انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، شماره ۲۲۷

# ریاضیات مهندسی

تألیف

لادیس د. کوواچ

ترجمه

دکتر اصغر کرایه چیان

دکتر ابوالقاسم بزرگ نیا

۱۳۷۷

بسم الله الرحمن الرحيم

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ، شمارهٔ ۲۳۷

# ریاضیات مهندسی

تألیف

**لادیس د . کوواک**

ترجمه

**دکتر اصغر کرایه چیان**

**دکتر ابوالقاسم بزرگ نیا**

**۱۳۷۷**

Kovach, Ladis D.

کوواک ، لادیس ، ۱۹۱۴-

ریاضیات مهندسی / تألیف لادیس د. کوواک ؛ ترجمه اصغر کرایه‌چیان ، ابوالقاسم بزرگ‌نیا . - مشهد : دانشگاه فردوسی مشهد ، مؤسسه چاپ و انتشارات ، ۱۳۷۷ .

ده ، ۴۶۸ ص . : مصور ، جدول ، نمودار . - (انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ؛ ۲۳۷)

(ISBN: 964-6335-30-6)

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار)

عنوان اصلی : Advanced engineering mathematics.

واژه‌نامه .

کتابنامه : ص . [۴۵۱] - ۴۵۲ .

۱. ریاضیات مهندسی . الف . کرایه‌چیان ، اصغر ، ۱۳۲۳- مترجم . ب . بزرگ‌نیا ، ابوالقاسم ، ۱۳۱۲- مترجم . ج . دانشگاه فردوسی مشهد مؤسسه چاپ و انتشارات . د . عنوان .

TA ۳۳۰ / ۹ک۹/۹ ۱۳۷۷ — ۶۲۰/۰۰۱۵۱

م ۸۹۰۶-۷۷


## شناسنامهٔ کتاب


**نام :** ریاضیات مهندسی

**تألیف :** لادیس د. کوواک

**ترجمه :** دکتر اصغر کرایه‌چیان - دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا

**ویراستار علمی :** دکتر محمدعلی پورعبدالله‌نژاد

**ویراستار ادبی :** مصطفی کدکنی

**ناشر :** انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

**تاریخ انتشار :** پاییز ۱۳۷۷

**تعداد :** ۲۰۰۰ نسخه - چاپ اوّل

**امور فنّی و چاپ :** مؤسسهٔ چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

**قیمت :** ۱۰۰۰۰ ریال

شابک : ۹۶۴-۶۳۳۵-۳۰-۶ (ISBN: 964-6335-30-6)

# فهرست مطالب

# پیشگفتار مؤلف

بطور کلی پذیرفته شده است که طرّاحی کار اصلی یک مهندس است. طرّاحی مهندسی از طرح یک فرایند قابل انعطاف تولید غذا تا طرح یک کارخانه تولید چرخ خیّاطی، رادیو، و موتورهای الکتریکی را شامل می‌شود، با این امکان که طرح ممکن است دو سال به‌طول انجامد تا خط تولیدی از پمپها و موتورهای درون‌سوز را تولید کند. می‌توانیم انتظار داشته باشیم که پروژه‌های آینده شامل طرحهای عظیم نیروی خورشیدی و سیّاره‌های قابل سکونت باشند.

ولی تحلیل، شرط لازم برای طرّاحی است. جنبه‌های مختلفی برای تحلیل مهندسی وجود دارد: از جمله عبارتند از ساختمان و مطالعه مدلها، مدل‌سازی باکامپیوتر، وکاربرد آنالیز ریاضی. گفته شده است [1] که «ریاضیات ابزاری است که دقّت را بر تصوّر تحمیل می‌کند و توجّه را بر مسائل اصلی با حذف شاخ و برگهای نامربوط معطوف می‌دارد. ریاضیات هر جا که کاربردش مفید تشخیص داده شود بنایی درست برای تحلیل فراهم می‌آورد». هدف ما نشان‌دادن راههای متعدّدی است که یک مهندس می‌تواند یک مسأله را از پیچیدگیهای بی‌اهمیّت پیراسته سازد، مسأله را با استفاده از نمایش ریاضی آن تقریب بزند، و آن را تحلیل نماید. در عین حال کسی که مسأله را حل می‌کند بایستی همواره از ساده‌سازیهای انجام شده و این که این ساده‌سازی چگونه می‌تواند بر نتیجه نهایی تأثیر بگذارد، آگاه باشد.

فنون ریاضی متعدّدی در تحلیلهای مهندسی به کار می‌روند که در این کتاب آنها را مورد بحث قرار داده‌ایم. چون ریاضیاتی که در این‌جا ارائه می‌شود در مسائلی که در زمینه‌های مختلف پیش می‌آیند مفید است، مخاطب این کتاب تنها دانشجویان مهندسی نیستند. فیزیکدانان و ریاضیدانان کاربردی نیز می‌توانند از مطالب این کتاب بهره‌مند گردند، زیرا در آن مباحثی گوناگون که معمولاً پس از درس ریاضیات عمومی مطرح می‌شوند، گنجانیده شده‌اند.

---

1- Saaty, Thomas L., *Mathematical Models of Arms Control and Disarmament.* New York: Wiley, 1968.

موضوعات مورد بحث بطور تصادفی ارائه نشده‌اند، و بنابراین این کتاب مجموعه‌ای از مباحث نامرتبط از آنالیز کاربردی نیست. بلکه این کتاب طوری طرح‌ریزی شده است که جریانی از یک موضوع به موضوع بعدی بر قرار باشد. مبحثی معرّفی نشده است مگر آن که نیاز به آن نشان داده شده باشد. بخشهای زیادی از کتاب با یک مسأله مشکل به پایان می‌رسد که بدون گسترش شیوه‌های جدید قابل حل نیست. ازجمله این‌بدان معناست‌که «ترتیب رایج» همه‌جا رعایت نشده است، هرچندکه تمام مباحث را می‌توان در کتاب یافت. کوشش فراوان به عمل آمده است که فصلها، و حتّی بخشهای داخل فصلها از یکدیگر مستقل باشند. به این طریق مدرّسین در انتخاب مباحثی که مورد تأکیدشان است، توانایی انعطاف بیشتری دارند.

بیشتر فصلها، با یک نگرش فراگیر آغاز و بخشهای زیادی هم با یک نگرش موشکافانه شروع می شوند. تمرینهای پایان هر بخش به سه دسته تقسیم می‌شوند. تمرینهای گروه اوّل مستقیماً با متن کتاب در ارتباط‌اند و به روشن‌شدن مطالب متن کمک می‌کنند یا مراحل محاسباتی را که حذف شده‌اند تکمیل می‌نمایند. در گروه دوم تمرینهایی وجود دارند که ممارست لازم را برای دانشجو فراهم می‌سازند تا با روشها و شیوه‌های ارائه شده آشنا شوند. گروه آخر شامل تمرینهایی است که بیشتر نظری هستند و طبیعت مشکلتری دارند، و آنها را می‌توان به‌عنوان مطالب تکمیل‌کننده در نظر گرفت. چون در این کتاب تمرینهای زیادی وجود دارند، بسادگی می‌توان آنهایی را که برای کلاس خاصی مناسب هستند انتخاب نمود.

در تمام کتاب تأکید بر حلّ مسأله و بیان مسائل فیزیکی به‌زبان ریاضی و برعکس است. وجود کامپیوتر را نیز مورد توجّه قرار داده‌ایم و بخشهای جداگانه‌ای به‌روشهای عددی اختصاص داده شده‌اند. پاسخ تمرینها و مثالها به‌صورتی داده شده‌اند که آنها را می‌توان با یک ماشین حساب به‌دست آورد. برای مثال، اگر نتیجه‌ای $\sqrt{3\log 3}$ است، تقریب ۱/۹۰۲۹ نیز داده شده است و به‌این‌طریق تمرینهایی که به ماشین حساب نیاز دارند مشخّص می‌شوند.

چند درس را می‌توان با استفاده از مطالب این کتاب تدریس نمود. فصلهای ۱ و ٦ را می‌توان به‌ترتیب برای تدریس جبر خطی و متغیّرهای مختلط، در سطحی نه‌چندان پیشرفته، به‌کار برد. از فصلهای ۲ تا ۵ می‌توان برای تدریس یک درس کامل معادلات با مشتقّات جزئی استفاده نمود. تمام بخشهایی راکه با روشهای عددی سروکار دارند می‌توان اختیاری در نظر گرفت. همچنین بسادگی می‌توان بر کاربردها تکیه‌کرد، زیرا خیلی از این مطالب در بخشهای جداگانه‌ای آورده شده‌اند.

بیشتر موضوعات این کتاب در درسهای مختلف طی چندین سال مورد استفاده قرار گرفته‌اند. با تجدید نظرهای لازم مطالب کتاب به‌شکل حاضر در آمده است که در این کار از نظرات ارزشمند تعدادی از اساتید استفاده شده است. بخشی از روش ارائه مطالب در این کتاب نتیجه تأثیر مستقیم اساتید خودم بوده است، بخصوص این شانس را داشته‌ام که از اساتید بسیار خوب بهره گیرم که در این‌جا مایلم دِیْنِ خود را به آنها ابراز کنم.

**لادیس د. کوواک**

# یادداشت مترجمان

این کتاب ترجمهٔ فصلهای ۴، ۶، ۷، ۸، ۹، و ۱۰ کتاب ریاضیات مهندسی پیشرفته تألیف لادیس د. کوواک است. کتاب اصلی شامل ۱۰ فصل می‌باشد که ما برحسب ضرورت شش فصل فوق‌الذکر را انتخاب و آنها را از ۱ تا ۶ مجدداً شماره‌گذاری کردیم. علت این انتخاب آن است که فصلهای یاد شده شامل موّادی هستند که تحت عنوان درس ریاضیات مهندسی و درس جبر خطی در دانشکده‌های فنّی و مهندسی ایران تدریس می‌شوند. چهار فصل ترجمهٔ نشده شامل مطالبی هستند که دانشجویان ما آنها را در درسهای ریاضیات عمومی و معادلات دیفرانسیل فرا می‌گیرند، و این دروس را می‌توان به‌عنوان پیشنیاز مطالب این کتاب در نظر گرفت.

اگر چه مجموعهٔ حاضر اساساً برای دانشجویان فنّی و مهندسی تدوین شده است، ولی دانشجویان رشته‌های علوم پایه بویژه دانشجویان رشته‌های ریاضی و فیزیک نیز می‌توانند از آن در درسهای جبر خطی، معادلات با مشتقات جزئی، و توابع مختلط بخوبی بهره‌مند گردند.

در این‌جا لازم می‌دانیم از همکاری همه کسانی که ترجمه و آماده‌سازی این کتاب با کمک آنان میسّر گشت، سپاسگزاری کنیم. بخصوص مراتب تشکر خود را از آقایان دکتر محمّدعلی پورعبدالله‌نژاد و مصطفی کدکنی که به‌ترتیب ویرایش علمی و ادبی کتاب را به‌عهده گرفتند، ابراز می‌داریم. از زحمات بی‌شائبه مدیریت و کارکنان مؤسسهٔ چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد بویژه از آقایان فنائی، عطائی، حقیقی‌پور، و افشاران که در تمام مراحل چاپ این کتاب نهایت همکاری راداشته‌اند، صمیمانه تشکر می‌کنیم.

**اصغر کرایه‌چیان**

**ابوالقاسم بزرگ‌نیا**

**مهر ۱۳۷۷**

# فصل اوّل

# جبر خطی

## ۱-۱ ماتریسها

بعد از بسط ریاضیات عمومی، در اواخر قرن هفدهم موجی در ریاضیات کاربردی به وجود آمد . یکی از مباحثی که بیشتر مورد توجه قرار گرفت حلّ معادلات دیفرانسیل بود . طرحهای گوناگونی برای حلّ انواع مختلف معادلات دیفرانسیل پیشنهاد شد . یکی از معروفترین این طرحها (که هنوز نیز از اهمیت خاصی برخوردار است) تبدیل لاپلاس بود که توسط آن بعضی از معادلات دیفرانسیل (معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت) به معادلات جبری، که خیلی آسانتر قابل حلّند، تبدیل می شوند . همچنین دستگاههای معادلات دیفرانسیل به دستگاههای معادلات جبری خطی تبدیل می شوند . چون ضرورت ایجاب می کرد که دستگاههای بزرگتر حل شوند، لازم شد که روش کاراتر که بتواند داده های زیادی را مورد بررسی قرار دهد یافت شود . چنین روشی به وسیلهٔ جبر *ماتریسها* فراهم می گردد که نتیجه ای از کارهای انجام شده در ۱۸۵۸ توسط *آرتور کیلی* (ریاضی دان انگلیسی، (۱۸۲۱-۱۸۹۵)) در نظریهٔ تبدیلات خطی است .

هر *ماتریس* را یک آرایهٔ مستطیلی * از موجودهایی به نام عناصر تعریف می کنیم .

---

* این تعریف عملاً یک تعریف دوری است چون «ماتریس» و «آرایه» در این حالت مترادفند .

هرماتریس توسط اندازه، طبیعت عناصرش و محل آنها در آرایه قابل تشخیص خواهد بود . پس

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

یک ماتریس ۳ × ۲ است و عناصر آن اعداد صحیحند . بنابه قرارداد اندازهٔ یک ماتریس را ابتدا با ذکر تعداد سطرها و سپس ذکر تعداد ستونها معرفی می کنیم . اگرچه تمام ماتریسها مستطیلی هستند، بعضی از آنها نامهای خاصی دارند . مثلاً یک ماتریس $n \times n$ را یک ***ماتریس مربعی*** و یک ماتریس $n \times 1$ را یک ***بردار ستونی*** و یک ماتریس $1 \times n$ را یک ***بردار سطری*** می نامیم . ماتریسهایی که عناصر آنها اعداد مختلط هستند در فیزیک ریاضی و مکانیک کوانتمی کاربرد دارند . بطور کلی عناصر یک ماتریس ممکن است توابع یا حتی ماتریس باشند؛ این حالات را بعداً خواهیم دید .

برای نشان دادن ماتریسها از حروف بزرگ استفاده می کنیم و عناصر یک ماتریس را با حروف دو اندیسی مشخص می کنیم . پس یک ماتریس ۳ × ۲ را می توانیم با $A$ نشان داده و بنویسیم

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

توجه کنید که اندیس اول نشانگر سطر و اندیس دوم نشانگر ستونی است که محل عنصر را در ماتریس مشخص می کند . گاهی بهتر است از نماد مختصر $(a_{ij})$ استفاده کنیم به شرط آن که دامنهٔ تغییرات $i$ و $j$ را مشخص نماییم . در یک ماتریس ۳ × ۲ ، $i = 1, 2$ و $j = 1, 2, 3$ .

حال چند تعریف و قضیهٔ مربوط به جبر ماتریسها را در این جا می آوریم .

**تعریف ۱-۱-۱** (تساوی) : دو ماتریس مساوی اند اگر و فقط اگر اندازهٔ آنها یکسان و عناصر متناظر آنها برابر باشند .

به عبارت دیگر، اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$، آن گاه $A = B$ نتیجه می دهد که به ازای هر $i$ و $j$، $a_{ij} = b_{ij}$ . بنابراین

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

حال اگر

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

آن گاه نتیجه می شود $a_{11} = -5$ ، $a_{12} = 3$ ، $a_{21} = 0$ و $a_{22} = 2$ .

**تعریف ۱ -۱ -۲** (جمع): اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$، آن گاه $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ .

از این تعریف روشن است که جمع فقط وقتی امکان پذیر است که دو ماتریس اندازهٔ یکسان داشته باشند . در این صورت جمع با افزودن عناصر متناظر به دست می آید . بنابراین

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

با توجه به جمع ماتریسها چند خاصیت در ارتباط با این عمل ثابت می کنیم . چون این نتایج مستقیماً از خواص شناخته شدهٔ اعداد حقیقی نتیجه می شوند، اثبات آنها به عنوان تمرین گذاشته می شود .

**قضیه ۱ -۱ -۱** : اگر $A$ ، $B$ و $C$ ماتریسهای $m \times n$ باشند، آن گاه

الف) $A + B$ یک ماتریس $m \times n$ است (خاصیت بسته بودن)؛

ب) $A + B = B + A$ (خاصیت تعویض پذیری)

پ) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (خاصیت شرکت پذیری)

**تعریف ۱ -۱ -۳** (ضرب در یک اسکالر): اگر $c$ یک عدد حقیقی باشد، آن گاه $c(a_{ij}) = (ca_{ij})$ . می گوییم ماتریس $(a_{ij})$ در اسکالر (عدد حقیقی) $c$ ضرب شده است* .

تعریف بالا بیان می کند که وقتی یک ماتریس را در یک اسکالر ضرب می کنیم هر عنصر آن در آن اسکالر ضرب می شود بنابراین برای یک ماتریس دلخواه $A = (a_{ij})$ داریم .

(۱-۱-۱)

الف) $1(a_{ij}) = (1a_{ij}) = (a_{ij}),$

ب) $-1(a_{ij}) = (-1a_{ij}) = (-a_{ij}) = -(a_{ij}) = -A,$

پ) $0(a_{ij}) = (0a_{ij}) = O.$

ماتریس $O$ را که همهٔ عنصرهای آن صفرند، ***ماتریس صفر*** می نامیم . بنابراین داریم

$$A + O = A, \qquad (۱-۱-۲)$$

که نشان می دهد یک ماتریس صفر را می توان به عنوان عضو خنثای عمل جمع در جبر ماتریسها در نظر گرفت . علاوه بر این، برای هر ماتریس $A$ ، یک ماتریس منحصر به فرد $-A$ (که

---

* بعداً ضرب یک ماتریس در یک ماتریس را خواهیم دید.

در ۱-۱-۱ (ب) تعریف شد) وجود دارد به گونه ای که

$$A + (-A) = O, \tag{۱-۱-۳}$$

این معادله نشان می دهد که برای هر ماتریس یک وارون جمعی وجود دارد.

