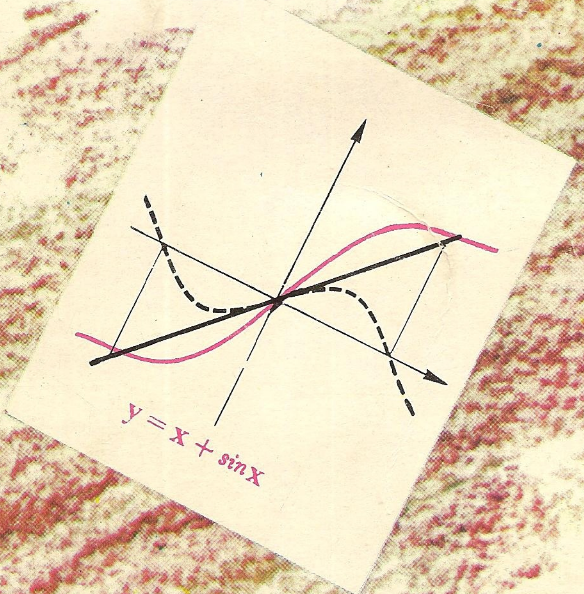
روشهای مثلثات

نوشتهٔ
پرویز شهریاری
احمد فیروزنیا



روشهای مثلثات

با تجدید نظر

نوشتهٔ
پرویز شهریاری
احمد فیروزنیا

انتشارات توسعه ـ تهران ـ صندوق پستی ۱۱۳۶۵/۵۸۵
انتشارات فردوس: خیابان مجاهدین اسلام، شمارهٔ ۲۶۲ ـ تلفن: ۳۰۲۵۳۳

روشهای مثلثات
پرویز شهریاری ـ احمد فیروزنیا
چاپ هفتم: ۱۳۶۹ ـ تهران
چاپ: چاپخانهٔ کیهانک ـ تهران
تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

مقدمهٔ چاپ اول

برنامه‌های ریاضیات دبیرستانی، چه در ایران و چه در سایر جاها، چنانست که دانش‌آموز را مقید به تبعیت از روشهای عمومی می‌کند و مجال این را نمی‌دهد که در انواع مسائل و روشهای خاص و جالبی که در هرشاخهٔ ریاضیات به فراوانی وجود دارد، کاوش بیشتری بکند و جنبه‌های مختلف استدلال را بررسی نماید. همین قید باعث می‌شود که دانش‌آموز علاقمند به‌ریاضیات بطور یکجانبه بارآید و همه چیز را محدود به مطالب کتابهای درسی بداند. وقتی‌که هرگاه وبیگاه با مسائل و روشهای ناآشنائی روبرو می‌شود، تصور می‌کندکه با استثنا و معمایی روبروست و راه حلی هم که برای آن پیدا شده است تصادفی و دور از ذهن است.

به‌همین مناسبت است‌که ضرورت تهیهٔ کتابهای جنب درسی، ازآن نوع که بتواند این جای خالی را پراکند، احساس می‌شود و تلاش مؤلفان این کتاب هم در همین جهت بوده است. آنجا که مباحثی از درس مثلثات آمده است مطلقاً مطالب کتابهای درسی، دانسته فرض شده وتنها به‌نکاتی توجه شده است که احتمالا برای خوانندهٔ علاقمند تازگی داشته است.

در تنظیم فصلها و تهیهٔ مسائل این‌کتاب از هیچ منبع خاصی استفاده نشده است و در عین حال که مدارك ومنابع بسیاری را، بخصوص برای تهیهٔ مسائل مورد نظر، زیرورو کرده‌ایم، تکیهٔ اساسی بر تجربهٔ دوران طولانی معلمی مؤلفان بوده است.

ادعا نداریم که در این‌کار موفق شده‌ایم ولی به‌هرحال قدم اول را برداشته‌ایم و تردید نداریم که گذشت زمان و دقت همکاران و علاقمندان امکان تکامل آنرا بدست خواهد داد.

مؤلفان

مقدمهٔ چاپ سوم

چاپ اول این‌کتاب مورد توجه معلمان علوم ریاضی و دانش‌آموزان واقع شد و مؤلفان را به‌تجدید چاپ این‌کتاب وتألیف کتابهای مشابه مشوق گردید. چاپ دوم‌کتاب بدون اطلاع مؤلفان منتشر شد و لـذا اصلاح چند غلط چاپی وبعضی تغییرات لازم و مفید میسر نشد. اینك که چاپ سوم کتاب وسیلهٔ انتشارات فردوس‌آماده شده و ازلحاظ خواننده می‌گذرد این توفیق نصیب شده است که غلط‌های چاپـی اصلاح و بعضی تغییرات درمتن صورت مسایل و راه حل آنها داده شود قسمت اول کتاب کـه شامـل بیان مطالب و روشها و حل مسایل نمونـه است مجدداً حروف‌چینی شده، و درقسمت حل مسایل هم اصلاحاتی به عمل آمده است.

امید است ایـن تغییرات در جهت کمال باشد، از آنجا که اظهار نظر همکاران و عموم علاقمندان راهـی بسوی تکامـل است امید آن داریم کـه اجابت این مسئول از طریق ارباب فضل مقبول افتد و توفیق در ارائهٔ این اثر را موجب باشد.

مؤلفان

در این کتاب

۱. مختصری تاریخ - موضوع مثلثات

مثلثات از جملهٔ علومی از ریاضیات است که پایه‌گذاری و پیشرفت آنرا، بیش از همه، مدیون ریاضی‌دانهای شرق و بخصوص ایرانی هستیم.

مطالعات نجومی، ریاضی‌دانهای بابل قدیم و یونان را بسمت مطالبی کشانده بود که می‌توان به عنوان مقدمهٔ پیدایش مثلثات به حساب آورد.

اقلیدس[1] از اولین دانشمندانی‌است که دراین زمینه تلاشهائی کرده است.

آریستارك[2] و **اراتوستن**[3] بخاطر محاسبات نجومی و زمین پیمائی (Géodériquc) از مفاهیم اولیهٔ مثلثات استفاده می کردند.

کوشش **ارشمیدس**[4] برای‌بررسی دایره،منجربه محاسبهٔ وترها

---

۱. دانشمند یونانی دره ۳۰۰سال‌قبل از میلاد. معروف‌ترین اثر او«مقدمات» است.

۲ و ۳. Aristarque ، Eratosthéne ؛ دو دانشمند مقیم‌اسکندریه درقرن سوم قبل ازمیلاد.

۴. دانشمند معروف یونانی ملقب به خدای ریاضیات (۲۱۲-۲۸۷قبل از میلاد).

وپیدا کردن رابطه‌هائی برای محاسبهٔ جمع وتفریق کمانها شد.

شاید بتوان **هیپارک**[۱] را بینان‌گذار اصلی مثلثات دانست. او در محاسبات خود تقسیم‌بندی شصت قسمتی[۲] بابلیها را دربارهٔ دایره به درجه ودقیقه پذیرفت و جدولی تنظیم کرد که در آن بعضی وترها محاسبه شده بود، واین قدیمی ترین جدول مثلثاتی است که تا کنون شناخته شده است.

منه‌لائوس[۳] هم در مثلثات مسطحه و کروی مطالعاتی دارد. **بطلمیوس**[۴] درتألیف اساسی‌خود «المجسطی» (Almageste) مثلثات زمان خود را ذکر کرده است.

ولی درتمام کارهای یونانیهای قدیم، مثلثات قسمتی از هندسه بشمار می‌رفت، آنها همیشه وتر قوسها را بکار می‌بردند و در آثار آنها نمی‌توان مطالبی که به معنای خطوط مثلثاتی قوسها باشد پیدا کرد.

---

۱. Hipparque؛ منجم مشهور اواسط قرن دوم بعد ازمیلاد.

۲. مردم بابل قدیم، قرنها قبل‌ازیونانیها در ریاضیات ونجوم به‌پیشرفتهای حیرت‌انگیزی رسیده بودند بابلیها بخصوص در عددنویسی و ریاضیات محاسبه‌ای به‌مراحلی‌رسیده‌بودندکه یونانیها نتوانستند قرنها بعدازآنها، به‌آن برسند. مردم بابل درمحاسبات و نوشته‌های علمی از مبنای ۶۰ استفاده می‌کردند و تقسیم‌بندی محیط دایره به ۳۶۰ درجه و هردرجه به ۶۰ دقیقه وغیره ویا تقسیم بندی زمان(که آنهم شصت شصتی‌است) از بابلیهاست.

۳. Ménélaus؛ دانشمند اهل اسکندریه درقرن‌دوم بعد ازمیلاد.

۴. Ptolémée - Clude؛متولد شهر«تب»درمصرعلیا، اوایل‌قرن دوم بعد ازمیلاد.

اولین قدم را دراین راه دانشمندان هندی برداشتند. **آریابهاتا**[1] مفهوم سینوس‌را بکاربردو آنرا «اردهاجیا» (ویاجیااردها ـ به معنی نصف وتر) ویا بطور خلاصه «جیا» نامید[2]. ازاین ببعد همهٔ پیشرفت مثلثات را مدیون ریاضیدانهای اسلامی هستیم .

بتانی[3] با وارد کردن«ظل تمام»[4] (کتانژانت) درمحاسبات، قدم مهمی در پیشرفت مثلثات برداشت. **ابوالوفا**[5] ظل (تانژانت) را در محاسبات‌وارد کرد، جدول جدیدی برای محاسبهٔ سینوس نوشت ، دستور محاسبهٔ $sin(\alpha+\beta)$ را کشف کرد وراه حل بعضی ازمسائل مثلثات کروی را بدست آورد.

اما گام اصلی‌را درپیشرفت‌مثلثات، **خواجه نصیرالدین طوسی** برداشت . او با تألیف کتاب «کشف القناع فی اسرار شکل القطاع»

---

۱. Aryabhata ؛ دانشمند هندی قرن پنجم میلادی.

۲. همین لفظ «جیا» بصورت تحریف شدهٔ آن درآثار ریاضی‌دانهای‌اسلامی «جیب» نامیده شد و بعدها (درقرن دوازدهم میلادی)، وقتی که «گراردوس‌کرمونسیس» (Gerardus Cremonensis) ایتالیائی‌به ترجمهٔ‌آثار ریاضی عربی به لاتینی پرداخت ، **جیب** را به **سینوس** ترجمه کرد که تقریباً به معنی کلمهٔ عربی جیب (یعنی گریبان) است .

۳. محمد بن جابربن سنان البتانی از اهالی بتان از نواحی حران(قرنهای نهم و دهم میلادی) .

۴. بتانی به این مناسبت کتانژانت را ظل تمام نامیدکه عبارتست از نسبت طول سایهٔ میلهٔ قائم به طول خود میله .

۵. محمد بن ابوالوفا بوزجانی (۹۴۰ ـ ۹۹۸ میلادی)ازبزرگترین ریاضی دانها ومنجمین ایرانی‌است‌که ریاست رصدخانهٔ معروف بغدادراعهده‌دار بوده است .

درحقیقت اولین کتاب را درعلم مثلثات نوشت . نقش طوسی را در مثلثات باید شبیه نقش اقلیدس در هندسه دانست ، زیرا او توانست مجموعهٔ آنچه را که قبل‌از او وجود داشت ، بصورت علمی مستقل ومنظم درآورد . ترجمه‌ای که از کتاب طوسی درسال ۱۸۹۱ بوسیله **کاراتئودوری** وبه زبان فرانسوی انجام گرفت ، مدتها بصورت کتاب درسی مورد استفاده اهل علم مغرب زمین بود .

واما پیشرفت مثلثات درغرب فهرست وار:

با انتشاراطلاعات ریاضی دانشمندان شرق دراروپای غربی **فویرباخ** (قرن پانزدهم) جدول جدیدی برای سینوس نوشت .

رگیومونتانوس[۱] برای اولین مرتبه عدد نویسی اعشاری را در جدولهای مثلثاتی وارد کرد، قدیمی ترین کتاب کامل مثلثات که در غرب انتشاریافته ، از اوست . **کپرنیک**[۲] دربارهٔ روابطاساسی مثلثات کروی نتایجی بدست آورد . **رتیکوس**[۳] جدولی شامل محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی کمانها، ده ثانیه به ده ثانیه، ازصفر درجه تا ۹۰ درجه تنظیم کرد . ویت[۴] تألیفاتی در بارهٔ روابط سینوس و کسینوس و

---

۱. Regiomontanus ، دانشمند آلمانی شاگرد فویرباخ (قرن‌پانزدهم میلادی).

۲. Copernic ، منجم مشهور (قرنهای پانزدهم و شانزدهم میلادی) .

۳. Rhéticus ، شاگرد کپرنیک (قرنهای پانزدهم و شانزدهم میلادی) .

۴. Viéte ، دانشمند فرانسوی (قرن شانزدهم میلادی).

مثلثات کروی دارد . او ثابت کرد که حل مسئلهٔ معروف تثلیث زوایه[۱]، بستگی به حل یك معادلهٔ درجه سوم دارد .

دزارك[۲] مطالعات ویت را دنبال کـرد، اومثلث قطبی را وارد مثلثات کرد . **نپر**[۳]، واضع لگاریتم ، نسبتهائی ازمثلثات کـروی را بدست آورد که به نام او معروف است . او طریقه‌ای بـرای محاسبهٔ پنج جزء طرفین از مثلث کروی را با معلوم بودن سه جزء وسط آن پیدا کرد (پنج ضلعی نپر) .

بریگس[۴] اولین‌جدول لگاریتم نسبتهای مثلثاتی را تنظیم کرد. **اولر**[۵] مطالعات جدی وعمیقی دربارهٔتابعهای مثلثاتی دارد.بررسیهای اولر را باید مبنای واقعی روشهای کنونی مثلثات دانست .

*

مثلثات‌زائیدهٔ احتیاج‌مربوط‌به محاسبات عملی‌است[۶]بخصوص **نیاز به وسیله‌ای برای محاسبهٔ اجزاء اشکال مختلف هندسی ،**

---

۱. مسئلهٔ تثلیث زاویه (یعنی تقسیم یك زاویه به سه قسمت مساوی‌بوسیلهٔ خط کش وپرگار) یکی ازسه مسئلهٔ لاینحل قدیمی است‌که وقت وانرژی بسیاری ازدانشمندان را بهدرداده است وبا اثبات ویت ، معلوم شد که نمی‌توان راه حل هندسی برای این مسئله بدست آورد .

۲. Girard Desargues ،دانشمند فرانسوی (۱۶۶۱-۱۵۹۳میلادی).

۳. John Neper ،دانشمند انگلیسی (۱۶۲۷-۱۵۵۰ میلادی).

۴. Briggs (قرنهای شانزدهم وهفدهم میلادی) .

۵. Euler مؤلف قریب ۸۰ جلد اثر ریاضی (قرن هیجدهم) .

۶. این قسمت‌از کتاب«مثلثات، مستقیم‌الخط و کروی»تألیف‌نووسلو برداشته شده است .

وقتی که تعدادکافی از اجزاء آنها معلوم باشد ، مثلثات را به وجـود آورد . حتی در یونان باستان، ضمن حل یك رشته مسایل محاسبه‌ای نجومی ، موفقیتهای جـالبی نصیب مثلثات شد . ولـی تنظیم مثلثات به عنوان علم مستقل را مدیون ریاضیدانهای آسیای میانه در قـرنهای ۹ تا ۱۳ میلادی هستیم . اگرچـه مثلثات علم مستقلی شد و روشهای مخصوص بخود پیدا کرد، هدفش به شناسائی و محاسبهٔ اجزاء اشکال سادهٔ هندسی (مثلثهای مسطحه و فضائی) محدود ماند و تصور می‌شد که مطالعهٔ توابع مثلثاتی‌جزازطریق ساختمانهای هندسی میسرنیست، وقتی که بطریق هندسی بین توابع مثلثاتی روابط جبری بر قرار شد، این امکان بدست آمد که با استفاده ازروشهای جبری ، توابع مثلثاتی مورد مطالعه قرار گیرد ، تبدیلات مختلف آنها بدست آیـد و روابط مختلفی بین اجزای اشکال هندسی کشف شود .

پیشرفتهای بعدی علم نشان داد که توابع مثلثاتی تنها ابـزاری برای حل مسائل محاسبه‌ای هندسه نیستند، بلکه درفیزیك ومکانیك‌نیز، وقتی که از فرایندهای متناوب صحبت می‌شود، اهمیت جدی دارند . به این ترتیب نظریهٔ توابع مثلثاتی دارای مفهوم مستقل شد ولازم بود که اساس تحلیلی‌این‌نظریه، بدون اتکاء به هندسه، بنیان گذاشته شود.

ریاضیدان بزرگ **لئوناراولر** نخستین قدم را در زمینهٔ نظریـهٔ تحلیلی توابع مثلثاتی برداشت و ریـاضیدان بزرگ روس **نیکلای ایوانویچ لباچوسکی** برای تعریف توابع مثلثاتی بدون استفاده از هندسهٔ اقلیدسی ، نظریهٔ تحلیلی این توابع را بوجودآورد که‌براساس رشته‌های توانی تنظیم شده بود .

امروزه **مثلثات را به عنوان علمی مستقل نمی‌شناسند**، زیرا طبیعی است که مسائل مربوط به محاسبهٔ اجزاء اشکال هندسی به **هندسه** مربوط است ومثلثات درمورد آنها تنها نقش «کمکی»دارد، ازطرف دیگر نظریهٔ تحلیلی توابع مثلثاتی مربوط به فصلی از **آنالیز ریاضی** است که در آنجا نظریهٔ عمومی توابع مقدماتی مورد مطالعه قرار میگیرد، ولی با وجود اینکه امروزه کسی مثلثات را به عنوان علمی مستقل قبول ندارد **در برنامه‌های درسی به عنوان مادهٔ مستقلی باقی** مانده استو در دورهٔ ریاضیات‌دبیرستانی‌بحق جای مهمی را اشغال کرده است.

دربرنامه‌های فعلی مثلثات دبیرستانی، دوجهت اصلی وجود دارد: **تابعی و محاسبه‌ای**. درجهت اول توابع مثلثاتی به عنوان توابعی‌با متغیر عددی موردمطالعه قرار می‌گیرندواهمیت فوق‌العاده‌ای دارند، زیرا این توابع در آنالیز ریاضی معاصر، فیزیك، مکانیك و صنعت نقش اساسی دارند. درجهت دوم راههای محاسبهٔ اجزای‌اشکال هندسی بیان میشود و اهمیت اساسی آنها درمورد استعمال عملی آنها درهندسه، فیزیك، صنعت، نجوم، مساحی وغیره است.

۲. روش مثلثاتی، روش جبری وروش هندسی

روش مثلثاتی براساس حل و بحث معادلات مثلثاتی وتبدیلهای مثلثاتی است، درحالیکه روش جبری براساس تبدیلهای جبری ویاحل

معادلات جبری قرار گرفته است.

اگر حل و یا پیدا کردن شرایط وجود جواب در یك مسئله، منجر به حل و یا بحث یکی از معادلات $\sin u = \sin \alpha$ ، $\cos u = \cos \alpha$ وغیره و با تنها تبدیلهای مثلثاتی بشود، مسئله با روش مثلثاتی حل شده است، ولی اگر جستجوی جوابهای مسئله، منجر به حل یا بحث یك معادلهٔ جبری (ومثلا یك معادلهٔ درجهٔ دوم یا درجه سوم) و یا تبدیلات جبری (مثل تجزیه، ساده کردن کسرها وغیره) بشود، با روش جبری حل شده است.

باید به این نکته توجه داشت که در روش جبری می‌توان از روابط تبدیل توابع مثلثاتی استفاده کرد، همچنین در روش مثلثاتی هم می‌توان روابط اختصار تبدیلات جبری را بکار برد؛ آنچه که این دو روش را ازهم جدا می‌کند، اینست که نتیجهٔ بحث را از چه نوع معادله‌ای بدست آوریم: جبری یا مثلثاتی.

بسیاری از مسائل مثلثات را می‌توان با یکی از سه روش: مثلثاتی، جبری و هندسی حل کرد. در اکثر موارد روش مثلثاتی کلی‌تر و ساده‌تر از روش جبری است و بر آن ترجیح دارد، همانطور که روش جبری هم ساده‌تر و کلی‌تر از روش هندسی است.

بخصوص در روش هندسی، اغلب محدودیتهائی بوجود می‌آید، که مسئله را به حالت خاص می‌کشاند، و این تازه مربوط به مواردی است که بتوان راه حل هندسی را پیدا کرد.

مثال ۱. اگر $tg\,x = t$ باشد. ثابت کنید برای $tg\frac{x}{۲}$ همیشه دو جواب وجود دارد که مجموع آنها مساوی $-\frac{۲}{t}$ و حاصلضرب آنها مساوی ۱ − است.

حل باروش مثلثاتی . α را زاویهٔ حاده ومثبتی می گیریم که تانژانت آن مساوی t باشد، دراینصورت داریم:

$$tg x = tg\alpha \implies x = k\pi + \alpha$$

وبنابراین برای $tg\frac{x}{۲}$ بدست می آید:

$$tg\frac{x}{۲} = tg(\frac{۱}{۲}k\pi + \frac{\alpha}{۲})$$

وروشن است که برای $tg\frac{x}{۲}$ دومقدارزیرپیدا می‌شود:

$$\left| \begin{array}{l} r_۱ = tg\frac{x'}{۲} = tg\frac{\alpha}{۲} \\ r_۲ = tg\frac{x''}{۲} = tg(\frac{\pi}{۲} + \frac{\alpha}{۲}) = -cotg\frac{\alpha}{۲} \end{array} \right.$$

واز آنجا داریم:

$$r_۱ . r_۲ = -tg\frac{\alpha}{۲} . cotg\frac{\alpha}{۲} = -۱$$

$$r_۱ + r_۲ = tg\frac{\alpha}{۲} - cotg\frac{\alpha}{۲} = -\frac{۱ - tg^۲\frac{\alpha}{۲}}{tg\frac{\alpha}{۲}} = -\frac{۲}{tg\alpha} = -\frac{۲}{t}$$

حل با روش جبری . اگر $r = tg\frac{x}{۲}$ فرض کنیم ، «$x \neq ۲k\pi + \pi$» داریم :

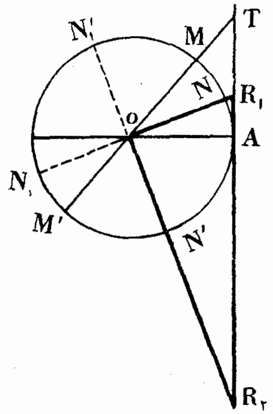
$$tg x = \frac{۲tg\frac{x}{۲}}{۱ - tg^۲\frac{x}{۲}} = \frac{۲r}{۱ - r^۲} = t$$

که از آنجا به معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$tr^۲+۲r-t=۰$$

این معادله نسبت به مجهول r ، همیشه دو جواب دارد ، زیرا $\Delta=۴(۱+t^۲)>۰$ است . ضمناً داریم :

$$r_۱+r_۲=-\frac{۲}{t} \text{ و } r_۱.r_۲=-۱$$



شکل ۱

حل با روش هندسی. $AT=t$ می گیریم (شکل ۱) ، بنابراین AM و $A'M$ قوسهائی از دایرهٔ مثلثاتی هستند که تانژانت آنها مساوی t است (یعنی قوسهای x). اگر N وسط قوس AM و N' وسط قوس AM' (از جهت منفی) باشد، AN و AN' قوسهای $\frac{x}{۲}$ خواهند بود، که تانژانت آنها بترتیب $AR_۱=r_۱$ و $AR_۲=r_۲$ می‌شود (نقاط متقاطر N و N' ، یعنی $N_۱$ و $N'_۱$ تانژانتهائی غیراز $r_۱$ و $r_۲$ ندارند). ضمناً روشن است که مقادیر $r_۱$ و $r_۲$ علامتهای مختلفی دارند.

درمثلث قائم‌الزاویهٔ $OR_۱R_۲$ داریم (OA ارتفاع این مثلث است):

$$|AR_۱|.|AR_۲|=OA^۲$$

و از آنجا ، با توجه باینکه $OA=۱$ است ، بدست می آید:

$$r_۱.r_۲=-۱$$

از طرف دیگر، درمثلث OAT ، چون OR_1 و OR_2 بترتیب نیمسازهای داخلی و خارجی زاویـهٔ O هستند ، نقطه‌های R_1 و R_2 زوج توافقی یکدیگر نسبت به نقطه‌های T و A می‌شوند ، بنابراین بنابر رابطهٔ دکارت داریم:

$$\frac{2}{\overline{AT}}=\frac{1}{\overline{AR_1}}+\frac{1}{\overline{AR_2}}$$

ویا :

$$\frac{2}{t}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{r_1+r_2}{r_1 \cdot r_2}=-(r_1+r_2)$$

و از آنجا :

$$r_1+r_2=-\frac{2}{t}$$

مثال ۲. شرط وجود جواب را درمعادلهٔ $a\sin x+b\cos x=c$ بدست آورید:

حل باروش مثلثاتی. $\frac{b}{a}=tg\varphi$ می گیریم،دراینصورت‌داریم:

$$\sin x+tg\varphi.\cos x=\frac{c}{a}$$

وچون $a\neq 0$ است. $\cos\varphi\neq 0$ می‌شود و می‌تـوان طـرفین معادلهٔ اخیر را در $\cos\varphi$ ضرب کرد.

$$\sin x.\cos\varphi+\cos x.\sin\varphi=\frac{c}{a}.\cos\varphi$$

ویا:

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{a}.\cos\varphi$$

و چون مقدار سینوس بین ۱ــ و ۱+ و یا مساوی آنهاست، بـرای وجود جواب باید داشته باشیم:

$$\left|\frac{c}{a}.\cos\varphi\right| \leqslant ۱ \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲}.\cos^۲\varphi \leqslant ۱ \quad (۱)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\cos^۲\varphi = \frac{۱}{۱+tg^۲\varphi} = \frac{۱}{۱+\frac{b^۲}{a^۲}} = \frac{a^۲}{a^۲+b^۲}$$

و بنابراین نامساوی (۱) به اینصورت درمی آید:

$$\frac{c^۲}{a^۲+b^۲} \leqslant ۱ \Rightarrow a^۲+b^۲ \geqslant c^۲$$

حل با روش جبری . اگر $tg\frac{x}{۲}=t$ بگیریم، داریم :

$$\sin x = \frac{۲t}{۱+t^۲} \quad و \quad \cos x = \frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}$$

و درنتیجه ، معادلهٔ مفروض، به‌صورت معادله جبری زیر درمی آید:

$$\frac{۲at}{۱+t^۲} + \frac{b(۱-t^۲)}{۱+t^۲} = c \Rightarrow (c+b)t^۲ - ۲at + (c-b) = ۰$$

چون مجهول این معادلهٔ درجه دوم $t = tg\frac{x}{۲}$ ، میتواند هر مقدار دلخواه باشد، شرط وجود جواب، غیرمنفی بودن مبین معادله است:

$$\Delta = a^۲ - (c+b)(c-b) = a^۲+b^۲-c^۲ \geqslant ۰ \Rightarrow a^۲+b^۲ \geqslant c^۲$$

حل با روش هندسی . اگر $\cos x = X$ و $\sin x = Y$ فرض کنیم، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} aY+bX=c \\ X^۲+Y^۲=۱ \end{cases} \quad (۱)$$

معادلهٔ اول این دستگاه نمایندهٔ یک خط و معادلهٔ دوم نمایندهٔ یك دایره به مرکز مبداء مختصات و شعاع واحد است. شرط وجود

جواب برای معادلهٔ $a\sin x + b\cos x = c$ ، منجر به وجود نقاط تلاقی خط و دایرهٔ دستگاه (۱) می‌شود. وقتی یك خط با یك دایره دارای نقطهٔ مشترك است، که فاصلهٔ مرکز دایره از خط بزرگتر از شعاع دایره نباشد. اگر مرکز دایره را O وپای عمودی که از O برخط فرود می‌آید H فرض کنیم، باید داشته باشیم:

$$OH = \frac{|0a + 0b - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{c^2}{a^2 + b^2} \leqslant 1$$

که از آنجا به سادگی نتیجه میشود: $a^2 + b^2 \geqslant c^2$

مسائل

۱ . $\sin\frac{\pi}{10}$ را با روش مثلثاتی ـ جبری و روش هندسی بدست آورید.

۲ . صحت اتحاد زیر را ، با سه روش مثلثاتی ، جبری و هندسی، تحقیق کنید :

$$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

۳ . اگر $tg\alpha = t$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ $\cos\frac{a}{2}$. چرا برای $\cos\frac{a}{2}$ چهار جواب بدست می‌آید و چرا مجموع مربعات این‌چهار مقدار مساوی ۲ است (مسئله را با هرسه روش حل کنید).

۴ . اگر $tg x = t$ باشد، مقدار $tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ را بدست آورید.

ثانیاً ثابت کنید برای $tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ همیشه دوجواب بدست می‌آید

که عکس قرینهٔ یکدیگرند و برحسب اینکه انتهای قوس x در هر کدام از ربعهای چهارگانه دایرهٔ مثلثاتی باشد، جواب مشخص را برای $tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ بدست آورید (با سه روش مثلثاتی، جبری و هندسی).

۵. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید (با هر سه روش).

$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

۶. α و β دو زاویهٔ حاده‌اند. ثابت کنید که اگر $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha$ باشد، $\alpha<\beta$ است (با روش مثلثاتی و هندسی).

۷. با استفاده از روابط مثلثاتی ثابت کنید اگر $x+y+z=xyz$ باشد، داریم:

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}$$

۸. اگر $xy+xz+yz=1$ و x ، y و z عددهای مثبتی باشند، ثابت کنید:

$$\Sigma x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}=2$$

۹. با استفاده از روابط مربوط به مثلث قائم‌الزاویه، اتحادهای زیر را ثابت کنید:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\ ,\ 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

۱۰ . این معادله را حل کنید و جوابهای تقریبی آنسرا بدست آورید :

$$\sin\alpha + 3\cos\alpha - \cos^3\alpha = 1$$

۱۱ . مطلوبست نسبتهای مثلثاتی کمان $\frac{a}{2}$ برحسب $\sin a$ و تعیین تعداد جوابها و بررسی درستی آنها (با هرسه روش).

۱۲ . مطلوبست محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی کمان $\frac{a}{2}$ بـــرحســب $\cos a$ و تعیین عدهٔ جوابها و بررسی درستی آنها (با هرسه روش) .

۳ . مباحث مقدماتی

تبدیلات . تساویهای عددی ، اتحادها

۱ . تابع مثلثاتی به عنوان تابعی با متغیر حقیقی

درفصل اول دیدیم که بـاکوششهای اولرولباچوسکی، مثلثات ازوابستگی هندسه آزاد شد و تـوابع مثلثاتی بـهعنوان تـوابعی بـا متغیرهای حقیقی وارد درآنالیز ریاضی‌شد.

می‌دانیم کـه درهندسهٔ اقلیدسی ، مجموع زوایـای یـك مثلث مقداری ثـابت و برابر بـا ۱۸۰ درجه است؛ درچنین هندسه‌ای اگـر دو زاویه از یك مثلث با دوزاویه از مثلث دیگر برابر باشد، زاویـهٔ سوم دومثلث هم خود بخود مساوی خواهدشد. بهمین مناسبت مبحث اساسی مثلثهای‌متشابه درهندسه بوجود می‌آید. ازطرف دیگرمی‌دانیم

که مثلثات ازدرون هندسهٔ اقلیدسی بوجود آمد و درك مفاهیم آن (چه زمانی که درمثلث مورد مطالعه قرار گیرند و چه زمانی که دردایره باشند) براساس خواص مثلثهای متشابه قرار گرفته است. بهمین‌دلیل است که دربرنامه‌های دبیرستانی از **توابع مثلثاتی** به‌عنوان نسبتهای **مثلثاتی** نام برده می‌شود.

وقتی که کوششهای قریب دوهزار سالهٔ ریاضی‌دانها دراثبات اصل اقلیدس بی‌نتیجه ماند و با طرح هندسه‌های غیراقلیدسی (بوسیلهٔ لباچوسکی، ریمان ، گوس، بایای و دیگران) معلوم شد که اولاً با تغییر اصل اقلیدس میتوان هندسه‌هائی بدون تناقض درست کرد و ثانیاً با طرح نظریهٔ نسبیت روشن شد که فضای فیزیکی ما، فضای اقلیدسی نیست، مبانی و روابط مثلثات هم مورد تردید قرار گرفت، علت این تردید از آنجاست که‌درهندسه‌های غیراقلیدسی مجموع زوایای مثلث مقداری ثابت نیست و می‌تواند کمتر یا بیشتر از ۱۸۰ درجه باشد. درنتیجه درهیچیك از هندسه‌های غیر اقلیدسی مبحثی بنام مثلثهای متشابه وجود ندارد و درحالیکه پی‌ریزی مفاهیم و روابط مثلثاتی بر مثلثهای متشابه بنا شده‌است، این بحث بوجود آمد که آیا بایدبه‌روابط مثلثاتی و نتیجه‌هائی که ناشی از آنهاست بچشم تردید نگاه کرد و تنها درفضای محدودی که قابل تطبیق با فضای اقلیدسی باشد مورد استفاده قرارداد، یا میتوان راهی برای اثبات استقلال روابط مثلثاتی ازهندسهٔ اقلیدسی پیدا کرد.

روابط اولر مشکل راحل کرد. اولر توابع مثلثاتی‌رابدون‌توجه به‌قضایای هندسی وتنها بطریق جبری تعریف کرد.

روابط اولر چنین‌اند:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} ; \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$(i = \sqrt{-1})$ و $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ است).

دراین روابط x یك متغیر حقیقی است و می‌تواند هرعدد حقیقی دلخواه و حتی درموارد کلی‌تر یك عدد موهومی باشد وضمناً تمام روابط معمول مثلثاتی را میتوان از همین دوتابع نتیجه گرفت. به‌این‌ترتیب ثابت شد که روابط مثلثاتی نتایجی از هندسهٔ اقلیدسی نیستند و اصولا ارتباطی به‌این ویا به‌آن‌نوع هندسه‌ندارند و آنچه را که امروز دربرنامه‌های متوسطه دربارهٔ مثلثات می‌خوانیم، درحقیقت تعبیر هندسی توابع مثلثاتی درهندسهٔ اقلیدسی است.

روشن است که هرگونه تعبیر هندسی از یك رابطهٔ جبری محدودیتهائی بوجود می‌آورد، مثلا اگر شما بخواهید اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ را تعبیر هندسی کنید، ناچار باید a و b را دوعدد حقیقی و مثبت درنظر بگیرید، درحالیکه مفروض برای هرمقدار دلخواهی از عددهای جبری a و b صحیح است. وقتی‌هم که توابع مثلثاتی مورد تعبیر هندسی قرار گیرند درحوزهٔمحدودتری واقع می‌شوند و متغیر x (که درحالت کلی می‌تواند هرعدد جبری دلخواه باشد) باید قوسی حقیقی باشد.

وقتی که توابع مثلثاتی را، جدا ازدایره و بطور کلی هندسه، مورد مطالعه قرار می‌دهیم، دیگر محدودیتی برای مقادیر سینوس وکسینوس وجود نخواهد داشت و معادله‌هائی ازنوع $\cos x = \sqrt{2}$

و یا حتی $\sin x=\sqrt{-۱}$ هم دارای جواب خواهند بود؛ همچنین $tg(\sin x)$ و امثال آن دارای معنا میشوند.

این توضیح مختصر بدین مناسبت دراینجا آورده‌شدکه اگر درمواردی مثلا به‌حل معادلهٔ $tg(cotg\,x)=cotg(tg\,x)$ برخورد کردیم. آنرا خالی از مفهوم تصور نکنیم و دربارهٔ تانژانت یك عدد دچار تردید نشویم.

مثال. معادلهٔ $\cos x=\sqrt{۲}$ را حل کنید.

حل. طبق رابطهٔ اولر داریم:

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{۲}=\sqrt{۲}$$

اگر $e^{ix}=y$ بگیریم، به معادلهٔ درجه دوم زیر میرسیم:

$$y^{۲}-۲\sqrt{۲}\,y+۱=۰\Longrightarrow y=\sqrt{۲}\pm ۱$$

و از آنجا بسادگی بدست می‌آید:

$$x=\frac{۱}{i}\mathrm{Log}(\sqrt{۲}\pm ۱)$$

لازم است یادآوری کنیم که دربحث دقیق‌تر لگاریتم (وقتی که درحوزهٔ اعداد موهومی موردمطالعه قرار گیرد) ثابت‌میشود که $\mathrm{Log}\,x$ هم یك تابع متناوب است وبی‌نهایت جواب دارد و با توجه به‌این مطلب، جواب x را درمعادلهٔ مورد بحث بصورت دورشته جواب (که هر کدام بصورت یك‌تصاعدحسابی نامحدوداست) درمی‌آورند.

۴ . بعضی روابط مهم

I. اگر $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$ و هیچیك از قوسهای α، β و γ مساوی

مضرب فردی از $\frac{\pi}{۲}$ نباشد، با تانژانت گرفتن ازطرفین آن بدست می‌آید :

$$\frac{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha tg\beta tg\gamma}{۱-tg\alpha tg\beta-tg\beta tg\gamma-tg\gamma tg\alpha}=۰$$

مخرج این کسر مخالف صفراست ، زیرا اگر مخرج کسر را مساوی صفر بگیریم بسادگی بدست می‌آید:

$$cos(\alpha+\beta+\gamma)=۰\Longrightarrow\alpha+\beta+\gamma=\frac{۲k+۱}{۲}\pi$$

که مخالف فرض‌است، بنابراین ازتساوی فوق بدست می‌آید:

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha tg\beta tg\gamma \qquad (۱)$$

وچون $cotg\alpha$ ، $cotg\beta$ و $cotg\gamma$ مخالف صفرند، با ضرب طرفین رابطهٔ اخیر در $cotg\alpha\, cotg\beta\, cotg\gamma$ بدست می‌آید:

$$cotg\alpha\ cotg\beta+cotg\beta cotg\gamma+cotg\gamma cotg\alpha=۱ \qquad (۲)$$

باتوجه به‌رابطهٔ (۲) از اتحاد واضح

$$(cotg\alpha-cotg\beta)^۲+(cotg\beta-cotg\gamma)^۲+(cotg\gamma-cotg\alpha)^۲\geqslant ۰$$

میتوان بدست آورد:

$$cotg^۲\alpha+cotg^۲\beta+cotg^۲\gamma\geqslant ۱ \qquad (۳)$$

II. شبیه حالت قبل ، اگر $\alpha+\beta+\gamma=\frac{۲k+۱}{۲}\pi$ وهیچیك از قوسهای α ، β و γ مضربی از π نباشد، میتوان بدست‌آورد:

$$\begin{cases} cotg\alpha+cotg\beta+cotg\gamma=cotg\alpha cotg\beta cotg\gamma \\ tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha=۱ \\ tg^۲\alpha+tg^۲\beta+tg^۲\gamma\geqslant ۱ \end{cases}$$

مثال ۱. صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$tg(a-b)+tg(b-c)+tg(c-a)=tg(a-b)tg(b-c)(c-a)$$

حل. اگـر $a-b=x$ ، $b-c=y$ و $c-a=z$ بگیریـم، داریم:

$$x+y+z=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$$

وچون مجموع سه‌قوس x ، y و z مساوی صفر (یعنی مضربـی از π) است داریم:

$$tgx+tgy+tgz=tgx.tgy.tgz$$

مثال۲. اگر α، β و γ سه زاویهٔ حاده و بـه مجموع $\frac{\pi}{2}$ بـاشند، حداکثر حاصلضرب $tg\alpha.tg\beta.tg\gamma$ را بدست آورید.

حل. اگر $x=tg\alpha.tg\beta.tg\gamma$ فرض کنیم، با توجه به مثبت‌بودن $tg\alpha$، $tg\beta$ و $tg\gamma$ ، ماکزیمم x همراه باماکزیمم x^2 است. داریم:

$$x^2=tg^2\alpha.tg^2\beta.tg^2\gamma=(tg\alpha tg\beta)(tg\beta tg\gamma)(tg\gamma tg\alpha)$$

سه عامـل متغیر $tg\alpha tg\beta$ ، $tg\beta tg\gamma$ و $tg\gamma tg\alpha$ مثبت و به مجمـوع واحدند (زیرا $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ است)، بنابراین حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که این عوامل باهم برابرباشند:

$$tg\alpha tg\beta=tg\beta tg\gamma=tg\gamma tg\alpha \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$$

یعنی ماکزیمم x وقتی است که α ، β و γ هـریك مساوی $\frac{\pi}{6}$ باشند، که در اینصورت مقدار x چنین میشود :

$$x_{Max}=tg^3\frac{\pi}{6}=(\frac{\sqrt{3}}{3})^3=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

III . روابط $sin(2n+1)a$ و $cos(2n+1)a$.

میدانیم :

$$\begin{cases} \sin 3a = -4\sin^3 a + 3\sin a \\ \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \end{cases}$$

و همچنین :

$$\begin{cases} \sin 5a = 16\sin^5 a - 20\sin^3 a + 5\sin a \\ \cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a \end{cases}$$

با شروع ازایـن روابط و بااستفاده از روش استقـراء ریاضی می‌توان ثابت کرد:

اولا $\sin(2n+1)a$ نسبت بـه $\sin a$ و $\cos(2n+1)a$ نسبت بـه $\cos a$ توابعی از درجه $2n+1$ هستند .

ثانیاً این‌توابع بترتیب برحسب $\sin a$ و $\cos a$ تنها شامل‌توانهای فرد هستند.

ثالثاً اگر n عـددی زوج باشد (یعنی درتقسیم $2n+1$ بـر ۴ باقیمانده‌ای مساوی ۱ بـدست آیـد) ، ضرایب بسط $\sin(2n+1)a$ و $\cos(2n+1)a$ برابر یکدیگرند و اگر n عددی فـرد باشد (یعنی در تقسیم $2n+1$ بر ۴ باقیمانده‌ای مساوی ۳ بدست آید)، ضرایب بسط $(\cos 2n+1)a$ و $\cos(2n+1)a$ قرینهٔ یکدیگرند.

با توجه به‌این نتیجه‌ها می‌توان مثلا بسط $\sin 7a$ و $\cos 7a$ را بدست آورد. با درنظر گرفتن اولا و ثانیاً میتوان نوشت:

$$\sin 7a = A\sin^7 a + B\sin^5 a + C\sin^3 a + D\sin a$$

اگر دراین اتحاد بترتیب مقادیر $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ را بجـــای قوس a قرار دهیم، به‌دستگاه زیر برای A، B، C و D می‌رسیم :

$$\begin{cases} A+B+C+D=-۱ \\ A+۲B+۴C+۸D=-۸ \\ A+۴B+۱۶C+۶۴D=-۶۴ \\ ۲۷A+۳۶B+۴۸C+۴۶D=۶۴ \end{cases}$$

که ازحل آن بدست می‌آید:

$$A=-۶۴\ ;\ B=۱۱۲\ ;\ C=-۵۶\ ;\ D-۷$$

وبنابراین خواهیم داشت:

$$\sin ۷a=-۶۴\sin^۷ a+۱۱۲\sin^۵ a-۵۶\sin^۳ a+۷\sin a$$

وبا درنظر گرفتن ثالثاً

$$\cos ۷a=۶۴\cos^۷ a-۱۱۲\cos^۵ a+۵۶\cos^۳ a-۷\cos a$$

IV. روابط بسط $\sin(۲n+۱)a$ و $\cos(۲n+۱)a$ به‌صورت ضرب .

معادلهٔ جبری‌درجه‌سوم $۴x^۳-۳x=\cos ۳a$ را درنظرمی گیریم.
برای حل این معادله بترتیب می‌توان چنین نوشت:

$$۴x^۳-۳x=۴\cos^۳ a-۳\cos a\ ;$$

$$۴(x-\cos a)(x^۲+x\cos a+\cos^۲ a)-۳(x-\cos a)=۰\ ;$$

$$(x-\cos a)(۴x^۲+x\cos a+۴\cos^۲ a-۳)=۰\ ;$$

$$x_۱=\cos a$$

$$x_{۲،۳}=\frac{-۲\cos a\pm\sqrt{۴\cos^۲ a-۱۶\cos^۲ a+۱۲}}{۴}=$$

$$=\frac{-\cos a\pm ۲\sqrt{۳}\sin a}{۴}$$

$$x_۲=-\frac{۱}{۲}\cos a+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin a=-(\cos\frac{\pi}{۳}\cos a-\sin\frac{\pi}{۳}\sin a)=$$

$$=-\cos(a+\frac{\pi}{۳})\ ;$$

$$x_3 = -\cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(a + \frac{2\pi}{3}\right).$$

ازطرف دیگر واضح است که درمعادلهٔ درجهٔ سوم

$$4x^3 - 3x - \cos 3a = 0$$

داریم:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{1}{4}\cos 3a$$

و بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\cos 3a = -4\cos a \cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad (1)$$

بهمین‌ترتیب و با شروع ازحل معادلهٔ درجه سوم

$$4x^3 - 3x = \sin 3a$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin 3a = 4\sin a \sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad (2)$$

وروشن است که به‌کمك روابط (۱) و (۲) می‌توان بدست‌آورد:

$$tg 3a = -tg a\, tg\left(a + \frac{\pi}{3}\right) tg\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad (3)$$

شبیه این روابط را برای $\sin 5a$، $\cos 5a$ و $tg 5a$ هم می‌توان بدست آورد. برای این‌منظور معادلهٔ جبری زیر را درنظرمی‌گیریم:

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = \cos 5a$$

اگر $x = \cos\lambda$ بگیریم، بدست می‌آید:

$$\cos 5\lambda = \cos 5a \Rightarrow 5\lambda = 2k\pi \pm 5a \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}k\pi \pm a\,;$$

$$x = \cos\lambda = \cos\left(\frac{2}{5}k\pi \pm a\right)$$

که با درنظر گرفتن مقادیر صحیح برای k ، جوابهای زیر برای معادلهٔ درجهٔ پنجم مفروض بدست می آید:

$$x_۱ = cos a \ , \ x_۲ = cos(a + \frac{۲\pi}{۵}) \ ، \ x_۳ = -cos(a + \frac{۳\pi}{۵}),$$

$$x_۴ = cos(a + \frac{۴\pi}{۵}) \ , \ x_۵ = -cos(a + \frac{\pi}{۵})$$

و حالا اگر رابطهٔ حاصلضرب جوابها را درمعادلهٔ درجه پنجم مفروض بنویسیم، خواهیم داشت:

$$cos ۵a = ۱۶ cos a \, cos(a + \frac{\pi}{۵}) \, cos(a + \frac{۲\pi}{۵}) \, cos(a + \frac{۳\pi}{۵}) \, cos(a + \frac{۴\pi}{۵})$$

وشبیه آن:

$$sin ۵a = ۱۶ sin a \, sin(a + \frac{\pi}{۵}) sin(a + \frac{۲\pi}{۵}) sin(a + \frac{۳\pi}{۵}) sin(a + \frac{۴\pi}{۵})$$

وبه‌عنوان نتیجهٔ آنها :

$$tg ۵a = tg a \, tg(a + \frac{\pi}{۵}) \, tg(a + \frac{۲\pi}{۵}) \, tg(a + \frac{۳\pi}{۵}) \, tg(۵ + \frac{۴\pi}{۵})$$

مثال ۱. ثابت کنید :

$$tg^۲ \frac{\pi}{۹} + tg^۲ \frac{۴\pi}{۹} + tg^۲ \frac{۷\pi}{۹} = ۳۳$$

حل. معادلهٔ درجه سوم زیرا درنظر میگیریم:

$$\frac{x^۳ - ۳x}{۱ - ۳x^۲} = \sqrt{۳}$$

اگر $x = tg\alpha$ بگیریم به‌معادلهٔ $tg ۳\alpha = \sqrt{۳}$ می‌رسیم که جواب آن $\alpha = \frac{۱}{۳}k + \frac{\pi}{۹}$ است. بنابراین داریم:

$$x=tg(\frac{1}{3}k\pi+\frac{\pi}{9})\qquad \begin{cases} x_1=tg\frac{\pi}{9}\\ x_2=tg\frac{4\pi}{9}\\ x_3=tg\frac{7\pi}{9}\end{cases}$$

ازطرف دیگر اگر معادلهٔ جبری درجه سوم را منظم کنیم، می‌شود:

$$x^3+3\sqrt{3}x^2-3x-\sqrt{3}=0$$

واز آنجا خواهیم داشت:

$$tg^2\frac{\pi}{9}+tg^2\frac{4\pi}{9}+tg^2\frac{7\pi}{9}=x_1^2+x_2^2+x_3^2=$$
$$=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=$$
$$=(-3\sqrt{3})^2-2(-3)=27+6=33$$

مثال ۲. مطلوبست محاسبهٔ $tg6^\circ.tg42^\circ.tg66^\circ.tg78^\circ$.

حل. در رابطهٔ

$$tga\,tg(a+\frac{\pi}{5})\,tg(a+\frac{2\pi}{5})\,tg(a+\frac{3\pi}{5})\,tg(a+\frac{4\pi}{5})=tg5a$$

فرض می کنیم $a=6^\circ$ ، بدست می آید:

$$tg6^\circ.tg42^\circ.tg78^\circ.tg114^\circ.tg150^\circ=tg30^\circ$$

که با توجه به‌اینکه $tg150^\circ=-tg30^\circ$ و $tg114^\circ=-tg66^\circ$ است، بدست می آید:

$$tg6^\circ.tg42^\circ.tg66^\circ.tg78^\circ=1$$

مسائل

۱۳ . با استفاده از $cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (بدون محاسبهٔ نسبتهای

مثلثاتی $22/5^\circ$) نشان دهید: $tg67/5^\circ = 1+\sqrt{2}$ و سپس بااستفاده از مقدار اخیر ثابت کنید $tg7/5^\circ = \dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

۱۴ . ثابت کنید:

$$\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$$

$$\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$$

۱۵ . ثابت کنید: $\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ=\cos 7^\circ$

۱۶ . ثابت کنید: $\cos^4\frac{\pi}{9}+\cos^4\frac{2\pi}{9}+\cos^4\frac{3\pi}{9}+\cos^4\frac{4\pi}{9}=\frac{19}{16}$

۱۷ . اگر $\widehat{AM}=2k\pi+\alpha$ باشد، ثابت کنید انتهای قوسهای $\frac{AM}{n}$ رئوس یك n ضلعی منتظم را در دایرهٔ مثلثاتی تشکیل می‌دهند.

۱۸ . اگر k تمام مقادیر صحیح از $-\infty$ تا $+\infty$ را اختیار کند، هریك از عبارتهای $\sin\frac{k\pi}{7}$ و $\cos\frac{k\pi}{\sqrt{6}}$ چند مقدار مختلف می‌توانند اختیار کنند.

۱۹ . اگر α و β در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$a\sin\alpha\sin\beta+b\cos\alpha\cos\beta=0$$

حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$y=\frac{1}{a\sin^2\alpha+b\cos^2\alpha}+\frac{1}{a\sin^2\beta+b\cos^2\beta}$$

۲۰ . مقدار m را طوری پیدا کنید که عبارت زیر مستقل از x باشد

$$\sin^6x+\cos^6x+m(\sin^4x+\cos^4x)$$

۲۱ . اگر $\frac{1}{a}\sin^4 x+\frac{1}{b}\cos^4 x=\frac{1}{a+b}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{1}{a^3}\sin^8 x+\frac{1}{b^3}\cos^8 x$ رابدست آورید (a و b عددهائی‌مثبت هستند).

۲۲ . a و b و c راطوری‌پیدا کنید که اتحاد زیربرقرارباشد:

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-1}=a\sin x+b\cos x+c$$

۲۳ . حاصل عبارت $\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}-\frac{1}{\sin 10^\circ}$ رابدست آورید .

۲۴ . ثابت کنید مجموع مقادیر

$$tg(a-b+\frac{\pi}{3})\text{،}\quad tg(b-c+\frac{\pi}{3})\ \text{و}\ tg(c-a+\frac{\pi}{3})$$

با حاصلضرب آنها برابراست .

۲۵ . مطلوبست محاسبهٔ عبارت

$$tg\frac{\pi}{20}-tg\frac{3\pi}{20}-tg\frac{7\pi}{20}+tg\frac{9\pi}{20}.$$

۲۶ . ثابت کنید از رابطهٔ $\sin x=\frac{\sin a+\sin b}{1+\sin a\sin b}$ مــی‌توان بدست آورد:

$$tg(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})=\pm tg(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2})tg(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2})$$

۲۷ . اگــر $tg\alpha=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ باشد ، مطلوبست محاسبهٔ

$$\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{b}{\sin\alpha}$$

۲۸ . ثابت کنید $\alpha+\beta=\gamma$ ، بشرطی که داشته باشیم:

$$cotg\alpha=\sqrt{x^3+x^2+x}\quad \text{و}\quad cotg\beta=\sqrt{x+x^{-1}+1}\quad \text{و}$$

$$tg\gamma=\sqrt{x^{-3}+x^{-2}+x^{-1}}$$

۲۹. n چه شرطی داشته باشد تا اتحاد زیربرقرار باشد :

$$\cos\left(\frac{n\pi}{۷}-\frac{۱۳\pi}{۱۴}\right)+\cos\left(\frac{۳n\pi}{۷}-\frac{۳\pi}{۱۴}\right)+\cos\left(\frac{۵n\pi}{۷}-\frac{۳\pi}{۱۴}\right)=۰$$

۳۰. اگر داشته باشیم :

$$(b^۲+c^۲)(\cos x-\cos a)^۲+b^۲(\sin x-\sin a)^۲=c^۲(۲+\cos x+\cos a)^۲$$

مطلوبست محاسبهٔ $tg\frac{x}{۲}-tg\frac{a}{۲}$.

۳۱. مطلوبست محاسبهٔ عبارت $\cos\frac{۲\pi}{۷}+\cos\frac{۴\pi}{۷}+\cos\frac{۶\pi}{۷}$

این عبارتها را به صورت ضرب تبدیل کنید (۳۲ تا ۳۹):

۳۲. $\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)$

۳۳. $\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c)$

۳۴. $tg a+tg b+tg c-tg(a+b+c)$

۳۵. $۱-\cos^۲ a-\cos^۲ b-\cos^۲ c+۲\cos a\cos b\cos c$

۳۶. $$\frac{۱}{\sin(a-b)\sin(a-c)}+\frac{۱}{\sin(b-c)\sin(b-a)}+\frac{۱}{\sin(c-a)\sin(c-b)}$$

۳۷. $tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma}$

۳۸. $\sin\alpha+\cos\alpha+\sin۲\alpha+\cos۲\alpha+\sin۳\alpha+\cos۳\alpha$

۳۹. $(\sin\alpha+\sin۲\alpha+\sin۳\alpha)^۳-\sin^۳\alpha-\sin^۳۲\alpha-\sin^۳۳\alpha$

۴۰. ثابت کنید کسر $\dfrac{۱-\cos x+y\sin x}{\sin x+y(۱+\cos x)}$ به y بستگی ندارد.

۴۱. ثابت کنید :

$$\sin a - \sin(a+\frac{\pi}{۷}) + \sin(a+\frac{۲\pi}{۷}) - \sin(a+\frac{۳\pi}{۷}) +$$
$$+ \sin(a+\frac{۴\pi}{۷}) - \sin(a+\frac{۵\pi}{۷}) + \sin(a+\frac{۶\pi}{۷}) = ۰$$

۴۲ . اگر $a+b+c+d=۲\pi$ باشد ، ثابت کنید:

۱) $tg\,a + tg\,b + tg\,c + tg\,d = tg\,a.tg\,b.tg\,c + tg\,a\,tg\,b\,tg\,d +$
$+ tg\,a.tg\,c.tg\,d + tg\,b.tg\,c.tg\,d$

۲) $\Sigma tg(\frac{\pi}{۵}+\frac{۳a}{۵}) = \Sigma tg(\frac{\pi}{۵}+\frac{۳a}{۵}).tg(\frac{\pi}{۵}+\frac{۳b}{۵}).tg(\frac{\pi}{۵}+\frac{۳c}{۵})$

۳) $\Sigma tg(\frac{۲\pi}{۳}-\frac{a}{۳}) = \Sigma tg(\frac{۲\pi}{۳}-\frac{a}{۳}).tg(\frac{۲\pi}{۳}-\frac{b}{۳}).tg(\frac{۲\pi}{۳}-\frac{c}{۳})$

۴۳ . اگر $\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta = m$ باشد ، مطلوبست محاسبهٔ

$$\cos(\alpha-\beta).\cos(\alpha+\beta)$$

۴۴ . ثابت کنید : $tg^۲۱۰^\circ + tg^۲۵۰^\circ + tg^۲۷۰^\circ = ۹$

۴۵ . منحنی تابع $y = x^n + a_۱x^{n-۱} + \ldots + a^n \quad (n>۱)$ ، خط $y=a$ را در نقاط $A_۱، A_۲، \ldots، A_n$ و خط $y=b$ را در نقاط $B_۱، B_۲، \ldots، B_n$ قطع کرده است . خط A_iB_i با محور طول زاویه‌ای مساوی α_i میسازد $(i=۱، ۲، \ldots، n)$ ، ثابت کنید .

$$\cot g\,\alpha_۱ + \cot g\,\alpha_۲ + \ldots + \cot g\,\alpha_n = ۰$$

۴۶ . ثابت کنید : $tg\,۲۰^\circ + tg\,۴۰^\circ + tg\,۸۰^\circ = ۸\sin ۴۰^\circ + \sqrt{۳}$

۴۷ . ثابت کنید :
$$\frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۷}} = \frac{۱}{\sin\frac{۲\pi}{۷}} + \frac{۱}{\sin\frac{۳\pi}{۷}}$$

۴۸ . ثابت کنید :

$$\sin^۲\frac{\alpha+\beta-\gamma}{۲} + \sin^۲\frac{\alpha+\gamma-\beta}{۲} +$$

$$+2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\cos\alpha=\sin^2\alpha$$

۴۹. ثابت کنید که ازتساویهای

$$\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0\\ \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0\end{cases}$$

می‌توان تساویهای زیررا نتیجه گرفت:

$$\begin{cases}\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma=0\\ \cos n\alpha+\cos n\beta+\cos n\gamma=0\end{cases}$$

(n عددی طبیعی ومضرب ۳ نمی‌باشد)

۵۰. ثابت کنید : $tg55^\circ . tg65^\circ . tg75^\circ = tg85^\circ$

۵۱. ثابت کنید : $1+4\cos\frac{2\pi}{7}-4\cos^2\frac{2\pi}{7}=8\cos^3\frac{2\pi}{7}=0$

۵۲. ثابت کنید :

$$tg(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\frac{S_1-S_3+S_5-\ldots}{1-S_2+S_4-\ldots}$$

که درآن داریم :

$$S_1=tgx_1+tgx_2+\ldots+tgx_n$$
$$S_2=tgx_1tgx_2+tgx_1tgx_3+\ldots+tgx_{n-1}tgx_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n=tgx_1tgx_2\ldots tgx_n$$

۵۳. اگر $\sin x+\cos x=a$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ

$1)\quad \sin^3x+\cos^3x$ و $2)\quad \sin^5x+\cos^5x$ و

$3)\quad \sin^{-2}x+\cos^{-2}x$

۵۴. اتحاد $tg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ را باروش هندسی ثابت کنید و

نسبتهای مثلثاتی $\frac{\pi}{8}$ ، $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{\pi}{24}$ را محاسبه کنید.

۵۵ . درصورتی که $\sin 2\alpha$ معلوم باشد،رابطه‌ای بنویسید که‌از روی آن $\sin\alpha$ برحسب $\sin 2\alpha$ محاسبه شود ، چند مقدار برای $\sin\alpha$ می‌توان بدست آورد؟

۵۶ . هفت‌ضلعی‌منتظم ABCDEFG مفروض‌است.ثابت کنید:

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$$

۵۷ . به فرض آنکه $\sin\frac{x+y}{2}+1\pm=\cos\frac{x-y}{2}$ باشد ، درستی‌رابطهٔ $\sin x+\sin y=\sin x\sin y$ را ثابت کنید .

۵۸ . عبارت $S=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$ را قابل‌محاسبهٔ لگاریتمی کنید.

۵۹ . عبارت $x=a\cos(\omega t+\alpha)+b\cos(\omega t+\beta)$ را که‌درآن t متغیر و a و b و ω عددهای مثبت و α و β دوعددجبری می‌باشند، به صورت $x=c.\cos(\omega t+\gamma)$ تبدیل کنید(c عددی‌مثبت و γ عددی جبری است). درستی تبدیل را با روش هندسی تحقیق کنید.

۶۰ . از رابطهٔ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta$ نتیجه بگیرید:

$$\sin^2(\alpha+\beta)=(\sin\alpha+\sin\beta)^2$$

۶۱ . اگر $\alpha=\frac{k\pi}{5}$ باشد، $\sin\alpha$ و $\cotg\alpha$ هر یک چند مقدار دارند مقادیرآنها را حساب کنید (k عددی است صحیح).

۶۲ . x و y را چنان پیدا کنید که داشته باشیم:

$$tg(x+y)=tg x+tg y$$

۶۳. دودایرهٔ متساوی به مرکزهای A و B یکدیگررا درنقاط C و D قطع کرده‌اند. اگر مساحت قسمت مشترك بین دودایره نصف مساحت هر کدام باشد وزاویهٔ $\widehat{CAD} = x_\circ$ فرض شود، ثابت کنید:

$$\sin x_\circ = \frac{\pi}{۱۸۰}(x_\circ - ۹۰)$$

۶۴. دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و نقطهٔ ثابت P واقع در داخل آن مفروض است $(PO = d)$. از نقطهٔ P وترغیرمشخصی رسم میکنیم تا محیط دایره را درنقاط A و B قطع کند. ثابت کنید همواره رابطهٔ زیر برقرار است :

$$tg\frac{\widehat{AOP}}{۲} . tg\frac{\widehat{POB}}{۲} = \frac{R-d}{R+d}$$

۶۵. اگر $\sin\beta$ واسطهٔ $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ باشد، ثابت کنید :

$$\cos ۲\beta = ۲\cos^۲(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$$

۶۶. دایرهٔ O به قطر $AB = ۲R$ ونقطهٔ M بر محیط آن و M' قرینهٔ M نسبت به AB مفروض است. مطلوبست اولا محاسبهٔ محیط ومساحت مثلث AMM' بر حسب R وزاویهٔ $\widehat{BAM} = \alpha$. ثانیاً تحقیق کنید که شعاع دایرهٔ محاطی مثلث AMM'، برابر $۲R\sin\alpha(۱-\sin\alpha)$ می‌باشد. ماکزیمم این شعاع به ازاء چه مقدار α خواهد بود. ثالثاً اگر I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث AMM' باشد و جهت مثبت AB از A به B اختیار شود، $y = \overline{OI}$ را برحسب R و α حساب کنید وتغییرات آنرا وقتی α از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر کند بدست آورید (بدون

رسم منحنی). رابعاً اگر شعاع دایرهٔ محاطی برابر 1 باشد، نقطهٔ M را ازطریق ترسیم پیدا کنید.

۶۷. $tg\frac{x}{2}$ را ازمعادلهٔ زیربدست آورید:

$$\frac{tg^2 a}{tg^2 b}=\frac{\cos b}{\cos a}\cdot\frac{\cos x-\cos a}{\cos x-\cos b}$$

۶۸. با معلوم بودن $\cos x$ ، مقدار $tg\frac{x}{2}$ را بدست آورید. چرا برای $tg\frac{x}{2}$ دوجواب بدست می‌آید؟ درحالت خاصی که $\cos x=\frac{\cos a-m}{1-m\cos a}$ باشد جوابها چیست؟

۶۹. صحت هریك از دواتحاد زیرا تحقیق کنید:

$$1)\ \frac{2tg^2 x}{1+tg^4 x}=\frac{tg^2 2x}{2+tg^2 2x}$$

$$2)\ tg^2 x+\cot g^2 x=2\frac{3+\cos 4x}{1-\cos 4x}$$

۷۰. اگر m و n دوعدد مفروض باشند وداشته باشیم:

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin(A+B)}=m \quad \text{و} \quad \frac{\cos A-\cos B}{\cos(A-B)}=n$$

هریك از مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$\sin\frac{A+B}{2}\ \text{و}\ \cos\frac{A+B}{2}\ \text{و}\ tg\frac{A+B}{2}$$

$$\sin\frac{A-B}{2}\ \text{و}\ \cos\frac{A-B}{2}\ \text{و}\ tg\frac{A-B}{2}$$

۴. معادلات و نامعادلات

۱. معادلاتی‌که باشرط $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$ به یکی ازدوصورت زیرباشند :

$$a\sin u+b\cos u=c\sin v$$

$$a\sin u+b\cos u=c\cos v$$

(u و v توابعی از x هستند) .

اگر در معادلهٔ اول $\cos\alpha=\frac{a}{c}$ ودرمعادلهٔ دوم $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ بگیریم، به معادلات سادهٔ قابل حل می‌رسیم .

مثال ۱ . مطلوبست حل معادلهٔ

$$۳\sin x+۴\cos x=۵\sin ۷x$$

حل . اگر $\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$ و α را کمانی حاده در نظر بگیریم ، $\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$ می‌شود . اکنون با تقسیم طرفین معادلهٔ مفروض بر۵ و جانشین کردن خطوط مثلثاتی α بجای ضرایب، بترتیب بدست‌آید:

$$\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha=\sin ۷x \quad ;$$

$$\sin(x+\alpha)=\sin ۷x \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} ۷x-(x+\alpha)=۲k\pi \\ ۷x+(x+\alpha)=۲k\pi+\pi \end{cases}$$

واز آنجا جوابهای کلی زیربدست می‌آید :

$$\begin{cases} x=\frac{۱}{۳}k\pi+\frac{\alpha}{۶} \\ x=\frac{۱}{۴}k\pi+(\frac{\pi}{۸}-\frac{\alpha}{۸}) \end{cases}$$

که درآنها α زاویه‌ایست حاده ، بنحوی که $\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$ باشد .

مثال ۲. معادلهٔ زیرا حل کنید $(m^{2}+n^{2}\neq 0)$:

$$(m^{2}-n^{2})\sin x-2mn\cos x=(m^{2}+n^{2})\cos\frac{x}{3}$$

حل. اگر طرفین معادله را بر $m^{2}+n^{2}$ تقسیم و

$$\frac{m_{2}-n^{2}}{m^{2}+n^{2}}=\sin\varphi$$

بگیریم ، بدست می‌آید:

$$\sin x\sin\varphi-\cos x\cos\varphi=\cos\frac{x}{3}\Longrightarrow\cos(x+\varphi)=\cos(\pi-\frac{x}{3})$$

وبه سادگی جوابهای کلی x بدست می‌آید :

$$x=\frac{3}{2}k\pi+\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{3\varphi}{4}\right)$$

$$x=3k\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\varphi}{2}\right)$$

که در آنها φ کمان حاده‌ای است که سینوس آن برابر $\frac{m^{2}-n^{2}}{m^{2}+n^{2}}$ است .

۲. استفاده ازخواص عبارتهای متقارن درحل‌معادلات و نامعادلات مثلثاتی

فرض کنید درمعادلهٔ

$$P(u,v)=0 \qquad (1)$$

عبارت سمت چپ ، کثیرالجمله‌ای متقارن نسبت بـه توابع مثلثاتی u و v باشد، یعنی داشته باشیم : $P(u,v)=P(v,u)$.

می‌دانیم که هر کثیرالجملهٔ متقارن $P(v$ و $u)$ را مـی‌توان به صورت کثیرالجمله‌ای از توابع اصلی متقارن ، یعنی

$$t=u.v \text{ و } z=u+v$$

نوشت بنابراین حل معادلهٔ (۱) را می‌توان منجربه حل یك معادلـهٔ

جبری (ویا دقیق‌تریک دستگاه مختلط) نسبت به $z=u+v$ و $t=u.v$ نمود ، بشرطی که z و t بایك اتحاد مثلثاتی بهم مربوط باشند .

معادلهٔ زیررا درنظر می گیریم :

$$P(\sin x, \cos x)=0 \qquad (۲)$$

بشرطی که $P(\sin x, \cos x)=P(\cos x, \sin x)$ باشد. کثیرالجمله‌ای را که نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ متقارن باشد ، می‌توان به صورت کثیر الجمله‌ای نسبت به مجهولهای

$$z=\sin x+\cos x \qquad (|z|\leqslant\sqrt{۲})$$

$$t=\sin x.\cos x \qquad (|t|\leqslant\frac{۱}{۲})$$

و یا یکی از آنها نوشت ، زیرا z و t با رابطهٔ $z^{۲}=۱+۲t$ بهم مربوط‌اند. بنابراین می‌توان معادلهٔ مفروض را به دستگاه مختلط زیر منجر کرد:

$$\begin{cases} P'(z)=0 \\ |z|\leqslant\sqrt{۲} \end{cases} \qquad (۳)$$

که درآن $P'(z)$ از تبدیل کثیرالجملهٔ مفروض $P(\sin x, \cos x)$ بدست آمده‌است.

گاهی بهتراست که به‌عنوان مجهول جدید

$$t=\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

را انتخاب کرد، دراینصورت معادلهٔ (۲) به‌صورت دستگاه مختلط زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases} P''(t)=0 \\ |t|\leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (4)$$

که در آن $P''(t)$ کثیرالجملهٔ جبری است که از تبدیل کثیرالجملهٔ مفروض بدست آمده است.

وقتی که کثیرالجملهٔ مفروض نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ متقارن است، همچنین می‌توان از تبدیل $x=y+\frac{\pi}{4}$ یا $x=y-\frac{\pi}{4}$ استفاده کرد، زیرا در اینصورت داریم:

$$a)\quad \sin x+\cos x=\sin(y+\frac{\pi}{4})+\cos(y+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos y$$

$$\sin x.\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+2y)=\cos^2 y-\frac{1}{2}$$

$$b)\quad \sin x+\cos x=\sin(y-\frac{\pi}{4})+\cos(y-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin y$$

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin(2y-\frac{\pi}{2})=\sin^2 y-\frac{1}{2}$$

و درهرحال به معادله‌ای با مجهول $\sin y$ یا $\cos y$ می‌رسیم.

مثال ۱ . مطلوبست حل معادلهٔ

$$\sin x+\cos x+2\sin x\cos x=m$$

حل . اگر $x=y+\frac{\pi}{4}$ بگیریم، بسادگی بدست می‌آید:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos y$$

$$\sin x.\cos x=\cos^2 y-\frac{1}{2}$$

وبنابراین معادلهٔ مفروض بصورت زیر درمی‌آید:

$$2\cos^2 y+\sqrt{2}\cos y-(m+1)=0$$

که یك معادلهٔ جبری درجه دوم نسبت به‌مجهول $\cos y$ است:

$$\cos y = \frac{-\sqrt{۲} \pm \sqrt{۸m+۱۰}}{۴}$$

بادردست داشتن $\cos y$ ، خود y و از آنجا $x = y + \frac{\pi}{۴}$ بدست می آید.

شرایط وجود جواب. اولا واضح است برای اینکه ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم نسبت به $\cos y$ حقیقی باشند، باید $۸m+۱۰ \geqslant ۰$ یا $m \geqslant -\frac{۵}{۴}$ باشد.

ثانیاً برای y وقتی جواب حقیقی بدست می‌آید که $\cos y$ کمتر از ۱ − و یا بزرگتر از ۱ نباشد. جوابهای $\cos y$ را بطور جداگانه درنظر می گیریم:

$$۱)\quad -۱ \leqslant \frac{-\sqrt{۲}+\sqrt{۸m+۱۰}}{۴} \leqslant ۱ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -۴ \leqslant -\sqrt{۲}+\sqrt{۸m+۱۰} \leqslant ۴ ;$$

این دستگاه نامعادله بصورت زیر درمی‌آید:

$$-۴+\sqrt{۲} \leqslant \sqrt{۸m+۱۰} \leqslant ۴+\sqrt{۲}$$

نامعادلهٔ سمت چپ برقراراست، زیرا $\sqrt{۸m+۱۰}$ مقداری غیر منفی وهمیشه ازعدد منفی $-۴+\sqrt{۲}$ بزرگتر است (با شرط $m \geqslant -\frac{۵}{۴}$). بنابراین باید نامعادلهٔ سمت راست برقرار باشد که چون هردوطرف نامعادله مقادیری مثبت هستند، می‌توان طرفین را مجذور کرد و بسادگی شرط $m \leqslant ۱+\sqrt{۲}$ را بدست آورد. بنابراین اگر

$-\frac{5}{4} \leqslant m \leqslant 1+\sqrt{2}$ باشد، جواب $\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{8m+10}}{4}$ قابل قبول است.

اگر بهمین‌ترتیب در مورد جواب دوم عمل کنیم، شرط $-\frac{5}{4} \leqslant m \leqslant 1-\sqrt{2}$ بدست می‌آید. یعنی:

در حالت $m<-\frac{5}{4}$ معادلهٔ مثلثاتی جواب ندارد.

در حالت $m=-\frac{5}{4}$، معادله دارای ریشهٔ مضاعف $\cos y=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ است.

در حالت $-\frac{5}{4}<m\leqslant 1-\sqrt{2}$ هر دوجواب $\cos y$ قابل قبول است.

در حالت $1-\sqrt{2}<m\leqslant 1+\sqrt{2}$ تنها یکی ازجوابهای $\cos y$ قابل قبول است.

وبالاخره درحالت $m>1+\sqrt{2}$ معادله جواب ندارد.

مثال ۴ . مطلوبست حل معادلهٔ $\sin x\cos^2 x+\cos x\sin^2 x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل. با تغییر مجهول $x=y+\frac{\pi}{4}$، معادلهٔ مفروض به صورت $2\cos^3 y-\cos y-1=0$ درمی‌آید که قابل تجزیه است:

$$(\cos y-1)(2\cos^2 y+2\cos y+1)=0$$

عامل درجه دوم نسبت به $\cos y$، ریشه‌های موهومی‌دارد وبرای عامل درجه اول داریم:

$$\cos y = 1 \implies y = 2k\pi \implies x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

مثال ۳ . مطلوبست حل معادلهٔ $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

حل. باتوجه به‌تغییر مجهول $x = y + \frac{\pi}{4}$ داریم:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x . \cos x) =$$

$$= \sqrt{2} \cos y \left(\frac{3}{2} - \cos^2 y\right)$$

و بنابراین معادلهٔ مفروض ، پس‌از تبدیلات ساده، چنین می‌شود:

$$2\cos^3 y - 3\cos y + \sqrt{2} = 0$$

واین معاده بسهولت بصورت زیر تجزیه پذیراست:

$$(\sqrt{2} \cos y - 1)^2 (\cos y + \sqrt{2}) = 0$$

و درنتیجه داریم (عامل دوم مخالف صفراست):

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

وازآنجا:

$$x = 2k\pi \text{ و } 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

راه حل دوم. این معادله را می‌توانستیم بترتیب زیرهم‌حل کنیم:

$$\sin x^3 + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x \ ;$$

$$\sin^2 x (1 - \sin x) + \cos^2 x (1 - \cos x) = 0 \ ;$$

$$(1 - \cos^2 x)(1 - \sin x) + (1 - \sin^2 x)(1 - \cos x) = 0 \ ;$$

$$(1 - \sin x)(1 - \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0 \ ;$$

عامل سوم جواب ندارد وجوابهای عوامل اول و دوم‌همانست

که قبلا پیدا کرده‌ایم.

مثال ۴ . این معادله را حل کنید:

$$۱+\sin^۳ x+\cos^۳ x=\frac{۳}{۲}\sin ۲x$$

حل . اگر $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ بگیریم ، معادله نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ متقارن است و با انتخاب $\sin x+\cos x=z$ به دستگاه مختلط زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} z^۳+۳z^۲-۳z-۵=۰ \\ |z|\leqslant\sqrt{۲} \end{cases}$$

برای حل معادلهٔ درجه سوم ، سمت چپ تساوی را تجزیه‌می کنیم:

$$z^۳+۳z^۲-۳z-۵=(z+۱)(z^۲+۲z-۵)$$

بنابراین ریشه‌های آن چنین است:

$$z_۱=-۱ \text{ و } z_۲=-۱-\sqrt{۶} \text{ و } z_۳=-۱+\sqrt{۶}$$

جواب دستگاه مختلط تنها $z_۱=-۱$ است، زیرا

$$-۱-\sqrt{۶}<-\sqrt{۲} \text{ و } -۱+\sqrt{۶}>\sqrt{۲}$$

حالا باید معادلهٔ $\sin x+\cos x=-۱$ را حل کنیم که دوجواب زیر را می‌دهد:

$$x_۱=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \text{ و } x_۲=۲n\pi+\pi$$

مثال ۵ . مطلوبست حل معادلهٔ

$$\sin ۲x-۱۲(\sin x-\cos x)+۱۲=۰$$

حل . این معادله نسبت به $\sin x$ و $\cos x-$ متقارن‌است و بنابراین $\sin x-\cos x=z$ می گیریم، که در اینصورت به دستگاه مختلط زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} z^2+12z-13=0 \\ |z|\leqslant\sqrt{2} \end{cases}$$

جواب این دستگاه $z=1$ است و بنابراین به معادلهٔ $\sin x-\cos x=1$ می‌رسیم که جوابهای آن چنین است:

$$x_1=2k\pi+\pi \text{ و } x_2=2n\pi+\frac{\pi}{4}$$

مثال ۶ . معادلهٔ $\cos^6 x+\sin^6 x=4\sin^2 2x$ را حل کنید.

حل . این معادله نسبت به $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ متقارن است‌وبنابراین $t=\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{4}\sin^2 2x$ می گیریم ($|t|\leqslant\frac{1}{4}$) که از آنجابه‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} 1-3t=16t \\ |t|\leqslant\frac{1}{4} \end{cases}$$

ازآنجا $t=\frac{1}{19}$ و $\sin^2 2x=\frac{4}{19}$ می‌شود و بدست می آید:

$$x=\frac{k\pi}{3}\pm\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,sin}\frac{2}{\sqrt{19}}$$

مثال ۷ . این معادله را حل کنید:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}(tg\,x-cotg\,x)=tg^2x+cotg^2x-2$$

حل . سمت چپ معادلهٔ

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(tg\,x-cotg\,x)-(tg^2x-2+cotg^2x)=0$$

نسبت به $u=tg\,x$ و $v=-cotg\,x$ متقارن است، ضمناً داریم:

$$t=u.v=-1 \text{ و } (u+v)^2=u^2-2+v^2$$

اگر $z=tg x-cotg x$ بگیریم، به‌معادلهٔ جبری زیر می‌رسیم:

$$\frac{۲}{\sqrt{۳}}z-z^۲=۰ \Longrightarrow z=۰ \quad \text{و} \quad z=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

وبنابراین بدست می‌آید:

$$tg x-cotg x=۰ \quad \text{و} \quad tg x-cotg x=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

ویا

$$tg^۲x-\frac{۲}{\sqrt{۳}}tg x-۱=۰ \quad \text{و} \quad tg^۲x=۱$$

جواب: $x_۱=k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ ، $x_۲=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}$

مثال ۸ . نامعادلهٔ زیر راحل کنید:

$$۳\sin ۲x>\sin x+\cos x+۱$$

حل . با درنظر گرفتن $z=\sin x+\cos x$ به‌دستگاه زیرمی‌رسیم:

$$\begin{cases} ۳z^۲-z-۴>۰ \\ |z|\leqslant\sqrt{۲} \end{cases}$$

ازحل این دستگاه جبری به جوابهای زیر می‌رسیم:

$$-\sqrt{۲}\leqslant z<-۱ \quad \text{و} \quad \frac{۴}{۳}<z\leqslant\sqrt{۲}$$

وچون $z=\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ است، بدست می‌آید:

$$-۱\leqslant\sin(x+\frac{\pi}{۴})<-\frac{۱}{\sqrt{۲}},$$

$$\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}<\sin(x+\frac{\pi}{۴})\leqslant۱$$

که از حل هریك از آنها جواب بدست می‌آید:

جواب: $(۲k-۱)\pi<x<۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$

$$2k\pi-\frac{\pi}{4}+\operatorname{Arcsin}\frac{2\sqrt{2}}{3}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{4}-\operatorname{Arcsin}\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۳ . وقتی‌که قدر مطلق حاصلضرب چندسینوس یاچندکسینوس‌مساوی واحد باشد

مثال ۱ . معادلهٔ $\cos x\cos 3x=1$ را درنظر می گیریم. واضح است که قدرمطلق هیچیك از دوعامل $\cos x$و$\cos 3x$ نمی‌توانند ازواحد کوچکتر باشند، زیرا درغیراینصورت قدرمطلق دیگری بزرگتر از واحد می‌شود که ممکن نیست.

بنابراین باید داشته باشیم:

$$(1)\quad\begin{cases}\cos x=1\\ \cos 3x=1\end{cases}\qquad \text{یا}\ (2)\quad\begin{cases}\cos x=-1\\ \cos 3x=-1\end{cases}$$

جواب هریك از دودستگاه فوق‌جواب معادله‌است. جوابهای معادله‌های (۱) چنین‌اند:

$$\cos x=1 \Longrightarrow x=2k\pi\ ;\ \cos 3x=1 \Longrightarrow x=\frac{2}{3}k\pi$$

که واضح است $x=2k\pi$ جواب مشترك آنهاست (درجواب $x=\frac{2}{3}k\pi$ اگر $k=3m$ بگیریم، همان جوابهای $x=2k\pi$ بدست می آید).

جوابهای معادله‌های (۲) چنین‌است:

$$\cos x=-1 \Longrightarrow x=(2k+1)\pi\ ;$$

$$\cos 3x=-1 \Longrightarrow x=\frac{1}{3}(2k+1)\pi$$

که جواب مشترك آنها $x=(2k+1)\pi$ است (زیرا اگر درجواب

$\pi(۲k+۱)\frac{۱}{۳}=x$ فرض کنیم: $k=۳m+۱$ ، همان جوابهای $x=(۲k+۱)\pi$ بدست می آید).

بنابراین $x=۲k\pi$ و $x=(۲k+۱)\pi$ ویابطور خلاصه $x=k\pi$ جواب معادلهٔ مفروض است.

راه حل دوم. معادله، پس‌از تبدیل سمت چپ تساوی بصورت مجموع، چنین می‌شود:

$$\cos ۴x+\cos ۲x=۲$$

واین تساوی تنها وقتی برقرار است که هردومقدار $\cos ۴x$ و $\cos ۲x$ برابر واحد باشند ، زیرا اگرمثلا $\cos ۴x$ کوچکتر از واحد مساوی $۱-a$ باشد $(a>۰)$، خواهیم داشت :

$$۱-a+\cos ۲x=۲ \implies \cos ۲x=۱+a$$

که ممکن نیست.

بنابراین حل معادله منجر به حل دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases}\cos ۲x=۱\\ \cos ۴x=۱\end{cases} \implies x=k\pi$$

مثال۲. اگر A،B وC زوایای یك مثلث باشد و داشته باشیم :

$$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)=۱$$

نوع مثلث را پیدا کنید.

حل . با استدلالی شبیه مسئلهٔ قبل روشن است که قدر مطلق هیچیك ازعوامل سمت چپ نمی‌توانند از واحد کوچکتر باشند. ضمناً دراینجا هیچیك ازعوامل مساوی ۱- هم نمی‌توانند باشند ، زیرا تفاضل دو زاویه از مثلث نمی‌تواند مساوی π ویا بیشتر ازآن

باشد؛ پس باید داشته باشیم:

$$\cos(A-B)=۱ \text{ و } \cos(B-C)=۱ \text{ و } \cos(C-A)=۱$$

که از آنجا بسادگی بدست می‌آید: $A=B=C$ ، یعنی مثلث مفروض مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

راه حل دوم. اگر سمت چپ تساوی را به‌مجموع تبدیل کنیم، پس‌از تبدیلات لازم ، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$\cos(۲A-۲B)+\cos(۲B-۲C)+\cos(۲C-۲A)=۳$$

که دراینصورت باید هر یك ازجمله‌های سمت چپ تساوی برابر واحد شود ودراینصورت‌همان نتیجهٔ $A=B=C$ بدست‌می‌آید.

۴ . وقتی‌که معادله‌ای نسبت به سینوس وکسینوس یك‌کمان از درجهٔ زوج باشد

درچنین مواردی همیشه با تبدیل به‌سینوس وکسینوس کمان دوبرابر، به‌معادله‌ای ساده‌تر می‌رسیم.

مثال ۱ . مطلوبست حل معادلهٔ

$$\cos^۲x+\cos^۲۲x+\cos^۲۳x+\cos^۲۴x=۲$$

حل : اگر همهٔ جمله‌های سمت چپ تساوی‌را به کسینوس کمان دوبرابر تبدیل کنیم،چنین می‌شود:

$$\frac{۱+\cos۲x}{۲}+\frac{۱+\cos۴x}{۲}+\frac{۱+\cos۶x}{۲}+\frac{۱+\cos۸x}{۲}=۲$$

که پس‌از ساده کردن بترتیب به‌اینصورت درمی‌آید:

$$(\cos۸x+\cos۶x)+(\cos۴x+\cos۲x)=۰ \;;$$

$$۲\cos۷x\cos x+۲\cos۳x\cos x=۰ \;;$$

$$۲\cos x(\cos۷x+\cos۳x)=۰ \;;$$

$$۴\cos x\cos۲x\cos۵x=۰$$

و بنابراین جوابهای کلی معادله چنین‌اند:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ، } \frac{1}{2}k_1\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ، } \frac{1}{5}k_2\pi + \frac{\pi}{10}$$

مثال ۲ . مطلوبست حل معادلهٔ

$$12\sin^3 x\cos x + 2\sin^2 x\cos^2 x + 2\cos^4 x = 2$$

حل . بترتیب داریم:

$$12\sin x\cos x.\sin^2 x + \frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2 + 2(\cos^2 x)^2 = 2 \quad ;$$

$$3\sin 2x(1-\cos 2x) + \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 2x)^2 = 2 \quad ;$$

$$3\sin 2x + \cos 2x - 3\sin 2x\cos 2x = 1 \quad ;$$
$$(1-\cos 2x) - 3\sin 2x(1-\cos 2x) = 0 \quad ;$$
$$(1-\cos 2x)(1-3\sin 2x) = 0 \quad ;$$
$$\cos 2x = 1 \implies x = k\pi$$
$$\sin 2x = \frac{1}{3} \implies x = k\pi + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{1}{3}$$

$$x = kn + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{1}{3}\right)$$

۵ : معادلاتی‌که شامل‌کمان x هستند .

معادلاتی که هم‌شامل‌کمان x وهم‌خطوط مثلثاتی مضربهای x باشند، درحالت‌کلی بسیار پیچیده واغلب غیرقابل حل‌اند.

روش‌کلی برای حل اینگونه معادلات استفاده از رسم منحنی و جستجوی جوابها (ویاتقریب جوابها) است.

مثال . مطلوبست حل معادلهٔ $\pi\sin x - 2\sqrt{2}x = 0$

حل. جوابهای $x_1 = 0$ ، $x_2 = \frac{\pi}{4}$ و $x_3 = -\frac{\pi}{4}$ بسادگی‌بدست

می آیندواگر منحنی نمایش تغییرات توابع $y = \sin x$ و $y = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} x$ را دریك دستگاه محـورهای مختصات رسم کنیم ، می‌بینیم کـه تنها درسه نقطه یکدیگر را قطع می کنند وبنابراین معادله جواب دیگـری ندارد.

*

رسم منحنی، برای حل معادلات و یا نامعادلات عادی مثلثاتـی هم می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد . بخصوص درحالتی که معادله یا نامعادله برحسب سینوس و کسینوس یك کمان قابل بیان باشد می‌توان از این‌روش نتیجهٔ قطعی گرفت و جوابهای تقریبی رابدست آورد.

مثال . مطلوبست حل معادلهٔ زیر

$$\sin x - \cos^3 x + \sin x \cos x = 0 \qquad (1)$$

حل. اگر $\cos x = X$ و $\sin x = Y$ فـرض کنیم ، حـل معادلـهٔ مفروض به‌حل‌دستگاه زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases} Y = \dfrac{X^3}{X+1} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

که ازلحاظ‌هندسی به معنای‌پیدا کردن‌نقاط‌تلاقی منحنی $Y = \dfrac{X^3}{X+1}$ با دایرهٔ $X^2 + Y^2 = 1$ است.

منحنی نمایش تغییرات این دوتابع درشکل ۲ رسم شده‌است.

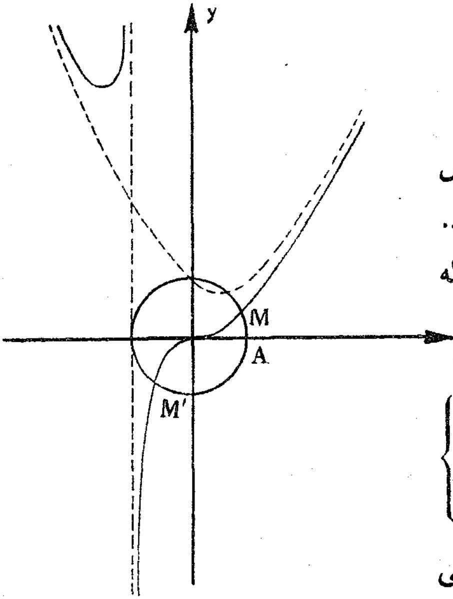
از شکل دیده می‌شود که (باتوجه به اینکه دایرهٔ

$$X^۲+Y^۲=۱$$

همان دایرهٔ مثلثاتی است).

معادلهٔ(۱) تنها دوجواب خاص (قوسهای AMوAM') دارد. وبنابراین جوابهای کلی معادله چنین است:

$$\begin{cases} x=۲k\pi+\widehat{AM} \\ x=۲k\pi+\widehat{AM'} \end{cases}$$



شکل ۲

توضیح . مقادیر تقریبی قوسهای AMوAM' را می‌توان به‌سادگی بدست آورد:

$$\widehat{AM}=۴۵^\circ=\frac{\pi}{۴}$$

$$\text{دایرهٔ } (C) \begin{cases} X=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰/۷۰۷۱\ldots \\ Y=\sin\frac{\pi}{۴}=۰/۷۰۷۱\ldots \end{cases}$$

$$\text{منحنی}(C_۱) \begin{cases} X=۰/۷۰۷۱\ldots \\ Y=۰/۲۰۷۱\ldots \end{cases}$$

$$\widehat{AM}=۳۰^\circ=\frac{\pi}{۶}$$

دایرهٔ (C)
$$\begin{cases} X=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰/۸۶۶... \\ Y=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}=۰/۵ \end{cases}$$

منحنی $(C_۱)$
$$\begin{cases} X=۰/۸۶۶... \\ Y=۰/۳۴۸۰۵... \end{cases}$$

$$\widehat{AM}=۲۲/۵^\circ=\frac{\pi}{۸}$$

دایرهٔ (C)
$$\begin{cases} X=\cos\frac{\pi}{۸}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}=۰/۹۲۳۹... \\ Y=\sin\frac{\pi}{۸}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}=۰/۳۸۲۷... \end{cases}$$

منحنی $(C_۱)$
$$\begin{cases} X=۰/۹۲۳۹... \\ Y=۰/۴۰۹۹۱۳... \end{cases}$$

بنابراین
$$۲۲/۵^\circ=\frac{\pi}{۸}<\widehat{AM}<۳۰^\circ=\frac{\pi}{۶}$$

حالا به محاسبهٔ مقدار تقریبی قوس AM' می‌پردازیم

$$\widehat{AM'}=۲۴۰^\circ=\frac{۴\pi}{۳}$$

دایرهٔ (C)
$$\begin{cases} X=\cos\frac{۴\pi}{۳}=-۰/۵ \\ Y=\sin\frac{۴\pi}{۳}=-۰/۸۶۶... \end{cases}$$

$$(C_1)\ \text{منحنی}\begin{cases} X=-۰/۵ \\ Y=-۰/۲۵ \end{cases}$$

$$\widehat{AM'}=۲۲۵^\circ=\frac{۵\pi}{۴}$$

$$(C)\ \text{دایرهٔ}\begin{cases} X=\cos\frac{۵\pi}{۴}=-۰/۷۰۷۱\ldots \\ Y=\sin\frac{۵\pi}{۴}=-۰/۷۰۷۱\ldots \end{cases}$$

$$(C_1)\ \text{منحنی}\begin{cases} X=-۰/۷۰۷۱\ldots \\ Y=-۱/۲۰۷۴\ldots \end{cases}$$

$$۲۲۵^\circ=\frac{۵\pi}{۴}<\widehat{AM'}<۲۴۰^\circ=\frac{۴\pi}{۳}$$

$$\widehat{AM'}=۲۳۲/۵^\circ$$

$$(C)\ \text{دایرهٔ}\begin{cases} X=\cos ۲۳۲/۵^\circ=-\cos ۵۲/۵=-۰/۶۰۸۸\ldots \\ Y=\sin ۲۳۲/۵=-\sin ۵۲/۵=-۰/۷۹۳۴\ldots \end{cases}$$

$$(C_1)\ \text{منحنی}\begin{cases} X=-۰/۶۰۸۸\ldots \\ Y=-۰/۵۷\ldots \end{cases}$$

$$۲۲۵^\circ<\widehat{AM'}<۲۳۲/۵^\circ$$

۶. استفاده ازماکزیمم و می‌نیمم توابع تشکیل دهندهٔ معادله

معادلهٔ $A(x)=B(x)$ را درنظر می‌گیریم. اگر $A(x)$ به ازای مقداری از x حداکثر و $B(x)$ به ازای مقداری از x حداقل باشد، در دو حالتی که $A_{Max}=B_{Min}$ یا $A_{Max}<B_{Min}$ باشد، می‌توان معادله راحل کرد.

مثال۱. مطلوبست‌حل معادلهٔ $\cos^۶ ۲x=۱+\sin^۴ x$.

حل. تابع $y_1=\cos^۶ ۲x$ به ازای $\cos ۲x=\pm۱$ حداکثرمقدار

خود یعنی ۱ را قبول می‌کند، که دراینصورت $x_1=\frac{k\pi}{2}$ بـــدســت می‌آید. تابع $y_2=1+sin^4 x$ به‌ازای $sin x=0$ به‌حداقل مقدارخود یعنی ۱ می‌رسد، که دراینصورت $x_2=m\pi$ بدست می‌آید. جوابهای معادله عبارتست از مقادیری از x که به‌ازای آنها y_1 حداکثــر و y_2 حداقل مقدار خود را دارا باشد، یعنی وقتی‌که $x_1=x_2$ شـــود ، از آنجا $k=2m$ بدست می‌آید. به‌این ترتیب‌جواب کلی معادلهٔ‌مفروض $x=m\pi$ خواهد بود.

مثال۴. معادلهٔ $sin x+cos x=\sqrt{2}+sin^4 4x$ را حل کنید.

حل . اگر سمت چپ معادله را به صورت ضرب تبدیل کنیم، بدست می‌آید:

$$\sqrt{2}\,cos(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}+sin^4 4x$$

حـــداکثر مقدار سمت چپ تساوی مساوی $\sqrt{2}$ است و وقتی حاصل می‌شود که داشته باشیم:

$$cos(x-\frac{\pi}{4})=1$$

حداقل مقدار سمت راست تساوی‌هم مساوی $\sqrt{2}$ است ووقتی بدست می‌آید که داشته باشیم :

$$sin 4x=0$$

و معادله وقتی بر قرار است که در عین حال

$$sin 4x=0 \text{ و } cos(x-\frac{\pi}{4})=1$$

باشد .

ازمعادله اول جوابهای $x_1 = 2m\pi + \frac{\pi}{4}$ وازمعادلهٔ دوم جوابهای $x_2 = \frac{n\pi}{4}$ پیدا می‌شود . از تساوی $x_1 = x_2$ به رابطهٔ $\frac{n}{4} = \frac{1}{4} + 2m$ می‌رسیم که از آنجا $n = 1 + 8m$ می‌شود . دیده می‌شود که اگر m عددی صحیح باشد، n هم‌عددی صحیح خواهدبود وبنابراین‌جواب معادلـه $x = 2m\pi + \frac{\pi}{4}$ است .

مثال ۳ . مطلوبست حل معادلهٔ $\sin 5x + \sin x = 2 + \cos^2 x$

حل : حداکثر مقدارسمت چپ تساوی برابراست بـا ۲ و آن وقتی بدست می‌آید که هم $\sin 5x = 1$ وهم $\sin x = 1$ باشد. حـداقل مقدارسمت راست تساوی هم برابر است با ۲ ، بشرطی که $\cos x = 0$ باشد. بنابراین معادله وقتی برقراراست که داشته باشیم:

$$\begin{cases} \sin 5x = 1 \\ \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

وبسادگی معلوم می‌شودکه جواب مشترك این سه معادله عبارتست از $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

مثال ۴ . معادلهٔ $\cos(2n+1)x + \cos 2mx = -2$ راحل کنید.

حل . معادله وقتی برقراراست که داشته باشیم:

$$\begin{cases} \cos(2n+1)x = -1 \\ \cos 2mx = -1 \end{cases}$$

که ازآنجا بدست می‌آید:

$$x_1=\frac{2k+1}{2n+1}\pi \quad \text{و} \quad x_2=\frac{2k'+1}{2m}\pi$$

وبنابراین برای جستجوی جواب مشترك باید داشته باشیم.

$$2m(2k+1)=(2n+1)(2k'+1)$$

و معادلهٔ اخیر برای مقادیر صحیح k و k' جواب ندارد، زیرا سمت چپ معادله عددی زوج وسمت راست آن عددی فرداست . بنابراین معادلهٔ مفروض به ازای هیچ مقداری ازعددهای صحیح m و n دارای جواب نیست .

مثال ۵ . مطلوبست حل معادلهٔ $5\sin^3 2x=15+2\cos^4 4x$.

حل , حداکثرمقدارسمت چپ تساوی مساوی ۵ وحداقل مقدار سمت راست تساوی مساوی ۱۵ است وبنابراین به ازای هیچ مقداری از x ، دوطرف تساوی برابرنمی‌شوند. معادله جواب ندارد.

۷ . معادله‌هائی که بطورمتصل صعودی یا نزولی هستند .

می‌توان ثابت کرد که اگر کثیرالجملهٔ یکنوا (مونوتون)[1] دارای جواب باشد، این جواب منحصر بفرد است. بنابراین اگر در چنین کثیرالجمله‌هائی یك جواب بدست آید ، تمام جوابهای آن بدست آمده است.

مثال . مطلوبست حل معادلهٔ $(\cos\frac{\pi}{7})^x+(\sin\frac{\pi}{7})^x=1$.

حل . بسادگی می‌توان ثابت کرد که اگر a و b دوعدد مثبت و کوچکتر ازواحد باشند، تابع $f(x)+a^x+b^x$ متصل ونزولی است و

---

۱. تابعی یکنوا است که بطورمتصل صعودی یابطورمتصل نزولی باشد.

بنابراین معادلهٔ مفروض تنها یك جواب دارد و واضح است کـه این جواب $x=۲$ می‌باشد.

۸ . تبدیل به مجموع مربعات

می‌دانیم که اگر $a^۲+b^۲+...=۰$ باشد ، بشرط حقیقی بودن مقادیر b،a،... باید داشته باشیم:

$$a=b=...=۰$$

با استفاده ازاین مطلب می‌توان بعضی از معادلات مثلثاتـی را حل کرد .

مثال ۱. معادلهٔ $\sin x+۲\sin ۲x=۳+\sin ۳x$ را حل کنید.

حل . بعداز تبدیلات ساده به معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$۲\cos ۲x\sin x-۲\sin ۲x+۳=۰$$

اگر به سمت چپ معادله، مقادیر $\cos^۲ ۲x+\sin^۲ ۲x$ را اضافه و $\sin^۲ x$ را یکبارکم ویکبار اضافه کنیم، پس ازتبدیلات ساده بدست می‌آید :

$$(\cos ۲x+\sin x)^۲+(\sin ۲x-۱)^۲+\cos^۲ x=۰$$

وبنابراین به دستگاه زیرمی‌رسیم:

$$(۱)\quad \begin{cases} \cos ۲x+\sin x=۰ \\ \sin ۲x-۱=۰ \\ \cos x=۰ \end{cases}$$

ازمعادلهٔ آخر دستگاه جواب $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ بدست می‌آید که اگـر در معادلهٔ دوم‌دستگاه‌قراردهیم، خواهیم داشت : $\sin(۲k\pi+\pi)-۱\neq۰$، یعنی معادله‌های دوم وسوم دستگاه جواب مشترك ندارند و بنابـراین دستگاه (۱) وازآنجا معادلهٔ مفروض جواب ندارد.

مثال ۴. همهٔ جوابهای معادلهٔ زیررا بدست آورید:

$$\cos(x-y)-2\sin x+2\sin y=3$$

حل . سمت چپ معادله را به مجموع مربعات تبدیل‌می کنیم،

بترتیب داریم:

$$1-\cos(x-y)+2(\sin x-\sin y)+2=0\ ,$$

$$2\sin^2\frac{x-y}{2}+4\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}+2=0$$

$$\sin^2\frac{x-y}{2}+2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}+\cos^2\frac{x+y}{2}+$$
$$+\sin^2\frac{x+y}{2}=0\ ,$$

$$\left(\sin\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right)^2+\sin^2\frac{x+y}{2}=0$$

واز اینجا به دستگاه زیرمی‌رسیم:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{x-y}{2}+\cos\dfrac{x+y}{2}=0\\[2mm] \sin\dfrac{x+y}{2}=0\end{cases}$$

از معادلهٔ دوم دستگاه بدست می آید:

$$\frac{x+y}{2}=k\pi\quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

مقدار $\frac{x+y}{2}$ رادرمعادلهٔ اول دستگاه قرارمی‌دهیم، بدست می آید:

$$\sin\frac{x-y}{2}=(-1)^{k+1}\qquad (k=0,\pm1,\ldots)$$

دوحالت پیش می آید:

a) $k=2n$ (یعنی k عددی است زوج):

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=2n\pi\\ \sin\dfrac{x-y}{2}=-1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=2n\pi\\ \dfrac{x-y}{2}=2m\pi-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

واز آنجا مقادیر x و y بدست می‌آید :

$$\begin{cases}x=2(n+m)\pi-\dfrac{\pi}{2}\\ y=2(n-m)\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\qquad(\mathrm{I})$$

b) $k=2n-1$ (یعنی k عددی است فرد):

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=(2n-1)\pi\\ \sin\dfrac{x-y}{2}=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=(2n-1)\pi\\ \dfrac{x-y}{2}=2m\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

واز آنجا :

$$\begin{cases}x=2(n+m)\pi-\dfrac{\pi}{2}\\ y=2(n-m-1)\pi+\dfrac{\pi}{2}\qquad(\mathrm{II})\\ n,m=0,\pm1,\pm2,\ldots\end{cases}$$

روابط (I) و (II) را مقایسه می‌کنیم . در (I) به ازای عددهای صحیح m و n ، عددهای $n+m$ و $n-m$ با هم زوج و یا با هم

فردند. در(II) عددهای $n+m$ و $n-m-1$ یکی زوج و دیگری فرد است وچون درروابط (I) و(II) اختلاف دیگری وجود ندارد، می‌توان آنها را بترتیب زیرمتحد کرد :

$$\begin{cases} x = 2p\pi - \frac{\pi}{2} \\ y = 2q\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

که درآن p و q عددهای صحیح دلخواهی هستند. وقتی p و q هردو زوج یا هردوفرد باشند، رابطهٔ (I) ووقتی یکی زوج و دیگری فرد باشد، رابطهٔ (II) بدست می‌آید.

مقادیر اخیر x و y همهٔ جوابهای معادلهٔ مفروض را بدست می‌دهد .

مسائل

معادله‌های زیررا حل کنید (۷۱ تا ۱۵۲) :

۷۱. $4\sin x + 2\cos x = 2 + 3tg x$

۷۲. $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3} - 2x) = 1$

۷۳. $\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = m\cos 4x$

۷۴. $4(\cos 3x + \cos 4x)(\cos 3x + \cos x) = 1$

۷۵. $2\sin^3 x + \sin^2 x - 2a\sin 2x + 2(a-1)\sin x - 2a\cos x + a - 1 = 0$

۷۶. $\cos^3 2x + \cos^2 2x + a^2\cos 2x = a^2$

۷۷. $\sin(x+\alpha) = k\cos(x-\beta)$

۷۸. $\cos^2 x - \cos^2(\alpha + x) = k$

۷۹. $\sqrt[۳]{\cos^{۲}x}+\sqrt[۳]{\sin^{۲}x}=\sqrt[۳]{m}$

۸۰. $$\sqrt[۵]{۲۷+۵\sqrt[۳]{\sin x+\sqrt{۳}\cos x-۱}}+$$
$$+\sqrt[۵]{۳۷-۵\sqrt[۳]{\sin x+\sqrt{۳}\cos x-۱}}=۴$$

۸۱. $\sin\left(x-\frac{۲\pi}{۱۱}\right)+\cos\left(\frac{۱۵\pi}{۲۲}-x\right)=۱$

۸۲. $\sqrt{۳}\sin\left(۳x+\frac{۴\pi}{۹}\right)+۴\sin\left(\frac{\pi}{۱۸}-۳x\right)=\sqrt{۱۹}\sin ۲x$

۸۳. $$tg\frac{x+\frac{\pi}{۳}}{\frac{\pi}{۲}-x}=cotg\frac{\frac{\pi}{۲}-x}{x+\frac{\pi}{۳}}$$

۸۴. $\sin\left(۳x-\frac{\pi}{۸}\right)=۲\sin\left(\frac{۳\pi}{۸}-x\right)$

۸۵. $\cos\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)+m\sin\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)+m-۱=۰$

۸۶. $tg\frac{x}{۲}=\frac{a-۱+tg x}{a+۱+tg x}$

۸۷. $\sin^{۴}x+\sin^{۲}x\cos^{۲}x+\cos^{۴}x=m\cos^{۴}x$

۸۸. $۲(\sin ۲x-\cos ۲x)=\frac{\cos x+\cos ۳x}{\cos x-\sin x}$

۸۹. $\sqrt{\cos x+m\cos^{۲}x}=۱-۲\cos x$

۹۰. $\frac{۱}{\sin x}+\frac{۱}{\sin ۲x}+\ldots+\frac{۱}{\sin ۲^{n-۱}x}=$

$$=\frac{2}{\cos\frac{2^n-1}{2}x-\cos\frac{2^n+1}{2}x}$$

۹۱. $$2x[2x-\cos(x-2y)]+y[y-\cos(x-2y]+$$
$$+4xy+\frac{1}{4}=0$$

۹۲. $$tg(cotg x)=cotg(tg x)$$

۹۳. $$tg(2x+\alpha).cotg(2x-\alpha)=a$$

۹۴. $$8\sin^3 x\cos x-3\sin^2 x+2\cos^2 x\sin^2 x+\cos^4 x=1$$

۹۵. $$\frac{a-b\cos x}{\sin x}=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}\,tg y}{1+tg^2 y}\qquad |a|>|b|$$

۹۶. $$\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x$$

۹۷. $$(1+z^2+cotg^2 x)^2+(2-z^2+tg^2 x)^2=12+\frac{1}{2}\cos y$$

(x و y و z را بدست آورید)

۹۸. $$\cos(x-a)-\frac{1}{4}\sin 2(x+a)=\sin 4a$$

۹۹. $$\sin^2\varphi+\cos^2 2\varphi-2\cos\varphi\cos 2\varphi\cos 4\varphi=\frac{3}{4}$$

۱۰۰. $$(1+\cos x)(1+\cos 2x)(1+\cos 3x)=\frac{1}{2}$$

۱۰۱. $$2ab\cos 3x+2ac\cos 2x+2bc\cos x+a^2+b^2+$$
$$+c^2=0\,(a.b.c\neq 0)$$

۱۰۲. $$\frac{\sin^8 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^8 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{4}$$

۱۰۳. $$\sin^n x+\frac{1}{\cos^m x}=\cos^n x+\frac{1}{\sin^m x}$$

(m و n عددهای فرد و مثبتی هستند).

۱۰۴. $tg3x + tg3x\,tg2x\,tgx = tg2x + tgx$

۱۰۵. $tg(\frac{\pi}{2}\cos x) - cotg(\pi \sin x) = 0$

۱۰۶. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$

۱۰۷. $3(\sin x + \cos x) = 4(\sin^3 x + \cos^3 x) + 1 = 0$

۱۰۸. $x - tg x = 0$ ۱۰۹. $\sin x = x^2$

۱۱۱. $3 - \cos x = x^2$ ۱۱۰. $\sin x = \log_2 x$

۱۱۲. $\cos^2 x + \sin^{10} 2x = 2$

۱۱۳. $\cos 2x(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x) = 1$

۱۱۴. $\sin^2 x \cos^6 x = 1$ ۱۱۵. $-10x^2 = 3\sin^2 x$

۱۱۶. $(m>0) \quad m\cos^3 2x = m + \sin^4 2x$

۱۱۷. $(m>0) \quad \cos f(x)\left[1 - \frac{\sin^3 f(x)}{m}\right] = 1$

۱۱۸. $\sin 18x + \sin 10x + \sin 2x = 3 + \cos^2 2x$

۱۱۹. $2\sin^3 x = 5 + 3\cos^4 x$

۱۲۰. $4x^4 + x^6 = -\sin^2 5x$

۱۲۱. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 3$

۱۲۲. $\sin x + \sin^2 3x = 3$

۱۲۳. $tg^2 2x + 2\sqrt{3}\,tg2x + 3 = -cotg^2(4x - \frac{\pi}{6})$

۱۲۴. $\sin\frac{x}{4} + 2\cos\frac{x - 2\pi}{3} = 3$

۱۲۵. $\cos 2x - \cos\frac{x}{3} - 2 = 0$

۱۲۶. $3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}-4\sin 2\pi x=5$

۱۲۷. $2\cos(\pi x^3)+\frac{6}{\pi}\text{Arc}\sin(x^2-2)+x^2-2x+6=0$

۱۲۸. $\sin^2(\pi x)+\log_2^2(x^2-2x+1)=0$

۱۲۹. $\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\frac{1}{2}\sin y$

۱۳۰. $3\sin^2\frac{x}{3}+5\sin^2 x=8$

۱۳۱. $2\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)-3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=5$

۱۳۲. $4\sin 2x-tg^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=4$

۱۳۳. $1+\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{2}\sin^2 3x$

۱۳۴. $1+\cos^2 x+2\cos x\cos^2 5x=\sin^2 5x$

۱۳۵. $\sin^6 x+\sin^4 x+\cos^6 x+\cos^4 x+\sin\frac{x}{2}=3$

۱۳۶. $2+4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2 x+5\sin^2\frac{x}{2}=8\sin^2\frac{x}{2}\sin^2 5x$

۱۳۷. $4+\sin^2 x\cos^2 2x=5\sin^2 x\sin^2 y$

۱۳۸. $2\cos^4 x+2\cos^4 y+1=2\cos(x+y)+2\cos(x-y)$

۱۳۹. $\text{Arc}\sin(x+y-2)+\text{Arc}\sin(xz-2)+$
$+\text{Arc}\cos(yz-7)=2\pi$

۱۴۰. $1+\sin 2x=\sin x+\cos x$

۱۴۱. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=tg x+cotg x$

۱۴۲. $tg^2 2x+cotg^2 2x+2tg 2x+2cotg 2x=6$

۱۴۳. $5(1-\sin 2x)-16(\sin x-\cos x)+3=0$

۱۴۴. $\sin^{۴}(\pi x)+\cos^{۴}(\pi x)=\sin(۲\pi x)$

۱۴۵. $\sin ۲x-۲(۲\sqrt{\sin x+\cos x}-۳)(\sin x+\cos x)-$
$$-۴\sqrt{\sin x+\cos x}+۲=۰$$

۱۴۶. $\sin^{۱۰}(\frac{\pi}{۶}-x)+\cos^{۱۰}(\frac{\pi}{۶}-x)=a$

۱۴۷. $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}=m$

۱۴۸. $\sin x+\cos x+tg x+cotg x+séc x+cosec x=a$

۱۴۹. $۱۶(\sin^{۱۰}x+\cos^{۱۰}x)=۲۹\cos^{۴}۲x$

۱۵۰. $\sin(\pi Arctg x)=\cos(\pi Arctg x)$

۱۵۱. $x^{۲}-۲x\cos(xy)+۱=۰$

۱۵۲. $(\sin x)^{۵۰۰}+(\cos x)^{۵۰۰}=۱$

۱۵۳. کوچکترین جواب معادلهٔ زیررا برحسب گراد (تا یکصدم تقریب) بدست آورید:

$$۱۰۰\cos^{۲}x+۲۰۰۰۱\sin x-۳۰۰=۰$$

۱۵۴. اگر $-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}$ باشد، شرط وجود جواب را در معادلهٔ زیر پیدا کنید:

$$m\sin^{۲}x+(۲m-۱)\cos x+۱=۰$$

۱۵۵. به‌ازای چه مقادیری از x تابع $y=\sqrt{۴\cos^{۲}۲x-۳}$ حقیقی است؟ نامعادلات زیررا حل کنید (از ۱۵۶ تا ۱۶۹)

۱۵۶. $\left(\sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{x}{۲}\right)^{۲}<\sin x$

۱۵۷. $۲\cos^{۲}(x+۳۰^\circ)۳-\sin(۶۰^\circ-x)+۱>۰$

۱۵۸. $\cos ۲x-\cos ۸x+\cos ۶x<۱$

۱۵۹. $\cos^2 x + 7\sin^2 x < 8\sin x\cos x$

۱۶۰. $3^{\cos x} < \sqrt{3}$ ۱۶۱. $\sin x + \sqrt{3}\cos x > 1$

۱۶۲. $2^{(2\cos x - 1)(2\cos x + \sqrt{2})} < 1$

۱۶۳. $2\cos^2 2x < 1$ ۱۶۴. $\sin^2 x + \cos x + 1 < 0$

۱۶۵. $3\cos^2 x - \sin^2 x > \sin 2x$

۱۶۶. $\cos 2x + \cos 6x > \sin 3x \sin 5x$

۱۶۷. $\sin x \sin 7x > \sin 3x \sin 5x$

۱۶۸. $\sin^2 x\, tg\frac{1}{1+x^2} > \sin^2 x$

۱۶۹. $\sqrt{tg x - 1}\left[\log_{tg x}(2 + 4\cos^2 x) - 2\right] \geqslant 0$

۱۷۰. اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ باشد، ثابت کنید:

$$\frac{\sin x}{x} > \sqrt{\cos x}$$

۱۷۱. اگر $0 \leqslant \alpha \leqslant 60^\circ$ باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sin(60^\circ + \alpha)} + \frac{1}{\sin(60^\circ - \alpha)} \geqslant \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

۱۷۲. اگر A، B و C زوایای حاده و $A + B + C = \pi$ باشد ، ثابت کنید:

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geqslant 6$$

۱۷۳. ثابت کنید درهرمثلث بازوایای حاده، نامساوی زیر صحیح است

$$tg^2 a + tg^2 b + tg^2 c \geqslant 9$$

۱۷۴. از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ، پاره خطهائی بموازات

اضلاع آن رسم کرده‌ایم. اگر شعاع دایرهٔ محاطی مساوی r باشد، ثابت کنید مجموع مربعات این پاره‌خطها (که محدود به‌اضلاع مثلث‌اند) از $16r^2$ کوچکتر نیست.

۱۷۵. اگرزاویهٔ بین میانه‌های وارد بر اضلاع مجاور به‌زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه را x فرض کنیم، ثابت کنید $\cos x \geqslant \frac{4}{5}$

۱۷۶. ثابت کنید اگر مجموع زوایای A و C از یك چهارضلعی محدب بیشتر از ۱۸۰ درجه باشد داریم:

$$\frac{e}{f} < \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

که در آن $AB=a$، $BC=b$، $CD=c$، $DA=d$، $BD=f$، $AC=e$ است.

۱۷۷. دایره‌ای درمثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌وتر c محاط شده‌است. اگر نقاط تماس این دایره را با اضلاع زاویهٔ حاده به M و N نشان دهیم ثابت کنید:

$$MN \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{9}c$$

۱۷۸. درهرمثلث نامساوی زیربرقرار است:

$$a\sin A + b\sin B + c\sin C \geqslant \frac{2S}{R}\sqrt{3}$$

(a و b و c اضلاع مثلث، S مساحت و R شعاع دایرهٔ محیطی آنست).

۱۷۹. دایرهٔ محیطی مثلث را به‌شعاع R رسم کرده‌ایم. سپس دایره‌های به‌شعاعهای r_1، r_2، r_3 را مماس بر دوضلع مثلث و دایره محیطی آن رسم کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$r_1+r_2+r_3\leqslant 2R$$

۱۸۰. ثابت کنید درهر مثلث نامساوی زیر صحیح است:

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{4}{R^2}$$

۱۸۱. اگر O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و R، R_1، R_2، R_3 بترتیب شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای ABC، BOC، COA و AOB باشد، ثابت کنید:

$$R_1^2+R_2^2+R_3^2\geqslant 3R^2$$

۱۸۲. اگر α ، β و γ زوایائی‌مثبت و به‌مجموع $\frac{\pi}{2}$ باشد، ثابت کنید:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant\frac{9}{8}$$

۱۸۳. اگر A، B و C زوایای یك مثلث باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geqslant 12$$

۱۸۴. اگر α ، β و γ زوایای یك مثلث حاده‌الزاویه باشند، ثابت کنید:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+tg\alpha+tg\beta+tg\gamma>2\pi$$

$|\sin kx|$

۱۸۵. ثابت کنید: $|\sin kx|\leqslant k|\sin x|$

(k عددی صحیح وغیرمنفی است).

۱۸۶. ثابت کنید درهرمثلث داریم:

$$cotg^2\frac{A}{2}+cotg^2\frac{B}{2}cotg^2\frac{C}{2}\geqslant 9$$

۱۸۷. نامعادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\sqrt{1-2\sin x}+\sqrt{1-2\cos x}>\sqrt{2}$$

۱۸۸. ثابت کنید:

$$(\sec^{2n}a-1)(\operatorname{cosec}^{2n}a-1)\geqslant(1+2+\dots+n)^2$$

۱۸۹. ثابت کنید:

$$tg^nA+tg^nB+tg^nC\geqslant 3+\frac{3n}{2}$$

A و B و C زوایای یك مثلث حادهالزاویه و n عـددی طبیعی یا صفر است.

۱۹۰. اگر a و b و c اضلاع یـك مثلث و x و y و z اضلاع مثلث ارتفاعیهٔ آن باشد، ثابت کنید:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\geqslant\frac{3}{4}$$

۱۹۱. اگر A ، B و C زوایای یك مثلث باشند، ثابت کنید پاره‌خطهای بطول $\cos\frac{A}{2}$ ، $\cos\frac{B}{2}$ و $\cos\frac{C}{2}$ وهمچنین پاره‌خطهای بطول $\cos^2\frac{A}{2}$ ، $\cos^2\frac{B}{2}$ و $\cos^2\frac{C}{2}$ می‌توانند اضلاع یك مثلث باشند.

۱۹۲. اگر a، b و c اضلاع مثلث و S مساحت آن باشد، ثابت کنید:

$$ab+bc+ca\geqslant 4\sqrt{3}S$$

۱۹۳. اگر c ، b و a اضلاع مثلث، p نصف محیط و r شعاع دایرهٔ محاطی آن باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1}{(P-a)^2}+\frac{1}{(P-b)^2}+\frac{1}{(P-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}$$

۱۹۴. ثابت کنید درهر مثلث نامساوی زیربرقرار است:

$$a \geqslant ۲h_a tg\frac{A}{۲}$$

۱۹۵. اگر $۰<\alpha<۹۰^\circ$ باشد، ثابت کنید:

$$(۱+\frac{۱}{sin\alpha})(۱+\frac{۱}{cos\alpha}) \geqslant ۳+۲\sqrt{۲}$$

۱۹۶. ثابت کنید برای هرمثلث نامساوی زیرصحیح است:

$$۵R-r \geqslant p\sqrt{۳}$$

(R شعاع دایرهٔ محیطی، r شعاع دایرهٔ محاطی و p نصف محیط مثلث است).

