.۱) معلوم می‌شود

۱. برای شرح نسبتاً "جالب کشف این پدیده توسط استوکس، و نیز بحث‌های اولیه مسئله

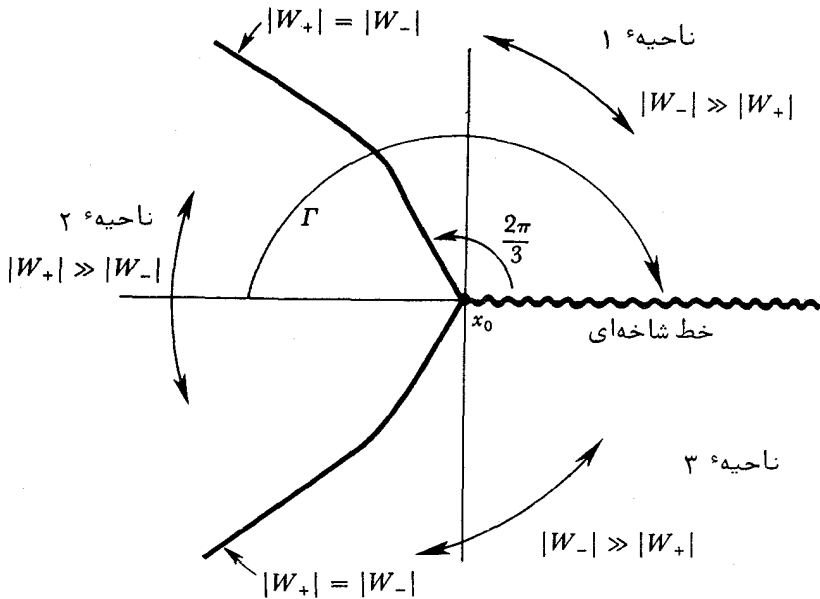
مربوطه، ر.ک. ار. ای. لانگر (L4).

۲. خواننده باید فرض تلویحی زیر را در نظر داشته باشد: فرض می‌کنیم شعاع مسیر  $\Gamma$  را

بتوان آنقدر کوچک گرفت که  $f(x) \approx K(x - x_0)$  برقرار باشد و در عین حال آنقدر بزرگ

که  $\Gamma$  یک مسیر "خوب" باشد.

که کدامیک از  $W_+$  یا  $W_-$  در هر ناحیه بین این مرزها غالب است. در شکل ۷.۱ یک نگاهت از نواحی استوکس داریم، و یک مسیر خوب  $\Gamma$  نشان داده شده



شکل ۷.۱ صفحه  $x$  مختلط که نواحی استوکس را حول نقطه  $x_0$  که در آن  $f(x)$  صفر می شود نشان می دهد.

که نواحی  $x \ll x_0$  و  $x \gg x_0$  واقع بر محور حقیقی را به هم مربوط می کند، درست جایی که باید جوابهای WKB را به هم مربوط کرد.

حال به آسانی می توان فرمول ارتباط برای جواب خصوصی  $y_1(x)$  را یافت که، همانند شکل ۶.۱، در سمت چپ  $x_0$  رفتار نمایی نزولی داشته باشد. این جواب با نمادگذاری (۹۱.۱) دارای  $a=0$  است یا، از (۱۱۰.۱) معلوم می شود که در ابتدای مسیر  $\Gamma$ ،  $\alpha_+(x) = 0$ ، لذا،  $\alpha_-(x)$  در امتداد  $\Gamma$ ، ولو اینکه در ناحیه ۲،  $|W_+/W_-| \gg 1$ ، ثابت می ماند.  $\alpha_+$  اساساً صفر می ماند. در ناحیه ۱،  $|W_-/W_+| \gg 1$ ؛ در نتیجه، با آنکه  $\alpha_+$  ممکن است تغییر کند (که می کند)،  $\alpha_-$  ثابت خواهد ماند. چون  $\alpha$  در تمام طول  $\Gamma$  ثابت است، از (۱۱۰.۱) معلوم می شود که

$$(112.1) \quad d = be^{i(\pi/4)}$$

اگر  $b$  حقیقی باشد، شرط حقیقی بودن نتیجه می دهد که  $c = d^*$ .

بدین ترتیب فرمول ارتباط برای جواب  $y_1(x)$  با رفتار نمایی نزولی به ازای  $x < x_0$

(با نرمالی کردن  $b=1$ ) خواهد بود



$$(113.1) \frac{1}{\sqrt{-f(x)}} \exp\left[-\int_x^{x_0} \sqrt{-f(x)} dx\right] \rightarrow 2 \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \cos\left[\int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx - \frac{\pi}{4}\right]$$

معکوس کردن سهم کار ظریفی است. فقط می‌دانیم که جملهء نمایی رشد کننده در طرف چپ به ازای فازی نزدیک  $-\pi/4$  در سمت راست وجود نخواهد داشت.

حال جواب کلیتر  $y_2(x)$  را در نظر می‌گیریم به طوری که  $a \neq 0$ . چون معادلهء اصلی خطی است، ضرایب عبارات (۹۱.۱) و (۹۲.۱) باید به طور خطی به هم مربوط باشند:

$$(114.1) \quad \begin{aligned} c &= Aa + Bb \\ d &= Ca + Db \end{aligned}$$

پس در (۱۱۲.۱) دریافتیم که

$$(115.1) \quad D = e^{i(\pi/4)} \quad \text{و} \quad B = e^{-i(\pi/4)}$$

شرط حقیقی بودن  $d = c^*$ ، در صورت حقیقی بودن  $a$  و  $b$ ، می‌گوید که

$$(116.1) \quad D = B^* \quad \text{و} \quad C = A^*$$

و ما دومی را از قبل می‌دانیم.

رابطهء کلی دیگر را می‌توان از این حقیقت به دست آورد که رونسکی  $y_1 y_2' - y_2 y_1'$  دو جواب مستقل معادلهء  $y'' + f(x)y = 0$  مقدار ثابتی است. (برای مشاهدهء این امر کافی است از رونسکی مشتق بگیریم.) می‌نویسیم

$$(117.1) \quad y_1(x) = \alpha_+^{(1)} W_+ + \alpha_-^{(1)} W_- \quad y_2(x) = \alpha_+^{(2)} W_+ + \alpha_-^{(2)} W_-$$

با به خاطر آوردن  $y' = \alpha_+ W_+' + \alpha_- W_-'$  و رونسکی

$$W_+ W_-' - W_+' W_- = -2i$$

خواهیم داشت

$$(118.1) \quad \alpha_+^{(1)} \alpha_-^{(2)} - \alpha_+^{(2)} \alpha_-^{(1)} = K = \text{ثابت}$$

این ثابت را در  $x \ll x_0$  [به وسیلهء (۱۱۰.۱)] حساب می‌کنیم:

$$K = e^{i(\pi/2)} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

که در آن  $a_1$  و  $b_1$  ضرایب  $a$  و  $b$  در تقریب WKB (۹۱.۱) برای  $y_1(x)$  بوده، و  $a_2$  و  $b_2$  ضرایب  $y_2(x)$  می‌باشند. به همین نحو، در طرف دیگر که  $x \gg x_0$  داریم

$$K = c_1 d_2 - c_2 d_1 = (AD - BC)(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

لذا،

$$(119.1) \quad e^{i(\pi/2)} = i = AD - BC = AB^* - A^*B = 2i \operatorname{Im} AB^*$$

اما  $B = e^{-i(\pi/4)}$ ؛ در نتیجه،  $Ae^{i(\pi/4)} = R + i/2$ ، که در آن  $R$  یک ثابت حقیقی نامعین است. با جمع‌آوری نتایج خود، داریم

$$(120.1) \quad \begin{aligned} A &= Re^{-i(\pi/4)} + \frac{1}{2}e^{i(\pi/4)} & B &= e^{-i(\pi/4)} \\ C &= Re^{i(\pi/4)} + \frac{1}{2}e^{-i(\pi/4)} & D &= e^{i(\pi/4)} \end{aligned}$$

و، به خاطر نامعین بودن  $R$ ، هنوز نمی‌توان  $c$  و  $d$  را برحسب  $a$  و  $b$  نوشت. لیکن، این نهایتی است که می‌شود پیش رفت.  $R$  نامعین است. راه دیگر بیان این نامعین بودن آن است که ملاحظه کنیم شکل مجانبی جوابی مانند  $y_2(x)$  در شکل ۶.۱ به ازای  $x < x_0$ ،  $y_2(x)$  را به ازای  $x > x_0$  تشبیت نمی‌کند. در مورد مسئله نوشتن  $a$  و  $b$  برحسب  $c$  و  $d$  چه می‌شود گفت؟ معادلات (۱۱۴.۱) با ثابتهای  $A, B, C, D$  داده شده با (۱۲۰.۱) را می‌توان به صورت زیر برگردانید:

$$(121.1) \quad \begin{aligned} a &= e^{-i(\pi/4)}c + e^{i(\pi/4)}d \\ b &= [\frac{1}{2}e^{i(\pi/4)} - Re^{-i(\pi/4)}]c + [\frac{1}{2}e^{-i(\pi/4)} - Re^{i(\pi/4)}]d \end{aligned}$$

لذا، فقط می‌توان  $a$  را پیدا کرد نه  $b$  را، و انتظار این می‌رفت زیرا  $\alpha_-(x)$  در ناحیه ۲ شکل ۷.۱ جز در حالت خاص  $\alpha_+ = 0$  خودسرانه نوسان می‌کند. همچنین، انتظار این نتیجه را از این امر که وقتی  $a \neq 0$ ، مقدار  $b$  بی‌اهمیت است داشتیم، زیرا تابع نمایی نزولی در مقایسه با تابع نمایی صعودی قابل چشم‌پوشی است. با حذف  $b$  به این دلیل، می‌توان دومین فرمولی که دو عبارت (۹۱.۱) و (۹۲.۱) برای  $y(x)$  را به هم ربط می‌دهد نوشت. معمولاً "با قرار دادن  $c = \frac{1}{2}e^{i\phi}$  و  $d = \frac{1}{2}e^{-i\phi}$  یک جواب حقیقی اختیار می‌کنند. در این صورت،

$$(122.1) \quad \begin{aligned} \sin\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{\sqrt[4]{-f(x)}} \exp\left[\int_x^{x_0} \sqrt{-f(x)} dx\right] \\ \leftarrow \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}} \cos\left[\int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx + \phi\right] \end{aligned}$$

مشروط بر اینکه  $\phi$  خیلی نزدیک  $\pi/4$  نباشد. همانطور که دیدیم، سهم را نمی‌توان برگرداند، زیرا اگر فقط بدانیم چه تابع نمایی بزرگی حضور دارد، فاز  $\phi$  را نمی‌توان معین نمود.

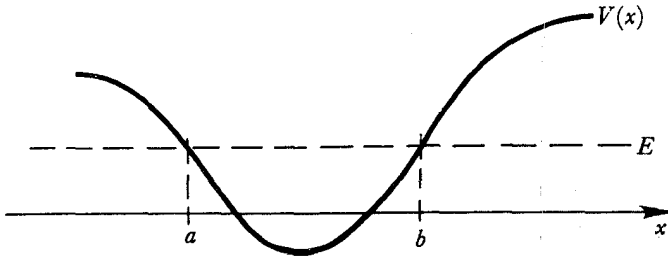
به آسانی می‌توان فرمولهای ارتباط (۱۱۳.۱) و (۱۲۲.۱) را با رسم تصاویری کیفی مانند شکل ۶.۱ به یاد آورد. ابتدا  $y_1(x)$  با نمایی نزولی در سمت چپ  $x_0$  را در نظر می‌گیریم. سمت راست  $x_0$ ،  $y_1(x)$  شبیه موج کسینوسی است که در آن وقتی  $x = x_0$ ، فاز بین  $-\pi/2$  و  $0$  است. به خاطر می‌آوریم که فاز  $\pi/4$  است. به علاوه، دامنه موج کسینوسی در سمت راست از دامنه موج نمایی در طرف چپ بزرگتر "به نظر می‌رسد" به یاد می‌آوریم که این دوبرابر بزرگ است. این نکات نتیجه (۱۱۳.۱) را مجدداً "به ما می‌دهد. طرح ذهنی مشابه برای به یاد سپردن (۱۲۲.۱) با در نظر گرفتن اینکه جوابی مثل  $y_2(x)$  در

ناحیه راست نسبت به  $y_1(x)$  به اندازه  $90^\circ$  اختلاف فاز دارد به دست می‌آید. با همین روند به آسانی می‌توان فرمولهای ارتباطی مشابه (۱۱۳.۱) و (۱۲۲.۱) را برای حالتی که شیب  $f(x)$  در  $x_0$  به جای مثبت بودن منفی است نوشت.

مطلب را با مثالی از طرز استفاده از روش WKB در مکانیک کوانتومی به پایان می‌بریم. معادله شرودینگر را برای یک ذره در چاه پتانسیل در نظر می‌گیریم:

$$(123.1) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi = 0$$

که در آن  $V(x)$  در شکل ۸.۱ نموده شده است.



شکل ۸.۱ یک چاه پتانسیل یک بعدی نوعی

$$\left. \begin{array}{l} \text{به ازای } a < x < b \text{ مثبت است} \\ \text{به ازای } x < a, x > b \text{ منفی است} \end{array} \right\} f(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]$$

هرگاه  $\psi(x)$  به ازای  $x < a$  کراندار باشد، آنگاه فرمول ارتباط (۱۱۳.۱) در  $a < x < b$  به ما می‌گوید که

$$(124.1) \quad \psi(x) \approx \frac{A}{(E - V)^{1/4}} \cos \left( \int_a^x \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V)} dx - \frac{\pi}{4} \right)$$

که در آن  $A$  ثابت دلخواهی است. هرگاه  $\psi(x)$  به ازای  $x > b$  کراندار باشد، آنگاه در  $a < x < b$  به همین نحو داریم

$$(125.1) \quad \psi(x) \approx \frac{B}{(E - V)^{1/4}} \cos \left( \int_x^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V)} dx - \frac{\pi}{4} \right)$$

که در آن  $B$  ثابت دلخواهی است. این دو عبارت باید یکی باشند، که از اینجا شرط

$$(126.1) \quad \int_a^b \sqrt{2m(E - V)} dx = (n + \frac{1}{2})\pi\hbar$$

به دست می‌آید. این نتیجه خیلی شبیه شرط کوانتشیس بوهر<sup>۱</sup> - سومرفلد<sup>۲</sup> در مکانیک کوانتمی پیش از ۱۹۲۵ است.

### مراجع

کتاب خوب بسیاری دربارهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی وجود دارند. دو کتاب کوچکولی مشخصاً "کامل کتابهای بورکیل"<sup>۳</sup> (B9) و اینس (I1) می‌باشند. کتاب اخیر نسخهٔ فشردهٔ کتاب (I2) اثر همان مولف است. کتاب دیگری که بسیار عالی است و با وجود قدیمی بودن ارزش مطالعه دارد کتاب فورسایت<sup>۴</sup> (F5) است.

کتاب جدید در این مبحث بیشتر روی جوابهای عددی، روشهای تبدیل انتگرال، و تکنیکهای خاص برای معادلات غیرخطی تکیه دارند تا روشهای کتاب قدیمی تر مذکور در فوق چند نمونهٔ خوب از آنها عبارتند از بیرکف<sup>۵</sup> و روتا<sup>۶</sup> (B3)؛ گولمب<sup>۷</sup> و شانکس<sup>۸</sup> (G5)؛ و رابن اشتاین<sup>۹</sup> (R1).

روش WKB و کاربردهایش در مکانیک کوانتمی در هر کتاب خوب نظریهٔ کوانتمی نظیر شیف<sup>۱۰</sup> (S2) بخش ۳۴؛ مرز باخرا<sup>۱۱</sup> (M4) فصل ۷؛ یالاندو<sup>۱۲</sup> و لیف شیتس<sup>۱۳</sup> (L2) فصل VII مطرح شده‌اند. توجه کنید که کتاب اخیر روش WKB را، "حالت شبه کلاسیک" نامیده است.

### مسائل

جوابهای عمومی مسائل ۱.۱ تا ۲۰.۱ را بیابید.

$$x^2 y' + y^2 = x y y' \quad \cdot 1.1$$

$$y' = \frac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}} \quad \cdot 2.1$$

$$y' = \frac{a^2}{(x+y)^2} \quad \cdot 3.1$$

$$y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \cdot 4.1$$

- |              |                |               |
|--------------|----------------|---------------|
| 1- Bohr      | 2- Sommerfeld  | 3- Burkill    |
| 4- Forsyth   | 5- Birkhoff    | 6- Rota       |
| 7- Golomb    | 8- Shanks      | 9- Rabenstein |
| 10- Schiff   | 11- Merzbacher | 12- Landau    |
| 13- Lifshitz |                |               |

$$(1 - x^2)y' - xy = xy^2 \cdot ۵۰۱$$

$$2x^3y' = 1 + \sqrt{1 + 4x^2y} \cdot ۶۰۱$$

$$y'' + y'^2 + 1 = 0 \cdot ۷۰۱$$

$$y'' = e^y \cdot ۸۰۱$$

$$x(1 - x)y'' + 4y' + 2y = 0 \cdot ۹۰۱$$

$$(1 - x)y^2 dx - x^3 dy = 0 \cdot ۱۰۰۱$$

$$xy' + y + x^4y^4e^x = 0 \cdot ۱۱۰۱$$

$$(1 + x^2)y' + y = \tan^{-1} x \cdot ۱۲۰۱$$

$$(جواب عمومی و جواب منفرد) \quad x^2y'^2 - 2(xy - 4)y' + y^2 = 0 \cdot ۱۳۰۱$$

$$yy'' - y'^2 - 6xy^2 = 0 \cdot ۱۴۰۱$$

$$x^4yy'' + x^4y'^2 + 3x^3yy' - 1 = 0 \cdot ۱۵۰۱$$

$$x^2y'' - 2y = x \cdot ۱۶۰۱$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \sin x \cdot ۱۷۰۱$$

$$y^{iv} + 2y'' + y = \cos x \cdot ۱۸۰۱$$

$$y'' + 3y' + 2y = \exp[e^x] \cdot ۱۹۰۱$$

$$a^2y''^2 = (1 + y'^2)^3 \cdot ۲۰۰۱$$

۲۱۰۱. معادله دیفرانسیل برای بار  $q$  ی خازن  $C$  که با مقاومت  $R$  سری شده و به ولتاژ

$$V = V_0 \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 e^{-t/\tau}$$

وصل شده است عبارت است از

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = V_0 \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 e^{-t/\tau}$$

$q(t)$  را در صورتی بیابید که  $q(0) = 0$ .

۲۲۰۱. در فعال سازی یک ورق ایندیم به وسیله یک شار نوترنی کند ثابت، تعداد اتمهای

رادیواکتیو  $N$  در معادله زیر صدق می کند:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N_s - \lambda N$$

که در آن  $N_s$  عدد ثابت بعد از " اشباع " است.  $N(t)$  را در صورتی بیابید که  $N(0) = 0$ .

۲۳۰۱. جواب عمومی

$$A(x)y''(x) + A'(x)y'(x) + \frac{y(x)}{A(x)} = 0$$

را در صورتی بیابید که  $A(x)$  یک تابع معلوم و  $y(x)$  مجهول باشد.

۲۴.۱. جواب عمومی

$$xy'' + 2y' + n^2xy = \sin \omega x$$

را بیابید. راهنمایی: جمله مشتق اول را حذف کنید.

۲۵.۱. توجه کنید که  $y = x$  در صورتی جواب

$$(1-x)y'' + xy' - y = (1-x)^2$$

است که طرف راست صفر باشد. با استفاده از این امر، جواب عمومی معادله فوق را بیابید.

۲۶.۱. معادله دیفرانسیل

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

را بر بازه  $a \leq x \leq b$  در نظر بگیرید. فرض کنید دو جواب  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  را بدانیم به طوری که

$$y_1(a) = 0 \quad y_2(a) \neq 0$$

$$y_1(b) \neq 0 \quad y_2(b) = 0$$

جوابی از معادله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

را بیابید که در شرطهای  $y(a) = y(b) = 0$  صدق کرده و به شکل زیر باشد:

$$y(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx'$$

که در آن  $G(x, x')$ ، به نام تابع گرین، فقط مستلزم جوابهای  $y_1$  و  $y_2$  بوده و به ازای  $x' < x$  و  $x' > x$  شکلهای تابعی متفاوتی به خود می‌گیرد. مسئله را با حل

$$y'' + k^2y = f(x)$$

$$y(a) = y(b) = 0$$

توضیح دهید.

۲۷.۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$xy'' + \frac{3}{x}y' = 1 + x^3$$

را به شکل حقیقی (جواب بدون  $i$ ) پیدا کنید.

۲۸.۱. معادله

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \left\{ K + \frac{2}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right\} y = 0 \quad 0 \leq x < \infty$$

را در نظر بگیرید، که در آن  $l$  عدد صحیح نامنفی است. تمام مقادیر ثابت  $K$  را بیابید که جوابی متناهی بر برد کامل  $x$  (به انضمام  $\infty$ ) به ما می‌دهند. این نوع معادله در حل معادله شرو دینگر برای اتم هیدروژن ظاهر می‌شود. راهنمایی: فرض کنید  $y = v/x$ . سپس رفتار در بی‌نهایت را "مستثنی نمایید".

۲۹.۱. معادله دیفرانسیل

$$y'' - \left(\frac{1}{4} + \frac{K}{x}\right)y = 0 \quad (0 < x < \infty)$$

به ازای چه مقادیری از ثابت  $K$  جوابی نابدیهی دارد که در  $x=0$  و  $x=\infty$  صفر می‌شود؟

۳۰.۱. معادله دیفرانسیل

$$xy'' - 2xy' + (k - 3x)y = 0$$

به ازای چه مقادیری از ثابت  $k$  جوابی کراندار بر برد  $0 \leq x < \infty$  دارد؟

۳۱.۱. جوابی از معادله دیفرانسیل

$$xy'' + 2y' + (E - x)y = 0$$

را می‌خواهیم که  $y(0) = 1$ ,  $y(\infty) = 0$ . این امر به ازای چه مقادیری از  $E$  ممکن است؟

۳۲.۱. با در نظر گرفتن معادله (۷۱.۱) به ازای  $r \rightarrow \infty$ ، تحقیق کنید که رفتار  $v(x)$  به ازای  $\pm 1 \rightarrow x$  مشابه رفتار  $(1 - x^2)^{-m}$  می‌باشد.

۳۳.۱. معادله بسل به ازای  $m = 0$  عبارت است از

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

ما یک جواب آن را یافتیم:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \dots$$

نشان دهید که جواب دیگری از آن به شکل

$$J_0(x) \ln x + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \dots$$

است و سه ضریب اول  $A, B, C$  را پیدا کنید.

۳۴.۱. معادله دیفرانسیل

$$xy'' + (2 - x)y' - 2y = 0$$

را در نظر بگیرید. دو جواب از آن به دست آورید، یکی منتظم در مبدأ و با مقدار 1 در این نقطه، و دیگری به شکل

$$\frac{1}{x} + A(x) \ln x + B(x)$$

که در آن  $A(x)$  و  $B(x)$  در مبدأ منظم هستند، سه جمله از هر سری کفایت می‌کند.

۳۵۰۱. برای جواب

$$y'' = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$

عبارتی تقریبی (مثلاً، سه جمله) به ازای  $x$  های بزرگ بیابید که وقتی  $x \rightarrow +\infty$  به محور  $x$  نزدیک شود.

۳۶۰۱. معادله دیفرانسیل

$$y'' - xy + y^3 = 0$$

را به ازای  $x$  های بزرگ مثبت در نظر بگیرید.

(آ) یک جواب نوسانی با دو ثابت دلخواه را بیابید.

(ب) یک جواب غیرنوسانی خصوصی (نابدیهی) پیدا نمایید.

۳۷۰۱. یک جواب نوسانی (تقریبی)

$$y'' = (y - x)^2 - e^{2(y-x)}$$

را پیدا کنید. می‌توانید  $\alpha$  را عددی حقیقی بگیرید به طوری که

$$\alpha^2 = e^{2\alpha} \quad (\alpha \approx -0.57)$$

۳۸۰۱. معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = e^{y/x}$$

را در نظر بگیرید.

(آ) فرض کنید  $y(1) = 0$ .  $y(x)$  را به سری طوری بسط دهید که به ازای  $x$  های نزدیک

1 برقرار باشد. از جملات مرتبه  $(x-1)^4$  صرف نظر کنید.

(ب) فرض کنید  $y(x_0) = +\infty$  ( $x_0 > 0$ ). برای  $y(x)$  یک عبارت تقریبی بیابید که

به ازای  $x$  های کمی کوچکتر از  $x_0$  مفید باشد.

۳۹۰۱. با استفاده از روش WKB، مقادیر منفی تقریبی ثابت  $E$  را بیابید که به ازای آنها

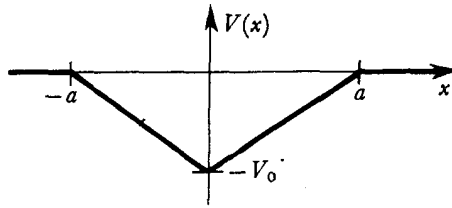
معادله

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [E - V(x)]y = 0$$

جوابی داشته باشد که به ازای هر  $x$  بین  $x = -\infty$  و  $x = +\infty$  و خود آنها متناهی

باشد.  $V(x)$  ذیلاً "نموده شده است".





۴۰.۱. به ازای  $x$  های بزرگ و مثبت، تقریب مناسبی به جواب معادله

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \left(\frac{15}{4x^2} + x^{1/2}\right)y = 0$$

پیدا نمایید.

راهنمایی: جمله مشتق اول را حذف کنید.

۴۱.۱. به روش WKB، یک فرمول تقریب برای تابع بسمل  $J_m(x)$  به دست آورده، و شکل

حدی این عبارت را به ازای  $x$  های بزرگ ( $x \gg m$ ) ارائه دهید. به دست آوردن مقدار

صحيح ثابت اهميتي ندارد. مي توانيد فرض كنيد  $m \gg \frac{1}{2}$ .

۴۲.۱. معادله ديفرانسيل  $y'' + xy = 0$  را در نظر بگيريد.

(آ) هرگاه وقتی  $x \rightarrow +\infty$ ،  $y \sim \frac{1}{x^{1/4}} \cos \frac{2}{3}x^{3/2}$ ، آنگاه وقتی  $x \rightarrow -\infty$ ،  $y \sim ?$ .

(ب) هرگاه وقتی  $x \rightarrow -\infty$ ،  $y \sim \frac{1}{(-x)^{1/4}} \exp\left[-\frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right]$ ، آنگاه وقتی  $x \rightarrow +\infty$ ،  $y \sim ?$ .

(پ) هرگاه وقتی  $x \rightarrow -\infty$ ،  $y \sim \frac{1}{(-x)^{1/4}} \exp\left[+\frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right]$ ، آنگاه وقتی  $x \rightarrow +\infty$ ،  $y \sim ?$ .

تذکر. جواب یکی از (آ)، (ب)، (پ) تعريف نشده است. اين جواب کدام است، و

دو جواب صحيح ديگر را نيز مشخص نماييد.

۴۳.۱. جواب معادله ديفرانسيل

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y = 0$$

را در نظر بگيريد که در  $x = 10$  مقدار صفر و شیب یک دارد.

(آ) محل (تقریبی) صفر بعدی  $y(x)$  را که از 10 بزرگتر است مشخص نمایید.

(ب) مقدار (تقریبی)  $y(x)$  را در اولین ماکزیمم خود به ازای  $x > 10$  مشخص نمایید.

۴۴.۱. جواب  $y_1(x)$  معادله دیفرانسیل

$$y'' + x^2 y = 0$$

را در نظر بگیرید که در  $x = 5$  دارای صفر باشد. محل تقریبی صفر 25 م بعد از صفر واقع

در  $x = 5$  را مشخص کرده، و خطای نتیجه خود را تخمین بزنید.

## فصل دوم

### سریهای نامتناهی

در این فصل چند آزمون همگرایی سریها را یادآور شده و چند روش برای به دست آوردن مجموع یک سری به شکل بسنه را عرضه خواهیم کرد. در اینجا روشهای عددی و تقریبی مطرح نمی‌شوند، بلکه در فصل ۱۳ خواهند آمد.

#### ۱۰.۲ همگرایی

گوئیم سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

همگرا به مجموع  $S$  است مشروط بر اینکه دنبالهٔ مجموعهای جزئی دارای حد  $S$  باشد، یعنی مشروط بر اینکه

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N a_n \right) = S$$

اگر سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا به مجموع  $S$  باشد، می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

گوئیم سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  به‌طور مطلق همگراست اگر سری مربوطهٔ  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  همگرا باشد.

همگرایی مطلق همگرایی را ایجاد می‌کند، ولی عکس آن درست نیست؛ مثلاً، سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots$$

همگرا (به مجموع  $\ln 2$ ) است، ولی به‌طور مطلق همگرا نیست، زیرا

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

همگرا نیست ( یعنی ، واگراست ) .

لازم است تأکید کنیم که اعداد  $a_n$  ممکن است مختلط باشند . البته ، وقتی  $a_n$  مختلط است ، باید به علامت  $|a_n|$  در بند پیش معنی عادی آن را بدهیم :

$$|a_n| = \sqrt{(\operatorname{Re} a_n)^2 + (\operatorname{Im} a_n)^2}$$

یعنی ،  $|a_n|$  قدرمطلق ( یا مدول )  $a_n$  می باشد .

ساده ترین راه برای تعیین همگرایی یک سری نامتناهی مقایسه آن با سری است که همگرایی یا واگرایی آن مشخص شده است . مثلاً ، سری هندسی

$$(1.2) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

به ازای  $|x| < 1$  همگرا و به ازای  $|x| > 1$  واگراست . این امر به آزمون نسبت منجر می شود :

اگر نسبت  $|a_{n+1}/a_n|$  جملات متوالی در سری نامتناهی

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

وقتی  $n \rightarrow \infty$  حدی کوچکتر از یک داشته باشد ، سری همگراست ؛ و در واقع ، به طور مطلق همگراست . اگر این حد بزرگتر از یک باشد ، سری واگرا می باشد . اگر حد مساوی یک باشد ( یا حد وجود نداشته باشد ) ، باید بیشتر تحقیق نماییم .

محک دوم مقایسه با یک انتگرال نامتناهی است . سری

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots$$

با انتگرال نامتناهی

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

همگرا یا واگراست مشروط بر اینکه  $f(x)$  به طور یکنوا نزولی باشد . مثلاً ، سری مربوط به تابع زتای ریمنان<sup>۱</sup>

$$(2.2) \quad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

را در نظر می گیریم . نسبت جملات متوالی عبارت است از

$$(3.2) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1 - \frac{s}{n} + \dots$$

این نسبت وقتی  $n \rightarrow \infty$  به یک نزدیک می شود . لذا ، مقایسه با سری هندسی به شکست منجر

می شود. اما

$$(۴.۲) \quad \int \frac{dx}{x^s} = \frac{-1}{s-1} \frac{1}{x^{s-1}}$$

در نتیجه، محک همگرایی سری تابع زتا عبارت است از  $s > 1$ . با این می توان آزمون نسبت را قویتر ساخت؛ اگر

$$(۵.۲) \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1 - \frac{s}{n}$$

که در آن  $s$  بزرگتر از 1 است، سری (به طور مطلق) همگرا می باشد.

مثال. سری فوق هندسی

$$(۶.۲) \quad F(a, b; c; x) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

را در نظر می گیریم. نسبت جملات متوالی عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} x \\ &= \frac{\left(1 + \frac{a}{n}\right) \left(1 + \frac{b}{n}\right)}{\left(1 + \frac{c}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)} x \\ &= \left(1 + \frac{a+b-c-1}{n} + \dots\right) x \end{aligned}$$

لذا، سری به ازای  $|x| < 1$ ، یا وقتی  $|x| = 1$  اگر

$$(۷.۲) \quad a + b - c < 0$$

همگرا می باشد.

آزمون نسبت را می توان با توجه به یک سری با همگرایی بسیار کند مانند

$$(۸.۲) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s} = \frac{1}{2(\ln 2)^s} + \frac{1}{3(\ln 3)^s} + \dots$$

۱. اگر  $a, b, c$  اعداد مختلطی باشند، شرط (۷.۲) به صورت زیر درمی آید:

$$\operatorname{Re}(a + b - c) < 0$$

از این هم قویتر ساخت. از مقایسه با انتگرال

$$(۹.۲) \quad \int \frac{dx}{x(\ln x)^s} = \frac{-1}{s-1} \frac{1}{(\ln x)^{s-1}}$$

معلوم می‌شود که سری (۸.۲) به‌ازای  $s > 1$  همگراست. نسبت جملات متوالی (۸.۲) عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n}{n+1} \left[ \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right]^s \\ &= \left( 1 - \frac{1}{n} + \dots \right) \left[ \frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right]^s \\ &= \left( 1 - \frac{1}{n} + \dots \right) \left[ 1 + \frac{1}{n \ln n} + \dots \right]^{-s} \\ (۱۰.۲) \quad &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{s}{n \ln n} + \dots \end{aligned}$$

لذا، سری‌یی که در آن  $|a_{n+1}/a_n|$  به‌شکل (۱۰.۲) است به‌ازای  $s > 1$  همگرا و به‌ازای  $s < 1$  واگرا می‌باشد.

مثال. جواب به صورت سری (۵۱.۱) معادله لژاندر را در نظر می‌گیریم:

$$1 - n(n+1) \frac{x^2}{2!} + n(n+1)(n-2)(n+3) \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

نسبت جملات متوالی عبارت است از

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = - \frac{(n-2i+4)(n+2i-3)}{(2i-3)(2i-2)} x^2$$

این نسبت به‌ازای  $i$  بزرگ مساوی است با

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} \sim \left[ 1 - \frac{1}{i} + o\left(\frac{1}{i^2}\right) \right] x^2$$

لذا، اگر  $x^2 = 1$ ، سری واگرا است.

البته، محکهای همگرایی دیگری نیز وجود دارند؛ مثلاً، هرگاه علامت‌های  $a_n$  یک در میان تغییر کرده و  $a_n$  به‌طور یکنوا به صفر نزدیک شود، آنگاه سری  $\sum a_n$  همگراست (ولی نه لزوماً "به‌طور مطلق"). خواننده علاقه‌مند به بحث دقیق‌تر و کامل‌تر همگرایی، همگرایی مطلق، و

غیره می‌تواند به مراجع متعارف نظیر آنهایی که در آخر این فصل آمده‌اند مراجعه کند.

### ۲.۲ سریهای آشنا

خواننده باید حداقل با سریهای ساده<sup>۱</sup> زیر آشنا باشد.

$$(11.2) \quad (1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-\alpha)! \alpha!} x^\alpha$$

$$(12.2) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

با استفاده از رابطه<sup>۱</sup> اویلر<sup>۱</sup>  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ، از (۱۲.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$(13.2) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

$$(14.2) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

انتگرالگیری جمله به جمله از سری مربوط به  $(1+x)^{-1}$  و  $(1+x^2)^{-1}$  نتیجه می‌دهد که

$$(15.2) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots$$

$$(16.2) \quad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots$$

سریهای فوق آنقدر ساده‌اند که به آسانی به یاد می‌آیند. توابع مقدماتی دیگر نظیر  $\tan x$ ،  $\cot x$ ،  $\sec x$ ، و غیره دارای بسط به صورت سری‌اند که احتمالاً "کمتر آشنا می‌باشند. در بعضی از آنها، ضرایب برحسب اعداد برنولی یا اعداد ویلر (که در واقع می‌توان آنها را به وسیله<sup>۱</sup> این ضرایب تعریف کرد) بیان شده‌اند. برای  $\sec x$ ،  $r$ ،  $k$ ، مسئله<sup>۱</sup> ۱۲.۲.

اعداد برنولی را با بسط تابع  $(e^x - 1)^{-1}$  معرفی می‌کنیم. برای حذف افراد در  $x=0$  در  $x$  ضرب می‌کنیم؛ می‌توان نوشت

$$(17.2) \quad \frac{x}{e^x - 1} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

بنابراین،

$$x = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \left( x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)$$

و، از تقسیم بر  $x$ ، خواهیم داشت

$$1 = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \left( 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right)$$

فرض کنیم  $c_n = B_n/n!$  پس

$$(18.2) \quad 1 = \left( B_0 + \frac{B_1x}{1!} + \frac{B_2x^2}{2!} + \dots \right) \left( 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right)$$

با متحد قرار دادن توانهای  $x$  در (۱۸.۲)، داریم

$$1 = B_0$$

$$0 = \frac{B_0}{2!} + \frac{B_1}{1!}$$

$$(19.2) \quad 0 = \frac{B_0}{3!} + \frac{B_1}{2!1!} + \frac{B_2}{1!2!}$$

و غیره.

معادلات (۱۹.۲)، جز اولی، را می توان باعلامات به شکل فشرده  $(B+1)^n - B^n = 0$

نوشت، که در آن  $B^n$  به معنی  $B_n$  گرفته شده است. چند عدد اولیه از اعداد برنولی عبارتند از

$$B_0 = 1 \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad B_6 = \frac{1}{42} \quad B_8 = -\frac{1}{30} \dots$$

$$(20.2) \quad B_1 = -\frac{1}{2} \quad B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$$

نمادها تغییر می کنند؛ در نتیجه، باید ضمن کار با فرمولها دقت داشت. مثلاً، نمادهای

دوایت<sup>۱</sup> (D8) و پیرس<sup>۲</sup> و فوستر<sup>۳</sup> (P1) با نمادهای ما فرق می کنند.

به عنوان مثالی از سودمندی اعداد برنولی به عنوان ضرایب سری توانی توابع آشنا،

$$(21.2) \quad \operatorname{ctn} x = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}$$

را در نظر می گیریم. فرض کنیم  $ix = y/2$ . در این صورت،

1- Dwight

2- Pierce

3- Foster



$$\begin{aligned} \operatorname{ctn} x &= i \frac{e^{y/2} + e^{-y/2}}{e^{y/2} - e^{-y/2}} \\ &= i \left( 1 + \frac{2}{e^y - 1} \right) \\ &= \frac{2i}{y} \left( \frac{y}{2} + \frac{y}{e^y - 1} \right) \\ &= \frac{2i}{y} \sum_{n \text{ even}} \frac{B_n y^n}{n!} \end{aligned}$$

از تعویض  $y$  با  $2ix$  نتیجه می‌شود که

$$(22.2) \quad \operatorname{ctn} x = \frac{1}{x} \sum_{n \text{ even}} (-1)^{n/2} \frac{B_n (2x)^n}{n!}$$

از رابطه  $\tan x = \operatorname{ctn} x - 2 \operatorname{ctn} 2x$  می‌توان سری توانی مربوط به  $\tan x$  را به دست آورد.

### ۳.۲ تبدیل سریها

برای تحویل یک سری نا آشنا به یک سری آشنا شیوه‌های متعددی را می‌توان به کار برد. مشتقگیری و انتگرالگیری اغلب مفید واقع می‌شوند.

### مثال

$$(23.2) \quad f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

جمله به جمله انتگرال می‌گیریم،

$$\int_0^x f(x) dx = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$$

سپس مشتقگیری می‌کنیم،

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

[این رابطه را می‌توانستیم فوراً از سری دو جمله‌ای (۱۱.۲) به دست آوریم.]

### مثال

$$(24.2) \quad f(x) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{3 \cdot 4} + \frac{x^3}{4 \cdot 5} + \dots$$

$$x^2 f(x) = \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots$$

دوبار مشتقگیری می‌کنیم ،

$$(x^2 f)'' = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

پس از دوبار انتگرالگیری نتیجه می‌گیریم که

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2} \ln(1-x)$$

ثابت‌های انتگرالگیری ظاهر شده در این روند را باید با دانستن مقدار سری در بعضی

مقادیر  $x$  حساب کرد؛ مثلاً ، از (۲۴.۲) معلوم می‌شود که  $f(0) = \frac{1}{2}$ .

گاهی اوقات متغیرهای مختلط تبدیلات مفیدی به ما می‌دهند .

مثال

$$(25.2) \quad \begin{aligned} f(\theta) &= 1 + a \cos \theta + a^2 \cos 2\theta + \dots \\ &= \operatorname{Re} (1 + ae^{i\theta} + a^2 e^{2i\theta} + \dots) \end{aligned}$$

این چیزی جز یک سری هندسی ساده نیست . لذا ،

$$f(\theta) = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - ae^{i\theta}} = \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$

ترفند مشتقگیری یا انتگرالگیری را ، حتی وقتی سری شامل متغیر نیست ، می‌توان به

کار گرفت .

مثال

$$(26.2) \quad S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$$

تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \dots$$

در این صورت ،  $S = f(1)$  ،

$$f'(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots = xe^x$$

$$f(x) = \int_0^x xe^x dx = xe^x - e^x + 1$$

$$S = f(1) = 1$$

مثال

$$(27.2) \quad S = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \dots = \sum_n \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

فرض کنیم

$$f(x) = \sum_n \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n \quad S = f(1)$$

اما

$$f(x) = (1+x)^m$$

بنابراین،  $S = 2^m$ .

حال سری ظاهراً " ساده " [ قس. (۳۰۲) ]

$$(28.2) \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \zeta(2)$$

را در نظر می‌گیریم. مثالهای قبل تعاریف زیر را پیشنهاد می‌کنند:

$$(29.2) \quad f(x) = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \dots \quad S = f(1)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots = -\frac{1}{x} \ln(1-x)$$

لذا،

$$(30.2) \quad S = -\int_0^1 \frac{\ln(1-x) dx}{x} \quad \text{و} \quad f(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-x) dx}{x}$$

متأسفانه، این انتگرال به اندازه سری ما مشکل است.

سری (۲۸.۲) را می‌توان برحسب یک عدد برنولی بیان کرد. برای یافتن این رابطه سری فوریه<sup>۱</sup>  $\cos kx$  را می‌نویسیم. ( در فصل ۴ سریهای فوریه با شرح بیشتری مطرح خواهند شد. )

$$(31.2) \quad \cos kx = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

$\cos kx$  یک تابع زوج است؛ در نتیجه، هیچ جمله سینوسی وجود ندارد ( $B_n = 0$ ). ضرایب  $A_n$  به صورت زیر معین می‌شوند:

$$(32.2) \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \cos kx dx = (-1)^n \frac{2k \sin k\pi}{\pi(k^2 - n^2)}$$

لذا،

$$(۳۳.۰۲) \quad \cos kx = \frac{2k \sin k\pi}{\pi} \left( \frac{1}{2k^2} - \frac{\cos x}{k^2-1} + \frac{\cos 2x}{k^2-4} - \frac{\cos 3x}{k^2-9} + \dots \right)$$

با گذاردن  $x = \pi$  در (۳۳.۰۲) نتیجه می شود که

$$(۳۴.۰۲) \quad k\pi \operatorname{ctn} k\pi = 1 + 2k^2 \left( \frac{1}{k^2-1} + \frac{1}{k^2-4} + \frac{1}{k^2-9} + \dots \right)$$

این نمایش کسرهای جزئی کتانژانت است. آنهایی که ریاضیات مربوطه را می شناسند می دانند که این نمایش کسرهای جزئی را می توان با استفاده از قضیه میتاگ - لفلر<sup>۱</sup> از نظریه متغیرهای مختلط فوراً نوشت.

بهرحال، با بسط (۳۴.۰۲) به صورت یک سری توانی از  $k$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} k\pi \operatorname{ctn} k\pi &= 1 - 2k^2 \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) \\ &\quad - 2k^4 \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) - \dots \end{aligned}$$

$$(۳۵.۰۲) \quad = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) k^{2n}$$

که در آن  $\zeta(2n)$  در (۲۰.۲) تعریف شده است. از مقایسه (۳۵.۰۲) با سری توانی (۲۲.۰۲) برای کتانژانت بر حسب اعداد برنولی، داریم

$$(۳۶.۰۲) \quad \zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

بنابراین،

$$(۳۷.۰۲) \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \zeta(2) = \frac{B_2 4\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

۱. ر.ک. گایسون (C8)، بخش ۸.۰۶، یا ویتاکر و واتسون (W5)، بخش ۴.۰۷. قضیه به بیان نادقیق می گوید تابع  $f(z)$  را که همه جا در صفحه  $z$  متناهی جز در قطبهای ساده واقع در  $z = a_1, a_2, \dots$  با مانده های  $b_1, b_2, \dots$  تحلیلی است، و (جز در مجاورت قطبها) با رفتن  $|z|$  به بی نهایت متناهی می ماند می توان به شکل

$$f(z) = f(0) + \sum_n b_n \left( \frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \right)$$

نوشت. رابطه (۳۴.۰۲) را می توان با اختیار تابع  $\pi z \operatorname{ctn} \pi z$  به جای  $f(z)$  فوراً "به دست آورد".

$$(۳۸.۰۲) \quad 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots = \zeta(4) = -\frac{B_4 16\pi^4}{48} = \frac{\pi^4}{90}$$

و غیره .

این بخش را با بحثی از یک تبدیل خاتمه می دهیم که در جمع بندی تحلیلی و عددی سریها مفید می باشد . فرض کنیم

$$(۳۹.۰۲) \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

یک سری باشد که مجموعش معلوم است ، و فرض کنید بخواهیم سری

$$(۴۰.۰۲) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n z^n$$

را جمع بزنیم .  $b_n$  را از (۴۰.۰۲) حذف می کنیم :

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 b_0 + c_1 b_1 z + c_2 b_2 z^2 + c_3 b_3 z^3 + \dots \\ &= c_0 g(z) + (c_1 - c_0) b_1 z + (c_2 - c_0) b_2 z^2 + (c_3 - c_0) b_3 z^3 + \dots \\ &= c_0 g(z) + (c_1 - c_0) z g'(z) + (c_2 - 2c_1 + c_0) b_2 z^2 \\ &\quad + (c_3 - 3c_2 + 2c_1) b_3 z^3 + \dots \\ &= c_0 g(z) + (c_1 - c_0) z g'(z) + (c_2 - 2c_1 + c_0) \frac{z^2 g''(z)}{2!} \end{aligned}$$

$$(۴۱.۰۲) \quad + (c_3 - 3c_2 + 3c_1 - c_0) \frac{z^3 g'''(z)}{3!} + \dots$$

ضرایب متوالی همان تفاضلات پیشرو در جدول تفاضلی ضرایب  $c_n$  می باشند :

$c_0$			
	$c_1 - c_0$		
$c_1$		$c_2 - 2c_1 + c_0$	
	$c_2 - c_1$		$c_3 - 3c_2 + 3c_1 - c_0$
$c_2$		$c_3 - 2c_2 + c_1$	
	$c_3 - c_2$		$\dots$
$c_3$		$\dots$	$\dots$
	$\dots$		$\dots$
$\dots$		$\dots$	$\dots$
	$\dots$		$\dots$

متداولترین نمونه این تبدیل تبدیل اولر است . قرار می دهیم

$$(۴۲.۰۲) \quad g(z) = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

لذا ،

$$b_n = (-1)^n$$

$$zg'(z) = \frac{-z}{(1+z)^2}$$

$$\frac{z^2 g''(z)}{2!} = \frac{z^2}{(1+z)^3}$$

و غیره. لذا، اگر  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n z^n$  تبدیل اویلر به ما می‌گوید که

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \left[ c_0 - (c_1 - c_0) \left( \frac{z}{1+z} \right) + (c_2 - 2c_1 + c_0) \left( \frac{z}{1+z} \right)^2 - + \dots \right] \quad (43.2)$$

مثلاً، " سری

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^3 + \dots \quad (44.2)$$

را در نظر می‌گیریم [ البته، از قبل می‌دانیم که  $f(z) = (1/z) \ln(1+z)$  این یک سری همگرای نسبتاً "ضعیف" است؛ در واقع، به ازای  $|z| > 1$  واگراست. در جدول تفاضلی

1			
	- $\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	
	- $\frac{1}{6}$		- $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{5}$
	- $\frac{1}{12}$		- $\frac{1}{20}$
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{30}$	
	- $\frac{1}{20}$		
$\frac{1}{5}$			

می‌بینیم که

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{1+z} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{1+z} \right)^2 + \dots \right] \quad (45.2)$$

مثلاً، " این سری جدید به ازای  $z$  های نزدیک 1 خیلی بهتر همگراست. در واقع، این سری به ازای هر  $z$  مثبت همگرا می‌باشد.

این یکی از ترفندهایی است که با آن می‌توان یک سری را به سری دیگری که مفیدتر است تبدیل کرد. مسئلهٔ عملی مهم یافتن مقدار عددی یک سری در فصل ۱۳ مورد بحث قرار می‌گیرد.

مراجع

سریهای نامتناهی در کتب متعددی در نظریه<sup>۶</sup> متغیرهای مختلط به طور جامع مورد بحث قرار گرفته‌اند. مثلاً، ر.ک. ویتاکر<sup>۱</sup> و واتسون<sup>۲</sup> (W5) فصل II و III، یا اپوستل<sup>۳</sup> (A5) فصول ۱۲ و ۱۳.

چند منبع کاملاً "مقدماتی عبارتند از هیزلوپ<sup>۴</sup> (H13)؛ گرین (G7)؛ و استانتیس<sup>۵</sup> (S11). مونوگراف هیرشمن<sup>۶</sup> (H10) نیز خیلی خواندنی است، ولی تاحدی در سطح بالاتری از سه مرجع فوق قرار دارد.

دو کتاب متعارف، که به نوعی رنگ و بوی قرن نوزدهم را می‌دهند، عبارتند از بروموویچ<sup>۷</sup> (B8) و کنوپ<sup>۸</sup> (K3).

دیویس<sup>۹</sup> (D2) بسیاری از شیوه‌های جمع‌بندی سریها را به طور منظم عرضه کرده است. بسیاری از سریهای مقدماتی، به انضمام آنهایی که به اعداد برنولی و اعداد اویلر منجر می‌شوند، تقریباً "در ابتدای دوايت (D8) داده شده‌اند.

مسائل

مجموع سریهای ۱۰۲ تا ۷۰۲ را بیابید.

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} - - + + \dots ۱۰۲$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots ۲۰۲$$

$$1 - \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \frac{1}{13 \cdot 3^6} - - + + \dots ۳۰۲$$

$$\frac{1}{0!} + \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \dots ۴۰۲$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots ۵۰۲$$

1- Whittaker

2- Watson

3- Apostol

4- Hyslop

5- Stanaitis

6- Hirschman

7- Bromwich

8- Knopp

9- Davis

$$1 + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{49^2} + \dots \quad \cdot ۶۰۲$$

$$1 - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{16^2} + \dots \quad \cdot ۷۰۲$$

۰۸۰۲ مجموع  $f(\theta) = \sin \theta + \frac{1}{3} \sin 2\theta + \frac{1}{5} \sin 3\theta + \frac{1}{7} \sin 4\theta + \dots$  را به شکل بسته حساب کنید ( برای قطعی بودن وضع ، فرض کنید  $0 < \theta < \pi$  )  
آیا سریهای زیر همگرایند یا نه؟

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{9 \cdot 7 \cdot 25 \cdot 1!} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{11 \cdot 9 \cdot 49 \cdot 2!} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}}{13 \cdot 11 \cdot 81 \cdot 3!} + \dots \quad \cdot ۹۰۲$$

$$\frac{(1 \cdot 3)^2}{1 \cdot 1 \cdot 1^2} + \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5)^2}{4 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 2)^2} + \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^2}{16 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)^2} \quad \cdot ۱۰۰۲$$

$$+ \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9)^2}{64 \cdot 4 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2} + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2 x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{سری} \cdot ۱۱۰۲$$

$$= x - \frac{4x^3}{3!} + \frac{9x^5}{5!} - + \dots$$

را به وسیله مقایسه با

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

حساب کنید .

۰۱۲۰۲ اعداد اولبر را که با

$$\sec z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

تعریف شده اند در نظر بگیرید .

(آ) نشان دهید که

$$(E+1)^k + (E-1)^k = 0 \quad (E^n \rightarrow E_n) \quad (k \text{ زوج})$$

.  $E_2, E_4, E_6, E_8$  را ارائه دهید .

(ب) با استفاده از بسط به کسرهای جزئی سکانت



سریهای زیر را حساب کنید:

$$k\pi \sec k\pi = 4k \left( \frac{1}{1-4k^2} - \frac{3}{9-4k^2} + \frac{5}{25-4k^2} - + \dots \right)$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + - \dots \quad (1)$$

$$1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - + \dots \quad (2)$$

## محاسبه انتگرالها

در سه بخش اول این فصل تکنیکهای مختلف محاسبه تحلیلی انتگرالهای معین را مورد بحث قرار می‌دهیم. این تکنیکها مشتمل اند بر مشتقگیری یا انتگرالگیری نسبت به یک پارامتر، استفاده از تقارن‌ها، و محاسبه به وسیله انتگرالگیری کنتوری. انتگرالهای جدولی نظیر تابع گاما، تابع بتا، انتگرال نمایی، انتگرالهای بیضوی، و غیره، در بخش ۴.۳ توصیف خواهند شد. بسطهای تقریبی، خصوصا "بسطهای مجانبی"، در بخش ۵.۳ مطرح می‌شوند، و روش نقطه زینی در بخش ۶.۳ مورد بحث قرار می‌گیرد.

## ۱.۳ روشهای مقدماتی

ابتدا چند تکنیک مقدماتی مفید برای محاسبه انتگرالها را مرور می‌کنیم. ساده‌ترین تکنیک تغییر متغیر است. مثلا، "ترفند متعارف محاسبه"

$$(1.3) \quad \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

با استفاده از مختصات قطبی احتمالا "برای شما آشناست. از این نتیجه با قراردادن  $t = u\sqrt{a}$  معلوم می‌شود که

$$(2.3) \quad \int_0^{\infty} e^{-au^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

یا با قرار دادن  $t = u^2$  می‌توان نتیجه گرفت که

$$(3.3) \quad \int_0^{\infty} e^{-u^4} u du = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$$

در مورد انتگرال  $\int_0^{\infty} e^{-t^{\alpha}} dt$  چطور؟ این خیلی آسان نیست. فرض کنیم

$$(۴.۳) \quad I_{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-t^{\alpha}} dt$$

تغییر متغیر می‌دهیم:

$$t^{\alpha} = u \quad t = u^{1/\alpha} \quad dt = \frac{1}{\alpha} u^{(1/\alpha)-1} du$$

در این صورت،

$$I_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{(1/\alpha)-1} du$$

این آسانتر به نظر نمی‌رسد، ولی انتگرالی است که تابع گاما  $\Gamma(z)$  را با

$$(۵.۳) \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du$$

تعریف می‌کند. در نتیجه،

$$(۶.۳) \quad I_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

ما در بخش ۴.۳ درباره تابع گاما بیشتر خواهیم گفت؛ توجه کنید که از (۱.۳) نتیجه

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

تکنیک مفید دیگر وارد کردن متغیرهای مختلط است.

### مثال

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \lambda x dx$$

$$= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{i\lambda x} dx$$

$$(۷.۳) \quad = \operatorname{Re} \frac{1}{a - i\lambda}$$

بنابراین،

$$I = \frac{a}{a^2 + \lambda^2}$$

ضمناً، این روش انتگرال دیگری (از قسمت موهومی) به ما می‌دهد:

۱. توجه کنید که ظاهر "در روش ما  $\lambda$  باید حقیقی باشد، ولی نتایج در واقع به ازای هر

$\lambda$  در نوار  $|\operatorname{Im} \lambda| < a$  درست اند. این چگونه به دست آمده است؟

$$(۸.۳) \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin \lambda x \, dx = \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2}$$

روش انتگرالگیری جزء به جزء بسیار مفید است، و احتمالاً "تاکنون با آن آشنا شده‌اید. ترفند مفید دیگر مشتقگیری یا انتگرالگیری نسبت به یک پارامتر است.

مثال

$$(۹.۳) \quad I = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \lambda x \, dx$$

فرض کنیم

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \lambda x \, dx = \frac{a}{a^2 + \lambda^2}$$

در این صورت،

$$I = -\frac{d}{da} I(a) = \frac{a^2 - \lambda^2}{(a^2 + \lambda^2)^2}$$

فرض کرده‌ایم ترتیب مشتقگیری و انتگرالگیری را بتوان عوض کرد. برای شرایط لازم و کافی، ر.ک. کتب ریاضی نظیر ویتاکر و واتسون (W5) فصل IV، یا اپوستل (A5) فصل ۹. در کاربردهای فیزیکی تقریباً همیشه آن را به کار می‌گیریم.

مثال.

$$(۱۰.۳) \quad I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

فرض کنیم

$$I = I(0)، \text{ در نتیجه } I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} \sin x}{x} \, dx$$

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = -\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx = \frac{-1}{\alpha^2 + 1}$$

$$I(\alpha) = -\int \frac{d\alpha}{\alpha^2 + 1} = C - \tan^{-1} \alpha$$

ولی  $I(\infty) = 0$ ، بنابراین،  $C = \pi/2$ .

$$(۱۱.۳) \quad I = I(0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \alpha$$

گاهی اوقات می‌توان از ترکیب چند مشتق یک انتگرال یک معادله دیفرانسیل تشکیل داد.

مثال .

$$(12.3) \quad I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx$$

$$I''(\alpha) + I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

این معادله را می‌توان به روش تغییر پارامتر که در بخش ۱۰.۱ مطرح شد به آسانی حل کرد. نتیجه عبارت است از

$$I(\alpha) = -\cos \alpha \int \frac{\sin t}{t} dt + \sin \alpha \int \frac{\cos t}{t} dt$$

اما  $I(\alpha)$  و تمام مشتقاتش در  $\alpha = \infty$  صفر می‌شوند. لذا،

$$I(\alpha) = \sin \alpha \int_0^{\alpha} \frac{\cos t}{t} dt - \cos \alpha \int_0^{\alpha} \frac{\sin t}{t} dt$$

توابع کسینوس-انتهگرال و سینوس-انتهگرال به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(13.3) \quad \text{Ci } x = \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt \quad \text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

لذا،  $I(\alpha) = \sin \alpha \text{ Ci } \alpha + \cos \alpha (\pi/2 - \text{Si } \alpha)$ ، و دیگران (J3) و و آبراموتیس<sup>۲</sup> و استگون<sup>۳</sup> (A1) به صورت جدول درآمده‌اند.

بالاخره، با تکرار مشتقگیری می‌توان انتگرالهای مفید  $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^n dx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

را از دو انتگرال اول

$$(14.3) \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x dx = \frac{1}{2\alpha}$$

به دست آورد. ضمن عبور ملاحظه می‌کنیم که اگر پارامتر انتگرال در حد (ها) نیز بیاید، مشتقگیری نسبت به آن پارامتر طبق قاعده<sup>۴</sup> زیر صورت می‌گیرد:

$$(15.3) \quad \frac{d}{d\alpha} \left[ \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx \right] = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + \frac{db}{d\alpha} f(b(\alpha), \alpha) - \frac{da}{d\alpha} f(a(\alpha), \alpha)$$

### ۲.۳ استفاده از استدلالهای تقارنی

محاسبه بعضی از انتگرالها را می‌توان با استفاده از تقارنهای موجود در مسئله به مقدار زیادی ساده کرد. اصول مربوطه را به‌وسیله چند انتگرال روی زاویه فضای در سه بعد

توضیح می‌دهیم .

مثال . انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم :

$$(۱۶۰۳) \quad I_1(\mathbf{k}) = \int \frac{d\Omega}{1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \frac{1}{1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}}$$

که در آن  $\hat{\mathbf{r}}$  بردار یکه شعاعی و  $(\theta, \phi)$  مختصات قطبی کروی معمول می‌باشند :

$$\hat{r}_x = \sin \theta \cos \phi \quad \hat{r}_y = \sin \theta \sin \phi \quad \hat{r}_z = \cos \theta$$

چون جهت دستگاه مختصات دلخواه است ، می‌توان محور  $z$  را در امتداد  $\mathbf{k}$  گرفته و به دست آورد ( فرض کنیم  $k < 1$  )

$$(۱۷۰۳) \quad I_1(\mathbf{k}) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos \theta)}{1 + k \cos \theta} = \frac{2\pi}{k} \ln \left( \frac{1+k}{1-k} \right)$$

انتگرالهای

$$(۱۸۰۳) \quad I_m(\mathbf{k}) = \int \frac{d\Omega}{(1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}})^m}$$

را می‌توان با مشتقگیری از  $I_1$  به دست آورد ( در مخرج 1 را با  $\alpha$  عوض کرده ، نسبت به  $\alpha$  مشتق گرفته ، و مجدداً  $\alpha$  را مساوی 1 قرار می‌دهیم ) . مثلاً ،

$$(۱۹۰۳) \quad I_2(\mathbf{k}) = \int \frac{d\Omega}{(1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2} = \frac{4\pi}{1 - k^2}$$

مثال دیگر عبارت است از

$$(۲۰۰۳) \quad I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = \int \frac{\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{r}} d\Omega}{1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}}$$

این انتگرال به این دلیل مشکل شده که دو جهت به وسیله بردارهای  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{k}$  داده شده‌اند ، و نمی‌توان محور قطبی را در امتداد هر دو گرفت . اما جهت  $\mathbf{a}$  بدیهی است به این معنی که می‌توان آن را " جدا نمود " ، زیرا

$$(۲۱۰۳) \quad \mathbf{J}(\mathbf{k}) = \int \frac{\hat{\mathbf{r}} d\Omega}{1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}}$$

را در نظر می‌گیریم . واضح است که

$$I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{J}$$

اما  $\mathbf{J}(\mathbf{k})$  یک بردار است و باید در جهت  $\mathbf{k}$  باشد ، زیرا هیچ جهت دیگری در تعریف

(۲۱۰۳) از  $\mathbf{J}$  مشخص نشده است . بنابراین ،

$$(۲۲.۳) \quad \mathbf{J}(\mathbf{k}) = A\mathbf{k}$$

برای محاسبه اسکالر  $A$ ،  $\mathbf{k}$  را در طرفین (۲۲.۳) ضرب نقطه‌ای کرده و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{k^2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{f}}}{1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{f}}} d\Omega \\ &= \frac{1}{k^2} \int d\Omega \left( 1 - \frac{1}{1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{f}}} \right) \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \left( 1 - \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right) \end{aligned}$$

لذا، انتگرال اصلی ما (۲۰.۳) عبارت است از

$$(۲۳.۳) \quad I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = A\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \left[ 1 - \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right]$$

و اما در باب انتگرال

$$I_2(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = \int \frac{\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{f}} d\Omega}{(1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{f}})^2} ?$$

می‌توان  $I_2(\mathbf{k}, \mathbf{a})$  را از  $I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a})$  مثل قبل از تعویض 1 با  $\alpha$  و مشتگیری به دست آورد، ولی روش ساده‌تر مشتگیری از  $I_1(\mathbf{k})$  نسبت به  $\mathbf{k}$  است. از یکسو،

$$(۲۴.۳) \quad \frac{\partial I_1(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \int \frac{d\Omega}{1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{f}}} = - \int \frac{d\Omega \hat{\mathbf{f}}}{(1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{f}})^2}$$

و از سوی دیگر، با استفاده از (۱۷.۳)،

$$(۲۵.۳) \quad \frac{\partial I_1(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\partial I_1(\mathbf{k})}{\partial k} = \frac{2\pi\mathbf{k}}{k^2} \left[ \frac{2}{1-k^2} - \frac{1}{k} \ln \left( \frac{1+k}{1-k} \right) \right]$$

از مقایسه (۲۴.۳) و (۲۵.۳) نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{d\Omega \hat{\mathbf{f}}}{(1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{f}})^2} = \frac{2\pi\mathbf{k}}{k^2} \left( \frac{-2}{1-k^2} + \frac{1}{k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right)$$

و لذا،

$$(۲۶.۳) \quad \int \frac{\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{f}} d\Omega}{(1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{f}})^2} = \mathbf{a} \cdot \int \frac{\hat{\mathbf{f}} d\Omega}{(1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{f}})^2} = \frac{2\pi\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{k^2} \left[ \frac{-2}{1-k^2} + \frac{1}{k} \ln \left( \frac{1+k}{1-k} \right) \right]$$

مثالهای دیگری راجع به استفاده از استدلالهای تقارنی محاسبه انتگرالهایی نظیر

$$\Phi_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\Omega \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{a} \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{b}$$

(۲۷.۳)

$$\Phi_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \int d\Omega \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{a} \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{b} \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{c} \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{d}$$

و غیره است. برای محاسبه  $\Phi_1$  ملاحظه می‌کنیم که این اسکالری است که نسبت به بردوی  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  خطی است. تنها امکان این است که  $\Phi_1 = A \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ، که در آن  $A$  یک عدد است. برای یافتن  $A$ ، فرض کنیم  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  هر دو مساوی  $\hat{\mathbf{z}}$  باشند. در این صورت،

$$\Phi_1(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}) = A = \int d\Omega (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}})^2 = \int d\Omega \cos^2 \theta = \frac{4\pi}{3}$$

بنابراین،  $\Phi_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (4\pi/3) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

محاسبه  $\Phi_2$  به همین نحو صورت می‌گیرد. چون  $\Phi_2$  یک اسکالر است که نسبت به چهار بردار  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  خطی بوده و تحت هر تعویض این بردارها باهم پایاست، باید به شکل زیر باشد:

$$\Phi_2 = B(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

که در آن  $B$  یک عدد است. با قرار دادن  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{d} = \hat{\mathbf{z}}$  به دست می‌آید؛ در نتیجه،

$$\Phi_2(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}) = 3B = \int d\Omega (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}})^4 = \int d\Omega \cos^4 \theta = \frac{4\pi}{5}$$

بنابراین،  $B = 4\pi/15$ ، و

$$\Phi_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{4\pi}{15} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

به عنوان مثال آخر از روشهایی که در ساده‌سازی انتگرالها به کار می‌روند، اتحاد

$$(28.3) \quad \frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{du}{[au + b(1-u)]^2}$$

را ذکر می‌کنیم که فاین من<sup>۱</sup> از آن برای ساده‌کردن محاسبه انتگرالهایی که در نظریه میدان کوانتمی پیش می‌آیند استفاده کرده است<sup>۲</sup>. به عنوان کاربردی از (28.3)، انتگرال

$$(29.3) \quad \psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \int \frac{d\Omega}{(1 + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}})(1 + \mathbf{l} \cdot \hat{\mathbf{r}})}$$

را حساب می‌کنیم. با استفاده از (28.3)، رابطه (29.3) را به صورت زیر درمی‌آوریم

$$(30.3) \quad \psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \int_0^1 du \int \frac{d\Omega}{\{1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot [\mathbf{k}u + \mathbf{l}(1-u)]\}^2}$$

انتگرال زاویه‌ای فضای در (30.3) مساوی است با  $I_2[\mathbf{k}u + \mathbf{l}(1-u)]$ ، که توسط (19.3)



داده شده است. لذا،

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = 4\pi \int_0^1 \frac{du}{1 - [\mathbf{k}u + \mathbf{l}(1-u)]^2}$$

این انتگرال با وجود ملال‌آور بودن مقدماتی است؛ جواب شکل جالب زیر را داراست:

$$(۳۱.۳) \quad \psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \frac{4\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}} \cosh^{-1} \frac{A}{B}$$

که در آن

$$A = 1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{l}$$

$$B = \sqrt{(1 - k^2)(1 - l^2)}$$

برهان (۳۱.۳) را به عنوان تمرین باقی می‌گذاریم (مسئله ۳۷.۳).

### ۳.۳ انتگرالگیری کنوری

یکی از قویترین ابزارهای محاسبه انتگرالهای معین توسط قضیه‌ای از مانده‌ها در نظریه توابع یک متغیر مختلط به دست می‌آید. در این بخش این روش انتگرالگیری کنوری را با چند مثال توضیح می‌دهیم. پیش از خواندن این مطالب، دانشجویی که نظریه توابع یک متغیر مختلط را خوب نمی‌داند باید قسمتهایی از این نظریه را مرور کند (یا بیاموزد). این قسمتها را در ضمیمه این کتاب آورده‌ایم تا کمکی در مرور (یا راهنمایی در مطالعه) باشد.

قضیه مانده‌ها [ضمیمه، معادله (۱۵)] به ما می‌گوید هرگاه تابع  $f(z)$  در ناحیه محدود به مسیر بسته  $C$ ، جز در تعدادی متناهی قطب و انفرادهای اساسی تنها در درون  $C$  منتظم باشد، آنگاه انتگرال  $f(z)$  در امتداد کنور  $C$  عبارت است از

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum \text{مانده‌ها}$$

که در آن مانده‌ها  $\sum$  یعنی مجموع مانده‌ها در تمام قطبها و انفرادهای اساسی داخل  $C$ .

مانده‌ها در قطبها و انفرادهای اساسی تنها را می‌توان به صورت زیر یافت.

اگر  $f(z)$  در  $z = z_0$  یک قطب ساده (قطب مرتبه یک) داشته باشد، مانده مساوی است با

$$(۳۲.۳) \quad a_{-1} = [(z - z_0)f(z)]_{z=z_0}$$

اگر  $f(z)$  به شکل  $f(z) = q(z)/p(z)$  نوشته شده باشد، که در آن  $q(z)$  منتظم بوده و  $p(z)$  در  $z_0$  صفر ساده داشته باشد، مانده  $f(z)$  در  $z_0$  را می‌توان به شکل زیر حساب کرد:

$$(۳۳.۳) \quad a_{-1} = \left. \frac{q}{p'} \right|_{z=z_0}$$

اگر  $z_0$  یک قطب مرتبه  $n$  باشد، مانده عبارت است از

$$(۳۴.۳) \quad a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} [(z-z_0)^n f(z)] \right\}_{z=z_0}$$

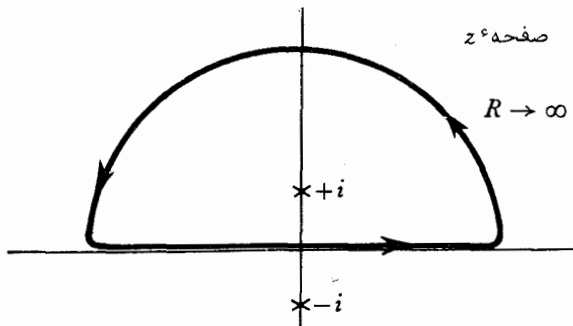
اگر  $z_0$  یک انفراد اساسی تنها باشد، مانده از بسط لوران به دست می‌آید (ضمیمه، بخش ض ۲، فقره ۷).

روش انتگرالگیری کنطوری را با چند مثال توضیح می‌دهیم.

مثال

$$(۳۵.۳) \quad I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

را در امتداد کنطور شکل ۱.۳ در نظر می‌گیریم. انتگرال در امتداد محور



شکل ۱.۳ کنطور برای انتگرال (۳۵.۳)

حقیقی  $2I$  است. در امتداد نیم‌دایره واقع در نیم‌صفحه بالایی صفر به دست می‌آوریم، زیرا

$$z = Re^{i\theta} \quad dz = iRe^{i\theta} d\theta \quad \frac{1}{1+z^2} \approx \frac{e^{-2i\theta}}{R^2}$$

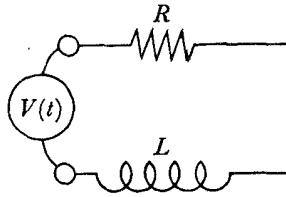
$$\int \frac{dz}{1+z^2} \approx \frac{i}{R} \int e^{-i\theta} d\theta \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \text{ وقتی}$$

مانده  $1/(1+z^2) = 1/(z+i)(z-i)$  در  $z=i$  عبارت است از  $1/(2i)$ . لذا،

$$2I = 2\pi i \left( \frac{1}{2i} \right) = \pi \quad I = \frac{\pi}{2}$$

توجه کنید که یک قسمت مهم مسئله ممکن است اختیار "مسیر برگشت" به نحوی باشد که سهم ناشی از آن ساده (ترجیحا "صفر") باشد.

مثال . مقاومت  $R$  و سلف  $L$  را که با ولتاژ  $V(t)$  سری شده در نظر می‌گیریم ( شکل ۲۰۳ ) . فرض کنیم  $V(t)$  یک پالس بالای ولتاژ باشد؛ یعنی ، یک پالس بسیار بالا که مدت زمان بسیار



شکل ۲۰۳ مدار  $R-L$  سری

کوتاهی دوام دارد . همانطور که در فصل ۴ خواهیم دید ، با تقریب خوبی می‌توان نوشت

$$V(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

که در آن  $A$  مساحت زیر منحنی  $V(t)$  است .

شدت جریان ناشی از ولتاژ  $e^{i\omega t}$  مساوی است با  $e^{i\omega t}/(R + i\omega L)$  . لذا ، شدت جریان

ناشی از پالس ولتاژ ما مساوی است با

$$I(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{R + i\omega L} \quad (۳۶.۳)$$

حال این انتگرال را حساب می‌کنیم .

اگر  $t < 0$  ، انتگرالده به ازای  $\omega \rightarrow -\infty$  به  $\text{Im } \omega$  به طور نمایی کوچک است ؛ در نتیجه ،

می‌توان کنتور را با یک نیمدایره بزرگ در نیمصفحه  $\omega$  پایینی که انتگرال در امتدادش

صفر می‌شود کامل کرد<sup>۱</sup> . کنتور هیچ انفرادی را دربر ندارد ؛ در نتیجه ،  $I(t) = 0$  .

اگر  $t > 0$  ، باید کنتور را با یک نیمدایره بزرگ در نیمصفحه بالایی کامل کنیم .

در این صورت ،

$$I(t) = 2\pi i \left( \frac{A}{2\pi} \right) \frac{e^{-Rt/L}}{iL} = \frac{A}{L} e^{-Rt/L}$$

مثال

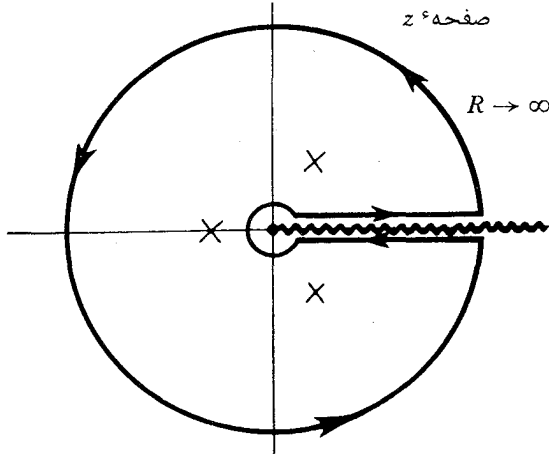
$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} \quad (۳۷.۳)$$

۱ . توجیه دقیق این روند توسط لم ژردان صورت می‌گیرد ؛ به عنوان مثال ، ر.ک . کاپسون

انتگرالده زوج نیست؛ در نتیجه، نمی توان آن را تا  $-\infty$  کشانید. انتگرال

$$\int \frac{\ln z dz}{1+z^3}$$

را در نظر می گیریم. انتگرالده چند مقداری است؛ می توان صفحه را مانند شکل ۳.۳ برید،



شکل ۳.۳ کنتور برای انتگرال (۳۷.۳)

و  $\ln z (= \ln x)$  حقیقی را درست بالای بریدگی تعریف کرد. بنابراین در زیر بریدگی،  $\ln z = \ln x + 2\pi i$ ، و با انتگرالگیری در امتداد کنتور ذکر شده، نتیجه می گیریم

$$\oint \frac{\ln z dz}{1+z^3} = -2\pi i$$

از طرف دیگر، با استفاده از روش مانده‌ها،

$$\oint \frac{\ln z dz}{1+z^3} = -\frac{4\pi^2 i \sqrt{3}}{9}$$

لذا،  $I = (2\pi\sqrt{3})/9$ .

وقتی حول یک نقطه شاخه‌ای، مثل این مثال، انتگرال می گیریم، لازم است نشان دهیم که انتگرال بر یک دایره خیلی کوچک حول نقطه شاخه‌ای صفر است. در این مثال، این قسمت نظیر  $r \ln r$  عمل می کند، که به ازای  $r \rightarrow 0$  به صفر نزدیک می شود. یک روش سراسرتر برای محاسبه انتگرال (۳۷.۳) عبارت است از محاسبه انتگرال

$$J = \oint \frac{dz}{1+z^3}$$

در امتداد یک کنتور بسته مرکب از (یک) محور حقیقی از 0 تا  $+\infty$  ، (دو) یکسوم دایره<sup>۶</sup> بزرگی در  $|z| = \infty$  ، و (سه) بازگشت به مبدا<sup>۶</sup> در امتداد خط  $\arg z = 2\pi/3$  . با محاسبه<sup>۶</sup>  $J$  در طول این قطعات ، معلوم می شود که

$$J = (1 - e^{2\pi i/3})I$$

از طرف دیگر ، انتگرالده  $J$  در  $z = e^{\pi i/3}$  قطب ساده دارد و از قضیه<sup>۶</sup> مانده ها نتیجه می شود که

$$J = \frac{2\pi i}{3e^{2\pi i/3}}$$

بنابراین ، مثل قبل ،

$$I = \frac{2\pi i}{3} \frac{e^{-2\pi i/3}}{1 - e^{2\pi i/3}} = \frac{\pi}{3 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

مثال .

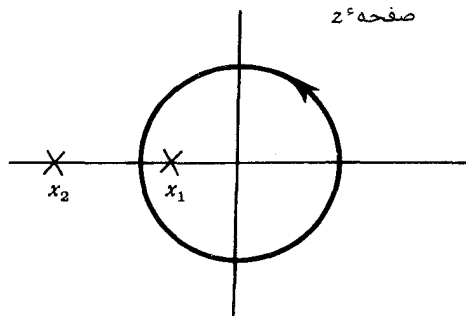
(۳۸.۳)

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} \quad a > b > 0$$

انتگرالده زوج است ؛ در نتیجه ،

$$2I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta}$$

هرگاه مثل شکل ۴.۳ روی دایره<sup>۶</sup> بیکه انتگرال بگیریم :



شکل ۴.۳ کنتور برای انتگرال (۳۸.۳)

(۳۹.۳)

$$z = e^{i\theta} \quad dz = ie^{i\theta} d\theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

$$2I = \int_C \frac{dz/(iz)}{a + (b/2)[z + (1/z)]}$$

$$= \frac{2}{i} \int_C \frac{dz}{bz^2 + 2az + b}$$

انتگرالده دارای دو قطب ( در ریشه‌های مخرج ) است . حاصل ضرب ریشه‌ها عبارت است از  $b/b = 1$  ؛ یکی خارج و یکی داخل دایره بیکه است . این ریشه‌ها عبارتند از

$$x_{1,2} = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$$

در این صورت ،

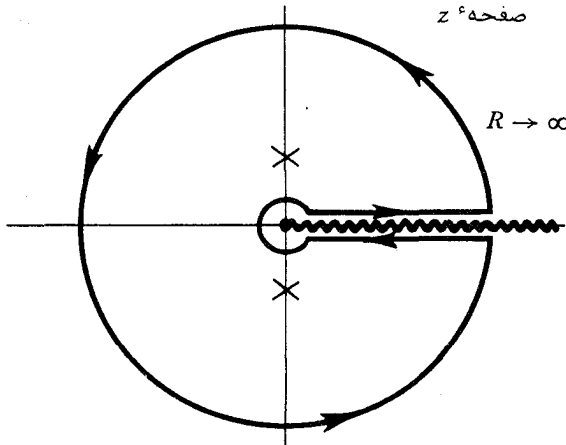
$$2I = \frac{2}{i} 2\pi i \left( x_1 = -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \right)$$

$$I = 2\pi \left( \frac{1}{2bx_1 + 2a} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

مثال

(۴۰۰۳) 
$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}$$

انتگرال  $\oint \frac{\sqrt{z} dz}{1+z^2}$  را روی کنتور شکل ۵.۳ در نظر می‌گیریم.  $\sqrt{z}$  را در بالای بریدگی مثبت صفحه  $z$



شکل ۵.۳ کنتور برای انتگرال (۴۰۰۳)

می‌گیریم. در این صورت ،

$$\oint \frac{\sqrt{z} dz}{1+z^2} = 2I$$

اما، با استفاده از مانده‌ها،

$$\oint \frac{\sqrt{z} dz}{1+z^2} = \pi\sqrt{2}$$

بنابراین،  $I = \pi/\sqrt{2}$ .

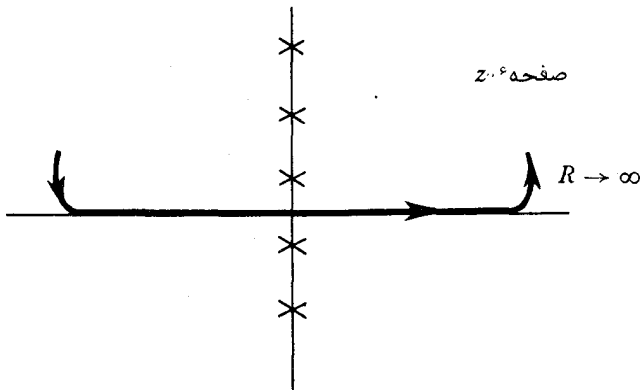
مثال

$$(۴۱.۳) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx \quad (0 < a < 1)$$

واضح است که می‌خواهیم

$$\int \frac{e^{az} dz}{e^z + 1}$$

را در امتداد کنتوری در نظر بگیریم. یک انتخاب در شکل ۶.۳ نموده شده است، که شامل



شکل ۶.۳ کنتور برای انتگرال (۴۱.۳)

نیمدایره<sup>۶</sup> بزرگ آشنا می‌باشد. توجه کنید که ما باید به  $a$  قسمت موهومی کوچکی بدهیم تا مطمئن شویم که انتگرال در امتداد نیمدایره صفر می‌شود. در این صورت،

$$I = 2\pi i \sum \text{مانده‌ها}$$

بی‌نهایت قطب وجود دارد.

در  $z = i\pi$  مانده مساوی است با  $-e^{i\pi a}$

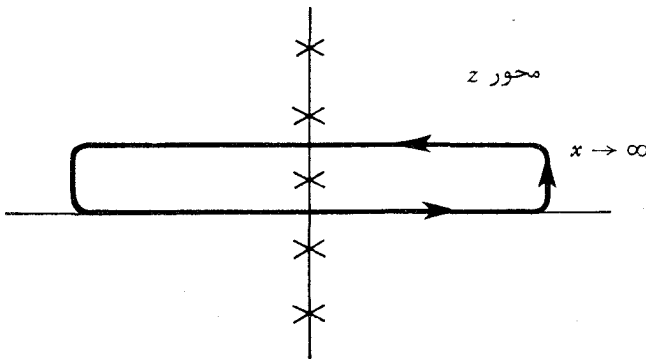
در  $z = 3i\pi$  مانده مساوی است با  $-e^{3i\pi a}$ ، و غیره

لذا،

$$I = -2\pi i \frac{e^{ina}}{1 - e^{2ina}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

حال می توان فرض کرد  $Im a \rightarrow 0$ .

به روش دیگر، می توان از کنتور شکل ۷.۳ استفاده کرد. در امتداد محور حقیقی  $I$



شکل ۷.۳ کنتور دیگری برای انتگرال (۴۱.۳)

به دست می آید، و در امتداد  $Im z = 2\pi i$  داریم

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{e^{x+2\pi i} + 1} dx = -e^{2\pi i \alpha} I$$

لذا،

$$(1 - e^{2\pi i \alpha})I = 2\pi i (\text{residue at } z = \pi i)$$

$$= -2\pi i e^{i\pi \alpha}$$

$$I = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \quad \text{مثل قبل،}$$

مثال

(۴۲.۳)

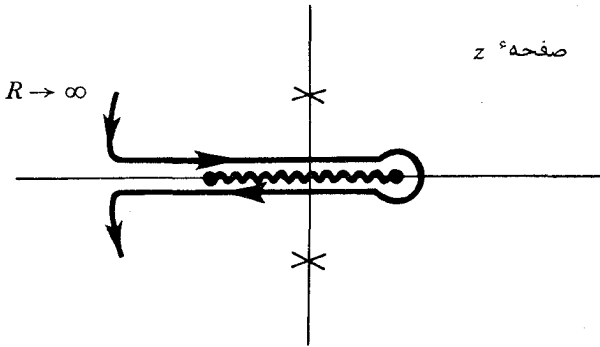
$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}$$

انتگرال

$$\oint \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}(1+z^2)}$$



را روی کنتور شکل ۸.۳ در نظر می‌گیریم. در بالای بریدگی  $I$  به دست می‌آید، وزیربریدگی



شکل ۸.۳ کنتور برای انتگرال (۴۲.۳)

$I$  دیگری به دست می‌آوریم. بنابراین،

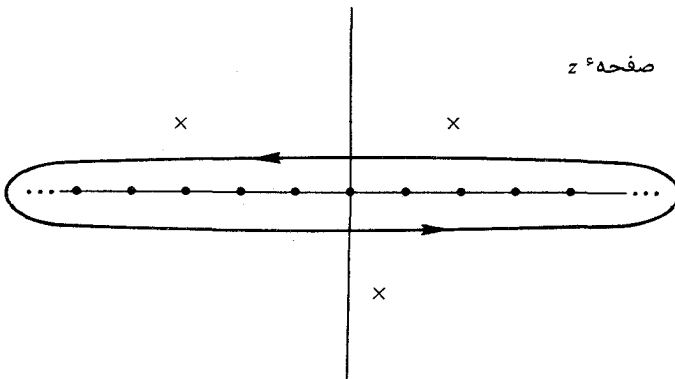
$$\begin{aligned} 2I &= 2\pi i \left[ \frac{1}{2i\sqrt{2}} + \frac{1}{2i\sqrt{2}} \right] \\ &= \pi\sqrt{2} \\ I &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

مثال. انتگرال

(۴۳.۳)

$$I = \oint \frac{f(z) dz}{\sin \pi z}$$

را روی کنتور شکل ۹.۳ در نظر می‌گیریم، که در آن  $f(z)$  چند انفراد تنها دارد (که در شکل

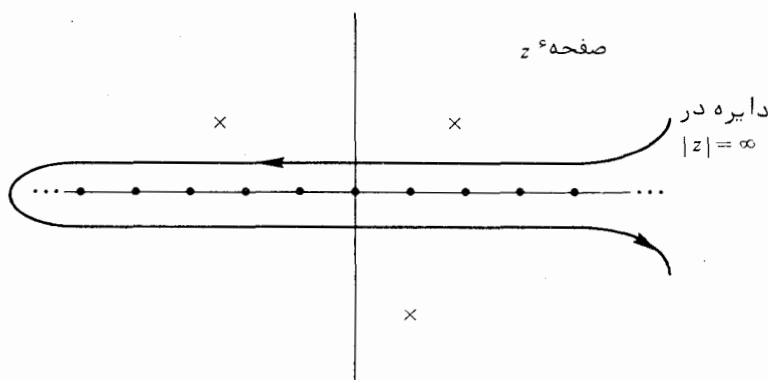


شکل ۹.۳ کنتور اصلی برای انتگرال (۴۳.۳)

با ضربدر مشخص شده‌اند) و وقتی  $|z| \rightarrow \infty$  دست کم به سرعت  $|z|^{-1}$  به صفر می‌رود. از طرفی، انتگرال  $I$  را می‌توان با جمع‌بندی مانده‌ها در صفرهای  $\sin \pi z$  (که در شکل ۹.۳ با نقاط نموده شده‌اند) حساب کرد. نتیجه خواهد شد

$$(44.3) \quad I = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} (-)^n f(n)$$

از طرف دیگر انتگرال روی کنتور شکل ۹.۳ بوضوح همان انتگرال روی کنتور شکل ۱۰.۳ است، زیرا انتگرال حول دایره در  $|z| = \infty$  صفر می‌شود. اما انفرادهای داخل کنتور شکل ۱۰.۳ انفرادهای  $f(z)$  هستند؛ هرگاه مواضع و مانده‌ها را به ترتیب با  $z_k$  و  $R_k$  نشان



شکل ۱۰.۳ کنتور تغییر شکل یافته برای انتگرال (۴۳.۳)

دهیم، آنگاه

$$I = -2\pi i \sum_k \frac{R_k}{\sin \pi z_k}$$

از مقایسه با (۴۴.۳) فرمول جمع‌بندی زیر به دست می‌آید:

$$(45.3) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-)^n f(n) = -\pi \sum_k \frac{R_k}{\sin \pi z_k}$$

این طرح، که یک مجموع نامتناهی را به یک انتگرال کنتوری که متعاقباً "تغییر شکل می‌یابد" تبدیل می‌کند، به تبدیل سومر فلد-واتسون<sup>۱</sup> معروف است. به عنوان مثال، سری زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. ر.ک. سومر فلد (S9) ضمیمه فصل VI یا جی.ان. واتسون (W1).

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \frac{\sin x}{a^2 + 1} - \frac{2 \sin 2x}{a^2 + 4} + \frac{3 \sin 3x}{a^2 + 9} - + \dots \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2}
 \end{aligned}$$

این با فرض

$$f(z) = -\frac{1}{2} \frac{z \sin xz}{a^2 + z^2}$$

همان طرف چپ (۴۵.۳) می باشد ( توجه کنید که برای آنکه دایره بزرگ شکل ۱۰.۳ سهمی در انتگرال نداشته باشد باید  $|x| < \pi$  ) اما مواضع و مانده های قطبهای  $f(z)$  عبارتند از

$$\begin{aligned}
 z_1 &= ia & z_2 &= -ia \\
 R_1 &= -\frac{i}{4} \sinh ax & R_2 &= \frac{i}{4} \sinh ax
 \end{aligned}$$

بنابراین، از فرمول (۴۵.۳) خواهیم داشت

$$S(x) = -\pi \left[ \frac{-\frac{i}{4} \sinh ax}{i \sinh a\pi} + \frac{\frac{i}{4} \sinh ax}{-i \sinh a\pi} \right] = \frac{\pi \sinh ax}{2 \sinh a\pi}$$

همانطور که در بالا گفتیم، این نتیجه فقط وقتی برقرار است که  $|x| < \pi$  به ازای  $x$  های خارج از این برد، کافی است توجه کنیم که، طبق تعریف،  $S(x)$  نسبت به  $x$  متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  می باشد.

### ۴.۳ انتگرالهای جدولی

ابتدا ( مجدداً ) تابع گاما را ذکر می کنیم، که به ازای  $\text{Re } z > 0$  با انتگرال

(۴۶.۳)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

تعریف شده است، انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می دهد که

(۴۷.۳)

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1) \quad (\text{Re } z > 1)$$

لذا، از  $\Gamma(1) = 1$  داریم

(۴۸.۳)

$$\Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, \Gamma(4) = 6, \dots, \Gamma(n) = (n-1) !$$

تابع گاما را می توان به وسیله رابطه بازگشتی (۴۷.۳) به طور تحلیلی به تمام صفحه

مختلط، جز قطبهای ساده در  $z = 0, -1, -2, \dots$ ، توسعه داد،  
با در نظر گرفتن

$$\Gamma(r)\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x} dx \int_0^\infty y^{s-1}e^{-y} dy$$

به انتگرال جالبی در این رابطه برمی خوریم. فرض کنیم  $x + y = u$ .

$$\Gamma(r)\Gamma(s) = \int_0^\infty du \int_0^u dx x^{r-1}(u-x)^{s-1}e^{-u}$$

فرض کنیم  $x = ut$ .

$$\begin{aligned} \Gamma(r)\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-u} u^{r+s-1} du \int_0^1 dt t^{r-1}(1-t)^{s-1} \\ &= \Gamma(r+s)B(r, s) \end{aligned}$$

که در آن  $B(r, s)$  تابع بتا می باشد:

$$(49.3) \quad B(r, s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1} dx$$

این نمایش انتگرالی برای  $B(r, s)$  فقط به ازای  $\operatorname{Re} r > 0$  و  $\operatorname{Re} s > 0$  معتبر است؛ تساوی اول در (49.3)،  $B(r, s)$  را به ازای هر  $r, s$  در صفحه مختلط تعریف می کند. یک حالت خاص جالب این رابطه عبارت است از

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(1)B(z, 1-z) \\ &= \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{-z} dx \end{aligned}$$

فرض کنیم  $x = t/(1+t)$  در این صورت،

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1+t} dt$$

این انتگرال را می توان با استفاده از کنتور شکل ۱۱.۳ حساب کرد<sup>۱</sup>. نتیجه عبارت است

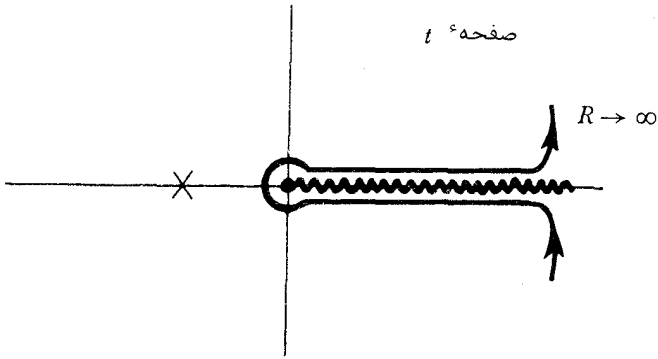
$$(50.3) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

این نتیجه فقط به ازای  $0 < \operatorname{Re} z < 1$  معتبر است، ولی طرفین (50.3) توابعی تحلیلی از  $z$  اند (جز در  $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )؛ در نتیجه، می توان آن را به تمام صفحه تعمیم داد.

انتگرال دیگری که نامی بر آن گذارده اند انتگرال نمایی است:

$$(51.3) \quad \operatorname{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$$

۱. به روش دیگر، کافی است در مثال (41.3) تغییر متغیر ساده ای بدهیم.



شکل ۱۱.۳ کنتور برای انتگرال

این تعریف معمولاً "با بریدن صفحه<sup>۶</sup>  $x$  در امتداد محور حقیقی مثبت تکمیل می‌شود. لذا،  $Ei(x)$  به ازای  $x$  حقیقی منفی تعریف شده است، ولی به ازای  $x$  حقیقی مثبت باید بین  $Ei(x + ie)$  و  $Ei(x - ie)$  تمایز قایل شد.

دو تابع مربوط به  $Ei(x)$  عبارتند از انتگرالهای سینوسی و کسینوسی:

$$(۵۲.۳) \quad Si\ x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$(۵۳.۳) \quad Ci\ x = \int_{\infty}^x \frac{\cos t}{t} dt$$

تابع خطا به صورت زیر تعریف شده است:

$$(۵۴.۳) \quad erf\ x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

انتگرالهای مثلثاتی مربوطه به انتگرالهای فرنل معروفند:

$$(۵۵.۳) \quad C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$$

رده<sup>۶</sup> دیگری از انتگرالها که در بسیاری از جاها به جدول درآمده‌اند رده<sup>۶</sup> انتگرالهای

بیضوی است. اینها انتگرالهایی هستند به شکل زیر:

$$(۵۶.۳) \quad \int dx \frac{A(x) + B(x)\sqrt{S(x)}}{C(x) + D(x)\sqrt{S(x)}}$$

۱. قرار دادهای فرق می‌کنند. تعاریف (۵۵.۳) ما با مگنس و دیگران (M1) سازگارند ولی با اردلی و دیگران (E5) چنین نیستند.

که در آن  $A, B, C, D$  چند جمله‌ای بوده و  $S$  یک چند جمله‌ای از درجه سوم یا چهارم است (البته، نه مربع کامل).

ما وارد نظریه عمومی این انتگرالها نمی‌شویم، فقط چند نکته را گوشزد می‌کنیم که دانشجوی می‌تواند آنها را تحقیق نماید<sup>۱</sup>. "اولاً"،

$$(57.3) \quad \frac{A + B\sqrt{S}}{C + D\sqrt{S}} = E + \frac{F}{\sqrt{S}}$$

که در آن  $E$  و  $F$  گویا (نسبت‌های چند جمله‌ایها) می‌باشند. با تجزیه  $F$  به کسرهای جزئی می‌بینیم که تنها انتگرالهای غیرمقداماتی مورد نیاز عبارتند از

$$(58.3) \quad J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{S}} \quad H_n = \int \frac{dx}{(x-c)^n \sqrt{S}}$$

اما می‌توان تمام  $J_n$  ها را از  $J_0, J_1, J_2$ ، و تمام  $H_n$  ها را از  $H_1, J_0, J_1, J_2$ ، و تمام حساب کرد. لذا، ما فقط به

$$(59.3) \quad J_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{S}} \quad J_1 = \int \frac{x dx}{\sqrt{S}} \quad J_2 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{S}} \quad H_1 = \int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{S}}$$

نیاز داریم.

شکلهای متعارف مختلفی برای  $S$  وجود دارند؛ ما فقط شکل لژاندر، یعنی  $S = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ ، را در نظر می‌گیریم. در این صورت،

$$J_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$(60.3) \quad F = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

انتگرال

انتگرال بیضوی لژاندر نوع اول نام دارد. به‌طور کلی، قرار می‌دهند  $x = \sin \phi$  و تعریف می‌کنند

$$(61.3) \quad F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$$

اگر قرار دهیم  $x^2 = u$ ،  $J_1$  یک انتگرال "مقداماتی" می‌باشد.

به جای  $J_2$ ، انتگرال بیضوی نوع دوم لژاندر

$$(۶۲.۳) \quad E = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2} dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

را انتگرال متعارف می‌گیرند. مجدداً، به‌طور کلی قرار می‌دهند  $x = \sin \phi$ ، و انتگرال

$$(۶۳.۳) \quad E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

را به جدول درمی‌آورند.

انتگرال  $H_1$  مشکل است. انتگرال بیضوی نوع سوم لژاندر را به صورت زیر تعریف

می‌کنیم:

$$(۶۴.۳) \quad \Pi(\phi, n, k) = \int_0^\phi \frac{dx}{(1 + nx^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

$$(۶۵.۳) \quad = \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 + n \sin^2 \phi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

وقتی  $\phi = \pi/2$ ، انتگرالهای بیضوی تام را داریم:

$$(۶۶.۳) \quad K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

$$(۶۷.۳) \quad E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

$$(۶۸.۳) \quad \Pi(n, k) = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 + n \sin^2 \phi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

فرمولهای تحویل S به شکل متعارف در کتب مختلفی آمده‌اند؛ مثلاً، در مگنوس<sup>۱</sup> و دیگران

(M1)، بخش ۱۰.۱۰، یا آبراموویتس و استگون (A1)، فصل ۱۷. انتگرالهای بیضوی، از

جمله جاهای دیگر، در

۱. حرکت پاندول ساده

۲. یافتن ضریب القای سیم پیچها

۳. یافتن طول مقاطع مخروطی

۴. محاسبه زوایای فضایی دوایری که مایل رویت می‌شوند

ظاهر می‌گردند.

تعداد زیادی انتگرال به‌توابع جدولی مربوطند؛ این نمایشهای انتگرالی گاهی بسیار

مفیدند. مثلاً،

$$(۶۹۰۳) \quad \int_0^1 \frac{\cos tx \, dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} J_0(x)$$

$$(۷۰۰۳) \quad \int_0^\theta \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \theta}} \, d\phi = \frac{\pi}{\sqrt{2}} P_n(\cos \theta)$$

$J_0(x)$  یک جواب معادله بسل با  $m=0$  است که به طرز مناسبی نرمالی شده است، و به تابع بسل معروف است؛  $P_n$  یک چندجمله‌ای لژاندر می‌باشد. در فصل ۷ این نمایشهای انتگرالی "توابع خاص" را با تفصیل بیشتر مطالعه خواهیم کرد.

### ۵.۳ بسطهای تقریبی

اغلب با بسط انتگرالده به سری می‌توان عبارت مفیدی برای یک انتگرال به دست آورد.

مثال

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left( 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots \right) dt \\ (۷۱۰۳) \quad &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right) \end{aligned}$$

این سری به ازای هر  $x$  همگراست، ولی فقط به ازای  $x$  های  $(x \lesssim 1)$  کوچک مفید است.

انتگرالگیری جزء به جزء اغلب مفید واقع می‌شود.

مثال. فرض کنید  $\operatorname{erf} x$  را به ازای  $x$  های بزرگ بخواهیم. وقتی  $x \rightarrow \infty$ ،  $\operatorname{erf} x \rightarrow 1$ . تفاضل آن از ۱ را حساب می‌کنیم.

$$1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} \, dt$$

انتگرالگیری جزء به جزء را متوالیا انجام می‌دهیم.

$$\int_x^\infty e^{-t^2} \, dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2} \, dt$$



$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \int_x^\infty \frac{3}{4} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt$$

و غیره .

نتیجه پس از  $n$  بار انتگرالگیری جزء به جزء ( $n > 1$ ) عبارت است از

$$\operatorname{erf} x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left[ \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n x^{2n-1}} \right]$$

$$(۷۲.۳) \quad + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}} dt$$

جملات داخل کروشه شروع یک سری نامتناهی همگرا را تشکیل نمی دهند . سری به ازای هر  $x$  همگرا نیست ، زیرا جملات با افزایش  $n$  مآلاً افزایش می یابند . معهداً ، این عبارت با تعدادی متناهی جمله به ازای  $x$  های بزرگ بسیار مفید می باشد .

عبارت (۷۲.۳) در صورتی کامل است که " باقیمانده " ، یعنی آخرین جمله ، شامل انتگرال را بگنجانیم . این باقیمانده با افزایش  $n$  تغییر علامت می دهد ، که بدان معنی است که خطا پس از  $n$  جمله در سری از حیث اندازه از جمله بعدی کوچکتر است . لذا ، دقت عبارت تقریبی در کروشه در صورتی ماکزیمم است که در جمله قبل از کوچکترین جمله توقف کنیم .

سری داخل کروشه در (۷۲.۳) در صورتی که تا بی نهایت ادامه یابد یک سری مجانبی است<sup>۱</sup> . تعریف دقیق یک سری مجانبی به شکل زیر است :

$$(۷۳.۳) \quad S(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

که یک بسط سری مجانبی  $f(z)$  است [ که به صورت  $S(z) \sim f(z)$  نوشته می شود ، که در آن  $\sim$  خوانده می شود : " به طور مجانبی مساوی است با " ] مشروط بر آنکه به ازای هر  $n$  ، خطای ناشی از ختم سری به جمله  $c_n z^{-n}$  ، وقتی  $|z|$  به ازای بردی از  $\arg z$  به  $\infty$  می رود ، سریعتر از  $z^{-n}$  به صفر برود . یعنی ، به ازای  $\arg z$  در بازه داده شده ،

$$(۷۴.۳) \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n [f(z) - S_n(z)] = 0$$

$S_n(z)$  یعنی  $c_0 + c_1/z + \dots + c_n/z^n$  .

۱. این ایده احتمالاً " از پوانکاره است " . ر.ک . مرجع (P2) ، فصل VIII .

[ یک سری همگرا وقتی  $n \rightarrow \infty$  به ازای  $z$  داده شده به  $f(z)$  نزدیک می شود، حال آنکه یک سری مجانبی وقتی  $\infty \rightarrow z$  به ازای  $n$  داده شده به  $f(z)$  نزدیک خواهد شد. ]

از تعریف به آسانی معلوم می شود که سربهای مجانبی را می توان به هم افزود، درهم ضرب کرد، و انتگرال گرفت و حاصل سری مجانبی مجموع، حاصل ضرب، و انتگرال توابع نظیر است. همچنین، بسط مجانبی تابع داده شده  $f(z)$  منحصر به فرد است، ولی عکس این درست نیست. یک سری مجانبی تابع  $f(z)$  را به طور منحصر به فرد مشخص نمی کند [ر. ک. ویتاکر و واتسون (WS)، فصل VIII، یا جفریز و جفریز (J4)، فصل ۱۷].

ما ثابت نکرده ایم که سری آمده در (۷۲.۳) یک سری مجانبی است، ولی این کار مشکلی نیست؛ انجام آن را به خواننده علاقه مند محول می کنیم.

مثال دیگر:

$$\begin{aligned} Ei(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^t}{t} dt = \int_{\infty}^x e^{-t} \frac{dt}{t} \quad (x > 0) \\ &= -\frac{e^{-x}}{x} - \int_{\infty}^x \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ &= -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2} + 2 \int_{\infty}^x \frac{e^{-t}}{t^3} dt \end{aligned}$$

اگر به همین طریق ادامه دهیم، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} -Ei(-x) &= \frac{e^{-x}}{x} \left[ 1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots + \frac{(-1)^n n!}{x^n} \right] \\ &+ (-1)^n (n+1)! \int_{\infty}^x \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt \end{aligned} \quad (۷۵.۳)$$

این نتیجه را به دو طریق می توان به کار برد:  
۱. به عنوان سری مجانبی برای  $Ei(-x)$ ؛

$$-Ei(-x) \sim \frac{e^{-x}}{x} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots \right) \quad (۷۶.۳)$$

۲. به عنوان عبارت کامل برای محاسبه بعضی از انتگرالها، با این فرض که جدولی از  $Ei(-x)$  در دست است. از (۷۵.۳) داریم

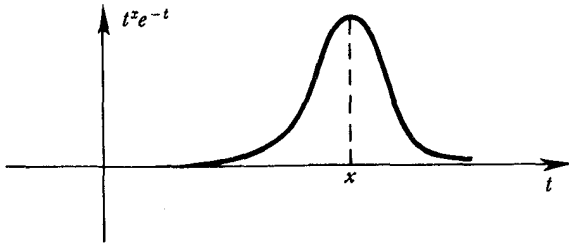
$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^n} dt &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} Ei(-x) + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{e^{-x}}{x} \\ &\times \left[ 1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \dots + (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-2}} \right] \end{aligned} \quad (۷۷.۳)$$

۶.۳ روشهای نقطه زینی

روشهای مهم دیگر تقریب انتگرالها، به روشهای نقطه زینی معروفند، دلایل این نامگذاری بزودی روشن خواهد شد. مهمترین اینها روش شیب‌ترین نزولها است. این روش را با توجه به تقریب  $\Gamma(x+1)$  به ازای  $x$  های بزرگ، مثبت، و حقیقی توضیح خواهیم داد.

$$(۷۸.۳) \quad \Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$$

انتگرالده به ازای  $x$  های بزرگ شبیه شکل ۱۲.۳ است. برای یافتن ماکزیمم، داریم



شکل ۱۲.۳ نمودار  $t^x e^{-t}$  به ازای  $x$  های بزرگ

$$0 = \frac{d}{dt} (e^{-t} t^x) = e^{-t} [-t^x + x t^{x-1}]$$

$$t = x$$

حال انتگرالده را، با نوشتن آن به شکل نمایی  $e^{f(t)}$  و استفاده از تقریب سری تیلور برای  $f(t)$  در نزدیک ماکزیمم، به طریقی خاص تقریب می‌کنیم. (مثلاً " بسط تیلور خود انتگرالده، در صورتی که فقط تعدادی جمله نگهداشته شده باشد، مفید نخواهد بود. )  
انتگرالده (۷۸.۳) عبارت است از

$$e^{f(t)} = t^x e^{-t} = e^{x \ln t - t}$$

در نتیجه،

$$f(t) = x \ln t - t$$

$$f' = 0, t = x \text{ به ازای } f'(t) = \frac{x}{t} - 1$$

$$f''(t) = -\frac{x}{t^2}$$

در این صورت، با بسط حول  $t = x$ ، خواهیم داشت

$$\Gamma(x+1) \approx \int_0^{\infty} \exp \left[ x \ln x - x - \frac{1}{2x} (t-x)^2 \right] dt$$

$$\approx e^{x \ln x - x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2x}(t-x)^2\right] dt$$

(اگر  $x \gg 1$ ، با توسعه انتگرال به  $-\infty$  - خطای بسیار کمی مرتکب می‌شویم.) با محاسبه انتگرال نتیجه می‌شود که

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$$

این اولین جمله فرمول استرلینگ<sup>۱</sup> است که بسط مجانبی  $n! = \Gamma(n+1)$  می‌باشد:

$$(۷۹.۳) \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right)$$

ما در آخر این فصل به این سری مجانبی باز خواهیم گشت.

به‌طور کلی، روش شیب‌ترین نزولها در مورد انتگرالهایی به شکل زیر قابل اعمال

است:

$$(۸۰.۳) \quad I(\alpha) = \int_C e^{\alpha f(z)} dz \quad (\alpha \text{ بزرگ و مثبت است})$$

که در آن  $C$  مسیری در صفحه مختلط است به طوری که دو انتهای مسیر سهم مهمی در انتگرال ندارند. [با این روش معمولاً "جمله اول بسط مجانبی  $I(\alpha)$  که به ازای  $\alpha$  های بزرگ معتبر است به دست می‌آید.]

اگر  $f(z) = u + iv$ ، انتظار داریم که بیشترین سهم در  $I(\alpha)$  از قسمتهایی از کنتور ناشی شود که  $u$  در آنها بیشترین است. ایده روش شیب‌ترین نزولها تغییر شکل دادن کنتور  $C$  به نحوی است که ناحیه  $u$  بزرگ حتی الامکان کوچک شود.

برای مشاهده چگونگی تغییر شکل کنتور لازم است رفتار توابع  $u$  و  $v$  در مثال فعلی را بیش و کم به تفصیل مورد بررسی قرار دهیم. با اینحال، هر تابع منظم  $f(z)$  چند ویژگی کلی دارد.  $u$  و  $v$  هیچکدام نمی‌توانند ماکزیمم یا مینیمم داشته باشند جز در یک انفراد، زیرا  $\nabla^2 v = 0$  و  $\nabla^2 u = 0$ . مثلاً، هرگاه

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0 \text{ آنگاه } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$$

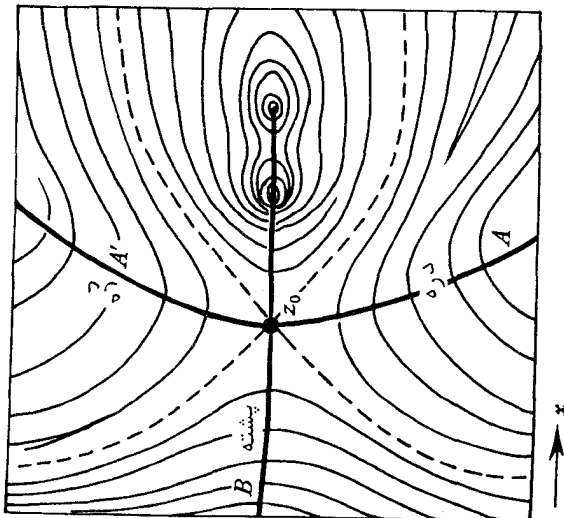
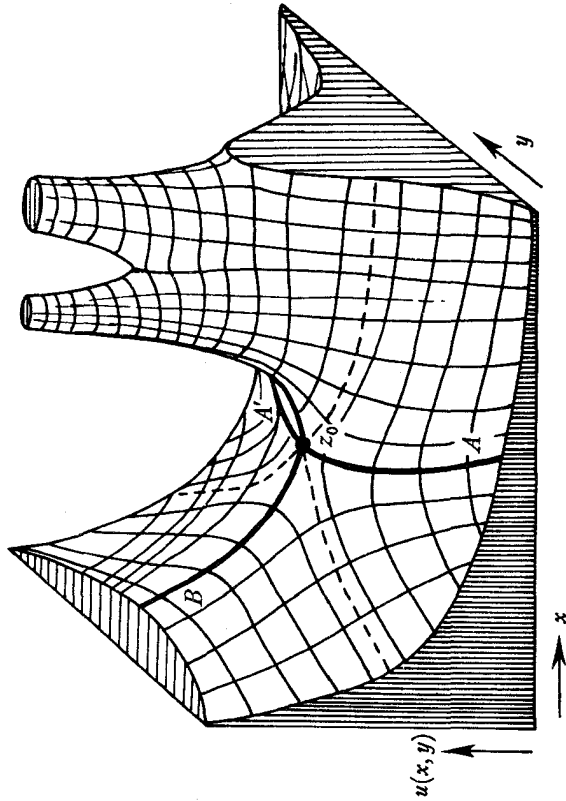
در نتیجه، هر "لکه پهن" سطح  $u(x, y)$  که در آن

### 1- Stirling

۲. این معادلات فوراً از معادلات گشی - ریمان، معادلات (ض. ۸۰) ضمیمه به دست می‌آیند.

(۸۱۰۳) 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

باید یک "نقطهٔ زینی" باشد، که در آن، سطح، شبیه زین یا گذرگاه کوهستانی مانند شکل ۱۳۰۳ است.



شکل ۱۳.۳ توپوگرافی سطح  $u = \operatorname{Re} f(z)$  در مجاورت نقطه زینی  $z_0$  برای تابع نوعی  $f(z)$ . منحنیهای پررنگ از مراکز پشتهها و درهها از نقطه زینی می گذرند، و منحنیهای منقطع کنتورهای تراز ثابت  $u = u(x_0, y_0)$  را نشان می دهند. منحنی  $AA'$  مسیر شیب ترین نزول است.

بنابر معادلات کشی<sup>۱</sup> - ریمان (ض. ۸۰)، می بینیم که (۸۱.۳) دلالت بر  $\partial v / \partial y = 0$  و  $\partial v / \partial x = 0$  دارد؛ در نتیجه،  $f'(z) = 0$ . لذا، یک نقطه زینی تابع  $u(x, y)$  یک نقطه زینی  $v(x, y)$  نیز هست نظیر نقطه ای که در آن  $f'(z) = 0$ . نزد یک نقطه زینی  $z_0$  داریم

$$f(z) \approx f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2$$

فرض کنیم  $f''(z_0) = \rho e^{i\theta}$ ،  $z - z_0 = se^{i\phi}$  در این صورت،

$$u \approx u(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \rho s^2 \cos(\theta + 2\phi)$$

(۸۲.۳)

$$v \approx v(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \rho s^2 \sin(\theta + 2\phi)$$

ملاحظه می کنیم که روی سطح  $u(x, y)$  مسیرهای شیب ترین نزول از نقطه زینی به توی درهها در جهاتی که  $\cos(\theta + 2\phi) = -1$  شروع می شود. در این جهتها  $v = v(x_0, y_0)$  ثابت است. همین طور که از  $z_0$  دور می شویم، شیب ترین مسیر جهت  $-\operatorname{grad} u$  را تعقیب می کند که بر کنتورهای  $u$  مساوی عمود است. لذا، مسیر منحنی  $v(x_0, y_0) = \text{ثابت} = v(x, y)$  را تعقیب می نماید؛ در نتیجه، عامل  $e^{i\theta}$  در انتگرالده اصلی (۸۰.۳) نوسانات مخربی تولید نخواهد کرد. لذا، کنتور اصلی  $C$  را طوری تغییر شکل می دهیم که از این مسیر شیب ترین نزول بگذرد. با استفاده از تقریب (۸۲.۳) در انتگرال (۸۰.۳) نتیجه می شود که

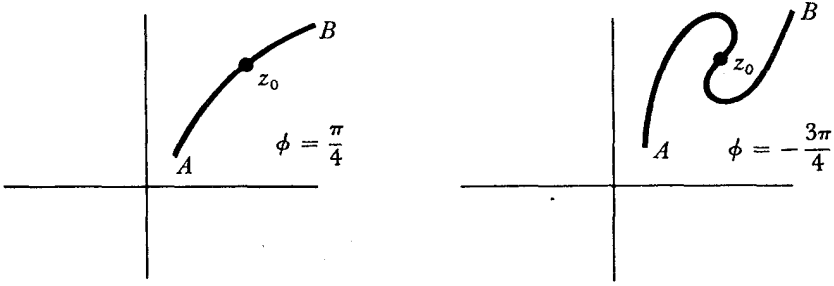
$$I(\alpha) \approx e^{\alpha f(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha/2)\rho s^2} e^{i\phi} ds$$

(۸۳.۳)

$$I(\alpha) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\rho}} e^{\alpha f(z_0)} e^{i\phi}$$

که در آن  $\phi$ ، بسته به اینکه در چه جهتی روی مسیر حرکت کنیم، یکی از مقادیر  $\pi/2 \pm \theta/2$  را دارد. ( $\phi$  چیزی جز میل مسیر در نقطه زینی نیست.) مثلاً، اگر  $\theta = \pi/2$ ، دو شکل ۱۴.۳ را داریم. احتمال درست بودن اولی بیشتر می رود، ولی برای آنکه مطمئن شویم، "برد کوهستانی" را که از آن می گذریم مورد بررسی قرار می دهیم. هر گاه شبیه قسمت (آ) شکل ۱۵.۳ باشد، آنگاه  $\phi = \pi/4$  درست است. از طرف دیگر، اگر برد شبیه قسمت (ب) شکل ۱۵.۳ باشد، حالت دوم، یعنی  $\phi = -3\pi/4$ ، درست خواهد بود.

به عنوان مثالی از روش شیب ترین نزولها با کنتوری کلیتر، تقریب مجانبی  $\Gamma(z+1)$



شکل ۱۴.۳ حالات مختلف کنطورها برای شیب‌ترین نزول

(به ازای  $z$  مختلط) را بدون ساده‌سازی به کمک کارهای قبلی ما با  $\Gamma(x+1)$  به دست می‌آوریم.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$(۸۴.۳) \quad \Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z \ln t dt$$

فرض کنیم

$$(۸۵.۳) \quad z = \alpha e^{i\beta}$$

در این صورت،

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} \exp\left[\alpha\left(\ln t - \frac{t}{z}\right)e^{i\beta}\right] dt$$

و

$$f(t) = \left(\ln t - \frac{t}{z}\right)e^{i\beta}$$

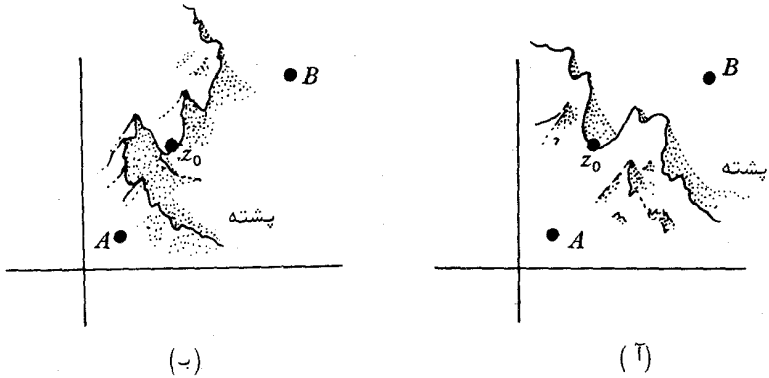
$$f'(t) = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{z}\right)e^{i\beta} \quad t_0 = z$$

$$f''(t) = \frac{-1}{t^2} e^{i\beta}$$

$$f(t_0) = (\ln z - 1)e^{i\beta} \quad f''(t_0) = -\frac{e^{i\beta}}{z^2} = \frac{-1}{\alpha^2} e^{-i\beta}$$

لذا،  $\rho = 1/\alpha^2$ ،  $\theta = \pi - \beta$ ،  $\phi$  چیست؟ با استفاده از شرط  $\cos(\theta + 2\phi) = -1$ ، داریم

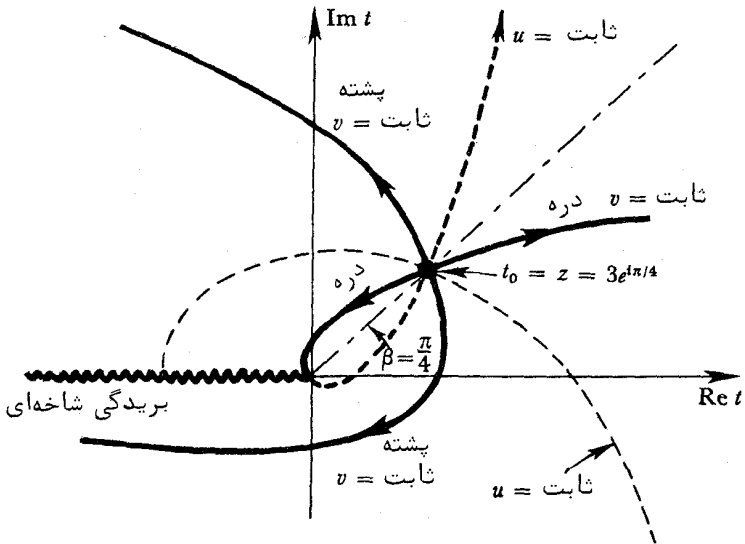
$$\phi = \frac{\beta}{2} - \pi \quad \text{یا} \quad \frac{\beta}{2}$$



شکل ۱۵.۳ "بردهای کوهستانی" مختلف برای دو حالت شکل ۱۴.۳

در مثال پیش، به ازای  $z$  حقیقی داریم  $\beta = 0$  و  $\phi = 0$ ؛ لذا، ظاهراً  $\phi = \beta/2$  مناسبترین انتخاب است. چون گاهی لازم است توپوگرافی سطح  $u = \text{Re} f(t)$  مشروحتر بررسی شود، لیکن پشته‌ها و دره‌های مثال حاضر را در شکل ۱۶.۳ به ازای  $\beta = \pi/4$  نشان می‌دهیم. این شکل انتخاب  $\phi = \beta/2$  را تأیید خواهد کرد.

حال تقریب شیب‌ترین نزول برای  $\Gamma(z+1)$  می‌توان با استفاده از (۸۰.۳) به



شکل ۱۶.۳ توپوگرافی سطح  $u = \text{Re} f(t) = \text{Re} (\ln t - t/z)e^{i\beta}$  برای حالت  $z = 3e^{i(\pi/4)}$ . واضح است که مسیر اصلی انتگرال‌گیری در امتداد محور  $t$  حقیقی باید طوری تغییر شکل یابد که از نقطه  $z$  یعنی  $t_0 = z$  بر مسیر شیب‌ترین نزول (دره‌ها) در جهت مشخص شده با زاویه  $\phi = \beta/2$  بگذرد.



صورت زیر نوشت:

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi\alpha} e^{z \ln z - z} e^{i\beta/2}$$

(۸۶.۳)

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z}$$

نمایش انتگرالی اصلی برای  $\Gamma(z)$  فقط به ازای  $\text{Re } z > 0$  معتبر است. با اینحال، نتیجه (۸۶.۳) عملاً "به ازای هر  $|z| \rightarrow \infty$  معتبر است مشروط بر اینکه از محور حقیقی منفی دور بایستیم (ر، ک، ویتاکر و واتسون (W5) در بخش ۳۳.۱۲).

نتیجه (۸۶.۳) درست جمله اول سری مجانبی تابع گاما است که اکنون آن را به

دست می آوریم. ابتدا می نویسیم

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &\approx \sqrt{2\pi} (z-1)^{z-1/2} e^{-(z-1)} \\ &\approx \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{z-1/2} e^{-(z-1)} \\ &\approx \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} \end{aligned}$$

حال قرار می دهیم

(۸۷.۳)

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots\right)$$

ثابت های  $A, B, \dots$  را می توان از رابطه بازگشتی تابع گاما به دست آورد:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

زیرا از رابطه (۸۷.۳) داریم

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \sqrt{2\pi} (z+1)^{z+1/2} e^{-(z+1)} \left[1 + \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \dots\right] \\ &= \sqrt{2\pi} \exp\left[\left(z + \frac{1}{2}\right) \log(z+1) - (z+1)\right] \\ &\quad \times \left[1 + \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \dots\right] \\ &= \sqrt{2\pi} \exp\left[\left(z + \frac{1}{2}\right) \log z - z + \left(\frac{1}{12z^2} - \frac{1}{12z^3} + \frac{3}{40z^4} - \dots\right)\right] \\ &\quad \times \left[1 + \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \dots\right] \\ &= \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12z^2} - \frac{1}{12z^3} + \frac{113}{1440z^4} - \dots\right) \\ &\quad \times \left[1 + \frac{A}{z} + \frac{B-A}{z^2} + \frac{C-2B+A}{z^3} + \dots\right] \end{aligned}$$

از طرف دیگر، از رابطه (۸۷.۳) فوراً خواهیم داشت

$$z\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots\right)$$

با متحد گرفتن جملات نظیر در دو سری، به دست می‌آوریم

$$A = 1/12, B = 1/288, \dots$$

این نتیجه با فرمول (۷۹.۳) که قبلاً به ازای  $z = n$  ذکر شده سازگار است. معتبر بودن این روند کشف قبلاً ثابت نشده است، ولی جواب درست را به ما می‌دهد.

لازم است آخرین روند برای محاسبه تقریبی انتگرالها را ذکر کنیم. این روند روش فاز ایستا است و در رابطه با انتگرالهایی است که به شکل زیر می‌باشند:

$$I = \int_C e^{i\alpha f(z)} dz \quad (88.3)$$

که در آن  $\alpha$  بزرگ و مثبت بوده، و  $f(z)$  در امتداد کنتور  $C$  حقیقی است. جز در حالت  $f'(z) = 0$ ، قسمت اعظم سهم همسایگی  $z$  در  $I$  به خاطر نوسانات سریع  $e^{i\alpha f(z)}$  حذف می‌شود. لذا، نقاطی در امتداد کنتور جستجو می‌کنیم که  $f'(z) = 0$ ، و از

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{i(\pi/4)}$$

استفاده می‌نماییم. این روش با روش شیب‌ترین نزول ارتباط نزدیک دارد. توجه کنید که اگر انتگرالدهم‌های دو روش به یک شکل نوشته شوند، یعنی  $e^{\alpha f(z)}$ ، مسیرهای انتگرالگیری برای روش شیب‌ترین نزول در امتداد منحنی ثابت  $\text{Im} f(z)$ ، و برای روش فاز ایستا در امتداد منحنی ثابت  $\text{Re} f(z)$  خواهد بود.

### مراجع

گردایه‌های مناسبی از انتگرالهای مفید را می‌توان در دوایت (D8) و پیرس و فوستر (P1) یافت. گروینر<sup>۱</sup> و هوفریترا<sup>۲</sup> (G8) و گراداشتین<sup>۳</sup> و ریزیک<sup>۴</sup> (G6) لیستهای مفصلتری به ما می‌دهند. امکان یافتن یک انتگرال در جدول تبدیلات انتگرال، نظیر جداول آمده در اردلی<sup>۵</sup> و دیگران (E6) را نباید از نظر دور داشت.

بسیاری از جداول و نمودارهای مفید توابع تعریف شده در این فصل و فصول بعد را

1- Grobner

2- Hofreiter

3- Gradshteyn

4- Ryzhik

5- Erdelyi

می‌توان در یانکه و دیگران (J3) ، و آبرامویتس و استگون (A1) یافت . خواص اضافی این توابع در مگنوس و دیگران (M1) و اردلی و دیگران (E5) جمع‌آوری شده است . بخصوص ، خواننده‌ای که بخواهد یک انتگرال بیضوی را محاسبه کند تبدیلات و فرمولهای تحویل در مگنوس و دیگران (M1) ، فصل ده ؛ آبرامویتس و استگون (A1) ، بخش ۱۷ ؛ یانکه و دیگران (J3) ، فصل پنج ؛ میلن<sup>۱</sup> - تامسون<sup>۲</sup> (M7) صفحات ۲۶ تا ۳۸ ؛ و هنکوک<sup>۳</sup> (H6) را مناسب خواهد یافت . همچنین ، مونوگراف زیبای آرتین<sup>۴</sup> (A6) در مورد تابع گاما را نباید از نظر دور داشت .

محاسبه انتگرالها با انتگرالگیری کنتموری در بسیاری از کتابها آمده است ؛ از آنجمله می‌توان کاپسون<sup>۵</sup> (C8) ، فصل شش ؛ ویتاکر و واتسون (W5) ، فصل III ؛ و مورس و فشبک<sup>۶</sup> (M9) ، فصل ۴ را نام برد .

بسطهای مجانبی در جفریز و جفریز (J4) ، فصل ۱۷ ؛ ویتاکر و واتسون (W5) ، فصل هشت ؛ اسمیت (S5) ، فصل ۸ مطرح شده‌اند . دو کتاب کوچکتر ، که به بسطهای مجانبی و مسائل مربوطه اختصاص دارند ، عبارتند از اردلی (E3) و دوبروین<sup>۷</sup> (D4) . روشهای نقطه‌ه زینی در آخرین مرجع فوق‌الذکر و نیز جفریز و جفریز (J4) ، فصل ۱۷ ؛ اسمیت (S5) ، فصل ۸ ؛ و مورس و فشبک (M9) ، فصل ۴ مورد بحث قرار گرفته‌اند .

### مسائل

انتگرالهای مسائل ۱.۳ تا ۹.۳ را حساب کنید .

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ay} - e^{-by}}{y} dy \quad . 1.3$$

$$\int_0^{\infty} \sin bx \, dx \quad . 2.3 \quad ( \text{از یک عامل همگرایی استفاده کرده ، انتگرالگیری کنید ، و}$$

سپس عامل همگرایی را حذف نمایید)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax \, dx}{1+x^2} \quad . 3.3$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax \, dx}{(1+x^2)^2} \quad . 4.3$$

---

1-Milne	2-Thomson	3-Hancock	4-Artin
5-Copson	6-Morse	7-Feshbach	8-de Bruijn

۵.۳  $\int d^3x e^{ia \cdot x} e^{-br^2}$  (علامت  $d^3x$  یعنی  $dx dy dz$ ، و در حالت کلی عنصر حجم در فضای سه بعدی است)

۶.۳  $\int d^3x x e^{ia \cdot x} e^{-br^2}$

۷.۳  $\int_0^1 \frac{dx}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$

راهنمایی. انتگرالده را به سری توانی بسط دهید.

۸.۳  $\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh x}$

راهنمایی. انتگرالده را به سری بسط دهید که در مجاورت  $x = \infty$  مفید باشد.

۹.۳  $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

انتگرالهای ۱۰.۳ تا ۲۴.۳ را با انتگرالگیری کنتوری حساب کنید.

۱۰.۳  $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$

۱۱.۳  $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t} d\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$  (قطبها را کمی بالای محور حقیقی قرار دهید)

۱۲.۳  $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^2}$

۱۳.۳  $\int \frac{d^3x}{(a^2 + r^2)^3}$

۱۴.۳  $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(a+bx)}$  ( $a > b > 0$ )

۱۵.۳  $\int_0^\infty \frac{x dx}{1+x^5}$

۱۶.۳  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{a + b \cos \theta}$  ( $a > |b|$ )

۱۷.۳  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sinh ax}{\sinh \pi x} dx$

۱۸.۳  $\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^4} \quad .19.3$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^3} \quad (a > 0, b > 0) \quad .20.3$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^3} \quad .21.3$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x(a^2+x^2)} \quad .22.3$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b \cos \theta)^2} \quad (a > b > 0) \quad .23.3$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{(x+1)^2} \quad .24.3$$

۲۵.۳. انتگرال  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \text{Ci}(ax) dx$  را حساب کنید.

۲۶.۳. انتگرال  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \text{erf} x dx$  را حساب کنید.

۲۷.۳. حاصل عبارات زیر را حساب کنید:

$$B(1, 3) \quad (\text{پ}) \qquad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \quad (\text{ب}) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{آ})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (\text{ث}) \qquad B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad (\text{ت})$$

۲۸.۳. انتگرال  $\int_0^{\infty} e^{-sx} [-\text{Ei}(-x)] dx$  را حساب کنید.

۲۹.۳. انتگرال  $\int_{-2}^2 (4-x^2)^{1/6} dx$  را برحسب توابع بتا و گاما حساب کنید.

۳۰.۳. انتگرال  $F(z) = \int_C dt (-t)^{z-1} e^{-t}$  را در نظر بگیرید که در آن صفحه  $t$  در امتداد

محور حقیقی مثبت بریده شده است،  $(-t)^{z-1}$  مساوی  $\exp[(z-1) \ln(-t)]$  تعریف

شده است که در آن  $\ln(-t)$  بر محور  $t$  حقیقی منفی حقیقی است، و مسیر انتگرالگیری

$C$  از  $t = +\infty$  زیر بریدگی آمده، حول مبداء رفته، و به  $t = +\infty$  بالای بریدگی باز

می‌گردد. این انتگرال معرف تابع گامای  $\Gamma(z)$  در تمام صفحه مختلط است [به‌خلاف

تعریف (۴۶.۳)]: به‌طور دقیقتر،  $\Gamma(z) \times (\text{چیزی}) = F(z)$  (چیزی) را حساب

کنید.

۳۱.۳. (آ) انتگرال کنتوری  $\oint f(z) \operatorname{ctn} \pi z \, dz$  را حول یک کنتور بزرگ مناسب در نظر گرفته، و بدین وسیله فرمولی برای مجموع

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$$

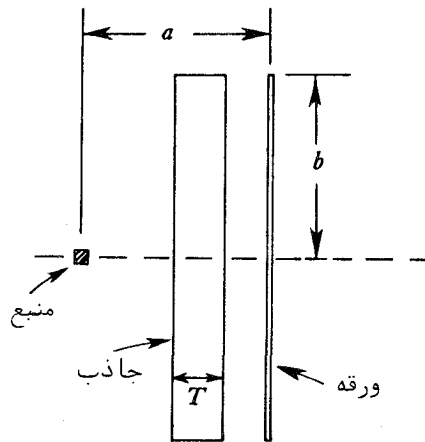
به دست آورید.

(ب) سری

$$g(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

را حساب کنید.

۳۲.۳. مسافت آزاد میانگین جذب  $\lambda$  برای نوترونهای یک مادهء معین با یک آزمایش جذب به صورت زیر اندازه گیری می شود: یک ورقهء نازک آشکارساز به شکل دیسکی به شعاع  $b$  در فاصلهء  $a$  از یک منبع نقطه ای از نوترونها تحت تابش قرار داده، و فعالیت  $A_0$  را اندازه می گیریم. سپس یک جاذب به ضخامت  $T$  را بین منبع و ورقه به صورت نشان داده شده قرار می دهیم، و فعالیت  $A$  ی ایجاد شده در همان فاصلهء زمانی را اندازه می گیریم. اگر  $a = b = 12 \text{ cm}$ ،  $T = 1 \text{ cm}$ ، و  $A/A_0 = 0.25$ ،  $\lambda$  را پیدا کنید.



#### تبصره

۱. چشمه به طور همسانگرد نوترون گسیل می کند.
۲. از پراکندگی نوترونها صرف نظر کنید.
۳. شدت نوترون با پیمودن مسافت  $d$  از میان جاذب با عامل  $e^{-d/\lambda}$  تقلیل می یابد.
۴. فعالیت ایجاد شده توسط نوترون در ورقه با فاصلهء پیموده شده توسط آن در

ورقه متناسب است .

۳۳.۳ . انتگرال  $\oint \Gamma(z)e^{zz} dz$  را حول کنتور  $|z| = \frac{\epsilon}{2}$  یکبار در جهت مثبت حساب کنید .

۳۴.۳ . دو بسط برای  $\text{Si } x$  بیابید که یکی به ازای  $x$  های کوچک و دیگری به ازای  $x$  های بزرگ مفید باشد .

۳۵.۳ . انتگرال  $I(x) = \int_0^\infty dt e^{xt-e^t}$  را به ازای  $x$  های مثبت بزرگ به طور تقریبی حساب کنید .

۳۶.۳ . انرژی یک ستاره توسط واکنشهای هسته‌ای تولید می‌شود . تعداد برخورد ها با انرژی جنبشی CM در بازه  $E$  از  $E + dE$  مساوی است با

$$Ne^{-E/kT} E dE$$

در واحد زمان ، که در آن  $k$  ثابت بولتزمن<sup>۱</sup> ،  $T$  دما ، و  $N$  یک ثابت است . احتمال آنکه یک برخورد با انرژی جنبشی CM ،  $E$  به واکنشی هسته‌ای منجر شود عبارت است از

$$Me^{-\alpha/\sqrt{E}}$$

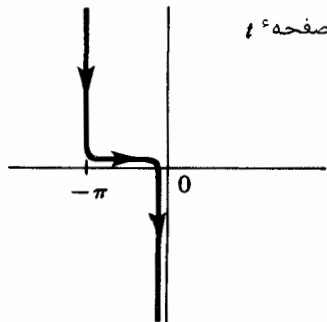
که در آن  $M$  و  $\alpha$  مقادیر ثابت‌اند . با فرض  $1 \ll \left(\frac{kT}{\alpha^2}\right)^{1/3}$  ، برای تعداد کل واکنشهای هسته‌ای در واحد زمان یک عبارت تقریبی بیابید .

۳۷.۳ . درستی نتیجه<sup>۶</sup> (۳۱.۳) را تحقیق کنید .

۳۸.۳ . برای تابع

$$f_n(x) = \int_C e^{-ix \sin t + int} dt$$

به ازای  $x$  های بزرگ ( حقیقی و مثبت ) در صورتی یک تقریب مجانبی بیابید که  $C$  کنتور زیر باشد :



## تبدیلات انتگرال

در این فصل سریهای فوریه، تبدیلات فوریه، و تبدیلات لاپلاس را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش ۴.۴ جفت‌های دیگری از تبدیلات ذکر شده ولی مورد بحث قرار نگرفته‌اند. در بخش ۵.۴، استفاده از تبدیلات انتگرال در حل مسائل به‌وسیله چند مثال به اختصار توضیح داده شده است. کاربردهای دیگر تبدیلات انتگرال در حل معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات انتگرال بعداً، در فصل‌های ۸ و ۱۱، مطرح خواهند شد.

## ۱.۴ سریهای فوریه

تابع  $f(\theta)$  تعریف شده به ازای  $0 \leq \theta < 2\pi$  را در نظر می‌گیریم. برای آن بسطی به شکل

$$(1.4) \quad f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

جستجو می‌کنیم. ضرایب را می‌توان با ضرب طرفین (۱.۴) در  $\cos n\theta$  (یا  $\sin n\theta$ ) و انتگرال‌گیری از ۰ تا  $2\pi$  به دست آورد:

$$(2.4) \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

سری (۱.۴)، که به سری فوریه  $f(\theta)$  معروف است، در تمام نقاط همگرا به  $\frac{1}{2}[f(\theta+) + f(\theta-)]$  است مشروط بر اینکه  $f(\theta)$  در  $0 \leq \theta < 2\pi$  دارای تغییر کراندار<sup>۱</sup> باشد. بحث فوق‌زیاد دقیق

---

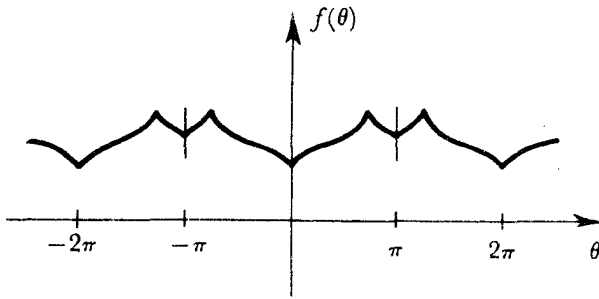
۱. برای تابع  $f(x)$  تعریف شده بر یک بازه،  $n$  نقطه  $x_i$  از این بازه را اختیار کرده و ←



نبوده، و دانشجوی علاقه‌مند را به یک کتاب ریاضی مرجع مانند ویتاکر و واتسون (W5)، فصل نه، یا اپوستل (A5)، فصل ۱۵، ارجاع می‌دهیم.

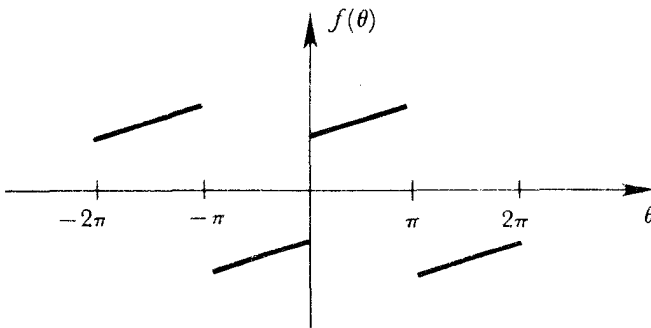
یک سری فوریه متناوب است؛ در نتیجه،  $f(\theta)$  را در  $-2\pi \leq \theta < 0$ ،  $2\pi \leq \theta < 4\pi$ ، و غیره تکرار می‌کند. لازم نیست با بازه از 0 تا  $2\pi$  شروع کنیم؛ هر بازه به طول  $2\pi$  کارساز است. بازه از  $-\pi$  تا  $\pi$  اغلب مناسبتر است.

لازم است انواع توابعی را که سریهای فوریه‌شان بعضی از جملات را ندارند بشناسیم:  
 ۱. توابع زوج.  $f(-\theta) = f(\theta)$  یا  $f(2\pi - \theta) = f(\theta)$ ، و غیره. در اینجا فقط جملات کسینوسی را داریم؛ یعنی،  $B_n = 0$ . در شکل ۱.۴ مثالی نشان داده شده است.



شکل ۱.۴ یک تابع زوج با دوره تناوب  $2\pi$

۲. توابع فرد.  $f(-\theta) = -f(\theta)$ . فقط جملات سینوسی ظاهر می‌شوند؛ یعنی،  $A_n = 0$ . در شکل ۲.۴ یک مثال دیده می‌شود.



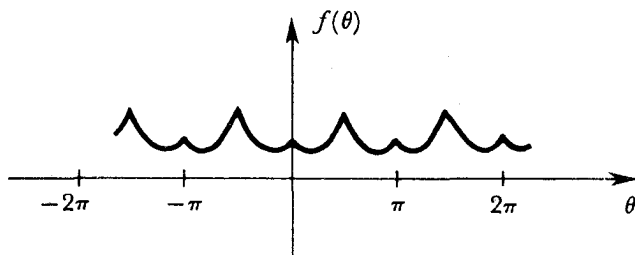
شکل ۲.۴ یک تابع فرد با دوره تناوب  $2\pi$

---

→  

$$V \text{ ("تغییر")} = |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)|$$
 را حساب می‌کنیم. اگر ثابت  $B$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای جميع انتخابهای  $x_i$ ، وقتی  $n \rightarrow \infty$ ،  $V < B$ ، گوییم  $f(x)$  برای این بازه دارای تغییر کراندار است.

۳. توابع زوج متقارن نسبت به  $\pi/2$ :  $f((\pi/2) + \theta) = f((\pi/2) - \theta)$ . فقط جملات کسینوسی با زوج ظاهر می‌شوند؛ یعنی،  $B_n = 0, A_{2n+1} = 0$ . در شکل ۳.۴ یک مثال دیده می‌شود.



شکل ۳.۴ یک تابع زوج متقارن نسبت به  $\pi/2$

واضح است که چنین مواردی زیادند. حال به چند مثال از سریهای فوریه می‌پردازیم.

مثال

$$(۳.۴) \quad f(\theta) = \begin{cases} +1 & 0 < \theta < \pi \\ -1 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

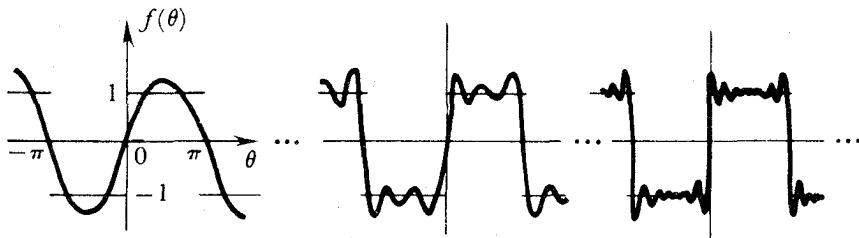
این یک تابع فرد است؛ در نتیجه، جملات کسینوسی وجود ندارند. این تابع نسبت به  $\pi/2$  متقارن است، بدان معنی که جملات سینوسی زوج وجود ندارند. به ازای  $n$  های فرد،

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta = \frac{4}{n\pi}$$

بنابراین،

$$(۴.۴) \quad f(\theta) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \theta + \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \dots \right)$$

این سری غیریکخواختی همگرایی یک سری فوریه را در مجاورت یک ناپیوستگی نشان می‌دهد. در شکل ۴.۴ تقریبات متوالی توسط شکل شرح داده شده‌اند. به تجاوزها، که



شکل ۴.۴ مجموعه‌های جزئی سری فوریه (۴.۴) با افزایش تعداد جملات

پدیده گیبس نام دارد، توجه کنید. تجاوز در حد تعدادی نامتناهی جمله متناهی می ماند؛ تقریباً "0.18 (ر.ک. مسئله ۲۰۴)." .

اگر در سری فوریه (۴۰۴) قرار دهیم  $\theta = \pi/2$ ، به دست می آید

$$(۵۰۴) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

که به سری گریگوری<sup>۲</sup> معروف است. این سری را می توان از سری

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

نیز به دست آورد.

### مثال

$$f(\theta) = \cos k\theta \quad (-\pi < \theta < \pi)$$

ما قبلاً "سری فوریه  $\cos k\theta$  را در رابطه با اعداد برنولی ذکر کردیم (بخش ۳۰۲). چون  $f(\theta)$  زوج است، فقط جملات کسینوسی وجود دارند.

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos k\theta \cos n\theta \, d\theta \\ = \frac{(-1)^n 2k \sin k\pi}{\pi(k^2 - n^2)}$$

لذا،

$$(۶۰۴) \quad \cos k\theta = \frac{2k \sin k\pi}{\pi} \left( \frac{1}{2k^2} - \frac{\cos \theta}{k^2 - 1} + \frac{\cos 2\theta}{k^2 - 4} - \dots \right)$$

البته، می توان سری فوریه را برای نمایش توابعی که متناوب با دوره تناوب  $L$  غیر از  $2\pi$  اند نیز تعمیم داد. فرض کنیم

$$x = \frac{\theta L}{2\pi}$$

در این صورت، بازهای به طول  $2\pi$  با متغیر  $\theta$  به بازهای به طول  $L$  با متغیر  $x$  تبدیل می شود. در این صورت، فرمولهای ما به شکل زیر درمی آیند

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{2\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{2\pi n x}{L} \right)$$

$$(۷۰۴) \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2\pi n x}{L} \, dx$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2\pi nx}{L} dx$$

تمام نکات راجع به زوج بودن، فرد بودن، و غیره را می‌توان در این بازه جدید عنوان کرد.