در مطالب بالا بر این واقعیت تأکید شده است که با تعاریف داده شده، مجموعهٔ ماتریسها با عمل جمع همان خاصیتهای اعداد حقیقی را دارد. اما در مورد ضرب ماتریسها وضعیت کاملاً متفاوت است. قبل از تعریف ضرب ماتریسها، مثالی ساده از یک ***تبدیل خطی*** ارائه می دهیم. (در ۱-۳-۷ تعریف تبدیل خطی داده خواهد شد). معادلات زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3. \end{aligned} \tag{۱-۱-۴}$$

که متغیّرهای $y_1$ و $y_2$ برحسب متغیّرهای $x_1$ ، $x_2$ و $x_3$ بیان شده اند. چون هر دو معادله خطی اند، (۱-۱-۴) را یک ***تبدیل خطی*** می نامیم که با ماتریس ۳ × ۲ ی زیر مشخص می شود

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

حال اگر داشته باشیم

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \\ x_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \\ x_3 &= b_{31}z_1 + b_{32}z_2, \end{aligned} \tag{۱-۱-۵}$$

که تبدیل خطی دیگری است که متغیّرهای $x_1$ ، $x_2$ و $x_3$ را به $z_1$ و $z_2$ مربوط می سازد، در این صورت می توانیم رابطهٔ بین $y_i$ و $z_i$ ، $i = 1, 2$ را به دست آوریم. این رابطه چنین است (تمرین ۵)

$$\begin{aligned} y_1 &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2, \\ y_2 &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2. \end{aligned} \tag{۱-۱-۶}$$

با استفاده از نماد ماتریسی، اگر $A$ ماتریس فوق باشد و

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

آن گاه معادلات (۱-۱-۴) و (۱-۱-۵) به شکل زیر در می آیند

$$Y = AX \quad \text{و} \quad X = BZ,$$

بنابراین معادلهٔ (۱-۱-۶) به صورت زیر نوشته می شود

$$Y = (AB)Z.$$

با توجه به حاصل ضرب ماتریسها در بالا، تعریف زیر قابل توجیه است

**تعریف ۱-۱-۴** (ضرب ماتریسها): اگر $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $m \times n$ و $B = (b_{ij})$ یک ماتریس $n \times r$ باشد، آن گاه حاصل ضرب $AB = C$ یک ماتریس $m \times r$ است که به صورت زیر تعریف می شود

$$C = (c_{ik}) = \left( \sum_{q=1}^{n} a_{iq} b_{qk} \right), \qquad (۱-۱-۷)$$

که در آن، مجموع نشانگر عنصر سطر $i$ ام و ستون $k$ ام در ماتریس حاصل ضرب است. (به خاطر داشته باشید که نمایش $B$ با نماد $(b_{jk})$ به معنای آن است که عنصر سطر $j$ ام و ستون $k$ ام $B$ برابر $b_{jk}$ است). در معادلهٔ (۱-۱-۷) نشان داده ایم که $AB$ فقط وقتی تعریف می شود که تعداد ستونهای $A$ برابر تعداد سطرهای $B$ باشد. همچنین تعریف ضرب نشان می دهد که ضرب ماتریسها یک فرآیند **سطر در ستون** است. در این فرآیند عنصرهای یک سطر را در عنصرهای متناظر یک ستون (اوّلی در اوّلی، دومی در دومی و الی آخر) ضرب کرده و حاصل ضربها را جمع می کنیم. پس عنصر سطر $i$ ام و ستون $k$ ام حاصل ضرب $AB$ از ضرب سطر $i$ ام $A$ در ستون $k$ ام $B$ به دست می آید. با چند مثال ضرب ماتریسها را تشریح می کنیم.

**مثال ۱-۱-۱** ماتریسهای زیر مفروضند

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

ماتریسهای $AX$، $BY$ و $AB$ را پیدا کنید.

**حل**: داریم

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(2) + (-2)(-3) + 3(1) \\ 0(2) + 4(-3) + 5(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$BY = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3) + 2(-2) \\ -3(3) + 1(-2) \\ 4(3) + 5(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1(2) + (-2)(-3) + 3(4) & 1(2) + (-2)(1) + 3(5) \\ 0(2) + 4(-3) + 5(4) & 0(2) + 4(1) + 5(5) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 8 & 29 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

توجه کنید که ماتریس $BA$ در مثال ۱-۱-۱ تعریف نمی شود، و بطور کلی ***ضرب ماتریسها*** تعویض پذیر نیست (تمرین ۱ (ب)) با وجود این خواص بیان شده در قضیهٔ زیر را داریم. فرض بر این است که تمام حاصل ضربها و مجموعها تعریف شده اند.

**قضیه ۱-۱-۲** : اگر $A$ ، $B$ و $C$ ماتریس باشند، آن گاه

الف) $(AB)C = A(BC)$ (خاصیت شرکت پذیری)؛

ب) $AO = O$ (خاصیت پوچ ساز)

پ) $A(B + C) = AB + AC$ (خاصیت توزیع پذیری از چپ)

ت) $(A + B)C = AC + BC$ (خاصیت توزیع پذیری از راست)

ملاحظه کنید که خاصیت تعویض پذیری در احکام بالا حذف شد است. چون جمع ماتریسها تعویض پذیر است، از گزارهٔ «$A$ و $B$ تعویض پذیرند» به معنای $AB = BA$ استفاده می کنیم. خاصیتی دیگر دربارهٔ ضرب ماتریسها هست که با خاصیت آشنای جبر متفاوت است. در جبر اعداد حقیقی و مختلط اگر $ab = 0$، آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$. ولی اگر $A$ و $B$ ماتریس باشند و $AB = 0$ نمی توان نتیجه گرفت که $B = O$، هرگاه $A \neq O$. این مطلب در مثال زیر نشان داده شده است :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

بنابراین حاصل ضرب دو ماتریسِ غیر صفر ممکن است ماتریس صفر باشد.

گاهی لازم است جای سطرها و ستونهای یک ماتریس را عوض کنیم که به این ترتیب (عموماً) یک ماتریس جدید به دست می آید. این فرآیند ***ترانهش*** نام دارد و به صورت زیر تعریف می شود.

**تعریف ۱-۱-۵** (ترانهش) : اگر $A=(a_{ij})$ یک ماتریس $m\times n$ باشد، ترانهادهٔ $A$ که با $A^T$ نشان داده می‌شود یک ماتریس $n\times m$ به صورت زیر است

$$A^T=(a_{ji}).$$

با استفاده از ماتریسهای مثال ۱-۱-۱، داریم

$$X^T=(2 \quad -3 \quad 1), \qquad B^T=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

خواص ترانهش در قضیهٔ زیر فهرست شده‌اند .

**قضیه ۱-۱-۳** برای ماتریسهای $A$ و $B$ داریم

الف) $(A+B)^T=A^T+B^T$ ؛

ب) $(AB)^T=B^TA^T$ ؛

پ) $(A^T)^T=A$ .

اثباتها به عنوان تمرین گذاشته می‌شود . توجه کنید که ترانهادهٔ یک حاصل ضرب برابر است با حاصل ضرب ترانهاده‌ها، با **ترتیب عکس** .

وقتی ماتریسی مربعی، یعنی $n\times n$، است، اصطلاحات توصیفی دیگری داریم . می‌گوییم ماتریس $A$ **متقارن** است اگر $A=A^T$. در این حالت $(a_{ij})=(a_{ji})$ برای هر $i$ و $j$. قسمتی از یک ماتریس را که شامل عنصر $a_{ii}$ است ***قطر اصلی*** ماتریس می‌نامند. در ترانهش این عناصر قطری تغییر نمی‌کنند .

اگر یک ماتریس مربعی باشد و عناصر غیرقطری آن همگی صفر باشند، آن‌گاه ماتریس را ***قطری*** گویند . برای مثال

$$D=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_4\end{pmatrix}$$

یک ماتریس قطری است که می‌توان آن را به شکل مختصر زیر نوشت

$$D=\operatorname{diag}(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4).$$

یک ماتریس قطری که $n$ عنصر قطری آن همه برابر، مثلاً، $c$ باشند

$$E=\operatorname{diag}(c \quad c \quad \ldots \quad c),$$

*ماتریس اسکالر* نامیده می شود . اگر $A$ ماتریس $n \times n$ باشد، آن گاه $AE = EA = cA$، که با تعریف ضرب اسکالر در ۱-۱-۳ مطابقت دارد . در حالت خاص وقتی $c = 1$، داریم

$$I_n = \text{diag}\,(1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1),$$

که *ماتریس همانی* $n \times n$ نام دارد . این ماتریس در خاصیت

$$AI = IA = A$$

صدق می کند که، $A$ یک ماتریس $n \times n$ دلخواه است . بنابراین $I$ مانند عضو یکّه در ضرب عمل می کند . وقتی ابهامی پیش نیاید، اندیس را حذف کرده و ماتریس همانی را مانند بالا با $I$ نشان می دهیم .

با داشتن ماتریسهای صفر و همانی گاهی می توان ضرب ماتریسها را با استفاده از روشی موسوم به *افراز* ساده کرد . هر ماتریس را می توان توسط خطهای افقی و عمودی به *زیرماتریسهایی* تقسیم نمود . برای مثال،

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

یک زیرماتریس، ماتریس

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right),$$

است که با افراز کردن $A$ به صورت فوق به دست می آید . به این طریق یک ماتریس را می توان به صورتی در نظر گرفت که عناصر آن خود ماتریس باشند . در مثال فوق می توانیم بنویسیم

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

که در آن علاوه بر $A_1$ که در بالا تعریف شده داریم

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \qquad A_3 = (a_{31} \quad a_{32}), \qquad A_4 = (a_{33}).$$

اگر $A$ یکی از عوامل یک حاصل ضرب باشد، می توانیم عمل ضرب را با در نظر گرفتن $A_i$ به عنوان عناصر $A$ انجام دهیم . پس اگر $A_1$ یک ماتریس همانی و $A_3$ یک ماتریس صفر باشد آن گاه محاسبهٔ حاصل ضرب $A$ در یک ماتریس دیگر تا حدی زیاد ساده می شود . این نوع ضرب را ضرب *بلوکی* می نامیم و آن را با مثال زیر تشریح می کنیم .

**مثال ۱-۴-۲** مطلوب است محاسبهٔ $AB$ در صورتی که

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

و

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

*حل*: دو ماتریس را به صورتی که نشان داده شده افراز می کنیم. نکتهٔ مهم این است که ***ستونهای*** $A$ باید دقیقاً مانند ***سطرهای*** $B$ افراز شوند؛ در غیر این صورت ممکن است حاصل ضرب زیرماتریسهای حاصل تعریف نشده باشند. افراز افقی $A$ و افراز عمودی $B$ اهمیتی ندارد. در این مثال کار به گونه ای انجام شده است که بیشترین استفاده را از ماتریسهای صفر و همانی ببریم. با افراز فوق ضرب بلوکی به صورت زیر در می آید

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \\ B_5 & B_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & A_2 & A_3 \\ O & I_2 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_4 \\ O & B_6 \end{pmatrix}.$$

پس حاصل ضرب به صورت زیر نوشته می شود

$$\begin{pmatrix} B_1 & A_2B_4 + A_3B_6 \\ O & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 8 & -10 & 16 \\ -2 & 1 & 2 & 15 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

در ریاضیات کاربردی اغلب با ماتریسهای بزرگ (ماتریسهایی که تعداد سطرها و ستونهای آنها زیاد است)، که تنک نیز هستند، یعنی ماتریسهایی که درصد زیادی از عناصر آن صفر است برخورد می کنیم. افراز و ضرب بلوکی در این نوع ماتریسها بسیار مفید است. در افراز کردن علاوه بر بلوکهای صفر، ماتریسهایی قطری (همچنین ماتریسهایی همانی) باید در نظر گرفته شود.

گاهی با ماتریسهایی مربعی که مثلثی نیز هستند مواجه می‌شویم . اگر همه عناصر یک ماتریس مربعی در بالای (زیر) قطر اصلی صفر باشند، آن گاه ماتریس، ***پایین (بالا) مثلثی*** نامیده می‌شود (شکل ۱-۱-۱ را ببینید) . در نتیجه اگر یک ماتریس هم بالا مثلثی، و هم پایین مثلثی باشد، آن ماتریس قطری خواهد بود .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

(الف) (ب)

شکل ۱-۱-۱ ماتریسهای مثلثی: (الف) بالا مثلثی؛ (ب) پایین مثلثی

چون ضرب ماتریسی تعویض‌پذیر نیست باید مشخص کنیم که یک ماتریس را از راست یا از چپ ضرب می‌کنیم مثلاً در حاصل ضرب $AB$ مشخص کنیم که $A$ از چپ یا از راست در $B$ ضرب شده است .

### تمرینهای ۱-۱

۱- اگر $A$ ، $B$ و $C$ ماتریسهای دلخواه $m \times n$ و $O$ ماتریس صفر $m \times n$ باشد . روابط زیر را ثابت کنید

الف) $A + B = B + A$ ب) $(A + B) + C = A + (B + C)$

پ) $A + O = A$ ت) $A + (-A) = O$

۲- الف) معادلهٔ (۱-۱-۶) را با ضرب ماتریسهای مناسب در معادلات (۱-۱-۴) و (۱-۱-۵) به دست آورید .

ب) معادلهٔ (۱-۱-۶) را با ضرب ماتریسهای مناسب در معادلات (۱-۱-۴) و (۱-۱-۵) به دست آورید .

۳- الف) خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریسها را ثابت کنید : قسمت (الف) قضیهٔ ۱-۱-۲ . (*راهنمایی* : از نماد مجموع مانند معادلهٔ ۱-۱-۷ استفاده کنید) .

ب) خاصیت توزیع‌پذیری از چپ را ثابت کنید : قسمت (پ) قضیهٔ ۱-۱-۲ .

۴- قضیهٔ ۱-۱-۳ را ثابت کنید (*راهنمایی* : در قسمت (ب) از نماد مجموع معادلهٔ ۱-۱-۷ استفاده کنید) .

۵- ماتریسهای زیر داده شده اند

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 3), \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

هریک از ماتریسهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $A + B, A - B, B - A$ ب) $AB, BA, CD, DC, BD, CA$

پ) $2A + 3B, 4CD, (A + B)AB, A^2$

۶- ماتریسهای زیر داده شده اند

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

هریک از ماتریسهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $AB, (AB)^T, (A + B)^T$

ب) $AB, (BA - AB)^T, (B + A)A^T$

پ) $A^3, A^3 - 10A$ (توجه : $A^3 = AAA$)

ت) $B^3, B^2, B^3 - 3B^2 - 6B + 16I$

۷- با استفاده از ماتریسهای مثال ۱-۱-۱ مطلوب است محاسبهٔ

$B^TX, \quad A^TY,$ و $B^TA^T$.

۸- اگر

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

ماتریسهای $AB$ و $BA$ را با افراز مناسب $A$ و $B$ محاسبه کنید .

۹- ماتریس زیر داده شده است

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}:$$

الف) $A^2$ ، $A^3$ ، $A^5$ و $A^{10}$ را بیابید؛

ب) $A^3 + 2A^3$ را بیابید؛

پ) نشان دهید اگرچه $A(A^2 + 2I) = O$ ، از این معادله نتیجه نمی شود که $A = O$ یا $A^2 = -2I$ .

۱۰- نشان دهید اگر

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

آن گاه $BA = A$ ، درحالی که $B \neq I$ . یک ماتریس چه خاصیت دیگری باید داشته باشد تا بتوان آن را ماتریس همانی نامید؟

۱۱- نشان دهید ماتریس

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

در معادلهٔ $x^2 - 7x + 6 = 0$ صدق می کند . (*راهنمایی* : هرجملهٔ معادله باید یک ماتریس ۲ × ۲ باشد)

۱۲- تمام ماتریسهای $A$ را که در معادلهٔ زیر صدق می کنند به دست آورید

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

۱۳- تمام ماتریسهای $B$ را که با ماتریس زیر تعویض پذیرند به دست آورید

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

۱۴- تمام ماتریسهای $A$ را که در معادلهٔ زیر صدق می کنند پیدا کنید

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

۱۵- ثابت کنید مجموع و حاصل ضرب ماتریسهای مثلثی، مثلثی هستند .

۱۶- الف) با استفاده از خاصیت توزیع پذیری چپ یا راست، عبارت زیر را بسط دهید .

$$(A + B)(A - B).$$

ب) تحت چه شرایطی $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ؟

۱۷ـ اگر $A$ با $B$ تعویض پذیر باشد، نشان دهید $A^T$ با $B^T$ تعویض پذیر است .

۱۸ـ ثابت کنید اگر $A$ و $B$ ماتریسهای قطری باشند، تعویض پذیرند .

۱۹ـ ثابت کنید که از $AA^T = O$ نتیجه می شود $A = O$ .

۲۰ـ ماتریس مارکف* (یا احتمالی) نقشی مهم در نظریهٔ احتمال دارد . هر ماتریس مارکف $n \times n$ دارای دو خاصیت زیر است :

i) $0 \le a_{ij} \le 1;$

ii) $\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = 1, \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n.$

الف) نشان دهید

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

ماتریسهای مارکف هستند .

ب) نشان دهید $AB$ و $BA$ نیز ماتریسهای مارکف هستند .

پ) نشان دهید هر ماتریس مارکف ۲ × ۲ به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}, \qquad 0 \le p \le 1, \qquad 0 \le q \le 1.$$

ت) با فرض

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$C^2$ ، $C^3$ ، $C^4$ را بیابید؛ سپس $C^n$ را حدس بزنید .

۲۱ـ اگر $A$ ماتریس $p \times q$ و $B$ ماتریس $r \times s$ باشد، نشان دهید $AB$ موجود و یک ماتریس $p \times s$ است به شرط آن که $q = r$ .

۲۲ـ ماتریس مربعی $A$ را **پادمتقارن** گوییم هرگاه $A^T = -A$ . نشان دهید هر ماتریس مربعی را می توان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشت

---

* A. A. Markov (۱۸۵۶-۱۹۲۲)، دانشمند روسی در رشته احتمال که اوّلین بار در ۱۹۰۷ این ماتریس را به کار برد .

(*راهنمایی*: نشان دهید $\frac{1}{2}(A + A^T)$ متقارن است).

۲۳- نشان دهید وارون جمعی یک ماتریس منحصر به فرد است. (*راهنمایی*: اگر $A + (-A) = O$ و $A + B = O$، رابطه ای بین $(-A)$ و $B$ به دست آورید.)

۲۴- اگر $c$ و $d$ اعداد حقیقی و $A$ و $B$ ماتریسهای $m \times n$ باشند، ثابت کنید

الف) $c(A+B) = cA + cB$ ب) $(c+d)A = cA + dA$ پ) $c(dA) = (cd)A$

۲۵- ماتریس مربعی $B$ را، به قسمی که به ازای عدد صحیح مثبتی مانند $n$، $B^n = O$ اما $B^{n-1} \neq O$ ماتریس *پوچتوان* با شاخص $n$ می نامند؛ نشان دهید

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

یک ماتریس پوچتوان با شاخص ۴ است.

۲۶- اگر $A$ و $B$ متقارن باشند، ثابت کنید $AB$ متقارن است اگر و فقط اگر $A$ و $B$ تعویض پذیر باشند.

۲۷- اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد، ثابت کنید

الف) $A^TA$ و $AA^T$ هر دو متقارنند.

ب) $A + A^T$ متقارن است.

پ) $A - A^T$ پاد متقارن است.

## ۱-۲ دستگاه معادلات خطی

در موارد بسیار گوناگونی با دستگاه معادلات جبری خطی رو به رو می شویم. این موارد از یافتن نقطهٔ اشتراك دو خط در صفحه که از حل یک جفت معادله به دست می آید، تا حلّ یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی با روشهای عددی را شامل می شود. در حالت اخیر ممکن است با تعداد زیادی معادله (مثلاً، هزار معادله) با متغیّرهای زیاد سر و کار داشته باشیم. در این صورت لازم است حجم عظیمی از داده ها را به کار ببریم، در این بخش خواهیم دید که روشهای ماتریسی برای این منظور بسیار مفید خواهند بود.