۱۹۷. ثابت کنید درهرمثلث نامساوی زیر صحیح است:

$$a(P-a)+b(p-b)+c(p-c) \leqslant ۹Rr$$

۱۹۸. $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ را شعاعهای دایره‌هائی می گیریم که هریك‌از آنها بردوضلع و دایرهٔ محیطی مثلث مماس باشند، اگر r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث باشد، ثابت کنید:

$$r_۱+r_۲+r_۳ \geqslant ۴r$$

۱۹۹. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را R و شعاع دایره‌های‌محاطی قطاعهای AOB ، BOC ، COA را به‌ترتیب $R_۱$،$R_۲$ و $R_۳$ می‌نامیم. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{R_۱}+\frac{۱}{R_۲}+\frac{۱}{R_۳} \geqslant \frac{۳+۲\sqrt{۲}}{R}$$

دستگاههای زیررا حل کنید (۲۰۰ تا ۲۰۸)

۲۰۰.
$$\begin{cases} tg^2x + cotg^2x = 2\sin^2y \\ \sin^2y + \cos^2z = 1 \end{cases}$$

۲۰۱.
$$\begin{cases} x+y+z=\frac{3\pi}{4} \\ \sqrt{3}\sin x=\sqrt{\frac{3}{2}}\sin y=\sin z \end{cases}$$

۲۰۲.
$$\begin{cases} x+y+xy=1 \\ (1+x^2)(1-y^2)+4xy=\frac{1}{2}(1+x^2)(1+y^2) \end{cases}$$

۲۰۳.
$$\begin{cases} \sin x\sin y=\frac{3}{4} \\ tgx\,tgy=3 \end{cases}$$

۲۰۴.
$$\begin{cases} \sin x=\sqrt{2}\sin y \\ tgx=\sqrt{3}tgy \end{cases}$$

۲۰۵.
$$\begin{cases} \sin^2x+\sin 2y=\frac{3}{4} \\ x+y=75^\circ \end{cases}$$

۲۰۶.
$$\begin{cases} tgx=a\,tg2y \\ tgy=a\,tg2x \end{cases}$$

۲۰۷.
$$\begin{cases} x+y+z=\pi \\ \frac{tgx}{m}=\frac{tgy}{n}=\frac{tgz}{p} \end{cases}$$

۲۰۸.
$$\begin{cases} x+2y=\frac{\pi}{2} \\ 3tgx+12tgy=5\sqrt{3} \end{cases}$$

۲۰۹. مطلوبست تعیین رابطه‌ای بین پارامترهای a، b و c بشرطی که داشته باشیم:

$$\begin{cases} a\sin 2x+b\cos 2x=c\cos x \\ a\sin x+b\cos x=c \end{cases}$$

۲۱۰. از دستگاه روابط $\frac{\sin x+\cos x}{\sin y+\cos y}=c$ ، $\frac{\cos x}{\cos y}=b$ ، $\frac{\sin x}{\sin y}=a$

رابطه‌ای بین a و b و c پیدا کنید.

۲۱۱. چه رابطه‌ای بین a، b و c وجود دارد بشرطی که داشته باشیم:

$$\cos x + \cos y = a \quad , \quad \operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec} y = b$$

$$\cot g\, x + \cot g\, y = c$$

۲۱۲. x را بین دو رابطهٔ زیر حذف کنید:

$$\begin{cases} a\sin x - b\cos x = \frac{1}{2} c\sin 2x \\ a\cos x + b\sin x = c\cos 2x \end{cases}$$

۲۱۳. φ را بین روابط زیر حذف کنید:

$$\frac{\cos(\alpha - 3\varphi)}{\cos^3\varphi} = \frac{\sin(\alpha - 3\varphi)}{\sin^3\varphi} = m$$

۲۱۴. x و y را بین روابط زیر حذف کنید:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 2a \\ \cos x + \cos y = 2b \qquad (a^2 + b^2 \neq 0) \\ tg\, x + tg\, y = 2c \end{cases}$$

۲۱۵. α و β را بین روابط زیر حذف کنید:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{\cos^2\alpha}{t^2} + \frac{\sin^2\alpha}{t'^2} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{\cos^2\beta}{t^2} + \frac{\sin^2\beta}{t'^2} \\ tg\alpha\, tg\beta \frac{t'}{t} \end{cases}$$

۲۱۶. x را بین معادلات زیر حذف کنید:

$$\begin{cases} \sin x - \operatorname{cosec} x = a \\ \cos x - \sec x = b \end{cases}$$

۲۱۷. جوابهای x و y از دستگاه زیررا بصورت قابل محاسبه لگاریتمی در آورید:

$$\begin{cases} x\sin a + y\sin 2a = \sin 3a \\ x\sin 3a + y\sin 6a = \sin 9a \end{cases}$$

۲۱۸. باچه شرطی معادلات زیر یك ریشهٔ مشترك دارند:

$$\begin{cases} p\sin 2x + q\cos 2x = r \\ m\,tg(x+a) = n\,tg(x-a) \end{cases}$$

۲۱۹. دو معادلهٔ زیر به‌چه شرطی یك ریشهٔ مشترك دارند:

$$\sin x + \cos x = m \quad , \quad tg\,2x + cotg\,2x = n$$

۵. توابع معکوس مثلثاتی

۱. تعریفها

اگر در تابع $y=f(x)$ ، با تبدیل نقشهای x و y ، بتوان تابع $x=\varphi(y)$ را بدست آورد، گویند $x=\varphi(y)$ تابع معکوس $y=f(x)$ است.

تابع معکوس $x=\varphi(y)$ را معمولا به‌صورت $y=\varphi(x)$ می‌نویسند (تا نقش متغیر به x و نقش تابع به y داده شده باشد) و بنابراین دو تابع $y=f(x)$ و $y=\varphi(x)$ را معکوس هم گویند.

مثلا توابع $y=۳x+۱$ و $y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}$ دوتابع‌معکوس‌اند.

همچنین توابع $y=\frac{x+۱}{۳x-۳}$ و $y=\frac{۳x+۱}{۲x-۱}$ معکوس یکدیگرند.

*

برای تابع $y=\sin x$ ، اگر x را هر مقدار دلخواه (از $-\infty$ تا ∞) بگیریم، نمی‌توان تابع معکوس را بدست آورد، زیرا به‌ازای هرمقدار $y=a$ ، بینهایت‌مقدار برای x بدست می‌آید. تابع‌معکوس $y=\sin x$ وقتی ممکن است که برای هرمقدار y تنها یك مقدار برای x بدست آید.

بهمین مناسبت x را درفاصله‌ای (که متصل وصعودی یا متصل‌و نزولی باشد) در نظر می‌گیرند. برای $y=\sin x$ ، وقتی که بخواهیم تابع معکوس آنرا بدست آوریم، $-\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}$ به‌حساب‌می‌آید، در اینصورت به‌ازای هرمقدار y (که از ۱- کمتر واز ۱+ بیشتر نباشد) تنها یك مقدار برای x بدست خواهد آمد.

تابع معکوس $y=\sin x$ را به‌صورت $y=\mathrm{Arc}\sin x$ نشان می‌دهند و با توجه به‌آنچه گفتیم داریم:

$$-\frac{\pi}{۲}\leqslant \mathrm{Arc}\sin x\leqslant\frac{\pi}{۲}$$

و بنابراین جواب کلی معادلهٔ $sin\,x = a$ را (با شرط $-1 \leqslant a \leqslant 1$) باید چنین نوشت:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \mathrm{Arc}\,sin\,a \\ x = (2k+1)\pi - \mathrm{Arc}\,sin\,a \end{cases}$$

تابع $\mathrm{Arc}\,sin\,x$ **فرد** است، زیرا بسادگی معلوم می‌شود که داریم:

$$\mathrm{Arc}\,sin(-x) = -\mathrm{Arc}\,sin\,x$$

تابع $\mathrm{Arc}\,sin\,x$ **صعودی** است، زیرا وقتی که x از ۱− تا ۱+ تغییر کند، مقدار $\mathrm{Arc}\,sin\,x$ از $-\frac{\pi}{2}$ تا $+\frac{\pi}{2}$ و بطور متصل تغییر می کند.

رابطهٔ $sin(\mathrm{Arc}\,sin\,x) = x$ روشن‌وناشی ازتعریف آرک‌سینوس است. درحقیقت بنابر تعریف: $\mathrm{Arc}\,sin\,x$ قوسی است که سینوس آن برابر x است.

*

تابع $\mathrm{Arc}\,sin\,x$ با شرط $0 \leqslant \mathrm{Arc}\,cos\,x \leqslant \pi$ معنا دارد و بنابراین جواب کلی معادلهٔ $cos\,x = a$ (با شرط $-1 \leqslant a \leqslant 1$) عبارتست از :

$$x = 2k\pi \pm \mathrm{Arc}\,cos\,a$$

تابع $\mathrm{Arc}\,cos\,x$ **نه‌فرد** است **نه‌زوج** و داریم:

$$\mathrm{Arc}\,cos(-x) = \pi - \mathrm{Arc}\,cos\,x$$

تابع $\mathrm{Arc}\,cos\,x$ **نزولی** است، زیرا وقتی که x از ۱− تا ۱+ تغییر کند، $\mathrm{Arc}\,cos\,x$ از π تا صفربطور متصل نزول می کند.

*

تابع $\mathrm{Arc}\,co\,x$ با شرط $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arc}\,tg\,x < \frac{\pi}{2}$ معنا دارد و

وبنابراین جواب کلی معادلهٔ $tg\,x = a$ (برای هر مقدار دلخواه a) چنین است:

$$x = k\pi + \mathrm{Arc}tg\,a$$

تابع $\mathrm{Arc}tg\,x$ فرد است، زیرا داریم:

$$\mathrm{Arc}tg(-x) = -\mathrm{Arc}tg\,x$$

تابع $\mathrm{Arc}tg\,x$ صعودی است،زیراوقتی که x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند، $\mathrm{Arc}tg\,x$ از $-\frac{\pi}{2}$ تا $+\frac{\pi}{2}$ بطور متصل ترقی می کند.

*

تابع $\mathrm{Arc}cotg\,x$ باشرط $0 < \mathrm{Arc}cotg\,x < \pi$ معین میشود و بنابراین جواب کلی معادلهٔ $cotg\,x = a$ (برای هر مقداردلخواه a) چنین است:

$$x = k\pi + \mathrm{Arc}cotg\,a$$

تابع $\mathrm{Arc}cotg\,x$ نه فرد است و نه زوج و داریم :

$$\mathrm{Arc}cotg(-x) = \pi - \mathrm{Arc}cotg\,x$$

تابع $\mathrm{Arc}cotg\,x$ نزولی است، زیرا وقتی که x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند ، $\mathrm{Arc}cotg\,x$ از π تا صفر بطور متصل نزول می کند .

*

روابط زیر واضح‌است ومی‌توانید صحت آنهارا تحقیق کنید:

$$\left\{\begin{array}{l} \sin \mathrm{Arc}(\sin x) = x \\ \sin(\mathrm{Arc}\cos x) = \sqrt{1 - x^2} \\ \sin(\mathrm{Arc}tg\,x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \\ \sin(\mathrm{Arc}cotg\,x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \end{array}\right. \quad ;$$

$$\begin{cases} \cos(\mathrm{Arc}\sin) = \sqrt{۱-x^۲} \\ \cos(\mathrm{Arc}\cos x) = x \\ \cos(\mathrm{Arc}tg x) = \dfrac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}} \\ \cos(\mathrm{Arc}cotg x) = \dfrac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} tg(\mathrm{Arc}\sin x) = \dfrac{x}{\sqrt{۱-x^۲}} \\ tg(\mathrm{Arc}\cos x) = \dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{x} \\ tg(\mathrm{Arc}tg x) = x \\ tg(\mathrm{Arc}cotg x) = \dfrac{۱}{x} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} cotg(\mathrm{Arc}\sin x) = \dfrac{\sqrt{۱-x_۲}}{x} \\ cotg(\mathrm{Arc}\cos x) = \dfrac{x}{\sqrt{۱-x^۲}} \\ cotg(\mathrm{Arc}tg x) = \dfrac{۱}{x} \\ cotg(\mathrm{Arc}cotg x) = x \end{cases} ;$$

مثال ۱ . مطلوبست محاسبهٔ $\sin(۲\mathrm{Arc}\sin x)$.

حل . با استفاده از رابطهٔ $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$ بدست می آید:

$$\sin(۲\mathrm{Arc}\sin x) = ۲\sin(\mathrm{Arc}\sin x)\cos(\mathrm{Arc}\sin x) = ۲x\sqrt{۱-x^۲}$$

مثال ۲ . مطلوبست محاسبهٔ $\sin(\frac{۱}{۲}\mathrm{Arc}\sin x)$.

حل . با استفاده از رابطهٔ

$$\sin\frac{۱}{۲}\alpha = \pm\left(\frac{\sqrt{۱+\sin\alpha}-\sqrt{۱-\mathrm{x}\sin\alpha}}{۲}\right)$$

بدست می‌آید :

$$\sin\left(\frac{۱}{۲}\mathrm{Arc}\sin\mathrm{x}\right)=\frac{\sqrt{۱+\mathrm{x}}-\sqrt{۱-\mathrm{x}}}{۲}$$

علامت سمت راست تساوی را به اینجهت مثبت گرفته‌ایم که اگر $\mathrm{x}>۰$ باشد سمت چپ تساوی مثبت و اگر $\mathrm{x}<۰$ باشد منفی است.

مثال ۳ . مطلوبست محاسبهٔ $\mathrm{y}=\mathrm{Arc}tg\,\mathrm{x}-\mathrm{Arc}cotg\frac{۱}{\mathrm{x}}$

حل . این تابع به‌ازای $\mathrm{x}=۰$ معنا‌ندارد. ازطرف دیگرروشن است که وقتی $\mathrm{x}>۰$ باشد داریم: $\mathrm{Arc}cotg\,\mathrm{x}=\mathrm{Arc}cotg\frac{۱}{\mathrm{x}}$ و وقتی $\mathrm{x}<۰$ باشد بترتیب داریم :

$$\mathrm{Arc}tg\,\mathrm{x}=-\mathrm{Arc}tg(-\mathrm{x})=-\mathrm{Arc}cotg\left(-\frac{۱}{\mathrm{x}}\right)=$$

$$-\left(\pi-\mathrm{Arc}cotg\frac{۱}{\mathrm{x}}\right)$$

یعنی‌درحالتی که $\mathrm{x}<۰$ است داریم: $\mathrm{Arc}tg\,\mathrm{x}=\mathrm{Arc}cotg\frac{۱}{\mathrm{x}}-\pi$

به‌این ترتیب بدست می‌آید:

$$\mathrm{y}=\begin{cases}۰ & (\mathrm{x}>۰)\\ -\pi & (\mathrm{x}<۰)\end{cases}$$

مثال ۴ . محاسبه کنید:

$$\alpha=\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۳}+\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۵}+\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۷}+\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۸}$$

حل . چون هریك ازقوسهای سمت راست تساوی کوچکتر از $\frac{\pi}{۴}$ است، مجموع آنها کوچکتر از π می‌شود و بنابراین انتهای قوس α بر نیمدایرهٔ فوقانی دایرهٔ مثلثاتی واقع است. بترتیب داریم:

$$tg(\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۳}+\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۵})=\frac{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}}{۱-\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۵}}=\frac{۴}{۷},$$

$$tg\left[(\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۳}+\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۵})+\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۷}\right]=\frac{\frac{۴}{۷}+\frac{۱}{۷}}{۱-\frac{۴}{۷}\cdot\frac{۱}{۷}}=\frac{۷}{۹},$$

و بالاخره بدست می‌آید :

$$tg\alpha=\frac{\frac{۷}{۹}+\frac{۱}{۸}}{۱-\frac{۷}{۹}\cdot\frac{۱}{۸}}=۱$$

و چون تنها قوسی که بین صفر و π واقع باشد و تانـژانتی مساوی واحد داشته باشد مساوی $\frac{\pi}{۴}$ است، $\alpha=\frac{\pi}{۴}$ می‌شود.

۳. مشتق توابع معکوس مثلثاتی

تابع $y=\mathrm{Arc}sin x$ را در نظر می‌گیریم. از این تابع می‌توان بدست آورد:

$$(۱)\qquad x=sin y\qquad (\text{با شرط } -\frac{\pi}{۲}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{۲})$$

از طرفین رابطهٔ (۱) نسبت به x مشتق می گیریم.

$$1 = y'\cos y = y'\sqrt{1-\sin^2 y} = y'\sqrt{1-x^2}$$

و از آنجا:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

توضیح. چون $\cos y$ باشرط $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ همیشه غیر منفی است، $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$ گرفتیم و علامت جلو رادیکال را مثبت اختیار کردیم.

روشن است که اگر $y = \mathrm{Arc}\sin u$ بود (u تابعی از x است) بدست می آید: $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

با همین روش می‌توان مشتق سایر توابع معکوس مثلثاتی را بدست آورد:

$$\left|\begin{array}{l} y = \mathrm{Arc}\cos u \\ y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \end{array}\right. , \qquad \left|\begin{array}{l} y = \mathrm{Arc}\,tg\, u \\ y' = \frac{u'}{1+u^2} \end{array}\right. ,$$

$$\left|\begin{array}{l} y = \mathrm{Arc}\cot g\, u \\ y' = \frac{-u'}{1+u^2} \end{array}\right.$$

چند مثال

۱) $$y = \mathrm{Arc}\sin\frac{2x-1}{x+2}$$

$$y'=\frac{\frac{۵}{(x+۲)^۲}}{\sqrt{۱-\left(\frac{۲x-۱}{x+۲}\right)^۲}}=\frac{۵}{(x+۲)^۲\sqrt{\frac{-۳x^۲+۸x+۳}{(x+۲)^۲}}}$$

از شرط $-۱\leqslant\frac{۲x-۱}{x+۲}\leqslant ۱$ بدست می‌آید $-\frac{۱}{۳}\leqslant x\leqslant ۳$ و

بنابراین $x+۲>۰$ است و می‌توان جواب را چنین نوشت:

$$y'=\frac{۵}{(x+۲)\sqrt{-۳x^۲+۸x+۳}}$$

۲) $$y=\mathrm{Arc}\cos\sqrt{۱-x^۲}$$

$$y'=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱-(۱-x^۲)}}=\frac{x}{|x|\sqrt{۱-x^۲}}=$$

$$=\begin{cases}\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} & (x>۰)\\ \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}} & (x<۰)\end{cases}$$

۳) $$y=\mathrm{Arc}tg\frac{۳x}{۱+x^۲}$$

$$y'=\frac{\frac{۳-۳x^۲}{(۱-x^۲)^۲}}{۱+\left(\frac{۳x}{۱+x^۲}\right)^۲}=\frac{۳(۱-x^۲)}{x^۴+۱۱x^۲+۱}$$

۴) $$y=\mathrm{Arcsec}\,\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}$$

اگر $y=\mathrm{Arcsec}\,u$ بگیریم، بسادگی و به‌کمك تابع معکوس

آن بدست می‌آیـد : $y'=\frac{u'}{u\sqrt{u^۲-۱}}$ و بنابـراین در مورد تابـع مفروض داریم:

$$y'=\frac{\frac{-۴x}{(x^۲-۱)^۲}}{\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}\sqrt{\left(\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}\right)^۲-۱}}=$$

$$=\frac{-۲x.|x^۲-۱|}{(x^۲+۱)(x^۲-۱)|x|}$$

که با توجه به جدول زیر:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
x		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x^۲-۱$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	

روشن است که اگر $x<-۱$ و یا $۰\leqslant x<۱$ باشد داریم :

$$y'=\frac{۲}{x^۲+۱}$$

واگر $-۱<x\leqslant ۰$ یا $x>۱$ باشد داریم :

$$y'=\frac{-۲}{x^۲+۱}$$

مسائل

صحت تساویهای زیررا تحقیق کنید (۲۲۰ تا ۲۲۷) :

.۲۲۰ $\frac{۱}{۲}\text{Arc}\cot g\,\frac{۲\sqrt[۳]{۴}+۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{۳}\text{Arc}tg\,\frac{\sqrt[۳]{۴}+۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\pi}{۶}$

۲۲۱. $$۲\mathrm{Acr}tg\frac{۱}{۵}+\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۴}=\mathrm{Arc}tg\frac{۳۲}{۴۳}$$

۲۲۲. $$\mathrm{Arc}\cos\sqrt{\frac{۲}{۳}}-\mathrm{Arc}\cos\frac{\sqrt{۶}+۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\pi}{۶}$$

۲۲۳. $$۲\mathrm{Arc}tg\,x+\mathrm{Arc}\sin\frac{۲x}{۱+x^{۲}}=\pi \qquad (x>۱)$$

۲۲۴. $$\sin\left(\frac{۳}{۲}\mathrm{Arc}\sin x\right)=\frac{x(۱+۲\sqrt{۱-x^{۲}})}{\sqrt{۲(۱+\sqrt{۱-x^{۲}})}}$$

۲۲۵. $$\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۲n-۱}-\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۲n+۱}=\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۲n^{۲}}$$

۲۲۶. $$\Sigma\mathrm{Arc}tg\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}=\pi$$

۲۲۷. $$\mathrm{Arc}\sin\frac{۱}{n}-\mathrm{Arc}\sin\frac{۱}{n+۱}=$$
$$=\mathrm{Arc}\sin\frac{\sqrt{n^{۲}+۲n}-\sqrt{n^{۲}-۱}}{n(n+۱)}$$

حاصل عبارتهای زیررا محاسبه کنید (۲۲۸ تا ۲۳۴) :

۲۲۸. $$\mathrm{Arc}tg\,x+\mathrm{Arc}tg\frac{۱-x}{۱+x}$$

۲۲۹. $$\mathrm{Arcsin}\frac{۳}{۵}+\mathrm{Arccos}\frac{۵}{۱۳}$$

۲۳۰. $$\mathrm{Arc}\cos\left(\sqrt{۳+\sqrt{۸}}\times\sqrt{۳+\sqrt{۶+\sqrt{۸}}}\times\right.$$
$$\left.\times\sqrt{۳+\sqrt{۶+\sqrt{۶+\sqrt{۸}}}}\times\sqrt{۳-\sqrt{۶+\sqrt{۶+\sqrt{۸}}}}\right)$$

۲۳۱. $$\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{n}+\mathrm{Arc}tg\frac{۲}{n}+\mathrm{Arc}tg\frac{۳}{n}$$

۲۳۲. $sin[\frac{۱}{۲}Arccotg(-\frac{۳}{۴})]$

۲۳۳. $sin[۴Arctg\frac{۱}{۵}-Arctg\frac{۱}{۲۳۹}]$

۲۳۴. $tg[Arccos\sqrt{\frac{۲}{۳}}-Arccos\frac{۱+\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۳}}]$

این معادله‌ها را حل کنید (۲۳۵ تا ۲۴۱) :

۲۳۵. $Arcsin x = Arcsin a + ۲Arccos b$

۲۳۶. $Arcsin mx = ۲Arctg nx$

۲۳۷. $Arctg(x-۱)+Arctg x+Arctg(x+۱)+Arctg۳=\pi$

۲۳۸. $Arccos\frac{۲x+۱}{۲}+Arccos\frac{۲x-۱}{۲}+Arccos x=\frac{۳\pi}{۲}$

۲۳۹. $Arccos\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}+Arcsin\frac{۲x}{۱+x^۲}+$

$$+Arctg\frac{۲x}{۱-x^۲}=\frac{۳\pi}{۲}$$

۲۴۰. $Arcsin۲x+Arcsin x=\frac{\pi}{۳}$

۲۴۱. $\begin{cases} Arcsin x.Arcsin y=\frac{\pi^۲}{۱۲} \\ Arccos x.Arccos y=\frac{\pi^۲}{۲۴} \end{cases}$

مشتق توابع زیررا محاسبه کنید (۲۴۲ تا ۲۴۹) :

۲۴۲. $y=Arcsin\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$

۲۴۳. $y=Arctg\frac{\sqrt{۱-۴x^۲}}{۳x}$

۲۴۴. $y=\mathrm{Arc}\,cosec\frac{\sqrt{x^2-x}}{1-x}$ ۲۴۵. $y=\mathrm{Arc}\,tg(tg\,x)$

۲۴۶. $y=\mathrm{Arc}\,sin(sin\,x)$ ۲۴۷. $y=\mathrm{Arc}\,tg^2 x$

۲۴۸. $x^2=\mathrm{Arc}\,tg\frac{x-y}{x+y}$ ۲۴۹. $y=\mathrm{Arc}\,tg\frac{x+y}{x-y}$

نامعادلات زیررا حل کنید (۲۵۰ تا ۲۵۳) :

۲۵۰. $\mathrm{Arc}\,tg\,x<4$ ۲۵۱. $\mathrm{Arc}\,cos\,x>\mathrm{Arc}\,cos\frac{1}{3}$

۲۵۲. $\mathrm{Arc}\,sin(x^2+1)<\sqrt{2}$ ۲۵۳. $\mathrm{Arc}\,sin\,x\leqslant\mathrm{Arc}\,cos\,x$

۶. محاسبهٔ مجموعها

برای محاسبهٔ مجموعهای محدود و یا نامحدود در مثلثات نمی‌توان روشی که کلی و عملی باشد، ذکر کرد ودرهرمورد بسته به نوع مسئاه باید روشی برای محاسبه انتخاب کرد.

همانطورکه درمورد مجموعهای جبری هم صادق است[1]، اگر در مورد یك مجموع جمله n ام را u_n بگیریم و بتوانیم رابطه‌ای به‌صورت $u_n=f(n+\alpha)-f(n)$ پیدا کنیم (α عددی است صحیح)، خواهیم توانست مجموع محدود و یا نامحدود را محاسبه کنیم. ولی همانطورکه گفته شد از لحاظ عملی این توضیح نمی‌تواند درهمهٔ موارد، راه حل مسئله را جلو ما بگذارد. در اینجا به چند مثال درحالت کلی می‌پردازیم وبعد بعضی حالتهای خاص را مورد مطالعه

۱. کتاب «روشهای جبر» را ببینید.

قرار می‌دهیم .

مثال ۱ . مطلوبست محاسبهٔ مجموع

$$S = \cos ۲x . \operatorname{cosec} ۳x + \cos ۶x . \operatorname{cosec} ۹x + \ldots +$$
$$+ \cos ۲ . ۳^{n-۱}x . \operatorname{cosec} ۳^n x$$

حل . ایـن مجموع شامل n جمله است . اگر جملهٔ n ام آنرا به u_n نشان دهیم، داریم:

$$u_n = \frac{\cos ۲ \ . ۳^{n-۱}x}{\sin ۳^n x} = \frac{۲ \sin ۳^{n-۱}x \cos ۲ . ۳^{n-۱}x}{۲ \sin ۳^{n-۱}x \sin ۳^n x} =$$

$$= \frac{\sin ۳^n x - \sin ۳^{n-۱}x}{۲ \sin ۳^{n-۱}x . \sin ۳^n x} = \frac{۱}{۲}\left(\operatorname{cosec} ۳^{n-۱}x - \operatorname{cosec} ۳^n x\right)$$

به‌این‌ترتیب $u_n = \frac{۱}{۲}[f(n-۱) - f(n)]$ می‌شود که $(n) = \operatorname{cosec} ۳^n x$ است. بنابراین داریم :

$$u_۱ = \frac{۱}{۲}(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} ۳x)$$

$$u_۲ = \frac{۱}{۲}(\operatorname{cosec} ۳x - \operatorname{cosec} ۹x)$$

. . . .

$$u_n = \frac{۱}{۲}(\operatorname{cosec} ۳^{n-۱}x - \operatorname{cosec} ۳^n x)$$

ازجمع این روابط بدست می‌آید :

$$S = \frac{۱}{۲}(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} ۳^n x)$$

مثال ۲ . مطلوبست محاسبهٔ مجموع زیر:

$$S=\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۳}+\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۷}+\cdots+\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۱+k+k^۲}$$

حل . داریم :

$$\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۱+k+k^۲}=\mathrm{Arc}tg\frac{(k+۱)-k}{۱+(k+۱)k}=$$

$$=\mathrm{Arc}tg(k+۱)-\mathrm{Arc}tg k$$

و بنابراین بدست می‌آید :

$$S=(\mathrm{Arc}tg۲-\mathrm{Arc}tg۱)+(\mathrm{Arc}tg۳-\mathrm{Arc}tg۲)+\cdots+$$

$$+[\mathrm{Arc}tg(k+۱)-\mathrm{Arc}tg k]$$

و یا پس‌از خلاصه‌کردن می‌شود :

$$S=\mathrm{Arc}tg(k+۱)-\mathrm{Arc}tg۱=\mathrm{Arc}tg\frac{k}{k+۲}$$

مثال ۳ . مطلوبست محاسبهٔ مجموع زیر:

$$S=\frac{۱}{\cos x.\cos ۲x}+\frac{۱}{\cos ۲x.\cos ۳x}+\cdots+\frac{۱}{\cos nx.\cos(n+۱)x}$$

حل . برای جملهٔ n ام داریم :

$$\frac{۱}{\cos nx.\cos(n+۱)x}=\frac{۱}{\sin x}.\frac{\sin[(n+۱)x-nx]}{\cos nx.\cos(n+۱)x}=$$

$$=\frac{۱}{\sin x}[tg(n+۱)x-tg\,nx]$$

و بنابراین برای مجموع S بدست می‌آید :

$$S=\frac{۱}{\sin x}(tg۲x-tg x)+\frac{۱}{\sin x}(tg۳x-tg۲x)+\cdots+$$

$$+\frac{۱}{\sin x}[tg(n+۱)x-tg\,nx]$$

که پس ازحذف جمله‌های قرینه خواهیم داشت :

$$S=\frac{۱}{sin x}[tg(n+۱)x-tg x]=\frac{۲ sin nx}{sin ۲x . cos(n+۱)x}$$

حالتهای خاص . I . وقتی که‌بامجموع محدودی ازسینوسها و کسینوسها سروکار داشته باشیم که قوسهای آنها به تصاعد حسابی باشند، می‌توان برای محاسبهٔ مجموع روشی کلی بدست آورد.

حالت کلی اینگونه مجموعها چنین است :

$$S_۱=sin a+sin(a+r)+sin(a+۲r)+\ldots+sin[a+(n-۱)r],$$

$$S_۲=cos a+cos(a+r)+cos(a+۲r)+\ldots+cos[a+(n-۱)r]$$

درهر یك ازاین دو مورد، اگرطرفین تساوی را در $۲ sin \frac{r}{۲}$ (دو برابر سینوس نصف قدر نسبت) ضرب و سپس تمام جمله‌های سمت راست تساوی را به مجموع تبدیل کنیم ، مجموع مورد نظر بدست می‌آید.

در حقیقت اگر جملهٔ $۲ sin\frac{r}{۲}. sin[a+(n-۱)r]$ و یا جملهٔ نظیر آن $۲ sin\frac{r}{۲} . cos[a+(n-۱)r]$ را به‌مجموع تبدیل کنیم اولی به صورت $f(n)-f(n+۱)$ و دومی به صورت $f(n+۱)-f(n)$ در می‌آید و بنابراین مجموع قابل محاسبه است.

مثال ۱ . مطلوبست محاسبهٔ مجموع زیر:

$$S=cos x+cos ۳x+\ldots+cos(۲n-۱)x$$

حل . بترتیب داریم :

$$۲S . sin x=۲ sin x cos x+۲ sin x cos ۳x+\ldots+۲ sin x cos(۲n-۱)x=$$

$$= (\sin 2x - \sin 0) + (\sin 4x - \sin 2x) + \ldots +$$
$$+ [\sin 2nx - \sin 2(n-1)x] = \sin 2nx$$

وبنابراین:
$$S = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$$

مثال ۴ . مطلوبست محاسبهٔ مجموع زیر :

$$S = \sin^3\alpha + \sin^3 2\alpha + \cos^3 3\alpha + \ldots + \sin^3 n\alpha$$

حل . از رابطهٔ $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$ می‌توان بـه دست آورد : $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$. بنابراین داریم:

$$4S = (3\sin\alpha - \sin 3\alpha) + (3\sin 2\alpha - \sin 6\alpha) +$$
$$+ (3\sin 3\alpha - \sin 9\alpha) + \ldots + (3\sin n\alpha - \sin 3n\alpha) =$$
$$= 3(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha) - (\sin 3\alpha + \sin 6\alpha +$$
$$+ \sin 9\alpha + \ldots + \sin 3n\alpha)$$

هر یك از پرانتزهای اخیر مجموع سینوسهائی هستند که قـوسهائی به تصاعد حسابی دارنـد و بنابراین بسادگی قابل محاسبه‌اند، جواب چنین است:

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{3\sin\frac{n+1}{2}\alpha \sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\frac{3(n+1)}{2}\alpha \sin\frac{3n}{2}\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\right)$$

II . درموردی که با مجموع محدودی از یك خط مثلثاتی سرو کار داریم که قوسهای آنها به تصاعد حسابی هستند، می‌توان بـا دقت در روابطی که بین قوسها وجود دارد ، مجموع را به‌سادگی مجاسبه کرد .

مثال . مطلوبست محاسبهٔ مجموع زیر :

$$S = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{۲\pi}{n} + \sin\frac{۳\pi}{n} + \dots \sin + \frac{(۲n-۱)\pi}{n}$$

حل . می‌دانیم که دریك تصاعد حسابی مجموع هر دوجمله‌ای که از دو طرف تصاعد به‌یك فاصله باشند ، مقداری است ثابت . مجموع قوسهای‌جملهٔ اول و جملهٔ n ام در مجموع فوق چنین‌است:

$$\frac{\pi}{n} + \frac{(۲n-۱)\pi}{n} = ۲\pi$$

و بنابراین اگر قوسها را دو به‌دو از طرفین انتخاب کنیم ، مجموعی مساوی ۲π دارند. در حالتی هم‌که n عددی فرد باشد (یعنی تعداد جمله‌های‌مجموع فوق فردباشد)، جملهٔ وسط، قوسی مساوی $\pi = \frac{۲\pi}{۲}$ خواهد داشت که سینوس آن مساوی صفر است. بنابراین مجموع فوق را می‌توان مجموع پرانتزهائی دانست که در هر پرانتز عبارتی بصورت $\sin\alpha + \sin\beta$ با شرط $\alpha + \beta = ۲\pi$ قرار دارد و با این شرط می‌دانیم که $\sin\alpha + \sin\beta = ۰$ می‌شود. یعنی مجموع فوق هم‌مساوی صفر است:

$$S = ۰$$

مسائل

صحت تساویهای زیررا ثابت کنید (۲۵۴ تا ۲۵۸):

۲۵۴ $$\sin(\frac{\pi}{n} - \alpha)\sin(\frac{۲\pi}{n} - \alpha)\dots\sin\left[\frac{(n-۱)\pi}{n} - \alpha\right] = \frac{\sin n\alpha}{۲^{n-۱}\sin\alpha}$$

(باشرط $n > ۱$)

۲۵۵. $$\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\cot g\frac{\pi}{2n}$$

۲۵۶. $$\left(2\sin\frac{\pi}{m}\right)\left(2\sin\frac{2\pi}{m}\right)\ldots\left[2\sin\frac{(m-1)\pi}{m}\right]=m$$

۲۵۷.

$$\left(2\sin\frac{\pi}{m}\right)\left(2\sin\frac{4\pi}{m}\right)^2\left(2\sin\frac{3\pi}{m}\right)^3\ldots\left[2\sin\frac{(m-1)\pi}{m}\right]^{m-1}=m^{\frac{m}{2}}$$

(این رابطه راتعبیر هندسی کنید).

۲۵۸. $$tg\sum_{k=1}^{4n+1}\operatorname{Arc}tg\frac{k^2+k+2}{k^2+k}=4n+2$$

مجموعهای زیررا محاسبه‌کنید (۲۵۹ تا ۲۸۲):

۲۵۹. $$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 2^2x}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^nx}$$

۲۶۰. $$\sin^4\alpha+\frac{1}{4}\sin^4 2\alpha+\frac{1}{16}\sin^4 4\alpha+\ldots+\frac{1}{4^k}\sin^4 2^k\alpha$$

۲۶۱. $$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3a+\ldots+\sin^2 n\alpha$$

۲۶۲. $$\cos a-\cos 2a+\cos 3a-\ldots+(-1)^{n-1}\cos n\alpha$$

۲۶۳. $$\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\ldots+n\cos nx$$

۲۶۴. $$tg x+\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{4}tg\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}tg\frac{x}{2^{n-1}}$$

۲۶۵. $$\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha-1}+\frac{2\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha-1}+\frac{4\sin 4\alpha}{2\cos 4\alpha-1}+\ldots+$$
$$+\frac{2^{2n-1}\sin 2^{2n-1}\alpha}{2\cos 2^{2n-1}\alpha-1}$$

۲۶۶. $$tg^2\frac{\alpha}{2}tg\alpha+2tg^2\frac{\alpha}{4}tg\frac{\alpha}{2}+\ldots+2^{n-1}tg^2\frac{\alpha}{2^n}tg\frac{\alpha}{2^{n-1}}$$

۲۶۷. $\sin^{3}\frac{\alpha}{3}+3\sin^{3}\frac{\alpha}{9}+\ldots+3^{n-1}\sin^{3}\frac{\alpha}{3^{n}}$

۲۶۸. $\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\sin a+\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin a+\sin 2a+\sin 3a}+\ldots+$
$+\frac{1}{\sin a+\sin 2a+\ldots+\sin na}$

۲۶۹. $\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{4}+\ldots+\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2^{n}}$

۲۷۰. $tg\frac{\alpha}{2}\sec\alpha+tg\frac{\alpha}{4}\sec\frac{\alpha}{2}+\ldots+tg\frac{\alpha}{2^{n}}\operatorname{sce}\frac{\alpha}{2^{n-1}}$

۲۷۱. $tg\,a\,tg\,2a+tg\,2a\,tg\,3a+\ldots+tg(n-1)a\,tg\,na$

۲۷۲. $\sin 1^{\circ}+\sin 2^{\circ}+\sin 3^{\circ}+\ldots+\sin 90^{\circ}$

۲۷۳. $\frac{1}{\cos x+\cos 3x}+\frac{1}{\cos x+\cos 5x}+\ldots+$
$\frac{1}{\cos x+\cos(2n+1)x}$

۲۷۴. $\sin^{2}a\sin 2a+\frac{1}{2}\sin^{2}2a\sin 4a+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin^{2}2^{n-1}a$

۲۷۵. $\frac{1}{4\cos^{2}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{16\cos^{2}\frac{\alpha}{4}}+\ldots+\frac{1}{4^{n}\cos^{2}\frac{\alpha}{2^{n}}}$

۲۷۶. $\sin x\sec 3x+\sin 3x\sec 9x+\ldots+\sin 3^{n-1}x\sec 3^{n}x$

۲۷۷. $\operatorname{Arctg}\frac{x}{1+1.2.x^{2}}+\operatorname{Arctg}\frac{x}{1+2.3.x^{2}}+\ldots+$
$+\operatorname{Arctg}\frac{x}{1+n(n+1)x^{2}}$

۲۷۸. $\sin x-\cos 2x+\sin 3x-\cos 4x+\ldots+\sin(2n-1)x-$
$-\cos 2nx$

۲۷۹. $\cos\alpha + 4\cos 2\alpha + 9\cos 3\alpha + \ldots + n^2\cos n\alpha$

۲۸۰. $$\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{6} + \ldots + \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}$$

۲۸۱. $\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{n}$

۲۸۲. $tg^3\frac{2\pi}{n} + tg\frac{4\pi}{n} + tg\frac{6\pi}{n} + \ldots + tg\frac{2(n-1)\pi}{n}$

۲۸۳. اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ جمله‌های متوالی یك تصاعد حسابی با قدر نسبت r باشند ، مجموع زیر را بدست آورید:

$$S = tg a_1 tg a_2 + tg a_2 tg a_3 + \ldots + tg a_{n-1} tg a_n$$

۲۸۴. اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ جمله‌های متوالی از یك تصاعد حسابی با قدر نسبت $r > 0$ باشند، مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$S = \operatorname{Arctg}\frac{r}{1+a_1a_2} + \operatorname{Arctg}\frac{r}{1+a_2a_3} + \ldots + \operatorname{Arctg}\frac{r}{1+a_na_{n+1}}$$

حاصلضربهای زیر را بدست آورید (۲۸۵ تا ۲۹۰):

۲۸۵. $\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos 2x}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{\cos 2^{n-1}x}\right)$

۲۸۶. $\cos\frac{\pi}{2K+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2k+1}\cdot\cos\frac{3\pi}{2k+1}\ldots\cos\frac{k\pi}{2k+1}$

۲۸۷. $\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}$

۲۸۸. $(2\cos\alpha-1)\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)\dots\left(2\cos\frac{\alpha}{2^n}-1\right)$

۲۸۹. $\left(\cos a+\cos b\right)\left(\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{b}{2}\right)\dots\left(\cos\frac{a}{2^{n-1}}+\cos\frac{b}{2^{n-1}}\right)$

۲۹۰. $\left(1-tg^2\frac{x}{2}\right)\left(1-tg^2\frac{x}{4}\right)\dots\left(1-tg^2\frac{x}{2^n}\right)$

۲۹۱. اولا تابع $f(x)$ را چنان تعیین کنید که بـرای هر مقدار x اتحاد $f(x)\equiv f(x-1)+x^3$ برقـرار باشد. ثانیاً مطلوبست محاسبه مجموع

$$S=\cos^3x+\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^3+\left(3\cos\frac{x}{3}\right)^3+\dots+\left(n\cos\frac{x}{n}\right)^3$$

وقتی که x بسمت صفر میل کند، ثالثاً اگر داشته باشیم:

$$S_1=\left(\cos x+2\cos\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{3}+\dots+n\cos\frac{x}{n}\right.$$

ثابت کنید وقتی کـه x بسمت صفر میل کند، حدود S و S_1 برابـر می‌شود.

۷. ماکزیمم و می‌نیمم در توابع مثلثاتی

بحث مربوط بـه ماکزیمم و می‌نیمم (چه ماکـزیمم و می‌نیمم نسبی و چه ماکـزیمم و مـی‌نیمم مطلق) مبحث خاصی را در مثلثات تشکیل نمی‌دهد و می‌توان از همان روشهائی که در جبر معمول است

استفاده کرد[1] . تنها در اینجا بــه‌روش جستجوی ماکــزیمم و می‌نیمم نسبی بدون استفاده از مشتق (بــرای رسم منحنی‌های مثلثاتی) اشاره می‌کنیم.

ضمناً این مطلب را هم یادآوری کنیم که همهٔ مسائلی را که در فصل معادلات و نامعادلات (فصل چهارم) به‌صورت اثبات نامساویهای مثلثاتی آورده‌ایم ، می‌توان به عنوان مسائلی از جستجوی ماکزیمم و می‌نیمم به‌حساب آورد.

مثال ۱ . مطلوبست رسم جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع

$y=۲sin^۲x-sinx-۱$ درفاصلهٔ از $-\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{۳\pi}{۲}$

حل . تابع را می‌توان بــه صورت $y=۲\left(sinx-\frac{۱}{۴}\right)^۲-\frac{۷}{۸}$

نوشت و واضح است که حداقل تابع به‌ازای $sinx=\frac{۱}{۴}$ بــدســت می‌آید. ازطرف دیگر چون $sinx$ محدود است واز ۱ــ کمتر ویااز ۱+ بیشتر نمی‌تواند باشد به‌ازای $sinx=\pm۱$ هم ماکزیمم یامی‌نیمم نسبی برای تابع بدست می‌آید . وبنابراین بــرای تعیین طولهای نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم نسبی منحنی باید معادله‌های زیر را حل کرد:

$$sinx=\frac{۱}{۴} \qquad \Longrightarrow \quad x=۲k\pi+\alpha \text{ ، } x=(۲k+۱)\pi-\alpha$$

$$sinx=\pm۱ \qquad \Longrightarrow \quad x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$$

---

۱. کتاب «روشهای جبر» را ببینید.

α را قوس حاده‌ای به‌سینوس مساوی $\frac{۱}{۴}$ گرفته‌ایم $\left(۰<\alpha<\frac{\pi}{۶}\right)$.

بنابراین طولهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی درفاصله $\left(-\frac{\pi}{۲}،\frac{۳\pi}{۲}\right)$ چنین‌اند:

$$-\frac{\pi}{۲}, \alpha, \frac{\pi}{۲}, \pi-\alpha, \frac{۳\pi}{۲}$$

جدول تغییرات تابع را تنظیم می کنیم:

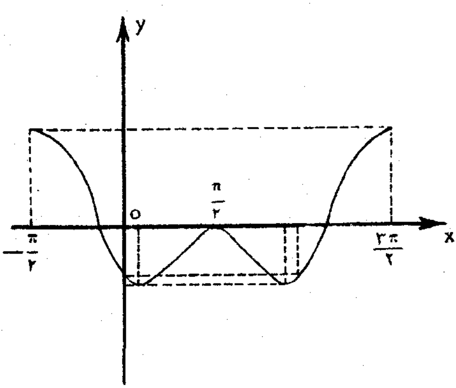
x	$-\frac{\pi}{۲}$		۰		α		$\frac{\pi}{۲}$		$\pi-\alpha$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$
y	۲ Max	$\searrow$	-۱	$\searrow$	$-\frac{۹}{۸}$ Min	$\nearrow$	۰ Max	$\searrow$	$-\frac{۹}{۸}$ Min	$\nearrow$	-۱	$\nearrow$	۲ Max

منحنی تابع درشکل ۳ داده شده است.

مثال ۲ . مطلوبست رسم منحنی نمایش‌تغییرات‌تابع

$$y=۲\sec^۲x-۷\sec x+۳$$

درفاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{۲}و\frac{۳\pi}{۲}\right)$.



شکل ۳

حل . شبیه مسئلهٔ قبل تابع وقتی‌ماکزیمم یامی‌نیمم نسبی است که $\sec x=\frac{۷}{۴}$ و یا $\sec x=\pm۱$ باشد.

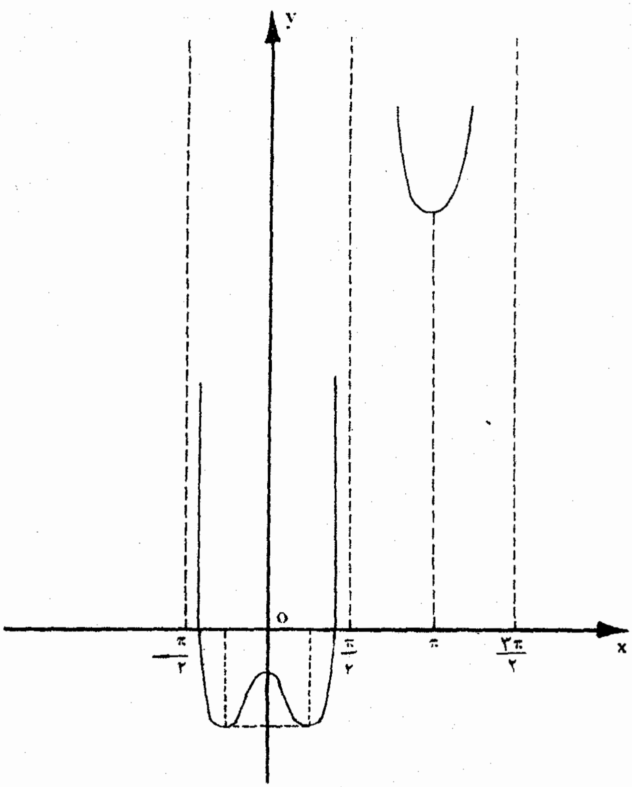
$$\sec x=\frac{۷}{۴}\Longrightarrow \cos x=\frac{۴}{۷} \Longrightarrow x=۲k\pi\pm\alpha$$

$$\sec x = \pm ۱ \Longrightarrow x = k\pi$$

α قوس حاده‌ای است که کسینوس آن برابـر $\frac{۴}{۷}$ است $\left(\frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{\pi}{۳}\right)$.

جدول تغییرات تابع درفاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{۲} , \frac{۳\pi}{۲}\right)$ چنین است.

x	$-\frac{\pi}{۲}$		$-\alpha$		۰		α		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$
y	$+\infty$	$\nearrow$	$-\frac{۲۵}{۸}$ Min	$\nearrow$	-۲ Max	$\searrow$	$-\frac{۲۵}{۸}$ Min	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	۱۲ Min	$\nearrow$	$+\infty$



شکل ۴

حالا به حل چند مسأله از انواع دیگرمسائل مربوط به‌ماکزیمم و می‌نیمم می‌پردازیم.

مثال ۳ . مطلوبست حداکثر و حداقل تابع

$$y=a\sin x+b\cos x+c$$

حل . اگر $\frac{b}{a}=tg\alpha$ و α را زاویه‌ای حاده (مثبت یا منفی)بگیریم. بدست می آید :

$$y=\alpha\left(\sin x+\frac{b}{a}\cos x\right)+c=a(\sin x+tg\alpha\cos x)+c=$$

$$=\frac{a}{\cos\alpha}\sin(x+\alpha)+c$$

دوحالت وجود دارد:

۱) $a>0$، در اینصورت حداکثر تابع به ازای $\sin(x+\alpha)=1$ بدست می آید و $y_{Max}=\frac{a}{\cos\alpha}+c$ می‌شود و حداقل تـابع بـه ازای $\sin(x+\alpha)=-1$ ، $y_{Min}=-\frac{a}{\cos\alpha}+c$ می‌شود.

۲) $a<0$ ، در اینحالت به ازای $\sin(x+\alpha)=1$ حداقل تـابع $y_{Min}=\frac{a}{\cos\alpha}+c$ و بـه‌ازای $\sin(x+\alpha)=-1$ حـداکثـر تـابع $y_{Max}=-\frac{a}{\cos\alpha}+c$ بدست می آید.

مثال ۴ . حـداکثر تـابع $y=(5-\sin x)(2+\sin x)$ را بـدست آورید .

حل . عوامل $5-\sin x$ و $2+\sin x$ به‌ازای همهٔ مقادیر x مثبت‌اند و ضمناً مجموع آنها مقداری ثابت و مساوی ۷ است. می‌دانیم که اگر مجموع دو متغیر مقداری ثابت باشد، حاصلضرب آنها وقتی حداکثر

است که تفاوت آنها حداقل باشد (در حالت عادی حداقل تفاوت‌صفر است، یعنی باید دو عامل ضرب برابر باشند، ولی در اینجا $۵-sin\mathrm{x}$ و $۲+sin\mathrm{x}$ نمی توانند مساوی شوند ، زیرا $sin\mathrm{x}=\frac{۳}{۲}$ نمی‌تواندباشد) تفاضل این دو متغیر $۲sin\mathrm{x}-۳$ می‌شود و واضح است که حداقل آن وقتی است که $sin\mathrm{x}=۱$ کـه در اینصورت $\mathrm{x}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ و $\mathrm{y}=۱۲$ می‌شود .

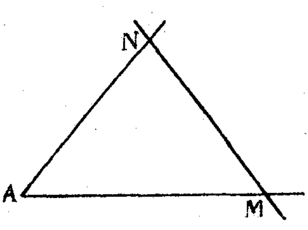
مثال ۵ . خط راست MN از زاویـهٔ مفروض A مثلثی را بـا مساحت مفروض S جدا کرده است (M و N نقاط تلاقی خط بااضلاع زاویهٔ A است) . با چه شرطی MN حداقل طول را دارد و این طول چقدر است ؟

حل . پاره خطهای AM و AN را (شکل ۵) بترتیب بـه x و y نشان می‌دهیم. طبق قضیهٔ کسینوسها در مثلث AMN داریم:

$$\mathrm{MN}^۲=\mathrm{x}^۲+\mathrm{y}^۲-۲\mathrm{xy}\cos\mathrm{A}=(\mathrm{x}-\mathrm{y})^۲+۲\mathrm{xy}(۱-\cos\mathrm{A})=$$
$$=(\mathrm{x}-\mathrm{y})^۲+۴\mathrm{S}\,tg\frac{\mathrm{A}}{۲}$$

زیرا $\mathrm{S}=\frac{۱}{۲}\mathrm{xy}\sin\mathrm{A}$ است .

بنابراین وقتی $\mathrm{x}=\mathrm{y}$ $(\mathrm{AM}=\mathrm{AN})$ باشد ، طـول MN حداقل مقدار مـمکـن را دارد کـه مساوی $\sqrt{۴\mathrm{S}\,tg\frac{\mathrm{A}}{۲}}$ است .



شکل ۵

مثال ۶. اگر A و B و C زوایای یك مثلث باشند حداکثر مقدار $sin\frac{A}{۲}.sin\frac{B}{۲}.sin\frac{C}{۲}$ چقدر است ؟

حل . $sin\frac{B}{۲}sin\frac{C}{۲}=m$ می گیریم ، اگر سمت چپ این تساوی را به مجموع تبدیل کنیم، بدست می آید :

$$\frac{۱}{۲}\left(cos\frac{B-C}{۲}-cos\frac{B+C}{۲}\right)=m$$

وچون $\frac{B+C}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}$ است، بسادگی می‌شود :

$$cos\frac{B-C}{۲}=۲m+sin\frac{A}{۲} \qquad (۱)$$

واضح است که $\frac{B-C}{۲}<\frac{B+C}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}$ و بنابراین خواهیم داشت: $cos\frac{B-C}{۲}>sin\frac{A}{۲}$ ، از آنجا برای اینکه معادلهٔ (۱) جواب داشته باشد، باید داشته باشیم :

$$sin\frac{A}{۲}<۲m+sin\frac{A}{۲}\leqslant ۱$$

که از آن نتیجه می‌شود : $m\leqslant\frac{۱}{۲}\left(۱-sin\frac{A}{۲}\right)$ واگر بجای m مقدارش یعنی $sin\frac{B}{۲}sin\frac{C}{۲}$ را قراردهیم، بدست می آید :

$$sin\frac{B}{۲}.sin\frac{C}{۲}\leqslant\frac{۱}{۲}\left(۱-sin\frac{A}{۲}\right),$$

واگرطرفین این نامساوی را درمقدار مثبت $sin\frac{A}{۲}$ ضرب کنیم :

$$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)$$

ولی $\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)$ حاصلضرب دوعامل مثبت به مجموع واحد می‌باشد ، بنابراین ماکزیمم آن وقتی است که $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ باشد که از آنجا بدست می آید :

$$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

یعنی ماکزیمم $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ مساوی $\frac{1}{8}$ است ودر حالتی این وضع وجود دارد که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد .

مسائل .

۲۹۲ . حداقل تابع $y=\cos 2x+1+tg x\, tg 2x$ رابدست آورید.

۲۹۳ . به ازای چه مقادیری از x تابع $y=2\sin x+3\cos x$ ماکزیمم یا می‌نیمم است ؟

۲۹۴ . اگر a ، b و c زوایائی حاده به مجموع π باشند ، ماکزیمم $cotg\, a\, cotg\, b\, cotg\, c$ را محاسبه کنید .

۲۹۵ . روی AB وAC از مثلث ABC نقطه‌های M وN را طوری پیدا کنید که مثلث ABC بوسیلهٔ پاره خط MN به دوقسمت هم ارز تقسیم شود و پاره خط MN حداقل طول را داشته باشد .

۲۹۶ . پاره‌خطی بطول حداقل چنان رسم کنید که مثلث مفروض ABC را به دوقسمت هم‌ارز تقسیم کند .

۲۹۷ . زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین چقدر باشد تا مستطیل محاط در آن‌که حداقل مساحت را دارد یك مربع باشد .

۲۹۸ . ثابت کنید از بین چهارضلعی‌هائـی کـه اضلاع متناظر آنها باهم برابرند، سطح حداکثر متعلق به چهارضلعی محاطی است .

۲۹۹ . مثلث قائم‌الزاویه‌ای به وتر c رسم کنید کـه فاصلهٔ محل تلاقی میانه‌های آن تـا محل تلاقـی نیمسازهای آن اولا حداقـل ثانیاً حداکثر باشد .

۳۰۰ . در نیمدایـره‌ای بـه شعاع R ، ذوذنقهٔ متساوی‌الساقینی محاط کنید که حداقل محیط را داشته باشد .

۳۰۱ . حداکثروحداقل تابع زیررا پیدا کنید :

$$y=(a+\sin x)(a+\cos x) \qquad (a>0)$$

۳۰۲ . بشرطی که $16\cos^2 y+36\sin^2 x=9$ باشد ، حداکثر و حداقل $\cos y-2\sin x$ را پیدا کنید (تعبیرهندسی جواب را بدهید).

۳۰۳ . اگر $\sin x+\sin y=a$ باشد $(a>0)$ ، مطلوبست حداقل عبارت $\sin^2 x+3\sin^2 y$ وتعبیرهندسی آن.

۳۰۴ . وقتی $2\operatorname{cosec} x+\sec y=6$ باشد ، حداقـل $\sin x\cos y$ را بدست آورید و آنرا تعبیرهندسی کنید .

۳۰۵ . حداقل وحداکثر $S=3\sin x+4\cos x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ را پیدا کنید .

۳۰۶ . اگر $0<x<\pi$ و $0<y<\pi$ و $\sin^2 x+\sin^2 y=k$ باشد ،

حداکثر عبارت $S=sinx+siny$ را بدست آورید .

۳۰۷ . کمان a محصور بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ را بــه دو قسمــت چنان تقسیم کنید که مجموع تانژانتهای دو کمان حاصل می‌نیمم شود وضمناً مقدار می‌نیمم آنرا بدست آورید .

۳۰۸ . کمــان a محصور بین صفر و π داده شده است. ایــن کمان را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که : اولا مجموع وترهــای دو کمان حاصل می‌نیمم باشد. ثانیاً حاصلضرب این وترها ماکزیمم‌شود. ثالثاً مجموع مربعهای وترها می‌نیمم باشد .

۳۰۹ . اگر x و y در یك معادلهٔ خطی صدق کنند، مطلوبست تعیین می‌نیمم عبارت $x^{2}+y^{2}$

۳۱۰ . مطلوبست حداقــل $tgx+3cotgx$ و تعیین مقدار x در حالت حداقل .

۳۱۱ . اولا عبارت زیررا به‌صورت ضرب تجزیه کنید :

$$S=1+sinx+cosx+sinx\,cosx$$

ثانیاً درصورتی که $0<x<2\pi$ باشد ، حداکثر و حداقل S را پیدا کنید.

منحنی توابع زیررا بدون استفاده از مشتق رسم کنید (۳۱۲ تا ۳۱۵) :

۳۱۲ . $y=2secx-1$ (درفاصلهٔ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$).

۳۱۳. $y=\cos^2 x-\cos x-1$ (درفاصلهٔ ۰ تا 2π).

۳۱۴. $y=\frac{3\sin x}{\sin x-2}$ (درفاصلهٔ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$).

۳۱۵. $y=\frac{tg x-1}{tg x+1}$ (درفاصلهٔ $-\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{3}{4}$).

۸. توابع اولیه

۱. توابع اولیهٔ توابعی که بصورت توانی از یك خط مثلثاتی هستند.

I. توابع اولیهٔ $\sin^n x$ و $\cos^n x$ (n عددی طبیعی است).

درحالتی که n عددی فردباشد: $n=2k+1$ یك عامل سینوس یا کسینوس را کنار می‌گذاریم و بقیه را، اگر توانی از سینوس بود به کسینوس، واگر توانی ازکسینوس بود به سینوس تبدیل می‌کنیم.

مثال ۱. مطلوبست توابع اولیهٔ تابع $y=\cos^7 x$.

حل. بترتیب داریم:

$$y=\cos x.\cos^6 x=\cos x(1-\sin^2 x)^3=$$

$$=\cos x-3\cos x\sin^2 x+3\cos x^4 \sin x-\cos x\sin^6 x$$

و روشن است که دیگر از همهٔ جمله‌ها می‌توان تابع اولیه گرفت:

$$Y=\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+c$$

در حالت مورد بحث، یعنی وقتی که توان سینوس یا کسینوس عددی فرد باشد، می‌توان با استفاده ازرابطهٔ بسط $sin(۲k+۱)x$ یا $cos(۲k+۱)x$ هم برای محاسبهٔ توابع اولیه استفاده کرد.

مثال ۴ . مطلوبست محاسبهٔ توابع اولیهٔ تابع $y = sin^۵x$

حل . اتحاد زیر واضح است:

$$sin۵x = ۱۶sin^۵x - ۲۰sin^۳x + ۵sinx$$

از آنجا بدست‌می آید:

$$sin^۵x = \frac{۱}{۱۶}(sin۵x + ۲۰sin^۳x - ۵sinx)$$

که با استفاده از اتحاد $sin^۳\alpha = \frac{۱}{۴}(۳sin\alpha - sin۳\alpha)$ بصورت زیر در می آید:

$$sin^۵x = \frac{۱}{۱۶}(sin۵x - ۵sin۳x + ۱۰sinx)$$

و بنابراین توابع اولیهٔ تابع $y = sin^۵x$ چنین می‌شود:

$$Y = \frac{۱}{۱۶}\left(-\frac{۱}{۵}cos۵x + \frac{۵}{۳}cos۳x - ۱۰cosx\right) + c$$

درحالتی که نمای n در sin^nx یا cos^nx عددی زوج باشد ، به کسینوس کمان دوبرابر تبدیل می کنیم. اگر ضمن این تبدیل به توان فرد رسیدیم از قاعدهٔ مربوط به توانهای فرد استفاده می کنیم و اگربه توان زوج رسیدیم دوباره به کسینوس کمان دوبرابرتبدیل می کنیم...

مثال ۳ . مطلوبست محاسبهٔ توابع اولیهٔ تابع $y = cos^۴x$.

حل . بترتیب داریم:

$$y(\cos^2 x)^2=\frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x)$$

و بنابراین برای توابع اولیهٔ $\cos^4 x$ خواهیم داشت:

$$Y=\frac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+c$$

II . توابع اولیهٔ $tg^{2n}x$ و $cotg^{2n}x$ (n عددی طبیعی است).

توابع اولیهٔ توانهای فرد تانژانت و کتانژانت خارج از برنامهٔ دبیرستانی است. در ریاضیات عالی ثابت می کنند که اگر $y=Lgu$ و u تابعی از x باشد $y'=\frac{u'}{u}$ می‌شود که با توجه به آن مثلا توابع اولیهٔ $y=tgx$ چنین است : $Y=Lg\sec x+c$ و توابع اولیهٔ $y=cotgx$. $Y=Lg\sin x+c$. محاسبهٔ توابع اولیهٔ هر توان فردی از تانژانت یا کتانژانت هم منجر بهمین روابط می‌شود .

اما برای توان زوج تانژانت (و شبیه آن در مورد کتانژانت) چنین می‌نویسیم:

$$y=tg^{2n}x=(1+tg^2x)tg^{2n-2}x-(1+tg^2x)tg^{2n-4}x+\dots$$

که در مورد هریک از جمله‌های بدست آمده ، محاسبهٔ تابع اولیه ممکن است .

مثال ۴ . مطلوبست محاسبهٔ توابع اولیهٔ $y=cotg^6x$.

حل. داریم :

$$y=cotg^6x=(1+cotg^2x)cotg^4x-(1+cotg^2x)cotg^2x+$$
$$+(1+cotg^2x)-1$$

و درنتیجه، توابع اولیهٔ آن چنین می‌شود:

$$Y=-\frac{۱}{۵}cotg^{۵}x+\frac{۱}{۳}cotg^{۳}x-cotgx-x+c$$

۲. توابع اولیهٔ صورتهای ضرب

در این مورد در حالت کلی باید بهر حال عبارت را به‌مجموع جبری توابعی تبدیل کرد که هر کدام به‌صورت توانی از یك خط مثلثاتی باشند.

مثال ۵. مطلوبست توابع اولیه $y=sinx\,cos^{۲}۳x$.

حل. بترتیب تبدیلات زیر را انجام می‌دهیم:

$$y=sinx.\frac{۱}{۲}(۱+cos۶x)=\frac{۱}{۲}sinx+\frac{۱}{۲}sinx\,cos۶x=$$

$$=\frac{۱}{۲}sinx+\frac{۱}{۴}(sin۷x-sin۵x)=\frac{۱}{۴}(۲sinx-sin۵x+sin۷x)$$

که از آنجا خواهیم داشت:

$$Y=\frac{۱}{۴}\left(-۲cosx+\frac{۱}{۵}cos۵x-\frac{۱}{۷}cos۷x\right)+c$$

۳. قاعدهٔ تبدیل جزء به جزء

رابطهٔ $(uv)'=u'v-v'u$ را از بحث مشتق می‌دانیم. این رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$u'.v=(uv)'-v'.u$$

اگر از طرفین این رابطه تابع اولیه بگیریم چنین می‌شود (برای سهولت نوشتن، تابع اولیه را به T نشان می‌دهیم، بنحوی که T(y)

به معنای تابع اولیهٔ y باشد) :

$$T(u'.v)=v.u-T(v'.u) \qquad (۱)$$

از رابطهٔ (۱) می‌توان برای محاسبهٔ بعضی ازتوابع اولیه استفاده کرد.

مثال ۶ . مطلوبست محاسبهٔ توابع اولیهٔ $y=x.\sin x$،

حل. $x=v$ و $\sin x=u'$ می گیریم . در اینصورت $v'=۱$ و $u=-\cos x$ می‌شود. از رابطهٔ (۱) استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} u'=\sin x \\ v'=۱ \end{cases} \quad , \quad \left| \begin{array}{l} u=-\cos x \\ v=x \end{array} \right.$$

$$T(u'.v)=Y=-x\cos x-T(-\cos x)+c=$$
$$=-x\cos x+\sin x+c$$

به این ترتیب توابع اولیه $y=x\sin x$ بدست آمد :

$$Y=-x\cos x+\sin x+c$$

مثال ۷ . مطلوبست توابع اولیهٔ $y=x^۲\cos x$

حل. $x^۲=v$ و $\cos x=u'$ می گیریم، دراینصورت $v'=۲x$ و $u=\sin x$ می‌شود و داریم :

$$T(u'v)=Y=x^۲\sin x-۲T(x\sin x)+c$$

تابع اولیهٔ $x\sin x$ را در مثال ۶ دیدیم. بنابراین توابع اولیهٔ $y=x^۲\cos x$ چنین می‌شود:

$$Y=x^۲\sin x+۲x\cos x-۲\sin x+c$$

۴ . قاعدهٔ تغییر متغیر

تابع $y=x$ را درنظر بگیرید، دراینجا متغیر x است وتوابع اولیهٔ آن $Y=\frac{۱}{۲}x^۲+c$ می‌شود. حالا اگر $x=tg\alpha$ بگیریم ، متغیر

تغییر می کند، بجای $tg\alpha$ (یعنی x) با متغیر α سروکار پیدا می کنیم. بنابراین اگر بخواهیم نسبت به متغیر α تابع اولیه بگیریم ، بنحوی که همان جواب اول بدست آید، باید $y=(۱+tg^۲\alpha)tg\alpha$ بنویسیم، که درآن $۱+tg^۲\alpha+c$ عبارتست ازمشتق $tg\alpha$ نسبب بهمتغیر α ، و روشن است که توابع اولیهٔ $y=(۱+tg^۲)tg\alpha$ نسبت به متغیر α چنین است:

$Y=\frac{۱}{۲}tg^۲\alpha+c$ که اگر دوباره بجای tgx مساویش x راقراردهیم به همان‌نتیجهٔ $Y=\frac{۱}{۲}x^۲+c$ می‌رسیم.

به این ترتیب اگر درمورد محاسبهٔ توابع اولیه متغیر راعوض کردیم. باید مشتق متغیر اصلی را نسبت به‌متغیر جدید محاسبه‌کنیم و درتابع ضرب نمائیم تا توابع اولیهٔ آن تغییر نکند.

مثال ۸ . مطلوبست محاسبهٔ توابع اولیهٔ $y=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$.

حل . $x=tg\alpha$ می گیریم ، $x'_\alpha=۱+tg^۲\alpha$ می‌شود و باید از تابع

$y=\frac{۱-tg^۲\alpha}{۱+tg^۲\alpha}(۱+tg^۲\alpha)$ و یا $y=۱-tg^۲\alpha$ نسبت به متغیر α تابع اولیه بگیریم :

$$y=۱-tg^۲\alpha=-(۱+tg^۲\alpha)+۲$$

$$Y=tg\alpha+۲\alpha+c=-x+۲\mathrm{Arc}tg x+c$$

مثال ۹ . توابع اولیهٔ تابع $y=\sqrt{۱-x^۲}$ را محاسبه‌کنید .

حل . $x=\sin\alpha$ و α را زاویه‌ای حاده می گیریم ، $x'_\alpha=\cos\alpha$

می‌شود و بنابراین باید از تابع $y=\sqrt{1-\sin^2\alpha}\ .\cos\alpha$ نسبت به متغیر α توابع اولیه را محاسبه کنیم . داریم :

$$y=\sqrt{1-\sin^2\alpha}\ .\cos\alpha=\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),$$

$$Y=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)+c=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha+c=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Arc}\sin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c$$

مسائل

توابع اولیهٔ توابع زیررا بدست آورید (۳۱۶ تا ۳۴۱) :

۳۱۶. $y=\dfrac{1}{1+\sin x}$ ۳۱۷. $y=\dfrac{a}{1-\cos x}$

۳۱۸. $y=\dfrac{\cos x(1-\sin x)^3}{(1+\sin x)^5}$ ۳۱۹. $y=\sin^7 x+\cos^3 x$

۳۲۰. $y=tg^3 x+tg^5 x-1$ ۳۲۱. $y=tg^2 x(1+tg^6 x)$

۳۲۲. $y=\dfrac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}$ ۳۲۳. $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$

۳۲۴. $y=\dfrac{a\,cotg\,x\,(cotg\,x-1)^m}{\sin^2 x}$ ۳۲۵. $y=\dfrac{3\sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt[15]{(\cos x-1)^8}}$

۳۲۶. $y=\sin^3 x\cos 3x$ ۳۲۷. $y=\sin^2 3x\cos^3 2x$

۳۲۸. $y=\cos^2 5x\sin^5 2x$ ۳۲۹. $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin^2\frac{x}{2}}$

۳۳۰. $y=\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}$ ۳۳۱. $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[5]{\sin x+\cos x}}$

۳۳۲. $y=\frac{\sin 2x}{\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}}$

۳۳۳. $y=\frac{\cos x-\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$

۳۳۴. $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ ۳۳۵. $y=\frac{x^2}{1+x^2}$

۳۳۶. $y=\frac{1}{x^2+3x+5}$ ۳۳۷. $y=\frac{x-1}{\sqrt{1-x'}}$

۳۳۸. $y=\frac{3x-2}{\sqrt{9-x^2}}$ ۳۳۹. $y=\sqrt{2x-x^2}$

۳۴۰. $y=\sqrt{1-4x^2}$ ۳۴۱. $y=\frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$

۳۴۲. اولاً منحنی نمایش تغییرات توابع $y_1=\sin x+\cos x-1$ و $y_2=\sin x+\cos x+1$ را رسم کنید. ثانیاً مساحت بین دومنحنی را بدست آورید (در فاصلهٔ صفر و 2π). ثالثاً منحنی تابع $z=\frac{y_1}{y_2}$ را رسم کنید.

۳۴۳. اولا منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sqrt{1-\cos x}$ را درفاصله (π و $-\pi$) رسم کنید. ثانیاً اگرسطح بین این منحنی ومحور طول را دورمحور xx' دوران دهیم، حجم حاصل را بدست آورید.

۹. رفع ابهام در توابع مثلثاتی

قواعد رفع ابهام در توابع مثلثاتی، همان قواعد معمول در جبر است ، منتها درمورد توابع مثلثاتی بیش از همه از سه حد زیر استفاده می‌شود :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{tg\, ax}{x}=a \quad \text{و}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\, ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$$

بهمین مناسبت دربسیاری موارد (وبخصوص اگر تابع شامل قوس هم باشد) بهتر است حالتی وجود داشته باشد که متغیر بسمت صفر میل کند . در حالتی که x بسمت عددی مثل a میل می کند کافی است $x-a=t$ بگیریم ، زیرا در اینصورت t بسمت صفر میل خواهد کرد.

درزیر کوشش می کنیم نمونه‌های مختلفی از حل مسائل مربوط به رفع ابهام درتوابع مثلثاتی را ذکر کنیم و ضمن حل، نکات لازم را یادآوری نمائیم.

مثال ۱ . مطلوبست: $\lim_{x\to 0}\dfrac{tg\frac{x}{2}\,tg\frac{3x}{2}\cdot tg\frac{9x}{2}}{x^3}$

حل. بترتیب داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\frac{x}{2}\cdot tg\frac{3x}{2}\cdot tg\frac{9x}{2}}{x^3}=\frac{27}{8}\left[\lim_{x\to 0}\frac{tg\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{tg\frac{3x}{2}}{\left(\frac{3x}{2}\right)}\cdot\frac{tg\frac{9x}{2}}{\left(\frac{9x}{2}\right)}\right]=$$

$$=\frac{27}{8}\left[\lim_{x\to 0}\frac{tg\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{tg\frac{3x}{2}}{\left(\frac{3x}{2}\right)}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{tg\frac{9x}{2}}{\left(\frac{9x}{2}\right)}\right]=\frac{27}{8}$$

مثال ۲ . مطلوبست: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg x}{1-\cos x}$.

حل. داریم :
$$\lim_{x\to 0}\frac{x.tg x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{\cos x(1-\cos^2 x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\cos x)}{\sin x\cos x}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos x}\right]=2$$

مثال ۳ . مطلوبست: $\lim\limits_{a\to b}\dfrac{\sin a-\sin b}{tg a-tg b}$

حل.
$$\lim_{a\to b}\frac{\sin a-\sin b}{tg a-tg b}=\lim_{a\to b}\frac{2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}}=$$
$$=\lim_{a\to b}\frac{2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}\cos a\cos b}{2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}=$$
$$=\lim_{a\to b}\frac{\cos\frac{a+b}{2}\cos a\cos b}{\cos\frac{a-b}{2}}=\cos^3 b$$

تبصره: در مثال فوق اگر می‌خواستیم از روش هوپیتال برای رفع‌ابهام استفاده کنیم، باید توجه می کردیم که در کسر مفروض b مقداری ثابت و a متغیر است، زیرا طبق فرض مسئله، a بسمت b

میل می کند. یعنی:

$$\lim_{a\to b}\frac{\sin a-\sin b}{tg\, a-tg\, b}=\lim_{a\to b}\frac{\cos a}{1+tg^{2}a}=\lim_{a\to b}\cos^{3}a=\cos^{3}b$$

مثال ۴ . مطلوبست: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\pi-2x}$.

حل. $x-\frac{\pi}{2}=t$، یعنی $x=\frac{\pi}{2}+t$ می گیریم، دراینصورت‌داریم:

$$\frac{\cos 3x}{\pi-2x}=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3t\right)}{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}=\frac{\sin 3t}{-2t}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 3t}{3t}$$

روشن است که وقتی x بسمت $\frac{\pi}{2}$ میل می کند، t بسمت صفرمیل می کند و داریم :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}=\implies\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\pi-2x}=-\frac{3}{2}$$

مسائل

مطلوبست حد توابع زیر (۳۴۴ تا ۳۷۰) :

۳۴۴. $\lim_{x\to 0}\frac{tg\, x-\sin x}{x^{3}}$

۳۴۵. $\lim_{x\to 1}\frac{(\mathrm{Arc}\cos x)^{2}}{x^{2}-1}$

۳۴۶. $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$

۳۴۷. $\lim_{x\to 2\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$

۰.۳۴۸ $$\lim_{x\to 0}\frac{tg\sqrt[3]{x+a}-tg\sqrt[3]{x}}{a}$$

۰.۳۴۹ $$\lim_{x\to a}\frac{tg\,nx-tg\,na}{cotg\,mx-cotg\,ma}$$

۰.۳۵۰ $$\lim_{x\to 1}\frac{Arctg\,2x+Arctg\,3x-\frac{3\pi}{4}}{x^2-1}$$

۰.۳۵۱ $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2sin^2x-1}$$

۰.۳۵۲ $$\lim_{x\to -1}\frac{Arctg(x^2-1)}{1+x^3}$$

۰.۳۵۳ $$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x\cdot\sqrt{cos\,2x}\cdot\sqrt[3]{cos\,3x}}{x^2}$$

۰.۳۵۴ $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sqrt{sin\,x})(1-\sqrt[3]{sin\,x})\dots(1-\sqrt[n]{sin\,x})}{(1-sin\,x)^{n-1}}$$

۰.۳۵۵ $$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-tg\,x}-\sqrt{1+tg\,x}}{sin^2x}$$

۰.۳۵۶ $$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{\sqrt{x+9}-3}$$

۰.۳۵۷ $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin\,3x}{sin\,x}\right)^{x+2}$$

۰.۳۵۸ $$\lim_{x\to\infty}x\,sin\frac{1}{x}$$

۰.۳۵۹ $$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x-tg^2x}{x\,sin\,x}$$

۰.۳۶۰ $$\lim_{x\to m}\frac{sin(x-a)+sin(a-m)+sin(m-x)}{sin(x-b)+sin(b-m)+sin(m-x)}$$

۰.۳۶۱ $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4sin^2x}-\frac{1}{sin^2 2x}\right)$$

۳۶۲. $\lim\limits_{x\to ۲} (۲-x)\, tg\frac{\pi}{۴}x$ ۳۶۳. $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱+x^{۲}-\cos x}{\sin^{۲}x}$

۳۶۴. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\mathrm{Arctg}\,x-\frac{\pi}{۲}\right)$ ۳۶۵. $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{x\sin ۶x}{(\mathrm{Arctg}\,۲x)^{۲}}$

۳۶۶. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{۱+۲\cos x}-۱}{x-\frac{\pi}{۲}}$

۳۶۷. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin(۴n+۱)x-\cos(۴n+۱)x}{\sin x-\cos x}$

۳۶۸. $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱-x}{\cos\frac{\pi x}{۲}}$ ۳۶۹. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin\frac{x}{۲}+\cos x}{\sin^{۲}x+\cos x+۱}$

۳۷۰. $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x-۱}}{\mathrm{Arccos}\,x}$

۱۰. رسم منحنی‌های مثلثاتی

۱. دورهٔ تناوب در توابع مثلثاتی

اگر برای تابع $y=f(x)$ مقداری مانند a وجود داشته باشد بنحوی که با تغییر x به هریك ازمقادیر $x\pm a$، $x\pm ۲a$، $x\pm ۳a$، ...، $x\pm na$ (n عددی است صحیح)، مقدار y تغییر نکند، یعنی داشته باشیم: $f(x)=f(x\pm a)=f(x\pm ۲a)=\ldots=f(x\pm na)$

a را کوچکترین دورهٔ تناوب و یا بطور خلاصه دورهٔ تناوب تابع $y=f(x)$ گویند.

توابع مثلثاتی (وقتی که شامل قوس نباشند) معمولا توابعی متناوب هستند. مثلا دورهٔ تناوب تابع $y=\sin 2x$ عبارتست از π، زیرا داریم:

$$\sin 2(x+k\pi)=\sin 2x$$

برای تعیین دورهٔ تناوب درتوابع مثلثاتی نمی‌توان قاعده‌ای مشخص بیان کرد، ولی ذکرچند راهنمائی ضروری است:

I. دورهٔ تناوب برای توابع $\sin x$ و $\cos x$ مساوی 2π و برای $tg x$ و $cotg x$ مساوی π است.

II. برای توابع $\sin nx$ و $\cos nx$ دورهٔ تناوب مساوی $\frac{2\pi}{n}$ و برای $tg nx$ و $cotg nx$ مساوی $\frac{\pi}{n}$ است، زیرا مثلا داریم:

$$\sin n(x+\frac{2\pi}{n})=\sin(nx+2\pi)=\sin nx$$

$$tg n(x+\frac{\pi}{n})=tg(nx+\pi)=tg nx$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع $y=\sin\frac{2x}{3}$ مساوی $2\pi:\frac{2}{3}=3\pi$ و دورهٔ تناوب تابع $y=tg\frac{\pi x}{2}$ مساوی $\pi:\frac{\pi}{2}=2$ می‌باشد.

III. وقتی که سینوس یا کسینوس دارای توان زوج باشد، دورهٔ تناوب آن نصف می‌شود، زیرا داریم:

$$sin^{۲n}x = (sin^{۲}x)^n = \left(\frac{۱ - cos ۲x}{۲}\right)^n$$

$$cos^{۲n}x = (cos^{۲}x)^n = \left(\frac{۱ + cos ۲x}{۲}\right)^n$$

مثلا دورهٔ تناوب تابع $y = sin^{۲}۳x$ مساوی $\frac{\pi}{۳}$ است، زیرا دورهٔ تناوب تابع $sin۳x$ مساوی $\frac{۲\pi}{۳}$ بود.

IV. وقتی که در یك تابع با دورهٔ تناوبهای مختلف سروکار داشته باشیم، دورهٔ تناوب کلی با محاسبهٔ کوچکترین مضرب مشترك بین دورهٔ تناوبهای جزئی بدست می آید[۱].

مثلا برای تعیین دورهٔ تناوب تابع

---

۱. یادآوری می کنیم که برای محاسبهٔ کوچکترین مضرب مشترك بین چند کسر باید ابتدا کسرها را بیك مخرج تبدیل کرد، دراینصورت کوچکترین مضرب مشترك بین کسرها عبارتست از کسری که مخرج آن همان مخرج مشترك کسرها و صورتش کوچکترین مضرب مشترك صورتها باشد. مثلا برای تعیین کوچکترین مضرب مشترك بین کسرهای $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۴}{۷}$ داریم:

$$\frac{۲}{۳} = \frac{۲ \times ۳۵}{۳ \times ۳۵} = \frac{۷۰}{۱۰۵}, \quad \frac{۳}{۵} = \frac{۳ \times ۲۱}{۵ \times ۲۱} = \frac{۶۳}{۱۰۵}, \quad \frac{۴}{۷} = \frac{۴ \times ۱۵}{۷ \times ۱۵} = \frac{۶۰}{۱۰۵}$$

کوچکترین مضرب مشترك بین عددهای ۷۰ و ۶۳ و ۶۰ برابر است با ۱۲۶۰ و بنابراین درمورد کسرهای $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۴}{۷}$ کوچکترین مضرب مشترك عبارتست از:

$$\frac{۱۲۶۰}{۱۰۵} = ۱۲$$

$$y=۲\cos\frac{x}{۳}+۵\sin\frac{۳x}{۴}+tg\frac{x}{۲}-۳cotg۴x$$

ابتدا دورهٔ تناوبهای جزئی را بدست می‌آوریم :

دورهٔ تناوب برای تابع $\cos\frac{x}{۳}$: $\quad ۲\pi:\frac{۱}{۳}=۶\pi$

دورهٔ تناوب برای تابع $\cos\frac{۳x}{۴}$: $\quad ۲\pi:\frac{۳}{۴}=\frac{۸\pi}{۳}$

دورهٔ تناوب برای تابع $tg\frac{x}{۲}$: $\quad \pi:\frac{۱}{۲}=۲\pi$

دورهٔ تناوب برای تابع $cotg۴x$: $\quad \pi:۴=\frac{\pi}{۴}$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع y عبارتست از کوچکترین مضرب مشترک ۶π، $\frac{۸\pi}{۳}$، ۲π و $\frac{\pi}{۴}$ که به‌سادگی مساوی ۲۴π بدست می‌آید .

V. با استفاده از چهارنکتهٔ مذکور نمی‌توان اطمینان داشت که کوچکترین دورهٔ تناوب بدست آمده است و بسیار اتفاق می‌افتد که دورهٔ تناوبی که به اینطریق بدست می‌آید ۲ یا چند برابر کوچکترین دورهٔ تناوب است . مثلا درمورد تابع $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ دورهٔ تناوب ۲π برای ما بدست می‌آید ، درحالیکهٔ دورهٔ تناوب این تابع مساوی π است .

$$\frac{\sin(\pi+x)-\cos(\pi+x)}{\sin(\pi+x)+\cos(\pi+x)}=\frac{-\sin x+\cos x}{-\sin x-\cos x}=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$$

واین مطلب ناشی از آنست که تابع مفروض قابل تبدیل به tgx است:

$\left(y=\frac{tgx-۱}{tgx+۱}\right)$ ودورهٔ تناوب tgx برابراست با π .

یا درمورد تابع $y = tg x - cotg x$ بنظرمی‌رسد که دورهٔ تناوب برابراست با π است ، درحالیکه کـوچکترین دورهٔ تناوب این تـابع برابر $\frac{\pi}{2}$ است :

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-cotg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-cotg x+tg x$$

واین ناشی ازآنست کـه تابع y قابل تبدیل به کتانژانت قوس $2x$ است :

$$tg x - cotg x = tg x - \frac{1}{tg x} = \frac{tg^2 x - 1}{tg x} = -2 cotg 2x$$

همچنین دورهٔ تناوب تابع $y = \sin 3x \cos x$ برابراست با π (ونه 2π) وعلت این امر آنست که باتبدیل $\sin 3x \cos x$ به مجموع بدست می‌آید:

$$\sin 3x \cos x = \frac{1}{2}\left[\sin(3x+x)+\sin(3x-x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$$

۴. مرکز ومحور تقارن در منحنی‌های مثلثاتی

روشن است که اگر منحنی نمایش تغییرات یـك تابع متناوب درفاصلهٔ یك دورهٔ تناوب مرکز یا محور تقارن[1] داشته بـاشد، دارای بی‌نهایت مرکز یا محور تقارن است، زیرا اگرمرکز تقارنی را که در یك دورهٔ تناوب بدست آمده است، بطور متوالـی به اندازهٔ یك دورهٔ

---

۱. درتوابع مثلثاتی هرجا صحبت ازمحور تقارن بکنیم، منظورمحور تقارن موازی محور yy' است.

تناوب بچپ یا به‌راست به موازات محور طول انتقال دهیم به مراکز جدید تقارن می‌رسیم. وبهمین ترتیب درمورد محور تقارن.

مثلا درتابع $y=\sin x$ ، مبداء مختصات $(0,0)$ مرکز تقارن منحنی است ، بنابراین سایر مرکزهای تقارن منحنی که با انتقال مبداء بدست می‌آید چنین‌اند :

$$\ldots, O_1(2\pi, 0) \ , \ O_2(4\pi, 0), \ldots, O_k(2k\pi, 0), \ldots$$

وچون درتابع $y=\cos x - \cos 2x$ ، محورعرض محور تقارن منحنی است، بنابراین سایرمحورهای تقارن منحنی چنین‌اند :

$$\ldots, \ x=2\pi, x=4\pi, \ldots, x=2k\pi, \ldots$$

همچنین این تابع دارای محورتقارن $x=\pi$ هم می‌باشد و بنابراین خطهای زیرهم، محورهای تقارن منحنی‌اند :

$$\ldots, \ x=\pi, x=3\pi, x=5\pi, \ldots, x=(2k+1)\pi, \ldots$$

یعنی بطورکلی می‌توان خط $x=k\pi$ را محورتقارن منحنی دانست که k می‌تواند هرعدد صحیح دلخواه (مثبت ، منفی یا صفر) باشد.

تعیین مختصات مراکز تقارن و یا معادلات محورهای تقارن (موازی محور عرض) در منحنی‌های مثلثاتی کاملا شبیه منحنی‌های جبری است. به چند مثال زیرتوجه کنید .

مثال ۱ . مطلوبست مختصات مرکزهای تقارن و معادله‌های محورهای تقارن منحنی تابع $y=\sin x$.

حل . مرکز تقارن منحنی را $\omega(\alpha, \beta)$ می‌گیریم . اگر مبداء مختصات را به مرکز تقارن منتقل کنیم باید به معادله‌ای برای منحنی

برسیم که با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نکند. بعد از تغییر مبداء، معادلهٔ منحنی چنین می‌شود:

$$Y = \cos\alpha \sin X + \sin\alpha \cos X - \beta$$

برای اینکه با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$، تغییری درمعادله حاصل نشود باید داشته باشیم:

$$\left|\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha = k\pi \\ \beta = 0 \end{array}\right.$$

یعنی نقطه‌های $\omega(k\pi, 0)$ مرکزهای تقارن منحنی هستند.

تبصره. درتابع $y = \sin x$ روشن است که با تبدیل x به $-x$ و یا x به $\pi + x$، مقدار y به $-y$ تبدیل می‌شود وبنابراین نقطه‌های $\omega_1(0, 0)$ و $\pi_2(\pi, 0)$ (در فاصلهٔ یک دور تناوب) مرکزهای تقارن منحنی‌اند، یعنی‌بطور کلی $\omega(k\pi, 0)$ مختصات مرکزهای تقارن منحنی را مشخص می‌کنند.

برای پیدا کردن معادلهٔ محورهای تقارن $y = \sin x$، خط $x = a$ را معادلهٔ محور تقارن فرض می‌کنیم، دراینصورت اگرمحورعرض‌را به اندازهٔ $x = a$ منتقل کنیم (یعنی مبداء مختصات را به نقطهٔ $(a, 0)$ منتقل نمائیم) باید به‌معادله‌ای برای تابع برسیم که با تبدیل Xبه $-X$ درآن مقدار Y تغییرنکند. پس ازانتقال مبداء به معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$Y = \sin(X \pm a) \implies Y = \sin X \cos a + \cos X \sin a$$

و برای اینکه باتبدیل X به $-X$ مقدار Y تغییرنکند باید داشته‌باشیم:

$$\cos a = 0 \implies a = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

و بنابراین خطهای $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ محورهای تقارن این منحنی‌هستند

مثال ۲ : مطلوبست معادلهٔ محورهای تقارن منحنی تابع

$$y=\cos x-\cos 3x$$

حل . درصورتی که محورتقارن موازی محورعرض فرض‌شود، معادلهٔ آن بصورت $x=a$ خواهد بود کـه پس از انتقال مبداء به نقطهٔ $(a,0)$ به معادله زیر برای منحنی می‌رسیم :

$$Y=\cos(X+a)-\cos 3(X+a) \qquad (1)$$

که باید بـا تغییر X بد $-X$ مقدار Y درآن تغییر نکند ، یعنی داشته باشیم :

$$Y=\cos(a-X)-\cos 3(a-X)$$

که می‌توان آنرا به صورت زیرنوشت :

$$Y=\cos(X-a)-\cos 3(X-a) \qquad (2)$$

باید سمت راست تساویهای (۱) و (۲) متحد یـکدیـگر باشند ، یعنی داشته باشیم :

$$\begin{cases}\cos(X+a)=\cos(X-a)\\ \cos(3X+3a)=\cos(3X-3a)\end{cases}$$

از معادلهٔ اول دستگاه بدست می‌آیـد : $a=k\pi$ و از معادلهٔ دوم آن : $a=k\frac{\pi}{3}$.

بنابراین جواب دستگاه $a=k\pi$ می‌شود. به‌این‌ترتیب خطهای $x=k\pi$ محورهای تقارن منحنی مفروض‌اند .

تبصره . منحنی تـابـع $y=\cos x-\cos 3x$ دارای مرکزهای

تقارنی با مختصات $(2k\pi+\frac{\pi}{2}, 0)$ می‌باشد .

مسائل

۳۷۱ . مرکزهای تقارن منحنی نمایش تغییرات تابع زیر را بدست آورید :

$$y=tg^2x-3tgx-2$$

۳۷۲ . مختصات مرکزهای تقارن ومعادله‌های محورهای تقارن منحنی تابع $y=\frac{2\cos x}{2\cos 2x-1}$ را پیدا کنید .

۳۷۳ . مطلوبست مختصات مرکزهای تقارن ومعادلهٔ محورهای تقارن منحنی تابع $y=\sin x-\cos 2x+\frac{1}{2}$.

جدول ومنحنی نمایش تغییرات هر یك از توابع زیررا رسم کنید. بهتراست فاصلهٔ تناوب را درمنحنی‌های متصل از یك اکسترمم و درمنحنی‌های منفصل از یك مجانب شروع کنید (از ۳۷۴ تا ۳۹۲) :

۳۷۴ . $y=2\sin^2y-\sin x-1$ ۳۷۵ . $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x$

۳۷۶ . $y=\sqrt{\frac{2\cos x-1}{2\cos x+1}}$ ۳۷۷ . $y=\sqrt{\frac{x.\sin x}{1-\cos x}}$

۳۷۸ . $y=\sqrt{1+\cos x-2\cos^2 x}$ ۳۷۹ . $y=\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

۳۸۰ . $y=\sin\frac{\pi}{4}x+\cos\frac{\pi}{4}x$ ۳۸۱ . $y=tg\pi x-\sin\pi x$

۳۸۲ . $y=\sqrt{\sin^2 x}+\sqrt{\cos^2 x}$ ۳۸۳ . $y=x+\sin x$

۳۸۴ . $y=tgx-cotgx$ ۳۸۵ . $y=x-2\cos x$

۳۸۶. $y=\frac{\sqrt{\sin^{2}x}}{1-\cos x}$ ۳۸۷. $y=x-\sin x$

۳۸۸. $y=\frac{1}{x}\sin x \quad (0\leqslant x\leqslant 6\pi)$

۳۸۹. $y=x\cos x-\sin x \quad (0\leqslant x\leqslant 6\pi)$

۳۹۰. $y=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{5}\sin 5x$

۳۹۱. $x=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$ ۳۹۲. $y=\sqrt{\left(\frac{1-2\sin x}{1+2\sin x}\right)^{2}}$

۱۱. حل مثلث

هر مثلث دارای شش‌جزء اصلی است که سه ضلع و سه‌زاویهٔ داخلی آن می‌باشد. مقصود از حل مثلث تعیین طول هریك از سه ضلع و اندازهٔ هریك از سه‌زاویهٔ آن است به‌شرط آن‌که معلومات کافی برای این منظور در دست باشد. درهندسه حل مثلث به‌وسیلهٔ ترسیم انجام می‌گیرد و اجزاء مجهول پس از ترسیم مثلث بدست می‌آید. اما در مثلثات به وسیلهٔ محاسبه، این مقصود حاصل می‌شود ، بنابراین برای حل مثلث از نظر مثلثاتی باید روابطی بین اجزاء اصلی مثلث برای تعیین اجزاء اصلی وهمچنین روابطی بین اجزاء اصلی و فرعی برای تعیین اجزاء فرعی از روی اجزاء اصلی بدست آورد.

بین اضلاع a و b و c وزاویه‌های A و B و C سه رابطهٔ

متمایز و مستقل از یکدیگروجود دارد که می‌توان آنها را به‌صورتهای مختلف درآورد.

اگر سه و یا هر شش جزء اصلی مثلث مجهول باشد باید معلوماتی که برای حل مثلث داده می‌شود چنان باشد که بتوان سه رابطهٔ دیگربین اجزاء مثلث برقرار کرد ودرنتیجه یك دستگاه‌معادلات سه یا چهار ویا پنج و شش مجهولی را حل کرد و اجزاء مجهول را بدست آورد.

در حالتی که معلومات مسأله شامل سه جزء اصلی مثلث باشد (به‌شرط آن‌که حداقل یکی‌از اجزاء معلوم، ضلع باشد) حل مثلث به حالتهای متعارفی (کلاسیك) تبدیل می‌شود.

اگر معلومات مسأله قسمتی‌ازاجزاء اصلی وفرعی، فقط اجزاء فرعی، رابطه‌ای بین اجزاء اصلی، رابطه‌ای بین‌اجزاء فرعی،رابطه‌ای بین اجزاء اصلی و رابطه‌ای بین اجزاء فرعی، ... باشد حل مثلث به حالتهای غیرمتعارفی (غیر کلاسیك) تبدیل می‌شود.

درحالتهای غیرمتعارفی اگر بتوان از معلومات مسأله دو رابطه بین زاویه‌های‌مثلث نوشت باتوجه به‌رابطهٔ $A+B+C=\pi$ ازدستگاه معادلات سه مجهولی مقدار سه‌زاویهٔ مثلث معلوم می‌شود وبا کمك معلوم دیگرمسأله ، محاسبهٔ طول اضلاع انجام می‌شود .

در حالت خاصی که مجموع دو زاویه در دست باشد بهتر است با کمك سایر معلومات مسأله درصورت امکان تفاضل دو زاویه را بدست آورد و اگر تفاضل دو زاویه معلوم باشد باید مجموع آنها را تعیین کرد.

اگر بتوان ازمحاسبهٔ طول‌ضلعها شروع کرد، عموماً حل‌مسأله به‌حل معادلات جبری منجر می‌شود و گاه ممکن است به‌علت وجود بعضی از زاویه‌ها که جزء معلومات مسأله است حل معادلات جبری شامل محاسبات مثلثاتی نیز باشد.

درتمام حالتها، توجه به حدود مجهولاتی که در مسأله وارد می‌شود ضرورت بسیار دارد وبویژه اگرمجهولات نسبتهای مثلثاتی، زاویه‌ها باشد توجه به‌حدود زاویه و نسبت مثلثاتی آن موجب تحقیق در درستی حل و صحت نتیجه می‌شود.

چون انواع مسائلی که مربوط به‌حل مثلث درحالتهای غیرمتعارفی می‌شود بسیار متنوع می‌باشد لذا طبقه‌بندی خاصی برای این حالتها وجود ندارد و نمی‌توان راه حل کلی وعمومی برای آنها نشان داد و ما تنها به‌ذکر چند مثال اکتفا می کنیم.

مثال ۱. در مثلثی مجموع شعاعهای‌دو دایرهٔ محیطی ومحاطی $(R+r)$ واسطهٔ عددی بین دوضلع b و c می‌باشد. اولا نوع مثلث را مشخص کنید. ثانیاً با معلوم بودن $b+c=l$ و r مثلث را حل کنید.

حل. اولا طبق فرض مسأله داریم: $b+c=۲(R+r)$ و ازآنجا بترتیب بدست می‌آید:

$$۲R(\sin B+\sin C)=۲R+۲.۴R\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲},$$

$$۲\sin\frac{B+C}{۲}\cos\frac{B-C}{۲}=۱+۲\sin\frac{A}{۲}\left(\cos\frac{B-C}{۲}-\cos\frac{B+C}{۲}\right),$$

$$۲\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B-C}{۲}=۱+۲\sin\frac{A}{۲}\left(\cos\frac{B-C}{۲}-\sin\frac{A}{۲}\right),$$

$$۲\cos\frac{B-C}{۲}\left(\cos\frac{A}{۲}-\sin\frac{A}{۲}\right)-\left(\cos^۲\frac{A}{۲}-\sin^۲\frac{A}{۲}\right)=۰,$$

$$\left(\cos\frac{A}{۲}-\sin\frac{A}{۲}\right)\left(۲\cos\frac{B-C}{۲}-\cos\frac{A}{۲}-\sin\frac{A}{۲}\right)=۰$$

$$\text{I)}\quad \cos\frac{A}{۲}-\sin\frac{A}{۲}=۰ \qquad \Longrightarrow A=۹۰^\circ$$

$$\text{II)}\quad ۲\cos\frac{B-C}{۲}=\cos\frac{A}{۲}+\sin\frac{A}{۲}=\sqrt{۲}\sin\left(\frac{A}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right),$$

$$\cos\frac{B-C}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{A}{۲}\right)$$

بنابراین یا مثلث مفروض قائم الزاویه است (حالت I) ویا مثلثی است که بین زوایای آن رابطهٔ (II) برقرار است.

درحالت II شرط وجود جواب را پیدا می کنیم. داریم:

$$B-C<B+C=\pi-A \quad \Longrightarrow \frac{B-C}{۲}<\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}$$

و ازآنجا $\cos\frac{B-C}{۲}>\sin\frac{A}{۲}$ می‌شود ، یعنی :

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{A}{۲}\right)>\sin\frac{A}{۲} \quad \Longrightarrow \quad \frac{۱}{۲}\left(\cos\frac{A}{۲}+\sin\frac{A}{۲}\right)>\sin\frac{A}{۲},$$

$$tg\frac{A}{۲}<۱ \qquad \Longrightarrow \qquad ۰<A<۹۰^\circ$$

یعنی درحالت II ، A زاویه‌ای حاده می‌شود .

ثانیاً. حالت I) دستگاه زیررا داریم :

$$\begin{cases} A=\frac{\pi}{۲} \\ b+c=l=۲(R+r) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B+C=\frac{\pi}{۲} \\ \sin B+\sin C=\frac{l}{l-۲r} \end{cases}$$

طرف اول معادلهٔ دوم دستگاه را ، با توجه بـه معادلهٔ اول دستگاه ، می‌توان چنین نوشت :

$$\sin B+\sin C=\sin B+\cos B=\sqrt{۲}\cos(B-\frac{\pi}{۴})$$

و بنابراین به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$\cos(B-\frac{\pi}{۴})=\frac{l}{\sqrt{۲}(l-۲r)} \qquad (III)$$

چون $۰<B<\frac{\pi}{۲}$ است $-\frac{\pi}{۴}<B-\frac{\pi}{۴}<\frac{\pi}{۴}$ می‌شود و در نتیجه بـرای وجود جواب باید داشته باشیم:

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\cos\left(B-\frac{\pi}{۴}\right)\leqslant ۱ \qquad \Longrightarrow \qquad ۱<\frac{l}{l-۲r}\leqslant\sqrt{۲}$$

$l-۲r$ مقداری است مثبت (ومساوی $۲R$) و بنابراین دستگاه اخیر نامساویها چنین می‌شود :

$$l-۲r<l\leqslant\sqrt{۲}(l-۲r)$$

نـامساوی سمت چپ واضح است و بنابـراین برای وجـود جواب باید $l\leqslant\sqrt{۲}(l-۲r)$ باشد ، یعنی $l\geqslant ۲(۲+\sqrt{۲})r$.

در حالت $l=۲(۲+\sqrt{۲})r$ زاویای B و C هریك مساوی $\frac{\pi}{۴}$ ومـثلث قائم‌الزاویه و متساوی الساقین می‌شود .

روشن است که بـا در دست داشتن زاویـهٔ B (از رابطهٔ III) می‌توان زاویهٔ C و سپس با توجه بـه‌روابط $b=a\sin B$ و $c=a\sin C$ مقادیر اضلاع b و c را بدست آورد.

تبصره. می‌توانستیم محاسبه را از اضلاع شروع کنیم. ازرابطهٔ $l=۲(R+r)$ مقدار R بدست می‌آید و در نتیجه وترمثلث $a=۲R$ محاسبه می‌شود. برای محاسبهٔ b و c می‌نویسیم :

$$b^۲+c^۲=a^۲ \implies l^۲-۲bc=a^۲ \implies bc=\frac{l^۲-a^۲}{۲}$$

با در دست داشتن $b+c$ و $b.c$ می‌توان مقادیر b و c را محاسبه کرد (بحث دراین مورد را به‌عهدهٔ خواننده می‌گـذاریم، باید همان نتیجهٔ بحث قبل بدست آید).

حالت II) دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{B-C}{۲}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\left(\dfrac{\pi}{۴}+\dfrac{A}{۲}\right) \\ b+c=۲(R+r)=l \end{cases}$$

معادلهٔ دوم دستگاه به‌صورت $\sin B+\sin C=\dfrac{l}{l-۲r}$ درمی آیـد که اگر سمت چپ آنـرا بصورت ضرب تجزیه کنیم، بـا استفاده از معادلهٔ اول دستگاه بدست می‌آید :

$$\sqrt{۲}\sin\frac{B+C}{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{A}{۲}\right)=\frac{l}{l-۲r}$$

بجای $\sin\dfrac{B+C}{۲}$ مساویش $\cos\dfrac{A}{۲}$ را قـرار میدهیم ، پس از تبدیـلات

ساده به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$\sin A+\cos A=\frac{1+۲r}{1-۲r} \implies \sqrt{۲}\cos\left(A-\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{1+۲r}{1-۲r}$$

چون دراین حالت $۰<A<۹۰^\circ$ بود ، برای وجود جواب باید داشته باشیم :

$$۱<\frac{1+۲r}{1-۲r}\leqslant\sqrt{۲} \implies 1\geqslant ۲(۳+۲\sqrt{۲})r$$

درحالت $1=۲(۳+۲\sqrt{۲})r$ بسادگی $A=۴۵^\circ$ و سپس $B=۱۱۲/۵^\circ$ و $C=۲۲/۵^\circ$ بدست می‌آید ($B-C=۹۰^\circ$ می‌شود).

در حالت کلی وقتی که A بدست‌آمد، از معادلـه اول دستگاه مقـدار $B-C$ وسپس B و C بـدست و محاسبهٔ اضلاع هم مشکل نیست .

مثال ۲ . از مثلث قائم‌الزاویه‌ای مجموع سه ضلع مساوی $۲P$ و شعاع دایرهٔ محاطی مساوی r است. مثلث را حل کنید .

حل. رأس زاویهٔ قائمه را A واضلاع مثلث را b ، a و c می گیریم (a وترمثلث است) طبق فرض داریم :

$$\begin{cases}a+b+c=۲p\\ r=p-a\end{cases} \implies \begin{cases}a(۱+\sin B+\cos B)=۲p\\ a=p-r\end{cases}$$

و بنابراین به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\sin B+\cos B=\frac{p+r}{p-r} \implies \cos\left(B-\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{p+r}{\sqrt{۲}(P-r)}$$

چون B زاویه‌ای است حاده، بنابراین باید $-\frac{\pi}{۴}<B-\frac{\pi}{۴}<\frac{\pi}{۴}$ باشد ،

یعنی :

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\frac{p+r}{\sqrt{۲}\,(p-r)}\leqslant ۱$$

نامساوی $\frac{p+r}{\sqrt{۲}(p-r)}<\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ همیشه برقرار است و نامساوی دوم وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$p\geqslant(۳+۲\sqrt{۲})r$$

با این شرط مقدار زاویهٔ B و سپس بـه‌کمك آن سایـر اجزاء مثلث بدست می‌آید:

مثال ۳ . در مثلثی a و $\widehat{A}$ و d_a' (نیمساز خارجی زاویـهٔ A) معلوم است مثلث را حل کنید $(B>C)$

حل. ابتداء زاویه‌های B و C را حساب می‌کنیم :

$$B+C=\pi-A$$

$$d_a'=\frac{a\sin B.\sin C}{\sin A.\sin\frac{B-C}{۲}}\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\frac{\sin B.\sin C}{\sin\frac{B-C}{۲}}=\frac{d_a'\sin A}{a}$$

از معادله اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\cos(B-C)+\cos A}{۲\sin\frac{B-C}{۲}}=\frac{d_a'.\sin A}{a}$$

و یا :

$$\text{I)}\quad a\sin^2\frac{B-C}{2}+d'_a\sin A\sin\frac{B-C}{2}-a\cos^2\frac{A}{2}=0$$

برای تعیین شرط جواب مسأله :

$$0<\frac{B-C}{2}<\frac{B+C}{2}\quad \text{و}\quad 0<\sin\frac{B-C}{2}<\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$$

و بنابراین باید داشته باشیم : $\quad f(0).f(\cos\frac{A}{2})<0$

و یا

$$\left(-a\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(d_a'\sin A\cos\frac{A}{2}\right)<0$$

نامساوی اخیر همواره محقق است. یعنی معادلهٔ (I) همیشه دارای یك جواب است و لذا $\sin\frac{B-C}{2}$ و $B-C$ مشخص می‌شود و با توجه به $B+C=\pi-A$ زاویه‌های B و C بدست می‌آید و از روابط $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ ، مقادیر b و c حاصل می‌شود .

تبصره . معادلهٔ مفروض هرگز دو جواب قابل قبول ندارد، زیرا $a.f(0)=-a^2\cos^2\frac{A}{2}<0$. یعنی صفر بین دو ریشهٔ معادله قرار دارد و هرگز هر دو ریشهٔ معادله بین صفر و $\cos\frac{A}{2}$ قرار نمی‌گیرد .

راه حل دوم . در این طریقه ابتدا اضلاع مثلث را حساب می‌کنیم :

(D پای نیمساز خارجی زاویهٔ A است) $\quad S_{ACB}=S_{ACD}-S_{ABD}$

$$\frac{1}{2}b.c.\sin A=\frac{1}{2}b.d_a'\sin(\widehat{A}+\widehat{BAD})-\frac{1}{2}c.d_a'\sin(\widehat{BAD})$$

$$۲b.c.\sin\frac{A}{۲}.\cos\frac{A}{۲}=b.d'_a\sin\left(\frac{A}{۲}+۹۰^\circ\right)-c.d'_a\cos\frac{A}{۲}$$

و یا
$$۲b.c.\sin\frac{A}{۲}=bd'_a-cd'_a=d'_a(b-c)$$

از طرف دیگر :

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲b.c.\cos A=b^۲+c^۲-۲bc(۱-۲\sin^۲\frac{A}{۲})$$

و بنابراین :
$$\begin{cases}۲b.c\sin\frac{A}{۲}=d'_a(b-c)\\ a^۲=(b-c)^۲+۴bc.\sin^۲\frac{A}{۲}\end{cases}$$

که اگر $b-c=X$ و $۲bc=Y$ فرض شود ، داریم :

$$\begin{cases}Y.\sin\frac{A}{۲}=d'_aX\\ a^۲=X^۲+۲Y\sin^۲\frac{A}{۲}\end{cases}$$

و یا
$$X^۲+۲\sin\frac{A}{۲}d'_aX-a^۲=۰$$

که باتوجه به فرض مسئله $(B>C)$ جواب مثبت این معادله قابل قبول می‌باشد :

$$\text{حاصلضرب ریشه‌ها}=-a^۲<۰$$

معادله همواره دارای دوریشهٔ مختلف‌العلامه است. ازاین‌معادله X واز حـل دستگاه Y ودرنتیجه b و c بـدست می‌آیـد . از رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ مقادیر $\sin B$ و $\sin C$ حاصل می‌شودوبالاخره زاویه‌های B و C بدست می‌آید .

مثال ۴ . در مثلث ABC دو ضلع b و c معلوم و مثلث معـادل

مثلث متساوی‌الاضلاعی است که به ضلع a می‌باشد ، مثلث را حل کنید .

حل . ازمحاسبهٔ زاویه‌ها شروع می کنیم

(مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$)

$$\begin{cases} S=\frac{۱}{۲}b.c.\sin A \\ a^۲=b^۲+c^۲-۲b.c.\cos A \\ S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} \end{cases}$$

و یا

$$\frac{۲S}{a^۲}=\frac{b.c.\sin A}{b^۲+c^۲-۲bc.\cos A},$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{b.c\sin A}{b^۲+c^۲-۲b.c.\cos A},$$

$$۲b.c\sin A+۲\sqrt{۳}\,b.c.\cos A=\sqrt{۳}(b^۲+c^۲)$$

$$\sin A+\sqrt{۳}\cos A=\frac{\sqrt{۳}(b^۲+c^۲)}{۲bc} \qquad (۱)$$

$$\frac{\sin(A+۶۰^\circ)}{\cos ۶۰^\circ}=\sqrt{۳}\times\frac{b^۲+c^۲}{۲bc}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sin(A+۶۰^\circ)=\frac{\sqrt{۳}(b^۲+c^۲)}{۴bc}.$$

طرف دوم تساوی اخیر نشان می‌دهد که $A+۶۰^\circ$ از ۱۸۰° کمتر است ولذا :

$$۶۰^\circ<A+۶۰^\circ<۱۸۰^\circ \qquad \Longrightarrow \qquad ۰<\sin(A+۶۰^\circ)\leqslant ۱$$

$$۰<\frac{\sqrt{۳}(b^۲+c^۲)}{۴bc}\leqslant ۱ \Longrightarrow \sqrt{۳}(b^۲+c^۲)\leqslant ۴bc$$

و یا

$$\sqrt{3}(b+c)^2-2\sqrt{3}bc\leqslant 4bc\Longrightarrow\frac{(b+c)^2}{2bc}\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{(b+c)^2}{2bc}\leqslant\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

از معادلهٔ (۱) زاویهٔ A بدست می‌آید (یك و یا دوجواب برای A) .
برای محاسبهٔ دو زاویهٔ دیگر $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ داریم :

$$\begin{cases}B+C=\pi-A\\ \dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\Longrightarrow\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{b}{c}\end{cases}\qquad(۲)$$

از معادلهٔ دوم دستگاه نتیجه می‌شود که

$$tg\frac{B-G}{2}=\frac{b-c}{b+c}cotg\frac{A}{2}\qquad(۳)$$

از معادلهٔ (۳) $tg\frac{B-C}{2}$ و درنتیجه $\frac{B-C}{2}$ بدست می‌آید و ازدستگاه (۲) زاویه‌های $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ حاصل می‌شود .

محاسبهٔ ضلع a : چون S معلوم می‌باشد از تساوی $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ مقدار a بدست می‌آید .

راه‌حل دوم . از محاسبهٔ ضلع a شروع می‌کنیم :

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

و یا

$$\frac{3a^4}{16}=\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

$$3a^4=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2],$$

$$4a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2=0 \qquad (4)$$

که معادله‌ای است دو مجذوری و حاصلضرب و حاصل جمع ریشه‌های معادلهٔ حلال آن هردومثبت می‌باشد ولذا شرط جواب مسئله آن است که داشته باشیم :

$$\Delta'=(b^2+c^2)^2-4(b^2-c^2)^2\geqslant 0$$

و یا

$$(b^2+c^2)^2\geqslant 4(b^2-c^2)^2$$

که اگر $b>c$ باشد بدست می‌آید:

$$b^2+c^2\geqslant 2(b^2-c^2) \Longrightarrow 3c^2\geqslant b^2 \text{ و } c\sqrt{3}\geqslant b>c$$

و در صورتیکه $b<c$ باشد

$$b^2+c^2\geqslant 2(c^2-b^2) \Longrightarrow 3b^2\geqslant c^2 \text{ و } b\sqrt{3}\geqslant c>b$$

از معادلهٔ (۴) یك مقدار (درصورتیکه $\Delta'=0$ باشد) و یا دو مقدار (در صورتیکه $\Delta'>0$ باشد) برای ضلع a حاصل می‌شود .

محاسبهٔ زاویه‌ها : ازتساوی $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ بامعلوم بودن a، مقدار S حاصل می‌شود و از رابطهٔ $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ زاویهٔ A مشخص میشود واز رابطهٔ $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$ مقدار $\sin B$ وبالاخره زاویهٔ $\widehat{B}$ و درنتیجه زاویهٔ $\widehat{C}$ مشخص می‌شود .

مثال ۵ . از مثلثی a و $b+c=l$ و S معلوم است مثلث را حل کنید.

حل. راه اول : محاسبهٔ زاویه‌ها :

با توجه به‌آنکه $h_a=\frac{۲S}{a}$ مقدار h_a معلوم می‌شود و

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{l}{\sin B+\sin C},$$

$$h_a=\frac{a\sin B.\sin C}{\sin A}$$

از طرف دیگر از معلومات مسأله نتیجه می‌شود که $۲p$ معلوم است و

لذا $r=\frac{S}{p}$ و داریم :

$$r=\frac{a}{cotg\frac{B}{۲}+cotg\frac{C}{۲}}$$

بنابراین :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{l}{\sin B+\sin C}\text{ و }\frac{a}{\sin A}=\frac{h_a}{\sin B\,.\,\sin C}$$

و یا $\frac{h_a}{\sin B\,.\,\sin C}=\frac{l}{\sin B+\sin C}$ که از آنجا دستگاه زیر حاصل می‌شود :

$$\mathrm{I}\quad\begin{cases}\dfrac{\sin B+\sin C}{\sin B\,.\,\sin C}=\dfrac{l}{h_a}\\[2ex] cotg\dfrac{B}{۲}+cotg\dfrac{C}{۲}=\dfrac{a}{r}\end{cases}$$

دستگاه I را می‌توان چنین‌نوشت:

$$\begin{cases}\dfrac{۱}{\sin C}+\dfrac{۱}{\sin B}=\dfrac{l}{h_a}\\[2ex] \dfrac{۱}{tg\frac{B}{۲}}+\dfrac{۱}{tg\frac{C}{۲}}=\dfrac{a}{r}\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\mathrm{II}\begin{cases}\dfrac{۱+tg^{۲}\frac{C}{۲}}{۲tg\frac{C}{۲}}+\dfrac{۱+tg^{۲}\frac{B}{۲}}{۲tg\frac{B}{۲}}=\dfrac{l}{h_a}\\[3ex] \dfrac{tg\frac{C}{۲}+tg\frac{B}{۲}}{tg\frac{B}{۲}.tg\frac{C}{۲}}=\dfrac{a}{r}\end{cases}$$

از معادلهٔ اول دستگاه اخیر نتیجه می‌شود :

$$\frac{\left(tg\frac{B}{۲}+tg\frac{C}{۲}\right)\left(tg\frac{B}{۲}.tg\frac{C}{۲}+۱\right)}{۲tg\frac{B}{۲}.tg\frac{C}{۲}}=\frac{l}{h_a}$$

که با توجه به‌معادلهٔ دوم دستگاه II چنین نتیجه میشود :

$$tg\frac{B}{۲}.\ tg\frac{C}{۲}+۱=\frac{l}{h_a}.\frac{۲r}{a}$$

و یا

$$tg\frac{B}{۲}.tg\frac{C}{۲}=\frac{۲lr}{ah_a}-۱=\frac{lr}{S}-۱$$

و لذا:

$$tg\frac{B}{۲}+tg\frac{C}{۲}=\frac{a}{r}tg\frac{B}{۲}.tg\frac{C}{۲}=\frac{a}{r}\left(\frac{lr}{S}-۱\right)$$

$tg\frac{B}{۲}$ و $tg\frac{C}{۲}$ ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند :

$$Z^۲-\frac{a}{r}\left(\frac{lr}{S}-۱\right)Z+\frac{lr}{S}-۱=۰ \qquad (II)$$

باتوجه به آنکه $tg\frac{B}{۲}$ و $tg\frac{C}{۲}$ هردومثبت می‌باشد شرط جواب معادله III چنین است :

$$\Delta\geqslant ۰ \text{ و } \frac{c}{a}>۰ \quad -\frac{b}{a}>۰$$

$$\Delta=\frac{a^۲}{r^۲}\left(\frac{lr}{S}-۱\right)^۲-۴\left(\frac{lr}{S}-۱\right)=$$

$$=\left(\frac{lr}{S}-۱\right)\left[\frac{a^۲}{r^۲}\left(\frac{lr}{S}-۱\right)-۴\right]\geqslant ۰$$

$$\frac{c}{a}=\frac{lr}{S}-۱>۰ \text{ و } -\frac{b}{a}=\frac{a}{r}\left(\frac{lr}{S}-۱\right)>۰$$

که شرط $\frac{lr}{S}-۱>۰$ برای $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ هردو کافی می‌باشد. اما چون داریم:

$\frac{a+b+c}{۲} > b+c$ و $l>p$ ویا $\frac{lr}{pr}>۱$ یعنی $\frac{lr}{S}-۱>۰$ نتیجه می‌شود : $b+c>a$

وبرای Δ چنین داریم:
$$\Delta=\left(\frac{lr}{S}-۱\right)\left[\frac{a^۲}{r^۲}\left(\frac{lr}{S}-۱\right)-۴\right]\geqslant ۰$$

و یا
$$\frac{a^۲}{r^۲}\left(\frac{lr}{S}-۱\right)\geqslant ۴$$

که چون به جای r مقدار $\frac{S}{p}$ و به‌جای p مقدار $\frac{l+a}{۲}$ قرارداده شود، بدست می آید :
$$\frac{a^۲(l^۲-a^۲)}{۴}\geqslant ۴S^۲$$

و با توجه به‌آنکه $l>a$ می‌باشد ، داریم :
$$\left(\frac{a\sqrt{l^۲-a^۲}}{۲}-۲S\right)\left(\frac{a\sqrt{l^۲-a^۲}}{۲}+۲S\right)\geqslant ۰$$

و بنابراین :
$$S\leqslant\frac{a\sqrt{l^۲-a^۲}}{۴}$$

درحالت خاصی کـه $S=\frac{a\sqrt{l^۲-a^۲}}{۴}$ باشد[۱] ، $tg\frac{B}{۲}=tg\frac{C}{۲}$

---

۱. در این حالت Δ مساوی صفر ومعادلهٔ III ریشهٔ مضاعف دارد و لـذا $tg\frac{C}{۲}=tg\frac{B}{۲}$ است. ازراه دیگر می‌توان درستی این مطلب را تحقیق کرد، چون $S=\frac{a\sqrt{l^۲-a^۲}}{۴}$ می‌باشد و ازطرف دیگر $S=\frac{a.h_a}{۲}$ لذا لازم است $\frac{l^۲-a^۲}{۴}=h_a^۲$ ویا $(b+c)^۲-a^۲=۴h_a^۲$ و یا

$$۴R^۲(\sin B+\sin C)^۲-۴R^۲\sin^۲A=۱۶R^۲\sin^۲B\sin^۲C$$
$$[\sin B+\sin C+\sin(B+C)][\sin B+\sin C-\sin(B+C)]=$$
$$=(۲\sin B.\sin C)^۲,$$

←

یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین می‌شود $(\widehat{B}=\widehat{C})$.

از معادلهٔ III مقادیر $tg\frac{B}{2}$ و $tg\frac{C}{2}$ حاصل می‌شود درنتیجه $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ بدست آمده‌وبالاخره A نتیجه می‌شود و با معلوم بودن ضلع a اضلاع b و c ازروابط $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ حاصل می‌شود.

