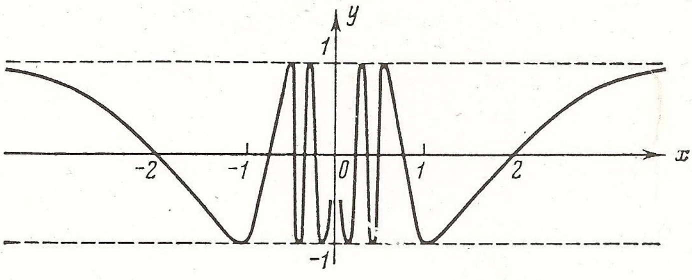
ریاضیات عمومی

جلد اول

ایساک مارون

شامل : *خلاصهٔ مباحث *۳۸۵ مسئلهٔ حل شده
*۱۳۵ مسئلهٔ راهنمایی شده



ترجمهٔ :

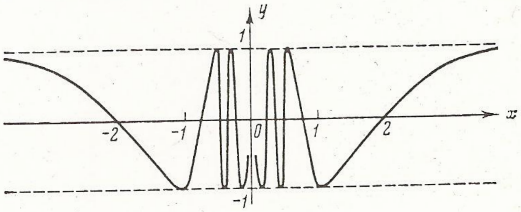
خلیل پاریاب
عضو هیئت علمی
دانشگاه علم و صنعت ایران

General Mathematics

Volume One

By

J. A. Maron



Translated By

Khalil Paryab

شابک ۹-۱۴-۶۴۵۸-۹۶۴ (دوره ۲ جلدی)

ISBN 964-6458-14-9(2 VOL.SET)

شابک ۲-۱۲-۶۴۵۸-۹۶۴ (جلد ۱)

ISBN 964-6458-12-2(VOL.1)

Paryab Publisher

ریاضیات عمومی

جلد اول

تألیف ایساک مارون

ترجمه : خلیل پاریاب

عضو هیئت علمی دانشگاه علم وصنعت ایران

فهرست

عنوان — صفحه

عنوان صفحه

فصل سوّم ● کاربرد مشتق در بررسی توابع

ضمیمهٔ ۱ * اعداد مختلط

عنوان | صفحه

بنام خدا

مقدمه:

کتاب حاضر که تحت عنوان **«ریاضیات عمومی»** تدوین شده است ترجمهٔ کتابی است که توسط **ایساك مارون**[1] به زیور طبع آراسته شده است، و در دو جلد تدوین یافته است که اینک جلد اول آن در اختیار علاقمندان و دانشجویان قرار می‌گیرد.

این کتاب در محضر استادان ریاضی و دانشجویان علوم و فنی و مهندسی، کتاب آشنایی است و یکی از منابع بسیار مهم در تدریس ریاضیات عمومی است و به نوعی تدوین یافته است که دانشجو را از نظر مطالب نظری و عملی ارضا می‌کند، به دانشجو درکی عمیق‌تر می‌دهد، تفکر و دقت فکری را در او ایجاد می‌نماید.

این کتاب درواقع یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال است و ابزار دست مهندسین و فیزیکدانان می‌باشد، باتوجه به شهود و حل مسائل متعدد، مهارتهای صحیح بکاربردن مفاهیم ریاضی را در مطالب عملی تقویت می‌کند و رابطهٔ تنگاتنگ علوم ریاضی و علوم مهندسی را آشکار می‌سازد. باید این نکتهٔ بسیار مهم را بخاطر داشت که حساب دیفرانسیل و انتگرال ریشه های عمیقی در مسائل فیزیکی و مهندسی دارد و قسمت اعظم نیرو و زیبائیش را از کاربردهای متنوع خود می‌گیرد.

روش کتاب در ارائه مطالب بسیار جالب است بدین معنی که هرفصل با تعاریف و قضایای اساسی شروع می‌شود و سپس چند مسئلهٔ حل شده مطرح می‌گردد و آنگاه تعداد زیادی مسائل حل نشده که در هرکدام ویژگیهای خاصی گنجانده شده، آمده است و اغلب این مسائل همراه با راهنمایی می‌باشند.

کتاب از نظر عملی و نظری کامل است و این امکان را به خواننده می‌دهد که در فرصت قلیلی او را برای حل مسائل مشکل و متنوع کاربردی آماده می‌سازد.

در ترجمهٔ این کتاب از راهنمائیهای بیدریغ استادان گروه ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران بهره‌مند بوده‌ام، بویژه همکار عزیز و استاد گرانقدر گروه فیزیك جناب آقای فرهاد اعظمی گره گشای اینجانب در اصطلاحات فیزیکی بوده‌اند که بسیار مفتخرم سپاس خود را نثار فرد فرد این غزیزان نمایم.

---

[1] *Isaac Maron*

کارهای حروفچینی فارسی بوسیلهٔ دستگاه «کومپ سِت» با ضرافت خاصی درچاپخانهٔ دانشگاه علم و صنعت ایران به انجام رسیده است، از همه آنها نیز سپاسگزارم.

در خاتمه از استادان، دانشجویان و بالاخره از تمام خوانندگان استدعا دارم جهت تشویق اینجانب در تهیه و تدوین کتابهای سودمند دیگر، لغزشهای احتمالی در ترجمه را که مشاهده می‌نمایند اطلاع دهند تا در چاپهای بعدی تصحیح شود.

خلیل پاریاب

گروه ریاضیات کاربردی و کامپیوتر

دانشگاه علم و صنعت ایران

آبان ماه ۱۳۶۵

فصل اوّل

مقدمه‌ای بر آنالیز ریاضی

۱ ــ ۱ اعداد حقیقی
قدر مطلق یک عدد حقیقی

هر کسر اعشاری مختوم و یا نامختوم را یک عدد حقیقی گویند.

کسرهای متناوب را اعداد گویا نامند. هر عدد گویا ممکن است به صورت نسبت $\frac{p}{q}$، از دو عدد صحیح p و q نوشته شود، و بالعکس.

کسرهای اعشاری غیر متناوب را **«اعداد اصم»** گویند.

هرگاه X مجموعه‌ای مشخص از اعداد حقیقی باشد، آنگاه نماد $x \in X$ بدین معنی است که عدد x متعلق به X است، و نماد $x \notin X$ این معنی را می‌دهد که x متعلق به X نیست.

یک مجموعه از اعداد حقیقی x که درنامساوی $a < x < b$ صدق کنند که a و b اعداد ثابتی هستند، **یک فاصلهٔ باز** (a, b) گویند، مجموعه‌ای از اعداد حقیقی x که درنامساوی $a \leqslant x \leqslant b$ صدق کنند، **فاصلهٔ بسته** نامند و به صورت $[a, b]$ نشان می‌دهند. مجموعه اعداد حقیقی x را که درنامساویهای $a \leqslant x < b$ یا $a < x \leqslant b$ صدق کنند **فاصلهٔ نیم باز** گویند و به ترتیب به صورت $[a, b)$ یا $(a, b]$ نشان می‌دهند. فاصله های باز، بسته یا نیم باز بطور اعم فاصله نامیده می‌شوند.

هرعدد حقیقی را که بتوان به عنوان یک نقطهٔ معین روی محور حقیقی نشان داد، **نقطهٔ حقیقی** گویند. همچنین دو نقطهٔ دیگر که به نقاط غیر حقیقی معروفند با نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ نشان داده می‌شوند، و به ترتیب در دو جهت مثبت و منفی دور از مبداء مختصات قرار دارند. بنا به تعریف نامساوی $-\infty < x < +\infty$ برای هرعدد حقیقی x برقرار است.

فاصلهٔ $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ را ε همسایگی عدد a گویند.

مجموعه اعداد حقیقی $x > M$ را M همسایگی نقطهٔ غیر حقیقی $+\infty$ نامند.

مجموعه اعداد حقیقی $x < M$ را M همسایگی نقطهٔ غیر حقیقی $-\infty$ گویند.

قدر مطلق عدد x را که با $|x|$ نشان می‌دهند عددی است که در شرایط زیر صدق کند:

$$|x| = -x \quad \text{اگر} \quad x < 0$$

$$|x| = x \quad \text{اگر} \quad x \geqslant 0$$

خواص قدر مطلقها به قرار زیرند:

(۱) نامساوی $|x| \leqslant \alpha$ به معنی $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$; است؛

(۲) نامساوی $|x| \geqslant \alpha$ به معنی $x \geqslant \alpha$ یا $x \leqslant -\alpha$ است.

(۳) $\quad |x \pm y| \leqslant |x| + |y|;$

(٤) $\quad |x \pm y| \geqslant ||x| - |y||;$

(۵) $\quad |xy| = |x||y|;$

(٦) $\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\ (y \neq 0).$

۱ - ۱ - ۱ ثابت کنید که عدد

$$0.1010010001\ldots1\underbrace{000\ldots0}_{n}1\ldots$$

یک عدد اصم است.

حل ــ برای اثبات، لازم است که تحقیق کنیم که کسر اعشاری مفروض، متناوب نیست. در واقع، n صفر، بین «یک»های n ام و $(n+1)$ ام وجود دارد، که این برای یک کسر متناوب اتفاق نمی‌افتد.

۲ ـ ۱ ـ ۱ ثابت کنید، هرعدد که منحصراً ارقام اعشاری مرتبه 10^n ام آنها (فقط در این مکان) صفر باشد، اصم است.

۳ ـ ۱ ـ ۱ ثابت کنید مجموع و یا تفاضل، یک عدد گویای α و یک عدد اصم β، یک عدد اصم است.

حل ــ مجموع α و β را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\alpha+\beta=\gamma$ عددی گویاست، آنگاه $\beta=\gamma-\alpha$ هم گویاست، زیرا تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست، که این با فرض متناقض است. پس $\alpha+\beta$ اصم است.

۴ ـ ۱ ـ ۱ اگر $\alpha\neq 0$ یک عدد گویا و β یک عدد اصم باشد. ثابت کنید که $\alpha\beta$ و α/β اصم است.

۵ ـ ۱ ـ ۱ (a) مطلوبست تعیین تمام مقادیر گویای x بطوری که $y=\sqrt{x^2+x+3}$ عددی گویا باشد.

حل ــ (a) فرض می‌کنیم x و $y=\sqrt{x^2+x+3}$ دو عدد گویا هستند. آنگاه $y-x=q$ هم عددی گویاست. حال x را نسبت به q حساب می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
y-x=\sqrt{x^2+x+3}-x&=q,\\
\sqrt{x^2+x+3}&=q+x,\\
x^2+x+3&=q^2+2qx+x^2,\\
x&=\frac{q^2-3}{1-2q}
\end{aligned}
$$

به سادگی با محاسبهٔ مستقیم معلوم می‌شود که $q\neq 1/2$. حال فرض می‌کنیم که $y=\sqrt{x^2+x+3}$ عددی گویاست، اگر $x=\frac{q^2-3}{1-2q}$، که در آن q هرعدد گویای مخالف با $1/2$ است.

در واقع

$$
y=\sqrt{x^2+x+3}=\sqrt{\frac{(q^2-3)^2}{(1-2q)^2}+\frac{q^2-3}{1-2q}+3}=
$$
$$
=\sqrt{\frac{q^4-2q^3+7q^2-6q+9}{(1-2q)^2}}=\sqrt{\frac{(q^2-q+3)^2}{(1-2q)^2}}=\frac{q^2-q+3}{|1-2q|}\quad\left(q\neq\frac{1}{2}\right)
$$

عبارت اخیر برای هر عدد گویای q مخالف با $1/2$، برابر یک عدد گویاست.

(b) ثابت کنید $\sqrt{2}$ یک عدد اصم است.

راهنمائی: با برهان خلف عمل کنید. فرض کنید $2=\frac{p^2}{q^2}$ که p و q دو عدد طبیعی هستند که مضرب مشترکی ندارند.

۱ـ۱ـ۶ ثابت کنید $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ یک عدد اصم است.

حل ــ از برهان خلف استفاده می‌کنیم، یعنی، فرض می‌کنیم $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ یک عدد گویاست.

پس

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

هم گویاست، زیرا خارج قسمت دو عدد گویا، عددی گویاست. بنابراین عدد

$$\sqrt{2}=\frac{1}{2}[(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})]$$

گویاست که این با اصم بودن عدد $\sqrt{2}$ (مسئلهٔ ۵ـ۱ـ۱) تناقض دارد. پس $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ اصم است.

۱ـ۱ـ۷ ثابت کنید به ازای هر عدد گویای مثبت r که در شرط $r^2<2$ صدق کند، همیشه می‌توان عدد گویای بزرگتر $r+h\ (h>0)$ یافت که درآن $(r+h)^2<2$.

حل ــ می‌توان فرض کرد که $h<1$. آنگاه $h^2<h$ و $(r+h)^2<r^2+2rh+h$ کافی است $r^2+2rh+h=2$ را در نظر بگیریم، یعنی، $h=(2-r^2)/(2r+1)$.

۱ـ۱ـ۸ ثابت کنید به ازای هر عدد گویای مثبت s که در شرط $s^2>2$ صدق می کند، می‌توان عدد گویای کوچکتر $s-k\ (k>0)$ را یافت که درآن

$$(s-k)^2>2$$

راهنمائی: می‌توانید فرض کنید

$$k=\frac{s^2-2}{2s}$$

۱ـ۱ـ۹ نامساویهای زیر را حل کنید:

(a) $|2x-3|<1;$
(b) $(x-2)^2\geqslant 4;$
(c) $x^2+2x-8\leqslant 0;$
(d) $|x^2-7x+12|>x^2-7x+12$

جواب: (b) $x \geqslant 4, \quad x \leqslant 0$; (c) $-4 \leqslant x \leqslant 2$

حل ــ (a) نامساوی $|2x-3| < 1$ با نامساویهای

$$-1 < 2x-3 < 1$$

معادل است.
که از آن

$$2 < 2x < 4 \quad \text{و} \quad 1 < x < 2$$

(d) نامساوی مفروض برای آن مقادیر x معتبر است که $x^2-7x+12 < 0$ از آنجا $3 < x < 4$.

۱ ـ ۱ ـ ۱۰ نشان دهید کدامیک از معادلات زیر جواب دارند؟

(a) $|x| = x+5$; (b) $|x| = x-5$?

حل ــ (a) به ازای $x \geqslant 0$ داریم $x = x+5$ پس در این حالت جواب وجود ندارد. به ازای $x < 0$ داریم $-x = x+5$ از آنجا $x = -5/2$ این مقدار در معادلهٔ اول صدق می‌کند.

(b) به ازای $x \geqslant 0$ داریم $x = x-5$ که دارای جواب نیست. در $x < 0$ داریم $-x = x-5$ و از آنجا $x = 5/2$ که این بافرض $(x < 0)$ متناقض است. پس معادله جواب ندارد.

۱ ـ ۱ ـ ۱۱ مقادیر x را طوری بیابید که در معادلات زیر صدق کنند:

(a) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1}$;
(b) $|x^2-5x+6| = -(x^2-5x+6)$

جواب: (a) $x \geqslant 1$ یا $x < -1$ **راهنمائی:** تساوی به ازای آن مقادیر x معتبر است که $\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0$

(b) $2 \leqslant x \leqslant 3$ **راهنمائی:** تساوی به ازای آن مقادیر x درست است که $x^2-5x+6 \leqslant 0$

۱ ـ ۱ ـ ۱۲ مقادیر x را طوری بیابید که در معادلات زیر صدق کنند:

(a) $|(x^2+4x+9)+(2x-3)| = |x^2+4x+9| + |2x-3|$;
(b) $|(x^4-4)-(x^2+2)| = |x^4-4| - |x^2+2|$.

حل ــ (a) تساوی $|a+b|=|a|+|b|$ فقط به فقط وقتی برقرار است که هردو جمعوند، همعلامت باشند. زیرا به ازای هرمقدار x

$$x^2+4x+9=(x+2)^2+5>0$$

پس تساوی به ازای آن مقادیر x برقرار است که $2x-3\geqslant 0$ یعنی، $x\geqslant 3/2$

(b) تساوی $|a-b|=|a|-|b|$ فقط و فقط وقتی برقرار است که a و b هم علامت بوده و رابطهٔ $|a|\geqslant|b|$ برقرار باشد.

در این حالت تساوی برای آن مقادیر x برقرار است که رابطهٔ زیر درست باشد،

$$x^4-4\geqslant x^2+2.$$

از آنجا

$$x^2-2\geqslant 1; \quad |x|\geqslant\sqrt{3}$$

۱۳ ـ ۱ ـ ۱ نامساویهای زیر را حل کنید:

(a) $|3x-5|-|2x+3|>0;$
(b) $|x^2-5x|>|x^2|-|5x|.$

جواب: (a) $x<\dfrac{2}{5}$ یا $x>8;$ (b) $x<0$ یا $0<x<5$

راهنمائی: نامساوی $|a-b|>|a|-|b|$ وقتی برقرار است که a و b هم‌علامت نباشند و $|a|<|b|$ برقرار باشد.

۱۴ ـ ۱ ـ ۱ ریشه‌های معادلات زیر را بیابید:

(a) $|\sin x|=\sin x+1;$
(b) $x^2-2|x|-3=0.$

حل ــ (a) این معادله برای آن مقادیر x بامعنی است که $\sin x<0$ پس

$$-\sin x=\sin x+1, \quad \text{یا} \quad \sin x=-1/2$$

از آنجا

$$x = \pi k - (-1)^k \pi/6 \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots)$$

(b) این معادله را می‌توان به‌روش معمول با در نظر گرفتن حالات $x \geqslant 0$ و $x \leqslant 0$ حل کرد. همچنین می‌توانیم آنرا به‌صورت

$$|x|^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

به نویسیم و فرض کنیم $y = |x|$،

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

از آنجا $y_1 = 3,\ y_2 = -1$ چون $y = |x| \geqslant 0$، مقدار $y_2 = -1$ قابل قبول نیست پس

$$y = |x| = 3$$

یعنی

$$x_1 = -3,\ x_2 = 3$$

۲ ـ ۱ تابع- حوزه تعریف

متغیر مستقل x بوسیلهٔ مجموعهٔ مقادیر آن، مانند X مشخص می‌شود.

اگر برای هرمقدار متغیر مستقل $x \in X$ یک مقدار معین از متغیر دیگر y متناظر باشد، آنگاه y را تابع x با **حوزهٔ تعریف (یاحوزهٔ)** X گویند و وابستگی بین این دو را با نماد تابعی $y = y(x)$ یا $y = f(x)$، یا $y = \varphi(x)$ و غیره نشان می‌دهند. مجموعهٔ مقادیر تابع $y(x)$ را حوزهٔ مقادیر آن تابع نامند.

بویژه، توابعی که در مجموعهٔ اعداد طبیعی $1,\ 2,\ 3,\ \dots$ تعریف شده‌اند، **دنباله‌های عددی** نامیده می‌شوند. آنها را به‌صورت $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$ یا $\{x_n\}$ می‌نویسند

۱ ـ ۲ ـ ۱ تابع $f(x) = (x+1)/(x-1)$ مفروض است. مطلوبست تعیین

$$f(2x),\ 2f(x),\ f(x^2),\ [f(x)]^2$$

حل ـ

$$f(2x)=\frac{2x+1}{2x-1};\quad 2f(x)=2\frac{x+1}{x-1};$$
$$f(x^2)=\frac{x^2+1}{x^2-1};\quad [f(x)]^2=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2.$$

۲ ـ ۲ ـ ۱ (a) تابع

$$f(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$$

مفروض است نشان دهید که به ازای $x_1,\ x_2\in(-1,\ 1)$ اتحاد زیر برقرار است:

$$f(x_1)+f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right).$$

حل ـ در $x\in(-1,\ 1)$ داریم $(1-x)/(1+x)>0$ بنابراین

$$f(x_1)+f(x_2)=\log\frac{1-x_1}{1+x_1}+\log\frac{1-x_2}{1+x_2}=\log\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)}. \qquad (1)$$

از طرفی:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)=\log\frac{1-\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}{1+\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}=\log\frac{1+x_1x_2-x_1-x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2}=$$
$$=\log\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)},$$

که این باطرف راست رابطه (۱) برابر است.

(b) تابع $f(x)=(a^x+a^{-x})/2\ \ (a>0)$ مفروض است. نشان دهید که

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

۳ ـ ۲ ـ ۱ تابع $f(x)=(x+1)/(x^3-1)$ مفروض است. مطلوبست تعیین

$$f(-1);\ f(a+1);\ f(a)+1.$$

جواب: $0;\ \frac{a+2}{[a(a^2+3a+3)]};\quad (a^3+a)(a^3-1).$

۴ - ۲ - ۱ تابع $f(x)=x^3-1$ مفروض است. مطلوبست محاسبهٔ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ (b\neq a) \quad \text{و} \quad f\left(\frac{a+h}{2}\right).$$

جواب: $b^2+ab+a^2;\ \frac{(a+h)^3}{8}-1$

۵ - ۲ - ۱ تابع زیر مفروض است:

$$f(x)=\begin{cases} 3^{-x}-1, & -1\leqslant x<0,\\ \tan(x/2), & 0\leqslant x<\pi,\\ x/(x^2-2), & \pi\leqslant x\leqslant 6.\end{cases}$$

مطلوبست محاسبهٔ

$$f(-1),\ f(\pi/2),\ f(2\pi/3),\ f(4),\ f(6).$$

حل ـ نقطهٔ $x=-1$ در فاصلهٔ $[-1,\ 0)$ قرار دارد. بنابراین

$$f(-1)=3^{-(-1)}-1=2.$$

نقاط $x=\pi/2,\quad x=2\pi/3$ به فاصلهٔ $[0,\ \pi)$ تعلق دارند. پس

$$f(\pi/2)=\tan(\pi/4)=1;\quad f(2\pi/3)=\tan(\pi/3)=\sqrt{3}.$$

نقاط $x=6 \quad x=4;$ در فاصلهٔ $[\pi,\ 6]$ هستند، پس

$$f(4)=\frac{4}{16-2}=\frac{2}{7};\quad f(6)=\frac{6}{36-2}=\frac{3}{17}.$$

۶ - ۲ - ۱ تابع $f(x)$ بادستور زیر تعریف می‌شود:

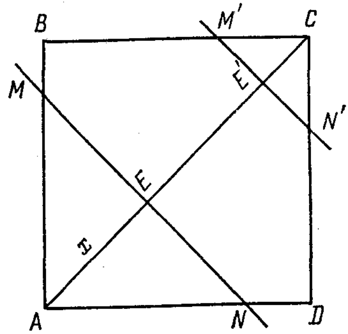
$$f(x)=\begin{cases} 2x^3+1, & x\leqslant 2,\\ 1/(x-2), & 2<x\leqslant 3,\\ 2x-5, & x>3.\end{cases}$$

مطلوبست محاسبهٔ

$$f(\sqrt{2}),\ f(\sqrt{8}),\ f(\sqrt{\log_2 1024})$$

جواب: $4\sqrt{2}+1;\ \frac{\sqrt{2}+1}{2};\quad 2\sqrt{10}-5.$

۷ـ۲ـ۱ در مربع $ABCD$ به ضلع $AB=2$ خط راست MN عمود به AC رسم شده است. فاصلهٔ راس A تا خط MN را با x نشان می‌دهیم. و وقتی $x=\sqrt{2}/2$ و $x=2$، مساحت مثلث AMN را که به‌وسیلهٔ خط راست MN از مربع بریده می‌شود، حساب کنید. شکل (۱)



شکل ۱

حل ــ متوجه هستیم که $AC=2\sqrt{2}$ پس $0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$ اگر $x\leqslant\sqrt{2}$ آنگاه

$$S(x)=S_{\triangle\ AMN}=x^2.$$

اگر $x>\sqrt{2}$ آنگاه

$$S(x)=4-(2\sqrt{2}-x)^2=-x^2+$$
$$+4x\sqrt{2}-4$$

پس

$$S(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2},\\ -x^2+4x\sqrt{2}-4, & \sqrt{2}<x\leqslant 2\sqrt{2}.\end{cases}$$

زیرا $S(\sqrt{2}/2)=(\sqrt{2}/2)^2={}^1/_2$ ، $\sqrt{2}/2<\sqrt{2}$ چون $2>\sqrt{2}$

$$S(2)=-4+8\sqrt{2}-4=8(\sqrt{2}-1)$$

۸ - ۲ - ۱ در بسط $\sqrt{2}$ به کسر اعشاری، رقم n ام جزء اعشاری را با α_n نشان می‌دهیم که یک تابع خاص $\alpha_n = \varphi(n)$ مشخص می‌شود. مطلوبست محاسبهٔ

$$\varphi(1),\ \varphi(2),\ \varphi(3),\ \varphi(4).$$

حل ــ با استخراج ریشهٔ دوم از عدد ۲ داریم $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$ پس

$$\varphi(1) = 4;\quad \varphi(2) = 1;\quad \varphi(3) = 4;\quad \varphi(4) = 2.$$

۹ - ۲ - ۱ مقدار $f(x) = 49/x^2 + x^2$ را در نقاطی که $7/x + x = 3$ محاسبه نمائید.

حل ــ $f(x) = 49/x^2 + x^2 = (7/x + x)^2 - 14$ ولی $7/x + x = 3$ پس

$$f(x) = 9 - 14 = -5$$

۱۰ - ۲ - ۱ تابعی به‌صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ را طوری بیابید که داشته باشیم: $f(0) = 5;\ f(-1) = 10;\ f(1) = 6.$

حل ــ

$$f(0) = 5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c,$$
$$f(-1) = 10 = a - b + c,$$
$$f(1) = 6 = a + b + c.$$

از دستگاه معادلات فوق ضرایب a, b, c را تعیین می‌کنیم، داریم:

$a = 3;\ b = -2;\ c = 5$ پس $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

۱۱ - ۲ - ۱ تابعی به صورت زیر بیابید،

$$f(x) = a + bc^x \quad (c > 0)$$

در صورتی که $f(0) = 15;\ f(2) = 30;\ f(4) = 90.$

جواب: $f(x) = 10 + 5 \times 2^x$

۱۲ - ۲ - ۱ مطلوب است تعیین $\varphi[\psi(x)]$ و $\psi[\varphi(x)]$ در صورتی که

$$\varphi(x) = x^2 \quad \text{و} \quad \psi(x) = 2^x.$$

حل ــ

$$\varphi[\psi(x)] = [\psi(x)]^2 = (2^x)^2 = 2^{2x},$$
$$\psi[\varphi(x)] = 2^{\varphi(x)} = 2^{x^2}$$

۱ـ۲ـ۱۳ تابع زیر مفروض است

$$f(x)=\frac{5x^2+1}{2-x}.$$

مطلوب است $f(3x);\ f(x^3);\ 3f(x);\ [f(x)]^3$

جواب: $f(3x)=\frac{45x^2+1}{2-3x}$; $f(x^3)=\frac{5x^6+1}{2-x^3}$;

$$3f(x)=\frac{15x^2+3}{2-x};\quad [f(x)]^3=\frac{125x^6+75x^4+15x^2+1}{8-12x+6x^2-x^3}$$

۱ـ۲ـ۱٤ فرض می‌کنیم

$$f(x)=\begin{cases} 3^x & -1<x<0, \\ 4 & 0\leqslant x<1, \\ 3x-1 & 1\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$$

مطلوبست محاسبهٔ $f(2),\ f(0),\ f(0.5),\ f(-0.5),\ f(3)$

جواب: $f(2)=5; f(0)=4; f(0.5)=4; f(-0.5)=\frac{\sqrt{3}}{3};\ f(3)=8.$

۱ـ۲ـ۱۵ ثابت کنید هرگاه درتابع نمائی $y=a^x\ (a>0;\ a\neq 1)$ مقادیر متغیر $x=x_n\ (n=1,\ 2,\ \ldots)$ یک تصاعد حسابی تشکیل دهند، آنگاه مقادیر متناظر ازتابع، $y_n=a^{x_n}\ (n=1,\ 2,\ \ldots)$ یک تصاعد هندسی می‌سازند.

راهنمائی: از $x_{n+1}=x_n+d$ نتیجه می‌شود که $y_{n+1}=a^{x_{n+1}}=a^{x_n+d}=a^{x_n}a^d$

۱ـ۲ـ۱٦ بافرض $f(x)=x^2+6,\ \varphi(x)=5x$ معادلهٔ $f(x)=|\varphi(x)|$ را حل کنید

جواب: $x=\pm 2;\ \pm 3$

۱ـ۲ـ۱۷ تابع $f(x)$ را تعیین کنید، هرگاه

$$f(x+1)=x^2-3x+2$$

جواب: $f(x)=x^2-5x+6$

۱۸ ـ ۲ ـ ۱ اگر $1/x+x=5$ مطلوبست محاسبهٔ

$$f(x)=x^2+1/x^2 \quad \text{و} \quad \varphi(x)=x^4+1/x^4$$

جواب: $f(x)=23;\ \varphi(x)=527$

۱۹ ـ ۲ ـ ۱ اگر $f(x)=x+1;\ \varphi(x)=x-2$ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|$$

جواب: $x\leqslant -1$ یا $x\geqslant 2$

۲۰ ـ ۲ ـ ۱ مستطیلی به طول x در مثلث ABC به قاعدهٔ b و ارتفاع h محاط شده است. محیط و مساحت مستطیل را که به‌ترتیب با P و S نشان می‌دهیم نسبت به x حساب کنید.

جواب: $P=2b+2\left(1-\frac{b}{h}\right)x;\ S=b\left(1-\frac{x}{h}\right)x$

۲۱ ـ ۲ ـ ۱ حوزهٔ تعریف توابع زیر را تعیین نمائید:

(a) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$;

(b) $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

(c) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$;

(d) $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$;

(e) $f(x)=\sqrt{\log\frac{5x-x^2}{4}}$;

(f) $f(x)=\log_x 5$;

(g) $f(x)=\log\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}$;

(h) $f(x)=\arcsin\frac{x-3}{2}-\log(4-x)$;

(i) $f(x)=\frac{1}{\log(1-x)}+\sqrt{x+2}$;

(j) $f(x)=\log\cos x$;

(k) $f(x)=\arccos\frac{3}{4+2\sin x}$;

(l) $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

حل ــ (a) حوزهٔ تعریف تابع مفروض شامل آن مقادیری از x است که به ازای آنها، عبارات زیر هردو رادیکال، حقیقی باشند. برای این منظور دوشرط زیر باید برقرار باشد:

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ 6-x \geqslant 0. \end{cases}$$

باحل این نامساویها داریم $x \geqslant 1;\ x \leqslant 6$ بنابراین، حوزهٔ تعریف تابع مفروض فاصلهٔ [۱ ، ٦] است.

(e) تابع برای آن مقادیر x معین است که

$$\log \frac{5x-x^2}{4} \geqslant 0.$$

این نامساوی وقتی برقرار است که

$$\frac{5x-x^2}{4} \geqslant 1 \quad \text{یا} \quad x^2-5x+4 \leqslant 0.$$

باحل نامساوی اخیر داریم $1 \leqslant x \leqslant 4$ پس فاصلهٔ [۱ ، ٤] حوزهٔ تعریف تابع است.

(f) تابع به ازای مقادیر مثبت x که مخالف با ۱ هستند، معین است، معنی آن این است که حوزهٔ تعریف تابع، شامل فاصله‌های $(0,\ 1)$ و $(1,\ +\infty)$ می‌باشد.

(k) تابع به ازای آن مقادیر x معین است که

$$-1 \leqslant \frac{3}{4+2\sin x} \leqslant 1$$

چون به ازای هر x ، $4+2\sin x > 0$ ، مسئله منجر به حل نامساوی

$$\frac{3}{4+2\sin x} \leqslant 1$$

می‌شود. از آنجا

$$3 \leqslant 4+2\sin x, \text{ یعنی } \sin x \geqslant -{}^1/_2$$

با حل نامساوی اخیر داریم،

$$-\frac{\pi}{6}+2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

(l) تابع به ازای آن مقادیر x معین است که $|x|-x>0$ از آنجا $x<|x|$. این نامساوی وقتی برقرار است که $x<0$، بنابراین تابع در فاصلهٔ $(-\infty,\ 0)$ معین است.

جواب:

(b) $(2,\ 3)$; (c) $(-\infty,\ -1)$ and $(2,\ \infty)$; (d) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k=0,\ \pm1, \pm2,\ \ldots)$.

راهنمائی: چون $\sin x \leqslant 1$. تابع فقط وقتی معین است که $\sin x=1$.

(g) $(-\infty,\ 2)$ و $(3,\ \infty)$; (h) $[1,\ 4)$; (i) $(-2,\ 0)$ و $(0,\ 1)$; (j) $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<$
$<\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

۲۲ - ۲ - ۱ حوزه تعریف هریک از توابع زیر را تعیین کنید:

(a) $f(x)=\sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$;
(b) $f(x)=\log_2 \log_3 \log_4 x$;
(c) $f(x)=\frac{1}{x}+2^{\arcsin x}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}$;
(d) $f(x)=\log|4-x^2|$;
(e) $f(x)=\sqrt{\cos(\sin x)}+\arcsin\frac{1+x^2}{2x}$.

حوزهٔ مقادیر توابع زیر را تعیین نمائید:

(f) $y=\frac{1}{2-\cos 3x}$;

(g) $y=\frac{x}{1+x^2}$.

حل ــ (a) برای اینکه تابع $f(x)$ تعریف شود باید نامساوی

$$\arcsin(\log_2 x)\geqslant 0,$$

برقرار باشد.

از آنجا $0\leqslant \log_2 x\leqslant 1$ و $1\leqslant x\leqslant 2$.

(b) تابع $\log_2 \log_3 \log_4 x$ وقتی $\log_3 \log_4 x>0$، تعریف شده است. از آنجا $\log_4 x>1$ و $x>4$. پس حوزهٔ تعریف، فاصلهٔ $4<x<+\infty$ است.

(c) تابع $f(x)$ وقتی معین است که نامساویهای زیر باهم برقرار باشند:

$$x\neq 0;\ -1\leqslant x\leqslant 1 \quad \text{و} \quad x>2,$$

ولی نامساویهای $-1\leqslant x\leqslant 1$ و $x>2$ باهم برقرار نیستند، پس تابع به ازای هیچ مقدار x معین نیست.

(e) نامساویهای زیر باید با هم برقرار باشند،

$$\cos(\sin x)\geqslant 0 \quad \text{و} \quad \left|\frac{1+x^2}{2x}\right|\leqslant 1.$$

نامساوی اول برای هر مقدار x برقرار است، دومی وقتی برقرار است که $|x|=1$، بنابراین، حوزهٔ تعریف تابع مفروض فقط شامل دو نقطه $x=\pm 1$ است.

(f) داریم

$$\cos 3x=\frac{2y-1}{y}$$

زیرا

$$-1\leqslant \cos 3x\leqslant 1 \quad \text{و داریم} \quad -1\leqslant\frac{2y-1}{y}\leqslant 1$$

از آنجا، بادرنظر گرفتن $y>0$ ، داریم

$$-y\leqslant 2y-1\leqslant y \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1$$

(g) عبارت را نسبت به x حل می‌کنیم، داریم

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y}$$

حوزهٔ مقادیر تابع y از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$1-4y^2\geqslant 0$$

از آنجا

$$-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$$

جواب: (d) تابع در تمام نقاط بجز $x=\pm 2$ معین است.

۲۳ - ۲ - ۱ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\operatorname{arc}\ \tan\sqrt{x(x+1)}+\operatorname{arc}\ \sin\sqrt{x^2+x+1}=\pi/2.$$

حل ــ با فرض اینکه طرف اول تساوی یک تابع است، حوزهٔ تعریف آنرا تعیین می‌کنیم:

$$x^2+x\geqslant 0,\ 0\leqslant x^2+x+1\leqslant 1,$$

از آنجا $x^2+x=0$

پس طرف اول معادله وقتی حقیقی است که فقط $x_1=0$ و $x_2=-1$، با یک بررسی ساده معلوم می‌شود که این دو مقدار ریشه‌های معادله هستند.

این مسئله نشان می‌دهد که مطالعهٔ حوزه‌های تعریف یک تابع، ساده‌تر از حل معادلات، نامساویها و غیره است.

۲۴ - ۲ - ۱ حوزهٔ تعریف هریک از توابع زیر را تعیین کنید:

(a) $y=\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;

(b) $y=\log\sin(x-3)+\sqrt{16-x^2}$;

(c) $y=\sqrt{3-x}+\arccos\frac{x-2}{3}$;

(d) $y=\frac{x}{\log(1+x)}$.

جواب:

(a) $(-\infty,\ \infty)$; (b) $(3-2\pi,\ 3-\pi)$ و $(3,\ 4)$; (c) $[-1,\ 3]$; (d) $(-1,\ 0)$ و $(0,\ \infty)$.

۲۵ - ۲ - ۱ تابع $f(x)$ درفاصلهٔ $[0,\ 1]$ تعریف شده است. حوزهٔ تعریف هریک از توابع زیر را تعیین کنید:

(a) $f(3x^2)$; (b) $f(x-5)$; (c) $f(\tan x)$

حل — این توابع، توابع مرکب هستند.

(a) تغییر متغیری به صورت $u=3x^2$ درنظر می‌گیریم. آنگاه تابع $f(3x^2)=f(u)$ وقتی معین است که $0\leqslant u\leqslant 1$، یعنی، $0\leqslant 3x^2\leqslant 1$ از آنجا $-1/\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 1/\sqrt{3}$

(c) به‌طور مشابه: $0\leqslant \tan x\leqslant 1$، از آنجا

$$k\pi\leqslant x\leqslant \pi/4+k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

جواب: (b) $5\leqslant x\leqslant 6$.

۲۶ - ۲ - ۱ تابع $f(x)$ درفاصلهٔ [۱ و ۰] معین است. حوزهٔ تعریف هریک از توابع زیر را تعیین کنید:

(a) $f(\sin x)$; (b) $f(2x+3)$

جواب:

(a) $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$; (b) $\left[-\frac{3}{2},\ -1\right]$.

۳ ـ ۱ بررسی توابع

تابع $f(x)$ را که در مجموعه X تعریف شده است، به ترتیب در این مجموعه **غیر نزولی، صعودی، غیر صعودی و نزولی گویند**، هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ وقتی $x_1 < x_2$ به ترتیب نامساوی $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ، $f(x_1) < f(x_2)$، $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ ، $f(x_1) > f(x_2)$ برقرار باشد. تابع $f(x)$ را **یکنواخت** گویند اگر تابع دارای یکی از چهار خاصیت فوق باشد. تابع $f(x)$ را در مجموعهٔ X **کراندار از بالا** (یا **کراندار از پائین**) گویند اگر عددی مانند M (یا m) وجود داشته باشد بطوری که به ازای هر $x \in X$ ، $f(x) \leqslant M$ (یا به ازای هر $x \in X$ ، $m \leqslant f(x)$). تابع $f(x)$ را در مجموعه X **«کراندار»** گویند وقتی از بالا و از پائین کراندار باشد.

تابع $f(x)$ را **متناوب** گویند اگر عددی مانند $T > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x از حوزهٔ تعریف تابع (هردو نقطهٔ x و $x+T$ بایستی به حوزهٔ تعریف تعلق داشته باشند) $f(x+T) = f(x)$ کوچکترین عدد T را که دارای چنین خاصیتی است (اگر چنین عددی وجود داشته باشد) **دوره تناوب** تابع $f(x)$ گویند. تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_0 \in X$ بیشترین مقدار (ماکزیمم مقدار) را دارد هرگاه به ازای هر $x \in X$ ، $f(x_0) \geqslant f(x)$ ، و در این نقطه کمترین مقدار (مینیمم مقدار) را دارد وقتی به ازای هر $x \in X$ ، $f(x_0) \leqslant f(x)$. تابع معین $f(x)$ درمجموعه X را **زوج** گویند اگر به ازای هر نقطه از آن $f(-x) = f(x)$ و در مجموعه X **فرد** نامند اگر در هر نقطهٔ آن $f(-x) = -f(x)$.

در تجزیه و تحلیل رفتار یک تابع مراحل زیر توصیه می‌شود:

۱ ــ تعیین حوزهٔ تعریف تابع،

۲ ــ آیا تابع فرد، زوج، متناوب است؟

۳ ــ تعیین مقادیری از متغیر که تابع را صفر می‌کنند (نقاط صفر تابع).

٤ ــ تعیین علامت تابع در فواصل این نقاط.

۵ ــ آیا تابع کراندار است؟ و مقادیر ماکزیمم و مینیمم چیست؟

مراحل فوق کاملاً رفتار تابع را تجزیه و تحلیل نمی کنند بلکه در اغلب مواقع نکات دیگری هم مطرح می‌شوند.

۱ ـ ۳ ـ ۱ تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ مفروض است، فاصله‌های صعودی و نزولی و همچنین مقادیر ماکزیمم و مینیمم آنرا تعیین کنید.

حل ــ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم،

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

اگر $a > 0$ ، آنگاه تابع $f(x)$ به ازای آن مقادیر x که در نامساوی $x + b/(2a) > 0$ صدق می‌کنند صعودی است، یعنی، $x > -b/(2a)$ و وقتی $x + b/(2a) < 0$ ، یعنی، $x < -b/(2a)$ آنگاه تابع نزولی است پس، هرگاه $a > 0$ تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ نزولی است و در فاصلهٔ $(-b/(2a), +\infty)$ صعودی می‌باشد. واضح است که در نقطهٔ $x = -b/(2a)$ تابع دارای مقدار مینیمم

$$f_{\min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

است. به ازای $a > 0$ تابع مقدار ماکزیمم ندارد.

به‌طور مشابه، در $a < 0$ تابع $f(x)$ درفاصلهٔ $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ صعودی و در فاصلهٔ $(-b/(2a), \infty)$ نزولی است، در $x = -b/(2a)$ تابع $f(x)$ مقدار ماکزیمم

$$f_{\max} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

دارد از آنجا تابع مقدار مینیمم ندارد.

۲ ـ ۳ ـ ۱ (الف) مقدار مینیمم تابع

$$y = 3x^2 + 5x - 1$$

را حساب کنید.

(ب) مستطیلی با محیط ثابت را طوری تعیین کنید که مساحت ماکزیمم داشته باشد.

حل ــ (الف) نتیجهٔ مسئله ۱ ـ ۳ ـ ۱ را به کار می‌بریم: $a = 3 > 0,\ b = 5$
$c = -1$ مقدار مینیمم تابع در نقطهٔ $x = -5/6$ بدست می‌آید

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{37}{12}.$$

(ب) طول محیط مستطیل مطلوب را با $2p$ نشان می‌دهیم، طول یکی از ابعاد آنرا x فرض می‌کنیم؛ آنگاه S مساحت مستطیل از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$S = x(p - x) \quad \text{یا} \quad S = px - x^2$$

پس، مسئله برمی‌گردد به تعیین مقدار ماکزیمم تابع $S(x) = -x^2 + px$. دوباره مسئله ۱ - ۳ - ۱ را به کار می‌بریم: $a = -1 < 0,\ b = p,\ c = 0$، مقدار ماکزیمم تابع در نقطهٔ $x = -b/(2a) = p/2$ حاصل می‌شود. پس، یکی از ابعاد مستطیل مطلوب $p/2$ است، و بُعد دیگر برابر با $p - x = p/2$ است، یعنی مستطیل مورد نظر یک مربع است.

۱ - ۳ - ۳ نشان دهید

الف) تابع $f(x) = x^3 + 3x + 5$ در تمام حوزهٔ تعریف صعودی است؛

ب) تابع $g(x) = x/(1 + x^2)$ در فاصلهٔ $(1, +\infty)$ نزولی است.

حل ــ تابع به ازای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است. اعداد دلخواه x_1 و x_2 را که $x_1 < x_2$ در نظر گرفته و تفاضل زیر را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^3 + 3x_2 + 5) - (x_1^3 + 3x_1 + 5) = \\ &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + 3) = \\ &= (x_2 - x_1)\left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 3\right]. \end{aligned}$$

چون $x_2 - x_1 > 0$ و عبارت داخل کروشه به ازای هر x_1 و x_2 مثبت است، پس $f(x_2) - f(x_1) > 0$ یعنی، $f(x_2) > f(x_1)$ این بدان معناست که تابع $f(x)$ به ازای هر x صعودی است.

۱ - ۳ - ٤ فاصله‌های صعودی و نزولی هریک از توابع زیر را بیابید:

(a) $f(x) = \sin x + \cos x;$
(b) $\tan(x + \pi/3).$

حل ــ (a) فرمول آشنای مثلثاتی را به کار می‌بریم، داریم

$$f(x) = \sqrt{2}\cos(x - \pi/4)$$

می‌دانیم که تابع $\cos x$ در فاصلهٔ

$$2n\pi \leqslant x \leqslant (2n + 1)\pi$$

نزولی است و در فاصله‌های

$$(2n - 1)\pi \leqslant x \leqslant 2n\pi \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

صعودی است .

پس، فواصل نزولی تابع $f(x)$ به قرار زیرند :

$$\pi/4+2n\pi \leqslant x \leqslant \pi/4+(2n+1)\pi \quad (n=0,\ \pm 1,\ \ldots),$$

و فواصل صعودی این تابع به صورت زیر می‌باشند :

$$\pi/4+(2n-1)\pi \leqslant x \leqslant \pi/4+2n\pi \quad (n=0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

جواب :(b) تابع در فاصلهٔ

$$-\frac{5\pi}{6}+k\pi < x < \frac{\pi}{6}+k\pi \quad (k=0,\ \ \pm 1,\ \ \pm 2,\ \ldots)$$

صعودی و در سایر فاصله‌ها نزولی است .

۵ ـ ۳ ـ ۱ مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=a\cos x+b\sin x \quad (a^2+b^2>0).$$

حل ــ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha),$$

که در آن $\cos\alpha=a/\sqrt{a^2+b^2},\ \sin\alpha=b/\sqrt{a^2+b^2}$ چون $|\cos(x-\alpha)|\leqslant 1$، پس مقدار ماکزیمم $f(x)$ برابر است با $+\sqrt{a^2+b^2}$ (وقتی $\cos(x-\alpha)=1$)، و مقدار مینیمم تابع $f(x)$ برابر است با $-\sqrt{a^2+b^2}$ (وقتی $\cos(x-\alpha)=-1$).

۶ ـ ۳ ـ ۱ مقدار مینیمم تابع

$$f(x)=3^{(x^2-2)^3+8}$$

را تعیین کنید.

حل ــ توان را با $\varphi(x)$ نشان می‌دهیم،

$$\varphi(x)=(x^2-2)^3+8.$$

تابع $f(x)=3^{\varphi(x)}$ در نقطه‌ای مینیمم است که تابع $\varphi(x)$ در آن نقطه مینیمم باشد.
پس

$$\varphi(x)=x^6-6x^4+12x^2=x^2\left[(x^2-3)^2+3\right].$$

از آنجا معلوم می‌شود که تابع $\varphi(x)$ مقدار مینیممی برابر صفر در نقطهٔ $x=0$ دارد. از این رو مقدار مینیمم تابع $f(x)$ برابر است با $3^0=1$.

۷ـ۳ـ۱ فاصله های صعودی و نزولی تابع زیر را تعیین کنید:

$$f(x)=\tan x+\cot x,\ 0<x<\pi/2,$$

جواب: تابع در فاصلهٔ $0<x\leqslant\frac{\pi}{4}$ از $+\infty$ تا ۲ نزول و در فاصلهٔ $\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ از ۲ تا $+\infty$ صعود می‌کند.

۸ـ۳ـ۱ n عدد، $a_1, a_2, \ldots, a_n$ مفروضند، مقدار x را طوری بیابید که در آن تابع

$$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2$$

مینیمم باشد.

حل ــ تابع $f(x)$ را به صورت

$$f(x)=nx^2-2(a_1+a_2+\ldots+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2),$$

می‌نویسیم. واضح است که $f(x)$ به صورت سه جمله‌ای ax^2+bx+c است که در آن $a=n>0$ با به کاربردن نتایج مسئله ۱ـ۳ـ۱ درمی‌یابیم که تابع مفروض به ازای $x=-b/(2a)$ یعنی در نقطهٔ $x=(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n$ مینیمم است.

بنابراین، مجموع مربعات، تفاضلهای x از n عدد مفروض، وقتی مینیمم است که x با میانگین حسابی آن اعداد برابر باشد.

۹ـ۳ـ۱ کدامیک از توابع زیر زوج یا فرد هستند و کدامیک از آنها فرد و یا زوج نیستند.

(a) $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$;

(b) $f(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$;

(c) $f(x)=2x^3-x+1$;

(d) $f(x)=x\frac{a^x+1}{a^x-1}$.

حل ــ (a) می‌توان تحقیق کرد که $f(+x)+f(-x)=0$ در واقع،

$$f(+x)+f(-x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})+\log(-x+\sqrt{1+x^2})=$$
$$=\log(1+x^2-x^2)=0,$$

پس به ازای هر x، $f(-x) = -f(x)$ یعنی تابع فرد است.

$$f(-x) = \log\frac{1+x}{1-x} = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\log\frac{1-x}{1+x} \quad (b)$$

پس به ازای هر x از حوزهٔ تعریف $(-1, 1)$، $f(-x) = -f(x)$ در نتیجه، تابع فرد است.

جواب: (c) تابع نه فرد است و نه زوج. (d) تابع زوج است.

۱۰ ـ ۳ ـ ۱ کدامیک از توابع زیر زوج و کدامیک فرد هستند.

(a) $f(x) = 4 - 2x^4 + \sin^2 x;$

(b) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2};$

(c) $f(x) = \dfrac{1+a^{kx}}{1-a^{kx}};$

(d) $f(x) = \sin x + \cos x;$

(e) $f(x) = \text{const}.$

جواب: (a) زوج. (b) فرد. (c) فرد. (d) نه فرد است و نه زوج. (e) زوج.

۱۱ ـ ۳ ـ ۱ ثابت کنید اگر تابع $f(x)$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب T باشد، آنگاه تابع $f(ax+b)$ که $a > 0$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب T/a است.

حل ــ اولاً

$$f[a(x+T/a)+b] = f[(ax+b)+T] = f(ax+b),$$

زیرا T دوره تناوب $f(x)$ است. ثانیاً فرض کنید T_1 عدد مثبتی است به طوری که

$$f[a(x+T_1)+b] = f(ax+b).$$

نقطهٔ دلخواه x را از حوزهٔ تعریف تابع $f(x)$ انتخاب کرده و فرض می‌کنیم $x' = (x-b)/a$ پس

$$f(ax'+b) = f\left(a\frac{x-b}{a}+b\right) = f(x) = f[a(x'+T_1)+b] =$$
$$= f(ax'+b+aT_1) = f(x+aT_1).$$

از آنجا نتیجه می‌شود که $T \leqslant aT_1$ یعنی، $T_1 \geqslant T/a$ پس T/a دورهٔ تناوب $f(ax+b)$ است.

توجه: تابع متناوب $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ را با دامنهٔ $|A|$، فرکانس ω و فاز اولیهٔ φ **همساز** گویند که در آن A, ω, φ مقادیر ثابت هستند. چون دورهٔ تناوب

تابع $\sin x$ برابر 2π است، پس
$A\sin(\omega x+\varphi)$ دارای دورهٔ تناوب $T=2\pi/\omega$ است.

۱۲ - ۳ - ۱ در توابع همساز زیر دامنهٔ $|A|$ فرکانس ω فاز اولیه φ و دورهٔ تناوب T را تعیین کنید.

(a) $f(x)=5\sin 4x$;
(b) $f(x)=4\sin(3x+\pi/4)$;
(c) $f(x)=3\sin(x/2)+4\cos(x/2)$.

جواب:

(a) $|A|=5,\ \ \omega=4,\ \ \varphi=0,\ \ T=\frac{\pi}{2}$; (b) $|A|=4,\ \omega=3,\ \varphi=\frac{\pi}{4},\ \ T=\frac{2\pi}{3}$;
(c) $|A|=5,\ \omega=\frac{1}{2},\ \varphi=\arctan\frac{4}{3},\ T=4\pi$.

راهنمائی: $3\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}=5\sin\left(\frac{x}{2}+\varphi\right)$ که در آن $\sin\varphi=\frac{4}{5}$
$\cos\varphi=\frac{3}{5}$،

۱۳ - ۳ - ۱ دورهٔ تناوب هریک از توابع زیر را بیابید:

(a) $f(x)=\tan 2x$;
(b) $f(x)=\cot(x/2)$;
(c) $f(x)=\sin 2\pi x$.

جواب (b) $T=2\pi$; (c) $T=1$

حل — (a) چون تابع $\tan x$ دورهٔ تناوب π دارد، تابع $\tan 2x$ دارای دورهٔ تناوب $\pi/2$ است.

۱۴ - ۳ - ۱ دورهٔ تناوب هریک از توابع زیر را بیابید:

(a) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$;
(b) $f(x)=|\cos x|$.

حل — (a)

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}\right);$$

از آنجا $T=2\pi/\omega=2\pi/4=\pi/2$.

(b) $f(x)=|\cos x|=\sqrt{\cos^2 x}=\sqrt{(1+\cos 2x)/2}$ ولی تابع $\cos 2x$ دارای دورهٔ تناوب $T=\pi$ است، پس تابع مفروض هم دارای همان دورهٔ تناوب است.

۱۵ ـ ۳ ـ ۱ ثابت کنید که تابع $f(x) = \cos x^2$ یک تابع متناوب نیست.

حل ــ از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم تابع دارای دورهٔ تناوب T است.

بنابراین رابطهٔ $\cos x^2 \equiv \cos (x+T)^2$ برقرار است.

با توجه به معادلهٔ کوسینوسی فوق به ازای هر مقدار صحیح k داریم:

$$x^2 + 2Tx + T^2 \pm x^2 \equiv 2\pi k.$$

ولی این رابطه غیر ممکن است، زیرا k فقط مقادیر صحیح را می‌پذیرد، و طرف اول رابطه، خطی بوده و یا تابع درجه دوم از متغیر پیوسته x است.

۱۶ ـ ۳ ـ ۱ بیشترین مقدار تابع زیر را بیابید

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x^2 - 4x + 3}}$$

جواب: مقدار ماکزیمم $f(1) = 2$ است.

راهنمائی: تابع وقتی بیشترین مقدار را دارد که سه جمله‌ای $2x^2 - 4x + 3$ کمترین مقدار را داشته باشد.

۱۷ ـ ۳ ـ ۱ کدامیک از توابع زیر زوج و کدامیک فرد هستند:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;
(b) $f(x) = x^2 - |x|$;
(c) $f(x) = x \sin^2 x - x^3$;
(d) $f(x) = (1+2^x)^2/2^x$?

جواب: (a) زوج. (b) زوج. (c) فرد. (d) زوج.

۱۸ ـ ۳ ـ ۱ دورهٔ تناوب هریک از توابع زیر را بیابید:

(a) $f(x) = \arctan(\tan x)$;
(b) $f(x) = 2\cos\frac{x-\pi}{3}$.

جواب: (a) $T = \pi$; (b) $T = 6\pi$

۱۹ ـ ۳ ـ ۱ ثابت کنید که توابع زیر غیر متناوب هستند:

(a) $f(x) = x + \sin x$; (b) $f(x) = \cos\sqrt{x}$

راهنمائی: (a) از برهان خلف استفاده کنید. پس

$$x + T + \sin(x+T) = x + \sin x,$$

از آنجا $\cos\left(x + \frac{T}{2}\right) = -\frac{T}{2\sin\frac{T}{2}}$ که این برای هر T برقرار نیست، زیرا طرف اول

ثابت نیست.

(b) از برهان خلف استفاده کنید. پس

$$\cos\sqrt{x+T}=\cos\sqrt{x}$$

نتیجه می‌شود

یا $\sqrt{x+T}+\sqrt{x}=2\pi k$ یا $\dfrac{T}{\sqrt{x+T}+\sqrt{x}}=2\pi k\ \ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$

که این غیر ممکن است، زیرا طرف اول تساویها توابعی پیوسته از x هستند.

۱ - ٤ تابع معکوس

فرض می‌کنیم تابع $y=f(x)$ در مجموعهٔ X معین بوده و دارای حوزهٔ مقادیر Y است. هرگاه به‌ازای هر $y\in Y$ مقدار منحصر بفرد x موجود باشد به طوری که $y=f(x)$ این تناظر تابع مشخص $x=g(y)$ موسوم به **تابع معکوس** را از تابع مفروض $y=f(x)$ تعریف می‌کند. شرط لازم برای وجود یک تابع معکوس، اکیداً صعودی بودن تابع اصلی $y=f(x)$ است. هرگاه تابع صعودی (یا نزولی) باشد، آنگاه تابع معکوس آن هم صعودی (یا نزولی) است.

نمودار تابع معکوس $x=g(y)$ به نمودار تابع $y=f(x)$ منطبق می‌شود هرگاه تغییرات متغیر مستقل آن را در روی محور y در نظر بگیریم. هرگاه تغییرات متغیر مستقل را روی محور x در نظر بگیریم، یعنی، معکوس تابع به صورت $y=g(x)$ نوشته شود، آنگاه نمودار تابع معکوس، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم می‌شود.

۱ - ٤ - ۱ معکوس تابع $y=3x+5$ را بیابید.

حل ــ تابع $y=3x+5$ در تمام نقاط محور حقیقی معین و صعودی است. بنابراین، یک تابع معکوس صعودی وجود دارد. معادلهٔ $y=3x+5$ را نسبت به x حل می‌کنیم، داریم $x=(y-5)/3$.

۲ - ٤ - ۱ نشان دهید که تابع $y=k/x\ \ (k\neq0)$ تابع معکوس خودش است.

حل ــ تابع در تمام نقاط بجز نقطهٔ $x=0$ معین و یکنواخت است. بنابراین، تابع معکوس موجود است. حوزهٔ مقادیر تابع، مجموعه تمام اعداد حقیقی، بجز $y=0$ است. با حل معادلهٔ $y=k/x$ نسبت به x داریم، $x=k/y$.

۳ ـ ٤ ـ ۱ معکوس تابع

$$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1}),\quad (a>0,\ a\neq 1).$$

را بیابید.

حل ــ تابع $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ به‌ازای هر x معین است، زیرا $\sqrt{x^2+1}>|x|$ و فرد است (مسئلهٔ ۹ـ۳ـ۱ (a) را ببینید). تابع به ازای مقادیر مثبت x صعودی است، بنابراین، در همه جا صعودی بوده و دارای تابع معکوس است. معادلهٔ

$$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$$

را نسبت به x حل می‌کنیم

$$a^y=x+\sqrt{x^2+1};\quad a^{-y}=-x+\sqrt{x^2+1},$$

از آنجا

$$x=\frac{1}{2}(a^y-a^{-y})=\sinh(y\ln a).$$

٤ ـ ٤ ـ ۱ نشان دهید که دو تابع

$$f(x)=x^2-x+1,\ x\geqslant 1/2 \quad \text{و} \quad \varphi(x)=1/2+\sqrt{x-3/4}$$

معکوس یکدیگرند و آنگاه معادلهٔ

$$x^2-x+1=1/2+\sqrt{x-3/4}.$$

را حل کنید.

حل ــ تابع $y=x^2-x+1=(x-1/2)^2+3/4$ در فاصلهٔ $1/2\leqslant x<\infty$ صعودی است، و با x دراین فاصله تغییر می‌کند و داریم $3/4\leqslant y<\infty$ بنابراین، تابع معکوس $x=g(y),\ x\geqslant 1/2$ در فاصلهٔ $3/4\leqslant y<\infty$ تعریف می‌شود که این تابع از معادلهٔ

$$x^2-x+(1-y)=0$$

به‌دست می‌آید. هرگاه این معادله را نسبت به x حل کنیم، داریم

$$x=g(y)=1/2+\sqrt{y-3/4}=\varphi(y)$$

حالا معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم

$$x^2-x+1=1/2+\sqrt{x-3/4}.$$

چون نمودارهای تابع اصلی و تابع معکوس آن فقط روی خط $y=x$ همدیگر را قطع می‌کنند بنابراین از حل معادلهٔ $x^2-x+1=x$ فقط $x=1$ به‌دست می‌آید.

۱ـ۴ـ۵ تابع معکوس $y=\sin x$ را به‌دست آورید.

حل ــ حوزهٔ تعریف تابع $y=\sin x$ مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی است. حوزهٔ مقادیر، فاصلهٔ [۱ ، ۱-] است، تا اینجا شرط وجودی یک تابع معکوس برآورد نشده است.

محور x را به فاصله‌های $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/2$ تقسیم می‌کنیم. هرگاه n زوج باشد، آنگاه تابع در فاصلهٔ $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/2$ صعودی است، هرگاه n فرد باشد، تابع دراین فاصله نزولی است.

پس، در هریک از این فاصله‌ها تابع معکوس وجود دارد و در فاصلهٔ [۱ ، ۱-] معین است. بویژه، برای یک فاصلهٔ $-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$ یک تابع معکوس به‌صورت $x=\arcsin y$ موجود است.

معکوس تابع $y=\sin x$ درفاصلهٔ $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/2$ که کلاً به صورت $\arcsin y$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x=(-1)^n\arcsin y+n\pi \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

۱ـ۴ـ۶ معکوس توابع زیر را بیابید:

(a) $y=\sin(3x-1)$ at $-(\pi/6+1/3)\leqslant x\leqslant(\pi/6+1/3)$;
(b) $y=\arcsin(x/3)$ at $-3\leqslant x\leqslant 3$;
(c) $y=5^{\log x}$;
(d) $y=2^{x(x-1)}$.

جواب:

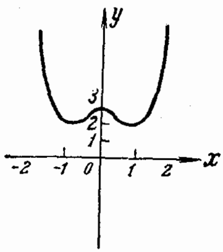
(a) $x=\dfrac{1+\arcsin y}{3}$; (b) $x=3\sin y$; (c) $x=y^{\frac{1}{\log 5}}$ $(y>0)$; (d) $x=$
$=\dfrac{\log_2 y}{\log_2 y-1}=\dfrac{\log y}{\log\frac{y}{2}}$ $(0<y<2$ or $2<y<\infty)$.

۱ـ۴ـ۷ ثابت کنید که تابع $y=(1-x)/(1+x)$ تابع معکوس خودش است.

۵ ـ ۱ منحنی نمایش تابع

۱ ـ ۵ ـ ۱ نمودار هریک از توابع زیر را رسم نمائید :

(a) $f(x)=x^4-2x^2+3;$
(b) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2};$
(c) $f(x)=\sin^2 x-2\sin x;$
(d) $f(x)=\arccos(\cos x);$
(e) $f(x)=\sqrt{\sin x};$
(f) $f(x)=x^{1/\log x}.$



شکل ۲

حل ــ (a) حوزهٔ تعریف تابع $f(x)$ مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی است. تابع $f(x)$ زوج است، پس، نمودار آن نسبت به محور y متقارن است و کافی است تابع را به ازای $x\geqslant 0$ مورد بررسی قرار دهیم. رابطهٔ تابعی را به صورت مربع کامل می‌نویسیم $f(x)=(x^2-1)^2+2$ چون $(x^2-1)^2\geqslant 0$، بنابراین، مقدار مینیمم آن برابر ۲ است، که به ازای $x=\pm 1$ به‌دست می‌آید. (شکل ۲)

تابع $f(x)$ در فاصلهٔ بستهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ از ۳ به ۲ نزول نموده ودر فاصلهٔ باز $1<x<\infty$ به‌طور نامتناهی صعود می‌کند.

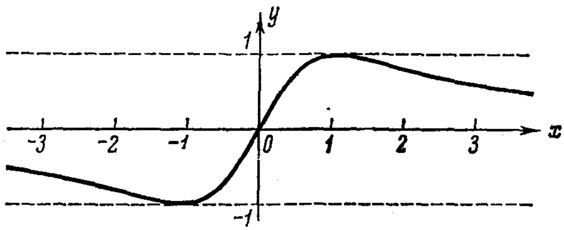
(b) حوزهٔ تعریف تابع $f(x)$ مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی است. تابع فرد است، بنابراین نمودار آن نسبت به مبداء مختصات متقارن است، پس کافی است آنرا به ازای $x\geqslant 0$ رسم کنیم.

چون $f(0)=0$ نمودار از مبداء می‌گذرد. واضح است که نقاط دیگری وجود ندارند که نمودار محورهای مختصات را قطع نماید. متوجه هستیم که $|f(x)|\leqslant 1$ زیرا

از آنجا $\quad 1+x^2 \geqslant 2|x| \quad$ یا $\quad (1-|x|)^2 \geqslant 0$

$$1 \geqslant \frac{2|x|}{1+x^2} = |f(x)|.$$

چون به ازای $x \geqslant 0$ ، $f(x) \geqslant 0$ و همچنین $f(1)=1$ ، در فاصلهٔ $[0, \infty)$ مقدار ماکزیمم تابع $f(x)$ برابر ۱ است، و مقدار مینیمم با صفر برابر است. (شکل ۳)



شکل ۳

حال ثابت می‌کنیم که تابع در فاصلهٔ بسته $0 \leqslant x \leqslant 1$ صعودی است. فرض می‌کنیم $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$ پس

$$f(x_2)-f(x_1) = \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2+2x_2x_1^2-2x_1-2x_1x_2^2}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} =$$

$$= \frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0$$

و $f(x_2) > f(x_1)$ ،

به‌طور مشابه، می‌توانیم نشان به‌دهیم که در فاصلهٔ $(1, \infty)$ تابع نزولی است. در نتیجه

$$f(x) = 2x/(1+x^2) < 2x/x^2 = 2/x,$$

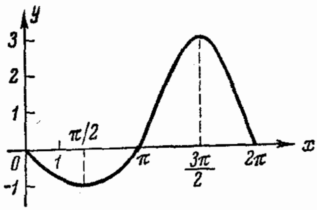
از آنجا، واضح است که وقتی x افزایش می‌یابد، $f(x)$ به صفر میل می‌کند.

(c) حوزهٔ تعریف تابع $f(x)$ مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی است. تابع دارای دوره تناوب 2π است، به‌این جهت کافی است آنرا در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ بررسی نمائیم، که تابع در نقاط $x=0;\ x=\pi;\ x=2\pi$ ازاین فاصله صفر می‌شود.

تابع را به صورت زیر می‌نویسیم

$$f(x) = (1-\sin x)^2 - 1,$$

متوجه هستیم که وقتی تابع $\sin x$ نزول می‌کند، $f(x)$ صعود می‌نماید و موقعی که $\sin x$ صعودی است، تابع نزول می‌کند. بنابراین $f(x)$ در فاصله‌های $[0, \pi/2]$ و $[3\pi/2, 2\pi]$ نزولی بوده و در فاصلهٔ $[\pi/2, 3\pi/2]$ صعود می‌کند. چون $f(\pi/2) = -1$ و $f(3\pi/2) = 3$ حوزهٔ مقادیر تابع $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$ است (شکل ٤).



شکل ٤

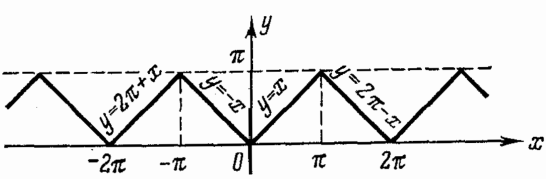
(d) حوزه تعریف تابع، مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی است. زیرا به ازای هر x $|\cos x| \leqslant 1$ بنابراین $\arccos(\cos x)$ دارای معنی است. تابع $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است، پس، کافی است نمودار آنرا در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ رسم نمائیم. اما در این فاصله تساوی زیر برقرار است،

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 2\pi - x, & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

در حقیقت اولی بنابه تعریف $\arccos x$ و دومی را می‌توان به روش زیر ثابت کرد: فرض کنید $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$، $x' = 2\pi - x$، آنگاه $0 \leqslant x' \leqslant \pi$ و

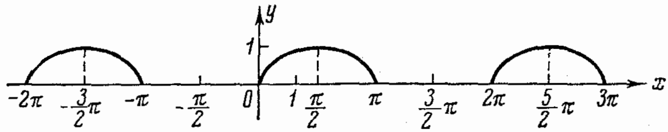
$$f(x) = \arccos[\cos(2\pi - x')] = \arccos(\cos x') = x' = 2\pi - x.$$

باتوجه به تمام این مطالب نمودار رسم می‌شود (شکل ۵).



شکل ۵

(e) تابع $y=\sqrt{\sin x}$ بادوره تناوب 2π متناوب است، روی این اصل بررسی را به فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ محدود می‌کنیم. ولی تابع درتمام فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ معین نیست، بلکه فقط درفاصلهٔ $[0, \pi]$ تعریف می‌شود، چون در فاصلهٔ $(\pi, 2\pi)$ عبارت زیر رادیکال منفی است. منحنی نسبت به خط $x=\pi/2$ متقارن است. در اینجا به یک مثال ازتوابع متناوب رسیدیم که در بی نهایت فاصله، وجود ندارد (شکل ۶).



شکل ۶

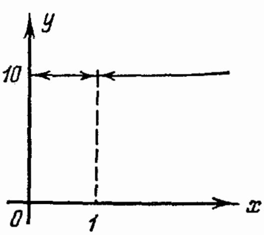
(f) حوزهٔ تعریف تابع عبارتست از

$$0<x<1 \quad \text{و} \quad 1<x<\infty$$

باتوجه به فرمولهای لگاریتم داریم

$$f(x)=x^{1/\log x}=x^{\log_x 10}=10.$$

پس، نمودار تابع نیم خط $y=10$ است که در نیم صفحهٔ سمت راست واقع است و نقطهٔ $x=1$ ازآن حذف شده است (شکل ۷).



شکل ۷

۲ ـ ۵ ـ ۱ نمودار هریک ازتوابع زیر را رسم کنید:

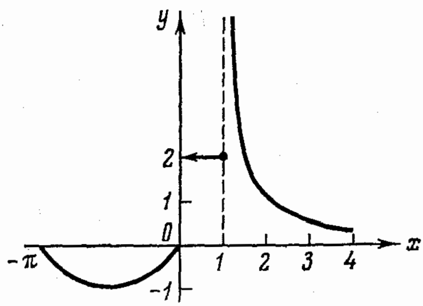
$$\text{(a)}\ y=\begin{cases} \sin x & -\pi\leqslant x\leqslant 0, \\ 2 & 0<x\leqslant 1, \\ 1/(x-1) & 1<x\leqslant 4; \end{cases}$$

(b) $y=\begin{cases} -2 & \text{at } x>0, \\ 1/2 & \text{at } x=0, \\ -x^3 & \text{at } x<0; \end{cases}$

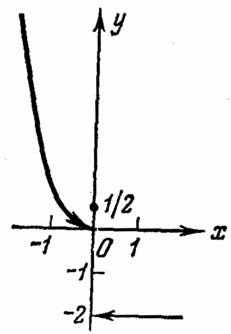
(c) $y=x+\sqrt{x^2}$;

(d) $y=2/(x+\sqrt{x^2})$.

حل ــ (a) حوزهٔ تعریف تابع فاصلهٔ $[-\pi, 4]$ است. نمودار متشکل از نمودار تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ و خط راست $y=2$ در فاصلهٔ [۱ ، ۰] و قسمتی از شاخهٔ هذلولی $y=1/(x-1)$ در فاصلهٔ [٤ ، ۱] است.



شکل ۸



شکل ۹

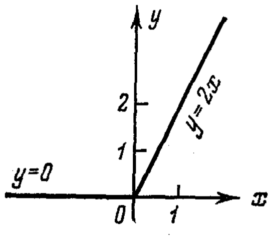
(b) نمودار، متشکل از قسمتی از سهمی مکعبی، یک نقطهٔ تنها و یک نیم خط است (شکل ۹ را ببینید).

(c) معادلهٔ منحنی را به صورت زیر می‌نویسیم:

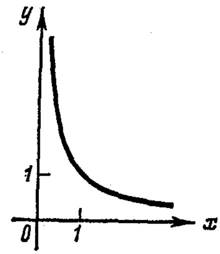
$$y=\begin{cases} 2x, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

پس نمودار، یک خط شکسته است (شکل ۱۰)

(d) باتوجه به قسمت (c) معلوم می‌شود که تابع فقط در فاصلهٔ $(0, +\infty)$ معین است، y با $1/x\ (x>0)$ برابراست. پس نمودار تابع، شاخهٔ سمت راست یک هذلولی متساوی الساقین است (شکل ۱۱).



شکل ۱۰



شکل ۱۱

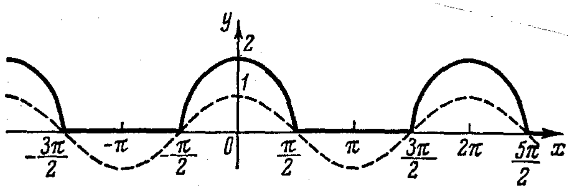
۳ - ۵ - ۱ نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید:

(a) $y=\cos x+|\cos x|$;
(b) $y=|x+2|x$.

حل ــ (a)

$$\cos x+|\cos x|=\begin{cases} 2\cos x & \cos x\geqslant 0,\\ 0 & \cos x<0.\end{cases}$$

اگر عرض نقاطی از منحنی $y=\cos x$ را که مثبت هستند دوبرابر کنیم و به‌جای قسمتی که در آن $\cos x<0$ خط $y=0$ را درنظر بگیریم، نمودار تابع طبق شکل ۱۲ حاصل می‌شود.



شکل ۱۲

(b) تابع $x|x+2|$ را می‌توان با دو فرمول مشخص کرد:

$$y=\begin{cases} (x+2)x & x\geqslant -2,\\ -(x+2)x & x\leqslant -2.\end{cases}$$

سهمی‌ها را جداگانه به صورت $y=(x+2)x=(x+1)^2-1$ و $y=-[(x+1)^2-1]$ می‌نویسیم، فقط کافی است هر سهمی را متناظر با فاصلهٔ

تعریف‌اش رسم کنیم که این قسمتها در شکل ۱۳ با خط پر رسم شده‌اند و قسمتهائی از سهمی ها که مربوط به نمودار این تابع نیست باخط چین رسم شده است.

۴ ـ ۵ ـ ۱ نمودار تابع

$$y=2|x-2|-|x+1|+x.$$

را رسم کنید.

حل ــ وقتی $x \geqslant 2$

$$y=2(x-2)-(x+1)+x=2x-5.$$

وقتی $-1 \leqslant x \leqslant 2$

$$y=-2(x-2)-(x+1)+x=-2x+3.$$

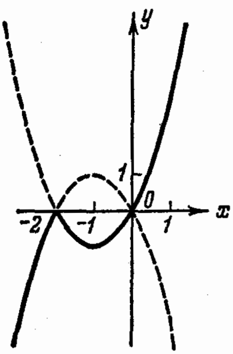
و بالاخره وقتی $x \leqslant -1$

$$y=-2(x-2)+(x+1)+x=5.$$

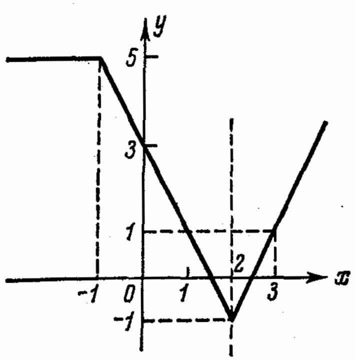
پس، تابع را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y=\begin{cases} 5, & x \leqslant -1, \\ -2x+3, & -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2x-5, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع طبق شکل ۱۴ یک خط شکسته است.



شکل ۱۳



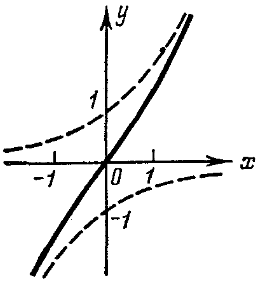
شکل ۱۴

۵ - ۵ - ۱ نمودار تابع

$$y = 2^x - 2^{-x}$$

را رسم کنید.

حل ــ نخست نمودار توابع $y_1 = 2^x$ و $y_2 = -2^{-x}$ را رسم می‌کنیم در (شکل ۱۵ با خط چین مشخص شده‌اند)، از روی شکل عرض نقاط واقع روی دو منحنی را نظیر به نظیر جمع می‌کنیم و بدین ترتیب به منحنی مورد نظر می‌رسیم. توجه داریم که $y_2 < y < y_1$ و واضح است که وقتی x صعود کند، y_2 به صفر میل می‌کند و وقتی x نزول کند y_1 به صفر می‌گراید. بنابراین برای x های بزرگتر، منحنی به منحنی تابع y_1 نزدیک می‌شود و وقتی x کم می‌شود، منحنی به نمایش هندسی y_2 نزدیک می‌شود. باتوجه به ملاحظات فوق نمودار طبق شکل ۱۵ باخط پر رسم شده است.



شکل ۱۵

۶ - ۵ - ۱ نمودار تابع

$$y = x \sin x$$

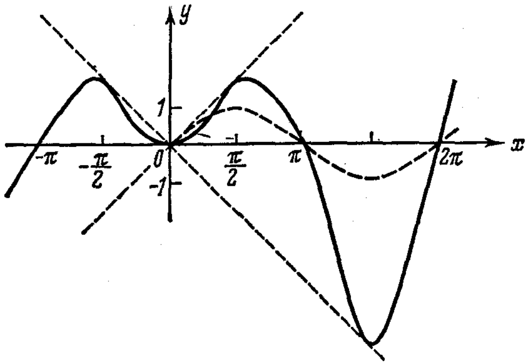
را رسم کنید.

حل ــ چون حاصلضرب دو تابع فرد $y_1 = x$ و $y_2 = \sin x$ تابعی زوج است، پس y تابعی زوج است بنابراین نمودار را به ازای $x \geqslant 0$ رسم می‌کنیم.

نمودارهای $y_1 = x$ و $y_2 = \sin x$ را رسم می‌کنیم (در شکل ۱۶ با خط چین مشخص هستند). در نقاطی که $y_2 = \sin x = 0, \;\; y = y_1 \cdot y_2 = 0$ و در نقاطی که $y_2 = \sin x = \pm 1, \;\; y = \pm y_1 = \pm x$.

تساوی اخیر تابعی کمکی جدید $y_3 = -x$ را نشان می‌دهد. نقاطی که باین ترتیب مشخص می‌شوند، علامت گذاری می‌کنیم و سپس آنها را بایک منحنی هموار بهم وصل

می‌کنیم. منحنی مورد نظر با خط پر در شکل ۱٦ رسم شده است.



(شکل ۱٦)

۷ ـ ۵ ـ ۱ منحنی نمایش هندسی تابع $y = x\,(x^2 - 1)$ را با ضرب عرض نقاط نظیر به نظیر منحنیهای $y_1 = x$ و $y_2 = x^2 - 1$ رسم کنید.

۸ ـ ۵ ـ ۱ منحنی نمایش هندسی هریک از توابع زیر را رسم کنید:

(a) $y = x/(x^2 - 4)$, (b) $y = 1/\arccos x$

حل ــ (a) چون تابع فرد است پس کافی است منحنی را به ازای $x \geqslant 0$ رسم کنیم. تابع را به عنوان خارج قسمت دو تابع

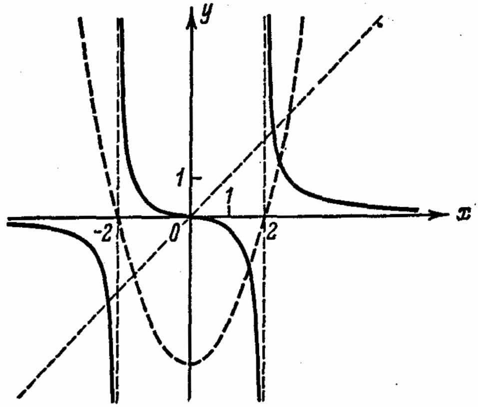
$$y_1 = x \quad \text{و} \quad y_2 = x^2 - 4$$

در نظر می‌گیریم. چون y_2 که در مخرج است در $x = 2$ صفر است پس تابع در این نقطه تعریف نشده است. در فاصلهٔ [۰ ، ۲) تابع y_1 از ۰ تا ۲ صعود می‌کند و تابع y_2 منفی است و در این فاصله $|y_2| = 4 - x^2$ از ٤ تا ۰ نزول می‌کند. بنابراین تابع $f(x) = y_1/y_2$ در این فاصله منفی و از لحاظ قدر مطلق زیاد می‌شود، یعنی، $f(x)$ در فاصلهٔ [۰ و ۲) از ۰ تا $\infty -$ نزول می‌کند.

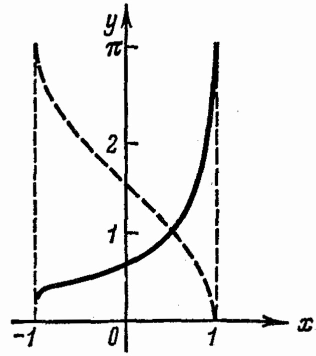
در فاصلهٔ $(2, \infty)$ هردو تابع مثبت و صعودی هستند. خارج قسمت در این فاصله نزولی است زیرا اگر فرض کنیم $2 \leqslant x_1 < x_2$ از آنجا

$$y_2 - y_1 = \frac{x_2}{x_2^2 - 4} - \frac{x_1}{x_1^2 - 4} = \frac{(x_1 - x_2)\,(x_1 x_2 + 4)}{(x_2^2 - 4)\,(x_1^2 - 4)} < 0.$$

وقتی $x \to \infty$ خارج قسمت به صفر میل می‌کند زیرا $y=\frac{1/x}{1-4/x^2} \to 0$ بالاخره باتوجه به مطالبی که گذشت منحنی را رسم می‌کنیم که در شکل ۱۷ با خط پر رسم شده است.