ابتدا دستگاههای با دو معادله و دو متغیّر را در نظر می گیریم. این دستگاهها به شکل کلی زیرند

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \end{aligned} \tag{۱-۲-۱}$$

که $b_1$ ، $b_2$ و $a_{ij}$ ها اعداد حقیقی اند . متغیّرها را به جای $x$ و $y$ با $x_1$ و $x_2$ نشان می دهیم تا بتوانیم روشهایی را که ارائه خواهیم داد، به دستگاههای بزرگتر تعمیم دهیم. منظور از ***جواب*** (۱-۲-۱) تمام زوجهای مرتب $(x_1, x_2)$ است که در هر دو معادله صدق کنند. تمام این زوجهای مرتب ***مجموعهٔ جواب*** دستگاه گفته می شود .

اکنون سه حالت متمایز به صورت زیر می توان در نظر گرفت .

**حالت I :** مجموعهٔ جواب دقیقاً شامل یک زوج مرتب است .

**حالت II :** مجموعهٔ جواب شامل هیچ زوج مرتب نیست .

**حالت III :** مجموعهٔ جواب شامل تعدادی نامتناهی زوج مرتب است .

برای هر دستگاه مفروض یکی و فقط یکی از حالتهای فوق می تواند برقرار باشد، یعنی، سه حالت دو به دو ناسازگارند؛ علاوه بر این هیچ حالت دیگری وجود ندارد. برای مثال، نمی توان دستگاهی مانند (۱-۲-۱) پیدا کرد که در مجموعهٔ جواب آن دقیقاً دو زوج مرتب متمایز باشد. بنابراین سه حالت فوق نیز جامع و مانع هستند. دو اصطلاح «دو به دو ناسازگار» و «جامع و مانع» هم در این جا و هم در نظریهٔ احتمال نقشی مهم را ایفا می کنند . وقتی حالت II پیش آید می گویند دستگاه ***ناسازگار*** است . در مقابل، دستگاههایی که مجموعهٔ جواب آنها شامل یک یا تعدادی نامتناهی زوج مرتب باشد، ***سازگار*** نامیده می شوند . ضرورت این دو اصطلاح بعداً آشکار خواهد شد .

برای دو معادله با دو متغیّر، سه حالت بالا یک تعبیر هندسی ساده دارد، که در شکل ۱-۲-۱ نشان داده شده است . حالت سه معادله با سه متغیّر ازنظر هندسی در تمرین ۳۵ بررسی می شود .

**مثال ۱-۲-۱** مجموعهٔ جواب هر یک از دستگاههای زیر را پیدا کنید .

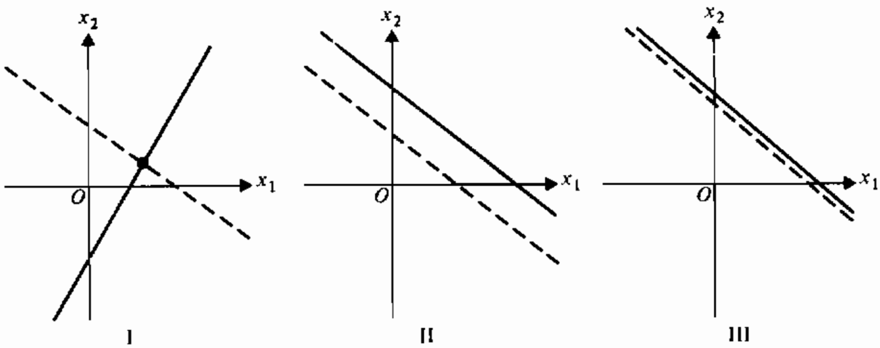
الف) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$ ب) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 5 \end{aligned}$ پ) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 - 4x_2 &= 6 \end{aligned}$

***حل*** : با استفاده از اطلاعات جبری، می توانیم دستگاه (الف) را با روش حذفی (حذف $x_1$ یا $x_2$ و حل معادلهٔ حاصل برحسب دیگری) یا با روش جانشانی (حل یک معادله برحسب $x_1$ یا $x_2$ و جانشین کردن این مقدار در معادلهٔ دیگر) حل کنیم . مثلاً اگر معادلهٔ دوم را در ۲ ضرب کرده و نتیجه را با معادلهٔ اوّل جمع کنیم خواهیم داشت $x_1 = -2$، و اگر معادلهٔ اوّل را در ۲ و معادلهٔ

دوم را در ۳ ضرب کرده و آنها را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت $x_2 = 3$ . پس مجموعهٔ جواب دستگاه (الف)، عبارت است از

$\{(-2, 3)\},$

که مجموعه ای است شامل فقط یک زوج مرتب . این جواب را منحصر به فرد می گوییم به این معنا که هیچ زوج مرتب (متفاوت) دیگری نمی توان یافت که در دو معادلهٔ دستگاه صدق کند . نمودار معادلات در (الف) نتیجهٔ جبری را تأیید می نماید (تمرین ۱) .




شکل ۱-۲-۱ دو معادله با دو متغیّر. حالت I : یك جواب (خطوط متقاطع) . حالت II : بدون جواب (خطوط موازی) . حالت III : تعداد نامتناهی جواب (خطوط منطبق) .

اگر بخواهیم دستگاه (ب) را با روش حذفی حل کنیم، موفق نمی شویم و به گزارهٔ ناسازگار «$1 = 0$» می رسیم . پس دستگاه جواب ندارد؛ آن را یک دستگاه ناسازگار می نامیم و می گوییم مجموعهٔ جواب آن *تهی* است و آن را با $\varnothing$ نشان می دهیم، که این نمادی است برای مجموعه ای که هیچ عضوی ندارد. نمودار دو خط تشکیل دهندهٔ دستگاه نشان می دهد که خطوط، موازی اند و بنابراین نقطهٔ مشترك ندارند .

در مورد دستگاه (پ) ملاحظه می شود که معادلهٔ دوم، دو برابر معادلهٔ اوّل است . از این رو هیچ اطلاع جدیدی به دست نمی دهد . بنابراین در واقع فقط یک معادله داریم و هر زوج مرتبی که در این معادله صدق کند، به مجموعه جواب دستگاه تعلق دارد . به این ترتیب مجموعهٔ جواب شامل تعدادی نامتناهی زوج مرتب است، هر زوج متناظر با نقطه ای روی خط نمودار

معادله است . مجموعهٔ جواب را به صورت زیر می توان نوشت

$$\{(3 + 2x_2,\, x_2) \mid \text{یک عدد حقیقی است } x_2\}$$

یا

$$\{(3 + 2k,\, k) \mid \text{یک عدد حقیقی است } k\}. \quad \blacksquare$$

وقتی تعداد معادلات در یک دستگاه برابر $m$ و تعداد متغیّرها برابر $n$ باشد، می گوییم یک دستگاه $m \times n$ داریم و اعضای مجموعهٔ جواب ***n تاییهای*** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ هستند . اما باز هم سه حالت فوق در این جا به کار می روند . به عبارت دیگر ، مجموعهٔ جواب یک دستگاه $m \times n$ شامل صفر ، یک ، یا تعدادی نامتناهی $n$ـ تایی است . توجه به این نکته ، مطالعهٔ این بخش و سایر بخشهای این فصل را ساده خواهد کرد .

**قاعدهٔ کرامر**

جواب منحصر به فرد یک دستگاه $n \times n$ را می توان با روشی به نام قاعدهٔ کرامر* پیدا کرد که از سال ۱۷۵۰ به بعد به کار می رود . اگر این قاعده را برای دستگاه (الف) در مثال ۱-۲-۱ به کار بریم، داریم

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0(-1) - (1)(2)}{3(-1) - (2)(-2)} = \frac{-2}{1} = -2,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3(1) - (-2)(0)}{1} = 3.$$

در این جا $x_1$ و $x_2$ را برحسب خارج قسمت دو ***دترمینان*** بیان نموده ایم . به هر ماتریس $n \times n$ ، $A$ ، یک عدد حقیقی به نام دترمینان $A$ نسبت داده و آن را با $|A|$ نشان می دهیم (نماد $\det(A)$ نیز به کار می رود) . اگر

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

* Gabriel Cramer ریاضی دان سویسی (۱۷۰۴-۱۷۵۲)

آن گاه

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \qquad (۱-۲-۲)$$

که آن را به عنوان تعریف دترمینان یک ماتریس ۲ × ۲ می توان پذیرفت .

اکنون می توان دترمینان یک ماتریس ۳ × ۳ را به صورت یک ترکیب خطی از دترمینانهای ماتریسهای ۲ × ۲ تعریف نمود . پس اگر

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

آن گاه

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (۱-۲-۳)$$

توجه کنید که دترمینانها در این تعریف، دترمینانهای زیرماتریسهای $A$ هستند که هرکدام به یک ضریب مربوط می شوند . مثلاً، $a_{11}$ در دترمینان زیرماتریس حاصل از حذف اوّلین سطر و اوّلین ستون $A$ ضرب می شود؛ $a_{12}$ در دترمینان زیرماتریس حاصل از حذف اوّلین سطر و دومین ستون $A$ ضرب می شود، و الی آخر . بطور کلی $a_{ij}$ در دترمینان زیرماتریس حاصل از حذف سطر $i$ ام و ستون $j$ ام $A$ ضرب می شود . علاوه بر آن ضرایب در معادلهٔ (۱-۲-۳) همان عناصر سطر اوّل $A$ هستند که یک در میان تغییر علامت می دهند . در این حالت می گوییم $|A|$ برحسب سطر اوّل بسط داده شده است . علامت ضریب $a_{ij}$ از $(-1)^{i+j}$ به دست می آید . اگر $|A|$ را برحسب سطر دوم آن بسط دهیم به دست می آوریم

$$|A| = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

از معادلات (۱-۲-۲) و (۱-۲-۳) معلوم می شود که دترمینان یک ماتریس ۳ × ۳ مجموع شش جمله است ـ سه جمله با علامت مثبت و سه جمله با علامت منفی . اگر این ایده را یک گام جلوتر ببریم، می توانیم دترمینان یک ماتریس ۴ × ۴ را به صورت مجموع چهار دترمینان زیرماتریسهای ۳ × ۳ مناسب تعریف کنیم . بنابراین دترمینان یک ماتریس ۴ × ۴ مجموع ۲۴ یا !۴ جمله است و بطور کلی دترمینان یک ماتریس $n \times n$ مجموع $n!$ جمله می باشد . دترمینانهایی که در این مجموع دخالت دارند، مربوط به زیرماتریسهایی هستند که به نوبت با حذف یک سطر

و یک ستون از ماتریس اصلی به دست می‌آیند . دترمینان یک ماتریس را می توان با استفاده از هر سطر یا ستون ماتریس بسط داده و محاسبه نمود (تمرین ۲) .

حال می توان یک قضیه در رابطه با دستگاههایی که جواب منحصر به فرد دارند، بیان نمود .

**قضیه ۱-۲-۱** (قاعدهٔ کرامر): دستگاه $n \times n$ ، $AX = B$ مفروض است که در آن

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

جواب منحصر به فرد این دستگاه عبارت است از

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

به شرط آن که $|A| \neq 0$ که $|A_k|$ دترمینان ماتریسی است که از $A$ با تعویض ستون $k$ ام آن با عناصر $B$ حاصل می شود .

اثبات این قضیه را برای بعد می گذاریم تا از هدفمان که ارائه روشهایی برای حل دستگاه معادلات جبر خطی است، باز نمانیم . اثبات قضیه را می توان در بخش ۱-۷ یافت (قضیهٔ ۱-۷-۳) .

## روش حذفی گاوس

روشن است که حل دستگاههای بزرگ با قاعدهٔ کرامر شامل محاسبات زیادی است و باید از روشهای دیگر استفاده شود . یکی از این روشها ، ***روش حذفی گاوس**** است که در این جا بررسی می شود . ابتدا به چند تعریف نیاز داریم . فرض کنید می خواهیم جوابهای دستگاه $m \times n$ زیر را بیابیم

$$AX = B, \tag{۱-۲-۴}$$

که در آن

---

* Karl F. Gauss ، ریاضی دان آلمانی (۱۷۷۷-۱۸۵۵)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

بهتر است که با ماتریس $m \times (n+1)$ زیر کار کنیم

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

که آن را ماتریس ***افزودهٔ دستگاه*** (۱-۲-۴) می نامند . توجه کنید که تمام اطلاعات اصلی مربوط به دستگاه در ماتریس افزودهٔ آن گنجانده شده است . هر سطر این ماتریس نمایانگر یکی از معادلات دستگاه است و بسادگی می توانیم رابطهٔ سطرها و معادلات را به دست آوریم . برای مثال، سطر دوم نمایانگر معادلهٔ زیر است .

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2.$$

حال ملاحظه می کنیم که مجموعهٔ جواب دستگاه (۱-۲-۴) در اثر تغییراتی معین روی ماتریس افزوده، عوض نمی شود . این تغییرات را ***اعمال سطری مقدماتی*** می نامیم، که به صورت زیر تعریف می شوند .

**ث ۱ :** هر دو سطر را می توان عوض کرد (این عمل فقط ترتیب معادله های دستگاه را عوض می کند) .

**ث ۲ :** هر سطر را می توان در یک ثابت غیرصفر ضرب کرد (این عمل معادل است با ضرب طرفین معادله در یک ثابت غیر صفر) .

**ث ۳ :** هر سطر را می توان در یک ثابت غیر صفر ضرب کرده و نتیجه را به سطری دیگر اضافه نمود (این عمل معادل است با گزارهٔ «افزون کمیتهای مساوی به دو کمیت مساوی نتیجه اش کمیتهای مساوی است») .

وقتی اعمال سطری مقدماتی فوق را روی ماتریس افزودهٔ مورد نظر انجام دهیم یک ماتریس متفاوت به دست می آید (در اغلب مواقع) . ولی نکتهٔ مهم این است که ماتریس متفاوت حاصل نمایانگر دستگاهی است که همان مجموعهٔ جواب ماتریس اوّلیه را دارد پس

به عبارتی دو ماتریس معادلند . این نوع معادل بودن را ***معادل بودن سطری*** گویند و آن را با نماد ~ نشان می دهند . می نویسیم «$A \sim B$»، یعنی $A$ معادل سطری $B$ است» به این معنی که می توان با یک یا چند عمل سطری مقدماتی $A$ را به $B$ (یا $B$ را به $A$) تبدیل کرد . با یک مثال مزایای کاربرد اعمال سطری مقدماتی را نشان می دهیم .

**مثال ۱-۲-۲** مجموعهٔ جواب دستگاه زیر را پیدا کنید

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1. \end{aligned}$$

***حل*** : با ماتریس افزودهٔ دستگاه، یعنی

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

شروع می کنیم و اعمال سطری مقدماتی را انجام می دهیم تا به جواب برسیم

الف) سطرهای اوّل و دوم را عوض می کنیم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

ب) سطر اوّل را در ۲- ضرب کرده و نتیجه را با سطر دوم جمع می کنیم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 & -10 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

پ) سطر اوّل را در ۳- ضرب نموده و نتیجه را به سطر سوم اضافه می کنیم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -15 & -16 \end{pmatrix}$$

ت) سطر دوم را در $-\frac{1}{6}$ ضرب می کنیم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{10}{6} \\ 0 & -2 & -15 & -16 \end{pmatrix}$$

ث) سطر دوم را در ۲ ضرب کرده نتیجه را به سطر سوم اضافه می کنیم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{10}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{38}{3} & -\frac{38}{3} \end{pmatrix}$$

ج) سطر سوم را در $\frac{3}{38}$ - ضرب می کنیم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{10}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

سطر سوم ماتریس آخر نشان می دهد که $x_3 = 1$ . سطر دوم به صورت زیر نوشته می شود

$$x_2 + \tfrac{7}{6}x_3 = \tfrac{10}{6} = x_2 + \tfrac{7}{6},$$

که از آن داریم $x_2 = \frac{1}{2}$ . سطر اوّل بیان می کند که

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 = x_1 + \tfrac{1}{2} + 4,$$

بنابراین $x_1 = \frac{1}{2}$ و مجموعهٔ جواب عبارت است از

$$\{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1)\}. \quad \blacksquare$$

بنابه تعریف هر یک از ماتریسهای افزودهٔ بالا معادل سطری با ماتریس بعدی است، زیرا هرکدام با یک عمل سطری مقدماتی از دیگری به دست آمده است . در مثال ۱-۲-۲ روش حل دستگاههای خطی را با روش ***حذفی گاوس*** بشرح نشان دادیم . (***تحویل گاوسی*** نیز نامیده می شود) . از این روش مقدار $x_3$ به دست می آید که از آن برای محاسبهٔ $x_2$ استفاده می شود . سرانجام مقادیر $x_3$ و $x_2$ را برای یافتن $x_1$ به کار می بریم . این روند، ***جانشانی از آخر*** نامیده می شود . چند نکته را دربارهٔ روش حذفی گاوس یادآور می شویم .

۱- عناصر ماتریس افزوده می توانند اعداد صحیح نباشند .

۲- این روش بآسانی برای ماشینهای محاسبه قابل برنامه ریزی است .

۳- این روش بآسانی برای دستگاههای بزرگتر از ۳ × ۳ قابل تعمیم است .

۴- این روش برای دستگاههای $m \times n$ نیز به کار می رود .

***تذکر*** : اعمال سطری مقدماتی باید یکی بعد از دیگری انجام شود . مثلاً افزودن همزمان سطر اوّل

به سطر دوم و سطر دوم به سطر سوم نادرست است . زیرا این عمل ممکن است به یک سطر صفر منجر شود در حالی که چنین سطری نباید وجود داشته باشد .

هدف از به کاربردن روش حذفی گاوس به دست آوردن ماتریسی نظیر ماتریس گام (ج) در مثال ۱-۲-۲ است . گفته می شود که این ماتریس به ***شکل پلکانی سطری*** است .

**تعریف ۱-۲-۱** یک ماتریس به شکل پلکانی سطری است هرگاه دارای خواصّ زیر باشد .

الف) سطرهایی که تمام عناصر آنها صفراند، همگی در قسمت پایین ماتریس قرار دارند .

ب) سطری که تمام عناصر آن صفر نیستند عنصر اوّلش که عنصر پیشرو نامیده می شود برابر ۱ باشد . علاوه برآن تمام عناصر زیر این عنصر صفر باشند .

پ) در دو سطر پیاپی عنصر پیشروِ سطر پایینتر، سمت راست عنصر پیشروِ سطر بالاتر واقع باشد .

ماتریسهای نمایش داده شده در شکل ۱-۲-۲ همگی به شکل پلکانی سطری هستند . اما در شکل ۱-۲-۳ ماتریسها به شکل پلکانی سطری نیستند . در (الف) عنصر پیشرو در سطر دوم، دارای صفر در زیر آن نیست؛ در (ب) سطری که همه عناصر آن صفر است، در پایین ماتریس قرار ندارد؛ در (پ) عنصر پیشرو در سطرِ دوم، سمتِ راست عنصر پیشرو در سطر اوّل نیست .

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&0&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&1&4&3&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(الف) (ب) (پ)

شکل ۱-۲-۲ ماتریسها به شکل پلکانی سطری هستند

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&5\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&0&2\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&0&1&5&0\\0&1&4&3&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(الف) (ب) (پ)

شکل ۱-۲-۳ ماتریسها به شکل پلکانی سطری نیستند

**تحویل گاوس ـ ژردان**

دستگاه مثال ۱-۲-۲ را با روشی دیگر که نیازی به جایگزینی از آخر ندارد، می توان حل نمود. از گام (ج) شروع کرده و به صورت زیر ادامه می دهیم.