راه حل دوم. از محاسبهٔ اضلاع شروع می کنیم، چون b+c داده شده ، b.c را حساب می کنیم ، داریم :

$$S=\frac{1}{2}b.c.\sin A \text{ و } a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$ و درنتیجه

$$\sin A=\frac{2S}{bc} \text{ و } \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\sin^2\frac{B+C}{2}.\cos^2\frac{B-C}{2}-\sin^2\frac{B+C}{2}.\cos^2\frac{B+C}{2}= \rightarrow$$

$$=\left[\cos^2\frac{B-C}{2}-\cos^2\frac{B+C}{2}\right]^2$$

$$\left(\cos^2\frac{B-C}{2}-\cos^2\frac{B+C}{2}\right)\left[\sin^2\frac{B+C}{2}-\right.$$

$$\left.-\left(\cos^2\frac{B-C}{2}-\cos^2\frac{B+C}{2}\right)\right]=0$$

$$\left(\cos^2\frac{B-C}{2}-\cos^2\frac{B+C}{2}\right)\left(\sin^2\frac{B-C}{2}\right)=0$$

که تنها عامل $\sin^2\frac{B-C}{2}$ می‌تواند مساوی باصفر باشد ودراینصورت:

$$\sin\frac{B-C}{2}=0 \Longrightarrow \widehat{B}=\widehat{C}$$

(اگر $\cos^2\frac{B-C}{2}-\cos^2\frac{B+C}{2}=0$ باشد نتیجه می‌شود:

$\pm\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$ و یا $\frac{B-C}{2}=\frac{B+C}{2}$ که‌لازم‌است $C=0$ و یا $\frac{B-C}{2}+\frac{B+C}{2}=\pi$ باشد که $B=\pi$ می‌شود).

$$\cos^2 A+\cos^2 A=1 \Longrightarrow \frac{4S^2}{d^2c^2}-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}=1$$

و با توجه آنکه $b+c=l$ می‌باشد نتیجه می‌شود :

$$b\,.\,c=\frac{16S^2+(l^2-a^2)^2}{4(l^2-a^2)}$$

و بنابراین b و c ریشه‌های معادلهٔ :

$$z^2-lz+\frac{16S^2+(l^2-a^2)^2}{4(l^2-a^2)}=0$$

می‌باشد ، که چون b و c مقادیری مثبت می‌باشند لـذا شرط جواب مسئله چنین است :

$$\Delta>0 \text{ و } \frac{c}{a}>0 \text{ و } -\frac{b}{a}>0\ ,$$

$$\Delta=\ l^2-\frac{16S^2+(l^2-a^2)^2}{l^2-a^2}>0\ ,$$

$$\frac{c}{a}=\frac{16S^2+(l^2-a^2)^2}{4(l^2-a^2)}>0\ ,-\frac{b}{a}=l>0$$

که در آن حاصلضرب ریشه‌ها وقتی مثبت است که $l>a$ بـاشد یعنی $b+c>a$ و حاصل جمع ریشه‌ها یعنی l همواره مثبت می‌بـاشد و لذا مسئله وقتی جواب داردکه مبین معادله مثبت و یا اقلا صفر باشد:

$$l^2(l^2-a^2)-16S^2-(l^2-a^2)^2\geqslant 0$$

$$a^2(l^2-a^2)-16S^2\geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (a\sqrt{l^2-a^2}+4S)(a\sqrt{l^2-a^2}-4S)\geqslant 0$$

ودر نتیجه $$S\leqslant\frac{a\sqrt{l^2-a^2}}{4}$$

مثال ۶ . در مثلثی ضلع a وزاویهٔ $\widehat{A}$ و $h_a^2+(b-c)^2=l^2$ معلوم می‌باشد ، مثلث را حل کنید (l مقداری است معلوم).

حل . ازمحاسبهٔ زاویه‌ها شروع می کنیم :

$$\begin{cases}\widehat{B}+\widehat{C}=\pi-\widehat{A}\\ h_a^2+(b-c)^2=l^2\end{cases}$$

چون $B+C$ معلوم است از معادلـهٔ دوم دستگاه $B-C$ را بـدست می‌آوریم :

$$h_a^2+(b-c)^2=\frac{a^2.\sin^2B.\sin^2C}{\sin^2A}+4R^2(\sin B-\sin C)^2=$$

$$=\frac{a^2}{\sin^2A}[\sin^2B.\sin^2C+(\sin B-\sin C)^2]=l^2,$$

$$\sin^2B.\sin^2C-4\sin^2\frac{B-C}{2}.\cos^2\frac{B+C}{2}=\frac{l^2.\sin^2A}{a^2}$$

$$\frac{1}{4}\Big[\cos(B-C)+\cos A\Big]^2+4\left(\frac{1-\cos(B-C)}{2}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)=\frac{l^2\sin^2A}{a^2}$$

که اگر نسبت به $\cos(B-C)$ مرتب کنیم :

$$\cos^2(B-C)+2(3\cos A-2)\cos(B-C)+$$
$$+\cos^2A-4\cos A+4-\frac{4l^2}{a^2}\sin^2A=0 \qquad \text{(I)}$$

و به‌فرض آن که $B\geqslant C$ باشد ، $0\leqslant B-C<B+C$ مـی‌شود یعنی $1\geqslant\cos(B-C)>-\cos A$.

شرط جواب مسئله آن است که : $f(1).f(-\cos A)\leqslant 0$ باشد .

$$f(1)=(\cos A+1)^2-\frac{4l^2}{a^2}\sin^2A$$

$$f(-\cos A)=4\sin^2A\left(1-\frac{l^2}{a^2}\right)$$

$$f(1).f(-\cos A)=\Big[(\cos A+1)^2-\frac{4l^2}{a^2}\sin^2A\Big]\times$$
$$\times\Big[4\sin^2A\left(1-\frac{l^2}{a^2}\right)\Big]\leqslant 0$$

$$(\cos A+1+\frac{2l}{a}.\sin A\cdot\cos A+1-\frac{2l}{a}\sin A)\times$$

$$\times(1+\frac{l}{a})(1-\frac{l}{a})\leqslant 0$$

که در آن عاملهای * $\cos A+1+\frac{2l}{a}\sin A$ و $1+\frac{l}{a}$ همواره مقادیر مثبت می‌باشد ولذا لازم است :

$$(\cos A+1-\frac{2l}{a}\sin A)(1-\frac{l}{a})\leqslant 0$$

وبنابراین: (I) $\cos A+1-\frac{2l}{a}\sin A\leqslant 0 \;;\; 1-\frac{l}{a}>0$

و یا (II) $\cos A+1-\frac{2l}{a}\sin A\geqslant 0 \;;\; 1-\frac{l}{a}<0$

نامعادلهٔ اول دستگاه I را می‌توان چنین نوشت :

$$2\cos^2\frac{A}{2}-\frac{4l}{a}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\leqslant 0$$

و یا

$$^{**}\cos\frac{A}{2}-\frac{2l}{a}\sin\frac{A}{2}\leqslant 0$$

$$\cot g\frac{A}{2}-\frac{2l}{a}\leqslant 0 \implies \cot g\frac{A}{2}\leqslant\frac{2l}{a}$$

ازمعادله دوم : $1-\frac{l}{a}>0$ و یا $1>\frac{l}{a}$ که درنتیجه

$$\frac{a}{2}\cot g\frac{A}{2}\leqslant l<a$$

ازدستگاه نامعادلات II نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases}\cot g\frac{A}{2}-\frac{2l}{a}\geqslant 0\\ 1<\frac{l}{a}\end{cases} \implies a<l\leqslant\frac{a}{2}\cot g\frac{A}{2}$$

---

* $\cos A$ همواره از (-1) بیشتر می‌باشد .

** دوطرف نامساوی بر $\cos\frac{A}{2}$ که مقداری است مثبت، تقسیم شده است .

اگر $l=\frac{a}{۲}cotg\frac{A}{۲}$ باشد $f(۱)=۰$ می‌شود یعنی داریم :

$$cos(B-C)=۱ \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{B}=\widehat{C}$$

مثلث متساوی‌الساقین است ودراین‌حال $h_a=l=\frac{a}{۲}cotg\frac{A}{۲}$ می‌باشد :

ازمعادلهٔ (l) $cos(B-C)$ بدست می‌آید و با توجه به‌آن‌که $B+C$ معلوم است ، زاویه‌های B و C حاصل می‌شود. و با توجه به روابط $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$ ، اضلاع b و c بدست می‌آید .

مثال ۷ . درمثلثی $\frac{c}{b}=k$ و $cosA+m\,cosB\,cosC=۰$ (m عدد جبری و $m\neq۱$) می‌باشد . مطلوبست محاسبهٔ زاویه‌های این‌مثلث و مکان هندسی رأس A در صورتیکه m ثابت و k متغیر فرض شود.

حل . داریم :

$$\begin{cases} cosA+m\,cosB.cosC=۰ \\ \frac{c}{b}=k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} cos(B+C)+m\,cosB\,cosC \\ \frac{sinC}{sinB}=k \end{cases}$$

برای تعیین زاویه‌های B و C ازاین دستگاه معادله‌های اول ودوم را برحسب tgB و tgC می‌نویسیم :

$$cosB.cosC-sinB.sinC=m\,cosB\,cosC$$

و یا

$$(I) \quad tgB.tgC=۱-m \text{ ،}$$

$$\frac{sin^۲C}{sin^۲B}=\frac{tg^۲C}{۱+tg^۲C}\cdot\frac{۱+tg^۲B}{tg^۲B}=k^۲$$

و یا

$$tg^۲C+tg^۲B\,tg^۲C=k^۲tg^۲B+k^۲tg^۲B.tg^۲C$$

که چون به‌جای $tgB.tgC$ مقدار $۱-m$ را قراردهیم :

$$tg^۲C+(۱-m)^۲=k^۲tg^۲B+k^۲(۱-m)^۲$$

و با توجه به‌آن‌که $tgC=\frac{۱-m}{tgB}$ نتیجه می‌شود :

$$k^2 tg^4 B+(k^2-1)(1-m)^2 tg^2 B-(1-m)^2=0$$

که معادله‌ایست دومجذوری نسبت به $tg\,B$ ودر آن داریم :

$$\frac{c}{a}=\frac{-(1-m)^2}{k^2}<0$$

لذا معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است که در ازای ریشهٔ مثبت آن دو ریشهٔ قرینه برای tgB حاصل می‌شود. اگر ایـن جوابها را به $\pm t$ نشان دهیم حاصل می‌شود:

$$tgB=t \quad \text{و} \quad tgC=\frac{1-m}{t}$$

اگر $m<1$ باشد زاویه‌های B و C هردو حاده می‌شود و اگر $m>1$ باشد زاویهٔ B حاده و C منفرجه می‌شود و شرط امکان مسأله آن است که داشته باشیم:

$B+C<180°$ و یـا $B<180°-C$ و $tgB<tg(180°-C)$ و یا $t<-\frac{1-m}{t}$ و ازآنجا $t^2<m-1$.

حال برای بررسی این شرط:

$$a.f(m-1)=k^2[k^2(m-1)^2+(k^2-1)(1-m)^2(m-1)-(1-m)^2]=k^2[(1-m)^2(k^2-1)m]$$

با توجه به‌فرض اخیر $(m>1)$ نتیجه می‌شود: $a.f(m-1)>0$

یعنی $m-1$ خارج از ریشه‌ها می‌باشد و اما:

$$\alpha+\frac{b}{2a}=m-1+\frac{(k^2-1)(1-m)^2}{2k^2}$$

همواره مقداری است مثبت و لذا $m-1$ از ریشه‌ها بزرگتر است و بنابراین:

$$t^2<m-1$$

محقق می‌باشد، یعنی دراین حالت نیز مسأله ممکن است.

به‌ازای ریشهٔ منفی معادله یعنی $(-t)$ چنین می‌شود:

$$tgB=-t \Longrightarrow \frac{\pi}{2}<B<\pi$$

و $tgC=\frac{1-m}{-t}$ که اگر $m<1$ باشد دراینصورت: $\frac{\pi}{2}<C<\pi$ و مسأله ممتنع می‌شود واگر $m>1$ باشد زاویهٔ $\widehat{C}$ حاده و با توجه به آنکه B منفرجه است شرط امکان مسأله $B+C<180°$ و یا $C<180°-B$ و $tgC<tg(180°-B)$ و یا $tgC<-tgB$ و یا $\frac{1-m}{-t}<t$ و درنتیجه : $t^2>m-1$ می‌شود اما $af(m-1)$ در ازای $m>1$ مثبت و $\alpha+\frac{b}{2a}$ نیز مثبت می‌باشد. یعنی دراین حالت مسأله غیرممکن است و لذا به‌ازای t ــ مسأله نشدنی است.

درحالت‌اول که $m<1$ فرض شد وزاویه‌های $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ هر دوحاده بدست آمد برای آن‌که وضع زاویهٔ A معلوم شود:

الف) $\widehat{B}+\widehat{C}<\frac{\pi}{2}$; ب) $\widehat{B}+\widehat{C}>\frac{\pi}{2}$

در حالت الف: $B<\frac{\pi}{2}-C$ و یا $tgB<tg(\frac{\pi}{2}-C)$ ویا $tgB.\,tgC<1$ و با توجه به‌آن که $tgB.tgC=1-m$ داریم : $0<1-m<1$ ویا $0<m<1$ که $m<1$ فرض مسأله بوده و در ازای $m>0$ زاویهٔ A منفرجه است.

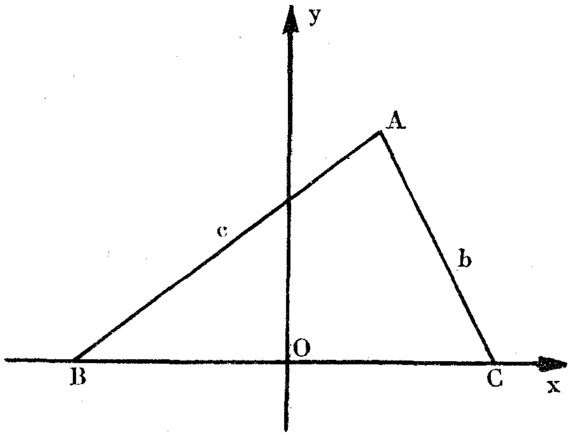
در حالت ب : $B>\frac{\pi}{2}-C$ و یا $tgB>tg(\frac{\pi}{2}-c)$ و یا $tgB.tgC>1$ که نتیجه می‌شود:

$$1-m>1 \implies m<0$$

یعنی اگر $m<0$ باشد زاویه A حاده می‌باشد.

برای تعیین مکان هندسی A محور x ها را منطبق بر ضلع BC و عمود منصف آنرا محور y ها می‌گیریم:

برای تعیین رابطه‌ای بین طول وعرض نقطهٔ A معادلهٔ خط AB



شکل ۶

وخط AC را برحسب یك پارامتر نوشته و با حذف آن پارامتر بین دو معادله، مکان هندسی نقطهٔ A نتیجه می‌شود.

$$(AB)\qquad y = tgB\left(x+\frac{a}{۲}\right) \quad \text{و} \quad (AC)\, y = (tg\pi - C)\left(x-\frac{a}{۲}\right)$$

$$\begin{cases} y = tgB\left(x+\frac{\pi}{۲}\right) \\ y = -tgC\left(x-\frac{a}{۲}\right) \end{cases}$$

با توجه به $tgB.tgC = ۱ - m$ خواهیم داشت:

$$y^۲ = -tgB.tgC\left(x^۲-\frac{a^۲}{۴}\right) \Longrightarrow y^۲ = (m-۱)\left(x^۲-\frac{a^۲}{۴}\right)$$

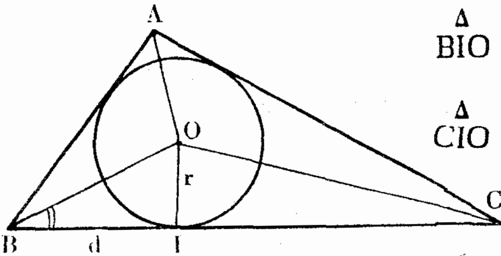
$$\frac{y^۲}{m-۱} = x^۲ - \frac{a^۲}{۴} \Longrightarrow \frac{x^۲}{\frac{a^۲}{۴}} - \frac{y^۲}{\frac{a^۲}{۴}(m-۱)} = ۱ \qquad \text{ویا}$$

اگر $m<۱$ باشد معادلهٔ بیضی و درصورتیکه $m>۱$ باشد معادله هذلولی است.

مثال ۶ در مثلث ABC ، ضلع a و زاویهٔ A و $B = d$ معلوم

است (I نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی با ضلع BC) مثلث را حل کنید.

حل. حالت اول اگر I را نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی با ضلع BC بگیریم:



شکل ۷

$$\overset{\Delta}{BIO} \qquad tg\frac{B}{۲}=\frac{r}{d}$$

$$\overset{\Delta}{CIO} \qquad tg\frac{C}{۲}=\frac{r}{a-d}$$

ویا $$tg\frac{B}{۲}.tg\frac{C}{۲}=\frac{r^{۲}}{d(a-d)}$$

اما از طرف دیگر چون $\frac{A}{۲}+\frac{B}{۲}+\frac{C}{۲}=\frac{\pi}{۲}$ می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت:

$$tg\frac{A}{۲}.tg\frac{B}{۲}+tg\frac{A}{۲}.tg\frac{C}{۲}+tg\frac{B}{۲}.tg\frac{C}{۲}=۱$$

و $$tg\frac{A}{۲}(tg\frac{B}{۲}+tg\frac{C}{۲})=۱-tg\frac{B}{۲}.tg\frac{C}{۲}=۱-\frac{r^{۲}}{d(a-d)}$$

چون در این معادله بجای $tg\frac{B}{۲}$ و $tg\frac{C}{۲}$ مقدار آنها را قرار دهیم:

$$tg\frac{A}{۲}(\frac{r}{d}+\frac{r}{a-d})=۱-\frac{r^{۲}}{d(a-d)}$$

و یا $$(I)\quad r^{۲}+(a.tg\frac{A}{۲})r-d(a-d)=۰$$

که معادله‌ای است از درجهٔ دوم نسبت به r.

دراین معادله $\frac{c}{a}=-d(a-d)$ منفی می‌باشد، یعنی معادله دارای دو ریشهٔ مختلف العلامه است که چون $-\frac{b}{a}=-atg\frac{A}{۲}$ می‌باشد قدر مطلق ریشهٔ منفی بیشتر می‌باشد ولذا ریشهٔ مثبت که قدر مطلق آن کوچکتر است مقدار r را نشان می‌دهد.

از این معادله r حاصل می‌شود و بنابراین:

از تساویهای $tg\frac{B}{۲}=\frac{r}{d}$ و $tg\frac{C}{۲}=\frac{r}{a-d}$، زاویه‌های B و C و از $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$، مقادیر d و c بدست می آید .

حالت دوم ـ I را نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی با ضلع BC می گیریم :

$$\overset{\Delta}{BIO_۱}: \quad tg\widehat{IBO_۱}=cotg\frac{B}{۲}=\frac{۱}{tg\frac{B}{۲}}=\frac{r_a}{d}$$

$$\overset{\Delta}{CIO_۱}: \quad tg\widehat{ICO_۱}=cotg\frac{C}{۲}=\frac{۱}{tg\frac{C}{۲}}=\frac{r_a}{a-d}$$

ویا
$$tg\frac{B}{۲}tg\frac{C}{۲}=\frac{(a-d)d}{r_a^۲}$$

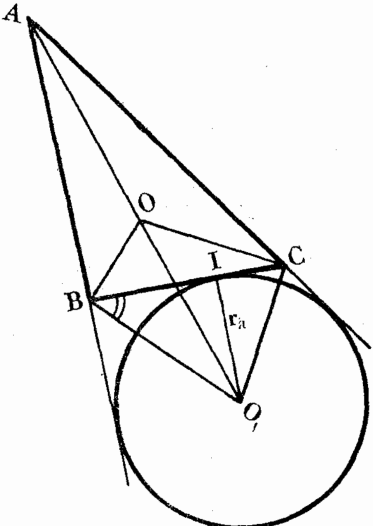
و
$$tg\frac{A}{۲}.tg\frac{B}{۲}+tg\frac{A}{۲}.tg\frac{C}{۲}+tg\frac{B}{۲}.tg\frac{C}{۲}=۱$$

ویا
$$tg\frac{A}{۲}(tg\frac{B}{۲}+tg\frac{C}{۲})=۱-tg\frac{B}{۲}.tg\frac{C}{۲}$$

و
$$tg\frac{A}{۲}(\frac{d}{r_a}+\frac{a-d}{r_a})=۱-\frac{(a-d)d}{r_a^۲}$$

ویا
$$(II)\quad r_a^۲-(a\,tg\frac{A}{۲})r_a-d(a-d)=۰$$

حاصلضرب ریشه‌های این معادله $-d(a-d)$ منفی می‌باشد، یعنی معادله دارای دو ریشهٔ مختلف العلامه است و حاصل جمع ریشه‌ها $a\,tg\frac{A}{۲}$ مثبت می‌باشد. لذا قدرمطلق ریشهٔ مثبت بیشتر است و

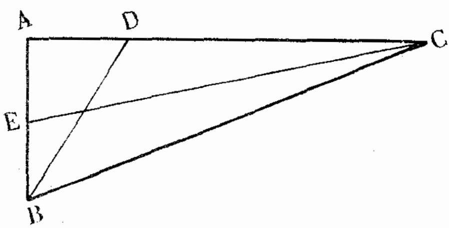


شکل ۸

لذا ریشهٔ مثبت این معادله r_a را نشان می‌دهد[1]

مثال ۹ . در مثلث ABC ، زاویهٔ A ثابت و اندازهٔ ضلع $BC = a$ نیز ثابت می‌باشد، مساحت مستطیلی که با بعدهای d_b و d_c (d_b و d_c اندازهٔ هریك از نیمسازهای $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ می‌باشد) ساخته می‌شود متناسب با مساحت مربع به ضلع BC است مطلوب است تعیین نسبت زاویهٔ $\widehat{B}$ به زاویهٔ $\widehat{C}$ برای آنکه سطح مستطیل ذکر شده ماکزیمم باشد و در این حالت مثلث را حل کنید .

حل . بنا به فرض مسئله داریم: $d_b \cdot d_c = k.a^2$ و در دو مثلث BDC و CEB:



شکل ۹

$$\frac{d_b}{\sin C} = \frac{r}{\sin(C+\frac{B}{2})} \quad (1)$$

$$\frac{d_c}{\sin B} = \frac{a}{\sin(B+\frac{C}{2})} \quad (2)$$

---

۱. از مقایسهٔ معادلات (I) و (II) نتیجه می‌شود که ریشه‌های این دو معادله قرینهٔ یکدیگرند. لذا می‌توان ریشهٔ منفی معادلهٔ (I) را از لحاظ قدرمطلق برابر r_a گرفت و همچنین ریشهٔ منفی معادلهٔ (II) را ازلحاظ قدرمطلق برابر r به‌حساب‌آورد.

از ضرب طرفهای اول رابطه‌های (۱) و (۲) در یکدیگر داریم:

$$\frac{d_b \cdot d_c}{\sin C . \sin B} = \frac{a^2}{\sin(C+\frac{B}{2}) . \sin(B+\frac{C}{2})}$$

و یا

$$d_b \cdot d_c = \frac{a^2 . \sin B . \sin C}{\sin(C+\frac{B}{2}) . \sin(B+\frac{C}{2})} = ka^2$$

و

$$k = \frac{\cos(B-C) - \cos(B+C)}{\cos(\frac{C}{2}-\frac{B}{2}) - \cos(\frac{3C}{2}+\frac{3B}{2})} =$$

$$= \frac{\cos(B-C) + \cos A}{\cos(\frac{B-C}{2}) + \sin\frac{3A}{2}}$$

و

$$k\cos\frac{B-C}{2} + k\sin\frac{3A}{2} = 2\cos^2\frac{B-C}{2} - 1 + 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$$

و

$$2\cos^2\frac{B-C}{2} - k . \cos\frac{B-C}{2} - (k\sin\frac{3A}{2} + 2\sin^2\frac{A}{2}) = 0 \qquad (3)$$

معادله‌ای است از درجه دوم نسبت به $\cos\frac{B-C}{2}$ و با فرض آنکه $B \geqslant C$ داریم:

$$0 \leqslant \frac{B-C}{2} < \frac{B+C}{2} \Longrightarrow 1 \geqslant \cos\frac{B-C}{2} > \cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}$$

بنابراین شرط وجود جواب در معادله آن است که داشته باشیم:

$$f(1) . f(\sin\frac{A}{2}) \leqslant 0$$

اما داریم:

$$f(1) = 2 - k - (k\sin\frac{3A}{2} + 2\sin^2\frac{A}{2})$$

$$f(\sin\frac{A}{2}) = -k\sin\frac{A}{2} - k . \sin\frac{3A}{2} = -4k\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}$$

و لذا: $f(\sin\frac{A}{۲}) > ۰$ و بنابراین لازم است:

$$۲ - k - (k\sin\frac{۳A}{۲} + ۱\sin^۲\frac{A}{۲}) \geqslant ۰$$

$$۲\cos^۲\frac{A}{۲} \geqslant k(۱+\sin\frac{۳A}{۲}) \quad و \qquad k \leqslant \frac{۲\cos^۲\frac{A}{۲}}{۱+\sin\frac{۳A}{۲}}$$

و درنتیجه حداکثر مقدار k وقتی است که $k = \frac{۲\cos^۲\frac{A}{۲}}{۱+\sin\frac{۳A}{۲}}$ بـاشد ،

یعنی عدد ۱ ریشهٔ معادلهٔ (۳) باشد و دراینصورت:

$$\cos\frac{B-C}{۲} = ۱ \implies \frac{B-C}{۲} = ۰ \implies B = C$$

یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است ولذا $\frac{\widehat{B}}{\widehat{C}} = ۱$ می‌باشد.

حل مثلث:

اندازهٔ زاویه‌های $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ از معادله $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{\pi}{۲} - \frac{A}{۲}$ حاصل می‌شود وبامعلوم بودن a ، مقادیر b و c ازرابطهٔ $= \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ $\frac{c}{\sin C}$ بدست می‌آید.

مثال ۱۰ . درمثلثی A و ۲p و r (شعاع دایرهٔ محاطی داخلی) معلوم است. مثلث را حل کنید.

حل . ازمحاسبهٔ زاویه‌ها شروع می کنیم :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{۲p}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

و

$$r=\frac{a.\sin\frac{B}{۲}.\sin\frac{C}{۲}}{\cos\frac{A}{۲}}$$

$$\begin{cases}\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{۲p}{\sin A+\sin B+\sin C}\\[2ex]\dfrac{r}{a}=\dfrac{\sin\frac{B}{۲}.\sin\frac{C}{۲}}{\cos\frac{A}{۲}}\end{cases}$$

با حذف a دراین دورابطه داریم :

$$\frac{r}{\sin A}=\frac{۲p\sin\frac{B}{۲}.\sin\frac{C}{۲}}{(\sin A+\sin B+\sin C)\cos\frac{A}{۲}}$$

و یا

$$\frac{r}{۲p.\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}=\frac{\cos\frac{B-C}{۲}-\sin\frac{A}{۲}}{[\sin A+۲\sin\frac{B+C}{۲}.\cos\frac{B-C}{۲}]\cos\frac{A}{۲}}$$

و

$$\cos\frac{B-C}{۲}=\sin\frac{A}{۲}\times\frac{p\,tg\frac{A}{۲}+r}{p\,tg\frac{A}{۲}-r}\qquad(E)$$

اما با فرض آنکه $B\geqslant C$ باشد :

$$۰\leqslant\frac{B-C}{۲}<\frac{B+C}{۲}\quad\Longrightarrow\quad ۱\geqslant\cos\frac{B-C}{۲}>\sin\frac{A}{۲}$$

بنابراین شرط جواب مسئله آن است که :

$$۱ \geqslant \frac{\sin\frac{A}{۲}(p\,tg\frac{A}{۲}+r)}{p\,tg\frac{A}{۲}-r}\sin\frac{A}{۲}$$

که از آن، دونامساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} ۱ \geqslant \dfrac{\sin\frac{A}{۲}(p\,tg\frac{A}{۲}+r)}{p\,tg\frac{A}{۲}-r} & (۱) \\ \dfrac{p\,tg\frac{A}{۲}+r}{p\,tg\frac{A}{۲}-r} > ۰ & (۲) \end{cases}$$

با توجه به‌آن که $r_a = p\,tg\frac{A}{۲}$ و $r_a > r$ می‌باشد[۱] نامساوی دوم همواره محقق است.

نامساوی (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$p\,tg\frac{A}{۲} - r \geqslant \sin\frac{A}{۲}(p\,tg\frac{A}{۲}+r)$$

و یا

$$p\,tg\frac{A}{۲}(۱-\sin\frac{A}{۲}) \geqslant r(۱+\sin\frac{A}{۲})$$

و

$$p\,tg\frac{A}{۲}\frac{(۱-\sin\frac{A}{۲})}{۱+\sin\frac{A}{۲}} \geqslant r$$

---

۱. مرکز هریك ازدایره‌های محاطی داخلی مثلث ومحاطی خارجی‌ضلع a برروی نیمساز زاویهٔ A قراردارد وچون $O_۱$ مرکز دایرهٔ به شعاع r_a فاصله‌اش از A بیشتراز فاصلهٔ O مرکز دایرهٔ به شعاع r می‌باشد، لذا $r_a > r$ است.

کسر $\dfrac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}$ را می‌توان چنین نوشت:

$$=\frac{\cos^2\frac{A}{4}+\sin^2\frac{A}{4}-2\sin\frac{A}{4}\cos\frac{A}{4}}{\cos^2\frac{A}{4}+\sin^2\frac{A}{4}+2\sin\frac{A}{4}\cos\frac{A}{4}}$$

$$=\left(\frac{\cos\frac{A}{4}-\sin\frac{A}{4}}{\cos\frac{A}{4}+\sin\frac{A}{4}}\right)^2=\left(\frac{1-tg\frac{A}{4}}{1+tg\frac{A}{4}}\right)^2=tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)$$

لذا:
$$p\,tg\frac{A}{2}\cdot tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)\geqslant r$$

از معادله (E) مقدار $\cos\frac{B-C}{2}$ و درنتیجه $B-C$ حاصل می‌شود و با توجه به آنکه $B+C=\pi-A$ می‌باشد، هر یك از مقادیر $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ بدست می‌آید. حال از رابطهٔ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{2P}{\sin A+\sin B+\sin C}$ a و b حاصل می‌شود و با توجه به $2p$ که معلوم می‌باشد، مقدار C بدست می‌آید.

مثال ۱۱. در مثلث ABC ، ضلع a و S و $K=\frac{b}{c}$ (K عددی است معلوم) داده شده است. مثلث را حل کنید.

حل. مسئله را از محاسبهٔ زاویه‌ها شروع می کنیم. برای تعیین زاویهٔ A:

$$\begin{cases} S=\frac{1}{2}b.c.\sin A \\ a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A \end{cases} \Longrightarrow \frac{2S}{a^2}=\frac{b.c.\sin A}{b^2+c^2-2bc.\cos A}$$

که چون صورت و مخرج طرف دوم تساوی را بر $c^۲$ تقسیم کنیم:

$$\frac{۲S}{a^۲}=\frac{k\sin A}{k^۲+۱-۲k\cos A}$$

و یا $ka^۲.\sin A+۴.kS.\cos A=۲S(k^۲+۱) \quad (۱)$

شرط جواب این معادله: $k^۲a^۴+۱۶k^۲S^۲\geqslant ۴S^۲(k^۲+۱)^۲$

و یا $a^۴k^۲\geqslant ۴S^۲(k^۲-۱)^۲$

حال اگر $k^۲-۱>۰$ باشد یعنی $k>۱$ و $b>c$ باشد:

$$a^۲k\geqslant ۲S(k^۲-۱)$$

و یا $۲Sk^۲-a^۲k-۲S\leqslant ۰$

که لازم است داشته باشیم: $\frac{a^۲+\sqrt{a^۴+۱۶S^۲}}{۴S}>k>۱$

واگر $k^۲-۱<۰$ باشد یعنی $k<۱$ و $b<c$ باشد

$$a^۲k\geqslant ۲S(۱-k^۲)$$

ویا $۲Sk^۲+a^۲k-۲S\geqslant ۰$

که لازم است داشته باشیم: $\frac{a^۲-\sqrt{a^۴+۱۶S^۲}}{۴S}<k<۱$

از معادلهٔ (۱) A بدست می‌آید، برای محاسبهٔ زاویه‌های B و C:

$$\begin{cases} B+C=\pi-A \\ \frac{b}{c}=k \implies \frac{\sin B}{\sin C}=k \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود:

$$tg\,\frac{B-C}{۲}=\frac{k-۱}{k+۱}.cotg\frac{A}{۲} \qquad (۲)$$

که با توجه به‌بحث بالا به ازای مقادیر $k>۱$ (یعنی $B>C$) طرف دوم مقداری مثبت و $tg\alpha$ فرض می‌شود

$$tg\,\frac{B-C}{۲}=\frac{k-۱}{k+۱}.\,cotg\frac{A}{۲}=tg\alpha \qquad (۳)$$

از معادلهٔ (۳) ، $\frac{B-C}{۲}$ حاصل می‌شود و با توجه بــه آنکه $B+C$ معلوم است هریك از مقادیر B و C نتیجه می‌شود.

و اگر $k>۱$ باشد، طرف دوم معادلهٔ (۳) منفی است ولذا:

$$tg\frac{C-B}{۲}=\frac{۱-k}{۱+K}\cdot cotg\frac{A}{۲}=tg\beta$$

برای محاسبهٔ اضلاع b و c از رابطهٔ $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}$ ضلع b حاصل‌می‌شودوازفرض‌مسئله یعنی $\frac{b}{c}=k$، ضلع c بدست می‌آید.

مثال ۱۲ . ازمثلثی h_a، m_a و R معلوم‌است، مثلث‌را حل‌کنید.

حل. داریم:

$$m_a^۲=R^۲(۲sin^۲B+۲sin^۲C-sin^۲A)$$

$$h_a=\frac{a.sinB.sinC}{sinA}=۲R.\ sinBsinC$$

دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} sinB\ .\ sinC=\dfrac{h_a}{۲R} \\ ۲sin^۲B+۲sin^۲C=\dfrac{m_a^۲}{R^۲}+sin^۲A \quad (I) \\ B+C=\pi-A \end{cases}$$

معادلهٔ دوم دستگاه چنین نوشته می‌شود:

$$۱-cos۲B+۱-cos۲C=\frac{m_a^۲}{R^۲}+sin^۲A$$

و یا

$$۲cosA.cos(B-C)=\frac{m_a^۲}{R^۲}+sin^۲A-۲$$

و بنابراین دستگاه (I) چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \cos(B-C)+\cos A=\dfrac{h_a}{R} \\ 2\cos A.\cos(B-C)=\dfrac{m_a^2}{R^2}+\sin^2 A-2 \end{cases} \qquad (II)$$

و یا
$$2\cos A\left[\frac{h_a}{R}-\cos A\right]=\frac{m_a^2}{R^2}+\sin^2 A-2$$

و یا
$$\cos^2 A-\frac{2h_a}{R}\cos A+\frac{m_a^2}{R^2}-1=0 \qquad (III)$$

$$\cos A=\frac{h_a}{R}\pm\frac{1}{R}\sqrt{h_a^2+R^2-m_a^2}$$

که دومقدار برای $\cos A$ و دومقدار برای زاویهٔ A حاصل می‌شود و با قرار دادن مقدار A در دستگاه II ، $\cos(B-C)$ بدست می‌آید و با توجه به آنکه $B+C$ معلوم می‌باشد مقادیر $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ حاصل می‌شود و با معلوم بودن R هر یك از مقادیر a و b و c بدست می‌آید.

بحث. اولا حدود A :
$$0<A<\pi$$

شرط وجود جواب در معادلهٔ (III) آن است که داشته باشیم:

$$f(-1).f(1)<0$$

$$\left(\frac{2h_a}{R}+\frac{m_a^2}{R^2}\right)\left(-\frac{2h_a}{R}+\frac{m_a^2}{R^2}\right)<0$$

و یا
$$m_a^2<2Rh_a$$

مثال ۱۳. ازمثلثی m_a و h_a و $\widehat{A}$ معلوم‌است، مثلث‌را حل کنید.

حل: دستگاه زیررا تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} B+C=\pi-A \\ m_a^2=\dfrac{a^2(2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A)}{4\sin^2 A} \\ h_a=\dfrac{a.\sin B.\sin C}{\sin A} \end{cases}$$

از دومعادلهٔ دوم و سوم دستگاه داریم:

$$\frac{۲\sin^۲B+۲\sin^۲C-\sin^۲A}{۴\sin^۲B.\sin^۲C}=\frac{m_a{}^۲}{h_a{}^۲}=k$$

و یا

$$۱-\cos ۲B+۱-\cos ۲C-\sin^۲A=k[\cos(B-C)-\cos(B+C)]^۲$$

و پس‌ازمرتب کردن معادله برحسب مجهول $\cos(B-C)$:

$$k\cos^۲(B-C)+۲(k-۱)\cos A.\ \cos(B-C)+$$
$$+(k-۱)\cos^۲A-۱=۰\quad(I)$$

برای تعیین شرط جواب این معادله اگر $B\geqslant C$ باشد:

$$۰\leqslant B-C<B+C \qquad\Longrightarrow\qquad ۱\geqslant\cos(B-C)>-\cos A$$

ولذا باید:

$$f(۱).f(-\cos A)\leqslant ۰$$

$$f(۱)=k+۲(k-۱)\cos A+(k-۱)\cos^۲A-۱=$$
$$=(k-۱)[\cos^۲A+۲\cos A+۱]=(k-۱)(\cos A+۱)^۲$$
$$f(-\cos A)=k\cos^۲A-۲(k-۱)\cos^۲A+$$
$$+(k-۱)\cos^۲A-۱=-\sin^۲A$$
$$f(۱).f(-\cos A)=(۱-k)(\cos A+۱)^۲.\sin^۲A\leqslant ۰$$

شرط تحقق نامساوی بالا آن است که:

$$۱-k\leqslant ۰$$

وچون $k=\frac{m_a{}^۲}{h_a{}^۲}$ می‌باشد:

$$۱-\frac{m_a{}^۲}{h_a{}^۲}\leqslant ۰$$

و یا

$$(۱+\frac{m_a}{h_a})(۱-\frac{m_a}{h_a})\leqslant ۰\ ;$$

$$۱-\frac{m_a}{h_a}\leqslant ۰\implies h_a\leqslant m_a$$

از معادلهٔ I ، $\cos(B-C)$ بدست می‌آید و با توجه به‌آنکه $B+C$ معلوم می‌شود، زاویه‌های B و C بدست می‌آید ، از رابطهٔ $h_a=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}$ ، ضلع a بدست می‌آید و با توجه به رابطه :

$\frac{a}{sin A}=\frac{b}{sin B}=\frac{c}{sin C}$ ضلعهای b و c حاصل می‌شود.

مسائل

۳۹۳ . اگر A و B و C زاویه‌های مثلثی باشند ثابت کنید :

$$sin^{۲}A+sin^{۲}B+sin^{۲}C-۲ cos A cos B cos C=۲$$

۳۹۴ . مثلث متساوی‌الاضلاع ABC درسطح افــق قــراردارد. نقطهٔ P روی AB واقع است وداریم $\frac{AP}{AB}=\lambda$. ازنقطه C عمــودی برصفحه مثلث اخراج می‌کنیم، اگر زاویهٔ انتهای عمود ازنقاط A وP بترتیب α و β باشد، ثابت کنید: $tg^{۲}\alpha \cdot cotg^{۲}\beta=۱-\lambda+\lambda^{۲}$

۳۹۵ . در مثلث متساوی الساقین BAC زاویهٔ رأس $A=۲۰°$ است. قطعه خط AD را به‌اندازهٔ BC برروی خط AC جدا می‌کنیم، مطلوبست محاسبهٔزاویهٔ $\widehat{ADB}$.

۳۹۶. در مثلث ABC تانژانت زاویه‌ها متناسب بامقادیرمعلوم α و β و γ می‌باشد. مطلوبست محاسبهٔ زاویه‌های مثلث وشرط‌وجود جواب. با توجه به شرط وجود جواب ثابت کنید که مسئله دارای‌یك جواب است.

۷۹۳ . قطعه خط ثابت $OA=۲a$ و قطعه خط متحرك $OB=a$ مفروض است، اگــر $AOB=x$ و $۰\leqslant x\leqslant\pi$ باشد، روی AB و در خارج صفحهٔ مثلث OAB مثلث‌متساوی‌الاضلاع ABC را می‌سازیم، مطلوبست اولا محاسبهٔ S مساحت چهــار ضلعی OACB بــرحسب a و x . ثانیاً زاویهٔ x را طوری معین کنید که $S=ka^{۲}$ باشد (بحث برحسب مقادیر مختلف $k>۰$) و اگر $k=\frac{۸+۵\sqrt{۳}}{۴}$ باشد ، مقدار x را معین کنید. ثالثاً تغییرات تابع $y=\frac{S}{a^{۲}}$ را معین ومنحنی نمــایش

آنرا رسم کنید.

۳۹۸ . زاویه‌های A و B و C ازمثلثی باسه زاویهٔ α و β و γ در روابط زیر صدق می کنند:

$$\cos A = \cos\alpha . \sin\beta ; \quad \cos B = \cos\beta . \sin\gamma ; \quad \cos C = \cos\gamma . \sin\alpha$$

ثابت کنید: $tg\alpha . tg\beta . tg\gamma = ۱$

۳۹۹ . تحقیق کنید که اگرمرکزدایرهٔ محیطی‌مثلثی روی‌محیط دایرهٔ محاطی آن قرار گیرد، بین زوایای مثلث رابطهٔ زیربرقراراست:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \sqrt{۲}$$

۴۰۰. اگر زاویهٔ حادهٔ بین میانه‌های وارد بر دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای مساوی α باشد، زوایای مثلث را محاسبه کنید.

۴۰۱. ثابت کنید که اگر زوایای یك مثلث دررابطهٔ $\sin^۲ A + \sin^۲ B = ۵ \sin^۲ C$ صدق کنند، $\sin C \leqslant \frac{۳}{۵}$ است.

۴۰۲ . از نقاط A، B و C راسهای مثلث ABC ، مماسهائی بر دایرهٔ محیطی مثلث رسم کرده‌ایم. مرکز این دایره را O و محل تلاقی $AA_۱$ ، $BB_۱$ و $CC_۱$ را M می گیریم ($A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ نقاط تلاقی‌مماسها هستند). ثابت کنید فاصلهٔ OM از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$OM^۲ = R^۲ \frac{۳AB^۲.BC^۲.CA^۲}{(AB^۲+BC^۲+CA^۲)^۲}$$

(R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است) .

۴۰۳. زوایای مثلثی در رابطهٔ زیر صدق می کنند:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

ثابت کنید یکی از زوایای مثلث مساوی ۱۲۰ درجه است.

۴۰۴ .زاویهٔ رأس ازمثلث‌متساوی‌الساقین ABC مساوی$\frac{\pi}{7}$است .
ثابت کنید بین قاعدهٔ $BC=a$ وساق $AC=b$ رابطهٔ زیر برقراراست:

$$a^5-4a^3b^2+3ab^4-b^5=0$$

۴۰۵ . مطلوبست محاسبهٔ قطر دایرهٔ محاط در ذوزنقه‌ای که دو قاعدهٔ آن a و b $(a>b)$ و زاویهٔ بین ساقهای آن α باشد. دربارهٔ وجود ذوزنقه وشکل آن بحث کنید.

۴۰۶ . در زوایای A و B و C از مثلث ABC دایره‌هائی به شعاعهای $r_a^{(1)}$ و $r_b^{(1)}$ و $r_c^{(1)}$ مماس بردایرهٔ محاطی مثلث (بـه‌شعاع r) و دوضلع مثلث رسم کرده‌ایم. سپس بـه‌شعاعهای $r_a^{(2)}$ و $r_b^{(2)}$ و $r_c^{(2)}$ دایره‌هائی را مماس بردایره‌های قبلی و دو ضلع مثلث رسم کرده‌ایم‌و غیره. ثابت کنید :

$$\sqrt[n]{r}=\sqrt[2n]{r_a^{(n)}\cdot r_b^{(n)}}+\sqrt[2n]{r_b^{(n)}\ r_c^{(n)}}+\sqrt[2n]{r_c^{(n)}\cdot r_a^{(n)}}$$

۴۰۷ . رابطه‌ای بین اضلاع مثلث ABC بدست آورید بشرطی که داشته باشیم :

$$\cos B=\frac{R-r}{R}$$

(R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث است).

۴۰۸ . ثابت کنید تصویرهای ارتفاعهای AA_1 و BB_1 ازمثلث ABC روی مماسی که ازنقطهٔ C بردایرهٔ محیطی مثلث رسم شده‌است، باهم برابرند.

۴۰۹ . A، B و C زوایای یك مثلث‌اند. نسبت زیر را برحسب اضلاع مثلث بدست آورید :

$$\frac{tg A.tg B+tg A.tg C}{tg B.tg C+tg B.tg A}$$

۴۱۰ . درمثلثی می‌دانیم $tgA\,tgB=۲$، ثابت کنید محل تلاقی ارتفاعات این مثلث، ارتفاع وارد برضلع AB را نصف می کند.

۴۱۱ . اگر x و y و z فواصل نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ محیطی مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a تا راسهای آن باشد، ثابت کنید:

$$x^۲+y^۲+z^۲=۲a^۲$$
$$x^۴+y^۴+z^۴=۲a^۴$$

۴۱۲ . زاویای مثلث متساوی الساقینی را پیدا کنید که بین‌قاعدهٔ a و ساق b آن رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$a^۳-۳ab^۲+b^۳\sqrt{۳}=۰$$

۴۱۳ . ثابت کنید مثلثی وجود ندارد که در آن داشته باشیم:

$$tgA+tgB+tgC=cotgA+cotgB+cotgC$$

۴۱۴ . دایـرهٔ محیطی مثلث ABC $(C\neq ۹۰^\circ)$، پاره خط CH (H محل تلاقی ارتفاعات) را نصف می کند. ثابت کنید:

$$tgA+tgB+۴tgC=۰$$

۴۱۵ . نقطهٔ M واقع برمحیط دایره‌ای مفروض است. دایره‌ای به مرکز M چنان رسم کنید که‌نصف سطح دایرهٔ مفروض را بپوشاند.

۴۱۶ . ارتفاعهای پنج ضلعی ABCDE متقاربند. ثابت کنیددر چنین پنج ضلعی تساویهای زیر صحیح است:

$$\frac{AB}{cos(A+B)sinD}=\frac{BC}{cos(B+C)sinE}=\dots=\frac{EA}{cos(E+A)sinC}$$

(ارتفاع پنج ضلعی‌عمودی است که یك رأس برضلع‌روبرو فرودآید، مثل عمودی که از B بر DE فرودآید).

۴۱۷ . زاویای مثلث ABC در رابطهٔ $۳tgA.tgB=-۱$ صدق می کنند. ثابت کنید $m_c=R$ است (m_c میانـهٔ وارد برضلع AB و R

شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است).

۴۱۸ . در دایره‌ای به‌شعاع واحد مربعی محاط کرده‌ایم. دراین مربع دایره‌ای و در دایرهٔ جدید یك ۸ ضلعی‌منتظم، سپس در ۸ ضلعی دایره و در دایره ۱۶ ضلعی منتظم وغیره محاط کـرده‌ایم. ثابت کنید شعاع همهٔ دایـره‌ها از $\frac{2}{\pi}$ بزرگتر است.

۴۱۹ . وتر مثلث قائم الزاویـه‌ای مساوی واحد و محل تـلاقی میانه‌های آن برمرکز دایرهٔ محاطی مثلث واقع است. محیط این مثلث را محاسبه کنید .

۴۲۰ . از مثلث قـائم الزاویـه‌ای محیط مساوی $2p$ و نیمساز داخلی یکی‌از زوایای حاده مساوی d می‌باشد. مثلث را حل کنید.

۴۲۱ . در مثلث قـائم‌الزاویـهٔ ABC وتر بـه طول معلوم a و $AH+BH=l$ می‌باشد(l مقداری است معلوم و H پای ارتفاع‌وارد بروتر است). مطلوبست اولا تعیین زاویهٔ B ، ثانیاً محاسبهٔ اضلاع AB و AC بدون استفاده از زاویهٔ B .

۴۲۲ . درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A=90^\circ)$ ضلـع b و زاویهٔ $\widehat{NBC}=\alpha$ معلوم است (BN میانهٔ وارد بـرضلـع b است) . مثلث را حل کنید .

۴۲۳ . از مثلث قائم‌الزاویه‌ای وتر و طول نیمساز زاویهٔ قائمه معلوم است، مثلث را حل کنید.

۴۲۴ . از مثلث قائم الـزاویه‌ای محیط و ارتفاع وارد بر وتـر

معلوم است، مثلث را حل کنید .

۴۲۵ . درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A=90^\circ)$ نیمساز زاویهٔ B ضلع مقابل را درنقطهٔ D قطع کرده است. اولا به‌معلوم بودن زاویهٔ B و طول نیمساز BD اضلاع مثلث را حساب کنید. ثانیاً زاویهٔ B را طوری تعیین کنید که $\frac{BC}{DC}=k$ باشد .

۴۲۶ . از مثلث قائم الزاویهٔ ABC $(A=90^\circ)$ وترو r_b معلوم است (r_b شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس برضلع b است). مثلث را حل کنید.

۴۲۷ . مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (قائمه در رأس A) به وترثابت a مفروض است. به‌قطر ارتفاع AH دایره‌ای رسم می‌کنیم، این‌دایره دوضلع AB و AC را در دونقطهٔ M و N قطع کرده است. اولا ثابت کنید چهار نقطهٔ M، N، B و C برمحیط یك دایره واقع‌اند. ثانیاً بر حسب ضلع a و زاویهٔ B مساحت چهارضلعی $BCNM$ را حساب کنید. ثالثاً زاویهٔ B را قسمی معلوم کنید که نسبت مساحت این چهار ضلعی به‌مساحت دایرهٔ به‌قطر AH مساوی مقدار معلوم k باشد.

۴۲۸ . درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A=90^\circ)$، $BC=a$ و $\widehat{C}=\alpha$ معلوم‌اند، Mx عمودمنصف BC ضلع AB را در E وضلع AC را در D قطع می کند. مطلوبست محاسبهٔ مساحت مثلث ADE بر حسب a و α و اثبات آنکه این مساحت برحسب $\sin 2\alpha$ مقداری است گویا و تعیین زاویهٔ α برای آنکه مساحت مثلث ADE مساوی k^2 باشد.

۴۲۹ . مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌ضلع a مفروض است.

بر رأس A خط zz' واقع در داخل زاویهٔ BAC_1 عبور کـرده است (C_1 در امتداد خط AC و درطرف دیگر نقطهٔ A است). اگر تصاویر دو رأس B و G براین محور B' و C' باشد اولا زاویهٔ $\widehat{BAZ}=x$ را طوری تعیین کنید کـه مساحت چهار ضلعی $BB'C'C$ مساوی k^2 شود (به ازای مقادیر مختلف k بحث کنید). ثانیاً درستی رابطهٔ

$$BB'^2+C'C^2=a^2[\sin^2(x+30^\circ)+\frac{1}{2}]$$

را تحقیق کنید وزاویهٔ x را طوری معین کنید که این‌عبارت ماکزیمم شود .

۴۳۰. ربع‌دایرهٔ AOB و دومماس مرسوم برنقاط A وB است ازنقطهٔ غیرمشخص M واقع بر کمانABدوعمود MH و MK رابراین دومماس‌فرودآورده‌ایم (H و K پای‌عمودها هستند). اولا به‌فرض آنکه $\widehat{MOA}=x$ باشد، مطلوبست‌تعیین نقطهٔM بنحوی که$MH.MK=l^2$ شود . ثانیاً مسئله را بحث نموده و ثابت کنید دو جواب برای مسئله وجود دارد که نسبت به نیمساز زاویهٔ AOB قرینه‌اند.

۴۳۱ . مطلوبست حل‌مثلث متساوی‌الساقینABC$(AB=AC)$، با معلومات :

I) a و S ;　　II) A و S　　III) h_a و $2p$;

IV) h_a و $a-b=l$;　V) R و r　;　VI(S و r_a

۴۳۲ . مطلوبست حل مثلث ABC بامعلومات:

I) B و C و h_a ; II) A و B و m_c ;

II) A و B و $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=k$　;　IV) h_a و h_b و h_c

V) m_a ، m_b ، m_c VI) A و h_a و d_a ؛

VII) $B-C=۲\alpha$ و $b+c=l$ و h_a VIII) $B=۲C$ و a و r

IX) $B-C=۲\alpha$ و $b.c=k^۲$ و m_a

۴۳۳ . در مثلثی زاویهٔ A و نسبت $\frac{b-c}{h_a}=m$ معلوم است ، زاویه‌های B و C را معین کنید (مسئله پاسکال).

۴۳۴ . در مثلثی m_a و m_b و زاویهٔ C معلوم است . معادله کلاسیك نوع اولی تشکیل دهید که به کمك آن دو زاویهٔ دیگرمثلث بدست آید.

۴۳۵ . در مثلثی زاویهٔ A و ضلع c و $a^۲-b^۲=k^۲$ معلوم است. اولا ثابت کنید $tgB=\frac{c^۲-k^۲}{c^۲+k^۲}tgA$. ثانیاً مثلث را حل کنید.

۴۳۶ . نقطهٔ M در داخل مثلث ABC مفروض است. اگر α ، β و γ بترتیب تصویر این نقطه برسه ضلع a، b و c باشد ثابت کنید نسبت مساحت مثلث $\alpha\beta\gamma$ به مساحت مثلث ABC با قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث یکی است و از آنجا نتیجه بگیرند که اگر H محل تلاقی سه ارتفاع مثلث و O مرکز دایرهٔ محیطی باشد خواهیم داشت:

$$OH^۲=R^۲(۱-۸\cos A\cos B\cos C)$$

وبالاخره نتیجه‌بگیرید $\cos A.\cos B.\cos C\leqslant\frac{۱}{۸}$ است.

۴۳۷ . اگر m و n و p به ترتیب فاصله‌های مرکزدایرهٔمحیطی مثلث ABC از اضلاع a، b و c باشد، ثابت کنید در صورتی که سه

زاویهٔ مثلث حاده باشد داریم:

$$۴(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p})=\frac{a.b.c}{m.n.p}$$

۴۳۸ . درمثلث ABC می‌دانیم $A=۶۰^\circ$ و $m_a=kb$ (k عددی است مثبت). زاویه‌های B و C را بدست آورید.

۴۳۹ . در مثلث ABC می‌دانیم $B-C=\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{b+c}{a}=m$ (حالت خاص $m=\sqrt{۲}$). اولا مطلوبست محاسبهٔ زاویه‌های مثلث . ثانیاً تحقیق کنید h_a مماس بردایرهٔ محیطی مثلث است. ثانیاً دراین مثلث صحت رابطهٔ $b^۲-c^۲=۲aR$ را تحقیق کنید، رابعاً اگر در این مثلث قاعدهٔ BC ثابت بماند مکان هندسی رأس A ومحل تلاقی ارتفاعهای مثلث را تعیین کنید .

۴۴۰ . درمثلثی ارتفاع AH مساوی بانصف BC می‌باشد. اولا رابطه‌ای بین تانژانت زاویه‌های B وC پیدا کنید. ثانیاً اگر A معلوم باشد زاویه‌های B وC را بدست آوردید (بحث) ثالثاً اگر $B=۲C$ باشد tgA وtgB را محاسبه کنید.

۴۴۱ . مطلوبست اولا تعیین d_a' و d_b' و d_c (طول نیمسازهای خارجی مثلث) برحسب سه‌ضلع مثلث و تعیین شرطی برای آنکه‌این سه نیمساز خارجی باهم مساوی باشند. ثانیاً اگر $c=۱$ و $ab=x$ و $a+b=۱+۲u$ باشد به‌فرض معلوم بودن x یا u اضلاع مثلث را حساب کنید (بحث)، بعلاوه برحسب x یا u مساحت مثلث ، R، r و

$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}$ را بدست آوردید. ثالثاً صحت رابطه زیررا، وقتی که مثلث متساوی‌الساقین نباشد، تحقیق کنید:

$$\mathrm{I)}\ \sin\frac{A}{۲}.\sin\frac{B}{۲}=\sin^{۲}\frac{C}{۲}\ ;\ \mathrm{II)}\frac{r}{R}=۴\sin^{۳}\frac{C}{۳}$$

رابعاً اگر $\sin\frac{C}{۲}=\frac{۱}{۴}$ باشد مثلث را حل کنید.

۱۲ . موارد استعمال مثلثات

اگربگوئیم که مثلثات درتمام زمینه‌های دانش‌های بشری (از علومِ نظری گرفته تا صنایع وفنون) ریشه دوانیده وبدون استفاده از آن همهٔ رشته‌های علمی دچارنوعی توقف می‌شوند، سخنی به اغراق نگفته‌ایم. رشته‌های مختلف ریاضی (مثل جبروهندسه)، علوم نظری ومحاسبه‌ای (مثل‌فیزیك ونجوم)، علوم عملی (مثل‌مساحی ومحاسبات فنی) و... همه برمثلثات تکیه دارند. روشن است که حتی ورود به‌همهٔ این مباحث مستلزم بحثی مفصل است و با فلسفهٔ وجودی این کتاب نمی‌سازد. ما تنها به بعضی ازاین موارد اشاره می کنیم وبخصوص به جنبه‌هائی تکیه می کنیم که درمسائل ریاضی دبیرستانی همیشه مطرح می‌شود.

۱. استفادهٔ از مثلثات درحل معادله‌های جبری

به کمك اتحادهای مثلثاتی وروابط بین نسبتهای مثلثاتی‌قوسها، می‌توان بعضی از معادله‌های جبری را حل کرد وجوابها را با تقریب کافی بدست آورد.

این روش که اغلب برروش تحلیلی (تعیین ریشه‌های معادله از راه رسم منحنی) برتری دارد، به سهولت وسرعت حل مسئله کمك می‌کند وچون جوابهای مسئله بصورت مضربی از یك نسبت مثلثاتی بدست می‌آید، با استفاده ازجدول مقادیرمثلثاتی قوسها، تعیین مقادیر عددی ریشه‌های معادله به‌آسانی میسرمی‌شود.

مثال ۱ . مطلوبست حل معادلهٔ درجه سوم $x^۳+px+q=۰$

حل . اگر درمعادلهٔ مفروض $x=\lambda \cos\alpha$ قراردهیم، با توجه به اینکه $\lambda \neq ۰$ است (اگر $\lambda=۰$ باشد $x=۰$ می‌شود که حالت خاصی ازمعادلهٔ درجه سوم وبدون اشکال قابل‌حل است) ، معادله‌ای بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\cos^۳\alpha+\frac{p}{\lambda^۲}\cos\alpha+\frac{q}{\lambda^۳}=۰ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر اتحاد $\cos ۳\alpha=۴\cos^۳\alpha-۳\cos\alpha$ را می‌توان چنین نوشت :

$$\cos^۳\alpha-\frac{۳}{۴}\cos\alpha-\frac{۱}{۴}\cos ۳\alpha=۰ \qquad (۲)$$

ازمقایسهٔ اتحاد (۲) ومعادلهٔ (۱) بدست می‌آید :

$$\frac{p}{\lambda^۲}=-\frac{۳}{۴} \quad \text{و} \quad \frac{q}{\lambda^۳}=-\frac{۱}{۴}\cos ۳\alpha$$

ازتساوی اول $\lambda=\pm ۲\sqrt{-\frac{p}{۳}}$ می‌شود واز تساوی دوم بدست می‌آید :

$$\cos ۳\alpha=\frac{-۴q}{\lambda^{۳}}=\frac{-۴q}{\pm\frac{۸}{۳}(-p)\sqrt{-\frac{p}{۳}}}=\frac{۳q}{\pm ۲p\sqrt{-\frac{p}{۳}}}$$

حالا اگر φ کوچکترین قوس مثبتی باشد که برای آن

$$\cos\varphi=\frac{۳P}{۲p\sqrt{-\frac{p}{۳}}}$$

بشود، داریم :

$$\cos ۳\alpha=\cos\varphi \implies \alpha=\frac{۲}{۳}k\pi\pm\frac{\varphi}{۳}$$

که جوابهای محصور بین صفر و ۲π برای α چنین است :

$$\frac{\varphi}{۳},\ \frac{۲\pi}{۳}+\frac{\varphi}{۳},\ \frac{۲\pi}{۳}-\frac{\varphi}{۳},$$

$$\frac{۴\pi}{۳}+\frac{\varphi}{۳},\ \frac{۴\pi}{۳}-\frac{\varphi}{۳},\ ۲\pi-\frac{\varphi}{۳}$$

اما با توجه به رابطهٔ $\cos(۲\pi-\theta)=\cos\theta$ ، شش قوس بالا دو به دو کسینوسهای مساوی دارند و جوابهای معادلهٔ $x^{۳}+px+q=۰$ بصورت زیر بدست می‌آید :

$$x_{۱}=۲\sqrt{-\frac{p}{۳}}\cos\frac{\varphi}{۳},\quad x_{۲}=۲\sqrt{-\frac{p}{۳}}\cos\left(\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\varphi}{۳}\right),$$

$$x_{۳}=۲\sqrt{-\frac{p}{۳}}\cos\left(\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\varphi}{۳}\right)$$

توضیح . درجوابهای بالا $\lambda=۲\sqrt{-\frac{p}{۳}}$ و $\cos\varphi=\dfrac{۳q}{۲p\sqrt{-\frac{p}{۳}}}$

اختیارشده است. اگر $\lambda=-۲\sqrt{-\frac{p}{۳}}$ انتخاب شود، بدست خواهدآمد:

$cos\varphi_۱=\dfrac{-۳q}{۲p\sqrt{-\frac{p}{۳}}}$ وبا توجه به‌آنکه $cos\varphi=-cos\varphi_۱$ است، همان جوابهای قبل بدست می‌آید.

بحث. برای آنکه معادلهٔ $x^۳+px+q=۰$ دارای سه جواب باشد باید λ و φ وجود داشته باشند وبرای این منظورلازم وکافی است که نامساویهای زیر برقرارباشند:

$$\begin{cases} -\frac{p}{۳}>۰ \\ -۱\leqslant\dfrac{۳q}{۲p\sqrt{-\frac{p}{۳}}}\leqslant ۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p<۰ \\ ۴p^۳+۲۷q^۲\leqslant ۰ \end{cases}$$

ولی اگر $۴p^۳+۲۷q^۲\leqslant ۰$ باشد، ناچار $p<۰$ می‌شود و بنابراین شرط لازم وکافی برای حل معادلهٔ درجه سوم به‌طریق مثلثاتی آنست که $۴p^۳+۲۷q^۲\leqslant ۰$ باشد که دراینصورت معادله دارای سه جواب حقیقی است.

یادآوری. درحالتی که $p\geqslant ۰$ ویا $۴p^۳+۲۷q^۲>۰$ باشد، حل معادلهٔ $x^۳+p^x+q=۰$ بطریق جبری ساده‌تراست.

مثال ۲. مطلوبست حل معادلهٔ $۸x^۳-۶x=\sqrt{۲}$

حل. معادله را بصورت زیرمی‌نویسیم:

$$f(x)=۸x^۳-۶x-\sqrt{۲}=۰$$

داریم :

$$\begin{cases} f(-۱) = -(۲+\sqrt{۲}) < ۰ \\ f(۱) = ۲-\sqrt{۲} > ۰ \end{cases} \Longrightarrow f(-۱).f(۱) < ۰$$

بنابرایـن معادلـهٔ مفروض لااقـل یـك ریشه بین ۱ − و ۱ + دارد .

$x = \sin\alpha$ می گیریم ، بترتیب بدست می آید :

$$۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \; ; \; \sin۳\alpha = \sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right) \; ;$$

$$\alpha = \frac{۲}{۳}k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \; , \; \alpha = \frac{۲}{۳}k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲}$$

وازآنجا خواهیم داشت :

$$x = \sin\left(\frac{۲}{۳}k\pi - \frac{\pi}{۱۲}\right) \; , \quad x = \sin\left(\frac{۲}{۳}k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲}\right)$$

که اگرمقادیرصحیح k را قراردهیم، سه جـواب زیر برای x بدست می آید :

$$x_۱ = -\sin\frac{\pi}{۱۲} \; , \; x_۲ = \sin\frac{۵\pi}{۱۲} \; , \; x_۳ = -\sin\frac{\pi}{۴}$$

واین جوابها بصورت مقادیرجبری چنین است :

$$x_۱ = \frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۴} \; , \quad x_۲ = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴} \; , \quad x_۳ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مثال ۳ . معادلهٔ $x^۴ - ۴x^۳ - ۱ = ۰$ را حل کنید.

حل . معادله را چنین می‌نویسیم:

$$x^۴ - ۱ = ۴x^۳ \quad \Longrightarrow \quad (x^۲-۱)(x^۲+۱) = ۴x^۳$$

اگر $x = tg\alpha$ بگیریم، بدست می آید:

$$(tg^2\alpha-1)(tg^2\alpha+1)=4tg^3\alpha=4tg\alpha.\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}=$$
$$=4tg\alpha sin^2\alpha(1+tg^2a)$$

وبا تقسیم طرفین آن بر $1+tg^2\alpha$ (که مخالف صفراست) می‌شود:

$$tg^2\alpha-1=4tg\alpha.sin^2\alpha$$

$tg^2\alpha-1\neq 0$ است، زیراجوابهای $x=\pm 1$ درمعادلهٔمفروض صدق نمی کند، بنابراین باتقسیم طرفین‌معادلهٔ اخیر بر $tg^2\alpha-1$ بدست می آید:

$$1=\frac{4tg\alpha}{tg^2\alpha-1}.sin^2\alpha=-tg2\alpha(1-cos2\alpha)\ ,$$
$$1=-\frac{sin2\alpha}{cos2\alpha}(1-cos2\alpha)$$

$cos2\alpha\neq 0$ است وبنابراین به معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$sin2\alpha+cos2\alpha-sin2\alpha cos2\alpha=0$$

که معادله‌ای قابل‌حل است. اگر $sin2\alpha+cos2\alpha=y$ بگیریم بسادگی جواب $sin2\alpha+cos2\alpha=1-\sqrt{2}$ بدست می آید واز آنجا

$$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}+\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=1-\sqrt{2}\ ,$$
$$(2-\sqrt{2})tg^2\alpha-2tg\alpha-\sqrt{2}=0\ ,$$
$$x=tg\alpha=\frac{(2+\sqrt{2})(1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1})}{2}$$

۲ . استفاده از مثلثات برای حل مسائل هندسه

مثلثات با هندسه ارتباطـی عمیق دارد. تعریفهای اصلی‌مثلثات

دردورهٔ ریاضیات متوسطه براساس پاره خطهای متناسب ومثلثهای متشابه است و بنابراین نمی‌توان این دورشتهٔ ریاضیات را ازهم جدا کرد.

تمام مسائلی که در بخش مربوط به حل مثلث وچندضلعی‌ها درمثلثات حل‌می‌شود ارتباط محکم مثلثات را با هندسه نشان می‌دهد.

دراینجا کوشش می‌شود نمونه‌های متنوعی ازحل مسائل‌هندسه به‌کمك مثلثات (چه درمثالها و یا درمسائل آخرفصل)، درزمینه‌هائی که کمتردرکتابهای درسی دیده می‌شودآورده شود.

مثال۱. ثابت‌کنید که اگر یك زاویه ازمثلثی بایك زاویه ازمثلث دیگرمساوی باشد، نسبت مساحتهای دومثلث به ضلعهای روبروی به این زاویه مربوط نیست.

حل. اگرزاویهٔ مساوی را دومثلث مساوی α ودوضلع مجاور به‌آنرا بترتیب a و b درمثلث اول و a' و b' درمثلث دوم بگیریم، داریم:

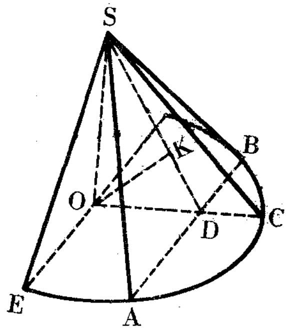
$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha \quad ، \quad S'=\frac{۱}{۲}a'b'\sin\alpha$$

(S و S' بترتیب مساحتهای دومثلث‌اند). ازاینجا بدست می‌آید:

$$\frac{S}{S'}=\frac{\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}a'b'\sin\alpha}=\frac{ab}{a'b'}$$

مثال ۲. ارتفاع مخروطی ۲۰ سانتیمتر و شعاع قاعدهٔ آن ۲۵ سانتیمتر است. صفحه‌ای از رأس مخروط چنان عبور کرده است که

فاصلهٔ آن ازمرکز قاعدهٔ مخروط مساوی ۱۲ سانتیمتراست، مطلوبست مساحت مقطع..



شکل ۱۰

حل. در شکل ۱۰ مقطع مفروض عبارتست ازمثلث SAB . معلوم است که S مساحت این مقطع چنین است:

$$S = AD \cdot DS$$

(SD ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین SAB است) . زوایای مساوی SOK و SDO را مساوی α می‌گیریم. ۱۶ = SK بسادگی بدست می‌آید.

داریم :

$$OD = \frac{۱۲}{sin\alpha} = \frac{۱۲}{۱۶:۲۰} = ۱۵ \quad ,$$

و بنابراین بسادگی ۲۵ = SD و ۲۰ = AD می‌شود وخواهیم داشت:

$$S = ۲۰ \ . \ ۲۵ = ۵۰۰ \quad \text{(سانتیمتر مربع)}$$

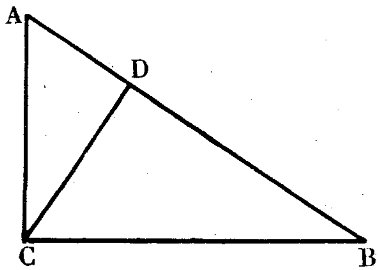
مثال ۳ . دریك مثلث قائم الزاویه اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه برنسبت ۳:۲ هستند و ارتفاع وتر را به دوقطعه تقسیم کرده است که یکی ازآنها ۲ متر ازدیگری بیشتراست. مطلوبست محاسبهٔ طول وتر.

حل. فرض می کنیم (شکل ۱۱):

$$AC = ۲x; \quad BC = ۳x \ ; \quad AD = y \ ;$$

$$BD = y + ۲ \quad ; \quad \widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \alpha$$

در اینصورت داریم.



شکل ۱۱

$$sin\alpha = \frac{y}{۲x} \quad ; \quad cos\alpha = \frac{y+۲}{۳x};$$

$$tg\alpha = \frac{۲x}{۳x} = \frac{۲}{۳} \text{ ، } tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} =$$

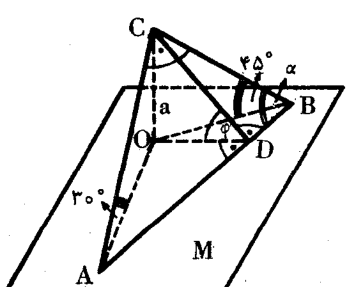
$$= \frac{y}{۲x} : \frac{y+۲}{۳x} = \frac{۳x}{۲(y+۲)}$$

و در نتیجه به‌معادلهٔ $\frac{۲}{۳} = \frac{۳y}{۲(y+۲)}$ می‌رسیم که از آنجا $y = \frac{۸}{۵}$ بدست می‌آید و بنابراین $AB = AD + BD = ۲y + ۲ = ۵/۲$ (متر)

مثال ۴ . صفحه‌ای که از وتر یك مثلث قائم الزاویه عبور کرده است، با اضلاع مجاوربه‌زاویهٔ قائمهٔ مثلث زوایائی مساوی ۳۰ درجه و ۴۵ درجه ساخته است. ثابت کنید که این صفحه با صفحهٔ مثلث زاویه‌ای مساوی ۶۰ درجه می‌سازد .

اثبات . صفحه‌ای را که از وتر AB از مثلث قائم الزاویهٔ ABC گذشته است M می‌نامیم و CO را بر M عمود می‌کنیم .

$CDO = \varphi$ ، $\widehat{ABC} = \alpha$ ، $OC = a$ می‌گیریم (CD ارتفاع مثلث است). بسادگی بدست می‌آید:



شکل ۱۲

$$AC = ۲a \; ; \quad BC = \frac{a}{\sin ۴۵^\circ} = a\sqrt{۲} \; ;$$

$$AB = \sqrt{AC^۲ + BC^۲} = \sqrt{۴a^۲ + ۲a^۲} = a\sqrt{۶} \; ;$$

$$\sin\varphi = \frac{OC}{CD} = \frac{a}{BC.\sin\alpha} = \frac{a}{a\sqrt{۲}\sin\alpha} = \frac{۱}{\sqrt{۲}\cdot\frac{AC}{AB}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}\,.۲a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

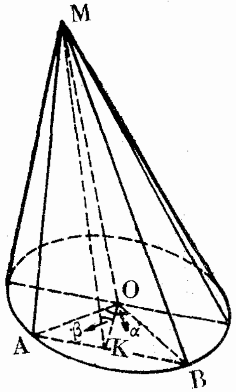
و از آنجا $\varphi = ۶۰^\circ$ بدست می‌آید.

مثال ۵ . از رأس یک مخروط صفحه‌ای عبور داده‌ایم که از دایرهٔ قاعده قوسی مساوی α جدا کرده است و با صفحهٔ قاعده زاویه‌ای مساوی β ساخته است. مطلوبست زاویه‌ای که در رأس این مقطع بدست می‌آید .

حل . زاویهٔ مجهول را γ ، $KB = x$ ، $KM = y$ می‌گیریم (شکل ۱۳). از مثلث KOB بدست می‌آید: $OK = x\,cotg\frac{\alpha}{۲}$ و از مثلث KOM: $OK = y\cos\beta$. بنابراین بدست می‌آید:

$$x\,cotg\frac{\alpha}{۲} = y\cos\beta \Longrightarrow \frac{x}{y}\cos\beta\,.\,tg\frac{\alpha}{۲}$$

در مثلث KMB می‌توان



شکل ۱۳

نوشت:

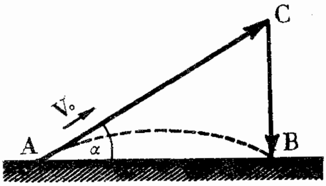
$\frac{x}{y}=tg\frac{\gamma}{۲}$ و بنابراین بدست می‌آید:

$$tg\frac{\gamma}{۲}=cos\beta \, . \, tg\frac{\alpha}{۲} \implies \gamma=۲\operatorname{Arctg}(cos\beta\, tg\frac{\alpha}{۲})$$

۳. استفاده ازمثلثات در فیزیك ومکانیك

مثال ۱ . جسمی را ازنقطهٔ A واقع برصفحه‌ای افقی باسرعت اولیهٔ $\vec{V_\circ}$ و درجهتی که با صفحه زاویه‌ای مساوی α ساخته است، پرتاب کرده‌ایم. اگر این جسم در نقطهٔ B به‌زمین رسیده باشد فاصلهٔ AB را محاسبه کنید. از مقاومت هوا صرفنظر می‌شود.

حل. جسم مفروض بطور همزمان دوحرکت خطی انجام می‌دهد: حرکت یکنواخت با سرعت $v_\circ$ در امتدادی که با افق زاویه‌ای مساوی α می‌سازد و حرکت متشابه‌التغییر سقوط آزاد



شکل ۱۴

اگر حرکت واقعی جسم را بیك حرکت تصوری تبدیل کنیم که در آن این‌دوحرکت نه بطور همزمان، بلکه به‌دنبال یکدیگر انجام شده باشند، انتهای جابجائی $\vec{AB}$ تغییر نخواهد کرد.

دراینصورت جابجائی مجهول $\vec{AB}$ عبارت می‌شود ازمجموع هندسی دوجابجائی $\vec{AB}$ و $\vec{CB}$ (شکل ۱۴) .

جابجائی $\overrightarrow{AC}$ مسیری است کـه ضمن آن حرکت یکنواخت با سرعت $\overrightarrow{v_0}$ ودر t ثانیه انجام گـرفته است، کـه در آن t عبارتست از مدت پراوز جسم روی سهمی از A تا B ، و جابجائی $\overrightarrow{CB}$ مسیـری است که ضمن سقوط آزاد درهمین زمان طی شده است.

داریم:

$$AC = v_0 t \qquad (۱)$$

$$CB = \frac{۱}{۲} g t^۲ \qquad (۲)$$

و از مثلث قائم‌الزاویهٔ ACB بدست می‌آید:

$$CB = AC \cdot \sin\alpha \qquad (۳)$$

$$AB = AC \cdot \cos\alpha \qquad (۴)$$

از روبط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha = \frac{۱}{۲} g t^۲ \qquad (۵)$$

و از آنجا

$$t = \frac{۲ v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

بالاخره از روابط (۱) و (۴) و (۵) بدست می‌آید:

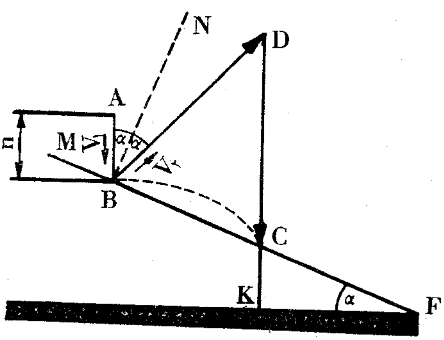
$$AB = \frac{۲ v_0^۲ \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^۲ \sin ۲\alpha}{g} \qquad (۶)$$

و واضح است که با معلوم بودن v_0 ، حداکثر طول AB وقتی است که $\alpha = ۴۵^\circ$ باشد.

مثال ۲ . یك‌توپ تنیس را از نقطهٔ A بطرف سطح‌شیب‌داری بطورآزاد رهاکرده‌ایم. توپ پس از برخورد بـه سطح شیب‌دار در نقطهٔ B ببالا مـی‌جهد و دوباره در نقطه‌ای مانند C به سطح شیب‌دار

می‌خورد. مطلوبست فاصلهٔ BC بشرطی که $AB=K$ و زاویهٔ سطح شیب‌دار مساوی α فرض شود. توپ را بطور مطلق قابل ارتجاع و مقاومت هوا را قابل صرفنظر کردن فرض کنید.

حل. زاویه‌های ABN و NBD بترتیب زاویهٔ سقوط و زاویهٔ برگشت توپ (یعنی $\widehat{ABN}=\widehat{NBD}$) و $v_۱$ و $v_۲$ سرعت آن بلافاصله قبل و بعد از اولین ضربه برسطح شیب‌دار است (شکل ۱۵).



شکل ۴۵

از رابطهٔ سقوط آزاد $v_t=gt$ و $h=\frac{۱}{۲}gt^۲$ بدست می‌آید $v_۱=\sqrt{۲gh}$ ولی $v_۲=v_۱$ است، زیرا طبق شرط توپ را بطورمطلق ارتجاعی گرفته‌ایم. بنابراین

$$v_۲=\sqrt{۲gh} \qquad (۱)$$

برای محاسبهٔ BC در اینجا هم از اصل عدم ارتباط حرکتهائی که حرکت مرکب را بوجود آورده‌اند، استفاده می‌کنیم.

براساس اصل، جابجائی $\overrightarrow{BC}$ را می‌توان مثل مجموع هندسی دو جابجائی $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{DC}$ در نظر گرفت. فاصلهٔ BD مسیری است که ضمن حرکت یکنواخت با سرعت $v_۲$ در زمان t و فاصلهٔ DC مسیری

است که ضمن سقوط آزاد در همان فاصلهٔ زمانی طی شده است t . همان فاصلهٔ زمانی است که تـوپ فاصلهٔ B تا C را روی مسیر واقعـی خود طی کرده است. داریم.

$$BD = v_2 t = \sqrt{2gh} \cdot t \qquad (2)$$

$$DC = \frac{1}{2} g t^2 \qquad (3)$$

$\widehat{ABN} = \widehat{MFK} = \alpha$ است، زیرا دوزاویهٔ حاده‌ای هستند که اضلاعشان برهم عمود است .

بنابـرایـن $\widehat{DBC} = 90^\circ - \alpha$ و $\widehat{DCB} = \widehat{FCK} = 90^\circ - \alpha$ واز آنجا $\widehat{DBC} = \widehat{DCB}$ و بنابراین

$$BD = DC \qquad (4)$$

ازروابط (۲) و (۳) و (۴) بدست می‌آید:

$$\sqrt{2gh} \cdot t = \frac{1}{2} g t^2 \Longrightarrow t = \frac{2\sqrt{2gh}}{g} \qquad (5)$$

ازروابط (۴) و (۲) و (۵) نتیجه می‌شود:

$$BD = DC = 4h \qquad (6)$$

وبالاخره ازمثلث متساوی‌الساقین BDC بدست می‌آید:

$BC = 2BD\cos(90^\circ - \alpha)$ ، یعنی

$$BC = 8h \cdot \sin\alpha \qquad (7)$$

ومسئله تنها وقتی جواب دارد که $0 \leqslant \alpha < 90^\circ$ باشد.

مسائل

۴۴۲ . معادلهٔ $x^3-3x+1=0$ را حل کنید.

۴۴۳ . مطلوبست حل معادلهٔ $8x^3-6x-1=0$

۴۴۴ . اولا معادلهٔ $3x-4x^3=\sin 3\alpha$ را حل کنید . ثانیاً ثابت کنید :

$$16\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ = 1$$

۴۴۵ . اولا مطلوبست محاسبهٔ $tg 4\alpha$ برحسب $tg a$. ثانیاً درتابع $y=\frac{4(x-x^3)}{1-6x^2+x^4}$ اگر $y=tg 4a$ فرض شود، معادلهٔ حاصل را حل کنید وجوابها رابرحسب خطهای مثلثاتی زاویهٔ a به ساده‌ترین‌صورت درآورید .

۴۴۶ . اولا ثابت کنید تساوی زیر به ازای همهٔ مقادیر x برقرار است :

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{3\pi}{5}\right)$$

ثانیاً ازاین رابطه نتیجه بگیرید $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$ وازآنجا $\cos\frac{\pi}{5}$ را محاسبه کنید.

ثالثاً معادلهٔ زیررا حل کنید وجوابهای بین صفرو 2π را بدست آورید:

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

۴۴۷ . اولا a ، b ، c و d را طوری تعیین کنید که به ازای همهٔ

مقادیر x داشته باشیم :

$$a\sin^7 x + b\sin^5 x + c\sin^3 x + d\sin x = \sin 7x$$

ثانیاً معادلهٔ درجه سومی بنویسید که ریشه‌های آن $\sin^2\frac{\pi}{7}$،

$\sin^2\frac{2\pi}{7}$ و $\sin^2\frac{3\pi}{7}$ باشد.

ثالثاً ثابت کنید:

$$\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{7}{4}\ ,\ 8\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$$

۴۴۸ . معادلهٔ $32x^5-40x^3+10x=1$ را حل کنید .

۴۴۹ . دو عدد عکس یکدیگر چنان پیدا کنید که تفاضل آنها $4tg\alpha.\sec\alpha$ باشد.

۴۵۰ . معادلهٔ $x^4-10(1-\sqrt{3}\sin\alpha)x^2+9\cos^2\alpha=0$ مفروض است. مطلوبست تعیین زاویهٔ α برای آنکه ریشه‌های معادلهٔ مفروض به تصاعد عددی باشند $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$.

۴۵۱ . دردامنهٔ تپه‌ای که با افق زاویه‌ای مساوی α ساخته است، درختکاری شده است. آبیاری بوسیلهٔ فوران آب از A (ابتدای دامنهٔ تپه) انجام می گیرد. سرعت اولیهٔ آب $\vec{V_0}$ وزاویه‌ای که باافق می‌سازد مساوی β است. آب درنقطه‌ای مانند B بزمین می‌ریزد.

مطلوبست فاصلهٔ AB. مقاومت هوا را چنان فرض می کنیم که فاصلهٔ نقطهٔ فرود آب را ازمبداء حرکت ، به ۰/۳ فاصلهٔ حقیقی آن (یعنی فاصله‌ای که بدون درنظر گرفتن مقاومت هوا بدست می آید) تقلیل دهد.

۴۵۲ . دردایره‌ای به شعاع r ، قطاعی با زاویهٔ مرکزی مساوی α جدا کرده‌ایم ($0<\alpha<\pi$). دراین قطاع مستطیلی به مساحت S چنان محاط کرده‌ایم که دورأس آن روی قوس قطاع ودورأس دیگرش روی شعاعهای محدودکنندهٔ قطاع قرار گرفته است .

اضلاع این مستطیل را محاسبه کنید. چه رابطه‌ای بین r ، α و S برقرارباشد تا مسئله تنها یك جواب داشته باشد ؟

۴۵۳ . درمثلث ABC می‌دانیم $\widehat{A}-\widehat{B}=\varphi$ (A و B زوایای داخلی مثلث‌اند) وطول ارتفاع وارد برضلع AB برابراست باتفاضل دوضلع BC و AC. مطلوبست زاویه‌های مثلث ABC. همهٔ مقادیر φ راکه به‌ازای‌آنها مسئله جواب دارد پیدا کنید.

۴۵۴ . اگر α، β و γ سه قوس مثبت به مجموع $\frac{\pi}{2}$ باشند ، مطلوبست محاسبهٔ $\cot g\,\alpha \cot g\,\gamma$ بشرطی که $\cot g\,\alpha$ ، $\cot g\,\beta$ ، $\cot g\,\gamma$ بسه تصاعد حسابی باشند .

۴۵۵ . داخل زاویهٔ AOB نقطهٔ M را چنان گرفته‌ایم که:

$$\widehat{MOA}=\alpha \quad , \quad \widehat{MOB}=\beta \quad , \quad OM=a$$

($\alpha+\beta<\pi$). مطلوبست محاسبهٔ شعاع دایره‌ای که از نقطهٔ M عبور کند وروی اضلاع OA و OB اززاویهٔ مفروض، وترهائی بطول $2a$ جدا کند.

۴۵۶ . زاویهٔ $AOB=\alpha$ مفروض است ($0<\alpha<\pi$). روی ضلع OA نقطهٔ C وروی ضلع OB نقطهٔ D را انتخاب کرده‌ایم ، ضمناً $OC=a\neq 0$ و $OD=b\neq 0$. دایره‌ای رسم کرده‌ایم که درنقطهٔ C بر

ضلع OA مماس‌است وازنقطهٔ D هم عبور کرده است. اگراین دایره ضلع OB را در نقطهٔ دیگر E قطع کـرده بـاشد، مطلوبست محاسبهٔ شعاع دایره وطول وتر DE.

۴۵۷ . قاعدهٔ یك هرم مستطیلی است به مساحت یك مترمربع. دووجه جانبی‌هرم برقاعده عمودند ودووجه دیگر با قاعده زاویه‌های ۳۰ درجه و ۶۰ درجه می‌سازند. حجم هرم را بدست‌آورید.

۴۵۸ . مطلوبست سطح جانبی یك مخروط ناقص، بشرطی‌که مولدآن با قاعده زاویه‌ای مساوی ۶۰ درجه می‌سازدومساحت دوقاعده مساوی P و Q است .

۴۵۹ . مطلوبست مساحت مثلث متساوی‌الساقینی کـه مساحـت دایرهٔ محاطـی‌آن مساوی S_1 ومساحت دایرهٔ محیطـی‌آن مساوی S_2 باشد .

۴۶۰ . سطح کره‌ای‌که دریك مخروط محاط شده است هم‌ارز سطح قاعدهٔ همان مخروط است. اولا نسبت سطح این کـره به سطح جانبی مخروط را پیدا کنید. ثانیاً کره چه قسمتی ازحجم مخروط را اشغال کرده است ؟

۴۶۱ . زاویهٔ حادهٔ یك متوازی‌الاضلاع برابر α وفاصلهٔ محـل تلاقی اقطارآن ازدوضلع غیرمساوی برابر m و p است مطـلـوبست محاسبهٔ طول هریك ازاقطارومساحت متوازی‌الاضلاع .

۴۶۲ . زاویهٔ بین دوساق ازمثلث متساوی‌الساقینی برابراست با α . مطلوبست نسبت شعاعهای دایره‌های محیطی ومحاطی این مثلث.

۴۶۳ . در ذوزنقه‌ای که زاویه‌های حادهٔ مجاور به قاعدهٔ آن بترتیب مساوی α و β است دایره‌ای محاط کرده‌ایم . اگر مساحت ذوزنقه مساوی Q باشد، شعاع دایره را بدست‌آورید.

۴۶۴ . ارتفاع وارد بر ساق درمثلث متساوی‌الساقینی، ساق را برنسبت $m : n$ تقسیم کرده است. مطلوبست محاسبهٔ زاویه‌های مثلث.

۴۶۵ . مطلوبست محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آن مساوی c و یکی از زاویه‌های حاده‌اش مساوی α باشد .

۴۶۶ . دریك دایره، $۲n$ ضلعی منتظم محاطی و n ضلعی منتظم محیطی را رسم کرده‌ایم. اگراختلاف مساحتهای این چند ضلعی‌ها مساوی P باشد ، شعاع دایره را حساب کنید .

۴۶۷ . قاعدهٔ یك هرم مثلث متساوی‌الساقینی است که زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن برابراست با α . هر یك از زاویه‌های دووجهی مجاور به قاعده مساوی φ است. فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محاطی قاعدهٔ هرم تا وسط ارتفاع وجه جانبی مساوی d است . سطح کل هرم را پیدا کنید .

۴۶۸ . قاعده یك منشور قائم، مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که یك ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن مساوی a و زاویهٔ حادهٔ روبروی به‌این ضلع مساوی α است . ازرأس زاویهٔ قائمهٔ قاعده پائین صفحه‌ای عبور داده‌ایم که با وترمثلث قاعده موازی است وبا وجه جانبی‌مقابل‌زاویه‌ای مساوی $\beta = ۹۰^\circ - \alpha$ می‌سازد و آنرا قطع می کند . مطلـــــوبست

حجم قسمتی از منشور که بین قاعدهٔ آن و صفحهٔ مقطع ووجه جانبی منشورقرار گرفته است ، بشرطی که می‌دانیم وجه جانبی منشور که از ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه ومساوی a عبور می کند مساحتی مساوی مساحت مقطع دارد. ضمناً معلوم کنید α چه مقادیری می‌تواند باشد تا صفحهٔ مقطع وجه جانبی را که از وترمی گذرد ، قطع کند .

۴۶۹. درهرم منتظم به‌قاعدهٔ چهارضلعی نیمکره‌ای‌محاط کرده‌ایم، بنحوی که وجه مسطح آن موازی قاعدهٔ هرم وسطح کروی آن مماس برقاعده باشد. مطلوبست مساحت کل هرم، بشرطی که وجه‌های جانبی آن زاویه‌ای مساوی α با قاعده ساخته‌اند وشعاع کره مساوی r است .

۴۷۰ . مطلوبست محاسبهٔ زاویهٔ رأس مقطع محوری مخروطی که برچهار کره محیط شده است، بشرطی که هریك ازاین کره‌ها به سه کرهٔ دیگرمماس است .

۴۷۱ . وجه‌های یك هرم ناقص منتظم با قاعده‌های مثلثی بر کره‌ای مماس‌اند. مطلوبست نسبت سطح کره به سطح کل هرم ناقص، بشرطی که وجه‌های جانبی هرم با قاعدهٔ آن زاویه‌ای مساوی α ساخته باشند .

۴۷۲ . یك بیضی با قطر کانونی $AA'=۲a$ و فاصلهٔ کانونی $FF'=۲c$ ونقطهٔ اختیاری M برمحیط آن مفروض است. اگردرمثلث MFF' زاویه‌های F و F' بترتیب با α و α' نمایش داده شود ، ثابت کنید :

$$tg\frac{\alpha}{۲}.tg\frac{\alpha'}{۲}=\frac{a-c}{a+c}$$

۴۷۳. دریك مكعب مستطیل با قاعده‌های مربعی صفحه‌ای را ازقطرقاعدهٔ پائین و یکی ازرأسهای قاعدهٔ بالا گذرانده‌ایم. سطح کل هرمی که بدست می‌آید مساوی S شده است. مطلوبست سطح کل مکعب مستطیل بشرطی که زاویهٔ رأس‌مثلثی که ازمقطع بدست می‌آید، مساوی α باشد.

۴۷۴ . قاعدهٔ هرم SABC عبارتست ازمثلث ABC که در آن زاویهٔ بین AB و AC مساوی α و AB=AC=a می‌باشد. وجه SBC برصفحهٔ قاعده عمود است ووجوه SBA و SCA با صفحهٔ قاعده زاویه‌ای مساوی φ می‌سازند. مطلوبست سطح جانبی این هرم.

۴۷۵ . درمثلث ABC ، اضلاع b و c وزاویهٔ بین‌آنها α معلوم است. این مثلث را دورمحوری که ازرأس A درخارج مثلث عبور کرده و با اضلاع AB و AC زاویه‌های مساوی می‌سازد ، دوران داده‌ایم. مطلوبست حجم جسمی که بدست می‌آید.

۴۷۶ . یك هرم با قاعدهٔ مستطیل مفروض است. یکی‌از یالهای جانبی برصفحهٔ قاعده عمود است ودو وجه جانبی با قاعده زاویه‌های α و β می‌سازند. اگرارتفاع این‌هرم مساوی h باشد، سطح جانبی آنرا پیدا کنید.

۴۷۷ . سطح کل مخروط قائم دواری n برابر سطح کرهٔ محاط درآنست زاویهٔ مولد مخروط را با صفحهٔ قاعده پیدا کنید.

۴۷۸ . درمخروطی کره‌ای محاط کرده‌ایم. نسبت حجمهای آنها

مساوی n است. مطلوبست زاویه‌ای که مولد مخروط با قاعده تشکیل می‌دهد (درحالت ۴=n این زاویه را محاسبه کنید).

۴۷۹ . مطلوبست زاویهٔ بین محور ومولد مخروطی که سطح کل آن n برابر سطح مقطع محوری آن باشد.

۴۸۰ . درمخروطی نیمکره‌ای محاط کرده‌ایم، بنحوی که دایرهٔ عظیمهٔ آن برقاعدهٔ مخروط واقع باشد. مطلوبست زاویهٔ رأس مخروط بشرطی که نسبت سطح کل مخروط به سطح نیمکره (بدون قاعدهٔ آن) مساوی ۱۸ : ۵ باشد.

۴۸۱ . مطلوبست زاویهٔ بین ارتفاع و مولد مخروطی که حجم آن مساوی $\frac{۴}{۳}$ حجم نیمکرهٔ محاط در آن باشد، بشرطی که صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ نیمکره برصفحهٔ قاعدهٔ مخروط واقع وسطح نیمکره بر سطح جانبی مخروط مماس باشد.

۴۸۲ . I) ازرابطه $cotg\,x = \frac{\cos ۲۰^\circ \cos ۳۰^\circ}{\cos^{۲} ۱۰^\circ}$ کمان جاده x را برحسب درجه بدست آورید. II) ثابت کنید $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ است.

کنکور تشریحی ریاضی ـ فیزیك تیرماه ۱۳۶۲

۴۸۳. فرض کنیم n زاویه $\alpha_۱$ ، ... ، α_n در نامساویهای ذیل صدق کنند

$$۰ < \alpha_۱ < \alpha_۲ < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{۲}$$

ثابت کنید:

$$tg\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n} < tg\alpha_n$$

II) درمثلث ABC، زاویه A برابر 30° است. ثابت کنید:

$$R^2 + 4\sqrt{3}S = b^2 + c^2$$

(R شعاع دایرهٔ محیطی و S مساحت مثلث است).

کنکور تشریحی ریاضی فیزیك تیرماه ۱۳۶۳

حل مسائل

۱ . روش‌مثلثاتی ـ جبری : داریم :

$$\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{۱۰}+\frac{۳\pi}{۱۰} \Longrightarrow \frac{۲\pi}{۱۰}=\frac{\pi}{۲}-\frac{۳\pi}{۱۰}$$

و بنابراین $sin\frac{۲\pi}{۱۰}=cos\frac{۳\pi}{۱۰}$ می‌شود وازآنجا

$$۲\,sin\frac{\pi}{۱۰}cos\frac{\pi}{۱۰}=۴\,cos^{۳}\frac{\pi}{۱۰}-۳\,cos\frac{\pi}{۱۰}$$

وچون $cos\frac{\pi}{۱۰}\neq ۰$ است ، باتقسیم طرفین آن بر $cos\frac{\pi}{۱۰}$ بدست می‌آید :

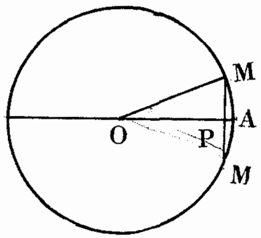
$$۲\,sin\frac{\pi}{۱۰}=۴\,cos^{۲}\frac{\pi}{۱۰}-۳ \Longrightarrow ۴\,sin^{۲}\frac{\pi}{۱۰}+۲\,sin\frac{\pi}{۱۰}-۱=۰\ ,$$

$$sin\frac{\pi}{۱۰}=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۴}$$

و چون $\frac{\pi}{10}$ قوسی حاده و سینوس آن مثبت است، بدست می‌آید :

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

روش هندسی . راه اول: اگر قوس MM' (شکل ۱۶) را مساوی ۳۶ درجه فرض کنیم ، وتر MM' ضلع ده‌ضلعی منتظم محاطی می‌شود و بنابراین اگرطول شعاع را R بگیریم، داریم:



شکل ۱۶

$$\overline{M'M}=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$$

و بنابراین

$$\sin 18=\frac{\overline{PM}}{R}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

راه دوم : پنج ضلعی محدب و منتظم $ABCDE$ به ضلع واحد را درنظر می‌گیریم ، هرکدام اززاویه‌های خارجی این‌پنج‌ضلعی برابر $\frac{2\pi}{5}$ است.

اگر $a=\frac{\pi}{5}$ و C', D', E' تصاویر C, D, E روی $\overrightarrow{AB}$ باشد، داریم :

$$\cos 2a=\overline{BC'} \quad , \qquad \cos 6a=\overline{D'E'}=\overline{C'D'}$$

$$\cos 4a=\overline{C'D'} \quad , \qquad \cos 8a=\overline{E'A'}=\overline{BC'}$$

ازجمع روابط بالابدست می‌آید :

$$\cos 2a+\cos 4a+\cos 6a+\cos 8a=2\overline{BC'}+2\overline{C'D'}=2\overline{BD'}=-1$$

(زیرا $\overline{BD'}=-\overline{D'B}=-\frac{1}{2}$ است).

اگربجای a مقدارش راقراردهیم ، خواهیم داشت :

$$\cos 72^\circ+\cos 144^\circ+\cos 216^\circ+\cos 288^\circ=-1$$

که پس‌ازتبدیلهای لازم به‌اینصورت درمی‌آید :

$$4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ-1=0 \implies \sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

۲ . روش مثلثاتی : فرض می‌کنیم :

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=a \implies \sin x-a\cos x-a=0$$

که بافرض $a = tg\varphi$ بدست می‌آید :

$$\sin(x-\varphi) = \sin\varphi$$

ازاین معادله ، φ را برحسب x محاسبه می‌کنیم ، بدست می‌آید :

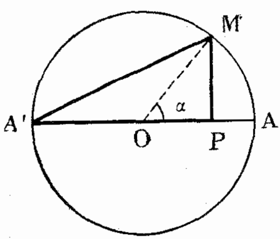
$$\varphi = k\pi + \frac{x}{۲} \Longrightarrow a = tg\varphi = tg(k\pi + \frac{x}{۲}) = tg\frac{x}{۲}$$

وبنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{\sin x}{۱+\cos x} = tg\frac{x}{۲}$$

روش جبری : بترتیب داریم :

$$\frac{\sin x}{۱+\cos x} = \frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}} = \frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}} = tg\frac{x}{۲}$$



شکل ۱۷

روش هندسی : اگردرشکل۱۷فرض کنیم: $\widehat{AM} = x$ ، $\widehat{MA'P} = \frac{x}{۲}$ می‌شود ودرمثلث قائم‌الزاویهٔ $MA'P$ داریم:

$$tg\frac{x}{۲} = \frac{PM}{A'P} = \frac{\sin x}{۱+\cos x}$$

۳ . روش مثلثاتی : φ را زاویـهٔحاده و مثبتی مـی‌گیریم که $tg\varphi = t$ باشد، دراینصورت بترتیب داریم :

$$tg\,a = tg\varphi \Longrightarrow a = k\pi + \varphi \Longrightarrow \frac{a}{۲} = \frac{۱}{۲}k\pi + \frac{\varphi}{۲};$$

$$\cos\frac{a}{۲} = \cos(\frac{۱}{۲}k\pi + \frac{\varphi}{۲}) = \begin{cases} \cos\frac{\varphi}{۲} \\ \cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{\varphi}{۲}) = -\sin\frac{\varphi}{۲} \\ \cos(\pi+\frac{\varphi}{۲}) = -\cos\frac{\varphi}{۲} \\ \cos(\frac{۳\pi}{۲}+\frac{\varphi}{۲}) = \sin\frac{\varphi}{۲} \end{cases}$$

وروشن استکه مجموع مربعهای اینجوابها برابراست با۲.

روش جبری : بترتیب داریم :

$$tg^{2}a=\frac{1-\cos^{2}a}{\cos^{2}a}=\frac{1-(2\cos^{2}\frac{a}{2}-1)^{2}}{(2\cos^{2}\frac{a}{2}-1)^{2}}=t^{2}$$

که اگر $\cos\frac{a}{2}=u$ فرض‌کنیم، به معادلهٔ دومجذوری زیر می‌رسیم :

$$u^{4}-u^{2}+\frac{t^{2}}{4(t^{2}+1)}=0$$

معلوم استکه این‌معادلهٔ دومجذوری دارای چهارریشهٔ دو به‌دو متقارن است:

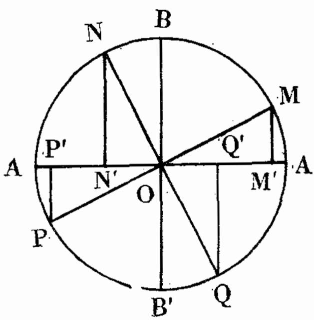
$$-u' \;,\; -u'' \;,\; u' \;,\; u''$$

و ریشه‌های معادلهٔ حلال $z^{2}-z+\frac{t^{2}}{4(t^{2}+1)}=0$ عبارتست از u'^{2} و u''^{2}

وضمناً $u'^{2}+u''^{2}=1$ می‌شود ، یعنی معادلهٔ دومجذوری دارای چهار ریشه است که مجموع‌مربعهای‌آنها برابراست با۲.

روش هندسی : اگر φ رازاویه‌ای به‌تانژانت t بگیریم، داریم :

$$a=k\pi+\varphi \implies \frac{a}{2}=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\varphi}{2}$$



شکل ۱۸

انتهای قوسهای $\frac{a}{2}$، روی دایرهٔ مثلثاتی (شکل۱۸)،رأسهای یك‌مربع راتشکیل می‌دهند (مربع MNPQ). کسینوس قوسهای $\frac{a}{2}$ عبارتست از OM' ، ON'، OP' و OQ'. چهارمثلث OMM'، ONN'، OPP' ، OQQ' برابرند

ودر نتیجه داریم : $ON'=OQ'=M'M \;,\; OP'=OM'$

وازآنجا بدست می‌آید :

$$OM'^{۲}+ON'^{۲}+OP'^{۲}+OQ'^{۲}=۲(OM'^{۲}+M'M^{۲})=۲OM^{۲}=۲$$

۴ . روش مثلثاتی: اگر φ را زاویهٔ حاده‌ای به‌تانژانت t بگیریم، داریم:

$$tg\,x=tg\,\varphi \implies x=-k\pi+\varphi \implies \frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}=\frac{۱}{۲}k\pi+\frac{\pi}{۴}-\frac{\varphi}{۲},$$

$$tg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}\right)=tg\left(\frac{۱}{۲}k\pi+\frac{\pi}{۴}-\frac{\varphi}{۲}\right)=\begin{cases} tg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{\varphi}{۲}\right) \\ -cotg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{\varphi}{۲}\right)\end{cases}$$

وروشن‌است‌که حاصلضرب دوجواب برابر ۱ — می‌شود ، درحالتهای‌مختلفی که انتهای قوس x نسبت به‌ربعهای دایرهٔ مثلثاتی داشته باشد ، داریم:

$$۰<x<\frac{\pi}{۲} \implies ۰<\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}<\frac{\pi}{۴},$$

$$\frac{\pi}{۲}<x<\pi \implies -\frac{\pi}{۴}<\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}<۰,$$

$$\pi<x<\frac{۳\pi}{۲} \implies -\frac{\pi}{۲}<\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}<-\frac{\pi}{۴},$$

$$\frac{۳\pi}{۲}<x<۲\pi \implies -\frac{۳\pi}{۴}<\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}<-\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین ، وقتی که انتهای قوس x در ربعهای اول و چهارم باشد $tg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}\right)>۰$ ومقدارآن مساوی $tg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{\varphi}{۲}\right)$ است و در حالتی که انتهای قوس x دریکی ازربعهای دوم‌وسوم باشد، $tg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}\right)<۰$ ومقدارآن‌مساوی $-cotg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{\varphi}{۲}\right)$ می‌شود .

روش‌جبری : اگر $tg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}\right)=y$ فرض کنیم، داریم :

$$y=\frac{۱-tg\frac{x}{۲}}{۱+tg\frac{x}{۲}} \implies tg\frac{x}{۲}=\frac{۱-y}{۱+y}$$

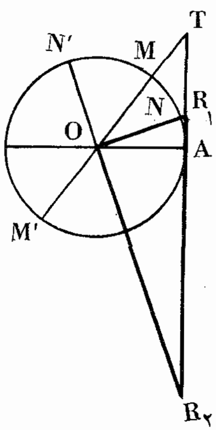
ازطرف دیگر داریم :

$$tg\,x=\frac{۲tg\dfrac{x}{۲}}{۱-tg^{۲}\dfrac{x}{۲}}=\frac{۱-y^{۲}}{۲y}\implies y^{۲}+(۲tg\,x)y-۱=۰$$

که ازحل‌آن بدست‌می‌آید: $y=-tg\,x\pm\sqrt{۱+tg^{۲}x}$

دو جواب معادله عکس قرینهٔ یکدیگرند، زیرا $y'y''=-۱$ است .
دنبالهٔ بحث شبیه روش مثلثاتی است .

روش هندسی: اگر $AT=t$ باشد، بسادگی (باتوجه به‌شکل ۱۹) می‌توان ثابت کرد که برای انتهای قوس $\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}$ دو نقطهٔ N و N' بدست می‌آید ، بنحوی که ON بر ON' عمود است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OR_۱R_۲$ نتیجه می‌شودکه حاصلضرب دوجوابی که برای $tg(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲})$ بدست می‌آیدمساوی -۱ است. ضمناً درشکل می‌بینیم‌که اگرانتهای x درربع‌اول یا سوم باشد ، جواب بترتیب مثبت ومنفی می‌شود. برای دوحالت دیگرهم‌بهمین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت .



شکل ۱۹

۵ . روش مثلثاتی : بترتیب داریم :

$$\cos(\alpha+\frac{۲\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}\cos\alpha-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin\alpha\ ,$$

$$\cos(\alpha+\frac{۴\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}\cos\alpha+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin\alpha\ ,$$

و بسادگی صحت اتحاد بدست می‌آید .

روش جبری : معادلهٔ درجه سوم زیررا درنظرمی‌گیریم

$$4x^3-3x=\cos 3\alpha \qquad (1)$$

این‌معادله را حل‌می‌کنیم ، بترتیب داریم :

$$4x^3-3x=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha \ ;$$

$$4(x-\cos\alpha)(x^2+x\cos\alpha+\cos^2\alpha)-3(x-\cos\alpha)=0 \ ;$$

$$(x-\cos\alpha)(4x^2+4x\cos\alpha+4\cos^2\alpha-3)=0 \ ;$$

$$x_1=\cos\alpha \ , \ x_{2,3}=\frac{-2\cos\alpha\pm 2\sqrt{3}\sin\alpha}{4} \ ;$$

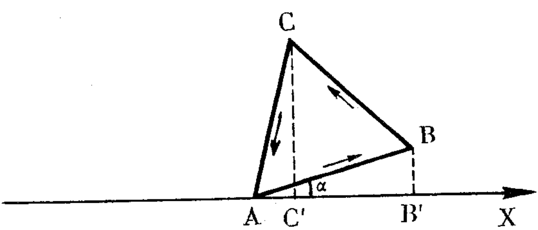
$$x_2=-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\cos\frac{4\pi}{3}\cos\alpha-\sin\frac{4\pi}{3}\sin\alpha=\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})$$

$$x_3=-\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha-\sin\frac{2\pi}{3}\sin\alpha=\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})$$

ازطرف دیگر، درمعادلهٔ درجه سوم(۱)، چون ضریب x^2 مساوی صفراست، مجموع سه‌جواب مساوی صفرمی‌شود وبنابراین

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0$$

روش هندسی : مثلث متساوی الاضلاع ABC رادرنظرمی‌گیریم، محور xx' را چنان رسم می‌کنیم که با $\overrightarrow{AB}$ زاویه‌ای مساوی α بسازد جهت حرکت رادوی‌مثلث



شکل ۲۰

مطابق شکل۲۰ می‌گیریم . اضلاع مثلث را بر محور xx' تصویر می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$\overline{AB'}=\overline{AB}\cdot\cos\alpha$$

$$\overline{B'C'}=\overline{BC}\cdot\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})$$

$$\overline{C'A}=\overline{CA}\cdot\cos(\alpha-\frac{2\pi}{3})=\overline{CA}\cdot\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})$$

اگر طول ضلع مثلث را a فرض کنیم ، ازجمع این سه رابطه بدست می‌آید :

$$\overline{AB'}+\overline{B'C'}+\overline{C'A}=a[\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{۲\pi}{۳})+\cos(\alpha+\frac{۴\pi}{۳})]$$

سمت چپ تساوی ، بنابه قضیهٔ شال، مساوی صفراست و بنابراین، چون $a\neq ۰$ است، داریم :

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{۲\pi}{۳})+\cos(\alpha+\frac{۴\pi}{۳})=۰$$

۶ . روش مثلثاتی- جبری : ازشرط مسئله نتیجه می‌شود :

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=۲\sin\alpha.$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha(۲-\cos\beta)<\sin\beta$$

ازطرف دیگر $۲-\cos\beta\geq ۱$ است و بنابراین داریم :

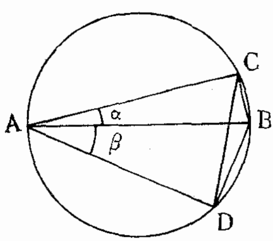
$$\sin\alpha<\sin\alpha(۲-\cos\beta)<\sin\beta$$

ازآنجا $\sin\alpha<\sin\beta$ و $\alpha<\beta$ است .

روش هندسی: دردایرهٔ بقطر واحد، وترهای AC و AD را دردوطرف قطر AB چنان رسم می‌کنیم که باآن بترتیب زوایای α و β را بسازند (شکل ۲۱). واضح است که

و $BD=\sin\beta$, $CB=\sin\alpha$

$CD=\sin(\alpha+\beta)$



شکل ۲۱

ولی درمثلث BCD داریم:

$BD>CD-CB$ ، بنابراین

$$\sin\beta>\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha=\sin\alpha\implies\beta>\alpha$$

۷ . اگر α ، β و γ چنان زوایائی باشند که داشته باشیم :

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha.tg\beta.tg\gamma$$

نتیجه می‌شود :

$$tg\gamma=-\frac{tg\alpha+tg\beta}{۱-tg\alpha.tg\beta}=-tg(\alpha+\beta)\implies\alpha+\beta+\gamma=n\pi$$

که درآن n عددصحیح دلخواهی است، زیرا درغیراینصورت $tg\alpha.tg\beta\neq ۱$ است.

ازتساوی اول بدست می‌آید: $tg\alpha + tg\beta = 0$ که درنتیجه بایده $0 \leqslant tg\alpha \cdot tg\beta$ باشد).

حالا x، y و z راعددهای حقیقی مخالف صفرو واحد درنظر می‌گیریم ، بنحوی‌که $tg\alpha = x$ ، $tg\beta = y$ و $tg\gamma = z$ باشد. دراینصورت ازتساوی

$$x + y + z = xyz$$

نتیجه می‌شود: $\alpha + \beta + \gamma = n\pi$ (n عددی است صحیح)

ویا: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2n\pi$

وبنابراین: $tg2\alpha + tg2\beta + tg2\gamma = tg2\alpha \cdot tg2\beta \cdot tg2\gamma$

یعنی

$$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}$$

۸ . α، β و γ رازوایای حاده ومثبتی می‌گیریم، بنحوی‌که $tg\alpha = x$ ، $tg\beta = y$ و $tg\gamma = z$ باشد، در اینصورت داریم :

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = tg\alpha\sqrt{\frac{(1+tg^2\beta)(1+tg^2\gamma)}{1+tg^2\alpha}} =$$

$$= tg\alpha \cdot \frac{1}{\cos\beta} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta \cdot \cos\gamma}$$

ازطرف دیگر، ازرابطهٔ فرض $tg\alpha \cdot tg\beta + tg\beta \cdot tg\gamma + tg\gamma \cdot tg\alpha = 1$ بسادگی نتیجه می‌شود :

$$tg\gamma = \frac{1 - tg\alpha tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} = cotg(\alpha+\beta) \implies \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

وبنابراین :

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta \cdot \cos\gamma} = \frac{\cos(\beta+\gamma)}{\cos\beta \cdot \cos\gamma} = \frac{\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma} = 1 - tg\beta tg\gamma$$

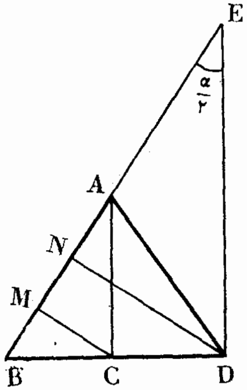
وبهمین ترتیب بدست می‌آید :

$$y\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{1+y^2}} = 1 - tg\alpha \cdot tg\gamma \ , \quad z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} =$$

$$= 1 - tg\alpha tg\beta$$

و بنابراین

$$\Sigma x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}=(1-tg\beta tg\gamma)+(1-tg\alpha tg\gamma)+$$
$$+(1-tg\alpha tg\beta)=3-(tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha)=3-1=2$$



شکل ۲۲

۹. ABD را مثلث متساوی‌الساقینی می‌گیریم که زاویهٔ رأس آن A مساوی α (شکل ۲۲)، AC ارتفاع آن، AC موازی DE، CM عمود بر AB و DN عمود بر AB باشد. در اینصورت داریم:

$$1)\quad tg\frac{\alpha}{2}=\frac{BN}{DN}=\frac{AB-AN}{DN}=$$
$$=\left(1-\frac{AN}{DN}\right):\frac{DN}{AD}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\ ;$$

$$2)\quad cotg\frac{\alpha}{2}=\frac{EN}{DN}=\frac{EA+AN}{DN}=\left(1+\frac{AN}{AD}\right):\frac{DN}{AD}=$$
$$=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\ ;$$

$$3)\quad 1-\cos\alpha=1-\frac{AN}{AD}=\frac{BN}{AD}=\frac{BN}{BD}:\frac{AD}{2DC}=$$
$$=\sin\frac{\alpha}{2}:\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\ ;$$

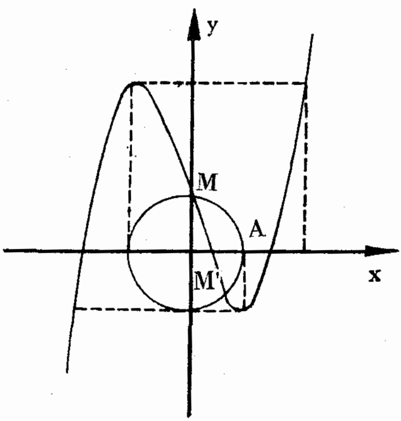
$$4)\quad 1+\cos\alpha=1+\frac{AN}{AD}=\frac{EN}{AD}=\frac{EN}{ED}\cdot\frac{2AC}{AD}=$$
$$=\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\ ;$$

$$5)\quad \sin\alpha=\frac{DN}{AD}=\frac{2CM}{AB}=2\frac{CM}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

۱۰ . حل این معادله بطریق معمولی منجر به حل یک معادلهٔ جبری درجه پنجم کامل می‌شود، که با محاسبه به نتیجه نمی‌رسد. فرض می‌کنیم: $\cos\alpha = x$ و $\sin\alpha = y$ ، . دراینصورت به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x + 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

منحنی نمایش تغییرات این دو تابع روی محورهای قائم xoy بصورت شکل ۲۳ است .



شکل ۲۳

اگر دایرهٔ به‌شعاع واحد را دایرهٔ مثلثاتی فرض کنیم ، جوابهای معادله عبارتست از

$$\begin{cases} \alpha = 2k\pi + \widehat{AM} \\ \alpha = 2k\pi + \widehat{AM'} \end{cases}$$

که M و M' نقاط تلاقی منحنی درجهٔ سوم بادایره است .

بسادگی معلوم می‌شود که $\widehat{AM} = \frac{\pi}{2}$ و $Arccos\, 0/6 > \widehat{AM'} > Arccos\, 0/7$ استو بنابراین خواهیم داشت :

$$\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2k\pi + Arccos\, 0/7 < \alpha < 2k\pi + Arccos\, 0/6$$

۱۱ . روش جبری : داریم :

$$\begin{cases} 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a \\ \cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2} = 1 \end{cases}$$

ازحل دستگاه بالاچنین نتیجه می‌شود:

$$\sin\frac{a}{2}=\left(\pm\sqrt{1+\sin a}\pm\sqrt{1-\sin a}\right)$$

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\sin a}\mp\sqrt{1-\sin a}\right)$$

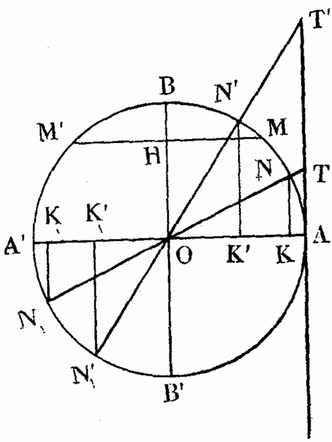
باید توجه داشت که تمام ترکیبهای علامتهای بالا جواب مسئله نمی‌باشد بلکه باید علامتها نظیر به نظیر اختیار شود بطوری که مسئله بیش از چهار جواب «دو به دو قرینه» برای $\sin\frac{a}{2}$ وچهارجواب نظیر برای $\cos\frac{a}{2}$ نخواهد داشت .

از تقسیم دو رابطهٔ بالا بر یکدیگر و با رعایت علامتهای نظیر، دومقدار برای $tg\frac{a}{2}$ بدست می‌آید که این دومقدار عکس یکدیگرند :

$$tg\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin a}+\sqrt{1-\sin a}}{\sqrt{1+\sin a}-\sqrt{1-\sin a}}$$

$$tg\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin a}-\sqrt{1-\sin a}}{\sqrt{1+\sin a}+\sqrt{1-\sin a}}$$

روش هندسی : بر محور سینوسها قطعه خط $\overline{OH}$ را مساوی $\sin a$ جدا کرده و از نقطهٔ H خط M'M را موازی A'A رسم می‌کنیم، (شکل ۲۴) در این صورت کمانهای a عبارت از کمانهائی به مبداء A و منتهای M یا M' و کمانهای $\frac{a}{2}$ کمانهائی به منتهای N و یا N_1 و N'_1 (N_1 قرینهٔ N نسبت به مرکز O) می‌باشد که



شکل ۲۴

هریك وسط یکی از دوکمان هندسی AM می‌باشد (اگر کوچکترین کمان AM را φ بگیریم، $\widehat{AN}=\frac{\varphi}{2}$ و $AN_1=\frac{1}{2}(2\pi+\varphi)=\pi+\frac{\varphi}{2}$ خواهد

بود.) وهمچنین کمانهای به‌منتهای N'وN'_1(N'_1 قرینهٔ N' نسبت بهO)که هریك وسط یکی از دوکمان‌هندسی AM' می‌باشد،کمان $\frac{a}{2}$ را نشان می‌دهد.

حال بنابرآنکه منتهای‌کمان$\frac{a}{2}$ را نقطهٔ N یا N_1 یا N'ویا N'_1بگیریم‌چهار جواب برای $sin\frac{a}{2}$ بدست می‌آید که دو به‌دو متساوی ومختلف العلامه می‌باشد وبهمین‌ترتیب چهارجواب نظیربرای $cos\frac{a}{2}$ حاصل‌می‌شود. اماباتوجه به‌آن‌که نقاط NوN_1 و همچنین N' وN'_1 نسبت به مرکز O قرینه است برای$tg\frac{a}{2}$ فقط دوجواب (AT و AT') حاصل می‌شود که می‌توان ثابت کرد این دو جواب عکس یکدیگرند .

دومثلث $T'AO$ وOAT متشابه‌اند، زیرامجموع دوزاویهٔ AOT و AOT' مساوی ۹۰درجه‌است(بترتیب نصف‌دوزاویهٔ AOM و AOM'هستند)

و بنابراین $\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{AT'}}$ و یا $\overline{AT'}\cdot\overline{AT}=\overline{OA}^2=1$

روش مثلثاتی : اگر α یکی‌از اندازه‌های کمان a باشد در این صورت کمانهای a عبارتست از :

$$a=2k\pi+\alpha\ ,\ a=(2k\pi+1)\pi-\alpha$$

وبنابراین اندازه‌های کمان $\frac{a}{2}$ عبارت است از

$$\frac{a}{2}=k\pi+\frac{\alpha}{2}\ ,\ \frac{a}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\ ,$$

ودرنتیجه بدست می‌آید :

$$sin\frac{a}{2}=sin(k\pi+\frac{\alpha}{2})\quad و \quad sin\frac{a}{2}=sin(k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})$$

که اگر k فرد باشد: $sin\frac{a}{2}=-sin\frac{\alpha}{2}$ و $sin\frac{a}{2}=-cos\frac{\alpha}{2}$

و اگر k زوج باشد: $sin\frac{a}{2}=sin\frac{\alpha}{2}$ و $sin\frac{a}{2}=cos\frac{\alpha}{2}$

چنانکه ملاحظه می‌شود چهارجواب برای $sin\frac{a}{۲}$ بدست می‌آید که دوبه‌دو قرینه‌اند وبهمین ترتیب :

$$cos\frac{a}{۲} = cos(k\pi + \frac{\alpha}{۲}) \quad و \quad cos\frac{a}{۲} = cos(k\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{\alpha}{۲})$$

اگر k فرد باشد: $cos\frac{a}{۲} = -cos\frac{\alpha}{۲}$ و $cos\frac{a}{۲} = -sin\frac{\alpha}{۲}$

و اگر k زوج باشد: $cos\frac{a}{۲} = cos\frac{\alpha}{۲}$ و $cos\frac{a}{۲} = sin\frac{\alpha}{۲}$

نتیجه می‌شود (جوابها دوبه‌دو قرینه است).