در هر مسئله خاص باید بازه اساسی  $L$  مشخص باشد. فرض کنیم تابع  $f(x)$  در بازه  $0 < x < a$  داده شده باشد.  $f(x)$  را می‌توان به سری فوریه با دوره تناوب  $a$  بسط داد:

$$(۸.۰۴) \quad f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{2\pi nx}{a} + B_n \sin \frac{2\pi nx}{a} \right)$$

واضح است که برای  $f(x)$  دلخواه هم کسینوس و هم سینوس لازم است. به بیان دیگر، سینوسها یا کسینوسها (با دوره تناوب  $a$ ) به تنهایی کافی نیستند.

از طرف دیگر، با تعریف  $f(x)$  بر  $-a < x < 0$  توسط  $f(-x) = -f(x)$  می‌توان فقط برحسب سینوس بسط داد. حال  $2a$  را دوره تناوب سری فوریه مان می‌گیریم؛ در نتیجه،

$$(۹.۰۴) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

لذا، کسینوسها را دور انداخته ولی تعداد سینوسها را دوبرابر کرده‌ایم، و هنوز مجموعه کاملی از توابع داریم. البته، با تعریف  $f(-x) = +f(x)$  به ازای  $0 < x < a$  می‌توان  $f(x)$  را به سری بسط داد که فقط شامل کسینوسها با دوره تناوب  $2a$  باشد. اغلب نوشتن سری فوریه به شکل مختلط مناسب است:

$$(۱۰.۰۴) \quad f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

یا، به‌طور کلیتر،

$$(۱۱.۰۴) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x / L}$$

برای محاسبه ضرایب  $a_n$  در (۱۱.۰۴)، طرفین را در  $e^{-2\pi i m x / L}$  ضرب کرده و از  $0$  تا  $L$  (یا هر بازه دیگر به طول  $L$ ) انتگرال می‌گیریم. در این صورت، داریم

$$(۱۲.۰۴) \quad \int_0^L e^{-2\pi i m x / L} e^{2\pi i n x / L} dx = L \delta_{mn}$$

که در آن  $\delta_{mn}$  دلتای کرونگر نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۱۳.۰۴) \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m \neq n \\ 1 & \text{اگر } m = n \end{cases}$$

بنابراین،

$$\frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-2\pi i n x/L} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_{mn} = a_m$$

به تغییر علامت در جمله<sup>۱</sup> نمایی توجه کنید:

$$(14.4) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x/L} \quad a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-2\pi i n x/L} dx$$

در کاربردهای فیزیکی کمیت  $(1/L) \int_0^L |f(x)|^2 dx$ ، یعنی متوسط مربع قدر مطلق  $f(x)$  اغلب مورد توجه است. با بسط  $f(x)$  به سری فوریه<sup>۲</sup> مختلط (۱۱.۴)، خواهیم داشت<sup>۱</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_0^L |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{L} \int_0^L dx \left( \sum_n a_n e^{2\pi i n x/L} \right) \left( \sum_m a_m^* e^{-2\pi i m x/L} \right) \\ &= \sum_{mn} a_n a_m^* \delta_{mn} \\ (15.4) \quad &= \sum_n |a_n|^2 \end{aligned}$$

رابطه<sup>۲</sup> (۱۵.۴) نشان می‌دهد که هر مولفه<sup>۳</sup> فوریه<sup>۴</sup>  $f(x)$  سهم جداگانه‌ای در انتگرال  $\int_0^L |f(x)|^2 dx$  دارد که مستقل از سایر مولفه‌های فوریه است. جملات تداخلی به شکل  $a_n^* a_m$  وجود ندارند. [با نکات زیر در رابطه با مثال (۲۶.۴) قیاس کنید].

### ۲.۴ تبدیلات فوریه

با سری فوریه<sup>۵</sup> مختلط تابع  $f(x)$  شروع می‌کنیم:

$$f(x) = \sum_n a_n e^{2\pi i n x/L} \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-2\pi i n x/L} dx$$

می‌خواهیم حالت  $L \rightarrow \infty$  را در نظر بگیریم. در این صورت، مجموع به طریق زیر به یک انتگرال بدل می‌شود: تعریف می‌کنیم

$$L a_n = g(y) \quad \text{و} \quad \frac{2\pi n}{L} = y$$

۱. به قاعده<sup>۶</sup> کلی زیر توجه کنید:

$$\sum_m (چیزی)_m \delta_{mn} = (چیزی)_n$$

مشروط بر اینکه برد جمع‌بندی روی  $m$  شامل مقدار  $n$  باشد؛ البته، در غیر این صورت مجموع صفر خواهد بود.

چون افزایش  $n$  در مجموع با گامهای واحد صورت می‌گیرد،

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n = \int_{-\infty}^{\infty} F_n dn = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) dy$$

که در آن  $F(y) = F_n$ . لذا، فرمولهای ما به صورت زیر درمی‌آیند:

$$(۱۶.۴) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy \quad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

$g(y)$  تبدیل فوریه  $f(x)$  نام دارد، یا بالعکس. موضع  $2\pi$  کاملاً "دلخواه است؛ ما اغلب مفاهیم را به‌طور متقارن‌تری تعریف می‌کنیم:

$$(۱۷.۴) \quad f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy \quad g(y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

از تلفیق عبارات (۱۶.۴) یا (۱۷.۴) به دست می‌آید

$$(۱۸.۴) \quad \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{ixy} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ix'y} dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x')y} dy \end{aligned}$$

برقراری (۱۸.۴) به ازای هر تابع  $f(x)$  نکته قابل توجهی از انتگرال

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x')y} dy$$

را بعنوان تابعی از  $x'$  بازگو می‌کند. این انتگرال همه‌جا جز  $x' = x$  صفر بوده، و انتگرالش نسبت به  $x'$  روی هر بازه شامل  $x$  مساوی یک است یعنی، این تابع را می‌توان به عنوان تابعی با قلّه بی‌نهایت بلند و بی‌نهایت باریک در  $x' = x$  در نظر گرفت. معمولاً "تابع دلتای (دیراک<sup>۱</sup>)  $\delta(x)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\delta(x) = 0 \quad x \neq 0$$

$$(۱۹.۴) \quad \int_{-a}^{+b} \delta(x) dx = 1 \quad a, b > 0$$

از این معادلات معلوم می‌شود که به ازای هر تابع  $f(x)$

$$(۲۰.۴) \quad \int f(y) \delta(x - y) dy = f(x)$$

مشروط براینکه برد انتگرالگیری شامل نقطه  $x$  باشد.

حال از مقایسه<sup>۶</sup> (۱۸.۴) و (۲۰.۴) معلوم می‌شود که

$$(۲۱.۴) \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dy$$

که نمایش انتگرالی تابع  $\delta$  است.

از تابع دلنا می‌توان برای محاسبه<sup>۶</sup> انتگرال مهم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

برحسب تبدیل فوریه<sup>۶</sup> (۱۶.۴)  $f(x)$  به صورت زیر استفاده کرد:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(y) e^{-ixy} dy \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y') e^{ixy'} dy' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy g^*(y) \int_{-\infty}^{\infty} dy' g(y') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(y'-y)x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy g^*(y) \int_{-\infty}^{\infty} dy' g(y') \delta(y' - y) \\ (۲۲.۴) \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy g^*(y) g(y) \end{aligned}$$

این حکم را قضیه<sup>۶</sup> پارسوال<sup>۱</sup> می‌نامند. این قضیه برای درک تعبیر فیزیکی تابع تبدیل  $g(y)$

وقتی معنی فیزیکی  $f(x)$  معلوم باشد مفید است [ ر. ک. بحث بعد از (۲۶.۴) ].

فرض کنیم  $f(x)$  تابع زوجی باشد. در این صورت،

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx + \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ixy} dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x) (e^{ixy} + e^{-ixy}) dx \\ (۲۳.۴) \quad &= 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos xy dx \end{aligned}$$

اما  $g(y)$  زوج است. پس

$$(۲۴.۴) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(y) \cos xy dy$$

$f(x)$  و  $g(y)$ ، که فقط کافی است به‌ازای  $x$  و  $y$  مثبت تعریف شده باشند، تبدیلات گسینوسی

فوریه<sup>۶</sup> یکدیگر نام دارند.

با در نظر گرفتن تبدیل فوریه یک تابع فرد، می توان روابط بین تبدیلات سینوسی فوریه را به طور مشابه به دست آورد:

$$(25.4) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(y) \sin xy \, dy \quad g(y) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin xy \, dx$$

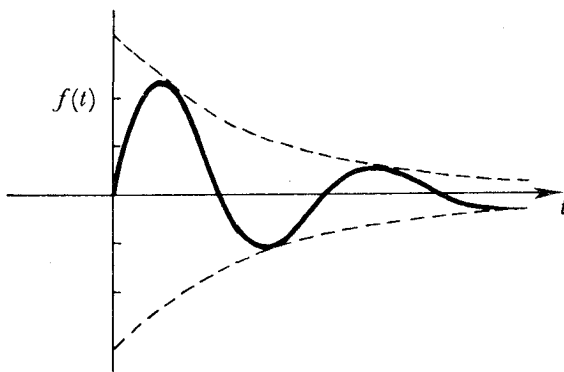
در صورت تمایل می توان با قرار دادن  $\sqrt{2/\pi}$  جلوه هر انتگرال در (23.4)، (24.4)، و (25.4) تقارن به وجود آورد.

جداول مبسوطی از تبدیلات فوریه توسط اردلی و دیگران (E6) ارائه شده است.

### مثال

$$(26.4) \quad f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-t/T} \sin \omega_0 t & (t > 0) \end{cases}$$

این تابع در شکل 5.4 نمودار شده است.  $f(t)$  ممکن است مثلاً "، جابه جایی یک نوسانگر



شکل 5.4 یک موج سینوسی میرا

همهنگ میرا، یا میدان الکتریکی در یک موج تابش شده یا جریان در یک آنتن نشان دهد.

تبدیل فوریه  $f(t)$  عبارت است از

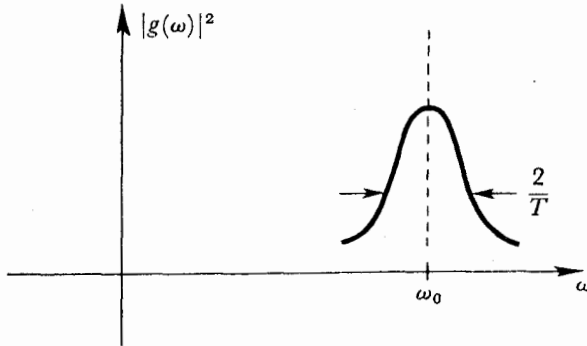
$$\begin{aligned} g(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t/T} e^{-i\omega t} \sin \omega_0 t \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega + \omega_0 - \frac{i}{T}} - \frac{1}{\omega - \omega_0 - \frac{i}{T}} \right) \end{aligned}$$



می توان به کمک قضیه پارسوال (۲۲.۴) معنی فیزیکی  $g(\omega)$  را تعبیر کرد. مثلاً، اگر  $f(t)$  یک میدان الکتریکی تابش شده باشد، توان تابش شده با  $|f(t)|^2$  و انرژی کل تابش شده با  $\int_0^\infty |f(t)|^2 dt$  متناسب است. این انتگرال، بنابر قضیه پارسوال، مساوی است با

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)|^2 d\omega$$

پس  $|g(\omega)|^2$  را می توان انرژی تابش شده بر بازه فرکانسی یکه (ضربدر ثابتی) تعبیر کرد.



شکل ۶.۴ طیف انرژی برای نوسان میرای شکل ۵.۴

فرض کنیم  $T$  نسبتاً بزرگ باشد ( $\omega_0 T \gg 1$ ). در این صورت، "طیف فرکانسی" ما  $g(\omega)$  در مجاورت  $\omega = \pm \omega_0$  دارای قله تیزی است. مثلاً، در مجاورت  $\omega = \omega_0$ ،

$$g(\omega) \approx -\frac{1}{2} \frac{1}{\omega - \omega_0 - \frac{i}{T}}$$

$$|g(\omega)| \approx \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{T^2}}}$$

وقتی  $\omega = \omega_0 \pm 1/T$ ، "دامنه"  $g(\omega)$  به وسیله عامل  $\sqrt{1/2}$ ، و انرژی تابش شده  $|g(\omega)|^2$  به وسیله عامل  $1/2$  پایین می آید. به عبارت دیگر، عرض  $\Gamma$  در نصف (توان) ماکزیمم عبارت است از  $\Gamma \approx 2/T$ . در شکل ۶.۴، طیف انرژی  $|g(\omega)|^2$  رسم شده است.

این نتیجه یک اصل عدم قطعیت نوعی بوده و با اصل عدم قطعیت هایزنبرگ<sup>۱</sup> در مکانیک کوانتمی رابطه ای بسیار نزدیک دارد. مدت زمان ( $T$ ) نوسان، با عرض  $\Gamma$ ، که "عدم

قطعیت " در فرکانس را می‌سنجد ، به‌طور معکوس متناسب است .

تبدیلات فوریه را می‌توان به آسانی به بیش از یک بعد تعمیم داد . مثلاً ، در فضای سه‌بعدی جفت تبدیل زیر را داریم :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{k}) &= \int d^3x f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ f(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (27.4)$$

از این تبدیلات می‌توان ، مثل قبل ، نمایش انتگرالی زیر را به دست آورد :

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (28.4)$$

که در آن تابع دلتای سه‌بعدی به صورت زیر تعریف شده است :

$$\delta(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \neq 0$$

مشروط براینکه مبداء داخل ناحیه انتگرالگیری باشد  $\int d^3x \delta(\mathbf{x}) = 1$

$$\int d^3x f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) \quad (29.4)$$

یک چنین تبدیلات در مکانیک کوانتمی مورد توجه‌اند . اگر  $f(\mathbf{x})$  تابع موج یک ذره باشد ، تبدیل فوریه  $\phi(\mathbf{k})$  " تابع موج در فضای اندازه حرکت " است .  $|\phi(\mathbf{k})|^2$  و  $|f(\mathbf{x})|^2$  توزیعهای احتمال برای موضع و اندازه حرکت می‌باشند .

### مثال

$$f(\mathbf{x}) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{3/4} e^{-r^2/a^2} = N e^{-r^2/a^2} \quad (r = |\mathbf{x}|) \quad (30.4)$$

این یک تابع موج است که توزیع احتمال گاوسی  $|f(\mathbf{x})|^2$  به مرکز  $r=0$  را می‌دهد و طوری نرمالی شده است که  $\int d^3x |f(\mathbf{x})|^2 = 1$  . تبدیل فوریه عبارت است از

$$\phi(\mathbf{k}) = N \int d^3x e^{-r^2/a^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

مختصات قطبی ، با محور  $z$  در امتداد  $\mathbf{k}$  ، را وارد می‌کنیم . فرض کنیم  $\cos \theta = \alpha$  . در این صورت ،

۱ . توابع به شکل  $Ae^{-Bx^2}$  ( ثابت  $A, B$  ) را اغلب توابع گاوسی نامند و این به خاطر پیش آمدن آنها در روشن‌گمترین مربعات تحلیل داده‌هاست که از ابداعات گاوس است . همچنین ، ر.ک . پانوشت ص ۳۸۳ .

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{k}) &= 2\pi N \int_0^\infty r^2 dr \int_{-1}^{+1} d\alpha e^{-r^2/a^2} e^{-ikr\alpha} \\
 &= \frac{4\pi}{k} N \int_0^\infty r dr e^{-r^2/a^2} \sin kr \\
 &= \frac{4\pi}{k} \frac{N}{2i} \int_{-\infty}^\infty r dr e^{-r^2/a^2} e^{ikr} \\
 &= \frac{2\pi}{ik} N e^{-k^2 a^2/4} \int_{-\infty}^\infty r dr \exp\left[-\frac{1}{a^2}\left(r - \frac{ika^2}{2}\right)^2\right] \\
 &= \frac{2\pi}{ik} N e^{-k^2 a^2/4} \int_{-\infty}^\infty \left(y + \frac{ika^2}{2}\right) dy e^{-y^2/a^2} \\
 &= \frac{2\pi}{ik} N e^{-k^2 a^2/4} \frac{ika^2}{2} a\sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

بالاخره، با توجه به  $N = (2/\pi a^2)^{3/4}$ ، خواهیم داشت

$$(۳۱.۴) \quad \phi(\mathbf{k}) = (2\pi a^2)^{3/4} e^{-k^2 a^2/4}$$

توجه کنید که تبدیل فوریه یک گاوسی، گاوسی دیگری است. هر قدر توزیع در  $\mathbf{x}$  باریکتر (یعنی، مقدار  $a$  کوچکتر) باشد توزیع در  $\mathbf{k}$  پهن تر است. عرضهای  $\Delta x$  و  $\Delta k$  تقریباً "عکس یکدیگرند":

$$\Delta x \Delta k \approx 1$$

دستورالعمل  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  از مکانیک کوانتومی (اندازه حرکت  $\mathbf{p}$ ) آن را به رابطه عدم قطعیت مکانیک کوانتومی دیگر

$$\Delta x \Delta p \approx \hbar$$

تبدیل می‌کند.

توزیع احتمال فوق  $|\phi(\mathbf{k})|^2$  یک گاوسی به مرکز  $k = 0$  است. می‌توان انتظار داشت که توزیع مشابهی به مرکز  $\mathbf{k}_0$  دلخواه به دست آید که با همان توزیع احتمال موضعی  $|f(\mathbf{r})|^2$  شروع شود. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که این کار فقط با ضرب  $f(\mathbf{x})$  در عامل  $e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}}$  قابل انجام است.

### ۳.۴ تبدیلات لاپلاس<sup>۱</sup>

ما اغلب به توابعی علاقه‌مندیم که تبدیلات فوریه‌شان وجود ندارند. مثلاً، توابع ساده ثابت  $f(x) = A$  و  $f(x) = x^2$  دارای انتگرالهای تبدیل فوریه‌ای هستند که همگرا نمی‌باشند.

در بسیاری از توابع، مشکل در  $x \rightarrow +\infty$  را می‌توان با ضرب در عامل  $e^{-cx}$  سامان داد که در آن  $c$  حقیقی و از مقدار مینیممی چون  $\alpha$  بزرگتر است. این عامل ممکن است رفتار در  $x \rightarrow -\infty$  را بدتر سازد، ولی ما اغلب به یک تابع به ازای  $x$  های مثبت توجه داریم. لذا رفتار به ازای  $x$  های منفی را می‌توان با عامل دیگری کنترل کرد، که تابع پله‌ای (هوی‌ساید<sup>۱</sup>) است:

$$(۳۲.۴) \quad H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

[ توجه کنید که  $(d/dt)H(t) = \delta(t)$  و این را می‌توان با انتگرالگیری از تابع  $\delta$  نشان داد. ]  
تابع  $f(x)e^{-cx}H(x)$  دارای تبدیل فوریه<sup>۲</sup> زیر است:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-cx}H(x)e^{-ixy} dx = \int_0^{\infty} f(x)e^{-cx}e^{-ixy} dx$$

تبدیل معکوس عبارت است از

$$f(x)e^{-cx}H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ixy} dy$$

معمولا " متغیر جدید

$$(۳۳.۴) \quad s = c + iy$$

را وارد کرده و تعریف می‌کنیم  $F(s) \equiv g(y)$ . دو انتگرال فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۳۴.۴) \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$$

$$(۳۵.۴) \quad f(x)H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(s)e^{sx} ds$$

که در آن مسیر انتگرالگیری  $C$  روبه‌بالا در امتداد خط مستقیم ثابت  $\text{Re } s = c$  است (شکل ۷.۴).

$F(s)$ ، به صورت (۳۴.۴)، تبدیل لاپلاس  $f(x)$  نام دارد. انتگرال فقط در "نیمه‌راست" صفحه  $s$ ، یعنی  $\text{Re } s > \alpha$ ، وجود دارد که در آن  $\alpha$  مقدار مینیمم  $c$  مذکور در فوق است. در این ناحیه  $F(s)$  تحلیلی است؛  $F(s)$  را می‌توان با تداوم تحلیلی در نیمه‌چپ صفحه تعریف کرد.

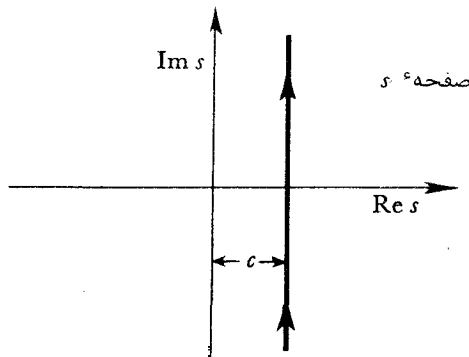
انتگرال دوم (۳۵.۴) انتگرال انعکاسی لاپلاس نام دارد. توجه کنید که این انتگرال

به ازای  $x > 0$  برابر  $f(x)$  (یا به طور دقیقتر  $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ ) است ولی به ازای  $x < 0$  خود بخود صفر است. وقتی  $x < 0$ ، کنتور  $C$  را می توان با افزودن یک نیمدایره بزرگ در سمت راست، که در آن  $F(s)$  تحلیلی است، بست.

از حالا به بعد  $H(x)$  را در (۳۵.۴) حذف کرده، و فقط می نویسیم

$$(۳۶.۴) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{sx} ds$$

با این فرض که تمام توابع  $f(x)$  که باید تبدیل لاپلاس شوند به ازای شناسه های منفی صفر هستند.



شکل ۷.۴ کنتور برای انتگرال انعکاسی لاپلاس (۳۵.۴)

### مثال

$$f(x) = 1$$

$$(۳۷.۴) \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{s}$$

که در آن انتگرال به ازای  $\text{Re } s > 0$  وجود دارد (یعنی،  $\alpha = 0$ ). توجه کنید که  $F(s)$  دارای انفراد (در این مثال یک قطب ساده) بر خط حدی، یعنی  $\text{Re } s = 0$ ، است. می توان فرمول انعکاسی

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{sx} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sx}}{s} ds$$

را، که در آن  $c > 0$ ، ثابت کرد.

اگر  $x > 0$ ، کنتور را با نیمدایره بزرگی در سمت چپ و

$$f(x) = 1$$

کامل می‌کنیم. اگر  $x < 0$ ، کنتور را در سمت راست و

$$f(x) = 0$$

کامل می‌کنیم.

در آخر این فصل جدول کوتاهی از تبدیلات لاپلاس آمده است. جداول کاملتر را

می‌توان در اردلی و دیگران (E6)؛ مگنوس و دیگران (M1)؛ و سایر جاها یافت.

#### ۴.۴ جفت تبدیلات دیگر

تبدیلات فوریه - بسل (یا تبدیل هنکل<sup>۱</sup>):

$$(38.4) \quad g(k) = \int_0^{\infty} f(x) J_m(kx) x dx$$

$$(39.4) \quad f(x) = \int_0^{\infty} g(k) J_m(kx) k dk$$

$$(40.4) \quad \phi(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} f(t) dt \quad \text{تبدیل ملین:}$$

$$(41.4) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} t^{-z} \phi(z) dz$$

$$(42.4) \quad g(y) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x-y} \quad \text{تبدیل هیلبرت<sup>۲</sup>:}$$

$$(43.4) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y) dy}{y-x}$$

[P مقدار اصلی (کشی) انتگرالی است که باید گرفته شود؛ ر.ک. ضمیمه، بخش ض ۲،

شماره ۰۸]

#### ۵.۴ کاربردهای تبدیلات انتگرال

ابتدا چند خاصیت اساسی تبدیلات فوریه و لاپلاس را خلاصه می‌کنیم.

۱. هر دو تبدیل خطی اند؛ یعنی، تبدیل  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  مساوی  $\alpha$  برابر تبدیل  $f(x)$  به

علاوه  $\beta$  برابر تبدیل  $g(x)$  است.

۲. مشتقات:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx = e^{-sx} f(x) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

برای تبدیل لاپلاس  $f(x)$  می نویسیم  $\mathcal{L}[f(x), s]$  یا  $\mathcal{L}[f(x)]$  ، و به همین نحو برای تبدیل فوریه خواهیم نوشت  $\mathcal{F}[f(x)]$  . در این صورت ، رابطه فوق را می توان به شکل زیر نوشت :

$$(44.4) \quad \mathcal{L}[f'(x)] = s\mathcal{L}[f(x)] - f(0)$$

به همین نحو ،

$$(45.4) \quad \mathcal{L}[f''(x)] = s^2\mathcal{L}[f(x)] - sf(0) - f'(0)$$

و غیره ( توجه کنید که 0 در واقع یعنی  $0+$  ، و آن حد است وقتی از سمت مثبت به صفر نزدیک می شویم ) . در تبدیلات فوریه قسمتهای انتگرالیگری شده صفر می شوند ، و

$$(46.4) \quad \mathcal{F}[f'(x)] = iy\mathcal{F}[f(x)] \text{ و غیره}$$

۳. انتگرالها :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^x f(t) dt\right] &= \int_0^\infty dx e^{-sx} \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^\infty dt \int_t^\infty dx f(t) e^{-sx} \\ &= \frac{1}{s} \int_0^\infty dt f(t) e^{-st} \end{aligned}$$

لذا ،

$$(47.4) \quad \mathcal{L}\left[\int_0^x f(t) dt\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(x)]$$

در تبدیلات فوریه وضع اینقدر ساده نیست . فرض کنیم  $g(x) = \int f(x) dx$  انتگرال نامعین  $f(x)$  باشد . از (46.4) داریم

$$\mathcal{F}[f(x)] = iy\mathcal{F}[g(x)]$$

لیکن ، نمی توان فوراً " نتیجه گرفت که

$$\mathcal{F}[g(x)] = \frac{\mathcal{F}[f(x)]}{iy}$$

چرا نمی توان ؟ معادله  $xf(x) = g(x)$  را در نظر می گیریم . آیا می توان نتیجه گرفت که

$$f(x) = \frac{g(x)}{x}$$

خیر ، نه در  $x=0$  . نتیجه کلی عبارت است از

$$f(x) = \frac{g(x)}{x} + C\delta(x)$$

که در آن  $C$  ثابت دلخواهی است. لذا،

$$(۴۸.۴) \quad \mathcal{F}\left[\int f(x) dx\right] = \frac{\mathcal{F}[f(x)]}{iy} + C \delta(y)$$

این دلخواه بودن از عدم قطعیت  $\int f(x) dx$  به خاطر ثابت جمعی دلخواه  $C$  نیز مشهود است، و

$$\mathcal{F}[C] = 2\pi C \delta(y)$$

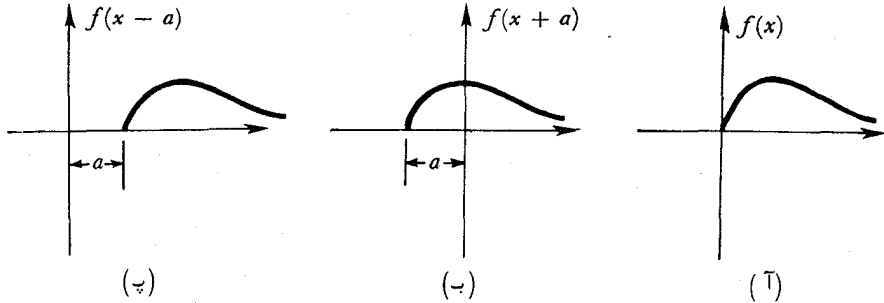
۴. انتقال:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x+a)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) e^{-ixy} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iy(x-a)} dx \end{aligned}$$

بنابراین،

$$(۴۹.۴) \quad \mathcal{F}[f(x+a)] = e^{ia y} \mathcal{F}[f(x)]$$

در تبدیلات لاپلاس باید کمی بیشتر محتاط بود. حالات  $a > 0$ ،  $a < 0$  را جداگانه در نظر می‌گیریم.



شکل ۸.۴ به چپ، یعنی  $f(x+a)$ ، و به راست، یعنی  $f(x-a)$  انتقال یافته‌است.

در شکل ۸.۴ ب،  $f(x+a)$  به ازای  $a > 0$  نشان داده شده است.

چون تبدیل لاپلاس،  $f(x)$  به ازای  $x < 0$  را نادیده می‌گیرد (در واقع، آن را صفر

فرض می‌کند)، می‌توان بخشی از تابع را حذف کرد، و

$$\mathcal{L}[f(x+a)] = \int_0^{\infty} f(x+a) e^{-sx} dx = \int_a^{\infty} f(x) e^{-s(x-a)} dx$$

در نتیجه،

$$(۵۰.۴) \quad \mathcal{L}[f(x+a)] = e^{as} \left\{ \mathcal{L}[f(x)] - \int_0^a f(x) e^{-sx} dx \right\} \quad a > 0$$



از طرف دیگر،  $f(x-a)$  در شکل ۸.۴ پ نشان شده است، و

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(x-a)] &= \int_0^{\infty} f(x-a) e^{-sx} dx \\ &= \int_{-a}^{\infty} f(x) e^{-s(x+a)} dx\end{aligned}$$

بنابراین،

$$(۵۱.۴) \quad \mathcal{L}[f(x-a)] = e^{-as} \mathcal{L}[f(x)] \quad a > 0$$

۵. ضرب در یک نمایی:

دو فرمول زیر به آسانی قابل اثبات اند:

$$(۵۲.۴) \quad \mathcal{F}[e^{\alpha x} f(x); y] = \mathcal{F}[f(x); y + i\alpha]$$

$$(۵۳.۴) \quad \mathcal{L}[e^{\alpha x} f(x); s] = \mathcal{L}[f(x); s - \alpha]$$

۶. ضرب در توانی از  $x$ : هرگاه

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

آنگاه

$$g'(y) = -i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-ixy} dx$$

لذا،

$$(۵۴.۴) \quad \mathcal{F}[x f(x)] = i \frac{d}{dy} \mathcal{F}[f(x)]$$

به آسانی می توان نتیجه مشابهی را برای تبدیلات لاپلاس اثبات کرد:

$$(۵۵.۴) \quad \mathcal{L}[x f(x)] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(x)]$$

۷. قضایای پیچش: فرض کنیم  $f_1(x), f_2(x)$  دوتابع دلخواه باشند. پیچش آنها را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(۵۶.۴) \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y) dy$$

تبدیل فوریه این پیچش چیست؟ با تغییر متغیر سرراست معلوم می شود که

$$(۵۷.۴) \quad \mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}[f_1(x)] \mathcal{F}[f_2(x)] \times \text{ثابت}$$

مقدار ثابت در (۵۷.۴) بستگی به قرارداد ما درباره تبدیلات فوریه دارد؛ یعنی، به این که آیا از (۱۶.۴) استفاده شده است یا از (۱۷.۴) و، در صورت به کار رفتن (۱۶.۴)، از

$f(x)$  و  $g(y)$  کدام تابع اصلی و کدام تبدیل فوریه گرفته شده است. لازم است خواننده ثابت موجود در (۵۷.۴) را حداقل برای یک قرارداد محاسبه کند. در هر حال، نتیجه مهم این است که، با تقریب یک ثابت، تبدیل فوریه یک پیچش حاصل ضرب تبدیلات فوریه "عوامل" پیچش می باشد.

برای تبدیلات لاپلاس نتیجه مشابهی برقرار است: هرگاه

$$(58.4) \quad g(x) = \int_0^x dt f_1(t) f_2(x-t)$$

آنگاه

$$\mathcal{L}[g(x)] = \mathcal{L}[f_1(x)]\mathcal{L}[f_2(x)]$$

برای تبدیلات لاپلاس رابطه عکس جالبی برقرار است. فرض کنیم

$$\mathcal{L}[f_2] = g_2(s) \quad \text{و} \quad \mathcal{L}[f_1] = g_1(s)$$

که در آنها انتگرالهای لاپلاس  $g_1(s)$  و  $g_2(s)$  به ترتیب به ازای  $\text{Re } s > \alpha_1$  و  $\text{Re } s > \alpha_2$  وجود دارند. در این صورت، تبدیل لاپلاس حاصل ضرب  $f_1 f_2$  مساوی است با

$$(59.4) \quad \mathcal{L}[f_1 f_2] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g_1(z) g_2(s-z) dz$$

که در آن مسیر انتگرالگیری در امتداد خط  $\text{Re } z = c$  است که  $c > \alpha_1$  و  $c > \alpha_2$  (این نتیجه را می توان با گذاردن انتگرال انعکاسی لاپلاس مربوط به  $f_1(z)$  در انتگرال  $\mathcal{L}[f_1 f_2]$  به دست آورد).

رابطه نظیر برای تبدیلات فوریه عبارت است از<sup>۱</sup>

$$(60.4) \quad \mathcal{F}[f_1 f_2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(z) g_2(y-z) dz$$

حال به چند کاربرد از تبدیلات انتگرال می پردازیم. روند کلی "تبدیل" مسئله بیان آن برحسب تابع تبدیل است با این امید که شکل جدید آسانتر حل شود.

مثال. اگر در مدار شکل ۹۰.۴ کلید را در لحظه  $t=0$  ببندیم، و بار اولیه خازن  $Q_0$  باشد، شدت جریان را پیدا کنید.

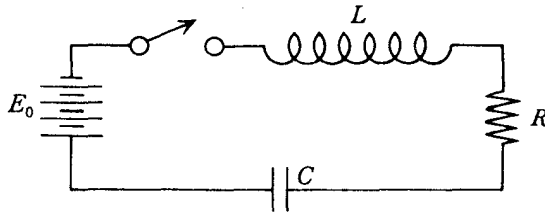
داریم

۱. مجدداً، عامل  $1/2\pi$  به قراردادی که در تبدیلات فوریه به کار می رود بستگی دارد.

ک. تبصره های بعد از معادله (۵۷.۴).

(۶۱.۴)

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = E_0$$



شکل ۹.۴ مدار سری RLC

به بیان دقیق، باید بنویسیم  $E_0 H(t)$  که در آن  $H(t)$  تابع پله‌ای (۳۲.۴) است، ولی در تشریح تبدیلات لاپلاس فرض می‌کنیم هر چیز به ازای  $t < 0$  صفر باشد. چون  $dQ/dt = I$  و  $Q(t) = Q_0 + \int_0^t I(t') dt'$  (۶۱.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \left[ Q_0 + \int_0^t I(t') dt' \right] = E_0$$

حال از طرفین این رابطه تبدیل لاپلاس می‌گیریم. فرض کنیم  $\mathcal{L}[I(t)] = i(s)$ :

$$Ri(s) + L[si(s) - I(0)] + \frac{1}{C} \left[ \frac{Q_0}{s} + \frac{i(s)}{s} \right] = \frac{E_0}{s}$$

با حل این معادله نسبت به  $i(s)$  (و کمی اعمال جبری) خواهیم داشت

$$i(s) = \frac{E_0 - \frac{Q_0}{C}}{L} \frac{1}{(s+a)^2 + b^2}$$

که در آن

$$[I(0) = 0] \quad a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

ولی

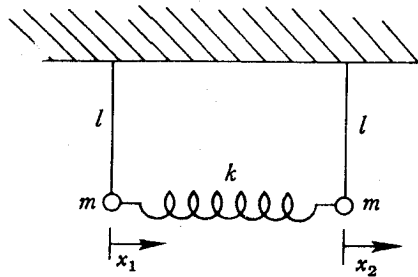
$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin bt] = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$$

بنابراین،

(۶۲.۴)

$$I(t) = \frac{E_0 - \frac{Q_0}{C}}{L} \frac{e^{-at} \sin bt}{b}$$

مثال. آونگهای جفت شده<sup>۶</sup> شکل ۱۰.۴ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم شرایط اولیه به صورت



شکل ۱۰.۴ آونگهای جفت شده

زیر باشند:

$$x_1 = x_2 = 0, \dot{x}_1 = v, \dot{x}_2 = 0, t = 0 \text{ در}$$

معادلات نیوتن به قرار زیرند:

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{l}x_1 + k(x_2 - x_1)$$

(۶۳.۴)

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{l}x_2 + k(x_1 - x_2)$$

فرض کنیم  $\mathcal{L}[x_i(t)] = F_i(s)$ . در این صورت، تبدیلات لاپلاس دو معادله دیفرانسیل

(۶۳.۴) عبارتند از

$$m(s^2 F_1 - v) = -\frac{mg}{l} F_1 + k(F_2 - F_1)$$

$$ms^2 F_2 = -\frac{mg}{l} F_2 + k(F_1 - F_2)$$

حال باید این معادلات جبری همزمان را نسبت به  $F_1$  و  $F_2$  حل کنیم. خواهیم داشت

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{v\left(s^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)}{\left(s^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\right)\left(s^2 + \frac{g}{l}\right)} \\ &= \frac{v}{2} \left( \frac{1}{s^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} + \frac{1}{s^2 + \frac{g}{l}} \right) \end{aligned}$$

بنابراین،

$$x_1(t) = \frac{v}{2} \left( \frac{\sin \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} t}{\sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}} + \frac{\sin \sqrt{\frac{g}{l}} t}{\sqrt{\frac{g}{l}}} \right)$$

به همین نحو، می‌توان  $x_2(t)$  را به دست آورد. توجه کنید که  $\sqrt{g/l}$  و  $\sqrt{g/l + 2(k/m)}$  فرکانسهای (زاویه‌ای) دوامد نرمال‌اند.

این فصل را با اثبات فرمول ارتباط WKB (۱۱۳.۱) داده شده در فصل ۱ به روش دیگر به پایان می‌بریم، که جواب کوچک‌نمایی یک طرف یک نقطه برگشت را به جواب نوسانی طرف دیگر ربط می‌دهد. معادله دیفرانسیل

$$(۶۴.۴) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + xy = 0$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله دارای جواب  $y(x)$  است که شبیه شکل ۱۱.۴ می‌باشد. فرض کنیم

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{-i\omega x} dx$$

در این صورت، تبدیل فوریه معادله دیفرانسیل (۶۴.۴) عبارت است از

$$-\omega^2 g(\omega) + i \frac{dg}{d\omega} = 0$$

که تبدیل معکوس زیر را به دست می‌دهد:

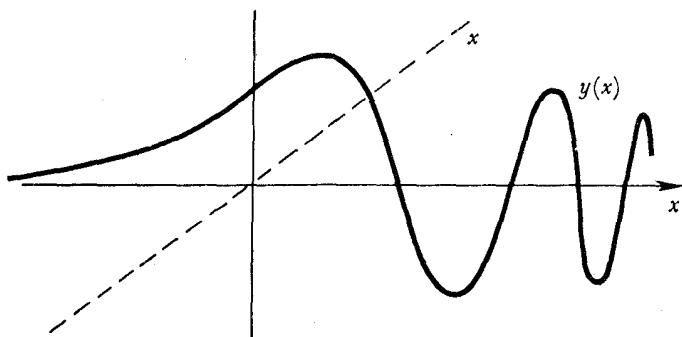
$$g(\omega) = A e^{-i(\omega^3/3)} \quad (A = \text{ثابت دلخواه})$$

لذا،

$$(۶۵.۴) \quad y(x) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp \left[ i \left( \omega x - \frac{\omega^3}{3} \right) \right]$$

ثابت نامربوط  $A/2\pi$  را حذف خواهیم کرد.

متأسفانه، این انتگرال نابدیهمی است. این انتگرال تاحدودی به این دلیل نامی یافته و به انتگرال ایری<sup>۱</sup> معروف شده است. در کاربرد حاضر یافتن فرمول ارتباط WKB، فقط به شکلهای مجانبی به ازای  $|x|$  های بزرگ نیاز داریم که می‌توان آنها را به روش نقطه زینی بخش ۶.۳ یافت. دو حالت  $x \rightarrow \pm \infty$  باید جداگانه در نظر گرفته شوند.



شکل ۱۱.۴ منحنی جواب (۶۴.۴) که به ازای  $x < 0$  رفتار نمایی نزولی دارد.

۱. فرض کنیم  $x \rightarrow +\infty$ . نقاط زینتی بر محور حقیقی قرار دارند، و ما باید از هر دوی آنها بگذریم. با استفاده از نمادهای بخش ۶.۳،

$$f(\omega) = i\left(\omega - \frac{\omega^3}{3x}\right) \quad f'(\omega) = i\left(1 - \frac{\omega^2}{x}\right) \quad f''(\omega) = -\frac{2i\omega}{x}$$

$$f'(\omega_0) = 0 \Rightarrow \omega_0 = \pm\sqrt{x}$$

$$\rho e^{i\theta} = \mp \frac{2i}{\sqrt{x}} \quad \rho = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \theta = \mp \frac{\pi}{2}$$

$$\phi = \mp \frac{\pi}{4}$$

$$f(\omega_0) = \pm \frac{2}{3}i\sqrt{x}$$

بنابراین،

$$y(x) \sim \sum_{\pm} \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{x}}{2x}} \exp\left[\pm \frac{2}{3}ix^{3/2}\right] \exp\left[\mp \frac{i\pi}{4}\right]$$

$$(۶۶.۴) \quad y(x) \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{x^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

۲. فرض کنیم  $x \rightarrow -\infty$ . در اینجا پارامتر مثبت بزرگ  $-x$  است، و

$$f(\omega) = -i\left(\omega - \frac{\omega^3}{3x}\right) \quad f'(\omega) = -i\left(1 - \frac{\omega^2}{x}\right) \quad f''(\omega) = \frac{2i\omega}{x}$$

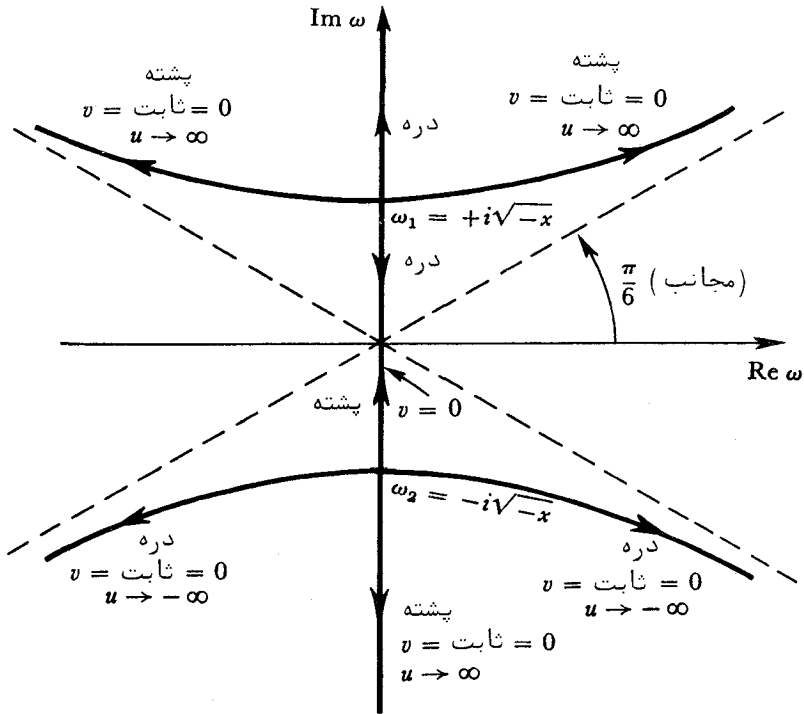
$$f'(\omega_0) = 0 \Rightarrow \omega_0 = \pm i\sqrt{-x}$$

نقاط زینتی بر محور موهومی قرار دارند.

$$\rho e^{i\theta} = \frac{2i}{x} (\pm i\sqrt{-x}) = \frac{\pm 2}{\sqrt{-x}}$$

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{-x}} \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$$

صفحه  $\omega$



شکل ۱۲.۴ توپوگرافی سطح  $u = \text{Re } f(\omega)$  در صفحه  $\omega$  نزدیک نقاط زینی  $\omega_{1,2} = \pm i\sqrt{-x}$  برای تابع

$$f(\omega) = -i[\omega + \omega^3/3(-x)]$$

اگر  $\omega = re^{i\theta}$  ،  $u = \text{Re } f(\omega) = r \sin \theta + [r^3/3(-x)] \sin 3\theta$

و  $v = \text{Im } f(\omega) = -r \cos \theta - [r^3/3(-x)] \cos 3\theta$

توپوگرافی سطح  $u = \text{Re } f(\omega)$  در شکل ۱۲.۴ نشان داده شده است. این توپوگرافی از نقطه زینی  $\omega_2 = -i\sqrt{-x}$  با  $\phi = 0$  می‌گذرد. در این صورت ،

$$y(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{-x}}{2(-x)}} \exp \left[ -(-x) \frac{2}{3} \sqrt{-x} \right]$$

(۶۷.۴)  $y(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(-x)^{1/4}} \exp \left[ -\frac{2}{3} (-x)^{3/2} \right]$

می بینیم که دو فرمول مجانبی (۶۶.۴) و (۶۷.۴) در واقع جوابهای WKB مربوطه اند، و با فرمول (۱۱۳.۱) که قبلاً در فصل ۱ به دست آمد با هم ارتباط دارند.

در جدول ۱۰.۴ چند تبدیل لاپلاس که بیش از همه پیش می آیند لیست شده اند؛ از نتایج ۱، ۲، ...، ۷ آغاز بخش ۵.۴ می توان برای توسیع این لیست استفاده کرد.

جدول ۱۰.۴ تبدیلات لاپلاس

$f(x)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$
1	$\frac{1}{s}$
$\delta(x - x_0) \quad (x_0 > 0)$	$e^{-sx_0}$
$\sin \lambda x$	$\frac{\lambda}{s^2 + \lambda^2}$
$\cos \lambda x$	$\frac{s}{s^2 + \lambda^2}$
$x^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{s + \lambda}$

### مراجع

بحثهای دقیق سریهای فوریه را می توان در اپوستل (A5) و در ویتاکر و واتسون (W5) و نیز در سایر کتب درسی ریاضی یافت.

انتگرالهای فوریه به وسیله مورس و فشریک (M9) و نیز تیچمارش<sup>۱</sup> (T3) مطرح شده اند. عنوان آخرین مرجع گولتان نژد؛ این کتاب مختص خواننده غیر جدی نیست.

در سالهای اخیر چند مفهوم صوری جدید شکل گرفته اند که از جمله مزیتهای آنها بحث دقیق توابع دلتا و توابع مشابه است. مطالب خواندنی در باب این ایده های جدید را می توان در لایت هیل<sup>۲</sup> (L8)، میکوسینسکی<sup>۳</sup> (M5)، و اردلی (E4) یافت. از این سه مرجع بخصوص اولی را توصیه می کنیم.

1- Titchmarsh

2- Lighthill

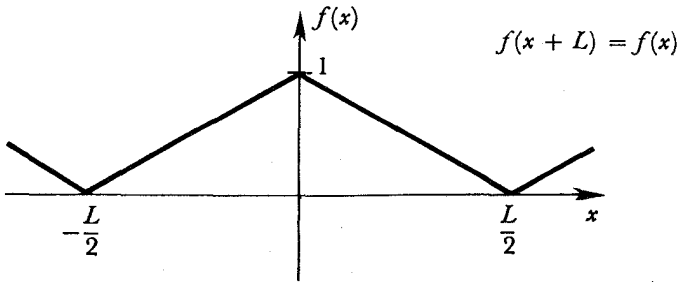
3- Mikusinski



کار اردلی و دیگران (E6) شامل جداول سودمندی از تبدیلات لاپلاس و فوریه و نیز چند تبدیل انتگرال دیگر است .  
 بسیاری از کاربردهای تبدیلات لاپلاس در مسائل فیزیکی را می توان در کارسلا<sup>۱</sup> و جگر<sup>۲</sup> (C2) یافت .

مسائل

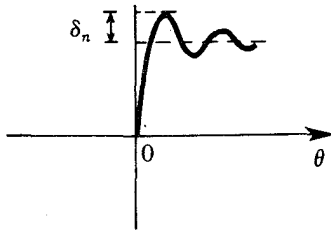
۱۰۴ . تابع  $f(x)$  زیر را به سری فوریه بسط دهید .



۲۰۴ . (آ) سری فوریه

$$f(\theta) = \begin{cases} +1 & 0 < \theta < \pi \\ -1 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$  را در نظر بگیرید . در سمت راست  $\theta = 0$  ، مجموع  $n$  جمله<sup>۱</sup> اول به شکل زیر خواهد بود :



$\delta_n$  ، یعنی "تجاوز" ماکزیمم اول ، را بیابید .  
 (ب) نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \approx 0.18$$

(آن را دقیقاً حساب کنید) این امر به پدیده گیس معروف است.

۳.۴ تابع  $f(x)$  به ازای  $0 < x < 1$  مساوی  $e^{-x}$  است.

(آ)  $f(x)$  را به سری فوریه به شکل  $\sum_n B_n \sin n\pi x$  بسط دهید.

(ب)  $f(x)$  را به سری فوریه با دوره تناوب 1 بسط دهید.

۴.۴ یک دستگاه خطی از ورودی متناوب  $f(t)$  به دست آمده است به طوری که  $f(t+T) = f(t)$

پاسخ دستگاه چنان است که یک ورودی سینوسی با فرکانس زاویه‌ای  $\omega$  در  $(\omega_0/\omega)^2$

ضرب می‌شود مگر آنکه  $\omega = 0$  که در این صورت خروجی نخواهیم داشت. خروجی را

می‌توان به شکل

$$g(t) = \frac{1}{T} \int_0^T G(t-t') f(t') dt'$$

نوشت. تابع  $G(t)$  را بیابید.

۵.۴ بسط

$$\cos \theta + \frac{\cos 3\theta}{9} + \frac{\cos 5\theta}{25} + \dots$$

سری فوریه چه تابعی است؟ مسئله را حل کنید؛ به جایی مراجعه نکنید!

۶.۴ نشان دهید

$$\int_a^b f(x) \delta[g(x)] dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

مشروط بر اینکه  $g(x) = 0$  در بازه  $a < x < b$  ریشه منفرد  $x_0$  را داشته باشد.

۷.۴ انتگرال  $\int_0^\pi dx \int_1^2 dy \delta(\sin x) \delta(x^2 - y^2)$  را حساب کنید.

۸.۴ تبدیل فوریه تابع موج الکترون  $2p$  هیدروژن را بیابید:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^5}} z e^{-r/2a_0}$$

که در آن  $a_0$  شعاع اولین مدار بوهر بوده و  $z$  مختص قائم است.

۹.۴ یک دستگاه خطی دارای پاسخ  $G(\omega)e^{-i\omega t}$  به علامت ورودی  $e^{-i\omega t}$  (دلخواه) است.

اگر ورودی  $f(t)$  شکل خاص زیر را داشته باشد:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-\lambda t} & (t > 0) \end{cases}$$

که در آن  $\lambda$  ثابت است، خروجی مساوی است با

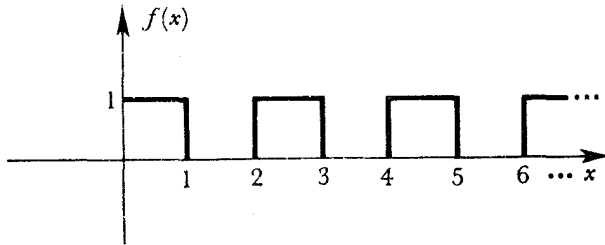
$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ (1 - e^{-\alpha t})e^{-\lambda t} & (t > 0) \end{cases}$$

که در آن  $\alpha$  ثابت دیگری است.

(آ)  $G(\omega)$  را بیابید.

(ب) پاسخ دستگاه به ورودی  $f(t) = A \delta(t)$  را بیابید.

۱۰.۴. تبدیل لاپلاس  $\mathcal{L}[f(x)]$  تابع زیر را بیابید.



۱۱.۴. تابع  $f(x)$  دارای بسط به صورت سری زیر است:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^n}{n!}$$

تابع  $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$  را به شکل بسته و بر حسب  $f(x)$  بنویسید.

۱۲.۴. با استفاده از نمایش انتگرالی

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \cos \theta) d\theta$$

تبدیل لاپلاس  $J_0(x)$  را بیابید.

۱۳.۴. عبارت

$$\frac{1}{(s^2 + 1)(s - 1)}$$

تبدیل لاپلاس چه تابعی است؟

۱۴.۴. سه هسته رادیواکتیو پی در پی واپاشیده می شوند به طوری که تعداد  $N_i(t)$  سه نوع

هسته از معادلات زیر تبعیت می کنند:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3$$

اگر ابتدا  $N_3 = n$ ,  $N_2 = 0$ ,  $N_1 = N$ ,  $N_3(t)$  را به کمک تبدیلات لاپلاس بیابید.

## کاربردهای دیگری از متغیرهای مختلط

در فصل ۳ از روشهای توانای نظریهٔ توابع یک متغیر مختلط برای محاسبهٔ انتگرالها استفاده کردیم، و در فصل ۴ انتگرالهای کنتوری نقش مهمی در مطالعهٔ تبدیلات انتگرال ایفا نمودند. نظریهٔ متغیرهای مختلط کاربردهای مهم دیگری نیز در فیزیک دارد. در بخش اول این فصل، تبدیلات همدیس و کاربردهایشان به اختصار مطرح می‌شوند. بخش دوم شامل توصیفی مقدماتی از روابط پراکندگی است.

## ۱.۵ تبدیلات همدیس

سه خاصیت نگاشتها یا تبدیلات، یعنی

$$W = W(z) \quad z = x + iy \quad W = U + iV$$

ناشی از توابع تحلیلی این نگاشتها را در حل مسائل دوبعدی در الکترواستاتیک، مگنتواستاتیک، شارش گرما، هیدرودینامیک، الاستیسیته، و سایر مباحث سودمند می‌سازد. (منظور از یک مسئلهٔ دوبعدی این نیست که فضای فیزیکی مسئله دوبعدی است، بلکه فقط این است که به یکی از مختصات قائم، مثلاً "z"، وابسته نیستیم.)

اولاً، معادلات دیفرانسیل کشی-ریمان [ضمیمه، معادلات (ض ۸)] ایجاب

می‌کنند که

$$(۱.۵) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

در نتیجه،  $U$  و  $V$  جوابهای معادلهٔ لاپلاس دوبعدی‌اند و می‌توانند کمیات فیزیکی صادق در این معادله را نمایش دهند.

ثانیا"، از معادلات کشی - ریمان نتیجه می شود که

$$(۲.۵) \quad \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} = (\text{grad } U) \cdot (\text{grad } V) = 0$$

در نتیجه، بردارهای  $\text{grad } U$  و  $\text{grad } V$  برهم عمودند. این بردارها به ترتیب بر منحنیهای ثابت  $U = \text{ثابت}$  و  $V = \text{ثابت}$  عمود می باشند. در نتیجه، منحنیهای اخیر نیز دو به دو برهم عمود خواهند بود.

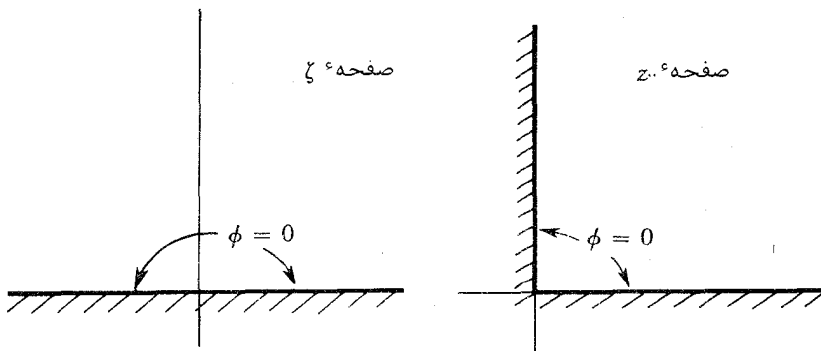
ثالثا"، تبدیل همدیس است به این معنی که زاویه تقاطع دو منحنی با این نگاشت تغییر نمی کند. این مطلب از خاصیت تحلیلی زیر به دست می آید:

$$(۳.۵) \quad W(z) - W(z_0) \approx W'(z_0)(z - z_0)$$

نگاشت در یک نقطه منفرد تبدیل، یعنی نقطه ای که در آن تابع  $W(z)$  یا معکوسش  $z(W)$  تحلیلی نیست، همدیس نمی باشد.

در کاربردهای تبدیلات همدیس، تبدیلی جستجویی شود که وضع را به مسئله معادلی با هیئت مرزی ساده تر تبدیل نماید.

مثال. جوابی از  $\nabla^2 \phi(x, y) = 0$  در ربع اول بیابید که از شرط مرزی  $\phi = 0$  در امتداد محورهای  $x = 0, y = 0$  تبعیت کند. فرض کنیم  $z = x + iy$  و  $\zeta = z^2$ . در این صورت، ربع اول صفحه  $z$  به شکل نیمه بالایی صفحه  $\zeta$  درآمده و مرزهای مسئله ما، مثل شکل ۱.۵، به محور  $\zeta$  حقیقی تبدیل می شوند. یافتن تابع تحلیلی  $\zeta$  که قسمت موهومی اش بر محور حقیقی صفر شود، یعنی  $f(\zeta) = c\zeta$  که در آن  $c$  ثابت حقیقی دلخواهی باشد، آسان است. این نیز یک



تابع تحلیلی از  $z$  است که قسمت موهومی اش جوابی از مسئله اصلی ما می باشد:

$$(۴.۵) \quad \phi = \text{Im } cz^2 = 2cxy$$

این مثال در این وضع کمی صوری است، اگرچه جواب  $\phi$  ممکن است نمایش پتانسیل

الکترواستاتیک در مجاورت گوشه داخلی یک ورقه هادی خم شده باشد. با اینحال، نتیجه را می توان در مسئله بسیار مهم ساخت دستگاههای "نوری" برای کانونی کردن ذرات باردار که شامل سنکروترون گرادیان متناوب است به کار برد. در دستگاههای کانونی کننده گرادیان متناوب<sup>۱</sup> از میدانهای مغناطیسی (یا الکتریکی) با خاصیت

$$B_x = Cy \quad B_y = Cx \quad (C = \text{ثابت}) \quad (5.5)$$

استفاده می شود.

اگر جواب (۴.۵) ما برای  $\phi$  را پتانسیل مگنتواستاتیک تعبیر کنیم، میدان حاصل  $B = -\nabla\phi$  به شکل (۵.۵) خواهد بود. در عمل برای تشخیص میدان، یک سر قطب را در امتداد یکی از سطوح همپتانسیل هذلولوی گذارده و آن را در ویژه پتانسیل قرار می دهیم. بنابراین تقارن می توان سر قطبهای مشابهی در سه ربع دیگر که دارای پتانسیلهای با علامت متناوب اند قرار داد. نتیجه یک آهن ربای چار قطبی مانند شکل ۲.۵ است. یک چنین مغناطیس ذراتی را که مدارهایشان در جهات  $\pm y$  جابجا شده اند کانونی کرده و ذراتی را که مدارهایشان در جهات  $\pm x$  جابجا شده اند متفرق می سازد<sup>۲</sup>. دو آهن ربای متوالی از این نوع که نسبت به محور مشترک خود به اندازه  $90^\circ$  چرخیده اند می توانند در هر دو جهت تمرکز خالص به ما بدهند.

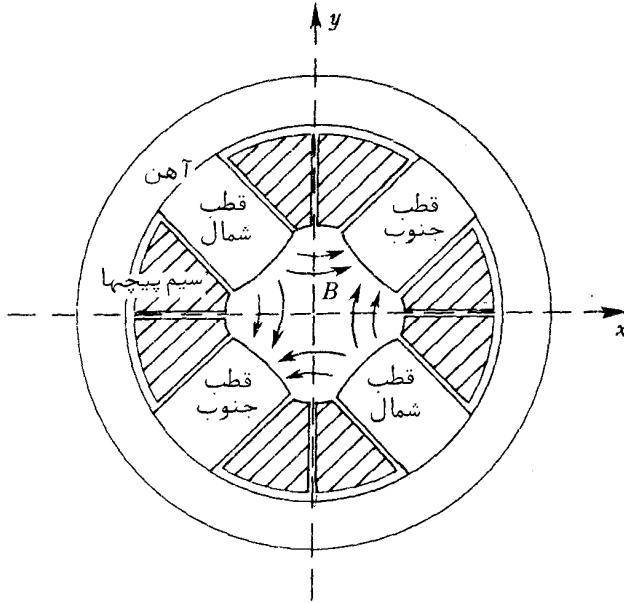
به تبدیلات همدیس باز می گردیم. اگر  $V = \text{Im}f(z)$  نمایش تابع فیزیکی مورد توجه ما باشد که از معادله لاپلاس تبعیت می کند، معنی  $U$  چیست؟ معنی کیفی  $U$  باید از این امر که منحنیهای ثابت  $U$  و ثابت  $V$  دو بدو متعامدند آشکار باشد. مثلاً، اگر  $V$  پتانسیل الکترواستاتیک باشد، خطوط میدان یا خطوط نیرو در امتداد منحنیهای ثابت  $U$  قرار خواهند گرفت. به علاوه، معادلات کشی - ریمان ایجاب می کنند که

$$U(Q) - U(P) = - \int_P^Q (\nabla V)_n ds \quad (6.5)$$

که در آن  $P$  و  $Q$  دو نقطه دلخواه بوده، و انتگرال در امتداد مسیری بین  $P$  و  $Q$  است.  $ds$  عنصر طول مسیر بوده و  $(\nabla V)_n$  مولفه عمود بر مسیر گرادیان است، جهت مثبت وقتی از  $P$  به  $Q$  می رویم به راست می باشد. به همین نحو،

1 - E. Courant et al. (C11)

۲. فرض کرده ایم ذرات بار مثبت داشته و در صفحه شکل حرکت کنند. بر دانشجوست که خواص تمرکز و تفرق را فقط با استفاده از قاعده دست راست برای نیروهای وارد بر بارهای متحرک در میدانهای مغناطیسی تحقیق نماید.



شکل ۲۰۵ مقطع عرضی یک آهن ربای کانونی کننده چار قطبی با سر قطبهای هذلولوی برای تولید میدان  $B_x = Cy, B_y = Cx$ . ذرات عمود بر صفحه کاغذ حرکت می کنند.

$$(۷۰۵) \quad V(Q) - V(P) = \int_P^Q (\nabla U)_n ds$$

حال اگر  $V$  پتانسیل الکترواستاتیک باشد،  $-(\nabla V)_n = E_n$  مولفه عمود بر مسیر میدان الکتریکی است. هرگاه مسیر در امتداد سطح یک هادی (یعنی، در امتداد فصل مشترک سطح هادی با صفحه  $x, y$ ) باشد، آنگاه  $E_n$  میدان الکتریکی عمود بر سطح هادی است که، طبق قانون گاوس در الکترواستاتیک، با چگالی بار سطحی متناسب است. به طور مشخص، در دستگاه mks، چگالی بار سطحی مساوی است با  $\sigma = \epsilon_0 E_n$  ولی در دستگاه cgs برابر است با  $\sigma = E_n/4\pi$ .

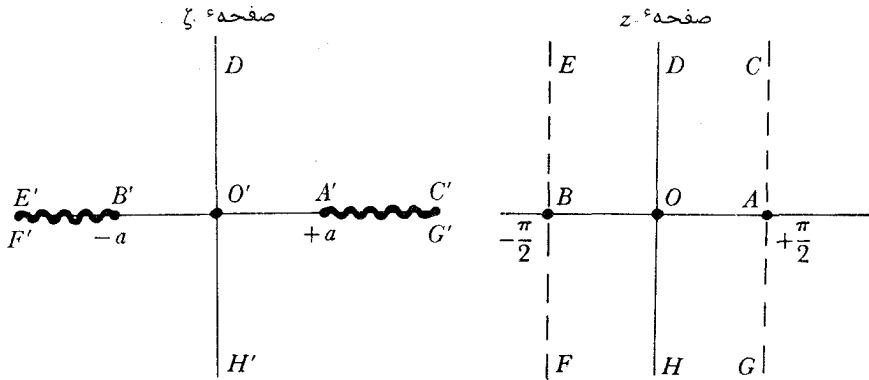
با انتگرالگیری از  $\sigma$  در امتداد سطح هادی می توان بار کل در این ناحیه (بر واحد مسافت در جهت  $z$ ) را یافت. هرگاه  $C(P, Q)$  را بار سطحی بین  $P$  و  $Q$  بر واحد طول عمود بر صفحه  $x, y$  تعریف کنیم، آنگاه (در دستگاه mks) نشان داده ایم که

$$(۸۰۵) \quad C(P, Q) = -\epsilon_0 \int_P^Q (\nabla V)_n ds = \epsilon_0 [U(Q) - U(P)]$$



اگر یکی از توابع  $U, V$  نمایش پتانسیل باشد، تابع دیگر را معمولاً "تابع جریان" می نامند.

مثال. با استفاده از تبدیل همدیس  $\zeta = a \sin z$ ، پتانسیل حاصل از یک نوار هادی بی نهایت طویل به عرض  $2a$  و بار  $\lambda$  بر واحد طول را بیابید. نداشت  $\zeta = a \sin z$  در شکل ۳۰۵ نشان داده شده است.



شکل ۳۰۵ نداشت  $\zeta = a \sin z$ . توجه کنید که صفحه  $\zeta$  در امتداد محور حقیقی به ازای  $|\operatorname{Re} \zeta| > a$  "بریده شده است" نوار قائم  $-\pi/2 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi/2$  روی تمام صفحه  $\zeta$  نگاشته می شود؛ همچنین، بی نهایت نوار قائم دیگر به عرض  $\pi$  در صفحه  $z$  به این نحو نگاشته می شوند.

نوار باردار را بی نهایت طویل در جهت عمود بر صفحه  $\zeta$  در نظر می گیریم که محور حقیقی را بین  $-a$  و  $a$  در این صفحه مثل شکل ۳۰۵ اشغال کند. البته، پتانسیل الکترو-استاتیک در طول نوار ثابت است، و از تقارن می دانیم که خطوط  $O'D'$ ،  $B'E'$ ، و  $A'C'$  همه در امتداد خطوط نیرو یا خطوط میدان اند. در این صورت، می توانیم مسئله الکترواستاتیک خود را به صورت یک تمرین ریاضی بیان کنیم: تابع تحلیلی  $f(\zeta)$  را طوری بیابید که قسمت موهومی آن (پتانسیل الکترواستاتیک) به ازای  $\zeta$  بر محور حقیقی بین  $-a$  و  $a$  و قسمت حقیقی اش (تابع جریان) به ازای  $\zeta$  بر محور حقیقی خارج این نوار و نیز بر محورهای موهومی مثبت و منفی ثابت باشد (یعنی، اینها خطوط نیرو باشند).

حل این مسئله با امتحان آسان نیست، ولی با توجه به شکل ۳۰۵، تبدیل همدیس  $\zeta = a \sin z$  آن را بدیهی می سازد. حال تابعی تحلیلی مانند  $F(z) [= f(\zeta)]$  را طالبیم که قسمت موهومی اش بر  $BA$ ، و قسمت حقیقی اش بر  $BE$ ،  $OD$ ، و  $AC$  ثابت باشد.

جواب واضح است؛ یعنی، عبارت است از  $F(z) = Kz$  که در آن  $K$  یک ثابت حقیقی ولسی دلخواه است. برحسب متغیر  $\zeta$  داریم

$$(۹۰۵) \quad f(\zeta) = F(z) = Kz = K \sin^{-1} \frac{\zeta}{a}$$

حال ثابت  $K$  را با استفاده از این امر که بار کل در واحد طول نوار  $\lambda$  است حساب می‌کنیم. قبلاً دیدیم [ معادله (۸۰۵) ] که کل بار بر واحد طول در بالای نوار، بین  $A'$  و  $B'$  در شکل ۳۰۵، مساوی  $\epsilon_0$  برابر افزایش قسمت حقیقی  $f(\zeta)$  است وقتی از  $A'$  به  $B'$  می‌رویم. بنابراین (۹۰۵)، این افزایش مساوی است با

$$K \sin^{-1}(-1) - K \sin^{-1}(1) = -K\pi$$

لذا، بار کل بر واحد طول در بالای نوار  $-K\pi\epsilon_0$  است. اما، بنا بر تقارن، نصف بار کل در بالای نوار است؛ نصف دیگر البته، در پایین قرار دارد. بنابراین،

$$-K\pi\epsilon_0 = \frac{1}{2} \lambda \Rightarrow K = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$$

به ازای این  $K$ ،

$$f(\zeta) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \sin^{-1} \frac{\zeta}{a}$$

و پتانسیل الکترواستاتیک مساوی است با

$$V = \text{Im } f(\zeta) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Im } \sin^{-1} \frac{\zeta}{a}$$

همپتانسیلها به چه شکلی هستند؟ اینها خطوطی با  $\text{Im } f(\zeta)$  ثابت یا، بنا بر (۹۰۵)، خطوطی با  $\text{Im } z$  ثابت‌اند. اگر بنویسیم  $z = x + iy$  و  $\zeta = \xi + i\eta$ ، تبدیل همدیس ما به صورت زیر درمی‌آید:

$$\xi + i\eta = a \sin(x + iy)$$

یا

$$\xi = a \sin x \cosh y$$

$$\eta = a \cos x \sinh y$$

همپتانسیلها خطوطی با  $y$  ثابت‌اند؛ یا حذف  $x$  از این دو معادله نتیجه می‌شود که

$$\frac{\xi^2}{a^2 \cosh^2 y} + \frac{\eta^2}{a^2 \sinh^2 y} = 1$$

یا، چون

$$V = \text{Im } f(\zeta) = \text{Im } F(z) = Ky = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} y$$

معادله همپتانسیلها را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{\xi^2}{a^2 \cosh^2\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}\right)} + \frac{\eta^2}{a^2 \sinh^2\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\lambda}\right)} = 1$$

همپتانسیلها بیضی می باشند .

### ۲۰۵ روابط پراکندگی

فرمول انتگرال کشی [ معادله (۱۰۵) ضمیمه ] مبین این نتیجه جالب است که مقادیر تابع تحلیلی  $f(z)$  در امتداد یک منحنی بسته در ناحیه انتظام آن مقادیر  $f(z)$  را همه جا در داخل این منحنی معین می کنند . یعنی ،

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta$$

که در آن  $C$  یک کنتور بسته است که در و بر آن  $f(z)$  منتظم بوده و  $z$  نقطه دلخواهی داخل  $C$  است .

وقتی فرمول کشی به شیوه زیر بر توابعی که بر بخشی از محور حقیقی معنی فیزیکی دارند اعمال می شود ، به روابط پراکندگی منجر می گردد . این نام از آنجائی شده که این نوع روابط نخست توسط کرونیگ<sup>۱</sup> و کرامرز<sup>۲</sup> در نظریه پراکندگی اپتیکی و اشعه X به دست آمده اند . در مبحث اپتیک ، یک رابطه پراکندگی رابطه ای انتگرالی بین قسمت شکست و قسمت جاذب نمار شکست در فرکانسهای مختلف است . چون اینها به ترتیب قسمت های حقیقی و موهومی نمار شکست (مختلط) اند ، ما از واژه رابطه پراکندگی برای هر چنین رابطه انتگرالی بین قسمت های حقیقی و موهومی تابع یک متغیر مختلط استفاده خواهیم کرد .

روابط پراکندگی امروزه کاربردهای وسیعی در نظریه برهم کنشهای ذرات بنیادی دارند . که در این نظریه بر دامنه های پراکندگی اعمال می شوند . این کاربرد با کاربرد اصلی ارتباط نزدیکی دارد ، زیرا نمار شکست نور به دامنه پراکندگی آن مربوط است . کاربردهای دیگر را می توان در تحلیل مدار الکتریکی یافت . مثلاً ، ر.ک. سشو<sup>۳</sup> و بالابانیان<sup>۴</sup> (S4) ، فصل ۷ .

ابتدا حالت ساده ای در نظر می گیریم که در آن  $f(z)$  در نیمه بالایی صفحه انفراد

1- Kronig

2- Kramers

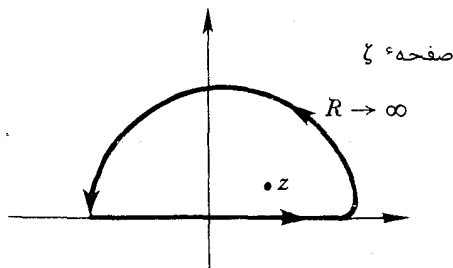
3- Seshu

4- Balabanian

نداشته باشد و وقتی  $|z| \rightarrow \infty$  ،  $f(z) \rightarrow 0$  . حال فرمول کشی را با کنتوری شامل محور حقیقی و نیمدایره<sup>۴</sup> بالایی بزرگ، مثل شکل ۴.۵، به کار می‌بریم. انتگرال روی نیمدایره صفر است زیرا، وقتی  $R \rightarrow \infty$  ،

$$\left| \int_{\text{نیمدایره}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta \right| \leq |f(\zeta)|_{\max} \int \frac{Re^{i\theta} i d\theta}{Re^{i\theta}} = \pi |f(\zeta)|_{\max} \rightarrow 0$$

که در آن  $|f(\zeta)|_{\max}$  اندازه<sup>۵</sup> ماکزیمم  $f(\zeta)$  بر نیمدایره است، که به ازای  $R \rightarrow \infty$  صفر می‌شود. لذا،



شکل ۴.۵ کنتور به کار رفته برای به دست آوردن روابط پراکنندگی

$$(۱۰.۵) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{real axis}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{Im } z > 0$$

همچنین فرض کنید، تابع مورد نظر فیزیکی بر محور حقیقی  $f(z)$  باشد، یا درحالی که خط شاخه‌ای وجود دارد، حد آن وقتی  $z$  از بالا به محور حقیقی نزدیک می‌شود یعنی، اگر این تابع را  $F(x)$  بنامیم، برابر است با

$$(۱۱.۵) \quad F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x + i\epsilon)$$

که در آن  $\epsilon$  مثبت است. در این صورت، از (۱۰.۵) نتیجه می‌شود که

۱. ما مبنای فیزیکی این فرض را به اختصار شرح می‌دهیم. "پاسخ"  $\phi(t)$  یک دستگاه خطی به "ورودی"  $g(t)$  را می‌توان به شکل  $\phi(t) = \int dt' K(t-t')g(t')$  نوشت، که در آن  $K(t)$  تابع گرین (بخش ۴.۹) دستگاه است. شرط علیت، یعنی اینکه هیچ پاسخی مقدم بر ورودی نیست، به این معنی که به ازای  $t < 0$  ،  $K(t) = 0$  . توابع  $f(z)$  مورد بحث تبدیلات فوریه (بخش ۲.۴) این توابع گرین اند، و شرط  $K(t) = 0$  به ازای  $t < 0$  ایجاب می‌کند که تبدیل فوریه<sup>۶</sup>  $f(z) = \int dt e^{iz} K(t)$  از  $K(t)$  به ازای  $\text{Im } z > 0$  انفراد نداشته، و به ازای  $|z| \rightarrow \infty$  در نیمصفحه<sup>۷</sup> بالایی  $f(z) \rightarrow 0$  ،  $f(z) \rightarrow 0$  (قس. فقره<sup>۸</sup> ۲، ص ۲۵۵).

$$2\pi i F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x - i\epsilon} dx' = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x')}{x' - x} dx' + \pi i F(x)$$

که در آن  $P$  مقدار اصلی کشی است [ ر. ک. ضمیمه، بخش ض ۲، فقره ۸ ]  
 لذا،

$$F(x) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x')}{x' - x} dx'$$

و، قسمت‌های حقیقی و موهومی را متحد قرار می‌دهیم:

$$\operatorname{Re} F(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx'$$

(۱۲۰۵)

$$\operatorname{Im} F(x) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} F(x')}{x' - x} dx'$$

اینها روابط پراکندگی برای تابع جالب فیزیکی  $F(x)$  می‌باشند.

این روابط در اکثر کاربردها در شکلی که مناسب برای مقایسه با آزمایش‌ها باشند، نیستند.

دلیلش این است که متغیر  $x$  معمولاً فقط به ازای  $x > 0$  یا حتی  $x > x_1 \geq 0$  معنی فیزیکی دارد؛ لذا، انتگرال‌های فوق روی ناحیه "غیر فیزیکی" وسیعی گسترده‌اند. مثلاً،  $x$  ممکن است انرژی یک ذره پراکنده شونده باشد که نمی‌تواند از جرم سکون کمتر باشد. در این وضع، ممکن است از تقارن  $f(z)$  برای ارتباط انتگرال روی یک ناحیه غیر فیزیکی به انتگرال روی یک ناحیه فیزیکی استفاده کرد.

یک حالت ساده وقتی است که برد فیزیکی  $x$  عبارت باشد از  $x \geq 0$  و  $f(z)$  تقارن

"زوج" یا "فرد" داشته باشد که به ترتیب با  $f(-z) = \pm f^*(z^*)$  تعریف می‌شوند. برای تقارن "زوج" داریم

$$F(x) = \frac{1}{\pi i} P \int_{\infty}^0 \frac{F^*(x')}{x' + x} dx' + \frac{1}{\pi i} P \int_0^{\infty} \frac{F(x')}{x' - x} dx'$$

(۱۳۰۵)

$$\operatorname{Re} F(x) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x' \operatorname{Im} F(x')}{(x')^2 - x^2} dx'$$

(۱۴۰۵)

$$\operatorname{Im} F(x) = -\frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{Re} F(x')}{(x')^2 - x^2} dx'$$

نتایج مشابهی برای تقارن "فرد" وجود دارند. روابط پراکندگی اپتیکی به این شکل اند، که در آنها  $x$  فرکانس اپتیکی و  $F(x)$  نمار شکست می‌باشد.

تا بحال توجه ما به روابط پراکندگی معطوف شکل تاریخی‌شان بود. یک نکته مربوطه

طرز تعیین انحصاری بعضی توابع تحلیلی به وسیلهٔ انفرادها و رفتار در بی‌نهایت است. اطلاعات لازم در امتداد یک خط شاخه‌ای چیزی جز ناپیوستگیها در امتداد خط شاخه‌ای، یعنی اختلاف مقادیر تابع در طرفین بریدگی، نیست. در مثالهای زیر، چند شرط که یک چنین نمایش تحت آنها امکان پذیر است روشن خواهند شد.

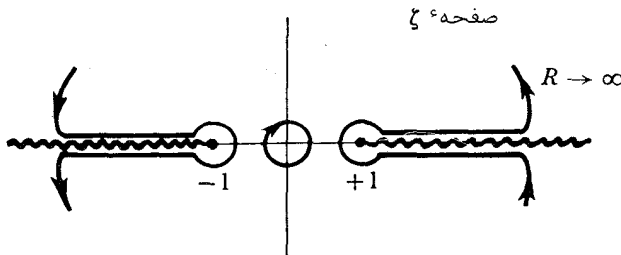
مثال. فرض کنیم از تابع  $f(z)$  اطلاعات زیر را داشته باشیم:

۱.  $f(z)$  همه جا جز یک قطب به ماندهٔ ۱ در  $z=0$  و خطوط شاخه‌ای از  $1$  تا  $+\infty$  و  $-1$  تا  $-\infty$  در امتداد محور حقیقی تحلیلی باشد.

۲. وقتی  $|z| \rightarrow \infty$  ،  $f(z) \rightarrow 0$ .

۳.  $f(z)$  بر محور حقیقی از  $-1$  تا  $1$  حقیقی باشد.

از اصل انعکاس شوارتز (ص ۴۸۲) نتیجه می‌شود که  $f(z^*) = f^*(z)$ . حال فرمول‌کشی را در امتداد کنتور شکل ۵.۵ به کار می‌بریم. مثل مثال پیش، وقتی  $R \rightarrow \infty$ ، انتگرال روی



شکل ۵.۵ کنتور به کار رفته در مثال فوق

دایرهٔ بزرگ صفر می‌شود. فرض کنیم رفتار  $f(z)$  در مجاورت نقاط شاخه‌ای  $\pm 1$  چنان است که انتگرالها روی دو دایرهٔ کوچک حول این نقاط نیز صفرند. در این صورت،

$$2\pi i f(z) = 2\pi i \left( \frac{1}{z} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_1^{\infty} \frac{f(x' + i\varepsilon) dx'}{x' + i\varepsilon - z} - \int_1^{\infty} \frac{f(x' - i\varepsilon) dx'}{x' - i\varepsilon - z} \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{-1} \frac{f(x' + i\varepsilon) dx'}{x' + i\varepsilon - z} - \int_{-\infty}^{-1} \frac{f(x' - i\varepsilon) dx'}{x' - i\varepsilon - z} \right]$$

از تلفیق دو انتگرال اول و دو انتگرال آخر معلوم می‌شود که، همانطور که قبلاً گفته شد، فقط ناپیوستگی  $f(z)$  در امتداد بریدگیها مهم است. در این مثال ناپیوستگی از تقارن انعکاسی  $f(x' - i\varepsilon) = f^*(x' + i\varepsilon)$  ناشی می‌شود، که از آن داریم

$$f(x' + i\varepsilon) - f(x' - i\varepsilon) = 2i \operatorname{Im} f(x' + i\varepsilon)$$

لذا،

$$(15.5) \quad f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - z} dx' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - z} dx'$$

که در آن، مثل قبل،  $F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x + i\varepsilon)$ ، این، نمایش  $f(z)$  برحسب انفرادهای مقررش را کامل خواهد کرد.

اگر  $F(x)$  تابعی مورد توجه در فیزیک باشد، برای آن می توان با رفتن به حد  $z = x + i\varepsilon \rightarrow x$  یک رابطه پراکندگی نوشت.

$$F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi} P \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' + \frac{1}{\pi} \pi i \operatorname{Im} F(x)$$

اگر  $|x| > 1$ ، جمله آخر ناشی از انفراد در یکی از انتگرالهاست.

اگر  $|x| < 1$ ، طبق فرض  $\operatorname{Im} F(x) = 0$ ، و با گنجاندن آخرین جمله خطایی مرتکب نمی شویم. در هر حالت، به دست می آوریم

$$(16.5) \quad \operatorname{Re} F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' + \frac{1}{\pi} P \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx$$

با این روند رابطه پراکندگی "دیگر" که  $\operatorname{Im} F(x)$  را برحسب یک انتگرال روی  $\operatorname{Re} F(x)$  می دهد به دست نمی آید.

اگر ناحیه فیزیکی متغیر  $x$ ،  $x > 1$  باشد، هنوز به یک اصل تقارن برای ارتباط  $\operatorname{Im} F(x)$  به ازای  $x < -1$  به  $\operatorname{Im} F(x)$  به ازای  $x > 1$  نیاز داریم. این رابطه تقارن را باید در فیزیک مسئله جستجو کرد.

در به دست آوردن نمایش (15.5) از کنتور خاص انتخاب شده استفاده شد. لیکن، رابطه پراکندگی (16.5) را می شد با استفاده از فرمول کشی در امتداد کنتور شکل 6.5 نیز به دست آورد، که نتیجه می دهد

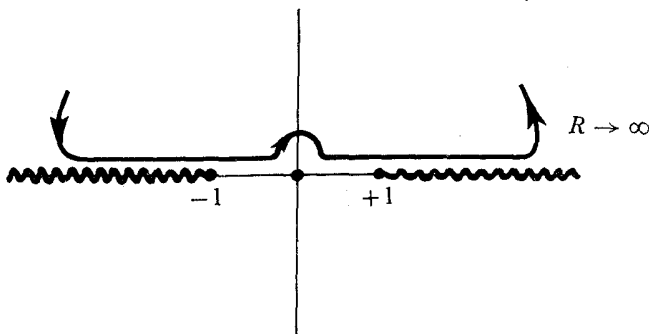
$$2\pi i f(z) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - z} dx' - \pi i \left( \frac{1}{-z} \right)$$

فرض کنیم  $z = x + i\varepsilon$  و  $\varepsilon \rightarrow 0$  در این صورت،

$$2F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi i} \left[ P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x')}{x' - x} dx' + \pi i F(x) \right]$$

$$(17.5) \quad F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x')}{x' - x} dx'$$

این نتیجه شامل (۱۶.۵) به عنوان قسمت حقیقی خود است.



شکل ۶.۵. کنتور انتگرالگیری دیگر

مثال. تابع  $f(z)$  را با خواص زیر بیابید:

۱.  $f(z)$  جز برای خط شاخه‌ای از  $z = 0$  تا  $+\infty$  در امتداد محور حقیقی و یک قطب ساده مانده

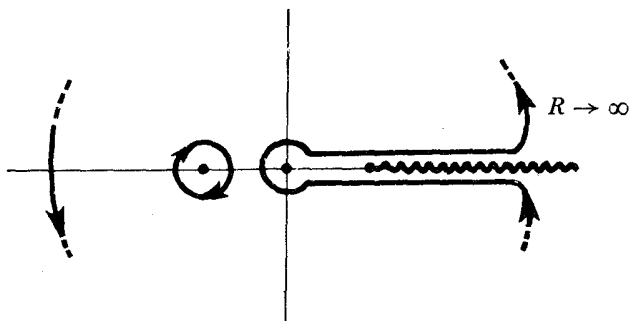
۱ در  $z = -1$ ، تحلیلی باشد؛

۲. وقتی  $|z| \rightarrow \infty$ ،  $f(z) \rightarrow 0$ ؛

۳.  $f(z)$  بر محور حقیقی منفی حقیقی باشد؛

۴. به ازای  $x > 0$ ،  $\text{Im} f(x + ie) = 1/(1 + x^2)$ ،

فرمول کشی را در امتداد کنتور شکل ۷.۵ به کار می‌بریم. نتیجه را می‌توان طبق مثال



شکل ۷.۵. کنتور انتگرالگیری برای مثال فوق



$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx'}{(1+x'^2)(x'-z)}$$

انتگرال سراسر بوده و نتیجه<sup>۶</sup> زیر را به دست می دهد:

$$(18.5) \quad f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{\pi} \frac{\ln z}{(1+z^2)} - \frac{1}{(1+z^2)} \left( \frac{z}{2} - i \right)$$

کار با تابع چند مقداری  $\ln z$  کمی دقت می خواهد. در جواب (18.5) فرض کرده ایم  $\ln z$  در بالای بریدگی حقیقی است.

این بخش را با تعدیلی به پایان می بریم که ممکن است برای به دست آوردن روابط پراکندگی تابعی که در شرط  $f(z) \rightarrow 0$  وقتی  $|z| \rightarrow \infty$  صدق نمی کند انجام گیرد. هرگاه وقتی  $|z| \rightarrow \infty$  ،  $(1/z)f(z) \rightarrow 0$  و در سایر شرایط نظیر شرایط مثالهای فوق نیز صدق کند، آنگاه از رابطه پراکندگی برای  $(1/z)f(z)$  می توان یک رابطه پراکندگی برای  $f(z)$  به دست آورد.

البته، عامل همگرایی  $1/(z-x_0)$  به جای  $1/z$  به کار خواهد رفت. قطب ناشی از این عامل در  $z = x_0$  [یا قطبی که قبلاً در  $f(z)$  آمده] را می توان با تفریق یک قطب باهمان مانده در همان نقطه حذف کرد. مثلاً، یک رابطه پراکندگی برای تابع  $[f(z) - f(x_0)]/(z - x_0)$  نظیر (12.5) عبارت است از

$$(19.5) \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{x-x_0} [F(x) - F(x_0)] \right\} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x') - \operatorname{Im} F(x_0)}{(x' - x_0)(x' - x)} dx'$$

به طور کلی،  $\operatorname{Im} F(x_0) = 0$ ، که در این صورت

$$(20.5) \quad \operatorname{Re} F(x) = \operatorname{Re} F(x_0) + \frac{(x-x_0)}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{(x' - x_0)(x' - x)} dx'$$

این یک رابطه پراکندگی تفریق شده نامیده می شود. همانطور که به آسانی در مثال فوق دیده می شود، روند تفریق، همگرایی انتگرال پراکندگی را اصلاح می کند.

### مراجع

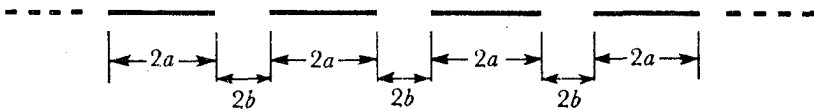
برای کاربردهای دیگر تبدیلات همدیس مسائل دوبعدی، ر. ک. اسمایت<sup>۱</sup> (S6)، فصل ۴؛ ایروینگ<sup>۲</sup> و مولینو<sup>۳</sup> (I3)، فصل هشت؛ اسمیت (S5)، فصل ۹؛ مورس و فیش بک (M9)،

بخش ۷.۴؛ ویلف<sup>۱</sup> (W7)، فصل ۶.

یک بحث مقدماتی از روابط پراکندگی توسط ای. کورینالدسی<sup>۲</sup> (C9) ارائه شده است؛ ارتباط آن با علیت توسط ج. اس. تول<sup>۳</sup> (T6)، و حالت نظریه کوانتمی به وسیله گل - مان<sup>۴</sup> و دیگران (G2) بحث شده است.

### مسائل

۱.۵. با استفاده از روش تبدیلات همدیس، پتانسیل الکترواستاتیک ناشی از یک سری نوارهای باردار همصفا هر یک به عرض  $2a$  را بیابید که با فضاهایی به عرض  $2b$  از هم جدا شده و هر یک دارای بار  $\lambda$  بر واحد طول می باشد.



۲.۵. بارهای خطی  $\pm \lambda$  به ترتیب در نقاط  $(0, \pm d)$  قرار دارند. اگر  $d \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$  به نحوی که ثابت  $p = 2\lambda d =$  تابع  $W(z)$  را طوری بیابید که قسمت حقیقی اش پتانسیل الکترواستاتیک در صفحه  $xy$  را به ما بدهد.

۳.۵. بار خطی  $\lambda$  را در  $(0, a)$  بین دو صفحه متصل به زمین  $y = 0$  و  $y = b$  ( $0 < a < b$ ) در نظر بگیرید. پتانسیل را همه جا بین صفحات پیدا نمایید. راهنمایی. تبدیل  $\zeta = e^{z\pi/b}$  مفید است.

۴.۵. رابطه (۸.۵) را به دقت ثابت کنید؛ بخصوص، مطمئن شوید که علامت بار را می دانید.

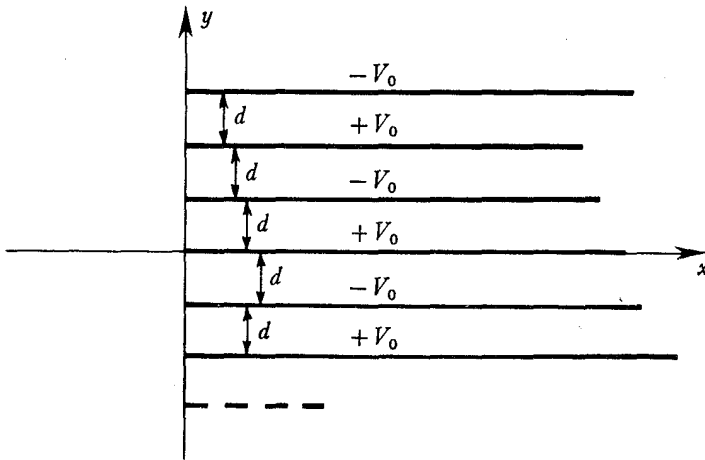
۵.۵. آرایه ای از تعداد زیادی صفحه هادی نیمه نامتناهی موازی در نظر بگیرید که طبق شکل متناوباً با پتانسیلهای  $+V_0$  و  $-V_0$  باردار شده اند.

1- Wilf

2- E. Corinaldesi

3- J. S. Toll

4- Gell-Mann



(آ) نشان دهید که تبدیل همدیس

$$\zeta = \frac{2V_0}{\pi} \sin^{-1} e^{\pi z/d}$$

مسئله را به یک مسئله بدیهی در صفحه  $\zeta$  تحویل می‌کند.

(ب) نشان دهید که با تقریب اول ظرفیت یک‌چنین خازن با صفحات موازی، به‌خاطر اثرات لبه، به‌اندازه‌ای افزایش می‌یابد که معادل افزودن نواری به‌عرض  $(d/\pi) \ln 2$  به هر صفحه است.

۶.۵ (آ) می‌خواهیم توزیع پتانسیل در نیم‌صفحه بالایی را در صورتی بیابیم که پتانسیل در امتداد محور  $x$  ثابت و به صورت زیر باشد:

$$\phi(y=0) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ V_0 & -a < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

نشان دهید این همان مسئله یافتن پتانسیل ناشی از دو بار خطی است که در آن نقشهای تابع پتانسیل و جریان باهم عوض شده‌اند. جواب عبارت است از

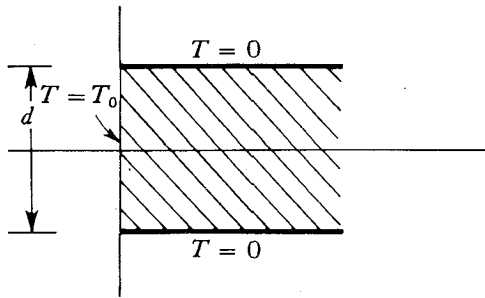
$$\phi = \frac{V_0}{\pi} \left( \tan^{-1} \frac{y}{x-a} - \tan^{-1} \frac{y}{x+a} \right)$$

(ب) به کمک جواب قسمت آ و تبدیل همدیس

$$\zeta = \cosh \frac{\pi z}{2d}$$

توزیع دما در صفحه فلزی نیمه‌نامتناهی زیر را در صورتی بیابید که سه‌وجه در دماهای

تعیین شده نگهداشته شوند. توجه کنید که داخل فلز داریم  $\nabla^2 T = 0$ .

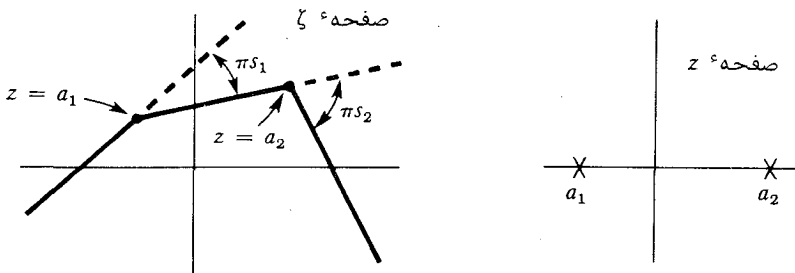


۷.۵. تبدیل شوارتز

( $\bar{z}$ ) نگاشت  $\zeta = \zeta(z)$  را در نظر بگیرید که در آن

$$\frac{d\zeta}{dz} = A(z - a_1)^{s_1}(z - a_2)^{s_2}$$

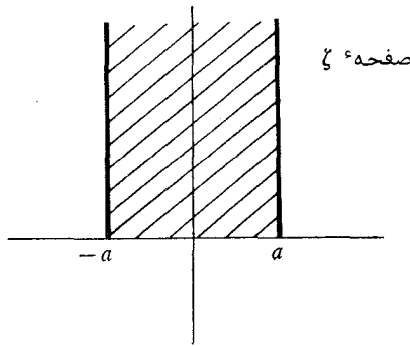
که در آن  $a_1, a_2, s_1, s_2$  ثابتهای حقیقی دلخواهی بوده، ولی  $A$  یک ثابت مختلط دلخواه است. نشان دهید وقتی  $z$  در امتداد محور حقیقی حرکت کند،  $\zeta$  نیز در یک خط مستقیم حرکت می‌کند جز آنکه وقتی  $z = a_1$  یا  $z = a_2$  تغییر جهت ناگهانی می‌دهد. وقتی  $z$  (به قدر بی‌نهایت کوچکی از بالا) از  $a_1$ ، از چپ به راست می‌گذرد، نشان دهید  $\zeta$  به اندازه  $\pi s_1$  به راست می‌چرخد، و نیز وقتی  $z$  از بالای  $a_2$  می‌گذرد، به اندازه  $\pi s_2$  خواهد چرخید (ر.ک. شکل زیر).



لذا، نیمه بالایی صفحه  $z$  به ناحیه‌ای نگاشته می‌شود که به یک چندضلعی دلخواه در صفحه  $\zeta$  محدود است. واضح است که این روش را می‌توان به تعداد دلخواهی گوشه تعمیم داد.

(ب) با استفاده از روش ( $\bar{z}$ )، نگاشت  $\zeta(z)$  را طوری بیابید که نیمه بالایی

صفحه  $z$  را به درون تغار راست گوشه که ناحیه سایه دار شکل زیر است بنگارد.



نتیجه را با شکل ۳۰۵ و مثال مربوطه مقایسه کنید.

۸۰۵. ثابت کنید جواب مثال دوم بخش ۱۰۵ در فواصل بزرگ یعنی به ازای مقادیر بزرگ،

$|k|$ ، به پتانسیل بار خطی  $\lambda$  نزدیک می شود.

۹۰۵. تابع  $f(z)$  دارای خواص زیر است:

( $\bar{A}$ )  $f(z)$  جز (۱) در یک خط شاخه‌ای از ۰ تا  $+\infty$  در امتداد محور حقیقی؛ (۲)

در یک قطب ساده به مانده  $2$  در  $z = -2$  تحلیللی است؛

(ب) وقتی  $|z| \rightarrow \infty$ ،  $f(z) \rightarrow 0$ ؛

(پ)  $f(z)$  بر محور حقیقی منفی حقیقی است؛

(ت) به ازای  $x > 0$ ،  $\text{Im} f(x + i\epsilon) = x/(1 + x^2)$ ، تابع

$$F(x) = f(x + i\epsilon)$$

را پیدا نمایید.

۱۰۰۵. رابطه پراکندگی تفریق شده را در نظر بگیرید. در واقع، فرض کنید وقتی  $|x| \rightarrow \infty$ ،

$$|F(x)| \rightarrow 0$$

( $\bar{A}$ ) از (۲۰۵) "قاعده" مجموع

$$\text{Re } F(0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } F(x') dx'}{x'}$$

را به دست آورید.

(ب) چگونه می توان این قاعده مجموع را از رابطه پراکندگی تفریق نشده (۱۲۰۵)

به دست آورد؟

(پ) حال فرض کنید  $F(x)$  در بی نهایت چنان سریع به صفر نزدیک شود که وقتی

$|x| \rightarrow \infty$ ،  $|x F(x)| \rightarrow 0$ ، در قیاس با قسمت ( $\bar{A}$ )، یک قاعده مجموع دیگر از (۱۲۰۵)

به دست آورید .

این روابط را " روابط فوق همگرایی " گویند ، و این به خاطر همگرایی سریع آنها در بی نهایت است که بر  $F(x)$  اعمال می شود<sup>۱</sup> .

## بردارها و ماتریسها

در این فصل فضاهای برداری خطی و عملگرهای خطی و نیز نمایش بردارها و عملگرها توسط مولفه‌هایشان در دستگاههای مختصات تعیین شده مورد بحث قرار می‌گیرند. ما خواص جبری و سایر خواص ماتریسهایی را مطرح می‌کنیم که نمایش عملگرهای خطی اند، و نیز ماتریسهایی را مورد بحث قرار می‌دهیم که برای توصیف تبدیلات مختصات، که هدف کاملاً "متفاوتی است، به کار می‌روند.

مسائل ویژه مقدار دربرگیرنده ماتریسها در بخش ۵.۶ مطرح می‌شوند، و در آنجا بر ماتریسهای هرمیتی به خاطر اهمیتشان در فیزیک تأکید خواهیم کرد. مسئله قطری سازی ماتریسها در بخش ۶.۶ مطرح می‌شود. فصل را با بحثی توصیفی از فضاهای برداری خطی که بعد نامتناهی دارند خاتمه می‌دهیم.

### ۱.۶ فضاهای برداری خطی

استفاده از بردارهای سه بعدی معمولی برای نمایش کمیات فیزیکی نظیر موضع، سرعت، نیروها، و غیره کاملاً آشناست. ما تعریف فضای برداری خطی زیر را از خواص معروف چنین بردارهایی مجرد می‌سازیم.

یک فضای برداری خطی مجموعه‌ای است از اشیاء ( بردارهای )  $a, b, c, \dots$  که تحت

دو عمل زیر بسته است :

۱. جمع، که تعویضپذیر و شرکتپذیر است :

$$a + b = b + a$$

(۱.۶)

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

۲. ضرب در اسکالر ( یک عدد مختلط ) ، که پخشپذیر و شرکتپذیر است ؛ یعنی ،

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$$

(۲.۶)

$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$$

به علاوه ، فرض کنیم بردار پوچ  $\mathbf{0}$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $\mathbf{a}$  ،

(۳.۰۶)

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

ضرب در اسکالر  $1$  هر بردار را بدون تغییر باقی می گذارد :

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

و ، بالاخره ، به ازای هر  $\mathbf{a}$  ، بردار  $-\mathbf{a}$  وجود دارد به طوری که

(۴.۰۶)

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

یک مجموعه از بردارهای  $\mathbf{u}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{a}$  را مستقل خطی گوئیم اگر هیچ معادله‌ای مانند

(۵.۰۶)

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \dots + \sigma\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

جز به ازای  $\lambda = \mu = \dots = \sigma = 0$  برقرار نباشد .

اگر در یک فضای برداری  $n$  بردار مستقل خطی وجود داشته باشند ولی هیچ مجموعه‌ای

از  $n + 1$  بردار مستقل خطی وجود نداشته باشد ، گوئیم فضا  $n$  بعدی است . ما در این فصل

اساساً "فضاهای با تعداد بعد متناهی را در نظر می گیریم ، ولی در پایان فضاها با تعداد

بعد نامتناهی را نیز به اختصار مطرح خواهیم کرد .

فرض کنیم  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  مجموعه‌ای از  $n$  بردار مستقل خطی در فضای برداری  $n$

بعدی باشد . در این صورت ، اگر  $\mathbf{x}$  بردار دلخواهی در فضا باشد ، رابطه‌ای مانند

$$\lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2 + \dots + \sigma\mathbf{e}_n + \tau\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

وجود دارد که در آن همهء ثابتها صفر نبوده و بخصوص  $\tau \neq 0$  . لذا ،  $\mathbf{x}$  را می توان به صورت

ترکیبی خطی از  $\mathbf{e}_i$  ها نوشت :

(۶.۰۶)

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$$

گوئیم بردارهای  $\mathbf{e}_i$  یک پایه ، یا دستگاه مختصات ، تشکیل داده و اعداد  $x_i$  مولفه‌های  $\mathbf{x}$

در این دستگاه اند .  $\mathbf{e}_i$  ها را بردارهای پایه می نامند . اینکه بردار دلخواه  $\mathbf{x}$  را می توان به

صورت ترکیبی خطی از  $\mathbf{e}_i$  ها نوشت اغلب به این ترتیب بیان می شود: مجموعهء بردارهای پایه‌ای  $\mathbf{e}_i$

تام است . ایدهء تمامیت بسیار مهم است . و بعداً "چند بار در این کتاب (مثلاً بخش ۲.۹) خواهد آمد .

## ۲.۶ عملگرهای خطی

حال یک تابع برداری خطی از یک بردار را در نظر می گیریم ؛ یعنی ، قاعده‌ای که به هر



بردار  $\mathbf{x}$  بردار  $\phi(\mathbf{x})$  را به نحوی خطی مربوط می سازد:

$$(۷.۶) \quad \phi(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\phi(\mathbf{a}) + \mu\phi(\mathbf{b})$$

کافی است  $n$  بردار  $\phi(\mathbf{e}_i)$  را بدانیم، که می توان آنها را به راحتی بر حسب پایه  $\mathbf{e}_i$  توصیف کرد؛ یعنی،

$$(۸.۶) \quad \phi(\mathbf{e}_i) = \sum_j A_{ji} \mathbf{e}_j$$

که در آن  $A_{ji}$  مولفه  $j$  م بردار  $\phi(\mathbf{e}_i)$  است.

حال اگر بردار دلخواه  $\mathbf{x}$  را در نظر گرفته و قرار دهیم  $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ ، خواهیم داشت

$$\mathbf{y} = \phi\left(\sum_i x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_i x_i \sum_j A_{ji} \mathbf{e}_j$$

لذا، مولفه های  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{y}$  به صورت زیر به هم مربوطند:

$$(۹.۶) \quad y_j = \sum_i A_{ji} x_i$$

همچنین، می توان روابط فوق را به طریقی دیگر توصیف کرده و گفت که ارتباط  $\mathbf{y}$  با

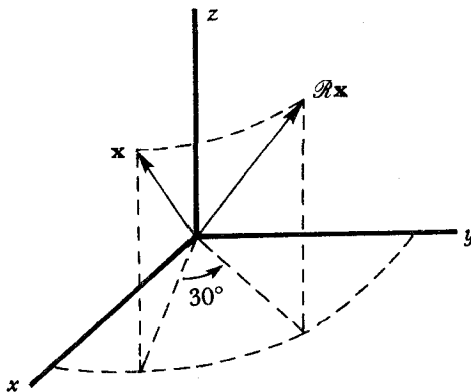
$\mathbf{x}$  به وسیله عملگر خطی  $\mathcal{A}$  که بر  $\mathbf{x}$  اثر می کند شکل می گیرد. با علامت،

$$(۱۰.۶) \quad \mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$$

در این صورت، اعداد  $A_{ij}$  مولفه های عملگر خطی  $\mathcal{A}$  (یا تابع برداری  $\phi$ ) در دستگاه مختصات  $\mathbf{e}_i$  می باشند. به طور مشخص، از (۸.۶) معلوم می شود که  $A_{ij}$  مولفه  $i$  م بردار  $\mathcal{A}\mathbf{e}_j$  است.

درست مثل بردارها، یک عملگر خطی اغلب دارای معنی فیزیکی است که از دستگاه

مختصات مستقل بوده و آن را می توان بدون ارجاع به دستگاهی خاص توصیف کرد.



شکل ۱۰.۶ نتیجه یک عملگر دورانی ساده

مثال. عملگر دورانی ساده  $\mathcal{A}$  را می توان توسط الفاظ مطابق قاعده زیر توصیف کرد:  $\mathcal{A}\mathbf{x}$

بردار حاصل از دوران  $x$  حول محوری قائم به اندازه  $30^\circ$  در جهت مثبت ( راست دست ) است . این عمل در شکل ۱۰۶ مجسم شده است . دستگاه مختصات این شکل برای تعریف عملگر لازم نیست ، زیرا معنی " قائم " از دستگاههای مختصات مستقل است . لیکن ، می توان  $\mathcal{R}$  را با مولفه های در دستگاه نشان داده شده نیز تعریف کرد .

مجموع و حاصل ضرب عملگرهای خطی و حاصل ضرب یک عملگر و یک اسکالر را می توان با روابط زیر تعریف کرد :

$$(11.6) \quad (\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$$

$$(12.6) \quad (\mathcal{A}\mathcal{B})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$$

$$(13.6) \quad (\lambda\mathcal{A})x = \lambda(\mathcal{A}x)$$

به طور کلی ،  $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$  ، ولی اگر مساوی باشند ، گوئیم  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  باهم تعویض می شوند . عملگرهای پوچ و همانی 0 و 1 معانی مشخصی دارند ؛ یعنی ، به ازای هر بردار  $x$  در فضای  $\mathcal{M}$  ،

$$(14.6) \quad 1x = x \quad \text{و} \quad 0x = 0$$

دو عملگر  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  مساویند اگر به ازای هر بردار  $x$  ،  $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$  . بالاخره ، اگر عملگر  $\mathcal{A}^{-1}$  با خواص زیر وجود داشته باشد :

$$(15.6) \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = 1$$

$\mathcal{A}^{-1}$  وارون  $\mathcal{A}$  نامیده می شود . عملگرهای دارای معکوس را نامنفرد می نامند . در بحث فوق ، بخصوص در معادله (۸.۶) ، فرض کرده ایم بردار  $\phi(x) = \mathcal{A}x$  در همان فضایی است که بردار  $x$  است . همانطور که مثال مقدماتی زیر نشان می دهد ، این فرض لازم نخواهد بود .

مثال . فضای بردارهای موضع سه بعدی  $x$  و یک دستگاه مختصات دکارتی  $xyz$  مانند شکل ۱۰۶ را در نظر می گیریم . عملگر تصویر  $\mathcal{P}$  را طوری تعریف می کنیم که  $\mathcal{P}x$  تصویر  $x$  بر صفحه  $xy$  باشد ؛ یعنی ،  $\mathcal{P}x$  همان مختصات  $x$  و  $y$  بردار  $x$  را دارد منتها مولفه  $z$  آن صفر است . در واقع ، فضای بردارهای  $\mathcal{P}x$  فقط دوبعدی بوده ؛ و لذا ، با فضای بردارهای  $x$  متفاوت است<sup>۱</sup> . همچنین ، واضح است که این عملگر  $\mathcal{P}$  معکوس ندارد .

۱ . البته ، فضای دوبعدی از بردارهای  $\mathcal{P}x$  را می توان زیر فضایی از فضای اصلی بردارهای  $x$  گرفت . این لازم نیست به طور کلی درست باشد .

اگر  $\phi(x)$  در فضایی متفاوت با فضای  $x$  باشد، تنها تغییر لازم در تحلیل فوق این است که  $\phi(e_i)$  را بر حسب پایه  $f_i$  در فضای  $\phi$  بیان کنیم؛ در نتیجه، (۸.۶) به صورت زیر درمی آید:

$$(16.6) \quad \phi(e_i) = \sum_j A_{ji} f_j$$

در این صورت، مولفه‌های  $A_{ji}$  عملگر  $\mathcal{A}$  در رابطه با دو پایه  $e_i$  و  $f_j$  می‌باشند. به علاوه، دو فضا ممکن است، مثل مثال فوق دارای تعداد ابعاد متفاوت باشند. در این صورت، عملگر  $\mathcal{A}$  نمی‌تواند معکوس داشته‌باشد؛ این امر احتمالاً "در مثال فوق آشکار است و نیز می‌تواند از بحث زیر در باب ماتریسها روشن گردد.

### ۳.۶ ماتریسها

اعداد  $A_{ij}$  مذکور در بالا را می‌توان به صورت ماتریس نمایش داد:

$$(17.6) \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

اعداد  $A_{ij}$  را عناصر ماتریس می‌نامند.

به‌طور کلی، هر ماتریس یک‌چنین آرایه از اعداد است که از چند قاعدهٔ جبری تبعیت می‌کند. اگر ماتریسها برای نمایش خطی عملگرهای خطی در فضاها برداریمان به کار روند، به آسانی می‌توان قواعد لازم را پیدا کرد. مثلاً، "مولفه‌های نرم معادلات عملگری (۱۱.۶)، (۱۲.۶)، و (۱۳.۶) در یک دستگاه مختصات عبارتند از

$$(11.6) \quad \sum_j (A+B)_{ji} x_j = \sum_j A_{ji} x_j + \sum_j B_{ji} x_j$$

$$(12.6) \quad \sum_j (AB)_{ji} x_j = \sum_j A_{ji} (Bx)_j = \sum_{ij} A_{ji} B_{ij} x_i$$

$$(13.6) \quad \sum_j (\lambda A)_{ji} x_j = \lambda \sum_j A_{ji} x_j$$

۱. یعنی، اگر عملگرهای  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  به ترتیب با ماتریسهای  $A$  و  $B$  نمایش داده شده باشند، می‌خواهیم عملگر  $\lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{B}$  با ماتریس  $\lambda A + \mu B$  نموده شود.

چون  $x$  دلخواه است، اینها قواعد جمع و ضرب ماتریسها و ضرب در یک ثابت را فوراً به ما می دهند:

$$(18.6) \quad (A + B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji}$$

$$(19.6) \quad (AB)_{ji} = \sum_l A_{jl} B_{li}$$

$$(20.6) \quad (\lambda A)_{ji} = \lambda A_{ji}$$

رابطه (19.6) از سایرین کمتر بدیهی است؛ در باب آن نکات زیر را متذکر می شویم:

۱. ضرب ماتریسی تعویضپذیر نیست؛  $AB$  لازم نیست مساوی  $BA$  باشد؛
۲. عنصر  $ji$  از  $AB$  مجموع حاصل ضربهای عناصر از سطر  $j$  م  $A$  و ستون  $i$  م  $B$  است؛
۳. برای معنی داشتن تعریف (19.6) درباره حاصل ضرب  $AB$  باید تعداد ستونهای  $A$  مساوی تعداد سطرهای  $B$  باشد.

عناصر ماتریس پوچ 0 همه صفر بوده، و عناصر ماتریس همانی 1 مساوی  $\delta_{ij}$  اند که دلتای کرونکر با تعریف (13.4) می باشد. یعنی، 1 قطری با عناصر قطری واحد می باشد. برای یک ماتریس معکوس  $A^{-1}$  شرایط زیر را داریم:

$$(21.6) \quad A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

که نظیر معادلات عملگری با همین شکل اند. این شرایط فقط در صورتی می توانند برقرار باشند که  $A$  یک ماتریس مربعی با دترمینان ناصفر باشد، که در این صورت<sup>۱</sup>،

$$(22.6) \quad (A^{-1})_{ij} = \frac{\text{همعامل } A_{ji}}{\det A}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} (AA^{-1})_{ij} &= \sum_k A_{ik} (A^{-1})_{kj} = \sum_k A_{ik} \frac{\text{همعامل } A_{jk}}{\det A} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

و به همین نحو در مورد حاصل ضرب  $A^{-1}A$ ؛ در نتیجه، شرایط (21.6) برقرار می باشند.

۱. همعامل عنصر  $A_{ij}$  در ماتریس (مربعی)  $A$  مساوی  $(-)^{i+j}$  برابر دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر  $i$  م و ستون  $j$  م  $A$  به دست می آید. اگر هر عنصر یک سطر (یا ستون)  $A$  را در همعاملش ضرب کرده و حاصل ضربها را به هم بیفزاییم، نتیجه دترمینان  $A$  خواهد بود.

در جدول ۱۰۶ چند ماتریس که با ماتریس  $A$  رابطه‌ای نزدیک دارند بیان شده‌اند.

جدول ۱۰۶ ماتریسهای مربوط به ماتریس  $A$

ماتریس	مولفه‌ها	مثال
$A$	$A_{ij}$	$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$
ترانسهاده $\bar{A}$	$(\bar{A})_{ij} = A_{ji}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 2 \end{pmatrix}$
مزدوج مختلط $A^*$	$(A^*)_{ij} = (A_{ij})^*$	$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$
مزدوج هرمیتی یا الحاقی $A^\dagger = (\bar{A})^*$	$(A^\dagger)_{ij} = (\bar{A}_{ji})^*$	$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$
معکوس $A^{-1}$	$(A^{-1})_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$ (فقط ماتریسهای مربعی با دترمینان $\neq 0$ )	
		$\frac{1}{(3-i)} \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix}$

چند تعریف دیگر به قرار زیرند:

$A^* = A$  اگر حقیقی است اگر

$\bar{A} = A$  اگر متقارن است اگر

$\bar{A} = -A$  پادمتقارن است اگر

$A^\dagger = A$  هرمیتی است اگر

$A^{-1} = \bar{A}$  متعامد است اگر

$A^{-1} = A^\dagger$  یگانی است اگر

قطری است اگر به ازای  $i, j$   $A_{ij} = 0, i \neq j$

$A^2 = A$  خودتوان است اگر

اثر یا اسپور ماتریس مربعی  $A$  مجموع عناصر قطری آن است:

$$\text{Tr } A = \sum_i A_{ii}$$

ذیلاً "چند رابطه در باب حاصل ضرب ماتریسهای مربعی ذکر شده‌اند که اغلب مفید

بوده و به آسانی قابل اثبات می‌باشند:

(مشروط بر اینکه همه معکوسها وجود داشته باشند)  $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

$$\widetilde{(ABC)} = \widetilde{CBA}$$

(۲۳.۶)

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) = \det(BA)$$

در پایان متذکر می شویم که گاهی ماتریسها را می توان به زیرماتریسها یا قالبها چنان تقسیم کرد که بعضی روابط جبری (و کار با آنها) ساده شوند.

مثال. هرگاه  $A$  و  $B$  را به صورت زیر تقسیم کنیم:

$$(24.6) \quad A = \left( \begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$(25.6) \quad B = \left( \begin{array}{ccc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

آنگاه  $A$  و  $B$  به شکل ماتریسهای قالبی  $2 \times 2$  خواهند بود که عناصرشان  $A_{ij}$  و  $B_{ij}$  خود ماتریس می باشند. به آسانی معلوم می شود که حاصل ضرب  $AB$  در صورتی درست است که ماتریسهای قالبی طبق قاعده معمول در هم ضرب شوند:

$$(26.6) \quad AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

مشروط بر اینکه در ماتریس اخیر تمام حاصل ضربهای ماتریسی با معنی باشند. این در صورتی درست است که تقسیم اصلی ستونها در ماتریس اول همان تقسیم سطرها در ماتریس دوم باشد. لذا، تقسیم فوق برای پیدا کردن حاصل ضرب  $BA$  بر حسب ماتریسهای قالبی  $2 \times 2$  مناسب نیست. (آیا تقسیمی از  $B$  که برای هر دو حاصل ضرب  $AB$  و  $BA$  کار کند وجود دارد؟) حال به بحث بردارها و عملگرهای خطی باز می گردیم.

#### ۴.۶ تبدیلات مختصات

همانطور که دیدیم، هر عملگر خطی را می توان در یک دستگاه مختصات با یک ماتریس نمایش داد. طرف راست معادله (۹.۶)، یعنی

$$y_j = \sum_i A_{ji} x_i$$

حالت خاصی از ضرب ماتریسی  $Ax$  است که در آن ماتریس طرف راست  $x$  ( و لذا، حاصل ضرب  $y$  ) فقط یک ستون دارد. این ماتریسها را بردارهای ستونی می نامند. حال می پرسیم مولفه های بردارها و عملگرهای خطی در تغییر دستگاه مختصات چگونه تبدیل می شوند پایه  $e'_j$  را که برحسب دستگاه بدون پریم به صورت زیر تعریف می شود در نظر می گیریم:

$$(27.6) \quad e'_j = \sum_i \gamma_{ij} e_i$$

ضریب  $\gamma_{ij}$  مولفه  $i$  م  $e'_j$  در دستگاه بدون پریم است (به قرارداد مربوط بترتیب اندیسها توجه کنید).  $n^2$  ضریب  $\gamma_{ij}$  عناصر ماتریس تبدیل  $\gamma$  را تشکیل می دهند، که تبدیل از یک دستگاه به دستگاه دیگری را انجام می دهد. بردار دلخواه  $x$  را با مولفه های  $x_i$  و  $x'_j$  در دو دستگاه در نظر می گیریم. در این صورت،

$$\begin{aligned} x &= \sum_i x_i e_i \\ &= \sum_j x'_j e'_j = \sum_j x'_j \sum_i \gamma_{ij} e_i \end{aligned}$$

بنابراین،

$$(28.6) \quad x_i = \sum_j \gamma_{ij} x'_j$$

که با معادله ماتریسی

$$(29.6) \quad x = \gamma x'$$

هم ارز است.

استقلال خطی بردارهای پایه ای  $e'_j$  به ما این اطمینان را می دهد که ماتریس  $\gamma$  نامنفرد است؛ در نتیجه، معکوس دارد. با ضرب (29.6) در  $\gamma^{-1}$ ، خواهیم داشت

$$(30.6) \quad x' = \gamma^{-1} x$$

توجه کنید که تبدیل مولفه های  $x_i$  با تبدیل بردارهای  $e_i$  فرق دارد [ (27.6) ] را با (30.6) مقایسه کنید. اشیایی که مانند  $x_i$  ها تبدیل می شوند گویند به طور پادگردیان با اشیایی مانند  $e_i$  ها تبدیل می شوند. اشیایی که مثل هم تبدیل می شوند گویند به طور همگردیان بایکدیگر تبدیل شده اند.

حال قانون تبدیل برای مولفه های عملگرهای خطی را با نوشتن معادله عملگری

$$y = Ax$$

به صورت معادلات ماتریسی در دو دستگاه مختصات

$$y = Ax \quad y' = A'x'$$

می یابیم. با به کار بردن  $x$  و  $y$  در معادله اول به کمک (29.6) نتیجه می شود که

$$\gamma y' = A\gamma x'$$

یا

$$y' = \gamma^{-1}A\gamma x'$$

لذا، تبدیل مطلوب به صورت زیر خواهد بود

$$(۳۱.۰۶) \quad A' = \gamma^{-1}A\gamma \quad A = \gamma A' \gamma^{-1}$$

این مثالی است از یک تبدیل تشابه که تبدیلی است از ماتریسهای مربعی به شکل

$$(۳۲.۰۶) \quad A' = S^{-1}AS$$

هر معادله ماتریسی جبری تحت تبدیل تشابه بدون تغییر باقی می ماند؛ مثلاً، معادله

$$ABC + \lambda D = 0$$

ایجاب می کند که

$$S^{-1}A(SS^{-1})B(SS^{-1})CS + S^{-1}\lambda DS = 0$$

یا

$$A'B'C' + \lambda D' = 0$$

تبدیلات مختصاتی که در آنها ماتریس تبدیل  $\gamma$  متعامدیا یکانی است، به دلایلی که

ذیلاً روشن می شود، نقش مهمی در فیزیک دارند. ابتدا تابع اسکالر خطی از یک بردار را در نظر می گیریم. این مفهوم به تابع برداری خطی که در بالا برای معرفی ماتریسها به کار رفت مربوط است. هر تابع اسکالر خطی قاعده ای است که به ازای هر بردار  $x$  اسکالر  $\phi(x)$  را به طور خطی تعریف می کند:

$$(۳۳.۰۶) \quad \phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y)$$

اگر پایه  $e_i$  را داشته باشیم، تابع اسکالر خطی را می توان به راحتی با  $n$  عدد  $\alpha_i = \phi(e_i)$

مشخص کرد که آنها را مولفه های تابع اسکالر  $\phi$  می نامیم. در این صورت،

$$(۳۴.۰۶) \quad \phi(x) = \phi\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i \alpha_i x_i$$

این عبارت در صورتی با قاعده ضرب ماتریسی سازگار است که مولفه های  $\alpha_i$  یک بردار

سطری تشکیل دهند؛ یعنی، ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد. در این صورت، (۳۴.۰۶) یک معادله ماتریسی به صورت زیر خواهد بود:

$$(۳۵.۰۶) \quad \phi(x) = \alpha x$$

اگر مولفه ها را در دستگاه مختصات دیگری (پریمدار) بنویسیم، اسکالر  $\phi(x)$  باید ثابت بماند؛ یعنی،

$$\phi(x) = \alpha' x' = \alpha' \gamma^{-1} x$$

لذا، شرط پایایی قانون تبدیل  $\alpha_i$  ها را تعیین خواهد کرد:



$$(۳۶.۶) \quad \alpha = \alpha' \gamma^{-1} \quad \alpha' = \alpha \gamma$$

یا

$$\alpha'_j = \sum_i \alpha_i \gamma_{ij}$$

از مقایسه (۲۷.۶) با (۳۰.۶) معلوم می‌شود که مولفه‌های  $\alpha_i$  به‌طور یادگرا دیان با مولفه‌های  $x_i$  بردار و به‌طور هم‌گرا دیان با بردارهای پایه‌ای  $e_i$  تبدیل می‌شوند.

توابع اسکالر خطی را می‌توان سازنده یک فضای برداری گرفت که با فضای بردارهای اصلی متمایز است ولی همان بعد را دارد. این فضا را گاهی فضای دوگان می‌نامند.

حال در فضای برداری اصلی مان ضرب اسکالر و، به کمک آن یک متر، معرفی می‌کنیم.

به ازای هر جفت بردار  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$ ، ضرب اسکالر (یا ضرب داخلی)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad \text{یا} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

را یک تابع اسکالر از دو بردار  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  با خواص زیر تعریف می‌کنیم:

$$(۳۷.۶) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^* \quad (۱)$$

$$(۳۸.۶) \quad \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mu \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (۲)$$

$$(۳۹.۶) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \text{و} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0 \quad \text{ایجاب می‌کند که} \quad \mathbf{a} = 0 \quad (۳)$$

دو بردار با حاصل ضرب اسکالر صفر را متعامد نامیده، و طول بردار  $\mathbf{a}$  را مساوی  $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}|^{\frac{1}{2}}$  تعریف می‌کنیم.

توجه کنید که خواص (۳۷.۶) و (۳۸.۶) ایجاب می‌کنند که حاصل ضرب اسکالر  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

پاد خطی (یا مزدوج خطی) نسبت به شناسه اول خود باشد؛ یعنی،

$$(۴۰.۶) \quad (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \lambda^* \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mu^* \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

یک راه مرسوم برای تعریف ضرب اسکالر صادق در اصول موضوع (۳۷.۶)، (۳۸.۶)

و (۳۹.۶) عبارت است از

$$(۴۱.۶) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i^* b_i$$

که در آن  $a_i$  ها و  $b_i$  ها مولفه‌های  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  در یک دستگاه مختصات خاصند. بردارهای پایه‌ای  $e_i$  این دستگاه مختصات در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$(۴۲.۶) \quad e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

یعنی، بردارهای پایه‌ای، متعامد یکه (متعامد و نرمالی به طول واحد) می‌باشند. به عکس اگر بردارهای پایه‌ای متعامد یکه باشند [یعنی، (۴۲.۶) برقرار باشد]، فوراً نتیجه می‌شود که حاصل ضرب اسکالر شکل (۴۱.۶) را به خود می‌گیرد.

فرض کنیم فضایی برداری با متر تعریف شده در آن و یک دستگاه مختصات با بردارهای

پایه‌ای متعامد یکه  $e_i$  داشته باشیم، اگر بخواهیم پایه جدید  $e_i$  را معرفی کنیم، چه شرطی

باید بر ماتریس تبدیل  $\gamma$  اعمال نماییم تا بردارهای پایه‌ای جدید نیز متعامد بیکه باشند؟  
باید داشته باشیم

$$\begin{aligned}\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j &= \left( \sum_k \gamma_{ki} \mathbf{e}_k \right) \cdot \left( \sum_l \gamma_{lj} \mathbf{e}_l \right) \\ &= \sum_k \gamma_{ki}^* \gamma_{kj} = (\gamma^\dagger \gamma)_{ij}\end{aligned}$$

لذا،  $\gamma^\dagger \gamma = 1$  و برای آنکه شکل (۴۱.۰۶) ضرب اسکالر بدون تغییر باقی بماند  $\gamma$  باید یکانی باشد. در فیزیک کلاسیک،  $\gamma$  علاوه بر یکانی حقیقی است؛ یعنی، متعامد می‌باشد.

خواص مهم دیگر تبدیلات یکانی در رابطه با تبدیلات ماتریسهاست تا بردارها یک تبدیل تشابه به‌وسیله یک ماتریس یکانی هر ماتریس یکانی را یکانی و هر ماتریس هرمیتی را هرمیتی باقی می‌گذارد. این خواص را می‌توانید به آسانی ثابت کنید (ر. ک. مسئله ۳.۰۶).

بالاخره، متذکر می‌شویم که با ضرب اسکالر می‌توان تناظر یک به یک بین بردارها و توابع اسکالر خطی، یعنی بین فضای برداری اصلی و دوگانش، ایجاد کرد. به هر بردار  $\mathbf{a}$  تابع اسکالر خطی  $\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$  را با تعریف

$$\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$$

مربوط می‌کنیم.  $\phi_{\mathbf{a}}$  در دستگاه مختصات به‌کاررفته در (۴۱.۰۶) و (۴۲.۰۶) دارای مولفه‌های زیر است:

$$\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_i) = a_i^*$$

### ۵.۰۶ مسائل ویژه مقدار

وقتی عملگر  $\mathcal{H}$  بر بردار  $\mathbf{x}$  عمل می‌کند، بردار  $\mathcal{H}\mathbf{x}$  در حالت کلی با  $\mathbf{x}$  متمایز است. لیکن، ممکن است بردارهایی (ناصفر) وجود داشته باشند که به ازای آنها  $\mathcal{H}\mathbf{x}$  مساوی  $\lambda\mathbf{x}$  ضربدر ثابتی چون  $\lambda$  باشد. یعنی،

$$\mathcal{H}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (۴۳.۰۶)$$

چنین برداری را یک ویژه بردار عملگر  $\mathcal{H}$  نامیده و ثابت  $\lambda$  را یک ویژه مقدار می‌نامیم. گوئیم ویژه بردار "متعلق" به ویژه مقدار است.

مثال. عملگر دورانی  $\mathcal{R}$  در شکل ۱.۰۶ را در نظر می‌گیریم. هر بردار واقع در امتداد محور دوران (محور  $z$ ) یک ویژه بردار  $\mathcal{R}$  متعلق به ویژه مقدار 1 است. (آیا ویژه بردارهای دیگری نیز وجود دارند؟) مولفه  $z$  معادله (۴۳.۰۶) در یک دستگاه مختصات معین عبارت است از

$$(۴۴.۶) \quad \sum_j A_{ij} x_j = \lambda x_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

یا، با نماد ماتریس،

$$(۴۵.۶) \quad Ax = \lambda x$$

مسئله یافتن ویژه مقادیر  $\lambda$  که دستگاه معادلات (۴۴.۶) به ازای آنها جواب نابدیهی داشته باشد مسئله بسیار مهمی است.

مثال. اگر  $A$  ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

باشد، دستگاه معادلات (۴۴.۶) عبارت است از

$$(1 - \lambda)x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$4x_1 + (5 - \lambda)x_2 + 6x_3 = 0$$

$$7x_1 + 8x_2 + (9 - \lambda)x_3 = 0$$

اگر این معادلات بخواهند جواب نابدیهی داشته باشند، دترمینان ضرایب باید صفر شود:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5 - \lambda & 6 \\ 7 & 8 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

این یک چندجمله‌ای مرتبه سوم نسبت به  $\lambda$  است که سه ریشه‌اش ویژه مقادیر  $\lambda_i$  می‌باشند.

به‌طور کلی، ویژه مقادیر ماتریس  $A$  با معادله زیر معین می‌شوند:

$$(۴۶.۶) \quad \det(A - \lambda I) = 0 \quad (\text{معادله عام})$$

اگر  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد،  $n$  ریشه  $\lambda$  وجود دارند که لزوماً همه متفاوت نیستند.

حال دو قضیه مهم در رابطه با ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریسهای هرمیتی

ثابت می‌کنیم. فرض کنیم  $H$  یک ماتریس هرمیتی،  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  دو ویژه مقدار آن، و  $x_1$  و  $x_2$

دو ویژه بردار متعلق به  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  باشند. یعنی،

$$(۴۷.۶) \quad Hx_1 = \lambda_1 x_1 \quad Hx_2 = \lambda_2 x_2$$

$x_2$  را در معادله اول و  $x_1$  را در معادله دوم ضرب اسکالر می‌کنیم<sup>۱</sup>.

$$x_2^\dagger Hx_1 = \lambda_1 x_2^\dagger x_1$$

$$(۴۸.۶)$$

$$x_1^\dagger Hx_2 = \lambda_2 x_1^\dagger x_2$$

۱. حاصل ضرب اسکالر دو بردار  $u$  و  $v$  را به صورت زیر می‌گیریم:

$$u^\dagger v = \sum_i u_i^* v_i$$

طرفهای چپ مزدوجهای مختلط اند، زیرا<sup>۱</sup>

$$\begin{aligned}(x_2^\dagger H x_1)^* &= \sum_{ij} (x_{i2}^* H_{ij} x_{j1})^* \\ &= \sum_{ij} x_{i2} H_{ij}^* x_{j1}^* = \sum_{ij} x_{j1}^* H_{ji} x_{i2}\end{aligned}$$

یعنی،

$$(49.6) \quad (x_2^\dagger H x_1)^* = x_1^\dagger H x_2$$

بنابراین، از رابطه (۴۸.۶) داریم

$$(50.6) \quad (\lambda_1 - \lambda_2^*) x_2^\dagger x_1 = 0$$

ابتدا فرض کنیم  $\lambda_1 = \lambda_2$ ،  $x_1 = x_2 \neq 0$  در این صورت،  $x_2^\dagger x_1 = x_1^\dagger x_1 > 0$ ؛ در نتیجه،  $\lambda_1 = \lambda_2^*$  و ویژه مقادیر یک ماتریس هرمیتی حقیقی اند.

حال فرض کنیم  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  در این صورت،  $x_2^\dagger x_1 = 0$  و ویژه بردارهای یک ماتریس هرمیتی متعلق به ویژه مقادیر مختلف متعامدند.

ممکن است چند ویژه بردار به یک ویژه مقدار متعلق باشند؛ یک چنین ویژه مقدار را واگن می نامند. ویژه بردارهای نظیر را نیز اغلب واگن می نامند. در بالا دیدیم که ویژه بردارهای یک ماتریس هرمیتی متعلق به ویژه مقادیر مختلف متعامدند. راجع به ویژه بردارهای متعلق به یک ویژه مقدار (واگن) چه می توان گفت؟ این مسئله، که حالت خاصی از مسئله کلیتر مربوط به عملگرهای هرمیتی و ویژه بردارهای آنهاست (قس. بخش ۲۰۹) به صورت زیر حل خواهد شد:

فرض کنیم سه ویژه بردار مستقل  $x_1$ ،  $x_2$ ، و  $x_3$  متعلق به ویژه مقدار  $\lambda$  باشند. واضح است که هر ترکیب خطی از این بردارها نیز یک ویژه بردار است. فرض کنیم

$$y_1 = x_1$$

$$y_2^* = x_2 + \alpha y_1$$

می خواهیم  $\alpha$  را طوری برگزینیم که  $y_1$  و  $y_2$  متعامد باشند. بنابراین،

$$y_1 \cdot y_2 = 0 = y_1 \cdot x_2 + \alpha y_1 \cdot y_1$$

$$\alpha = -\frac{y_1 \cdot x_2}{y_1 \cdot y_1}$$

حال قرار می دهیم

۱. هر نماد برای مولفه های بردارهای  $x_1, x_2, \dots, x_n$  که با زیرنویس متمایز شده اند ابهام ساز است. قرارداد ما این است که  $x_{ij}$  مولفه  $i$ م بردار  $x_j$  می باشد [قس. معادلات (۸.۶) و

$$y_3 = x_3 + \beta y_1 + \gamma y_2$$

می‌خواهیم  $\beta$  و  $\gamma$  را طوری برگزینیم که  $y_3$  بر هر دوی  $y_1$  و  $y_2$  عمود باشد. لذا،

$$0 = y_1 \cdot x_3 + \beta y_1 \cdot y_1 \Rightarrow \beta = -\frac{y_1 \cdot x_3}{y_1 \cdot y_1}$$

$$0 = y_2 \cdot x_3 + \gamma y_2 \cdot y_2 \Rightarrow \gamma = -\frac{y_2 \cdot x_3}{y_2 \cdot y_2}$$

لذا، سه ویژه بردار دوبه‌دو متعامد  $y_i$  ساخته‌ایم. این روند را، که به روند متعامد سازی گرام-شمیت معروف است، می‌توان به تعدادی دلخواه ویژه بردار واگن تعمیم داد. لذا، وضع را می‌توان طوری ترتیب داد که تمام  $n$  ویژه بردار یک ماتریس هرمیتی دوبه‌دو متعامد باشند (مشروط بر اینکه  $n$  ویژه بردار مستقل خطی باشند، که درستی آن را در بخش ۶.۶ نشان خواهیم داد).

همانطور که از معادله (۴۳.۶) معلوم می‌شود، ویژه مقادیر و ویژه بردارهای یک عملگر خطی از دستگاه مختصاتی که در یافتن آنها به کار رفته مستقل‌اند. همچنین، از معادله ماتریسی (۴۵.۶) واضح است که

$$Ax = \lambda x$$

که رابطه

$$\gamma^{-1} A \gamma \gamma^{-1} x = \lambda \gamma^{-1} x$$

یا

$$A'x' = \lambda x'$$

را ایجاب می‌کند. لذا، اگر  $x$  یک ویژه بردار  $A$  باشد، تبدیل آن  $x' = \gamma^{-1} x$  یک ویژه بردار ماتریس تبدیل شده  $A'$  بوده، و ویژه مقادیر همانها خواهند بود.

فرض کنید دستگاه مختصات را طوری تغییر دهیم که در آن بردارهای پایه‌ای  $e_i$  ویژه بردارهای عملگر خطی  $\mathcal{A}$  باشند (با این فرض که اینها مجموعه‌ای مستقل خطی تشکیل می‌دهند):

$$(51.6) \quad \mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$$

در این دستگاه، عنصر ماتریسی  $A'_{ij}$  مولفه  $i$  م بردار  $e_j$  است که، بر طبق (51.6)، بر حسب اینکه  $i \neq j$  یا  $i = j$ ، به ترتیب صفر یا  $\lambda_i$  می‌باشد. یعنی،

$$(52.6) \quad A'_{ij} = \lambda_j \delta_{ij}$$

لذا، ماتریس  $A'$  قطری است، و عناصر قطری ویژه مقادیر می‌باشند.

ماتریس تبدیل  $\gamma$  را در این حالت به خاطر اهمیتش به شکلی خاص می نویسیم . به یاد آورید [(معادله ۲۷.۰۶)] که مولفه  $\gamma_{ij}$  مولفه  $i$  م جدید در دستگاه ( بدون پریم ) قدیم است . یعنی ، ستون  $i$  م از مولفه های ویژه بردار  $e'_i$  تشکیل شده است .

$$(۵۳.۰۶) \quad \gamma = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{pmatrix}$$

اگر تبدیل بخواهد یکانی باشد ، ویژه بردارها باید دو به دو متعامد باشند (در صورت لزوم با روند گرام - اشمیت چنین می شود) و آنها را باید نرمالی کرد .

در بالا دیدیم که وقتی یک ماتریس تحت یک تبدیل تشابه قرار می گیرد ، ویژه مقادیرش ثابت می مانند . اینها پایاهای ماتریس می باشند . پایاهای دیگر عبارتند از اثر و دترمینان :

$$(۵۴.۰۶) \quad \text{Tr } A' = \text{Tr } S^{-1}AS = \text{Tr } ASS^{-1} = \text{Tr } A$$

$$(۵۵.۰۶) \quad \det A' = \det (S^{-1}AS) = \det (S^{-1})(\det A)(\det S) = \det A$$

این پایاها از ویژه مقادیر مستقل نیستند . در واقع ، می توان آنها را در دستگاهی که در آن  $A$  قطری است حساب کرد :

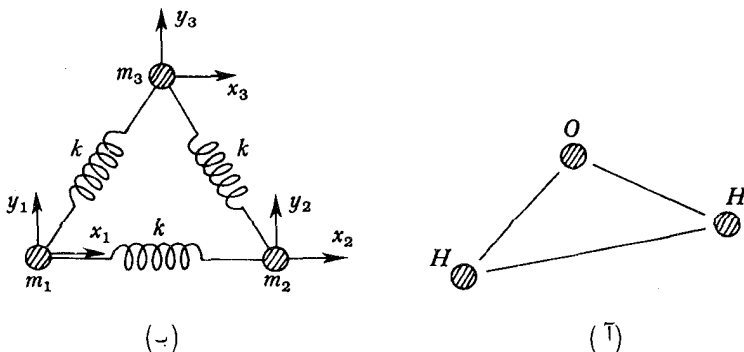
$$(۵۶.۰۶) \quad \text{Tr } A = \sum_i \lambda_i$$

$$(۵۷.۰۶) \quad \det A = \prod_i \lambda_i$$

ویژه مقادیر تنها پایاهای مستقل می باشند .

این بخش را با مثالی از فیزیک مسئله ویژه مقدار که مستلزم ماتریه است پایان می دهیم .

مثال . مسئله ارتعاشات مولکولی یا ، به طور کلی ، " ارتعاشات کوچک " یک دستگاه مکانیکی



شکل ۲۰.۶ دستگاههای ارتعاشی ساده : (T) یک مولکول آب ؛

(ب) سه جرم که با فنر به هم وصل شده اند

( کلاسیک ) را در نظر می‌گیریم . مثلاً ، در شکل ۲۰۶ یک مولکول آب و یک دستگاه ارتعاشی ساده مرکب از سه جرم که با فنر به هم وصل شده‌اند دیده می‌شوند .

هیئت یا حالت این دستگاه را می‌توان با بردار  $n$  بعدی  $x$  توصیف کرد که در آن  $n$  تعداد درجات آزادی است ؛ یعنی ، سه برابر تعداد جرمها . یک دستگاه مختصات ساده از بردارهای پایه‌ای زیر تشکیل شده است :

$e_1$  : جابجایی جرم 1 در فاصله واحد در جهت  $x$

$e_2$  : جابجایی جرم 1 در فاصله واحد در جهت  $y$

$e_3$  : جابجایی جرم 1 در فاصله واحد در جهت  $z$

$e_4$  : جابجایی جرم 2 در فاصله واحد در جهت  $x$

و غیره

انرژی جنبشی برحسب مولفه‌ها در این دستگاه مختصات برابر است با

$$(۵۸.۶) \quad T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} M \dot{\mathbf{x}}$$

که در آن  $m_i$  جرم مربوط به  $x_i$  است (یعنی ،  $m_1 = m_2 = m_3$  ، جرم ذره 1 ؛  $m_4 = m_5 = m_6$  ، جرم ذره 2 است ، و غیره .) ،  $\dot{x}_i = dx_i/dt$  و  $M$  ماتریس قطری  $M_{ij} = m_i \delta_{ij}$  می‌باشد .

برای ارتعاشات با دامنه کوچک ، انرژی پتانسیل را به سری تیلور بسط می‌دهیم :

$$(۵۹.۶) \quad V = V_0 + \sum_i \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_0 x_i + \sum_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 x_i x_j + \dots$$

نیروی  $(\delta V / \delta x_i)_0$  در حال تعادل باید صفر باشد ، و می‌توان  $V_0 = 0$  را اختیار کرد ؛ یعنی ، با چشم‌پوشی از جملات مرتبه سوم ، انرژی پتانسیل به شکل زیر خواهد بود :

$$(۶۰.۶) \quad V = \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} V \mathbf{x}$$

که در آن  $V$  یک ماتریس متقارن حقیقی می‌باشد ؛  $V_{ij} = [\delta^2 V / (\delta x_i \delta x_j)]_0$  . اگر به دستگاه مختصات جدیدی با پایه

$$(۶۱.۶) \quad e'_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}} e_i$$

برویم ، عبارت مربوط به انرژی جنبشی ساده‌تر خواهد شد . ماتریس تبدیل

$$(۶۲.۶) \quad \gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{m_n}} \end{pmatrix}$$

یکانی نیست؛ لذا، مثلاً"، شکل یک ضرب اسکالر ناوردان خواهد بود. اما این درست چیزی است که برای به دست آوردن عبارت (۶۴.۰۶) زیر برای  $T$  لازم است. داریم

(۶۳.۰۶)

$$x = \gamma x' \quad \bar{x} = \bar{x}' \bar{\gamma}$$

در نتیجه،

(۶۴.۰۶)

$$T = \frac{1}{2} \bar{x}' \bar{\gamma} M \gamma \bar{x}' = \frac{1}{2} \bar{x}' \bar{x}'$$

$$V = \frac{1}{2} \bar{x}' \bar{\gamma} V \gamma \bar{x}' = \frac{1}{2} \bar{x}' A \bar{x}'$$

که در آن تعریف می‌کنیم

(۶۵.۰۶)

$$A = \bar{\gamma} V \gamma$$

(هر تبدیل به این شکل، یعنی  $SVS$ ، یک تبدیل همبسته نام دارد.)

اما  $A$  حقیقی و متقارن (ولذا، هرمیتی) است؛ لذا،  $n$  ویژه مقدار حقیقی  $\lambda_k$  و  $n$

ویژه بردار حقیقی  $u_k$  دارد که می‌توان آنها را متعامد بیکه ساخت.

(۶۶.۰۶)

$$A u_k = \lambda_k u_k$$

اگر یک تبدیل یکانی<sup>۲</sup> از دستگاه  $e'_j$  به دستگاه  $u_k$  در نظر گرفته و مختصات بردار  $x$

را در دستگاه دوم  $q_k$  بنامیم، ماتریس انرژی پتانسیل نیز قطری می‌شود:

(۶۷.۰۶)

$$T = \frac{1}{2} \dot{q} \dot{q} = \frac{1}{2} \sum_k \dot{q}_k^2$$

$$V = \frac{1}{2} \dot{q} \Lambda q = \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k q_k^2$$

$\Lambda$  ماتریس قطری است  $\Lambda_{kl} = \lambda_k \delta_{kl}$ . می‌دانیم که تمام ویژه مقادیر  $\lambda_k$  حقیقی بوده و  $\lambda_k \geq 0$

چرا که اگر تعادل پایدار باشد،  $V$  هرگز نمی‌تواند منفی باشد.

معادلات حرکت لاگرانژ<sup>۳</sup> برحسب مختصات تعمیم یافته<sup>۴</sup>  $q_k$  عبارتند از

(۶۸.۰۶)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0$$

یا

(۶۹.۰۶)

$$\ddot{q}_k + \lambda_k q_k = 0$$

جوابها عبارتند از

(۷۰.۰۶)

$$\lambda_k > 0: q_k = a_k \sin(\omega_k t + \delta_k) \quad \omega_k = \sqrt{\lambda_k} \quad (1)$$

$$\lambda_k = 0: q_k = b_k t + c_k \quad (2)$$

فرکانسهای  $\omega_k$  را فرکانسهای نرمال و  $q_k$  ها را مختصات نرمال می‌نامند. اگر فقط یک

۱. استقلال خطی این ویژه بردارها در بخش بعد ثابت می‌شود.

۲. چون  $u_k$  ها حقیقی‌اند، تبدیل ما علاوه بر یکانی متعامد است.



$q_k \neq 0$  ، دستگاه در مد نرمال ارتعاش می‌کند، که در آن تمام مختصات اصلی  $x_i$  بافرکانس مشترک  $\omega_k$  به‌طور هماهنگ با زمان تغییر می‌کنند.