شکل ۱۷



شکل ۱۸

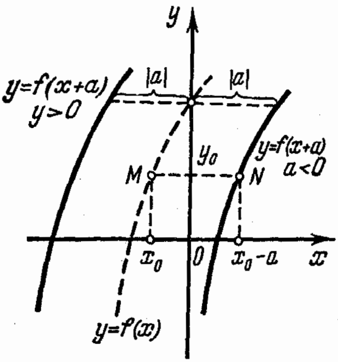
(b) فرض می‌کنیم $y_1=\arccos x$، حوزهٔ تعریف تابع $|x| \leqslant 1$ است. در $x=1$ داریم $y_1=0$ پس وقتی $x \to 1$ ، $y=1/y_1 \to \infty$. یعنی، $x=1$ یک مجانب قائم منحنی است. تابع y_1 در تمام فاصلهٔ (۱ ، ۱-] نزولی است، بنابراین در این فاصله $y=1/y_1$ صعود می‌کند. ماکزیمم مقدار $y_1=\pi$ در $x=-1$ حاصل می‌شود که $1/\pi$ کوچکترین مقدار تابع y است. نمودار تابع باخط پر در (شکل ۱۸) رسم شده است.

چند انتقال سادهٔ نمودارها

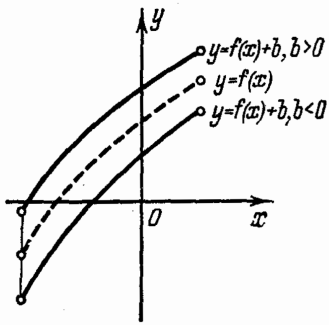
I نمودار $y=f(x+a)$ ز انتقال نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور x به اندازهٔ $|a|$ واحد در خلاف علامت a به‌دست می‌آید (اگر a مثبت است انتقال در جهت منفی محور x ، اگر a منفی است انتقال در جهت مثبت محور x انجام می‌شود) (شکل ۱۹ را ببینید).

II نمودار $y=f(x)+b$ از انتقال منحنی $y=f(x)$ در امتداد محور y به اندازهٔ $|b|$ واحد در جهت علامت b حاصل می‌شود (اگر b منفی است منحنی به طرف پائین و اگر مثبت است به طرف بالا منتقل می‌شود) (شکل ۲۰).

III. نمودار تابع $y=f(kx)\ (k>0)$ از روی منحنی $y=f(x)$ بدین ترتیب ساخته می‌شود: اگر $k>1$ منحنی را k مرتبه از محور y به‌طور افقی متراکم می‌کنیم (می‌فشاریم). اگر $k<1$، منحنی $f(x)$ را $1/k$ مرتبه از محور y به طور افقی می‌کشیم (شکل ۲۱ را ببینید).



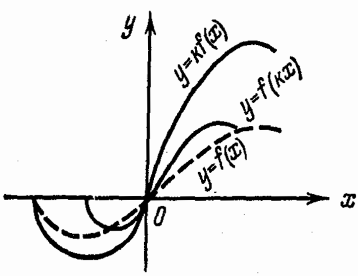
شکل ۱۹



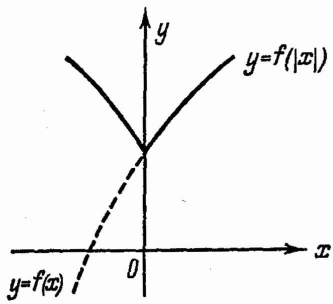
شکل ۲۰

IV. نمودار $y=kf(x)\ (k>0)$ به‌وسیله منحنی $y=f(x)$ به‌دست می‌آید. وقتی $k>1$ آنرا k مرتبه به‌طور عمودی می‌کشیم. اگر $k<1$ منحنی را $1/k$ مرتبه از محور x (به‌طور قائم) متراکم می‌کنیم (شکل ۲۱ را ببینید).

V. نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینه منحنی $y=f(x)$ نسبت به محور x است، و نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور y است.



شکل ۲۱



شکل ۲۲

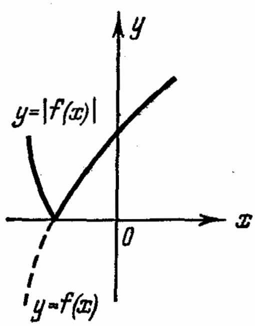
VI . نمودار تابع $y=f(|x|)$ از نمودار $y=f(x)$ به ترتیب زیر به دست می‌آید:
آن قسمت از نمودار تابع $f(x)$ که به ازای $x\geqslant 0$ رسم شده است تغییر نمی‌دهیم، سپس قرینهٔ همان قسمت را نسبت به محور y به دست می‌آوریم، منحنی حاصل مربوط به $0\leqslant x$ است (شکل ۲۲ را ببینید). نمودار مورد نظر با خط پر رسم شده است.

VII . نمودار تابع $y=|f(x)|$ از نمودار $y=f(x)$ بدین ترتیب به دست می‌آید: قسمتی از نمودار $y=f(x)$ که بالای محور x واقع است تغییر نمی‌کند، قرینهٔ آن قسمت از نمودار که زیر محور x قرار دارد، نسبت به محور y پیدا می‌کنیم (شکل ۲۳). در شکل نمودار مورد نظر با خط پر رسم شده است.

VIII . نمایش هندسی توابعی مانند

$$y=\lambda f(kx+a)+b$$

را می‌توان از روی نمودار $y=f(x)$ با توجه به حالات I تا V رسم نمود.



شکل ۲۳

۹ـ۵ـ۱ نمودار تابع

$$y=3\sqrt{-2(x+2.5)}-0.8$$

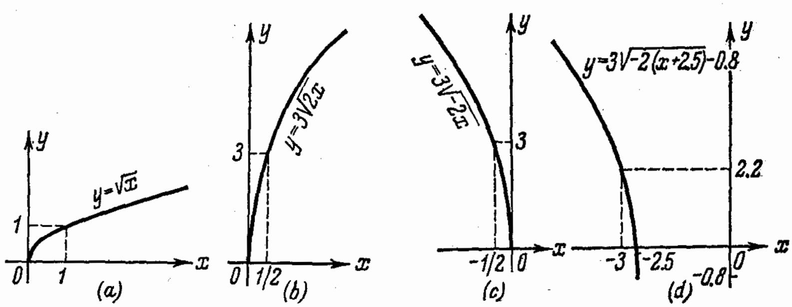
را به وسیلهٔ تغییر نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

حل ـ نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را که قسمت فوقانی سهمی $y^2=x$ است، رسم می‌کنیم (شکل ۲۴ a) و آن را به ترتیب زیر تغییر می‌دهیم:
نخست نمودار $y=3\sqrt{2x}$ را رسم می‌کنیم، که کافی است عرض هر نقطه از نمودار $y=\sqrt{x}$ را $3\sqrt{2}$ برابر بکنیم بدون اینکه طول نقاط تغییر بکنند (شکل

b ۲٤ را به بینید).

از روی این نمودار، نمودار تابع $y=3\sqrt{-2x}$ را می‌سازیم که به وسیلهٔ قرینه‌یابی نسبت به محور y انجام می‌گیرد (یا تصویر آئینه گونهٔ آنرا نسبت به محور y تعیین می‌کنیم) (شکل c ۲٤).

بالاخره نمودار حاصل را ۲/۵ واحد به چپ و ۰/۸ واحد به پائین انتقال می‌دهیم و آنگاه نمودار تابع $y=3\sqrt{-2(x+2.5)}-0.8$ رسم می‌شود (شکل d ۲٤).



شکل ۲٤

۱۰ ـ ۵ ـ ۱ نمودار تابع

$$y=3\cos x-\sqrt{3}\sin x$$

را از تبدیل منحنی کسینوسی به‌دست آورید.

حل ـــ معادلهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

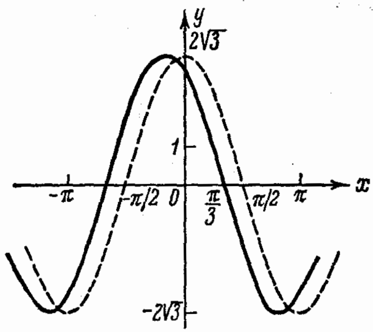
$$y=3\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=$$

$$=2\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

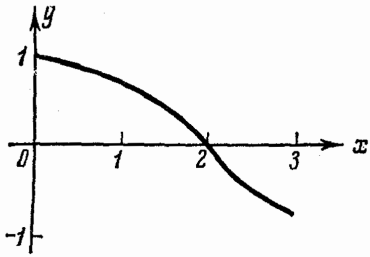
پس کافی است نمودار تابع

$$y=2\sqrt{3}\cos(x+\pi/6),$$

را به‌دست آوریم. برای این منظور نمودار $y=2\sqrt{3}\cos x$ را به اندازهٔ $\pi/6$ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم. چون تابع متناوب با دورهٔ تناوب 2π است پس نمودار آن‌را در فاصلهٔ $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ رسم می‌کنیم (شکل ۲۵).



شکل ۲۵



شکل ۲۶

برای رسم نمودار هرتابع به صورت $y=a\cos x+b\sin x$ را که a و b اعداد ثابتی هستند، می‌توان به روش فوق عمل نمود.

۱۱ - ۵ - ۱ نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید:

(a) $y=\frac{x+3}{x+1}$;

(b) $y=\frac{1}{x^2-9}$;

(c) $y=\begin{cases} x^2+x+1, & -1\leqslant x<0, \\ \sin^2 x, & 0\leqslant x\leqslant \pi, \\ (x-1)/(x+1), & \pi<x\leqslant 5; \end{cases}$

(d) $y=x+1/x$;

(e) $y=x^2-x^3$;

(f) $y=x+\sin x$;

(g) $y=1/\cos x$;

(h) $y=3\sin(2x-4)$;

(i) $y=2\sqrt{-3(x+1.5)}-1.2$;

(j) $y=|x^2-2x-1|$;

(k) $y=||x|-1|$;

(l) $y=\cos(\sin x)$;

(m) $y=|\sin x|+\sin x$ ، در فاصلهٔ $[0,3\pi]$;

(n) $y=x^2 \operatorname{sign} x$, $\quad \operatorname{sign} x=\begin{cases} 1 & x>0, \\ 0 & x=0, \\ -1 & x<0. \end{cases}$

۱۲ - ۵ - ۱ نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل ۲۶ داده شده است. باتوجه به آن نمودار هریک از توابع زیر را به‌دست آورید:

(a) $y=f(x+1)$;
(b) $y=f(x/2)$;
(c) $y=|f(x)|$;
(d) $y=(|f(x)|\pm f(x))/2$;
(e) $y=|f(x)|/f(x)$.

۶ ـ ۱ دنباله‌های عددی ـ حد یک دنباله

عدد a را حد دنبالهٔ

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

وقتی $n\to\infty$ گویند، هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon>0$ ، عددی مانند $N(\varepsilon)>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای تمام $n>N(\varepsilon)$ نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرار باشد. آن‌را به‌صورت

$$a=\lim_{n\to\infty} x_n$$

می‌نویسیم. دنباله‌ای که حد متناهی داشته باشد، **همگرا** (یا **متقارب**) گویند. دنبالهٔ $\{x_n\}$ رایک **بینهایت کوچک** گویند اگر

$$\lim x_n=0,$$

ویک **بینهایت بزرگ** نامند هرگاه

$$\lim x_n=\infty.$$

۱ ـ ۶ ـ ۱ جملهٔ عمومی دنباله $\{x_n\}$ به صورت

$$x_n=\frac{\sin(n\pi/2)}{n}.$$

داده شده است. پنج جملهٔ اول آن‌را بنویسید .

حل ــ به ترتیب به n مقادیر $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ را در جملهٔ عمومی می‌دهیم،

$$x_1=\frac{\sin(\pi/2)}{1}=1;$$

$$x_2=\frac{\sin(2\pi/2)}{2}=0;$$

$$x_3=\frac{\sin(3\pi/2)}{3}=-\frac{1}{3};$$

$$x_4=\frac{\sin(4\pi/2)}{4}=0;$$

$$x_5=\frac{\sin(5\pi/2)}{5}=\frac{1}{5}.$$

۲ ـ ۶ ـ ۱ جملهٔ عمومی هریک از دنباله های زیر را تعیین کنید که چند جمله اول هرکدام داده شده است،

(a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23};$

(b) $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}.$

توجه ــ اطلاعات چند جملهٔ اول دنباله برای تعریف دنباله کافی نیست. زیرا در چنین مسئله‌ای باید یک دستور استقرایی سادهٔ سازگار با جملات دنباله، پیدا شود.

حل ــ (a) توجه داریم که صورت هرکسر با مربع عدد آن جمله باضافه یک، برابر است، یعنی، n^2+1 درحالیکه مخرجها، جملات تصاعد حسابی

$$3, 8, 13, 18, \ldots$$

با جملهٔ اول $a_1 = 3$ قدرنسبت $d=5$ است، پس

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + 5(n-1) = 5n-2,$$

بنابراین

$$x_n = \frac{n^2+1}{5n-2}$$

(b) جمله عمومی این دنباله را می‌توانیم بادو ضابطه تعریف بکنیم یک ضابطه برای جملات مرتبه فرد و ضابطهٔ دیگر برای جملات مرتبهٔ زوج،

$$x_n = \begin{cases} k & n = 2k-1, \\ 1/(k+1) & n = 2k. \end{cases}$$

می‌توانیم جملهٔ عمومی رابایک ضابطه نشان دهیم ولی این ضابطه خیلی پیچیده است، مثلاً

$$x_n = \frac{n+1}{4}[1-(-1)^n] + \frac{1}{n+2}[1+(-1)^n].$$

۳ ـ ۶ ـ ۱ چند جملهٔ اول هریک ازدنباله های زیر را به‌دست آورید:

(a) $x_n = \sin(n\pi/3);$
(b) $x_n = 2^{-n}\cos n\pi;$
(c) $x_n = (1+1/n)^n.$

جواب:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ldots;$ (b) $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots;$

(c) $2;\ 2.25;\ 2\frac{10}{27};\ 2\frac{113}{256},\ \ldots .$

۴ ـ ۶ ـ ۱ با استفاده از تعریف حد دنباله، ثابت کنید

(a) $\lim x_n = 1$ اگر $x_n = (2n-1)/(2n+1)$

(b) $\lim x_n = 3/5$ اگر $x_n = (3n^2+1)/(5n^2-1)$ مرتبهٔ جمله‌ای را تعیین کنید که از آن به بعد نامساوی $|x_n - 3/5| < 0.01$ برقرار باشد.

حل ـ (a) به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی $N(\varepsilon)$ را طوری تعیین می‌کنیم که به ازای تمام اعداد طبیعی $n > N(\varepsilon)$ نامساوی

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

برقرار باشد. برای این منظور به قرار زیر عمل می‌کنیم:

$$\left|\frac{2n-1}{2n+1} - 1\right| = \left|\frac{-2}{2n+1}\right| = \frac{2}{2n+1}$$

پس نامساوی $|x_n - 1| < \varepsilon$ وقتی برقرار است که $\frac{2}{2n+1} < \varepsilon$ برقرار باشد. از آنجا $n > 1/\varepsilon - 1/2$ قسمت صحیح عدد $1/\varepsilon - 1/2$ را $N(\varepsilon)$ در نظر می‌گیریم، یعنی،

$$N = \bar{E}(1/\varepsilon - 1/2)$$

بنابراین، به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توانیم عدد N را طوری بیابیم که از نامساوی $n > N$ نامساوی $|x_n - 1| < \varepsilon$ نتیجه شود، این بدان معناست که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1$$

(b)

$$\left|\frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5}\right| = \frac{8}{5(5n^2-1)}$$

فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ ، n را طوری تعیین می‌کنیم که نامساوی

$$\frac{8}{5(5n^2-1)} < \varepsilon$$

برقرار باشد. از حل نامساوی فوق داریم:

$$n^2 > \frac{8}{25\varepsilon}+\frac{1}{5}; \quad n > \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3+5\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

با انتخاب

$$N = E\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}\right)$$

هرگاه $n > N$ نامساوی

$$|x_n - 3/5| < \varepsilon,$$

برقرار است.

اگر $\varepsilon = 0.01$ آنگاه

$$N = E\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}\right) = E\left(\frac{1}{5}\sqrt{805}\right) = 5,$$

تمام جملات دنباله از مرتبه ششم به بعد در فاصلهٔ $(3/5 - 0.01;\ 3/5 + 0.01)$ واقع اند.

۵ ـ ۶ ـ ۱ دنباله‌ای با جملهٔ عمومی

$$x_n = \frac{3n-5}{9n+4}$$

مفروض است. می‌دانیم که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/3$ جملات x_n را طوری تعیین کنید که در خارج فاصلهٔ

$$L = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1\,000};\ \frac{1}{3} + \frac{1}{1\,000}\right)$$

قرار گیرند.

حل ــ فاصلهٔ بین دو نقطه x_n و $1/3$ برابر است با

$$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| = \left|-\frac{19}{3(9n+4)}\right| = \frac{19}{3(9n+4)}$$

درخارج فاصلهٔ L آن جملاتی ازدنباله قرار دارند که این فاصله برای آنها از 0.001 بزرگتر باشد، پس

$$\frac{19}{3(9n+4)} > \frac{1}{1\,000}$$

از آنجا

$$1 \leqslant n < \frac{18\,988}{27} = 703\frac{7}{27}$$

پس 703 جمله $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{703})$ خارج فاصلهٔ L قرار دارند.

۱-۶-۶ ثابت کنید که عدد $l=0$ حد دنباله با جملهٔ عمومی $x_n=(n^2-2)/(2n^2-9)$ نیست.

حل ــ قدر مطلق

$$\left|\frac{n^2-2}{2n^2-9}-0\right|=\frac{|n^2-2|}{|2n^2-9|}$$

را برآورد می‌کنیم (تخمین می‌زنیم). به ازای $n\geqslant 3$ کسر فوق از عدد ثابت $1/_2$ بیشتر است، پس مقداری برای $\varepsilon>0$ مانند $\varepsilon=1/_2$ وجود دارد که نامساوی

$$\left|\frac{n^2-2}{2n^2-9}-0\right|>\frac{1}{2}$$

به ازای هر $n\geqslant 3$ برقرار است. نامساوی اخیر نشان می‌دهد که $l=0$ حد این دنباله نیست.

۱-۶-۷ ثابت کنید دنبالهٔ

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{7},\ \frac{4}{5},\ \ldots$$

با جملهٔ عمومی

$$x_n=\begin{cases}1/n, & n=2k-1,\\ n/(n+2), & n=2k,\end{cases}$$

حد ندارد.

حل ــ به‌راحتی می‌توان نشان داد که جملات در مرتبهٔ فرد به صفر نزدیک می‌شوند و جملات در مرتبهٔ زوج به ۱ می‌گرایند. پس هر همسایگی صفر و هر همسایگی ۱ شامل یک مجموعهٔ نامتناهی از نقاط x_n هستند. عدد حقیقی دلخواه a را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم عدد کوچک $\varepsilon>0$ را طوری انتخاب کنیم که یک ε همسایگی a، حداقل شامل یکی از دو همسایگی از صفر یا ۱ نباشد. بنابراین یک مجموعهٔ نامتناهی از نقاط x_n وجود دارد که در این همسایگی نیست، این همان چیزی است که نمی‌توان ادعا کرد که تمام جملات x_n از مرتبه‌ای به بعد در ε همسایگی a قرار دارند. پس بنا به تعریف، a حد این دنباله نیست. چون a دلخواه انتخاب شده بود، در نتیجه دنباله حد ندارد.

۱-۶-۸ ثابت کنید که $\lim x_n=1$ هرگاه $x_n=(3^n+1)/3^n$

۱-۶-۹ ثابت کنید که $\lim x_n=2$ اگر $x_n=(2n+3)/(n+1)$، n را طوری تعیین کنید که نامساوی $|(2n+3)/(n+1)-2|<\varepsilon$ وقتی $\varepsilon=0.1;\ 0.01;\ 0.001$ برقرار باشد.

راهنمائی: نامساوی

$$\left|\frac{2n+3}{n+1}-2\right|<\varepsilon$$

برای $n>N=E\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$ برقرار است.

جواب:

$$n=10,\ 100\ ,\ 1000.$$

۱۰ - ۶ - ۱ ثابت کنید که دنبالهٔ

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{8},\ldots,$$

با جملهٔ عمومی

$$x_n=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2^{(n+1)/2}} & \text{وقتی } n \text{ فرد است}\\[2mm] \dfrac{1}{2^{n/2}} & \text{وقتی } n \text{ زوج است}\end{cases}$$

حد ندارد.

راهنمائی: تحقیق کنید که دنبالهٔ $\{x_{2n}\}$ به صفر و دنبالهٔ $\{x_{2n-1}\}$ به ۱ میل می‌کند.

۱۱ - ۶ - ۱ دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $x_n=a^n/n!$ مفروض است. ثابت کنید به ازای هر عدد بزرگ $a>0$، $\lim x_n=0$.

حل ــ فرض می‌کنیم $k>2a$ عددی طبیعی است. پس به ازای $n>k$ داریم:

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{n}=\left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k}\right)\left(\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdots\frac{a}{n}\right)<$$
$$<a^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=(2a)^k\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

چون $\lim (1/2)^n=0$ (ثابت کنید)، پس به ازای مقادیر بقدر کافی بزرگ n داریم:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{\varepsilon}{(2a)^k}$$

بنابراین $a^n/n!<\varepsilon$ یعنی، $\lim (a^n/n!)=0$.

۱۲ - ۶ - ۱ کدامیک از دنباله‌های زیر حد دارند؟

(a) $x_n=1/(2\pi);$

(b) $x_n=\begin{cases}1 & \text{وقتی } n \text{ زوج است}\\ 1/n & \text{وقتی } n \text{ فرد است}\end{cases}$

(c) $x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2};$

(d) $x_n = n[1-(-1)^n]$.

جواب: (a) حد دارد، (b) حد ندارد، (c) حد دارد، (d) حد ندارد.

۱۳ ـ ۶ ـ ۱ ثابت کنید دنباله‌ای با جملهٔ عمومی

$$x_n = 1/n^k \quad (k>0)$$

یک دنباله بینهایت کوچک است.

حل ــ برای اثبات نشان می‌دهیم:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

عدد کوچک و مثبت $\varepsilon > 0$ را انتخاب می‌کنیم. چون $|x_n| = 1/n^k$ ، بنابراین نامساوی زیر را حل می‌کنیم:

$$1/n^k < \varepsilon$$

از آنجا $n > \sqrt[k]{1/\varepsilon}$ ، N را قسمت صحیح $\sqrt[k]{1/\varepsilon}$ انتخاب می‌کنیم، یعنی،

$$N = E(\sqrt[k]{1/\varepsilon})$$

۱۴ ـ ۶ ـ ۱ ثابت کنید وقتی $n \to \infty$ دنباله‌های

$$\text{(a)} \quad x_n = \frac{1-(-1)^n}{n}, \qquad \text{(b)} \quad x_n = \frac{1}{n}\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

یک بینهایت کوچک هستند.

راهنمائی: (a) $|x_n| \leqslant \frac{2}{n}$; (b) $|x_n| \leqslant \frac{1}{n}$.

۱۵ ـ ۶ ـ ۱ نشان دهید که وقتی $n \to \infty$ دنباله با جملهٔ عمومی

$$x_n = (-1)^n 2/(5\sqrt[3]{n}+1)$$

یک بینهایت کوچک است. عدد N را طوری بیابید که از آن مرتبه به بعد تمام نقاط x_n درفاصلهٔ $(-1/10,\ 1/10)$ واقع شوند.

حل ــ عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ را انتخاب و $|x_n|$ را تخمین می‌زنیم:

$$|x_n| = \frac{2}{5\sqrt[3]{n}+1} < \frac{2}{5\sqrt[3]{n}} < \frac{2}{2\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

اگر $n > 1/\varepsilon^3$ آنگاه $|x_n| < \varepsilon$ پس $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ یعنی، دنباله یک بینهایت کوچک است.

فرض می‌کنیم $\varepsilon = 1/10$. چون $|x_n| < 1/\sqrt[3]{n}$ اگر $1/\sqrt[3]{n} < 1/10$ یا $n > 1\,000$ الزاماً x_n از $1/10$ کوچکتر می‌شود. پس N را می‌توان برابر $1\,000$ گرفت.

با حل نامساوی

$$|x_n| = \frac{2}{5\sqrt[3]{n+1}} < \frac{1}{10}$$

به نتیجهٔ دقیقتری می‌رسیم از رابطهٔ اخیر داریم:

$$n > (19/5)^3 = 3.8^3 = 54.872$$

پس N را می‌توان برابر $54 \ll 1\,000$ انتخاب کرد.

۱۶ - ۶ - ۱ می‌دانیم که اگر $x_n = a + \alpha_n$ وقتی $n \to \infty$ ، α_n یک بینهایت کوچک است، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ با استفاده از این قاعده حد هریک از دنباله‌های زیر را بیابید:

$$\text{(a)}\ x_n = \frac{3^{n+1} + \sin(n\pi/4)}{3^n}; \quad \text{b)}\ x_n = \frac{2^n + (-1)^n}{2^n}.$$

حل — (a) $x_n = \dfrac{3^{n+1} + \sin(n\pi/4)}{3^n} = 3 + \alpha_n$ که در آن $\alpha_n = \dfrac{\sin(n\pi/4)}{3^n}$ وقتی $n \to \infty$ یک بینهایت کوچک است. پس $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

۱۷ - ۶ - ۱ ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

حل — کافی است ثابت کنیم که $\sqrt[n]{n}$ را می‌توان به صورت مجموع $1 + \alpha_n$ نوشت که در آن وقتی $n \to \infty$ ، α_n یک بینهایت کوچک است. فرض می‌کنیم $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$ طرفین را به توان n می‌رسانیم:

$$n = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 + \ldots + \alpha_n^n$$

می‌دانیم $n > 1$ ، از تعدادی از جملات که همگی نامنفی هستند صرفنظر می‌کنیم و داریم:

$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2$$

عدد یك را به طرف اول منتقل کرده و طرفین را به $n-1$ تقسیم می‌کنیم،

$$1 > \frac{n}{2}\alpha_n^2$$

از آنجا

$$\sqrt{2/n} > \alpha_n > 0 \quad \text{یا} \quad 2/n > \alpha_n^2$$

چون $\lim_{n \to \infty} \sqrt{2/n} = 0$ پس $\lim_{n \to \infty} \alpha_n$ برابر صفر است یعنی α_n یک بینهایت کوچک است. بنابراین

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

۱۸ - ٦ - ۱ ثابت کنید وقتی $n \to \infty$ دنباله با جملهٔ عمومی

$$x_n = 3^{\sqrt[3]{n}}$$

یک بینهایت بزرگ است.

حل ــ عدد مثبت دلخواه M را در نظر گرفته نامساوی

$$3^{\sqrt[3]{n}} > M$$

را حل می‌کنیم.

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\sqrt[3]{n} > \log_3 M, \ n > (\log_3 M)^3$$

اگر $N = E(\log_3 M)^3$ آنگاه، به ازای تمام $n > N$ نامساوی $|x_n| > M$ برقرار است. پس این دنباله یک بینهایت بزرگ است.

۱۹ - ٦ - ۱ ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

راهنمائی: اگر $a > 1$ فرض کنید $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n \ (\alpha_n > 0)$ و به کمک نامساوی

$$a = (1 + \alpha_n)^n > n\alpha_n$$

ثابت کنید که α_n یک بینهایت کوچک است.

اگر $a < 1$ فرض کنید $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + \alpha_n} \ (\alpha_n > 0)$ و آنگاه از نامساوی $\frac{1}{a} = (1 + \alpha_n)^n > n\alpha_n$ استفاده کنید.

۷ ـ ۱ محاسبهٔ حد دنباله

اگر دنباله های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا باشند آنگاه

$$\begin{aligned}
&(1)\ \lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n;\\
&(2)\ \lim (x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n;\\
&(3)\ \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} \quad (\lim y_n \neq 0).
\end{aligned}$$

اگر $x_n \leqslant y_n$ آنگاه $\lim x_n \leqslant \lim y_n$.

۱ ـ ۷ ـ ۱ مطلوبست محاسبهٔ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ در حالات زیر:

$$\text{(a)}\ x_n = \frac{3n^2+5n+4}{2+n^2};\quad \text{(b)}\ x_n = \frac{5n^3+2n^2-3n+7}{4n^3-2n+11};$$

$$\text{(c)}\ x_n = \frac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4};\quad \text{(d)}\ x_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{5n^3+n+1};$$

$$\text{(e)}\ x_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}.$$

حل ــ (a)

$$x_n = \frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{\frac{2}{n^2}+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+5/n+4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+1\right)} = 3.$$

(d) یادآوری می‌کنیم که

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

پس

$$x_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(5n^3+n+1)} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6(5n^3+n+1)} = \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{30+\frac{6}{n^2}+\frac{6}{n^3}},$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1/15.$$

جواب: (b) $\frac{5}{4}$; (c) 0; (e) $\frac{1}{2}$

۲ - ۷ - ۱ مطلوبست محاسبهٔ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ اگر

(a) $x_n = \left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$; (b) $x_n = \left(\frac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4}\right)^4$;
(c) $x_n = \sqrt[n]{5n}$; (d) $x_n = \sqrt[n]{n^8}$;
(e) $x_n = \sqrt[n]{n^5}$; (f) $x_n = \sqrt[n]{6n+3}$.

حل ـ (a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3 =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)\left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)\left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right) =$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{3+1/n-2/n^2}{4+2/n+7/n^2}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

(c) درحل این مسئله وبقیه مسائل باقیمانده از **۲ ـ ۷ ـ ۱** ازنامساویهای زیر استفاده می‌کنیم (مسائل **۱۷-۶-۱ و ۱۹-۶-۱**):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1. \qquad (1)$$

داریم:

$$\lim_{n\to\infty}x_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n},$$

با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$\lim x_n = 1\cdot 1 = 1$$

جواب: (b) $\frac{1}{16}$; (e) 1; (f) 1

۳ ـ ۷ ـ ۱ مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3}{2n^2+3}+\frac{1-5n^2}{5n+1}\right).$$

حل ـ کسرهای داخل پرانتز را جمع می‌کنیم.

$$x_n = \frac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+3}.$$

از آنجا

$$\lim_{n\to\infty}x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+3} = \frac{1}{5}.$$

توجه ــ اگر فرض کنیم

$$y_n=\frac{2n^3}{2n^2+3};\quad z_n=\frac{1-5n^2}{5n+1},$$

دیدیم که $\lim(y_n+z_n)=1/5,$ درحالیکه هرکدام از جمعوندها بینهایت بزرگ هستند. بنابراین از همگرائی مجموع نمی‌توان نتیجه گرفت که هرکدام از جمعوندها، همگرا هستند.

۴ ـ ۷ ـ ۱ مطلوبست محاسبهٔ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ اگر

(a) $x_n=\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1};$

(b) $x_n=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1};$

(c) $x_n=n^2(n-\sqrt{n^2+1});$

(d) $x_n=\sqrt[3]{n^2-n^3}+n;$

(e) $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}};$

(f) $x_n=\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2};$

(g) $x_n=\dfrac{1-2+3-4+5-6+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}};$

(h) $x_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}.$

حل ـ (a) چون داخل پرانتز مثبت است (یاحد مثبتی دارد)، پس وقتی $n\to\infty$ داریم

$$x_n=\sqrt{n}\,(\sqrt{2+3/n}-\sqrt{1-1/n})\to+\infty$$

(c) $$x_n=\frac{n^2(n-\sqrt{n^2+1})}{1}=\frac{-n^2}{n+\sqrt{n^2+1}}=$$
$$=-n\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\to-\infty$$

(d) $$x_n=\frac{n^2}{(n^2-n^3)^{2/3}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}=$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{n}-1\right)^{2/3}-\left(\frac{1}{n}-1\right)^{1/3}+1}.$$

یعنی $x_n\to 1/3$

$$(e)\ \ x_n=\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}=\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{n^{3/4}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{\frac{1}{n}}\right)}=$$

$$=n^{1/4}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{\frac{1}{n}}}\to+\infty$$

جواب: (b) 1; (f) 0 ; (g) $-\frac{1}{3}$; (h) 1. **راهنمائی:** هرجمله را در جمله عمومی به صورت

$$\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\ \dots;\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

بنویسید و سپس جمع کنید تا به $x_n=1-\frac{1}{n+1}$ برسید.

۵ ـ ۷ ـ ۱ مطلوبست محاسبهٔ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ هرگاه

(a) $x_n=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; (b) $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$;

(c) $x_n=\sqrt[3]{1-n^3}+n$; (d) $x_n=\dfrac{1}{2n}\cos n^3-\dfrac{3n}{6n+1}$;

(e) $x_n=\dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-1}-\dfrac{n}{1-2n}\,\dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$;

(f) $x_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}$.

جواب: (a) $\frac{1}{2}$; (b) 1; (c) 0, (d) $-\frac{1}{2}$. (e) 0; (f) $\frac{4}{3}$. **راهنمائی:** $\frac{1}{2n}$ یک بینهایت کوچک و $\cos n^3$ تابعی کراندار است.

۸ ـ ۱ تعیین نوع دنباله

قضیهٔ بولتسانو- وایرشتراس

یک دنباله کراندار یکنواخت، حدی متناهی دارد.

قضیه ای در باره حد نا مساوی ها

اگر $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ و $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} z_n = c$ آنگاه $\lim_{n \to \infty} y_n = c$

(c می‌تواند عددی حقیقی، $\infty+$ یا $\infty-$ باشد ولی نه ∞).

۱ ـ ۸ ـ ۱ ثابت کنید که دنباله با جمله عمومی

$$x_n = (2n-1)/(3n+1)$$

صعودی است.

حل ــ ثابت می‌کنیم که به ازای هر n ، $x_{n+1} > x_n$ یعنی

$$\frac{2n+1}{3n+4} > \frac{2n-1}{3n+1}.$$

این نامساوی با نامساوی

$$6n^2+5n+1 > 6n^2+5n-4.$$

معادل است. پس $x_{n+1} > x_n$

۲ ـ ۸ ـ ۱ ثابت کنید دنباله با جملهٔ عمومی

$$x_n = \frac{10^n}{n!}.$$

وقتی $n \geqslant 10$ ، نزولی است.

حل ــ

$$x_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{10^n}{n!} \cdot \frac{10}{n+1} = x_n \frac{10}{n+1}.$$

چون وقتی $n \geqslant 10$ ، $\frac{10}{n+1} < 1$ پس $x_{n+1} < x_n$ یعنی با شرط $n \geqslant 10$ دنباله نزولی است.

۳ ـ ۸ ـ ۱ کدامیک از دنباله های زیر کراندار هستند:

(a) $x_n = \frac{5n^2}{n^2+3}$;

(b) $y_n=(-1)^n\frac{2n}{n+1}\sin n;$

(c) $z_n=n\cos\pi n.$

حل ــ (a) چون به ازای هر n

$$0<\frac{5n^2}{n^2+3}<5$$

پس $\{x_n\}$ کراندار است.

(b)) چون

$$|y_n|=|(-1)^n|\cdot\frac{2n}{n+1}|\sin n|<\frac{2n}{n+1}<2.$$

پس دنباله $\{y_n\}$ است.

(c) چون

$$|z_n|=|n\cos\pi n|=n.$$

پس $\{z_n\}$ کراندار نیست

۱ ـ ۸ ـ ٤ ثابت کنید دنبالهٔ

$$x_1=\frac{x_0}{a+x_0};\quad x_2=\frac{x_1}{a+x_1};\quad x_3=\frac{x_2}{a+x_2};\quad\ldots;\quad x_n=\frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}};\quad\ldots$$

$(a>1,\ x_0>0)$ همگراست.

حل ــ ثابت می‌کنیم که دنباله کراندار و یکنواخت است. اولاً $x_n<x_{n-1}$ زیرا

$$x_n=\frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}}<x_{n-1}.$$

پس دنباله نزولی است. ثانیاً، با توجه به فرض هر جملهٔ دنباله مثبت است. پس دنباله از پائین محدود است. چون دنباله نزولی و از پائین محدود است پس حد متناهی دارد، یعنی، دنباله همگراست.

۱ ـ ۸ ـ ۵ ثابت کنید که دنبالهٔ

$$x_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+\ldots+\frac{1}{5^n+1}$$

یعنی

$$\left(\text{i.e.}\quad x_1=\frac{1}{5+1};\ x_2=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1};\ x_3=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1};\ \ldots\right)$$

همگراست.

حل ــ چون $x_{n+1}=x_n+1/(5^{n+1}+1)$ یعنی $x_{n+1}>x_n$ پس دنباله صعودی است.

وچون به ازای هر n ، $1/(5^n+1)<1/5^n$ و

$$x_n=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+\dots+\frac{1}{5^n+1}<$$
$$<\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\dots+\frac{1}{5^n}=\frac{1/5-1/5^{n+1}}{1-1/5}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)<\frac{1}{4}$$

پس دنباله کراندار است. بنابراین $\{x_n\}$ همگراست.

۶ ـ ۸ ـ ۱ با استفاده از اینکه هر دنباله کراندار یکنواخت، همگراست، ثابت کنید که دنباله های زیر همگرا هستند:

(a) $x_n=\frac{n^2-1}{n^2}$;

(b) $x_n=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$

راهنمائی: (b) با توجه به

$$n!=1\times2\times3\times\dots\times n\geqslant 2^{n-1}$$

و

$$x_n\leqslant 2+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3$$

پس دنباله کراندار است.

۷ ـ ۸ ـ ۱ ثابت کنید که دنباله های زیر همگرا هستند و حد هرکدام را بدست آورید:

(a) $x_1=\sqrt{2}$; $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$;
$x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; ...; $x_n=\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}_{n \text{ radicals}}}$; ...;

(b) $x_n=\frac{2^n}{(n+2)!}$;

(c) $x_n=\frac{E(ny)}{n}$;

(d) 1; 1.4; 1.41; 1.414; .. (بسط تقریبی عدد اصم $\sqrt{2}$ به اعداد اعشاری)

(e) $x_n=n!/n^n$.

حل ــ (a) واضح است که

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots,$$

یعنی دنباله صعودی است. حال ثابت می‌کنیم که کراندار است.

چون $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots$ داریم

$$x_1 = \sqrt{2} < 2 , \; x_2 = \sqrt{2+x_1} < \sqrt{2+2} = 2, \; x_3 = \sqrt{2+x_2} <$$
$$< \sqrt{2+2} = 2, \dots .$$

فرض می‌کنیم $x_{n-1} < 2$ پس

$$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} < \sqrt{2+2} = 2$$

بنابراین به کمک استقراء ریاضی ثابت شد که $x_n < 2$ یعنی، دنباله کراندار است. پس دنباله حد متناهی دارد. حال حد را حساب می‌کنیم. فرض می‌کنیم:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = y.$$

طرفین رابطهٔ $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ را به توان ۲ می‌رسانیم و سپس حد می‌گیریم:

$$x_n^2 = 2 + x_{n-1}.$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n^2 = \lim_{n \to \infty} (2 + x_{n-1}), \quad \text{یا} \quad y^2 = 2 + y$$

ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$y_1 = 2; \quad y_2 = -1$$

چون $x_n > 0$ پس ریشهٔ منفی مورد قبول نیست. پس

$$\lim_{n \to \infty} x_n = y_1 = 2$$

(c) داریم

$$ny - 1 < E(ny) \leqslant ny \quad \text{یا} \quad y - \frac{1}{n} < \frac{E(ny)}{n} \leqslant y$$

چون دنباله‌های $\left\{y - \frac{1}{n}\right\}$ و $\{y\}$ همگرا وحد هردو y است پس

$$\lim_{n \to \infty} x_n = y.$$

(d) این دنباله غیر نزولی است، زیرا با اضافه کردن یک رقم با معنی به قسمت اعشاری x_n ، جملهٔ x_{n+1} حاصل می‌شود. دنباله از بالا مثلاً به عدد 1.5 محدود است. پس از بالا کراندار است، بنابراین دنباله همگراست وحدّش برابر $\sqrt{2}$ است.

(e)

$$x_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n!}{(n+1)^n}=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{n^n}{(n+1)^n}x_n.$$

چون $\frac{n^n}{(n+1)^n}<1$ پس، $x_{n+1}<x_n$ یعنی دنباله نزولی است. چون $x_n>0$ پس دنباله از پائین محدود است، بنابراین حد دنباله موجود است و آنرا با l نشان می‌دهیم. واضح است $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$ نشان می‌دهیم که $l=0$.

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 1+n\frac{1}{n}=2.$$

بنابراین $\frac{n^n}{(n+1)^n}<\frac{1}{2}$ و $x_{n+1}<\frac{1}{2}x_n$. حد طرفین را حساب می‌کنیم:

$$l\leqslant\frac{1}{2}l,$$

باتوجه به $l\geqslant 0$ معلوم می‌شود که $l=0$.

جواب: (b) 0 **راهنمائی:** از این حقیقت استفاده کنید که

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{n+3}<1.$$

۸ ـ ۸ ـ ۱ حد هریک از دنباله های زیر را به دست آورید:

$$x_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}};\qquad z_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}};$$
$$y_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

حل ــ ثابت می‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ درحقیقت،

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}-1\right|=\left|\frac{n-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+n}}\right|=$$
$$=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}\,(n+\sqrt{n^2+n})}<\frac{1}{2n}.$$

به طور مشابه ثابت می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1$$

با توجه به فرض داریم :

$$y_n < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = z_n$$

از طرفی

$$y_n > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = x_n$$

پس

$$x_n < y_n < z_n, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 1$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 1$$

۹ ـ ۸ ـ ۱ با استفاده از قضیهٔ مربوط به حد نامساویها، ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

راهنمائی: به ازای هر n ، از مرتبه‌ای به بعد $\frac{1}{n} < a < n$. بنابراین $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ و $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

۱۰ ـ ۸ ـ ۱ ثابت کنید که دنبالهٔ

$$y_n = a^{1/2^n} \qquad (a > 1)$$

حد دارد و آنرا حساب کنید.

راهنمائی: چون

$$y_{n+1}=a^{\frac{1}{2^{n+1}}}=a^{\frac{1}{2^n\times 2}}=\sqrt{y_n}\ (y_n>1)$$

پس $\{y_n\}$ نزولی است. از شرط $a>1$ برای کرانداربودن استفاده کنید. حد دنباله را با b نشان دهید و از $y_{n+1}=\sqrt{y_n}$ نتیجه بگیرید که $b=1$

۱۱ ـ ۸ ـ ۱ از قضیه مربوط به حد دنبالهٔ یکنواخت استفاده کرده ثابت کنید که دنباله زیر حد متناهی دارد:

$$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

راهنمائی: اول نشان دهید که دنباله صعودی است و سپس برای اثبات کراندار بودن از نامساویهای زیر استفاده کنید:

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\quad (n\geqslant 2);$$
$$x_n<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}.$$

۱۲ ـ ۸ ـ ۱ با استفاده از قضیه حد نامساویها، ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1 \ ، \ x_n=2n(\sqrt{n^2+1}-n).$$

راهنمائی: جمله عمومی را به‌صورت $x_n=\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}$ بنویسید و آنگاه از نامساویهای

$$\frac{2n}{2n+1}<\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}<1$$

استفاده کنید.

۱۳ ـ ۸ ـ ۱ ثابت کنید که دنباله

$$x_1=\sqrt{a};\ x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}};$$
$$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}};\ \ldots;\quad x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n\text{ radicals}}$$
$$(a>0)$$

دارای حد $b=(\sqrt{4a+1}+1)/2$ است.

راهنمائی: از مسئله (a) **۷ ـ ۸ ـ ۱** استفاده کنید.

۱۴ ـ ۸ ـ ۱ ثابت کنید که دنبالهٔ

$$x_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+2}+\dots+\frac{1}{3^n+n}$$

حد متناهی دارد.

راهنمائی: برای اثبات کرانداری، x_n را بایک تصاعد هندسی مقایسه نمائید.

۱۵ ـ ۸ ـ ۱ ثابت کنید که دنبالهٔ طول محیط های 2^n چند ضلعیهای منتظم محاط دریک دایره حد دارد (که طول پیرامون نامیده می‌شود).

۹ ـ ۱ حد تابع

نقطهٔ a از محور حقیقی را **نقطهٔ حد** مجموعه X گویند اگرهر همسایگی a شامل نقاط X بجز خود a باشد (a می‌تواند نقطهٔ حقیقی یا غیرحقیقی باشد).

فرض می‌کنیم X حوزهٔ تعریف تابع $f(x)$ است و a نقطهٔ حد X است. عدد A را **حد تابع** $f(x)$ وقتی $x\to a$ گویند (به صورت $A=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ می‌نویسند)، هرگاه به ازای هر همسایگی V ازعدد A، همسایگی u از a وجود دارد به طوری که به ازای هر $x\in X$ واقع در u، $f(x)\in V$ (این تعریف حد تابع، بعد از کوشی است). A ممکن است متناهی و یا نامتناهی باشد. درحالت خاص اگر اعداد A و a متناهی باشند، حد را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

عدد A را حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to a$ گویند (به صورت $A=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ می‌نویسند)، اگر به ازای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta(\varepsilon)>0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر x متعلق به حوزهٔ تعریف تابع $f(x)$ که درنامساوی $0<|x-a|<\delta$ صدق می‌کند، نامساوی $|f(x)-A|<\varepsilon$ برقرارباشد (تعریف ε-δ).

اگر $a=+\infty$، تعریف بدین صورت است: عدد A را حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to+\infty$ گویند ($A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$)، هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $M(\varepsilon)>0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر x ازحوزه تعریف تابع $f(x)$ که درنامساوی $x>M(\varepsilon)$ صدق می‌کند، نامساوی $|f(x)-A|<\varepsilon$ برقرارباشد (تعریف ε-M).

نماد $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ به معنی $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty$ است. بقیه حالات مانند تعاریف بالا بیان می‌شوند.

تعریف حد تابع بعد از هاین

معنی نماد $\lim_{x \to a} f(x) = A$ چنین است که به ازای هر دنباله از مقادیر x

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

که به a همگراست (جملات دنباله همگی متعلق به حوزهٔ تعریف تابع‌اند و هیچکدام a نیستند)، دنباله‌ای از مقادیر y،

$$y_1 = f(x_1);\ y_2 = f(x_2);\ \ldots;\ y_n = f(x_n),\ \ldots$$

وجود دارند که حد آن A است.

۱ ـ ۹ ـ ۱ بااستفاده از تعریف حد تابع بعد از «هاین» و قضایای حد دنباله، ثابت کنید،

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$$

حل ــ دنبالهٔ $x_1,\ x_2,\ \ldots$ را در نظر می‌گیریم که دو شرط دارد: (۱) اعداد $x_1,\ x_2,\ \ldots$ متعلق به حوزهٔ تعریف تابع $f(x) = (3x+1)/(5x+4)$ هستند (یعنی $x_n \neq -4/5$)، (۲) حد دنباله $\{x_n\}$ عدد 2 است یعنی $\lim_{n \to \infty} x_n = 2$. متناظر دنباله $\{x_n\}$ دنباله‌ای از مقادیر تابع یعنی

$$\frac{3x_1+1}{5x_1+4};\ \frac{3x_2+1}{5x_2+4};\ \ldots;$$

وجود دارد که باید ثابت کنیم حد این دنباله $1/2$ است. طبق قضیهٔ حدها (**بخش ۷ ـ ۱**) عمل می‌کنیم:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{3x_n+1}{5x_n+4} = \frac{\lim (3x_n+1)}{\lim (5x_n+4)} = \frac{6+1}{10+4} = \frac{1}{2}.$$

بنابراین به ازای هر دنبالهٔ دلخواه $\{x_n\}$ که به عدد 2 همگراست ($x_n \neq -4/5$)، دنبالهٔ متناظر آن از مقادیر تابع $f(x_n)$ وجود دارد که به عدد $1/2$ همگراست، مطابق تعریف حد، می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}.$$

توجه: اغلب، تعریف حد بعد از «هاین» وقتی به کار برده می‌شود که بـه‌خواهیم ثابت کنیـم که $f(x)$ حد ندارد. آن بـه‌ایـن صورت انجام می‌گیرد که نشان می‌دهیم دو دنباله مانند $\{x_n'\}$ و $\{x_n''\}$ وجود دارند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = a$$

ولی دنباله‌های متناظرشان یعنی $\{f(x_n')\}$ و $\{f(x_n'')\}$ به یک حد میل نمی‌کنند.

۲ ـ ۹ ـ ۱ ثابت کنید که حدهای زیر وجود ندارند:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1} \sin\frac{1}{x-1};\ \text{(b)} \lim_{x\to 0} 2^{1/x};\ \text{(c)} \lim_{x\to\infty} \sin x.$$

حل ــ (a) دو دنبالهٔ

$$x_n = 1+\frac{1}{n\pi} \quad \text{و} \quad x_n' = 1+\frac{2}{(4n+1)\pi} \quad (n=1,\ 2,\ \dots),$$

را انتخاب می‌کنیم، که درآن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n' = 1$$

دنباله‌های متناظر به این دو دنباله عبارتند از

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{1+1/(n\pi)-1} = \sin n\pi = 0$$

و

$$f(x_n') = \sin\frac{1}{1+2/[(4n+1)\pi]-1} = \sin\frac{4n+1}{2}\pi = \sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

بنابراین

$$\lim_{x_n\to 1} f(x_n) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x_n'\to 1} f(x_n') = 1,$$

یعنی دنباله‌های $\{f(x_n)\}$ و $\{f(x_n')\}$ حدهای مختلف دارند، پس حد $\lim_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$ وجود ندارد.

(c) دو دنبـالـهٔ $(n=1, 2, \dots)$ $x_n' = 2\pi n + \pi/2$ و $x_n = \pi n$ را در نظر می‌گیریم، داریم

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = \infty$$

چون

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = \lim_{n\to\infty} \sin \pi n = 0,$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \sin x'_n = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n + \pi/2) = 1,$$

پس $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ وجود ندارد.

راهنمائی: (b) . فرض کنید

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad x'_n = -\frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

و آنگاه نتیجه بگیرید

$$\lim 2^{\frac{1}{x_n}} = +\infty, \quad \lim 2^{\frac{1}{x'_n}} = 0.$$

توجه: مثالهای فوق نشان دادند که برای اثبات وجود حد تابع نمی‌توان دنبالهٔ خاصی از مقادیر x را درنظر بگیریم (مثلاً دنبالهٔ $x_n = 1 + 2/((4n+1)\pi)$ در قسمت (a) مسئله قبلی)، بلکه لازم است که یک دنبالهٔ دلخواهی مانند $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ انتخاب کنیم که حد مفروضی داشته باشد.

۳ ـ ۹ ـ ۱ با استفاده از تعریف حد بعد از کوشی (یعنی تعریف "ε-M" ;"ε-δ" و غیره) ثابت کنید

(a) $\lim\limits_{x\to 1} (3x - 8) = -5;$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x+1}{3x+9} = \dfrac{5}{3};$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty;$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty \quad (a > 1);$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \pi/2;$

(f) $\lim\limits_{x\to \pi/6} \sin x = 1/2.$

حل ــ (a) مطابق تعریف "ε-δ" ثابت می‌کنیم به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی

مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که از نامساوی $|x-1| < \delta$ نامساوی

$$|f(x)-(-5)| = |f(x)+5| < \varepsilon$$

نتیجه شود. نامساوی

$$|3x-8+5| = 3|x-1| < \varepsilon$$

را حل می‌کنیم. نامساوی اخیر نشان می‌دهد که نامساوی $|f(x)+5| < \varepsilon$ وقتی برقرار است که $|x-1| < \varepsilon/3 = \delta$ برقرار باشد. پس

$$\lim_{x \to 1} (3x-8) = -5$$

(b) براساس تعریف حد به صورت "ε-M" نشان می‌دهیم که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $M > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای تمام $x > M$ نامساوی

$$\left|\frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon \qquad (*)$$

برقرار باشد. برای این منظور به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\left|\frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3}\right| = \frac{14}{|3x+9|} < \varepsilon.$$

چون $x > 0$ پس

$$\frac{14}{3x+9} < \varepsilon,$$

از آنجا

$$x > \frac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon}$$

بنابراین

$$M = \frac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon}$$

پس، به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $M = \frac{14-9\varepsilon}{3\varepsilon}$ وجود دارد به طوری که به ازای تمام مقادیر $x > M$ نامساوی $(\star)$ برقرار است، یعنی

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$$

مثلاً وقتی $\varepsilon = 0.01$ آنگاه $M = \frac{14-0.09}{0.03} = 463\frac{2}{3}$.

(c) می‌خواهیم ثابت کنیم که به ازای هر $K > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که از نامساوی

$$|x-1| < \delta$$

همواره نامساوی

$$\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right| = \frac{1}{(1-x)^2} > K$$

نتیجه شود. با درنظر گرفتن $K > 0$ نامساوی

$$\frac{1}{(1-x)^2} > K, \qquad (\star\,\star)$$

را حل می‌کنیم. داریم

$$|1-x| < \frac{1}{\sqrt{K}} \quad (K > 0).$$

پس اگر $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$ آنگاه نامساوی $(\star\,\star)$ وقتی برقرار است که $|x-1| < \delta$ یعنی،

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$$

(d) می‌خواهیم ثابت کنیم که به ازای هر $K > 0$ عددی مانند $M > 0$ موجود است به طوری که از نامساوی $x > M$ همواره نامساوی $\log_a x > K$ نتیجه شود. عدد دلخواه $K > 0$ را انتخاب می‌کنیم و نامساوی $\log_a x > K$ را درنظر می‌گیریم. اگر فرض کنیم $a^K = M$ آنگاه از $x > M$ درستی نامساوی $\log_a x > K$ نتیجه می‌شود. پس

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty.$$

راهنمائی: (e) از نامساوی زیر استفاده کنید

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x < \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

(f) عبارت

$$\sin x - \frac{1}{2} = \sin x - \sin\frac{\pi}{6}$$

را به حاصلضرب تبدیل کنید و آنگاه از $|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|$ استفاده کنید.

۱ ـ ۹ ـ ۴ ثابت کنید

$$\lim_{x\to\infty}\cos x$$

وجود ندارد.

۱ ـ ۹ ـ ۵ دنبالهٔ ریشه های دو معادلهٔ $\sin(1/x)=1$ و $\sin(1/x)=-1$ را بکار برده، نشان دهید که تابع

$$f(x)=\sin(1/x)$$

وقتی $x\to 0$ حد ندارد.

۱ ـ ۹ ـ ۶ با استفاده از تعریف کوشی برای حد تابع، ثابت کنید:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1;$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2;$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0;$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1;$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{3x+2}=\dfrac{2}{3};$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty\ \ (a>1);$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

۱ ـ ۱۰ محاسبهٔ حد تابع

I. اگر حدهای $\lim\limits_{x\to a}u(x)$ و $\lim\limits_{x\to a}v(x)$ وجود داشته باشند، قضیه های زیر برقرارند:

(1) $\lim\limits_{x\to a}[u(x)\pm v(x)]=\lim\limits_{x\to a}u(x)\pm\lim\limits_{x\to a}v(x);$

(2) $\lim\limits_{x\to a}[u(x)\cdot v(x)]=\lim\limits_{x\to a}u(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}v(x);$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}u(x)}{\lim\limits_{x\to a}v(x)}\quad(\lim\limits_{x\to a}v(x)\neq 0).$

II. در تمام توابع مقدماتی، در هر نقطه از حوزهٔ تعریف، تساوی

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x)=f(a)$$

برقرار است.

III. اگر به ازای تمام مقادیر x از همسایگی معینی از نقطهٔ a (a می‌تواند در این همسایگی باشد و ممکن است نباشد) توابع $\varphi(x)$ و $f(x)$ برابر باشند و یکی از این توابع وقتی x به a میل می‌کند حد داشته باشد، دیگری هم حدی برابر باآن دارد.

IV . حدهای زیر خیلی مورد استفاده قرار می‌گیرند:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1;$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e=2.71828\ldots;$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \quad (a>0;\ a\neq 1);$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0).$

۱ ـ ۱۰ ـ ۱ حدهای زیر را حساب کنید:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1};$ (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6};$

(c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x};$ (d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^p-1}{x^q-1}$ (p و q صحیح و مثبت هستند)

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x};$ (f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2};$

(g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{3x-5}};$ (h) $\lim\limits_{x\to 3}\left[\log_a\dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}\right];$

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2};$ (j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}.$

حل (a) چون حدهای صورت و مخرج وجود دارد و حد مخرج صفر نیست پس می‌توان قضیهٔ حد خارج قسمت را بکار برد:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(4x^5+9x+7)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^6+x^3+1)}=\frac{4+9+7}{3+1+1}=4.$$

(b) در این مسئله قضیه‌ای را که در بالا استفاده شد، نمی‌توان بکار برد، زیرا حد مخرج وقتی $x \to 2$ صفر می‌شود. ولی حد صورت، وقتی $x \to 2$ صفر است. پس حالت مبهم $\frac{0}{0}$ وجود دارد. به ازای $x \neq 2$ داریم:

$$\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}=\frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)}=\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}.$$

درهر حوزه‌ای که شامل نقطهٔ $x=2$ نیست توابع

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} \quad \text{و} \quad \varphi(x)=\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}$$

برابر هستند، پس حدشان هم برابر است. حد $\varphi(x)$ مستقیماً حساب می‌شود:

$$\lim_{x\to 2}\varphi(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}=\frac{15}{11};$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}=\frac{15}{11}.$$

(c) . درست مشابه قسمت (b) حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را از بین می‌بریم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3-3x^2}=$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(1-x)}=1.$$

جواب: (d) $\frac{p}{q}$; (e) $\frac{5}{6}$; (f) $-\frac{1}{12}$ **راهنمائی:** صورت و مخرج رابه $(\sqrt[3]{10-x}+2)$ ضرب کنید. (g) $\frac{34}{23}$; (h) $\log_a 6$ **راهنمائی:**

$$\lim_{x\to 3}\left[\log_a\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}\right]=\log_a\left[\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3}\right]=\log_a 6; \text{(i) } \frac{2}{3};$$

(j) $\frac{7}{12}$.

۲ ـ ۱۰ ـ ۱ حدهای زیر را محاسبه کنید:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2+1}-3x)$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$;

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2-3}-5x)$;

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$;

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} 5^{2x/(x+3)}$.

حل ــ (a) در این مسئله حالت مبهم $\infty-\infty$ وجود دارد. به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+4/x}{9+6/x-12/x^2-8/x^3}=\frac{2}{9}.$$

توجه: در چنین مثالهائی می‌بینیم که حد با نسبت ضرایب جملاتی برابر است که بزرگترین توان را دارند (بشرط اینکه درجهٔ چند جمله ایهای صورت و مخرج برابر باشند).

(b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+1}-3x)}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=0.$$

(c) وقتی با چنین مثالهائی سروکار داریم، باید به خاطر داشته باشیم که تابع $f(x)=\sqrt[m]{p_n(x)}$ که در آن $p_n(x)$ یک چند جمله ای از درجه n است، مثل تابع $\sqrt[m]{x^n}$ به بینهایت میل می‌کند. از این رو صورت و مخرج را به جملهٔ x با بزرگترین توان تقسیم می‌کنیم. در این مثال صورت و مخرج به $\sqrt{x}$ تقسیم می‌شود:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+3/\sqrt[6]{x}+5/\sqrt[10]{x^3}}{\sqrt{3-2/x}+\sqrt[6]{4/x-12/x^2+9/x^3}}=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(d) چون مجموع دو بینهایت بزرگ، یک بینهایت بزرگ است، پس

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-3}-5x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{2x^2-3}+(-5x)\right]=+\infty.$$

(f) در $x > 0$ داریم $\sqrt{x^2} = x$، بنابراین

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2(2+3/x^2)}}{x(4+2/x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{2+3/x^2}}{x(4+2/x)} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

در $x < 0$ داریم $\sqrt{x^2} = -x$ پس،

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2(2+3/x^2)}}{x(4+2/x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{2+3/x^2}}{x(4+2/x)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

توجه: اگر هردو حالت را باهم درنظر بگیریم، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$$

وجود ندارد.

$$\text{(g)} \quad \lim_{x \to \infty} 5^{2x/(x+3)} = 5^{\lim_{x \to \infty} 2x/(x+3)} = 5^2 = 25.$$

جواب: (e) $\frac{1}{2}$ **راهنمائی:** می‌توانید صورت و مخرج را به x تقسیم به کنید.

۳ـ۱۰ـ۱ مطلوبست محاسبهٔ:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$;

(b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$;

(c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$;

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}$
k صحیح و مثبت است.

(e) $\lim\limits_{x \to \pi/6} \dfrac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}-2\cos x}$;

(f) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$;

(g) $\lim\limits_{x \to \pi/6} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

حل ــ (روش تغییر متغیر). (a) فرض می‌کنیم $26+x = z^3$ پس هرگاه $x \to 1$ آنگاه $z \to 3$ بنابراین

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3} = \lim_{z \to 3} \frac{2z^3-54}{z-3} = \lim_{z \to 3} \frac{2(z-3)(z^2+3z+9)}{z-3} =$$
$$= \lim_{z \to 3} 2(z^2+3z+9) = 54.$$

(d) فرض می کنیم $1+x=z^k$. پس $x=z^k-1$ ، اگر $x\to 0$ آنگاه $z\to 1$ ، بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z^k-1}=\frac{1}{k}$$ (مسئله (d) ؛ ۱-۱۰-۱)

(e) فرض می‌کنیم $x-\pi/6=z$ از آنجا $x=z+\pi/6$ و هرگاه $x\to\pi/6$ آنگاه $z\to 0$ داریم:

$$\lim_{x\to\pi/6}\frac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}-2\cos x}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sqrt{3}-2\cos(z+\pi/6)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos z+\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin(z/2)\cos(z/2)}{2\sqrt{3}\sin^2(z/2)+2\sin(z/2)\cos(z/2)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos(z/2)}{\sqrt{3}\sin(z/2)+\cos(z/2)}=1.$$

جواب:

(b) 32. (c) $\frac{5}{3}$ ؛ (فرض کنید $x=z^{15}$) (f) ∞ .(فرض کنید $\frac{\pi}{2}-x=z$)

$x=\frac{\pi}{2}-z$ ، $x\to\frac{\pi}{2}$ وقتی $z\to 0$; (g) -3. (فرض کنید $\sin x=y$)

۱-۱۰-٤ مطلوبست محاسبهٔ:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2};\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3};$$

$$\text{(c)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x/2)}{1-x}.$$

حل ـ

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2};$$

$$\text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2};$$

(c) فرض کنید $z=1-x$ از آنجا هرگاه $x\to 1$ آنگاه $z\to 0$ پس

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}z\right)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}z}{z}=\frac{\pi}{2}.$$

توجه: روش حل ساده‌تر این مثال در بخش ۱۲ ـ ۱ آمده است.

۵ ـ ۱۰ ـ ۱ مطلوبست محاسبهٔ

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^{7x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/(3x)}$;

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$; (d) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+k/x)^{mx}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^x-1}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\tan x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;

(i) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

حل ـ

$$(a)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{7x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{7}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{7}=e^{7};$$

$$(e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{3^x-1}\right]=\frac{1}{\ln 3}.$$

(i) فرض کنید $x/e-1=z$ از آنجا هرگاه $x\to e$ آنگاه $z\to 0$ پس

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln(x/e)}{e(x/e-1)}=\frac{1}{e}\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=\frac{1}{e}.$$

جواب:

(b) $e^{\frac{1}{3}}$; (c) e^{-1}; (d) e^{mk}; (f) 4; (g) $\frac{1}{a}$; (h) 2.

۶ ـ ۱۰ ـ ۱ مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}.$$

حل ـ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{1/x}=e^{0}=1.$$

۷ ـ ۱۰ ـ ۱ مطلوبست محاسبهٔ:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$;

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{(2x+1)/(x-1)}$.

حل ــ (a) فرض می‌کنیم

$$f(x)=(1+x)/(2+x);$$
$$\varphi(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1-x};$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x}{2+x}=\frac{2}{3};$$
$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\frac{1}{2}.$$

ولی وقتی حدها متناهی باشند و

$$\lim_{x\to a} f(x)=A>0,\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=B$$

رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)}=e^{B\ln A}=A^B.$$

پس،

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

توجه: اگر در عبارت $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ داشته باشیم

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty, \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} f(x)=1$$

در این حالت روش زیر توصیه می‌شود:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\{1+[f(x)-1]\}^{\varphi(x)}=$$
$$=\lim_{x\to a}\{[1+(f(x)-1)]^{1/(f(x)-1)}\}^{\varphi(x)[f(x)-1]}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)[f(x)-1]}. \quad (\star)$$

جواب: (b) $\frac{1}{4}$.

۸ - ۱۰ - ۱ مطلوبست محاسبهٔ

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$ ($a\neq k\pi$, و k عددی صحیح است)

حل ـــ (a) فرض می‌کنیم

$$f(x)=\frac{2x^2+3}{2x^2+5};\ \ \varphi(x)=8x^2+3;$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{2x^2+5}=1;$$
$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to\infty}(8x^2+3)=\infty.$$

دستور (★) را بکار می‌بریم :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)[f(x)-1]};$$
$$f(x)-1=\frac{2x^2+3}{2x^2+5}-1=-\frac{2}{2x^2+5};$$
$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)[f(x)-1]=-\lim_{x\to\infty}\frac{2(8x^2+3)}{2x^2+5}=-8.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=e^{-8}.$$

جواب: (b) 1; (c) $\frac{1}{e}$; (d) $e^{\cot a}$

۹ ـ ۱۰ ـ ۱ تابع $f(x)$ به صورت

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

تعریف می‌شود . آن را مورد بررسی قرار داده و نمودارش را رسم کنید .

حل ـــ سه حالت در نظر می‌گیریم :

(۱) $|x|>1$ چون در اینحالت $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\infty,$ پس

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1/x^{2n}}{1+1/x^{2n}}=1.$$

(۲) $|x|<1$ در اینحالت $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$ بنابراین $f(x)=-1$.

(۳) $x=\pm1$ در اینحالت به ازای هر n ، $x^{2n}=1$ پس $f(x)=0$.

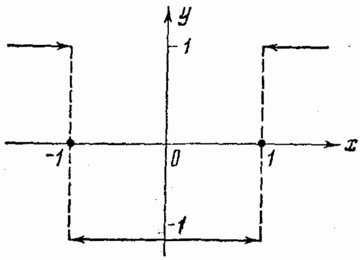
بنابراین در نهایت تابع به صورت زیر در می‌آید :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & |x|>1 \\ -1 & |x|<1 \\ 0 & x=\pm 1 \end{cases}$$

یا آن‌را به صورت

$$f(x)=\operatorname{sign}(|x|-1)$$

نشان می‌دهیم (مسئله (n) ۱۱ - ۵ - ۱ را به بینید). نمودار آن در شکل ۲۷ نشان داده می‌شود.



شکل ۲۷

۱۰ - ۱۰ - ۱ جمعیت کشوری در هرسال 2% افزایش می‌یابد. جمعیت آن بعد از یک قرن چند برابر می‌شود؟

حل — جمعیت اولیه کشور مورد نظر را با A نشان می‌دهیم. بعد از یکسال کل جمعیت برابر

$$A+\frac{A}{100}\cdot 2=\left(1+\frac{1}{50}\right)A$$

و بعد از دوسال مقدار جمعیت برابر $A\left(1+\frac{1}{50}\right)^2$ می‌شود. بعد از صد سال کل جمعیت به $A\left(1+\frac{1}{50}\right)^{100}$ می‌رسد، یعنی، $\left[\left(1+\frac{1}{50}\right)^{50}\right]^2$ برابر می‌شود با استفاده از

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

مقدار تقریبی $e\approx\left(1+\frac{1}{50}\right)^{50}$ به‌دست می‌آید.

پس از صدسال (یک قرن) جمعیت این کشور $e^2\approx 7.39$ برابر می‌شود. البته

این برآورد خیلی تقریبی است، ولی ایده‌ای از افزایش جمعیت را نشان می‌دهد (مقدار دقیقتر با سه رقم اعشار برابر است با $\left(1+\frac{1}{50}\right)^{100}=7.245$).

۱۱ ـ ۱۰ ـ ۱ مطلوبست محاسبهٔ

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+4\tan x}{2-x-2x^4}$;

(b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

(d) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-5x+4}{5x^2-2x-3}$;

(e) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;

(f) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+2^{-x^2}\right)$.

جواب: (a) $\frac{1}{2}$; (b) $-\frac{3}{4}$; (c) $\frac{1}{2}$; (d) $\frac{2}{5}$; (e) 0; (f) -1.

۱۲ ـ ۱۰ ـ ۱ مطلوبست محاسبهٔ

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$;

(c) $\lim\limits_{\alpha\to \pi}\dfrac{\sin\alpha}{1-\alpha^2/\pi^2}$; (d) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\tan 2x\tan(\pi/4-x)$;

(e) $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(x+\pi/6)}$.

جواب: (a) $\frac{1}{20}$; (b) -2; (c) $\frac{\pi}{2}$; (d) $\frac{1}{2}$; (e) -24.

۱۳ ـ ۱۰ ـ ۱ مطلوبست محاسبهٔ

(a) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+4/x)^{x+3}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{2x}-1}{x}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\sin 2x)^{\tan^2 2x}$; (f) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$;

(g) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\tan x)^{\tan 2x}$; (h) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{\tan x}$;

(i) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)^{(6x+1)/(3x+2)}$;

(j) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+3x}{2+3x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$;

(k) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$.

جواب:

(a) e^4; (b) -1; (c) $2\ln a$; (d) e^3; (e) $e^{-\frac{1}{2}}$; (f) e^{-1}; (g) 1; (h) 1; (i) 9; (j) 1; (k) $\alpha-\beta$.

راهنمائی. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0} e^{\beta x}\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{x}=\alpha-\beta.$

۱۴ - ۱۰ - ۱ حدهای زیر را محاسبه کنید:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$; (b) $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\ln\tan x}{1-\cot x}$;

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln(1+a\sin x)$.

جواب: (a) $\sqrt{2}$ **راهنمائی:** به جای $\arccos(1-x)$، $\arcsin\sqrt{2x-x^2}$ قرار دهید. (b) 1; (c) a.

۱۱ - ۱ تابع بینهایت کوچک و بینهایت بزرگ تعریف و مقایسه آنها

تابع $\alpha(x)$ را وقتی $x\to a$ یا $x\to\infty$ یک **بینهایت کوچک** گویند اگر

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0.$$

تابع $f(x)$ را وقتی $x\to a$ یا $x\to\infty$ یک **بینهایت بزرگ** نامند اگر

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

عکس یک کمیت بینهایت بزرگ را یک بینهایت کوچک گویند.

توابع بینهایت کوچک دارای خواص زیر هستند:

(۱) مجموع یا حاصلضرب تعداد متناهی بینهایت کوچک، یک بینهایت کوچک است.

(۲) حاصلضرب یک بینهایت کوچک دریک تابع کراندار، یک بینهایت کوچک است.

مقایسه بینهایت کوچکها

فرض می‌کنیم توابع $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ وقتی $x \to a$ بینهایت کوچک هستند. اگر

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c,$$

که در آن c عددی معین، متناهی و غیرصفر است، آنگاه توابع $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ را دو بینهایت کوچک **هم مرتبه** گویند. اگر $c=1$، آنگاه این دو بینهایت کوچک را **معادل** یا**هم ارز**نامند و با نماد

$$\alpha(x)\sim\beta(x)$$

نشان می‌دهند. اگر $c=0$، آنگاه $\alpha(x)$ یک بینهایت کوچک از مرتبه بالاتر نسبت به $\beta(x)$ است، و بانماد

$$\alpha(x)=o(\beta(x))$$

نشان می‌دهند، با همان شرط، $\beta(x)$ یک بینهایت کوچک از مرتبهٔ پائین‌تر نسبت به $\alpha(x)$ گویند. اگر

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n}=c \qquad 0<|c|<+\infty,$$

آنگاه $\alpha(x)$ یک بینهایت کوچک مرتبهٔ n ام نسبت به $\beta(x)$ است. توابع بینهایت بزرگ هم به‌طور مشابه، مقایسه می‌شوند.

۱ ـ ۱۱ ـ ۱ ثابت کنید که توابع زیر بینهایت کوچک هستند:

(a) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2+5}$ در $x\to 2$

(b) $f(x)=(x-1)^2\sin^3\dfrac{1}{x-1}$ در $x\to 1$

حل ــ (a) کافیست که نشان دهیم حد تابع صفر است:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^2+5}=0.$$

(b) اولاً

$$\varphi(x)=(x-1)^2$$

وقتی $x \to 1$ یک بینهایت کوچک است، در واقع، $\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0$ ثانیاً تابع

$$\psi(x)=\sin^3\frac{1}{x-1};\quad x\neq 1,$$

کراندار است:

$$\left|\sin^3\frac{1}{x-1}\right|\leqslant 1.$$

پس تابع $f(x)$ که حاصلضرب تابع کراندار $\psi(x)$ در بینهایت کوچک $\varphi(x)$ است، یک بینهایت کوچک است.

۲ ـ ۱۱ ـ ۱ ثابت کنید که توابع

$$\text{(a)}\ \ f(x)=\frac{3x-12}{2x^2+7}\qquad x\longrightarrow 4;$$

$$\text{(b)}\ \ f(x)=\frac{\sin x}{x}\qquad x\longrightarrow\infty$$

بینهایت کوچک هستند.

۳ ـ ۱۱ ـ ۱ مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x).$$

حل ـــ چون x وقتی $x\longrightarrow 0$ یک بینهایت کوچک و $\sin(1/x)$ کراندار است، پس حاصلضرب آنها بینهایت کوچک است، یعنی.

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)=0.$$

٤ ـ ۱۱ ـ ۱ هریک از توابع بینهایت کوچک زیر را وقتی $x\longrightarrow 0$ با $\varphi(x)=x$ مقایسه کنید:

$$\text{(a)}\ \ f_1(x)=\tan x^3;\quad \text{(b)}\ \ f_2(x)=\sqrt[3]{\sin^2 x};$$

$$\text{(c)}\ \ f_3(x)=\sqrt{9+x}-3.$$

حل ـــ (a) داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^3}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x^3}{x^3}x^2\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^3}{x^3}\lim_{x\to 0}x^2=0$$

پس $\tan x^3$ یک بینهایت کوچک از مرتبه بالاتر نسبت به x است.

(b) داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{x^2}}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]=\infty.$$

بنابراین $\sqrt[3]{\sin^2x}$ یک بینهایت کوچک از مرتبه پائین‌تر نسبت به x است.

(c) داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{9+x}+3}=\frac{1}{6}.$$

پس دو بینهایت کوچک $\sqrt{9+x}-3$ و x هم مرتبه هستند.

۵ - ۱۱ - ۱ مرتبهٔ بینهایت کوچکی β را نسبت به α تعیین کنید:

(a) $\beta=\cos\alpha-\cos 2\alpha$; (b) $\beta=\tan\alpha-\sin\alpha$.

حل ـ (a)

$$\beta=\cos\alpha-\cos 2\alpha=2\sin\frac{3}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$$

از آنجا

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\sin(3\alpha/2)\sin(\alpha/2)}{\alpha^2}=\frac{3}{2}$$

پس β یک بینهایت کوچک هم مرتبه با α^2 است، یا بینهایت کوچک از مرتبه دوم نسبت به α است.

جواب: (b) یک بینهایت کوچک مرتبه سوم است. **راهنمائی:** از

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}=\frac{1}{2}$$

استفاده کنید.

۶ - ۱۱ - ۱ اگر $x\to\infty$، بینهایت بزرگهای زیر را مقایسه کنید:

(a) $f(x)=3x^2+2x+5$ و $\varphi(x)=2x^3+2x-1$;
(b) $f(x)=2x^2+3x$ و $\varphi(x)=(x+2)^2$;
(c) $f(x)=\sqrt[3]{x+a}$ و $\varphi(x)=\sqrt[3]{x}$.

حل ـ (a) بینهایت بزرگ $3x^2+2x+5$ ازمرتبهٔ پائین‌تر در مقایسه با بینهایت بزرگ $2x^3+2x-1$ است، زیرا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+5}{2x^3+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3/x+2/x^2+5/x^3}{2+2/x^2-1/x^3}=0.$$

جواب: (b) هم مرتبه‌اند. (c) معادل‌اند.

۷ ـ ۱۱ ـ ۱ ثابت کنید که بینهایت کوچکهای $\alpha = x$ و $\beta = x\cos(1/x)$ (وقتی $x \to 0$) قابل مقایسه نیستند، یعنی، نسبت آنها حد ندارد.

حل ــ درواقع

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} \cos(1/x)$$

حد ندارد (ثابت کنید). پس این بینهایت کوچکها قابل مقایسه نیستند.

۸ ـ ۱۱ ـ ۱ وقتی $x \to 0$ کدامیک از بینهایت کوچکهای زیر از مرتبه بالاتر، از مرتبهٔ پائینتر و یا هم مرتبه با x است (یا هستند):

(a) $100x$; (b) x^2; (c) $6\sin x$; (d) $\sin^3 x$; (e) $\sqrt[3]{\tan^3 x}$.

جواب: (a) هم مرتبه با x، (b) از مرتبه بالاتر نسبت به x، (c) هم مرتبه با x، (d) از مرتبه بالاتر نسبت به x است.

۹ ـ ۱۱ ـ ۱ وقتی $x \to 0$ آنگاه مرتبهٔ بینهایت کوچکهای زیر را نسبت به x تعیین کنید:

(a) $2\sin^4 x - x^5$; (b) $\sqrt{\sin^2 x + x^4}$;
(c) $\sqrt{1 + x^3} - 1$; (d) $\sin 2x - 2\sin x$;
(e) $1 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; (f) $2\sqrt{\sin x}$;
(g) $\frac{x}{x-1}$; (h) $\tan x + x^2$;
(i) $\cos x - \sqrt[3]{\cos x}$; (j) $e^x - \cos x$.

جواب: (b)، (e)، (g)، (h)، (j) از مرتبه اول، (c)، (d) از مرتبه سوم (a) از مرتبه چهارم (f) از مرتبهٔ $\frac{1}{2}$، (i) از مرتبه دوم.

۱۰ ـ ۱۱ ـ ۱ فرض می‌کنیم که ضلع مکعبی یک بینهایت کوچک است. مرتبه بینهایت کوچکی قطر (d) مساحت کل (S) حجم (V) آن‌را نسبت به ضلع آن تعیین کنید.

جواب: قطر از مرتبه اول، مساحت از مرتبه دوم و حجم از مرتبه سوم نسبت به ضلع آن است.

۱۲ ـ ۱ بینهایت کوچکهای معادل یا هم ارز کاربرد آن در محاسبهٔ حد

اگر توابع $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ در $x \to a$ بینهایت کوچک باشند و اگر

$$\alpha(x) \sim \gamma(x), \ \beta(x) \sim \delta(x)$$

آنگاه

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)}$$ (تعویض یک بینهایت کوچک با معادل خودش)

اگر

$$\lim_{x \to a} f(x) = k, \quad 0 < |k| < \infty,$$

آنگاه

$$f(x)\alpha(x) \sim k\alpha(x)$$

اگر

$$\alpha(x) \sim \gamma(x),$$
$$\beta(x) \sim \gamma(x),$$

آنگاه

$$\alpha(x) \sim \beta(x)$$

شرط لازم و کافی برای اینکه دو بینهایت کوچک معادل باشند آنست که تفاضل آنها یک بینهایت کوچک از مرتبهٔ بالاتر نسبت به هرکدام از آنها باشد.

لیست توابع بینهایت کوچک با معادل هرکدام

در فرمولهای زیر وقتی $x \to 0$ ، $\alpha(x)$ یک بینهایت کوچک است

(1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$; (2) $\tan\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
(3) $1-\cos\alpha(x) \sim [\alpha(x)]^2/2$;

$$(4)\ \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x); \quad (5)\ \arctan \alpha(x) \sim \alpha(x);$$
$$(6)\ \ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x); \quad (7)\ a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\ln a \qquad (a>0),$$

درحالت خاص $\quad e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$

$$(8)\ [1+\alpha(x)]^P-1 \sim P\alpha(x),$$

درحالت خاص $\quad \sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$

۱ـ۱۲ـ۱ ثابت کنید وقتی $x \to 0$

$$(a)\ 1-\frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim \frac{1}{2}x; \quad (b)\ 1-\frac{1}{1+x} \sim x;$$
$$(c)\ \sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$$

حل ــ (a) بنابه فرمول (۸) وقتی $P=1/2$ داریم:

$$1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}(\sqrt{1+x}-1) \sim 1\cdot\frac{1}{2}x.$$

(c) بنابه فرمول (۱) داریم،

$$\sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x\sqrt{x}}=x^{3/4},$$
$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}=x^{3/4}\sqrt{1+x^{1/2}} \sim x^{3/4},$$

پس

$$\sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}\cdot$$

۱ـ۱۲ـ۲ هم ارزیا معادل هریک از بینهایت کوچکهای زیر را تعیین کنید:

$$(a)\ 3\sin\alpha-5\alpha^3; \quad (b)\ (1-\cos\alpha)^2+16\alpha^3+5\alpha^4+6\alpha^5.$$

حل ــ (a) قابل توجه است که مجموع دو بینهایت کوچک α و β با مرتبه‌های متفاوت با بینهایت کوچک آن جمعوندی معادل است که مرتبه پائینتری داشته باشد. با انتخاب بینهایت کوچک معادل، ازبقیه بینهایت کوچکهای ازمرتبه بالاتر صرفنظر می‌شود.