واما برای $tg\frac{a}{۲}$ فقط دو جواب حاصل می‌شود واین دو جواب عکس یکدیگرند :

$$tg\frac{a}{۲} = tg(k\pi + \frac{\alpha}{۲}) = tg\frac{\alpha}{۲}$$

$$tg\frac{a}{۲} = tg(k\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{\alpha}{۲}) = tg(\frac{\pi}{۲} - \frac{\alpha}{۲}) = cotg\frac{\alpha}{۲}$$

یادآوری ـ هرگاه‌علاوه بر $sin\,a$ کمان a نیزمعلوم باشد، منتهای‌کمان $\frac{a}{۲}$ مشخص بوده ولذا برای هریك از نسبتهای مثلثاتی کمان $\frac{a}{۲}$ فقط یك‌جواب بدست می‌آید .

۱۲ . روش جبری: داریم :

$$\begin{cases} cos^۲\frac{a}{۲} - sin^۲\frac{a}{۲} = cos\,a \\ cos^۲\frac{a}{۲} + sin^۲\frac{a}{۲} = ۱ \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا نتیجه می‌شود :

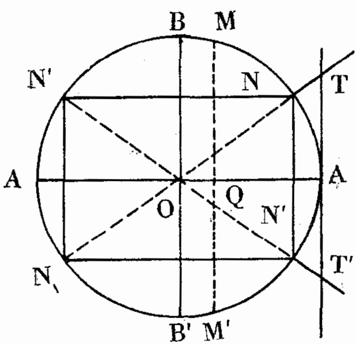
$$cos\frac{a}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱ + cos\,a}{۲}} \; ; \; sin\frac{a}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱ - cos\,a}{۲}}$$

واز دورابطهٔ بالا بدست می‌آید :

$$tg\frac{a}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱-\cos a}{۱+\cos a}}$$

بطوری‌که ملاحظه می‌شود بافرض معلوم بودن $\cos a$ برای $\cos\frac{a}{۲}$ و $\sin\frac{a}{۲}$ و $tg\frac{a}{۲}$ هریك دوجواب مساوی ومختلف‌العلامه بدست‌می‌آید.

حل هندسی : بـر محور کسینوسها قطعه خط OQ را مساوی با $\cos a$ جداکرده واز نقطهٔ Q خطی به‌موازات B′B رسم می‌کنیم، در ایـن صورت کمـانهای a عبـارت است از کمانهای به‌مبداء A و منتهای M ویا M′ و کمانهای $\frac{a}{۲}$، کمانهائی است‌که انتهای آنها



شکل ۲۵

N وسط‌کمان هندسی AM و یا $N_۱$ قرینهٔ آن‌نسبت به‌مرکزO می‌باشدواگر M′ منتهای‌کمان a اختیارشود، انتهای کمانهای $\frac{a}{۲}$ نقطهٔ N′ وسط‌کمان‌هندسی AM′ و $N'_۱$ قرینهٔ آن نسبت به‌مرکز O خواهدبود .

حال اگرمنتهای‌کمان $\frac{a}{۲}$ نقطهٔ N یا $N_۱$ یا N′ ویا $N'_۱$ اختیار شود باتوجه به‌آن‌که چهار ضلعی $NN'_۱N_۱N'$ مستطیل است برای هر یك از نسبتهای مثلثاتی $\frac{a}{۲}$ دوجواب قرینه بدست‌می‌آید .

روش‌مثلثاتی : اگر α یکی‌از اندازه‌های کمانی باشد که کسینوس آن مساوی $\cos a$ است، دراین صورت تمام اندازه‌های کمان a چنین است :

$$a=۲k\pi\pm\alpha \implies \frac{a}{۲}=k\pi\pm\frac{\alpha}{۲}$$

واز آنجا :

$$\sin\frac{a}{۲}=\sin(k\pi\pm\frac{\alpha}{۲})$$

اگر k فرد باشد :

$$\sin\frac{a}{۲}=-\sin(\pm\frac{\alpha}{۲})=\mp\sin\frac{\alpha}{۲}$$

واگر k زوج باشد :

$$\sin\frac{a}{۲}=\sin(\pm\frac{\alpha}{۲})=\pm\sin\frac{\alpha}{۲}$$

وبهمین ترتیب برای $\cos\frac{a}{۲}$ و $tg\frac{a}{۲}$ به‌ازای مقادیر فرد وزوج k نتیجه‌های زیر حاصل می‌شود :

(k فرد)
$$\cos\frac{a}{۲}=\cos(k\pi\pm\frac{\alpha}{۲})=-\cos(\pm\frac{\alpha}{۲})=-\cos\frac{\alpha}{۲}$$

(k زوج)
$$\cos\frac{a}{۲}=\cos(k\pi\pm\frac{\alpha}{۲})=\cos(\pm\frac{\alpha}{۲})=\cos\frac{\alpha}{۲}$$

(k فرد)
$$tg\frac{a}{۲}=tg(k\pi\pm\frac{\alpha}{۲})=tg(\pm\frac{\alpha}{۲})=\pm tg\frac{\alpha}{۲}$$

(k زوج)
$$tg\frac{a}{۲}=tg(k\pi\pm\frac{\alpha}{۲})=tg(\pm\frac{\alpha}{۲})=\pm tg\frac{\alpha}{۲}$$

نتیجه آن‌که برای هریك‌ازخطهای مثلثاتی‌کمان $\frac{a}{۲}$ دومقدار قرینه بدست می‌آید .

یادآوری ـ اگرعلاوه بر $\cos a$، کمان a نیز معلوم باشد منتهای‌کمان $\frac{a}{۲}$ مشخص شده وبرای هرخط مثلثاتی کمان $\frac{a}{۲}$ فقط یك جواب بدست می‌آید.

۱۳ ـ اگر α زاویه‌ای حاده باشد ، داریم :

$$tg\,\alpha=\sqrt{\frac{۱-\cos۲\alpha}{۱+\cos۲\alpha}}$$

$\alpha=۶۷/۵^\circ$ می‌گیریم ، باتوجه به‌اینکه $\cos۱۳۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، بدست می‌آید :

$$tg ۶۷/۵^\circ = \sqrt{\frac{۱-\cos ۱۳۵^\circ}{۱+\cos ۱۳۵^\circ}} = \sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}} = \sqrt{۲}+۱ ,$$

$$tg ۷/۵^\circ = tg(۶۷/۵^\circ - ۶۰^\circ) = \frac{tg ۶۷/۵^\circ - tg ۶۰^\circ}{۱+tg ۶۷/۵^\circ \cdot tg ۶۰^\circ} =$$

$$= \frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۱+(۱+\sqrt{۲})\sqrt{۳}} = \frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}+\sqrt{۶}}$$

که اگر مخرج کسر را گویا کنیم، می‌شود:

$$tg ۷/۵^\circ = \sqrt{۶}-\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۲$$

۱۴ . روابط زیر واضح است :

$$\cos\frac{\pi}{۸} = -\cos\frac{۷\pi}{۸} , \quad \cos\frac{۳\pi}{۸} = -\cos\frac{۵\pi}{۸} ,$$

$$\sin\frac{\pi}{۸} = \sin\frac{۷\pi}{۸} , \quad \sin\frac{۳\pi}{۸} = \sin\frac{۵\pi}{۸} ,$$

حالا اگر سمت چپ تساوی اول را A و سمت چپ تساوی دوم را B بگیریم، داریم:

$$A = ۲\cos^۴\frac{\pi}{۸} + ۲\cos^۴\frac{۳\pi}{۸} = ۲\left(\frac{۱+\cos\frac{\pi}{۴}}{۲}\right)^۲ +$$

$$+ ۲\left(\frac{۱+\cos\frac{۳\pi}{۴}}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}(۱+\cos^۲\frac{\pi}{۴}+۲\cos\frac{\pi}{۴}+۱+\cos^۲\frac{۳\pi}{۴}+$$

$$+۲\cos\frac{۳\pi}{۴}) = \frac{۱}{۲}(۱+\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}+۱+\frac{۱}{۲}-\sqrt{۲}) = \frac{۳}{۲} ,$$

$$B = ۲\sin^۴\frac{\pi}{۸} + ۲\sin^۴\frac{۳\pi}{۸} = ۲\left(\frac{۱-\cos\frac{\pi}{۴}}{۲}\right)^۲ +$$

$$+ ۲\left(\frac{۱-\cos\frac{۳\pi}{۴}}{۲}\right)^۲ = \frac{۳}{۲}$$

۱۵ . درحل مسئلهٔ ۱ دیدیم : $\sin ۱۸^\circ = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$ ، به‌کمک $\sin ۱۸^\circ$

می‌توان $\cos 36^\circ$ رامحاسبه کرد:

$$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

بعدازاین مقدمه می‌نویسیم :

$$(\sin 47^\circ + \sin 61^\circ) - (\sin 25^\circ + \sin 11^\circ) = 2\sin 54^\circ \cdot \cos 7^\circ -$$
$$-2\sin 18^\circ \cdot \cos 7^\circ = 2\cos 7^\circ (\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) =$$
$$= 4\cos 7^\circ \cdot \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = 4\cos 7^\circ \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 7^\circ$$

۱۶ . داریم :

$$\cos^4\frac{3\pi}{9} = \cos^4\frac{\pi}{3} = \frac{1}{16},$$

$$\cos^4\frac{\pi}{9} = \frac{1}{4}\left(1 + \cos\frac{2\pi}{9}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{9} + \cos^2\frac{2\pi}{9}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{9} + \frac{1+\cos\frac{4\pi}{9}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\frac{2\pi}{9} + \frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{9}\right).$$

و بهمین ترتیب :

$$\cos^4\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\frac{4\pi}{9} + \frac{1}{2}\cos\frac{8\pi}{9}\right),$$

$$\cos^4\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\frac{8\pi}{9} + \frac{1}{2}\cos\frac{16\pi}{9}\right)$$

بنابراین اگرمقدار سمت چپ تساوی حکم را $\mathbf{A}$ بگیریم :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4}\left(\frac{19}{4} + 2\cos\frac{2\pi}{9} + \frac{5}{2}\cos\frac{4\pi}{9} + \frac{5}{2}\cos\frac{8\pi}{9} + \frac{1}{2}\cos\frac{16\pi}{9}\right)$$

ازطرف دیگر داریم :

$$\cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9} = -\cos\frac{2\pi}{9}$$

وبنابراین خواهیم داشت :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4}\left[\frac{19}{4} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{16\pi}{9} - \cos\frac{2\pi}{9}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{19}{4} + \frac{1}{2}(-2)\sin\pi\sin\frac{7\pi}{9}\right] = \frac{19}{16}$$

۱۷ . اگرقوسهای $\frac{AM}{n}$ را به AN نشان دهیم، داریم :

$$\widehat{AN}=\frac{۲}{n}k\pi+\frac{\alpha}{n}=\frac{۲}{n}k\pi+\beta$$

(برای سهولت کار $\beta=\frac{\alpha}{n}$ گرفتیم). اگر بترتیب مقادیر ۰، ۱، ۲، ...، $n-۱$ را به k نسبت دهیم، بدست می‌آید:

$$\widehat{AN}_۰=\beta\ ,\ \widehat{AN}_۱=\frac{۲\pi}{n}+\beta\ \ ,\ \widehat{AN}_۲=\frac{۴\pi}{n}+\beta,\cdots,$$

$$\widehat{AN}_{n-۱}=\frac{۲(n-۱)\pi}{n}+\beta$$

می‌بینیم که نقطه‌های $N_۰$، $N_۱$، $N_۲$، ...، $N_{n-۱}$ روی دایرهٔ مثلثاتی بطور متوالی و بترتیب بفاصله $\frac{۲\pi}{n}$ ازیکدیگر قرار می‌گیرند، . تعداد این نقطه‌ها مساوی n است وضمناً به‌ازای $k=n$ همان نقطهٔ $N_۰$ بدست‌می‌آید. بنابراین نقطه‌های $N_۰$، $N_۱$، ...، $N_{n-۱}$ رأسهای يك n ضلعی منتظم در دایرهٔ مثلثاتی خواهند بود .

۱۸ . بنا برمسئلهٔ قبل انتهای قوسهای $\frac{۲k\pi}{۱۴}=\frac{k\pi}{۷}$ رأسهای يك چهارده ضلعی منتظم راروی دایرهٔ مثلثاتی تشکیل می‌دهند، فاصلهٔ انتهای‌این قوسها ازمبدأ دایرهٔ مثلثاتی بترتیب چنین است :

$$۰\ ,\ \frac{\pi}{۷}\ ,\ \frac{۲\pi}{۷}\ ,\ \frac{۳\pi}{۷},\ldots,\ \frac{۱۳\pi}{۷}$$

ولی باتوجه به‌اینکه اگرمجموع دوقوس مضرب فردی از π باشد ، سینوسهای برابردارند برای $\sin\frac{k\pi}{۷}$ فقط ۷ مقدار متمایز بدست می‌آید.

ولی در مورد $\cos\frac{k\pi}{\sqrt{۶}}$ وضع چنین نیست ووقتی‌که k مقادیر صحیح رااختیار کند، هرگز انتهای قوسهای $\frac{k\pi}{\sqrt{۶}}$ بر نقطهٔ شروع قرار نمی‌گیرد

و بنابراین $\cos\frac{k\pi}{\sqrt{6}}$ بی‌نهایت مقدارمختلف می‌تواند اختیارکند .

۱۹ . ازرابطهٔ $a\sin\alpha\sin\beta+b\cos\alpha\cos\beta=0$ بدست می‌آید :

$$tg\alpha\cdot tg\beta=-\frac{b}{a}\qquad(1)$$

حالااگردرعبارت y صورت ومخرج کسراول رابر $\cos^2\alpha$ وصورت ومخرج کسر دوم را بر $\cos^2\beta$ تقسیم کنیم، می‌شود :

$$y=\frac{1+tg^2\alpha}{atg^2\alpha+b}+\frac{1+tg^2\beta}{atg^2\beta+b}$$

ازرابطهٔ(۱) بجای $tg\beta$ درکسر دوم مقدارش‌را قرارمی‌دهیم :

$$y=\frac{1+tg^2\alpha}{atg^2\alpha+b}+\frac{1+\frac{b^2}{a^2tg^2\alpha}}{\frac{b^2}{atg^2\alpha}+b}=$$

$$=\frac{1+tg^2\alpha}{atg^2\alpha+b}+\frac{a^2tg^2\alpha+b^2}{ab(atg^2\alpha+b)}=$$

$$=\frac{ab+abtg^2\alpha+a^2tg^2\alpha+b^2}{ab(atg^2\alpha+b)}=\frac{(atg^2\alpha+b)(a+b)}{ab(atg^2\alpha+b)}=$$

$$=\frac{a+b}{ab}$$

۲۰ . حاصل عبارت را A می‌گیریم، داریم :

$$A=(\sin^2x+\cos^2x)^3-3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)+$$
$$+m[(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x]=$$
$$=(m+1)-(2m+3)\sin^2x\cos^2x$$

و برای‌اینکه عبارت مفروض مستقل‌از x باشد باید ضریب $\sin^2x\cos^2x$ مساوی صفر شود :

$$2m+3=0\implies m=-\frac{3}{2}$$

۲۱ . روابط زیرواضح است :

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}\ ,\ \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$$

که اگر در رابطهٔ فرض قرار دهیم :

$$\frac{1}{a}\left(\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}\right)^2 + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{1+tg^2 x}\right)^2 = \frac{1}{a+b}$$

پس از ساده کردن به رابطهٔ زیر می‌رسیم :

$$(b\,tg^2 x - a)^2 = 0 \implies tg^2 x = \frac{a}{b}$$

حالا به محاسبهٔ عبارت موردنظر می‌پردازیم :

$$\frac{1}{a^3}\sin^8 x + \frac{1}{b^3}\cos^8 x = \frac{1}{a^3}\left(\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}\right)^4 + \frac{1}{b^3}\left(\frac{1}{1+tg^2 x}\right)^4 =$$

$$= \frac{1}{a^3}\cdot\frac{a^4}{(a+b)^4} + \frac{1}{b^3}\cdot\frac{b^4}{(a+b)^4} = \frac{a}{(a+b)^4} + \frac{b}{(a+b)^4} =$$

$$= \frac{a+b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}$$

۲۲ . سمت چپ تساوی را تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x-1} = \frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}{(\sin x+\cos x)^2-1} =$$

$$= \frac{\sin x\cos x(\sin x+\cos x+1)}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}$$

و بنابراین بدست می‌آید : $a=b=c=\frac{1}{2}$

۲۳ . داریم :

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - tg60^\circ \sin 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{2(\cos 10^\circ\cos 60^\circ - \sin 10^\circ\sin 60^\circ)}{\sin 20^\circ\cos 60^\circ} = \frac{4\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} = 4$$

۲۴ . مجموع قوسها برابراست با π وبنابراین حاصلجمع تانژانتهای آنها با حاصلضربشان برابراست .

۲۵ . اگرحاصل عبارت را A بگیریم داریم :

$$A=(tg9^\circ+tg81^\circ)-(tg27^\circ+tg63^\circ)=\frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ\cos 81^\circ}-$$

$$-\frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ\cos 63^\circ}=\frac{1}{\cos 9^\circ\sin 9^\circ}-\frac{1}{\cos 27^\circ\sin 27^\circ}=\frac{2}{\sin 18^\circ}-$$

$$-\frac{2}{\sin 54^\circ}=\frac{2(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=\frac{4\sin 18^\circ\cos 36^\circ}{\sin 18^\circ\cos 36^\circ}=4$$

۲۶ . رابطهٔ فرض باترکیب نسبت در صورت وتفضیل نسبت در مخرج بعد ازتبدیلات ساده چنین می‌شود :

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin a}{1-\sin a}\cdot\frac{1+\sin b}{1-\sin b}$$

کسرسمت چپ تساوی راتبدیل می‌کنیم:

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}+\sin x}{\sin\frac{\pi}{2}-\sin x}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}=tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

بهمین ترتیب کسرهای $\frac{1+\sin a}{1-\sin a}$ و $\frac{1+\sin b}{1-\sin b}$ نیزقابل تبدیل‌اند. درنتیجه تساوی فرض به اینصورت درمی‌آید :

$$tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}\right)$$

که باجذرگرفتن ازطرفین تساوی، همان رابطهٔ حکم بدست می‌آید.

۲۷ . داریم :

$$\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{b}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}(a+b\cot g\alpha)=\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}(a+b\cot g\alpha)=$$

$$=\pm\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}\left(a+b\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})=\pm(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^{\frac{3}{2}}$$

۲۸ . داریم:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=$$

$$=\frac{\cot g\alpha+\cot g\beta}{\cot g\alpha\cot g\beta-1}=\frac{\sqrt{x(x^2+x+1)}+\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}}}{(x^2+x+1)-1}=$$

$$=\frac{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x}(x+1)}=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^3}}=$$

$$=\sqrt{x^{-1}+x^{-2}x^{-3}}=tg\gamma\implies\alpha+\beta=k\pi+\gamma$$

وبشرط حاده بودن زوایا : $\alpha+\beta=\gamma$.

۲۹ . $n=7k+r$ می‌گیریم، عبارت سمت‌چپ تساوی‌چنین‌می‌شود:

$$\cos(k\pi+\frac{r\pi}{7}-\frac{13\pi}{14})+\cos(3k\pi+\frac{3r\pi}{7}-\frac{3\pi}{14})+$$

$$+\cos(5k\pi+\frac{5r\pi}{7}-\frac{3\pi}{14})=(-1)^k[\cos(\frac{r\pi}{7}-\frac{13\pi}{14})+$$

$$+\cos(\frac{3r\pi}{7}-\frac{3\pi}{14})+\cos(\frac{5r\pi}{7}-\frac{3\pi}{14})$$

وبنابراین باید ببینیم مقدارداخل‌کروشه به‌ازاء چه مقادیری از r مساوی صفر می‌شود. ضمناً r می‌تواند یکی از عددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵و۶ باشد .

درحالت $r=0$ مقدارکروشه چنین می‌شود :

$$\cos\frac{13\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}=2\cos\frac{3\pi}{14}-\cos\frac{\pi}{14}\neq 0$$

و به ازای $r=1$:

$$\cos\frac{11\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{2}=$$

$$= -\cos\frac{۳\pi}{۱۴} + \cos\frac{۳\pi}{۱۴} + ۰ = ۰$$

واگر بهمین ترتیب برای سایرمقادیر r عمل کنیم می‌بینیم کـه تنها در حالتهائی‌که r یکی‌ازعددهای ۱، ۳و۴ باشد، مقدارعبارت مساوی صفرمی‌شود. بنابراین برای اینکه اتحادمفروض برقرار باشد، باید باقیماندهٔ تقسیم عددصحیح n بر۷ برابر ۱ یا۳ ویا ۴ باشد.

۳۰ . تساوی مفروض دابترتیب چنین می‌نویسیم :

$$b^۲[(\cos x - \cos a)^۲ + (\sin x - \sin a)^۲] = c^۲[(۲ + \cos x + \cos a)^۲ -$$
$$- (\cos x - \cos a)^۲] \;,\; b^۲[۲ - ۲(\cos x \cos a + \sin x \sin a)] =$$
$$= c^۲(۴ + ۴\cos x + ۴\cos a + ۴\cos x \cos a) \;,\; ۲b^۲[۱ - \cos(x - a)] =$$
$$= ۴c^۲(۱ + \cos x)(۱ + \cos a) \;,$$

$$۴b^۲ \sin^۲\frac{x-a}{۲} = ۱۶c^۲ \cos^۲\frac{x}{۲} \cos^۲\frac{a}{۲} \;,$$

$$۲b \sin\frac{x-a}{۲} = \pm ۴c \cos\frac{x}{۲} \cos\frac{a}{۲} \;,$$

$$\frac{\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{a}{۲} - \cos\frac{x}{۲}\sin\frac{a}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}\cos\frac{a}{۲}} = \pm\frac{۲c}{b} \;,\; tg\frac{x}{۲} - tg\frac{a}{۲} = \pm\frac{۲c}{b}$$

۳۱ . حاصل عبارت راAمی‌گیریم، دراینصورت داریم :

$$۲A \sin\frac{\pi}{۷} = ۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۲\pi}{۷} + ۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۴\pi}{۷} + ۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۶\pi}{۷} =$$

$$= (\sin\frac{۳\pi}{۷} - \sin\frac{\pi}{۷}) + (\sin\frac{۵\pi}{۷} - \sin\frac{۳\pi}{۷}) + (\sin\pi - \sin\frac{۵\pi}{۷}) =$$

$$= \sin\pi - \sin\frac{\pi}{۷} = -\sin\frac{\pi}{۷} \implies A = -\frac{۱}{۲}$$

۳۲ . $(\sin a + \sin b) + [\sin c - \sin(a + b + c)] =$

$$= ۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲} - ۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a+b+۲c}{۲} =$$

$$=2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b+2c}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{a+b}{2}\left(2\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}\right)=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}$$

۳۳ . شبیه مسئلهٔ ۳۲ حل کنید، جواب چنین است :

$$4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+c}{2}\cos\frac{b+c}{2}$$

۳۴ . جواب : $-\dfrac{\sin(a+b)\sin(a+c)\sin(b+c)}{\cos a\cos b\cos c\cos(a+b+c)}$

۳۵ . عبارت‌را A می‌گیریم، داریم:

$$A=(\sin^2 a-\cos^2 b)-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=$$

$$=-\frac{1}{2}(\cos 2a+\cos 2b)-\cos^2 c+\cos c[\cos(a+b)+\cos(a-b)]=$$

$$=-\cos(a+b)\cos(a-b)-\cos^2 c+\cos c\cos(a+b)+$$

$$+\cos c\cos(a-b)=[\cos c-\cos(a+b)][\cos(a-b)-\cos c]=$$

$$=4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}$$

واگر $a+b+c=2p$ بگیریم:

$$A=4\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)$$

۳۶ . مخرج‌مشترك بگیرید وصورت راتجزیه کنید، جواب‌چنین‌است:

$$\frac{1}{2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{c-a}{2}}$$

۳۷ . ابتدا اتحاد زیررا ثابت کنید :

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha tg\beta tg\gamma)$$

جواب باکمك این‌اتحاد $tg\alpha tg\beta tg\gamma$ خواهدشد .

۳۸ . عبارت راS می‌گیریم، داریم:

$$S=(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)+(\sin\alpha+\sin 3\alpha)+(\cos\alpha+\cos 3\alpha)=$$

$$=(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)+2\sin 2\alpha\cos\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha=$$

$$=(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)+2\cos\alpha(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)=$$

$$=(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)(1+2\cos\alpha)=$$

$$=2\left[\sin 2\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right]\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\right)=$$

$$=8\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

۳۹ . از این اتحاد استفاده کنید:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

جواب: $24\sin 2a\cos a\sin\frac{3a}{2}\sin\frac{5a}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$

۴۰ . کسر را A می‌گیریم و صورت و مخرج آنرا در $1+\cos x$ ضرب می‌کنیم:

$$A=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)+y\sin x(1+\cos x)}{(1+\cos x)[\sin x+y(1+\cos x)]}=$$

$$=\frac{\sin x[\sin x+y(1+\cos x)]}{(1+\cos x)[\sin x+y(1+\cos x)]}=tg\frac{x}{2}$$

۴۱ . با توجه به روابط

$$-\sin\left(a+\frac{\pi}{7}\right)=\sin\left(a+\frac{\pi}{7}+\pi\right)=\sin\left(a+\frac{8\pi}{7}\right)$$

$$-\sin\left(a+\frac{3\pi}{7}\right)=\sin\left(a+\frac{3\pi}{7}+\pi\right)=\sin\left(a+\frac{10\pi}{7}\right)$$

$$-\sin\left(a+\frac{5\pi}{7}\right)=\sin\left(a+\frac{5\pi}{7}+\pi\right)=\sin\left(a+\frac{12\pi}{7}\right)$$

اگر مجموع سمت چپ تساوی مسئله را A بگیریم، داریم:

$$A=\sin a+\sin\left(a+\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(a+\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(a+\frac{6\pi}{7}\right)+$$

$$+\sin\left(a+\frac{8\pi}{7}\right)+\sin\left(a+\frac{10\pi}{7}\right)+\sin\left(a+\frac{12\pi}{7}\right)$$

قوسهای این مجموع یك تصاعد حسابی به‌قدر نسبت $\frac{۲\pi}{۷}$ تشکیل می‌دهند، اگر طرفین تساوی را در $۲\sin\frac{\pi}{۷}$ ضرب‌کنیم وهمهٔ‌جمله‌های طرف دوم را به‌مجموع تبدیل کنیم، بعدازحذف جمله‌های قرینه، بدست می‌آید :

$$۲A\sin\frac{\pi}{۷}=\cos(a-\frac{\pi}{۷})-\cos(a+\frac{۱۳\pi}{۷})=۲\sin(a+\frac{۶\pi}{۷})\cdot\sin\pi=۰$$

۴۲ . ۱) داریم: $a+b=۲\pi-(c+d)$ وبنابراین :

$$tg(a+b)=-tg(c+d) \implies \frac{tg a+tg b}{۱-tg a\,tg b}=-\frac{tg c+tg d}{۱-tg c\,tg d},$$

که‌ازآنجا بدست می‌آید :

$$tg a+tg b+tg c+tg d=$$
$$=tg a\,tg b\,tg c+tg a\,tg b\,tg d+tg a\,tg c\,tg d+tg b\,tg c\,tg d$$

حالتهای ۲)و۳) به‌حالت ۱) برمی‌گردد، زیرا درحالت ۲) داریم :

$$\left(\frac{\pi}{۵}+\frac{۳a}{۵}\right)+\left(\frac{\pi}{۵}+\frac{۳b}{۵}\right)+\left(\frac{\pi}{۵}+\frac{۳c}{۵}\right)+\left(\frac{\pi}{۵}+\frac{۳d}{۵}\right)=$$
$$=\frac{۴\pi}{۵}+\frac{۳}{۵}(a+b+c+d)=\frac{۴\pi}{۵}+\frac{۶\pi}{۵}=۲\pi$$

و درحالت ۳)

$$\left(\frac{۲\pi}{۳}-\frac{a}{۳}\right)+\left(\frac{۲\pi}{۳}-\frac{b}{۳}\right)+\left(\frac{۲\pi}{۳}-\frac{c}{۳}\right)+\left(\frac{۲\pi}{۳}-\frac{d}{۳}\right)=$$
$$=\frac{۸\pi}{۳}-\frac{۱}{۳}(a+b+c+d)=\frac{۸\pi}{۳}-\frac{۲\pi}{۳}=۲\pi$$

۴۳ . داریم :

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta=\frac{۱}{۲}(۱+\cos۲\alpha)+$$
$$+\frac{۱}{۲}(۱+\cos۲\beta)=۱+\frac{۱}{۲}(\cos۲\alpha+\cos۲\beta)=۱+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

بنابراین داریم:

$$۱+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=m \implies \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=m-۱$$

۴۴ . قبلاثابت می‌کنیم :

$$p=\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

در حقیقت داریم :
$$p=\frac{1}{2}(\cos 80^\circ+\cos 60^\circ)\cos 50^\circ=$$
$$=\frac{1}{2}\cos 80^\circ \cdot \cos 50^\circ+\frac{1}{4}\cos 50^\circ=\frac{1}{4}(\cos 130^\circ+\cos 30^\circ)+$$
$$+\frac{1}{4}\cos 50^\circ=\frac{1}{4}\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

وحالا حاصل‌عبارت مفروض رابدست می‌آوریم :

$$tg^2 10^\circ+tg^2 50^\circ+tg 70^\circ=\frac{1}{\cos^2 10^\circ}+\frac{1}{\cos^2 50^\circ}+\frac{1}{\cos^2 70^\circ}-3=$$
$$=\frac{64}{3}(\cos^2 50^\circ \cos^2 70^\circ+\cos^2 70^\circ \cos^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ \cos^2 50^\circ)-3=$$
$$=\frac{64}{3}\cdot\frac{1}{4}[(1-\cos 80^\circ)(1-\cos 40^\circ)+(1-\cos 40^\circ)(1+\cos 20^\circ)+$$
$$+(1+\cos 20^\circ)(1-\cos 80^\circ)]-3=\frac{16}{3}[3-2(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ-$$
$$-\cos 20^\circ)+\cos 80^\circ \cos 40^\circ-\cos 40^\circ \cos 20^\circ-\cos 20^\circ \cos 80^\circ]-3=$$
$$=\frac{16}{3}[3-2\cdot 0+\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 40^\circ-\cos 60^\circ-\cos 20^\circ+\cos 80^\circ-$$
$$-\cos 60^\circ)]-3=\frac{16}{3}[3-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(\cos 80^\circ+\cos 40^\circ-\cos 20^\circ)]-$$
$$-3=\frac{16}{3}\cdot\frac{9}{4}-3=9$$

راه حل دوم . معادلهٔ درجه سوم زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\frac{x^3-3x}{1-3x^2}=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad (1)$$

اگر $x=tg\alpha$ فرض کنیم به‌معادلهٔ $tg 3\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ می‌رسیم که جوابهای آن

$\alpha=\frac{1}{3}k\pi+\frac{\pi}{18}$ است. بنابراین بدست می‌آید :

$$x = tg\left(\frac{1}{3}k\pi + \frac{\pi}{18}\right) \begin{cases} x_1 = tg\frac{\pi}{18} = tg10^\circ \\ x_2 = tg\frac{7\pi}{18} = tg70^\circ \\ x_3 = tg\frac{13\pi}{18} = tg130^\circ = -tg50^\circ \end{cases}$$

حالا معادلهٔ(۱) رامنظم می‌کنیم:

$$3x^3 + 3\sqrt{3}x^2 - 9x - \sqrt{3} = 0$$

اگر ریشه‌های این‌معادله را x_1، x_2 و x_3 بگیریم، داریم :

$$tg^2 10^\circ + tg^2 50^\circ + tg^2 70^\circ = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) =$$
$$= (-\sqrt{3})^2 - 2(-3) = 3 + 6 = 9$$

۴۵ . طولهای نقاط تلاقی منحنی مفروض با خط $y = a$ عبارتست از جوابهای معادلهٔ زیر :

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n - a = 0$$

وچون مجموع جوابهای این‌معادله مساوی $-a_1$ است ، پس

$$x_{A_1} + x_{A_2} + \cdots + x_{A_n} = -a_1$$

وبهمین ترتیب :

$$x_{B_1} + x_{B_2} + \cdots + x_{B_n} = -a_1$$

ازطرف دیگرواضح استکه

$$cotg\,\alpha_i = \frac{x_{B_i} - x_{A_i}}{b - a}$$

وبنابراین داریم :

$$cotg\,\alpha_1 + cotg\,\alpha_2 + \cdots + cotg\,\alpha_n =$$
$$= \frac{1}{b-a}[(x_{B_1} + x_{B_2} + \cdots + x_{B_n}) - $$
$$- (x_{A_1} + x_{A_2} + \cdots + x_{A_n})] = 0$$

۴۶ . داریم :

$$A = tg20^\circ + tg40^\circ + tg80^\circ - tg60^\circ =$$

$$=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ}+\frac{\sin 20^\circ}{\cos 80^\circ \cos 60^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 60^\circ \cos 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}+4\cos 10^\circ=8\sin 60^\circ \sin 10^\circ+4\cos 10^\circ$$

(ازرابطهٔ $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ=\frac{1}{8}$ استفاده کردیم) و سپس

$$A=4(\cos 50^\circ-\cos 70^\circ+\cos 10^\circ)=4(\sin 40^\circ+$$
$$+2\sin 40^\circ \sin 30^\circ)==8\sin 40^\circ$$

وبالاخره
$$tg 20^\circ+tg 40^\circ+tg 80^\circ=8\sin 40^\circ+\sqrt{3}$$

۴۷ . طرفین تساوی حکم رادر $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}$ ضرب می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}$$

طرف دوم این‌تساوی را به‌طرف اول تبدیل می‌کنیم :

$$\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}\left(\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}$$

۴۸ . سمت چپ اتحاد مفروض‌را N می‌گیریم، داریم :

$$N=\frac{1-\cos(\alpha+\beta-\gamma)}{2}+\frac{1-\cos(\alpha+\gamma-\beta)}{2}+$$
$$+[\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha]\cos\alpha=1-\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)+$$
$$+\cos(\beta-\gamma)\cos\alpha-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$$

۴۹ . محورکسینوسها را xx' ومحور سینوسهارا yy' می‌گیریم، نقاط

$$A\left|\begin{matrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{matrix}\right. ,\quad B\left|\begin{matrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{matrix}\right. ,\quad C\left|\begin{matrix}\cos\gamma\\ \sin\gamma\end{matrix}\right.$$

بر محیط دایرهٔ مثلثاتی واقع‌اند ودایرهٔ محیطی مثلث ABC همان دایرهٔ مثلثاتی است. ازطرف دیگر اگرمحل تلاقی میانه‌های این مثلث را G فرض کنیم، داریم:

$$G \left| \begin{array}{l} \frac{1}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=0 \\ \\ \frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=0 \end{array} \right.$$

یعنی محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC همان مرکز دایرهٔ محیطی آن (دایرهٔ مثلثاتی) است و بنابراین مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. α، β و γ رازوایائی مثبت و بین صفر و 2π می‌گیریم، دراینصورت بافرض $\alpha<\beta<\gamma$ بدست می‌آید:

$$\widehat{AOB}=\beta-\alpha=\frac{2\pi}{3},\ \widehat{BOC}=\gamma-\beta=\frac{2\pi}{3},$$

$$\widehat{COA}=\alpha-\gamma+2\pi=\frac{2\pi}{3}$$

حالا مثلث $A'B'C'$ رامی‌سازیم بنحوی‌که داشته باشیم:

$$A' \left| \begin{array}{l} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{array} \right. ,\qquad B' \left| \begin{array}{l} \cos n\beta \\ \sin n\beta \end{array} \right. ,\qquad C' \left| \begin{array}{l} \cos n\gamma \\ \sin n\gamma \end{array} \right.$$

مثلث $A'B'C'$ هم متساوی‌الاضلاع است، زیرا A'، B' و C' بردایرهٔ مثلثاتی واقع‌اند و ضمناً مقادیر زوایای $A'OB'$، $B'OC'$ و $C'OA'$ بترتیب مساوی $n(\beta-\alpha)$، $n(\gamma-\beta)$ و $n(\alpha-\gamma+2\pi)$ هستند و اگر این زوایا را به‌زوایای بین صفر و 2π تبدیل کنیم (که مقادیر سینوس وکسینوس آنها تغییر نمی‌کند)، باتوجه باینکه n بر ۳ قابل‌قسمت نیست، هرسه زاویه باهم برابر می‌شوند.

وقتی‌که مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع باشد، بایدنقطهٔ تلاقی میانه‌های آن برمبداء مختصات منطبق‌شود وازآنجا بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma=0 \\ \cos n\alpha+\cos n\beta+\cos n\gamma=0 \end{cases}$$

متذکر می‌شویم‌که اگر n عددی قابل‌قسمت بر ۳ باشد. نقطه‌های A'، B' و C' برهم منطبق می‌شوند و بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma=3\sin n\alpha \\ \cos n\alpha+\cos n\beta+\cos n\gamma=3\cos n\alpha \end{cases}$$

۵۰ . داریم :

$$tg55^\circ \cdot tg65^\circ = tg(60^\circ-5^\circ)tg(60^\circ+5^\circ)=\frac{3-tg^2 5^\circ}{1-3tg^2 5^\circ},$$

$$tg75^\circ = cotg(3\times5^\circ)=\frac{1-3tg^2 5^\circ}{3tg5^\circ - tg^3 5^\circ}$$

وبنابراین بدست می‌آید :

$$tg55^\circ \cdot tg65^\circ \cdot tg75^\circ = \frac{1}{tg5^\circ} = tg85^\circ$$

۵۱ . باتوجه به‌روابط

$$\begin{cases} cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+cos2\alpha) \\ cos^3\alpha = \frac{1}{4}(cos3\alpha + 3cos\alpha) \end{cases}$$

اگرسمت چپ اتحاد حکم را A بگیریم، بدست می‌آید :

$$A = 1+4cos\frac{2\pi}{7} - 2\left(1+cos\frac{4\pi}{7}\right) - 2\left(cos\frac{6\pi}{7}+3cos\frac{2\pi}{7}\right)=$$

$$=1+4cos\frac{2\pi}{7}-2+2cos\frac{3\pi}{7}+2cos\frac{\pi}{7}-6cos\frac{2\pi}{7}=$$

$$=-1-2cos\frac{2\pi}{7}+2cos\frac{3\pi}{7}+2cos\frac{\pi}{7}=$$

$$=\frac{1}{sin\frac{\pi}{7}}\left(-sin\frac{\pi}{7}-2sin\frac{\pi}{7}cos\frac{2\pi}{7}+2sin\frac{\pi}{7}cos\frac{3\pi}{7}+2sin\frac{\pi}{7}cos\frac{\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{sin\frac{\pi}{7}}\left[\left(-sin\frac{\pi}{7}\right)-\left(sin\frac{3\pi}{7}-sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(sin\frac{4\pi}{7}-sin\frac{2\pi}{7}\right)+\right.$$

$$\left.+sin\frac{2\pi}{7}\right]=\frac{1}{sin\frac{\pi}{7}}\left(sin\frac{4\pi}{7}-sin\frac{3\pi}{7}\right)=0$$

۵۲ . ازروش استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم. رابطه برای $n=1$ و $n=2$ صحیح است .

ثابت می‌کنیم که از رابطهٔ

$$tg(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{S_1^{(n)}-S_3^{(n)}+S_5^{(n)}-\cdots}{1-S_2^{(n)}+S_4^{(n)}-\cdots}$$

می‌توان صحت رابطهٔ زیر را ثابت کرد:

$$tg(x_1+\cdots+x_n+x_{n+1})=\frac{S_1^{(n+1)}-S_3^{(n+1)}+S_5^{(n+1)}-\cdots}{1-S_2^{(n+1)}+S_4^{(n+1)}-\cdots}$$

بترتیب داریم:

$$tg\left[(x_1+\cdots+x_n)+x_{n+1}\right]=\frac{tg(x_1+\cdots+x_n)+tg\,x_{n+1}}{1-tg(x_1+\cdots+x_n)\cdot tg\,x_{n+1}}=$$

$$=\frac{\dfrac{S_1^{(n)}-S_3^{(n)}+S_5^{(n)}-\cdots}{1-S_2^{(n)}+S_4^{(n)}-\cdots}+tg\,x_{n+1}}{1-\dfrac{S_1^{(n)}-S_3^{(n)}+S_5^{(n)}-\cdots}{1-S_2^{(n)}+S_4^{(n)}-\cdots}\cdot tg\,x_{n+1}}=$$

$$=\frac{(S_1^{(n)}-S_3^{(n)}+\cdots)+(1-S_2^{(n)}+S_4^{(n)}-\cdots)tg\,x_{n+1}}{(1-S_2^{(n)}+S_4^{(n)}-\cdots)-(S_1^{(n)}-S_3^{(n)}+\cdots)tg\,x_{n+1}}=$$

$$=\frac{(S_1^{(n)}+tg\,x_{n+1})-(S_3^{(n)}+S_2^{(n)}tg\,x_{n+1})+(S_5^{(n)}+S_4^{(n)}tg\,x_{n+1})-\cdots}{1-(S_2^{(n)}+S_1^{(n)}tg\,x_{n+1})+(S_4^{(n)}+S_3^{(n)}tg\,x_{n+1})-\cdots}=$$

$$=\frac{S_1^{(n+1)}-S_3^{(n+1)}+S_5^{(n+1)}-\cdots}{1-S_2^{(n+1)}+S_4^{(n+1)}-\cdots}$$

۵۳. اگر $\sin x+\cos x=a$ باشد (که البته باید $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$)

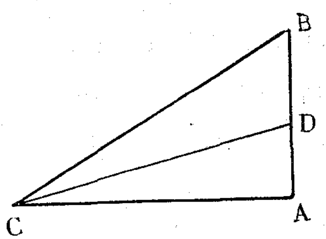
می‌توان با مجذور کردن طرفین آن مقدار $\sin x\cos x$ را بدست آورد:

$$\sin^2 x+2\cos x\cos x+\cos^2 x=a^2 \Longrightarrow \sin x\cos x=\frac{a^2-1}{2}$$

حالا به محاسبهٔ عبارتهای مورد نظر می‌پردازیم:

$$1)\ \sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)^3-3\cos x\cos x(\cos x+\cos x)=$$
$$=a^3-3a\cdot\frac{a^2-1}{2}=\frac{1}{2}a(3-a^2)$$
$$2)\ \sin^5 x+\cos^5 x=(\sin x+\cos x)^5-5\sin x\cos x(\sin^3 x+\cos^3 x)-$$
$$-10\sin^2 x\cos^2 x(\sin x+\cos x)=a^5-5\cdot\frac{a^2-1}{2}\cdot\frac{3a-a^3}{2}-$$
$$-10\cdot\frac{(a^2-1)^2}{4}\cdot a=\frac{1}{4}a(5-a^4)$$
$$3)\ \sin^{-2}x+\cos^{-2}x=\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{4}{(a^2-1)^2}$$

۵۴ . مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر می‌گیریم وزاویهٔ حادهٔ C ازآنرامساوی x فرض می‌کنیم. میدانیم



شکل ۲۶

$$\frac{AD}{DB}=\frac{CA}{CB}$$ (CD نیمساز زاویهٔ داخلی C است). بنابراین

$$\frac{AD}{DB}=\cos x \Longrightarrow$$
$$\frac{AD}{AD+DB}=\frac{\cos x}{1+\cos x}$$

صورت ومخرج سمت چپ تساوی اخیررا برCA تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{AD:CA}{AB:CA}=\frac{\cos x}{1+\cos x}\Longrightarrow\frac{tg\frac{x}{2}}{tg x}=\frac{\cos x}{1+\cos x}$$

وبالاخره بدست می‌آید : $$tg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

(درمسئله‌های ۲و۹ روشهای دیگری از اثبات هندسی این اتحاد راآوردیم).

اکنون به‌محاسبهٔ $tg\frac{\pi}{8}$ ، $tg\frac{\pi}{12}$ و $\frac{\pi}{24}$ می‌پردازیم :

$$tg\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}-1$$

$$tg\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=2-\sqrt{3}$$

$$tg\frac{\pi}{24}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{1+\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$$

۵۵ . روابط زیر واضح است :

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha \quad , \quad (\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\sin 2\alpha$$

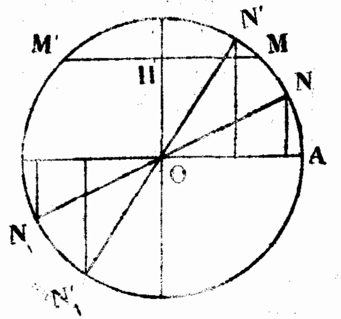
که از آنجا بدست می‌آید :

$$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\pm\sqrt{1+\sin 2\alpha}\\ \sin\alpha-\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin 2\alpha}\end{cases}$$

ازجمع این‌دورابطه حاصل می‌شود :

$$\sin\alpha=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\sin 2\alpha}\pm\sqrt{1-\sin 2\alpha}\right)$$

همهٔ ترکیب علامتها قابل‌قبول است وبنابراین برای $\sin\alpha$ چهارجواب بدست‌می‌آیدکه‌دو به‌دوقرینهٔ‌یکدیگرند.

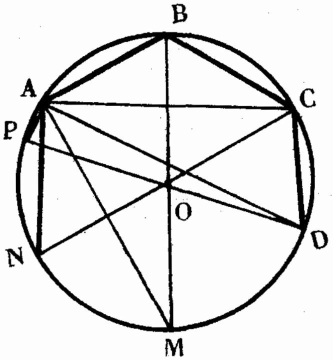


شکل ۲۷

تعبیر هندسی. اگر OH مساوی $\sin 2\alpha$ باشد (شکل ۲۷) وسط‌قوسهای AM و AM' یعنی نقطه‌های N و N' وهمچنین وسط قوسهای $AM+2\pi$ و $AM'+2\pi$ یعنی‌نقطه‌های N_1 و N'_1 معرف انتهای قوسهای α هستند، یعنی برای انتهای α چهار نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی‌بدست می‌آیدکه سینوسهای‌آنها

دو به‌دو قرینهٔ یکدیگرند .

البته اگر علاوه بر مقدار $\sin 2\alpha$ مقدار قوس 2α نیز معلوم باشد، انتهای قوس 2α ودر نتیجه انتهای قوس α معلوم می‌شود و برای $\sin\alpha$ فقط یك جواب بدست می‌آید:



شکل ۲۸

۵۶ . A، B، C و D را چهار رأس متوالی از یك ۷ ضلعی منتظم فرض می‌کنیم (شکل ۲۸). درمثلث ABM داریم :

$$AB = BM \sin \widehat{AMB} = 2R \sin\frac{\pi}{7}$$

در مثلث ACN: $AC = 2R\sin\frac{2\pi}{7}$

ودرمثلث ADP: $AD = 2R\sin\frac{3\pi}{7}$

و بنابراین رابطهٔ حکم منجر به‌رابطهٔ زیر می‌شود :

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$$

واثبات این‌رابطه هم درمسئلهٔ ۴۷ آمده است .

۵۷ . رابطهٔ فرض‌را بترتیب می‌توان چنین نوشت :

$$\left(\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1 ,$$

$$\cos^2\frac{x-y}{2} + \sin^2\frac{x+y}{2} - 2\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = 1 ,$$

$$\frac{1+\cos(x-y)}{2} + \frac{1-\cos(x+y)}{2} - 1 = 2\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} ,$$

$$\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] = 2\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} ,$$

که اگرسمت چپ تساوی را به‌ضرب وسمت راست آنرا به جمع تبدیل کنیم ، بدست می‌آید :

$$\sin x \sin y = \sin x + \sin y$$

۵۸ . داریم :

$$S=\sqrt{(b^{۲}+c^{۲}((\cos^{۲}\frac{A}{۲}+\sin^{۲}\frac{A}{۲})-۲cb(\cos^{۲}\frac{A}{۲}-\sin^{۲}\frac{A}{۲})}=$$

$$=\sqrt{(b-c)^{۲}\cos^{۲}\frac{A}{۲}+(b+c)^{۲}\sin^{۲}\frac{A}{۲}}=$$

$$=(b+c)\sin\frac{A}{۲}\sqrt{\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^{۲}\cot g^{۲}\frac{A}{۲}+۱}$$

اگر α را زاویه‌ای بگیریم که $tg\,\alpha=\frac{b-c}{b+c}\cot g\frac{A}{۲}$ باشد، بدست می‌آید :

$$S=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{۲}}{\cos\alpha}$$

که قابل محاسبهٔ لگاریتمی است .

۵۹ . داریم :

$$x=a\cos\omega t\cdot\cos\alpha-a\sin\omega t\cdot\sin\alpha+b\cos\omega t\cdot\cos\beta-$$

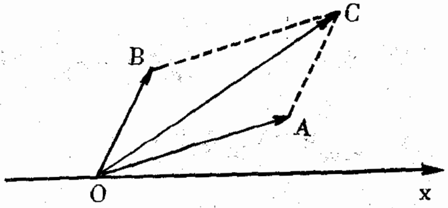
$$-b\sin\omega t\cdot\sin\beta=(a\cos\alpha+b\cos\beta)\cos\omega t-(a\sin\alpha+b\sin\beta)\sin\omega t=$$

$$=(a\cos\alpha+b\cos\beta)(\cos\omega t-tg\gamma\sin\omega t)=\frac{a\cos\alpha+b\cos\beta}{\cos\alpha}\times$$

$$\times(\cos\omega t\cdot\cos\gamma-\sin\omega t\cdot\sin\gamma)=c\cos(\omega t+\gamma)$$

که در آن $tg\gamma=\frac{a\sin\alpha+b\sin\beta}{a\cos\alpha+b\cos\beta}$ و $c=\frac{a\cos\alpha+b\cos\beta}{\cos\gamma}$ فرض کردیم.

تعبیر هندسی . طول بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را بترتیب a و b و زاویه‌هائی که با محور Ox می‌سازند بترتیب $\omega t+\alpha$ و $\omega t+\beta$ می‌گیریم. داریم :



شکل ۲۹

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

این رابطه را برمحور ox تصویر می‌کنیم :

$$\text{تصویر } \overrightarrow{OB} \text{ بر } Ox + \text{تصویر } \overrightarrow{OA} \text{ بر } Ox - \text{تصویر } \overrightarrow{OC} \text{ بر } Ox$$

که از آنجا بدست می‌آید :

$$OC\cdot\cos(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{Ox})=a\cos(\omega t+\alpha)+b\cos(\omega t+\beta)$$

اگرطول OC را مساوی c وزاویهٔ $(\overrightarrow{OC}\ ,\ \overrightarrow{Ox})$ رامساوی $\omega t+\gamma$ بگیریم، نتیجه می‌شود که تبدیل مطلوب همیشه ممکن است .

۶۰ . ازرابطهٔ فرض نتیجه می‌شود : $\sin\alpha\sin\beta=0$. داریم :

$$\sin^2(\alpha+\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+$$
$$+2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)+(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta=$$
$$=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha+\sin^2\beta=$$
$$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=(\sin\alpha+\sin\beta)^2$$

۶۱ . شبیه مسئلهٔ ۱۸ حل‌کنید. برای $\sin\frac{k\pi}{5}$ پنج‌مقدار بدست می‌آید:

$$\sin 0=0\ ,\ \sin\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\ ,\ \sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ ,$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\frac{\pi}{5}\quad ,\quad \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)=-\sin\frac{2\pi}{5}$$

(محاسبه‌ها راانجام دهید . مسئلهٔ ۱ راببینید). برای $\cot g\frac{k\pi}{5}$ هم پنج مقدار بدست می‌آید :

$$\cot g\,0\ ,\ \cot g\frac{\pi}{5}=\frac{1}{5}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^3}\ ,$$

$$\cot g\frac{2\pi}{5}\quad ,\quad \cot g\frac{3\pi}{5}\quad ,\quad \cot g\frac{4\pi}{5}$$

(سه مقدار اخیررا محاسبه‌کنید).

۶۲ . داریم :

$$\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\,tg\,y}=tg\,x+tg\,y$$

که ازآنجا بدست می‌آید:

$$tg\,x\,tg\,y(tg\,x+tg\,y)=0\ ,$$

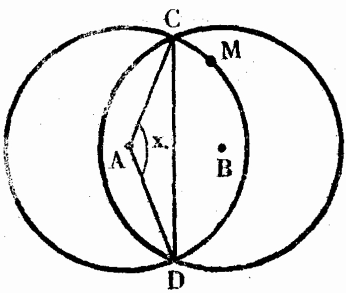
$$tg\,x=0 \implies \begin{cases} x=k\pi \\ y=\text{قوسی دلخواه} \end{cases}$$

$$tg\,y=0 \implies \begin{cases} x=\text{قوسی دلخواه} \\ y=k\pi \end{cases}$$

$$tg\,x+tg\,y=0 \implies x+y=k\pi$$

۶۳ . باتوجه به‌مساوی بودن شعاعهای دودایره ، مساحت قسمت‌مشترك دودایره رامی‌توان دوبرابرمساحت قطعهٔ CMDC دانست. اگرمساحت این قطعه راS بگیریم، داریم:

$$S=\frac{1}{2}R\left(l-\frac{CH}{2}\right) \quad (1)$$



شکل ۳۰

که درآنR شعاع هرکدام ازدودایره، l طول قوس CD و CH طول وتر قوسی است‌که دوبرابر قوس CDاست.

ازطرف دیگرداریم :

$$l=\frac{2\pi R x_0}{360}\ ,\ CH=2R\sin x_0$$

که اگردررابطهٔ(۱) قراردهیم، بدست می‌آید:

$$S=\frac{1}{2}R\left(\frac{2\pi R x_0}{360}-R\sin x_0\right)=\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{180}x_0-\sin x_0\right)$$

وچون طبق فرض‌مسئله $2S=\frac{1}{2}\pi R^2$ است، خواهیم داشت :

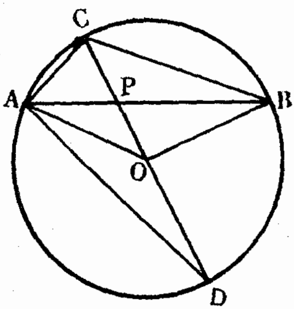
$$\frac{1}{2}\pi R^2=R^2\left(\frac{\pi}{180}x_0-\sin x_0\right) \implies \sin x_0=\frac{\pi}{180}(x_0-90)$$

۶۴ . قطر CD را که از نقطهٔ P می‌گذرد رسم می‌کنیم. در مثلثهای CAD و CBD می‌توان نوشت :

$$tg\,ADP=tg\frac{AOP}{2}=\frac{AC}{DA}\ ,\ tg\,BDP=tg\frac{BOP}{2}=\frac{BC}{DB}$$

که از آنجا بدست می‌آید :

$$tg\frac{AOP}{۲}\cdot tg\frac{BOP}{۲}=\frac{AC\cdot BC}{DA\cdot DB}$$



شکل ۳۱

اما باتوجه به‌فرض‌مسئله‌وشکل ۳۱ داریم:

$$PC=OC-OP=R-d$$

$$DP=DO+OP=R+d$$

و بنابراین $\frac{PC}{DP}=\frac{R-d}{R+d}$

برای اثبات حکم مسئله ابتدا قضیهٔ زیررا ثابت می‌کنیم .

قضیه. درچهارضلعی‌محاطی $ADBC$ ، اگردوقطریکدیگررا درنقطه‌ای مانند P قطع‌کرده باشند، رابطهٔ زیرصحیح است :

$$AC\cdot CB\cdot PD=AD\cdot DB\cdot PC$$

اثبات . دومثلث APC و DPB متشابه‌اند ومی‌توان نوشت :

$$\frac{AC}{BD}=\frac{PC}{PB} \qquad (۱)$$

همچنین ازتشابه دومثلث CPB و APD بدست می‌آید :

$$\frac{CB}{AD}=\frac{PB}{PD} \qquad (۲)$$

ازضرب دوتساوی (۱)و(۲) دریکدیگرپیدا می‌شود :

$$\frac{AC\cdot CB}{BD\cdot AD}=\frac{PC}{PD} \qquad (۳)$$

که همان تساوی حکم قضیه است .

ولی دررابطهٔ(۳) مقدارسمت چپ تساوی مساوی $tg\frac{AOP}{۲}\cdot tg\frac{BOP}{۲}$ و سمت راست‌آن مساوی $\frac{R-d}{R+d}$ است ودرنتیجه :

$$tg\frac{AOP}{۲}\cdot tg\frac{BOP}{۲}=\frac{R-d}{R+d}$$

۶۵ . ازفرض مسئله نتیجه می‌شود :

$$\sin^2\beta = \sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

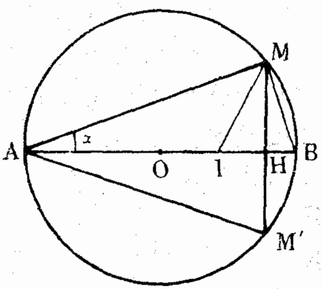
وداریم :
$$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta =$$

$$= 1 - \sin 2\alpha = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

۶۶ . اولا درمثلثهای قائم‌الزاویهٔ AMB و MHB می‌توان نوشت (شکل ۳۲):

$$AM = AB\cdot\cos\alpha = 2R\cos\alpha$$

$$MH = AM\cdot\sin\alpha = 2R\cos\alpha\sin\alpha = R\sin 2\alpha$$



شکل ۳۲

وبنابراین داریم :

$$\text{محیط مثلث } MAM' =$$

$$= 2(AM + MH) =$$

$$= 4R\cos\alpha(1 + \sin\alpha)$$

$$\text{مساحت مثلث } MAM' =$$

$$= \frac{1}{2}AM^2\cdot\sin(MAM') =$$

$$= 2R^2\sin 2\alpha\cos^2\alpha$$

ثانیاً داریم :

$$r = \frac{MM'\cdot\sin^2\frac{AMM'}{2}}{\cos\alpha} = \frac{2R\sin 2\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha} =$$

$$= 2R\sin\alpha\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = 2R\sin\alpha(1 - \sin\alpha)$$

عوامل $\sin\alpha$ و $1 - \sin\alpha$ مثبت هستند و مجموعی ثابت دارند ، بنابراین حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که این‌دوعامل برابر باشند :

$$\sin\alpha = 1 - \sin\alpha \implies \sin\alpha = \frac{1}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{6}$$

یعنی ماکزیمم r به ازای $\alpha = \frac{\pi}{6}$ بدست‌می‌آیدوآن‌وقتی‌است‌که مثلث AMM'

متساوی الاضلاع باشد .

ثالثاً داریم : $y=\overline{OI}=\overline{OB}-\overline{IB}\ ;\ \overline{IB}=\overline{IH}+\overline{HB}$

که $IH=r$ و HB ازمثلث قائم‌الزاویهٔ MHB بدست می‌آید :

$$HB=HM\,tg(HMB)=R\sin 2\alpha\, tg\alpha=2R\sin^2\alpha$$

و از آنجا : $\overline{IB}=r+2R\sin^2\alpha=$

$$=2R\sin\alpha(1-\sin\alpha)+2R\sin^2\alpha=2R\sin\alpha$$

وبنابراین مقدار y بدست می‌آید :

$$y=\overline{OI}=\overline{OB}-\overline{IB}=R-2R\sin\alpha=R(1-2\sin\alpha)$$

وقتی‌که α بسیارکوچك باشد، یعنی α بسمت صفرمیل‌کند، نقاط M و M' و I بسمت‌نقطهٔ B میل‌می‌کند ودر نتیجه: $y=\overrightarrow{OI}\to R$.

وقتی‌که α ترقی‌کند y کوچك می‌شود (مرکزهای دو دایرهٔ محیطی و محاطی بهم نزدیك می‌شوند) واگر $\alpha=\frac{\pi}{6}$ باشد $y=0$ می‌شود، یعنی‌دومرکز دایره‌های محیطی‌ومحاطی برهم‌منطبق می‌شوندومثلث متساوی‌الاضلاع می‌شود .

وقتی α از $\frac{\pi}{6}$ بیشتر باشد $\overline{OI}$ منفی می‌شود، یعنی نقطهٔ I در سمت چپ نقطهٔ O قرارمی‌گیرد. وبالاخره اگر α بسمت $\frac{\pi}{2}$ میل‌کند، نقطه‌های M و M' و I بسمت نقطهٔ A میل می‌کنند ودر نتیجه $y=\overrightarrow{OI}\to -R$.

رابعاً $\sin\alpha$ را بین‌دوتساوی $y=R(1-2\sin\alpha)$ و $r=2R\sin\alpha(1-\sin\alpha)$ حذف می‌کنیم ، پس‌ازساده‌کردن بدست می‌آید[1] :

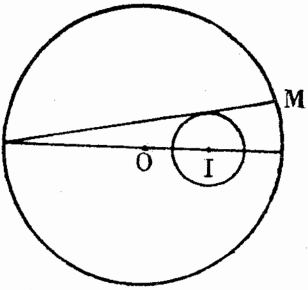
$$y=\pm\sqrt{R(R-2r)} \qquad (1)$$

باتوجه به‌رابطهٔ (۱) معلوم‌می‌شودکه y واسطهٔ هندسی بین R و $R-2r$ است وبنابراین می‌توان آنرا باروش ترسیمی بدست می‌آورد.

---

۱) باتوجه به جهت مثبت که در مسئله اختیار شده است، بسته به اینکه نقطهٔ I سمت راست‌یاچپ نقطهٔ O قرارگیرد، یکی‌ازدوعلامت + یا — راباید اختیارکرد .

حالا برای تعیین نقطهٔ M بطریق زیرعمل می‌کنیم :



شکل ۲۳

ابتدا دایرهٔ O به‌شعاع R را رسم می‌کنیم . قطعه خط $y=OI$ (فاصله دو مرکز دایره‌های محیطی و محاطی) را بر روی یکی‌ازقطرهای‌دایره از نقطهٔO جدامی‌کنیم. به‌مرکز I و به شعاع $r=l$ دایره‌ای رسم می‌کنیم (دایرهٔ محاطی داخلی). از انتهای قطر دایرهٔ O (آنجا که فاصلهٔ بیشتری تا نقطهٔ I دارد) مماسی بردایرهٔ به شعاع r رسم می‌کنیم، محل تلاقی این مماس با محیط دایره ، نقطهٔ مطلوب M است .

شرط وجود جواب اینست که مقدار زیر رادیکال در رابطهٔ (۱) مثبت باشد ، یعنی‌داشته باشیم :

$$R-۲r\geqslant ۰ \implies R\geqslant ۲r=۲l \implies l\leqslant \frac{R}{۲}$$

یعنی‌شعاع دایرهٔ محاطی داخلی باید بزرگتر از نصف شعاع دایرهٔ محیطی‌نباشد.

۶۷ . جواب: $tg\frac{x}{۲}=\pm tg\frac{a}{۲}tg\frac{b}{۲}$

۶۸ . ازرابطهٔ $cos\,x=\dfrac{۱-tg^{۲}\frac{x}{۲}}{۱+tg^{۲}\frac{x}{۲}}$ بسادگی بدست می‌آید:

$$tg\frac{x}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱-cos\,x}{۱+cos\,x}}$$

علت وجود دوجواب قرینه‌آنست‌که دوقوس قرینه، کسینوسهای مساوی دارند، درحالیکه تانژانتهای آنها قرینه‌اند.

درحالت‌خاص، جواب $tg\frac{x}{۲}=\pm tg\frac{a}{۲}\sqrt{\frac{۱+m}{۱-m}}$ بدست می‌آید .

۶۹ . ۱) اگر مخرجها را از بین ببریم و $tg^2 2x$ را به‌فاکتور بگذاریم ، بدست می‌آید :

$$tg^2 2x(1-2tg^2x+tg^4x)=4tg^2x;$$

$$tg^2 2x(1-tg^2x)^2=4tg^2x$$

جملهٔ سمت راست را بسمت چپ منتقل و تجزیه می‌کنیم :

$$[tg2x(1-tg^2x)+2tgx][tg2x(1-tg^2x)-2tgx]=0$$

عامل دوم مساوی صفر است زیرا از آن بدست می‌آید : $tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}$

که صحت آن واضح است.

۲) اگر به‌اتحاد موردنظر اتحاد زیر را اضافه کنیم :

$$2tgx\,cotgx=2$$

بدست می‌آید : $(tgx+cotgx)^2=2\left(\frac{3+cos4x}{1-cos4x}+1\right)$,

و از آنجا :

$$(tgx+cotgx)^2=\frac{8}{1-cos4x}=$$

$$=\frac{8}{1-(1-2sin^2 2x)}=\frac{4}{sin^2 2x}$$

باید جذر دوطرف مساوی باشد :

$$tgx+cotgx=\frac{2}{sin2x}$$

و این اتحاد واضح است، زیرا داریم :

$$tgx+cotgx=\frac{sin^2x+cos^2x}{sinx\,cosx}=\frac{2}{sin2x}$$

۷۰ . روابط زیر واضح است :

$$sinA+sinB=2sin\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}$$

$$sin(A+B)=2sin\frac{A+B}{2}cos\frac{A+B}{2}$$

$$cosA-cosB=-2sin\frac{A+B}{2}sin\frac{A-B}{2}$$

$$\sin(A-B)=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

وروابط مفروض مسئله به‌این صورت درمی‌آیند :

$$\cos\frac{A-B}{2}=m\cos\frac{A+B}{2}\ ,\quad \sin\frac{A+B}{2}=-n\cos\frac{A-B}{2}$$

که از آنها نتیجه می‌شود : $\quad tg\frac{A+B}{2}=-mn\ ,$

$$\sin\frac{A+B}{2}=-\frac{mn}{\sqrt{1+m^2n^2}}\ ,\quad \cos\frac{A+B}{4}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2n^2}},$$

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2n^2}}\ ,\quad \sin\frac{A-B}{2}=\sqrt{\frac{1-m^2+m^2n^2}{1+m^2n^2}},$$

$$tg\frac{A-B}{2}=\frac{\sqrt{1-m^2+m^2n^2}}{m}$$

۷۱ . باتبدیل به $tg\frac{x}{2}$ به‌معادلهٔ زیرمی‌رسیم :

$$2tg\frac{x}{2}(2tg\frac{x}{2}+1)(tg^2\frac{x}{2}-4tg\frac{x}{2}+1)=0$$

$$1)\quad tg\frac{x}{2}=0 \implies x=2k\pi$$

$$2)\quad 2tg\frac{x}{2}+1=0 \implies x=2m\pi-2\alpha \qquad (tg\alpha=\frac{1}{2})$$

$$3)\quad tg^2\frac{x}{2}-4tg\frac{x}{2}+1=0 \implies tg\frac{x}{2}=2\pm\sqrt{3}\ ,$$

$$tg\frac{x}{2}=2+\sqrt{3}=tg\frac{5\pi}{12} \implies x=2n\pi+\frac{5\pi}{6}$$

$$tg\frac{x}{2}=2-\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{12} \implies x=2p\pi+\frac{\pi}{6}$$

۷۲ . قوسهای $2x+\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}-2x$ متمم یکدیگرند وبنابراین‌معادله بصورت زیر درمی‌آید :

$$\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\sqrt{3}\cos(2x+\frac{\pi}{6})=1$$

که اگر $\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3}$ قرار دهیم ، بعد از تبدیلات ساده بدست می‌آید:

$$\sin(2x-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6} \implies x=k\pi+\frac{\pi}{6};x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۷۳ • سمت چپ تساوی را در معادلهٔ مفروض تبدیل می‌کنیم :

$$\sin^4x+\sin^2x\cos^2x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-\sin^2x\cos^2x=$$

$$=1-\frac{1}{4}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}[\frac{1}{2}(1-\cos 4x)]=\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x$$

و بنابراین معادله چنین می‌شود:

$$\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x=m\cos 4x \implies \cos 4x=\frac{7}{8m-1} ;$$

$$x=\frac{1}{2}k\pi\pm\frac{1}{4}Arccos\frac{7}{8m-1}$$

برای اینکه معادله جواب داشته باشد باید داشته باشیم :

$$-1\leqslant\frac{7}{8m-1}\leqslant 1 \implies m\leqslant-\frac{3}{4} \text{ یا } m\geqslant 1$$

۷۴ • سمت چپ معادلهٔ مفروض‌را بترتیب زیر تبدیل می‌کنیم :

$$4(\cos 3x+\cos 4x)(\cos 3x+\cos x)=$$

$$=4(2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2})(2\cos 2x\cos x)=$$

$$=\frac{4}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{7x}{2}}\left(2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{7x}{2}\right)\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\cos 2x\cos x=$$

$$=\frac{4}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{7x}{2}}\sin 7x(\sin x\cos x)\cos 2x=$$

$$=\frac{2}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{7x}{2}}\sin 7x(\sin 2x\cos 2x)=\frac{\sin 7x\sin 4x}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{7x}{2}}$$

و بنابراین معادلهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$\sin 7x\sin 4x=\sin\frac{x}{2}\sin\frac{7x}{2}$$

طرفین تساوی را به‌مجموع تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 11x) = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 4x)$$

وبالاخره بدست می‌آید : $\cos 11x = \cos 4x$

از این معادله ظاهراً دوجوات $x = \frac{2}{7}k\pi$ و $x = \frac{2}{15}k\pi$ بدست می‌آید .

جواب اول قابل‌قبول نیست وبه‌مناسبت ضرب طرفین معادله در $\sin\frac{7x}{2}$ ظاهر شده است. درمورد جواب دوم هم بایدشرط‌کرد $k \neq 15m$ (یعنی k مضربی از۱۵ نبایدباشد)، زیرا مضربهای زوج π جزوجوابهای معادله نیست. به‌این ترتیب جواب کلی معادله چنین است:

$$x = \frac{2}{15}k\pi \qquad (\text{باشرط } k \neq 15m)$$

۷۵ . باقراردادن $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ بسادگی می‌توان سمت چپ تساوی را تجزیه‌کرد :

$$(2\sin x + 1)(\sin^2 x - 2a\cos x + a - 1) = 0$$

$$(1)\quad 2\sin x + 1 = 0 \implies x = 2k\pi - \frac{\pi}{6},\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$$

$$(2)\quad \sin^2 x - 2a\cos x + a - 1 = 0 \implies \cos^2 x + 2a\cos x - a = 0,$$

$$x = 2k\pi \pm \operatorname{Arccos}(-a \pm \sqrt{a^2 + a})$$

برای اینکه ببینیم معادلهٔ (۲) به‌ازای چه مقادیری از a جواب دارد، بافرض $\cos x = t$ ، بایدریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $t^2 + 2at - a = 0$ را بادوعدد ۱ و ۱ــ مقایسه کنیم . برای وجود جواب باید $-1 \leqslant t \leqslant 1$ باشد . اگر $f(t) = t^2 + 2at - a$ فرض‌کنیم، برای‌اینکه تنها یکی ازجوابهای معادلهٔ درجه دوم مورد نظربین ۱و۱ــ قرارگیرد، باید $f(1) \cdot f(-1) < 0$ باشد:

$$f(1) \cdot f(-1) = (1 + a)(1 - 3a) < 0$$

که ازآنجا $a < -1$ ویا $a > \frac{1}{3}$ بدست می‌آید .

درحالت خاص $a = -1$ معادله ریشهٔ مضاعف $t = 1$ $(x = 2k\pi)$ و

درحالت خاص $a=\frac{1}{3}$ معادله دوجواب $t=-1$ $(x=2k\pi+\pi)$ و $t=\frac{1}{3}$ $(x=2k\pi\pm Arccos\frac{1}{3})$ راخواهد داشت .

برای اینکه درمعادلهٔ موردنظر هردو جواب بین ۱و۱ـــ قرار گیرد (باتوجه به‌مثبت بودن ضریب t^2) بایددستگاه نامعادلات زیرراحل‌کنیم :

$$\Delta\geqslant 0\ ,\ f(1)>0\ ,\ f(-1)>0\ ,\ 1-\frac{S}{2}>0\ ,\ -1-\frac{S}{2}<0$$

(منظور از S مجموع دوجواب درمعادلهٔ درجه دوم است).

$$\Delta=a^2+a\ ,\ f(1)=1+a\ ,\ f(-1)=1-3a\ ,$$

$$1-\frac{S}{2}=1+a\ ,\ -1-\frac{S}{2}=a-1$$

و بنابراین دستگاه نامعادلات چنین می‌شود:

$$\begin{cases} a^2+a\geqslant 0 \\ 1+a>0 \\ 1-3a>0 \\ a-1<0 \end{cases} \Longrightarrow 0<a<\frac{1}{3}$$

درحالت خاص $a=0$ ، معادله جواب مضاعف $t=0$ $(x=k\pi+\frac{\pi}{2})$ را خواهد داشت. به‌این‌ترتیب نتیجه می‌شود.

وقتی $a<-1$ یا $a>\frac{1}{3}$ باشد تنها یکی ازجوابهای کلی معادلهٔ(۲) قابل قبول است .

وقتی $0<\alpha\leqslant\frac{1}{3}$ باشد هردوجواب معادلهٔ (۲) قابل‌قبول است .

درحالتهای خاص $a=-1$ و $a=0$ معادلهٔ(۲) ریشهٔ مضاعف دارد.

۷۶ . اگر $\cos 2x$ رابرحسب $tg\,x$ بنویسیم، بعدازعملیات عادی به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$(1-tg^2x)^2-a^2tg^2x(1+tg^2x)^2=0$$

وبنابراین باید دومعادلهٔ زیررا حل‌کنیم :

$$1-tg^2x=\pm a\,tg\,x(1+tg^2x)$$

و یا :

$$a\,tg^3x+tg^2x+a\,tgx-1=0 \qquad (1)$$
$$a\,tg^3x-tg^2x+a\,tgx+1=0 \qquad (2)$$

برای حل این معادله‌ها باید راه حل معادلهٔ درجه سوم را دانست ولی می‌توان معلوم کرد که درمورد هریك از آنها با تغییر مقدار a چند جواب حقیقی وجود دارد. درمورد معادلهٔ (۱) بحث را انجام می‌دهیم.

با تبدیل $tgx=y-\frac{1}{3a}$ درمعادلهٔ (۱)، بدست می‌آید :

$$y^3+\frac{3a^2-1}{3a^2}y+\frac{2(1-18a^2)}{27a^3}=0$$

علامت $4p^3+27q^2$ را معین می‌کنیم :

$$4p^3+27q^2=4\left(\frac{3a^2-1}{3a^2}\right)^3+27\cdot4\left(\frac{1-18a^2}{27a^3}\right)^2=$$
$$=\frac{4}{27a^6}[(3a^2-1)^3+(1-18a^2)^2]=\frac{4}{a^4}(a^4+11a^2-1)$$

تعیین علامت عبارت دومجذوری داخل پرانتز مشکل نیست.

نتیجهٔ بحث: اگر $a\leqslant-\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$ یا $a>\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$ باشد معادلهٔ (۱) تنها یك جواب حقیقی برای tgx دارد.

اگر $-\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}\leqslant a\leqslant\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$ باشد، سه جواب معادلهٔ (۱) حقیقی است (درحالتهای تساوی یکی از جوابها مضاعف است).

توضیح . درحالت $a=0$ ظاهراً به معادله‌ای درجه دوم می‌رسیم، ولی وقتی ضریب بزرگترین درجهٔ معادله بسمت صفر میل کند، یکی از ریشه‌ها بسمت بی‌نهایت میل می‌کند ودر مورد معادلهٔ (۱) به‌ازای $a=0$ علاوه بر جوابهای $tg^2x-1=0$، جواب $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ هم قابل قبول است واگر این جواب را درمعادلهٔ صورت مسئله قراردهیم، صحت آن (به‌ازای $a=0$) تایید می‌شود.

۷۷ . معادلهٔ مفروض بسادگی بصورت زیردرمی‌آید :

$$tg\,x = -\frac{\sin\alpha - k\cos\beta}{\cos\alpha - k\sin\beta}$$

و در نتیجه :

$$x = k\pi + Arctg\frac{-\sin\alpha + k\cos\beta}{\cos\alpha - k\sin\beta}$$

۷۸ . به‌کسینوس قوس دوبرابر تبدیل می‌کنیم :

$$\cos 2x - \cos(2x + 2\alpha) = 2k$$

سمت چپ تساوی اخیررا به‌ضرب تبدیل‌می‌نمائیم :

$$\sin\alpha \cdot \sin(2x+\alpha) = k \Longrightarrow \sin(2x+\alpha) = \frac{k}{\sin\alpha},$$

$$x = k\pi - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}Arcsin\frac{k}{\sin\alpha}, \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}Arcsin\frac{k}{\sin\alpha}$$

شرط وجود جواب اینست‌که $-1 \leqslant \frac{k}{\sin\alpha} \leqslant 1$ باشد، یعنی:

$$-|\sin\alpha| \leqslant k \leqslant |\sin\alpha|$$

۷۹ . برای گویاکردن معادله، ابتدا طرفین آنرا مکعب می‌کنیم :

$$\cos^2 x + \sin^2 x + 3\sqrt[3]{\cos^2 x \sin^2 x}\left(\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\sin^2 x}\right) = m$$

بجای مقدارداخل پرانتزمی‌توان $\sqrt[3]{m}$ قرارداد :

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{4}\sin^2 2x} = \frac{m-1}{\sqrt[3]{m}} \quad ; \quad \sin^2 2x = \frac{4(m-1)^3}{27m}$$

شرط وجود جواب اینست‌که داشته باشیم :

$$0 \leqslant \frac{4(m-1)^3}{27m} \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{4(m-1)^3}{27m} \geqslant 0 \\[2ex] \dfrac{4(m-1)^3}{27m} \leqslant 1 \end{cases}$$

نامعادلهٔ دوم را ساده وحل‌می‌کنیم :

$$\frac{4(m-1)^3 - 27m}{27m} \leqslant 0$$

ریشهٔ $m=4$ برای صورت سمت‌چپ این‌نامعادله بچشم می‌خورد و بنابراین بدست می‌آید:

$$\frac{(m-4)(2m+1)^2}{27m}\leqslant 0$$

اگر $m\neq -\frac{1}{2}$ بگیریم دو نامعادلهٔ دستگاه چنین می‌شود :

$$\frac{m-1}{m}\geqslant 0 \quad , \quad \frac{m-4}{m}\leqslant 0$$

که جواب مشترك آنها $1\leqslant m\leqslant 4$ بدست می‌آید .

۸۰ . فرض می‌کنیم :

$$a=\sqrt[5]{27+5\sqrt[3]{\sin x+\sqrt{3}\cos x-1}}\ ;$$

$$b=\sqrt[5]{37-5\sqrt[3]{\sin x+\sqrt{3}\cos x-1}}$$

دراینصورت اگرطرفین این‌دوتساوی رابتوان ۵ برسانیم وسپس باهم جمع‌کنیم $a^5+b^5=64$ بدست می‌آید . طبق صورت مسئله هم $a+b=4$ است . بنابراین حل‌معادله منجربه‌حل دستگاه زیرمی‌شود :

$$\begin{cases} a^5+b^5=64 \\ a+b=4 \end{cases}$$

سمت چپ معادلهٔ اول دستگاه را تبدیل می‌کنیم :

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=$$
$$=(a+b)[(a^2+b^2)^2-ab(a^2+b^2)-a^2b^2]$$

بامجذورکردن طرفین معادلهٔ دوم دستگاه، بدست می‌آید:

$$a^2+b^2+2ab=16 \implies a^2+b^2=16-2ab$$

وبنابراین خواهیم داشت :

$$a^5+b^5=4[(16-2ab)^2-ab(16-2ab)-a^2b^2]=$$
$$=4(5a^2b^2-80ab+256)$$

که اگر $a^5+b^5=64$ قراردهیم، می‌شود :

$$a^2b^2-16ab+48=0 \implies ab=12;ab=4$$

دستگاه $a+b=4$ و $ab=12$ جواب حقیقی ندارد وجواب دستگاه $a+b=4$ و $ab=4$ عبارتست از $a=2$ و $b=2$. بنابراین مثلا از حل معادلهٔ $a=2$ ، باقراردادن مقدار a، بدست می‌آید :

$$\sqrt[5]{27+5\sqrt[5]{\sin x+\sqrt{3}\cos x-1}}=2 \implies \sin x+\sqrt{3}\cos x=2$$

(اگرمعادله $b=2$ راهم درنظر می‌گرفتیم بهمین نتیجه می‌رسیدیم). حل این معادله مشکل نیست وجواب کلی زیربدست می‌آید :

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$$

۸۱ . باتوجه به‌متمم بودن قوسهای $x-\frac{2\pi}{11}$ و $\frac{15\pi}{22}-x$ معادله بسادگی حل‌می‌شود :

$$x=2k\pi+\frac{23\pi}{66}\ ,\ \ x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{66}$$

۸۲ . باتوجه به‌شرط $(\sqrt{19})^2=4^2+(\sqrt{3})^2$، طرفین‌معادله رابر $\sqrt{19}$ تقسیم می‌کنیم و $\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{19}}$ می‌گیریم که دراینصورت $\cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{19}}$ می‌شود. معادله بعدازتبدیلات ساده به‌اینصورت درمی‌آید :

$$\sin\left(3x+\frac{4\pi}{9}+\alpha\right)=\sin 2x$$

که جوابها بسادگی بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} x=2k\pi-\frac{4\pi}{9}-\operatorname{Arcsin}\frac{4}{\sqrt{19}} \\ x=\frac{2}{5}k\pi+\frac{\pi}{9}-\frac{1}{5}\operatorname{Arcsin}\frac{4}{\sqrt{19}} \end{array}\right.$$

۸۳ . حل‌معادلهٔ مثلثاتی، منجر به‌حل معادلهٔ جبری زیرمی‌شود :

$$\frac{x+\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}-x}=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\frac{\pi}{2}-x}{x+\frac{\pi}{3}}$$

اگر $t=\frac{x+\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}-x}$ فرض کنیم، به‌معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$2t^2-(2k+1)\pi t+2=0 \qquad (1)$$

شرط وجودجواب آنست‌که معادلهٔ(۱) ریشه‌های حقیقی داشته باشد:

$$\Delta=(2k+1)^2\pi^2-16\geqslant 0$$

ازاین نامعادلهٔ جبری دو جواب $k\leqslant-\frac{\pi+4}{2\pi}$ و $k\geqslant\frac{4-\pi}{2\pi}$ بدست می‌آید، ولی باتوجه به‌اینکه k عددی است صحیح، این جوابها را می‌توان چنین نوشت :

$$k\leqslant-2\ ;\ k\geqslant 1$$

یعنی k همهٔ عددهای صحیح به‌استثنای $k=-1$ و $k=0$ رامی‌تواند اختیار کند (چون بین ۲ — و ۱ تنها دوعدد صحیح ۰ و ۱ — قراردارد).

۸۴ . اگر $3x-\frac{\pi}{8}=\alpha$ و $\frac{3\pi}{8}-x=\beta$ فرض کنیم $\alpha+3\beta=\pi$ و در نتیجه $\sin\alpha=\sin 3\beta$ می‌شودکه اگردرمعادلهٔ فرض، یعنی $\sin\alpha=2\sin\beta$ قراردهیم بدست می‌آید :

$$\sin 3\beta=2\sin\beta \implies \sin\beta(1-4\sin^2\beta)=0$$

ازاینجا β وسپس به‌کمك‌آن x بدست می‌آید ، جوابهای کلی چنین‌اند:

$$x=k\pi+\frac{3\pi}{8}\ ,\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{24}\ ,\ x=2k\pi-\frac{11\pi}{24}\ ,$$

$$x=2k\pi+\frac{13\pi}{24}\ ,\ x=2k\pi-\frac{19\pi}{24}$$

۸۵ . اگر برای سهولت کار $x-\frac{\pi}{6}=y$ فرض‌کنیم، معادله‌چنین‌می‌شود:

$$\cos(y+\frac{\pi}{2})+m\sin y+m-1=0$$

وازآنجا بافرض $m\neq 1$ بدست می‌آید : $\sin y=-1$

ازاینجا y وسپس x بدست می‌آید : $x=2k\pi-\frac{\pi}{3}$

درحالت $m=1$، معادله بیك اتحاد تبدیل می‌شود .

۸۶ . باتبدیل به $tg\frac{x}{2}$ به‌معادلهٔ درجه سوم زیرمی‌رسیم :

$$(a+1)tg^3\frac{x}{2}-(a+1)tg^2\frac{x}{2}-(a-1)tg\frac{x}{2}+a-1=0$$

که بسادگی قابل‌تجزیه است :

$$\left(tg\frac{x}{2}-1\right)\left[(a+1)tg^2\frac{x}{2}-(a-1)\right]=0\ ;$$

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ \ x=2k\pi\pm 2\,Arctg\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$$

اما با توجه به‌صورت مسأله جواب $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ در آن صدق نمی‌کند لذا نمی‌تواند جواب مسأله باشد.

جواب دوم وقتی وجود دارد که $\frac{a-1}{a+1}$ منفی نباشد، یعنی a بین ۱ — و ۱ قرار نگیرد.

۸۷ . با شرط $m\neq 1$ طرفین معادله را بر $\sin^4 x$ تقسیم می‌کنیم ، بدست می‌آید : (۱) $\quad (m-1)cotg^4 x-cotg^2 x-1=0$

که نسبت به $cotg\,x$ معادله‌ای دومجذوری وقابل‌حل است.

اگرحاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ (۱) منفی‌باشد، یعنی $-\frac{1}{m-1}<0$ یا $m>1$، برای معادلهٔ (۱) دوجواب حقیقی‌بدست می‌آید، ولی‌اگر $m<1$ باشد هرچهار ریشهٔ معادلهٔ (۱) موهومی می‌شود .

درحالت خاص $m=1$ معادلهٔ اصلی‌بصورت $\sin^2 x=0$ درمی‌آید که $x=k\pi$ جواب آنست.

۸۸ معادلهٔ مفروض باتبدیل x به $x+\pi$ تغییرنمی‌کند وبنابراین بر حسب $tg\,x$ قابل‌بیان است. کسرسمت راست معادله رامی‌توان چنین‌نوشت:

$$\frac{\cos x+\cos 3x}{\cos x-\sin x}=\frac{4\cos^2 x-2\cos x}{\cos x-\sin x}=2.\frac{2\cos^2 x-1}{1-tg x}=$$
$$=\frac{2(1+tg x)}{1+tg^2 x}$$

واگرسمت چپ‌تساوی راهم درمعادلهٔ مفروض به $tg x$ تبدیل‌کنیم، بعداز ساده‌کردن چنین خواهیم داشت :

$$tg^3 x-3tg x+2=0 \Longrightarrow (tg x-1)^2(tg x+2)=0\ ,$$
$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ x=k\pi-Arctg 2$$

با توجه به‌صورت مسأله جواب $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$، نمی‌تواند جواب مسأله باشد و جواب فقط $x=k\pi-Arctg 2$ است.

۸۹ . $\cos x=y$ می‌گیریم . روشن است‌که برای وجود جواب باید $1-2y\geqslant 0$ ، یعنی $y\leqslant\frac{1}{2}$ باشد (زیرا سمت چپ معادله مقداری غیر منفی است). اگرمعادله راگویاکنیم بدست می‌آید:

$$f(y)=(m-4)y^2+5y-1=0 \qquad (1)$$

برای وجود جواب باید $-1\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$ باشد. برای اینکه این معادله تنها یك‌جواب قابل قبول داشته باشد باید $f(-1).f(\frac{1}{2})<0$ باشد که از آنجا جواب $-2<m<10$ بدست می‌آید. برای اینکه هردوجواب قابل قبول باشد باید دستگاه نامعادلات زیر را حل‌کنیم :

$$\Delta=4m+9>0\ ;\ af(-1)=(m-4)(m-10)>0\ ;$$
$$af(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(m-4)(m+2)>0\ ;\ -1-\frac{S}{2}=\frac{-2m+13}{2(m-4)}<0;$$
$$\frac{1}{2}-\frac{S}{2}=\frac{m+1}{2(m-4)}>0$$

که ازحل‌دستگاه جوابهای $-\frac{9}{4}\leqslant m<-2$ و $m>10$ بدست می‌آید.

حالتهای خاص مربوط به‌مواردی است‌که m یکی ازعددهای -2 یا 10 رااختیارکندکه بسادگی قابل‌تحقیق است .

۹۰ . مجموع سمت چپ معادله را می‌توان بـا کمك اتحاد

$\frac{1}{\sin x}=cotg\frac{x}{2}-cotg x$ بدست آورد :

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin 2x}+\dots+\frac{1}{\sin 2^{n-1}x}=cotg\frac{x}{2}-cotg 2^{n-1}x=$$

$$=\frac{\sin\frac{2^n-1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2^{n-1}x}$$

مخرج سمت راست تساوی رادرمعادلهٔ مفروض تجزیه می‌کنیم :

$$\cos\frac{2^n-1}{2}x-\cos\frac{2^n+1}{2}x=2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2^{n-1}x$$

وبنابراین معادلهٔ مفروض به‌اینصورت درمی‌آید:

$$\sin\frac{2^n-1}{2}x-1=0 \implies x=\frac{4k+1}{2^n-1}\pi$$

۹۱ . معادلهٔ مفروض رامی‌توان چنین نوشت :

$$(4x^2+4xy+y^2)-(2x+y)\cos(x-2y)+\frac{1}{4}=0$$

بجای ۱ درصورت‌کسر $\frac{1}{4}$ مقدار $\cos^2(x-2y)+\sin^2(x-2y)$ راقرارمی‌دهیم:

$$(2x+y)^2-(2x+y)\cos(x-2y)+\frac{1}{4}\cos^2(x-2y)+$$
$$+\frac{1}{4}\sin^2(x-2y)=0$$

که بالاخره خواهدشد :

$$[(2x+y)-\frac{1}{2}\cos(x-2y)]^2+[\frac{1}{2}\sin(x-2y)]^2=0$$

وازاینجا به‌دستگاه زیرمی‌رسیم :

$$\begin{cases}2x+y-\frac{1}{2}\cos(x-2y)=0\\ \frac{1}{2}\sin(x-2y)=0\end{cases}$$

ازمعادلهٔدومدستگاه $x-2y=k\pi$ بدست‌می‌آیدکه اگردرمعادلهٔاول‌قراردهیم:

$$2x+y=\frac{1}{2}\cos(x-2y)=\frac{1}{2}\cos k\pi=+\frac{1}{2} \text{ یا } -\frac{1}{2}$$

(اگر $k=2m$ باشد $+\frac{1}{2}$ واگر $k=2m+1$ باشد $-\frac{1}{2}$ خواهد بود):

$$1)\quad \begin{cases} 2x+y=\frac{1}{2} \\ 2x-y=2m\pi \end{cases} \qquad 2)\quad \begin{cases} 2x+y=-\frac{1}{2} \\ 2x-y=(2m+1)\pi \end{cases}$$

که درهرحالت x و y بدست می‌آید .

۹۲ . باید داشته باشیم :

$$tg\,x+cotg\,x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

که ازآنجا بسادگی بدست می‌آید :

$$\sin 2x=\frac{4}{(2k+1)\pi}$$

$$\left| \begin{array}{l} x=m\pi+\frac{1}{2}Arc\sin\frac{4}{(2k+1)\pi} \\ x=m\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}Arc\sin\frac{4}{(2k+1)\pi} \end{array} \right.$$

شرط وجودجواب آنست که $-1\leqslant\frac{4}{(2k+1)\pi}\leqslant 1$ باشدکه ازآنجابسادگی بدست می‌آید $k\leqslant -2$ یا $k\geqslant 1$. یعنی k می‌تواند همهٔ عددهای صحیح‌را به‌استثنای $k=0$ و $k=-1$ اختیارکند .

۹۳ . سمت چپ تساوی رادرمعادلهٔ مفروض تبدیل می‌کنیم :

$$tg(2x+\alpha)cotg(2x-\alpha)=\frac{\sin(2x+\alpha)\cdot\cos(2x-\alpha)}{\cos(2x+\alpha)\cdot\sin(2x-\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin 4x+\sin 2\alpha}{\sin 4x-\sin 2\alpha}$$

وبنابراین معادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$\sin 4x=\frac{a+1}{a-1}\sin 2\alpha \quad ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{1}{4}Arcsin\left(\frac{a+1}{a-1}sin2\alpha\right)\\ x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}Arcsin\left(\frac{a+1}{a-1}sin2\alpha\right)\end{array}\right.$$

شرط وجود جواب اینست که $-1\leqslant\frac{a+1}{a-1}sin2\alpha\leqslant1$ باشد که می‌توان آنرا به اینصورت نوشت : $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 sin^2 2\alpha\leqslant1$

که اگر بافرض $a\neq1$ سمت چپ آنرا نسبت به a منظم کنیم :

$$(cos^2 2\alpha)a^2+2(1+sin^2 2\alpha)a+cos^2 2\alpha\geqslant0 \qquad (1)$$

جوابهای سمت چپ نامعادله نسبت به a چنین است :

$$a_1=\frac{1+sin2\alpha}{1-sin2\alpha}=tg^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)$$

$$a_2=\frac{1-sin2\alpha}{1+sin2\alpha}=cotg^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)$$

وجواب نامعادلهٔ (۱) اینست که a بین $tg^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ و $cotg^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ قرار نگیرد .

درحالت خاص $a=1$، معادلهٔ مفروض بصورت $2sin2\alpha=0$ درمی‌آید.

بنابراین اگردر این حالت $\alpha=\frac{1}{2}k\pi$ باشد معادله به‌اتحاد تبدیل می‌شود و اگر $\alpha\neq\frac{1}{2}k\pi$ باشد معادله جواب ندارد .

۹۴ . برای‌اینکه به‌معادله‌ای متجانس نسبت به $sin x$ و $cos x$ برسیم، جملهٔ‌دوم سمت‌چپ تساوی رادر sin^2x+cos^2x ضرب‌می‌کنیم ودرسمت‌راست تساوی بجای ۱ مساوی‌آن $(sin^2x+cos^2x)^2$ راقرار میدهیم. پس‌ازعملیات عادی به‌معادلهٔ زیرمی‌رسیم :

$$4sin^4x-8sin^3x\,cos x+3sin^2x\,cos^2x=0$$

جواب $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ دراین معادله صدق نمی‌کند وبنابراین می‌توان طرفین

آنرا بر $cos^4 x$ تقسیم کرد :

$$4tg^4x - 8tg^3x + 3tg^2x = 0 \Longrightarrow tg^2x(4tg^2x - 8tgx + 3) = 0;$$

$$x_1 = k\pi \;,\; x_2 = k\pi + Arctg\frac{3}{2} \;,\; x_3 = k\pi + Arctg\frac{1}{2}$$

۹۵ . روشن است‌که می‌توان نوشت :

$$cos^2 2y = 1 - sin^2 2y = 1 - \left(\frac{2tgy}{1+tg^2y}\right)^2$$

صورت معادله رامی‌توان چنین نوشت :

$$\frac{2tgy}{1+tg^2y} = \frac{a - bcosx}{\sqrt{a^2 - b^2}sinx}$$

وازآنجا ($sinx \neq 0$ است) بدست می‌آید :

$$cos^2 2y = 1 - \frac{(a - bcosx)^2}{(a^2 - b^2)sin^2x}$$

ویا :

$$(a^2 - b^2)sin^2x cos^2 2y = a^2 sin^2x - b^2 sin^2x -$$
$$- a^2 + 2abcosx - b^2cos^2x$$

که پس ازتبدیلات ساده چنین‌می‌شود :

$$(a^2 - b^2)sin^2x\, cos^2 2y + (b - acosx)^2 = 0$$

$a^2 - b^2 > 0$ است (والامعادلهٔ اصلی‌ضرایب موهومی‌پیدا می‌کند) وبنابراین به‌دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} cos2y = 0 \\ cosx = \dfrac{b}{a} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \pm Arccos\dfrac{b}{a} \\ y = \dfrac{1}{2}k\pi + \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

۹۶ . باتجزیهٔ سمت چپ معادله بدست می‌آید :

$$(sinx + cosx)(1 - \frac{1}{2}sin2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}sin2x$$

اگرطرفین این‌معادله رامجذورکنیم، پس‌ازتبدیلات لازم چنین می‌شود :

$$sin^3 2x - 5sin^2 2x + 4 = 0$$

که به‌اینصورت قابل‌تجزیه است :

$$(\sin 2x-1)(\sin^2 2x-4\sin 2x-4)=0 \quad ;$$
$$\sin 2x=1 \quad , \quad \sin 2x=2(1\pm\sqrt{2})$$

$\sin 2x=2(1+\sqrt{2})$ جواب ندارد و برای دومعادلهٔ دیگر داریم :

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4} \quad , \quad x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{1}{2}(-1)^k \arcsin 2(1-\sqrt{2})$$

۹۷ . نامساوی زیر به‌ازای همه مقادیرغیرمنفی a و b صحیح است:

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}\geqslant\frac{1}{2}(a+b)$$

یعنی جذرواسطهٔ عددی مجذورهای دوعدد غیرمنفی ازواسطه عددی خودآنها کوچکتر نیست، حالت تساوی برای وقتی‌است‌که $a=b$ باشد .

حال معادلهٔ مفروض رامی‌توان چنین نوشت :

$$\sqrt{6+\frac{1}{4}\cos y}=\sqrt{\frac{1}{2}[(1+z^2+\cot g^2 x)^2+(2-z^2+tg^2 x)^2]}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(1+z^2+\cot g^2 x+2-z^2+tg^2 x)=$$
$$=\frac{1}{2}[3+(\cot g^2 x+tg^2 x)]\geqslant\frac{5}{2}$$

ولی نا مساوی $\sqrt{6+\frac{1}{4}\cos y}>\frac{5}{2}$ ممکن نیست ، زیـرا در اینصورت باید $\cos y>1$ باشد وبرای $\sqrt{6+\frac{1}{4}\cos y}=\frac{5}{2}$ به‌دستگاه زیرمی‌رسیم :

$$\cos y=1 \quad , \quad 1+z^2+\cot g^2 x=2-z^2+tg^2 x \quad , \quad tg^2 x=1$$

معادلهٔ آخر دستگاه ازاینجابدست می‌آیدکه باید هریك‌ازدوطرف معادلهٔ دوم دستگـاه مساوی $\frac{5}{2}$ باشد. ازاینجا جوابهای زیربدست می‌آید :

$$x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4} \quad , \quad y=2k\pi \quad , \quad z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۹۸ . داریم: $2\cos[(x+a)-2a]-\sin(x+a)\cos(x+a)=2\sin 4a$

که ازآنجا بدست می‌آید:

$$2[\cos(x+a)\cos 2a+\sin(x+a)\sin 2a]-$$
$$-\sin(x+a)\cos(x+a)-4\sin 2a\cos 2a=0$$

که بسادگی قابل‌تجزیه است:

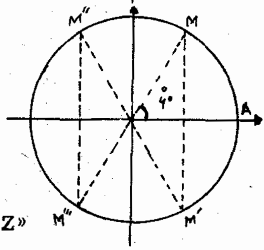
$$[\sin(x+a)-2\cos 2a][2\sin 2a-\cos(x+a)]=0$$

باحل معادلهٔ $\sin(x+a)=2\cos 2a$ بدست می‌آید:

$$x=k\pi-a+(-1)^k Arcsin(2\cos 2a)$$

برای تعیین حدود کمان a می‌توان چنین نوشت:

$$-1\leqslant 2\cos 2a\leqslant 1 \implies -\frac{1}{2}\leqslant \cos 2a\leqslant \frac{1}{2}$$



$$\text{I)}\quad 2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant 2a\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{II)}\quad 2k\pi+\frac{4\pi}{3}\leqslant 2a\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{3}$$

$$k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant a\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}\qquad «k\in z»$$

$$k\pi+\frac{2\pi}{3}\leqslant a\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6}$$

دونامساوی اخیر را می‌توان در یك نامساوی خلاصه کرد:

$$n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\leqslant a\leqslant n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\qquad «n\in z»$$

باشرط $\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{3}$

وازحل معادلهٔ $\cos(x+a)=2\sin 2a$ بدست می‌آید:

$$x=2m\pi-a\pm Arccos(2\sin 2a)$$

باشرط $\frac{1}{2}n\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{12}$

۹۹. $\cos^2\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$ و $\cos^2 2\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)$ قرار می‌دهیم و پس ازمنظم کردن طرفین معادله را در $4\sin\varphi$ ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$2\sin\varphi\cos 2\varphi+2\sin\varphi\cos 4\varphi-8\sin\varphi\cos\varphi\cos 2\varphi\cos 4\varphi=-\sin\varphi;$$
$$(\sin 3\varphi-\sin\varphi)+(\sin 5\varphi-\sin 3\varphi)-\sin 8\varphi=-\sin\varphi;$$

وبالاخره

$$\sin 8\varphi=\sin 5\varphi\qquad(1)$$

اما باید توجه کنیم‌که چون طرفین معادله را در $\sin\varphi$ ضرب کردیم، جوابهای بصورت $n\pi$ به‌آن اضافه شده است که درمعادله صدق نمی‌کنند.

ازحل معادلهٔ(۱) بدست می‌آید:

$$\text{I)}\quad 8\varphi=2k\pi+5\varphi \Longrightarrow \varphi=\frac{2}{3}k\pi\ \ (k\neq 3m)$$

$$\text{II)}\quad 8\varphi=2k\pi-5\varphi \Longrightarrow \varphi=\frac{2k+1}{13}\pi\ \ (k\neq 13m+6)$$

درجواب اول روشن‌است که برای خارج کردن مضربهای 2π باید k مضرب ۳ نباشد، درمورد این جواب می‌توان چنین نوشت:

$$\text{I)}\quad \varphi_1=2k\pi+\frac{2\pi}{3}\ ,\ \ \varphi_2=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$$

درمورد جواب دوم باید $2k+1$ مضرب ۱۳ نباشد وچون $2k+1$ عددفرد است، تنها می‌تواند مضربهای فرد ۱۳ بشود

$$2k+1=13(2m+1)\ \ ;\ \ 2k=26m+12\ \ ;\ \ k=13m+6$$

بهمین مناسبت درجواب دوم‌شرط $k\neq 13m+6$ راقراردادیم. این جواب راهم می‌توان چنین نوشت:

$$\text{II)}\quad \varphi_3=2m\pi+\frac{(2k+1)\pi}{13}(0\leqslant k<12,k\neq 6)$$

۱۰۰ . باتبدیل عوامل سمت‌چپ معادله بصورت ضرب بدست می‌آید:

$$16\cos^2\frac{x}{2}\cos^2x\cos^2\frac{3x}{2}=1$$

ودرنتیجه معادلهٔ مفروض به‌دومعادله تبدیل می‌شود:

$$1)\quad 4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2}=1\ \ ;\ \ 2\cos x(\cos x+\cos 2x)=1\ ;$$

$$2\cos x\cos 2x+1+\cos 2x=1\ \ ;\ \ \cos 2x(1+2\cos x)=0\ ;$$

$$x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ \ x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

$$2)\quad 4\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3x}{2}=-1\ ;\ \ 2\cos^2x+2\cos x\cos 2x+1=0\ \ ;$$

که بسادگی بصورت زیردرمی‌آید:

$$(\cos x+\cos 2x)^2+\sin^2 2x+\cos^2 x=0$$

که از آنجا باید داشته باشیم : $\cos x = \cos 2x = \sin 2x = 0$

که جواب ندارد .

۱۰۱ . با توجه به رابطهٔ $\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

می‌توان معادلهٔمفروض رابصورت زیر نوشت :

$$(a\cos 2x + b\cos x + c)^2 + (a\sin 2x - b\sin x)^2 = 0$$

بنابراین جوابهای معادلهٔ مفروض ازحل دستگاه زیربدست می‌آید :

$$a\sin 2x - b\sin x = 0 \quad , \quad a\cos 2x + b\cos x + c = 0$$

باحل معادلهٔ اول بدست می‌آید :

$$x_1 = 2k\pi \quad , \quad x_2 = (2k+1)\pi \quad , \quad x_3 - 2k\pi \pm Arccos\frac{b}{2a}$$

که البته برای وجود x_3 باید $|b| \leqslant |2a|$ باشد. حالا بایدببینیم چه شرایطی برای‌پارامترهای aوbوc وجودداشته‌باشد تااین‌جوابها درمعادلهٔ دوم‌دستگاه صدق‌کنند. باتبدیلات ساده‌ای معلوم می‌شود که :

۱) $a\cos 2x_1 + b\cos x_1 + c = 0$ است وقتی‌که $a+b+c=0$ باشد.

۲) $a\cos 2x_2 + b\cos x_2 + c = 0$ است وقتی‌که $a-b+c=0$ باشد.

۳) $a\cos 2x_3 + b\cos x_3 + c = 0$ است وقتی که $c = \frac{a^2 - b^2}{a}$ باشد.

بنابراین جوابها چنین‌اند :

۱) $x = 2k\pi$ (باشرط $a+b+c=0$)

۲) $x = (2k+1)\pi$ (باشرط $a-b+c=0$)

۳) $x = 2k\pi \pm Arccos\frac{b}{2a}$ (باشرط $c = \frac{a^2-b^2}{a}$ و $|b| \leqslant |2a|$)

۱۰۲ . معادلهٔ مفروض را به‌اینصورت می‌نویسیم :

$$\frac{(2\sin^2 x)^4}{2\cos^2 x} + \frac{(2\cos^2 x)^4}{2\sin^2 x} = 2$$

که بادرنظرگرفتن روابط $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ و $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

بدست می‌آید : $(1-\cos 2x)^5 + (1+\cos 2x)^5 = 2(1-\cos^2 2x)$

که پس‌ازساده‌کردن چنین می‌شود : $\cos^2 2x(5\cos^2 2x + 11) = 0$

عامل‌دوم جواب‌ندارد وجواب‌کلی $\cos 2x = 0$ عبارتست‌از $x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۰۳ . بسادگی‌معلوم می‌شودکه معادله به‌ازای $\sin x=\cos x$ برقرار است، یعنی $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ درمعادله صدق می‌کند. ثابت می‌کنیم‌که این معادله جواب‌دیگری ندارد. اولا متذکرمی‌شویم‌که $\sin x\neq 0$ و $\cos x\neq 0$. ثانیاً $\sin x$ و $\cos x$ هم‌علامت‌اند، زیرا اگرمعادله رابه‌اینصورت بنویسیم :

$$\frac{1}{\cos^m x}-\cos^n x=\frac{1}{\sin^m x}-\sin^n x$$

اگر $\cos x<0<\sin x$ باشد سمت راست معادله مثبت و سمت چپ آن منفی می‌شود؛ ووقتی $\cos x>0>\sin x$ باشدبرعکس، یعنی سمت‌راست معادله‌منفی وسمت‌چپ آن مثبت می‌شود. بنابراین $\sin x\cdot\cos x>0$ است .

اگر $\sin x<\cos x<0$ یا $0<\sin x<\cos x$ باشد، $\sin^n x<\cos^n x$ و $\frac{1}{\sin^m x}<\frac{1}{\cos^m x}$ (چون mوn عددهائی فردهستند) می‌شود ودرنتیجه بدست می‌آید :
$$\sin^n x+\frac{1}{\cos^m x}<\cos^n x+\frac{1}{\sin^m x}$$

اگر $\sin x>\cos x>0$ یا $0>\sin x>\cos x$ باشد $\sin^n x>\cos^n x$ و $\frac{1}{\sin^m x}>\frac{1}{\cos^m x}$ می‌شود و بدست می‌آید :

$$\sin^n x+\frac{1}{\cos^m x}>\cos^n x+\frac{1}{\sin^m x}$$

بنابراین ازمعادلهٔ مفروض نتیجه می‌شود $\sin x=\cos x$ وبنابراین

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

۱۰۴ . اتحاد زیرواضح است :

$$tg(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha tg\beta tg\gamma}{1-tg\alpha tg\beta-tg\beta tg\gamma-tg\gamma tg\alpha}$$

اگر $\alpha=x$، $\beta=2x$ و $\gamma=-3x$ بگیریم $\alpha+\beta+\gamma=0$ مـی‌شود و بدست می‌آید :

$$tg x+tg 2x-tg 3x=-tg x\, tg 2x\, tg 3x$$

وبنابراین معادلهٔ مفروض هم ارزمعادلهٔزیراست :

$$tg\,x\,tg\,2x\,tg\,3x = 0 \implies x = \frac{1}{3}k\pi$$

۱۰۵ . ابتدا ببینیم عبارت سمت چپ تساوی در معادلهٔ مفروض بچه شرطی معنادارد. جملهٔ اول برای مقادیری از x معنا ندارد که درمورد آنها داشته باشیم:

$$\frac{\pi}{2}cos\,x = k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$$

چون $|cos\,x| \leqslant 1$ است در اینجا k فقط عددهای ۰و۱— را می‌تواند اختیار کند وبنابراین : $cos\,x = \pm 1 \implies x = n\pi$ (۱)

جملهٔ دوم درسمت چپ تساوی ازمعادلهٔ مفروض وقتی بدون معناست که داشته باشیم:

$$\pi\,sin\,x = k\pi$$

دراینجا هم باتوجه به اینکه $|sin\,x| \leqslant 1$ است، k می‌تواند فقط عددهای ۰و۱± راااختیار کندو بنابراین :

$$sin\,x = 0, \pm 1 \implies x = \frac{n\pi}{2} \qquad (۲)$$

باتلفیق روابط(۱)و(۲) بدست می‌آید : (۳) $x \neq \frac{n\pi}{2}$

حالا برای حل معادله، آنرا چنین می‌نویسیم :

$$tg\left(\frac{\pi}{2}cos\,x\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} - \pi\,sin\,x\right)$$

که ازآنجا بالاخره بمعادلهٔ زیرمی‌رسیم :

$$2\,sin\,x + cos\,x = 2k + 1 \qquad (۴)$$

بسادگی معلوم می‌شودکه معادلهٔ(۴) تنها وقتی جواب دارد که k یکی ازدوعدد ۰و۱— باشد.

۱) اگر $k = 0$ باشد به معادلهٔ $2\,sin\,x + cos\,x = 1$ می‌رسیم که به اینصورت درمی‌آید :

$$2\,sin\frac{x}{2}\left(2\,cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$S\frac{x}{2} = 0 \implies x = 2k\pi$$

ولی این جواب باشرط(۳) نمی‌سازد وقابل قبول نیست .

$$۲\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}=۰ \Longrightarrow tg\frac{x}{۲}=۲;$$

$$x=۲k\pi+۲Arctg۲$$

۲) اگر $k=-۱$ باشد بدست می‌آید :

$$\cos\frac{x}{۲}\left(۲\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}\right)=۰$$

ولی باتوجه به‌شرط(۳)، $\cos\frac{x}{۲}\neq ۰$ است و بنابراین بدست می‌آید:

$$tg\frac{x}{۲}=-\frac{۱}{۲},\quad x=۲k\pi-۲Arctg\frac{۱}{۲}$$

۱۰۶. جواب : $\alpha=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ و $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۶}$

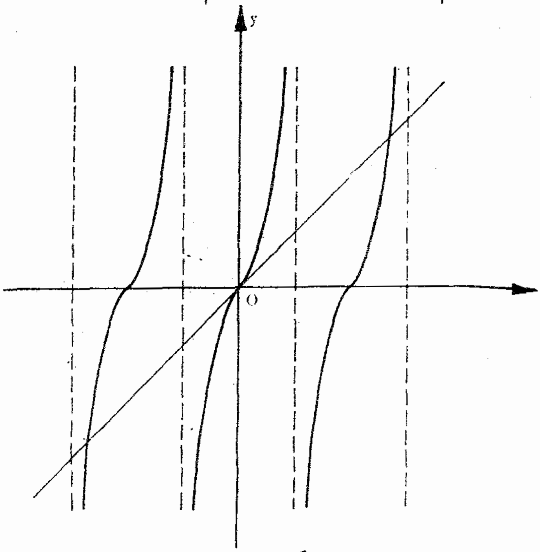
۱۰۷. $\sin x+\cos x=y$ بگیرید، معادلهٔ جبری زیر بدست‌می‌آید:

$$(y-۱)(۲y^۲+۲y-۱)=۰$$

وجوابها چنین‌اند : $x=۲k\pi\ ,\ x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲},$

$$x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\ ,\ x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\ ,\ x=(۲k+۱)\pi+\frac{\pi}{۶},$$

۱۰۸. جوابهای معادلهٔ $x-tg\,x=۰$ عبارتست ازطولهای نقاط تلاقی خط $y=x$ با منحنی $y=tg\,x$. همانطور که‌درشکل ۳۴ دیده‌می‌شود بی‌نهایت نقطهٔ‌تلاقی‌وجود دارد که در صورت لزوم می‌توان در هر فاصله‌ای آنرا بدست‌آورد. $x=۰$ جواب معادله است ومثلا درفاصله $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ جوابی



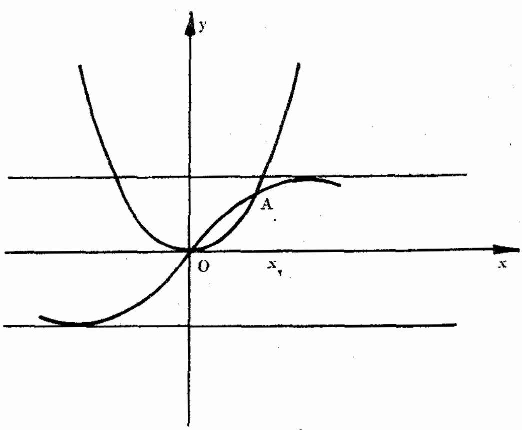
شکل ۳۴

داردکه بین $\frac{۱۷\pi}{۱۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ قرار گرفته است .

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{۱۷\pi}{۱۲} \# ۴/۴۴ \\ tg\,x = tg\,\frac{۱۷\pi}{۱۲} \# ۳/۷۳ \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x = \frac{۱۳\pi}{۹} \# ۴/۵۳ \\ tg\,x = tg\,\frac{۱۳\pi}{۹} \# ۵/۶۷ \end{array} \right.$$

و بنابراین $۴/۴۴ < x < ۴/۵۳$. روشن است کـه هر جـوابی در معادلهٔ $x - tg\,x = ۰$ صدق‌کند ، قرینهٔ آن هم در معادله صدق می‌کند.

۱۵۹ . منحنی نمایش تغییرات تـوابع $y_۱ = sin\,x$ و $y_۲ = x^۲$ را رسم می‌کنیم (شکـل ۳۵). طولهای نقاط تلاقی دومنحنی جوابهای معادلهٔ مفروض‌است: $x_۱ = ۰$; $۰ < x_۲ < ۱$. درفاصلهٔ ازصفر تا $x_۲$، منحنی‌سینوسی بالای منحنی سهمی است. بااستفاده از جدول بدست می آید :



شکل ۳۵

$$\left| \begin{array}{l} sin\,۰/۵ = ۰/۴۷۹۴ \\ ۰/۵^۲ = ۰/۲۵ \end{array} \right. ;$$

$$\left| \begin{array}{l} sin\,۰/۶ = ۰/۵۶۴۶ \\ ۰/۶^۲ = ۰/۳۶ \end{array} \right. ;$$

$$\left| \begin{array}{l} sin\,۰/۷ = ۰/۶۴۴۲ \\ ۰/۷^۲ = ۰/۴۹ \end{array} \right. ;$$

$$\left| \begin{array}{l} sin\,۰/۸ = ۰/۷۱۷۴ \\ ۰/۸^۲ = ۰/۶۴ \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} sin\,۰/۹ = ۰/۷۸۳۳ \\ ۰/۹^۲ = ۰/۸۱ \end{array} \right.$$

بنابراین $۰/۷ < x_۲ < ۰/۹$ ، یعنی $x_۲ \# ۰/۸$ (با یکدهم تقریب نقصانی) و $x_۲ \# ۰/۹$ (بایکدهم تقریب اضافی).

برای اینکه مقدار $x_۲$ را تا $۰/۰۱$ تقریب بدست آوریم ، مقادیر

$\sin 0/85$ و $0/85^2$ رامقایسه می‌کنیم: $\sin 0/85 > 0/85^2$، یعنی به‌ازای $x = 0/85$ منحنی سینوسی بالای سهمی و به‌ازای $x = 0/9$ پائین آن قرار دارد:

$$\left|\begin{array}{l}\sin 0/87 = 0/7643 \\ 0/87^2 = 0/7569\end{array}\right. \quad ; \quad \left|\begin{array}{l}\sin 0/86 = 0/7578 \\ 0/86^2 = 0/7396\end{array}\right.$$

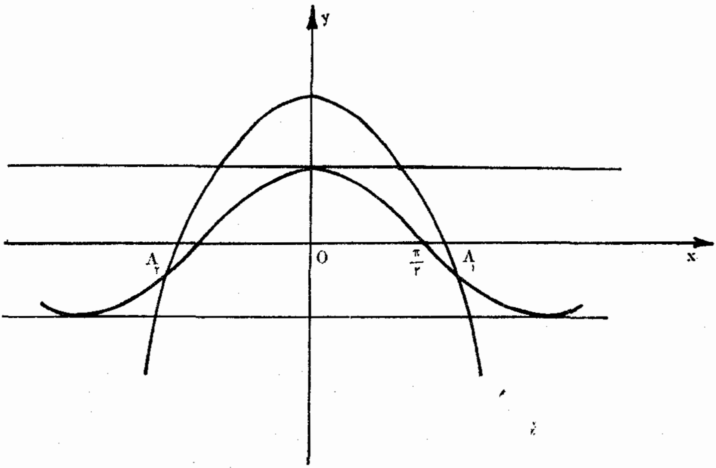
$$\left|\begin{array}{l}\sin 0/88 = 0/7707 \\ 0/88^2 = 0/7744\end{array}\right.$$

و بنابراین $0/87 < x_2 < 0/88$، یعنی $x_2 = 0/87$ (با یکصدم تقریب نقصانی) و $x_2 = 0/889$ (با یکصدم تقریب اضافی).

۱۱۰ . داریم: $\cos x = 3 - x^2$. چون $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ بدست می‌آید:

$$-1 \leqslant 3 - x^2 \leqslant 1 \implies 2 \leqslant x^2 \leqslant 4 \implies \sqrt{2} \leqslant |x| \leqslant 2$$

چون منحنی‌های $y_1 = 3 - x^2$ و $y_2 = \cos x$ (شکل ۳۶) نسبت به oy متقارن‌اند، طولهای نقاط مشترك آنها A_1 و A_2 قرینهٔ یکدیگرند. ریشهٔ مثبت x_1 را بدست می‌آوریم . می‌دانیم که $\sqrt{2} \leqslant x_1 \leqslant 2$ است . با ملاحظهٔ شکل ۳۶ معلوم می‌شود که $\frac{\pi}{2} < x_1$، زیرا به‌ازای $x = \frac{\pi}{2}$ منحنی سهمی بالای منحنی کسینوسی قرارگرفته است. به‌این ترتیب $1/57 < x_1 \leqslant 2$. حالا به‌محاسبه می‌پردازیم :



شکل ۳۶

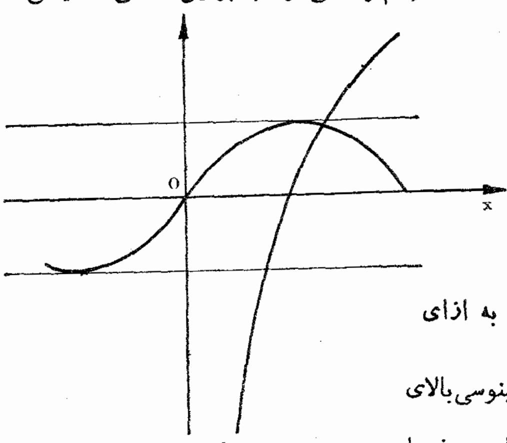
$$x=1/6 \quad \begin{cases} y_1=3-1/6^2=3-2/560=0/44 \\ y_1=\cos 1/6=-0/0292 \end{cases}$$

$$x=1/7 \quad \begin{cases} y_1=3-1/7^2=3-2/890=0/11 \\ y_2=\cos 1/7=-0/1288 \end{cases}$$

$$x=1/8 \quad \begin{cases} y_1=3-1/8^2=3-3/240=-0/24 \\ y_2=\cos 1/8=-0/2272 \end{cases}$$

بنابراین $1/7 < x_1 < 1/8$. یعنی $x_1=1/7$ (با یکدهم تقریب نقصانی)، $x_1=1/8$ (با یکدهم تقریب اضافی) و $x_2=-1/8$ (با یکدهم تقریب نقصانی) و $x_2=-1/7$ (بایکدهم تقریب اضافی).