بعضی از فرکانسهای صفر  $\lambda_k = 0$  کلاً "مربوط به انتقال و دوران دستگاه‌اند. می‌دانیم ویژه بردارهای توصیف‌کننده، مدهای ارتعاشی واقعی بر اینها (و بر یکدیگر) عمودند. می‌توان نشان داد که شرایط تعامد با مدهای انتقالی و دورانی به این احکام فیزیکی تعبیر می‌شوند که در یک مد ارتعاشی مرکز جرم ساکن و اندازه حرکت زاویه‌ای صفر است. بالاخره، به دستگاه مختصات اصلی (بدون پیریم) برمی‌گردیم.

$$\begin{aligned} x' &= U'q \\ x &= \gamma x' = \gamma U'q \end{aligned} \quad (71.6)$$

که در آن  $\gamma$  ماتریس (۶۲.۶) و  $U'$  ماتریس تبدیل یگانی از  $e'_i$  به دستگاه  $u_k$  است؛  $U'_{ik} = u'_{ik} = e'_i \cdot u_k$  مختص  $i$  م در دستگاه  $e'_i$  ویژه بردار  $u_k$  است. در این صورت، هر مولفه دکارتی  $x_i$  به صورت جمعی روی مدهای نرمال می‌باشد:

$$x_i = \sum_{jk} \gamma_{ij} U'_{jk} q_k$$

$$\begin{aligned} (72.6) \quad &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{m_i}} u'_{ik} q_k = \sum_k \frac{u'_{ik}}{\sqrt{m_i}} a_k \sin(\omega_k t + \delta_k) \\ &= \sum_k u_{ik} a_k \sin(\omega_k t + \delta_k) \end{aligned}$$

که در آن  $u_{ik}$  مولفه  $i$  م  $u_k$  در دستگاه بدون پیریم می‌باشد.

روابط تعامدی و نرمال‌سازی برای ویژه بردارهای  $u_k$ ، وقتی برحسب دستگاه مقدماتی

(بدون پیریم) بیان شوند، عبارتند از

$$(73.6) \quad \delta_{kl} = u_k \cdot u_l = \sum_j u'_{jk} u'_{jl} = \sum_j m_j u_{jk} u_{jl}$$

### ۶.۶ قطری سازی ماتریسها

در بالا دیدیم که یک ماتریس مربعی را می‌توان با ماتریس یگانی متشکل از ویژه بردارهایش قطری کرد مشروط بر اینکه ویژه بردارها مجموعه متعامد یکه‌تامی تشکیل دهند. حال نشان می‌دهیم این امر برای ماتریس هرمیتی  $H$  درست است.

دست‌کم یک ویژه مقدار و یک ویژه بردار وجود دارد

$$(74.6) \quad H u_1 = \lambda_1 u_1$$

زیرا معادله عام (۴۶.۶) لااقل یک جواب دارد. دستگاه مختصات متعامد یکه‌تامی  $e'_i$  را اختیار می‌کنیم که در آن اولین عضو  $e'_1 = u_1$  باشد. (این کار ممکن است، زیرا مجموعه‌هایی از  $n$  بردار مستقل خطی شامل  $u_1$  وجود دارند، و آنها را می‌توان با روند گرام-اشمیت، در

صورت لزوم، به ترکیباتی متعامد مرتب کرد. ) با تبدیل  $H$  به این دستگاه، عناصر ستون اول عبارتند از

$$(۷۵.۰۶) \quad H'_{i1} = \mathbf{e}'_i \cdot H\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \delta_{i1}$$

در این صورت، سطر اول از هرمیتی بودن  $H'$  معین شده، و شکل زیر را برای  $H'$  خواهیم داشت:

$$(۷۶.۰۶) \quad H' = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) \quad G$$

که در آن  $G$  یک ماتریس هرمیتی  $n-1$  بعدی در زیرفضای برداری قائم به  $\mathbf{u}_1$  است. حال همین فرایند را با  $G$  تکرار کرده و آنقدر ادامه می‌دهیم تا  $H$  کاملاً "قطری شود. با این کار  $n$  ویژه بردار مستقل  $H$  به دست می‌آیند که یک ماتریس تبدیل یکانی تشکیل می‌دهند که  $H$  را قطری می‌سازد.

حال فرض کنید دو ماتریس هرمیتی  $H_1$  و  $H_2$  را داشته باشیم. آیا می‌توان آنها را به وسیله تبدیل یکانی واحدی "همزمان" قطری کرد؟ یعنی، آیا می‌توان یک ماتریس یکانی  $U$  چنان یافت که

$$(۷۷.۰۶) \quad D_2 = U^{-1}H_2U \quad \text{و} \quad D_1 = U^{-1}H_1U$$

هر دو قطری باشند؟

چون ماتریسهای قطری باهم تعویض می‌شوند،

$$(۷۸.۰۶) \quad 0 = D_1D_2 - D_2D_1 = U^{-1}(H_1H_2 - H_2H_1)U$$

$$H_1H_2 - H_2H_1 = 0$$

لذا، یک شرط لازم این است که  $H_1$  و  $H_2$  باهم تعویض شوند.

این شرط کافی نیز هست. زیرا فرض کنیم  $H_1$  و  $H_2$  باهم تعویض شوند. قرار می‌دهیم

$$U^{-1}H_1U = D \quad (\text{قطری})$$

$$U^{-1}H_2U = M \quad (\text{ممکن است قطری نباشد})$$

اما  $D$  و  $M$  باهم تعویض می‌شوند:

$$DM = MD$$

عنصر  $ij$  این معادله عبارت است از

$$(۷۹.۰۶) \quad D_{ii}M_{ij} = M_{ij}D_{jj}$$

لذا، اگر  $D_{ii} \neq D_{jj}$ ، اما این به معنی قطری بودن  $M$  نیست، زیرا  $H_1$  ممکن است چند ویژه مقدار واگن داشته باشد؛ یعنی، ممکن است چند عنصر  $D$  مساوی باشند. مثلاً،

فرض کنیم سه تایی اول مساوی باشند. در این صورت،

$$(۸۰.۰۶) \quad D = \left( \begin{array}{ccc|cc} \lambda & 0 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ \hline & & & \lambda_4 & 0 \\ & 0 & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \end{array} \right) \quad M = \left( \begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & \\ \hline & & & N \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

یعنی،  $M$  به شکل قطری قالبی است. زیرا ماتریس واقع در گوشهٔ چپ بالایی  $M$  هرمیتی بوده و می‌توان آن را با یک تبدیل یکانی که فقط شامل سه سطر و ستون اول است قطری کرد. این گوشهٔ  $D$  چیزی جز ضربی از ماتریس یکه نیست؛ و لذا، تغییر نمی‌کند. واضح است که با تکرار این عمل هر دوی  $M$  و  $D$  را می‌توان همزمان قطری کرد.

این ما را به این شرط کلی می‌رساند که هر ماتریس را می‌توان با یک تبدیل یکانی قطری کرد. ماتریس دلخواه  $M$  را در نظر می‌گیریم. می‌توان نوشت

$$(۸۱.۰۶) \quad M = A + iB$$

که در آن اگر

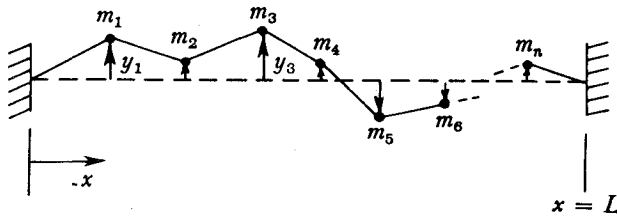
$$(۸۲.۰۶) \quad A = \frac{M + M^\dagger}{2} \quad B = \frac{M - M^\dagger}{2i}$$

هر دوی  $A$  و  $B$  هرمیتی‌اند. (این درست شبیه تجزیهٔ یک عدد مختلط به قسمت‌های حقیقی و موهومی است.) اما  $A$  و  $B$  را می‌توان تک تک قطری کرد، ولی برای قطری کردن  $M$  باید بتوان  $A$  و  $B$  را همزمان قطری کرد. لازم‌آش این است که  $A$  و  $B$  باهم تعویض شوند، که با شرط تعویض شدن  $M$  و  $M^\dagger$  هم‌ارز می‌باشد. هر ماتریس که با مزدوج هرمیتی خود تعویض شود نرمال نام دارد؛ ماتریس  $M$  را می‌توان با یک تبدیل یکانی قطری کرد اگر و فقط اگر  $M$  نرمال باشد. توجه کنید که ماتریسهای یکانی مانند ماتریسهای هرمیتی در این شرط صدق می‌کنند.

### ۷.۶ فضاهای با بعد نامتناهی

در این بخش طرز تعمیم روابط فوق را به فضای برداری با بعد نامتناهی توصیف می‌کنیم. به عنوان مقدمه، مسئله ارتعاشات یک "تار انباشته"، یعنی تار کشیده‌ای به طول  $L$  تحت کشش  $T$  را که در فواصل مساوی  $n$  جرم مساوی به آن بسته شده‌اند در نظر می‌گیریم. این دستگاه در شکل ۳.۶ نموده شده است.

مثل مثال آخر بخش ۵.۶، هیئت یا "حالت" دستگاه را با بردار  $n$  بعدی  $y$  نمایش می‌دهیم. یک پایهٔ مقدماتی را می‌توان از بردارهای  $e_r$  تشکیل داد، که در آن  $e_r$  هیئت در زمانی است که جرم  $m$  به اندازه  $1/\sqrt{m_i}$  جابجا شده و سایر جرمها در مواضع تعادل



شکل ۳.۶ یک "تار انباشته" مرتعش. تمام جرمها مساویند،

$$m_i = m$$

خود باشند. (این همان دستگاه مختصات پیریمدار بخش ۵.۶ است.) مختص  $y_i$  از  $y$  در این دستگاه مقدماتی چیزی جز تغییر مکان جرم  $i$  م برحسب  $1/\sqrt{m_i}$  نیست. می توان نشان داد که ویژه بردارهای  $\mathbf{u}_k$  نظیر مدهای نرمال دارای مولفه های (در دستگاه مقدماتی)

$$(۸۳.۶) \quad u_{ik} = (\mathbf{u}_k)_i = \sqrt{\frac{2a}{L}} \sin \frac{lk\pi a}{L}$$

هستند که در آن  $a$  فاصله بین جرمها بوده؛  $(n+1)a = L$ ؛ و ثابت  $\sqrt{2a/L}$  برای نرمال سازی می باشد:

$$(۸۴.۶) \quad \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k = 1 = \sum_l \left(\frac{2a}{L}\right) \sin^2 \frac{lk\pi a}{L}$$

هیئت دستگاه در هر لحظه را می توان به وسیله (۷۱.۶) برحسب مختصات قائم

بیان کرد:

$$(۸۵.۶) \quad y_i = \sum_k u_{ik} q_k = \sum_k u_{ik} a_k \sin(\omega_k t + \delta_k)$$

که در آن فرکانسها برابرند با

$$(۸۶.۶) \quad \omega_k = \sqrt{\frac{T}{ma}} 2 \sin \frac{k\pi a}{2L}$$

حال فرض کنیم تعداد جرمها نامتناهی بوده و طول  $L$  ثابت بماند. به جای نمایش یک

جرم با عدد صحیح  $l$ ، شایسته است از متغیر موضع  $x = la$  استفاده کنیم که در حد متغیر پیوسته ای خواهد شد. چند تغییر در نمادها نیز لازم است.

۱. مولفه های  $y$  در دستگاههای مختصات مقدماتی عبارتند از

$$y_i \rightarrow y(x)$$

$$(۸۷.۶)$$

$$\mathbf{y} = \sum_l y_l \mathbf{e}_l \rightarrow \mathbf{y} = \int y(x) \mathbf{e}_x dx$$

۲. دستگاه مختصات مقدماتی به صورت یک دستگاه مختصات نقطه ای درمی آید؛ یعنی، یک

بردار پایه ای  $\mathbf{e}_b$  نمایش جابجایی تابع  $\delta$  فقط در نقطه  $b$  است. در واقع، مولفه های یک بردار پایه

در دستگاه مقدماتی عبارتند از

$$(۸۸.۶)$$

$$(\mathbf{e}_l)_m = \delta_{lm} \rightarrow (\mathbf{e}_b)_x = \delta(x - b)$$

۳. ماتریس تبدیل از دستگاه مقدماتی به دستگاه مختصات ویژه بردار چنان است که "ستون"

$k$  ام از مولفه‌های  $\mathbf{u}_k$  در دستگاه مقدماتی تشکیل شده است؛ یعنی،

$$U_{ik} = (\mathbf{u}_k)_i = \sqrt{\frac{2a}{L}} \sin \frac{lk\pi a}{L} \rightarrow u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{k\pi x}{L} \quad (۸۹.۰۶)$$

۴. روابط نرمال‌سازی - تعامدی برای ویژه توابع، که در دستگاه مقدماتی حساب شده‌اند، عبارتند از

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_l &= \sum_{j=1}^n \frac{2}{(n+1)} \sin \frac{jk\pi}{(n+1)} \sin \frac{jl\pi}{(n+1)} = \delta_{kl} \\ &\rightarrow \int_0^L u_k(x) u_l(x) dx = \int_0^L \left(\frac{2}{L}\right) \sin \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{l\pi x}{L} dx = \delta_{kl} \end{aligned} \quad (۹۰.۰۶)$$

۵. بسط (۸۵.۰۶) یک مولفه مقدماتی بر حسب مختصات قائم به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} y_l &= \sum_k u_{lk} q_k \rightarrow y(x) = \sum_k u_k(x) q_k \\ &= \sum_k \sqrt{\frac{2}{L}} q_k \sin \frac{k\pi x}{L} \end{aligned} \quad (۹۱.۰۶)$$

آخرین عبارت چیزی جز یک سری (سینوسی) فوریه نیست.  $q_k$  مولفه  $k$  ام  $y$  در دستگاه مختصات  $\mathbf{u}_k$  است.

۶. رابطه معکوس عبارت است از

$$\begin{aligned} q_k &= \sum_l U_{kl}^{-1} y_l = \sum_l u_{lk}^* y_l \\ &\rightarrow q_k = \int u_k^*(x) y(x) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L y(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx \end{aligned} \quad (۹۲.۰۶)$$

که انتگرال انعکاسی فوریه می‌باشد.

در بالا از دو نوع دستگاه مختصات با بعد نامتناهی استفاده شده است. یکی تعداد شمارشپذیری بردار پایه‌ای دارد و آن ویژه بردارهای  $\mathbf{u}_k$  اند و این بردارها را می‌توان به شیوه معمول نرمالی کرد:  $\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_l = \delta_{kl}$ . دستگاه دیگر شمارش ناپذیر است، و نرمال‌سازی شکل زیر را به خود خواهد گرفت:

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \int \delta(x-a) \delta(x-b) dx = \delta(a-b) \quad (۹۳.۰۶)$$

حال براساس مثال ساده فوق چند تعمیم انجام می‌دهیم. خواهیم دید که توابع معمولی (صادق در چند شرط ریاضی با رفتاری مناسب که به آنها نخواهیم پرداخت) یک فضای برداری خطی با بعد نامتناهی تشکیل می‌دهند. این فضای برداری با یک ضرب اسکالر فضای هیلبرت نام دارد.

ذیلا " چند تشابه دیگر با روابط یک فضای با تعداد بعد متناهی شرح داده می شوند.  
 ۷. تعریف مناسبی از ضرب اسکالر، که در دستگاه مختصات نقطه‌ای حساب می شود، عبارت است از

$$(94.6) \quad \phi \cdot \psi = \int_a^b \phi^*(x) \psi(x) dx$$

۸. مجموعه متعامد یکه  $\phi_k$  نام است اگر بردار " دلخواه "  $\psi$  را بتوان بر حسب  $\phi_k$  ( که بدین ترتیب یک پایه تشکیل می دهند ) بسط داد :

$$(95.6) \quad \psi = \sum_k a_k \phi_k$$

یا، با گرفتن مولفه  $x$ ،

$$(96.6) \quad \psi(x) = \sum_k a_k \phi_k(x)$$

$a_k$  مولفه  $k$  ام  $\psi$  در دستگاه  $\phi_k$  است.

$$(97.6) \quad a_k = \phi_k \cdot \psi = \int_a^b \phi_k^*(x) \psi(x) dx$$

۹. عملگرهای خطی. فرض کنیم  $\mathcal{H}$  یک عملگر خطی به صورت

$$\psi = \mathcal{H} \phi$$

باشد. به صورت مولفه داریم

$$(98.6) \quad \psi_i = \sum_j K_{ij} \phi_j \rightarrow \psi(x) = \int_a^b K(x, x') \phi(x') dx'$$

عبارت اخیر یادآور تبدیلات انتگرالی فصل ۴ است؛  $K(x, x')$  هسته تبدیل می باشد.

۱۰. معادله ویژه مقدری

$$\mathcal{H} \psi = \lambda \psi$$

به صورت زیر درمی آید:

$$(99.6) \quad \int_a^b K(x, x') \psi(x') dx' = \lambda \psi(x)$$

این یک معادله انتگرالی همگن است که مجدداً در فصل ۱۱ آن را خواهیم دید.

در اینجا بحث فضاهای با بعد نامتناهی را خاتمه می دهیم. ایده های ذکر شده در

اینجا در فصل ۸ و جاهای دیگر کتاب دوباره خواهند آمد.

### مراجع

ماتریسها در اغلب کتب روشهای ریاضی در فیزیک مطرح می شوند از جمله مارگنوا<sup>۱</sup> و مورفی<sup>۲</sup>، (M2)، فصل ۱۰؛ گورتزل<sup>۳</sup> و ترالی<sup>۴</sup> (G3)، قسمت یک؛ سوکول نیکوف<sup>۵</sup> و ردهفر<sup>۶</sup> (S8)،

فصل ۴: هیلدبراند<sup>۱</sup> (H9)، فصل ۱: فریدمن<sup>۲</sup> (F8)، فصول ۱ و ۲: و دنری<sup>۳</sup> و کرزیویکی<sup>۴</sup> (D5)، فصل دو. کتاب اخیر ترکیب مطبوعی است از دقت و شهود.

به علاوه، کتب زیادی در باب ماتریسها و جبرخطی وجود دارند که به روشهای صرفاً ریاضی به آنها پرداخته اند. سه کتاب جالب عبارتند از هالموس<sup>۵</sup> (H2)؛ گلفاند<sup>۶</sup> (G1) و ژاکوبسون<sup>۷</sup> (J2). همچنین، می توان از فریزر<sup>۸</sup> و دیگران (F6)؛ ایتکن<sup>۹</sup> (A2)؛ تورن بول<sup>۱۰</sup> (T9)؛ و شوارتز (S3) نام برد.

### مسائل

۱.۰۶. نشان دهید که

$$(\overline{AB}) = \overline{B} \overline{A} \quad (\overline{A})$$

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger} \quad (\text{ب})$$

$$A(BC) = (AB)C \quad (\text{پ})$$

$$\text{Tr } ABC = \text{Tr } BCA \quad (\text{ت})$$

که در آنها  $A, B, C$  ماتریس اند.

۲.۰۶. فرض کنید  $U$  یک ماتریس یکانی بوده و  $x_1, x_2$  دو ویژه بردار  $U$  به ترتیب متعلق به ویژه مقادیر  $\lambda_1, \lambda_2$  باشند. نشان دهید که

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 \quad (\overline{A})$$

$$x_1^{\dagger} x_2 = 0 \quad \text{اگر } \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (\text{ب})$$

۳.۰۶. فرض کنید ماتریسهای  $A$  و  $B$  هرمیتی و ماتریسهای  $C$  و  $D$  یکانی باشند. ثابت کنید

$$C^{-1}AC \quad (\overline{A}) \text{ هرمیتی است}$$

$$C^{-1}DC \quad (\text{ب}) \text{ یکانی است}$$

$$i(AB - BA) \quad (\text{پ}) \text{ هرمیتی است}$$

۴.۰۶. ویژه مقادیر و ویژه بردارهای نرمالی شده<sup>۶</sup> ماتریس

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

را بیابید. جوابهای خود را (تا 3 رقم با معنی) به طور عددی بیان کنید.

1- Hildebrand

2- Friedman

3- Dennery

4- Krzywicki

5- Halmos

6- Gel'fand

7- Jacobson

8- Frazer

9- Aitken

10- Turnbull

۵.۶. در یک دستگاه مختصات خاص، یک تبدیل خطی در یک فضای برداری مجرد با ماتریس

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

و یک بردار (مجرد) خاص با بردار ستونی

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نمایش داده شده است. ماتریس و بردار ستونی را در دستگاه مختصاتی بیان کنید که در آن بردارهای پایه‌ای قدیم به صورت

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نموده می‌شوند.

۶.۶. ماتریس  $A$  و بردار  $x$  زیر را در دستگاه مختصاتی بیان کنید که در آن  $A$  قطری باشد.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ i \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$$

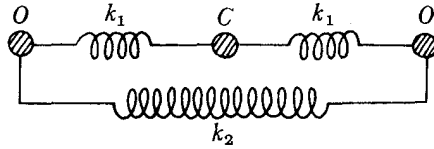
۷.۶. تانسور لختی یک جسم صلب را می‌توان یک عملگر خطی در نظر گرفت؛ مولفه‌های یک تانسور لختی خاص در یک دستگاه مختصات دکارتی خاص به شکل زیر است:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{7}{3} & \sqrt{\frac{1}{18}} \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & \sqrt{\frac{1}{18}} & \frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

مولفه‌های سه بردار بیکه (معروف به محورهای اصلی جسم صلب) را در این دستگاه مختصات طوری بیابید که ماتریس نمایش تانسور لختی در دستگاه مختصات با این بردارهای پایه قطری باشد. این عناصر قطری چیستند؟ (گشتاورهای لختی اصلی)؟

۸.۶. مد های نرمال و فرکانسهای نرمال ارتعاشات خطی مولکول  $CO_2$  (یعنی، ارتعاشات در امتداد خط مولکول) را بیابید.





۹.۶. ثابت کنید که در یک مولکول، تعامد یک مد ارتعاشی واقعی با مدهای انتقالی و دورانی ( حکم مذکور در متن ) دارای این تعبیر فیزیکی است که در ارتعاش، مرکز جرم ثابت می ماند و اندازه حرکت زاویه ای صفر است.

۱۰.۶. ( آ ) فرض کنید  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  دو بردار در فضای برداری خطی بوده، و  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$  را تعریف می کنیم که در آن  $\lambda$  اسکالر است. با توجه به اینکه به ازای هر  $\lambda$ ،  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \geq 0$ ، نامساوی کشی - شوارتز به دست می آید:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \geq (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

( چه وقت تساوی برقرار است ؟ )

( ب ) در یک فضای با بعد نامتناهی مسائل همگرایی مطرح می شوند و ممکن است بسط  $\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i$  بردار دلخواه  $\mathbf{x}$  برحسب بردارهای پایه ای  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$  فاقد معنی باشد. لیکن، می توان نتیجه مفیدی به دست آورد: فرض کنید  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  و تعریف کنید  $x_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x}$ .

$$\mathbf{x}^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$$

نامساوی کشی - شوارتز ( قسمت آ ) را به کار برده و نامساوی

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

را نتیجه بگیرید. این نتیجه، که به ازای هر  $n$  ولو خیلی بزرگ برقرار است، به نامساوی بسل معروف است.

۱۱.۶. یک زنجیر خطی از  $N$  اتم را در نظر بگیرید که  $N$  اتم مجاور اتم  $1$  باشد ( شرط مرزی دوری ) به این نحو که گویی زنجیر به شکل یک دایره خم شده است. هر اتم می تواند در یکی از سه حالت  $A, B, C$ ، قرار گیرد جز آنکه یک اتم در حالت  $A$  نمی تواند مجاور اتمی در حالت  $C$  قرار گیرد. آنتروپی هر اتم یک چنین زنجیر را وقتی  $N \rightarrow \infty$  بیابید. ( $k \ln W =$  آنتروپی، که در آن  $W$  تعداد کل هیئت های مجاز است.)

راهنمایی: بردارهای ستونی سه بعدی  $v^{(j)}$  را طوری تعریف کنید که سه عنصر  $v^{(j)}$  تعداد کل هیئت های مجاز زنجیر  $z$  اتم  $1, 2, 3, \dots, z$  با اتم  $z$  به ترتیب در حالت  $A, B, C$ ، باشند مثلاً،

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \dots$$

واضح است که  $v^{(j+1)} = Mv^{(j)}$ ، که در آن

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ماتریس انتقال مناسب این مسئله است. در این صورت،

$$W = \operatorname{tr} M^N \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \left( \text{بزرگترین ویژه مقدار } M \right)^N$$

بدین ترتیب، نشان دهید که آنتروپی هر اتم مساوی است با  $k \ln(1 + \sqrt{2})$ . فرض

کنید اتم  $N$  مجاور اتم 1 نباشد. آنتروپی هر اتم چقدر است؟

فرض کنید این قید که یک اتم در حالت A نباید در کنار یک اتم در حالت C قرار

گیرد برداشته شود. حال آنتروپی هر اتم چقدر است؟

## توابع خاص

"توابع خاص فیزیک ریاضی" جوابهای بعضی از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی اند که مکرر ظاهر می‌شوند. به عنوان چند مثال مقدماتی، توابع لژاندر، توابع لژاندر مربوطه، و توابع بسل را مورد بحث قرار می‌دهیم. این توابع نمایشهای بسیار دارند. به عنوان جواب معادلات دیفرانسیل، سریها، نمایشهای انتگرالی مختلف، روابط بازگشتی، و توابع مولد. با شروع از یکی از این نمایشها می‌توان سایرین را به دست آورد. لذا، مسیرهای خاص ما در این فصل برای رسیدن از یکی به دیگری منحصر به فرد نبوده‌ولی توضیح‌دهنده می‌باشند. توابع فوق هندسی، که بسیاری از توابع را به عنوان حالاتی خاص دربردارند، در بخشهای ۳.۷ و ۴.۷ مطرح می‌شوند. توابع ماتیو در بخش ۵.۷ و به شیوه‌ای مطرح می‌شوند که در حل سایر معادلات با ضرایب تناوبی قابل اعمال باشند. بالاخره، در بخش ۶.۷ بحثی مقدماتی از خواص توابع بیضوی ژاکوبی خواهیم داشت.

## ۱.۷ توابع لژاندر

معادله دیفرانسیل لژاندر (۴۹.۱)

$$(1.7) \quad (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

را به یاد آورید. در فصل ۱ دو جواب مستقل به صورت سری یافتیم [معادله (۵۱.۱)] به طوری که اگر  $n$  عددی صحیح باشد، یکی از آنها چندجمله‌ای از  $x$  است. حال این چندجمله‌ایها را با تفصیل بیشتری مطالعه می‌کنیم.

به کمک فاکتوریلها می‌توان جواب (۵۱.۱) را مستقیماً "به شکل زیر نوشت:

$$y = c_0 \sum_k (-)^k \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2} + k\right)!} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2} - k\right)!} \frac{(n + 2k)!}{n!} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$+ c_1 \sum_k (-)^k \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-1}{2} + k\right)!} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-1}{2} - k\right)!} \frac{(n + 2k)!}{n!} \frac{x^{2k+1}}{(2k + 1)!}$$

اگر  $n = 0, 2, 4, \dots$ ، سری اول یک چندجمله‌ای می‌شود. اندیس جمع‌بندی جدید  $r = n/2 - k$  را وارد کرده، و این جواب را به صورت زیر می‌نویسیم

$$c_0 \frac{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}{n!} (-)^{n/2} \sum_r (-)^r \frac{(2n - 2r)!}{(n - r)! r!} \frac{x^{n-2r}}{(n - 2r)!}$$

از طرف دیگر، اگر  $n = 1, 3, 5, \dots$ ، سری دوم مورد توجه ماست. در این سری تعریف می‌کنیم  $r = [(n - 1)/2] - k$ ، و جواب زیر را خواهیم داشت

$$\frac{c_1}{2} \frac{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}{n!} (-)^{\frac{n-1}{2}} \sum_r (-)^r \frac{(2n - 2r)!}{(n - r)! r!} \frac{x^{n-2r}}{(n - 2r)!}$$

حال واضح است که به ازای هر عدد صحیح نامنفی  $n$ ، زوج یا فرد، چندجمله‌ای

$$P_n(x) = K_n \sum_r (-)^r \frac{(2n - 2r)!}{(n - r)! r!} \frac{x^{n-2r}}{(n - 2r)!} \quad (K_n \text{ دلخواه})$$

یک جواب معادله لژاندر است.

پیش از یافتن ثابت نرمال‌سازی  $K_n$ ، به محاسبات فاکتوریلی پرداخته و می‌نویسیم

$$P_n(x) = K_n \sum_r \frac{(-)^r}{(n - r)! r!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{2n-2r}$$

$$= \frac{K_n}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \sum_r (-)^r \frac{n!}{r!(n - r)!} x^{2n-2r}$$

$$= \frac{K_n}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n$$

(۲۰۷)

معمولاً "شرط نرمال‌سازی  $P_n(1) = 1$  به ازای هر  $n$  اعمال می‌شود. مقدار  $K_n$  حاصل را می‌توان با امتحان یافت، زیرا  $P_n(1)$  مساوی  $K_n/n!$  برابر مشتق  $n$  م حاصل ضرب زیر است:

$$\underbrace{(x-1)(x-1)\cdots(x-1)}_{n \text{ عامل}} \quad \underbrace{(x+1)(x+1)\cdots(x+1)}_{n \text{ عامل}}$$

که در  $x=1$  حساب می‌شود. اگر عامل  $(x-1)$  پس از  $n$  مشتقگیری باقی بماند، با قراردادن  $x=1$  آن جمله صفر می‌شود. لذا، تنها سهمهای ناصفر در  $P_n(1)$  زمانی پیش می‌آیند که هر یک از  $n$  مشتقگیری یک عامل  $(x-1)$  را به 1 بدل کند. این امر به  $n!$  طریق صورت می‌گیرد، و هر بار با گذاردن  $x=1$  داریم  $(1+1)^n = 2^n$ . نتیجه خواهد بود

$$P_n(1) = \frac{K_n}{n!} n! 2^n = 2^n K_n$$

و لذا، اختیار می‌کنیم

$$(3.7) \quad K_n = \frac{1}{2^n}$$

عبارت حاصل، یعنی

$$(4.7) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n$$

فرمول رد ریگوز<sup>۱</sup> برای چند جمله‌ایهای لژاندر نام دارد. چند تای اول عبارتند از

$$(5.7) \quad \begin{array}{ll} P_0(x) = 1 & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_1(x) = x & P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{array}$$

از فرمول رد ریگوز فوراً "یک‌نمایش انتگرال کنتوری به دست می‌آید. ما از فرمول کشی

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t) dt}{t - z}$$

استفاده می‌کنیم مشروط بر اینکه  $f(t)$  داخل کنتور، که  $z$  را یکبار در جهت مثبت دربردارد، منتظم باشد [ر.ک. ضمیمه، معادله (ض ۱۰)]. با  $n$  بار مشتقگیری نسبت به  $z$  داریم

$$(6.7) \quad \left(\frac{d}{dz}\right)^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(t) dt}{(t - z)^{n+1}}$$

لذا، از (۴.۷) خواهیم داشت

$$(7.7) \quad P_n(z) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+1}} dt$$

این را نمایش انتگرالی شلفلی برای  $P_n(z)$  می‌نامیم .

می‌توان نمایش انتگرالی دیگری به صورت زیر به دست آورد . فرض کنیم کنتور در

انتگرال شلفلی (۷.۷) دایره‌ای به شعاع  $|\sqrt{z^2-1}|$  حول  $z$  باشد . یعنی ،

$$t = z + \sqrt{z^2-1} e^{i\phi}$$

که در آن  $\phi$  از 0 تا  $2\pi$  تغییر می‌کند . در این صورت ، مستقیماً " از جبر نتیجه می‌شود که

$$t^2 - 1 = 2(t-z)(z + \sqrt{z^2-1} \cos \phi)$$

و

$$dt = i(t-z) d\phi$$

لذا ، با گذاردن در (۷.۷) ، خواهیم داشت

$$(۸.۷) \quad P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2-1} \cos \phi)^n d\phi$$

این را نمایش انتگرالی لاپلاس برای چند جمله‌ایهای لژاندر می‌نامند .

حال سری زیر را در نظر می‌گیریم :

$$(۹.۷) \quad \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z) = F(h, z)$$

با استفاده از نمایش لاپلاس ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} F(h, z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} h^n (z + \sqrt{z^2-1} \cos \phi)^n d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\phi}{1 - hz - h\sqrt{z^2-1} \cos \phi} \end{aligned}$$

در نتیجه ،

$$(۱۰.۷) \quad F(h, z) = \frac{1}{\sqrt{1-2hz+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z)$$

$F(h, z)$  را تابع مولد چند جمله‌ایهای لژاندر می‌نامند .

معادله (۱۰.۷) نمایش بسیار مفیدی برای عکس فاصله بین دو نقطه در فضای

سه‌بعدی می‌باشد . هرگاه نقاط  $x$  و  $x'$  بوده و  $r' < r$  ، آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x-x'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{r}\cos\theta+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \end{aligned}$$

$$(۱۱.۷)$$

که در آن  $\theta$  زاویه بین بردارهای  $x$  و  $x'$  است. اگر  $r < r'$ ،  $r$  و  $r'$  را باید در فرمول (۱۱.۷) باهم عوض کرد<sup>۱</sup>؛ گاهی هر دو فرمول را باهم تلفیق کرده می‌نویسیم

$$(12.7) \quad \frac{1}{|x - x'|} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r_i'}{r_i^{i+1}} P_i(\cos \theta)$$

که در آن  $r_<$  و  $r_>$  به ترتیب مینیمم و ماکزیمم  $r$  و  $r'$  را نشان می‌دهد. به عنوان مثالی از مفید بودن یک تابع مولد، روابط بازگشتی بین چند جمله‌ایهای لژاندر را نتیجه می‌گیریم:

$$F(h, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2hz + h^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{z - h}{1 - 2hz + h^2} F$$

$$(1 - 2hz + h^2) \frac{\partial F}{\partial h} = (z - h)F$$

با متحد گرفتن ضرایب  $h^n$  در طرفین، خواهیم داشت

$$(n + 1)P_{n+1}(z) - 2znP_n(z) + (n - 1)P_{n-1}(z) = zP_n(z) - P_{n-1}(z)$$

یا

$$(13.7) \quad (n + 1)P_{n+1}(z) - (2n + 1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0$$

با مشتقگیری از تابع مولد (۱۰.۷) نسبت به  $z$ ، رابطه بازگشتی دوم به دست

می‌آید:

$$(1 - 2hz + h^2) \frac{\partial F}{\partial z} = hF$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$(14.7) \quad P_n'(z) - 2zP_{n-1}'(z) + P_{n-2}'(z) = P_{n-1}(z)$$

از دو رابطه بازگشتی (۱۳.۷) و (۱۴.۷) می‌توان روابط بازگشتی متعددی به دست

آورد؛ مثلاً،

$$P_{n+1}'(z) - zP_n'(z) = (n + 1)P_n(z)$$

$$zP_n'(z) - P_{n-1}'(z) = nP_n(z)$$

$$P_{n+1}'(z) - P_{n-1}'(z) = (2n + 1)P_n(z)$$

$$(z^2 - 1)P_n'(z) = nzP_n(z) - nP_{n-1}(z)$$

و غیره.

۱. در غیر این صورت، سری (۱۱.۷) همگرا نیست؛ با مسئله ۷.۷ قیاس کنید.

استفاده دیگر از تابع مولد محاسبه  $P_n(z)$  در نقاط مختلف است. مثلاً، در  $z = 1$  از رابطه (۱۵.۷) داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(1) = \frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^3 + \dots$$

لذا،

$$(15.7) \quad P_n(1) = 1$$

در  $z = 0$ ،

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(0) = (1 + h^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}h^2 + (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \frac{h^4}{2!} + \dots$$

بنابراین،

$$(16.7) \quad P_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ \frac{(n-1)!!(-1)^{n/2}}{2^{n/2} \left(\frac{n}{2}\right)!} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

که در آن از نماد زیر استفاده می‌کنیم:

$$n!! = n(n-2)(n-4) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1$$

حال خواص تعامدی و نرمال‌سازی چند جمله‌ای‌های لژاندر را مورد بحث قرار می‌دهیم. برای این کار از بسط‌ردریگوز (۴.۷) استفاده می‌کنیم. انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I_{mn} = \int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx \quad (m < n)$$

$$= \frac{1}{2^{m+n}} \frac{1}{m! n!} \int_{-1}^{+1} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^m (x^2 - 1)^m \right] \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n \right] dx$$

$n$  بار انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌کنیم:

$$I_{mn} = \frac{-1}{2^{m+n}} \frac{1}{m! n!} \int_{-1}^{+1} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^{m+1} (x^2 - 1)^m \right] \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^{n-1} (x^2 - 1)^n \right] dx$$

.....

$$= \frac{(-1)^n}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^{+1} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^{m+n} (x^2 - 1)^m \right] (x^2 - 1)^n dx$$

بنابراین،

$$(17.7) \quad I_{mn} = 0 \quad \text{زیرا اگر } m < n \text{، } \left( \frac{d}{dx} \right)^{m+n} (x^2 - 1)^m = 0$$



فرض کنیم  $m = n$  . در این صورت ،

$$I_{nn} = \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{+1} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n \right]^2 dx$$

حال  $n$  بار انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می دهد که

$$I_{nn} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n \left( \frac{d}{dx} \right)^{2n} (x^2 - 1)^n dx$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n dx$$

فرض کنیم  $x = 2u - 1$  .

$$I_{nn} = \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \int_0^1 du (1 - u)^n u^n$$

$$= \frac{2(2n)!}{(n!)^2} B(n + 1, n + 1) \quad [ \text{با } (۴۹.۳) \text{ مقایسه کنید} ]$$

بنابراین ،

$$(۱۸.۷) \quad I_{nn} = \frac{2}{2n + 1}$$

پس نشان داده ایم که

$$(۱۹.۷) \quad \int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_{mn}$$

هر تابع " معقول "  $f(x)$  بر بازه  $-1 \leq x \leq 1$  را می توان به یک سری از چند-

جمله ایهای لژاندر بسط داد :

$$(۲۰.۷) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

۱. گهگاه در کتاب شرط معقول بودن یک تابع یا رفتار معقول داشتن دیده می شود . ما

نمی خواهیم در مورد شرایط معقول بودن یک تابع خیلی دقیق باشیم . از طرف دیگر ،

اگر  $f(x)$  پیوسته بوده و تعدادی متناهی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد ، یا علاوه بر این

تعدادی متناهی ناپیوستگی جهشی داشته باشد ، بسط (۲۰.۷) برقرار است . یعنی ،

سری سمت راست (۲۰.۷) همگرا به  $f(x)$  است . از طرف دیگر ، برای توابع خیلی کلیتر

$f(x)$  ، بسط (۲۰.۷) هنوز " به طور میانگین " همگراست (ر.ک. بخش ۳.۱۲) .

به زبان فصل ۶،  $c_n$  ها را می توان مولفه های بردار  $f$  در دستگاه مختصات با بردارهای پایه ای  $P_n$  گرفت. با ضرب طرفین (۲۰.۷) در  $P_m(x)$  و انتگرالگیری از  $-1$  تا  $+1$ ، خواهیم داشت

$$(21.7) \quad c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_m(x) f(x) dx$$

جواب مستقل خطی دیگر معادله لژاندر غیر از  $P_n(x)$  چیست؟ اگر در معادله لژاندر

تغییر متغیر [قس. بحث بعد از معادله (۴۰.۱)]

$$(22.7) \quad y = v P_n(x)$$

بدهیم، معادله زیر را خواهیم داشت:

$$(1-x^2)v''P_n(x) + v'[2(1-x^2)P_n'(x) - 2xP_n(x)] = 0$$

حل این معادله سرراست بوده و نتیجه می دهد که

$$v = C \int \frac{dx}{(1-x^2)[P_n'(x)]^2} + C'$$

لذا، جواب دومی به دست آورده ایم؛ تعریف مرسوم به صورت زیر است

$$(23.7) \quad Q_n(z) = -P_n(z) \int_{\infty}^z \frac{dz}{(z^2-1)[P_n'(z)]^2}$$

توجه کنید وقتی  $z \rightarrow \infty$ ،  $Q_n(z)$  مانند  $z^{-(n+1)}$  به صفر نزدیک می شود. می توان نشان داد

(مثلاً، ر.ک. کاپسون (C8) که)

$$(24.7) \quad Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) + f_{n-1}(z)$$

که در آن  $f_{n-1}(z)$  یک چندجمله ای از درجه  $n-1$  نسبت به  $z$  است. توجه کنید که  $Q_n(z)$  یک تابع چند مقداری است؛ برای یک مقداری ساختن آن، معمولاً "صفحه  $z$  را بین  $-1$  و  $+1$  در امتداد محور حقیقی بریده و  $Q(z)$  را به ازای  $z > 1$  حقیقی تعریف می کنیم. در این صورت، اگر  $-1 < x < +1$ ،

$$(25.7) \quad Q_n(x \pm i\varepsilon) = \frac{1}{2} P_n(x) \left[ \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \mp i\pi \right] + f_{n-1}(x)$$

اگر  $-1 < x < +1$ ، معمولاً  $Q_n(x)$  به معنی میانگین حسابی گرفته می شود:

$$(26.7) \quad Q_n(x) = \frac{1}{2} [Q_n(x+i\varepsilon) + Q_n(x-i\varepsilon)] = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) + f_{n-1}(x)$$

چندجمله ای  $f_{n-1}(x)$  به وسیله این شرط معین می شود که وقتی  $z \rightarrow \infty$ ، مانند  $z^{-(n+1)}$ ،

$Q_n(z) \rightarrow 0$  به عنوان مثال ،

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \dots$$

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= \frac{1}{2} z \ln \frac{z+1}{z-1} + f_0 \\ &= z \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \dots \right) + f_0 \end{aligned}$$

واضح است که  $f_0 = -1$  ، و

$$Q_1(z) = \frac{1}{2} z \ln \frac{z+1}{z-1} - 1$$

معادله دیفرانسیل لژاندر مربوطه [ ر. ک. (۶۹۰۱) ] عبارت است از

$$(27.7) \quad (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

مستقیماً می‌توان تحقیق کرد که اگر  $y$  جواب معادله دیفرانسیل لژاندر باشد ،  
 $(1-x^2)^{m/2} (d/dx)^m y$  جواب معادله مربوطه خواهد بود . به ازای عدد صحیح مثبت  $m$   
 تعریف می‌کنیم

$$(28.7) \quad P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^m P_n(x)$$

$P_n^m$  یک تابع لژاندر مربوطه نام دارد . جواب دوم (۲۷.۷) ، که به صورت  $Q_n^m(x)$  نوشته شده ، در  $x = \pm 1$  منفرد است و بیش از این به آن توجه نداریم .  
 انتگرال تعامدی - نرمال سازی برای توابع لژاندر مربوطه عبارت است از

$$(29.7) \quad \int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

توجه کنید که برای برقرار بودن (۲۹.۷) باید هر دو تابع مقدار  $m$  یکسان داشته باشند .  
 این رابطه تعامدی را می‌توان مثل (۱۹.۷) به دست آورد .  
 توابع لژاندر مربوطه ، به ازای  $m$  ثابت ، یک مجموعه تام از توابع نیز تشکیل می‌دهند ،  
 که در آن یک تابع ( معقول ) دلخواه  $f(x)$  بر بازه  $-1 \leq x \leq +1$  را می‌توان به سربگی به  
 شکل زیر بسط داد :

$$(30.7) \quad f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n P_n^m(x)$$

از تلفیق (۳۰.۷) و سری فوریه که قبلاً " در فصل ۴ بحث شد معلوم می‌شود که تابع  $f(\Omega)$

را، که در آن  $\Omega$  اختصاری برای زوایای قطبی  $\theta, \phi$  است، می‌توان به سری بسط داد:

$$(۳۱.۷) \quad f(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{mn} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

با آنکه سودمندی فیزیکی (۳۱.۷) تا فصل ۸ مطرح نخواهد شد، در این محبت به اختصار آن را دنبال می‌کنیم. معمولاً "هماهنگهای گروهی تعریف می‌شوند:

$$(۳۲.۷) \quad Y_{lm}(\Omega) = \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \times \begin{cases} (-1)^m, & m \geq 0 \\ 1, & m < 0 \end{cases}$$

تحقیق اینکه (۳۲.۷) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت به دانشجو محول می‌شود:

$$(۳۳.۷) \quad Y_{lm}(\Omega) = \frac{1}{2^l l!} \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} e^{im\phi} (-\sin \theta)^m \frac{d^{l+m}}{d(\cos \theta)^{l+m}} (\cos^2 \theta - 1)^l$$

که به ازای  $m$  مثبت یا منفی معتبر است. از (۳۲.۷) یا (۳۳.۷) نتیجه می‌شود که

$$(۳۴.۷) \quad Y_{l,-m}(\Omega) = (-1)^m Y_{lm}^*(\Omega)$$

ثابت نرمال‌سازی در (۳۲.۷) طوری انتخاب شده است که

$$(۳۵.۷) \quad \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

حال بسط (۳۱.۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۳۶.۷) \quad f(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} Y_{lm}(\Omega)$$

که در آن  $B_{lm}$  ها به آسانی از (۳۵.۷) به دست می‌آیند:

$$(۳۷.۷) \quad B_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) f(\Omega)$$

فایده بسطهای هماهنگ گروهی را با اثبات قضیه جمع برای هماهنگهای گروهی شرح

می‌دهیم. با گذاردن (۳۷.۷) در (۳۶.۷) داریم

$$(۳۸.۷) \quad f(\Omega) = \int d\Omega' f(\Omega') \sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega)$$

چون (۳۸.۷) باید به ازای  $f(\Omega)$  دلخواه برقرار باشد، می‌بینیم که

$$(۳۹.۷) \quad \sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) = \delta(\Omega - \Omega')$$

$\delta(\Omega - \Omega')$  با خواص زیر توصیف می‌شود.

$$\delta(\Omega - \Omega') = 0, \quad \Omega \neq \Omega'$$

$$(۴۰.۷) \quad \int d\Omega \delta(\Omega) = 1$$

اما  $\delta(\Omega - \Omega')$  فقط تابع زاویه  $\gamma$  بین جهات  $\Omega$  و  $\Omega'$  است. مثلثات گروهی به ما می‌گوید که

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

چون  $\delta(\Omega - \Omega')$  فقط تابع  $\gamma$  است، آن را به سری چندجمله‌ایهای لژاندر بسط می‌دهیم:

$$(۴۱.۷) \quad \delta(\Omega - \Omega') = \sum_l B_l P_l(\cos \gamma)$$

ضرایب  $B_l$  عبارتند از [قس (۲۱.۷)]

$$B_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \gamma) \delta(\Omega - \Omega') P_l(\cos \gamma)$$

$$(42.7) \quad = \frac{2l+1}{4\pi} \int d\Omega \delta(\Omega - \Omega') P_l(\cos \gamma)$$

زیرا  $2\pi d(\cos \gamma)$  مساوی عنصر زاویه فضای  $d\Omega$  روی کره امت. با استفاده از خواص (۴۰.۷) از  $\delta(\Omega - \Omega')$ ، رابطه (۴۲.۷) به صورت زیر درمی آید:

$$B_l = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(1)$$

$$(43.7) \quad = \frac{2l+1}{4\pi}$$

حال با استفاده از (۳۹.۷)، (۴۱.۷) و (۴۲.۷) داریم

$$(44.7) \quad \sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma)$$

برای برداشتن آخرین گام در برهان، کافی است در این لحظه خاصیتی از هماهنگهای کروی بیان کنیم که صحت آن در فصل ۸ روشن می شود. اگر محورهای مختصات بدخواه دوران یابند، هر هماهنگ کروی  $Y_{lm}(\Omega)$  ترکیبی خطی از هماهنگهای کروی  $Y_{lm}(\bar{\Omega})$  از مختصات قطبی جدید  $\bar{\Omega}$  می شود که همه دارای مقدار  $l$  یکسان می باشند. یعنی،

$$(45.7) \quad Y_{lm}(\Omega) = \sum_{m'=-l}^l C_{mm'}^l Y_{lm'}(\bar{\Omega})$$

که در آن ضرایب  $C_{mm'}^l$ ، علاوه بر  $l$ ،  $m$  و  $m'$ ، به دوران  $\bar{\Omega} \rightarrow \Omega$  وابسته است<sup>۱</sup> چون از (۳۲.۷) داریم

$$Y_{l0}(\Omega) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

جمله  $P_l(\cos \gamma)$  در (۴۴.۷) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$P_l(\cos \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l0}(\bar{\Omega})$$

۱. صحت (۴۵.۷) را می توان به این صورت ثابت کرد که اگر تابع  $f(x)$  به شکل  $r^l g(\Omega)$  از

معادله لاپلاس (بخش ۱.۸)  $\nabla^2 f(x) = 0$  تبعیت کند، بنا بر بخش ۳.۸، تابع زاویه ای

$g(\Omega)$  یک هماهنگ کروی  $Y_{lm}(\Omega)$  یا ترکیبی خطی از هماهنگهای کروی با  $l$  یکسان است.

اگر محورهای مختصات خود را دوران دهیم،  $r$  و عملگر لاپلاسین  $\nabla^2 (= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$

هر دو ثابت می مانند. در نتیجه،  $g(\Omega)$  مجدداً ترکیبی خطی از هماهنگهای کروی با  $l$

یکسان است.

که در آن  $\bar{\Omega}$  نمایش مختصات قطبی جهت معین شده با  $\Omega$  است منتها در دستگاه مختصاتی دیگر که محور قطبی اش در جهت  $\Omega'$  می باشد .

لذا، از (۴۵.۷) ( به وسیله تعویض  $\Omega$  و  $\bar{\Omega}$  ) داریم

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m'=-l}^{+l} A_{0m'}^l(\Omega') Y_{lm'}(\Omega)$$

و از مقایسه با (۴۴.۷) معلوم می شود که جملات (۴۴.۷) به ازای هر مقدار  $l$  را می توان متحد هم قرار داد؛ یعنی،

$$(۴۶.۷) \quad P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega)$$

اگر از (۳۲.۷) استفاده کنیم، می توانیم (۴۶.۷) را برحسب توابع لژاندر مربوطه بنویسیم:

$$P_l(\cos \gamma) = P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta')$$

$$(۴۷.۷) \quad + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \cos m(\phi - \phi')$$

معادله (۴۶.۷) [ یا (۴۷.۷) ] قضیه جمع مطلوب را بیان می کند. مارگنو و مورفی (M2) و کاپسون (C8) برهانهای دقیق ریاضی آن را به ما می دهند. این بخش را با ذکر چند هماهنگ گروهی به پایان می بریم:

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{2, \pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_{1, \pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2, \pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

## ۲.۷ توابع بسل

ما قبلاً " به معادله بسل (۵۲.۱)

$$(۴۸.۷) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$$

و جواب به صورت سری آن

$$(۴۹.۷) \quad y(x) = x^m \left[ 1 - \frac{1}{m+1} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - + \dots \right]$$

برخورده ایم .

تابع بسل  $J_m(x)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_m(x) = \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \left[ 1 - \frac{1}{m+1} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - + \dots \right]$$

$$(50.7) \quad = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r}$$

با این تعریف، به ازای  $m$  صحیح،

$$(51.7) \quad J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

روابط بازگشتی را می‌توان فوراً "از سری توانی (50.7) نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r-1} + \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r+1} \right] \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(m)} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} - \frac{(-1)^r}{(r-1)! \Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \right] \right\} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \left[ \frac{1}{\Gamma(m)} + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \frac{m}{r! \Gamma(m+r+1)} \right] \\ &= m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r-1} \end{aligned}$$

بنابراین،

$$(52.7) \quad J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x)$$

به همین نحو،

$$(53.7) \quad J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x)$$

اگر (52.7) و (53.7) را باهم جمع و تفریق کنیم، خواهیم داشت

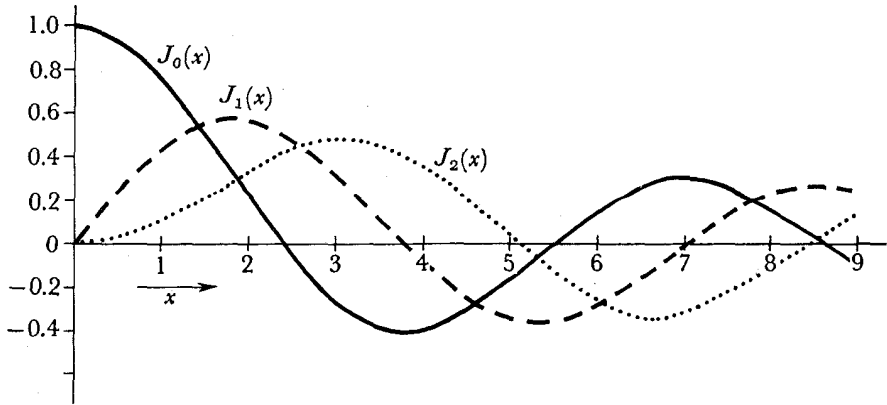
$$(54.7) \quad J_{m-1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) + J'_m(x)$$

$$(55.7) \quad J_{m+1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J'_m(x)$$

در شکل ۱۰۷ سه تابع بسل اول به ترتیب اعداد صحیح نموده شده‌اند.

توابع بسل به ترتیب نصف اعداد صحیح را می‌توان برحسب توابع مثلثاتی بیان کرد.

از جوابهای به صورت سری داریم (مسئله ۱۶۰۷)



شکل ۱۰۷ توابع بسل  $J_0(x)$  ،  $J_1(x)$  ، و  $J_2(x)$

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x \quad J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x$$

در این صورت، از روابط بازگشتی (۵۵.۷) و (۵۴.۷) خواهیم داشت

$$J_{3/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{x} \sin x - \cos x\right)$$

$$J_{-3/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(-\frac{1}{x} \cos x - \sin x\right)$$

سایر روابط را می‌توان از روابط بازگشتی به دست آورد.

وقتی  $m$  عددی صحیح نباشد، دوجواب مستقل معادله بسل توسط  $J_m(x)$  و  $J_{-m}(x)$  داده می‌شوند. ولی، همانطور که در صفحات ۱۷ و ۱۸۶ بحث شده، این جوابها به‌ازای  $m$  صحیح مستقل نیستند. لذا، تعریف می‌کنیم

$$(۵۶.۷) \quad Y_m(x) = \frac{\cos m\pi J_m(x) - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}$$

$J_m(x)$  و  $Y_m(x)$  همواره جفت مستقلی از جوابها هستند. برای اثبات این امر، می‌توان رونسکی  $J_m$  و  $Y_m$  را حساب کرده و ناصفر بودن آن را به‌ازای جميع مقادیر  $m$  تحقیق کرد. (این کار به مسئله ۱۲.۷ واگذار شده است.)

چند رابطه انتگرالی مفید به صورت زیر به دست می‌آیند.

از رابطه

$$J_0(x) = -J_1(x)$$



داریم

$$\int J_1(x) dx = -J_0(x)$$

و از رابطه (۵۴.۷) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} [x^n J_n(x)]' &= x^n \left[ J_n'(x) + \frac{n}{x} J_n(x) \right] \\ &= x^n J_{n-1}(x) \end{aligned}$$

بنابراین ،

$$(۵۷.۷) \quad \int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x)$$

همچنین ،

$$\begin{aligned} [x^{-n} J_n(x)]' &= x^{-n} \left[ J_n'(x) - \frac{n}{x} J_n(x) \right] \\ &= -x^{-n} J_{n+1}(x) \end{aligned}$$

بنابراین ،

$$(۵۸.۷) \quad \int x^{-n} J_{n+1}(x) dx = -x^{-n} J_n(x)$$

توابع بسل دارای خاصیتی تعامدی‌اند که شبیه خاصیت تعامدی چندجمله‌ایهای

لژاندر است . فرض کنیم

$$J_m(kx) = f(x) \quad J_m(lx) = g(x)$$

در این صورت ،

$$f'' + \frac{1}{x} f' + \left( k^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) f = 0$$

$$g'' + \frac{1}{x} g' + \left( l^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) g = 0$$

با ضرب رابطه دوم در  $xf$  و تفریق  $xg$  برابر اولی ، خواهیم داشت

$$[x(fg' - gf')] = (k^2 - l^2)xfg$$

$$\int xf(x)g(x) dx = \frac{x}{k^2 - l^2} [f(x)g'(x) - g(x)f'(x)]$$

$$\int_a^b J_m(kx)J_m(lx)x dx = \frac{1}{k^2 - l^2} [lxJ_m(kx)J_m'(lx) - kxJ_m(lx)J_m'(kx)]_a^b$$

اگر  $J_m(kx)$  و  $J_m(lx)$  در  $a$  و  $b$  صفر شوند یا اینکه  $J_m'(kx)$  و  $J_m'(lx)$  در  $a$  و  $b$  صفر شوند ، یا تحت شرایطی کلیتر ( مثلاً " ، دو تابع در  $a$  و دو مشتق در  $b$  صفر شوند ) ، خواهیم داشت

$$(۵۹.۷) \quad k \neq l \quad \int_a^b J_m(kx)J_m(lx)x dx = 0$$

اگر  $k = l$  چطور؟ باید انتگرال زیر را حساب کنیم

$$y = kx \quad \text{که در آن} \quad \int J_m^2(kx)x dx = \frac{1}{k^2} \int J_m^2(y)y dy$$

با انتگرالگیری جزء به جزء داریم

$$I = \int J_m^2(y)y dy = \frac{1}{2}y^2 J_m^2(y) - \int J_m(y)J'_m(y)y^2 dy$$

ولی از معادله بسل داریم

$$y^2 J_m(y) = m^2 J_m(y) - y J'_m(y) - y^2 J''_m(y)$$

بنابراین،

$$I = \frac{1}{2}y^2 J_m^2(y) - \int J'_m(y)[m^2 J_m(y) - y J'_m(y) - y^2 J''_m(y)] dy$$

$$= \frac{1}{2}y^2 J_m^2(y) - \frac{1}{2}m^2 J_m^2(y) + \frac{1}{2}y^2 [J'_m(y)]^2$$

لذا، "انتگرال نرمال سازی" به دست آمده است:

$$\int J_m^2(kx)x dx = \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{m^2}{k^2} \right) J_m^2(kx) + \frac{1}{2} x^2 [J'_m(kx)]^2$$

مثلاً، اگر  $J_m(kx)$  در  $x = a$  و  $x = b$  صفر شود،

$$\int_a^b J_m^2(kx)x dx = \frac{x^2}{2} [J'_m(kx)]^2 \Big|_a^b$$

$$(۶۰.۷) \quad = \frac{x^2}{2} [J_{m+1}(kx)]^2 \Big|_a^b$$

استفاده معمول از این روابط تعامدی تعیین ضرایب بسط یک تابع به صورت سری

توابع بسل است. مثلاً، "تابع  $f(x)$  را بر بازه  $0 < x < a$  در نظر می‌گیریم. می‌نویسیم

$$(۶۱.۷) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_m(k_n x)$$

که در آن  $k_n$  ها طوری اختیار شده‌اند که  $J_m(k_n a) = 0$ . در این صورت، چون

$$(۶۲.۷) \quad \int_0^a J_m(k_n x) J_m(k_p x) x dx = \delta_{np} \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(k_p a)]^2$$

به آسانی به دست می‌آوریم

$$(۶۳.۷) \quad c_n = \frac{\int_0^a f(x) J_m(k_n x) x dx}{\frac{a^2}{2} [J_{m+1}(k_n a)]^2}$$

اگر بخواهیم تابعی را بر بازه  $a < x < b$  کلیتر  $a$  نمایش دهیم، می‌توانیم مثلاً "ازتوابعی

به شکل زیر استفاده کنیم:

$$(۶۴.۷) \quad J_m(kx)Y_m(ka) - Y_m(kx)J_m(ka)$$

که در آن  $k$  طوری اختیار شده است که توابع در  $x = b$  صفر شوند.  
تابع مولد معادله (۱۵.۷) برای چند جمله‌ایهای لژاندر را به یاد آورید:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2hz+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z)$$

سعی می‌کنیم برای توابع بسل به ترتیب صحیح تابع مولد بیابیم؛ یعنی، می‌خواهیم تابعی چون  $F(z, h)$  بیابیم به طوری که

$$F(z, h) = \sum_n h^n J_n(z)$$

با رابطه بازگشتی

$$J_{m+1}(z) + J_{m-1}(z) = \frac{2m}{z} J_m(z)$$

شروع می‌کنیم. در  $h^m$  ضرب و روی  $m$  جمع‌بندی می‌کنیم. نتیجه خواهد بود

$$\left(h + \frac{1}{h}\right) F(z, h) = \frac{2h}{z} \frac{\partial F(z, h)}{\partial h}$$

با انتگرالگیری نتیجه می‌شود که

$$F(z, h) = \phi(z) \exp \left[ \frac{z}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \right]$$

که در آن  $\phi(z)$  تابعی از  $z$  است که باید معین شود. حال  $\phi$  را طوری تعدیل می‌کنیم که ضریب  $h^0$  در  $F$  مساوی  $J_0(z)$  باشد. به آسانی معلوم می‌شود که این مستلزم  $\phi(z) = 1$  است در این صورت، اگر بنویسیم

$$(۶۵.۷) \quad \exp \left[ \frac{z}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \right] = \sum_n h^n U_n(z)$$

می‌دانیم که

$$U_n(-z) = (-1)^n U_n(z) \quad (۳) \quad U_0(z) = J_0(z) \quad (۱)$$

$$U_{-n}(z) = (-1)^n U_n(z) \quad (۴) \quad U_{n-1}(z) + U_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} U_n(z) \quad (۲)$$

این کاملاً "برای برقراری  $U_n(z) = J_n(z)$  کافی نیست. حال از تابع مولد نسبت به  $z$  مشتق می‌گیریم:

$$\frac{1}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \exp \left[ \frac{z}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \right] = \sum_n h^n U'_n(z)$$

$$\frac{1}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \sum_n h^n U_n(z) = \sum_n h^n U'_n(z)$$

با متحد گرفتن ضرایب  $h^n$  در دو طرف این معادله نتیجه می شود که

$$U'_n(z) = \frac{1}{2} [U_{n-1}(z) - U_{n+1}(z)]$$

لذا،  $U_1 = -U_0 = -J'_0 = J_1$ ، و بقیه از روابط بازگشتی نتیجه می شوند. به عنوان مثال از سودمندی این تابع مولد، داریم

$$\begin{aligned} \sum_n J_n(x+y) h^n &= \exp \left[ \frac{x+y}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \right] \\ &= \exp \left[ \frac{x}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \right] \exp \left[ \frac{y}{2} \left( h - \frac{1}{h} \right) \right] \\ &= \sum_k h^k J_k(x) \sum_l h^l J_l(y) \end{aligned}$$

لذا،

$$(۶۶.۷) \quad J_n(x+y) = \sum_k J_k(x) J_{n-k}(y)$$

از تابع مولد نمایش انتگرالی شلفلی فوراً نتیجه می شود:

$$(۶۷.۷) \quad J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\exp \left[ \frac{z}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right] dt}{t^{n+1}}$$

که در آن کنتور مبدا را یک بار در جهت مثبت دربر می گیرد. اگر قرار دهیم  $t = e^{i\theta}$  خواهیم داشت

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{iz \sin \theta}}{e^{(n+1)i\theta}} i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(z \sin \theta - n\theta)} d\theta \end{aligned}$$

بنابراین،

$$(۶۸.۷) \quad J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta$$

این انتگرال را انتگرال بسل می نامند.

حال نمایشهای انتگرالی توابع بسل را به طور کلیتر، بویژه در حالتی که  $n$  لزوماً

عدد صحیح نیست، مورد بحث قرار می دهیم. انتگرال

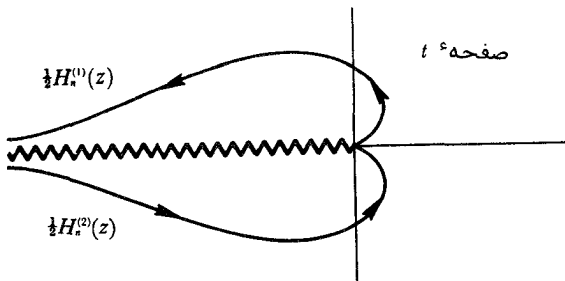
$$(۶۹.۷) \quad f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\exp \left[ \frac{z}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right]}{t^{n+1}} dt$$

را در نظر گرفته و شرایطی را می‌یابیم که تحت آنها این انتگرال یک جواب معادلهٔ بسل باشد. ابتدا عملگر دیفرانسیل بسل را روی  $f_n(z)$  اعمال کرده و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & \left[ z^2 \left( \frac{d}{dz} \right)^2 + z \frac{d}{dz} + (z^2 - n^2) \right] f_n(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dt}{t^{n+1}} \exp \left[ \frac{z}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right] \left[ \frac{z^2}{4} \left( t - \frac{1}{t} \right)^2 + \frac{z}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) + z^2 - n^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\exp \left[ \frac{z}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right]}{t^n} \left[ \frac{z}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) + n \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} [F_n(z, t)] \end{aligned}$$

که در آن  $F_n(z, t)$  تابع داخل کروهه است، و باید تفاضل مقادیر این تابع را در دو انتهای مسیر انتگرالی انتخاب کنیم. اگر مسیر را طوری بگیریم که این تفاضل صفر شود، (۶۹.۷) یک جواب معادلهٔ بسل خواهد شد. اگر  $n$  صحیح باشد، هر مسیر بسته مناسب است؛ البته اگر مسیر شامل مبدا نباشد، انتگرال (۶۹.۷) صفر می‌باشد.

فرض کنیم  $n$  لزوماً صحیح نبوده و  $t$  حقیقی و مثبت باشد. در این صورت، وقتی  $t \rightarrow 0+$  و وقتی  $t \rightarrow -\infty$ ،  $F_n(z, t)$  صفر می‌شوند. لذا، می‌توان دو جواب به دست آورد که با کنتورهای شکل ۲.۷ تعریف می‌شوند. این جوابها توابع هنگل نوع اول و دوم نام



شکل ۲.۷ کنتورها چنانند که انتگرال (۶۹.۷) جواب معادلهٔ بسل است. چون انتگرالده به ازای  $n$  غیر صحیح یک مقداری نیست، صفحه  $t$  را در امتداد محور حقیقی منفی بریده، و تعریف می‌کنیم  $t^{n+1} = \exp[(n+1) \ln t]$  که در آن  $\ln t$  بر محور  $t$  حقیقی مثبت حقیقی است.

دارند؛ اینها همیشه دو جواب معادله بسل به ما می دهند. وقتی  $n$  صحیح باشد، از شکل ۲۰۷ و انتگرال شلفلی (۶۷۰۷) معلوم می شود که

$$\frac{1}{2}[H_n^{(1)}(z) + H_n^{(2)}(z)] = J_n(z) \quad (۷۰۰۷)$$

این رابطه به ازای  $n$  غیر صحیح نیز درست است؛ ر. ک. مسئله ۳۷۰۷.

این نمایشهای انتگرالی به ازای

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2}$$

رضایت بخش می مانند. اگر نمایشی را بخواهیم که به ازای  $|\arg z - \alpha| < \pi/2$  برقرار باشد، باید کنتور را به نحوی دوران دهیم. تعیین نحوه دوران را به عنوان تمرین می گذاریم (مسئله ۱۹۰۷).

حال جوابهای به دست آمده برای معادله بسل را به انضمام چند نکته ثابت نشده

خلاصه می کنیم.

$$J_n(x) \quad (۱)$$

(۲)  $J_{-n}(x)$ . اگر  $n$  صحیح نباشد، این جواب مستقل خطی دوم است. اگر  $n$  صحیح باشد،

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

(۳)  $Y_n(x) = [\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)] / \sin n\pi$ . این همواره یک جواب مستقل دوم است.

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x) \quad (۷۱۰۷) \quad (۴)$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x) \quad (۵)$$

وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $J_n(x)$  به ازای  $n \geq 0$  متناهی است. سایرین در مبداء نامتناهی اند. شکلهای مجانبی جوابها وقتی  $x \rightarrow \infty$  عبارتند از

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

(۷۲۰۷)

$$H_n^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$H_n^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$J_n$ ،  $Y_n$ ،  $H_n^{(1)}$  و  $H_n^{(2)}$  همه از روابط بازگشتی یکسانی [ (۵۲۰۷) تا (۵۵۰۷) ] تبعیت می کنند. ذیلا "چند تابع مربوط به توابع بسل ذکر شده اند.

۱. توابع بسل با شناسه "موهومی" ( "توابع بسل تعدیل یافته" ):

$$(۷۳ \cdot ۷) \quad I_n(z) = \frac{J_n(iz)}{i^n} \quad K_n(z) = \frac{\pi i}{2} (i)^n H_n^{(1)}(iz)$$

$$I_n(z) \sim \frac{z^n}{2^n \Gamma(n+1)} \quad , \quad z \rightarrow 0 \quad \text{وقتی}$$

$$\bar{K}_n(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad , \quad z \rightarrow \infty \quad \text{وقتی}$$

۲. توابع  $ber_n x$  و  $bei_n x$  که برحسب توابع بسل با شناسه‌ای به فاز  $3\pi/4$  تعریف شده‌اند:

$$(۷۴ \cdot ۷) \quad J_n(xi\sqrt{i}) = ber_n x + i bei_n x$$

۳. " توابع بسل کروی " :

$$(۷۵ \cdot ۷) \quad j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x)$$

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+1/2}(x)$$

### ۳.۷ توابع فوق هندسی

این تابع با سری فوق هندسی تعریف می‌شود:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$(۷۶ \cdot ۷) \quad = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!}$$

نماد  ${}_2F_1$  نشانگر آن است که دو " پارامتر صورت "  $a$  و  $b$  و یک " پارامتر مخرج "  $c$  وجود

دارد. تابع  $y = {}_2F_1(a, b; c; x)$  یک جواب معادله دیفرانسیل

$$(۷۷ \cdot ۷) \quad x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

است که در  $0 < x < 1$ ، و  $x = \infty$  افرادهای منتظم دارد.  ${}_2F_1$  جواب عمومی نیست، ولی جوابی

است که در مجاورت نقطه منفرد  $x = 0$  مثل یک ثابت رفتار می‌کند. از روش سری توانی

بخش ۲۰۱ می‌توان برای یافتن رفتار جواب در مجاورت هر نقطه منفرد استفاده کرد.

طبیعی است در اینجا کمی منحرف شده به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم کلی

با سه انفراد منتظم بپردازیم. فرض کنیم سه انفراد در  $\zeta, \eta, \xi$  بوده و معادله دیفرانسیل

عبارت باشد از

$$(۷۸ \cdot ۷) \quad y'' + P(z)y' + Q(z)y = 0$$

از بخش ۲۰۱ می‌دانیم که  $P$  و  $Q$  به شکل زیرند<sup>۱</sup>:

$$(۷۹.۷) \quad P = \frac{\text{چندجمله‌ای}}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)} \quad Q = \frac{\text{چندجمله‌ای}}{(z-\xi)^2(z-\eta)^2(z-\zeta)^2}$$

با اعمال این شرط که نقطه بی‌نهایت یک نقطه عادی است، نتیجه می‌شود

$$P = \frac{A}{z-\xi} + \frac{B}{z-\eta} + \frac{C}{z-\zeta} \quad A+B+C=2$$

$$Q = \frac{1}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)} \left( \frac{D}{z-\xi} + \frac{E}{z-\eta} + \frac{F}{z-\zeta} \right)$$

حال، با استفاده از روش بخش ۲۰۱، به جواب  $\alpha(z-\xi) \sim y$  در مجاورت  $z = \xi$

توجه می‌کنیم. معادله اندیسی عبارت است از

$$\alpha^2 + (A-1)\alpha + \frac{D}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)} = 0$$

فرض کنیم  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  دو ریشه باشند. در این صورت،

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - A$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = \frac{D}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}$$

اگر این دو معادله نسبت به  $A$  و  $D$  و برحسب  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  حل شوند، و بررسی مشابهی در دو انفراد دیگر صورت گیرد، نتیجه می‌شود که معادله دیفرانسیل (۷۸.۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y'' + \left( \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z-\xi} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-\eta} + \frac{1-\gamma_1-\gamma_2}{z-\zeta} \right) y' - \frac{(\xi-\eta)(\eta-\zeta)(\zeta-\xi)}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)}$$

$$(۸۰.۷) \quad \times \left[ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(z-\xi)(\eta-\zeta)} + \frac{\beta_1 \beta_2}{(z-\eta)(\zeta-\xi)} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(z-\zeta)(\xi-\eta)} \right] y = 0$$

ما از  $\beta$  و  $\gamma$  به ترتیب برای نمایش نما در  $\eta$  و  $\zeta$  استفاده کرده‌ایم.

این امر را که  $y$  جواب معادله (۸۰.۷) است اغلب به صورت زیر می‌نویسند:

۱. در اینجا از این امر استفاده می‌کنیم که هر تابع که در صفحه مختلط متناهی انفراد نداشته و در بی‌نهایت انفراد اساسی نداشته باشد باید یک چندجمله‌ای باشد.



$$(۸۱.۷) \quad y = P \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} z \quad (\text{علامت } P \text{ ریمان})$$

توجه کنید برای آنکه  $z = \infty$  یک نقطه عادی باشد باید داشته باشیم

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1$$

علامت  $P$  ریمان نمایش جواب عمومی معادله (۸۰.۷) است. از آن می توان شش جواب خصوصی مختلفی را که رفتارشان در مجاورت انفرادها به شیوه نموده شده با نماهاست به دست آورد. مثلاً، یکی از این شش جواب جوابی است که به ازای  $z$  های مجاور  $\eta$  مثل  $(z - \eta)^{\beta_1}$  رفتار می کند. البته، این شش جواب خصوصی مستقل نیستند. اغلب شایسته است انفرادها در  $0, 1, \infty$  گذارده شوند. کافی است تبدیل

هموگرافیک

$$(۸۲.۷) \quad \omega = \frac{(z - \xi)(\eta - \zeta)}{(z - \zeta)(\eta - \xi)}$$

صورت گیرد که نقاط  $\xi, \eta, \zeta$  را به نقاط  $\omega = 0, 1, \infty$  خواهد برد. در این صورت، معلوم می شود (به قدر کافی معقول) که

$$(۸۳.۷) \quad y = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \omega$$

به عبارت دیگر، اگر متغیر مستقل در معادله دیفرانسیل (۸۰.۷) طبق (۸۲.۷) تبدیل شود، معادله دیفرانسیل حاصل به همین شکل است منتها با تعویضهای  $\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 1, \zeta \rightarrow \omega$  تبدیل (۸۳.۷) انفرادها را بدون تغییر نماها انتقال داده است. نماها را نیز می توان بدون حرکت دادن انفرادها تغییر داد؛ مثلاً،

$$(۸۴.۷) \quad \frac{(z - \xi)^\lambda}{(z - \eta)^\lambda} P \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} z = P \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha_1 + \lambda & \beta_1 - \lambda & \gamma_1 \\ \alpha_2 + \lambda & \beta_2 - \lambda & \gamma_2 \end{pmatrix} z$$

یعنی، اگر جواب دلخواهی از (۸۰.۷) را در  $(z - \xi)^\lambda / (z - \eta)^\lambda$  که در آن  $\lambda$  ثابت است ضرب کنیم، تابع حاصل در معادله دیفرانسیلی صدق می کند که از (۸۰.۷) در صورت تعویض  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  با  $\alpha_1 + \lambda$  و  $\alpha_2 + \lambda$  و تعویض  $\beta_1$  و  $\beta_2$  با  $\beta_1 - \lambda$  و  $\beta_2 - \lambda$  به دست می آید. یا، به بیان دیگر، اگر متغیر وابسته در (۸۰.۷) با تغییر متغیر

$$u = \left( \frac{z - \xi}{z - \eta} \right)^\lambda y$$

تبدیل یابد،  $u$  در معادله دیفرانسیلی صدق می‌کند که از (۸۵.۷) در اثر تعویضهای  $\alpha_i \rightarrow \alpha_i + \lambda, \beta_i \rightarrow \beta_i - \lambda$  به دست می‌آید<sup>۱</sup>.

از تلفیق این دونوع تبدیل می‌توان معادله کلی (۸۵.۷) یا (۸۱.۷) را به معادله زیر تحویل کرد:

$$(۸۵.۷) \quad y = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \ x \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix}$$

به آسانی معلوم می‌شود که (۸۵.۷) مبین آن است که  $y$  جوابی از معادله فوق هندسی (۷۷.۷) است که در آغاز این بخش نوشته شد. سری فوق هندسی (۷۶.۷) جواب خصوصی این معادله است که در مجاورت نقطه منفرد  $z=0$  مانند  $1 = (z-0)^0$  رفتار می‌کند. برای به دست آوردن جواب دوم، تبدیل (۸۵.۷) را مشابه (۸۴.۷) انجام داده به دست می‌آوریم<sup>۲</sup>

$$y = x^{1-c} P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1+a-c \ x \\ c-1 & c-a-b & 1+b-c \end{pmatrix}$$

لذا، جواب دیگر (۷۷.۷) عبارت است از

$$(۸۶.۷) \quad y = x^{1-c} {}_2F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x)$$

این جوابی است که در مجاورت  $x=0$  مانند  $(x-0)^{1-c}$  رفتار می‌کند. همچنین، می‌توان جوابهای دیگر را نیز به دست آورد؛ مثلاً، "فرض کنیم  $u = 1/x$ ، این حالت خاصی از تبدیل هموگرافیک کلی (۸۲.۷) است؛  $x=0$  به  $u = \infty$ ،  $x=1$  به  $u = 1$ ، و  $x = \infty$  به  $u = 0$  تبدیل می‌شود. لذا،

۱. این حکم و بند پیش را می‌توان مستقیماً "تحقیق کرد، ولی اعمال جبری مربوطه کاملاً" خسته‌کننده‌اند. در واقع، مزیت عمدهٔ نماد  $P$  ریمان آن است که این تغییرات متغیر را به شیوه‌ای طبیعی و آشکار نشان می‌دهد.

۲. توجه کنید که از (۸۴.۷) به ازای  $\eta \rightarrow \infty$  استفاده کرده‌ایم. یعنی، وقتی که یکی از سه انفراد در بی‌نهایت باشد، هر تغییر مستلزم نماها در بی‌نهایت به صورت زیر است:

$$(z-\xi)^\lambda P \begin{pmatrix} \xi & \eta & \infty \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \ z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi & \eta & \infty \\ \alpha_1 + \lambda & \beta_1 & \gamma_1 - \lambda \ z \\ \alpha_2 + \lambda & \beta_2 & \gamma_2 - \lambda \end{pmatrix}$$

تابع  $(z-\xi)^\lambda$  دارای نمای  $\lambda$  در  $z = \xi$  و ولی نمای  $-\lambda$  در  $z = \infty$  است. همچنین، در علامت  $P$  مهم نیست کدام نمای  $\xi$  را  $\alpha_1$  و کدام را  $\alpha_2$  بنامیم؛ اگر یکی صفر باشد، معمولاً آن را  $\alpha_1$  می‌نامند.

$$y = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ a & 0 & 0 & u \\ b & c-a-b & 1-c & \end{pmatrix}$$

$$= u^a P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & u \\ b-a & c-a-b & 1+a-c & \end{pmatrix}$$

بنابراین ،

$$(۸۷.۷) \quad y = x^{-a} {}_2F_1 \left( a, 1+a-c; 1+a-b; \frac{1}{x} \right)$$

جواب دیگری از معادله فوق هندسی است. این یکی جوابی است که به ازای  $x \rightarrow \infty$  مثل  $(1/x)^a$  رفتار می کند. چون معادله فوق هندسی از مرتبه دوم است، فقط می تواند دو جواب مستقل خطی داشته باشد. جوابهای (۷۶.۷)، (۸۶.۷)، و (۸۷.۷) نمی توانند همه مستقل باشند. ارتباط این جوابها با سایر جوابها مسئله جالبی است، ولی در اینجا نمی توانیم وارد آن شویم. یک نتیجه نوعی<sup>۱</sup> عبارت است از

$$(-x)^{-a} {}_2F_1 \left( a, 1+a-c; 1+a-b; \frac{1}{x} \right) = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1-b)} {}_2F_1(a, b; c; x)$$

$$(۸۸.۷) \quad + \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-x)^{1-c} {}_2F_1(1+a-c, 1+b-c; 2-c; x)$$

نمایش انتگرالی برای  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a+n) B(c-b, b+n) \frac{x^n}{n!}$$

۱. مثلاً "، ر.ک. اردلی و دیگران (E5)، جلد ۱، ص ۶۳. عاملهای  $(-x)^{-a}$  و  $(-x)^{1-c}$  در (۸۸.۷) یادآور آنند که تابع  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  در حالت کلی یک نقطه شاخه ای در  $x=1$  دارد. طبیعی ترین تداوم تحلیلی بین  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  و  ${}_2F_1(a, 1+a-c; 1+a-b; 1/x)$  در امتداد محور  $x$  حقیقی منفی است که در آن  $(-x)^{-a}$  و  $(-x)^{1-c}$  مقادیر " اصلی " خود یعنی  $\exp[-a \ln(-x)]$  و  $\exp[(1-c) \ln(-x)]$  را دارند که در آنها  $\ln(-x)$  حقیقی است.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 dt (1-t)^{c-b-1} t^{b+n-1} \Gamma(a+n) \frac{x^n}{n!} \\
 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) (tx)^n}{\Gamma(a) n!} \\
 (۸۹.۷) \quad &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a}
 \end{aligned}$$

که در آن برای همگرا بودن انتگرالمان باید فرض کنیم  $Re\ c > Re\ b > 0$ . این نمایش پیشنهاد می‌کند که، به‌طور کلی، تابع

$$(۹۰.۷) \quad f(x) = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a} dt$$

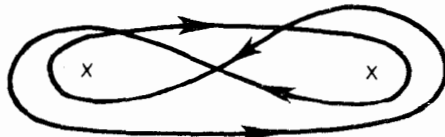
را در امتداد کنتوری به‌عنوان نامزد جواب معادله فوق هندسی بگیریم. با گذاردن  $f(x)$  در معادله فوق هندسی (۷۷.۷)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 0 &= x(1-x)f'' + [c - (a+b+1)x]f' - abf \\
 (۹۱.۷) \quad &= -a \int dt \underbrace{\frac{d}{dt} [t^b(1-t)^{c-b}(1-tx)^{-a-1}]}_{F(t,x)}
 \end{aligned}$$

لذا، در صورتی جواب داریم که  $F$  پس از بيمودن کنتور به مقدار اصلی خود باز گردد. هرگاه  $Re\ c > Re\ b > 0$ ، آنگاه محور حقیقی از 0 تا 1 مناسب بوده و ماب (۸۹.۷) باز خواهیم گشت.

توجه کنید که انتگرالده  $f$  در (۹۰.۷) سه انفراد، در  $t = 0, 1, 1/x$ ، دارد. هر کنتوری که حول یکی (یا چند تا) از این نقاط بگذرد، عموماً  $F$  را به مقدار اصلی‌اش باز نمی‌گرداند. از طرف دیگر، اگر یک انفراد را دور نزنیم، بنا بر قضیه کشی، انتگرال (۹۰.۷) صفر خواهد بود.

راه‌حل کلی (منسوب به پوچ هامر<sup>۱</sup>) این است که، با کنتوری مانند شکل ۳.۷، در هر لحظه دو انفراد را دور نزنیم. برای احتراز از این پیچیدگی، فرض کنیم  $c$  عددی



شکل ۳.۷ کنتور پوچ هامر برای نمایش انتگرالی تابع فوق هندسی که دو انفراد را دربر دارد.

صحیح باشد. با این فرض می‌توان بدون مشکل اضافی کمی تمرین کرد. حال می‌توان از کنتور شکل ۴.۷ استفاده کرد و

(۹۲.۷)

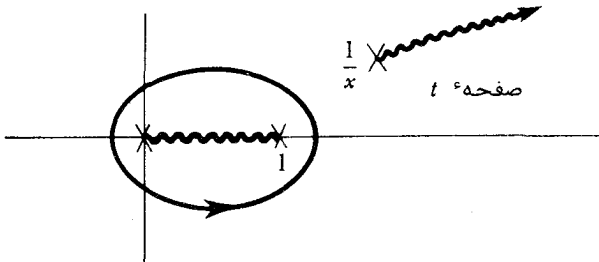
$$I = \oint dt t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}$$

را در نظر گرفت. رابطه<sup>۶</sup> (۹۲.۷) را به صورت توانمایی از  $x$  بسط می‌دهیم:

$$I = \oint dt t^{b-1}(t-1)^{c-b-1} \left[ 1 + atx + a(a+1)t^2 \frac{x^2}{2!} + \dots \right]$$

لازم است انتگرال

$$\int = \oint t^a(t-1)^{n-a} dt \quad (n \text{ عددی صحیح است})$$



شکل ۴.۷ کنتور مناسب عدد صحیح  $c$

را حساب کنیم. کنتور را به دایره<sup>۶</sup> بزرگی تغییر شکل می‌دهیم. در این صورت،

$$\begin{aligned} \int &= \oint t^n \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{n-a} dt \\ &= \oint t^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n-a)(n-a-1)\dots(n-a-k+1)}{k!} \frac{dt}{t^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \oint dt t^{n-k} (-1)^k \frac{\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(n-a-k+1)k!} \end{aligned}$$

اما این انتگرال، بنابر نظریه<sup>۶</sup> مانده‌ها، بوضوح صفر است مگر آنکه  $n-k = -1$ . لذا، اگر  $n < -1$ ،  $\int = 0$ ، حال آنکه اگر  $n \geq -1$

$$\int = 2\pi i (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(-a)(n+1)!}$$

تحقیق اینکه نتیجه را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت به خواننده محول می‌شود:

(۹۳.۷)

$$\int = 2\pi i \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n)(n+1)!}$$

حال به نمایش انتگرالی (۹۲.۷) باز گشته و از (۹۳.۷) استفاده می‌کنیم:

$$I = 2\pi i \left[ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1+b-c)(c-1)!} + a \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(1+b-c)c!} x + \frac{a(a+1)\Gamma(b+2)}{\Gamma(1+b-c)(c+1)!} \frac{x^2}{2!} + \dots \right]$$

$$= \frac{2\pi i}{(c-1)!} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1+b-c)} {}_2F_1(a, b; c; x)$$

لذا، نمایش انتگرالی زیر برای  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  به دست می آید مشروط بر اینکه  $c$  عدد صحیح (بزرگتر از صفر) باشد:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = (c-1)! \frac{\Gamma(1+b-c)}{\Gamma(b)} \frac{1}{2\pi i} \oint dt t^{b-1} (t-1)^{c-b-1} (1-tx)^{-a} \quad (94.7)$$

دلیل توجه ما به توابع فوق هندسی این است که بسیاری از توابعی که در فیزیک ریاضی با آنها مواجه می شویم حالات خاصی از  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  اند. مثلاً، معادله دیفرانسیل لژاندر (۱۰۷) سه انفراد منتظم در  $-1$ ،  $+1$ ، و  $\infty$  دارد. این تضمین می کند که توابع لژاندر حالات خاصی از توابع فوق هندسی هستند. اگر  $a$  یا  $b$  عدد صحیح منفی باشد، تابع فوق هندسی به یک چندجمله ای تبدیل می شود که به چندجمله ای ژاکوبی<sup>۱</sup> معروف است. چندجمله ایهای ژاکوبی (از جمله جاهای دیگر) در بررسی خواص تبدیلی هماهنگهای کروی تحت دورانهای مختصات ظاهر می شوند. به علاوه، در بخش بعد، یکی از منسوبان نزدیک تابع فوق هندسی، یعنی تابع فوق هندسی همشار، را مطرح خواهیم کرد که توابع فیزیکی زیادی مانند توابع بسل، جوابهای معادله شرودینگر برای پتانسیلهای کولنی (چند - جمله ایهای لاگرا<sup>۲</sup>) جوابهای معادله شرودینگر برای پتانسیلهای نوسانگر هماهنگ (چندجمله ایهای هرمیت)، انتگرالهای فرنل<sup>۳</sup> اپتیک کلاسیک، و بسیاری دیگر را به عنوان حالت خاص دربر دارد.

#### ۴.۷ توابع فوق هندسی همشار

بحث را با معادله دیفرانسیل تابع فوق هندسی معمولی

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

با سه نقطه منفرد منتظم  $x=0, 1, \infty$  آغاز می کنیم. قرار می دهیم  $x = z/b$  که انفرادها

را به  $z = 0, b, \infty$  می برد، و فرض می کنیم  $b \rightarrow \infty$ . نتیجه عبارت است از

$$(95.7) \quad zy'' + (c - z)y' - ay = 0$$

که در اینجا پریم یعنی مشتگیری نسبت به  $z$ ،

این معادله دیفرانسیل یک نقطه منفرد منتظم در  $z = 0$  و یک انفراد اساسی در

$z = \infty$  دارد که از همشاری  $b \rightarrow \infty$  ناشی شده است.

دو جواب معادله فوق هندسی معمولی

$$y_1 = {}_2F_1(a, b; c; x)$$

$$y_2 = x^{1-c} {}_2F_1(1 + a - c, 1 + b - c; 2 - c; x)$$

را به یاد آورید. با انجام دادن فرایند حدی  $b \rightarrow \infty$ ، دو جواب معادله فوق هندسی همشار به دست می آیند:

$$(96.7) \quad y_1 = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots = {}_1F_1(a; c; z)$$

$$y_2 = z^{1-c} {}_1F_1(1 + a - c; 2 - c; z)$$

تابع  ${}_1F_1(a; c; z)$  تابع فوق هندسی همشار، یا تابع کومر<sup>۱</sup>، نام دارد.

نمایش انتگرالی (۸۹.۷)

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tx)^{-a}$$

(Re  $c > \text{Re } b > 0$ )

را به یاد آورید. تعویض  $a$  و  $b$  باهم و انجام فرایند همشاری نتیجه می دهد که

$$(97.7) \quad {}_1F_1(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{tz}$$

(Re  $c > \text{Re } a > 0$ )

همچنین، اگر  $c$  عددی صحیح باشد، رابطه (۹۴.۷) نتیجه خواهد شد:

$${}_2F_1(a, b; c; x)$$

$$= (c-1)! \frac{\Gamma(1+b-c)}{\Gamma(b)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0,1)} dt t^{b-1} (t-1)^{c-b-1} (1-tx)^{-a}$$

که در آن نماد  $(0, 1)$  زیر علامت انتگرال به این معنی است که کنتور، مثل شکل ۰۴۰۷،  $t = 0$  و

$t = 1$  را دربر دارد. با انجام همشاری نتیجه می شود که

$$(۹۸.۷) \quad {}_1F_1(a; c; z) = (c-1)! \frac{\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(a)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0,1)} dt t^{a-1} (t-1)^{c-a-1} e^{tz}$$

که در آن  $c$  مجدداً " باید عددی صحیح باشد .

نمایش انتگرالی دیگر  ${}_1F_1(a; c; z)$  ، وقتی  $c$  عددی صحیح باشد ، عبارت است از

$$(۹۹.۷) \quad {}_1F_1(a; c; z) = (c-1)! z^{1-c} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0,1)} dt (t-1)^{-a+c} e^{tz}$$

این امر را می توان به آسانی با بسط انتگرالده نسبت به توانهای  $z$  و انتگرالگیری جمله به جمله تحقیق کرد .

بسیاری از توابع که اغلب با آنها مواجهیم حالات خاصی از توابع فوق هندسی

همشارند . چند نمونه عبارتند از

$$(۱۰۰.۷) \quad e^z = {}_1F_1(a; a; z) \quad (a \text{ دلخواه است})$$

$$(۱۰۱.۷) \quad J_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^n e^{iz} {}_1F_1\left(n + \frac{1}{2}; 2n + 1; -2iz\right)$$

$$(۱۰۲.۷) \quad \operatorname{erf} z = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -z^2\right)$$

$H_n(z) =$  [قس (۶۷.۱)] چند جمله‌ای هرمیتی  $n$  م

$$(۱۰۳.۷) \quad = 2^n \left[ \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)} z {}_1F_1\left(\frac{1-n}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)} {}_1F_1\left(-\frac{n}{2}; \frac{1}{2}; z^2\right) \right]$$

اگر  $a$  عدد صحیح منفی باشد ،  ${}_1F_1(a; c; z)$  یک چند جمله‌ای است که وقتی به طور

مناسبی نرمالی شود ، یک چند جمله‌ای لاگر خواهد بود . به طور مشخص ، معمولاً "می نویسیم

( به ازای  $n = 0, 1, 2, \dots$  )

$$(۱۰۴.۷) \quad L_n^\alpha(z) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} {}_1F_1(-n; \alpha + 1; z)$$

توجه به جواب عمومی معادله فوق هندسی همشار از جهاتی جالب است . اگر  $c$  عددی

صحیح نباشد ، دو جواب مستقل عبارتند از

$$(۱۰۵.۷) \quad y_1 = {}_1F_1(a; c; z)$$

$$y_2 = z^{1-c} {}_1F_1(1+a-c; 2-c; z)$$

اگر  $c = 0, -1, -2, \dots$  ،  $y_1$  بزرگ می شود ؛ در واقع ، به آسانی می توان نشان داد که



$$(106.7) \lim_{c \rightarrow -n} \frac{{}_1F_1(a; c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} {}_1F_1(a+n+1; n+2; z)$$

اگر  $y_1 = y_2, c = 1$ ، اگر  $c = 2, 3, 4, \dots$ ،  $y_2$  بزرگ می‌شود، و وقتی متناهی باشد با  $y_1$  متناسب است. لذا، به معرفی تابع

$$(107.7) \frac{1}{\sin \pi c} \left[ \frac{{}_1F_1(a; c; z)}{\Gamma(c)} \frac{1}{\Gamma(1+a-c)} - \frac{z^{1-c} {}_1F_1(1+a-c; 2-c; z)}{\Gamma(2-c)} \frac{1}{\Gamma(a)} \right]$$

رسیده‌ایم. تابع تعریف شده با (107.7) ضمن نزدیک شدن  $c$  به عددی صحیح خوشرفتار است، و جواب دوم معادله فوق هندسی همشار را به ما می‌دهد. معادلات (107.7) و (56.7) را باهم مقایسه کنید.

گاهی  $y = uz^{-c/2} e^{z/2}$  را [قس. جانسانی (41.1)] در معادله فوق هندسی همشار قرار داده و به دست می‌آوریم

$$u'' + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{\frac{c}{2} - a}{z} + \frac{\frac{1}{2}c \left(1 - \frac{1}{2}c\right)}{z^2} \right] u = 0$$

بیش و کم رسم برای این است که تعریف کنیم

$$k = \frac{c}{2} - a$$

$$m = \frac{1}{2}(c-1)$$

در نتیجه،

$$(108.7) u'' + \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2} \right) u = 0$$

این معادله دیفرانسیل را معادله ویتاکر می‌نامیم؛ واضح است که این معادله جوابهای زیر را دارد:

$$(109.7) \begin{aligned} u_1 &= z^{m+1/2} e^{-z/2} {}_1F_1\left(m + \frac{1}{2} - k; 2m + 1; z\right) \\ u_2 &= z^{-m+1/2} e^{-z/2} {}_1F_1\left(-m + \frac{1}{2} - k; -2m + 1; z\right) \end{aligned}$$

این معادلات وقتی غیرمقطع ( ناتمام ) اند که  $c$  عددی صحیح باشد؛ یعنی،  $2m$  عددی صحیح باشد. لذا، تابع ویتاگر را تعریف می‌کنیم:

$$(110.7) \quad W_{k,m} = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2} - m - k)} u_1 + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + m - k)} u_2$$

$W_{-k,m}(-z)$  و  $W_{k,m}(z)$  دوجواب مستقل معادله ویتاگر (۱۰۸.۷) به ازای جمیع  $k, m$  اند. دو رابطه نهایی را بدون برهان ذکر می‌کنیم.

$$(111.7) \quad {}_1F_1(a; c; z) = e^z {}_1F_1(c - a; c; -z) \quad \text{تبدیل کومر.}$$

۲. فرمولهای مجانبی: به ازای  $|z|$  بزرگ،

$$(112.7) \quad {}_1F_1(a; c; z) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c} & (\operatorname{Re} z > 0) \\ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} & (\operatorname{Re} z < 0) \end{cases}$$

### ۵.۷ توابع ماتیو<sup>۱</sup>

معادله ماتیو در مسائل حرکت موج با مرزهای بیضوی ظاهر می‌شود، که ساده‌ترین نمونه ارتعاشات سر یک طبل بیضوی است. مسائل سه‌بعدی که در آنها مرز از استوانه‌ای با مقطع بیضوی تشکیل شده است نیز به این معادله منجر می‌شوند، و البته این معادله در سایر زمینه‌ها نیز ظاهر خواهد شد.

لیکن، مهمتر از شکل خاص آن خاصیت بسیار عمومی معادله ماتیو است؛ این یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب تناوبی است. قسمت اعظم تحلیل در این بخش را می‌توان، با تعدیلهای مناسبی، بر هر چنین معادله دیفرانسیلی اعمال کرد. برای معادله دیفرانسیل ماتیو می‌توان شکل متعارف زیر را اختیار کرد:

$$(113.7) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + \beta \cos 2x)y = 0 \quad (\alpha, \beta \text{ ثابت})$$

در هر کتاب نمادهای متفاوتی به کار رفته است؛ لذا، ما نیز نمادهای خودمان را به کار می‌بریم.

این معادله را می‌توان به شکل آشناتری که دارای ضرایب جبری است تبدیل کرد؛ مثلاً "جانسانی

$$(114.7) \quad z = \cos^2 x$$

معادله دیفرانسیل (۱۱۳.۷) ما را به

$$(115.7) \quad 4z(1-z) \frac{d^2y}{dz^2} + 2(1-2z) \frac{dy}{dz} + [\alpha + \beta(2z-1)]y = 0$$

برمی گرداند.

$$z = 0 \quad \text{یک انفراد منتظم است}$$

$$z = 1 \quad \text{یک انفراد منتظم است}$$

$$z = \infty \quad \text{یک انفراد اساسی است}$$

با اینحال، معادله ماتئو کلیترین معادله از این نوع نیست؛ یعنی، همه معادلات دیفرانسیل با دو انفراد منتظم و یک انفراد نامنتظم را نمی توان به معادله ماتئو تحویل کرد.

حال قضیه مهمی به نام قضیه فلوکه<sup>۱</sup> را ثابت می کنیم.

در اولین شکل (۱۱۳.۷) معادله ماتئو، متغیر  $x$  ممکن است زاویه باشد، که در این صورت (معمولا) مایلیم جواب  $y(x)$  ما تناوبی با دوره تناوب  $2\pi$  باشد. این به ازای هر  $\alpha$  و  $\beta$  دلخواه ممکن نیست. فرض کنیم  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  دو جواب مستقل معادله ماتئو باشند. چون ضرایب معادله نسبت به  $x$  تناوبی با دوره تناوب  $2\pi$  اند،  $y_1(x+2\pi)$  و  $y_2(x+2\pi)$  نیز جوابند و لذا، می توان آنها را به طور خطی برحسب  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  بیان کرد. فرض کنیم

$$(116.7) \quad y_1(x+2\pi) = A_{11}y_1(x) + A_{21}y_2(x)$$

$$y_2(x+2\pi) = A_{12}y_1(x) + A_{22}y_2(x)$$

قضیه فلوکه می گوید جوابی مانند  $y(x)$  وجود دارد به طوری که

$$(117.7) \quad y(x+2\pi) = ky(x)$$

$k$  یک ثابت (مختلط) است.

زیرا فرض کنیم

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

در این صورت،

$$y(x+2\pi) = (C_1A_{11} + C_2A_{12})y_1(x) + (C_1A_{21} + C_2A_{22})y_2(x)$$

و اگر (۱۱۷.۷) بخواهد برقرار باشد، باید داشته باشیم

$$(118.7) \quad C_1A_{11} + C_2A_{12} = kC_1$$

$$C_1A_{21} + C_2A_{22} = kC_2$$

لذا،  $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$  یک ویژه بردار و  $k$  ویژه مقدار مربوطه ماتریس

$$(119.7) \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

است. یعنی،

$$(120.7) \quad AC = kC$$

یک چنین ویژه بردار و ویژه مقدار را همیشه می توان یافت؛ به این ترتیب اثبات قضیه فلوکه کامل خواهد شد. یک نتیجه مفید به صورت زیر به دست می آید.  $\mu$  و  $\phi(x)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(121.7) \quad \phi(x) = e^{-\mu x} y(x) \quad \text{و} \quad \mu = \frac{1}{2\pi} \ln k \quad \text{یا} \quad k = e^{2\pi\mu}$$

در این صورت، از (121.7) داریم

$$(122.7) \quad \phi(x + 2\pi) = e^{-\mu x} e^{-2\pi\mu} y(x + 2\pi) = e^{-\mu x} y(x) = \phi(x)$$

در نتیجه، قضیه فلوکه می گوید همواره می توان جوابی از معادله ماتریو به شکل زیر یافت

$$(123.7) \quad y(x) = e^{\mu x} \phi(x)$$

که در آن  $\phi(x)$  تناوبی با دوره تناوب  $2\pi$  است. اگر  $\mu$  صفر یا ضرب صحیحی از  $i$  باشد،  $y(x)$  نیز تناوبی با دوره تناوب  $2\pi$  است. اگر  $\mu$  موهومی محض باشد،  $y(x)$  به طور غیر تناوبی نوسان می کند. اگر  $\mu$  قسمت حقیقی داشته باشد،  $y(x)$  ناپایدار است؛ یعنی، به ازای  $x \rightarrow +\infty$  یا  $x \rightarrow -\infty$  بزرگ می شود.

از اثبات قضیه فلوکه معلوم می شود که قضیه و شکل جواب (123.7) نه فقط در مورد

معادله ماتریو بلکه در مورد هر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب تناوبی به کار می رود. هر معادله به شکل

$$(124.7) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + f(x)y = 0$$

که در آن  $f(x)$  یک تابع تناوبی زوج است، به افتخار جی. دبلیو. هیل<sup>۱</sup> که اول بار این نوع معادله را در رابطه با نظریه حرکت ماه بررسی کرد، یک معادله هیل می نامند. این معادلات در نظریه مدارهای ذره در یک سنکروترون گرادیان متناوب به خاطر تناوبی بودن ساختار میدان مغناطیسی، و در نظریه کوانتومی فلزات و نیمه هادیها به خاطر آنکه معادله شرودینگر یک الکترون در یک شبکه تناوبی به شکل (124.7) یا مشابه سه بعدی اش است

ظاهر می‌شوند. در نظریهٔ فلزات، توابع موج بلوک<sup>۱</sup> چیزی جز جوابهای فلوکه به شکل (۱۲۳.۷) نیستند.

توجه کنید که معادلهٔ ماتئوی (۱۱۳.۷) نسبت به  $x$  زوج است؛ در نتیجه، اگر  $y(x)$  یک جواب باشد،  $y(-x)$  نیز چنین است. لذا، جواب عمومی عبارت است از

$$y(x) = Ae^{\mu x}\phi(x) + Be^{-\mu x}\phi(-x) \quad (125.7)$$

$$[\phi(x + 2\pi) = \phi(x)]$$

بحثهای مفصلی دربارهٔ بردهای  $\alpha$  و  $\beta$  که به ازای آنها جوابهای تناوبی و انواع دیگر جوابها وجود دارند در مک‌لاخلن<sup>۲</sup> (M3)، فصل سه و ضمیمهٔ دو، و در مورس و فشبک (M9)، بخش ۲.۵، دیده می‌شوند. ما به‌طور اختصار به آنها می‌پردازیم. فرض کنیم  $\beta = 0$ . معادلهٔ (۱۱۳.۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha y = 0 \quad (126.7)$$

جوابهای تناوبی با دورهٔ تناوب  $2\pi$  در صورتی وجود دارند که

$$\alpha = 0 \quad (y = 1)$$

$$\alpha = 1 \quad (y = \sin x, \cos x)$$

$$\alpha = 4 \quad (y = \sin 2x, \cos 2x)$$

و غیره

در شکل ۵.۷ وضع به ازای  $\beta$  های دلخواه ترسیم شده است.

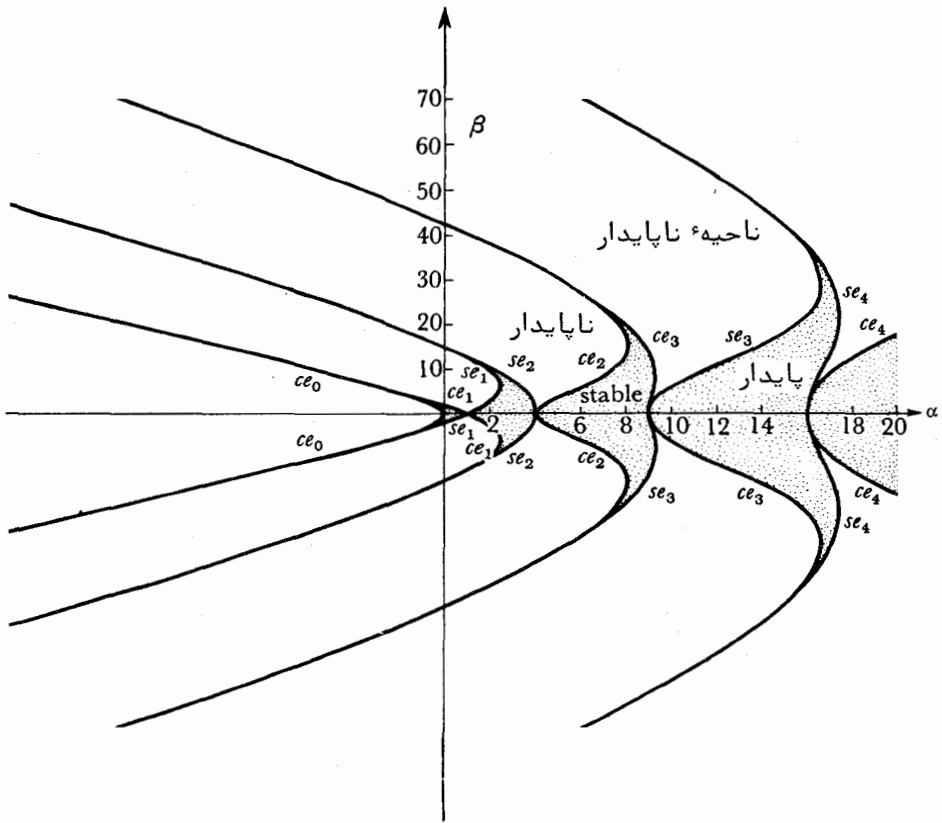
خطوطی که مرزهای بین نواحی پایدار و ناپایدار شکل ۵.۷ را مشخص می‌کنند نظیر به جوابهای تناوبی می‌باشند ( $\mu = 0$ ). این جوابها توابع ماتئو نام دارند و به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$(127.7) \quad \begin{matrix} ce_0(x) & ce_1(x) & ce_2(x) & \dots \\ se_1(x) & se_2(x) & & \dots \end{matrix}$$

نمادها را می‌توان با مراجعه به شکل مشخص این توابع که در بالا برای حالت حدی  $\beta = 0$  داده شده است معنی کرد. توابع (۱۲۷.۷) تقارنهای توابع مثلثاتی نظیری را دارند که وقتی  $\beta = 0$  به آنها تحویل می‌شوند. یعنی،

$$ce_{2n}(x) = \sum_k A_k \cos 2kx \quad ce_{2n+1}(x) = \sum_k A_k \cos (2k + 1)x$$

$$se_{2n}(x) = \sum_k A_k \sin 2kx \quad se_{2n+1}(x) = \sum_k A_k \sin (2k + 1)x$$



شکل ۵.۷ صفحه ۵۰۷ نشانگر ویژگی جوابهای معادله ماتيو  
برای مقادير مختلف  $\alpha$  و  $\beta$

(البته،  $A_k$  ها برای هر تابع متفاوت می باشند.)

نرمال سازیهای مختلفی قابل انجام است؛ ضریب جمله نظیر در سری فوریه را مساوی ۱ قرار می دهیم. مثلاً،

$$ce_1(x) = \cos x + \frac{\beta}{16} \cos 3x + \dots \quad (128.7)$$

چگونه می توان معادلات منحنیهای  $\alpha(\beta)$  را برای جوابهای تناوبی یافت؟ یک سری

۱.۱ این در بحث دقیقتری از توابع ماتيو مناسبترین نرمال سازی نیست، چرا که ممکن است این ضریب خاص صفر گردد. ر.ک. مکلاخلن (M3)، بخشهای (۲۱.۲) و (۲۶.۳).

$$(۱۲۹.۷) \quad y = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

را در معادله دیفرانسیل ماتئوی (۱۱۳.۷) قرار می دهیم . با متحد صفر گرفتن ضرایب جملات مختلف سمت چپ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha A_0 &+ \frac{1}{2}\beta A_2 = 0 \\ (\alpha - 1)A_1 + \frac{1}{2}\beta A_1 + \frac{1}{2}\beta A_3 &= 0 & (\alpha - 1)B_1 - \frac{1}{2}\beta B_1 + \frac{1}{2}\beta B_3 &= 0 \\ (\alpha - 4)A_2 + \frac{1}{2}\beta A_0 + \frac{1}{2}\beta A_4 &= 0 & (\alpha - 4)B_2 &+ \frac{1}{2}\beta B_4 = 0 \\ (\alpha - 9)A_3 + \frac{1}{2}\beta A_1 + \frac{1}{2}\beta A_5 &= 0 & (\alpha - 9)B_3 + \frac{1}{2}\beta B_1 + \frac{1}{2}\beta B_5 &= 0 \end{aligned}$$

و غیره و غیره

برای آنکه نحوه پرداختن به این روابط بازگشتی سه جمله ای را ببینیم ، به جستجوی جوابی به شکل  $ce_{2n}$  می پردازیم که در آن فقط  $A_0, A_2, A_4, \dots$  موجود باشند .

$$\begin{aligned} \alpha A_0 + \beta A_2 &= 0 \\ \beta A_0 + 2(\alpha - 4)A_2 + \beta A_4 &= 0 \\ \beta A_2 + 2(\alpha - 16)A_4 + \beta A_6 &= 0 \\ \dots & \\ \beta A_{n-2} + 2(\alpha - n^2)A_n + \beta A_{n+2} &= 0 \quad (زوج\ n) \\ \dots & \end{aligned}$$

ابتدا ممکن است این طور به نظر برسد که می توان به ازای هر  $\alpha$  و  $\beta$  جوابی یافت . لیکن ، ضرایب  $A_n$  خیلی سریع بزرگ می شوند ؛ در واقع ،

$$\frac{A_{n+2}}{A_n} \sim n^2$$

مگر آنکه محتاط باشیم . رابطه بازگشتی خود را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\beta \frac{A_{n-2}}{A_n} + 2(\alpha - n^2) + \beta \frac{A_{n+2}}{A_n} = 0$$

لذا ،

$$\frac{A_n}{A_{n-2}} = \frac{-\beta}{2(\alpha - n^2) + \beta \frac{A_{n+2}}{A_n}}$$

$$(130.7) \quad = \frac{-\beta}{2(\alpha - n^2) - \frac{\beta^2}{2[\alpha - (n+2)^2] - \dots}}$$

این یک کسر مسلسل می باشد .

حال می توان  $\alpha$  و  $\beta$  را با متحد گرفتن دو عبارت برای  $A_2/A_0$  به هم ربط داد :

$$-\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-\beta}{2(\alpha - 4) - \frac{\beta^2}{2(\alpha - 16) - \dots}}$$

یا

$$(131.7) \quad \alpha = \frac{\beta^2}{2(\alpha - 4) - \frac{\beta^2}{2(\alpha - 16) - \dots}}$$

مثلاً "، فرض کنیم جوابی به ازای  $ce_0(x)$  خواهیم . این جوابی است که وقتی  $\beta = 0$  یا  $\alpha = 0$  شروع می شود . تکرار می کنیم :

$$\alpha_0 \approx -\frac{\beta^2}{8}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\approx \frac{\beta^2}{2\left(-\frac{\beta^2}{8} - 4\right) + \frac{\beta^2}{32}} \\ &\approx -\frac{\beta^2}{8} + \frac{7\beta^4}{2048} \end{aligned}$$

و غیره

در این صورت ، از رابطه بازگشتی مان ( به یاد آورید که  $A_0 = 2$  ) داریم

$$A_2 = -\frac{2\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{4} - \frac{7\beta^3}{1024} + \dots$$

$$A_4 = -2 - \frac{2(\alpha - 4)}{\beta} A_2$$

$$\approx \frac{\beta^2}{128} + \dots$$

در نتیجه ،

$$(132.7) \quad ce_0(x) = 1 + \left(\frac{\beta}{4} - \frac{7\beta^3}{1024} + \dots\right) \cos 2x + \left(\frac{\beta^2}{128} + \dots\right) \cos 4x + \dots$$

### ۶.۷ توابع بیضوی

بحث را با نظری به توابع مثلثاتی آشنا به شیوه ای نسبتاً ناآشنا آغاز می کنیم . تابع



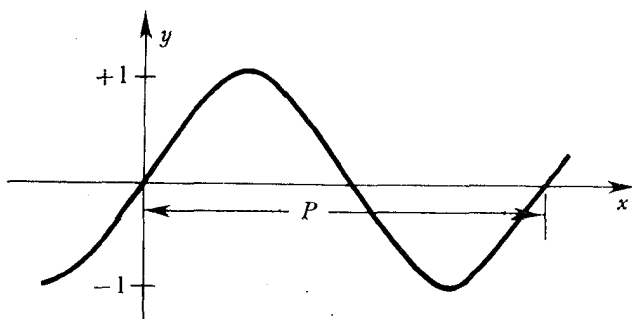
$y = \sin x$  را در نظر می‌گیریم. این تابع را می‌توان جواب هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر تعریف کرد:

$$(1) \quad y'' + y = 0 \quad y = 0, y' = 1 \quad x = 0 \quad \text{در} \quad (133.7)$$

$$(2) \quad (y')^2 = 1 - y^2 \quad y = 0, y' > 0 \quad x = 0 \quad \text{در} \quad (134.7)$$

بخصوص، فرض می‌کنیم  $\sin x$  یا  $(134.7)$  تعریف شده باشد. راجع به تابع  $y = \sin x$  چه می‌دانیم؟ به آسانی معلوم می‌شود که  $y(x)$  باید شبیه شکل  $6.7$  باشد. یعنی،  $y(x)$  به طور تناوبی بین  $\pm 1$  و با دوره تناوب

$$(135.7) \quad P = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$



شکل  $6.7$  جواب نیمه کمی معادله  $(134.7)$

نوسان کند. می‌توان ادامه داد و کسینوس را با تغییر شرایط مرزی تعریف کرد و تمام خواص آشنای توابع مثلثاتی را به دست آورد.

حال معادله دیفرانسیل

$$(136.7) \quad (y')^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2) \quad 0 < k < 1$$

را در نظر می‌گیریم. جوابی که از شرایط اولیه  $y = 0, y' > 0$  در  $x = 0$  تبعیت کند به صورت  $y = \text{sn } x$  تعریف می‌شود؛  $\text{sn } x$  یک تابع بیضوی ژاکوبی می‌باشد. چون از  $(136.7)$  نتیجه می‌شود که

$$(137.7) \quad x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}$$

می‌بینیم که توابع بیضوی چیزی جز توابع معکوس انتگرالهای بیضوی نیستند؛ به‌طور مشخص، هرگاه

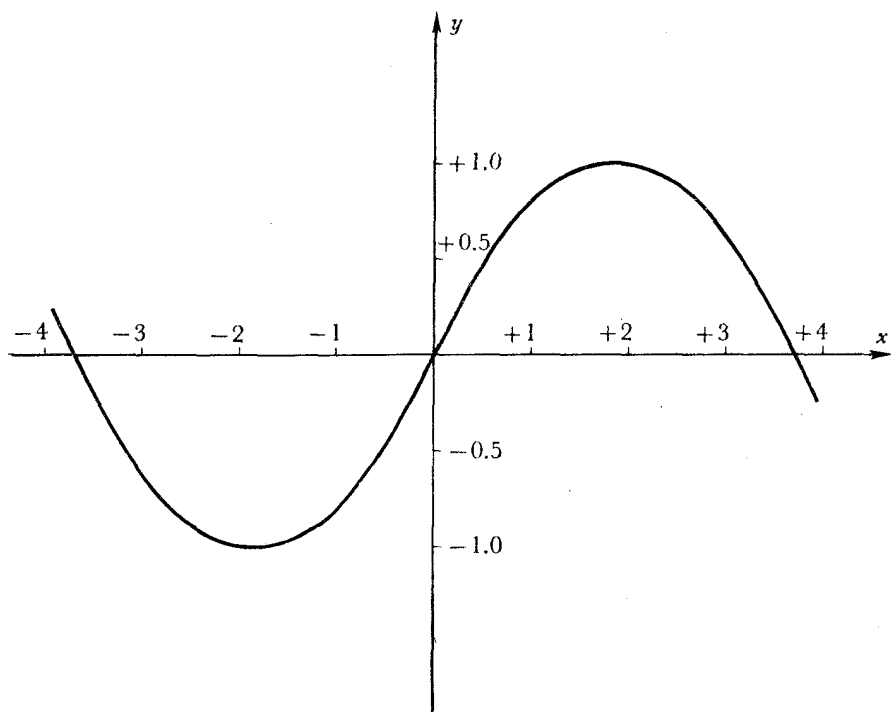
$$y = \text{sn } x$$

$$x = F(\sin^{-1} y, k)$$

که در آن  $F$  انتگرال بیضوی لژاندر نوع اول است [ر. ک. (۶۰.۳)].  
اگر مثل تابع  $\sin x$  استدلال کنیم، می‌بینیم که  $\operatorname{sn} x$  تناوبی با دوره تناوب

$$(138.7) \quad P = 4 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \\ = 4K(k)$$

است، که در آن  $K$  انتگرال بیضوی نام نوع اول می‌باشد [ر. ک. (۶۶.۳)]. لذا،  $y = \operatorname{sn} x$ ، شبیه شکل ۷.۷ است.



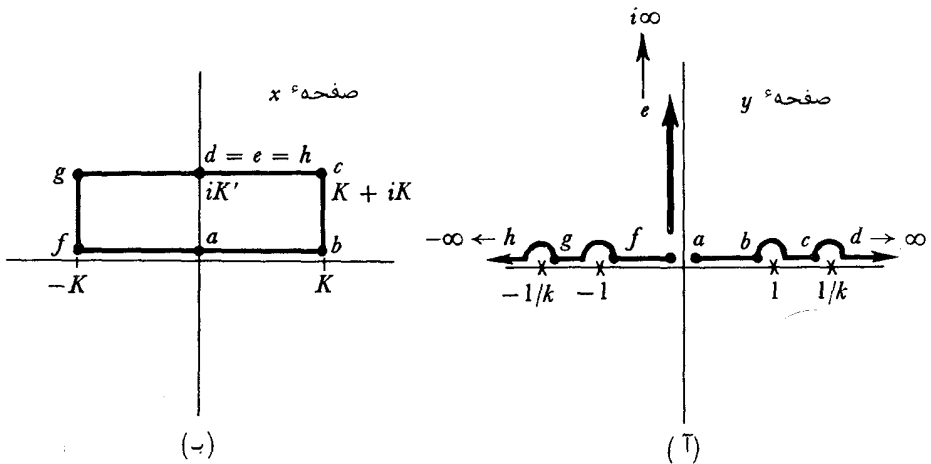
شکل ۷.۷ نمودار  $y = \operatorname{sn} x$  به ازای  $k^2 = 0.5$  ( $K = 1.854 \dots$ )

نکته جدید و جالب درباره  $\operatorname{sn} x$  این است که دوره تناوب (مستقل) دیگری مانند  $P'$  دارد؛  $\operatorname{sn} x$  یک تابع دودوره تناوبی می‌باشد. برای به دست آوردن این دوره تناوب، باید به صفحه مختلط برویم.

نگاشت همدیس داده شده با  $y = \operatorname{sn} x$ ، یا

$$(۱۳۹.۷) \quad x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

را در نظر می‌گیریم. انتگرالده در  $y = \pm 1, \pm 1/k$  نقاط شاخه‌ای دارد. وقتی انتگرالگیری را از  $y = 0$  شروع می‌کنیم، انتگرالده را  $+1$  تعریف کرده و به‌طور تحلیلی در امتداد کنتور انتگرالگیری ادامه می‌دهیم. نداشت در شکل ۸.۷ دیده می‌شود.



شکل ۸.۷ نداشت حاصل از تابع (۱۳۹.۷):

$$x = \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

نیمه بالایی صفحه  $y$  به مستطیل صفحه  $x$  نگاشته می‌شود.

اولاً، "  $y = 0$  به  $x = 0$  می‌رود. فرض کنیم  $y$  در امتداد محور حقیقی مثبت حرکت می‌کند. همین‌طور  $x$ ، و وقتی  $y$  به  $1$  می‌رسد،  $x$  به انتگرال بیضوی تام  $K$  خواهد رسید. حال روی نقطه شاخه‌ای در  $y = 1$  "جهش" کرده و در امتداد محور حقیقی به سمت  $y = 1/k$  ادامه می‌دهیم.  $x$  خواهد شد

$$(۱۴۰.۷) \quad x = K + i \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-k^2y^2)}}$$

و وقتی  $y$  به  $1/k$  می‌رسد،  $x$  به صورت  $K + iK'$  درمی‌آید، که در آن

$$(۱۴۱.۷) \quad K' = \int_1^{1/k} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-k^2y^2)}}$$

در ضمن، اگر در انتگرال اخیر تغییر متغیر  $z^2 = (1-k^2y^2)/(1-k^2)$  بدهیم، درمی‌یابیم

که در آن  $K'(k) = K(k')$  ،

$$(142.7) \quad k'^2 = 1 - k^2$$

بالاخره ، فرض کنید روی  $y = 1/k$  جهش کرده و در امتداد محور حقیقی به بی نهایت برویم .  
داریم

$$(143.7) \quad x = K + iK' - \int_{1/k}^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - 1)(k^2 y^2 - 1)}}$$

و در نتیجه ، قسمت حقیقی  $x$  نزول خواهد کرد . وقتی  $y$  به  $\infty$  برسد ، قسمت حقیقی  $x$  عبارت است از

$$K - \int_{1/k}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - 1)(k^2 y^2 - 1)}}$$

جانمایی  $z = 1/(ky)$  انتگرال را به  $K$  تبدیل می کند . در نتیجه ، وقتی  $x = iK'$  ،  $y = \infty$  ، حال از مبدأ شروع کرده و از محور  $y$  موهومی مستقیماً "بالا" می رود . سپس  $x$  از محور موهومی خود بالا رفته و ، وقتی  $y$  به  $i\infty$  می رسد ،

$$(144.7) \quad \begin{aligned} x &= \int_0^{i\infty} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} \\ &= i \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(1 + y^2)(1 + k^2 y^2)}} \end{aligned}$$

تغییر متغیر

$$\frac{1 + y^2}{1 + k^2 y^2} = z^2$$

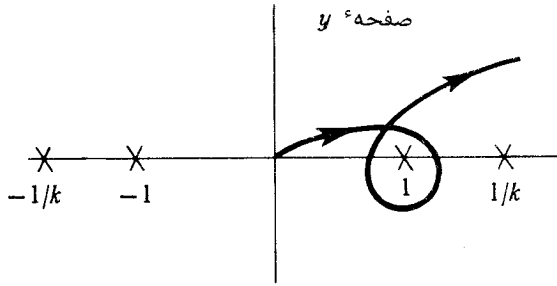
این نتیجه را به

$$\begin{aligned} x &= i \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(1 - k^2 z^2)}} \\ &= iK' \end{aligned}$$

تبدیل می کند . بالاخره ، اگر  $y$  از مبدأ شروع کرده و در امتداد مسیری درست بالای محور حقیقی منفی به  $-\infty$  حرکت کند ،  $x$  از 0 تا  $-K$  تا  $-K + iK'$  تا  $iK'$  تغییر می کند . با گذاردن این نتایج در کنار هم ، معلوم می شود که نیمه بالایی صفحه  $y$  ، مثل

شکل ۸.۷ ، به درون یک مستطیل در صفحه  $x$  نگاشته می شود .

کجا تناوب وارد کار می شود؟ فرض کنید کنتوری مانند شکل ۹.۷ را تعقیب کنیم ، این کنتور مقدار جدید  $x$  را به ما می دهد (نه در داخل مستطیل) که نظیر همان مقدار نهایی

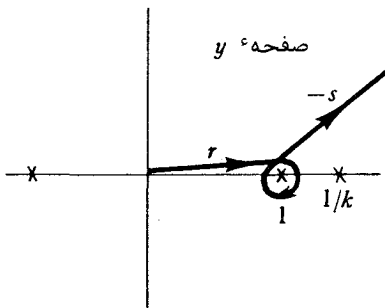


شکل ۹.۷ یک کنتور که به نیمه بالایی صفحه  $y$  ختم می شود ، ولی به سوی نقطه  $x$  خارج مستطیل شکل ۸.۷ رهسپار است .

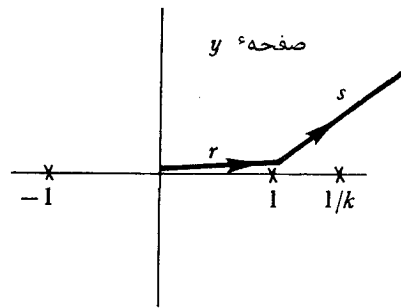
$y$  می باشد . برای آنکه نحوه ارتباط دو مقدار  $x$  را ببینیم ، کنتور شکل ۹.۷ را به کنتور شکل ۱۰.۷ (ب) ، که با شکل ۱۰.۷ (آ) فقط در یکبار چرخش حول نقطه  $y=1$  فرق دارد ، تغییر شکل می دهیم . مقدار قدیم  $x$  ، از کنتور معادل کنتور شکل ۱۰.۷ (آ) ، مساوی  $r+s$  است . مقدار جدید داده شده با کنتور شکل ۱۰.۷ (ب) عبارت است از  $x=r-s$  . لذا ، ( مقدار قدیم )  $= 2r -$  ( مقدار جدید ) . ولی  $r=K$  . بنابراین ، ( مقدار قدیم )  $= 2K -$  ( مقدار جدید ) .

پس برحسب تابع  $y = \text{sn } x$  ثابت کرده ایم که

$$\text{sn } x = \text{sn } (2K - x) \quad (145.7)$$



(ب)



(آ)

شکل ۱۰.۷ (آ) یک کنتور که در آن  $x=r+s$  داخل مستطیل شکل ۸.۷ است ( توجه کنید که  $r=K$  ) . (ب) یک کنتور که با کنتور (آ) فقط در چرخش حول نقطه  $y=1$  فرق دارد . لذا ، داریم  $x=r-s$  .

به همین نحو، با کنتور شکل ۱۱.۷ می توان نشان داد که  $x = \text{sn}(x + 2iK')$  و کنتور شکل ۱۲.۷ ما را به رابطه تناوبی که با آن شروع کردیم می رساند. یعنی،

$$\text{sn } x = \text{sn}(x + 4K) \quad (146.7)$$

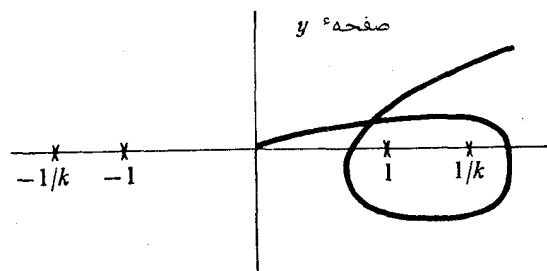
نتیجه این است که  $y = \text{sn } x$  یک تابع دو دوره تناوبی با دوره های تناوب  $4K$  و  $2iK'$  است. لذا، می توان به مستطیل یا گوشه های  $x = \pm 2K - iK'$ ،  $\pm 2K + iK'$  اکتفا کرد. تابع در  $x = \pm iK'$  و در گوشه ها دارای قطب بوده، و در  $x = 0$  و  $x = \pm 2K$  دارای صفر می باشد. دیدیم که  $y = \text{sn } x$  از معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} \quad (147.7)$$

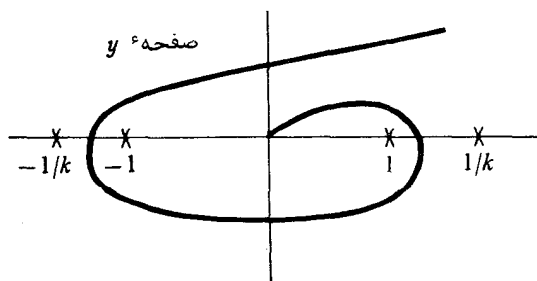
تابعیت می کند. دو تابع بیضوی دیگر را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\text{cn } x = \sqrt{1 - \text{sn}^2 x} \quad \text{cn } 0 = 1 \quad (148.7)$$

$$\text{dn } x = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 x} \quad \text{dn } 0 = 1 \quad (149.7)$$



شکل ۱۱.۷ کنتور برای اثبات  $\text{sn } x = \text{sn}(x + 2iK')$



شکل ۱۲.۷ کنتور برای اثبات  $\text{sn } x = \text{sn}(x + 4K)$

$$(150.7) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{sn} x = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$$

یک تابع دو دوره تناوبی تحلیلی (جز در قطبها) یک تابع بیضوی نام دارد. توابع  $\operatorname{sn} x$ ,  $\operatorname{cn} x$ ,  $\operatorname{dn} x$  متعلق به رده‌ای به نام توابع بیضوی ژاکوبی می‌باشند. بررسی کلی توابع تحلیلی دو دوره تناوبی طبعاً "به رده" دیگری از توابع بیضوی، به نام توابع بیضوی وایراشتراس<sup>۱</sup> منجر می‌شود. این توابع را در اینجا مطرح نخواهیم کرد.

### مراجع

در باب توابع خاص می‌توان مطالب مبسوطی در آبراموتیس و استگون (A1)؛ یانکه و دیگران (J3)؛ و مگنوس و دیگران (M1) یافت. دو مرجع اول علاوه بر فرمولها شامل جداول عددی و نمودارها می‌باشند. لیست کاملتری از خواص توابع خاص را می‌توان در کتاب سه جلدی اردلی و دیگران (E5) یافت.

از جمله کتبی که این توابع را از دید ریاضی مطرح کرده‌اند عبارتند از کاپسون (C8)؛ ویتاکر و واتسون (W5)؛ و کتاب کوچکی از اسندون<sup>۲</sup> (S7).

مورس و فش بک (M9)، فصل ۵، بحث روشن و زیبایی از کسرهای مسلسل، توابع ماتیو، و مطالب مربوطه داده‌اند. کتاب جلد ششمی مک‌لاخلن (M3) خیلی کاملتر است، ولی هنوز مرجعی خواندنی برای این توابع می‌باشد.

یک بحث مقدماتی از توابع بیضوی، در زمینه مکانیک کلاسیک، در سینج<sup>۳</sup> و گریفیت<sup>۴</sup> (S12)، بخش ۱۰.۱۳، است. دو مرجع دیگر با بحثهای مقدماتی از توابع بیضوی عبارتند از بومن<sup>۵</sup> (B7) و میلن - تامسون (M7)؛ دومی شامل جدولهایی نیز می‌باشد.

### مسائل

$$f(x) = \begin{cases} +1 & 0 < x < 1 \\ -1 & -1 < x < 0 \end{cases} \quad 107$$

$f(x)$  را به صورت یک سری نامتناهی از چند جمله‌ایهای لژاندر  $P_n(x)$  بسط دهید.

۲۰۷. با استفاده از تابع مولد یا به هر طریق دیگر، مجموع

1- Weierstrass

2- Sneddon

3- Synge

4- Griffith

5- Bowman

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} P_n(x)$$

را در صورتی حساب کنید که  $P_n(x)$  ها چند جمله‌ایهای لژاندر باشند.

۳.۰۷. انتگرال

$$I = \int d\Omega f(\cos \alpha) g(\cos \beta)$$

را در نظر بگیرید، که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  زوایای بین جهت متغیر  $\Omega$  و دو جهت ثابت در فضا باشند. انتگرال را می‌توان به دو راه به شکل زیر نوشت

$$I = \int dx dy f(x) g(y) K(x, y)$$

(۱) با تغییر متغیر

(۲) با بسط  $f$  و  $g$  به سری از چند جمله‌ایهای لژاندر.

مجموع

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(x) P_l(y) P_l(z)$$

را با مقایسه دو عبارت حساب کنید.

۴.۰۷.  $P'_n(1)$  را

(آ) مستقیماً "از فرمول رودریگوز (۴.۰۷)؛

(ب) از تابع مولد (۱۰.۰۷)

حساب کنید.

۵.۰۷. نمایش (۳۳.۰۷) را برای هماهنگ‌گروی  $Y_{lm}(\Omega)$  تحقیق کنید.

۶.۰۷. با اعمال فرمول کشی نشان دهید که از (۲۴.۰۷) داریم

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(t) dt}{z-t} \quad (n \text{ صحیح است})$$

۷.۰۷. فرض کنید سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  دارای شعاع همگرایی  $R$  باشد. با استفاده از

نمایش انتگرالی لاپلاس برای  $P_n(z)$ ، ناحیه‌ای از صفحه مختلط بیابید که در آن سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z)$$

همگرا باشد. (ناحیه بیضی است.) (اگر  $R < 1$  چه رخ می‌دهد؟)

۸.۰۷. چند جمله‌ایهای هرمیتی  $H_n(x)$  را می‌توان با تابع مولد

$$e^{2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{h^n}{n!}$$



تعریف کرد .

(آ) رابطه بازگشتی بین  $H_n$  ،  $H_{n-1}$  ، و  $H_{n+1}$  را بیابید .

(ب) انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) dx$$

را حساب کنید .

۹۰۷ . توابع  $f_n(x)$  تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید :

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \quad (\text{آ})$$

$$(n+1)f_{n+1} = xf_n - f_{n+2} \quad (\text{ب})$$

$$f'_n = f_{n-1} \quad (\text{پ})$$

تابع مولد  $G(x, t)$  را طوری بیابید که

$$G(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x) t^n$$

۱۰۰۷ . فرض کنید  $f(x)$  و  $g(x)$  دوجواب معادله بسل ( با  $m$  یکسان ) باشند . نشان دهید رونسکی آنها به شکل زیر است :

$$fg' - gf' = \frac{\text{ثابت}}{x}$$

۱۱۰۷ . رونسکی  $J_m(x)$  و  $J_{-m}(x)$  (  $m$  دلخواه ) را بیابید .

۱۲۰۷ . رونسکی  $J_m(x)$  و  $Y_m(x)$  (  $m$  دلخواه ) را بیابید .

۱۳۰۷ . رونسکی  $P_l(x)$  و  $Q_l(x)$  (  $l$  عددی صحیح ) را بیابید .

۱۴۰۷ . با استفاده از روش نقطه زینی ، شکل مجانبی  $H_n^1(z)$  را از نمایش انتگرالی داده شده در متن ، شکل ۲۰۷ ، به دست آورید .

۱۵۰۷ . نشان دهید که تعریف ( ۵۰۷ ) برای  $J_m(x)$  ایجاب می کند که به ازای هر  $m$  صحیح ،

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

۱۶۰۷ . مستقیماً " تحقیق کنید که

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x$$

9

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x$$

۱۷۰۷ . تابع  $f(x)$  بر بازه  $0 < x < a$  را می توان به سری زیر بسط داد :

$$f(x) = \sum_n c_n J_m(k_n x)$$

که در آن  $k_n$  طوری اختیار شده است که  $J_m(k_n a) = 0$  ، و  $m$  دلخواه است . با توجه به حد  $a \rightarrow \infty$  ، برای تبدیل هنکل

$$f(x) = \int_0^\infty g(y) J_m(xy) y dy$$

$$g(y) = \int_0^\infty f(x) J_m(xy) x dx$$

فرمولهایی به دست آورید .

۱۸.۷ . نشان دهید اگر  $n$  عددی صحیح باشد ،

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_n(x)}{\partial n} - (-)^n \frac{\partial J_{-n}(x)}{\partial n} \right]$$

۱۹.۷ . در متن کنتورهای  $H_n^{(1)}(z)$  و  $H_n^{(2)}(z)$  که به ازای  $|\arg z| < \pi/2$  مناسباند رسم شده‌اند . کنتورهایی مناسب

$$-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

رسم کنید .

۲۰.۷ . چه معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم همگن خطی دارای جوابهای

$$x^\alpha J_{\pm m}(\beta x^\gamma)$$

است؟ جواب عمومی

$$y'' + x^2 y = 0$$

را به دست آورید .

۲۱.۷ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$z^2(z^2 - 1)y'' + z(z^2 - 1)y' + \frac{1}{16}y = 0$$

را در نظر بگیرید .

(آ) جواب عمومی شامل توابع فوق هندسی با شناسهٔ

$$\frac{2z}{z+1}$$

را ارائه دهید .

(ب) جواب عمومی شامل توابع فوق هندسی با شناسهٔ

$$\frac{z-1}{2z}$$

را ارائه دهید .

۲۲.۷ . توابع زیر را برحسب توابع مقدماتی بیان کنید :

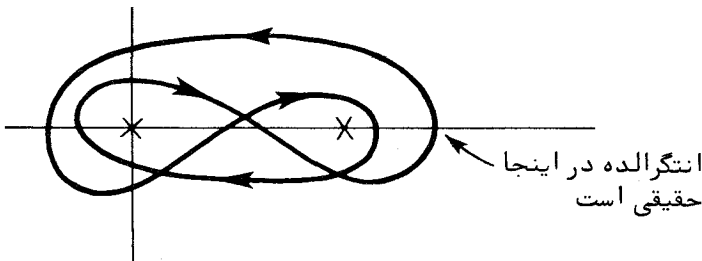
$${}_2F_1(1, \alpha; 2; z) \quad (\bar{A})$$

(-)  ${}_2F_1(1, 1; 2; z)$

۲۳.۷. دو جواب معادله فوق هندسی معمولی را بیابید که در مجاورت  $z = 1$  مفید باشند.  
 ۲۴.۷. کلیترین معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن خطی را که فقط دو انفراد منتظم در  $\xi$  و  $\eta$ ، برحسب  $\xi$  و  $\eta$  و نماهایی در  $\xi$  و  $\eta$ ، داشته باشد بنویسید. نماها چه شرایطی را باید داشته باشند؟  
 رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$\left(\frac{z-\xi}{z-\eta}\right)^\lambda P\left(\begin{matrix} \xi & \eta \\ \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{matrix} z\right) = P\left(\begin{matrix} \xi & \eta \\ \alpha_1 + \lambda & \beta_1 - \lambda \\ \alpha_2 + \lambda & \beta_2 - \lambda \end{matrix} z\right)$$

اگر نماهای سمت چپ از شرایط فوق تبعیت کنند، نشان دهید که نماهای جدید سمت راست نیز از این شرایط پیروی می کنند.  
 ۲۵.۷. انتگرال  $\oint dz z^a (z-1)^b$  را در امتداد کنتور زیر حساب کنید:



۲۶.۷. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' + \frac{2z-1}{z(z-1)} y' - \frac{2}{9} \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)} y = 0?$$

چیست؟

۲۷.۷. جواب عمومی

$$z^2(z^2-1)^2 y'' + z(z^2-1)(2z^2-1)y' - \left[\left(3\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)z^2 + \alpha^2\right]y = 0$$

را در مجاورت  $z = 1$  و برحسب توابع فوق هندسی  ${}_2F_1$  بیان کنید.

۲۸.۷. رونسکی  ${}_1F_1(a; c; z)$  و  $z^{1-c} {}_1F_1(1+a-c; 2-c; z)$  را بیابید.

۲۹.۷. انتگرال

$$\int_0^\infty dx e^{-sx} {}_1F_1(a; c; x)$$

را حساب کنید.

۳۵۰۷. چه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن خطی دارای جوابهای زیر است:

$$y(x) = \begin{cases} e^{\lambda x} {}_1F_1(a; c; x) \\ e^{\lambda x} x^{1-c} {}_1F_1(1+a-c; 2-c; x) \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل

$$y'' + \left(\frac{3}{2x} - \frac{1}{3}\right)y' + \left(\frac{E}{x} - \frac{2}{9}\right)y = 0 \quad (0 < x < \infty)$$

به ازای چه مقادیری از پارامتر  $E$  دارای جوابهایی است که وقتی  $x \rightarrow 0$  و  $x \rightarrow \infty$  متناهی اند؟

۳۱۰۷. کسر مسلسل بنویسید که به ازای توابع  $se_{2n+1}(x)$ ،  $\alpha$  و  $\beta$  را به هم ربط دهد. جمله اول سری توانی  $\alpha(\beta)$  مربوط به تابع  $se_1(x)$  را بیابید.

۳۲۰۷. جرم  $m$  توسط فنری با ثابت فنر  $k(t) = k_0 \sin \omega t$  به مبداء بسته شده است. جرم مقید است روی خط مستقیمی مار بر مبداء حرکت کند. فرکانس  $\omega_0$  چنان وجود دارد که به ازای هر  $\omega > \omega_0$  حرکت پایدار است.  $\omega_0 \sqrt{m/k_0}$  را تا سه رقم با معنی بیابید.

۳۳۰۷. معادله دیفرانسیل

$$y'' + f(x)y = 0$$

را در نظر بگیرید، که در آن

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \pi \\ C & \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad (C \text{ حقیقی و مثبت است})$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

قضیه فلوکه تضمین می‌کند که به ازای هر مقدار از ثابت  $C$ ، می‌توان  $\mu$  را چنان یافت که یک جواب به شکل زیر وجود داشته باشد:

$$y(x) = e^{\mu x} \phi(x)$$

که در آن  $\phi(x) = \phi(x + 2\pi)$  را به صورت تابعی از  $C$  بیابید، و معادله (ساده) متعالی را پیدا کنید که در صورت وجود جواب تناوبی برای معادله دیفرانسیل باید توسط  $C$  برقرار باشد.

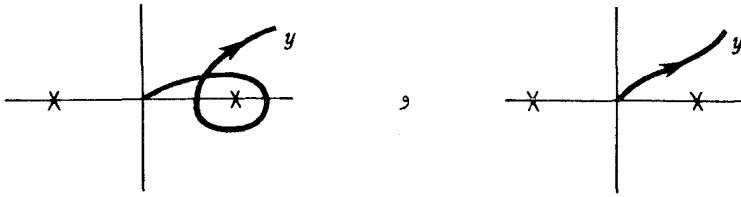
۳۴۰۷. نشان دهید که قطبهای  $\text{sn } z$  ساده‌اند، و مانده‌های آنها را پیدا کنید.

۳۵۰۷. تابع  $y = \sin x$  را می‌توان به صورت معکوس

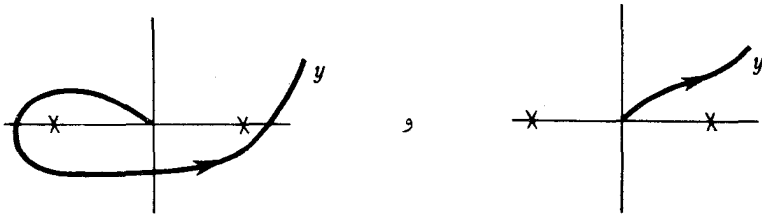
$$x = \sin^{-1} y = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

تعریف کرد .

(آ) از مقایسه دو کنتور زیر چه خواصی از  $\sin x$  به دست می‌آیند؟



(ب) مسئله فوق را برای کنتورهای زیر حل کنید:



۳۶.۷. با مراجعه به مسئله ۲۵.۷، جواب معادله دیفرانسیل

$$y'' + xy = 0$$

را که وقتی  $x \rightarrow -\infty$  به صفر نزدیک می‌شود بیابید. از مقایسه شکل‌های مجانبی این

جواب به‌ازای  $x \rightarrow +\infty$  و  $x \rightarrow -\infty$ ، فرمول همبندی WKB (۱۱۳.۱) را مجدداً به

دست آورید .

۳۷.۷. (آ) انتگرال

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int e^t t^{-(n+1)} dt$$

را در نظر بگیرید.  $n$  لزوماً عددی صحیح نیست؛ صفحه  $t$  در امتداد محور حقیقی

منفی بریده شده است و  $\ln t$  بر محور  $t$  مثبت حقیقی تعریف شده است. مسیر

انتگرالگیری از  $t = -\infty$  زیربریدگی شروع شده، حول مبدأ چرخیده، و مثل شکل ۲.۷

به  $t = -\infty$  بالای بریدگی باز می‌گردد. نشان دهید که  $I_n = 1/\Gamma(n+1)$ .

(ب) نشان دهید که انتگرال (۶۹.۷) در امتداد مسیر قسمت (آ) مساوی تابع بسط

$J_n(z)$  است که با سری توانی (۵۰.۷) تعریف شده است.

## معادلات دیفرانسیل جزئی

بعد از توصیف کوتاهی از چند معادله دیفرانسیل جزئی خطی و رده بندی آنها، روشهای به دست آوردن جوابهایی را مورد بحث قرار می دهیم که در شرایط مرزی و اولیه داده شده ای صدق می کنند. در بخش ۳.۸ روش مقدماتی جداسازی متغیرها و کاربردش در مسائل مقدار مرزی کلاسیکی توصیف می شود. تبدیلات انتگرال در بخش ۴.۸ و تعمیم تکنیک تبدیل، یعنی روش وینر<sup>۱</sup> - هویف<sup>۲</sup>، در بخش ۵.۸ معرفی خواهد شد. مسائل ویژه مقداری و توابع گرین که، با مطالب فوق ارتباط نزدیکی دارند، در فصل ۹ مطرح خواهند شد.