دراین مثال مرتبهٔ $3\sin\alpha$ برابر ۱ است و مرتبهٔ $(-5\alpha^3)$ برابر ۳ است، پس

$$3\sin\alpha+(-5\alpha^3) \sim 3\sin\alpha \sim 3\alpha.$$

(b) مرتبه جمعوند $16\alpha^3$ از همه پائینتر است، بنابراین

$$(1-\cos\alpha)^2+16\alpha^3+5\alpha^4+6\alpha^5 \sim 16\alpha^3.$$

۳-۱۲-۱ با استفاده از بینهایت کوچکهای معادل مطلوبست محاسبهٔ

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)};\quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}};$$

$$\text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1};\quad \text{(d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x};$$

$$\text{(e)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\arcsin^2 x-\arctan^2 x}{3x};$$

$$\text{(f)}\ \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-x^2+x^3}{\tan x+2\sin^2 x+5x^4};$$

$$\text{(g)}\ \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-\tan x)^2+(1-\cos 2x)^4+x^5}{7\tan^7 x+\sin^6 x+2\sin^5 x};$$

$$\text{(h)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\,\ln(1+3x)}{(\arctan\sqrt{x})^2\left(e^{5\sqrt[3]{x}}-1\right)};$$

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4}{\tan^3 x-6\sin^2 x+x-5x^3}.$$

حل ــ (a) باتوجه به لیست بینهایت کوچکها داریم،

$$\sin 5x\sim 5x;\ \ \ln(1+4x)\sim 4x$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x}=\frac{5}{4}.$$

$$\text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2/4}=$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-4\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}=-2.$$

(d) با استفاده از لیست بینهایت کوچکها داریم:

$$\sqrt{1+x+x^2}-1\sim(x+x^2)/2\sim x/2,\ \ \sin 4x\sim 4x.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x/2}{4x}=\frac{1}{8}.$$

(e) با توجه به لیست بینهایت کوچکها داریم:

$$\sin 2x + \arc\sin^2 x - \arctan^2 x \sim \sin 2x \sim 2x.$$

پس

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \arctan^2 x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

(h) $\sin\sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x};\ \ \ln(1+3x) \sim 3x;$

$$\arctan\sqrt{x} \sim \sqrt{x};\quad e^{5\sqrt[3]{x}} - 1 \sim 5\sqrt[3]{x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\,\ln(1+3x)}{(\arctan\sqrt{x})^2\left(e^{5\sqrt[3]{x}}-1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\cdot 3x}{x\cdot 5\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{5}$$

جواب: (b) 4; (f) 3; (g) $\frac{1}{2}$; (i) 2.

۱-۱۲-۴ مقادیر تقریبی ریشه‌های $\sqrt{1.02}$ و $\sqrt{0.994}$ را بیابید و خطای مطلق را تخمین به‌زنید.

حل ــ فرمول تقریبی زیر را به کار می‌بریم:

$$\sqrt{1+x} \sim 1 + x/2 \qquad (*)$$

(x به اندازهٔ کافی نزدیک به صفر است). در این حالت

$$\sqrt{1+0.02} \sim 1 + \frac{0.02}{2} = 1.01;$$

$$\sqrt{1-0.006} \sim 1 - \frac{0.006}{2} = 0.997.$$

برای تخمین خطا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{x}{2} - (\sqrt{1+x} - 1) = \frac{1}{2}(x - 2\sqrt{1+x} + 2) =$$

$$= \frac{1}{2}(x + 1 - 2\sqrt{x+1} + 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{x+1} - 1)^2 \sim \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{8}.$$

پس خطای مطلق فرمول تقریبی $(\star)$ با کمیت $\frac{x^2}{8}$ تخمین زده می‌شود. با استفاده ازاین رابطه خطای مطلق ریشه $\sqrt{1.02} \approx 1.01$ برابر $\approx \frac{(0.02)^2}{8} = 0.00005$ است و خطای مطلق $\sqrt{0.994} \approx 0.997$ برابر $\approx \frac{(0.006)^2}{8} \approx 0.000005$ می‌شود.

۱-۱۲-۵ ثابت کنید وقتی $x \longrightarrow 0$

(a) $\sqrt[3]{1+x}-1 \sim \frac{1}{3}x;$
(b) $\arctan mx \sim mx;$
(c) $1-\cos^3 x \sim \frac{3}{2}\sin^2 x.$

۶ ـ ۱۲ ـ ۱ وقتی $x \to 0$ مطلوبست تعیین مرتبهٔ بینهایت کوچکی هریک از بینهایت کوچکهای زیر نسبت به $\beta(x)=x$

$$\text{(a)}\ \sqrt{\sin^2 x+x^4};\quad \text{(b)}\ \frac{x^2(1+x)}{1+\sqrt[3]{x}}.$$

جواب: (a) 1; (b) 2.

۷ ـ ۱۲ ـ ۱ وقتی $x \to 2$ مرتبهٔ بینهایت کوچکی هریک از بینهایت کوچکهای زیر را نسبت به $\beta(x)=x-2$ تعیین کنید

$$\text{(a)}\ 3(x-2)^2+2(x^2-4);\quad \text{(b)}\ \sqrt[3]{\sin \pi x}.$$

جواب: (a) 1; (b) $\frac{1}{3}$

۸ ـ ۱۲ ـ ۱ با استفاده از بینهایت کوچکهای هم ارز، حدهای زیر را محاسبه کنید:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+5x)};$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{e^{\sin 5x}-1};$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{\ln(1+\tan 2x)};$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan 3x}{\arcsin 2x};$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos 2x)}{\ln^2(\sin 3x+1)};$ (f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\ln(1+\tan 2x)};$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x-3x^2+4x^3)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)};$ (h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}.$

جواب:

(a) $\frac{3}{5}$; (b) $\frac{4}{5}$; (c) $\frac{3}{2}$; (d) $\frac{3}{2}$; (e) $\frac{2}{9}$; (f) $\frac{3}{4}$; (g) -2; (h) 1.

۹ ـ ۱۲ ـ ۱ مقدار تقریبی ریشهٔ $\sqrt[3]{1042}$ را به‌دست آورید.

جواب: 10.14. **راهنمائی:** $1042=10^3\times(1+0.042)$.

۱۳ـ۱ حدهای یک طرفه

عدد A را حد راست تابع $f(x)$ وقتی $x \to x_0+0$ گویند هرگاه به ازای هر عدد $0 < \varepsilon$ عددی مانند $0 < \delta(\varepsilon)$ موجود باشد، به طوری که به ازای هر x از حوزهٔ تعریف تابع که در نامساوی

$$0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$$

صدق می‌کند، نامساوی

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

برقرار باشد و آن را به صورت

$$\left(A = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)\right)$$

نشان می‌دهند.

حد چپ تابع $f(x)$ را وقتی $x \to x_0 - 0$ ، که به صورت $f(x_0-0)$ نشان می‌دهند به طور مشابه تعریف می‌شود.

هرگاه $x_0 = 0$ در این صورت $x \to +0$ یا $x \to -0$ وحد را به ترتیب با $f(+0)$ یا $f(-0)$ نشان می‌دهند.

توجه: تابعی در نقطه‌ای وقتی حد دارد که حد چپ و حد راست تابع در آن نقطه برابر باشند.

۱ـ۱۳ـ۱ حد چپ و حد راست هریک از توابع زیر را به دست آورید:

(a) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & x \leqslant 1, \\ 3x-5 & x > 1 \end{cases} \quad \text{as } x \to 1;$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|} \qquad x \to 1;$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} \qquad x \to 0;$

(d) $f(x) = 3 + \dfrac{1}{1+7^{1/(1-x)}} \qquad x \to 1;$

(e) $f(x) = \cos(\pi/x) \qquad x \to 0;$

(f) $f(x) = 5/(x-2)^3 \qquad x \to 2.$

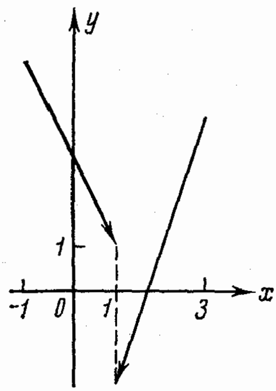
حل ــ (a) فرض می‌کنیم $x \leqslant 1$ ، پس $f(x) = -2x+3$ بنابراین حد چپ برابر است با

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = 1$$

اگر $1 < x$ پس $f(x) = 3x - 5$ بنابراین حد راست برابر است با

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = -2$$

(شکل ۲۸ را ببینید).



شکل ۲۸

$$\text{(c)}\ f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x} = \frac{\sqrt{2}\,|\sin x|}{x},$$

ولی

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{if } \quad 0 < x < \pi/2, \\ -\sin x, & \text{if } -\pi/2 < x < 0. \end{cases}$$

پس

$$f(-0) = \lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0}\left(-\sqrt{2}\,\frac{\sin x}{x}\right) = -\sqrt{2},$$
$$f(+0) = \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}\left(\sqrt{2}\,\frac{\sin x}{x}\right) = \sqrt{2}.$$

(d) وقتی x به ۱ میل می‌کند و همواره از ۱ کمتر است (یعنی از چپ به ۱ نزدیک می‌شود) عبارت $1/(1-x)$ به $+\infty$ می‌گراید، بنابراین

$$\lim_{x\to 1-0} 7^{1/(1-x)} = +\infty,\ \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1+7^{1/(1-x)}} = 0,\ f(1-0) = 3.$$

بعلاوه وقتی $x \to 1+0$ داریم $1/(1-x) \to -\infty$ بنابراین

$$\lim_{x\to 1+0} 7^{1/(1-x)} = 0,$$

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0}\left(3 + \frac{1}{1+7^{1/(1-x)}}\right) = 3+1 = 4.$$

(e) دو دنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{x'_n\}$ رابا جملات عمومی

$$x_n = \frac{1}{2n} \text{ and } x'_n = \frac{2}{2n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

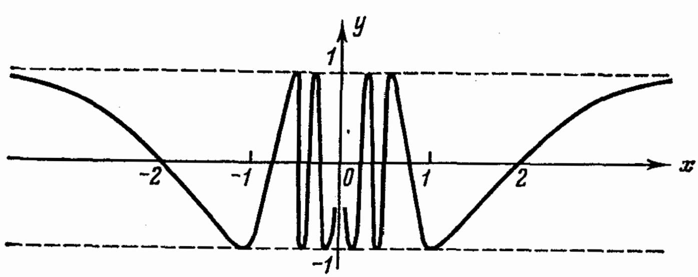
در نظر می‌گیریم. در اینصورت $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 0$ و

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos 2\pi n = 1;$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \cos (2n+1)\frac{\pi}{2} = 0.$$

پس تـابع $f(x)$ در نقطهٔ صفـر حد راست ندارد. چون $f(x)$ تابعی زوج است پس در این نقطه حد چپ هم ندارد (شکل ۲۹ را ببینید).

جواب:

(b) $f(1-0) = -2,$ $f(1+0) = 2;$ (f) $f(2-0) = -\infty;\ f(2+0) = +\infty$



شکل ۲۹

۲ ـ ۱۳ ـ ۱ ثابت کنید که وقتی $x \to 1$ تابع

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & 0\leqslant x<1, \\ 3x+2 & 1<x<3 \end{cases}$$

حد چپی برابر ۲ و حد راستی برابر ۵ دارد.

۳ ـ ۱۳ ـ ۱ حدهای چپ و راست توابع زیر را وقتی $x \to 0$ به‌دست آورید:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{2-2^{1/x}}$;

(b) $f(x)=e^{1/x}$;

(c) $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$.

جواب:

(a) $f(-0)=\frac{1}{2}$, $f(+0)=0$; (b) $f(-0)=0$, $f(+0)=+\infty$;

(c) $f(-0)=-1$, $f(+0)=1$.

۱۴ ـ ۱ پیوستگی تابع
نقاط انفصال یا ناپیوستگی و طبقه‌بندی آنها

تابع $y=f(x)$ را که در مجموعهٔ X معین است در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $x_0 \in X$ نقطهٔ حد این مجموعه است. تابع $f(x)$ را در نقطهٔ x_0 **پیوسته** گویند هرگاه

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

این شرط معادل است با

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0.$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 **پیوسته**است اگر و فقط اگر

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

تابع $f(x)$ را در مجموعهٔ X پیوسته گویند اگر در هر نقطهٔ این مجموعه پیوسته باشد.

نقاط انفصال نوع اول

فرض می‌کنیم مجموعهٔ X حوزهٔ تعریف تابع $f(x)$ بوده و x_0 نقطهٔ حد این مجموعه است. نقطهٔ x_0 را نقطهٔ **انفصال نوع اول** تابع $f(x)$ گویند هرگاه تابع در این نقطه حد چپ و حد راست متناهی و برابر داشته ولی

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$$

در این صورت x_0 را **نقطهٔ انفصال نوع اول «رفع شدنی»** گویند. بعلاوه اگر

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$$

در این صورت آن‌را **نوع اول «رفع نشدنی»** نامند و تفاضل $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ را **«جهش انفصال»** تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 گویند.

نقاط انفصال نوع دوم

اگر حداقل یکی از حدهای $f(x_0-0)$ و $f(x_0+0)$ موجود نباشد و یا بینهایت باشد، آنگاه نقطهٔ x_0 را **نقطهٔ انفصال نوع دوم** تابع $f(x)$ گویند.

۱ ـ ۱۴ ـ ۱ فقط از تعریف استفاده کرده و پیوستگی تابع

$$f(x)=3x^4+5x^3+2x^2+3x+4$$

را در نقطهٔ دلخواه x ثابت کنید.

حل ــ نقطهٔ دلخواه x_0 را انتخاب می‌کنیم

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(3x^4+5x^3+2x^2+3x+4)=3x_0^4+5x_0^3+2x_0^2+3x_0+4.$$

مقدار تابع در این نقطه برابر است با

$$f(x_0)=3x_0^4+5x_0^3+2x_0^2+3x_0+4.$$

با مقایسه آنها داریم،

$$\lim_{x\to x_0} f(x_0)=f(x_0).$$

پس بنا به تعریف، تابع در این نقطه پیوسته است. چون x_0 یک نقطهٔ دلخواه است پس ثابت شد که تابع به ازای تمام مقادیر x پیوسته است.

۲ ـ ۱۴ ـ ۱ توابع زیر داده شده‌اند:

$$\text{(a)}\ \ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+3) & -\infty<x\leqslant 1,\\ 6-5x & 1<x<3,\\ x-3 & 3\leqslant x<\infty;\end{cases}$$

$$\text{(b)}\ \ f(x)=\begin{cases}-2x^2 & x\leqslant 3,\\ 3x & x>3;\end{cases}$$

$$\text{(c)}\ \ f(x)=\frac{|2x-3|}{2x-3}.$$

نقاط انفصال را (در صورت وجود) تعیین کنید. جهشهای انفصال توابع را در نقاط انفصال نوع اول به‌دست آورید.

حل ــ (a) حوزهٔ تعریف تابع، فاصلهٔ $(-\infty, \infty)$ است. در فاصله‌های باز $(3, \infty)$ $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ تابع پیوسته است. بنابراین، احتمالاً تابع در نقاط $x=3$ ، $x=1$ که نمایش تحلیلی تابع در آنها عوض می‌شود، منفصل است. حدهای یک طرفهٔ تابع را در نقطهٔ $x=1$ حساب می‌کنیم.

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{5}(2x^2+3)=1;$$
$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(6-5x)=1.$$

مقدار تابع در $x=1$ برابر است با

$$f(1)=(2+3)/5=1$$

چون

$$f(1-0)=f(1+0)=f(1),$$

پس تابع $x=1$ پیوسته است.

نقطهٔ $x=3$ را در نظر می‌گیریم:

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}(6-5x)=-9;$$
$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}(x-3)=0.$$

چون حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر نیست، پس تابع در نقطهٔ $x=3$ انفصال نوع

اول است . جهش تابع در این نقطه برابر است با

$$f(3+0)-f(3-0)=0-(-9)=9.$$

(c) تابع در تمام نقاط بجز $x=3/2$ معین و پیوسته است . چون وقتی $2x-3>0$ داریم $x>3/2$ ووقتی $2x-3<0$ داریم $x<3/2$ پس

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x>3/2, \\ -1 & x<3/2. \end{cases}$$

بنابراین

$$f(3/2+0)=1,\ f(3/2-0)=-1.$$

پس تابع در $x=3/2$ انفصال متناهی نوع اول دارد . جهش تابع در این نقطه برابر است با

$$f(3/2+0)-f(3/2-0)\ =\ 1-(-1)=2.$$

جواب: (b) تابع در $x=3$ انفصال نوع اول دارد و جهش آن برابر ۲۷ است .

۳ ـ ۱۴ ـ ۱ توابع زیر را برای پیوستگی بیازمائید :

(a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0, \\ 1 & x=0; \end{cases}$

(b) $f(x)=\sin(1/x);$

(c) $f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x) & x\neq 0, \\ 0 & x=0; \end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases} 4\cdot 3^{x} & x<0, \\ 2a+x & x\geqslant 0; \end{cases}$

(e) $f(x)=\operatorname{arc\,tan}(1/x);$ (f) $f(x)=(x^3+1)/(x+1).$

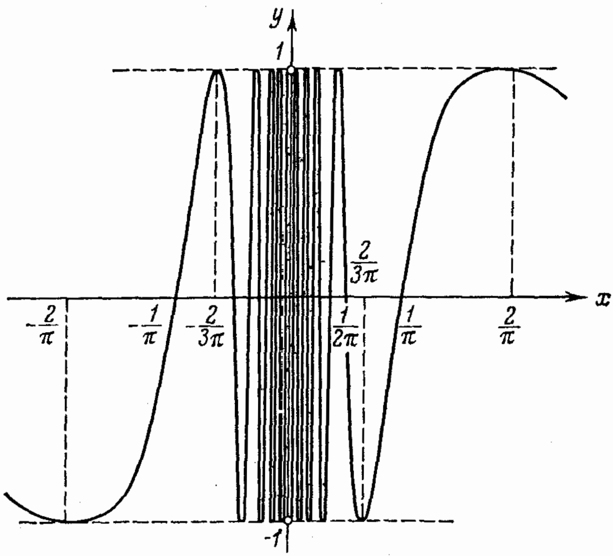
حل ـــ (a) تابع به ازای تمام مقادیر $x\neq 0$ پیوسته است . در $x=0$ داریم :

$$f(0)=1;\quad \lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

پس تابع در این نقطه پیوسته است ، بنابراین به ازای تمام مقادیر x پیوسته می‌شود .

(b) تابع به ازای تمام $x\neq 0$ پیوسته و معین است . حدهای چپ و راست در

$x=0$ وجود ندارند (مسئله (e) ۱ - ۱۳ - ۱ را ببینید). بنابراین تابع در نقطهٔ $x=0$ انفصال نوع دوم دارد (شکل ۳۰).



شکل ۳۰

(d)) $f(+0)=2a$, $f(-0)=4$ اگر $a=2$, $2a=4$ آنگاه

$$f(-0)=f(+0)=f(0)$$

در نتیجه تابع $x=0$ پیوسته است.

$$f(-1-0)=f(-1+0)=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3 \quad \text{(f)}$$

یعنی هردو حد یک طرفه موجود، متناهی و برابرند. ولی در نقطهٔ $x=-1$ تابع تعریف نشده است. بنابراین پیوسته نیست. نمودار تابع سهمی $y=x^2-x+1$ است که از آن نقطهٔ $M(-1,3)$ حذف شده است. اگر تابع را دوباره تعریف کنیم و فرض بکنیم $f(-1)=3$ آنگاه در این نقطه پیوسته می‌شود. پس تابع در $x=-1$ انفصال حذف شدنی دارد.

جواب: (c) تابع در همه جا پیوسته است. (e) تابع در $x=0$ انفصال نوع اول دارد و جهش تابع را در این نقطه برابر π است.

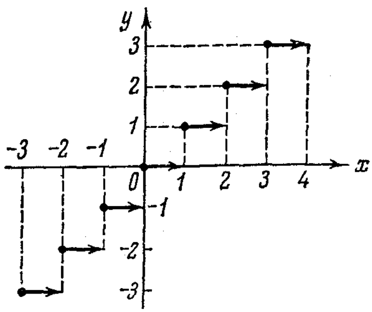
راهنمائی: $\arc\tan(-\infty)=-\frac{\pi}{2},\ \arc\tan(+\infty)=+\frac{\pi}{2}$

۴ ـ ۱۴ ـ ۱ توابع زیر را برای پیوستگی بیازمائید :

(a) $f(x)=E(x)$ که در آن $E(x)$ قسمت صحیح عدد x است، یعنی اگر $n\leqslant x$ مقدار تابع را با n نشان دهیم .

(b)
$$\lambda(x)=\begin{cases}1 & x \text{ گویاست}\\ 0 & x \text{ اصم است}\end{cases}$$

$\lambda(x)$ را **تابع دیریکله** گویند. مثلاً $\lambda(-1/2)=1;\ \lambda(\sqrt{2})=0;\ \lambda(\pi)=0$ و $\lambda(0)=1$ وغیره.



شکل ۳۱

حل ــ (a) تابع $E(x)$ درتمام نقاط حقیقی تعریف شده وفقط مقادیر حقیقی را می‌پذیرد. این تابع در هر نقطهٔ صحیح n منفصل است، زیرا $E(n+0)=n$ و $E(n-0)=n-1$ (شکل ۳۱).

(b) نقطهٔ دلخواه x_0 روی محور x مفروض است، دو حالت درنظر می‌گیریم :

(۱) x_0 گویاست.

(۲) x_0 اصم است.

درحالت اول $\lambda(x_0)=1$ درنزدیکی نقطهٔ گویا، نقاط اصم زیادی وجود دارند که درآنها $\lambda(x)=0$ پس در هر همسایگی x_0 نقاط x ی وجود دارند که درآنها

$$|\Delta y|=|\lambda(x_0)-\lambda(x)|=1.$$

در حالت دوم $\lambda(x_0)=0$ در هر همسایگی نقطهٔ اصم، نقاط گویائی وجود دارند که در آنها $\lambda(x)=1$ پس،

$$|\Delta y|=|\lambda(x_0)-\lambda(x)|=1$$

بنابراین در هر دو حالت Δy وقتی $\Delta x\to 0$ ، به صفر میل نمی‌کند. پس تابع در x_0 منفصل است. چون این نقطه دلخواه است، بنابراین تابع دیریکله در هر نقطه منفصل است. نمودار این تابع شامل مجموعه نقاطی از محور x هستند که طول هرکدام عددی گویاست و مجموعه نقاطی از خط $y=1$ هستند که طول هرکدام از این نقاط عددی اصم است، باین علت است که رسم نمایش هندسی این تابع غیر ممکن است.

۵ ـ ۱٤ ـ ۱ با استفاده از تعریف پیوستگی و استفاده از "$\varepsilon-\delta$" پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید:

(a) $f(x)=ax+b \quad (a\neq 0);$

(b) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{گویاست } x \\ -x^2 & \text{اصم است } x \end{cases}$

حل ـ (a) نقطهٔ دلخواه x_0 را انتخاب می‌کنیم. مطابق تعریف "$\varepsilon-\delta$" لازم است نشان دهیم که به ازای هر عدد کوچک و دلخواه $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که اگر $|x-x_0|<\delta$ آنگاه نامساوی $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ برقرار است.

نامساوی اخیر را در نظر می‌گیریم:

$$|f(x)-f(x_0)|=|(ax+b)-(ax_0+b)|=|ax+b-ax_0-b|=|a||x-x_0|$$

نامساوی $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ وقتی برقرار است که

$$|a||x-x_0|<\varepsilon \quad \text{یا} \quad |x-x_0|<\varepsilon/|a| \quad (a\neq 0).$$

پس اگر $\delta\leqslant\varepsilon/|a|$ آنگاه از نامساوی $|x-x_0|<\delta$ درستی نامساوی

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

نتیجه می‌شود. پس تابع در هر نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته است.

(b) نقطهٔ دلخواه x_0 را انتخاب می‌کنیم. اگر حد دنباله $\{x_n\}$ از اعداد گویا، به x_0 میل کند آنگاه

$$\lim_{x_n\to x_0} f(x_n)=x_0^2.$$

اگر حد دنباله $\{x_n'\}$ از اعداد اصم به x_0 میل کند، آنگاه

$$\lim_{x_n'\to x_0} f(x_n') = -x_0^2 \qquad x_0 \neq 0$$

چون حدها برابر نیستند پس تابع در تمام نقاط $x \neq 0$ منفصل است.

از طرفی فرض می‌کنیم $x=0$ داریم

$$|f(x)-f(0)| = |\pm x^2 - 0| = x^2$$

واضح است که وقتی $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ داریم $x^2 < \varepsilon$. اگر $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد، آنگاه با در نظر گرفتن $\delta \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ و $|x-0| = |x| < \delta$ داریم

$$|\Delta f(0)| = x^2 < \varepsilon$$

پس تابع در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است. بنابراین نقطهٔ $x=0$ تنها نقطهٔ پیوستگی تابع است. باتوجه به تعریف تابع دیریکله (مسئله (b) ۴ ـ ۱۴ ـ ۱) می‌توان این تابع را به صورت زیر بیان نمود:

$$f(x) = x^2\,[2\lambda(x) - 1]$$

۶ ـ ۱۴ ـ ۱ نوع انفصال توابع زیر را درنقطهٔ $x = x_0$ تعیین کنید:

(a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x<2, \\ x^2-1 & x \geqslant 2; \quad x_0 = 2; \end{cases}$

(b) $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x-5}; \; x_0 = 5;$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{1/x}}; \quad x_0 = 0;$

(d) $f(x) = \tan x; \; x_0 = \pi/2;$

(e) $f(x) = \sqrt{x} - E(\sqrt{x}); \; x_0 = n^2,$ n عددی طبیعی است

حل ــ (a) حدهای چپ و راست را در نقطهٔ $x_0 = 2$ تعیین می‌کنیم:

$$f(2-0) = \lim_{x\to 2-0} (x+2) = 4;$$
$$f(2+0) = \lim_{x\to 2+0} (x^2-1) = 3.$$

پس حدهای چپ و راست موجود و متناهی بوده و برابر نیستند، بنابراین در نقطهٔ $x_0 = 2$ تابع انفصال نوع اول دارد.

(e) تابع $E(\sqrt{x})$ در هر نقطهٔ $x = n^2$ انفصال نوع اول دارد، که درآن n عددی طبیعی است (مسئله (a) ۴ ـ ۱۴ ـ ۱ را ببینید) حال آنکه تابع $\sqrt{x}$ درتمام

$x \geqslant 0$ پیوسته است. بنابراین تابع

$$f(x) = \sqrt{x} - E(\sqrt{x})$$

در تمام نقاط... $1,\ 4,\ 9,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$ انفصال نوع اول دارد.

جواب: (b) در نقطهٔ $x_0 = 5$ انفصال نوع اول است: $f(5+0) = \frac{\pi}{2}$ و $f(5-0) = -\frac{\pi}{2}$ (c) در نقطهٔ $x_0 = 0$ انفصال نوع اول است: $f(-0) = 1,\ f(+0) = 0$

(d) در نقطهٔ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ انفصال نوع دوم است:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty, \quad f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty.$$

۷ـ ۱٤ ـ ۱ توابع زیر را برای انفصال و پیوستگی بررسی کنید:

(a) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$;

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0, \\ 3 & x = 0; \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0; \end{cases}$

(d) $f(x) = \lim_{n \to \infty} (\sin x)^{2n}$; (e) $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$;

(f) $f(x) = E(x) + E(-x)$.

جواب: (a) در نقطهٔ $x = 0$ انفصال، رفع شدنی است. با تعریف دوباره تابع بافرض $f(0) = 1$ تابع در این نقطه پیوسته می‌شود.

(b) در نقطهٔ $x = 0$ انفصال از نوع رفع شدنی است. با تعریف دوباره تابع و بافرض $f(0) = 1$ تابع پیوسته می‌شود.

(c) در نقطهٔ $x = 0$ انفصال از نوع دوم است: $f(-0) = 0,\ f(+0) = +\infty$

(d) در نقاط

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

انفصالها رفع شدنی هستند، زیرا

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} (\sin x)^{2n} = \begin{cases} 0 & |\sin x| < 1, \\ 1 & |\sin x| = 1; \end{cases}$$

(e) در نقاط

$$x=k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

انفصالها از نوع اول است. زیرا

$$f(x)=\frac{|\sin x|}{\sin x}\begin{cases}1 & \sin x>0,\\ -1 & \sin x<0;\end{cases}$$

(f) درنقاط $x=n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ انفصالها ازنوع رفع شدنی هستند، زیرا

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x=n,\\ 0 & x\neq n.\end{cases}$$

۸ - ۱۴ - ۱ درهریک از توابع زیر نقاط انفصال را بیابید و دراین نقاط جهشهای تابع را تعیین کنید:

(a) $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+1}$;

(b) $f(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$;

(c) $f(x)=\dfrac{2|x-1|}{x^2-x^3}$;

(d) $f(x)=\begin{cases}-x & x\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{x-1} & x>1.\end{cases}$

جواب: (a) درنقطهٔ $x=1$ انفصال از نوع دوم است.

(b) درنقطهٔ $x=-2$ انفصال از نوع اول بوده و جهش تابع برابر ۲ است.

(c) درنقطهٔ $x=0$ انفصال از نوع دوم است و درنقطهٔ $x=1$ انفصال از نوع اول بوده و جهش تابع در این نقطه برابر ٤- است.

(d) درنقطهٔ $x=1$ تابع انفصال نوع دوم دارد.

۹ - ۱٤ - ۱ هریک از توابع زیر را درنقطهٔ $x=0$ طوری تعریف کنید که دراین نقطه پیوسته باشند:

(a) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$;

(b) $f(x)=\dfrac{5x^2-3x}{2x}$;

(c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

(d) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

جواب:

(a) $f(0)=1$;   (b) $f(0)=-\dfrac{3}{2}$;   (c) $f(0)=\dfrac{1}{2}$;   (d) $f(0)=2$.

۱۵ - ۱ عملیات در توابع پیوسته
پیوستگی تابع مرکب

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته باشند آنگاه توابع

$$(1)\ f(x)\pm g(x);\quad (2)\ f(x)\cdot g(x);\quad (3)\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x_0)\neq 0)$$

در این نقطه پیوسته اند.

اگر تابع $u=\varphi(x)$ در $x=x_0$ پیوسته باشد و تابع $y=f(u)$ در نقطه $u_0=\varphi(x_0)$ پیوسته باشد، آنگاه تابع مرکب $y=f[\varphi(x)]$ در $x=x_0$ پیوسته است.

۱ - ۱۵ - ۱ پیوستگی توابع زیر را بررسی نمائید:

$$(a)\ f(x)=\frac{2x^5-8x^2+11}{x^4+4x^3+8x^2+8x+4};$$

$$(b)\ f(x)=\frac{3\sin^3 x+\cos^2 x+1}{4\cos x-2};$$

$$(c)\ f(x)=\frac{x^3\cos x+x^2\sin x}{\cos(1/\sin x)}.$$

حل (a)ـ تابعی که به صورت نسبت دو تابع پیوسته باشد (در این حالت نسبت دو چند جمله ای) در تمام نقاط بجز نقاطی که مخرج را صفر می کنند، پیوسته است. ولی در این حالت به ازای هر x

$$x^4+4x^3+8x^2+8x+4=(x^2+2x+2)^2,$$

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$$

یعنی مخرج هیچ وقت صفر نیست. پس تابع $f(x)$ در تمام نقاط پیوسته است.

(b) تابع در تمام نقاط بجز نقاطی که مخرج را صفر می کنند، پیوسته است، یعنی، نقاط انفصال ریشه های معادله زیر است:

$$4\cos x-2=0 \quad \text{یا} \quad \cos x=1/2,$$

از آنجا

$$x = x_n = \pm \pi/3 + 2\pi n \ \ (n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

پس تابع در تمام نقاط بجز نقطه x_n پیوسته است.

(c) مانند مسئلهٔ قبلی، صورت در تمام نقاط پیوسته است. مخرج، براساس پیوستگی تابع مرکب در نقاطی پیوسته است که تابع $u = 1/\sin x$ در آن نقاط پیوسته باشد. چون تابع $\cos u$ در همه جا پیوسته است. پس مخرج در هر نقطه بجز نقاط $x = k\pi$ (k عددی صحیح است) پیوسته است. بعلاوه، به این نقاط، نقاطی را اضافه می کنیم که ریشه های

$$\cos(1/\sin x) = 0$$

هستند، یعنی، نقاطی که در آن

$$1/\sin x = (2p+1)\pi/2$$

(p عدد صحیح است)، یا

$$\sin x = 2/[(2p+1)\pi].$$

پس تابع $f(x)$ در همه جا پیوسته است بجز نقاط

$$x = k\pi \text{ و } x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{(2p+1)\pi} + n\pi \ \ (k, p, n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

۲ ـ ۱۵ ـ ۱ پیوستگی توابع مرکب زیر را بررسی نمائید:

(a) $y = \cos x^n$, n عدد طبیعی است.

(b) $y = \cos \log x$;

(c) $y = \sqrt{1/2 - \cos^2 x}$.

حل ــ (a) تابع $y = \cos u$ یک تابع مرکب است که در آن $u = x^n$ تابع $y = \cos u$ در هر نقطهٔ u پیوسته است و تابع $u = x^n$ هم در هر نقطه x پیوسته است. پس تابع $y = \cos x^n$ همه جا پیوسته می باشد.

(c) در اینجا $y = \sqrt{1/2 - u^2}$ که در آن $u = \cos x$ تابع $\sqrt{1/2 - u^2}$ در فاصلهٔ $[-\sqrt{2}/2, \ \sqrt{2}/2]$ معین و پیوسته است، تابع $u = \cos x$ همواره پیوسته است. بنابراین تابع

$$y = \sqrt{1/2 - \cos^2 x}$$

به ازای تمام مقادیر x که در آن

$$|\cos x| \leqslant \sqrt{2}/2, \qquad \begin{cases} \pi/4+2\pi n \leqslant x \leqslant 3\pi/4+2\pi n, \\ 5\pi/4+2\pi n \leqslant x \leqslant 7\pi/4+2\pi n. \end{cases}$$

پیوسته می باشد.

جواب: (b) تابع در فاصلهٔ $(0, +\infty)$ پیوسته است.

۳ـ۱۵ـ۱ نقاط انفصال و نوع آن را درهریک از توابع زیر تعیین کنید:

$$\text{(a)}\quad y=\frac{1}{u^2+u-2}, \qquad u=\frac{1}{x-1};$$

$$\text{(b)}\quad y=u^2, \qquad u=\begin{cases} x-1 & x \geqslant 0, \\ x+1 & x<0; \end{cases}$$

$$\text{(c)}\quad y=\frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad u=\tan x.$$

حل ــ (a) تابع

$$u=\varphi(x)=\frac{1}{x-1}$$

در نقطه $x=1$ منفصل است. تابع

$$y=f(u)=\frac{1}{u^2+u-2}$$

در نقاطی منفصل است که

$$u^2+u-2=0,$$

یعنی $u_1=-2$ و $u_2=1$. مقادیر متناظر x را با حل معادلات زیر بدست می آوریم:

$$-2=\frac{1}{x-1}, \quad 1=\frac{1}{x-1}$$

از آنجا که

$$x=1/2 \quad \text{و} \quad x=2.$$

پس این تابع مرکب در سه نقطهٔ $x_1=1/2,\ x_2=1,\ x_3=2$ منفصل است. چون

$$\lim_{x\to 1} y=\lim_{u\to\infty} y=0,$$

پس $x_2=1$ انفصال رفع شدنی است.

$$\lim_{x \to 1/2} y = \lim_{u \to -2} y = \infty; \qquad \lim_{x \to 2} y = \lim_{u \to 1} y = \infty;$$

پس نقاط $x_1 = 1/2, x_3 = 2$ نقاط انفصال نوع دوم است.

جواب: (b) تابع در همه جا پیوسته است. در نقطه $x=0$ که نقطه انفصال احتمالی تابع است داریم:

$$\lim_{x \to -0} y = \lim_{u \to 1} u^2 = 1; \quad \lim_{x \to +0} y = \lim_{u \to -1} u^2 = 1; \quad y|_{x=0} = y|_{u=-1} = 1;$$

(c) در نقاط

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

انفصال، رفع شدنی است، زیرا

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} y = \lim_{u \to \pm\infty} y = -1$$

۴ - ۱۵ - ۱ تابع $f(x) = 1/(1-x)$. مفروض است. نقاط انفصال تابع مرکب

$$y = f\{f[f(x)]\}.$$

را تعیین کنید.

حل ــ نقطه $x = 1$ از نقاط انفصال تابع

$$v = f(x) = \frac{1}{1-x}$$

است. اگر $x \neq 1$، آنگاه

$$u = f[f(x)] = \frac{1}{1 - 1/(1-x)} = \frac{x-1}{x}$$

پس، نقطه $x = 0$ نقطهٔ انفصال تابع

$$u = f[f(x)]$$

است.

اگر $x \neq 0, \ x \neq 1$، آنگاه

$$y = f\{f[f(x)]\} = \frac{1}{1-(x-1)/x} = x$$

همه جا پیوسته است. پس نقاط انفصال تابع مرکب $x=1$ $x=0$, هستند که هر دو رفع شدنی می باشند،

۱۶ ـ ۱ خواص تابع پیوسته در یک فاصله بسته
پیوستگی تابع معکوس

I تابع $f(x)$ که در فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته‌است، خواص زیر را دارد:

(۱) $f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ کراندار است،

(۲) $f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ مقادیر ماکزیمم و مینیمم دارد،

(۳) اگر $m=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x),\ M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x),$

آنگاه به ازای هر A که در نامساوی

$$m\leqslant A\leqslant M$$

نقطه‌ای مانند $x_0\in[a, b]$ وجود دارد که $f(x_0)=A$.

بویژه، اگر $f(a)\cdot f(b)<0$ آنگاه نقطه‌ای مثل $c\ (a<c<b)$ می‌توان یافت به‌طوری که $f(c)=0$.

II پیوستگی یک تابع معکوس

اگر تابع $y=f(x)$. در فاصلهٔ X معین، پیوسته و اکیداً یکنواخت باشد، آنگاه یک تابع معکوس منحصر به فرد $x=\varphi(y)$ وجود دارد که حوزهٔ مقادیر $y=f(x)$ معین، پیوسته و اکیداً یکنواخت است.

۱ ـ ۱۶ ـ ۱ آیا معادلهٔ

$$\sin x-x+1=0$$

ریشه دارد؟

حل ــ تابع

$$f(x)=\sin x-x+1$$

در همه جا پیوسته است. بعلاوه چون $f(3\pi/2)=-3\pi/2$ و $f(0)=1$ پس علامت تابع تغییر می کند. بنابراین، طبق خاصیت (۳) معادله در فاصلهٔ $[0, 3\pi/2]$ حداقل یک ریشه دارد.

۲ ـ ۱۶ ـ ۱ آیا معادلهٔ

$$x^5 - 18x + 2 = 0$$

ریشه‌ای در فاصله $[-1, 1]$ دارد؟

جواب: بلی

۳ ـ ۱۶ ـ ۱ ثابت کنید که هر معادلهٔ جبری با نمای فرد و ضرایب حقیقی، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0 \qquad (*)$$

حل ــ تابع

$$f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{2n}x + a_{2n+1},$$

را که همه جا پیوسته است، در نظر می گیریم. برای اثبات فرض می کنیم $a_0 > 0$ ، آنگاه

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \text{ and } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

پس دو عدد $a, b, a < b$ می توان یافت طوری که $f(b) > 0$ و $f(a) < 0$. بنا به خاصیت (۳) بین a و b عددی مانند c وجود دارد طوری که $f(c) = 0$ ، پس معادله (*) حداقل یک ریشه دارد.

۴ ـ ۱۶ ـ ۱ فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته است و معادلهٔ $f(x) = 0$ در این فاصله تعداد متناهی ریشه دارد. آنها را به صورت

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < b.$$

مرتب می کنیم. ثابت کنید در هر یک از فاصله های

$$(a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_n, b)$$

علامت تابع ثابت است.

حل ــ اگر در یکی از فاصله ها علامت تابع عوض شود در آن فاصله ریشه‌ای وجود دارد که این بافرض متناقض است. برای تعیین علامت تابع در هر یک از فاصله ها، کافیست که مقدار تابع را در نقطه ای از آن فاصله حساب به کنیم.

۵ ـ ۱۶ ـ ۱ تابع

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & -2\leqslant x<0, \\ -(x^2+2) & 0\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$$

در فاصلهٔ $[-2, \ +2]$ داده شده است. آیا در این فاصلهٔ بسته، نقطه‌ای وجود دارد که در آن $f(x)=0$ ؟

حل ــ در نقاط انتهائی فاصله علامت تابع متفاوت است:

$$f(-2)=+6;\ f(+2)=-6$$

متوجه هستیم که تابع در هیچ نقطه‌ای از فاصلهٔ $[-2, \ +2]$ صفر نمی شود. در واقع، به ازای هر x، $x^2+2>0$ و $-(x^2+2)<0$ دلیل این حقیقت آنست که تابع در نقطه $x=0$ پیوسته نیست.

۶ ـ ۱۶ ـ ۱ تابع

$$f(x)=x^3/4-\sin \pi x+3$$

مفروض است، آیا نقطه‌ای از فاصلهٔ $[-2, \ +2]$ وجود دارد که به ازای آن مقدار تابع برابر $2\frac{1}{3}$ شود؟

حل ــ تابع در فاصلهٔ $[-2, \ 2]$ پیوسته است. بعلاوه در نقاط انتهائی فاصله،

$$f(-2)=1;\ f(2)=5$$

چون $1<2\frac{1}{3}<5$، پس بنابه خاصیت (۳)، در فاصلهٔ $[-2, \ 2]$ حداقل یک x وجود دارد که در آن $f(x)=2\frac{1}{3}$

۷ ـ ۱۶ ـ ۱ نشان دهید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} 2^x+1 & -1\leqslant x<0, \\ 2^x & x=0, \\ 2^x-1 & 0<x\leqslant 1, \end{cases}$$

که در فاصلهٔ [۱ و ۱-] معین و کراندار است، نه مقدار ماگزیمم و نه مقدار مینیمم دارد.

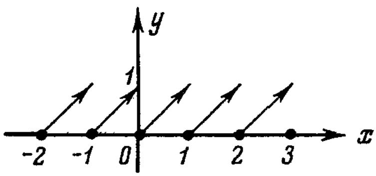
حل ــ در فاصلهٔ [۱ و ۱-] تابع از $3/2$ به ۲ صعود می کند و در [۱ و ۰] از ۰ به ۱ نزول‌می کند ولی به مقادیر ۲ یا ۰ نمی رسد. بنابراین تابع کراندار است ولی به کران بالا و کران پائین نمی رسد. دلیلش این است که تابع در $x=0$ پیوسته نیست.

۸-۱۶-۱ نشان دهید که در هر فاصلهٔ $[a, b]$ که طول آن بیشتر از یک نیست، تابع

$$f(x) = x - E(x)$$

به مقدار مینیمم می رسد ولی به مقدار ماکزیمم نمی رسد.

حل — در هر فاصلهٔ $[n, n+1)$ که n صحیح است، تابع $f(x)$ از 0 تا 1 صعود می کند، ولی به ماکزیمم نمی رسد. پس، به ازای هر x، $0 \leqslant f(x) < 1$. چون به ازای هر x عددی صحیح مانند n از فاصله $[a, b]$ می‌توان یافت که $f(n) = 0$ و $\lim\limits_{x \to n-0} f(x) = 1$ ولی $f(x) \neq 1$. این بدان معناست که تابع به مینیمم می رسد ولی هرگز به ماکزیمم نمی رسد. علت این امر آنست که تابع در $x = n$ پیوسته نیست (شکل ۳۲).



شکل ۳۲

۹-۱۶-۱ ثابت کنید که تابع $y = \sqrt[2n+1]{x}$ (n عددی طبیعی است) همه جا پیوسته است و معکوس تابع $y = x^{2n+1}$ است.

حل — تابع $y = x^{2n+1}$ همه جا پیوسته و از $-\infty$ تا $+\infty$ صعود می کند. پس تابع معکوس $x = \sqrt[2n+1]{y}$ به ازای هر y پیوسته و صعودی است. متغیر مستقل را با x نشان می دهیم و درمی یابیم که

$$y = \sqrt[2n+1]{x}$$

تابع مورد نظر است.

۱۰-۱۶-۱ ثابت کنید برای هر تابع به صورت

$$y = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-3} + \ldots + a_nx + a_{n+1}, \qquad (*)$$

که در آن ضرایب $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ همگی مثبت هستند، یک تابع معکوس همه جا پیوسته و صعودی وجود دارد.

حل ــ می دانیم که توابع $x,\ x^3,\ x^5,\ \ldots,\ x^{2n+1}$ همواره صعودی اند. چون ضرایب $a_i\ (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n+1)$ مثبت هستند، پس تابع

$$f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_nx+a_{n+1}$$

صعودی است. بعلاوه پیوسته است. بنابراین برای تابع به صورت (★) همواره یک تابع معکوس صعودی و پیوسته وجود دارد.

توجه ــ در این مسئله فقط وجود تابع معکوس ثابت می شود ولی عبارت تحلیلی تابع معکوس ارائه نمی گردد. چون همیشه تعیین تحلیلی تابع معکوس امکان پذیر نسیت. بنابراین مسائل اثبات وجودی تابع معکوس و تعیین تحلیلی تابع معکوس را نباید با هم اشتباه کرد.

۱۱ ـ ۱۶ ـ ۱ ثابت کنید که معادله کپلر

$$x-\varepsilon\sin x=y\quad(0<\varepsilon<1)$$

فقط یک تابع معکوس پیوسته $(-\infty<y<\infty)$ $x=x(y)$ دارد.

حل ــ نشان می دهیم که $y(x)$ تابعی صعودی است. فرض می کنیم $x_1<x_2$ دو نقطهٔ دلخواه باشند. پس

$$y(x_2)-y(x_1)=(x_2-\varepsilon\sin x_2)-(x_1-\varepsilon\sin x_1)=$$
$$=(x_2-x_1)-\varepsilon(\sin x_2-\sin x_1)$$

حال قدر مطلق تفاضل $|\sin x_2-\sin x_1|$ را برآورد می کنیم:

$$|\sin x_2-\sin x_1|=2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\left|\cos\frac{x_2+x_1}{2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\leqslant 2\frac{|x_2-x_1|}{2}=|x_2-x_1|=(x_2-x_1).$$

چون $0<\varepsilon<1$ پس

$$\varepsilon|\sin x_2-\sin x_1|<(x_2-x_1),$$

که از آنجا

$$(x_2-x_1)-\varepsilon(\sin x_2-\sin x_1)=y(x_2)-y(x_1)>0.$$

چون تابع $y(x)$ در فاصله $(-\infty,\ \infty)$ پیوسته است، پس تابع معکوس x تابعی یک به یک (یک مقداری) از y است.

۱ـ۱۶ـ۱۲ نشان دهید که معادلهٔ

$$x^3-3x+1=0$$

در فاصلهٔ $[1, 2]$ یک ریشه دارد و مقدار تقریبی آن را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

جواب: 1.53.

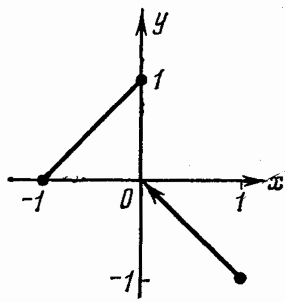
۱ـ۱۶ـ۱۳ تابع $f(x)$ که در فاصلهٔ $[a, b]$ تعریف شده است، مقادیرش در نقاط انتهائی هم‌علامت هستند. آیا می‌توان ادعا کرد که در فاصله $[a, b]$ نقطه‌ای وجود ندارد که تابع را صفر کند؟

جواب: خیر مثلاً تابع $y=x^2$ در فاصله [۱ و ۱-].

۱ـ۱۶ـ۱۴ ثابت کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\leqslant x\leqslant 0, \\ -x & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$$

در نقطه $x=0$ منفصل است ولی در فاصله [۱ و ۱-] مقدار ماکزیمم و مقدار مینیمم دارد (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

۱۷ - ۱ چند مسئله اضافی

۱ - ۱۷ - ۱ درستی نامساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\text{(a)}\ n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad n > 1; \quad (\text{طبیعی است } n)$$
$$\text{(b)}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

راهنمائی: (a) نامساویهای زیررا به‌هم ضرب کنید

$$\sqrt{1\cdot n} < \frac{n+1}{2};$$
$$\sqrt{2(n-1)} < \frac{n+1}{2};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sqrt{(n-1)\cdot 2} < \frac{n+1}{2};$$
$$\sqrt{n\cdot 1} < \frac{n+1}{2}.$$

(b) فرض کنید

$$A = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n},$$
$$B = \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ \ldots\ \times\frac{2n}{2n+1}.$$

چون

$$\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1} \quad \text{و} \quad A^2 < AB = \frac{1}{2n+1}$$

پس

$$A < B$$

۲ - ۱۷ - ۱ درستی نامساویهای زیر را ثابت کنید:

$$\text{(a)}\ 202^{303} > 303^{202};$$
$$\text{(b)}\ 200! < 100^{200}.$$

راهنمائی: (a) نخست ریشه ۱۰۱ام را حساب کنید و آنگاه طرفین را به 101^2 تقسیم کنید.

(b) نامساویهای زیرا بهم ضرب کنید:

$$
\begin{aligned}
99 \times 101 &< 100^2,\\
98 \times 102 &< 100^2,\\
\cdots\cdots&\cdots\\
2 \times 198 &< 100^2,\\
1 \times 100 \times 199 \times 200 &< 100^4.
\end{aligned}
$$

۳ـ۱۷ـ۱ نامساویهای زیر را حل کنید:

(a) $||x|-2| \leqslant 1$;
(b) $||2-3x|-1| > 2$;
(c) $(x-2)\sqrt{x^2+1} > x^2+2$.

جواب: (a) $-3 < x < -1$ یا $1 < x < 3$; (b) $x < -\frac{1}{3}$ یا $x > \frac{5}{3}$;

(c) نامساوی جواب ندارد. زیرا معادل با عبارت متناقض $x-2 > 0,\ x(4x^2-x+4) < 0$ است.

۴ـ۱۷ـ۱ آیا مجموع، تفاضل، حاصلضرب یا خارج قسمت دو عدد اصم می‌تواند عددی گویا باشد؟

جواب: بلی

۵ـ۱۷ـ۱ آیا معادلات

(a) $|\sin x| = \sin x + 3$, (b) $|\tan x| = \tan x + 3$

ریشه دارند؟

جواب: (a) خیر (b) بلی

۶ـ۱۷ـ۱ اتحاد

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2$$

را ثابت کنید.

۷ـ۱۷ـ۱ نامساوی برنولی

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

را ثابت کنید که در آن اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هم‌علامت هستند، و

$$1+x_i>0 \ (i=1, 2, \ldots, n).$$

راهنمائی: از روش استقراء ریاضی استفاده کنید. در $n=1$ رابطه محقق است. فرض کنید

$$(1+x_1)(1+x_2)\ \ldots\ (1+x_{n-1})\geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}$$

برقرار باشد، طرفین را به $1+x_n$ ضرب کنید و از شرایط

$$1+x_n>0,\ x_i\cdot x_n>0\ (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

استفاده کنید.

۸ ـ ۱۷ ـ ۱ حوزهٔ تعریف هریک از توابع زیر را تعیین کنید:

(a) $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$;
(b) $f(x)=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;
(c) $f(x)=\sqrt{-\sin^2\pi x}$;
(d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ و $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$;
(e) $f(x)=\arcsin(|x|-3)$;
(f) $f(x)=\arccos\dfrac{1}{\sin x}$.

جواب:

(a) $[1, +\infty)$; (b) $(2n\pi)^2\leqslant x\leqslant(2n+1)^2\pi^2 \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$;

(c) $x=0, \pm1, \pm2, \ldots$; (d) $(-\infty, 0)$ ، $f(x)$ حوزهٔ تعریف

و $g(x)$ همه جا نامعین است.

(e) $[-4, -2]$ or $[2, 4]$; (f) $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad (n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

۹ ـ ۱۷ ـ ۱ آیا توابع زیر معادلند؟

(a) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ و $\varphi(x)\equiv 1$;
(b) $f(x)=\log x^2$ و $\varphi(x)=2\log x$;
(c) $f(x)=x$ و $\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$;
(d) $f(x)\equiv 1$ و $\varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;
(e) $f(x)=\log(x-1)+\log(x-2)$ و $\varphi(x)=\log(x-1)(x-2)$.

جواب: (a) خیر $\varphi(0)=1$ و $f(0)$ تعریف نشده است. (b) نه، $f(x)$ به ازای هر $x \neq 0$ تعریف شده و $\varphi(x)$ فقط به ازای $x>0$ تعریف شده است.
(c) نه، $f(x)$ به ازای هر x تعریف شده است و $\varphi(x)$ به ازای هر $x \geqslant 0$ تعریف شده است. (d) بلی، (e) نه، $f(x)$ فقط وقتی $x>2$ تعریف شده و $\varphi(x)$ به ازای $x>2$ و $x<1$ تعریف می‌شود.

۱-۱۷-۱۰ در چه فاصله‌ای توابع زیر معادلند؟

(a) $f(x)=x$ و $\varphi(x)=10^{\log x}$;
(b) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ و $\varphi(x)=\sqrt{x(x-1)}$.

جواب: (a) $(0, \infty)$; (b) $[1, \infty)$

۱-۱۷-۱۱ مثلث متساوی الساقینی با پیرامون $2p=12$ حول قاعده‌اش دوران می‌کند. اگر V حجم جسم حاصل باشد. تابع $V(x)$ را تعیین کنید که x طول ساق مثلث است.

جواب: $V=8\pi(x-3)(6-x),\ 3<x<6$

۱-۱۷-۱۲ بررسی حوزه تعریف تابعها

(a) نامساوی زیر را حل کنید

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}\geqslant\sqrt{5-x};$$

(b) ثابت کنید که نامساوی

$$\log_{2-x}(x-3)\geqslant-5$$

جواب ندارد.

جواب: (a) $x=5$، **راهنمائی:** حوزهٔ تعریف با نامساویهای $x+2\geqslant 0,\ x-5\geqslant 0,\ 5-x\geqslant 0$ مشخص می‌شود، که تنها $x=5$ مقدار سازگار دراین نامساویهاست و این مقدار در نامساوی صدق می‌کند.

(b) **راهنمائی:** $2-x>0$؛ $x-3>0$، با توجه به تناقض، حوزهٔ تعریف شامل هیچ نقطه‌ای نیست پس نامساوی جواب ندارد.

۱-۱۷-۱۳ تابع $y=\operatorname{sign} x$ که در مسئله (n) **۱-۱۵-۱۱** تعریف شده است، مفروض است، ثابت کنید:

(a) $|x|=x\operatorname{sign} x$;

(b) $x = |x| \operatorname{sign} x$;
(c) $\operatorname{sign}(\operatorname{sign} x) = \operatorname{sign} x$.

۱۴ ـ ۱۷ ـ ۱ ثابت کنید اگر در تابع خطی

$$f(x) = ax + b$$

مقادیر متغیر مستقل $x = x_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ یک تصاعد حسابی به‌سازند، آنگاه مقادیر متناظرشان از تابع

$$y_n = f(x_n) \ \ (n = 1, 2, \ldots)$$

هم یک تصاعد حسابی می سازند.

۱۵ ـ ۱۷ ـ ۱ ثابت کنید که حاصلضرب دو تابع زوج یا دو تابع فرد یک تابع زوج است، درحالیکه یک تابع زوج دریک تابع فرد ضرب شود، نتیجه تابعی فرد است.

۱۶ ـ ۱۷ ـ ۱ ثابت کنید که اگر حوزهٔ تعریف تابع $f(x)$ نسبت به $x = 0$ (یعنی محور y) متقارن باشد، آنگاه $f(x) + f(-x)$ تابعی زوج و $f(x) - f(-x)$ تابعی فرد است.

۱۷ ـ ۱۷ ـ ۱ ثابت کنید که می‌توان هر تابع $f(x)$ را که در فاصله متقارن $(-l, l)$ تعریف شده است به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.
هریک از توابع زیررا به‌صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید:

(a) $f(x) = \dfrac{x+2}{1+x^2}$; (b) $y = a^x$.

جواب: (a) $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{x}{1+x^2}$; (b) $a^x = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2} + \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$

(مسئله ۱۶ ـ ۱۷ ـ ۱ را ببینید).

۱۸ ـ ۱۷ ـ ۱ تابع $f(x) = x^2 + x$ درفاصله [۳ و ۰] تعریف شده است. تعریف آنرا در فاصله [۳ و ۳-] طوری انجام دهید که یک دفعه زوج و دفعه دیگر فرد باشد.

جواب: وقتی زوج است که

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) = x^2 + x & 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ f(-x) = x^2 - x & -3 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

وقتی فرد است که

$$\psi(x)=\begin{cases} f(x)=x^2+x & 0\leqslant x\leqslant 3, \\ -f(-x)=-x^2+x & -3\leqslant x<0 \end{cases}$$

۱۹ - ۱۷ - ۱ تابع

$$\{x\}=x-E(x)$$

قسمت اعشاری عدد x است. ثابت کنید که این تابع متناوب با دورهٔ تناوب ۱ است.

۲۰ - ۱۷ - ۱ نمودار تابع متناوب با دورهٔ تناوب $T=1$ را که با فرمول $y=x^2$ در فاصلهٔ نیمه باز [۱ و ۰) تعریف شده است رسم کنید.

۲۱ - ۱۷ - ۱ فرض می کنیم دو تابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ در یک مجموعهٔ مشترک تعریف شوند. ثابت کنید اگر دوره‌های تناوب آنها متناسب باشد، آنگاه مجموع و حاصلضرب آنها تابعی متناوب است.

راهنمائی: اگر T_1 دوره تناوب $f(x)$ و T_2 دورهٔ تناوب $\varphi(x)$ باشد و $T_1=n_1d,\ T_2=n_2d$ ($n_1,\ n_2$ اعداد طبیعی اند)، آنگاه دورهٔ تناوب مجموع و حاصلضرب این توابع $T=nd$ است که n کوچکترین مضرب مشترک n_1 و n_2 است.

۲۲ - ۱۷ - ۱ ثابت کنید که $\lambda(x)$ تابع دیریکله (مسئله (b) ٤ - ١٤ - ۱ را ببینید) تابعی متناوب است ولی دوره تناوب ندارد.

راهنمائی: به ازای هر عدد منطق r،

$$\lambda(x+r)=\lambda(x)=\begin{cases} 1 & \text{منطق است } x \\ 0 & \text{اصم است } x \end{cases}$$

ولی مجموعهٔ اعداد مثبت منطق کوچکترین عضو ندارد،

۲۳ - ۱۷ - ۱ ثابت کنید اگر تابع

$$f(x)=\sin x+\cos ax$$

متناوب باشد، آنگاه a عددی منطق (گویا) است.

راهنمائی: اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ را با T نشان دهیم، آنگاه بنا به $f(T)=f(0)=f(-T)$ داریم:

$$\sin T+\cos aT=1=\sin(-T)+\cos(-aT),$$

از آنجا $\sin T=0,\ \cos aT=1$ پس $T=k\pi,\ aT=2n\pi,\ a=\frac{2n}{k}$ عددی گویا ست.

۲۴ ـ ۱۷ ـ ۱ یک نواختی تابعهای زیر را بررسی نمائید:

$$(a)\ f(x)=|x|;\quad (b)\ f(x)=|x|-x.$$

۲۵ ـ ۱۷ ـ ۱ اگر دو تابع در فاصله‌ای صعودی باشند، آنگاه مجموع این دو در این فاصله صعودی یکنواخت است. آیا تفاضل دو تابع صعودی تابعی یکنواخت است؟

جواب: تفاضل دو تابع صعودی، الزاماً یکنواخت نیست مثلاً، دو تابع $g(x)=x^2$ و $f(x)=x$ وقتی $x\geqslant 0$ صعودی‌اند ولی تفاضل آنها $f(x)-g(x)=x-x^2$ وقتی $x\geqslant 0$ یکنواخت نیست زیرا در فاصلهٔ $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ صعودی و در فاصلهٔ $\left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$ نزولی است.

۲۶ ـ ۱۷ ـ ۱ یک تابع غیر یکنواخت مثال بزنید که معکوس داشته باشد.

جواب: مثلاً

$$y=\begin{cases} x & x \text{ گویاست} \\ -x & x \text{ اصم است} \end{cases}$$

۲۷ ـ ۱۷ ـ ۱ تابع معکوس و حوزهٔ تعریف هریک از تابعهای زیر را بیابید:

$$(a)\ y=\tanh x;\quad (b)\ y=\begin{cases} x & -\infty<x<1, \\ x^2 & 1\leqslant x\leqslant 4, \\ 2^x & 4<x<\infty. \end{cases}$$

جواب:

$$(a)\ x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}\quad (-1<y<1);$$

(b)

$$x=\begin{cases} y & -\infty<y<1 \\ \sqrt{y} & 1\leqslant y\leqslant 16, \\ \log_2 y & 16<y<\infty. \end{cases}$$

۲۸ ـ ۱۷ ـ ۱ نشان دهید که معادلهٔ

$$x^2+2x+1=-1+\sqrt{x}$$

هیچ ریشه حقیقی ندارد.

راهنمائی: تابعهای $y=x^2+2x+1\ (x\geqslant -1)$ و $y=-1+\sqrt{x}\ (x\geqslant 0)$

معکوس یکدیگرند ، نمودار آنها روی نیمساز ربع اول و سوم متقاطعند ولی معادلهٔ $x^2+2x+1=x$ ریشهٔ حقیقی ندارد (مسئله ٤ ـ ٤ ـ ١ را ببینید).

٢٩ ـ ١٧ ـ ١ نمودار تابع

$$y=f(x-l)+f(x+l),$$

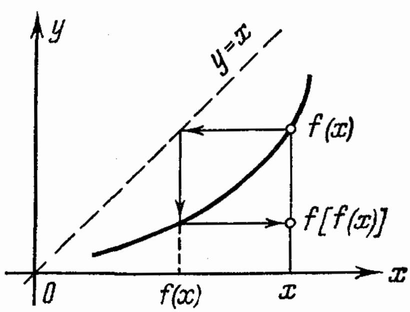
را رسم کنید هرگاه

$$f(x)=\begin{cases} k(1-|x|/l) & |x|\leqslant l \\ 0 & |x|>l. \end{cases}$$

٣٠ ـ ١٧ ـ ١ هرگاه نمودار تابع $y=f(x)$ معلوم باشد. نمودار هریک از تابعهای زیر را رسم کنید :

(a) $y=f^2(x)$; (b) $y=\sqrt{f(x)}$; (c) $y=f[f(x)]$.

راهنمائی: (c) اگر E حوزه تعریف $f(x)$ باشد آنگاه $y=f[f(x)]$ فقط به ازای آن $x\in E$ تعریف می‌شود که برای آنها $f(x)\in E$. نحوه انتخاب نقاط نمودار مورد نظر در شکل ٣٤ نشان داده شده است.



شکل ٣٤

٣١ ـ ١٧ ـ ١ ثابت کنید که نمودارهای تابعهای $y=\log_a x$ و $y=\log_{a^n} x$ را می‌توان با تغییر تمام عرضهای دو تابع با نسبت $1:1/n$ ازیکدیگر نتیجه می‌شوند.

٣٢ ـ ١٧ ـ ١ فرض می‌کنیم تابع $y=f(x)$ درتمام نقاط مجموعهٔ اعداد

حقیقی تعریف شده ونسبت به دوخط $x=b$ و $x=a$ که $(a<b)$ ، متقارن باشد ثابت کنید که این تابعی متناوب است .

راهنمائی: اگر $T=2(b-a)$ دور تناوب باشد از شرایط تقارن $f(b+x)=f(b-x)$ و $f(a+x)=f(a-x)$ نتیجه بگیرید:

$$f[x+2(b-a)]=f[b+(b+x-2a)]=f(2a-x)=f[a+(a-x)]=f(x).$$

۱-۱۷-۳۳ فرض کنید دنبالهٔ x_n همگرا و دنباله y_n واگراست . در همگرائی دنباله های زیر چه می‌توان گفت ؟

(a) x_n+y_n; (b) x_ny_n

جواب: (a) واگراست . (b) ممکن است واگرا یا همگرا باشد . مثلاً

$$x_n=\frac{1}{n};\quad y_n=\frac{[1+(-1)^n]}{2};\qquad \lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=0,$$
$$x_n=\frac{1}{n}\quad y_n=n^2;\qquad \lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\infty.$$

۱-۱۷-۳۴ دنباله‌های x_n و y_n واگرا هستند . آیا می‌توان ادعا کرد که دنباله های

$$x_n+y_n,\ x_ny_n$$

هم واگرا هستند ؟

جواب: (a) نه . **مثال:** $x_n=n;\ y_n=-n+1$ ، (b) نه .

۱-۱۷-۳۵ فرض کنید α_n یک زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم است $(n=3, 4, \ldots)$ چند جملهٔ اول دنباله α_n را بنویسید : . ثابت کنید $\lim \alpha_n=\pi$.

جواب: $\alpha_n=\frac{\pi(n-2)}{n}\ (n=3,\ 4,\ \ldots).$

۱-۱۷-۳۶ ثابت کنید که هر گاه $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.
آیا عکس آنهم درست است ؟

راهنمائی: از نامساوی $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$ استفاده کنید . عکس آن درست نیست .

مثال:

$$x_n=(-1)^{n+1}$$

۳۷ـ ۱۷ ـ ۱ اگر دنباله‌ای حد نامتناهی داشته باشد، آیا بدین معنی است که غیر کراندار است؟ و اگر دنباله‌ای کراندار نباشد آیا می‌توان گفت که حد نامتناهی دارد؟ ثابت کنید که

$$x_n = n^{(-1)^n}$$

تابعی غیر کراندار است ولی یک بینهایت بزرگ نیست.

۳۸ـ ۱۷ ـ ۱ اگر $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای باشد که α_n ریشه n ام یک عدد اصم است. ثابت کنید که این دنباله یکنواخت نیست.

راهنمائی: دنبالهٔ α_n فقط می‌تواند مقادیر

$$0,\ 1,\ \ldots,\ 9$$

را بپذیرید. اگر این دنباله یکنواخت باشد، آنگاه بایستی عدد اصم را بتوان به صورت یک کسر اعشاری متناوب نوشت.

۳۹ـ ۱۷ ـ ۱ ثابت کنید که هرگاه دنبالهٔ $(b_n > 0)$ $\{a_n/b_n\}$ یکنواخت باشد، آنگاه دنبالهٔ

$$\left\{ \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \right\}$$

هم یکنواخت است.

راهنمائی: اگر دنبالهٔ $\frac{a_n}{b_n}$ صعودی باشد، آنگاه

$$\frac{a_i}{b_i} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}, \qquad b_{n+1}a_i < a_{n+1}b_i \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

از آن نتیجه بگیرید که

$$b_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n) < a_{n+1}(b_1+b_2+\ldots+b_n),$$

پس

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}}{b_1+b_2+\ldots+b_{n+1}} - \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = \\ = \frac{a_{n+1}(b_1+b_2+\ldots+b_n)-b_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{(b_1+b_2+\ldots+b_{n+1})(b_1+b_2+\ldots+b_n)} > 0.$$

۴۰ـ ۱۷ ـ ۱ ثابت کنید که دنباله‌های زیر حد دارند و آن را بیابید:

(a) $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\ \ldots;$

(b) $x_n = c^n/\sqrt[k]{n!} \quad (c>0,\ k>0)$;

(c) $x_n = \alpha_n/n$، که در آن α_n رقم n ام عدد π است

جواب: (a) 2; (b) 0; (c) 0.

۴۱ ـ ۱۷ ـ ۱ ثابت کنید که به ازای هر x دلخواه، دنبالهٔ

$$\left\{\frac{E(nx)}{n}\right\}$$

کراندار است.

راهنمائی: از نامساوی $nx-1 < E(nx) \leqslant nx$ نتیجه می شود که

$$x-1 < x-\frac{1}{n} < \frac{E(nx)}{n} \leqslant x.$$

۴۲ ـ ۱۷ ـ ۱ ثابت کنید که حد

$$\left\{\frac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2}\right\}$$

برابر $x/2$ است.

راهنمائی: از نامساویهای

$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx,$$

نتیجه بگیرید که

$$x\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx) \leqslant x\frac{n+1}{2n}.$$

۴۳ ـ ۱۷ ـ ۱ ثابت کنید

$$\lim_{h\to 0} a^h = 1 \quad (a>0).$$

راهنمائی: از

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad \text{(مسئله ۱۹ ـ ۶ ـ ۱)}$$

و

$$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}} = 1,$$

وقتی $a > 1,\ |h| < \frac{1}{n}$ ازنامساوی

$$a^{-\frac{1}{n}} - 1 < a^h - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1$$

استفاده کنید

۱-۱۷-۴۴ تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

مفروض است. ثابت کنید که

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

۱-۱۷-۴۵ فرض کنید

$$P(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}. \quad (a_0 \neq 0;\ b_0 \neq 0).$$

ثابت کنید که

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & n > m, \\ a_0/b_0, & n = m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

راهنمائی: صورت و مخرج را بر x^m تقسیم کنید.

۱-۱۷-۴۶ درهریک ازعبارات زیر a و b را بیابید:

(a) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0;$

(b) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b \right) = 0.$

جواب: (a) $a = 1;\ b = -1;$ (b) $a = 1;\ b = \frac{1}{2}$ **راهنمائی:** برای تعیین ضریب a ، اول عبارت را به x تقسیم کنید و سپس حد بگیرید.

۱-۱۷-۴۷ نمودار هریک از تابعهای زیر را رسم کنید:

(a) $f(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^n}\ (x \geqslant 0);$

(b) $f(x) = \lim_{n \to \infty} \sin^{2n} x.$

راهنمائی:

(a)

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x & x>1. \end{cases}$$

(b)

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\neq \dfrac{\pi}{2}+n\pi, \\ 1 & x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi \end{cases} \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

۴۸ ـ ۱۷ ـ ۱ ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})\right]=\frac{1}{1-x}\ (|x|<1).$$

راهنمائی: از اتحاد زیر استفاده کنید:

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^n})=1-x^{2^n}.$$

۴۹ ـ ۱۷ ـ ۱ آیا می توان در محاسبهٔ حد مجموع چند بینهایت کوچک به‌جای هر کدام معادل آنها را قرار داد؟

جواب: درحالت کلّی خیر. مثلاً

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}=-1,$$

ولی اگر $\ln(1+x)$ را با x و $\ln(1-x)$ را با $-x$ عوض کنیم نتیجه نادرست زیر به‌دست می آید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^2}=0.$$

۵۰ ـ ۱۷ ـ ۱ مرتبهٔ کوچکی وترکمان بینهایت کوچک دایره‌ای را نسبت به سهم آن کمان حساب کنید. (سهم خطی است که وسط کمان را به وسط وتر نظیرش وصل می کند. مترجم).

جواب: $\frac{1}{2}$. **راهنمائی:** اگر α زاویهٔ مرکزی مقابل به کمان مفروض باشد، آنگاه وتر برابر $2R\sin\frac{\alpha}{2}\sim R\alpha,$ وسهم برابر $R(1-\cos\alpha)\sim R\frac{\alpha^2}{2}$ است.

۵۱ ـ ۱۷ ـ ۱ مرتبهٔ کوچکی تفاضل محیطهای دو n ضلعی منتظم محاطی و محیطی را نسبت به ضلع بینهایت کوچک n ضلعی محاطی تعیین کنید.

جواب : ۲ راهنمائی: تفاضل محیطهای دو n ضلعی منتظم محاطی و محیطی برابر است با

$$2Rn\left(\tan\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)=2\pi R\,\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\alpha}\sim\pi R\alpha^2,$$

که در آن $\alpha=\frac{\pi}{n}$ ، و طول ضلع n ضلعی محاطی برابر است با

$$2R\sin\frac{\pi}{n}=2R\sin\alpha\sim 2R\alpha.$$

۱-۱۷-۵۲ ضریب انبساط حجمی یک جسم تقریباً با سه برابر ضریب انبساط طولی آن برابر فرض می‌شود. این کمیت باکدام بینهایت کوچکها هم ارز است ؟

جواب: این کمیت با $(1+\alpha)^3-1$ و 3α ، وقتی که $\alpha\to 0$ ، هم ارز می‌باشد.

۱-۱۷-۵۳ ــ آیا رابطهٔ

$$\log(1+x)\sim x$$

وقتی $x\to 0$ درست است ؟

جواب: نه، زیرا وقتی $x\to 0$

$$\log(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln 10}\sim\frac{x}{\ln 10}$$

۱-۱۷-۵٤ اگر

(a) درنقطهٔ $x=x_0$ تابع $f(x)$ پیوسته وتابع $g(x)$ منفصل باشد،

(b) در $x=x_0$ هر دو تابع منفصل باشند،

آیا الزاماً $f(x)+g(x)$ در نقطهٔ x_0 باید منفصل باشد. درصورت لزوم مثالی بیاورید.

جواب: (a) بلی. **راهنمائی:** اگر تابع

$$\varphi(x)=f(x)+g(x)$$

در $x=x_0$ پیوسته باشد، آنگاه باید تابع

$$g(x)=\varphi(x)-f(x)$$

در این نقطه پیوسته باشد.

((b)) خیر. مثال: فرض می‌کنیم

$$f(x)=-g(x)=\operatorname{sign}x$$

(مسئله (p) **۱-۵-۱۱** را ببینید)، هر دو تابع در $x=0$ منفصل هستند ومجموعشان

که برابر صفر است، پیوسته است.

۵۵-۱۷-۱ اگر در x_0

(a) تابع $f(x)$ پیوسته و $g(x)$ ناپیوسته باشد.

(b) در هر تابع منفصل باشند

آیا الزاماً حاصلضرب $f(x)\ g(x)$ باید منفصل باشد؟ در صورت لزوم مثالی بیاورید.

جواب: (a) خیر. مثال $f(x)=x$ همه جا پیوسته و

$$g(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{x} & x\neq 0\\[2ex] 0 & x=0.\end{cases}$$

در $x=0$ منفصل است. حاصلضرب دو تابع در $x=0$ پیوسته است، زیرا

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x}=0$$

(b) خیر ــ مثال

$$f(x)=-g(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0,\\ -1 & x<0;\end{cases}$$

هر دو تابع در $x=0$ منفصل هستند ولی حاصلضرب

$$f(x)\ g(x)\equiv -1$$

که همه جا پیوسته است.

۵۶-۱۷-۱ آیا می‌توان ادعا کرد که مربع یک تابع منفصل، باز هم منفصل است؟ مثالی بیاورید تا تابعی که همه جا منفصل است، مربع آن تابعی پیوسته باشد.

جواب: خیر. مثال

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{منطق است } x\\ -1 & \text{اصم است } x\end{cases}$$

می‌توان فرض کرد:

$$f(x)=2\lambda(x)-1$$

که در آن $\lambda(x)$ تابع دیریکله است (مسئلهٔ (b) ۴-۱۴-۱ ببینید).

۵۷-۱۷-۱ نقاط انفصال توابع زیر را تعیین کنید و مشخصات هر نقطهٔ را مشخص کنید:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{x/(1-x)}}$;

(b) $f(x)=2^{-2^{1/(1-x)}}$;

(c) $\varphi(x)=x[1-2\lambda(x)]$

که در آن $\lambda(x)$ تابع دیریکله است (مسئلهٔ (b) ۴ - ۱۴ - ۱)

جواب: (a) در $x=0$ انفصال از نوع دوم و در $x=1$ انفصال از نوع اول دارد.

(b) در $x=1$ انفصال از نوع اول است، $f(1-0)=0$ و $f(1+0)=1$

(c) $\varphi(x)$ در تمام نقاط بجز $x=0$ منفصل است.

۵۸ - ۱۷ - ۱ پیوستگی هر یک از توابع زیر را بررسی کنید و نمودار هر کدام را رسم کنید:

(a) $y=x-E(x)$;

(b) $y=x^2+E(x^2)$;

(c) $y=(-1)^{E(x^2)}$;

(d) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

جواب: (a) $x=n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ نقاط انفصال نوع اول هستند:

$$\lim_{x\to n-0} y=1,\quad \lim_{x\to n+0} y=y\,|_{x=n}=0.$$

دورهٔ تناوب تابع یک است.

(b) $(n=\pm1,\ \pm2,\ \ldots)$ $x=\pm\sqrt{n}$ نقاط انفصال از نوع اول هستند:

$$\lim_{x\to\sqrt{n}-0} y=2n-1;\quad \lim_{x\to\sqrt{n}+0} y=y\,|_{x=\sqrt{n}}=2n.$$

تابع زوج است.

(c) $(n=\pm1,\ \pm2,\ \ldots)$ $x=\pm\sqrt{n}$ نقاط انفصال از نوع اول هستند، در این نقاط تابع از مقدار ۱ به ۱- تبدیل می‌شود و سپس به ۱ برمی‌گردد. تابع زوج است.

(d)

$$y=\begin{cases} x & |\sin x|<\dfrac{1}{2}, \qquad -\dfrac{\pi}{6}+\pi n<x<\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\\ \dfrac{x}{2} & |\sin x|=\dfrac{1}{2}, \qquad x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\\ 0 & |\sin x|>\dfrac{1}{2}, \qquad \dfrac{\pi}{6}+\pi n<x<\dfrac{5\pi}{6}+\pi n.\end{cases}$$

$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ انفصالها از نوع اول هستند.

۱-۱۷-۵۹ دوتابع

$$f(x) = \operatorname{sign} x \quad و \quad g(x) = x(1-x^2).$$

مفروضند، پیوستگی توابع

$$f[g(x)] \quad و \quad g[f(x)]$$

را بررسی نمائید.

جواب: تابع $f[g(x)]$ در نقاط $x=-1;\ 0;\ +1$ انفصال نوع اول دارد. تابع $g[f(x)]$ همه جا پیوسته است. **راهنمائی:** تابع $f(u)$ در $u=0$ منفصل است و علامت تابع $g(x)$ در نقاط $x=0,\ \pm 1$ تغییر می کند. تابع $g[f(x)]\equiv 0$، چون $f(x)$ فقط سه مقدار $0,\ \pm 1$ را دارد.

۱-۱۷-۶۰ ثابت کنید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} 2x & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x + {}^1/_2 & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

درنقطهٔ $x=0$ منفصل است و درفاصلهٔ $[-1,\ 1]$ مقادیرماکزیمم ومینیمم آن را حساب کنید.

۱-۱۷-۶۱ تابع

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\,2^{-(1/|x|+1/x)} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

مفروض است. تحقیق کنید با اینکه تابع درنقطهٔ وسط فاصلهٔ [۲ و ۲-] منفصل است. ولی مقادیرمیانی از $f(-2)$ تا $f(2)$ را می پذیرد.

راهنمائی: تابع را به‌صورت زیر بنویسید:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -2 \leqslant x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ (x+1)\,2^{-\frac{2}{x}} & 0 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

و نشان دهید که تابع درفاصله (۰ و ۲-] از ۱- تا ۱ و درفاصلهٔ [۲ ، ۰] از ۰ تا $\frac{3}{2}$ صعود می کند. قضیهٔ مقدار میانی را در فاصلهٔ های [۱- و ۲-] و [۲ ، ۰] به کاربرید. تابع در

$x=0$ منفصل است زیرا $f(+0)=0$، $f(-0)=1$

۱ـ۱۷ـ۶۲ ثابت کنید اگر تابع $f(x)$

(۱) در فاصلهٔ $[a, b]$ معین و یکنواخت باشد،

(۲) تمام مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را بپذیرید،

آنگاه در فاصله $[a, b]$ پیوسته است.

راهنمائی: فرض کنید $0 < \varepsilon$ و $x_0 \in [a, b]$. می توان فرض کرد

$$\varepsilon \leqslant \min [f(x_0) - f(a), \quad f(b) - f(x_0)]$$

نقاط x_1 و x_2 را که $x_1 < x_0 < x_2$ طوری انتخاب کنید که

$$f(x_1) = f(x_0) - \varepsilon, \quad f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon,$$

و آنگاه $\delta = \min (x_0 - x_1, \ x_2 - x_0)$ بگیرید

۱ـ۱۷ـ۶۳ فرض می کنیم تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته است و حوزهٔ مقادیر آن هم فاصلهٔ $a \leqslant y \leqslant b$ است. ثابت کنید که در این فاصلهٔ بسته نقطه‌ای مانند x وجود دارد که $f(x) = x$ این مطلب را تعبیر هندسی کنید.

راهنمائی: قضیه مقدار میانه را برای تابع $g(x) = f(x) - x$ بکار ببرید.

۱ـ۱۷ـ۶۴ ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ (a, b) پیوسته باشد و

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$$

مقادیر دلخواهی از این فاصلهٔ باز انتخاب شوند. آنگاه بین این اعداد، عددی مانند ξ وجود دارد به طوری که

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)].$$

راهنمائی: قضیهٔ مقدار میانه را برای تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[x_1, x_n]$ به کار ببرید، توجه کنید که

$$\min [f(x_1), \ldots, f(x_n)] \leqslant \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] \leqslant \max [f(x_1), \ldots, f(x_n)].$$

۱ـ۱۷ـ۶۵ ــ ثابت کنید که معادله

$$x \, 2^x = 1$$

حداقل یک ریشهٔ مثبت کمتر از ۱ دارد.

راهنمائی : قضیهٔ مقدار میانه را برای تابع $g(x)=2^x-\frac{1}{x}$ در فاصله $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ به کار ببرید.

۶۶ ـ ۱۷ ـ ۱ ثابت کنید که اگر در یک چند جمله‌ای از درجهٔ زوج، حداقل علامت یک مقدار آن مخالف علامت ضریب جمله‌ای با بزرگترین توان x باشد آنگاه چند جمله‌ای حداقل دو ریشهٔ حقیقی دارد.

راهنمائی: به ازای مقادیر به قدر کافی بزرگ متغیر مستقل، علامت مقادیر چند جمله‌ای با درجهٔ زوج با ضریب جملهٔ با بزرگترین توان x، یکی است، بنابراین علامت چند جمله‌ای حداقل دوبار عوض می‌شود.

۶۷ ـ ۱۷ ـ ۱ ثابت کنید که معکوس تابع منفصل

$$y=(1+x^2)\ \operatorname{sign}\ x$$

تابعی پیوسته است.

راهنمائی: تابع معکوس

$$x=\begin{cases} -\sqrt{-y-1} & y<-1, \\ 0 & y=0, \\ \sqrt{y-1} & y>1 \end{cases}$$

در فاصله های $(-\infty, -1)$ و $(1, \infty)$ پیوسته بوده و نقطهٔ منفرد $y=0$ را دارد.