چ) سطر دو را در ۱- ضرب و نتیجه را با سطر اوّل جمع می کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{6} & \frac{20}{6} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{10}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ح) سطر سه را در $\frac{17}{6}-$ ضرب و نتیجه را به سطر اوّل اضافه می کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{6} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{10}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

خ) سطر سه را در $\frac{7}{6}-$ ضرب و نتیجه را به سطر دوم اضافه می کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

حال مجموعهٔ جواب $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)\}$ را می توانیم از گام (خ) به دست آوریم. این روش اخیر ***تحویل گاوس ـ ژردان**** نامیده شده و گفته می شود که ماتریس در گام (خ) به ***شکل پلکانی سطری تحویل یافته*** است. به نظر می رسد که حجم محاسبهٔ لازم برای به دست آوردن جواب از روش حذفی گاوس و تحویل گاوس ـ ژردان تقریباً یکسان است، اما در بخش ۱-۶ خواهیم دید که همیشه چنین نیست.

**معکوس ماتریس مربعی**

یک راه دیگر برای حل دستگاه معادلات جبری خطی ارائه می دهیم. اگر دستگاه $AX = B$، $n\times n$ باشد، یعنی $A$ یک ماتریس $n\times n$ و ماتریس $A^{-1}$، به نام **معکوس** $A$، موجود باشد به قسمی که

* Camille jordan، ریاضی دان فرانسوی (۱۸۳۸-۱۹۲۲)

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I, \qquad (۱-۲-۵)$$

آن گاه می توانیم دستگاه را به شکل زیر حل کنیم . اگر معادلهٔ $AX = B$ را از چپ در $A^{-1}$ ضرب کنیم نتیجه می شود $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ یا $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$ زیرا ضرب ماتریسها شرکت پذیر است . ولی $A^{-1}A = I$ و $IX = X$ ؛ بنابراین $X = A^{-1}B$ جواب مطلوب است . اگر $A^{-1}$ وجود داشته باشد به گونه ای که معادلهٔ (۱-۲-۵) برقرار باشد، آن گاه $A$ را **ناتکین** گویند (ماتریسی که معکوس نداشته باشد، **تکین** نام دارد) . قضیهٔ زیر را در مورد معکوس ماتریسها بیان می کنیم و اثبات آن را به عنوان تمرین می گذاریم (تمرینهای ۵ تا ۸) .

**قضیه ۱-۲-۲** اگر ماتریسهای $A$ و $B$ ناتکین باشند، آن گاه

الف) $A^{-1}$ یکتاست ؛

ب) $(A^{-1})^{-1} = A$ ؛

پ) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ؛

ت) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

معکوس یک ماتریس را می توان با روش تحویل گاوس ـ ژردان به دست آورد . **ماتریس مقدماتی** را ماتریسی تعریف می کنیم که با یکی از اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس $I$ به دست می آید . برای مثال

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

ماتریسهای مقدماتی اند که از $I_3$ به دست می آیند . اوّلی از تعویض سطرهای یک و دو، دومی از ضرب سطر سه در $c$ $(c \neq 0)$ و سومی از ضرب سطر دو در $c$ و افزون نتیجه به سطر سه به دست می آید . اگر یک ماتریس مقدماتی $E$ را از چپ در یک ماتریس $A$ ضرب کنیم، حاصل ضرب $EA$، همان ماتریس $A$ است که روی آن عمل سطری مقدماتی که با $E$ نشان داده شده، انجام گرفته است (تمرین ۹) . پس اگر $A$ ناتکین باشد با انجام اعمال سطری مقدماتی به صورت متوالی، می توان $A$ را به $I$ تبدیل نمود، یعنی، $A \sim I$ . بنابراین ، پس از $r$ عمل سطری مقدماتی داریم

$$(E_1E_2 \cdots E_r)A = I, \qquad (۱-۲-۶)$$

که $E_1$ ، $E_2$ ، ... ، $E_r$ ماتریسهای مقدماتی هستند و $A^{-1} = E_1E_2 \dots E_r$ (تمرین ۱۰) . در عمل

محاسبهٔ $A^{-1}$ از طریق محاسبهٔ حاصل ضرب $E_1E_2 \dots E_r$ به دست می آید . مثال زیر این روش را نشان می دهد .

**مثال ۱-۲-۳** مطلوب است محاسبهٔ $A^{-1}$ در صورتی که

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

*حل* : با نوشتن یک ماتریس همانی ۳ × ۳ در کنار $A$، ماتریس افزوده را تشکیل داده و اعمال سطری مقدماتی روی آن انجام می دهیم تا این که $A$ به شکل پلکانی سطری تحویل یافته در آید :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

بنابراین

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

و می توان نشان داد که $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (تمرین ۱۱)

معکوس یک ماتریس ناتکین یکتاست (تمرین ۵) . روش فوق معکوس ماتریس را می دهد به این دلیل که از اعمال سطری مقدماتی نتیجه می شود . این کار با انجام همین اعمال روی ماتریس واحد که با آن ماتریس افزودهٔ $A$ تشکیل می شود، انجام می گردد . پس، بعد از آن که $A$ با عملیات سطری به $I$ تبدیل شد، به وضعیت نشان داده شده در معادلهٔ (۱-۲-۶) می رسیم که ماتریس همانی با اعمال سطری به $A^{-1}$ تبدیل می شود . بطور خلاصه

$$(A \mid I) \sim (I \mid A^{-1}).$$

دستگاه $AX = B$ را که دارای جواب منحصر به فرد باشد با روش حذفی گاوس می توان حل نمود یا این که $A^{-1}$ و سپس $A^{-1}B$ را محاسبه کرد؛ انتخاب یکی از این دو روش به عوامل دیگر بستگی دارد. اگر لازم باشد دستگاه فقط یک بار حل شود، روش حذفی گاوس مناسب است. ولی در عمل، اغلب با مسائلی رو به رو می شویم که یک دستگاه را باید با ورودیهای متفاوت یعنی، با ماتریسهای متفاوت $B$ حل کنیم. در این حالت محاسبهٔ $A^{-1}$ بهترین روش خواهد بود.

**دستگاههای همگن**

اگر $B = O$، آن گاه دستگاه $AX = O$ را یک **دستگاه همگن** می نامند. چنین دستگاههایی همواره سازه گار هستند. اگر $A$ ناتکین باشد، این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد $X = O$ (موسوم به ***جواب بدیهی***) است (تمرین ۱۲). اگر $A$ تکین باشد، دستگاه دارای بی نهایت جواب است. در حالت اخیر، اعمال سطری $A$ به تعدادی، مثلاً $r$ تا سطر صفر منجر می شود. در نتیجه $n - r$ متغیّر را می توان برحسب $r$ متغیّر که اختیاری اند به دست آورد. دستگاههای همگن غیرمربعی را مانند مثال زیر می توان حل نمود.

**مثال ۱-۳-۴**

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0\\
2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0\\
3x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 0\\
3x_1 - 11x_2 + 12x_3 &= 0.
\end{aligned}$$

***حل*** : تحویل سطری ماتریس ضرایب را برای به دست آوردن صورت پلکانی سطری به کار می بریم :

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 4 & -6\\ 3 & -11 & 12\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 5 & -6\\ 0 & 10 & -12\\ 0 & -5 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 5 & -6\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{6}{5}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

سومین سطر ماتریس سوم که برابر صفر است از ضرب دومین سطر ماتریس دوم در ۲− و جمع آن با سومین سطر به دست می آید، و سطر چهارم آن از ضرب سطر دوم در ۱ و جمع آن با

سطر چهارم به دست می آید . حال از صورت پلکانی سطری نتیجه می شود :

$$x_2 = \tfrac{6}{5}x_3,$$
$$x_1 = 2x_2 - 2x_3 = \tfrac{2}{5}x_3.$$

بنابراین مجموعهٔ جواب را به صورت زیر می توان نوشت :

$\{(\tfrac{2}{5}k, \tfrac{6}{5}k, k) \mid$ $k$ یک عدد حقیقی است $\}.$

پس مجموعهٔ جواب شامل تعدادی نامتناهی سه تایی مرتب است . به عبارت دیگر، هر مضرب اسکالر $(2, 5, 6)$ به مجموعهٔ جواب بستگی دارد .

## تمرینهای ۱-۲

۱- دستگاههای مثال ۱-۲-۱ را رسم کنید.

۲- ماتریس زیر مفروض است

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

مطلوب است محاسبهٔ $|A|$ با هریک از روشهای زیر :

الف) بسط آن با استفاده از ستون اوّل ؛

ب) بسط آن با استفاده از سطر چهارم ؛

پ) بسط آن با استفاده از ستون سوم .

۳- اعمال سطری مقدماتی که هریک از ماتریسهای (الف)، (ب) و (پ) شکل ۱-۲-۲ را به صورت پلکانی سطری تحویل یافته، تبدیل می کند، فهرست کنید .

۴- اعمال سطری مقدماتی که هریک از ماتریسهای (الف)، (ب) و (پ) شکل ۱-۲-۳ را به (الف) صورت پلکانی سطری ؛ (ب) صورت پلکانی سطری تحویل یافته تبدیل می کند، فهرست کنید .

۵- قسمت (الف) قضیهٔ ۱-۲-۳ را ثابت کنید (***راهنمایی*** : فرض کنید $AB = I$ و $AC = I$ ؛ سپس نشان دهید $B = C$) .

۶- قسمت (ب) از قضیهٔ ۱-۲-۲ را ثابت کنید (***راهنمایی*** : $(A^{-1})(A^{-1})^{-1}$ برابر چیست ؟)

۷- قسمت (پ) از قضیهٔ ۱-۲-۲ را ثابت کنید (*راهنمایی*: $(B^{-1}A^{-1})(AB)$ برابر چیست؟).

۸- قسمت (ت) از قضیهٔ ۱-۲-۲ را ثابت کنید (*راهنمایی*: ترانهادهٔ $AA^{-1}=I$ و $A^{-1}A=I$ را بنویسید.)

۹- برای هر ماتریس ۳ × ۳ دلخواه $A$، هریک از ماتریسهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}A$ ب) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&c\end{pmatrix}A$

پ) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix}A$ ت) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix}A$

۱۰- نشان دهید اگر $A$ ماتریس $n \times n$ باشد، آن گاه $A^{-1}A=I$ نتیجه می دهد $AA^{-1}=I$.

۱۱- نشان دهید برای ماتریس $A$ در مثال ۱-۲-۳، $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

۱۲- نشان دهید دستگاه همگن $AX=O$، که در آن $A$ یک ماتریس $n \times n$ است، فقط دارای جواب بدیهی است، اگر $A$ ناتکین باشد. مسأله را:

الف) با استفاده از معکوس $A$ حل کنید؛ ب) با استفاده از قاعدهٔ کرامر حل کنید.

۱۳- مجموعهٔ جواب هریک از دستگاههای زیر را پیدا کنید.

الف)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 23 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

پ)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

۱۴- مجموعهٔ جواب هریک از دستگاههای زیر را به دست آورید:

الف)
$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

۱۵- با استفاده از قاعدهٔ کرامر مجموعهٔ جواب هریک از دستگاههای زیر را پیدا کنید.

الف)

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

پ)

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

ت)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 5x_1 - 3x_2 - \ \ x_3 &= 16 \end{aligned}$$

۱۶- نشان دهید دترمینان یک ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب عناصر واقع بر قطر اصلی آن است .

۱۷- هریک از دترمینانهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

ب) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

پ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

ت) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

ث) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$

ج) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$

چ) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

ح) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

۱۸- در هر قسمت ماتریس مقدماتی ۴ × ۴ ، $E$ را چنان تعیین کنید که وقتی $EA$ محاسبه شد، اعمال سطری مقدماتی مشخص زیر را روی $A$ انجام دهد :

الف) سطرهای ۲ و ۴ عوض شوند .

ب) سطر ۳ در یک ثابت $c$ ضرب شود .

پ) سطر ۳ در یک ثابت $k$ ضرب و نتیجه به سطر ۱ اضافه شود .

ت) سطر ۲ در ۲- ضرب و حاصل با سطر ۳ جمع شود و همچنین سطر ۲ در ۳ ضرب شود و نتیجه به سطر ۴ اضافه شود .

۱۹- با مراجعه به تمرین ۱۸، معکوس هریک از ماتریسهای مقدماتی $E$ را به دست آورید.
(*راهنمایی*: کدام عمل سطری مقدماتی اثر $E$ بر $A$ را خنثی می کند؟)

۲۰- توضیح دهید که چرا عمل سطری مقدماتی $E_2$ در متن شامل کلمه «غیرصفر» است ولی $E_3$ چنین نیست.

۲۱- نشان دهید دستگاه $AX = B$، که در آن

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix},$$

دارای جواب نیست، اما اگر $B = (2 \quad 3 \quad 1 \quad 3)^T$، آن گاه دستگاه تعدادی نامتناهی جواب دارد.

۲۲- با استفاده از روش حذفی گاوس، دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

۲۳- کدام یک از ماتریسهای زیر تکین هستند؛

الف) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

پ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

۲۴- نشان دهید معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ $(a, b)$ و $(c, d)$ می گذرد به صورت دترمینان عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

۲۵- مجموعهٔ جواب هریک از دستگاههای زیر را بیابید .

الف)
$$\begin{aligned} 4x_1 - 7x_2 + x_3 - 6x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

پ)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + 8x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 9 \end{aligned}$$

*۲۶- مجموعهٔ جواب هریک از دستگاههای $AX = B$ را که در آن $A$ و $B$ به صورتهای زیرند، بیابید :

الف)
$$A = \begin{pmatrix} 3.000 & -4.031 & -3.112 \\ -0.002 & 4.000 & 4.000 \\ -2.000 & 2.906 & -5.387 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4.413 \\ 7.998 \\ -4.481 \end{pmatrix}$$

ب)
$$A = \begin{pmatrix} 4.23 & -1.06 & 2.11 \\ -2.53 & 6.77 & 0.98 \\ 1.85 & -2.11 & -2.32 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5.28 \\ 5.22 \\ -2.58 \end{pmatrix}$$

پ)
$$A = \begin{pmatrix} 2.51 & 1.48 & 4.53 \\ 1.48 & 0.93 & -1.30 \\ 2.68 & 3.04 & -1.48 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 1.03 \\ -0.53 \end{pmatrix}$$

۲۷- ماتریس زیر را در نظر بگیرید :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ a & b & -1 \end{pmatrix}.$$

الف) مقادیر $a$ و $b$ را چنان تعیین کنید که $A$ تکین باشد .

ب) مقادیر $a$ و $b$ را چنان تعیین کنید که $A$ ناتکین باشد .

۲۸- هریک از دستگاههای زیر را حل کنید

---

* حل این مسأله نیازمند ماشین حساب است .

الف)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 &= 3 \\ x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

پ)
$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -8x_1 - 8x_2 + 3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

ت)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

۲۹- ثابت کنید اگر $A$ یک ماتریس متقارن ناتکین باشد، آن گاه $A^{-1}$ متقارن است .

۳۰- ثابت کنید اگر $A$ با $B$ تعویض پذیر و $A$ ناتکین باشد، آن گاه $A^{-1}$ با $B$ تعویض پذیر است .

۳۱- ثابت کنید اگر $A$ ناتکین باشد، آن گاه $A$ متقارن است اگر و فقط اگر $A^{-1}$ متقارن باشد . (**راهنمایی** : دو مطلب باید ثابت شود : یکی این که نشان دهیم اگر $A$ متقارن و ناتکین باشد، $A^{-1}$ متقارن است؛ دیگر این که اگر $A$ ناتکین و $A^{-1}$ متقارن باشد، آن گاه $A$ متقارن است . )

۳۲- ثابت کنید رابطهٔ «~» (معادل سطری بودن) رابطه ای هم ارزی است، یعنی، دارای خواص زیر است :

(i) $A \sim A$ (خاصیت انعکاسی)؛

(ii) اگر $A \sim B$ آن گاه $B \sim A$ (خاصیت تقارن)؛

(iii) اگر $A \sim B$ و $B \sim C$ آن گاه $A \sim C$ (خاصیت تعدّی) .

۳۳- یک معادله خطی دارای سه متغیّر یک صفحه را در فضای $(x_1, x_2, x_3)$ نشان می دهد . تعبیرهای هندسی ممکن سه معادله با سه متغیّر را، یعنی، حالتهایی که سه معادله دارای جواب یکتا، بدون جواب و تعداد نامتناهی جواب است، مورد بحث قرار دهید .

## ۱-۳ تبدیلات خطی

در بخش ۱-۱ نشان دادیم که چگونه تعریف ضرب ماتریسها بطور طبیعی از تبدیلات خطی متوالی به دست می آید حال تبدیلات، بخصوص فضاهایی را که در ارتباط با تبدیلات هستند با تفصیل بیشتری بررسی می کنیم . برای مثال ماتریس ۳ × ۲

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 \end{pmatrix} \tag{۱-۳-۱}$$

نمایانگر یک تبدیل از سه تاییهای مرتب $(x_1, x_2, x_3)^T$ به زوج مرتب $(x_1 + 2x_2 - 3x_3, -2x_1 + 4x_2 + x_3)^T$ است. بخصوص، این تبدیل، نقطهٔ (۸، ۱۵، ۱۴) را به (۰، ۰) تبدیل می کند. به عبارت دیگر، یک بردار (ماتریسهای $1 \times n$ و $m \times 1$ **بردار** نامیده می شوند) که دارای سه مؤلّفه است به یک بردار با دو مؤلّفه تبدیل شده است. حال فضای شامل همه بردارهای با $n$ مؤلّفهٔ حقیقی را تعریف می کنیم.

**تعریف ۱-۳-۱**: یک بردار، یک ماتریس $1 \times n$ است که به صورت زیر نشان داده می شود:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$

مجموعهٔ همهٔ چنین بردارهای $\mathbf{x}$، یک فضای برداری حقیقی $n$ بعدی $\mathbb{R}^n$ تشکیل می دهد که دارای خواص زیر است.

(i) اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار در $\mathbb{R}^n$ باشند، آن گاه $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ یک بردار در $\mathbb{R}^n$ است. به عبارت دیگر $\mathbb{R}^n$ ***تحت جمع بردار بسته*** است. علاوه بر این، جمع برداری، دارای خواص زیر است:

۱- برای هر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ در $\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$؛

۲- برای هر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ در $\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$؛

۳- یک بردار منحصر به فرد $0$ در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد بطوری که برای هر $\mathbf{u}$ در $\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}+0=0+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

۴- به ازای هر $\mathbf{u}$ در $\mathbb{R}^n$، یک بردار منحصر به فرد $-\mathbf{u}$ در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد بطوری که $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u})+\mathbf{u} = 0$.