## ۱.۸ چند مثال

۱. معادله تار مرتعش قابل انعطاف یا معادله موج یک بعدی:

$$(1.8) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

که در آن  $c$  تندی امواج است. برای تار قابل انعطاف،  $c^2 = T/\rho$  که در آن  $T$  کشش و  $\rho$  چگالی خطی است.

۲. معادله لاپلاس:

$$(2.8) \quad \nabla^2 \psi = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0$$

۳. معادله موج سه بعدی:

$$(۳.۸) \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

۴. معادله پخش:

$$(۴.۸) \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

اگر  $\psi$  دما باشد،

$$\kappa = \frac{K}{C\rho} = \frac{\text{هدایت گرمایی}}{(\text{چگالی}) \times (\text{گرمای ویژه})}$$

۵. معادله شرودینگر:

$$(۵.۸) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

یا، اگر  $\psi \propto e^{-iEt/\hbar}$ ،

$$(۶.۸) \quad \nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi = 0$$

اینها معادلاتی هستند که بیش از همه با آنها سرگرم خواهیم بود. توجه کنید که همه

اینها معادلات خطی مرتبه دوم اند.

معادلات فوق همه همگن اند بدین معنی که اگر  $\psi$  یک جواب باشد، هر مضربی از  $\psi$

نیز چنین است. بسیاری از مسائل مستلزم معادله غیرهمگنی است که شامل جمله‌ای نظیر

به "نیروها" یا "چشمه‌ها"ی به کار رفته می‌باشد. مثلاً، اگر نیروی  $f(x, t)$  بر واحد

طول بر یک تار مرتعش اعمال شود، معادله غیرهمگن به صورت زیر خواهد بود.

$$(۷.۸) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{T} f(x, t)$$

یک مسئله ممکن است به خاطر شرایط مرزی و یا خود معادله غیرهمگن باشد. محک

برای یک مسئله مقدار مرزی همگن همان است که در بالا بیان شد؛ یعنی، هرگاه  $\psi$  جوابی

از معادله و شرایط مرزی باشد، آنگاه مضربی از  $\psi$  نیز چنین است. یک مثال از یک شرط

مرزی غیرهمگن تار مرتعش است که در آن سر  $x=0$  باید به شیوه‌ای معین حرکت کند:

$$\psi(0, t) = g(t)$$

جواب عمومی یک مسئله غیرهمگن از یک جواب خصوصی مسئله به علاوه جواب عمومی

مسئله همگن نظیر تشکیل می‌شود، که در آن معادله و شرایط مرزی همگن اند. این ترکیب

جواب قبلا" در معادلات دیفرانسیل معمولی در فصل ۱ بحث شده است.

### ۲۰۸ بحث کلی

پیش از پرداختن به روشهای حل معادلاتی که هم‌اکنون داده شد به اختصار معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی کلی را مورد بحث قرار می‌دهیم. لیکن، شرط کرده و فقط دو متغیر مستقل در نظر می‌گیریم. این کار را برای ساده‌کردن مطالب و ترسیم تصاویر قابل درک انجام می‌دهیم. بسیاری از استدلالها را می‌توان فوراً " به معادلاتی با متغیرهای مستقل بیشتر تعمیم داد.

سپس تابعی چون  $\psi(x, y)$  داریم که باید در ناحیه‌ای از صفحه  $xy$  محاسبه شود. مسلماً " معادله دیفرانسیل جزئی باید با شرایطی مرزی همراه شود. فرض کنیم اینها مستلزم  $\psi$  و  $(\psi)$  یا بعضی از مشتقاتش بر منحنی باشند که ناحیه‌ای را دربرمی‌گیرد که سعی داریم معادله را در آن حل کنیم.

سه نوع شرایط مرزی متداولند.

۱. شرایط دیریکله<sup>۱</sup>:  $\psi$  در هر نقطه از مرز مشخص شده است.
۲. شرایط نویمان<sup>۲</sup>:  $(\nabla\psi)_n$ ، یعنی مولفه قائم‌گرایان  $\psi$ ، در هر نقطه از مرز مشخص شده است.
۳. شرایط گشی:  $\psi$  و  $(\nabla\psi)_n$  در هر نقطه از مرز مشخص شده است.

به خاطر تشابه با معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم معمولی، می‌توان انتظار داشت که شرایط گشی در امتداد یک خط طبیعی‌ترین مجموعه از شرایط مرزی باشند. با اینحال، مطالب به این اندازه ساده نیستند.

در یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم معمولی (یعنی، یک بعدی) نسبت به  $\psi(x)$  تعیین  $\psi$  و  $\psi'$  در نقطه عادی  $x_0$  همراه با خود معادله برای تعیین مشتقات مرتبه دوم و بالاتر در  $x_0$  کافی بوده؛ و لذا، وجود جوابی به شکل سری تیلور در مجاورت  $x_0$  را تضمین می‌کند.

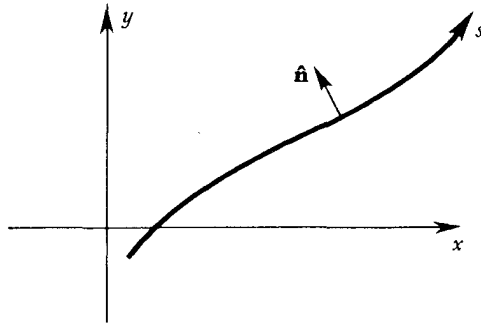
حال مسئله نظیر را برای معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم بررسی می‌کنیم؛ یعنی، آیا تعیین  $\psi$  و  $(\nabla\psi)_n$  در امتداد یک منحنی مرزی همراه با خود معادله دیفرانسیل برای تعیین مشتقات دوم و بالاتر  $\psi$  بر منحنی مرزی کافی است؛ و لذا، وجود جوابی به شکل سری تیلور در مجاورت منحنی را تضمین می‌کند؟



فرض کنیم منحنی مرزی ما با معادلات پارامتری زیر توصیف شده باشد:

$$x = x(s) \quad y = y(s)$$

که در آن  $s$  طول قوس در امتداد منحنی است (ر.ک. شکل ۱۰.۸). فرض کنیم  $\psi(s)$  و



شکل ۱۰.۸ یک منحنی مرزی و بردار یکه  $\hat{n}$  قائم به آن

مشتق قائمش  $N(s)$  در امتداد مرز داده شده باشد. مولفه‌های یکه قائم  $\hat{n}$  عبارتند از  $(dx/ds), -(dy/ds)$ ؛ در نتیجه،

$$(۸.۰۸) \quad N(s) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dx}{ds}$$

این معادله و

$$(۹.۰۸) \quad \frac{d}{ds} \psi(s) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

را می‌توان نسبت به مشتقات جزئی اول  $\psi$  حل کرد:

$$(۱۰.۰۸) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -N(s) \frac{dy}{ds} + \left[ \frac{d}{ds} \psi(s) \right] \frac{dx}{ds}$$

$$(۱۱.۰۸) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(s) \frac{dx}{ds} + \left[ \frac{d}{ds} \psi(s) \right] \frac{dy}{ds}$$

مشکل مربوط به مشتقات دوم است. تعداد این مشتقات سه تا هستند:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

با مشتگیری از مشتقات اول (معلوم) در امتداد مرز دو معادله زیر به دست می‌آیند:

$$(۱۲.۰۸) \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}$$

$$(13.8) \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}$$

معادله سوم از معادله دیفرانسیل اصلی به دست می آید، که آن را به شکل زیر خواهیم نوشت:

$$(14.8) \quad A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = f\left(x, y, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

که در آن  $f(x, y, \partial\psi/\partial x, \partial\psi/\partial y)$  تابع معلومی می باشد. این سه معادله (غیرهمگن) را می توان نسبت به مشتقات جزئی دوم  $\psi$  حل کرد مگر اینکه دترمینان ضرایب صفر شوند:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ A & 2B & C \end{vmatrix} = 0$$

یا

$$(15.8) \quad A \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 2B \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + C \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0$$

این معادله در هر نقطه از صفحه  $xy$  دو جهت معین می کند که جهات مشخصه در آن نقطه نام دارند. منحنیهایی در صفحه  $xy$  که مماسهایشان در هر نقطه در امتداد جهات مشخصه باشند مشخصه های معادله دیفرانسیل جزئی خوانده می شوند.

لذا، مشتقات دوم جز در حالتی که منحنی مرزی جایی بر یک مشخصه مماس است معین خواهند بود. با مشتقگیری بیشتر، مجموعه مشابهی از معادلات همزمان برای مشتقات سوم (و بالاتر) به دست می آید، و شرط برای یک جواب مستلزم دترمینانی است که دقیقاً همان دترمینان فوق می باشد. لذا، شرایط مرزی کشی در صورتی جواب را مشخص می کنند که منحنی مرزی در هیچ نقطه بر یک مشخصه مماس نباشد.

با مراجعه به معادله (15.8) برای مشخصه ها، اگر مشخصه ها بخواهند منحنیهایی حقیقی باشند، باید داشته باشیم  $B^2 > AC$ . معادلات دیفرانسیل جزئی تابع این شرط معادلات هذلولوی نام دارند. اگر  $B^2 = AC$ ، گوئیم معادله سهموی است؛ اگر  $B^2 < AC$  معادله را بیضوی می نامیم. از مثالهای بخش 10.8، شماره های 1 و 3 هذلولوی، شماره 2 بیضوی، و شماره های 4 و 5 سهموی اند. (ولی مثال 5 کمی غیر معمول است؛ همه ضرایب آن حقیقی نیستند.)

حال به انتخاب شرایط مرزی مناسب برای هر یک از سه نوع معادله می پردازیم؛ با

معادله هذلولوی شروع می‌کنیم. در بالا دیدیم که، به بیان کلی، شرایط کشی در امتداد یک منحنی که مشخصه نباشد برای تعیین جواب در مجاورت منحنی کافی‌اند. با تصور مشخصه‌ها به عنوان منحنیهایی که در امتدادشان اطلاعات جزئی راجع به جواب انتشار می‌یابند، می‌توان تصور سودمندی از نقش مشخصه‌ها و شرایط مرزی به دست آورد. معنی این امر و نحوه کارکرد آن را می‌توان به کمک یک مثال مقدماتی به ساده‌ترین وجه درک کرد.

مثال. "ساده‌ترین" معادله هذلولوی را در نظر می‌گیریم که در آن  $A = 1, B = 0, C = -1/c^2$  ثابت =  $-1/c^2$ . این معادله موج یک بعدی است:

$$(16.8) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

که برای آن معادله مشخصه‌های (۱۵.۸) عبارت است از

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0$$

یا

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = c^2$$

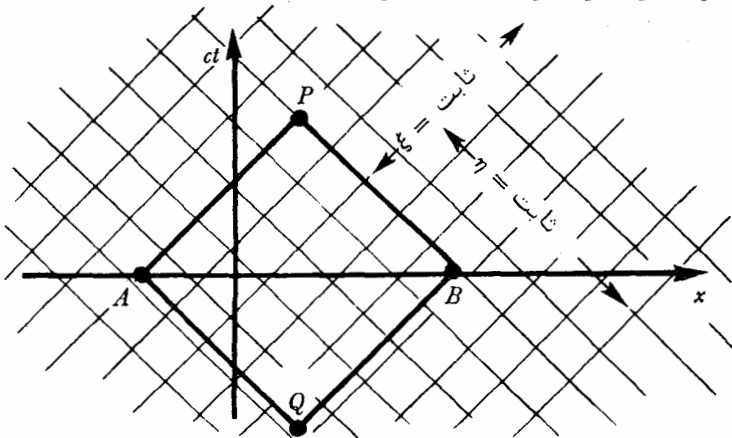
لذا، مشخصه‌ها خطوط مستقیم می‌باشند:

$$(x - ct) = \xi = \text{ثابت}$$

$$(x + ct) = \eta = \text{ثابت}$$

(۱۷.۸)

این دو خانواده از خطوط در شکل ۲۰.۸ نموده شده‌اند.



شکل ۲۰.۸ مشخصه‌ها برای معادله موج یک بعدی

مشخصه‌ها مجموعه‌ای "طبیعی" از مختصات برای یک معادله هذلولوی تشکیل می‌دهند. مثلاً، اگر معادله (۱۶۰۸) را به مختصات جدید  $\xi$  و  $\eta$  تعریف شده با (۱۷۰۸) تبدیل کنیم، معادله‌ای به شکل نرمال به دست می‌آوریم:

$$(18.8) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

جواب این معادله فوراً "به دست می‌آید":

$$(19.8) \quad \psi = f(\xi) + g(\eta)$$

که در آن  $f$  و  $g$  توابعی دلخواهند.

اما اگر  $\psi(x)$  و مشتق قائمش  $N(x) = c^{-1}(\partial\psi/\partial t)$  در امتداد پاره‌خط  $AB$  از شکل ۲۰۸ معلوم باشند، می‌توانیم توابع  $f(\xi)$  و  $g(\eta)$  را در امتداد این پاره‌خط پیدا کنیم، که دارای مقادیر  $f(x)$  و  $g(x)$  می‌باشند. به‌طور مشخص،

$$\psi(x, t=0) = f(x) + g(x)$$

و

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t=0) = -f'(x) + g'(x)$$

که از آنها داریم

$$f(x) = \frac{1}{2} \psi(x) - \frac{1}{2c} \int \frac{\partial \psi}{\partial t} dx$$

(۲۰۰۸)

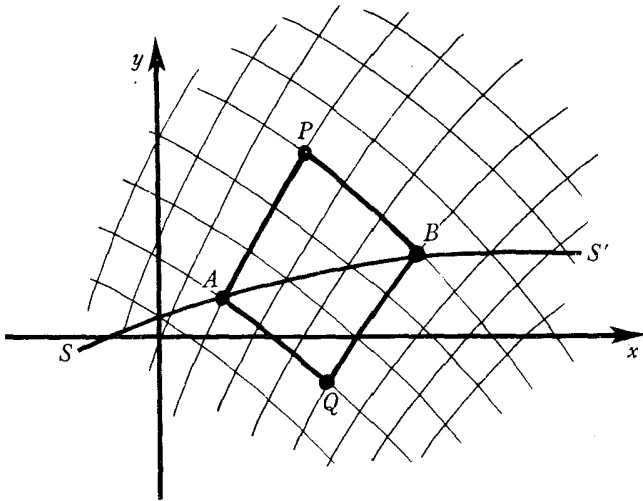
$$g(x) = \frac{1}{2} \psi(x) + \frac{1}{2c} \int \frac{\partial \psi}{\partial t} dx$$

ثابت دلخواه مربوط به انتگرال از اهمیتی برخوردار نیست، زیرا همه‌جا در مجموع  $\psi = f + g$  حذف می‌شود.

مقادیر  $f(x)$  در امتداد پاره‌خط  $AB$ ،  $f(\xi)$  را در امتداد همه مشخصه‌های ثابت  $\xi =$  که  $AB$  را قطع می‌کنند مشخص می‌کنند. همچنین، مقادیر  $g(x)$ ،  $g(\eta)$  را در امتداد همه منحنیهای ثابت  $\eta =$  که  $AB$  را قطع می‌کنند مشخص خواهند کرد. هر دوی  $f(\xi)$  و  $g(\eta)$ ، و لذا  $\psi(x, t)$ ، در ناحیه مشترکی که توسط هر دو نوع مشخصه پیموده شده‌اند، که مستطیل  $AQBP$  شکل ۲۰۸ است، معین می‌شوند.

نتایج به دست آمده برای مثال ساده فوق عموماً "برای معادلات هذلولوی برقرارند. فرض کنیم تور مشخصه‌ها مثل شکل ۳۰۸ باشد، که در آن  $SS'$  یک منحنی مرزی است. شرایط کشی در امتداد قوس  $AB$  از مرز جواب را در نواحی "مثلثی" شکل از هر طرف که توسط مشخصه‌های مار بر  $A$  و  $B$  محدود شده‌اند معین می‌کنند.

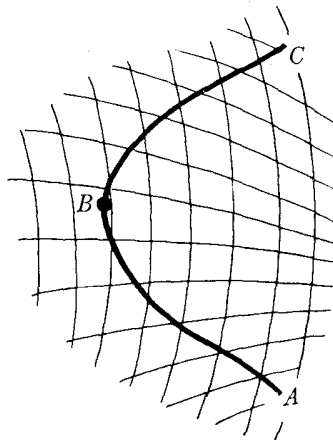
تصویر فوق به ما توان بحث در حالات پیچیده‌تر را می‌بخشد. مثلاً، در شکل ۴۰۸



شکل ۳.۸ مشخصه‌ها برای یک معادله هذلولوی، و منحنی مرزی  $SS'$  که بر یک مشخصه مماس نیست. شرایط کشی در امتداد قوس  $AB$  از  $SS'$  جواب را در ناحیه  $AQBP$  ثابت می‌کند.

مرز و تور مشخصه‌ها را می‌بینیم.

شرایط کشی از  $A$  به  $B$  رفتار را در امتداد تمام مشخصه‌های قائم که مرز  $ABC$  را قطع می‌کنند و در امتداد مشخصه‌های افقی که قوس  $AB$  را قطع می‌کنند معین می‌نمایند. آنچه بجا مانده تعیین رفتار در امتداد مشخصه‌های افقی است که بین  $B$  و  $C$  شروع می‌شوند. لذا، شرایط دیریکله یا نویمان در امتداد  $BC$  کافی‌اند؛ در اینجا شرایط کشی خیلی زیادند و جواب را بیش از حد تعیین می‌کنند.



شکل ۴.۸ تور مشخصه‌ها با منحنی مرزی  $ABC$  که بر یک مشخصه در نقطه  $B$  مماس است.

راجع به معادلات بیضوی چه می شود گفت؟ خواهیم دید که شرایط کشی بر یک مرز باز، که برای معادلات هذلولوی بسیار خوبند، عموماً "در اینجا مناسب نیستند. مثلاً"، فرض کنید خواهیم معادله لاپلاس را در ناحیه  $R$  حل کنیم، و پتانسیل  $\phi$  و مشتق قائمش  $E_n$  را بر بخش  $L$  از مرز بدانیم. نکات بخش ۰.۵ به ما می گویند که  $\phi(x, y)$  قسمت حقیقی تابعی تحلیلی مانند  $W(x + iy)$  است؛ به آسانی معلوم می شود که شرایط کشی  $W$  را با تقریب ثابت نامربوطی بر  $L$  به ما می دهد. حال با تداوم تحلیلی (ضمیمه، بخش ض ۲) می توان تابع  $W$  را در سراسر  $R$  تعیین کرد. مسئله این است که تضمینی برای وجود قطبها، نقاط شاخه‌ای، و غیره در داخل  $R$  وجود ندارد؛ البته، در صورت وقوع چنین اتفاقی، دیگر جوابی از  $\nabla^2 \phi = 0$  به دست نخواهد آمد.

واضح است که با تعیین  $\phi$  و مشتق قائمش  $E_n$  بر  $L$  مفاد زیادی مشخص شده‌اند؛ به‌ازای انتخابی از  $\phi$ ، فقط بعضی از  $E_n$  ها جوابی از  $\nabla^2 \phi = 0$  در  $R$  به ما می دهند، و  $E_n$  های دیگر مجاز نیستند. به‌طور کلی، تشخیص اینکه چه وقت یک شرط مرزی کشی مناسب است یا نه بسیار مشکل است، و مسئله در سه بعد (یا بیشتر) که دیگر توابع تحلیلی کمکی نمی‌کنند سختتر خواهد بود.

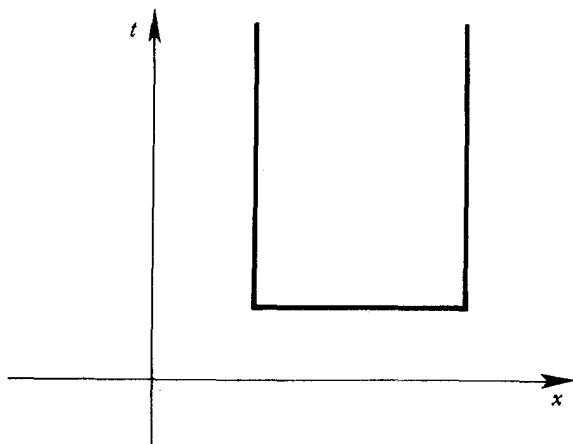
ایده‌های آشنا از الکترواستاتیک جوابی پیشنهاد می‌کنند. برای تعیین پتانسیل الکترواستاتیک در یک ناحیه، معمولاً "پتانسیل (شرط دیریکله) را بر تمام مرز ناحیه مورد بحث مشخص می‌کنیم؛ به‌جای این کار می‌توان میدان الکتریکی قائم (شرط نویمان) بر مرز، یا حتی ترکیبی از این دو، را معین کرد. نکته مهم این است که مسائل فیزیکی مربوط به معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی در یک ناحیه معمولاً "نیاز به شرایط دیریکله یا نویمان (ولی نه کشی) در امتداد تمام مرز ناحیه مورد بحث دارند.

ممکن است خواهیم بدانیم این نوع شرط برای معادلات هذلولوی مناسب است یا نه. جواب معمولاً "نفی است. ما به جزئیات امر وارد نمی‌شویم، ولی دلیل اصلی این است که جوابهای ناصفر یک معادله هذلولوی را می‌توان یافت که بر مرزهای بسته مناسبی صفر باشند (یا مشتقات قائمشان صفر باشند). وجود این "مدهای قائم" وقتی که سعی کنیم شرایط دیریکله یا نویمان را بر یک مرز بسته اعمال کنیم مشکلاتی ایجاد می‌کند (برای یک مثال، ر.ک. مسئله ۲۷.۸).

بالاخره، معادلات سهموی را در نظر می‌گیریم. اینها همیشه فرایندهای "پخش‌مانند" را توصیف می‌کنند و با یک برگشت‌ناپذیری مشخص می‌شوند. مثلاً، مسئله پخش یک بعدی را در نظر می‌گیریم؛ در واحدهای مناسب،

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

یک شرط مرزی معقول فیزیکی شرط دیریکله در امتداد خطی با  $t$  ثابت با یک شرط دیریکله در امتداد یک مرز مانند شکل ۵.۸ است. در هر حالت، جواب



شکل ۵.۸ مرزی مناسب برای یک مسئلهٔ پخش ساده

به ازای  $t$  در آینده معین می‌شود، ولی نمی‌توان انتظار داشت در گذشته نسبت به  $\psi$  حل شود. به‌طور دقیقتر، جواب در جهت برگشت ناپایدار است. با پیشرفت زمان، افرادها با فرایند پخش هموار می‌شوند؛ اگر به عقب برگردیم، شروع به تولید افراد کرده و قادر به ادامهٔ حل نخواهیم بود.

در جدول ۱.۸ انواع شرایط مرزی مناسب برای انواع مختلف معادلات خلاصه شده‌اند.

جدول ۱.۸ انواع شرایط مرزی مناسب برای سه رده از معادلات

معادله	شرط	مرز
هدلولوی	کشی	باز
بیضوی	دیریکله یا نویمان	بسته
سهموی	دیریکله یا نویمان	باز

### ۳.۸ جداسازی متغیرها

حال به حل صریح چند معادلهٔ دیفرانسیل جزئی می‌پردازیم. روشهایی که بیش از همه به کار می‌روند روشهایی هستند که با حذف یک یا چند جملهٔ مشتق جزئی معادله را به معادله‌ای

با متغیرهای کمتر تبدیل می‌کنند. این کار را می‌توان آنقدر تکرار کرد تا یک معادله دیفرانسیل معمولی از یک متغیر به دست آید. اولین روشی که اختیار می‌کنیم به روش جداسازی متغیرها معروف است. به جای آنکه در حالت کلی به آن بپردازیم، کافی است چند مثال بیاوریم.

با حل معادله موج در مختصات قطبی شروع می‌کنیم.

جوابی از

$$(21.8) \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

به شکل

$$(22.8) \quad \psi(\mathbf{x}, t) = X(\mathbf{x})T(t)$$

جستجو می‌کنیم. با گذاردن این جواب امتحانی در معادله دیفرانسیل جزئی (21.8) و تقسیم بر  $XT$ ، داریم

$$\frac{\nabla^2 X}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

طرف چپ فقط تابعی از  $\mathbf{x}$ ، و طرف راست فقط تابعی از  $t$  است. لذا، باید ثابت و (مثلاً) مساوی  $-k^2$  باشند. (یا  $k$ ، ثابت جداسازی نام دارد.) بنابراین، معادله ما به دو معادله تقسیم می‌شود، که معادله وابسته به زمان عبارت است از

$$(23.8) \quad \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$$

که در آن  $\omega = kc$ . جواب عبارت است از

$$(24.8) \quad T = e^{\pm i\omega t} \quad \text{یا} \quad T = \begin{cases} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{cases}$$

حال به معادله دوم که شامل تابع فضایی  $X(\mathbf{x})$  است می‌پردازیم. این همان معادله هلمهولتز<sup>۱</sup>

$$(25.8) \quad \nabla^2 X + k^2 X = 0$$

است، یا، در مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$ ،

$$(26.8) \quad \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] X + k^2 X = 0$$



فرض کنیم  $X = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$  . با گذاردن در (۲۶.۸) و تقسیم کردن بر  $R\Theta\Phi$  ، خواهیم داشت

$$\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 = 0$$

اگر در  $r^2 \sin^2 \theta$  ضرب کنیم ، جمله سوم فقط تابع  $\phi$  خواهد بود ، حال آنکه بقیه فقط تابع  $r$  و  $\theta$  اند . لذا ،

$$(۲۷.۸) \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \text{ثابت} = -m^2$$

یا

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0$$

با جوابهای

$$(۲۸.۸) \quad \Phi = e^{\pm im\phi} \quad \text{یا} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{pmatrix}$$

پس معادله  $r, \theta$  به صورت زیر درمی آید :

$$\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} + k^2 = 0$$

اگر این معادله را در  $r^2$  ضرب کنیم ، جملات اول و چهارم فقط تابع  $r$  اند ، حال آنکه جملات دوم و سوم فقط به  $\theta$  بستگی دارند . لذا ،

$$(۲۹.۸) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta = \text{ثابت} \times \Theta = -l(l+1)\Theta$$

و

$$(۳۰.۸) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0$$

اگر قرار دهیم  $\cos \theta = x$  ، معادله  $\theta$  ی (۲۹.۸) به صورت زیر درمی آید :

$$(۳۱.۸) \quad (1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0$$

این همان معادله لژاندر مربوطه (۲۷.۷) است . جوابهایش عبارتند از

$$(۳۲.۸) \quad \Theta = P_l^m(x), Q_l^m(x) \quad (\text{توابع لژاندر مربوطه})$$

معادله شعاعی (۳۰.۸) با تغییر متغیر وابسته  $R = u/\sqrt{r}$  به صورت زیر درمی آید:

$$(۳۳.۸) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left[ k^2 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right] u = 0$$

که همان معادله بسل (۴۸.۷) به ازای  $x = kr$  و  $m = l + \frac{1}{2}$  است. بنابراین،

$$(۳۴.۸) \quad R = \frac{J_{l+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \quad \frac{Y_{l+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}$$

معمولا "توابع بسل گروهی" به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(۳۵.۸) \quad j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) \quad n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+1/2}(x)$$

$$(۳۶.۸) \quad h_l^{(1,2)}(x) = j_l(x) \pm i n_l(x) \quad (\text{توابع هنکل گروهی})$$

می توان نشان داد که

$$(۳۷.۸) \quad j_l(x) = (-x)^l \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}$$

$$(۳۸.۸) \quad n_l(x) = (-x)^l \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left( -\frac{\cos x}{x} \right)$$

آبرامویتس و استگون (ض ۱)، در فصل ۱۰، روابط بازگشتی، رفتار جانبی، و غیره، توابع بسل گروهی را به اختصار مطرح می کنند.

اگر  $k = 0$ ، در نتیجه  $\partial \psi / \partial t = 0$  و ما واقعا "معادله لاپلاس را داریم، معادله شعاعی (۳۰.۸) به صورت زیر درمی آید:

$$(۳۹.۸) \quad R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0$$

که دارای جوابهای

$$(۴۰.۸) \quad R = \left\{ \begin{array}{l} r^l \\ r^{-(l+1)} \end{array} \right\}$$

است.

لذا، جوابهای زیر به دست آمده اند:

$$(۴۱.۸) \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \psi = \begin{Bmatrix} e^{+i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e^{+im\phi} \\ e^{-im\phi} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos \theta) \\ Q_l^m(\cos \theta) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} j_l(kr) \\ n_l(kr) \end{Bmatrix}$$

$$(۴۲.۸) \quad \nabla^2 \psi = 0 \Rightarrow \psi = \begin{Bmatrix} e^{+im\phi} \\ e^{-im\phi} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_l^m(\cos \theta) \\ Q_l^m(\cos \theta) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-(l+1)} \end{Bmatrix}$$

که در آنها هر گروه نمایش ترکیبی خطی از دو تابع داخل آن است. هر ترکیب خطی از این جوابها مجدداً جواب است، و این به خاطر خطی بودن معادله دیفرانسیل اصلی

می‌باشد.

مثال. برای نشان دادن سودمندی این جوابها، مسئلهء مقدار مرزی زیر را حل می‌کنیم. انتشار صوتی ناشی از یک آنتن "کروی نصف‌شده" را در نظر می‌گیریم؛ یعنی،  $\psi$  از معادلهء موج (۲۱۰۸) تبعیت کرده، و در  $r = a$  داریم

$$(۴۳۰۸) \quad \psi = \begin{cases} V_0 e^{-i\omega_0 t} & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -V_0 e^{-i\omega_0 t} & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

در آغاز فقط از جوابهایی با  $\omega = \omega_0$  استفاده می‌کنیم؛ در نتیجه،

$$k = k_0 = \frac{\omega_0}{c}$$

همچنین، به خاطر تقارن محوری شرایط مرزی، کافی است فقط جوابهای به ازای  $m = 0$  را در نظر بگیریم. چون هر چیز باید در  $\cos \theta = \pm 1$  خوشرفتار باشد، فقط  $P_l$  را به ازای  $l$  صحیح به کار می‌بریم. لذا، جواب امتحانی خود را به

$$\psi = e^{-i\omega_0 t} \sum_l P_l(\cos \theta) [A_l j_l(k_0 r) + B_l n_l(k_0 r)]$$

تحویل کرده‌ایم.

حال از این که در بی‌نهایت فقط امواج بیرون رونده وجود دارند استفاده می‌کنیم.

به ازای  $x$  بزرگ،

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \cos \left[ x - \frac{\pi}{2} (l+1) \right]$$

$$n_l(x) \sim \frac{1}{x} \sin \left[ x - \frac{\pi}{2} (l+1) \right]$$

$$h_l^{(1,2)}(x) \sim \frac{1}{x} e^{\pm i[x - (l+1)\pi/2]}$$

لذا، توابع شعاعی مورد نیاز ما عبارتند از  $h_l^{(1)}(k_0 r)$ ، زیرا در این صورت وقتی  $r \rightarrow \infty$ ،

$$\psi \sim \frac{1}{r} e^{i(k_0 r - \omega_0 t)}$$

که یک موج بیرون رونده است. پس جواب ما به

$$(۴۴۰۸) \quad \psi = e^{-i\omega_0 t} \sum_l A_l P_l(\cos \theta) h_l^{(1)}(k_0 r)$$

تحویل شده است.

حال شرط مرزی در  $r = a$  را اعمال می‌کنیم:

$$\sum_l A_l P_l(\cos \theta) h_l^{(1)}(k_0 a) = \begin{cases} V_0 & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -V_0 & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

برای تعیین  $A_l$  طرفین (۴۴.۸) را در  $P_m(\cos \theta) d \cos \theta$  ضرب کرده و از  $-1$  تا  $+1$  انتگرال می‌گیریم. چون

$$\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}$$

داریم (قس. مسئله ۱.۷)

$$\frac{2}{2l+1} A_l h_l^{(1)}(k_0 a) = V_0 \int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta - V_0 \int_{\pi/2}^\pi P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

واضح است که فقط  $l$  های فرد سهم‌اند. اگر  $l$  فرد باشد،

$$A_l = \frac{(2l+1)V_0}{h_l^{(1)}(k_0 a)} \int_0^1 P_l(x) dx$$

اما از روابط بازگشتی در ص ۱۷۸ داریم

$$\int P_l(x) dx = \frac{P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)}{2l+1}$$

بنابراین،

$$A_l = \frac{V_0}{h_l^{(1)}(k_0 a)} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)]_0^1$$

از روابط (۱۵.۷) و (۱۶.۷) خواهیم داشت

$$P_l(1) = 1 \quad P_l(0) = \begin{cases} 0 & (l \text{ فرد}) \\ (-1)^{l/2} \frac{l!}{2^l \left[ \left( \frac{l}{2} \right)! \right]^2} & (l \text{ زوج}) \end{cases}$$

نتیجه عبارت است از

$$A_l = (-1)^{(l-1)/2} \frac{V_0}{h_l^{(1)}(k_0 a)} \frac{(l+1)(2l+1)(l-1)!}{2^{l+1} \left[ \left( \frac{l+1}{2} \right)! \right]^2} \quad (l \text{ فرد})$$

لذا، جواب نهایی خواهد بود

$$\psi(r, \theta, t) = V_0 e^{-i\omega_0 t} \sum_{l \text{ odd}} (-1)^{(l-1)/2} \frac{(l+1)(2l+1)(l-1)!}{2^{l+1} \left[ \left( \frac{l+1}{2} \right)! \right]^2} \frac{h_l^{(1)}(k_0 r)}{h_l^{(1)}(k_0 a)} P_l(\cos \theta)$$

به عنوان تمرینی دیگر در جداسازی متغیرها، ارتعاش سر یک طبل مدور را در نظر می‌گیریم. معادلهٔ دیفرانسیل نوسانات کوچک عبارت است از

$$(۴۶.۰۸) \quad \nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حال جوابهای تناوبی را جستجو می‌کنیم که مدهای نرمال طبل را توصیف می‌کنند. این جوابها به شکل  $u(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$  بوده، و با گذاردن آنها در (۴۶.۰۸) معادله‌ای برای  $u(\mathbf{x})$  به دست می‌آید:

$$(۴۷.۰۸) \quad \nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad k = \frac{\omega}{c} = \text{عدد موج}$$

در مختصات قطبی دوبعدی

$$(۴۸.۰۸) \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

در نتیجه، (۴۷.۰۸) مساوی است با

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 u = 0$$

جوابی به شکل

$$u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

را امتحان می‌کنیم. با جداسازی متغیرها خواهیم داشت

$$(۴۹.۰۸) \quad \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + n^2 \Theta = 0 \Rightarrow \Theta = e^{\pm i n \theta}$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

معادلهٔ  $R$  معادلهٔ بسل است؛ در نتیجه،

$$(۵۰.۰۸) \quad R = \begin{Bmatrix} J_n(kr) \\ Y_n(kr) \end{Bmatrix}$$

پیش از حل مسئلهٔ طبل، این جداسازی را به مختصات استوانه‌ای سه‌بعدی تعمیم می‌دهیم. لاپلاسین عبارت است از

$$(۵۱.۰۸) \quad \nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

جوابهای معادلهٔ لاپلاس

$$\nabla^2 \psi = 0$$

عبارتنداز

$$(۵۲.۰۸) \quad \psi = \begin{pmatrix} J_m(\alpha\rho) \\ Y_m(\alpha\rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{az} \\ e^{-az} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{im\phi} \\ e^{-im\phi} \end{pmatrix}$$

ولی جوابهای معادله هلمهولتز

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

عبارتنداز

$$(۵۳.۰۸) \quad \psi = \begin{pmatrix} J_m(\sqrt{k^2 - \alpha^2}\rho) \\ Y_m(\sqrt{k^2 - \alpha^2}\rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{iaz} \\ e^{-iaz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{im\phi} \\ e^{-im\phi} \end{pmatrix}$$

به ازای  $k=0$  ، جوابهای (۵۳.۰۸) به جوابهای معادله لاپلاس تحویل می شود ؛ به ازای  $\alpha=0$  ، این جوابها به جوابهای طبل دوبعدی (۴۹.۰۸) و (۵۰.۰۸) تحویل می شوند. به ازای  $k=0$  و  $\alpha=0$  ، پتانسیلهای الکترواستاتیک آشنای  $\rho^{\pm m}e^{\pm im\phi}$  را مجدداً به دست می آوریم .

به مسئله طبل باز می گردیم . دامنه نوسان باید به شکل زیر باشد :

$$(۵۴.۰۸) \quad u = J_m(kr) \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix} e^{\pm i\omega t}$$

که در آن تابع  $Y_m(kr)$  به دلیل نامتناهی شدن در  $r \rightarrow 0$  حذف شده است . شرط یک مقداری جواب ما به این معنی است که  $m$  باید عددی صحیح باشد . اگر سر طبل در لبه خارجی ( $r=R$ ) مقید باشد ، باید داشته باشیم :

$$u = 0, \quad r = R \quad \text{در}$$


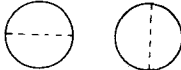
بنابراین ،

$$J_m(kR) = 0$$

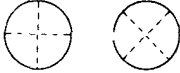
صفرهای توابع بسل در کتب مختلف ، مثلاً "آبرامویتس و استگون (ض ۱) ، به جدول درآمده اند . بعضی از صفرها ( تقریباً ) به قرار زیرند :

$$(۵۵.۰۸) \quad \begin{aligned} J_0(x) = 0: & \quad x \approx 2.40, 5.52, 8.65, \dots \\ J_1(x) = 0: & \quad x \approx 3.83, 7.02, 10.17, \dots \\ J_2(x) = 0: & \quad x \approx 5.14, 8.42, 11.62, \dots \end{aligned}$$


لذا ، پایین ترین مدهای سر طبل ما عبارتنداز

$k = \frac{2.40}{R}$	$\omega = 2.40 \frac{c}{R}$	$u \propto J_0\left(2.40 \frac{r}{R}\right)$	
$k = \frac{3.83}{R}$	$\omega = 3.83 \frac{c}{R}$	$u \propto J_1\left(3.83 \frac{r}{R}\right) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$	

$$k = \frac{5.14}{R} \quad \omega = 5.14 \frac{c}{R} \quad u \propto J_2\left(5.14 \frac{r}{R}\right) \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}$$



$$k = \frac{5.52}{R} \quad \omega = 5.52 \frac{c}{R} \quad u \propto J_0\left(5.52 \frac{r}{R}\right)$$



سمت راست هر مد تصویری دیده می‌شود که گره‌ها یا جاهایی را که  $u$  همواره صفر است نشان می‌دهد.

توجه کنید که دو مد مستقل متعلق به فرکانسهای دوم و سوم وجود دارند. این مثالی است از واگنی که در فصل ۶ ذکر شد و در چند فصل آتی نیز ظاهر خواهد شد. به عنوان آخرین مثال از سودمندی جداسازی متغیرها در حل مسائل مقدار مرزی، دمای داخل مکعبی به ضلع  $L$  را می‌یابیم که دمای اولیه‌اش  $T=0$  بوده و در لحظه  $t=0$  در حمام گرما به دمای  $T=T_0$  وارد شده است. باید معادله زیر را حل کنیم:

$$(۵۶.۸) \quad \nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}$$

فرض کنیم

$$T \propto e^{-\lambda t}$$

در این صورت،

$$\nabla^2 T + \frac{\lambda}{\kappa} T = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{\lambda}{\kappa} T$$

از جداسازی متغیرها نتیجه می‌شود

$$T \propto e^{i\alpha x} e^{i\beta y} e^{i\gamma z}$$

که در آن

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\lambda}{\kappa}$$

اما یک شرط مرزی (با انتخاب میداء در یکی از گوشه‌های مکعب) عبارت است از

$$T = T_0, \quad x = 0, L$$

$$T = T_0, \quad y = 0, L$$

$$T = T_0, \quad z = 0, L$$

توجه کنید که این یک شرط مرزی غیرهمگن است، اگرچه شرط بسیار ساده‌ای می‌باشد. یک جواب خصوصی از (۵۶.۸) عبارت است از  $T = T_0$ ، و تابع مکمل باید در شرایط مرزی همگن نظیر صدق کند: روی سطح  $T = 0$ . لذا، می‌نویسیم

$$(57.8) \quad T = T_0 + \sum_{lmn} C_{lmn} \sin \frac{l\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L} \sin \frac{n\pi z}{L} e^{-\lambda_{lmn} t}$$

که در آن

$$\lambda_{lmn} = \kappa \frac{\pi^2}{L^2} (l^2 + m^2 + n^2)$$

برای تعیین ثابتهای  $C_{lmn}$ ، شرط  $T = 0$  را در لحظه  $t = 0$  داریم. لذا،

$$\sum_{lmn} C_{lmn} \sin \frac{l\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L} \sin \frac{n\pi z}{L} = -T_0$$

طرفین را در  $\sin(l'\pi x/L) \sin(m'\pi y/L) \sin(n'\pi z/L)$  ضرب و روی تمام مکعب انتگرالگیری می‌کنیم. نتیجه خواهد بود

$$C_{lmn} = \begin{cases} -\frac{64T_0}{\pi^3 lmn} & \text{اگر } l, m, n \text{ همه فرد باشند،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

لذا، به ازای  $t > 0$ ،

$$(58.8) \quad T = T_0 \left\{ 1 - \frac{64}{\pi^3} \sum_{lmn \text{ odd}} \frac{1}{lmn} \sin \frac{l\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L} \sin \frac{n\pi z}{L} \times \exp \left[ -(l^2 + m^2 + n^2) \kappa \frac{\pi^2 t}{L^2} \right] \right\}$$

به ازای  $t \gg L^2/\kappa$ ، فقط جمله اول مجموع مهم است، و

$$(59.8) \quad T \approx T_0 \left[ 1 - \frac{64}{\pi^3} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \sin \frac{\pi z}{L} \exp \left( -\frac{3\kappa\pi^2}{L^2} t \right) \right]$$

جواب (۵۸.۸) ما به ازای  $t$  ی کوچک خیلی مفید نیست؛ در آخر بخش ۴.۸ روشی مطرح می‌کنیم که با آن جوابی به دست می‌آید که به ازای  $t$  ی کوچک مفید است.

در همه مثالهای فوق، جداسازی متغیرها با توجه به جوابی به شکل حاصل ضرب توابع که هر یک تابع متغیرهای کمتری از متغیرهای معادله اصلی است انجام داده شده است. ولی در بعضی مسائل می‌توان متغیرها را به کمک جوابی به شکل دیگر، مثلاً "مجموعی از



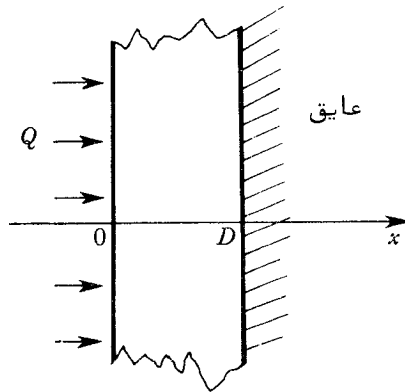
توابع با متغیرهای کمتر، از هم جدا نمود.

مثال . یک ورقه نامتناهی هادی گرما به ضخامت  $D$  را در نظر می‌گیریم که یک طرفش  $(x = D)$  عایق‌بندی شده باشد. اگر ابتدا، دمای  $T$  صفر بوده و سپس گرما (مثلاً، به وسیله تابش) به میزان ثابت  $Q$  کالری بر  $\text{sec}$  بر  $\text{cm}^2$  در سطح  $x = 0$  فراهم شود، دمای داخل ورقه را به صورت تابعی از موضع و زمان بیابید. این وضع در شکل ۶.۸ نموده شده است.

باید معادله پخش یک بعدی

$$(۶۰.۸) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \kappa = \frac{K}{C\rho}$$

را با شرایط مرزی غیرهمگن داده شده حل کنیم. ملاحظات فیزیکی رفتار کیفی دما نسبت به زمان را به ما بازگو می‌کنند. پس از یک دوره گذرای اولیه انتظار داریم دما در هر موضع به‌طور خطی با زمان افزایش یابد.



شکل ۶.۸ یک ورقه نامتناهی هادی گرما به ضخامت  $D$  با سطح عایق‌بندی شده  $x = D$  که گرما در سطح  $x = 0$  به میزان ثابت  $Q$  کالری بر  $\text{cm}^2$  بر  $\text{sec}$  فراهم می‌شود.

لذا، جوابی خصوصی به شکل

$$(۶۱.۸) \quad T_p = u(x) + at$$

را امتحان می‌کنیم که به جداسازی متغیرها منجر می‌شود، معادله  $x$  خواهد بود

$$(۶۲.۸) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\alpha}{\kappa}$$

با جواب

$$u(x) = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\kappa} x^2 + ax + b$$

برای جواب خصوصی می‌توان  $b$  را دلخواه گرفت، لیکن ثابتهای  $\alpha$  و  $a$  با شرایط مرزی زیر تعیین می‌شوند:

$$-Ku'(0) = Q \quad u'(D) = 0$$

یک جواب صادق در این شرایط عبارت است از

$$u(x) = \frac{1}{2} \frac{Q}{KD} (x - D)^2 \quad \alpha = \frac{Q\kappa}{KD} = \frac{Q}{C\rho D}$$

که جواب خصوصی زیر را به ما می‌دهد:

$$(۶۳۰۸) \quad T_p = \frac{1}{2} \frac{Q}{KD} (x - D)^2 + \frac{Q}{C\rho D} t$$

از دانشجو می‌خواهیم مسئله را با یافتن جواب مکمل  $T_c$  و استفاده از آن برای صدق کردن در شرط اولیه

$$t = 0 \quad \text{در} \quad T(x, 0) = T_p + T_c = 0$$

تمام کند.

کاربرد اصلی جداسازی متغیرها به روشی که هم‌اکنون وصف شد در مکانیک کلاسیک و در رابطه با معادله دیفرانسیل هامیلتون - ژاکوبی است. برای این کاربردها، شما را به کتاب گولدستاين (G4) ارجاع می‌دهیم.

مثالی جالب از یک مسئله مقدماتی که حلش نیاز به مقداری مهارت دارد حل معادله هلمهولتز دوبعدی داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. به طور مشخص، معادله هلمهولتز

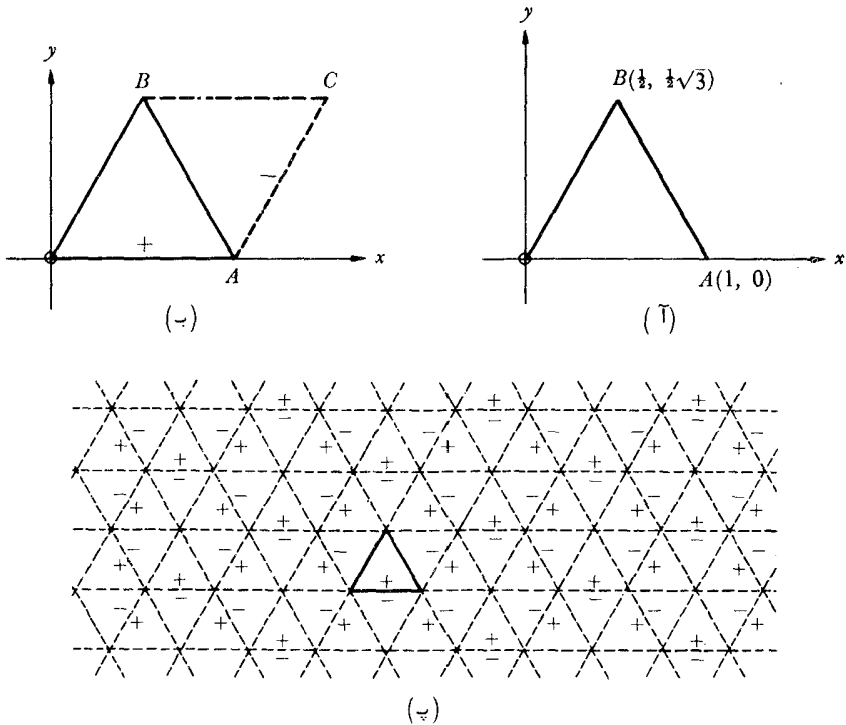
$$(۶۴۰۸) \quad \nabla^2 u + k^2 u = 0$$

را داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع 1 شکل ۱۷۰۸ آ در نظر می‌گیریم؛ شرط مرزی روی محیط مثلث  $u = 0$  گرفته می‌شود.

حال منعکس مثلث را نسبت به ضلع  $AB$  به دست می‌آوریم که مثلث  $ABC$  شکل ۱۷۰۸-ب است. در عین حال، "منعکس" تابع  $u(x)$  را به دست می‌آوریم؛ یعنی  $u(x)$  را در هر نقطه از  $ABC$  قرینه  $u(x)$  در "نقطه" تصویر در  $OAB$  تعریف می‌کنیم. این فرایند انعکاس را با علامت + کوچک در  $OAB$  و علامت - در نقطه تصویر آن در  $ABC$  نشان می‌دهیم.

دلیل این نگاهت خاص این است که می‌خواهیم تابع حاصل  $u(x)$  در سراسر ناحیه دو مثلث  $OACB$  در معادله هلمهولتز صدق کند. هرگاه شرط مرزی اصلی این بود که به

جای  $u$  مشتق قائمش بر محیط مثلث صفر می‌شد، باید  $u$  را طوری تعریف می‌کردیم که تحت انعکاس نسبت به  $AB$  به جای فرد بودن زوج شود. این فرایند انعکاس را می‌توان مرتب تکرار کرد؛ لذا، صفحه  $xy$  را با مثلثهای متساوی‌الاضلاع پر می‌کنیم (شکل ۷.۸ پ).



شکل ۷.۸ مراحل حل  $\nabla^2 u + k^2 u = 0$  داخل مثلث متساوی‌الاضلاع. مثلث اصلی. (ب) مثلث اصلی  $OAB$  و "تصویر"  $ABC$  آن در ضلع  $AB$ . (پ) صفحه  $xy$  با انعکاسهای مکرر مثلثها نسبت به اضلاعشان پوشیده شده است. علائم به‌علاوه و منها علائم نسبی  $u(x, y)$  در نقاط مختلف می‌باشند.

به همین اندازه مهم، جواب  $\nabla^2 u + k^2 u = 0$  در داخل مثلث اصلی  $OAB$  را به جوابی از  $\nabla^2 u + k^2 u = 0$  در سراسر صفحه توسعه داده‌ایم. به‌علاوه، این جواب درجه بالایی از تقارن و تناوب دارد، و این امر در شکل ۷.۸ پ با علائم به‌علاوه و منها نموده شده است. برای آنکه راجع به تناوب دقیق باشیم، می‌توانیم روابط زیر را از شکل ۷.۸ پ به دست

آوریم:

$$u(x, y) = u(x + 3, y)$$

$$u(x, y) = u(x, y + \sqrt{3})$$

لذا، می‌توان  $u(x, y)$  را به سری فوریه مضاعف زیر بسط داد:

$$(۶۵.۰۸) \quad u(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{lm} e^{\frac{2\pi i}{3}lx} e^{\frac{2\pi i}{\sqrt{3}}my}$$

که به کمک (۶۴.۰۸) ایجاب می‌کند که

$$(۶۶.۰۸) \quad k^2 = 4\pi^2 \left( \frac{l^2}{9} + \frac{m^2}{3} \right)$$

پس اگر بخواهیم جوابی از معادله هلمهولتز (۶۴.۰۸) با مقدار معینی از  $k$  داشته باشیم، در بسط (۶۵.۰۸) فقط ضرایب فوریه  $a_{lm}$  ای می‌توانند ظاهر شوند که برای آنها  $l$  و  $m$  با (۶۶.۰۸) به هم مربوطند.

چند رابطه تقارن دیگر نیز وجود دارند. مثلاً، از شکل ۷.۰۸ واضح است که  $u(x, y)$  تابع فردی از  $y$  است؛  $u(x, -y) = -u(x, y)$ . از رابطه (۶۵.۰۸) می‌بینیم این ایجاب می‌کند که

$$(۶۷.۰۸) \quad a_{lm} = -a_{l,-m}$$

همچنین، از شکل ۷.۰۸ می‌توان دید که  $u(x, y)$  با دوران به اندازه  $120^\circ$  حول مبدأ تغییر نمی‌کند؛ یعنی،

$$u\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right) = u(x, y)$$

این رابطه را به وسیله (۶۵.۰۸) برحسب ضرایب فوریه بیان می‌کنیم:

$$(۶۸.۰۸) \quad \begin{cases} l' = -\frac{1}{2}l - \frac{\sqrt{3}}{2}m \\ m' = \frac{\sqrt{3}}{2}l - \frac{1}{2}m \end{cases} \quad \text{که در آن } a_{lm} = a_{l'm'}$$

دوران دوم به اندازه  $120^\circ$  نتیجه می‌دهد که

$$(۶۹.۰۸) \quad \begin{cases} l'' = -\frac{1}{2}l + \frac{\sqrt{3}}{2}m \\ m'' = -\frac{\sqrt{3}}{2}l - \frac{1}{2}m \end{cases} \quad \text{که در آن } a_{lm} = a_{l''m''}$$

می‌توان تحقیق کرد که  $l'$  و  $m'$  در (۶۸.۰۸) و  $l''$  و  $m''$  در (۶۹.۰۸)، طبق (۶۶.۰۸)، همان  $k^2$  ای را می‌دهند که  $l$  و  $m$  می‌دهند.

حال فقط باقی مانده جفتهای  $(l, m)$  صادق در محکهای (۶۷.۰۸)، (۶۸.۰۸) و (۶۹.۰۸) و مقادیر  $k^2$  مربوطه را حساب کنیم. نتایج در جدول ۲.۰۸ داده شده‌اند. در این جدول شاخصهای بالای منفی در جفتهای  $(l, m)$  دلالت بر جفتهایی دارند که

جدول ۲۰۸ جوابهای مد نرمال معادله هلمهولتز که بر سطح یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱ صفرند

$(l, m)$			$k^2$
$(3, 1)$ $(3, -1)^-$	$(-3, 1)$ $(-3, -1)^-$	$(0, -2)$ $(0, 2)^-$	$16\pi^2/3$
$(5, 1)$ $(5, -1)^-$	$(-4, 2)$ $(-4, -2)^-$	$(-1, -3)$ $(-1, 3)^-$	$112\pi^2/9$
$(6, 2)$ $(6, -2)^-$	$(-6, 2)$ $(-6, -2)^-$	$(0, -4)$ $(0, 4)^-$	$48\pi^2/3$
	$\vdots$	$\vdots$	

ضرایب فوریه  $a_{lm}$  آنها باید، طبق (۶۷۰۸)، با دیگران مختلف‌العلامه باشند. توجه کنید که جوابهای دوم و سوم جدول ۲۰۸ واگن‌اند؛ هر یک با تغییر علامت هر  $l$  و  $m$  جواب دیگری با همان مقدار  $k^2$  را می‌دهد. لیکن، جواب اول تحت این تغییر علامت به (قرینه) خودش تبدیل می‌شود؛ و لذا، فقط یک جواب مستقل با مقدار مینیم  $16\pi^2/3$  برای  $k^2$  وجود خواهد داشت.

### ۴۰۸ روشهای تبدیل انتگرال

حال با حل چند مسئله طرز استفاده از تبدیلات انتگرال در حل مسائل مقدار مرزی را نشان می‌دهیم. نکته اصلی تبدیل معادله به معادله‌ای است که شامل مشتقات نسبت به تعداد کمتری متغیر باشد. همچنین، شرایط مرزی را می‌توان به‌طور خودکارتری وارد کار کرد.

مثال. توزیع دما در ناحیه نیمه نامتناهی  $x > 0$  را در حالتی در نظر می‌گیریم که ابتدا  $T = 0$  و صفحه  $x = 0$  در  $T = T_0$  نگهداشته شده باشد. معادله پخش به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

(۱)  $T(x, 0) = 0$

(۲)  $T(0, t) = T_0$

چون ما فقط به  $t > 0$  توجه داریم، می‌توانیم از تبدیل لاپلاس نسبت به  $t$  استفاده کنیم. (همچنین فقط به  $x > 0$  علاقه‌مندیم، لیکن تبدیل لاپلاس نسبت به  $x$  مفید نیست.

چرا؟ فرض کنیم

$$F(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} T(x, t) dt$$

تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$(۷۰.۸) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{sF}{\kappa}$$

زیرا به ازای  $T=0$  ،  $t=0$  .

شرط مرزی دوم به صورت زیر درمی آید:

$$(۷۱.۸) \quad F(0, s) = \frac{T_0}{s}$$

لذا، با حل (۷۰.۸) و استفاده از (۷۱.۸) ، به دست می آوریم

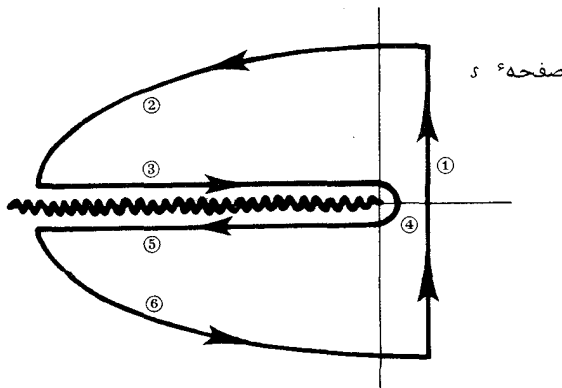
$$F(x, s) = \frac{T_0}{s} \exp(-\sqrt{s/\kappa} x)$$

زیرا جواب  $\exp(+\sqrt{s/\kappa} x)$  ~ رد می شود .

حال یا معکوس کردن این تبدیل جوابمان را به دست می آوریم .

$$(۷۲.۸) \quad T(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{T_0}{s} \exp(-\sqrt{s/\kappa} x) e^{st} ds$$

انتگرالده چند مقداری است . صفحه  $s$  را در امتداد محور حقیقی منفی بریده و کنتور شکل ۸.۸ را در نظر می گیریم . چون کل انتگرال بر کنتور بسته شکل ۸.۸ صفر است . سهم



شکل ۸.۸ صفحه  $s$  با برش شاخه‌ای و کنتور به کار رفته در محاسبه انتگرال انعکاسی لاپلاس (۷۲.۸)

① عبارت است از

$$\textcircled{1} = -\textcircled{2} - \textcircled{3} - \textcircled{4} - \textcircled{5} - \textcircled{6}$$

② و ⑥ هیچ مشارکتی ندارند.

$$\textcircled{4} = -2\pi i \frac{1}{2\pi i} T_0 = -T_0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{T_0}{s} \exp(-ix\sqrt{1/\kappa}\sqrt{-s}) e^{st} ds \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{T_0}{s} \exp(-ix\sqrt{1/\kappa}\sqrt{s}) e^{-st} ds \end{aligned}$$

به همین نحو،

$$\textcircled{5} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{T_0}{s} \exp(ix\sqrt{1/\kappa}\sqrt{s}) e^{-st} ds$$

لذا،

$$\textcircled{3} + \textcircled{5} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{T_0}{s} e^{-st} \sin x\sqrt{s/\kappa} ds$$

فرض کنیم  $s = z^2$  . در این صورت،

$$\textcircled{3} + \textcircled{5} = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} e^{-tz^2} \sin x\sqrt{1/\kappa} z$$

و

$$T(x, t) = T_0 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} e^{-tz^2} \sin x\sqrt{1/\kappa} z \right)$$

بر دانشجویست این انتگرال را محاسبه کرده به دست آورد<sup>۱</sup>

$$(۷۳.۸) \quad T(x, t) = T_0 \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2} \sqrt{\frac{1}{\kappa t}} \right) \right]$$

توجه کنید که جواب به جای سری نامتناهی که معمولاً "جدا سازی متغیرها به ما می دهد

۱. محاسبه انتگرال (۷۲.۸) سراسر است و آموزنده است، ولی روش ساده تری وجود دارد.

یعنی، اگر از طرفین (۷۲.۸) نسبت به  $x$  مشتق گرفته، و متغیر انتگرال گیری را به

$u = \sqrt{s}$  تغییر دهیم، می توان با تغییر شکل جزئی کنتور دریافت که

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{T_0}{\sqrt{\pi \kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t}$$

که از آن (۷۳.۸) مستقیماً نتیجه می شود.

به شکل بسته به دست آمده است. لیکن این امر از برد نامتناهی متغیر  $x$  ناشی می‌شود تا روش تبدیل. برای حل این مسئله به روش جداسازی متغیرها، یک ورقه به ضخامت متناهی  $D$  در نظر گرفته و در آخر فرض می‌کنیم  $D \rightarrow \infty$ . در این فرایند حدی، جواب به صورت سری باید به انتگرالی تبدیل شود که محاسبه‌اش نتیجه (۷۳.۸) را به ما بدهد. انجام این روش برای دانشجو آموزنده خواهد بود.

به عنوان مثال دوم از مورد استعمال روشهای تبدیل انتگرال در حل معادلات دیفرانسیل جزئی، یک مسئله پخش دیگر را در نظر می‌گیریم. توزیع دمای  $T(x, t)$  در یک جسم جامد نامتناهی را با این فرض که  $T(x, 0) = f(x)$  پیدا کنید. هیچ چیز به  $y$  یا  $z$  وابسته نیست؛ در نتیجه،

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}$$

برای تنوع، متغیر  $x$  را تبدیل فوریه می‌کنیم.

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} F(k, t) e^{ikx}$$

$$F(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) e^{-ikx} dx$$

لذا،

$$-k^2 F(k, t) = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial F(k, t)}{\partial t}$$

با جواب

$$F(k, t) = \phi(k) e^{-k^2 \kappa t}$$

از شرط اولیه داریم

$$F(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x, 0) e^{-ikx} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

لذا،

$$\phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

و

$$F(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx e^{-ikx} e^{-k^2 \kappa t}$$

با عکس کردن تبدیل فوریه، به دست می‌آوریم



$$\begin{aligned}
 T(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} e^{-k^2 \kappa t} \\
 (۷۴.۸) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')} e^{-k^2 \kappa t}
 \end{aligned}$$

انتگرال نسبت به  $k$  آسان است و از آن

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi\kappa t}} e^{-(x-x')^2/4\kappa t}$$

نتیجه می‌شود. لذا،

$$(۷۵.۸) \quad T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \sqrt{\frac{1}{4\pi\kappa t}} e^{-(x-x')^2/4\kappa t}$$

تابع

$$G(x, t; x') = \sqrt{\frac{1}{4\pi\kappa t}} e^{-(x-x')^2/4\kappa t}$$

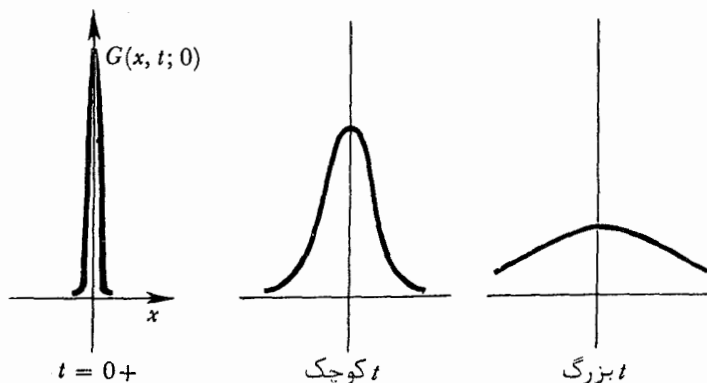
تابع گرین برای مسئله<sup>۹</sup> فوق است. در فصل بعد توابع گرین با تفصیل بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند.

فرض کنیم "منبع" گرمای اولیه<sup>۹</sup>  $f(x)$  (یعنی، توزیع دمای اولیه) از منبع مسطح  $\delta(x)$  متشکل باشد. در این صورت،

$$(۷۶.۸) \quad T(x, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t} = G(x, t; 0)$$

این یک وابستگی گاوسی به  $x$  است که، همانطور که شکل ۹.۸ نشان داده، پهنایش

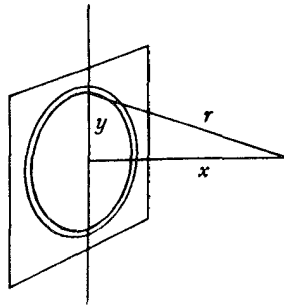
همانند  $\sqrt{t}$  افزایش می‌یابد.



شکل ۹.۸ تابع گرین  $G(x, t; 0)$  برای مسئله<sup>۹</sup> گرمادر یک بعد با توزیع دمای اولیه<sup>۹</sup> داده شده

توزیع حاصل از منبع نقطه‌ای  $\delta(\mathbf{x})$  در لحظه  $t = 0$  چیست؟ این توزیع را می‌توان از نتیجه قبل به صورت زیر به دست آورد. فرض کنیم  $f(x, t)$  پاسخ به منبع سطح  $\delta(x)$  در  $t = 0$  و  $g(r, t)$  پاسخ به منبع نقطه‌ای  $\delta(\mathbf{x})$  در  $t = 0$  باشد. در این صورت، از شکل ۱۰.۸ معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \int_0^{\infty} 2\pi y \, dy \, g(r, t) \\ &= \int_x^{\infty} 2\pi r \, dr \, g(r, t) \end{aligned}$$



شکل ۱۰.۸ روابط بین متغیرهای  $x$  و  $r$  که به ترتیب برای یک منبع مسطح و یک منبع نقطه‌ای مناسب‌اند.

بنابراین،

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\pi x g(x, t)$$

$$(۷۷.۸) \quad g(r, t) = \frac{-1}{2\pi r} \left[ \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right]_{x=r}$$

با استفاده از پاسخ  $f(x, t)$  به منبع مسطح (۷۶.۸) که قبلاً "به دست آمد، فوراً"

$$(۷۸.۸) \quad g(r, t) = \left( \frac{1}{4\pi kt} \right)^{3/2} e^{-r^2/4kt}$$

یعنی پاسخ به توزیع اولیه نقطه‌ای  $T(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x})$ ، را خواهیم داشت. این توزیع منبع نقطه‌ای مثالی دیگر از یک تابع گرین است که بعداً "راجع به آن بیشتر صحبت می‌کنیم. لیکن سودمندی توابع گرین را در دو مسئله پخش نشان خواهیم داد.

به عنوان اولین مثال، پاسخ جسم جامد نیمه نامتناهی  $x > 0$  به یک توزیع دمای اولیه نقطه‌ای در  $x = a, y = z = 0$  را در صورتی در نظر می‌گیریم که ابتدا ( $t = 0$ ) تمام

جسم جامد در دمای  $T=0$  ( جز در نقطه فوق ) بوده و مرز  $x=0$  در  $T=0$  نگهداشته شود. جواب با اعمال یک تابع منبعی حول  $x=a, y=z=0$  :

$$(۷۹.۰۸) \quad \left(\frac{1}{4\pi kt}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(x-a)^2 + y^2 + z^2}{4kt}\right]$$

و یک تابع منبعی منفی حول  $x=-a, y=z=0$  :

$$(۸۰.۰۸) \quad -\left(\frac{1}{4\pi kt}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(x+a)^2 + y^2 + z^2}{4kt}\right]$$

به دست می‌آید. منبع " ساختگی " دوم یک تصویر نام دارد. این روش تصاویر باید از الکترواستاتیک که اغلب در آن به کار می‌روند آشنا باشد.

به عنوان دومین مثال، یک مکعب در نظر می‌گیریم که ابتدا در دمای صفر بوده و وجوه آن در دمای صفر نگهداشته شده‌اند و نیز  $T(\mathbf{x}, t=0) = \delta(\mathbf{x})$ ، مرکز مکعب است. با جداسازی متغیرها یا اعمال مجموعه‌ای نامتناهی از تصاویر، می‌توان در زمانهای بعد توزیع دما را پیدا کرد. جواب اول به ازای  $t$  های بزرگ و جواب دوم به ازای  $t$  های کوچک مفید است.

### ۵.۰۸ روش وینر - هویف

از نظر تاریخی، این روش برای حل نوع خاصی معادله انتگرال ابداع شد، لیکن در حل بعضی مسائل مقدار مرزی که حلشان با تکنیکهای مرسومتر بسیار مشکل است نیز به کار می‌رود.

همانطور که در اینجا به کار رفته، این روش تعمیمی از روش تبدیل انتگرال است که در آن باید تداوم تحلیلی تبدیلات فوریه متغیر تبدیل دور از محور حقیقی در نظر گرفته شود. لذا، تبدیل فوریه  $f(x)$  را در نظر می‌گیریم. به ازای  $k = \omega + iy$ ،

$$(۸۱.۰۸) \quad F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

در این صورت،

$$(۸۲.۰۸) \quad F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\gamma x}e^{-i\omega x} dx$$

عامل  $e^{\gamma x}$  ممکن است موجب واگرایی انتگرال به ازای  $x \rightarrow +\infty$  یا  $x \rightarrow -\infty$  شود مگر آنکه تابع  $f(x)$  مانع واگرایی گردد، که این ممکن است در برد محدودی از  $\gamma$  صورت گیرد. این برد  $\gamma = \text{Im } k$  تابع رفتار مجانبی  $f(x)$  به طرق زیر است:

(۸۳.۸)  $f(x)e^{\alpha x} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$  وقتی

به ازای  $\alpha > \beta$  وقتی  $f(x)e^{\beta x} \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty$

آنگاه  $F(k)$  تابعی تحلیلی از  $k$  در نوار  $\beta < \text{Im } k < \alpha$  می باشد.

۲. هرگاه به ازای هر  $x < 0, f(x) = 0$ ، آنگاه  $\beta$  می تواند یک عدد منفی دلخواه باشد.

در این حالت نه فقط  $F(k)$  به ازای  $-\infty < \text{Im } k < \alpha$  تحلیلی است، بلکه وقتی  $\text{Im } k \rightarrow -\infty$

به طور یکنواخت  $F(k) \rightarrow 0$ ، زیرا در اینجا  $F(k) = \int_0^{\infty} f(x)e^{\gamma x}e^{-i\omega x} dx$

برای آنکه ببینیم حکم دوم چقدر قویتر است، تابع  $e^{-x^2}$  را در نظر می گیریم.  $\beta$  ی

قسمت ۱ را می توان  $-\infty$  گرفت؛ و در واقع، تبدیل فوریه  $F(k) \sim e^{-k^2/4}$  در

تمام نیم صفحه پایینی تحلیلی است. ولی  $f(x)$  به ازای  $x < 0$  صفر نمی شود و، یقیناً،

وقتی  $\text{Im } k \rightarrow -\infty, F(k)$  به طور یکنواخت صفر نخواهد شد.

ضمیمه گذشتن از این مطلب خاطر نشان می کنیم که آنچه را که راجع به ارتباط رفتار

$f(x)$  در  $\pm\infty$  با تحلیلی بودن  $F(k)$  گفته ایم می توان در جهت عکس به کار برد؛ رفتار

$F(k)$  در  $\pm\infty$  (در واقع، در  $\text{Re } k \rightarrow \pm\infty$ ) ناحیه تحلیلی تابع  $f(x)$  داده شده با

انتگرال انعکاسی را معین می کند.

علاوه بر این خواص تبدیلات فوریه، باید تجزیه ساده یک تابع از متغیر مختلط به

مجموع دو تابع را مورد بحث قرار دهیم. این تجزیه صفت بارز جواب وینر-هویفاست،

خواه در یک مسئله مقدار مرزی به کار رود، خواه در معادله انتگرال و یا چیز دیگر.

فرض کنیم تابع  $F(k)$  در نوار

$$\beta < \text{Im } k < \alpha$$

تحلیلی بوده و در دو انتهای نوار ( $\text{Re } k \rightarrow \pm\infty$ ) به صفر برود. در این صورت، می توان

$F(k)$  را به صورت مجموع دو تابع نوشت:

(۸۴.۸)  $F(k) = F_+(k) + F_-(k)$

که در آن  $F_+(k)$  به ازای  $\text{Im } k > \beta$  تحلیلی بوده و وقتی  $\text{Im } k \rightarrow +\infty$  به صفر می رود،

ولی  $F_-(k)$  به ازای  $\text{Im } k < \alpha$  تحلیلی بوده و وقتی  $\text{Im } k \rightarrow -\infty$  به صفر می رود.

زیرا، بنابر قضیه کشی، به ازای  $k$  ی داخل نوار،

(۸۵.۸) 
$$F(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} \frac{F(k')}{k' - k} dk' - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \frac{F(k')}{k' - k} dk'$$

انتگرال اول به ازای  $\text{Im } k > \beta$  تحلیلی است (همچنین، به ازای  $\text{Im } k < \beta$  ولی این مورد

توجه ما نیست ) و می توان آن را با  $F_+(k)$  یکی کرد ، حال آنکه جمله دوم را می توان مشابه با  $F_-(k)$  یکی کرد . به آسانی معلوم می شود که تجزیه منحصر به فرد است . تجزیه گاهی با امتحان صورت می گیرد . مثلاً ، فرض کنیم

$$(۸۶۰۸) \quad F(k) = \frac{1}{(k+i)\sqrt{k-i}}$$

این تابع در  $k = -i$  دارای قطب است و در  $k = +i$  نقطه شاخه ای دارد ، ولی در نوار  $|\text{Im } k| < 1$  تحلیلی است . حال تابع ریشه دوم را با قبول

$$\sqrt{0-i} = e^{-i\pi/4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

تثبیت می کنیم . در این صورت ، می توان نوشت

$$(۸۷۰۸) \quad \begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k+i} \left( \frac{1}{\sqrt{k-i}} - \frac{1}{\sqrt{-i-i}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-i-i}} \frac{1}{k+i} \\ &= \underbrace{\frac{1}{k+i} \left( \frac{1}{\sqrt{k-i}} - \frac{1+i}{2} \right)}_{F_-(k)} + \underbrace{\frac{1+i}{2} \frac{1}{k+i}}_{F_+(k)} \end{aligned}$$

که در آن  $F_-(k)$  با حذف قطب در  $k = -i$  به دست آمده است . حال روش وینر - هویف را با حل یک مسئله توضیح می دهیم .  
معادله لاپلاس دوبعدی

$$(۸۸۰۸) \quad \nabla^2 \phi = 0$$

را در نیم صفحه بالایی ( $y > 0$ ) و با شرایط مرزی زیر حل می کنیم :

$$(۱) \quad \phi \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty \quad \text{وقتی}$$

$$(۲) \quad \phi = e^{-ax} \quad (a > 0), \quad y = 0, \quad x > 0 \quad \text{به ازای}$$

$$(۳) \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Ce^{bx} \quad (b > 0), \quad y = 0, \quad x < 0 \quad \text{به ازای}$$

فرض کنیم

$$(۸۹۰۸) \quad \phi(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = g(x)$$

۱. مسئله را با اصطلاحات ریاضی بیان می کنیم . برای کاربردی فیزیکی ، ر.ک. مسئله

روابط (۲) و (۳) به ما می‌گویند که

$$(۹۰.۸) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (x > 0) \\ ? & (x < 0) \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} ? & (x > 0) \\ Ce^{bx} & (x < 0) \end{cases}$$

با حل معادله (۸۸.۸) و شرط مرزی (۱) به وسیله تبدیل فوریه نسبت به  $x$ ،

می‌نویسیم

$$\phi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} F(k, y)$$

که در آن تابع تبدیل  $F(k, y)$  در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - k^2 F = 0$$

لذا،

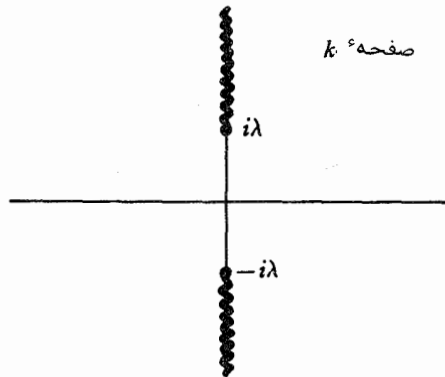
$$F(k, y) = \Phi(k) e^{-|k|y}$$

برای توسیع تابع  $F(k, y)$  به صفحه  $k$  مختلط، تابع  $|k|$  به ازای  $k$  حقیقی را با

$$(۹۱.۸) \quad \sqrt{k^2 + \lambda^2}$$

با بریدگیهایی که مثل شکل ۱۱.۸ تا  $\pm i\infty$  می‌روند عوض کرده، وریشه را وقتی  $k \rightarrow +\infty$

با  $k + \sqrt{k^2 + \lambda^2} \rightarrow +k$  تعریف می‌کنیم. وقتی کار تمام شد،  $\lambda$  را به صفر میل می‌دهیم.



شکل ۱۱.۸ صفحه  $k$  با بریدگیها

که تابع  $\sqrt{k^2 + \lambda^2}$  را مشخص می‌کند.

لذا،

$$(۹۲.۸) \quad \phi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \exp(-\sqrt{k^2 + \lambda^2} y) \Phi(k)$$

می‌خواهیم  $\Phi(k)$  ای بیابیم که در شرایط مرزی (۹۰.۸) صدق کند.

$$(93.8) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \Phi(k)$$

$$(94.8) \quad g(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \sqrt{k^2 + \lambda^2} \Phi(k)$$

با عکس کردن دو تبدیل فوریه، اخیر خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \\ &= \left( \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) dx e^{-ikx} f(x) \end{aligned}$$

$$= \Phi_+(k) + \int_0^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-ax}$$

$$(95.8) \quad = \Phi_+(k) + \frac{1}{i} \frac{1}{k - ia}$$

و به همین نحو،

$$(96.8) \quad \Phi(k) \sqrt{k^2 + \lambda^2} = \psi_-(k) + \frac{C}{i} \frac{1}{k + ib}$$

که در آن  $\Phi_+(k)$  تبدیل فوریه تابعی است که به ازای  $x > 0$  صفر می‌شود، ولی  $\psi_-(k)$  تبدیل فوریه تابعی است که به ازای  $x < 0$  صفر می‌گردد.

از متحد گرفتن این دو عبارت برای  $\Phi(k)$  نتیجه می‌شود که

$$\sqrt{k^2 + \lambda^2} \Phi_+(k) + \frac{1}{i} \frac{\sqrt{k^2 + \lambda^2}}{k - ia} = \psi_-(k) + \frac{C}{i} \frac{1}{k + ib}$$

این معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(97.8) \quad \underbrace{\frac{\sqrt{k + i\lambda} \Phi_+(k)}{F_+(k)}}_{F_+(k)} - \underbrace{\frac{\psi_-(k)}{\sqrt{k - i\lambda}}}_{F_-(k)} = \underbrace{\frac{C}{i} \frac{1}{k + ib} \frac{1}{\sqrt{k - i\lambda}} - \frac{1}{i} \frac{\sqrt{k + i\lambda}}{k - ia}}_{F(k)}$$

در این شکل، دو جمله سمت چپ در شرایط مقتضی برای نمادهای  $F_+(k)$  و  $F_-(k)$  صدق می‌کنند [قس. (۸۴.۸)]، در حالی که طرف راست تابع مشخصی می‌باشد، حال باید طرف راست  $F(k) = F_+(k) + F_-(k)$  را برای یافتن  $\Phi_+(k)$  و  $\psi_-(k)$  تجزیه کنیم، که از هر یک می‌توان  $\Phi(k)$  را به دست آورد، این روند نکته اصلی روش وینر-هویف است. در این

مثال خاص، هر جزء  $F(k)$  را می توان با امتحان تجزیه کرد.  
ابتدا داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+ib} \frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}} &= \frac{1}{k+ib} \left( \frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{-ib-i\lambda}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-ib-i\lambda}} \frac{1}{k+ib} \\ &= \frac{1}{k+ib} \left( \frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{b+\lambda}} \right) + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{b+\lambda}} \frac{1}{k+ib} \end{aligned}$$

به همین نحو،

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k+i\lambda}}{k-ia} &= \frac{1}{k-ia} (\sqrt{k+i\lambda} - \sqrt{ia+i\lambda}) + \sqrt{ia+i\lambda} \frac{1}{k-ia} \\ &= \frac{1}{k-ia} \left( \sqrt{k+i\lambda} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{a+\lambda} \right) + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{a+\lambda} \frac{1}{k-ia} \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} F_+(k) &= \sqrt{k+i\lambda} \Phi_+(k) \\ (98.8) \quad &= \frac{C}{i} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{b+\lambda}} \frac{1}{k+ib} - \frac{1}{i} \frac{1}{k-ia} \left( \sqrt{k+i\lambda} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{a+\lambda} \right) \end{aligned}$$

با گذاردن این نتیجه در عبارت (۹۵.۸) برای  $\Phi(k)$  بر حسب  $\Phi_+(k)$ ، خواهیم داشت

$$\Phi(k) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{k+i\lambda}} \left( \frac{\sqrt{a+\lambda}}{k-ia} + \frac{C}{\sqrt{b+\lambda}} \frac{1}{k+ib} \right)$$

حال می توان به حد  $\lambda \rightarrow 0$  رفت، توجه کنید که

$$\sqrt{k+i\lambda} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{k} & (k > 0) \\ i\sqrt{-k} & (k < 0) \end{cases}$$

لذا،

$$(99.8) \quad \Phi(k) = \begin{cases} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{k}} \left( \frac{\sqrt{a}}{k-ia} + \frac{C}{\sqrt{b}} \frac{1}{k+ib} \right) & (k > 0) \\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{-k}} \left( \frac{\sqrt{a}}{k-ia} + \frac{C}{\sqrt{b}} \frac{1}{k+ib} \right) & (k < 0) \end{cases}$$

در این صورت، جواب مسئله ما عبارت است از

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} e^{-|k|y} \Phi(k) \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{-1-i}{2\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{-k}} \left( \frac{\sqrt{a}}{k-ia} + \frac{C}{\sqrt{b}} \frac{1}{k+ib} \right) e^{ikx} e^{ky} dk \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \int_0^\infty \frac{1-i}{2\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{k}} \left( \frac{\sqrt{a}}{k-ia} + \frac{C}{\sqrt{b}} \frac{1}{k+ib} \right) e^{ikx} e^{-ky} dk \\
 (100.8) \quad & = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{1-i}{2\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{k}} \left( \frac{\sqrt{a}}{k-ia} + \frac{C}{\sqrt{b}} \frac{1}{k+ib} \right) e^{ikx} e^{-ky} dk
 \end{aligned}$$

باید انتگرال زیر را حساب کنیم :

$$\begin{aligned}
 I(u, a) &= \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \frac{e^{-ux}}{x+a} \\
 &= e^{ua} \int_a^\infty \frac{dy}{\sqrt{y-a}} \frac{e^{-uy}}{y} \\
 (101.8) \quad &= e^{ua} J(u, a)
 \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 J(u, a) &= \int_a^\infty \frac{dy}{\sqrt{y-a}} \frac{e^{-uy}}{y} \\
 \frac{\partial J}{\partial u} &= - \int_a^\infty \frac{dy}{\sqrt{y-a}} e^{-uy} \\
 &= -2 \int_0^\infty dz e^{-u(z^2+a)} \quad (y = z^2 + a) \\
 &= -\sqrt{\pi} \frac{e^{-ua}}{\sqrt{u}}
 \end{aligned}$$

$$J(u, a) = -\sqrt{\pi} \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-ta} + C(a)$$

وقتی  $u=0$  ،

$$\begin{aligned}
 J(u, a) &= \int_a^\infty \frac{dy}{y\sqrt{y-a}} \\
 &= 2 \int_0^\infty \frac{dz}{z^2+a} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}
 \end{aligned}$$

لذا ،  $C(a) = \pi/\sqrt{a}$  ، و

$$\begin{aligned}
 J(u, a) &= \frac{\pi}{\sqrt{a}} - \sqrt{\pi} \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{-ta} \quad \left( \text{let } t = \frac{z^2}{a} \right) \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{ua}} dz e^{-z^2} \\
 (102.8) \quad &= \frac{\pi}{\sqrt{a}} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{ua})
 \end{aligned}$$

بنابراین،

$$(103.8) \quad I(u, a) = \frac{\pi}{\sqrt{a}} e^{au}(1 - \operatorname{erf} \sqrt{ua})$$

اگر این نتیجه را برای محاسبه انتگرالهای عبارت (100.8) برای  $\phi(x, y)$  به کار گیریم، خواهیم داشت

$$(104.8) \quad \phi(x, y) = \operatorname{Re} \left[ e^{-az}(1 - \operatorname{erf} \sqrt{-az}) - i \frac{C}{b} e^{bz}(1 - \operatorname{erf} \sqrt{bz}) \right]$$

که در آن  $z = x + iy$ ، بر دانشجویست که علامت هر ریشه دوم را، یا از اصول اولیه یا با امتحان کردن شرایط مرزی، تعیین نماید. تابع خطا به ازای شناسه مختلط توسط فرید<sup>۱</sup> و کنت<sup>۲</sup> (F7) و فادیوا<sup>۳</sup> و ترنتو<sup>۴</sup> (F1) به جدول درآمده است.

### مراجع

مورس و فشیک (M9) معادلات دیفرانسیل جزئی زیادی در فیزیک مثال زده، آنها را رده‌بندی کرده، روشهای حل و نقش شرایط مرزی آنها را به تفصیل بیان نموده‌اند. مراجع عمومی مفید دیگر عبارتند از کورانت<sup>۵</sup> و هیلبرت (C10)، جلد دو؛ سومر فلد (S9)؛ گورتزل و ترالی (G3)، قسمت دو.

روش جداسازی متغیرها در مارگنو و مورفی (M2)، فصل ۷؛ و سوکولینکوف و ردهفر (S8)، فصل ۶ مطرح شده است.

گردایه‌ای از نتایج راجع به جداسازی معادله موج در دستگاههای مختصات مختلف را می‌توان در مگنوس و دیگران (M1)، بخش ۲۰۱۲، یافت.

چند نمونه از موارد استعمال تبدیلات انتگرال در حل معادلات دیفرانسیل جزئی را می‌توان در کتاب کوچک ترانتر<sup>۶</sup> (T8) مشاهده کرد.

در مورس و فشیک (M9)، بخش ۵۰۸، مثالهای خاصی از روشهای وینر-هویف آمده‌اند. یک مرجع کلیتر ولی خواندنی مونوگراف نوبل<sup>۷</sup> (N3) می‌باشد.

### مسائل

۱۰۸. پایین‌ترین فرکانس نوسان امواج صوتی را در یک کره توخالی به شعاع  $R$  بیابید.

1- Fried

2- Conte

3- Faddeyeva

4- Terent'ev

5- Courant

6- Tranter

7- Noble

شرط مرزی در  $r = R$  عبارت است از  $\partial\psi/\partial r = 0$  و  $\psi$  از معادله دیفرانسیل

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

تبعیت می‌کند.

۲۰۸. فرض کنید چگالی نوترون  $n$  داخل  $U_{235}$  از معادله دیفرانسیل زیر تبعیت کند:

$$\nabla^2 n + \lambda n = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial n}{\partial t} \quad (n=0 \text{ سطح})$$

(آ) شعاع بحرانی  $R_0$  را طوری بیابید که چگالی نوترون داخل کره  $U_{235}$  به شعاع  $R_0$  یا بزرگتر ناپایدار بوده و به‌طور نمایی با زمان افزایش یابد.

(ب) فرض کنید دو نیمکره را که هر یک به زحمت پایدارند، پیش هم بیاوریم تا یک کره تشکیل دهند. این کره ناپایدار است و

$$n \sim e^{t/\tau}$$

" ثابت زمانی  $\tau$  انفجار حاصل را بیابید.

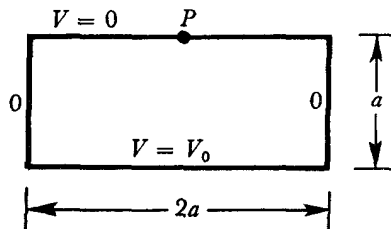
۳۰۸. کره‌ای به شعاع  $R$  در دمای  $T=0$  قرار دارد. در لحظه  $t=0$  آن را در حمام مایع به دمای  $T_0$  فرو برده‌ایم. توزیع دمای بعدی  $T(r, t)$  را در داخل کره بیابید. [فرض

کنید (گرمای ویژه  $\times$  چگالی) هدایت گرمایی  $\kappa$ ].

۴۰۸. سه تا کوچکترین ویژه مقدار معادله شرودینگر را برای ذره‌ای که در یک جعبه استوانه‌ای به شعاع  $a$  و ارتفاع  $h$  محبوس شده است بیابید.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi = E\psi \quad (\psi=0 \text{ روی جدارها}) \quad a \approx h$$

۵۰۸. یک هادی توخالی طویل دارای مقطع عرضی مستطیلی به اضلاع  $a$  و  $2a$  است. ضلع به طول  $2a$  تا پتانسیل  $V_0$  باردار، و سه ضلع دیگر به زمین وصل شده‌اند ( $V=0$ ). (آ) با استفاده از یک تبدیل همدیس،  $\sigma$ ، یعنی چگالی بار در نقطه میانی  $P$  ضلعش، و نیز بار کل بر واحد طول این ضلع را بیابید.



(ب) همین مسئله را با اعمال تکنیکهای جداسازی متغیرها بر معادله لاپلاس حل نمایید.

۶۰۸. کمیت  $u$  در معادله موج

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

داخل یک لوله استوانه‌ای توخالی به شعاع  $a$  صدق می‌کند و روی جداره‌های لوله  $u = 0$  است. اگر در انتهای  $z = 0$ ،  $u = u_0 e^{-i\omega_0 t}$  باشد، امواج با توزیعها (مدها) ی فضایی مختلف به سمت پایین لوله فرستاده می‌شوند. سرعت فاز مد اصلی را به صورت تابعی از فرکانس  $\omega_0$  یافته و نتیجه را به ازای  $\omega_0$  کوچک تعبیر کنید.

۷۰۸. مجموعه‌ای تام از جوابهای معادله

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2(\nabla^2 \phi) = 0$$

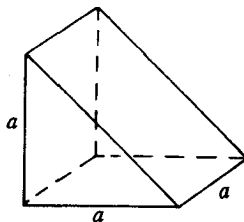
را در (آ) مختصات کروی ( $\theta$ ،  $\phi$ ) توابع متعامد)؛

(ب) مختصات قائم ( $x$ ،  $y$ ) توابع متعامد) به دست آورید.

۸۰۸. پایین‌ترین فرکانس سرطیلی به شکل مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به اضلاع  $a$ ،  $a$ ،  $a\sqrt{2}$  را بیابید.

راهنمایی. مدهای یک طبل مربع شکل را در نظر بگیرید.

۹۰۸. یک ماده به شکل نصف مکعب (که مطابق شکل زیر روی یک قطر بریده شده است) را تا دمای  $T_0$  گرم کرده و سپس در حمام روغنی فرو می‌بریم که سطحش را در دمای صفر نگه می‌دارد. دمای تقریبی  $T(x, t)$  را در لحظات بعد وقتی تنها یک جمله کافی است بیابید. اگر دو ضلع مجاور زاویه قائمه هم‌طول نباشند چه رخ می‌دهد؟



۱۰۰۸. یک نیم‌استوانه فلزی به طول  $a$  و شعاع  $a$  ابتدا در دمای  $T_0$  قرار دارد. جسم در لحظه  $t = 0$  وارد حمامی می‌شود که دمای سطح آن را در  $T = 0$  نگه می‌دارد. عبارت تقریبی  $T(\rho, \theta, z, t)$  را به ازای  $t$  های بزرگ بیابید.

۱۱۰۸. معادله امواج الاستیک در یک محیط همسانگرد عبارت است از

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{a} - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2}$$

که در آن  $\mathbf{a}$  جابجایی از موضع تعادل،  $\rho$  چگالی، و  $\lambda$  و  $\mu$  ثابتهای الاستیک محیط می‌باشند. پایین‌ترین فرکانس نوسان یک کره الاستیک همسانگرد به شعاع  $R$  را در صورتی بیابید که

$$a(\mathbf{x}) \text{ به شکل } f(r)\mathbf{e}_r \text{ بوده و}$$

(ب) شرط مرزی در  $r = R$  به شکل زیر باشد:

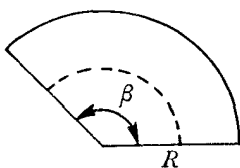
$$\lambda \nabla \cdot \mathbf{a} + 2\mu \frac{\partial a_r}{\partial r} = 0$$

برای به دست آوردن عددی معین در پایان کار، می‌توان قرار داد  $\lambda = \mu$ .

۱۲.۸. سر طبلی به شکل قطاعی از یک دایره به شعاع  $R$  و زاویه  $\beta$  در نظر بگیرید.

(آ) مد نموده شده کدام مد است (یعنی، اول، سوم، نود و هشتم، یا دیگر)؟

جواب را به ازای  $\beta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$  بیان کنید.



(ب) نمودار فرکانسهای شش مد اول را به صورت توابعی از  $\beta$  رسم نمایید.

۱۳.۸. مکعب  $|x| < L/2, |y| < L/2, |z| < L/2$  با دمای  $T=0$  در حمام گرمایی فرورفته و به

وضع تعادل می‌رسد. در لحظه  $t=0$  یک پالس انرژی درمیداء رها می‌شود. در نتیجه،

$T = \delta(\mathbf{x})$ . برای دما دو عبارت به عنوان تابعی از زمان در نقطه  $(L/4, 0, 0)$

بیابید که یکی برای زمانهای کوتاه و دیگری برای زمانهای طولانی مفید باشد. در هر حالت،

فقط باید دو نمای ماکزیمم را نگهدارید. در چه لحظه‌ای دما در آن نقطه ماکزیمم است.

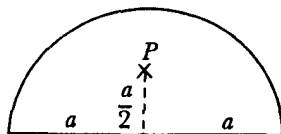
۱۴.۸. استوانه‌ای به طول  $l$  دارای سطح مقطع نیمدایره‌ای به شعاع  $a$  است (ر. ک. شکل

زیر). چگالی استوانه  $\rho$ ، گرمای ویژه آن  $C$ ، و هدایت گرمایی اش  $K$  است. استوانه

ابتدا در دمای  $T_0$  بوده، و با فروبردن در حمام روغنی سطحش در آن دما نگهداشته

می‌شود. در لحظه  $t=0$ ، یک پالس انرژی در نقطه وسط استوانه (در شکل زیر،

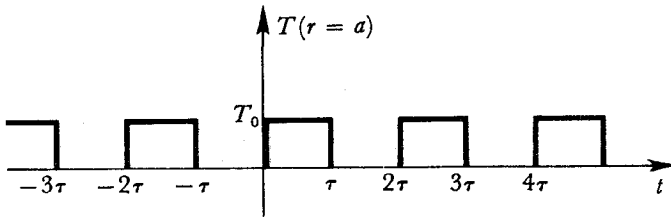
نقطه  $P$ ) رها می‌شود.



اگر انرژی کل رها شده  $E$  باشد، توزیع دما در استوانه را به ازای  $t$  های بزرگ بیابید.  
 ۱۵۰۸. دما در یک کره<sup>۶</sup> همگن به شعاع  $a$  از معادله<sup>۶</sup> دیفرانسیل زیر تبعیت می کند:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}$$

با ابزار خارجی کاری می کنیم که دمای سطح کره به صورت زیر عمل کند.



این تناوبات را تا  $t = \pm \infty$  ادامه می دهیم. دمای  $T(t)$  را در مرکز کره بیابید.  
 ۱۶۰۸. تابع پتانسیل  $u(x, t)$  در خارج یک استوانه<sup>۶</sup> بی نهایت طویل به شعاع  $a$  در معادله<sup>۶</sup> موج

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

صدق می کند. استوانه در امتداد طولش شکافته شده است، و روی سطح آن داریم

$$u = \begin{cases} u_0 e^{-i\omega_0 t} & (0 < \phi < \pi) \\ -u_0 e^{-i\omega_0 t} & (\pi < \phi < 2\pi) \end{cases}$$

$u$  را خارج استوانه در صورتی بیابید که فقط امواج بیرون رونده در فواصل بزرگ وجود داشته باشند.

۱۷۰۸. با استفاده از تبدیل کسینوسی نسبت به  $y$ ، توزیع دمای حالت پایدار را در یک جسم نیمه نامتناهی  $x > 0$  وقتی بیابید که دما بر سطح  $x = 0$  به ازای  $-a < y < a$  واحد بوده و در خارج این نوار صفر باشد.

۱۸۰۸. جسم نیمه نامتناهی  $x < 0$  دارای هدایت گرمایی  $K_1$ ، چگالی  $\rho_1$ ، و گرمای ویژه<sup>۶</sup>  $C_1$  است. دمای اولیه<sup>۶</sup> جسم  $T_0$  است. جسم در لحظه<sup>۶</sup>  $t = 0$  با جسم نیمه نامتناهی  $x > 0$  که دارای پارامترهای  $K_2$ ،  $\rho_2$ ،  $C_2$  بوده و دمای اولیه<sup>۶</sup> اش  $T = 0$  است تماس گرمایی پیدا می کند.  $T_2(x, t)$ ، یعنی دمای جسم دوم، را از معادله<sup>۶</sup> زیر بیابید:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{C\rho}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

۱۹۰۸. سیم مستقیمی به شعاع  $a$  در یک حجم نامتناهی از مایع فرو رفته است. دمای اولیه<sup>۶</sup>

سیم و مایع  $T=0$  است. در لحظه  $t=0$  سیم را ناگهان به دمای  $T_0$  رسانیده و در این دما نگهداشته‌ایم.  $F(r, s)$ ، یعنی تبدیل لاپلاس توزیع دمای حاصل  $T(r, t)$  در مایع، را بیابید.

۲۰۰۸. با استفاده از تبدیلات فوریه، حرکت یک تار کشیده با طول نامتناهی و جابه‌جایی اولیه  $\phi(x)$  و سرعت اولیه صفر را بیابید.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

۲۱۰۸. یک غشاء کشیده نامتناهی دارای چگالی سطحی  $\rho$  و کشش  $T$  است. در ابتدا جابه‌جایی آن  $f(\mathbf{r})$  و سرعت اولیه‌اش در همه جا صفر است. حرکت بعدی را پیدا کنید.

۲۲۰۸. دمای یک میله طویل با سطح مقطع مربع شکل  $(0 \leq x \leq s; 0 \leq y \leq s)$  در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}$$

در انتهای  $z=0$  دما عبارت است از  $T = T_0 \cos \omega t$  (مستقل از  $x$  و  $y$ ).  
 (آ) دما را در طول میله در صورتی بیابید که اطرافش عایق‌بندی شده باشد.  
 (ب) دما را در طول میله در صورتی بیابید که اطرافش در دمای صفر نگهداشته شده باشد.

در هر دو حالت، از گذراها صرف نظر کنید.

۲۳۰۸. در یک محیط جاذب، چگالی نوترون از معادله دیفرانسیل زیر تبعیت می‌کند:

$$\kappa \nabla^2 n - \frac{n}{T} = \frac{\partial n}{\partial t}$$

که در آن  $T$  یک ثابت است. در لحظه  $t=0$ ، انفجاری از نوترون‌ها روی صفحه  $yz$  یک محیط نامتناهی تولید می‌کند. در نتیجه،

$$n(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x}) \quad [ \delta(\mathbf{x}) \text{ نه} ]$$

چگالی نوترون و تعداد کل نوترون‌ها (بر واحد مساحت) را در لحظات بعد بیابید.

۲۴۰۸. فرض کنید چگالی نوترون  $n(\mathbf{x}, t)$  در قالبی از اورانیم 235 از معادله دیفرانسیل زیر تبعیت کند:

$$\nabla^2 n + n = \frac{\partial n}{\partial t}$$

و روی سطح  $n = 0$  . مینیمم حجم ماده را که می توان به قطعه ای استوانه ای که فوق بحرانی است تبدیل کرد پیدا نمایید .

۲۵.۸ . تابع  $F(k) = (k^2 + 1)^{-1/2}$  را به (مجموع) دوتابع  $F_{\pm}(k)$  تجزیه کنید ، که  $F_{+}(k)$  به ازای  $\text{Im } k > -1$  و  $F_{-}(k)$  به ازای  $\text{Im } k < 1$  تحلیلی باشد .

۲۶.۸ . ناحیه نیمه نامتناهی  $y > 0$  را در نظر بگیرید . به ازای  $x > 0$  ، سطح  $y = 0$  در دمای  $T_0 e^{-x/l}$  نگهداشته شده است . به ازای  $x < 0$  ، سطح  $y = 0$  عایق کاری شده است . در نتیجه ، هیچ گرمایی وارد یا خارج نمی شود . دمای تعادل در نقطه  $(-l, 0)$  را بیابید .

۲۷.۸ . حرکت یک تار کشیده را در نظر بگیرید که جابه جایی  $y(x, t)$  اش از معادله دیفرانسیل زیر تبعیت می کند :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

شرایط مرزی عبارتند از

$$(\bar{A}) \quad y(0, t) = y(L, t) = 0$$

$$(\bar{B}) \quad \text{شکل تار در } t = 0 \text{ داده شده است . } y(x, 0) = f(x)$$

$$(\bar{C}) \quad \text{شکل تار در لحظه دیگر } T \text{ داده شده است . } y(x, T) = g(x)$$

این مثالی است از کاربرد شرط مرزی دیریکله بر یک مرز بسته ( در صفحه  $x - t$  ) در یک معادله دیفرانسیل هذلولوی

آیا مسئله جواب دارد ؟ حالات زیر را جدا از هم مورد بحث قرار دهید :

$$(\bar{A}) \quad \frac{cT}{L} = \text{عدد صحیح}$$

$$(\bar{B}) \quad \frac{cT}{L} = \text{عدد گویا}$$

$$(\bar{C}) \quad \frac{cT}{L} = \text{عدد گنگ}$$

۲۸.۸ . دما در یک میله استوانه ای نامتناهی به شعاع  $a$  در شرایط زیر صدق می کند :

$$\nabla^2 T = \alpha^{-1} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \left( \alpha = \frac{K}{C\rho} \right) \quad (\bar{A})$$

$$(\bar{B}) \quad T = 0, \quad t = 0$$

$$(\bar{C}) \quad T = T_0 \cos \phi, \quad \rho = a$$

$T(\rho, \phi, t)$  را به ازای  $t > 0$  بیابید .



## ویژه توابع، ویژه مقادیر، و توابع گرین

در دو بخش اول این فصل مسائل ویژه مقداری و چند خاصیت کلی ویژه توابع عملگرهای دیفرانسیل هرمیتی مطرح می‌شوند. در بخش ۴.۹ جواب مسائل غیرهمگن، با تأکید بر استفاده از توابع گرین برای توصیف جوابهای خصوصی، مورد بحث قرار خواهند گرفت. روشهای مختلف یافتن توابع گرین ارائه، و در بخش ۵.۹ چند مثال از الکترودینامیک داده خواهند شد.

## ۱.۹ چند مثال ساده از مسائل ویژه مقداری

ما قبلاً" (در فصل ۶) ویژه مقادیر ماتریسها را مورد بحث قرار داده‌ایم. اینها مقادیری از پارامتره بودند که به ازای آنها جوابهای نابدیهی  $v$  از معادله

$$Mv = \lambda v \quad (1.9)$$

وجود دارند، که در آن  $M$  ماتریس مورد نظر است. حال این ایده را تعمیم داده و مسئله ویژه مقداری را برای هر عملگر خطی  $M$ ، چه ماتریس باشد، چه عملگر دیفرانسیل، یا عملگر انتگرال مطرح می‌کنیم. معادله اصلی همان معادله فوق است، که در آن  $v$  آن شیئی است که  $M$  می‌تواند بر آن اثر کند. اگر  $M$  ماتریس باشد،  $v$  یک بردار ستونی است؛ اگر  $M$  عملگر دیفرانسیل باشد،  $v$  یک تابع است؛ و از این قبیل. جوابهای  $v$  معادله فوق را ویژه توابع، ویژه بردارها، و غیره می‌نامند.

مسائل ویژه مقداری در ماتریسها یا عملگرهای خطی کلیتر وجه مشابه بسیار دارند. مهمترین مسائل از این نوع در فیزیک مستلزم عملگرهای دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم سه بعدی اند. مثالها و نمادهای این فصل اهمیت این مسائل را بازگو می‌کنند، ولی شاگرد باید

اکثر تکنیکهای ما را که به انواع دیگر مسائل ویژه مقادیری قابل تعمیم اند بدانند .  
به عنوان مثالی بسیار ساده ، مسئله<sup>۶</sup> یافتن ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس

$$(2.9) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم . اگر قرار دهیم

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

معادله<sup>۶</sup>

$$Mv = \lambda v$$

هم ارز دو معادله<sup>۶</sup> زیر خواهد شد :

$$(1 - \lambda)v_1 + v_2 = 0$$

$$v_1 + (1 - \lambda)v_2 = 0$$

پس ویژه مقادیر و ویژه بردارهای مربوطه عبارتند از

$$(3.9) \quad \lambda_1 = 0 \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 2 \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

به چند نکته می‌توان توجه کرد .

۱ . چون معادله<sup>۶</sup> اصلی همگن است ، ویژه جوابها فقط با تقریب یک عامل ثابت ضربی دلخواه معین می‌شوند .

۲ . اگر  $\lambda$  یک ویژه مقدار باشد ، مسئله<sup>۶</sup> غیرهمگن نظیر :

$$(4.9) \quad (M - \lambda)v = u \quad (u \neq 0)$$

معمولا " جواب ندارد . در واقع ، یک جواب فقط وقتی وجود دارد که  $u$  در شرایطی صدق کند ؛ مثلا " ، با ماتریس  $M$  (۲.۹) و  $\lambda = 0$  ،  $u_1$  باید مساوی  $u_2$  باشد تا (۴.۹) جواب داشته باشد . به عبارت دیگر ،  $u$  باید به ویژه بردار  $v^{(1)}$  متعلق به ویژه مقدار  $\lambda = 0$  " متعامد " باشد ؛ این نکته<sup>۶</sup> بدیهی را می‌توان تعمیم داد [ قس . معادله<sup>۶</sup> (۲۹.۹) ] .

۳ . " حاصل ضرب نقطه‌ای " دو ویژه بردار ما صفر است .

۴ . یک بردار 2 مولفه‌ای دلخواه را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از ویژه بردارها نوشت . این چهار خاصیت کاملا " عمومی بوده و در برخورد با سایر مسائل ویژه مقدار مرتب ظاهر می‌شوند .

مثال . معادله<sup>۶</sup> تازی را در نظر می‌گیریم که در  $x = 0$  و  $x = L$  محکم شده و با فرکانس زاویه‌ای

$\omega$  ( معادله هلمهولتز یک بعدی ) ارتعاش می کند :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = 0 \quad \left( k = \frac{\omega}{c} \right)$$

چون وقتی  $x=0$  ،  $u=0$  ، داریم  $u = a \sin kx$  ، و چون وقتی  $x=L$  ،  $u=0$  ، خواهیم داشت  $k = n\pi/L$  ، که در آن  $n = 1, 2, 3, \dots$  ، اینها ویژه مقادیر  $k$  هستند . از نظر فنی ، اگر  $d^2/dx^2$  را عملگر خطی بگیریم ، باید  $-k^2$  را ویژه مقدار این مسئله بنامیم . ولی این تمایز خیلی اهمیت ندارد ، و ما به  $-k^2$  ، یا  $k^2$  ، یا  $k$  ویژه مقدار اطلاق خواهیم کرد .

توجه کنید که یک معادله دیفرانسیل باید ناحیه و شرایط مرزی داشته باشد تا معرف یک مسئله ویژه مقداری باشد ، و مسئله باید همگن نیز باشد . از دانشجو می خواهیم مشابه چهار خاصیت ذکر شده بعد از اولین مثال را در این مثال دوم کشف نماید .  
بالاخره ، یک مثال سه بعدی در نظر می گیریم .

مثال

(۵۰۹)  $\nabla^2 u + k^2 u = 0$  ، داخل کره  $r = R$

با شرط مرزی  $u = 0$  بر  $r = R$  .

جوابها عبارتند از

$$u = j_l(kr)P_l^m(\cos \theta)e^{\pm im\phi} \quad m, l \text{ صحیح اند ، } l \geq m$$

ویژه مقادیر با شرط

$$j_l(kR) = 0$$

معین اند . لذا ، ویژه مقادیر خواهند بود

$$k \approx \frac{3.14}{R}, \frac{4.49}{R}, \dots$$

### ۲۰۹ بحث کلی

عملگر دیفرانسیل خطی  $L$  و مسئله ویژه مقداری

$$Lu(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x})$$

را در نظر می گیریم . فرض کنیم ناحیه  $\Omega$  مشخص شده و شرایط مرزی مناسبی اعمال شده باشد .

گوییم  $L$  هرمیتی است اگر

$$\int_{\Omega} u^*(\mathbf{x})Lv(\mathbf{x}) d^3x = \left[ \int_{\Omega} v^*(\mathbf{x})Lu(\mathbf{x}) d^3x \right]^*$$

که در آن ستاره نشانگر مزدوج مختلط بوده و  $u$  و  $v$  توابعی دلخواهند که از شرایط مرزی تبعیت می‌کنند. کمیت سمت چپ معادله فوق را اغلب "عناصر ماتریسی  $v$ ،  $u$  ی  $L$ " یا "عناصر ماتریسی  $L$  بین  $u$  و  $v$ " یا فقط  $L_{uv}$  می‌نامند. ارتباط بین ماتریسهای هرمیتی، به صورت تعریف شده در فصل ۶، باید واضح باشد.

فرض کنیم  $L$  هرمیتی باشد، ویژه مقدار خاص  $\lambda_i$  و ویژه تابع  $u_i$  متعلق به  $\lambda_i$  را در نظر می‌گیریم. در این صورت،

$$Lu_i(\mathbf{x}) = \lambda_i u_i(\mathbf{x})$$

معادله نظیر برای جفت  $u_j(\mathbf{x})$  و  $\lambda_j$  عبارت است از

$$Lu_j(\mathbf{x}) = \lambda_j u_j(\mathbf{x})$$

در این صورت،

$$\int_{\Omega} u_j^*(\mathbf{x})Lu_i(\mathbf{x}) d^3x = \lambda_i \int_{\Omega} u_j^*(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x}) d^3x$$

$$\int_{\Omega} u_i^*(\mathbf{x})Lu_j(\mathbf{x}) d^3x = \lambda_j \int_{\Omega} u_i^*(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) d^3x$$

چون  $L$  هرمیتی است، طرفهای چپ مزدوجهای مختلط یکدیگرند. بنابراین،

$$(۶.۹) \quad (\lambda_i - \lambda_j^*) \int_{\Omega} u_j^*(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x}) d^3x = 0$$

در اینجا باید روشن شده باشد که ما فقط مراحل برهان بخش ۵.۶ را جع به خواصی از ویژه

مقادیر و ویژه بردارهای یک ماتریس هرمیتی را تکرار می‌کنیم. همین نتایج از رابطه (۶.۹) و باتوجه به دو حالت  $i = z$  و  $\lambda_i \neq \lambda_j$  به دست می‌آیند. یعنی،

۱. ویژه مقادیر یک عملگر دیفرانسیل هرمیتی حقیقی‌اند.

۲. ویژه توابع یک عملگر دیفرانسیل هرمیتی متعلق به ویژه مقادیر مختلف متعامد می‌باشند.

منظور از متعامد بودن  $u(\mathbf{x})$  و  $v(\mathbf{x})$  این است که [قس. معادله (۹۴.۶)]

$$(۷.۹) \quad u \cdot v \equiv \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d^3x = 0$$

آشناترین مجموعه از توابع متعامد مجموعه توابع مثلثاتی است. اینها ویژه توابع

مربوط به مسئله ویژه مقدراری زیرند:

$$(۸.۹) \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0 \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$u(0) = u(2\pi) \quad u'(0) = u'(2\pi)$$

آیا عملگر  $d^2/dx^2$  بر بازه  $0 \leq x \leq 2\pi$  با شرایط مرزی تناوبی (۸.۹) هرمیتی است؟ این

امر را تحقیق می‌کنیم .

$$\int_0^{2\pi} u^* \frac{d^2}{dx^2} v dx = u^* \frac{dv}{dx} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{du^*}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

قسمت انتگرالگیری شده به خاطر تناوب  $u$  و  $v$  صفر می‌شود. اگر بار دیگر جزء به جزء انتگرال بگیریم ،

$$\int_0^{2\pi} u^* \frac{d^2}{dx^2} v dx = - \frac{du^*}{dx} v \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} v \frac{d^2 u^*}{dx^2} dx$$

باز قسمت انتگرالگیری شده صفر است ؛ در نتیجه ،

$$\int_0^{2\pi} u^* \frac{d^2}{dx^2} v dx = \left( \int_0^{2\pi} v^* \frac{d^2}{dx^2} u dx \right)^*$$

و وقتی شرایط مرزی تناوبی (۸.۹) داده شده باشند ،  $d^2/dx^2$  واقعا "هرمیتی خواهد بود . به عنوان توضیحی دیگر از یک مسئله<sup>۱</sup> ویژه مقداری مستلزم عملگر هرمیتی ، معادله<sup>۲</sup> دیفرانسیل استورم<sup>۱</sup> - لیوویل<sup>۲</sup> را در نظر می‌گیریم :

$$(9.9) \quad \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] - q(x)u(x) + \lambda \rho(x)u(x) = 0$$

که در آن  $p(x)$  ،  $q(x)$  ، و  $\rho(x)$  توابعی حقیقی بوده ، و به علاوه  $\rho(x)$  بر بازه مورد نظر نامنفی فرض می‌شود . تابع  $u(x)$  در دو سر بازه صفر گرفته می‌شود<sup>۳</sup> . بایستی دو نکته را در بگیریم .

۱ . آیا عملگر  $L = p(d^2/dx^2) + p'(d/dx) - q$  هرمیتی است ؟ اثبات مثل حالت ساده‌تر  $d^2/dx^2$  است ؛ این کار به دانشجو محول می‌شود .

۲ . اثر  $\rho(x)$  که 1 نباشد چیست ؟ مستقیما " می‌توان تمام استدلالهای قبل را با تابع چگالی  $\rho(x)$  آمده در جمله شامل ویژه مقدار تکرار کرد . در اینجا تعامد یعنی

$$(10.9) \quad u_i \cdot u_j \equiv \int_a^b u_i^*(x) u_j(x) \rho(x) dx = 0 \quad , \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

دو یا چند ویژه تابع اغلب به یک ویژه مقدار تعلق دارند . این حالت را واگنی نامیده و ویژه مقدار مربوطه را واگن می‌خوانیم ( قس . بحث نظیر برای ماتریسها در ص ۱۵۹ . )

### 1- Sturm

### 2- Liouville

۳ . می‌توان شرایط مرزی دیگری در نظر گرفت ؛ مثلا " ،  $u(x)$  می‌تواند در یک سر و مشتقش در سر دیگر صفر باشد . از دانشجو می‌خواهیم کلیترین شرط مرزی را بسازد که برایش استدلالهای پیش برقرار بمانند .

توجه کنید که یک ترکیب خطی دلخواه از ویژه توابع متعلق به یک مجموعه واگن مجدداً یک ویژه تابع با همان ویژه مقدار است. با استفاده از روند گرام - اشمیت (ر.ک. ص. ۱۶۰) می توان همواره مجموعه متعامدی از ویژه توابع ساخت. لذا، می توان طوری ترتیب داد که ویژه توابع یک عملگر هرمیتی مجموعه ای متعامد یکه تشکیل دهند که متعامد بوده:

$$u_i \cdot u_j = 0 \quad (i \neq j)$$

و نرمالی شده باشند:

$$u_i \cdot u_i = 1$$

این دو شرط را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(11.9) \quad u_i \cdot u_j = \left[ \int d^3x u_i^*(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \right] = \delta_{ij}$$

خاصیت ۴ مذکور در ابتدای این فصل، همراه با مثالی از سریهای فوریه، به ما می گوید که می توان هر تابع صادق در شرایطی مناسب را به یک سری از ویژه توابع بسط داد. یعنی، ویژه توابع یک عملگر هرمیتی تحت شرایطی بسیار کلی مجموعه ای تام تشکیل می دهند. این چیزی جز تعمیم قضیه اثبات شده در فصل ۶، ص ۱۶۴، به ابعاد نامتناهی نیست. ما این خاصیت را در اینجا ثابت نمی کنیم، لیکن این امر برای تمام معادلات دیفرانسیل رایج در فیزیک برقرار است. شاگرد علاقه مند به بحث ریاضی موضوع می تواند به مراجعی نظیر کورانت و هیلبرت (C10)، جلد یک، فصول دو و چهار، یا تیچمارش (T2) مراجعه نماید. لذا، بسطی به شکل زیر را در نظر می گیریم:

$$(12.9) \quad f(\mathbf{x}) = \sum_n c_n u_n(\mathbf{x})$$

اگر  $u_n$  ها را متعامد یکه اختیار کنیم، می توانیم  $c_n$  ها را خیلی آسان تعیین نماییم:

$$(13.9) \quad u_m \cdot f = \sum_n c_n u_m \cdot u_n = \sum_n c_n \delta_{mn} = c_m$$

یک رابطه صوری مفید از جانشانی این نتیجه در سری اصلی به دست می آید:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_n u_n(\mathbf{x}) u_n \cdot f \\ &= \sum_n u_n(\mathbf{x}) \int_{\Omega} d^3x' u_n^*(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \\ &= \int_{\Omega} d^3x' f(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \sum_n u_n(\mathbf{x}) u_n^*(\mathbf{x}') \end{aligned}$$

بنابراین،

$$(14.9) \quad \rho(\mathbf{x}') \sum_n u_n(\mathbf{x}) u_n^*(\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

این رابطه را گاهی رابطه تمامیت و گاهی خاصیت بست ویژه توابع می نامند. به قیاس

جالب با رابطه تعامدی (۱۱.۹) توجه کنید.

### ۳.۹ جوابهای مسائل مقدار مرزی به عنوان بسطهای ویژه تابعی

میان بسط یک تابع برحسب ویژه توابع یک عملگر دیفرانسیل و جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی حاصل از روش جداسازی متغیرها یا روش تبدیلات انتگرال رابطه نزدیکی وجود دارد.

فرض کنیم یک معادله دیفرانسیل جزئی شامل عملگر دیفرانسیل  $L$  نسبت به یکی از متغیرها باشد. هرگاه جواب به صورت یک مجموع روی ویژه توابع  $L$  ارائه شده باشد، آنگاه ترکیب مشتقات  $L$  از معادله حذف و با ویژه مقادیر تعویض می‌شود. لذا، معادله به معادله‌ای با متغیرهای کمتر تحویل می‌گردد.

مثال. مسئله ستر طبل مطرح شده در فصل ۸ را در نظر گرفته، با معادله (۴۶.۸) شروع می‌کنیم.

$$(15.9) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

ابتدا می‌توان مشتقات نسبت به  $r, \theta$ ، یا  $t$  را حذف کرد. ابتدا  $\theta$  را انتخاب می‌کنیم. عملگر  $L_\theta = d^2/d\theta^2$  دارای ویژه توابع  $e^{\pm in\theta}$  متعلق به ویژه مقادیر  $-n^2$  است، که در آن  $n$  عددی صحیح به ازای شرایط مرزی  $u(2\pi) = u(0)$ ،  $u'(2\pi) = u'(0)$  می‌باشد. لذا،  $u$  را به صورت مجموع زیر بیان می‌کنیم:

$$(16.9) \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r, t) (e^{in\theta} + a_n e^{-in\theta})$$

که در آن ضرایب  $f_n$  توابعی از متغیرهای  $r$  و  $t$  می‌باشند. معادله دیفرانسیل به صورت زیر تحویل می‌شود:

$$(17.9) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f_n}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f_n - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f_n}{\partial t^2} = 0$$

حال مشتقات نسبت به  $r$  را با بسط  $f_n$  برحسب ویژه توابع عملگر

$$(18.9) \quad L_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}$$

با شرایط مرزی  $u(r=0)$  متناهی و  $u(r=R) = 0$  حذف می‌کنیم. اینها توابع بسط  $J_n(k_{jn}r)$  با ویژه مقادیر  $-k_{jn}^2$  اند به طوری که  $J_n(k_{jn}R) = 0$ . لذا،

$$(19.9) \quad f_n(r, t) = \sum_{j=1}^{\infty} g_{jn}(t) J_n(k_{jn}r)$$

که در آن ضرایب  $g_{jn}$  به متغیر باقیمانده  $t$  وابسته اند. معادله دیفرانسیل به صورت

$$(20.9) \quad k_{jn}^2 g_{jn}(t) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 g_{jn}}{dt^2} = 0$$

با جوابهای

$$(21.9) \quad g_{jn}(t) = e^{\pm i\omega_{jn}t} \quad \omega_{jn} = ck_{jn}$$

تحویل می شود.

به طور خلاصه، جواب (۵۴.۸) را داریم که با جداسازی متغیرها به دست آمده است:

$$(22.9) \quad u(r, \theta, t) = \sum_{j, n=1}^{\infty} A_{jn} J_n(k_{jn}r) (\sin n\theta + B_n \cos n\theta) (\sin \omega_{jn}t + C_{jn} \cos \omega_{jn}t)$$

#### ۴.۹ مسائل غیرهمگن. توابع گرین

همانطور که در فصل ۸ گفتیم، یک مسئله ممکن است به خاطر معادله دیفرانسیل یا به خاطر شرایط مرزی غیرهمگن باشد. همانطور که تقریباً در آخر این بخش خواهیم دید معمولاً "تبدیل یک شکل غیرهمگن به دیگری امکان پذیر است.

ابتدا، معادله غیرهمگن

$$(23.9) \quad Lu(x) - \lambda u(x) = f(x)$$

را روی قلمرو  $\Omega$  در نظر می گیریم، که در آن  $L$  یک عملگر دیفرانسیل هرمیتی بوده،  $u(x)$  تحت شرایط مرزی (همگن) از نوع معمولی است، و  $\lambda$  ثابت می باشد. برای حل این معادله  $u(x)$  و  $f(x)$  را بر حسب ویژه توابع عملگر  $L$  بسط می دهیم.

$$(24.9) \quad u(x) = \sum_n c_n u_n(x) \quad f(x) = \sum_n d_n u_n(x)$$

معادله (۲۳.۹) به صورت زیر درمی آید:

$$\sum_n c_n (\lambda_n - \lambda) u_n(x) = \sum_n d_n u_n(x)$$

لذا، چون ویژه توابع  $u_n(x)$  مستقل خطی اند،

$$c_n = \frac{d_n}{\lambda_n - \lambda}$$

یا، چون

$$d_n = u_n \cdot f$$

می توان نوشت:

$$c_n = \frac{u_n \cdot f}{\lambda_n - \lambda}$$

بنابراین،



$$u(\mathbf{x}) = \sum_n \frac{u_n u_n \cdot f}{\lambda_n - \lambda} \quad (25.9)$$

$$= \sum_n \frac{u_n(\mathbf{x})}{\lambda_n - \lambda} \int_{\Omega} u_n^*(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d^3x'$$

این عبارت را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d^3x' \quad (26.9)$$

که در آن تابع گرین به صورت زیر می‌باشد :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_n \frac{u_n(\mathbf{x}) u_n^*(\mathbf{x}')}{\lambda_n - \lambda} \quad (27.9)$$

توجه کنید که تابع گرین با یک عملگر دیفرانسیل ( تقریباً " همیشه هرمیتی ) ، یک ناحیه خاص ، و شرایط مرزی مناسبی معین می‌شود . گاهی می‌نویسیم  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \lambda)$  تا بستگی  $G$  به  $\lambda$  و نیز به  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{x}'$  تأکید شده باشد .

حال معادله دیفرانسیلی می‌یابیم که  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  در آن صدق کند . فرض کنیم در

استدلال فوق  $f(\mathbf{x})$  مساوی  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  باشد . در این صورت ، جواب

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) d^3x = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$$

به دست می‌آید . لذا ،  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  جواب

$$LG(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \lambda G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (28.9)$$

تحت شرایط مرزی مناسبی می‌باشد . با اعمال عملگر  $L - \lambda$  بر نمایش سری نامتناهی (۲۷.۹) برای  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  و استفاده از رابطه تمامیت (۱۴.۹) ( به ازای  $\rho = 1$  ) نیز می‌توان به این امر پی برد .

لذا ، تابع گرین تعبیر فیزیکی ساده‌ای دارد . این تابع جواب مسئله برای یک " منبع "

نقطه‌ای یکه  $f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  است .

رابطه (۲۷.۹) از ویژگی برخوردار است که اول بار در آغاز این فصل ظاهر شد .

اگر  $\lambda$  یک ویژه مقدار باشد ( در نتیجه ، یک جواب نابدیهی معادله همگن وجود دارد ) ، حل معادله غیرهمگن با مشکلات جدی روبروست . وقتی  $\lambda$  مساوی یک ویژه مقدار  $\lambda_n$  است تابع گرین (۲۷.۹) نامتناهی است ، و جوابی مانند  $u(\mathbf{x})$  وجود ندارد مگر آنکه طرف راست معادله غیرهمگن در شرط

$$\int u_n^*(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d^3x = 0 \quad (29.9)$$

صدق نماید .

حال مثالی خاص در نظر می‌گیریم . فرض کنیم تار  $l$  با فرکانس ( زاویه‌ای )

$\omega$  در حال ارتعاش باشد. معادله و شرایط مرزی عبارتند از

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = 0 \quad u(0) = u(l) = 0$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

(۳۰.۹)

تابع گرین چیست؟

روش اول. فرض کنیم  $k^2 = -\lambda$ .

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u$$

ویژه مقادیر عبارتند از

$$n = 1, 2, 3, \dots \text{ در آن } \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

ویژه توابع نرمالی شده عبارتند از

$$u_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

بنابراین، فرمول کلی

$$G(x, x') = \sum_n \frac{u_n(x)u_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda}$$

به صورت زیر درمی آید:

$$G(x, x') = \frac{2}{l} \sum_n \frac{\sin(n\pi x/l) \sin(n\pi x'/l)}{k^2 - (n\pi/l)^2}$$

(۳۱.۹)

نتیجه فوق رابطه تقارنی کلی مهمی را برای توابع گرین نشان می دهد، که از معادله

(۲۷.۹) به دست می آید:

$$G(x', x) = [G(x, x')]^*$$

(۳۲.۹)

تعبیر فیزیکی این نتیجه برای توابع گرین حقیقی رابطه وارونی است که می گوید پاسخ در  $x$  به یک آشفتگی نقطه ای بیکه ایجاد شده در  $x$  همان پاسخ در  $x'$  به آشفتگی نقطه ای بیکه ایجاد شده در  $x$  می باشد.

روش دوم. سعی می کنیم معادله دیفرانسیل زیر را که  $G(x, x')$  در آن صدق می کند حل کنیم:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = \delta(x - x')$$

(۳۳.۹)

در تعبیر فیزیکی نتیجه ، مفید است به یاد داشته باشیم که (۳۳.۹) معادله‌ای است مستقل از زمان برای تار مرتعش که تحت تأثیر نیروی  $e^{-i\omega t} \delta(x-x')$  قرار دارد. به ازای  $x$  مساوی هر چیز جز  $x'$  ،

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = 0$$

بنابراین ،

$$(۳۴.۹) \quad G(x, x') = \begin{cases} a \sin kx & (x < x') \\ b \sin k(x-l) & (x > x') \end{cases}$$

ثابت‌های  $a$  و  $b$  را چطور تعیین کنیم ؟

از معادله دیفرانسیل (۳۳.۹) ، که  $G(x, x')$  در آن صدق می‌کند ، از  $x' - \varepsilon$  تا  $x' + \varepsilon$  که در آن  $\varepsilon$  بی نهایت کوچک است ، انتگرال می‌گیریم . نتیجه عبارت است از

$$(۳۵.۹) \quad \frac{dG}{dx} \Big|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} = 1$$

انتگرالگیری مجدد نتیجه می‌دهد که

$$(۳۶.۹) \quad G \Big|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} = 0$$

یعنی ،  $G(x, x')$  ، به عنوان تابعی از  $x$  ، در  $x = x'$  پیوسته است ولی مشتق اولش در این نقطه جهشی برابر 1+ دارد . با استفاده از عبارات (۳۴.۹) برای  $G$  ، شرایط فوق نتیجه می‌دهند که

$$a \sin kx' = b \sin k(x' - l)$$

$$ka \cos kx' + 1 = kb \cos k(x' - l)$$

جواب این معادلات همزمان عبارت است از

$$a = \frac{\sin k(x' - l)}{k \sin kl} \quad b = \frac{\sin kx'}{k \sin kl}$$

و تابع گرین خواهد بود :

$$G(x, x') = \frac{1}{k \sin kl} \begin{cases} \sin kx \sin k(x' - l) & 0 < x < x' \\ \sin kx' \sin k(x - l) & x' < x < l \end{cases}$$

یا ، با نماد فشرده‌تر ،

$$(۳۷.۹) \quad G(x, x') = \frac{-1}{k \sin kl} \sin kx < \sin k(l - x) <$$

که در آن

$$x_{<} = \min(x, x') \quad (l-x)_{<} = \min[(l-x), (l-x')]$$

همین نتیجه با حل

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = f(x)$$

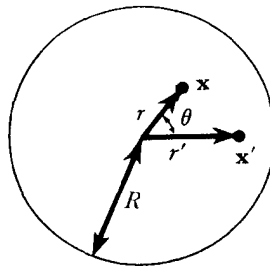
به وسیله تغییر پارامترها به دست می آید (ر، ک، مسئله ۲۶۰۱). به تقارن مشابهی بین  $x$  و  $x'$  که در (۳۱۰۹) به دست آمد توجه کنید.

حال روی یک تابع گرین دو بعدی کار می کنیم. می توان مجموعی صوری شامل ویژه توابع نرمالی شده، مشابه (۳۱۰۹)، نوشت ولی روش دوم را اختیار کرده و معادله دیفرانسیل را حل خواهیم کرد.

مسئله مسئله طبل مستدیر است که در آن معادله و شرایط مرزی به قرار زیرند:

$$r = R \quad u = 0, \quad \nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (38.9)$$

از ملاحظات فیزیکی پیداست که  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  فقط می تواند تابع  $r$ ،  $r'$ ، و  $\theta$  (زاویه بین  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{x}'$ ) باشد.  $\mathbf{x}'$  را مثل شکل ۱۰۹ روی محور مختصات قطبی می گیریم.



شکل ۱۰۹ مختصات برای تابع گرین طبل مستدیر

اما  $G$  جواب معادله زیر است:

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (39.9)$$

که در آن  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  تابع دلتای دوبعدی است؛ به ازای هر ناحیه انتگرالگیری شامل  $\mathbf{x}'$ ،

$$\int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^2x = 1$$

به ازای  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ ،

$$\nabla^2 G + k^2 G = 0 \quad (40.9)$$

جواب این معادله صادق در شرایط مرزی را می توان به شکل زیر نوشت:

$$(41.9) \quad G = \begin{cases} \sum_m A_m J_m(kr) \cos m\theta & (r < r') \\ \sum_m B_m [J_m(kr) Y_m(kR) - Y_m(kr) J_m(kR)] \cos m\theta & (r > r') \end{cases}$$

توجه کنید که جواب را به ازای  $r > r'$  اختیار می‌کنیم؛ لذا، خود بخود در  $r = R$  صفر می‌شود؛ همچنین، از این حقیقت آشکار فیزیکی که  $G$  تابع زوجی از  $\theta$  است استفاده کرده‌ایم. ثابتهای  $A_m$  و  $B_m$  را با برازش جوابهای (۴۱.۹) در امتداد دایره  $r = r'$  تعیین می‌کنیم. مثل مثال یک بعدیمان،  $G$  پیوسته است ولی مشتقش (یعنی، گرادیان آن) در نقطه  $x = x'$  ناپیوسته می‌باشد. برای یافتن انفراد، از معادله دیفرانسیل (۳۹.۹) نسبت به  $G$  روی یک سطح بی‌نهایت کوچک که شامل نقطه  $x = x'$  است انتگرال می‌گیریم. خواهیم داشت

$$(42.9) \quad \int \nabla^2 G d^2x = \int (\nabla G)_n dl = 1$$

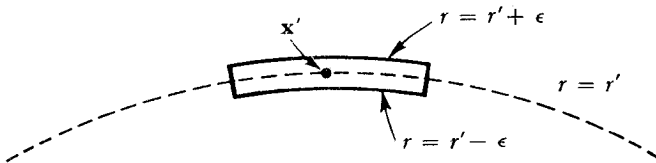
که در آن از مشابه دوبعدی قضیه گاوس استفاده کرده‌ایم:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{u} d^3x = \int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$$

$\Sigma$  سطحی است که حجم  $V$  را دربردارد.

برای سطح شامل نقطه  $x'$ ، از شکل ۲۰.۹ استفاده می‌کنیم. با چشم‌پوشی از دو انتها، رابطه (۴۲.۹) نتیجه می‌دهد که

$$\int_{r'+\epsilon} \frac{\partial G}{\partial r} dl - \int_{r'-\epsilon} \frac{\partial G}{\partial r} dl = 1$$



شکل ۲۰.۹ سطح مربوط به کاربرد قضیه گاوس

که در آن  $l$  طول قوس است. چون  $dl = r' d\theta$ ، از این نتیجه می‌شود که

$$\int d\theta \left( \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'+\epsilon} - \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'-\epsilon} \right) = \frac{1}{r'}$$

(مشروط بر اینکه برد انتگرالگیری شامل نقطه  $x'$  باشد؛ در غیر این صورت، صفر به دست

می‌آید). بنابراین،

$$\left( \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'+\epsilon} - \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'-\epsilon} \right) = \frac{1}{r'} \delta(\theta)$$

فرض کنیم

$$\frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'+\varepsilon} - \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'-\varepsilon} = \sum_m C_m \cos m\theta$$

طرفین را در  $\cos m'\theta$  به طریق معمول ضرب کرده، و روی  $\theta$  از  $-\pi$  تا  $\pi$  انتگرال می‌گیریم. نتیجه خواهد بود

$$(43.9) \quad \varepsilon_{m'} = \begin{cases} 2 & \text{اگر } m' = 0 \\ 1 & \text{اگر } m' > 0 \end{cases} \quad \text{که در آن } \frac{1}{r'} = \pi C_{m'} \varepsilon_{m'}$$

لذا،

$$(44.9) \quad \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'+\varepsilon} - \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'-\varepsilon} = \frac{1}{\pi r'} \sum_m \frac{1}{\varepsilon_m} \cos m\theta$$

این همان شرط ناپیوستگی گرادیان  $G$  است که در جستجوی پیش بودیم. حال می‌توان دو معادله همزمان برای  $A_m$  و  $B_m$  رابطه (۴۱.۹) نوشت. از پیوستگی  $G$  در  $r = r'$  داریم

$$A_m J_m(kr') = B_m [J_m(kr') Y_m(kR) - Y_m(kr') J_m(kR)]$$

و از شرط (۴۴.۹) ناپیوستگی  $\partial G / \partial r$  خواهیم داشت

$$B_m [J'_m(kr') Y_m(kR) - Y'_m(kr') J_m(kR)] - A_m J'_m(kr') = \frac{1}{\pi \varepsilon_m k r'}$$

جواب خواهد بود

$$(45.9) \quad A_m = \frac{J_m(kR) Y_m(kr') - J_m(kr') Y_m(kR)}{2 \varepsilon_m J_m(kR)}$$

$$(46.9) \quad B_m = \frac{-J_m(kr')}{2 \varepsilon_m J_m(kR)}$$

که در آن از رابطه (به دست آمده در مسئله ۱۲.۷)

$$(47.9) \quad J_m(x) Y'_m(x) - J'_m(x) Y_m(x) = \frac{2}{\pi x}$$

استفاده کرده‌ایم. توجه کنید که، مثل قبل،  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$

حال به معادله تابع گرین اصلی (۳۹.۹) بازگشته و آن را به روشی دیگر حل می‌کنیم.

$$(48.9) \quad \nabla^2 G + k^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

که در آن  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  تابع دلتای دوبعدی واقع در نقطه "منبع"  $\mathbf{x}'$  است.

یافتن جواب یا دو مشکل روبروست: یکی تضمین انفراد حقیقی در نقطه منبع  $\mathbf{x}'$

و دیگری برقراری شرایط مرزی است. گاهی شایسته است دو مشکل را با یافتن جوابی به

شکل

$$(۴۹.۹) \quad G = u(x, x') + v(x, x')$$

از هم جدا کنیم ، که در آن  $u$  در  $x'$  انفراد دارد [ یعنی ، از معادله (۴۸.۹) تبعیت می کند ] بدون آنکه لزوماً در شرایط مرزی صدق کند ، ولی  $v$  در  $x'$  " هموار " است [ یعنی ، در معادله همگن (۴۵.۹) صدق کند ] ولی طوری تعدیل شده است که  $G(x, x')$  را وادار به صدق در شرایط مرزی می نماید . تابع  $u(x, x')$  را گاهی یک جواب اساسی ( ۴۸.۹ ) می نامند .

انفراد لازم در  $x'$  را می توان با انتگرالگیری از معادله (۴۸.۹) روی عنصر سطح کوچکی به مرکز  $x'$  و یافتن  $u$  به شکل  $u(\rho)$  که  $u(\rho) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-\rho}$  به دست آورد . از قضیه گاوس داریم [ قس . (۴۲.۹) ]

$$\int_0^\rho \nabla^2 G \cdot 2\pi\rho \, d\rho = 2\pi\rho \frac{\partial G}{\partial \rho}$$

در نتیجه ،

$$2\pi\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} + k^2 \int_0^\rho G \cdot 2\pi\rho \, d\rho = 1$$

و

$$(۵۰.۹) \quad G(\rho) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \ln \rho + \text{ثابت} , \quad \rho \rightarrow 0 \text{ وقتی}$$

پس  $u(x, x')$  باید در مجاورت  $\rho = 0$  این رفتار را داشته باشد . جواب منفرد معادله (۴۵.۹) یعنی  $Y_0(k\rho)$  ، به ازای  $\rho$  ی کوچک رفتار زیر را دارد :

$$Y_0(k\rho) \rightarrow \frac{2}{\pi} \ln \rho + \text{ثابت}$$

لذا ،

$$(۵۱.۹) \quad G = \frac{1}{4} Y_0(k\rho) + v(x, x')$$

حال می نویسیم

$$v = \sum_n A_n J_n(kr) \cos n\theta$$

که در آن  $A_n$  طوری اختیار شده است که  $G$  در شرایط مرزی صدق می کند . یعنی ،

$$G(r = R) = 0 = \frac{1}{4} Y_0(k\rho_R) + \sum_n A_n J_n(kR) \cos n\theta$$

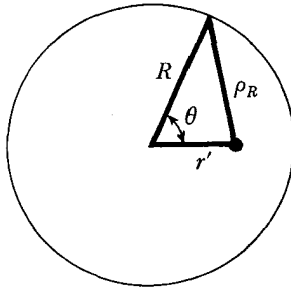
$$A_n = -\frac{1}{4\pi J_n(kR) \epsilon_n} \int_0^{2\pi} Y_0(k\rho_R) \cos n\theta \, d\theta$$

که در آن

$$\rho_R^2 = R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos \theta$$

(ر.ک. شکل ۳۰۹) و  $\epsilon_n$  در (۴۳۰۹) تعریف شده است. نتیجه خواهد بود

$$(۵۲۰۹) \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4} Y_0(k\rho) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n(kr) \cos n\theta}{2\pi J_n(kR) \epsilon_n} \int_0^\pi Y_0(k\rho_R) \cos n\theta \, d\theta$$



شکل ۳۰۹ مختص  $\rho_R$  برای سرطیل

این شکل از تابع گرین برای بعضی از اهداف مناسب است؛ به آسانی می توان آن را برای فرکانسهای پایین  $\omega$  و مواضع منبع  $\mathbf{x}'$  که خیلی نزدیک لبه نباشند تجسم کرد.

به طور خلاصه، سه شکل به دست آمده برای تابع گرین را یادآور می شویم:

۱. مجموع صوری روی ویژه توابع (۲۷۰۹)

۲. جواب معادله همگن و شرایط مرزی روی هر طرف یک "سطح" شامل نقطه منبع؛ دو جواب روی این سطح طوری جور شده اند که افراد نقطه منبع را ایجاد می کنند؛

۳. شکل  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = u(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + v(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ، که در آن  $u$  جواب اساسی است، و  $v$  مواظب شرایط مرزی است.

اگر غیرهمگنی مسئله ای نه به خاطر معادله دیفرانسیل بلکه به خاطر شرایط مرزی باشد، باز هم می توان جواب را برحسب یک تابع گرین نوشت. در واقع، مثالهای فصل ۸ درباره مسائل گرما یا توزیعهای دمای اولیه از این نوع بودند، چرا که شرایط اولیه شرایط مرزی نسبت به زمان اند (همچنین، ر.ک. مسئله ۵۰۹).

به بیان دیگر، یک معادله همگن با شرایط مرزی غیرهمگن را می توان به یک معادله غیرهمگن با شرایط مرزی همگن تبدیل کرد. (عکس مطلب نیز صحیح است.) تبدیلی که این کار را می کند منحصر به فرد نیست، و باید تبدیلی اختیار کنیم که به یک معادله دیفرانسیل ساده منجر شود.



مثال . مسئله گرمای ص ۲۴۴ را در نظر می‌گیریم . در یک ورقه نامتناهی به ضخامت  $D$  و دمای اولیه صفر سطح  $x = D$  عایق‌کاری شده است ، و گرما در سطح  $x = 0$  به میزان ثابت  $Q$  کالری بر ثانیه بر سانتیمتر مربع تولید می‌شود . مسئله ریاضی این است که

$$(۵۳.۹) \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=D} = 0 \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{Q}{K}$$

که در آن  $\kappa = K/C\rho$  ، هدایت گرمایی  $K$  ، گرمای ویژه  $C$  ، و چگالی  $\rho$  . مسئله را می‌توان با تغییر متغیر

$$v(x, t) = u(x, t) - w(x)$$

به یک مسئله با شرایط مرزی همگن ( نسبت به  $x$  ) تبدیل کرد ، که در آن  $w(x)$  در شرایط زیر صدق می‌کند :

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=D} = 0 \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{Q}{K}$$

و نیز  $w(x)$  باید طوری اختیار شود که عمل  $d^2w/dx^2$  در معادله دیفرانسیل به آسانی انجام گیرد و نتیجه ساده‌ای به بار آورد . شاید ساده‌ترین انتخاب سهمی زیر باشد :

$$(۵۴.۹) \quad w(x) = \frac{Q}{2KD} (x - D)^2$$

در این صورت ، معادله دیفرانسیل (۵۳.۹) به صورت زیر درمی‌آید :

$$(۵۵.۹) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{Q}{KD}$$

یک جواب خصوصی عبارت است از

$$(۵۶.۹) \quad v_p = \frac{Q\kappa}{KD} t \quad u_p(x, t) = \frac{Q}{C\rho D} t + \frac{Q}{2KD} (x - D)^2$$

که همان جوابی است که قبلاً" در (۶۳.۸) به دست آمد .

به عنوان آخرین کاربرد توابع گرین ، ملاحظه می‌کنیم که به کمک تابع گرین می‌توان یک معادله دیفرانسیل جزئی را به یک معادله انتگرال تبدیل کرد . مثلاً ، معادله

$$(۵۷.۹) \quad \nabla^2 u(x) = f(x)u(x)$$

را در ناحیه  $\Omega$  و با شرایط مرزی مناسب در نظر می‌گیریم . فرض کنیم  $G(x, x')$  تابع گرین

معادله لاپلاس<sup>۱</sup> برای ناحیه و شرایط مرزی خاصی باشد. در این صورت،

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (58.9)$$

و جواب

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$$

خواهد بود

$$u(\mathbf{x}) = \int d^3x' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')g(\mathbf{x}') \quad (59.9)$$

لذا، معادله دیفرانسیل اصلی (۵۷.۹) هم ارز معادله انتگرال زیر است:

$$u(\mathbf{x}) = \int d^3x' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')f(\mathbf{x}')u(\mathbf{x}') \quad (60.9)$$

توجه کنید که معادله انتگرال دارای شرایط مرزی "دائمی" است. در فصل ۱۱ مثالی خاص از این کاربرد داده خواهد شد [ ر. ک. معادله (۱۸.۱۱) ] .

### ۵.۹ توابع گرین در الکتروستاتیک

دو تابع گرین را که در الکتروستاتیک حائز اهمیت است به اختصار مورد بحث قرار می دهیم. ابتدا معادله لاپلاس

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (61.9)$$

را در یک ناحیه نامتناهی در نظر می گیریم. شرط مرزی عبارت است از  $\phi \rightarrow 0$  وقتی  $r \rightarrow \infty$ . برای یافتن تابع گرین باید معادله

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (62.9)$$

را حل کنیم. واضح است که  $\phi$  فقط می تواند تابع کمیت اسکالر  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  باشد. لذا، مبدأ مختصات (کروی) را نقطه  $\mathbf{x}'$  می گیریم. به ازای هر  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ ،  $\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = 0$ ، لذا،

$$\phi \sim \left\{ \begin{matrix} r^l \\ r^{-(l+1)} \end{matrix} \right\} P_l^m(\cos \theta) e^{\pm im\phi}$$

به خاطر تقارن کروی و شرط مرزی در بی نهایت، تنها امکان عبارت است از

$$\phi = \frac{A}{r}$$

برای یافتن  $A$ ، از معادله دیفرانسیل (۶۲.۹) روی حجم یک کره به شعاع  $R$  حول مبدأ

۱.  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  را می توان تابع گرین معادله پواسون نیز نامید. به طور کلی، می توان یک تابع گرین را با معادله همگن یا غیرهمگن خود نامگذاری کرد.