۱۱۱ . اگر $x \geqslant 2$ باشد، $\log_2 x \geqslant 1$ می‌شود. بنابراین منحنی لگاریتمی



شکل ۳۷

ومنحنی سینوسی تنها در یك نقطهٔ A مشترك‌اند (شکل ۳۷). اگر طول این نقطه (یعنی ریشهٔ معادله) را α بگیریم، α بین $\frac{\pi}{2}$ و ۲ قرار دارد. به ازای $x=\frac{\pi}{2} \# 1/57$ منحنی سینوسی بالای منحنی لگاریتمی قرار دارد، زیرا $\sin\frac{\pi}{2}=1$ و $\log_2\frac{\pi}{2}<\log_2 2=1$، یعنی $\log_2\frac{\pi}{2}<\sin\frac{\pi}{2}$. به‌ازای $x=2$ منحنی سینوسی زیر منحنی لگاریتمی قرار می‌گیرد. واسطهٔ عددی دو عدد $\frac{\pi}{2}$ و ۲ راانتخاب می‌کنیم. داریم :

$$x=\frac{1/570+2}{2}=1/785 \quad \left| \begin{array}{l} y_1=\log_2 1/785=\dfrac{\log 1/785}{\log 2}\# 0/8 \\ y_2=\sin 1/785\# 0/9 \end{array}\right.$$

یعنی $\sin 1/785>\log_2 1/785$ وبنابراین نتیجه می‌شود $1/785<\alpha<2$
حالا مقادیر y_1 و y_2 را به‌ازای $x=1/8$ و $x=1/9$ حساب می‌کنیم .

$$x=1/8 \quad \left| \begin{array}{l} y_1=\log_2 1/8=\dfrac{\log 1/8}{\log 2}\#\dfrac{0/2553}{0/3010}\# 0/8 \\ y_2=\sin 1/8\# 0/9 \end{array}\right.$$

$$x=1/9 \quad \left| \begin{array}{l} y_1=\log_2 1/9=\dfrac{\log 1/9}{\log 2}\#\dfrac{0/2788}{0/3010}\# 0/92 \\ y_2=\sin 1/9\# 0/94 \end{array}\right.$$

وازآنجا $\alpha\# 1/9$.

۱۱۲ . برای اینکه تساوی برقرار باشد، باید $|\cos x|=1$ و $|\sin 2x|=1$ باشد، زیرا اگر مثلا $|\cos x|<1$ باشد ، $|\sin 2x|>1$ می‌شود که ممکن نیست.
بنابراین جوابهای مشترك معادله‌های دستگاه زیرجوابهای معادله است:

$$\cos x=\pm 1 \Longrightarrow x=k\pi \;;\; \sin 2x=\pm 1 \Longrightarrow x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}$$

وچون جواب مشترك ندارند ، معادله هم جواب ندارد .

۱۱۳ . بترتیب داریم : $\frac{1}{4}\cos 2x[4-3(1-\cos^2 2x)]=1$;

$$\cos 2x+3\cos^3 2x=4 \;;\; (1-\cos x)+3(1-\cos^3 2x)=0 \;;$$

$$(1-\cos 2x)(4+3\cos 2x+3\cos^2 2x)=0$$

ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم پرانتز دوم موهومی است و ریشه‌های پرانتز اول چنین است : $\cos 2x=1 \Longrightarrow x=k\pi$

۱۱۴ . باید $|\sin x|=1$ و $|\cos x|=1$ باشد؛ زیرا اگرمثلا $|\sin x|<1$ بشود، چون $\cos^6 x$ عکس $\sin^2 x$ است، $|\cos x|>1$ می‌شود که ممکن نیست:

$$\left| \begin{array}{l} \sin x=\pm 1 \Longrightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x=\pm 1 \Longrightarrow x=k\pi \end{array}\right.$$

که جواب مشترك ندارند وبنابراین معادله‌هم جواب ندارد .

۱۱۵ . معادله را می‌توان بصورت $10x^2+3\sin^2 x=0$ نوشت و مجموع دومقدار غیرمنفی وقتی‌صفر می‌شودکه هردو مساوی صفر باشند.

جواب: $x=0$

۱۱۶ . معادلهٔ مفروض‌را بترتیب می‌توان چنین نوشت :

$$m(1-\cos^3 2x)+\sin^4 2x=0\ ;$$

$$2m\sin^2 x(1+\cos 2x+\cos^2 2x)+16\sin^4 x\cos^4 x=0\ ;$$

$$2\sin^2 x[m(1+\cos 2x+\cos^2 2x)+8\sin^2 x\cos^4 x]=0$$

عامل داخل کروشه مخالف صفراست، زیرا باتوجه به‌مثبت بودن m داریم:

$$m(1+\cos 2x+\cos^2 2x)>0\ ,\quad 8\sin^2 x\cos^4 x\geqslant 0$$

وبنابراین جواب معادله همان جواب $\sin x=0$ یا $x=k\pi$ است .

۱۱۷ . معادله رابترتیب چنین می‌نویسیم :

$$\cos f(x)[m-\sin^2 f(x)]=m\ ;$$

$$m[1-\cos f(x)]+\cos f(x)\sin^2 f(x)=0\ ;$$

$$2m\sin^2\frac{f(x)}{2}+4\sin^2\frac{f(x)}{2}\cos^2\frac{f(x)}{2}\cos f(x)=0\ ;$$

$$2\sin^2\frac{f(x)}{2}[m+\Big(1+\cos f(x)\Big)\cos f(x)]=0\ ;$$

$$2\sin^2\frac{f(x)}{2}[\cos^2 f(x)+\cos f(x)+m]=0$$

$$1)\quad \sin\frac{f(x)}{2}=0 \Longrightarrow f(x)-2k\pi=0 \qquad (1)$$

جوابهای‌معادلهٔ‌جبری(۱)، باشرط‌صحیح‌بودنk، جوابهای معادلهٔ‌مفروض‌است.

$$2)\quad \cos^2 f(x)+\cos f(x)+m=0 \Longrightarrow \cos f(x)=\frac{-1\pm\sqrt{1-4m}}{2}$$

$$f(x)=2k\pi\pm \operatorname{Arccos}\frac{-1\pm\sqrt{1-4m}}{2} \qquad (2)$$

معادلهٔ جبری(۲) وقتی وجوددارد‌که داشته باشیم :

$$1-4m\geqslant 0\ ,\quad -1\leqslant\frac{-1\pm\sqrt{1-4m}}{2}\leqslant 1$$

ازنامعادلهٔ اول بدست می‌آید : $m \leqslant \frac{۱}{۴}$ وبا توجه به‌مثبت بودن m نامعادلات دوم همیشه برقراراست، زیرا بترتیب داریم :

$$a)\quad -۱ \leqslant \frac{-۱-\sqrt{۱-۴m}}{۲} \leqslant ۱\ ;\ -۲ \leqslant -۱-\sqrt{۱-۴m} \leqslant ۲;$$

$$-۱ \leqslant -\sqrt{۱-۴m} \leqslant ۳\ ;\ \sqrt{۱-۴m} \leqslant ۱\ ;\ ۱-۴m \leqslant ۱\ ;\ m > ۰$$

$$b)\quad -۱ \leqslant \frac{-۱+\sqrt{۱-۴m}}{۲} \leqslant ۱\ ;\ -۱ \leqslant \sqrt{۱-۴m} \leqslant ۳;$$

$$\sqrt{۱-۴m} \leqslant ۳\ ;\ ۱-۴m \leqslant ۹\ ;\ ۴m \geqslant -۸\ ;\ m \geqslant -۲$$

بنابراین اگر $۰ < m \leqslant \frac{۱}{۴}$ باشد ، معادلهٔ جبری(۲) وجوددارد،که جوابهای آن (بشرطی‌که وجودداشته باشد) جوابهای معادلهٔ مفروض است (k را باید عددی صحیح گرفت).

۱۱۸ . حداکثرمقدار سمت چپ تساوی مساوی ۳ وحداقل مقدارسمت راست تساوی مساوی ۳ است . بنابراین جوابهای معادله ، جوابهای مشترك معادله‌های زیراست :

$$\sin ۱۸x = ۱\ ,\ \sin ۱۰x = ۱\ ,\ \sin ۲x = ۱\ ,\ \cos ۲x = ۰$$

$$\sin ۱۸x = ۱\ ;\ ۱۸x = ۲m\pi + \frac{\pi}{۲}\ ;\ x = \frac{۱}{۹}m\pi + \frac{\pi}{۳۶}$$

$$\sin ۱۰x = ۱\ ;\ ۱۰x = ۲n\pi + \frac{\pi}{۲}\ ;\ x = \frac{۱}{۵}n\pi + \frac{\pi}{۲۰}$$

$$\sin ۲x = ۱\ ;\ ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}\ ;\ x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

$$\cos ۲x = ۰\ ;\ ۲x = p\pi + \frac{\pi}{۲}\ ;\ x = \frac{۱}{۲}p\pi + \frac{\pi}{۴}$$

وجواب مشترك آنها $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$ است،زیرااگرفرض‌کنیم: $m = ۹k + ۲$ و $n = ۵k + ۱$ و $p = ۲k$ ، همهٔ جوابها بصورت $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$ درمی‌آید.

۱۱۹ . این‌معادله جواب ندارد ، زیرا داریم :

$$2\sin^3 x \leqslant 2 \quad \text{و} \quad 5+3\cos^4 x \geqslant 5$$

۱۲۰ . داریم : $4x^4+x^6 \geqslant 0$ و $-\sin^2 5x \leqslant 0$ وبنابراین معادله وقتی برقرار است که داشته باشیم :

$$4x^4+x^6=0 \quad \text{و} \quad -\sin^2 5x=0$$

که جواب مشترك آنها تنها $x=0$ است .

۱۲۱ . روشن است که برای برقراری معادله بایدداشته باشیم :

$$\cos^2 x=\cos^2 2x=\cos^2 3x=1 \implies x=k\pi$$

۱۲۲ . این معادله جواب ندارد ، زیرا $\sin x+\sin^2 3x \leqslant 2$ است.

۱۲۳ . معادله را می‌توان چنین نوشت :

$$(\operatorname{tg} 2x+\sqrt{3})^2=-\operatorname{cotg}^2(4x-\frac{\pi}{6})$$

سمت چپ تساوی غیرمنفی وسمت راست آن غیرمثبت است، بنابراین باید داشته باشیم :

$$\operatorname{tg} 2x+\sqrt{3}=\operatorname{cotg}(4x-\frac{\pi}{6})=0 \quad ,$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x+\sqrt{3}=0 \implies x=\frac{1}{2}k\pi-\frac{\pi}{6} \\ \operatorname{cotg}(4x-\frac{\pi}{6})=0 \implies x=\frac{1}{4}m\pi+\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

دستگاه جواب ندارد ، زیرا اگر $\frac{1}{2}k\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}m\pi+\frac{\pi}{6}$ بگیریم به رابطهٔ $m=2k-\frac{4}{3}$ می‌رسیم که ممکن نیست (k و m عددهائی صحیح‌اند). بنابراین معادلهٔ مفروض جواب ندارد.

۱۲۴ . حل معادله منجر به حل دستگاه زیر می‌شود :

$$\sin\frac{x}{4}=1 \quad \text{و} \quad \cos\frac{x-2\pi}{3}=1$$

که جوابهای آنها چنین‌اند :

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{4}=1 \implies x=2(4k+1)\pi \\ \cos\frac{x-2\pi}{3}=1 \implies x=2(3n+1)\pi \end{cases}$$

دستگاه تنها وقتی جواب داردکه $4k+1=3n+1$ یا $k=\frac{3n}{4}$ باشد. اگر $n=4t$ بگیریم $k=3t$ می‌شود ودراینصورت بدست می‌آید :

$$x=2(12t+1)\pi$$

واین‌رابطه شامل همهٔ جوابهای معادلهٔ مفروض است.

۱۲۵ . داریم : $\cos 2x\leqslant 1$ و $-\cos\frac{x}{3}\leqslant 1$ ، دراینصورت بدست‌می‌آمد:

$\cos 2x-\cos\frac{x}{3}\leqslant 2$ وضمناً تساوی‌وقتی برقراراست که بطورهمزمان $\cos 2x=1$ و $-\cos\frac{x}{3}=1$ باشد. بنابراین حل‌معادلهٔ‌مفروض‌منجر به‌حل‌دستگاه‌زیرمی‌شود:

$$\begin{cases} \cos 2x=1 \\ -\cos\frac{x}{3}=1 \end{cases} \implies \begin{cases} x=k\pi \\ x=3(2n+1)\pi \end{cases}$$

اگر $k=3(2n+1)$ باشد، جوابهای معادلهٔ اول‌دستگاه به‌جوابهای معادلهٔ دوم منجرمی‌شود وبنابراین جواب دستگاه، وضمناً جوابهای معادلهٔ مفروض، چنین است :

$$x=3(2n+1)\pi$$

۱۲۶ . به‌ازای همهٔ مقادیر x داریم :

$$3^{\left|x-\frac{1}{2}\right|+2}\geqslant 9\ ,\quad -4\sin 2\pi x\geqslant -4$$

و بنابراین :

$$3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}-4\sin 2\pi x\geqslant 5$$

درنتیجه حل معادلهٔ مفروض به‌حل دستگاه زیرمنجر می‌شود :

$$\begin{cases} 3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}=9 \\ -4\sin 2\pi x=-4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ x=k+\frac{1}{4} \end{cases}$$

وبنابراین جواب دستگاه، وضمناً جواب معادلهٔ مفروض $x=\frac{1}{4}$ است .

۱۲۷ . برای اینکه $Arcsin(x^2-1)$ معنا داشته باشد ، باید $-1\leqslant x^2-1\leqslant 1$ باشدکه ازآنجا $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ و $1\leqslant x\leqslant \sqrt{3}$ بدست می‌آید . وقتی x چنین شرایطی داشته باشد، داریم :

$$2\cos(\pi x^3)\geqslant -2 \quad ; \quad \frac{6}{\pi}Arcsin(x^2-2)\geqslant -3 \quad ;$$

وبنابراین سمت چپ تساوی معادله وقتی مساوی صفرمی‌شودکه داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2\cos(\pi x^3)=-2 \\ \frac{6}{\pi}Arcsin(x^2-2)=-3 \\ x^2-2x+6=5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{2k+1} \quad (\text{عددی صحیح } k) \\ x=\pm 1 \\ x=1 \end{cases}$$

دستگاه، ودرنتیجه معادلهٔ مفروض ، تنها یك جواب دارد : $x=1$

۱۲۸ . مجموع مجذورهای دومقدار تنها وقتی‌مساوی صفراست‌که هر دوی‌آنها مساوی صفر باشد :

$$\begin{cases} \sin(\pi x)=0 \\ \log_2(x^2-2x+1)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=k \\ x=0 \text{ و } 2 \end{cases}$$

وبنابراین معادلهٔ مفروض دوجواب دارد : $x_1=0$ ، $x_2=2$.

۱۲۹ . چون $-1\leqslant \sin y\leqslant 1$ است ، بسادگی بدست می‌آید :

$$11\frac{1}{2}\leqslant 12+\frac{1}{2}\sin y\leqslant 12\frac{1}{2}$$

وحالا نامساوی زیررا ثابت می‌کنیم :

$$\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2\geqslant 12\frac{1}{2} \qquad (1)$$

چون $\sin^2\frac{\pi}{4}=\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$ ، فرض می‌کنیم $\sin^2 x=\frac{1}{2}+\alpha$ (α می‌تواند مثبت ، منفی ویاصفر باشد) وچون $0<\sin^2 x<1$ ، پس $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$ و علاوه بر آن داریم :

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{1}{2}-\alpha$$

حالا سمت چپ نامساوی(۱) چنین می‌شود :

$$\left(\frac{1}{2}+\alpha+\frac{1}{\frac{1}{2}+\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\alpha+\frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^2+2+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^2}+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2+2+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}+$$

$$=4\frac{1}{2}+2\alpha^2+\frac{\frac{1}{2}+2\alpha^2}{\left(\frac{1}{2}-\alpha^2\right)^2}$$

در حالت $\alpha=0$ حاصل این عبارت مساوی $12\frac{1}{2}$ می‌شود ودر حالت $\alpha\neq 0$، چون $\alpha^2>0$ ، بدست می‌آید :

$$4\frac{1}{2}+2\alpha^2+\frac{\frac{1}{2}+2\alpha^2}{\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)^2}>4\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=4\frac{1}{2}+8=12\frac{1}{2}$$

بنابراین سمت چپ معادلهٔ مفروض کمتر از $12\frac{1}{2}$ وسمت راست آن بیشتر از $12\frac{1}{2}$ نیست . درنتیجه جواب معادله ، جواب دستگاه زیراست :

$$\begin{cases} \cos^{۲}x=\frac{۱}{۲} \\ ۱۲+\frac{۱}{۲}\sin y=۱۲\frac{۱}{۲} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \sin y=۱ \end{cases}$$

جواب : $x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۴}$ و $y=(۴n+۱)\frac{\pi}{۲}$

۱۳۰ . معادله را می‌توان چنین نوشت :

$$۳(۱-\sin^{۲}\frac{x}{۳})+۵(۱-\sin^{۲}x)=۰ \Longrightarrow ۳\cos^{۲}\frac{x}{۳}+۵\cos^{۲}x=۰$$

و از آنجا باید جوابهای مشترك معادله های $\cos x=۰$ و $\cos\frac{x}{۳}=۰$ را بدست آورد .

جواب : $x=۲(۲k+۱)\frac{\pi}{۳}$.

۱۳۱ . داریم :

$$\sin(\frac{۲}{۳}x-\frac{\pi}{۶})\leqslant ۱ \quad و \quad -\cos(۲x+\frac{\pi}{۳})\leqslant ۱$$

پس بدست‌می‌آید: $۲\sin(\frac{۲}{۳}x-\frac{\pi}{۶})-۳\cos(۲x+\frac{\pi}{۳})\leqslant ۵$

بنابراین حل معادلهٔ مفروض ، منجر به حل دستگاه زیر می‌شود :

$$\begin{cases} \sin(\frac{۲}{۳}x-\frac{\pi}{۶})=۱ \\ \cos(۲x+\frac{\pi}{۳})=-۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=(۳k+۱)\pi \\ x=n\pi+\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

که جواب مشترك ندارند. معادلهٔ مفروض هم جواب ندارد .

۱۳۲ . $x-\frac{\pi}{۴}=y$ یا $x=\frac{\pi}{۴}+y$ می‌گیریم، دراینصورت :

$$\sin ۲x=\sin(\frac{\pi}{۲}+۲y)=\cos ۲y=\frac{۱-tg^{۲}y}{۱+tg^{۲}y}$$

که اگر درمعادلهٔ مفروض قراردهیم ، پس ازعملیات ساده چنین‌می‌شود :

$$tg^{۲}y\,(tg^{۲}y+۹)=۰\ ;\ tg\,y=۰\ ;\ y=k\pi\ ;$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

۱۳۳ . معادله را بترتیب چنین می‌نویسیم :

$۲+۲\cos ۲x\cos ۳x=\sin^{۲}۳x$,

$\sin^{۲}۳x+\cos^{۲}۳x+\sin^{۲}۲x+\cos^{۲}۲x+۲\cos ۲x\cos ۳x=\sin^{۲}۳x$,

$(\cos ۳x+\cos ۲x)^{۲}+\sin^{۲}۲x=۰$

بنابراین حل معادلهٔ مفروض منجر به حل دستگاه زیر می‌شود :

$$\cos ۳x+\cos ۲x=۰\quad ,\quad \sin ۲x=۰$$

جواب : $x=(۲k+۱)\pi$

۱۳۴ اگر بجای ۱ درسمت چپ تساوی $(\sin^{۲}۵x+\cos^{۲}۵x)^{۲}$ قرار دهیم، پس‌ازعملیات ساده بهمعادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$(\cos^{۲}۵x+\cos x)^{۲}+\frac{۱}{۴}\sin^{۲}۱۰x=۰\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}\cos^{۲}۵x+\cos x=۰\\ \sin ۱۰x=۰\end{cases}$$

جوابهای معادلهٔ دوم دستگاه $x=\frac{۱}{۱۰}n\pi$ است که باید ببینیم به ازای چه مقادیری از n درمعادلهٔ اول صدق می‌کند اگر $x=\frac{۱}{۱۰}n\pi$ را در معادلهٔ اول دستگاه قراردهیم بدست می‌آید :

$$\cos^{۲}(\frac{۱}{۲}n\pi)+\cos(\frac{۱}{۱۰}n\pi)=۰$$

در حالتی‌که $n=۲m+۱$ عددی فردباشد $\cos(\frac{۱}{۲}n\pi)=۰$ می‌شود و باید داشته باشیم :

$$\cos(\frac{۱}{۱۰}n\pi)=\cos\frac{\pi}{۲}\implies n=۲(۵k+۲)+۱=۵(۲k+۱)$$

پس‌وقتی $n=۵(۲k+۱)$ باشد $x=\frac{۱}{۱۰}n\pi$ درمعادلهٔ‌اول‌دستگاه‌صدق‌می‌کند:

$$x_{۱}=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$$

در حالتی که $n=۲m$ عددی زوج باشد $\cos^۲(\frac{۱}{۲}n\pi)=۱$ می‌شود و باید داشته باشیم:

$$\cos(\frac{۱}{۱۰}n\pi)=-۱=\cos\pi \implies n=۲(۱۰k+۵)=۱۰(۲k+۱)$$

که اگر در $x=\frac{۱}{۱۰}n\pi$ قراردهیم، جواب دوم بدست می‌آید:

$$x_۲=(۲k+۱)\pi$$

۱۳۵ . سمت چپ تساوی را تبدیل می‌کنیم:

$$(\sin^۲x+\cos^۲x)^۳-۳\sin^۲x\cos^۲x(\sin^۲x+\cos^۲x)+$$
$$+(\sin^۲x+\cos^۲x)^۲-۲\sin^۲x\cos^۲x+\sin\frac{x}{۲}=۲-۵\sin^۲x\cos^۲x+$$
$$+\sin\frac{x}{۲}=۲-\frac{۵}{۴}\sin^۲۲x+\sin\frac{x}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$\sin\frac{x}{۲}=۱+\frac{۵}{۴}\sin^۲۲x$$

از طرف دیگر داریم: $\sin\frac{x}{۲}\leqslant ۱$ و $۱+\frac{۵}{۴}\sin^۲۲x\geqslant ۱$ وبنابراین حل معادله منجر به‌حل دستگاه زیرمی‌شود:

$$\begin{cases}\sin\frac{x}{۲}=۱\\ \sin ۲x=۰\end{cases} \implies \left|\begin{array}{l} x=(۴k+۱)\pi \\ x=\frac{۱}{۲}n\pi\end{array}\right.$$

وقتی که $n=۲(۴k+۱)$ باشد، جواب دوم به جواب اول تبدیل می‌شود وبنابراین جواب کلی معادله چنین است:

$$x=(۴k+۱)\pi$$

۱۳۶ . معادله رابترتیب چنین می‌نویسیم:

$$۲+۴\sin^۲\frac{x}{۲}(۱-\sin^۲x)+۵\sin^۲\frac{x}{۲}=۸\sin^۲\frac{x}{۲}(۱-\cos^۲۵x);$$

$$۲+۸\sin^۲\frac{x}{۲}\cos^۲۵x=-\sin^۲\frac{x}{۲}(۱-۴\sin^۲x);$$

$$۲+۸\sin^۲\frac{x}{۲}\cos^۲۵x=-\frac{۱}{۲}(۱-\cos x)(۲\cos۲x-۱);$$

$$۲+۸\sin^۲\frac{x}{۲}\cos^۲۵x=\frac{۱}{۲}(۱+\cos۳x-۲\cos۲x)$$

حداکثرسمت راست تساوی مساوی ۲ وحداقل سمت چپ تساوی مساوی ۲ می‌باشد، ولی‌این حداقل به‌ازای $\sin\frac{x}{۲}=۰$ یا $\cos۵x=۰$ بدست‌می‌آید که درهیچیك ازاین دوحالت سمت راست تساوی به‌حداکثرخود نمی‌رسد .

معادله جواب ندارد .

۱۳۷ . معادله را بترتیب چنین می‌نویسیم :

$$۴+\sin^۲x-\sin^۲x\sin^۲۲x-۵\sin^۲x+۵\sin^۲x\cos^۲y=۰\ ,$$
$$۴(۱-\sin^۲x)\quad ۴\sin^۴x\cos^۲x+۵\sin^۲x\cos^۲y=۰\ ,$$
$$۴\cos^۲x(۱-\sin^۴x)+۵\sin^۲x\cos^۲y=۰\ ,$$
$$۴\cos^۴x(۱+\sin^۲x)+۵\sin^۲x\cos^۲y=۰\ ,$$

مجموع دومقدار غیرمنفی وقتی صفراست‌که هرکدام مساوی صفرباشد. ازجملهٔ اول فقط $\cos x$ می‌تواند مساوی صفرشودکه دراینصورت باید بناچار $\cos y$ از جملهٔ دوم مساوی صفرشود. جواب چنین است :

$$x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ \text{و}\ y=n\pi+\frac{\pi}{۲}$$

۱۳۸ طرف دوم را بصورت ضرب تبدیل کنید ؛ معادلهٔ مفروض با عملیات ساده چنین می‌شود :

$$۲(\cos^۲x-\cos^۲y)^۲+(۲\cos x\cos y-۱)^۲=۰$$

بنابراین حل‌معادلهٔ مفروض منجر به‌حل دودستگاه زیرمی‌شود :

$$\begin{cases}\cos x=\cos y\\ ۲\cos x\cos y=۱\end{cases}\ ;\qquad \begin{cases}\cos x=-\cos y\\ ۲\cos x\cos y=۱\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \\ y_1 = 4k' - k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2 = k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \\ y_2 = 4k' + k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

(k و k' مستقل ازیکدیگرمی‌توانند هرعدد صحیح دلخواه باشند).

۱۳۹ . اگر $Arcsin(x+y-2)=\alpha$ و $Arcsin(xz-2)=\beta$ و $Arccos(yz-7)=\gamma$ فرض‌کنیم، طبق تعریف توابع معکوس مثلثاتی (فصل مربوطه را ببینید) داریم :

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2} ; \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2} ; \quad 0\leqslant\gamma\leqslant\pi$$

ازجمع این‌سه رابطه بدست می‌آید :

$$-\pi\leqslant\alpha+\beta+\gamma\leqslant2\pi$$

وچون طبق‌صورت مسئله باید $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ شود، بنابراین باید داشته باشیم :

$$\alpha=\frac{\pi}{2} ; \quad \beta=\frac{\pi}{2} ; \quad \gamma=\pi$$

$$Arcsin(x+y-2)=\frac{\pi}{2} \implies x+y-2=sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$Arcsin(xz-2)=\frac{\pi}{2} \implies xz-2=sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$Arccos(yz-7)=\pi \implies yz-7=cos\pi=-1$$

وبنابراین حل‌معادلهٔ مفروض منجر به‌حل دستگاه جبری زیرمی‌شود :

$$x+y=3 ; \quad xz \quad 3 ; \quad yz=6$$

که ازحل آن $x=1$ ، $y=2$ ، $z=3$ بدست می‌آید .

۱۴۰ . بترتیب داریم :

$$(sin\,x+cos\,x)^2-(sin\,x+cos\,x)=0 ,$$

$$(sin\,x+cos\,x)(sin\,x+cos\,x-1)=0 ,$$

$$sin\,x+cos\,x=0 \implies x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$\sin x+\cos x-1=0 \implies x=2k\pi \ , \quad x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۱۴۱ . سمت راست تساوی را درمعادلهٔ مفروض تبدیل می‌کنیم :

$$tg\,x+cotg\,x=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}=\frac{-2}{\cos(\frac{\pi}{2}+2x)}=$$

$$=\frac{-2}{1-2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})}$$

وازآنجا به‌معادلهٔ زیرمی‌رسیم :

$$\sin^2(x+\frac{\pi}{4})=1 \implies x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

۱۴۲ . معادلهٔ مفروض بسادگی به اینصورت درمی‌آید :

$$(tg2x+cotg2x)^2+2(tg2x+cotg2x)-8=0$$

که نسبت به $(tg2x+cotg2x)$ ازدرجهٔ دوم است وداریم :

$$tg2x+cotg2x=2 \ , \quad tg2x+cotg2x=-4$$

$$1)\ \ tg2x+cotg2x=2 \ ; \ tg^2 2x-2tg2x+1=0 \ ;$$

$$(tg2x-1)^2=0 \ ; \ tg2x=1 \ ; \ x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{8}$$

$$2)\ \ tg2x+cotg2x=-4 \ ; \ tg^2 2x+4tg2x+1=0 \ ;$$

$$tg2x=-(2-\sqrt{3})=tg(-\frac{\pi}{12}) \ ; \ x=\frac{1}{2}k\pi-\frac{\pi}{24}$$

$$tg2x=-(2+\sqrt{3})=tg(-\frac{5\pi}{12}) \ ; \ x=\frac{1}{2}k\pi-\frac{5\pi}{24}$$

۱۴۳ . معادلهٔ مفروض بصورت معادلهٔ درجه دوم زیر درمی‌آید :

$$5(\sin x-\cos x)^2-16(\sin x-\cos x)+3=0 \ ;$$

وازآنجا : $\sin x-\cos x=3 \ , \ \frac{1}{5}$

$\sin x-\cos x=3$ جواب ندارد ، زیرا به معادلهٔ $\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

تبدیل می‌شود . جوابهای $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$ چنین است

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \pm Arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$$

۱۴۴ . معادله را بعداز تبدیلات ساده می‌توان چنین نوشت :

$$\sin^2(2\pi x) + 2\sin(2\pi x) - 2 = 0 \implies \sin(2\pi x) = -1 \pm \sqrt{3}$$

$\sin(2\pi x) = -1 - \sqrt{3}$ قابل‌قبول نیست و برای $\sin(2\pi x) = \sqrt{3} - 1$ بدست می‌آید :

$$x = k + \frac{1}{2\pi} Arcsin(\sqrt{3} - 1) \quad , \quad x = k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} Arcsin(\sqrt{3} - 1)$$

۱۴۵ . $\sqrt{\sin x + \cos x} = y$ بگیرید، به‌معادلهٔ معکوسهٔ زیر می‌رسید:

$$y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 = 0$$

که تنها یك جواب $y = 1$ (ریشه تکراری ازمرتبهٔ چهارم) دارد :

$$x_1 = 2k\pi \quad , \quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۱۴۶ ازاین اتحاد برای تبدیل سمت چپ تساوی استفاده‌کنید :

$$a^{10} + b^{10} = (a^2 + b^2)^5 - 5a^2b^2(a^6 + b^6) - 10a^4b^4(a^2 + b^2)$$

جواب باشرط $\frac{1}{16} < a < 1$ چنین است :

$$x = k\pi + \frac{\pi}{6} \pm Arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{2\sqrt{\frac{1+4a}{5}} - 1}\right)}$$

۱۴۷ . روشن است‌که باید $m > 0$ باشد. معادله راگویا می‌کنیم، بعد از تبدیلات ساده به‌معادلهٔ درجه دوم‌زیر، نسبت‌به $\sin x + \cos x$، می‌رسیم :

$$(\sin x + \cos x)^2 + 2m^2(\sin x + \cos x) - (m^4 + 2) = 0$$

می‌دانیم‌که $-\sqrt{2} \leqslant \sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$ است. $\sin x + \cos x = y$ می‌گیریم:

$$f(y) = y^2 + 2m^2 y - (m^4 + 2) = 0 \qquad (1)$$

باتوجه به‌اینکه $f(-\sqrt{2}) = -m^2(m^2 + 2\sqrt{2})$ همیشه‌منفی‌است، همیشه یکی‌ازریشه‌ها از $-\sqrt{2}$ کوچکتراست وبنابراین هرگز هردوجواب‌معادلهٔ (۱) قابل قبول نیست .

برای اینکه یکی ازجوابها قابل‌قبول باشدباید $f(\sqrt{2})\geqslant 0$ شود:

$$f(\sqrt{2})=m^2(2\sqrt{2}-m^2)\geqslant 0 \implies 0<m\leqslant\sqrt[4]{8}$$

بااین شرط، معادلهٔ مفروض دارای جواب‌کلی زیرمی‌شود :

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm Arccos\left(\sqrt{m^4-1}-\frac{\sqrt{2}}{2}m^2\right)$$

درحالت خاص $m=\sqrt[4]{8}$ جواب $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ بدست می‌آید .

۱۴۸ . $sin\,2x=y$ می‌گیریم $(y\neq 0)$، معادلهٔ مفروض به‌اینصورت در می‌آید :

$$y^2-(a^2-5)y+4(a+2)=0 \qquad (1)$$

برای‌اینکه ببینیم، معادلهٔ(۱) به‌ازای چه‌مقادیری از a جواب داردباید ریشه‌های آنرا با ۱و۱ — مقایسه‌کنیم . معلوم می‌شود :

۱) اگر $a>2+3\sqrt{2}$ یا $a<2-3\sqrt{2}$ باشد، یکی‌ازریشه‌های معادله قابل قبول است .

۲) اگر $2-3\sqrt{2}<a<1-2\sqrt{2}$ باشدهردوجواب‌قابل‌قبول‌است.

یادآوری . مبین معادلهٔ درجه دوم(۱) نسبت به a ازدرجه چهارم ولی قابل تجزیه است :

$$\Delta=a^4-10a^2-16a-7=(a+1)^2(a^2-2a-7)$$

حالتهای خاص . به‌ازای $a=2-3\sqrt{2}$ بدست می‌آید :

$$x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{1}{2}Arcsin\,4(4-3\sqrt{2}) \ , \ x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

به ازای $a=2+3\sqrt{2}$; $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

به ازای $a=1-2\sqrt{2}$ (ریشهٔ مضاعف):

$$x=k\pi+Arcsin\,2(1-\sqrt{2}) \ , \ x=k\pi+\frac{\pi}{2}-Arcsin\,2(1-\sqrt{2})$$

۱۴۹ . داریم:

$$sin^{10}x+cos^{10}x=(sin^2x)^5+(cos^2x)^5=$$
$$=(sin^2x+cos^2x)(sin^8x-sin^6x\,cos^2x+sin^4x\,cos^4x-$$
$$-sin^2x\,cos^6x+cos^8x)=(sin^4x+cos^4x)^2-sin^4x\,cos^4x-$$

$$-\sin^2 x\cos^2 x(\sin^4 x+\cos^4 x)=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-$$

$$-\sin^4 x\cos^4 x-\sin^2 x\cos^2 x(1-2\sin^2 x\cos^2 x)=\frac{5}{16}\sin^4 2x-$$

$$-\frac{5}{4}\sin^2 2x+1$$

ازطرف دیگرداریم :

$$\cos^4 2x=(1-\sin^2 2x)^2=\sin^4 2x-2\sin^2 2x+1$$

وبنابراین معادلهٔ مفروض ، بعداز تبدیلات ساده ، چنین می‌شود :

$$24\sin^4 2x-38\sin^2 2x+13=0 \implies \sin 2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=k_1\pi\pm\frac{\pi}{8},\ x=k_2\pi+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{8}$$

که می‌توان دوجواب کلی‌را بصورت زیر نوشت : $x=\frac{1}{4}k\pi+\frac{\pi}{8}$

۱۵۰ . باید داشته باشیم :

$$2\pi \operatorname{Arctg} x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \implies x=tg(k+\frac{1}{4})$$

که درآن k عددی است صحیح (مثبت ، منفی یاصفر).

۱۵۱ . معادله بسهولت بصورت زیر درمی‌آید :

$$[x-\cos(xy)]^2+\sin^2(xy)=0$$

که ازآنجا به‌جوابهای زیرمی‌رسیم :

$$x_1=1\ ,\ y_1=2m\pi \quad ; \quad x_2=-1\ ,\ y_2=-(2m+1)\pi$$

۱۵۲ . جواب $x=\frac{1}{2}k\pi$ از صورت معادله بچشم می‌خورد . ثابت می‌کنیم که‌معادلهٔ‌مفروض‌جواب دیگری‌ندارد. اگر $y=(\sin x)^{500}+(\cos x)^{500}$ فرض‌کنیم داریم :

$$y'=500\sin x\cos x[(\sin x)^{249}-(\cos x)^{249}][(\sin x)^{249}+(\cos x)^{249}]$$

وروشن است‌که y' تنها وقتی صفرمی‌شودکه داشته باشیم :

$$\sin 2x(\sin^2 x-\cos^2 x)=0$$

$$1)\quad \sin 2x = 0 \implies x = \frac{1}{2}k\pi$$

$$2)\quad \sin^2 x - \cos^2 x = 0 \implies x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

به ازای $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ مقدار y چنین می‌شود :

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{250} + \left(\frac{1}{2}\right)^{250} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{250} = \left(\frac{1}{2}\right)^{249} < 1$$

وبه‌ازای $x = \frac{1}{2}k\pi$ مقدار $y = 1$ بدست می‌آید . بنابراین خط $y = 1$ تنها درنقطه‌های بطول $x = \frac{1}{2}k\pi$ بامنحنی $y = (\sin x)^{500} + (\cos x)^{500}$ نقطهٔ مشترك دارد (دراین نقطه‌ها برمنحنی مماس است). درحقیقت این نقطه ماکزیممهای منحنی‌راتشکیل می‌دهند، به‌این‌ترتیب جواب معادلهٔ مفروض‌همان $x = \frac{1}{2}k\pi$ است .

۱۵۳ . معادله بصورت زیر درمی‌آید :

$$100\sin^2 x - 20001\sin x + 200 = 0$$

جواب قابل قبول این معادلهٔ $\sin x = \frac{1}{100}$ است. باتوجه به‌کوچك بودن مقدار سینوس، می‌توان قوس x رابرحسب رادیان مساوی ۰٫۰۱ گرفت واندازهٔ آن برحسب گراد چنین می‌شود :

$$\text{اندازهٔ } x \text{ برحسب گراد} = \frac{0{,}01 \times 200}{\pi} \# 0{,}63 (34'50'')$$

۱۵۴ . معادله را برحسب $\cos x$ می‌نویسیم ، بدست می‌آید :

$$f(\cos x) = m\cos^2 x - (2m-1)\cos x - (m+1) = 0$$

با شرط $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ باید $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x \leqslant 1$ باشد . چون $af(1) = -2m^2$ همیشه منفی است، بنابراین هرگز هر دو جواب معادله قابل قبول نیست . برای اینکه تنها یك جواب قابل‌قبول داشته باشیم ، باید

$f(1)f(\frac{\sqrt{2}}{2})<0$ باشد .

$$f(1)\cdot f\frac{(\sqrt{2})}{2}=m[(2\sqrt{2}+1)m+(2-\sqrt{2})]<0$$

که از آنجا جواب $-\frac{5\sqrt{2}-6}{7}<m<0$ بدست می‌آید .

$m=0$ می‌تواند باشد ، چون دراین حالت $\cos x=1$ می‌شود .

۱۵۵ . برای‌اینکه تابع مفروض‌حقیقی باشد باید $4\cos^2 2x-3\geqslant 0$ شود. بترتیب داریم : $4\cos^2 2x-3=2(1+\cos 4x)-3=$

$$=2\cos 4x-1\geqslant 0\quad ;\quad 1\geqslant\cos 4x\geqslant\frac{1}{2}\ ;$$

$$2k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant 4x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{1}{2}k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{12}$$

۱۵۶ . جواب : $2k\pi+\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

۱۵۷ . قوسهای $x+30^\circ$ و $60^\circ-x$ متمم یکدیگرند وبنابراین نامعادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$2\cos^2(x+\frac{\pi}{6})-3\cos(x+\frac{\pi}{6})+1>0$$

و یا : $\left[1-\cos(x+\frac{\pi}{6})\right]\left[1-2\cos(x+\frac{\pi}{6})\right]>0$

عامل اول سمت چپ همیشه مثبت است وبنابراین بایدداشته باشیم :

$$1-2\cos(x+\frac{\pi}{6})>0\implies\cos(x+\frac{\pi}{6})<\frac{1}{2}$$

که از آنجا جوابهای زیربدست می‌آید :

$$2k\pi+\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$$

۱۵۸ . باتبدیلات ساده می‌توان به‌نامعادلهٔ زیررسید :

$$\cos 4x\sin 3x\sin x<0\qquad(1)$$

اگر دورهٔ تناوب $\cos 4x$ را T_1، $\sin 3x$ را T_2 و $\sin x$ را T_1 فرض کنیم ، داریم :

$$T_1=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \text{ و } T_2=\frac{2\pi}{3} \text{ و } T_3=2\pi$$

یعنی $4T_1=3T_2=T_3=2\pi$. ازاینجا دیده می‌شود که دورهٔ تناوب تابع

$$f(x)=\cos 4x \sin 3x \sin x$$

برابراست با 2π . به‌این‌ترتیب کافی‌است جوابهای خاص نامعادلهٔ مفروض‌را درفاصلهٔ $(0, 2\pi)$ بدست آوریم :

۱) به‌کمك محاسبه : جوابهای هریك ازعوامل‌سمت چپ نامعادلهٔ(۱) رادرفاصلهٔ 0 و 2π بدست می‌آوریم ودریك جدول علامت حاصلضرب آنها را درفواصل مختلف معین می‌کنیم .

$$\cos 4x=0 \quad ; \quad x=\frac{1}{4}k\pi+\frac{\pi}{8} \quad ; \quad x=\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$$

$$\sin 3x=0 \quad ; \quad x=\frac{1}{3}k\pi \quad ; \quad x=\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$\sin x=0 \quad ; \quad x=k\pi \quad ; \quad x=\pi$$

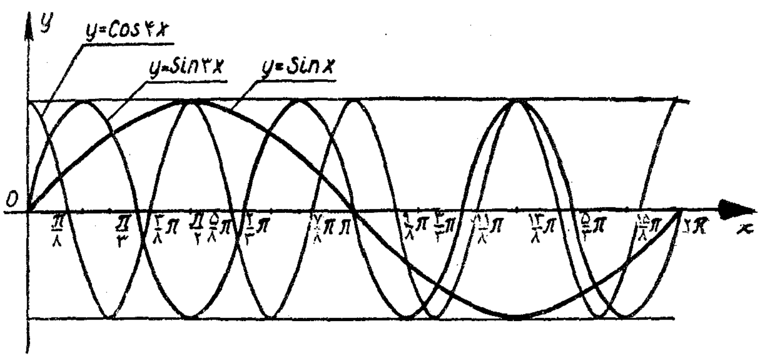
x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{8}$		π		$\frac{9\pi}{8}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{8}$		$\frac{13\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{15\pi}{8}$		2π
$\cos 4x$		+	0	−		−	0	+	0	−		−	0	+		+	0	−		−	0	+	0	−		−	0	+	
$\sin 3x$		+		+	0	−		−		−	0	+		+	0	−		−	0	+		+		+	0	−		−	
$\sin x$		+		+		+		+		+		+		+	0	−		−		−		−		−		−		−	
$f(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

ازجدول دیده می‌شود که فواصل منفی برای $f(x)$ عبارتند از :

$$\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}\right) ; \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right) ; \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{8}\right) ; \left(\frac{9\pi}{8}, \frac{4\pi}{3}\right) ;$$

$$\left(\frac{۱۱\pi}{۸}\,,\,\frac{۱۳\pi}{۸}\right)\,;\,\left(\frac{۵\pi}{۳}\,,\,\frac{۱۵\pi}{۸}\right)$$

۲) به کمک رسم منحنی ، منحنی هر یک از توابع $y=\cos ۴x$ ، $y=\sin ۳x$ و $y=\sin x$ را روی یک دستگاه محورهای مختصات، درفاصلهٔ ۰ و ۲π ، رسم می‌کنیم (شکل ۳۸):



شکل ۳۸

در شکل دیده می‌شود که وقتی $۰<x<\pi$ باشد $\sin x>۰$ می‌شود و نامعادله وقتی برقرار است‌که $\cos ۴x$ و $\sin ۳x$ علامتهای مختلفی داشته‌باشند (منحنی نمایش یکی از آنها بالا و دیگری پائین محور ox باشد). چنین فواصلی عبارتند از $\left(\frac{\pi}{۸}\,,\,\frac{\pi}{۳}\right)$ ، $\left(\frac{۳\pi}{۸}\,,\,\frac{۵\pi}{۸}\right)$ و $\left(\frac{۲\pi}{۳}\,,\,\frac{۷\pi}{۸}\right)$. وقتی که $\pi<x<۲\pi$ باشد $\sin x<۰$ است وبنابراین نامعادلهٔ مفروض وقتی برقرار است‌که $\cos ۴x$ و $\sin ۳x$ هم علامت باشند (یعنی منحنی نمایش آنها یاهردو دربالا ویا هردو درپائین محور ox قرار گیرد). چنین فواصلی عبارتند از

$$\left(\frac{۹\pi}{۸}\,,\,\frac{۴\pi}{۳}\right)\text{،}\left(\frac{۱۱\pi}{۸}\,,\,\frac{۱۳\pi}{۸}\right)\text{ و }\left(\frac{۵\pi}{۳}\,,\,\frac{۱۵\pi}{۸}\right).$$

جوابهای کلی نامعادلهٔ(۱) چنین‌اند :

$$۲k\pi+\frac{\pi}{۸}<x<۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \quad ; \quad ۲k\pi+\frac{۳\pi}{۸}<x<۲k\pi+\frac{۵\pi}{۸}$$

$$۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}<x<۲k\pi+\frac{۷\pi}{۸} \quad ; \quad ۲k\pi+\frac{۹\pi}{۸}<x<۲k\pi+\frac{۴\pi}{۳}$$

$$۲k\pi+\frac{۱۱\pi}{۸}<x<۲k\pi+\frac{۱۳\pi}{۸} ; \quad ۲k\pi+\frac{۵\pi}{۳}<x<۲k\pi+\frac{۱۵\pi}{۸}$$

۱۵۹ . طرفین معادله‌را بر $cos^{۲}x>۰$ تقسیم می‌کنیم ، بدست‌می‌آید.

$$۷tg^{۲}x-۸tgx+۱<۰ \implies \frac{۱}{۷}<tgx<۱$$

جواب : $k\pi+Arctg\frac{۱}{۷}<x<k\pi+\frac{\pi}{۴}$

۱۶۰ . هردوطرف نامعادله مقادیری مثبت هستند، بنابراین‌بالگاریتم گرفتن ازطرفین به نامعادله‌ای هم‌ارز باآن می‌رسیم :

$$cosx\cdot log۳<\frac{۱}{۲}log۳ \implies cosx<\frac{۱}{۲}$$

جواب : $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}<x<۲k\pi+\frac{۵\pi}{۳}$

۱۶۱ . جواب : $۲k\pi-\frac{\pi}{۶}<x<۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

۱۶۲ . جواب : $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}<x<۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$

$$۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴}<x<۲k\pi+\frac{۵\pi}{۳}$$

۱۶۳ . جواب : $\frac{۱}{۲}k\pi+\frac{\pi}{۸}<x<\frac{۱}{۲}k\pi+\frac{۳\pi}{۸}$

۱۶۴ . جواب : $x\neq(۲k+۱)\pi$

۱۶۵ . $sin۲x$ راباز وطرفین رابر $cos^{۲}x>۰$ تقسیم کنید :

$$k\pi-Arctg۳<x<k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

۱۶۶ . این‌نامعادله، همان نامعادلهٔ مسئلهٔ ۱۵۸ باتغییرجهت نامساوی

است ، جوابها چنین‌اند:

$$2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{8};\quad 2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{8};$$

$$2k\pi+\frac{5\pi}{8}<x<2k\pi+\frac{2\pi}{3};\quad 2k\pi+\frac{7\pi}{8}<x<2k\pi+\pi;$$

$$2k\pi+\pi<x<2k\pi+\frac{9\pi}{8};\quad 2k\pi+\frac{4\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{11\pi}{8};$$

$$2k\pi+\frac{13\pi}{8}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3};\quad 2k\pi+\frac{15\pi}{8}<x<2k\pi+2\pi$$

۱۶۷ . هریك ازدوطرف نامعادله رابه‌مجموع تبدیل کنید .

جواب : $k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{3};\ k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\frac{3\pi}{4}$

۱۶۸ . طرفین نامعادله رابر $\sin^2 x>0$ تقسیم می‌کنیم :

$$tg\frac{1}{1+x^2}>1 \implies \frac{1}{1+x^2}>\frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

متذکر می‌شویم که $0<\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1$ است و بنابراین لازم نیست شرط $\frac{1}{1+x^2}<\frac{\pi}{2}$ را درنظر بگیریم . بنابراین باید داشته‌باشیم:

$$0\neq|x|<\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$$

و یا : $-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}<x<0\ :\ 0<x<\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$

۱۶۹ . روشن‌است‌که $2+4\cos^2 x$ به‌ازای همهٔ مقادیر x مثبت‌است. مبنای لگاریتم باید مثبت ومخالف واحدباشد ومقدارزیر رادیکال درعامل‌اول باید مثبت یاصفرشود. همهٔ این شرایط رامی‌توان بانامساوی زیرنشان داد:

$$tg\,x>1 \qquad (1)$$

بااین شرایط می‌توان طرفین معادله را بر $\sqrt{tg\,x-1}$ تقسیم کرد، که ازآنجا بدست می‌آید :

$$\log_{tgx}(2+4\cos^2 x)\geqslant 2 \qquad (2)$$

باتوجه به‌شرط(۱)، نامعادلهٔ(۲) را می‌توان چنین نوشت :

$$2+4\cos^2 x \geqslant tg^2 x$$

که بعدازتبدیلات ساده چنین می‌شود :

$$tg^4 x - tg^2 x - 6 \leqslant 0 \implies \left(tg^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{25}{4}\ ;$$

$$\left|tg^2 x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{5}{2} \implies tg^2 x \leqslant 3$$

که بالاخره باتوجه به‌شرط(۱) بدست می‌آید :

$$1 < tg\,x \leqslant \sqrt{3} \implies k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{3}$$

۱۷۰ . می‌دانیم که وقتی x زاویه‌ای حاده و مثبت و برحسب رادیان باشد، داریم : $\sin x < x < tg\,x$

ابتدا ثابت می‌کنیم $\sin x > x - \frac{x^3}{4}$. داریم :

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\,tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\,tg\frac{x}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

اگر بجای $tg\frac{x}{2}$ مقدار $\frac{x}{2}$ راکه کوچکتر است وبجای $\sin\frac{x}{2}$ مقدار $\frac{x}{2}$ را که بزرگتر است قراردهیم، بدست می‌آید :

$$\sin x > 2.\frac{x}{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right) = x - \frac{x^3}{4} \qquad (1)$$

حالا ثابت می‌کنیم که با شرط $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، وقتی x برحسب‌رادیان باشد، نامساوی $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$ برقرار است . بـا استفاده از نامساوی(۱) داریم :

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{32}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{16.32}$$

وبنابراین بطور مسلم داریم :

$$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16} \qquad (2)$$

حالا باتوجه به‌نامساوی(۱) ومثبت بودن x داریم :

$$\frac{\sin x}{x}>1-\frac{x^2}{4} \Longrightarrow \frac{\sin^2 x}{x^2}>1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16} \qquad (3)$$

$1-\frac{x^2}{4}>0$ است ، زیرا از شرط $0<x<\frac{\pi}{2}$ بدست‌می‌آید $0<x^2<3$.
بهمین مناسبت توانستیم طرفین نامساوی فوق را مجذورکنیم . ازنامساویهای (۲) و(۳) بدست می‌آید :

$$\frac{\sin^2 x}{x^2}-\cos x>0 \Longrightarrow \frac{\sin x}{x}>\sqrt{\cos x}$$

توضیح . اگر از بسط $\sin x$ و $\cos x$ برحسب قوای x استفاده‌کنیم، می‌توان نامساوی $\frac{\sin x}{x}>\sqrt[3]{\cos x}$ را ثابت کرد . داریم :

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$$

که ازآنجا بدست می‌آید : $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$ ویا $\frac{\sin x}{x}>1-\frac{x^2}{6}$.
که اگر طرفین آنرا مکعب کنیم بدست می‌آید :

$$\frac{\sin^3 x}{x^3}>1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{216} \qquad (4)$$

ازطرف دیگر برای بسط $\cos x$ داریم :

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots \Longrightarrow \cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \qquad (5)$$

ازنامساویهای (۴)و(۵) بدست می‌آید :

$$\frac{\sin^3 x}{x^3}-\cos x>\frac{x^4(9-x^2)}{216}$$

وچون $0<x^2<3$ است پس $9-x^2>0$ وداریم :

$$\frac{\sin^3 x}{x^3} - \cos x > 0 \implies \frac{\sin x}{x} > \sqrt[3]{\cos x}$$

۱۷۱ . قبلا متذکر می‌شویم که اگر a و b دوعدد مثبت باشند نامساوی $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ برای هرمقدار a و b صحیح است .

با توجه به‌شرط مسئله $\sin(60^\circ+\alpha)>0$ و $\sin(60^\circ-\alpha)>0$ و بنابراین داریم :

$$\frac{1}{\sin(60^\circ+\alpha)} + \frac{1}{\sin(60^\circ-\alpha)} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{\cos 2\alpha - \cos 120^\circ}} = 2\sqrt{\frac{4}{2\cos 2\alpha + 1}} \geqslant \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

۱۷۲ قبلا متذکر می‌شویم‌که اگر a و b و c سه‌عدد مثبت باشند، برای هرمقدار a، b و c نامساوی $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ صحیح است ، داریم :

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{\cos A\cos B\cos C}}$$

اگر $\cos A\cos B\cos C = z$ فرض‌کنیم ، داریم :

$$z = \frac{[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cos C}{2} =$$

$$= \frac{-\cos^2 C + \cos(A-B)\cos C}{2}$$

و یا $$\cos^2 C - \cos(A-B)\cos C + 2z = 0$$

که از آنجا نتیجه می‌شود :

$$\cos^2(A-B) - 8z \geqslant 0 \ ; \ z \leqslant \frac{1}{8}\cos^2(A-B) \leqslant \frac{1}{8}$$

وبنابراین بدست می‌آید :

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = 6$$

۱۷۳ . داریم . $$tg^2 A + tg^2 B + tg^2 C =$$

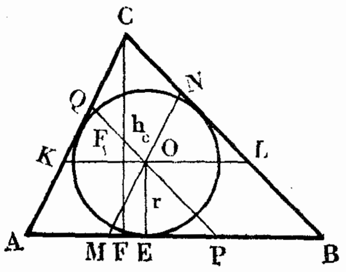
$$= sec^2 A + sec^2 B + sec^2 C - 3 \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{cos^2 A\, cos^2 B\, cos^2 C}} - 3$$

وچون باتوجه به‌مسئلهٔ ۱۷۲ داریم :

$$cos A\, cos B\, cos C \leqslant \frac{1}{8}$$

بدست می‌آید :

$$tg^2 A + tg^2 B + tg^2 C \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2}} - 3 = 9$$



شکل ۳۹

۱۷۴. O رامرکزدایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌گیریم (شکل ۳۹) ، بطوری‌که KL موازی AB ، MN موازی AC ، PQ موازی BC، OE عمود بر AB و CF عمود بر AB باشد. از تشابه دومثلث KLC و ABC داریم : $\frac{KL}{AB} = \frac{CF_1}{CF}$ یا $\frac{KL}{c} = \frac{h_c - r}{h_c}$ واز آنجا :

$$KL = c\left(1 - \frac{r}{h_c}\right) = c\left(1 - \frac{rc}{2S}\right) = \left(1 - \frac{c}{2p}\right)c =$$

$$= \frac{(a+b)c}{2p} \geqslant \frac{c}{p}\sqrt{ab}$$

وبهمین ترتیب می‌توان بدست آورد :

$$MN \geqslant \frac{b}{p}\sqrt{ac} \quad ; \quad PQ \geqslant \frac{a}{p}\sqrt{bc}$$

ودرنتیجه خواهیم داشت :

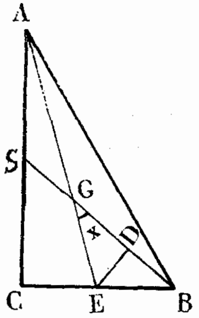
$$KL^2 + MN^2 + PQ^2 \geqslant \frac{abc^2 + acb^2 + bca^2}{p^2} = \frac{2abc}{p} =$$

$$=\frac{8RSr}{S}=8Rr$$

(R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است). ولی میدانیم $R \geqslant 2r$ وبنابراین:

$$KL^2+MN^2+PQ^2 \geqslant 16r^2$$

۱۷۵ . فرض می‌کنیم a و b اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه ، c وتر، S وسط AC ، E وسط BC، DE عمود بر BG و G محل تلاقی میانه‌ها باشد.



شکل ۴۰

داریم :
$$BS^2=\frac{1}{2}(c^2+a^2)-\frac{1}{4}b^2=$$
$$=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}(c^2-a^2)=\frac{1}{4}(3a^2+c^2)$$

وازآنجا $BS=\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+c^2}$ و بهمین ترتیب $AE=\frac{1}{2}\sqrt{3b^2+c^2}$.

ازتشابه دومثلث BDE و BSC نتیجه می‌شود:

$$\frac{BD}{a}=\frac{a}{\sqrt{c^2+3a^2}} \;;\; BD=\frac{a^2}{\sqrt{c^2+3a^2}}$$

وبنابراین داریم :

$$DG=\frac{2}{3}BS-BD=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{3a^2+c^2}-\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+c^2}}=\frac{\frac{1}{3}c^2}{\sqrt{3a^2+c^2}}$$

وبنابراین :

$$\cos X=\frac{DG}{EG}=\frac{2c^2}{\sqrt{(4a^2+c^2)(3b^2+c^2)}}=$$

$$=\frac{2c^2}{\sqrt{4c^4+9a^2b^2}} \geqslant \frac{2c^2}{\sqrt{4c^4+\frac{9}{4}c^4}}=\frac{4}{5}$$

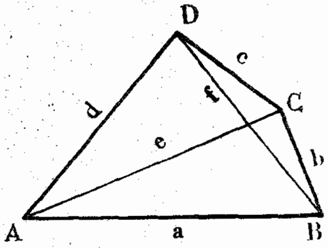
۱۷۶ . اگر $A+C>180^\circ$ (شکل ۴۱) ، داریم :

$$\cos A+\cos C=2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}<0$$

ضمناً داریم :

$$\cos A=\frac{d^2+a^2-f^2}{2ad},$$

$$\cos C=\frac{b^2+c^2-f^2}{2bc}$$



شکل ۴۱

وبنابراین بدست می‌آید :

$$(a^2+d^2)bc+(b^2+c^2)ad-$$
$$-f^2(ad+bc)<0$$

وازآنجا بدست می‌آید :

$$(ab+cd)(ac+bd)<(ad+bc)f^2 \qquad (1)$$

ازطرف دیگر بنابرقضیهٔ بطلمیوس داریم :

$$ef<ac+bd \qquad (2)$$

بااستفاده ازنامساویهای (۱)و(۲)، پس‌ازتبدیلات ساده بدست می‌آید:

$$\frac{e}{f}<\frac{ad+bc}{ab+cd}$$

۱۷۷ . MN را به x نشان می‌دهیم ، داریم :

$$x=2r\cos\frac{\alpha}{2}$$

که درآن r شعاع دایرهٔ محاطی و α زاویهٔ حاده MAN است ازطرف‌دیگرداریم:

$$b=c\cos\alpha=r+r\cot g\frac{\alpha}{2}$$

ازاینجا r بدست می‌آید :

$$r=c\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

که اگردررابطهٔ x بجای r قرار دهیم ، می‌شود :

$$x=c\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=c\sqrt{\sin^2\alpha(1-\sin\alpha)}=$$

$$=2c\sqrt{\frac{\sin\alpha}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{2}(1-\sin\alpha)}$$

عوامل زیر رادیکال مثبت و به‌مجموع واحدهستند، بنابراین حداکثر حاصلضرب آنها وقتی‌است‌که داشته باشیم $\frac{1}{2}\sin\alpha=1-\sin\alpha$ و یا $\sin\alpha=\frac{2}{3}$. بنابراین

$$x_{Max}=2c\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}c \Longrightarrow x\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}c$$

۱۷۸ . داریم : $a\sin A+b\sin B+c\sin C=\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}$

ازطرف دیگر می‌دانیم : $a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}$

(حالت تساوی مربوط به‌موردی است‌که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد). بنابراین

$$a\sin A+b\sin B+c\sin C\geqslant\frac{4S\sqrt{3}}{2R}=\frac{2S\sqrt{3}}{R}$$

۱۷۹ . داریم (حل مسئلهٔ ۱۹۸ را ببینید) :

$$r_1+r_2+r_3=r\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\right)=$$

$$=4Rr\left(\frac{1}{r_a+r_b}+\frac{1}{r_b+r_c}+\frac{1}{r_a+r_c}\right)$$

(r_a و r_b و r_c شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی هستند). ولی داریم :

$$\frac{1}{r_a+r_b}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\ ;\ \frac{1}{r_b+r_c}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\ ;$$

$$\frac{1}{r_a+r_c}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}\right)$$

وبنابراین بدست می‌آید :

$$r_1+r_2+r_3<2Rr\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)$$

ازطرف دیگر می‌دانیم : $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$

وبنابراین نتیجه می‌شود : $r_1+r_2+r_3\leqslant 2R$

راه حل دوم . مثل راه حل اول می‌نویسیم :

$$r_1+r_2+r_3=r\left(3+tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\right)$$

ازطرف دیگر نامساویهای زیرواضح است :

$$tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\geqslant tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=1\ ;\ r\leqslant\frac{R}{2}$$

وبنابراین بدست می‌آید :

$$r_1+r_2+r_3\leqslant\frac{R}{2}\left(3+tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\right)\leqslant 2R$$

۱۸۰ ازرابطهٔ $r=(p-a)tg\frac{A}{2}$ استفاده می‌کنیم. داریم :

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}-\frac{4}{R^2}=\frac{1}{r^2}\left(tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\right)-$$

$$-\frac{4}{R^2}\geqslant\frac{1}{r^2}-\frac{4}{R^2}=\frac{R^2-4r^2}{R^2r^2}\geqslant 0$$

زیرا $tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\geqslant 1$ و $R\geqslant 2r$ است .

۱۸۱ . داریم : $AB=2R_3\sin\left(180^\circ-\frac{A+B}{2}\right)=$

$$=2R_3\cos\frac{C}{2}=4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\implies R_3=2R\sin\frac{C}{2}$$

وبهمین ترتیب بدست می‌آید : $R_1=2R\sin\frac{A}{2}$ و $R_2=2R\sin\frac{B}{2}$ و در اینصورت خواهیم داشت :

$$R_1^2+R_2^2+R_3^2=4R^2\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\geqslant 4R^2.\frac{3}{4}=3R^2$$

۱۸۲ . داریم :
$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)+$$
$$+\frac{1}{2}(1-\cos 2\beta)+\sin^2\gamma=1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin^2\gamma=$$
$$=1-\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]=1-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
وبنابراین خواهیم داشت:
$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=1+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
ولی اگر 2α، 2β، 2γ زوایای یک‌مثلث باشند. داریم (مثال ۶ صفحهٔ ۸۹ را ببینید):
$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant\frac{1}{8}$$
وبنابراین بدست می‌آید :
$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant\frac{9}{8}$$

۱۸۳ . چون داریم (مثال ۶ صفحهٔ ۸۹) :
$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$
نتیجه می‌شود :
$$\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\right)\leqslant\frac{1}{64}$$
ازقضیهٔ واسطه‌های عددی وهندسی استفاده می‌کنیم :
$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}}\geqslant$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^2}}=12$$

۱۸۴ . قبلا نامساوی $\sin x+\operatorname{tg}x>2x$ را ثابت می‌کنیم $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$:
$$\sin x+\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{۴tg\frac{x}{۲}}{۱-tg^{۴}\frac{x}{۲}}>۴tg\frac{x}{۲}>۴.\frac{x}{۲}=۲x$$

بااستفاده ازاین نامساوی می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} \sin\alpha+tg\alpha>۲\alpha \\ \sin\beta+tg\beta>۲\beta \\ \sin\gamma+tg\gamma>۲\gamma \end{cases}$$

که ازمجموع آنها بدست می‌آید :

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+tg\alpha+tg\beta+tg\gamma>۲(\alpha+\beta+\gamma)=۲\pi$$

۱۸۵ . داریم : $|\sin kx|=|\sin[(k-۱)x+x]=$

$$=|\sin(k-۱)x\cos x+\cos(k-۱)x\sin x|\leqslant|\sin(k-۱)x|+|\sin x|$$

وبنابراین بدست می‌آید :

$$|\sin kx|\leqslant|\sin(k-۱)x|+|\sin x|$$

و بهمین‌ترتیب داریم :

$$\sin|(k-۱)x|\leqslant|\sin(k-۲)x|+|\sin x|$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\sin ۲x\leqslant|\sin x|+|\sin x|$$

که اگراین نامساویها راباهم جمع کنیم بدست می‌آید :

$$|\sin kx|\leqslant k|\sin x|$$

۱۸۶ . ازمجموع نامساویهای واضح زیر :

$$cotg^{۲}\frac{A}{۲}+cotg^{۲}\frac{B}{۲}\geqslant ۲cotg\frac{A}{۲}cotg\frac{B}{۲}$$

$$cotg^{۲}\frac{B}{۲}+cotg^{۲}\frac{C}{۲}\geqslant ۲cotg\frac{B}{۲}cotg\frac{C}{۲}$$

$$cotg^{۲}\frac{C}{۲}+cotg^{۲}\frac{A}{۲}\geqslant ۲cotg\frac{C}{۲}cotg\frac{A}{۲}$$

بسادگی به‌نامساوی زیر می‌رسیم :

$$\cot g^{2}\frac{A}{2}+\cot g^{2}\frac{B}{2}+\cot g^{2}\frac{C}{2}\geqslant \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+$$
$$+\cot g\frac{C}{2}\cot g\frac{A}{2} \qquad (1)$$

ضمناً درمورد زاویه‌های هرمثلث می‌دانیم :

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=1 \qquad (2)$$

ازطرف دیگربرای سه‌عدد مثبت l، mو n نامساوی زیرصحیح است .

$$(l+m+n)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\geqslant 9 \qquad (3)$$

حالا باتوجه به‌نامساوی(۳) می‌توان نوشت :

$$\left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}\right)\left(\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+\right.$$
$$\left.+\cot g\frac{C}{2}\cot g\frac{A}{2}\right)\geqslant 9$$

که باتوجه به‌تساوی(۲) به‌اینصورت در می‌آید :

$$\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{C}{2}\cot g\frac{A}{2}\geqslant 9$$

وبااستفاده ازنامساوی(۱) بدست می‌آید :

$$\cot g^{2}\frac{A}{2}+\cot g^{2}\frac{B}{2}+\cot g^{2}\frac{C}{2}\geqslant 9$$

۱۸۷ ۰ برای اینکه رادیکالها حقیقی باشند، باید داشته باشیم :

$$1-2\sin x\geqslant 0 \qquad و \qquad 1-2\cos x\geqslant 0$$

جواب مشترك این‌دونامعادله درفاصلهٔ (۲π و ۰) عبارتست از: $\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}$.

بااین شرط می‌توان طرفین نامعادله رامجذورکرد (هردوطرف نامعادله مثبت است)، پس‌ازعملیات ساده بدست می‌آید :

$$\sqrt{(1-2\sin x)(1-2\cos x)}>\sin x+\cos x$$

سمت راست این‌نامعادله ، یعنی $\sin x+\cos x$ درفاصلهٔ $\left[\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right]$

همیشه منفی است وبنابراین نامعادله همیشه برقراراست .

جواب : $2k\pi+\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{3}$.

۱۸۸ . قبلا متذکر می‌شویم که نامساوی به ازای $a\neq\frac{1}{2}k\pi$ معنا دارد. برای اثبات ازاستقراء ریاضی استفاده می‌کنیم. اگر $n=1$ باشدداریم:

$$(sec^2a-1)(cosec^2a-1)=tg^2a\cdot cotg^2a=1=1^2$$

یعنی‌درحالت $n=1$ نامساوی به‌تساوی‌تبدیل‌می‌شود. اگر $n=2$ باشدداریم:

$$(sec^4a-1)(cosec^4a-1)=tg^2a(sec^2a+1)cotg^2a(cosec^2a+1)=$$
$$=(2+tg^2a)(2+cotg^2\alpha)=4(tg^2a+cotg^2a)+1\geqslant 9$$

زیرا $tg^2a+cotg^2a\geqslant 2$ (مجموع دوعدد عکس هم ، بشرط مثبت بودن، از۲ کوچکتر نیست). به‌این‌ترتیب بدست آمد :

$$(sec^4a-1)(cosec^4a-1)\geqslant(1+2)^2$$

ضمناً علامت‌تساوی برای وقتی‌است‌که $tg\,a=cotg\,a=1$ یعنی $a=k\pi+\frac{\pi}{4}$.

به‌ازای $n=3$ داریم :

$$(sec^6a-1)(cosec^6a-1)=(sec^2a-1)(sec^4a+sec^2a+1)\times$$
$$\times(cosec^2a-1)(cosec^4\alpha+cosec^2a+1)=[(sec^2a+1)^2-sec^2a]\times$$
$$\times[(cosec^2a+1)^2-cosec^2a]=(3+3tg^2a+tg^4a)(3+3cotg^2a+$$
$$+cotg^4a)=19+12(tg^2a+cotg^2a)+3(tg^4a+cotg^4a)\geqslant$$
$$\geqslant 19+24+6=49$$

وبنابراین بدست می‌آید :

$$(sec^6a-1)(cosec^6a-1)>(1+2+3)^2$$

دراین حالت علامت تساوی وجود ندارد .

حالا فرض می‌کنیم به‌ازای $n=m\geqslant 3$ داشته باشیم :

$$(sec^{2m}a-1)(cosec^{2m}a-1)>(1+2+\dots+m)^2=\frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

دراینصورت به‌ازای $n=m+1$ داریم :

$$(sec^{2m+2}a-1)(cosec^{2m+2}a-1)=(sec^2a\cdot sec^{2m}a-1)\times$$

$$\times(cosec^2a\,cosec^{2m}a-1)=\frac{(sec^{2m}a-cos^2a)\,(cosec^{2m}a-sin^2a)}{cos^2a\cdot sin^2a}>$$

$$>\frac{4}{sin^2 2a}(sec^{2m}a-1)(cosec^{2m}a-1)>\frac{4}{1}\cdot\frac{m^2(m+1)^2}{4}=$$

$$=m^2(m+1)^2=(m+1)^2\left(\frac{m+2}{2}+\frac{m-2}{2}\right)>$$

$$>\frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}=[1+2+3+\cdots+m+(m+1)]^2$$

وبنابراین صحت حکم به‌کمك استقراء ریاضی ثابت شد .

۱۸۹ . می‌دانیم که اگر p و q و r عددهائی غیرمنفی باشند ، داریم:

$$\sqrt[3]{pqr}\leqslant\frac{p+q+r}{3}$$

وضمناً درهرمثلث تساوی زیر هم صحیح است :

$$cotg\,A\,cotg\,B+cotg\,B\,cotg\,C+cotg\,C\,cotg\,A=1$$

حالا می‌نویسیم :

$$\sqrt[3]{cotg^2A\,cotg^2B\,cotg^2C}=$$

$$=\sqrt[3]{(cotg\,A\,cotg\,B)(cotg\,B\,cotg\,C)(cotg\,C\,cotg\,A)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{3}(cotg\,A\,cotg\,B+cotg\,B\,cotg\,C+cotg\,C\,cotg\,A)=\frac{1}{3}$$

یعنی : $$\sqrt[3]{cotg^2A\,cotg^2B\,cotg^2C}\leqslant\frac{1}{3}$$

اگرطرفین نامساوی اخیررا در $tg\,A\,tg\,B\,tg\,C$ ضرب‌کنیم. بعدازتبدیلات ساده بدست می‌آید :

$$\sqrt[3]{tg\,A\,tg\,B\,tg\,C}\geqslant\sqrt{3}$$

حالا داریم :

$$tg^nA+tg^nB+tg^nC\geqslant3\sqrt[3]{(tg\,A\,tg\,B\,tg\,C)^n}\geqslant3(\sqrt{3})^n\geqslant$$

$$\geqslant3(1+\frac{1}{2})^n\geqslant3+\frac{3n}{2}$$

حالت تساوی برای $n=0$ است .

۱۹۰ . اگر دایره‌ای راکه ازدورأس مثلث وپای ارتفاعهای مرسوم از این دورأس‌عبورکرده است درنظربگیریم، صحت تساویهای زیرروشن‌می‌شود:

$$x=a|\cos A| \text{ و } y=b|\cos B| \text{ و } z=c|\cos C|$$

بنابراین مسئله منجر به‌اثبات نامساوی زیرمی‌شود :

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geqslant\frac{3}{4}$$

و یا

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4}$$

ولی نامساوی اخیر صحیح است، زیرا اگر O مرکز دایرهٔ محیطی وHمحل تلاقی ارتفاعهای یك مثلث باشد، داریم :

$$OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$$

واز آنجا بدست می‌آید : $\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}\leqslant\frac{9}{4}$

تبصره . می‌توان ثابت کرد : $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}\geqslant 12$

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}=\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{(\cos A\cos B\cos C)^2}}$$

وچون داریم : $\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$ ، بدست می‌آید :

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{64}}}=12$$

حالت تساوی برای موردی است‌که داشته باشیم : $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=2$

۱۹۱ . ۱) چون $\sin\frac{A}{2}<1$ و $\sin\frac{B}{2}<1$، داریم :

$$\cos\frac{C}{2}=\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}<\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}$$

اگر C راکوچکترین زاویهٔ مثلث بگیریم، پاره‌خط به‌طول $cos\frac{C}{2}$ از دو پاره خط به‌طولهای $cos\frac{A}{2}$ و $cos\frac{B}{2}$ بزرگتر می‌شود و نامساوی $cos\frac{C}{2}<cos\frac{A}{2}+cos\frac{B}{2}$ به‌معنای آنست که این سه پاره خط می‌توانند اضلاع یك مثلث باشند.

۲) دراین حالت هم C راکوچکترین زاویهٔ مثلث می‌گیریم، داریم:

$$cos^2\frac{A}{2}+cos^2\frac{B}{2}-cos^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}(1+cosA+cosB-cosC)=sin^2\frac{A}{2}+$$

$$+cos\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}=sin\frac{C}{2}(cos\frac{A+B}{2}+cos\frac{A-B}{2})=$$

$$=2cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}>0$$

یعنی $cos^2\frac{C}{2}<cos^2\frac{A}{2}+cos^2\frac{B}{2}$ وپاره خطهای بطول $cos^2\frac{A}{2}$ ، $cos^2\frac{B}{2}$ و $cos^2\frac{C}{2}$ می‌توانند اضلاع یك مثلث باشند .

۱۹۴ . داریم :

$$ab+bc+ca=\frac{2S}{sinC}+\frac{2S}{sinA}+\frac{2S}{sinB}$$

بنابراین نامساوی مفروض ، منجر به نامساوی زیر می‌شود :

$$\frac{1}{sinA}+\frac{1}{sinB}+\frac{1}{sinC}\geqslant 2\sqrt{3}$$

بااستفاده از نامساوی مربوط به واسطه‌های عددی وهندسی داریم:

$$\frac{1}{sinA}+\frac{1}{sinB}+\frac{1}{sinC}>\frac{3}{\sqrt[3]{sinA\,sinB\,sinC}}$$

ازطرف دیگر، باتوجه به نامساویهای زیردرمورد هرمثلث :

$$sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

$$cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

بدست می‌آید : $\sin A \sin B \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$

وبنابراین: $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}}=2\sqrt{3}$

۱۹۳ . نامساوی مفروض را به‌اینصورت می‌نویسیم :

$$\frac{r^2}{(p-a)^2}+\frac{r^2}{(p-b)^2}+\frac{r^2}{(p-c)^2}\geqslant 1$$

که بسادگی به‌نامساوی زیر تبدیل می‌شود :

$$tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\geqslant 1$$

و اثبات ایـن نامساوی را هـم در صفحهٔ ۲۰ داده‌ایـم (توجـه کنید کـه $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$).

۱۹۴ . دایرهٔ محیطی مثلث ABC دارسم می‌کنیم ووسط قوس CAB را M می‌گیریم ، از M عمودی بر BC رسم می‌کنیم وپای عمودرا N فرض می‌کنیم . اولا تساوی $MN=\frac{a}{2}cotg\frac{A}{2}$ واضح است . ثانیاً داریم:

$$h_a \leqslant MN=\frac{a}{2}cotg\frac{A}{2} \implies a\geqslant 2h_a tg\frac{A}{2}$$

۱۹۵ . داریم :

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=1+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=1+\frac{2}{\sin 2\alpha}(\sqrt{1+\sin 2\alpha}+1)=1+\frac{2}{\sqrt{1+\sin 2\alpha}-1}\geqslant$$

$$\geqslant 1+\frac{2}{\sqrt{2}-1}=1+2(\sqrt{2}+1)=3+2\sqrt{2}$$

علامت تساوی برای موردی است‌که $\alpha=45^\circ$ باشد .

۱۹۶ . ثابت می‌کنیم : $d=r+p\sqrt{3}-5R\leqslant 0$

ازروابط معلوم زیراستفاده می‌کنیم :

$$r=۴R\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}\ ,\ \ p=۴R\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}$$

دراینصورت خواهیم داشت :

$$d=R(۴\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}+۴\sqrt{۳}\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}-۵)$$

نامساویهای زیر واضح است :

$$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}\leqslant\frac{۱}{۸}\ ,\ \cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}\leqslant\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$$

بنابراین بدست می‌آید :

$$d\leqslant R(\frac{۱}{۲}+\frac{۹}{۲}-۵)=۰\ \Longrightarrow\ d\leqslant ۰$$

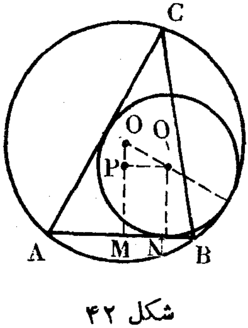
۱۹۷ . ازرابطهٔ زیراستفاده می‌کنیم :

$$a^۲+b^۲+c^۲=۲p^۲-۲r^۲-۸Rr$$

داریم :

$$a(p-a)+b(p-b)+c(p-c)=$$
$$=۲p^۲-(a^۲+b^۲+c^۲)=۲r^۲+۸Rr>۹Rr$$

(از نا مساوی $R\geqslant ۲r$ استفاده کردیم) .



شکل ۴۲

۱۹۸ . Oرامرکزدایرهٔ‌محیطی مثلث ABC و$O_۱$ را مرکز دایرهٔ به شعاع $r_۱$ که برضلعهای AB وAC و دایرهٔ O مماس است ، می‌گیریم . از نقطه‌های Oو$O_۱$ عمودهای OM و $O_۱N$ را بر وتر AB فرود می‌آوریم (شکل ۴۲). سپس $O_۱P$ را بر OM عمود می‌کنیم. درمثلث $OO_۱P$ ، بنابرقضیهٔ فیثاغورث، داریم:

$$(R\cos C-r_۱)^۲+(r_۱\cot g\frac{A}{۲}-\frac{c}{۲})^۲=(R-r_۱)^۲$$

که بعدازساده‌کردن بدست می‌آید :

$$r_1 = c\cdot tg\frac{A}{2} - 2R(1-\cos C)tg^2\frac{A}{2} = c\cdot tg\frac{A}{2} - 2R\sin C\, tg\frac{C}{2}tg^2\frac{A}{2} =$$

$$= c\cdot tg\frac{A}{2}(1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}) = c\cdot tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}(tg\frac{A}{2}+tg\frac{C}{2})$$

ازطرف دیگر می‌دانیم :

$$c = r(cotg\frac{A}{2}+cotg\frac{B}{2}) = r\frac{tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}}{tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}$$

وبنابراین بدست می‌آید :

$$r_1 = r(1+tg^2\frac{A}{2})$$

وبهمین ترتیب می‌توان بدست آورد :

$$r_2 = r(1+tg^2\frac{B}{2}) \quad , \quad r_3 = r(1+tg^2\frac{C}{2})$$

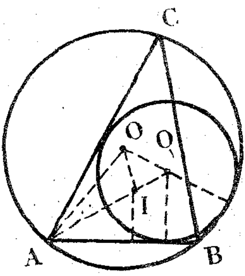
وبنابراین خواهیم داشت :

$$r_1+r_2+r_3 = r(3+tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2})$$

از طرف دیگر می‌دانیم : $tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\geqslant 1$ (صفحهٔ ۲۰ را ببینید).

وبنابراین بدست می‌آید :

$$r_1+r_2+r_3 \geqslant 4r$$



شکل ۴۳

راه حل دوم . اگر I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث (به‌شعاع r) باشد، ازمثلث O_1AO، طبق قضیهٔ استوارت، پاره خط OI بدست می‌آید :

$$OI^2 = \frac{1}{AO_1}(AI\cdot OO_1^2 + IO_1\cdot OA^2 - AI\cdot IO_1\cdot AO_1)$$

وچون طبق قضیهٔ اولر داریم : $OI^2 = R^2 - 2Rr$ داریم :

$$R^2 - 2Rr = \frac{\sin\frac{A}{2}}{r_1}\left[\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}(R-r_1)^2 + \frac{r_1 - r}{\sin\frac{A}{2}}R^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{r(r_1-r)1r_1}{\sin^2\frac{A}{2}}\right]$$

وبعد ازتبدیلات لازم بدست می‌آید :

$$r_1(R^2 - 2Rr) = r(R-r_1)^2 + (r_1 - r)R^2 - \frac{rr_1(r_1-r)}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

وبنابراین :

$$r_1 = \frac{r_1 - r}{\sin^2\frac{A}{2}} = r(1 + tg^2\frac{A}{2})$$

ادامهٔ حل مثل راه حل اول است .

۱۹۹ . روابط زیر بسادگی بدست می‌آید :

$$\frac{R}{R_1} = 1 + \frac{1}{\sin C}\ ,\ \frac{R}{R_2} = 1 + \frac{1}{\sin A}\ ,\ \frac{R}{R_3} = 1 + \frac{1}{\sin B}$$

واز آنجا بدست می‌آید :

$$\frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2} + \frac{R}{R_3} = 3 + \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)$$

ازطرف‌دیگر، باتوجه به‌نامساوی مربوط به‌واسطه‌های عددی وهندسی،داریم:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A \sin B \sin C}}$$

وهمچنین می‌دانیم : $\sin A \sin B \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$. بنابراین :

$$R\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \geqslant 3 + 3\sqrt[3]{\frac{8}{3\sqrt{3}}}$$

واز آنجا $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\geqslant\frac{3+2\sqrt{3}}{R}$

۴۰۰ . دستگاه را می‌توان چنین نوشت :

$$\frac{2}{\sin^2 2x}=1+\sin^2 y \quad , \quad \sin^2 y=\sin^2 z$$

معلوم است‌که $\frac{2}{\sin^2 2x}\geqslant 2$ و ضمناً علامت تساوی وقتی برقرار است که $\sin^2 2x=1$ باشد. همچنین $1+\sin^2 y\leqslant 2$ وضمناً علامت تساوی برای $\sin^2 y=1$ است. بنابراین معادلهٔ اول دستگاه تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم : $\sin^2 2x=1$ و $\sin^2 y=1$ که از آنجا $\sin^2 z=1$ بدست‌می‌آید . درنتیجه دستگاه مفروض هم‌ارز دستگاه زیراست :

$$\cos 2x=0 \quad , \quad \cos y=0 \quad , \quad \cos z=0$$

وجواب دستگاه چنین است :

$$x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4} , \quad y=m\pi+\frac{\pi}{2} , \quad z=n\pi+\frac{\pi}{2}$$

۴۰۱ . از معادلهٔ اول دستگاه داریم :

$$2x+2z=\frac{3\pi}{2}-2y \quad \Longrightarrow \quad \sin(2x+2z)=2\sin^2 y-1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر ازرابطهٔ $\sqrt{\frac{3}{2}}\sin y=\sin z$ بدست می‌آید : $\sin^2 y=\frac{2}{3}\sin^2 z$ وبنابراین رابطهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$\sin(2x+2z)=\frac{4}{3}\sin^2 z-1=-\frac{1}{3}(1+2\cos 2z) \qquad (2)$$

همچنین از رابطهٔ $\sqrt{\frac{3}{2}}\sin y=\sqrt{3}\sin x$ بدست‌می‌آید: $\sin^2 y=2\sin^2 x$

وبنابراین باتوجه به‌رابطهٔ (۱) داریم:

$$\sin(2x+2z)=4\sin^2 x-1=1-2\cos 2x \qquad (3)$$

ازروابط(۲)و(۳) دستگاه زیر، که شامل y نیست ، بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \sin(2x+2z) = -\frac{1}{3}(1+2\cos 2z) \\ \sin(2x+2z) = 1-2\cos 2x \end{cases}$$

سه برابر معادلهٔ اول این دستگاه را بامعادلهٔ دوم جمع می‌کنیم؛ بترتیب بدست می‌آید :

$$4\sin(2x+2z) = -2(\cos 2x+\cos 2z) \ ;$$

$$2\sin(x+z)\cdot\cos(x+z) = -\cos(x+z)\cdot\cos(x-z) \ ;$$

$$\cos(x+z)[2\sin(x+z)+\cos(x-z)] = 0$$

که ازآنجا باید یکی ازعوامل برابر صفر شود :

$$(\mathrm{I}) \quad \cos(x+z) = 0 \ ; \quad (\mathrm{II}) \quad 2\sin(x+z)+\cos(x-z) = 0$$

اگر $\cos(x+z) = 0$ باشد بدست می‌آید :

$$x+z = k\pi+\frac{\pi}{2} \qquad (4)$$

دوحالت درنظر می‌گیریم :

حالت اول : $k = 2k_1$ (یعنی k عددی است زوج). داریم .

$$\begin{cases} x+y+z = \frac{3\pi}{4} \\ x+z = 2k_1\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases} \implies y = \frac{\pi}{4}-2k_1\pi$$

باقرار دادن مقدار y در رابطهٔ $\sin x = \frac{\sin y}{\sqrt{2}}$ بدست می‌آید :

$$\sin x = \frac{1}{2} \implies x = 2m\pi+\frac{\pi}{6} \text{ و } x = 2m\pi+\frac{5\pi}{6}$$

وازرابطهٔ $\sin z = \sqrt{3}\sin x$ بدست می‌آید :

$$\sin z = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies z = 2n\pi+\frac{\pi}{3} \text{ و } z = 2n\pi+\frac{2\pi}{3}$$

چون بین x و z باید رابطهٔ (۴) برقرار باشد، بعداز بحث ساده به جواب ذیر می‌رسیم:

$$\left|\begin{array}{l} x=2m\pi+\frac{\pi}{6} \\ y=\frac{\pi}{4}-2k_1\pi \qquad (m+n=k_1 \text{ باشرط}) \\ z=2n\pi+\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

ترکیبهای دیگر جوابها قابل‌قبول نیست . مثلا اگر $x=2m\pi+\frac{5\pi}{6}$ و $z=2n\pi+\frac{2\pi}{3}$ بگیریم باید داشته باشیم :

$$(2m\pi+\frac{5\pi}{6})+(2n\pi+\frac{2\pi}{3})=2k_1\pi+\frac{\pi}{2} \implies$$

$$\implies 2(m+n-k_1)=-1$$

ورابطهٔ اخیرممکن نیست ، زیرا m، n و k_1 عددهائی صحیح‌اند و نمی‌تواند عددی زوج مساوی ۱ — بشود.

حالت دوم : $k=2k_1+1$ (یعنی k عددی است فرد). در اینحالت دستگاه جواب ندارد ، زیرا اگر مثل حالت قبل عمل کنیم به جواب قابل قبول نمی‌رسیم .

حل معادله (II) یعنی $2\sin(x+z)+\cos(x-z)=0$ ، بعد از بسط جمله‌ها وتبدیل نسبتهای مثلثاتی x به‌نسبتهای مثلثاتی z ، به‌معادله‌ای ازدرجه چهارم نسبت به $tg z$ می‌رسیم که تعیین ریشه‌های آن به کمك رسم‌منحنی نمایش تغییرات تابع وتعیین نقاط تلاقی‌منحنی بامحورطول میسرمی‌باشد.

۲۰۲ دستگاه مفروض را می‌توان چنین‌نوشت:

$$\frac{x+y}{1-xy}=1 \quad , \quad \frac{(1-x^2)(1-y^2)+4xy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{2}$$

اگر $x=tg\alpha$ و $y=tg\beta$ فرض‌کنیم، بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta}=1 \\ \dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\cdot\dfrac{1-tg^2\beta}{1+tg^2\beta}+\dfrac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\cdot\dfrac{2tg\beta}{1+tg^2\beta}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

که بسادگی چنین می‌شود :

$$\begin{cases} tg(\alpha+\beta)=1 \\ cos(2\alpha-2\beta)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=k\pi+\dfrac{\pi}{4} \\ \alpha-\beta=m\pi\pm\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

ازاینجا مقادیر αوβ وسپس xوy بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} x=tg\left[(k+m)\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{24}\right] \\ y=tg\left[(k-m)\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{24}\right] \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x=tg\left[(k+m)\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{24}\right] \\ y=tg\left[(k-m)\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{24}\right] \end{array}\right.$$

که باتوجه به‌حالتهای مختلف k و m جوابها چنین‌است :

$$\left|\begin{array}{l} x_1=tg\dfrac{5\pi}{24} \\ y_1=tg\dfrac{\pi}{24} \end{array}\right. ,\quad \left|\begin{array}{l} x_2=tg\dfrac{\pi}{24} \\ y_2=tg\dfrac{5\pi}{24} \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x_3=-cotg\dfrac{5\pi}{24} \\ y_3=-cotg\dfrac{\pi}{24} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_4=-cotg\dfrac{\pi}{24} \\ y_4=-cotg\dfrac{5\pi}{24} \end{array}\right.$$

۲۰۳ . معادلهٔ دوم دستگاه بصورت $sin\,x\,sin\,y=3cos\,x\,cos\,y$ در می‌آیدکه‌باتوجه‌به‌معادلهٔاول دستگاه‌بدست می‌آید : $cos\,x\,cos\,y=\frac{1}{4}$ وبنابراین دستگاه‌مفروض منجر به‌دستگاه زیر می‌شود :

$$\cos x \cos y = \frac{۱}{۴} \quad , \quad \sin x \sin y = \frac{۳}{۴}$$

ازتفاضل ومجموع این‌دومعادله بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \cos(x+y) = -\frac{۱}{۲} \\ \cos(x-y) = ۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \\ x-y = ۲m\pi \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = (k+m)\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ y = (k-m)\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{array} \right.$$

۲۰۴ . معادلهٔ دوم دستگاه رابرحسب سینوس وکسینوس می‌نویسیم و درآن بجای $\sin x$ ازمعادلهٔ اول قرار می‌دهیم، بدست می‌آید :

$$\frac{\sqrt{۲}\sin y}{\cos x} = \frac{\sqrt{۳}\sin y}{\cos y} \Longrightarrow \sin y(\sqrt{۲}\cos y - \sqrt{۳}\cos x) = ۰$$

اگر $\sin y = ۰$ باشد ، دراینصورت $y = k\pi$ می‌شودکه‌اگر درمعادلهٔ اول دستگاه قراردهیم $x = n\pi$ بدست می‌آید. حالابرای بقیهٔ جوابها باید دستگاه زیررا حل‌کنیم :

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{۲}\sin y \\ \sqrt{۲}\cos y = \sqrt{۳}\cos x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{۲} \\ \frac{\cos y}{\cos x} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} \end{cases}$$

هریك ازدو تناسب دستگاه را تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱} \\ \frac{\cos y + \cos x}{\cos y - \cos x} = \frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} tg\dfrac{x+y}{۲}\,cotg\dfrac{x-y}{۲}=(\sqrt{۲}+۱)^{۲} \\ cotg\dfrac{x+y}{۲}\,cotg\dfrac{x-y}{۲}=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{۲} \end{cases}$$

انضرب و تقسیم معادله‌های دستگاه اخیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} cotg\dfrac{x-y}{۲}=\pm(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱)=cotg(\pm\dfrac{\pi}{۲۴}) \\ cotg\dfrac{x+y}{۲}=\pm(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۲}-۱)=cotg(\pm\dfrac{۵\pi}{۲۴}) \end{cases}$$

از دستگاه قبلی معلوم است که $cotg\dfrac{x+y}{۲}$ و $cotg\dfrac{x-y}{۲}$ هم‌علامت‌اند (به‌علت مثبت بودن حاصلضرب آنها) و بنابراین به‌دو دستگاه جبری زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x+y=۲k_{۱}\pi+\dfrac{۵\pi}{۱۲} \\ x-y=۲k_{۲}\pi+\dfrac{\pi}{۱۲} \end{cases} ;\quad \begin{cases} x+y=۲k_{۱}\pi-\dfrac{۵\pi}{۱۲} \\ x-y=۲k_{۲}\pi-\dfrac{\pi}{۱۲} \end{cases}$$

که از آنجا بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} x=(k_{۱}+k_{۲})\pi+\dfrac{\pi}{۴} \\ y=(k_{۱}-k_{۲})\pi+\dfrac{\pi}{۶} \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x=(k_{۱}+k_{۲})\pi-\dfrac{\pi}{۴} \\ y=(k_{۱}-k_{۲})\pi-\dfrac{\pi}{۶} \end{array}\right.$$

به‌این ترتیب جوابهای کلی دستگاه چنین‌اند :

$$\left|\begin{array}{l} x_{۱}=n\pi \\ y_{۱}=k\pi \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x_{۲}=l\pi+\dfrac{\pi}{۴} \\ y_{۲}=m\pi+\dfrac{\pi}{۶} \end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l} x_{۳}=l\pi-\dfrac{\pi}{۴} \\ y_{۳}=m\pi-\dfrac{\pi}{۶} \end{array}\right.$$

بااین شرط که l و m باهم زوج ویا باهم فرد هستند .

۲۰۵ . معادلهٔ اول‌دستگاه، بعدازتبدیلات ساده به‌اینصورت درمی‌آید:

$$\cos(x+y)\cos(x-y)=\frac{1}{4}\ ,\quad \cos 75^\circ \cos(x-y)=\frac{1}{4},$$

$$\cos(x-y)=\frac{1}{4\cos 75^\circ}=\frac{1}{4\sin 15^\circ}=\frac{\cos 15^\circ}{4\sin 15^\circ \cos 15^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 15^\circ}{2\sin 30^\circ}=\cos 15^\circ$$

وبنابراین به‌دستگاه جبری زیر می‌رسیم :

$$x+y=\frac{5\pi}{12}\quad ,\quad x-y=2k\pi\pm\frac{\pi}{12}$$

وازآنجا مقادیر xو y بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} x_1=(4k+1)\frac{\pi}{4} \\ y_1=(-6k+1)\frac{\pi}{6} \end{array}\right. \quad ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2=(6k+1)\frac{\pi}{6} \\ y_2=(-4k+1)\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

۲۰۶ . ازضرب دومعادلهٔ دستگاه دریکدیگر بدست می‌آید :

$$tg\,x\,tg\,y(tg^2x\,tg^2y-tg^2x-tg^2y+1-4a^2)=0 \qquad (1)$$

اگر $tg\,x=0$ باشد ، باتوجه بـه معادلهٔ دوم دستگاه $tg\,y=0$ می‌شود و بنابراین یك جواب دستگاه چنین است :

$$x=k\pi\quad ,\quad y=n\pi$$

اگر معادله‌های دستگاه رابرهم تقسیم کنیم به‌سادگی به‌معادلهٔ $tg^2y=tg^2x$ می‌رسیم که‌اگر درعبارت‌داخل‌پرانتز درسمت‌چپ تساوی (۱) قراردهیم بدست‌می‌آید:

$$tg^4x-2tg^2x+1-4a^2=0 \quad\Longrightarrow\quad tg\,x=\pm\sqrt{1\pm 2a} \qquad (2)$$

ازاینجا x وسپس ازمعادلهٔ $tg\,y=\pm tg\,x$ مقدار y بدست می‌آید .

اگر $a<-\frac{1}{2}$ و یا $a>\frac{1}{2}$ بـاشد دو جواب معادلهٔ (۲) و اگر $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ باشد هر چهار جواب قـابل قبول است . در حالتهای خاص

$a=\frac{1}{2}$ یا $a=-\frac{1}{2}$ یکی ازجوابها مضاعف است .

۲۰۷ فرض می‌کنیم : $\frac{tg\,x}{m}=\frac{tg\,y}{n}=\frac{tg\,z}{p}=t$ که ازآنجا بدست می‌آید :

$$tg\,x=mt\ ,\ tg\,y=nt\ ,\ tg\,z=pt \qquad (1)$$

از معادلهٔ اول دستگاه بدست می‌آید :

$$tg\,x+tg\,y+tg\,z-tg\,x\,tg\,y\,tg\,z=b$$

که‌بااستفاده ازروابط (۱) خواهیم داشت :

$$t(m+n+p-mnpt^2)=0 \implies t=0\ ,\ \pm\sqrt{\frac{m+n+p}{mnp}}$$

$$t=0 \implies \begin{cases} tg\,x=0 \\ tg\,y=0 \\ tg\,z=0 \end{cases} \implies \left| \begin{array}{l} x=k\pi \\ y=m\pi \quad (\text{باشرط } k+m+n=1) \\ z=n\pi \end{array} \right.$$

وبه‌شرط مثبت بودن $\frac{m+n+p}{mnp}$ جوابهای زیرهم وجوددارد:

$$x=k\pi\pm Arctg\sqrt{\frac{m(m+n+\pi)}{np}}\ ,$$

$$y=m\pi\pm Arctg\sqrt{\frac{n(m+n+p)}{mp}}\ ,$$

$$z=n\pi\pm Arctg\sqrt{\frac{p(m+n+p)}{mn}}\ ,$$

با این شرط که بهرحال $x+y+z=\pi$ باشد .

۲۰۸ . مقدار x راازمعادلهٔ اول درمعادلهٔ دوم قرارمی‌دهیم ، بعداز تبدیلات ساده خواهیم داشت :

$$21tg^2y-10\sqrt{3}tg\,y+3=0 \implies tg\,y=\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{7}$$

و جوابها چنین‌اند :

$$x_1 = -2k\pi + \frac{\pi}{6} \qquad ; \qquad x_2 = -2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2\,Arctg\,\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$y_1 = k\pi + \frac{\pi}{6} \qquad\qquad y_2 = k\pi + Arctg\,\frac{\sqrt{3}}{7}$$

۲۰۹ . دومعادله را بصورت یك‌دستگاه نسبت به‌مجهولهای a و b درنظر می‌گیریم ومقادیر a و b رابدست می‌آوریم :

$$a = \frac{c\cos^2 x - c\cos 2x}{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x} = \frac{c\sin^2 x}{\sin x} = c\sin x$$

وبهمین‌ترتیب $b = c\cos x$ بدست می‌آید وازآنجا :

$$a^2 + b^2 = c^2\sin^2 x + c^2\cos^2 x = c^2 \quad ; \quad a^2 + b^2 = c^2$$

۲۱۰ دررابطهٔ $\frac{\sin x + \cos x}{\sin y + \cos y} = c$ به‌جای $\sin x$ و $\cos x$ از دو رابطهٔ دیگر قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$\frac{a\sin y + b\cos y}{\sin y + \cos y} = c \quad \Longrightarrow \quad tg\,y = \frac{c-b}{a-c}$$

ازرابطهٔ $\sin x = a\sin y$ می‌توان نتیجه‌گرفت :

$$\sin^2 x = a^2\sin^2 y = a^2 . \frac{tg^2 y}{1 + tg^2 y} = \frac{a^2(c-b)^2}{(a-c)^2 + (c-b)^2}$$

وبهمین‌ترتیب ازرابطهٔ $\cos x = b\cos y$:

$$\cos^2 x = b^2\cos^2 y = \frac{b^2}{1 + tg^2 y} = \frac{b^2(a-c)^2}{(a-c)^2 + (c-b)^2}$$

وازآنجا، اگردررابطهٔ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ قراردهیم، بدست می‌آید:

$$\frac{a^2(c-b)^2}{(a-c)^2 + (c-b)^2} + \frac{b^2(a-c)^2}{(a-c)^2 + (c-b)^2} = 1$$

وبالاخره : $(a-c)^2(1-b^2) + (b-c)^2(1-a^2) = 0$

۲۱۱ . دستگاه رابعدازتبدیلات ساده، می‌توان چنین نوشت :

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2} = a \\ \dfrac{2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}}{\sin x\cdot\sin y} = b \\ \dfrac{2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x+y}{2}}{\sin x\cdot\sin y} = c \end{cases}$$

اگر دوطرف معادلهٔ دوم دستگاه را بر دوطرف معادلهٔ سوم آن تقسیم کنیم، بدست می‌آید:

$$b\cdot\cos\frac{x+y}{2} = c\cdot\cos\frac{x-y}{2} \qquad (1)$$

اگر طرفین معادلهٔ اول دستگاه را یکبار در طرفین معادلهٔ (۱) ضرب و یکبار بر طرفین آن تقسیم کنیم، بدست می‌آید:

$$2\cos^2\frac{x+y}{2} = \frac{ac}{b}\ ,\quad 2\cos^2\frac{x-y}{2} = \frac{ab}{c} \qquad (2)$$

معادلهٔ سوم دستگاه اصلی را، باتوجه به روابط (۲)، تبدیل می‌کنیم:

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = c\sin x\sin y = \frac{c}{2}[\cos(x-y)-$$

$$-\cos(x+y)] = \frac{c}{2}\left(2\cos^2\frac{x-y}{2} - 1 - 2\cos^2\frac{x+y}{2} + 1\right) =$$

$$= \frac{c}{2}\left(\frac{ab}{c} - \frac{ac}{b}\right) = \frac{a}{2b}(b^2 - c^2)$$

که از آنجا، با مجذور کردن طرفین رابطه‌ای که بدست آمده است، داریم:

$$4\sin^2\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x+y}{2} = \frac{a^2}{4b^2}(b^2-c^2)^2$$

که با قراردادن $\cos^2\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{ac}{2b}$ بدست می‌آید:

$$\sin^2\frac{x+y}{2} = \frac{a}{8bc}(b^2-c^2)^2$$

وبالاخره بااستفاده ازاتحاد $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ بدست می‌آید :

$$a(b^2-c^2)^2+4a\,c^2=8bc$$

۲۱۲ . دستگاه رامثل دومعادلهٔ دومجهولی نسبت به a و b حل می‌کنیم:

$$a=\frac{1}{2}c\sin x\sin 2x+c\cos x\cos 2x=c\sin^2 x\cos x+$$

$$+c\cos x(1-2\sin^2 x)=c\cos x(\sin^2 x+1-2\sin^2 x)=c\cos^3 x\ ,$$

$$b=c\sin x\cos 2x-\frac{1}{2}c\cos x\sin 2x=-c\sin^3 x$$

که ازآنجا بدست می‌آید :

$$\sin x=-\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c}}\ ,\quad \cos x=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{c}}$$

وبالاخره، بااستفاده ازرابطهٔ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ، بدست می‌آید :

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}=\sqrt[3]{c^2}$$

۲۱۳ . دستگاه رامی‌توان چنین نوشت :

$$\begin{cases}\cos(\alpha-3\varphi)=m\cos^3\varphi\\ \sin(\alpha-3\varphi)=m\sin^3\varphi\end{cases}\qquad (1)$$

اگرطرفین دومعادلهٔ دستگاه(۱) رامجذور وسپس باهم جمع کنیم، بدست می‌آید:

$$\sin^6\varphi+\cos^6\varphi=\frac{1}{m^2}\qquad (2)$$

ازرابطهٔ(۲) بسادگی می‌توان نتیجه گرفت :

$$\sin^4\varphi+\cos^4\varphi=\frac{m^2+2}{3m^2}\qquad (3)$$

حالا دردستگاه(۱)، طرفین معادلهٔ اول را در $\cos 3\varphi$ و طرفین معادلهٔ دوم رادر $\sin 3\varphi$ ضرب وسپس معادلهٔ دوم راازمعادلهٔ اول کم می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\cos(\alpha-3\varphi)\cos 3\varphi-\sin(\alpha-3\varphi)\sin 3\varphi=m(\cos^3\varphi\cos 3\varphi-$$

$$-\sin^3\varphi\sin 3\varphi)$$

که بعدازتبدیلهای ساده می‌شود :

$$\cos\alpha=-3m(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)+4m(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)$$

وبااستفاده از روابط (۲) و(۳) به اینصورت درمی‌آید :

$$\cos\alpha=\frac{2-m^2}{m}$$

۲۱۴ . طرفین معادله‌های اول‌ودوم دستگاه رامجذور می‌کنیم :

$$\begin{cases} \sin^2 x + 2\sin x \sin y + \sin^2 y = 4a^2 \\ \cos^2 x + 2\cos x \cos y + \cos^2 y = 4b^2 \end{cases} \qquad (1)$$

ازجمع وتفریق معادله‌های دستگاه(۱) بدست‌می‌آید:

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 2(a^2+b^2) - 1 \\ \cos 2x + \cos 2y + 2\cos(x+y) = 4(a^2-b^2) \end{cases} \qquad (2)$$

باتجزیهٔسمت‌چپ‌معادلهٔ دوم‌دستگاه‌اخیرواستفاده‌ازمعادلهٔ اول آن‌بدست‌می‌آید:

$$\cos(x+y) = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} \qquad (3)$$

حالاطرفین دومعادلهٔ اول دستگاه اصلی را درهم ضرب می‌کنیم :

$$\sin x \cos x + \sin y \cos y + \sin(x+y) = 4ab$$

ویا پس‌ازتبدیل سمت چپ تساوی :

$$\sin(x+y)[\cos(x-y)+1] = 4ab$$

که باکمك معادلهٔ اول دستگاه(۲) بدست می‌آید :

$$\sin(x+y) = \frac{2ab}{a^2+b^2} \qquad (4)$$

حالا سمت چپ معادلهٔ سوم دستگاه اصلی‌را تبدیل وباکمك روابط(۳) و (۴) محاسبه می‌کنیم :

$$tg\,x + tg\,y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} =$$

$$= \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2 - a^2}$$

ودرنتیجه رابطهٔ مستقل از x و y چنین می‌شود :

$$\frac{ab}{(a^2+b^2)^2 - a^2} = c$$

۲۱۵ . ازمعادلهٔ اول‌دستگاه $tg^2\alpha$ واز معادلهٔ دوم‌آن $tg^2\beta$ را بدست آورید ودرمعادلهٔ سوم قراردهید. جواب : $a^2b^2 = t^2t'^2$

۲۱۶ . دوطرف هریك ازدو معادلهٔ دستگاه رامجذور می‌کنیم :

$$\begin{cases} \sin^{۲}x+\dfrac{۱}{\sin^{۲}x}-۲=a^{۲} \\ \cos^{۲}x+\dfrac{۱}{\cos^{۲}x}-۲=b^{۲} \end{cases} \qquad (۱)$$

ازجمع دومعادلهٔ دستگاه(۱)، پس‌ازتبدیلهای ساده ، بدست می‌آید :

$$\sin^{۲}x\cos^{۲}x=\frac{۱}{a^{۲}+b^{۲}+۳} \qquad (۲)$$

دستگاه اصلی‌را می‌توان به‌این ترتیب تبدیل‌کرد :

$$\begin{cases} \sin x-\dfrac{۱}{\sin x}=a \\ \cos x-\dfrac{۱}{\cos x}=b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{-\cos^{۲}x}{\sin x}=a \\ \dfrac{-\sin^{۲}x}{\cos x}=b \end{cases}$$

که ازضرب دومعادلهٔ آن دریکدیگر بدست می‌آید :

$$\sin x\cos x=ab \qquad (۳)$$

باتوجه به‌روابط(۲)و(۳)، رابطهٔ مطلوب بدست می‌آید :

$$a^{۲}b^{۲}(a^{۲}+b^{۲}+۳)=۱$$

۲۱۷ . داریم :

$$x=\frac{\sin ۳a\sin ۶a-\sin ۲a\sin ۹a}{\sin a\sin ۶a-\sin ۲a\sin ۳a}$$

صورت ومخرج رابطور جداگانه تبدیل می‌کنیم :

$$\sin ۳a\sin ۶a-\sin ۲a\sin ۹a=\sin ۳a(۳\sin ۲a-۴\sin^{۳}۲a)-$$
$$\sin ۲a(۳\sin ۳a-۴\sin^{۳}۳a)=\sin ۲a\sin ۳a(۳-۴\sin^{۲}۲a-$$
$$-۳+۴\sin^{۲}۳a)=۴\sin ۲a\sin ۳a(\sin^{۲}۳a-\sin^{۲}۲a)=$$
$$=۲\sin ۲a\sin ۳a(\cos ۴a-\cos ۶a)=۴\sin ۲a\sin ۳a\sin ۵a\sin a;$$
$$\sin a\sin ۶a-\sin ۲a\sin ۳a=۲\sin a\sin ۳a\cos ۳a-۲\sin a\cos a\sin ۳a=$$
$$=۲\sin a\sin ۳a(\cos ۳a-\cos a)=-۴\sin^{۲}a\sin ۳a\sin ۲a$$

وبهمین ترتیب برای صورت ومخرج کسر y هم می‌توان عمل‌کرد .

جواب : $x=-\dfrac{sin ۵a}{sin a}$ و $y=\dfrac{sin ۴a}{sin a}$

۳۱۸ ۰ شرط وجود ریشهٔ مشترك بین‌دومعادله، باحذف مجهول بدست می‌آید. معادلهٔ دوم رابترتیب چنین تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{tg(x+a)}{tg(x-a)}=\frac{n}{m}\ ;\ \frac{tg(x+a)+tg(x-a)}{tg(x+a)-tg(x-a)}=\frac{n+m}{n-m}\ ;$$

$$\frac{sin(x+a+x-a)}{sin(x+a-x+a)}=\frac{n+m}{n-m}\ ;\ sin ۲x=\frac{n+m}{n-m}sin ۲a\ ;$$

با قرار دادن مقدار $sin ۲x$ در معادلهٔ اول، بدست می‌آید :

$$cos ۲x=\frac{r}{q}-\frac{p(n+m)}{q(n-m)}sin ۲a$$

وبالاخره باستفاده ازرابطهٔ $sin^۲ ۲x+cos^۲ ۲x=۱$، پس‌ازتبدیلهای ساده، خواهیم داشت :

$$(p^۲+q^۲)(n+m)^۲ sin^۲ ۲a-۲pr(n^۲-m^۲)sin ۲a+$$
$$+(r^۲-q^۲)(n-m)^۲=۰$$

۳۱۹ ۰ بامجذورکردن طرفین معادلهٔ اول بدست می‌آید :

$$sin ۲x=m^۲-۱ \qquad (۱)$$

وباتبدیل نسبتهای مثلثاتی معادلهٔ دوم به‌سینوس وکسینوس بدست می‌آید :

$$sin ۲x\cdot cos ۲x=\frac{۱}{n} \qquad (۲)$$

به‌کمك روابط (۱)و(۲) نتیجه می‌شود :

$$cos ۲x=\frac{۱}{n(m^۲-۱)} \qquad (۳)$$

وبالاخره باستفاده ازروابط(۱)و(۳) بدست می‌آید :

$$m^۲n^۲(m^۲-۱)^۲(m^۲-۲)+۱=۰$$

۳۲۰ ۰ $Arccotg\dfrac{۲\sqrt[۳]{۴}+۱}{\sqrt{۳}}=\alpha$ و $Arctg\dfrac{\sqrt[۳]{۴}+۱}{\sqrt{۳}}=\beta$

می‌گیریم، دراینصورت خواهیم داشت :

$$tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}+1} \quad , \quad tg\beta = \frac{\sqrt[3]{4}+1}{\sqrt{3}}$$

رابطهٔ حکم را می‌توان بصورت $3\alpha + 2\beta = \pi$ نوشت وبنابراین بایدثابت کنیم : $tg3\alpha = -tg2\beta$

داریم :

$$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}+1} - \frac{3\sqrt{3}}{(2\sqrt[3]{4}+1)^3}}{1-\frac{9}{(2\sqrt[3]{4}+1)^2}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}[(2\sqrt[3]{4}+1)^2-1]}{(2\sqrt[3]{4}+1)[(2\sqrt[3]{4}+1)^2-9]} =$$

$$= \frac{12\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{4}+1)}{4\sqrt[3]{4}(2\sqrt[3]{4}+1)(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}-1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{4}+1)}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-1} \ ;$$

$$-tg2\beta = \frac{2tg\beta}{tg^2\beta-1} = \frac{\frac{2(\sqrt[3]{4}+1)}{\sqrt{3}}}{\frac{(\sqrt[3]{4}+1)^2}{3}-1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{4}+1)}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-1}$$

۲۲۱ . اولا داریم :

$$tg(2Arctg\frac{1}{5}) = \frac{2tg(Arctg\frac{1}{5})}{1-tg^2(Arctg\frac{1}{5})} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

ثانیاً می‌توان نوشت :

$$tg(2Arctg\frac{1}{5}+Arctg\frac{1}{4}) = \frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{48}} = \frac{32}{43}$$

و از آنجا :

$$2Arctg\frac{1}{5}+Arctg\frac{1}{4} = Arctg\frac{32}{43}$$

۲۲۲. داریم:

$$cos(Arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\pi}{6}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$$

۲۲۳ . باتوجه به‌روابط زیر (باشرط $x<1$) صحت اتحادواضح‌می‌شود:

$$tg(2Arctg\,x)=\frac{2x}{1-x^2}\quad;\quad tg(Arcsin\frac{2x}{1+x^2})=\frac{2x}{x^2-1}$$

۲۲۴ . ازرابطهٔ زیراستفاده می‌کنیم :

$$\sin\frac{3\alpha}{2}=3\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^3\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\left(3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}(1+2\cos\alpha)$$

اگر فرض‌کنیم $\alpha=Arcsin\,x$ ، بدست می‌آید : $\sin\alpha=x$ وچون $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$

بنابراین $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$. حالا به محاسبهٔ $\sin\frac{\alpha}{2}$ می‌پردازیم :

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}=$$

$$=\pm\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}$$

وقتی $x\geqslant 0$ باشد $\alpha\geqslant 0$ می‌شود وبنابراین اولا علامت جلو کسررا باید مثبت گرفت وثانیاً $\sqrt{x^2}=x$ نوشت :

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}$$

ووقتی $x<0$ باشد $\alpha<0$ می‌شود . دراین حالت علامت جلوکسر را منفی و بایدگرفت وبنابراین درایں مورد هم خواهیم داشت : $\sqrt{x^2}=-x$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}$$

حالا اگرمقادیر $\cos\alpha$ و $\sin\frac{\alpha}{2}$ رادررابطهٔ $\sin\frac{3\alpha}{2}$ قراردهیم بدست می‌آید:

$$\sin(\frac{3}{2}Arcsin\,x)=\frac{x(1+2\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}$$

۲۲۵ . بترتیب داریم :

$$tg\left(Arctg\frac{1}{2n-1}-Arctg\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}}{1+\frac{1}{4n^2-1}}=\frac{1}{2n^2}$$

۲۲۶ . باید ثابت‌کنیم (a و b و c را مثبت می‌گیریم):

$$Arctg\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}+Arctg\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ca}}+$$

$$+Arctg\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}=\pi$$

وقتی مجموع سه‌قوس مساوی π است‌که حاصل‌جمع تانژانتهای آنها با حاصلضرب تانژانتهایشان مساوی باشد ، یعنی باید ثابت کنیم :

$$\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}+\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}$$

که صحت آن بسادگی بدست می‌آید .

توضیح . باتوجه به‌اینکه همهٔ عددهای جلوعلامت $Arctg$ مثبت هستند ، هرکدام قوسهائی بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ ومجموع آنها بین صفر و $\frac{3\pi}{2}$ می‌شود و بنابراین وقتی حاصلضرب تانژانتهای‌آنها مساوی حاصل‌جمع تانژانتهای‌آنها باشد ، مجموعشان تنها مساوی π می‌تواند باشد.

۲۲۷ . تساوی باشرط $n>1$ برقرار است . روابط زیر واضح است:

$$cos\left(Arcsin\frac{1}{n}\right)=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\quad,\quad cos\left(Arcsin\frac{1}{n+1}\right)=\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n+1}$$

وبنابراین داریم :

$$sin\left(Arcsin\frac{1}{n}-Arcsin\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n+1}-\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}$$

توضیح . اگر $Arcsin\frac{1}{n}=\alpha$ ، $Arcsin\frac{1}{n+1}=\beta$ بگیریم ،

$\sin\alpha=\frac{1}{n}$ و $\sin\beta=\frac{1}{n+1}$ می‌شود وبنابراین $\alpha>\beta$ است (با شرط $n>1$). ازطرف دیگرداریم :

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}\ ,\ \ 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

و بنابراین $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$ و رابطهٔ مفروض صحیح است.

۲۲۸ . اگر مجموع مفروض‌را مساوی α بگیریم ، داریم :

$$tg\,\alpha=\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-\frac{x(1-x)}{1+x}}=1$$

وچون $-\pi<\alpha<\pi$ است ، یا $\alpha=\frac{\pi}{4}$ و یا $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$ می‌شود . بـرای اینکه $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$ شود ، باید هردومقداری کـه جلو علامت $Arctg$ قـرار گرفته‌اند، منفی باشند :

$$x<0 \quad و \quad \frac{1-x}{1+x}<0$$

جواب این‌دستگاه $x<-1$ است و به‌این‌ترتیب داریم :

$$Arctg\,x+Arctg\frac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & (\text{باشرط } x>-1)\\ -\frac{3\pi}{4} & (\text{باشرط } x<-1)\end{cases}$$

۲۲۹ . جواب : $Arcsin\frac{۶۳}{۶۵}$

۲۳۰ . جواب : ۱

۲۳۱ . به‌ازای $n=۱$ داریم :

$$Arctg\frac{۱}{n}+Arctg\frac{۲}{n}+Arctg\frac{۳}{n}=\pi$$

زیرا $Arctg۱=\frac{\pi}{۴}$ است وسپس :

$$tg(Arctg۲+Arctg۳)=-۱ \implies Arctg۲+Arctg۳=\frac{\pi}{۲}+Arctg۱$$

و بهمین ترتیب به‌ازای $n=-۱$ بدست می‌آید :

$$Arctg\frac{۱}{n}+Arctg\frac{۲}{n}+Arctg\frac{۳}{n}=-\pi$$

بنابراین وقتی $|n|>۱$ باشد :

$$\left|Arctg\frac{۱}{n}+Arctg\frac{۲}{n}+Arctg\frac{۳}{n}\right|<\pi$$

ووقتی $|n|<۱$ باشد :

$$\left|Arctg\frac{۱}{n}+Arctg\frac{۲}{n}+Arctg\frac{۳}{n}\right|>\pi$$

ازطرف دیگر داریم :

$$\alpha=tg(Arctg\frac{۱}{n}+Arctg\frac{۲}{n}+Arctg\frac{۳}{n})=\frac{۶(n^۲-۱)}{n(n^۲-۱۱)}$$

وبطورکلی نتیجه‌های زیر بدست می‌آید :

$$۱)\ \begin{cases} n<-۱ \\ n>۱ \end{cases} \implies \alpha=Arctg\frac{۶(n^۲-۱)}{n(n^۲-۱۱)}\ ;$$

$$۲)\quad -۱<n<۰ \implies \alpha=-\frac{\pi}{۲}+Arctg\frac{۶(n^۲-۱)}{n(n^۲-۱۱)}$$

$$۳)\quad ۰<n<۱ \implies \alpha=\frac{\pi}{۲}+Arctg\frac{۶(n^۲-۱)}{n(n^۲-۱۱)}\ ;$$

$$۴)\ n=۱ \implies \alpha=\pi \ ; \quad ۵)\ n=-۱ \implies \alpha=-\pi$$

۲۳۲. اگر $Arccotg(-\frac{۳}{۴})=-\alpha$ بگیریم (α کمان حاده ومثبتی است) $cotg\alpha=\frac{۳}{۴}$ وازآنجا $cos\alpha=\frac{۳}{۵}$ می‌شود. داریم:

$$cos\alpha=۱-۲sin^۲\frac{\alpha}{۲}=\frac{۳}{۵} \implies sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

وبنابراین: $sin\left[\frac{۱}{۲}Arccotg(-\frac{۳}{۴})\right]=sin(-\frac{\alpha}{۲})=-sin\frac{\alpha}{۲}=-\frac{۱}{\sqrt{۵}}$

۲۳۳. اگر $Arctg\frac{۱}{۵}=\alpha$ بگیریم، $tg\alpha=\frac{۱}{۵}$ می‌شود و داریم:

$$tg۲\alpha=\frac{۲tg\alpha}{۱-tg^۲\alpha}=\frac{۲}{۵(۱-\frac{۱}{۲۵})}=\frac{۵}{۱۲}\ ;$$

$$tg۴\alpha=\frac{۲tg۲\alpha}{۱-tg^۲۲\alpha}=\frac{۱۰}{۱۲(۱-\frac{۲۵}{۱۴۴})}=\frac{۱۲۰}{۱۱۹}\ ;$$

$$۴Arctg\frac{۱}{۵}-Arctg\frac{۱}{۲۳۹}=Arctg\frac{۱۲۰}{۱۱۹}-Arctg\frac{۱}{۲۳۹}=$$

$$=Arctg\frac{\frac{۱۲۰}{۱۱۹}-\frac{۱}{۲۳۹}}{۱+\frac{۱۲۰}{۱۱۹}\cdot\frac{۱}{۲۳۹}}=Arctg\frac{۱۲۰\cdot۲۳۹-۱۱۹}{۱۱۹\cdot۲۳۹+۱۲۰}=$$

$$=Arctg\frac{۱۱۹\cdot۲۳۹+۲۳۹-۱۱۹}{۱۱۹\cdot۲۳۹+۱۲۰}=Arctg\frac{۱۱۹\cdot۲۳۹+۱۲۰}{۱۱۹\cdot۲۳۹+۱۲۰}=$$

$$=Arctg۱=\frac{\pi}{۴}\ ;$$

$$sin(۴Arctg\frac{۱}{۵}-Arctg\frac{۱}{۲۳۹})=sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۳۴. اگر $Arccos\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\alpha$ و $Arccos\frac{۱+\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۳}}=\beta$ فرض کنیم،

داریم :
$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{۲}{۳}} \Longrightarrow tg\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ;$$

$$\cos\beta=\frac{۱+\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۳}} \Longrightarrow tg\beta=\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۶}}\ ;$$

$$tg\left(\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{۲}{۳}}-\operatorname{Arccos}\frac{۱+\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۳}}\right)=tg(\alpha-\beta)=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۶}}}{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cdot\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۶}}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۳۵ . اگر $\operatorname{Arccos}b=\alpha$ فرض‌کنیم $\cos\alpha=b$ می‌شود وداریم:

$$\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۲b^۲-۱$$

می‌دانیم $۰<\operatorname{Arccos}b=\alpha\leqslant\pi$ پس $۰<۲\alpha<۲\pi$ خواهد بود .