فصل دوم

مشتقگیری از توابع

۱ ـ ۲ تعریف مشتق

مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ x را که با $f'(x)$ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

اگر این حد موجود و متناهی باشد، آنگاه $f(x)$ را در نقطهٔ x مشتقپذیر گویند و حتماً دراین نقطه پیوسته است.

به تعبیر هندسی، مشتق، $f'(x)$ ضریب زاویهٔ (شیب) خط مماس به نمودار تابع $y=f(x)$ را در نقطهٔ x مشخص می کند.

عبارت

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

را مشتق راست گویند.

عبارت

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

را مشتق چپ تابع نامند.

شرط لازم و کافی برای آن که $f'(x)$ وجود داشته باشد آن است که مشتق چپ

و مشتق راست موجود و متناهی بوده و رابطهٔ

$$f'_-(x)=f'_+(x)$$

برقرار باشد

اگر $f'(x)=\infty$ ، می گویند که تابع $f(x)$ در x مشتق نا متناهی دارد. در اینحالت خط مماس به نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ x به محور x ها عمود است.

۱ ـ ۱ ـ ۲ نمو Δy و نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را در توابع زیر بیابید:

(a) $y=\sqrt{x}$ $\Delta x=0.0001;$ و $x=0$ در

(b) $y=\frac{1}{x^2+x-6}$ $\Delta x=0.2.$ و $x=1$ در

حل ـ (a)

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\sqrt{0.0001}=0.01;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0.01}{0.0001}=100.$$

جواب: $-\frac{20}{21}$ (b)

۲ ـ ۱ ـ ۲ تعریف مشتق را بکاربرده و مشتق توابع زیر را بیابید:

(a) $y=\cos ax;$ (b) $y=5x^2-2x.$

حل ـ (a)

$$\Delta y=\cos a(x+\Delta x)-\cos ax=$$

$$=-2\sin\left(ax+\frac{a}{2}\Delta x\right)\sin\frac{a}{2}\quad x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\sin\left(ax+\frac{a}{2}\Delta x\right)\sin\frac{a}{2}\Delta x}{\Delta x};$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-2\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(ax+\frac{a}{2}\Delta x\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{a}{2}\Delta x}{\Delta x}=-a\sin ax.$$

بویژه، اگر $a=1$ ، آنگاه $y=\cos x$ و $y'=-\sin x$.

جواب: $y'=10x-2$ (b)

۳ ـ ۱ ـ ۲ نشان دهید که هریک از توابع زیر در نقاط داده شده مشتق ندارند:

(a) $y=\sqrt[5]{x^3}$ در نقطهٔ $x=0$

(b) $y=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطهٔ $x=1$

(c) $y=3|x|+1$ در نقطهٔ $x=0$

حل ـ (a) $\Delta y=\sqrt[5]{(x+\Delta x)^3}-\sqrt[5]{x^3}$ ، در $x=0$ داریم:

$$\Delta y=\sqrt[5]{\Delta x^3},\ \ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[5]{\Delta x^3}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[5]{\Delta x^2}}$$

پس

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[5]{\Delta x^2}}=\infty,$$

یعنی حد متناهی نیست.

(c) وقتی $\Delta x>0$ نموتابع در $x=0$ عبارت است از

$$\Delta y=3\ (0+\Delta x)+1-1=3\Delta x.$$

بنابر این

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3.$$

وقتی $\Delta x<0$ نموتابع در آن نقطه برابر است با

$$\Delta y=-3\,(0+\Delta x)+1-1=-3\Delta x,$$

پس

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-3$$

چون مشتقهای چپ و راست برابر نیستند پس تابع در $x=0$ مشتق ندارد (شکل ۳۵).

۴ ـ ۱ ـ ۲ وجود مشتق تابع

$$y=|\ln x|$$

را در نقطهٔ $x=1$ بررسی نمائید.

حل ـ در $x=1$

$$\Delta y=|\ln(1+\Delta x)|-|\ln 1|=|\ln(1+\Delta x)|,$$

یعنی

$$\Delta y = |\ln(1+\Delta x)| = \begin{cases} \ln(1+\Delta x) & \Delta x \geqslant 0, \\ -\ln(1+\Delta x) & \Delta x < 0. \end{cases}$$

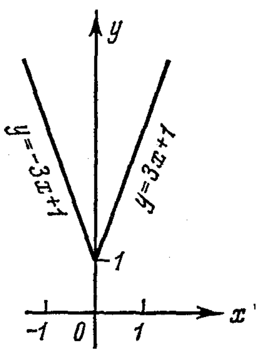
بنابر این

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} & \Delta x > 0, \\ -\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} & \Delta x < 0, \end{cases}$$

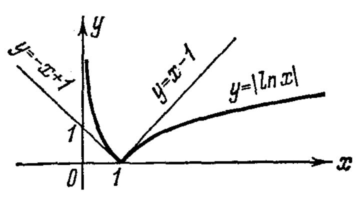
از آنجا

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +1 \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

چون مشتقهای چپ و راست برابر نیستند. پس مشتق در این نقطهٔ وجود ندارد. یعنی تابع $y = |\ln x|$ در نقطهٔ $x = 1$ مشتقپذیر نیست (شکل ۳۶)



شکل ۳۵



شکل ۳٦

۵ ـ ۱ ـ ۲ سرعت متوسط متحرکی را که تحت رابطهٔ

$$s = (t^2 - 5t + 2) \text{ m}$$

حرکت می کند از $t_1 = 5$ ثانیه تا $t_2 = 15$ ثانیه حساب کنید.

جواب : $v_{av} = 25$ m/sec.

۲ـ۱ـ۶ تعریف مشتق را بکاربرده و مشتق هریک از توابع زیر را بیابید:

(a) $y=x^3$; (b) $y=1/x^2$.

جواب: (a) $y'=3x^2$; (b) $y'=-\frac{2}{x^3}$

۲ـ۱ـ۷ وجود مشتق تابع

$$y=|\cos x|$$

را درنقطهٔ $x=\pi/2+n\pi$ (n عددی صحیح است) بررسی کنید.

جواب: تابع درنقاط داده شده مشتق ندارد.

۲ـ۲ مشتقگیری از تابع ضمنی

I ـ دستورهای اساسی مشتقگیری

(1) $c'=0$;
(2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;
(3) $(cu)'=cu'$;
(4) $(uv)'=u'v+uv'$,
(5) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$,

در این دستورها c عددی ثابت است u و v تابعهایی از x می‌باشند که درنقاط متناظر مشتق دارند.

(6) اگر تابع $u=\varphi(x)$ درنقطهٔ x_0 و تابع $y=f(u)$ درنقطهٔ $u_0=\varphi(x_0)$ مشتق داشته باشد، آنگاه تابع مرکب

$$y=f(\varphi(x))$$

درنقطهٔ x_0 مشتق دارد و

$$y'_x(x_0)=y'_u(u_0)\,u'_x(x_0)$$

که در این رابطه دستور مشتقگیری از تابع مرکب و یا **دستور زنجیری** گویند.

II مشتقگیری از توابع مقدماتی اساسی

(1) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$; (2) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
(3) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
(4) $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; (5) $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$;
(6) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;
(7) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$; 8) $(e^u)' = e^u u'$;
(9) $(\sinh u)' = \cosh u \cdot u'$;
(10) $(\cosh u)' = \sinh u \cdot u'$;
(11) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = -(\arccos u)'$;
(12) $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = -(\operatorname{arc\,cot} u)'$.

۱ - ۲ - ۲ مطلوبست y' اگر:

(a) $y = 5x^{2/3} - 3x^{5/2} + 2x^{-3}$;
(b) $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$ (a, b دو عدد ثابتند)

حل ــ

(a) $$y' = 5\cdot\frac{2}{3}x^{2/3-1} - 3\cdot\frac{5}{2}x^{5/2-1} - 2\cdot 3x^{-3-1} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} - $$
$$-\frac{15}{2}x\sqrt{x} - \frac{6}{x^4}.$$

جواب: (b) $y' = -\frac{2}{3}ax^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}bx^{-\frac{7}{3}}$

۲ - ۲ - ۲ مطلوبست y' ، اگر:

(a) $y = 3\cos x + 2\sin x$; (b) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;
(c) $y = (x^2+1)\arctan x$; (d) $y = x^3 \arcsin x$.

حل ــ

(a) $y' = 3(\cos x)' + 2(\sin x)' = -3\sin x + 2\cos x$;

(b) $$y' = \frac{(\sin x+\cos x)'(\sin x-\cos x) - (\sin x-\cos x)'(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2} =$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}=$$

$$=-\frac{2}{(\sin x-\cos x)^2};$$

(d) $y'=(x^3)'\arcsin x+(\arcsin x)'x^3=3x^2\arcsin x+\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}.$

جواب: (c) $y'=2x\arctan x+1.$

۳ ـ ۲ ـ ۲ نخست مشتق توابع زیر را بدست آورید و آنگاه آنرا در نقطهٔ داده شده حساب کنید:

(a) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}+16/x \qquad x=-8;$
(b) $f(x)=(1-\sqrt{x})^2/x \qquad x=0.01;$
(c) $f(t)=(\cos t)/(1-\sin t) \qquad t=\pi/6.$

حل ــ (a)

$$f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-1/3}-16x^{-2}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{16}{x^2}.$$

با فرض $x=-8$ داریم

$$f'(-8)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{-8}}-\frac{16}{(-8)^2}=\frac{1}{12};$$

(c)

$$f'(t)=\frac{-\sin t\,(1-\sin t)+\cos^2 t}{(1-\sin t)^2}=\frac{1}{1-\sin t}.$$

از آنجا

$$f'(\pi/6)=2.$$

جواب: (b) -9000

۴ ـ ۲ ـ ۲ با استفاده از دستورهای مشتقگیری، مشتق هریک از توابع زیر را بیابید:

(a) $y=2x^3+3x-5;$ (b) $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+0.1x^{10};$

(c) $y=\frac{2x^2+x+1}{x^2-x+1};$ (d) $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}};$

(e) $y=\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi};$ (f) $y=2e^x+\ln x;$

(g) $y=e^x(\cos x+\sin x);$ (h) $y=\frac{e^x+\sin x}{xe^x}.$

جواب :

(a) $y'=6x^2+3$; (b) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+x^9$;

(c) $y'=\frac{-3x^2+2x+2}{(x^2-x+1)^2}$; (d) $y'=-\frac{3\sqrt{x}+8\sqrt{x}+2\sqrt{1/x}}{6\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)}$;

(e) $y'=\frac{\cos\varphi-\sin\varphi-1}{(1-\cos\varphi)^2}$; (f) $y'=2e^x+\frac{1}{x}$; (g) $y'=2e^x\cos x$; (h) $y'=$
$=\frac{x(\cos x-\sin x)-\sin x-e^x}{x^2e^x}$.

۵ ـ ۲ ـ ۲ با استفاده از مشتقگیری از توابع مرکب، مشتق توابع زیر را بیابید :

(a) $y=\sin^3 x$; (b) $y=\ln\tan x$; (c) $y=5^{\cos x}$;
(d) $y=\ln\sin(x^3+1)$; (e) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;
(f) $y=\ln^5(\tan 3x)$; (g) $y=\sin^2\sqrt{1/(1-x)}$.

حل ــ (a) در اینجا $(\sin x)$ از توان سوم است و نخست از تابع نسبت به $\sin x$ مشتق می گیریم،

$$(\sin^3 x)'_{\sin x}=3\sin^2 x;$$

که تابع واسطهٔ $\sin x$ خود تابعی از x است، بنابراین نتیجهٔ حاصل را به مشتق $\sin x$ نسبت به x ضرب می کنیم و داریم :

$$y'_x=(\sin^3 x)'_{\sin x}(\sin x)'_x=3\sin^2 x\cos x;$$

(b) $y'_x=(\ln\tan x)_{\tan x}(\tan x)'_x=\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2}{\sin 2x}$;

(c) $y'_x=(5^{\cos x})'_{\cos x}(\cos x)'_x=5^{\cos x}\ln 5(-\sin x)=-5^{\cos x}\sin x\ln 5$;

(d) $y'_x=[\ln\sin(x^3+1)]'_{\sin(x^3+1)}[\sin(x^3+1)]'_{x^3+1}[x^3+1]'_x=$
$=\frac{1}{\sin(x^3+1)}\cdot\cos(x^3+1)\cdot 3x^2=3x^2\cot(x^3+1)$;

(e) $y'_x=\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)'_{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)_{1-x^2}(1-x^2)'_x=$
$=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}\quad(x\neq 0)$.

جواب:

(f) $30\ln^4(\tan^3 x)\frac{1}{\sin 6x}$; (g) $\sin\frac{2}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$.

۶ ـ ۲ ـ ۲ مشتق هریک از توابع زیر را بدست آورید :

(a) $y=(1+3x+5x^2)^4$; (b) $y=(3-\sin x)^3$;
(c) $y=\sqrt[3]{\sin^2 x}+1/\cos^2 x$;

(d) $y=\sqrt[3]{2e^x+2^x+1}+\ln^5 x;$

(e) $y=\sin 3x+\cos(x/5)+\tan\sqrt{x};$

(f) $y=\sin(x^2-5x+1)+\tan(a/x);$

(g) $y=\arccos\sqrt{x};$

(h) $y=\arctan(\ln x)+\ln(\arctan x);$

(i) $y=\ln^2\arctan(x/3);$

(j) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$

حل ــ

$$(a)\quad y'=4(1+3x+5x^2)^3(1+3x+5x^2)'=$$
$$=4(1+3x+5x^2)^3(3+10x);$$

$$(g)\quad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}(\sqrt{x})'=-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}};$$

$$(j)\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right].$$

جواب:

(b) $y'=-3(3-\sin x)^2\cos x;$ (c) $y'=\dfrac{2\cos x}{3\sin x\sqrt[3]{\sin^2 x}}+\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x};$

(d) $y'=\dfrac{2e^x+2^x\ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x-2^x+1)^2}}+\dfrac{5\ln^4 x}{x};$ (e) $y'=3\cos 3x-\dfrac{1}{5}\sin\dfrac{x}{5}+$ $+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2\sqrt{x};$ (f) $y'=(2x-5)\cos(x^2-5x+1)-\dfrac{a}{x^2}\sec^2\dfrac{a}{x};$ (h) $y'=$ $=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}+\dfrac{1}{\arctan x}+\dfrac{1}{1+x^2};$ (i) $y'=2\ln\arctan\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{1}{\arctan\dfrac{x}{3}}\cdot\dfrac{3}{9+x^2}.$

۷ ـ ۲ ـ ۲ مشتق تابع

$$y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

را بدست آورید.

حل ــ داریم

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\,\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}\,(1+x^2)}=\frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)},$$

یعنی

$$y' = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & |x| < 1, \\ -\dfrac{2}{1+x^2} & |x| > 1. \end{cases}$$

وقتی $|x| = 1$ مشتق وجود ندارد.

۸ ـ ۲ ـ ۲ مشتق توابع زیر بیابید:

(a) $y = \sinh 5x \cosh (x/3)$;
(b) $y = \coth (\tan x) - \tanh (\cot x)$;
(c) $y = \arccos (\tanh x) + \sinh (\sin 6x)$;
(d) $y = \sinh^2 x^3 + \cosh^3 x^2$;
(e) $y = \dfrac{e^{\sinh ax}}{\sinh bx - \cosh bx}$.

حل ـ

(a) $y' = (\sinh 5x)' \cosh \frac{x}{3} + \sinh 5x \left(\cosh \frac{x}{3}\right)' =$

$= 5 \cosh 5x \cosh \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \sinh 5x \sinh \frac{x}{3}$;

(c) $y' = -\dfrac{(\tanh x)'}{\sqrt{1-\tanh^2 x}} + \cosh (\sin 6x) (\sin 6x)' =$

$= -\dfrac{1/\cosh^2 x}{\sqrt{(\cosh^2 x - \sinh^2 x)/\cosh^2 x}} +$

$+ 6 \cos 6x \cosh (\sin 6x) = -\dfrac{1}{\cosh x} + 6 \cos 6x \cosh (\sin 6x)$.

جواب:

(b) $y' = -\dfrac{1}{\sinh^2 (\tan x)} \sec^2 x + \dfrac{1}{\cosh^2 (\cot x)} \operatorname{cosec}^2 x$; (d) $y' = 3x \times$
$\times (x \sinh 2x^3 + \cosh x^2 \cdot \sinh 2x^2)$; (e) $y' = e^{\sinh ax} e^{bx (a \cosh ax + b)}$.

۹ ـ ۲ ـ ۲ مشتق توابع زیر را بیابید:

(a) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 (x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$; (b) $y = [u(x)]^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$;

(c) $y = \sqrt[3]{x^2 \dfrac{1-x}{1+x^2} \sin^3 x \cos^2 x}$;

(d) $y = (\sqrt{\tan x})^{x+1}$

حل ـ (a) مشتق لگاریتمی را بکار می بریم.

$$z = \ln |y| = \ln \sqrt[3]{\frac{|x^3| (x^2+1)}{\sqrt[5]{|5-x|}}} = \ln |x| + \frac{1}{3} \ln (x^2+1) - \frac{1}{15} \ln |5-x|.$$

با استفاده از $(\ln|u|)'=u'/u$، داریم

$$z'=\frac{1}{x}+\frac{2x}{3(x^2+1)}+\frac{1}{15(5-x)}=\frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}.$$

ولی $z'=(\ln|y|)'=y'/y$، که از آنجا

$$y'=yz'=\sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}\cdot\frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}.$$

(b) فرض می کنیم توابع $v(x)$ و $u(x)$ در حوزهٔ مفروض مشتق دارند. آنگاه تابع

$$z=\ln y=v\ln u$$

هم در آن حوزه مشتق دارد، و

$$z'=(v\ln u)'=v'\ln u+v\frac{u'}{u}.$$

پس تابع

$$y=e^{\ln y}=e^z$$

هم در حوزهٔ مفروض مشتق دارد و

$$y'=e^z z'=yz'.$$

پس

$$y'=u^v\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right)=vu^{v-1}u'+u^v\ln u\cdot v'.$$

جواب:

(c) $y'=\sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x\left(\frac{2}{3x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3\cot x-2\tan x\right)$;

(d) $y'=(\tan x)^{\frac{(x+1)}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\tan x+\frac{x+1}{\sin 2x}\right)$.

۱۰ـ۲ـ۲ نشان دهید که تابع $y=xe^{-x^2/2}$ در معادلهٔ زیر صدق می کند:

$$xy'=(1-x^2)\,y.$$

حل ـــ

$$y'=e^{-x^2/2}-x^2e^{-x^2/2}=e^{-x^2/2}(1-x^2);$$
$$xy'=xe^{-x^2/2}(1-x^2).$$

پس

$$xy'=y(1-x^2).$$

۲-۲-۱۱ نشان دهید که تابع $y=xe^{-x}$ درمعادلهٔ زیر صدق می کند

$$xy'=(1-x)\,y.$$

۲-۲-۱۲ وجود مشتق را در توابع زیر بررسی کنید:

$$\text{(a)}\ \ y=\arcsin(\cos x);\quad \text{(b)}\ \ y=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}.$$

حل — (a)

$$y'=\frac{(\cos x)'}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}=-\frac{\sin x}{|\sin x|}.$$

پس در نقاطی که $\sin x>0$ داریم $y'=-1$ و درنقاطی که $\sin x<0$ ، داریم $y'=1$ • در نقاطی که $\sin x=0$ یعنی در نقاط $x=k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots)$ تابع پیوسته است ولی مشتق ندارد.

(b) حوزه تعریف تابع ، فاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ است.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\qquad x\neq 0\quad \text{و}\quad x\neq\pm1$$

وقتی $x\to-1+0$ یا $x\to1-0$ داریم $y'\to+\infty$. حال باید بررسی کنیم که آیا تابع در $x=0$ مشتق دارد یا نه؟ یعنی آیا

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-\Delta x^2}}}{\Delta x}$$

موجود است؟ چون $\sqrt{1-\Delta x^2}-1\sim-\frac{1}{2}\Delta x^2$ پس

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-\Delta x^2}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\Delta x^2}}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \Delta x\to+0,\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \Delta x\to-0.\end{cases}$$

بنابر این $y'_-(0)\neq y'_+(0)$. یعنی با اینکه تابع در $x=0$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق ندارد.

توجه: در چند حالت مشتق وجود ندارد از جمله موجود نبودن $f'_-(x)$ و $f'_+(x)$ در یک نقطهٔ مفروض، یعنی ، وقتی تابع در نقطهٔ مورد نظر مماس راست یا مماس چپ نداشته باشد. مثلاً تابع

$$f(x)=\begin{cases}x\sin(1/x) & x\neq0,\\ 0 & x=0\end{cases}$$

در $x=0$ پیوسته است ولی مشتق چپ و مشتق راست ندارد، زیرا

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

۲-۲-۱۳ مشتق توابع زیر را حساب کنید:

(a) $f(x)=\sinh(x/2)+\cosh(x/2)$;
(b) $f(x)=\ln[\cosh x]$; (c) $f(x)=2\sqrt{\cosh x-1}$;
(d) $f(x)=\arcsin\{\tanh x\}$;
(e) $f(x)=\sqrt{1+\sinh^2 4x}$;
(f) $f(x)=e^{ax}(\cosh bx+\sinh bx)$.

جواب:

(a) $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\cosh\frac{x}{2}+\sinh\frac{x}{2}\right)$; (b) $f'(x)=\tanh x$; (c) $f'(x)=$ $=\sqrt{\cosh x+1}$; (d) $f'(x)=\frac{1}{\cosh x}$; (e) $f'(x)=4\sinh 4x$; (f) $f'(x)=(a+b)e^{ax}\times$ $\times(\cosh bx+\sinh bx)=(a+b)\,e^{(a+b)x}$.

۲-۲-۱۴ به کمک مشتق لگاریتمی، مشتق توابع زیررا بدست آورید:

(a) $y=(\cos x)^{\sin x}$; (b) $y=\sqrt[3]{\frac{\sin 3x}{1-\sin 3x}}$;
(c) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$.

جواب:

(a) $y'=(\cos x)^{\sin x}(\cos x\ln\cos x-\tan x\sin x)$;
(b) $y'=\frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{\sin^2 3x(1-\sin 3x)^4}}$;
(c) $y'=\frac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{5}{2}}}$.

۲-۲-۱۵ اگر

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x};$$

نشان دهید.

$$f(\pi/4)-3f'(\pi/4)=3.$$

۲-۲-۱۶ نشان دهید که تابع

$$y=\frac{-e^{-x^2}}{2x^2}$$

جواب معادلهٔ دیفرانسیل زیر است :

$$xy' + 2y = e^{-x^2}.$$

۱۷ ـ ۲ ـ ۲ مشتق هریک از توابع زیر را بدست آورید :

(a) $y = \ln \cos \sqrt{\arc \sin 3^{-2x}} \quad (x > 0);$

(b) $y = \sqrt[3]{\arctan \sqrt[5]{\cos \ln^3 x}}.$

جواب :

$$\text{(a)}\ y' = \frac{\ln 3}{\sqrt{81^x - 1}} \cdot \frac{\tan \sqrt{\arcsin 3^{-2x}}}{\sqrt{\arcsin 3^{-2x}}};$$

$$\text{(b)}\ y' = -\frac{\sin \ln^3 x \cdot \ln^2 x}{5x \sqrt[5]{\cos^4 \ln^3 x}\left(1 + \sqrt[5]{\cos^2 \ln^3 x}\right)\sqrt[3]{\left(\arctan \sqrt[5]{\cos \ln^3 x}\right)^2}}$$

۳ ـ ۲ مشتقات متوالی توابع ضمنی
فرمول لایبنیتز

اگر مشتق $(n-1)$ ام تابع $y = f(x)$ معلوم باشد، مشتق مرتبهٔ n ام آن از دستور

$$y^{(n)}(x) = [y^{(n-1)}(x)]'.$$

بدست می آید.

بویژه $y''(x) = [y'(x)]', \ y'''(x) = [y''(x)]'$ وغیره.

اگر u و v دوتابع n مرتبه مشتقپذیر باشند وآنگاه برای ترکیب خطی

$$c_1 u + c_2 v \quad (c_1,\ c_2 \ \text{دو عدد ثابتند})$$

داریم

$$(c_1 u + c_2 v)^{(n)} = c_1 u^{(n)} + c_2 v^{(n)},$$

فرمول زیر که برای uv معتبر است به دستور لایبنیتز معروف است :

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

که در آن $u^{(0)}=u,\quad v^{(0)}=v$ و $C_n^k=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
ضرایب دوجمله‌ای نیوتن هستند. چند فرمول اساسی بقرار زیرند:

(1) $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\dots(m-n+1)\,x^{m-n}$.
(2) $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a\,(a>0)$. در حالت خاص $(e^x)^{(n)}=e^x$.
(3) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.
(4) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\pi/2)$.
(5) $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\pi/2)$.

۱ ـ ۳ ـ ۲ مشتقات مرتبهٔ n ام توابع زیر را بیابید:

(a) $y=\ln x$; (b) $y=e^{kx}$; (c) $y=\sin x$; (d) $y=\sin 5x\cos 2x$;
(e) $y=\sin x\cos x$; (f) $y=\sin 3x\cos^2 x$; (g) $y=\ln(x^2+x-2)$.

حل ــ

(a) $y'=\frac{1}{x}=x^{-1};\ y''=(-1)\,x^{-2};\ y'''=1\cdot 2x^{-3};$
$y^{(4)}=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4};\ \dots;\ y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

(c) $y'=\cos x=\sin(x+\pi/2)$;
$y''=\cos(x+\pi/2)=\sin(x+2\pi/2)$.

در حالت کلی، اگر فرض کنیم $n=k$ داریم

$$y^{(k)}=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),$$

از آنجا

$$y^{(k+1)}=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[(k+1)\frac{\pi}{2}+x\right].$$

بنابر استقراء ریاضی به ازای هر n طبیعی

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

(d)

$$y=\sin 5x\cos 2x=\frac{1}{2}\left[\sin 7x+\sin 3x\right].$$

بنابراین

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left[7^n\sin\left(7x+n\frac{\pi}{2}\right)+3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

(g)
$$y'=\frac{2x+1}{x^2+x-2}.$$

برای سادگی محاسبات آن را به صورت زیر می نویسیم :

$$y'=\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}=(x-1)^{-1}+(x+2)^{-1}.$$

که از آنجا

$$y''=-1\,(x-1)^{-2}-1\,(x+2)^{-2};$$
$$y'''=1\cdot 2\,(x-1)^{-3}+1\cdot 2\,(x+2)^{-3};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,[(x-1)^{-n}+(x+2)^{-n}]=$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x-1)^n}+\frac{1}{(x+2)^n}\right].$$

جواب :

(b) k^ne^{kx}; (e) $2^{n-1}\sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$; (f) $\frac{1}{4}\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+$
$+\frac{3^n}{2}\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{5^n}{4}\sin\left(5x+n\frac{\pi}{2}\right).$

۲ ـ ۳ ـ ۲ اگر $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ مطلوب است محاسبهٔ $y^{(n)}$.

حل ــ تابع را به صورت زیر می نویسیم

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}(cx+d)^{-1}.$$

از آنجا

$$y'=(-1)\frac{bc-ad}{c}c\,(cx+d)^{-2},$$
$$y''=(-1)(-2)\frac{bc-ad}{c}c^2\,(cx+d)^{-3},$$
$$y'''=(-1)(-2)(-3)\frac{bc-ad}{c}c^3\,(cx+d)^{-4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)}=(-1)^n n!\,\frac{bc-ad}{c}c^n\,(cx+d)^{-(n+1)}=$$
$$=(-1)^n\frac{n!\,c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}(bc-ad).$$

۳ ـ ۳ ـ ۲ اگر

$$y=x/(x^2-1)$$

مطلوبست محاسبهٔ $y^{(n)}$.

حل - عبارت را به صورت زیر می نویسیم :

$$y=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right],$$

بنابراین با استفاده از مسئلهٔ ۲ـ۳ـ۲ داریم :

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

۴ ـ ۳ ـ ۲ با استفاده از فرمول لایبنیتز، مشتقات خواسته شده را برای هر تابع بنویسید .

(a) $y=x^2\sin x;\qquad y^{(25)};$
(b) $y=e^x(x^2-1);\qquad y^{(24)};$
(c) $y=e^{\alpha x}\sin\beta x;\qquad y^{(n)}.$

حل — (a)

$$y^{(25)}=(\sin x\cdot x^2)^{(25)}=(\sin x)^{(25)}x^2+25(\sin x)^{(24)}(x^2)'+ \\ +\frac{25\cdot 24}{2}(\sin x)^{(23)}(x^2)'',$$

چون جملات بعدی صفر هستند، پس

$$y^{(25)}=x^2\sin\left(x+25\frac{\pi}{2}\right)+50x\sin\left(x+24\frac{\pi}{2}\right)+600\sin\left(x+23\frac{\pi}{2}\right)= \\ =(x^2-600)\cos x+50x\sin x.$$

جواب :

(b) $e^x(x^2+48x+551)$; (c) $e^{\alpha x}\left\{\sin\beta x\left[\alpha^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^{n-2}\beta^2+\dots\right]+\right.$
$\left.+\cos\beta x\left[n\alpha^{n-1}\beta-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}\alpha^{n-3}\beta^3+\dots\right]\right\}.$

۵ ـ ۳ ـ ۲ مقدار مشتق مرتبهٔ n ام تابع

$$y=\frac{3x+2}{x^2-2x+5}$$

را در نقطهٔ $x=0$ بنویسید

حل — با توجه به فرض داریم :

$$y(x)(x^2-2x+5)=3x+2$$

با استفاده از فرمول لایبنیتز، از طرفین رابطهٔ فوق n مرتبه مشتق می گیریم. که به ازای $n \geqslant 2$ داریم:

$$y^{n}(x)(x^2-2x+5)+ny^{(n-1)}(x)(2x-2)+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-2)}(x)\cdot 2=0.$$

با فرض $x=0$، داریم

$$5y^{(n)}(0)-2ny^{(n-1)}(0)+n(n-1)y^{(n-2)}(0)=0.$$

از آنجا

$$y^{(n)}(0)=\frac{2}{5}ny^{(n-1)}(0)-\frac{n(n-1)}{5}y^{(n-2)}(0).$$

که این یک دستور بازگشتی است که از آن مقدار مشتق مرتبهٔ n ام در نقطهٔ $x=0\ (n\geqslant 2)$ بدست می آید، و مقادیر $y(0)$ و $y'(0)$ فوراً حساب می شوند،

$$y(0)=2/5 \text{ ، } y'(x)=\frac{-3x^2-4x+19}{(x^2-2x+5)^2}; \qquad y'(0)=\frac{19}{25}.$$

متوالیاً با قرار دادن $n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$ در دستور بازگشتی، مقادیر مشتقات از مرتبهٔ بالاتر حساب می شوند. مثلاً

$$y''(0)=\frac{2}{5}\cdot 2\cdot\frac{19}{25}-\frac{2\cdot 1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{56}{125},$$

$$y'''(0)=\frac{2}{5}\cdot 3\cdot\frac{56}{125}-\frac{3\cdot 2}{5}\cdot\frac{19}{25}=-\frac{234}{625}.$$

۲ - ۳ - ۶ مشتقهای مرتبهٔ دوم هریک از توابع زیر را تعیین کنید:

$$\text{(a)}\ y=x\sqrt{1+x^2}; \quad \text{(b)}\ y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}; \ \text{(c)}\ y=e^{-x^2}.$$

جواب:

$$\text{(a)}\ \frac{2x^2+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}; \quad \text{(b)}\ \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x}{(1-x^2)^2}; \quad \text{(c)}\ 2e^{-x^2}\times$$
$$\times(2x^2-1).$$

۲ - ۳ - ۷ تابع

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+e^x.$$

مفروض است. نشان دهید که این تابع در معادلهٔ زیر صدق می کند:

$$y''-4y'+4y=e^x.$$

۸ ـ ۳ ـ ۲ با استفاده از فرمول لایبنیتز، مشتقهای خواسته شده را در توابع زیر بدست آورید:

(a) $y = x^3 \sin x;\quad y^{(20)};$ را بیابید.
(b) $y = e^{-x} \sin x;\quad y''';$ «
(c) $y = e^x (3x^2 - 4);\quad y^{(n)};$ «
(d) $y = (1 - x^2) \cos x;\quad y^{(2n)}.$ «

جواب:

(a) $x^3 \sin x - 60x^2 \cos x - 1140x \sin x + 8640 \cos x$; (b) $2e^{-x} \times \times (\sin x + \cos x)$; (c) $e^x [3x^2 + 6nx + 3n(n-1) - 4]$; (d) $(-1)^n [(4n^2 + 2n + + 1 - x^2) \cos x - 4nx \sin x]$.

۹ ـ ۳ ـ ۲ با تبدیل هر کدام از توابع زیر به ترکیب خطی از توابع ساده، مشتق مرتبهٔ صدم هر کدام را بیابید:

(a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$; (b) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

جواب:

(a) $100! \left[\dfrac{1}{(x-2)^{101}} - \dfrac{1}{(x-1)^{101}}\right]$; (b) $\dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 197 \times (399 - x)}{2^{100} (1-x)^{\frac{201}{2}}}$.

راهنمایی:

$$y = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

۱۰ ـ ۳ ـ ۲ نشان دهید که معادلهٔ

$$y = x^n [c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)]$$

که c_1, c_2, n ثابتند در معادلهٔ زیر صدق می کند:

$$x^2 y'' + (1 - 2n) xy' + (1 + n^2) y = 0.$$

۱۱ ـ ۳ ـ ۲ ثابت کنید که اگر $f(x)$ مشتق n ام داشته باشد، آنگاه

$$[f(ax + b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b).$$

٤ ـ ۲ مشتقگیری از توابع: معکوس، ضمنی وپارامتری

۱ ـ مشتق تابع معکوس

اگر تابع مشتقپذیر $y=f(x)$, $a<x<b$ یک تابع معکوس یک مقداری پیوسته $x=g(y)$ داشته باشد و $y'_x \neq 0$ آنگاه

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

هم موجود است. مشتق مرتبه دوم آن عبارتست از:

$$x''_{yy}=-\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

۲ ـ مشتق تابع ضمنی

اگر تابع مشتقپذیر $y=y(x)$ در معادله $F(x,\ y)=0$ صدق کند، آنگاه از رابطهٔ اخیر نسبت به x مشتق می‌گیریم که y به عنوان تابع است و معادلهٔ

$$\frac{d}{dx}F(x,\ y)=0$$

را نسبت به y'_x حل می‌کنیم. برای بدست آوردن y''_{xx}، از مشتق مرتبه اول، دفعه دیگر نسبت به x مشتق می‌گیریم و برای مشتقهای مرتبهٔ بالاتر بهمان نحو عمل می‌کنیم.

۳ ـ مشتق تابع پارامتری

اگر تابعی بامعادلات پارامتری

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ \alpha<t<\beta,$$

تعریف شود که در آن $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ مشتق دارند و $\varphi'(t)\neq 0$ و y تابعی پیوسته ویک مقداری از x است، آنگاه y'_x وجود دارد و

$$y'_x=\frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

و مشتقات مرتبه‌های بالاتر متوالیاً محاسبه می‌شوند:

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t},\ \ y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t},\ \ldots$$

بویژه مشتق مرتبه دوم از دستور زیر حساب می‌شود:

$$y''_{xx} = \frac{x'_t\, y''_{tt} - x''_{tt}\, y'_t}{(x'_t)^3}.$$

۱ ـ ٤ ـ ۲ مشتق مورد نظر را در توابع زیر بدست آورید:

(a) $y = 2x^3 + 3x^5 + x;$ $\qquad x'_y;$ مطلوب است

(b) $y = 3x - (\cos x)/2;$ $\qquad x''_{yy};$ « «

(c) $y = x + e^x;$ $\qquad x''_{yy}.$ « «

حل ــ (a) داریم:

$$y'_x = 6x^2 + 15x^4 + 1,$$

پس

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{6x^2 + 15x^4 + 1}.$$

(c) $y'_x = 1 + e^x, \quad y''_{xx} = e^x$ پس

$$x'_y = \frac{1}{1 + e^x}, \quad x''_{yy} = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^3}.$$

جواب: (b) $x''_{yy} = -\dfrac{4\cos x}{(6 + \sin x)^3}.$

۲ ـ ٤ ـ ۲ با استفاده از مشتق تابع معکوس، y'_x را در توابع زیر بدست آورید:

(a) $y = \sqrt[3]{x};$ (b) $y = \arcsin\sqrt{x};$ (c) $y = \ln\sqrt{1 + x^2}.$

حل ــ (a) معکوس تابع، $x = y^3$ و مشتق آن برابر $x'_y = 3y^2$ است.

پس

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

(c) به ازای $x > 0$ ،تابع معکوس، $x = \sqrt{e^{2y} - 1}$ است که

$$x'_y = e^{2y}/\sqrt{e^{2y} - 1}$$

مشتق آن است، پس

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{\sqrt{e^{2y} - 1}}{e^{2y}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

۳ ـ ٤ ـ ۲ در توابع زیر که به صورت پارامتری مشخص شده‌اند مشتق مرتبهٔ اول y را نسبت به x بدست آورید:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)}\ x=a(t-\sin t), & y=a(1-\cos t);\\ \text{(b)}\ x=k\sin t-\sin kt, & y=k\cos t+\cos kt;\\ \text{(c)}\ x=2\ln\cot t, & y=\tan t+\cot t;\\ \text{(d)}\ x=e^{ct}, & y=e^{-ct}. \end{array}$$

حل ــ (a) از y و x نسبت به t مشتق می‌گیریم،

$$x'_t=a(1-\cos t);\quad y'_t=a\sin t.$$

از آنجا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2}\ (t\neq 2k\pi).$$

(c)

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-2\operatorname{cosec}^2 t}{\cot t}=-\frac{4}{\sin 2t};$$
$$\frac{dy}{dt}=\sec^2 t-\operatorname{cosec}^2 t=-\frac{4\cos 2t}{\sin^2 2t};$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{4\cos 2t\sin 2t}{4\sin^2 2t}=\cot 2t\ \left(t\neq\frac{k\pi}{2}\right).$$

جواب:

(b) $y'_x=-\cot\frac{k-1}{2}t$; (d) $y'_x=-2e^{-2ct}$.

٤ ـ ٤ ـ ۲ در معادلات زیر که به صورت پارامتری هستند، مشتق مرتبهٔ دوم y رانسبت به x حساب کنید:

$$\text{(a)}\ \begin{cases} x=a\cos^3 t,\\ y=b\sin^3 t;\end{cases}\qquad \text{(b)}\ \begin{cases} x=t^3+3t+1,\\ y=t^3-3t+1;\end{cases}$$
$$\text{(c)}\ \begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t);\end{cases}\qquad \text{(d)}\ \begin{cases} x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t.\end{cases}$$

حل ــ (a) نخست y'_x را حساب می کنیم:

$$y'_t=3b\sin^2 t\cos t;\quad x'_t=-3a\cos^2 t\sin t;$$
$$y'_x=-\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t}=-\frac{b}{a}\tan t\ \left(t\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

و حال با استفاده از دستور

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

که در آن

$$(y'_x)'_t=-\frac{b}{a\cos^2 t}.$$

داریم:

$$y''_{xx}=-\frac{b}{a\cos^2 t\,(-3a\cos^2 t\sin t)}=\frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}.$$

(d)

$$x'_t=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t);$$
$$y'_t=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\cos t+\sin t);$$
$$y'_x=\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t};$$
$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}\right)_t}{e^t(\cos t-\sin t)}=\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}.$$

جواب:

(b) $y''_{xx}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$; (c) $y''_{xx}=\frac{1}{at\cos^3 t}$.

۵ ـ ٤ ـ ۲ مطلوب است محاسبهٔ y'''_{xxx}:

(a) $x=e^{-t}$; $y=t^3$; (b) $x=\sec t$; $y=\tan t$.

حل ــ (a) نخست داریم

$$x'_t=-e^{-t};\quad y'_t=3t^2,$$

از آنجا

$$y'_x=-3t^2/e^{-t}=-3e^t t^2.$$

حال مشتق مرتبهٔ دوم را به دست می آوریم،

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{-(3e^t t^2+6te^t)}{-e^{-t}}=3te^{2t}(t+2).$$

و بالاخره از روی آن مشتق مرتبهٔ سوم حساب می شود

$$y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}=\frac{3e^{2t}\,[2(t^2+2t)+2t+2]}{-e^{-t}}=-6e^{3t}(t^2+3t+1).$$

جواب:

(b) $y'''_{xxx}=-3\sin t\sec^2 t.$

۲ ـ ٤ ـ ٦ در توابع ضمنی زیر y'_x را بیابید:

(a) $x^3+x^2y+y^2=0;$ (b) $\ln x+e^{-y/x}=c;$
(c) $x^2+y^2-4x-10y+4=0;$
(d) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$

حل ـ (a) با فرض اینکه y تابع x است از آن نسبت به x مشتق می گیریم، داریم:

$$3x^2+2xy+x^2y'+2yy'=0.$$

از این معادله، y' را حساب می کنیم

$$y'=-\frac{3x^2+2xy}{x^2+2y}.$$

جواب:

(b) $y'_x=\frac{y}{x}+e^{-\frac{y}{x}};$ (c) $y'_x=\frac{2-x}{y-5};$ (d) $y'_x=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$

۲ ـ ٤ ـ ۷ مطلوب است y''_{xx}، اگر

(a) $\arctan y-y+x=0;$ (b) $e^x-e^y=y-x;$
(c) $x+y=e^{x-y}.$

حل ـ (a) با در نظر گرفتن اینکه y تابع x است، مقدار y' را حساب می کنیم:

$$\frac{y'}{1+y^2}-y'+1=0,$$

از آنجا

$$y'=\frac{1+y^2}{y^2}=y^{-2}+1.$$

دوباره نسبت به x مشتق می گیریم

$$y''=-2y^{-3}y'$$

باقرار دادن مقدار y' در رابطهٔ اخیر داریم:

$$y''_{xx}=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

جواب:

(b) $y''_{xx}=\frac{(e^x-e^y)(1-e^{x+y})}{(1+e^y)^3};$ (c) $y''_{xx}=\frac{4e^{x-y}}{(e^{x-y}+1)^3}=\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}.$

۲ ـ ٤ ـ ۸ مقدار y'' را به ازای $x=1$ از عبارت زیر حساب کنید:

$$x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0 \quad \text{و} \quad y|_{x=1}=1.$$

حل ــ نسبت به x مشتق می گیریم :

$$3x^2-4xy^2-4x^2yy'+5+y'=0.$$

با فرض $x=1$ و $y=1$ ، مقدار y' به ازای $x=1$ حساب می شود

$$3-4-4y'+5+y'=0; \quad y'=4/3.$$

دو باره نسبت به x مشتق می گیریم :

$$6x-4y^2-8xyy'-8xyy'-4x^2y'^2-4x^2yy''+y''=0.$$

با فرض $y=1$ و $x=1$ و $y'=4/3$ مقدار y'' به ازای $x=1$ بدست می آید :

$$6-4-\frac{64}{3}-\frac{64}{9}-3y''=0, \; y''=-8\frac{22}{27}.$$

۲ ـ ٤ ـ ۹ y'_x را از توابع ضمنی زیر حساب کنید :

(a) $x+\sqrt{xy}+y=a$; (b) $\arctan(y/x)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;
(c) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$;
(d) $e^y+xy=e$; در نقطهٔ $(0, 1)$ ،

جواب :

(a) $\frac{2a-2x-y}{x+2y-2a}$; (b) $\frac{x+y}{x-y}$; (c) $-\frac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$; (d) $-\frac{1}{e}$.

۲ ـ ٤ ـ ۱۰ از توابع ضمنی زیر y''_{xx} را بدست آورید

(a) $y=x+\arctan y$;
(b) $x^2+5xy+y^2-2x+y-6=0$; y'' را در نقطهٔ (۱ و ۱) بیابید

جواب :

(a) $-\frac{2y^2+2}{y^5}$; (b) $\frac{111}{256}$.

۲ ـ ٤ ـ ۱۱ مشتق خواسته شده را در توابع زیر که به صورت پارامتری نمایش داده شده اند بیابید :

(a) $x=\frac{a\sin t}{1+b\cos t}$,	$y=\frac{c\cos t}{1+b\cos t}$;	y'_x;	مطلوبست
(b) $x=\ln(1+t^2)$,	$y=t-\arctan t$;	y'_x;	״

(c) $x=t^2+2,$	$y=t^3/3-t;$	$y''_{xx};$	مطلوبست
(d) $x=e^{-t^2},$	$y=\arc\tan(2t+1);$	$y'_x;$	//
(e) $x=4\tan^2(t/2),$	$y=a\sin t+b\cos t;$	$y'_x;$	//
(f) $x=\arc\sin(t^2-1),$	$y=\arc\cos 2t;$	$y'_x;$	//
(g) $x=\arc\sin t,$	$y=\sqrt{1-t^2};$	$y''_{xx}.$	//

جواب:

(a) $-\dfrac{c\sin t}{a(b+\cos t)}$; (b) $\dfrac{t}{2}$;

(c) $\dfrac{t^2+1}{4t^3}$; (d) $-\dfrac{e^{t^2}}{2t(2t^2+2t+1)}$; (e) $\dfrac{(a\cos t-b\sin t)\cos^3\frac{t}{2}}{4\sin\frac{t}{2}}$;

(f) $-\sqrt{\dfrac{1-4t^2}{2-t^2}}$; (g) $-\sqrt{1-t^2}$.

۱۲ ـ ٤ ـ ۲ نشان دهید که تابع $y=f(x)$ که با معالات پارامتری

$$x=e^t\sin t,\quad y=e^t\cos t,$$

مشخص شده است در معادلهٔ زیر صدق می کند

$$y''(x+y)^2=2(xy'-y)$$

۵ ـ ۲ کابرد مشتق

معادله خط مماس به منحنی مشتقپذیر $y=y(x)$ درنقطهٔ $M(x_0, y_0)$ که $y_0=y(x_0)$ عبارت است از

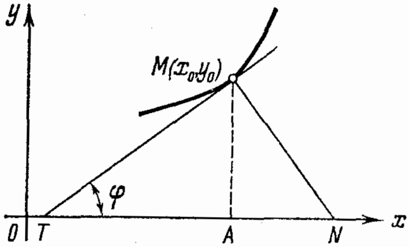
$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0).$$

خط راستی که درنقطهٔ تماس به خط مماس عمود باشد **قائم** به منحنی گویند.
معادلهٔ خط قائم (خط نرمال) در نقطهٔ M به صورت زیر است:

$$y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0),$$
$$y'(x_0)\neq 0.$$

پاره خطهای AT, AN را به ترتیب **تحت قائم وتحت مماس** گویند و درازاهای MN و MT را به ترتیب **طول قائم وطول مماس** نامند (شکل ۳۷). درازاهای این چهار پاره خط به صورت زیرند:

$$AT=\left|\frac{y}{y'}\right|;\quad AN=|yy'|;\quad MT=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+(y')^2};$$
$$MN=|y|\sqrt{1+(y')^2}.$$



شکل ۳۷

۱ ـ ۵ ـ ۲ معالادت خط مماس و خط قائم به منحنیهای زیر را بنویسید:

(a) به منحنی $y=x^3-3x+2$ در نقطهٔ $(2,\ 4)$ ،

(b) به سهمی $y=2x^2-x+5$ در نقطه‌ای به طول $x=-0.5$;

(c) به منحنی $y=x^4+3x^2-16$ در نقاط تلاقی با سهمی $y=3x^2$.

حل ــ (a) مشتق را در $x=2$ حساب می کنیم،

$$y'=3x^2-3,\qquad y'(2)=9.$$

معادلهٔ خط مماس عبارتست از

$$y-4=9(x-2)\quad \text{یا}\quad 9x-y-14=0.$$

و معادلهٔ قائم برابر است با :

$$y-4=-\frac{1}{9}(x-2)\quad \text{یا}\quad x+9y-38=0.$$

(c) دستگاه معادلات زیر را حل می کنیم

$$\begin{cases} y=x^4+3x^2-16,\\ y=3x^2,\end{cases}$$

نقاط تلاقی منحنیها بدست می آید:

$$x_1=-2,\ \ x_2=2,\ \ y_1=y_2=12.$$

مشتقها را در نقاط $x=-2$ و $x=2$ بدست می آوریم:

$$y' = 4x^3 + 6x, \quad y'(-2) = -44, \quad y'(2) = 44.$$

بنابراین معادلات خطوط مماس به صورت زیرند:

$$y - 12 = -44(x+2), \quad y - 12 = 44(x-2).$$

معادلات خطوط قائم به صورت زیر هستند:

$$y - 12 = \frac{1}{44}(x+2), \quad y - 12 = -\frac{1}{44}(x-2).$$

جواب: (b) $6x + 2y - 9 = 0; \quad 2x - 6y + 37 = 0.$

۲ ـ ۵ ـ ۲ نقاطی از منحنی $y = x^3 - 3x + 5$ را بیابید که خط مماس در آنها:

(a) موازی خط $y = -2x$ باشد،

(b) به خط $y = -x/9$ عمود باشد،

(c) با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ 45° بسازد.

حل ــ در تعیین این نقاط باید به خاطر داشته باشیم که ضریب زاویهٔ خط مماس مقدار مشتق به ازای نقطهٔ تماس است.

(a) با توجه به شرط توازی داریم:

$$3x^2 - 3 = -2,$$

از آنجا $x_1 = -1/\sqrt{3}, \; x_2 = 1/\sqrt{3}$ نقاط مطلوب عبارتند از

$$M_1(-1/\sqrt{3}, \; 5 + 8\sqrt{3}/9), \quad M_2(1/\sqrt{3}, \; 5 - 8\sqrt{3}/9).$$

(b) با استفاده از شرط عمود بودن

$$3x^2 - 3 = 9,$$

که از آنجا $x_1 = -2, \; x_2 = 2$ پس

$$M_1(-2, \; 3), \; M_2(2, \; 7).$$

جواب:

(c) $M_1\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \; 5 + \frac{10}{3\sqrt{3}}\right), \; M_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \; 5 - \frac{10}{3\sqrt{3}}\right).$

۳ ـ ۵ ـ ۲ مطلوبست تعیین زوایای بین خطوط زیر:

(a) خط $y=4-x$ و سهمی $y=4-x^2/2$ ،

(b) بین دو منحنی $y=\cos x$ و $y=\sin x$.

حل ــ (a) خاطر نشان می سازیم که زوایهٔ بین دو منحنی ، زاویه بین دو خط مماس در نقطهٔ تلاقی است . لذا برای تعیین نقطهٔ تلاقی دستگاه زیر را حل می کنیم :

$$\begin{cases} y=4-x, \\ y=4-x^2/2. \end{cases}$$

از آنجا

$$M_1(0,\ 4);\quad M_2(2,\ 2).$$

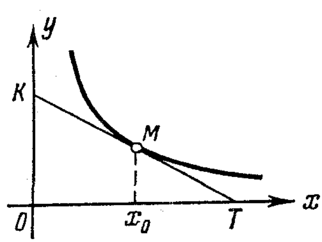
ضریب زاویهٔ ها را در این نقاط حساب می کنیم :

$$y'(0)=0,\quad y'(2)=-2$$

ضریب زاویه در تمام نقاط یک خط راست ، مقدار ثابتی است ، در اینحالت برابر ۱ـ است . بالاخره زاویهٔ بین دو خط را حساب می کنیم :

$$\tan\varphi_1=1;\quad \varphi_1=45^\circ;$$
$$\tan\varphi_2=\frac{-1+2}{1+2}=\frac{1}{3};$$
$$\varphi_2=\arctan\frac{1}{3}\approx 18.5^\circ.$$

جواب : (b) $\varphi=\arctan 2\sqrt{2}$



شکل ۳۸

٤ ـ ٥ ـ ۲ ثابت کنید پاره خطی از خط مماس به هذلولی $y=c/x$ که بین محورهای مختصات قرار دارد بوسیله نقطهٔ تماس نصف می شود .

حل ــ داریم $y'=-c/x^2$ ، پس مقدار تحت مماس در نقطهٔ $M(x_0,\ y_0)$ برابر است با

$$\left|\frac{y}{y'}\right| = |x_0|$$

یعنی $Ox_0 = x_0T$ (شکل ۳۸ را ببینید)

از این مثال روش ساده‌ای برای ساختن خط مماس به هذلولی $y = c/x$ نتیجه می شود: روی محور x ها فاصلهٔ $OT = 2x_0$ را جدا می کنیم. از آنجا مماس MT را رسم می کنیم.

۵ - ۵ - ۲ ثابت کنید که عرض منحنی زنجیری

$$y = a\cosh\ (x/a)$$

واسطهٔ هندسی بین درازای قائم و مقدار a است.

حل ــ درازای قائم را حساب می کنیم. چون

$$y' = \sinh(x/a),$$

درازای قائم برابر است با

$$MN = |y|\sqrt{1+(y')^2} = y\sqrt{1+\sinh^2(x/a)} = y\cosh(x/a) = y^2/a,$$

که در آن $y^2 = a\cdot MN$ و $y = \sqrt{a\cdot MN}$. یعنی y واسطهٔ هندسی بین a و MN است.

۶ - ۵ - ۲ ضریب زاویه (شیب) خط مماس به منحنی

$$\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8, \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$$

را در نقطهٔ $M(2,\ -1)$ بدست آورید.

حل ــ نخست مقدار متناظر t را برای مقادیر x و y مفروض بدست می آوریم. این مقدار باید در دستگاه زیر صدق کند

$$\begin{cases} t^2 + 3t - 8 = 2 \\ 2t^2 - 2t - 5 = -1. \end{cases}$$

ریشه های اولین معادله $t_1 = 2;\ t_2 = -5$ است و ریشه های معادلهٔ دوم $t_1 = 2;\ t_2 = -1$ می باشند. پس مقدار مورد نظر $t = 2$ است. حال مقدار مشتق را در نقطهٔ M حساب می کنیم:

$$y'|_{x=2} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_{t=2} = \left(\frac{4t-2}{2t+3}\right)_{t=2} = \frac{6}{7}.$$

بنابراین ضریب زاویه یا شیب خط مماس در نقطهٔ M برابر $6/7$ است.

۷ - ۵ - ۲ ثابت کنید که خط مماس به منحنی لمینسکات $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ در نقطهٔ متناظر به مقدار $\theta_0 = \pi/6$ با محور x ها موازی است.

حل ــ معادله رابه صورت پارامتری می نویسیم:

$$x = \rho\cos\theta = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta = a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta.$$

از آنجا

$$x'_\theta = -\frac{a\cos\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} - a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta,$$
$$y'_\theta = -\frac{a\sin\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} + a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,$$
$$x'_\theta(\pi/6) = -a\sqrt{2}, \qquad y'_\theta(\pi/6) = 0.$$

پس شیب برابر $k = \frac{y'_\theta(\pi/6)}{x'_\theta(\pi/6)} = 0$ است. درنتیجه خط مماس به منحنی در نقطه ای با $\theta_0 = \pi/6$ و $\rho_0 = a\sqrt{\cos 2\theta_0} = a/\sqrt{2}$ موازی محور x ها است

۸ - ۵ - ۲ معادلات خط مماس و خط قائم به منحنیهای زیر را بنویسید:

(a) $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$ در نقطهٔ $(-2, 3)$ ؛
(b) $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ در نقطهٔ (۱ و ۱)،

حل ــ (a) از دستور مشتق تابع ضمنی استفاده می کنیم:

$$12x^2 - 3y^2 - 6xyy' + 12x - 5y - 5xy' - 16yy' + 9 = 0.$$

دراین رابطه مختصات نقطهٔ $M(-2, 3)$ را قرار می دهیم:

$$48 - 27 + 36y' - 24 - 15 + 10y' - 48y' + 9 = 0;$$

از آنجا

$$y' = -9/2.$$

معادلهٔ خط مماس عبارتست از

$$y - 3 = -\frac{9}{2}(x+2)$$

و معادلهٔ قائم برابر است با:

$$y - 3 = \frac{2}{9}(x+2).$$

جواب: (b) $x + y - 2 = 0;\quad y = x.$

۹ - ۵ - ۲ نقطهٔ $(2,\ 0)$ روی منحنی

$$y=x^4$$

قرارندارد، معادلات خطوط مماسی را تعیین کنید که از این نقطه به منحنی رسم می شوند.

حل ــ فرض کنید که $(x_0,\ x_0^4)$ نقطهٔ تماس باشد، پس معادلهٔ خط مماس به صورت زیر است:

$$y-x_0^4=y'(x_0)(x-x_0)$$

$$y-x_0^4=4x_0^3(x-x_0).$$

بنا به فرض خط مماس از نقطهٔ $(2,\ 0)$ می گذرد، پس

$$-x_0^4=4x_0^3(2-x_0);\quad 3x_0^4-8x_0^3=0,$$

از آنجا $x_0=8/3$ ؛ $x_0=0$ بنابراین نقاط تماس عبارتند از

$$M_1(0,\ 0),\ M_2(8/3,\ 4096/81)$$

و معادلات خطوط مماس به قرار زیرند:

$$y=0,\ \ y-\frac{4096}{81}=\frac{2048}{27}\left(x-\frac{8}{3}\right).$$

۱۰ - ۵ - ۲ تابع

$$f(x)=3x^5-15x^3+5x-7$$

مفروض است. مطلوبست تعیین نقاطی که در آنها میزان تغییرات تابع مینیمم باشد.

حل ــ میزان تغییر تابعی در یک نقطه، با مشتق تابع در آن نقطه برابر است،

$$f'(x)=15x^4-45x^2+5=15\left[(x^2-1/2)^2+1/12\right].$$

تابع به ازای $x=\pm 1/\sqrt{2}$ مینیمم است. پس کمترین میزان تغییر تابع در این نقطه برابر $5/4$ است.

۱۱ - ۵ - ۲ نقطه‌ای روی منحنی سهمی مکعبی

$$12y=x^3$$

در حرکت است. تغییرات کدامیک از مختصات آن سریعتر است.

حل ــ از طرفین نسبت به t مشتق می گیریم و میزان تغییرات متغیرها را بدست می آوریم:

$$12y'_t = 3x^2 \cdot x'_t$$

یا

$$\frac{y'_t}{x'_t} = \frac{x^2}{4}.$$

پس

(۱) وقتی $-2 < x < 2$ نسبت $y'_t : x'_t$ از یک کوچکتر است ، یعنی میزان تغییر عرض از طول کمتر است .

(۲) وقتی $x = \pm 2$ نسبت $y'_t : x'_t$ با یک برابر است یعنی در این نقاط میزان تغییرات برابر است .

(۳) وقتی $x > 2$ یا $x < -2$ نسبت $y'_t : x'_t$ از یک بزرگتر است ، یعنی ، میزان تغییرات عرض از طول بیشتر است .

۱۲ - ۵ - ۲ جسمی به جرم شش گرم با حرکت مستقیم الخط باقانون

$$s = -1 + \ln(t+1) + (t+1)^3$$

حرکت می‌کند (s برحسب سانتیمتر و t برحسب ثانیه است) مطلوبست تعیین انرژی جنبشی $(mv^2/2)$ ذره بعد از یک ثانیه از آغاز حرکت .

حل ــ سرعت حرکت با مشتق فاصله نسبت به زمان برابر است :

$$v(t) = s'_t = \frac{1}{t+1} + 3(t+1)^2.$$

بنابراین

$$v(1) = 12\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{6}{2}\left(12\frac{1}{2}\right)^2 = 468\frac{3}{4}\,(\text{erg}).$$

۱۳ - ۵ - ۲ سرعت در یک حرکت مستقیم الخط متناسب با ریشهٔ دوم فاصلهٔ طی شده (s) است (مثلاً در حرکت سقوط آزاد) . ثابت کنید که حرکت تحت تأثیر نیروی ثابت انجام می گیرد .

حل ــ بنا به فرض

$$v = s'_t = \alpha\sqrt{s} \quad (\text{ثابت است } \alpha)$$

از آنجا

$$s''_{tt} = v'_t = \alpha \frac{1}{2\sqrt{s}} s'_t = \alpha^2/2.$$

ولی براساس قانون نیوتن داریم

$$F = ks''_{tt} \quad (\text{ثابت است } k.)$$

پس

$$F = k\alpha^2/2 = \text{ثابت}$$

۱۴ ـ ۵ ـ ۲ قایقی را به وسیلهٔ طنابی که به دور چرخ ثابتی پیچیده شده است به طرف ساحل رودخانه می کشیم. سرعت کشیدن طناب ۳ متر در دقیقه است (m/min). سرعت قایق را در لحظه‌ای که از ساحل ۲۵ متر فاصله دارد به دست آورید در صورتیکه چرخ در مکانی به ارتفاع چهار متر از سطح آب قرار داشته باشید.

حل ــ اگر فاصلهٔ بین چرخ و قایق را با s و فاصلهٔ قایق از ساحل را با x نشان دهیم بنا به فرض داریم

$$s^2 = x^2 + 4^2.$$

حال از این رابطه نسبت به t مشتق می گیریم و رابطهٔ سرعتها را به دست می آوریم

$$2ss'_t = 2xx'_t,$$

از آنجا

$$x'_t = \frac{s}{x} s'_t.$$

با توجه به

$$s'_t = 3;\ \ x = 25;\ \ s = \sqrt{25^2 + 4^2} \approx 25.3,$$

داریم

$$x'_t = \frac{\sqrt{25^2 + 4^2}}{25} \cdot 3 \approx 3.03 \text{ (m/min)}.$$

۱۵ ـ ۵ ـ ۲ (a) شیب (ضریب زاویه) خط مماس به سهمی مکعبی $y = x^3$ را در نقطهٔ $x = \sqrt{3}/3$ بیابید.

(b) معادلات خطوط مماس به منحنی $y = 1/(1+x^2)$ را در نقاط تلاقی با سهمی $y = 1/(x+1)$ را بنویسید.

(c) معادلهٔ قائم به سهمی $y = x^2 + 4x + 1$ را که به خط واصل مبداء به راس سهمی عمود است بنویسید.

(d) تحت چه زاویه‌ای منحنی $y = e^x$ محور y را قطع می کند؟

جواب:

(a) $\frac{\pi}{4}$; (b) $y = 1,\ \ x + 2y - 2 = 0$; (c) $y + \frac{39}{16} = -\frac{2}{3}\left(x + \frac{5}{4}\right)$; (d) $\frac{\pi}{4}$.

۱۶ - ۵ - ۲ سرعت یک متحرک درحرکت مستقیم الخط از دستور

$$v = 3t + t^2$$

به دست می آید. شتاب متحرک را چهارثانیه بعد از حرکت بیابید.

جواب: ۱۱

۱۷ - ۵ - ۲ جسمی به جرم ۱۰۰ کیلو گرم طبق قانون

$$s = 2t^2 + 3t + 1$$

حرکت مستقیم الخط دارد. انرژی جنبشی $(mv^2/2)$ بعد از پنج ثانیه از آغاز حرکت چقدر است؟

جواب: 26,450

۱۸ - ۵ - ۲ ثابت کنید اگر قانون حرکت یک متحرک

$$s = ae^t + be^{-t}$$

باشد، آنگاه شتاب آن از نظر عددی با فاصلهٔ پیموده شده برابر است.

۱۹ - ۵ - ۲ جسمی با سرعت اولیه a متر برثانیه به طور قائم پرتاپ می شود. بعد از t ثانیه به چه ارتفاعی می رسد؟ سرعت آنرا تعیین کنید. بعد از چند ثانیه به بالا ترین نقطه می رسد، فاصلهٔ آن نقطه تا زمین چقدر است؟

جواب:

$$s = at - \frac{gt^2}{2}\,;\ v = a - gt;\ s_{\max} = s\Big|_{t=\frac{a}{g}} = \frac{a^2}{2g}.$$

۲۰ - ۵ - ۲ یک قمر مصنوعی در یک مدار بیضی شکل زمین را دور می زند. فاصلهٔ قمر از مرکز زمین، تابعی از t (زمان) است که تقریباً با معادلهٔ

$$r = a\left[1 - \varepsilon \cos M - \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2M - 1)\right]$$

مشخص می شود که در آن $M = \frac{2\pi}{P}(t - t_n)$

t = زمان

a = نیم قطر اطول مدار

P = دورهٔ تناوب مدار (زمان تناوب مدار)

t_n = زمانی است که قمر به نقطهٔ حفیض می رسد

ε = شتاب متحرک

حفیض نقطه‌ای است که فاصلهٔ قمر تا مرکز زمین به مینیمم می رسد

در اینجا P ,ε ,a و t_n ثابتند.

میزان تغییر r را نسبت به مرکز زمین بیابید (یعنی سرعت شعاعی قمر را حساب کنید).

جواب:
$$v=r'_t=\frac{2\pi a\varepsilon}{P}\sin M\ (1+2\varepsilon\cos M).$$

۶ ـ ۲ دیفرانسیل تابع
کاربرد دیفرانسیل در محاسبات تقریبی

اگر نموتابع $y=f(x)$ را به صورت

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=A(x)\,\Delta x+\alpha(x,\ \Delta x)\,\Delta x,$$

بنویسیم که در آن

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(x,\ \Delta x)=0,$$

آنگاه تابع را دیفرانسیلپذیر در نقطهٔ x گویند. و قسمت خطی اصلی آن را که $A(x)\,\Delta x$ است **دیفرانسیل تابع** گویند و با $df(x)$ یا dy نشان می دهند. بنابه تعریف دیفرانسیل، $dx=\Delta x$. شرط لازم و کافی برای آنکه دیفرانسیل تابع وجود داشته باشد آن است که مشتق، یعنی

$$y'=A(x)$$

موجود و متناهی باشد. معمولاً دیفرانسیل تابع را به صورت

$$dy=y'\,dx=f'(x)\,dx.$$

نشان می دهند

دیفرانسیل تابع مرکب $y=f(u),\quad u=\varphi(x)$ به قرار زیر است:

$$dy=f'(u)\,du$$

رابطهٔ تقریبی

$$\Delta y\approx dy$$

برای مقادیر کوچک Δx بکار می رود. فقط در تابع خطی $y=ax+b$ داریم

$$\Delta y = dy$$

دیفرانسیلگیری پی در پی از تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است:

$$d^2y = d(dy);\ d^3y = d(d^2y),\ \ldots,\ d^ny = d(d^{n-1}y).$$

اگر $y=f(x)$ که x متغیر مستقل است، آنگاه

$$d^2y = y''(dx)^2;\ d^3y = y'''(dx)^3,\ \ldots,\ d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$$

ولی اگر $y=f(u)$ که در آن $u=\varphi(x)$، آنگاه

$$d^2y = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u$$

و الی آخر.

۱ ـ ۶ ـ ۲ دیفرانسیل تابع

$$y = \ln(1+e^{10x}) + \arc\tan e^{5x}$$

را بیابید و آن را به ازای $x=0;\ dx=0.2$ حساب کنید.

حل ـ

$$dy = \left[\frac{(1+e^{10x})'}{1+e^{10x}} - \frac{(e^{5x})'}{1+e^{10x}}\right] dx = \frac{5e^{5x}(2e^{5x}-1)}{1+e^{10x}}\, dx$$

قرار می دهیم $dx=0.2$ و $x=0$ داریم

$$dy\,|_{x=0;\ dx=0.2} = \frac{5}{2}\cdot 0.2 = 0.5$$

۲ ـ ۶ ـ ۲ نمو و دیفرانسیل تابع

$$y = 3x^3 + x - 1$$

را به ازای $\Delta x = 0.1$ و $x=1$ حساب کنید.

خطای مطلق و خطای نسبی را وقتی نمو تابع را با دیفرانسیل آن جابجا می کنیم محاسبه کنید.

حل ـ

$$\Delta y = [3(x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x) - 1] - (3x^3 + x - 1) =$$
$$= 9x^2\,\Delta x + 9x\,\Delta x^2 + 3\Delta x^3 + \Delta x$$

$$dy = (9x^2 + 1)\,\Delta x$$

از آنجا

$$\Delta y - dy = 9x\,\Delta x^2 + 3\Delta x^3$$

به ازای $\Delta x = 0.1$ و $x = 1$ داریم

$$\Delta y - dy = 0.09 + 0.003 = 0.093$$
$$dy = 1;\quad \Delta y = 1.093.$$

خطای مطلق برابر $|\Delta y - dy| = 0.093$ و خطای نسبی برابر

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0.093}{1.093} \approx 0.085 \text{ یا } 8.5\%$$

است

۳ ـ ٦ ـ ۲ مقدار تقریبی نمو تابع

$$y = x^3 - 7x^2 + 8$$

را وقتی x از 5 به 5.01 تبدیل می شود، حساب کنید.

جواب: $\Delta y \approx dy = 0.05$

٤ ـ ٦ ـ ۲ با استفاده از مفهوم دیفرانسیل، مقدار تقریبی تابع

$$y = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$$

را وقتی $x = 0.15$ حساب کنید.

حل ــ با توجه به

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$$

داریم

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta y$$

با در نظر گرفتن $\Delta y \approx dy$

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + dy$$

در این مسئلهٔ $x = 0$ و $\Delta x = 0.15$ پس

$$y' = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^4}\cdot\frac{(-4)}{(2+x)^2};$$
$$y'(0) = -\frac{1}{5},\quad dy = -\frac{1}{5}\cdot 0.15 = -0.03.$$

بنابر این

$$y(0.15) \approx y(0) + dy = 1 - 0.03 = 0.97.$$

مقدار دقیق با دقت 10^{-4} برابر است با $y(0.15) = 0.9702$

۵ - ۶ - ۲ مقدار تقریبی هریک از عبارات زیر را حساب کنید:

(a) $\cos 31°$; (b) $\log 10.21$; (c) $\sqrt[5]{33}$; (d) $\cot 45°10'$

حل (a) برای حل این مسئلهٔ از دستور (★) استفاده می کنیم: با فرض $x = \pi/6,\ \Delta x = \pi/180,$ داریم:

$$y(x) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y'(x) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos 31° = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{180} = 0.851.$$

(c) با فرض $x = 32;\ \Delta x = 1$ و بنا به دستور (★) داریم:

$$\sqrt[5]{33} \approx \sqrt[5]{32} + (\sqrt[5]{x})'_{x=32} \cdot 1 = 2 + \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} = 2 + \frac{1}{80} = 2.0125.$$

جواب: (b) $\log 10.21 \approx 1.009$; (d) $\cot 45°10' \approx 0.9942.$

۶ - ۶ - ۲ یک مکعب مسی به ضلع ۵ سانتیمتر مفروض است. کلیه وجوه آن را به طور یکنواخت تراشکاری کرده اند، به طوری که وزن آن به اندازه 0.96 گرم کاسته شده است. با توجه به آنکه چگالی (8) است، کاهش اندازهٔ مکعب را بیابید، به عبارت دیگر میزان کاهش ضلع آن را بدست آورید.

حل ــ بعد مکعب را با x نشان می دهیم حجم آن برابر است با

$$v = x^3$$

حجم برابر وزن تقسیم بر چگالی است یعنی

$$v = p/d$$

تغییر حجم برابر

$$\Delta v = 0.96/8 = 0.12 \ (\text{cm}^3)$$

است. چون Δv تقریباً با dv برابر است پس

$$dv = 3x^2\,dx$$
$$0.12 = 3 \times 5^2 \times \Delta x$$

از آنجا

$$\Delta x = \frac{0.12}{3\cdot 25} = 0.0016 \text{ cm.}$$

پس بعد مکعب به اندازهٔ 0.0016 سانتیمتر کم می‌شود.

۲-۶-۷ رابطه‌ای تعیین کنید که خطای مطلق هریک از توابع زیر به وسیلهٔ خطای مطلق متغیر آنها حساب شود:

(a) $y = \ln x$;
(b) $y = \log x$;
(c) $y = \sin x \quad (0 < x < \pi/2)$;
(d) $y = \tan x \quad (0 < x < \pi/2)$;
(e) $y = \log(\sin x) \quad (0 < x < \pi/2)$;
(f) $y = \log(\tan x) \quad (0 < x < \pi/2)$.

حل ــ اگر $f(x)$ در x مشتقپذیر باشد و خطای مطلق متغیر Δ_x بقدر کافی کوچک باشد، آنگاه خطای مطلق y می‌تواند

$$\Delta_y = |y'_x|\,\Delta_x$$

شود.

(a) $\Delta_y = |(\ln x)'|_x\,\Delta_x = \frac{\Delta_x}{x}$ یعنی خطای مطلق لگاریتم طبیعی با خطای نسبی متغییرش برابر است.

(b) $\Delta_y = (\log x)'\,\Delta_x = \frac{M}{x}\,\Delta_x,$ که در آن $M = \log e = 0.43429$.

(e) $\Delta_y = |[\log(\sin x)]'|\,\Delta_x = M\,|\cot x|\,\Delta_x;$

(f) $\Delta_y = |[\log(\tan x)]'|\,\Delta_x = \frac{2M}{|\sin 2x|}\,\Delta_x.$

از (e) و (f) چنین نتیجه می‌شود که خطای مطلق $\log\tan x$ همیشه‌از خطای مطلق $\log\sin x$ بیشتر است (برای x و Δ_x هم همین طور).

جواب: (c) $\Delta_y = |\cos x|\,\Delta_x$; (d) $\Delta_y = (1 + \tan^2 x)\,\Delta_x$.

۲-۶-۸ dy و d^2y تابع

$$y = 4x^5 - 7x^2 + 3$$

را در حالات زیر حساب کنید:

(۱) x متغیر مستقل است،

(۲) x تابع متغیر دیگری است.

حل ــ دیفرانسیل مرتبهٔ اول تابع را به دست می آوریم :

$$dy = y'\,dx = (20x^4 - 14x)\,dx.$$

در حالت اول که x متغیر مستقل است داریم $(dx = \Delta x)$ و درحالت دوم که x تابع است ممکن است dx با Δx برابر نباشد.

برای محاسبهٔ d^2y دو حالت در نظر می گیریم :

(۱) x متغیر مستقل است،

$$d^2y = y''\,dx^2 = (80x^3 - 14)\,dx^2$$

(۲) x تابعی از متغیر دیگر است،

$$d^2y = (80x^3 - 14)\,dx^2 + (20x^4 - 14x)\,d^2x$$

۹ ـ ۶ ـ ۲ دیفرانسیلهای مرتبهٔ بالاتر توابع زیر را بیابید x متغیر مستقل است ،

(a) $y = 4^{-x^2}$ مطلوب است d^2y

(b) $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$ مطلوب است d^2y

(c) $y = \sin^2 x$ مطلوب است d^3y

جواب:

(a) $d^2y = 4^{-x^2}\, 2\ln 4\,(2x^2 \ln 4 - 1)\,dx^2$; (b) $d^2y = \dfrac{4\ln x - 4 - \ln^3 x}{x^2 \sqrt{(\ln^2 x - 4)^3}}\,dx^2$;
(c) $d^3y = -4\sin 2x\,dx^3$.

۱۰ ـ ۶ ـ ۲ اگر

$$y = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

مطلوب است d^2y

(a) x متغیر مستقل است

(b) x تابع یک متغیر دیگر است. مثلاً فرض کنید $x = \tan t$

جواب:

(a) $d^2y = -\dfrac{4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}\,dx^2$; (b) $d^2y = -\dfrac{4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}\,dx^2 - \dfrac{4x}{1-x^4}\,d^2x$;

در حالت $x = \tan t$ ، $d^2y = -\dfrac{4}{\cos^2 2t}\,dt^2$.

۱۱ ـ ۶ ـ ۲ V حجم کره‌ای بشعاع r برابر $\frac{4}{3}\pi r^3$ است. نمو و دیفرانسیل حجم

را بیابید و آن را تعبیر هندسی کنید.

جواب $\Delta V=4\pi r^2\,\Delta r+4\pi r\,\Delta r^2+\frac{4}{3}\pi\Delta r^3$ حجمی است که بین دو کره بشعاعهای r و $r+\Delta r$ قرار دارد.

$dV=4\pi r^2\,\Delta r$ حجم لایهٔ نازکی است که مساحت قاعده آن با مساحت سطح کره $4\pi r^2$ برابر بوده و ارتفاعش Δr است.

۱۲ ـ ٦ ـ ۲ قانون سقوط آزاد یک جسم با رابطهٔ

$$s=gt^2/2$$

بیان می شود. نمو و دیفرانسیل فاصله را در لحظهٔ t بیابید و مفهوم مکانیکی آنرا توضیح دهید.

جواب: $\Delta s=gt\,\Delta t+\frac{1}{2}g\,\Delta t^2$ فاصله‌ای است که بوسیلهٔ جسم در زمان Δt طی می‌شود.

$ds=gt\,\Delta t=v\,dt$، فاصله‌ای است که بوسیلهٔ جسم با سرعت $v=gt$ در تمام فاصلهٔ زمانی طی می شود.

۷ ـ ۲ مسائل اضافی

۱ ـ ۷ ـ ۲ توابع

$$\text{(a)}\quad f(x)=|x| \quad \text{و} \quad \text{(b)}\quad \varphi(x)=|x^3|$$

مفروض‌اند. آیا این توابع در $x=0$ مشتق دارند؟ در صورت وجود آنها را تعیین کنید.

جواب: (a) وجود ندارد. (b) وجود دارد و برابر صفر است

۲ ـ ۷ ـ ۲ نشان دهید که تابع $y=e^{|x|}$ در نقطهٔ $x=0$ خط مماس ندارد. زاویهٔ بین خطوط مماس چپ و راست در این نقطهٔ چقدر است؟

جواب: 90°. **راهنمائی:** چون

$$y=\begin{cases} e^{x}, & x\geqslant 0\\ e^{-x}, & x<0,\end{cases}$$

$f'_-(0)=-1,\ f'_+(0)=1.$

۳ ـ ۷ ـ ۲ نشان دهید که تابع

$$f(x)=|x-a|\,\varphi(x),$$

که در آن تابع $\varphi(x)$ پیوسته است و $\varphi(a)\neq 0$، در نقطهٔ $x=a$ مشتق ندارد. مشتق‌های

چپ وراست را در این نقطهٔ بیابید.

جواب: $f'_{-}(a) = -\varphi(a);\ f'_{+}(a) = \varphi(a)$

۲ ـ ۷ ـ ٤ از تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

استفاده کرده نشان دهید که همیشه مشتق یک تابع پیوسته تابعی پیوسته نیست.

راهنمائی: به ازای $x \neq 0$ مشتق برابر

$$f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

و در $x = 0$ مشتق برابر صفر است:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0.$$

پس $f'(x)$ به ازای تمام مقادیر x موجود است ولی این مشتق در $x = 0$ انفصال نوع دوم است.

۲ ـ ۷ ـ ۵ در تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant x_0, \\ ax + b, & x > x_0. \end{cases}$$

ضرایب a و b را طوری بیابید که تابع در $x = x_0$ پیوسته باشد.

جواب: $a = 2x_0,\ b = -x_0^2.$

۲ ـ ۷ ـ ٦ بامشتق گرفتن از

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

فرمول

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

را از آن نتیجه بگیرید.

۲ ـ ۷ ـ ۷ از دستور مجموع تصاعد هندسی

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (x \neq 1)$$

مجموع عبارات زیر را بیابید:

(a) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$;
(b) $1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}$.

راهنمائی: فرمول مجموع یک تصاعد هندسی نسبت به x یک اتحاد است. با مشتقگیری از طرفین آن داریم:

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2};$$

طرفین را به x ضرب و سپس مشتق می گیریم

$$1^2+2^2x+\ldots+n^2x^{n-1}=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-nx^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

۸ـ۷ـ۲ اتحاد

$$\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x},\quad x\neq k\pi$$

را ثابت کنید و از آن مجموع زیر را نتیجه بگیرید:

$$\sin x+3\sin 3x+\ldots+(2n-1)\sin(2n-1)x.$$

جواب:

$$\sin x+3\sin 3x+\ldots+(2n-1)\sin(2n-1)x=$$
$$=\frac{(2n+1)\sin(2n-1)x-(2n-1)\sin(2n+1)x}{4\sin^2 x}.$$

راهنمائی: برای اثبات طرف چپ را به $2\sin x$ ضرب کنید و از دستور

$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

استفاده کنید. سپس از طرفین مشتق بگیرید و رابطهٔ مورد نظر را نتیجه بگیرید.

۹ـ۷ـ۲ مطلوب است y' اگر

(a) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$; (b) $y=f(e^x)e^{f(x)}$;
(c) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)\quad(\varphi(x)>0;\quad \psi(x)>0)$.

جواب:

(a) $\sin 2x\,[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$; (b) $e^{f(x)}[e^xf'(e^x)+f'(x)f(e^x)]$;

(c) $\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\dfrac{1}{\ln\varphi(x)}-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot\dfrac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$.

۲ ـ ۷ ـ ۱۰ آیا می توان ادعا کرد که حاصلضرب

$$F(x)=f(x)\,g(x)$$

در $x=x_0$ در حالت زیر مشتق ندارد؟

(a) $f(x)$ در x_0 مشتق دارد ولی $g(x)$ در این نقطه فاقد مشتق است.

(b) هیچکدام از توابع در x_0 مشتق ندارد.

مثلاً توابع زیر را در $x=0$ در نظر بگیرید،

$$(1)\ f(x)=x,\ g(x)=|x|;$$
$$(2)\ f(x)=|x|,\ g(x)=|x|.$$

آیا می توان گفت که

$$F(x)=f(x)+g(x)$$

در نقطهٔ $x=x_0$ در حالات زیر مشتق ندارد:

(c) $f(x)$ در x_0 مشتق دارد ولی $g(x)$ در این نقطهٔ مشتق ندارد،

(d) هیچیک از توابع در x_0 مشتق ندارند.

جواب: (a) خیر، (b) خیر، (c) بلی، (d) بلی

۲ ـ ۷ ـ ۱۱ ثابت کنید که مشتق تابع زوج، تابعی فرد است و مشتق تابع فرد، تابعی زوج است. این حقیقت را تعبیر هندسی کنید.