انتگرال می‌گیریم . از این نتیجه می‌شود که

$$1 = \int dS \cdot \nabla \phi$$

$$= 4\pi r^2 \left( \frac{-A}{r^2} \right) \Rightarrow A = -\frac{1}{4\pi}$$

لذا ، تابع گرین ( یعنی ، پتانسیل یک بار نقطه‌ای یا پتانسیل کولنی ) عبارت است از

$$(۶۳.۰۹) \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{-1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

این یک " جواب اساسی " معادله (۶۲.۰۹) است .

به عنوان مثالی دیگر ، معادله موج را در یک ناحیه نامتناهی در نظر می‌گیریم .

$$(۶۴.۰۹) \quad \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0$$

می‌خواهیم معادله

$$(۶۵.۰۹) \quad \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$

را حل کنیم .

اولاً ، واضح است که جواب فقط تابع  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  و  $t - t'$  است ؛ به عبارت دیگر ، معادله

موج (۶۴.۰۹) دارای ناوردایی انتقالی نسبت به  $\mathbf{x}$  و  $t$  می‌باشد . لذا ، بدون اختلال در

کلیت می‌توان قرارداد  $\mathbf{x}' = 0, t' = 0$  . حال تبدیل فوریه  $\Phi$  از  $\phi$  را معرفی می‌کنیم :

$$(۶۶.۰۹) \quad \phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \Phi(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

$$(۶۷.۰۹) \quad \Phi(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3 x \int dt \phi(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

تبدیل فوریه معادله دیفرانسیل (۶۵.۰۹) عبارت است از

$$\left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Phi = 1$$

در نتیجه ،

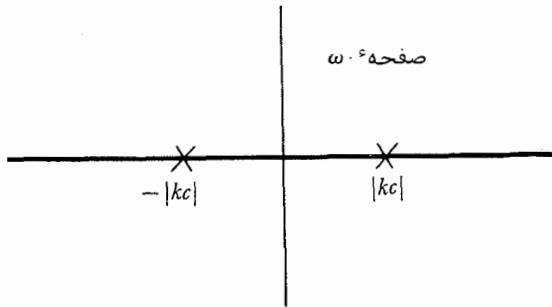
$$(۶۸.۰۹) \quad \Phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c^2}{\omega^2 - k^2 c^2}$$

$$(۶۹.۰۹) \quad \phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} c^2 \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}}{\omega^2 - k^2 c^2}$$

اگر محور مختصات قطبی در فضای  $k$  را در امتداد بردار  $x$  بگیریم، انتگرال‌گیریهای زاویه‌ای سراسر استاند، و خواهیم داشت

$$(۷۰.۰۹) \quad \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{c^2}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} k dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{\omega^2 - k^2 c^2} \quad (r = |\mathbf{x}|)$$

حال انتگرال نسبت به  $\omega$  را حساب می‌کنیم. مشکلی پیش می‌آید و آن این است که بر مسیر انتگرال‌گیری، مثل شکل ۴.۰۹، دو قطب وجود دارند. چه مسیر انتگرال‌گیری را تعقیب می‌کنیم؟



شکل ۴.۰۹ صفحه  $\omega$  که جای قطبهای انتگرالده (۷۰.۰۹) را نشان می‌دهد.

عدم قطعیت ارتباط مستقیمی با شکست ما در تعیین شرایط مرزی مسئله اصلی دارد. برای مشاهده این امر، توجه کنید که تنها اختلاف بین گذشتن از رو، زیر، یا خود هر قطب این است که  $\phi$  مقدار مختلفی از

$$\frac{e^{ik(r \pm ct)}}{r}$$

را بگیرد. اما این توابع جوابهای (به‌طور کروی متقارن) معادله همگن (۶۴.۰۹) می‌باشند. اما معادله دیفرانسیل (۶۵.۰۹) مستلزم آشفتگی در  $t=0, \mathbf{x}=0$  است. یک شرط مرزی معقول  $\phi=0$  به ازای  $t < 0$  است؛ یعنی، چیزی پیش از آشفتگی رخ نمی‌دهد. برای برقراری این شرط، کنتور شکل ۴.۰۹ را از روی هر دو قطب می‌گذرانیم. در این صورت، وقتی  $t < 0$  و کنتور را با نیمدایره بالایی کامل کنیم، قطبی داخل آن نخواهد بود. وقتی  $t > 0$ ، باید کنتور را با یک نیمدایره پایینی کامل کنیم، و داریم

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{c^2}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} k dk e^{ikr} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - k^2 c^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{c}{2ir} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikr} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \left( \frac{1}{\omega - kc} - \frac{1}{\omega + kc} \right)$$

$$= -\frac{c}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikr} (e^{-ikct} - e^{ikct})$$

$$(۷۱.۹) = -\frac{c}{4\pi r} [\delta(r - ct) - \delta(r + ct)]$$

تابع دلتای دوم مشارکتی ندارد ، زیرا  $r$  و  $t$  هر دو مثبت می باشند . لذا ، تابع گرین مطلوب خواهد بود

$$(۷۲.۹) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \begin{cases} 0 & \text{اگر } t < t' \\ -\frac{c}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta[|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - c(t - t')] & \text{اگر } t > t' \end{cases}$$

حال موارد استعمال این تابع گرین را به اختصار توضیح می دهیم . جواب

$$(۷۳.۹) \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = f(\mathbf{x}, t)$$

عبارت است از

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{c}{4\pi} \int d^3x' dt' f(\mathbf{x}', t') \frac{\delta[|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - c(t - t')]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

انتگرالگیری نسبت به  $t'$  به خاطر تابع  $\delta$  قابل انجام است و نتیجه خواهد بود

$$(۷۴.۹) \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{f\left(\mathbf{x}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

این پتانسیل را پتانسیل تأخیری می نامند ، زیرا جملهء منبع در انتگرالده در زمان قبلی  $t - (1/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  حساب شده است ،  $(1/c)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  مدت زمانی است که در آن مدت اثرش مسافت  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  را با تندی  $c$  می پیماید . به عنوان مثال ، فرض کنیم  $f(\mathbf{x}', t) = \delta[\mathbf{x}' - \xi(t)]$  این یک منبع نقطه ای را توصیف می کند که در امتداد مسیر  $\xi(t)$  حرکت می کند . در این صورت ،

$$(۷۵.۹) \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \int dt' \frac{\delta[\mathbf{x}' - \xi(t')] \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

واضح است که تنها سهم در این انتگرال وقتی ناشی می شود که  $x'$  و  $t'$  در معادلات

زیر صدق کنند :

$$\mathbf{x}' = \xi(t')$$

$$t - t' = \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

سؤال این است که این نقطه چه مشارکتی دارد؟  
به محاسبه انتگرال کلیتر زیر می پردازیم:

$$\int dx dy dz dt \delta[f_1(xyzt)] \delta[f_2(xyzt)] \delta[f_3(xyzt)] \delta[f_4(xyzt)]$$

این انتگرال را با تغییر متغیرهای انتگرالی از  $xyz t$  به  $f_1 f_2 f_3 f_4$  حساب می کنیم. انتگرال به صورت زیر در می آید:

$$\int df_1 df_2 df_3 df_4 \left| \frac{\partial(xyzt)}{\partial(f_1 f_2 f_3 f_4)} \right| \delta(f_1) \delta(f_2) \delta(f_3) \delta(f_4) = \left| \frac{\partial(xyzt)}{\partial(f_1 f_2 f_3 f_4)} \right|$$

(۷۶.۹)

که در  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$  حساب شده است، که عبارت اخیر مستلزم ژاکوبی زیر است:

$$(77.9) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial f_1} & \frac{\partial x}{\partial f_2} & \frac{\partial x}{\partial f_3} & \frac{\partial x}{\partial f_4} \\ \frac{\partial y}{\partial f_1} & \frac{\partial y}{\partial f_2} & \frac{\partial y}{\partial f_3} & \frac{\partial y}{\partial f_4} \\ \frac{\partial z}{\partial f_1} & \frac{\partial z}{\partial f_2} & \frac{\partial z}{\partial f_3} & \frac{\partial z}{\partial f_4} \\ \frac{\partial t}{\partial f_1} & \frac{\partial t}{\partial f_2} & \frac{\partial t}{\partial f_3} & \frac{\partial t}{\partial f_4} \end{vmatrix} = \frac{\partial(xyzt)}{\partial(f_1 f_2 f_3 f_4)}$$

یک قضیه مفید از حساب دیفرانسیل و انتگرال به ما می گوید که

$$(78.9) \quad \frac{\partial(xyzt)}{\partial(f_1 f_2 f_3 f_4)} = \left[ \frac{\partial(f_1 f_2 f_3 f_4)}{\partial(xyzt)} \right]^{-1}$$

این ژاکوبی در حالت خاص ما به چه شکل است؟

$$f_1 = x' - \xi_x(t') \quad f_3 = z' - \xi_z(t')$$

$$f_2 = y' - \xi_y(t') \quad f_4 = t - t' - \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

محاسبه دترمینان سراسر است بوده و نتیجه می دهد که

$$\frac{\partial(f_1 f_2 f_3 f_4)}{\partial(x' y' z' t')} = -1 - \frac{1}{c} \dot{\xi} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})$$

بنابراین،

$$(79.9) \quad \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| + \frac{1}{c} \dot{\xi}(t') \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}$$

که در آن  $x' = \xi(t')$  و  $t' = t - (l/c)|x - x'|$ . این در الکترو دینامیک به پتانسیل لینارد-ویشرت<sup>۲</sup> معروف است.

در واقع ، انتگرال (۷۵.۹) را می توان ساده تر حساب کرد به این ترتیب که ابتدا انتگرال  $d^3x'$  و سپس انتگرال  $dt'$  را محاسبه کرد. تنها نتیجه لازم مسئله ۶.۴ است. شرح مطالب را به عنوان تمرین می گذاریم (مسئله ۱۳.۹).

### مراجع

یک بحث مقدماتی روشن و معقول از ویژه مقادیر و ویژه توابع معادلات دیفرانسیل را می توان در فصل ۸ مارگنو و مورفی (M2) و نیز سراسر کتاب ساگان<sup>۳</sup> (S1) یافت. فصلهای ۶ و ۷ مورس و فش یک (M9) شامل مطالب بسیاری راجع به این موضوعات و مباحث مربوطه اند ، ولی نمادهای مجرد و مسائل متنوع آن کار خواندن را آسان نمی کند. توابع گرین ( دست کم در فیزیک کلاسیک ) در نظریه الکترومغناطیس کرارا " ظاهر می شوند. بعضی از مثالهای کتبی که توابع گرین را در این محدوده مطرح کرده اند از آن جکسون<sup>۴</sup> (J1) و اسمایت<sup>۵</sup> (S6) اند. موضوع تابش ناشی از یک بار متحرک در هر کتاب نظریه الکترومغناطیس کلاسیک نظیر دو کتاب قبل یا کتاب لاندو و لیفشیتش (L1) مطرح شده است.

### مسائل

۱.۹. جواب

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{l(l+1)}{x^2} y = \delta(x-a) \quad (a > 0)$$

بر بازه  $0 < x < \infty$  با شرایط مرزی  $y(0) = y(\infty) = 0$  چیست؟  $l$  یک عدد صحیح مثبت است.

۲.۹.  $f_n(x)$  یک چند جمله ای از مرتبه  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) است و این چند جمله ایها در برد  $0$  تا  $\infty$  دو به دو متعامد بوده و دارای تابع وزن  $e^{-x}$  می باشند؛ یعنی ، اگر  $m \neq n$  ،  $\int_0^\infty e^{-x} f_n(x) f_m(x) dx = 0$  ، معادله دیفرانسیلی به شکل

$$x \frac{d^2 f_n}{dx^2} + g(x) \frac{df_n}{dx} + \lambda_n f_n(x) = 0$$

بیابد که  $f_n(x)$  در آن صدق نماید.

۳.۹. تابع گرین  $G(x, x')$  معادله هلمهولتز

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

را داخل کره  $r = a$  با شرط مرزی  $u(r = a) = 0$  بیابید.  $G$  را با حل معادله پیدا کنید، نه فقط به صورت مجموعی صوری روی ویژه توابع مانند (۲۷.۹). توجه کنید که  $G$  فقط تابع  $r$ ،  $r'$ ، و زاویه بین  $x$  و  $x'$  است.

۴.۹. تابع گرین معادله هلمهولتز را در مکعب  $0 \leq x, y, z \leq L$  با حل معادله

$$\nabla^2 u + k^2 u = \delta(x - x') \quad (u = 0 \text{ بر سطح مکعب})$$

بیابید.

۵.۹. توابع گرین را می توان برای معادلات همگن با شرایط مرزی غیر همگن نوشت. برای توضیح این امر، معادله هلمهولتز

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

را داخل دایره  $r = R$ ، با شرایط مرزی  $u = f(\theta)$  در  $r = f(\theta)$  در نظر بگیرید. تابع معلومی می باشد. جواب را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u(x) = \int_0^{2\pi} G(x, \theta') f(\theta') d\theta'$$

$G(x, \theta)$  را بیابید.

۶.۹. تار کشیده ای به طول  $L$  داریم که سر  $x = 0$  آن ثابت و سر  $x = L$  آن به صورت زیر حرکت می کند:

$$y(L, t) = \cos \omega_0 t \quad t > 0$$

ابتدا تار به طور مستقیم کشیده شده است و سر  $x = L$  یک واحد تغییر مکان یافته و سرعت های اولیه همه جا صفرند. تغییر مکان  $y(x, t)$  را پس از لحظه  $t = 0$  به صورت تابعی از  $x$  و  $t$  بیابید.

۷.۹. جواب

$$y'' + \omega^2 y = g(x) \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

تحت شرایط مرزی

$$y(0) = y(2\pi) \quad y'(0) = y'(2\pi)$$

را می توان به شکل زیر نوشت:

$$y(x) = \int_0^{2\pi} G(x, x', \omega) g(x') dx'$$



تابع گرین  $G(x, x', \omega)$  را در شکل بسته پیدا کنید. این تابع گرین در بحث اثرات خطاهای مغناطیسی روی مدارهای تناوبی در یک سنکروترون اهمیت عملی دارد. ۸.۹. یک تار کشیده به طول  $L$  ، چگالی خطی  $\rho$  ، و کشش  $T$  با مقاومت در جواب به نیروی محرکه  $F(x)e^{i\omega_0 t}$  ارتعاش می‌کند. لذا ، در معادله زیر صدق خواهد کرد:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{\rho} F(x)e^{i\omega_0 t}$$

جواب را برحسب یک تابع گرین نوشته و تابع گرین را به شکل بسته ( یعنی ، نه یک سری ) بیابید .

۹.۹. بار نقطه‌ای  $e$  در امتداد محور  $x$  با سرعت یکنواخت  $v$  حرکت می‌کند؛ در نتیجه ، موضع آن  $x$  در لحظه  $t$  از  $x = vt$  به دست می‌آید. برای پتانسیل  $\phi(t)$  در نقطه  $(0, b, 0)$  عبارت صریحی بیابید. معادله دیفرانسیلی که  $\phi(\mathbf{x}, t)$  در آن صدق می‌کند عبارت است از

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

که در آن  $\rho$  چگالی بار می‌باشد .

۱۰.۹. نشان دهید که تابع گرین تأخیری برای معادله هلمهولتز

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0$$

با این شرط مرزی که  $u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$  نمایش امواج بیرون رونده فقط در بی‌نهایت است مساوی است با

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

که در آن  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  . رابطه این نتیجه با تابع گرین (۷۲.۹) چیست؟

۱۱.۹. نشان داده‌ایم [ معادله (۳۲.۹) ] که تابع گرین برای عملگر دیفرانسیل هرمیتی  $L$  در رابطه تفارنی

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = [G(\mathbf{x}', \mathbf{x})]^*$$

صدق می‌کند. این امر را با روشی مستقیم تر از روش به کار رفته در متن نشان دهید، به این ترتیب که با معادلات دیفرانسیل مربوط به  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  و  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')$  شروع کنید؛ یعنی ،

$$LG(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$LG(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')$$

۱۲.۹. جواب  $u(x)$  معادله هلمهولتز غیرهمگن دوبعدی

$$\nabla^2 u(x) + k^2 u(x) = f(x)$$

در داخل دایره  $r = R$  را با شرط مرزی  $u(x) = g(\theta)$  در  $r = R$  در نظر بگیرید.  $f(x)$  و  $g(\theta)$  توابعی معلوم اند. با کار روی معادلات دیفرانسیل صادق به وسیله  $u(x)$  و  $G(x, x')$ ، که دومی تابع گرین (۴۱.۹) است، عبارت صریحی برای  $u(x)$  برحسب  $f(x)$ ،  $g(\theta)$  و  $G(x, x')$  پیدا کنید.

در رابطه بین  $G(x, x')$  و جواب مسئله ۵.۹ بحث کرده آن را ثابت نمایید.  
 ۱۳.۹. از (۷۵.۹) به ترتیب نسبت به  $d^3 x'$  و  $dt'$  انتگرال گرفته، و (۷۹.۹) را مستقیماً" به دست آورید.

## فصل دهم

### نظریهٔ اختلال

در این فصل کوتاه نظریهٔ مقدماتی اختلال را که بر مسائل ویژه مقدراری اعمال می شود عرضه می کنیم . استفاده از آن در یافتن ویژه مقادیر و ویژه توابع را با مثالهایی از فیزیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی توضیح خواهیم داد .

#### ۱۰.۱۰ نظریهٔ ناواگن مرسوم

مسئلهٔ ویژه مقدار

$$(10.10) \quad Lu = \lambda u$$

را در نظر می گیریم ، که در آن  $L$  یک ماتریس یا عملگر دیفرانسیل خطی است . می خواهیم ویژه بردارهای  $u_n$  و ویژه مقادیر  $\lambda_n$  را بیابیم :

$$(20.10) \quad Lu_n = \lambda_n u_n$$

فرض کنیم  $L$  تقریباً " مساوی  $L^0$  باشد که ویژه بردارهای  $u_n^0$  و ویژه مقادیر  $\lambda_n^0$  آن را می دانیم :

$$(30.10) \quad L^0 u_n^0 = \lambda_n^0 u_n^0$$

فرض کنیم

$$(40.10) \quad L = L^0 + Q$$

که در آن  $Q$  به نوعی کوچک است . سپس فرض کنیم

$$(50.10) \quad \lambda_n = \lambda_n^0 + \lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} + \dots$$

$$(60.10) \quad u_n = u_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0 + \sum_m a_{mn}^{(2)} u_m^0 + \dots$$

که در آن  $\lambda_n^{(1)}$  و  $a_{mn}^{(1)}$  مانند  $Q$  کوچک بوده ،  $\lambda_n^{(2)}$  و  $a_{mn}^{(2)}$  از مرتبه  $Q^2$  اند ، و غیره . همچنین فرض می کنیم ویژه بردارهای مختل نشده  $u_m^0$  یک مجموعهٔ تام تشکیل داده باشند ؛ برای

راحتی، فرض کنیم این بردارها یک مجموعه متعامد یکه تشکیل دهند:

$$(۷.۱۰) \quad u_m^0 \cdot u_n^0 = \delta_{mn}$$

حال شکلهای امتحانی (۵.۱۰) و (۶.۱۰) را به جای  $u_n$  و  $\lambda_n$  در مسئله ویژه مقداری اصلی (۲.۱۰) گذارده و به دست می آوریم

$$(۸.۱۰) \quad (L^0 + Q) \left( u_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0 + \dots \right) = (\lambda_n^0 + \lambda_n^{(1)} + \dots) \left( u_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0 + \dots \right)$$

قسمت مرتبه صفر این معادله عبارت است از

$$(۹.۱۰) \quad L^0 u_n^0 = \lambda_n^0 u_n^0$$

یعنی، چیز جدیدی به دست نیامده است. جملات مرتبه اول نتیجه می دهند که

$$(۱۰.۱۰) \quad Qu_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_m^0 u_m^0 = \lambda_n^{(1)} u_n^0 + \lambda_n^0 \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0$$

طرفین (۱۰.۱۰) را در  $u_n^0$  ضرب نقطه ای می کنیم. داریم

$$(۱۱.۱۰) \quad u_n^0 \cdot Qu_n^0 = \lambda_n^{(1)}$$

که نتیجه بسیار مهمی است. در این صورت، ویژه مقدار تصحیح شده  $\lambda_n$  مساوی است با<sup>۱</sup>

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + u_n^0 \cdot Qu_n^0 + O(Q^2)$$

در باب  $a_{pn}^{(1)}$  چه می شود گفت؟ معادله مرتبه اول (۱۰.۱۰) را در  $u_p^0$  ( $p \neq n$ ) ضرب

نقطه ای می کنیم. نتیجه خواهد بود

$$u_p^0 \cdot Qu_n^0 = (\lambda_n^0 - \lambda_p^0) a_{pn}^{(1)}$$

فعلا "فرض می کنیم  $\lambda_p^0 \neq \lambda_n^0$ ؛ اگر ویژه مقدار مختل نشده  $\lambda_n^0$  ناواگن باشد این مسلما" برقرار است<sup>۲</sup>. در این صورت،

$$(۱۲.۱۰) \quad a_{pn}^{(1)} = \frac{u_p^0 \cdot Qu_n^0}{\lambda_n^0 - \lambda_p^0}$$

از نتایج (۱۱.۱۰) و (۱۲.۱۰) معلوم می شود که اگر اعداد  $u_p^0 \cdot Qu_n^0$  در مقایسه با تفاضلهای  $\lambda_n^0 - \lambda_p^0$  کوچک باشند، اختلال  $Q$  را می توان "کوچک" گرفت.

نکاتی در باب نمادها.  $u_p^0 \cdot Qu_n^0$  را با  $Q_{pn}$  نشان می دهیم. این نمایش عملگر خطی کلی  $Q$  به وسیله ماتریس  $Q_{pn}$ ، به کمک "دستگاه مختصات"  $u_n^0$ ، از نوع چیزی است که در فصل ۶ به زبانی نسبتا مجرد مطرح کردیم؛ همچنین، ر.ک. بخش ۲.۹ از فصل ۹.

۱. علامت  $O(x)$  یعنی "کمیتی از مرتبه  $x$ ".

۲. در بخش ۳.۱۰ حالت واگن در نظر گرفته شده است.

توجه کنید که یک عملگر دیفرانسیل هرمیتی به وسیله یک ماتریس هرمیتی نمایش داده می شود .

با این نمادها ، نتایج (۱۱.۱۰) و (۱۲.۱۰) را می توان به شکل زیر نوشت :

$$(13.10) \quad \lambda_n^{(1)} = Q_{nn}$$

و

$$(14.10) \quad a_{mn}^{(1)} = \frac{Q_{mn}}{\lambda_n^0 - \lambda_m^0} \quad (m \neq n)$$

در باب  $a_{nn}^{(1)}$  چه می شود گفت ؟ این با معادله مرتبه اول (۱۰.۱۰) مشخص نمی شود . لیکن ، فرض کنید می خواهیم ویژه بردارهای جدیدمان یک مجموعه متعامد بیکه تشکیل دهند .

$$(15.10) \quad \begin{aligned} u_m \cdot u_n &= \left( u_m^0 + \sum_{m'} a_{m'm}^{(1)} u_{m'}^0 + \dots \right) \cdot \left( u_n^0 + \sum_{n'} a_{n'n}^{(1)} u_{n'}^0 + \dots \right) \\ &= \delta_{mn} + a_{nm}^{(1)*} + a_{mn}^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

اگر  $Q$  هرمیتی نباشد ، جملات مرتبه اول در حالت کلی صفر نیستند . اگر  $Q$  هرمیتی باشد ( که معمولا " چنین است ) ، جملات مرتبه اول (۱۵.۱۰) به ازای  $m \neq n$  حذف می شوند . به ازای  $m = n$  ، شرط

$$u_n \cdot u_n = 1$$

نتیجه می دهد که

$$(16.10) \quad \text{Re } a_{nn}^{(1)} = 0$$

قسمت موهومی  $a_{nn}^{(1)}$  اصلا " معین نیست ، دلیلش این است که همیشه می توان یک ویژه بردار را در عدد مختلطی با قدر مطلق 1 ضرب کرد :

$$(17.10) \quad \begin{aligned} u_n &\rightarrow e^{i\delta} u_n \\ &= (1 + i\delta + \dots) u_n \end{aligned}$$

بی آنکه متعامد بیکه ویژه بردارها بهم بخورد .

حال به چند مثال می پردازیم .

مثال .

$$(18.10) \quad L = \begin{pmatrix} 2 + \varepsilon & 1 - \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & 2 + 2\varepsilon \end{pmatrix} \quad (\varepsilon \ll 1)$$

$$L^0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ویژه بردارها ( نرمالی شده ) و ویژه مقادیر مختل نشده عبارتند از

$$u_1^0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2^0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^0 = 3 \quad \lambda_2^0 = 1$$

در این صورت، بنابر نمادهای صوری کلی ما،

$$\lambda_1^{(1)} = Q_{11} = \frac{1}{2}(1-1)Q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lambda_2^{(1)} = Q_{22} = \frac{5\varepsilon}{2}$$

در نتیجه،

$$\lambda_1 = 3 + \frac{\varepsilon}{2} + \dots$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{5\varepsilon}{2} + \dots$$

همچنین،

$$a_{21}^{(1)} = \frac{Q_{21}}{3-1} = -\frac{\varepsilon}{4}$$

$$a_{12}^{(1)} = \frac{Q_{12}}{1-3} = \frac{\varepsilon}{4}$$

لذا،

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\approx \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon}{4} \\ 1 + \frac{\varepsilon}{4} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\approx \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\varepsilon}{4} \\ -1 + \frac{\varepsilon}{4} \end{pmatrix}$$

این نتایج را می‌توان با حل دقیق مسئلهء مختل شده امتحان کرد.

مثال. سر طبل مستدیری به شعاع  $a$  و جرم نقطه‌ای  $m$  که به فاصله  $b$  تا مرکز نصب شده

است در نظر بگیرید. انتقال پایین ترین فرکانس را بیابید.  
معادله اساسی عبارت است از

$$(19.10) \quad T \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

هرگاه  $u \sim e^{-i\omega t}$ ، آنگاه

$$\frac{T}{\rho} \nabla^2 u = -\omega^2 u$$

این یک مسئله ویژه مقدری متعارف با عملگر  $(T/\rho)\nabla^2$  و ویژه مقدار  $-\omega^2$  است. فرض کنیم

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho$$

$\rho_0$  یک چگالی یکنواخت است. در این صورت، عملگر مختل نشده عبارت است از

$$\frac{T}{\rho_0} \nabla^2$$

و اختلال  $Q$  مساوی است با<sup>۱</sup>

$$(20.10) \quad Q = -\frac{T\Delta\rho}{\rho_0^2} \nabla^2$$

پایین ترین ویژه مقدار و ویژه تابع مختل نشده عبارتند از (ر.ک. ص ۲۴۱)

$$\lambda_0^0 = -\left(\frac{2.40}{a}\right)^2 \frac{T}{\rho_0} \quad u_0^0 = \frac{J_0\left(2.40 \frac{r}{a}\right)}{\sqrt{\pi a^2} J_1(2.40)}$$

توجه کنید که  $u_0^0$  را نرمالی کرده ایم تا با فرض اولیه مان (۷.۱۰) سازگار باشد:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr (u_0^0)^2 = 1$$

در این صورت،

$$\lambda_0^{(1)} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr u_0^0 (Qu_0^0)$$

۱. ممکن است اعتراض شود که عبارت  $\rho_0^{-1} - \rho_0^{-2}\Delta\rho$ ، که به ازای  $\Delta\rho$  کوچک معتبر است، وقتی  $\Delta\rho$  یک تابع دلتا باشد مناسب نیست. با اینحال، روند کار صحیح است. خواننده ای که از حیث فیزیکی قانع نشده است می تواند برهان دقیقی بسازد. (همچنین، ر.ک. مسئله ۰.۹۰۵)

ولی

$$\begin{aligned}
 Qu_0^0 &= -\frac{T\Delta\rho}{\rho_0^2} \nabla^2 u_0^0 \\
 &= -\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \lambda_0^0 u_0^0
 \end{aligned}
 \tag{۲۱.۱۰}$$

همچنین، در مسئلهٔ فعلی،  $\Delta\rho$  مساوی  $m$  برابر یک تابع دلتا در  $r = b$  است. لذا،

$$\lambda_0^{(1)} = -m \frac{\lambda_0^0}{\rho_0} [u_0^0(r = b)]^2$$

یا

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^0} &= -\frac{m}{\rho_0} [u_0^0(r = b)]^2 \\
 &= -\frac{m}{M} \frac{\left[ J_0\left(2.40 \frac{b}{a}\right) \right]^2}{\left[ J_1(2.40) \right]^2}
 \end{aligned}$$

که در آن  $M = \rho_0 \pi a^2$  جرم کل سربطل است. انتقال فرکانس عبارت است از

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^0} = -\frac{m}{2M} \frac{\left[ J_0\left(2.40 \frac{b}{a}\right) \right]^2}{\left[ J_1(2.40) \right]^2}
 \tag{۲۲.۱۰}$$

مثال. معادلهٔ شرودینگر برای اتم هیدروژن عبارت است از

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})$$

که در آن  $m$  جرم (کاهش یافته) الکترون بوده و انرژی  $E$  یک ویژه مقدار است.  $V(\mathbf{x})$  پتانسیل کولنی  $-e^2/r$  است، حالت  $2p$  با عدد کوانتومی مغناطیسی  $+1$  را در نظر می‌گیریم:

$$\psi_{2p}(\mathbf{x}) = C(x + iy)e^{-r/2a_0} \quad E_{2p} = -\frac{e^2}{8a_0}$$

$a_0$  شعاع بوهر، مساوی  $\hbar^2/(me^2)$  است؛ اگر  $\psi_{2p}(\mathbf{x})$  بخواهد نرمالی باشد، ثابت  $C$  باید مساوی  $1/\sqrt{64\pi a_0^5}$  باشد. اگر اختلال کوچک  $\Delta V(\mathbf{x}) = \lambda z^2/a_0^2$  به کار رود، انتقال انرژی  $(\Delta E)$  چقدر است؟

از فرمول (۱۳.۱۰) فوراً داریم



$$\begin{aligned} \Delta E &= \int d^3x \psi_{2p}^*(x) \frac{\lambda z^2}{a_0^2} \psi_{2p}(x) \\ &= \frac{\lambda C^2}{a_0^2} \int_0^\infty r^2 dr \int d\Omega (x^2 + y^2) z^2 e^{-r/a_0} \\ &= 6\lambda \end{aligned}$$

### ۲۰۱۰ یک سری با آرایش مجدد

بحث صوری فوق، با وجودی که به قدر کافی سراسر است، در مرتبه‌های بالاتر نسبتاً " پرزحمت است. ما به اختصار روش متفاوتی را در نظر می‌گیریم که به " آرایش مجدد " نسبتاً " زیبایی از سری قبل منجر می‌شود. مثل قبل، می‌خواهیم معادله

$$Lu = \lambda u$$

$$(L^0 + Q)u = \lambda u$$

را حل کنیم. این معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(23.10)$$

$$L^0 u - \lambda u = -Qu$$

اما در فصل ۹ دیدیم که جواب

$$(24.10)$$

$$(L_0 - \lambda)u = f$$

عبارت است از

$$(25.10)$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int G(x, x') f(x') d^3x' \\ &= \sum_n \frac{u_n^0(u_n^0 \cdot f)}{\lambda_n^0 - \lambda} \end{aligned}$$

لذا، معادله (۲۳.۱۰) جواب صوری زیر را دارد:

$$(26.10)$$

$$u = \sum_n \frac{u_n^0(u_n^0 \cdot Qu)}{\lambda - \lambda_n^0}$$

البته، مشکل اینجاست که  $u$  هم در طرف راست و هم در طرف چپ ظاهر می‌شود. فرض کنیم وقتی  $Q \rightarrow 0$ ،  $\lambda \rightarrow \lambda_m^0$ ،  $u \rightarrow u_m^0$ . این جواب را با  $u_m$  نشان داده و جمله  $m$  را از مجموع (۲۶.۱۰) حذف می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$(27.10)$$

$$u_m = cu_m^0 + \sum_{n \neq m} \frac{u_n^0(u_n^0 \cdot Qu_m)}{\lambda_m - \lambda_n^0}$$

که در آن

$$(28.10) \quad c = \frac{u_m^0 \cdot Qu_m}{\lambda_m - \lambda_m^0}$$

حال معادلهء ضمنی (27.10) را با تکرار، نسبت به  $u_m$  حل می‌کنیم:

$$(29.10) \quad \begin{aligned} u_m &= cu_m^0 + \sum_{n \neq m} \frac{u_n^0 (u_n^0 \cdot Qcu_m^0)}{\lambda_m - \lambda_n^0} + \sum_{n \neq m} \sum_{p \neq m} \frac{u_n^0 (u_n^0 \cdot Qu_p^0) (u_p^0 \cdot Qcu_m^0)}{(\lambda_m - \lambda_n^0)(\lambda_m - \lambda_p^0)} + \dots \\ &= c \left[ u_m^0 + \sum_{n \neq m} \frac{u_n^0 Q_{nm}}{\lambda_m - \lambda_n^0} + \sum_{n \neq m} \sum_{p \neq m} \frac{u_n^0 Q_{np} Q_{pm}}{(\lambda_m - \lambda_n^0)(\lambda_m - \lambda_p^0)} + \dots \right] \end{aligned}$$

لذا، از (28.10) و (29.10) داریم

$$\begin{aligned} c(\lambda_m - \lambda_m^0) &= u_m^0 \cdot Qu_m \\ &= c \left[ Q_{mm} + \sum_{n \neq m} \frac{Q_{mn} Q_{nm}}{\lambda_m - \lambda_n^0} + \sum_{n \neq m} \sum_{p \neq m} \frac{Q_{mn} Q_{np} Q_{pm}}{(\lambda_m - \lambda_n^0)(\lambda_m - \lambda_p^0)} + \dots \right] \end{aligned}$$

که از آن یک سری ضمنی زیبایی برای  $\lambda_m$  به دست می‌آید:

$$(30.10) \quad \lambda_m = \lambda_m^0 + Q_{mm} + \sum_{n \neq m} \frac{Q_{mn} Q_{nm}}{\lambda_m - \lambda_n^0} + \sum_{n \neq m} \sum_{p \neq m} \frac{Q_{mn} Q_{np} Q_{pm}}{(\lambda_m - \lambda_n^0)(\lambda_m - \lambda_p^0)} + \dots$$

این سری از سری قبلی بهتر است از این باب که می‌توان جملات متوالی آن را با معاینه نوشت؛ البته، این نقص را دارد که در دو طرف  $\lambda_m$  را داشته و باید با تکرار یا نوع دیگری تقریب حل کرد.

### ۳.۱۰ نظریهء اختلال واگن

روشهایی که تابحال مطرح شده‌اند برای ویژه مقدار واگن نیاز به تعدیل دارند. مثلا، فرمول (12.10)، یعنی

$$a_{pn}^{(1)} = \frac{u_p^0 \cdot Qu_n^0}{\lambda_n^0 - \lambda_p^0}$$

در صورت واگن بودن  $u_p^0$  با  $u_n^0$ ، یعنی  $\lambda_n^0 = \lambda_p^0$ ،  $a_{pn}^{(1)}$  نامتناهی به دست می‌دهد. (البته،

مگر اینکه  $u_p^0 \cdot Qu_n^0$  صفر شود؛ در واقع، ذیلا "خواهیم دید که صفر می‌شود.)

تفاوت بین حالات واگن و ناواگن از ویژه تابع مرتبهء صفر  $u_n^0$  شروع می‌شود. اگر  $u_n^0$  ناواگن باشد،  $\lambda_n^0$  منحصرأ با نرمالی بودن آن، جز در مورد فازش، تعریف می‌شود. ولی اگر مجموعه‌ای از ویژه توابع مانند  $u_p^0$  موجود باشد که همه متعلق به ویژه مقدار  $\lambda_n^0$  باشند، چه ترکیبی از اینها را باید به عنوان  $u_n^0$  گرفت؟

راه دیگر عنوان کردن مسئله این است که فرض کنیم اختلال رفته رفته از بین می‌رود. به‌طور کلی، اختلال واگنی را از بین می‌برد و، وقتی اختلال از بین می‌رود و  $u_n \rightarrow u_n^0$  (طبق تعریف  $u_n^0$ )، چه ترکیب خطی از  $u_n^0$ ،  $u_\alpha^0$  را می‌دهد؟

یک مثال فیزیکی ساده از این مسئله سر طبل مستدیر است. در فصل ۸ دیدیم که فرکانس مختل نشده دوم واگن بوده، و شامل دو مد شکل ۱۰۱۰ می‌باشد. حال فرض کنید بخواهیم اثر یک نقطه جرمی کوچک را که به سر طبل وصل شده بیابیم. از حیث فیزیک واضح است که گره‌های دو جواب مرتبه صفر مناسب این مسئله به ترتیب در امتداد و عمود بر قطر نقطه جرمی قرار دارند.

مثل این مثال، ویژه توابع مرتبه صفر صحیح را اغلب می‌توان از تقارن یا نکات فیزیکی دیگر نوشت. در هر حال، همانطور که اینک خواهیم دید، این توابع به وسیله نظریه اختلال معین خواهند شد.

ما  $u_n^0$  را به صورت ترکیب خطی زیر بیان می‌کنیم:

(۳۱۰۱۰)

$$u_n^0 = \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha n}^0 u_\alpha^0$$

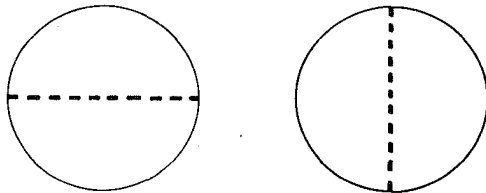
که در آن  $u_\alpha^0$  ها یک مجموعه دلخواه (متعامد بیکه) تشکیل می‌دهند. همچنین، معادله مرتبه اول (۱۰۰۱۰)

(۳۲۰۱۰)

$$Qu_n^0 + \sum_m a_{mn}^{(1)} \lambda_m^0 u_m^0 = \lambda_n^{(1)} u_n^0 + \lambda_n^0 \sum_m a_{mn}^{(1)} u_m^0$$

را به یاد می‌آوریم. اگر (۳۱۰۱۰) را در (۳۲۰۱۰) قرار داده و آن را در  $u_\beta^0$ ، یعنی عضوی از مجموعه واگن (یعنی  $\lambda_\beta^0 = \lambda_\alpha^0 = \lambda_n^0$ )، ضرب نقطه‌ای کنیم، خواهیم داشت

$$u_\beta^0 \cdot \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha n}^0 Qu_\alpha^0 + a_{\beta n}^{(1)} \lambda_\beta^0 = \lambda_n^{(1)} \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha n}^0 u_\beta^0 \cdot u_\alpha^0 + \lambda_n^0 a_{\beta n}^{(1)}$$



شکل ۱۰۱۰ دو مد متعلق به فرکانس نرمال دوم یک طبل مستدیر

یا

(۳۳۰۱۰)

$$\sum_{\alpha=1}^N Q_{\beta\alpha} a_{\alpha n}^0 = \lambda_n^{(1)} a_{\beta n}^0$$

این مؤلفه  $\beta$  ی معادله ماتریسی

$$(۳۴.۱۰) \quad Qa_n^0 = \lambda_n^{(1)} a_n^0$$

در یک دستگاه مختصات با بردارهای پایه‌ای  $u_\alpha^0$  است. لذا،  $a_n^0$  ها، که  $u_n^0$  ها را در این دستگاه نمایش می‌دهند، ویژه بردارهای ماتریس  $N \times N$ ،  $Q$  بوده، و تصحیح‌های مرتبه اول  $\lambda_n^{(1)}$  ویژه مقادیر نظیر می‌باشند.

حال اگر به دستگاه جدید با پایه  $u_n^0$  برویم،  $Q$  قطری شده، و عناصر قطری‌اش تغییرات مرتبه اول  $\lambda_n^{(1)}$  می‌باشند. یعنی،

$$(۳۵.۱۰) \quad Q_{n'n} = \lambda_n^{(1)} \delta_{n'n}$$

همچنین، با ضرب نقطه‌ای (۳۲.۱۰) در  $u_m^0$  (با  $\lambda_m^0 \neq \lambda_n^0$ )، برای تصحیح‌های مرتبه اول  $u_n^0$  همان نتیجه‌ای به دست می‌آید که در نظریه ناواگن حاصل شد:

$$a_{mn}^{(1)} = \frac{Q_{mn}}{\lambda_n^0 - \lambda_m^0}$$

حال کاربرد نظریه اختلال را در یک مسئله واگن توضیح می‌دهیم.

مثال. مسئله سر طبل مستدیر فوق را در نظریه‌گیرییم. ویژه‌مقدار مختل نشده دوم عبارت است از

$$(۳۶.۱۰) \quad \lambda_2^0 = -\left(\frac{3.83}{a}\right)^2 \frac{T}{\rho_0}$$

و دو ویژه تابع متعامد و نرمالی شده متعلق به  $\lambda_2^0$  عبارتند از

$$u_\alpha^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \frac{J_1\left(3.83 \frac{r}{a}\right) \cos \theta}{J_0(3.83)}$$

$$u_\beta^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \frac{J_1\left(3.83 \frac{r}{a}\right) \sin \theta}{J_0(3.83)}$$

اختلال  $Q$  مساوی است با

$$Q = -\frac{T\Delta\rho}{\rho_0^2} \nabla^2$$

که در آن  $\Delta\rho$  چگالی ناشی از جرم نقطه‌ای  $m$  به مختصات قطبی  $(b, \psi)$  می‌باشد. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که  $Q$  با ماتریس زیر نموده می‌شود:

$$(۳۷.۱۰) \quad \frac{2m}{\pi a^2 \rho_0} \frac{\left[J_1\left(3.83 \frac{b}{a}\right)\right]^2}{\left[J_0(3.83)\right]^2} \frac{T}{\rho_0} \left(\frac{3.83}{a}\right)^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & \sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi \end{pmatrix}$$

ماتریس  $2 \times 2$  داخل کרוشه دارای ویژه مقادیر و ویژه بردارهای زیر است:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 0$$

$$a_1^0 = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \qquad a_2^0 = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}$$

لذا، ویژه توابع مرتبه صفر صحیح عبارتند از

(۳۸.۱۰)

$$u_1^0 = (\cos \psi)u_x^0 + (\sin \psi)u_\beta^0$$

$$u_2^0 = (-\sin \psi)u_x^0 + (\cos \psi)u_\beta^0$$

و  $Q$  در دستگاه با این بردارهای پایه‌ای به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{2m}{\pi a^2 \rho_0} \frac{\left[ J_1 \left( 3.83 \frac{b}{a} \right) \right]^2}{\left[ J_0(3.83) \right]^2} \frac{T}{\rho_0} \begin{pmatrix} 3.83 \\ a \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

عناصر قطری عبارتند از  $\lambda_1^{(1)}$  و  $\lambda_2^{(1)}$ ، و  $u_1^0$  و  $u_2^0$  چیزی جز مدهای مرتبه صفر که قبلاً در این بخش از شهود فیزیکی ناشی شدند نیستند.

این محاسبات را می‌توان به اثرات مرتبه‌های بالای اختلالات ویژه مقادیر و ویژه توابع واکن تعمیم داد، ولی مطالب به سرعت پیچیده شده و ما در اینجا وارد آنها نخواهیم شد.

### مراجع

خواندنی‌ترین مطالب در باب نظریه اختلال مقدماتی را می‌توان در کتب جدید مکانیک کوانتومی نظیر مرز باخر (M4)، فصل ۱۶؛ شیف (S2)، بخش ۲۵؛ ولاندو و لیف شیتس (L2)، فصل شش یافت.

بحث روشن دیگری، بازهم در زمینه مکانیک کوانتومی، در مارگنو و مورفی (M2)، فصل ۱۱، مطرح شده است.

طبق معمول، بحث کاملی شامل صورتهای مختلف تکنیکهای ساده مطرح شده در این فصل، را می‌توان در موریس و فشریک (M9)، فصل ۹، یافت.

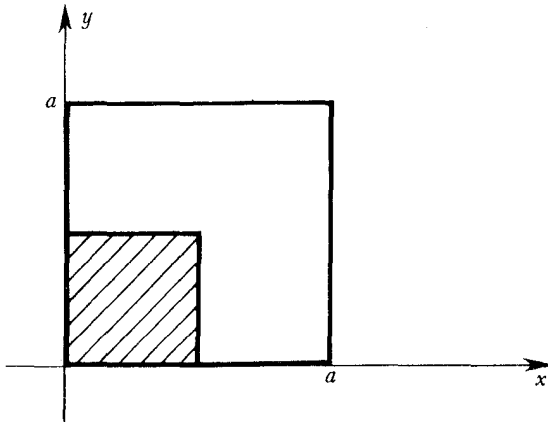
### مسائل

۱۰.۱۰. سه تا از پایین‌ترین فرکانسهای نوسان تاری به طول  $L$ ، کشش  $T$ ، و جرم واحد طول  $\rho$  را در صورتی بیابید که جرم  $m$  در فاصله  $L/4$  از یک انتهای تار به آن بسته شده باشد.

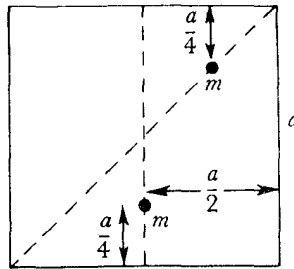
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (m \ll \rho L)$$

۲۰۱۰. یک سر طبل مربع شکل به ضلع  $a$  دارای چگالی سطحی  $\rho_0$  جز در گوشه<sup>۱</sup>  $0 < x < a/2, 0 < y < a/2$  است که در آن چگالی ۱۰٪ بزرگتر می‌باشد. مقادیر تقریبی مرتبه اول سه تا از پایین‌ترین فرکانسهای نوسان را بیابید.

$$T\nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



۳۰۱۰. یک سر طبل مربع شکل با کشش  $T$ ، چگالی سطحی  $\rho$ ، و ضلع  $a$  با بستن دو جرم کوچک هر یک به جرم  $m$  به آن مثل شکل زیر مختل شده است. سه تا از پایین‌ترین فرکانسهای طبل را با چشم‌پوشی از جملات مرتبه<sup>۲</sup>  $(m/\rho a^2)^2$  پیدا نمایید.



۴۰۱۰. ذره‌ای به جرم  $m$  که در معادله<sup>۱</sup> شرودینگر دوبعدی صدق می‌کند در درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $s$  محدود شده است. انتقال مرتبه اول انرژی حالت پایه ناشی از پتانسیل مختل‌کننده<sup>۲</sup>  $V(\mathbf{x}) = \lambda \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  را، که در آن  $\mathbf{x}_0$  مرکز مثلث است، بیابید.

۵۰۱۰.  $\lambda(\alpha)$ ، پایین‌ترین ویژه مقدار

$$\Delta^2 \phi + \lambda(1 + \alpha r^2)\phi = 0 \quad (0 \leq r \leq R)$$

( روی سطح کره<sup>۳</sup>  $\phi = 0$ ،  $r = R$  )

را به ازای  $\alpha$  ی کوچک بیابید .

۶.۱۰. (آ) با استفاده از نظریه اختلال ، مقدار تقریبی پایین ترین ویژه مقدار معادله شروع دینگر

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})$$

را در صورتی بیابید که  $V(\mathbf{x}) = \alpha r^2 + \beta z^2$  ( $\beta$  کوچک) .

(ب) صحت و سقم جواب را با جداسازی معادله دیفرانسیل در مختصات قائم و حل دقیق آن معلوم کنید .

۷.۱۰. با استفاده از نظریه اختلال بخش ۲.۱۰ ،  $\alpha(\beta)$  را برای جواب تناوبی معادله ماتیو که وقتی  $\beta \rightarrow 0$  به  $\sin x$  تحویل می شود حساب کنید . جملات را تا  $\beta^4$  و خود آن نگهدارید .

۸.۱۰. با استفاده از نظریه اختلال ،  $\alpha(\beta)$  را برای جواب تناوبی معادله ماتیو که وقتی  $\beta \rightarrow 0$  به یک ثابت تحویل می شود حساب کنید . جملات را تا  $\beta^4$  نگهدارید .

۹.۱۰. (آ) گاهی یک مسئله ویژه مقداری با عملگر  $Q$  در جمله ویژه مقدار مختل می شود، یعنی

$$L^0 u = \lambda(1 + Q)u$$

در نتیجه ، (۲۳.۱۰) به صورت زیر درمی آید :

$$L^0 u - \lambda u = \lambda Q u$$

در این مسئله بسط نظیر به (۳۰.۱۰) چیست ؟

(ب) مسئله ویژه مقداری زیر را در نظر بگیرید :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \omega^2 \left[ 1 + \varepsilon \frac{d}{dx} \right] u = 0 \quad u(0) = u(\pi) = 0 \quad \varepsilon \ll 1$$

پایین ترین ویژه مقدار عبارت است از  $\omega^2 = 1 + \alpha \varepsilon^2$  ؛ ثابت  $\alpha$  را به کمک نظریه

اختلال به دست آورید . (مسئله ۳۱.۳ ممکن است در اینجا کمک کند .)

۱۰.۱۰. فرض کنید  $L^0$  و  $Q$  ی (۴.۱۰) هرمیتی باشند ، و نشان دهید که تصحیح مرتبه

دوم  $\lambda^{(2)}$  به پایین ترین ویژه مقدار همیشه منفی است .

## معادلات انتگرال

بعضی از معادلات انتگرال را می‌توان به آسانی به معادلات جبری یا دیفرانسیل تحویل و بدین ترتیب با ابزارهای مقدماتی حل کرد. در بخشهای ۲۰.۱۱ و ۵.۱۱ مثالهایی از آنها ذکر شده‌اند. در بخش ۳۰.۱۱ جوابهای عمومی به صورت سری نویمان و فردهولم<sup>۱</sup>، و در بخش ۴۰.۱۱ نظریهٔ اشمیت - هیلبرت همراه با بحثی از مسائل ویژه مقداری مستلزم عملگرهای انتگرال داده شده‌اند. فصل را در بخش ۶۰.۱۱ با بحث کوتاهی از معادلات انتگرال که در نظریهٔ پراکندگی مواجه می‌شویم به پایان می‌بریم.

## ۱.۱۱ رده‌بندی

یک معادلهٔ انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. ما فقط به چند نمونهٔ ساده از این معادلات می‌پردازیم. معادلهٔ انتگرال خطی کلی شامل تابع مجهول  $f(x)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(1.11) \quad \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + g(x) = h(x) f(x)$$

که در آن  $h(x)$  و  $g(x)$  توابع معلومی از  $x$  اند،  $\lambda$  یک پارامتر ثابت است که اغلب نقش یک ویژه مقدار را دارد، و  $K(x, y)$  هستهٔ معادلهٔ انتگرال نامیده می‌شود. اگر  $h(x) = 0$ ، یک معادلهٔ فردهولم نوع اول داریم؛ اگر  $h(x) = 1$ ، یک معادلهٔ فردهولم نوع دوم خواهیم داشت. در هر حالت، اگر  $g(x) = 0$ ، معادله همگن می‌باشد.



گاهی  $K(x, y)$  به ازای  $x > y$  صفر است. در این حالت، حد بالایی انتگرال  $x$  بوده و معادله یک معادله ولتررا<sup>۱</sup> نام دارد.

اغلب بهتر است معادله (۱.۱۱) را به شکل علامتی بنویسیم:

$$(2.11) \quad \lambda Kf + g = hf$$

که در آن  $K$  عملگری است با این معنی " که در هسته  $K(x, y)$  ضرب و روی  $y$  از  $a$  تا  $b$  انتگرال بگیرد. " معادلات به این شکل را می‌توان به آسانی با معادلات عملگری شامل عملگرهای ماتریسی یا دیفرانسیل مقایسه کرد.

به یاد آورید که ما قبلاً، در بخش ۷.۶، به معادلات انتگرال به عنوان تعمیم مستقیم معادلات عملگری ماتریسی، و در بخش ۴.۹ در رابطه با توابع گرین برخوردیم. با آنکه اغلب معادلات انتگرال مطرح شده در این فصل خطی اند، تقریباً در آخر فصل چند معادله غیرخطی نیز در نظر می‌گیریم. بسیاری از معادلات انتگرال را که در عمل با آنها مواجه می‌شویم، هم خطی و هم غیرخطی، می‌توان با روشهای نسبتاً بدیهی، نظیر آنهایی که در بخشهای ۲.۱۱ و ۵.۱۱ مطرح شدند، حل کرد.

### ۲.۱۱ هسته‌های واگن

اگر هسته  $K(x, y)$  به شکل

$$(3.11) \quad K(x, y) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)\psi_i(y)$$

باشد، گوئیم واگن است. معادلات انتگرال با هسته‌های واگن را می‌توان با تکنیکهای مقدماتی حل کرد. به جای بحث کلی، فقط به ذکر یک مثال ساده می‌پردازیم.

مثال

$$(4.11) \quad f(x) = x + \lambda \int_0^1 (xy^2 + x^2y)f(y) dy$$

تعریف می‌کنیم

$$(5.11) \quad A = \int_0^1 y^2 f(y) dy \quad B = \int_0^1 y f(y) dy$$

در این صورت، (۴.۱۱) به شکل زیر درمی‌آید:

$$(6.11) \quad f(x) = x + \lambda Ax + \lambda Bx^2$$

حال (۶.۱۱) را در معادلات معرف (۵.۱۱) برای  $A$  و  $B$  می‌گذاریم:

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda A + \frac{1}{3}\lambda B$$

(۷۰۱۱)

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda A + \frac{1}{3}\lambda B$$

جواب معادلات (۷۰۱۱) عبارت است از

$$A = \frac{60 + \lambda}{240 - 120\lambda - \lambda^2} \quad B = \frac{80}{240 - 120\lambda - \lambda^2}$$

در نتیجه، جواب معادله انتگرال اصلی مان خواهد بود

$$(۸۰۱۱) \quad f(x) = \frac{(240 - 60\lambda)x + 80\lambda x^2}{240 - 120\lambda - \lambda^2}$$

توجه کنید که به ازای دو مقدار از  $\lambda$  جواب (۸۰۱۱) نامتناهی می شود. این چیز ناآشنایی نیست؛ ما این مقادیر را ویژه مقادیر معادله انتگرال می نامیم. معادله همگن فقط وقتی جوابهای نابدیهی دارد که  $\lambda$  یکی از این ویژه مقادیر باشد. این جوابها ویژه توابع عملگر  $K$  نام دارند.

لذا، اگر هسته ما واگن باشد، مسئله حل یک معادله انتگرال به حل یک دستگاه معادلات جبری تحویل می شود که موضوع بسیار آشناتری است. اگر هسته واگن (۳۰۱۱) شامل  $N$  جمله باشد،  $N$  ویژه مقدار وجود دارند که لزوماً همه باهم متفاوت نیستند.

فرد هولم، با توجه به اینکه هر هسته خوش رفتار را می توان به صورت یک سری نامتناهی از هسته های واگن نوشت، مجموعه ای از قضایا به دست آورد که آنها را بدون برهان بیان می کنیم. لیکن، با توجه به تجربه قبلی دانشجو در زمینه ویژه مقادیر و معادلات جبری باید آنها را کاملاً معقول ببیند. این قضایا در رابطه با هسته های حقیقی می باشند.

۱. یا معادله غیرهمگن

$$(۹۰۱۱) \quad f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy$$

به ازای هر تابع  $g(x)$  جواب (منحصر به فرد) دارد (یعنی،  $\lambda$  ویژه مقدار نیست) یا معادله همگن

$$(۱۰۰۱۱) \quad f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy$$

دست کم یک جواب نابدیهی دارد ( $\lambda$  ویژه مقدار بوده و جواب یک ویژه تابع است).  
۲. هرگاه  $\lambda$  ویژه مقدار نباشد (حالت اول)، آنگاه  $\lambda$  ویژه مقدار معادله "ترا نهاده"

$$(۱۱۰۱۱) \quad f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(y, x) f(y) dy$$

نیز نیست، حال آنکه اگر  $\lambda$  ویژه مقدار باشد (حالت دوم)،  $\lambda$  ویژه مقدار معادله ترانهاده نیز هست؛ یعنی،

$$(۱۲۰۱۱) \quad f(x) = \lambda \int_a^b K(y, x) f(y) dy$$

دست کم یک جواب نابدیهی دارد.

۳. هرگاه  $\lambda$  ویژه مقدار باشد، معادله غیرهمگن (۹.۱۱) دارای جواب است اگر و فقط اگر به ازای هر تابع  $\phi(x)$  که در معادله همگن ترانواده (۱۲.۱۱) صدق کند،

$$\int_a^b \phi(x)g(x) dx = 0 \quad (13.11)$$

ما این قضایا را در اینجا ثابت نمی‌کنیم<sup>۱</sup>. اینها در کورانت و هیلبرت (C10)، جلد

۱، به طرز زیبایی ثابت شده‌اند. مثلاً، حکم ۲ شبیه این است که یک ماتریس و ترانواده‌اش ویژه مقادیر یکسان دارند. ضرورت شرط (۱۳.۱۱) با ضرب (۹.۱۱) در  $\phi(x)$  و انتگرالگیری روی  $x$  فوراً نتیجه می‌شود.

### ۳.۱۱ سریهای نویمان و فرد هولم

یک روش سراسر برای حل معادله انتگرال

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)f(y) dy \quad (14.11)$$

تکرار است. بحث را با تقریب

$$f(x) \approx g(x)$$

آغاز می‌کنیم. با گذاردن این در معادله اصلی زیر علامت انتگرال، تقریب دوم به دست آمده و سپس فرایند تکرار می‌شود. سری حاصل

$$(15.11) f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)g(y) dy + \lambda^2 \int_a^b dy \int_a^b dy' K(x, y)K(y, y')g(y') + \dots$$

به سری نویمان، یا جواب نویمان، معادله انتگرال (۱۴.۱۱) معروف است. این سری به ازای  $\lambda$  های به قدر کافی کوچک همگراست مشروط بر اینکه  $K(x, y)$  کراندار باشد.

مثال. در نظریه مکانیک کوانتمی پراکندگی به وسیله پتانسیل  $V(\mathbf{r})$ ، جوابی از معادله شرودینگر

$$(16.11) \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) - \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = 0$$

را با این شرایط مرزی جستجو می‌کنیم که  $\psi(\mathbf{r})e^{-iE\mathbf{r}/\hbar}$  نشان دهنده یک موج تخت تابشی با بردار موج  $\mathbf{k}_0$ ، و امواج بیرون رونده در  $r \rightarrow \infty$  باشد.  $k^2 = k_0^2 = 2mE/\hbar^2$ .

معادله

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = f(\mathbf{r})$$

۱. قضایا فقط در مورد معادلات انتگرال با هسته‌های کراندار و حدود انتگرالگیری متناهی یعنی معادلات انتگرال نامنفرد، به کار می‌روند. نظریه معادلات انتگرال منفرد موضوعی دیگر است.

با شرایط مرزی موج بیرون رونده برای تابع  $\psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$  دارای تابع گرین مسئله ۴۰۹ است.

$$(17.11) \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

لذا، مثل بخش ۴۰۹، می‌توان مسئله پراکندگی را به معادله انتگرال

$$(18.11) \quad \psi(\mathbf{r}) = e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}} - \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r}' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')$$

تبدیل کرد، که در آن جمله  $e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}}$  تابع مکمل است که برای برآزش با شرایط مرزی تعدیل شده است. جواب را می‌توان به صورت سری نویمان (۱۵۰۱۱) نوشت. اولین تکرار نقداً "نتیجه بسیار مهمی است معروف به تقریب بورن":

$$(19.11) \quad \psi(\mathbf{r}) \approx e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r}' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}')e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}'}$$

به معادله انتگرال (۱۴۰۱۱) باز می‌گردیم. یک جواب به صورت سری که زیباتر ولی پیچیده‌تر است توسط فردهولم به دست آمده است و این سری با تقسیم بازه  $a < x < b$  تعویض انتگرال با یک مجموع، حل معادلات جبری حاصل، و سپس گرفتن حد با بی‌نهایت کردن تعداد تقسیمات حاصل می‌شود. نتیجه این است که جواب معادله انتگرال (۱۴۰۱۱) عبارت است از

$$(20.11) \quad f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b R(x, y, \lambda)g(y) dy$$

که در آن  $R(x, y, \lambda)$ ، به نام هسته حلال، نسبت دوسری نامتناهی می‌باشد:

$$(21.11) \quad R(x, y, \lambda) = \frac{D(x, y, \lambda)}{D(\lambda)}$$

$$(22.11) \quad D(x, y, \lambda) = K(x, y) - \lambda \int dz \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, z) \\ K(z, y) & K(z, z) \end{vmatrix} + \frac{\lambda^2}{2!} \int dz dz' \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, z) & K(x, z') \\ K(z, y) & K(z, z) & K(z, z') \\ K(z', y) & K(z', z) & K(z', z') \end{vmatrix} - + \dots$$

$$(23.11) \quad D(\lambda) = 1 - \lambda \int dz K(z, z) + \frac{\lambda^2}{2!} \int dz dz' \begin{vmatrix} K(z, z) & K(z, z') \\ K(z', z) & K(z', z') \end{vmatrix} - + \dots$$

این فرمولها، که نسبتاً پیچیده‌اند، شکل دیگری دارند که زیبا بوده و شبیه‌صوری‌سازیهای اختلال است که در قسمت‌های مختلف فیزیک نوین به کار می‌روند. حال هر هسته  $K$  را با یک خط نمایش می‌دهیم.  $K(x, y)$  یک خط قائم ( | ) خواهد بود. اگر دو  $K$  یا متغیر مشترکی انتگرالگیری شده باشند، دو خط را به هم وصل کرده و اتصال را با ضربدر نشان می‌دهیم. به عنوان مثال،

$$\begin{aligned} \int dz K(x, z)K(z, y) &\rightarrow * \\ \int dz K(z, z) &\rightarrow \bigcirc * \\ \int dz K(x, y)K(z, z) &\rightarrow | \bigcirc * \end{aligned}$$

جواب فردهولم را می توان با این تصاویر نوشت :

$$R = \frac{\left| - \left( \bigcirc * - * \right) + \frac{1}{2} \left( \bigcirc * \bigcirc * + 2 \frac{*}{*} - \bigcirc * * - 2 * \bigcirc * \right) + \dots \right.}{1 - \bigcirc * + \frac{1}{2} \left( \bigcirc * \bigcirc * - * * \right) + \dots}$$

(۲۴.۱۱)

توانهای  $\lambda$  را در جملات انداخته ایم؛ این قاعده که یک عامل  $\lambda$  باید به هر ضربدر (یعنی، به هر انتگرالگیری) مربوط باشد برای تأمین این منظور کافی است. این قاعده با معاینه به دست آمده است که از تنظیم اصلی برحسب دترمینانها نیز واضح است که هر جمله در مخرج جز 1 به وسیله "اتصال انتهاها" در جمله قبل در صورت، تقسیم بر تعداد  $K$  های حاضر، و تغییر علامت به دست می آید. همچنین، توجه کنید که اگر تقسیم (۲۴.۱۱) را انجام دهیم، در واقع سری نویمان (۱۵.۱۱) به دست می آید:

$$(25.11) \quad R = \left| + * + \frac{*}{*} + \frac{*}{*} + \dots \right.$$

[ به عبارت دیگر، حاصل ضرب (۲۵.۱۱) در مخرج (۲۴.۱۱) مساوی صورت عبارت دوم است. ] دو خاصیت مذکور در این پاراگراف کاملاً "جواب فردهولم را تعریف می کنند. به عنوان مثال، جملات بعدی را می سازیم. جمله مرتبه سوم در مخرج از اتصال انتباهای جمله مرتبه دوم در صورت به دست می آید؛ نتیجه خواهد بود

$$-\frac{1}{6} \left( \bigcirc * \bigcirc * \bigcirc * + 2 \frac{*}{*} - 3 \bigcirc * * \right)$$

و برای به دست آوردن جمله مرتبه سوم در صورت، جملات مرتبه سوم موجود در حاصل ضرب مخرج با سری (۲۵.۱۱) را دسته بندی می کنیم. نتیجه خواهد بود

$$\frac{*}{*} - \frac{*}{*} \bigcirc * + \frac{1}{2} * \bigcirc * \bigcirc * - \frac{1}{2} * * *$$

$$-\frac{1}{6} \left| \begin{array}{ccc} \textcircled{\times} & \textcircled{\times} & \textcircled{\times} \\ & & \end{array} \right| - \frac{1}{3} \left| \begin{array}{cc} \textcircled{\times} & \textcircled{\times} \\ \textcircled{\times} & \end{array} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} \textcircled{\times} \\ \textcircled{\times} \end{array} \right|$$

مخرج شکل جالب زیر را دارد:

$$(26.11) \quad D(\lambda) = \exp \left( -\textcircled{\times} - \frac{1}{2} \textcircled{\times} \textcircled{\times} - \frac{1}{3} \textcircled{\times} \textcircled{\times} \textcircled{\times} - \dots \right)$$

و این را می‌توان با بسط عبارت فوق دید؛ ر.ک. مسئله ۱۰.۱۱.

اهمیت جواب فردهولم در این است که هر دو سری توانی (۲۲.۱۱) و (۲۳.۱۱) (به خلاف سری نویمان که اغلب واگراست) همگرایند. ویژه مقادیر را می‌توان با توجه به صفرهای تابع مخرج  $D(\lambda)$  به دست آورد.

#### ۴.۱۱ نظریه اشمیت - هیلبرت

حال روشی کاملاً متفاوت با سریهای نویمان و فردهولم اختیار می‌کنیم. این روش مبتنی بر ویژه توابع و ویژه مقادیر معادله انتگرال همگن می‌باشد.

گوییم هسته  $K(x, y)$  متقارن است اگر

$$K(x, y) = K(y, x)$$

و هرمیتی است اگر

$$K(x, y) = K^*(y, x)$$

ویژه مقادیر یک هسته هرمیتی حقیقی بوده، و ویژه توابع متعلق به ویژه مقادیر مختلف متعامدند؛ گوییم دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  متعامدند اگر

$$\int f^*(x)g(x) dx = 0$$

برهان این احکام عملاً با برهانهای فصل ۶ یکی بوده، و ارائه آنها به دانشجو محول می‌شود. اگر معادله انتگرال را با نمادهای (۲.۱۱) بنویسیم، اتحاد واضح می‌شود. در این صورت، معادله ویژه مقداری خواهد بود

$$(27.11) \quad \lambda Kf = f$$

ما خود را به هسته‌های هرمیتی محدود کرده، و با هسته واگنی آغاز می‌کنیم:

$$(28.11) \quad K(x, x') = \sum_{\alpha=1}^N f_{\alpha}(x)f_{\alpha}^*(x')$$

معادله انتگرال همگن نظیر عبارت است از

$$(29.11) \quad \begin{aligned} u(x) &= \lambda \int_a^b K(x, x')u(x') dx' \\ &= \lambda \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x) \int f_{\alpha}^*(x')u(x') dx' \end{aligned}$$

حال تعریف می‌کنیم

$$(۳۰.۱۱) \quad \int f_{\alpha}^{*}(x')u(x') dx' = c_{\alpha}$$

در نتیجه،

$$(۳۱.۱۱) \quad u(x) = \lambda \sum_{\alpha} c_{\alpha} f_{\alpha}(x)$$

می‌بینیم که هر ویژه تابع  $u(x)$  را می‌توان به‌طور خطی برحسب  $N$  تابع  $f_{\alpha}(x)$  بیان کرد، و مثلاً "واضح است که بیش از  $N$  ویژه تابع مستقل خطی وجود ندارد" با گذاردن عبارت (۳۱.۱۱) در (۳۰.۱۱) و تعریف

$$(۳۲.۱۱) \quad A_{\alpha\beta} = \int f_{\alpha}^{*}(x)f_{\beta}(x) dx = A_{\beta\alpha}^{*}$$

خواهیم داشت

$$(۳۳.۱۱) \quad c_{\alpha} = \lambda \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} c_{\beta}$$

لذا، ویژه مقادیر  $\lambda$  و ارونهای ویژه مقادیر (ناصفر) ماتریس هرمیتی  $A_{\alpha\beta}$  اند. از فصل ۶ می‌دانیم که اعداد  $c_{\alpha}^{(i)}$ ، که در آنها بالانویس  $i$  ویژه بردارهای مختلف ماتریس  $A$  را نشان می‌دهد، از شرط تعامدی زیر تبعیت می‌کنند:

$$(۳۴.۱۱) \quad c^{(i)} \cdot c^{(j)} = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{(i)*} c_{\alpha}^{(j)} = 0 \quad , \quad i \neq j$$

برای آنکه ببینیم چه نرمال‌سازی مناسب است، فرض کنیم  $u^{(i)}(x)$  ویژه تابع  $i$ م باشد، و به همین ترتیب در مورد  $u^{(j)}(x)$  در این صورت،

$$\begin{aligned} \int u^{(i)}(x)*u^{(j)}(x) dx &= \lambda_i \lambda_j \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha}^{(i)*} c_{\beta}^{(j)} \int f_{\alpha}(x)*f_{\beta}(x) dx \\ &= \lambda_i \lambda_j \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha}^{(i)*} c_{\beta}^{(j)} A_{\alpha\beta} \\ &= \lambda_i \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{(i)*} c_{\alpha}^{(j)} \end{aligned}$$

لذا، اختیار می‌کنیم

$$(۳۵.۱۱) \quad \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{(i)*} c_{\alpha}^{(j)} = \frac{\delta_{ij}}{\lambda_i}$$

در نتیجه،

$$(۳۶.۱۱) \quad \int u^{(i)}(x)*u^{(j)}(x) dx = \delta_{ij}$$

یعنی، ویژه توابع ما متعامد یک‌ه می‌باشند.

۱. به چند دلیل ممکن است تعداد ویژه توابع مستقل از  $N$  کمتر باشد. توابع  $f_{\alpha}(x)$  لازم نیست مستقل خطی باشند؛ در اینجا مسئله (۱.۱) مورد ندارد. همچنین، معمولاً "بی‌نهایت را ویژه مقدار نمی‌گیرند" قس. جمله بلافاصله بعد از معادله (۳۳.۱۱)، و البته، هر ویژه تابع متعلق به این ویژه مقدار کنار گذاشته خواهد شد.

توجه کنید که، بنابر (۳۵.۱۱)، اعداد  $\sqrt{\lambda_i} c_\alpha^{(i)}$  یک ماتریس یکانی تشکیل می دهند.

بنابراین،

$$(۳۷.۱۱) \quad \sum_i \lambda_i c_\alpha^{(i)*} c_\beta^{(i)} = \delta_{\alpha\beta}$$

این یک خاصیت تعامدی مفید است. مثلاً، به کمک آن می توان رابطه

$$u^{(i)}(x) = \lambda_i \sum_\alpha c_\alpha^{(i)} f_\alpha(x)$$

را نسبت به  $f_\alpha(x)$  " حل " کرد:

$$(۳۸.۱۱) \quad f_\alpha(x) = \sum_i c_\alpha^{(i)*} u^{(i)}(x)$$

این به نوبه خود ما را قادر می سازد تا هسته  $K(x, x')$  داده شده با (۲۸.۱۱) را به طرز زیبایی برحسب ویژه توابع اش بیان کنیم:

$$(۳۹.۱۱) \quad \begin{aligned} K(x, x') &= \sum_\alpha f_\alpha(x) f_\alpha^*(x') \\ &= \sum_\alpha \sum_{ij} c_\alpha^{(i)*} u^{(i)}(x) c_\alpha^{(j)} u^{(j)}(x')^* \\ &= \sum_i \frac{u^{(i)}(x) u^{(i)}(x')^*}{\lambda_i} \end{aligned}$$

این نتیجه، اگرچه در اینجا فقط برای یک هسته واگن به دست آمده، کلاً برای هسته های هرمیتی که در آنها تعداد ویژه مقادیر مثبت و منفی هر دو نامتناهی اند برقرار است. برای برهانها و شرایط، ر. ک. کتب ریاضی؛ بخصوص، کتاب کورانت و هیلبرت (C10)، جلد یک، فصل سه مرجع مناسبی است.

این روش را می توان به معادله غیرهمگن تعمیم داد. از قضیه ای استفاده می کنیم که فوراً از (۳۹.۱۱) به دست می آید، ولی در شرایط کلیتر، مثلاً " شرایطی که در کورانت و هیلبرت (C10) ذکر شده اند نیز برقرار است. هر تابع که " به طور منبعی " برحسب هسته  $K(x, y)$  قابل نمایش باشد، یعنی هر تابع  $\phi(x)$  به شکل

$$(۴۰.۱۱) \quad \phi(x) = \int K(x, y) \psi(y) dy \quad (\psi \text{ دلخواه و } K \text{ هرمیتی})$$

را می توان به یک سری از ویژه توابع  $K(x, y)$  بسط داد:

$$(۴۱.۱۱) \quad \phi(x) = \sum_i c_i u^{(i)}(x)$$

که در آن

$$(۴۲.۱۱) \quad c_i = \int u^{(i)}(x) \phi(x) dx = \frac{1}{\lambda_i} \int u^{(i)}(x) \psi(x) dx$$

به طور کلی، ویژه توابع  $u^{(i)}(x)$  مجموعه نامی از توابع را تشکیل نمی دهند. هر تابع (جز توابع قابل نمایش منبعی) را نمی توان برحسب آنها بسط داد. این وضعیت ناآشنایی نیست. مثلاً، بردارهای معمولی در سه بعد و عملگر  $P$  را که بردار  $r$  را به توی صفحه  $xy$  تصویر کند در نظر می گیریم.  $P$  دو ویژه بردار مستقل، مثلاً  $e_x$  و  $e_y$ ، دارد و هر



بردار  $\mathbf{r}'$  به شکل  $\mathbf{r}' = P\mathbf{r}$  را می‌توان برحسب آنها بیان کرد، ولی بردار دلخواه  $\mathbf{r}$  به این صورت قابل بیان نیست.

حال می‌توان معادله غیرهمگن

$$(۴۳.۱۱) \quad \phi(x) = g(x) + \lambda \int K(x, y)\phi(y) dy$$

را حل کرد. می‌توان بسط‌زیر را داشت:

$$(۴۴.۱۱) \quad \phi(x) - g(x) = \sum_i c_i u^{(i)}(x)$$

که در آن، طبق (۴۲.۱۱)،

$$(۴۵.۱۱) \quad c_i = \int dx u^{(i)}(x) * [\phi(x) - g(x)] = \lambda \frac{1}{\lambda_i} \int u^{(i)}(x) * \phi(x) dx$$

لذا، اگر تعریف کنیم

$$(۴۶.۱۱) \quad d_i = \int dx u^{(i)}(x) * \phi(x) \quad e_i = \int dx u^{(i)}(x) * g(x)$$

رابطه (۴۵.۱۱) خوانده می‌شود

$$c_i = d_i - e_i = \frac{\lambda}{\lambda_i} d_i$$

لذا،

$$d_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda} e_i$$

$$c_i = \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} e_i$$

با گذاردن در (۴۴.۱۱) خواهیم داشت

$$\phi(x) = g(x) + \lambda \sum_i \frac{e_i u^{(i)}(x)}{\lambda_i - \lambda}$$

یا

$$(۴۷.۱۱) \quad \phi(x) = g(x) + \lambda \sum_i \frac{u^{(i)}(x)}{\lambda_i - \lambda} \int u^{(i)}(y) * g(y) dy$$

اگر نتیجه اخیر را با جواب (۲۵.۱۱) مقایسه کنیم، خواهیم دید که برای هسته حلال نمایش سری به دست آورده‌ایم:

$$(۴۸.۱۱) \quad R(x, y, \lambda) = \sum_i \frac{u^{(i)}(x)u^{(i)}(y) *}{\lambda_i - \lambda}$$

معادله اصلی (۴۳.۱۱)، با علامات به صورت زیر بود:

$$(۴۹.۱۱) \quad \phi = g + \lambda K\phi$$

که دارای جواب صوری زیر است:

$$(۵۰.۱۱) \quad \phi = (1 - \lambda K)^{-1} g$$

توجه کنید که بسط سری توانی عملگر در این عبارت چیزی جز سری نویمان نیست.

$$(۵۱.۱۱) \quad \phi = g + \lambda Kg + \lambda^2 K^2 g + \lambda^3 K^3 g + \dots$$

چون، از طرف دیگر، طبق (۲۵.۱۱)

$$(52.11) \quad \phi = (1 + \lambda R)g$$

اتحاد صوری زیر را خواهیم داشت :

$$(53.11) \quad (1 - \lambda K)^{-1} = 1 + \lambda R$$

جالب است که نتایج فعلی را با نتایج به دست آمده در بخش ۴.۹ برای معادلات دیفرانسیل جزئی مقایسه کنیم. فرض کنیم عملگر دیفرانسیل  $L$  دارای ویژه مقادیر  $\kappa_i$  و ویژه توابع  $u^{(i)}$  باشد که در شرایط مرزی داده شده‌ای صدق کنند. معادله دیفرانسیل غیرهمگن به شکل زیر است :

$$(54.11) \quad L\phi + f = \kappa\phi$$

که در آن جمله غیرهمگن  $f$  تابع معلومی می باشد. بنا بر (۲۶.۹) و (۲۷.۹)، جواب برحسب تابع گرین خواهد بود :

$$(55.11) \quad \phi(x) = \int G(x, x') f(x') d^3(x')$$

که در آن<sup>۱</sup>

$$(56.11) \quad G(x, x') = -\sum_i \frac{u^{(i)}(x)u^{(i)}(x')^*}{\kappa_i - \kappa}$$

توجه کنید که  $G(x, x')$  یک عملگر هسته انتگرال بوده، و معادله (۵۵.۱۱) صورت علامتی زیر را دارد :

$$(57.11) \quad \phi = Gf$$

معادله دیفرانسیل (۵۴.۱۱) و معادله انتگرال (۴۹.۱۱) با فرض  $\kappa = 1/\lambda$  و  $\lambda f = g$  و یکی کردن  $L$  با  $K$  شکل علامتی یکسانی خواهند یافت. جوابهای این معادلات، طبق (۵۷.۱۱) و (۵۲.۱۱)، عبارتند از

$$\phi = (1 + \lambda R)g$$

و

$$\phi = Gf = \frac{1}{\lambda} Gg$$

لذا، می توان انتظار داشت که عملگرهای  $(1 + \lambda R)$  و  $(1/\lambda)G$  برحسب ویژه توابع و ویژه مقادیر نظیر شکل یکسانی داشته باشند. برای تحقیق این امر، (۵۶.۱۱) را به ازای  $\kappa_i = 1/\lambda_i$  و  $\kappa = 1/\lambda$  می نویسیم. در این صورت،

$$-\frac{1}{\kappa_i - \kappa} = \frac{\lambda\lambda_i}{\lambda_i - \lambda} = \lambda \left( 1 + \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} \right)$$

و رابطه (۵۶.۱۱) خواهد شد

۱. اختلاف علامت (۲۷.۹) با (۵۶.۱۱) ناشی از قرار دادن جمله غیرهمگن  $f$  در سمت چپ معادله (۵۴.۱۱) است.

$$G(x, x') = \lambda \sum_i u^{(i)}(x)u^{(i)}(x')^* + \lambda^2 \sum_i \frac{u^{(i)}(x)u^{(i)}(x')^*}{\lambda_i - \lambda}$$

$$= \lambda \delta(x - x') + \lambda^2 \sum_i \frac{u^{(i)}(x)u^{(i)}(x')^*}{\lambda_i - \lambda}$$

که در آن از رابطهٔ تمامیت (۱۴.۹) استفاده کرده‌ایم. هستهٔ انتگرالی  $\delta(x - x')$  هم ارز عملگر همانی است؛ لذا، داریم

$$(۵۸.۱۱) \quad \frac{1}{\lambda} G = 1 + \lambda \sum_i \frac{u^{(i)}(x)u^{(i)}(x')^*}{\lambda_i - \lambda}$$

که دارای همان شکل  $1 + \lambda R$  است که در آن  $R$  از عبارت (۴۸.۱۱) به دست می‌آید.

### ۵.۱۱ طرحهای گوناگون

معادلات ولتررا را اغلب می‌توان با مشتقگیری به معادلات دیفرانسیل برگرداند.

مثال

$$(۵۹.۱۱) \quad u(x) = x + \int_0^x xy u(y) dy = x + x f(x)$$

که در آن

$$f(x) = \int_0^x y u(y) dy$$

در این صورت،

$$f'(x) = x u(x) = x[x + x f(x)]$$

با حل این معادلهٔ دیفرانسیل داریم

$$f(x) = -1 + Ce^{x^3/3}$$

در نتیجه،

$$(۶۰.۱۱) \quad u(x) = Cxe^{x^3/3}$$

برای یافتن  $C$ ، در معادلهٔ انتگرال اصلی می‌گذاریم. نتیجه خواهد بود  $C = 1$ .

اگر هسته فقط تابع  $(x - y)$  باشد، آن را هستهٔ تغییر مکان می‌نامند، و اگر حدود

$-\infty$  تا  $+\infty$  باشند، می‌توان از تبدیلات فوریه استفاده کرد. معادلهٔ

$$(۶۱.۱۱) \quad f(x) = \phi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x - y)f(y) dy$$

را در نظر می‌گیریم. تبدیلات فوریه (که با بار نموده شده‌اند)

$$(۶۲.۱۱) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{-ikx} = \bar{f}(k) \quad \text{و غیره}$$

را اختیار می‌کنیم. تبدیل معادلهٔ انتگرال (۶۱.۱۱) مساوی است با

$$(۶۳.۱۱) \quad \bar{f}(k) = \bar{\phi}(k) + \lambda \bar{K}(k)\bar{f}(k)$$

بنابراین،

(۶۴.۱۱) 
$$\bar{f}(k) = \frac{\bar{\phi}(k)}{1 - \lambda \bar{K}(k)}$$
 اگر بتوان این تبدیل را برگرداند، می توان مسئله را حل کرد.

اگر حدود از 0 تا  $x$  و هسته یک هسته تغییر مکان بوده، و توابع ما به ازای  $x < 0$  صفر شوند، از تبدیل لاپلاس استفاده می کنیم، زیرا دارای شکل مناسب انتگرال پیچشی برای این حالت می باشد [ر.ک. معادله (۵۸.۴)].

تکنیک وینر-هویف، که قبلاً (بخش ۵.۸) در رابطه با معادلات دیفرانسیل جزئی مطرح شد، در بعضی از معادلات انتگرال که از نوع وینر-هویف هستند قابل استفاده است:

(۶۵.۱۱) 
$$f(x) = \phi(x) + \int_0^{\infty} K(x-y)f(y) dy \quad (-\infty < x < \infty)$$
 هسته تغییر مکان و برد نیم نامتناهی انتگرالگیری مفاهیم مهمی هستند. فرض کنیم  $f_-(x) = 0$ ،  $x < 0$  و به ازای  $f_+(x) = 0$ ،  $x > 0$ ، که در آن به ازای  $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$  در این صورت،

(۶۶.۱۱) 
$$f_+(x) + f_-(x) = \phi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)f_-(y) dy$$
 حال تبدیلات فوریه را می گیریم:

$$\bar{f}_+(k) + \bar{f}_-(k) = \bar{\phi}(k) + \bar{K}(k)\bar{f}_-(k)$$

که می توان آنها را به شکل زیر نوشت:

(۶۷.۱۱) 
$$\bar{f}_-(k)[1 - \bar{K}(k)] + \bar{f}_+(k) = \bar{\phi}(k)$$

حال فرض کنیم

(۶۸.۱۱) 
$$|K(x)| \lesssim \begin{cases} e^{-\alpha x} & , x \rightarrow \infty \\ e^{\beta x} & , x \rightarrow -\infty \end{cases}$$
 وقتی

بنابراین،  $\bar{K}(k)$  در نوار  $-\beta < \text{Im } k < \alpha$  تحلیلی است. همچنین، فرض کنیم تابع  $\phi(x)$  در بی نهایت دست کم به این خوشرفتاری باشد: لذا،  $\bar{\phi}(k)$  نیز در این نوار تحلیلی هست. با توجه به معادله انتگرال اصلی (۶۵.۱۱)، فرض تحلیلی بودن  $\bar{f}(k)$  در قسمتی از نوار  $-\beta < \text{Im } k < \alpha$  (اگر در تمام نوار نباشد) معقول است. لذا، فرض کنیم هرچیز در (۶۷.۱۱) در نواری چون

$$\gamma < \text{Im } k < \delta$$

تحلیلی باشد. حال  $1 - \bar{K}(k)$  را به دو تابع "تجزیه" می کنیم:

$$1 - \bar{K}(k) = \frac{A(k)}{B(k)}$$

که در آن  $A(k)$  به ازای  $\text{Im } k < \delta$  و  $B(k)$  به ازای  $\text{Im } k > \gamma$  تحلیلی است. توجه کنید که این تجزیه اساساً "هم ارز تجزیه"

$$(۶۹.۱۱) \quad \ln [1 - \bar{K}(k)] = \ln A(k) - \ln B(k)$$

به تفاضل دو تابع است که هر یک در ناحیه مناسبی منتظم است؛ ما اصولاً از قبل طرز انجام این کار را می‌دانیم [ر.ک. معادله (۸۵.۸)]. معادله مبدل فوریه (۶۸.۱۱) ما به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۷۰.۱۱) \quad \bar{f}_-(k)A(k) + \bar{f}_+(k)B(k) = B(k)\bar{\phi}(k)$$

حال  $B(k)\bar{\phi}(k)$  را به طرز آشنایی تجزیه می‌کنیم:

$$(۷۱.۱۱) \quad B(k)\bar{\phi}(k) = C(k) + D(k)$$

که در آن  $C(k)$  به ازای  $\text{Im } k > \gamma$  و  $D(k)$  به ازای  $\text{Im } k < \delta$  تحلیلی است. لذا،

$$(۷۲.۱۱) \quad \bar{f}_+(k)B(k) - C(k) = -\bar{f}_-(k)A(k) + D(k)$$

که در آن تابع سمت چپ به ازای  $\text{Im } k > \gamma$ ، و تابع سمت راست به ازای  $\text{Im } k < \delta$  تحلیلی است. لذا، هر دو باید مساوی یک تابع تمام باشند. به علاوه،  $\bar{f}_+(k)$  و  $\bar{f}_-(k)$  در  $\text{Im } k = \pm \infty$  به صفر می‌روند، و توابع  $A, \dots, D$  می‌توانند در بدترین وضع شبیه چندجمله‌ایها رفتار کنند. لذا، طرفین معادله فوق مساوی یک چندجمله‌ای می‌باشند. این  $f_+$  و  $f_-$  را جز احتمالاً به ازای ثابتهای مجهولی که می‌توان آنها را به روش فیزیکی یا گذاردن در معادله انتگرال اصلی تعیین کرد مشخص می‌نماید.

این روش از یک دستورالعمل مکانیکی بدور است؛ در هر مرحله نیاز به فکر قابل ملاحظه‌ای داریم تا معنی دار بودن محاسبات تضمین گردد. با حل یک مثال نسبتاً ساده، بعضی از مشکلات موجود را توضیح خواهیم داد.

### مثال

$$(۷۳.۱۱) \quad f(x) = e^{-|x|} + \lambda \int_0^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy$$

تبدیل فوریه تابع  $e^{-|x|}$ ، که هم به عنوان هسته و هم جمله غیرهمگن ظاهر می‌شود، عبارت است از

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-|x|} e^{-ikx} = \frac{2}{1+k^2}$$

در نتیجه، تبدیل فوریه معادله انتگرال (۷۳.۱۱) مساوی است با

$$\bar{f}_+(k) + \bar{f}_-(k) = \frac{2}{1+k^2} + \frac{2\lambda}{1+k^2} \bar{f}_-(k)$$

یا

$$(۷۴.۱۱) \quad \frac{k^2 - \xi^2}{k^2 + 1} \bar{f}_-(k) + \bar{f}_+(k) = \frac{2}{1+k^2}$$

که در آن  $\xi^2 = 2\lambda - 1$ . برای معین بودن وضع، فرض می‌کنیم  $\xi$  حقیقی باشد ( $\lambda > \frac{1}{2}$ ). گام بعدی ما نمایش ضریب  $(k^2 - \xi^2)/(k^2 + 1)$  به صورت خارج قسمت  $A(k)/B(k)$  است.

انفرادها و صفرهای این ضرایب عبارتند از  $\pm i$  و  $\pm \xi$ ؛ لذا، برای نوار مشترک که در آن انفرادی نباشد دو حالت رخ می‌دهد. فعلا "نوار"  $0 < \text{Im } k < 1$  را در نظر گرفته، و حالت دیگر، یعنی  $0 < \text{Im } k < 1$ ، را برای بعد می‌گذاریم.

پس رابطه زیر را چگونه می‌توان نوشت

$$\frac{k^2 - \xi^2}{k^2 + 1} = \frac{A(k)}{B(k)}$$

که در آن  $A(k)$  انفراد یا صفر در  $\text{Im } k < 0$  نداشته باشد، ولی  $B(k)$  در  $\text{Im } k > -1$  فاقد صفر یا انفراد باشد؟ جواب روشن است:

$$A(k) = \frac{k^2 - \xi^2}{k - i} \quad B(k) = k + i$$

و معادله اصلی خود (۷۴.۱۱) را در  $B(k)$  ضرب می‌کنیم تا به دست آید [قس. معادله (۷۰.۱۱)]

$$(۷۵.۱۱) \quad \frac{k^2 - \xi^2}{k - i} \bar{f}_-(k) + (k + i) \bar{f}_+(k) = \frac{2}{k - i}$$

حال می‌توانیم طرف راست (۷۵.۱۱) را به دو قسمت تجزیه کنیم [قس. (۷۱.۱۱)]

$$\frac{2}{k - i} = C(k) + D(k)$$

که در آن  $C(k)$  به ازای  $\text{Im } k > -1$  و  $D(k)$  به ازای  $\text{Im } k < 0$  منتظم است. تجزیه بدیهی است؛ می‌توان

$$C(k) = 0 \quad D(k) = \frac{2}{k - i}$$

را اختیار کرد. به‌طور کلی، همان‌طور که در بالا گفتیم، می‌توان به  $C(k)$  یک ثابت افزود مشروط براینکه همان ثابت را از  $D(k)$  کم کنیم؛ یک ثابت در هیچ نقطه انفراد ندارد.

پس اگر اختیار کنیم

$$(۷۶.۱۱) \quad D(k) = \frac{2}{k - i} - iA \quad \text{و} \quad C(k) = iA$$

که در آنها  $A$  ثابت دلخواهی باشد، مسئله ما حل شده است. زیرا از (۷۵.۱۱) باید داشته باشیم

$$\frac{k^2 - \xi^2}{k - i} \bar{f}_-(k) = \frac{2}{k - i} - iA$$

$$\bar{f}_-(k) = \frac{2}{k^2 - \xi^2} - \frac{iA(k - i)}{k^2 - \xi^2}$$

$$f_-(x) = -\frac{2}{\xi} \sin \xi x + A \left( \cos \xi x + \frac{1}{\xi} \sin \xi x \right)$$

و

$$(k + i) \bar{f}_+(k) = iA$$

$$\bar{f}_+(k) = \frac{iA}{k + i}$$

$$f_+(x) = Ae^x$$

در نتیجه، جواب معادله انتگرال (۷۳.۱۱) ما خواهد بود

$$(77.11) \quad f(x) = \begin{cases} Ae^{x} & (x < 0) \\ -\frac{2}{\xi} \sin \xi x + A \left( \cos \xi x + \frac{1}{\xi} \sin \xi x \right) & (x > 0) \end{cases}$$

که در آن  $A$  ثابت دلخواهی می باشد.

فرض کنید نوار نادرست، یعنی  $0 < \text{Im } k < 1$ ، را حدس زده باشیم. در این صورت چه اتفاقی خواهد افتاد؟ جواب به دلایلی که کشفشان بر خواننده است، فرو می ریزد. همچنین، چرا فقط می توانستیم یک ثابت دلخواه وارد (۷۶.۱۱) کنیم؟ دلیلش این است که تابع بعدی، بعد از ثابت، که انفرادی در صفحه مختلط متناهی ندارد یک تابع خطی، مثلاً " $Bk$ "، است. ولی اگر  $Bk$  را به  $C(k)$  یا  $D(k)$  افزوده و آن را از دیگری کم می کردیم،  $\bar{f}_{\pm}(k)$  ما، وقتی  $\text{Im } k \rightarrow \pm \infty$ ، به صفر نزدیک نمی شد، و این رفتار دانسته ما در باب  $\bar{f}_{\pm}(k)$  را نقض می کرد.

کاربردهای عملی این روش کاملاً "طولانی و پیچیده اند". مورس و فشریک (M9) در فصل ۸ و نوبل (N3): شرحی از کاربردهای تکنیکهای وینر-هوپف در مسائل مورد علاقه فیزیک ذکر کرده اند.

### ۶.۱۱ معادلات انتگرال در نظریه پراکندگی

در فصل ۵ به روابطی به شکل

$$(78.11) \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{g(x') dx'}{x' - x - i\epsilon}$$

موسوم به روابط پراکندگی برخوردیم. ریاضیدانان آنها را تبدیلات هیلبرت می نامند. انتگرال (معمولاً) در امتداد بخشی از محور حقیقی گرفته شده، و تابع

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{g(x') dx'}{x' - z}$$

همه جا جز این بخش از محور حقیقی، که خط شاخه‌ای را تشکیل می دهد، تحلیلی است. توجه کنید که

$$f(x + i\epsilon) = F(x)$$

برای یافتن  $f(z)$  یا  $F(x)$  به اطلاعاتی در باب  $g(x)$  نیاز داریم. اگر  $g(x)$  حقیقی باشد، قسمت موهومی  $F(x)$  است. به طور کلی، به دلایلی فیزیکی که در اینجا واردشان نمی شویم،  $g(x)$  را اغلب قسمت جاذب  $F(x)$  می نامند.

به عنوان اولین مثال از حل این معادلات انتگرال، فرض کنید به ما گفته باشند

$$g(x) = |F(x)|^2 h(x)$$

که در آن  $h(x)$  تابع حقیقی معلومی است<sup>۱</sup>. لذا، باید معادله انتگرال غیرخطی

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{|F(x')|^2 h(x') dx'}{x' - x - i\varepsilon} \quad (۷۹.۱۱)$$

را حل کنیم. این معادله به نظر مشکل می‌رسد، ولی با توجه به وارون آن

$$\phi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

به جای تابع تحلیلی  $f(z)$  به میزان قابل توجهی ساده می‌شود. اگر  $f(z)$  هرگز صفر نشود

(یک فرض مهم!)، وارونش همه‌جا جز خط شاخه‌ای تحلیلی است. به علاوه، ناپیوستگی  $\phi$

در امتداد خط شاخه‌ای عبارت است از

$$\begin{aligned} \phi(x+i\varepsilon) - \phi(x-i\varepsilon) &= 2i \operatorname{Im} \phi(x+i\varepsilon) \\ &= -2i \frac{\operatorname{Im} f(x+i\varepsilon)}{|f(x+i\varepsilon)|^2} = -2i \frac{\operatorname{Im} F(x)}{|F(x)|^2} \\ &= -2ih(x) \end{aligned}$$

لذا، با کاربرد ساده فرمول کشی، درست مثل اثبات رابطه پراکندگی اصلی،

$$\phi(z) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{h(x') dx'}{x' - z}$$

و جواب مسئله اصلی ما خواهد بود:

$$F(x) = \frac{1}{\phi(x+i\varepsilon)} = -\left[ \frac{1}{\pi} \int \frac{h(x') dx'}{x' - x - i\varepsilon} \right]^{-1} \quad (۸۰.۱۱)$$

مشروط بر اینکه  $\phi(z)$  هیچ جا صفر نشود.

به عنوان مثال دیگر، فرض کنیم تابع  $g(x)$  با

$$g(x) = h^*(x)F(x) \quad (۸۱.۱۱)$$

داده شده باشد، که در آن  $h(x) = e^{i\delta} \sin \delta$ ،  $\delta(x)$  یک تابع حقیقی معلوم است<sup>۲</sup>. مجدداً،

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{h^*(x')F(x') dx'}{x' - z}$$

را در نظر گرفته و ملاحظه می‌کنیم که

$$f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon) = 2ih^*(x)F(x)$$

لذا، رابطه پراکندگی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)}{2ih^*(x)} = f(x+i\varepsilon)$$

۱. این یک شرط نوعی است که بر یک دامنه پراکندگی الاستیک به وسیله یگانی بودن اعمال

می‌شود. مثلاً،  $F(x)$  بنا بر یگانی بودن باید به شکل

$$F(x) \sim \frac{e^{i\delta(x)} \sin \delta(x)}{h(x)}$$

باشد که در آن  $\delta(x)$  و  $h(x)$  حقیقی‌اند. از این نتیجه می‌شود که  $\operatorname{Im} F(x) = |F(x)|^2 h(x)$

۲. این مجدداً یک شرط نوعی است که ممکن است در یک دامنه پراکندگی به خاطر یگانی

بودن لازم شود.



که، به خاطر اتحاد

$$1 - 2ih^*(x) = e^{-2i\delta(x)}$$

به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{f(x + i\varepsilon)}{f(x - i\varepsilon)} = e^{2i\delta(x)}$$

حال به جای وارون  $f$ ، لگاریتمش را در نظر می گیریم:

$$L(z) = \ln f(z)$$

در این صورت،

$$L(x + i\varepsilon) - L(x - i\varepsilon) = 2i\delta(x)$$

حال به مبحث آشنایی باز گشته ایم.  $L$  یک تابع تحلیلی از  $z$  است (مشروط بر اینکه  $f$  صفر نشود) مگر در امتداد بریدگی؛ و در نتیجه،

$$L(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\delta(x') dx'}{x' - z}$$

و

$$(۸۲.۱۱) \quad F(x) = e^{L(x+i\varepsilon)} = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int \frac{\delta(x') dx'}{x' - x - i\varepsilon} \right]$$

### مراجع

بحثهای متعدد مفیدی از معادلات انتگرال خطی وجود دارند؛ چندتایی که بخصوص برای مؤلفان مفید بوده اند عبارتند از: مارگنو و مورفی (M2)؛ لوویت<sup>۱</sup> (L9)؛ کورانت و هیلبرت (C10)؛ ایروینگ و مولینو (I3)؛ مورس و فشیک (M9). از این مراجع، مارگنو و مورفی بخصوص ساده، فشرده، و قابل فهم اند؛ کورانت و هیلبرت کتب خواندنی زیبایی هستند و ایروینگ و مولینو روشهای تقریبی و مثالهای جالب زیادی را دربردارند. کاربردهای فیزیکی جواب معادلات انتگرال ناشی از روابط پراکندگی را می توان مثلاً در کاستیلجو<sup>۲</sup> و سایرین (C3) و اومنز<sup>۳</sup> (O1) یافت.

### مسائل

۱.۱۱. معادلات انتگرال زیر را حل کنید:

$$u(x) = e^x + \lambda \int_0^1 xt u(t) dt \quad (\text{آ})$$

$$(ب) \quad u(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x-t) u(t) dt \quad (\text{دو ویژه مقدار؛ دو جواب})$$

۲.۱۱. معادله انتگرال

$$f(x) = x + \lambda \int_0^1 y(x+y)f(y) dy$$

را با حفظ جملات تا  $\lambda^2$

(آ) به روش فرد هولم

(ب) به روش نویمان

حل کنید.

۳.۱۱. معادله انتگرال

$$f(x) = e^{-|x|} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy$$

را در صورتی حل کنید که  $f(x)$  به ازای  $x \rightarrow \pm\infty$  متناهی بماند.

۴.۱۱. (آ) ویژه تابع (ها) و ویژه مقدار (ها)ی معادله انتگرال

$$f(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-y} f(y) dy$$

را بیابید.

(ب) معادله انتگرال

$$f(x) = e^x + \lambda \int_0^1 e^{x-y} f(y) dy$$

را حل کنید.

۵.۱۱. معادله انتگرال (۷۳.۱۱)

$$f(x) = e^{-|x|} + \lambda \int_0^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy \quad (-\infty < x < \infty; \lambda > \frac{1}{2})$$

را مستقیماً، بدون استفاده از تبدیلات فوریه، حل کرده، نتیجه خود را با (۷۷.۱۱) مقایسه نمایید.

۶.۱۱. نمودارهای (با ضرایب) صورت و مخرج مرتبه ششم بسط فرد هولم را بنویسید.

۷.۱۱. معادلات انتگرال زیر را حل کنید:

$$f(x) = x^2 + \int_0^1 xyf(y) dy \quad (\text{آ})$$

$$f(x) = x + \int_0^x f(y) dy \quad (\text{ب})$$

۸.۱۱. معادله انتگرال

$$f(x) = e^{-|x|} + \lambda \int_0^{\infty} f(y) \cos xy dy$$

را حل کنید. راهنمایی. تبدیل کسینوسی معادله انتگرال را اختیار کنید.

۹.۱۱. معادله انتگرال (فرد هولم) را بیابید که جوابهایش فرکانسهای نرمال و مدهای

نرمال یک تار کشیده مرتعش به طول  $L$  با دو سر ثابت را به ما بدهند.

۱۰.۱۱. (آ) باتوجه به ویژه مقادیر، نشان دهید که ماتریس دلخواه  $M$  از معادله زیر

تبعیت می‌کند:

$$\det [e^M] = \exp [\text{Tr } M]$$

(ب) بدون توجه به دقت لازم برای رفتن از ماتریسها به عملگرهای هسته<sup>۱</sup> انتگرال ، نشان دهید که (۲۶.۱۱) را می توان به طور صوری چنین نوشت :

$$D(\lambda) = \det(1 - \lambda K)$$

و صورت  $D(x, y, \lambda)$  جواب فردهولم (۲۱.۱۱) به شکل ( صوری ) زیر می باشد :

$$D(x, y, \lambda) = \frac{K \det(1 - \lambda K)}{1 - \lambda K}$$

۱۱.۱۱. فرض کنید  $\phi_\alpha(x)$  مجموعه ای نام از توابع متعامد باشد ، و هسته<sup>۱</sup>  $K(x, x')$  را به صورت سری بسط دهید :

$$K(x, x') = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \phi_\alpha(x) \phi_\beta^*(x')$$

(آ) اگر  $K(x, x')$  بخواهد هسته<sup>۱</sup> هرمیتی باشد ، ضرایب  $c_{\alpha\beta}$  در چه شرطی باید صدق کنند ؟

(ب) نشان دهید یک چنین هسته<sup>۱</sup> هرمیتی را همیشه می توان به شکل (۲۸.۱۱) نوشت مشروط بر اینکه فقط تعدادی متناهی از ضرایب  $c_{\alpha\beta}$  ناصفر باشند .

۱۲.۱۱. در یک مسئله<sup>۱</sup> یک بعدی ( به نام مسئله<sup>۱</sup> میلن ) راجع به انتقال تابش در یک جو پراکننده به طرف بالا ،  $I(x, \theta)$  ، یعنی شدت تابش در جهتی که با امتداد قائم زاویه<sup>۱</sup>  $\theta$  می سازد در ارتفاع  $x$  از معادله<sup>۱</sup> انتگرال زیر تبعیت می کند :

$$(۱) \quad \cos \theta \frac{\partial I(x, \theta)}{\partial x} = -\kappa I(x, \theta) + \frac{\kappa}{4\pi} B(x)$$

که در آن  $\kappa$  وارون میانگین مسافت آزاد پراکننده بوده و  $B(x) = 2\pi \int I(x, \theta) d(\cos \theta)$  شدت تابش گل در ارتفاع  $x$  می باشد . جمله<sup>۱</sup> اول سمت راست (۱) نمایش کاهش  $I(x, \theta)$  ناشی از پراکندگی بوده ، و جمله<sup>۱</sup> دوم نمایش افزایش شدت ناشی از تابش پراکنده شده از سایر جهات می باشد .

(آ) فرض کنید گسترش جو رو به پایین از سطحش در  $x=0$  تا  $x=-\infty$  بوده و شرط مرزی به صورت زیر باشد :

$$I(0, \theta) = 0 \quad , \quad -1 < \cos \theta < 0$$

( یعنی ، هیچ تابشی از بالا به جو فرود نمی آید ) . ثابت کنید

$$I(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\kappa}{4\pi} \int_x^0 e^{\frac{\kappa(x'-x)}{\cos \theta}} B(x') \frac{dx'}{-\cos \theta} & (-1 < \cos \theta < 0) \\ \frac{\kappa}{4\pi} \int_{-\infty}^x e^{\frac{\kappa(x'-x)}{\cos \theta}} B(x') \frac{dx'}{\cos \theta} & (0 < \cos \theta < 1) \end{cases}$$

و مفهوم فیزیکی این روابط را بیان کنید .

(ب) نشان دهید  $B(x)$  از معادله<sup>۱</sup> انتگرال همگن خطی

$$B(x) = \int_{-\infty}^0 dx' K(x-x') B(x')$$

تبعیت می‌کند، و هسته  $K(x-x')$  را بر حسب تابع انتگرال نمایی  $E_1(z) = \int_1^\infty (dt/t)e^{-tz}$  حساب کنید. [توجه کنید که این معادله انتگرال اساساً "به شکل وینر - هویف (۱۱.۶۵) است؛ حلش را می‌توان در مورس و فشریک (M9)، بخش ۵.۸، یافت.]

۱۳.۱۱. معادله انتگرال

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt' \phi(t') e^{-\Gamma|t-t'|} = \lambda \phi(t) \quad \left(-\frac{1}{2}T < t < \frac{1}{2}T\right)$$

در نظریه آماری شمارش فوتون مورد توجه است [ر. ک. بدارد<sup>۱</sup> (B1)]. نشان دهید

که ویژه مقادیر  $\lambda_k$  ی این معادله عبارتند از

$$\Gamma \lambda_k = \frac{2}{1 + u_k^2}$$

که در آن  $u_k$  ها ریشه‌های معادله متعالی

$$(\Gamma T u_k) = \frac{2u_k}{u_k^2 - 1}$$

می‌باشند.

## حساب تغییرات

مسئله اصلی حساب تغییرات یافتن تابعی چون  $y(x)$  است به طوری که یک تابعی، یا تابع این تابع، به ازای تغییرات کوچکی از  $y(x)$  مقدار مانا داشته باشد. فصل را با این توضیح متعارف آغاز می‌کنیم که چگونه یک مسئله تغییرات ساده به معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ منجر می‌شود. در بخش ۲۰۱۲، تعمیم به انواع مختلف مسائل تغییراتی همراه با مسائل شامل قیود کمکی بر تغییرات مجاز تابع  $y(x)$  مطرح خواهند شد. بالاخره، در بخش ۳۰۱۲، چند رابطه بین حساب تغییرات و مسائل ویژه مقداری شامل معادلات دیفرانسیل، معادلات ماتریسی، و معادلات انتگرال مورد بحث قرار خواهند گرفت.

### ۱۰۱۲ معادله اویلر-لاگرانژ

مسئله اصلی حساب تغییرات را با چند مثال توضیح می‌دهیم. تابع

$$(10.12) \quad F\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right)$$

و انتگرال

$$(20.12) \quad I = \int_a^b F\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) dx = I[y(x)]$$

را در نظر می‌گیریم. یک چنین انتگرال را اغلب یک تابعی می‌نامند. این تعمیمی است از تابع که در آن یک عدد به جای عددی دیگر به یک تابع وابسته است.

حال می‌خواهیم تابع  $y(x)$  را طوری اختیار کنیم که تابعی

$$I[y(x)]$$

ماکزیمم، مینیمم، یا (به طور کلی) مانا باشد. یعنی، می‌خواهیم  $y(x)$  بیابیم که اگر

$y(x)$  را با  $y(x) + \xi(x)$  عوض کنیم، به شرطی که قدر کافی کوچک بودن  $\xi$ ،  $I$  تا مرتبه  $\xi$  بلا تغییر باشد.

برای تحویل این مسئله به مسئله آشنا مانا ساختن یک تابع معمولی، تغییر مکان زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(۳.۱۲) \quad y(x) \rightarrow y(x) + \alpha\eta(x)$$

که در آن  $\alpha$  کوچک و  $\eta(x)$  دلخواه است. اگر  $I[y(x)]$  بخواهد مانا باشد، باید به ازای هر  $\eta(x)$  داشته باشیم

$$(۴.۱۲) \quad \left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

اما

$$I(\alpha) = \int_a^b F(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x) dx$$

(۵.۱۲)

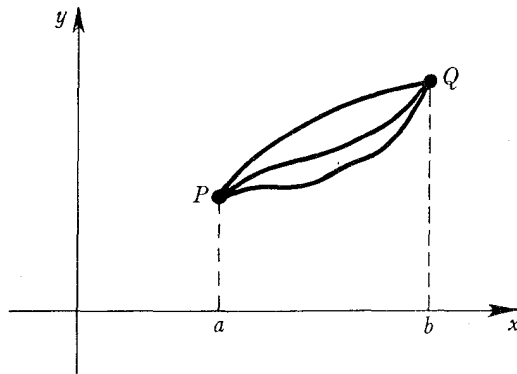
$$= I(0) + \alpha \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx + O(\alpha^2)$$

لذا، باید (به ازای هر  $\eta$ )

(۶.۱۲)

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0$$

برای ساده کردن مسئله، ابتدا شرط دیگری اعمال می‌کنیم. فقط تغییراتی را مجاز می‌دانیم که در نقاط انتهایی  $a$  و  $b$  صفر شوند. یعنی، از بین تمام توابعی که دو نقطه ثابت  $P$  و  $Q$  را به هم وصل می‌کنند می‌خواهیم تابعی را انتخاب کنیم که  $I[y(x)]$  را مانا سازد (ر.ک. شکل ۱۰.۱۲). با نمادهای (۳.۱۲) که به کار برده‌ایم، لازم است



شکل ۱۰.۱۲ منحنیهای مختلف  $y(x)$  که نقاط انتهایی ثابت

$P$  و  $Q$  را به هم وصل می‌کنند

$$\eta(a) = \eta(b) = 0$$

حال جمله دوم (۶.۱۲) را جزء به جزء انتگرالگیری می‌کنیم. با این کار معادله به

صورت زیر درمی آید:

$$(۷.۱۲) \quad 0 = \eta \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_a^b + \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx$$

قسمت انتگرالگیری شده به خاطر صفر بودن  $\eta$  در دو انتها صفر می شود. لذا، اگر انتگرال

بخواهد به ازای  $\eta(x)$  دلخواه صفر شود، باید داشته باشیم

$$(۸.۱۲) \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

طرف چپ این معادله را اغلب به صورت  $\delta F / \delta y$  نوشته، و آن را مشتق تغییری یا تابعی  $F$  نسبت به  $y$  می نامیم<sup>۱</sup>.

معادله دیفرانسیل (۸.۱۲) را معادلهٔ اویلر-لاگرانژ می نامیم. این معادله،

همراه با شرایط مرزی مناسب، با مسئلهٔ تغییری اصلی هم ارز خواهد بود.

بسیاری از قوانین فیزیک را می توان برحسب یک معادلهٔ دیفرانسیل یا یک اصل

تغییری هم ارز بیان کرد. یک مثال مهم در مکانیک کلاسیک این است که اصل (تغییری)

هامیلتون

$$(۹.۱۲) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

با معادلات حرکت لاکرانژ

$$(۱۰.۱۲) \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

هم ارز است، که در آن لاکرانژین  $L$  تابعی از مختصات (تعمیم یافته)  $q_i$  و سرعتهای  $\dot{q}_i$

و زمان می باشد. معادلات لاکرانژ خود با معادلات نیوتن هم ارز می باشند.

در بعضی حالات، می توان یکبار از معادلهٔ اویلر-لاگرانژ انتگرال گرفت. مثلاً،

فرض کنیم  $F$  تابع  $y$  نباشد. در این صورت، معادلهٔ اویلر-لاگرانژ (۸.۱۲) عبارت است از

$$(۱۱.۱۲) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \text{ثابت} ; \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

به عنوان مثالی دیگر، فرض کنیم  $F$  تابع  $x$  نباشد. مجدداً، می توان معادلهٔ اویلر

-لاگرانژ را به صورت زیر به یک معادلهٔ مرتبهٔ اول تحویل کرد:

$$(۱۲.۱۲) \quad \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'}$$

معادلهٔ اویلر-لاگرانژ، پس از ضرب در  $y'$ ، عبارت است از

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

با افزودن و کاستن  $y''(\partial F / \partial y')$ ، خواهیم داشت

۱. به بیان دیگر، گاهی عبارت سمت چپ معادلهٔ (۸.۱۲) را مشتق تغییری  $\delta I / \delta y$  تابعی

نظیر  $I$  تعریف می کنند.

$$\frac{d}{dx} \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

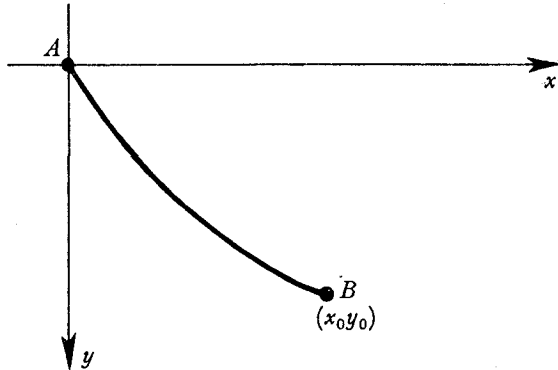
که معادله مرتبه اول

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{ثابت} \quad (۱۳.۱۲)$$

را به ما می دهد.

به یک مثال می پردازیم. فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو نقطه از یک صفحه قائم بوده، و  $A$  از  $B$  بالاتر باشد. در امتداد چه منحنی بین  $A$  و  $B$  یک ذره بدون اصطکاک از  $A$  به  $B$  در کمترین زمان می لغزد؟ این مسئله مشهوری است که توسط جان برنولی عنوان شده است. منحنی به منحنی کمترین زمان معروف شده است.

یک ساده سازی آشکار قرار دادن  $A$  در مبدأ و سنجش  $y$  رو به پایین، مثل شکل ۲.۱۲ است. می خواهیم زمان پایین آمدن را مینیمم سازیم. تندی ذره مساوی است با



شکل ۲.۱۲ منحنی کمترین زمان

$$v = \frac{ds}{dt}$$

که در آن  $s$  طول قوس در امتداد مسیر است. لذا،

$$dt = \frac{ds}{v}$$

و زمان کل مساوی است با

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

عنصر طول قوس عبارت است از  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$  و، اگر ذره از حالت سکون از  $A$  شروع به حرکت کرده باشد، اصل بقای انرژی به ما می گوید که

$$v = \sqrt{2gy}$$

لذا،

$$t = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2av}} dx \quad (۱۴.۱۲)$$

این حالتی است که در آن انتگرالده شامل  $x$  نیست. با حذف عامل نامربوط  $\sqrt{2g}$ ،



$$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

و معادله [ر.ک. (۱۳.۱۲)]

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{ثابت}$$

نتیجه می‌دهد که

$$y(1+y'^2) = C$$

عبارت  $1+y'^2$  را می‌توان با جانشانی

$$y' = \text{ctn } \theta$$

ساده کرد. در این صورت،

$$y = \frac{C}{1+y'^2} = C \sin^2 \theta = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

و

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{y'} \frac{dy}{d\theta} = C \tan \theta \sin 2\theta = C(1 - \cos 2\theta)$$

با انتگرالگیری از این معادله، داریم

$$x = \frac{C}{2}(2\theta - \sin 2\theta)$$

که در آن در مبداء،  $x=y=0$ ،  $\theta=0$ . با فرض  $C=2A$  و  $2\theta=\phi$ ، خواهیم داشت

$$x = A(\phi - \sin \phi)$$

(۱۵.۱۲)

$$y = A(1 - \cos \phi)$$

اینها معادلات پارامتری چرخزاداند، منحنی که یک نقطه از لبه یک چرخ که در امتداد محور  $x$  می‌غلتد خواهد پیمود.

### ۲.۱۲ تعمیمهای مسئله اصلی

تعمیم زیر از مسئله اصلی ما کاملاً "بدیهی" است. فرض کنید بخواهیم تابعی

$$I[y(x), z(x)] = \int_a^b F(y, y', z, z', x) dx \quad (16.12)$$

را تحت شرایط نقطه انتهایی ثابت

$$y(a) = y_1 \quad y(b) = y_2$$

$$z(a) = z_1 \quad z(b) = z_2$$

ماکزیم سازیم. فقط برای هر متغیر وابسته جداگانه یک معادله اولیر - لاگرانژی نویسیم:

$$\frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

(۱۷.۱۲)

$$\frac{\delta F}{\delta z} = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} = 0$$

تعمیم ساده دیگر وارد کردن مشتقات بالاتر است. فرض کنید بخواهیم

$$(18.12) \quad I[y(x)] = \int_a^b F(y, y', y'', x) dx$$

را با  $y$  و  $y'$  ثابت گر  $a$  و  $b$  ماکزیمم سازیم. به آسانی معلوم می شود که شرط مربوطه عبارت است از

$$(19.12) \quad \frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0$$

توجه کنید که تعریف مشتق تغییری را تعمیم داده ایم.

اینک حالت چندمتغیر مستقل را در نظر می گیریم. تابعی زیر را در نظر می گیریم:

$$(20.12) \quad I[f(x, y)] = \iint_G F(f, f_x, f_y, x, y) dx dy$$

که در آن  $G$  ناحیه ای از صفحه  $xy$  بوده،  $f_x = \partial f / \partial x$ ، و  $f_y = \partial f / \partial y$  تابع  $f$  باید طوری تغییر کند که مقادیرش بر مرز  $G$  ثابت بماند. در این صورت، شرط مانا بودن  $I[f]$  عبارت است از

$$(21.12) \quad \frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial f_y} = 0$$

مجدداً، تعریف مشتق تغییری تعمیم یافته است.

در تعبیر مشتقات مختلف در معادله (21.12) کمی دقت لازم است. در محاسبه

$\partial F / \partial f_x$ ،  $\partial F / \partial f$ ، و غیره در معادله (21.12)، همه متغیرهای  $F$ ، یعنی  $f$ ،  $f_x$ ،  $f_y$ ،  $x$  و  $y$ ، مستقل گرفته می شوند. برای مشتق  $d/dx$  در  $(d/dx)(\partial F / \partial f_x)$ ،  $x$  و  $y$  متغیرهای مستقل اند، و در مشتگیری  $d/dx$ ،  $y$  ثابت گرفته می شود. لذا،  $[df(x, y)]/dx$  یعنی  $\partial f / \partial x$  و معادله اوپلر - لاگرانژ (21.12) یک معادله دیفرانسیل جزئی قراردادی نسبت به  $f(x, y)$  می باشد.

ما در مثال منحنی کمترین زمان دیدیم که شایسته است جواب به صورت پارامتری

بیان شود؛ یعنی، به شکل

$$x = x(t) \quad y = y(t)$$

که در آن  $t$  پارامتر است. لذا، می توان مسئله را تعیین این دو تابع، به جای تنها تابع

$y(x)$ ، گرفت. اگر  $x$  و  $y$  را توابعی از  $t$  بگیریم، تابعی

$$(22.12) \quad I = \int_a^b F(y, y', x) dx$$

به صورت زیر درمی آید.

$$(23.12) \quad \begin{aligned} I &= \int_{t_0}^{t_1} F\left(y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, x\right) \dot{x} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt \end{aligned}$$

که در آن  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $\dot{y} = dy/dt$ ,  $\mathcal{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}\mathcal{F}(y, \dot{y}/\dot{x}, x)$  در این صورت، معادلات اوایلر خواهند بود

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} = 0$$

(۲۴.۱۲)

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} = 0$$

خواهیم دید که معادلات (۲۴.۱۲) مستقل نیستند؛ یعنی، یکی دیگری را در بر دارد. در واقع، دانشجو می‌تواند نشان دهد که

$$\dot{x} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} \right) + \dot{y} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} \right) = 0$$

(۲۵.۱۲)

حال تعمیم بسیار مهمی را در نظر می‌گیریم، و آن تغییر نقاط انتهایی است. برای شروع، فرض کنید بخواهیم تابعی

$$I = \int_a^b F(y, y', x) dx$$

را ماکزیمیم سازیم ولی  $y(b)$  را دلخواه بگذاریم. مثل قبل، اگر به  $y$  نمو  $\eta(x)$  بدهیم، تغییر  $I$  عبارت است از

$$\delta I = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx$$

(۲۶.۱۲)

$$= \eta \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_a^b + \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx$$

واضح است که معادله اوایلر-لاگرانژ هنوز باید برقرار باشد؛ در غیر این صورت، می‌توان تغییر  $\eta$  با  $\eta(b) = 0$  را یافت که  $I$  را تغییر داده است. ولی، علاوه بر این، اگر  $\delta I$  بخواهد به ازای  $\eta(b)$  دلخواه صفر شود، باید داشته باشیم

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=b} = 0$$

(۲۷.۱۲)

اگر هر دو نقطه انتهایی آزاد باشند،  $\partial F / \partial y'$  بوضوح باید در دو سر صفر شود. به عنوان حالتی دیگر، فرض کنیم  $y$  در  $x = a$  ثابت بوده ولی نقطه انتهایی دیگر آزاد باشد که هر جا بر منحنی

$$g(x, y) = 0$$

قرار گیرد. داریم

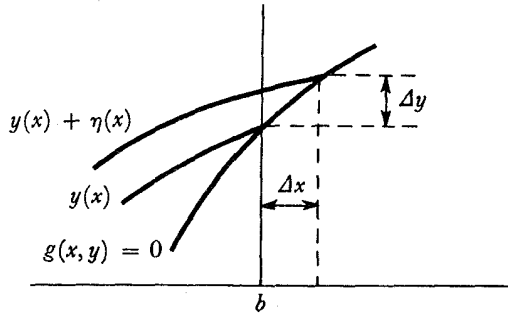
$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \Big|_a^b + \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx + F(b) \Delta x$$

(۲۸.۱۲)

که در آن  $\Delta x$  تغییر مکان نقطه انتهایی بالایی، مثل شکل ۳.۱۲، است. توجه کنید که شرط  $\Delta g = 0$  در انتهای منحنی نتیجه می‌دهد که  $\Delta y = \eta(b) + y'(b) \Delta x$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} (\eta + y' \Delta x) = 0$$



شکل ۳.۱۲ تغییر نقطه انتهایی  $b$  در امتداد منحنی  $g(x, y) = 0$

یا

$$\left( \frac{\partial g}{\partial x} + y' \frac{\partial g}{\partial y} \right) \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \eta = 0$$

همچنین، طبق (۲۸.۱۲)، شرط  $\delta I = 0$ ، در کنار معادله اویلر - لاگرانژ، شرط انتهایی

$$(۲۹.۱۲) \quad x = b \quad \text{در} \quad F \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta = 0$$

را خواهد داد. با حذف  $\Delta x$  و  $\eta$  از معادلات (۲۸.۱۲) و (۲۹.۱۲) شرط مورد نظر ما،

یعنی

$$(۳۰.۱۲) \quad \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

حاصل می‌شود، که در آن هر چیز در نقطه انتهایی مورد بحث حساب شده است.

به عنوان مثالی از مورد استعمال این شرط، مسئله یافتن منحنی را در نظر می‌گیریم

که یک ذره در امتدادش از یک نقطه معلوم تا یک منحنی معلوم، به جای تا یک نقطه معلوم

هرچه سریعتر پایین بیاید. مثل (۱۴.۱۲)،

$$F = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$$

در نتیجه، شرط (۳۰.۱۲) در نقطه انتهایی متغیر عبارت است از

$$\frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{y'}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

یا

$$(۳۱.۱۲) \quad y' = \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^{-1}$$

این به ما شهودا" می گوید که منحنی سریعترین نزول باید منحنی " مقصد " را در زاویه قائمه قطع کند. دانشجو می تواند نشان دهد که این تعامد  $y(x)$  و  $g(x)$  وقتی حاصل است که انتگرالده  $F(x, y, y')$  به شکل  $f(x, y)\sqrt{1+y'^2}$  باشد.

ما تعمیم نهایی مسئله اصلی مان را در نظر می گیریم، و آن ماکزیم سازی یک تابعی مانند

$$I[y(x)] = \int_a^b F(y, y', x) dx$$

تحت این شرط، یا قید، است که تابعی دیگر

$$J[y(x)] = \int_a^b G(y, y', x) dx$$

ثابت بماند. اینها را گاهی مسائل هم محیطی می نامند، زیرا مسئله کلاسیک یافتن منحنیی به طول ثابت است که مساحت ماکزیم را دربر گیرد. مثال دیگر یافتن منحنی  $y(x)$  به طول معلوم  $L$  است که حجم حاصل از دوران  $y(x)$  حول محور  $x$  را ماکزیم سازد.

تکنیک مرسوم برای پرداختن به مسائلی از این نوع مستلزم استفاده از ضرایب لاگرانژ است. حال استفاده مقدماتی از ضرایب لاگرانژ را مرور می کنیم. فرض کنید بخواهیم تابع دو متغیره  $f(x, y)$  را ماکزیم سازیم. باید شرایط

$$f_x = 0 \quad f_y = 0$$

برقرار باشند. حال فرض کنید بخواهیم  $f(x, y)$  را تحت شرط

$$g(x, y) = \text{ثابت}$$

ماکزیم سازیم. برای شروع،  $df = f_x dx + f_y dy = 0$ ، اگر  $dx$  و  $dy$  مستقل بودند، می شد نتیجه گرفت  $f_x = f_y = 0$ . لیکن، اینها مستقل نیستند، ولی تحت شرط

$$dg = g_x dx + g_y dy = 0$$

می باشند. لذا،

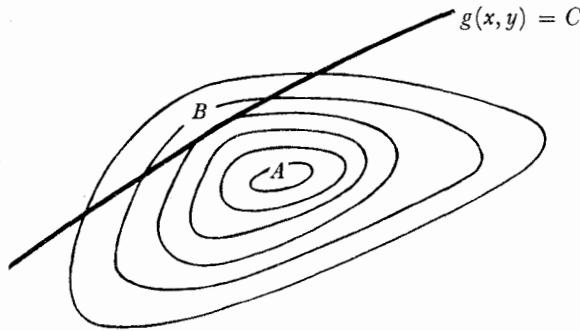
$$f_x/g_x = f_y/g_y$$

اگر نسبت مشترک را  $\lambda$  بنامیم، خواهیم داشت

$$(۳۲.۱۲) \quad f_x - \lambda g_x = 0 \quad f_y - \lambda g_y = 0$$

اینها همان معادلاتی هستند که در ماکزیم سازی تابع  $f - \lambda g$  (ثابت  $\lambda$ ) بدون قید به دست می آیند.  $\lambda$  را یک ضریب لاگرانژ می نامند. جوابها بوضوح تابع  $\lambda$  اند. طوری تعدیل می شود که  $g(x, y)$  مقدار صحیح را بگیرد.

نتیجه تعبیر هندسی ساده ای دارد. نگاشت کنتروری  $f(x, y)$  را مثل شکل ۴.۱۲ در نظر می گیریم. همچنین، خط ثابت  $g(x, y)$  نموده شده است. اگر قیدی در کار نبود، جواب ماکزیم  $f$  بوضوح نقطه  $A$  ("قله کوه") بود. با این قید که باید روی منحنی



شکل ۴.۱۲ کنتورهای تراز برای تابع  $f(x, y)$  و منحنی  $g(x, y) = C$

ثابت  $g(x, y) = C$  باشیم، جواب بوضوح نقطه  $B$  است که در آن منحنیهای ثابت  $g = C$  و ثابت  $f = C$  موازی می‌باشند. این همان نتیجه (۳۲.۱۲) است که در بالا به دست آمد. همین تکنیک برای هر تعداد قید به کار می‌رود (البته، باید تعداد قیدها از تعداد

متغیرهای مستقل کمتر باشد) اگر بخواهیم  $f(x, y, z, \dots)$  را تحت

$$g_1(x, y, z, \dots) = \text{ثابت}$$

(۳۳.۱۲)

$$g_2(x, y, z, \dots) = \text{ثابت}$$

ماکزیم سازیم، کافی است تابع  $f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \dots$ ، که در آن  $\lambda$  ها ضرایب لاگرانژ (ثابت) مجهولند، ماکزیم شود.

این روش برای توابع غیرهولونوم، یعنی با قیدهای انتگرال ناپذیر، نیز کار می‌کند.

فرض کنید قید

$$(۳۴.۱۲) \quad A(x, y, \dots) dx + B(x, y, \dots) dy + C(x, y, \dots) dz + \dots = 0$$

را بر تغییرات خود داشته باشیم که نمی‌تواند انتگرال گرفته شود (یا راه انتگرالگیری آن را ندانیم). در این صورت،  $f(x, y, z, \dots)$  با حل

$$f_x = \lambda A$$

$$f_y = \lambda B$$

و غیره

ماکزیم می‌شود.

حال به مسئله حساب تغییرات خود باز می‌گردیم. به آسانی می‌توان نشان داد که راه ماکزیم‌سازی  $\int F dx$ ، تحت قید ثابت  $\int G dx = \text{ثابت}$ ، حل معادله اویلر-لاگرانژ برای  $F + \lambda G$  است، که در آن  $\lambda$  یک ضریب لاگرانژ (ثابت) مجهول است.

برای نشان دادن این طرق متعددی وجود دارد. یک راه توجه به تغییرات دو تابعی

است که از تغییر  $y$  در  $x$  حاصل می‌شوند.

$$\delta I = \int \frac{\delta F}{\delta y} \delta y \, dx$$

(۳۵.۱۲)

$$\delta J = \int \frac{\delta G}{\delta y} \delta y \, dx$$

حال شرط می‌کنیم به ازای هر  $\delta y$  که  $\delta I = 0$ ،  $\delta J = 0$  نیز صفر شود. واضح است که این فقط وقتی ممکن است که نسبت  $\delta F/\delta y$  و  $\delta G/\delta y$  ثابتی مستقل از  $x$  باشد. این هم ارز آن است که

$$\int (F + \lambda G) \, dx \quad (۳۶.۱۲)$$

را مانا سازیم.

راه دیگر رسیدن به نتیجه فوق استدلالات زیر است.

۱. می‌خواهیم  $y(x)$  را طوری بیابیم که  $I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \, dx$  تحت تغییرات  $\delta y(x)$  مقید به شرط

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') \, dx = J_0 = \text{ثابت}$$

ماکزیمم باشد.

۲. یک مسئله دقیقاً "هم ارز یافتن  $y(x)$  است که  $I[y(x)] + \lambda J[y(x)]$  را، که در آن  $\lambda$  ثابت است، تحت این تغییرات مقید ماکزیمم سازد.

۳. تابع  $y(x, \lambda)$  که  $I + \lambda J$  را به ازای تغییرات دلخواه  $\delta y$  ماکزیمم می‌سازد از معادله معمولی اویلر - لاگرانژ برای انتگرالده  $F + \lambda G$  به دست می‌آید.

۴. اگر مقدار  $\lambda_1$  به دست آمده باشد که به ازای آن جواب  $y(x, \lambda_1)$  در شرط  $J[y(x, \lambda_1)] = J_0$  صدق کند، این  $y(x)$ ،  $I + \lambda J$  را تحت تغییرات مقید نیز ماکزیمم ساخته و جواب مسئله ما خواهد بود.

### ۳.۱۲ روابط بین مسائل ویژه مقداری و حساب تغییرات

فرض کنید بخواهیم یک معادله دیفرانسیل خاص را حل کنیم. اغلب می‌توان یک تابعی ابداع کرد که معادله اویلر - لاگرانژ آن همان معادله دیفرانسیل مورد بحث باشد. مثلاً "معادله لاپلاس

$$\nabla^2 \phi = 0$$

را در حجم  $V$  در نظر می‌گیریم، که در آن  $\phi$  روی مرز  $V$  داده شده است. به آسانی معلوم می‌شود که حل این معادله هم ارز مینیمم سازی تابعی

$$I[\phi(x)] = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \phi)^2 \, d^3x \quad (۳۷.۱۲)$$

می‌باشد. انتگرالده (۳۷.۱۲) عبارت است از

$$F = \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

در نتیجه،

$$\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial \phi} = 0$$

و غیره ،

و معادلهٔ اویلر - لاگرانژ عبارت از

$$\sum_{xyz} \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)} = \nabla^2 \phi = 0$$

به عنوان مثال دیگر، معادلهٔ استورم - لیوویل (۹۰۹)

$$(۳۸.۱۲) \quad \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u(x) + \lambda \rho(x)u(x) = 0 \quad (a < x < b)$$

معادلهٔ اویلر - لاگرانژ برای تابعی

$$(۳۹.۱۲) \quad I[u(x)] = \int_a^b [pu'^2 + (q - \lambda \rho)u^2] dx$$

است. ولی این بهترین شکل نیست، زیرا  $\lambda$  عموماً مجهول است. به نحو دیگر، می‌توان

$$(۴۰.۱۲) \quad I[u(x)] = \int_a^b (pu'^2 + qu^2) dx$$

را تحت شرط

$$(۴۱.۱۲) \quad J[u(x)] = \int_a^b \rho u^2 dx = \text{ثابت}$$

مینیم ساخت. در این صورت، ویژه مقدار  $\lambda$  به عنوان ضریب لاگرانژ وارد می‌شود. چون

(۴۱.۱۲) چیزی جز شرط نرمالی سازی برای  $u(x)$  نیست، واضح است که روند تغییری اخیر

هم ارز مینیم سازی

$$(۴۲.۱۲) \quad K[u(x)] = \frac{I[u(x)]}{J[u(x)]}$$

می‌باشد. به علاوه، اگر معادلهٔ (۳۸.۱۲) را در  $u(x)$  ضرب و از  $a$  تا  $b$  انتگرالگیری کرده،

و انتگرالگیری جز به جزء باشد، خواهیم دید که مقدار مانای  $K[u]$  در واقع مساوی ویژه

مقدار  $\lambda$  می‌باشد.

همچنین، می‌توان نشان داد (مثلاً، ر.ک. موریس و فشیک (M9)، بخش ۳۰۶)

که ویژه مقادیر  $\lambda_n$  معادلهٔ دیفرانسیل استورم - لیوویل از خواص زیر برخوردارند:

۱. کوچکترین ویژه مقدار  $\lambda_0$  وجود دارد؛

۲. وقتی  $n \rightarrow \infty$ ،  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ ؛

۳. به طور دقیقتر، وقتی  $n \rightarrow \infty$ ،  $\lambda_n \sim n^2 \times \text{ثابت}$ .

اما، طبق (۴۲.۱۲) و تبصرهٔ بعد از آن، مقادیر مانای تابعی

$$(۴۳.۱۲) \quad K[u(x)] = \frac{\int_a^b (pu'^2 + qu^2) dx}{\int_a^b \rho u^2 dx}$$

ویژه مقادیر  $\lambda_n$  می‌باشند. لذا، مینیمم مطلق  $K$  کوچکترین ویژه مقدار  $\lambda_0$  است. این روش



بسیار توانایی برای محاسبه کوچکترین ویژه مقدار می باشد. روش را می توان به آسانی به مسائل چندبعدی تعمیم داد.

توجه کنید که اگر تابع امتحانی  $u(x)$  را که "تا مرتبه اول" مناسب است در (۴۳.۱۲) بگذاریم، یک ویژه مقدار تقریبی به ما می دهد که تا "مرتبه دوم" مناسب خواهد بود. زیرا فرض کنیم

$$(44.12) \quad u = u_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots$$

که در آن  $u_i$  ها ویژه توابع واقعی بوده و  $c_i$  ها کوچک اند. اگر  $u_i$  ها نرمالی شده باشند،  $u$  نیز جز به ازای جملات مرتبه دوم نرمالی شده است. در این صورت، تخمین ما از  $\lambda_0$  خواهد بود

$$\int_a^b [p(u'_0 + c_1 u'_1 + \dots)^2 + q(u_0 + c_1 u_1 + \dots)^2] dx$$

ولی به ازای  $i \neq j$

$$\int_a^b (p u_i'^2 + q u_i^2) dx = \lambda_i$$

و

$$\int_a^b (p u_i u_j' + q u_i u_j) dx = 0$$

(ثابت کنید!). لذا، تخمین ما از  $\lambda_0$  خواهد بود

$$(45.12) \quad (\lambda_0 + c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \dots)[1 + O(c^2)]$$

که، همانطور که بیان شد، اختلافش با  $\lambda_0$  در جملات مرتبه دوم می باشد. محاسبه جملات مرتبه دوم جالب است، که در آن لازم است

$$\int_a^b p u^2 dx = 1 + c_1^2 + c_2^2 + \dots$$

در این صورت، تخمین (۴۳.۱۲) خواهد بود

$$K = \frac{\lambda_0 + c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \dots}{1 + c_1^2 + c_2^2 + \dots}$$

$$K = \lambda_0 + c_1^2 (\lambda_1 - \lambda_0) + c_2^2 (\lambda_2 - \lambda_0) + \dots$$

این نتیجه ویژگیهای نوعی یک محاسبه تغییراتی را نشان می دهد، که  $K$  نمی تواند از  $\lambda_0$  کمتر باشد و فقط وقتی مساوی  $\lambda_0$  است که تمام  $c_i = 0$  ها؛ یعنی،  $u = u_0$ .

مثال. کوچکترین ویژه مقدار  $\lambda$  را تخمین می زنیم که

$$(46.12) \quad x=1 \text{ و } x=0 \text{ در } u=0, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0$$

البته، جواب دقیق  $\lambda = \pi^2$  خواهد بود.

تابع امتحانی

$$u = x(1 - x)$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت، بنا بر اصل تغییری ما،

$$\lambda \leq \frac{\int_0^1 u'^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{30}} = 10$$

که تاحدودی به  $\pi^2$  نزدیک ( ولی از آن بزرگتر ) است. تخمین را می‌توان با فرض

$$u = x(1 - x)(1 + c_1x + \dots)$$

و تغییر پارامترهای  $c_i$  برای مینیمم‌سازی  $K$  بهتر کرد.

نکته دشاروش انتخاب تابع امتحانی است. یک تابع امتحانی مناسب باید درسه

شرط صدق کند:

۱. باید در شرایط مرزی صدق کند؛

۲. باید از حیث کیفی شبیه جواب منتظره باشد؛

۳. باید به محاسبات نسبتاً ساده‌ای در محاسبه تابعی  $K[u(x)]$  منجر گردد.

مثال. به عنوان مثال دیگر، پایین‌ترین فرکانس یک سر طبل مستدیر به شعاع  $a$  را تخمین می‌زنیم.

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$k^2 \leq \frac{\int (\nabla u)^2 dx dy}{\int u^2 dx dy}$$

(۴۷.۱۲)

تابع

$$u = 1 - \frac{r}{a}$$

را امتحان می‌کنیم. در این صورت، تخمین تغییری ما خواهد بود

$$k^2 \leq \frac{\pi}{\pi a^2 / 6} = \frac{6}{a^2}$$

کوچکترین ویژه مقدار صحیح عبارت است از  $k^2 = (2.405 \dots / a)^2 \approx 5.78 / a^2$

مثال. بالاخره، مثال سوم ما روش تغییری ریلی<sup>۱</sup> - ریتس<sup>۲</sup> برای تعیین کوچکترین ویژه مقدار انرژی  $E$  از معادله شرودنیر

(۴۸.۱۲)

$$H\psi = E\psi$$

است، که در آن  $H$  هامیلتونین ( خود الحاق ) یا عملگر انرژی می‌باشد. مسئله تغییری مربوطه مینیمم‌سازی تابعی<sup>۳</sup>

1- Rayleigh

2- Ritz

۳. بر دانشجوست که هم ارز بودن مینیمم‌سازی تابعیهای (۴۲.۱۲) و (۴۹.۱۲) را تحقیق

(۴۹.۱۲) 
$$\frac{\psi \cdot H\psi}{\psi \cdot \psi}$$
 است. مثلاً، سعی می‌کنیم حالت پایه<sup>۶</sup> (کمترین انرژی) یک نوسانگر هماهنگ مکانیک کوانتمی را بیابیم. معادله<sup>۶</sup> شرودنیر عبارت است از

(۵۰.۱۲) 
$$H\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + x^2\psi = E\psi \quad (-\infty < x < \infty)$$

تابع

$$\psi = (1 + \alpha x^2)e^{-x^2}$$

را تابع امتحانی می‌گیریم. در این صورت،

$$E \leq \frac{\psi \cdot H\psi}{\psi \cdot \psi} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{\alpha}{8} + \frac{43\alpha^2}{64}}{1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{3\alpha^2}{16}}$$

مینیمم با حل معادله<sup>۶</sup> درجه<sup>۶</sup> دوم زیر به دست می‌آید:

$$23\alpha^2 + 56\alpha - 48 = 0$$

$$\alpha = 0.6718$$

از این نتیجه می‌شود که  $E < 1.034$  (جواب صحیح:  $E = 1$ ). توجه کنید که در این روش  $H$  یک عملگر هرمیتی فرض می‌شود (ر.ک. بخش ۲۰.۹).

آنچه تا بحال گفته‌ایم فقط در رابطه با کوچکترین ویژه مقدار بوده است. چگونه می‌توان، مثلاً، یک اصل تغییری برای بلافاصله بعد از کوچکترین ویژه مقدار به دست آورد؟ این کار آسان است؛ همان روش را به کار برده، ولی توابع امتحانی را با این شرط که بر کوچکترین ویژه تابع عمودند مقید می‌کنیم. تعمیم به ویژه توابع بالاتر سراسر است. ماتریسها نیز ویژه مقدار دارند. روش تغییری آنها چیست؟ شباهت واضح است. فرض

کنید تابع

(۵۱.۱۲) 
$$I(x) = \frac{x \cdot Mx}{x \cdot x} = \frac{\sum_{ij} M_{ij} x_i x_j}{\sum_i x_i^2}$$

یا، معادلاً،

$$\sum_{ij} M_{ij} x_i x_j$$

را تحت شرط

$$\sum_i x_i^2 = \text{ثابت}$$

ماکزیمم سازیم. معادلات حاصل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

(۵۲.۱۲) 
$$Mx = \lambda x$$

که در آن مجدداً "ویژه مقدار  $\lambda$  به عنوان ضریب لاگرانژ وارد می‌شود.

به روش تغییری می توان تمامیت ویژه توابع یک معادله استورم - لیوویل را نشان داد. فرض کنید تابع  $f(x)$  را داشته باشیم و بخواهیم آن را به صورت ترکیبی خطی از ویژه توابع  $u_i(x)$  معادله استورم - لیوویل

$$(pu')' - qu + \lambda \rho u = 0 \quad (a < x < b)$$

نمایش دهیم. توابع  $u_i$  از شرط تعامد بیکه ای

$$\int_a^b u_i u_j \rho \, dx = \delta_{ij}$$

پیروی می کنند. در این صورت، داریم

(۵۳.۱۲)

$$f(x) = \sum_i c_i u_i(x) \quad c_i = \int_a^b u_i f \rho \, dx$$

و می خواهیم اعتبار این بسط را تحقیق کنیم. فرض کنیم

(۵۴.۱۲)

$$\Delta_n(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n c_i u_i(x)$$

و

(۵۵.۱۲)

$$\delta_n^2 = \int_a^b \Delta_n^2 \rho \, dx$$

تابع  $\psi_n(x) = \Delta_n(x)/\delta_n$  بوضوح یک تابع نرمالی شده است که به  $u_1, u_2, \dots, u_n$  متعامد می باشد. اما مینیمم تابعی

$$I[\psi(x)] = \int_a^b (\rho \psi'^2 + q \psi^2) \, dx$$

تحت این شرط که  $\psi$  نرمالی شده و بر  $n$  ویژه تابع اول  $u_i(x)$  متعامد باشد  $\lambda_{n+1}$  است. لذا،

$$I[\psi_n(x)] \geq \lambda_{n+1}$$

یا

(۵۶.۱۲)

$$\frac{I[\Delta_n(x)]}{\delta_n^2} \geq \lambda_{n+1}$$

ولی به آسانی معلوم می شود که  $I[\Delta_n(x)]$  بارتفتن  $n$  به بی نهایت کراندار است. ابتدا ملاحظه می کنیم که به ازای هر تابع  $g(x)$  صادق در شرایط مرزی، با انتگرالگیری جزء به جزء ساده معلوم می شود که

$$I[g(x)] = \int_a^b g(x)[Lg(x)] \, dx$$

که در آن  $L$  عملگر دیفرانسیل استورم - لیوویل

$$L = -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q$$

می باشد. در این صورت، با استفاده از تعریف (۵۴.۱۲) از  $\Delta_n(x)$ ، داریم

$$\begin{aligned} I[\Delta_n] &= \int_a^b f[Lf] \, dx - 2 \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f[Lu_i] \, dx + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \int_a^b u_i[Lu_j] \, dx \\ &= I[f] - \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 \end{aligned}$$

چون  $I[\Delta_n]$  بوضوح مثبت است، همان طور که  $\lambda_i$  ها به ازای  $i$  به قدر کافی بزرگ مثبت اند، کراننداری  $I[\Delta_n]$  واضح خواهد بود.

اما از (۵۶.۱۲) و این امر (در ص ۳۴۰ بیان شد) که وقتی  $n \rightarrow \infty$  ،  $\lambda_n \rightarrow \infty$  معلوم می شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^2 = 0$$

یعنی،

$$(۵۷.۱۲) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[ f(x) - \sum_I c_i u_i(x) \right]^2 \rho dx = 0$$

این نتیجه را معمولاً "این طور توصیف می کنند که می گویند سری

$$(۵۸.۱۲) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$$

"به طور میانگین" به  $f(x)$  همگراست. این در بسیاری از مقاصد فیزیکی به خوبی همگرایی معمولی (نقطه به نقطه) می باشد.