اگر $۰\leqslant b\leqslant ۱$ باشد ، $۰\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{۲}$ و $۰\leqslant ۲\alpha\leqslant\pi$ می‌شود وبنابراین:

$$۲\operatorname{Arccos}b=\operatorname{Arccos}(۲b^۲-۱)$$

اگر $-۱\leqslant b<۰$ باشد $\frac{\pi}{۲}<\alpha\leqslant\pi$ و $\pi<۲\alpha\leqslant۲\pi$ می‌شودو بنابراین

$$\operatorname{Arccos}b=۲\pi-\operatorname{Arccos}(۲b^۲-۱)$$

در حالت $b\geqslant۰$ معادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$\operatorname{Arcsin}x=\operatorname{Arcsin}a+\operatorname{Arccos}(۲b^۲-۱)$$

واز آنجا، باسینوس‌گرفتن ازطرفین، بدست می‌آید :

$$x=a(۲b^۲-۱)+۲|b|\sqrt{(۱-a^۲)(۱-b^۲)} \qquad (۱)$$

ودرحالت $b<۰$ معادلهٔ مفروض به‌اینصورت درمی‌آید :

$$\operatorname{Arcsin}x=۲\pi+\operatorname{Arcsin}a-\operatorname{Arccos}(۲b^۲-۱)$$

که باسینوس گرفتن ازطرفین بدست می‌آید :

$$x=a(۲b^۲-۱)-۲|b|\sqrt{(۱-a^۲)(۱-b^۲)} \qquad (۲)$$

چون دررابطهٔ(۱) $b\geqslant۰$ است $|b|=b$ ودررابطهٔ(۲) (باتوجه به‌منفی بودن

b) $|b|=-b$ می‌شود وبنابراین درهرحال جواب x چنین می‌شود :

$$x=a(2b^2-1)-2b\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$$

۲۳۶ . داریم :

$$tg(Arcsin\, mx)=\frac{sin(Arcsin\, mx)}{cos(Arcsin\, mx)}=\frac{mx}{\sqrt{1-m^2x^2}} \ ;$$

$$tg(2Arctg\, nx)=\frac{2tg(Arctg\, nx)}{1-tg^2(Arctg\, nx)}=\frac{2nx}{1-n^2x^2} \ ;$$

وبنابراین معادلهٔ مفروض بصورت معادلهٔ جبری زیردرمی‌آید :

$$\frac{mx}{\sqrt{1-m^2x^2}}=\frac{2nx}{1-n^2x^2} \qquad (1)$$

جواب $x_1=0$ راکنارمی‌گذاریم ومعادله راگویا می‌کنیم ، پس‌ازساده کردن چنین می‌شود:

$$m^2n^4x^4+2m^2n^2x^2+m^2-4n^2=0$$

واز آنجا بدست می‌آید :

$$x^2=-\frac{m+2n}{mn^2} \ ; \ x^2=-\frac{m-2n}{mn^2}$$

مثلا برای اینکه $x^2=-\frac{m+2n}{mn^2}$ قابل‌قبول باشد ، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{m+2n}{n}<0 \qquad (2)$$

علاوه بر آن باید مقدار x^2 درمعادلهٔ(۱) صدق‌کندکه ازآنجا شرط زیر بدست می‌آید:

$$\frac{m+n}{n}>0 \qquad (3)$$

وجواب مشترک دونامعادلهٔ (۲)و(۳) چنین است :

$$-n<m<0$$

وبهمین ترتیب برای اینکه جواب $x^2=-\frac{m-2n}{mn^2}$ قابل‌قبول باشد ، باید داشته باشیم:

$$n<m<2n \quad (n>0) \quad \text{یا} \quad 2n<m<n \quad (n<0)$$

۲۳۷ . معادله را به‌اینصورت می‌نویسیم :

$$\mathrm{Arctg}(x-1)+\mathrm{Arctg}(x+1)=\pi-(\mathrm{Arctg}\,x+\mathrm{Arctg}\,3)$$

واز طرفین تانژانت می‌گیریم :

$$\frac{(x-1)+(x+1)}{1-(x^2-1)}=\frac{-(x+3)}{1-3x}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^3+9x^2-4x-6=0$$

ومعادلهٔ درجه سوم اخیر قابل تجزیه است :

$$(x-1)(x^2+10x+6)=0 \Longrightarrow x=1\ ,\ -5\pm\sqrt{19}$$

۲۳۸ . برای اینکه معادله معنا داشته باشد ، بایدداشته باشیم :

$$-1\leqslant\frac{2x+1}{2}\leqslant 1\quad ,\quad -1\leqslant\frac{2x+1}{2}\leqslant 1\ ,\ -1\leqslant x\leqslant 1$$

که ازآنجا شرط $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ بدست می‌آید . ازطرف دیگرداریم :

$$\sin\left(\mathrm{Arccos}\frac{2x+1}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3-4x-4x^2}$$

$$\sin\left(\mathrm{Arccos}\frac{2x-1}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3+4x-4x^2}$$

ومعادله را به اینصورت می‌نویسیم :

$$\mathrm{Arccos}\frac{2x+1}{2}+\mathrm{Arccos}\frac{2x-1}{2}=\frac{3\pi}{2}-\mathrm{Arccos}\,x$$

وازطرفین سینوس می‌گیریم :

$$\frac{1}{2}\sqrt{3-4x-4x^2}\ .\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}(2x+1)\ \times$$

$$\times\frac{1}{2}\sqrt{3+4x-4x^2}=-x$$

اگرجملهٔ دوم سمت چپ تساوی رابه‌سمت راست ببریم وطرفین رامجذورکنیم، بعدازساده‌کردن بدست می‌آید :

$$-16x(x+2)=8x(2x+1)\sqrt{(2x+1)(3-2x)}$$

از اینجا جواب $x=0$ بدست می‌آید . اگر طرفین معادله را به $8x$

ساده کنیم وسپس دوطرف رامجذور نمائیم بدست می‌آید :

$$16x^4 - 20x^2 + 13 = 0$$

که‌ریشه‌های‌موهومی‌دارد. بنابراین‌معادلهٔ مفروض‌تنهایك جواب $x = 0$ دارد.

۲۳۹ . اگر $x < 0$ باشد داریم:

$$\operatorname{Arccos}\frac{1-x^2}{1+x^2} = -\operatorname{Arcsin}\frac{2x}{1+x^2}$$

و معادله بصورت $\frac{3\pi}{2} = \operatorname{Arctg}\frac{2x}{1-x^2}$ درمی‌آید که معنا ندارد .

اگر $x > 0$ باشد داریم :

$$\operatorname{Arccos}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \operatorname{Arcsin}\frac{2x}{1+x^2} = \operatorname{Arctg}\frac{2x}{1-x^2}$$

و بنابراین معادلهٔ مفروض بصورت $\frac{\pi}{2} = \operatorname{Arccos}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ درمی‌آیدکه‌باتوجه به‌مثبت بودن x ، تنها جواب $x = 1$ راقبول دارد .

توضیح . درحقیقت باید گفت‌که اگر x از واحد کوچکتر باشد وبسمت واحد میل‌کند ، سمت چپ معادله بسمت $\frac{3\pi}{2}$ میل‌می‌کند .

۲۴۰ . ازدوطرف تساوی کسینوس می‌گیریم، بترتیب داریم :

$$\cos(\operatorname{Arcsin}x)\cdot\cos(\operatorname{Arcsin}2x) - \sin(\operatorname{Arcsin}x)\cdot\sin(\operatorname{Arcsin}2x) = \frac{1}{2};$$

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-4x^2} - 2x^2 = \frac{1}{2};\ \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-4x^2} =$$

$$= 2x^2 + \frac{1}{2};\ (1-x^2)(1-4x^2) = (2x^2+\frac{1}{2})^2\ ;$$

$$1 - 5x^2 + 4x^4 = 4x^4 + 2x^2 + \frac{1}{4};\ 7x^2 = \frac{3}{4}\ ;$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\ ,\quad x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

جواب $x_2 < 0$ قابل‌قبول نیست ، زیراوقتی مقدار x منفی باشد ، سمت‌چپ معادلهٔ مفروض مقداری منفی می‌شود ، درحالیکه مقدار سمت راست آن مثبت

است . برای اینکه ببینیم جواب $x_1 > 0$ درمعادله صدق می‌کند یا نه ، فرض می‌کنیم $\operatorname{Arcsin} x_1 = \alpha$ و $\operatorname{Arcsin} 2x_1 = \beta$. چون $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ است $0 < \alpha + \beta < \pi$ می‌شود ، $\frac{\pi}{3}$ هم در همین فاصلهٔ (0 و π) قرار دارد و بنابراین ازتساوی $\cos(\alpha+\beta) = \cos\frac{\pi}{3}$ نتیجه می‌گیریم : $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$.

۳۴۱ . اگر $\operatorname{Arcsin} x = a$ و $\operatorname{Arccos} x = b$ فرض کنیم ، چون $-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$ و $0 \leqslant b \leqslant \pi$ و $\sin a = \cos b$ است ، ناچار a و b قوسهائی ... و مثبت ومتمم یکدیگر خواهند بود : $a + b = \frac{\pi}{2}$. بهمین ترتیب اگر $\operatorname{Arcsin} y = c$ و $\operatorname{Arccos} y = d$ بگیریم $c + d = \frac{\pi}{2}$ بدست می‌آید. به این ترتیب دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$a \cdot c = \frac{\pi^2}{12}, \quad b \cdot d = \frac{\pi^2}{24}, \quad a + b = \frac{\pi}{2}, \quad c + d = \frac{\pi}{2}$$

مقادیر b و c رااز دومعادلهٔ آخر درمعادله‌های اول ودوم قرارمی‌دهیم :

$$a\left(\frac{\pi}{2} - d\right) = \frac{\pi^2}{12}, \quad d\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{\pi^2}{24}$$

که بعد ازحذف d بین این‌دو معادله وتبدیلات ساده ، بهمعادلهٔ زیرمی‌رسیم :

$$12a^2 - 7\pi a + \pi^2 = 0 \Longrightarrow a_1 = \frac{\pi}{3}, \quad a_2 = \frac{\pi}{4}$$

ومحاسبهٔ سایرمجهولات مشکل نیست. جواب چنین است :

$$\left|\begin{array}{l}\operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{3} \\ \operatorname{Arcsin} y = \frac{\pi}{4}\end{array}\right. \qquad \text{یا} \qquad \left|\begin{array}{l}\operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{Arcsin} y = \frac{\pi}{3}\end{array}\right.$$

ازآنجا :

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۴۲ . بسادگی بدست می‌آید :

$$y = Arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = Arctg\, x$$

وبنابراین: $y' = \frac{1}{1+x^2}$

(اگر مستقیماً ازآرکسینوس هم مشتق بگیریم ، بهمین نتیجه می‌رسیم).

۲۴۳ . جواب : $y' = \frac{-3}{(5x^2+1)\sqrt{1-4x^2}}$

۲۴۴ . ازرابطهٔ مشتق تابع $y = Arccosec\, u$ یعنی $y' = \frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$ استفاده کنید . جواب : $y' = \frac{\sqrt{x-1}}{2x(x-1)}$

۲۴۵ . $y' = 1$ (با شرط $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$)

۲۴۶ . $y' = 1$ (با شرط $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$)

۲۴۷ . $y' = \frac{2Arctg\, x}{1+x^2}$

۲۴۸ . داریم : $tg\, x^2 = \frac{x-y}{x+y}$ که از آنجا بدست می‌آید :

$y = \frac{x(1-tg\, x^2)}{1+tg\, x^2}$ ومحاسبهٔ مشتق آن مشکل نیست .

راه حل دوم . ازطرفین تابع مفروض، مشتق می‌گیریم (نسبت به x) و ساده می‌کنیم :

$$2x = \frac{\frac{(1-y')(x+y)-(1+y')(x-y)}{(x+y)^2}}{1+\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}};$$

$$2x = \frac{y-xy'}{x^2+y^2}$$

واز آنجا بدست می‌آید : $y'=\frac{y}{x}-۲(x^۲+y^۲)$

۲۴۹ . جواب : $y'=\frac{-y}{x^۲+y^۲-x}$

۲۵۰ . نامعادله همیشه برقراراست، زیرا به‌ازای همهٔ‌مقادیر x داریم:

$$-\frac{\pi}{۲}<Arctg\,x<\frac{\pi}{۲}$$

۲۵۱ . در ربعهای اول ودوم کسینوس نزولی است و بنابراین اگر از طرفین نامعادله‌کسینوس بگیریم ، جهت آن تغییرمی‌کند وبدست می‌آید :

$$-۱\leqslant x<\frac{۱}{۳}$$

۲۵۲ نامعادله جواب ندارد ، زیرا برای $Arcsin(x^۲+۱)$ ، تنها مقدار $x=۰$ قابل‌قبول است (باید $-۱\leqslant x^۲+۱\leqslant ۱$ باشد)که دراینصورت $Arcsin\,۱=\frac{\pi}{۲}$ می‌شود که از $\sqrt{۲}$ بزرگتر است .

۲۵۳ . درحالتی‌که $x\leqslant ۰$ باشد نامعادله برقرار است ، زیرا در این صورت $Arcsin\,x\leqslant ۰$ و $Arccos\,x\geqslant\frac{\pi}{۲}$ است ، وقتی که $x>۰$ باشد : $Arcsin\,x+Arccos\,x=\frac{\pi}{۲}$ می‌شود و برای مقادیر $۰<Arcsin\,x\leqslant\frac{\pi}{۴}$ نامعادله برقرار است یعنی $۰<x\leqslant\frac{\sqrt{۲}}{۲}$. بنابراین نامعادلهٔ مفروض به‌ازای همهٔ مقادیر $-۱\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برقرار است .

۲۵۴ . قبلا رابطهٔ **موآور** را یادآوری می‌کنیم : اگر $i=\sqrt{-۱}$ باشد داریم : $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$

با توجه به‌این رابطه می‌توان مثلا معادلهٔ $x^n-۱=۰$ راحل کرد :

$$x^n=۱=\cos ۲k\pi+i\sin ۲k\pi \implies$$

$$\implies x=\cos\frac{۲k\pi}{n}+i\sin\frac{۲k\pi}{n}$$

که اگر به k مقادیر از ۰ تا $n-1$ را بدهیم n جواب معادله بدست می‌آید:

$$x_0=1\ ,\quad x_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\ ,\quad x_2=\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n},\dots,$$

$$,\ x_{n-1}=\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

وروشن است‌که اتحاد زیر برقرار است :

$$x^n-1=(x-1)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (1)$$

دراتحاد (۱)یکبار $x=\cos2\alpha+i\sin2\alpha$ و سپس $x=\cos2\alpha-i\sin2\alpha$ قرار می‌دهیم :

$$\cos2n\alpha+i\sin2n\alpha-1=$$

$$=(\cos2\alpha+i\sin2\alpha-1)\prod_{k=1}^{n-1}(\cos2\alpha+i\sin2\alpha-x_k)$$

$$\cos2n\alpha-i\sin2n\alpha-1=$$

$$=(\cos2\alpha-i\sin2\alpha-1)\prod_{k=1}^{n-1}(\cos2\alpha-i\sin2\alpha-x_k)$$

ازضرب این‌دورابطه دریکدیگر ، پس‌ازتبدیلات لازم، به‌رابطهٔ حکم می‌رسیم.

۲۵۵ . اگرسمت چپ اتحاد را به‌x نشان دهیم ، داریم :

$$x\sin\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{3\pi}{2n}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2n}-\cos\frac{5\pi}{2n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n}-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)=\sin\frac{2n\pi}{4n}\cdot\sin\frac{(2n-2)\pi}{4n}=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)=\cos\frac{\pi}{2n}$$

وازآنجا :

$$x=\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}$$

۲۶۴ . رابطهٔ مواوی ریشه‌های معادلهٔ $x^n=1$ (مسئلهٔ ۲۵۴) را پیوسته مفروض می‌گیریم وضمناً به‌رابطهٔ زیر (که به‌سادگی قابل تحقیق است) توجه می‌کنیم :

$$(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)=\cos(a+b)+i\sin(a+b)$$

در حالت کلی آن :

$$(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)\cdots(\cos c+i\sin c)= \qquad (1)$$

$$=\cos(a+b+\cdots+c)+i\sin(a+b+\cdots+c)$$

حالا اگر $x_k=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}$ بگیریم داریم :

$$x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{m-1})$$

در طرفین این رابطه $x=1$ می‌گیریم ، باتوجه به‌رابطهٔ :

$$1-x_k=2\sin\frac{k\pi}{m}\left(\sin\frac{k\pi}{m}-i\cos\frac{k\pi}{m}\right)=$$

$$=2\sin\frac{k\pi}{m}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{m}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{m}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

بدست می‌آید :

$$m=(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{m-1})=$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{m}\right)\left(2\sin\frac{2\pi}{m}\right)\cdots\left(2\sin\frac{(m-1)\pi}{m}\right)\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdots$$

$$\cdots\left[\cos\left(\frac{m-1}{m}\pi-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{m-1}{m}\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

حاصلضرب $m-1$ عامل داخل کروشه‌ها مساوی واحد است ، زیرا باتوجه به‌رابطهٔ (۱) این حاصلضرب چنین می‌شود :

$$\cos\left(\frac{1+2+\cdots+m-1}{m}\pi-\frac{m\pi}{2}\right)+$$

$$+i\sin\left(\frac{1+2+\cdots+m-1}{m}\pi-\frac{m\pi}{2}\right)=\cos 0+i\sin 0=1$$

وبنابراین بدست می‌آید :

$$m=\left(2\sin\frac{\pi}{m}\right)\left(2\sin\frac{2\pi}{m}\right)\cdots\left(2\sin\frac{m-1}{m}\pi\right)$$

۲۵۷ . باتوجه بهاینکه قوسهای $\frac{\pi}{m}$ و $\frac{(m-1)\pi}{m}$ و همچنین $\frac{2\pi}{m}$ و $\frac{(m-2)\pi}{m}$ وغیره مکمل یکدیگرند ، تساوی زیرواضح می‌شود :

$$\left(2\sin\frac{\pi}{m}\right)\left(2\sin\frac{2\pi}{m}\right)^2\left(2\sin\frac{3\pi}{m}\right)^3\cdots\left(2\sin\frac{m-1}{m}\pi\right)^{m-1}=$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{m}\right)^{m-1}\left(2\sin\frac{2\pi}{m}\right)^{m-2}\left(2\sin\frac{3\pi}{m}\right)^{m-3}\cdots\left(2\sin\frac{m-1}{m}\pi\right)$$

وبنابراین اگرحاصلضرب مطلوب رامساوی P فرض کنیم، داریم :

$$P^2=\left(2\sin\frac{\pi}{m}\right)^m\left(2\sin\frac{2\pi}{m}\right)^m\left(2\sin\frac{3\pi}{m}\right)^m\cdots\left(2\sin\frac{m-1}{m}\pi\right)^m$$

وبنابراین باتوجه بەمسئلهٔ ۲۵۶ بدست می‌آید :

$$P^2=m^m \implies P=m^{\frac{m}{2}}$$

ازلحاظ‌هندسی، صحت اتحاد این‌مسئله بەمعنای آنست که حاصلضرب همهٔ اضلاع وهمهٔ قطرهای یك m ضلعی منتظم محاط دردایرهٔ بەشعاع واحد برابر است با $m^{\frac{m}{2}}$.

۲۵۸ . قبلا متذکر می‌شویم :

$$\operatorname{Arctg}\frac{k^2+k+2}{k^2+k}=\operatorname{Arctg}\frac{(k^2+k+1)+1}{(k^2+k+1)-1}=$$

$$=\operatorname{Arctg}\frac{1+\frac{1}{k^2+k+1}}{1-\frac{1}{k^2+k+1}}=\operatorname{Arctg}1+\operatorname{Arctg}\frac{1}{k^2+k+1}=$$

$$=Arctg\,1+Arctg\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}=Arctg\,1+Arctg(k+1)-Arctg\,k$$

وبنابراین بسادگی بدست می‌آید :

$$\sum_{k=1}^{4n+1}Arctg\frac{k^2+k+2}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{4n+1}[Arctg\,1+Arctg(k+1)-Arctg\,k]=$$

$$=\frac{\pi}{4}(4n+1)+\sum_{k=1}^{4n+1}[Arctg(k+1)-Arctg\,k]=$$

$$=\frac{\pi}{4}(4n+1)+Arctg(4n+2)-Arctg\,1=$$

$$=\frac{\pi}{4}(4n+1)+Arctg\frac{4n+1}{4n+3}$$

واز آنجا خواهیم داشت :

$$tg\sum_{k=1}^{4n+1}Arctg\frac{k^2+k+2}{k^2+k}=tg\left(\frac{\pi}{4}+Arctg\frac{4n+1}{4n+3}\right)=$$

$$=\frac{1+\frac{4n+1}{4n+3}}{1+\frac{4n+1}{4n+3}}=4n+2$$

۲۵۹ . اتحادهای واضح زیر را درنظر می‌گیریم :

$$\frac{1}{\sin 2x}=cotg\,x-cotg\,2x$$

$$\frac{1}{\sin 2^2x}=cotg\,2x-cotg\,2^2x$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\frac{1}{\sin 2^nx}=cotg\,2^{n-1}x-cotg\,2^nx$$

ازمجموع این اتحادها بدست می‌آید :

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 2^2 x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot g\, x-\cot g\, 2^n x$$

۲۶۰ . از اتحاد $\sin^4\alpha=\sin^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$ (که به‌سادگی قابل تحقیق است) استفاده می‌کنیم. داریم :

$$\sin^4\alpha=\sin^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$$

$$\frac{1}{4}\sin^4 2\alpha=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\frac{1}{16}\sin^2 4\alpha$$

$$\frac{1}{16}\sin^4 4\alpha=\frac{1}{16}\sin^2 4\alpha-\frac{1}{64}\sin^2 8\alpha$$

. . . .

$$\frac{1}{4^k}\sin^4 2^k\alpha=\frac{1}{4^k}\sin^2 2^k\alpha-\frac{1}{4^{k+1}}\sin^2 2^{k+1}\alpha$$

ازمجموع این روابط بدست می‌آید :

$$\sin^4\alpha=\frac{1}{4}\sin^4 2\alpha+\frac{1}{16}\sin^4 4\alpha+\cdots+\frac{1}{4^k}\sin^4 2^k\alpha=$$

$$=\sin^2\alpha-\frac{1}{4^{k+1}}\sin^2 2^{k+1}\alpha$$

۲۶۱ . مجموع مطلوب را S می‌گیریم وازرابطهٔ $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم، دراینصورت بدست می‌آید :

$$n-2S=\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha+\cdots+\cos 2n\alpha$$

اگر طرفین تساوی رادر $2\sin\alpha$ ضرب کنیم وهمهٔ جمله‌های سمت راست تساوی را به‌مجموع تبدیل نمائیم، بدست می‌آید :

$$2(n-2S)\sin\alpha=(\sin 3\alpha-\sin\alpha)+(\sin 5\alpha-\sin 3\alpha)+$$

$$+(\sin 7\alpha-\sin 5\alpha)+\cdots+[\sin(2n+1)\alpha-\sin(2n-1)\alpha]$$

ویابعد ازخلاصه کردن و تبدیلهای لازم :

$$S=\frac{n\sin\alpha-\sin n\alpha\cos(n+۱)\alpha}{۲\sin\alpha}$$

۲۶۲ . می‌توان جمله‌های مثبت را باهم و جمله‌های منفی را باهم جمع کرد وسپس حاصل‌کل‌را بدست‌آورد. ولی‌دراینجا بطریق دیگری عمل می‌کنیم.
مجموع را چنین می‌نویسیم :

$$S=\cos a+\cos(\pi+۲a)\cdot(۲\pi+۳a)+\cdots+\cos[(n-۱)\pi+na]$$

که‌اگرطرفین تساوی رادر $۲\sin\left(\frac{a}{۲}+\frac{\pi}{۲}\right)$ ضرب‌کنیم وهمهٔ جمله‌های طرف‌دوم را به‌مجموع تبدیل نمائیم ، پس‌ازساده کردن ، بدست می‌آید :

$$S=\frac{\sin\frac{na}{۲}\cos\frac{(n+۱)a}{۲}}{\cos\frac{a}{۲}}\quad (\text{بشرط زوج بودن } n)$$

$$S=\frac{\cos\frac{na}{۲}\cos\frac{(n+۱)a}{۲}}{\cos a}\quad (\text{بشرط فرد بودن } n)$$

۲۶۳ . روش اول . مجموع مفروض را می‌توان چنین نوشت :

$$\begin{aligned}S=\cos x+\cos ۲x+\cos ۳x+\cdots+\cos nx+\\+\cos ۲x+\cos ۳x+\cdots+\cos nx+\\+\cos ۳x+\cdots+\cos nx+\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\+\cos nx\end{aligned}$$

اگر سطر kام رادرنظربگیریم‌شامل $n-k+۱$ جمله است. باتوجه به‌اینکه درهرسطر قوسها به‌تصاعد حسابی هستند ، می‌توان مجموع جمله‌های سطر kام رابدست آورد :

$$\cos kx+\cos(k+۱)x+\cdots+\cos nx=$$

$$=\frac{۲}{۲\sin\frac{x}{۲}}\left[\sin\frac{۲n+۱}{۲}x-\sin\left(k-\frac{۱}{۲}\right)x\right]$$

دراین رابطه بجای k مقادیر از ۱ تا n را قرار می‌دهیم وهمهٔ رابطه‌هائی راکه بدست می‌آید جمع می‌کنیم؛ خواهد شد:

$$S = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \cdots + n\cos nx =$$

$$= \frac{n}{2\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{2n+1}{2}x - \frac{2}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{3x}{2} + \cdots + \sin\frac{2n-1}{2}x\right)$$

مقدار داخل پرانتز هم‌قابل محاسبه است (مجموع سینوسهائی است‌که‌قوسهائی به‌تصاعد حسابی دارند) :

$$\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2} + \cdots + \sin\frac{2n-1}{2}x = \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

وبنابراین (بعدازعملیات ساده) بدست می‌آید :

$$S = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

روش‌دوم. رابطهٔ واضح زیررا درنظرمی‌گیریم :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

اگر ازطرفین این رابطه مشتق بگیریم ، بدست می‌آید :

$$\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \cdots + n\cos nx =$$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{2n+1}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x\right) - \cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x\right)}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{-\sin^2\frac{x}{2}+(2n+1)\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{2n+1}{2}x\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{-1+2n\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2}+\left(\cos\frac{2n+1}{2}x\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2}\right)}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{-1+n[\cos nx-\cos(n+1)x]+\cos nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

۲۶۴ . از اتحاد $2\cot g2\alpha-\cot g\alpha=-tg\alpha$ استفاده کنید .

جواب : $\frac{1}{2^{n-1}}\cot g\frac{x}{2^{n-1}}-2\cot g2x$

۲۶۵ . به‌مجموع مفروض مقدار $\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha-1}$ رااضافه می‌کنیم، داریم:

$$\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha+1}+\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha-1}=\frac{2\sin2\alpha}{4\cos^2\alpha-1}=\frac{2\sin2\alpha}{2\cos2\alpha+1}$$

ازمجموع حاصل اخیر باکسردوم مجموع مفروض بدست می‌آید :

$$\frac{2\sin2\alpha}{2\cos2\alpha+1}+\frac{2\sin2\alpha}{2\cos2\alpha-1}=\frac{4\sin4\alpha}{2\cos4\alpha+1}$$

حاصل اخیررا باکسرسوم جمع می‌کنیم و بهمین‌ترتیب‌ادامه می‌دهیم. بنابراین اگرمجموع مفروض‌را S فرض‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$S+\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha+1}=\frac{2^{2n}\sin2^{2n}\alpha}{2\cos2^{2n}\alpha-1}\implies$$

$$\implies S=\frac{2^{2n}\sin2^{2n}\alpha}{2\cos2^{2n}\alpha-1}-\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha+1}$$

۲۶۶ . ازاتحاد واضح $tg\,a=\dfrac{۲tg\frac{a}{۲}}{۱-tg^{۲}\frac{a}{۲}}$ بسادگی بدست می‌آید :

$$tg^{۲}\frac{a}{۲}tg\,a=tg\,a-۲tg\frac{a}{۲}$$

بنابراین اتحادهای زیرواضح است :

$$tg^{۲}\frac{\alpha}{۲}tg\,\alpha=tg\,\alpha-۲tg\frac{\alpha}{۲}$$

$$۲tg^{۲}\frac{\alpha}{۴}tg\frac{\alpha}{۲}=۲tg\frac{\alpha}{۲}-۴tg\frac{\alpha}{۴}$$

$$۴tg^{۲}\frac{\alpha}{۸}tg\frac{\alpha}{۴}=۴tg\frac{\alpha}{۴}-۸tg\frac{\alpha}{۸}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$۲^{n-۱}tg^{۲}\frac{\alpha}{۲^{n}}\cdot tg\frac{\alpha}{۲^{n-۱}}=۲^{n-۱}tg\frac{\alpha}{۲^{n-۱}}-۲^{n}tg\frac{\alpha}{۲^{n}}$$

که ازمجموع آنها بدست می‌آید :

$$tg^{۲}\frac{\alpha}{۲}tg\,\alpha+۲tg^{۲}\frac{\alpha}{۴}tg\frac{\alpha}{۲}+\dots+۲^{n-۱}tg^{۲}\frac{\alpha}{۲^{n}}tg\frac{\alpha}{۲^{n-۱}}=$$

$$=tg\,\alpha-۲^{n}tg\frac{\alpha}{۲^{n}}$$

۲۶۷ . از اتحاد $sin\,a=-۴sin^{۳}\frac{a}{۳}+۳sin\frac{a}{۳}$ بدست می‌آید :

$$sin^{۳}\frac{\alpha}{۳}=\frac{۱}{۴}\left(۳sin\frac{a}{۳}-sin\,a\right)\qquad(۱)$$

باتوجه به‌اتحاد (۱) روابط زیر واضح می‌شود :

$$sin^{۳}\frac{\alpha}{۳}=\frac{۱}{۴}\left(۳sin\frac{a}{۳}-sin\,\alpha\right)$$

$$۳\sin^۳\frac{\alpha}{۹}=\frac{۱}{۴}\left(۹\sin\frac{\alpha}{۹}-۳\sin\frac{\alpha}{۳}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$۳^{n-۱}\sin^۳\frac{\alpha}{۳^n}=\frac{۱}{۴}\left(۳^n\sin\frac{\alpha}{۳^n}-۳^{n-۱}\sin\frac{\alpha}{۳^{n-۱}}\right)$$

که ازمجموع آنها بدست می‌آید :

$$\sin^۳\frac{\alpha}{۳}+۳\sin^۳\frac{\alpha}{۹}+\cdots+۳^{n-۱}\sin^۳\frac{\alpha}{۳^n}=\frac{۱}{۴}\left(۳^n\sin\frac{\alpha}{۳^n}-\sin\alpha\right)$$

۲۶۸ اگر جملهٔ عمومی این‌مجموع را S_n فرض‌کنیم ، داریم :

$$S_n=\frac{۱}{\sin a+\sin ۲a+\cdots+\sin na}=\frac{\sin\frac{a}{۲}}{\sin\frac{n}{۲}a\sin\frac{n+۱}{۲}a}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{n+۱}{۲}a-\frac{n}{۲}a\right)}{\sin\frac{n}{۲}a\sin\frac{n+۱}{۲}a}=\cot g\frac{na}{۲}-\cot g\frac{n+۱}{۲}a$$

وبنابراین خواهیم داشت (دررابطهٔ S_n بجای n بترتیب مقادیر۱،۲،.. .،nرا قرارمی‌دهیم):

$$\frac{۱}{\sin a}+\frac{۱}{\sin a+\sin ۲a}+\frac{۱}{\sin a+\sin ۲a+\sin ۳a}+\cdots+$$

$$+\frac{۱}{\sin a+\sin ۲a+\cdots+\sin na}=\left(\cot g\frac{a}{۲}-\cot g\, a\right)+$$

$$+\left(\cot g\, a-\cot g\frac{۳a}{۲}\right)+\left(\cot g\frac{۳a}{۲}-\cot g\frac{۵a}{۲}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left[\cot g\frac{na}{۲}-\cot g\frac{(n+۱)a}{۲}\right]=\cot g\frac{a}{۲}-\cot g\frac{(n+۱)a}{۲}$$

۲۶۹ . باتوجه به‌اتحاد $\frac{۱}{\sin x}=\cot g\frac{x}{۲}-\cot g\, x$ داریم :

$$cosec\frac{\alpha}{۲}+cosec\frac{\alpha}{۴}+\dots+cosec\frac{\alpha}{۲^n}=(cotg\frac{\alpha}{۴}-cotg\frac{\alpha}{۲})+$$

$$+(cotg\frac{\alpha}{۸}-cotg\frac{\alpha}{۴})+(cotg\frac{\alpha}{۱۶}-cotg\frac{\alpha}{۸})+\dots$$

$$\dots+(cotg\frac{\alpha}{۲^{n+۱}}-cotg\frac{\alpha}{۲^n})=cotg\frac{\alpha}{۲^{n+۱}}-cotg\frac{\alpha}{۲}$$

۲۷۰ . داریم :

$$tg\frac{x}{۲}\sec x=\frac{tg\frac{x}{۲}(۱+tg^۲\frac{x}{۲})}{۱-tg^۲\frac{x}{۲}}=$$

$$=\frac{۲tg\frac{x}{۲}-tg\frac{x}{۲}(۱-tg^۲\frac{x}{۲})}{۱-tg^۲\frac{x}{۲}}=\frac{۲tg\frac{x}{۲}}{۱-tg^۲\frac{x}{۲}}-tg\frac{x}{۲}=tgx-tg\frac{x}{۲}$$

حالا باتوجه به‌اتحاد $tg\frac{x}{۲}\sec x=tgx-tg\frac{x}{۲}$ بدست می‌آید :

$$tg\frac{\alpha}{۲}\sec\alpha+tg\frac{\alpha}{۴}\sec\frac{\alpha}{۲}+\dots+tg\frac{\alpha}{۲^n}\sec\frac{\alpha}{۲^{n-۱}}=$$

$$=(tg\alpha-tg\frac{\alpha}{۲})+(tg\frac{\alpha}{۲}-tg\frac{\alpha}{۴})+\dots+(tg\frac{\alpha}{۲^{n-۱}}-tg\frac{\alpha}{۲^n})=$$

$$=tg\alpha-tg\frac{\alpha}{۲^n}$$

۲۷۱ . از اتحاد $tga=\frac{tg۲a-tga}{۱+tg۲atga}$ می‌توان نتیجه گرفت.

$$tga\cdot tg۲a=\frac{۱}{tga}(tg۲a-tga)-۱$$

وبنابراین بدست می‌آید :

$$tgatg۲a+tg۲atg۳a+\dots+tg(n-۱)atgna=$$

$$=\frac{1}{tg\,a}[(tg2a\quad tga)+(tg3a-tg2a)+\cdots+(tg\,na-$$

$$-tg(n-1)a)]-(n-1)=\frac{1}{tg\,a}(tg\,na-tga)-(n-1)=$$

$$=\frac{tg\,na}{tg\,a}-\frac{tga}{tga}-n+1=\frac{tg\,na}{tga}-n$$

۲۷۲ ۰ اگر مجموع را مساوی S فرض کنیم و طرفین تساوی را در $2\sin 0/5^\circ$ ضرب نمائیم وسپس همهٔ جمله‌های سمت راست تساوی را به‌مجموع تبدیل‌کنیم ، جواب بدست می‌آید :

$$S=\frac{\sqrt{2}\sin 45/5^\circ}{\cos 0/5^\circ}$$

۲۷۳ ۰ داریم :

$$\frac{1}{\cos x+\cos(2n+1)x}=$$

$$=\frac{1}{2\cos(n+1)x\cos nx}=\frac{1}{2\sin x}\cdot\frac{\sin[(n+1)x-nx]}{\cos(n+1)x\cos nx}=$$

$$=\frac{1}{2\sin x}[tg(n+1)x-tg\,nx]$$

وحالا اگر در طرفین اتحادی که بدست آوردیم ، بجای n بترتیب مقادیر ۱، ۲، ...، n را قرار دهیم :

$$\frac{1}{\cos x+\cos 3x}=\frac{1}{2\sin x}(tg2x-tgx)$$

$$\frac{1}{\cos x+\cos 5x}=\frac{1}{2\sin x}(tg3x-tg2x)$$

. . . .

$$\frac{1}{\cos x+\cos(2n+1)x}=\frac{1}{2\sin x}[tg(n+1)x-tg\,nx]$$

ازمجموع این روابط بدست می‌آید :

$$\frac{1}{\cos x+\cos 3x}+\frac{1}{\cos x+\cos 5x}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{\cos x+\cos(2n+1)x}=\frac{1}{2\sin x}[(tg\,n+1)x-tg\,x]=$$

$$=\frac{\sin nx}{\sin 2x\cos(n+1)x}$$

۲۷۴ . داریم : $\sin^2 x\sin 2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin 2x=$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x$$

بااستفاده ازاین اتحاد می‌توان نوشت :

$$\sin^2 a\sin 2a=\frac{1}{2}\sin 2a-\frac{1}{4}\sin 4a$$

$$\frac{1}{2}\sin^2 2a\sin 4a=\frac{1}{4}\sin 4a-\frac{1}{8}\sin 8a$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sin^2 2^{n-1}a\sin 2^n a=\frac{1}{2^n}\sin 2^n a-\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2^{n+1}a$$

وازمجموع این رابطه‌ها بدست می‌آید :

$$\sin^2 a\sin 2a+\frac{1}{2}\sin^2 2a\sin 4a+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin^2 2^{n-1}a\sin 2^n a=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2a-\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2^{n+1}a$$

۲۷۵ . بسادگی می‌توان بدست آورد :

$$\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4\sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{4-4\cos^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\sin^2 x}$$

باتوجه به‌این‌اتحاد، مجموع مطلوب قابل‌محاسبه است .

جواب : $S=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{2^n\sin^2\frac{\alpha}{2^n}}$

۲۷۶ . از اتحاد $\sin x \sec 3x = \frac{1}{2}(tg 3x - tg x)$ استفاده کنید .

جواب : $S = \frac{1}{2}(tg 3^n x - tg x)$

۲۷۷ . داریم :

$$Arctg \frac{x}{1+n(n+1)x^2} =$$

$$= Arctg \frac{(n+1)x - nx}{1+(n+1)x \cdot nx} = Arctg(n+1)x - Arctg\, nx$$

با استفاده ازاین اتحاد، مجموع مطلوب بدست می‌آید .

جواب : $Arctg(n+1)x - Arctg\, x = Arctg \frac{nx}{1+(n+1)x^2}$

۲۷۸ . روابط زیر بسادگی بدست می‌آید :

$$A = \sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x},$$

$$B = \cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx = \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{\sin x}$$

وبنابراین $A - B$ مساوی مجموع مطلوبست :

$$A - B = \frac{\sin nx[\sin nx - \cos(n+1)x]}{\sin x}$$

۲۷۹ . مجموع زیرقابل محاسبه است :

$$y = -\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 3\alpha - \cdots - \cos n\alpha \qquad (1)$$

اگر ازاین رابطه مشتق بگیریم (نسبت به‌متغیر α) بدست می‌آید :

$$y' = \sin\alpha + 2\sin 2\alpha + 3\sin 3\alpha + \cdots + n\sin n\alpha \qquad (2)$$

وچنانچه دوباره ازرابطهٔ(۲) مشتق بگیریم ، بدست می‌آید :

$$y'' = \cos\alpha + 4\cos 2\alpha + 9\cos 3\alpha + \cdots + n^2\cos n\alpha \qquad (3)$$

بنابراین مجموع(۱) رامحاسبه می‌کنیم‌ومشتق دوم آنراحساب‌می‌کنیم، مجموع (۳) بدست می‌آید :

۲۸۰ . اتحاد زیربسادگی ثابت می‌شود :

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}=\operatorname{Arcsin}\frac{1}{n}-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{n+1}$$

باکمك این اتحاد، مجموع مفروض محاسبه می‌شود:

$$S=\operatorname{Arcsin}1-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{n+1}=\operatorname{Arccos}\frac{1}{n+1}$$

۲۸۱. چون قوسهای $\frac{\pi}{n}$ و $\frac{(n-1)\pi}{n}$ مکمل‌یکدیگرند، مجموع کسینوسهای آنها برابرصفر است. ازطرف دیگر، چون قوسها به‌تصاعدحسابی هستند، مجموع هردوقوس متساوی الفاصله ازطرفین، برابر π می‌شود، یعنی مجموع دوبه‌دوی جمله‌ها ازطرفین مساوی صفراست. اگر تعداد جمله‌ها فرد باشد، جملهٔ وسط $\cos\frac{\pi}{2}$ خواهدشد، که‌آنهم مساوی صفر است. بنابراین:

$$\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\dots+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}=0$$

۲۸۲. بااستدلالی شبیه مسئلهٔ قبل بدست می‌آید:

$$tg\frac{2\pi}{n}+tg\frac{4\pi}{n}+\dots+tg\frac{2(n-1)\pi}{n}=0$$

۲۸۳. باتوجه به‌تساوی $a_n-a_{n-1}=r$، داریم:

$$tg\,r=tg(a_n-a_{n-1})=\frac{tg\,a_n-tg\,a_{n-1}}{1+tg\,a_{n-1}\,tg\,a_n}$$

وازآنجا بدست می‌آید:

$$tg\,a_{n-1}\,tg\,a_n=\frac{tg\,a_n-tg\,a_{n-1}}{tg\,r}-1$$

باکمك این اتحاد، مجموع مطلوب بدست می‌آید:

$$S=\frac{1}{r}[(tg\,a_2-tg\,a_1)+(tg\,a_3-tg\,a_2)+\dots$$

$$\dots+(tg\,a_n-tg\,a_{n-1})]-(n-1)=$$

$$=\frac{1}{r}(tg\,a_n-tg\,a_1)-(n-1)$$

۲۸۴ تبدیل زیر روشن است :

$$\mathrm{Arctg}\frac{r}{1+a_n a_{n+1}}=\mathrm{Arctg}\frac{a_{n+1}-a_n}{1+a_{n+1}a_n}=$$

$$=\mathrm{Arctg}\,a_{n+1}-\mathrm{Arctg}\,a_n$$

که به‌کمك آن مجموع مطلوب محاسبه می‌شود :

$$S=\mathrm{Arctg}\,a_{n+1}-\mathrm{Arctg}\,a_1=\mathrm{Arctg}\frac{a_{n+1}-a_1}{1+a_1a_{n+1}}=$$

$$=\mathrm{Arctg}\frac{nr}{1+a_1a_{n+1}}$$

۲۸۵ . از اتحاد $\frac{tg\,a}{tg\frac{a}{2}}=1+\frac{1}{\cos a}$ استفـاده مـی‌کنیم . اگر حاصلضرب مطلوب را p بگیریم، داریم :

$$P=\frac{tg\,x}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{tg\,2x}{tg\,x}\cdots\frac{tg\,2^{n-1}x}{tg\,2^{n-2}x}=\frac{tg\,2^{n-1}x}{tg\frac{x}{2}}$$

۲۸۶ . روابط زیر واضح است :

$$\sin\frac{2\pi}{2k+1}=2\sin\frac{\pi}{2k+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2k+1}\qquad(1)$$

$$\sin\frac{4\pi}{2k+1}=2\sin\frac{2\pi}{2k+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2k+1}\qquad(2)$$

$$\sin\frac{6\pi}{2k+1}=2\sin\frac{3\pi}{2k+1}\cdot\cos\frac{3\pi}{2k+1}\qquad(3)$$

$$\sin\frac{8\pi}{2k+1}=2\sin\frac{4\pi}{2k+1}\cos\frac{4\pi}{2k+1}\qquad(4)$$

. . . .

$$\sin\frac{2(k-1)\pi}{2k+1}=2\sin\frac{(k-1)\pi}{2k+1}\cdot\cos\frac{(k-1)\pi}{2k+1}\quad (k-1)$$

$$\sin\frac{2k\pi}{2k+1}=2\sin\frac{k\pi}{2k+1}\cdot\cos\frac{k\pi}{2k+1}\quad (k)$$

حاصلضرب سینوسهائی که درسمت چپ تساوی قرار گرفته باحاصلضرب سینوسهائی که درسمت راست تساوی قرارگرفته‌اند برابرند، زیراسینوس سمت چپ تساوی در رابطهٔ(۱) باعامل سینوس رابطهٔ(۲) درسمت راست تساوی برابرند، بهمین ترتیب سینوسهای سمت چپ بردیف باعوامل سینوس سمت راست (بطور یك در میان) برابرند: به‌این‌ترتیب‌درسمت چپ‌تساوی نیمی‌ازسینوسها (ازآخر به بالا) ودر سمت راست تساوی سینوسهای باضریب فرد برای قوس $\frac{\pi}{2k+1}$ باقی می‌ماند، ولی‌قوسهای $\frac{\pi}{2k+1}$ و $\frac{2k\pi}{2k+1}$ یا $\frac{3\pi}{2k+1}$ و $\frac{2(k-1)\pi}{2k+1}$ و ... مکمل یکدیگرند و بنابراین سینوسهای مساوی دارند . در نتیجه اگر روابط(۱) تا (k) رادرهم ضرب‌کنیم، بدست می‌آید :

$$1=2^k\cos\frac{\pi}{2k+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2k+1}\ \cdots\ \cos\frac{k\pi}{2k+1}$$

و از آنجا :

$$\cos\frac{\pi}{2k+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2k+1}\cdots\cos\frac{k\pi}{2k+1}=\frac{1}{2^k}$$

۲۸۷ . اتحادهای زیر واضح است :

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$$

. . . .

$$\sin\frac{\alpha}{2^{n-2}}=2\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}$$

ازضرب این‌رابطه‌ها دریکدیگر بدست می‌آید :

$$\sin ۲\alpha = ۲^n \sin \frac{\alpha}{۲^{n-۱}} \left(\cos\alpha \cos\frac{\alpha}{۲} \cdots \cos\frac{\alpha}{۲^{n-۱}}\right)$$

و از آنجا :

$$\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{۲}\cdots\cos\frac{\alpha}{۲^{n-۱}} = \frac{\sin ۲\alpha}{۲^n \sin\frac{\alpha}{۲^{n-۱}}}$$

۲۸۸ . اتحادهای زیر بسادگی بدست می‌آید :

$$(۲\cos\alpha - ۱)(۲\cos\alpha + ۱) = ۲\cos ۲\alpha + ۱$$

$$(۲\cos\frac{\alpha}{۲} - ۱)(۲\cos\frac{\alpha}{۲} + ۱) = ۲\cos\alpha + ۱$$

. . . .

$$(۲\cos\frac{\alpha}{۲^n} - ۱)(۲\cos\frac{\alpha}{۲^n} + ۱) = ۲\cos\frac{\alpha}{۲^{n+۱}} + ۱$$

ازضرب این رابطه‌ها در یکدیگر بدست می‌آید :

$$(۲\cos\alpha - ۱)(۲\cos\frac{\alpha}{۲} - ۱)\cdots(۲\cos\frac{\alpha}{۲^n} - ۱) = \frac{۲\cos ۲\alpha + ۱}{۲\cos\frac{\alpha}{۲^n} + ۱}$$

۲۸۹ . اتحادهای زیررا بترتیب می‌نویسیم :

$$(\cos a + \cos b)(\cos a - \cos b) = \frac{۱}{۲}(\cos ۲a - \cos ۲b)$$

$$(\cos\frac{a}{۲} + \cos\frac{b}{۲})(\cos\frac{a}{۲} - \cos\frac{b}{۲}) = \frac{۱}{۲}(\cos a - \cos b)$$

. . . .

$$(\cos\frac{a}{۲^{n-۱}} + \cos\frac{b}{۲^{n-۱}})(\cos\frac{a}{۲^{n-۱}} - \cos\frac{b}{۲^{n-۱}}) =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{a}{2^{n-2}}-\cos\frac{b}{2^{n-2}}\right)$$

ازضرب این رابطه‌ها دریکدیگر، حاصلضرب مطلوب بدست می‌آید :

$$P=\frac{\cos 2a-\cos 2b}{2^{n}\left(\cos\frac{a}{2^{n-1}}-\cos\frac{b}{2^{n-1}}\right)}$$

۲۹۰ . ازاتحاد $1-tg^{2}a=2tg\,a\,cotg\,2a$ استفاده کنید :

$$\left(1-tg^{2}\frac{x}{2}\right)\left(1-tg^{2}\frac{x}{4}\right)\dots\left(1-tg^{2}\frac{x}{2^{n}}\right)=2^{n}tg\frac{x}{2^{n}}cotg\,x$$

۲۹۱ . $f(x)$ راازدرجهٔ چهارم می‌گیریم وفرض می‌کنیم :

$$f(x)=ax^{4}+bx^{3}+cx^{2}+dx+e$$

دراینصورت بسادگی بدست می‌آید :

$$f(x)-f(x-1)=4ax^{3}+3(b-2a)x^{2}+(2c-3b+4a)x+$$
$$+(d-c+b-a)$$

که اگر متحد x^{3} قراردهیم ، ضرایب a، b، c و d بدست می‌آید :

$$a=\frac{1}{4}\ ,\ b=\frac{1}{2}\ ,\ c=\frac{1}{4}\ ,\ d=0$$

(درصورت مسئله می‌بایستی شرط $f(0)=0$ داده می‌شد که $e=0$ باشد).
در اینصورت :

$$f(x)=\frac{1}{4}x^{4}+\frac{1}{2}x^{3}+\frac{1}{4}x^{2}=\frac{1}{4}x^{2}(x+1)^{2}$$

اکنون اگر دراتحاد $f(x)-f(x-1)\equiv x^{3}$ بترتیب مقادیر ۱ تا n را بجای x قراردهیم ورابطه‌های حاصل راباهم جمع کنیم ، بدست می‌آید :

$$1^{3}+2^{3}+3^{3}+\dots+n^{3}=\frac{1}{4}n^{2}(n+1)^{2}\qquad(1)$$

ثانیاً) وقتی‌که x بسمت صفرمیل‌کند داریم :

$$\lim_{x\to 0}S=1^{3}+2^{3}+3^{3}+\dots+n^{3}=\frac{1}{4}n^{2}(n+1)^{2}$$

ثالثاً) وقتی‌که x بسمت صفر میل‌کند داریم :

$$\lim_{x \to 0} S_2 = (1+2+3+\cdots+n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

وهمانطورکه می‌بینیم حد دومقدار S وS_1 ، وقتی x بسمت صفرمیل‌کند، باهم برابر است .

۴۹۲ . مسئله باشرط $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ ویادرحالت‌کلی:

$2k\pi - \frac{\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ قابل حل است که در اینصورت $\cos 2x$ و $1 + tg\,x\,tg\,2x$ مقادیری مثبت هستند وضمناً داریم :

$$\cos 2x(1 + tg\,x\,tg\,2x) = 1$$

اگرحاصلضرب دوعامل مثبت مقداری ثابت باشد، مجموع آنها وقتی می‌نیمم است که باهم برابر باشند :

$$\cos 2x = 1 + tg\,x\,tg\,2x$$

این معادله راحل می‌کنیم . بترتیب داریم :

$$\cos 2x = 1 + \frac{\sin x \cdot 2\sin x \cos x}{\cos x \cdot \cos 2x}\ ;\ \cos^2 2x = \cos 2x + 2\sin^2 x = 1!$$

$$\cos 2x = \pm 1 \implies x = \frac{1}{2} k\pi$$

جوابهای x بشرطی قابل‌قبولندکه باشرط مسئله بسازند؛ یعنی‌وقتی‌که $x = 2m\pi$ باشد. یعنی می‌نیمم عبارت مفروض درفاصلهٔ$(2m\pi + \frac{\pi}{4}$ و $2m\pi - \frac{\pi}{4})$ بهازای $x = 2m\pi$ بدست می‌آید .

۴۹۳ . اگر $tg\varphi = \frac{3}{2}$ بگیریم (φ قوسی است حاده ومثبت) داریم :

$$y=۲(\sin x+tg\varphi\cos x)=\frac{۲}{\cos\varphi}\sin(x+\varphi)$$

حداکثر y به‌ازای $\sin(x+\varphi)=۱$ وحداقل‌آن به‌ازای $\sin(x+\varphi)=-۱$ بدست می‌آید. به این ترتیب $y_{Max}=\sqrt{۱۳}$ وقتی است که داشته باشیم:

$x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-\varphi$ و $y_{Mm}=-\sqrt{۱۳}$ وقتی بدست‌می‌آیدکه‌داشته‌باشیم:

$$x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-\varphi$$

۲۹۴. وقتی‌که $a+b+c=\pi$ باشد، داریم:

$$cotg\,a\,cotg\,b+cotg\,b\,cotg\,c+cotg\,c\,cotg\,a=۱ \qquad (۱)$$

چون $cotg\,a$، $cotg\,b$، $cotg\,c$ مقادیری مثبت هستند، اگر $y=cotg\,a\,cotg\,b\,cotg\,c$ بگیریم، ماکزیمم y همراه باماکزیمم $y^۲$ است و داریم:

$$y^۲=(cotg\,a\,cotg\,b)(cotg\,b\,cotg\,c)(cotg\,c\,cotg\,a)$$

حاصلضرب سه عامل مثبت، وقتی‌که مجموع آنها مقداری است‌ثابت، بشرطی ماکزیمم است‌که با هم برابر باشند:

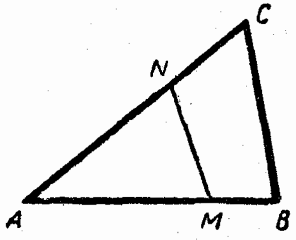
$$cotg\,a\,cotg\,b=cotg\,b\,cotg\,c=cotg\,c\,cotg\,a$$

وازآنجا بدست می‌آید: $a=b=c=\frac{\pi}{۳}$

که دراینصورت خواهیم داشت: $y_{Max}=cotg^۳\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۹}$

۲۹۵. MN را پاره‌خط‌مجهول می‌گیریم(شکل۴۴). اگرمساحت مثلث ABC رامساوی S فرض کنیم، مساحت مثلث AMN مساوی $\frac{۱}{۲}S$ مـی‌شود بنا بـر مثال ۵ صفحـهٔ ۸۸ داریم:

$AM=AN$ و $MN=\sqrt{۲S tg\frac{A}{۲}}$.



شکل ۴۴

پاره‌خط MN را برحسب b و c اضلاع مثلث ABC بدست می‌آوریم.
چون مساحت‌مثلث AMN نصف مساحت مثلث ABC است، بنابراین‌داریم:

$$AM^{۲}\cdot \sin A=\frac{۱}{۲}bc\sin A \implies AM=\sqrt{\frac{bc}{۲}}$$

طبق‌فرض باید نقطه‌های M و N براضلاع AB و AC واقع باشند، یعنی جواب مسئله تنها وقتی‌قابل قبول است‌که $\sqrt{\frac{bc}{۲}}$ ازهریك‌ازاضلاع b و c بزرگتر نباشد. فرض‌کنید $c<b$، دراینصورت شرط $\sqrt{\frac{bc}{۲}}\leqslant c$ تنها وقتی برقرار است‌که $b\leqslant ۲c$ باشد.

به‌این‌ترتیب باشرط $c\leqslant b\leqslant ۲c$، روی اضلاع AB و AC ازمثلث ABC، نقطه‌های M و N را چنان پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$AM=AN=\sqrt{\frac{bc}{۲}}$$

بسادگی می‌توان ثابت کرد که اگر $b>۲c$ باشد، پاره‌خط مجهول برمیانهٔ وارد برضلع b منطبق می‌شود وضمناً این میانه از $\sqrt{۲S\,tg\frac{A}{۲}}$ بزرگتر است.

۲۹۶ • درمسئلهٔ ۲۹۵ مقید بودیم‌که نقطه‌های M و N را روی اضلاع AB و AC ازمثلث ABC انتخاب کنیم. مسئله رامی‌توان در حالت کلی آنطورکه درمسئلهٔ ۲۹۶ طرح شده است، حل‌کرد.

$a<c<b$ می‌گیریم، دراینصورت $b<a+c<۲c$ یعنی $c<b<۲c$ می‌شود. باتوجه به‌مسئلهٔ ۲۹۵، اگر MN اضلاع زاویهٔ A ازمثلث ABC را چنان قطع کند که مساحت مثلث AMN مساوی $\frac{۱}{۲}S$ شود، طول پاره خط MN مساوی $\sqrt{۲S\,tg\frac{A}{۲}}$ خواهد بود. پاره خط MN جواب مسئله است، یعنی از پاره خطهائی که اضلاع زاویه‌های B یا C را قطع‌می‌کنند، کوچکتر است، زیرا:

$$\sqrt{2S\,tg\frac{A}{2}}<\sqrt{2S\,tg\frac{C}{2}}<\sqrt{2S\,tg\frac{B}{2}}$$

بنابراین باید روی اضلاع کوچکترین زاویهٔ مثلث ، نقطه‌های M و N را طوری انتخاب‌کرد که داشته باشیم: $AM=AN=\sqrt{\frac{bc}{2}}$.

۲۹۷ . α را زاویهٔ مجاور به قاعده ، AB را قاعده ، CD را ضلع مستطیل CDFE ، $AB=1$ ، $CE=x$ و $CD=y$ می‌گیریم . در اینصورت داریم :

$$y=1-2x\,cotg\,\alpha \qquad (1)$$

$$S_{CDFE}=x\cdot y=x-2x^2cotg\,\alpha=\frac{1-(1-4x\,cotg\,\alpha)^2}{8\,cotg\,\alpha}$$

مساحت مستطیل CDFE وقتی ماکزیمم است‌که $1-4x\,cotg\,\alpha=0$ باشد واز آنجا $x=\frac{1}{4}tg\,\alpha$ بـدست می‌آیـد . طبـق شرط باید $x=y$ یعنی $y=\frac{1}{4}tg\,\alpha$ باشد. این مقادیر x و y رادررابطهٔ(۱) قرارمی‌دهیم بدست‌می‌آید:

$$tg\,\alpha=2 \implies \alpha=Arctg\,2$$

۲۹۸ . a، b، c و d رااضلاع یك چهارضلعی فرض می‌کنیم . اگرزاویهٔ x که بین اضلاع a و b قرارگرفته است معلوم‌باشد ، چهارضلعی کاملامشخص می‌شود. بنابراین بامعلوم بودن a، b، c و d ، زاویهٔ y کـه بین اضلاع c و d قرارگرفته است تابعی از x می‌شود که بسادگی می‌توان آنرا پیداکرد . طبق قضیهٔ کسینوسها داریم :

$$a^2+b^2-2ab\cos x=c^2+d^2-2cd\cos y \qquad (1)$$

ازطرف دیگر، اگر S مساحت چهارضلعی باشد ، داریم :

$$S=\frac{1}{2}(ab\sin x+cd\sin y)$$

مشتق S را نسبت به x بدست می‌آوریم :

$$S'=\frac{1}{2}(ab\cos x+cd\,y'\cos y) \qquad (2)$$

درتابع ضمنی (۱) هم نسبت به x مشتق می‌گیریم :

$$2ab\sin x = 2cdy'\sin y$$

که ازآنجا بدست می‌آید : $y' = \dfrac{ab\sin x}{cd\sin y}$

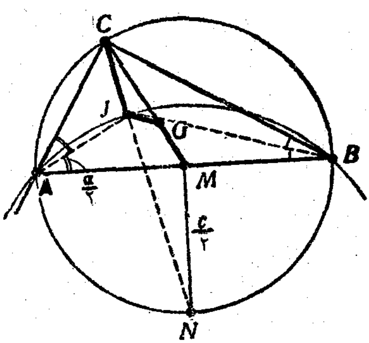
این مقدار y' را دررابطهٔ(۲) قرارمی‌دهیم وساده می‌کنیم :

$$S' = \frac{1}{2}ab\frac{\sin(x+y)}{\sin y}$$

ازصفر قراردادن S' بدست می‌آید : $\sin(x+y) = 0$

وقتی $x+y<\pi$ باشد $S'>0$ ووقتی $x+y>\pi$ باشد $S'<0$ است. بنابراین به‌ازای $x+y=\pi$ تابع به ماکزیمم خود می‌رسد . به این‌ترتیب حداکثر مساحت مربوط به چهارضلعی است‌که درآن $x+y=\pi$ باشد، یعنی چهارضلعی قابل محاط دردایره باشد .

۲۹۹ . G را محل تـلاقی میانه‌هاو J را محل‌تلاقی نیمسازهای مثلث قائـم الزاویهٔ ABC به وتر مساوی c فرض می‌کنیم (شکل۴۵) در اینصورت :



شکل ۴۵

$$CG = \frac{2R}{3} = \frac{c}{3} \text{ و } CJ = r\sqrt{2}$$

(R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث است). اگر از قضیهٔ‌کسینوسها درمثلث CGj استفاده کنیم ، بدست می‌آید :

$$GJ^2 = \frac{c^2}{9} + 2r^2 - \frac{2\sqrt{2}rc}{3}\cos(\alpha - 45^\circ)$$

سپس توجه می‌کنیم‌که برای مثلث قائم‌الزاویه داریم :

$$r = p - c = \frac{c}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1\right) = \frac{c}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) - \frac{c}{2}$$

ازاینجا نتیجه می‌گیریم :
$$r=\frac{c}{\sqrt{۲}}cos(\alpha-۴۵^\circ)-\frac{c}{۲}$$

ضمناً داریم : $r-\frac{c}{۲}=\frac{۱}{۲}(a+b-۲c)<۰$. بنابراین :

$$Gj^۲=\frac{c^۲}{۹}+۲r^۲-\left(r+\frac{c}{۲}\right)\sqrt{۲}\cdot\frac{۲r\sqrt{۲}}{۳}$$

که بعداز تبدیلات ساده چنین می‌شود :

$$۹Gj^۲=۶\left(\frac{c}{۲}-r\right)^۲-\frac{c^۲}{۲}$$

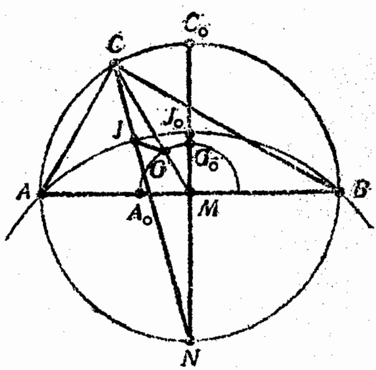
واضح است که حداقل Gj وقتی بدست می‌آید که r حداکثر باشد . ولی حداکثر r وقتی است که $\alpha=۴۵^\circ$ باشد ، یعنی وقتی کـه مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین باشد . دراینحالت داریم :

$$r=c\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}-\frac{۱}{۲}\right)\ ;\ Gj_{Min}=\frac{c}{۶}(۳\sqrt{۲}-۴)$$

حداکثر Gj وقتی بدست می‌آیدکه r حداقل، یعنی $r=۰$ باشد. دراینحالت دورأس ازمثلث برهم منطبق می‌شود . وقتی‌که $r\to۰$ ، زاویهٔ α بسمت صفریا ۹۰ درجه میل می‌کند وپاره‌خط Gj حداکثر خود را بدست می‌آورد:

$$Gj_{Max}=\frac{c}{۳}$$

راه حل دوم . وقتی‌که نقطهٔ C محیط نیمدایرهٔ بقطر $AB=c$ را طی می‌کند. ، نقطهٔ G هم قوس نیمدایرهٔ به‌شعاع $\frac{c}{۳}$ و به‌مرکز M وسط AB را طی‌می‌کند. دراینحالت نقطهٔ j قوس‌دایره‌ای را طی‌می‌کند که از A و B می‌گذرد و مرکز آن نقطهٔ N است (شکل ۴۶) . باید کوتاهترین فاصلهٔ بین‌نقطه‌های این



شکل ۴۶

دوقوس را پیداکنیم. بسادگی می‌توان ثابت‌کردکه‌کوتاهترین فاصله‌ازنقطه‌های تلاقی MN بااین قوسها بدست‌می‌آید. درحقیقت نقطه‌های G و J تنها در یك حالت بانقطهٔ M بریك استقامت قرار می‌گیرند، یعنی وقتی که به وضع $G_\circ$ و $J_\circ$ باشند. ولی داریم:

$$GJ > MJ - MG \geqslant MJ_\circ - MG_\circ = G_\circ J_\circ$$

به‌این‌ترتیب $G_\circ J_\circ$ حداقل مقدار ممکن است‌وداریم:

$$GJ_{\text{Min}} = G_\circ j_\circ = \frac{c\sqrt{۲}}{۲} - \frac{c}{۲} - \frac{c}{۶} = \frac{c}{۶}(۳\sqrt{۲} - ۴)$$

ثابت می‌کنیم که وقتی نقطهٔ C از $C_\circ$ بسمت A یا B نزدیك شود، فاصلهٔ GJ مرتباً بزرگ می‌شود. درحقیقت طول MG ثابت است، زاویهٔ GCj ازصفرتا ۴۵ درجه ترقی می‌کند وپاره خط CJ ازمقدار $G_\circ J_\circ$ تاصفر نزول می‌کند (پاره خط CN نزولی و پاره خط JN ثابت است و بنابراین تفاضل آنها نزولی‌می‌شود). باقی‌می‌ماند ثابت‌کنیم‌که‌اگر برای‌دومثلث $C_۱J_۱G_۱$ و $C_۲J_۲G_۲$ داشته باشیم:

$$C_۱G_۱ = C_۲G_۲ \quad \text{و} \quad G_۱\widehat{C_۱}J_۱ < G_۲\widehat{C_۲}J_۲ \quad \text{و} \quad C_۱J_۱ > C_۲J_۲$$

در اینصورت $G_۲J_۲ > C_۱J_۱$ می‌شود. برای این منظور مثلث کمکی $C'J'G'$ را می‌سازیم که درآن داشته باشیم:

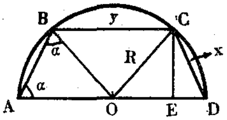
$$C'G' = C_۲G_۲ \quad \text{و} \quad G'\widehat{C'}J' = G_۱\widehat{C_۱}J_۱ \quad \text{و} \quad C'J' = C_۲J_۲ < C_۱J_۱$$

واضح است که $G'J' < G_۲J_۲$. ازطرف دیگر اگر بحساب بیاوریم که زاویه $C_۱J_۱G_۱$ منفرجه است (کافی است مماس در نقطه $J_۱$ را رسم کنیم)، بایدنامساوی $G'J' > G_۱J_۱$ برقرار باشد(برای این منظورمی‌توان مثلث $C'J'G'$ رابرمثلث $C_۱G_۱J_۱$ قرارداد وازقضیهٔ زاویهٔ خارجی استفاده کرد). ازآنجا نتیجه می‌شود $G_۱J_۱ < G_۲J_۲$.

به‌این‌ترتیب پاره خط GJ صعودی است‌ومرتباً از $G_\circ j_\circ$ زیادترمی‌شود تابه‌اندازهٔ $AA_\circ$ برسد. درحالت حدی مثلث ABC وجود ندارد، زیرا دو رأس آن برهم منطبق می‌شود.

۳۰۰ . درنیمدایره ذوزنقهٔ متساوی الساقینی محاط می‌کنیم (AD قطر

نیمدایره ومساوی $\text{۲}R$ است) (شکل ۴۷). محیط این ذوزنقه برابراست با:



شکل ۴۷

$$AB+BC+CD+\text{۲}R$$

$$BC=y \quad \text{و} \quad AB=CD=a$$

می‌گیریم وحداکثرمقدار عبارت زیر را بدست می‌آوریم:

$$\text{۲}x+y+\text{۲}R$$

قبلاً y را برحسب R و x محاسبه می‌کنیم. برای این‌منظور ارتفاع CE ازمثلث OCD را می‌سازیم. باتوجه به‌اینکه $DE=\frac{y}{\text{۲}}$ و $ED=R-\frac{y}{\text{۲}}$ است، بدست می‌آید:

$$x^{\text{۲}}=\text{۲}R(R-\frac{y}{\text{۲}}) \text{ و } y=\text{۲}R-\frac{x^{\text{۲}}}{R}$$

به‌این‌ترتیب باید حداکثر تابع زیررا پیداکنیم:

$$f(x)=\text{۲}x-\frac{x^{\text{۲}}}{R}+\text{۴}R$$

تابع اخیر را می‌توان چنین نوشت:

$$f(x)=\text{۵}R-\frac{\text{۱}}{R}(x-R)^{\text{۲}}$$

وواضح‌است‌که حداکثر مقدار $f(x)$ به‌ازای $x=R$ بدست می‌آید واین‌مقدار حداکثر برابر $\text{۵}R$ است. بنابراین برای اینکه ذوزنقه‌حداکثرمحیط را داشته باشد، باید قاعدهٔ‌کوچکتر ودوساق، هرکدام مساوی R باشند.

راه حل دوم. شعاعهای OB و OC دارسم می‌کنیم. اگرزاویهٔ OAB را مساوی α بگیریم، $x=\text{۲}R\cos\alpha$ می‌شود. با توجه به اینکه داریم: $\widehat{OBC}=\text{۱۸۰}^\circ-\text{۲}\alpha$، بدست می‌آید:

$$y=\text{۲}R\cos(\text{۱۸۰}^\circ-\text{۲}\alpha)=-\text{۲}R\cos\text{۲}\alpha$$

محیط ذوزنقه برابراست با:

$$\text{۲}R(\text{۱}+\text{۲}\cos\alpha-\cos\text{۲}\alpha)=\text{۴}R(\text{۱}+\cos\alpha-\cos^{\text{۲}}\alpha)$$

عبارت اخیررا می‌توان چنین نوشت:

$$4R\left[\frac{5}{4}-\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

وحداکثر این‌عبارت به‌ازای $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ یا $\alpha=60^\circ$ بدست می‌آید که مساوی $5R$ است. بنابراین‌هریك ازاضلاع AB ، BC و CD مساوی R می‌شود.

۳۰۱ . بترتیب داریم :

$$y=(a+\sin x)(a+\cos x)=$$

$$=\sin x\cos x+a(\sin x+\cos x)+a^2=\frac{1}{2}[2\sin x\cos x+$$

$$+1+2a(\sin x+\cos x)+2a^2-1]=\frac{1}{2}[2\sin x\cos x+$$

$$+\sin^2 x+\cos^2 x+2a(\sin x+\cos x)+a^2+(a^2-1)]$$

وبه‌این‌ترتیب بدست می‌آید :

$$y=\frac{1}{2}[(\sin x+\cos x+a)^2+(a^2-1)] \qquad (1)$$

ازآنجاکه $-\sqrt{2}\leqslant\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$ ، با توجه به‌رابطهٔ (۱) داریم :

$$y_{Max}=\frac{1}{2}[(a+\sqrt{2})^2+a^2-1]=\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

واین مقدار حداکثر وقتی بدست می‌آیدکه داشته باشیم :

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

وقتی‌که $0\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ باشد، حداقل‌مقدار y به‌ازای $\sin x+\cos x+a=0$ ، یعنی‌به‌ازای:

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\left(\pi-\operatorname{Arccos}\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \qquad (3)$$

بدست می‌آید و داریم:

$$y_{Min}=\frac{1}{2}(a^2-1)$$

وقتی $a>\sqrt{2}$ باشد ، حداقل مقدار y به ازای $\sin x+\cos x=-\sqrt{2}$ ، یعنی به‌ازای:

$$x=(8k+5)\frac{\pi}{4} \qquad (4)$$

بدست می‌آید وداریم :

$$y_{Min}=\frac{۱}{۲}\left[(a-\sqrt{۲})^{۲}+a^{۲}-۱\right]=\left(a-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲}$$

ازروابط ۲ تا ۴ دیده می‌شودکه حداکثر وحداقل مقدار y همراه‌با a صعودی است . به‌ازای $a=۰$ طبق رابطهٔ (۳) می‌نیم‌مطلق تابع چنین‌است:

$$y_{Min}=-\frac{۱}{۲}$$

۳۰۴ . اگر $\cos y-۲\sin x=\lambda$ فرض‌کنیم، داریم: $\cos y=\lambda+۲\sin x$. این مقدار $\cos y$ را در رابطهٔ فـرض یعنی $۱۶\cos^{۲}y+۳۶\sin^{۲}x=۹$ قرار می‌دهیم ، بعد ازساده‌کردن بدست می‌آید :

$$۱۰۰\sin^{۲}x+۶۴\lambda\sin x+۱۶\lambda^{۲}-۹=۰ \qquad (E)$$

برای‌اینکه معادلهٔ(E) جوابهای حقیقی‌داشته باشد، باید مبین‌آن‌مثبت‌باشد،

$$۳۲^{۲}\lambda^{۲}-۱۰۰(۱۶\lambda^{۲}-۹)\geqslant ۰ \implies -\frac{۵}{۴}\leqslant\lambda\leqslant\frac{۵}{۴} \qquad (F)$$

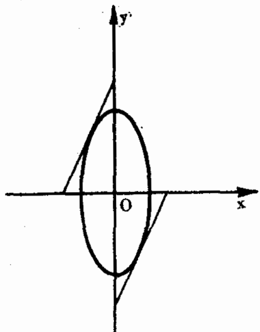
بنابراین حداکثر $\cos y-۲\sin x$ مساوی $\frac{۵}{۴}$ وحداقل آن مساوی $-\frac{۵}{۴}$ است.

حداکثرتابع به ازای $\sin x=-\frac{۲}{۵}$ و $\cos y=\pm\frac{۹}{۲۰}$ وحداقل‌آن‌به‌ازای $\sin x=\frac{۲}{۵}$ و $\cos y=\pm\frac{۹}{۲۰}$ بدست می‌آید :

تعبیر هندسی . $\sin x=X$ و $\cos y=Y$ می‌گیریم ، داریم :

$$\begin{cases}۱۶Y^{۲}+۳۶X^{۲}=۹\\ Y-۲X=\lambda\end{cases}$$

معادلـهٔ اول این دستگاه یك بیضی و معادلهٔدوم یك‌خط راست را نشان‌می‌دهد معادلهٔ(E) طولهای نقطه‌های تلاقی‌خط وبیضی را می‌دهد ونامعادلهٔ (F) شرط



شکل ۴۸

تقاطع و تماس خط و بیضی‌را معین می‌کند ، بنابراین باتوجه به‌اینکه نقطه‌هائی مانند $M(X,Y)$ بایدروی بیضی وخط هردو واقع باشند ، حداکثر و حداقل عرض ازمبدأ خط $Y=2X+\lambda$ بترتیب مساوی $\frac{5}{4}$ و $-\frac{5}{4}$ است(شکل۴۸).

۳۰۴ . $\sin^2 x+3\sin^2 y=\lambda$ می‌گیریم ، داریم :

$$\sin x+\sin y=a \quad \text{و} \quad \sin^2 x+3\sin^2 y=\lambda$$

باحذف y بین این دومعادله ، بدست می‌آید:

$$4\sin^2 x-6a\sin x+3a^2-\lambda=0 \qquad (A)$$

برای اینکه این معادله جوابهای حقیقی داشته باشد ، باید مبین آن غیر منفی باشد :

$$9a^2-4(3a^2-\lambda)\geqslant 0 \implies \lambda\geqslant\frac{3a^2}{4} \qquad (B)$$

یعنی حداقل مقدار λ برابر است با $\frac{3a^2}{4}$.

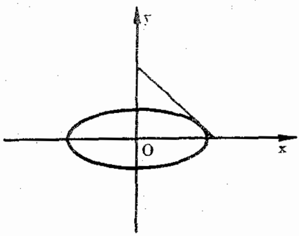
به ازای $\lambda=\frac{3a^2}{4}$ معادلهٔ (A) ریشهٔ مضاعف دارد و جواب آن $\sin x=\frac{3a}{4}$ است و برای وجود $\sin x$ باید $-\frac{4}{3}\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}$ باشدویا،چون a مقداریست مثبت ، $a\leqslant\frac{4}{3}$.

بنابراین با شرط $0<a\leqslant\frac{4}{3}$ حداقل $\sin^2 x+3\sin^2 y$ برابر است با $\frac{3a^2}{4}$.

تعبیر هندسی • اگر $\sin x=X$ و $\sin y=Y$ بگیریم، بدست‌می‌آید:

$$X+Y=a \;,\; X^2+3Y^2=\lambda$$

که نمایندهٔ یك خط ویك بیضی است . معادلهٔ (A) طولهای نقطه‌های تلاقی خط وبیضی ونامعادلهٔ (B) شرط تقاطع ویا حداقل شرط مماس بودن خط و بیضی را نشان می‌دهد . M (نقطهٔ تماس‌خط و بیضی) ، نقطه‌ای است کـه در آن



شکل ۴۹

$X^2+3Y^2=\lambda=\frac{3a^2}{4}$ حداقل مقدار خود می‌باشد.

۳۰۴. $\sin x\cos y=\lambda$ می‌گیریم داریم :

$$\frac{2}{\sin x}+\frac{1}{\cos y}=6\ ,\quad \sin x\cdot\cos y=\lambda \qquad (1)$$

پس از حذف y بین این دو معادله بدست می‌آید :

$$\sin^2 x-6\lambda\sin x+2\lambda=0 \qquad (E)$$

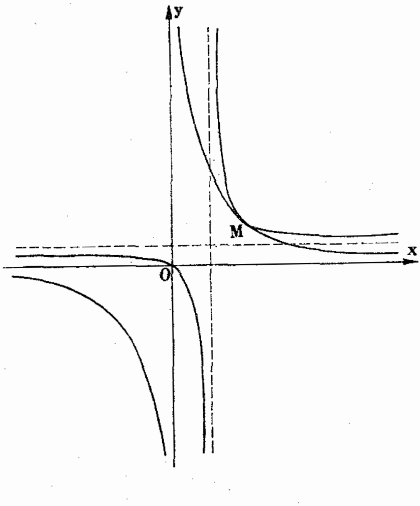
شرط حقیقی بودن ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم را می‌نویسیم :

$$9\lambda^2-2\lambda\geqslant 0 \implies \lambda\leqslant 0 \text{ یا } \lambda\geqslant\frac{2}{9} \qquad (F)$$

بنابراین بشرط اینکه $\sin x\cos y$ مثبت باشد، حداقلی مساوی $\frac{2}{9}$ خواهد داشت.

تعبیر هندسی. $X=\sin x$ و $Y=\cos y$ می‌گیریم، دستگاه (۱) به اینصورت در می‌آید :

$$Y=\frac{X}{6X-2} \quad (1)\ ;\ Y=\frac{\lambda}{X} \quad (2)$$



شکل ۵۰

منحنی هر دو معادله هذلولی متساوی‌الساقین است. معادلهٔ (E) نقطه‌های تلاقی این دو منحنی و نامعادله‌های (F) شرط وجود تقاطع و یا حداقل وجود نقاط تماس دو منحنی را نشان می‌دهند. برای اینکه دو منحنی بر هم مماس باشند باید $\lambda=0$ یا $\lambda=\frac{2}{9}$ باشد، در حالت $\lambda=0$، تابع (۲) بصورت $X\cdot Y=0$ در می‌آید که یکی از شاخه‌های منحنی بر محور xها و یا بر محور yها منطبق و شاخهٔ دیگر خطی موازی محور

yها و یا موازی محور xها می‌شود و برای دو منحنی نقطهٔ تماس وجود ندارد. بنابراین $\lambda=0$ نمی‌تواند مقدار ماکزیمم را نشان دهد. در حالتی که $\lambda=\frac{2}{9}$ باشد ، تابع (۲) بصورت $y=\frac{2}{9x}$ درمی‌آید و دو منحنی برهم مماس می‌شوند (شکل ۵۰) در نقطهٔ تماس حاصلضرب دو مختص حداقل بوده و مساوی $\frac{2}{9}$ می‌باشد. برای تعیین موقعیت نقطهٔ M می‌توان نوشت :

$$X^2-6\lambda X+2\lambda=0$$

$$X'=X''=3\lambda=3\times\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$$

$$Y=\frac{2}{9X} \quad ; \quad M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

۳۰۵ . می‌دانیم که حداقل و حداکثر تابع یك متغیره به‌ازای یکی از مقادیر جوابهای مشتق و یا حدود متغیر بدست می‌آید (کتاب روشهای جبر را ببینید). اگر از تابع مفروض مشتق بگیریم ، بدست می‌آید :

$$y'=3\cos x-4\sin x$$

مشق درفاصلهٔ صفر تا $\frac{\pi}{2}$ به‌ازای $x=Arctg\frac{3}{4}$ صفر می‌شود وداریم :

$$\left|\begin{array}{l} x=Arctg\frac{3}{4} \\ y=5\end{array}\right. \quad ; \quad \left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=4\end{array}\right. \quad ; \quad \left|\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2} \\ y=3\end{array}\right.$$

بنابراین حداقل تابع به‌ازای $x=\frac{\pi}{2}$ (یکی از حدود متغیر) و حداکثر تابع به‌ازای $x=Arctg\frac{3}{4}$ (جواب مشتق) بدست می‌آید: $y_{Min}=3$ ، $y_{Max}=5$.

۳۰۶ . از شرایط مربوط به x و y معلوم می‌شود که $\sin x$ و $\sin y$ مقادیری مثبت هستند . اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم :

$$(\sin x+\sin y)^2+(\sin x-\sin y)^2=2(\sin^2 x+\sin^2 y)$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$S^2=(\sin x+\sin y)^2=2k-(\sin x-\sin y)^2 \qquad (1)$$

چون $\sin x+\sin y$ مقداری است مثبت ، حداکثر S وقتی بدست می‌آیدکه S^2 حداکثر باشد . با توجه به رابطهٔ (۱) . S^2 وقتی حداکثر است کـه $\sin x-\sin y=0$ یا $\sin x=\sin y$ باشد. از دستگاه:

$$\sin x=\sin y \quad , \quad \sin^2 x+\sin^2 y=k$$

بدست می‌آید :

$$x=y=\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2k}}{2}$$

و ضمناً:
$$S_{Max}=\sqrt{2k}$$

۳۰۷ . اگر یك قسمت کمان a را مساوی x بگیریم ، قسمت دیگر مساوی $a-x$ می‌شود وباید می‌نیمم‌عبارت $y=tg x+tg(a-x)$ رابدست آوریم . داریم .

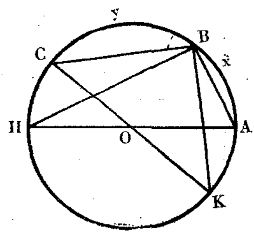
$$y=tg x+tg(a-x)=\frac{\sin a}{\cos x\cdot\cos(a-x)}=\frac{2\sin a}{\cos a+\cos(2x-a)}$$

چون صورت‌کسر اخیر مقداری است ثابت ، وقتی مقدار y می‌نیمم است که مخرج کسر یعنی $\cos a+\cos(2x-a)$ و یا(با توجه به‌ثابت بودن $\cos a$) $\cos(2x-a)$ ماکزیمم شود . بنابراین باید داشته باشیم :

$$\cos(2x-a)=1 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{a}{2}$$

یعنی‌کمان a باید به دوقسمت مساوی تقسیم شود و دراین صورت داریم:

$$y_{Min}=2tg\frac{a}{2}$$



شکل ۵۱

۳۰۸ . اولا) اگر کمانهای مطلوب را به x و y نشان دهیم ، طول وترهای متناظر آنها از مثلثهای قائم‌الزاویـهٔ ABH و BCK (شکل ۵۱) بدست می‌آید :

$$AB=2R\sin\frac{x}{2} \quad , \quad BC=2R\sin\frac{y}{2}$$

و بنابراین داریم :

$$S=AB+BC=2R\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{y}{2}\right)=4R\sin\frac{x+y}{4}\cos\frac{x-y}{4}=$$

$$=4R\sin\frac{a}{4}\cos\frac{x-y}{4}$$

چون $x+y=a$ است $0\leqslant x-y\leqslant a$ می‌شود واز آنجا:

$$0\leqslant\frac{x-y}{4}\leqslant\frac{a}{4}\implies\cos\frac{a}{4}\leqslant\cos\frac{x-y}{4}\leqslant 1$$

وبنابراین حداقل S وقتی بدست می‌آید که $\cos\frac{x-y}{4}=\cos\frac{a}{4}$ یا $x-y=a$ باشد که دراینصورت باید داشته باشیم : $x=a$ و $y=0$ می‌شود وداریم :

$$S_{Min}=2R\sin\frac{a}{2}$$

اگرمی‌خواستیم ماکزیمم S را بدست آوریم، می‌بایستی $\cos\frac{x-y}{4}=1$ یا $x=y=\frac{a}{2}$ بشود که دراینصورت بدست می‌آید: $S_{Max}=4R\sin\frac{a}{4}$

ثانیاً) حاصلضرب وترها چنین است :

$$P=AB\cdot BC=4R^2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=2R^2\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)=$$

$$=2R^2\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{a}{2}\right)$$

عبارت P وقتی به حداکثر خود می‌رسد که $\cos\frac{x-y}{2}$ حداکثر مقدار ممکن یعنی واحد بشود :

$$\cos\frac{x-y}{2}=1\implies x=y=\frac{a}{2}$$

و ضمناً : $P_{Max}=4R^2\sin^2\frac{a}{4}$

ثالثاً) مجموع مربعهای وترها چنین است :

$$T=4R^2\left(\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{y}{2}\right)=2R^2(2-\cos x-\cos y)=$$

$$=2R^2\left(2-2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)=4R^2\left(1-\cos\frac{a}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)$$

وعبارت اخیر وقتی می‌نیمم است که $\cos\frac{x-y}{2}$ حداکثر مقدار ممکن یعنی واحد را اختیار کند:

$$\cos\frac{x-y}{2}=1 \implies x=y=\frac{a}{2}\ ;\ T_{Min}=8R^2\sin^2\frac{a}{4}$$

۳۰۹. بنا به‌فرض مسئله باید داشته باشیم.

$$ax+by=c \qquad (1)$$

اگر $x=\lambda\cos\alpha$ و $y=\lambda\sin\alpha$ فرض‌شود، معادلهٔ (۱) به‌اینصورت درمی‌آید:

$$a\lambda\cos\alpha+b\lambda\sin\alpha=c \qquad (2)$$

وضمناً داریم: $x^2+y^2=\lambda^2\cos^2\alpha+\lambda^2\sin^2\alpha=\lambda^2$

ازطرف دیگر شرط وجود جواب برای معادلهٔ (۲) چنین است:

$$a^2\lambda^2+b^2\lambda^2\geqslant c^2 \implies \lambda^2\geqslant\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

بنابراین حداقل‌مقدار $\lambda^2=x^2+y^2$ برابراست با $\frac{c^2}{a^2+b^2}$

اگرمقادیر x و y در حالت می‌نیمم خواسته شود، می‌توان مقادیر آنها را ازحل دستگاه زیر بدست‌آورد:

$$ax+by=c \quad , \quad x^2+y^2=\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

۳۱۰. اتحاد زیرواضح است:

$$(tg\,x+3\cot g\,x)^2-(tg\,x-3\cot g\,x)^2=4tg\,x(3\cot g\,x)=12$$

که ازآنجا بدست می‌آید: $(tg\,x+3\cot g\,x)^2=12+(tg\,x-3\cot g\,x)^2$

مقدار $(tg\,x+3\cot g\,x)^2$ وقتی می‌نیمم است که داشته باشیم:

$$tg\,x-3\cot g\,x=0 \implies tg^2x=3 \implies tg\,x=\pm\sqrt{3}$$

اگر انتهای کمان x درربع اول ویاسوم باشد، $tg\,x$ مقداری مثبت و می‌نیمم عبارت $tg\,x+3\cot g\,x$ مساوی $\sqrt{3}+3.\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$ می‌شود و مقدار

کمان x دراینصورت چنین می‌شود: $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$.

اگر انتهای کمان x درربع دوم ویاچهارم باشد $tg\,x<0$ ومی‌نیمم‌عبارت $tg\,x+3\,cotg\,x$ مساوی $-2\sqrt{3}$ می‌شود ودراینحالت $x=k\pi-\frac{\pi}{3}$ است .

۳۱۱ . اولا) داریم : $S=(1+\sin x)(1+\cos x)=$

$$=4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos^2\frac{x}{2}=$$

$$=\left[2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}\right]^2$$

ثانیاً) مقدار داخل کروشه را درجواب قسمت اولا ، به‌صورت مجموع تبدیل می‌کنیم :

$$S=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\cos\frac{\pi}{4}\right]^2=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2$$

حداکثر S وقتی بدست می‌آید که $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ حداکثر باشد، یعنی:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \implies x=\frac{\pi}{4}$$

و در اینصورت داریم : $S_{Max}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

حداقل S وقتی بدست می‌آیدکه $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ حداقل باشد ، یعنی

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \implies x=\frac{5\pi}{4}$$

ودراینصورت داریم : $S_{Min}=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$

۳۱۲ . می‌دانیم‌که $|Sec\,x|\geqslant 1$ است، بنابراین معادلهٔ $Sec\,x=\pm 1$ طولهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع را می‌دهد. ضمناً تابع مفروض نسبت به $Sec\,x$ یك تابع خطی‌است وبنابراین ازلحاظ جبری ماکزیمم و می‌نیمم ندارد:

$$Sec\,x=\pm 1 \implies x=0\ ,\ \pi$$

تابع درنقاط $-\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ منفصل است و ضمناً داریم :

$$2\sec\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)-1=\frac{2}{\sin\varepsilon}-1>0$$

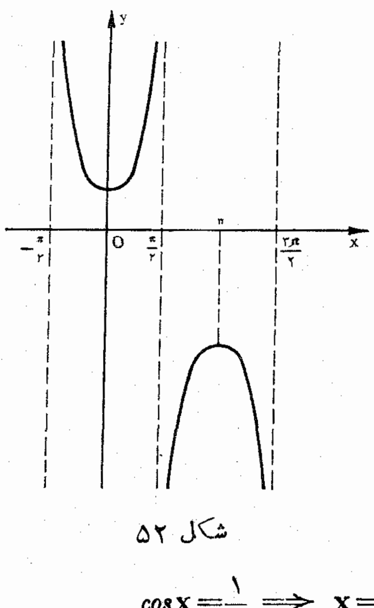
($\varepsilon>0$ مقداری بسیارکوچك فرض‌شده‌است). بهمین ترتیب بسادگی معلوم‌می‌شود:

$$2\sec\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-1>0\ ,\ 2\sec\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)-1<0\ ,\ 2\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\varepsilon\right)-1<0$$

جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$2\sec x-1$	$+\infty$	$\searrow$	1 Min	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	-3 Max	$\searrow$	$-\infty$

منحنی تابع درشکل ۵۲ داده شده است .



شکل ۵۲

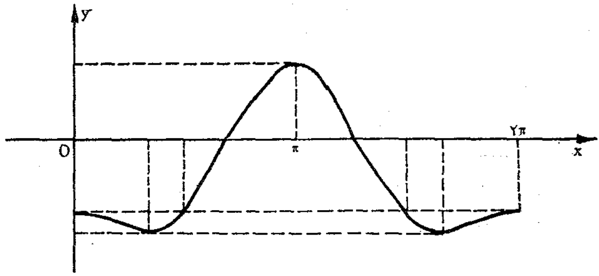
۲۱۳ . تابع ازلحاظ جبری نسبت به $\cos x$ از درجهٔ دوم‌است وبنابراین هم معادلهٔ $\cos x=\frac{1}{2}$ و هم معادل هـای $\cos x=\pm 1$ طـولهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم را می‌دهند :

$$\cos x=\frac{1}{2}\ \Longrightarrow\ x=\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x=\pm 1\ \Longrightarrow\ x=0\ ,\ \pi\ ,\ 2\pi$$

جدول تغییرات تابع چنین است :

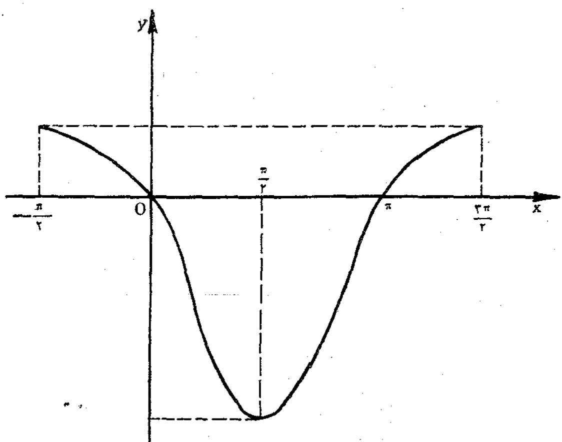
x	۰		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
y	-1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	-1	↗	1	↘	-1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	-1
	Max		Min				Max				Min		Max



شکل ۵۳

منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض در شکل ۵۳ داده شده است .

۳۱۴ . تابع نسبت به $\sin x$ یك تابع هموگرافیك است و بنابراین از لحاظ جبری ماکزیمم و می‌نیمم ندارد ، چون $|\sin x| \leqslant 1$ است ، بنابراین طولهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم از حل معادله‌های $\sin x = \pm 1$ بدست می‌آید :



شکل ۵۴

$$\sin x = \pm ۱ \implies x = -\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}$$

جدول تغییرات تابع چنین است :

x	$-\frac{\pi}{۲}$		۰		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$
y	۱	↘	۰	↘	-۳	↗	۰	↗	۱
	Max				Min				Max

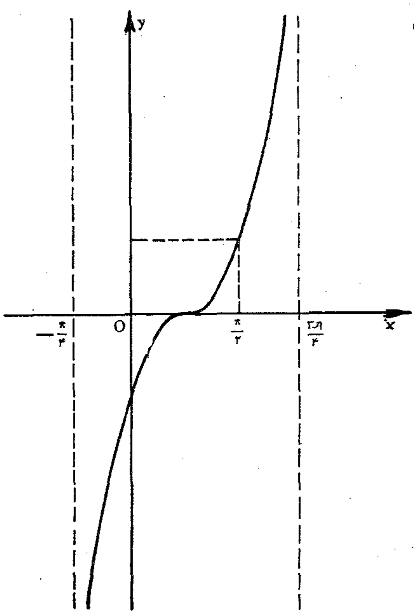
منحنی نمایش تغییرات تابع (شکل ۵۴) درنقاط بطول $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ بر خط $y = ۱$ مماس است .

۳۱۵ . منحنی نمایش تغییرات تابع در نقطه‌های $x = -\frac{\pi}{۴}$ و $x = \frac{۳\pi}{۴}$ منفصل است و به‌ازای $x = \frac{\pi}{۲}$ مقدار $y = ۱$ بدست‌می‌آید. منحنی‌تابع‌در نقطهٔ بطول $\frac{\pi}{۴}$ محور xx' ودرنقطهٔ به عرض -۱ محور yy' را قطع می‌کند. ضمناً بسادگی بدست‌می‌آید:

$$f\left(-\frac{\pi}{۴}+\varepsilon\right) < ۰ \quad \text{و}$$

$$f\left(\frac{۳\pi}{۴}-\varepsilon\right) > ۰$$

(ε مقداری است مثبت وکوچك).



شکل ۵۵

جدول نمایش تغییرات تابع چنین است:

x	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

منحنی نمایش تغییرات تابع درشکل ۵۵ داده شده است .

۳۱۶ . صورت ومخرج کسر $\frac{1}{1+\sin x}$ را در $1-\sin x$ ضرب می‌کنیم

بترتیب داریم :

$$y=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=(1+tg^2 x)-\sin x\cos^{-2}x$$

و حالا بسادگی توابع اولیهٔ تابع مفروض بدست می‌آید :

$$Y=tg x-\frac{1}{\cos x}+c=\frac{\sin x-1}{\cos x}+c$$

۳۱۷ . صورت و مخرج کسر را در $1+\cos x$ ضرب کنید .

جواب : $$Y=-\frac{a(1+\cos x)}{\sin x}+c$$

۳۱۸ . اگر $u=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ فرض می‌کنیم ، بسادگی بدست می‌آید:

$u'=\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}$. با این فرض می‌توان تابع مفروض را چنین نوشت :

$y=-\frac{1}{2}u'u^3$ که دراینصورت توابع اولیهٔ آن چنین می‌شود :

$$Y=-\frac{1}{8}u^4+c=-\frac{1}{8}\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^4+c$$

۳۱۹ . بترتیب داریم :

$$y=\sin^7 x+\cos^3 x=\sin x(1-\cos^2 x)^3+\cos x(1-\sin^2 x)=$$
$$=\sin x-3\sin x\cos^2 x+3\sin x\cos^4 x-\sin x\cos^6 x+\cos x-\cos x\sin^2 x$$

و بنابراین بدست می‌آید :

$$Y=-\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c$$

۳۲۰ . اگر تابع را بصورت $y=(1+tg^2x)tg^3x-1$ بنویسیم ، توابع اولیهٔ آن چنین می‌شود :

$$Y=\frac{1}{4}tg^4x-x+c$$

۳۲۱ . تابع را می‌توان چنین نوشت :

$$y=(1+tg^2x)tg^6x-(1+tg^2x)tg^4x+(1+tg^2x)tg^2x$$

و نوابع اولیهٔ آن چنین می‌شود :

$$Y=\frac{1}{7}tg^7x-\frac{1}{5}tg^5x+\frac{1}{3}tg^3x+c$$

۳۲۲ . جواب : $Y=\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}+c$

۳۲۳ . جواب : $Y=\frac{2(\sin x-1)}{\cos x}-x+c$

۳۲۴ . تابع مفروص را بترتیب چنین می‌نویسیم :

$$y=\frac{a\,cotg\,x(cotg\,x-1)^m}{\sin^2x}=a[(cotg\,x-1)+1](1+$$

$$+cotg^2x)(cotg\,x-1)^m=a(1+cotg^2x)(cotg\,x-1)^{m+1}+$$

$$+a(1+cotg^2x)(cotg\,x-1)^m$$

و در نتیجه توابع اولیهٔ آن چنین می‌شود :

$$Y=-\frac{a}{m+2}(cotg\,x-1)^{m+2}-\frac{a}{m+1}(cotg\,x-1)^{m+1}+c=$$

$$=-\frac{a}{(m+1)(m+2)}[(m+1)cotg\,x+1](cotg\,x-1)^{m+1}+c$$

۳۲۵ . بترتیب داریم :

$$y=3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}(1-\cos x)^{-\frac{8}{15}}=\frac{3}{4}\sin x(1-\cos x)\times$$

$$\times\ (1-\cos x)^{-\frac{8}{15}}=\frac{3}{4}\sin x(1-\cos x)^{\frac{7}{15}}$$

و بنابراین توابع اولیهٔ آن چنین است :

$$Y=-\frac{45}{88}(1-\cos x)\sqrt[15]{(1-\cos x)^{7}}+c$$

۳۲۶ . با استفاده از اتحاد $\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$ داریم :

$$y=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\cos 3x=\frac{1}{4}(3\sin x\cos 3x-\sin 3x\cos 3x)=$$

$$=\frac{1}{8}(-3\sin 2x+3\sin 4x-\sin 6x)$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$Y=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}\cos 2x-\frac{3}{4}\cos 4x+\frac{1}{6}\cos 6x\right)+c$$

۳۲۷ . از اتحادهای زیر برای تبدیل تابع استفاده می‌کنیم :

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\ ,\quad \cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos 3\alpha)$$

تابع مفروض به‌صورت زیر در می‌آید :

$$y=\frac{1}{2}(1-\cos 6x).\frac{1}{4}(3\cos 2x+\cos 6x)=\frac{1}{8}(3\cos 2x+\cos 6x-$$

$$-3\cos 6x\cos 2x-\cos^2 6x)=$$

$$=\frac{1}{16}(6\cos 2x+2\cos 6x-3\cos 8x-3\cos 4x-1-\cos 12x)$$

و توابع اولیهٔ آن چنین می‌شود :

$$Y=\frac{1}{16}\left(3\sin 2x-\frac{3}{4}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 6x-\frac{3}{8}\sin 8x-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{12}\sin 12x-x\right)+c$$

۳۲۸ . به‌کمك اتحادهای

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha \quad ,$$
$$\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha \quad ,$$

می‌توان بدست آورد :

$$\sin^5\alpha = \frac{1}{16}(10\sin\alpha - 5\sin 3\alpha + \sin 5\alpha) \qquad (1)$$

با توجه به اتحاد $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ و اتحاد (۱) ، تابع مفروض بصورت زیر در می‌آید :

$$y = \frac{1}{32}(1+\cos 10x)(10\sin 2x - 5\sin 6x + \sin 10x)$$

اگر پرانتزها را در یکدیگر ضرب‌کنیم و سپس جمله‌های شامل دو عامل را به‌صورت ضرب در آوریم ، بدست می‌آید :

$$y = \frac{1}{64}(20\sin 2x + 5\sin 4x - 10\sin 6x - 10\sin 8x + 2\sin 10x +$$
$$+ 10\sin 12x - 5\sin 16x + \sin 20x)$$

و بنابراین توابع اولیهٔ آن چنین می‌شود :

$$Y = \frac{1}{64}\Big(-10\cos 2x - \frac{5}{4}\cos 4x + \frac{5}{3}\cos 6x + \frac{5}{4}\cos 8x -$$
$$- \frac{1}{5}\cos 10x - \frac{5}{12}\cos 12x + \frac{5}{16}\cos 16x - \frac{1}{20}\cos 20x\Big) + c$$

۳۲۹ . بترتیب داریم :

$$y = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right](1-\cos x)} =$$

$$= \frac{\sin x - \cos x}{(1-\sin x))1-\cos x)} = \frac{(\sin x - \cos x)(1+\sin x)(1+\cos x)}{\sin^2 x\cos^2 x} =$$

$$=\frac{(\sin x-\cos x)\left[(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)+(\sin x+\cos x)\right]}{\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^3 x-\cos^3 x+\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\sin x\cdot\cos^{-2}x-$$

$$-\cos x\cdot\sin^{-2}x+(1+tg^2 x)-(1+cotg^2 x)$$

و حالا توابع اولیهٔ تابع مفروض را بدست می‌آوریم :

$$Y=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}+tg x+cotg x+c=\sec x+cosec x+tg x+$$

$$+cotg x+c$$

۳۳۰ . بترتیب داریم :

$$y=\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4}=\frac{16}{\sin^4 2x}=$$

$$=16(1+cotg^2 2x)^2=16\left[(1+cotg^2 2x)+(1+cotg^2 2x)cotg^2 2x\right]$$

و در نتیجه توابع اولیهٔ تابع مفروض چنین می‌شود :

$$Y=-\frac{8}{3}cotg 2x(3+cotg^2 2x)+c$$

۳۳۱ . داریم : $y=(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)^{-\frac{1}{5}}$

و از آنجا بدست می‌آید : $Y=-\frac{5}{4}\sqrt[5]{(\sin x+\cos x)^4}+c$

۳۳۲ . اگر $u=a\sin^2 x+b\cos^2 x+c$ باشد $u'=(a-b)\sin 2x$ می‌شود و تابع را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$y=\frac{1}{a-b}u'\cdot u^{-\frac{1}{3}}$$

واز آنجا بدست می‌آید :

$$Y=\frac{3}{2(a-b)}u^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2(a-b)}\sqrt[3]{(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c)^2}$$

۳۳۳ . مسئلهٔ ۳۲۹ را ببینید .

جواب : $y=4(tg x+cotg x-sec x-cosec x)+c$

۳۳۴ . داریم : $y=\sqrt{4-(x+1)^2}=2\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$

اگر $\frac{x+1}{2}=\sin\alpha$ بگیریم[1] . $x=2\sin\alpha-1$ و $x'_\alpha=2\cos\alpha$ و $y=2\cos\alpha$ می‌شود ، بنابراین باید از تابع $y\cdot x'_\alpha$ ، یعنی $f(\alpha)=4\cos^2\alpha=2(1+\cos 2\alpha)$ نسبت به α تابع اولیه بگیریم :

$$F(\alpha)=2(\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha)+c$$

و از آنجا : $Y=2\,Arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+c$

۳۳۵ . اگر $x=tg\alpha$ فرض‌کنیم ، $x'_\alpha=1+tg^2 x$ و ضمناً $y=\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$ می‌شود و باید از تابع $f(\alpha)=\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}(1+tg^2\alpha)=tg^2\alpha$ نسبت به α تابع اولیه بگیریم :

$$F(\alpha)=tg\alpha-\alpha+c$$

واز آنجا: $Y=x-Arctg x+c$

۳۳۶ . بترتیب می‌نویسیم :

$$y=\frac{1}{x^2+3x+5}=\frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=$$

$$=\frac{4}{11}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{11}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{11}}}{1+\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)^2}$$

---

۱) این انتخاب ممکن است ، زیرا از مقدار زیر رادیکال معلوم است که $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\leqslant 1$ ویا $-1\leqslant\frac{x+1}{2}\leqslant 1$ باید باشد .

و اگر $u=\frac{2x+3}{\sqrt{11}}$ بگیریم ، تابع بصورت زیر درمی‌آید :

$$y=\frac{2}{\sqrt{11}}\cdot\frac{u'}{1+u^2} \Longrightarrow Y=\frac{2}{\sqrt{11}}\mathrm{Arctg}\,u+c=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{11}}\mathrm{Arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{11}}+c$$

۳۳۷ . جواب : $Y=-\sqrt{1-x^2}+\mathrm{Arccos}\,x+c$

۳۳۸ . جواب : $Y=-3\sqrt{9-x^2}+2\mathrm{Arccos}\frac{x}{3}+c$

۳۳۹ . تابع را می‌توان چنین نوشت : $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$
باتوجه‌به‌اینکه برای حقیقی‌بودن تابع‌باید $-1\leqslant x-1\leqslant 1$ باشد، می‌توان $x-1=\sin\alpha$ فرض‌کردکه دراینصورت $(x-1)'_{\alpha}=\cos\alpha$ می‌شود و باید از تابع $y=\cos^2\alpha$ نسبت به α تابع اولیه بگیریم :

$$y=\cos^2\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha$$ و

$$Y=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha+c=\frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2}+c$$

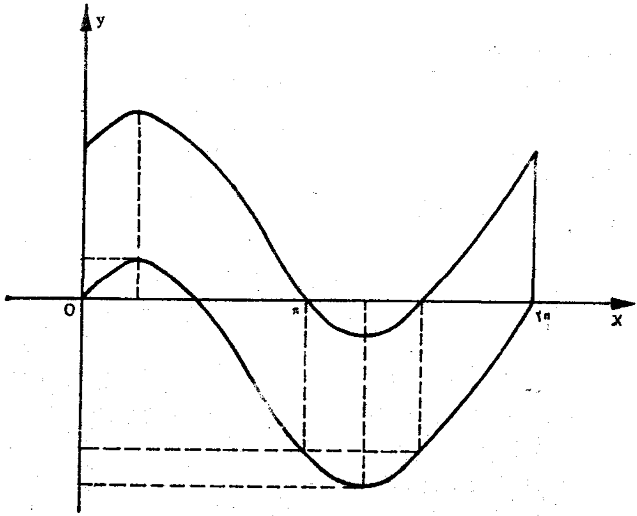
۳۴۰ . جواب : $Y=\frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(2x)+\frac{1}{2}2x\sqrt{1-4x^2}+c$

۳۴۱ . جواب : $Y=-2\sqrt{-4x^2+12x-5}+$

$$+\frac{9}{2}\mathrm{Arccos}\left(\frac{2x-3}{2}\right)+c$$

۳۴۲ . اولا منحنی نمایش تغییرات دو تابع در فاصلهٔ صفر و 2π در شکل ۵۶ داده شده است . توجه می‌کنیم که برای رسم منحنی تابع y_2، کافی است منحنی تابع y_1 را به‌اندازهٔ دو واحد در جهت مثبت محور عرض انتقال دهیم .

ثانیاً) برای محاسبهٔ سطح بین دومنحنی تابع اولیهٔ تفاضل دو تابع را در فاصلهٔ صفر و 2π محاسبه می‌کنیم .



شکل ۵۶

$$y = y_۲ - y_۱ = (\sin x + \cos x + ۱) - (\sin x + \cos x - ۱) = ۲ \;,$$
$$Y = ۲x + c \;,$$
$$S = \left| ۲x + c \right|_{۰}^{۲\pi} = \left| (۴\pi + c) - (c) \right| = ۴\pi \text{ (واحد مربع)}$$

جدول تغییرات تابع $z = \dfrac{y_۱}{y_۲}$ در فاصلهٔ $\pi-$ و π درزیر ومنحنی نمایش‌آن درشکل۵۷ داده شده است .

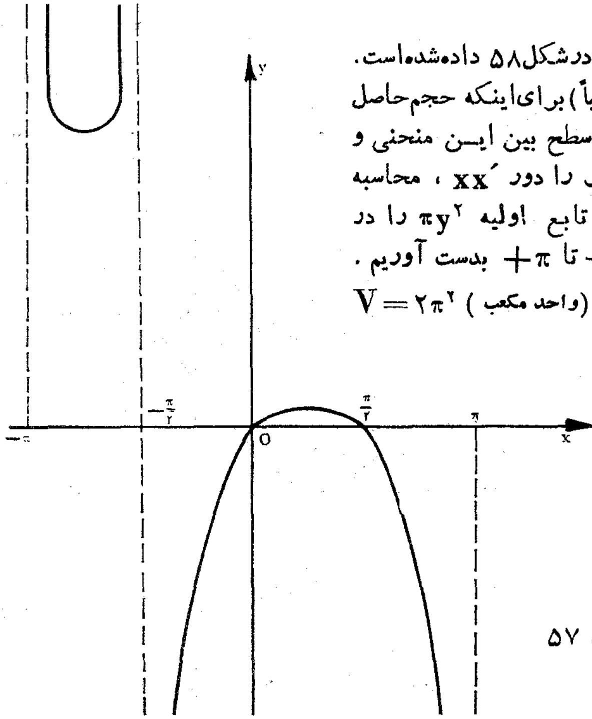
x	$-\pi$		$-\frac{۳\pi}{۴}$		$-\frac{\pi}{۲}$		۰		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{\pi}{۲}$		π
z'		$-$	۰		$+$				۰		$-$		
z	∞	$\searrow$	$۳+۲\sqrt{۲}$	$\nearrow$	$+\infty \;\Big|\; -\infty$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	$۳-۲\sqrt{۲}$	$\searrow$	۰	$\searrow$	$-\infty$

۳۴۳ . اولا) تابع‌مفروض‌رامی‌توان‌به‌صورت $\left|\sin \dfrac{x}{۲}\right|$ $y = \sqrt{۲}$ [illegible]

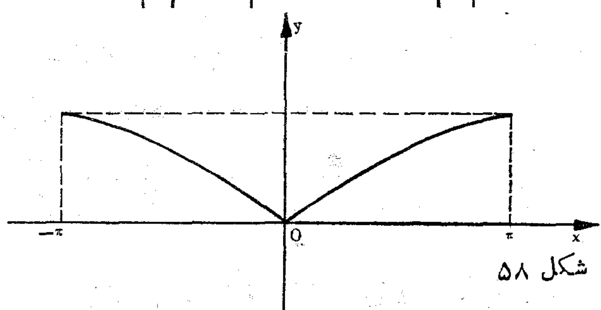
بنابراین باید منحنی تابع $y = -\sqrt{۲} \sin \dfrac{x}{۲}$ را درفاصلهٔ π [illegible]

منحنی‌تابع $y = \sqrt{۲} \sin \dfrac{x}{۲}$ رادرفاصلهٔ ۰ تا π رسم کرد .

این منحنی در شکل ۵۸ داده شده است.
ثانیاً) برای اینکه حجم حاصل از دوران سطح بین این منحنی و محور طول را دور xx'، محاسبه کنیم باید تابع اولیه $\pi y^{۲}$ را در فاصلهٔ $\pi-$ تا $\pi+$ بدست آوریم.
جواب: $V = ۲\pi^{۲}$ (واحد مکعب)



شکل ۵۷



شکل ۵۸

۳۴۴ . داریم:

$$\frac{tg\,x - \sin x}{x^{۳}} = \frac{۲\sin x \sin^{۲}\frac{x}{۲}}{x^{۳}\cos x} = \frac{۱}{۲\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}\right)^{۲}$$

و بنابراین

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{tg\,x - \sin x}{x^{۳}} = \underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{۱}{۲\cos x} = \frac{۱}{۲}$$

۳۴۵ . اگر $Arccos x=\alpha$ فرض کنیم $\alpha=cos x$ می‌شود ووقتی x بسمت واحد میل‌کند α بسمت صفر میل می‌کند وداریم :

$$\lim_{x\to 1}\frac{(Arccos x)^{2}}{x^{2}-1}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha^{2}}{cos^{2}\alpha-1}=\lim_{\alpha\to 0}-\left(\frac{\alpha}{sin\alpha}\right)^{2}=-1$$

۳۴۶ . جواب : ۲ ۳۴۷ . جواب : $\pm\infty$

۳۴۸ . بترتیب داریم :

$$\frac{tg\sqrt[3]{x+a}-tg\sqrt[3]{x}}{a}=$$

$$=\frac{tg\sqrt[3]{x+a}-tg\sqrt[3]{x}}{(x+a)-x}=\frac{sin(\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x}}\times$$

$$\times\frac{1}{cos\sqrt[3]{x+a}\cdot cos\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{(x+a)^{2}}+\sqrt[3]{x(x+a)}+\sqrt[3]{x^{2}})}$$

ودیگر بسادگی بدست می‌آید :

$$\lim_{a\to 0}\frac{tg\sqrt[3]{x+a}-tg\sqrt[3]{x}}{a}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}\cdot cos^{2}\sqrt[3]{x}}$$

راه حل دیگر

با استفاده از تعریف مشتق می‌توان نوشت:

$$\lim_{a\to 0}\frac{tg\sqrt[3]{x+a}-tg\sqrt[3]{x}}{a}=\lim_{a\to 0}\frac{tg\sqrt[3]{x+a}-tg\sqrt[3]{x}}{x+a-a}=$$

$$=(tg\sqrt[3]{x})=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}})1+tg^{2}\sqrt[3]{x})$$

۳۴۹ . بسادگی بدست می‌آید:

$$\frac{tg nx-tg na}{cotg mx-cotg ma}=-\frac{sin n(x-a)}{sin m(x-a)}\cdot\frac{sin mx\cdot sin ma}{cos nx\cdot cos na}$$

و چون داریم : $\lim_{x\to a}\frac{sin n(x-a)}{sin m(x-a)}=\frac{n}{m}$ ، بنابراین بدست‌می‌آید:

$$\lim_{x\to a}\frac{tg nx-tg na}{cotg mx-cotg ma}=-\frac{n\cdot sin^{2}ma}{m\cdot cos^{2}na}$$

۳۵۰ . اتحاد $Arctg 2+Arctg 3=\frac{3\pi}{4}$ بسادگی ثابت‌می‌شود، بنابراین

اگر $Arctg 2x=\alpha$ و $Arctg 3x=\beta$ فرض کنیم عبارت $\alpha+\beta-\frac{3\pi}{4}$

وقتی که x بسمت واحد میل می‌کند ، بسمت صفرمیل خواهد کرد ومی‌توان در حالت حدی بجای آن $tg(\alpha+\beta-\frac{3\pi}{4})$ راانتخاب‌کرد . باتوجه به‌این مقدمه داریم :

$$\lim_{x\to 1}\frac{tg2x+tg3x-\frac{3\pi}{4}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{tg(\alpha+\beta-\frac{3\pi}{4})}{x^2-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{tg(\alpha+\beta)-tg\frac{3\pi}{4}}{1-tg(\alpha+\beta)tg\frac{3\pi}{4}}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\frac{5x}{1-6x^2}+1}{1+\frac{5x}{1-6x^2}}}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5x+1-6x^2}{(1-6x^2+5x)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}$$

الف: اگر $x\to 1^+$ $\qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}=\infty$

ب: اگر $x\to 1^-$ $\qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1}=-\infty$

چون حد راست و حد چپ برابر نمی‌باشد، تابع حد ندارد.

۳۵۱ . بترتیب داریم :

$$\frac{sin(x-\frac{\pi}{4})}{2sin^2x-1}=\frac{\sqrt{2}(sin\,x-cos\,x)}{2(sin^2x-cos^2x)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2(sin\,x+cos\,x)}$$

وبنابراین :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sin(x-\frac{\pi}{4})}{2sin^2x-1}=\frac{1}{2}$$

۳۵۴ . اگر $Arctg(x^2-1)=\alpha$ فرض‌کنیم $tg\alpha=x^2-1$ و با توجه به‌منفی‌بودن x (y بسمت $1-$ میل‌می‌کند) $x=-\sqrt{1+tg\alpha}$ می‌شود.

ضمناً وقتی x بسمت ۱ — میل کند α بسمت صفر می‌کند وداریم :

$$\lim_{x\to -1}\frac{Arctg(x^2-1)}{1+x^3}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{1-(\sqrt[3]{1+tg\alpha})^3}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{1-\sqrt[3]{1+tg\alpha}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+tg\alpha}+\sqrt[3]{(1+tg\alpha)^2}}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha(1+\sqrt{1+tg\alpha})}{-tg\alpha}\times$$

$$\times\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+tg\alpha}+\sqrt[3]{(1+tg\alpha)^2}}=-\frac{2}{3}$$

راه حل دیگر:

با توجه به: $\lim_{x\to 0} tgx=x \Longrightarrow \underset{x\to 0}{Arctgx}=x$

$$\lim_{x\to -1}\frac{Arctg(x^2-1)}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2-x+1}=-\frac{2}{3}$$

۳۵۳ . داریم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx\cdot\sqrt{cos2x}\cdot\sqrt[3]{cos3x}}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2sin^2\frac{x}{2})\sqrt{1-2sin^2x}\cdot\sqrt[3]{1-2sin^2\frac{3x}{2}}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2sin^2\frac{x}{2})\ (1-2sin^2x)(1-2sin^2\frac{3x}{2})}{x^2\sqrt{1-2sin^2x}\ .\ \sqrt[3]{(1-2sin^2\frac{3x}{2})^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{x^2}{2})(1-2x^2)(1-\frac{9x^2}{2})}{x^2\sqrt{1-2x^2}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{9x^2}{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(7-\frac{49}{4}x^2+\frac{9}{4}x^4)}{x^2\sqrt{1-2x^2}\ .\ \sqrt[3]{1-\frac{9x^2}{2}}}=7$$

۳۵۴ . بترتیب داریم :

$$\frac{1-\sqrt{\sin x}}{1-\sin x}=$$

$$=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sqrt{\sin x})}=\frac{1}{1+\sqrt{\sin x}}$$

و بنابراین داریم : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{\sin x}}{1-\sin x}=\frac{1}{2}$ و بهمین ترتیب :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sin x}=\frac{1}{3};\ldots;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt[n]{\sin x}}{1-\sin x}=\frac{1}{n}$$

ودر نتیجه خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\ldots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\ldots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}$$

۳۵۵ . جواب : $-\frac{1}{2}$ ۳۵۶ . جواب : ۶

۳۵۷ . داریم : $\frac{\sin 3x}{\sin x}=3-4\sin^2 x$

و بنابراین بدست می‌آید : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\sin x}\right)^{x+2}=9$

۳۵۸ . اگر $\frac{1}{x}=\alpha$ بگیریم بدست می‌آید :

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

۳۵۹ . جواب : $-\frac{1}{2}$ ۳۶۰ . جواب : $\left(\dfrac{\sin\frac{m-a}{2}}{\sin\frac{m-b}{2}}\right)^2$

۳۶۱ . داریم :

$$\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 2x}=\frac{\sin^2 2x-4\sin^2 x}{4\sin^2 x\sin^2 2x}=\frac{4\sin^2 x(\cos^2 x-1)}{4\sin^2 x\sin^2 2x}=$$

$$=-\frac{\sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x}=-\frac{1}{4\cos^2 x}$$

و بنابراین بدست می‌آید :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)=-\frac{1}{4}$$

۳۶۲ . $x=2+y$ می‌گیریم ، بدست می‌آید :

$$(2-x)tg\frac{\pi}{4}x=-\frac{y\cos\frac{\pi}{4}y}{\sin\frac{\pi}{4}y}=-\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}y\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{4}y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}y\right)}$$

وقتی که x بسمت ۲ میل‌کند y بسمت صفر میل می‌کند وحدکسر اخیر برابر واحد می‌شود و بنابراین داریم :

$$\lim_{x\to 2}(2-x)tg\frac{\pi}{4}x=-\frac{4}{\pi}$$

۳۶۳ . داریم :

$$\frac{1+x^2-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+x^2}{\sin^2 x}=\frac{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+1}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2+1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$

و بنابراین بدست می‌آید :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{3}{2}$$

۳۶۴ . اگر $\operatorname{Arctg} x = \alpha$ و سپس $\alpha - \frac{\pi}{۲} = \beta$ فرض کنیم ، بترتیب بدست می‌آید :

$$\lim_{x \to \infty} x \left(\operatorname{Arctg} x - \frac{\pi}{۲}\right) = \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{۲}} \left(\alpha - \frac{\pi}{۲}\right) tg\,\alpha =$$

$$= \lim_{\beta \to ۰} -\frac{\beta}{tg\,\beta} = -۱$$

۳۶۵ . حد هر یك از کسرهای $\frac{x}{\operatorname{Arctg} ۲x}$ و $\frac{\sin ۶x}{\operatorname{Arctg} ۲x}$ را بدست آورید و نتیجه‌ها را در هم ضرب کنید . جواب : $\frac{۳}{۲}$

۳۶۶ . اگر $x = \frac{\pi}{۲} + y$ بگیریم ، داریم :

$$\frac{\sqrt{۱ + ۲\cos x} - ۱}{x - \frac{\pi}{۲}} = \frac{\sqrt{۱ - ۲\sin y} - ۱}{y} =$$

$$= -۲ \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{۱}{\sqrt{۱ - ۲\sin y} + ۱}$$

که از آنجا بسادگی حد مطلوب بدست می‌آید . جواب : -۱

۳۶۷ با توجه به اتحاد $\sin\alpha - \cos\alpha = ۲\cos\frac{\pi}{۴}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{۴}\right)$ بدست می‌آید :

$$z = \frac{\sin(۴n+۱)x - \cos(۴n+۱)x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sin\left[(۴n+۱)x - \frac{\pi}{۴}\right]}{\sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)}$$

اگر $x = \frac{\pi}{۴} + y$ بگیریم ، وقتی x بسمت $\frac{\pi}{۴}$ میل کند y بسمت صفر میل می‌کند و داریم :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} z=\lim_{y\to 0}\frac{\sin[n\pi+(4n+1)y]}{\sin y}=$$

$$=\begin{cases}4n+1 & (n=2k)\\ -(4n+1) & (n=2k+1)\end{cases}$$

یعنی اگر n زوج باشد حد مطلوب مساوی $4n+1$ و اگر n فرد باشد مساوی $-(4n+1)$ می‌شود .