راهنمائی: با مشتقگیری از طرفین $f(-x)=-f(x)$ یا $f(-x)=f(x)$ حکم ثابت می شود. از نظر هندسی باید در نظر بگیریم که تابع زوج نسبت به محور y و تابع فرد نسبت به مبداءِ مختصات متقارن است

۲ ـ ۷ ـ ۱۲ ثابت کنید که مشتق یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب T، تابعی متناوب با دورهٔ تناوب T است.

راهنمائی: از اتحاد $f(x+T)=f(x)$ مشتق بگیرید.

۲ ـ ۷ ـ ۱۳ مطلوب است تعیین $F'(x)$ اگر

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$$

جواب: $F'(x)=6x^2$

۱۴ - ۷ - ۲ مشتق تابع $y=x|x|$ را بیابید و نمودار تابع و مشتق آن را رسم کنید.

جواب: $y'=2|x|$

۱۵ - ۷ - ۲ تابع مرکب $y=f(u)$ که $u=\varphi(x)$ مفروض است. در چه نقاطی تابع مرکب مشتق ندارد؟ مثلاً فرض کنید $y=u^2,\ u=|x|$

راهنمائی: تابع مرکب $f[\varphi(x)]$ ممکن است فقط در نقاطی مشتق نداشته باشد، که $\varphi(x)$ در آنها مشتق ندارد و اگر به ازای آن نقاط $\varphi(x)=u$ آنگاه $f'(u)$ به ازای آن نقاط وجود ندارد. مثلاً تابع $y=u^2=|x|^2$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق $y'=0$ را دارد ولی $u=|x|$ در $x=0$ مشتق ندارد.

۱۶ - ۷ - ۲ مطلوبست تعیین y'' در توابع زیر:

$$\text{(a)}\ \ y=|x^3|;\quad \text{(b)}\ \ y=\begin{cases} x^2\sin(1/x), & x\neq 0,\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

آیا $y''(0)$ وجود دارد؟

جواب: ($x\neq 0$) $\quad$ (a) $y''=6|x|$; $\quad$ (b) $y''=2\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$

$y''(0)$ وجود ندارد چون $y'(x)$ در $x=0$ منفصل است

۱۷ - ۷ - ۲ (a) $f(x)=x^n$ نشان دهید

$$f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f^{(2)}(1)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=2^n$$

(b) $f(x)=x^{n-1}e^{1/x}$ نشان دهید

$$[f(x)]^{(n)}=(-1)^n\frac{f(x)}{x^{2n}}\quad(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

راهنمائی: (a) تحقیق کنید

$$f^{(k)}\frac{1}{k!}=C_n^k\ \ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

و از خواص ضرایب دو جمله ای استفاده کنید.

(b) فرض کنید $f(x)=u_n$ نشان دهید

$$u_n'=(n-1)\,u_{n-1}-u_{n-2}$$

و روش استقراء ریاضی را به کار ببرید.

۱۸ - ۷ - ۲ اگر

$$y=x^2e^{-x/a};$$

نشان دهید که

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n n(n-1)}{a^{n-2}} \quad (n\geqslant 2).$$

راهنمائی: فرمول لایبنیتز را برای مشتق n ام حاصلضرب توابع $v=x^2$ و $u=e^{-\frac{x}{a}}$ را به کار ببرید.

۲-۷-۱۹ نشان دهید که تابع

$$y=\arcsin x$$

در رابطهٔ

$$(1-x^2)y''=xy'$$

صدق می کند. فرمول لایبنیتز را را در دوطرف معادله بکار برده و $y^{(n)}(0)$ $(n\geqslant 2)$ را حساب کنید.

جواب:

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases} 0 & n=2k \\ [1\times 3\times\ldots\times(2k-1)]^2 & n=2k+1 \\ & (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$$

راهنمائی: از طرفین اتحاد، $n-2$ مرتبه مشتق بگیرید و سپس فرض کنید $x=0$ و رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید:

$$y^{(n)}(0)=(n-2)^2 y^{(n-2)}(0) \quad (n\geqslant 2).$$

۲-۷-۲۰ ثابت کنید که چند جمله‌ای چبیشف

$$T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

در معادلهٔ زیر صدق می کند:

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0.$$

۲-۷-۲۱ مشتق n ام تابع e^{-x^2} به صورت

$$(e^{-x^2})^{(n)}=e^{-x^2}H_n(x)$$

است که در آن $H_n(x)$ را چند جمله‌ای **«هرمیت ــ چبیشف»** گویند که درجه‌اش n است.

دستور بازگشتی زیر را ثابت کنید

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0 \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

راهنمائی: از رابطهٔ

$$e^{-x^2} H_{n+1}(x) = (e^{-x^2})^{(n+1)} = (-2xe^{-x^2})^{(n)}$$

و از دستور لایبنیتز برای حاصلضرب $u = e^{-x^2}$ و $v = -2x$ تا مشتق مرتبهٔ n ام استفاده کنید.

۲۲ ـ ۷ ـ ۲ نشان دهید که یک تابع یک مقداری $y = y(x)$ وجود دارد که بوسیلهٔ معادلهٔ

$$y^3 + 3y = x$$

تعریف می شود و y_x را حساب کنید.

جواب: $y'_x = \frac{1}{3(y^2+1)}$

۲۳ ـ ۷ ـ ۲ تابع

$$y = 2x^2 - x^4$$

مفروض است. توابع معکوس پیوسته یک مقداری آن را تعیین و سپس مشتق بگیرید.

جواب:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{1+\sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leqslant 1),$$
$$x_{3,4} = \pm\sqrt{1-\sqrt{1-y}} \quad (0 \leqslant y \leqslant 1),$$
$$x'_i = \frac{1}{4x_i(1-x_i^2)} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \text{ for } x_i \neq 0,\ \pm 1.$$

راهنمائی: معادلهٔ دو مجذوری $x^4 - 2x^2 + y = 0$ را حل کرده و حوزهٔ تعریف هر کدام را تعیین کنید.

۲٤ ـ ۷ ـ ۲ اگر

$$u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$$

درستی رابطهٔ $\frac{du}{dv}\frac{dv}{du} = 1$ را تحقیق کنید.

۲۵ ـ ۷ ـ ۲ توابع معکوس مثلثاتی در حوزهٔ تعریف شان پیوسته هستند. آیا این توابع در هر نقطهٔ از حوزهٔ تعریف، مشتق متناهی دارند؟ در توابع زیر نقاطی را که مشتق متناهی وجود ندارند، تعیین کنید:

$$\text{(a)}\ \ y = \arccos\frac{x+1}{2}; \quad \text{(b)}\ \ y = \arcsin\frac{1}{x}$$

جواب: (a) $x_1 = -3;\ x_2 = 1;$ (b) $x = \pm 1$

۲٦ ـ ۷ ـ ۲ تابع $y = y(x)$ با معادلات پارامتری

$$x = 2t - |t|, \quad y = t^2 + t|t|$$

تعریف شده است. نشان دهید که این تابع در $t=0$ مشتق دارد ولی نمی‌توان مشتق را با فرمول معمولی محاسبه کرد.

راهنمائی: توجه کنید که

$$x=2t-|t|=\begin{cases} t, & t\geqslant 0,\\ 3t, & t<0\end{cases}$$

در $t=0$ مشتق ندارد. ولی

$$t=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{x}{3}, & x<0,\end{cases}$$

بنابراین

$$y=t^2+t\,|t|=\begin{cases} 2t^2, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$$

از آنجا

$$y=\begin{cases} 2x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$$

که تابع همه جا مشتق دارد.

۲۷ ـ ۷ ـ ۲ در سهمی $y=ax^2+bx+c$ ، پارامترهای $a,\ b,\ c$ را طوری تعیین کنید که به خط $y=x$ در نقطهٔ $x=1$ مماس و از نقطهٔ (۰و۱ـ) بگذرد.

جواب: $a=c=\frac{1}{4}\ ;\ b=\frac{1}{2}$

۲۸ ـ ۷ ـ ۲ ثابت کنید که منحنیهای $(f(x)>0)\ y_1=f(x)$ و $y_2=f(x)\sin ax$ در نقاط تلاقی بر هم مماس هستند که درآن $f(x)$ تابعی مشتقپذیراست.

راهنمائی: منحنیها در نقاطی متقاطعند که $\sin ax=1$ ، چون در این نقاط $\cos ax=0$. پس

$$y_2'=f'(x)\sin ax+f(x)\,a\cos ax=f'(x)=y_1',$$

یعنی منحنیها بر هم مماسند.

۲۹ ـ ۷ ـ ۲ هذلولی متساوی الساقین $x^2-y^2=a^2$ ونقطهٔ $M(x_0,\ y_0)$ واقع روی آن مفروض است. نشان دهید پاره خطی ازقائم به هذلولی در M که بین این نقطه و نقطهٔ تلاقی اش با محور x ها قرار دارد با شعاع حامل نقطهٔ M برابر است.

۳۰ ـ ۷ ـ ۲ نشان دهید که خط مماس و خط قائم به سیکلوئید

$$y=a(1-\cos t)\ \text{،}\ \ x=a(t-\sin t)$$

در نقطهٔ دلخواه به ترتیب از نقاط $(at,\ 2a)$ و $(at,\ 0)$ می گذرند که به ترتیب بالا ترین و پائین ترین نقطهٔ دایرهٔ مولد هستند.

راهنمائی: به ازای $t \neq \pi n$ معادلات خط مماس و خط قائم عبارتند از

$$y = \cot \frac{t}{2}(x - at) + 2a;\quad y = -\tan \frac{t}{2}(x - at),$$

به ازای $t = \pi(2k-1)\ (k = 1,\ 2,\ \ldots)$ خط مماس $y = 2a$ به دایره در بالا ترین نقطهٔ مماس است و خط قائم $x = at$ از بالا ترین و پائین ترین نقطهٔ می گذرد، به ازای $t = 2k\pi\ (k = 0,\ 1,\ \ldots)$ خط مماس $x = at$ از هر دو نقطهٔ (پائین‌ترین و بالا ترین) می گذرد و قائم $y = 0$ دایره را در پائین‌ترین نقطه لمس می کند.

۲ ـ ۷ ـ ۳۱ نشان دهید که دو کاردیوئید به معادلات

$$\rho = a(1 + \cos\varphi)\ ،\ \rho = a(1 - \cos\varphi)$$

برهم عمودند.

۲ ـ ۷ ـ ۳۲ تابع $y = f(u)$ که در آن $u = \varphi(x)$ مفروض است. ثابت کنید که این تابع در معادله زیر صدق می کند:

$$d^3y = f'''(u)\,du^3 + 3f''(u)\,du\,d^2u + f'(u)\,d^3u.$$

۲ ـ ۷ ـ ۳۳ تابع $y = f(x)$ که $x = \varphi(t)$ مفروض است. که در آن توابع $f(x)$ و $\varphi(t)$ دوبار مشتقپذیر هستند و $dx \neq 0$ ثابت کنید

$$y''_{xx} = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3}$$

که در آن دیفرانسیلهای طرف دوم نسبت به t است.

۲ ـ ۷ ـ ۳٤ با فرض $x = \cos t$ عبارت

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y$$

را نسبت به متغیر جدید t بنویسید که در آن y دوبار قابل دیفرانسیلگیری است.

جواب: $\frac{d^2y}{dt^2} + y.$

۲ ـ ۷ ـ ۳۵ در تعیین شدت جریان الکتریکی به وسیله گالوانومتر با قاب‌گردان از دستور

$$I = k\tan\varphi,$$

استفاده می شود که در آن I شدت جریان، k ضریب تناسب (به نوع دستگاه بستگی دارد) و φ زاویهٔ انحراف عقربه است. خطای نسبی حاصل از جواب را که از عدم دقت

در قرائت φ ناشی می‌شود تعیین کنید. در چه موقعیت عقربه، قابل اطمینان‌ترین نتیجه را می‌توان بدست آورد.

جواب : خطای نسبی عبارتست از

$$\delta = \frac{\Delta I}{I} \approx \frac{2d\varphi}{\sin 2\varphi}$$

قابل اطمینان‌ترین نتیجه، یعنی نتیجه با کمترین خطای نسبی به ازای $\varphi = 45°$ حاصل می‌شود.

فصل سوم

کاربرد مشتق در بررسی توابع

۱ ـ ۳ قضیه های اساسی توابع مشتقپذیر

قضیهٔ فرمت ــ تابع $y=f(x)$ مفروض است که در نقطهٔ x_0 از نقاط داخلی حوزهٔ تعریف اش مقدار ماکزیمم یا مینیمم دارد. اگر $f'(x_0)$ وجود داشته باشد، آنگاه $f'(x_0)=0$.

قضیهٔ رُل ــ اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد و در تمام نقاط داخلی مشتق متناهی داشته باشد و $f(a)=f(b)$، آنگاه حداقل نقطه ای درداخل فاصله، مانند $\xi \in (a, b)$ موجود است به طوری که $f'(\xi)=0$.

قضیهٔ لاگرانژ (یا قضیهٔ مقدار میانگین) ــ

اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد ودر تمام نقاط داخلی فاصله مشتق متناهی داشته باشد، آنگاه حداقل یک نقطه مانند $\xi \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

آزمون (یامحك) ثابت بودن تابع

اگر در تمام نقاط فاصله ای، $f'(x)=0$ آنگاه تابع $f(x)$ در این فاصله ثابت است.

قضیهٔ کوشی ــ فرض می‌کنیم توابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته باشند و در تمام نقاط داخلی فاصله مشتق متناهی داشته باشند. اگر این مشتقها باهم صفر نشوند و $\varphi(a)\neq\varphi(b)$، آنگاه عددی مانند $\xi \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

۱ - ۱ - ۳ آیا تابع

$$f(x)=3x^2-1$$

درفاصلهٔ [۲، ۱] درشرط قضیهٔ فرمت صدق می‌کند؟

حل ـــ تابع در شرط قضیه صدق نمی‌کند، چون در فاصلهٔ [۲، ۱] به طور یکنواخت صعود می‌کند و در نتیجه تابع در $x=1$ کمترین مقدار و در $x=2$ بیشترین مقدار را دارد که اینها از نقاط داخلی فاصله نیستند. پس قضیهٔ فرمت برقرار نیست یعنی نمی‌توان گفت که $f'(1)=f'(2)=0$، در واقع $f'(1)=6$ و $f'(2)=12$.

۲ - ۱ - ۳ آیا توابع زیر در شرایط قضیهٔ رُل صادق اند؟

(a) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}\qquad[-1,\ 1];$
(b) $f(x)=\ln\sin x\qquad[\pi/6,\ 5\pi/6];$
(c) $f(x)=1-|x|\qquad[-1,\ 1].$

در هرکدام که صدق نمی‌کند علت را بیان کنید.

حل ـــ (a) تابع در فاصلهٔ [۱، ۱-] پیوسته است و بعلاوه $f(-1)=f(1)=0$ پس دو شرط قضیه رُل برقرار است. مشتق آن

$$f'(x)=-2/(3\sqrt[3]{x})$$

در تمام نقاط بجز $x=0$ موجود است. چون این نقطه از نقاط داخلی فاصله است پس شرط سوم قضیه برقرار نیست. بنابراین، قضیهٔ رُل برای این تابع در این فاصله به کار برده نمی‌شود. در واقع در فاصلهٔ $[-1,\ 1]$، $f'(x)\neq 0$.

جواب: (b) بلی. (c) خیر، زیرا مشتق در $x=0$ وجود ندارد.

۳ - ۱ - ۳ ثابت کنید که معادلهٔ

$$3x^5+15x-8=0$$

فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد.

حل ـــ چون چند جمله‌ای

$$f(x)=3x^5+15x-8$$

از درجهٔ فرد است پس حداقل یک ریشه دارد. حال ثابت می‌کنیم که این ریشه منحصر به فرد است. فرض می‌کنیم که معادله دو ریشهٔ متمایز

$$x_1<x_2$$

دارد. پس در فاصلهٔ $[x_1, x_2]$ تابع

$$f(x) = 3x^5 + 15x - 8$$

تمام شرایط قضیهٔ رُل را دارد، چون تابع پیوسته بوده و بنابه فرض مقدارش در دو نقطهٔ انتهای فاصله صفر است و مشتق هم دارد. پس نقطه‌ای مانند ξ که

$$x_1 < \xi < x_2$$

وجود دارد که $f'(\xi) = 0$ ولی

$$f'(x) = 15(x^4 + 1) > 0$$

اما این تناقض است. پس معادله فقط یک ریشه دارد.

۴ ـ ۱ ـ ۳ آیا تابع

$$f(x) = 3x^2 - 5$$

در شرایط قضیهٔ لاگرانژ (یا قضیه مقدار میانگین) در فاصلهٔ [۰، ۲-] صدق می‌کند. اگر صدق می‌کند عدد ξ را طوری بیابید که

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

حل ـ تابع در شرایط قضیهٔ لاگرانژ صدق می‌کند، زیرا در فاصلهٔ [۰، ۲-] پیوسته است و در تمام نقاط داخلی آن مشتق متناهی دارد. پس نقطهٔ ξ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f'(\xi) = 6\xi = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-5 - 7}{2} = -6,$$

از آنجا $\xi = -1$

۵ ـ ۱ ـ ۳ دستور لاگرانژ را برای تابع

$$f(x) = \ln x$$

در فاصلهٔ $[1, e]$ به کاربرده و عدد متناظر ξ را بیابید.

جواب: $\xi = e - 1$

۶ ـ ۱ ـ ۳ تحقیق کنید که توابع

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{و} \quad g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$$

در فاصلهٔ [۱، ۴] در شرایط قضیهٔ کوشی صدق می‌کنند و مقدار متناظر ξ را حساب کنید.

حل ـ چون توابع $f(x)$ و $g(x)$ همه جا پیوسته اند پس در فاصلهٔ [۱، ۴] نیز

پیوسته اند و مشتق آنها

$$f'(x)=2x-2 \quad \text{و} \quad g'(x)=3x^2-14x+20$$

در هر نقطه‌ای از فاصله، متناهی و $g'(x)$ به ازای هیچ مقدار حقیقی x صفر نمی‌شود. در نتیجه می‌توان قضیهٔ کوشی را درباره این دو تابع در این فاصله به کاربرد:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

یعنی

$$\frac{11-2}{27-9}=\frac{2\xi-2}{3\xi^2-14\xi+20} \ (1<\xi<4).$$

معادله را حل می‌کنیم و داریم:

$$\xi_1=2 \quad \text{و} \quad \xi_2=4$$

از این دو مقدار $\xi_1=2$ نقطه داخلی است و مورد قبول است.

۷ - ۱ - ۳ آیا توابع

$$f(x)=e^x \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$$

در فاصلهٔ [۳، ۳-] در شرایط قضیهٔ کوشی صدق می‌کنند؟

جواب: خیر. چون $g(-3)=g(3)$

۸ - ۱ - ۳ روی منحنی

$$y=x^3$$

نقطه‌ای تعیین کنید که خط مماس به منحنی درآن نقطه باوتر واصل دو نقطهٔ $B(2,\ 8)$ و $A(-1,\ -1)$ موازی باشد.

حل — چون در فاصلهٔ [۲، ۱-] که درآن نقاط انتهایی، طولهای نقاط A و B هستند، تابع $y=x^3$ پیوسته و مشتق متناهی دارد، بنابراین، قضیهٔ لاگرانژ برقرار است. مطابق این قضیه روی منحنی AB حداقل نقطه‌ای مانند M وجود دارد که خط مماس درآن نقطه باوتر AB موازی است. دستور لاگرانژ را به کار می‌بریم:

$$f(2)-f(-1)=f'(\xi)\,[2-(-1)],$$

یا

$$8+1=3\xi^2\cdot 3;$$

از آنجا

$$\xi_1=-1,\ \xi_2=1$$

که این مقادیر طولهای دو نقطهٔ مورد نظر است (همانطور که دیده می‌شود، از چنین نقاطی دوتا موجود است). با قراردادن مقادیر اخیر در معادلهٔ منحنی داریم:

$$y_1=\xi_1^3=1;\ \ y_2=\xi_2^3=-1$$

پس دو نقطهٔ $M_1(1,\ 1)$ و $M_2(-1,\ -1)$ تنها دو نقطه‌ای از نقاط داخلی کمان AB هستند که خط مماس در آنها باوتر AB موازی است.

توجه: این مسئله را می‌توان بدون استفاده از قضیهٔ لاگرانژ حل کرد. بدین صورت که اول معادلهٔ وتر را می‌نویسیم و سپس نقاطی از منحنی را می‌یابیم که خط مماس در آنها موازی این وتر است.

۹ ـ ۱ ـ ۳ با استفاده از آزمون (یا محك) ثابت بودن تابع، دستورهای زیر را که در ریاضیات مقدماتی با آنها آشنا هستیم، ثابت کنید:

(a) $\arcsin x+\arccos x=\pi/2;$

(b) $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2;$

(c) $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=2\arctan x \qquad 0\leqslant x<\infty;$

(d) $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\begin{cases}\pi-2\arctan x & x\geqslant 1,\\ 2\arctan x & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ -\pi-2\arctan x & x\leqslant -1.\end{cases}$

حل ــ (a) تابع

$$f(x)=\arcsin x+\arccos x,$$

را که در فاصلهٔ [۱،۱-] تعریف می‌شود، درنظر می‌گیریم. مشتق تابع در این فاصله همیشه صفر است:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0 \quad (-1<x<1).$$

مطابق این آزمون داریم

$$f(x) = \text{مقدار ثابت}$$

یعنی

$$\arc\sin x + \arc\cos x = C \quad (-1 < x < 1)$$

برای محاسبه C فرض می‌کنیم $x = 0$ از آنجا $\pi/2 = C$ پس

$$\arc\sin x + \arc\cos x = \pi/2 \quad (-1 < x < 1)$$

درستی رابطه در نقاط $x = \pm 1$ مستقیماً تحقیق می‌شود.

(b) فرض می‌کنیم

$$f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

که در فاصلهٔ $-\infty < x < \infty$ تعریف می‌شود. مشتق این تابع همه جا صفر است:

$$f'(x) = 2\sin x\cos x - \sin 2x \equiv 0$$

پس تابع ثابت است یعنی

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = C$$

برای محاسبهٔ C فرض می کنیم $x = 0$ از آنجا $1/2 = C$ ، بنابراین

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}$$

یا

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

(c) فرض می‌کنیم

$$f(x) = \arc\cos\frac{1 - x^2}{1 + x^2} - 2\arc\tan x.$$

به ازای هر x

$$\left|\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right| \leqslant 1$$

مشتق تابع $f(x)$ به ازای هر $x > 0$ صفر است:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2}}\,\frac{-4x}{(1 + x^2)^2} - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{4x}{2x(1 + x^2)} - \frac{2}{1 + x^2} \equiv 0$$

پس مطابق آزمون ثابت بودن تابع،

$$\arc\cos \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2 \arctan x = C \qquad x > 0$$

برای تعیین C فرض می‌کنیم $x = 1$، از آنجا

$$C = \arccos 0 - 2 \arctan 1 = 0$$

درست بودن فرمول به ازای $x = 0$ مستقیماً تحقیق می‌شود.

توجه: در $x = 0$ تابع

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

مشتق ندارد. به ازای $x < 0$ مشتق برابر

$$\left(\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = -\frac{2}{1+x^2}$$

از آنجا فرمول

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = -2 \arctan x \quad (x < 0)$$

نتیجه می‌شود. فرمول اخیر را می‌توان به استناد اینکه $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ تابعی زوج و $2 \arctan x$ تابعی فرد است بدست آورد.

راهنمائی: (d) توابع زیر را درنظر بگیرید:

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + 2 \arctan x \qquad |x| > 1$$
$$g(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} - 2 \arctan x \qquad |x| < 1$$

۱۰ - ۱ - ۳ طوری که می‌دانیم به ازای هر x، $(e^x)' = e^x$ آیا توابع دیگری وجود دارند که با مشتق خودشان برابر باشند؟

حل ــ فرض می‌کنیم $f(x)$ چنین تابعی است که همه جا

$$f'(x) = f(x)$$

فرض می‌کنیم

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^x} = f(x) e^{-x}$$

مشتق این تابع همه‌جا صفر است :

$$\varphi'(x) = f'(x)\, e^{-x} - e^{-x} f(x) \equiv 0$$

بنابه آزمون ثابت بودن تابع، داریم :

$$f(x)/e^{x} = C$$

از آنجا

$$f(x) = Ce^{x}$$

پس ثابت شد که گروهی از توابع به صورت $f(x) = Ce^{x}$ وجود دارند که $f'(x) = f(x)$.

۱۱ ـ ۱ ـ ۳ نامساوی

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 < x_2 - x_1$$

را ثابت کنید که در آن $x_2 > x_1$

حل ــ فرمول لاگرانژ را برای تابع $f(x) = \arctan x$ در فاصلهٔ $[x_1, x_2]$ به کار می‌بریم :

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_2 - x_1)$$

که در آن $x_1 < \xi < x_2$، چون

$$0 < \frac{1}{1+\xi^2} < 1 \quad \text{و} \quad x_2 - x_1 > 0$$

پس

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 < x_2 - x_1$$

درحالت خاص که $x_1 = 0$ و $x_2 = x$ داریم

$$\arctan x < x \quad (x > 0)$$

۱۲ ـ ۱ ـ ۳ نشان دهید که تفاضل ریشهٔ دوم دو عدد طبیعی متوالی بزرگتر از N^2، از $1/(2N)$ کوچکتر است.

حل ــ فرمول لاگرانژ را درباره تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در فاصلهٔ $[n, n+1]$ به کار می‌بریم :

$$f(n+1) - f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

که در آن $n < \xi < n+1$ ، اگر $n > N^2$ آنگاه $\xi > N^2$ ، پس

$$1/(2\sqrt{\xi}) < 1/(2N)$$

از آنجا

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1/(2N)$$

۱۳ - ۱ - ۳ با استفاده از قضیهٔ رُل ثابت کنید که مشتق تابع

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

دریک مجموعهٔ نامتناهی از نقاط فاصلهٔ (۱ ، ۰) صفر می‌شود.

حل ــ تابع در نقاطی که

$$\sin(\pi/x) = 0, \quad \pi/x = k\pi, \quad x = 1/k$$
$$k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

صفر می‌شود. چون این تابع در هر نقطهٔ داخلی [۱ ، ۰] مشتق دارد، پس قضیهٔ رُل را می‌توان درهریک از فاصله های

$$[1/2,\ \ 1],\ \ [1/3,\ \ 1/2],\ \ \ldots,\ \ [1/(k+1),\ \ 1/k],\ \ \ldots\ .$$

به کار برد. پس حداقل یک نقطه درهر فاصله مانند ξ_k که $1/(k+1) < \xi_k < 1/k$ وجود دارد که در آن $f'(\xi_k) = 0$ پس تعداد نقاطی که مشتق درآن صفر می‌شود نامتناهی است (شکل ۳۹ را به بینید).

۱٤ - ۱ - ۳ **«چند جمله‌ای لژاندر»**[۱] چند جمله‌ای است که با فرمول **(فرمول رُدریگوز)**[۲] زیر تعریف می‌شود:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

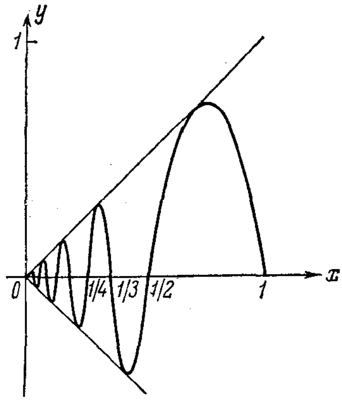
قضیهٔ رُل را بکاربرده ثابت کنید که چند جمله‌ای لژاندار بین دو عدد ۱ و ۱- ، n ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

حل ــ تابع

$$f(x) = (x^2-1)^n = (x-1)^n\ (x+1)^n$$

---

۱ *Legendre polynomial* ـ ۲ Rodrigues' formula



شکل ۳۹

این تابع و $n-1$ مشتق متوالی آن در نقاط $x=\pm 1$ صفر می‌شوند (فرمول لایبنیتز را برای حاصلضرب دو تابع در مشتقهای بالاتر به کار ببرید).

از $f(1)=f(-1)=0$ نتیجه می‌شود که در داخل فاصلهٔ [۱، ۱-] نقطه‌ای مانند ξ_1 وجود دارد که $f'(\xi_1)=0$ یعنی $x=\xi_1$ ریشهٔ مشتق اول است. حال دوباره قضیهٔ رُل را برای تابع $f'(x)$ در فاصله‌های $[-1, \xi_1]$، $[\xi_1, 1]$ به کار می‌بریم. معلوم می‌شود که تابع $f''(x)$ علاوه بر ۱+ و ۱- دو ریشه دیگر در فاصلهٔ $[-1, 1]$ دارد. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که مشتق $(n-1)$ ام غیر از ۱+ و ۱- دارای $(n-1)$ ریشهٔ دیگر در فاصلهٔ [۱، ۱-] دارد، یعنی، تابع $f^{(n-1)}(x)$ در فاصلهٔ [۱، ۱-]، $n+1$ ریشه دارد که فاصله را به n قسمت تقسیم می‌کنند. با استفاده مجدد از قضیهٔ رُل ثابت می‌شود که تابع $f^{(n)}(x)$ و در نتیجه تابع

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}f^{(n)}(x)$$

در فاصلهٔ [۱، ۱-]، n ریشهٔ متمایز دارد.

۱۵ - ۱ - ۳ تحقیق کنید کدامیک از توابع زیر در فاصلهٔ داده شده، شرایط قضیهٔ لاگرانژ را دارند و آنگاه مقدار متناظر ξ را به دست آورید:

(a) $f(x)=x^2$ ، $[3,\ 4]$;
(b) $f(x)=\ln x$ ، $[1,\ 3]$;
(c) $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ ، $[0,\ 1]$;

(d) $f(x)=\sqrt[5]{x^4(x-1)}$ on $[-1/2,\ 1/2]$

جواب:

(a) $\xi=\frac{7}{2}$; (b) $\xi=\frac{2}{\ln 3}$; (c) $\xi=\frac{10\pm\sqrt{52}}{24}$;

(d) چون در $x=0$ مشتق وجود ندارد، پس قضیه را نمی‌توان دربارهٔ این تابع بکار برد.

۱۶ - ۱ - ۳ با استفاده از قضیهٔ لاگرانژ مقدار تقریبی $\ln(1+e)$ را برآورد کنید.

جواب: $1.26<\ln(1+e)<1.37$ **راهنمائی:** فرمول لاگرانژ را در فاصلهٔ $[e,\ e+1]$ دربارهٔ تابع $f(x)=\ln x$ به کار ببرید و سپس مقدار تقریبی طرف راست رابطهٔ

$$\ln(1+e)=1+\frac{1}{\xi}\quad(e<\xi<e+1)$$

را تخمین بزنید.

۱۷ - ۱ - ۳ با استفاده از فرمول لاگرانژ درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید:

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\qquad x>0$$

راهنمایی: فرمول لاگرانژ را برای تابع $f(x)=\ln x$ در فاصلهٔ $[1,\ 1+x],\ x>0$ بنویسید و سپس طرف راست را در رابطهٔ زیر برآورد کنید:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{\xi}\qquad(1<\xi<1+x)$$

۲ - ۳ صور مبهم و رفع ابهام
دستور هوپیتال

I حالتهای مبهم $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دریک همسایگی نقطهٔ $x=a$ احتمالاً بجز خود نقطه a مشتقپذیر باشند و $g'(x)\neq 0$ و اگر

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

به شرط اینکه

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وجود داشته باشد. دستور فوق را **«دستور هوپیتال»** گویند. نقطهٔ a می‌تواند متناهی و یا نامتناهی یعنی $+\infty$ یا $-\infty$ باشد.

II حالتهای مبهم $\infty - \infty$ یا $0 \cdot \infty$

هردو حالت بعد از چند محاسبهٔ جبری به یکی از دو حالت $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ تبدیل و رفع ابهام می‌شوند.

III حالتهای مبهم ∞^0 , 1^∞ یا 0^0

هرسه حالت بعد ازیک بارلگاریتم گرفتن تبدیل به $0 \cdot \infty$ شده و رفع ابهام می‌شوند و یا از تبدیل

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) \ln f(x)}$$

استفاده می‌کنیم.

۱ ـ ۲ ـ ۳ با استفاده از دستور هوپیتال حد توابع زیر را بیابید:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$;
(b) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$;

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;
(d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$;

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2 - x)}$;
(f) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2\arctan x^2 - \pi}$

حل ــ (a) در اینجا هردوتابع

$$f(x) = e^{ax} - e^{-2ax} \quad \text{و} \quad g(x) = \ln(1+x)$$

در همسایگی صفر بینهایت کوچک هستند، زیرا

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 - 1 = 0; \quad \lim_{x \to 0} g(x) = \ln 1 = 0$$

بعلاوه $f'(x)$ و $g'(x)$ در هر همسایگی $x = 0$ که شامل $x = -1$ نیست وجود دارد و

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} \neq 0 \quad (x > -1).$$

بالاخره،

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{1/(1+x)}=3a.$$

بنابراین دستور هوپیتال قابل اجراست

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{1/(1+x)}=3a. \qquad (*)$$

توجه: وقتی حد نسبت را به وسیلهٔ دستور هوپیتال حساب می‌کنیم معمولاً آن را مطابق (⋆) می‌نویسیم. اگر نسبت

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مبهم باشد دوباره دستور هوپیتال را به کار می‌بریم، یعنی دستور هوپیتال را تا رفع ابهام به کار می‌بریم تا مقدار حقیقی بدست آید و یا ثابت شود که حد وجود ندارد. بنابراین از این به بعد فقط محاسبات و تبدیلات لازم را انجام می‌دهیم و بررسی شرایط استفاده از دستور هوپیتال را به خواننده محول می‌کنیم.

(b) $$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}=\lim_{x\to -1}\frac{2/(3\sqrt[3]{(1+2x)^2})}{1/(2\sqrt{2+x})+1}=\frac{4}{9};$$

(e) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-6x\cos 3x^2\cos(2x^2-x)}{(4x-1)\sin(2x^2-x)}=$$

$$=-6\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x^2\cos(2x^2-x)}{4x-1}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(2x^2-x)}$$

حد عامل اول مستقیماً حساب شده ولی حد دومی بازهم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را دارد که دوباره دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$-6\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x^2\cos(2x^2-x)}{4x-1}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(2x^2-x)}=$$

$$=-6\cdot\frac{1\cdot 1}{-1}\lim_{x\to 0}\frac{1}{(4x-1)\cos(2x^2-x)}=6\cdot\frac{1}{-1\cdot 1}=-6.$$

جواب: (c) 2; (d) 0; (f) $-\frac{1}{2}$

۳-۲-۲ می‌دانیم که وقتی x به بینهایت میل می‌کند توابع $\log_a x;\ a^x\,(a>1)$ ، $x^k\,(k>0)$ بینهایت بزرگ هستند. با استفاده از دستور هوپیتال حد عبارات زیر را حساب می‌کنیم:

1. $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}\log_a e}{kx^{k-1}}=\log_a e\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{kx^k}=0$$

$$2.\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{mx^{m-1}}{a^x\ln a}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{m!}{a^x(\ln a)^m}=0.$$

بنابراین تابع توانی $x^k\ (k>0)$ باسرعت بیشتری نسبت به تابع لگاریتمی $\log_a x\ (a>1)$ افزایش می‌یابد، وصعود کردن تابع نمائی a^x با پایهٔ بزرگتر از واحد، از افزایش تابع توانی x^m ، سریعتر است.

۳ ـ ۲ ـ ۳ حد عبارات زیر را حساب کنید:

(a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$; (b) $\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

حل ــ (a) در اینجا نوع ابهام $\infty-\infty$ است که آنرا به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل و سپس دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{\ln x+1-1/x}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

جواب: (b) 0. **راهنمائی:** آن را به صورت زیر بنویسید

$$\cot x-\frac{1}{x}=\frac{x-\tan x}{x\tan x}$$

(c) $\frac{1}{2}$.

۴ ـ ۲ ـ ۳ حد عبارات زیر را بیابید:

(a) $\lim_{x\to 0} x^n\ln x\ (n>0)$;

(b) $\lim_{x\to 0}[\ln(1+\sin^2 x)\cot\ln^2(1+x)]$.

حل ــ (a) در اینجا حالت مبهم $0\cdot\infty$ را داریم. آن را به حالت $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل و سپس دستور هوپیتال را به کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to 0}x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-n}}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-nx^{-n-1}}=-\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}x^n=0,\ (n>0)$$

(b) اینجا هم حالت مبهم $0\cdot\infty$ است:

$$\lim_{x\to 0}[\ln(1+\sin^2 x)\cot\ln^2(1+x)]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\tan\ln^2(1+x)}=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+\sin^2 x} \sin 2x}{2\{1+\tan^2[\ln^2(1+x)]\} \ln(1+x) \cdot \frac{1}{1+x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{1+x}} = 1.$$

۵ ـ ۲ ـ ۳ حدهای زیر را بیابید:

$$\text{(a)} \lim_{x \to +0} (1/x)^{\sin x}; \qquad \text{(b)} \lim_{x \to +0} x^{1/\ln(e^x - 1)}.$$

حل ــ (a) حالت مبهم ∞^0 را داریم. فرض می‌کنیم $y = (1/x)^{\sin x}$ پس

$$\ln y = \sin x \ln(1/x),$$

$$\lim_{x \to +0} \ln y = \lim_{x \to +0} \sin x \ln(1/x)$$

به حالت مبهم $0 \cdot \infty$ تبدیل شده است و آنرا به $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل و از دستور هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \to +0} \ln y = \lim_{x \to +0} \frac{-\ln x}{1/\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{-1/x}{-(\cos x)/\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = 0.$$

پس

$$\lim_{x \to +0} y = e^0 = 1.$$

جواب: (b) $e^1 = e.$

۶ ـ ۲ ـ ۳ حدهای زیر را حساب کنید:

$$\text{(a)} \lim_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\tan x}; \qquad \text{(b)} \lim_{x \to 0} x^x.$$

جواب: (a) 1; (b) 1

۷ ـ ۲ ـ ۳ مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{x \to +\pi/2 - 0} (\tan x)^{\cot x}.$$

حل ــ از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$(\tan x)^{\cot x} = e^{\cot x \ln \tan x},$$

ولی

$$\lim_{x \to +\pi/2 - 0} \cot x \ln \tan x = \lim_{x \to +\pi/2 - 0} \frac{\ln \tan x}{\tan x} = \lim_{y = \tan x \to +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0.$$

از آنجا

$$\lim_{x\to+\pi/2-0} (\tan x)^{\cot x} = e^0 = 1.$$

۸ ـ ۲ ـ ۳ در موجودیت حدهای زیر تحقیق کنید:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)\, e^{\sin x}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\tan x}{\sec x}$.

آیا برای محاسبهٔ حداین عبارات، می‌توان از دستور هوپیتال استفاده کرد؟
اگر از دستور هوپیتال استفاده کنیم نتیجهٔ حاصل درست است؟

حل ــ (a) حد وجود دارد و برابر صفر است. درواقع

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 1\cdot 0 = 0.$$

ولی حد نسبت مشتقها وجود ندارد. درحقیقت

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x} = 0 - \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x},$$

اما حد $\lim\limits_{x\to 0} \cos(1/x)$ وجود ندارد، پس دستور هوپیتال را نمی‌توان به کاربرد.

(b) حد نسبت دو تابع وجود ندارد:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)\, e^{\sin x}} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{2x+\sin 2x}\right) e^{-\sin x}$$

اما حد $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\sin x}$ وجود ندارد، زیرا وقتی x به بینهایت میل می‌کند تابع $e^{-\sin x}$ مقادیر $1/e$ تا e را بینهایت بار می‌پیماید.

حال نشان می‌دهیم که حد نسبت مشتقها وجود دارد:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+2\cos 2x}{[2+2\cos 2x + (2x+\sin 2x)\cos x]\, e^{\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4\cos^2 x}{4\cos^2 x + (2x+\sin 2x)\cos x} e^{-\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4\cos x}{2x+4\cos x+\sin 2x} e^{-\sin x} = 0,$$

چون تابع $e^{-\sin x}$ کراندار است و $\dfrac{4\cos x}{2x+4\cos x+\sin 2x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$
در اینجا $\cos x$ را که دریک مجموعهٔ نامتناهی ازمقادیر x صفر می‌شود، از

صورت و مخرج حذف می‌کنیم چون از مقایسهٔ مشتق توابع باهم نتیجه‌ای حاصل نمی‌شود، وضعیتی پیش می‌آید که نتوانیم از دستور هوپیتال استفاده کنیم.

(c)

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x}{\sec x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec^2 x}{\sec x\tan x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{\tan x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x}{\sec x}=\dots$$

در اینجا استفاده از دستور هوپیتال هیچ نتیجه‌ای نمی‌دهد، درحالی که حد وجود دارد:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x}{\sec x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\sin x=1.$$

۹ ـ ۲ ـ ۳ از دستور هوپیتال استفاده کنید و حد توابع زیر را بیابید:

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$; (d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-4\sin^2(\pi x/6)}{1-x^2}$;

(e) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\frac{x-a}{a}\cot(x-a)$; (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x$;

(g) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$; (h) $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{1/x}-1)x\ \ (a>0)$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos mx)^{n/x^2}$; (j) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan(\pi x/(2a))}$;

(k) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$; (l) $\lim\limits_{x\to 0}x^{1/\ln(e^x-1)}$;

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$; (n) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$;

(o) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\cosh\frac{a}{x}-1\right]$; (p) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{1/\sin x}$;

(q) $\lim\limits_{x\to+0}(\ln\cot x)^{\tan x}$; (r) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{1/x^2}-1}{2\arctan x^2-\pi}$.

جواب:

(a) $\frac{4}{7}$; (b) $\ln a-1$; (c) 2; (d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$; (e) $\frac{1}{a}$;

(f) 0; (g) 1; (h) $\ln a$; (i) $e^{-m^2\frac{n}{2}}$; (j) $\frac{2}{\pi}$; (k) -1; (l) e; (m) $\frac{2}{3}$;

(n) $\frac{1}{2}$; (o) $\frac{a^2}{2}$; (p) $e^{-\frac{1}{30}}$; (q) 1; (r) $-\frac{1}{2}$.

۳ ـ ۳ دستور تیلر و کاربرد آن درمحاسبات تقریبی

اگر تابع $f(x)$ در $[a, b]$ پیوسته باشد و مشتقات پیوسته تا مرتبهٔ $n-1$ در این فاصله داشته باشد و مشتق متناهی مرتبه n ام در نقاط داخلی فاصله موجود باشد، آنگاه به ازای $x \in [a, b]$ دستور زیر برقرار است:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+$$
$$+f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\dots+f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+f^{(n)}(\xi)\frac{(x-a)^n}{n!},$$

که درآن

$$\xi=a+\theta(x-a) \quad \text{و} \quad 0<\theta<1$$

این فرمول را **دستور تیلر** تابع $f(x)$ گویند. اگر دراین دستور $a=0$ آنرا دستور **ماکلورن** نامند:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\dots+f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+f^{(n)}(\xi)\frac{x^n}{n!},$$

که درآن $\xi=\theta x,\ 0<\theta<1$ •

جملهٔ آخر دستور تیلر را شکل لاگرانژ باقیمانده گویند و با $R_n(x)$ نشان می‌دهند:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n$$

براین اساس، باقیمانده در دستور ماکلورن به صورت زیر است:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n.$$

۱ ـ ۳ ـ ۳ با استفاده از دستور تیلر، چند جمله‌ای

$$P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$$

را به صورت جملاتی از $x-1$ بنویسید.

حل ــ برای حل این مسئله لازم است که مقدار چند جمله‌ای و مقادیر مشتقات آنرا در نقطهٔ $x=1$ حساب کنیم:

$$P(1)=0, \qquad P'(1)=0,$$
$$P''(1)=0, \qquad P'''(1)=18,$$
$$P^{(4)}(1)=72, \qquad P^{(5)}(1)=120,$$

به ازای هر x

$$P^{(n)}(x)=0\ (n\geqslant 6)$$

باقرار دادن این مقادیر در دستور تیلر داریم:

$$P(x)=\frac{18}{3!}(x-1)^3+\frac{72}{4!}(x-1)^4+\frac{120}{5!}(x-1)^5;$$
$$P(x)=3(x-1)^3+3(x-1)^4+(x-1)^5.$$

۲ ـ ۳ ـ ۳ دستور ماکلورن را به کار برده و تابع

$$f(x)=\ln(1+x),$$

را به صورت جملاتی از x (تا x^9) در فاصلهٔ [۰،۱] بسط دهید. خطای حاصل از حذف باقیمانده را برآورد کنید.

حل ــ

$$f(0)=\ln 1=0.$$

مشتق مرتبهٔ n ام (بخش **۳ـ۲** را به‌ببینید) و مقدار آن به ازای $x=0$ برابر است با:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$
$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

مقادیر حاصل را در دستور ماکلورن قرار می‌دهیم،

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{x^9}{9}+R_{10}(x),$$

که در آن $R_{10}(x)$ به صورت لاگرانژ بقرار زیر نوشته می‌شود:

$$R_{10}(x)=\frac{f^{(10)}(\xi)}{10!}x^{10}=-\frac{9!}{10!(1+\xi)^{10}}x^{10}=-\frac{x^{10}}{10(1+\xi)^{10}} \quad (0<\xi<x).$$

با در نظر گرفتن $0\leqslant x\leqslant 1$ و $\xi>0$ قدر مطلق باقیمانده را برآورد می‌کنیم

$$|R_{10}(x)|=\left|\frac{-x^{10}}{10(1+\xi)^{10}}\right|<\frac{1}{10}.$$

۳ ـ ۳ ـ ۳ چند جمله از چند جمله‌ای بسط تابع

$$f(x)=e^x$$

را که در فاصلهٔ [۱، ۱-] با دستور ماکلورن انجام شده است، انتخاب کنیم تا با دقت ۰/۰۰۱ محاسبه شود؟

حل ــ چون تابع همواره مشتق دارد و

$$f^{(n)}(x)=e^x$$

بنابراین فرمول ماکلورن را می‌توان به کاربرد. حال مقدار تابع و مقدار $n-1$ مشتق آنرا در $x=0$ و مقدار مشتق مرتبهٔ nام رادر

$$\xi=\theta x\ (0<\theta<1)$$

حساب می‌کنیم،

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=1;$$
$$f^{(n)}(\xi)=e^{\xi}=e^{\theta x}.$$

پس

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n(x),$$

که در آن

$$R_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}.$$

چون بنا به فرض $|x|\leqslant 1$ و $0<\theta<1$ ، پس

$$|R_n(x)|=\frac{|x|^n}{n!}e^{\theta x}<\frac{1}{n!}e<\frac{3}{n!}$$

پس اگر نامساوی

$$\frac{3}{n!}\leqslant 0.001 \qquad (*)$$

برقرار باشد، به قانون تعددی نامساوی

$$|R_n(x)|\leqslant 0.001$$

هم برقرار می شود. برای برقراری (⋆) کافی است که $n\geqslant 7$ $(7!=5040)$. پس هفت جملهٔ اول از چند جمله‌ای باید انتخاب شود.

٤ ـ ۳ ـ ۳ به ازای چه مقادیری از x ، خطای تقریبی فرمول

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

کمتر از 0.00005 است؟

حل ــ طرف راست معادلهٔ تقریبی، شش جملهٔ اول بسط تابع $\cos x$ با دستور ماکلورن است (جملات دوم، چهارم و ششم صفر هستند. چرا؟). حال $R_6(x)$ را

برآورد می‌کنیم . چون $(\cos x)^{(6)} = -\cos x$ پس

$$|R_6(x)| = \left|\frac{-\cos\theta x}{6!}x^6\right| \leqslant \frac{|x|^6}{6!}$$

چون خطا کمتر از 0.00005 است، x را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم

$$\frac{|x|^6}{6!} < 0.00005.$$

از حل این نامساوی داریم :

$$|x| < 0.575.$$

۵ ـ ۳ ـ ۳ مطلوبست محاسبهٔ مقدار تقریبی هریک از عبارات زیر تا پنج رقم اعشار:

$$(a)\ \cos 5^\circ; \qquad (b)\ \sin 20^\circ.$$

حل ـــ (a) باتوجه به دستور ماکلورن داریم :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}$$

با در نظر گرفتن $x = \pi/36$ چون

$$\frac{x^2}{2!} = \frac{\pi^2}{2\cdot 36^2} = 0.003808, \quad \frac{x^4}{4!} = \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = 2.4\cdot 10^{-6},$$

دو جملهٔ اول را انتخاب می‌کنیم

$$\cos x \approx 1 - x^2/2$$

برآورد خطا عبارتست از

$$|R_4(x)| = \left|\frac{\cos\theta x}{4!}x^4\right| \leqslant \frac{|x|^4}{4!} < 2.5\cdot 10^{-6}.$$

بنابراین

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36} = 1 - 0.00381 = 0.99619.$$

جواب : (b) 0.34201.

۶ ـ ۳ ـ ۳ مقدار تقریبی $\sqrt[4]{83}$ را تا شش رقم اعشار حساب کنید.

جواب : $\sqrt[4]{83} \approx 3.018350$ **راهنمائی :** فرض کنید :

$$\sqrt[4]{83} = \sqrt[4]{81+2} = 3\left(1+\frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$$

دستور دوجمله‌ای را بکار برده و چهار جملهٔ آنرا انتخاب کنید .

۳-۳-۷ نامساویهای زیر را ثابت کنید:

(a) $x-x^2/2<\ln(1+x)<x$ ، $x>0$;
(b) $\tan x>x+x^3/3$ ، $0<x<\pi/2$;
(c) $1+\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{1}{2}x$ ، $0<x<\infty$.

حل — (a) مطابق دستور ماکلورن با باقیمانده $R_2(x)$ داریم:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\xi)^2},\quad (0<\xi<x)$$

مطابق همان دستور با باقیمانده $R_3(x)$ داریم:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\xi_1)^3},\quad 0<\xi_1<x.$$

چون وقتی $x>0$ داریم

$$\frac{x^2}{2(1+\xi)^2}>0 \quad \text{و} \quad \frac{x^3}{3(1+\xi_1)^3}>0$$

نتیجه می‌شود که

$$x-x^2/2<\ln(1+x)<x.$$

راهنمائی: (b) دستور ماکلورن را برای تابع $f(x)=\tan x$ با باقیمانده $R_4(x)$ بنویسید.

(c) دستور ماکلورن را برای تابع

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

با باقیمانده $R_2(x)$ و $R_3(x)$ بنویسید.

۳-۳-۸ ثابت کنید که تفاضل بین $\sin(\alpha+h)$ و $\sin\alpha+h\cos\alpha$ از $h^2/2$ بیشتر نیست.

حل — از دستور تیلر داریم:

$$\sin(\alpha+h)=\sin\alpha+h\cos\alpha-\frac{h^2}{2}\sin\xi$$

از آنجا

$$|\sin(\alpha+h)-(\sin\alpha+h\cos\alpha)|=\frac{h^2}{2}|\sin\xi|\leqslant\frac{h^2}{2}.$$

۴ ـ ۳ استفاده از دستور تیلر در محاسبهٔ حدها

بسط

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$
$$+o(|x-a|^n)$$

را **دستور تیلر** با باقیمانده به فرم «پئانو» گویند که در آن وقتی $x \to a$. معنی $\varphi(x)=o[\psi(x)]$ آن است که مرتبهٔ کوچکی تابع $\varphi(x)$ از مرتبهٔ کوچکی تابع $\psi(x)$ بالا تر است، یعنی

$$\lim_{x \to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$$

در حالت خاص که $a=0$ داریم

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(|x|^n).$$

فرم پئانو باقیمانده برای دستور تیلر نشان می‌دهد که وقتی بجای تابع $f(x)$ چند جمله‌ای تیلر از مرتبهٔ n را در همسایگی نقطهٔ a قرار دهیم، مرتکب خطائی می‌شویم که وقتی $x \to a$. یک بینهایت کوچک از مرتبهٔ بالا تر نسبت به $(x-a)^n$ است.

پنج بسط بسیار مهم زیر در حل مسائل عملی بیشتر مورد نیاز هستند:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n});$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1});$$
$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n);$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).$$

۱ ـ ۴ ـ ۳ بسط تابع

$$f(x)=\sin^2 x-x^2e^{-x}$$

را با توانهای صحیح و مثبت x تا جمله‌ای بنویسید که مرتبهٔ کوچکی آن نسبت به x برابر چهار باشد.

حل ــ داریم:

$$f(x)=\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right]^2-x^2\left[1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]=$$
$$=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^5)-x^2+x^3-\frac{x^4}{2}+o(x^4)=x^3-\frac{5}{6}x^4+o(x^4).$$

۲ ـ ٤ ـ ۳ بسط توابع

(a) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}-\cos x\ln(1+x)$;
(b) $f(x)=\ln(1+\sin x)$

از توانهای صحیح و مثبت x را تا جمله‌ای بنویسید که مرتبهٔ کوچکی هرکدام نسبت به x برابر پنج باشد.

جواب:

(a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5+o(x^5)$; (b) $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{24}+o(x^5)$.

۳ ـ ٤ ـ ۳ دستور تیلر با باقیمانده به صورت پئانو را به کاربرده حدهای زیر را بیابید:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\tan^4 x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

حل ـــ (a) بسط عبارتهای صورت و مخرج را تا جمله‌ای می‌نویسیم که مرتبهٔ کوچکی آن نسبت به x برابر چهار باشد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\tan^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2)^{1/2}\cos x}{x^4}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1/2\,(-1/2)}{2}x^4+o(x^4)\right]\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right]}{x^4}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=\frac{1}{3}.$$

جواب: (b) $-\frac{1}{2}$; (c) $-\frac{1}{12}$; (d) $\frac{1}{3}$; (e) 1.

۴ - ۴ - ۳ هریک از توابع زیر را به صورت جملاتی از x با توانهای صحیح و مثبت تا مرتبه‌ای که نشان داده شده است بنویسید:

(a) $f(x)=e^{2x-x^2}$ تا جملهٔ که شامل x^5 است،

(b) $\ln\cos x$ تا جملهٔ شامل x^6 ،

(c) $\frac{x}{e^x-1}$ تا جملهٔ شامل x^4

جواب:

(a) $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5$; (b) $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}$; (c) $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}$.

۵ - ۳ توابع یکنواخت
(یا توابع صعودی یا نزولی)

فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ که در فاصلهٔ $[a, b]$ تعریف شده است در این فاصله پیوسته بوده و در نقاط داخلی آن مشتق متناهی داشته باشد. در اینصورت:

(۱) شرط لازم و کافی برای آن که تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ غیر نزولی (یاغیر صعودی) باشد آن است که به ازای هر x از (a, b) داشته باشیم:

$$f'(x)\geqslant 0 \quad (\text{یا } f'(x)\leqslant 0)$$

(۲) شرط لازم و کافی برای آن که تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ صعودی (یا نزولی) باشد آن است که به ازای هر x از (a, b) شرط

$$f'(x)>0 \quad (\text{یا } f'(x)<0)$$

برقرار باشد.

۱ - ۵ - ۳ فاصله های صعودی یا نزولی توابع زیر را تعیین کنید:

(a) $f(x)=2x^2-\ln x$;
(b) $f(x)=2x^3-9x^2-24x+7$;
(c) $f(x)=x^2e^{-x}$;
(d) $f(x)=\ln|x|$;
(e) $f(x)=4x^3-21x^2+18x+20$;
(f) $f(x)=e^x+5x$.

حل — حل این مسائل منجر به تعیین فاصله‌هایی می‌شوند که در آنها علامت مشتق

ثابت بماند. اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ (a, b) دارای مشتق پیوسته بوده و دراین فاصله تعداد متناهی نقطهٔ ایستا مانند

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ (a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b)$$

داشته باشد که در آن

$$f'(x_k) = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

آنگاه علامت $f'(x)$ درهریک از فاصله های

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b).$$

ثابت است.

(a) تابع به ازای $x > 0$ معین است. و

$$f'(x) = 4x - 1/x.$$

اگر $4x - 1/x > 0$ یعنی، $x > 1/2$، تابع صعودی است.
اگر $4x - 1/x < 0$ یعنی، $x < 1/2$، تابع نزولی است.
پس تابع در فاصلهٔ $0 < x < 1/2$ نزولی و در فاصلهٔ $1/2 < x < +\infty$ صعودی است.

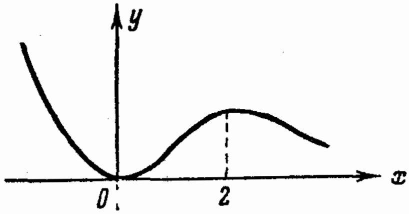
(b) مشتق را حساب می‌کنیم،

$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 24 = 6(x^2 - 3x - 4)$$

مشتق در نقاط $x = 4$ و $x = -1$ صفر می‌شود. چون $f'(x)$ یک سه جمله‌ای بوده که ضریب جملهٔ درجه دوم $6 > 0$ است، پس در فاصله‌های $(-\infty, -1), (4, \infty)$ علامت $f'(x)$ مثبت است و در فاصلهٔ (۴،۱-) علامت مشتق منفی است. در نتیجه در دو فاصلهٔ اول $f(x)$ صعودی و در فاصلهٔ (۴،۱-) نزولی است.

(c) در اینحالت مشتق،

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$$



شکل ۴۰

در نقاط $x=2$ و $x=0$ صفر است. در فاصله‌های $(2, \infty)$ و$(-\infty, 0)$ مشتق منفی و نزولی است، و در (۰، ۲) مشتق مثبت و تابع صعودی است (شکل ۴۰).

جواب: (d) تابع در فاصلهٔ $(-\infty, 0)$ نزولی و در $(0, \infty)$ صعودی است، (e) تابع در $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ و $(3, +\infty)$ صعودی و در $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ نزولی است، (f) تابع همواره صعودی است.

۲ - ۵ - ۳ فاصله‌های صعودی و نزولی هریک از توابع زیر را بیابید:

(a) $f(x) = \cos(\pi/x)$;
(b) $f(x) = \sin x + \cos x \qquad [0, 2\pi]$.

حل ــ (a) این تابع در تمام نقاط بجز $x=0$ تعریف شده و مشتق دارد،

$$y' = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}$$

طوری که دیده می‌شود علامت مشتق با علامت $\sin(\pi/x)$ یکی است.

(۱) اگر $\sin(\pi/x) > 0$

$$2k\pi < \pi/x < (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

(۲) اگر $\sin(\pi/x) < 0$

$$(2k+1)\pi < \pi/x < 2(k+1)\pi$$

پس تابع در فاصله‌های

$$\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$$

صعودی و در فاصله‌های

$$\left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$$

نزولی است.

جواب: (b). تابع در فاصله‌های $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ و $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ صعودی و در فاصلهٔ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ نزولی است.

۳ - ۵ - ۳ رفتار تابع

$$f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$$

را در فاصلهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$ بررسی کنید.

حل ــ مشتق

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x - 2\cos^2 x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{4\sin^3(x/2)\sin(3x/2)}{\cos^2 x}$$

در فاصله های $(-\pi/2, 0)$ و $(0, \pi/2)$ مثبت و فقط در $x=0$ صفر است. پس، $f(x)$ در فاصلهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$ صعودی است.

۴ ـ ۵ ـ ۳ ثابت کنید نامساویهای

$$x - x^3/3 < \arc\tan x < x - x^3/6$$

در فاصلهٔ $0 < x \leqslant 1$ برقرار است.

حل ــ فقط نامساوی طرف راست را ثابت می‌کنیم (نامساوی طرف چپ به طور مشابه ثابت می‌شود).

مشتق تابع

$$f(x) = \arc\tan x - x + \frac{x^3}{6}$$

برابر است با

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}$$

تابع در همه جا، به ویژه، در فاصلهٔ [۰، ۱] پیوسته است و در داخل این فاصله $f'(x) < 0$ بنابراین، $f(x)$ در فاصلهٔ [۰، ۱] صعودی است، در نتیجه به ازای هر x که $0 < x \leqslant 1$ نامساوی $f(x) < f(0) = 0$ یا

$$\arc\tan x - x + \frac{x^3}{6} < 0$$

برقرار است، از آنجا

$$\arc\tan x < x - \frac{x^3}{6}$$

۵ ـ ۵ ـ ۳ درستی نامساویهای زیر را ثابت کنید

$$x - x^3/6 < \sin x < x \qquad x > 0$$

۶ ـ ۵ ـ ۳ ثابت کنید وقتی $0 \leqslant p \leqslant 1$ و به ازای هر a و b مثبت، نامساوی

$$(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

برقرار است.

حل ــ طرفین نامساوی را به b^p تقسیم می‌کنیم،

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^p \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^p+1$$

یا

$$(1+x)^p \leqslant 1+x^p \qquad (\star)$$

که درآن $x=\frac{a}{b}$. حال نشان می‌دهیم که نامساوی $(\star)$ به‌ازای هر x مثبت برقرار است. برای این کار تابع

$$f(x)=1+x^p-(1+x)^p; \quad x\geqslant 0$$

را در نظر می‌گیریم و مشتق آنرا حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=px^{p-1}-p(1+x)^{p-1}=p\left[\frac{1}{x^{1-p}}-\frac{1}{(1+x)^{1-p}}\right]$$

چون بنا به فرض $x>0$ و $1-p\geqslant 0$ ، پس مشتق همه جا مثبت است. بنابراین تابع در فاصلهٔ $[0,\infty)$ صعودی است، یعنی

$$f(x)=1+x^p-(1+x)^p>f(0)=0$$

از آنجا

$$1+x^p>(1+x)^p$$

که این برقراری حکم را ثابت می‌کند. اگر فرض کنیم $p=1/n$ آنگاه

$$\sqrt[n]{a+b}\leqslant \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b} \quad (n\geqslant 1)$$

۷ ـ ۵ ـ ۳ ثابت کنید که تابع

$$y=x^5+2x^3+x$$

همه جا صعودی و تابع

$$y=1-x^3$$

همه جا نزولی است.

۸ ـ ۵ ـ ۳ فاصله های صعودی و نزولی هریک از توابع زیر را تعیین کنید:

(a) $f(x)=x^3+2x-5;$ (b) $f(x)=\ln(1-x^2);$

(c) $f(x)=\cos x-x;$ (d) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x};$

(e) $f(x)=\frac{2x}{\ln x};$ (f) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}.$

جواب . (a) تابع همواره صعودی است.

(b) درفاصله (۰،۱-) صعودی ودر فاصله(۱و۰)نزولی است،

(c) تابع همواره نزولی است،

(d) تابع در فاصله‌های $(0, \infty)$ و $(-\infty, 0)$ که در آنها تعریف شده است صعودی است،

(e) درفاصله‌های $(0, 1)$ و $(1, e)$ نزولی و در $(e, +\infty)$ صعودی است،

(f) درفاصله‌های $(1, \infty)$ و $(-\infty, 1)$ نزولی و در (۱، ۱-) صعودی است،

۹ - ۵ - ۳ درستی نامساویهای زیر را ثابت کنید:

(a) $\tan x > x + x^3/3$ اگر $(0 < x < \pi/2)$،

(b) به ازای هر x، $e^x \geqslant 1 + x$،

(c) به ازای $x > 1$، $e^x > ex$.

۱۰ - ۵ - ۳ به ازای چه مقادیری از a تابع

$$f(x) = x^3 - ax$$

همواره صعودی است؟

جواب: $a \leqslant 0$

۱۱ - ۵ - ۳ به ازای چه مقادیری از b تابع

$$f(x) = \sin x - bx + c$$

همواره نزولی است.

جواب: $b \geqslant 1$

۶ - ۳ ماکزیمم و مینیمم توابع

اگر تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ X تعریف شده باشد، آنگاه نقطهٔ x_0 از نقاط داخلی این فاصله رایک **نقطهٔ ماکزیمم** (یایک **نقطهٔ مینیمم**) تابع $f(x)$ گویند اگر همسایگی از این نقطه مانند $U \in X$ وجود داشته باشد به طوری که در این فاصله نامساوی $f(x) \leqslant f(x_0)$ [یا $f(x) \geqslant f(x_0)$] برقرار باشد. نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع را نقطهٔ حد نهائی یا **نقطهٔ اکسترمم** تابع گویند.

شرط لازم وجود اکسترمم. در نقاط اکسترمم مشتق صفر است ویا وجود ندارد. نقاطی که در آنها $f'(x) = 0$ ویا وجود نداشته باشد، **نقاط بحرانی** گویند.

شرطهای کافی وجود اکسترمم.

I. فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ در همسایگی از x_0 پیوسته است.

۱) اگر وقتی $x < x_0$ ، $f'(x) > 0$ و وقتی $x > x_0$ ، $f'(x) < 0$ (یعنی وقتی از طرف چپ به طرف راست نقطهٔ x_0 حرکت کنیم علامت مشتق از مثبت به منفی تبدیل شود)، آنگاه نقطهٔ x_0 **نقطهٔ ماکزیمم** است.

۲) اگر وقتی $x < x_0$ ، $f'(x) < 0$ و وقتی $x > x_0$ ، $f'(x) > 0$ (یعنی درحرکت از طرف چپ به طرف راست نقطهٔ x_0 علامت مشتق از منفی به مثبت تبدیل شود)، آنگاه x_0 را **نقطهٔ مینیمم** گویند.

۳) اگر علامت مشتق در دو طرف نقطهٔ x_0، ثابت بماند، آنگاه این نقطهٔ اکسترمم نیست.

II . فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ در نقطهٔ بحرانی x_0. (یعنی $f''(x_0) = 0$) دوبار مشتق داشته باشد. اگر $f''(x_0) < 0$ ، آنگاه تابع در نقطهٔ x_0 ماکزیمم دارد، اگر $f''(x_0) > 0$ آنگاه در نقطهٔ x_0 تابع مینیمم دارد، ولی اگر $f'(x_0) = 0$ دراین حالت موجودیت اکسترمم دراین نقطه معلوم نیست.

III . فرض می‌کنیم

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ولی $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ اگر n زوج باشد، آنگاه وقتی $f^{(n)}(x_0) < 0$ تابع در x_0 ماکزیمم است، و وقتی $f^{(n)}(x_0) > 0$ تابع در این نقطه مینیمم است.

اگر n فرد باشد، آنگاه در نقطهٔ x_0 اکسترمم وجود ندارد.

IV . فرض می‌کنیم تابع $y = f(x)$ با معادلات پارامتری

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

مشخص شده است، که در آن توابع $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ در فاصلهٔ تغییرات متغیر t مشتقات مرتبهٔ اول و دوم دارند و $\varphi'(t) \neq 0$ بعلاوه فرض می‌کنیم در $t = t_0$

$$\psi'(t) = 0$$

آنگاه:

(الف) اگر $\psi''(t_0) < 0$ ، آنگاه تابع $y = f(x)$ در $x = x_0 = \varphi(t_0)$ ماکزیمم دارد.

(ب) اگر $\psi''(t_0) > 0$ آنگاه تابع $y = f(x)$ در $x = x_0 = \varphi(t_0)$ مینیمم دارد.

(ج) اگر $\psi''(t_0)=0$ در این حالت موجودیت اکسترمم در این نقطه معلوم نیست.

در نقاطی که $\varphi'(t)$ صفر می‌شود به مطالعه خاصی نیاز است.

۱-۶-۳ با استفاده از مشتق مرتبهٔ اول اکسترمم توابع زیر را تعیین کنید:

(a) $f(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3-9x^2+7;$

(b) $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+12;$

(c) $f(x)=x(x+1)^3(x-3)^2;$

(d) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}.$

حل ــ (a) تابع در همه‌جا معین و همه‌جا مشتق دارد. بنابراین، نقاط بحرانی فقط ریشه‌های حقیقی مشتق هستند

$$f'(x)=3x^3-3x^2-18x=3x(x+2)(x-3)$$

مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم ازحل معادلات حاصل نقاط بحرانی تابع به قرار زیر به دست می‌آیند:

$$x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=3$$

(همیشه باید این نقاط به طور صعودی مرتب شوند). حال علامت مشتق را در همسایگی هر کدام از این نقاط مشخص می‌کنیم. چون در سمت چپ نقطهٔ $x=-2$ نقطهٔ بحرانی دیگری وجود ندارد، پس علامت مشتق به ازای نقاط $x<-2$ ثابت است که برای این تابع، منفی است. به طور مشابه معلوم می‌شود که مشتق در فاصلهٔ (۰، ۲-) مثبت است و در فاصلهٔ (۰،۳) منفی است، و به ازای $x>3$ مشتق مثبت است. پس در نقاط $x_1=-2$ و $x_3=3$ تابع مینیمم بوده و مقدار آن $f(-2)=-9$ و $f(3)=-40\frac{1}{4}$ است و در نقطهٔ $x_2=0$ ماکزیممی برابر $f(0)=7$ دارد.

(c) مانند مسئله‌ای که حل شد، چون تابع همه‌جا معین و همه‌جا مشتق دارد، پس نقاط بحرانی فقط ریشه‌های مشتق هستند. مشتق را بدست می‌آوریم:

$$f'(x)=(x+1)^3(x-3)^2+3x(x+1)^2(x-3)^2+2x(x+1)^3\times$$
$$\times(x-3)=3(x+1)^2(x-3)(2x^2-3x-1).$$

مشتق را مساوی صفر قرار داده نقاط بحرانی را حساب می‌کنیم:

$$x_1=-1,\ x_2=(3-\sqrt{17})/4,\ \ x_3=(3+\sqrt{17})/4,\ \ x_4=3.$$

علامت مشتق در فاصله‌های بین نقاط بحرانی با جدول زیر مشخص شده‌اند:

فاصله‌ها	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x_4 < x$
علامت $f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

طوری که از جدول معلوم می‌شود، در نقطهٔ $x_1 = -1$ اکسترمم وجود ندارد، در x_2 مینیمم و در x_3 ماکزیمم و در x_4 مینیمم وجود دارد.

جواب: (b) مینیمم $f(1) = f(3) = 3$ و ماکزیمم $f(2) = 4$ است.

(d) $f\left(\frac{7}{5}\right) = -\frac{1}{24}$ مینیمم است.

۲ ـ ٦ ـ ۳ مشتق مرتبهٔ اول را به کار برده و اکسترمم توابع زیرا را بیابید:

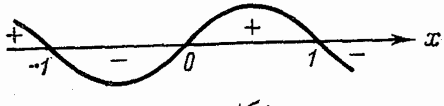
(a) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$;
(b) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$

حل ــ (a) تابع همه‌جا معین و پیوسته است. مشتق را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right)$$

جوابهای مشتق $x = \pm 1$ هستند. بعلاوه مشتق در $x = 0$ بینهایت است. پس نقاط بحرانی تابع عبارتند از $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$. شکل ٤١ علامت مشتق را در همسایگی این نقاط نشان می‌دهد. بررسی علامت مشتق نشان می‌دهد که تابع دو ماکزیمم $f(-1) = 2;\ f(1) = 2$ و یک مینیمم $f(0) = 0$ دارد.

جواب: (b) تابع دو مینیمم $f(\pm 1) = \sqrt{3}$ و یک ماکزیمم $f(0) = 2$ دارد.



شکل ٤١

۳ ـ ٦ ـ ۳ با استفاده از مشتق مرتبهٔ دوم، نقاط اکسترمم توابع زیر را بیابید:

(a) $y = 2\sin x + \cos 2x$;
(b) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8$.

حل ــ (a) چون تابع متناوب است آنرا در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ بررسی می‌کنیم. مشتقهای مرتبهٔ اول و دوم را به دست می‌آوریم:

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x(1 - 2\sin x);$$
$$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x.$$

از حل معادلهٔ

$$2\cos x(1 - 2\sin x) = 0$$

نقاط بحرانی واقع در فاصلهٔ $[0,\ 2\pi]$ را می‌یابیم:

$$x_1 = \pi/6, \quad x_2 = \pi/2, \quad x_3 = 5\pi/6, \quad x_4 = 3\pi/2$$

در هریک از این نقاط علامت مشتق دوم را تعیین می‌کنیم:

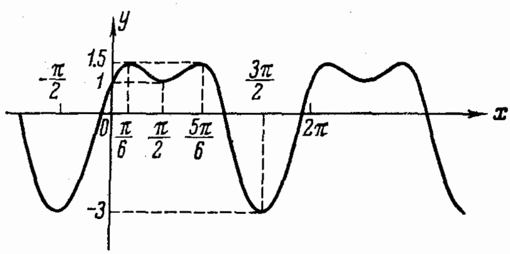
$y''(\pi/6) = -3 < 0$ ، پس در نقطهٔ $x_1 = \pi/6$ تابع ماکزیمم $y(\pi/6) = 3/2$ را دارد،

$y''(\pi/2) = 2 > 0$ ، پس تابع در نقطهٔ $x_2 = \pi/2$ مینیمم $y(\pi/2) = 1$ را دارد،

$y''(5\pi/6) = -3 < 0$ ، پس تابع در نقطهٔ $x_3 = 5\pi/6$ ماکزیمم $y(5\pi/6) = 3/2$ را دارد،

$y''(3\pi/2) = 6 > 0$ ، پس تابع در نقطهٔ $x_4 = 3\pi/2$ مینیمم $y(3\pi/2) = -3$ را دارد (شکل ٤٢).

جواب: (b) ماکزیمم $f(-2) = 160$ و مینیمم $f(0) = 2$ است.



شکل ٤٢

٤ ـ ٦ ـ ۳ اکسترمم توابع زیر را بیابید:

$$\text{(a)}\ f(x) = \begin{cases} -2x & (x < 0), \\ 3x + 5 & (x \geqslant 0); \end{cases}$$

$$\text{(b)}\ f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & (x \neq 0), \\ 4 & (x = 0). \end{cases}$$

حل ــ (a) مشتق عبارت است از

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & (x < 0), \\ 3 & (x > 0) \end{cases}$$

شتق در تمام نقاط بجز $x=0$ وجود دارد، و علامت آن در گذشتن از $x=0$ از منفی به مثبت تبدیل می‌شود، اینجا مینیمم وجود ندارد:

در فاصلهٔ $-1 < x < 0$ $f(0)=5 > f(x)$

ین مطلب ناشی از این است که تابع در $x=0$ پیوسته نیست.

(b) مشتق تابع

$$f'(x) = 4x \; (x \neq 0)$$

همه جا بجز $x=0$ وجود دارد و علامت مشتق درطرفین نقطهٔ $x=0$ از چپ به راست از منفی به مثبت تبدیل می‌شود. با وجود این، با بررسی معلوم می‌شود که این تابع نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم. علت این امر آن است که تابع در $x=0$ پیوسته نیست.

۳-۶-۵ اکسترمم توابع زیر را بیابید:

$$\text{(a)}\;\; f(x) = \frac{50}{3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60}$$

$$\text{(b)}\;\; f(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}.$$

حل ـ (a) در اینجا تعیین اکسترمم تابع

$$f_1(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60$$

راحت‌تر است. چون

$$f_1'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 36x = 12x(x^2 + 2x - 3)$$
$$f_1''(x) = 12(3x^2 + 4x - 3),$$

و نقاط بحرانی عبارتند از

$$x_1 = -3, \;\; x_2 = 0, \;\; x_3 = 1$$

برای تعیین اکسترمم از مشتق دوم استفاده می‌کنیم، $f_1''(-3) > 0$ ، پس در نقطهٔ $x_1 = -3$ تابع $f_1(x)$ مینیمم دارد، واضح است که در این نقطه تابع $f(x)$ ماکزیمم $f(-3) = -2/3$ را دارد. $f_1''(0) < 0$ پس در $x_2 = 0$ تابع $f_1(x)$ ماکزیمم دارد، از آنجا تابع $f(x)$ در این نقطه مینیمم $f(0) = 5/6$ را دارد. $f_1''(1) > 0$ ، پس در $x_3 = 1$ تابع $f_1(x)$ مینیمم دارد، و $f(x)$ ماکزیمم $f(1) = 50/53$ را دارد.

(b) در اینجا راحت‌تر این است که نقاط اکسترمم تابع زیر رادیکال یعنی

$$f_1(x) = e^{x^2} - 1$$

را تعیین بکنیم که همان نقاط اکسترمم تابع $f(x)$ است.

نقاط بحرانی $f_1(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f_1'(x) = 2xe^{x^2}$$

از حل معادلهٔ $f_1'(x) = 0$ داریم $x = 0$، مشتق دوم و علامت آنرا در $x = 0$ به دست می‌آوریم :

$$f_1''(x) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2), \quad f_1''(0) = 2 > 0$$

بنابراین در $x = 0$ تابع $f_1(x)$ مینیمم دارد، درنتیجه تابع $f(x)$ هم در این نقطه مینیمم دارد و مقدار آن $f(0) = 0$ است.

۶ - ۶ - ۳ وجود اکسترمم تابع

$$y = \cosh x + \cos x$$

را در $x = 0$ برزسی کنید.

حل ــ تابع زوج است ظاهراً در $x = 0$ مینیمم دارد. برای بررسی، مشتقات متوالی را در $x = 0$ حساب می‌کنیم :

$$\begin{aligned}
y' &= \sinh x - \sin x, \quad y'(0) = 0;\\
y'' &= \cosh x - \cos x, \quad y''(0) = 0;\\
y''' &= \sinh x + \sin x, \quad y'''(0) = 0;\\
y^{(4)} &= \cosh x + \cos x; \quad y^{(4)}(0) = 2 > 0
\end{aligned}$$

چون اولین مشتقی که در $x = 0$ مخالف صفر است از مرتبهٔ زوج بوده و مقدارش مثبت است، پس تابع در این نقطه مینیمم بوده و مقدار آن برابر $y(0) = 2$ است.

۷ - ۶ - ۳ وجود اکسترمم توابع زیر را در $x = 0$ بررسی کنید :

$$\text{(a)}\ \ y = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}; \quad \text{(b)}\ \ y = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

حل ــ (a)

$$\begin{aligned}
y' &= -\sin x + x - \frac{x^2}{2}; \quad y'(0) = 0;\\
y'' &= -\cos x + 1 - x; \quad y''(0) = 0;\\
y''' &= \sin x - 1; \quad y'''(0) = -1 \neq 0.
\end{aligned}$$

پس اولین مشتق غیر صفر در نقطهٔ $x = 0$ مشتق مرتبهٔ سوم است، یعنی، از مرتبهٔ فرد. بنابراین در $x = 0$ اکسترمم وجود ندارد.

جواب : (b) $f(0) = 0$ مینیمم است.

۸ - ۶ - ۳ اکسترمم توابع زیر را بیابید :

$$\text{(a)}\ \ f(x) = x^4 e^{-x^2}; \quad \text{(b)}\ \ f(x) = \sin 3x - 3\sin x$$

حل ــ (a) تابع

$$f(x)=x^4e^{-x^2}$$

ه جا به‌طور پیوسته مشتقپذیر است. مشتق را تعیین می‌کنیم،

$$f'(x)=4x^3e^{-x^2}-2x^5e^{-x^2}=x^3e^{-x^2}(4-2x^2)$$

ا مساوی صفر قرار داده و نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم:

$$x_1=-\sqrt{2};\ \ x_2=0;\ \ x_3=\sqrt{2}.$$

مقدار مشتق دوم را در نقاط بحرانی حساب می‌کنیم:

$$f''(x)=12x^2e^{-x^2}-8x^4e^{-x^2}-10x^4e^{-x^2}+4x^6e^{-x^2}=$$
$$=2x^2e^{-x^2}(6-9x^2+2x^4)$$
$$f''(0)=0;\quad f''(-\sqrt{2})<0;\quad f''(\sqrt{2})<0.$$

پس در نقاط $x_1=-\sqrt{2}$ و $x_3=+\sqrt{2}$ تابع به ماکزیمم می‌رسد و مقدارش برابر

$$f(\pm\sqrt{2})=4e^{-2}=\frac{4}{e^2}$$

است و موجودیت اکسترمم در نقطهٔ بحرانی $x_2=0$ معلوم نیست از این جهت متوسل به مشتقات بالاتر می‌شویم و به‌طور متوالی از تابع مشتق می‌گیریم تا به مشتقی برسیم که در این نقطه مخالف صفر باشد، ملاحظه می‌شود که این کار پرزحمتی است لذا به اولین شرط کافی یک اکسترمم بر می‌گردیم:

علامت مشتق مرتبه اول را در همسایگی نقطهٔ بحرانی $x_2=0$ تعیین می‌کنیم:

$$f'(-1)<0;\ f'(1)>0$$

پس در این نقطه تابع مینیمم است و مقدار آن برابر $f(0)=0$ است.

جواب: (b). در فاصلهٔ $[0,\ 2\pi]$: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4$ مینیمم و $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=4$ ماکزیمم است.

۹ ـ ۶ ـ ۳ تابع $y=f(x)$ با معادلات پارامتری

$$\begin{cases} x=\varphi(t)=t^5-5t^3-20t+7, \\ y=\psi(t)=4t^3-3t^2-18t+3 \quad (-2<t<2). \end{cases}$$

مشخص شده است، اکسترمم این تابع را تعیین کنید.

حل ــ داریم

$$\varphi'(t)=5t^4-15t^2-20.$$

در فاصلهٔ $(-2,\ 2)$ $\varphi'(t) \neq 0$

$\psi'(t)$ را حساب و آنرا مساوی صفر قرار می‌دهیم :

$$\psi'(t) = 12t^2 - 6t - 18 = 0$$

که از آنجا $t_1 = -1$ و $t_2 = 3/2$. این ریشه ها از نقاط داخلی فاصلهٔ تغییرات پارامتر t هستند.

بعلاوه

$$\psi''(t) = 24t - 6; \quad \psi''(-1) = -30 < 0, \quad \psi''(3/2) = 30 > 0$$

پس تابع $y = f(x)$ در $t = -1$ (یعنی در $x = 31$) ماکزیممی برابر $y = 14$ و در $t = 3/2$ (یعنی در نقطهٔ $x = -1033/32$) مینیممی برابر $y = -17.25$ دارد.