(ii) اگر $\mathbf{u}$ برداری در $\mathbb{R}^n$ و $c$ یک عدد حقیقی باشد، آن گاه $c\mathbf{u}$ برداری در $\mathbb{R}^n$ است. به عبارت دیگر، $\mathbb{R}^n$ ***تحت ضرب اسکالر بسته است***. علاوه براین، ضرب اسکالر دارای خواص زیر است:

۱- به ازای هر $\mathbf{u}$ در $\mathbb{R}^n$ و هر عدد حقیقی $c$، $c\mathbf{u}=\mathbf{u}c$؛

۲- به ازای هر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ در $\mathbb{R}^n$ و هر عدد حقیقی $c$، $c(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$؛

۳- به ازای هر $\mathbf{u}$ در $\mathbb{R}^n$ و هر دو عدد حقیقی $c$ و $d$، $(c+d)\mathbf{u} = c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$؛

۴- به ازای هر $\mathbf{u}$ در $\mathbb{R}^n$ و هر دو عدد حقیقی $c$ و $d$، $(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u})$؛

۵- به ازای هر $\mathbf{u}$ در $\mathbb{R}^n$، $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$ و $0\mathbf{u}=0$.

توجه کنید که تمام خواص فوق در مورد ماتریسها صادق است و در بخش قبلی این فصل مورد استفاده قرار گرفت. در این جا توجه خود را به ماتریسهای $1 \times n$ محدود می کنیم، که آنها را **بردار** می نامیم و با حروف کوچک سیاه نشان می دهیم. همچنین می توانیم از ماتریسهای $n \times 1$ (یا بردارهای ستونی) استفاده کنیم، زیرا تمام خواص تعریف ۱-۳-۱ در مورد این ماتریسها نیز صادق اند. یک دلیل برای تعویض این نماد آن است که معادلاتی نظیر معادلهٔ (۱-۳-۱) را می توان به صورت مناسبتر $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ نوشت. در (۱-۳-۱) برداری که باید تبدیل شود برداری در $\mathbb{R}^3$ است، در صورتی که بردار تبدیل شده در $\mathbb{R}^2$ قرار دارد.

تعریف ۱-۳-۱ بیان می کند $\mathbb{R}^n$، فضای برداری $n$ بعدی حقیقی، از تمام بردارهای به صورت

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

تشکیل می شود. اما معمولاً قسمتی از فضای $\mathbb{R}^n$ مورد توجه ماست؛ برای مثال، همهٔ بردارهای به شکل

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, 0)$$

که زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}^n$ را تشکیل می دهند. بنابراین زیرفضا را تعریف می کنیم.

**تعریف ۱-۳-۲** : اگر $V$ فضای برداری و $W$ زیرمجموعهٔ $V$ باشد، آن گاه $W$ یک زیرفضای $V$ است، هرگاه $W$ یک فضای برداری باشد.

تأکید می کنیم که هر زیرمجموعه ای از یک فضای برداری، زیرفضا نیست. برای مثال، زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}^3$ شامل تمام بردارهای به شکل $(x_1, x_2, 1)$ یک زیرفضا نیست، زیرا طبق تعریف ۱-۳-۱ یک فضای برداری نیست (تمرین ۱). هر فضای برداری دو زیرفضای بدیهی دارد: خود فضا و فضای شامل فقط بردار $\mathbf{0}$ (تمرین ۲). زیرفضاهای دیگر به کمک قضیهٔ زیر بآسانی به دست می آیند.

**قضیهٔ ۱-۳-۱** : فرض کنید $V$ فضای برداری و $W$ زیرمجموعهٔ $V$ باشد. آن گاه $W$ یک زیرفضای $V$ است اگر و فقط اگر $W$ تحت عمل جمع برداری و ضرب اسکالر بسته باشد.

پس لازم نیست تمام خواص فضای برداری که در تعریف ۱-۳-۱ فهرست شده، بررسی شوند، بلکه بررسی خواص (i) و (ii) کافی است. قضیهٔ ۱-۳-۱ ما را مطمئن می سازد

که اگر این خواص برقرار باشند، سایر خواص نیز برقرار خواهند بود؛ اثباتها طولانی و خسته کننده اند، اما مشکل نیستند.

بحث ما دربارهٔ فضاهای برداری هنوز ادامه دارد. تا این جا فضای برداری را معرفی کردیم (تعریف ۱-۳-۱) ولی هنوز نمی دانیم چگونه آن را بسازیم برای این کار به تعریفهای بیشتری نیاز داریم.

**تعریف ۱-۳-۳** :فرض کنید $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_j\}$ مجموعه ای از بردارها در فضای $V$ باشد. بردار

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_j\mathbf{u}_j,$$

که در آن $c_i$ ها اعداد حقیقی اند، یک **ترکیب خطی** از بردارها در $S$ نامیده می شود.

توجه کنید که بردار $\mathbf{v}$ لزوماً به فضای $V$ متعلق است. برای مثال، اگر

$$\mathbf{u}_1 = (2, 3, 4), \qquad \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 5), \qquad \mathbf{u}_3 = (1, -4, 7),$$

آن گاه بردار

$$\mathbf{v} = c_1(2, 3, 4) + c_2(-1, 0, 5) + c_3(1, -4, 7),$$

که درآن $c_1$ ، $c_2$ و $c_3$ اعداد حقیقی اند، یک ترکیب خطی از $\mathbf{u}_1$ ، $\mathbf{u}_2$ و $\mathbf{u}_3$ است. دراین مثال بردارهای $\mathbf{u}_1$ ، $\mathbf{u}_2$ و $\mathbf{u}_3$ بردارهایی در $\mathbb{R}^3$ هستند و طبیعی است این سؤال را مطرح کنیم که آیا هر بردار $\mathbb{R}^3$ را می توان به صورت ترکیبی خطی از این بردارها نوشت. در این صورت واضح است که $\mathbb{R}^3$ فقط با بردارهای $\mathbf{u}_1$ ، $\mathbf{u}_2$ و $\mathbf{u}_3$ معین می شود. برای ادامهٔ بحث به چند تعریف دیگر نیاز داریم.

**تعریف ۱-۳-۴** :فرض کنید $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_j\}$ مجموعه ای از بردارها در فضای $V$ باشد. مجموعهٔ $S$ فضای $V$ را پدید می آورد هرگاه هر بردار در $V$ ترکیبی خطی از بردارها در $S$ باشد.

در این صورت می گوییم $V$ به وسیلهٔ $S$ پدید می آید و $S$ را یک مجموعهٔ پدیدآورنده $V$ می نامیم.

**مثال ۱-۳-۱** نشان دهید مجموعهٔ

$$S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$\mathbb{R}^3$ را پدید می آورد.

**حل** : برداری دلخواه در $\mathbb{R}^3$ مانند $(x_1, x_2, x_3)$ را اختیار می کنیم و نشان می دهیم که آن را می توان به صورت ترکیبی خطی از بردارهای $S$ نوشت. پس

$$c_1(1, 0, 0) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 1, 1) = (x_1, x_2, x_3)$$

که به معادلات خطی زیر منجر می شود :

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= x_1 \\ c_2 + c_3 &= x_2 \\ c_3 &= x_3. \end{aligned}$$

جواب یکتای این دستگاه چنین است (تمرین ۳)

$$c_1 = x_1 - x_2, \qquad c_2 = x_2 - x_3, \qquad c_3 = x_3,$$

با استفاده از این مقادیر می توان نشان داد که برای مثال :

$$(-2, 5, 7) = -7(1, 0, 0) - 2(1, 1, 0) + 7(1, 1, 1).$$

مجموعهٔ $S$ مثال ۱-۳-۱ دارای خاصیت ویژه ای است که مجموعه های دیگر این خاصیت را ندارند. برای مثال، مجموعهٔ

$$T = \{(1, 0, 2), (1, 2, 0), (1, 1, 1)\}$$

$\mathbb{R}^3$ را پدیدنمی آورد(تمرین ۴). تنهابردارهای$(x_1, x_2, x_3)$ در $\mathbb{R}^3$ که برای آنها $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$* را می توان به صورت ترکیبی خطی از بردارهای مجموعهٔ $T$ بیان نمود. خاصیت ویژهٔ مزبور ***استقلال خطی*** نام دارد و به صورت زیر تعریف می شود.

**تعریف ۱-۳-۵ :** فرض کنید $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_j\}$ مجموعه ای از ***بردارهای متمایز*** در یک فضای برداری $V$ باشد. آن گاه مجموعهٔ $S$ را روی اعداد حقیقی ***بطور خطی مستقل*** می نامند هرگاه معادلهٔ

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_j\mathbf{u}_j = \mathbf{0} \qquad (۱-۳-۲)$$

فقط به ازای

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_j = 0,$$

صادق باشد که در آن $c_i$ ها اعداد حقیقی اند.

عبارت «روی اعداد حقیقی» اغلب حذف می شود به شرط این که حذف آن موجب ابهام نشود. اگر معادلهٔ (۱-۳-۲) حداقل به ازای یک $c_i$ غیرصفر برقرار باشد، آن گاه مجموعهٔ $S$ را ***وابستهٔ خطی*** گویند. در این حالت، هریک از $\mathbf{u}_i$ ها را به صورت ترکیبی از سایر بردارها می توان نوشت. در یک مجموعهٔ مستقل خطی هیچ یک از بردارها را نمی توانیم به صورت ترکیبی خطی

* ازنظر هندسی این صفحه ای است که از مبدأ می گذرد. مجموعهٔ $T$ این صفحه را پدید می آورد.

از دیگر بردارها بنویسیم. قضایای زیر نتایج فوری تعریف ۱-۳-۵ هستند که اثبات آنها به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۵)

**قضیهٔ ۱-۳-۲**

الف) هر بردار غیرصفر، مستقل خطی است.

ب) بردار صفر وابستهٔ خطی است.

پ) هر مجموعه ای از بردارها که شامل بردار صفر باشد وابستهٔ خطی است.

اکنون با استفاده از مفهوم استقلال خطی و یک مجموعهٔ پدیدآورنده، می توان یک ***پایه*** را برای فضای برداری $V$ تعریف نمود.

**تعریف ۱-۳-۶**: فرض کنید $S$ مجموعه ای از بردارها در فضای برداری $V$ باشد. آن گاه $S$ یک ***پایه*** برای $V$ است هرگاه

الف) $S$ مستقل خطی باشد، و

ب) $S$، $V$ را پدید آورد.

به عنوان مثال، مجموعهٔ

$S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

فضای $\mathbb{R}^3$ را پدید می آورد (مثال ۱-۳-۱) و مستقل خطی است (تمرین ۶)، بنابراین یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است. اما، افزودن هر برداری به $S$ مجموعه ای را به وجود می آورد که وابستهٔ خطی است، هرچند هنوز هم $\mathbb{R}^3$ را پدید می آورد (تمرین ۷). از طرف دیگر با حذف یک بردار از مجموعهٔ $S$، مجموعه ای به وجود می آید که باز هم مستقل خطی است ولی دیگر فضای $\mathbb{R}^3$ را پدید نمی آورد. این مطلب نشان می دهد که *تعداد* بردارها در یک پایه، ثابت است. در واقع قضیهٔ زیر را می توان بیان کرد.

**قضیه ۱-۳-۳**: اگر فضای برداری $V$ دارای پایه ای شامل $n$ بردار باشد، آن گاه هر پایهٔ دیگر نیز شامل $n$ بردار است.

اثبات این قضیه را می توان در کتابهای جبر خطی (مثلاً، جبر خطی مقدماتی نوشته استانلی گراسمان) یافت.

حال معنی دقیقتری را از عبارت «فضای برداری $n$ بُعدی» ارائه می دهیم .

**تعریف ۱ -۳-۷** :اگر فضای برداری $V$ دارای یک پایه باشد، آن گاه تعداد بردارها در این پایه را بُعد $V$ می نامند و با نماد "$\dim(V)$" نمایش می دهند . فضای برداری شامل بردار صفر، دارای بُعد صفر است .

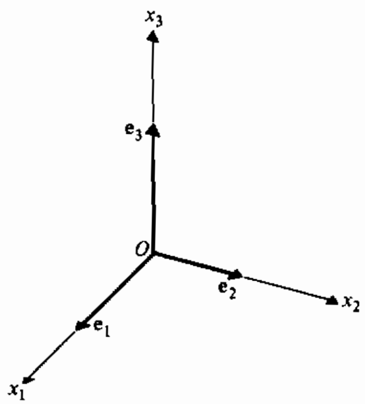
پس $\mathbb{R}^n$ دارای بُعد $n$ است، یعنی هر پایه برای $\mathbb{R}^n$ شامل $n$ بردار است . از میان همهٔ پایه های $\mathbb{R}^n$ یکی از آنها به خاطر سادگی مورد توجه است . این پایه به صورت زیر است :

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\},$$

که

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\vdots\\
\mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1);
\end{aligned}$$

یعنی، $\mathbf{e}_i$ ها سطرهای ماتریس واحد $I_n$ هستند . این پایه را، ***پایهٔ طبیعی*** $\mathbb{R}^n$ می گوییم . (شکل ۱-۳-۱ را ببینید) .




شکل ۱-۳-۱ پایهٔ طبیعی برای $\mathbb{R}^3$

حال به رابطهٔ بین ***توابع*** و تبدیلات می پردازیم . وقتی می نویسیم $y = f(x)$ ، نماد $f$ اعمال انجام شده روی $x$ را نشان می دهد . علاوه بر این $f$ ***یک مقداری*** است، یعنی تابع به هر مقدار $x$

یک و فقط یک مقدار را نسبت می دهد . همچنین منظور از دامنه و برد تابع $f$، به ترتیب مجموعه هایی هستند که $x$ و $y$ به آنها تعلق دارد . برای مثال در تابع $y = x \log x$ دامنه، مجموعهٔ $\{x : x > 0\}$ و برد، مجموعهٔ $\{y : -\infty < y < \infty\}$ است . تابع را یک **نگاشت** نیز می نامیم، زیرا برای مثال تابع $y = x \log x$ نیمهٔ مثبت محور $x$ ها $(x > 0)$ را بر روی خط حقیقی $(-\infty < y < \infty)$ می نگارد .

با توجه به مطالب فوق یک تبدیل خطی را به صورت زیر تعریف می کنیم .

**تعریف ۱-۳-۸ :** فرض کنید $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ به ترتیب فضاهای برداری $n$ بعدی و $m$ بعدی باشند . نگاشت یک مقداری $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ نامیده می شود هرگاه

الف) به ازای هر $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ در $\mathbb{R}^n$ ، $L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$ ، و

ب) به ازای هر $\mathbf{u}$ در $\mathbb{R}^n$ و هر عدد حقیقی $c$ ، $L(c\mathbf{u}) = cL(\mathbf{u})$

**مثال ۱-۳-۲** معین کنید تبدیلات زیر خطی اند یا نه .

الف) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ که به صورت $L(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2)$ تعریف شده است .

ب) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ که به صورت $L(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, 0)$ تعریف شده است .

پ) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ که به صورت $L(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 1)$ تعریف شده است .

ت) $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ که به صورت $L(u_1, u_2, u_3, u_4) = (u_1 u_2, u_3 - u_4)$ تعریف شده است .

**حل :** فرض کنید $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ و $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . آن گاه بنابه تعریف نگاشت در قسمت (الف)

$$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

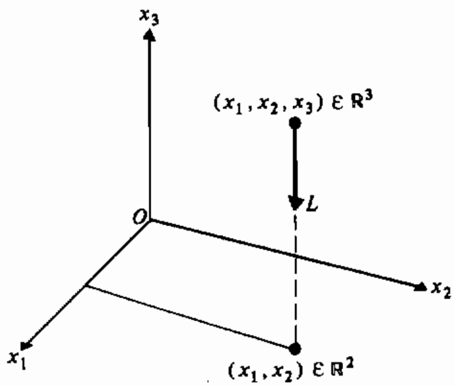
و

$$L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

همچنین،

$$L(c\mathbf{u}) = L(cu_1, cu_2, cu_3) = (cu_1, cu_2) = cL(\mathbf{u}).$$

بنابراین نگاشت (الف) یک تبدیل خطی است . این تبدیل، یک **تصویر** نامیده می شود . زیرا خطی که از نقطهٔ $(x_1, x_2, x_3)$ بر صفحه $x_1 x_2$ عمود شود، صفحه را در نقطهٔ $(x_1, x_2)$ قطع می کنند . شکل ۱-۳-۲ را ببینید .




شکل ۱-۳-۲ تبدیل $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$

قسمت (ب) را به عنوان تمرین می گذاریم (تمرین ۹) . توجه کنید که این نگاشت نیز یک تبدیل خطی است و **تصویر** نامیده می شود . اگرچه به نظر می رسد که نقاط $(x_1, x_2)$ و $(x_1, x_2, 0)$ از لحاظ هندسی یکی هستند، یک تفاوت عمده بین تبدیلات خطی (الف) و (ب) وجود دارد . اوّلی را می توان با ضرب ماتریسی

$$(u_1, u_2, u_3)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = (u_1, u_2),$$

به دست آورد، در حالی که دومی به صورت زیر خواهد بود

$$(u_1, u_2, u_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = (u_1, u_2, 0),$$

که نشان می دهد دو ماتریس **متفاوت** به کار رفته اند .

در قسمت (پ) به ازای $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ و $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ داریم

$$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (u_2 + v_2, u_1 + v_1, 1)$$

و

$$\begin{aligned}L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) &= L(u_1, u_2) + L(v_1, v_2) = (u_2, u_1, 1) + (v_2, v_1, 1)\\ &= (u_2 + v_2, u_1 + v_1, 2).\end{aligned}$$

چون دو عبارت متفاوتند، این نگاشت یک تبدیل خطی نیست. در قسمت (ت) داریم

$$L(cu_1, cu_2, cu_3, cu_4) = (c^2 u_1 u_2, c(u_3 - u_4)),$$

و

$$cL(u_1, u_2, u_3, u_4) = c(u_1 u_2, u_3 - u_4) = (cu_1 u_2, c(u_3 - u_4)),$$

چون دو عبارت یکسان نیستند، این نگاشت نیز یک تبدیل خطی نیست.

تبدیل خطی مثال ۱-۳-۲ (ب) را می توان به شکل ماتریسی به صورت

$$(u_1, u_2, u_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (u_1, u_2),$$

تعریف نمود که قبلاً هم این کار انجام شد. چون ماتریسهای $1 \times n$ و $n \times 1$ را بردار می نامیم، بدون آن که بین بردارهای سطری و ستونی فرقی خاص قائل شویم، می توانیم این تبدیل را به صورت زیر نیز بیان کنیم

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

هریک از این نمادها مزایا و معایبی دارد و هرکدام که مناسبتر باشد، آن را به کار خواهیم گرفت.

تبدیلات خطی مشخّصه هایی معیّن دارند که آنها را بتفصیل بررسی خواهیم کرد. ابتدا تبدیلات خطی یک به یک را بررسی می کنیم که به صورت زیر تعریف می شوند.

**تعریف ۱-۳-۹** : یک تبدیل خطی $L : V \to W$ از فضای برداری $V$ به فضای برداری $W$ را **یک به یک** گوییم اگر $L(\mathbf{u}) = L(\mathbf{v})$ نتیجه دهد، $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ .

توجه کنید که تبدیل ۱-۳-۲ (الف) یک به یک نیست چون

$$L(u_1, u_2, 2) = L(u_1, u_2, 3) = (u_1, u_2).$$

تعریف ۱-۳-۹ روشی عملی برای تعیین یک به یک بودن تبدیل به دست نمی دهد. روش بهتر آن است که تعیین کنیم کدام بردارها به بردار صفر تبدیل می شوند. توجه کنید که یک تبدیل خطی همواره بردار صفر را به بردار صفر تبدیل می کند (تمرین ۳۸). ابتدا تعریف زیر را می آوریم.