این فصل را با نشان دادن اینکه چگونه اصول تغییری بر معادلات انتگرال نیز اعمال

می شوند به پایان می بریم. مسئله یافتن ماکزیمم (یا مینیمم) تابعی

$$(۵۹.۱۲) \quad I[\phi(x)] = \int_a^b \int_a^b K(x, y) \phi(x) \phi(y) dx dy \quad [K(x, y) = K(y, x)]$$

تحت شرط نرمال سازی

$$(۶۰.۱۲) \quad \int_a^b \phi^2(x) dx = \text{ثابت}$$

است که فوراً "نتیجه می دهد

$$(۶۱.۱۲) \quad \lambda \int_a^b K(x, y) \phi(y) dy = \phi(x)$$

(اثبات به دانشجویان واگذار شده است)

معادله (۶۱.۱۲) یک معادله انتگرال خطی به شکل متعارف است. توجه کنید که به ازای

تابع  $\phi(x)$  صادق در این معادله انتگرال، تابعی

$$(۶۲.۱۲) \quad \frac{I[\phi(x)]}{\int_a^b \phi^2(x) dx}$$

مساوی  $1/\lambda$  است. لذا، ویژه مقادیر یک هسته متقارن را می توان، درست مثل ویژه مقادیر

یک معادله دیفرانسیل استورم - لیوویل، به طور تغییری توصیف کرد.

## مراجع

یک بحث طولانی، روشن، و مفید از حساب تغییرات کتاب کورانت و هیلبرت (C10)، جلد

۱، فصل چهارم است. بحثی کامل نیز توسط فورسایت (F4) داده شده است. کتاب جدیدتر

به قلم اخیزرا (A3) نیز باید کاملاً مفید باشد.

بحثهای کوتاهتر را می‌توان در جفریز و جفریز (J4)، فصل ۱۰؛ ویلف (W7)، فصل ۷ مارگنو و مورفی (M2)، فصل ۶؛ و ایروینگ و مولینو (I3)، فصل هفت، یافت. سودمندی روشهای تغییری در مکانیک کوانتومی در هر کتاب متعارف نظیر شیف (S2)، بخش ۳۲، ولاندو ولیف‌شیتش (L2)، بخش ۲۰، مورد بحث قرار گرفته است. بالاخره، کتاب مورس و فشیک (M9) (بخصوص، فصل ۳ و بخشهای ۴۰۹ و ۴۰۱۱) حاوی بحثهایی از کاربردهای متنوع تکنیکهای تغییری در مسائل فیزیکی می‌باشد.

### مسائل

۱۰۱۲. یک تار یکنواخت به طول ۲ متر از دو تکیه‌گاه به ارتفاع یکسان و به فاصله ۱ متر آویزان است. با مینیمم‌سازی انرژی پتانسیل تار، معادله منحنی آن را یافته و، بخصوص، فاصله قائم بین تکیه‌گاهها و پایین‌ترین نقطه تار را بیابید.

۲۰۱۲. جسی به جرم  $m$  در میدان نیروی دوبعدی

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

قرار دارد. منحنیهایی که جرم بین نقاط داده شده در کوتاهترین زمان سقوط می‌کند

جوابهای معادله دیفرانسیل به شکل

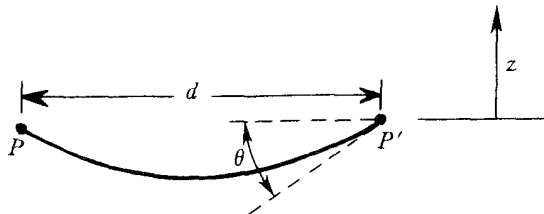
$$\frac{dr}{d\theta} = f(r)$$

می‌باشند. تابع  $f(r)$  را بیابید.

۳۰۱۲. اصل فرما دوباره کمترین زمان می‌گوید پرتو نور بین دو نقطه داده شده در مسیری حرکت می‌کند که در کمترین زمان آن را طی کند. ناحیه‌ای در نظر بگیرید که در آن شمار شکست به طور خطی نسبت به ارتفاع تغییر کند:

$$n = n_0(1 + \alpha z)$$

تحت چه زاویه  $\theta$ ، نقطه  $P$  از دید ناظری در نقطه  $P'$  واقع در همان ارتفاع ( $z = 0$ )



نقطه  $P$ ، وقتی در فاصله افقی  $d$  از  $P'$  است، ظاهراً "پایین آورده می‌شود؟ برای به دست آوردن جواب صریح، می‌توانید فرض کنید  $ad \ll 1$ .

۰۴.۱۲. رابطه (۲۵.۱۲) را ثابت کرده، و به‌طور وضوح بیان کنید چرا می‌توانستیم آن را فوراً "بدون محاسبه بنویسیم؛ یعنی، چرا بدهاها" برقرار است.

۰۵.۱۲. جمله دوم بعد از (۳۱.۱۲) را ثابت کنید.

۰۶.۱۲. میدان حقیقی  $\phi(x, t)$  از اصل تغییری

$$\delta \int L d^3x dt = 0$$

تبعیت می‌کند، که در آن

$$L(x, t) = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - |\nabla\phi|^2 - \mu^2\phi^2)$$

معادله دیفرانسیل حرکت را که  $\phi(x, t)$  در آن صدق می‌کند بنویسید.

۰۷.۱۲. با تغییر یک تابع امتحانی مناسب، تخمینی برای کمترین ویژه مقدار انرژی معادله شرو دینگر یک بعدی برای ذره‌ای به جرم  $m$  در پتانسیل

$$V(x) = kx^4 \quad (-\infty < x < \infty)$$

را به دست آورید.

۰۸.۱۲. تخمین به دست آمده در کتاب برای پایین‌ترین فرکانس طبیعی یک سر طبل مستدیر

به شعاع  $a$  را با امتحان جوابی به شکل

$$u = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^n$$

و تغییر  $n$  بهتر کنید. نتیجه را به صورت تقریبی برای پایین‌ترین صفر  $J_0(x)$  ارائه دهید.

۰۹.۱۲. مینیمم مقدار فرم درجه دوم

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$$

را تحت شرط

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

بیابید.

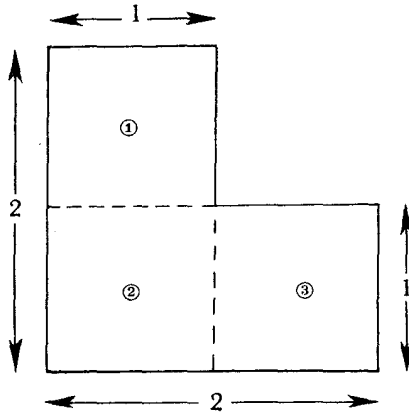
۱۰.۱۲. با استفاده از ساده‌ترین تابع امتحانی چندجمله‌ای پیوسته ممکن، کران بالایی

برای پایین‌ترین ویژه مقدار  $k_0$  کی

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$$

در ناحیه دو بعدی زیر به دست آورید. روی تمام مرزها  $\phi = 0$ .

برای هر یک از سه زیر ناحیه عبارت چندجمله‌ای به‌کاربرید؛ درجه هیچ چندجمله‌ای نباید از سه بیشتر باشد.



۱۱.۱۲. برای پایین‌ترین ویژه مقدار  $\lambda_0$

$$\nabla^2 u + \lambda r^2 u = 0 \quad (u=0, r=a, 0 < r < a, \text{ سه بعدی})$$

حد بالایی بیابید.

۱۲.۱۲. مسئله ویژه مقدار

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (\text{دو بعد})$$

را در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  در نظر بگیرید. شرط مرزی عبارت است از  $u=0$  بر مرز مثلث.

(آ) یک چندجمله‌ای درجه سه بسازید که در شرط مرزی صدق کند، و بدین وسیله یک حد بالایی برای پایین‌ترین ویژه مقدار  $k_0^2$  به دست آورید.

(ب) می‌توان نشان داد که به ازای مساحتی معلوم، دایره پایین‌ترین ویژه مقدار را برای این معادله به دست می‌دهد. با استفاده از این نتیجه، یک حد پایینی برای  $k_0^2$  در مسئله مثلث ما بیابید.

(پ) تخمین (ب) را با در نظر گرفتن مربع به جای دایره بهتر کنید.

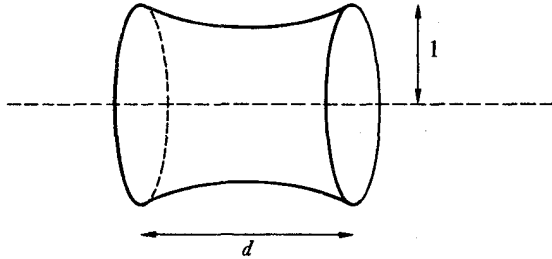
۱۳.۱۲. منحنی  $y(x)$  به طول  $2a$  بین نقاط  $(0,0)$  و  $(a,0)$  طوری رسم شده است که جسم حاصل از دوران آن حول محور  $x$  بیشترین حجم را داشته باشد.  $y(\frac{1}{2}a)$  را بیابید.

۱۴.۱۲. دو دایره به شعاع واحد، هر یک عمود بر خط مار بر مراکزشان، به فاصله  $d$  از هم قرار دارند. یک فیلم صابونی بین آنها مطابق شکل زیر تشکیل شده است. به خاطر ملاحظات انرژی، شکل فیلم کمترین مساحت را خواهد داشت.

(آ) نشان دهید که به ازای هر مقدار  $d$  کمتر از مقدار بحرانی  $d_c$ ، دو سطح وجود دارند که در معادله اویلر-لاگرانژ مناسبی صدق می‌کنند، ولی به ازای  $d > d_c$  این سطح وجود نخواهد داشت.  $d_c$  را حساب کنید.



دو سطح را به ازای یک  $d < d_0$  نوعی رسم کنید. کدام مساحت کمتری دارد؟  
 (ب) نشان دهید در بردی چون  $d_0 < d < d_e$ ، سطح مینیمم به صورت داده شده با معادله اویلر-لاگرانژ مساحتی بزرگتر از  $2\pi$  دارد؛ در نتیجه، سطح "شبه پایدار" است؛ یعنی، سطح در مقابل اختلالهای کوچک پایدار است ولی در مقابل اختلال دلخواه چنین نیست.  $d_0$  را حساب کنید.  
 (پ) وقتی  $d$  از  $d_e$  بیشتر شود چه رخ می دهد؟



۱۵.۱۲. تار به طول  $l$ ، کشش  $T$ ، دارای جرم واحد طول  $\rho(x)$  است. تخمین تغییری  $\omega_0^2$ ، یعنی مجذور پایین ترین فرکانس، را به دست آورید. نتیجه کلی را به دست آورید. از یک تابع امتحانی خاص استفاده نکنید.  
 ۱۶.۱۲. با استفاده از یک چندجمله ای درجه دو به عنوان تابع امتحانی، برای پایین ترین ویژه مقدار  $\lambda_0$  معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda xy = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 0$$

کران بالایی بیابید.

## روشهای عددی

در این فصل چند روش عددی برای درونیابی، انتگرالگیری، حل معادلات دیفرانسیل (معمولی)، یافتن ریشه‌های توابع، و جمع‌بندی سریها عرضه می‌کنیم.

## ۱۰.۱۳ درونیابی

فرض کنید جدولی از مقادیر تابع

$x$	$\sin x$
0	0.00000
0.1	0.09983
0.2	0.19867
0.3	0.29552

جدول ۱۰.۱۳

$f(x)$  (جدول ۱۰.۱۳) داشته باشیم.

چطور می‌توان  $\sin x$  را به ازای  $x$  هایی که در جدول نیستند، مانند  $x = 0.1432$ ، یافت؟ می‌توان مسئله را به طور تصویری تجسم کرد و یک منحنی هموار در نظر گرفت که از چهار نقطه داده شده گذشته است و سپس مقادیر را به ازای  $x$  های میانی به دست آورد. برای سهولت در تحلیل، معمولاً "منحنی هموار" را یک چندجمله‌ای می‌گیریم. یعنی، قرار می‌دهیم

$$(10.13) \quad f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

و، با استفاده از نقاط داده شده، ضرایب  $A, B, C, \dots$  را حساب می‌کنیم. در حالت فعلی چهار نقطه داده شده‌اند؛ لذا، می‌توان ضرایب تا  $D$  و خود  $D$  را با فرض صفر بودن سایر ضرایب به دست آورد.

۲۶۸ فصل هشتم

۲۹۰.۸. کمترین سه مقدار از  $k^2$  را بیابید که به ازای آنها معادله هلمهولتز دوبعدی

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0$$

داخل مثلث قائم الزاویه  $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$  به اضلاع  $a, a\sqrt{3}$ ، و  $2a$  جواب نابدیهی داشته باشد. شرط مرزی  $\phi = 0$  بر محیط مثلث است.

۳۰.۸. مسئله‌ای را که منجر به جدول ۲۰.۸ شد حل کنید، ولی با شرط مرزی  $(\text{grad } u)_n = 0$  بر محیط مثلث.

محاسبه مستقیم ضرایب به شیوه فوق تا حدودی خسته کننده است؛ باید چهار معادله خطی همزمان حل شوند تا درونیایی فوق انجام پذیرد. راههای میان بر بسیاری طرح شده اند، و ما به دو روش به این مسئله خواهیم پرداخت.

فرض کنیم جدولی از مقادیر  $y=f(x)$  داده شده باشد (جدول ۲۰۱۳)، که در آن

جدول ۲۰۱۳

$x_1$	$y_1$
$x_2$	$y_2$
$x_3$	$y_3$
$\vdots$	$\vdots$

مقادیر  $x$  متساوی الفاصله اند (در اغلب جدولها چنین است). یعنی،

$$(۲۰۱۳) \quad x_3 = x_2 + h = x_1 + 2h \quad x_2 = x_1 + h$$

حال عملگر  $E$  را با  $Ey_n = y_{n+1}$  تعریف کرده، و عملگر  $\Delta$  را با  $\Delta = E - 1$  تعریف می کنیم. لذا،

$$(۳۰۱۳) \quad \Delta y_n = (E - 1)y_n = y_{n+1} - y_n$$

$$(۴۰۱۳) \quad \Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n)$$

توجه کنید که

$$y_2 = y(x_1 + h) = Ey_1$$

$$y_3 = y(x_1 + 2h) = E^2 y_1$$

و، به طور کلی،

$$(۵۰۱۳) \quad y_{n+1} = y(x_1 + nh) = E^n y_1$$

اگر در معادله اخیر  $n$  را عددی دلخواه، نه لزوماً صحیح، بگیریم، به یک فرمول

درونیایی دست می یابیم. یعنی، قرار می دهیم

$$y(x_1 + \alpha h) = E^\alpha y_1$$

$$(۶۰۱۳) \quad \begin{aligned} &= (1 + \Delta)^\alpha y_1 \\ &= \left[ 1 + \alpha \Delta + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} \Delta^2 + \dots \right] y_1 \end{aligned}$$

معمولاً فقط چند جمله اول این سری نامتناهی را نگه می دارند؛ این چند جمله تقریبی از  $y(x)$  را به ما می دهند که همان تقریب چند جمله ای است که در آغاز این بخش ذکر شد. اگر

مثلاً، تفاضلات سوم و بالاتر را حذف کنیم، خواهیم داشت

$$y(x_1 + \alpha h) \approx \left[ 1 + \alpha \Delta + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} \Delta^2 \right] y_1$$

$$\begin{aligned}
 &\approx \left[ 1 + \alpha(E-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} (E-1)^2 \right] y_1 \\
 (۷.۱۳) \quad &\approx \left[ \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2} + \alpha(2-\alpha)E + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} E^2 \right] y_1 \\
 &\approx \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2} y_1 + \alpha(2-\alpha)y_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y_3
 \end{aligned}$$

اگر از جدولی شامل تفاضلات اول و دوم استفاده کنیم ، احتمالاً " اولین شکل مناسبترین است ؛ در غیر این صورت ، آخرین شکل مفیدتر خواهد بود .

با بررسی آخرین شکل معلوم می شود که دارای ساختاری است که اگر شخص باهوش باشد ، می تواند آن را با معاینه فوراً " بنویسد . چون فرض کرده ایم تفاضلات سوم و بالاتر صفرند ،  $y$  باید ( نسبت به  $\alpha$  ) از درجه دوم باشد . به علاوه ، وقتی  $x = x_2 (\alpha = 1)$  ،  $y = y_2$  ، و وقتی  $x = x_3 (\alpha = 2)$  ،  $y = y_3$  . در هر حالت  $y_1$  در جواب وجود ندارد ؛ و لذا ، ضریب  $y_1$  باید مساوی

$$x (\alpha - 1)(\alpha - 2) \text{ ثابت}$$

باشد . برای آنکه وقتی  $x = x_1 (\alpha = 0)$  ،  $y = y_1$  ، ثابت  $\frac{1}{2}$  است . سایر ضرایب سطر آخر (۷.۱۳) را می توان به نحو مشابهی یافت .

به عنوان مثال دیگری از این استدلال ، می توان فرمول نظیر را با حفظ تفاضلات سوم فوراً " نوشت :

$$\begin{aligned}
 (۸.۱۳) \quad y = &\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{-6} y_1 + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-3)}{2} y_2 \\
 &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)}{-2} y_3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} y_4
 \end{aligned}$$

ضرایب فرمولهای (۷.۱۳) و (۸.۱۳) به ضرایب درونیابی لاگرانژین معروفند ؛ جداول بزرگی<sup>۱</sup> از آنها به صورت توابعی از  $\alpha$  تهیه شده و در دست اند .

در تحلیلی که تاکنون شده است فرض کرده ایم مقادیر متغیر مستقل  $x$  متساوی الفاصله اند .

لیکن ، ضرایب لاگرانژین را می توان با بررسی برای حالت کلی نیز نوشت . مثلاً ، از

$$x_1 \quad y_1$$

$$x_2 \quad y_2$$

$$x_3 \quad y_3$$

می توان تقریب معقول " منحنی هموار " برای  $y$  را تشکیل داد :

۱ . مثلاً ، " ر.ک. آبرامویتس و استگون (A1) ، فصل ۲۵ ، یا جلد NBS (N1) .

$$y(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3 \quad (9.13)$$

گاهی می‌خواهیم خطای ناشی از یک فرمول درونیایی را تخمین بزنیم. با تخمین خطای فرمول (۷.۱۳) که در بالا به دست آمد روش تخمین را توضیح می‌دهیم:

$$y = y_1 + \alpha \Delta y_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 y_1$$

بنابر قضیه تیلور،

$$y_2 = y_1 + h y_1' + \frac{1}{2} h^2 y_1'' + \frac{1}{6} h^3 y_1''' + \dots$$

$$y_3 = y_1 + 2h y_1' + 2h^2 y_1'' + \frac{4}{3} h^3 y_1''' + \dots$$

در این صورت،

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = h y_1' + \frac{1}{2} h^2 y_1'' + \frac{1}{6} h^3 y_1''' + \dots \quad (10.13)$$

$$\Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1 = h^2 y_1'' + h^3 y_1''' + \dots$$

لذا، تخمین (۷.۱۳) ما از  $y(x_1 + \alpha h)$  سری زیر است:

$$y_1 + \alpha \left( h y_1' + \frac{1}{2} h^2 y_1'' + \frac{1}{6} h^3 y_1''' + \dots \right) + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) (h^2 y_1'' + h^3 y_1''' + \dots)$$

$$= y_1 + \alpha h y_1' + \frac{1}{2} \alpha^2 h^2 y_1'' + \frac{\alpha}{6} (3\alpha-2) h^3 y_1''' + \dots \quad (11.13)$$

از طرف دیگر، سری تیلور (دقیق) برای  $y(x_1 + \alpha h)$  عبارت است از

$$y_1 + \alpha h y_1' + \frac{1}{2} \alpha^2 h^2 y_1'' + \frac{1}{6} \alpha^3 h^3 y_1''' + \dots \quad (12.13)$$

و خطا با تفاضل بین (۱۱.۱۳) و (۱۲.۱۳)، یعنی

$$\frac{\alpha}{6} (\alpha-1)(\alpha-2) h^3 y_1''' \quad (13.13)$$

داده می‌شود. به طور دقیقتر، خطا عبارت است از  $(\alpha/6)(\alpha-1)(\alpha-2)h^3 y'''$ ، که در آن مشتق سوم جایی در باره  $x_1 \leq x \leq x_3$  حساب شده است.

چگونه می‌توان  $y''$  را حساب کرد؟ این طبعاً "به مسئله مشتقگیری عددی منجر می‌شود که رابطه

نزدیکی با درونیایی دارد. ساده‌ترین راه به دست آوردن فرمولهایی برای مشتقات معرفی عملگر  $D$  است.

$$D y_n = y_n' \quad (14.13)$$

(ما مجدداً شناسه‌های متساوی‌الفاصله را در نظر می‌گیریم)

رابطه  $D$  با عملگرهای  $E$  و  $\Delta$  چیست؟ ابزار اتصال سری تیلور است:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= E y_n = y_n + h y_n' + \frac{1}{2} h^2 y_n'' + \frac{1}{6} h^3 y_n''' + \dots \\ &= (1 + hD + \frac{1}{2} h^2 D^2 + \frac{1}{6} h^3 D^3 + \dots) y_n \\ &= e^{hD} y_n \end{aligned}$$

لذا،

$$(15.13) \quad E = e^{hD}$$

یا

$$(16.13) \quad D = \frac{1}{h} \ln E = \frac{1}{h} \ln(1 + \Delta)$$

$$= \frac{1}{h} \left( \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - + \dots \right)$$

برای پاسخ دادن به سؤال فوق در باب  $y'''$ ، از (۱۶.۱۳) می‌بینیم که

$$(17.13) \quad D^n \approx \left( \frac{\Delta}{h} \right)^n$$

در نتیجه،

$$(18.13) \quad y''' \approx \frac{1}{h^3} \Delta^3 y$$

### ۲.۱۳ انتگرالگیری عددی

اصول انتگرالگیری عددی اساساً همان اصول درونیایی و مشتقگیری عددی است؛ تابع با یک چندجمله‌ای تقریب شده و چندجمله‌ای دقیقاً "انتگرالگیری می‌شود. معمولاً" تمام تابع با یک چندجمله‌ای برازش نمی‌شود. در عوض، بازه انتگرالگیری به چند زیر بازه کوچکتر تجزیه شده، و برای هر زیر بازه یک چندجمله‌ای تقریب ساز به کار می‌رود.

ساده‌ترین روش از این نوع قاعده دوزنقه است. اگر انتگرال مورد بحث

$$(19.13) \quad \int_a^b f(x) dx$$

باشد، بازه  $a < x < b$  را به  $n$  زیر بازه به طول  $h = (b - a)/n$  تقسیم می‌کنیم. در هر زیر بازه، تابع را با خط مستقیمی که مقادیر در دو سر را به هم وصل می‌کند عوض می‌کنیم.

نتیجه خواهد بود

$$(20.13) \quad \int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right)$$

که در آن  $y_0 = f(a)$ ،  $y_1 = f(a + h)$ ،  $\dots$ ،  $y_{n-1} = f(b - h)$ ،  $y_n = f(b)$

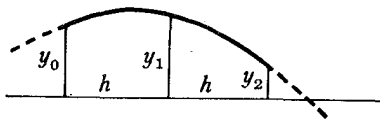
فرمولی دقیقتر و مفید قاعده سیمپسون<sup>۱</sup> است. بازه  $a < x < b$  را به تعدادی زوج زیربازه تقسیم می‌کنیم. یک سهمی را به  $y(x)$  در  $x = a$ ،  $a + h$ ،  $a + 2h$  برازش می‌دهیم؛

سهمی دیگری را در  $x = a + 2h$ ،  $a + 3h$ ،  $a + 4h$  برازش می‌دهیم؛ و از این قبیل.

مساحت زیر یک سهمی نوعی، نظیر سهمی شکل ۱.۱۳، چقدر است؟

فرض کنیم مساحت عبارت باشد از

$$A = h(\alpha y_0 + \beta y_1 + \gamma y_2)$$



شکل ۱۰۱۳ یک عنصر مساحت در قاعده سیمپسون

باید ضرایب  $\alpha, \beta, \gamma$  را بیابیم. بنابر تقارن،  $\alpha = \gamma$ . سهمی خاص  $y = x^2$  را از  $-1$  تا  $+1$  در نظر می‌گیریم. در این صورت،  $y_0 = y_2 = 1$ ،  $y_1 = 0$ ، و

$$A = \frac{4}{3} = \alpha + \gamma$$

بنابراین،

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{3}$$

برای یافتن  $\beta$ ، حالتی را در نظر می‌گیریم که  $y_0 = y_1 = y_2 = 1$ . منحنی تقریب ساز خط افقی  $y = 1$  بوده، و

$$A = 2h = h\left(\frac{1}{3} + \beta + \frac{1}{3}\right)$$

لذا،

$$\beta = \frac{4}{3}$$

و فرمول

$$(21.13) \quad A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

به دست آمده است. وقتی برای حالت کلی‌تر انتگرال از  $a$  تا  $b$  (که به  $n$  قسمت تقسیم شده) به کار رود، نتیجه خواهد بود

$$(22.13) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n)$$

می‌توان ادامه داد و برازش به وسیله چند جمله‌ایهای درجه سه یا درجه چهار را در نظر گرفته دقت را بهتر کرد، ولی عملاً "بیشتر از قاعده سیمپسون استفاده کرده، اگر دقت بیشتری لازم بود تقسیمات را بیشتر می‌کنند.

راه دیگر بهتر کردن دقت حذف شرط متساوی الفاصله بودن طولها و تعدیل مواضعی است که در آنها تابع، و همچنین ضرایب، حساب می‌شوند تا برازش با چند جمله‌ای با بیشترین درجه صورت گیرد. مثلاً، در قاعده سیمپسون، فقط سه نقطه اختیار و فرمولی به دست می‌آوریم که برای چند جمله‌ایها تا درجه دو دقیق است. با تغییر نقاط  $x$  که تابع در آنها حساب می‌شود، رویهم شش پارامتر داریم که باید بتوان هر چند جمله‌ای تا درجه پنج را برازش کرد. این روش به انتگرالگیری گاوسی معروف است. ما این روش را به اختصار مطرح می‌کنیم.

## فرمول انتگرالگیری

$$(۲۳.۱۳) \quad \int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

را می‌سازیم که می‌خواهیم برای هر چندجمله‌ای درجه پنج یا کمتر دقیق باشد.  $c_i$  ها و  $x_i$  ها را می‌توان مستقیماً از این شرط معین کرد، ولی شش معادله حاصل با شش مجهول خیلی درهم برهم‌اند (مثلاً، نسبت به  $x_i$  ها غیرخطی‌اند). به جای آن، با ترفندی  $x_i$  ها را مستقیماً به دست آورده،  $c_i$  ها را بعداً محاسبه می‌کنیم.

چگونه می‌توان  $x_i$  ها را اختیار کرد؟ یک چندجمله‌ای در نظر می‌گیریم که ریشه‌هایش

$x_i$  ها باشند:

$$(۲۴.۱۳) \quad g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

در این صورت، انتگرالگیری گاوسی به وسیله فرمول (۲۳.۱۳)، وقتی بر انتگرال

$$(۲۵.۱۳) \quad \int_a^b g(x) dx$$

اعمال شود صفر به دست می‌دهد. در واقع، انتگرالگیری گاوسی اعمال شده بر انتگرال

$$(۲۶.۱۳) \quad \int_a^b g(x)\phi(x) dx$$

به ازای هر تابع  $\phi(x)$  صفر به دست می‌دهد.

اما فرض است که روش ما برای چندجمله‌ایها تا درجه پنج دقیق است. چون  $g(x)$

فقط از درجه سه است،

$$(۲۷.۱۳) \quad \int_a^b g(x) dx = 0$$

باید دقیقاً درست باشد. به همین نحو،

$$(۲۸.۱۳) \quad \int_a^b xg(x) dx = 0$$

و

$$(۲۹.۱۳) \quad \int_a^b x^2 g(x) dx = 0$$

از طرف دیگر،  $\int_a^b x^3 g(x) dx$  لازم نیست صفر باشد، اگرچه تخمین گاوسی آن صفر است، زیرا  $x^3 g(x)$  یک چندجمله‌ای درجه شش بوده و فرمول ما فقط چندجمله‌ایها تا درجه پنج را تضمین می‌کند.

سه شرط "تعامدی" (۲۷.۱۳)، (۲۸.۱۳)، و (۲۹.۱۳)  $g(x)$  را، جز در مورد

یک ثابت ضربی دلخواه، معین می‌کنند؛ و لذا،  $x_i$  ها مشخص می‌شوند. اگر  $a = -1$  و

$b = +1$  اختیار شوند (که به کلیت خللی وارد نمی‌شود)،  $g(x)$  چیزی جز چند جمله‌ای

لژاندار  $P_3(x)$  نیست. (چرا؟) تعمیم به بیش از سه نقطه سراسر خواهد بود.

وزنها یا ضرایب  $c_i$  در (۲۳.۱۳) به‌همین نحو تعیین می‌شوند؛ یعنی، شرط می‌کنیم

روش به ازای  $f(x) = 1, x, x^2$  دقیق باشد. از این شرط سه معادله خطی زیر به دست می‌آید:



$$\begin{aligned} b - a &= c_1 + c_2 + c_3 \\ \frac{1}{2}(b^2 - a^2) &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ \frac{1}{3}(b^3 - a^3) &= c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 \end{aligned} \quad (30.13)$$

این سه معادله را می‌توان نسبت به  $c_1$ ،  $c_2$ ،  $c_3$  حل کرد، زیرا اکنون معلوم است که  $x_i$ ها صفرهای  $P_3(x)$  هستند.

انتگرالگیری گاوسی را می‌توان طوری تعمیم داد که تابع وزن  $\rho(x)$  را دربرگیرد، یعنی، می‌توان فرمولی چون

$$\int_a^b f(x)\rho(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n) \quad (31.13)$$

ساخت، که در آن  $2n$  ثابت  $c_i$  و  $x_i$  طوری اختیار شوند که فرمول به ازای  $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$  دقیق باشد. همه چیز مثل قبل است؛ مثلاً،  $x_i$ ها ریشه‌های چندجمله‌ای  $g_n(x)$  اند به طوری که

$$\begin{aligned} \int_a^b g_n(x)\rho(x) dx &= 0 \\ \int_a^b g_n(x)\rho(x)x dx &= 0 \\ &\vdots \\ \int_a^b g_n(x)\rho(x)x^{n-1} dx &= 0 \end{aligned} \quad (32.13)$$

اگر  $\rho \neq 1$ ،  $g_n$  دیگر چندجمله‌ای لژاندار  $P_n$  نیست.

گهگاه به یک انتگرال نامتناهی به شکل زیر برمی‌خوریم:

$$I = \int_a^\infty f(x) dx \quad (33.13)$$

برای حل عددی این انتگرال چند راه وجود دارد.

ابتدا می‌توان از قاعدهٔ سیمپسون استفاده کرد:

$$I \approx \frac{1}{3}h[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots] \quad (34.13)$$

و مشارکتها در یک نقطه را به هم افزود و از مشارکت‌های دیگر صرف‌نظر کرد. این روش در صورتی بهترین است که  $f(x)$  به طور سریع و هموار به صفر نزدیک شود.

راه دیگر انتگرالگیری گاوسی است با یک تابع وزن مناسب. مثلاً، اگر انتگرالده ما

تقریباً "شبه  $e^{-x}$  باشد، فرمول

$$\int_a^\infty f(x)e^{-x} dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n) \quad (35.13)$$

مفید خواهد بود.

بالاخره، تغییر متغیر اغلب یاری‌دهنده است. مثلاً،

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^1 f\left(\frac{t}{1-t}\right) \frac{dt}{(1-t)^2} \quad (36.13)$$

اگر وقتی  $x \rightarrow \infty$  ،  $f(x)$  دست کم به سرعت  $1/x^2$  به صفر برود ، انتگرالده جدید ما در  $t = 1$  متناهی بوده و می توان از آن به روشهای متعارف انتگرال گرفت .

### ۳.۱۳ حل عددی معادلات دیفرانسیل

روشهای زیادی برای انتگرالگیری عددی از معادلات دیفرانسیل وجود دارند . ما فقط معادله مرتبه اول

$$(۳۷.۱۳) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

را در نظر گرفته و دو روش نوعی را که اغلب بر آن اعمال می شوند شرح می دهیم .

اولین روش روش رونگه<sup>۱</sup> - کوتا<sup>۲</sup> است . فرض کنیم در  $x = x_0$  ،  $y = y_0$  . بازه  $\delta x$  را اختیار و متوالیا " حساب می کنیم :

$$k_1 = \delta x f(x_0, y_0)$$

$$(۳۸.۱۳) \quad k_2 = \delta x f(x_0 + \frac{1}{2}\delta x, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = \delta x f(x_0 + \frac{1}{2}\delta x, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = \delta x f(x_0 + \delta x, y_0 + k_3)$$

#### جدول ۳.۱۳

$x_0$	$y_0$	$y'_0$
$x_1 (= x_0 + \delta x)$	$y_1$	$y'_1$
$x_2 (= x_1 + \delta x)$	$y_2$	$y'_2$
$x_3 (= x_2 + \delta x)$	$y_3$	$y'_3$

پس در  $x = x_0 + \delta x$  داریم  $y \approx y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$  . ( این تقریباً " قاعده سیمسونی انتگرال  $y'$  از  $x_0$  تا  $x_0 + \delta x$  است . ) حال می توان به یافتن  $y$  در  $x_0 + 2\delta x$  دقیقاً " به همان نحو پرداخت .

روش دوم ، یعنی روش بشفورث<sup>۳</sup> - آدامز<sup>۴</sup> - میلن ، فرض می کند که حل به نحوی شروع شده و جدولی مانند جدول ۳.۱۳ داریم . به صورت زیر عمل می کنیم .

$$۱. \quad y_4 \text{ را به صورت } y_4 = y_0 + \frac{1}{4}\delta x(2y'_1 - y'_2 + 2y'_3) \text{ " پیش بینی می کنیم " .}$$

[ این فرمول را می توان بابیان  $y'$  برحسب  $\alpha(x = x_0 + \alpha\delta x)$  ، استفاده از فرمول درونیایی

قبلی (۸.۱۳) ، ما ، و انتگرالگیری از  $y'$  برای به دست آوردن  $y_4 - y_0$  یافت . ]

$$۲. \quad y_4 = f(x_4, y_4) \text{ را حساب می کنیم .}$$

1- Runge

2- Kutta

3- Bashforth

4- Adams

۳.  $y_4$  را به صورت  $y_4 = y_2 + \frac{1}{3}\delta x(y'_2 + 4y'_3 + y'_4)$  تصحیح می‌کنیم " (قاعدهٔ سیمپسون). مقایسهٔ مقادیر پیش‌بینی شده و اصلاح شده دقت کار را به ما نشان می‌دهد. به طور

دقیقت، خطا در فرمول پیش‌بینی ما عبارت است از

$$(39.13) \quad \frac{28}{90}(\delta x)^5 y^{(v)}$$

حال آنکه خطا در فرمول تصحیح عبارت است از

$$(40.13) \quad \frac{1}{90}(\delta x)^5 y^{(v)}$$

لذا، قاعدهٔ زیر قاعدهٔ عملی مناسبی است. اگر اختلاف بین مقادیر پیش‌بینی شده و اصلاح شده  $y_4$  در آخرین ارقام اعشاری از 14 کمتر باشد، احتمالاً "وضع خوب است". در غیر این صورت یا باید مجدداً تصحیح کنیم، یا (بهتر است) بازهٔ  $\delta x$  را کوچکتر نماییم.

خاصیتی که یک روش انتگرالگیری، علاوه بر کوچکی خطا، باید داشته باشد پایداری است. ما عمیقاً وارد این موضوع نمی‌شویم، با مثالی ساده اهمیتش را نشان خواهیم داد. می‌خواهیم معادلهٔ دیفرانسیل

$$(41.13) \quad y' = f(x, y)$$

را فقط با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون حل کنیم. یعنی، از

$$\begin{array}{ccc} x_0 & y_0 & y'_0 \\ x_1 & y_1 & y'_1 \end{array}$$

$x_2$  را به وسیلهٔ معادلهٔ

$$(42.13) \quad \begin{aligned} y_2 &= y_0 + \frac{1}{3}\delta x(y'_0 + 4y'_1 + y'_2) \\ &= y_0 + \frac{1}{3}\delta x[y'_0 + 4y'_1 + f(x_2, y_2)] \end{aligned}$$

برونبایی می‌کنیم. این معادله را با آزمایش و خطا (یا طریقی دیگر) نسبت به  $y_2$  حل کرده و سپس به همین نحو به  $y_3$  می‌پردازیم.

برای نشان دادن نقص جدی که در این روش نسبتاً "معقول ولی ساده پنهان است، آن را بر معادلهٔ دیفرانسیل بدیهی

$$(43.13) \quad y' = \alpha y \quad (\alpha = \text{ثابت})$$

اعمال می‌کنیم. فرمول برونبایی

$$y_2 = y_0 + \frac{1}{3}\delta x(y'_0 + 4y'_1 + y'_2)$$

به صورت زیر درمی‌آید:

$$(44.13) \quad y_2 = y_0 + \frac{\alpha \delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

این یک معادلهٔ تفاضلی خطی با ضرایب ثابت است. این معادلات شایهتهای زیادی با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت (که در بخش ۱۰.۱ مطرح شدند) دارند. روش

متعارف امتحان جوابی به شکل زیر است :

(۴۵.۱۳)

$$y_n = k^n$$

که در آن  $k$  ثابتی است که باید معین شود. با گذاردن (۴۵.۱۳) در معادله تفاضلی (۴۴.۱۳)، یک معادله درجه دو نسبت به  $k$  به دست می آید :

$$(1 - \frac{1}{3}\alpha \delta x)k^2 - \frac{4}{3}\alpha \delta x k - (1 + \frac{1}{3}\alpha \delta x) = 0$$

به ازای  $\alpha \delta x$  کوچک، جوابها عبارتند از

$$k \approx \begin{cases} 1 + \alpha \delta x \\ -1 + \frac{1}{3}\alpha \delta x \end{cases}$$

لذا، جواب عمومی معادله تفاضلی ما یک ترکیب خطی دلخواه از

$$y_n \approx (1 + \alpha \delta x)^n \approx e^{\alpha x}$$

و

(۴۶.۱۳)

$$y_n \approx (-1 + \frac{1}{3}\alpha \delta x)^n \approx (-1)^n e^{-\alpha x/3}$$

می باشد. جواب اول مناسب بوده و در واقع جواب صحیح معادله دیفرانسیل اصلی (۴۳.۱۳) می باشد. ولی اگر  $\alpha$  منفی باشد، جواب دوم (۴۶.۱۳) یک جواب بانوسانات زیاد است که دیر یا زود جواب دقیق را محو می سازد. لذا، روش ما ناپایدار می شود. با حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول و یک معادله تفاضلی مرتبه دوم، یک جواب ناپایدار نامربوط وارد کرده ایم.

بررسی پایداری دو روش دیگر توصیف شده در این بخش پیچیده تر است؛ این کار را به یک کتاب ریاضی در آنالیز عددی، نظیر تودا<sup>۱</sup> (T5)، فصل ۹، ارجاع می دهیم. حال کمی از بحث دور شده، کاربرد جالبی از پایداری در محاسبات عددی را لمس می کنیم. یک مثال کلاسیک رابطه بازگشتی (۵۲.۷) بین توابع بسل

(۴۷.۱۳)

$$J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) - J_{m-1}(x)$$

است.

در نظر اول این رابطه بازگشتی ابزار مفیدی برای محاسبه، مثلاً " $J_{10}(1)$ "، در یک کامپیوتر رقمی می نماید. کافی است مقادیر شروع  $J_0(1)$  و  $J_1(1)$  را داشته باشیم؛ سپس کاربرد مکرر (۴۷.۱۳) مقادیر  $J_2(1), J_3(1), \dots, J_{10}(1), \dots$  را به ما خواهد داد.

نقص این روش ناپایداری آن است. حال (۴۷.۱۳) را به شکل

(۴۸.۱۳)

$$y_{m+1} = \frac{2m}{x} y_m - y_{m-1}$$

به ازای  $m \rightarrow \infty$  تحلیل می کنیم، همانگونه که معادله تفاضلی (۴۴.۱۳) را تحلیل کردیم.

ولی در آنجا توانستیم معادله را دقیقاً " حل کنیم ، زیرا معادله‌ای خطی با ضرایب ثابت بود؛ معادله (۴۸.۱۳) با وجود خطی بودن ضریب غیرثابت ( یعنی، تابع  $m$  ) دارد، و روش ساده‌ما دیگر کار نمی‌کند .

در اینجا روش آزمایش و خطای بخش ۳.۱ را می‌توان به خوبی به کار برد . مثلاً ، سعی می‌کنیم از جمله دوم سمت راست (۴۸.۱۳) صرف نظر کنیم . معادله حاصل

$$y_{m+1} = \frac{2m}{x} y_m$$

دارای جواب

$$y_m = \text{ثابت} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^m \Gamma(m) \quad (49.13)$$

است ، و حالا می‌توان با فرض  $m \rightarrow \infty$  از  $y_{m-1}$  در (۴۸.۱۳) به آسانی صرف نظر کرد .

به همین نحو ، اگر از  $y_{m+1}$  در (۴۸.۱۳) صرف نظر کنیم ، به دست می‌آوریم

$$y_m = \frac{x}{2m} y_{m-1}$$

که از آن داریم

$$y_m = \text{ثابت} \cdot \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^m \quad (50.13)$$

و مجدداً " می‌توان اغماض از  $y_{m+1}$  را توجیه نمود .

لذا ، معادله تفاضلی (۴۸.۱۳) جوابی دارد که رفتارش به ازای  $m$  بزرگ با (۴۹.۱۳)

توصیف می‌شود و جواب دیگری دارد که رفتارش با (۵۰.۱۳) داده می‌شود . حال ، بنابر

(۵۰.۲)

$$J_m(x) \approx \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^m , \quad \text{به ازای } m \ll x$$

در نتیجه ، جواب دوم به دست آمده در بالا ، یعنی (۵۰.۱۳) ، در واقع جواب مطلوب

$y_m = J_m(x)$  می‌باشد . ولی از تحلیل ما وجود جوابی دیگر ، یعنی (۴۹.۱۳) ، آشکار می‌شود

جدول ۴.۱۳ رابطه بازگشتی (۴۸.۱۳) به ازای

$m$  صعودی ( $x = 1$ )

$m$	$y_m$	$J_m(1)$
0	.76519 76866	.76519 76866
1	.44005 05857	.44005 05857
2	.11490 34848	.11490 34849
3	.01956 33535	.01956 33540
4	.00247 66362	.00247 66390
5	.00024 97361	.00024 97577
6	.00002 07248	.00002 09383
7	-.00000 10385	.00000 15023
8	-.00003 52638	.00000 00942
9	-.00056 52593	.00000 00052
10	-.01073 81267	.00000 00003

یک روش بهتر، اگر  $f(x)$  به ازای  $x$  دلخواه قابل محاسبه باشد، تکرار است؛ در نتیجه، می توان هر دقت مطلوب را به دست آورد. معمولاً "درونیابی خطی کافی است. مثلاً"، به یافتن جواب مثبت

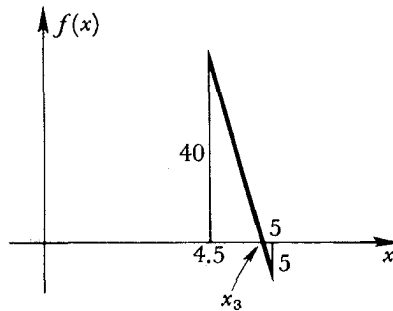
$$f(x) = (5 - x)e^x - 5 = 0$$

می پردازیم. ابتدا

$$x_1 = 5 \quad f(5) = -5$$

$$x_2 = 4.5 \quad f(4.5) \approx 40$$

را امتحان می کنیم. شکل ۲۰.۱۳ یک درونیابی خطی بین این مقادیر را نشان می دهد.



شکل ۲۰.۱۳ یک درونیابی خطی بین نقاط

$(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  و یافتن  $x_3$

حال

$$x_3 = \frac{40 \times 5 + 5 \times (4.5)}{45} = 4.944 \quad f(4.944) = 2.859$$

$$x_4 = \frac{(2.859) \times 5 + 5 \times (4.944)}{7.859} = 4.964 \quad f(4.964) = 0.154$$

و غیره

را امتحان می کنیم (این روش را گاهی *regula falsi* می نامیم).  
به صورت دیگر، می توان تخمین اصلاح شده‌ای از  $x$  را به روش نیوتن<sup>۱</sup> به دست آورد که مستلزم  $f(x)$  و  $f'(x)$  است (ر.ک. شکل ۳۰.۱۳):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

اگر تابع نقطهٔ عطف یا رفتار بد دیگری در مجاورت صفر داشته باشد، این روش ممکن است فروریزد.

$m = 15$  یا  $m = 20$  شروع کنیم<sup>۱</sup>.

لذا، استفاده از رابطه بازگشتی (۴۷.۱۳) را به ازای  $m$  های نزولی، با شروع از دو مقدار آغازی دلخواه همراه با جدولی از  $J_0(x)$  که محاسبه آسان هر  $J_m(x)$  را به ازای  $m$  صحیح ممکن می‌سازد، آموختهایم. این روند و روندهای مشابه عملاً "در کامپیوتر رقمی و در محاسبه توابع بسل و سایر توابع خاص به کار می‌روند."

### ۴.۱۳ ریشه‌های معادلات

ما اغلب با مسئله یافتن یک  $x$  بیش و کم دقیق به طوری که

$$f(x) = 0$$

مواجهیم که در آن  $f(x)$  آنقدر پیچیده است که حل مستقیم آن میسر نیست.

یک راه ساده برای این کار ساختن جدولی است که بهینه ریشه مطلوب را به ما بدهد (جدول ۶.۱۳). در این صورت، از دیدگاه تابع وارون، مسئله چیزی جز درونیایی با شناسه‌های غیرمتساوی الفاصله نیست، و می‌توان از روش لاگرانژ استفاده کرد. ریشه این مثال، بنابر معادله‌ای شبیه (۹.۱۳) تا چهار رقم اعشار، خواهد بود

$$\begin{aligned} & \frac{(0 - 0.41)(0 + 0.16)(0 + 0.32)}{(1.76 - 0.41)(1.76 + 0.16)(1.76 + 0.32)} \times (1) \\ & + \frac{(0 - 1.76)(0 + 0.16)(0 + 0.32)}{(0.41 - 1.76)(0.41 + 0.16)(0.41 + 0.32)} \times (2) \\ & + \frac{(0 - 1.76)(0 - 0.41)(0 + 0.32)}{(-0.16 - 1.76)(-0.16 - 0.41)(-0.16 + 0.32)} \times (3) \\ & + \frac{(0 - 1.76)(0 - 0.41)(0 + 0.16)}{(-0.32 - 1.76)(-0.32 - 0.41)(-0.32 + 0.16)} \times (4) = 2.37 \end{aligned}$$

جدول ۶.۱۳

$x$	$f(x)$
1	1.76
2	0.41
3	-0.16
4	-0.32

۱. مثلاً، "اگر با  $y_{20} = 0, y_{19} = 1$  شروع کرده و تا  $y_0$  به پایین ادامه دهیم تا در مقایسه با  $J_0(1)$  عامل مقیاس به دست آید،  $J_{10}(1)$  [و نیز  $J_1(1), \dots, J_9(1)$ ] را تا دقت ده رقم خواهیم داشت."

که با افزایش  $m$  خیلی بزرگ می شود. لذا، خطاهای گرد کردن غیر قابل اجتناب بهمن وار سرازیر شده، و نتیجه، که به آسانی با یک مثال عددی توجیه می شود (جدول ۴۰.۱۳)، این است که رابطه بازگشتی (۴۷.۱۳) برای محاسبه توابع بسل مرتبه بزرگ با استفاده از مقادیر توابع بسل از مرتبه پایین خیلی مفید نیست.

لیکن، اگر رابطه بازگشتی (۴۸.۱۳) را در جهت مخالف، یعنی به ازای  $m$  نزولی در نظر بگیریم، جالبترین نتیجه به دست می آید. مجدداً، یک جواب رشد کرده و دیگری کوچک می شود، ولی جواب رشدکننده است که نتیجه مطلوب  $J_m(x)$  است، ولی جواب نامربوط ناخواسته به سرعت محو خواهد شد. به عبارت دیگر، محاسبات بازگشتی ما پایدار می باشند.

جدول ۵۰.۱۳ این روند دوم را توضیح عددی می دهد. توجه کنید که ما با  $y_0 = 1$  و  $y_{10} = 0$  کاملاً دلخواه شروع می کنیم. این مطلب که اینها تخمینهای ضعیفی از  $J_0(1)$  و  $J_{10}(1)$  اند مهم نیست؛ مطمئنیم که خطاها (به طور نمایی!) محو خواهند شد. توجه کنید که درایه نهایی، یعنی  $y_0$ ، در جدول ۵۰.۱۳ عبارت است از

جدول ۵۰.۱۳ رابطه بازگشتی (۴۸.۱۳)  
به ازای  $m$  نزولی ( $x = 1$ )

$m$	$y_m$	$y_m \cdot \frac{J_0(1)}{y_0}$	$J_m(1)$
10	0	.00000 000	.00000 000
9	1	.00000 001	.00000 001
8	18	.00000 009	.00000 009
7	287	.00000 150	.00000 150
6	4,000	.00002 094	.00002 094
5	47,713	.00024 976	.00024 976
4	473,130	.00247 664	.00247 664
3	3,737,327	.01956 335	.01956 335
2	21,950,832	.11490 348	.11490 348
1	84,066,001	.44005 059	.44005 059
0	146,181,170	.76519 769	.76519 769

$$\text{مقیاس} = \frac{J_0(1)}{y_0} = \frac{.76519 7687}{146,181,170} = 5.2345 8450 \times 10^{-9}$$

146 181,170 که یقیناً تقریب ضعیفی از  $J_0(1)$  است! لیکن، اختلال فقط به خاطر ثابت دلخواه در (۵۰.۱۳) است. لذا،  $y_0$  را بر مقدار معلوم  $J_0(1)$  تقسیم کرده یک عامل مقیاس "به دست می آوریم؛ محاسبات مربوط در جدول ۵۰.۱۳ نموده شده است. برای اثبات سودمندی محاسبات،  $y_m$  را در این عامل مقیاس ضرب می کنیم؛ نتایج (در ستون سوم) با  $J_m(1)$  (در ستون چهارم) تا هشت رقم اعشار سازگارند. اگر ارقام با معنی بیشتری بخواهیم، یا  $J_m(x)$  را به ازای مقادیر بزرگتری از  $m$  طالب باشیم، باید به جای  $m = 10$  از



یک روش بسیار ساده که اغلب ارزش امتحان کردن بر معادله‌های به شکل

$$\begin{aligned} x &= f(x) \\ x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2) \end{aligned}$$

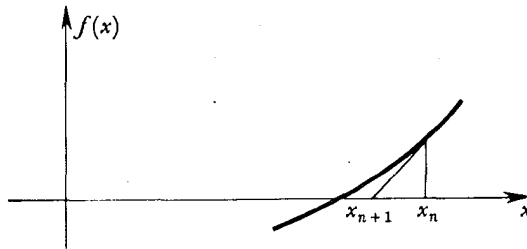
را دارد تکرار مستقیم

و غیره

است. اگر طرح همگرا باشد، اغلب سریعترین راه برای تخمین  $x$  است. همگرایی نیاز به

$$|f'(x)| < 1$$

در مجاورت ریشه دارد.



شکل ۳.۱۳ توضیح روش نیوتن برای به دست آوردن

تخمین اصلاح شده  $x_{n+1}$  برای ریشه  $f(x)$

بالاخره، روش هورنر<sup>۱</sup> برای محاسبه ریشه‌های (حقیقی) چندجمله‌ایها را توصیف می‌کنیم. این روش بر دو الگوریتم استوار است، یکی برای تقلیل ریشه‌های یک چندجمله‌ای به اندازه یک ثابت و دیگری ضرب هر ریشه در ده<sup>۲</sup>. برای این روش مثال عددی می‌آوریم که در محاسبات با قلم و کاغذ مفیدترین است؛ یک کامپیوتر رقمی معمولاً از سایر روشها استفاده می‌کند<sup>۳</sup>.

برای تقلیل هر ریشه تابع  $f(x)$  به اندازه ثابت  $a$ ، کافی است تابع جدید  $g(x) = f(x + a)$  را بسازیم؛ واضح است که هر ریشه  $g(x)$  به اندازه  $a$  از یک ریشه  $f(x)$

### 1- Horner

۲. به طور دقیقتر، یک الگوریتم چندجمله‌ای جدیدی می‌سازد که ریشه‌های ریشه‌های چندجمله‌ای اصلی است که به اندازه ثابت معینی کاهش یافته‌اند، و دیگری چندجمله‌ای جدیدی می‌سازد که ریشه‌های ریشه‌های چندجمله‌ای اصلی ضربدر ۱۰ می‌باشند.
۳. برای بحث کاملتری از تکنیکهای ریشه‌یابی، خواننده می‌تواند به مرجع تخصصی‌تری نظیر تود (T5)، فصل ۷، رالتون (R2)، فصل ۸، یا استروسکی (O3) مراجعه نماید.

کمتر است. اگر  $f(x)$  یک چندجمله‌ای باشد، می‌توان نوشت

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$$

و، در صورت معلوم بودن  $b_n$  ها، دستورالعمل ساده‌ای برای محاسبه  $a_n$  ها در دست است.

زیرا

$$f(x) = g(x-a) = b_n(x-a)^n + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + \dots + b_0$$

لذا،  $b_0$  باقیمانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x-a$  می‌باشد. اگر خارج‌قسمت حاصل را مجدداً بر

$(x-a)$  تقسیم کنیم، باقیمانده  $b_1$  است، و همین‌طور تا آخر.

تقسیم یک چندجمله‌ای بر  $x-a$  به وسیله فرایند تقسیم مصنوعی به ساده‌ترین‌وجه

میسر است. مثلاً، نمایش مرسوم تقسیم  $2x^3 - 7x^2 + x + 3$  بر  $x-3$  عبارت است از

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + x + 3 \quad |x-3 \\ \underline{2x^3 - 6x^2} \phantom{+ x + 3} \quad |2x^2 - x - 2 \\ \phantom{2x^3 - } - x^2 + x \phantom{+ 3} \\ \phantom{2x^3 - } \underline{- x^2 + 3x} \phantom{+ 3} \\ \phantom{2x^3 - } \phantom{- x^2 + } - 2x + 3 \\ \phantom{2x^3 - } \phantom{- x^2 + } \underline{- 2x + 6} \\ \phantom{2x^3 - } \phantom{- x^2 + } \phantom{- 2x + } - 3 \end{array}$$

تقسیم مصنوعی چیزی جز اختصار این محاسبات به صورت زیر نیست:

$$\begin{array}{r} 2 - 7 + 1 + 3 \quad |3 \\ \underline{+ 6 - 3 - 6} \\ 2 - 1 - 2 \quad | -3 \end{array}$$

توجه کنید که ضرایب مربوطه در سراسر کار مورد استفاده‌اند؛ سه عدد اول سطر آخرنمایش

خارج‌قسمت  $(2x^2 - x - 2)$  اند، حال آنکه آخرین عدد  $(-3)$  باقیمانده می‌باشد. ضمناً،

این باقیمانده حاصل جانشانی  $x=3$  در چندجمله‌ای  $2x^3 - 7x^2 + x + 3$  نیز می‌باشد.

اما دیدیم که چندجمله‌ایی را که ریشه‌هایش از ریشه‌های  $2x^3 - 7x^2 + x + 3$  سه تا

کمترند می‌توان با تکرار تقسیم بر  $x-3$  به دست آورد؛ تقسیم مصنوعی تکراری شبیه زیر

$$\begin{array}{r} 2 - 7 \quad 1 \quad 3 \quad |3 \\ \underline{+ 6 - 3 - 6} \end{array}$$

خواهد بود:

$$\begin{array}{r} 2 - 1 - 2 \quad | -3 \\ \underline{+ 6 + 15} \end{array}$$

(۵۱۰۱۳)

$$\begin{array}{r} 2 + 5 \quad | +13 \\ \underline{+ 6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad | +11 \end{array}$$

چندجمله‌ای مطلوب عبارت است از  $2x^3 + 11x^2 + 13x - 3$ .

باتوجه به این امر که چند جمله‌ای اصلی  $2x^3 - 7x^2 + x + 3$  بین  $x=3$  و  $x=4$  تغییر علامت می‌دهد، گوییم ریشه‌های در این بازه دارد<sup>۱</sup>. گام اول در روش هورنر تقلیل ریشه‌هایش به اندازه 3، مثل (51.13)، است. در این صورت، چندجمله‌ای حاصل، یعنی  $2x^3 + 11x^2 + 13x - 3$ ، ریشه‌های بین 0 و 1 خواهد داد؛ لذا، برای آسانی محاسبات رقم بعدی ریشه، همه ریشه‌ها را در 10 ضرب می‌کنیم. به آسانی می‌توان ثابت کرد که چندجمله‌ای مطلوب، که ریشه‌هایش 10 برابر ریشه‌های  $2x^3 + 11x^2 + 13x - 3$  است، چندجمله‌ای  $2x^3 + 110x^2 + 1300x - 3000$  می‌باشد. حال مثل قبل عمل می‌کنیم. چندجمله‌ای جدید بین 1 و 2 تغییر علامت می‌دهد؛ ریشه‌ها به اندازه 1 تقلیل می‌یابند، مجدداً در 10 ضرب می‌کنیم، و همین‌طور تا آخر. چند مرحله از محاسبات کامل ذیلاً" نموده شده‌اند.

$$\begin{array}{r}
 2 - 7 \quad 1 \quad 3 \quad | \quad 3 \\
 \quad + 6 - 3 - 6 \\
 \hline
 2 - 1 - 2 \quad | \quad -3 \\
 \quad + 6 + 15 \\
 \hline
 2 + 5 \quad | \quad +13 \\
 \quad + 6 \\
 \hline
 2 \quad | \quad +11
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2 + 110 + 1300 - 3000 \quad | \quad 1 \\
 \quad + \quad 2 + 112 \quad + 1412 \\
 \hline
 2 + 112 + 1412 \quad | \quad -1588 \\
 \quad + \quad 2 + \quad 114 \\
 \hline
 2 + 114 \quad | \quad +1526 \\
 \quad + \quad 2 \\
 \hline
 2 \quad | \quad +116
 \end{array}$$

۱. برای روشهای پیچیده‌تر تعیین ریشه‌های چندجمله‌ایها، نظیر روش استورم، می‌توان به مراجع ذکر شده در پایان این فصل مراجعه کرد.

$$\begin{array}{r}
 2 + 1160 + 152600 - 1588000 \quad |9 \\
 + \quad 18 + 10602 + 1468818 \\
 \hline
 2 + 1178 + 163202 \quad | - 119182 \\
 + \quad 18 + 10764 \\
 \hline
 2 + 1196 \quad | + 173966 \\
 + \quad 18 \\
 \hline
 2 \quad | + 1214 \\
 2 + 12140 + 17396600 - 119182000
 \end{array}$$

...

تا اینجا ریشه عبارت است از  $3.19 \dots$ ؛ چند رقم دیگر را می‌توان با تقسیم آخرین ضریب چندجمله‌ای بر ضریب بلافاصله قبل از آخر به دست آورد:

$$\frac{119,182,000}{17,396,000} = 6.85 \dots$$

لذا،  $x \approx 3.19685$ . ریشه واقعی عبارت است از  $3.19682 \dots$ .

### ۵.۱۳ جمع‌بندی سریها

برای شروع می‌توان جملات را آنقدر به هم افزود تا باقیمانده به قدری کوچک باشد که بشود از آن چشم پوشید. اگر سری به سرعت همگرا باشد، این کار خوبی است. ولی بسیاری از سریها همگرایی بسیار کندی دارند که این روش ساده برایشان مناسب نیست.

مثلاً، "مجموع

(۵۲.۱۳)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

را در نظر می‌گیریم. چندجمله‌ء اول در جدول ۷.۱۳ نموده شده‌اند.

جدول ۷.۱۳

$n$	$\frac{1}{n^2}$	$\Sigma$
1	1.0000	1.0000
2	0.2500	1.2500
3	0.1111	1.3611
4	0.0625	1.4236
5	0.0400	1.4636

واضح است که برای به دست آوردن چهار رقم اعشار باید تقریباً " 100 جمله را نوشت.

برای تخمین سریهای نامتناهی می‌توان از انتگرالهای نامتناهی استفاده کرد. مثلاً،

همانطور که از شکل ۴.۱۳ واضح است،

$$(۵۳.۱۳) \quad \int_6^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_5^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

لذا،

$$0.1667 < \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 0.2000$$

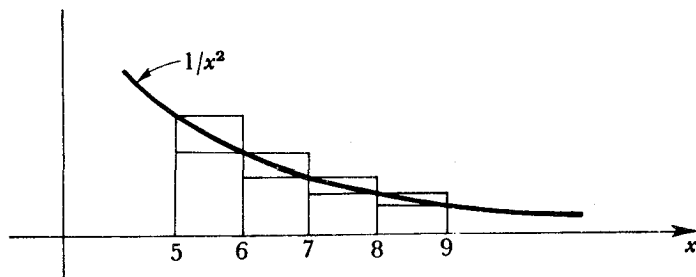
و، از تلفیق این نتیجه با پنج جمله اول که در بالا با دست حساب شدند، خواهیم داشت

$$(۵۴.۱۳) \quad 1.6303 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1.6636$$

نتیجه هنوز رضایت بخش نیست. متوسط دو حد، یعنی 1.6470، خیلی دقیق نیست. البته،

جواب دقیق خواهد بود [ر.ک. (۳۷.۲)]

$$\frac{\pi^2}{6} = 1.6449 \dots$$



شکل ۴.۱۳ روابط بین یک سری و یک انتگرال نشانگر

نامساویهای (۵۳.۱۳)

فرمول اویلر - ماکلورن<sup>۱</sup> مقایسه دقیقتری از یک سری با انتگرال نظیر را سبب می شود.

این فرمول را می توان با استفاده از عملگرهای  $E$  و  $D$  مطرح شده در بخش ۱.۱۳ این فصل به ساده ترین وجه به دست آورد. ابتدا تقریب ذوزنقه

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

$$\approx h \left[ \frac{1}{2} + E + E^2 + \dots + E^{n-1} + \frac{1}{2} E^n \right] f(a)$$

$$(۵۵.۱۳) \quad \approx h(E^n - 1) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{E-1} \right) f(a)$$

را می‌نویسیم. از طرف دیگر، مقدار دقیق انتگرال عبارت است از

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a)$$

که در آن

$$g(x) = \int f(x) dx$$

در این صورت،

$$Dg(a) = f(a)$$

و

$$(۵۶.۱۳) \quad \int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a) = (E^n - 1)g(a) = \frac{(E^n - 1)}{D} f(a)$$

لذا،

(تقریب) - (انتگرال)

$$\begin{aligned} &= \frac{(E^n - 1)}{D} \left[ 1 - hD \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{E - 1} \right) \right] f(a) \\ &= \left( \frac{E^n - 1}{D} \right) \left[ 1 - hD \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{hD} - 1} \right) \right] f(a) \\ &= \frac{E^n - 1}{D} \left[ -\frac{B_2}{2!} (hD)^2 - \frac{B_4}{4!} (hD)^4 - \dots \right] f(a) \\ &= -\frac{B_2}{2!} h^2 f'(x) \Big|_a^b - \frac{B_4}{4!} h^4 f'''(x) \Big|_a^b - \dots \end{aligned}$$

که در آن  $B_n$  ها اعداد برنولی‌اند که در فصل ۲ مورد بحث قرار گرفتند [ر.ک. (۱۷.۲) و (۲۰.۲)]. نتیجه نهایی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۵۷.۱۳) \quad \int_a^b f(x) dx = h \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \frac{1}{2} f(b) \right] - \frac{B_2}{2!} h^2 f'(x) \Big|_a^b - \frac{B_4}{4!} h^4 f'''(x) \Big|_a^b - \dots$$

از این فرمول می‌توان، با اصلاح تقریب دوزنقه، برای تخمین انتگرالها یا سربها استفاده کرد. ما فقط کاربرد دوم را توضیح خواهیم داد. به ازای  $a=6$ ،  $b=\infty$ ،  $h=1$ ، و  $f(x) = 1/x^2$ ، رابطه (۵۷.۱۳) نتیجه می‌دهد که

$$\int_6^\infty \frac{d}{x^2} = \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \dots \right] + \frac{1}{6x^3} \Big|_6^\infty - \frac{1}{30x^5} \Big|_6^\infty + \dots$$

لذا،

$$\sum_{n=6}^\infty \frac{1}{n^2} = \int_6^\infty \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{6^2} - \frac{1}{6x^3} \Big|_6^\infty + \frac{1}{30x^5} \Big|_6^\infty - + \dots$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{72} + \frac{1}{1296} - \dots$$

$$= 0.1813$$

با افزودن این به  $\sum_{n=1}^5 1/n^2$  به دست می‌آید

$$(58.13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1.6449$$

که تا چهار رقم درست می‌باشد.

فرض کنید بخواهیم از هر جمع‌بندی با دست احتراز کنیم!

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[ \frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \right] + \frac{1}{6x^3} \Big|_1^{\infty} - \frac{1}{30x^5} \Big|_1^{\infty}$$

$$+ \frac{1}{42x^7} \Big|_1^{\infty} - \frac{1}{30x^9} \Big|_1^{\infty} + \frac{5}{66x^{11}} \Big|_1^{\infty} - \dots$$

$$(59.13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{30} + \frac{1}{42} - \frac{1}{30} + \frac{5}{66} - \dots$$

این سری همگرا نیست! دلیلش این است که فرمول اویلر - ماکلورن معمولاً "سری مجانبی" (به صورت تعریف شده در بخش ۵.۳) به دست می‌دهد نه یک سری همگرا. این معمولاً در مقاصد عددی اهمیت ندارد مشروط بر اینکه جملات به سرعت کاهش یابند.

این فصل را با توضیح چند ترفند که برای اصلاح همگرایی به کار می‌روند خاتمه

می‌دهیم. فرض کنید بخواهیم  $\pi$  را حساب کنیم. یک سری مفید عبارت است از

$$(60.13) \quad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

با فرض  $x = 1$  داریم

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \quad (\text{سری گریگوری})$$

همگرایی این سری کند است.  $x = \sqrt{1/3}$  را امتحان می‌کنیم.

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} \left( 1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{5 \times 9} - \frac{1}{7 \times 27} + \dots \right)$$

این بوضوح بهتر است. برای بهتر شدن قرار می‌دهیم  $x = \frac{1}{3}$ .

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} - \dots$$

$$2\alpha = \tan^{-1} \frac{5}{12}$$

$$4\alpha = \tan^{-1} \frac{120}{119} \left( \approx \frac{\pi}{4} \right)$$

در واقع ،  $4\alpha = \pi/4 + \beta$  ، که در آن ( با گرفتن تانژانت )

$$\frac{120}{119} = \frac{1 + \tan \beta}{1 - \tan \beta} \Rightarrow \beta = \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

لذا ،

$$\begin{aligned} \pi &= 16\alpha - 4\beta \\ &= 16 \tan^{-1} \frac{1}{5} - 4 \tan^{-1} \frac{1}{239} \\ &= 16 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} - + \dots \right) \\ &\quad - 4 \left( \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \times 239^3} + - \dots \right) \end{aligned}$$

(۶۱.۱۳)

این رابطه  $\pi$  را برحسب دوسری با همگرایی سریع بیان می نماید .

به عنوان مثال دوم ، فرض کنید بخواهیم  $\ln 2$  را حساب کنیم . می توانیم با

(۶۲.۱۳)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots$$

شروع کنیم که نتیجه می دهد

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots$$

همگرایی این سری خیلی کند است . برای اصلاح ، ملاحظه می کنیم که

$$\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

با فرض  $x = \frac{1}{3}$  داریم

$$\ln 2 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \dots \right)$$

این خیلی بهتر همگراست .

اگر سری بخواهیم که واقعا " سریع همگرا شود ، به اعدادی در مجاورت 1 نیاز داریم

، مثلا " ،

$$\begin{aligned} \ln 3 - \ln 2 &= \ln \frac{3}{2} & (x = \frac{1}{2}) \\ 2 \ln 3 - 3 \ln 2 &= \ln \frac{9}{8} & (x = \frac{1}{7}) \end{aligned}$$

اینها  $\ln 2$  و  $\ln 3$  را برحسب سریهای با همگرایی بسیار سریع به ما می دهند .

تبدیل اویلر (ر.ک. بخش ۳.۲) طرح دیگری است که گاهی برای اصلاح همگرایی

یک سری به کار می رود .



### مراجع

کار کلاسیک در این مبحث کتاب بول<sup>۱</sup> (B5) است. دو کتاب بعد از آن که ارزش نام بردن دارند کتب میلن - تامسون<sup>۲</sup> (M6) و ویتاکر و رایینسون<sup>۳</sup> (W4) اند. این کتب اگرچه پیش از کامپیوترهای رقمی الکترونیک نگاشته شده‌اند، حاوی مطالب جالب بسیاری می‌باشند. در بین کارهای بسیاری که اخیراً در این مبحث شده است، کتاب بوت<sup>۴</sup> (B6) مجموعه جدیدترین فرمولهای عددی مفید می‌باشد. برای بحثهای کاملتری از روشهای عددی، ر.ک. تود (T5)؛ هیلدبراند<sup>۵</sup> (H8)؛ همینگ<sup>۶</sup> (H4)؛ رالستون<sup>۷</sup> (R2)؛ یا هنریچی<sup>۸</sup> (H7). کار استروسکی<sup>۹</sup> (O3) عالی ولی نسبتاً تخصصی است. دو جلد کوچک کتاب نوبل<sup>۱۰</sup> (N4) شرحی مقدماتی از این موضوعات می‌باشند.

مسئله محاسبه عددی ریشه‌ها، و بخصوص ریشه‌های چندجمله‌ایها، در اکثر مراجع فوق و نیز در کتب نظریه معادلات بحث شده است. کونک رایت<sup>۱۱</sup> (C7) و ویزنر<sup>۱۲</sup> (W3) کتبی نوعی‌اند که در آنها شرح کاملتری از روش هورنر و روشهای کلی و تواناتری دیده می‌شود.

### مسائل

۰۱۰۱۳. مقادیر

$$f(1.5) \quad (\text{آ})$$

$$f'(1.5) \quad (\text{ب})$$

(پ) ریشه<sup>۶</sup>  $f(x) = 0$  بین 2 و 3

را با استفاده از جدول زیر تخمین بزنید.

$x$	$f(x)$
1	4.721
2	2.160
3	-0.357
4	-2.099

۰۲۰۱۳. فرض کنید تابعی مقادیر  $y_0, y_1, y_{-1}$  را در سه مقدار متساوی الفاصله شناسه‌اش  $x$

- |            |                |              |
|------------|----------------|--------------|
| 1- Boole   | 2- Thomson     | 3- Robinson  |
| 4- Booth   | 5- Hildebrand  | 6- Hamming   |
| 7- Ralston | 8- Henrici     | 9- Ostrowski |
| 10- Noble  | 11- Conkwright | 12- Weisner  |

بگیرد .

(آ)  $y_{\max}$  ، یعنی ماکزیمم (یا مینیمم)  $y$  ، را برحسب  $y_{-1}$  ،  $y_0$  ، و  $y_1$  تخمین بزنید .

(ب) اگر  $y(x)$  مشتق سوم کوچک داشته باشد ، نشان دهید که خطای  $\Delta y_{\max}$  در تخمین قسمت (آ) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\Delta y_{\max} \approx C \frac{y' y'''}{y''} \left[ \left( \frac{y'}{y''} \right)^2 - h^2 \right]$$

که در آن  $h$  فاصله بین مقادیر  $x$  است . مقدار ثابت  $C$  چقدر است ؟

۳۰۱۳ . مشابه دویبعدی روش درونیابی خطی شکل ۲۰۱۳ را بسازید . یعنی ، می خواهیم معادلات

$$g(x, y) = 0 \quad \text{و} \quad f(x, y) = 0$$

را به طور همزمان حل کنیم . سه جفت  $(x, y)$  با نتایج زیر حدس زده شده اند :

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) = A_1 & \quad f(x_2, y_2) = A_2 & \quad f(x_3, y_3) = A_3 \\ g(x_1, y_1) = B_1 & \quad g(x_2, y_2) = B_2 & \quad g(x_3, y_3) = B_3 \end{aligned}$$

$x$  و  $y$  را برحسب  $x_i$  ،  $y_i$  ،  $A_i$  ، و  $B_i$  ،  $(i = 1, 2, 3)$  حساب کنید .

۴۰۱۳ .  $y(0.4)$  را از جدول زیر ، با استفاده از روش رونگه - کوتای مطرح شده در متن ، بیابید .

$$y' = x - y^2$$

$x$	$y$	$y'$
0	1.00000	-1.00000
0.1	0.91379	-0.73501
0.2	0.85119	-0.52452
0.3	0.80762	-0.35225

۵۰۱۳ .  $y(0.4)$  را از جدول مسئله ۴۰۱۳ ، با استفاده از روش میلن ، بیابید . (یک حدس ، یک اصلاح) .

۶۰۱۳ . فرض کنید می خواهیم یک فرمول " پیشگو " بسازیم به طوری که از

$$\begin{array}{ccc} x_0 & y_0 & y'_0 \\ x_1 & y_1 & y'_1 \end{array}$$

با شناسه های متساوی الفاصله بتوان  $y_2$  را پیشگویی کرد .

(آ) فرمولی شامل  $y_0$  ،  $y'_0$  ، و  $y'_1$  به دست آورید . در خطا و پایداری آن بحث کنید .

(ب) فرمولی شامل  $y_0, y_1, y'_0, y'_1$  و  $y_1$  به دست آورید. در خطا و پایداری آن بحث کنید.

۰۷۰۱۳. (آ) برای جوابهای دقیق رابطه بازگشتی (ب) مسئله ۰۷۰۷ در رفتار مجانبی (به ازای  $n$  بزرگ) ممکن به دست آورید.

(ب) توابع  $f_n(x)$  آن مسئله کدامیک از این دو رفتار را دارند؟

(پ) با مقادیر (بی معنی)  $f_9(1) = 1, f_{10}(1) = 0$  شروع کرده، با فرض  $f_0(1) = 2.2796$   $f_1(1)$  را با تکرار بازگشتی به دست آورید. جواب را با جمع بندی سری توانی مربوط به  $f_1(1)$  امتحان کنید.

۰۸۰۱۳. خطا بر تقسیم قاعده سیمپسون در انتگرال گیری عددی را تخمین بزنید.

۰۹۰۱۳. برای انتگرال

$$I = \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, dx$$

تخمین گاوسی به شکل

$$I \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

به دست آورید؛  $\sin x$  را به عنوان تابع وزن و  $f(x)$  را با یک چند جمله ای تقریب کنید. خطا چقدر خواهد بود؟

۰۱۰۰۱۳. انتگرالهای زیر را با یک فرمول گاوسی دو نقطه ای حساب کنید:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \quad (\text{آ})$$

$$(\text{ب}) \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{1+x^2} \quad (e^{-x} \text{ را تابع وزن بگیرید})$$

در هر حالت، جواب صحیح را هم تا سه رقم با معنی بیان دارید.

۰۱۱۰۱۳. در بسیاری از انتگرالها به شکل  $\int_a^b f(x) dx$  روش انتگرال گیری مناسب است که برای

چند جمله ایها دقیق باشد، ولی برای انتگرالهایی به شکل  $\int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi$ ، که در آن  $\phi$  یک زاویه هندسی است، "بسط طبیعی"  $f(\phi)$  یک سری توانی نبوده و بلکه یک سری فوریه است، و مناسب آن است که روش انتگرال گیری برای هر چه بیشتر جملات سری فوریه دقیق باشد. از این به ازای تعداد داده شده ای از نقاط انتگرال گیری چه نتیجه ای برای مواضع آنها و ضرایب به دست می آید؟

۰۱۲۰۱۳. صورت نسبتاً "ساده" زیر از روش رونگه-کوتا برای معادله دیفرانسیل  $dy/dx = f(x, y)$

با شروع از  $x_0, y_0$  را در نظر می گیریم:

$$k_1 = \delta x f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = \delta x f(x_0 + \lambda \delta x, y_0 + \mu k_1)$$

$$y(x_0 + \delta x) \approx y_0 + \rho k_1 + \sigma k_2$$

$$\text{خطا} \approx C(\delta x)^3 y'' \frac{\partial f}{\partial y}$$

ثابت‌های  $C, \lambda, \mu, \rho, \sigma$  را تعیین کنید.

۱۳.۱۳. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

را، با استفاده از فرمول اویلر - ماکلورن، تا چهار رقم اعشار حساب کنید.

۱۳.۱۴. فرمول گاوسی دو نقطه‌ای مربوط به

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx$$

را با گرفتن  $x^2$  به عنوان تابع وزن بیابید.

۱۳.۱۵. فرمول اویلر - ماکلورن به عنوان اصلاح قاعدهٔ دوزنقه برای انتگرالگیری عددی

به دست آمد. فرمول مشابهی به دست آورید که با قاعدهٔ سیمپسون شروع شود.

فقط لازم است یک جملهٔ اصلاح شامل مشتقات در نقاط انتهایی نگهداشته شود.

## احتمال و آمار

این فصل را با بحث کوتاهی از قوانین اساسی احتمال و مرور چند نکته راجع به جایگشتها و ترکیبات آغاز می‌کنیم. در بخشهای ۴.۱۴، ۵.۱۴، و ۶.۱۴، توزیعهای احتمال همراه با توابع مشخصه مورد بحث قرار می‌گیرند. در بخش ۷.۱۴، که در آن روش راستنمایی ماکزیم برآزش داده‌ها توصیف شده است، تعبیر نتایج تجربی مطرح خواهد شد.

### ۱.۱۴ آشنایی

به تجربه ثابت شده است که اگر یک سکه معمولی را  $N$  بار بیندازیم و  $N_h$  بار شیر بیاید، نسبت

$$\frac{N_h}{N}$$

تقریباً  $\frac{1}{2}$  است، و هر قدر  $N$  را بزرگتر بگیریم، این نسبت به  $\frac{1}{2}$  نزدیکتر است. این نتیجه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد. احتمال آنکه در پرتاب یک سکه شیر بیاید  $\frac{1}{2}$  است. به طور کلی، اگر آزمایش  $N$  بار انجام شده و  $N_s$  بار "پیروز" باشد، و نسبت

$$\frac{N_s}{N}$$

وقتی  $N \rightarrow \infty$  به حد نزدیک گردد، گوئیم احتمال پیروزی  $N_s/N$  است.

این نوع احتمال یک احتمال پسین نام دارد. ما سعی نمی‌کنیم نتیجه را پیش بینی کنیم؛ ما فقط آن را اندازه می‌گیریم.

اگر بخواهیم احتمالات را پیش‌بینی کنیم، به تعریف احتمال پیشین می‌رسیم. هرگاه آزمایشی  $N$  نتیجه ممکن داشته، همه متساوی‌الاحتمال بوده، و  $N_s$  تا "پیروز" باشند، آنگاه احتمال پیشین پیروزی  $N_s/N$  می‌باشد. البته، عبارت کلیدی "متساوی‌الاحتمال"

بودن است. ما متساوی‌الاحتمال بودن دو پیشامد را تعریف نمی‌کنیم؛ تنها فرض می‌کنیم می‌توان پدیده‌های متساوی‌الاحتمال را تشخیص داد.

البته، دو نوع احتمال باید همیشه یک جواب به ما بدهند. اگر احتمال پسین با احتمال پیشین متفاوت بود، نتیجه می‌گیریم که بعضی از پیشامدها به اشتباه متساوی‌الاحتمال گرفته شده‌اند. در آنچه می‌آید، بین دو نوع احتمال تمایزی قایل نمی‌شویم.

### ۲.۱۴ قوانین اساسی احتمال

فرض کنیم  $P(A)$  احتمال چیزی (به نام  $A$ ) باشد که در یک آزمایش روی می‌دهد.  $P(A)$  مسلماً "بین 0 و 1 قرار دارد. اگر وقوع  $A$  محقق باشد،  $P(A) = 1$ . اگر  $A$  مسلماً " روی ندهد،  $P(A) = 0$ .

برای توضیح چند حالت پیچیده‌تر، آزمایشی با  $n$  نتیجه متساوی‌الاحتمال مستلزم دو پیشامد  $A$  و  $B$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$$n_1 = \text{تعداد نتایجی که } A \text{ روی می‌دهد ولی } B \text{ روی نمی‌دهد}$$

$$n_2 = \text{تعداد نتایجی که } B \text{ روی می‌دهد ولی } A \text{ روی نمی‌دهد}$$

$$n_3 = \text{تعداد نتایجی که هر دوی } A \text{ و } B \text{ روی می‌دهند}$$

$$n_4 = \text{تعداد نتایجی که نه } A \text{ روی می‌دهد نه } B$$

چون تمام حالات ذکر شده‌اند،

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$$

اما احتمالات  $A$  و  $B$  به صورت زیرند:

$$(1.14) \quad P(A) = \frac{n_1 + n_3}{n} \quad P(B) = \frac{n_2 + n_3}{n}$$

می‌توان احتمالات پیچیده‌تری را تعریف کرد. احتمال روی دادن  $A$  یا  $B$  (یا هر دو) عبارت است از

$$(2.14) \quad P(A + B) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n}$$

احتمال روی دادن هر دوی  $A$  و  $B$  احتمال مشترک  $A$  و  $B$  نام دارد:

$$(3.14) \quad P(AB) = \frac{n_3}{n}$$

بالاخره، می‌توان احتمالات شرطی را تعریف کرد؛ احتمال روی دادن  $A$  به شرط  $B$  عبارت است از

$$(4.14) \quad P(A|B) = \frac{n_3}{n_2 + n_3}$$

به همین نحو،

$$(۵.۱۴) \quad P(B|A) = \frac{n_3}{n_1 + n_3}$$

از این مثال ساده می توان دو قاعده<sup>۶</sup> مهم استخراج کرد؛ و در واقع، به آسانی معلوم می شود که در حالت کلی

$$(۶.۱۴) \quad P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$(۷.۱۴) \quad P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

یک مثال از (۶.۱۴) احتمال آن است که وقتی هر یک از دو دست ورق یک ورق می کشیم، دست کم یکی آس باشد. جواب خواهد بود

$$P = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{169} = \frac{25}{169}$$

( توجه کنید که کشیدن هر کارت در یک دسته ورق "متساوی الاحتمال" فرض می شود. )  
یک مثال از (۷.۱۴) احتمال آمدن دو دل در کشیدن ورقهای متوالی از یک دسته ورق است.

$$P(2 \text{ دل}) = P(1 \text{ دل} | 1 \text{ دل}) P(1 \text{ دل})$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

اگر دو پیشامد مستقل از هم باشند، که به معنی  $P(AB) = 0$  است، از (۶.۱۴)

داریم

$$(۸.۱۴) \quad P(A + B) = P(A) + P(B)$$

اگر  $P(AB) = P(A)P(B)$ ، گوییم پیشامدهای  $A$  و  $B$  به طور آماری مستقل اند. توجه

کنید که این [ بنابر (۷.۱۴) ] ایجاب می کند که

$$(۹.۱۴) \quad P(A|B) = P(A) \quad P(B|A) = P(B)$$

می توان روابط جالبی بین احتمالات شرطی به دست آورد. مثلاً، از

$$(۱۰.۱۴) \quad P(AB) = P(B)P(A|B)$$

و

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

نتیجه می گیریم که

$$(۱۱.۱۴) \quad P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} P(A|B)$$

با نوشتن رابطه ای مشابه برای  $A$  و  $C$  و تقسیم آنها، نتیجه ای معروف به قضیه بیژ به دست

می آید:

$$(12.14) \quad \frac{P(B|A)}{P(C|A)} = \frac{P(B) P(A|B)}{P(C) P(A|C)}$$

به عنوان مثال نسبتاً " ساده‌ای از این قضیه، مسئلهٔ قدیمی سه کتو  $A$ ،  $B$ ،  $C$  به ترتیب شامل دو سکه طلا، یک طلا و یک نقره، و دو سکه نقره را در نظر می‌گیریم. یک کتو را به تصادف اختیار می‌کنیم و سکه‌ای به تصادف از آن برمی‌داریم. سکه طلاست. احتمال طلا بودن سکه دیگر چقدر است؟ اگر  $D$  پیشامد طلا بودن سکه اول باشد، می‌خواهیم  $P(A|D)$  را حساب کنیم. داریم

$$P(C|D) = 0$$

و

$$\frac{P(A|D)}{P(B|D)} = \frac{P(A) P(D|A)}{P(B) P(D|B)} = \frac{1/3}{1/3} \times \frac{1}{1/2} = 2$$

چون  $P(A|D) + P(B|D) + P(C|D) = 1$  داریم

$$(13.14) \quad P(A|D) = 2/3 \quad P(B|D) = 1/3 \quad P(C|D) = 0$$

### ۳.۱۴ ترکیبات و جایگشتها

حال چند نتیجه را مرور می‌کنیم که احتمالاً " برای دانشجو آشنا هستند.

تعداد ترتیبات، یا جایگشتهای  $n$  شیء عبارت است از  $n!$ ، زیرا اولین موضع می‌تواند توسط هر یک از  $n$  شیء اشغال شود، دومین موضع توسط هر یک از  $(n-1)$  شیء باقیمانده اشغال می‌شود، و غیره. به دلیلی مشابه، تعداد زیرمجموعه‌های مرتب شامل  $m$  شیء از  $n$  شیء عبارت است از

$$(14.14) \quad n(n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

اگر تعداد زیرمجموعه‌های شامل  $m$  شیء از  $n$  شیء را صرف‌نظر از ترتیبشان در نظر بگیریم (تعداد ترکیبات  $n$  شیء  $m$  به  $m$ )، باید نتیجه فوق را بر  $m!$  تقسیم کنیم، زیرا هر ترکیب را می‌توان به  $m$  طریق مرتب کرد؛ و در نتیجه، تعداد (۱۴.۱۴) را خواهیم داشت. لذا، تعداد ترکیبات  $n$  شیء  $m$  به  $m$  ضریب دو جمله‌ای

$$(15.14) \quad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{n-m}$$

می‌باشد.



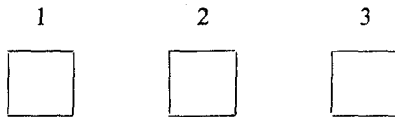
می توان سوءالات پیچیده تری مطرح کرد. مثلا، اگر  $n_1$  شیء مثل هم و  $n_2$  شیء دیگر مثل هم (ولی متفاوت با  $n_1$  شیء) باشند، و غیره، چند ترتیب متمایز از  $n$  شیء وجود دارند. تعداد کل جایگشتها  $n!$  است ولی هرجایگشت متمایز  $n_1!, n_2!, \dots$  بار ظاهر می شود؛ در نتیجه، تعداد جایگشتهای متمایز مساوی است با

$$(16.14) \quad \frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$$

به عنوان مثالی دیگر، اگر تکرار مجاز باشد، چند ترکیب از  $n$  شیء  $m$  به  $m$  وجود دارند؟ مثلا، تعداد ترکیبات سه شیء دو به دو، با تکرار، شش تا است:

11 12 13 22 23 33

برای به دست آوردن فرمول کلی، ابتدا توجه می کنیم که تعداد ترکیبات  $n$  نوع شیء  $m$  به  $m$ ، با تکرار، مساوی تعداد طرقی است که  $m$  گوی یکسان را می توان در  $n$  جعبه توزیع کرد. در مثال فوق، سه جعبه وجود دارند:



و با نشان دادن دو "گوی" با ضربدرها شش توزیع خواهیم داشت که در جدول ۱۰۱۴ نموده شده اند. اینها نظیر شش ترکیبی هستند که در بالا با همین ترتیب شماره گذاری شده اند.

جدول ۱۰۱۴

1	2	3
xx		
x	x	
x		x
	xx	
	x	x
		xx

حال تعداد طرقی را می شماریم که  $m$  شیء یکسان را می توان در  $n$  جعبه توزیع کرد. کافی است  $m$  ضربدر و  $(n-1)$  خط قائم را با ترتیبهای مختلف بنویسیم. مثلا اگر  $m=6$  و  $n=4$ ، ترتیب زیر نظیر دوگویی در جعبه اول، هیچ گویی در جعبه دوم، چهار گویی در

$$xx | xxxx$$

جعبه سوم، و هیچ گوی در جعبه چهارم می باشد. تعداد کل ترتیبات  $m$  ضربدر (یکسان) و  $(n-1)$  خط (یکسان) از  $(16 \cdot 14)$  به دست می آید:

$$(17 \cdot 14) \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} = \binom{n+m-1}{m}$$

در مثال فوق،  $n=3$  و  $m=2$ ؛ در نتیجه، این تعداد باید مساوی

$$\binom{4}{2} = 6$$

باشد که یک امتحان برای فرمول است.

سوءالات ترکیباتی پیچیده تر زیادی می توانند مطرح شوند؛ ما فقط سعی کرده ایم چند تکنیک مفید را شرح دهیم.

در واقع، مثالهای نسبتاً ساده ای که مطرح شده اند در به دست آوردن توابع توزیع (بوزا-اینشتن<sup>۲</sup>، فرمی<sup>۳</sup>-دیراک، و ماکسول<sup>۴</sup>-بولتزمن) در دستگاههای ذرات بدون اثر متقابل در مکانیک آماری مفید هستند.

برای بحثی پیرامون این مطالب، خواننده را به کتابی در مکانیک آماری نظیر آنهايي که در آخر این فصل ذکر شده اند ارجاع می دهیم.

#### ۴.۱۴ توزیعهای دو جمله ای، پواسون<sup>۵</sup>، و گاوسی

حال به نظریه احتمال بازگشته و می پرسیم اگر سکه سالمی  $n$  بار پرتاب شود، احتمال آنکه درست  $m$  شیر بیاید چقدر است. نتایج  $n$  پرتاب متوالی یک سکه را می توان با دنباله ای از  $n$  حرف، هر یک  $h$  یا  $t$ ، نمایش داد:

$$(18 \cdot 14) \quad h h t h \dots t$$

احتمال هر چنین نتیجه  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  است؛ تعداد این ترتیبات با دقتاً  $m$  شیر مساوی است با

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$$

در نتیجه، احتمال مطلوب مساوی است با

$$(19 \cdot 14) \quad P(m) = \binom{n}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

مسئله را کمی تعمیم داده، احتمال  $m$  پیروزی " و  $(n-m)$  شکست " در تکراریک

1- Bose

2- Einstein

3- Fermi

4- Maxwell

5- poisson

آزمایش  $n$  بار را در صورتی می‌خواهیم که احتمال پیروزی  $p$  و احتمال شکست  $(1-p)$  باشد. جواب با استدلالی شبیه فوق آسان بوده و مساوی است با

$$P(m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \quad (20.14)$$

این توزیع احتمال به توزیع دوجمله‌ای معروف است.

دو حد مختلف از توزیع دوجمله‌ای به ازای  $n$  بزرگ از اهمیت عملی برخوردارند. ابتدا فرض کنیم هر دوی  $n$  و  $pn$  بزرگ باشند. واضح است که  $P(m)$  به نوعی در مجاورت  $m = pn$  در اوج است. با استفاده از تقریب استرلینگ (۲۹.۳) برای فاکتوریلها، احتمال  $m$  پیروزی مساوی است با

$$\begin{aligned} P(m) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-m-1/2} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{-n+m-1/2} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp \left[ -\left(m + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{m}{n} - \left(n - m + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n-m}{n} \right. \\ &\quad \left. + m \ln p + (n-m) \ln (1-p) \right] \end{aligned} \quad (21.14)$$

حال فرض کنیم  $\xi$  و  $m = np + \xi$ ، که در آن  $np \ll \xi$ . اگر فقط جملات غالب را نگهداریم، خواهیم داشت

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{np(1-p)} \right] \quad (22.14)$$

این رابطه را معمولاً "به شکل زیر می‌نویسند:

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\sigma^2} \right) \quad (23.14)$$

که در آن  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$  عرض توزیع را می‌سنجد. رابطه<sup>۱</sup> (۲۳.۱۴) توزیع گاوسی<sup>۱</sup> یا نرمال نام دارد. این تقریب حتی به ازای مقادیر کوچک  $n$  تقریب بسیار خوبی است. مثلاً، در جدول ۲۰.۱۴،  $n = 10$ ،  $p = 0.4$ ، اختیار و نتایج دوجمله‌ای و گاوسی برای  $P(m)$  مقایسه شده‌اند.

حد دوم توزیع دوجمله‌ای که برای ما جالب است وقتی به دست می‌آید که  $n \rightarrow \infty$  و  $p \rightarrow 0$  به نحوی که حاصل ضرب  $np = a$  متناهی بماند. بنابراین (۲۰.۱۴)، احتمال  $m$  پیروزی

۱. نتیجه<sup>۱</sup> (۲۳.۱۴)، اگرچه معمولاً "به گاوس منتسب می‌شود، احتمالاً "اول بار توسط دم‌آورگشف شده است. برای خلاصه<sup>۲</sup> تاریخی جالب مطلب، ر. ک. گرامر (C12)، بخش ۸.۱۷.

مساوی است با

$$P(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

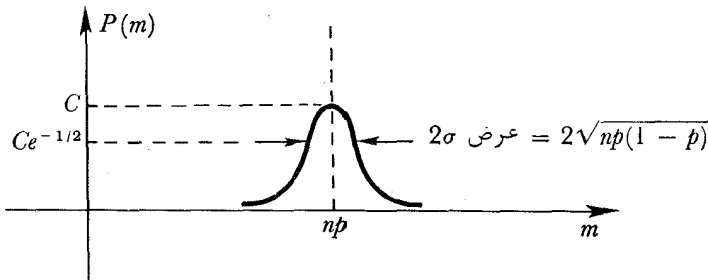
اما تحت شرایط فعلی، به ازای  $m \ll n$ ،

$$(1-p)^{n-m} \rightarrow (1-p)^{n/p} \rightarrow e^{-a} \quad \text{و} \quad \frac{n!}{(n-m)!} \rightarrow n^m$$

لذا،

$$(24.14) \quad P(m) = \frac{a^m e^{-a}}{m!}$$

این به توزیع پواسون معروف است. توجه کنید که  $\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = 1$  که باید این طور باشد. توزیع گاوسی (۲۳.۱۴) وقتی به دست می آید که یک آزمایش با احتمال پیروزی متناهی به دفعات بسیار زیاد تکرار شود. این توزیع در شکل ۱.۱۴ نموده شده است.



شکل ۱.۱۴ یک توزیع گاوسی. ماکزیمم  $P(m)$

مساوی  $C = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma)$  می باشد.

توزیع دارای عرض تقریبی  $\sqrt{np(1-p)}$  (بسته به اینکه عرض را تا چه اوجی اندازه گرفته اید) است. نکته مهم این است که عرض با  $\sqrt{n}$  متناسب می باشد. توزیع رفته رفته پهن تر می شود، ولی عرض نسبی، یا  $n$  / (عرض)، وقتی  $n \rightarrow \infty$  به صفر خواهد رفت.

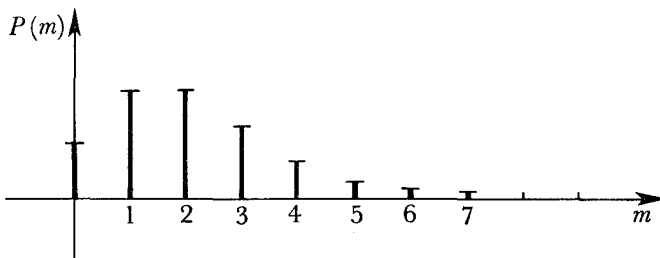
از طرف دیگر، توزیع پواسون (۲۴.۱۴) وقتی اعمال می شود که تعداد بسیار زیادی آزمایش صورت گیرد، ولی احتمال پیروزی در هر یک خیلی کوچک باشد به طوری که  $a$ ، یعنی امید ریاضی پیروزیها، عددی متناهی باشد. یک مثال کلاسیک از توزیع پواسون احتمال  $m$  تماس با یک خط در مدت زمانی معلوم است.

جدول ۲۰۱۴ مقایسه توزیعهای دو جمله‌ای

با گاوسی به ازای  $n = 10$  و  $p = 0.4$

$m$	$P(m)$ دو جمله‌ای	$P(m)$ گاوسی
0	0.0060	0.0092
1	0.0403	0.0395
2	0.1209	0.1119
3	0.2150	0.2091
4	0.2508	0.2575
5	0.2006	0.2091
6	0.1115	0.1119
7	0.0425	0.0395
8	0.0106	0.0092
9	0.0016	0.0014
10	0.0001	0.0001

هر ثانیه را می‌توان آزمایش جداگانه‌ای گرفت، پیروزی عبارت است از تماس در طول آن ثانیه. مثالی از این نوع ولی جالب‌تر (دست‌کم برای فیزیکدانان) توزیع زمانی شمارش پرتو کیهانی (یا شمارش هر پدیده تصادفی دیگر) است. به ازای  $a$  ی کوچک، توزیع پواسون کاملاً نامتقارن است. ر.ک. شکل ۲۰۱۴ به ازای  $a = 2$ . البته، اگر  $a \gg 1$ ،



شکل ۲۰۱۴ توزیع پواسون به ازای  $a = 2$

توزیع گاوسی می‌شود. در این صورت، نیم عرض مساوی است با  $\sqrt{a}$   $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx \sqrt{a}$ .

### ۵.۱۴ خواص کلی توزیعها

تا بحال فقط احتمالات نتایج گسسته را مطرح کرده‌ایم، احتمال یک پیروزی یا دو پیروزی، و غیره. همچنین، می‌توان توزیعهای احتمال پیوسته را تعریف کرد. مثلاً، اگر  $x$  متغیری باشد که هر مقدار حقیقی را بگیرد، می‌توان  $p(x)$ ، یعنی توزیع احتمال  $x$ ، را به صورت زیر تعریف کرد:

$$p(x) dx = \text{احتمال قرار داشتن } x \text{ در بازه } x \text{ کوچک } dx$$

وقتی در شکل ۱۰۱۴ توزیع گاوسی را به صورت یک منحنی هموار کشیدیم، در واقع یک توزیع احتمال پیوسته مدنظر بود. به طور دقیقتر، اگر متغیر گسسته  $m$  را با متغیر پیوسته  $x$ ، که میانگینش  $\bar{x} = np$  است، عوض کنیم، چون  $m$  بانموهای واحد تغییر می کند، باید در حد  $n$  های بزرگ داشته باشیم

$$P(m) = p(x)\Delta x \quad \text{که در آن } \Delta x = 1$$

لذا، توزیع گاوسی  $m$  توزیع گاوسی پیوسته از  $x$  خواهد شد:

$$(۲۵.۱۴) \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}\right]$$

که این چیزی جز معادله (۲۳.۱۴) به ازای  $x - \bar{x} \rightarrow m - np = \xi$  نیست. مثل قبل،

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

مقدار میانگین (یا مقدار امید) کمیت  $x$  مساوی است با

$$(۲۶.۱۴) \quad \langle x \rangle = \sum_x P(x)x$$

که در آن  $x$  فقط مقادیر گسسته را می گیرد، یا به طور کلی،

$$(۲۷.۱۴) \quad \langle x \rangle = \int p(x)x dx$$

میانگین هر تابع از  $x$  برابر است با

$$(۲۸.۱۴) \quad \langle f(x) \rangle = \int p(x)f(x) dx$$

چند مثال. برای توزیع گاوسی (۲۵.۱۴)، همانطور که در بالا گفتیم، مقدار میانگین مساوی است با

$$(۲۹.۱۴) \quad \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}\right] x dx = \bar{x}$$

و میانگین مربع انحراف  $x$  از متوسط خود برابر است با

$$(۳۰.۱۴) \quad \langle (x-\bar{x})^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}\right] (x-\bar{x})^2 dx = \sigma^2$$

به طور کلی،  $\langle (x-\bar{x})^2 \rangle$  پراش  $x$ ، و ریشه دومش انحراف معیار نام دارد که معمولاً

با  $\sigma$  نموده می شود. می بینیم که در یک توزیع گاوسی، انحراف معیار نیم عرض  $\sigma$  می باشد.

گشتاور  $n$  م توزیع  $p(x)$  مقدار میانگین  $x^n$  تعریف می شود:

$$(۳۱.۱۴) \quad \langle x^n \rangle = \int p(x)x^n dx$$

ضمن گذشتن از مطلب رابطه مفیدی بین گشتاور دوم، مقدار میانگین، و پراش متذکر می شویم.

این رابطه چنین است:

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

یعنی ،

$$(۳۲.۱۴) \quad \sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

یک توزیع اغلب با گشتاورهایش توصیف می شود. این به تعریف تابع مولد گشتاور ، یا تابع مشخصه ، یک توزیع منجر می گردد. این تابع چیزی جز تبدیل فوریه چگالی احتمال

$$(۳۳.۱۴) \quad \phi(k) = \int dx e^{ikx} p(x)$$

نیست. توجه کنید که در بسط  $\phi(k)$  به سری توانی از  $k$  چه رخ می دهد :

$$(۳۴.۱۴) \quad \begin{aligned} \phi(k) &= \int dx p(x) \left( 1 + ikx - \frac{1}{2!} k^2 x^2 - \frac{i}{3!} k^3 x^3 + \dots \right) \\ &= 1 + ik\langle x \rangle - \frac{k^2}{2!} \langle x^2 \rangle + \dots + \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle + \dots \end{aligned}$$

لذا، تابع مشخصه یک تابع مولد برای گشتاورها می باشد.

مثال. تابع مشخصه یک توزیع گاوسی عبارت است از

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[ -\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{x}{\sigma} - \left( \frac{\bar{x}}{\sigma} + ik\sigma \right) \right]^2 \right\} \exp \left( ik\bar{x} - \frac{k^2\sigma^2}{2} \right) dx \end{aligned}$$

$$(۳۵.۱۴) \quad \phi(k) = e^{ik\bar{x}} e^{-k^2\sigma^2/2}$$

عامل گاوسی در  $\phi(k)$  بدین معنی است که فقط  $k$  های کوچک مهم اند.  $\phi(k)$  به ازای  $|k| \gg 1/\sigma$  خیلی کوچک است. (قس. اصول عدم قطعیت بخش ۲.۴)

حال درجه مفید بودن توابع مشخصه را نشان می دهیم. فرض کنیم  $x$  متغیری تصادفی با توزیع احتمال  $p(x)$  ، و  $y$  متغیر تصادفی مستقل با توزیع احتمال  $q(y)$  باشد. کمیت  $z$  را که تابعی از  $x$  و  $y$  است در نظر می گیریم :

$$z = f(x, y)$$

در باب توزیع احتمال  $z$  چه می شود گفت. مثلاً ، احتمال واقع بودن  $z$  در بازه  $dz$  در  $z_0$  چقدر است ؟

گشتاورهای مختلف توزیع  $z$  را در نظر می گیریم. داریم

$$\langle z \rangle = \iint f(x, y) p(x) dx q(y) dy$$

(۳۶.۱۴)

$$\langle z^2 \rangle = \iint [f(x, y)]^2 p(x) dx q(y) dy$$

و غیره

لذا، تابع مشخصه توزیع  $z$  عبارت است از

(۳۷.۱۴)

$$\phi(k) = \iint e^{ikf(x, y)} p(x) dx q(y) dy$$

اگر  $f(x, y)$  تابع ساده  $x + y$  باشد، داریم

$$\phi(k) = \iint e^{ik(x+y)} p(x) dx q(y) dy$$

(۳۸.۱۴)

$$= \int e^{ikx} p(x) dx \int e^{iky} q(y) dy$$

این نتیجه بسیار مهمی است. تابع مشخصه برای مجموع دو متغیر تصادفی مستقل حاصل ضرب توابع مشخصه جداگانه آنها می باشد. واضح است که این امر قابل تعمیم به هر تعداد متغیر تصادفی خواهد بود.

مهمترین نتیجه این قضیه به قضیه حد مرکزی موسوم است. فرض کنیم متغیر تصادفی  $x$  دارای توزیع احتمال  $p(x)$  با گشتاورهای اول و دوم  $\bar{x}$  و  $\langle x^2 \rangle$  باشد. حال  $x$  را  $n$  بار "اندازه گرفته"، و متوسط

(۳۹.۱۴)

$$a = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

را تشکیل می دهیم. توزیع  $P(a)$  ی متغیر تصادفی  $a$  چیست؟ به جای  $P(a)$  توزیع  $Q(a - \bar{x})$  متغیر  $(a - \bar{x})$  را، که متوسط آن صفر است، بررسی می کنیم. این کاری هم ارزاست زیرا

$$P(a) = Q(a - \bar{x})$$

تابع مشخصه  $Q(a - \bar{x})$  عبارت است از

$$\Phi(k) = \int e^{ik(a - \bar{x})} Q(a - \bar{x}) da$$

$$= \int \exp \left\{ \frac{ik}{n} [(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x})] \right\}$$

$$\times p(x_1) dx_1 \dots p(x_n) dx_n$$

$$= \int \exp \left[ \frac{ik}{n} (x_1 - \bar{x}) \right] p(x_1) dx_1 \int \exp \left[ \frac{ik}{n} (x_2 - \bar{x}) \right] p(x_2) dx_2 \dots$$

$$(۴۰.۱۴) = \left[ \phi \left( \frac{k}{n} \right) \right]^n$$

که در آن  $\phi(k)$  تابع مشخصه متغیر  $(x - \bar{x})$  است که بنا بر تعریف  $\bar{x}$  و  $\sigma$  دارای گشتاورهای اول و دوم 0 و  $\sigma^2$  می باشد. لذا،



$$\begin{aligned} \phi(k) &= \int e^{ik(x-\bar{x})} p(x) dx \\ (41.14) \quad &= 1 - \frac{1}{2} k^2 \sigma^2 + O(k^3) \end{aligned}$$

و از (40.14) داریم

$$\Phi(k) = \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \sigma^2}{n^2} + O\left(\frac{k^3}{n^3}\right) \right]^n$$

که، در حد  $n$  های بزرگ، به صورت زیر درمی آید:

$$(42.14) \quad \Phi(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-k^2 \sigma^2 / 2n}$$

با وارون کردن این تبدیل فوریه، یا مراجعه به (35.14)، به ازای  $n$  های بزرگ داریم

$$(43.14) \quad Q(a - \bar{x}) = P(a) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{n(a - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]$$

لذا، بدون توجه به شکل توزیع  $x$ ، توزیع میانگین تعداد زیادی از سنجشهای  $x$  توزیعی گاوسی است به مرکز  $\bar{x}$  و با انحراف معیار  $n^{-1/2}$  برابر انحراف معیار توزیع  $x$ .

#### ۶.۱۴ توزیعهای گاوسی چندمتغیره

تعمیم مفهوم توزیع احتمال  $p(x)$  برای متغیر تصادفی  $x$  به توزیع احتمال چند متغیره<sup>۶</sup>  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  برای  $n$  متغیر تصادفی  $x_1, \dots, x_n$  سراسر است. احتمال اینکه  $x_1$  در

$dx_1$  حول مقدار  $a_1$  و  $x_2$  در  $dx_2$  حول  $a_2, \dots$  قرارگیرد چیزی جز

$$p(a_1, a_2, \dots, a_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

نخواهد بود.

توزیعهای گاوسی چندمتغیره، یعنی توزیعیایی به شکل زیر<sup>۱</sup>

$$(44.14) \quad p(x_1, x_2, \dots, x_n) = N \exp\left[-\sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j\right]$$

مورد توجه خاص هستند. البته، فرم مربعی  $\sum a_{ij} x_i x_j$  معین مثبت است (چرا؟). محاسبه ثابت نرمال سازی  $N$  به عنوان تمرین به دانشجو محول می شود (مسئله 12.14).

تابع مشخصه<sup>۷</sup> یک توزیع گاوسی چند متغیره مجدداً "گاوسی است".

۱. بی آنکه به کلیت خللی وارد شود، فرض کرده ایم مقادیر امید همه  $x_i$  ها صفرند. اینها یعنی جملات خطی در نماهای (44.14) وجود ندارند.

$$\phi(k_1, k_2, \dots, k_n) = \int dx_1 \cdots dx_n N \exp \left[ - \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j \right] e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)}$$

$$(۴۵.۱۴) \quad = \exp \left[ - \sum_{i \leq j} b_{ij} k_i k_j \right]$$

این نکته مهم تعمیم فوری نتیجه (۳۵.۱۴) برای توزیع گاوسی یک متغیره است. عدم وجود عامل نرمال ساز در جلو نمایی در (۴۵.۱۴) از نرمال سازی  $p(x_1, \dots, x_n)$  نتیجه می شود که نیاز به  $\phi(0, \dots, 0) = 1$  دارد.

اگر تابع مشخصه یک توزیع گاوسی چندمتغیره معلوم باشد، گشتاورهای توزیع به آسانی قابل محاسبه اند [قس. (۳۴.۱۴)]. به عنوان مثال، از (۴۵.۱۴) معلوم می شود که

$$\langle x_1^2 \rangle = - \frac{\partial^2 \phi(k_1, \dots, k_n)}{\partial k_1^2} \Big|_{k_i=0}$$

$$\langle x_1^3 x_4 \rangle = \frac{\partial^4 \phi(k_1, \dots, k_n)}{\partial k_1^3 \partial k_4} \Big|_{k_i=0}$$

و به طور کلی

$$(۴۶.۱۴) \quad \langle x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \rangle = (-i)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \phi(k_1, \dots, k_n)}{\partial k_1^{\alpha_1} \partial k_2^{\alpha_2} \cdots \partial k_n^{\alpha_n}} \Big|_{k_i=0}$$

این طرح عملاً برای هر توزیع چندمتغیره مؤثر است، ولی ما فقط از آن در توزیعهای گاوسی استفاده خواهیم کرد.

حال "تعبیر فیزیکی" ضرایب  $b_{ij}$  در (۴۵.۱۴) واضح است. زیرا

$$\langle x_i^2 \rangle = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial k_i^2} (0, \dots, 0) = 2b_{ii}$$

و

$$\langle x_i x_j \rangle = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial k_i \partial k_j} (0, \dots, 0) = b_{ij}$$

به عبارت دیگر، ضریب  $k_i^2$  در نمایی تابع مشخصه (۴۵.۱۴) نصف  $\langle x_i^2 \rangle$  می باشد؛ ضریب جمله حاصل ضربی  $k_i k_j$  چیزی جز  $\langle x_i x_j \rangle$  نیست.

به عنوان کاربرد ساده‌ای از این نتیجه، دو متغیر گاوسی  $x_1$  و  $x_2$  را با تابع مشخصه

$$\phi(k_1, k_2) = e^{-ak_1^2 - bk_1 k_2 - ck_2^2}$$

در نظر می‌گیریم. هم‌اکنون دیدیم که  $a = \frac{1}{2} \langle x_1^2 \rangle$ ,  $b = \langle x_1 x_2 \rangle$ ,  $c = \frac{1}{2} \langle x_2^2 \rangle$  حال فرض کنیم

$\langle x_1 x_2 \rangle = 0$ ؛ یعنی، متغیرها ناهمبسته اند<sup>۱</sup>. در این صورت  $b = 0$  و تابع مشخصه چیزی جز حاصل ضرب توابع مشخصه جداگانه آنها نیست:

$$\phi(k_1, k_2) = \phi_1(k_1)\phi_2(k_2)$$

با گرفتن تبدیل فوریه<sup>۲</sup> این معادله، توزیع احتمال

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2)$$

به دست می آید؛ یعنی، متغیرهای  $x_1$  و  $x_2$  به طور آماری مستقل می باشند. لذا، قضیه<sup>۳</sup> زیر را خواهیم داشت: متغیرهای تصادفی گاوسی ناهمبسته به طور آماری مستقل اند.

به عنوان توضیحی یا بدهات کمتر درباره<sup>۴</sup> توان این تکنیکها، سیگنال نوفه  $I(t)$  معمولاً یک فرایند تصادفی گاوسی گرفته می شود؛ یعنی، توزیع  $f[I(t)]$  گاوسی است، توزیع چندمتغیره، یا مشترک  $g[I(t), I(t')]$  گاوسی است، و غیره. علاوه بر این فرض می کنیم فرایندمان مانا باشد، بدین معنی که توزیع  $I(t)$  مستقل از  $t$  است، توزیع مشترک  $I(t)$  و  $I(t')$  فقط تابع تفاضل  $t - t'$  است، و غیره. بالاخره، فرض می کنیم  $\langle I(t) \rangle = 0$ ؛ هیچ محاسبه<sup>۵</sup> مستقیم زمينه وجود ندارد.

برای توصیف این نوفه به چه چیز نیاز داریم؟ کمیاتی که فوراً<sup>۶</sup> به ذهن می رسند عبارتند از میانگین مربع سیگنال  $P = \langle I^2(t) \rangle$ ، که طبق فرض ثابت می باشد، و تابع خود همبستگی  $\rho(\tau) = \langle I(t)I(t + \tau) \rangle$ ، که مجدداً<sup>۷</sup> طبق فرض مانا بودن نوفه از  $t$  مستقل است. حال نتیجه می شود که تمام فرایند به وسیله<sup>۸</sup> ثابت  $P$  و تابع  $\rho(\tau)$  ( در واقع، فقط با  $\rho(\tau)$  زیر  $P = \rho(0)$  ) مشخص می شود.

مثلاً<sup>۹</sup>، می خواهیم توزیع مشترک  $I(t)$  را در سه زمان  $I(t)$ ،  $I(t + \delta)$ ، و  $I(t + \delta')$  حساب کنیم. برای اختصار، تعریف می کنیم

$$x = I(t)$$

$$y = I(t + \delta)$$

$$z = I(t + \delta')$$

توزیع مشترک این سه متغیر ( طبق فرض<sup>۱۰</sup> ) گاوسی است؛ لذا، تابع مشخصه<sup>۱۱</sup>  $\phi(k, l, m)$  گاوسی می باشد:

$$\phi(k, l, m) = \exp[-ak^2 - bl^2 - cm^2 - dkl - ekm - flm]$$

اما حالا تمام ثابتهای  $f, \dots, a$  قابل محاسبه اند. زیرا

۱. دو متغیر تصادفی را ناهمبسته گوئیم، یا گوئیم دارای همبستگی صفرند، اگر امید حاصل ضربشان مساوی حاصل ضرب امیدهایشان باشد.

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2}P \\ b &= \frac{1}{2}\langle y^2 \rangle = \frac{1}{2}P \\ c &= \frac{1}{2}\langle z^2 \rangle = \frac{1}{2}P \\ d &= \langle xy \rangle = \rho(\delta) \\ e &= \langle xz \rangle = \rho(\delta') \\ f &= \langle yz \rangle = \rho(\delta' - \delta) \end{aligned}$$

به عنوان مسئله دیگر، تابع خود همبستگی  $R(\tau)$  برای توان نوبه، یعنی  $I^2(t)$ ، چیست؟ باید

$$(47.14) \quad R(\tau) = \langle I^2(t)I^2(t + \tau) \rangle$$

را حساب کنیم. فرض کنیم  $x = I(t)$  و  $y = I(t + \tau)$ ؛ توزیع مشترک  $x$  و  $y$  دارای تابع مشخصه<sup>۶</sup>

$$\phi(k, l) = \exp \left[ -\frac{1}{2}Pk^2 - \frac{1}{2}Pl^2 - \rho(\tau)kl \right]$$

می باشد. حال تابع خود همبستگی  $R(\tau)$  ی (47.14) را می توان با نتیجه کلی (46.14) حساب کرد:

$$R(\tau) = \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial k^2 \partial l^2} \right|_{k=l=0} = P^2 + 2[\rho(\tau)]^2$$

پورسل<sup>۱</sup> (P3) در بحث خود از آزمایشهای شمارش فوتون هانوری براون<sup>۲</sup> و تویس<sup>۳</sup> (H5) از این نوع روابط استفاده کرده است.

#### ۷.۱۴ برآزش داده های تجربی

در تعبیر اهمیت نتایج تجربی از ایده<sup>۴</sup> را ستمایی نسبی استفاده می کنیم، که می توان آن را از قضیه<sup>۵</sup> بیز به صورت زیر " به دست آورد ":

فرض کنیم  $A$  یک نظریه<sup>۶</sup> ممکن باشد

فرض کنیم  $B$  نظریه<sup>۶</sup> دیگری باشد

فرض کنیم  $E$  یک نتیجه (یا نتایج) تجربی باشد

می خواهیم  $P(A|E)$  و  $P(B|E)$ ، یعنی احتمالهای صحت  $A$  و  $B$  به شرط صحت نتیجه<sup>۶</sup> تجربی  $E$ ، را باهم مقایسه کنیم. قضیه<sup>۵</sup> بیز به ما می گوید که

(48.14)

$$\frac{P(A|E)}{P(B|E)} = \frac{P(A)P(E|A)}{P(B)P(E|B)}$$

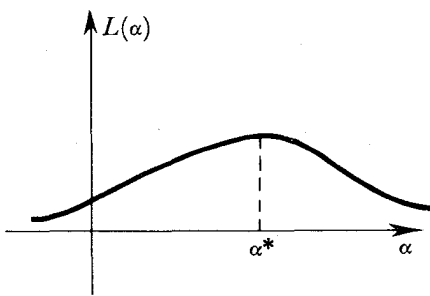
حال فرض کنیم  $P(A) = P(B)$ ؛ دو نظریه به هر معنی که باشند " متساوی الاحتمال "

پیشین‌اند. این گاهی اوقات درست نیست، که در این صورت باید از معادله<sup>۶</sup> (۴۸.۱۴) به همین شکل استفاده شود. لیکن، با این فرض،

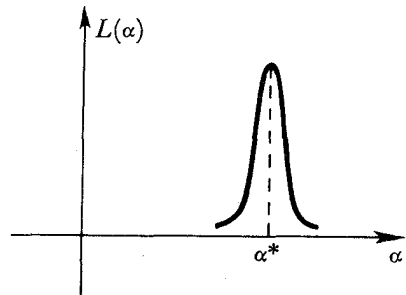
$$(۴۹.۱۴) \quad \frac{P(A|E)}{P(B|E)} = \frac{P(E|A)}{P(E|B)}$$

کمیات سمت راست ساده‌اند؛ این کمیات چیزی جز احتمالات به دست آمدن نتیجه<sup>۶</sup>  $E$  در صورت صحت نظریه<sup>۶</sup>  $A$  یا  $B$  نیستند. لذا، "راستنمایی" نسبی دو نظریه را نسبت احتمالات (پیش‌بینی شده با آن دو نظریه) به دست آوردن نتیجه‌ای که عملاً حاصل می‌شود می‌گیریم. البته، محتملترین نظریه آن است که راستنمایی ماکزیمم دارد.

فرض کنید بخواهیم پارامتر  $\alpha$  را در یک نظریه معین کنیم. آزمایشی ترتیب داده و جوابی به دست می‌آوریم. اگر احتمال  $L(\alpha)$  به دست آوردن جواب، به عنوان تابعی از  $\alpha$  شبیه منحنی شکل ۳.۱۴ آ باشد، آزمایش "مناسب" بوده و  $\alpha$  معین شده است. از طرف دیگر، اگر منحنی راستنمایی شبیه شکل ۳.۱۴ ب باشد، زیاد نمی‌شود به نتیجه<sup>۶</sup>  $\alpha = \alpha^*$  دل بست.



(ب)



(آ)

شکل ۳.۱۴ توابع راستنمایی نسبی  $L(\alpha)$  برای پارامتر  $\alpha$  حاصل از (آ) یک آزمایش "مناسب" و (ب) یک آزمایش "ضعیف"

اگر منحنی نسبتاً باریک باشد، اغلب یک شکل گاوسی داریم. در این صورت، می‌توان نتایج تجربی را با بیان مقدار راستنمایی ماکزیمم  $\alpha^*$  و خطای معیار

$$\Delta\alpha = \left[ \frac{\int (\alpha - \alpha^*)^2 L(\alpha) d\alpha}{\int L(\alpha) d\alpha} \right]^{1/2}$$

توصیف کرد. توجه کنید که  $\Delta\alpha$  در صورتی همان انحراف معیار  $\sigma$  است که  $\alpha$  یک متغیر تصادفی با میانگین  $\alpha^*$  و توزیع  $L(\alpha)$  باشد. البته،  $L(\alpha)$  واقعا "توزیع احتمال  $\alpha$  نیست،

توزیع واقعی یک تابع  $\delta$  است اگر  $\alpha$  پارامتری با مقدار معین (ولو مجهول) باشد .  
اگر  $L(\alpha)$  گاوسی باشد ،

$$L(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{(\alpha - \alpha^*)^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$\frac{d}{d\alpha} \ln L(\alpha) = -\frac{(\alpha - \alpha^*)}{\sigma^2}$$

و خطای معیار خواهد بود

$$\Delta\alpha = \sigma = \left[ -\frac{d^2}{d\alpha^2} \ln L(\alpha) \right]^{-1/2} \quad (50.14)$$

اگر آزمایش به طور آماری ضعیف باشد ، یا تابع راستنمایی به دلیلی دیگر غیر گاوسی باشد ، مقادیر  $\alpha^*$  و  $\Delta\alpha$  نتایج را به طور کامل توصیف نمی کنند ، و بهتر است تابع راستنمایی را رسم کنیم .

حال اصل راستنمایی ماکزیمم را با چند مثال توضیح می دهیم . اولاً ، فرض کنید بخواهیم عمر میانگین T یک ذره<sup>۶</sup> ناپایدار را تعیین کنیم . به چند ذره از این نوع به طور تجربی نظاره می کنیم . اولی به مدت زمان  $t_1$  دوام می آورد ، دومی به مدت زمان  $t_2$  ، و غیره . محتملترین مقدار  $\tau$  حاصل از این نتایج چیست ؟

احتمال واپاشی یک ذره با عمر میانگین  $\tau$  در لحظه<sup>۶</sup>  $t$  در مدت  $dt$  مساوی است با

$$p(t) dt = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt$$

لذا ، احتمال اینکه آزمایش ما به صورتی که شد انجام شود متناسب است با

$$L(\tau) = \frac{1}{\tau} e^{-t_1/\tau} \frac{1}{\tau} e^{-t_2/\tau} \dots \frac{1}{\tau} e^{-t_n/\tau}$$

$$L(\tau) = \exp \left( -\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n t_i - n \ln \tau \right)$$

می خواهیم این احتمال را ماکزیمم سازیم ؛ با مشتقگیری نسبت به  $\tau$  داریم

$$\frac{d}{d\tau} \ln L(\tau) = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n}{\tau} = 0$$

لذا ، ماکزیمم مقدار راستنمایی  $\tau$  عبارت است از

$$\tau^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad (51.14)$$

که چیزی جز متوسط زمانهای نظاره<sup>۶</sup>  $t_i$  نیست .

همچنین، اگر تعداد ذرات نظاره شده آنقدر بزرگ باشد که  $L(\tau)$  تقریباً " گاوسی " باشد، می توان خطای معیار را به دست آورد. بنا بر (۵۰.۱۴)، داریم

$$\Delta\tau = \left[ -\frac{d^2}{d\tau^2} \ln L(\tau) \right]^{-1/2}$$

$$= \left( \frac{2}{\tau^3} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{n}{\tau^2} \right)^{-1/2}$$

این عبارت، مثل یک گاوسی واقعی، از  $\tau$  مستقل نیست. با محاسبه آن در  $\tau^*$  داریم<sup>۱</sup>

$$(۵۲.۱۴) \quad \Delta\tau = \frac{\tau^*}{\sqrt{n}}$$

کاربرد دیگر اصل راستنمایی ماکزیم تعیین تعداد پارامترها در یک نظریه در موقعی است که تعداد نقاط تجربی از تعداد پارامترها بیشتر است و، به خاطر خطاهای تجربی، برازش کامل ممکن نیست. به عنوان توضیحی از این نوع مسئله، داده‌های شکل ۴.۱۴ را در نظر می‌گیریم. توزیع زاویه‌ای در یک واکنش هسته‌ای به وسیله سنجش مقاطع دیفرانسیل  $\sigma(\theta)$  در چند زاویه مختلف با خطاهای ذکر شده بررسی می‌شود. می‌خواهیم داده‌ها را با یک منحنی " نظری " به شکل

$$\sigma(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos^2 \theta + a_3 \cos^3 \theta$$

برازش کرده و مقادیر راستنمایی ماکزیم پارامترهای  $a_m$  را بیابیم.

به‌طور کلی، فرض کنیم  $N$  کمیت را سنجیده و مقادیر تجربی  $x_i$  با خطاهای معیار  $\sigma_i$  را به دست آورده باشیم. همچنین، عباراتی " نظری " برای این کمیات داشته باشیم و این عبارات شامل مجموعه‌ای از  $n$  پارامتر  $a_m$  باشد که با تعدیل آنها بهترین برازش به داده‌ها به دست می‌آید.  $\xi_i = \xi_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$  عبارت " نظری " برای  $x_i$  ها نام دارد. حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن توزیعهای احتمال برای نتایج تجربی  $x_i$  گاوسی‌اند.

در این صورت، تابع راستنمایی با

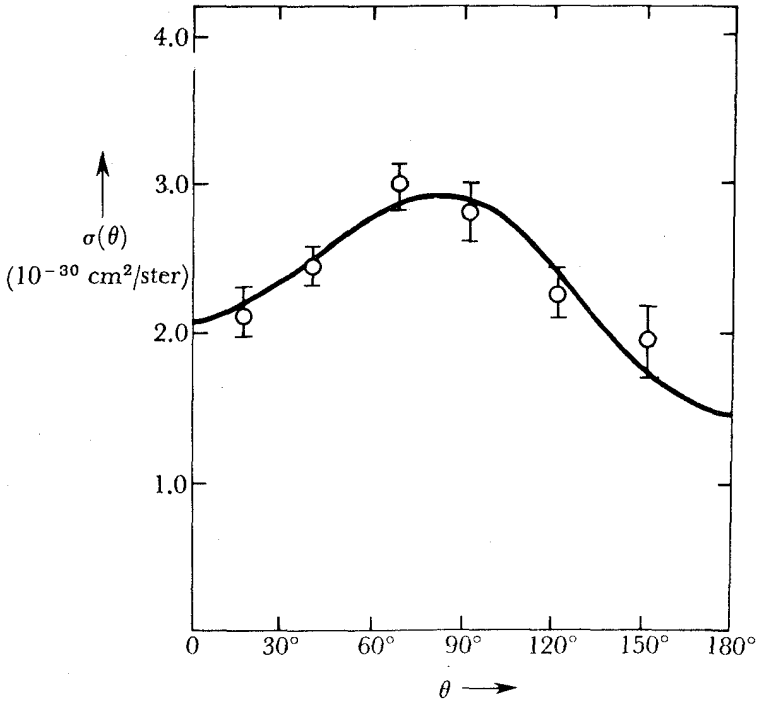
$$(۵۴.۱۴) \quad L(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sigma_1 \sigma_2 \dots} \exp \left[ -\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \xi_i)^2}{2\sigma_i^2} \right]$$

متناسب است، و می‌خواهیم پارامترهای  $a_m$  را طوری تعدیل کنیم که راستنمایی ماکزیم به

۱. این روند معمولاً " خطای نقصانی می‌دهد، و از این بهتر متوسط  $[-(d^2/d\tau^2) \ln L(\tau)]^{-1/2}$

روی تابع راستنمایی است. لیکن، اگر تفاضل بزرگ باشد، احتمالاً " رسم تابع

راستنمایی در ابتدای کار بهتر خواهد بود.



شکل ۴.۱۴. توزیع زاویه‌ای نوعی در یک واکنش هسته‌ای که داده‌های تجربی و برازش کمترین مربعات را نشان می‌دهد.

دست آید. این هم ارز است با مینیمم سازی نمای

$$(۵۵.۱۴) \quad \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \xi_i)^2}{2\sigma_i^2} = \frac{1}{2} \chi^2(a_m)$$

و لذا، نتیجه را یک برازش کمترین مربعات می‌نامند. کمیت  $\chi^2$  تعریف شده با (۵۵.۱۴) بعداً "به کار خواهد رفت [قس. (۷۱.۱۴)]."

برای یافتن مفادیر ماکزیمم راستنمایی  $a_m^*$  از  $a_m$ ، مشتقات (۵۵.۱۴) را نسبت به این پارامترها می‌گیریم:

$$(۵۶.۱۴) \quad \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \xi_i)}{\sigma_i^2} \frac{\partial \xi_i}{\partial a_m} = 0 \quad m = 1, 2, \dots, n$$

اگر  $\xi_i$ ها توابع همگن خطی از پارامترهای  $a_j$  باشند، یعنی

$$(۵۷.۱۴) \quad \xi_i = \sum_{m=1}^n C_{im} a_m$$



با ضرایب معلوم  $C_{im}$  باشند، جواب معادلات فوق را می‌توان به شکل زیبایی درآورد. در این صورت، شرایط راستنمایی ماکزیم (۵۶.۱۴) خواهند شد

$$(58.14) \quad \sum_i \frac{C_{im}}{\sigma_i^2} x_i = \sum_{i,l} \frac{C_{im} C_{il}}{\sigma_i^2} a_l$$

حال " بردار داده‌های  $X$  " و " ماتریس سنجش  $M$  " را با مؤلفه‌هایشان به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(59.14) \quad X_m = \sum_{i=1}^N \frac{C_{im}}{\sigma_i^2} x_i$$

$$(60.14) \quad M_{ml} = \sum_{i=1}^N \frac{C_{im} C_{il}}{\sigma_i^2} = M_{lm}$$

توجه کنید که  $X$  تابع نتایج تجربی  $x_i$  و خطاهای  $\sigma_i$  است، حال آنکه  $M$  فقط تابع خطاهای می‌باشد.  $M$  یک ماتریس متقارن است.

در این صورت، شرایط (۵۸.۱۴) معادله ماتریسی<sup>۱</sup>

$$(61.14) \quad X = Ma$$

با جواب

$$(62.14) \quad a = M^{-1}X$$

می‌باشد.

حال خطاهای مربوط به پارامترهای  $a_m$  معین شده در فوق را بررسی می‌کنیم. دو راه برای پرداختن به این مسئله وجود دارد، که هر دو به جبر و نتایج یکسانی منجر می‌شوند. یکی این است که تابع راستنمایی (۵۴.۱۴) را توزیع احتمال پارامترهای  $a_m$  گرفته و با آن میانگین مربع انحرافها  $\langle (a_m - a_m^*)^2 \rangle$  و غیره را حساب کنیم. دیدگاه دیگر تکرار آزمایش

۱. معادلات (۵۷.۱۴)، (۵۹.۱۴)، و (۶۰.۱۴) را نیز می‌توان، با تعریف ماتریس  $D$  به صورت  $D_{ij} = C_{ij}/\sigma_j^2$ ، به شکل ماتریسی نوشت. در این صورت، این معادلات خواهند شد

$$\xi = Ca$$

$$X = Dx$$

$$M = DC$$

و

توجه کنید که  $C$  یک ماتریس مربعی نبوده و وارون ندارد (جز در حالت  $n=N$ ). اگر تعداد پارامترها مساوی تعداد نقطه‌های داده‌ای باشد، یک برازش کامل  $\xi_i = x_i$  با پارامترهای (فقط حالت  $N=n$ )  $a = C^{-1}X$  به دست خواهد آمد.

به دفعات زیاد و به نحو مشابه ( یعنی ، با خطاهای  $\sigma_i$  یکسان ) و محاسبه میانگین مربع انحرافهای  $a_m$  حاصل از تک تک آزمایشها از متوسط بزرگ  $\bar{a}_m$  روی تمام آزمایشهاست . (منظور از بار فوقانی یعنی متوسط روی تمام آزمایشات تصور شده .) البته ، مقدار این متوسط معلوم نیست ، ولی به آن نیازی نداریم .

برای یافتن خطاهادر پارامترها ، باید میانگین مربع انحرافهای موردانتظار  $\langle (a_m - \bar{a}_m)^2 \rangle$  یا ، بهطور کلی ،

$$\langle (a_m - \bar{a}_m)(a_l - \bar{a}_l) \rangle$$

را حساب کنیم . از روابط (۶۲.۱۴) و (۵۹.۱۴) داریم

$$(۶۳.۱۴) \quad (a_m - \bar{a}_m) = \sum_k (M^{-1})_{mk} (X_k - \bar{X}_k) = \sum_{kj} (M^{-1})_{mk} \frac{C_{jk}}{\sigma_j^2} (x_j - \bar{x}_j)$$

حال آنکه

$$(۶۴.۱۴) \quad \langle (x_j - \bar{x}_j)(x_i - \bar{x}_i) \rangle = \sigma_i^2 \delta_{ij}$$

زیرا سنجشهای  $x_i$  ها بهطور آماری مستقل فرض شدهاند . بنابراین ،

$$(۶۵.۱۴) \quad \begin{aligned} \langle (a_m - \bar{a}_m)(a_l - \bar{a}_l) \rangle &= \sum_{kzpi} (M^{-1})_{mk} \frac{C_{jk}}{\sigma_j^2} (M^{-1})_{lp} \frac{C_{ip}}{\sigma_i^2} \sigma_i^2 \delta_{ij} \\ &= \sum_{kp} (M^{-1})_{mk} (M^{-1})_{lp} M_{pk} = (M^{-1})_{ml} \end{aligned}$$

و خطای معیار در  $a_m$  مساوی است با

$$(۶۶.۱۴) \quad \Delta a_m = \langle (a_m - \bar{a}_m)^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{(M^{-1})_{mm}}$$

توجه کنید که جملات حاصل ضربی  $\langle (a_m - \bar{a}_m)(a_l - \bar{a}_l) \rangle$  به ازای  $l \neq m$  عموماً " صفر " نیستند . این بدان معنی است که پارامترهای  $a_m$  بهطور آماری مستقل نبوده و خطاهایشان همبستهاند! ( البته ، می توان ماتریس  $M^{-1}$  را قطری کرده و بدین ترتیب مجموعه‌ای از ترکیبات  $a_m$  که به طور آماری مستقل‌اند به دست آورد .) خطای منتسب به کمیتی را که تابعی از پارامترهای  $a_m$  است می توان از ماتریس خطای  $M^{-1}$  به دست آورد .

مثال . خطا در  $z = a_1 + 2a_2$  را بیابید . پراش یا میانگین مربع انحراف عبارت است از

$$(۶۷.۱۴) \quad \begin{aligned} \langle (z - \bar{z})^2 \rangle &= \langle [(a_1 - \bar{a}_1) + 2(a_2 - \bar{a}_2)]^2 \rangle \\ &= \langle (a_1 - \bar{a}_1)^2 \rangle + 4 \langle (a_1 - \bar{a}_1)(a_2 - \bar{a}_2) \rangle + 4 \langle (a_2 - \bar{a}_2)^2 \rangle \\ &= (M^{-1})_{11} + 4(M^{-1})_{12} + 4(M^{-1})_{22} \end{aligned}$$

$$\Delta z = \sqrt{\langle (z - \bar{z})^2 \rangle}$$

تا کنون فرض کرده‌ایم که عبارات نظری  $\xi_i$  ما به ازای بعضی از مقادیر پارامترها [ که ممکن است، در صورت عدم وجود خطاهای تجربی "منظم"، مقادیر متوسط بزرگ  $\bar{a}_m$  ها باشند. در این صورت، داریم  $\bar{x}_i = \xi_i(\bar{a}_m)$  درست هستند. خطاهای  $\Delta a_m$  به دست آمده در فوق به این فرض حساس بوده و هیچ صحتی را نشان نمی‌دهند لذا، این مسئله را در نظر می‌گیریم که آیا شکل عبارات نظری به کار رفته مناسب است یا نه. مسئله یک مسئله یکطرفه است. نمی‌توان نتیجه گرفت که یک نظریه صرفاً "به خاطر برازش مناسبی به داده‌ها صحیح است. از طرف دیگر، اگر برازش بد باشد، یا عبارات نظری به کار رفته نادرست‌اند یا آزمایش‌کننده خطاهایش را دست‌کم گرفته (یا اشتباه کرده است).

ما محکی کمی برای یک برازش مناسب، به نام آزمون خی بی توان دو ( $\chi^2$ )، را مورد بحث قرار می‌دهیم. در این آزمون معین می‌کنیم آیا نمای (۵۵.۱۴) در تابع راستنمایی از آنچه به طور آماری انتظار داریم بزرگتر است یا نه<sup>۱</sup>.

اگر  $\bar{x}_i$  میانگین واقعی  $x_i$  ها باشد، احتمال (نرمالی شده) مشاهده کردن  $x_1$  در  $x_1, x_2, \dots, x_N$  در  $dx_1, dx_2, \dots, dx_N$ ، و غیره مساوی است با

$$P(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x_i - \bar{x}_i)^2\right] dx_i$$

(۶۸.۱۴)

تعریف می‌کنیم

$$(۶۹.۱۴) \quad q_i = \frac{1}{\sigma_i}(x_i - \bar{x}_i)$$

و

$$Q(q_i) dq_1 \dots dq_N = P(x_i) dx_1 \dots dx_N$$

در این صورت،

$$(۷۰.۱۴) \quad Q(q_i) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i^2\right)$$

و بستگی  $Q$  به  $q_i$  فقط از طریق

$$(۷۱.۱۴) \quad \sum_{i=1}^N q_i^2 = \chi^2$$

میسر است، که در آن  $\chi^2$  مربع "شعاع" یا فاصله مبداء در فضای اقلیدسی  $N$  بعدی تا

۱. برای اتخاذ روشی دقیقتر ولی کمی پرهزینه‌تر برای این مسئله، ر.ک. مسئله ۷.۱۴.

نقطه به مختصات دکارتی  $q_1 \dots q_N$  می باشد.

چون  $Q(q_i)$  فقط تابع  $\chi^2$  است، همه جا بر یک سطح "کروی" در فضای  $N$  بعدی مقدار یکسان داشته و توزیع احتمال  $\chi^2$  باید به شکل زیر باشد:

$$F(\chi^2) d\chi^2 = F(\chi^2) 2\chi d\chi$$

$$= \int_{d\chi} \text{غشاء کروی } \chi, Q(q_i) dq_1 \dots dq_N = (2C) e^{-\chi^2/2} \chi^{N-1} d\chi$$

$$(۷۲.۱۴) \quad = C e^{-\chi^2/2} \chi^{N-2} 2\chi d\chi$$

ثابت  $C$  را با نرمال سازی

$$\int_0^\infty F(\chi^2) d\chi^2 = 1 = C \int_0^\infty e^{-z/2} z^{(N/2)-1} dz$$

تعیین می کنیم؛ در نتیجه،

$$C = [2^{N/2} \Gamma(N/2)]^{-1}$$

لذا، از رابطه (۷۲.۱۴) داریم

$$(۷۳.۱۴) \quad F(\chi^2) d\chi^2 = \frac{1}{2^{N/2} \Gamma(N/2)} e^{-\chi^2/2} (\chi^2)^{(N/2)-1} d\chi^2$$

این توزیع  $\chi^2$  به توزیع خی به توان دو با  $N$  درجه آزادی معروف است. احتمال اینکه  $\chi^2$  از مقدار مشاهده شده  $\chi_0^2$  متجاوز باشد مساوی است با

$$(۷۴.۱۴) \quad P_N(\chi^2 > \chi_0^2) = \int_{\chi_0^2}^\infty F(\chi^2) d\chi^2$$

جدول این تابع در کتاب راهنمای شیمی و فیزیک و سایر جاها داده شده اند. اگر این احتمال خی به توان دو بالا باشد، برازش البته مناسب خواهد بود.

ما در بحث توزیع خی به توان دو فرض کرده ایم که پارامترهای واقعی  $\bar{a}_m$ ، و لذا، مقادیر میانگین واقعی  $\bar{x}_i$ ، معلوم هستند. ولی در عمل این چنین نیست؛ ما پارامترهای  $a_m$  را به مقادیر راستنمایی ماکزیمم  $a_m^*$  تعدیل می کنیم تا بهترین برازش به داده ها به دست آید. البته، با استفاده از این بهترین مقادیرهای  $a_m^*$  برای محاسبه  $\chi^2$  طبق (۵۵.۱۴)، مقدار کوچکتری از آنچه با  $\bar{a}_m$  مشخص حاصل می شود به دست می آید. مثلاً، اگر تعداد پارامترهای تعدیل پذیر  $n$  مساوی تعداد نقاط داده ای  $N$  باشد، برازش کامل ممکن بوده و  $\chi^2 = 0$ . اگر  $N > n$ ، باید به جای  $N$  به عنوان تعداد درجات آزادی در آزمون خی به توان دو (۷۴.۱۴) از عدد  $N' = N - n$  استفاده کرد (ر.ک. مسئله ۱۷۰.۱۴).

این بخش را با بحثی از نقش احتمالات پیشین به پایان می بریم. باید در نظر داشت

که استفاده از توابع راستنمایی به صورت تعریف شده در فوق مشمول این فرض است که احتمالات پیشین "نظریه‌های" مختلف مساویند؛ یعنی،  $P(A)/P(B) \approx 1$ . به طور کلی، این یک فرض معقول بوده، و، در یک آزمایش خوب، تفاوت زیادی تولید نمی‌کند. لیکن، در بعضی حالات، می‌دانیم یک "نظریه" غیر ممکن است؛ در نتیجه،  $P(A) = 0$ . همچنین، آزمایشهای قبلی ممکن است راستنمایی پیشین بعضی از نظریه‌ها را از سایرین بیشتر سازد. آثار احتمالات پیشین نابرابر را می‌توان با بازگشت به معادله اساسی (۴۸۰۱۴) مبتنی بر قضیهٔ بیز دخالت داد.

### مراجع

کتاب مرجع زیادی در احتمال و آمار، هم نظری و هم عملی، وجود دارند. دو کتاب که از سایرین مفیدترند کتب فلر<sup>۱</sup> (F2) و هوئل<sup>۲</sup> (H11) می‌باشند. هر دو شامل تمرینات بسیار بوده و یادگیریشان آسان است.

یک مرجع متعارف، که در سطح ریاضی بالاتری از کتب فلر و هوئل قرار دارد، کتاب گرامر<sup>۳</sup> (C12) می‌باشد.

احتمال و آمار کاربردهای زیادی در فیزیک دارند. نظریهٔ مکانیک آماری کلا "یک مثال محسوب می‌شود. این مبحث در کتب متعددی مطرح شده است، که چندتا از آنها عبارتند از لاندو و لیف شیتس (L3)، هوآنگ<sup>۴</sup> (H12)، تولمن<sup>۵</sup> (T7)، و دیویدسون<sup>۶</sup> (D1). بحثهای مقدماتی‌تر را می‌توان در مارگنو و مورفی (M2)، فصل ۱۲، و کیتل<sup>۷</sup> (K2) یافت. کاربرد نظریهٔ احتمال در تحلیل سنجشها، که تحت اثر خطاهای تصادفی‌اند، در مرجع کلاسیک ویناکر و رابینسون (W4) مطرح شده است. کارهای جدیدتر، که در تعیین ثابتهای اتمی اساسی انجام داده شده است، در اثر کوهن (C5, C6) یافت می‌شود. یادداشتهای اورر<sup>۸</sup> (O2) نیز برای فیزیکدانان سودمندند.

### مسائل

۱۰۱۴. سه کوش  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، صفحه ۳۸۰<sup>۶</sup> متن را در نظر بگیرید. یک کوش را به تصادف اختیار

- 
- |           |             |
|-----------|-------------|
| 1- Feller | 2- Hoel     |
| 3- Cramer | 4- Huang    |
| 5- Tolman | 6- Davidson |
| 7- Kittel | 8- Orear    |

کرده، سکه‌ای به تصادف از آن برمی‌داریم. سکه طلاست. سکه را به کشو برگردانده، کشو را کاملاً "تکان می‌دهیم" و از آن سکه دیگری به تصادف برمی‌داریم. مجدداً "سکه طلاست. سکه را به کشو عودت داده، بار دیگر آن را تکان می‌دهیم و یک سکه به تصادف از آن برمی‌داریم. احتمال طلا بودن سکه اخیراً در صورتی بیابید که (آ) سکه‌های طلا یکسان باشند؛

(ب) سکه‌های طلا قابل تمیز از هم بوده، و دوتای اول متفاوت باشند؛

(پ) سکه‌های طلا قابل تمیز از هم بوده، و دوتای اول یکسان باشند.

۲۰۱۴. یک مدار شمارشگر، یا مقیاسگر، از یک سری مراحل دوتایی تشکیل شده است که هر یک در هر پالس ورودی ثانیه‌ای یک پالس خارج می‌کند. فرض کنید شمارشهای پرتو کیهانی تصادفی را به یک مقیاس چهار (دو مرحله دوتایی) داده باشیم و پالسهای خروجی آنها با یک ثبات مکانیکی شمرده شوند. اگر ثبات مکانیکی 0.1 ثانیه پس از دریافت هر پالس (ثابت شده یا نشده) غیرحساس یا "مرده" باشد، کسری از شمارشهای از دست رفته را در صورتی حساب کنید که آهنگ متوسط پرتو کیهانی 10 بر ثانیه باشد. (فرض کنید تلفات شمارش در مدار مقیاس قابل چشم‌پوشی باشد.)