۳ـ۶ـ۱۰ ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید :

(a) $f(x) = x^2 e^{-x}$; (b) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$;

(c) $f(x) = -x^2 \sqrt[5]{(x-2)^2}$; (d) $f(x) = \dfrac{14}{x^4 - 8x^2 + 2}$;

(e) $f(x) = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$;

(f) $f(x) = x^2 \ln x$; (g) $f(x) = x \ln^2 x$.

جواب : (a) $f(0) = 0$ مینیمم و $f(2) = 4e^{-2}$ ماکزیمم است.

(b) $f(-2) = -1$ مینیمم و $f(2) = 1$ ماکزیمم است.

(c) $f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{25}{9}\sqrt[5]{\frac{1}{9}}$ مینیمم و $f(0) = 0$ ماکزیمم است.

(d) $f(0) = 7$ مینیمم و $f(\pm 2) = -1$ ماکزیمم است.

(e) $f(2) = -\sqrt[3]{44}$ مینیمم $f(-3) = 3\sqrt[3]{3}$ ماکزیمم است.

۳ـ۶ـ۱۱ موجودیت اکسترمم توابع زیر را در $x = 0$ بررسی کنید:

(a) $f(x) = \sin x - x$; (b) $f(x) = \sin x - x + x^3/3$;

(c) $f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^4}{4!}$;

(d) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

جواب :

(a) و (b) اکسترمم نیست، (c) $f(0) = 0$ ماکزیمم است، (d) $f(0) = 0$ مینیمم است.

۳ـ۷ محاسبهٔ بیشترین و کمترین مقدار تابع

بیشترین (یا کمترین) مقدار تابع پیوستهٔ $f(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ یا در نقاط بحرانی و یا درنقاط انتهایی فاصله است. برای تعیین بیشترین (یا کمترین) مقدار تابع، مقدار آنرا در تمام نقاط بحرانی واقع در فاصلهٔ ~~$[a, b]$ و~~ مقادیر $f(a)$، $f(b)$ را حساب می کنیم و سپس بیشترین (یا کمترین) مقدار بین آنها را انتخاب می کنیم.

اگر فاصله‌ای که تابع در آن تعریف شده است فاصلهٔ باز باشد، ممکن است تابع بیشترین یا کمترین مقدار نداشته باشد.

۱ـ۷ـ۳ بیشترین و کمترین مقدار هریک از توابع زیر را در فاصله‌های داده شده بیابید:

(a) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ ، $[-2,\ 5/2]$;
(b) $f(x)=x^2\ln x$ ، $[1,\ e]$;
(c) $f(x)=xe^{-x}$ $[0,\ +\infty]$;
(d) $f(x)=\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$ ، $[-1,\ 1]$.

حل ـ (a) مشتق را حساب می کنیم:

$$f'(x)=6x^2-6x-12.$$

مشتق در نقاط $x_1=-1$ و $x_2=2$ صفر می شود. هر دو نقطه در داخل فاصلهٔ $\left[-2,\ \frac{5}{2}\right]$ قرار دارند، پس هر دو باید در نظر گرفته شوند. برای تعیین بیشترین و کمترین مقدار تابع، لازم است که مقدار تابع در این نقاط و در نقاط انتهایی فاصله حساب شوند:

$$f(-2)=-3,\ f(-1)=8;\quad f(2)=-19,\ f\left(\frac{5}{2}\right)=-16\frac{1}{2}$$

پس بیشترین مقدار تابع $f(-1)=8$ و کمترین و مقدار آن $f(2)=-19$ است.

(b) نخست نقاط بحرانی را تعیین می کنیم:

$$f'(x)=x(1+2\ln x)$$

ولی مشتق تابع در نقاط داخلی فاصله $[1,\ e]$ صفر نیست. بنابر این تابع در این فاصله نقاط بحرانی ندارد. پس کافیست مقدار تابع را در نقاط انتهائی فاصله حساب بکنیم:

$$f(1)=0;\quad f(e)=e^2$$

پس $f(1)=0$ کمترین و $f(e)=e^2$ بیشترین مقدار تابع است.

جواب: (c) بیشترین مقدار تابع $f(1)=\frac{1}{e}$ و کمترین مقدار تابع $f(0)=0$. (d) بیشترین مقدار $f\left(\pm\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{\sqrt{8}}$ و کمترین مقدار $f(\pm 1)=0$ است.

۲ ـ ۷ ـ ۳ بیشترین و کمترین مقدار هر یک از توابع زیر را در فاصله های داده شده بیابید.

(a) $y=\sin x\sin 2x \qquad (-\infty,\ \infty);$

(b) $y=\arc\cos x^2 \qquad [-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2];$

(c) $y=x+\sqrt{x} \qquad [0,\ 4].$

حل ـ (a) تابع $y=\sin x\sin 2x$ را به صورت

$$y=\frac{\cos x-\cos 3x}{2}$$

می نویسیم که از آن معلوم می شود که این تابع زوج است و دورهٔ تناوب 2π را دارد. پس کافی است که بیشترین و کمترین مقدار آن را در فاصلهٔ $[0,\ \pi]$ تعیین بکنیم. برای این کار مشتق را بدست می آوریم:

$$y'=\frac{1}{2}(3\sin 3x-\sin x)$$

جوابهای مشتق در فاصلهٔ $[0,\ \pi]$ عبارتند از

$$x_1=0,\ \ x_2=\arc\cos\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ x_3=\arc\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \ x_4=\pi$$

مقادیر تابع را در این نقاط حساب می کنیم:

$$y(0)=y(\pi)=0,\ \ y\left[\arc\cos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]=\pm\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

پس کمترین مقدار تابع در فاصلهٔ $(-\infty\ ,\ \infty)$ برابر $-4/(3\sqrt{3})$ و بیشترین مقدار برابر $4/(3\sqrt{3})$ است.

جواب: (b) بیشترین مقدار $y(0)=\frac{\pi}{2}$ و کمترین مقدار $y\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

(c) 〃 〃 $y(4)=6$ 〃 〃 $y(0)=0$

۳ ـ ۷ ـ ۳ ـ تابع

$$f(x)=ax+\frac{b}{x} \quad (a,\ b,\ x>0)$$

شامل دو جمعوند است که اولی با x ودومی با $\frac{1}{x}$ متناسب است. ثابت کنید که کمترین مقدار تابع به ازای $x=\sqrt{b/a}$ حاصل می شود.

حل ــ جوابهای مشتق را در فاصلهٔ $(0, \infty)$ بدست می آوریم:

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} = 0$$

جواب مورد قبول $x = \sqrt{b/a}\ (x > 0)$ است. چون به ازای تمام $x > 0$

$$f''(x) = 2b/x^3 > 0$$

پس در این نقطهٔ بحرانی، تابع $f(x)$ به مینیمم می رسد. این تنها اکسترمم در فاصلهٔ $(0, \infty)$ است. بنابراین کمترین مقدار تابع در $x = \sqrt{b/a}$ است.

۴ ـ ۷ ـ ۳ نتیجهٔ n دفعه اندازه گیری کمیت مجهول x اعداد

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

هستند. x را طوری بیابید که مجموع مربعات خطاهای

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$$

کمترین مقدار باشد.

حل ــ از تابع مشتق می گیریم:

$$f'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \ldots + 2(x - x_n)$$

تنها ریشهٔ مشتق عبارت است از:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

به ازای هر x داریم

$$f''(x) = 2n > 0$$

پس، تابع $f(x)$ در نقطهٔ

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

مینیمم دارد. مقدار این مینیمم با کمترین مقدار تابع برابر است (مسئلهٔ ۸ ـ ۳ ـ ۱ را ببینید).

بنابراین، بهترین (به مفهوم کمترین مربعات) مقدار تقریبی کمیت مجهول x واسطه حسابی مقادیر

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n.$$

می باشند.

۵ ـ ۷ ـ ۳ بزرگترین جملهٔ دنبالهٔ

$$a_n = \frac{n^2}{n^3 + 200}$$

را بیابید.

حل ـ تابع

$$f(x)=\frac{x^2}{x^3+200}$$

را درفاصلهٔ $[1,\ \infty)$ درنظر می گیریم. چون

$$f'(x)=\frac{x(400-x^3)}{(x^3+200)^2}$$

به ازای $0<x<\sqrt[3]{400}$ مثبت به ازای $x>\sqrt[3]{400}$ منفی است، پس تابع $f(x)$ درفاصلهٔ $0<x<\sqrt[3]{400}$ صعودی و درفاصلهٔ $x>\sqrt[3]{400}$ نزولی است. از نامساوی

$$7<\sqrt[3]{400}<8$$

نتیجه می شود که بزرگترین جملهٔ دنباله می تواند a_7 یا a_8 باشد. چون

$$a_7=49/543>a_8=8/89$$

پس بزرگترین جمله عبارت است از

$$a_7=\frac{49}{543}$$

۶ ـ ۷ ـ ۳ بیشترین و کمترین مقدار هریک از توابع زیر را درفاصله های داده شده بیابید:

(a) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2 \qquad [-2,\ 4];$

(b) $f(x)=\sqrt{4-x^2} \qquad [-2,\ 2];$

(c) $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\ln x \qquad \left[\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}\right];$

(d) $f(x)=2\sin x+\sin 2x \qquad \left[0,\ \frac{3}{2}\pi\right];$

(e) $f(x)=x-2\ln x \qquad [1,\ e];$

(f) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+\frac{2}{x^2} & -2\leqslant x<0;\ 0<x\leqslant 2, \\ 1 & x=0. \end{cases}$

جواب: (a) بیشترین مقدار $f(-2)=\frac{16}{3}$ و کمترین مقدار $f(3)=-\frac{37}{4}$

(b) 〃 〃 $f(0)=2$ 〃 〃 $f(\pm 2)=0$

(c) 〃 〃 $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}+0.25\ln 3$ 〃 〃 $f(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}-0.25\ln 3$

(d) 〃 〃 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 〃 〃 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$

(e) بیشترین مقدار $f(1)=1$ و کمترین مقدار $f(2)=2(1-\ln 2)$

(f) بیشترین مقدار ندارد و کمترین مقدار $f(0)=1$ است.

۸ ـ ۳ حل چند مسئله فیزیکی و هندسی

۱ ـ ۸ ـ ۳ نیروی جریان الکتریکی مدوری (دایره‌ای) روی آهنربائی عمل می کند که محور آهنربا عمود بر صفحهٔ دایره بوده و از مرکز آن می گذرد. این نیرو با فرمول

$$F=\frac{Cx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

مشخص می شود، که در آن a شعاع دایره، x فاصلهٔ مرکز دایره تا آهنربا $(0<x<\infty)$ ، C عددی ثابت است.

مقدار x را طوری بیابید که F بیشترین مقدار باشد.

حل ــ از تابع مشتق می گیریم،

$$F'(x)=C\,\frac{a^2-2x^2}{(a^2+x^2)^{5/2}}$$

تنها جواب مثبت مشتق $x=a/\sqrt{2}$ است. این مقدار مورد نظر، x است.

توجه: اغلب مواقع، دلایل فیزیکی و یا وضعیت هندسی موجب می‌شود که استفاده از روشهای مشتقگیری برای تعیین بیشترین یا کمترین مقدار تابع در نقاطی، غیر لازم گردد.

۲ ـ ۸ ـ ۳ می‌خواهیم استخر شنای سربازی بسازیم که کف آن مربعی شکل باشد. ابعاد آن‌را طوری تعیین کنید تا حداقل مصالح ساختمانی در ساختن آن بکار رود، تا از نظر اقتصادی باصرفه شود.

حل ــ طول ضلع مربع را با x و ارتفاع استخر را با y نشان می‌دهیم. حجم استخر برابر است با

$$V=x^2y=32, \qquad (*)$$

مساحت کل استخر برابر است با

$$S=x^2+4xy$$

از $(*)$ y را نسبت به x حساب می‌کنیم و در رابطهٔ اخیر قرار می دهیم:

$$S=x^2+4x\frac{V}{x^2}=x^2+\frac{128}{x}.$$

در این رابطه x را طوری محاسبه می‌کنیم که تابع در فاصلهٔ $(0, \infty)$ مینیمم شود.

$$S'=2x-\frac{128}{x^2};\quad 2x-\frac{128}{x^2}=0;\quad x=4.$$

مقداری که حاصل شد، تنها مقداری است که S را مینیمم می‌کند، چون تابع بیشترین مقدار ندارد (زیرا وقتی $x\to 0$ یا $x\to\infty$ تابع به طور نامحدود صعود می‌کند).

بنابراین، ابعاد استخر $y=2$ و $x=4$ متر هستند.

۳-۸-۳ در کرهٔ مفروضی استوانه‌ای با بیشترین مساحت جانبی محاط کنید.

جواب: $H=R\sqrt{2}$ که درآن H ارتفاع استوانه و R شعاع کره است.

۳-۸-۴ با ۲۰ متر سیم حصاری دوریک باغچه به شکل «قطاع دایره» می‌کشیم. شعاع دایره را طوری بیابید تا مساحت باغچه بیشترین مقدار باشد.

حل ــ شعاع دایره را با x و درازای کمان را با y نشان می‌دهیم (شکل ۴۳).

پس

$$20=2x+y,$$

از آنجا

$$y=2(10-x).$$

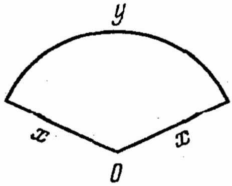
مساحت قطاع برابر است با

$$S=\frac{1}{2}xy=x(10-x)\ (0\leqslant x\leqslant 10)$$

مشتق آن

$$S'(x)=10-2x$$

ریشهٔ $x=5$ را دارد. چون کمترین مقدار مساحت یعنی $S=0$ در نقاط انتهائی فاصلهٔ [۰و۱۰] حاصل می‌شود، پس به ازای $x=5$ مساحت بیشترین مقدار را دارد.



شکل ۴۳

۵ ـ ۸ ـ ۳ می‌خواهیم مخزن استوانه‌ای شکلی با ظرفیت V_0 بسازیم که ضخامت دیواره‌ها d باشد. ابعاد (شعاع قاعده و ارتفاع) مخزن را طوری تعیین کنید که برای ساختن آن متحمل کمترین هزینه شویم.

حل ــ شکل ٤٤ مقطع طولی آن را نشان می‌دهد که در آن شعاع داخلی قاعده x و ارتفاع داخلی h است. حجم قسمت پائین و حجم دیوارهٔ مخزن برابر است با:

$$V = \pi (x+d)^2 d + \pi [(x+d)^2 - x^2] h = \pi d (x+d)^2 + \pi h (2xd + d^2) \quad (\star)$$

از طرف دیگر، بنا به فرض

$$V_0 = \pi x^2 h$$

که از آنجا

$$h = \frac{V_0}{\pi x^2}$$

این مقدار را در $(\star)$ قرار می‌دهیم،

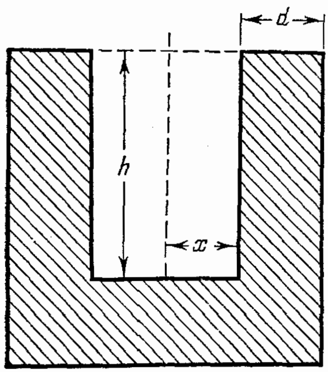
$$V = \pi d (x+d)^2 + \frac{\pi V_0}{\pi x^2} (2xd + d^2) = \pi d (x+d)^2 + \frac{2V_0 d}{x} + \frac{V_0 d^2}{x^2}$$

حال اکسترمم $V(x)$ را وقتی $x > 0$ تعیین می‌کنیم،

$$V'(x) = 2\pi d (x+d) - \frac{2V_0 d}{x^2} - \frac{2V_0 d^2}{x^3} = \frac{2d (x+d)(\pi x^3 - V_0)}{x^3}$$

تنها ریشهٔ مثبت مشتق $x = \sqrt[3]{V_0/\pi}$ است. از آنجا

$$h = \frac{V_0 \sqrt[3]{\pi^2}}{\pi \sqrt[3]{V_0^2}} = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}} = x$$



شکل ٤٤

۶ ـ ۸ ـ ۳ کارخانهٔ D با یک بزرگراه به راه آهن مستقیمی که شهر A در آن است، وصل می شود. فاصلهٔ DB از کارخانه تا راه آهن برابر a, و طول AB برابر l است. کرایهٔ حمل بار در بزرگراه m برابر کرایهٔ حمل بار در راه آهن است $(m > 1)$ طول بزرگراه (طول DP) چقدر باشد تا هزینهٔ کرایهٔ حمل بار از کارخانه تا شهر کمترین مقدار شود.

حل ــ شکل را مطابق شکل ۴۵ در نظر می گیریم. بدیهی است که بزرگراه باید مستقیم در نظر گرفته شود (کوتاهترین فاصله بین دو نقطه، خط راست است). بعلاوه، نقطهٔ P نمی‌تواند در طرف چپ A و در طرف راست B واقع شود. فاصلهٔ AP را با x نشان می‌دهیم واضح است که $0 \leqslant x \leqslant l$.

فرض می‌کنیم که کرایه حمل بار در راه آهن (برای هرتن دریک کیلومتر) k است، پس کرایهٔ حمل بار در بزرگراه، km می‌شود. اگر تمام هزینهٔ حمل بار از D تا A برابر N باشد، داریم

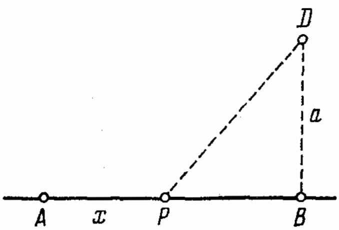
$$N = kx + km\sqrt{a^2 + (l-x)^2}$$

پس کافیست کمترین مقدار تابع

$$f(x) = x + m\sqrt{a^2 + (x-l)^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

را به‌دست آوریم. از آن مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 1 + \frac{m(x-l)}{\sqrt{a^2 + (x-l)^2}}$$



شکل ۴۵

جواب مشتق

$$x = l - \frac{a}{\sqrt{m^2 - 1}}$$

است. اگر این نقطه در فاصلهٔ $[0, l]$ واقع شود، یعنی، اگر

$$l \geqslant \frac{a}{\sqrt{m^2-1}} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{l} \leqslant \sqrt{m^2-1}$$

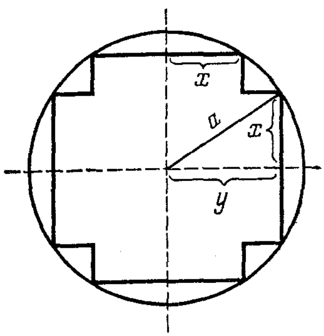
آنگاه هزینه حمل بار کمترین مقدار می‌شود (تحقیق ساده است). اگر نامساوی برقرار نباشد، آنگاه $f(x)$ در فاصلهٔ $[0, l]$ صعود می‌کند و کمترین هزینه به ازای $x=0$ حاصل می‌شود.

۷ ـ ۸ ـ ۳ قرار دادن یک هستهٔ آهنی با مقطع صلیب شکل که بیشترین مساحت خارجی ممکن را داشته باشد در درون سیم پیچ، در ساختن یک مبدل جریان متناوب اهمیت دارد. شکل ٤٦ مقطع این هسته را با ابعاد مناسب نشان می‌دهد. حال اگر شعاع این هسته برابر a باشد مناسبترین مقدار x و y را تعیین کنید.

جواب: $x=a\sin\alpha,\ y=a\cos\alpha$ که در آن $\alpha=0.5\ \arctan 2$.

راهنمائی: مسئله منجر به تعیین بیشترین مقدار تابع زیر می‌شود:

$$S=4xy+4x(y-x)=4a^2(\sin 2\alpha-\sin^2\alpha) \qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$$



شکل ٤٦

۸ ـ ۸ ـ ۳ اگر منبع جریان الکتریکی یک باطری باشد، با قراردادن مقاوم در مدارخارجی توان موثر به وسیلهٔ رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$P=\frac{E^2R}{(R+R_i)^2}$$

در اینجا E نیروی محرکه (الکترو موتوری) برحسب ولت و R_i مقاومت داخلی باطری برحسب اهم است.

توان ماکزیمم را به ازای مقادیر معین E و R_i به دست آورید.

جواب: در $W=W_i$ برابر است با $P_{\max}=\frac{E^2}{4W_i}$

۹ ـ ۸ ـ ۳ یک قوطی استوانه ای شکل به حجم V مفروض است. نسبت ارتفاع h و قطر $2R$ را طوری بیابید که مواد لازم جهت ساختن قوطی حداقل باشد.

جواب: $h=2R=2\sqrt[3]{\frac{3v}{2\pi}}$

۱۰ ـ ۸ ـ ۳ در یک مخروط مفروض استوانه ای را طوری محاط کنید که مساحت جانبی آن ماکزیمم باشد. در صورتیکه صفحات و مراکز دایره های قاعده استوانه و مخروط برهم منطبق است.

جواب: شعاع قاعده استوانه $r=\frac{R}{2}$ است که R شعاع قاعده مخروط است.

۱۱ ـ ۸ ـ ۳ نقطهٔ (۲، ۱) در دستگاه مختصات قائم مفروض است. معادلهٔ خطی را طوری تعیین کنید که از این نقطه گذشته و با محورهای مختصات مثلثی با کمترین مساحت بسازد.

جواب: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$

۱۲ ـ ۸ ـ ۳ روی محور سهمی

$$y^2=2px$$

نقطهٔ M به فاصلهٔ a از راس آن مفروض است. طول نقطه ای از سهمی را تعیین کنید که فاصله اش از نقطهٔ مفروض مینیمم باشد.

جواب: وقتی $a\leqslant p$ ، $x=0$ ، وقتی $a>p$ ، $x=a-p$

۱۳ ـ ۸ ـ ۳ مخارجی که به ازای یک ساعت دریانوردی یک کشتی متحمل می‌شویم برحسب ریال با رابطهٔ تجربی

$$a+bv^3$$

بیان می‌شود، که در این رابطه a و b ضرایب مخصوص برای هرکشتی و v سرعت کشتی برحسب گره دریائی است (یک گره دریائی معادل ۱/۸۵ کیلومتر درساعت است). در این رابطه جزء ثابت مخارج یعنی a مربوط به استهلاک و عدم مراقبت کارکنان و جزء دوم، bv^3 مربوط به سوخت است. در چه سرعتی کشتی هر مسافت دلخواهی را با کمترین خرج خواهد پیمود.

جواب: $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$ **راهنمائی:** یک گره در $\frac{1}{v}$ ساعت پیموده می‌شود. هزینهٔ مناسب از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$T=\frac{a+bv^3}{v}=\frac{a}{v}+bv^2$$

۱۴ ـ ۸ ـ ۳ آبشخوری از سه تخته با پهنای برابر ساخته شده است. دو تختهٔ جانبی را با چه زاویه‌ای جاگذاری کنیم تا مساحت مقطع آبشخور ماکزیمم شود.

جواب: $\varphi=\frac{\pi}{3}$ **راهنمائی:** اگر پهنای تخته را با a نشان بدهیم مساحت مقطع برابر

$$a^2(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

می‌شود که φ زاویهٔ دیواره‌ها با کف است.

۱۵ ـ ۸ ـ ۳ مخزنی با دیوارهٔ قائم روی صفحهٔ افقی نصب شده است. سوراخی در آن طوری ایجاد کنید که اگر سرعت جریان مایع طبق **قانون توریچلّی** $\sqrt{2gx}$ باشد، بردفوران مایع ماکزیمم شود که در آن x عمق سوراخ است.

جواب: $\frac{h}{2}$ **راهنمائی:** نقطه‌ای که فوراه می‌ریزد به فاصلهٔ $\frac{v\sqrt{2H}}{g}$ از قاعده مخزن است. که در آن $H=h-x$ ارتفاعی است که سوراخ ایجاد شده است، v میزان جریان مایع است، بنابراین طول فوران از رابطهٔ زیر حساب می‌شود

$$\sqrt{2gx}\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}=2\sqrt{x(h-x)}$$

۱۶ ـ ۸ ـ ۳ دو هواپیما دریک صفحه در دو مسیر مستقیم که باهم زاویه ۱۲۰ درجه می‌سازند به طرف یکدیگر درحال حرکت هستند سرعت این دو هواپیما یکنواخت و برابر v کیلومتر درساعت است. در لحظهٔ معینی یکی از هواپیما ها به نقطهٔ تلاقی مسیرشان می‌رسد، درحالیکه دومی a کیلومتر با او فاصله دارد. در چه زمانی فاصلهٔ دو هواپیما به حداقل می‌رسد و این فاصله چقدر است؟

جواب: بعد از $\frac{a}{2v}$ ساعت فاصلهٔ دو هواپیما به حداقل $\frac{a}{2}$ کیلومتر می‌رسد.

۹ ـ ۳ تحدب وتقعریک منحنی ــ نقاط عطف

اگر در فاصلهٔ (a, b) داشته باشیم $f''(x)<0\ (>0)$ ، آنگاه منحنی $y=f(x)$ در این فاصلهٔ **محدب** (یا **مقعر**) است، یعنی، منحنی درزیر (یادربالای) خط مماس قرار دارد.

اگر $f''(x_0)=0$ یا وجود نداشته باشد ولی $f'(x_0)$ موجود باشد و علامت $f''(x)$ درطرفین نقطهٔ x_0 یکی نباشد، در اینصورت نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ را **نقطهٔ عطف** منحنی $y=f(x)$ گویند.

۱ ـ ۹ ـ ۳ نقاط عطف و فاصله های تحدب و تقعر هریک از منحنی های زیر را تعیین کنید.

a) $y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12;$
b) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12;$
c) $y = \frac{x}{1+x^2};$
d) $y = x + x^{5/3};$
e) $y = 4\sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3} \quad (x \geqslant 1);$
f) $y = \frac{\ln^2 x}{x} \quad (x > 0);$
(g) $y = x \sin(\ln x) \quad (x > 0);$
(h) $y = 2 - |x^5 - 1|.$

حل ــ (a) مشتقها را حساب می‌کنیم

$$y' = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24,$$
$$y'' = 12x^2 + 6x - 36 = 12\left(x^2 + \frac{x}{2} - 3\right)$$

از آنجا جواب $y'' = 0$ عبارتست از $x_1 = -2, \ x_2 = 3/2$؛
پس در فاصله های $(-\infty, \ -2)$ و $(3/2, \ \infty)$، $y'' > 0$ و در فاصلهٔ $(-2, \ 3/2)$، $y'' < 0$ علامت مشتق دوم تقعر و تحدب رادریک فاصله مشخص می‌کند باتوجه به این مطالب جدول زیر را می‌سازیم:

x	$x < -2$	$-2 < x < \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
علامت y''	$+$	$-$	$+$
نتیجه	تقعر	تحدب	تقعر

چون علامت مشتق دوم وقتی از نقاط $x_1 = -2$ و $x_2 = 3/2$ می‌گذریم تغییر می‌کند، پس نقاط $(-2, \ -124)$ و $\left(\frac{3}{2}, \ -8\frac{1}{16}\right)$ نقاط عطف منحنی هستند.
(d) مشتقها را حساب می‌کنیم:

$$y' = 1 + \frac{5}{3}x^{2/3}, \qquad y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$$

مشتق دوم در هیچ نقطه‌ای صفر نیست و در $x = 0$ بی‌معنی است. وقتی $y' = 1$ داریم

$y'' < 0$ و منحنی محدب است و در $x > 0$ داریم $y'' > 0$ و منحنی مقعر است.
در $x = 0$ مشتق اول $y' = 1$ و علامت مشتق دوم در این نقطه عوض می شود.
بنابر این نقطهٔ (۰، ۰) نقطهٔ عطف است.
(g) مشتقها را بدست آوریم.

$$y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x),$$
$$y'' = \frac{1}{x}[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] = \frac{\sqrt{2}}{x}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right)$$

مشتق دوم در نقاط

$$x_k = e^{\pi/4 + k\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

صفر می شود. علامت تابع

$$\sin(\pi/4 - \ln x)$$

در نتیجه علامت مشتق دوم در نقاط x_k تغییر می کند. پس، نقاط x_k طول نقاط عطف است. در فاصله های

$$(e^{2k\pi - 3\pi/4}, \quad e^{2k\pi + \pi/4})$$

منحنی مقعر و در فاصله های

$$(e^{2k\pi + \pi/4}, \quad e^{2k\pi + 5\pi/4})$$

منحنی محدب است.
(h) می توان معادله را به صورت

$$y = \begin{cases} 2 - (x^5 - 1), & x \geqslant 1, \\ 2 + (x^5 - 1), & x < 1. \end{cases}$$

نوشت. بنابر این

$$y' = \begin{cases} -5x^4, & x > 1, \\ 5x^4, & x < 1. \end{cases}$$

در نقطهٔ $x = 1$ مشتق وجود ندارد. بعلاوه

$$y'' = \begin{cases} -20x^3, & x > 1, \\ 20x^3, & x < 1; \end{cases}$$

در $x = 0$ مشتق دوم صفر است. پس سه فاصلهٔ $(1, \infty)$ و $(0, 1)$ و $(-\infty, 0)$ را در نظر گرفته و جدول زیر را می سازیم. نقطهٔ (۰و۱) یک نقطهٔ عطف و (۲و۱) یک نقطهٔ گوشه است.

x	$x<0$	$0<x<1$	$x>1$
علامت y''	$-$	$+$	$-$
نتیجه	تحدب	تقعر	تحدب

جواب : (b) درفاصله‌های $(1, \infty)$ و $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ مقعر و درفاصلهٔ $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ محدب است نقاط $(1, 13)$ ، $\left(\frac{1}{3}, 12\frac{11}{27}\right)$ نقاط عطف اند.

(c) درفاصله‌های $(\sqrt{3}, \infty)$ و $(-\sqrt{3}, 0)$ مقعر و درفاصله‌های $(-\infty, -\sqrt{3})$ و $(0, \sqrt{3})$ محدب و نقاط عطف عبارتند از

$$\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{10}\right), \quad (0, 0), \quad \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{10}\right)$$

(e) منحنی همه جا مقعر است.

(f) درفاصله‌های $(0, x_1)$ و (x_2, ∞) تابع مقعر و درفاصله (x_1, x_2) محدب است که در آن

$$x_1 = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \quad x_2 = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

نقاط عطف، $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ هستند که در آن

$$y_1 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}, \qquad y_2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

۲ ـ ۹ ـ ۳ ــ درمنحنی

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

بین ضرایب a, b, c چه شرایطی برقرار باشد تا منحنی نقطهٔ عطف داشته باشد ؟

حل ــ مشتق دوم را می یابیم

$$y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

منحنی وقتی نقطهٔ عطف دارد اگر و فقط اگر معادلهٔ

$$6ax^2 + 3bx + c = 0$$

ریشه‌های حقیقی داشته باشد، یعنی، وقتی مبین معادله $9b^2 - 24ac > 0$ یا

$$3b^2 - 8ac > 0$$

۳ ـ ۹ ـ ۳ به ازای چه مقادیر a منحنی

$$y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$$

همیشه مقعر است.

حل ــ y'' را به دست می آوریم:

$$y'' = 12x^2 + 6ax + 3$$

اگر به ازای هر x داشته باشیم $y'' \geqslant 0$ آنگاه منحنی همواره مقعر می شود، یعنی، وقتی به ازای هر x

$$4x^2 + 2ax + 1 \geqslant 0$$

پس شرط لازم و کافی برای اینکه منحنی همیشه مقعر باشد آنست که $4a^2 - 16 \leqslant 0$ و از آنجا

$$|a| \leqslant 2$$

۴ ـ ۹ ـ ۳ نشان دهید که منحنی

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

دارای سه نقطهٔ عطف واقع روی یک خط مستقیم است.

حل ــ مشتقها را به دست می آوریم:

$$y' = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2},$$
$$y'' = \frac{2x^3 + 6x^2 - 6x - 2}{(x^2+1)^3}$$

مشتق دوم در سه نقطه صفر می شود که جوابهای معادلهٔ

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

هستند که از آنجا

$$x_1 = -2 - \sqrt{3}, \quad x_2 = -2 + \sqrt{3}, \quad x_3 = 1$$

جدول زیر را تنظیم می کنیم:

x	$-\infty < x < -2-\sqrt{3}$	$-2-\sqrt{3} < x < -2+\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3} < x < 1$	$1 < x < \infty$
علامت y''	$-$	$+$	$-$	$+$
نتیجه	تحدب	تقعر	تحدب	تقعر

پس

$$\left(-2-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right),\ \left(-2+\sqrt{3},\ \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right),\ (1,\ 1)$$

نقاط عطف هستند. بسادگی تحقیق می شود که این سه نقطه دریک امتدادند. در واقع، مختصات این سه نقطه در رابطهٔ

$$\frac{-2-\sqrt{3}-1}{-2+\sqrt{3}-1}=\frac{(1-\sqrt{3})/4-1}{(1+\sqrt{3})/4+1}$$

صدق می کند.

۵ ـ ۹ ـ ۳ نقاط عطف و فاصله های تقعر و تحدب هر یک از منحنیهای زیر را تعیین کنید:

(a) $y=x-\sqrt[5]{(x-3)^2}$;
(b) $y=e^{\sin x}\ (-\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2)$

جواب: (a)) در فاصلهٔ $x<3$ محدب و در فاصلهٔ $x>3$ مقعر و (۳و۳) نقطهٔ عطف است،

(b) $x=\arc\sin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ طول نقطهٔ عطف است و منحنی در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2},\ \arc\sin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ مقعر و در فاصلهٔ $\left(\arc\sin\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ محدب است.

۶ ـ ۹ ـ ۳ نشان دهید که نقاط عطف منحنی $y=x\sin x$ روی منحنی

$$y^2(4+x^2)=4x^2$$

واقعند.

۱۰ـ۳ مجانب

مجانب منحنی $y=f(x)$ خط راستی است که فاصلهٔ نقطه‌ای از منحنی مانند M از آن خط به صفر نزدیک شود وقتی M روی شاخه‌ای از منحنی به بینهایت میل کند.

سه نوع مجانب مهم وجود دارد: **قائم، افقی و مایل.**

مجانب قائم

اگر یکی از حدهای $f(x)$ (حد چپ یا حد راست در نقطهٔ a) بینهایت شود، آنگاه خط $x=a$ را **مجانب قائم** گویند.

مجانب افقی

اگر

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=A$$

آنگاه خط $y=A$ را **مجانب افقی** گویند (اگر $x\to+\infty$ آنرا **مجانب راست** و اگر $x\to-\infty$ آنرا **مجانب چپ** نامند).

مجانب مایل

اگر حدهای

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1,\qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x]=b_1$$

وجود داشته باشند، آنگاه خط مستقیم

$$y=k_1x+b_1$$

را **مجانب مایل** (یا **مجانب راست**) گویند.

اگر حدهای

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=b_2$$

وجود داشته باشد، آنگاه خط مستقیم

$$y=k_2x+b_2$$

رایک **مجانب مایل** (یا **مجانب چپ**) گویند. مجانب افقی حالت خاصی از مجانب مایل است وقتی که $k=0$

۱ـ۱۰ـ۳ مجانبهای منحنیهای زیر را بیابید:

(a) $y=\frac{5x}{x-3}$; (b) $y=\frac{3x}{x-1}+3x$; (c) $y=\frac{x}{x^2+1}$;

(d) $y=\frac{1}{x}+4x^2$; (e) $y=xe^{\frac{1}{x}}$; (f) $y=\frac{3x}{2}\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)$;

(g) $y=\sqrt{1+x^2}+2x$; (h) $y=\sqrt{1+x^2}\sin\frac{1}{x}$

(i) $y=2\sqrt{x^2+4}.$

حل ــ (a) منحنی مجانب قائم $x=3$ دارد، زیرا

$$\lim_{x\to 3\mp 0} y=\lim_{x\to 3\mp 0}\frac{5x}{x-3}=\mp\infty$$

(نقطهٔ $x=3$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است). مجانب افقی را تعیین می‌کنیم:

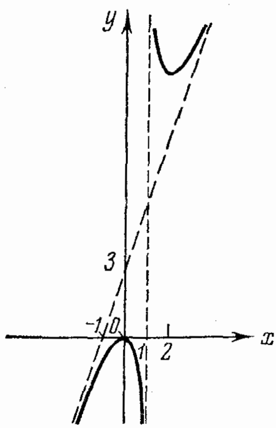
$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x}{x-3}=5$$

پس منحنی مجانب قائم $x=3$ و مجانب افقی $y=5$ را دارد.

(b) مجانب قائم منحنی خط $x=1$ است، زیرا

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{3x}{x-1}+3x\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{3x}{x-1}+3x\right)=+\infty$$



شکل ٤۷

مجانب مایل عبارتست از:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x-1}+3\right)=3$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) =$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3x}{x-1} + 3x - 3x\right) = 3$$

پس خط $y = 3x+3$ مجانب مایل منحنی است (شکل ٤٧ را ببینید).

(e) منحنی مجانب قائم $x = 0$ دارد، زیرا

$$\lim_{x \to +0} y = \lim_{x \to +0} xe^{1/x} = \lim_{t=\frac{1}{x} \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

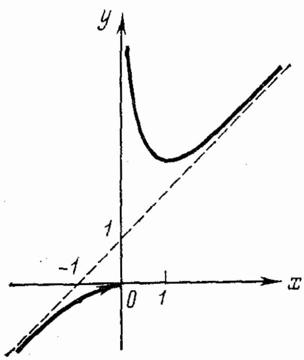
(مسئله **۲-۲-۳** را ببینید). مجانب مایل را تعیین می‌کنیم

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (xe^{1/x} - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{1/x = z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

پس خط $y = x + 1$ مجانب مایل منحنی است (شکل ٤٨ را ببینید). توجه داریم که

$$\lim_{x \to -0} y = \lim_{x \to -0} xe^{1/x} = 0.$$



شکل ٤٨

(f) تابع به ازای $e - \frac{1}{3x} > 0$ یعنی

$$x < 0 \quad \text{و} \quad x > \frac{1}{3e}$$

معین و پیوسته است.

چون تابع در تمام نقاط حوزهٔ تعریفش پیوسته است، پس منحنی فقط می‌تواند در نقاط انتهائی فاصلهٔ تعریف، مجانب قائم داشته باشد.

وقتی $x \to -0$ داریم

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} \frac{3x}{2}\ln\left(e - \frac{1}{3x}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{z\to +\infty} \frac{\ln(e+z)}{z} = 0 \quad \left(z = -\frac{1}{3x}\right)$$

(مسئلهٔ **۲-۲-۳** را ببینید)، یعنی، خط $x=0$ مجانب قائم است. وقتی $x \to \frac{1}{3e}+0$ داریم

$$\lim_{x\to 1/(3e)+0} y = \frac{3}{2}\lim_{x\to 1/(3e)+0} x\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right) = -\infty,$$

پس خط $x = 1/(3e)$ مجانب قائم است. حال مجانب مایل را تعیین می‌کنیم:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(e-\frac{1}{3x}\right) = \frac{3}{2};$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [y-kx] = \frac{3}{2}\lim_{x\to\pm\infty} x\left[\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)-1\right] =$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{3xe}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3e}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

پس خط $y = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2e}$ مجانب مایل است (شکل ۴۹ را ببینید).

(g) چون تابع همه جا پیوسته است، پس منحنی مجانب قائم ندارد. حال وجود مجانب مایل را جستجو می کنیم. چون وقتی $x \to -\infty$ و $x \to +\infty$ دو حد مختلف به دست می آید پس دو حالت در نظر می گیریم:

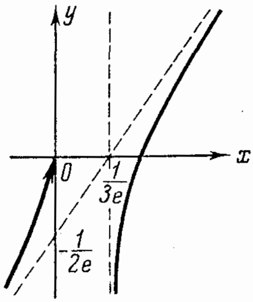
نخست مجانب مایل راست را تعیین می کنیم:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+2}{1} = 3;$$
$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2}+2x-3x) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} [\sqrt{1+x^2}-x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0.$$

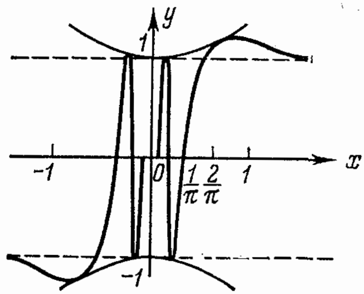
پس وقتی $x \to +\infty$ مجانب مایل $y = 3x$ است. حال مجانب مایل چپ را می یابیم (وقتی $x \to -\infty$).

$$k_2 = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+2x}{x} = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to -\infty} \left[\sqrt{1+x^2}+2x-x\right] = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0,$$



شکل ۴۹



شکل ۵۰

چون هر دو جمعوند $(-x)$ و $(\sqrt{1+x^2})$ وقتی $x<0$ ، در مخرج مثبت هستند. پس مجانب مایل چپ $y=x$ است.

(h) چون تابع به ازای $x\neq 0$ پیوسته و در همسایگی نقطهٔ $x=0$ کراندار است پس منحنی مجانب قائم ندارد.

حال مجانب مایل را تعیین می کنیم، داریم

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x}}{x} = \pm 1\cdot 0 = 0$$

پس

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x} = \begin{cases} 1 & x\to+\infty, \\ -1 & x\to-\infty. \end{cases}$$

پس تابع دو مجانب مایل $y=-1$ و $y=+1$ دارد (شکل ۵۰ را ببینید). مشابه نتایج حاصل را می توان از فرد بودن تابع y و از تقارن نسبت به مبداءِ نتیجه گرفت.

جواب: (d) $x=0$ (c) $y=0$؛ (i) وقتی $x\longrightarrow+\infty$، $y=2x$ ، وقتی $x\longrightarrow-\infty$ ، $y=-2x$.

۲ ـ ۱۰ ـ ۳ مجانب مایل منحنی

$$y = \frac{x^2}{1+x} \quad ، \quad x \to \infty$$

را تعیین کنید و نشان دهید که می‌توان در فاصلهٔ $(100, \infty)$ این تابع را با تابع خطی $y = x - 1$ با خطای نابیشتر از 0.01 عوض کرد.

حل ـ مجانب مایل را به قرار زیر تعیین می کنیم:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(1+x)} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \right) = -1.$$

پس خط $y = x - 1$ مجانب مایل است.

تفاضل

$$\delta = \frac{x^2}{1+x} - (x-1) = \frac{1}{1+x}.$$

پس فرض می‌کنیم

$$y = \frac{x^2}{1+x} \approx x - 1$$

که به ازای هر$x > 100$خطای حاصل بیشتر از 0.01 نیست.

۳ ـ ۱۰ ـ ۳ مجانب هریک از منحنیهای زیر را بیابید:

(a) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$; (b) $y = x \arctan x$;

(c) $y = x + (\sin x)/x$; (d) $y = \ln(4 - x^2)$;

(e) $y = 2x - \arccos \dfrac{1}{x}$.

جواب:

(a) $x = 3,\ y = x - 3$; (b) $y = \pm \dfrac{\pi x}{2} - 1$; (c) $y = x$;

(d) $x = \pm 2$; (e) $y = 2x - \dfrac{\pi}{2}$.

۱۱ ـ ۳ بررسی کلی توابع و رسم نمودار آنها

تجزیه و تحلیل و رسم نمودار توابع با روشهای مقدماتی را در فصل اول (بخشهای ۳ـ۱ و ۵ـ۱) مطالعه کردیم. با استفاده از حساب دیفرانسیل می‌توان با تبحر زیاد و جامع، خواص مختلف تابع را مطالعه کرد و شکل نمودار را (از نظر صعودی، نزولی، تقعر، تحدب و ...) بیان نمود.

اغلب، بررسی توابع و رسم نمودار آنها مطابق مراحل زیر انجام می‌گیرد:

۱. حوزهٔ تعریف تابع را تعیین می کنیم.

۲. مشخص می‌کنیم که آیا تابع فرد، زوج یا متناوب است.

۳. پیوستگی تابع را مشخص کرده و نوع انفصال را معین می‌کنیم.

۴. مجانبهای نمودار تابع را می‌یابیم.

۵. نقاط اکسترمم را تعیین کرده و مقادیر تابع را دراین نقاط حساب می‌کنیم.

۶. نقاط عطف نمودار تابع را تعیین کرده مقادیر تابع و مشتق را دراین نقاط محاسبه می‌کنیم. فاصله های تقعر و تحدب نمودار تابع را مشخص می‌کنیم.

۷. با توجه به نتایج حاصل نمودار تابع را رسم می‌کنیم. اگر لازم باشد ناحیه های خاصی از منحنی را تعیین می‌کنیم و مختصات چند نقطهٔ اضافی (بویژه، محل تلاقی منحنی با محورهای مختصات) را که برای رسم منحنی مفید هستند پیدا می‌کنیم.

این روش یک روش کاملاً پیشنهادی است، می‌توان نمودار را به نحو دیگری هم رسم کرد. مثلاً به دانشجویان پیشنهاد می‌شود که بعد از تعیین مجانبها، مبادرت به رسم نمودار نمایند، معمولاً قبل از این مرحله نقاط عطف مشخص می‌شوند. باید بخاطر داشت که در رسم نمودار، اساس کار، تعیین نقاط اکسترمم و مقادیر تابع در این نقاط، نقاط عطف و مجانبها می‌باشند.

۱ ـ ۱۱ ـ ۳ هریک از توابع زیر را بررسی کرده و سپس رسم کنید:

(a) $y=x^6-3x^4+3x^2-5;$ (b) $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1};$

(c) $y=\frac{2x^3}{x^2-4};$ (d) $y=\frac{1-x^3}{x^2};$

(e) $y=x+\ln(x^2-1);$ (f) $y=\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x;$

(g) $y = x^2 e^{1/x}$; (h) $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

حل ــ (a) تابع همه‌جا معین و پیوسته است، بنابراین منحنی آن مجانب قائم ندارد. چون $f(-x) = f(x)$ پس تابع زوج است. در نتیجه نمودار آن نسبت به محور y متقارن است و بنابراین کافی است تابع را در فاصلهٔ $[0, \infty)$ مطالعه نمائیم.

چون وقتی $x \to \infty$ تابع یک بینهایت بزرگ است پس مجانب مایل وجود ندارد. مشتق را حساب می‌کنیم:

$$y' = 6x^5 - 12x^3 + 6x = 6x(x^4 - 2x^2 + 1) = 6x(x^2 - 1)^2;$$

نقاط بحرانی عبارتند از

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

چون در فاصلهٔ $[0, \infty)$ ، $y' \geqslant 0$ پس تابع صعودی است. مشتق دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$y'' = 30x^4 - 36x^2 + 6 = 6(5x^4 - 6x^2 + 1)$$

ریشه های مشتق دوم عبارتند از

$$x_1 = 1/\sqrt{5}, \quad x_2 = 1.$$

نتایج حاصل از بررسی و نقاط مورد نیاز را تعیین و جدول زیررا مرتب می‌کنیم:

x	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right)$	1	$(1, \infty)$	2
y'	0	$+$	$\frac{96}{25\sqrt{5}} \approx 1.7$	$+$	0	$+$	
y''	6	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-5		-4.51		-4		23

با توجه به تقارن منحنی و جدول فوق نمودار تابع مطابق شکل ۵۱ رسم می‌شود. با توجه به نمودار ریشه‌های معادله $x = \pm a$ هستند که در آن $a \approx 1.6$

(b) تابع به ازای هر عدد حقیقی معین و همیشه پیوسته است، چون $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+1}$ پس همواره منفی است.

نمودار نه مجانب قائم دارد و نه مجانب مایل. مجانب افقی را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{(x+1)^2}} = 0$$

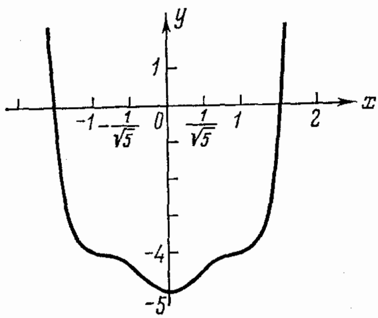
پس $y = 0$ مجانب افقی منحنی است. مشتق اول

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}$$

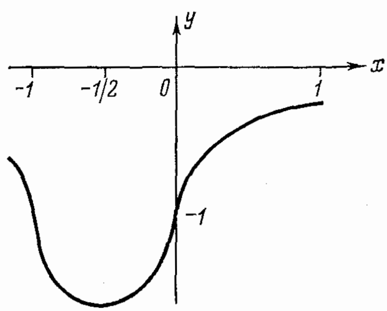
در $x_2 = -\frac{1}{2}$ صفر و در نقاط

$$x_1 = -1, \ x_3 = 0$$

بینهایت می‌شود.



شکل ۵۱



شکل ۵۲

مشتق دوم

$$y'' = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^5}} = -\frac{2\left[\sqrt[3]{(x+1)^5} - \sqrt[3]{x^5}\right]}{9\sqrt[3]{[x(x+1)]^5}}$$

به ازای جواب مشتق اول صفر نمی‌شود و در نقاط $x_1 = -1, \ x_3 = 0$ بینهایت است. جدول زیررا مرتب می‌کنیم:

x	-1	$\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$	0	$(0,\ \infty)$	1
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	∞	$+$	
y''	∞	$+$	$+\frac{16}{9\sqrt[3]{2}}$	$+$	∞	$-$	
y	-1		$-\sqrt[3]{4}$		-1		-0.26

به کمک این جدول و مجانب $y=0$ نمودار تابع مطابق شکل ۵۲ رسم می‌شود.

(c) تابع در تمام نقاط محور حقیقی بجز نقاط $x=\pm 2$ معین و پیوسته است. تابع فرد است، پس نمودارش نسبت به مبداء متقارن است، بنابراین کافیست آن را در فاصلهٔ $[0,\ \infty)$ بررسی کنیم.

خط $x=2$ مجانب قائم است زیرا:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2x^3}{x^2-4}=-\infty;\qquad \lim_{x\to 2+0}\frac{2x^3}{x^2-4}=+\infty.$$

مجانب مایل را تعیین می‌کنیم:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-4}=2,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x^2-4}=0.$$

خط $y=2x$ مجانب مایل است و

$$y-2x=\frac{8x}{x^2-4}\begin{cases}>0 & x>2,\\ <0 & x<2\end{cases}$$

مشتق اول

$$y'=\frac{6x^2\,(x^2-4)-4x^4}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^2\,(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

در فاصلهٔ $[0,\ \infty)$ در نقاط

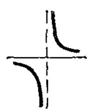
$$x=0,\ \ x=2\sqrt{3}\approx 3.46$$

صفر و در نقطهٔ $x=2$ بینهایت است.

مشتق دوم

$$y''=\frac{16x\,(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

در $x=0$ ، صفر و در $x=2$ بینهایت است. براساس نتایج حاصل جدول زیر تنظیم می‌شود:

x	0	$(0,\ 2)$	2	$(2,\ 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3},\ \infty)$
y'	-0	$-$	∞	$-$	0	$+$
y''	$+0$	$-$	∞	$+$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+$
y						

با توجه به جدول فوق، نمودار منحنی مطابق شکل ۵۳ رسم می‌شود.

(e) تابع به ازای تمام مقادیر x که $x^2-1>0$ یا $|x|>1$ یعنی، در دو فاصلهٔ $(-\infty,\ -1)$ و $(1,\ +\infty)$ ، معین و پیوسته است.

مجانب قائم را تعیین می کنیم:

$$\lim_{x\to-1-0} y=\lim_{x\to-1-0}\left[x+\ln(x^2-1)\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to1+0} y=\lim_{x\to1+0}\left[x+\ln(x^2-1)\right]=-\infty$$

پس منحنی دو مجانب قائم $x=+1$ و $x=-1$ را دارد.

مجانب مایل را تعیین می کنیم:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\ln(x^2-1)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\frac{\ln(x^2-1)}{x}\right]=1$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[y-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\ln(x^2-1)=+\infty$$

پس منحنی نه مجانب مایل دارد و نه مجانب افقی.

چون مشتق

$$y'=1+\frac{2x}{x^2-1}$$

در تمام حوزهٔ تعریف موجود و متناهی است، فقط ریشه‌های مشتق یعنی

$$x_1=-1-\sqrt{2};\quad x_2=-1+\sqrt{2}$$

می‌توانند نقاط بحرانی باشند، در نقطهٔ $x_2=-1+\sqrt{2}$ تابع تعریف نشده است، پس، فقط نقطهٔ بحرانی $x_1=-1-\sqrt{2}$ متعلق به فاصلهٔ $(-\infty,\ -1)$ است. در فاصلهٔ $(1,\ \infty)$ $y'>0$ و درنتیجه تابع صعودی است.

مشتق دوم

$$y''=-\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}<0$$

است پس منحنی همه‌جا محدب است و در نقطهٔ

$$x_1=-1-\sqrt{2}\approx-2.41$$

تابع مینیمم

$$y(-1-\sqrt{2})\approx-1-\sqrt{2}+\ln(2+2\sqrt{2})\approx-0.84$$

را دارد. برای رسم نمودار تابع، نقاط اضافی

$$x=2;\ y=2+\ln 3\approx 3.10 \quad \text{و} \quad x=1.2;\ y=1.2+\ln 0.44\approx 0.38$$

را درنظر می‌گیریم. نمودار تابع در شکل ۵٤ رسم شده است.

(f) تابع همه‌جا معین و پیوسته است و دورهٔ تناوب 2π را دارد. بنابراین آنرا در فاصلهٔ $[0,\ 2\pi]$ بررسی می‌کنیم. براساس پیوستگی و متناوب بودن، منحنی هیچ نوع مجانب ندارد.

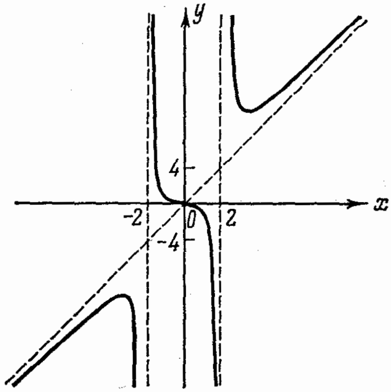
مشتق اول

$$y'=\cos 2x-\sin x$$

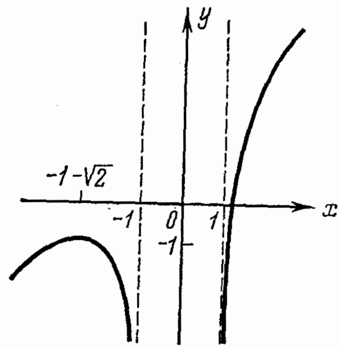
در فاصلهٔ $[0,\ 2\pi]$ سه ریشهٔ

$$x_1=\frac{\pi}{6},\ x_2=\frac{5\pi}{6},\ x_3=\frac{3\pi}{2}$$

دارد



شکل (۵۳



شکل (۵٤

مشتق دوم

$$y'' = -2\sin 2x - \cos x$$

در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ چهار ریشهٔ

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \pi + \arcsin(1/4), \quad x_3 = \frac{3\pi}{2}, \quad x_4 = 2\pi - \arcsin(1/4)$$

را دارد.

جدول نتایج بررسی را در تمام ریشه‌های مشتقات اول و دوم تنظیم می‌کنیم. جدول شامل نقاط انتهائی فاصله $[0, 2\pi]$ نیز است.

چون در فاصلهٔ $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ریشه‌های مشتقات اول و دوم یکی نیستند، علامت مشتق دوم فقط درسه فاصلهٔ آخری مشخص شده است.

به کمک جدول و اطلاعات حاصل از بررسیها نمودار منحنی در شکل ۵۵ رسم شده است.

(g) تابع درهریک از فاصله‌های $(0, \infty)$ و $(-\infty, 0)$، معین، مثبت و پیوسته است. نقطهٔ $x = 0$ نقطهٔ انفصال تابع است. چون (مسئلهٔ **۲ـ۲ـ۳** را ببینید)

$$\lim_{x \to +0} y = \lim_{x \to +0} x^2 e^{1/x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^2} = \infty \quad \left(t = \frac{1}{x}\right)$$

خط $x = 0$ مجانب قائم است. ولی

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} x^2 e^{1/x} = 0$$

چون تـابع $y = x^2 e^{1/x}$ وقتی $x \to \pm\infty$ نسبت به x بینهایت کـوچک مرتبهٔ دوم است، پس مجانب مایل وجود ندارد.

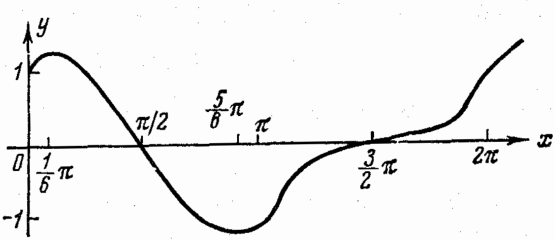
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	x_2	$\left(x_2, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2}, x_4\right)$	x_4	$(x_4, 2\pi)$	2π
y'		0	-2	0	$1\frac{1}{8}$		0		$1\frac{1}{8}$		
y''		$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{15}}{16}$		0		$\frac{3\sqrt{15}}{16}$		1

اکسترمم تابع را تعیین می‌کنیم، برای این منظور مشتق اول را حساب می‌کنیم:

$$y' = 2xe^{1/x} - e^{1/x} = 2e^{1/x}(x - 1/2)$$

ازآنجا معلوم می‌شود که فقط $x = \frac{1}{2}$ نقطهٔ بحرانی است. چون به ازای $x \neq 0$

$$y''(x) = 2e^{1/x} - \frac{2}{x} e^{1/x} + \frac{1}{x^2} e^{1/x} = \frac{1}{x^2} e^{1/x}(2x^2 - 2x + 1) > 0$$



شکل ۵۵

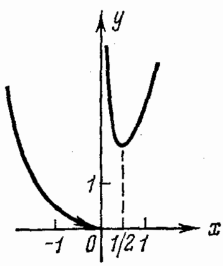
پس درتمام فاصله‌های حوزه تعریف، منحنی مقعراست و درنقطهٔ $x = 1/_2$ تابع مینیمم

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} e^2 \approx 1.87$$

را دارد. برای اینکه نمودار در فاصله های $(^1/_2,\ \infty)$ و $(-\infty,\ 0)$ به طور صحیح رسم شود نقاط اضافی

$$x=-1, \quad y=e^{-1}\approx 0.37; \quad x=1$$
$$y=e\approx 2.72.$$

حساب شده است. با استفاده از نتایج حاصل از بررسی، نمودار تابع مطابق شکل ۵۶ رسم می‌شود.



شکل ۵۶

(h) چون به ازای هر x

$$\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right|\leqslant 1$$

پس تابع همه‌جا معین و نیز پیوسته است. چون تابع زوج است تابع را در فاصلهٔ $x\geqslant 0$ مطالعه می‌کنیم.

چون تابع همواره پیوسته است پس مجانب قائم ندارد، ولی مجانب افقی دارد:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$$

مشتق اول

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}\times\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2|x|}\times\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

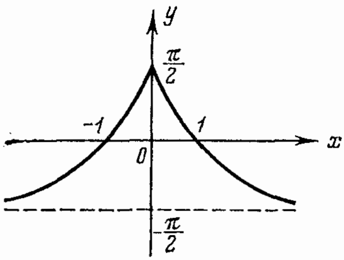
وقتی $x>0$ منفی است، بنابراین تابع نزولی است. مشتق در $x=0$ وجود ندارد. چون منحنی نسبت به محور y متقارن است، نمودار ماکزیمم

$$y(0)=\frac{\pi}{2}$$

را دارد. توجه داریم که در نقطهٔ $x=0$ مشتق راست برابر ۱- و مشتق چپ ۱+ است.
مشتق دوم

$$y''(x)=2\,\frac{2(1+x^2)\,2x}{(1+x^2)^4}=\frac{8x}{(1+x^2)^3}>0 \qquad x>0$$

به ازای هر$0<x$، مثبت است. پس در فاصلهٔ $(0,\infty)$ منحنی مقعر است. باتوجه به نتیجه بررسیها و هم اینکه منحنی محور x ها را در نقاط$x=\pm 1$قطع می‌کند، آنرا مطابق شکل ۵۷ رسم می‌کنیم.



شکل ۵۷

۲ ـ ۱۱ ـ ۳ هریک از توابع زیر را بررسی و سپس رسم نمائید:

$$\text{(a)}\ \ y=1+x^2-\frac{x^4}{2};\ \ \text{(b)}\ \ y=\frac{x^4}{(1+x)^3};$$

$$\text{(c)}\ \ y=\frac{1}{x}+4x^2;\ \ \text{(d)}\ \ y=\frac{x^3}{x^2-1};$$

$$\text{(e)}\ \ y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-4};$$

$$\text{(f)}\ \ y=x^2\ln(x+2);\ \ \text{(g)}\ \ y=x^3e^{-4x};$$

$$\text{(h)}\ \ y=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x} & x\neq 0,\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

جواب: (a) تابع زوج و همه‌جا معین است. نمودارش نسبت به محور y ها متقارن است و مجانب ندارد. تابع دارای مینیمم $y(0)=1$ و ماکزیمم

$$y(1)=y(-1)=\frac{3}{2}$$

است. نقاط عطف عبارتند از $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{23}{18}\right)$

(b) تابع در فاصله‌های $(-1,\ +\infty)$ و $(-\infty,\ -1)$ معین است. دارای مجانب

قائم $x=-1$ و مجانب مایل $y=x-3$ است. تابع مینیمم $y(0)=0$ و ماکزیمم $y(-4)=-\frac{256}{27}$ دارد. نقاط عطف $\left(-6,\ -\frac{3296}{125}\right)$ و $\left(2,\ \frac{16}{27}\right)$ هستند.

(c) تابع در فاصله‌های $(-\infty,\ 0)$ و $(0,\ +\infty)$ معین است مجانب قائم $x=0$ است. مینیمم $y\left(\frac{1}{2}\right)=3$ دارد، نقطهٔ عطف $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2},\ 0\right)$ است.

(d) تابع در فاصله‌های $(-\infty,\ -1)$ ، $(-1,\ 1)$ و $(1,\ \infty)$ معین و فرد است. نمودار نسبت به مبداء برمتقارن است و دو مجانب قائم $x=\pm 1$ و یک مجانب مایل $y=x$ دارد. تابع مینیمم $y(\sqrt{3})=+3\frac{\sqrt{3}}{2}$ و ماکزیمم $y(-\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ دارد. و (۰، ۰) نقطهٔ عطف است.

(e) تابع زوج و همه جا معین است. نمودارش نسبت به محور y ها متقارن است و مجانب افقی $y=0$ دارد. دارای مینیمم $y(0)=\sqrt[3]{4}$ و ماکزیمم $y(\pm\sqrt{2})=2\sqrt[3]{2}$ است. $(\pm 2,\ \sqrt[3]{4})$ نقاط عطف هستند.

(f) تابع در فاصلهٔ $(-2,\ +\infty)$ معین است. $x=-2$ مجانب قائم است. $y(0)=0$ مقدار مینیمم، $y(-0.73)\approx 0.12$ ماکزیمم است. $(-0.37;\ 0.075)$ نقطهٔ عطف است.

(g) تابع همه‌جا معین است. وقتی $x\to+\infty$ خط $y=0$ مجانب افقی است. $y\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4e}\right)^3$ ماکزیمم تابع است. نقاط عطف عبارتند از:

$$\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4},\ \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)^3 e^{\sqrt{3}-3}\right),\ \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4},\ \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)^3 e^{-3-\sqrt{3}}\right);\ (0,\ 0)$$

(h) تابع همه‌جا معین و پیوسته است. $y=1$ مجانب افقی است. $y(0)=0$ مینیمم و (۰، ۰) نقطهٔ گوشهٔ نمودار است:

$$y'_-(0)=-\frac{\pi}{2},\ y'_+(0)=+\frac{\pi}{2}$$

۱۲ ـ ۳ حل تقریبی معادلات جبری و غیر جبری

محاسبهٔ تقریبی ریشه‌های حقیقی منفرد معادله $f(x)=0$ معمولاً در دو مرحله انجام می‌گیرد:

(۱) جداسازی ریشه‌ها، یعنی تعیین فاصله‌هائی مانند $[\alpha,\ \beta]$ که دارای یک و فقط یک ریشهٔ حقیقی معادله است.

(۲) تعیین ریشه‌ها، یعنی، محاسبهٔ آنها با درجهٔ دقت مطلوب.

روند جداسازی ریشه‌ها با تعیین علامت تابع $f(x)$ درنقاط

$$x=\alpha_1,\ \alpha_2\ \ldots,$$

شروع می‌شود، این نقاط باتوجه به ویژگیهای تابع انتخاب می‌شوند.

اگر $f(\alpha_k)f(\alpha_{k+1})<0$ باتوجه به پیوستگی تابع، ریشه‌ای از معادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ $(\alpha_k,\ \alpha_{k+1})$ قرار دارد.

ریشه‌های حقیقی یک معادله را می‌توان با رسم نمودار $y=f(x)$ و تعیین نقاط تلاقی آن با محور x ها محاسبه کرد. اگر معادله‌ای ریشه‌های نزدیک بهم نداشته باشد، دراینصورت به وسیلهٔ این روش، به آسانی ریشه‌ها از هم جدا می‌شوند. بویژه، اغلب تعویض معادلهٔ مفروض با معادلهٔ معادلش مانند

$$\psi_1(x)=\psi_2(x)$$

خیلی مفید است که درآن $\psi_1(x)$ و $\psi_2(x)$ ساده‌تر از $f(x)$ هستند. نمودار هردو تابع را رسم می‌کنیم طول نقاط تلاقی منحنیها، ریشه‌های مورد نظر می‌باشند.

روشهای تقریب زدن یک ریشه

۱. روش وترها

اگر فاصلهٔ $[a,\ b]$ فقط شامل یک ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $f(x)=0$ باشد و تابع دراین فاصله پیوسته باشد، آنگاه x_1، اولین تقریب ریشه از دستور

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$$

به‌دست می‌آید.

دومین تقریب، x_2 از دستور مشابه فوق حاصل می‌شود که درفاصلهٔ $[a,\ x_1]$ یا درفاصلهٔ $[x_1,\ b]$ به کاربرده می‌شود به شرط اینکه علامت مقادیر تابع $f(x)$ درنقاط انتهائی این فاصله یکی نباشند. این روند را تا حصول دقت مورد نظر ادامه می‌دهیم.

۲. روش مماسها (روش نیوتن)

اگر $f(a)f(b)<0$ و $f'(x)$ و $f''(x)$ درفاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ مخالف صفرباشند و علامت هردو دراین فاصله تغییر نکند، وآنگاه محاسبه را از تقریب اولیه $x_0\ (x_0\in[a,\ b])$ که درآن $f(x_0)\ f''(x_0)>0$ شروع و تقریبهای پی درپی را تا ریشهٔ مطلوب مانند ξ براساس فرمولهای زیر ادامه می‌دهیم:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad \ldots, \quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

می‌توان از فرمول عمومی زیر برای برآورد خطای قدر مطلق تقریب n ام استفاده کرد:

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$

که درآن

$$m_1 = \min_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$$

تحت شرایط فوق، تعیین مقدار تقریبی ریشه‌ها، به وسیلهٔ روش وترها و روش مماسها، دوراه متفاوت است. معمولاً در عمل، از ترکیب هردو روش استفاده می‌شود، یعنی، هردو طریقه را با هم بکار می‌برند. دراین حالت عمل محاسبه سریع و مقدار ریشه‌ها بادقت بیشتری به دست می‌آیند. به طور کلی، محاسبهٔ تقریبهای

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

را آنقدر باید ادامه دهیم تا به رقمهای اعشاری مورد نظر برسیم یعنی تا به درجهٔ دقت از پیش تعیین شده دست یابیم. برای تقریبهای پی در پی میانی، یک یا دو رقم را برای حذف در نظر می‌گیریم.

۳. روش تکرار

معادلهٔ $f(x) = 0$ را تبدیل به $x = \varphi(x)$ می‌کنیم که درآن $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ که q مقداری ثابت است و $a \leqslant x \leqslant b$. محاسبه رابایک مقدار اولیه $x_0 \in [a, b]$ شروع می‌کنیم و تقریبهای متوالی را تاحصول ریشهٔ ξ با فرمولهای

$$x_1 = \varphi(x_0), \; x_2 = \varphi(x_1), \ldots, x_n = \varphi(x_{n-1})$$

ادامه می‌دهیم. خطای قدر مطلق تقریب n ام را می‌توان با فرمول زیر برآورد کرد:

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{q}{1-q} |x_{n-1} - x_n|,$$

وقتی که تقریبهای x_{n-1} و x_n دریک طرف ریشه قرار گرفته باشند،

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{q}{1+q} |x_{n-1} - x_n|$$

اگر تقریبهای x_{n-1} و x_n در دو طرف ریشه واقع شوند.

۱ - ۱۲ - ۳ فاصله‌هایی تعیین کنید که ریشه‌های

$$f(x) \equiv x^3 - 6x + 2 = 0$$

درآنجا واقع اند.

حل ــ جدول علامات $f(x)$ را در چند نقطهٔ دلخواه تنظیم می‌کنیم :

x	$f(x)$	x	$f(x)$
$-\infty$	$-$	1	$-$
-3	$-$	3	$+$
-1	$+$	$+\infty$	$+$
0	$+$		

از محتوای جدول نتیجه می‌شود که معادله سه ریشه دارد که هرکدام دریکی از فاصله های

$(-3,\ -1),\ (0,\ 1)$ و $(1,\ 3)$

قرار دارند.

۲ ـ ۱۲ ـ ۳ تعداد ریشه های حقیقی معادلهٔ

$$f(x) \equiv x + e^x = 0$$

را تعیین کنید.

حل ــ چون

$$f'(x) = 1 + e^x > 0;\ f(-\infty) = -\infty;\ f(+\infty) = +\infty$$

پس معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۳ ـ ۱۲ ـ ۳ یک مقدار تقریبی ریشه معادلهٔ

$$f(x) \equiv x^4 - x - 1 = 0$$

$\bar{x} = 1.22$ است. خطای قدر مطلق این ریشه را برآورد کنید.

حل ــ داریم

$$f(\bar{x}) = 2.2153 - 1.22 - 1 = -0.0047$$

چون به ازای $x = 1.23$

$$f(x) = 2.2888 - 1.23 - 1 = 0.0588$$

ریشه ξ درفاصلهٔ $(1.22,\ 1.23)$ واقع است. مشتق

$$f'(x) = 4x^3 - 1$$

صعودی یکنواخت است، بنابراین حداقل مقدار مشتق دراین فاصله برابر

$$m_1 = 4\times 1.22^3 - 1 = 4\times 1.816 - 1 = 6.264$$

است که از آنجا خطا را برآورد می‌کنیم:

$$|\bar{x} - \xi| \leqslant \frac{|f(\bar{x})|}{m_1} = \frac{0.0047}{6.264} \approx 0.00075 < 0.001.$$

۴ ـ ۱۲ ـ ۳ معادلهٔ

$$x\log x - 1 = 0$$

رابا رسم نمودار حل کنید.

حل ــ معادله را به‌صورت

$$\log x = \frac{1}{x}$$

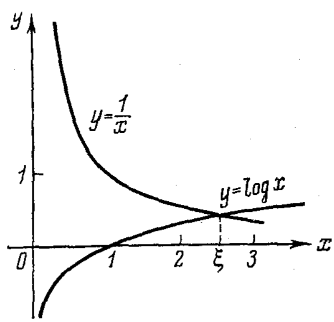
که درآن

$$\psi_1(x) = \log x, \quad \psi_2(x) = \frac{1}{x}$$

جدولهایی از مقادیر این توابع وجود دارند که رسم نمودارشانرا ساده می‌کند. نمودارهای $y = \frac{1}{x}$ و $y = \log x$ را مطابق شکل ۵۸ رسم می‌کنیم، مقدار تقریبی تنها ریشهٔ آن برابر

$$\xi \approx 2.5$$

است.



شکل ۵۸

۵ ـ ۱۲ ـ ۳ ریشهٔ حقیقی معادلهٔ

$$f(x) \equiv x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

را بادقت تا 10^{-4}حساب کنید.

(الف) با استفاده از روش وترها،

(ب) با استفاده از روش مماسها.

حل ــ نخست مشخص می‌کنیم که معادله فقط یک ریشه دارد. برای این منظور از آن مشتق می‌گیریم

$$f'(x)=3x^2-4x+3>0$$

چون

$$f(1)=-3<0,\quad f(2)=1>0$$

پس مشتق یک ریشه مثبت در فاصلهٔ (۲و۱) دارد.

(الف) از روش وترها استفاده می‌کنیم. اولین تقریب عبارتست از:

$$x_1=1-\frac{-3}{4}\cdot 1=1.75$$

چون

$$f(1.75)=-0.5156<0 \quad \text{و} \quad f(2)=1>0$$

پس

$$1.75<\xi<2$$

تقریب دوم را حساب می‌کنیم

$$x_2=1.75+\frac{0.5156}{1.5156}\cdot 0.25=1.75+0.0850=1.8350$$

چون $f(1.835)=-0.05059<0$ پس $1.835<\xi<2$.

دنبالهٔ تقریبها به کندی به ریشه نزدیک می‌شوند. سعی می‌کنیم فاصله را کم بکنیم، با توجه به اینکه قدر مطلق مقدار تابع در نقطهٔ $x_2=1.835$ از مقدار $f(2)$ کمتر است. داریم

$$f(1.9)=0.339>0$$

پس

$$1.835<\xi<1.9$$

روش وترها را در فاصلهٔ $(1.835,\ 1.9)$ به کار می‌بریم و تقریب جدیدی حاصل می‌شود:

$$x_3 = 1.835 - \frac{-0.05059}{0.339+0.05059} \cdot 0.065 = 1.8434$$

روش وترها را دوباره به کار می‌بریم و به تقریبهای زیر می‌رسیم:

$$x_4 = 1.8437, \quad x_5 = 1.8438$$

و چون

$$f(1.8437) < 0, \quad \text{و} \quad f(1.8438) > 0$$

پس ریشهٔ تقریبی با دقت 10^{-4} برابر است با $\xi \approx 1.8438$.

(ب) برای استفاده از روش مماسها، فرض می‌کنیم تقریب اولیه $x_0 = 2$ است، چون $f(2) = 1 > 0$ و در فاصلهٔ (۲و۱) داریم $f''(x) = 6x - 4 > 0$. همچنین علامت

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

در فاصلهٔ (۲و۱) ثابت است، پس می‌توان روش مماسها را به کار برد.

اولین تقریب:

$$x_1 = 2 - 1/7 = 1.857$$

دومین تقریب:

$$x_2 = 1.857 - \frac{f(1.857)}{f'(1.857)} = 1.857 - \frac{0.0779}{5.9275} = 1.8439$$

سومین تقریب:

$$x_3 = 1.8439 - \frac{f(1.8439)}{f'(1.8439)} = 1.8438$$

است که دقت مطلوب حاصل می‌شود. طوری که ملاحظه می‌شود، سرعت نزدیک شدن دنباله تقریبها به ریشهٔ مطلوب در روش مماسها از روش وترها بیشتر است، در روش مماسها، در تقریب سوم به دقت 10^{-6} می رسیم.

۳ـ۱۲ـ۶ با استفاده از روش نیوتن (روش مماسها) کوچکترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$\tan x = x$$

را با دقت 0.0001 بیابید.

جواب: 4.4934

۳ـ۱۲ـ۷ ریشهٔ حقیقی معادلهٔ

$$2 - x - \log x = 0$$

را با ترکیب روش وترها و روش مماسها بیابید.

حل ــ معادله را به صورت

$$f(x) = (2 - x) + (-\log x)$$

می‌نویسیم، که در آن تابع $f(x)$ به صورت مجموع دو تابع نزولی یکنواخت است که خودش هم نزولی می‌شود. درنتیجه، معادلهٔ مفروض فقط یک ریشه مانند ξ دارد.

بررسی مستقیم نشان می‌دهد که این ریشه در فاصلهٔ (۱و۲) واقع است. می‌توان این فاصله را باریکتر کرد:

$$1.6 < \xi < 1.8$$

زیرا

$$f(1.6) = 0.1959 > 0; \quad f(1.8) = -0.0553 < 0$$

پس

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{x}\log e; \quad f''(x) = \frac{1}{x^2}\log e$$

ودر فاصلهٔ $[1.6;\ 1.8]$:

$$f'(x) < 0; \quad f''(x) > 0$$

دراین فاصله روش وترها و روش مماسها را به کار می‌بریم، مقدار اولیه را $x_0 = 1.6$ درنظر می‌گیریم اولین تقریبها حاصل می‌شود:

$$x_1 = 1.6 - \frac{(1.8 - 1.6)\, f(1.6)}{f(1.8) - f(1.6)} = 1.6 + 0.1559 = 1.7559$$

$$x_1' = 1.6 - \frac{f(1.6)}{f'(1.6)} = 1.6 + 0.1540 = 1.7540.$$

هردو روش را در فاصلهٔ $[1.7540,\ 1.7559]$ به کار می‌بریم و دومین تقریبها را به دست می‌آوریم:

$$x_2 = 1.7559 - \frac{(1.7540 - 1.7559)\, f(1.7559)}{f(1.7540) - f(1.7559)} = 1.75558,$$

$$x_2' = 1.7540 - \frac{f(1.7540)}{f'(1.7540)} = 1.75557.$$

چون $x_2 - x_2' = 0.00001$ بنابراین ریشهٔ ξ بادقت 0.00001 به دست می‌آید.

۸ ـ ۱۲ ـ ۳ روش ترکیب را بکاربرده تمام ریشه‌های معادلهٔ

$$f(x) \equiv x^3 - 5x + 1 = 0$$

را تا سه رقم اعشار به دست آورید.

جواب: $x_1 = -2.330;\ x_2 = 0.202;\ x_3 = 2.128$

۹ ـ ۱۲ ـ ۳ با استفاده از روش تکرار، ریشه های حقیقی معادلهٔ

$$x - \sin x = 0.25$$

را تا سه رقم اعشار حساب کنید.

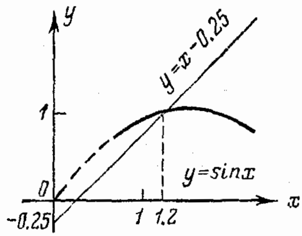
حل ــ معادله را به‌صورت

$$x - 0.25 = \sin x$$

نوشته و از روش نموداری استفاده می‌کنیم، معلوم می‌شود که معادله یک ریشه مانند ξ دارد که تقریباً برابر $x_0 = 1.2$ است (شکل ۵۹ را ببینید).

چون

$$\sin 1.1 = 0.8912 > 1.1 - 0.25,$$
$$\sin 1.3 = 0.9636 < 1.3 - 0.25,$$



شکل ۵۹

پس ξ در فاصلهٔ $(1.1,\ 1.3)$ واقع است. حال معادله را به‌صورت

$$x = \varphi(x) = \sin x + 0.25.$$

می‌نویسیم. چون قدر مطلق مقدار

$$\varphi'(x) = \cos x$$

در فاصلهٔ $(1.1,\ 1.3)$ از

$$\cos 1.1 < 0.46 < 1$$

بیشتر نیست، پس می‌توان روش تکرار را بکار برد. تقریبهای پی در پی را به کار می‌بریم:

$$x_n = \sin x_{n-1} + 0.25, \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

تقریب اولیه را $x_0 = 1.2$ درنظر می‌گیریم :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sin 1.2 \quad\; + 0.25 = 0.932 \;\; + 0.25 = 1.182;\\
x_2 &= \sin 1.182 \;\, + 0.25 = 0.925 \;\; + 0.25 = 1.175;\\
x_3 &= \sin 1.175 \;\, + 0.25 = 0.923 \;\; + 0.25 = 1.173;\\
x_4 &= \sin 1.173 \;\, + 0.25 = 0.9219 + 0.25 = 1.1719;\\
x_5 &= \sin 1.1719 + 0.25 = 0.9215 + 0.25 = 1.1715;\\
x_6 &= \sin 1.1715 + 0.25 = 0.9211 + 0.25 = 1.1711.
\end{aligned}$$

چون $q = 0.46$ پس $\frac{q}{1-q} < 1,$ ، ریشه تقریبی باسه رقم اعشار عبارتست از

$$\xi = 1.171$$

۱۰ـ۱۲ـ۳ به کمک روش تکرار، بزرگترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$x^3 + x = 1000$$

را تا چهار رقم اعشار به دست آورید .

حل ـــ باتوجه بـه معادله، تقریب اولیه را $x_0 = 10$ درنظر می‌گیریم . معادله را به صورت

$$x = 1000 - x^3$$

یا به صورت

$$x = \frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x}$$

ویا به صورت

$$x = \sqrt[3]{1000 - x}$$

وغیره می‌نویسیم . از توابعی کـه به ترتیب نـوشته شده است ، آخـری باصرفه‌تر اسـت ، فاصله اصلی را [۹،۱۰] انتخاب می‌کنیم

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$$

از آن مشتق می‌گیریم :

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}$$

قدر مطلق آن از $1/300$ بیشتر نیست:

$$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}} \approx \frac{1}{300} = q.$$

تقریبهای پی در پی x_n را به‌دست می‌آوریم:

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1000 - x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$x_0 = 10,$$
$$x_1 = \sqrt[3]{1000 - 10} = 9.96655,$$
$$x_2 = \sqrt[3]{1000 - 9.96655} = 9.96666,$$
$$x_3 = \sqrt[3]{1000 - 9.96666} = 9.96667.$$

مقدار تقریبی ریشه با دقت 10^{-4} برابر $\xi = 9.9667$ است.

توجه: در اینجا سرعت نسبی نزدیک شدن به ریشه، در روش تکرار مدیون انتخاب کوچکتر کمیت q است. در حالت کلی، هرچقدر q کوچکتر انتخاب شود، سرعت نزدیک شدن به ریشه در روش تکرار بیشتر است.

۱۱ ـ ۱۲ ـ ۳ به کمک روش وترها، ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$f(x) \equiv x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$$

را بادقت ۰/۰۰۰۵ حساب کنید.