**تعریف ۱-۳-۱۰ :** فرض کنید $L : V \to W$ یک تبدیل خطی از فضای برداری $V$ به فضای برداری $W$ باشد . **هستهٔ** $L$ که آن را به صورت $\ker L$ می نویسیم، عبارت است از زیرمجموعه تشکیل شده از تمام اعضای $\mathbf{v}$ در $V$ به قسمی که $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$ .

از نمادهای $\mathbf{0}_W$ و $\mathbf{0}_V$ به ترتیب برای نشان دادن بردارهای صفر $W$ و $V$ استفاده می کنیم . قضیهٔ زیر را می توان بیان کرد .

**قضیهٔ ۱-۳-۴ :** اگر $L : V \to W$ یک تبدیل خطی از فضای برداری $V$ به فضای برداری $W$ باشد، آن گاه $\ker L$ یک زیرفضای V است .

اثبات قضیهٔ ۱-۳-۴ را به عنوان تمرین می گذاریم (تمرین ۱۰) .

**قضیهٔ ۱-۳-۵ :** اگر $L : V \to W$ یک تبدیل خطی از فضای برداری $V$ به فضای برداری $W$ باشد، آن گاه $L$ یک به یک است اگر و فقط اگر $\dim (\ker L) = 0$ .

***اثبات*** : اگر $\dim (\ker L) = 0$ ، آن گاه $\ker L = \{\mathbf{0}_V\}$ . برای آن که نشان دهیم $L$ یک به یک است، فرض کنید $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$ که $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ به $V$ تعلق دارند . در آن صورت $L(\mathbf{v}_1) - L(\mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}_W$ ، که نشان می دهد $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}_V$ یا $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ ، یعنی، $L$ یک به یک است .

برعکس اگر $L$ یک به یک باشد، آن گاه برای $\mathbf{v}$ در $\ker L$ ، داریم $L(v) = \mathbf{0}_W$ . ولی چون $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ (تمرین ۳۸)، $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ ؛ یعنی، $\ker L = \{\mathbf{0}_V\}$ ، که دارای بُعد صفر است .

**مثال ۱-۳-۳** یک پایه برای $\ker L$ پیدا کنید در صورتی که $L$ تبدیل خطی است که به صورت زیر تعریف شده است

$$L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$$

و

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + 3x_4 - x_5 \\ x_1 \qquad + 2x_4 - x_5 \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5 \\ - x_3 + x_4 \qquad \end{pmatrix}.$$

*حل* : چون $\ker L$ شامل تمام بردارهایی در $\mathbb{R}^5$ است که به بردار صفر در $\mathbb{R}^4$ تبدیل می شوند، دستگاه خطی همگن زیر را داریم

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 3x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 \qquad + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5 &= 0 \\ - x_3 + \ x_4 \qquad &= 0. \end{aligned}$$

شکل پلکانی سطری تحویل یافته ماتریس ضرایب چنین است

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

که نشان می دهد $x_5 = 0$ ، $x_3 = x_4$ و $x_1 = -2x_4$ که $x_2$ و $x_4$ اختیاری هستند . پس مجموعهٔ جواب دستگاه همگن به صورت زیر است

$\{(-2t, s, t, t, 0):$   $s$ و $t$ حقیقی $\}$

و یک پایه برای $\ker L$ عبارت است از

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

از استقلال خطی بردارها در مجموعهٔ پایه به این ترتیب مطمئن می شویم که ابتدا قرار می دهیم $t = 0$ و $s = 1$ و سپس قرار می دهیم $t = 1$ و $s = 0$ (چرا؟) بنابراین $\dim (\ker L) = 2$ . فضای پدید آمده به وسیلهٔ بردارهای پایهٔ فوق را نیز ***فضای پوچ*** $L$ و بُعد این فضارا **پوچی** $L$ می نامند .

تبدیلات خطی از یک فضای برداری $V$ به یک فضای برداری $W$ را مطالعه کردیم . فضای $V$ ***دامنهٔ*** تبدیل و فضای $W$ ***هم‌دامنهٔ*** تبدیل نامیده می شوند . زیرمجموعهٔ معینی از هم دامنه که در زیر تعریف می شود دارای اهمیتی خاص است .

**تعریف ۱-۳-۱۱** : فرض کنید $L$ یک تبدیل خطی از فضای برداری $V$ به فضای برداری $W$ باشد، $L : V \to W$ زیرمجموعه ای از $W$ شامل تمام بردارهای $L(\mathbf{v})$ ، که $\mathbf{v}$ به $V$ تعلق دارد، برد $L$

نامیده می شود . اگر $W$ = برد $L$ ، آن گاه تبدیل را **پوشا** می نامند .

**قضیهٔ ۱-۳-۶** :اگر $L : V \to W$ تبدیلی خطی از فضای برداری $V$ به فضای برداری $W$ باشد آن گاه برد $L$ یک زیرفضای $W$ است .

***اثبات*** : باید نشان دهیم برد $L$ تحت عمل جمع برداری و ضرب اسکالر بسته است (قضیهٔ ۱-۳-۱ را ملاحظه کنید) . فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار در برد $L$ باشد . در این صورت به ازای دو بردار $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{v}_1$ در $V$ داریم $L(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}$ و $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}$ . حال داریم $\mathbf{u} + \mathbf{v} = L(\mathbf{u}_1) + L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1)$ که نشان می دهد $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ در برد $L$ قرار دارد . همچنین $c\mathbf{u} = cL(\mathbf{u}_1) = L(c\mathbf{u}_1)$ ، که نشان می دهد $c\mathbf{u}$ در برد $L$ قرار دارد . بنابراین $L$ یک زیرفضای $W$ است .

**مثال ۱-۳-۴** یک پایه برای برد $L$ پیدا کنید در صورتی که $L$ یک تبدیل خطی است و به شکل زیر تعریف شده است

$L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$

بطوری که

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + 3x_4 - x_5 \\ x_1 \quad\quad + 2x_4 - x_5 \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5 \\ - x_3 + \quad x_4 \end{pmatrix}.$$

***حل*** : چون دامنهٔ تبدیل $\mathbb{R}^5$ است ، کافی است معین کنیم بردارهای پایهٔ طبیعی برای $\mathbb{R}^5$ ، به چه بردارهایی تبدیل می شوند (چرا؟) . بنابراین داریم

$$(1, 0, 0, 0, 0)L = (1, 1, 2, 0),$$
$$(0, 1, 0, 0, 0)L = (0, 0, 0, 0),$$
$$(0, 0, 1, 0, 0)L = (-1, 0, -1, -1),$$
$$(0, 0, 0, 1, 0)L = (3, 2, 5, 1),$$
$$(0, 0, 0, 0, 1)L = (-1, -1, -1, 0).$$

بردارهای طرف راست برد $L$ را پدید می آورند . پس با جدا کردن بردارهای مستقل خطی این مجموعه می توانیم یک پایه برای برد $L$ بیابیم . برای این کار تحویل سطری را برای ماتریسی که

سطرهای آن بردارهای مورد بحث هستند، به کار می بریم . بنابراین با حذف مراحل میانی (تمرین ۱۱ را ملاحظه کنید)، داریم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

پس، یک پایه برای برد $L$ عبارت است از

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

که نشان می دهد $\dim($برد $L) = 3$ .

این بخش را با بیان سه قضیهٔ کاربردی به پایان می بریم .

**قضیهٔ ۱-۳-۷** (قانون پوچی سیلوستر*): اگر $L : V \to W$ یک تبدیل خطی در فضای برداری $V$ به فضای برداری $W$ باشد، آن گاه

$$\dim(\text{range } L) + \dim(\ker L) = \dim(V).$$

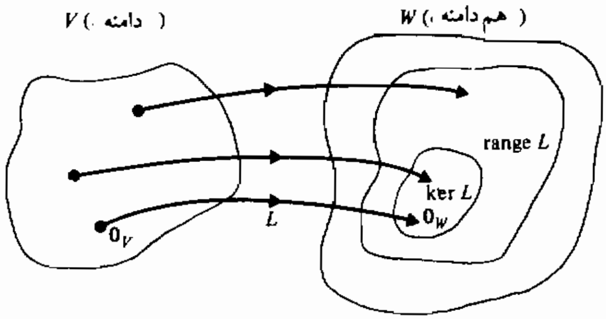
**قضیهٔ ۱-۳-۸** : فرض کنید $L : V \to W$ تبدیلی خطی از فضای برداری $V$ به فضای برداری $W$ باشد و فرض کنید $\dim(V) = \dim(W)$ . آن گاه $L$ پوشاست اگر و فقط اگر یک به یک باشد .

**قضیهٔ ۱-۳-۹** : فرض کنید $L : V \to W$ تبدیلی خطی از فضای برداری $V$ به فضای برداری $W$ باشد . آن گاه $L$ یک به یک است اگر و فقط اگر $\dim($برد $L) = \dim(V)$ .

برای «تجسم» قضایای فوق نموداری مانند شکل ۱-۳-۳ می تواند مفید باشد . توجه کنید که شکل نشان می دهد $L(0_V) = 0_W$ و (احتمالاً) اعضای دیگری از $V$ می توانند توسط $L$ به اعضای $\ker L$ تبدیل شوند . آن اعضایی از $V$ که تبدیل آنها در $\ker L$ واقع نمی شود لزوماً در برد $L$ قرار می گیرند . و آخر این که، برد $L$ زیرمجموعه ای از هم دامنهٔ $W$ است .

---

* James J. Sylvester ریاضی دان انگلیسی (۱۸۱۴ - ۱۸۹۷)




شکل ۱-۳-۳ نمودار تبدیل خطی $L: v \to w$

## تمرینهای ۱-۳

۱- نشان دهید زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^3$ شامل تمام بردارهای به شکل $(x_1, x_2, 1)$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ نیست.

۲- نشان دهید فضایی که تنها شامل بردار 0 باشد یک فضای برداری است.

۳- دستگاه معادلات مثال ۱-۳-۱ را حل کنید.

۴- نشان دهید مجموعهٔ

$$T = \{(1, 0, 2), (1, 2, 0), (1, 1, 1)\}$$

$\mathbb{R}^3$ را پدید نمی‌آورد. برای این کار نشان دهید تنها آن بردارهای $(x_1, x_2, x_3)$ در $\mathbb{R}^3$ که به ازای آنها $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ به وسیلهٔ بردارهای مجموعهٔ $T$ پدید می‌آیند.

۵- قضیهٔ ۱-۳-۲ را ثابت کنید.

۶- نشان دهید مجموعهٔ

$$S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

مستقل خطی است.

۷- نشان دیده مجموعهٔ

$$S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (-1, 2, 3)\}$$

(الف) $\mathbb{R}^3$ را پدید می‌آورد و (ب) وابستهٔ خطی است.

۸- نشان دهید مجموعهٔ

$S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$

(الف) مستقل خطی است و (ب) فضای $\mathbb{R}^3$ را پدید نمی‌آورد .

۹- نشان دیده نگاشت مثال ۱-۳-۲ (ب) یک تبدیل خطی است .

۱۰- قضیهٔ ۱-۳-۴ را ثابت کنید .

۱۱- نشان دهید

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

۱۲- نگاشت $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ را که به صورت زیر تریف می شود در نظر بگیرید

$L(u_1, u_2) = (u_2, u_1, 1).$

الف) نشان دهید این نگاشت یک مقداری است .

ب) آیا این نگاشت یک تبدیل خطی است؟ چرا؟

پ) این نگاشت را ازنظر هندسی توصیف کنید .

۱۳- تعیین کنید که کدام یک از مجموعه های زیرفضای $\mathbb{R}^3$ را پدید می آورد .

الف) $\{(2, 2, 0), (0, 2, 2), (0, 0, 2)\}$

ب) $\{(-1, 2, 3), (3, 2, 1), (0, 1, 2)\}$

پ) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (3, 3, 1)\}$

۱۴- الف) ثابت کنید بردارهای

$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 3), \quad \mathbf{v}_3 = (2, 2, 0)$

یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می دهند .

ب) بردارهای پایهٔ طبیعی برای $\mathbb{R}^3$ را برحسب بردارهای $\mathbf{v}_i$ در قسمت (الف) بنویسید .

۱۵- بردارهای زیر را در نظر بگیرید :

$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 2), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 2, 3), \quad \mathbf{u}_3 = (-4, 3, 5), \quad \mathbf{u}_4 = (11, -6, -16).$

الف) نشان دهید $\mathbf{u}_1$ ، $\mathbf{u}_3$ و $\mathbf{u}_4$ وابسته خطی اند و $\mathbf{u}_3$ را به صورت یک ترکیب خطی از $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_4$ بنویسید .

ب) نشان دهید $\mathbf{u}_1$ ، $\mathbf{u}_2$ و $\mathbf{u}_3$ مستقل خطی اند .

۱۶- نشان دهید زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ شامل تمام بردارهای به صورت $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است .

۱۷- نشان دهید تعریف ۱-۳-۸ با عبارت زیر معادل است :

یک نگاشت یک به یک $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ نامیده می شود هرگاه برای هر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ در $\mathbb{R}^n$ و هر دو عدد حقیقی $a$ و $b$ داشته باشیم

$$L(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aL(\mathbf{u}) + bL(\mathbf{v})$$

۱۸- نشان دهید مجموعهٔ

$$\{(1, -1, 0), (2, 1, 0)\}$$

یک زیرفضا از $\mathbb{R}^3$ پدید می آورد . بُعد این زیرفضا چیست ؟

۱۹- فرض کنید $(x_1, x_2, x_3)$ برداری دلخواه در $\mathbb{R}^3$ باشد . کدام یک از مجموعه های زیر ، زیرفضاست ؟

الف) تمام بردارهایی که برای آنها $x_1 = x_2 = x_3$ .

ب) تمام بردارهایی که برای آنها $x_2 = 1$ .

پ) تمام بردارهایی که $x_1 = 0$ .

ت) تمام بردارهایی که برای آنها $x_1$ ، $x_2$ و $x_3$ اعداد گویا هستند .

۲۰- نشان دهید تمام بردارهای $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ در $\mathbb{R}^4$ بطوری که $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ یک زیرفضای $V$ از $\mathbb{R}^4$ است . سپس نشان دهید مجموعهٔ

$$\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$$

$V$ را پدید می آورد .

۲۱- الف) نشان دهید

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

یک تبدیل خطی است .

ب) مفهوم هندسی $L$ را بیان کنید .

۲۲- یک پایه برای هسته و برد هریک از تبدیلات زیر بیابید .

الف) $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

ب) $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$

پ) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ ت) $\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&-1&2&-1\\1&-3&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

ث) $(1, 0, 0)L=(0, 1, 0, 2),$
$(0, 1, 0)L=(0, 1, 1, 0),$
$(0, 0, 1)L=(0, 1, -1, 4)$

۲۳- زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ را که توسط بردارهای $(2, -3, 1)$ و $(1, 4, 0)$ پدید می‌آید، در نظر بگیرید. معین کنید کدام یک از بردارهای زیر به این زیرفضا تعلق دارد.

الف) $(2, 9, 4)$ ب) $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ پ) $(2, 9, 5)$
ت) $(4, 7, 6)$ ث) $(0, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ ج) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

۲۴- زیرفضای پدید آمده توسط هریک از مجموعه بردارهای زیر را توصیف کنید.

الف) $\{(2, 1, 3), (-1, 2, 1)\}$ ب) $\{(1, 0, 2), (2, 1, -2)\}$

۲۵- نشان دهید مجموعهٔ بردارها در $\mathbb{R}^4$ که به صورت زیر داده شده‌اند مستقل خطی‌اند.

الف) $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$
ب) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$

۲۶- بردار $(3, -1, 0, 2)$ را به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای قسمت (الف) و (ب) تمرین ۲۵ بنویسید.

۲۷- تعیین کنید کدام یک از مجموعهٔ بردارها در $\mathbb{R}^3$ که به صورت زیر داده شده‌اند وابستهٔ خطی‌اند.

الف) $\{(-1, 3, 2), (3, 4, 0), (1, 4, 4)\}$
ب) $\{(2, -2, 1), (1, -3, 4), (-3, 1, 2)\}$
پ) $\{(-2, 1, 3), (3, -2, -1), (-1, 0, 5)\}$
ت) $\{(1, 0, -5), (4, 2, 2), (1, 1, 6)\}$

۲۸- ثابت کنید بردارهای $(2, 2, 1)$ ، $(2, 1, 0)$ و $(2, 1, 1)$ یک پایه برای $R^3$ تشکیل می دهند.

۲۹- بُعد زیرفضایی از $R^3$ که توسط بردارهای زیر پدید می آید چیست؟

الف) $(1, 0, 2, -1), (3, -1, -2, 0), (1, -1, -6, 2), (0, 1, 8, -3)$

ب) $(1, 1, 10, -4), (\frac{1}{2}, 0, 1, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, -1)$

۳۰- کدام یک از مجموعهٔ بردارهای زیر در $R^3$ مستقل خطی اند؟

الف)
$$\begin{aligned} u &= 2e_1 - e_2 + 2e_3, \\ v &= -e_1 + e_2 - 3e_3, \\ w &= -2e_1 + 2e_2 - e_3 \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} u &= -3e_1 + 5e_2 + 2e_3, \\ v &= 4e_1 - 3e_2 - 3e_3, \\ w &= 2e_1 + 7e_2 + e_3 \end{aligned}$$

پ)
$$\begin{aligned} u &= -2e_1 + 5e_2 - 6e_3, \\ v &= 5e_1 + e_2 - 3e_3, \\ w &= -4e_1 - e_2 + 6e_3 \end{aligned}$$

ت)
$$\begin{aligned} u &= 4e_1 - 2e_2 + 3e_3, \\ v &= 2e_1 - 8e_2 + 7e_3, \\ w &= e_1 + 3e_2 - 2e_3 \end{aligned}$$

۳۱- ثابت کنید هریک از تبدیلات زیر، یک تبدیل خطی از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$ است و هریک را بطور هندسی توصیف نمایید.

الف) $(x_1, x_2)L = -(x_2, x_1)$

ب) $(x_1, x_2)L = 2(x_1, x_2)$

پ) $(x_1, x_2)L = -(x_1, x_2)$

ت) $(x_1, x_2)L = (x_2, x_1)$

ث) $(x_1, x_2)L = (x_1 + x_2, 0)$

۳۲- تمام بردارهای $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ در $R^4$ را در نظر بگیرید که $x_4 = ax_1 + bx_2 + cx_3$ و $a$ ، $b$ و $c$ اعداد حقیقی ثابتند. نشان دهید این بردارها یک زیرفضا مانند $V$ تشکیل می دهند. سپس یک مجموعهٔ پدیدآورنده برای $V$ بیابید.

۳۳- یک پایه برای زیرفضای $V$ شامل تمام بردارهای $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ در $\mathbb{R}^4$ بیابید بطوری که $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

۳۴- نشان دهید نگاشت زیر تبدیلی خطی است:

$$L(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(**توجه**: این تبدیل یک دوران در صفحهٔ $x_1x_2$ به اندازهٔ زاویه $\theta$ است که در خلاف جهت عقربه های ساعت اندازه گیری می شود).