۳۰۱۴. در یک "راه رفتن تصادفی" یک بعدی، گامهای به طول یک در جهت مثبت یا منفی  $x$  و با احتمال مساوی برداشته می‌شوند.

(آ) توزیع احتمال را برای موضع  $x_n$  پس از  $n$  گام بیابید.  $\langle x_n \rangle$  و  $\langle x_n^2 \rangle$  را پیدا کنید.

(ب) امید بازگشتها به مبدا را در صورتی بیابید که کلاً " $N$  گام برداشته شده باشد.

(پ) احتمال بازگشت به مبدا درست در گام  $m$ ، نه پیش از آن، چقدر است.

۴۰۱۴. یک راه رفتن تصادفی نامتقارن در امتداد محور  $x$  در نظر بگیرید که از مبدا شروع شود؛ وقتی هر گام برداشته شد، احتمال اینکه گام  $+1$  باشد  $p$ ، و احتمال اینکه گام  $-1$  باشد  $q (= 1 - p)$  است.

(آ) فرض کنید  $f(m)$  احتمال رسیدن به نقطه  $x = m$  ( $m > 0$ ) باشد. نشان دهید

که  $f(m+1) = f(m)f(1)$ ، و  $f(m+1) = p + qf(2)$ ، و بدین ترتیب  $f(m)$  را محاسبه کنید.

(ب) فرض کنید  $g(m, n)$  احتمال رسیدن به نقطه  $x = +m$  پیش از رسیدن به نقطه

$x = -n$  باشد. نشان دهید که

$$f(m) = g(m, n) + [1 - g(m, n)]f(m+n)$$

و بدین ترتیب  $g(m, n)$  را حساب کنید.

(پ) یک فیزیکدان که قدرت کنترل حرکت اجسام را دارد می‌تواند 60% پرتاب یک

سکه را بخواند. وی با داشتن دو مهره با شخصی که بی نهایت مهره دارد شیر - خط بازی می کند. هر بار که سکه پرتاب می شود، بازنده یک مهره به برنده می دهد. احتمال اینکه فیزیکدان مآلا "همه مهره هایش را بیازد چقدر است؟

۵.۱۴. متغیر تصادفی  $x$  دارای توزیع احتمال

$$f(x) = e^{-x} \quad (0 < x < \infty)$$

است.

(آ)  $\langle x \rangle$  را بیابید.

(ب) دو مقدار  $x_1$  و  $x_2$  مستقل از هم انتخاب شده اند.  $\langle x_1 + x_2 \rangle$  و  $\langle x_1 x_2 \rangle$  را بیابید.

(پ) توزیع احتمال  $P(a)$  متغیر تصادفی  $a = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  چیست؟

۶.۱۴. متغیر تصادفی  $x$  دارای توزیع احتمال

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

است.

(آ)  $n$  سنجش مستقل  $x_i$  صورت گرفته است. فرض کنید

$$a = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$P(a)$ ، یعنی توزیع احتمال  $a$ ، را بیابید.  $\langle a \rangle$  و  $\langle a^2 \rangle$  را بیابید.

(ب) فرض کنید  $Q(s) = (1/n)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ . یعنی توزیع احتمال  $s$ ، را بیابید.  $\langle s \rangle$  را پیدا کنید.

۷.۱۴.  $n$  کمیت  $x_1, x_2, \dots, x_n$  به طور آماری مستقل اند؛ هر کدام یک توزیع گاوسی با میانگین صفر و پراش مشترک دارند:

$$\langle x_i \rangle = 0 \quad \langle x_i^2 \rangle = \sigma^2 \quad \langle x_i x_j \rangle = 0$$

(آ)  $n$  کمیت جدید  $y_i$  با  $y_i = \sum_j M_{ij} x_j$  تعریف شده اند، که در آن  $M$  یک ماتریس متعامد است. نشان دهید که  $y_i$  ها همه خواص آماری  $x_i$  ها را دارند؛ یعنی، متغیرهای گاوسی مستقل با خاصیت

$$\langle y_i \rangle = 0 \quad \langle y_i^2 \rangle = \sigma^2 \quad \langle y_i y_j \rangle = 0$$

می باشند.

(ب)  $y_1 = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$  را اختیار کرده، و بقیه  $y_i$  ها را دلخواه و فقط

تحت این شرط که تبدیل متعامد است بگیریید. بدین ترتیب، نشان دهید که میانگین

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n) \text{ و کمیت } s = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ متغیرهای تصادفی به طور آماري}$$

مستقل می باشند. توزیعهای احتمال  $\bar{x}$  و  $s$  چیستند؟

(پ) اغلب می خواهیم، بدون دانستن چیزی راجع به اندازه  $\sigma$ ، صفر بودن میانگین

(مجهول) توزیع گاوسی را امتحان کنیم. از شهود برمی آید که  $\tau = \bar{x}/\sqrt{s}$  کمیت

مفیدی است. نشان دهید که توزیع احتمال متغیر تصادفی  $\tau$  عبارت است از

$$p(\tau) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{(1+n\tau^2)^{n/2}}$$

نکته مهم در این توزیع (که اصولاً "توزیع  $t$  دانشجوی نام دارد<sup>۱</sup>) این است که شامل

پارامتر مجهول  $\sigma$  نیست.

۸۰۱۴. در بخش ۷۰۱۴، آزمون  $\chi^2$  برای موجه بودن، به خلاف آزمون توصیف شده در

مسئله ۷۰۱۴، تابع معلوم بودن  $\sigma^2$  در هر نقطه تجربی است. لذا، سوءال زیر مطرح

خواهد شد: چگونه می توان  $\sigma^2$  را با داده های تجربی تخمین زد؟ در بعضی از

سنجشها ممکن است  $\sigma^2$  با معلومات ما راجع به دقت روندهای تجربی تخمین زده

شود؛ ما در اینجا وضعیت دیگری در نظر می گیریم، که در آن  $\sigma^2$  باید از خود نتایج

تجربی تخمین زده شود.

فرض کنید  $n$  سنجش متغیر تصادفی  $x$  نتایج  $x_1, x_2, \dots, x_n$  را به ما داده و  $x$  دارای

توزیع گاوسی

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

با دو پارامتر مجهول  $a$  و  $\sigma^2$  باشد.

۱.  $t$  دانشجوی عملاً " مساوی  $\sqrt{n(n-1)}$  ضربدر  $\tau$  ی ماست؛ و لذا، توزیع  $t$  خواهد

بود

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-(n/2)}$$



(آ) تخمینهای راستنمایی ماکزیمم برای  $a$  و  $\sigma^2$  را برحسب داده‌های  $x_1, \dots, x_n$  به دست آورید.

(ب) تخمین یک پارامتر را غیراریب گوئیم اگر امید تخمین مساوی پارامتر باشد. نشان دهید که تخمین  $a$  در قسمت آ غیراریب است، ولی تخمین  $\sigma^2$  اریب می‌باشد.

(پ) نشان دهید

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

که در آن

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

یک تخمین غیراریب  $\sigma^2$  است. وجود  $(n-1)$  به جای  $n$  در این تخمین با وجود مشابه  $(n-1)$  در جواب قسمت ب مسئله ۷۰۱۴ ارتباط نزدیکی دارد. تذکر. تخمینهای راستنمایی ماکزیمم را کورکورانه به کار نبرید.

۹۰۱۴. کمیت  $y$  به‌طور نظری تابع خطی کمیت  $x$  است. یعنی  $y = Ax + B$ . نتایج تجربی عبارتند از

$$\begin{array}{ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ y & 5 \pm 2 & 9 \pm 1 & 15 \pm 2 \end{array}$$

(آ)  $A$  و  $B$  را با خطاهای احتمالی در هر مورد حساب کنید.

(ب)  $y(4)$  و خطای احتمالی را محاسبه نمایید.

۱۰۰۱۴. سنجشهای مقطع دیفرانسیل یک واکنش هسته‌ای در چند زاویه داده‌های زیر را به دست داده‌اند:

$\theta$	$30^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$
$\sigma(\theta)$	11	13	17	17	14
خطا	$\pm 1.5$	$\pm 1.0$	$\pm 2.0$	$\pm 2.0$	$\pm 1.5$

واحدهای مقطع عبارتند از

$$10^{-30} \text{ cm}^2/\text{استرادیان}$$

(آ) یک برازش کمترین مربعات به  $\sigma(\theta)$  به شکل

$$\sigma(\theta) = A + B \cos \theta + C \cos^2 \theta$$

انجام دهید. مقادیر و خطاهای مربوط به  $A, B, C$  را به دست آورید.

(ب) مقطع کل  $\sigma = \int \sigma(\theta) d\Omega$  و خطایش را بیابید.

(پ) مقطع دیفرانسیل در  $0^\circ$  و خطایش را بیابید .

۱۱.۱۴ . در واپاشی ذرات  $\Lambda$  ی پولاریزه شده،  $\Lambda \rightarrow \pi^- + p$ ؛ توزیع زاویه‌ای در دستگاه سکون  $\Lambda$  عبارت است از

$$w(\theta) d\Omega = (1/4\pi)(1 + a \cos \theta) d\Omega$$

$w(\theta) d\Omega$  احتمال آن است که  $\pi^-$  در زاویه فضای  $d\Omega$  واقع در زاویه  $\theta$  با جهت پلاریزاسیون گسیل شود. (پارامتر  $a = \alpha P$ ، که در آن  $P$  پلاریزاسیون ذرات  $\Lambda$  است، و  $\alpha$  پارامتر نامتقارن ذاتی برای واپاشی  $\Lambda$  می‌باشد.)

اگر در آزمایشی پارامتر  $a$  با خطای متعارف 5 درصد سنجیده شده باشد، با فرض  $a \approx 0.4$  و اینکه تمام واپاشیها بدون توجه به زاویه پیگیری شده‌اند، چند پیشامد واپاشی باید مشاهده شوند؟

۱۲.۱۴ . ثابت نرمال سازی  $N$  در (۴۴.۱۴) را حساب کنید .

۱۳.۱۴ . تناظر یک به یک مناسبی بین انرژی یک پروتون سریع و برد آن در یک ماده، یعنی فاصله‌ای که پروتون در ماده قبل از کند شدن و توقف طی می‌کند، وجود دارد. البته، انحراف، یا تغییر در طول مسیرها، وجود دارد، زیرا فرایند کند شدن یک فرایند تصادفی می‌باشد. فرض کنید یک باریکه پروتون تک انرژی در یک اطاقک حباب متوقف شده و  $N$  مسیر جداگانه به طولهای  $x_1, x_2, \dots, x_N$  ایجاد شوند. با این فرض که توزیع احتمال برای طول مسیر گاوسی است، با استفاده از داده‌ها، مقادیر راستنمایی ماکزیمم برد  $R$  (طول میانگین) و پارامتر انحراف (انحراف معیار)  $\delta$  را بیابید. خطاهای  $R$  و  $\delta$  را پیدا کنید.

۱۴.۱۴ . میانگین و انحراف معیار متغیر  $\chi^2$  را برای  $N$  درجه آزادی حساب کرده و بدین وسیله حدی تقریبی برای مقادیر " معقول "  $\chi^2$  به دست آورید .  
۱۵.۱۴ . در نظریه آماری واکنشهای هسته‌ای، یک مقطع نوعی مساوی

$$\sigma(E) = \left| \sum_i \frac{\gamma_i}{E - E_i - i(\Gamma_i/2)} \right|^2$$

فرض می‌شود، که در آن مجموع روی تشدیدهای زیادی گرفته می‌شود که هر یک دارای انرژی تشدید  $E_i$ ، عرض جزئی  $\gamma_i$ ، و عرض کلی  $\Gamma_i$  است. با مفروضات زیر:

(۱) همه  $\Gamma_i$  ها مساوی ثابت ( حقیقی )  $\Gamma$  است؛

(۲)  $\gamma_i$  ها اعدادی حقیقی‌اند که توزیع تصادفی مستقل داشته و

$$\langle \gamma_i \rangle = 0 \quad \langle \gamma_i^2 \rangle = \alpha^2 = \text{ثابت}$$

(۳)  $E_i$  ها مساوی الفاصله با فاصله  $D$  می‌باشند .

$$D \ll \Gamma(4)$$

$\langle \sigma(E) \rangle$ ،  $\langle \sigma^2(E) \rangle$ ، و  $\langle \sigma(E)\sigma(E+k) \rangle$  را حساب کرده، و نشان دهید که

$$\frac{\langle \sigma(E) \rangle^2}{\langle \sigma^2(E) \rangle} = \frac{1}{2} \frac{\langle [\sigma(E) - \sigma(E+k)]^2 \rangle}{\langle \sigma^2(E) \rangle} = \frac{k^2}{k^2 + \Gamma^2}$$

۱۶.۱۴. دو عدد صحیح را، مثلاً "از اعداد صحیح از ۱ تا  $10^9$ ، به تصادف اختیار کنید. احتمال آنکه نسبت به هم اول باشند چقدر است؟ راهنمایی. احتمال اینکه هر دو زوج نباشند مساوی  $1 - 1/2^2$  است.

۱۷.۱۴.  $(\bar{A})$  تابع  $F(q) = (q - \lambda a - \mu b)^2$  را در نظر بگیرید، که در آن  $a$  و  $b$  بردارهای ثابتی اند، و به ازای هر انتخاب از بردار  $q$  اسکالرهای  $\lambda$  و  $\mu$  طوری تعدیل شده اند که  $F(q)$  را مینیمم می سازند. نشان دهید این مینیمم برابر  $F(q) = q_{\perp}^2$  است که، در آن  $q_{\parallel}$  و  $q_{\perp}$  با  $q = q_{\parallel} + q_{\perp}$  تعریف می شوند، که در آن  $q_{\parallel}$  و  $q_{\perp}$  به ترتیب با صفحهء شامل  $a$  و  $b$  موازی و عمود می باشند.

(ب) فرض کنید متغیر  $y$  تابعی خطی از  $x$  باشد:  $y = \alpha x + \beta$  که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  ثابتهای مجهولی هستند. برای تعیین این ثابتها به طور تجربی،  $y$  را به ازای  $N$  مقدار مختلف از متغیر  $x$  سنجیده، و برازش کمترین مربعات این داده ها را انجام می دهیم. اگر مقادیر تجربی  $y$  دارای خطاهای متعارف مساوی  $\sigma$  باشند، برازش با انتخاب  $a$  و  $b$  طوری صورت می گیرد که کمیت

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma^2} (y_i - \alpha x_i - \beta)^2$$

مینیمم می شود؛ در نتیجه،  $a$  و  $b$  تخمینهای کمترین مربعات  $\alpha$  و  $\beta$  می باشند. نشان دهید که متغیر تصادفی  $\chi^2$  دارای توزیع خی به توان دو (۷۳.۱۴) است ولی با  $N - 2$  درجهء آزادی.

## آنالیز تانسوری و هندسه دیفرانسیل

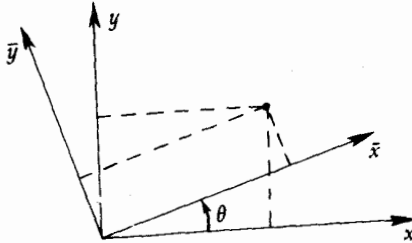
در فصل ۶ فضاهای برداری خطی کلی و عملگرهای خطی که در این فضاها عمل می‌کنند مورد بحث قرار گرفتند. در این فصل خواص بردارها، عملگرها، و مفاهیم مربوطه که در فضاهای برداری خطی خاص وجود دارند با شرح بیشتری بررسی می‌شوند. در فیزیک، متداولترین فضاها فضای اقلیدسی سه‌بعدی و فضای چهاربعدی نسبت است. در واقع، این نظریه نسبت است که آنالیز تانسوری را با بیشترین کاربرد پذیرا می‌باشد.

این فصل را با مطالعه تانسورهای دکارتی در فضای سه‌بعدی معمولی آغاز می‌کنیم. پس از آن برای توصیف تحلیلی منحنیها در فضای سه‌بعدی و بیان فرمولهای فرنه‌ل کمی منحرف می‌شویم. سپس بخش ۳.۱۵ شامل بحثی کلی از آنالیز تانسوری در دستگاههای مختصات دلخواه است. این بخش با بحثی از مشتقگیری هموردای تانسورها و توصیف کوتاهی از مسئله ژئودزیک پایان می‌یابد.

### ۱.۱۵ تانسورهای دکارتی در فضای سه‌بعدی

بحث را با مرور اثر دوران مختصات دکارتی بر بردارها در فضای سه‌بعدی معمولی آغاز می‌کنیم. اگر دستگاه مختصاتمان در جهت مثبت حول محور  $z$ ، مثل شکل ۱.۱۵، به اندازه  $\theta$  زاویه دوران کند، چه رخ خواهد داد؟ مؤلفه‌های جدید بردار برحسب مؤلفه‌های قدیم به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= A_x \cos \theta + A_y \sin \theta \\ \bar{A}_y &= -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta \\ \bar{A}_z &= A_z\end{aligned}$$



شکل ۱۰۱۵ دو دستگاه مختصات، یکی نسبت به دیگری به اندازه زاویه  $\theta$  حول محور  $z$  دوران کرده است.

که می توان آنها را به شکل  $\bar{A} = MA$  نوشت، که در آن ماتریس  $M$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$(1015) \quad M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ماتریسهای توصیف کننده دوران حول محور  $x$  یا  $y$  را به آسانی می توان به تشابه نوشت. اگر بیش از یک دوران مورد نظر باشد، نماد خاصتری سودمند است. مثلاً،  $M_z(\theta)$  را می توان برای نمایش دوران به اندازه  $\theta$  حول محور  $z$  به کار برد.

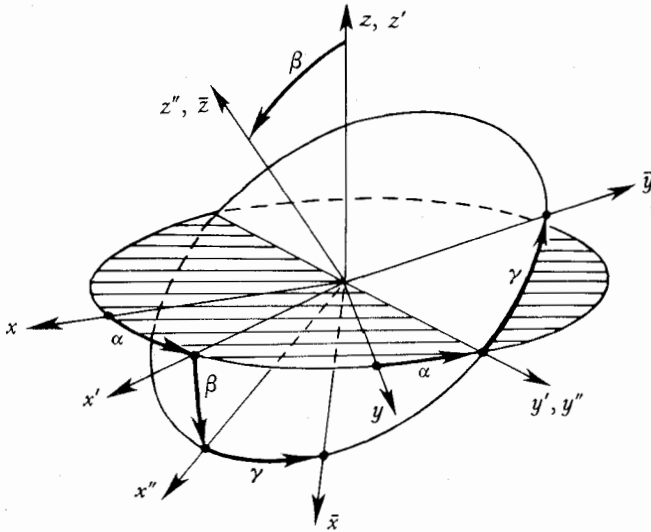
با سه دوران متوالی حول محورهای مختصات می توان جهت دلخواهی برای دستگاه مختصاتمان منظور کرد. این دورانها معمولاً "به شکل زیر انجام می شوند:

۱. دوران  $(xyz)$  به اندازه زاویه  $\alpha$  حول محور  $z$  تا  $(x'y'z')$  به دست آید. ماتریس توصیف کننده این دوران  $M_z(\alpha)$  است.

۲. دوران  $(x'y'z')$  به اندازه  $\beta$  حول محور  $y'$  تا  $(x''y''z'')$  به دست آید. ماتریس نظیر این دوران  $M_{y'}(\beta)$  می باشد.

۳. دوران  $(x''y''z'')$  به اندازه زاویه  $\gamma$  حول محور  $z''$  تا  $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$  به دست آید. ماتریس مربوطه  $M_{z''}(\gamma)$  خواهد بود.

این دورانهای متوالی در شکل ۲۰۱۵ نموده شده اند. توجه کنید که  $\beta$  و  $\alpha$  مختصات قطبی معمولی اند که جهت محور  $\bar{z}$  نهایی نسبت به مختصات اصلی  $(x, y, z)$  را به دست



شکل ۲۰.۱۵ نمودار نمایش سه دوران متوالی  
به اندازه زوایای اوپلر  $\alpha$  ،  $\beta$  ، و  $\gamma$

می دهند. زوایای  $(\alpha, \beta, \gamma)$  را زوایای اوپلر<sup>۱</sup> می نامند. ماتریس تبدیل توصیف کننده<sup>۲</sup> کل دوران عبارت است از<sup>۲</sup>

$$\begin{aligned}
 M(\alpha, \beta, \gamma) &= M_{z''}(\gamma)M_{y'}(\beta)M_z(\alpha) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 (20.15) \quad &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \sin \alpha \cos \gamma & -\sin \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \sin \gamma & +\cos \alpha \sin \gamma & \\ -\cos \beta \cos \alpha \sin \gamma & -\cos \beta \sin \alpha \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ -\sin \alpha \cos \gamma & +\cos \alpha \cos \gamma & \\ \sin \beta \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

۱. گاهی برای دورانها از قراردادهای مختلفی استفاده می شود [قس. گلدستاین (G4)].  
ما از قراردادی استفاده کرده ایم که امروزه در بحثهای دوران در مکانیک کوانتومی، مثلاً "در رز (R3)، بیش از همه متداول است.

۲. برای برخی مقاصد، شایسته است جهت گیری مجدد دستگاه مختصات بر حسب دورانها

مولفه‌های یک بردار نسبت به دستگاه جدید  $(\bar{A})$  با مولفه‌ها در دستگاه قدیم  $(A)$  به صورت زیر مرتبط می‌شوند:

$$(۳۰۱۵) \quad \bar{A} = MA$$

توجه کنید که  $M$  متعامد است؛  $M^{-1} = \bar{M}$ . همچنین،  $\det M = 1$ .  
 حال می‌توان یک بردار در فضای سه‌بعدی را هر شیء مانند  $A$  تعریف کرد که در دستگاه مختصات دکارتی سه مولفه داشته، طبق

$$(۴۰۱۵) \quad \bar{A} = MA$$

تبدیل یابد، و  $M$  در دوران مختصات ماتریس  $(۲۰۱۵)$  باشد.  
 ماتریس تبدیل  $M$  تعریف شده در اینجا وارون (یا ترانهاده) ماتریس  $\gamma$  است که در فصل ۶ به کار رفت. این را می‌توان به آسانی در مقایسه معادله  $(۴۰۱۵)$  با معادله  $(۳۰۰۶)$  فصل ۶ دید. البته،  $M$  یا وارون آن به عنوان "ماتریس تبدیل" فقط یک مسئله تعریف می‌باشد. "طبیعی"ترین تعریف به طرز تعریف تبدیل بستگی دارد. در فصل ۶ این امر با دادن بردارهای پایه‌ای جدید  $e'_i$  به صورت ترکیباتی خطی از  $e_j$ های قدیم صورت گرفت. در اینجا تبدیل با دادن مولفه‌های جدید  $\bar{A}_i$  ی بردار  $A$  به صورت ترکیبات خطی از مولفه‌های قدیم  $A_j$  تعریف شده است.

به اختلاف بین تعریف  $(۴۰۱۵)$  ما از بردار و اصول موضوع آمده در بخش ۱۰۶ برای یک فضای برداری مجرد توجه کنید. مثلاً، معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(۵۰۱۵) \quad E = \frac{e}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{قانون کولن})$$

که میدان الکتریکی  $E$  را در نقطه  $\mathbf{r}$  که به وسیله بار نقطه‌ای  $e$  واقع در مبدأ تولید شده به ما می‌دهد. کمیات  $E$  و  $\mathbf{r}$  برای مقاصد فعلی بردارند چون از  $(۴۰۱۵)$  پیروی می‌کنند، ولی شایسته نیست آنها را بخشی از یک فضای برداری مجرد بگیریم؛ مثلاً، مجموع آنها (که از حیث بعد ناسازگارند) معنی فیزیکی ندارد.

حال اشیایی را در نظر می‌گیریم که خواص تبدیل آنها با خواص تبدیل بردارها متفاوت باشند. مثلاً، اگر  $A_i$  و  $B_i$  مولفه‌های دو بردار باشند، می‌توان شیئی (حاصل ضرب

حول محورهای اصلی (بدون پریم) توصیف شود. می‌توان نشان داد که سه دوران  
 (از راست به چپ بخوانید)

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = M_z(\alpha)M_y(\beta)M_x(\gamma)$$

همان جهت نموده شده در شکل ۳۰۱۵ را به ما می‌دهد (تحقیق مطلب به دانشجوی منحول شده است).

" خارجی " ( دو بردار ) با نه مؤلفه

$$(۶.۱۵) \quad T_{ij} = A_i B_j$$

تشکیل داد. طرز تبدیل این مؤلفه‌ها در دوران دستگاه مختصات مستقیماً از (۴.۱۵) نتیجه می‌شود:

$$(۷.۱۵) \quad \bar{T}_{ij} = \sum_{kl} M_{ik} M_{jl} T_{kl}$$

هر شیء با نه مؤلفه که به این نحو تبدیل شود یک تانسور رتبه دوم نام دارد.

مثال. تانسور لختی یک جسم صلب دارای مؤلفه‌های<sup>۱</sup>

$$(۸.۱۵) \quad I_{jk} = \delta_{jk} \int_{\text{body}} r^2 \rho d^3x - \int_{\text{body}} r_j r_k \rho d^3x$$

است، که در آن چگالی  $\rho$  و طول بردار موضع  $\mathbf{r}$  با مؤلفه‌های  $r_i$  می‌باشد. توجه کنید که انتگرال دوم شامل حاصل ضرب خارجی  $\mathbf{r}$  در خودش بوده؛ و لذا، یک تانسور رتبه دوم می‌باشد.

راجع به دلتای کرونیگر که در انتگرال (اسکالر) اول در  $I_{jk}$  ضرب می‌شود چه می‌توان

گفت؟

$$(۹.۱۵) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \text{ اگر} \\ 1 & , \quad i = j \text{ اگر} \end{cases} \quad (\text{در تمام دستگاه‌های مختصات})$$

آیا  $\delta_{ij}$ ، که به این صورت تعریف شده، تانسور است؟ در تبدیل (۷.۱۵) لازم است

$$\bar{\delta}_{ij} = \delta_{ij} \stackrel{?}{=} \sum_{kl} M_{ik} M_{jl} \delta_{kl} = \sum_k M_{ik} M_{jk} = (M\bar{M})_{ij} = \delta_{ij}$$

لذا،  $\delta_{ij}$  یک تانسور رتبه دوم می‌باشد.

تانسورهای رتبه سوم و بالاتر تعمیم واضح رتبه ۲ می‌باشند. یک تانسور رتبه  $n$

دارای  $3^n$  مؤلفه است که تحت دوران مختصات مانند حاصل ضربهای  $A_i B_j \dots G_l$  مؤلفه‌های  $n$  بردار تبدیل می‌شوند؛ یعنی، تبدیل شامل  $n$  عامل  $M_{ik} \dots$  می‌باشد. حاصل ضرب خارجی " دو تانسور رتبه  $n$  و  $m$  یک تانسور رتبه  $n+m$  است. هر بردار یک تانسور رتبه ۱ و هر اسکالر یک تانسور رتبه ۰ می‌باشد.

حال علامت پادمقارن لوی - چویوتا را در نظر می‌گیریم:



$$(10.15) \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk = 123, 231, 312 \text{ اگر} \\ -1, & ijk = 321, 213, 132 \text{ اگر} \\ 0 & \text{در غیر این صورت,} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{در تمام دستگاههای} \\ \text{مختصات} \end{matrix}$$

آیا  $\varepsilon_{ijk}$  تانسور است؟ یعنی،

$$\bar{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \stackrel{?}{=} \sum_{lmn} M_{il} M_{jm} M_{kn} \varepsilon_{lmn}$$

ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر ماتریس  $3 \times 3$  ی  $A_{ij}$ ،

$$(11.15) \quad \sum_{lmn} A_{il} A_{jm} A_{kn} \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk} \det A$$

لذا، چون به ازای جميع دورانها،  $\det M = 1$ ،  $\varepsilon_{ijk}$  یک تانسور (رتبه سه) می‌باشد. اغلب یک دوران ناسره با تبدیلی تعریف می‌شود که ماتریس آن متعامد ولی دارای دترمینان  $-1$  است. یک دوران ناسره مساوی یک دوران سره ( $\det M = +1$ ) و سپس یک انعکاس یا وارون است. اگر بر یک دستگاه مختصات راستگرد دوران ناسره اعمال شود، یک دستگاه چپگرد به ما می‌دهد.

حال می‌بینیم اگر امکان  $-1$  بودن  $\det M$  را بپذیریم، واقعا "تانسور نیست. یک

تانسور که قانون تبدیلیش

$$(12.15) \quad \bar{A}_{ij\dots} = \sum_{kl\dots} M_{ik} M_{jl} \dots A_{kl\dots} \times \det M$$

باشد یک شبه تانسور نام دارد. پس  $\varepsilon_{ijk}$  یک شبه تانسور است. حاصل ضرب خارجی یک تانسور در یک شبه تانسور یک شبه تانسور است، و حاصل ضرب خارجی دو شبه تانسور یک تانسور است زیرا  $(\det M)^2 = 1$ .

قانون تبدیل (۷.۱۵) برای تانسور رتبه دو را می‌توان با نماد ماتریسها نوشت:

$$(13.15) \quad \bar{T} = MTM^{-1}$$

لذا، اگر  $A$  بردار باشد،

$$(14.15) \quad \bar{T}A = (MTM^{-1})(MA) = MTA$$

در نتیجه،  $TA$  یک بردار است. این مثالی از انقباض می‌باشد؛ اگر دو اندیس در یک تانسور را مساوی هم قرار داده و از 1 تا 3 جمع‌بندی کنیم، یک تانسور جدید با دو اندیس کمتر نتیجه می‌شود. زیرا

$$\begin{aligned} \left( \sum_i T_{ij\dots} \right) &= \sum_i \sum_{lmn\dots} M_{il} M_{im} M_{jn} M_{kp} \dots T_{lmnp\dots} \\ &= \sum_{lmn\dots} \delta_{im} M_{jn} M_{kp} \dots T_{lmnp\dots} \end{aligned}$$

$$(15.15) \quad = \sum_{n\dots} M_{jn} M_{kp} \dots \left( \sum_l T_{l\dots} \right)$$

و می‌توان نوشت  $(\sum_i T_{i1np\dots}) = S_{np\dots}$ ، که در آن  $S$  تانسوری با دو اندیس کمتر از  $T$  است. مثلاً، بردار  $TA$  از تانسور  $T$  و بردار  $A$  با قواعد زیر به دست می‌آید:

۱. ضرب در هم تا تانسور رتبه سه  $T_{ij}A_k$  به دست آید، و

۲. انقباض اندیسهای دوم و سوم

$$(16.15) \quad (TA)_i = \sum_j T_{ij} A_j$$

"حاصل ضرب نقطه‌ای"  $AB$  بردارهای  $A$  و  $B$  تحت دورانهای

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{B} &= (MA)(MB) \\ &= A\tilde{M}MB \\ &= AB \end{aligned}$$

(17.15)

ناورداست. البته، یک چنین شیء اسکالر، یا تانسور رتبه صفر، است. شیء حاصل ضرب خارجی

$$(18.15) \quad \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} A_i B_j = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k$$

یک شبه بردار، و شیء

$$(19.15) \quad \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$$

یک شبه اسکالر می‌باشد.

گاهی تانسور مرتبه دوی  $T_{ij} = A_i B_j$  حاصل از ضرب خارجی دو بردار را با علامتی

به نام دیاد ( $AB$ ) نشان داده، و هر ترکیب خطی دیادها مانند  $\sum \lambda_k A_k B_k$  را یک دیادیک می‌نامند. توجه کنید که ترتیب بردارها در یک دیاد مهم است؛  $AB \neq BA$ . اگر  $T = AB$  حاصل ضرب منقبض شده

$$(20.15) \quad V_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} C_j$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(21.15) \quad \mathbf{V} = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$$

به همین نحو، یک تریاد  $ABC$  تانسوری از رتبه سه با مؤلفه‌های  $T_{ijk} = A_i B_j C_k$

است؛ و همین‌طور، در مورد پلیادهای رتبه بالاتر. بحث آنالیز تانسوری با استفاده از پلیادیکها را می‌توان در بلوک (B4) و درو<sup>۱</sup> (D7) یافت.

۲۰۱۵ منحنیها در فضای سه‌بعدی؛ فرمولهای فرنه

در بخش پیش نوع خاصی تبدیل مختصات، یعنی دوران مختصات دکارتی در فضای سه‌بعدی

مورد بحث قرار گرفت. در بخش بعد، تبدیلات مختصات کلی مطرح خواهند شد. ولی پیش از ترک دنیای آشنای سه بعدی، کمی منحرف شده و منحنیها را به طور تحلیلی در فضای سه بعدی توصیف می‌کنیم.

یک منحنی را می‌توان با معادله

$$(22.15) \quad \mathbf{x} = \phi(t)$$

توصیف کرد، که در آن  $\mathbf{x}$  برداری از مبداء مختصات تا نقطه‌ای از منحنی بوده و  $t$  پارامتری است که در امتداد منحنی تغییر می‌کند.

عنصر مجذور شده طول قوس عبارت است از

$$(23.15) \quad ds^2 = d\mathbf{x}^2 = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 (dt)^2$$

این معادله را می‌توان نسبت به  $t(s)$  یا  $s(t)$  حل کرده طول قوس  $s$  در امتداد منحنی را پارامتر گرفت. ما معمولاً این کار را به این دلیل می‌کنیم که اغلب فرمولها ساده‌تر می‌شوند؛ تعمیم به پارامتر دلخواه سراسر است ولی گاهی کمی پیچیده است.

حال منحنی را به شکل

$$(24.15) \quad \mathbf{x} = \phi(s)$$

در نظر گرفته، و بردار

$$(25.15) \quad \alpha(s) = \frac{d\phi}{ds}$$

را تشکیل می‌دهیم. به آسانی معلوم می‌شود که  $\alpha$  چیزی جز بردار یکه در امتداد مماس بر منحنی نیست.

از  $\alpha^2 = 1$  نتیجه می‌گیریم که

$$(26.15) \quad \alpha \cdot \frac{d\alpha}{ds} = 0$$

لذا،  $d\alpha \cdot ds$  بر  $\alpha$  عمود است. تعریف می‌کنیم

$$(27.15) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \kappa \beta$$

که در آن  $\beta$  یک بردار یکه و  $\kappa$  مثبت است.  $\beta$  را قائم اصلی منحنی و  $\kappa$  را خمیدگی می‌نامند. راجع به  $d\beta \cdot ds$  چه می‌شود گفت؟ از  $\beta \cdot \beta = 1$  به تشابه با (26.15) معلوم می‌شود

که  $d\beta \cdot ds$  بر  $\beta$  عمود است. لذا، می‌نویسیم

$$(28.15) \quad \frac{d\beta}{ds} = C_1 \alpha + C_2 \gamma \quad (\gamma = \alpha \times \beta)$$

بردار  $\gamma$  قائم دوم به منحنی ما نام دارد. توجه کنید که  $\alpha, \beta, \gamma$  یک دستگاه مختصات راستگرد در هر نقطه از منحنی تشکیل می‌دهند.

از  $\alpha \cdot \beta = 0$  نتیجه می‌شود که

$$(29.15) \quad \alpha \cdot \frac{d\beta}{ds} + \beta \cdot \frac{d\alpha}{ds} = 0$$

یا

$$(30.15) \quad C_1 + \kappa = 0$$

بنابراین،

$$C_1 = -\kappa$$

کمیت ( $-C_2$ ) را معمولاً "به صورت  $\tau$  نوشته و آن را پیچش می‌نامند. بالاخره،  $dy/ds$  را در نظر می‌گیریم.

$$\alpha \cdot \gamma = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \frac{d\gamma}{ds} + \gamma \cdot \frac{d\alpha}{ds} = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \frac{d\gamma}{ds} = 0$$

$$\beta \cdot \gamma = 0 \Rightarrow \beta \cdot \frac{d\gamma}{ds} + \gamma \cdot \frac{d\beta}{ds} = 0 \Rightarrow \beta \cdot \frac{d\gamma}{ds} = \tau$$

$$\gamma \cdot \gamma = 1 \Rightarrow \gamma \cdot \frac{d\gamma}{ds} = 0$$

بنابراین،

$$(31.15) \quad \frac{d\gamma}{ds} = \tau\beta$$

به‌طور خلاصه، سه معادله زیر به دست آمده‌اند:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \kappa\beta$$

$$(32.15) \quad \frac{d\beta}{ds} = -\kappa\alpha - \tau\gamma$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \tau\beta$$

این معادلات را فرمولهای فرنه می‌نامند.

### ۳۰.۱۵ آنالیز تانسوری کلی

حال مفاهیم بخش اول این فصل را با توجه به تبدیلات مختصات دلخواه به جای فقط

تبدیلات متعامد خطی ( دورانها ) در سه بعد، تعمیم می‌دهیم. یعنی، فرض می‌کنیم مختصات جدید  $\bar{x}$  توابع دلخواهی از مختصات قدیم  $x$  باشند:

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, x_2, \dots) \quad (۳۳.۱۵)$$

یا، مختصرتر،

$$\bar{x} = \bar{x}(x)$$

نقطه  $P$  به مختصات  $x$  و نقطه  $Q$  مجاور آن به مختصات  $x + dx$  را در نظر می‌گیریم. می‌توان کمیت  $dx$  را مؤلفه‌های بردار کوچکی از  $P$  تا  $Q$  گرفت؛ این تصویر لازم نیست ولی بحث زیر را موجب خواهد شد.

فرض کنید مختصات را تغییر داده باشیم. حال  $P$  به مختصات  $\bar{x}$ ،  $Q$  به مختصات

$\bar{x} + d\bar{x}$  بوده، و

$$d\bar{x}_i = \sum_j \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} dx_j$$

از این به بعد از قرارداد جمع‌بندی ( منسوب به اینشتن ) استفاده می‌کنیم؛ هر اندیس که در یک جمله دوبار بیاید جمع‌بندی می‌شود. مثلاً،

$$d\bar{x}_i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} dx_j \quad (۳۴.۱۵)$$

هر شیء  $A^i$  که دارای قانون تبدیل

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} A^j \quad (۳۵.۱۵)$$

باشد یک بردار پادوردا نامیده می‌شود. دیفرانسیلهای مختصات  $dx_i$  طبق ( ۳۴.۱۵ ) یک بردار پادوردا تشکیل می‌دهند.

قانون تبدیل ( ۳۵.۱۵ ) همان قانون  $\bar{A} = MA$  ( ۳۰.۱۵ ) برای دستگاههای دکارتی

است جز آنکه در اینجا ماتریس تبدیل  $M_{ij} = \partial \bar{x}_i / \partial x_j$  ممکن است با موضع در فضا تغییر نماید.

نوع دومی از بردار با کمیات

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (۳۶.۱۵)$$

مشخص می‌شود، که در آن  $\phi$  اسکالر است؛ یعنی، کمیتی که با تغییر مختصات تغییر نمی‌کند. به‌طور دقیقتر، مقدار  $\phi$  در هر نقطه تغییر نخواهد کرد؛ البته، بستگی تابعی  $\phi$  به مختصات از یک دستگاه مختصات به دیگری تغییر می‌کند. اما، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای حساب دیفرانسیل و انتگرال،

$$(۳۷.۱۵) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i}$$

هر شیء مانند  $B_i$  با قانون تبدیل

$$(۳۸.۱۵) \quad \bar{B}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} B_j$$

را یک بردار همورد می‌نامند. توجه کنید که اندیسهای پادوردا بالا می‌روند؛ اندیسهای هموردا پایین می‌آیند. برای تأیید کاملترین قرارداد، از حالا به بعد اندیسهای تمام مختصات را در بالا قرار می‌دهیم، زیرا دیفرانسیلهای  $dx^i$  یک بردار پادوردا تشکیل می‌دهند.

حال معادله (۳۸.۱۵) را با معادله (۳۶.۶)

$$\alpha'_i = \alpha_j \gamma_{ji}$$

مقایسه می‌کنیم. با یادآوری اینکه در اینجا  $\gamma = M^{-1}$  [ر.ک. پاراگراف بعد از (۴.۱۵)] معلوم می‌شود که قوانین تبدیل یکی هستند مشروط بر اینکه ماتریس وارون  $M^{-1}$  مساوی

$$(۳۹.۱۵) \quad (M^{-1})_{ji} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$$

باشد. ولی این درست است، زیرا

$$M_{kj}(M^{-1})_{ji} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{x}^i} = \delta_{ki}$$

و

$$(۴۰.۱۵) \quad (M^{-1})_{kj} M_{ji} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} = \delta_{ki}$$

پس نشان داده‌ایم که مؤلفه‌های  $\alpha_i$  یک تابع اسکالر خطی، که در بخش ۴.۶ به طور پادگردایان به مؤلفه‌های یک بردار تبدیل شدند، با نمادگذاری فعلی یک بردار هموردا تشکیل می‌دهند.

در بخش ۱۰.۱۵ تانسورها از رتبه بالاتر تعریف شده‌اند و همان قوانین تبدیل حاصل ضرب بردارها را دارند. مثلاً "سه قانون تبدیل تانسورهای رتبه دو به قرار زیرند:

$$\bar{T}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} T^{kl} \quad \text{تانسور پاددوردا:}$$

(۴۱.۱۵)

$$\bar{T}_j^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} T_l^k \quad \text{تانسور مخلوط:}$$

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} T_{kl} \quad \text{تانسور هموردا:}$$

می توان به همین ترتیب جلو رفت و تانسورها با هر تعداد اندیس هموردا و پادوردا ( با قوانین تبدیلیشان ) تعریف کرد .

به یاد می آوریم که تانسورهای دکارتی را می توان با مساوی گرفتن دو اندیس و جمع بندی منقبض کرد . همین کار با تانسورهای کلیتر ما میسر است مشروط بر اینکه یک اندیس بالا و دیگری پایین باشد . مثلا " ، فرض کنیم  $A^{ij}$  و  $B_k$  تانسور بوده ، و

$$C^i = A^{ij} B_j$$

در این صورت ،

$$\begin{aligned} \bar{C}^i &= \bar{A}^{ij} \bar{B}_j \\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^{kl} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} B_m \\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A^{kl} B_l = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} C^k \end{aligned}$$

(۴۲.۱۵)

در نتیجه ،  $C^i$  یک بردار پادوردا است .

دلتهای کرونگر ، مثل مختصات دکارتی ، تانسور است مشروط بر اینکه آن را به صورت  $\delta^i_j$  با یک اندیس بالا و یک اندیس پایین بنویسیم ( تحقیق این امر به دانشجو محول می شود ) . همچنین ، مثل قبل ، علامت پادمتقارن  $\epsilon_{ij\dots}$  " کاملاً " تانسور نیست . در این بخش تعداد دلخواهی بعد در نظر می گیریم ، ولی  $\epsilon_{ijk}$  توسط (۱۰.۱۵) فقط در سه بعد تعریف شده است . علامت متناوب کلی به صورت زیر تعریف می شود :

$$\epsilon_{ij\dots} = \begin{cases} +1 & \text{اگر اندیسها یک جایگشت زوج از } 12\dots n \text{ باشند ،} \\ -1 & \text{اگر اندیسها یک جایگشت فرد از } 12\dots n \text{ باشند ،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت ،} \end{cases}$$

یک ترتیب از اعداد  $12\dots n$  را جایگشت زوج ( فرد ) از  $12\dots n$  گوئیم اگر بتوان آن را از ترتیب متعارف با تعدادی زوج ( فرد ) تعویض جفتیایی از اعداد به دست آورد . هر شیء با قانون تبدیل

$$\bar{A}^{ij\dots}_{kl\dots} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \dots \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^l} \dots A^{\alpha\beta\dots}_{\gamma\delta\dots} \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^w$$

(۴۴.۱۵)

( که در آن  $|\partial x / \partial \bar{x}|$  ژاکوبی )

$$(۴۵.۱۵) \quad \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} & \dots & & \\ \dots & & & \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}_n} \end{vmatrix}$$

تبدیل است) را یک تانسور نسبی به وزن  $w$  می نامند. بر خواننده است تحقیق کند که  $\varepsilon_{ijk\dots}$  یک تانسور هموردای نسبی به وزن  $-1$ ، و  $\varepsilon^{ijk\dots}$  (که از حیث عددی مساوی  $\varepsilon_{ijk\dots}$  است) یک تانسور پادوردای نسبی به وزن  $+1$  است.

مثال. "عناصر حجم"

$$d^n x = dx^1 dx^2 \dots dx^n$$

طبق قانون زیر تبدیل می شود<sup>۱</sup>:

$$(۴۶.۱۵) \quad d^n \bar{x} = d^n x \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right| = d^n x \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^{-1}$$

در نتیجه،  $d^n x$  یک اسکالر نسبی به وزن  $-1$  می باشد.

هر تانسور نسبی به وزن  $+1$  یک چگالی تانسور نام دارد. دلیلش این است که اگر  $A$  چگالی اسکالر باشد،

$$\int d^n x A(x)$$

در پرتو (۴۶.۱۵) یک اسکالر مطلق (اسکالر به وزن صفر) می باشد.

سایر تانسورها و تانسورهای نسبی علاوه بر  $\varepsilon_{ijk\dots}$  ممکن است خواص تقارنی مشخصی داشته باشند. یک تانسور ممکن است نسبت به تعویض دو یا چند اندیس متقارن یا پادمقارن باشد و، اگر همه اندیسها هموردا یا همه پادوردا باشند، خاصیت تقارنی تحت تبدیلات مختصات ناوردا خواهد بود.

از علامت متناوب  $\varepsilon_{ijk\dots}$  می توان برای ساختن تانسورهای پادمقارن استفاده کرد.

مثلا، اگر  $A_{ij}$  یک تانسور باشد،

$$(۴۷.۱۵) \quad A_{ij} \varepsilon^{ijkl\dots} = R_i^{kl\dots}$$

۱. ر.ک. کتابی در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته، مثلا، ایوستل (A5)، بخش



یک تانسور نسبی به وزن +1 است که نسبت به اندیسهای پادوردای خود پادمتقارن می باشد .  
یا ، اگر  $R^{ij}$  یک تانسور نسبی به وزن +1 باشد ،

$$(48.15) \quad R^{ij} \varepsilon_{jkl\dots} = T^{i\dots}$$

یک تانسور مطلق است که نسبت به اندیسهای هموردای خود پادمتقارن می باشد .

مثال . اگر در سه بعد  $V_i$  یک بردار نسبی به وزن -1 ( یک شبه بردار ) باشد ،

$$(49.15) \quad V_i \varepsilon^{ijk} = T^{jk}$$

یک تانسور پادمتقارن می باشد . لذا ، تناظری یک به یک بین شبه بردارهای هموردا به وزن -1 و تانسورهای پادوردای پادمتقارن رتبه دو برقرار می شود . حاصل ضرب  $A \times B$  ( 18.15 ) را می توان به هر نوع که بخواهیم در نظر گرفت .

حال قضیه مهمی ، به نام قانون خارج قسمتی ، در نظر می گیریم . این قضیه را ابتدا با مثالی ساده توضیح می دهیم . فرض کنیم  $A_{ij}$  شیئی باشد که  $A_{ij} u^j$  به ازای هر بردار پادوردای  $u^j$  یک بردار هموردا است . پس نتیجه می شود که  $A_{ij}$  یک تانسور هموردا است .

برهان .

$$\bar{A}_{ij} \bar{u}^j = (\partial x^k / \partial \bar{x}^i) A_{kl} u^l \quad \text{طبق فرض ،}$$

حال بردار  $\bar{u}^j$  سمت چپ را تبدیل می کنیم :

$$\bar{A}_{ij} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} u^m = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_{kl} u^l$$

چون این به ازای هر  $u^m$  دلخواه درست است ، نتیجه می شود که

$$\bar{A}_{ij} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_{km}$$

برای کامل کردن برهان ، طرفین را در  $\partial x^m / \partial \bar{x}^l$  ضرب می کنیم :

$$\bar{A}_{il} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^l} A_{km}$$

این برهان را می توان به آسانی تعمیم داده و قضیه زیر را ثابت کرد : هرگاه حاصل ضرب  $AB = C$  تانسور باشد ، که در آن  $B$  یک تانسور دلخواه است ، آنگاه  $A$  یک تانسور است . حاصل ضرب می تواند شامل هر تعداد انقباض جفتهای اندیسهای بالایی و پایینی بین  $A$  و  $B$  باشد ( ولی نه داخل  $A$  یا  $B$  ؛ اسکالر بودن  $A_i^i$  تانسور بودن  $A_j^j$  را ایجاب نمی کند ) .

مثال . نیروی تعمیم یافته شیئی است با  $n$  مؤلفه به طوری که به ازای هر تغییر مکان دلخواه  $dx^i$  نقطه اثر نیرو ، حاصل ضرب

$$f_i dx^i = W \quad (۵۰.۱۵)$$

یک اسکالر باشد ( کار انجام شده توسط نیرو ) . لذا ،  $f_i$  یک بردار همورد است .

مثال . تانسور هموردای رتبه دوم  $A_{ij}$  را می توان یک ماتریس گرفت که اندیسهای  $i$  و  $j$  به ترتیب سطرها و ستونهای آن را نشان دهند . وارون این ماتریس را با  $B^{ij}$  نشان می دهیم ؛ یعنی ،

$$A_{ij} B^{jk} = \delta_i^k$$

حال نشان می دهیم  $B^{ij}$  یک تانسور پادوردای رتبه دو است ؛ که البته این خود دلیل قرار دادن اندیسها در بالا است .

ابتدا توجه می کنیم که نمی توان قانون خارج قسمتی را فوراً " بر معادله فوق اعمال کرد ؛  $A_{ij}$  و  $\delta_i^k$  در واقع تانسورند ، ولی  $A_{ij}$  یک تانسور خاص است نه یک تانسور دلخواه . در عوض ، بردار پادوردای دلخواه  $u^i$  را در نظر می گیریم . در این صورت ،  $A_{ij} u^j$  یک بردار هموردای دلخواه مانند  $v_i$  است . اما

$$B^{ij} v_j = B^{ij} A_{jk} u^k = \delta_k^i u^k = u^i$$

لذا ،  $B$  ضربدر بردار دلخواه  $v$  برداری چون  $u$  به دست می دهد . لذا ، طبق قانون خارج قسمتی ،  $B$  یک تانسور می باشد .

حال تانسور هموردای نامفرد متقارن خاصی چون  $g_{ij}$  اختیار کرده و آن را تانسور هموردای اساسی می نامیم . این تانسور لازم نیست متقارن باشد ، ولی اگر باشد ، وضع کمی مغشوش می شود . وارون  $g_{ij}$  به صورت  $g^{ij}$  نوشته می شود :

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (۵۱.۱۵)$$

با استفاده از تانسور اساسی  $g_{ij}$  ، می توان تناظر یک به یکی بین بردارهای هموردا و پادوردا برقرار کرد . به ازای هر بردار هموردای  $u_i$  ، بردار پادوردایی چون  $u^i$  با تعریف

$$u^i = g^{ij} u_j \quad (۵۲.۱۵)$$

وجود دارد . به همین نحو ،

$$u_i = g_{ij} u^j \quad (۵۳.۱۵)$$

به خاطر این تناظر ، معمولاً " $u_i$  و  $u^i$  را مؤلفه های هموردا و پادوردای بردار  $u$  می نامند . این بالا و پایین بردن اندیسها را می توان بر تانسورها نیز اعمال کرد :

$$(۵۴.۱۵) \quad A_{ij} = g_{ik} A_j^k = g_{ik} g_{jl} A^{kl}$$

با استفاده از تانسور اساسی، می‌توان یک تانسور نسبی از یک تانسور و بالعکس به دست آورد یا، به طور کلی، وزن یک تانسور نسبی را تغییر داد. برای این کار، از خاصیت تبدیل  $\det g$ ، که اینک به دست می‌آوریم، استفاده می‌کنیم. با نامیدن  $\partial x^i / \partial \bar{x}^j = \gamma_{ij}$  داریم

$$\bar{g}_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} g_{ij} = \gamma_{li} \gamma_{jm} g_{ij}$$

یا، با نماد ماتریس،

$$\bar{g} = \bar{\gamma} g \gamma$$

لذا،

$$\det \bar{g} = (\det \gamma)^2 \det g$$

$$(۵۵.۱۵) \quad (\det \bar{g})^{1/2} = \det \gamma (\det g)^{1/2} = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right| (\det g)^{1/2}$$

لذا،  $(\det g)^{1/2}$  یک اسکالر نسبی به وزن  $+1$  است، و آن را می‌توان به عنوان عاملی جهت افزایش وزن یک تانسور نسبی به اندازه  $1$  به کار برد.

در هندسه ریمانی، تانسور اساسی با بازه  $ds$  به وسیله

$$(۵۶.۱۵) \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

مربوط می‌شود که یک اسکالر است. یعنی،  $g_{ij}$  یک تانسور خاص، یعنی تانسور متریک، اختیار می‌شود.

از (۵۶.۱۵) معلوم می‌شود که، به ازای هر دستگاه مختصات دکارتی معمولی، تانسور

متریک  $g_{ij}$  مساوی  $\delta_{ij}$  است؛ لذا، لازم نیست تمایزی بین تانسورهای پادوردا و هموردا قایل شویم.

قبلاً "گفتیم [ر.ک. (۲۷.۱۵)] که مشتق هر اسکالر یک بردار هموردا است. ولی

به آسانی معلوم می‌شود که مشتگیری از یک تانسور غیر از اسکالر معمولاً "تانسور به دست نمی‌دهد. مثلاً"، بردار هموردای  $v_i$  را در نظر می‌گیریم:

$$\bar{v}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} v_j$$

$$(۵۷.۱۵) \quad \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} v_j + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial v_j}{\partial \bar{x}^l}$$

اگر فقط جمله دوم سمت راست موجود باشد،

$$\frac{\partial v_i}{\partial x^k}$$

یک تانسور است ، ولی جمله اول وضع را پیچیده می کند . این جمله ناشی از تغییر ماتریس تبدیل  $\partial x^i \partial \bar{x}^j$  با موضع در فضا است . این جمله ، و لذا مشکل ما ، در یک دستگاه مختصات دکارتی وجود ندارد .

حال ، با استفاده از تانسور اساسی  $g_{ij}$  ، طرز فایق آمدن بر مشکل را نشان می دهیم .

مشق تانسور اساسی

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} g_{kl}$$

را در نظر می گیریم :

$$(58.15) \quad \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^m} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} g_{kl} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^m} g_{kl} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n}$$

حال ، با جایگشت اندیسها در معادله اخیر ، دو معادله دیگر می نویسیم ( فقط اندیسها را می نویسیم )

$$\begin{aligned} m_j &= \begin{matrix} k & l & kl \\ m & j & i \end{matrix} + \begin{matrix} k & l & kl \\ m & i & j \end{matrix} + \begin{matrix} k & l & n & kl \\ m & i & j & n \end{matrix} \\ j_m &= \begin{matrix} k & l & kl \\ j & i & m \end{matrix} + \begin{matrix} k & l & kl \\ j & m & i \end{matrix} + \begin{matrix} k & l & n & kl \\ j & m & i & n \end{matrix} \end{aligned}$$

اگر معادله اخیر را از مجموع دو معادله اول کم کرده و علامت کریستوفل<sup>۱</sup> نوع اول

$$(59.15) \quad [ij, k] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

را تعریف نماییم ، پس از کار با اندیسها خواهیم داشت

$$(60.15) \quad \overline{[ij, k]} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} [lm, n] + g_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

این معادله را می توان نسبت به مشتق دوم حل کرد ؛ نتیجه خواهد بود

$$(61.15) \quad \frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^p} \overline{[ij, p]} - \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \left\{ \begin{matrix} s \\ lm \end{matrix} \right\}$$

که در آن علامت کریستوفل نوع دوم

$$(62.15) \quad \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = g^{il} [jk, l]$$

معرفی شده است .

حال در وضعی هستیم که مشتق هموردای یک بردار هموردا را تعریف کنیم . باگذاردن

عبارت (۶۱.۱۵) برای مشتق دوم  $x$  نسبت به  $\bar{x}$  در معادله (۵۷.۱۵) پیشین ما برای  $\partial \bar{v}_i / \partial \bar{x}^k$ ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial v_j}{\partial x^l} + v_j \left[ \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^l} \left( \frac{l}{ik} \right) - \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k} \left( \frac{j}{lm} \right) \right]$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$(۶۳.۱۵) \quad \frac{\partial v_i}{\partial \bar{x}^k} - \left( \frac{l}{ik} \right) \bar{v}_l = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \left[ \frac{\partial v_j}{\partial x^l} - \left( \frac{m}{jl} \right) v_m \right]$$

لذا،

$$(۶۴.۱۵) \quad v_{i;j} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \left( \frac{k}{ij} \right) v_k$$

یک تانسور هموردای رتبه دو، به نام مشتق هموردای  $v_i$ ، می‌باشد. مشتق هموردای یک بردار پادوردا مساوی است با

$$(۶۵.۱۵) \quad v^i_{;j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \left( \frac{i}{jk} \right) v^k$$

اثبات این امر را به عنوان تمرین می‌گذاریم (مسئله ۷.۱۵).

مشتق هموردای یک حاصل ضرب از مشتقگیری تک تک عوامل، درست مثل حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی، به طور هموردا تشکیل می‌شود. مشتق هموردای یک تانسور از تشابه با عبارات فوق برای مشتق هموردای بردارها و گرفتن یک اندیس در هر لحظه تشکیل می‌شود:

$$(۶۶.۱۵) \quad A^{ij\dots\alpha}_{kl\dots\alpha} = \frac{\partial A^{ij\dots\alpha}_{kl\dots\alpha}}{\partial x^\alpha} + \left( \frac{i}{\alpha\beta} \right) A^{\beta j\dots\alpha}_{kl\dots\alpha} + \left( \frac{j}{\alpha\beta} \right) A^{i\beta\dots\alpha}_{kl\dots\alpha} + \dots - \left( \frac{\beta}{\alpha k} \right) A^{ij\dots\alpha}_{\beta l\dots\alpha} - \left( \frac{\beta}{\alpha l} \right) A^{ij\dots\alpha}_{k\beta\dots\alpha} - \dots$$

مشتق هموردای یک تانسور نسبی به صورت زیر تعریف می‌شود.

فرض کنیم  $A^{ij\dots\alpha}_{kl\dots\alpha}$  یک تانسور نسبی به وزن  $w$  باشد. تانسور مطلق

$$B^{ij\dots\alpha}_{kl\dots\alpha} = A^{ij\dots\alpha}_{kl\dots\alpha} (\det g)^{-w/2}$$

را تعریف می‌کنیم. مشتق هموردای  $B^{ij\dots\alpha}_{kl\dots\alpha}$  تانسور  $B^{ij\dots\alpha}_{kl\dots\alpha}$  طبق (۶۶.۱۵) تشکیل و سپس مشتق هموردای  $A^{ij\dots\alpha}_{kl\dots\alpha}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{ij\dots\alpha}_{kl\dots\alpha} = B^{ij\dots\alpha}_{kl\dots\alpha} (\det g)^{w/2}$$

به‌طورکلی، می‌بینیم که مشتق هموردای یک تانسور به خاطر وجود علائم کریستوفل

پیچیده است. لیکن، مشتقات هموردایی وجود دارند که به این طریق پیچیده نیستند. بعضی از این مشتقات ساده ذیلاً ذکر شده‌اند.

۱. مشتق هموردای یک اسکالر همان مشتق جزئی معمولی معرفی شده در (۳۶.۱۵) است،

$$\phi_{;k} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

۲. اگر  $A_i$  یک بردار هموردا باشد، عمل "curl  $A$ " با تعریف

$$(68.15) \quad (\text{curl } A)_{ij} = A_{i;j} - A_{j;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

یک تانسور هموردای پادمتقارن به دست می‌دهد. جملات علامت کریستوفل از  $A_{j;i}$  و  $A_{i;j}$  به خاطر تقارن این علامین حذف می‌شوند. تانسور بودن  $\partial A_j / \partial x^i - \partial A_i / \partial x^j$  نیز مستقیماً از معادله (۵۷.۱۵) دیده می‌شود، زیرا جملات مشتق دوم حذف خواهند شد.

۳. اگر  $R^i$  یک بردار نسبی به وزن  $+1$  باشد، مشتق هموردای منقبض شد، که یک اسکالر نسبی به وزن  $+1$  است، شکل ساده‌ء

$$(69.15) \quad R^i_{;i} = \frac{\partial R^i}{\partial x^i} (= \text{"div } R\text{"})$$

را خواهد داشت.

۴. مشتق هموردای تانسور اساسی بخصوص ساده است؛ یعنی، صفر است:

$$(70.15) \quad g_{ij;k} = 0$$

تحقیق خواص ۳ و ۴ به دانشجو محول می‌شود.

حال از یک بردار هموردا دوبار به طور هموردا مشتق می‌گیریم:

$$u_{i;jk} = (u_{i;j})_{;k}$$

این مساوی  $u_{i;kj}$  نیست؛ در واقع،

$$(71.15) \quad u_{i;jk} - u_{i;kj} = R^l_{ijk} u_l$$

که در آن

$$(72.15) \quad R^l_{ijk} = \left\{ \begin{matrix} l \\ mj \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} l \\ mk \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}$$

از قانون خارج‌قسمتی نتیجه می‌شود که  $R^l_{ijk}$  باید تانسور باشد. این تانسور را تانسور خمیدگی ریمان می‌نامند.

حال مسئلهء یافتن منحنی  $x_i = x_i(t)$  را در نظر می‌گیریم که انتگرال

$$(73.15) \quad \begin{aligned} I &= \int \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \\ &= \int \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \end{aligned}$$

را مینیمم سازد. اگر، مثل (۵۶.۱۵)،  $\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$  یک عنصر بازه در نظر گرفته شود، انتگرال ما "بازه کل"، یا امتداد یا فاصله یا هر چیزی را که مایلید بنامید، را در امتداد مسیر اندازه می‌گیرد. در این حالت، نام ژئودزیک برازنده این منحنی است. ولی ما فقط به مسئله تحلیلی مینیمم‌سازی  $I$ ، بدون توجه به تعبیر هندسی یا فیزیکی آن، می‌پردازیم.

لازم است معادلات اوایلر - لاگرانژ انتگرالده

$$F\left(x^i, \frac{dx^i}{dt}\right) = \sqrt{g_{ij}(x) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}$$

را بنویسیم. [قس. معادلات (۱۷.۱۲)]. به آسانی می‌توان نوشت:

(۷۴.۱۵)

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \frac{s''}{s'} \frac{dx^i}{dt}$$

که در آن  $s$  "طول قوس" تعریف شده با

(۷۵.۱۵)

$$s' = \frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}$$

است.

اگر  $s$  پارامتر باشد،  $s' = 1, s'' = 0$ ، و معادله دیفرانسیل (۷۴.۱۵) برای ژئودزیکها

خواهد شد

(۷۶.۱۵)

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

علایم کریستوفل حالا هم در مشتگیری هموردا و هم در معادله دیفرانسیل ژئودزیک ظاهر شده‌اند. از این برمی‌آید که ممکن است رابطه‌ای بین دو مفهوم، مشتگیری هموردا و ژئودزیکها، موجود باشد. در واقع، ارتباطات زیادی وجود دارند. مثلاً، "مشتق همورداى بردار " مماس "

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

را در امتداد یک ژئودزیک در نظر می‌گیریم. مشتق هموردا در امتداد ژئودزیک عبارت است

از

$$u^i_{;j} \frac{dx^j}{ds} = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

(۷۷.۱۵)

$$0 = [ \text{بنا بر (۷۶.۱۵)} ]$$

لذا، هر ژئودزیک یک منحنی با مماس "ثابت" است؛ یعنی، بردار مماس با مشتق همورداى صفر در امتداد منحنی. به طور هندسی، این به آن معنی است که ژئودزیکها

"خطوطی مستقیم" در فضا می‌باشند.

### مراجع

جنبه‌های ریاضی هندسه<sup>۱</sup> دیفرانسیل و آنالیز تانسوری در کتب بسیاری، از جمله لاس<sup>۱</sup> (L5)؛ اسپین<sup>۲</sup> (S10)؛ و دربورن<sup>۳</sup> (W2)؛ لوی چپویتا (L7)؛ و آیزنهارت<sup>۴</sup> (E2)، بحث شده‌اند. کتب مذکور را (تقریباً) به ترتیب سادگی ریاضی و دقت لیست کرده‌ایم. بحثهای شامل پلیادیکها در بلوک (B4) و درو (D7) آمده‌اند.

مهمترین کاربردهای ابزار ریاضی هندسه<sup>۵</sup> دیفرانسیل در فیزیک در نظریه<sup>۶</sup> عمومی نسبیت آمده‌اند؛ ر.ک. آندرسون<sup>۵</sup> (A4)؛ اینشتن (E1)؛ یا مولر<sup>۶</sup> (M8). بخصوص، دومین کتاب را، هم به عنوان توصیف فشرده‌ای از آنالیز تانسوری و هم کاربردهای اساسی آن در نظریه‌های خاص و عام نسبیت، توصیه می‌کنیم.

توصیف زاویه<sup>۷</sup> دورانها و تبدیلات متعامد در سه بعد را می‌توان در چهارچوب کلاسیک گلداستاین (G4) و در رابطه با نظریه<sup>۸</sup> کوانتمی اندازه<sup>۹</sup> حرکت زاویه‌ای در رز (R3) یافت.

### مسائل

۱۰۱۵. یک خط در راستایی رسم شده است که با زوایای قطبی معمولی  $\phi$  و  $\theta$  تعریف می‌شود، و دستگاه مختصاتمان را حول این خط به عنوان محور دوران به اندازه<sup>۱۰</sup> زاویه<sup>۱۱</sup>  $\omega$  دوران می‌دهیم. ماتریس تبدیل مربوط به این دوران را بیابید.

۲:۱۵. یک دستگاه مختصات به یک چهاروجهی منتظم طوری وصل شده است که

(۱) مبدا<sup>۱۲</sup> در مرکز چهاروجهی است؛

(۲) رأس ۱ بر محور  $z$  مثبت قرار دارد؛

(۳) رأس ۲ در صفحه<sup>۱۳</sup>  $xy$  واقع است؛

(۴) رأس ۳ دارای  $y > 0$  می‌باشد.

حال چهاروجهی (و دستگاه مختصات همراه آن) را دوران می‌دهیم؛ در نتیجه، رأس ۱ به رأس ۳ می‌رود؛

1- Lass

2- Spain

3- Weather burn

4- Eisenhart

5- Anderson

6- Møller



رأس 3 به رأس 4 می‌رود؛

رأس 4 به رأس 1 می‌رود؛

رأس 2 بجا می‌ماند.

ماتریس تبدیل مربوط به این دوران را بیابید.

۳.۱۵. (آ) نشان دهید که  $\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$

(ب)  $\sum_{ij} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl}$  را حساب کنید.

(پ)  $\sum_{ijk} \sum_{lmn} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} M_{il} M_{jm} M_{kn}$  را، که در آن  $M$  ماتریس دلخواهی است، حساب کنید.

۴.۱۵. خمیدگی و پیچش مکعب پیچ خورده<sup>۶</sup>

$$x = at \quad y = bt^2 \quad z = ct^3 \quad (a, b, c \text{ ثابت})$$

را به صورت توابعی از پارامتر  $t$  بیابید.

۵.۱۵. یک ذره<sup>۶</sup> باردار در فضا تحت اثر میدانی مغناطیسی که با موضع ولی نه با زمان

تغییر می‌کند در حرکت است. نشان دهید که جهت میدان مغناطیسی در هر نقطه از

مسیر در صفحه<sup>۶</sup> معین شده به وسیله<sup>۶</sup> مماس و قائم دوم بر مسیر در آن نقطه قرارداد.

۶.۱۵. در منحنی خاص  $\phi(s)$  (طول قوس  $= s$ ) گاهی مناسب است نقطه<sup>۶</sup> دلخواه  $x$  در

فضا، که لزوماً "روی منحنی  $\phi(s)$  نیست، را با سه پارامتر  $s$ ،  $\xi$ ، و  $\eta$  نشان دهیم.

از نقطه<sup>۶</sup>  $x$  عمودی بر منحنی فرود آورده، و  $s$  را طول قوس در امتداد منحنی تا

نقطه<sup>۶</sup> تقاطع بگیرید. قائم اصلی  $\beta$  و قائم دوم  $\gamma$  در این نقطه را در نظر گرفته، و

$\xi$  را با  $\eta$  و  $\beta$  تعریف کنید.

بدین ترتیب،  $s$ ،  $\xi$ ، و  $\eta$  برای هر نقطه در فضا تعریف می‌شوند.  $\nabla s$ ،  $\nabla \xi$ ، و  $\nabla \eta$

را محاسبه نمایید.

۷.۱۵. تعریف (۶۵.۱۵) را توجیه نمایید.

۸.۱۵. تانسور هموردای متقارن دلخواه  $A_{ij}$  را در نظر بگیرید. می‌توان به کمک  $A_{ij}$  یک

عمل مشتقگیری هموردا تعریف کرد. نشان دهید که مشتق هموردای  $A_{ij}$  که به این

صورت تعریف شده است صفر می‌شود. [ این اثباتی از (۷۵.۱۵) به دست می‌دهد. ]

۹.۱۵. علامت کریستوفل  $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$  ناشی از تانسور هموردای متقارن دلخواه  $A_{lm}$  را در نظر

بگیرید. نشان دهید که

$$\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ ik \end{smallmatrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{\det A}$$

۱۰.۱۵. سه بردار  $A^i$ ،  $A_i$ ، و  $A(i)$  را در نظر بگیرید، آخری از مؤلفه‌های "معمولی" یا

"فیزیکی" A تشکیل شده است که در آنالیز برداری معمولی با آن آشنا شده ایم. سه بردار در دستگاه مختصات دکارتی (xyz) از حیث اندازه مساویند. تغییر مختصات  $(xyz) \rightarrow (r\theta\phi)$  به طریق معمولی صورت می گیرد.

(آ) نشان دهید که

$$\begin{aligned} A(r) &= \sqrt{A_r A^r} \\ A(\theta) &= \sqrt{A_\theta A^\theta} \\ A(\phi) &= \sqrt{A_\phi A^\phi} \end{aligned}$$

(ب) بردار  $\mathbf{v}$  و تانسور  $T$  در مختصات دکارتی با رابطه زیر به هم مربوط شده اند:

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x^j} T_{ji}, \quad \text{یعنی: } \mathbf{v} = \nabla \cdot T$$

یعنی مؤلفه‌های "معمولی"  $\mathbf{v}$  در مختصات قطبی، را برحسب مؤلفه‌های قطبی "معمولی"  $T$  و مشتقاتش نسبت به  $\phi, \theta, r$  بیان دارید.

۱۱.۱۵ مختصات  $\alpha, \beta, \gamma$  به صورت زیر تعریف شده اند:

$$x = \beta\gamma \quad y = \alpha\gamma \quad z = \alpha\beta$$

که در آن  $x, y, z$  مختصات دکارتی معمول می باشند.  $\nabla^2 u$  را برحسب مشتقات  $u$  نسبت به  $\alpha, \beta, \gamma$  بیابید.

۱۲.۱۵ خطی از یک نقطه تا مبدأ مختصات دکارتی رسم شده است. صفحه مار بر این نقطه و عمود بر این خط سه محور مختصات را قطع کرده، سه عدد  $(a, b, c)$  با نقاط تقاطع معین می شوند. این سه عدد را می توان به نقطه منتسب کرد، که با دوران محورهای مختصات ضمن ثابت ماندن نقطه تغییر خواهند کرد.

(آ) آیا  $(a, b, c)$  مؤلفه‌های یک تانسور دکارتی اند؟

(ب) در صورت بودن، مطلب را شرح دهید.

در صورت نبودن، از  $(a, b, c)$  سه کمیت بسازید که تانسور باشند.

۱۳.۱۵ موضع یک نقطه در نیمصفحه بالایی با فواصل  $x_1, x_2$  نقطه تا دو نقطه مرجع ثابت بر محور  $x$  که به فاصله یک از هم قرار دارند معین می شود. تانسورهای متریک

$g_{ij}, g^{ij}$  را برای این مختصات بیابید.

۱۴.۱۵ برای مشتق هموردای یک چگالی اسکالر فرمول به دست آورید.

## آشنایی با گروهها و نمایشهای گروه

نظریه گروهها نظامی است ریاضی که کاربردهایی متنوع و توانا در فیزیک دارد. در این فصل نه به شرح کامل این نظریه ریاضی، که خود مبحث زیبایی است می پردازیم، و نه به سودمندی نظریه گروهها در فیزیک بلکه به اختصار تعاریف و خواص گروهها و نمایشهای ماتریسی آنها، همراه با چند کاربرد توضیحی، اکتفا می کنیم. در بخش آخر به جنبه‌هایی از چند گروه پیوسته که اهمیت فیزیکی دارند، بدون ذکر انگیزه فیزیکی برای مطالعه آنها اشاره می کنیم؛ بررسی کامل این گروهها ما را خیلی از مطلب دور می سازد.

### ۱.۱۶ آشنایی؛ چند تعریف

گروه  $G$  مجموعه‌ای است از عناصر  $g_1, g_2, \dots$  و قاعده‌ای برای ترکیب (" ضرب ") هر دو تایی آنها برای تشکیل " حاصل ضرب " تحت چهار شرط زیر.

۱. حاصل ضرب  $g_i g_j$  هر دو عنصر گروه باید عنصری از گروه باشد.

۲. ضرب گروه شرکتپذیر است:  $(g_i g_j) g_k = g_i (g_j g_k)$ .

۳. یک عنصر گروه منحصر به فرد مانند  $g_1 = I$ ، به نام همانی، هست به طوری که به ازای

هر  $g_i$  در  $G$ ،

$$I g_i = g_i I = g_i$$

۴. هر عنصر وارون منحصر به فرد دارد؛ یعنی، به ازای هر  $g_i$  یک عنصر گروه منحصر به

فرد مانند  $g_i^{-1}$  هست به طوری که

$$g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = I$$

هر گروه با تعدادی متناهی عنصر یک گروه متناهی نام دارد؛ تعداد عناصر یک گروه

متناهی مرتبه گروه نامیده می شود. در ابتدا خود را به گروه های متناهی محدود می کنیم؛ در دو بخش آخر این فصل به چند گروه نامتناهی به اختصار خواهیم پرداخت. ضرب گروه لازم نیست تعویض پذیر باشد؛ یعنی، لازم نیست  $g_i g_j$  مساوی  $g_j g_i$  باشد. اگر به ازای هر جفت عنصر در گروه  $G$  باشد،  $g_i g_j = g_j g_i$ ، گوئیم گروه تعویض پذیر یا آبلای است. اگر  $S$  زیرمجموعه ای از گروه  $G$  باشد،  $Sg_i$  یعنی مجموعه عناصر حاصل از ضرب هر عنصر  $S$  از راست در  $g_i$ . نماد مشابهی برای ضرب از چپ به کار خواهد رفت. توجه کنید که تعداد عناصر در  $Sg_i$  مساوی تعداد عناصر در  $S$  است. زیرا هرگاه

$$ag_i = bg_i \quad (a \text{ و } b \text{ در } S)$$

آنگاه با ضرب از راست در  $g_i^{-1}$  داریم  $a = b$ . بخصوص،  $Gg = G$ ؛ اگر تمام گروه را از راست (یا چپ) در عنصری ضرب کنیم، حاصل تغییر ترتیبی از گروه می باشد.

یک گروه را اغلب به یک جبر توسعه می دهند. هر جبر مجموعه ای است از عناصر که یک فضای برداری خطی (فصل ۶) تشکیل می دهند که در آن، علاوه بر جمع، عمل ضرب طوری تعریف شده است که از اصول موضوع گروه تبعیت می کند جز آنکه صفر جبر وارون ندارد. مثلاً، اگر گروه  $G$  از عناصر  $g_i$  ( $i = 1, \dots, h$ ) تشکیل شده باشد، ترکیبات خطی  $\sum_{i=1}^h c_i g_i$  از عناصر گروه با ضرایب حقیقی  $c_i$  یک جبر تشکیل می دهند. حاصل ضرب به نحو روشنی تعریف می شود:

$$\left(\sum_{i=1}^h c_i g_i\right)\left(\sum_{j=1}^h d_j g_j\right) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h c_i d_j g_i g_j$$

چون  $G$  گروه است، هر حاصل ضرب  $g_i g_j$  عنصری مانند  $g_k$  از  $G$  بوده؛ و لذا، عنصری از جبر می باشد.

این آشنایی را با چند مثال از گروه های متناهی پایان می دهیم.

۱. گروه تغییر ترتیب  $n$  شیء. این گروه، که به گروه متقارن بر  $n$  شیء معروف است، با  $S_n$  نموده می شود. یک عنصر نوعی  $S_n$  را می توان به صورت [24153] نوشت که به معنی زیر است:

شیء دوم را اول می گذاریم، شیء چهارم را دوم، و همین طور تا آخر. دو عنصر این طور در هم ضرب می شوند که ابتدا در راست و سپس در چپ تغییر ترتیب می دهیم. مثلاً،

$$\begin{aligned} [24153][51234]abcde &= [24153]eabcd \\ &= acedb \\ &= [13542]abcde \end{aligned}$$

بنابراین،

$$(1 \cdot 16) \quad [24153][51234] = [13542]$$

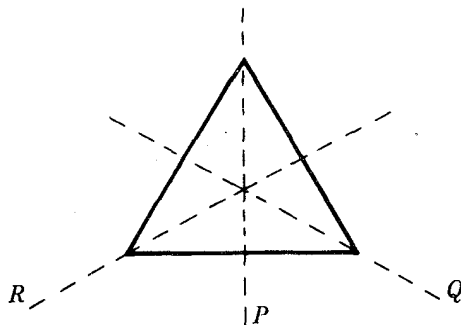
مرتبه  $S_n$  مساوی  $n!$  است. یک مفهوم بسیار مهم در گروه متقارن  $S_n$  تجزیه یک جایگشت به دورهاست. مثلاً، جایگشت  $[31254]$  شیء دوم را اول، شیء سوم را دوم، و شیء اول را سوم قرار می‌دهد؛ این یک دور تشکیل می‌دهد که می‌توان آن را به صورت  $(123)$  نوشت. علاوه بر این، تعویض اشیاء چهارم و پنجم دور دوتایی  $(45)$  را تشکیل می‌دهد؛ در نتیجه، جایگشت ما با نماد دور به صورت  $(123)(45)$  نوشته می‌شود. به عنوان مثالی دیگر، جایگشت  $[13542]$  با نماد دور به صورت  $(1)(253)(4)$  ظاهر می‌گردد. واضح است که ترتیب نوشتن دورها مهم نیست، و اعداد داخل دورها می‌توانند به طور

دوری بچرخند

۲. گروه اعداد صحیح  $0, 1, 2, 3$ . "ضرب" گروه جمع (به هنگ 4) است. مثلاً

$$1 \times 2 = 3 \quad 2 \times 3 = 1$$

۳. گروه تبدیلات یک مثلث متساوی‌الاضلاع به روی خودش (گروه تقارن مثلث متساوی‌الاضلاع). این گروه شامل شش عنصر است (ر.ک. شکل ۱۰۱۶):



شکل ۱۰۱۶ یک مثلث متساوی‌الاضلاع که با گروه تبدیلات مثال ۳ به خودش تبدیل شده است.

$I$  همانی؛ مثلث تنها گذارده شده است.

$A$  مثلث به اندازه  $120^\circ$  در جهت عقربه‌های ساعت چرخیده است

$B$  مثلث به اندازه  $240^\circ$  در جهت عقربه‌های ساعت چرخیده است

$C$  مثلث نسبت به خط  $p$  انعکاس یافته است

$D$  مثلث نسبت به خط  $Q$  انعکاس یافته است

$E$  مثلث نسبت به خط  $R$  انعکاس یافته است

این گروه همان  $S_3$  است با نامهای متفاوتی برای عناصر گروه. گوییم این گروه با  $S_3$  یگريخت

می‌باشد. این گروه‌ها جدول ضرب، یا جدول گروه، یکسانی دارند.

### ۲۰۱۶ زیرگروه‌ها و رده‌ها

یک زیرمجموعه گروه  $G$  که خود گروه باشد زیرگروه  $G$  نام دارد. فرض کنیم  $S$  زیر گروه  $G$  بوده و مجموعه‌های  $Sg_1, Sg_2, \dots, Sg_n$  را در نظر می‌گیریم که از ضرب متوالی  $S$  از راست در هر عنصر گروه به دست می‌آید. این مجموعه‌ها را هم مجموعه‌های راست  $S$  می‌نامند.<sup>۱</sup> حال ملاحظه می‌کنیم دو هم مجموعه  $Sg_1$  و  $Sg_2$  یا یکسانند یا عنصر مشترک ندارند. فرض کنیم عنصر مشترکی داشته باشند؛ یعنی،

$$s_1g_1 = s_2g_2 = g \quad (S \text{ در } s_2 \text{ و } s_1)$$

در این صورت،  $g_2 = s_2^{-1}s_1g_1 = Sg_1$  و  $g_2 = s_2^{-1}s_1g_1$ ، زیرا  $s_2^{-1}s_1$  در  $S$  است و اگر  $s$  در  $S$  باشد،  $Ss = S$  (به خاطر گروه بودن  $S$ ). همچنین، اگر  $Sg_1 = Sg_2$ ،  $g_2g_1^{-1} = s_2^{-1}s_1$ ، که در  $S$  است. در واقع، این پاراگراف را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد. دوهم مجموعه  $Sg_1$  و  $Sg_2$  مساویند یا عنصر مشترک ندارند، و این بسته به آن است که  $g_2g_1^{-1}$  عضوی از زیر گروه  $S$  باشد یا نباشد.

اگر به دو نکته دیگر زیر توجه کنیم:

۱. هر عنصر گروه  $g$  دست‌کم در یکی از هم مجموعه‌های  $S$  ظاهر می‌شود، و

۲. هر هم مجموعه دارای  $h'$  عنصر است، که  $h'$  مرتبه  $S$  می‌باشد،

خواهیم دید که تمام گروه  $G$  به هم مجموعه‌هایی از  $S$  تجزیه می‌شود که هر یک  $h'$  عنصر دارند. لذا، اگر  $h$  مرتبه  $G$  باشد،  $h$  باید مضربی از  $h'$  باشد. مرتبه هر زیرگروه عاملی از مرتبه تمام گروه است.

اگر  $A$  عنصری از یک گروه متناهی باشد، دنباله عناصر (به نام دوره تناوب  $A$ )

$$(2016) \quad A, A^2, \dots, A^p = I$$

یک زیرگروه آبدلی از مرتبه  $p$  تشکیل می‌دهد.  $p$  کوچکترین عدد صحیحی است که  $A^p = I$ . این عدد را مرتبه  $A$  می‌نامند. توجه کنید که تمام عناصر در این دنباله متمایزند، چرا که اگر به ازای  $A^l = A^k$ ،  $l < k < p$ ، از ضرب در  $(A^l)^{-1}$  خواهیم داشت  $A^{k-l} = I$  که با فرض کوچکترین عدد صحیح بودن  $p$  با خاصیت

$$A^p = I$$

---

۱. بعضی از مؤلفان، مثلاً "، ویگنر (W6)، خود  $S$  را از مجموعه هم مجموعه‌ها مستثنی می‌کنند.

تعارض دارد.

مثال. عنصر  $A$  از گروه تقارن مثلث صفحه ۴۳۳ را در نظر می‌گیریم. دوره تناوب  $A$  شامل عناصر زیر است:

$$(۳.۱۶) \quad A \quad A^2 = B \quad A^3 = I$$

در نتیجه،  $A$  از مرتبه ۳ می‌باشد. عناصر  $C$ ،  $D$ ، و  $E$  هر یک از مرتبه ۲ می‌باشد.

راه جالب دیگری برای تجزیه یک گروه به زیرمجموعه‌ها وجود دارد. دو عنصر  $a$  و  $b$  از  $G$  را هم‌ارز گوییم اگر یک عنصر گروه مانند  $g$  موجود باشد به طوری که

$$(۴.۱۶) \quad g^{-1}ag = b$$

حال گروه را به زیرمجموعه‌ها تقسیم می‌کنیم به طوری که تمام عناصر در هر زیرمجموعه با هم هم‌ارز باشند. این زیرمجموعه‌ها را رده می‌نامند.

اگر عناصر گروه را تبدیل بگیریم، معادله (۴.۱۶) تعبیر "فیزیکی" ساده‌ای دارد. تبدیل  $b$  ابتدا با انجام تبدیل  $g$ ، سپس  $a$ ، و بالاخره "وارون کردن"  $g$  به دست می‌آید. به عبارت دیگر،  $b$  همان  $a$  است ولی در یک دستگاه مختصات مختلف، یا با نگاهی متفاوت، یا به صورتی دیگر. لذا، واژه "هم‌ارز" نامناسب نیست.

مثال. توجه به معنی هم‌ارزی در گروه تقارن  $S_n$  آموزنده است. مثلاً، فرض کنیم  $n = 6$ ، تعریف می‌کنیم  $a = [4 6 1 3 5 2]$  و  $g = [3 5 1 4 6 2]$ ، و  $b = g^{-1}ag$  را که عنصری هم‌ارز با  $a$  است حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} b &= [3 6 1 4 2 5][4 6 1 3 5 2][3 5 1 4 6 2] \\ &= [3 6 1 4 2 5][4 2 3 1 6 5] \\ &= [3 5 4 1 2 6] \end{aligned}$$

رابطه، یا "تشابه"، بین  $a$  و  $b$  را می‌توان با توصیف مشروح جایگشت‌های مربوطه روشن ساخت. پس از جایگشت  $a$ ،

شیء اول شیء سوم می‌شود

شیء دوم شیء ششم می‌شود

شیء سوم شیء چهارم می‌شود

شیء چهارم شیء اول می‌شود

شیء پنجم شیء پنجم می‌شود

شیء ششم شیء دوم می شود  
یا، به اختصار،  $a$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(5.16) \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

به همین نحو، پس از جایگشت  $b$ ،  
شیء اول شیء چهارم می شود  
شیء دوم شیء پنجم می شود  
شیء سوم شیء اول می شود  
شیء چهارم شیء سوم می شود  
شیء پنجم شیء دوم می شود  
شیء ششم شیء ششم می شود  
یا، به اختصار،

$$(6.16) \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

حال می توان دید که اگر در شکل (۵.۱۶) برای  $a$  هر عدد را با دیگری طبق قاعده ای تعویض کنیم که از  $g$  یا  $g^{-1}$  خوانده شوند، یعنی

$$(7.16) \quad 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 4, 5 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 2$$

نتیجه خواهد بود

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

که از مقایسه با (۶.۱۶) معلوم می شود که مساوی  $b$  است. به عبارت دیگر، جایگشتهای  $a$  و  $b$  را می توان یک جایگشت گرفت که اشیاء با نمادهای مختلف را جابجا می کنند.

با استفاده از نماد دور توصیف شده بعداز معادله (۱۰.۱۶)، می توان هم ارزی فوق را تجسم بیشتری بخشید. با این نماد، جایگشت  $a$  را می توان به صورت (134)(26)(5) و  $b$  را به صورت (314)(52)(6) نوشت. مجدداً، می بینیم که جانشانیهای (۷.۱۶) القا شده به وسیله  $g$  یکی را به دیگری تبدیل می کند. به علاوه، چون اندیسگذاری مجدد اشیاء به این ترتیب اعداد داخل پرانتزها را که نشانگر دورها هستند تغییر داده ولی نمی توانند تعداد دورها یا طول آنها را تغییر دهند، دو عنصر  $S_6$  (یا، در واقع، هر  $S_n$ ) هم ارزند اگر و



فقط اگر دقیقاً " ساختار دوری یکسانی داشته باشند. مثلاً"، سه عنصر زیر از  $S_5$  را در نظر می‌گیریم:

$$(۸۰۱۶) \quad \begin{aligned} g_1 &= [5\ 4\ 1\ 2\ 3] \\ g_2 &= [2\ 1\ 5\ 3\ 4] \\ g_3 &= [3\ 5\ 1\ 4\ 2] \end{aligned}$$

اگر اینها را با نماد دور بنویسیم، یعنی

$$\begin{aligned} g_1 &= (135)(24) \\ g_2 &= (12)(345) \\ g_3 &= (13)(25)(4) \end{aligned}$$

واضح است که  $g_1$  و  $g_2$  هم‌ارزند، زیرا هر یک شامل یک دور به طول سه و یک دور به طول دو می‌باشند، ولی  $g_3$  که شامل دو دور به طول دو و یک دور به طول یک است با  $g_1$  یا  $g_2$  هم‌ارز نیست. ضمناً، از بحث فوق طرز نوشتن عنصر  $g$  از  $S_5$  که هم‌ارزی را روشن سازد واضح می‌باشد:

$$g^{-1}g_1g = g_2$$

این کار را به عنوان تمرین می‌گذاریم (مسئله ۲۰۱۶).

توجه کنید که همانی  $I$  در یک ردهء تنهاست. همچنین، دو عنصر با ترتیبهای مختلف نمی‌توانند در یک رده باشند، زیرا  $a^h = I$  ایجاب می‌کند که  $b^h = (g^{-1}ag)^h = I$ . اگر زیرگروه  $S$  به ازای هر عنصر  $g$  در گروه  $G$  دارای خاصیت

$$g^{-1}Sg = S$$

باشد، گوئیم  $S$  یک زیرگروه ناورد، یا نرمال، است. به عبارت دیگر، یک زیرگروه ناورد از رده‌ها تشکیل شده است؛ اگر بخشی از یک رده را شامل شود، همهء رده را در بر خواهد داشت.

### ۳۰۱۶ نمایشهای گروه

نمایش گروه  $G$  مجموعه‌ای از ماتریسهای نامنفرد مربعی  $M_1, M_2, \dots$  است (برای هر عنصر گروه  $g$  یک ماتریس  $M$ ) به طوری که

$$M_i M_j = M_k \quad \text{که } g_i g_j = g_k \text{ ایجاب می‌کند}$$

به عبارت دیگر، مجموعه‌ای است از ماتریسها که مثل عناصر گروه در هم ضرب شده، و لذا، یک گروه نیز تشکیل می‌دهند. اگر ماتریسها  $n \times n$  باشند، نمایش  $n$  بعدی خواهیم داشت.

هر گروه یک نمایش یک بعدی بدیهی دارد که در آن هر عنصر گروه با عدد 1 نموده شده است .

اگر ماتریسهای نظیر عناصر مختلف  $G$  خود متفاوت باشند ، دو گروه یگريخت اند و گوییم نمایش باوفا است . اگر یکی از ماتریسهای  $M$  نمایش بیش از یک عنصر گروه  $G$  باشد ، گوییم  $G$  با گروه ماتریسی همريخت و نمایش بیوفا است .

حال نمایش خاص  $D$  را در نظر می گیریم . ماتریس مربوط به عنصر گروه  $g$  را به صورت  $D(g)$  می نویسیم . می توان نمایش دیگر  $D'$  را با تعریف

$$D'(g) = S^{-1}D(g)S$$

به طور بدیهی تشکیل داد ، که در آن  $S$  یک ماتریس نامفرد است .  $D(g)$  و  $D'(g)$  با یک تبدیل هم ارزی به هم مربوطند . این نمایشها را هم ارز گوییم ، و در عمل نمایشهای یکسانی ملحوظ می شوند .

دو نمایش  $D^{(1)}(g)$  و  $D^{(2)}(g)$  را در نظر می گیریم . می توان نمایش جدید

$$(9.16) \quad D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}$$

را تشکیل داد . اگر  $D^{(1)}$  و  $D^{(2)}$  به بعدهای  $n_1$  و  $n_2$  باشند ، بعد  $D^{(1)} \oplus D^{(2)}$  بوضوح  $n_1 + n_2$  است .

گوییم نمایش  $D$  تحویل پذیر<sup>۱</sup> بوده و به دو نمایش کوچکتر  $D^{(1)}$  و  $D^{(2)}$  تجزیه می شود .

نمایش  $D(g)$  ، که به شکل (9.16) نبوده و نتوان آن را با یک تبدیل هم ارزی به این شکل درآورد ، یک نمایش تحویل ناپذیر نام دارد . نمایشهای تحویل ناپذیر یک گروه " ابزارهای اصلی " بررسی نمایشهای گروهند ، زیرا هر نمایش دلخواه را می توان به ترکیبی از نمایشهای تحویل ناپذیر تجزیه کرد . مثلاً " ، اگر بتوان  $D(g)$  را با یک تبدیل تشابه به شکل زیر درآورد :

$$\begin{pmatrix} D^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{(3)} \end{pmatrix}$$

۱ . به بیان دقیق ، یک نمایش را تحویل پذیر گوییم اگر هم ارز نمایشی به شکل

$$\begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & Y(g) \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}$$

باشد ، و گاملاً " تحویل پذیر یا تجزیه پذیر گوییم اگر با (9.16) هم ارز باشد ، برای

نمایش یگه ای تمایزی بین این دو مشخصه نیست .

اغلب می توان نوشت

$$D(g) = 2D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) \oplus D^{(3)}(g)$$

حال چند قضیه مهم در باب نمایشهای گروه را بدون برهان ذکر می کنیم . این قضایا برای گروههای متناهی و گروههای نامتناهی مطرح شده در این فصل برقرارند . برهانها را می توان در کتب ریاضی<sup>۱</sup> که نظریه نمایشهای گروه را بحث کرده اند یافت .  
یک هر نمایش با یک نمایش یکانی ، یعنی نمایشی که در آن هر عنصر گروه با یک ماتریس یکانی نموده شده است ، هم ارز است . لذا ، بدون از کف دادن کلیت ، ذیلا " فقط نمایشهای یکانی را در نظر می گیریم . ر.ک . مسئله ۲۲.۱۶ .

دو . یک ماتریس که با هر ماتریس با نمایش تحویل ناپذیر تعویض شود مضرری از ماتریس یکه است . یعنی ، اگر  $D(g)$  تحویل ناپذیر بوده و به ازای هر  $g$  در گروه

$$D(g)A = AD(g)$$

$A$  مضرری از ماتریس یکه خواهد بود .

سه ( لم شور ) . فرض کنیم  $D^{(1)}$  و  $D^{(2)}$  دو نمایش تحویل ناپذیر به ابعاد  $n_1$  و  $n_2$  بوده ، و ماتریسی چون  $A$  موجود باشد<sup>۲</sup> به طوری که به ازای هر  $g$  در گروه  $G$  ،

$$AD^{(1)}(g) = D^{(2)}(g)A$$

در این صورت ،  $A = 0$  یا  $n_1 = n_2$  ،  $\det A \neq 0$  ، و دو نمایش  $D^{(1)}$  و  $D^{(2)}$  با یکدیگر هم ارز می باشند .

چهار ( قضیه تعامد ) . فرض کنیم گروه  $G$  شامل  $h$  عنصر بوده ، و نمایشهای ( یکانی ) تحویل ناپذیر غیر هم ارز آن  $D^{(1)}$  ( به بعد  $n_1$  ) ،  $D^{(2)}$  ( به بعد  $n_2$  ) ، و غیره باشند .  $D^{(i)}(g)$  یک ماتریس است ؛ یک عنصر ماتریسی نوعی را با  $D_{\alpha\beta}^{(i)}(g)$  نشان می دهیم . در این صورت ،

$$(10.16) \quad \sum_g [D_{\alpha\beta}^{(i)}(g)]^* D_{\gamma\delta}^{(j)}(g) = \frac{h}{n_i} \delta_{ij} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}$$

مجموع روی همه  $g$  ها در  $G$  گرفته می شود .

قضیه تعامد نتیجه ای بسیار توانا و سودمند است . عنصر ماتریسی  $\alpha\beta$  در نمایش تحویل ناپذیر  $i$  م را در نظر می گیریم . وقتی  $g$  تمام  $h$  عنصر گروه  $G$  را بگیرد ،  $D_{\alpha\beta}^{(i)}(g)$  ،  $h$  مقدار را خواهد گرفت ؛ این را می توان برداری با  $h$  مؤلفه در نظر گرفت . قضیه تعامد ( ۱۰.۱۶ ) به ما می گوید که این بردار " ضرب نقطه ای " در خودش مساوی  $h/n_i$  است ، حال

۱ . مثلا " ، ر.ک . هامرمنش (H3) ، فصل ۳ ، یا ویگنر (W6) ، فصل ۹ .

۲ . توجه کنید که  $A$  باید  $n_1$  سطر و  $n_2$  ستون داشته باشد .

آنکه بر هر بردار مشابه در نمایش دیگر، یا حتی در جای دیگر از همان نمایش، متعامد می‌باشد.

از این بردارها چندتا وجود دارند؟ نمایش  $D^{(i)}$  به بعد  $n_i$  از ماتریسهایی با  $n_i$  سطر و  $n_i$  ستون تشکیل شده‌است؛ و لذا، شامل  $n_i^2$  بردار از این نوع می‌باشد. بنابراین، تعداد کل بردارها خواهد بود

$$(11.16) \quad n_1^2 + n_2^2 + \dots = \sum n_i^2$$

که در آن مجموع روی تمام نمایشهای تحویل‌ناپذیر (غیر هم‌ارز) گرفته می‌شود. ولی واضح است که بیش از  $h$  بردار مستقل (فرض کنید فقط متعامد باشند) با  $h$  مؤلفه وجود ندارند. بنابراین،

$$(12.16) \quad \sum n_i^2 \leq h$$

در واقع، می‌توان نشان داد این یک تساوی است.

یک مثال ساده که می‌تواند برای "امتحان" روابط فوق به کار رود  $S_3$ ، یعنی گروه متقارن بر 3 شیء، است. این گروه سه نمایش تحویل‌ناپذیر دارد که در جدول ۱۰۱۶ نموده شده‌اند.

جدول ۱۰۱۶ نمایشهای تحویل‌ناپذیر گروه  $S_3$

$g$	$D^{(1)}$ $n_i = 1$	$D^{(2)}$ 1	$D^{(3)}$ 2
[1 2 3]	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
[2 3 1]	1	1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
[3 1 2]	1	1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
[3 2 1]	1	-1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
[2 1 3]	1	-1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$
[1 3 2]	1	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

#### ۴.۱۶ مشخصه‌ها

توصیف نمایشها با اراءه صریح (مثل جدول ۱۰۱۶) ماتریسهایی که عناصر مختلف گروه را نشان می‌دهند نه فقط پیرزحمت است بلکه به نوعی نامناسب نیز می‌باشد. می‌توان از تبدیل تشابه

$$(13.16) \quad D(g) \rightarrow D'(g) = SD(g)S^{-1}$$

استفاده کرد که به مجموعهء کاملاً متفاوتی از ماتریسها منجر می شود، ولی دو نمایش هم ارزند؛ یعنی، برای اغلب مقاصد فیزیکی یکی می باشد. لذا، ترجیح می دهیم نمایش خود را با چیزی یکی کنیم که تحت تبدیلات تشابه ناوردا باشد.

خواهیم دید که اثرهای ماتریسهای نمایش ما مجموعهء بسیار مناسبی از اعداد برای این منظور است. مسلماً اینها تحت تبدیلات تشابه بلا تغییرند، لیکن از آنها می توان برای تمایز نمایشهای مختلف استفاده کرد.

لذا، مشخصهء  $\chi^{(i)}(g)$  را اثر ماتریس  $D^{(i)}(g)$  تعریف می کنیم:

$$(14.16) \quad \chi^{(i)}(g) = \sum_{\alpha} D_{\alpha\alpha}^{(i)}(g)$$

می توان از ماتریسهای جدول ۱۰۱۶ برای سه نمایش تحویل ناپذیر گروه  $S_3$  استفاده کرده، جدول مشخصهء ۲۰۱۶ را تشکیل داد.

جدول ۲۰۱۶ جدول مشخصه برای  $S_3$

$g$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
[1 2 3]	1	1	2
[2 3 1]	1	1	-1
[3 1 2]	1	1	-1
[3 2 1]	1	-1	0
[2 1 3]	1	-1	0
[1 3 2]	1	-1	0

در این جدول به چند ویژگی برمی خوریم. مشخصهء عنصر همانی (که در این گروه خاص [1 2 3] است) بعد نمایش خاص را به ما می دهد، زیرا اثر ماتریس یکهء  $n \times n$  مساوی  $n$  است. لذا، از سطر اول جدول مشخصهء ما می توان ابعاد نمایشهای تحویل ناپذیر مختلف را خواند.

ویژگی مهم دیگر جدول ۲۰۱۶ این است که بعضی از مجموعه های عناصر گروه مشخصه های یکسانی دارند. یعنی، [2 3 1] و [3 1 2] در هر نمایش مشخصهء یکسان دارند؛ و همین طور [3 2 1]، [2 1 3]، و [1 3 2]. نتیجهء کلی این است که دو عنصر گروه متعلق به یک رده در هر نمایش مشخصهء یکسانی دارند.

برهان. فرض کنیم  $g_1$  و  $g_2$  متعلق به یک رده باشند. در این صورت،

$$g_1 = hg_2h^{-1}$$

که در آن  $h$  عنصری از گروه  $G$  است. لذا، در هر نمایش داریم

$$D(g_1) = D(h)D(g_2)D(h^{-1})$$

$$\begin{aligned} \chi(g_1) &= \text{Tr } D(g_1) = \text{Tr } [D(h)D(g_2)D(h^{-1})] \\ &= \text{Tr } [D(h^{-1})D(h)D(g_2)] \\ &= \text{Tr } [D(I)D(g_2)] \\ &= \text{Tr } D(g_2) \\ &= \chi(g_2) \end{aligned}$$

(۱۵۰۱۶)

که در آن  $I$  عنصر یکه گروه  $G$  است.

لذا، مشخصه‌ها توابع رده‌ای هستند؛ به ازای یک نمایش داده شده، یک مشخصه برای هر رده وجود دارد، و جدول مشخصه برای  $S_3$  را می‌توان مثل جدول ۳۰۱۶ نوشت.  $S_3$  را به سه رده تقسیم کرده‌ایم:

$$(16.016) \quad \begin{array}{ccc} [1\ 2\ 3] & \underbrace{[2\ 3\ 1][3\ 1\ 2]} & \underbrace{[3\ 2\ 1][2\ 1\ 3][1\ 3\ 2]} \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$

جدول ۳۰۱۶ جدول مشخصه برای  $S_3$

رده	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
$C_1$	1	1	2
$C_2$	1	-1	-1
$C_3$	1	-1	0

یک رابطه تعامدی مهم برای مشخصه‌های گروه فوراً "از رابطه قبلاً" بیان شده

(۱۵۰۱۶) برای عناصر ماتریسی نمایشهای تحویل‌ناپذیر به دست می‌آید. هرگاه  $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \dots$  مشخصه‌های نمایشهای تحویل‌ناپذیر،  $C_1, C_2, \dots, C_s$  رده‌های مختلف، و  $p_k$  تعداد عناصر گروه در رده  $k$ ام  $C_k$  باشد، آنگاه

$$(17.016) \quad \sum_{k=1}^s p_k \chi^{(i)}(C_k) \chi^{(j)}(C_k) = h \delta_{ij}$$

$h$  طبق معمول تعداد عناصر گروه است.

اگر مشخصه‌ها در هر نمایش تحویل‌ناپذیر را برداری  $s$  بعدی بگیریم (برای هر رده یک مؤلفه)، متعامد بودن همه آنها یعنی بیش از  $s$  نمایش تحویل‌ناپذیر مختلف وجود ندارند. در واقع (می‌توان نشان داد)، همیشه  $s$  نمایش وجود دارند؛ لذا، جدول مشخصه ما مربعی است؛ تعداد نمایشهای تحویل‌ناپذیر مساوی تعداد رده‌ها می‌باشد.

یک طریق فشرده برای بیان رابطه تعامدی مشخصه‌ها این است که بگوییم ماتریسی که عنصر آن  $(i, j)$

$$(18.016) \quad \sqrt{p_j/h} \chi^{(i)}(C_j)$$

باشد یک ماتریس یکانی است.

حال نمایش تحویل پذیر  $D$  را در نظر می گیریم. یعنی، نمایشی که پس از تغییر مناسب مختصات (تبدیل تشابه) به صورت زیر باشد:

$$(19.16) \quad D(g) = \begin{pmatrix} D^{(a)}(g) & & & 0 \\ & D^{(b)}(g) & & \\ & & D^{(c)}(g) & \\ 0 & & & \dots \end{pmatrix}$$

یعنی،

$$(20.16) \quad D(g) = D^{(a)}(g) \oplus D^{(b)}(g) \oplus \dots$$

که در آن  $D^{(a)}$ ،  $D^{(b)}$ ، ... نمایشهای تحویل ناپذیر مختلف می باشند. اثر  $D$  بوضوح مجموع اثرات زیر ماتریسهای مختلف  $D$  است؛ یعنی،

$$(21.16) \quad \chi(C) = \chi^{(a)}(C) + \chi^{(b)}(C) + \dots$$

فرض کنیم  $D$  شامل  $c_1$  برابر نمایش تحویل ناپذیر اول  $D^{(1)}$ ،  $c_2$  برابر دومی، و غیره باشد. می توان نوشت

$$(22.16) \quad D = c_1 D^{(1)} \oplus c_2 D^{(2)} \oplus \dots$$

مسئله " برای مشخصه  $D$  داریم

$$(23.16) \quad \chi(C_k) = \sum_i c_i \chi^{(i)}(C_k)$$

با ضرب طرفین در  $p_k \chi^{(j)}(C_k)$  و جمع بندی روی  $k$ ، به خاطر رابطه تعامدی مشخصه های گروه داریم

$$c_i = \frac{1}{h} \sum_k p_k \chi^{(i)}(C_k) * \chi(C_k)$$

$$(24.16) \quad = \overline{\chi^{(i)}(g) * \chi(g)}$$

که در آن بار متوسط روی تمام گروه را نشان می دهد.

نتیجه اخیر سودمندی مشخصه ها را نشان می دهد. برای تجزیه نمایش  $D$  به نمایشهای

تحویل ناپذیر کافی است  $\chi$ ، یعنی اثرهای  $D(g)$ ، را حساب کنیم. در این صورت، فرمول (24.16) تعداد دفعاتی را که هر نمایش تحویل ناپذیر  $D^{(i)}$  مشمول  $D$  است بازگو می کند.

به عنوان مثال، نمایشی از  $S_3$  را تجزیه می کنیم. نمایش  $D$  توسط نمایش تغییر ترتیبها

(که  $S_3$  را می سازند) با ماتریسها تشکیل شده است. مثلاً، [1 2 3]، یعنی عنصرهمانی،

با ماتریس  $3 \times 3$  یکه

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نموده می شود. عنصر گروه [2 1 3]، که اشیاء اول و دوم را باهم عوض می کند، با

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \vdots \end{pmatrix}$$

نموده می‌شود، زیرا

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$$

و غیره. از دانشجو می‌خواهیم هر شش ماتریس را بنویسد؛ ما در اینجا فقط جدول مشخصه نمایش جدید خود را می‌آوریم:

$$(25.16) \quad \begin{array}{cccc} & \text{رده} & C_1 & C_2 & C_3 \\ \chi & & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

حال می‌توان ضرایب  $c_i$  در تجزیه‌مان

$$(26.16) \quad D = c_1 D^{(1)} \oplus c_2 D^{(2)} \oplus c_3 D^{(3)}$$

را با اعمال فرمول کلی (24.16) و استفاده از جدول مشخصه  $S_3$  (جدول 3.16) به دست آورد:

$$c_1 = \overline{\chi^{(1)*}(g)\chi(g)} = \frac{1}{6}[1 \times 1 \times 3 + 2 \times 1 \times 0 + 3 \times 1 \times 1] = 1$$

$$c_2 = \overline{\chi^{(2)*}(g)\chi(g)} = \frac{1}{6}[1 \times 1 \times 3 + 2 \times 1 \times 0 + 3 \times (-1) \times 1] = 0$$

$$c_3 = \overline{\chi^{(3)*}(g)\chi(g)} = \frac{1}{6}[1 \times 2 \times 3 + 2 \times (-1) \times 0 + 3 \times 0 \times 1] = 1$$

لذا،

$$(27.16) \quad D = D^{(1)} \oplus D^{(3)}$$

به عنوان مثالی دیگر، هر گروه از مرتبه  $h$  یک نمایش  $h \times h$ ، به نام نمایش منظم، دارد که با توجه به تغییر ترتیبهای عناصر گروه حاصل از ضرب چپ در هر عنصر گروه به دست می‌آید. مجدداً، با استفاده از  $S_3$  به عنوان نمونه، عناصر گروه را برای راحتی به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{array}{lll} g_1 = [1 \ 2 \ 3] & g_2 = [2 \ 3 \ 1] & g_3 = [3 \ 1 \ 2] \\ g_4 = [3 \ 2 \ 1] & g_5 = [2 \ 1 \ 3] & g_6 = [1 \ 3 \ 2] \end{array}$$

البته،  $g_1$  با ماتریس یک  $6 \times 6$  نموده می‌شود. با ضرب در  $g_2$  از چپ، داریم

$$(28.16) \quad \begin{array}{lll} g_1 \rightarrow g_2 & g_2 \rightarrow g_3 & g_3 \rightarrow g_1 \\ g_4 \rightarrow g_5 & g_5 \rightarrow g_6 & g_6 \rightarrow g_4 \end{array}$$

حال هر عنصر گروه را یک بردار ستونی می‌گیریم:



$$(29.16) \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ و غیره}$$

در این صورت، ماتریسی که تغییر ترتیب (28.16) را می‌دهد عبارت است از

$$(30.16) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و این ماتریسی است که  $g_2$  را در نمایش منتظم  $S_3$  نشان می‌دهد. تعریف صورتی‌ترین نمایش عبارت است از

$$(31.16) \quad D_{ij}(g_k) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } g_k g_j = g_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مشخصه  $\chi(g)$  برای این نمایش چیست؟ واضح است که  $\chi(g_1) = 6$ ، حال آنکه سایر  $\chi(g)$  ها

صفرند. جدول مشخصه عبارت است از

رده	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$\chi$	6	0	0

(32.16)

اگر  $D = c_1 D^{(1)} \oplus c_2 D^{(2)} \oplus c_3 D^{(3)}$  داریم

$$c_1 = \frac{1}{6}[1 \times 6] = 1 \quad c_2 = \frac{1}{6}[1 \times 6] = 1 \quad c_3 = \frac{1}{6}[2 \times 6] = 2$$

در این صورت،

$$(33.16) \quad D = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus 2D^{(3)}$$

بررسی نمایش منتظم یک گروه دلخواه به سهولت این مثال ساده است. از دو نکته<sup>۶</sup>

مقداماتی استفاده می‌کنیم:

۱. مشخصه  $\chi$  نمایش منتظم یک گروه دلخواه از مرتبه  $h$  عبارت است از

$$\chi(g) = \begin{cases} h & \text{اگر } g = I \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۲. مشخصه  $\chi^{(i)}(I)$  برای نمایش تحویل‌ناپذیر  $D^{(i)}$  مساوی  $n_i$ ، یعنی بعد  $D^{(i)}$ ، است.

نتیجه می‌گیریم که نمایش منتظم هر نمایش تحویل‌ناپذیر  $D^{(i)}$  را  $n_i$  بار، یعنی بعد

$D^{(i)}$ ، دربردارد. چون بعد نمایش منتظم  $h$  است، این امر حکم قبلی ما را که

$$\sum_i n_i^2 = h \quad (34.16)$$

به ثبوت می‌رساند.

این بخش را با مثالی از ساختن جدول مشخصه یک گروه به پایان می‌بریم.  $A_4$ ، یعنی گروه جایگشت‌های زوج از 4 شیء که اغلب گروه متناوب بر 4 شیء نام دارد، را در نظر می‌گیریم. با شماره‌گذاری  $12 = 4! \times \frac{1}{2}$  عنصر شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} [1\ 2\ 3\ 4] &= I & [1\ 3\ 4\ 2] &= A & [1\ 4\ 2\ 3] &= B & [3\ 2\ 4\ 1] &= C \\ (35.16) \quad [4\ 2\ 1\ 3] &= D & [2\ 4\ 3\ 1] &= E & [4\ 1\ 3\ 2] &= F & [2\ 3\ 1\ 4] &= G \\ [3\ 1\ 2\ 4] &= H & [2\ 1\ 4\ 3] &= J & [3\ 4\ 1\ 2] &= K & [4\ 3\ 2\ 1] &= L \end{aligned}$$

حال گروهمان را به رده‌هایی از عناصر هم‌ارز تجزیه می‌کنیم. این کار سراسر است بوده و 4 رده به ما می‌دهد:

$$\begin{aligned} C_1 &= I & C_2 &= A, D, E, H \\ (36.16) \quad C_3 &= B, C, F, G & C_4 &= J, K, L \end{aligned}$$

چون تعداد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر مساوی تعداد رده‌هاست، چهار نمایش تحویل‌ناپذیر

$$D^{(1)} \quad D^{(2)} \quad D^{(3)} \quad D^{(4)}$$

و چهار مشخصه

$$\chi^{(1)} \quad \chi^{(2)} \quad \chi^{(3)} \quad \chi^{(4)}$$

وجود دارند.

ابعاد  $n_i$  ی این نمایشها را می‌توان از شرط زیر به دست آورد:

$$\sum_{i=1}^4 n_i^2 = h = 12$$

تنها یک مجموعه از چهارمربع مجموع 12 دارد؛ یعنی،

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12 \quad (37.16)$$

در نتیجه،

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1 \quad n_4 = 3$$

و اینها چهار مشخصه برای رده  $C_1$  (عناصر همانی) می‌باشند. همچنین، می‌دانیم که یک نمایش (آن را  $D^{(1)}$  می‌نامیم) بدیهی است؛ به‌ازای هر  $C_i$ ،  $\chi^{(1)} = 1$ . لذا، شروع جدول مشخصه  $4.16$  را خواهیم داشت.

نتیجه‌ای دیگر که به یافتن مشخصه‌ها کمک می‌کند به فرار زیر است. فرض کنیم  $g$  یک عنصر گروه از مرتبه  $m$  [ر.ک. (2.16)] و  $D(g)$  ماتریس نمایش  $g$  در یک نمایش  $n$  بعدی باشد. در این صورت،

جدول ۴.۱۶

رده	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$
$C_1$	1	1	1	3
$C_2$	1			
$C_3$	1			
$C_4$	1			

$$g^m = I$$

ایجاب می کند که

$$(38.16) \quad [D(g)]^m = 1$$

اگر  $D(g)$  را با یک تبدیل تشابه قطری کنیم، معادله اخیر به صورت زیر درمی آید:

$$(39.16) \quad \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

در نتیجه،  $\lambda_k$  ها، یعنی ویژه مقادیر  $D(g)$ ، همه ریشه های  $m$  م واحد می باشند. پس مشخصه مساوی است با

$$(40.16) \quad \chi(g) = \text{Tr } D(g) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$$

یا مجموع  $n$  ریشه  $m$  م واحد است.

حال این نتیجه را بر نمایشهای یک بعدی  $D^{(2)}$  و  $D^{(3)}$  گروه  $A_4$  اعمال می کنیم. رتبه عناصر در رده های  $C_1, C_2, C_3, C_4$  به ترتیب عبارتند از 1, 3, 3, 2. لذا،  $\chi(C_4)$  فقط می تواند مساوی  $\pm 1$  باشد، ولی  $\chi(C_2)$  و  $\chi(C_3)$  می تواند مقادیر 1،  $\omega$ ، یا  $\omega^2$  را داشته باشد، که در آن  $\omega$  ریشه سوم واحد است،  $\omega = e^{2\pi i/3}$ . این نکات همراه با شرط (17.16) تعامد با  $\chi^{(1)}$ ،  $\chi^{(2)}$ ، و  $\chi^{(3)}$  را مشخص می کنند. به طور مشخص، اگر  $\chi^{(2)}(C_2) = \omega$ ،  $\chi^{(2)}(C_3) = \omega^2$  باید باشد تا قسمت موهومی در رابطه تعامدی را حذف کند. انتخاب  $\chi^{(2)}(C_2) = \chi^{(2)}(C_3) = 1$  نمی تواند در تعامد صدق کند؛ لذا، باید داشته باشیم  $\chi^{(2)}(C_2) = \omega$  و  $\chi^{(2)}(C_3) = \omega^2$  (یا بالعکس)، و به علاوه  $\chi^{(2)}(C_4) = 1$ . نتایج مشابه برای  $\chi^{(3)}$  برقرارند؛ لذا، جدول مشخصه ما جدول ۵.۱۶ خواهد بود.

آخرین ستون را می توان با استفاده از تعامد بین آن و سه ستون اول به آسانی پر کرد. هرگاه ستون آخر را  $x, y, z, 3$  بگیریم، آنگاه [توجه کنید که  $\omega^* = \omega^2$  و  $(\omega^2)^* = \omega$ ]

$$(41.16) \quad \begin{aligned} 3 + 4x + 4y + 3z &= 0 \\ 3 + 4\omega x + 4\omega^2 y + 3z &= 0 \\ 3 + 4\omega^2 x + 4\omega y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

جدول ۵.۱۶

رده	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$
$C_1$	1	1	1	3
$C_2$	1	$\omega$	$\omega^2$	
$C_3$	1	$\omega^2$	$\omega$	
$C_4$	1	1	1	

حل این معادلات سر راست است، و جدول مشخصه ما "مآلا" به شکل ۶.۱۶ در می آید. روش کاملاً متفاوتی برای به دست آوردن همین جدول در مارگنو و مورفی (M2)، فصل پانزده آمده است.

جدول ۶.۱۶

رده	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$
$C_1$	1	1	1	3
$C_2$	1	$\omega$	$\omega^2$	0
$C_3$	1	$\omega^2$	$\omega$	0
$C_4$	1	1	1	-1

### ۵.۱۶ کاربردهای فیزیکی

ما فقط سودمندی روشهای نظریه گروهها را در چند وضع توضیح می دهیم؛ بسیاری از کاربردهای دیگر را می شد با وارد کردن فضا و زمان ذکر کرد<sup>۱</sup>.

مسئله ویژه مقداری مربوط به یک عملگر دیفرانسیل جزئی در دو یا سه بعد را در نظر می گیریم. در فصل ۸ دیدیم که واگنتی مکرر رخ می دهد؛ چند مد یا ویژه تابع ممکن است متعلق به یک ویژه مقدار باشند. این ممکن است گاهی اتفاقی باشد، ولی اغلب مربوط به نوعی تقارن در دستگاه مورد نظر خواهد بود.

مثلاً، مدهای دوم و سوم یک سر طبل مربع شکل واگن هستند؛ هر ترکیب خطی



مدی با همان فرکانس است. این بوضوح اتفاق نیست، بلکه بیشتر از این امر ناشی می شود که سر طبل در دوران 90° کاملاً "بلا تغییر" است.

۱. مثلاً، ر.ک. تین خام (T1)؛ هامریش (H3)؛ یا ویگنر (W6).

برای دقیقتر ساختن این تقارن، گروه تقارن دستگاه فیزیکی، یعنی مجموعه تمام تبدیلات دستگاه که آن را از لحاظ دینامیکی بلا تغییر می‌گذارد، را در نظر می‌گیریم. البته، یک طرف طبل را رنگ قرمز و بالای آن را رنگ سبز زده‌ایم؛ در نتیجه، هیچ دورانی آن را بلا تغییر نمی‌گذارد؛ لیکن دوران بر دینامیک هیچ اثری نخواهد داشت.

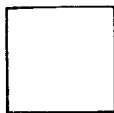
حال یک ویژه تابع خاص در نظر می‌گیریم. اگر عنصری از گروه تقارن را بر این ویژه تابع اعمال کنیم؛ باید ویژه تابع دیگری با همان ویژه مقدار به دست آوریم. با آنکه این را می‌توان به طور ریاضی ثابت کرد، ولی باید مطلب روشنی باشد. اگر اعمال یک عنصر گروه بر یک ویژه تابع ویژه دیگر با همان ویژه مقدار ندهد، دستگاه ما تحت این تبدیل ناوردا نیست، و تبدیلی در گروه تقارن جا می‌دهیم که متعلق به آن نیست.

همه این ویژه توابع واگن را می‌توان فضای برداری گرفت که در آن عناصر گروه تبدیلات خطی در این فضا می‌باشند. با اختیار دستگاه مختصات، می‌توان این تبدیلات را با ماتریسها نمایش داد؛ و در واقع، نمایشی از گروه تقارن خواهیم داشت. لذا، می‌توان از نظریه نمایشهای گروه که قبلاً در این فصل آمد استفاده نمود. لازم است به دو نکته اشاره کنیم.

۱. باید از توابع موج متعامد نرمالی شده برای بردارهای پایه‌ای استفاده کنیم؛ در نتیجه، نمایشهای ما یکانی می‌شوند؛ در غیر این صورت، اغلب نتایج این فصل را نمی‌توان به کار برد.

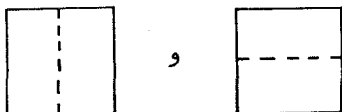
۲. اگر مجموعه متعامد یکه از بردارهای پایه‌ای به چند صورت قابل انتخاب باشد، مهم نیست که کدام یک را انتخاب کنیم، زیرا نمایشهای مختلف فقط در یک تبدیل هم‌ارزی متفاوتند.

حال این ایده‌ها را بر پایین‌ترین ویژه توابع یک سر طبل مربع شکل اعمال می‌کنیم. پایین‌ترین ویژه تابع



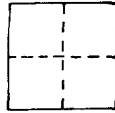
که دارای گرهِ نیست، به وسیله تمام عناصر گروه تقارن بلا تغییر می‌ماند. لذا، این مد نمایشی را تولید می‌کند که هر عنصر گروه را با عدد 1 نمایش می‌دهد.

دو مد بعدی



با عناصر گروه مخلوط شده‌اند، و یک نمایش دو بعدی تولید می‌کنند. (این گروه تقارن فقط یک نمایش دو بعدی دارد.)

مد بعدی



ناواگن است؛ در نتیجه، یک نمایش یک بعدی تولید می‌کند، ولی این نمایش در چند جا داشته و نمایش بدیهی تولید شده به وسیله پایین‌ترین مدنیست. از دانشجو می‌خواهیم این نمایش و جدول کامل مشخصه را بنویسد؛ نتیجه در جدول ۷.۱۶ داده شده است.

به عنوان مثالی دیگر، معادله شرودینگر را برای  $n$  ذره یکسان، مانند الکترونها در یک اتم  $n$  الکترونی، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  یک ویژه تابع با انرژی  $E$  باشد. در این صورت،  $\psi(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ ، که در آن  $i_1, \dots, i_n$  جایگشت دلخواهی از  $1, \dots, n$  است، نیز باید یک ویژه تابع با همان انرژی  $E$  باشد، زیرا ما فقط ذراتی را باهم عوض کرده‌ایم که از لحاظ دینامیکی هم‌ارزند. لذا، مجموعه تمام ویژه توابع با انرژی  $E$  یک نمایش از گروه تقارن بر  $n$  شیء را تولید می‌کند. اگر ذرات الکترون باشند، اصل طرد پاولی به ما می‌گوید که فقط یک نمایش مجاز است، یک نمایش کاملاً پادمتقارن که در آن هر تعویض دو الکترون علامت تابع  $\psi$  را تغییر می‌دهد.

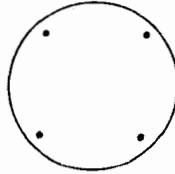
چگونه می‌توان این نکات صوری را در یک مسئله خاص به کار برد؟ ساده‌ترین مسئله‌ای که می‌توان مطرح کرد تجزیه واگنیها به وسیله اختلال است که تقارن دستگاه فیزیکی را پایین آورد. یک دستگاه با تقارن بالا را در نظر می‌گیریم که به مسئله ویژه مقداری منجر

$$L^0 \psi = \lambda \psi \quad (43.16)$$

می‌شود. مجموعه ویژه توابع  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  متعلق به ویژه مقدار  $\lambda$  یک نمایش از گروه تقارن  $S$  از  $L^0$  را تولید می‌کند.

می‌خواهیم طرز تجزیه این مجموعه واگن را وقتی اختلال  $Q$  با گروه تقارن  $S'$  که زیر گروهی از  $S$  است اعمال می‌شود بررسی کنیم. روند باید از بحث قبلی ما روشن باشد. مجموعه  $\psi_1, \dots, \psi_n$  نمایشی از  $S'$  را تولید می‌کند. اگر این نمایش را به نمایشهای تحویل‌ناپذیر تجزیه کنیم، بردارهای پایه‌ای هر نمایش تحویل‌ناپذیر هنوز تحت عملگر  $L^0 + Q$  واگن هستند، ولی ویژه توابع متعلق به نمایشهای تحویل‌ناپذیر مختلف لازم نیست ویژه مقدار مختل شده یکسان داشته باشند.

به جای ادامه این کلیتها، به مثال خاصی می‌پردازیم. یک سر طبل مدور در نظر می‌گیریم که با چهار جرم واقع در رئوس یک مربع متحدالمرکز



مختل شده است. در غیاب اختلال، مدهای سر طبل یا ناواگن اند یا واگن دوتایه اند (ر. ک. ص ۲۴۱). نظریه گروه چیزی راجع به مدهای ناواگن نمی گوید، ولی یک سوءال جالب این است که آیا اختلال واگنی یک جفت مد واگن را می شکند یا نه. بحث را با گروه تقارن و جدول مشخصه آن آغاز می کنیم. گروه تقارن گروه تقارن یک مربع بوده و شامل هشت عنصر می باشد:

$$I \quad R \quad R^2 \quad R^3 \quad PR \quad PR^2 \quad PR^3$$

(همانی)  $(90^\circ \text{ به اندازه})$  (انعکاس نسبت به خط مار بر مرکز  $P$ )

رده ها به آسانی به دست می آیند:

$$\begin{aligned} C_1: I & & C_4: P, PR^2 \\ C_2: R, R^3 & & C_5: PR, PR^3 \\ C_3: R^2 & & \end{aligned}$$

(۴۴.۱۶)

حال به روشهایی مانند روشهای به کار رفته در اوایل این فصل می توان جدول مشخصه گروهمان را به آسانی نوشت (جدول ۷.۱۶).

جدول ۷.۱۶

رده	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$	$\chi^{(5)}$
$C_1$	1	1	1	1	2
$C_2$	1	1	-1	-1	0
$C_3$	1	1	1	1	-2
$C_4$	1	-1	-1	1	0
$C_5$	1	-1	1	-1	0

حال یک جفت ویژه تابع مختل نشده واگن را در نظر می گیریم:

$$\psi_1 \sim \sin m\theta \quad \psi_2 \sim \cos m\theta$$

(۴۵.۱۶)

باید بگوییم که نمایش دو بعدی  $D$  گروه تقارن تولید شده به وسیله  $\psi_1$  و  $\psi_2$  تحویل پذیر است یا تحویل ناپذیر.

برای شروع، داریم  $I\psi_1 = \psi_1, I\psi_2 = \psi_2$ ؛ در نتیجه،  $I$  با ماتریس

$$(۴۶.۱۶) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نموده می‌شود و  $\chi(C_1) = 2$ .

اما عمل  $R$  بر  $\psi_1$  یا  $\psi_2$  هم ارز کاهش  $\theta$  به اندازه  $\pi/2$  است. لذا،

$$(۴۷.۱۶) \quad R\psi_1 \sim \sin m\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos \frac{m\pi}{2}\right)\psi_1 - \left(\sin \frac{m\pi}{2}\right)\psi_2$$

$$R\psi_2 \sim \cos m\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin \frac{m\pi}{2}\right)\psi_1 + \left(\cos \frac{m\pi}{2}\right)\psi_2$$

لذا،  $R$  با ماتریس

$$(۴۸.۱۶) \quad \begin{pmatrix} \cos \frac{m\pi}{2} & \sin \frac{m\pi}{2} \\ -\sin \frac{m\pi}{2} & \cos \frac{m\pi}{2} \end{pmatrix}$$

نموده شده، و اثرش عبارت است از  $\chi(C_2) = 2 \cos(m\pi/2)$ . اگر به همین نحو ادامه دهیم، درمی‌یابیم که نمایش  $D$  ما دارای مشخصه زیر می‌باشد:

$$(۴۹.۱۶) \quad \begin{aligned} \chi(C_1) &= 2 & \chi(C_2) &= 2 \cos \frac{m\pi}{2} \\ \chi(C_3) &= 2 \cos m\pi & \chi(C_4) &= \chi(C_5) = 0 \end{aligned}$$

حال می‌توان  $D$  را به نمایشهای تحویل‌ناپذیر تجزیه کرد؛ نتیجه خواهد بود

$$(۵۰.۱۶) \quad \begin{aligned} D &= 4 \left[ 1 + 2 \cos \frac{m\pi}{2} + \cos m\pi \right] [D^{(1)} + D^{(2)}] \\ &+ 4 \left[ 1 - 2 \cos \frac{m\pi}{2} + \cos m\pi \right] [D^{(3)} + D^{(4)}] \\ &+ \frac{1}{2} [1 - \cos m\pi] D^{(5)} \\ &= \begin{cases} D^{(1)} + D^{(2)} & m = 4, 8, 12, \dots \\ D^{(3)} + D^{(4)} & m = 2, 6, 10, \dots \\ D^{(5)} & m = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

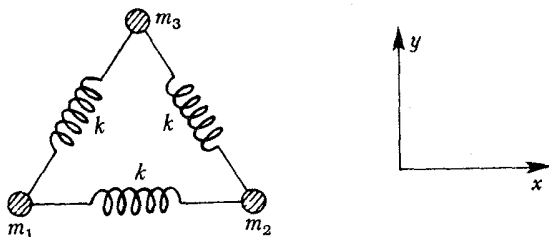
لذا، اگر  $m$  زوج باشد، نمایش تحویل‌پذیر بوده و مجموع دو نمایش یک بعدی می‌باشد؛ در نتیجه، اختلال می‌تواند واگنی را تجزیه نماید. از طرف دیگر، اگر  $m$  فرد باشد، نمایش تحویل‌ناپذیر بوده و هیچ تجزیه‌ای میسر نیست، زیرا تقارن تمام حالتها را به هم ربط می‌دهد.

توجه کنید که در این مثال نتایج به دست آمده از نظریه گروه کیفی‌اند؛ مقادیر



تجزیه ناشی از اختلال به دست نیامده‌اند. این یک ویژگی کلی استدلالهای نظریهٔ گروههاست. لیکن مسئله‌ای را حل می‌کنیم که در آن، با استفاده از نظریهٔ گروهها، اعداد را محاسبه می‌نماییم.

سه جرم نقطه‌ای  $m$  در رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع در نظر می‌گیریم که با فنرها با ثابت  $k$  به هم وصل شده‌اند (ر.ک. شکل ۲۰۱۶). مدهای نرمال این دستگاه مکانیکی چیستند؟ فرض کنیم جرمها فقط در صفحه کاغذ حرکت کنند.



شکل ۲۰۱۶ مثلث ارتعاشی

جرمها را مطابق شکل شماره‌گذاری می‌کنیم. فرض کنیم مختصات  $m_1$  نسبت به وضع تعادلش  $x_1, y_1$  باشند، و به همین ترتیب در مورد دو جرم دیگر. هیئت دستگاه را بایک " بردار حالت " شش بعدی  $\xi$  نمایش می‌دهیم. در یک " دستگاه مختصات مقدماتی " ، نظیر دستگاه صفحه ۱۶۱،  $\xi$  به مؤلفه‌های زیر است:

$$\xi = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \quad (51.16)$$

انرژیهای جنبشی و پتانسیل دستگهمان عبارتند از [قس. معادلات (۵۸.۶) و (۶۰.۶)]

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \sum_i \dot{\xi}_i^2 \\ V &= \frac{1}{2} k \{ (x_2 - x_1)^2 + [-\frac{1}{2}(x_3 - x_2) + \frac{1}{2}\sqrt{3}(y_3 - y_2)]^2 \\ &\quad + [\frac{1}{2}(x_1 - x_3) + \frac{1}{2}\sqrt{3}(y_1 - y_3)]^2 \} \\ (52.16) \quad &= \frac{1}{2} k \sum_{ij} V_{ij} \xi_i \xi_j \end{aligned}$$

از قانون دوم نیوتن داریم

$$m \ddot{\xi}_i = - \frac{\partial V}{\partial \xi_i} = -k \sum_j V_{ij} \xi_j \quad (53.16)$$

برای ارتعاش در یک مد نرمال داریم  $\xi \sim e^{-i\omega t}$ . در این صورت، (۵۳.۱۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lambda = \frac{m\omega^2}{k} \quad \text{که در آن} \quad \sum_j V_{ij} \xi_j = \lambda \xi_i \quad (54.16)$$

مدهای نرمال ویژه بردارهای ماتریس  $V$  با ویژه مقادیری هستند که فرکانسها را به ما می دهند. حال ببینیم نظریه گروهها برای یافتن این ویژه مقادیر چه می کند. اولاً، هر ویژه بردار وقتی همه عناصر گروه تقارن ما بر آن عمل کند یک نمایش تحویل ناپذیر تولید می کند. لذا، در یک دستگاه مختصات که  $V$  را قطری کند،

$$(55.16) \quad V = \left( \begin{array}{cccccc} \lambda_a & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_a & & & \\ & & & \lambda_b & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_b \\ & & & & & \text{etc.} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} D^{(a)} \\ \\ \\ \\ \\ D^{(b)} \end{array} \right\}$$

$n_a$  بردار مختصات جدید اول، ویژه بردارهای متعلق به ویژه مقدار  $\lambda_a$  اند، و طبق نمایش تحویل ناپذیر  $D^{(a)}$  بین هم تبدیل می شوند، و  $n_b$  های بعدی ویژه بردار متعلق به  $\lambda_b$  بوده و طبق  $D^{(b)}$  تبدیل می شوند، و همین طور تا آخر. طبق معمول، باید گروه تقارن را به اختصار مورد بحث قرار دهیم. این گروه از شش عنصر

$$I \quad R \quad R^2 \quad P \quad PR \quad PR^2$$

تشکیل شده است، که در آن  $I$  همانی بوده،  $R$  مثلث را  $120^\circ$  در جهت مثبت (خلاف جهت عقربه های ساعت) دوران می دهد، و  $P$  انعکاس نسبت به خط قائمی ماربرمرکز است. جدول مشخصه جدول ۸.۱۶ می باشد. این گروه تقارن چیزی جز  $S_3$  نیست؛

جدول ۸.۱۶

رده	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
$C_1(I)$	1	1	2
$C_2(R, R^2)$	1	1	-1
$C_3(P, PR, PR^2)$	1	-1	0

جدولهای ۱۰.۱۶ و ۳.۱۶ را باهم مقایسه نمایید.

وقتی عناصر مختلف گروه بر مثلث عمل کنند، تبدیلاتی خطی از  $\xi$  القا خواهند کرد. مثلاً، اگر  $R$  بر مثلث عمل کند،

$$(56.16) \quad \xi' = D(R)\xi$$

که در آن ماتریس  $D(R)$  عبارت است از

$$(۵۷.۱۶) \quad D(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

به همین نحو،

$$(۵۸.۱۶) \quad D(P) = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

این نمایش  $D$  چه نمایش‌هایی را شامل است؟ مشخصه آن عبارت است از

$$\chi(C_1) = 6 \quad \chi(C_2) = 0 \quad \chi(C_3) = 0$$

و از این داریم [(۳۲.۱۶) و (۳۳.۱۶)] را باهم مقایسه کنید

$$(۵۹.۱۶) \quad D = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus 2D^{(3)}$$

توجه کنید که  $D$  درست (هم ارز) نمایش منتظم گروه تقارن ما می‌باشد. این ویژگی خاص تصادفی بوده و خیلی کلی نیست.

حال می‌توان صریح‌تر بود و در یک دستگاه مختصات با بردارهای ویژه  $V$  به عنوان

پایه نوشت:

$$(۶۰.۱۶) \quad V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \lambda_{31} & & & \\ & & & \lambda_{31} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \lambda_{32} \\ & & & & & & \lambda_{32} \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} D^{(1)} \\ D^{(2)} \\ D^{(3)} \\ D^{(3)} \end{array} \right\}$$

که در آن خواص تبدیلی بردارهای ویژه مختلف را نشان داده‌ایم. توجه کنید که لازم نیست دو جفت ویژه برداری که مثل  $D^{(3)}$  تبدیل می‌کنند ویژه مقدار یکسان داشته باشند.

ماتریس  $D(G)V$ ، که در آن  $G$  یک عنصر دلخواه گروه تقارن ماست، در این دستگاه

مختصات خاص به چه شکلی است؟ جواب بوضوح خواهد بود

$$(۶۱.۱۶) \quad D(G)V = \begin{pmatrix} \lambda_1 D^{(1)}(G) & & & & \\ & \lambda_2 D^{(2)}(G) & & & \\ & & \lambda_{31} D^{(3)}(G) & & \\ & & & \lambda_{31} D^{(3)}(G) & \\ & & & & \lambda_{32} D^{(3)}(G) \end{pmatrix}$$

البته این ماتریس مستقیماً مفید نیست، زیرا این دستگاه مختصات را نمی‌شناسیم؛ یعنی ویژه بردارها را نمی‌دانیم. با اینحال، اثر این ماتریس تحت تبدیلات مختصات ناوردا

است؛ در نتیجه، در هر دستگاه مختصات،

$$(۶۲.۱۶) \quad \text{Tr } D(G)V = \lambda_1 \chi^{(1)}(G) + \lambda_2 \chi^{(2)}(G) + (\lambda_{31} + \lambda_{32}) \chi^{(3)}(G)$$

حال محاسبه اثرهای زیر با استفاده از شکلهای خاص (۵۲.۱۶)، (۵۷.۱۶)، و

(۵۸.۱۶) از  $V$ ،  $D(R)$  و  $D(P)$  سراسر است.

(۶۳.۱۶)

$$\text{Tr } D(I)V = 6$$

$$\text{Tr } D(R)V = \frac{3}{2}$$

$$\text{Tr } D(P)V = 3$$

لذا، ویژه مقادیر در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2(\lambda_{31} + \lambda_{32}) = 6$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) = \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 3$$

که از آنها داریم

(۶۴.۱۶)

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_{31} + \lambda_{32} = \frac{3}{2}$$

$\lambda_{31}$  و  $\lambda_{32}$  را می‌توان جداگانه با توجه به چیزهایی مانند

$$\text{Tr } V^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2(\lambda_{31}^2 + \lambda_{32}^2)$$

معین کرد، ولی راه ساده‌تر این است که ببینیم باید سه درجه آزادی با ویژه مقدار صفر، دو انتقالی و یک دورانی، وجود داشته باشند، لذا،

(۶۵.۱۶)

$$\lambda_{31} = 0 \quad \lambda_{32} = 3/2$$

و، بدون حل یک معادله عام، تمام ویژه مقادیر را مشخص کرده‌ایم.

### ۶.۱۶ گروههای نامتناهی

این فصل را با بحث کوتاهی از گروههایی با تعدادی نامتناهی عنصر به پایان می‌بریم. به چند مثال از گروههای نامتناهی که در فیزیک ظاهر می‌شوند پرداخته، و نمایشهای تحویل‌ناپذیر آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم. برهانها ذکر نشده‌اند؛ خواننده علاقه‌مند به بحث کاملتر و برهانها می‌تواند به مراجع ذکر شده در آخر این فصل رجوع نماید.

گروههای نامتناهی در نظر می‌گیریم که عناصرشان را بتوان با پارامترهای حقیقی شماره‌گذاری کرد که به طور پیوسته تغییر کنند؛ یک عنصر گروه نوعی به صورت  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x)$  نوشته می‌شود. اگر  $n$  پارامتر لازم باشد، گروه را  $n$  پارامتری می‌نامیم. واضح است که برای یک گروه نامتناهی نمی‌توان به صورت معمول جدول ضرب نوشت. هرگاه حاصل ضرب  $g(x)$  در  $g(y)$  مساوی  $g(z)$  باشد، یعنی

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n)g(y_1, y_2, \dots, y_n) = g(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

آنگاه  $n$  پارامتر  $z_1, z_2, \dots, z_n$  توابعی از پارامترهای  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  می‌باشند. یعنی، "جدول ضرب" برای گروه نامتناهی مان از  $n$  تابع حقیقی، هر یک با  $2n$  شناسه حقیقی، مانند

$$z_1 = f_1(x_1, \dots, y_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_n = f_n(x_1, \dots, y_n)$$

(۶۶.۱۶)

تشکیل شده است.

البته، یک گروه نامتناهی در اصول موضوع گروههای کلی داده شده در بخش ۱.۱۶ صدق می‌کند. سخت‌ترین قید شرکتپذیری است:

$$[g(x)g(y)]g(z) = g(x)[g(y)g(z)] \quad (۶۷.۱۶)$$

از رابطه (۶۷.۱۶) معلوم می‌شود که باید برحسب توابع  $f_i(x, y)$  رابطه (۶۶.۱۶) داشته باشیم: به ازای هر  $x, y, z$ ,

$$f_i(f(x, y), z) = f_i(x, f(y, z)) \quad (۶۸.۱۶)$$

اگر توابع  $f_i(x, y)$  از (۶۶.۱۶)، علاوه بر صدق کردن در اصول موضوع گروهها، پیوسته بوده و از هر مرتبه مشتق داشته باشند، یک گروه لی<sup>۱</sup> خواهیم داشت. ذیلا "چند مثال ذکر شده‌اند.

۱. گروه تبدیلات مختصات خطی دوبعدی به شکل

$$x' = ax + by + c$$

$$y' = dx + ey + f$$

(۶۹.۱۶)

شرط وجود وارون به این معنی است که پارامترهای  $f, \dots, a$  در (۶۹.۱۶) باید از شرط

$$ae - bd \neq 0$$

تبعیت کنند. واضح است که این گروه یک گروه شش پارامتری است.

۲. گروه تمام ماتریسهای  $n \times n$  یک‌گانه؛ یعنی، گروه تمام ماتریسهای یکانی  $n \times n$  با درمیانان ۱. این گروه را معمولاً " $SU(n)$ " می‌نامند. می‌توان نشان داد که  $SU(n)$  دارای  $n^2 - 1$  پارامتر است. مثلاً، عنصر عمومی  $SU(2)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \eta & e^{i\xi} \sin \eta \\ -e^{-i\xi} \sin \eta & e^{-i\xi} \cos \eta \end{pmatrix} \quad (۷۰.۱۶)$$

که دارای سه پارامتر حقیقی  $\xi, \eta, \zeta$  است.

۳. گروه تمام ماتریسهای  $n \times n$  متعامد حقیقی که معمولا " با  $O(n)$  نموده می شود. اگر خود را به ماتریسهایی از  $O(n)$  مقید کنیم که دترمینانشان (به جای  $-1$ )  $+1$  باشد، گروه  $O^+(n)$  به دست می آید. مثلا،  $O(3)$  گروه دورانها در فضای سه بعدی است؛  $O^+(3)$  گروه دورانهای سره است. چون برای تعیین یک دوران سه پارامتر لازم است ( مثلا، سه زاویه اوپلر )،  $O(3)$  یک گروه سه پارامتری می باشد. به طور کلی، تعداد پارامترها در  $O(n)$  مساوی  $\frac{1}{2}n(n-1)$  خواهد بود.

باید گفت که مثالهای فوق همه گروههای تبدیل اند؛ یعنی، گروههایی مرکب از تبدیلات متغیرها. وقتی این تبدیلات خطی و همگن باشند، گروه یک گروه از ماتریسهاست. ما از این پس اغلب گروههای نامتناهی را گروههای تبدیل می گیریم<sup>۱</sup>.

جالب است که همسایگی مبدأ گروه نامتناهی خود را در نظر بگیریم. یعنی، عنصر همانی گروهمان را با  $g(0)$ ، با تمام پارامترهای صفر، نشان می دهیم؛ در نتیجه، به ازای هر  $x$ ،

$$g(0)g(x) = g(x)$$

حال عناصر گروه با تمام پارامترهای بی نهایت کوچک را در نظر می گیریم. این ما را به ایده مولدهای گروه می کشاند. به ازای هر پارامتر یک مولد وجود دارد؛ اینها به صورت زیر تعریف می شوند:

$$X_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(\varepsilon, 0, 0, \dots, 0) - g(0, 0, \dots, 0)}{\varepsilon}$$

$$(71.16) \quad X_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(0, \varepsilon, 0, \dots, 0) - g(0, 0, \dots, 0)}{\varepsilon}$$

. . . . .

$$X_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(0, 0, \dots, \varepsilon) - g(0, 0, \dots, 0)}{\varepsilon}$$

وجود " مشتقات " در (71.16) را فرض لی بودن گروه تضمین می کند. برای دادن معنی به تفاضلهای عناصر گروه که در تعاریف (71.16) آمده اند، می توان تبدیلات مختصات را به تفصیل مورد بحث قرار داد. تبدیل نوعی  $R$  را در نظر می گیریم که

۱. این واقعا " یک فرض محدودکننده نیست. اگر گروه به صورت یک گروه تبدیلات تعریف نشده باشد، همواره می توان آن را تبدیلات مؤثر در فضای پارامتری  $n$  بعدی آن تصور کرد. یعنی، عنصر  $g(x)$  تبدیل  $y \rightarrow z$  داده شده با (66.16) را تولید می کند.