جواب: ۰/۶۷۰۵

۱۲ ـ ۱۲ ـ ۳ با استفاده از روش وترها، مقادیر تقریبی ریشه های حقیقی معادلات زیر را بادقت ۰/۰۱ حساب کنید:

$$\text{(a)}\ (x-1)^2 - 2\sin x = 0; \quad \text{(b)}\ e^x - 2(1-x)^2 = 0$$

جواب: (a) 0.27; 2.25; (b) 0.21

۱۳ ـ ۱۲ ـ ۳ با استفاده از روش نیوتن، ریشه های مثبت معادلات زیر را با دقت 0.01 حساب کنید:

$$\text{(a)}\ x^3 + 50x - 60 = 0; \quad \text{(b)}\ x^3 + x - 32 = 0$$

جواب:

(a) 1.17; (b) 3.07

۱۴ ـ ۱۲ ـ ۳ روش ترکیب را به کار برده، مقدار ریشهٔ معادلهٔ

$$x^3 - x - 1 = 0$$

را در فاصلهٔ [۱،۲] با دقت ۰/۰۰۵ حساب کنید.

جواب: ۱/۳۲۵

۱۵ ـ ۱۲ ـ ۳ با استفاده از روش تکرار تمام ریشه‌های معادلهٔ

$$4x - 5 \ln x = 5$$

را تا چهار رقم اعشاری حساب کنید.

جواب: ۲/۲۸۰۵ و ۰/۵۸۹٦

راهنمایی: برای محاسبهٔ ریشهٔ کوچکتر با دقت بیشتری معادله را به‌صورت

$$x = e^{0.8x - 1}$$

و برای محاسبهٔ ریشه بزرگتر با دقت بیشتر، معادله را به‌صورت

$$x = 1.25 (1 + \ln x)$$

بنویسید.

۱۳ ـ ۳ چند مسئله اضافی

۱ ـ ۱۳ ـ ۳ آیا تابع

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 1/x & x \geqslant 1 \end{cases}$$

شرایط قضیهٔ لاگرانژ را دارد؟

جواب: خیر. **راهنمایی:** نشان دهید که در نقطهٔ $x = 1$ مشتق وجود ندارد.

$$f'_-(1) = 1; \; f'_+(1) = -1$$

۲ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید که عدد ξ در فرمول لاگرانژ برای تابع

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

در فاصلهٔ مفروض $[a, b]$ ، واسطهٔ حسابی اعداد a و b است، یعنی،

$$\xi = (a + b)/2$$

راهنمایی: درستی تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

۳ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید که اگر x_0 ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x = 0$$

باشد، آنگاه ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$na_0x^{n-1} + (n-1)\,a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$$

کمتر از x_0 است.

راهنمایی: در فاصلهٔ $[0,\ x_0]$ قضیهٔ رُل را برای تابع زیر به کار ببرید

$$f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}(x)$$

۳ ـ ۱۳ ـ ٤ ثابت کنید که معادلهٔ

$$x^4 - 4x - 1 = 0$$

دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

راهنمایی: نشان دهید که مشتق تابع یعنی

$$f'(x) = 4(x^3 - 1)$$

فقط یک ریشهٔ حقیقی $x=1$ دارد و آنگاه از قضیهٔ رُل استفاده کنید.

۳ ـ ۱۳ ـ ۵ ثابت کنید که معادلهٔ

$$f(x) = x^n + px + q$$

وقتی n زوج است بیشتر از دو ریشهٔ حقیقی، وقتی n فرد است بیشتر از سه ریشهٔ حقیقی ندارد.

راهنمایی: نشان دهید که

$$f'(x) = nx^{n-1} + p$$

وقتی n زوج است فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد، وقتی n فرد است بیشتر از دو ریشه حقیقی ندارد.

۳ ـ ۱۳ ـ ٦ ثابت کنید که تمام ریشه های مشتق چند جمله ای

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$$

حقیقی اند.

راهنمایی: مشتق، یک چند جمله ای از درجهٔ سوم است و سه ریشهٔ حقیقی دارد. از این حقیقت استفاده کنید که ریشه های مشتق بین ریشه های خود چند جمله ای واقع

است .

۷ ـ ۱۳ ـ ۳ اشتباه استدلال زیر را بیابید .

تابع

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & x\neq 0, \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

به ازای هر x ، مشتق دارد. بنا به قضیهٔ لاگرانژ

$$x^2\sin\frac{1}{x}=x\left(2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}\right)$$

که درآن

$$\cos\frac{1}{\xi}=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-x\sin\frac{1}{x}\quad (0<\xi<x)$$

وقتی x به صفر میـل می‌کند، ξ هم به صفر نزدیک می‌شود. حد طرفین را حساب می‌کنیم نتیجه می‌دهد :

$$\lim_{\xi\to 0}\cos(1/\xi)=0$$

درحالی که می‌دانیم

$$\lim_{x\to 0}\cos(1/x)$$

وجود ندارد .

راهنمایی : از درستی تساوی

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{\xi}=0\ \ (0<\xi<x)$$

که درآن ξ از قضیهٔ مقدار میانگین بدست آمده است ، نمی‌توان درستی رابطهٔ

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=0$$

را نتیجه گـرفت ، زیـرا نمی‌توان ادعا کرد که مـتغیر ξ شامل تمـام مقادیر داخلی همسایگی صفر وقتی $x\longrightarrow 0$ مـی‌باشد. بعلاوه ξ فـقط آن مقادیری از دنبـاله مقادیر E را می‌پذیرد که به ازای آنها

$$\lim\ \cos\frac{1}{\xi}=0\ \ (\xi\in E)$$

۸ ـ ۱۳ ـ ۳ اشتباه را در نتیجه گیری قضیه کوشی پیدا نمائید :

فرض می‌کنیم توابع $\varphi(x)$ و $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,\ b]$ در شرایط قضیهٔ کوشی صادق‌اند. در

نتیجه هرکدام از توابع در شرایط قضیه لاگرانژ هم صدق می‌کنند. پس می‌توان نوشت:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \qquad a<\xi<b,$$
$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a), \qquad a<\xi<b.$$

طرفین رابطهٔ اول را به طرفین رابطهٔ دوم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)(b-a)}{\varphi'(\xi)(b-a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

راهنمایی: اشتباه در اینجاست که در فرمول لاگرانژ عدد ξ برای توابع $\varphi(x)$ و $f(x)$ مساوی در نظر گرفته شده است.

۹ ـ ۱۳ ـ ۳ درستی نامساویهای زیر را ثابت کنید:

(a) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b} \qquad 0<b<a,$

(b) $py^{p-1}(x-y)\leqslant x^p-y^p\leqslant px^{p-1}(x-y) \qquad 0<y<x$ و $p>1$

راهنمایی: (a) فرمول لاگرانژ را در فاصلهٔ $[b, a]$ برای تابع $\ln x$ بنویسید، (b) فرمول لاگرانژ را در فاصلهٔ $[y, x]$ برای تابع z^p بنویسید.

۱۰ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید که تمام ریشه‌های چند جمله‌ای «چبیشف ـ لوگر»

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

مثبت است.

راهنمایی: بکمک فرمول لایبنیتز نشان دهید که علامت ضرایب این چند جمله‌ای تغییر می‌کند، ضرایب جملاتی که در آنها توان x فرد است، منفی است. از آنجا نتیجه بگیرید که وقتی $x<0$، $L_n(x)>0$.

۱۱ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) تابع در فاصلهٔ $[x_0, x_n]$ معین و دراین فاصله مشتقات پیوسته تا مرتبهٔ $(n-1)$ دارد،

(۲) $f^{(n)}(x)$ در فاصلهٔ (x_0, x_n) پیوسته است،

(۳) $(x_0<x_1<\ldots<x_n)$ $f(x_0)=f(x_1)=\ldots=f(x_n)$

آنگاه در فاصلهٔ $[x_0, x_n]$ حداقل یک نقطه مانند ξ وجود دارد که

$$f^{(n)}(\xi)=0$$

راهنمایی: از قضیهٔ رُل استفاده کنید و نشان دهید که مشتق اول حداقل n ریشه و مشتق دوم حداقل $n-1$ ریشه و .... داخل $[x_0, x_n]$ دارند.

۱۲ ـ ۱۳ ـ ۳ حد نسبت توابع

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\infty}e^{-x}\frac{1+2\tan x}{1+\tan x}$$

وجود ندارد، زیرا عبارت $\frac{1+2\tan x}{1+\tan x}$ درنقاط

$$x_n=n\pi+\pi/2 \quad (n=0,\ 1,\ \ldots)$$

منفصل است، ولی همزمان حد نسبت مشتقها وجود دارد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[e^{-2x}(\cos x+2\sin x)]'}{[e^{-x}(\cos x+\sin x)]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5e^{-2x}\sin x}{-2e^{-x}\sin x}=\frac{5}{2}\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0$$

این تناقض را چگونه توجیه می‌کنید؟

راهنمایی: چون مشتقهای صورت و مخرج به ازای جوابهای $\sin x$ صفر می‌شوند (که آنها ضمن محاسبهٔ حد نسبت مشتقها حذف شده‌اند). پس دستور هوپیتال را نمی‌توان به کاربرد.

۱۳ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید که در فرمول تیلر (از درجهٔ اول)

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h)$$

که $f'''(x)$ در $x=a$ پیوسته و $f'''(a)\neq 0$، وقتی $h\to 0$، θ به $1/3$ میل می‌کند.

راهنمایی: فرمول تیلر را با باقیمانده R_2 بنویسید:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1 h)$$

این عبارت را با عبارت مسئله مقایسه کرده و تساوی زیر را نتیجه بگیرید:

$$\frac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{h}=\frac{1}{3}f'''(a+\theta_1 h)$$

و سپس حد طرفین را وقتی $h\to 0$ حساب کنید.

۱۴ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید که عدد e اصم است.

راهنمایی: از برهان خلف استفاده کنید. فرض کنید $e=\frac{p}{q}$ که p و q دو عدد طبیعی هستند و $p>q>1$ و فرمول تیلر را وقتی $n>p$ بنویسید

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta}\ (0<\theta<1)$$

طرفین را به $n!$ ضرب کنید و توجه داشته باشید که $\frac{p}{q}n!$ و $\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)n!$ اعداد صحیح مثبت هستند و

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta}<\frac{1}{n+1}\cdot\frac{p}{q}<1$$

و تناقض را از آن نتیجه بگیرید.

۱۵ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید تابع

$$f(x)=(\sin x)/x$$

در فاصلهٔ $0<x\leqslant\pi/2$ نزولی است. از این مطلب درستی نامساوی

$$2x/\pi<\sin x<x$$

را در فاصلهٔ $0<x<\pi/2$ نتیجه بگیرید و سپس آنرا تعبیر هندسی کنید.

راهنمایی: تحقیق کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x=0\end{cases}$$

در فاصلهٔ $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ پیوسته است و سپ ں نشان دهید که در داخل این فاصله $f'(x)<0$

۱۶ ـ ۱۳ ـ ۳ نشان دهید تابع

$$f(x)=x+\cos x-a$$

صعودی است و از آن نتیجه بگیرید که معادلهٔ

$$x+\cos x=a$$

وقتی $a<1$ هیچ ریشهٔ مثبتی ندارد و وقتی $a>1$ یک ریشهٔ مثبت دارد.

راهنمایی: نشان دهید $f'(x)\geqslant 0$ تحقیق کنید

$$f(0)=1-a\begin{cases}>0 & a<1,\\ <0 & a>1,\end{cases}$$

و از صعودی بودن تابع استفاده کنید.

۱۷ ـ ۱۳ ـ ۳ نشان دهید که معادلهٔ

$$xe^{x}=2$$

در فاصلهٔ (۱ ، ۰) فقط یک ریشهٔ مثبت دارد.

راهنمایی: نشان دهید که در فاصلهٔ (۱ ، ۰) تابع

$$f(x) = xe^x - 2$$

صعودی و علامت آن در نقاط انتهایی فاصله یکی نیست.

۱۸ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در هر فاصله شامل مبداء، یکنواخت نیست. نمودار آن را رسم کنید.

راهنمایی: نشان دهید

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

در نقاط

$$x = \frac{1}{(2n+1)\pi} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

برابر $\frac{3}{2}$ و در نقاط

$$x = \frac{1}{2n\pi}$$

برابر $-\frac{1}{2}$ است، یعنی مشتق در مجاورت یا همسایگی مبداء تغییر علامت می‌دهد.

۱۹ ـ ۱۳ ـ ۳ این قضیه را ثابت کنید:

اگر

(۱) $f(x)$ و $\varphi(x)$ در فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته و در داخل فاصله مشتق‌پذیر باشد،

(۲) $f(a) = \varphi(a)$

(۳) $f'(x) > \varphi'(x) \quad (a < x < b)$

آنگاه

$$f(x) > \varphi(x) \quad (a < x < b)$$

راهنمایی: تحقیق کنید که تابع کمکی

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$$

صعودی است.

۲۰ ـ ۱۳ ـ ۳ نشان که تابع

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

وقتی $ad-bc\neq 0$ نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم.

راهنمایی: تحقیق کنید که علامت مشتق در تمام نقاط حوزهٔ تعریف تابع، تغییر نمی‌کند در صورتیکه $ad-bc\neq 0$. ولی اگر $ad-bc=0$ یعنی $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ آنگاه تابع ثابت است.

۲۱ ـ ۱۳ ـ ۳ در سه جمله‌ای

$$x^2+px+q$$

ضرایب p و q را طوری تعیین کنید که در $x=3$ مینیممی برابر ۵ داشته باشد.

جواب: $p=-6,\quad q=14$

۲۲ ـ ۱۳ ـ ۳ وجود اکسترمم تابع

$$f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$$

را در نقطهٔ $x=x_0$ بررسی کنید، که درآن n عددی طبیعی و $\varphi(x)$ در $x=x_0$ پیوسته و $\varphi(x_0)\neq 0$ است.

جواب: اگر n زوج $\varphi(x_0)>0$ آنگاه $f(x_0)=0$ مینیمم است و اگر n زوج و $\varphi(x_0)<0$ آنگاه $f(x_0)=0$ ماکزیمم است. اگر n فرد باشد نقطهٔ x_0 اکسترمم نیست.

راهنمایی: وقتی n زوج است، علامت تابع در یک همسایگی معین x_0 در ارتباط با علامت $\varphi(x_0)$ ثابت است، یا از صفر خیلی بزرگتر و یا از صفر خیلی کوچکتر است. وقتی n فرد است علامت تابع در همسایگی معینی از x_0 تغییر می‌کند.

۲۳ ـ ۱۳ ـ ۳ تابع پیوسته

$$f(x)=\begin{cases}\left(2-\sin\frac{1}{x}\right)|x| & x\neq 0,\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

مفروض است. نشان دهید که $f(x)$ در $x=0$ مینیمم است. ولی در طرف چپ و یا طرف راست نقطهٔ $x=0$ یکنواخت نیست.

راهنمایی: وقتی $x\neq 0$ $f(x)>0$ پس $f(0)$ مینیمم است. وقتی $x>0$،

$$f'(x)=2-\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

در نقاط $x=\frac{1}{2\pi n}$ مثبت و در نقاط $x=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ منفی است. وقتی $x<0$ مشابه

چیزی که گفته شد، بررسی می‌شود.

۲۴ ـ ۱۳ ـ ۳ مطلوبست بیشترین و کمترین مقدار هریک از توابع زیر در فاصله‌های داده شده:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & y=|x| & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ \text{(b)} & y=E(x) & -2\leqslant x\leqslant 1. \end{array}$$

جواب: (a) 1 و 0; (b) 1 و -2

۲۵ ـ ۱۳ ـ ۳ آیا توابع زیر در فاصله های داده شده بیشترین و یا کمترین مقدار دارند؟

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & f(x)=\cos x & -\pi/2\leqslant x<\pi, \\ \text{(b)} & f(x)=\arcsin x & -1<x<1. \end{array}$$

جواب: (a) کمترین مقدار ندارد، بیشترین مقدار برابر ۱ است،

(b) کمترین و بیشترین مقدار ندارد.

۲۶ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید هرتابع پیوسته ای بین دو ماکزیمم (یابین دو مینیمم) یک مینیمم (یایک ماکزیمم) دارد.

۲۷ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید تابع

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin^2(1/x) & x\neq 0, \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

در $x_0=0$ مینیمم دارد (نه مینیمم اکید).

۲۸ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید اگر در نقطهٔ مینیمم مشتق راست موجود باشد، آنگاه این مشتق نامنفی است و اگر مشتق چپ داشته باشد، آنگاه این مشتق نامثبت است.

۲۹ ـ ۱۳ ـ ۳ نشان دهید که تابع

$$y=\begin{cases} 1/x^2 & (x>0), \\ 3x^2 & (x\leqslant 0) \end{cases}$$

در نقطه $x=0$ مینیمم است، با اینکه علامت مشتق در طرفین این نقطه تغییر نمی‌کند.

۳۰ ـ ۱۳ ـ ۳ فرض می‌کنیم x_0 طول نقطهٔ عطف منحنی $y=f(x)$ باشد. آیا x_0 می‌تواند طول نقطهٔ اکسترمم تابع $f'(x)$ باشد؟

جواب: بلی

راهنمایی: چون علامت $f''(x)$ در گذشتن از نقطهٔ x_0 تغییر می‌کند لذا دراین نقطه تابع $f'(x)$ اکسترمم دارد.

۳۱ ـ ۱۳ ـ ۳ نمودار تابع $y=f(x)$ را در همسایگی نقطهٔ $x=-1$ رسم کنید اگر

$$f(-1)=2,\ f'(-1)=-1,\ f''(-1)=0,\ f'''(x)>0$$

جواب: نمودار از نقطهٔ $M(-1,\ 2)$ می‌گذرد و دراین نقطه معادلهٔ خط مماس

$$y-2=-(x+1)$$

است. M یک نقطهٔ عطف است، در طرف چپ نقطه M، منحنی تقعر به پائین و در طرف راست تقعر به بالاست.

راهنمایی: تابع $f''(x)$ صعودی و علامت آن در گذشتن از $x=-1$ تغییر می‌کند.

۳۲ ـ ۱۳ ـ ۳ به ازای چه مقداری از پارامتر h در «منحنی احتمال»

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2} \qquad (h>0)$$

$x=\pm\sigma$ نقاط عطف است؟

جواب: $h=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2}}$

۳۳ ـ ۱۳ ـ ۳ نشان دهید هرتابعی که مشتق اول و دوم پیوسته داشته باشد بین دو نقطهٔ اکسترمم حداقل یک نقطهٔ عطف دارد.

راهنمایی: مطابق قضیهٔ رُل، بین دو ریشهٔ مشتق اول حداقل یک ریشهٔ مشتق دوم وجود دارد. که علامت مشتق دوم در گذشتن از یکی از ریشه ها تا ریشهٔ دوم تغییر می‌کند.

۳۴ ـ ۱۳ ـ ۳ تابع

$$y=x^4+8x^3+18x^2+8$$

را به عنوان مثال در نظر بگیرید و نشان دهید که ممکن است بین نقاط عطف، نقاط اکسترمم وجود نداشته باشد.

۳۵ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید هر چند جمله‌ای با ضرایب مثبت که تابعی زوج باشد، همه‌جا مقعر بوده و فقط یک نقطهٔ مینیمم دارد.

راهنمایی: چنین چند جمله‌ای به صورت

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-2}+\ldots+a_{n-1}x^2+a_n$$

است. این چند جمله‌ای با ضرایب مثبت هیچ ریشهٔ حقیقی ندارد.

۳۶ ـ ۱۳ ـ ۳ ثابت کنید که هر چند جمله‌ای از درجهٔ فرد $n\geqslant 3$ حداقل یک نقطهٔ عطف دارد.

راهنمایی: از این حقیقت استفاده کنید که یک چند جمله با درجهٔ فرد (که مشتق دوم آن نیز از درجه فرد است) حداقل یک ریشه حقیقی دارد و علامتش حداقل یکبار تغییر می‌کند.

۳۷ - ۱۳ - ۳ مستقیماً از تعریف استفاده کنید و نشان دهید که خط $y=2x+1$ یک مجانب منحنی

$$y=\frac{2x^4+x^3+1}{x^3}$$

است.

راهنمایی: عبارت

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^4+x^3+1}{x^3-2x-1}\right)$$

را حساب کنید.

ضمیمهٔ ۱

اعداد مختلط

قبل از اینکه به تعریف **اعداد مختلط** بپردازیم، نخست چند پرسش مطرح می شود آیا معادله $x^2+1=0$ ریشه‌ای حقیقی دارد؟ می دانیم هر نقطه ای روی محور حقیقی مؤید یک عدد حقیقی است حال سؤال می شود «نقطه ای که خارج محور حقیقی قرار دارد چه عددی را مشخص می کند؟» به این پرسشهای می توان در حوزه اعداد مختلط پاسخ داد.

تعریف. یک **عدد مختلط**[1] به صورت $a+bi$ تعریف می شود که در آن a و b دو عدد حقیقی اند و i را **واحد موهومی**[2] گویند که دارای خاصیت $i^2=-1$ است. اگر $z=a+bi$، آنگاه a را **قسمت حقیقی**[3] عدد z و b قسمت **موهومی**[4] آن گویند و به ترتیب $\operatorname{Re}\{z\}$ و $\operatorname{Im}\{z\}$ نشان می دهند. هر عدد مختلط را که می توان با z نشان داد **متغیر مختلط** گویند.

دو عدد مختلط $a+bi$ و $c+di$ را **مساوی** گویند اگر و فقط اگر $a=c$ و $b=d$ باشد. می توانیم مجموعه اعداد حقیقی را یک زیر مجموعه از مجموعه اعداد مختلط به حساب آوریم. چون هر گاه $b=0$، عدد مختلط یک **عدد حقیقی** است و اگر $a=0$، عدد $0+bi$ یا bi را یک عدد **موهومی محض** گویند. مثلاً $0+0i$ و $-3+0i$ اعداد حقیقی 0 و -3 را مشخص می کنند.

مزدوج مختلط یا ساده تر **مزدوج** عدد مختلط $a+bi$ را با $a-bi$ تعریف می کنند.

مزدوج عدد مختلط z را اغلب با $\bar{z}$ یا z^* نشان می دهند.

---

1. *complex number* 2. *imaginary unit* 3. *real part* 4. *imaginary part*

عملیات اساسی با اعداد مختلط

نمادهای عملیات با اعداد مختلط همان نمادهای عملیات جبری در اعداد حقیقی است که با درنظر گرفتن i^2 برابر ۱ــ انجام می گیرد. چهارعمل اصلی در اعداد مختلط به صورت زیر انجام می شود:

۱ . جمع

$$(a+bi)+(c+di) = a+bi+c+di = (a+c)+(b+d)i$$

۲ . تفریق

$$(a+bi)-(c+di) = a+bi-c-di = (a-c)+(b-d)i$$

۳ . ضرب

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

٤ . تقسیم

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}$$

$$= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

قدرمطلق یک عدد مختلط

قدرمطلق یا **مدول** عدد مختلط $a+bi$ به صورت

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

تعریف می شود

مثال :

$$|-4+2i| = \sqrt{(-4)^2+(2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

اگر $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$ اعداد مختلط باشند، خواص زیر برقرار است:

۱ــ $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ یا $|z_1 z_2 \cdots z_m| = |z_1||z_2|\cdots|z_m|$

۲ــ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ اگر $z_2 \neq 0$

۳ـ $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ یا

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_m| \leqq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_m|$$

۴ـ $|z_1 + z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$ یا $|z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$

مبانی اصول موضوعی دستگاه اعداد مختلط

از نقطه نظر منطقی تعریف عدد مختلط به صورت یک زوج مرتب (a, b) از اعداد حقیقی a و b معادل تعاریف فوق است. این تعاریف به قرار زیرند که در آنها هر یک از حروف یک عدد حقیقی می باشند:

الف: تساوی $(a, b) = (c, d)$ اگر و فقط اگر $a = c,\ b = d$

ب: جمع $(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$

ج: ضرب $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$

$$m(a, b) = (ma,\ mb)$$

از تعاریف فوق می توان نشان داد (مسئله **۱٤** را ببینید) که

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

که متناظر با $a + bi$ است که در آن i برابر (۰،۱) و دارای خاصیت

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$$

است و (۱،۰) متناظر به عدد حقیقی ۱ می باشد. زوج مرتب (۰،۰) نظیر عدد حقیقی ۰ است.

با توجه به تعاریف فوق می توان ثابت کرد که اگر z_1, z_2, z_3 متعلق به مجموعه S از اعداد مختلط باشند آنگاه

۱ $z_1 + z_2$ و $z_1 z_2$ متعلق به S هستند **قانون بسته بودن**

۲ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ **قانون جابجائی** درعمل جمع

۳ $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ **قانون انجمنی درعمل جمع**

٤ $z_1 z_2 = z_2 z_1$ **قانون جابجائی درعمل ضرب**

۵ $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ **قانون انجمنی در عمل ضرب**

٦ $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ قانون توزیعی

۷ $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1, \quad 1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1$

۰ را **واحد** (یا **عنصر خنثی**) در عمل جمع و ۱ را **واحد** (یا **عضو خنثی**) در عمل ضرب گویند.

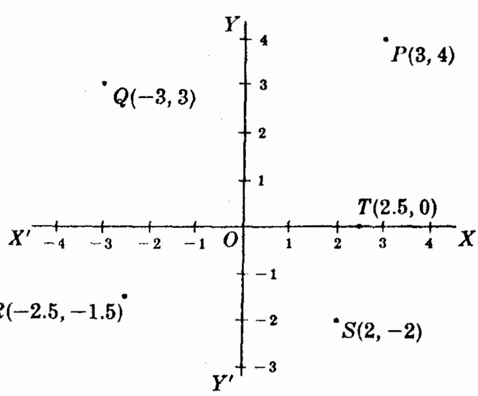
۸ ــ برای هر عدد مختلط z_1 عدد منحصر به فرد z از S وجود دارد به طوری که $z+z_1 = 0$ ، z را معکوس z_1 نسبت به عمل جمع گویند و با $-z_1$ نشان می دهند.

۹ــ به ازای هر $z_1 \neq 0$ عدد منحصر به فرد z از S وجود دارد به طوری که $z_1z = zz_1 = 1$ عدد z را **معکوس** z_1 نسبت به عمل ضرب گویند و با z_1^{-1} یا $1/z_1$ نشان می دهند.

در حالت کلی ، هر مجموعه مانند S را که اعضای آن در شرایط فوق صدق کنند یک **میدان** گویند.

نمایش نموداری اعداد مختلط

محورهای مختصات را مطابق شکل ۱ــ۱ در نظر می گیریم. هر نقطه را با توجه به زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی که **مختصات قائم** نامیده می شوند در صفحه مختصات مشخص می کنیم. به عنوان مثال نقاط P, Q, R, S و T که در شکل نموده شده‌اند



شکل ۱ــ۱

چون هر عدد مختلط $x + iy$ با زوج مرتب (x, y) نشان داده می شود لذا می توان آنرا در صفحه xy که **صفحهٔ مختلط** نامیده می شود به عنوان یک نقطه که **نمودار آرگاند** آن عدد خوانده می شود، نشان داده مثلاً عدد مختلطی را که P نمایش آن

است یا به صورت (۳،٤) یا $3+4i$ می نویسید. برای هر عدد مختلط یک و فقط یک نقطه از صفحه مختلط متناظر است، و برعکس هر نقطه از صفحه مختلط متناظر به یک عدد مختلط است. بهمین علت است که اغلب ترجیح می دهیم که به جای عدد مختلط z از **نقطه** z صحبت بکنیم. همین طور بجای محورهای x و y به ترتیب محورهای **حقیقی** و **موهومی** و به جای صفحه مختلط **صفحه** z را بکار ببریم. فاصله بین نقاط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ در صفحه مختلط، با رابطه

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

حساب می شود.

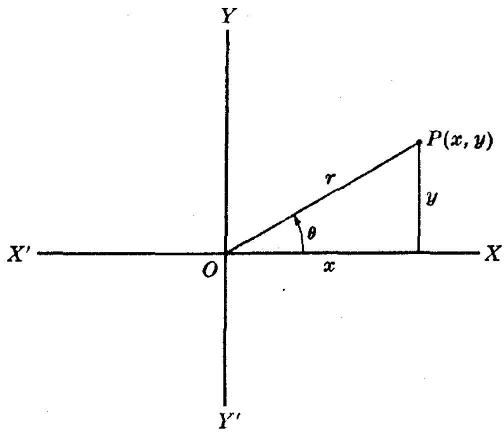
شکل مثلثاتی یا قطبی اعداد مختلط

اگر P نقطه‌ای از صفحه مختلط، متناظر به عدد مختلط (x, y) یا $x + iy$ باشد، آنگاه طبق شکل ۲ــ۱ داریم

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

که در آن

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy|$$



شکل ۲ــ۱

را **قدر مطلق** یا **مدول** عدد مختلط $z = x + iy$ گویند که با $mod\ z$ یا $|z|$ نشان

می دهند، و θ را **آرگومان** یا **فازعدد** $z = x+iy$ گویند و با $arg\ z$ نشان می دهند که زاویه بین OP با جهت مثبت محور x ها است. داریم :

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (۱)$$

که آنرا **شکل مثلثاتی** یا قطبی عدد مختلط گویند و r و θ را **مختصات قطبی** نامند. اغلب ترجیح می دهند که به جای $\cos\theta + i\sin\theta$ بنویسند $\mathrm{cis}\,\theta$.

برای هر عدد مختلط $z \neq 0$ فقط یک θ در فاصله $0 \leqq \theta < 2\pi$ متناظر است. حال آنکه فاصلهٔ دیگری به طول 2π مانند $-\pi < \theta \leqq \pi$ را نیز می توان بکار برد. هر کدام از فاصله ها را **دامنه** یا **حوزه اصلی** گویند و θ را که در آن فاصله قرار دارد **آرگومان اصلی** یا **مقدار اصلی** گویند.

قضیهٔ موآور

اگر

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{و}$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

می توانیم نشان دهیم (مسئله ۱۹ را ببینید) :

$$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \qquad (۲)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \qquad (۳)$$

از تعمیم (۲) داریم :

$$z_1z_2\cdots z_n = r_1r_2\cdots r_n\{\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\} \qquad (٤)$$

و اگر

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$$

داریم

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad (۵)$$

اغلب این رابطه را **قضیه موآور** گویند.

ریشه‌های اعداد مختلط

عدد مختلط w را یک ریشه n ام عدد مختلط z گویند اگر $w^n = z$ ، و می نویسند $w = z^{1/n}$ اگر n عددی صحیح و مثبت باشد می توان بکمک قضیهٔ موآور نشان داد که

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{1/n} \\ &= r^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (٦)$$

از اینجا نتیجه می شود که n مقدار مختلف، برای $z^{1/n}$ وجود دارد، یعنی z به شرط اینکه $z \neq 0$ ، n ریشهٔ n ام مختلف دارد.

فرمول اویلر

می‌دانیم که

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$$

اگر قرار دهیم $x = i\theta$ و نتیجه را مرتب کنیم

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad e = 2.71828\ldots \qquad (٧)$$

که این را **فرمول اویلر** گویند. در حالت کلی

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad (٨)$$

در حالت خاص که $y = 0$ ، e^x حاصل می شود از رابطه (٧) به راحتی قضیهٔ موآور بدست می آید:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

معادلات چند جمله ای

ما اغلب در صدد حل معادلات چند جمله ای به صورت

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad (٩)$$

هستیم که در آن $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ اعداد مختلط بوده و n که **درجهٔ** معادله است، عددی صحیح و مثبت می باشد. جوابهای این معادله را **صفرهای** چند جمله‌ای سمت چپ (۹) یا ریشه های معادله گویند.

قضیهٔ خیلی مهمی را که **قضیهٔ اساسی جبر** نامیده می شود، می گوید که هر معادله چند جمله‌ای به صورت (۹) حداقل یک ریشه مختلط دارد. با توجه به این قضیه می توان نشان داد که n ریشه مختلط وجود دارد که ممکن است بعضی یا همه آنها برابر باشند.

اگر $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ، $\mathbf{n}$ ریشهٔ (۹) باشند می توان نوشت:

$$a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) = 0 \qquad (۱۰)$$

که این را **شکل تجزیه شدهٔ** معادله چند جمله‌ای گویند. برعکس اگر بتوانیم (۹) را به صورت (۱۰) بنویسیم، براحتی می توان ریشه ها را تعیین کرد.

ریشه‌های n ام واحد

جوابهای معادلهٔ

$$z^n = 1$$

را که در آن n عددی صحیح و مثبت می باشد، **ریشه‌های n ام واحد** گویند که با صورت زیر می باشند

$$z = \cos 2k\pi/n + i\sin 2k\pi/n = e^{2k\pi i/n}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (۱۱)$$

اگر فرض کنیم

$$\omega = \cos 2\pi/n + i\sin 2\pi/n = e^{2\pi i/n}$$

n ریشهٔ معادله عبارتند از

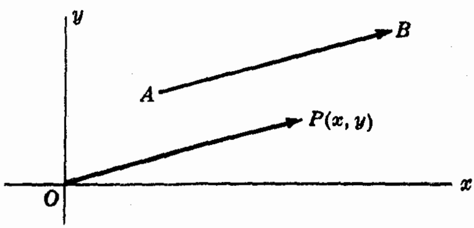
$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$$

از نقطه نظر هندسی، ریشه ها در رئوس یک n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع واحد و بمرکز مبداء مختصات، قرار دارند این را **دایرهٔ واحد** گویند که به معادل $|z| = 1$ می باشد.

تعبیر برداری اعداد مختلط

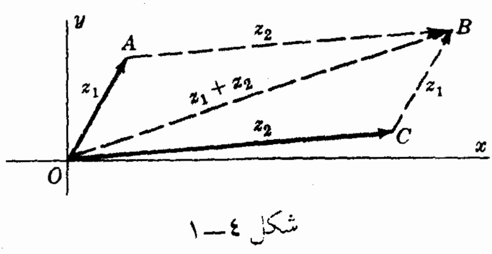
عدد مختلط $z = x + iy$ را می توان به عنوان برداری مانند OP در نظر گرفت که **ابتدای** آن O مبداء مختصات و **انتهای** آن P نقطهٔ (x, y) باشد. شکل ۳ــ۱ را ببینید. گاهی $OP = x + iy$ را **بردار وضعیت** P گویند. دو بردار مانند OP و AB که در شکل ۳ــ۱ نموده شده اند برابر گویند اگر ابتدای آنها یکی نباشد ولی دارای یک **جهت** بوده و اندازه های برابر داشته باشند. در این حالت می‌نویسیم :

$$OP = AB = x + iy$$



شکل ۳ــ۱

جمع اعداد مختلط همانند جمع بردارها با **قانون متوازی الاضلاعی** انجام می گیرد (شکل ٤ــ۱ را ببینید). پس برای جمع اعداد z_1 و z_2 متوازی الاضلاع $OABC$ را می سازیم که اضلاع OA و OC بترتیب متناظر به اعداد z_1 و z_2 می باشند. در این متوازی الاضلاع قطر OB متناظر $z_1 + z_2$ است (مسئله ۵ را ببینید).



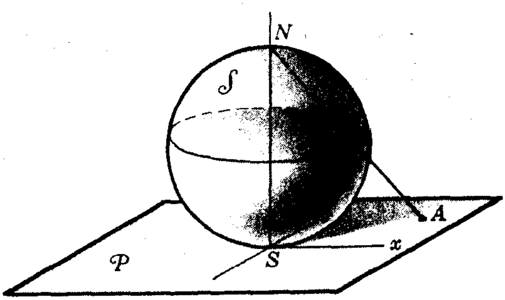
شکل ٤ــ۱

تعبیر کروی اعداد مختلط

تصویر کنجگاری [1]

صفحه مختلط $\mathcal{P}$ مفروض است که کره واحد $\mathcal{S}$ (کره‌ای به شعاع یک) در نقطه $z=0$ بر آن مماس است (شکل ۵ـ۱ را ببینید) قطر NS را که به $\mathcal{P}$ عمود است در نظر می گیریم، N و S را بترتیب **قطب‌های شمال** و **جنوب** $\mathcal{S}$ گویند به هر نقطهٔ A از $\mathcal{P}$ خطی مانند NA متناظر است که کره $\mathcal{S}$ را در نقطه A' قطع می کند. پس هر نقطه صفحه مختلط $\mathcal{P}$ نظیر یک و فقط یک نقطه کرهٔ $\mathcal{S}$ است، و می توانیم هر عدد مختلط را به عنوان نقطه‌ای روی کره در نظر بگیریم. N خودش، نظر «**نقطه بینهایت**» صفحه مختلط است. مجموعه تمام نقاط صفحهٔ مختلط به انضمام «نقطه بینهایت» را **صفحه مختلط کامل**، یا **صفحهٔ z کامل**، یا **صفحهٔ مختلط تعمیم یافته** گویند.

روش فوق را که صفحهٔ مختلط را روی کره می نگارد، **تصویر کنجگاری** گویند. کره را، گاهی **کرهٔ ریمان** نامند.



شکل ۵ـ۱

1. *stereographic projection*

ضرب داخلی و ضرب خارجی

دو عدد مختلط (یا دو بردار) $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ مفروضند.

ضرب داخلی (یا **ضرب عددی**) z_1 و z_2 به صورت زیر تعریف می شود:

$$z_1 \circ z_2 = |z_1|\,|z_2| \cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 = \operatorname{Re}\{\bar{z}_1 z_2\} = \tfrac{1}{2}\{\bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2\} \quad (۱۲)$$

که θ زاویه بین z_1 و z_2 است که بین ۰ و π قرار دارد.

ضرب خارجی (یا **ضرب برداری**) z_1 و z_2 به صورت زیر تعریف می شود:

$$z_1 \times z_2 = |z_1|\,|z_2| \sin\theta = x_1y_2 - y_1x_2 = \operatorname{Im}\{\bar{z}_1 z_2\} = \frac{1}{2i}\{\bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2\} \quad (۱۳)$$

با توجه به روابط فوق داریم:

$$\bar{z}_1 z_2 = (z_1 \circ z_2) + i(z_1 \times z_2) = |z_1|\,|z_2|\, e^{i\theta} \quad (۱٤)$$

اگر z_1 و z_2 مخالف صفر باشند، آنگاه

(۱) شرط لازم و کافی برای اینکه z_1 و z_2 بر همدیگر **عمود** باشند آن است که

$$z_1 \circ z_2 = 0$$

(۲) شرط لازم و کافی براینکه z_1 و z_2 **موازی** باشند آن است که

$$z_1 \times z_2 = 0$$

(۳) طول تصویر z_1 روی z_2 برابر است با

$$|z_1 \circ z_2| / |z_2|$$

(٤) مساحت متوازی الاضلاعی به اضلاع z_1 و z_2 برابر است با

$$|z_1 \times z_2|$$

مختصات مزدوج مختلط[1]

هر نقطه را میتوان بوسیله مختصات قائم (x, y) یا مختصات قطبی (r, θ) در صفحه مختلط مشخص کرد. روشهای دیگری نیر برای این منظور وجود دارند، یکی از آن روشها استفاده از روابط زیر است:

$$x = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

که در آن $z = x + iy$ مختصات $(z, \bar{z})$ را که مشخص کنندهٔ نقطه‌ای هستند، **مختصات مزدوج مختلط** یا ساده‌تر **مختصات مزدوج** گویند (مسائل **۴۳** و **۴۴** را ببینید).

مسائل حل شده

عملیات اساسی با اعداد مختلط

۱. هریک ازعملیات زیر را انجام دهید:

$$(a) \quad (3 + 2i) + (-7 - i) = 3 - 7 + 2i - i = -4 + i$$
$$(b) \quad (-7 - i) + (3 + 2i) = -7 + 3 - i + 2i = -4 + i$$

نتایج (a) و (b) **قانون جابجائی درجمع** را نشان می‌دهد

$$(c) \quad (8 - 6i) - (2i - 7) = 8 - 6i - 2i + 7 = 15 - 8i$$

$$(d) \quad (5 + 3i) + \{(-1 + 2i) + (7 - 5i)\} = (5 + 3i) + \{-1 + 2i + 7 - 5i\} = (5 + 3i) + (6 - 3i) = 11$$

$$(e) \quad \{(5 + 3i) + (-1 + 2i)\} + (7 - 5i) = \{5 + 3i - 1 + 2i\} + (7 - 5i) = (4 + 5i) + (7 - 5i) = 11$$

نتایج (d) و (e) **قانون انجمنی را درعمل جمع** نشان می دهند.

$$(f) \quad (2 - 3i)(4 + 2i) = 2(4 + 2i) - 3i(4 + 2i) = 8 + 4i - 12i - 6i^2 = 8 + 4i - 12i + 6 = 14 - 8i$$

۱- *complex conjugate coordinates*

$$(g)\quad (4+2i)(2-3i) = 4(2-3i)+2i(2-3i) = 8-12i+4i-6i^2 =$$
$$= 8-12i+4i+6 = 14-8i$$

نتایج (f) و (g) **قانون جابجائی را در عمل ضرب** نشان می دهند.

$$(h)\quad (2-i)\{(-3+2i)(5-4i)\} = (2-i)\{-15+12i+10i-8i^2\}$$
$$= (2-i)(-7+22i) = -14+44i+7i-22i^2 = 8+51i$$

$$(i)\quad \{(2-i)(-3+2i)\}(5-4i) = \{-6+4i+3i-2i^2\}(5-4i)$$
$$= (-4+7i)(5-4i) = -20+16i+35i-28i^2 = 8+51i$$

نتایج (h) و (i) **قانون انجمنی را در عمل ضرب** نشان می دهند.

$$(j)\quad (-1+2i)\{(7-5i)+(-3+4i)\} = (-1+2i)(4-i)$$
$$= -4+i+8i-2i^2 = -2+9i$$

روش دیگر

$$\begin{aligned}(-1+2i)\{(7-5i)+(-3+4i)\} &= (-1+2i)(7-5i)+(-1+2i)(-3+4i)\\ &= \{-7+5i+14i-10i^2\}+\{3-4i-6i+8i^2\}\\ &= (3+19i)+(-5-10i) = -2+9i\end{aligned}$$

این مسئله، **قانون توزیعی** را نشان می دهد

$$(k)\quad \frac{3-2i}{-1+i} = \frac{3-2i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-3-3i+2i+2i^2}{1-i^2}$$
$$= \frac{-5-i}{2} = -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$$

روش دیگرــ بنابه تعریف، $(3-2i)/(-1+i)$ برابر عددی مانند $a+bi$ است که در آن a و b حقیقی هستند، به طوری که

$$(-1+i)(a+bi) = -a-b+(a-b)i = 3-2i.$$

پس

$$-a-b = 3,\quad a-b = -2$$

با حل معادلات حاصل داریم:

$$a = -5/2,\quad b = -1/2 \quad \text{یا} \quad a+bi = -5/2-i/2$$

$$(l)\quad \frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i} = \frac{5+5i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}+\frac{20}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}$$
$$= \frac{15+20i+15i+20i^2}{9-16i^2}+\frac{80-60i}{16-9i^2}$$

$$= \frac{-5+35i}{25} + \frac{80-60i}{25} = 3 - i$$

$$(m)\ \frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1} = \frac{3(i^2)^{15}-(i^2)^9 i}{2i-1} = \frac{3(-1)^{15}-(-1)^9 i}{-1+2i}$$

$$= \frac{-3+i}{-1+2i}\cdot\frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{3+6i-i-2i^2}{1-4i^2}$$

$$= \frac{5+5i}{5} = 1 + i$$

۲ اگر $z_1 = 2+i,\ z_2 = 3-2i$ و $z_3 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ هر یک از عبارات زیر را حساب کنید:

$$(a)\ |3z_1 - 4z_2| = |3(2+i) - 4(3-2i)| = |6+3i-12+8i|$$
$$= |-6+11i| = \sqrt{(-6)^2+(11)^2} = \sqrt{157}$$

$$(b)\ z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8 = (2+i)^3 - 3(2+i)^2 + 4(2+i) - 8$$
$$= \{(2)^3 + 3(2)^2(i) + 3(2)(i)^2 + i^3\} - 3(4+4i+i^2) + 8 + 4i - 8$$
$$= 8 + 12i - 6 - i - 12 - 12i + 3 + 8 + 4i - 8 = -7 + 3i$$

$$(c)\ (\bar{z}_3)^4 = \left(\overline{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = \left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\right]^2$$
$$= \left[\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2$$
$$= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(d)\ \left|\frac{2z_2+z_1-5-i}{2z_1-z_2+3-i}\right|^2 = \left|\frac{2(3-2i)+(2+i)-5-i}{2(2+i)-(3-2i)+3-i}\right|^2$$
$$= \left|\frac{3-4i}{4+3i}\right|^2 = \frac{|3-4i|^2}{|4+3i|^2} = \frac{(\sqrt{(3)^2+(-4)^2})^2}{(\sqrt{(4)^2+(3)^2})^2}$$
$$= 1$$

۳. اعداد حقیقی x و y را از معادله زیر تعیین کنید

$$3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$$

حل : معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$3x + 5y + i(2y - x) = 7 + 5i.$$

با مساوی قرار دادن مقادیر حقیقی و موهومی طرفین داریم:

$$3x + 5y = 7,\ 2y - x = 5$$

با حل دستگاه معادلات، جوابها بدست می آیند

$$x = -1, \; y = 2$$

٤. ثابت کنید:

$$(a)\quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad (b)\quad |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|.$$

حل. فرض کنید

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

بنابر این

$$\begin{aligned}(a)\quad \overline{z_1 + z_2} &= \overline{x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2} = \overline{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)} \\ &= x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 \\ &= \overline{x_1 + iy_1} + \overline{x_2 + iy_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\quad |z_1 z_2| &= |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| = |x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)| \\ &= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |z_1|\,|z_2|\end{aligned}$$

روش دیگر

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2\,|z_2|^2$$

یا

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

در اینجا از این حقیقت استفاده شده که مزدوج حاصلضرب دو عدد مختلط با حاصلضرب مزدوجهای آن دو عدد برابرند (مسئله ۵۵ را ببینید).

مسائل مربوط به نمایش نموداری و برداری اعداد مختلط

۵ اعمال زیر را هم به طور تحلیلی و هم به طور نموداری انجام دهید:

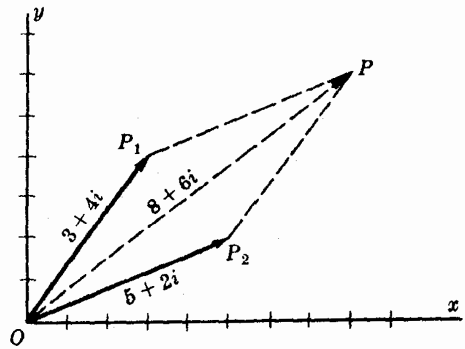
$$(a)\ (3 + 4i) + (5 + 2i), \quad (b)\ (6 - 2i) - (2 - 5i),$$
$$(c)\ (-3 + 5i) + (4 + 2i) + (5 - 3i) + (-4 - 6i).$$

حل (a) تحلیلی:

$$(3 + 4i) + (5 + 2i) = 3 + 5 + 4i + 2i = 8 + 6i$$

حل نموداری، دو عدد مختلط را به ترتیب با نقاط P_1 و P_2 نشان می دهیم که در

شکل ۶ــ۱ نموده شده اند ، متوازی الاضلاعی به اضلاع OP_1 و OP_2 را رسم می‌کنیم نقطهٔ P یعنی $8 + 6i$ نمایش مجموع دو عدد است. توجه کنید که مجموع دو بردار OP_1 و OP_2 **با قانون متوازی الاضلاعی**، بردار OP است. **به این دلیل**، معمولاً عدد مختلط $a + bi$ را به عنوان یک بردار با **مؤلفه‌های** a و b که بترتیب در جهت مثبت محورهای x و y می‌باشند، نشان می دهند.

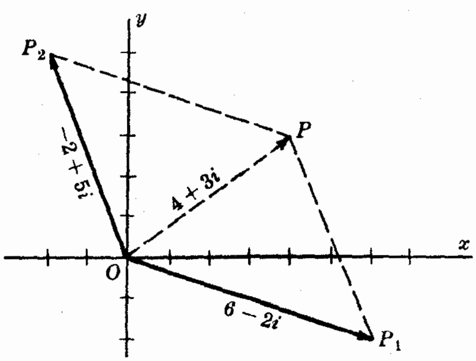


شکل ۶ــ۱

(b) تحلیلی :

$$(6 - 2i) - (2 - 5i) = 6 - 2 - 2i + 5i = 4 + 3i.$$

حل نموداری : $(6 - 2i) - (2 - 5i) = 6 - 2i + (-2 + 5i)$ حال اعداد $6 - 2i$ و $(-2 + 5i)$ را مثل قسمت (a) جمع می کنیم. نتیجه در شکل ۷ــ۱ با OP نشان داده شده است.



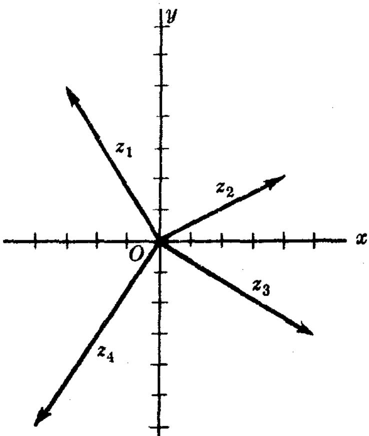
شکل ۷ــ۱

(c) تحلیلی :

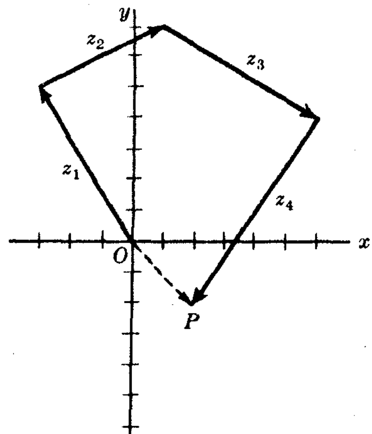
$$(-3+5i)+(4+2i)+(5-3i)+(-4-6i) = (-3+4+5-4)+$$
$$(5i+2i-3i-6i) = 2-2i$$

حل نموداری : اعداد مورد نظر را بترتیب با z_1, z_2, z_3, z_4 نشان دهیم. که نمودار آنها در شکل ۸ــ۱ نشان داده شده است. چگونگی عمل جمع این اعداد مطابق شکل ۹ــ۱ باین ترتیب است که از انتهای عدد z_1 ، z_2 را رسم می کنیم از انتهای z_2 مساوی عدد z_3 را می سازیم، وبالاخره z_4 را از انتهای z_3 رسم می کنیم معمولاً این مجموع را **برآیند** گویند که با بردار OP نشان داده شده است که از وصل ابتدای z_1 به انتهای z_4 بدست آمده است، یعنی

$$OP = z_1+z_2+z_3+z_4 = 2-2i$$



شکل ۸ــ۱



شکل ۹ــ۱

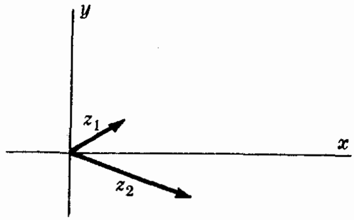
۶ . اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط (یا دو بردار) مفروض مطابق شکل ۱۰ــ۱ باشند، مطلوب است تعیین نمودار

$$(a)\ 3z_1-2z_2 \qquad (b)\ \tfrac{1}{2}z_2+\tfrac{5}{3}z_1$$

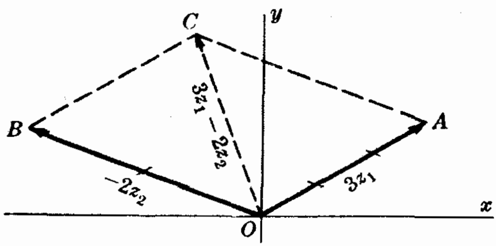
حل (a). در شکل ۱۱ــ۱ ، $OA = 3z_1$ برداری است که طول آن سه برابر طول بردار z_1 و در همان جهت است. $OB = -2z_2$ برداری است که طول آن دو برابر طول بردار z_2 و در جهت خلاف آن می باشد. پس

$$OC = OA+OB = 3z_1-2z_2$$

(b) بردار (یا عدد مختلط) مفروض با بردار OP در شکل ۱۲ـــ۱ نشان داده شده است .



شکل ۱۰ـــ۱



شکل ۱۱ـــ۱

۷ ثابت کنید :

$$(a)\ \ |z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|, \quad (b)\ \ |z_1 + z_2 + z_3| \leqq |z_1| + |z_2| + |z_3|,$$

$$(c)\ \ |z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$$

و سپس آن را تعبیر برداری نمائید .

حل . (a) **تحلیلی :** فرض کنید $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$. پس باید نشان دهیم :

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leqq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

دو طرف را به توان ۲ می رسانیم :

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leqq x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2$$

یعنی اگر

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leqq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$$

یا اگر (طرفین را دوباره به توان ۲ می رسانیم) :

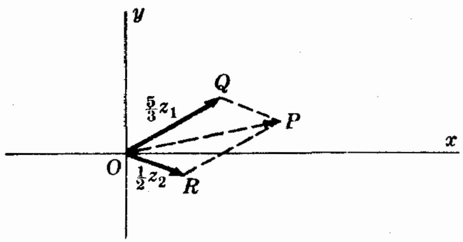
$$x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 \leqq x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2$$

یا

$$2x_1x_2y_1y_2 \leqq x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2$$

ولی این رابطه معادل است با :

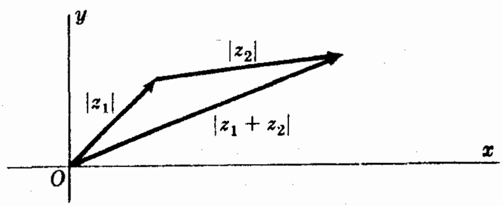
$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqq 0$$



شکل ۱۲ــ۱

که رابطه‌ای درست است. اگر این روابط را از آخر به اول تعقیب نمائیم درستی رابطه نتیجه می شود.

حل نموداری. نتیجه از این حقیقت ناشی می شود که $|z_1|, |z_2|, |z_1 + z_2|$ بترتیب طول اظلاع مثلثی است که در شکل ۱۳ــ۱ نشان داده شده است و مجموع دو ضلع مثلث از ضلع سوم کمتر یا مساوی با آن است.

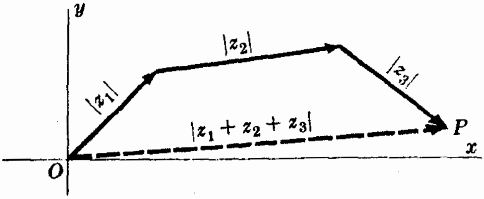


شکل ۱۳-۱

(b) **حل تحلیلی** : بنا به قسمت (a)

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 + (z_2 + z_3)| \leqq |z_1| + |z_2 + z_3| \leqq |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

حل نموداری : نتیجه ناشی از این حیقیقت هندسی است که در صفحه، کوتاهترین فاصله بین دونقطهٔ O و P خط راستی است که در شکل ۱۴ــ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱۴ــ۱

(c) **حل تحلیلی :** بنا به قسمت (a)

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqq |z_1 - z_2| + |z_2|.$$

پس

$$|z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$$

نتیجه مشابه از تبدیل z_2 به $-z_2$ در رابطه اخیر حاصل می شود :

$$|z_1 + z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$$

حل نموداری : نتیجه معادل این مطلب است که طول ضلع یک مثلث بزرگتر یا مساوی تفاضل طولهای دو ضلع دیگر است .

۸ فرض کنید بردار وضعیت نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بترتیب با z_1 و z_2 نموده شده باشند .

(a) بردار AB را به صورت یک عدد مختلط بنویسید .

(b) فاصله بین نقاط A و B را بیابید .

حل . (a) از شکل ۱۵ــ۱داریم

$$OA + AB = OB$$

یا

$$\begin{aligned} AB &= OB - OA = z_2 - z_1 \\ &= (x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1) \\ &= (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

(b) فاصله بین نقاط A و B برابر است با

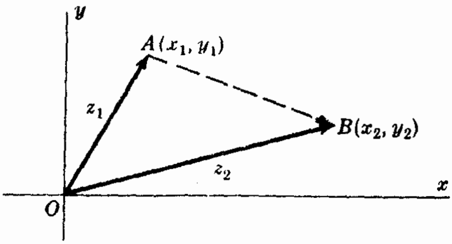
$$|AB| = |(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

۹ . اگر $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ نمایش دو بردار **غیر واقع در یک صفحه** یا **غیر موازی** باشند . اگر a و b دو عدد حقیقی (یا دواسکالر) باشند به طوری که

$$az_1 + bz_2 = 0$$

ثابت کنید

$$a = 0 \quad \text{و} \quad b = 0$$



شکل ۱۵ــ۱

حل . شرط مفروض $az_1 + bz_2 = 0$ ، معادل

$$a(x_1 + iy_1) + b(x_2 + iy_2) = 0$$

یا

$$ax_1 + bx_2 + i(ay_1 + by_2) = 0$$

میباشد پس

$$ax_1 + bx_2 = 0 \quad \text{و} \quad ay_1 + by_2 = 0.$$

جواب این معادله باهم ، با شرط

$$y_1/x_1 \neq y_2/x_2$$

برابر $a = 0, b = 0$ است که شرط اخیر مؤید این حقیقت است که بردارها در یک صفحه نیستند یا موازی نمی باشند

۱۰ . ثابت کنید اقطار متوازی الاضلاع منصف یکدیگرند .

حل . متوازی الاضلاع $OABC$ مفروض است که دو قطر در نقطه P متقاطعند شکل ۱۶ــ۱ را ببینید . چون

$$z_1 + AC = z_2, \ AC = z_2 - z_1$$

پس

$$AP = m(z_2 - z_1)$$

که در آن $0 \leqq m \leqq 1$. چون

$$OB = z_1 + z_2, \ OP = n(z_1 + z_2)$$

که در آن $0 \leqq n \leqq 1$. ولی

$$OA + AP = OP$$

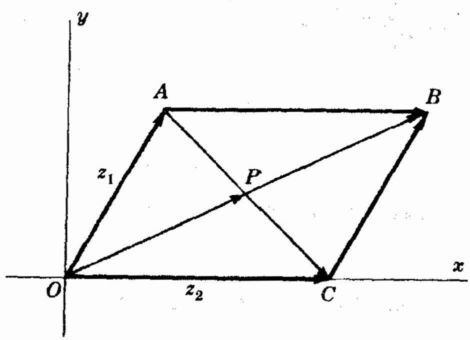
یعنی

$$z_1 + m(z_2 - z_1) = n(z_1 + z_2) \quad \text{یا} \quad (1 - m - n)z_1 + (m - n)z_2 = 0.$$

پس بنا به مسئله ۹

$$1 - m - n = 0, \; m - n = 0 \quad \text{یا} \quad m = \tfrac{1}{2}, \; n = \tfrac{1}{2}$$

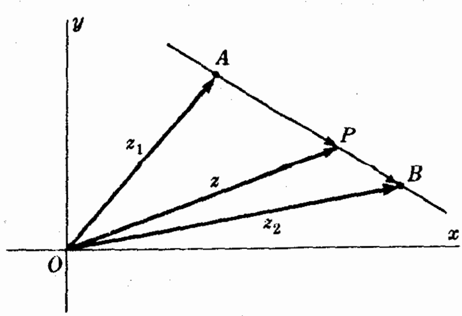
بنابراین P وسط دو قطر متوازی الاضلاع است.



شکل ۱۶ــ۱

۱۱ . معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می گذرد.

حل . فرض کنید $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ بترتیب بردار وضعیت نقاط A و B باشند. فرض کنید که $z = x + iy$ بردار وضعیت نقطه دلخواه P از خط واصل نقاط A و B باشد. از شکل ۱۷ــ۱ داریم:



شکل ۱۷ــ۱

$$AP = z - z_1 \text{ یعنی } z_1 + AP = z, \text{ یا } OA + AP = OP$$

$$AB = z_2 - z_1 \text{ یعنی } z_1 + AB = z_2, \text{ یا } OA + AB = OB$$

چون AB و AP **هم صفحه‌اند** (یعنی در یک صفحه قرار دارند) پس

$$z - z_1 = t(z_2 - z_1) \text{ یا } AP = tAB$$

که در آن t عددی حقیقی است و معادله مورد نظر عبارت است از

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad \text{یا} \quad z = (1-t)z_1 + tz_2$$

با استفاده از

$$z = x + iy \text{ و } z_1 = x_1 + iy_1, \; z_2 = x_2 + iy_2$$

داریم:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ یا } x - x_1 = t(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = t(y_2 - y_1)$$

t را **پارامتر** و معادله اول را **معادلات پارامتری** خط نامند. معادلهٔ دوم را معادلهٔ به شکل **استاندارد** گویند.

روش دیگر: چون AP و PB هم‌صفحه هستند، به ازای دو عدد حقیقی m و n داریم:

$$m(z - z_1) = n(z_2 - z) \text{ یا } mAP = nPB$$

با حل این معادلات حاصل می‌شود:

$$x = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}, \quad y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n} \text{ یا } z = \frac{mz_1 + nz_2}{m+n}$$

این معادلات را معادله به شکل **متقارن** گویند.

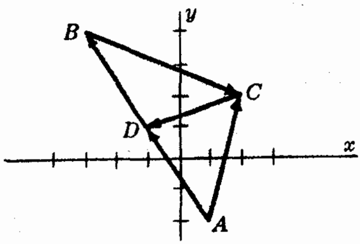
۱۲ . فرض کنید نقاط $A(1,-2), B(-3,4), C(2,2)$ سه رأس مثلث ABC باشند طول میانهٔ وارد به ضلع AB را بیابید.

حل . بردارهای وضعیت نقاط A, B و C را بترتیب $z_1 = 1 - 2i, \; z_2 = -3 + 4i$ و $z_3 = 2 + 2i$ فرض میکنیم. پس با توجه به شکل ۱۸ــ۱ داریم:

$$\begin{aligned}
AC &= z_3 - z_1 = 2 + 2i - (1 - 2i) = 1 + 4i \\
BC &= z_3 - z_2 = 2 + 2i - (-3 + 4i) = 5 - 2i \\
AB &= z_2 - z_1 = -3 + 4i - (1 - 2i) = -4 + 6i \\
AD &= \tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}(-4 + 6i) = -2 + 3i
\end{aligned}$$

(چون D در وسط AB است)

$$CD = AD - AC = -2 + 3i - (1 + 4i) = -3 - i \text{ یا } AC + CD = AD$$



شکل ۱۸ــ۱

بنابر این طول میانه CD برابر است با

$$|CD| = |-3-i| = \sqrt{10}.$$

۱۳ . مطلوب است معادلهٔ :

(الف) دایره‌ای به مرکز (۱ و ۲) و به شعاع ٤،

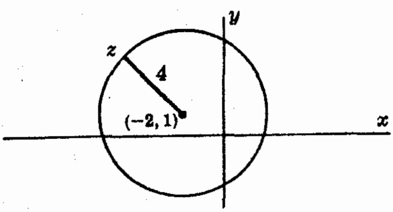
(ب) بیضی با قطر اطول ۱۰ و با کانونهای (۰، ۳ــ) و (۰، ۳).

حل : (الف) مرکز را با عدد مختلط $-2+i.$ نشان می‌دهیم. اگر z نقطه دلخواهی از دایره باشد، فاصلهٔ z از $-2+i$ برابر است با

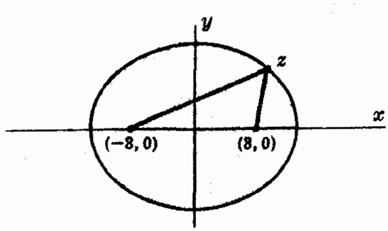
$$|z-(-2+i)| = 4$$

(شکل ۱۹ــ۱ را ببینید). پس $|z+2-i| = 4$ معادله دایره است. این معادله در مختصات قائم چنین است :

$$|(x+2)+i(y-1)| = 4, \quad \text{یا} \quad (x+2)^2+(y-1)^2 = 16$$



شکل ۱۹ــ۱



شکل ۲۰ــ۱

(ب) مجموع فواصل z نقطه دلخواهی از بیضی، تا کانونها برابر ۱۰ است. پس معادله بیضی برابر است با :

$$|z+3| + |z-3| = 10$$

و در مختصات قائم معادله بیضی عبارت است از

$$x^2/25 + y^2/16 = 1$$

(مسئله ۷۴را ببینید).

مبانی اصول موضوعی اعداد مختلط

۱۴ . از تعریف اعداد مختلط به عنوان زوج مرتب از اعداد حقیقی و تعاریف صفحهٔ ۲۷۹ استفاده کرده ثابت کنید

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

که در آن $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

از تعاریف جمع و ضرب مذکور در صفحهٔ ۲۷۹ داریم:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

که در آن

$$(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

با مساوی قرار دادن (۰، ۱) با ۱ و (۱، ۰) با i درمی‌یابیم که $(a, b) = a + bi$.

۱۵ . اگر $z_1 = (a_1, b_1)$، $z_2 = (a_2, b_2)$ و $z_3 = (a_3, b_3)$ ، قانون توزیعی

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

را ثابت کنید.

حل . داریم:

$$\begin{aligned} z_1(z_2+z_3) &= (a_1, b_1)\{(a_2, b_2) + (a_3, b_3)\} = (a_1, b_1)(a_2+a_3,\ b_2+b_3) \\ &= \{a_1(a_2+a_3) - b_1(b_2+b_3),\ a_1(b_2+b_3) + b_1(a_2+a_3)\} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3,\ a_1b_2 + b_1a_2 + a_1b_3 + b_1a_3) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1a_3 - b_1b_3,\ a_1b_3 + b_1a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) + (a_1, b_1)(a_3, b_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \end{aligned}$$

شکل قطبی یا مثلثاتی اعداد مختلط

۱۶ . اعداد زیر را به صورت مثلثاتی و قطبی بنویسید:

(الف) $2 + 2\sqrt{3}\,i$

حل . قدر مطلق برابر است با

$$r = |2+2\sqrt{3}\,i| = \sqrt{4+12} = 4$$

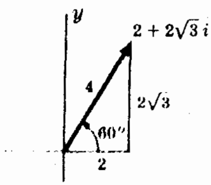
آرگمان برابر است با

$$\theta = \sin^{-1} 2\sqrt{3}/4 = \sin^{-1} \sqrt{3}/2 = 60^\circ = \pi/3$$

پس

$$\begin{aligned} 2+2\sqrt{3}\,i &= r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) \\ &= 4(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) \end{aligned}$$

نتیجه را میتوان به صورت $4 \text{ cis } \pi/3$ یا بر اساس فرمول اویلر به صورت $4e^{\pi i/3}$ نوشت .



شکل ۲۱ـــ۱

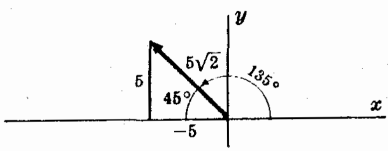
(ب) $-5+5i$

حل .

$$\begin{aligned} r &= |-5+5i| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2} \\ \theta &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ = 3\pi/4 \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} -5+5i &= 5\sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ) \\ &= 5\sqrt{2}\text{ cis } 3\pi/4 = 5\sqrt{2}\,e^{3\pi i/4} \end{aligned}$$



شکل ۲۲ـــ۱

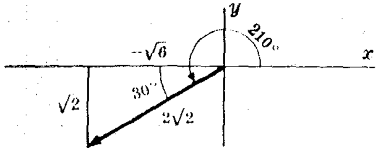
(ج) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$

حل .

$$\begin{aligned} r &= |-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2} \\ \theta &= 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ = 7\pi/6 \end{aligned}$$

پس

$$-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i = 2\sqrt{2}\,(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ) = 2\sqrt{2}\ \text{cis}\ 7\pi/6 = 2\sqrt{2}\,e^{7\pi i/6}$$



شکل ۲۳ــ۱

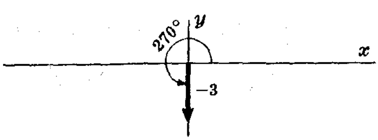
د $-3i$

حل .

$$r = |-3i| = |0-3i| = \sqrt{0+9} = 3$$
$$\theta = 270^\circ = 3\pi/2$$

پس

$$-3i = 3(\cos 3\pi/2 + i\sin 3\pi/2) = 3\ \text{cis}\ 3\pi/2 = 3e^{3\pi i/2}$$



شکل ۲٤ــ۱

۱۷ــ. نمودار هر یک از اعداد زیر را رسم کنید:

$(a)\ \ 6(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ),\quad (b)\ \ 4e^{3\pi i/5},\quad (c)\ \ 2e^{-\pi i/4}.$

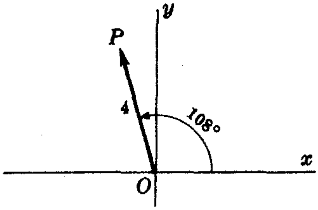
حل (a)

$$6(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) = 6\ \text{cis}\ 240^\circ = 6\ \text{cis}\ 4\pi/3 = 6\,e^{4\pi i/3}$$

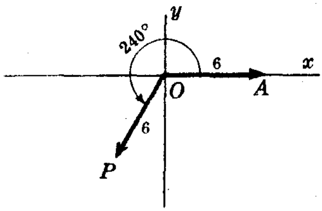
نمودار این عدد با بردار OP در شکل ۲۵ــ۱ نشان داده شده است

نخست بردار OA را که قدر مطلق آن ٦ است در جهت مثبت محور x ها رسم می کنیم. سپس برای حصول به OP آنرا در جهت مثلثاتی به اندازه 240° درجه دوران می دهیم. عموماً $re^{i\theta}$ معادل برداری است که از دوران برداری با قدر مطلق r که در جهت مثبت محور x ها واقع است به اندازه زاویه θ در جهت مثلثاتی ، بدست

می آید.



شکل ۲٦ــ۱



شکل ۲۵ــ۱

(b)

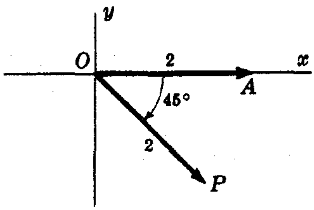
$$4\,e^{3\pi i/5} \;=\; 4(\cos 3\pi/5 + i \sin 3\pi/5) \;=\; 4(\cos 108^\circ + i \sin 108^\circ)$$

که در شکل ۲٦ــ۱ با بردار OP مشخص شده است.

(c)

$$2\,e^{-\pi i/4} \;=\; 2\{\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)\} \;=\; 2\{\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)\}$$

این عدد مختلط با بردار OP در شکل ۲۷ــ۱ نشان داده شده است. این بردار را میتوان از دوران بردار OA با قدر مطلق ۲ که در جهت محور x ها قرار دارد، در جهت مثلثاتی به اندازه زاویه °٤۵ ــ درجه بدست آورد (این دوران معادل دورانی است که در جهت خلاف مثلثاتی به اندازه °٤۵ درجه انجام می گیرد).



شکل ۲۷ــ۱

۱۸ . مردی ۱۲ مایل به طرف شمال شرقی (یعنی در امتداد °٤۵ درجه شمالشرقی). ۲۰ مایل در امتداد °۳۰ درجهٔ شمالغربی، و سپس ۱۸ مایل درجهت °٦۰ درجهٔ جنوبغربی مسافرت می کند. مطلوب است تعیین:

(الف) به طور تحلیلی

(ب) . به صورت نموداری

فاصله مسافر تا نقطه حرکت و امتداد آن.

حل :

(الف) تحلیلی : فرض کنید O نقطهٔ حرکت باشد (شکل ۲۸ــ۱ را ببینید). پس تغییر مکانهای متوالی، بردارهای OA, AB و BC هستند. برآیند این سه تغییر مکان بردار زیر است :

$$OC = OA + AB + BC$$

حال

$$\begin{aligned} OA &= 12(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = 12\, e^{\pi i/4} \\ AB &= 20\{\cos (90^\circ + 30^\circ) + i \sin (90^\circ + 30^\circ)\} = 20\, e^{2\pi i/3} \\ BC &= 18\{\cos (180^\circ + 60^\circ) + i \sin (180^\circ + 60^\circ)\} = 18\, e^{4\pi i/3} \end{aligned}$$

بنابر این

$$\begin{aligned} OC &= 12\, e^{\pi i/4} + 20\, e^{2\pi i/3} + 18\, e^{4\pi i/3} \\ &= \{12 \cos 45^\circ + 20 \cos 120^\circ + 18 \cos 240^\circ\} + \\ &\quad + i\{12 \sin 45^\circ + 20 \sin 120^\circ + 18 \sin 240^\circ\} = \\ &= \{(12)(\sqrt{2}/2) + (20)(-1/2) + (18)(-1/2)\} + i\{(12)(\sqrt{2}/2) + \\ &\quad + (20)(\sqrt{3}/2) + (18)(-\sqrt{3}/2) = \\ &= (6\sqrt{2} - 19) + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})i \end{aligned}$$

اگر

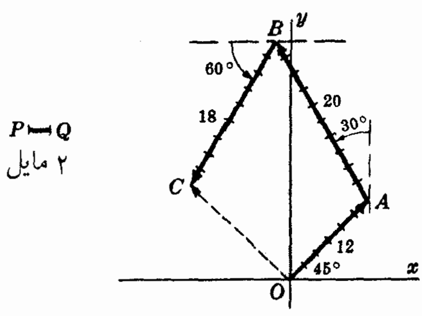
$$r(\cos\theta + i \sin\theta) = 6\sqrt{2} - 19 + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})i,$$

داریم :

$$r = \sqrt{(6\sqrt{2} - 19)^2 + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = 14.7 \quad \text{(تقریباً)}$$

و

$$\theta = \cos^{-1}(6\sqrt{2} - 19)/r = \cos^{-1}(-.717) = 135^\circ 49' \quad \text{تقریباً}$$



شکل ۲۸ــ۱

پس مرد مسافر در فاصله ۱٤/۷ مایلی نقطه حرکت و در امتداد

$$135°49' - 90° = 45°49'$$

شمالغربی قرار دارد.

(ب) حل نموداری: با استفاده از واحد انتخاب PQ که ۲مایل را نشان می‌دهد (شکل ۲۸ــ۱ را ببینید) و نقاله، که زاویه بین بردارهای OA, AB و BC را اندازه می‌گیرد. اندازه OC و زاویه‌ای که OC با محور y ها می‌سازد اندازه می‌گیریم و (تقریباً) به نتایج قسمت **(الف)** می‌رسیم.

قضیهٔ موآور

۱۹. اگر $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ثابت کنید:

$$(a)\quad z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

$$(b)\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}.$$

حل: با استفاده از دستور اویلر

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

می‌توان نوشت که اگر $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ و $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ آنگاه

$$\begin{aligned}(a)\quad z_1z_2 &= \{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\}\{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\}\\ &= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\}\\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}\cdot\frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}\\ &= \frac{r_1}{r_2}\left\{\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right\}\\ &= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}\end{aligned}$$

بنابراین

$$z_1z_2 = r_1r_2\,e^{i(\theta_1+\theta_2)} \quad و \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

۲۰ . قضیهٔ موآور را ثابت کنید:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

n عددی طبیعی است.

حل: از **اصل استقراء ریاضی** استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم فرمول برای عدد صحیح و مثبت k درست باشد، یعنی فرض می‌کنیم

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$$

دو طرف را به $\cos\theta + i\sin\theta$ ضرب می‌کنیم، بنا به مسئلهٔ **۱۹** داریم:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) =$$

$$\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$$

پس اگر فرمول برای $n=k$ درست باشد، آنگاه برای $n = k+1$ نیز درست است. ولی چون درستی فرمول برای $n=1$ بدیهی است، پس فرمول باید برای $n = 1+1 = 2$ و $n = 2+1 = 3$ و غیره درست باشد. بنابراین فرمول به ازای تمام اعداد صحیح مثبت برقرار است.

نتیجه معادل است با $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$.

۲۱ . تساویهای زیر را ثابت کنید:

(a) $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta;$

(b) $(\sin 5\theta)/(\sin\theta) = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1$

اگر $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$.

حل: فرمول دو جمله‌ای را بکار می‌بریم.

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n$$

که ضرایب

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

را می‌توان با ${}_nC_r$ نیز نشان داد که **ضرایب دو جمله‌ای** نامیده میشوند. عدد $n!$ را **فاکتوریل** n گویند که با $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ تعریف می‌شود و همین طور بنا به تعریف $0! = 1$.

از مسئلهٔ **۲۰** به ازای $n=5$ و از طرفی از فرمول دو جمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned}\cos 5\theta + i\sin 5\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^5 \\ &= \cos^5\theta + \binom{5}{1}(\cos^4\theta)(i\sin\theta) + \binom{5}{2}(\cos^3\theta)(i\sin\theta)^2 \\ &\quad + \binom{5}{3}(\cos^2\theta)(i\sin\theta)^3 + \binom{5}{4}(\cos\theta)(i\sin\theta)^4 + (i\sin\theta)^5 \\ &= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta\end{aligned}$$

$$-\ 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta$$
$$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i(5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta)$$

پس

$$(a)\quad \cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$
$$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2$$
$$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

و

$$(b)\quad \sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$$

یا

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$
$$= 5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) + (1-\cos^2\theta)^2$$
$$= 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1$$

به شرطی که $\sin\theta \neq 0$ یعنی $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

۲۲ . نشان دهید:

$$(a)\quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad (b)\quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

حل : بنابه فرمول اویلر داریم:

$$(1)\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad (2)\quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

(a) (۱) و (۲) را جمع می کنیم

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad \text{یا} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

(b) (۲) را از (۱) کم می کنیم

$$e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \quad \text{یا} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

۲۳ . تساویهای زیر را ثابت کنید:

$$(a)\quad \sin^3\theta = \tfrac{3}{4}\sin\theta - \tfrac{1}{4}\sin 3\theta,$$
$$(b)\quad \cos^4\theta = \tfrac{1}{8}\cos 4\theta + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \tfrac{3}{8}$$

حل :

$$(a)\quad \sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3}{8i^3} =$$

$$= -\frac{1}{8i}\{(e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}) + 3(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3\}$$

$$= -\frac{1}{8i}(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) = \frac{3}{4}\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

(b) $$\cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4}{16}$$

$$= \frac{1}{16}\{(e^{i\theta})^4 + 4(e^{i\theta})^3(e^{-i\theta}) + 6(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta})^2 + 4(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4\}$$

$$= \frac{1}{16}(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta})$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right) + \frac{3}{8}$$

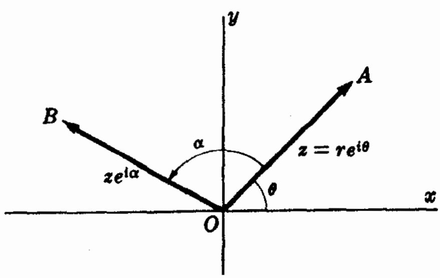
$$= \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

۲٤ . عدد مختلط (یا بردار) z مفروض است، $ze^{i\alpha}$ را از نظر هندسی تعبیر نمائید که در آن α حقیقی است.

حل : عدد $z = re^{i\theta}$ را طبق شکل ۲۹ــ۱ با بردار OA نشان می دهیم. پس

$$ze^{i\alpha} = re^{i\theta}\cdot e^{i\alpha} = re^{i(\theta+\alpha)}$$

بردار OB است



شکل ۲۹ــ۱

پس حاصلضرب بردار z در $e^{i\alpha}$ برابر برداری است که از دوران بردار z در جهت مثلثاتی به اندازه زاویهٔ α انجام گرفته است. بنابراین می توانیم $e^{i\alpha}$ را بعنوان **عملگر** بنگریم که روی z اثر میکند و او را دوران می دهد.

۲۵ . ثابت کنید

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

حل :

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)$$
$$= \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

۲۶ . هریک ازعبارات زیر را حساب کنید:

$$(a)\quad [3(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)][4(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)]$$
$$= 3\cdot 4[\cos(40^\circ+80^\circ) + i\sin(40^\circ+80^\circ)]$$
$$= 12(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$$
$$= 12\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -6+6\sqrt{3}\,i$$

$$(b)\quad \frac{(2\text{ cis }15^\circ)^7}{(4\text{ cis }45^\circ)^3} = \frac{128\text{ cis }105^\circ}{64\text{ cis }135^\circ} = 2\text{ cis }(105^\circ-135^\circ)$$
$$= 2[\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ)]$$
$$= 2[\cos 30^\circ - i\sin 30^\circ] = \sqrt{3}-i$$

$$(c)\quad \left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10} = \left\{\frac{2\text{ cis }(60^\circ)}{2\text{ cis }(-60^\circ)}\right\}^{10} = (\text{cis }120^\circ)^{10}$$
$$= \text{cis }1200^\circ = \text{cis }120^\circ = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

روش دیگر:

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10} = \left(\frac{2e^{\pi i/3}}{2e^{-\pi i/3}}\right)^{10} = (e^{2\pi i/3})^{10} = e^{20\pi i/3}$$
$$= e^{6\pi i}e^{2\pi i/3} = (1)[\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)] = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

۲۷ . ثابت کنید:

$$(a)\quad \arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$
$$(b)\quad \arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$$

شرایط مناسب برای تساوی را بیان کنید.

حل : فرض کنید

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

بنابراین

$$\arg z_1 = \theta_1,\quad \arg z_2 = \theta_2$$

(a) چون

$$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\},$$

پس

$$\arg(z_1z_2) = \theta_1+\theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

(b) چون

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\},$$

پس

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1-\theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2$$

چون $\theta_1 = \arg z_1$ و $\theta_2 = \arg z_2$ مقادیر مختلفی دارند، فقط می توانیم بگوییم که دو طرف تساویها به ازای **بعضی** مقادیر $\arg z_1$ و $\arg z_2$ برقرارند. ممکن است این تساویها حتی اگر از مقادیر اصلی آرگمانها هم استفاده کنیم، برابر نباشد.

ریشه های اعداد مختلط

۲۸ . (الف) مقادیر z را طوری بیابید که $z^5 = -32$

(ب) این مقادیر را در صفحهٔ مختلط مشخص کنید.