۳۵- ثابت کنید اگر یک مجموعه از بردارها مستقل خطی باشد، شامل بردار صفر نخواهد بود. (*راهنمایی*: از برهان خلف استفاده کنید)

۳۶- دو بردار $(2, 0, 1, 1)$ و $(1, 1, 0, 3)$ در $\mathbb{R}^4$ داده شده‌اند، دو بردار دیگر بیابید به قسمی که چهار بردار یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل دهند. آیا جواب مسأله یکتاست؟ چرا؟

۳۷- برای هریک از تبدیلات خطی از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}^3$ که در زیر داده شده‌اند، LM و ML را بیابید. کدام یک از این زوجها تعویض پذیرند؟

الف)
$$(x_1, x_2, x_3)L = (x_2, x_1, x_1 + x_2 + x_3),$$
$$(x_1, x_2, x_3)M = (x_2, x_1, -x_1 - x_2 - x_3)$$

ب)
$$(x_1, x_2, x_3)L = (x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_2 + x_3$$
$$(x_1, x_2, x_3)M = (x_1 + x_2 + x_3, x_2, -x_1 - x_2 - x_3)$$

۳۸- ثابت کنید یک تبدیل خطی بردار صفر را به بردار صفر تبدیل می کند.

۳۹- در مثال ۱-۳-۴ تحویل سطری را ادامه دهید تا این که یک شکل پلکانی سطری تحویل یافته به دست آید و از آن جا یک پایهٔ دیگر برای برد $L$ بیابید.

## ۱-۴ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

اگر $\mathbf{x}$ یک بردار ستونی باشد، آن گاه حاصل ضرب $A\mathbf{x}$، که $A$ یک ماتریس حقیقی $m \times n$ است، بردار دیگری مانند $\mathbf{y}$ است. در بخش قبل دیدیم که

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

یک تبدیل خطی $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تعریف می کند و در آن جا مشخصه های چنین تبدیلی را بررسی نمودیم.

در این بخش توجه خود را به ماتریسهای $n \times n$ و تبدیلات خطی که به شکل زیر باشند، معطوف می کنیم

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \tag{۱-۴-۱}$$

در این معادله $\lambda$ یک اسکالر است. یک دلیل مهم برای مطالعهٔ معادلهٔ (۱-۴-۱) این است که یک دستگاه فیزیکی را به مفهومی می توان با یک ماتریس $A$ نشان داد و برای چنین دستگاهی بردار $\mathbf{x}$ که در معادلهٔ (۱-۴-۱) صدق می کند معنایی خاص دارد. (در بخش ۱-۵ در این باره توضیح خواهیم داد). پس، برای یک ماتریس مربعی $A$، یک یا چند بردار $\mathbf{x}$ جستجو می کنیم که در معادلهٔ (۱-۴-۱) صدق کند. چنین بردارهایی را، ***بردار ویژه*** یا بردار مشخصه یا بردار نهفته

می نامند . ما از اصطلاح «بردار ویژه» استفاده خواهیم کرد .

متناظر با هر بردار ویژه که در معادلهٔ (۱-۴-۱) صدق کند یک مقدار اسکالر $\lambda$ که ***مقدار ویژه*** یا مقدار مشخصه یا ریشهٔ نهفته نامیده می شود، وجود دارد .

کارهای اولیه در این زمینه توسط دو ریاضی دان انگلیسی، آرتور کیلی (۱۸۲۱-۱۸۹۵) و ویلیام هامیلتون (۱۸۰۵-۱۸۶۵) انجام شده است . کیلی تبدیلات خطی را از دیدگاه ناوردایی مطالعه نمود؛ یعنی، بردارهایی را مورد بررسی قرار می داد که در معادلهٔ $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ صدق می کردند و آنها را بردارهای ناوردا نامید . ***سیلوستر*** (قضیهٔ ۱-۳-۷) برای اوّلین بار اصطلاح «ریشهٔ نهفته» را به کار برد . ریاضی دانان آلمانی از پیشوند "-eigen" استفاده کردند که بعداً «مشخصه» ترجمه شد .

معادلهٔ (۱-۴-۱) را می توان به صورت زیر نوشت

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

یا اگر از $\mathbf{x}$ فاکتور بگیریم، داریم

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{۱-۴-۲}$$

توجه کنید که وجود $I$ در معادلهٔ اخیر ضروری است (چرا؟) . حال معادلهٔ (۱-۴-۲) در واقع یک دستگاه معادلات خطی همگن به صورت زیر است :

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0\\
&a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0\\
&\vdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0.
\end{aligned}$$

چنین دستگاهی همواره دارای یک جواب است، یعنی $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ ، که ***جواب بدیهی*** نامیده می شود به عبارت دیگر، بردار صفر در معادلهٔ (۱-۴-۲) صدق می کند . ولی ما فقط به بردارهای ویژه مخالف صفر توجه داریم . بنابراین، ماتریس ضرایب در دستگاه (۱-۴-۲) باید تکین باشد (بخش ۱-۲)، یعنی، دترمینان این ماتریس باید برابر صفر باشد . پس،

$$|A - \lambda I| = 0. \tag{۱-۴-۳}$$

این معادله یک چندجمله ای درجهٔ $n$ برحسب $\lambda$ است،

$$(-1)^n\lambda^n + \cdots + |A| = 0, \tag{۱-۴-۴}$$

که ***معادلهٔ مشخصهٔ*** $A$ نامیده می شود . ریشه های $\lambda_1$ ، $\lambda_2$ ، ... ، $\lambda_n$ آن مقادیر ویژهٔ $A$ هستند و

به کمک آنها می توان بردارهای ویژهٔ $A$ را به دست آورد . به مثال زیر توجه کنید .

**مثال ۱-۲-۱** مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر آنها را برای ماتریس زیر بیابید .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*حل* : ابتدا معادلهٔ مشخصه را با بسط دترمینان ماتریس $A - \lambda I$ به دست می آوریم

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -3 \\ 2 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda\,[(3-\lambda)(1-\lambda) - 3] + [2(1-\lambda) + 6] - 3\,[2 + 2(3-\lambda)] \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda) - 2(\lambda - 4) + 6(\lambda - 4) \\ &= (\lambda - 4)(-\lambda^2 + 4) = 0. \end{aligned}$$

بنابراین مقادیر ویژه عبارتند از $\lambda_1 = -2$ ، $\lambda_2 = 2$ و $\lambda_3 = 4$ . حال بردار ویژهٔ متناظر با هر مقدار ویژه را به دست می آوریم . به ازای $\lambda_1 = 2$ ، $Ax = \lambda x$ به صورت زیر نوشته می شود

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

یا

$$\begin{aligned} 2x_1 - \ x_2 - 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

از جمع این معادلات نتیجه می شود $x_1 = -x_2$ و از تفریق آنها داریم $x_2 = -x_3$ ، پس $(1, -1, 1)^T$ بردار ویژه ای* متناظر با $\lambda_1 = -2$ است . به طریق مشابه از $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ به دست می آوریم $(1, +1, -1)^T$ ، که بردار ویژهٔ متناظر با $\lambda_2 = 2$ است . سرانجام $(-1, 1, 1)^T$ بردار ویژهٔ متناظر با $\lambda_3 = 4$ (تمرین ۱ را ملاحظه کنید) .

توجه کنید که مقادیر ویژه لزوماً اعداد حقیقی نیستند . برای مثال، معادلهٔ مشخصهٔ $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$ یک ریشهٔ حقیقی و دو ریشهٔ مختلط دارد (تمرین ۲) . ولی در این بخش ما با ماتریسهایی سر و کار داریم که معادلات مشخصهٔ آنها فقط ریشه های حقیقی دارند .

---

* توجه کنید که هر مضربی از این بردار ویژه خود بردار ویژه ای متناظر با مقدار ویژهٔ ۲− است .

در مثال ۱-۴-۱ مقادیر ویژه متمایز (متفاوت) بودند . دو مثال بعدی نشان می دهند که وقتی یک مقدار ویژه تکراری است چه چیزی ممکن است پیش آید .

**مثال ۱-۴-۲** مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ متناظر را برای ماتریس زیر بیابید .

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

***حل*** : داریم

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= (-4 - \lambda)\,[(6 - \lambda)(6 - \lambda) - 25] \\ &\quad - 5[-5(6 - \lambda) + 25] + 5[-25 + 5(6 - \lambda)] \\ &= (-4 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 11) - 25(\lambda - 1) - 25(\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 7\lambda - 6) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 6) = 0. \end{aligned}$$

بنابراین مقادیر ویژهٔ $A$ عبارتند از $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = 6$ ، یعنی، $\lambda = 1$ یک مقدار ویژهٔ ***مضاعف*** است . با جای گذاری این مقدار در $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ تنها یک معادله به دست می آید که عبارت است از

$$-5x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0$$

یا

$$x_1 = x_2 + x_3.$$

پس $x_2$ و $x_3$ دلخواه هستند و می توان دو بردار ویژهٔ مستقل خطی به دست آورد . به این ترتیب که ابتدا قرار می دهیم $x_2 = 0$ و $x_3 = 1$ و سپس قرار می دهیم $x_2 = 1$ و $x_3 = 0$ . بنابراین بردارهای ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ ۱ عبارتند از $(1, 0, 1)^T$ و $(1, 1, 0)^T$ . برای $\lambda_3 = 6$ بردار ویژهٔ $(1, 1, 1)^T$ به دست می آید . (تمرین ۳ را ملاحظه کنید)

بردارهای ویژهٔ مستقل خطی $(1, 0, 1)^T$ و $(1, 1, 0)^T$ فضایی پدید می آورند که ***فضای ویژه*** $\lambda = 1$ نامیده می شود و آن یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است . همین طور بردار ویژهٔ $(1, 1, 1)^T$ فضای ویژهٔ $\lambda = 6$ را پدید می آورد که آن نیز یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است (تمرین ۴ را ملاحظه کنید) .

**مثال ۱-۴-۳** مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر آنها را برای ماتریس زیر بیابید .

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

*حل* : مقادیر ویژه عبارتند از $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ (تمرین ۵) . برای $\lambda_1 = 1$ داریم

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= 0, \end{aligned}$$

که از آن جا $x_3 = -3x_2$ ، $x_1 = 4x_2$ ، و یک بردار ویژه عبارت است از $(4, 1, -3)^T$ . برای $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + \phantom{3}x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 5x_2 - 4x_3 &= 0, \end{aligned}$$

و با استفاده از تحویل گاوسی به دست می آوریم $x_3 = -2x_2$ و $x_1 = 3x_2$ . بنابراین یک بردار ویژهٔ نظیر آن $(3, 1, -2)^T$ است .

دو مثال آخر نشان می دهند که یک مقدار ویژهٔ تکراری می تواند یک یا دو بردار ویژهٔ متناظر داشته باشد . مطمئن هستیم که حداقل یک بردار ویژهٔ غیرصفر وجود دارد، زیرا برای یک $\lambda$ ی مفروض ، دستگاه معادلات همگن $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ یک جواب غیربدیهی دارد . (چرا) ؟ علاوه بر این بردارهای ویژهٔ به دست آمده برای هریک از ماتریسها در دو مثال فوق مجموعهٔ مستقل خطی تشکیل می دهند . بعداً خواهیم دید که این مطلب تصادفی نیست .

### تشابه

**تعریف ۱-۴-۱** : اگر $A$ و $B$ ماتریسهای $n \times n$ باشند، $A$ را متشابه با $B$ گوییم هرگاه ماتریس ناتکین $P$ وجود داشته باشد بطوری که $P^{-1}AP = B$ .

تشابه ماتریسها مفهومی مفید است زیرا ایده های مهم در هندسه و دینامیک برآن استوارند. در بخش ۱-۵ به مثالی بر می خوریم که تشابه، کارِ یافتن جواب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را ساده می کند . در حال حاضر توجه کنید که اگر $A$ متشابه با ماتریس قطری $D$ باشد، می توانیم بنویسیم

$$P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

بنابراین نتیجه می شود که چندجمله ای مشخصهٔ $D$ با چند جمله ای مشخصهٔ $A$ یکسان است (تمرین ۲۳ در بخش ۱-۷ را برای اثبات این که $|AB| = |A|\,|B|$ ملاحظه کنید) . پس

$$\begin{aligned}|D-\lambda I| &= |P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P|\\ &= |P^{-1}(A-\lambda I)P| = |P^{-1}||A-\lambda I||P|\\ &= |P^{-1}P||A-\lambda I| = |A-\lambda I|.\end{aligned}$$

اما از این جا نتیجه می شود که عناصر قطری $a_1$ ، $a_2$ ، ... ، $a_n$ با ترتیبی همان مقادیر ویژهٔ $\lambda_1$ ، $\lambda_2$ ، ... ، $\lambda_n$ ماتریس $A$ هستند . به این ترتیب قضیهٔ زیر ثابت می شود .

**قضیهٔ ۱-۴-۱** :اگر ماتریس $A$ متشابه با ماتریس قطری $D$ باشد، آن گاه مقادیر ویژهٔ $A$ ، عناصر قطری $D$ هستند .

با توجه به این مطالب تعجب آور نیست که بتوان ماتریس $P$ در بالا را از بردارهای ویژهٔ $A$ به دست آورد . در واقع ماتریس $A$ در مثال ۱-۴-۲ و ماتریس $B$ در مثال ۱-۴-۳ از این لحاظ متفاوتند. برای ماتریس $A$ می توانیم یک ماتریس ناتکین $P$ بیابیم که $P^{-1}AP=D$ ، و در این صورت می گوییم $A$ ***قطری شدنی*** است، در حالی که برای ماتریس $B$ چنین ماتریسی نمی توان یافت و می گوییم $B$ ***قطری شدنی*** نیست . دلیل این تفاوت در قضیهٔ بعدی روشن می شود .

**قضیهٔ ۱-۴-۲** : یک ماتریس $n\times n$ ، $A$ با یک ماتریس قطری $D$ متشابه است اگر و فقط اگر مجموعهٔ برداری ویژهٔ $A$ یک پایه برای $R^n$ باشد .

***اثبات*** : فرض کنید $\mathbf{x}_1$ ، $\mathbf{x}_2$ ، ... ، $\mathbf{x}_n$ بردارهای ویژهٔ $A$ باشند و پایه ای برای $R^n$ تشکیل دهند . آن گاه

$$A\mathbf{x}_i=\lambda_i\mathbf{x}_i=\mathbf{x}_i\lambda_i,\qquad i=1,2,\ldots,n. \tag{۱-۴-۵}$$

اگر $P$ ماتریسی باشد که ستون $i$ ام آن شامل عناصر بردار $\mathbf{x}_i$ باشد و اگر

$$D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n),$$

آن گاه معادلهٔ (۱-۴-۵) معادل است با

$$AP=PD.$$

چون بردارهای ویژهٔ $A$ مستقل خطی اند، نتیجه می شود $P$ ناتکین است* و

$$P^{-1}AP=D,$$

یعنی، $A$ متشابه با یک ماتریس قطری $D$ است، اثبات عکس مطلب به عنوان تمرین گذاشته

* فرآیندی را به یاد آورید که در بخش ۱-۲ برای یافتن معکوس یک ماتریس به کار رفت .

می شود (تمرین ۶ را ملاحظه کنید) .

**مثال ۱-۴-۴** نشان دهید ماتریس $A$ در مثال ۱-۴-۲ قطری شدنی است .

*حل* : با استفاده از بردارهای ویژهٔ $A$ که در مثال ۱-۴-۲ به دست آمدند، داریم

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین $P^{-1}AP = \text{diag}\ (1, 1, 6)$ . جزئیات به عنوان تمرین ۷ گذاشته می شود .

**صورتهای درجه دوم**

یک کاربرد مهم قطری سازی در رابطه با صورتهای درجهٔ دوم است که باختصار آن را مورد بحث قرار می دهیم .

**تعریف ۱-۴-۴** :عبارتی به شکل

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

که $a$ ، $b$ و $c$ اعداد حقیقی اند و حداقل یکی از آنها صفر نیست یک صورت درجهٔ دوم برحسب $x$ و $y$ نامیده می شود .

صورتهای درجهٔ دوم در مطالعهٔ مقاطع مخروطی در هندسهٔ تحلیلی پیش می آیند . صورتهای درجهٔ دوم برحسب $x$ ، $y$ و $z$ در مطالعهٔ سطوح درجهٔ دوم پیش می آیند (تمرین ۱۸ را ملاحظه کنید). صورتهای درجه دوم علاوه بر هندسه، نقش مهمی در دینامیک، آمار و مسائل ماکزیمم و مینیمم دارند.

هر صورت درجهٔ دوم را می توان به شکل ماتریسی با استفاده از یک ماتریس متقارن نوشت . برای مثال، صورت درجهٔ دوم در تعریف ۱-۴-۲ به صورت زیر نوشته می شود

$$(x, y)\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

با استفاده از این مطلب و قضیهٔ ۱-۴-۳، بسادگی روشی برای شناخت مقاطع مخروطی به دست می آید . ابتدا بردارهای متعامد را تعریف می کنیم .

اگر

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{و} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

آن گاه حاصل ضرب $\mathbf{x}\mathbf{y}^T (= \mathbf{y}\mathbf{x}^T)$ یک اسکالر (عددی حقیقی) است که ***حاصل ضرب اسکالر*** $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ نامیده می شود. حالت مهم وقتی است که ضرب اسکالر برابر صفر شود. در این صورت $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را ***متعامد*** گویند. در فصل ۲ نشان خواهیم داد که بردارهای متعامد از لحاظ هندسی برحسب خطوط عمود بر هم تعبیر می شوند.

**قضیهٔ ۱-۴-۳** :بردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ متمایز یک ماتریس متقارن (حقیقی) متعامدند.

***اثبات*** : فرض کنید $A$ یک ماتریس متقارن با مقادیر ویژهٔ متمایز $\lambda_i$ و $\lambda_j$ ، و $\mathbf{x}_i$ و $\mathbf{x}_j$ به ترتیب بردار ویژهٔ متناظر با آنها باشند. در این صورت

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{و} \quad A\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j.$$

اگر اوّلی را از چپ در $\mathbf{x}_j^T$ ضرب کنیم، داریم

$$\mathbf{x}_j^T A \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_i, \tag{۱-۴-۶}$$

و اگر دومی را از چپ در $\mathbf{x}_i^T$ ضرب کنیم، داریم

$$\mathbf{x}_i^T A \mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j.$$

ترانهادهٔ معادلهٔ فوق چنین است

$$\mathbf{x}_j^T A^T \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j^T A \mathbf{x}_i = \lambda_j \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_i.$$

یا اگر معادلهٔ (۱-۴-۶) را از این معادله کم کنیم، داریم

$$(\lambda_j - \lambda_i)\mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_i = 0,$$

و از این جا قضیه ثابت می شود.