۳۶۸ . جواب : $\frac{2}{\pi}$

۳۶۹ . بترتیب داریم :

$$\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos x}{\sin^2 x+\cos x+1}=\frac{\sin\frac{x}{2}+1-2\sin^2\frac{x}{2}}{-\cos^2 x+\cos x+2}=$$

$$=\frac{(1-\sin\frac{x}{2})(1+2\sin\frac{x}{2})}{(1+\cos x)(2-\cos x)}=\frac{(1-\sin\frac{x}{2})(1+2\sin\frac{x}{2})}{2(1-\sin^2\frac{x}{2})(2-\cos x)}=$$

$$=\frac{1+2\sin\frac{x}{2}}{2(1+\sin\frac{x}{2})(2-\cos x)}$$

و از آنجا حد مطلوب بدست می‌آید . جواب : $\frac{1}{4}$

۳۷۰ . کسر $\frac{\sqrt{x-1}}{\arccos x}$ در هر حال موهومی است ، زیرا اگر $x>1$ باشد و بسمت ۱ میل‌کند مخرج‌کسر و اگر $x<1$ باشد و بسمت ۱ میل‌کند صورت‌کسر موهومی می‌شود .

۳۷۱ . اگر $\omega(\alpha,\beta)$ را مرکز تقارن منحنی فرض کنیم ، با انتقال مبداء مختصات به نقطهٔ ω ، معادلهٔ جدید منحنی چنین می‌شود :

$$Y+\beta=tg^{۳}(X+\alpha)-۳tg(X+\alpha)-۲ \qquad (۱)$$

مبداء مختصات باید مرکز تقارن منحنی‌تابع (۱) باشد وبنابراین با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ معادلهٔ آن تغییر نکند ؛ تبدیل را انجام می‌دهیم :

$$Y-\beta=tg^{۳}(X-\alpha)-۳tg(X-\alpha)+۲ \qquad (۲)$$

معادله‌های (۱) و (۲) را می‌توان چنین نوشت :

$$\begin{cases} Y-tg^{۳}(X+\alpha)+۳tg(X+\alpha)+(\beta+۲)=۰ \\ Y-tg^{۳}(X-\alpha)+۳tg(X-\alpha)-(\beta+۲)=۰ \end{cases}$$

برای اینکه این دو معادله نقاط یك منحنی را نشان دهند ، بایدداشته‌باشیم:

$$X+\alpha=k\pi+X-\alpha \;\;,\;\; \beta+۲=-\beta-۲$$

که از آنجا بدست می‌آید : $\alpha=k\frac{\pi}{۲}$ و $\beta=-۲$. بنابراین نقطه‌های

$\omega(k\frac{\pi}{۲},-۲)$ مرکزهای تقارن منحنی مفروض‌اند .

توضیح . اگر k عددی زوج باشد ، نقطه‌های ω برمنحنی واقع‌اند که ضمناً نقطه‌های عطف منحنی هم هستند . در حالتی که k عددی فـرد باشد ، نقطه‌های ω در خارج منحنی قرارمی‌گیرند .

۳۷۲ . $\omega(\alpha,\beta)$ را مرکز تقارن منحنی مـی‌گیریم و مبداء مختصات را به ω منتقل می‌کنیم ، معادلهٔ جدید منحنی‌چنین می‌شود :

$$Y+\beta=\frac{۲cos(X+\alpha)}{۲cos(۲X+۲\alpha)-۱} \qquad (۱)$$

برای اینکه مبداء مختصات مرکزتقارن منحنی‌تابع (۱) باشد ، باید با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ ، معادلهٔ آن تغییر نکند :

$$-Y+\beta=\frac{۲cos(-X+\alpha)}{۲cos(-۲X+۲\alpha)-۱} \qquad (۲)$$

معادله‌های (۱) و (۲) را می‌توان چنین نوشت :

$$\begin{cases} 2Y\cos(2X+2\alpha)-Y+2\beta\cos(2X+2\alpha)- \\ \qquad -\beta-2\cos(X+\alpha)=0, \\ 2Y\cos(2X-2\alpha)-Y-2\beta\cos(2X-2\alpha)+ \\ \qquad +\beta+2\cos(X-\alpha)=0 \end{cases}$$

برای اینکه‌این دومعادله نقطه‌های‌یك منحنی را نشان دهند باید داشته‌باشیم:

$$\begin{cases} 2X+2\alpha=2m\pi\pm(2X-2\alpha) \ ; \ \beta=0 \ ; \\ (X+\alpha)\pm(X-\alpha)=(2n+1)\pi \end{cases}$$

از رابطهٔ اول $\alpha=\frac{m\pi}{2}$ و از رابطهٔ سوم $\alpha=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ بدست می‌آید که $\alpha=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ جواب مشترك آنهاست ، بنابرایـن نقطه‌های بطول $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ و عرض صفر مرکزهای تقارن منحنی مفروض‌اند .

برای محورهای‌تقارن خط $x=\lambda$ را درنظر می‌گیریم . اگر باانتقال مبداء مختصات به‌نقطهٔ $(\lambda, 0)$ به‌معادله‌ای برسیم که با تبدیل X به $-X$ مقدار Y تغییر نکند ، خط $x=\lambda$ محور تقارن منحنی‌خواهد بود .

بعد ازانتقال مبداء و تبدیلهای لازم بدست می‌آید :

$$2Y\cos(2X+2\lambda)-Y-2\cos(X+\lambda)=0 \qquad (1)$$

و اگر X را به $-X$ تبدیل‌کنیم :

$$2Y\cos(2X-2\lambda)-Y-2\cos(X-\lambda)=0 \qquad (2)$$

برای اینکه معادله‌های (۱) و (۲) معرف یك منحنی باشند باید داشته‌باشیم:

$$\begin{cases} 2X+2\lambda=2m\pi\pm(2X-2\lambda) \\ X+\lambda=2k\pi\pm(X-\lambda) \end{cases}$$

ازمعادلهٔ اول $\lambda=\frac{m\pi}{2}$ و از معادلهٔ دوم $\lambda=k\pi$ بدست می‌آید که جواب مشترك آنها $\lambda=k\pi$ است . بنابراین‌خطهای $x=k\pi$ محورهـای

تقارن منحنی هستند .

توضیح . در تابع $y=\frac{2\cos x}{2\cos 2x-1}$ با تغییر x به $-x$ مقدار y تغییر نمی‌کند ، یعنی محور عرض محور تقارن منحنی است همچنین با تبدیل x به $\pi+x$ به تابع $y=\frac{-2\cos x}{2\cos 2x-1}$ می‌رسیم که اگر در آن x را به $-x$ تبدیل کنیم بدون تغییر باقی می‌ماند ، یعنی خط $x=\pi$ هم محور تقارن منحنی است .

از این توضیح می‌توان بلافاصله نتیجه گرفت که خطهای $x=k\pi$ محورهای تقارن منحنی هستند .

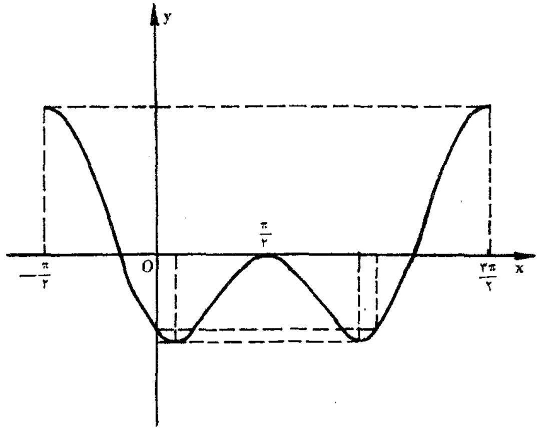
۳۷۳ . اگر شبیه دو تمرین قبل عمل کنیم روشن می‌شود که منحنی مرکز تقارن ندارد و معادله‌های محورهای تقارن آن $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ است .

۳۷۴ . مشتق تابع بصورت $y'=\cos x(4\sin x-1)$ در می‌آید که در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ به ازای مقادیر $-\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، α و $\pi-\alpha$ برابر صفر می‌شود (α کمان حاده و مثبتی است بطوری که $\sin\alpha=\frac{1}{4}$ باشد و ضمناً $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$) . جدول تغییرات تابع چنین است :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		α		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\alpha$		π		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$
y'	0		$-$				0	$+$	0	$-$	0		$+$				0
y	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2
	Max						Min		Max		Min						Max

منحنی تابع در شکل ۵۹ داده شده است .

۳۷۵ . منحنی تابع را در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ رسم می‌کنیم. مشتق تابع



شکل ۵۹

به‌صورت $y' = \cos x - \cos 3x$ درمی‌آید و به‌ازای مقادیر $-\frac{\pi}{2}$ ، ۰ ، $\frac{\pi}{2}$،

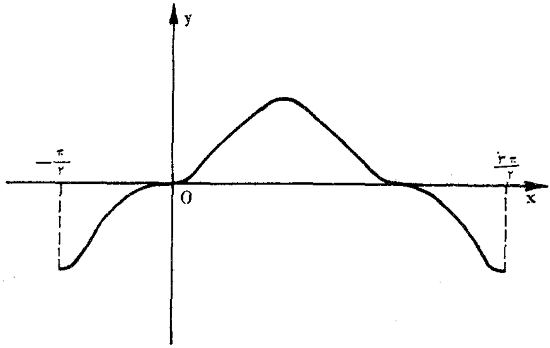
π و $\frac{3\pi}{2}$ مساوی صفر می‌شود (۰ = x و x = π جوابهای مضاعف مشتق در فاصلهٔ تناوب‌اند و بنابراین مشتق در این دو نقطه تغییر علامت نمی‌دهد).

جدول تغییرات تابع چنین است :

x	$-\frac{\pi}{2}$		۰		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y'	۰	+	۰	+	۰	−	۰	−	۰
y	$-\frac{4}{3}$	↗	۰	↗	$\frac{4}{3}$	↘	۰	↘	$-\frac{4}{3}$
	Min				Max				Min

منحنی تابع در شکل ۶۰ داده شده است .

۳۷۶. منحنی‌تابع رادرفاصلهٔ $-\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{5\pi}{3}$ رسم مـی‌کنیم . قبل ازهمه ببینیم تابع در چـه فـواصلی از دورهٔ تناوب حقیقی است . باید نـامعادلهٔ $\frac{2\cos x - 1}{2\cos x + 1} \geqslant 0$ را حل کنیم . معلوم می‌شودکه تابع در فواصل $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$

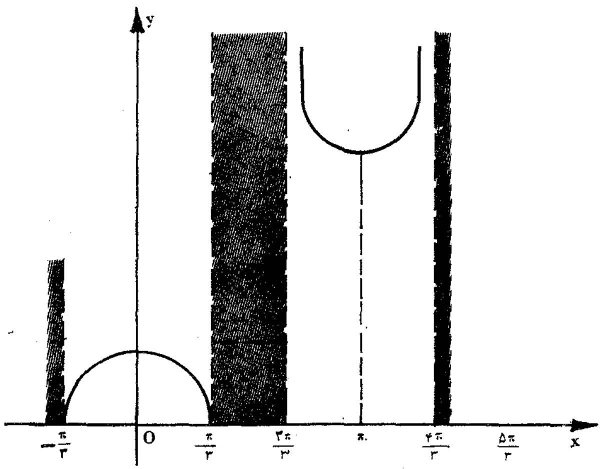


شکل ۶۰

و $\frac{4\pi}{3} > x > \frac{2\pi}{3}$ حقیقی است .

مشتق تابع $y' = \dfrac{-2\sin x}{(2\cos x+1)^2\sqrt{\dfrac{2\cos x-1}{2\cos x+1}}}$ به‌ازای $x=0$ و $x=\pi$

(درفاصلهٔ تناوب) مساوی‌صفرمی‌شود. $x=\frac{2\pi}{3}$ و $x=\frac{4\pi}{3}$ مجانبهای منحنی اندو



شکل ۶۱

منحنی محور طول را در نقاط $-\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۳}$ قطع می‌کند . جدول تغییرات تابع چنین است :

x	$-\frac{\pi}{۳}$		۰		$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$		π		$\frac{۴\pi}{۳}$
y'		+	۰	−			−	۰	+	
y	۰	↗	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	↘	۰	$+\infty$	↘	$\sqrt{۳}$	↗	$+\infty$
			Max					Min		

منحنی تابع درشکل ۶۱ داده شده است .

۳۷۷ . برای اینکه تابع حقیقی باشد باید $\frac{x\sin x}{۱-\cos x} \geqslant ۰$ باشد.

اگر $\cos x \neq ۱$ باشد ، $۱-\cos x$ مثبت است و بنابراین باید $x\sin x \geqslant ۰$ شود، دوحالت درنظر می‌گیریم :

ـ اگر $x > ۰$ باشد $x\sin x$ وقتی مثبت است‌که $\sin x$ مثبت باشد ، یعنی،داشته باشیم :

$$۲k\pi \leqslant x \leqslant (۲k+۱)\pi \quad (k \geqslant ۰) \quad (۱)$$

ـ اگر $x < ۰$ باشد $x\sin x$ وقتی مثبت است‌که $\sin x$ منفی باشد یعنی داشته باشیم :

$$-(۲k+۱)\pi \leqslant x \leqslant -۲k\pi \quad (k \geqslant ۰) \quad (۲)$$

ضمناً تابع درنقطه $x = ۰$ هم حقیقی است وحدتابع دراین نقطه‌مساوی $\sqrt{۲}$ می‌شود :

$$\lim_{x\to ۰} \sqrt{\frac{x\sin x}{۱-\cos x}} = \lim_{x\to ۰} \sqrt{\frac{\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}} \cdot ۲\cos\frac{x}{۲}} = \sqrt{۲}$$

بنابراین فواصل حقیقی بودن تابع چنین است :

$$\ldots,(-۵\pi,-۴\pi),(-۳\pi,-۲\pi),(-\pi,\pi),(۲\pi,۳\pi),(۴\pi,۵\pi),\ldots$$

ازطرف دیگر اگر $x=2k\pi+t$ بگیریم داریم :

$$A=\lim_{x\to 2k\pi}\sqrt{\frac{x\sin x}{1-\cos x}}=\lim_{t\to 0}\sqrt{\frac{(2k\pi+t)\sin t}{2\sin^2\frac{t}{2}}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\sqrt{\frac{2(2k\pi+t)}{t}}$$

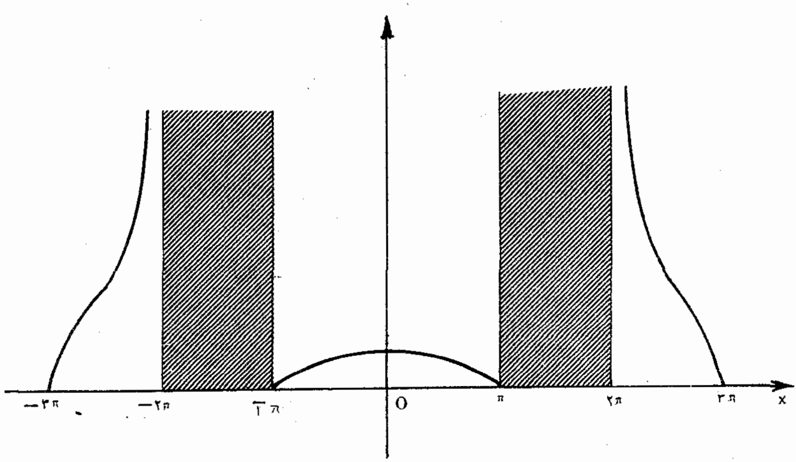
و روشن است که در حالت $k=0$ بدست می‌آید: $A=\sqrt{2}$ و در حالت $k\neq 0$: $A=+\infty$ ، بنابراین منحنی تابع مفروض در نقاط زیر منفصل است

$$x=\ldots,-4\pi,-2\pi,2\pi,4\pi,\ldots$$

مشتق تابع به صورت $y'=\dfrac{\sin x-x}{2(1-\cos x)\sqrt{\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}}}$ درمی‌آید،

منحنی تابع نسبت به‌محور عرض متقارن است وتنها درنقطهٔ $x=0$ ماکزیممی مساوی $\sqrt{2}$ دارد .

منحنی دورهٔ تناوب ندارد ، ولی اگر از فاصلهٔ $(-\pi,\pi)$ بگذریم ، شاخه‌های دیگر منحنی، چه درسمت راست محور طول وچه درسمت چپ آن،



شکل ۶۲

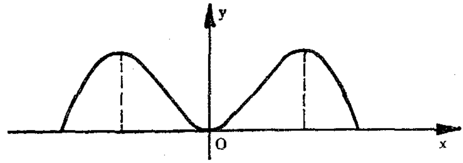
شبیه یکدیگر تکرار می‌شود، منتهی هرچه از نقطه O بطرف راست یاچپ دورتر شویم، عرض نقطهٔ عطف آن بزرگتر می‌شود.

منحنی در نقطه‌های بطول $(2k+1)\pi$ (k عددی صحیح، مثبت، منفی یاصفر است) ضریب زاویه‌ای مساوی بی‌نهایت دارد، یعنی برخطی موازی محور عرض مماس است. منحنی نمایش تغییرات تابع در فاصلهٔ $(-3\pi, 3\pi)$ در شکل ۶۲ رسم شده است.

۳۷۸. منحنی را درفاصلهٔ $-\frac{2\pi}{3}$ تا $\frac{2\pi}{3}$ رسم می‌کنیم. تابع در این فاصله حقیقی است و مشتق آن $y' = \frac{\sin x(4\cos x - 1)}{2\sqrt{1+\cos x - 2\cos^2 x}}$ به ازای 0، α و $-\alpha$ مساوی صفرمی‌شود (α کمان حاده ومثبتی‌است بین $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{12}$).

جدول تغییرات ومنحنی تابع درزیر داده‌شده است (شکل۶۳):

x	$-\frac{2\pi}{3}$		$-\alpha$		0		α		$\frac{2\pi}{3}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$ Max	$\searrow$	0 Min	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$ Max	$\searrow$	0



شکل ۶۳

منحنی نسبت به‌محور عرض متقارن ودر نقاط بطول $-\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ بر

خط موازی محورعرض مماس است .

تابع درفاصلهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ تا $\frac{۴\pi}{۳}$ موهومی است ودر فاصلهٔ $\frac{۴\pi}{۳}$ تا $\frac{۸\pi}{۳}$ شبیه‌فاصلهٔ $-\frac{۲\pi}{۳}$ تا $\frac{۲\pi}{۳}$ تکرار می‌شود وبهمین ترتیب تابی نهایت ادامه می‌یابد .

۳۷۹ . دورهٔ تناوب تابع مساوی ۲π است و خود تابع را می‌توان به این ترتیب تبدیل‌کرد :

$$y=\sqrt{\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}}=\sqrt{\frac{\left(\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{x}{۲}\right)^۲}{\left(\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}\right)^۲}}=$$

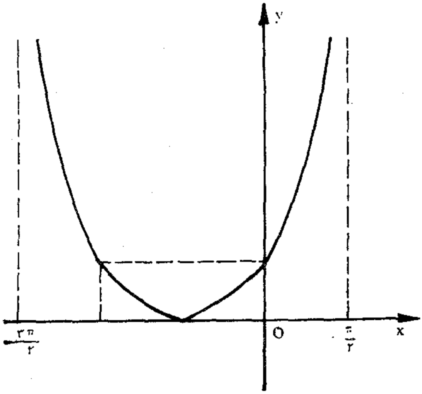
$$=\sqrt{\left(\frac{۱+tg\frac{x}{۲}}{۱-tg\frac{x}{۲}}\right)^۲}=\sqrt{tg^۲\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{x}{۲}\right)}=$$

$$=\left|tg\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{x}{۲}\right)\right|$$

اگر بخواهیم منحنی را درفاصلهٔ از $-\frac{۳\pi}{۲}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ رسم کنیم ، بسادگی معلوم می‌شود که $tg\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{x}{۲}\right)$ در فاصلهٔ $-\frac{۳\pi}{۲}$ تا $-\frac{\pi}{۲}$ منفی و در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ مثبت است . بنابراین داریم:

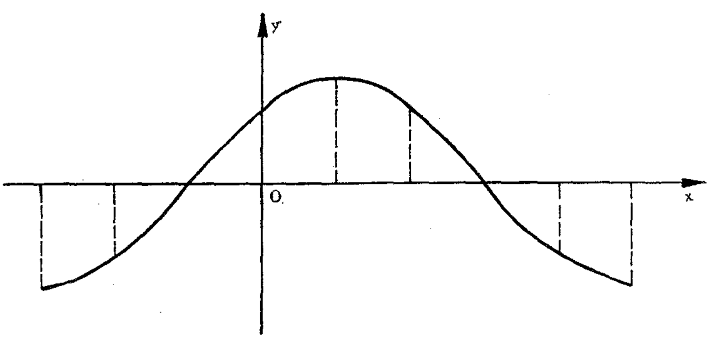
$$y=\begin{cases} -tg\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{x}{۲}\right) & \left(-\frac{۳\pi}{۲}<x<-\frac{\pi}{۲}\right) \\ tg\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{x}{۲}\right) & \left(-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\right) \end{cases}$$

بنابراین باید منحنی تابع $y=-tg(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$ را در فاصلهٔ $-\frac{3\pi}{2}$ تا $-\frac{\pi}{2}$ و منحنی تابع $y=tg(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$ را در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ رسم کنیم، این منحنی درشکل ۶۴ داده شده است .



شکل ۶۴

۳۸۰ ۰ دورهٔ تناوب تابع برابر $8=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}$ است . منحنی را در فاصلهٔ $-3\leqslant x\leqslant 5$ رسم می‌کنیم .



شکل ۶۵

مشتق تابع $y'=\frac{\pi}{4}(cos\frac{\pi}{4}x-sin\frac{\pi}{4}x)$ به‌ازای ۳− ، ۱و۵ مساوی

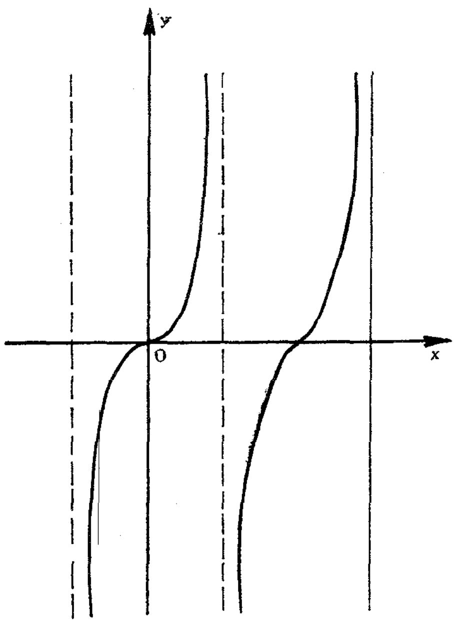
صفر می‌شود وتابع درنقاط $x=-1$ و $x=3$ برابر صفر است . منحنی درشکل ۶۵ داده شده است .

۳۸۱ . دورهٔ تناوب تابع $\frac{2\pi}{\pi}=2$ است : منحنی را در فاصلهٔ $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ رسم می‌کنیم .

تابع درنقاط $x=0$ و $x=1$ محور طول را قطع می‌کند ودر نقاط بطول $-\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ منفصل است.

مشتق تابع بصورت $y'=\frac{\pi(1-\cos^3\pi x)}{\cos^2\pi x}$ در می‌آید که به ازای $x=0$ (درفاصلهٔ تناوب) صفرمی‌شود، بنابراین $x=0$ نقطهٔ عطف منحنی است .

جدول تغییرات تابع چنین است :



شکل ۶۶

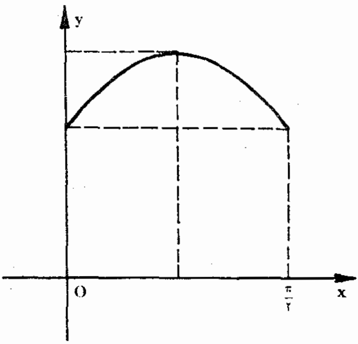
x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$
y'		$+$	0				$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

منحنی تابع درشکل ۶۶ داده شده است .

۳۸۲ . دورهٔ تناوب تابع $\frac{\pi}{2}$ است ، زیرا داریم :

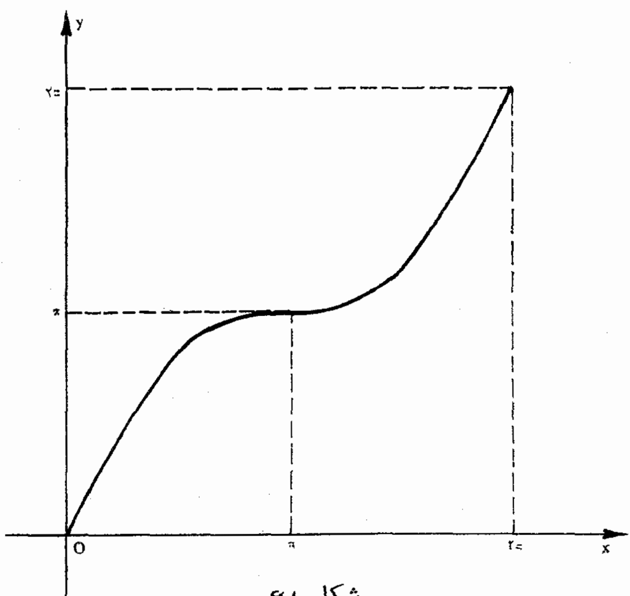
$$\sqrt{\sin^2(x+\frac{\pi}{2})}+\sqrt{\cos^2(x+\frac{\pi}{2})}=\sqrt{\cos^2 x}+\sqrt{\sin^2 x}=y$$

منحنی را در فاصلهٔ ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ رسم می‌کنیم. دراین‌فاصله مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ مثبت‌انـد و بنابراین باید منحنی $y=\sin x+\cos x$ را در فاصلهٔ ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ رسم کرد. منحنی تابع دراین فاصله درشکل ۶۷ داده شده است.



شکل ۶۷

۳۸۳ ۰ تابع دورهٔ تناوب ندارد ولی چون با اضافه کردن 2π به x ، به y هم به اندازهٔ 2π اضافه می‌شود ، اگر منحنی تابع را در فاصلهٔ ۰ تا 2π رسم کنیم ، برای رسم منحنی تابع در فاصلهٔ 2π تا 4π باید عین منحنی قبل را در دستگاهی که از انتقال دستگاه قبل به نقطهٔ



شکل ۶۸

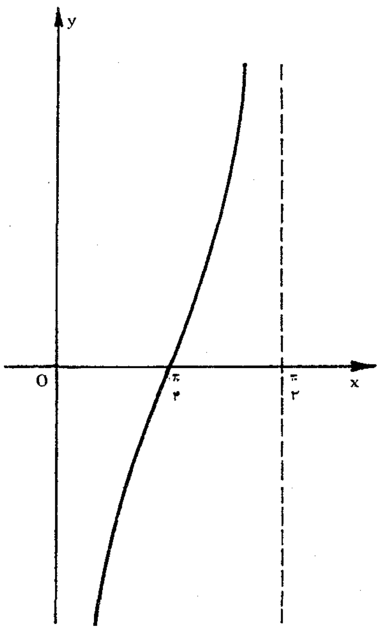
(π۲ و π۲) بدست‌آمده است رسم‌کنیم. بنابراین کافی‌است منحنی تابع‌مفروض را درفاصلهٔ ۰ و π۲ رسم کنیم .

بعضی مشخصات منحنی چنین است : در نقاط بطول ۰ و π۲ برخطی‌با ضریب زاویهٔ۲ مماس است، مشتق تابع $y'=1+\cos x$ تنها به‌ازای $x=\pi$ مساوی صفر می‌شود که طول نقطهٔ عطف منحنی است ودرآنجا برخطی موازی محور xx' مماس‌است . به‌ازای بقیهٔ مقادیر x ، مشتق مثبت وبنابراین تابع صعودی است .

منحنی تابع درفاصلهٔ (π۲ ، ۰) درشکل ۶۸ داده شده است.

۳۸۴ تابع‌را می‌توان بصورت $y=-2\cot g\,2x$ نوشت وواضح‌است که دورهٔ تناوب‌آن $\frac{\pi}{2}$ است .

منحنی را درفاصله ۰ تا $\frac{\pi}{2}$رسم می‌کنیم . مشتق تابع $y'=4(1+\cot g^2 2x)$همیشه مثبت است و تابع در نقطه‌های بطول ۰ و $\frac{\pi}{2}$ منفصل است ودر نقطهٔ بطول$\frac{\pi}{4}$ محور طول را قطع می‌کند . منحنی تابع در فاصلهٔ ($\frac{\pi}{2}$, ۰) در شکل ۶۹ داده شده است .

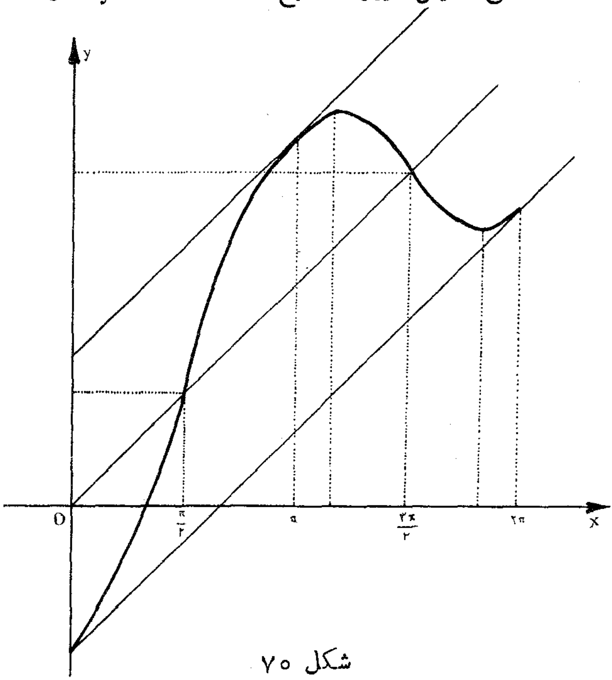


شکل ۶۹

۳۸۵ . تابع دارای دورهٔ تناوب نیست ، ولی‌اگر منحنی نمایش تغییرات آنرا درفاصلهٔ ۰ تا π۲ رسم کنیم، باانتقال مبدأ مختصات به‌نقطهٔ(π۲ , π۲) عین منحنی قبل در دستگاه جدید تکرارمی‌شود . برای رسم منحنی به‌نکات زیر توجه می‌کنیم :

۱) حداکثر $\cos x$ برابر ۱ وحداقل‌آن ۱ — است ، که اگر درتابع قرار دهیم دوخط $y=x-2$ و $y=x+2$ بدست می‌آید . یعنی‌عرضهای

نقاط مختلف منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x-2\cos x$ همواره درفاصلهٔ



شکل ۷۰

دو خط موازی فوق قرار دارد . درحقیقت منحنی تابع مفروض مرتباً براین دوخط مماس می‌شود . تعیین این نقاط رسم منحنی را دقیق‌ترمی‌کند. بسادگی روشن می‌شود که خط $y=x+2$ درنقطه‌های بطول $x=2k\pi+\pi$ وخط $y=x-2$ درنقطه‌های بطول $x=2k\pi$ برمنحنی مطلوب مماس‌اند .

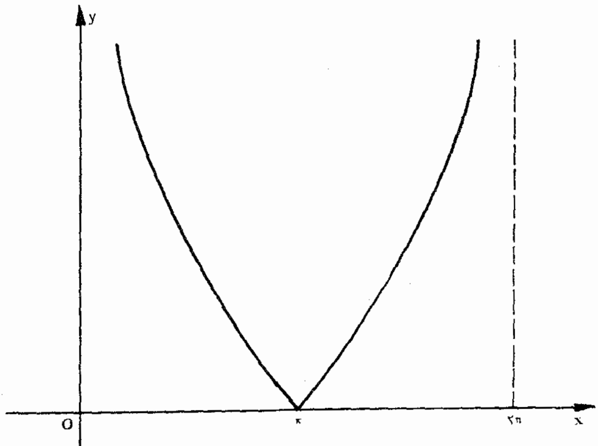
۲) منحنی تابع مفروض نیمساز ربع اول و سوم ، یعنی خط $y=x$ را در نقطه‌های بطول $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ قطع می‌کند .

۳) مشتق تابع $y'=1+2\sin x$ درنقطه‌های بطول $x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$ و $x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}$ ماکزیمم یا می‌نیمم است .

منحنی نمایش‌تغییرات تابع درفاصلهٔ ۰ تا 2π درشکل ۷۰ رسم‌شده‌است.

۳۸۶ . تابع بصورت $y=\frac{|\sin x|}{1-\cos x}$ در می‌آید و برای رسم منحنی

آن در فاصلهٔ ۰ تا 2π باید منحنی تابع $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ را در فاصلهٔ ۰ تا π ومنحنی تابع $y=\frac{-\sin x}{1-\cos x}$ را درفاصلهٔ πتا 2π رسم‌کرد. شاخه‌های منحنی در نقطهٔ بطول π طوری بهم می‌رسند که شاخه سمت چپ برخطی با ضریب زاویهٔ $-\frac{1}{2}$ و شاخهٔ سمت راست برخطی باضریب زاویه $\frac{1}{2}$ مماس‌است.

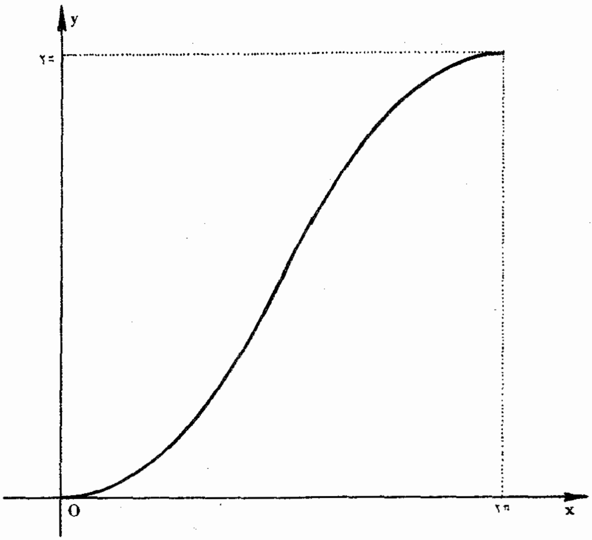


شکل ۷۱

منحنی نمایش تغییرات تابع (که درنقطه‌های بطول $x=2k\pi$ منفصل است) درفاصلهٔ ۰ تا 2π درشکل ۷۱ داده شده است.

۳۸۷ . تابع همیشه صعودی است ، زیرا مشتق آن $y'=1-\cos x$ غیرمنفی است . مشتق ثانی تابع $y''=\sin x$ به ازای $x=k\pi$ برابر صفر می‌شود وبنابراین دراین نقطه‌ها جهت تقعر منحنی عوض می‌شود. اگرمنحنی نمایش‌تغییرات تابع‌را درفاصلهٔ ۰ تا 2π رسم کنیم ، باانتقال مبداءمختصات به‌نقطهٔ $(2\pi, 2\pi)$ و رسم مجدد منحنی در دستگاه جدید و ادامهٔ این روش منحنی‌مطلوب بدست می‌آید. منحنی نمایش تغییرات تابع در فاصلهٔ ۰تا2π درشکل ۷۲ داده شده است.

۳۸۸ . مشتق تابع بصورت $y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ در می‌آید که جوابهای تقریبی آنرا می‌توان بارسم‌منحنی‌تابع $y=x\cos x-\sin x$ (مسئلهٔ



شکل ۷۲

۳۸۹ را ببینید) بدست آورد . مشتق در فاصلهٔ ۰ تا ۶π دارای ۵ ریشه است‌که بترتیب درفواصل $\left(\pi,\frac{۳\pi}{۲}\right)$ ، $\left(۲\pi,\frac{۵\pi}{۲}\right)$ ، $\left(۳\pi\ ,\ \frac{۷\pi}{۲}\right)$، $\left(۴\pi\ ,\ \frac{۹\pi}{۲}\right)$ و $\left(۵\pi\ ,\ \frac{۱۱\pi}{۲}\right)$ قرار گرفته‌اند . اگر این مقادیر ، یعنی ریشه‌های مشتق را a،b،c،d وe فرض‌کنیم به‌سادگی می‌توان ثابت‌کرد .

$$\left|\frac{\sin a}{a}\right| > \left|\frac{\sin b}{b}\right| > \left|\frac{\sin c}{c}\right| > \left|\frac{\sin d}{d}\right| > \left|\frac{\sin e}{e}\right|$$

یعنی مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم از لحاظ قدرمطلق نزولی هستند وروشن‌است:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}\sin x = ۰ \quad , \quad \lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x}\sin x = ۱$$

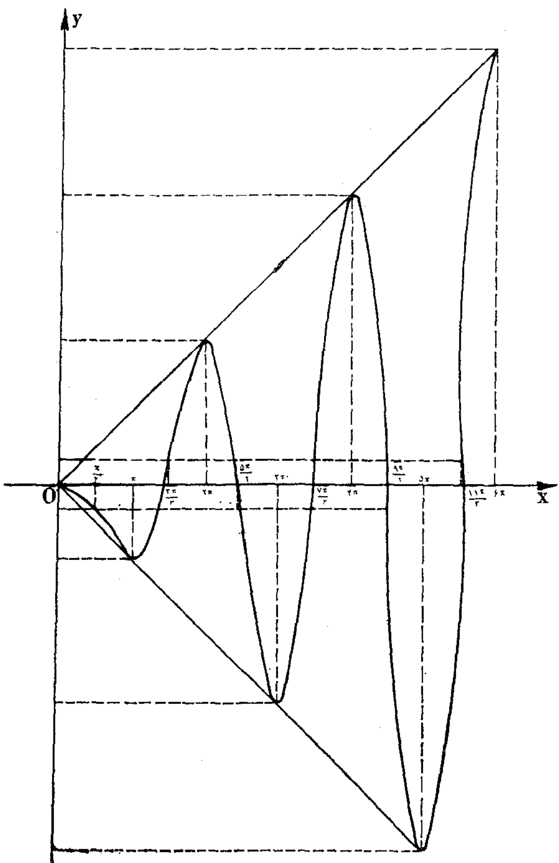
منحنی تابع درنقطه‌های بطول $x = k\pi$ محور xx' را قطع می‌کند.
ضمناً درنقطهٔ (۱ , ۰) منحنی برخطی‌موازی‌محور xx' مماس‌است،زیراداریم:

$$\lim_{x\to ۰} y' = \lim_{x\to ۰}\frac{x\cos x - \sin x}{x^۲} = ۰$$

باتوجه به‌این نکات می‌توان منحنی تابع را رسم کرد .

۳۸۹. مشتق تابع به‌صورت $y' = -x\sin x$ درمی‌آید که به‌ازای $x = k\pi$ برابر صفر می‌شود . جدول تابع چنین است (در فاصلهٔ ۰ تا π ۶) :

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π	$\frac{۵\pi}{۲}$	۳π	$\frac{۷\pi}{۲}$	۴π	$\frac{۹\pi}{۲}$	۵π	$\frac{۱۱\pi}{۲}$	۶π
y'	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰
y	۰	↘ −۱	↘ −π	↗ ۱	↗ ۲π	↘ −۱	↘ −۳π	↗ ۱	↗ ۴π	↘ −۱	↘ −۵π	↗ ۱	↗ ۶π



شکل ۷۳

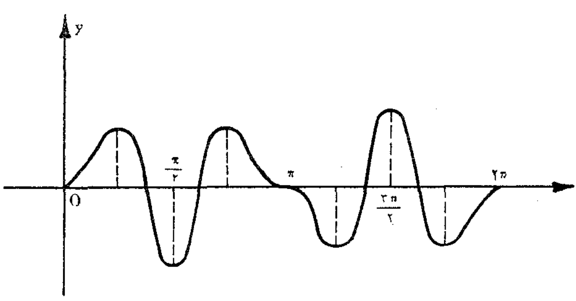
ضمناً باید توجه کرد که منحنی نمایش تغییرات این تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. منحنی درفاصله ۰ تا ۶π درشکل ۷۳ رسم شده‌است.

۳۹۰ . مشتق تابع بصورت $y' = \cos ۳x - \cos ۵x$ در می‌آید که ریشه‌های آن در فاصلهٔ ۰ تا ۲π عبارتند از :

$$۰ , \frac{\pi}{۴} , \frac{\pi}{۲} , \frac{۳\pi}{۴} , \pi , \frac{۵\pi}{۴} , \frac{۳\pi}{۲} , \frac{۷\pi}{۴} , ۲\pi$$

که در بین آنها مقادیر ۰ و π و ۲π ریشه‌های مضاعف‌اند وبنابراین نقطه‌های عطف منحنی را تشکیل می‌دهند. جدول ومنحنی(شکل۷۴) تابع درزیر داده شده است (در فاصله ۰ تا۲π) :

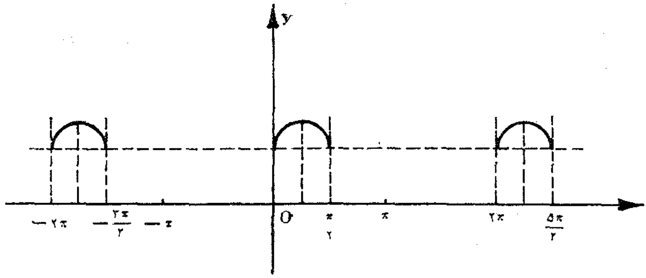
x	۰		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{\pi}{۲}$		$\frac{۳\pi}{۴}$		π		$\frac{۵\pi}{۴}$		$\frac{۳\pi}{۲}$		$\frac{۷\pi}{۴}$		۲π
y'	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰
y	۰	↗	$\frac{۴\sqrt{۲}}{۱۵}$	↘	$-\frac{۸}{۱۵}$	↗	$\frac{۴\sqrt{۲}}{۱۵}$	↘	۰	↘	$-\frac{۴\sqrt{۲}}{۱۵}$	↗	$\frac{۸}{۱۵}$	↘	$-\frac{۴\sqrt{۲}}{۱۵}$	↗	۰



شکل ۷۴

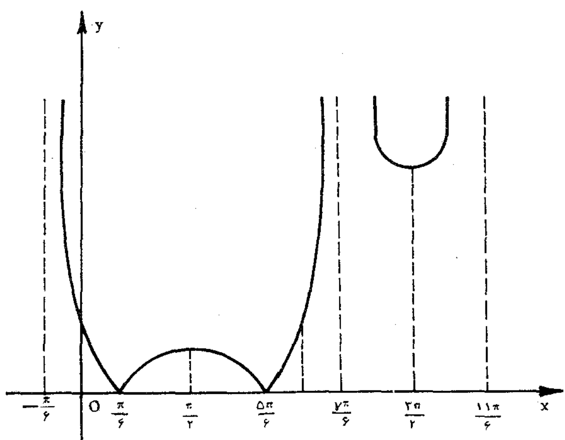
۳۹۱ . برای اینکه تابع حقیقی باشد باید $\sin x \geqslant ۰$ و $\cos x \geqslant ۰$ باشد ، یعنی درفاصلهٔ ۰ تا ۲π تنها به‌ازای مقادیر $۰ \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{۲}$ ، تابع حقیقی است ودراین فاصله ماکزیممی مساوی $\sqrt[۴]{۸}$ دارد . درشکل ۷۵ منحنی نمایش

تغییرات تابع در فاصلهٔ $\left(-2\pi \, , \, \frac{5\pi}{2}\right)$ (سه دورهٔ تناوب) رسم شده است .



شکل ۷۵

۳۹۲. منحنی را در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{6}$ تا $\frac{11\pi}{6}$ رسم می‌کنیم . در این فاصله



شکل ۷۶

منحنی در نقطه‌های بطول $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{7\pi}{6}$ و $x = \frac{11\pi}{6}$ منفصل است.

تابع را می‌توان به‌صورت $y = \left|\frac{1 - 2\sin x}{1 + 2\sin x}\right|$ نوشت و بسادگی معلوم می‌شود

که کسر $\frac{1 - 2\sin x}{1 + 2\sin x}$ در فواصل $\left(-\frac{\pi}{6} \, , \, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(\frac{5\pi}{6} \, , \, \frac{7\pi}{6}\right)$ مثبت و در

فواصل $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ و $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$ منفی است . بنابراین منحنی نمایش تغییرات تابع را به دوطریق می‌توان رسم‌کرد :

۱) منحنی تابع $y=\frac{1-2\sin x}{1+2\sin x}$ رادرفواصل $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$ ومنحنی تابع $y=-\frac{1-2\sin x}{1+2\sin x}$ رادرفواصل $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ و $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$ رسم می‌کنیم.

۲) منحنی تابع $y=\frac{1-2\sin x}{1+2\sin x}$ را درفاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$ رسم می‌کنیم وآن قسمت ازمنحنی که پائین محور $x'x$ قرار گرفته است به قرینه‌اش نسبت به‌این محورتبدیل می‌کنیم .

منحنی نمایش تغییرات تابع مفروض در فاصلهٔ $\left(\frac{11\pi}{6}\right.$ و $\left.-\frac{\pi}{6}\right)$ در شکل ۷۶ داده شده است .

۳۹۳. رابطهٔ حکم را نسبت به $\cos A$ منظم می‌کنیم ، بدست می‌آید:

$$\cos^2 A+(2\cos B\cos C)\cos A+(\cos^2 B+\cos^2 C-1)=0 \qquad (1)$$

این رابطه نسبت به $\cos A$ از درجهٔ دوم است و بسادگی می‌توان جوابهای $\cos A$ دابرحسب B و C محاسبه کرد :

$$\cos A=-\cos B\cos C\pm\sqrt{\cos^2 B\cos^2 C-\cos^2 B-\cos^2 C+1}=$$
$$=-\cos B\cos C\pm\sin B\sin C=-\cos(B\pm C)$$

وبنابراین رابطهٔ(۱) را می‌توان چنین نوشت :

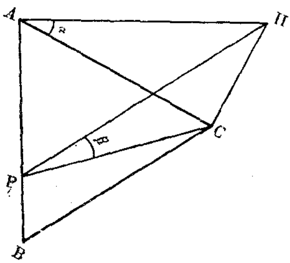
$$[\cos A+\cos(B+C)][\cos A+\cos(B-C)]=0$$

که اگرهریك ازدوکروشه را به‌صورت ضرب تبدیل کنیم می‌شود :

$$4\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A-B-C}{2}\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A+C-B}{2}=0$$

واین تساوی صحیح است ، زیرا طبق فرض $\frac{A+B+C}{۲}=\frac{\pi}{۲}$ می‌شود و کسینوس آن برابر صفر است .

۳۹۴ . طول ضلع مثلث‌متساوی الاضلاع ABC را مساوی a می‌گیریم، داریم (شکل ۷۷) :



شکل ۷۷

$$tg\,\alpha=\frac{CH}{a}\ ,\ cotg\,\beta=\frac{CP}{CH}$$

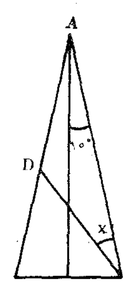
ازطرف دیگر در مثلث CAP ، طبق رابطهٔ کسینوسها، داریم :

$$CP^{۲}=AC^{۲}+AP^{۲}-$$
$$-۲AC\cdot AP\cdot cos(CAP)=$$
$$=a^{۲}+a^{۲}\lambda^{۲}-۲a\cdot a\lambda\cdot\frac{۱}{۲}=a^{۲}(۱+\lambda^{۲}-\lambda)$$

وازآنجا خواهیم داشت :

$$tg^{۲}\alpha\,.\,cotg^{۲}\beta=\frac{CH^{۲}}{a^{۲}}\cdot\frac{CP^{۲}}{CH^{۲}}=\frac{CP^{۲}}{a^{۲}}=$$
$$=\frac{a^{۲}(۱+\lambda^{۲}-\lambda)}{a^{۲}}=۱+\lambda^{۲}-\lambda$$

۳۹۵ . $\widehat{ABD}=x$ و $BC=a$ می‌گیریم.



شکل ۷۸

درمثلث ADB می‌توان نوشت :

$$\frac{AD}{sin\,x}=\frac{AB}{sin(x+۲۰^{\circ})}$$

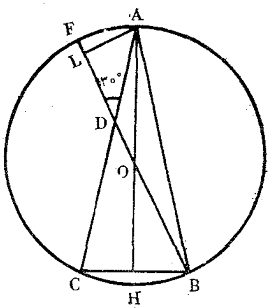
ازطرف دیگرداریم : $AB=\frac{a}{۲sin\,۱۰^{\circ}}$ وبنابراین بدست می‌آید :

$$\frac{a}{sin\,x}=\frac{a}{۲sin\,۱۰^{\circ}sin(x+۲۰^{\circ})}$$

و از آنجا بترتیب خواهیم داشت :

$$2\sin 10^\circ \sin(x+20^\circ)=\sin x\ ,$$
$$2\sin 10^\circ(\sin x\cos 20^\circ+\cos x\sin 20^\circ)=\sin x\ ,$$
$$(2\sin 10^\circ\cos 20^\circ-1)\sin x+2\sin 10^\circ\sin 20^\circ\cos x=0\ ,$$
$$tg\,x=\frac{2\sin 10^\circ\sin 20^\circ}{-2\sin 10^\circ\cos 20^\circ+1}=\frac{2\sin 10^\circ\sin 20^\circ}{1-\sin 30^\circ+\sin 10^\circ}=$$
$$=\frac{2\sin 10^\circ\sin 20^\circ}{\sin 30^\circ+\sin 10^\circ}=\frac{2\sin 10^\circ\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 10^\circ}=tg\,10^\circ$$

واز آنجا $x=10^\circ$ و $\widehat{ADB}=150^\circ$ می‌شود.



شکل ۷۹

محاسبهٔ زاویه باروش هندسی. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم ، قطر BF رامی‌کشیم واز A عمود AL را براین‌قطر فرود می‌آوریم، مرکز دایره ، نقطهٔ O محل تلاقی AH و BF است، چون $OA=OB$ پس $ABO=10^\circ$ می‌شود ودر نتیجه زاویهٔ LAD مساوی ۶۰ درجه وزاویهٔ ADL مساوی ۳۰ درجه و بنابراین زاویـهٔ ADB مساوی ۱۵۰ درجه‌می‌شود. باقی می‌ماند که ثابت‌کنیم $AD=BC$ است. دومثلث ALO و BHO برابرند (دروتـر ویك زاویهٔ حاده)، بنابراین بدست می‌آید:

$$AL=BH=\frac{BC}{2}\implies AD=2AL=a$$

۳۹۶ . نسبتهای مساوی رابرابر λ می‌گیریم :

$$\frac{tg\,A}{\alpha}=\frac{tg\,B}{\beta}=\frac{tg\,C}{\gamma}=\lambda \qquad (1)$$

ازطرف دیگرباتوجه به‌اینکه A وB وC زوایای یك‌مثلث‌اند داریم:

$$tg\,A+tg\,B+tg\,C=tg\,A\,tg\,B\,tg\,C \qquad (2)$$

اگرمقادیر $tg\,A$ و $tg\,B$ و $tg\,C$ راازرابطهٔ (۱) دررابطهٔ (۲) قراردهیم:

$$\lambda(\alpha+\beta+\gamma)=\lambda^3\alpha\beta\gamma\implies\lambda=\pm\sqrt{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}}$$

بادردست داشتن λ مقادیر $tg\,A$ و $tg\,B$ و $tg\,C$ از رابطهٔ (۱) بدست‌می‌آید و از آنجا مقادیر A و B و C محاسبه می‌شود .

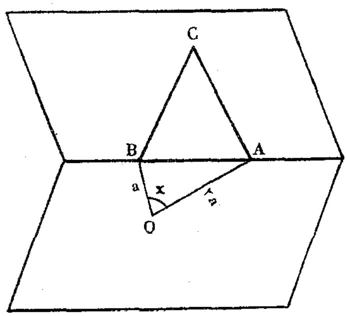
شرط وجود جواب اینست‌که $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}>0$ باشد . بافرض وجود جواب، برای λ دو مقدار قرینه بدست مـی‌آید ولی تنها یکی از مقادیر λ قابل قبول است ، زیرا باید لااقل دوزاویه از مثلث حاده وتانژانت‌آنهامثبت بشود . بنابراین مسئله تنها یك جواب دارد .

۳۹۷ . اولا) مساحت‌چهارضلعی چپ ACBO برابر است بامجموع مساحتهای دو مثلث AOB و ACB :

$$S_{ACBO}=S_{ACB}+S_{AOB}$$

مساحت مثلث AOB بسادگی بدست می‌آید (شکل ۸۰) :

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin(AOB)=$$
$$=a^2\sin x$$



شکل ۸۰

برای محاسبهٔ مساحت مثلث ACB قبلا AB را محاسبه می‌کنیم . درمثلث AOB داریم :

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos(AOB)=5a^2-4a^2\cos x$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$S_{ACB}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin(BAC)=\frac{1}{2}AB^2\sin 60^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(5-4\cos x)$$

و در نتیجه داریم :

$$S_{ACBO}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(5-4\cos x)+a^2\sin x$$

ثانیاً) اگر مساحت چهارضلعی را مساوی ka^2 قرار دهیم ، بعد از

منظم‌کردن به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$sin\,x - \sqrt{۳}\,cos\,x = k - \frac{۵\sqrt{۳}}{۴}\;;$$

$$sin(x - ۶۰^\circ) = \frac{۴k - ۵\sqrt{۳}}{۸} \qquad (۱)$$

چون $۰ \leqslant x \leqslant ۱۸۰^\circ$ است $-۶۰^\circ \leqslant x - ۶۰^\circ \leqslant ۱۲۰^\circ$ می‌شود ، یعنی

$$-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \leqslant sin(x - ۶۰^\circ) \leqslant ۱ \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \leqslant \frac{۴k - ۵\sqrt{۳}}{۸} \leqslant$$

و از آنجا $\qquad \frac{\sqrt{۳}}{۴} \leqslant k \leqslant \frac{۵\sqrt{۳}+۸}{۴}$

اگر $k = \frac{۵\sqrt{۳}+۸}{۴}$ باشد ، با توجه به معادلهٔ (۱) بدست می‌آید :

$$sin(x - ۶۰^\circ) = ۱ \quad \Longrightarrow \quad x = ۱۵۰^\circ$$

ثالثاً) باید منحنی نمایش تغییرات تابع

$$y = \frac{S}{a^۲} = sin\,x - \sqrt{۳}\,cos\,x + \frac{۵\sqrt{۳}}{۴}$$

را وقتی که x از ۰ تا π تغییر می‌کند رسم‌کنیم . جدول تغییرات تابع‌چنین است :

x	۰		$\frac{۵\pi}{۶}$		π
y'		+	۰	−	
y	$\frac{\sqrt{۳}}{۴}$	↗	$\frac{۸+۵\sqrt{۳}}{۴}$ Max	↘	$\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

منحنی نمایش تغییرات تابع درشکل ۸۱ داده شده است. نقطهٔ $\left(\frac{\pi}{۳}, \frac{۵\sqrt{۳}}{۴}\right)$ نقطهٔ عطف منحنی است .

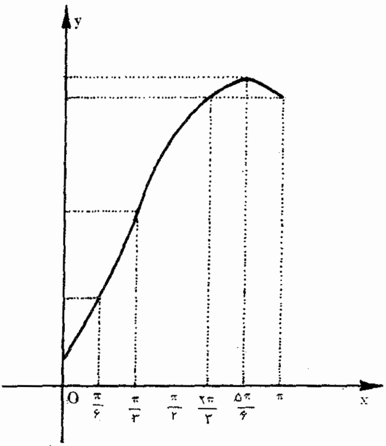
۲۹۸ . با توجه به اینکه A وB وC زوایای مثلث‌اند، داریم :

$$cos(B+C) = -cos\,A = -cos\,\alpha \cdot sin\,\beta \qquad (۱)$$

سمت‌چپ رابطهٔ(۱) را بسط می‌دهیم و برای خطوط مثلثاتی B و C از روابط‌فرض‌استفاده می‌کنیم، بترتیب بدست می‌آید:

$$\cos B\cos C - \sin B\cdot\sin C = -\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$

$$(\cos\beta\cdot\sin\gamma)(\cos\gamma\cdot\sin\alpha) - \sqrt{1-\cos^2\beta\sin^2\gamma}\cdot\times \sqrt{1-\cos^2\gamma\sin^2\alpha} = -\cos\alpha\cdot\sin\beta$$



شکل ۸۱

این‌رابطه‌راگویا وسپس‌ساده‌می‌کنیم:

$$\cos^2\beta\cdot\sin^2\gamma+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\gamma\cdot\sin^2\alpha+ +2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma=1$$

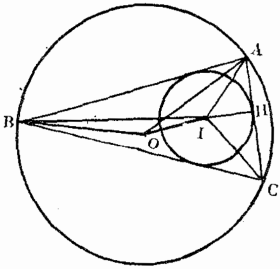
طرفین این رابطه را بر $\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma$ تقسیم می‌کنیم (و این بشرطی ممکن است که مثلث ADC غیرقائم‌الزاویه باشد) :

$$tg^2\gamma(1+tg^2\alpha)+tg^2\beta(1+tg^2\gamma)+tg^2\alpha(1+tg^2\beta)+ +2tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma=(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)(1+tg^2\gamma)$$

که پس از ساده‌کردن بدست می‌آید:

$$tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma=1$$

۳۹۹ . ابتدافاصلهٔمرکزدایرهٔ محیطی مثلث غیر مشخص ABC را از مرکز دایرهٔ محاطی آن برحسب شعاعهای دو دایره محاسبه می‌کنیم.



شکل ۸۲

در مثلث OAI داریم:

$$OI^2=AO^2+AI^2- -2AO\cdot AI\cdot\cos(OAI) \quad (1)$$

در مثلث AIC می‌توان نوشت :

$$AC=b=AI\cdot\cos\frac{A}{۲}+CI\cdot\cos\frac{C}{۲}$$

از طرف دیگر در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AHI و CHI داریم :

$$IH=r=AI\cdot\sin\frac{A}{۲}\ ,\ \ r=CI\cdot\sin\frac{C}{۲}$$

و از آنجا به دستگاه زیر می‌رسیم (نسبت به مجهولهای AI و CI) :

$$\begin{cases} AI\cdot\cos\frac{A}{۲}+CI\cdot\cos\frac{C}{۲}=b=۲R\sin B \\ AI\ \sin\frac{A}{۲}=CI\cdot\sin\frac{C}{۲} \end{cases}$$

از این دستگاه بدست می‌آید :

$$AI=\frac{۲R\sin B\sin\frac{C}{۲}}{\sin\frac{A+C}{۲}}=\frac{۴R\sin\frac{B}{۲}\cos\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}}{\cos\frac{B}{۲}}=۴R\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$$

حالا به محاسبهٔ زاویهٔ OAI می‌پردازیم . داریم :

$$\widehat{OAI}=\widehat{BAI}-\widehat{BAO}=\frac{A}{۲}-\widehat{BAO}\qquad (۲)$$

از طرف دیگر در مثلث‌متساوی‌الساقین AOB داریم :

$$۲\widehat{BAO}+\widehat{AOB}=۱۸۰^\circ\quad\Longrightarrow\quad ۲\widehat{BAO}+۲C=۱۸۰^\circ$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$\widehat{BAO}=۹۰^\circ-C$$

بنابراین ، با توجه به رابطهٔ (۲) خواهیم داشت :

$$\widehat{OAI}=\frac{A}{۲}-(۹۰^\circ-C)=\frac{A}{۲}+C-۹۰^\circ=(۹۰^\circ-\frac{B+C}{۲})+$$
$$+C-۹۰^\circ=\frac{C-B}{۲}$$

به‌این ترتیب رابطهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$OI^2 = R^2 + 16R^2 \sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - 2R\cdot 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C-B}{2} =$$

$$= R^2 + 8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{C-B}{2}\right) =$$

$$= R^2 + 8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(-\cos\frac{C+B}{2}\right) =$$

$$= R^2 - 8R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

که با استفاده از رابطهٔ $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ بدست می‌آید :

$$OI^2 = R^2 - 2R\left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = R^2 - 2Rr$$

و بالاخره[1] $\qquad OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$

حالا به فرض مسئله می‌پردازیم ، اگر O برمحیط دایرهٔ محاطی واقع باشد $OI = r$ می‌شود و بنابراین باید داشته باشیم :

$$r^2 = R^2 - 2Rr \quad \Longrightarrow \quad R^2 - 2rR - r^2 = 0$$

که نسبت به R معادله‌ای است از درجهٔ دوم و از آن بدست می‌آید :

$$R = (1+\sqrt{2})r$$

(جواب دیگر R دراین معادله که منفی است، قابل قبول نمی‌باشد). دراین رابطه $R = \frac{a}{2\sin A}$ و $r = \dfrac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ قرار می‌دهیم ، پس از ساده کردن بدست می‌آید :

---

۱) رابطهٔ به $OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ به‌رابطهٔ اولر معروف است .

$$4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sqrt{2}-1 \qquad (3)$$

که اگر سمت چپ تساوی را به‌مجموع تبدیل کنیم :

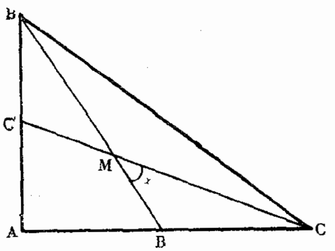
$$4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=2\cos\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-2\cos^2\frac{B+C}{2}=\cos B+\cos C-$$

$$-[1+\cos(B+C)]=\cos B+\cos C-1+\cos A$$

که اگر دررابطهٔ(۳) قراردهیم، بدست‌می‌آید :

$$\cos A+\cos B+\cos C=\sqrt{2}$$



شکل ۸۳

۴۰۰ . میانه‌های واردبراضلاع AC و AB را بترتیب BB' و CC' و محل تـلاقی آنها را M و $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ می‌گیریم (شکل ۸۳). داریم:

$$BB'^2=c^2+\frac{b^2}{4},$$

$$CC'^2=b^2+\frac{c^2}{4},$$

وچون میانه‌ها در ثلث یکدیگررا قطع می‌کنند :

$$MB^2=\frac{4}{9}BB'^2=\frac{4}{9}\left(c^2+\frac{b^2}{4}\right)=\frac{4c^2}{9}+\frac{b^2}{9},$$

$$MC^2=\frac{4}{9}CC'^2=\frac{4}{9}\left(b^2+\frac{c^2}{4}\right)=\frac{4b^2}{9}+\frac{c^2}{9}$$

رابطهٔ‌کسینوسها رادرمثلث BMC می‌نویسیم:

$$BC^2=MB^2+MC^2-2MB\cdot MC\cos(\pi-\alpha)$$

که اگرمقادیر مربوطه رادرآن قرار دهیم :

$$a^2=\frac{4c^2}{9}+\frac{b^2}{9}+\frac{4b^2}{9}+\frac{c^2}{9}+$$
$$+\frac{2}{9}\sqrt{(4c^2+b^2)(4b^2+c^2)}\ \cos\alpha$$

که پس‌ازتبدیلات ساده و بااستفاده از رابطهٔ $b^2+c^2=a^2$ ، پس از گویا کردن می‌شود :

$$4a^4=(a^2+3c^2)(a^2+3b^2)\cos^2\alpha$$

واز تقسیم طرفین تساوی بر a^4:

$$4=(1+3\cos^2C)(1+3\sin^2C)\cos^2\alpha$$

که از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\sin^2 2C=\frac{16}{9}tg^2\alpha \implies \sin 2C=\frac{4}{3}tg\,\alpha$$

وبنابراین زوایای حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه چنین‌می‌شود:

$$\left|\begin{array}{l} C=\frac{1}{2}Arcsin\left(\frac{4}{3}tg\,\alpha\right) \\ B=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}Arcsin\left(\frac{4}{3}tg\,\alpha\right) \end{array}\right.$$

۴۰۱ . باتوجه به‌قضیهٔ سینوسها ورابطهٔ فرض‌مسئله، نتیجه‌می‌شود:

$$a^2+b^2=5c^2$$

طبق قضیهٔ کسینوسها داریم:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

وبنابراین بدست می‌آید : $5a^2+5b^2-10ab\cos C=a^2+b^2$

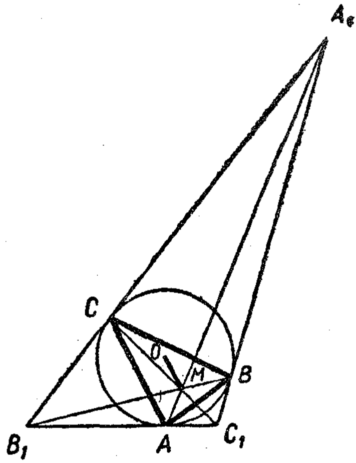
واز آنجا : $2a^2-5ab\cos C+2b^2=0$

ویاپس‌ازتقسیم طرفین‌معادله بر b^2 بدست می‌آید:

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\cos C\left(\frac{a}{b}\right)+2=0 \qquad (1)$$

برای اینکه $\frac{a}{b}$ وجودداشته باشد، بایدممبین‌معادلهٔ(۱) مثبت باشد:

$$25\cos^2 C - 16 \geqslant 0 \implies \sin C \leqslant \frac{3}{5}$$.



شکل ۸۴

۴۰۴ . ازقضیهٔ منلائوس در مورد مثلث A_1CC_1 وقاطع B_1B استفاده می‌کنیم (شکل ۸۴) :

$$\frac{CM}{MC_1} \cdot \frac{C_1B}{BA_1} \cdot \frac{A_1B_1}{B_1C} = 1$$

$\frac{CM}{MC_1} = k$ می‌گیریم، در اینصورت

$$k = \frac{BA_1}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{A_1B_1} = \frac{tg A}{tg C} \times \frac{tg B}{tg B + tg A} = \frac{\sin A \sin B \cos C}{\sin^2 C} \qquad (1)$$

حالا دستگاه محورهای مختصاتی‌درنظر می‌گیریم‌که مبداءآن نقطهٔ O (مرکزدایرهٔ محاطی‌مثلث ABC) ومحور xx' منطبق‌بر OA وجهت مثبت‌از O به A باشد. دراینصورت اگرشعاع دایره راواحد انتخاب کنیم $(R = 1)$، $A(1, 0)$ می‌شود، چون $\widehat{BOA} = 2C$؛ و نقطهٔ C درربع سوم ازدستگاه‌محورهای مختصات قرارمی‌گیرد وداریم $\widehat{COA} = 2B$، بسادگی‌مختصات نقطهٔ C بدست می‌آید: $C(\cos 2B, -\sin 2B)$. نقطهٔ C_1 درربع اول قراردارد وطول آن‌مساوی واحد است (زیرا C_1A بر OA عموداست و $x_{c_1} = OA = 1$) وبسادگی معلوم می‌شود‌که $y_{c_1} = AC_1 = tg C$. بنابراین $C_1(1, tg C)$ بدست می‌آید . نقطهٔ M پاره خط CC_1 را به‌نسبت k و ۱ تقسیم می‌کند $(\frac{CM}{MC_1} = k)$ ، بنابراین مختصات نقطهٔ M چنین می‌شود :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_c + kx_{c_1}}{k+1} = \dfrac{\cos 2B + k}{k+1} \\ y_M = \dfrac{y_c + ky_{c_1}}{k+1} = \dfrac{-\sin 2B + k\,tg\,C}{k+1} \end{cases}$$

از اینجا می‌توان با توجه به مقدار k از رابطهٔ (۱) ، OM^2 را محاسبه کرد:

$$OM^2 = \frac{1}{(1+k)^2}[(k+\cos 2B)^2 + (k\,tg\,C - \sin 2B)^2]$$

که اگر بجای k مقدارش را از رابطهٔ (۱) قرار دهیم و تبدیلات لازم را انجام دهیم، بدست می‌آید :

$$OM^2 = 1 - \frac{2\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{(1+\cos A\cos B\cos C)^2}$$

از طرف دیگر در هر مثلث داریم :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1+\cos A\cos B\cos C)$$

$$a = 2R\sin A\ ,\ b = 2R\sin B\ ,\ c = 2R\sin C$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$OM^2 = R^4 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

۴۰۳ . بجای $tg\,30^\circ$ مساویش $\frac{1}{\sqrt{3}}$ را قرار می‌دهیم و تساوی مفروض را تبدیل می‌کنیم :

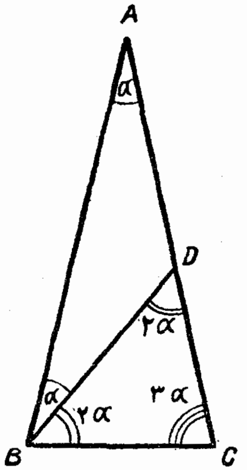
$$\sin A\cos 30^\circ - \cos A\sin 30^\circ + \sin B\cos 30^\circ - \cos B\sin 30^\circ +$$
$$+ \sin C\cos 30^\circ - \cos C\sin 30^\circ = 0$$

و یا

$$\sin(A-30^\circ) + \sin(B-30^\circ) + \sin(C-30^\circ) = 0$$

بدون اینکه به کلی بودن استدلال لطمه‌ای بزند می‌توان $C > 30^\circ$ فرض کرد. دراینصورت

$$2\sin\left(60^\circ - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} + \sin(C-30^\circ) = 0$$



شکل۸۵

که از آنجا $\sin(۶۰^\circ-\frac{C}{۲})<۰$

یا $۶۰^\circ-\frac{C}{۲}<۰$ یعنی $C>۱۲۰^\circ$

بدست می‌آید .

۴۰۴ . اگر $A=\alpha=\frac{\pi}{۷}$ باشد، $B=C=\frac{۳\pi}{۷}$ می‌شود (شکل۸۵) : BD را طوری رسم می‌کنیم که $\widehat{ABD}=\alpha$ باشد، دراینصورت $\widehat{DBC}=\widehat{BDC}=۲\alpha$ می‌شود .

در مثلثهای متساوی‌الساقین ABD و BDC داریم :

$$\cos\alpha=\frac{b}{۲(b-a)}\ ,\ \cos۲\alpha=\frac{b-a}{۲a}$$

که با توجه به رابطهٔ $۱+\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha$ بدست می‌آید :

$$\frac{b+a}{۲a}=\frac{b^۲}{۲(b-a)^۲}$$

و از آنجا

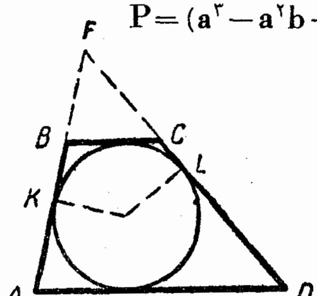
$$a^۳-a^۲b-۲ab^۲+b^۳=۰ \qquad (۱)$$

کثیرالجملهٔ مفروض $P=a^۵-۴a^۳b^۲+۳ab^۴-b^۵$ را می‌توان به این ترتیب تجزیه کرد :

$$P=(a^۳-a^۲b-۲ab^۲+b^۳)(a^۲+ab-b^۲)$$

که باتوجه به‌رابطهٔ(۱) نتیجه می‌شود:

$$P=۰$$



شکل ۸۶

۴۰۵ . F را محل تلاقی ساقها (شکل۸۶) ، K و L را نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی با ساقهای AB و CD ، d را قطردایرهٔ محاطی، $p_۱$ را محیط‌مثلث ADF ، $p_۲$ را محیط مثلث

BCF ، $AD=a$ ، $BC=b$ می‌گیریم دراینصورت داریم :

$$p_1=a+(FK+FL)+(AK+DL)=d\,cotg\frac{\alpha}{2}+2a$$

$$p_2=b+(FK+FL)-(BK+CL)=d\,cotg\frac{\alpha}{2}$$

از طرف دیگر ، با توجه به‌موازی بودن BC و AD ، داریم :

$$\frac{FA}{FB}=\frac{FD}{FC}=\frac{AD}{BC}=\frac{FA+FD+AD}{FB+FC+BC}=\frac{p_1}{p_2}$$

یعنی :

$$\frac{d\,cotg\frac{\alpha}{2}+2a}{d\,cotg\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{b}$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$d=\frac{2ab}{a-b}\cdot tg\frac{\alpha}{2}$$

در مثلث ADF طبق قضیهٔ سینوسها داریم :

$$\frac{a}{\sin F}=\frac{AF}{\sin D}=\frac{DF}{\sin A}$$

که از آن نتیجه می‌شود :

$$\frac{AF+DF}{a}=\frac{\sin A+\sin D}{\sin\alpha}$$

که پس از تبدیلات لازم بدست می‌آید :

$$AF+FD=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\frac{A-D}{2}$$

بهمین ترتیب از مثلث BCF بدست می‌آید :

$$FB+FC=\frac{b}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\frac{A-D}{2}$$

چون برای ذوزنقهٔ محیطی داریم : $AB+CD=a+b$ ، دراینصورت

$$\frac{a-b}{\sin\frac{\alpha}{۲}}\cdot\cos\frac{A-D}{۲}=a+b$$

و یا
$$\cos\frac{A-D}{۲}=\frac{a+b}{a-b}\sin\frac{\alpha}{۲}$$

از آنجا شرط وجود ذوزنقه بدست می‌آید :

$$۰<\sin\frac{\alpha}{۲}<\frac{a-b}{a+b}$$

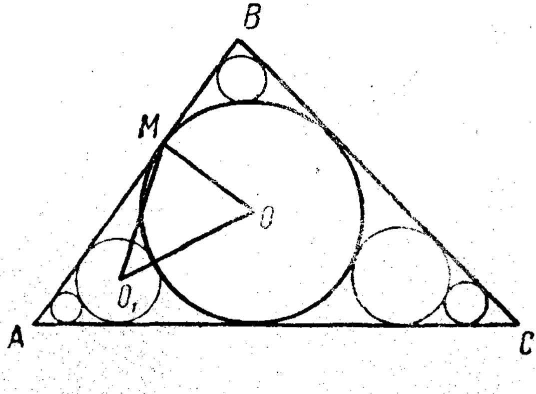
و برای اینکه ذوزنقهٔ مفروض قائم‌الزاویه باشد باید داشته باشیم :

$$\cos\frac{A-D}{۲}=\cos\frac{\alpha}{۲}\quad\Longrightarrow\quad tg\frac{\alpha}{۲}=\frac{a-b}{a+b}$$

۶۰۴ . D را مرکز دایرهٔ محاطی‌مثلث و $O_۱$ را مرکزدایرهٔ به‌شعاع $r_a^{(۱)}$ می‌گیریم (شکل ۸۷) . در مثلث $OO_۱M$ داریم:

$$\frac{r-r_a^{(۱)}}{r+r_a^{(۱)}}=\sin\frac{A}{۲}\quad\Longrightarrow\quad r_a^{(۱)}=tg^۲\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{A}{۴}\right)$$

بهمین ترتیب بدست می‌آید :



شکل ۸۷

$$r_a^{(۲)}=r_a^{(۱)}tg^{۲}\frac{\pi-A}{۴}=r\,tg^{۴}\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{A}{۴}\right)$$

بنابراین بعد از n مرحله عمل خواهیم داشت :

$$r_a^{(n)}=r\,tg^{۲n}\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{A}{۴}\right)\ ،\ r_b^{(n)}=r\,tg^{۲n}\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{B}{۴}\right)$$

$$r_c^{(n)}=tg^{۲n}\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{C}{۴}\right)$$

از آنجا می‌توان نوشت :

$$\sqrt[۲n]{r_a^{(n)}\cdot r_b^{(n)}}+\sqrt[۲n]{r_b^{(n)}\cdot r_c^{(n)}}+\sqrt[۲n]{r_c^{(n)}\cdot r_a^{(n)}}=\sqrt[n]{r}\ \left[tg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{A}{۴}\right)tg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{B}{۴}\right)+tg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{B}{۴}\right)tg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{C}{۴}\right)+tg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{C}{۴}\right)tg\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{A}{۴}\right)\right]$$

از طرف دیگر می‌دانیم که اگر $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{۲}$ باشد ،خواهیم داشت:

$tg\alpha\, tg\beta+tg\beta\, tg\gamma+tg\gamma\, tg\alpha=۱$. در اینجا داریم :

$$\alpha=\frac{\pi}{۴}-\frac{A}{۴}\ ,\ \beta=\frac{\pi}{۴}-\frac{B}{۴}\ ,\ \gamma=\frac{\pi}{۴}-\frac{C}{۴},$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{۱}{۴}[۳\pi-(A+B+C)]=\frac{\pi}{۲}$$

و بنابراین بدست می‌آید :

$$\sqrt[۲n]{r_a^{(n)}\cdot r_b^{(n)}}+\sqrt[۲n]{r_b^{(n)}\cdot r_c^{(n)}}+\sqrt[۲n]{r_c^{(n)}\cdot r_a^{(n)}}=\sqrt[n]{r}$$

۴۰۷ . طبق فرض مسئله داریم :

$$\cos B=۱-\frac{r}{R}=۱-\frac{(p-b)tg\frac{B}{۲}}{\frac{b}{۲\sin B}}=۱-\frac{۴(p-b)\sin^{۲}\frac{B}{۲}}{b}$$

و از آنجا بترتیب بدست می‌آید :

$$b\cos B = b - 2(p-b)(1-\cos B)\ ;$$

$$b\cos B = b - 2(p-b) + 2(p-b)\cos B\ ;$$

$$(3b-2p)\cos B - (3b-2p) = 0\ ;\ (3b-2p)(\cos B - 1) = 0$$

و چون $\cos B \neq 1$ است ، خواهیم داشت :

$$3b = 2p \implies b = \frac{a+c}{2}$$

یعنی اضلاع مثلث تشکیل یك تصاعد حسابی می‌دهند .

راه‌حل‌دوم. از تساوی‌مفروض بدست‌می‌آید:

$$1 - \cos B = \frac{r}{R} = \frac{pr}{pR} = \frac{4S^2}{pabc}$$

و یا

$$1 - \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

که پس از تبدیلات لازم به‌اینصورت در می‌آید :

$$\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{ac} = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc}$$

و چون $b+a-c \neq 0$ و $b-a+c \neq 0$ است می‌شود :

$$b = c+a-b \implies b = \frac{a+c}{2}$$

۴۰۸ . مماس در نقطهٔ C با A_1B_1 موازی است (شکل ۸۸) ، زیرا داریم :

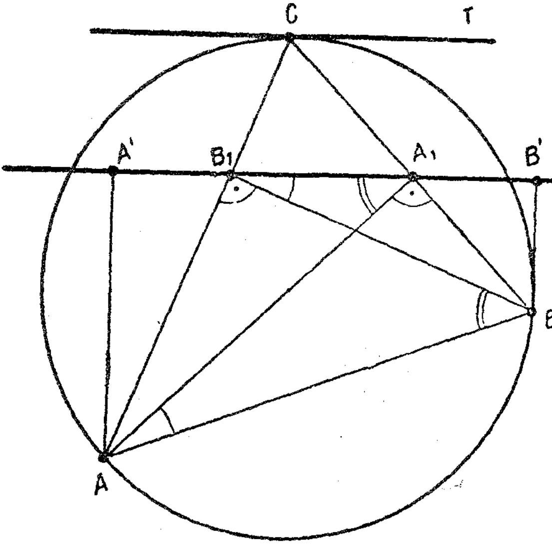
$$\widehat{CAB} = \widehat{CA_1B_1}\ ,\ \widehat{CAB} = \widehat{BCT}$$

A_1A' و B_1B' را تصویرهای ارتفاعها بر A_1B_1 فرض می‌کنیم :

$$A_1A' = AA_1\cos(B_1A_1A) = AB\sin B\sin A\ ,$$

$$B_1B' = BB_1\cos(A_1B_1B) = AB\sin A\sin B$$

بنابراین تصویرهای ارتفاعهای AA_1 و BB_1 روی مماسی که از نقطهٔ C



شکل ۸۸

بردایرهٔ محیطی مثلث رسم شود ، با هم برابرند . متذکر می‌شویم که

$$A_1A' = B_1B' = C_1C' = ۲R\sin A\sin B\sin C$$

که درآن C_1C' عبارتست از تصویر ارتفاع CC_1 روی مماسی که از نقطهٔ A یا B بردایرهٔ محیطی مثلث رسم شود .

۴۰۹ . با تبدیل عبارت مفروض بدست می‌آید :

$$\frac{tg A(tg B+tg C)}{tg B(tg A+tg C)}=\frac{tg A\cdot \sin(B+C)\cdot \cos A}{tg B\cdot \sin(A+C)\cdot \cos B}=\frac{\sin^۲ A}{\sin^۲ B}=\frac{a^۲}{b^۲}$$

و بنابراین

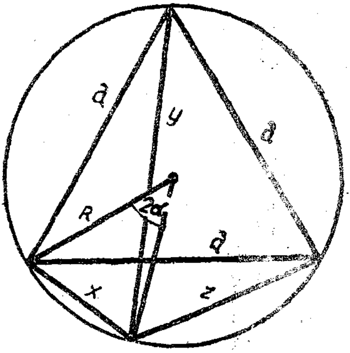
$$\frac{tg A tg B+tg A tg C}{tg B tg C+tg A tg B}=\frac{a^۲}{b^۲}$$

۴۱۰ . از تساوی $tg A\cdot tg B=۲$ معلوم می‌شود که هردوزاویهٔ A و B حاده‌اند . H را محل تلاقی ارتفاعات و C_1 را پای ارتفاع وارد بر AB می‌گیریم . داریم :

$$HC_1 = AC_1 \cot g B = AC\cdot \cos A\cdot \frac{tg A}{۲} =$$

$$=\frac{۱}{۲}AC\cdot \sin A=\frac{۱}{۲}CC_1$$

یعنی H وسط پاره خط CC_1 است .



شکل۸۹

۴۱۱ روابط زیر بسادگی بدست می‌آید :

$$x=2R\sin\alpha\ ,$$
$$y=2R\sin(60^\circ+\alpha)\ ,$$
$$z=2R\sin(60^\circ-\alpha)$$

که درآنها R عبارتست از شعاع دایرهٔ محیطی مثلث مفروض و 2α زاویهٔ مرکزی روبروی وتر بطول x ($x\leqslant y$ ، $x\leqslant z$) (شکل۸۹) . چون $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$ است بنابراین تساویهای حکم بصورت زیر در می‌آیند :

$$\sin^2\alpha+\sin^2(60^\circ+\alpha)+\sin^2(60^\circ-\alpha)=\frac{3}{2}$$

$$\sin^4\alpha+\sin^4(60^\circ+\alpha)+\sin^4(60^\circ-\alpha)=\frac{9}{8}$$

این دو اتحاد بسادگی وبه‌کمك اتحادهای زیر ثابت می‌شوند :

$$\sin^2\beta=\frac{1}{2}(1-\cos2\beta)\ ,\ \cos^2\beta=\frac{1}{2}(1+\cos2\beta).$$
$$\cos\beta+\cos(120^\circ+\beta)+\cos(120^\circ-\beta)=0$$

۴۱۲ . اگرزاویهٔ رأس مثلث رامساوی α بگیریم $a=2b\sin\frac{\alpha}{2}$ می‌شود. اگرازرابطهٔ فرض استفاده کنیم، بدست می‌آید :

$$2(4\sin^3\frac{\alpha}{2}-3\sin\frac{\alpha}{2})+\sqrt{3}=0 \Longrightarrow \sin\frac{3\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وازآنجا برای α دوجواب بدست می‌آید: $\alpha=\frac{2\pi}{9}$ ، $\alpha=\frac{4\pi}{9}$.

۴۱۳ . تفاضل d رادرنظر می‌گیریم :

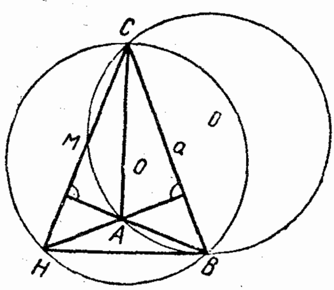
$$d = tg A + tg B + tg C - (cotg A + cotg B + cotg C)$$

داریم:
$$d = \frac{1}{tg A \cdot tg B \cdot tg C}[(tg A + tg B + tg C) \cdot tg A \cdot tg B \cdot tg C -$$
$$- tg A \cdot tg B - tg B \cdot tg C - tg C \cdot tg A]$$

ولی برای زوایای یك مثلث رابطهٔ زیرواضح است :

$$tg A + tg B + tg C = tg A \cdot tg B \cdot tg C$$

و بنابراین
$$d = \frac{1}{tg A \cdot tg B \cdot tg C}[(tg A + tg B + tg C)^{2} -$$
$$- (tg A \cdot tg B + tg B \cdot tg C + tg C \cdot tg A)] =$$
$$= \frac{1}{2 tg A \cdot tg B \cdot tg C}[(tg A + tg B)^{2} + (tg B + tg C)^{2} +$$
$$+ (tg C + tg A)^{2}] \neq 0$$



شکل ۹۰

۴۱۴ . زاویهٔ رأس A (یاB) ازمثلث ABC بـاید منفرجه باشد ، زیرا درغیراینصورت دایرهٔ محیطی آن باره‌خط CH راقطع نمی‌کند(شکل ۹۰).

R_1 شعاع دایـرهٔ محیطی مثلث BCH برابر است با R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC ، زیرا

$$a = 2R \sin A = 2R_1 \sin H$$

ضمناً $A + H = 180^\circ$ ، بنابراین $\sin A = \sin H$ و $R = R_1$ می‌شود .

به‌این‌ترتیب داریم :

$$CH = 2R \sin(90^\circ - C) = 2R \cos C \ , \ CM = \frac{1}{2} CH = R \cos C$$

ازطرف دیگر
$$\widehat{MBC} = 180^\circ - (\widehat{BMC} + \widehat{MCB}) =$$
$$= 180^\circ - (A + 90^\circ - B) = 90^\circ - (A - B)$$

وبنابراین
$$MC = 2R \sin(MBC) = 2R \cos(A - B)$$

واز آنجا
$$2R \cos(A - B) = R \cos C$$

ازرابطهٔ اخیر بسادگی بدست می‌آید :

$$۲cos(A-B)=-cos(A+B) \Longrightarrow tgA.tgB=-۳$$

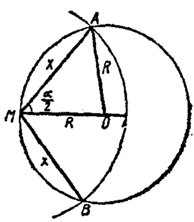
این رابطه رامی‌توان چنین نوشت :

$$۴+(tgA.tgB-۱)=۰ \Longrightarrow ۴tgC+tgC(tgA.tgB-۱)=۰$$

ازطرف دیگر می‌دانیم : $tgC=\frac{tgA+tgB}{tgA.tgB-۱}$ وبنابراین بدست می‌آید:

$$۴tgC+tgA+tgB=۰$$

۴۱۵ . شعاع دایرهٔ مفروض را R و شعاع دایرهٔ مطلوب را x فرض می‌کنیم. زاویهٔ بین‌دوشعاعی‌که ازنقطهٔ M به‌دونقطهٔ تلاقی دایره‌ها وصل می‌شود α می‌گیریم (شکل۹۱).



شکل ۹۱

چون داریم $x=۲Rcos\frac{\alpha}{۲}$. بسادگی‌معلوم می‌شودکه α (برحسب رادیان) باید درمعادلهٔ زیرصدق‌کند:

$$۲\alpha R^۲cos^۲\frac{\alpha}{۲}+(\pi-\alpha)R^۲-R^۲sin(\pi-\alpha)=\frac{\pi R^۲}{۲}$$

این معادله بعد از تبدیلات لازم بصورت زیر درمی‌آید :

$$f(\alpha)=sin\alpha-\alpha cos\alpha-\frac{\pi}{۲}=۰$$

به‌کمك جدول می‌توان تحقیق کرد :

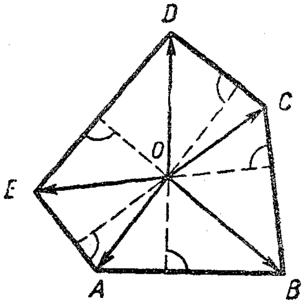
$$f(۹۰^\circ)<۰\ ,\ f(۱۰۸^\circ)<۰\ ,\ f(۲.\frac{۱۸۰^\circ}{\pi})>۰$$

بنابراین زاویهٔ مجهول از۱۰۸ درجه بزرگتر (تابع $f(\alpha)$ درفاصلهٔ (π و ۰) بطور متصل صعودی است)، زیرا داریم : $(f'(\alpha)=\alpha sin\alpha)$، ولی از $\frac{۳۶۰^\circ}{\pi}$ کوچکتر است. باروش تقریبهای متوالی می‌توان بدست‌آورد :

$$۱۰۹^\circ<\alpha<۱۱۰^\circ$$

بنابراین دایرهٔ مطلوب را می‌توان باتقریب رسم کرد .

۴۱۶ . O رامحل تلاقی ارتفاعهای پنج‌ضلعی می‌گیریم وفرض‌می‌کنیم:



شکل ۹۲

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{c}$ ، $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$ ، $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$ ،
$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{e}$ (شکل۹۲) ، $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{d}$.
بسادگی ثابت می‌شود .

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{e}=\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{b}=$$
$$=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}$$

زیرا مثلاً ازعمود بودن OA وCD برهم ، نتیجه می‌شود :

$$\overrightarrow{a}(\overrightarrow{d}-\overrightarrow{c})=0 \Longrightarrow \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$$

علاوه‌بر آن داریم :

$$\widehat{(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})}=180^\circ-D\ ,\ \widehat{(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})}=180^\circ-E\ ,\ \widehat{(\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})}=$$
$$=180^\circ-A\ ,\ \widehat{(\overrightarrow{d},\overrightarrow{e})}=180^\circ-B\ ,\ \widehat{(\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{a})}=180^\circ-C$$

ودراینحالت بدست می‌آید :

$$\frac{AB}{\cos(A+B)\sin D}=\frac{AB|\overrightarrow{e}|\ |\overrightarrow{c}|\ |\overrightarrow{b}|DC}{(\overrightarrow{e}\ \overrightarrow{c})\,[\,\overrightarrow{b}\,(\,\overrightarrow{c}-\overrightarrow{d}\,)]}=$$

$$=\frac{AB|\overrightarrow{e}|\ |\overrightarrow{c}|\ |\overrightarrow{b}|DC}{(\overrightarrow{e}\ \overrightarrow{b})\,[\overrightarrow{c}\,(\,\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\,)]}=\frac{AB|\overrightarrow{e}|\ |\overrightarrow{c}|\ |\overrightarrow{b}|DC}{|\overrightarrow{e}|\ |\overrightarrow{b}|\cos(C+D)|\overrightarrow{e}|AB\sin A}=$$

$$=\frac{CD}{\cos(C+D)\sin A}$$

بهمین ترتیب تساویهای زیر ثابت می‌شود :

$$\frac{BC}{\cos(B+C)\sin E}=\frac{DE}{\cos(D+E)\sin B}\ ,$$

$$\frac{CD}{\cos(C+D)\sin A}=\frac{EA}{\cos(E+A)\sin C},$$
$$\frac{DE}{\cos(D+E)\sin B}=\frac{AB}{\cos(A+B)\sin D},$$

که از آنجا صحت تساوی حکم ثابت می‌شود .

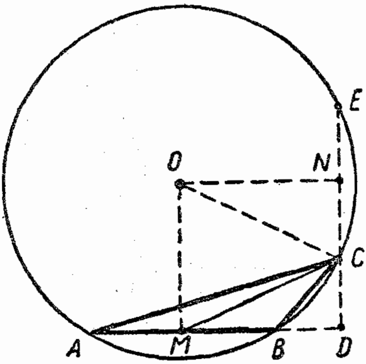
۴۱۷ . ازشرط مسئله معلوم می‌شود که یکی‌ازدوزاویهٔ A وB منفرجه است. فرض‌می‌کنیم $B>90^\circ$ باشد عمود CD را برامتداد AB فرود می‌آوریم (شکل ۹۳)، دراینصورت

$$tg\,A=\frac{CD}{AD}\ ,\ tg\,B=-\frac{CD}{BD}$$

و بنابراین بدست می‌آید :

$$3CD^2=AD\cdot BD \qquad (1)$$

DC را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی‌مثلث رادرنقطهٔ E قطع‌کند.



شکل ۹۳

واضح است‌که داریم :

$$AD\cdot BD=CD\cdot DE \qquad (2)$$

باتوجه به‌روابط (۱) و (۲) بدست می‌آید :

$$3CD^2=CD\cdot DE \implies DE=3CD$$

ویا به‌عبارت دیگر $CE=2CD$

ازنقطهٔ O ، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ، عمودهای OM و ON را بر AB و CD فرود می‌آوریم . بسادگی دیده می‌شود :

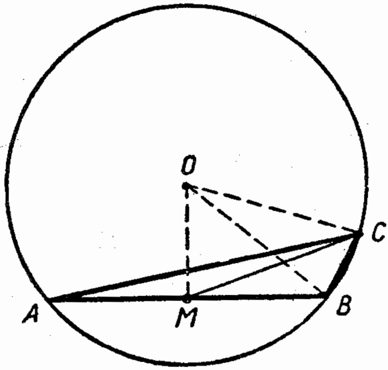
$$OM=ND\ ,\ NC=NE=CD$$

از اینجا معلوم می‌شود که نقطهٔ C وسط پاره خط ND است . بنابراین $CO=CM$ یا $R=m_c$.

راه حل دوم . رابطهٔ فرض‌را بعدازتبدیلات ساده می‌توان به‌اینصورت نوشت :

$$\cos C=-2\cos(A-B)$$

ازطرف دیگرطبق قضیهٔ کسینوسها درمثلث OMC (شکل ۹۴) داریم :



شکل ۹۴

$$m_c^2=R^2+R^2\cos^2C-$$
$$-2R^2\cos C\cdot\cos(2A+C)=$$
$$=R^2[1+\cos^2C-2\cos C\times$$
$$\times\cos(2A+180^\circ-A-B)]=$$
$$=R^2[1+\cos^2C+2\cos C\times$$
$$\times\cos(A-B)]=R^2$$

۴۱۸ . شعاع دایرهٔ nام برابراست با

$$r_n=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$$

وچون $\sin x<x$ است بدست می‌آید :

$$r_n>\frac{1}{2^{n-1}\cdot\frac{\pi}{2^n}}=\frac{2}{\pi}$$

۴۱۹ . فرض‌کنیم O مرکز و r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC ، F محل‌تلاقی میانه‌ها، p نصف محیط ، $C=90^\circ$ و $BC\geqslant AC$ باشد. واضح است‌که $CF=\frac{1}{3}$ و $OC=r\sqrt{2}$ و $\widehat{OCF}=A-45^\circ$ می‌شود. از قضیهٔ کسینوسها درمثلث OFC استفاده می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$r^2=2r^2+\frac{1}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{3}r\cos(A-45^\circ)\ ,$$

وازآنجا

$$9r^2-6\sqrt{2}r\cos(A-45^\circ)+1=0\qquad(1)$$

ازطرف دیگرداریم :

$$r=p-c=\frac{۱}{۲}(a+b-۱)=\frac{۱}{۲}(\sin A+\sin B-۱)=$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos(A-۴۵^\circ)-\frac{۱}{۲}$$

یعنی $$۲r-\sqrt{۲}\cos(A-۴۵^\circ)+۱=۰ \qquad (۲)$$

بین روابط (۱) و (۲) ، $\cos(A-۴۵^\circ)$ را حذف می‌کنیم، بدست می‌آید :

$$r=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}-۱$$

ولی $۲p=۲r+۲$ بنابراین $۲p=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۴۲۰ . اگررأس زاویهٔ قائمه راA فرض‌کنیم ، اولا داریم :

$$a+b+c=۲p \implies a(۱+\sin C+\cos C)=۲p \qquad (۱)$$

ثانیاً اگر نیمساززاویهٔ قائمه راAD بگیریم، بااستفاده ازقضیهٔ سینوسها درمثلث ADC داریم :

$$\frac{d}{\sin C}=\frac{b}{\sin(\frac{\pi}{۴}+C)} \implies$$

$$\implies a\sin C\cos C=\frac{\sqrt{۲}}{۲}d(\sin C+\cos C) \qquad (۲)$$

ازتقسیم روابط (۱) و (۲) بریکدیگر، بعداز تبدیلات لازم بدست می‌آید :

$$d(\sin C+\cos C)+۲(d-p\sqrt{۲})\sin C\cos C+d=۰$$

کـه اگر $C=x+\frac{\pi}{۴}$ بگیریم بمعادلهٔ زیرمی‌رسیم :

$$f(\cos x)=۲(d-p\sqrt{۲})\cos^۲x+d\sqrt{۲}\cos x+p\sqrt{۲}=۰ \qquad (۳)$$

چون $۰<C<\frac{\pi}{۲}$ است $-\frac{\pi}{۴}<x=C-\frac{\pi}{۴}<\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\cos x\leqslant ۱$ است . بـرای اینکـه معادلهٔ (۳) جـواب قـابل قبول داشته بـاشد بـاید $f(۱)\cdot f(\frac{\sqrt{۲}}{۲})<۰$ باشد .

$$f(\frac{\sqrt{2}}{2})=2d \ , \ f(1)=(2+\sqrt{2})d-p\sqrt{2}$$

ولی‌چون $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=2d>0$ است ، واضح است‌که باید $f(1)<0$ ، یعنی نامساوی $d<p(\sqrt{2}-1)$ برقرار باشد .

از معادلهٔ (۳) مقدار x و سپس زاویهٔ C بدست می‌آید و شرط وجود جواب اینست‌که $d<p(\sqrt{2}-1)$ باشد.

۴۲۱ اولا) درمثلثهای AHB و BAC داریم :

$$BH=AB\cdot\cos B \ ; \ AB=BC\cdot\cos B$$

درنتیجه بدست می‌آید :

$$BH=BC\cdot\cos^2 B=a\cos^2 B$$

ازطرف دیگر درمثلث AHB می‌توان نوشت :

$$AH=AB\cdot\sin B=BC\cdot\cos B\sin B=a\sin B\cos B$$

وبنابراین باتوجه به‌فرض مسئله داریم :

$$a\cos^2 B+a\sin B\cos B=l$$

طرفین این معادله رابر $\cos^2 B$ تقسیم می‌کنیم ($\cos B\neq 0$) ، پس‌از تبدیلات لازم بدست می‌آید:

$$l\,tg^2 B-a\,tg B+l-a=0 \qquad (1)$$

$tg B$ ودرنتیجه زاویهٔ B ازمعادلهٔ(۱) بدست می‌آید .

برای جستجوی شرط وجود جواب حالتهای زیررا درنظر می‌گیریم:

۱) اگر $l-a>0$ یا $l>a$ باشد، باتوجه به‌آنکه مجموع ریشه‌های معادلهٔ(۱) یعنی $\frac{a}{l}$ مقداری‌است‌مثبت، شرط‌وجودجواب،غیرمنفی بودن‌مبین‌است:

$$a^2-4l(l-a)\geqslant 0 \Longrightarrow a<l\leqslant\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$$

۲) اگر $l-a<0$ یعنی $l<a$ باشد ، معادلهٔ(۱) دوریشهٔ مختلف‌العلامه دارد و با توجه به حاده بودن زاویهٔ B ، تنها ریشهٔ مثبت معادله قابل قبول است .

۳) اگر $l-a=0$ ، یعنی $a=l$ باشد ، یکی ازریشه‌های معادلهٔ(۱) مساوی صفرو‌ریشهٔ دیگرچنین می‌شود:

$$tg B=\frac{a}{l}=۱ \implies \hat{B}=۴۵^\circ$$

دراین حالت مثلث بصورت متساوی‌الساقین درمی‌آید .

ثانیاً) ازتشابه دومثلث AHB و CAB نتیجه می‌شود :

$$\frac{BH}{AB}=\frac{AH}{AC}=\frac{AB}{CB} \implies \frac{BH+AH}{AB+AC}=\frac{AB}{CB}$$

و یا
$$\frac{l}{c+b}=\frac{c}{a} \implies c^۲+bc=al$$

و به‌این‌ترتیب به‌دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} c^۲+bc=al \\ b^۲+c^۲=a^۲ \end{cases} \implies ۲c^۴-a(۲l+a)c^۲+a^۲l^۲=۰ \qquad (۲)$$

باتوجه‌به‌مثبت بودن حاصلضرب‌وحاصلجمع ریشه‌هادرمعادلهٔ(۲)، شرط وجود جواب غیرمنفی بودن مبین آنست:

$$a^۲(۲l+a)^۲-۸a^۲l^۲\geqslant ۰ \implies a^۲-۴l(l-a)\geqslant ۰$$

که همان شرطی است‌که ازقسمت اولا بدست‌آمد. از معادلهٔ(۲) ضلع c وسپس ضلع b′ پیدا می‌شود .

۴۲۲ . درمثلث BAN داریم:

$$\frac{b}{۲}=BN\cdot sin(B-\alpha) \qquad (۱)$$

وازمثلث BNC بدست می‌آید :

$$\frac{NC}{sin\alpha}=\frac{BN}{sin C} \implies \frac{b}{۲\,sin\alpha}=\frac{BN}{cos B} \qquad (۲)$$

باحذف BN بین‌روابط(۱)و(۲)، پس‌ازتبدیلات‌ساده، نتیجه می‌شود:

$$sin\alpha\cdot tg^۲B-cos\alpha\cdot tg B+۲\,sin\alpha=۰ \qquad (۳)$$

ازمعادلهٔ(۳) زاویهٔ B وسپس سایراجزاء مثلث بدست می‌آید.

بحث . در معادلهٔ(۳) مجموع دو جواب $cotg\alpha$ و حاصلضرب آنها ۲ مقادیری‌مثبت هستندوبنابراین‌شرط وجودجواب‌غیرمنفی‌بودن مبین‌معادله‌است:

$$cos^۲\alpha-۸\,sin^۲\alpha\geqslant ۰ \implies tg\alpha\leqslant\frac{\sqrt{۲}}{۴} \implies \alpha\leqslant Arctg\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۴۲۳. می‌دانیم :
$$d_a=\frac{a\sin B\sin C}{\cos\frac{B-C}{۲}}$$

که چون B و C متمم یکدیگرند بسادگی بدست می‌آید :

$$\frac{d}{a}=\frac{\sin B\cos B}{\cos\left(B-\frac{\pi}{۴}\right)}\Longrightarrow \sin ۲B=\frac{۲d}{a}\cos\left(B-\frac{\pi}{۴}\right)\qquad(۱)$$

(d را نیمساز زاویهٔ قائمهٔ A گرفته‌ایم) . از طرف دیگرداریم :

$$\sin ۲B=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-۲B\right)=۲\cos^{۲}\left(B-\frac{\pi}{۴}\right)-۱$$

و بنابراین رابطهٔ (۱) بصورت زیر درمی‌آید :

$$۲\cos^{۲}\left(B-\frac{\pi}{۴}\right)-\frac{۲d}{a}\cos\left(B-\frac{\pi}{۴}\right)-۱=۰\qquad(۲)$$

ازاین معادله مقدار زاویهٔ B وسپس سایر اجزاء مثلث بدست می‌آید .

بحث . چون B زاویه‌ای حاده است باید $-\frac{\pi}{۴}<B-\frac{\pi}{۴}<\frac{\pi}{۴}$ و یا $\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\cos\left(B-\frac{\pi}{۴}\right)\leqslant ۱$ باشد. اگر سمت‌چپ‌معادلهٔ(۲)را $\left[f\cos\left(B-\frac{\pi}{۴}\right)\right]$ بنامیم چون $f\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-\frac{d\sqrt{۲}}{a}<۰$ است، بنابراین هردوجواب معادلهٔ (۲) نمی‌تواند بین $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و ۱ قرار گیرد . برای اینکه یکی ازجوابها قابل قبول باشد باید $f\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)<۰$ ، $f(۱)$ باشدوچون $f\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)<۰$ است باید داشته باشیم :

$$f(۱)=\frac{a-۲d}{a}\geqslant ۰\Longrightarrow d\leqslant\frac{a}{۲}$$

درحالت خاص $d=\frac{a}{۲}$ ، مثلث متساوی‌الساقین و $B=۴۵^\circ$ می‌شود .

۴۲۴. دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$b^2+c^2=a^2 \quad , \quad a+b+c=2p \quad , \quad a \cdot h=b.c$$

($2p$ محیط و h ارتفاع وارد بر وتر درمثلث قائم‌الزاویه است) . از معادلهٔ دوم دستگاه داریم :

$$(b+c)^2=(2p-a)^2 \implies \frac{2bc}{a}=\frac{4p^2}{a}-4p$$

و ازمعادلهٔ سوم :
$$\frac{bc}{a}=h$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$2h=\frac{4p^2}{a}-4p \implies a=\frac{2p^2}{h+2p}$$

با در دست داشتن مقدار a ، با توجه به روابط $b+c=2p-a$ ، $b\,c=ah$ ، مقادیر b و c جوابهای معادلهٔ دوجه دوم زیر هستند :

$$x^2-(2p-a)x+ah=0 \qquad (1)$$

دراین معادله حاصلضرب ریشه‌ها ah و حاصل‌جمع آنها $2p-a$ مقادیری مثبت هستند و بنابراین شرط وجود جواب غیر منفی بودن مبین معادله است :

$$(2p-a)^2-4ah\geqslant 0 \implies$$
$$\implies \left(2p-\frac{2p^2}{h+2p}\right)^2-4h\cdot\frac{2p^2}{h+2p}\geqslant 0 \ ;$$
$$p^2-2hp-h^2\geqslant 0 \implies p\geqslant h(1+\sqrt{2})$$

درحالت خاص $p=h(1+\sqrt{2})$ مثلث مفروض متساوی‌الساقین می‌شود.

۴۲۵. اولا) اگرطول نیمساز زاویهٔ B را مساوی d بگیریم درمثلثهای DAB و CAB داریم :

$$AB=d\cdot\cos\frac{B}{2} \ , \ AC=AB\,tg\,B=d\cdot\cos\frac{B}{2}tg\,B \ ,$$

$$BC=\frac{AB}{\cos B}=\frac{d\cos\frac{B}{2}}{\cos B}$$

ثانیاً) داریم :

$$DC = AC - AD = d \cdot \cos\frac{B}{2} tg B - d \sin\frac{B}{2} =$$

$$= d\left(\cos\frac{B}{2} tg B - \sin\frac{B}{2}\right),$$

$$\frac{BC}{DC} = \frac{\dfrac{d\cos\frac{B}{2}}{\cos B}}{d\left(\cos\frac{B}{2} tg B - \sin\frac{B}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}\sin B - \sin\frac{B}{2}\cos B} =$$

$$= \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = cotg\frac{B}{2}$$

از آنجا داریم :

$$cotg\frac{B}{2} = k \implies B = 2\,Arccotg\, k$$

چون $0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{4}$ است ، $cotg\frac{B}{2} > 1$ می‌شود و شرط‌وجود جواب اینست که $k > 1$ باشد .

۴۲۶. داریم :

$$r_b = \frac{a \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \implies \frac{r_b}{a}\sin 45^\circ = \sin\frac{B}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}\right)$$

از معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود :

$$\sin^2\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} - \frac{r_b}{a} = 0 \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱) بعداز تبدیلهای ساده بصورت زیر درمی‌آید :

$$\left(1 - \frac{r_b}{a}\right) tg^2\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2} - \frac{r_b}{a} = 0 \qquad (2)$$

از معادلهٔ (۲) زاویهٔ B و سپس به‌کمك آن سایر اجزاء مثلث بدست می‌آید.

بحث . اگرحاصلضرب‌ریشه‌هادرمعادلهٔ (۲) منفی‌باشد: $\frac{r_b}{r_b-a}<0$

معادله دوریشهٔ حقیقی و مختلف‌العلامه دارد که دراینصورت تنها ریشهٔ مثبت قابل قبول‌خواهد بود($tg\frac{B}{2}$ مقداری است مثبت) . دراینحالت داریم :

$$r_b-a<0 \implies r_b<a$$

اگر $\frac{r_b}{r_b-a}>0$ باشد ، با توجه به‌مثبت بودن مجموع دوریشه در معادلهٔ (۲) ، برای‌آنکه معادله ریشه‌های‌حقیقی داشته باشد بایدداشته باشیم:

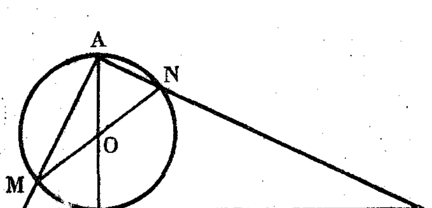
$$1+\frac{4r_b}{a}\left(1-\frac{r_b}{a}\right)\geqslant 0 \implies a^2+4r_ba-4r_b^2\geqslant 0$$

و نامساوی اخیر وقتی محقق است که داشته باشیم : $a\geqslant 2r_b(\sqrt{2}-1)$ که با توجه به‌مثبت بودن‌حاصلضرب ریشه‌ها $a<r_b$ می‌شود و لذا بایدداشته باشیم :

$$2r_b(\sqrt{2}-1)\leqslant a<r_b$$

به‌این ترتیب :

- اگر $r_b<a$ باشد مسئله یك جواب دارد .
- اگر $2r_b(\sqrt{2}-1)<a<r_b$ باشد مسئله دوجواب دارد .
- اگر $a=2r_b(\sqrt{2}-1)$ باشد معادلهٔ (۲) دارای یك ریشهٔ‌مضاعف می‌شود . در اینحالت مثلث قـائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین خواهد بود .



شکل ۹۵

۴۳۷. اولا) کافی‌است‌ثابت کنیم‌که دو زاویهٔ B و ANM برابرند(شکل۹۵). برای‌این منظور می‌نویسیم :

$$\hat{B}=\frac{\widehat{ANH}-\widehat{MH}}{2}=\frac{180^\circ-(180^\circ-\widehat{AM})}{2}=\frac{\widehat{AM}}{2}=\widehat{ANM}$$

ثانیاً) بترتیب داریم :

$$S_{BCNM}=S_{BAC}-S_{MAN}\ ;$$

$$S_{BAC}=\frac{BA\cdot AC}{۲}=\frac{a\cos B\cdot a\sin B}{۲}=\frac{a^{۲}}{۴}\sin ۲B\ ;$$

$$S_{MAN}=\frac{AM\cdot AN}{۲}=\frac{MN\sin B\cdot MN\cos B}{۲}=\frac{MN^{۲}}{۴}\sin ۲B$$

که اگر رابطهٔ $MN=AH=a\sin B\cos B$ را در نظر بگیریم، بدست‌می‌آید :

$$S_{MAN}=\frac{a^{۲}}{۴}\sin^{۲}B\cos^{۲}B\sin ۲B=\frac{a^{۲}}{۱۶}\sin^{۳}۲B$$

که از آنجا نتیجه می‌شود : $S_{BCNM}=\frac{a^{۲}}{۴}\sin ۲B(۱-\frac{۱}{۴}\sin^{۲}۲B)$

ثالثاً) اگر مساحت دایرهٔ به قطر AH را S بنامیم ، داریم :

$$S=\pi\ \frac{AH^{۲}}{۴}=\frac{\pi}{۴}a^{۲}\sin^{۲}B\cos^{۲}B$$

و بنابراین بنابرفرض مسئله باید داشته باشیم :

$$\frac{\frac{a^{۲}}{۴}\sin ۲B\left(۱-\frac{۱}{۴}\sin^{۲}۲B\right)}{\frac{\pi a^{۲}}{۴}\sin^{۲}B\cos^{۲}B}=k$$

که از آنجا به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$f(\sin ۲B)=\sin^{۲}۲B+k\pi\sin ۲B-۴=۰\qquad(۱)$$

چون زاویهٔ $۲B$ بین صفر و π واقع است $۰<\sin ۲B\leqslant ۱$ می‌شود . ضمناً داریم :

$$f(۰)=-۴<۰\ \ ,\ f(۱)=k\pi-۳$$

ازآنجاکه $f(۰)<۰$ است ، هر دوریشهٔ معادله نمی‌تواند بین ۰ و ۱ واقع شود ، بنابراین برای اینکه یکی از ریشه‌ها قابل قبول باشدباید $f(۱)\geqslant ۰$ یعنی $k\geqslant\frac{۳}{\pi}$ شود :

درحالت خاص $k=\frac{۳}{\pi}$ بدست‌می‌آید : $B=\frac{\pi}{۴}$ ، یعنی مثلث قائم‌الزاویهٔ BAC متساوی‌الساقین می‌شود .

۴۲۸. روابط زیر واضح است (شکل۹۶) :

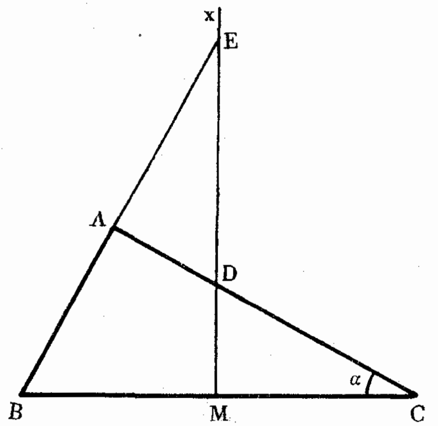
$$AC = a\cos\alpha \quad ;$$

$$DC = \frac{MC}{\cos\alpha} = \frac{a}{۲\cos\alpha}$$

وبنابراین داریم :

$$AD = AC - DC = a\cos\alpha - \frac{a}{۲\cos\alpha} = \frac{a\cos۲\alpha}{۲\cos\alpha} \quad ;$$

$$AE = AD\,cotg\,\alpha = \frac{a\cos۲\alpha}{۲\cos\alpha}cotg\,\alpha = \frac{a\cos۲\alpha}{۲\sin\alpha} \quad ;$$



شکل۹۶

و ازاینجا ، اگر مساحت مثلث ADE را مساوی S بگیریم ، بدست می‌آید:

$$S = \frac{۱}{۲}AD\cdot AE = \frac{۱}{۲}\cdot\frac{a\cos۲\alpha}{۲\cos\alpha}\cdot\frac{a\cos۲\alpha}{۲\sin\alpha} = \frac{a^۲}{۴}\cdot\frac{\cos^۲۲\alpha}{\sin۲\alpha} = \frac{a^۲(۱-\sin^۲۲\alpha)}{۴\sin۲\alpha}$$

اگر این مساحت مساوی $k^۲$ باشد ، به معادلهٔ درجه دوم زیر نسبت به $\sin۲\alpha$ می‌رسیم :

$$f(\sin۲\alpha) = a^۲\sin^۲۲\alpha + ۴k^۲\sin۲\alpha - a^۲ = ۰ \qquad (۱)$$

۲α زاویه‌ای است بین صفر و π و بنابراین باید داشته باشیم :

$$۰ < \sin۲\alpha \leqslant ۱$$

چون درمعادلهٔ (۱) ، حاصلضرب دوجواب مساوی ۱ — ومنفی است، همیشه دوریشهٔ حقیقی‌وجود دارد که یکی‌از آنها منفی و غیرقابل قبول‌است. ضمناً چون $f(۱) = ۴k^۲$ و مقداری است مثبت ، ریشهٔ مثبت همیشه ازواحد کوچکتر و قابل قبول است . بنابراین مسئله همیشه یك جواب دارد .

درحالت خاص $k=0$، مثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABC متساوی‌الساقین‌ومساحت مثلث EAD مساوی صفر می‌شود.

۴۲۹. اولاً) داریم (شکل ۹۷):

$$BB'=a\cdot \sin x\ ,$$
$$CC'=a\cdot \sin(CAC')=a\cdot \sin(120^\circ-x)\ ,$$
$$B'C'=B'A+AC'=a\cdot \cos x+a\cdot \cos(120^\circ-x)\ ,$$

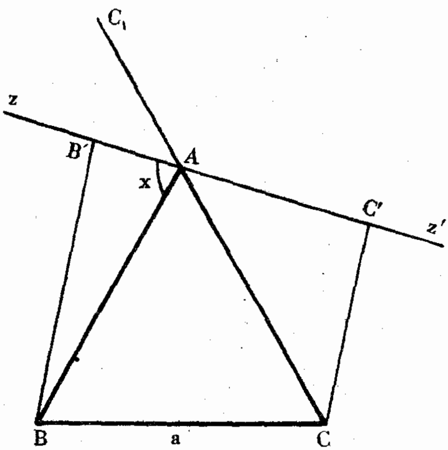
و بنابراین، اگر مساحت چهارضلعی BB'C'C را S فرض کنیم، داریم:

$$S=\frac{1}{2}(BB'+CC')\,B'C'=\frac{1}{2}[a\sin x+a\sin(120^\circ-x)]\times$$
$$\times[a\cos x+a\cos(120^\circ-x)]=\frac{a^2}{8}(3\sin x+\sqrt{3}\cos x)\times$$
$$\times(\cos x+\sqrt{3}\sin x)=\frac{a^2}{8}(3\sqrt{3}\sin^2 x+\sqrt{3}\cos^2 x+$$
$$+6\sin x\cos x)=k^2$$

که پس از تبدیلهای لازم به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$f(\cot g\,x)=\left(\sqrt{3}-\frac{8k^2}{a^2}\right)\cot g^2 x+6\cot g\,x+3\sqrt{3}-\frac{8k^2}{a^2}=0 \quad (1)$$

چون $0<x<120^\circ$ است باید $\cot g\,x>-\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، بسادگی می‌توان تحقیق کرد که $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ همیشه غیر منفی است، بنابراین برای اینکه جوابهای معادلهٔ (۱) قابل قبول باشد باید $\Delta\geqslant 0$ و $-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{b}{2a}<0$



شکل ۹۷

باشد که جواب مشترک این دو نامعادله چنین است $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}<k^2\leqslant\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
از طرف دیگر چون مساحت‌مثلث ABC مساوی $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است ، این شرط را می‌توان چنین نوشت :

$$\frac{1}{2}S_{ABC}<S\leqslant 2S_{ABC}$$

یعنی مساحت‌چهارضلعی $BB'C'C$ همیشه‌از نصف مساحت‌مثلث‌متساوی‌الاضلاع ABC بیشتر است واز دوبرابر آن تجاوز نمی‌کند .

ثانیاً) بترتیب داریم :

$$B'B^2+CC'^2=a^2\sin^2x+a^2\sin^2(120^\circ-x)=$$
$$=a^2[\sin^2x+\sin^2(120^\circ-x)]=$$
$$=a^2\left(\sin^2x+\frac{3}{4}\cos^2x+\frac{1}{4}\sin^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x\right)=$$
$$=a^2\left[\frac{3}{4}\sin^2x+\frac{1}{4}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}(\sin^2x+\cos^2x)\right]=$$
$$=a^2\left[\sin^2(x+30^\circ)+\frac{1}{2}\right]$$

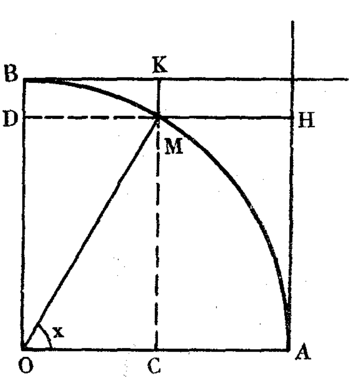
$> \frac{\sqrt{3}}{2}$

برای اینکه عبارت اخیر ماکزیمم باشد ، لازم و کافی است که $\sin^2(x+30^\circ)=1$ شود و باتوجه به شرط $30^\circ<x+30^\circ<150^\circ$ ، نتیجه می‌شود $\sin(x+30^\circ)=1$ که ازآنجا $x=60^\circ$ بدست می‌آید.