مختصات  $x$  را به مختصات  $x' = Rx$  تغییر می‌دهد. مثلاً، اگر تبدیل دوران محورهای مختصات به اندازه  $90^\circ$  و در جهت مثبت حول محور  $x$  باشد، مختصات  $x$ ،  $y$ ،  $z$  به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= z \\ z' &= -y \end{aligned} \quad (72.16)$$

لیکن، لازم نیست خود را به تبدیلات مختصات خطی نظیر دورانهها محدود کنیم. در هر حال، به هر تبدیل  $R$  می‌توان عملگری چون  $O_R$  مربوط کرد که بر توابعی از متغیرهای  $x$  عمل کند که  $R$  بر آنها عمل می‌نماید. تعریف  $O_R$  به این نحو است که  $O_R$  با عمل بر تابع دلخواه  $f(x)$  تابع جدید  $g(x)$  را می‌دهد که از حیث عددی مساوی  $f(Rx)$  است؛ یعنی،

$$O_R f(x) = f(Rx) \quad (73.16)$$

حال تعبیر فیزیکی (73.16) را در حالت خاص که  $R$  یک دوران فضایی معمولی است در نظر می‌گیریم. معادله (73.16) به ما می‌گوید که تابع جدید  $O_R f$  در هر نقطه مساوی تابع اصلی  $f$  در مختصات مبدل است. مثلاً، اگر  $R$  دوران حول محور  $x$  به اندازه  $90^\circ$  باشد که با (72.16) تعریف می‌شود، از (73.16) داریم

$$O_R f(x, y, z) = f(x, z, -y)$$

فرض کنیم  $f(x, y, z)$  ویژگی خاصی در امتداد محور  $z$  مثبت ( $x=y=0, z>0$ ) داشته باشد. در این صورت،  $O_R f$  همین ویژگی را وقتی  $x=z=0, y<0$ ، یعنی در امتداد محور  $y$  منفی، نشان می‌دهد (ر.ک. شکل 3.16). لذا، می‌توان عملگر  $O_R$  مان را این‌سان بگیریم که تابع  $f$  را حول محور  $x$  به اندازه  $90^\circ$  دوران داده و محورهای مختصات را بلا تغییر گذارده است.

در آنچه ذیلاً می‌آید، نماد ما همیشه بین تبدیلات مختصات  $R$  و عملگرهای  $O_R$  تمایز نمی‌گذارد، ولی خواننده باید تمایز را رعایت کند، و سعی می‌کنیم در همه حال نوع شیء مورد نظر را ذکر نماییم. برای آنکه ببینیم احتیاط لازم است، اثر اعمال متوالی  $O_S$  و  $O_R$  را در نظر می‌گیریم. با چند بار استفاده از (73.16) داریم

$$O_R O_S f(x) = O_S f(Rx) = f(SRx) \quad (74.16)$$

معادله (74.16) به ما می‌گوید که عملگر  $O_R O_S$  به تبدیل مختصات  $SR$  مربوط است؛ وقتی که از یکی به دیگری می‌رویم ترتیب عمل عکس می‌شود.

منظورمان این نیست که در این نکته باید دقیق باشیم، ولی باید به اشتباهی که

اغلب در اعمالی نظیر (۷۴.۱۶) رخ می‌دهد اشاره کنیم. می‌توان به صورت زیر استدلال کرد. از (۷۳.۱۶) داریم

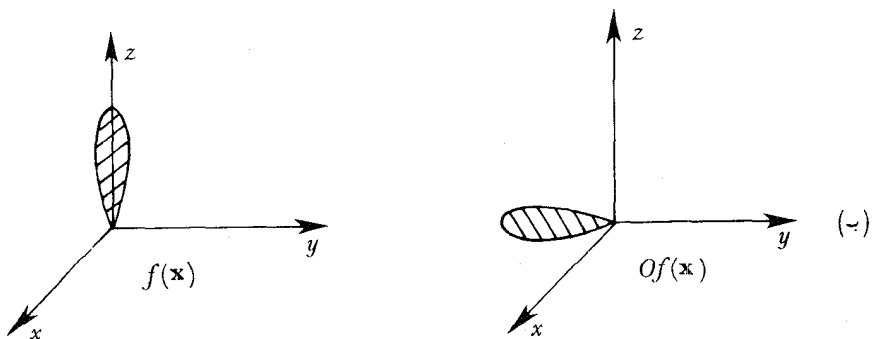
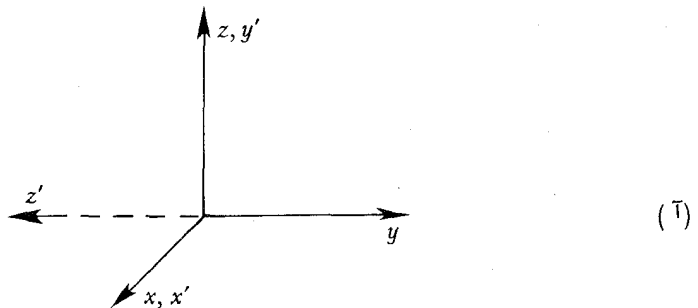
$$(۷۵.۱۶) \quad O_S f(x) = f(Sx)$$

حال عملگر  $O_R$  را بر طرفین (۷۵.۱۶) اعمال می‌کنیم. در طرف چپ به دست می‌آوریم  $O_R O_S f(x)$ ؛ چون (۷۳.۱۶) به ما می‌گوید که عمل  $O_R$  بر یک تابع چیزی جز عمل بر شناسه با  $R$  نیست، در طرف راست به دست می‌آوریم  $f(RSx)$ ؛ لذا،

$$(۷۶.۱۶) \quad O_R O_S f(x) = f(RSx)$$

که با (۷۴.۱۶) ناسازگار؛ و در نتیجه، غلط می‌باشد.

خطا در آخرین مرحله نهفته است، که در آن عملگر  $O_R$  بر طرفین (۷۵.۱۶) اعمال شد.  $O_R$  بر توابع عمل می‌کند نه بر اعداد؛ طرفین (۷۵.۱۶) ممکن است از حیث عدد یکی باشند، ولی توابع مختلفی هستند. یک مثال ساده به قرار زیر است. عملگر  $O$  را با  $O f(x) = f(x^2)$  تعریف کرده و دو تابع  $g(x) = x, h(x) = 2x$  را در نظر می‌گیریم.



شکل ۳۰.۱۶ (آ) دوران محورهای مختصات به اندازه  $90^\circ$  حول محور  $x$ . (ب) اثر عملگر دورانی مربوطه  $O$  بر تابع  $f(x)$  که در امتداد محور  $z$  مثبت یک "پره" دارد.



مسئله " داریم

$$(۷۷.۱۶) \quad h(x) = g(2x)$$

ولی با اعمال عملگر  $O$  بر طرفین  $(۷۷.۱۶)$  جواب نادرست زیر به دست می‌آید:

$$Oh(x) = Og(2x) = g(4x^2) = 4x^2$$

البته، جواب صحیح  $Oh(x) = h(x^2) = 2x^2$  می‌باشد.

ما قبلاً " به ترانسپوز عملگرهای  $(۷۴.۱۶)$  برخورد کرده ایم. مثلاً، اگر  $R$  ماتریسی باشد که یک دوران مختصات را توصیف کند، می‌توان ماتریس مربوطه  $T_R$  را در نظر گرفت که یک بردار را به همان نحو دوران داده، محورهای مختصات را ثابت می‌گذارد. می‌دانیم  $T_R = R^{-1}$ ؛ در نتیجه، اگر دو دوران از این نوع به کار روند، خواهیم داشت

$$(۷۸.۱۶) \quad T_R T_S = R^{-1} S^{-1} = (SR)^{-1} = T_{SR}$$

ترانسپوز ترتیب بین ماتریسهای  $(۲۰.۱۵)$  و ماتریسهای پانوش دوم در ص ۴۰۴ پدیده‌ای کاملاً " مربوط است.

حال به بحث مولدها، به صورت تعریف شده با  $(۷۱.۱۶)$ ، باز می‌گردیم. در پرتو انحرافی که هم اینک خاتمه یافت، باید مشخص کنیم که تبدیلاتمان بر مختصات عمل می‌کنند یا بر توابع آن مختصات. حال قرار دوم را می‌پذیریم. در این صورت، می‌توان مولدها را برای چند گروه لی نوعی به‌طور صریح نمایش داد.

۱. گروه شش پارامتری تعریف شده با  $(۶۹.۱۶)$  را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که عنصر همانی این گروه دارای پارامترهای زیر است:

$$a=1 \quad b=0 \quad c=0 \quad d=0 \quad e=1 \quad f=0$$

هرگاه یک عنصر نوعی گروه را با  $g(a, b, c, d, e, f)$  نشان دهیم، آنگاه اولین مولد، طبق  $(۷۱.۱۶)$ ، مساوی است با

$$X_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(1 + \varepsilon, 0, 0, 0, 1, 0) - g(1, 0, 0, 0, 1, 0)}{\varepsilon}$$

لذا، اگر  $X_a$  بر تابع دلخواه  $f(x, y)$  عمل کند، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} X_a f(x, y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ f[(1 + \varepsilon)x, y] - f(x, y) \} \\ &= x \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \end{aligned}$$

لذا، مولد  $X_a$  عملگر دیفرانسیل  $x(\partial/\partial x)$  می‌باشد:

$$(۷۹.۱۶) \quad X_a = x \frac{\partial}{\partial x}$$

به همین نحو،

$$\begin{aligned} X_b f(x, y) &= \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(1, \varepsilon, 0, 0, 1, 0) - g(1, 0, 0, 0, 1, 0)}{\varepsilon} \right] f(x, y) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(x + \varepsilon y, y) - f(x, y)] \\ &= y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \end{aligned}$$

بنابراین،

$$(۸۰.۱۶) \quad X_b = y \frac{\partial}{\partial x}$$

اگر به این نحو ادامه دهیم، سایر مولدها به دست می‌آیند:

$$(۸۱.۱۶) \quad X_c = \frac{\partial}{\partial x} \quad X_d = x \frac{\partial}{\partial y} \quad X_e = y \frac{\partial}{\partial y} \quad X_f = \frac{\partial}{\partial y}$$

۲. گروه  $SU(2)$  را در نظر می‌گیریم که عضو نوعی اش (۷۰.۱۶) است. دو متغیری راکه تحت این ماتریس  $2 \times 2$  تبدیل می‌شوند  $u_1$  و  $u_2$  می‌گیریم. در این صورت، دو مولد  $X_\xi$  و  $X_\eta$  را می‌توان با اعمال (۷۱.۱۶) فوراً ساخت:

$$\begin{aligned} X_\xi f(u_1, u_2) &= \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(\varepsilon, 0, 0) - g(0, 0, 0)}{\varepsilon} \right] f(u_1, u_2) \\ (۸۲.۱۶) \quad &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{f[(1 + i\varepsilon)u_1, (1 - i\varepsilon)u_2] - f(u_1, u_2)\} \\ &= i \left( u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} \right) f(u_1, u_2) \end{aligned}$$

و، به همین نحو،

$$(۸۳.۱۶) \quad X_\eta = u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_2}$$

ولی اگر بخواهیم  $X_\xi$  را مستقیماً به کمک (۷۱.۱۶) حساب کنیم به مشکل برمی‌خوریم. مشکل این است که  $\xi$  پارامتر مناسبی در مجاورت مبدأ نیست، زیرا وقتی  $\eta = 0$ ،  $g(\xi, \eta, \xi)$  مستقل از  $\xi$  می‌شود. این بیماری آشنایی است؛ مثلاً، "مشخص کردن جهات با زوایای قطبی معمولی  $\theta$  و  $\phi$  را در نظر می‌گیریم.  $\phi$  در امتداد محور قطبی ( $\theta = 0$ ) معنی خود را از دست می‌دهد. به‌طور دقیقتر، اگر گرادینتها را روی کرهٔ یک در نظر بگیریم،  $\partial/\partial\theta$  یک عملگر کاملاً "معقول در مجاورت  $\theta = 0$  است، ولی  $\partial/\partial\phi$  همواره در آنجا صفر می‌شود. برای به دست آوردن یک عملگر گرادیان منتهایی، باید  $\partial/\partial\phi$  را بر  $\sin \theta$  (یا  $\theta$ )، که در مجاورت

$\theta = 0$  همان است) تقسیم کنیم.

لذا، دو حالت وجود دارند. می‌توانیم با پارامترهای متفاوتی در (۷۰.۱۶) شروع کنیم؛ در نتیجه، هیچ چیز در مجاورت همانی گروه منفرد نمی‌شود. ولی در عوض فقط نکات کشف پاراگراف اخیر را تعقیب می‌کنیم. یعنی،  $X_\zeta$  را با  $\eta$  ای که کاملاً " صفر نیست حساب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$X_\zeta = i \sin \eta \left( u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} \right)$$

ما

$$(۸۴.۱۶) \quad X'_\zeta = \frac{X_\zeta}{\sin \eta} = i \left( u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} \right)$$

را مولد سوم خواهیم گرفت.

۳. بالاخره،  $O(3)$ ، یعنی گروه دورانها در سه بعد، را در نظر می‌گیریم. برای احتراز از مشکلاتی که با  $SU(2)$  داشتیم، از زوایای اویلر برای توصیف دورانهای بی‌نهایت کوچکمان استفاده نمی‌کنیم. در عوض، می‌بینیم هر دوران بی‌نهایت کوچک را می‌توان ترکیبی از دوران  $\theta_x$  حول محور  $x$ ، دوران  $\theta_y$  حول محور  $y$ ، و دوران  $\theta_z$  حول محور  $z$  گرفت. حال به محاسبه مولدهای مربوطه می‌پردازیم:

$$X_x f(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(x, y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon, z \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) - f(x, y, z)]$$

$$= \left( z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z)$$

لذا،

$$(۸۵.۱۶) \quad X_x = \left( z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

جایگشت دوری  $x$ ،  $y$ ،  $z$  دو مولد دیگر را به ما می‌دهد:

$$(۸۶.۱۶) \quad X_y = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \quad X_z = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

این بخش را با چند نکته در اهمیت مفهوم مولدهای یک گروه به پایان می‌بریم. لی چند قضیه جالب راجع به روابط بین مولدها و گروه ثابت کرد. مثلاً، " تعویضگر دو مولدی زیر

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$$

همیشه ترکیبی خطی از مولدهاست:

$$(۸۷.۱۶) \quad [X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$$

ثابت‌های حقیقی  $c_{ij}^k$  در (۸۷.۱۶) ثابت‌های ساختاری گروه لی نامیده می‌شوند.

رابطه<sup>۱۶</sup> (۸۷.۱۶) ما را به مفهوم جبرلی مربوط به یک گروه لی می‌رساند. این جبر از تمام ترکیبات خطی مولدهای

$$(۸۸.۱۶) \quad c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$$

با ضرایب حقیقی  $c_i$  تشکیل شده است. اگر "حاصل ضرب" دو عنصر را تعویضگر آنها بگیریم، این همان جبر تعریف شده در ص ۴۳۲ می‌شود. مثلاً، "حاصل ضرب" دو عنصر  $X_1 + X_2$  و  $X_3 - 2X_4$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۸۹.۱۶) \quad [X_1, X_3] - 2[X_1, X_4] + [X_2, X_3] - 2[X_2, X_4]$$

از (۸۷.۱۶) معلوم می‌شود که (۸۹.۱۶) به شکل (۸۸.۱۶) است؛ یعنی، خود عنصری از جبر است.

واضح است که گروه لی کاملاً "ساختار جبرلی مربوطه را مشخص می‌کند. سوفوس لی عکس آن را ثابت کرد؛ ساختار موضعی (یعنی، ساختار در همسایگی همانی) یک گروه لی کاملاً" با جبر لی آن، یعنی با ثابتهای ساختاری  $c_{ij}$  در (۸۷.۱۶)، معین می‌شود.

بالاخره، می‌بینیم که برای یک گروه ماتریسی نظیر  $SU(2)$  یا  $O(3)$  به آسانی می‌توان مولدها را تحت تصویر دیگری که در ص ۴۵۹ ذکر شد، که در آن عناصر گروه به جای عملگرهای تبدیل مربوطه تعریف شده با (۷۳.۱۶) خود ماتریسها گرفته شدند، ساخت. در این نمایش، ماتریسهای مناسب را مستقیماً در معادلات معرف (۷۱.۱۶) می‌گذاریم؛ تفاضل، و در واقع مشتق، اعمال معروفی بر ماتریسها هستند. مثلاً، از شکل (۷۰.۱۶) عضو نوعی  $SU(2)$  با مشتگیری فوراً" داریم:

$$(۹۰.۱۶) \quad X_\xi = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad X_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

مجدداً" در مورد  $X_\xi$  باید تقسیم بر  $\sin \eta$  را از یاد نبرد؛ نتیجه خواهد بود

$$(۹۱.۱۶) \quad X'_\xi = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

بر خواننده است نکات زیر را تحقیق نماید.

۱. جبرهای لی تعریف شده با (۸۲.۱۶)، (۸۳.۱۶)، و (۸۴.۱۶) برای  $SU(2)$ ، و با (۸۵.۱۶) و (۸۶.۱۶) برای  $O(3)$  یگاریختاند. یعنی، اگر تناظر یک به یک

$$(۹۲.۱۶) \quad X'_\xi \leftrightarrow 2X_x \quad X_\eta \leftrightarrow 2X_y \quad X_\xi \leftrightarrow 2X_z$$

را در نظر بگیریم، دو جبر یکسان می‌شوند. این امر از قواعد تعویضپذیری در دو جبر نتیجه می‌شود:

$$[X_\xi, X'_\eta] = 2X_\eta \quad [X_x, X_y] = X_z$$

$$[X'_\xi, X_\eta] = 2X_\xi \quad [X_y, X_z] = X_x$$

$$(۹۳.۱۶) \quad [X_\eta, X_\xi] = 2X'_\xi \quad [X_z, X_x] = X_y$$

در تناظر (۹۲.۱۶) حالات مختلفی در دست اند؛ انتخابهای ما به صورتی است که با قراردادهای جاری فیزیک سازگار است.

۲. مولدهای ماتریسی (۹۰.۱۶) و (۹۱.۱۶)  $SU(2)$  از روابط تعویضپذیری (۹۳.۱۶) که برای نمایشهای عملگر دیفرانسیل (۸۲.۱۶)، (۸۳.۱۶)، و (۸۴.۱۶) به دست آمدند تبعیت نمی‌کنند. در واقع، از ترتیب عکس ناشی از (۷۴.۱۶) برای دو نوع شیء می‌توان پیش‌بینی کرد که علامت تمام تعویضگرها با رفتن از یک تصویر به دیگری باید عوض شود. تعویضگرهای ماتریسهای (۹۰.۱۶) و (۹۱.۱۶) گزینه‌های تعویضگرهای (۹۳.۱۶) می‌باشند.

۳. نمایشهای ماتریسی، شبیه (۹۰.۱۶) و (۹۱.۱۶) مولدهای  $O(3)$ ، که به عنوان تبدیلات مختصات تعبیر می‌شوند، عبارتند از

$$X_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(۹۴.۱۶) \quad X_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مجدداً، تعویضگرهای ماتریسهای (۹۴.۱۶) گزینه‌های (۹۳.۱۶) می‌باشند.

### ۷.۱۶ نمایشهای تحویل‌ناپذیر $SU(2)$ ، $SU(3)$ ، و $O^+(3)$

$SU(2)$ . بحث را با نمایشهای ماتریسی تحویل‌ناپذیر  $SU(2)$  آغاز می‌کنیم. اولاً، نمایش یک بعدی بدیهی  $D^1$  وجود دارد که در آن هر عنصر گروه با عدد 1 نموده می‌شود. ثانیاً، نمایش دوبعدی  $D^2$  وجود دارد که از خود ماتریسهای (۷۰.۱۶) ناشی می‌شود. مثل بخش قبل، می‌توان بردارهای دوبعدی در نظر گرفت که این ماتریسها بر آنها عمل کنند؛ یک چنین بردار به صورت  $u_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) نوشته خواهد شد. همچنین، می‌توان یک نمایش مرکب از ماتریسهایی در نظر گرفت که مزدوجهای مختلط ماتریسهای اصلی (۷۰.۱۶) باشند. یعنی، هر ماتریس در  $SU(2)$  با مزدوج مختلطش نموده شود. هر بردار که با این ماتریسهای مزدوج تبدیل شود با یک اندیس بالایی، مثلاً "به صورت  $v^\alpha$ ، نوشته می‌شود.

حال می‌توان ادامه داد و تانسورها را تعریف کرد؛ هرگاه، مثلاً،  $u_\alpha$  و  $v_\alpha$  بردارهایی

باشند که با (۷۰.۱۶) تبدیل شوند، و  $w^\alpha$  یک بردار مزدوج باشد که با مزدوج مختلط (۷۰.۱۶) تبدیل شود، آنگاه شیء  $u_{\alpha\beta}^\gamma$  که مانند حاصل ضربهای  $u_\alpha v_\beta w^\gamma$  تبدیل شود یک چنین تانسور می باشد. واضح است که تانسورها را می توان با تعداد دلخواهی اندیس بالایی و پایینی تعریف کرد.

تبدیلات مؤلفه های مختلف یک تانسور به همدیگر به ازای هر عنصر گروه  $SU(2)$  یک نمایش گروه را تشکیل می دهند، گوئیم این نمایش به وسیله تانسور تولید می شود. مثلاً، بردار  $u_\alpha$  نمایش  $D^2$  را تولید می کند، و یک اسکالر تولیدکننده  $D^1$  می باشد. تمام تانسورها نمایشهایی را تولید می کنند، ولی بعضی از آنها تحویل پذیر بوده، و بعضی با سایر نمایشها هم ارز می باشند.

شیء  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  با دو زیرنویس را با تعریف زیر در نظر می گیریم:

$$(95.16) \quad \varepsilon_{12} = 1 \quad \varepsilon_{21} = -1 \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$$

این چیزی جز علامت متناوب لوی - چپوینای دوبعدی نیست؛ قس. (۱۰.۱۵) یا  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  تانسور است؟ فرض کنیم  $A$  ماتریس دلخواهی از  $SU(2)$  باشد. در این صورت،  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  به شکل زیر تبدیل می شود:

$$A_{\alpha\gamma} A_{\beta\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} = A_{\alpha 1} A_{\beta 2} - A_{\alpha 2} A_{\beta 1} \quad (\text{مجموع روی اندیسهای مکرر گرفته می شود})$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } \alpha = \beta \\ A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \det A = 1 & \text{اگر } \alpha = 1, \beta = 2 \\ A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11} = -\det A = -1 & \text{اگر } \alpha = 2, \beta = 1 \end{cases}$$

$$= \varepsilon_{\alpha\beta}$$

لذا،  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  یک تانسور تحت  $SU(2)$  است. به همین نحو،  $\varepsilon^{\alpha\beta}$ ، که از حیث عدد مساوی  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  است، یک تانسور می باشد.

حال ملاحظه می کنیم که می توان یک اندیس بالایی و یک اندیس پایینی را جمع بندی (منقبض) کرده، تانسوری با دو اندیس کمتر مثل اندیسهای پادوردا و هموردا در بخش ۳.۱۵ به دست آورد. مثلاً، اگر  $u_\alpha$  و  $v^\beta$  بردار باشند، کمیت  $u_\alpha v^\alpha$ ، پس از تبدیل  $A$  از  $SU(2)$ ، به صورت زیر درمی آید:

$$A_{\alpha\beta} u_\beta A_{\alpha\gamma}^* v^\gamma = A_{\gamma\alpha}^\dagger A_{\alpha\beta} u_\beta v^\gamma = \delta_{\beta\gamma} u_\beta v^\gamma = u_\alpha v^\alpha$$

در نتیجه، همانطور که حکم شده،  $u_\alpha v^\alpha$  ناورد است. به همین نحو، از تانسور  $u_{\alpha\beta}^\gamma$  می توان بردار  $v_\alpha = u_{\alpha\beta}^\beta$  و از تانسورهای  $u_{\alpha\beta}$  و  $v^{\gamma\delta}$  می توان تانسور  $w_\alpha^\beta = u_{\alpha\gamma} v^{\gamma\beta}$  را ساخت، و این کار را ادامه داد.

حال می توانیم نمایشهای تحویل ناپذیر  $SU(2)$  را بسازیم. در آغاز، می توان خود را

به تانسورهای محدود کرد که همه اندیسهایشان پایین باشند بدون آنکه نمایشی را حذف کنیم. مثلاً، تانسور  $u_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$  از ترکیبات خطی مؤلفه‌های تانسور  $v_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\gamma\lambda} \varepsilon_{\delta\mu} u_{\alpha\beta}^{\lambda\mu}$  تشکیل شده است، و بالعکس؛ در نتیجه، نمایشهای تولید شده با  $u_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$  و  $v_{\alpha\beta\gamma\delta}$  هم‌ارز می‌باشند. توجه کنید که تانسور  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ، درست مثل تانسور اساسی  $g_{ij}$  در بخش ۳.۱۵، یک "عملگر پایین آورنده" می‌باشد.

حال می‌بینیم اگر تانسور  $u_{\alpha\beta\gamma\dots}$  بخواهد نمایش تحویل‌ناپذیری تولید کند، باید نسبت به همه اندیسهایش کاملاً "متقارن" باشد. زیرا فرض کنیم تانسور  $u_{\alpha\beta\gamma\dots}$  نسبت به دو اندیس اولش متقارن نباشد،

$$u_{\alpha\beta\gamma\dots} \neq u_{\beta\alpha\gamma\dots}$$

در این صورت، می‌توان تانسور

$$\begin{aligned} v_{\gamma\dots} &= \varepsilon^{\alpha\beta} u_{\alpha\beta\gamma\dots} \\ &= u_{12\gamma\dots} - u_{21\gamma\dots} \end{aligned}$$

را با دو اندیس کمتر تشکیل داد. پس نمایش تولید شده به وسیله  $u_{\alpha\beta\gamma\dots}$  باید تحویل‌پذیر باشد، زیرا شامل نمایش (کوچکتر) تولید شده به وسیله  $v_{\gamma\dots}$  است.

لذا، نمایش تحویل‌ناپذیر کلی  $SU(2)$  با تانسور کاملاً "متقارن"  $u_{\alpha\beta\gamma\dots}$  که آن را تولید می‌کند مشخص می‌شود. اگر تانسور  $u$  دارای  $n$  زیرنویس باشد،  $n+1$  مؤلفه مستقل وجود دارند (چرا؟)؛ و لذا، بعد نمایش مربوطه  $n+1$  می‌باشد. نتایج این تحلیل در جدول ۹.۱۶ خلاصه شده‌اند.

جدول ۹.۱۶ نمایشهای تحویل‌ناپذیر  $SU(2)$

تانسور (کاملاً "متقارن") نمایش	
$D^1$	1
$D^2$	$u_\alpha$
$D^3$	$u_{\alpha\beta}$
$D^4$	$u_{\alpha\beta\gamma}$
$\vdots$	$\vdots$

$SU(3)$ . بخش اعظم تحلیلی که برای گروه  $SU(2)$  شد برای  $SU(3)$  برقرار است. مجدداً، بردارهای  $u_\alpha$  را در نظر می‌گیریم، که در آنها  $\alpha$  از 1 تا 3 تغییر می‌کند. بر بردار  $u_\alpha$  ماتریسهای  $3 \times 3$  تک‌هنگی یکانی عمل می‌کنند که  $SU(3)$  را می‌سازند. لذا، می‌توان گفت بردار  $u_\alpha$  نمایش سه‌بعدی  $D^3$  را تولید می‌کند که در آن هر عنصر گروه با خودش نموده می‌شود.

بار دیگر می‌توان بردارهای  $u^\alpha$  را با اندیسهای بالایی تعریف کرد، که مانند مزدوجهای

مختلط بردارها با اندیسهای پایینی تبدیل می‌شوند. این بردارها نمایش  $\overline{D^3}$  را تولید می‌کنند که در آن هر ماتریس  $SU(3)$  با مزدوج مختلطش نموده می‌شود. به خلاف وضع مشابه در  $SU(2)$ ، این نمایش  $\overline{D^3}$  هم‌ارز نمایش  $D^3$  نیست.

مجدداً، تانسورها را با تعداد دلخواهی اندیسهای بالایی و پایینی تعریف می‌کنیم. مثلاً، وقتی بردار  $u_\alpha$  تحت تبدیل

$$(96.16) \quad u'_\alpha = A_{\alpha\beta} u_\beta$$

قرار گیرد.

تانسور  $u_{\alpha\beta}^\gamma$  تحت تبدیل زیر واقع می‌شود،

$$u_{\alpha\beta}^{\gamma'} = A_{\alpha\rho} A_{\beta\sigma} A_{\gamma\tau}^* u_{\rho\sigma}^\tau$$

$A$  یک ماتریس دلخواه در  $SU(3)$  است.

علامت متناوب مجدداً تانسور است، ولی البته در اینجا سه اندیس دارد. یعنی،

دو شیء با مقدار عددی یکسان

$$(97.16) \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } 231, 123, \text{ یا } 312, \alpha\beta\gamma \\ -1 & \text{اگر } 321, 213, \text{ یا } 132, \alpha\beta\gamma \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به خاطر شرط تک‌هنگی تانسورهای  $SU(3)$  تحت  $SU(3)$  اند. اثبات به خواننده محول شده است. بالاخره، انقباض اندیسها مجدداً، مثل  $SU(2)$ ، عملی مجاز است مشروط بر اینکه یک اندیس که جمع‌بندی می‌شود بالایی و دیگری پایینی باشد. برهان، که حذف شده است، فوراً از یکانی بودن ماتریسهای  $SU(3)$  به دست آمده، و کاملاً شبیه محاسبات نظیر در حالت  $SU(2)$  می‌باشد.

حال می‌توان نمایشهای تحویل‌ناپذیر  $SU(3)$  را برشمرد. اندیسهای بالایی و پایینی دیگر هم‌ارز نیستند، زیرا علامت متناوب به جای دو اندیس سه تا دارد، و دیگر نمی‌توان از آن برای بالا بردن یا پایین آوردن یک اندیس استفاده کرد. لذا، تانسورهای را در نظر می‌گیریم که اندیسهایشان هم‌بالا و هم‌پایین باشند. اگر یک چنین تانسور  $u_{\alpha\beta}^{\gamma\delta\dots}$  بخواهد یک نمایش تحویل‌ناپذیر  $SU(3)$  تولید کند، باید دو شرط برقرار شوند.

۱. باید نسبت به همه اندیسهای بالایی خود و همه اندیسهای پایینی خود جداگانه متقارن باشد. اگر مثلاً

$$u_{\alpha\beta}^{\gamma\delta\dots} \neq u_{\alpha\beta}^{\delta\gamma\dots}$$

می‌توان تانسور

$$v_{\lambda\alpha\beta\dots} = \varepsilon_{\lambda\gamma\delta} u_{\alpha\beta}^{\gamma\delta\dots}$$



را با یک اندیس کمتر تشکیل داد، و نمایش ما تحویل‌پذیر خواهد بود. البته، شرط تقارنی وجود ندارد که اندیسهای بالایی و پایینی را به هم ربط دهد.

۲. باید بدون اثر باشد؛ هر انقباض یک اندیس بالایی با یک اندیس پایینی باید صفر به دست دهد. در غیر این صورت، می‌توان تانسوری با دو اندیس کمتر تشکیل داد، و نمایش ما تحویل‌پذیر خواهد بود. البته، اثرهای متشکل از جمع‌بندی دو اندیس بالایی یا دو اندیس پایینی لازم نیست صفر باشند، زیرا این یک انقباض ناوردا نیست.

لذا، نمایش تحویل‌ناپذیر کلی از  $SU(3)$ ، به وسیله یک تانسور با  $m$  اندیس بالایی و  $n$  اندیس پایینی تولید می‌شود؛ تانسور باید نسبت به تمام اندیسهای بالایی و نسبت به تمام اندیسهای پایینی کاملاً "متقارن بوده، و تمام انقباضهای یک اندیس بالایی با یک اندیس پایینی باید صفر باشند. در جدول ۱۰.۱۶ چند نمایش تحویل‌ناپذیر از  $SU(3)$

جدول ۱۰.۱۶ چند نمایش تحویل‌ناپذیر از  $SU(3)$ .

$m$  تعداد اندیسهای بالایی؛  $n$  تعداد اندیسهای پایینی

$m$	$n$	نمایش	تانسور
0	0	$D^1$	1
1	1	$D^3$	$u_\alpha$
1	0	$\overline{D^3}$	$u^\alpha$
0	2	$D^6$	$u_{\alpha\beta}$
1	1	$D^8$	$u_\alpha^\beta$
2	0	$\overline{D^6}$	$u^{\alpha\beta}$
0	3	$D^{10}$	$u_{\alpha\beta\gamma}$
1	2	$D^{15}$	$u_{\beta\gamma}^\alpha$
2	1	$\overline{D^{15}}$	$u_\beta^{\alpha\gamma}$
3	0	$\overline{D^{10}}$	$u^{\alpha\beta\gamma}$

شمارش شده‌اند. می‌توان نشان داد که بعد نمایش تحویل‌ناپذیر کلی  $SU(3)$  مساوی است با  $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2)$ . گویم نمایشهای  $D^3$  و  $\overline{D^3}$ ،  $D^6$  و  $\overline{D^6}$ ، و غیره نمایشهای مزدوج می‌باشند.

$O^+(3)$ . بالاخره، مسئله مهم یافتن نمایشهای تحویل‌ناپذیر  $O^+(3)$ ، یعنی گروه ماتریسهای  $3 \times 3$  متعامد تک‌هنگی حقیقی، که دورانها در فضای سه‌بعدی اقلیدسی را توصیف می‌کنند را مطرح می‌کنیم. مسئله مجدداً با ساختن تانسورها، در این حالت درست مثل تانسورهای دکارتی بخش ۱۰.۱۵، حل می‌شود.

در واقع، با توجه به نکاتی که راجع به  $SU(2)$  و  $SU(3)$  گفتیم، باید واضح باشد که نمایش تحویل‌ناپذیر کلی  $O^+(3)$  با یک تانسور متقارن بدون اثر با رتبه  $n$  تولید می‌شود.

مثلاً، یک اسکالر نمایش بدیهی  $D^1$  را القای کند. یک بردار ( $n=1$ ) نمایش سه بعدی  $D^3$  را تولید می کند که در آن هر دوران با ماتریس متعامد  $3 \times 3$  معمولی نمایش داده می شود. تانسور متقارن  $T_{ij}$  دارای شش مؤلفهء مستقل است؛ با حذف اثر پنج مؤلفه باقی می ماند. این پنج کمیت نمایش تحویل ناپذیر پنج بعدی  $D^5$  را تولید می کند، و غیره. می توان نشان داد که تانسور متقارن از رتبه  $n$  دارای  $2n+1$  مؤلفهء مستقل است؛ در نتیجه، نمایش مربوطه  $2n+1$  بعدی می باشد.

این نمایشها را می توان به عنوان عملگر بر هماهنگهای گروه  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  بخش  $1.7$  به زیباترین وجه تصور کرد. یعنی، نمایش بدیهی  $D^1$  از تبدیلات  $Y_{00}(\Omega)$  به خودش تشکیل شده است، "نمایش برداری"  $D^3$  تبدیلات هماهنگهای گروه  $Y_{1m}(\Omega)$  ( $m = -1, 0, 1$ ) به ترکیبات خطی یکدیگر تحت دورانها را توصیف می کند، و، به طور کلی، تبدیلات  $2n+1$  تابع  $Y_{nm}(\Omega)$  به ازای  $n$  داده شده به یکدیگر نمایش تحویل ناپذیر  $D^{2n+1}$  از  $O^+(3)$  را تولید می کنند.

چون در اینجا اثرات دورانها به جای مختصات بر توابع، یعنی هماهنگهای گروه، مورد بحث قرار می گیرند، عملگرهای دورانی خود را با  $(\text{۷۳.۱۶})$  تعریف می کنیم. لذا، اثر دوران  $R$  روی هماهنگ گروه خاص  $Y_{lm}(\Omega)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$O_R Y_{lm}(\Omega) = Y_{lm}(R\Omega)$$

که در آن  $R\Omega$  مقادیر جدید  $\theta$  و  $\phi$  مربوط به جهت  $\Omega$  است وقتی محورهای مختصات تحت دوران  $R$  قرار گرفته و جهت  $\Omega$  در فضا ثابت بماند. به عبارت دیگر، تابع جدید  $O_R Y_{lm}(\Omega)$  تابع حاصل از دوران  $Y_{lm}(\Omega)$  به جای دوران محورهای مختصات است (قس. شکل ۳۰۱۶). معمولاً "ماتریس دوران"  $D_{m'm}^l(R)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$(98.16) \quad Y_{lm}(R\Omega) = \sum_{m'} D_{m'm}^l(R) Y_{lm'}(\Omega)$$

به ترتیب زیرنویسها بر  $D_{m'm}^l$  در  $(98.16)$  توجه کنید. این انتخاب عمدی بوده است. برای مشاهدهء دلیل آن<sup>۱</sup>، اثر دو عملگر دورانی متوالی  $O_R, O_S$  بر یک هماهنگ گروه را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} O_R O_S Y_{lm}(\Omega) &= Y_{lm}(SR\Omega) \quad [\text{from (16-74)}] \\ &= \sum_{m'} D_{m'm}^l(S) Y_{lm'}(R\Omega) \\ &= \sum_{m'} D_{m'm}^l(S) \sum_{m''} D_{m''m}^l(R) Y_{lm''}(\Omega) \end{aligned}$$

۱. به عنوان راه دیگر برای جبر مربوطه، می توان دید که  $(98.16)$  حالت خاصی از رابطه  $(8.6)$  است؛ در اینجا هماهنگهای گروه بردارهای پایه ای نمایش ما می باشند.

$$(99.16) \quad = \sum_{m''} \left[ \sum_{m'} D_{m''m'}^l(R) D_{m''m}^l(S) \right] Y_{lm''}(\Omega)$$

معادله (99.16) نشان می‌دهد که ماتریسهای دوران  $D_{m''m}^l(R)$  از نمایش ماتریسی عملگرهای دورانی  $O_R$  تشکیل شده است.

در جدول 11.16 عناصر ماتریس دوران  $D_{m''m}^l(\alpha\beta\gamma)$  به صورت توابعی از زوایای اولیه  $\alpha, \beta, \gamma$  داده شده‌اند. خواص دیگر  $D_{m''m}^l(\alpha\beta\gamma)$  و فرمولی کلی در رز (R3) ذکر شده‌اند. ما فقط به چند نکته اشاره می‌کنیم.

جدول 11.16 ماتریس دوران  $D_{m''m}^l(\alpha\beta\gamma)$

$m'$	$m = 1$	0	-1
1	$e^{-i\alpha} \frac{1 + \cos \beta}{2} e^{-i\gamma}$	$-e^{-i\alpha} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$	$e^{-i\alpha} \frac{1 - \cos \beta}{2} e^{i\gamma}$
0	$\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma}$	$\cos \beta$	$-\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{i\gamma}$
-1	$e^{i\alpha} \frac{1 - \cos \beta}{2} e^{-i\gamma}$	$e^{i\alpha} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$	$e^{i\alpha} \frac{1 + \cos \beta}{2} e^{i\gamma}$

1. بررسی جدول 11.16 قاعده‌ای کلی به ما می‌دهد، که در واقع درست است، به این ترتیب که بستگی  $D_{m''m}^l(\alpha\beta\gamma)$  به  $\alpha$  و  $\gamma$  اساساً بدیهی است. برای مشخص بودن وضع، می‌توان نشان داد

$$(100.16) \quad D_{m''m}^l(\alpha\beta\gamma) = e^{-im'\alpha} d_{m''m}^l(\beta) e^{-im'\gamma}$$

که در آن "ماتریس دوران تحویل یافته"  $d_{m''m}^l(\beta)$  مثلاً "توسط رز (R3) داده شده است. خاصیت (100.16) در واقع مستقیماً از تعریف (98.16) و اینکه هماهنگ‌کروی  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  فقط از طریق عامل  $e^{im\phi}$  تابع  $\phi$  است نتیجه می‌شود [ر. ک. (32.7) یا (33.7)].

2. اگر در (98.16) قرار دهیم  $m = 0$ ، خواهیم داشت

$$(101.16) \quad \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(R\Omega) = \sum_{m'} D_{m'0}^l(\alpha\beta\gamma) Y_{lm'}(\Omega)$$

حال شناسه  $R\Omega$  از چند جمله‌ای لژاندر  $P_l$  واقع در سمت چپ (101.16) رادرنظر می‌گیریم. فرض کنیم جهت  $\Omega$  دارای مختصات قطبی  $\phi$  و  $\theta$  باشد. اگر محورهای مختصات تحت دوران  $R$  قرار گیرند، محور  $z$  در جهتی به مختصات قطبی  $\alpha$  و  $\beta$  (به نام محورهای اصلی) امتداد می‌یابد. لذا، زاویه قطبی  $R\Omega$  زاویه  $\chi$  بین این دو جهت می‌باشد:

$$(102.16) \quad \cos \chi = \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta \cos(\phi - \alpha)$$

لذا، (۱۰۱.۱۶) به صورت زیر درمی آید:

$$(103.16) \quad \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \chi) = \sum_{m'} D_{m'o}^l(\alpha\beta\gamma) Y_{lm'}(\theta, \phi)$$

از مقایسه (۱۰۳.۱۶) و قضیه جمع (۴۶.۷) برای هماهنگهای کروی فوراً نتیجه می شود

$$(104.16) \quad D_{m'o}^l(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm'}^*(\beta\alpha)$$

۳. متعامد بیکه بودن هماهنگهای کروی [ر.ک. (۳۵.۷)] بر کره بیکه به ما می گوید که نمایشهای ما یگانگی اند:

$$(105.16) \quad D_{m'm}^l(R^{-1}) = D_{mm}^l(R)^*$$

این فصل را با بررسی مختصر بکریختی (ای که در آخرین بخش مطرح شد) بین جبرهای لی مربوط به  $O^+(3)$  و  $SU(2)$  به پایان می بریم. با  $O^+(3)$  شروع می کنیم.

یک عنصر دلخواه در مجاورت مبدأ (عنصر همانی)  $O^+(3)$  را می توان به صورت  $1 + \theta_x X_x + \theta_y X_y + \theta_z X_z$  نوشت، که  $X_x, X_y, X_z$  مولدها هستند، در روابط تعویض پذیری (۹۳.۱۶) صدق می کنند و  $\theta_\alpha$  ها بی نهایت کوچک اند. تعریف می کنیم  $X_\alpha = -iJ_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ): در نتیجه، عنصر گروه به صورت زیر درمی آید:

$$(106.16) \quad 1 - i\theta_x J_x - i\theta_y J_y - i\theta_z J_z = 1 - i\theta \cdot \mathbf{J}$$

معنی بردار (بی نهایت کوچک)  $\theta$  چیست؟ خواننده با کمی فکر متقاعد خواهد شد که عنصر (۱۰۶.۱۶) یک دوران بی نهایت کوچک را توصیف می کند که اندازه اش اندازه بردار  $\theta$  است، حال آنکه محور در جهت  $\theta$  خواهد بود.

یک عملگر دوران متناهی چطور به دست می آید؟ ساده است، یک دوران متناهی را می توان دنباله ای از دورانهای بی نهایت کوچک گرفت. لذا، عملگر دورانی برای دوران متناهی  $\theta$  به صورت زیر است:

$$(107.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{n} \theta \cdot \mathbf{J}\right) \left(1 - \frac{i}{n} \theta \cdot \mathbf{J}\right) \cdots \left(1 - \frac{i}{n} \theta \cdot \mathbf{J}\right) \quad (n \text{ عامل}) \\ = e^{-i\theta \cdot \mathbf{J}}$$

البته، نمایی (۱۰۷.۱۶) فقط یک طرح صوری است، زیرا شناسه یک عملگر می باشد. نمایی را می توان اختصاری برای سری تیلور یا نمایش حاصل ضربی آن گرفت.

حال به  $SU(2)$  رو آورده و انطباق (۹۲.۱۶) را انجام می دهیم. یعنی، برای  $J_x$  در (۱۰۷.۱۶) به جای  $iX_x$  عملگر  $X'_x (i/2)$  را می گیریم، و به همین ترتیب در مورد  $J_y$  و  $J_z$ . لذا، عنصر (۱۰۷.۱۶) از  $O^+(3)$  با عنصر

$$(108.16) \quad e^{-(i/2)\theta \cdot \mathbf{S}} \quad (\mathbf{S} = iX'_x, iX'_y, iX'_z)$$

از  $SU(2)$  یکی می‌شود. با این کار می‌توان، دست‌کم در همسایگی همانی، ارتباط یک به یکی بین عناصر  $O^+(3)$  با عناصر  $SU(2)$  برقرار کرد. همان طور که به زودی خواهیم دید، اگر گروههای کامل را در نظر بگیریم تناظر به جای یک به یک دو به یک است.

این تناظر برای  $O^+(3)$  نمایشی ماتریسی پیش‌بینی می‌کند که با نمایشهای تانسوری به دست آمده در ابتدای این بخش متفاوت است. قبلاً گفتیم که ماتریسهای  $(90.16)$  و  $(91.16)$  تقریباً "نمایشی برای مولدهای  $SU(2)$  به دست می‌دهند، جز آنکه علائم تعویضگرها عکس می‌شوند. لذا، قرینه‌های ماتریسهای  $(90.16)$  و  $(91.16)$  یک نمایش به ما می‌دهند. با یادآوری  $i$  در تعریف  $S$  [ر.ک.  $(108.16)$ ]، خواهیم داشت

$$(109.16) \quad S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

این ماتریسها به ماتریسهای اسپین پاولی<sup>۱</sup> معروفند.

یک دوران حول یکی از محورهای مختصات، مثلاً "دوران  $\theta$  حول محور  $x$ "، را در نظر می‌گیریم. بنابر  $(108.16)$ ، این باید با ماتریس  $e^{-(i/2)\theta S_x}$  در  $SU(2)$  یکی شود. محاسبه این نمایی آسان است. ماتریسهای پاولی  $(109.16)$  با مجدورشدن مساوی واحد می‌شوند:  $S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = 1$ ؛ در نتیجه،

$$\begin{aligned} e^{-(i/2)\theta S_x} &= 1 - i \frac{\theta}{2} S_x - \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{i}{3!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^3 S_x + \dots \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^4 - \dots \right] - i S_x \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \dots \right] \\ &= \cos \frac{\theta}{2} - i S_x \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$(110.16) \quad = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

از ترکیب سه دوران از این نوع می‌توان عنصر  $SU(2)$  مربوط به یک دوران دلخواه را برحسب زوایای اوپلر  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  به دست آورد. لیکن باید مواظب ترتیب انجام دورانها باشیم. اگر دورانهایمان را تبدیلات مختصات بگیریم، باید از  $(2.15)$  استفاده کنیم. لیکن، ما مشخصاً "با عملگرهای دورانی کار می‌کنیم، و این به خاطر استفاده از روابط تعویضپذیری

(۹۳.۱۶) می‌باشد. لذا، ترتیب دورانها باید همانی باشد که در پا نوشت ۲ درص ۴۱۰ داده شده است؛ لذا، به دوران  $R(\alpha\beta\gamma)$  از  $O^+(3)$  ماتریس

$$(111.16) \quad e^{-(i/2)\alpha S_z} e^{-(i/2)\beta S_y} e^{-(i/2)\gamma S_z}$$

از  $SU(2)$  را مربوط می‌کنیم. محاسبه این حاصل ضرب را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم؛ نتیجه خواهد بود

$$(112.16) \quad \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha/2)} \cos \frac{\beta}{2} e^{-i(\gamma/2)} & -e^{-i(\alpha/2)} \sin \frac{\beta}{2} e^{i(\gamma/2)} \\ e^{i(\alpha/2)} \sin \frac{\beta}{2} e^{-i(\gamma/2)} & e^{i(\alpha/2)} \cos \frac{\beta}{2} e^{i(\gamma/2)} \end{pmatrix}$$

توجه کنید که (۱۱۲.۱۶) در واقع یک عنصر عمومی  $SU(2)$  است؛ ر.ک. (۷۰.۱۶).  
در واقع، مطلب کاملاً "جالبی به دست آورده‌ایم، یک نمایش دویعدی از  $O^+(3)$  که از شمارش قبلی ما کاملاً حذف شده بود! ما فقط از ماتریسهای (۱۱۲.۱۶)، یعنی نمایش برداری  $D^2$  از  $SU(2)$ ، استفاده می‌کنیم. این درست است؛ تنها مشکل مربوط به نیم‌زاویه‌های آمده در (۱۱۲.۱۶) می‌باشد. دو ماتریس، هریک گزینه دیگری، وجود دارند که باید به هر دوران  $O^+(3)$  مربوط شوند. مثلاً، دوران  $\alpha$  را حول محور  $z$  در نظر می‌گیریم. بنابراین (۱۱۲.۱۶) این دوران با ماتریس

$$(113.16) \quad \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha/2)} & 0 \\ 0 & e^{i(\alpha/2)} \end{pmatrix}$$

نموده می‌شود. اگر  $\alpha$  از ۰ تا  $2\pi$  افزایش یابد، عملگر دورانی بوضوح به‌همانی باز می‌گردد، ولی (۱۱۳.۱۶) به ماتریس

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

یعنی گزینه عنصر همانی در  $SU(2)$ ، تبدیل می‌شود.

در محدودیت این دو برای یکی، در واقع بیش از یک نمایش جدید از  $O^+(3)$  به دست آورده‌ایم. ولی تمام نمایشهای  $SU(2)$  آمده در جدول ۹.۱۶ می‌توانند نمایشهای  $O^+(3)$  باشند، زیرا تناظری<sup>۱</sup> بین عناصر گروههای  $SU(2)$  و  $O^+(3)$  برقرار کرده‌ایم. نمایشهای  $D^1, D^3, D^5, \dots$  از  $SU(2)$  نمایشهای اسکالر، برداری، تانسوری بدون اثر متقارن، و غیره

۱. به زبان ریاضی، این تناظر یک همریختی است. اگر یک به یک بود، یک یگریختی می‌شد.

از  $O^+(3)$  اند که قبلاً "شناختیم". سایرین نمایشهای اسپینور نامیده می‌شوند، "بردار" دو مؤلفه‌ای  $U$  را اغلب اسپینور می‌نامند. این نمایشهای دو مقداری اهمیت فیزیکی برابری برای نمایشهای یک مقداری در مکانیک کوانتمی دارند، که در آنجا عملگرهای دورانی با اندازه حرکت زاویه‌ای شناسایی میشوند.

### مراجع

چند مرجع نظریه گروههای متناهی کتب کارمایکل<sup>۱</sup> (C1)؛ هال<sup>۲</sup> (H1)؛ لدرمن<sup>۳</sup> (L6)؛ و بیرکف و مک‌لین<sup>۴</sup> (B2) می‌باشند.

مرجع کلاسیک در کاربرد نظریه گروهها در فیزیک اتمی کتاب ویگنر (W6) است؛ این کتاب بحثهای روشن و مبسوطی از ابزار ریاضی و کاربردش را دربردارد. تین‌خام<sup>۵</sup> (T1) مرجع جدیدتری از همین مبحث است. بحث کوتاهی از کاربردهای نظریه گروهها در فیزیک توسط مارگنو و مورفی (M2)، فصل ۱۵، داده شده است.

یک مرجع جدید که بخصوص گروه متقارن، گروههای پیوسته، و کاربردها در طیف نمایی اتمی و هسته‌ای را به تفصیل مطرح کرده است کتاب هارمزش (H3) است.

نظریه گروه  $O^+(3)$  و نمایشهایش توسط رز (R3) در زمینه مکانیک کوانتمی مشروحا بررسی شده است.

### مسائل

۱۰۱۶. کدامها گروهند؟

(آ) تمام اعداد حقیقی (ضرب معمولی = ضرب گروه)

(ب) تمام اعداد حقیقی (جمع = ضرب گروه)

(پ) تمام اعداد مختلط جز صفر (ضرب معمولی = ضرب گروه)

(ت) تمام اعداد گویای مثبت ("حاصل ضرب"  $a$  و  $b$  یعنی  $a/b$ )

۲۰۱۶. دو عنصر زیر را از گروه متقارن  $S_5$  در نظر بگیرید:

$$g_1 = [54123] = (135)(24)$$

$$g_2 = [21534] = (12)(345)$$

عنصر سوم  $g$  از این گروه را چنان بیابید که

$$g^{-1}g_1g = g_2$$

۳.۱۶. عناصر یک رده از یک گروه را با  $A_1, A_2, \dots, A_{n_A}$  ، عناصر رده دیگر را با  $B_1, B_2, \dots, B_{n_B}$  ، و غیره نشان دهید. فرض کنید  $A$  عنصر  $\sum_{i=1}^{n_A} A_i$  از جبر گروهی باشد، و به همین ترتیب در مورد  $B, \dots$  .

(آ) نمایش تحویل‌ناپذیر  $n$  بعدی خاص  $D$  از گروه را در نظر بگیرید. نشان دهید  $\sum_{i=1}^{n_A} D(A_i)$  ، که می‌توان آن را مختصراً " با  $D(A)$  نشان داد، مساوی مضرب ثابتی از ماتریس یک‌ه  $n$  بعدی است. ثابت را برحسب  $n, n_A$  ، و  $\chi(A)$  ، یعنی مشخصه رده  $A$  در نمایش  $D$  ، حساب کنید.

(ب) اگر دو عنصر  $A$  و  $B$  جبر گروهی در هم ضرب شوند، نشان دهید حاصل ضرب از رده‌های تام تشکیل شده است؛ یعنی، می‌توان نوشت

$$AB = \sum_c s_c C$$

که در آن  $s_c$  ها اعداد صحیح نامنفی هستند.

راهنمایی. ابتدا نشان دهید به ازای هر  $g$  در گروه،  $g^{-1} ABg = AB$  .

(پ) نشان دهید که  $n_A \chi(A) n_B \chi(B) = n \sum_c s_c n_c \chi(C)$  . این گونه روابط بین مشخصه‌ها اغلب در محاسبه مشخصه‌ها مفیدند.

۴.۱۶. گروه تقارن یک چهار وجهی منتظم را در نظر بگیرید.

(آ) مرتبه این گروه چیست؟

(ب) آن را به رده‌ها تجزیه کنید.

(پ) جدول مشخصه آن را بسازید.

۵.۱۶. مسئله ۴.۱۶ را برای گروه تقارن یک شش وجهی منتظم تکرار کنید.

۶.۱۶. عناصر گروه مسئله ۴.۱۶ را می‌توان با ماتریسهای متعامد  $3 \times 3$  که دورانها و انعکاسهای مختلف را توصیف می‌کنند نمایش داد. این نمایش را به نمایشهای تحویل‌ناپذیر تجزیه کنید.

۷.۱۶. نشان دهید که نمایش  $D(g)$  تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر

$$\overline{\chi(g) * \chi(g)} = 1$$

که در آن  $\chi(g)$  مشخصه  $D(g)$  است. فرض کنید  $\overline{\chi(g) * \chi(g)} = 2$  ؛ این راجع به  $D(g)$  چه می‌گویید؟

۸.۱۶. یک مسئله ویژه مقداری دارای تقارن کروی بوده، و یک ویژه مقدار خاص واگن 5 تایی می‌باشد، ویژه توابع عبارتند از

$$P_2^2(\cos \theta) e^{\pm 2i\phi} \quad P_2^1(\cos \theta) e^{\pm i\phi} \quad P_2(\cos \theta)$$

که در آنها تابع شعاعی مشترک را حذف کرده‌ایم.



(آ) محورهای مختصات (یا ویژه توابع) حول محوری به اندازه زاویه  $\omega$  چرخیده‌اند. اثر ماتریس تبدیل  $5 \times 5$  را که ویژه توابع جدید را بر حسب قدیم می‌دهد بیابید.  
 (ب) حال مسئله اصلی طوری مختل شده است که تقارن به تقارن یک مثلث افت کرده است. مشخصه‌های نمایش  $5 \times 5$  گروه تقارن مثلث را که پنج ویژه تابع ما تولید می‌کنند بیان کنید. (برای پرهیز از مسائل انعکاس ص ۴۲۶، می‌توانید آنها را بادورانهای هم‌ارز عوض کنید.)

(پ) تجزیه دستگاه واگن 5 تاییه‌مان به وسیله اختلال را مورد بحث قرار دهید؛ یعنی، آیا واگن می‌ماند، آیا به یک دستگاه واگن 4 تاییه و یک ویژه تابع ناواگن جداگانه تجزیه می‌شود، و یا چیز دیگر؟

۹.۱۶. چهار جرم  $m$  با شش فنر با ثابت  $k$  طوری به هم وصل شده‌اند که مواضع تعادل جرما در گوشه‌های یک چهاروجهی منتظم می‌باشند. فرکانسهای تمام مدهای نرمال را بدون حل یک معادله عام بیابید.

۱۰.۱۶. آیا ماتریسهای زیر گروه تشکیل می‌دهند؟ (ضرب ماتریسی = ضرب گروه)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

که در آنها  $\omega = e^{2\pi i/3}$  ( $\omega^3 = 1$ )

اگر جواب منفی است، آنقدر به آنها ماتریس  $2 \times 2$  بیفزایید تا گروه (با کوچکترین مرتبه ممکن) کامل شود.  
 عناصر گروه را به رده‌ها تقسیم کنید.

۱۱.۱۶. گروه تقارن مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر بگیرید. وقتی مختصات تحت تبدیلی از گروه قرار گیرند، فرم مربعی

$$a \frac{x^2}{\sqrt{2}} + bxy + c \frac{y^2}{\sqrt{2}}$$

به فرم دیگری با  $a, b, c$  متفاوت تبدیل می‌شود که با یک ماتریس  $3 \times 3$  به فرم اصلی مربوط است. ماتریسهای  $3 \times 3$  ای که به این نحو به دست می‌آیند یک نمایش گروه را تشکیل می‌دهند. مشخصه‌های این نمایش را بیابید.

۱۲.۱۶. گروه تمام جابه‌جاییها در فضای سه‌بعدی را در نظر بگیرید:

$$x' = x + a \quad y' = y + b \quad z' = z + c$$

(آ) این گروه چند پارامتر دارد؟

(ب) عملگرهای بی‌نهایت کوچک را (به شکل دیفرانسیل) بسازید.

(پ) نشان دهید که تمام عملگرهای بی‌نهایت کوچک با یکدیگر تعویض می‌شوند.

۱۳.۱۶. (آ) نشان دهید که  $[X_i, X_j] = -[X_j, X_i]$  رابطه  $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$  را ایجاب می‌کند.  
(ب) نشان دهید که اتحاد ژاکوبی

$$[[X_i, X_j], X_k] + [[X_j, X_k], X_i] + [[X_k, X_i], X_j] = 0$$

رابطه زیر را ایجاب می‌کند:

$$c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m = 0 \quad (\text{جمع‌بندی روی اندیسهای مکرر است})$$

[شرایط (آ) و (ب) تنها شرایط ثابتهای ساختارند؛ هر مجموعه از اعداد حقیقی  $c_{ij}^k$  که در این دو شرط صدق کند معرف یک جبر لی است.]

۱۴.۱۶. ارتباط ماتریس  $c_{ij}^k$  - (اندیس سطری =  $j$ ، اندیس ستونی =  $k$ ) با هر مولد  $X_i$  را در نظر بگیرید. نشان دهید این یک نمایش جبر لی است؛ یعنی، ماتریسها همان روابط تعویضپذیری مولدهای مربوطه را دارند. این نمایش نمایش منتظم، یا نمایش الحاقی، جبر لی نام دارد.

۱۵.۱۶. روابط تعویضپذیری عملگرهای بی‌نهایت کوچک (۷۹.۱۶)، (۸۰.۱۶)، و (۸۱.۱۶) را بنویسید.

۱۶.۱۶. نتیجه (۱۱۲.۱۶) را تحقیق کنید.

۱۷.۱۶. اگر سه دوران مختصات (ماتریسهای)  $R, R', R''$  با  $R'R = R''$  به هم مربوط شده باشند، نشان دهید که ماتریسهای دوران مربوطه در معادله ترانهاده

$$D'(R)D'(R') = D'(R'')$$

نمایشی از ماتریسهای وارون  $R^{-1}$  به دست دهد.

۱۸.۱۶. با استفاده از (۱۱۲.۱۶)، نشان دهید که نمایش  $D^3$  از  $SU(2)$  همان نمایش

$$D_{m,m}^1(R)$$

از جدول ۱۱.۱۶ است مشروط بر اینکه پایه  $D^3$  مساوی  $u_{11}, \sqrt{2}u_{12}, u_{22}$  اختیار شود.

۱۹.۱۶. اگر  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  ماتریسهای اسپین پاولی (۱۰۹.۱۶) باشند، نشان دهید

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

که در آن  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$  اپاد تعویضگر  $\sigma_i$  و  $\sigma_j$  است.

۲۰.۱۶. نشان دهید هر نمایش تحویل‌ناپذیر یک گروه آبلی یک بعدی است.

۲۱.۱۶. گروه  $G$  و نمایش بی‌وفای  $D$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $G'$  مجموعه تمام عناصر

گروه باشد که با ماتریس یکه نموده می‌شوند.

(آ) نشان دهید که  $G'$  زیرگروهی از  $G$  است.

(ب) نشان دهید  $G'$  در واقع زیرگروه نرمال  $G$  است.

(پ) اگر  $h'$  مرتبه  $G'$  باشد، نشان دهید هر ماتریس در  $D$  نماینده  $h'$  عنصر متمایز گروه است.

۲۲.۱۶. (آ) فرض کنید  $M_1, M_2, \dots, M_n$  مجموعه دلخواهی از ماتریسها بوده، و ماتریس هرمیتی  $K$  دارای خاصیت

$$M_i^+ K M_i = K$$

به ازای هر  $i$  باشد، در این صورت، اگر تمام ویژه مقادیر  $K$  مثبت باشند، نشان دهید یک ماتریس هرمیتی مانند  $H$  با خاصیت  $H^2 = K$  وجود دارد به طوری که  $HM_i H^{-1}$  به ازای هر  $i$  یکانی است.

(ب) اگر  $D(g)$  نمایشی از یک گروه متناهی از مرتبه  $n$  باشد، نشان دهید  $K = \sum_{i=1}^n D^+(g_i) D(g_i)$  از خواص زیر برخوردار است:

$$K = K^+ \quad (1)$$

(۲) تمام ویژه مقادیر  $K$  مثبت اند

$$D^+(g_k) K D(g_k) = K, \quad k \text{ هر } k \quad (3)$$

و در نتیجه، نمایش  $D(g)$  را می توان با یک تبدیل تشابه یکانی ساخت.

## چند خاصیت از توابع یک متغیر مختلط

در این کتاب بارها از خواص توابع یک متغیر مختلط استفاده شده است. در این ضمیمه خلاصه‌ای از این خواص برای مراجعه و مرور ارائه شده است. به دانشجوی ناآشنا با این مطالب توصیه می‌کنیم مبحث را در یک کتاب ریاضی بخواند. مثلاً، دو کتاب کوچک کنوپ (K4) کاملاً "مختصر و بسیار خواندنی می‌باشند."

ض ۱ توابع یک متغیر مختلط. نگاشت

یک عدد مختلط به شکل زیر است:

$$(ض ۱) \quad z = x + iy = re^{i\theta}$$

که در آن  $x$ ،  $y$ ،  $r$ ،  $\theta$  حقیقی بوده،  $i^2 = -1$ ، و  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ،  $x$  و  $y$  به ترتیب قسمتهای حقیقی ( $\text{Re } z$ ) و موهومی ( $\text{Im } z$ )،  $r = |z|$  اندازه، و  $\theta$  فاز یا شناسه  $\arg z$  می‌باشد. یک چنین عددی را می‌توان به‌طور هندسی با یک نقطه بر صفحه  $z$  مختلط، یا صفحه  $xy$ ، مثل شکل ض ۱، نمایش داد.

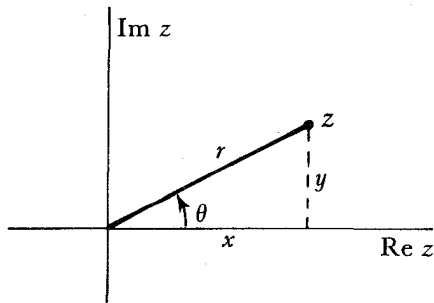
مزدوج مختلط  $z$  با  $z^*$  نموده می‌شود:  $z^* = x - iy$ .

تابع  $W(z)$  از متغیر مختلط  $z$  خود عددی مختلط است که قسمتهای حقیقی و موهومی اش

$U$  و  $V$  تابع موضع  $z$  در صفحه  $xy$  است:

$$(ض ۲) \quad W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

دو نمایش تصویری مختلف تابع  $W(z)$  سودمند است. یکی صرفاً "رسم قسمتهای حقیقی



شکل ۱ یک نقطه در صفحه مختلط

و (یا) موهومی  $U(x, y)$  و  $V(x, y)$  به عنوان سطوح بالای صفحه  $xy$  است (مثلاً "ر.ک. بخش ۶.۳، شکل ۱۳.۳). دیگری نمایش عدد مختلط  $W(z)$  با نقطه‌ای در "صفحه  $W$ " مختلط یا صفحه  $UV$  است؛ در نتیجه، به هر نقطه در صفحه  $z$  یک (یا چند) نقطه در صفحه  $W$  نظیر می‌باشد. بدین ترتیب، تابع  $W(z)$  نگاشتی از صفحه  $xy$  به روی صفحه  $UV$  تولید خواهد کرد.

مثال

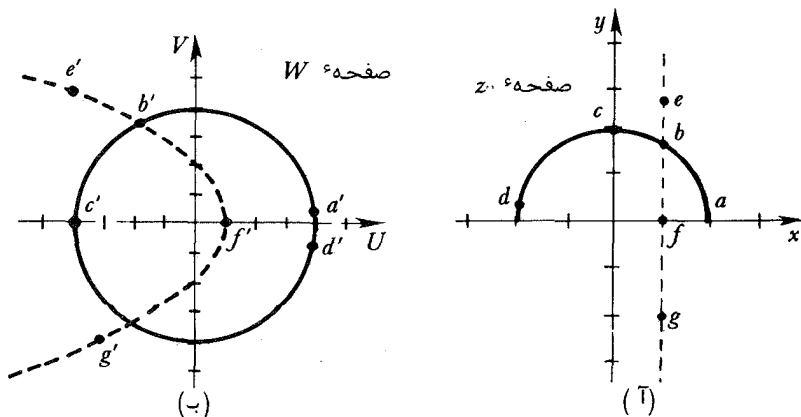
(ض ۳)

$$W(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$U = x^2 - y^2 \quad V = 2xy$$

به صورت دیگر،

$$W = z^2 = r^2 e^{2i\theta}$$



شکل ض ۲ توضیح نگاشت حاصل از تابع  $W(z) = z^2$  با چند نقطه و منحنی. نقاط  $a, b, \dots$  در صفحه  $z$  به نقاط  $a', b', \dots$  در صفحه  $W$  نگاشته شده‌اند.

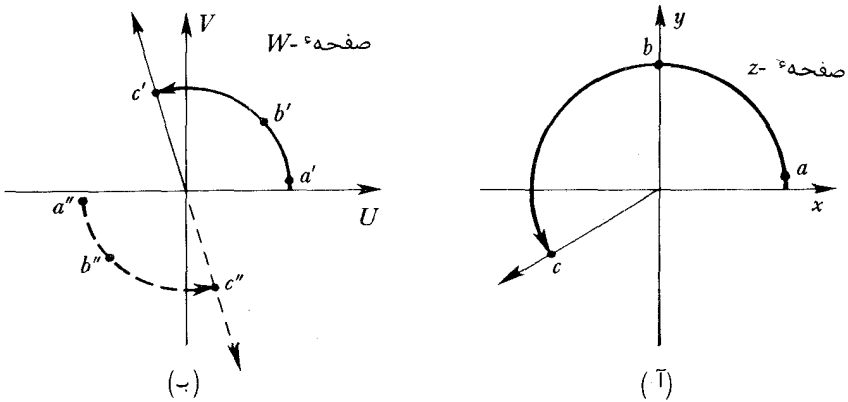
در شکل ض ۲ نگاشت چند نقطه و دو منحنی از صفحه  $z$  به روی صفحه  $W$  نموده شده است. مثلا "، خط  $x = 1$  به صورت سهمی  $4U = 4 - V^2$  در خواهد آمد.

در مثال فوق، دو نقطه  $z$  و  $-z$  به یک نقطه  $W(z)$  می روند. نیمه بالایی صفحه  $z$  روی تمام صفحه  $W$  نگاشته می شود؛ و به همین ترتیب، نیمه پایینی صفحه  $z$  واضح است که این وضع مشکلاتی برای نگاشت وارون، که با جذرگیری به دست می آید:

(ض ۴)

$$W(z) = z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$$

فراهم می سازد. این یک تابع چند مقدار است، نقطه  $p$  در صفحه  $xy$  به دو نقطه  $p'$  و  $p''$  در صفحه  $UV$  می روند. (اینها دو جذر نظیر به فازهای  $\theta_p$  و  $\theta_p + 2\pi$  می باشند). این وضع در شکل ض ۳ مجسم شده است.

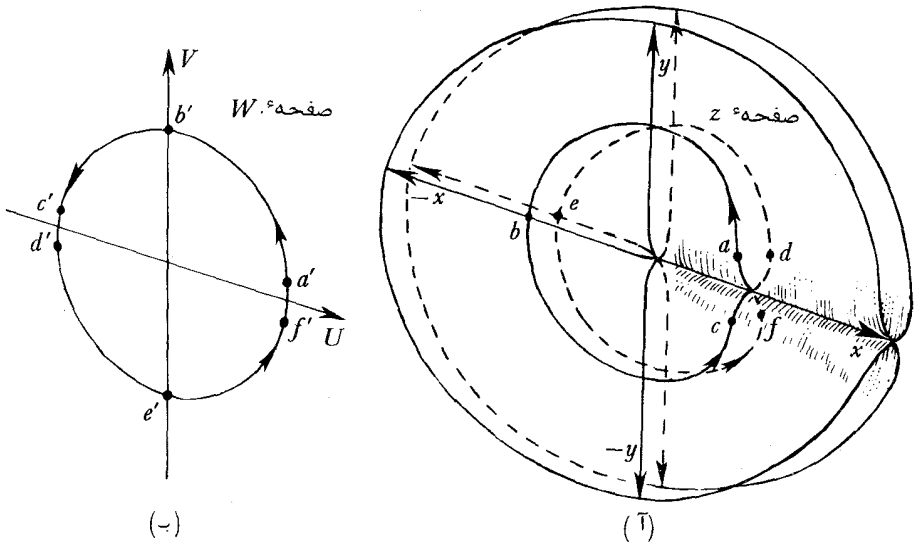


شکل ض ۳ توضیح نگاشت حاصل از  $W(z) = z^{1/2}$

فرض کنید با پذیرفتن اینکه نقطه  $p$  نظیر  $p'$  بوده و نظیر  $p''$  نیست سعی کنیم نگاشت را یک مقدار کنیم. باید مطمئن شویم که اگر از  $p$  شروع کرده و یک منحنی بسته در صفحه  $z$  رسم کنیم، نگاشت یک منحنی بسته در صفحه  $W$  تولید می کند که از  $p'$  شروع شده و به  $p'$ ، نه  $p''$ ، باز می گردد. این در صورتی درست است که منحنی بسته در صفحه  $xy$  مبدأ را دور نزند. ولی اگر منحنی یکبار مبدأ را دور بزند،  $\theta$  به اندازه  $2\pi$  تغییر کرده و منحنی نگاشته شده در صفحه  $W$  به نقطه شروع خود باز نخواهد گشت.

لذا، فقط وقتی می توان از چند مقدار دوری کرد که مبدأ  $z = 0$  را هرگز دور نزنیم. برای تضمین این امر یک خط شاخه ای یا بریدگی شاخه ای از  $z = 0$  تا بی نهایت کشیده و می پذیریم که از آن نگذریم. نقطه منفرد  $z = 0$  یک نقطه شاخه ای نام دارد. خط شاخه ای را می توان از  $z = 0$  تا بی نهایت به هر طریق کشید ولی معمولاً "برای راحتی آن را در امتداد محور حقیقی مثبت یا منفی می گیریم."

صفحه  $z$  ، وقتی به این نحو بریده شود ، یک صفحه ، یا صفحهٔ ریمان ، تابع  $W(z)$  نام دارد . این صفحه به طور یک مقداری روی بخشی ( در مثال ما ، نصف ) از صفحهٔ  $W$  نگاشته می شود . این بخش یک شاخهٔ تابع نام دارد . لازم است صفحهٔ دیگر ، که به همین ترتیب بریده شده ، روی نیمهٔ دیگر صفحهٔ  $W$  نگاشته شود . حال اگر از یک صفحه به دیگری برویم ، می توانیم از خط شاخه‌ای بدون برخورد به مشکلات چند مقداری عبور کنیم . برای مجسم کردن این امر ، لبه‌های صفحات را در نظر می گیریم که در امتداد بریدگی مثل شکل ض ۴ به هم وصل شده اند . صفحاتی که به این نحو به هم وصل می شوند سطح ریمان تشکیل



شکل ض ۴ سطح ریمان و نگاشت  $W(z) = z^{1/2}$  . قسمت نقطه‌چین

منحنی در صفحهٔ  $z$  بر صفحهٔ پایینی قرار می گیرد .

می دهند که به طرز یک مقداری روی تمام صفحهٔ  $W$  نگاشته می شود . حال اگر نقطهٔ شاخه‌ای  $z = 0$  دوبار دور زده شود ، روی هر صفحه یکبار ، مثل شکل ض ۴ ، به نقطهٔ شروع در صفحهٔ  $W$  باز خواهیم گشت .

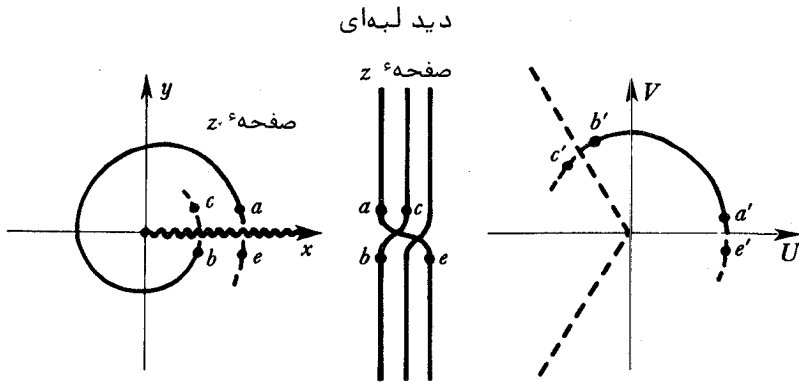
ریشه‌های دیگر را می توان به همین نحو توصیف کرد .

### مثال

(ض ۵)

$$W = z^{1/3}$$

نگاشت حاصل از این تابع در شکل ض ۵ نموده شده است . مجدداً " مبدا " یک نقطهٔ شاخه‌ای است ، که از مرتبهٔ ۲ گفته می شود زیرا سطح ریمان شامل  $3 (= 2 + 1)$  صفحه است .



شکل ۵ سطح ریمان و نگاشت مربوط به  $W = z^{1/3}$ . این شکل از شکل ۴ اطلاعات مشابه کمتری را به ما می‌دهد.

مثال دیگر  $W(z) = \ln z$  می‌باشد:

$$z = re^{i\theta}$$

(ض ۶)

$$\ln z = \ln r + i\theta$$

"مجدداً" مبدأ یک نقطه شاخه‌ای است، این بار از مرتبه نامتناهی زیرا سطح ریمان دارای بی‌نهایت صفحه است. هر صفحه روی یک نوار افقی در صفحه  $W$  به عرض  $\Delta V = 2\pi$  در جهت "موهومی" نگاشته می‌شود. با دورزدن پیوسته مبدأ  $z = 0$  در همان جهت، هرگز به نقطه شروع روی نقشه باز نخواهیم گشت.

نوع مهم دیگر تابع شامل دو نقطه شاخه‌ای است که از جذرها ناشی می‌شوند. تابع

$$W(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

با نقاط شاخه‌ای در  $z = a$  و  $z = b$  را در نظر می‌گیریم. سطح ریمان این تابع را می‌توان با رسم بریدگیهای شاخه‌ای از هر نقطه شاخه‌ای به بی‌نهایت در جهت دلخواه، یا با ساختن بریدگی بین دو نقطه، تشکیل داد. همانطور که شکل ض ۶ نشان می‌دهد، صفحات ریمان حاصل و شاخه تابع نظیر به یک صفحه داده شده به انتخاب بریدگیها بستگی دارند.

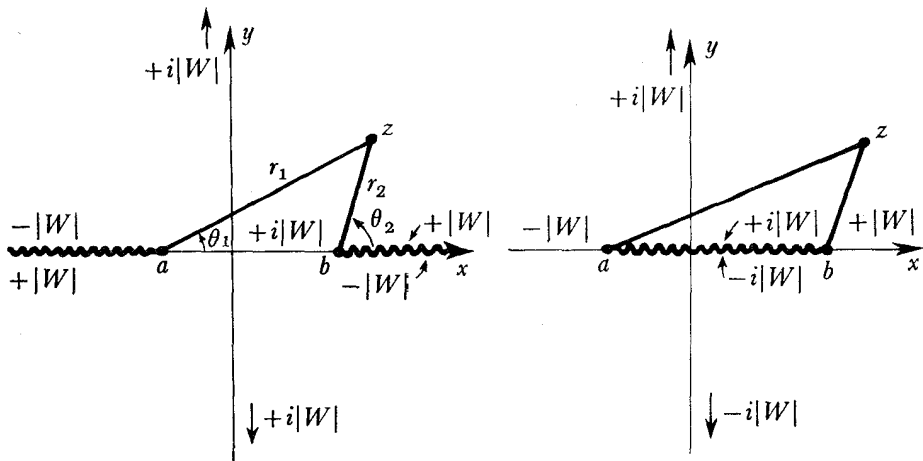
برای رسم نگاشت، شایسته است مختصات قطبی  $z$  به مرکز هر نقطه شاخه‌ای را وارد

کنیم؛ یعنی،

$$z - a = r_1 e^{i\theta_1} \quad z - b = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$W(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} = (r_1 r_2)^{1/2} e^{i\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}$$





شکل ۶ دورا برای رسم خطوط شاخه ای تابع  $W(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$  با رفتار  $W$  در نواحی مختلف یک صفحه، ریمان که صفحه  $z$  رامیوشانند. در هر دو رسم، صفحه مورد نظر صفحه ای است که برای آن  $W(z)$  در امتداد "قسمت بالایی" محور حقیقی به طرف راست  $b$ ، مثبت است. مثلاً، علامت  $-i|W|$  یعنی  $W(z)$  در جای نموده شده موهومی منفی محض است.

رفتار این تابع در شکل ۶ ترسیم شده است.

نگاشتهای ناشی از توابع پیچیده تر را می توان با تعمیم روندهای فوق مورد بررسی قرار داد.

### ض ۲ توابع تحلیلی

در این بخش خواصی از توابع تحلیلی از یک متغیر مختلط را که در این کتاب لازمند مرور می کنیم. برای نظریه ریاضی کلی، ر. ک. کتب متعددی که در این میحث وجود دارند؛ مثلاً، ایوستل (A5)، بخصوص فصل ۱۶، کنوپ (K4)، کاپسون (C8)، ویتاکر و واتسون (WS)، یا تیجمارش (T4).

۱. در نقشه سمت چپ شکل ۶، وقتی نقطه  $z$  حول بریدگی حرکت کند، بردارهای شعاعی از  $a$  و  $b$  به  $z$  سرتاسر بریدگی را چارو می نمایند. این هیچ اشکالی ندارد، ولی خود نقطه  $z$  نباید از بریدگی بگذرد. اگر گذشت، روی صفحه ریمان دیگر قرار خواهد گرفت.

۱. یک تابع در نقطه  $z$  تحلیلی است اگر در این نقطه مشتق داشته باشد؛ یعنی اگر

$$(ض ۷) \quad f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

موجود و از مسیری که در آن عدد مختلط  $h$  به صفر نزدیک می شود مستقل باشد. اگر یک تابع در ناحیه  $R$  تحلیلی و یک مقداری باشد، آن را در  $R$  منتظم می نامیم. ناحیه انتظام تابع چند مقداری باید بر یک صفحهٔ ریمان بریدگی مشخص شود.

۲. اگر  $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  یک تابع تحلیلی بوده و بنویسیم

$$h = h_x + ih_y$$

دو مسیر برای  $h \rightarrow 0$  در امتداد جهات افقی و قائم اند که در آنها به ترتیب داریم  $h_y = 0$  و  $h_x = 0$ . حدود (ض ۷) حاصل از این مسیرها باید مساوی باشند:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \quad (= W'(z))$$

از متحدگرفتن قسمت‌های حقیقی و موهومی این معادله، معادلات دیفرانسیل گشی-ریمان به دست می آیند:

$$(ض ۸) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

این معادلات شرط لازم و کافی برای انتظام تابع  $W = U + iV$  در یک ناحیه است مشروط بر اینکه در آن چهار مشتق جزئی موجود و پیوسته باشند.

مثال

$$W = z^2$$

$$U = x^2 - y^2 \quad V = 2xy$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

مثال زیر نشان می دهد که بعضی از توابع در هیچ نقطه تحلیلی نیستند.

مثال

$$W = z^* \quad (\text{مزدوج مختلط})$$

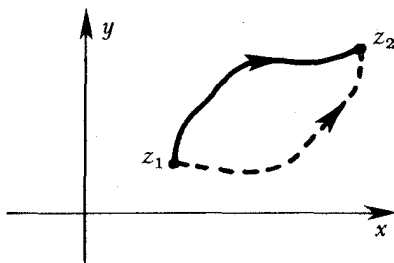
$$U = x \quad V = -y$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = +1 \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -1$$

۳. انتگرال گیری. انتگرال

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$$

یک انتگرال خط است که عموماً "به مسیری طی شده از  $z_1$  به  $z_2$  بستگی دارد (شکل ض ۷). ولی اگر  $f(z)$  در ناحیهء محدود به مسیری منتظم باشد، انتگرال برای دو مسیر یکسان است. حکم



شکل ض ۷ مسیره‌های انتگرالگیری در صفحهء مختلط

هم‌ارز قضیهء کشی است: اگر  $C$  مسیر بسته‌ای در ناحیهء انتظام  $f(z)$  باشد،

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (\text{ض } ۹)$$

عکس قضیه به نوعی برقرار است: هرگاه به ازای هر مسیر بستهء  $C$  در ناحیهء  $R$  که در آن  $f(z)$  پیوسته و یک مقداری است  $\oint_C f(z) dz = 0$ ، آنگاه  $f(z)$  در  $R$  منتظم می‌باشد.

۴. اگر  $f(z)$  در ناحیه‌ای منتظم باشد، مشتقات آن در این ناحیه موجود و منتظم‌اند.

۵. اگر  $f(z)$  در ناحیهء  $R$  منتظم باشد، مقدار  $f(z)$  در هر نقطهء داخل  $R$  را می‌توان با فرمول انتگرال کشی بیان کرد:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (\text{ض } ۱۰)$$

که در آن  $C$  مسیر بسته‌ای در  $R$  است که  $z$  را یکبار در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور می‌زند. این فرمول مستقیماً "از قضیهء مانده‌ها، فقره ۸، نتیجه می‌شود. لازم است به خاصیت جالب توابع تحلیلی ناشی از معادلهء (ض ۱۰) توجه شود. مقادیر یک تابع تحلیلی در سرتاسر یک ناحیهء کاملاً "با مقادیر تابع روی مرز ناحیه مشخص می‌شوند. برای کاربردی از این خاصیت، ر.ک. بخش ۲۰۵.

از فرمول کشی می‌توان هر تعداد دفعه که لازم باشد مشتق گرفت:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}$$

(ض ۱۱)

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

۶.  $f(z)$  را می‌توان در ناحیه انتظامش حول هر نقطه  $z_0$  به سری توانی (سری تیلور) :

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

(ض ۱۲)

$$a_0 = f(z_0) \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

بسط داد

ناحیه صفحه  $z$  که سری در آن همگراست دایره است. این دایره همگرایی تا نزدیکترین انفراد  $f(z)$ ، یعنی تا نزدیکترین نقطه‌ای که  $f(z)$  در آن تحلیلی نیست، امتداد دارد.

عکس مطلب نیز درست است. هر سری توانی همگرا در دایره  $R$  نمایش یک تابع

منتظم در آن می‌باشد.

۷. بسط لوران<sup>۱</sup>. هرگاه  $f(z)$  در یک ناحیه طوقی بین دو دایره متحدالمركز به مرکز  $z_0$

منتظم باشد، آنگاه  $f(z)$  را می‌توان در این ناحیه با بسط لوران نمایش داد:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

که در آن ضرایب  $a_n$  عبارتند از

(ض ۱۳)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

$C$  یک مسیر بسته حول  $z_0$  در ناحیه طوقی و در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است. توجه کنید که ضریب  $a_{-1}$  عبارت است از

(ض ۱۴)

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

هرگاه  $f(z)$  در طوق منتظم باشد، اگر هر قدر هم دایره داخلی را کوچک کنیم  $f(z)$

در دایره بزرگتر منتظم نشود، آنگاه گوییم  $z_0$  یک انفراد تنهای  $f(z)$  است. برای یک چنین انفراد تنها سه حالت وجود دارند:

(آ) سری لوران  $f(z)$  ممکن است شامل جملات با توانهای منفی از  $(z - z_0)$  نباشد. این یک حالت بدیهی است، و آن را یک انفراد قابل رفع می‌نامیم. با تعریف مجدد  $f(z)$  در نقطه  $z = z_0$  می‌توان انفراد را رفع کرد. مثلاً، تابع

$$f(z) = \begin{cases} z & |z| > 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

یک انفراد قابل رفع در  $z = 0$  دارد.

(ب) سری لوران  $f(z)$  ممکن است تعدادی متناهی جمله با توانهای منفی از  $(z - z_0)$  داشته

باشد. در این حالت  $z_0$  یک قطب از مرتبه  $m$  نام دارد، که در آن  $m$  - پایین ترین توان  $(z - z_0)$  در سری لوران است. مثلاً، تابع  $f(z) = (1/\sin z)^2$  در  $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  قطبهای از مرتبه دو دارد. اگر  $f(z)$  در  $z_0$  قطب از مرتبه  $m$  داشته باشد، تابع  $(z - z_0)^m f(z)$  در همسایگی  $z_0$  منتظم است.

(پ) سری لوران  $f(z)$  ممکن است شامل بی نهایت جمله با توانهای منفی از  $(z - z_0)$  باشد. در این حالت گوئیم  $f(z)$  در  $z = z_0$  انفراد اساسی دارد. مثلاً،  $e^{1/z}$  در  $z = 0$  انفراد اساسی دارد (و لذا،  $e^z$  در  $z = \infty$  انفراد اساسی خواهد داشت).

اگر  $z_0$  یک انفراد تنها باشد، ضریب  $a_{-1}$  در بسط لوران مانده  $f(z)$  در  $z_0$  نامیده می شود. همانطور که اینک بحث می شود، مانده به خاطر رابطه (ض ۱۴) اهمیت خاصی دارد.

۸. با استفاده از قضیه مانده ها به آسانی می توان انتگرال تابع  $f(z)$  را در امتداد مسیر بسته  $C$  حساب کرد؛ مسیر چنان است که  $f(z)$  در ناحیه محدود به  $C$  جز در تعدادی متناهی قطب و انفرادهای اساسی (تنها) در درون  $C$  منتظم می باشد. بنابر قضیه کشی، مسیر یا کنتور  $C$  را می توان بدون گذشتن از انفرادها طوری تغییر شکل داد که به دایره کوچک حول هر نقطه منفرد تحویل شود. در این صورت، انتگرال حول هر دایره کوچک با (ض ۱۴) داده می شود؛ در نتیجه، قضیه مانده ها را خواهیم داشت:

(ض ۱۵) 
$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum \text{مانده ها}$$
 که در آن مجموع روی تمام قطبها و انفرادهای اساسی داخل  $C$  گرفته می شود. این قضیه در محاسبه انتگرالها از اهمیت خاصی برخوردار بوده، و چند کاربرد آن در بخش ۳.۳ داده شده اند.

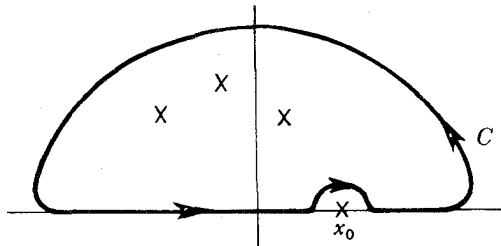
اگر یک قطب روی کنتور باشد چطور؟ اولین کار بررسی شرایط فیزیکی مسئله است که ببینیم وضع ناهنجار قطب از تقریبی ناشی شده است یا نه. اگر چنین بود، می توان تصمیم گرفت قطب در چه طرف مسیر واقع باشد؛ و بدین ترتیب، دید که آیا باید مانده آن را به حساب آورد یا نه.

یک انتگرال ریاضی با قطبی بر کنتور وجود ندارد، ولی به ازای یک قطب ساده بر محور حقیقی می توان مقدار اصلی کشی را به صورت زیر تعریف کرد:

(ض ۱۶) 
$$P \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x_0 - \delta} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \delta}^b \frac{f(x)}{x - x_0} dx \right]$$
 که در آن  $\delta$  مثبت است.

مسیر برای انتگرال مقدار اصلی کشی می تواند بخشی از یک کنتور بسته را تشکیل دهد

که در آن دو انتهای  $x_0 \pm \delta$  با یک نیمدایره<sup>۴</sup> کوچک به مرکز قطب به هم وصل می‌شوند (ر. ک. شکل ضی ۸).



شکل ضی ۸ توضیح یک قطب بر محور حقیقی

محاسبه<sup>۵</sup> انتگرال در امتداد این نیمدایره آسان است؛ اگر شعاع به صفر نزدیک شود،

$$f(z) \rightarrow a_{-1}(z - x_0)^{-1} \quad \text{فرض کنیم}$$

$$z - x_0 = re^{i\theta} \quad dz := ire^{i\theta} d\theta$$

در این صورت،

$$\int_{\text{نیمدایره}} f(z) dz \rightarrow - \int_0^\pi a_{-1} i d\theta = -\pi i a_{-1}$$

و اگر (که معمولاً<sup>۶</sup> چنین است) نیمدایره<sup>۷</sup> بزرگ مشارکتی نکند،

$$\oint_C f(z) dz = P \int f(z) dz - \pi i \quad (\text{مانده در } z_0) \\ = 2\pi i (\sum \text{مانده‌ها داخل } C)$$

از این نتیجه می‌شود که

$$(ضی ۱۷) \quad P \int f(z) dz = 2\pi i (\frac{1}{2} \text{ مانده در } x_0 + \sum C)$$

لذا، مقدار اصلی کشی متوسط دونتیجه<sup>۸</sup> حاصل از قطب داخل و خارج کنتور است.

ما اغلب انتگرالی در امتداد محور حقیقی با یک قطب ساده درست بالا (یا پایین)

محور در  $x_0$  داریم. اگر مسیر انتگرالگیری با یک نیمدایره<sup>۹</sup> کوچک در پایین (یا بالای)

قطب را از دست بدهد، می‌توان قطب را روی محور گرفت. در این صورت، با استدلالی

شبه آنکه به (ضی ۱۷) ختم شد معلوم می‌شود که می‌توان انتگرال را بر حسب مقدار اصلی

کشی به صورت زیر بیان کرد؛

$$\int \frac{f(x)}{x - x_0 \mp i\epsilon} dx = P \int \frac{f(x)}{x - x_0} dx \pm i\pi f(x_0)$$

این نتیجه را می‌توان به شکل علامتی بیان نمود:

$$(ضی ۱۸) \quad \frac{1}{x - x_0 \mp i\epsilon} = P \frac{1}{x - x_0} \pm i\pi \delta(x - x_0)$$

که در آن  $\delta(x - x_0)$  تابع دلتای دیراک تعریف شده در (۱۹.۴) است.

۹. قضیهٔ همانی می‌گوید هرگاه دو تابع در ناحیهٔ  $R$  منتظم بوده، و در هر نقطه از زیر ناحیه‌ای یا هر نقطه از قوسی از یک منحنی در  $R$  یا حتی تعداد نامتناهی و شمارش‌پذیر نقطه با نقطهٔ حدی در  $R$  مقادیر یکسان داشته باشند، آنگاه دو تابع همه جا در ناحیه یکسان خواهند بود. مثلاً، هرگاه در امتداد قوسی در  $R$  داشته باشیم  $f(z) = 0$ ، آنگاه  $f(z)$  همه جا در  $R$  تابع منتظم ۰ است.

این قضیه در توسیع توابع تعریف شده به صفحهٔ مختلط مفید است. مثلاً،

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots$$

تابع منحصر به فرد  $f(z)$  است که بر محور حقیقی مساوی  $e^x$  می‌باشد.

۱۰. تابع  $f(z)$  را در نظر می‌گیریم که در ناحیهٔ  $R$  از صفحهٔ مختلط تحلیلی بوده، و بخشی متناهی از محور حقیقی در  $R$  جا دارد. هرگاه تابع  $f(z)$  بر بخشی از محور حقیقی که در  $R$  است فقط مقادیر حقیقی بگیرد، آنگاه می‌توان نشان داد که در سراسر  $R$ ،  $f(z^*) = [f(z)]^*$ ، یعنی، رفتن از نقطهٔ  $z$  به "تصویر" آن در محور حقیقی، یعنی  $z^*$ ، چیزی جز انتقال مقدار  $f$  تابع به تصویر  $f^*$  آن نیست. این مطلب به اصل انعکاس شوارتز معروف است.

قضیهٔ همانی پایه‌ای برای روند تداوم تحلیلی می‌باشد. یک سری توانی حول نقطهٔ  $z_1$  نمایش یک تابع منتظم مانند  $f_1(z)$  در دایرهٔ همگرایی آن است که تا نزدیکترین افراد ادامه دارد. اگر این تابع را حول نقطهٔ جدید  $z_2$  بسط دهیم، سری حاصل در دایره‌ای همگراست که ممکن است ورای دایرهٔ همگرایی  $f_1(z)$  امتداد داشته باشد. مقادیر  $f_2(z)$  در ناحیهٔ وسعت یافته منحصراً با  $f_1(z)$ ، در واقع با مقادیر  $f_1(z)$  در ناحیهٔ مشترک همگرایی  $f_1(z)$  و  $f_2(z)$  معین می‌شوند. گوییم  $f_2(z)$  تداوم تحلیلی  $f_1(z)$  در ناحیهٔ جدید است. این فرایند را می‌توان آنقدر (با محدودیت‌های ذکر شده در زیر) تکرار کرد تا این عناصر تابع منفرد  $F(z)$  تمام صفحه جز نقاط منفرد را بپوشانند.

مثال

$$f_1(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

در یک دایره به شعاع ۱ همگرا به

$$F(z) = \frac{1}{1-z}$$

است. ولی  $F(z)$  همهجا جز در قطب ساده  $z = 1$  تحلیلی است، و تابع تحلیلی دیگری خارج  $|z| = 1$  نمی‌تواند در  $|z| < 1$  با  $f_1(z)$  یکی شود.  $f_1(z)$  تداوم تحلیلی منحصر به فرد  $f_1(z)$  در تمام صفحه می‌باشد.

همه توابع را نمی‌توان به‌طور نامحدود امتداد داد. تداوم ممکن است با مانعی از افرادها سد گردد.

همچنین، ممکن است تابع  $F(z)$  حاصل از تداوم چند مقداری باشد. مثلاً، فرض کنید با چند بار تکرار فرایند فوق، دایره همگرایی  $n$  م کمی روی اولی بیفتد. در این صورت، مقادیر عنصر  $f_n(z)$  در ناحیه مشترک ممکن است با  $f_1(z)$  سازگار باشند یا نباشند. اگر سازگار نباشند، تابع  $F(z)$  چند مقداری است، و "مسیر" تداوم یک یا چند نقطه شاخه‌ای را دور زده است.

هر سری توانی که همهجا همگرا باشد یک تابع تحلیلی یک مقداری بدون افراد در تمام صفحه را ( $\infty$  مستثنی است) تعریف می‌کند. یک چنین تابع یک تابع تمام نام دارد. مثالها عبارتند از چند جمله‌ایها،  $e^z$ ، و  $\sin z$ . هر تابع یک مقداری که در تمام صفحه ( $\infty$  مستثنی شده است) غیر از قطبها افراد نداشته باشد یک تابع هلوریخت نام دارد. مثالها عبارتند از توابع گویا، یعنی نسبتهای چند جمله‌ایها.

بحث را با ذکر قضیه لیوویل به پایان می‌بریم: هرگاه تابع  $f(z)$  همهجا در صفحه  $z$ ، به انضمام نقطه در بی‌نهایت، منتظم باشد، آنگاه  $f(z)$  ثابت می‌باشد.

## مراجع

بحث بسیار زیبایی از نظریه توابع یک متغیر مختلط را می‌توان در کتاب کوچک دو جلدی کنوپ (K4) یافت. این مبحث در کتب متعدد دیگری نظیر کاپسون (C8)؛ ویتاکرو واتسون (W5)؛ اپوستل (A5)؛ نهاری<sup>۱</sup> (N2)؛ و تیچمارش (T4) مطرح شده است.

## مسائل

ض ۱. نگاشت تولید شده با تابع

$$W(z) = \frac{1}{\sqrt{(z^2 + 1)(z - 2)}}$$

را توصیف کنید.



ض ۲. نگاشت تولید شده با تابع

$$W(z) = \frac{1}{\sqrt{z-1-i\sqrt{2}}}$$

را توصیف کنید.

ض ۳. از توابع زیر کدامها توابعی تحلیلی از متغیر مختلط  $z$  اند؟

(آ)  $|z|$

(ب)  $\operatorname{Re} z$

(پ)  $e^{\sin z}$

ض ۴. تابع  $f(z)$  در  $z = z_0$  قطبی از مرتبه  $n$  دارد. نشان دهید تابع  $f'(z)/f(z)$  در  $z_0$  قطب ساده دارد. مانده چیست؟

ض ۵. در مثالهای زیر،  $U(x, y)$  و  $V(x, y)$  به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع تحلیلی  $W(z)$  اند. کمیت‌های مفقود را بیابید.

(آ)  $U(x, y) = e^x \cos y, V(x, y) = ?, W(z) = ?$

(ب)  $U(x, y) = ?, V(x, y) = y(3x^2 - y^2 - 1), W(z) = ?$

(پ)  $U(x, y) = ?, V(x, y) = ?, W(z) = \tan^{-1} z$

ض ۶. مانده تابع  $z^2 e^{1/\sin z}$  را در انفراد (اساسی) تنهای  $z = \pi$  بیابید.

## واژه‌نامه

### فارسی به انگلیسی

test	آزمون
square	مربعی
ratio	نسبت
statistics	آمار
magnet	آهن‌ریا
quadrupole	چهارتایی
trace	اثر
of a matrix	یک ماتریس
probability	احتمال
a posteriori	پسین
a proiori	پیشین
conditional	شرطی
joint	مشترک
perturbation	اختلال
degenerate	واگن
vibration	ارتعاش
small	کوچک
molecular	مولکولی
spur	اسپور

of a matrix	یک ماتریس
spinor	اسپینور
independence	استقلال
statistical	آماري
linear	خطي
scalar	اسکالر
as a tensor	به عنوان یک تانسور
principle	اصل
reflection	انعکاس
variational	تغییری
exclusion	طرد
uncertainty	عدم قطعیت
integral	انتگرال
elliptic	بیضوی
tabulated	جدولی
particular	خصوصی
principal value	مقدار اصلی
exponential	نمایی
Integration	انتگرالگیری
contour	کنتوری
gaussian	گاوسی
deviation	انحراف
standard	معیار
curvature	انحناء
of a curve	یک منحنی
magnitude	اندازه
of a complex number	یک عدد مختلط
singularity	انفراد
essential	اساسی
isolated	تنها

removable	قابل رفع
contraction	انقباض
of tensor indices	اندیسهای تانسور
interval	بازه
in riemann geometry	در هندسهٔ ریمان
raising	بالا بردن
of tensor indices	اندیسهای تانسور
argument	بحث
symmetry	تقارن
fit	برآزش
least-squares	کمترین مربعات
vector	بردار
contravariant	ناوردا
orthonormal	متعامد بیکه
conjugate	مزدوج
covariant	هموردا
closure	بست
expansion	بسط
dimensionality	بعدیت
of a vector space	یک فضای برداری
anticommutator	پاد تعویضگر
antilinear	پاد خطی
contragredient	پاد گرادیان
parameter	پارامتر
osculating	بوسان
of an infinite group	یک گروه نامتناهی
stability	پایداری
basis	پایه

of vector space	فضای برداری
lowering	پایین آوردن
of tensor indices	اندیسهای تانسور
potential	پتانسیل
retarded	تاخیری
phenomenon	پدیده
polyad	پلیاد
envelope	پوش
torsion	پیچش
function	تابع
linear scalar	اسکالر خطی
sine-integral	انتگرال سینوسی
cosine-integral	انتگرال کسینوسی
integral	انتگرالی
beta	بتا
linear vector	بررداری خطی
elliptic	بیضوی
step	پله‌ای
analytic	تحلیلی
continued	تداوم
entire	تمام
meromorphic	تمام‌مریخت
stream	جریان
density	چگالی
multivalued	چندمقداری
secial	خاص
error	خطا
autocorrelation	خودهمبستگی
delta	دلتا

zeta	زتا
spherical	کروی
gamma	گاما
gaussian	گوسی
characteristic	مشخصه
complementary	مکمل
regular	منتظم
generating	مولد
wave	موج
confluent	همشار
homogeneous	همگن
functional	تابعی
string	تار
loaded	بارشده
vibrating	مرتعش
tensor	تانسور
fundamental	اساسی
curvature	انحناء
cartesian	دکارتی
metric	متریک
mixed	مخلوط
absolute	مطلق
contranvariant	ناوردا
relative	نسبی
covariant	هموردا
transform	تبدیل
integral	انتهگرالی
similarity	تشابه
sine	سینوسی
csine	کسینوسی

coordinate	مختصات
conformal	همدیس
congruent	همنهشت
homographic	هموگرافیک
unitary	یکانی
analysis	تحلیل
tensor	تانسوری
estimate	تخمین
error	خطا
unbiased	غیراریب
continuation	تداوم
analytic	تحلیلی
transpose	ترانهاده
of a matrix	یک ماتریس
combination	ترکیب
triad	تریاد
orthogonality	تعامد
variation	تغییر
of parameters	پارامترها
bounded	کراندار
symmetry	تقارن
of a function	یک تابع
approximation	تقریب
division	تقسیم
synthetic	مصنوعی
iteration	تکرار
completeness	تمامیت
periodicity	تناوب
double	مضاعف
distribution	توزیع

student	دانشجو
binomial	دوجمله‌ای
gaussian	گاوسی
chi-square	مربعی خی
normal	نرمال
constant	ثابت
structure	ساختار
permutation	جایگشت
algebra	جبر
of a group	بیک‌گروه
separation	جداسازی
of variables	متغیرها
summing	جمع‌بندی
series	سری‌ها
solution	جواب
fundamental	اساسی
series	به صورت سری
particular	خصوصی
second	دوم
singular	منفرد
cycloid	چرخزاد
density	چگالی
tensor	تانسور
polynomial	چندجمله‌ای
calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال ( حساب )
of variations	تغییرات



error	خطا
standard	معیار
line	خط
cut	برشی
branch	شاخه‌ای
point	نقطه‌ای
linearity	خطی
conjugate	مزدوج
circle	دایره
of convergence	همگرایی
degree	درجه
of differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل
interpolation	درونیابی
lagrangian	لاگرانژی
system	دستگاه
coordinate	مختصات
delta	دلتا
rotation	دوران
infinitesimal	بی‌نهایت کوچک
proper	سره
improper	ناسره
period	دورهٔ تناوب
of a group element	یک عنصر گروه
dyad	دیاد
dyadic	دیادیک
relation	رابطه
recursion	بازگشتی
dispersion	پراکندگی

reciprocity	تقابل
superconvergence	فوق همگرایی
likelihood	راستنمایی
relative	نسبی
walk	راه رفتن
random	تصادفی
class	رده
in a group	در یک گروه
method	روش
numerical	عددی
saddle point	نقطه زینی
graphical	نموداری
wronskian	رونسکی
root	ریشه
of equation	معادله
angle	زاویه
subgroup	زیرگروه
invariant	ناوردا
normal	نرمال
geodesic	ژئودزیک
series	سری
rearranged perturbation	اختلال آرایش مجدد یافته
hypergeometric	فوق هندسی
asymptotic	مجانبی
surface	سطح
sheet	ورقه
synchrotron	سنکروترون

alternating gradient	گرادیان متناوب
character	شاخص
of a group	یک‌گروه
branch	شاخه
of a function	یک تابع
pseudotensor	شبه تانسور
condition	شرط
quantization	کوانتشن
boundary	مرزی
unitary	یکانی
form	شکل
normal	نرمال
argument	شناسه
of a complex number	یک عدد مختلط
steepest	شیب‌ترین
descent	نزول
product	ضرب (حاصل ضرب)
scalar	اسکالر
outer	خارجی
inner	داخلی
coefficient	ضریب
binomial	دوجمله‌ای
undetermined	مجهول
dRum	طبل
vibrating	مرتعش
length	طول
of a vector	یک‌بردار

factor	عامل
integrating	انتگرالگیری
number	عدد
complex	مختلط
symbol	علامت
antisymmetric	پادمتقارن
causality	علیت
mean life	عمر میانگین
of unstable particle	ذره ناپایدار
operator	عملگر
projection	تصویر
commuting	تعویضگر
linear	خطی
hermitian	هرمیتی
nonsingular	نامنفرد
element	عنصر
of a matrix	یک ماتریس
phase	فاز
stationary	مانا
of a complex number	یک عدد مختلط
factorial	فاکتوریل
double	مضاعف
process	فرایند
random	تصادفی
stationary	ایستا
gaussian	گاوسی
frequency	فرکانس
normal	نرمال
formula	فرمول

inverse distance	عکس فاصله
connection	همبندی
space	فضا
vector	بررداری
linear	خطی
dual	دوگان
rule	قاعده
trapezoidal	دوزنقه
law	قانون
quotient	خارج قسمت
binormal	قائم دوم
part	قسمت
absorptive	جاذب
theorem	قضیه
convolution	پیچش
addition	جمع
central limit	حد مرکزی
identity	همانی
pole	قطب
diagonalization	قطری سازی
of a matrix	یک ماتریس
regula falsi	
constraint	قید
nonholonomic	غیر هولونوم
brachistochrone	کمترین زمان
contour	کنتور
group	گروه

abelian	آبلی
transformation	تبدیل
commutative	تعویضپذیر
symmetry	تقارن
lie	لی
symmetric	متقارن
alternating	متناوب
unitary	یکانی
unimodular	تک‌هنگی
moment	گشتاور
of a distribution	یک توزیع
lemma	لم
matrix	ماتریس
spin	اسپین
transfer	انتقال
antisymmetric	پادمتقارن
transformation	تبدیل
error	خطا
idempotent	خودتوان
rotation	دوران
block	قالبی
symmetric	متقارن
normal	نرمال
hermitian	هرمیتی
unitary	یکانی
residue	مانده
metric	متریک
orthogonalization	متعامدسازی

triangle	مثلث
equilateral	متساوی الاضلاع
order	مرتبه
of a tensor	یک تانسور
of a group element	یک عنصر گروه
of a group	یک گروه
of differential equation	یک معادله دیفرانسیل
conjugate	مزدوج
complex	مختلط
hermitian	هرمیتی
problem	مسئله
inhomogeneous	غیر همگن
boundary-value	مقدار مرزی
isoperimetric	هم محیطی
derivative	مشتق
functional	تابعی
variational	تغییری
differentiation	مشتقگیری
numerical	عددی
covariant	هموردا
characteristic	مشخصه
equation	معادله
hypergeometric	فوق هندسی
confluent	همشار
integral	انتهگرالی
linear	خطی
indicial	اندیسی
diffusion	پخش
difference	تفاضلی
linear	خطی

of motion	حرکت
differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل
separable	جدایی پذیر
partial	جزئی
elliptic	بیضوی
parabolic	سهموی
hyperbolic	هذلولوی
linear	خطی
secular	عام
inhomogeneous	غیر همگن
hypergeometric	فوق هندسی
exact	کامل
isobaric	هم فشاری
homogeneous	همگن
inverse	معکوس
of a matrix	یک ماتریس
of an operator	یک عملگر
value	مقدار
expectation	امید
mean	میانگین
cubic	مکعبی
twisted	پیچ خورده
wave	موج
elastic	الاستیک
outgoing	بیرون رونده
generator	مولد
of a group	یک گروه
component	مولفه
of a vector	یک بردار
of a linear scalar function	یک تابع اسکالر خطی



of a linear operator	یک عملگر خطی
inequality	نامساوی
normal	نرمال
principle	اصلی
normalization	نرمال سازی
theory	نظریه
probability	احتمال
perturbation	اختلال
point	نقطه
ordinary	عادی
singular	منفرد
regular	منتظم
irregular	نامنتظم
image	نقش
mapping	نگاشت
notation	نماد
cycle	دور
representation	نمایش
spinor	اسپینور
adjoint	الحاقی
integral	انتگرالی
faithful	باوفا
decomposable	تجزیه پذیر
reducible	تحویل پذیر
irreducible	تحویل ناپذیر
fully reducible	کاملاً "تحویل پذیر
partial fraction	کسر جزئی
conjugate	مزدوج
regular	منتظم

of a lie algebra	یک جبرلی
of a group	یک گروه
strip	نوار
conducting	هادی
charged	باردار
oscilation	نوسان
small	کوچک
sheet	ورقه
eigenvector	ویژه بردار
of a linear operator	یک عملگر خطی
of a matrix	یک ماتریس
eigenfunction	ویژه تابع
of Schrodinger equation	معادلهء شرودینگر
of a hermitian operator	یک عملگر هرمیتی
eigenvalue	ویژه مقدار
degenerate	واگن
conduction	هدایت
heat	گرما
kernel	هسته
displacement	تغییر مکان
resolvent	حلال
symmetric	متقارن
hermitian	هرمیتی
degenerate	واگن
of an integral	یک انتگرال
equivalence	هم‌ارزی
of group elements	عناصر گروه

of group representations	نمایشهای گروه
harmonic	هماهنگ
spherical	کروی
homomorphic	همریخت
cofactor	همعامل
cogredient	همگردیان
convergence	همگرایی
absolute	مطلق
coset	هم مجموعه
of a group	یک گروه
geometry	هندسه
differential	دیفرانسیل
Riemann	ریمانی
isomorphism	یکریختی

## واژه نامه

## انگلیسی به فارسی

abelian	آبلی
group	گروه
absolute	مطلق
convergence	همگرایی
tensor	تانسور
absorbitive	جذب کننده
part	قسمت
adjoint	الحاق (ی)
representation	نمایش
algebra	جبر
alternating	متناوب
gradient	گرادیان
group	گروه
analytic	تحلیلی
continuation	تداوم
function	تابع
anticommutator	پادتعویضگر
antilinearity	پادخطی
antisymmetric	پادمتقارن
matrix	ماتریس

symbol	علامت
a posteriori	پسین
probability	احتمال
a priori	پیشین
probability	احتمال
argument	شناسه
of a complex number	یک عدد مختلط
asymptotic	مجانبی
series	سری
autocorrelation	خود همبستگی
function	تابع
basis	پایه
of vector space	فضای برداری
beta	بتا
function	تابع
binomial	دوجمله‌ای
coefficient	ضریب
distribution	توزیع
binormal	قائم دوم
block	قالب (ی)
matrix	ماتریس
wave function	تابع موج
boundary	مرز (ی)
condition	شرط
value problem	مسئله مقدار
bounded	کراندار
variation	تغییر
branch	شاخه (ای)
line	خط

cut	برش
of a function	یک تابع
point	نقطه
calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال (حساب)
of variation	تغییرات
cartesian	دکارتی
tensor	تانسور
causality	علیت
relation	رابطه
central	مرکزی
limit theorem	قضیه حد
characteristic	مشخصه
function	تابع
character	شاخص
of a group	یک گروه
charged	باردار
strip	نوار
chi	خی
square distribution	توزیع مربعی
square test	آزمون مربعی
circle	دایره
of convergence	همگرایی
class	رده
in a group	در یک گروه
closure	بست
cofactor	همعامل
cogredient	همگردیان
combination	ترکیب
commutative	تعویضپذیر

group	گروه
commuting	تعویض ساز
operator	عملگر
complementary	مکمل
function	تابع
completeness	تمامیت
complex	مختلط
conjugate	مزدوج
number	عدد
component	مؤلفه
of a vector	یک بردار
conditional	شرطی
probability	احتمال
confluent	همشار
function	تابع
conformal	همدیس
transformation	تبدیل
congruent	همنهشت
transformation	تبدیل
conjugate	مزدوج
linearity	خطی
representation	نمایش
tensor	تانسور
vector	بردار
connection	همبندی
formula	فرمول
continuator	تداوم
continued	متداوم
function	تابع
contour	کنتور (ی)

انتگرالگیری

integration

انقباض

contraction

اندیسهای تانسور

of tensor indices

پادگرادیان

contragredient

پادوردا

contravariant

تانسور

tensor

بردار

vector

convergence

همگرایی

absolute

مطلق

of hypergeometric series

سری فوق هندسی

in the mean

میانگینی

convolution

پیچش

theorem

قضیه

coordinate

مختص (ات)

system

دستگاه

transformation

تبدیل

coset

هم مجموعه

of a group

یک گروه

cosine

کسینوس (ی)

integral function

تابع انتگرال

transform

تبدیل

covariant

هموردا

differentiation

مشتقگیری

tensor

تانسور

vector

بردار

curvature

انحناء

of a curve

یک منحنی

tensor

تانسور

cycle

دور

notation

نماد



cycloid	چرخزاد
decomposable	تجزیه پذیر
representation	نمایش
degenerate	واگن
eigenvalue	مقدار ویژه
kernel	هسته
perturbation	اختلال
degree	درجه
of differential equation	معادله دیفرانسیل
delta	دلتا
function	تابع
density	چگالی
diagonalization	قطری سازی
of matrix	ماتریس
difference	تفاضل (ی)
equation	معادله
differential	دیفرانسیل
equation	معادله
geometry	هندسه
differentiation	مشتق گیری
numerical	عددی
diffusion	پخش
equation	معادله
dimensionality	بعدیت
dispersion	پراکندگی
relation	رابطه
displacement	جابجایی
kernel	هسته
Dual	دوگان

space	فضای
dyad	دیاد
eigenfunction	ویژه تابع
of an operator	یک عملگر
eigenvalue	ویژه مقدار
degenerate	واگن
of a matrix	یک ماتریس
eigenvector	ویژه بردار
of a matrix	یک ماتریس
of an operator	یک عملگر
elastic	الاستیک
wave	موج
element	عنصر
of a matrix	یک ماتریس
elliptic	بیضوی
function	تابع
integral	انتگرال
partial differential equation	معادله دیفرانسیل جزئی
entire	تمام
function	تابع
envelope	پوش
equilateral	متساوی الاضلاع
triangle	مثلث
equivalence	هم‌ارزی
of group elements	عناصرگروه
of group representations	نمایشهای گروه
error	خطا
estimate	تخمین
function	تابع

matrix	ماتریس
essential	اساسی
singularity	انفراد
exact	کامل
differential equation	معادله دیفرانسیل
expectation	امید
value	مقدار (ارزش)
exponential	نمایی
integral	انتگرال
faithful	باوفا
representation	نمایش
functional	تابعی
derivative	مشتق
fundamental	اساسی
solution	جواب
tensor	تانسور
gamma	گاما
function	تابع
gaussian	گاوسی
distribution	توزیع
function	تابع
integration	انتگرالگیری
random process	فرایند تصادفی
generating	مولد
function	تابع
generator	مولد
of a group	یک گروه
geodesic	ژئودزیک

graphical	نموداری
approach	روش
group	گروه
character	شاخص
class	رده <sup>۶</sup>
coset	هم مجموعه <sup>۶</sup>
order	مرتبه <sup>۶</sup>
representaton	نمایش
heat	گرما
conduction	هدایت
hermitian	هرمیتی
conjugate	مزدوج
kernel	هسته <sup>۶</sup>
linear operator	عملگر خطی
matrix	ماتریس
homogeneous	همگن
function	تابع
homographic	هموگرافیک
transformation	تبدیل
homomorphic	همریخت
relation	رابطه <sup>۶</sup>
hyperbolic	هذلولوی
partial differential equation	معادله <sup>۶</sup> دیفرانسیل جزئی
hypergeometric	فوق هندسی
differential equation	معادله <sup>۶</sup> دیفرانسیل
series	سری
function	تابع
idempotent	خودتوان

matrix	ماتریس
identity	همانی
theorem	قضیه
image	نقش
improper	ناسره
rotation	دوران
impulse	پالس بالا
indicial	اندیسی
equation	معادله
infinitesimal	بی نهایت کوچک
rotation	دوران
inhomogeneous	غیر همگن
equation	معادله
problem	مسئله
inner	داخلی
product	حاصل ضرب
integral	انتگرال (ی)
equation	معادله
representation	نمایش
transform	تبدیل
evaluation	محاسبه
integrating	انتگرالگیری
factor	عامل
integration	انتگرالگیری
interpolation	درونمایی
interval	بازه
invariant	مانا
subgroup	زیرگروه
inverse	معکوس
distance formula	فرمول فاصله

of a matrix	یک ماتریس
of an operator	یک عملگر
irreducible	تحویل ناپذیر
representation	نمایش
irregular	نامنتظم
singular point	نقطه منفرد
Isobaric	همفشار
isolated	تنها
singularity	انفراد
isomorphism	یکریختی
of lie algebra	جبر لی
isoperimetric	هم محیطی
problem	مسئله
iteration	تکرار
jacobian	ژاکوبی
elliptic function	تابع بیضوی
joint	مشترک
probability	احتمال
lagrangian	لاگرانژی
equation	معادله
interpolation	درونیابی
polynomial	چند جمله‌بی
least-square	کمترین مربعات
fit	برازش
length	طول
of a vector	یک بردار
likelihood	راستمنامی
linear	خطی
difference equation	معادله تفاضلی

differential equation	معادله دیفرانسیل
independence	استقلال
integral equation	معادله انتگرال
operator	عملگر
scalar function	تابع اسکالر
vector function	تابع برداری
vector space	فضای برداری
loaded	بار شده
string	تار
lowering	پایین آوردن
of tensor indices	اندیسهای تانسور
magnitude	اندازه
of a complex number	یک عدد مختلط
mapping	نگاشت
matrix	ماتریس
mean	میانگین
life	عمر
value	مقدار
meromorphic	تمام ریخت
function	تابع
metric	متریک
tensor	تانسور
mixed	مخلوط
tensor	تانسور
modified	تعدیل یافته
Bessel function	تابع بسل
molecular	مولکولی
vibration	ارتعاش
moment	گشتاور

of a distribution	یک توزیع
multivalued	چند مقداری
function	تابع
nonholonomic	غیر هولونوم
constraint	قید
nonsingular	نامنفرد
operator	عملگر
normal	نرمال
distribution	توزیع
form	شکل
frequency	فرکانس
coordinate	مختص
mode	مد
matrix	ماتریس
of wave equation	معادله موج
subgroup	زیرگروه
normalization	نرمال سازی
numerical	عددی
method	روش
operator	عملگر
linear	خطی
order	مرتبه
of differential equation	معادله دیفرانسیل
of group	گروه
ordinary	عادی
point	نقطه
orthogonality	تعامد
orthonormal	متعامدیکه



vector	بردار
oscillation	نوسان
osculating	بوسان
parameter	پارامتر
outer	خارجی
product	حاصل ضرب
outgoing	بیرون رونده
wave	موج
parabolic	سهموی
partial	جزئی
fraction	کسر
particular	خصوصی
integral	انتگرال
solution	جواب
period	دوره، تناوب
of a group element	یک عنصر گروه
permutation	جایگشت
theory	نظریه
phase	فاز
of a complex number	یک عدد مختلط
pole	قطب
polyad	پلیاد
polyadic	پلیادیک
principle	اصل
normal	نرمال
value integral	انتگرال مقدار
probability	احتمال
theory	نظریه
projection	تصویر

operator	عملگر
proper	سره
rotation	دوران
pseudotensor	شبه تانسور
pulse	پالس
quadrupole	چهارتایی
magnet	آهن ربا
quotient	خارج قسمت
law	قانون
raising	بالا بردن
of tensor index	اندیس تانسور
random	تصادفی
walk	راه رفتن
rank	رتبه
of a tensor	یک ماتریس
ratio	نسبت
test	آزمون
rearranged	آرایش مجدد یافته
perturbation series	سری اختلال
reciprocity	تقابل
relation	رابطه
recursion	بازگشتی
relation	رابطه
reducible	تحویل پذیر
representation	نمایش
regular	منتظم

function	تابع
representation	نمایش
singular point	نقطهء منفرد
relative	نسبی
likelihood	راستنمایی
tensor	تانسور
removable	قابل رفع
singularity	انفراد
representation	نمایش
of a group	یک گروه
of a Lie algebra	یک جبرلی
residue	مانده
resolvent	حلال
kernel	هستهء
retarded	تاخیری
potential	پتانسیل
root	ریشه
of an equation	یک معادله
rotation	دوران
matrix	ماتریس
saddle	زین (ی)
point	نقطهء
scalar	اسکالر
as a tensor	یک تانسور
product	حاصل ضرب
secular	عام
equation	معادلهء
separable	جدایی پذیر
equation	معادلهء

separation	جداسازی
of variables	متغیرها
series	سری
asymptotic	مجانسی
similarity	تشابه
transformation	تبدیل
sine	سینوس (ی)
transform	تبدیل
sine-integral	انتگرال سینوسی
function	تابع
singular	منفرد
point	نقطه
solution	جواب
special	خاص
function	تابع
spherical	کروی
Bessel function	تابع بسل
harmonic	هماهنگ
spinor	اسپینور
representation	نمایش
spur	اسپور
of a matrix	یک ماتریس
stability	پایداری
of numerical integration	انتگرالگیری عددی
standard	معیار (متعارف)
deviation	انحراف
error	خطای
stationary	ساکن (مانا)
phase	فاز
random process	فرایند تصادفی

statistical	آماري
independence	استقلال
statistics	آمار
steepest	شيب ترين
descent	نزول
step	پله (اي)
function	تابع
stream	جريان
function	تابع
structure	ساختار
constant	ثابت
subgroup	زيرگروه
subtract	تفریق (ی)
dispersion relation	رابطه پراکندگی
suprerconvergence	فوق همگرایی
relation	رابطه
symmetric	متقارن
group	گروه
kernel	هسته
matrix	ماتریس
symmetry	تقارن
group	گروه
synthetic	مصنوعي
division	تقسیم
tabulated	به جدول درآمده
integral	انتگرال
tensor	تانسور
analysis	آنالیز
density	چگالی
torsion	پیچش

trace	اثر
of a matrix	یک ماتریس
transfer	انتقال
matrix	ماتریس
transformation	تبدیل
group	گروه
matrix	ماتریس
transpose	ترانسهاده
of a matrix	یک ماتریس
trapezoidal	ذوزنقه
rule	قاعده
triad	تریاد
twisted	پیچ خورده
cubic	مکعبی
unbiased	غیراریب
estimate	تخمین
uncertainty	عدم قطعیت
principle	اصل
undetermined	مجهول
coefficient	ضریب
unimodular	تک‌هنگی
unitary group	گروه یکانی
unitary	یکانی
condition	شرط
matrix	ماتریس
trasformation	تبدیل
variance	پراش
variation	تغییر

of parameters	پارامترها
variational	تغییری
derivative	مشتق
variation(s)	تغییر (ات)
calculus	حساب
vector	بردار
space	فضای
vibrating	مرتعش
drum	طبل
string	تار
wronskian	رونسکی
zeta	زتا
function	تابع

## فهرست راهنما

آزمون

مربعی خی ، ۳۹۹

نسبت برای همگرایی یک سری نامتناهی ، ۴۷

آمار ، ۳۷۷

آنالیز تانسویری ، ۴۱۶

آهن ربای چهارتایی ، ۱۳۰

اثر ماتریس ، ۱۵۲

احتمال

پسین ، ۳۷۷

پیشین ، ۳۷۷

شرطی ، ۳۷۸

مشترک ، ۳۷۸

اختلال واگن ، ۳۰۲

ارتعاش

کوچک ، ۱۶۱

مولکولی ، ۱۶۱

اسپوریک ماتریس ، ۱۵۲

اسپینور ، ۴۷۵

استدلال تقارنی برای ارزیابی انتگرال ، ۶۴

استقلال



- آماری، ۳۷۹  
خطی بردارها، ۱۴۷  
اسکالر  
به عنوان یک تانسور رتبه ۶ صفر، ۴۱۲  
اصل  
انعکاس شوارتز، ۴۹۱  
تغییری هامیلتون، ۳۳۱  
طرد پائولی، ۴۵۰  
عدم قطعیت، ۱۰۸ و ۱۱۰  
انتگرال، ۶۱  
ایری، ۱۲۰  
بسل، ۱۹۱  
بیضوی، ۸۰  
لژاندر، ۸۱ و ۸۲  
جدولی، ۷۸  
خصوصی، ۷  
فرنل، ۸۰  
مقدار اصلی کشی، ۴۸۹  
نمایی، ۷۹  
انتگرالگیری، ۳۵۴  
گاوسی، ۳۵۵  
کنتوری، ۶۸  
انحراف، معیار، ۳۸۶  
انحنای یک منحنی، ۴۱۵  
اندازه یک عدد مختلط، ۴۸۰  
انفراد  
اساسی، ۴۸۹  
تنها، ۴۸۸  
قابل رفع، ۴۸۸  
انقباض اندیسهای تانسور، ۴۱۹

- بازه در هندسهٔ ریمانی، ۴۲۳  
بالا بردن اندیسهای تانسور، ۴۲۲  
برازش کمترین مربعات، ۳۹۶  
بردار (های)، ۱۴۶  
پاد وردا، ۴۱۷  
متعامد یک، ۱۵۶  
هموردا، ۴۱۸  
پایانانسور مزدوج، ۴۶۶  
بریدگی شاخهای، ۴۸۲  
بست، ۲۷۴  
بسطلوران، ۴۸۸  
بعد یک فضای برداری، ۱۴۷  
پاد تعویضگر، ۴۷۸  
پاد خطی، ۱۵۶  
پاد گرادیان، ۱۵۴  
پارامتر  
بوسان، ۹  
یک گروه نامتناهی، ۴۵۶  
پایداری  
انتگرالگیری عددی، ۳۵۹  
معادلهٔ دیفرانسیل، ۳۵۹  
معادلهٔ سهموی، ۲۳۴  
پایهٔ فضای برداری، ۱۴۷  
پایه‌های متعامدیکه، ۱۵۶  
پایین آوردن اندیسهای تانسور، ۴۶۶ و ۴۲۲  
پتانسیل  
تاءخیری، ۲۸۹  
لینارد - ویشرت، ۲۹۱  
پدیده

استوکس، ۳۴

گیس، ۱۰۲ و ۱۲۵

پراش، ۳۸۶

پلیاد، ۴۱۴

پلیادیک، ۴۱۴

یوش جواسهای یک معادله دیفرانسیل، ۶

پیچش، ۴۱۶

۴

تابع

اسکالر خطی یک بردار، ۱۵۵

انتگرالی فرد هولم، ۳۰۸

بتا، ۷۹

بسل، ۱۸۶

تعدیل یافته، ۱۹۳

کروی، ۱۹۴، ۲۳۷

بررداری خطی یک بردار، ۱۴۷

بیضوی، ۲۱۱ و ۲۱۷

دو دوره تناوبی، ۲۱۳

زاکوبی، ۲۱۲ و ۲۱۸

پلهای، ۱۱۱

هوی ساید، ۱۱۱

تحلیلی، ۴۸۵

تمام، ۴۹۲

جریان، ۱۳۲

چگالی، ۲۷۳

چند مقداری، ۴۸۲

خاص، ۱۷۴

خطا، ۸۰

خود همبستگی، ۳۹۱

دلتا (دیراک)، ۱۰۵

دلتای سه بعدی، ۱۰۹

زتای ریمان، ۴۷

سینوس - انتگرال، ۶۴ و ۸۰

فوق هندسی، ۱۹۴

کسینوس - انتگرال، ۶۴ و ۸۰

کومر، ۲۰۲

گاما، ۶۲ و ۷۸

گاوسی، ۱۰۹

گرین، ۲۷۶

لژاندر مربوطه، ۲۳ و ۱۸۲ و ۲۳۶

ماتیو، ۲۰۸

مشخصه یک توزیع، ۳۸۷

مکمل، ۷

منتظم، ۴۸۶

موج بلوک، ۲۰۸

مولد

تابع بسل، ۱۹۰

چند جمله‌ای لژاندر، ۱۷۷

چند جمله‌ای هرمیت، ۲۱۹

گشتاور توزیع احتمال، ۳۸۷

ویتاکر، ۲۰۵

هلوریخت، ۴۹۲

همشار فوق هندسی، ۲۰۲

همگن، ۴

هنکل، ۱۹۲

کروی، ۲۳۷

تابعی، ۳۲۹

نار

انباشته، ۱۶۷

مرتعش، ۲۷۱ و ۲۸۷

تام ، ۱۴۷

تانسور

اساسی ، ۴۲۲

پادوردا ، ۴۱۸

خمیدگی ریمان ، ۴۲۶

دکارتی ، ۴۰۸

متریک ، ۴۲۳

مخلوط ، ۴۱۸

مطلق ، ۴۲۱ و ۴۲۵

نسی ، ۴۲۰

هموردا ، ۴۱۹

تبدیل

انتگرال ، ۹۹

اویلر ، ۵۶

تشابه ، ۱۵۵

سومرفلد - واتسون ، ۷۷

سینوسی ، ۱۰۷

شوارتز ، ۱۴۳

فوریه ، ۱۰۴

فوریه - بسل ، ۱۱۳

کسینوسی ، ۱۰۶

کومر ، ۲۰۵

لاپلاس ، ۱۱۰

مختصات ، ۱۵۳

ملین ، ۱۱۳

همدیس ، ۱۲۸

همنهشت ، ۱۶۳

هموگرافیک ، ۱۹۶

هنکل ، ۱۱۳ و ۲۲۱

هیلبرت ، ۱۱۳ ، ۳۲۳

یکانی، ۱۵۷

تحلیل تانسوری،

تخمین

غیر اریب، ۴۰۵

خطا در درونبایی، ۳۵۳

برای روش شفقورت - آدامز - میلن، ۳۵۸

تداوم تحلیلی، ۴۹۱

ترانسهاده یک ماتریس، ۱۵۲

ترکیب و جایگشت، ۳۸۰

تریاد، ۴۱۴

تصویر، ۲۵۴

تعامد، ۱۸۲

بردارها،

توابع بسل، ۱۸۸

توابع لژاندر مربوطه، ۱۸۲

چند جمله‌ایهای لژاندر، ۱۷۹

ماتریس، ۱۵۲

مشخصه‌های گروه، ۴۴۲

نمایشهای گروه، ۴۳۹

ویژه توابع

عملگر هرمیتی، ۲۷۲

ماتریس هرمیتی، ۱۵۹

تغییر، ۳۲۹

پارامتر، ۹

کراندار، ۱۰۰

تقارن تابع گرین، ۲۷۸

تقریب بورن، ۳۱۲

تقسیم مصنوعی، ۳۶۶

تکرار، ۲۶

تمامیت، ۱۴۷ و ۲۷۴

توزیع

پواسون، ۳۸۴  
(۱) دانشجو، ۴۰۴  
خی به توان دو،  
دو جمله‌ای، ۳۸۳  
گاوسی، ۳۸۳ و ۳۸۶  
نرمال، ۳۸۳

ثابت ساختاری گروه لی، ۴۶۳

جایگشت، ۳۸۰  
جبر

لی، ۴۶۴  
یک گروه، ۴۳۲  
جداسازی متغیرها، ۲۳۴ و ۲۴۳  
جمع سریها به روش عددی، ۳۶۸  
جواب

اساسی، ۲۸۳  
به صورت سری معادلات دیفرانسیل، ۱۳  
دوم معادله

فوق هندسی، ۱۹۸

همشار، ۲۰۳

بسل، ۱۸

لزاندِر، ۱۷۴

فرد هولم معادله انتگرال، ۳۱۲ و ۳۲۷  
منفرد یک معادله دیفرانسیل، ۶  
یا انتگرال خصوصی، ۷

چرخزاد، ۳۳۳

چگالی تانسور، ۴۲۰

چند جمله‌ای

ژاکویی، ۲۰۱

لاگر، ۲۰۳

لژاندر، ۱۶ و ۱۷۶

هرمیت، ۲۱ و ۲۰۳

حساب تغییرات، ۳۲۹

خطای معیار، ۳۹۳

خط

شاخه‌ای، ۴۸۲

دایره همگرایی، ۴۸۸

درجه معادله دیفرانسیل، ۱

درونیایی، ۳۵۰

لاگرانژین، ۳۵۲

دستگاه مختصات برای فضای برداری، ۱۴۷

دلتای کرونکر، ۱۰۳

دوران

بی نهایت کوچک، ۴۶۳ و ۴۷۲

سر، ۴۱۳

ناسره، ۴۱۳

دوره تناوب یک عنصر گروه، ۴۳۴

دیاد، ۴۱۴

دیادیک، ۴۱۴

رابطه، ۱۴۵

بازگشتی برای

تابع بسل، ۱۸۶

چند جمله‌ای لژاندر، ۱۷۸



- ضرایب، ۱۵ و ۱۶ و ۲۱  
پراکندگی، ۱۳۴  
تفریق شده، ۱۴۰  
فوق همگرایی، ۱۴۵  
وارونی تابع گرین، ۲۷۸  
راستمنامی، ۳۹۲  
نسی، ۳۹۲  
راه رفتن تصادفی، ۴۰۲ و ۴۰۲  
رده در یک گروه، ۴۳۵  
روش WKB، ۲۷  
بشفورت - آدامز - میلن، ۳۵۸  
رسم شکل، ۲۳  
رونکه - کوتا، ۳۵۸  
ریلی - ریتس، ۳۴۲  
نقطه - زمین، ۸۶  
نموداری برای حل یک معادله دیفرانسیل،  
نیوتن برای ریشه‌های معادلات، ۳۶۴  
وینر - هویف، ۳۲۰  
هورنر برای ریشه‌های چند جمله‌ای، ۳۶۵  
رونسکی، ۳۲ و ۳۶  
ریشه‌های معادلات، ۳۶۵  
  
زوایای اویلر، ۴۱۰  
زیر گروه، ۴۳۴  
ناوردا، ۴۳۷  
نرمال، ۴۳۷  
  
ژئودزیک، ۴۲۷

اختلال با آرایش مجدد ، ۳۰۱

شیلور ، ۱۴ و ۴۸۸

فوریه ، ۹۹

فوق هندسی ، ۱۹۴

گریگوری ، ۱۰۲ و ۳۷۱

مجانبی ، ۸۵

نویمان برای انتگرال ، ۳۱۱

سطح ورقه‌ ریمان ، ۴۸۳

سنکر و ترون گرادیان متناوب ، ۱۳۰

شاخه‌ یک تابع ، ۴۸۳

شبه تانسور ، ۴۱۳

شرط

کوانتش بوهر - سومر فلد ، ۳۹

مرزی

کشی ، ۲۲۷

دیریکله ، ۲۲۷

معادلات دیفرانسیل جزئی ، ۲۲۷ و ۲۳۴

نویمان ، ۲۲۷

یکانی در دامنه‌ پراکندگی ، ۳۲۴

شکل نرمال معادله‌ موج یک بعدی ، ۲۳۱

شناسه‌ یک عدد مختلط ، ۴۸۰

شیب ترین نزول ، ۸۶

صفحه‌ ریمان ، ۴۸۳

ضرب

اسکالر ، ۱۵۶

خارجی بردارها و تانسورها ، ۴۱۱ و ۴۱۲

داخلی ، ۱۵۶

ضریب

دو جمله‌ای، ۳۸۰

لاگرانژ، ۳۳۷

نامعین، ۸

طبل مرتعش، ۲۴۰ و ۲۷۵

طول یک بردار، ۱۵۶

عامل انتگرالگیری، ۲

عدد

اویلر، ۵۰ و ۵۹

برنولی، ۵۰ و ۵۱

مختلط، ۴۸۰

علامت

پاد متقارن لوی - چپوتیا، ۴۱۲

به عنوان تانسور

دکارتی، ۴۱۲

عمومی، ۴۱۹

پی ریمان، ۱۹۶

کریستوفل، ۴۲۴

علیت، ۱۳۵

عمر میانگین، ۳۹۴

عملگر

تصویر، ۱۴۹

تعویضگر، ۱۴۹

خطی، ۱۴۸ و ۱۶۹

هرمیتی، ۲۷۱

نامنفرد، ۱۴۹

عنصر یک ماتریس، ۱۵۰

فاز

ایستا، ۹۳

یک عدد مختلط، ۴۸۵

فاکتوریل مضاعف، ۱۷۹

فرایند تصادفی

گاوسی، ۳۹۱

مانا، ۳۹۱

فرکانس نرمال، ۱۶۳

سرطیل دایره‌ای، ۲۴۱

مثلث متساوی الاضلاع، ۲۴۸

فرمول

ارتباط برای روش WKB، ۳۵ و ۳۸ و ۱۲۵

استرلینگ، ۸۷

انتگرال کشی، ۴۸۷

اویلر - مایکلورن، ۳۶۹

رد ریگوز برای چند جمله‌ایهای لژاندر، ۱۷۶

عکس فاصله، ۱۷۷

فرنه، ۴۱۶

فضا (ی)

برداری، ۱۳۹

خطی، ۱۳۹

دوگان، ۱۵۶

هیلبرت، ۱۶۸

قاعده (ی)

دوزنقه، ۳۵۴

سیمپسون، ۳۵۴

قانون خارج قسمتی، ۴۲۱

قائم

اصلی، ۴۱۵

- دوم ، ۴۱۶  
قسمت جاذب دامنه پراکندگی ، ۳۲۳  
قضیه (ی)  
بیز ، ۳۷۹  
پارسوال ، ۱۰۶  
پیچش ، ۱۱۶  
جمع برای هماهنگهای گروهی ، ۱۸۳  
حد مرکزی ، ۳۸۸  
فلوکه ، ۲۰۶ و ۲۰۷  
کشی ، ۴۸۷  
لیوویل  
لیوویل ، ۴۹۲  
میتاگ - لفلر ، ۵۵  
همانی ، ۴۹۱  
قطب ، ۴۸۹  
قطری سازی ماتریس ، ۱۶۰ و ۱۶۴  
قید غیر هولونوم ، ۳۳۸  
  
کسر مسلسل ، ۲۱۱  
کمترین زمان ، ۳۳۲  
کنترلر پوچ هامر ، ۱۹۹  
  
گروه ، ۴۳۱  
آبلی ، ۴۳۲  
تبدیل ، ۴۵۸  
تعویضپذیر ، ۴۳۲  
تقارن ، ۴۳۳ و ۴۴۹ و ۴۵۱  
لی ، ۴۵۷  
متقارن بر شی ، ۴۳۲  
متناوب ، ۴۴۶

یکانی یک هنگی، ۴۵۷

گشتاور یک توزیع، ۳۸۶

لم

ژردان، ۷۰

شور، ۴۳۹

ماتریس، ۱۵۰

اسپین پاولی، ۴۷۳

انتقال، ۱۷۳

یاد متقارن، ۱۵۲

تبدیل، ۱۵۴

خطا، ۳۹۸

خودتوان، ۱۵۲

دوران، ۴۷۰

قالبی، ۱۵۳

متقارن، ۱۵۲

نرمال، ۱۶۶

هرمیتی، ۱۵۲

یکانی، ۱۵۲

مانده، ۶۸ و ۶۸ و ۴۸۹

متر، ۱۵۶

متعامد سازی گرام - اشمیت، ۱۶۰

مثلث متساوی الاضلاع، ۲۴۶

رتبه یک نانسور، ۴۱۲

مرتبه

معادله دیفرانسیل، ۱

یک عنصر گروه، ۴۳۴

یک گروه، ۴۳۲

مزدوج

- خطی، ۱۵۶  
مختلط، ۴۸۰  
هرمیتی یک ماتریس، ۱۵۲  
مسئله  
غیر همگن، ۲۷۶  
مقدار مرزی، ۲۳۸ و ۲۷۵  
هم محیطی، ۳۳۷  
مشتق  
تابعی، ۳۳۱  
تغییری، ۳۳۱ و ۳۳۴ و ۳۳۴  
مشتفگیری  
عددی، ۳۵۳  
هموردا، ۴۲۴  
مشخصه، ۲۲۹  
مشخص یک گروه، ۴۴۱  
معادله  
انتگرال، ۳۰۸  
خطی، ۳۰۸  
ولترا، ۳۰۹ و ۳۱۹  
اندیسی، ۱۷  
اویلر - لاگرانژ، ۳۳۱  
سل، ۱۲ و ۱۶ و ۱۸۵  
پخش، ۲۲۶ و ۲۴۴ و ۲۴۸ و ۲۵۱  
تفاضلی، ۳۵۹  
خطی، ۳۵۹  
عام، ۱۵۸  
حرکت لاگرانژ، ۳۳۱  
معادله دیفرانسیل  
استورم - لیوویل، ۲۷۳  
برنولی، ۴

جدایی پذیر، ۱

جزئی، ۲۲۵

بیضوی، ۲۲۹

سه‌موی، ۲۲۹

هذلولوی، ۲۲۹

خطی، ۷

غیر همگن، ۷

فوق هندسی، ۱۹۴

کامل، ۲

کشی - ریمان، ۱۲۸ و ۴۸۶

لژاندر، ۱۵ و ۱۷۴

معمولی، ۱

هرمیت، ۲۱

همفشار، ۴ و ۱۳

همگن

جزئی، ۲۱۸

معمولی، ۴ و ۷

شرو دینگر، ۲۲۶

کلرو، ۵

لاپلاس، ۲۱۸ و ۲۳۲

لژاندر مربوطه، ۲۲ و ۱۸۲ و ۲۳۶

هلمهولتز، ۲۳۵ و ۲۴۱

هیل، ۲۰۷

معکوس

یک عملگر، ۱۴۹

یک ماتریس، ۱۵۱

مقدار

امید، ۳۸۶

میانگین، ۳۸۶

مکعب پیچ خورده، ۴۲۹



موج

الاستیک، ۲۶۳

بیرون رونده، ۲۳۸

مولد یک گروه، ۴۵۸

موءلفه‌ها (ی)

بردار، ۱۴۸

تابع اسکالر خطی، ۱۴۸

عملگر خطی، ۱۴۸

نامساوی

بسل، ۱۷۲

کشی - شوارتز، ۱۷۲

نرمال سازی

تابع بسل، ۱۸۹

تابع لژاندر مربوطه، ۱۸۲

چند جمله‌ای لژاندر، ۱۸۰

نظریه (ی)

احتمال، ۳۷۷

اشمیت - هیلبرت، ۳۱۴

اختلال، ۲۹۵

نقطه (ی)

معمولی معادله دیفرانسیل، ۱۴

منفرد معادله دیفرانسیل، ۱۹

منفرد غیر منتظم معادله دیفرانسیل، ۱۵

منفرد منتظم معادله دیفرانسیل، ۱۴

نگاشت، ۴۸۰

نماد دوری برای گروه تقارن، ۴۳۳

نمایش، ۴۳۰

اسپینور، ۴۷۵

الحاقی، ۴۷۸

- انتگرالی، ۸۲  
شلفلی، ۱۷۷  
لاپلاس، ۱۷۷  
باوفا، ۴۳۸  
تجزیه پذیر، ۴۳۸  
تحویل پذیر، ۴۳۸ و ۴۴۳  
تحویل ناپذیر، ۴۳۸  
زیر گروه، ۴۲۴  
کاملاً "تحویل پذیر، ۴۳۸  
کسرهای جزئی کتانژانت، ۵۵  
متقارن، ۴۳۳  
مزدوج، ۴۶۹  
منتظم یک گروه، ۴۴۴  
یک جبرلی، ۴۷۸  
یک گروه، ۴۲۷  
نوار هادی باردار، ۱۳۲  
ویژه  
بردار، ۱۵۷  
عملگر خطی، ۱۵۷  
ماتریس، ۲۷۰  
تابع، ۲۶۹  
عملگر هرمیتی، ۲۷۲  
معادله شرودینگر، ۲۱  
مقدار،  
ماتریس، ۱۵۸ و ۲۶۹  
هرمیتی، ۱۵۹  
معادله انتگرال، ۳۰۸ و ۳۱۰  
معادله شرودینگر، ۲۲ و ۲۵  
واگن، ۱۵۹

هدایت گرما در یک مکعب ، ۲۴۲ و ۲۵۴  
هسته (ی)

تغییر مکان ، ۳۱۹

حلال معادله انتگرال ، ۳۱۲ و ۳۱۷

متقارن ، ۳۱۴

واکن معادله انتگرال ، ۳۰۹

هرمیتی ، ۳۱۴

یک معادله انتگرال ، ۱۶۹ و ۳۰۸

هم ارزی

عناصر گروه ، ۴۳۵

نمایشهای گروه ، ۴۳۸

هماهنگ کروی ، ۱۸۳ و ۱۸۵

همریخت ، ۴۳۸

همعامل ، ۱۵۱

همگرادیان ، ۱۵۴

همگرایی

سری فوق هندسی ، ۴۸

مطلق ، ۴۶

هم مجموعه یک گروه ، ۴۳۴

هندسه

دیفرانسیل ، ۴۰۸

ریمانی ، ۴۲۳

یکریختی ، ۴۳۸