حل : (الف) عدد ۳۲ــ را به صورت مثلثاتی می نویسم :

$$-32 = 32\{\cos(\pi+2k\pi) + i\sin(\pi+2k\pi)\},\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots.$$

فرض کنید $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. پس بنابه قضیهٔ موآور داریم :

$$z^5 = r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 32\{\cos(\pi+2k\pi) + i\sin(\pi+2k\pi)\}$$

و بنابر این $r^5 = 32,\ 5\theta = \pi + 2k\pi$ ، پس $r = 2,\ \theta = (\pi+2k\pi)/5$. از آنجا

$$z = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)\right\}$$

بالاخره داریم :

$$k=0,\quad z = z_1 = 2(\cos\pi/5 + i\sin\pi/5).$$
$$k=1,\quad z = z_2 = 2(\cos 3\pi/5 + i\sin 3\pi/5).$$
$$k=2,\quad z = z_3 = 2(\cos 5\pi/5 + i\sin 5\pi/5) = -2.$$
$$k=3,\quad z = z_4 = 2(\cos 7\pi/5 + i\sin 7\pi/5).$$
$$k=4,\quad z = z_5 = 2(\cos 9\pi/5 + i\sin 9\pi/5).$$

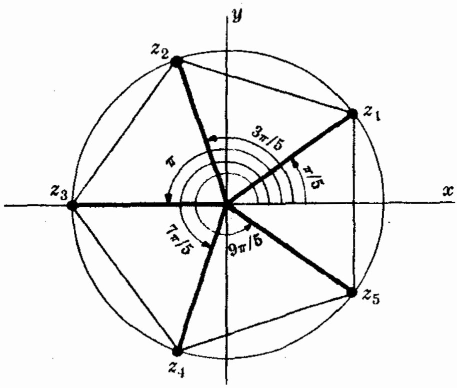
اگر $k = 5, 6, \ldots$ و همچنین به ازای مقادیر $-1, -2, \ldots$ پنج مقدار فوق که

برای z حاصل شده‌اند، تکرار می شوند. بنابر این مقادیر فوق تنها **جوابها** یا **ریشه‌های** معادلهٔ مفروض هستند. این پنج ریشه، **ریشه‌های پنجم** عدد ۳۲ــ می باشند که هر کدام از آنها با $(-32)^{1/5}$ نشان داده می شوند. درحالت کلی، ریشه‌های n ام عدد a را با $a^{1/n}$ نشان می دهند که تعداد آنها n تاست.

(ب) مقادیر z در شکل ۳۰ــ۱ نموده شده است. توجه کنید که این مقادیر به فاصله‌های مساوی روی محیط دایره‌ای به مرکز مبداء و به شعاع ۲ قرار دارند. بعبارت دیگر ریشه‌ها در رئوس یک چند ضلعی منتظم (در اینجا در رئوس یک پنج ضلعی منتظم) قرار دارند.

۲۹ . ریشه‌های هر یک از اعداد زیر را بدست آورید و آنها را روی صفحه مختلط مشخص نمائید.

$(a)\ \ (-1+i)^{1/3}$ $\qquad\qquad$ $(b)\ \ (-2\sqrt{3}-2i)^{1/4}$



شکل ۳۰ــ۱

حل : (a)

$$-1+i = \sqrt{2}\{\cos(3\pi/4+2k\pi) + i\sin(3\pi/4+2k\pi)\}$$

$$(-1+i)^{1/3} = 2^{1/6}\left\{\cos\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right)\right\}$$

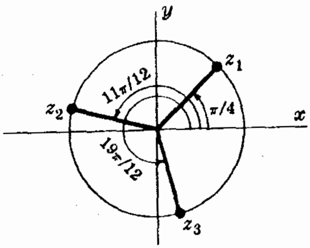
ریشه‌ها به قرار زیرند:

$k=0,\quad z_1 = 2^{1/6}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4).$

$k=1,\quad z_2 = 2^{1/6}(\cos 11\pi/12 + i\sin 11\pi/12).$

$k=2,\quad z_3 = 2^{1/6}(\cos 19\pi/12 + i\sin 19\pi/12).$

ریشه ها در شکل ۳۱ــ۱ نموده شده اند



شکل ۳۱ــ۱

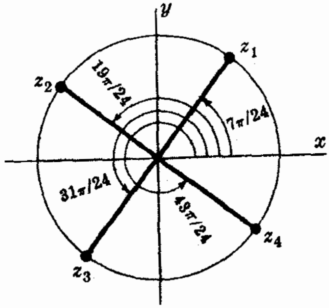
(b)

$$-2\sqrt{3}-2i = 4\{\cos(7\pi/6+2k\pi) + i\sin(7\pi/6+2k\pi)\}$$
$$(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4} = 4^{1/4}\left\{\cos\left(\frac{7\pi/6+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi/6+2k\pi}{4}\right)\right\}$$

ریشه ها به صورت زیرند:

$$k=0,\quad z_1 = \sqrt{2}\,(\cos 7\pi/24 + i\sin 7\pi/24).$$
$$k=1,\quad z_2 = \sqrt{2}\,(\cos 19\pi/24 + i\sin 19\pi/24).$$
$$k=2,\quad z_3 = \sqrt{2}\,(\cos 31\pi/24 + i\sin 31\pi/24).$$
$$k=3,\quad z_4 = \sqrt{2}\,(\cos 43\pi/24 + i\sin 43\pi/24).$$

در شکل ۳۲ــ۱ ریشه ها مشخص شده اند.



شکل ۳۲ــ۱

۳۰ . ریشه های دوم عدد $-15-8i$ را بیابید.

حل : روش اول.

$$-15-8i = 17\{\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)\}$$

که در آن $\cos\theta = -15/17,\ \sin\theta = -8/17$. پس ریشه های دوم $-15-8i$ عبارتند از

$$\sqrt{17}\,(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2) \qquad (۱)$$

و

$$\sqrt{17}\,\{\cos(\theta/2+\pi) + i\sin(\theta/2+\pi)\} = -\sqrt{17}\,(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2) \qquad (۲)$$

حال

$$\cos\theta/2 = \pm\sqrt{(1+\cos\theta)/2} = \pm\sqrt{(1-15/17)/2} = \pm 1/\sqrt{17}$$
$$\sin\theta/2 = \pm\sqrt{(1-\cos\theta)/2} = \pm\sqrt{(1+15/17)/2} = \pm 4/\sqrt{17}$$

چون θ زاویه‌ای است که در ربع سوم قرار دارد، پس $\theta/2$ در ربع دوم واقع است. بنابر این

$$\cos\theta/2 = -1/\sqrt{17},\quad \sin\theta/2 = 4/\sqrt{17}$$

پس از (۱) و (۲) بر می آید که

$$-1+4i \quad \text{و} \quad 1-4i$$

ریشه های مطلوب هستند. درستی جوابها در زیر امتحان می شوند:

$$(-1+4i)^2 = (1-4i)^2 = -15-8i$$

روش دوم.

فرض کنید $p+iq$ که در آن p و q حقیقی اند ریشه های مورد نظر باشند. پس

$$(p+iq)^2 = p^2-q^2+2pqi = -15-8i$$

یا

$$p^2-q^2 = -15 \qquad (۳)$$
$$pq = -4 \qquad (٤)$$

مقدار $q = -4/p$ را از (٤) در (۳) قرار می دهیم داریم:

$$p^2-16/p^2 = -15 \quad \text{یا} \quad p^4+15p^2-16 = 0$$

یعنی

$$(p^2+16)(p^2-1) = 0 \quad \text{یا} \quad p^2 = -16,\ p^2 = 1$$

چون p حقیقی است پس $p = \pm 1$. از روابط فوق داریم:

$$p = 1,\ q = -4 \quad \text{و} \quad p = -1,\ q = 4$$

بنابر این ریشه ها

$$-1+4i \quad \text{و} \quad 1-4i$$

هستند .

معادلات چند جمله ای

۳۱ . معادله درجه دوم

$$az^2+bz+c = 0, \quad a \neq 0$$

را حل کنید.

حل : c را به طرف دوم منتقل و طرفین را به $a \neq 0$ تقسیم می کنیم :

$$z^2+\frac{b}{a}z = -\frac{c}{a}$$

به طرفین، جمله $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ را اضافه می کنیم :

$$z^2+\frac{b}{a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

پس

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

از طرفین ریشهٔ دوم می گیریم :

$$z+\frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

بنابر این

$$z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

۳۲ . معادلهٔ

$$z^2+(2i-3)z+5-i = 0$$

را حل کنید

حل : با توجه به مسئله **۳۱** داریم

$$a=1, \ b = 2i-3, \ c=5-i$$

پس ریشه ها چنین هستند

$$z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(2i-3)\pm\sqrt{(2i-3)^2-4(1)(5-i)}}{2(1)} =$$

$$= \frac{3-2i\pm\sqrt{-15-8i}}{2}$$

$$= \frac{3-2i\pm(1-4i)}{2} = 2-3i \ \text{یا} \ 1+i$$

در اینجا از ریشهٔ دوم $-15-8i$ که $\pm(1-4i)$ هستند استفاده کرده‌ایم (مسئله ۳۰ را ببینید).

۳۳ . اگر کسر **واقعی** p/q (یعنی p و q غیر از ± 1 مضرب مشترکی ندارند) در معادلهٔ

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

صدق کند که در آن $a_0, a_1, \ldots, a_n$ اعداد صحیح هستند، نشان دهید که p و q بترتیب یکی از مضارب a_n و a_0 هستند.

حل $z = p/q$ را در معادله قرار می دهیم و طرفین را به q^n ضرب می کنیم، بدست می آید:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \cdots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0 \qquad (۱)$$

دو طرف را به p تقسیم و آنگاه عبارت را چنین می نویسیم:

$$a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + \cdots + a_{n-1} q^{n-1} = -\frac{a_n q^n}{p} \qquad (۲)$$

چون طرف چپ عددی صحیح است پس طرف راست نیز عددی صحیح می باشد. چون p و q مضرب مشترکی ندارند لذا a_n به p بخش پذیراست.

به طور مشابه طرفین (۱) را به q تقسیم می کنیم و نشان می دهیم که بایستی a_0 به q بخش پذیر باشند.

۳۴ . معادله

$$6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = 0$$

را حل کنید.

حل : مضارب ۶ و ۱۰ــ بترتیب عبارتند از

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10 \quad \text{و} \quad \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

پس بنابه مسئلهٔ **۳۳** جوابهای احتمالی یکی از کسرهای زیر است

$$\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/6, \pm 2, \pm 2/3, \pm 5, \pm 5/2, \pm 5/3, \pm 5/6, \pm 10, \pm 10/3$$

با امتحان کردن در می یابیم که جوابهای حقیقی $z = 2/3$ و $z = -1/2$ هستند. پس یکی از عاملهای چند جمله ای

$$6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10$$

عبارت

$$(2z+1)(3z-2) = 6z^2 - z - 2$$

است که عامل دوم که

$$z^2 - 4z + 5$$

است از تقسیم کردن چند جمله ای به اولین عامل بدست می آید. بنابر این

$$6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = (6z^2 - z - 2)(z^2 - 4z + 5) = 0$$

جوابهای

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

عبارتند از

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

(مسئله **۳۱** را ببینید). پس جوابها

$$-1/2,\ 2/3,\ 2+i,\ 2-i$$

می باشند.

۳۵ . ثابت کنید که مجموع و حاصلضرب تمام ریشه های معادلهٔ

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

که در آن $a_0 \neq 0$ ، بترتیب برابر $-a_1/a_0$ و $(-1)^n a_n/a_0$ می باشند.

حل : اگر

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

n ریشهٔ معادله باشند، می توانیم معادله را به صورت زیر بنویسیم :

$$a_0(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) = 0$$

از ضرب مستقیم پرانتزها بدست می آید

$$a_0\{z^n - (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)z^{n-1} + \cdots + (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n\} = 0$$

اگر این رابطه را با خود معادله مقایسه کنیم داریم :

$$-a_0(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = a_1 \quad \text{و} \quad a_0(-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n = a_n,$$

پس

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -a_1/a_0, \qquad z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n a_n/a_0$$

۳۶ . اگر $p + qi$ یک جواب معادلهٔ

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

باشد که در آن $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n, p$ و q همگی حقیقی اند. ثابت کنید $p - qi$ نیز جواب معادله است.

حل : فرض کنید $p + qi = re^{i\theta}$. چون این عدد جواب معادله است پس

$$a_0 r^n e^{in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \cdots + a_{n-1} re^{i\theta} + a_n = 0$$

مزدوج دو طرف را تعیین می کنیم:

$$a_0 r^n e^{-in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta} + \cdots + a_{n-1} r e^{-i\theta} + a_n = 0$$

پس $re^{-i\theta} = p - qi$ نیز جواب معادله است. اگر تمام ضرایب $a_0, \ldots, a_n$ حقیقی نباشند این مطلب درست نخواهد بود (مسئلهٔ **۳۲** را ببینید).

اغلب قضیهٔ زیر بیان می شود که:

صفرهای (یا ریشه های) یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی، مزدوج یکدیگرند.

ریشه های n ام واحد

۳۷ . تمام ریشه های پنجم واحد را حساب کنید.

حل :

$$z^5 = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

پس

$$z = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} = e^{2k\pi i/5}$$

کافیست فرض کنیم

$$k = 0, 1, 2, 3, 4$$

بنابر این ریشه عبارتند از

$$1,\ e^{2\pi i/5},\ e^{4\pi i/5},\ e^{6\pi i/5},\ e^{8\pi i/5}$$

اگر فرض کنیم $\omega = e^{2\pi i/5}$ آنگاه می توان نوشت:

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$$

۳۸ اگر $n = 2, 3, 4, \ldots$ ، ثابت کنید

$$(a) \qquad \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$$

$$(b) \qquad \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{6\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

حل : معادله $z^n - 1 = 0$ را که جوابهای آن ریشه های n ام واحد هستند در نظر می گیریم یعنی

$$1,\quad e^{2\pi i/n},\quad e^{4\pi i/n},\quad e^{6\pi i/n},\quad \ldots,\quad e^{2(n-1)\pi i/n}$$

جوابهای معادله فوق می باشند. بنابه مسئلهٔ **۳۵** مجموع ریشه ها صفر است. پس

$$1 + e^{2\pi i/n} + e^{4\pi i/n} + e^{6\pi i/n} + \cdots + e^{2(n-1)\pi i/n} = 0$$

یعنی

$$\left\{1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} + i\left\{\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \right.$$
$$\left. + \cdots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} = 0$$

بدین ترتیب تساویها ثابت می شوند.

ضرب داخلی و ضرب خارجی

۳۹ . اگر $z_1 = 3 - 4i$ و $z_2 = -4 + 3i$ مطلوب است

$$(a)\ z_1 \circ z_2,\quad (b)\ z_1 \times z_2$$

حل :

$$(a)\quad z_1 \circ z_2 = \mathrm{Re}\,\{\bar{z}_1 z_2\} = \mathrm{Re}\,\{(3+4i)(-4+3i)\}$$
$$= \mathrm{Re}\,\{-24 - 7i\} = -24$$

روش دیگر:

$$z_1 \circ z_2 = (3)(-4) + (-4)(3) = -24$$

$$(b)\quad z_1 \times z_2 = \mathrm{Im}\,\{\bar{z}_1 z_2\} = \mathrm{Im}\,\{(3+4i)(-4+3i)\} = \mathrm{Im}\,\{-24 - 7i\} = -7$$

روش دیگر:

$$z_1 \times z_2 = (3)(3) - (-4)(-4) = -7$$

٤۰ . زاویه حاده بین بردارهای مسئلهٔ **۳۹** را بدست آورید.

حل : از مسئلهٔ ۳۹ قسمت (a) داریم :

$$\cos\theta = \frac{z_1 \circ z_2}{|z_1|\,|z_2|} = \frac{-24}{|3-4i|\,|-4+3i|} = \frac{-24}{25} = -.96$$

پس زاویهٔ حاده بین دو بردار مذکور تقریباً برابر است با

$$\cos^{-1} .96 = 16°16'$$

٤۱ . ثابت کنید که مساحت یک متوازی الاضلاع با اضلاع z_1 و z_2 برابر

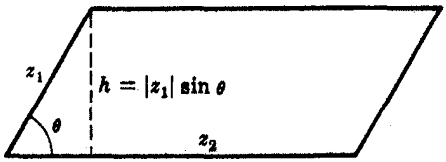
$$|\,z_1 \times z_2\,|$$

است.

حل : مساحت متوازی الاضلاع نموده شده در شکل ۳۳ــ۱ برابر است با

ارتفاع × قاعده

$$
\begin{aligned}
&= (|z_2|)(|z_1| \sin\theta) \\
&= |z_1|\,|z_2| \sin\theta = |z_1 \times z_2|
\end{aligned}
$$

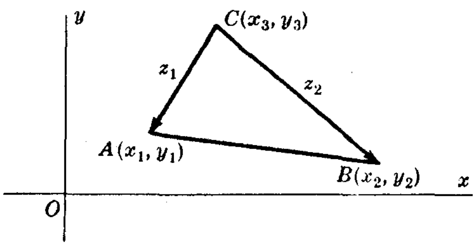


شکل ۳۳ـــ۱

۴۲ . مساحت مثلثی با رئوس $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ را حساب کنید.

حل : بردارهای از C تا A و B را بترتیب به صورت زیر می نویسم :

$$
\begin{aligned}
z_1 &= (x_1 - x_3) + i(y_1 - y_3), \\
z_2 &= (x_2 - x_3) + i(y_2 - y_3)
\end{aligned}
$$



شکل ۳۴ـــ۱

چون مساحت مثلث با اضلاع z_1 و z_2 با نصف مساحت متوازی الاضلاع متناظر آن برابر است، بنابه مسئلهٔ **۴۱** داریم :

$$
\text{مساحت مثلث} = \tfrac{1}{2}\,|z_1 \times z_2| = \tfrac{1}{2}\,|\,\mathrm{Im}\,\{[(x_1 - x_3) - i(y_1 - y_3)][(x_2 - x_3) + i(y_2 - y_3)]\}\,|
$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\,|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)| \\
&= \tfrac{1}{2}\,|x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3 + x_3y_1 - y_3x_1| \\
&= \tfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|
\end{aligned}
$$

مساحت مثلث با مقدار دترمینان فوق برابر است (شکل ۳۴ــ۱ را ببینید).

مختصات مزدوج مختلط

۴۳ . معادلات زیر را در مختصات مزدوج بنویسید:

(a) $2x + y = 5,$

(b) $x^2 + y^2 = 36.$

حل : (a) چون

$$z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy,\quad x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

پس $2x + y = 5$ درمی آید

$$2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = 5 \quad \text{یا} \quad (2i+1)z + (2i-1)\bar{z} = 10i$$

که این معادله خطی را در صفحهٔ مختلط z نشان می دهد.

(b) **روش اول :** معادله را به صورت

$$(x+iy)(x-iy) = 36 \quad \text{یا} \quad z\bar{z} = 36$$

می نویسیم.

روش دوم : از قرار دادن

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

درمعادله $x^2 + y^2 = 36$ حاصل می شود $z\bar{z} = 36$. این معادله دایره‌ای را در صفحهٔ z به مرکز مبداء و به شعاع ۶ نشان می دهد.

۴۴ . ثابت کنید که معادله هر دایره یا هر خط را در صفحه مختلط z می توان به صورت زیر نوشت

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$$

که در آن α و γ ثابتهای حقیقی هستند و β ممکن است ثابت مختلطی باشد.

حل : معادله کلی یک دایره در صفحه xy را می توان به صورت زیر نوشت:

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

که در مختصات مزدوج چنین است:

$$Az\bar{z} + B\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + C\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + D = 0$$

یا

$$Az\bar{z} + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right) z + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right) \bar{z} + D = 0$$

با فرض $A = \alpha,\ \frac{B}{2} + \frac{C}{2i} = \beta$ و $D = \gamma$ حکم ثابت می شود.
درحالت خاص $A = \alpha = 0,$ معادلهٔ دایره تبدیل به معادلهٔ خط می شود.

مسائل متنوع

۴۵ . عددی را **عددی جبری**[1] گویند اگر **جواب** معادلهٔ چند جمله‌ای

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

باشد که در آن $a_0, a_1, \ldots, a_n$ اعداد صحیح هستند. ثابت کنید

$(a)\ \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$(b)\ \sqrt[3]{4} - 2i$

اعداد جبری هستند.

حل : (a) فرض کنید $z = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ یا $z - \sqrt{2} = \sqrt{3}$. طرفین را به توان ۲ می رسانیم :

$$z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 2 = 3 \quad \text{یا} \quad z^2 - 1 = 2\sqrt{2}\,z$$

دوباره طرفین به توان ۲ می رسد ، داریم :

$$z^4 - 2z^2 + 1 = 8z^2 \quad \text{یا} \quad z^4 - 10z^2 + 1 = 0$$

که عبارت اخیر یک معادله چند جمله‌ای با ضرایب صحیح است که جواب آن $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ می باشد.

پس $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ یک عدد جبری است.

(b) فرض کنید $z = \sqrt[3]{4} - 2i$ یا $z + 2i = \sqrt[3]{4}$. دو طرف را به توان ۳ می رسانیم :

$$z^3 - 12z - 4 = i(8 - 6z^2) \quad \text{یا} \quad z^3 + 3z^2(2i) + 3z(2i)^2 + (2i)^3 = 4$$

طرفین رابطه اخیر را به توان ۲ می رسانیم

$$z^6 + 12z^4 - 8z^3 + 48z^2 + 96z + 80 = 0$$

که یک معادله چند جمله‌ای با ضرایب صحیح است که جواب آن $\sqrt[3]{4} - 2i$ می باشد
پس عدد $\sqrt[3]{4} - 2i$ یک عدد جبری است.

1. *algebraic number*

عددی که جبری نیست ، یعنی جواب هیچ معادله چند جمله‌ای با ضرایب صحیح نیست ، **عددی غیر جبری**[1] خوانده می‌شود. ثابت شده است که اعداد

$$e = 2.71828\ldots \quad \text{و} \quad \pi = 3.14159\ldots$$

غیر جبری هستند. حال آنکه تا حالا معلوم نشده است که آیا مثلاً اعداد $e\pi$ یا $e+\pi$ هم غیر جبری هستند یا نه.

۴۶ . اعداد زیر را به صورت نمودار نشان دهید :

$$(a)\ \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2, \quad (b)\ \left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$$

حل : (a) معادله مفروض معادل $|z-3| = 2|z+3|$ یا، اگر $z = x+iy$ معادل

$$|x+iy-3| = 2\,|x+iy+3|$$

یعنی

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

است. طرفین معادلهٔ اخیر را به توان ۲ می‌رسانیم و سپس آن را ساده می‌کنیم و بدست می‌آید :

$$x^2+y^2+10x+9 = 0 \quad \text{یا} \quad (x+5)^2+y^2 = 16$$

یعنی

$$|z+5| = 4$$

که معادله یک دایره به شعاع ٤ و به مرکز (۰ ، ۵—) است شکل ۳۵—۱ را ببینید.

از نقطه نظر هندسی ، فاصله هر نقطه P از دایره تا نقطه $B(3,0)$ با دو برابر فاصله‌اش تا نقطه $A(-3,0)$ برابر است.

روش دیگر $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| = 2$ معادل است با

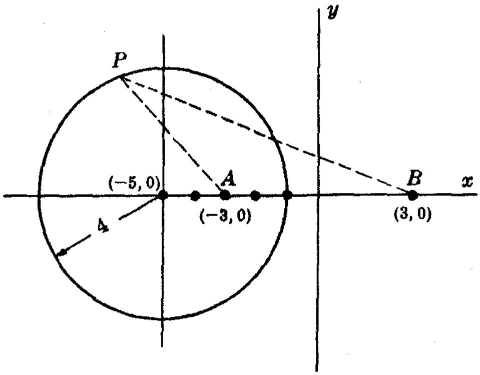
$$\left(\frac{z-3}{z+3}\right)\left(\frac{\bar{z}-3}{\bar{z}+3}\right) = 4 \quad \text{یا} \quad z\bar{z}+5\bar{z}+5z+9 = 0$$

یعنی

$$(z+5)(\bar{z}+5) = 16 \quad \text{یا} \quad |z+5| = 4.$$

---

1. *transcendental numbers*



شکل ۳۵ــ۱

(b) نامساوی مفروض معادل

$$|z-3| < 2|z+3| \quad \text{یا} \quad \sqrt{(x-3)^2+y^2} < 2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

است. طرفین رابطهٔ اخیر را به توان ۲ می رسانیم و ساده می کنیم داریم:

$$x^2+y^2+10x+9 > 0 \quad \text{یا} \quad (x+5)^2+y^2 > 16$$

یعنی

$$|z+5| > 4$$

نامساوی اخیر مجموعهٔ نقاطی را نشان می دهد که خارج دایره‌ای به شعاع ٤ و به مرکز (۰ ، ۵) واقع هستند. شکل ۳۵ــ۱ را ببینید.

٤۷ : مجموعه های A و B بترتیب با نامساویهای $|z-1| < 3$ و $|z-2i| < 2$ مشخص شده‌اند.

به طور هندسی

$$(a)\ A\cap B \ \text{یا}\ AB, \quad (b)\ A\cup B \ \text{یا}\ A+B$$

را نشان دهید.

حل : مجموعه های مطلوب به صورت سایه دار در شکلهای ۳۶ــ۱ و ۳۷ــ۱ نشان داده شده اند.

٤۸ . معادله

$$z^2(1-z^2) = 16$$

را حل کنید.

حل : روش اول ی توان معادله را به صورت

$$z^4 - z^2 + 16 = 0$$

نوشت یعنی

$$z^4 + 8z^2 + 16 - 9z^2 = 0, \ (z^2+4)^2 - 9z^2 = 0$$

یا

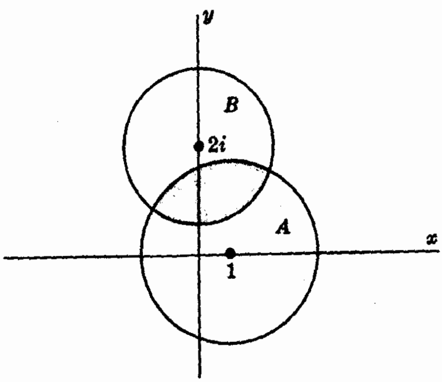
$$(z^2 + 4 + 3z)(z^2 + 4 - 3z) = 0$$

پس جوابهای معادله مفروض ، جوابهای معادلات،

$z^2 + 3z + 4 = 0$ یا $z^2 - 3z + 4 = 0$

هستند . این جوابها به قرار زیرند

$$-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i \quad \text{و} \quad \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$$



شکل ۳۶ــ۱

روش دوم . با فرض $w = z^2$ معادله را به صورت

$$w^2 - w + 16 = 0$$

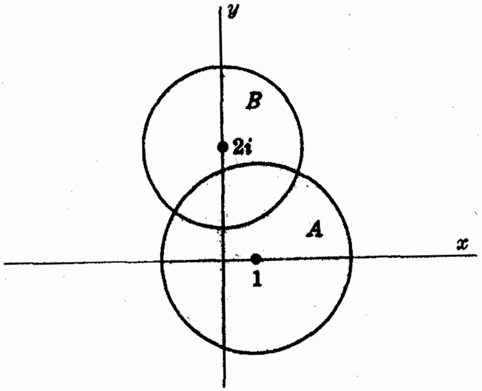
می نویسیم که جوابهای آن $w = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{7}\,i$ می باشند. برای رسیدن به جوابهای $z^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{7}\,i$, از روشهایی که در مسئله ۳۰ دیدیم استفاده می کنیم.

۴۹ . اگر z_1, z_2, z_3 رئوس مثلث متساوی الاضلاعی باشند، ثابت کنید

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$$

حل : از شکل ۳۸ــ۱ داریم :

$$z_2 - z_1 = e^{\pi i/3}(z_3 - z_1)$$
$$z_1 - z_3 = e^{\pi i/3}(z_2 - z_3)$$



شکل ۳۷ـ ۱

از تقسیم آنها نتیجه می‌شود:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$$

یا

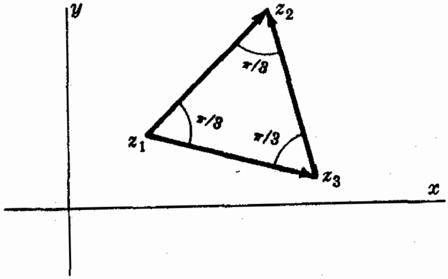
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

۵۰ . به ازای $m = 2, 3, \ldots$ ثابت کنید:

$$\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\sin\frac{3\pi}{m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}$$

حل : جوابهای $z^m = 1$ عبارتند از

$$z = 1,\ e^{2\pi i/m},\ e^{4\pi i/m},\ \ldots,\ e^{2(m-1)\pi i/m}$$



شکل ۳۸ـ ۱

پس می توان نوشت

$$z^m - 1 = (z-1)(z-e^{2\pi i/m})(z-e^{4\pi i/m})\cdots(z-e^{2(m-1)\pi i/m})$$

طرفین را به $z-1$ تقسیم می کنیم و آنگاه قرارمی دهیم $z=1$ و از

$$(z^m-1)/(z-1) = 1+z+z^2+\cdots+z^{m-1}]$$

استفاده می کنیم، داریم

$$m = (1-e^{2\pi i/m})(1-e^{4\pi i/m})\cdots(1-e^{2(m-1)\pi i/m}) \qquad (۱)$$

مزدوج مختلط دو طرف را حساب می کنیم

$$m = (1-e^{-2\pi i/m})(1-e^{-4\pi i/m})\cdots(1-e^{-2(m-1)\pi i/m}) \qquad (۲)$$

طرفین (۱) و (۲) را بر همدیگر ضرب می کنیم و از

$$(1-e^{2k\pi i/m})(1-e^{-2k\pi i/r}) = 2 - 2\cos(2k\pi/m)$$

استفاده کرده، داریم

$$m^2 = 2^{m-1}\left(1-\cos\frac{2\pi}{m}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{m}\right)\cdots\left(1-\cos\frac{2(m-1)\pi}{m}\right) \qquad (۳)$$

چون

$$1-\cos(2k\pi/m) = 2\sin^2(k\pi/m)$$

از (۳) در می یابیم:

$$m^2 = 2^{2m-2}\sin^2\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{2\pi}{m}\cdots\sin^2\frac{(m-1)\pi}{m} \qquad (٤)$$

اگر جواب مثبت ریشه دوم دو طرف را در نظر بگیریم، حکم ثابت می شود.

مسائل متمم

۵۱ . هر یک از عملیات زیر را انجام دهید:

(a) $(4-3i)+(2i-8)$

(b) $3(-1+4i)-2(7-i)$

(c) $(3+2i)(2-i)$

(d) $(i-2)\{2(1+i)-3(i-1)\}$

(e) $\dfrac{2-3i}{4-i}$

(f) $(4+i)(3+2i)(1-i)$

(g) $\dfrac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$

(h) $(2i-1)^2\left\{\dfrac{4}{1-i}+\dfrac{2-i}{1+i}\right\}$

(i) $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

(j) $3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2-2\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

جواب :

(a) $-4-i$ (c) $8+i$ (e) $11/17-(10/17)i$
(b) $-17+14i$ (d) $-9+7i$ (f) $21+i$

(g) $-15/2+5i$ (i) $2+i$
(h) $-11/2-(23/2)i$ (j) $-3-2i$

۵۲ . اگر $z_1 = 1-i,\ z_2 = -2+4i,\ z_3 = \sqrt{3}-2i$ هریک از عبارات زیر را حساب کنید :

(a) $z_1^2+2z_1-3$

(b) $|2z_2-3z_1|^2$

(c) $(z_3-\bar{z}_3)^5$

(d) $|z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1|$

(e) $\left|\dfrac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$

(f) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z_3}{\bar{z}_3}+\dfrac{\bar{z}_3}{z_3}\right)$

(g) $\overline{(z_2+z_3)(z_1-z_3)}$

(h) $|z_1^2+\bar{z}_2^2|^2+|\bar{z}_3^2-z_2^2|^2$

(i) $\mathrm{Re}\,\{2z_1^3+3z_2^2-5z_3^2\}$

(j) $\mathrm{Im}\,\{z_1z_2/z_3\}$

جواب :

(a) $-1-4i$ (c) $1024i$ (e) $3/5$
(b) 170 (d) 12 (f) $-1/7$

(g) $-7+3\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i$ (i) -35
(h) $765+128\sqrt{3}$ (j) $(6\sqrt{3}+4)/7$

۵۳ . ثابت کنید

(a) $\overline{(z_1z_2)} = \bar{z}_1\bar{z}_2$, (b) $\overline{(z_1z_2z_3)} = \bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3$.

این نتایج را تعمیم دهید .

۵٤ . ثابت کنید

(a) $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$, (b) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ $z_2 \neq 0$.

۵۵. اعداد حقیقی x و y را طوری بیابید که داشته باشیم :

$$2x-3iy+4ix-2y-5-10i = (x+y+2)-(y-x+3)i.$$

جواب : $x=1,\ y=-2$

۵٦ . ثابت کنید

(a) $\mathrm{Re}\,\{z\} = (z+\bar{z})/2$, (b) $\mathrm{Im}\,\{z\} = (z-\bar{z})/2i$

۵۷ . ثابت کنید که اگر حاصلضرب دو عدد مختلط صفر شود، آنگاه حداقل یکی از آنها باید صفر باشد.

۵۸ . اگر $w = 3iz - z^2$ و $z = x + iy$ ، عبارت $|w|^2$ را به صورت جملاتی از x و y بنویسید.

جواب : $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6x^2y - 6y^3 + 9x^2 + 9y^2$

نمایش نموداری اعداد مختلط

بردارها

۵۹ . اعمال زیر را هم به صورت تحلیلی و هم به صورت نموداری انجام دهید :

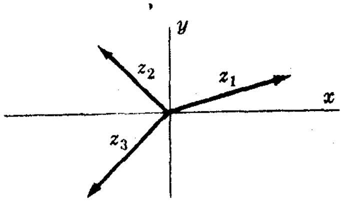
(a) $(2 + 3i) + (4 - 5i)$
(b) $(7 + i) - (4 - 2i)$
(c) $3(1 + 2i) - 2(2 - 3i)$
(d) $3(1 + i) + 2(4 - 3i) - (2 + 5i)$
(e) $\frac{1}{2}(4 - 3i) + \frac{3}{2}(5 + 2i)$

جواب :

(a) $6 - 2i$, (b) $3 + 3i$, (c) $-1 + 12i$, (d) $9 - 8i$, (e) $19/2 + (3/2)i$

۶۰ . اگر z_1, z_2 و z_3 بردارهایی باشند، که در شکل ۳۹ــ۱ نموده شده‌اند. اعمال زیر را به صورت نموداری انجام دهید :

(a) $2z_1 + z_3$
(b) $(z_1 + z_2) + z_3$
(c) $z_1 + (z_2 + z_3)$
(d) $3z_1 - 2z_2 + 5z_3$
(e) $\frac{1}{3}z_2 - \frac{3}{4}z_1 + \frac{2}{3}z_3$



شکل ۳۹ــ۱

۶۱ . اگر $z_1 = 4 - 3i$ و $z_2 = -1 + 2i$ هریک از عبارات زیر را :
(الف) به صورت تحلیلی **(ب)** به صورت نموداری بدست آورید.

$$(a)\ |z_1+z_2|,\ (b)\ |z_1-z_2|,\ (c)\ \bar{z}_1-\bar{z}_2,\ (d)\ |2\bar{z}_1-3\bar{z}_2-2|$$

جواب :

$$(a)\ \sqrt{10},\ (b)\ 5\sqrt{2},\ (c)\ 5+5i,\ (d)\ 15$$

۶۲ . اگر بردارهای وضعیت نقاط A, B و C رئوس مثلث ABC بترتیب $z_1=1+2i,\ z_2=4-2i$ و $z_3=1-6i$ باشند. ثابت کنید که ABC یک مثلث متساوی الساقین است و طول اضلاع آنرا بیابید.

جواب : ۸، ۵، ۵،

۶۳ . فرض کنید که اگر z_1, z_2, z_3, z_4 بردارهای وضعیت رئوس چهارضلعی $ABCD$ باشند. ثابت کنید که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع است اگر و فقط اگر $z_1-z_2-z_3+z_4=0$.

۶۴ . ثابت کنید که اگر اضلاع یک چهارضلعی همدیگر را نصف کنند، این چهارضلعی یک متوازی الاضلاع است.

۶۵ . ثابت کنید که میانه های یک مثلث در یک نقطه متقاطعند

۶۶ . چهارضلعی $ABCD$ مفروض است که نقاط E, F, G, H اوساط اضلاع این چهارضلعی است ثابت کنید که $EFGH$ یک متوازی الاضلاع است.

۶۷ . در متوازی الاضلاع $ABCD$ نقطه E وسط AD است. ثابت کنید که فاصله محل تلاقی BE با AC یک سوم AC است.

۶۸ . بردارهای وضعیت نقاط A و B را بترتیب با $2+i$ و $3-2i$ نشان می دهیم. (a) معادله AB را بیابید. (b) معادله عمود منصف AB را تعیین کنید.

جواب :

$(a)\ z-(2+i)=t(1-3i)$ یا $x=2+t,\ y=1-3t$ یا $3x+y=7$

$(b)\ z-(5/2-i/2)=t(3+i)$ یا $x=3t+5/2,\ y=t-1/2$ یا $x-3y=4$

۶۹ . مکان هندسی هریک از عبارات زیر را تعیین و آنها را شرح دهید:

$$(a)\ |z-i|=2,\ (b)\ |z+2i|+|z-2i|=6,\ (c)\ |z-3|-|z+3|=4,$$
$$(d)\ z(\bar{z}+2)=3,\ (e)\ \mathrm{Im}\{z^2\}=4$$

جواب : (a) دایره، (b) بیضی (c) هذلولی، (d) دایره، (e) هذلولی

۷۰ . مطلوب است تعیین معادلهٔ :

(الف) دایره‌ای بشعاع ۲ و بمرکز (۴ ، ۳-).

(ب) بیضی به کانونهای (۲ ، ۰) و (۲-، ۰) که قطر اطول آن ۱۰ باشد.

جواب : الف : $|z+3-4i| = 2$ یا $(x+3)^2+(y-4)^2 = 4$

(ب) $|z+2i|+|z-2i| = 10$

۷۱ به طور هندسی ناحیه‌ای را که به وسیلهٔ هر یک از روابط زیر مشخص می شود شرح دهید :

$(a)\ \ 1 < |z+i| \leqq 2,\quad (b)\ \ \mathrm{Re}\{z^2\} > 1,\quad (c)\ \ |z+3i| > 4,$

$(d)\ \ |z+2-3i| + |z-2+3i| < 10$

۷۲ . نشان دهید که معادله بیضی

$$|z+3|+|z-3| = 10$$

در دستگاه مختصات قائم به صورت

$$x^2/25 + y^2/16 = 1$$

می باشد

مسائل مربوط به مبانی اصول موضوعی اعداد مختلط

۷۳ . از تعریف اعداد مختلط به صورت زوج مرتبی از اعداد حقیقی استفاده کرده ثابت کنید که اگر حاصلضرب دو عدد مختلط صفر شود، آنگاه حداقل یکی از آنها صفر است.

۷۴ . قانون جابجائی را نسبت به

(الف) عمل جمع

(ب) عمل ضرب را ثابت کنید

۷۵ . قانون انجمنی را نسبت به

(الف) عمل جمع **(ب)** عمل ضرب، ثابت کنید.

۷۶ . **(الف)** اعداد حقیقی x و y را طوری بیابید که

$$(c,d)\cdot(x,y) = (a,b)$$

که در آن $(c,d) \neq (0,0)$.

(ب) . وابستگی (x,y) به نتیجه عمل تقسیم اعداد مختلط چیست ؟

۷۷ . ثابت کنید

$$(\cos\theta_1, \sin\theta_1)(\cos\theta_2, \sin\theta_2)\cdots(\cos\theta_n, \sin\theta_n) = (\cos[\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n], \sin[\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n])$$

۷۸ . **(الف)** $(a, b)^{1/n}$ را چگونه تعریف می کنید که در آن n عددی صحیح و مثبت است ؟

(ب) $(a, b)^{1/2}$ را به صورت جملاتی از a و b تعریف کنید .

مسایل مربوط به صورت قطبی

اعداد مختلط

۷۹ . هریک از اعداد زیر را به صورت قطبی بنویسید :

(a) $2-2i$, (b) $-1+\sqrt{3}\,i$, (c) $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$, (d) $-i$, (e) -4,

(f) $-2\sqrt{3}-2i$, (g) $\sqrt{2}\,i$, (h) $\sqrt{3}/2-3i/2$.

جواب:

(a) $2\sqrt{2}$ cis $315°$ یا $2\sqrt{2}\,e^{7\pi i/4}$, (b) 2 cis $120°$ یا $2e^{2\pi i/3}$, (c) 4 cis $45°$ یا $4e^{\pi i/4}$,

(d) cis $270°$ یا $e^{3\pi i/2}$, (e) 4 cis $180°$ یا $4e^{\pi i}$, (f) 4 cis $210°$ یا $4e^{7\pi i/6}$,

(g) $\sqrt{2}$ cis $90°$ یا $\sqrt{2}\,e^{\pi i/2}$, (h) $\sqrt{3}$ cis $300°$ یا $\sqrt{3}\,e^{5\pi i/3}$.

۸۰ . ثابت کنید

$$2+i = \sqrt{5}\,e^{i\tan^{-1}(1/2)}$$

۸۱ . اعداد (a) $-3-4i$, (b) $1-2i$ را به صورت قطبی بنویسید

جواب :

$$(a)\ 5\,e^{i(\pi+\tan^{-1}4/3)},\quad (b)\ \sqrt{5}\,e^{-i\tan^{-1}2}$$

۸۲ . نمودار اعداد زیر را تعیین کنید و سپس آنها را به صورت جبری بنویسید .

(a) $6(\cos 135° + i\sin 135°)$, (b) 12 cis $90°$, (c) 4 cis $315°$, (d) $2e^{5\pi i/4}$,

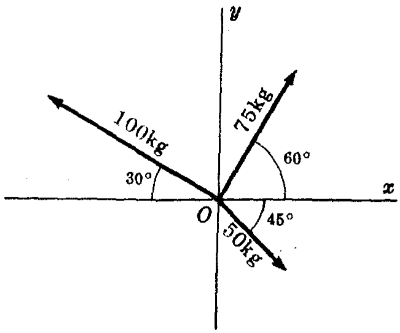
(e) $5e^{7\pi i/6}$, (f) $3e^{-2\pi i/3}$.

جواب :

(a) $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$, (b) $12i$, (c) $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i$, (d) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$,

(e) $-5\sqrt{3}/2-(5/2)i$, (f) $-3\sqrt{3}/2-(3/2)i$

۸۳ . نیروهایی مطابق شکل ۴۰ــ۱ ، در صفحه به یک شیئی که در نقطهٔ O قرار دارد اثر می کنند. مطلوب است تعیین
(الف) به صورت نمودار **(ب)** به صورت تحلیلی
که چه نیرویی لازم است که شیئی حرکت نکند. [این نیرو را گاهی **نیروی موازنه** یا **متعادل کننده** گویند).



شکل ۴۰ــ۱

۸۴ . ثابت کنید روی دایره $z = Re^{i\theta}$ داریم :

$$|e^{iz}| = e^{-R\sin\theta}.$$

۸۵ . (الف) ثابت کنید

$$r_1e^{i\theta_1} + r_2e^{i\theta_2} = r_3e^{i\theta_3}$$

که در آن

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2}{r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2}\right)$$

(ب) نتیجه (الف) را تعمیم دهید:

مسایل مربوط به قضیه موآور

۸۶ . هریک ازعبارات زیر را حساب کنید.

(a) $(5\text{ cis }20°)(3\text{ cis }40°)$
(b) $(2\text{ cis }50°)^6$
(c) $\dfrac{(8\text{ cis }40°)^3}{(2\text{ cis }60°)^4}$
(d) $\dfrac{(3e^{\pi i/6})(2e^{-5\pi i/4})(6e^{5\pi i/3})}{(4e^{2\pi i/3})^2}$
(e) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$

جواب :

$(a)\ 15/2 + (15\sqrt{3}/2)i,\quad (b)\ 32 - 32\sqrt{3}\,i,\quad (c)\ -16 - 16\sqrt{3}\,i,$

$(d)\ 3\sqrt{3}/2 - (3\sqrt{3}/2)i,\quad (e)\ -\sqrt{3}/2 - (1/2)i$

۸۷ . ثابت کنید

$(a)\ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta,\quad (b)\ \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$

۸۸ . ثابت کنید که جوابهای معادلهٔ

$$z^4 - 3z^2 + 1 = 0$$

عبارتند از

$$z = 2\cos 36^\circ, 2\cos 72^\circ, 2\cos 216^\circ, 2\cos 252^\circ$$

۸۹ . نشان دهید

$(a)\ \cos 36^\circ = (\sqrt{5}+1)/4,\quad (b)\ \cos 72^\circ = (\sqrt{5}-1)/4$

(**راهنمایی :** از مسئله ۸۸ استفاده کنید).

۹۰ . ثابت کنید

$(a)\ \dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = 8\cos^3\theta - 4 = 2\cos 3\theta + 6\cos\theta - 4$

$(b)\ \cos 4\theta = 8\sin^4\theta - 8\sin^2\theta + 1$

۹۱ . قضیهٔ موآور را **(الف)** برای اعداد صحیح منفی **(ب)** برای اعداد گویا ثابت کنید.

مسائل مربوط به ریشه‌های اعداد مختلط

۹۲ . هریک از ریشه‌های نشان داده شده در زیر را بدست آورید و آنها را به صورت هندسی مشخص کنید:

$(a)\ (2\sqrt{3} - 2i)^{1/2},\quad (b)\ (-4 + 4i)^{1/5},\quad (c)\ (2 + 2\sqrt{3}\,i)^{1/3},$

$(d)\ (-16i)^{1/4},\quad (e)\ (64)^{1/6},\quad (f)\ (i)^{2/3}$

جواب :

$(a)\quad 2\ \text{cis}\ 165^\circ,\quad 2\ \text{cis}\ 345^\circ.$

$(b)\quad \sqrt{2}\ \text{cis}\ 27^\circ,\quad \sqrt{2}\ \text{cis}\ 99^\circ,\quad \sqrt{2}\ \text{cis}\ 171^\circ,\quad \sqrt{2}\ \text{cis}\ 243^\circ,\quad \sqrt{2}\ \text{cis}\ 315^\circ.$

$(c)\quad \sqrt[3]{4}\ \text{cis}\ 20^\circ,\quad \sqrt[3]{4}\ \text{cis}\ 140^\circ,\quad \sqrt[3]{4}\ \text{cis}\ 260^\circ.$

(d) $2 \text{ cis } 67.5°$, $2 \text{ cis } 157.5°$, $2 \text{ cis } 247.5°$, $2 \text{ cis } 337.5°$.

(e) $2 \text{ cis } 0°$, $2 \text{ cis } 60°$, $2 \text{ cis } 120°$, $2 \text{ cis } 180°$, $2 \text{ cis } 240°$, $2 \text{ cis } 300°$.

(f) $\text{cis } 60°$, $\text{cis } 180°$, $\text{cis } 300°$.

۹۳ . هریک از ریشه های نشان داده شده در زیر را بدست آورده و آنها را در صفحه مختلط مشخص کنید :

(a) ریشه های سوم ۸ ، (b) ریشه های دوم $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$ (c) ریشه های پنجم عدد $-16 + 16\sqrt{3}\,i$ (d) ریشه های ششم عدد $-27i$

جواب :

(a) $2 \text{ cis } 0°$, $2 \text{ cis } 120°$, $2 \text{ cis } 240°$. (b) $\sqrt{8} \text{ cis } 22.5°$, $\sqrt{8} \text{ cis } 202.5°$.

(c) $2 \text{ cis } 48°$, $2 \text{ cis } 120°$, $2 \text{ cis } 192°$, $2 \text{ cis } 264°$, $2 \text{ cis } 336°$.

(d) $\sqrt{3} \text{ cis } 45°$, $\sqrt{3} \text{ cis } 105°$, $\sqrt{3} \text{ cis } 165°$, $\sqrt{3} \text{ cis } 225°$, $\sqrt{3} \text{ cis } 285°$, $\sqrt{3} \text{ cis } 345°$.

۹٤ . معادلات زیر را حساب کنید :

$$(a)\ z^4 + 81 = 0, \quad (b)\ z^6 + 1 = \sqrt{3}\,i.$$

جواب :

(a) $3 \text{ cis } 45°$, $3 \text{ cis } 135°$, $3 \text{ cis } 225°$, $3 \text{ cis } 315°$

(b) $\sqrt[6]{2} \text{ cis } 40°$, $\sqrt[6]{2} \text{ cis } 100°$, $\sqrt[6]{2} \text{ cis } 160°$, $\sqrt[6]{2} \text{ cis } 220°$, $\sqrt[6]{2} \text{ cis } 280°$, $\sqrt[6]{2} \text{ cis } 340°$

۹۵ . ریشه های دوم

$$(a)\ 5 - 12i, \quad (b)\ 8 + 4\sqrt{5}\,i$$

را بدست آورید .

جواب :

$$(a)\ 3 - 2i,\ -3 + 2i, \quad (b)\ \sqrt{10} + \sqrt{2}\,i,\ -\sqrt{10} - \sqrt{2}\,i$$

۹۶ ریشه های سوم $-11 - 2i$ را بدست آورید .

جواب :

$$1 + 2i,\ \tfrac{1}{2} - \sqrt{3} + (1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3})i,\ -\tfrac{1}{2} - \sqrt{3} + (\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - 1)i$$

مسائل مربوط به معادلات چند جمله ای

۹۷ . معادلات زیر را حل کرده و تمام ریشه های آنها را بدست آورید :

$$(a)\ 5z^2 + 2z + 10 = 0, \quad (b)\ z^2 + (i - 2)z + (3 - i) = 0$$

جواب : (a) $(-1 \pm 7i)/5$, (b) $1 + i,\ 1 - 2i$

۹۸ . مطلوب است حل معادلهٔ زیر

$$z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$$

جواب : $1, 1, 2, -1 \pm i$

۹۹ . (الف) تمام ریشه‌های معادله $z^4 + z^2 + 1 = 0$ را بدست آورید و (ب) آنها را در صفحهٔ مختلط مشخص کنید.

جواب : $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

۱۰۰ . دو عدد مختلط را طوری بیابید که مجموعشان ٤ و حاصلضربشان ۸ باشد.

جواب : $2 + 2i,\ 2 - 2i$

۱۰۱ . مطلوبست تعیین تمام ریشه‌های

(الف) چهارم (ب) هفتم واحد .

(جواب) .

$$(a)\ \ e^{2\pi ik/4} = e^{\pi ik/2},\ k = 0, 1, 2, 3 \qquad (b)\ \ e^{2\pi ik/7},\ k = 0, 1, \ldots, 6$$

۱۰۲ . ثابت کنید

$$1 + \cos 72^\circ + \cos 144^\circ + \cos 216^\circ + \cos 288^\circ = 0$$

۱۰۳ . ثابت کنید:

$$\cos 36^\circ + \cos 72^\circ + \cos 108^\circ + \cos 144^\circ = 0$$

۱۰٤ . مطلوب است تعیین تمام ریشه‌های

$$(1 + z)^5 = (1 - z)^5$$

جواب :

$$0,\ (\omega - 1)/(\omega + 1),\ (\omega^2 - 1)/(\omega^2 + 1),\ (\omega^3 - 1)/(\omega^3 + 1),\ (\omega^4 - 1)/(\omega^4 + 1)$$

که در آن $\omega = e^{2\pi i/5}$

مسائل مربوط به ضرب داخلی و ضرب خارجی

۱۰۵ . اگر $z_1 = 2 + 5i$ و $z_2 = 3 - i,$ مطلوب است تعیین :

$(a)\ z_1 \circ z_2,\ \ (b)\ z_1 \times z_2,\ \ (c)\ z_2 \circ z_1,\ \ (d)\ z_2 \times z_1,\ \ (e)\ |z_1 \circ z_2|,$

$(f)\ |z_2 \circ z_1|,\ \ (g)\ |z_1 \times z_2|,\ \ (h)\ |z_2 \times z_1|.$

جواب :

$(a)\ 1,\ \ (b)\ -17,\ \ (c)\ 1,\ \ (d)\ 17,\ \ (e)\ 1,\ \ (f)\ 1,\ \ (g)\ 17,\ \ (h)\ 17$

۱۰۶ ثابت کنید:

$$(a)\ z_1 \circ z_2 = z_2 \circ z_1, \quad (b)\ z_1 \times z_2 = -z_2 \times z_1$$

۱۰۷ . اگر $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ثابت کنید:

$$(a)\ z_1 \circ z_2 = r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1), \quad (b)\ z_1 \times z_2 = r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

۱۰۸ . ثابت کنید:

$$(a)\ z_1 \circ (z_2 + z_3) = z_1 \circ z_2 + z_1 \circ z_3, \quad (b)\ z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$$

۱۰۹ . مساحت مثلثی را بیابید که

$$-4 - i,\ 1 + 2i,\ 4 - 3i$$

رئوس آن باشند.

جواب: ۱۷

۱۱۰ . مساحت چهارضلعی برئوس

$$(2, -1),\ (4, 3),\ (-1, 2) \text{ ، } (-3, -2)$$

را بیابید.

جواب: ۱۸

مسائل مربوط به مختصات مزدوج

۱۱۱ . مکان هندسی هریک ازعبارات زیر را که به صورت جملاتی از مختصات مزدوج $z, \bar{z}$ داده شده‌اند مشخص کنید:

$$(a)\ z\bar{z} = 16, \quad (b)\ z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 8 = 0, \quad (c)\ z + \bar{z} = 4, \quad (d)\ \bar{z} = z + 6i$$

جواب:

$$(a)\ x^2 + y^2 = 16, \quad (b)\ x^2 + y^2 - 4x + 8 = 0, \quad (c)\ x = 2, \quad (d)\ y = -3$$

۱۱۲ . هریک از معادلات زیر را به صورت جملاتی از مختصات مزدوج بنویسید:

$$(a)\ (x-3)^2 + y^2 = 9, \quad (b)\ 2x - 3y = 5, \quad (c)\ 4x^2 + 16y^2 = 25.$$

جواب:

$$(a)\ (z-3)(\bar{z}-3) = 9, \quad (b)\ (2i-3)z + (2i+3)\bar{z} = 10i,$$

$$(c)\ 3(z^2 + \bar{z}^2) - 10z\bar{z} + 25 = 0$$

مسائل متفرقه

۱۱۳ . فرض کنید $ABCD$ یک متوازی الاضلاع است. ثابت کنید:

$$(AC)^2 + (BD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2$$

۱۱۴ . مورد اشتباه را در محاسبهٔ زیر بیابید:

$$-1 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

پس ۱ــ = ۱

۱۱۵ . **(الف)** معادله زیر مفروض است

$$z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0$$

که در آن a_1, a_2, a_3, a_4 اعداد حقیقی مخالف صفر هستند، اگر $a_3^2 + a_1^2 a_4 = a_1 a_2 a_3$ آنگاه این معادله ریشه موهومی محض دارد.

(ب) آیا عکس (الف) درست است؟

۱۱۶ . اگر $z = 6e^{\pi i/3}$ ، مطلوب است محاسبهٔ $|e^{iz}|$

جواب: $e^{-3\sqrt{3}}$

۱۱۷ . نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی m و p داریم:

$$e^{2mi\cot^{-1}p}\left\{\frac{pi+1}{pi-1}\right\}^m = 1$$

۱۱۸ . اگر $P(z)$ چند جمله‌ای دلخواه از z با ضرایب حقیقی باشد ثابت کنید

$$\overline{P(z)} = P(\bar{z})$$

۱۱۹ . اگر نقاط z_1, z_2 و z_3 در یک استقامت باشند، ثابت کنید سه عدد حقیقی ثابت α, β, γ که هر سه صفر نیستند موجود است به طوری که

$$\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0$$

که در آن $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

۱۲۰ . عدد مختلط z مفروض است،

$$(a)\ \bar{z},\quad (b)\ -z,\quad (c)\ 1/z,\quad (d)\ z^2$$

را به صورت هندسی نمایش دهید.

۱۲۱ . دو عدد مختلط دلخواه مخالف صفر z_1 و z_2 مفروضند. چگونه می توان فقط با استفاده از خط کش و پرگار اعداد زیر را به طور هندسی نشان داد؟

$$(a)\ z_1z_2,\quad (b)\ z_1/z_2,\quad (c)\ z_1^2+z_2^2,\quad (d)\ z_1^{1/2},\quad (e)\ z_2^{3/4}$$

۱۲۲ . ثابت کنید معادله خطی که از نقاط z_1 و z_2 می گذرد به صورت زیر است

$$\arg\{(z-z_1)/(z_2-z_1)\} = 0$$

۱۲۳ . اگر $z = x+iy$ ، ثابت کنید

$$|x|+|y| \leqq \sqrt{2}\,|x+iy|$$

۱۲۴ . آیا عکس مسئله ٤۹ درست است؟ ادعای خود را ثابت کنید.

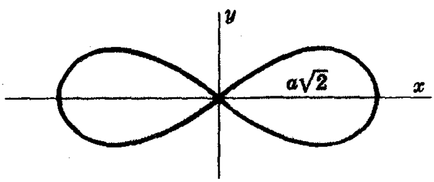
۱۲۵ . معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که از نقاط $1-i,\ 2i,\ 1+i$ می گذرد.

جواب : $(x+1)^2+y^2 = 5$ یا $|z+1| = \sqrt{5}$

۱۲۶ . نشان دهید مکان هندسی نقاط z به طوری که

$$|z-a|\,|z+a| = a^2 \qquad a>0$$

یک **لمنسکات** است که در شکل ٤۲ــ۱ نشان داده شده است.



شکل ٤۲ــ۱

۱۲۷ . ثابت کنید:

$$(a)\quad \cos\theta+\cos(\theta+\alpha)+\cdots+\cos(\theta+n\alpha) = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\cos(\theta+\tfrac{1}{2}n\alpha)$$

$$(b)\quad \sin\theta+\sin(\theta+\alpha)+\cdots+\sin(\theta+n\alpha) = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\sin(\theta+\tfrac{1}{2}n\alpha)$$

۱۲۸ . ثابت کنید که

$(a)\ \mathrm{Re}\{z\}>0$ و $(b)\ |z-1|<|z+1|$

معادلند.

۱۲۹ . اگر نقاط P_1 و P_2 بترتیب نمایش اعداد z_1 و z_2 باشد به طوری که $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$ ثابت کنید **(الف)** z_1/z_2 یک عدد موهومی محض است، **(ب)** $\angle P_1OP_2 = 90°$

۱۳۰ اگر m_1, m_2, m_3 به ترتیب جرمهای واقع در نقاط z_1, z_2, z_3 **باشند ثابت کنید** مرکز جرم از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\hat{z} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

این رابطه را برای n جرم تعمیم دهید.

۱۳۱ . روی پاره خطی که نقاط z_1 و z_2 را بهم وصل می کند نقطه ای تعیین کنید که آن را به نسبت $p:q$ تقسیم کند.

جواب : $(qz_1 + pz_2)/(q + p)$

۱۳۲ . نشان دهید معادله دایره‌ای که از نقاط z_1, z_2, z_3 می گذرد به صورت زیر است:

$$\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) \Big/ \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) = \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z} - \bar{z}_2}\right) \Big/ \left(\frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2}\right)$$

۱۳۳ . ثابت کنید میانه‌های مثلثی برئوس z_1, z_2, z_3 در نقطه $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ متقاطعند.

مجموعه نقاطی از صفحه مختلط z را تعیین کنید که در هر یک از روابط زیر صدق کنند

۱۳٤ $(a)\ |z| > |z - 1|,\quad (b)\ |z + 2| > 1 + |z - 2|$

۱۳۵ $(a)\ |z| \geqslant 2;\quad (b)\ \frac{1}{|z|} \geqslant 1,\ z \neq 0;\ (c) \left|\frac{1}{z}\right| \leqslant 2,\ z \neq 0.$

جواب :

(a) تمام صفحه مختلط بدون دایره‌ای بشعاع ۲ و به مرکز مبداء مختصات.

(b) دایره به شعاع ۱ و بمرکز مبداء مختصات بدون مرکز.

(c) تمام صفحه مختلط بدون دایره‌ای بشعاع $r = 1/2$ و بمرکز مبداء مختصات و بدون مرکز.

۱۳٦ . $(a)\ |z - 5i| = 8;\ (b)\ |z - 1 - i| \leqslant 4$

جواب :

(a) پیرامون دایره‌ای به شعاع ۸ و به مرکز $z = 5i$.

(b) دایره‌ای به شعاع ٤ و به مرکز $z = 1 + i$ و مرز آن.

.۱۳۷

(a) $1<|z+i|<2, \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}$; (b) $2<|z|<$
$<3, \frac{\pi}{8}<\arg z<\frac{4}{3}\pi$.

جواب : (a) ناحیه‌ای محدود به شعاع حامل $\arg z = \pi/4$ و $\arg z = \pi/2$، و پیرامون دو دایره بشعاعهای ۱ و ۲ و بمرکز $z = -i$.

(b) ناحیه‌ای محدود به دو شعاع حامل $\arg z = \pi/8$ و $\arg z = 4\pi/3$ و پیرامون دایره هایی بشعاعهای ۳ و ۲ بمرکز مبداء مختصات .

.۱۳۸

(a) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$; (b) $0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1$.

جواب : (a) نیم صفحه سمت راست که شامل محور y هاست

(b) نوار بین خطوط $y = 0$ و $y = 1$ وبانضمام نقاط روی این دو خط راست.

معادلات منحنیهایی را تعیین کنید که با معادلات زیر مشخص شده‌اند

۱۳۹ (a) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; (b) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$; (c) $\operatorname{Im} (1/z) = 1/2$

جواب : (a) هذلولی $xy = 1$ ؛ (b) هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ ، (c) دایره، $x^2 + (y + 1)^2 = 1$

.۱۴۰ (a) $\operatorname{Re} (1/\bar{z}) = 1$; (b) $\operatorname{Im} (\overline{z^2 - \bar{z}}) = 2 - \operatorname{Im} z$.

جواب : (a) دایرهٔ $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$ (b) هذلولی $xy = -1$

.۱۴۱ $z^2 + \bar{z}^2 = 1$

جواب : $x^2 - y^2 = 1/2$

.۱۴۲ $2z\bar{z} + (2 + i) z + (2 - i)\bar{z} = 2$

جواب : $(x + 1)^2 + (y - 1/2)^2 = 9/4$

.۱۴۳ (a) $|z - i| + |z + i| = 4$; (b) $|z - i| -$
$- |z + i| = 2$.

جواب : (a) بیضی $x^2/3 + y^2/4 = 1$ (b) شعاع حاملی روی محور y ها از ۱ــ تا $-\infty$

.۱۴۴ (a) $|z| - 3 \operatorname{Im} z = 6$; (b) $3 |z| - \operatorname{Re} z = 12$

جواب :

(a) هذلولی $\dfrac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{(3\sqrt{2})^2}=1$

(b) بیضی $\dfrac{\left(y+\frac{9}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}-\dfrac{x^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$

مجموع های زیر را حساب کنید

۱٤۵.

(a) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx;$
(b) $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx.$

حل. مجموع زیر را در نظر می گیریم :

$$S_n=(\cos x+i\sin x)+(\cos 2x+i\sin 2x)+\ldots+(\cos nx+i\sin nx)$$

با استفاده از دستور موآور داریم :

$$S_n=(\cos x+i\sin x)+(\cos x+i\sin x)^2+\ldots+(\cos x+i\sin x)^n$$

این مجموع n جمله اول یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $q=\cos x+i\sin x$ و جمله اول $a_1=\cos x+i\sin x$ است. مجموع برابر است با :

$$S_n=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos nx+i\sin nx)(\cos x+i\sin x)}{1-(\cos x+i\sin x)}$$

قسمتهای حقیقی و موهومی را جدا می کنیم

$$S_n=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{(n+1)x}{2}+i\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(n+1)x}{2}$$

از آنجا

$$\text{(a)}\ \sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(n+1)x}{2};$$

$$\text{(b)}\ \cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{(n+1)x}{2}.$$

۱۴۶

$$\text{(a)}\ \sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x;$$
$$\text{(b)}\ \cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x.$$

جواب :

$$\text{(a)}\ \frac{\sin^2 nx}{\sin x};\quad \text{(b)}\ \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$$

۱۴۷ . x و y را که حقیقی هستند از معادلهٔ زیر حساب کنید.

$$(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i.$$

جواب : $x=-\frac{4}{11},\quad y=\frac{5}{11}$.

۱۴۸ . x, y, z, t حقیقی را از دستگاه معادلات زیر بدست آورید:

$$(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)z+(1+4i)t=1+5i,$$
$$(3-i)x+(4-2i)y+(1+i)z+4it=2-i.$$

جواب: $x=-2,\quad y=\frac{3}{2},\quad z=2,\quad t=-\frac{1}{2}$

۱۴۹ دستگاه معادلات زیر را حل کنید

(a) $(3-i)x+(4+2i)y=2+6i,\ \ (4+2i)x-(2+3i)y=5+4i;$

(b) $(2+i)x+(2-i)y=6,\ \ (3+2i)x+(3-2i)y=8;$

(c) $x+yi-2z=10,\ \ x-y+2iz=20,\ \ ix+3iy-(1+i)z=30.$

جواب : (a) $x=1+i,\ y=i$; (b) $x=2+i,\ y=2-i$; (c) $x=3-11i,\ y=-3-9i,$ $z=1-7i.$

۱۵۰ . معادلات زیر را حل کنید:

(a) $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0,$

(b) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0,$

(c) $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0.$

جواب : (a) $x_1=3-i,\ x_2=-1+2i$; (b) $x_1=2+i,\ x_2=1-3i$; (c) $x_1=1-i,\quad x_2=\frac{4-2i}{5}$.

۱۵۱ . معادلات زیر را حل کنید و سپس هر کدام را به حاصلضرب دو عامل با ضرایب حقیقی بنویسید:

(a) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$.

(b) $x^4+2x^2-24x+72=0$.

(راهنمائی : هریک از معادلات را بصورت مجموع دو مربع کامل بنویسید).

جواب :

(a) $1\pm 2i,\ -4\pm 2i,\ (x^2-2x+5)(x^2+8x+20)$;

(b) $2\pm i\sqrt{2},\ -2\pm 2i\sqrt{2},\ (x^2-4x+6)\ (x^2+4x+12)$.

۱۵۲ . ثابت کنید

$$(1+i\sqrt{3})\,(1+i)\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right]$$

۱۵۳ . مطلوبست محاسبهٔ

$$\frac{(1-i\sqrt{3})\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2\,(1-i)\,(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$$

جواب :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

۱۵۴ . هریک از عبارت زیر را حساب کنید.

(a) $(1+i)^{25}$, (b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$,

(c) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$, (d) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$

جواب :

(a) $2^{12}(1+i)$, (b) $2^{9}(1-i\sqrt{3})$, (c) $(2-\sqrt{3})^{12}$, (d) -64.

۱۵۵ . ثابت کنید

(a) $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$,

(b) $(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$

n عددی طبیعی است .

۱۵۶ . اگر $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ مطلوب است محاسبهٔ $(1+\omega)^n$

راهنمائی: تحقیق کنید $1+i=-\omega^2$ جواب: $\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$

۱۵۷ . مطلوب است محاسبهٔ

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$$

حل :

$$1+\cos\alpha+i\sin\alpha$$
$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right);$$

پس

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

۱۵۸ ثابت کنید که اگر $z+\frac{1}{z}=2\cos\Theta$، آنگاه،

$$z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\Theta.$$

راهنمائی : تحقیق کنید که اگر $z=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$ آنگاه

$$\frac{1}{z}=\cos\varphi\mp i\sin\varphi$$

۱۵۹ . ثابت کنید.

$$\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n=\frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$$

۱۶۰ . مطلوب است محاسبهٔ

$$\text{(a)}\ \sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}},\quad \text{(b)}\ \sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}},\quad \text{(c)}\ \sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}.$$

جواب :

$$\text{(a)}\ \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi+i\sin\frac{24k+19}{72}\pi\right),$$

$k=0, 1, 2, 3, 4, 5;$

$$\text{(b)}\ \frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{24k+5}{96}\pi+i\sin\frac{24k+5}{96}\pi\right),$$

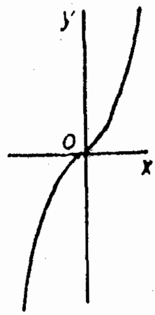
$k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;$

$$\text{(c)}\ \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+17}{72}\pi+i\sin\frac{24k+17}{72}\pi\right)$$

$k=0, 1, 2, 3, 4, 5.$

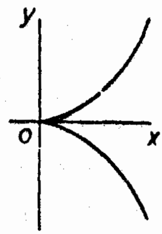
منحنی‌های کلاسیک

Cubical Parabola



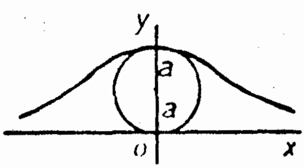
$y = ax^3$

Semicubical Parabola



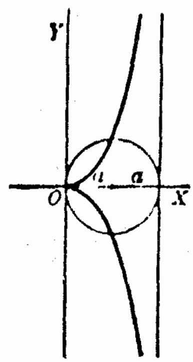
$y^2 = ax^3$

The Witch of Agnesi



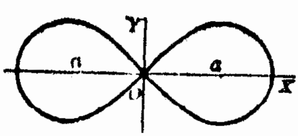
$x^2 y = 4a^2(2a - y)$

The Cissoid of Diocles



$y^2(2a - x) = x^3$

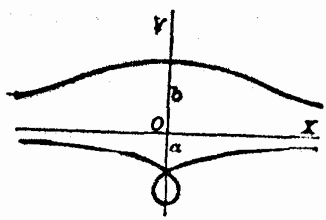
The Lemniscate of Bernoulli



$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$

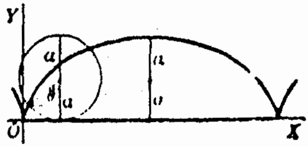
The Conchoid of Nicomedes



$x^2 y^2 = (y + a)^2 (b^2 - y^2)$

$\rho = a \operatorname{cosec} \theta + b$

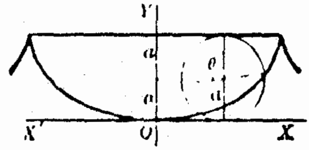
Cycloid, Ordinary Case



$$x = a\ \mathit{arc\ sin\ vers}\ \frac{y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

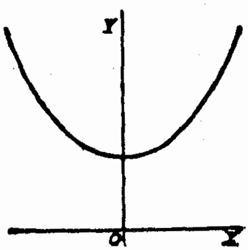
Cycloid, Vertex at Origin



$$x = a\ \mathit{arc\ sin\ vers}\ \frac{y}{a} + \sqrt{2ay - y^2}$$

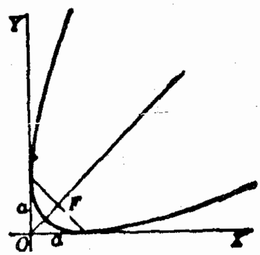
$$\begin{cases} x = a(\theta + \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

Catenary



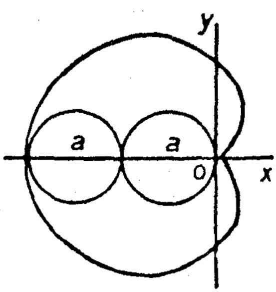
$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Parabola



$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

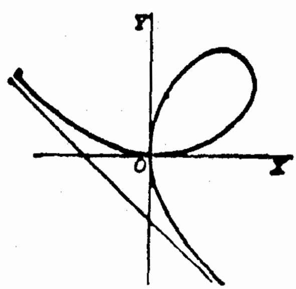
Cardioid



$$x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

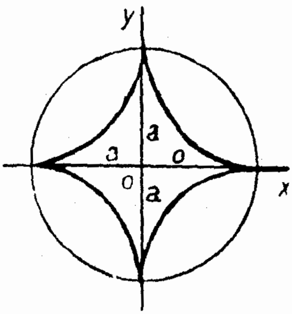
$$\rho = a(1 - \cos\theta)$$

Folium of Descartes



$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

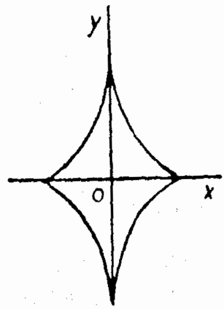
Hypocycloid of Four Cusps (Astroid)



$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$$

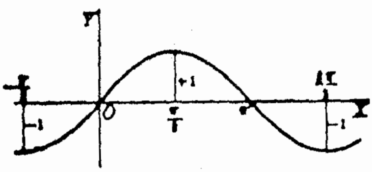
Evolute of Ellipse



$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

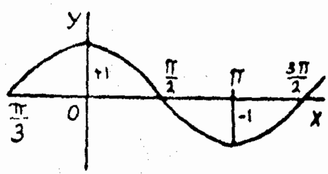
$$\begin{cases} x = A\cos^3\theta, \ Aa = a^2 - b^2 \\ y = B\sin^3\theta, \ Bb = b^2 - a^2 \end{cases}$$

Sine Curve



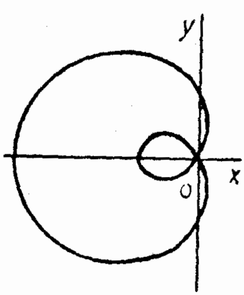
$$y = \sin x$$

Cosine Curve



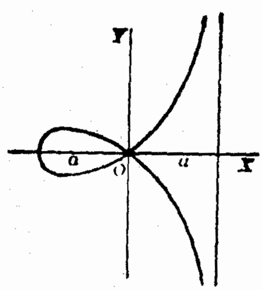
$$y = \cos x$$

Limaçon



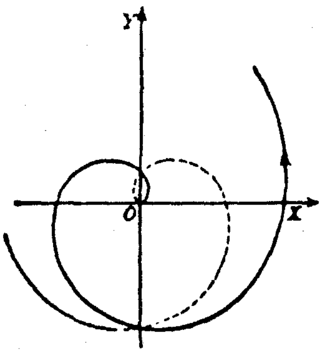
$$\rho = b - a\cos\theta$$

Strophoid



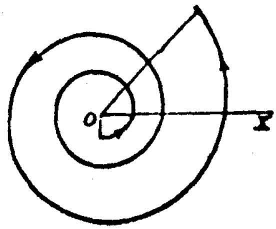
$$y^2 = x^2 \frac{a + x}{a - x}$$

Spiral of Archimedes



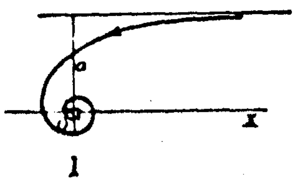
$\rho = a\theta$

Logarithmic or Equiangular Spiral



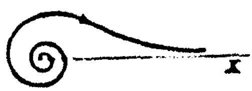
$\rho = e^{a\theta}$ ou $\log \rho = a\theta$

Hyperbolic or Reciprocal Spiral



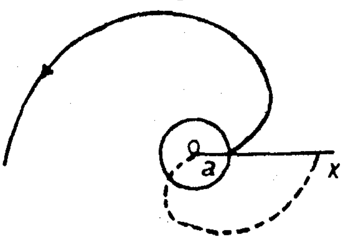
$\rho\theta = a$

Lituus



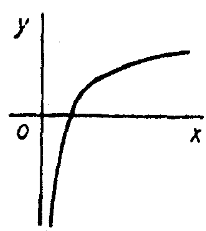
$\rho^2\theta = a^2$

Parabolic Spiral



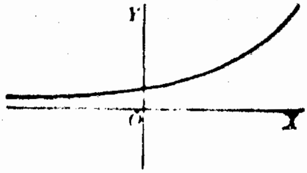
$(\rho - a)^2 = 4ac\theta$

Logarithmic Curve



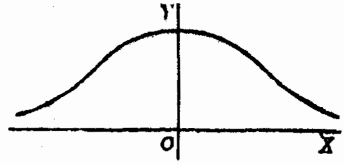
$y = \log x$

Exponential Curve



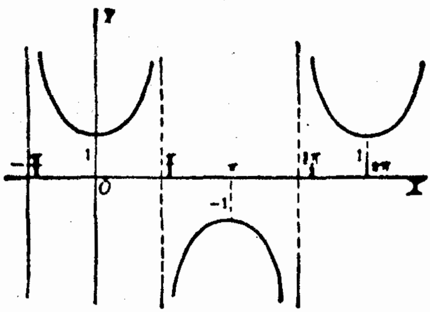
$y = e^{x}$

Probability Curve



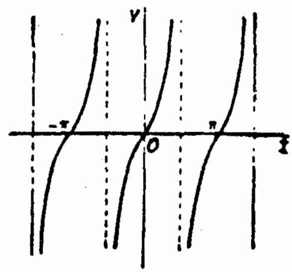
$y = e^{-x^{2}}$

Secant Curve



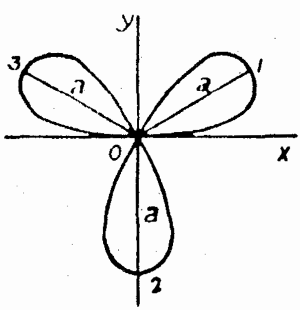
$y = \sec x$

Tangent Curve



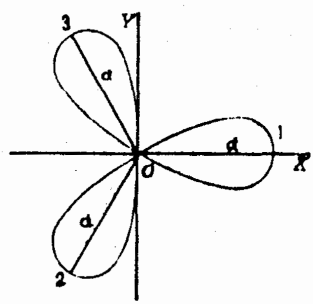
$y = tg x$

Three-Leaved Rose



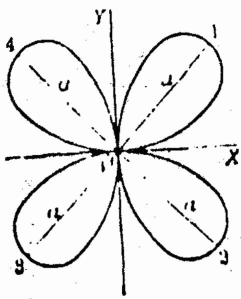
$\rho = a \sin 3\theta$

Three-Leaved Rose



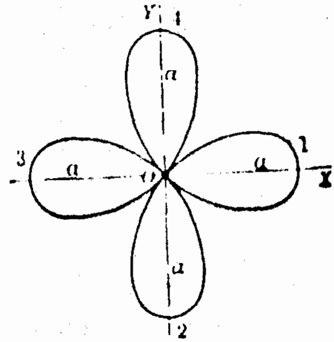
$\rho = a \cos 3\theta$

Four-Leaved Rose



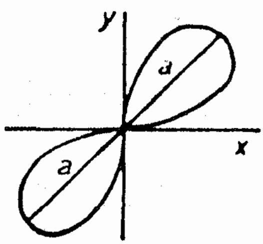
$\rho = a \sin ۲\theta$

Four-Leaved Rose



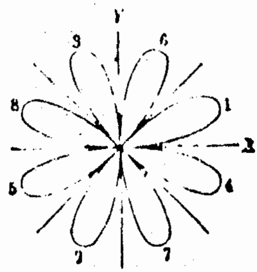
$\rho = a \cos ۲\theta$

Two-Leaved Rose Lemniscate



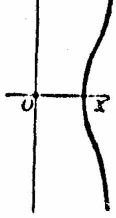
$\rho^{۲} = a^{۲} \sin ۲\theta$

Eight-Leaved Rose



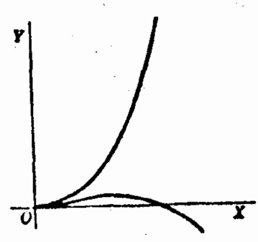
$\rho = a \sin ۴\theta$

(Courbe Avec Point Conjugué (Isolé) A L'origine)



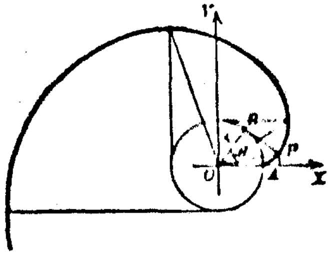
$y^{۲} = x^{۳} - x^{۲}$

(Courbe Avec Point de Rebroussement de Seconde Espèce A L'origine)



$(y - x^{۲})^{۲} = x^{۵}$

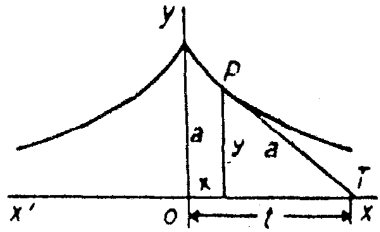
Involute of a Circle



$$\begin{cases} x = r\cos\theta + r\theta\sin\theta \\ y = r\sin\theta - r\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t - a\,tgh\,\dfrac{t}{a} \\ y = a\,sech\,\dfrac{t}{a} \end{cases}$$

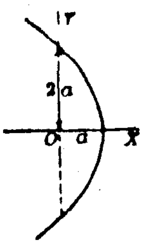
Tractrix (Tractrice)



$$x = a\,sech^{-1}\frac{y}{a} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

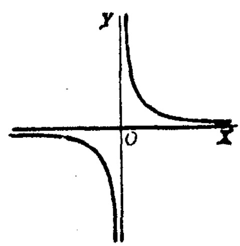
$$y + (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = 0$$

Parabola



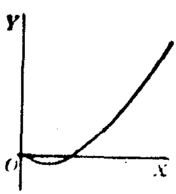
$$\rho = a\sec^2\frac{\theta}{2}$$

Equilateral Hyperbola



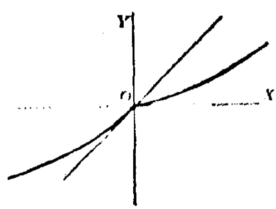
$$xy = a$$

(Courbe Avec Point D'arrét



$$y = x\cos x$$

(Courbe Avec Point Anguleux



$$y\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right) = x$$