۴۳۰. اگرشعاع‌دایرهٔ مفروض را واحد بگیریم،داریم (شکل۹۸) :

$$MH=OA-OC=1-\cos x\ ,$$
$$MK=OB-OD=1-\sin x$$
$$MH\cdot MK=(1-\cos x)\times$$
$$\times(1-\sin x)=l^2$$

که ازآنجا ، بعد از تبدیلهای لازم ، به معادلهٔ زیر می‌رسیم :



شکل ۹۸

$$f\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)\right]= ۲\cos^۲\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)-۲\sqrt{۲}\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)+$$

$$+۱-۲l^۲=۰ \qquad (۱)$$

چون $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ است باید $\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)\leqslant ۱$ باشد . از طرف دیگر داریم :

$$f\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۱-۲+۱-۲l^۲=-۲l^۲<۰$$

یعنی همیشه یکی‌ازریشه‌ها از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ کوچکتر وغیرقابل قبول است ، برای‌اینکه ریشهٔ دیگر قابل قبول باشد ، باید داشته باشیم :

$$f(۱)=۳-۲\sqrt{۲}-۲l^۲>۰ \Longrightarrow l<\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$$

بااین‌شرط معادلهٔ (۱)یك جواب‌قابل قبول دارد و اگر $\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=\cos\alpha$ فرض‌کنیم، بدست‌می‌آید :

$$x-\frac{\pi}{۴}=\pm\alpha \Longrightarrow x=\frac{\pi}{۴}\pm\alpha$$

از تساوی‌اخیر معلوم‌می‌شود که‌مسئله‌دارای‌دوجواب‌است که نسبت به نیمساز AOB قرینهٔ یکدیگرند .

۴۳۱ . I) ازرابطهٔ $h=\frac{۲S}{a}$ مقدار h معلوم می‌شود و از تساوی $AB=\sqrt{h^۲+\frac{a^۲}{۴}}$ ضلع AB واز رابطهٔ $\sin B=\frac{h}{\sqrt{h^۲+\frac{a^۲}{۴}}}$ زاویهٔ B وسپس زاویهٔ A مشخص می‌شود .

II) ازرابطهٔ $۲S=AB^۲.\sin A$ ضلع AB بدست‌می‌آید $AB=\sqrt{\frac{۲S}{\sin A}}$

از تساوی $\frac{BC}{۲AB}=\sin\frac{A}{۲}$ ضلع BC و بالاخره از تساویهای $B=C=\frac{\pi}{۲}-\frac{A}{۲}$ زاویه‌های B و C بدست می‌آید .

III) ازدستگاه

$$AB+BH=p \quad , \quad AB^۲-BH^۲=h^۲$$

اندازه‌های AB و BH بدست می‌آید :

$$AB=\frac{p}{۲}+\frac{h^۲}{۲p} \quad , \quad BH=\frac{p}{۲}-\frac{h^۲}{۲p}$$

ازآنجا $BC=۲BH=p-\frac{h^۲}{p}$ حاصل‌می‌شود . شرط وجود جواب، مثبت بودن مقدار BC است :

$$p-\frac{h^۲}{p}>۰ \implies h<p$$

با وجود این شرط ضلع BC وسپس‌از رابطهٔ $\sin B=\frac{h}{AB}$ زاویهٔ B و بالاخره به‌کمك آن زاویهٔ A مشخص می‌شود .

IV) ازمعادله‌های $a-b=l$ و $b^۲-\frac{a^۲}{۴}=h^۲$ به‌معادلهٔ‌زیر می‌رسیم:

$$\frac{۳}{۴}a^۲-۲l\,a+l^۲-h^۲=۰ \qquad (۱)$$

مبین معادلهٔ (۱) و همچنین مجموع دوریشهٔ آن همیشه مثبت است :

$$\Delta=l^۲-\frac{۳}{۴}(l^۲-h^۲)=\frac{۱}{۴}(l^۲+۳h^۲)>۰ \quad , \quad a_۱+a_۲=\frac{۸}{۳}l>۰$$

بنابراین برای اینکه هردوریشهٔ معادلهٔ (۱) قابل قبول باشد باید حاصلضرب دوریشهٔ آن مثبت شود :

$$a_۱\cdot a_۲=\frac{۴}{۳}(l^۳-h^۲)>۰ \implies l>h$$

وبرای اینکه تنها یکی‌از ریشه‌ها قابل قبول باشد باید $l<h$ شود .

درحالت خاص $l=h$ ، جواب قابل‌قبول معادلهٔ (۱) بصورت $a=\frac{8}{3}l$

و یا $a=\frac{8}{3}h$ درمی‌آید .

از معادلهٔ(۱) مقدار a وسپس‌ازرابطهٔ $a-b=l$ مقدار b وبالاخره

از رابطهٔ $\sin B=\frac{h}{AB}$ زاویهٔ B معین می‌شود .

۷) داریم :

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{a}{2\sin 2B},$$

$$r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{a\sin^2\frac{B}{2}}{\sin B}=\frac{a\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{a}{2}tg\frac{B}{2}$$

ازاین دورابطه می‌توان نتیجه گرفت :

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{\sin 2B\, tg\frac{B}{2}}=\frac{1}{4\sin^2\frac{B}{2}\cos B}$$

که بعداز تبدیلهای لازم به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$f(\cos B)=2\cos^2 B-2\cos B+\frac{r}{R}=0 \qquad (1)$$

چون زاویهٔ B بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ است ، برای‌وجودجواب باید $0<\cos B<1$ باشد .

$f(0)=\frac{r}{R}>0$ و $\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}<0$ است، بنابراین صفر همیشه‌از دو ریشه کوچکتر است . بهمین ترتیب $f(1)=\frac{r}{R}>0$ و $1+\frac{b}{2a}>0$ است وبنابراین‌عدد ۱ همیشه از دوریشه بزرگتر است. بنابراین برای‌اینکه معادلهٔ (۱) دوریشهٔ قابل قبول داشته باشد ، باید مبین آن غیرمنفی باشد:

$$\Delta=1-\frac{2r}{R}\geqslant 0 \implies R\geqslant 2r$$

درحالت خاص $R=2r$ معادلهٔ (۱) ریشهٔ مضاعف‌پیدا می‌کند ومثلث ABC متساوی‌الاضلاع می‌شود .

VI) داریم :

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{a}{2\sin 2B}$$

$$r_a=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{a\cos^2\frac{B}{2}}{\sin B}=\frac{a\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{a}{2}\cot g\frac{B}{2}$$

که ازآنجا بدست‌می‌آید :

$$\frac{R}{r_a}=\frac{1}{\sin 2B\cot g\frac{B}{2}}=\frac{1}{4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cos B\cot g\frac{B}{2}}=\frac{1}{4\cos^2\frac{B}{2}\cos B}$$

وبسادگی به‌معادلهٔ درجه دوم زیر نسبت به $\cos B$ می‌رسیم :

$$f(\cos B)=\cos^2 B+\cos B-\frac{r_a}{2R}=0 \qquad (1)$$

چون B زاویه‌ای است حاده و مثبت باید $0<\cos B<1$ باشد . از طرف دیگر درمعادلهٔ (۱) حاصلضرب دوریشه منفی است و بنابراین همیشه یکی‌از ریشه‌ها منفی‌وغیرقابل قبول‌است . برای‌اینکه‌ریشهٔ دوم ازواحدکوچکتر باشد باید $f(1)$ مثبت باشد (ضریب جملهٔ درجه دوم مقداری است مثبت) :

$$f(1)=2-\frac{r_a}{2R}=\frac{4R-r_a}{2R}>0 \implies r_a<4R$$

بااین‌شرط زاویهٔ B بدست می‌آید وسپس سایر اجزاء مثلث محاسبه‌می‌شود.

۴۳۲ . I) از رابطهٔ $A=\pi-(B+C)$ زاویهٔ A و از رابطهٔ $h_a=AB\cdot\sin B$ ضلع $AB=\frac{h_a}{\sin B}$ بدست می‌آید، سپس باتوجه به‌روابط سینوسها می‌توان طول اضلاع a و b را بدست آورد :

$$a=\frac{c\cdot \sin A}{\sin C} \quad \text{و} \quad b=\frac{c\cdot \sin B}{\sin C}$$

شرط وجود جواب اینست که $A>0$ یعنی $B+C<\pi$ باشد .

II) از رابطهٔ $C=\pi-(A+B)$ زاویهٔ C و سپس از رابطهٔ

$m_C^2=\dfrac{a^2(2\sin^2 A+2\sin^2 B-\sin^2 C)}{4\sin^2 A}$ مقدارضلع a بدست می‌آید.

برای تعیین اضلاع b و c می‌توان ازروابط سینوسها استفاده‌کرد:

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A} \quad \text{و} \quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

III) زاویهٔ Cازرابطهٔ $C=\pi-(A+B)$ بدست می‌آید. ازرابطهٔ

$\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=k$ می‌توان نتیجه گرفت :

$$\frac{\sin A}{a\sin B\sin C}+\frac{1}{a\sin C}+\frac{1}{a\sin B}=k \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{k\sin B\sin C}$$

وسپس مقادیر b و c ازروابط سینوسها بدست می‌آید .

IV) داریم :

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{h_b}{h_a} \Longrightarrow \frac{\sin(B+C)}{\sin B}=\frac{h_b}{h_a}$$

وازآنجا نتیجه می‌شود :

$$\cos C+\cot g B\cdot \sin C=\frac{h_b}{h_a}$$

ازطرف دیگرداریم :

$$\cot g B=\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 B}}{\sin B}=$$

$$=\pm\frac{\sqrt{1-\dfrac{h_c^2}{h_b^2}\sin^2 C}}{\dfrac{h^a}{h_b}\sin C}=\pm\frac{\sqrt{h_b^2-h_c^2\sin^2 C}}{h_c\cdot \sin C}$$

و بنابراین بدست می‌آید :

$$\cos C \pm \frac{\sqrt{h_b^2-h_c^2\sin^2 C}}{h_c}=\frac{h_b}{h_a}$$

باگویا کردن این معادله ، مقدار $\cos C$ بدست می‌آید :

$$\cos C=\frac{h_b^2h_c^2-h_a^2(h_b^2-h_c^2)}{2h_ah_bh_c^2}$$

ازاین رابطه $\cos C$ ودرنتیجه زاویهٔ C محاسبه می‌شود .

چون C زاویه‌ای‌است بین‌صفر و ۱۸۰ درجه $-1<\cos C<1$ می‌شود و باید داشته باشیم :

$$-1<\frac{h_b^2h_c^2-h_a^2(h_b^2-h_c^2)}{2h_ah_bh_c}<1$$

ازحل این‌دونامعادله ، بعدازتبدیلهای‌لازم ، شرط وجود جواب بدست‌می‌آید:

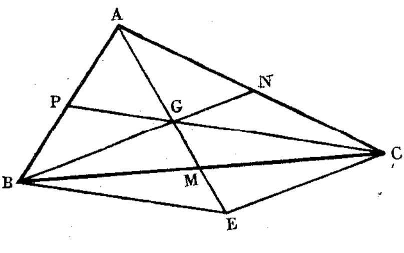
$$\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_a}<\frac{1}{h_c}<\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_a}$$

باتوجه به‌شرط اخیر وبا دردست داشتن زاویهٔ C از رابطهٔ $\sin B=\frac{h_c}{h_b}\sin C$ زاویهٔ B محاسبه می‌شود وبرای تعیین اضلاع از تساوی $h_b=a\cdot\sin C$ و از $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$ ضلع b وبالاخره‌ازرابطهٔ $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ ضلع c حاصل می‌شود .

۷) درمثلث GEC هریك‌از اضلاع $\frac{2}{3}$ طول‌میانه‌های‌مثلث ABC هستند (شکل ۹۹) :

$$GC=\frac{2}{3}CP\ ,\ GE=\frac{2}{3}AM,$$

$$CE=\frac{2}{3}BN$$



شکل۹۹

بنابراین اضلاع مثلث GEC معلوم‌اند و می‌توان نوشت :

$$GE^{۲}=CE^{۲}+GC^{۲}-۲CE\cdot GC\cos(ECG)$$

واز آنجا :
$$\cos(ECG)=\frac{m_b^{۲}+m_c^{۲}-m_a^{۲}}{۲m_bm_c}$$

ازرابطهٔاخیر زاویهٔ ECG معلوم می‌شود وازآنجا ازرابطهٔ (درمثلث ECG)

$$\frac{m_a}{\sin(ECG)}=\frac{m_b}{\sin(EGC)}$$

زاویهٔ EGC بدست می‌آید . درهمین مثلث ECG می‌توان نوشت :

$$MC^{۲}=\frac{۱}{۴}a^{۲}=\frac{m_a^{۲}[۲\sin^{۲}(GEC)+۲\sin^{۲}(EGC)-\sin^{۲}(ECG)]}{۴\sin^{۲}(ECG)}$$

(۱)

از رابطهٔ (۱) ضلع a و شبیه آن ضلعهای b و c پیدا می‌شود ، زاویه‌های مثلث هم ازروابطی شبیه رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\cos A=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲bc}$$

VI) اگر زاویهٔ بین h_a و d_a را α بگیریم می‌دانیم : $\alpha=\left|\frac{B-C}{۲}\right|$

از آنجا $\cos\frac{B-C}{۲}=\frac{h_a}{d_a}$. ازطرف‌دیگر $B+C=\pi-A$ و بنابراین

برای تعیین B و C باید دستگاه زیر را حل‌کنیم :

$$\cos\frac{B-C}{۲}=\frac{h_a}{d_a}\ ,\ B+C=\pi-A \qquad (۱)$$

اگر $B\geqslant C$ فرض‌کنیم باید $\frac{B+C}{۲}>\frac{B-C}{۲}\geqslant ۰$ باشدویادراینصورت باید

$۱\geqslant\cos\frac{B-C}{۲}>\sin\frac{A}{۲}$ باشد واز آنجا :

$$\sin\frac{A}{۲}<\frac{h_a}{d_a}\leqslant ۱ \implies d_a\cdot\sin\frac{A}{۲}<h_a\leqslant d_a$$

باشرط اخیر زوایای B و C ازدستگاه (۱) بدست می‌آید. ضلع a ازرابطهٔ $h_a=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}$ حاصل می‌شود که‌ازآنجا می‌توان اضلاع b و c را هم بدست آورد .

VII) ازروابط سینوسها می‌توان نتیجه گرفت :

$$\frac{a}{\sin(B+C)}=\frac{l}{\sin B+\sin C}$$

بنابراین دورابطهٔ زیر را داریم :

$$a=\frac{l\cos\frac{B+C}{۲}}{\cos\frac{B-C}{۲}}\ ,\quad h_a=\frac{a\sin B\sin C}{\sin(B+C)}$$

باحذف a بین این‌دورابطه نتیجه می‌شود :

$$\frac{l\cos\frac{B+C}{۲}}{\cos\frac{B-C}{۲}}=\frac{h_a\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{۴h_a\sin\frac{B+C}{۲}\cos\frac{B+C}{۲}}{\cos(B-C)-\cos(B+C)}$$

که بعدازتبدیلهای لازم به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$f\left(\sin\frac{B+C}{۲}\right)=۲l\sin^۲\frac{B+C}{۲}-۴h_a\cos\alpha\sin\frac{B+C}{۲}-\qquad(۱)$$
$$-۲l\sin^۲\alpha=۰$$

چون $\frac{B+C}{۲}$ زاویهٔ حاده ومثبتی است بنابراین باید $۰<\sin\frac{B+C}{۲}<۱$ باشد . حاصلضرب‌دوجواب‌درمعادلهٔ (۱)منفی است‌وبنابراین یکی‌ازریشه‌های معادله منفی وغیر قابل قبول است . برای‌اینکه ریشهٔ دوم قابل قبول باشد ، باتوجه به‌مثبت بودن ضریب درجه دوم ، باید $f(۱)>۰$ باشد :

$$f(۱)=۲l-۴h_a\cos\alpha-۲l\sin^۲\alpha=۲l\cos^۲\alpha-۴h_a\cos\alpha>۰$$

که ازآنجا با توجه به‌مثبت وحاده بودن زاویهٔ α بدست می‌آید :

$$\cos\alpha > \frac{2h_a}{l}$$

با تحقق این شرط مقدار $B+C$ ازمعادلهٔ (۱) بدست می‌آیدو باتوجه به معلوم بودن $B-C=2\alpha$ زاویه‌های B و C وسپس A محاسبه می‌شود. ضلع a از رابطهٔ $h_a \sin A = a\sin B \sin C$ وضلع b ازرابطهٔ $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$ و بالاخره ضلع c ازرابطه $c=l-b$ بدست می‌آید .

VIII) داریم :

$$\frac{r}{a}=\frac{\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin C\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{3C}{2}}=\frac{\sin C}{3-4\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{\sin C}{1+2\cos C}$$

و ازآنجا به معادلهٔ زیر برحسب $tg\frac{C}{2}$ می‌رسیم :

$$f\left(tg\frac{C}{2}\right)=r\,tg^2\frac{C}{2}+2a\,tg\frac{C}{2}-3r=0 \qquad (1)$$

ازطرف دیگر می‌دانیم $A+B+C=\pi$ و $B=2C$ ، که‌ازآنجا بدست می‌آید: $C=\frac{\pi}{3}-\frac{A}{3}$ یعنی $0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{6}$ و $0<tg\frac{C}{2}<\frac{\sqrt{3}}{3}$ باید باشد. درمعادلهٔ (۱) حاصلضرب دوریشه منفی‌است وبنابراین یکی از ریشه‌ها منفی‌وغیرقابل‌قبول است . برای‌اینکه ریشهٔ مثبت قابل‌قبول باشد (باتوجه به مثبت بودن ضریب درجه دوم) باید $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)>0$ شود :

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{r}{3}+\frac{2a\sqrt{3}}{3}-3r=\frac{2a\sqrt{3}}{3}-\frac{8r}{3}>0$$

که‌ازآنجا شرط $r<\frac{\sqrt{3}}{4}a$ بدست می‌آید وسپس بسادگی سایر اجزاء مثلث محاسبه می‌شود .

IX) باتوجه به روابط $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$ و $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ داریم ;

$$b\cdot c=\frac{a^{2}\sin B\sin C}{\sin^{2}A}=k^{2}$$

ازطرف دیگر می‌دانیم :

$$m_a^{2}=\frac{a^{2}(2\sin^{2}B+2\sin^{2}C-\sin^{2}A)}{4\sin^{2}A}$$

ازدورابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود :

$$\frac{k^{2}}{m_a^{2}}=\frac{4\sin B\sin C}{2\sin^{2}B+2\sin^{2}C-\sin^{2}A}=$$

$$=\frac{2\cos(B-C)-2\cos(B+C)}{1-\cos 2B+1-\cos 2C-\frac{1-\cos 2(B+C)}{2}}=$$

$$=\frac{4\cos 2\alpha-4\cos(B+C)}{3-4\cos(B+C)\cos 2\alpha+\cos 2(B+C)}$$

که ازآنجا به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$f[\cos(B+C)]=k^{2}\cos^{2}(B+C)+2(m_a^{2}-k^{2}\cos 2\alpha)\cos(B+C)+$$
$$+k^{2}-2m_a^{2}\cos 2\alpha=0 \qquad (1)$$

$B+C$ بین‌صفر و π و بنابراین $-1<\cos(B+C)<1$ است. داریم:

$$f(1)=k^{2}+2(m_a^{2}-k^{2}\cos 2\alpha)+k^{2}-2m_a^{2}\cos 2\alpha=$$
$$=2(1-\cos 2\alpha)(k^{2}+m_a^{2})>0$$

$$1+\frac{b}{2a}=1+\frac{m_a^{2}-k^{2}\cos 2\alpha}{k^{2}}=\frac{k^{2}(1-\cos 2\alpha)+m_a^{2}}{k^{2}}>0$$

بنابراین‌دوجواب معادلهٔ (۱)(درصورت‌حقیقی بودن) همیشه از ۱کوچکترند.
برای‌اینکه فقط یکی‌از جوابها از ۱ — بزرگتر باشد باید داشته باشیم :

$$f(-1)<0 \implies 2(1+\cos 2\alpha)(k^{2}-m_a^{2})<0 \implies k<m_a$$

و برای‌اینکه هردوجواب از ۱ — بزرگتر باشند باید مبین معادلهٔ (۱) مثبت و $-1+\frac{b}{2a}<0$ و $f(-1)>0$ باشد . مبین معادلهٔ (۱) وقتی

مثبت‌است‌که $m_a \geqslant k\sqrt{sin 2\alpha}$ باشد وبنابراین‌برای وجود دوجواب شرط $k\sqrt{sin 2\alpha} \leqslant m_a < k$ بدست می‌آید .

به‌این ترتیب برای $B+C$ ممکن است یك یادوجواب بدست‌آید(در حالت $m_a < k\sqrt{sin 2\alpha}$ مسئله جواب ندارد) . ازاینجا زوایای مثلث و سپس سایراجزاء آن محاسبه می‌شود .

۴۳۳. رابطهٔ $b-c=mh_a$ با استفاده از روابط سینوسها و رابطهٔ $h_a=2R\,sin B\,sin C$ به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{sin B - sin C}{sin B\,sin C}=m$$

صورت کسر سمت چپ تساوی را به ضرب و مخرج آنرا به مجموع تبدیل می‌کنیم . بادرنظرگرفتن $B+C=\pi-A$ ، بدست می‌آید :

$$f\left(sin\frac{B-C}{2}\right)=2m\,sin^2\frac{B-C}{2}+4\,sin\frac{A}{2}sin\frac{B-C}{2}-$$
$$-m(1+cos A)=0 \qquad (1)$$

اگر $B \geqslant C$ باشد $\frac{B+C}{2} > \frac{B-C}{2} \geqslant 0$ می‌شود و ازآنجا خواهیم‌داشت: $0 \leqslant sin\frac{B-C}{2} < cos\frac{A}{2}$ ، ازطرف دیگر داریم :

$$f(0)=-m(1+cos A)=-2m\,cos^2\frac{A}{2}<0$$

$$f\left(cos\frac{A}{2}\right)=2\,sin A>0 \;\;,\;\; f(0)\cdot f\left(cos\frac{A}{2}\right)<0$$

بنابراین همیشه یکی‌ازجوابهای‌معادلهٔ (۱) قابل قبول‌است‌که ازآنجا $B-C$ وسپس B و C بدست می‌آید . درحالت خاص $m=0$ بدست‌می‌آید $b=c$ یعنی مثلث متساوی‌الساقین خواهد بود .

۴۳۴. داریم :

$$\frac{m_a^2}{m_b^2}=\frac{2\,sin^2B+2\,sin^2C-sin^2A}{2\,sin^2A+2\,sin^2C-sin^2B}=$$

$$=\frac{1-\cos 2B+1-\cos 2C-\frac{1-\cos 2A}{2}}{1-\cos 2A+1-\cos 2C-\frac{1-\cos 2B}{2}}$$

که بعداز تبدیلهای لازم به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$(m_a^2+2m_b^2)\sin 2C\cdot\sin 2A+[m_a^2(2-\cos 2C)+$$
$$+m_b^2(1-2\cos 2C)]\cos 2A=(m_a^2-m_b^2)(3+2\cos 2C)$$

ازاین معادله A وسپس به‌کمك آن زاویهٔ B بدست می‌آید .

۴۳۵. اولا) رابطهٔ $a^2-b^2=k^2$ را بترتیب می‌توان چنین‌نوشت ؛

$$4R^2(\sin^2A-\sin^2B)=k^2\ ;\ \frac{4R^2}{c^2}(\sin^2A-\sin^2B)=\frac{k^2}{a^2}\ ;$$

$$\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin^2(A+B)}=\frac{k^2}{c^2}\ ;\ \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{k^2}{c^2}\ ;$$

$$\frac{\sin(A+B)-\sin(A-B)}{\sin(A+B)+\sin(A-B)}=\frac{c^2-k^2}{c^2+k^2}\ ;$$

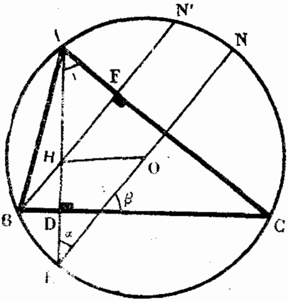
$$\frac{\cos A\sin B}{\sin A\cos B}=\frac{c^2-k^2}{c^2+k^2}\ ;$$

که ازآنجا نتیجه می‌شود : $$tgB=\frac{c^2-k^2}{c^2+k^2}tgA$$

ثانیاً) ازرابطهٔ اخیر tgB ودرنتیجه B معلوم می‌شود. اضلاع مثلث‌را هم می‌توان به‌کمك روابط سینوسها محاسبه‌کرد .

۴۳۶. حکم‌قسمت اول مسئله صحیح‌نیست ، زیرا اگر مثلث رادرحالت خاص متساوی‌الاضلاع ونقطهٔ M را برمحل تلاقی ارتفاعهای آن بگیریم‌روشن است‌که بدست می‌آید : $S_{\alpha\beta\gamma}:S_{ABC}=1:4$ ، درحالیکه قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ محیطی‌مثلث مساوی $-R^2$ می شود وحتی‌اگر این قوت رااز لحاظ قدرمطلق درنظر بگیریم باید مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع مساوی $\frac{\sqrt{3}}{2}$

باشدتانسبت مساحتهامساوی‌عددقوت‌نقطهٔ M نسبت به‌دایره‌باشد، به‌اثبات‌رابطهٔ
$OH^2=R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)$.



شکل ۱۰۰

می‌پردازیم :

درمثلث OEH (شکل ۱۰۰)

داریم :

$$OH^2=HE^2+OE^2-2HE\times$$
$$\times OE\cdot\cos(HEO) \qquad (I)$$

می‌دانیم قرینهٔ محل تلاقی ارتفاعها نسبت به‌هرضلع مثلث (ومنجمله BC) برمحیط دایرهٔ محیطی قرار می‌گیرد ، یعنی E قرینهٔ H نسبت به BC است . ازطرف دیگر داریم :

$$AD\cdot DE=BD\cdot DC \Longrightarrow h_a\cdot DE=b\cdot c\cdot\cos B\cos C$$

وازآنجا مقدار DE بدست می‌آید :

$$DE=\frac{b\cdot c\cdot\cos B\cos C\sin A}{a\cdot\sin B\sin C}=2R\cos B\cos C$$

وبنابراین $HE=2DE=4R\cos B\cos C$

برای محاسبهٔ زاویهٔ $\widehat{HEO}=\alpha$ با توجه شکل ۱۰۰ می‌نویسیم :

$$\beta=\frac{\widehat{BE}+\widehat{CN}}{2} \quad (1) \quad , \quad \frac{\widehat{CN}+\widehat{CE}}{2}=90^\circ \qquad (2)$$

$$\widehat{DAC}+\hat{C}=90^\circ \Longrightarrow \frac{\widehat{CE}}{2}=90^\circ-\hat{C} \qquad (3)$$

وبا توجه به رابطهٔ (۲) : $\hat{C}=\dfrac{\widehat{CN}}{2}$ وباتوجه به‌رابطهٔ (۱) : $\beta=\dfrac{\widehat{BE}}{2}+\hat{C}$

ازطرف دیگر داریم :

$$\frac{\widehat{BE}+\widehat{AC}}{2}=90^\circ \Longrightarrow$$ [illegible]

ودر نتیجه : $\beta = 90° - B + C$

وبنابراین $\alpha = 90° - \beta = 90° - (90° - B + C) = B - C$

حالا رابطهٔ(۱) بهاینصورت درمی‌آید :

$$OH^2 = 16R\cos^2B\cos^2C + R^2 - 8R^2\cos B\cos C\cos(B-C) =$$

$$= R^2[16\cos^2B\cos^2C + 1 - 8\cos B\cos C\cos(B-C)] =$$

$$= R^2(16\cos^2B\cos^2C + 1 - 8\cos^2B\cos^2C - 8\cos B\cos C\sin B\sin C) =$$

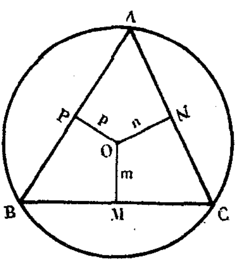
$$= R^2[1 + 8\cos B\cos C(\cos B\cos C - \sin B\sin C)] =$$

$$= R^2[1 + 8\cos B\cos C\cos(B+C)] = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$$

و با توجه بهغیرمنفی بودن OH^2 باید داشته باشیم ؛

$$1 - 8\cos A\cos B\cos C > 0 \implies \cos A\cos B\cos C \leqslant \frac{1}{8}$$

۴۳۷. با توجه به شکل۱۰۱ تساویهای زیر واضح است ؛



شکل۱۰۱

$$\hat{A} = \widehat{BOM} \quad , \quad \hat{B} = \widehat{AON} \quad , \quad \hat{C} = \widehat{AOP}$$

وبنابراین بدست می‌آید ؛

$$tg A = \frac{a}{2m} \quad , \quad tg B = \frac{b}{2n} \quad , \quad tg C = \frac{c}{2p} \quad (1)$$

ازطرف دیگر رابطهٔ زیر درهرمثلث صحیح است ؛

$$tg A + tg B + tg C = tg A \cdot tg B \cdot tg C \qquad (2)$$

باتوجه بهروابط (۱) و (۲) بدست می‌آید ؛

$$\frac{a}{2m} + \frac{b}{2n} + \frac{c}{2p} = \frac{a}{2m} \cdot \frac{b}{2n} \cdot \frac{c}{2p}$$

وازآنجا ؛ $$4\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p}\right) = \frac{a \cdot b \cdot c}{mnp}$$

۴۳۸. باتوجه‌بهرابطهٔ $m_a = kb$ ... $m_a^2 = \frac{k^2a^2\sin^2B}{\sin^2A}$

که اگر بجای m_a^2 مقدارش راقرار دهیم ؛

$$\frac{a^2(2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A)}{4\sin^2 A}=\frac{k^2a^2\sin^2 B}{\sin^2 A}$$

که بعداز تبدیلهای لازم به معادلهٔ زیر می‌رسیم ؛

$$(2k^2-1)\cos 2B-\cos 2C+\frac{5}{4}-2k^2=0$$

وچون $B+C=120^\circ$ می‌باشد ، می‌توان معادله را تنها برحسب مجهول B نوشت ؛

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B+\left(2k^2-\frac{1}{2}\right)\cos 2B=2k^2-\frac{5}{2}$$

کهٔ بعدازتبدیل به $tgB=t$ خواهیم داشت ؛

$$(16k^2-7)t^2-4\sqrt{3}t-3=0 \qquad (1)$$

روشن‌استکه $0<B<120^\circ$ وبنابراین‌باید $tgB>0$ ویا $tgB<-\sqrt{3}$ باشد . اگر ریشه‌های معادلهٔ (۱) راباعددهای صفر و $-\sqrt{3}$ مقایسه‌کنیم ، باتوجه به‌مثبت‌بودن k معلوم می‌شود که اگر $\frac{1}{2}<k<\frac{\sqrt{7}}{4}$ باشد هر دو ریشهٔ معادله منفی است که یکی از آنها از $-\sqrt{3}$ کوچکتر و قابل قبول است ، دراینحالت $90^\circ<B<120^\circ$ است . اگر $k>\frac{\sqrt{7}}{4}$ باشد معادلهٔ (۱) دوریشه مختلف‌العلامه دارد که تنها ریشهٔ مثبت قابل قبول است (ریشهٔ منفی از $-\sqrt{3}$ بزرگتراست) ، دراینحالت $0<B<90^\circ$ است. درحالت خاص $k=\frac{\sqrt{7}}{4}$ زاویهٔ $B=90^\circ$ بدست می‌آید .

بطور خلاصه اگر $k>\frac{1}{2}$ باشد یك جواب معادلهٔ (۱) قابل‌قبول است و درحالت $k<\frac{1}{2}$ معادلهٔ (۱) جواب قابل قبول ندارد .

۴۳۹. اولا) ازرابطهٔ $m=\dfrac{b+c}{a}$ بترتیب بدست می‌آید :

$$m=\frac{\sin B+\sin C}{\sin(B+C)}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}}$$

و ازآنجا $\cos\dfrac{B+C}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2m}$. چون $\dfrac{\pi}{2}>\dfrac{B+C}{2}>0$ استخواهیمداشت:

$1>\cos\dfrac{B+C}{2}>0$ و ازآنجا شرط $m>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ برای وجود جواب بدست می‌آید .

باتحقق این‌شرط $B+C$ معین می‌شودکه باتوجه به‌رابطهٔ $B-C=\dfrac{\pi}{2}$ هر یك از زاویه‌های B و C محاسبه می‌شود .

درحالت خاص $m=\sqrt{2}$ زاویه‌های مثلث چنین می‌شود :

$$C=\frac{\pi}{12}=15^\circ \;\cdot\; B=\frac{7\pi}{12}=105^\circ \;\cdot\; A=\frac{\pi}{3}=60^\circ ,$$

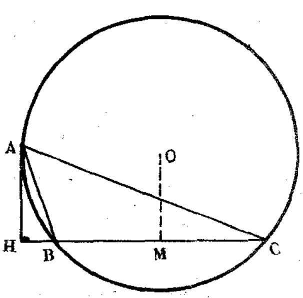
ثانیاً) باید ثابت کرد (شکل۱۰۲) : $HB+BM=R$

درمثلث AHB داریم :

$$BH=AB\cos(ABH)=$$
$$=c\cdot\cos(\pi-B)=-c\cdot\cos B ,$$

که با توجه به‌اینکه $BM=\dfrac{a}{2}$ است بدست می‌آید :

$$HB+BM=-c\cos B+\frac{a}{2}=$$
$$=-2R\sin C\cos B+R\sin A=$$



شکل۱۰۲

$$=R[-2\sin C\cos B+\sin(B+C)]=R\sin(B-C)=R\sin\frac{\pi}{2}=R$$

و در نتیجه h_a بردایرهٔ O مماس می‌شود .

ثالثاً) برای اثبات رابطهٔ $b^۲-c^۲=۲aR$ طرفین رابطهٔ $\sin(B-C)=۱$ را در $\sin(B+C)=\sin A$ ضرب می‌کنیم، بترتیب بدست می‌آید :

$$\sin(B+C)\sin(B-C)=\sin A \quad ; \quad \sin^۲B-\sin^۲C=\sin A \quad ;$$
$$۴R^۲\sin^۲B-۴R^۲\sin^۲C=۲R\cdot۲R\sin A \quad , \quad b^۲-c^۲=۲aR$$

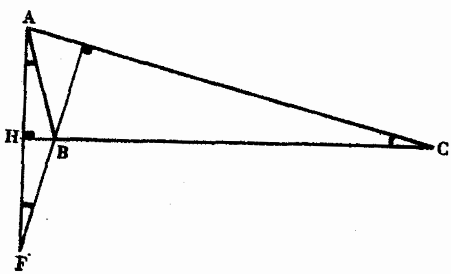
رابعاً) از رابطهٔ $B-C=\frac{\pi}{۲}$ نتیجه‌می‌شود $tgB\cdot tgC=-۱$. ضلع BC را محورطول‌وعمودمنصف آن(امتداد MO) را محور عرض و $A(x,y)$ می‌گیریم ، دراینصورت داریم :

$$tgB=-tg(ABH)=$$
$$=-\frac{HA}{HB}=-\frac{y}{-x-\frac{a}{۲}} \quad , \quad tgC=\frac{HA}{HC}=\frac{y}{-x+\frac{a}{۲}} ,$$

$$-\frac{y}{-x-\frac{a}{۲}}\cdot\frac{y}{-x+\frac{a}{۲}}=-۱ \Longrightarrow x^۲-y^۲=\frac{a^۲}{۴}$$

مکان هندسی ، هذلولی متساوی‌الساقینی است که مرکز آن مبداء مختصات ودو رأس آن نقطه‌های B و C می‌باشد . نقطهٔ A روی شاخهٔ چپ این هذلولی تغییر مکان می‌دهد .

برای تعیین مکان هندسی نقطهٔ تـلاقی ارتفاعها ، یعنی F (شکل ۱۰۲) : ازیکطرف داریم : $B=\frac{\pi}{۲}+C$



شکل ۱۰۲

واز طرف دیگر $B=\frac{\pi}{۲}+\widehat{HAB}$

وبنابراین $C=\widehat{HAB}$ ضمناً $\widehat{HFB}=C$ (اضلاع آنها برهم عمودند) و در نتیجه $\widehat{HAB}=\widehat{HFB}$ و F قرینهٔ A نسبت به BC است ومکان هندسی نقطهٔ F همان شاخهٔ هذلولی است که نقطهٔ A برآن حرکت می‌کند .

۴۴۰ . اولاً) از رابطهٔ $AH=\frac{BC}{۲}$ بترتیب نتیجه می‌شود :

$$\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}=\frac{a}{۲}\ ;\ \ ۲\sin B\sin C=\sin A=\sin(B+C)\ ;$$

$$۲\sin B\sin C=\sin B\cos C+\cos B\sin C\ ;$$

که باتقسیم طرفین رابطهٔ اخیر بر $\cos B\cos C$ بدست می‌آید :

$$۲tg B tg C=tg B+tg C$$

ثانیاً) اگر از طرفین رابطهٔ $B+C=\pi-A$ تانژانت بگیریم ؛ بسادگی بدست می‌آید :

$$tg B+tg C=-tg A(۱-tg B tg C)$$

که بااستفاده ازرابطه‌ای‌که درقسمت اولا بدست آوردیم نتیجه می‌شود :

$$tg B\cdot tg C=\frac{tg A}{tg A-۲}\ \ ,\ \ tg B+tg C=\frac{۲tg A}{tg A-۲}$$

بنابراین $tg B$ و $tg C$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند :

$$t^۲-\frac{۲tg A}{tg A-۲}\cdot t+\frac{tg A}{tg A-۲}=۰ \qquad (۱)$$

شرط وجود جواب اینست‌که مبین معادلهٔ (۱) غیرمنفی‌باشد که ازآنجانتیجه می‌شود :

$$۳-\sqrt{۵}<tg A<۳+\sqrt{۵}$$

ثالثاً) اگر $B=۲C$ باشد، ازرابطهٔ حکم قسمت اولا نتیجه می‌شود :

$$۲\sin ۲C\cdot\sin C=\sin ۳C \implies tg^۲C-۴tg C-۳=۰$$

که‌ازآنجا $tg C$ و سپس $tg B=tg ۲C$ و بالاخره $tg A=-tg(B+C)$ بدست می‌آید .

۴۴۱ ۰ اولاً) ازفرض $d'_a=d'_b=d'_c$ نتیجه می‌شود :

$$\frac{۲}{|a-b|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}=\frac{۲}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}=$$
$$=\frac{۲}{|a-b|}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

اگر صورت و مخرج کسر اول را در $\sqrt{a(p-a)}$ و کسر دوم را در $\sqrt{b(p-b)}$ وکسر سوم را در $\sqrt{c(p-c)}$ ضرب کنیم و سپس طرفین تساویها را مجذورکنیم بدست می‌آید :

$$a(p-a)(c-b)^۲=b(p-b)(a-c)^۲=c(p-c)(a-b)^۲$$

ثانیاً) a و b ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند :

$$z^۲-(۱+۲u)z+x=۰$$

که اگر x رامعلوم فرض کنیم شرط وجود جواب $u\geqslant\sqrt{x}-\frac{۱}{۲}$ است .
ضمناً داریم :

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{x}{۲}\sin C \ ,$$

$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{۴S}=\frac{x}{۲x\sin C}=\frac{۱}{۲\sin C} \ ,$$

$$r=\frac{a\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}}{\cos\frac{A}{۲}}=۴R\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}=$$

$$=\frac{۲}{\sin C}\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}=\frac{\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}}{\cos\frac{C}{۲}}$$

برای محاسبهٔ $\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}$ داریم :

$$۱+۲u=a+b=۲R(\sin A+\sin B)=$$

$$=\frac{1}{\sin C}\cdot 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=$$

$$=\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{1+tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}{1-tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}$$

که ازآنجا بدست می‌آید : $tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}=\frac{u}{1+u}$

و از آنجا نتیجه می‌شود : $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=u\sin\frac{C}{2}$

وبنابراین $r=\frac{u\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=u\,tg\frac{C}{2}$

ثالثاً) بادردست داشتن مقدار $\sin\frac{C}{2}$ ، با توجه‌به قسمت ثانیاً بسادگی اجزاء مثلث بدست می‌آید .

۴۴۲ . باتوجه به‌اینکه $4p^3+27q^2=-81<0$ است ، معادلهٔ مفروض سه جواب حقیقی‌دارد و می‌توان آنرا با روش‌مثلثاتی‌حل‌کرد . اگر $x=\lambda\cos\alpha$ بگیریم ، بترتیب داریم :

$$\lambda^3\cos^3\alpha-3\lambda\cos\alpha+1=0 \implies \cos^3\alpha-\frac{3}{\lambda^2}\cos\alpha+\frac{1}{\lambda^3}=0$$

که اگرآنرا با اتحاد $\cos^3\alpha-\frac{3}{4}\cos\alpha-\frac{1}{4}\cos 3\alpha=0$ مقایسه کنیم، بدست می‌آید :

$$-\frac{3}{\lambda^2}=-\frac{3}{4}\implies \lambda=\pm 2$$

$$\frac{1}{\lambda^3}=-\frac{1}{4}\cos 3\alpha \implies \cos 3\alpha=\mp\frac{1}{2}$$

اگر $\lambda=2$ باشد $\cos 3\alpha=-\frac{1}{2}$ و داریم :

$$۳\alpha=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳} \implies \alpha=\frac{۲}{۳}k\pi\pm\frac{۲\pi}{۹}$$

باانتخاب مقادیر ۰ ، ۱ ، ۲ و ۳ برای k بدست می‌آید :

$$\alpha=\pm\frac{۲\pi}{۹}, \frac{۸\pi}{۹}, \frac{۴\pi}{۹}, \frac{۱۴\pi}{۹}, \frac{۱۰\pi}{۹}, \frac{۱۶\pi}{۹}$$

اما باتوجه به اینکه زاویه‌های $\pm\frac{۲\pi}{۹}$, $\frac{۱۶\pi}{۹}$ و دوزاویه $\frac{۴\pi}{۹}$ و $\frac{۱۴\pi}{۹}$ و دو زاویهٔ $\frac{۸\pi}{۹}$ و $\frac{۱۰\pi}{۹}$ کسینوسهای مساوی دارند ، سه جواب معادلهٔ درجه سوم مفروض‌چنین می‌شود :

$$x_۱=\lambda\cos\alpha=۲\cos\frac{۲\pi}{۹}=۲\cos۴۰^\circ ,$$

$$x_۲=۲\cos\frac{۴\pi}{۹}=۲\cos۸۰^\circ , \quad x_۳=۲\cos\frac{۸\pi}{۹}=-۲\cos۲۰^\circ$$

ومقادیر عددی جوابها ، بااستفاده ازجدول ، بدست می‌آید :

$$x_۱=۱/۵۳۲۰ , \quad x_۲=۰/۳۴۷۲ , \quad x_۳=-۱/۸۷۹۴$$

توضیح . باکمك روابط بین‌ریشه‌ها و ضرایب درمعادلهٔ درجه سوم ، اتحادهای زیر بدست می‌آید :

$$\cos\frac{۲\pi}{۹}+\cos\frac{۴\pi}{۹}+\cos\frac{۸\pi}{۹}=۰$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۹}\cos\frac{۴\pi}{۹}+\cos\frac{۲\pi}{۹}\cos\frac{۸\pi}{۹}+\cos\frac{۴\pi}{۹}\cos\frac{۸\pi}{۹}=-\frac{۳}{۴}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۹}\cos\frac{۴\pi}{۹}\cos\frac{۸\pi}{۹}=-\frac{۱}{۸}$$

۴۴۳ . داریم : $۴p^۳+۲۷q^۲=-\frac{۸۱}{۶۴}<۰$ ، یعنی معادلهٔ درجه سوم مفروض سه جواب حقیقی دارد . $x=\lambda\cos\alpha$ می‌گیریم ، به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$\cos^۳\alpha-\frac{۳}{۴\lambda^۲}\cos\alpha-\frac{۱}{۸\lambda^۳}=۰$$

ازمقایسهٔ این‌معادله بااتحاد

$$cos^{۳}\alpha-\frac{۳}{۴}cos\alpha-\frac{۱}{۴}cos۳\alpha=۰$$

می‌توان نتیجه گرفت : $\lambda=\pm۱$ و $cos۳\alpha=\pm\frac{۱}{۲}$.

اگر $\lambda=۱$ اختیار شود $cos۳\alpha=\frac{۱}{۲}$ می‌شود و داریم :

$$۳\alpha=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \Longrightarrow \alpha=\frac{۲}{۳}k\pi\pm\frac{\pi}{۹}$$

که ازآنجا می‌توان مقدار $x=\lambda cos\alpha$ را بدست آورد :

$$x_۱=cos\frac{\pi}{۹},\quad x_۲=cos\frac{۵\pi}{۹},\quad x_۳=cos\frac{۷\pi}{۹}$$

و یامقادیر عددی آنها :

$$x_۱=cos۲۰^\circ=۰/۹۳۹۷\quad,\quad x_۲=-sin۱۰^\circ=-۰/۱۷۳۶\quad,$$
$$x_۳=-cos۴۰^\circ=-۰/۷۶۶۰$$

راه حل دوم . اگر $x=cos\alpha$ بگیریم داریم :

$$۸cos^{۳}\alpha-۶cos\alpha=۱ \Longrightarrow cos۳\alpha=\frac{۱}{۲}\ ,$$

$$۳\alpha=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \Longrightarrow \alpha=\frac{۲}{۳}k\pi\pm\frac{\pi}{۹}$$

که ازآنجا جوابهای $x=cos\alpha$ بسادگی بدست‌می‌آید .

۴۴۴ . اولا) بسادگی‌می‌توان‌این‌جوابهارابدست‌آورد: $x_۱=sin\alpha$ و

$$x_۲=sin\left(\frac{۲\pi}{۳}+\alpha\right)=sin\left(\frac{\pi}{۳}-\alpha\right) \text{ و } x_۳=sin\left(\frac{۴\pi}{۳}+\alpha\right)=-sin\left(\frac{\pi}{۳}+\alpha\right)$$

و ازآنجا باتوجه به رابطهٔ حاصلضرب ریشه‌ها درمعادلهٔ درجه سوم به اتحاد زیر می‌رسیم :

$$۴sin\alpha\ .\ sin\left(\frac{\pi}{۳}-\alpha\right)\ .\ sin\left(\frac{\pi}{۳}+\alpha\right)=sin۳\alpha\qquad(۱)$$

ثانیاً) اگر دراتحاد (۱) یکبار $\alpha=6^\circ$ و باردیگر $\alpha=18^\circ$ بگیریم بدست می‌آید :

$$4\sin 6^\circ \sin 54^\circ \sin 66^\circ = \sin 18^\circ$$

$$4\sin 18^\circ \sin 42^\circ \sin 78^\circ = \sin 54^\circ$$

ازضرب این‌دورابطه دریکدیگر بدست می‌آید :

$$16\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ = 1$$

۴۴۵. اولاً) داریم: $tg 4a = tg 2(2a) = \dfrac{2tg 2a}{1-tg^2 2a} =$

$$= \frac{\dfrac{4tga}{1-tg^2a}}{1-\left(\dfrac{2tga}{1-tg^2a}\right)^2} = \frac{4tga(1-tg^2a)}{1-6tg^2a+tg^4a}$$

ثانیاً) داریم : $\quad (1) \quad tg 4a = \dfrac{4(x-x^3)}{1-6x^2+x^4}$

اگر $x=tg\alpha$ فرض کنیم بدست می‌آید : $tg 4a = tg 4\alpha$ وازآنجا :

$$\alpha = \frac{1}{4}k\pi + a$$

ودرنتیجه چهار جواب برای x بدست می‌آید :

$$x_1 = tga \quad , \quad x_2 = tg\left(\frac{\pi}{4}+a\right) \quad , \quad x_3 = -cotga \quad ,$$

$$x_4 = -cotg\left(\frac{\pi}{4}+a\right)$$

معادلهٔ (۱) رابطریق دیگری هم می‌توانیم حل‌کنیم . اگر بجای $tg4a$ مقدارش را برحسب tga قرار دهیم و معادله را نسبت به x منظم کنیم بدست می‌آید :

$$tga(1-tg^2a)x^4 + (1-6tg^2a+tg^4a)x^3 - 6tga(1-tg^2a)x^2 -$$
$$-(1-6tg^2a+tg^4a)x + tga(1-tg^2a) = 0$$

که یك معادله معکوسهٔ منفی از درجهٔ چهارم است . اگر طرفین آنرا بر x^2 تقسیم‌کنیم و $x - \frac{1}{x} = y$ فرض کنیم به معادلهٔ درجه دوم زیر نسبت به y می‌رسیم :

$$tga(1 - tg^2a)y^2 + (1 - 6tg^2a + tg^4a)y - 4tga(1 - tg^2a) = 0$$

ازحل این معادله مقدار y وسپس به‌کمك آن مقدار x بدست می‌آید.

۴۴۶ . اولا) طرفین تساوی را در $2\sin\frac{\pi}{5}$ ضرب کنید و سپس تمام جمله‌ها را به‌مجموع تبدیل کنید . صحت اتحاد مسلم می‌شود ؛

ثانیاً) دراتحاد قسمت اولا $x = 0$ می‌گیریم بدست می‌آید :

$$\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{3\pi}{5}$$

اگر طرفین رابطهٔ اخیر را به‌صورت ضرب تبدیل‌کنیم ، بعدازساده‌کردن‌به تساوی $\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5}$ می‌رسیم‌که از آنجا بدست می‌آید :

$$3\sin\frac{\pi}{5} - 4\sin^3\frac{\pi}{5} = 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$$

وچون $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$ است می‌توان طرفین آنرا به $\sin\frac{\pi}{5}$ تقسیم کرد .

$$3 - 4\sin^2\frac{\pi}{5} = 2\cos\frac{\pi}{5} \implies 3 - 2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos\frac{\pi}{5}$$

وازآنجا بدست می‌آید :

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

ازاین‌رابطه می‌توان بااستفاده ازاتحاد $\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1$ مقدار $\cos\frac{\pi}{5}$ را بدست آورد :

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

ثالثاً) با توجه به اتحاد قسمت اولا می‌توان معادلهٔ مفروض را چنین نوشت :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(x+\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\cos\frac{\pi}{5}$$

که با تبدیل سمت چپ تساوی به‌صورت ضرب به معادلهٔ سادهٔ زیر می‌رسیم :

$$\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x=2k\pi-\frac{7\pi}{30} \\ x=2k\pi+\frac{13\pi}{30} \end{array}\right.$$

که جوابهای بین صفر و 2π درآن عبارتست از $x=\frac{13\pi}{30}$ و $x=\frac{53\pi}{30}$

۴۴۷. اولا) جواب: $a=64$ ، $b=-112$: $c=56$ ، $d=-7$

ثانیاً) ازمعادلهٔ $\sin 7x=0$ هفت جواب زیر (بین صفر و π) بدست می‌آید :

$$x_1=0\ ,\ x_2=\frac{\pi}{7}\ ,\ x_3=\frac{2\pi}{7}\ ,\ x_4=\frac{3\pi}{7}\ ,\ x_5=\frac{4\pi}{7}\ ,$$

$$x_6=\frac{5\pi}{7}\ ,\ x_7=\frac{6\pi}{7}$$

که‌دربین آنها $x_2=x_7$ و $x_3=x_6$ و $x_4=x_5$ است . بنابراین درمعادلهٔ

$$64\sin^7 x-112\sin^5 x+56\sin^3 x-7\sin x=0$$

$x=0$ متعلق به $\sin x=0$ و شش‌ریشهٔ دیگر متعلق به معادلهٔ درجهٔ ششم زیر است :

$$64\sin^6 x-112\sin^4 x+56\sin^2 x-7=0$$

اگر $\sin^2 x=y$ بگیریم ، با توجه به‌اینکه معادلهٔ اخیر سه ریشهٔ مضاعف دارد ، به معادلهٔ درجه سوم زیر می‌رسیم که ریشه‌های آن $\sin^2 x_2=\sin^2\frac{\pi}{7}$ و $\sin^2 x_3=\sin^2\frac{2\pi}{7}$ و $\sin^2 x_4=\sin^2\frac{3\pi}{7}$ می‌باشد :

$$۶۴y^۳-۱۱۲y^۲+۵۶y-۷=۰ \qquad (۱)$$

ثالثاً) روابط مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها را درمعادلهٔ(۱) می‌نویسیم:

$$y_۱+y_۲+y_۳=\frac{۱۱۲}{۶۴}=\frac{۷}{۴} \quad و \quad y_۱\cdot y_۲\cdot y_۳=\frac{۷}{۶۴}$$

که اگر بجای $y_۱$ ، $y_۲$ ، $y_۳$ مقادیرشان را قرار دهیم بدست می‌آید :

$$\sin^۲\frac{\pi}{۷}+\sin^۲\frac{۲\pi}{۷}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۷}=\frac{۷}{۴} \quad ;$$

$$\sin^۲\frac{\pi}{۷}\cdot\sin^۲\frac{۲\pi}{۷}\cdot\sin^۲\frac{۳\pi}{۷}=\frac{۷}{۶۴}$$

که از رابطهٔ اخیر بسادگی نتیجه می‌شود :

$$۸\sin\frac{\pi}{۷}\sin\frac{۲\pi}{۷}\sin\frac{۳\pi}{۷}=\sqrt{۷}$$

۴۴۸. اگر طرفین معادله را بر ۲ تقسیم کنیم و $x=\cos\alpha$ فرض کنیم ، به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$\cos۵\alpha=\frac{۱}{۲} \Longrightarrow \alpha=\frac{۲}{۵}k\pi\pm\frac{\pi}{۱۵}$$

واز آنجا ؛
$$y=\cos\alpha=\cos\left(\frac{۲}{۵}k\pi\pm\frac{\pi}{۱۵}\right)$$

و بسادگی پنج جواب زیر برای x بدست می‌آید :

$$x_۱=\cos۱۲^\circ,\ x_۲=\cos۶۰^\circ=\frac{۱}{۲},\ x_۳=\cos۸۴^\circ=\sin۶^\circ,$$

$$x_۴=\cos۱۵۶^\circ=-\cos۲۴^\circ,\ x_۵=\cos۱۳۲^\circ=-\cos۴۸^\circ$$

۴۴۹. اگر دو عدد مفروض را x و y فرض کنیم ، باید دستگاه زیر را حل کنیم :

$$x-y=۴tg\alpha\sec\alpha \ , \ x\cdot y=۱$$

وبنابراین x و $-y$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند :

$$t^۲-(۴tg\alpha\sec\alpha)t-۱=۰ \qquad (۱)$$

مبین معادلهٔ (۱) را محاسبه می‌کنیم :

$$\Delta = ۱۶tg^{۲}\alpha sec^{۲}\alpha + ۴ = ۴[۴tg^{۲}\alpha(۱+tg^{۲}\alpha)+۱] =$$
$$= ۴(۲tg^{۲}\alpha+۱)^{۲}$$

و بنابراین بدست می‌آید :

$$t' = ۲tg\alpha sec\alpha + ۲tg^{۲}\alpha + ۱ = \left(\frac{۱+sin\alpha}{cos\alpha}\right)^{۲} ,$$

$$t'' = ۲tg\alpha sec\alpha - ۲tg^{۲}\alpha - ۱ = -\left(\frac{۱-sin\alpha}{cos\alpha}\right)^{۲}$$

و درنتیجه جوابهای x و y (دوعدد مطلوب) چنین می‌شود :

$$\left| \begin{aligned} x &= \left(\frac{۱+sin\alpha}{cos\alpha}\right)^{۲} \\ y &= \left(\frac{۱-sin\alpha}{cos\alpha}\right)^{۲} \end{aligned} \right. \qquad \text{یا} \qquad \left| \begin{aligned} x &- = \left(\frac{۱-sin\alpha}{cos\alpha}\right)^{۲} \\ y &= -\left(\frac{۱+sin\alpha}{cos\alpha}\right)^{۲} \end{aligned} \right.$$

۴۵۰. بسادگی می‌توان‌ثابت‌کردکه اگرریشه‌های یك‌معادلهٔ‌دومجذوری به تصاعد عددی باشند ، باید درمعادلهٔ حلال آن یکی از ریشه‌ها ۹ برابر دیگری شود . معادلهٔ حلال معادلهٔ دومجذوری چنین است :

$$y^{۲} - ۱۰(۱-\sqrt{۳}sin\alpha)y + ۹cos^{۲}\alpha = ۰ \qquad (۱)$$

وبنابراین باید ازدستگاه زیر مقدار α را بدست آوریم :

$$y' = ۹y'' \quad , \quad y'+y'' = ۱۰(۱-\sqrt{۳}sin\alpha) \quad , \quad y'\,y'' = ۹cos^{۲}\alpha$$

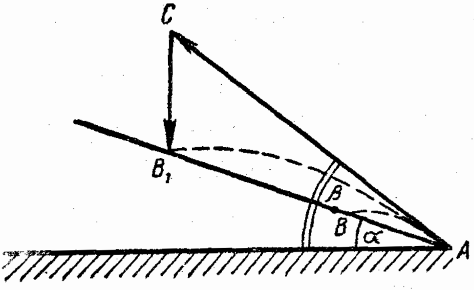
با حذف y' و y'' بین این معادله‌ها بدست می‌آید:

$$۱-\sqrt{۳}sin\alpha = \pm cos\alpha$$

جوابهای بین صفر و π دراین معادله‌ها ۰ ، $\frac{۲\pi}{۳}$ و π است . ولی به ازای $\alpha = \frac{۲\pi}{۳}$ مجموع دو جواب در معادلهٔ (۱) منفی می‌شود و چون حاصلضرب ریشه‌ها مثبت است چهار ریشهٔ‌موهومی برای معادلهٔ دومجذوری بدست‌می‌آید،

بنابراین برای اینکه معادلهٔ دومجذوری چهار ریشهٔ حقیقی و به تصاعدعددی داشته باشد باید $x=0$ یا $x=\pi$ باشد .

۴۵۱ t را زمانی می‌گیریم که آب از A تا نقطهٔ B_1 حرکت می‌کند، B_1 نقطهٔ فرود آب بدون در نظر گرفتن مقاومت هواست. از رابطهٔ $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB_1}$ استفاده می‌کنیم که در آن AC فاصله‌ای است که آب با حرکت یکنواخت و درمدت t باسرعت v_0 حرکت می‌کند و CB_1 فاصله‌ای است که درهمین مدت آب سقوط می‌کند (شکل ۱۰۴).



شکل ۱۰۴

درمثلث ACB_1 داریم :

$$\widehat{CAB_1}=\beta-\alpha \quad ,$$

$$\widehat{ACB_1}=90^\circ-\beta \quad ,$$

$$\widehat{AB_1C}=90^\circ+\alpha$$

دراینصورت با استفاده از قضیهٔ سینوسها بدست می‌آید :

$$AB_1=\frac{AC\cdot\sin(90^\circ-\beta)}{\sin(90^\circ+\alpha)}=\frac{AC\cos\beta}{\cos\alpha} \qquad (1)$$

$$AC=\frac{CB_1\cdot\sin(90^\circ+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{CB_1\cdot\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} \qquad (2)$$

بانوجه به‌روابط $AC=v_0t$ و $CB_1=\frac{1}{2}gt^2$ و رابطهٔ (۲) می‌توان بدست آورد :

$$t=\frac{2v_0\cdot\sin(\beta-\alpha)}{g\cdot\cos\alpha} \qquad (3)$$

ودراینصورت

$$AC=v_0t=\frac{2v_0^2\cdot\sin(\beta-\alpha)}{g\cdot\cos\alpha} \qquad (4)$$

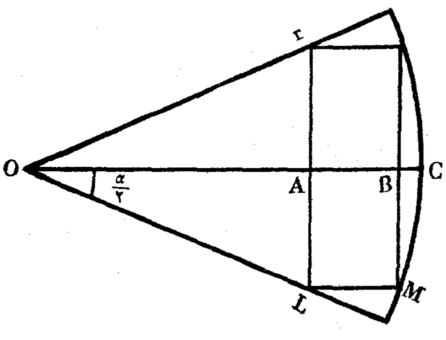
اگر مقدار AC را دررابطهٔ (۱) قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$AB_1=\frac{2v_0^2\cdot sin(\beta-\alpha)\cdot cos\beta}{g\cdot cos^2\alpha} \qquad (5)$$

و چون طبق فرض $AB=0/3AB_1$ است ، بدست می‌آید :

$$AB=\frac{0/6v_0^2 sin(\beta-\alpha)\cdot cos\beta}{g\cdot cos\alpha^2} \qquad (6)$$

و واضح است‌که مسئله تنها وقتی جواب داردکه $\alpha<\beta\leqslant 90^\circ$ باشد .



شکل ۱۰۵

۴۵۲، مستطیلی محاط درقطاع‌با توجه‌به‌شرایط‌مسئله درنظرمی‌گیریم (شکل۱۰۵). OC را نیمساز زاویهٔ قطاع و C را روی قوس قطاع فرض می‌کنیم . زاویهٔ بین دو شعاع OM و OC را x می‌گیریم ومساحتS مستطیل رابرحسب r ، α و x می‌نویسیم . اگر A و Bراوسط اضلاع مستطیل بگیریم داریم :

$$OA=r\,sin\,x\,cotg\frac{\alpha}{2}\;,\;\; AB=r\,cos\,x-r\,sin\,x\,cotg\frac{\alpha}{2}$$

اضلاع مستطیل $r\,cos\,x-r\,sin\,x\,cotg\frac{\alpha}{2}$ و $2r\,sin\,x$ است و بنابراین داریم :

$$S=2r^2 sin\,x(cos\,x-sin\,x)cotg\frac{\alpha}{2}=r^2\left[sin\,2x-(1-cos\,2x)cotg\frac{\alpha}{2}\right]=$$

$$=r^2\left(sin\,2x+cos\,2x\,cotg\frac{\alpha}{2}-cotg\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=r^2\left(\frac{\sin 2x\sin\frac{\alpha}{2}+\cos 2x\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)=$$

$$=\frac{r^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\left(2x-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\right]\qquad(1)$$

ازاین رابطه نتیجه می‌شودکه وقتی x مقادیرازصفر تا $\frac{\alpha}{4}$ را اختیار کند تابع S ازصفر تا

$$\frac{r^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=r^2 tg\frac{\alpha}{4}$$

بطور صعودی تغییر می‌کند ووقتی x مقادیراز $\frac{\alpha}{4}$ تا $\frac{\alpha}{2}$ را اختیار کند ، تابع از $r^2 tg\frac{\alpha}{4}$ تا صفر بطور نزولی تغییر می‌کند .

ازاینجا نتیجه می‌شود که اگر $S>r^2 tg\frac{\alpha}{4}$ باشد مسئله جواب ندارد.

اگر $S=r^2 tg\frac{\alpha}{4}$ باشد ، مسئله يك جواب دارد و بالاخره اگر $0<S<r^2 tg\frac{\alpha}{2}$ باشد ، مسئله دوجواب دارد .

۱°. فرض کنید : $\quad 0<S<r^2 tg\frac{\alpha}{4}$

دراینصورت از معادلهٔ (۱) دوجواب x_1 و x_2 بدست می‌آیدکه یکی‌ازآنها درفاصلهٔ$\left(0\ ,\ \frac{\alpha}{4}\right)$ و دیگری در فاصلهٔ$\left(\frac{\alpha}{4}\ ,\ \frac{\alpha}{2}\right)$ واقع است :

$$0<x_1<\frac{\alpha}{4}\ \text{و}\ \frac{\alpha}{4}<x_2<\frac{\alpha}{2}$$

از معادلهٔ (۱) بدست می‌آید :

$$\cos\left(2x-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{S.\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}+\cos\frac{\alpha}{2}$$

وازآنجا برای مقادیر x_1 و x_2 بدست می‌آید :

$$x_1=\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}\left(\frac{S.\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (2)$$

$$x_2=\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}\left(\frac{S.\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (3)$$

حالا به محاسبهٔ اضلاع مستطیل می‌پردازیم :

$$a_1=2r\sin x_1=2r\sin\left[\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{Arc}\cos\left(\frac{S.\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$$

$$=2r\sin\frac{\alpha}{4}\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{Arc}\cos\left(\frac{S.\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]-$$

$$-2r\cos\frac{\alpha}{4}\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}\left(\frac{S.\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$$

$$=2r\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{S.\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}\right)}-$$

$$-2r\cos\frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{S.\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}\right)}=$$

$$= 2r\, \sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{4}+\frac{S.\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{r^2}}-$$

$$-2r\,\cos\frac{\alpha}{4}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4}-\frac{S.\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{r^2}}=$$

$$=r\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{1+\frac{S.tg\frac{\alpha}{4}}{r^2}}-\sqrt{1-\frac{S.cotg\frac{\alpha}{4}}{r^2}}\right) \qquad (۴)$$

ضلع b_1 را می‌توان از رابطهٔ $b_1=\frac{S}{a_1}$ بدست آورد :

$$b_1=\frac{r}{2}\left(\sqrt{1+\frac{S.tg\frac{\alpha}{4}}{r^2}}+\sqrt{1-\frac{S\ cotg\frac{\alpha}{4}}{r^2}}\right) \qquad (۵)$$

ازروابط(۴) و (۵) معلوم‌می‌شود که $S=a_1b_1$ (تحقیق‌کنید) بهمین ترتیب می‌توان جواب دوم را محاسبه کرد :

$$a_2=r\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{1+\frac{S.tg\frac{\alpha}{2}}{r^2}}+\sqrt{1-\frac{S.cotg\frac{\alpha}{4}}{r^2}}\right) \qquad (۶)$$

$$b_2=\frac{r}{2}\left(\sqrt{1+\frac{S.tg\frac{\alpha}{4}}{r^2}}-\sqrt{1-\frac{S.cotg\frac{\alpha}{4}}{r^2}}\right) \qquad (۷)$$

۲°. اگر $S=r^2tg\frac{\alpha}{4}$ باشد ، مسئله یك جواب دارد :

$$a=2r\sin\frac{\alpha}{4} \quad \text{و} \quad b=\frac{r}{2\cos\frac{\alpha}{4}}$$

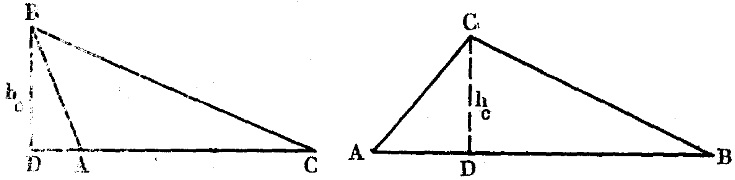
۴۵۳. فرض می‌کنیم مثلث ABC با شرایط مسئله وجود داشته‌باشد.

چون تفاضل $BC-AC$ با ارتفاع وارد بر AB برابر است ، بنابراین $BC>AC$ وازآنجا $A>B$ می‌شود وازرابطهٔ $A-B=\varphi$ نتیجه‌می‌شود $0<\varphi<\pi$.

D را پای ارتفاع وارد بر AB (یاامتدادآن) می‌گیریم (شکل۱۰۶) دراینصورت داریم :

$$CD=a\sin B=a-b$$

$$CD=b\sin A=b\cos(B+\varphi)$$



شکل۱۰۶

ازاین روابط بدست می‌آید :

$$\frac{b}{a}=1-\sin B \quad , \quad \frac{a}{b}=1+\sin(B+\varphi)$$

و بنابراین

$$(1-\sin B)[1+\sin(B+\varphi)]=1 ,$$

ویا

$$\sin(B+\varphi)-\sin B=\sin B\sin(B+\varphi) ,$$

ویا

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(B+\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\varphi-\cos(2B+\varphi)\right]=\cos^2\frac{\varphi}{2}-\cos^2\left(B+\frac{\varphi}{2}\right) ,$$

وبالاخره :

$$\cos^2\left(B+\frac{\varphi}{2}\right)-2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(B+\frac{\varphi}{2}\right)-\cos^2\frac{\varphi}{2}=0$$

[illegible] $\sin\frac{\varphi}{2}$ — تنها جواب زیر قابل

قبول است :

$$\cos\left(B+\frac{\varphi}{۲}\right)=۱-\sin\frac{\varphi}{۲}$$

و دراینحالت برای زوایای مثلث داریم :

$$\begin{cases} B = \operatorname{Arccos}\left(۱-\sin\frac{\varphi}{۲}\right)-\frac{\varphi}{۲} \\ A = \operatorname{Arccos}\left(۱-\sin\frac{\varphi}{۲}\right)+\frac{\varphi}{۲} \\ C = \pi - ۲\operatorname{Arccos}\left(۱-\sin\frac{\varphi}{۲}\right) \end{cases} \quad (۱)$$

که در آن $۰<\varphi<\pi$ است .

به‌این ترتیب اگر مثلث ABC وجود داشته باشد ، زوایای آن طبق روابط (۱) بدست می‌آید . ثابت می‌کنیم که برعکس اگر $۰<\varphi<\pi$ باشد، روابط (۱) می‌توانند زوایای مثلثی را نشان دهند که در شرایط مسئله صدق می‌کند .

قبل از همه روشن است که اگر $۰<\varphi<\pi$ باشد ، $۰<\frac{\varphi}{۲}<\frac{\pi}{۲}$ می‌شود

یعنی $۰<۱-\sin\frac{\varphi}{۲}<۱$ وازآنجا نتیجه می‌شود :

$$۰<\operatorname{Arccos}\left(۱-\sin\frac{\varphi}{۲}\right)<\frac{\pi}{۲}$$

یعنی
$$A=\operatorname{Arccos}\left(۱-\sin\frac{\varphi}{۲}\right)+\frac{\varphi}{۲}>۰$$

$$C=\pi-۲\operatorname{Arccos}\left(۱-\sin\frac{\varphi}{۲}\right)>۰$$

وعلاوه برآن ازروابط (۱) معلوم است که داریم :

$$A+B+C=\pi$$

ثابت می‌کنیم که $B>0$ است یعنی

$$\operatorname{Arccos}\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\right)>\frac{\varphi}{2} \qquad (2)$$

و یا

$$\cos\left[\operatorname{Arccos}\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]<\cos\frac{\varphi}{2}$$

و یا

$$1-\sin\frac{\varphi}{2}<\cos\frac{\varphi}{2}$$

و یا

$$\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}>1 \qquad (3)$$

وقتی $\pi>\varphi>0$ باشد این رابطه صحیح است وچون از نامساوی (۳) می‌توان نامساوی (۲) را نتیجه گرفت ، نامساوی (۲) هم صحیح است .

به این ترتیب ثابت کردیم :

$$A>0 \quad , \quad B>0 \quad , \quad C>0 \quad , \quad A+B+C=\pi$$

بنابراین مثلث ABC وجود دارد ، بنحوی که زوایای آن بوسیلهٔ روابط (۱) بیان شوند . ثابت می‌کنیم که این مثلث با شرایط مسئله می‌سازد. برای این منظور متذکر می‌شویم که

$$CD=h=a\sin B \quad , \quad CD=h=b\sin A$$

وازآنجا

$$\frac{h}{a}=\sin B \quad , \quad \frac{h}{b}=\sin A$$

ودرنتیجه

$$\frac{a-b}{h}=\frac{1}{\sin B}-\frac{1}{\sin A}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A\sin B}=$$

$$\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\cos^2\frac{A-B}{2}-\cos^2\frac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\frac{\varphi}{2}-\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}=1$$

و بنابراین بدست می‌آید : $a-b=h$.

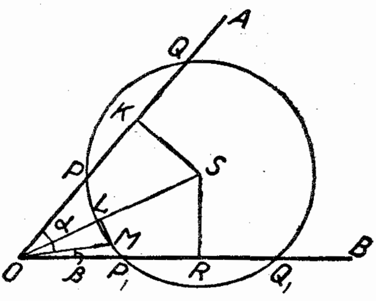
۴۵۴. طبق شرط مسئله داریم : $cotg\alpha+cotg\gamma=2cotg\beta$ و چون $\beta=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\gamma)$ پس

$$cotg\beta=tg(\alpha+\gamma)=\frac{cotg\alpha+cotg\gamma}{cotg\alpha\, cotg\gamma-1}=\frac{2cotg\beta}{cotg\alpha\, cotg\gamma-1}$$

$cotg\beta>0$ است و بنابراین ازرابطهٔ بالا بدست می‌آید :

$$1=\frac{2}{cotg\alpha\, cotg\gamma-1}\implies cotg\alpha\, cotg\gamma=3$$

۴۵۵. فرض می‌کنیم‌که مسئله جواب داشته باشد و دایرهٔ C باشرایط مسئله‌تطبیق‌کند. S را مرکز این دایره ، x را شعاع آن و PQ و P_1Q_1 را وترهائی بطول 2a ک دایره روی اضلاع OA و OB اززاویهٔ مفروض جدا کرده است ، فرض می‌کنیم (شکل ۱۵۷) . پای عمودهائی که از S بر OA و OB فرود می‌آیدبترتیب K و R می‌نامیم. داریم :



شکل ۱۵۷

$$\widehat{SOB}=\widehat{SOA}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$\alpha>\beta$ می‌گیریم (در حالت $\alpha\leqslant\beta$ نتیجهٔ آخر تغییر نمی‌کند ، نوع استدلالی هم که انجام می‌دهیم تغییر نمی‌کند). پای عمود وارد از M بر OS را L می‌نامیم ، بدست می‌آید :

$$\widehat{MOL}=\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

واضح است‌که $SQ>QK$ و چون $SP=x$ و $PK=a$ است $x>a$ می‌شود. ازطرف‌دیگر $OL<OM=a$ ، یعنی $OL<x$ می‌شود. ازاینجا نتیجه می‌شودکه نقطهٔ L بین نقطه‌های O و S قرار گرفته است و بنابراین : $OL+LS=OS$ (۱)

و چون $SM=x$ و $ML=a\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ است ، بدست می‌آید :

$$LS=\sqrt{x^2-a^2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

وبالاخره
$$OS=\frac{SK}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

حالا از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود :

$$\sqrt{x^2-a^2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}-a\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (۲)$$

اگر طرفین این تساوی را مجذور کنیم و دو طرف معادله‌ای را که بدست می‌آید به $\sqrt{x^2-a^2}\neq 0$ ساده کنیم ($x>a$ است) خواهیم‌داشت:

$$x=a\sqrt{1+4\frac{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}}} \qquad (۳)$$

وعلاوه بر آن
$$OS=2a\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad (۴)$$

حالا ثابت می‌کنیم دایره‌ای‌که با روابط (۳) و (۴) بدست می‌آید در شرایط مسئله صدق می‌کند . داریم :

$$SK^2=OS^2\cdot\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=4a^2\frac{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}}<x$$

وعلاوه بر آن

$$x^2-OS^2=a^2+4a^2\frac{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}}-$$

$$-4a\frac{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}}=a^2-4a^2\frac{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}<0$$

زیرا $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ است . به‌این‌ترتیب داریم :

$$SK<x<OS$$

به‌این ترتیب دایرهٔ به‌مرکز S وشعاع x هردو نیم‌خط OA و OB راقطع می‌کند.اگر P و Q را نقطه‌های تلاقی دایره با نیم‌خط OA بنامیم داریم:

$KQ=\sqrt{SQ^2-SK^2}=$

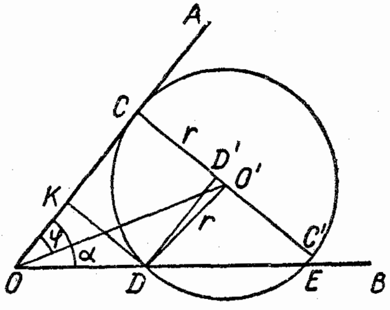
$$\sqrt{a^2+\frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}}-\frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}}}=a$$

یعنی $PQ=2a$ می‌شود . بالاخره در مثلث OSM با استفاده ازقضیهٔ کسینوسها

$$SM^2=OS^2+OM^2-2OS\cdot OM\cos(MOS)$$

بدست می‌آید : $SM=x$ ، یعنی دایره ازنقطهٔ M عبور می‌کند.

۴۵۶. نقطهٔ O' مرکز دایرهٔ مطلوب برخطی‌که از C بر OA عمود شود وبرخط‌عمود منصف DE واقع‌است . این‌دوخط تنها دریك نقطه‌یکدیگر را قطع می‌کنند وبنابراین تنها یك دایره وجود داردکه درشرایط مسئله‌صدق می‌کند (شکل۱۵۸) .



شکل ۱۰۹

D' را تصویر قائم D بر CO' و K را تصویر قائم D بر OC و C' را نقطهٔ متقاطر C فرض می‌کنیم . داریم :

$$CD^2 = CD' \cdot CC' = DK \cdot 2r = 2rb\sin\alpha$$

و چون داریم : $CD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

بنابراین بدست می‌آید : $r = \frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2b\sin\alpha}$

برای محاسبهٔ DE فرض می‌کنیم $x=DE$ ، $OD<OE$ (مثل شکل ۱۰۹) ، دراینصورت داریم :

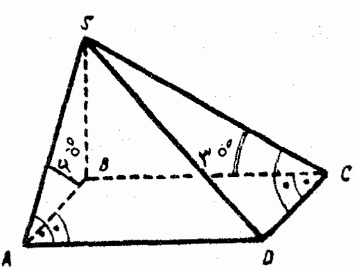
$$b(b+x) = a^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a^2-b^2}{b}$$

اگر $OD<OE$ باشد (روی شکل ۱۰۹ جای نقطه‌های D و E را عوض کنید)، داریم :

$$b(b-x) = a^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{b^2-a^2}{b}$$

به این ترتیب در هر حالت خواهیم داشت :

$$x = \frac{|a^2-b^2|}{b}$$



شکل ۱۱۰

۴۵۷. $AB=a$ و $BC=b$ می‌گیریم (شکل ۱۱۰). در اینصورت $ab=1$ می‌شود .

$$SB = b\,tg\,۳۰^\circ = a\,tg\,۶۰^\circ = \frac{b}{\sqrt{۳}} = a\sqrt{۳}$$

که از آنجا $b=۳a$ و مقادیر $a=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $b=\sqrt{۳}$ بدست می‌آید . از طرف دیگر داریم :

$$SB = a\,tg\,۶۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \cdot \sqrt{۳} = ۱$$

و بنابراین اگر حجم هرم را V فرض‌کنیم ، داریم :

$$V = \frac{۱}{۳} \cdot ۱ \cdot ۱ = \frac{۱}{۳} \quad \text{(مترمکعب)}$$

۴۵۸ . داریم :

$$S = \frac{Q-P}{\cos ۶۰^\circ} = ۲(Q-P)$$

زیرا مساحت تصویر سطح جانبی برقاعدهٔ بزرگتر برابراست بامساحت حلقهٔ $Q-P$.

۴۵۹ . زاویهٔ مجاور به‌قاعدهٔ مثلث را α می‌گیریم(شکل ۱۱۱) ومساحت آنرا بدست می‌آوریم :

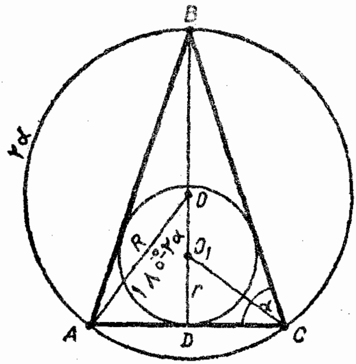
$$S = AD \cdot AB \cdot \sin\alpha =$$

$$= R\sin ۲\alpha \cdot \frac{R\sin ۲\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{R^۲ \sin^۲ ۲\alpha \sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= ۴R^۲ \cos\alpha \sin^۳\alpha$$

$\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را بر حسب R و r محاسبه می‌کنیم :



شکل ۱۱۱

$$AD = R\sin 2\alpha \;:\; AD = CD = r\cot g\frac{\alpha}{2},$$

$$R\sin 2\alpha = r\cot g\frac{\alpha}{2} \;;\; \frac{r}{R} = \frac{\sin 2\alpha}{\cot g\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = 2(1-\cos\alpha)\cos\alpha$$

و از آنجا

$$2\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + \frac{r}{R} = 0$$

و بنابراین

$$\cos\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1-\frac{2r}{R}}}{2}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{2r}{R}}}{2}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1 \pm 2\sqrt{1-\frac{2r}{R}} + 1 - \frac{2r}{R}}{4} =$$

$$= \frac{1+\frac{r}{R} \mp \sqrt{1-\frac{2r}{R}}}{2};$$

$$\sin\alpha = \left(\frac{1+\frac{r}{R} \mp \sqrt{1-\frac{2r}{R}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$S = 4R^2\cos\alpha\sin^2\alpha =$$

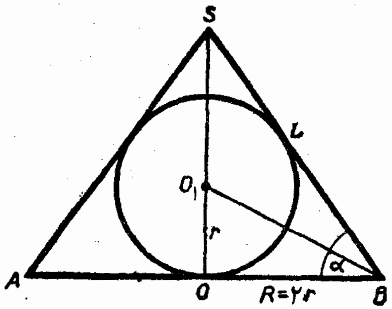
$$= \frac{4S_2}{\pi}\cdot\frac{1 \pm \sqrt{1-\frac{2r}{R}}}{2}\cdot\left(\frac{1+\frac{r}{R} \mp \sqrt{1-\frac{2r}{R}}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{S^2}{\pi\sqrt{2}}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{2r}{R}}\right)\left(1+\frac{r}{R}\mp\sqrt{1-\frac{2r}{R}}\right)^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{S_2}{\pi\sqrt{2}}\left(1\pm\sqrt{1-2\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}\mp\sqrt{1-2\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

مسئله وقتی جواب دارد که $2r\leqslant R$ باشد. درحالت $2r=R$ مسئله تنها یك جواب دارد ، در این حالت مثلث ABC متساوی الاضلاع می‌شود.

۴۶۰ . فرض می‌کنیم r : شعاع‌کره ، R شعاع قاعدهٔ مخروط l مولد مخروط ، h ارتفاع آن و $\widehat{SBO}=\alpha$ باشد. چون $4\pi r^2=\pi R^2$ است $R=2r$ می‌شود و داریم (S_1 سطح‌کره و S_2 سطح جانبی مخروط است، V_1 حجم‌کره‌و V_2 حجم‌مخروط است) :



شکل ۱۱۲

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi r^2}{\pi Rl}=\frac{2r}{l}=\frac{2r}{2r:\cos\alpha}=\cos\alpha\quad;$$

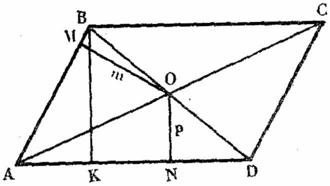
$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi R^2h}=\frac{4r^3}{R^2h}=\frac{r}{h}=\frac{r}{2r\,tg\alpha}=\frac{1}{2}cotg\,\alpha,$$

$\cos\alpha$ و $cotg\,\alpha$ را محاسبه می‌کنیم :

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\ ;\ \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{3}{5}\ ;\ cotg\,\alpha=\frac{3}{4}$$

به این ترتیب : $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}$ و $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{8}$

۴۶۱ . ارتفاع BK از متوازی‌الاضـلاع ABCD را رسم مـی‌کنیم (شکل۱۱۳):



شکل ۱۱۳

$$BK=2ON=2p$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$AB=\frac{2p}{\sin\alpha}$$

و بهمین ترتیب :

$$AD=\frac{2m}{\sin\alpha}$$

و از آنجا :

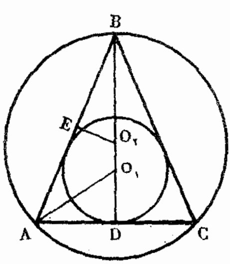
$$S_{ABCD}=AD\cdot BK=\frac{4mp}{\sin\alpha}$$

اقطار هم به‌کمك قضیهٔ کسینوسها بدست می‌آید :

$$BD=\frac{2\sqrt{p^2+m^2-2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha},$$

$$AC=\frac{2\sqrt{p^2+m^2+2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha}$$

۴۶۲ . O_1 را مـرکز دایرهٔ محاطی و O_2 را مرکزدایرهٔمحیطی مثلث‌متساوی‌الساقین ABC $(\hat{B}=\alpha)$ می‌گیریم (شکل ۱۱۴) ، O_2E را بر AB عمود می‌کنیم ، در مثلث EBO_2 که در آن $BE=\frac{1}{2}AB$ است داریم :



شکل ۱۱۴

$$R=O_2B=\frac{AB}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

ضمناً واضح است

$$\widehat{DAO_1}=\frac{1}{2}\widehat{DAB}=45^\circ-\frac{\alpha}{4}$$

و بنابراین در مثلث ADO_1 می‌توان نوشت :

$$r=O_1D=AD\,tg(45^\circ-\frac{\alpha}{4})$$

و چون $AD=AB\sin\frac{\alpha}{2}$ است :

$$r=AB\sin\frac{\alpha}{2}tg(45^\circ-\frac{\alpha}{4})$$

و از آنجا

$$\frac{R}{r}=\frac{cotg\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}$$

۴۶۳ . AD را قاعدهٔ بزرگتر، BC را قاعدهٔ کوچکتر و M را پای
عمود وارد از B بر AD می‌گیریم . ضمناً $\hat{A}=\alpha$ و $\hat{D}=\beta$ است. داریم:

$$Q=\frac{BC+AD}{2}.BM=(BC+AD)R$$

(R شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقه است) . با توجه به خاصیت چهار ضلعی محیطی داریم :

$$BC+AD=AB+CD$$

از طرف دیگر

$$CD=\frac{2R}{\sin A}\quad,\quad AB=\frac{2R}{\sin\alpha}$$

و از آنجا بدست می‌آید :

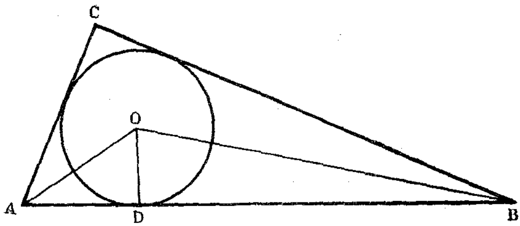
$$Q=2R^2(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta})=$$

$$=2R^2\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{4R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}$$

ودر نتیجه :
$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{Q\sin\alpha\sin\beta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}}}$$

۴۶۴ . جواب : $B=Arccos\frac{n}{m+n}$ (زاویهٔ بین دوساق)

$$A=C=Arccos\sqrt{\frac{m}{۲(m+n)}}\left[=\frac{۱}{۲}Arccos\left(-\frac{n}{m+n}\right)\right]$$



شکل۱۱۵

۴۶۵ . OA نیمساز زاویهٔ CAB و مساوی $\frac{\alpha}{۲}$ است (شکل۱۱۵) .

بنابراین

$$\widehat{ABO}=\frac{۱}{۲}(۹۰^\circ-\alpha)=۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲}$$

در مثلثهای AOD و BOD داریم :

$$AD=OD\,cotg\frac{\alpha}{۲}\ ,\ DB=OD\,cotg\left(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right),$$

و بنابراین
$$c=AB=OD\left[cotg\frac{\alpha}{۲}+cotg\left(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)\right]$$

و در نتیجه ، اگر شعاع دایرهٔ محاطی مثلث را r بگیریم ، بدست می‌آید :

$$r=\frac{c}{cotg\frac{\alpha}{۲}+cotg\left(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)}=c\sqrt{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\left(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)$$

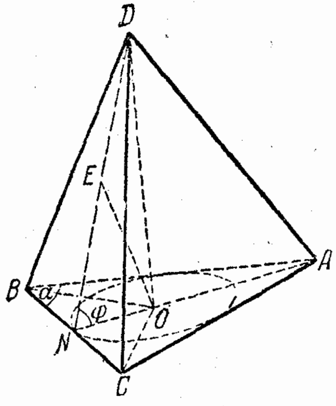
۴۶۶ . مساحت $۲n$ ضلعی منتظم محاطی برابر است با $\pi R^۲\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$

و مساحت n ضلعی منتظم محیطی برابر است با $\pi R^2 tg\frac{180^\circ}{n}$ و بنابراین داریم :

$$\pi R^2\left(tg\frac{180^\circ}{n}-sin\frac{180^\circ}{n}\right)=P$$

و از آنجا بعد از تبدیلهای لازم بدست می‌آید :

$$R=\frac{1}{sin\frac{90^\circ}{n}}\sqrt{\frac{P\,cotg\frac{180^\circ}{n}}{2n}}$$



شکل۱۱۶

۴۶۷ . طبق فرض مسئله‌داریم $EO=d$ (شکل۱۱۶) . نقطهٔ E (وسط وتر ND از مثلث‌قائم‌الزاویهٔ NOD) مرکز دایرهٔ‌محیطی مثلث NOD است بنابراین

$$ND=2ED=2EO=2d$$

از مثلث ODN ، کـه در آن $\widehat{OND}=\varphi$ ، شعاع $ON=r$ دایرهٔ‌محاطی قاعده بدست می‌آید : $r=2d\cos\varphi$. اگر مساحت قاعده را s بگیریم ، برای تعیین آن باید BN (نصف قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC) و AN (ارتفاع آن) را محاسبه‌کنیم . نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی بر نیمساز زاویهٔ $\widehat{ABC}=\alpha$ قرار دارد ، یعنی $\widehat{OBN}=\frac{\alpha}{2}$. ازمثلث BON پیدا می‌شود: $BN=r\cdot cotg\frac{\alpha}{2}$ واز مثلث ABN بدست می‌آید: $AN=BN.tg\alpha$. واز آنجاخواهیم‌داشت:

$$s=\frac{1}{2}BC\cdot AN=BN\cdot AN=BN^2tg\alpha=r^2cotg^2\frac{\alpha}{2}tg\alpha=$$

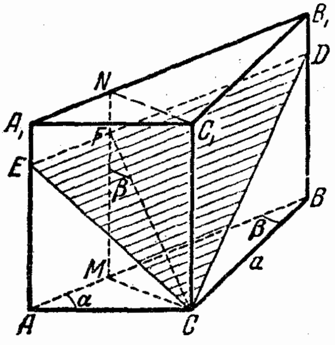
$$=4d^2\cos^2\varphi\, cotg^2\frac{\alpha}{2}tg\alpha$$

برای محاسبهٔ سطح جانبی هرم روشن‌است‌که چون‌سطح قاعده، تصویر سطح جانبی‌است ، اگرسطح جانبی‌را s_1 فرض‌کنیم، داریم: $s_1=\frac{s}{\cos\varphi}$ و بنابراین S سطح کل هرم چنین می‌شود :

$$S=s+s_1=s\left(1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)=\frac{2s\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$$

که با قرار دادن مقدار s ، که قبلا‌بدست آوریم ، سطح کل S بدست‌می‌آید:

$$S=8d^2\cos\varphi\cos^2\frac{\varphi}{2}\cot g^2\frac{\alpha}{2}tg\,\alpha$$



شکل۱۱۷

۴۶۸ . صفحهٔ مقطع ECD(شکل۱۱۷)که موازی وتر AB است ، صفحهٔ وجه ABB_1A_1 را در خط ED موازی AB قطع می‌کند . عمودهای CM و CF را بترتیب بر AB و EDفرود می‌آوریم ، مثلث قائم‌الزاویهٔ CMF بدست می‌آیدکه درآن $C\hat{F}M=\beta$ است (ثابت کنید !) . بنابراین دومثلث CMF و CMB برابرند (دروتر و یك زاویهٔ حاده) .

باید حجم V هرم CABDE را بدست آوریم ، که در آن قاعدهٔ ABDE مستطیل و ارتفاع آن $CM=a\sin\beta=a\cos\alpha$ است . داریم :

$$V=\frac{1}{3}AB\cdot MF\cdot CM=\frac{1}{3}AB\cdot MB\cdot CM=\frac{1}{3}BC^2\cdot CM=$$
$$=\frac{1}{3}a^3\cos\alpha$$

(BC واسطهٔ هندسی بین AB و MB است) .

برای محاسبهٔ S سطح جانبی منشور می‌نویسیم :

$$S=(BC+AB+AC)h=ah\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}+\cot g\,\alpha\right),$$

دراینجا ah مساوی مساحت CBB_1C_1 است که طبق فرض مسئله برابر است با سطح مقطع مثلث CDE . بنابراین داریم :

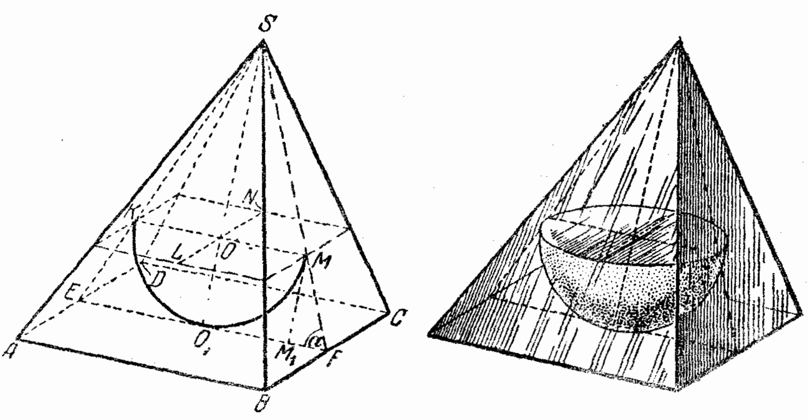
$$a\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot CF=\frac{1}{2}AB\cdot CB=\frac{a^2}{2\sin\alpha}$$

وازآنجا بدست می‌آید :

$$S=\frac{a^2}{2\sin\alpha}\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}+\cot g\,\alpha\right)=\frac{a^2}{2\sin^2\alpha}(\sin\alpha+\cos\alpha+1)$$

برای اینکه صفحهٔ CDE، وجه ABB_1A_1 را قطع کند بایدپاره‌خط $MN=h=\frac{a^2}{2\sin\alpha}:a=\frac{a}{2\sin\alpha}$ از پاره‌خط $MN=MF=MB=a\sin\alpha$ کوچکتر باشد. از نامساوی $a\sin\alpha<\frac{a}{2\sin\alpha}$ بدست می‌آید $\sin\alpha<\frac{\sqrt{2}}{2}$. یعنی زاویهٔ α باید از ۴۵ درجه کوچکتر باشد .

۴۶۹. مرکز O از دایرهٔ عظیمهٔ نیمکره (یعنی دایره‌ای که نیمکره را



شکل ۱۱۸

محدود می‌کند) برارتفاع SO_1 هرم واقع است (شکل۱۱۸) . چون OO_1M_1 از زاویهٔ O_1M ، بنابراین نقطهٔ M بر نیمساز $OM = OO_1 = r$ قرار دارد.

نقطهٔ M را به‌عنوان نقطهٔ تلاقی O_1M با SF در نظر می‌گیریم. مقطع $KLMN$ راموازی قاعده رسم می‌کنیم. K ، L ، M و N اوساط اضلاع این مقطع نقطه‌های تماس دایرهٔ عظیمه با وجوه جانبی هرم است. بنابراین KO_1M مقطع نیمکره باصفحهٔ ESF است.

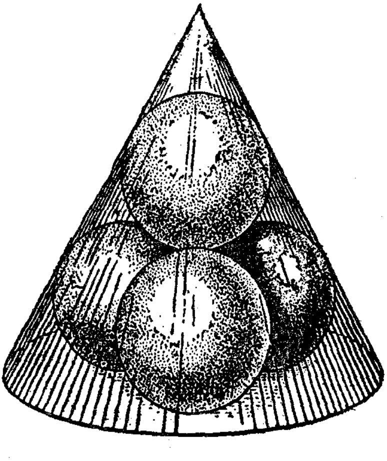
اگر ضلع مربع قاعده را a بگیریم ، داریم :

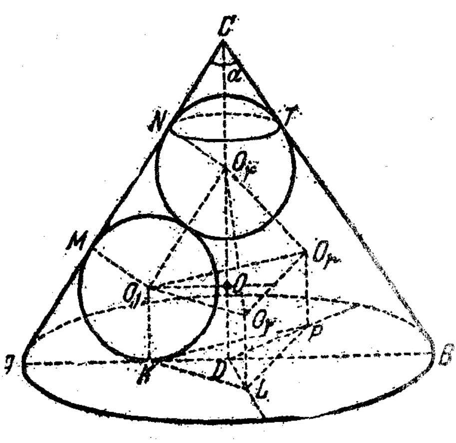
$$a = EF = ۲O_1F = ۲(O_1M_1 + M_1F)$$

ازطرف دیگر $O_1M_1 = OM = r$ و $M_1F = MM_1 cotg\alpha = r\,cotg\alpha$، یعنی $a = ۲r(۱ + cotg\alpha)$. اگر سطح کل هرم را S فرض‌کنیم، شبیه‌مسئله ۴۶۷ بدست می‌آید :

$$S = \frac{۲a^۲ cos^۲\frac{\alpha}{۲}}{cos\alpha} = \frac{۸r^۲(۱ + cotg)^۲ cos^۲\frac{\alpha}{۲}}{cos\alpha} = \frac{۸r^۲ sin^۲(۴۵^\circ + \alpha)}{cos\alpha\, sin^۲\frac{\alpha}{۲}}$$

۴۷۰. مرکزهای O_1، O_2، O_3، O_4، چهارکره دوبه‌دوبه فاصلهٔ $۲r$از



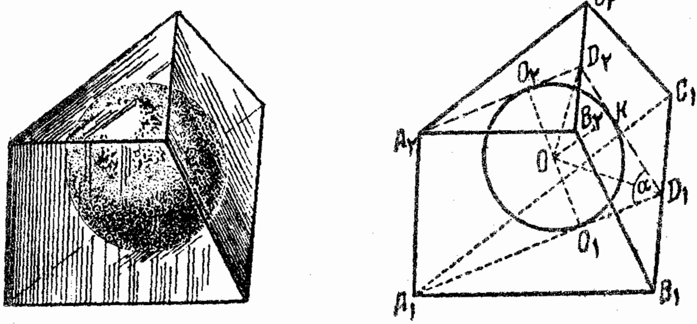


شکل۱۱۹

یکدیگر قرار گرفته‌اند و بنابراین شکل $O_1O_2O_3O_4$ چهار وجهی منتظمی به یال مساوی $2r$ است. مخروط ACB (شکل ۱۱۹) که بر چهار کره محیط شده‌است بر یکی از آنها (کرهٔ به مرکز O_4) درطول محیط دایرهٔ NT مماس است ، هریك از سه کرهٔ دیگر (مثلا کرهٔ به‌مرکز O_1) در دو نقطه برمخروط مماس‌اند که یکی از این دو نقطه ، K ، روی قاعده ودیگری ، M ، روی سطح جانبی مخروط قرار دارد . محور مخروط بر O_4O ، ارتفاع چهاروجهی واقع است ، مرکز O_1 درصفحهٔ ACD ، مقطع محوری مخروط که از نقطهٔ تماس M عبور می‌کند ، قرار گرفته است (یا خط O_1M برصفحهٔ مماس مشترك مخروط و کره عمود است و صفحهٔ مقطع محوری ACD براین‌صفحهٔ مماس عمود است) . یعنی صفحهٔ ACD کرهٔ O_1 را دردایرهٔ عظیمه‌ای قطع می‌کند ؛ همین صفحهٔ محوری کرهٔ O_4 را هم دردایرهٔ عظیمه قطع می‌کند و مولد AC مماس مشترك این دودایرهٔ عظیمه است . بنابراین AC موازی O_1O_4 و $\widehat{O_1O_4O}=\widehat{ACD}=\frac{\alpha}{2}$ است (α زاویهٔ مجهول رأس مخروط روی مقطع محوری است) . یعنی $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{OO_1}{O_1O_4}$. ولی $O_1O_4=2r$ و پاره‌خط OO_1 (شعاع‌دایرهٔ محیطی‌مثلث $O_1O_2O_3$) مساوی $\frac{2r}{\sqrt{3}}=\frac{O_1O_2}{\sqrt{3}}$ است و بدست می‌آید : $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ که از آنجا $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ می‌شود واز آنجا

$$\alpha=2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{Arccos}\frac{1}{3}$$

۴۷۱. صفحه‌ای که فرجهٔ A_1A_2 از هرم ناقص را نصف می‌کند (شکل ۱۲۰) از ارتفاع O_1O_2 می‌گذرد و بر وجه $B_1C_1C_2B_2$ عمود است (ثابت کنید !) و بهمین ترتیب برای دو یال جانبی دیگر . بنابراین مرکز کره‌ای که بروجه‌های هرم ناقص مماس است روی ارتفاع آن (یعنی در وسط ارتفاع ، زیرا کره برقاعده‌ها مماس‌است) و K نقطهٔ تماس کره با وجه $B_1C_1C_2B_2$ برسهم D_1D_2 از همین‌وجه قرار می‌گیرد . بهمین ترتیب در مورد سایر



شکل ۱۲۰

وجه‌ها . اگر سطح کل هرم ناقص را s وسطح‌کره را S فرض کنیم ، داریم:

$$s=\frac{\sqrt{3}}{4}(a_1^2+a_2^2)+3\cdot\frac{(a_1+a_2)l}{2}$$

که درآن $a_1=B_1C_1$ ، $a_2=B_2C_2$ اضلاع قاعده و $l=D_1D_2$ سهم‌وجه جانبی است. اگر $r_1=O_1D_1$ و $r_2=O_2D_2$ شعاعهای دایره‌های محاطی دوقاعده باشند $a_1=2r_1\sqrt{3}$ و $a_2=2r_2\sqrt{3}$ می‌شود . یعنی

$$s=3\sqrt{3}(r_1^2+r_2^2)+3\sqrt{3}(r_1+r_2)l$$

داریم : $r_2=D_2O_2=D_2K$ و $r_1=D_1O_1=D_1K$ وبنابراین

$$r_1+r_2=D_1K+D_2K=D_1D_2=l$$

درمثلث OO_1D_1 بدست می‌آید $r_1=r\,cotg\frac{\alpha}{2}$ و در مثلث OO_2D_2:

$r_2=r\,tg\frac{\alpha}{2}$ وازآنجا $r_1r_2=r^2$ می‌شود و درنتیجه :

$$r_1^2+r_2^2=(r_1+r_2)^2-2r_1r_2=l^2-2r^2$$

و بدست می‌آید : $s=6\sqrt{3}(l^2-r^2)=6\sqrt{3}\left(\frac{4r^2}{\sin^2\alpha}-r^2\right)$

وازآنجا نسبت سطح کره به سطح کل هرم ناقص چنین می‌شود :

$$S:s=\frac{2\pi\sin^2\alpha}{3\sqrt{3}(4-\sin^2\alpha)}$$

۴۷۲. درمثلث FMF' داریم :

$$tg\frac{F'}{۲}=\sqrt{\frac{(p-MF')(p-F'F)}{p(p-MF)}}\ ,$$

$$tg\frac{F}{۲}=\sqrt{\frac{(p-MF)(p-F'F)}{p(p-MF')}}$$

ازضرب این دورابطه دریکدیگر بدست می‌آید :

$$tg\frac{\alpha}{۲}\cdot tg\frac{\alpha'}{۲}=\frac{p-F'F}{p}$$

اما
$$۲p=MF'+MF+F'F=۲a+۲c$$

وبنابراین
$$tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\alpha'}{۲}=\frac{a+c-۲c}{a+c}=\frac{a-c}{a+c}$$

۴۷۳. ضلع قاعدهٔ مکعب مستطیل را مساوی x و ارتفاع آنرا مساوی y می‌گیریم (شکل۱۲۱) ، دراینصورت داریم :

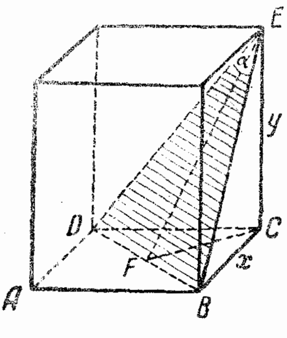
$$S=\frac{۱}{۲}x^۲+xy+\frac{۱}{۲}DB\cdot EF\ (۱)$$

و اگر سطح کل مکعب مستطیل را $S_۱$ فرض کنیم :

$$S_۱=۲x^۲+۴xy\qquad(۲)$$

اگر طرفین رابطهٔ (۱) را ۴ برابر کنیم و با رابطهٔ (۲) مقایسه نمائیم معلوم می‌شود

$$S_۱=۴S-۲DB\cdot EF$$



شکل۱۲۱

ولی‌داریم: $DB=BC\sqrt{۲}=x\sqrt{۲}$

و $EF=FB\,cotg\frac{\alpha}{۲}=\frac{x\sqrt{۲}}{۲}cotg\frac{\alpha}{۲}$. حالا y رابرحسب x محاسبه‌می‌کنیم:

$$y=EC=\sqrt{EF^۲-FC^۲}=\sqrt{\frac{x^۲}{۲}cotg^۲\frac{\alpha}{۲}-\frac{x^۲}{۲}}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-1}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{x\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$$

و دیگر می‌توان x را محاسبه کرد :

$$S=\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}DB\cdot EF=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{x^2\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2}\cot g\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{x^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}\right),$$

واز آنجا

$$x=\sqrt{\frac{2S\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

وسطح‌کل مکعب مستطیل چنین می‌شود :

$$S_1=4S-2x\sqrt{2}\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2}\cot g\frac{\alpha}{2}=4S-2x^2\cot g\frac{\alpha}{2}=$$

$$=4S-\frac{4S\sin\frac{\alpha}{2}\cot g\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}}=4S.\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}}$$

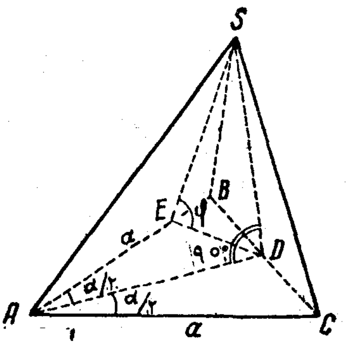
۴۷۴ . چون مساحت مثلثهای SAC و SAB یکی است (شکل ۱۲۲) سطح جانبی هرم چنین است :

$$Q=\frac{1}{2}BC\cdot SD+2\cdot\frac{1}{2}AB\cdot SE$$

ولی داریم : $AB=a$,

$$BC=2BD=2AB\sin\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2a\sin\frac{\alpha}{2},$$



شکل ۱۲۲

$$SE=\frac{ED}{\cos\varphi}=\frac{AD\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\varphi}=\frac{AB\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\varphi}=\frac{a\sin\alpha}{2\cos\varphi},$$

$$SD=SE\cdot\sin\varphi=\frac{a\sin\alpha}{2\cos\varphi}\sin\varphi,$$

و از آنجا بدست می‌آید :

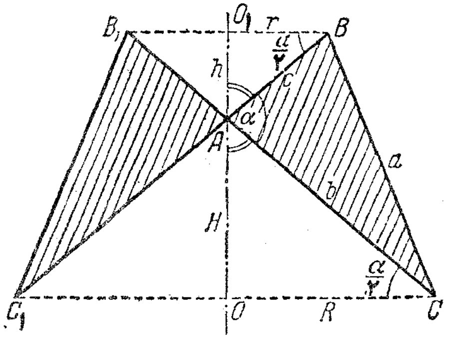
$$Q=\frac{1}{2}\cdot 2a\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a\sin\alpha}{2\cos\varphi}\sin\varphi+a\cdot\frac{a\sin\alpha}{2\cos\varphi}=$$

$$=\frac{a^2\sin\alpha}{2\cos\varphi}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi+1\right)$$

۴۷۵ . حجم V (شکل۱۲۳) جسمی‌که‌بعد ازدوران بدست می‌آید ، برابر است با حجم مخروط ناقصی که از دوران ذوزنقهٔ OO_1BC بدست می‌آید بدون حجم دو مخروطـی که از دوران مثلثهای AO_1B و AOC پیدا می‌شود . داریم : $\widehat{BAO_1}=\widehat{CAO}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$ و بنابـرایـن :

$$.\ \widehat{O_1BA}=\widehat{OCA}=\frac{\alpha}{2}$$

باتوجه به حروف وقرار دادهای شکل ۱۲۳ داریم :



شکل ۱۲۳

$$H = b\sin\frac{\alpha}{2},\ R = b\cos\frac{\alpha}{2},$$

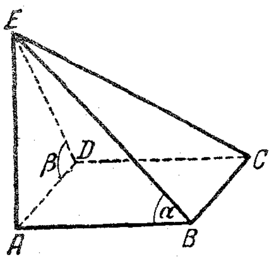
$$h = c\sin\frac{\alpha}{2},\ r = c\cos\frac{\alpha}{2}$$

و بنابراین اگر حجم جسم حاصل را V بگیریم ، داریم:

$$V = \frac{\pi}{3}(H+h)(R^2+Rr+r^2) - \frac{\pi}{3}HR^2 - \frac{\pi}{3}hr^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}[(b+c)(b^2+bc+c^2)-b^3-c^3]$$

جواب : $V = \frac{\pi}{3}bc(b+c)\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$



شکل ۱۲۴

۴۷۶ . اگر سطح جانبی هرم را S بگیریم داریم (شکل ۱۲۴) :

$$S = \frac{h^2 \cot g\,\alpha}{2} + \frac{h^2 \cot g\,\beta}{2} +$$

$$+ \frac{h^2 \cot g\,\beta}{2\sin\alpha} + \frac{h^2 \cot g\,\alpha}{2\sin\beta} =$$

$$= \frac{h^2}{2\sin\alpha\sin\beta}(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \cos\beta + \cos\alpha)$$

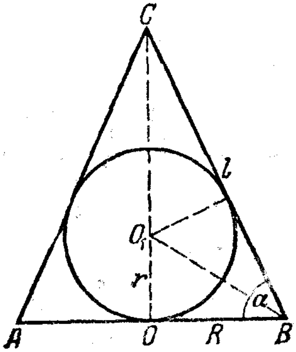
که بعد از تبدیلهای ساده بصورت زیر ، که قابل محاسبهٔ لگاریتمی است ، در می‌آید :

$$S=\frac{2h^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

۴۷۷ . با توجه به علامتهای قراردادی شکل ۱۲۵، طبق فرض مسئله داریم :

$$\pi R(l+R)=4n\pi r^2 \quad (1)$$

از مثلث OBO_1 بدست می‌آید $r=R\,tg\frac{\alpha}{2}$ و از مثلث BOC داریم: $BC=l=\frac{R}{\cos\alpha}$. در اینصورت تساوی (۱) به‌اینصورت در می‌آید :



شکل ۱۲۵

$$1+\frac{1}{\cos\alpha}=4n\,tg^2\frac{\alpha}{2}$$

که اگر $\cos\alpha$ را بر حسب $tg\frac{\alpha}{2}$ بنویسیم ، با فرض $tg\frac{\alpha}{2}=z$ به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$z^4-z^2+\frac{1}{2n}=0$$

و از آنجا

$$z^2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}$$

از اینجا دیده می‌شود که به‌ازای $n<2$ مسئله جواب ندارد . وقتی $n\geqslant 2$ باشد هر دو مقدار z^2 مثبت است . چون $tg\frac{\alpha}{2}$ باید مثبت باشد تنها دوجواب برای z بدست می‌آید :

$$z=tg\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}}$$

چون $\frac{\alpha}{۲}$ از ۴۵ درجه‌کوچکتراست ، $tg\frac{\alpha}{۲}$ از واحد کوچکتر می‌شود یعنی باید $z^۲<۱$ باشد . این شرط هم برقرار است ، زیرا داریم :

$$\frac{۱}{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲n}}<\frac{۱}{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۴}}=۱ , \frac{۱}{۲}-\sqrt{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲n}}<\frac{۱}{۲}$$

وقتی $n=۲$ باشد مسئله یك جواب دارد : $tg\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$.

۴۷۸ . با توجه به شکل ۱۲۵ داریم :

$$\frac{۱}{۳}\pi R^۲h=n.\frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

که اگر در آن $r=Rtg\frac{\alpha}{۲}$ و $h=rtg\alpha$ قراردهیم ، بدست می‌آید :

$$tg\alpha=۴ntg^۳\frac{\alpha}{۲}$$

و اگر $tg\frac{\alpha}{۲}=z$ بگیریم به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$z\left(\frac{۱}{۱-z^۲}-۲nz^۲\right)=۰$$

$z=۰$ قابل‌قبول نیست، زیرا زاویهٔ α نمی‌تواندمساوی صفر شود .بنابراین z از معادلهٔ زیر بدست می‌آید :

$$z^۴-z^۲+\frac{۱}{۲n}=۰$$

که همان معادلهٔ مسئلهٔ ۴۷۷ است ، یعنی :

$$tg\frac{\alpha}{۲}-\sqrt{\frac{۱}{۲}\pm\sqrt{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲n}}}$$

وقتی $n=۴$ باشد جواب اول چنین است :

$$tg\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۱}{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۸}}}=\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=\sqrt{\frac{۱+cos۴۵^\circ}{۲}}=$$

$$=\cos 22^\circ 30' \# 0/9239$$

وجواب دوم : $tg\frac{\alpha}{2}=\sin 22^\circ 30' \# 0/3827$

و بنابراین جوابها چنین‌اند :

$$\alpha_1=2Arctg(\cos 22^\circ 30') \# 85^\circ 28'$$

$$\alpha_2=2Arctg(\sin 22^\circ 30') \# 41^\circ 53'$$

۴۷۹ . مساحت سطح مقطع برابراست با Rh و سطح کل مخروط $\pi Rl+\pi R^2$ و بنابراین ، با توجه به شرط مسئله، بدست می‌آید : $\frac{\pi(l+R)}{h}=n$. اگر زاویهٔ بین‌محور ومولدمخروط‌مساوی β باشد داریم:

$R=l\sin\beta$ و $h=l\cos\beta$ که با قرار دادن آنهابدست می‌آید :

$$\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{n}{\pi}$$

از طرف دیگر داریم :

$$\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1+\cos(90^\circ-\beta)}{\sin(90^\circ-\beta)}=cotg(45^\circ-\frac{\beta}{2})$$

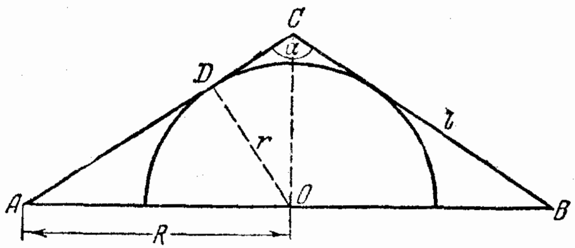
و بنابراین به معادلهٔزیررسیم : $cotg\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{n}{\pi}$

از اینجا $\frac{\beta}{2}-45^\circ$ و سپس β بدست می‌آید .

ولی به‌ازای همهٔ مقادیر n مسئله جواب ندارد . زاویهٔ β بین ۰ تا ۹۰ درجه واقع است و بنابراین زاویهٔ $45^\circ-\frac{\beta}{2}$ بین صفر و۴۵ درجه‌قرار دارد ، یعنی مقدار $\frac{n}{\pi}=cotg\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)$ باید بزرگتر از واحد باشد که‌از آنجا $n>\pi$ بدست می‌آید . به‌ازای $n=1,2,3$ مسئله جواب ندارد .

با این شرط مقدار β چنین است :

$$\beta = ۹۰^\circ - ۲\, Arccotg \frac{n}{\pi}$$



شکل ۱۲۶

۴۸۰ . با توجه به شکل ۱۲۶ داریم :

$$\frac{R(l+R)}{۲r^۲} = \frac{۱۸}{۵} \qquad (۱)$$

از مثلث AOD بدست می‌آید :

$$r = R\cos(AOD) = R\cos(ACO) = R\cos\frac{\alpha}{۲}$$

و از مثلث AOC : $l = \dfrac{R}{\sin\frac{\alpha}{۲}}$

در نتیجه رابطهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$\frac{۱+\sin\frac{\alpha}{۲}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos^۲\frac{\alpha}{۲}} = \frac{۱۸}{۵} \Longrightarrow \frac{۱+\sin\frac{\alpha}{۲}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\left(۱-\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\right)} = \frac{۱۸}{۵}$$

اگر کسر را به $۱+\sin\frac{\alpha}{۲} \neq ۰$ ساده‌کنیم به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$\sin^۲\frac{\alpha}{۲} - \sin\frac{\alpha}{۲} + \frac{۵}{۳۶} = ۰$$

که از آنجا زاویهٔ α بدست می‌آید :

$$\alpha_1 = 2 Arcsin \frac{5}{6} \# 112^\circ 53' \quad , \quad \alpha_2 = 2 Arcsin \frac{1}{6} \# 19^\circ 11'$$

۴۸۱ . با توجه به شکل ۱۲۶ داریم : $\frac{\pi}{3} R^2 h = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \pi r^3$.

زاویهٔ مجهول را مساوی β می‌گیریم(درشکل ۱۲۶ داریم $\beta = \frac{\alpha}{2}$) . در اینصورت $r = R\cos\beta$ و $h = R cotg\beta$ می‌شود و رابطهٔ قبل بصورت $3 cotg\beta - 8\cos^3\beta = 0$ در می‌آید . این معادله بعد از تبدیلهای ساده چنین می‌شود :

$$8\sin^3\beta - 8\sin\beta + 3 = 0$$

سمت چپ این معادله بصورت زیر قابل تجزیه است :

$$(2\sin\beta - 1)(4\sin^2\beta + 2\sin\beta - 3) = 0$$

که دو جواب قابل قبول دارد :

$$\sin\beta = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$$

جواب . $\beta_1 = 30^\circ$. $\beta_2 = Arcsin \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$.

۴۸۲. حل I :

$$cotg X = \frac{\cos 20 (4\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ)}{\cos^2 10^\circ} = \frac{4\cos 20^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ}{\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 40^\circ \cos 50^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{2\sin 40^\circ \cos 50^\circ \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ \sin 50^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 40 \sin 100^\circ}{\cos 10^\circ \sin 50^\circ} = \frac{\sin 40^\circ \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ \sin 50^\circ} = \frac{\cos 50^\circ}{\sin 50^\circ} = cotg 50^\circ$$

$$x = 50^\circ \qquad x = K \times 180^\circ + 50^\circ$$

حل II :

$$\cos(\sin x) - \sin(\cos x) > ۰$$

$$\cos(\sin x) - \cos(\frac{\pi}{۲} - \cos x) > ۰$$

$$۲\sin\left[\frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}(\sin x - \cos x)\right].\sin\left[\frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}(\sin x + \cos x)\right] > ۰$$

$$۲\sin\left[\frac{\pi}{۴} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴})\right].\sin\left[\frac{\pi}{۴} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴})\right] > ۰$$

$$-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \leqslant \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴}) \leqslant \frac{\sqrt{۲}}{۲} \text{ و } -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \leqslant \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴}) \leqslant \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین:

$$\frac{\pi}{۴} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۳/۱۴ - ۲/۸}{۴} = \frac{۰/۳۴}{۴} \quad \text{رادیان}$$

$$\frac{\pi}{۴} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۳/۱۴ + ۲/۸}{۴} = \frac{۵/۹۴}{۴} = ۱/۴۸ \quad \text{رادیان}$$

ملاحظه می‌شود که هر دو کمان

$$\frac{\pi}{۴} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴}) \text{ و } \frac{\pi}{۴} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴})$$

در ازاء جمیع مقدارهای متغیر x محصور بین دو مقدار $\frac{۰/۳۴}{۴}$ و ۱/۴۸ رادیان مـی‌باشد «$۰ \leqslant x \leqslant ۲\pi$ فرض شده است» و لذا هر دوعامل ضرب وحاصل مقداری مثبت است.

۴۸۳. حل I :

$$۰ < \alpha_۱ < \alpha_۲ < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow$$

$$۰ < \sin\alpha_۱ < \sin\alpha_۲ < \ldots < \sin\alpha_n < ۱$$

$$۰ < \cos\alpha_n < \cos\alpha_{n-۱} < \ldots < \cos\alpha_۱ < ۱$$

$$۰ < n\sin\alpha_۱ < \sin\alpha_۱ + \sin\alpha_۲ + \ldots + \sin\alpha_n < n\sin\alpha_n$$

$$۰ < n\cos\alpha_n < \cos\alpha_۱ + \cos\alpha_۲ + \ldots + \cos\alpha_n < n\cos\alpha_۱$$

$$\frac{1}{n\cos\alpha_1} < \frac{1}{\cos\alpha_1 + \dots + \cos\alpha_n} < \frac{1}{n\cos\alpha_n}$$

$$\frac{n\sin\alpha_1}{n\cos\alpha_1} < \frac{\sin\alpha_1 + \dots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \dots + \sin\alpha_n} < \frac{n\sin\alpha_n}{n\cos\alpha_n}$$

$$tg\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \dots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \dots + \cos\alpha_n} < tg\alpha_n$$

حل II :

$$S = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{4}bc$$

$$R^2 + 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}bc\right) = R^2 + \sqrt{3}(4R^2 \sin B \sin C) =$$
$$= R^2(1 + 4\sqrt{3}\sin B \sin C) = R^2\{1 + 2\sqrt{3}[\cos(B-C) -$$
$$-\cos(B+C)]\} = R^2\{1 + 2\sqrt{3}[\cos(B-C) + \frac{\sqrt{3}}{2}] =$$
$$= R^2[1 + 2\sqrt{3}\cos(B-C) + 3] = 4R^2[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(B-C)] =$$
$$= 4R^2[1 + \cos A \cos(B-C)] = 4R^2[1 -$$
$$-\cos(B+C)\cos(B-C)] = 4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C) = b^2 + c^2$$