با استفاده از قضیهٔ ۱-۴-۳ مخروطی زیر را ساده می کنیم

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8.$$

صورت درجهٔ دوم زیر را در نظر بگیرید

$$(x, y)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T,$$

که دارای ماتریس متقارن $A$ است. مقادیر ویژه $A$ عبارتند از ۲ و ۸ و بردارهای ویژهٔ متناظر با آنها

به ترتیب $(1, 1)^T$ و $(-1, 1)^T$ هستند .

به یاد داشته باشید که بردارهای ویژه را با تقریب یک ضریب ثابت می توان پیدا کرد ، پس بردارهای ویژه را به صورت $(1/\sqrt{2})(1, 1)^T$ و $(1/\sqrt{2})(-1, 1)^T$ اختیار می کنیم و ماتریس زیر را تشکیل می دهیم

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

معکوس این ماتریس عبارت است از

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P^T,$$

یعنی ، معکوس $P$ با ترانهادهٔ آن برابر است . هر ماتریسی با این خاصیت را ***ماتریس متعامد*** گویند . این نام گذاری از آن جهت است که ستونهای $P$ به عنوان دو بردار ، بر هم عمود هستند . علاوه بر این هر بردار ستون $\mathbf{u}$ دارای خاصیت $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1$ نیز هست .

بنابراین ، با قرار دادن

$$\mathbf{X}^T = (X,\ Y) \qquad \text{و} \qquad \mathbf{x}^T = P\mathbf{X},$$

داریم

$$\mathbf{x}A\mathbf{x}^T = \mathbf{X}^TP^TAP\mathbf{X} = (X,\ Y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$
$$= 2X^2 + 8Y^2,$$

و معادلهٔ $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ به صورت $X^2 + 4Y^2 = 4$ در می آید . معادلهٔ اخیر معادلهٔ یک بیضی به صورت متعارف در دستگاه مختصاتی است که ***محورهای اصلی*** آن $X$ و $Y$ هستند و این محورها از نقطهٔ $(1, 1)$ و $(-1, 1)$ در صفحهٔ $xy$ می گذرند . در این جا تبدیل مختصات معادل است با دوران محورهای $x$ و $y$ به اندازهٔ زاویهٔ $\pi/4$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت .

قطری سازی صورت درجهٔ دوم همه جملات را بجز جملات درجهٔ دوم حذف می کند . این روش را بآسانی می توان به سطوح درجهٔ دوم تعمیم داد . به مثال زیر توجه کنید .

**مثال ۱-۴-۵** صورت درجه دوم از $x$ ، $y$ و $z$ به شکل

$$f(x,\ y,\ z) = 4xy + 4xz + 4yz$$

را به محورهای اصلی تبدیل کنید . سپس سطح درجهٔ دوم $f(x,\ y,\ z) = 1$ را مشخص کنید .

**حل :** $f(x, y, z)$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$(x, y, z)\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

مقادیر ویژهٔ ماتریس متقارن فوق عبارتند از $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ و $\lambda_3 = 4$ و بردارهای ویژه به ترتیب $\mathbf{x}_1 = (1, -1, 0)^T$ ، $\mathbf{x}_2 = (1, 0, -1)^T$ و $\mathbf{x}_3 = (1, 1, 1)^T$ هستند . (تمرین ۱۱ پ را ملاحظه کنید)
فرض کنید

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

در این صورت

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

و

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

پس $f(x, y, z) = 1$ به صورت $-2X^2 - 2Y^2 + 4Z^2 = 1$ در می آید که یک هذلولی وار دو پارچه است (تمرین ۸ را ملاحظه کنید) .

چگونگی استفاده از یک ماتریس متعامد برای تبدیل صورت درجه دوم مثال اخیر به محورهای اصلی روشن نیست . این مبحث در بخش ۱-۷ در رابطه با ساختن پایه های متعامد باز هم بررسی خواهد شد .

### تمرینها ۱ - ۴

۱- جزئیات یافتن بردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ $\lambda_2 = 2$ و $\lambda_3 = 4$ را در مثال ۱-۴-۱ بنویسید .

۲- اگر معادلهٔ مشخصه به صورت زیر داده شود، مقادیر ویژه را پیدا کنید.

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0.$$

(توجه: مقادیر ویژه ممکن است مختلط باشند.)

۳- بردار ویژهٔ مثال ۱-۴-۲ را بیابید.

۴- با مراجعه به مثال ۱-۴-۲، نشان دهید فضاهای ویژه $\lambda = 1$ و $\lambda = 6$ زیرفضای $\mathbb{R}^3$ هستند.
(راهنمایی: تعریف زیرفضا را به صورتی که در قضیهٔ ۱-۳-۱ بیان شد به خاطر بیاورید.)

۵- مقادیر ویژهٔ ماتریس $B$ را در مثال ۱-۴-۳ بیابید. سپس نشان دهید بردارهای ویژهٔ نظیر آن مستقل خطی اند.

۶- اثبات قضیهٔ ۱-۴-۲ را کامل کنید، به عبارتی ثابت کنید اگر $A$ متشابه یک ماتریس قطری $D$ باشد، یعنی $P^{-1}AP = D$، آن گاه ستونهای $P$ بردارهای ویژهٔ $A$ هستند و مستقل خطی اند.

۷- با مراجعه به مثال ۱-۴-۴، $P^{-1}$ را بیابید. همچنین نشان دهید اگر

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

آن گاه $Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}(6, 1, 1)$.

۸- در مثال ۱-۴-۵ ماتریس $P^{-1}$ را محاسبه کنید و تحقیق کنید که صورت درجه دوم داده شده، همان گونه که دیدیم، قطری شدنی است.

۹- مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ نظیر هریک از ماتریسهای زیر را بیابید.

الف) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ پ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

۱۰- مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ نظیر آن را در هریک از ماتریسهای زیر بیابید.

الف) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ پ) $\begin{pmatrix} 11 & -4 & -7 \\ 7 & -2 & -5 \\ 10 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

۱۱- مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریسهای متقارن زیر را بیابید.

الف) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & -6 \\ -6 & -6 & -15 \end{pmatrix}$ پ) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

۱۲ـ مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریسهای زیر را بیابید.

الف) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ پ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

۱۳ـ مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ نظیر آنها را در ماتریسهای زیر، که مقادیر ویژهٔ تکراری دارند، بیابید

الف) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ پ) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

ت) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ث) $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -6 & -1 & 6 \\ -8 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ج) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

چ) $\begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

۱۴ـ مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ هریک از ماتریسهای زیر را به دست آوردید.

الف) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

پ) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ ت) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

کدام یک از ماتریسهای بالا قطری شدنی هستند.

۱۵ـ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر آنها را در هریک از ماتریسهای زیر به دست آورید.

الف) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

۱۶ـ هریک از صورتهای درجه دوم زیر را با محورهای اصلی بنویسید.

الف) $3x^2 + 3y^2 + 2xy$ ب) $2x^2 - y^2 - 4xy$

پ) $2x^2 + 5y^2 - 12xy$ ت) $x^2 + y^2 - 2xy$

۱۷- هریک از صورتهای درجه دوم برحسب $x$ ، $y$ و $z$ زیر را با محورهای اصلی بنویسید .

الف) $2xz$

ب) $7x^2 + 7y^2 + 4z^2 + 4xy + 2xz - 2yz$

پ) $x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy + 2xz + 6yz$

ت) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 -$ [illegible] $xz$

۱۸- مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ نظیر آنها را در ماتریس زیر بیابید

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

۱۹- ثابت کنید اگر $\lambda$ یک مقدار ویژهٔ $A^{-1}$ باشد، آن گاه $1/\lambda$ یک مقدار ویژهٔ $A$ است .

۲۰- گزارهٔ «بردارهای ویژهٔ غیرصفر ماتریس $A$ ، هستهٔ $A - \lambda I$ را پدید می‌آورند» را توضیح دهید .

۲۱- ثابت کنید صفر یک بردار ویژهٔ $A$ است اگر و فقط اگر $A$ تکین باشد .

۲۲- ثابت کنید اگر $\lambda$ یک مقدار ویژهٔ ماتریس $A$ با بردار ویژهٔ $\mathbf{x}$ باشد، آن گاه $\lambda^n$ به ازای هر عدد صحیح و مثبت $n$ یک مقدار ویژهٔ $A^n$ با بردار ویژهٔ $\mathbf{x}$ است . (*راهنمایی* : از استقراء ریاضی استفاده کنید)

۲۳- ماتریس $A$ با خاصیت $A^2 = A$ را خودتوان می گویند . ماتریسهای متقارن خودتوان در آمار ریاضی نقش مهمی دارند . خواص زیر را برای ماتریس خود توان $A$ ثابت کنید .

الف) به ازای هر عدد صحیح و مثبت $n$ ، $A^n = A$ .

ب) تنها ماتریس ناتکین خودتوان ماتریس همانی است .

پ) مقادیر ویژهٔ $A$ برابر صفر یا ۱ هستند .

ت) تعداد مقادیر ویژهٔ $A$ که برابر ۱ هستند برابر تعداد سطرهای مستقل خطی $A$ است .

ث) خاصیتهای فوق را برای ماتریس زیر تشریح کنید

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

۲۴- توضیح دهید چرا جملهٔ مستقل از $\lambda$ در معادله مشخصه (۱-۴-۴) برابر $|A|$ است .

## ۵-۱ کاربرد در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

در این فصل برای راحتی نمادگذاری و انجام محاسبات، از ماتریسها برای یافتن جوابهای دستگاه معادلات دیفرانسیل استفاده خواهیم کرد. برای مثال، دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اوّل با ضرایب ثابت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + x_3\\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 - x_3\\ \dot{x}_3 &= -8x_1 - 5x_2 - 3x_3,\end{aligned}$$

که در آن، نقطه مشتق گیری نسبت به $t$ را نشان می دهد. با نماد ماتریسی این دستگاه به صورت سادهٔ زیر نوشته می شود

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{۱-۵-۱}$$

که $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ و $A$ ماتریس ضرایب است.

اگر بتوانیم یک ماتریس ناتکین $P$ بیابیم بطوری که $\mathbf{x} = P\mathbf{v}$، در آن صورت $\dot{\mathbf{x}} = P\dot{\mathbf{v}}$ و با استفاده از این تبدیل مختصات خطی، معادلهٔ (۱-۵-۱) به صورت $P\dot{\mathbf{v}} = AP\mathbf{v}$ در می آید که از آن $\dot{\mathbf{v}} = P^{-1}AP\mathbf{v}$ نتیجه می شود. اگر $A$ قطری شدنی باشد، آن گاه چنین ماتریس ناتکین $P$ ای وجود دارد و داریم

$$\dot{\mathbf{v}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathbf{v}, \tag{۲-۵-۱}$$

که $\lambda_i$ ها مقادیر ویژهٔ $A$ هستند.

حال می توان مزایای قطری سازی را ملاحظه نمود. معادلهٔ (۱-۵-۲) یک دستگاه سه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اوّل همگن را نشان می دهد که بسادگی با تفکیک متغیّرها قابل حل است. در این مثال داریم $\lambda_1 = -2$، $\lambda_2 = -1$ و $\lambda_3 = 2$ و

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0\\ 5 & 4 & 1\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

(تمرین ۱ را ملاحظه کنید) و با توجه به قضیهٔ ۱-۴-۲ مطمئن هستیم که $P$ ناتکین است (تمرین ۲). پس اوّلین معادلهٔ (۱-۵-۲) عبارت است از $\dot{v}_1 = -2v_1$ و جواب آن

$v_1 = c_1 \exp(-2t)$ ، که $c_1$ ثابت دلخواه می باشد . به این طریق با انتگرال گیری از معادلهٔ (۱-۵-۲) به دست می آوریم

$$\mathbf{v} = (c_1 \exp(-2t), c_2 \exp(-t), c_3 \exp(2t))^T$$

بنابراین

$$\mathbf{x} = P\mathbf{v} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \qquad (۱-۵-۳)$$

جواب معادلهٔ (۱-۵-۱) است . از این جواب عمومی می توانیم جوابهای خصوصی را به دست آوریم . برای مثال، اگر دادهٔ اضافی $\mathbf{x}(0) = (2, -12, 24)^T$ در دست باشد، آن گاه یک مسألهٔ مقدار اوّلیه با جواب زیر خواهیم داشت

$$\mathbf{x} = 4 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} e^{-2t} - 6 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} - 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

جزئیات به عنوان تمرین گذاشته می شود (تمرین ۳ را ملاحظه کنید) .

یک راه دیگر برای حل مثال فوق به شکل زیر است :

ابتدا معادلهٔ $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ را در نظر گرفته و فرض می کنیم دارای جوابی به صورت $\mathbf{x} = \mathbf{c} \exp(\lambda t)$ است، که $\lambda$ یک اسکالر و $\mathbf{c}$ یک بردار ثابت است . در این صورت $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}\lambda \exp(\lambda t)$ ، در نتیجه داریم $\mathbf{c}\lambda \exp(\lambda t) = A\mathbf{c}\, \mathrm{xep}(\lambda t)$ یا $A\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c}$ . اما از این جا نتیجه می شود که یک جواب غیربدیهی می توان یافت به شرط آن که $\mathbf{c}$ یک بردار ویژه $A$ متناظر با مقدار ویژهٔ $\lambda$ باشد. پس اگر $A$ یک ماتریس قطری شدنی باشد، روشهای بخش ۱-۴ قابل استفاده است . جزئیات در مثال زیر نشان داده شده اند .

**مثال ۱-۵-۱** دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

***حل*** : مقادیر ویژهٔ ماتریس ضرایب عبارتند از $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = 6$ (مثال ۱-۴-۲ را ببینید) . بردارهای ویژهٔ متناظر به ترتیب عبارتند از $(1, 0, 1)^T$ ، $(1, 1, 0)^T$ ، $(1, 1, 1)^T$ ، که نشان می دهد $(1, 0, 1)^T \exp(t)$ ، $(1, 1, 0)^T \exp(t)$ و $(1, 1, 1)^T \exp(6t)$ جواب هستند. ترکیبی خطی

از این جوابها چنین است

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\exp(t) + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\exp(t) + c_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\exp(6t).$$

عبارت اخیر ***جواب عمومی*** دستگاه داده شده است، زیرا ترکیبی خطی از سه جواب مستقل خطی است، به این دلیل که

$$\begin{vmatrix}\exp(t) & \exp(t) & \exp(6t)\\ 0 & \exp(t) & \exp(6t)\\ \exp(t) & 0 & \exp(6t)\end{vmatrix} = \exp(8t),$$

و هرگز صفر نمی شود. دترمینان فوق دترمینان ***رونسکی*** سه جواب دستگاه نامیده می شود. صفر نشدن دترمینان رونسکی دلیلی است بر این که جواب به دست آمده، جواب عمومی است. این مبحث دربخش ۱-۷ بیشتر مورد بررسی قرار خواهد گرفت. حال قضیهٔ زیر را بیان می کنیم.

**قضیهٔ ۱-۵-۱** : دستگاه معادلات همگن زیر را در نظر می گیریم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{۱-۵-۴}$$

که عناصر ماتریس $n\times n$ ، $A(t)$ بربازهٔ $a < t < b$ پیوسته اند و $\mathbf{x}_0$ یک بردار مفروض است و $a < t_0 < b$. آن گاه یک جواب یکتا برای مسألهٔ مقدار اولیهٔ (۱-۵-۴) وجود دارد. علاوه بر آن، اگر

$$\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$$

جوابهای مستقل خطی

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \tag{۱-۵-۵}$$

بر بازهٔ $a < t < b$ باشند، آن گاه جواب عمومی معادلهٔ (۱-۵-۴) به صورت زیر است

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t). \tag{۱-۵-۶}$$

مجموعهٔ جوابهای مستقل خطی بر بازهٔ $a < t < b$ را ***مجموعهٔ اساسی جوابها*** در آن بازه می نامند. در نتیجه یک مجموعه از جوابهای اساسی بر یک بازه، دارای یک دترمینان رونسکی غیرصفر برآن بازه است. در مثال ۱-۵-۱ مجموعهٔ

$\{(1, 0, 1)^T \exp(t), (1, 1, 0)^T \exp(t), (1, 1, 1)^T \exp(6t)\}$

مجموعه ای اساسی از جوابهاست . اگر دستگاهی مانند (۱-۵-۵) دارای $n$ بردار ویژهٔ مستقل خطی باشد، آن گاه جواب عمومی را می توان مستقیماً به دست آورد. وقتی تعداد بردارهای ویژهٔ مستقل خطی کمتر از $n$ باشد (که تنها وقتی اتفاق می افتد که یک یا چند مقدار ویژه تکراری باشند، در آن صورت، همان گونه که در مثال بعدی نشان داده شده است روش دیگری باید به کار برد .

**مثال ۱-۵-۲** جواب عمومی دستگاه زیر را بیابید

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(با مثال ۱-۴-۳ مقایسه کنید)

*حل* : در این جا مقادیر ویژه عبارتند از $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ و بردارهای ویژهٔ متناظر با آن $(4, 1, -3)^T$ و $(3, 1, -2)^T$ می باشند . چون تنها دو بردار ویژهٔ مستقل خطی وجود دارد، نمی توانیم فوراً جواب عمومی را بنویسیم ولی با اطلاعاتی که از معادلات دیفرانسیل معمولی داریم، حدس می زنیم که $\mathbf{c}t\,\mathrm{xep}\,(2t)$ به ازای بردار ثابت $\mathbf{c}$ جواب است . در این صورت فقط کافی است $\mathbf{c}$ را بیابیم . برای این کار قرار می دهیم

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}t \exp(2t), \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}[\exp(2t)](2t+1)$$

و در معادلهٔ $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ جایگزین می نماییم، که $A$ ماتریس ضرایب است . پس

$$\mathbf{c}(2t+1)\exp(2t) = A\mathbf{c}t\exp(2t)$$

و

$$2t\mathbf{c}\exp(2t) + \mathbf{c}\exp(2t) - A\mathbf{c}t\exp(2t) = \mathbf{0}. \qquad (۱-۵-۷)$$

اما $\exp(2t)$ و $t\exp(2t)$ به ازای هر $t$ مستقل خطی اند (تمرین ۴)، پس معادلهٔ آخر فقط وقتی می تواند برقرار باشد که ضرایب $\exp(2t)$ و $t\exp(2t)$ صفر باشند . بنابراین $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ و باید در حدس خود تجدید نظر کنیم زیرا $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ جوابی قابل قبول نیست . (چرا؟)

یک بررسی مجدد معادلهٔ (۱-۵-۷) نشان می دهد که یک حدس بهتر به صورت زیر است :

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}\exp(2t) + \mathbf{c}t\exp(2t)$$

که b و c بردارهایی ثابتند . در این صورت

$$\dot{\mathbf{x}} = 2\mathbf{b}\exp(2t) + \mathbf{c}\exp(2t) + 2\mathbf{c}t\exp(2t)$$

و با قرار دادن در معادلهٔ $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ نتیجه می شود

$$2\mathbf{c}t\exp(2t) + (2\mathbf{b} + \mathbf{c})\exp(2t) = A(\mathbf{b}\exp(2t) + \mathbf{c}t\exp(2t)).$$

حال اگر ضرایب $\exp(2t)$ و $t\exp(2t)$ را مساوی قرار دهیم دو معادلهٔ زیر نتیجه می شود

$$(A - 2I)\mathbf{c} = \mathbf{0},$$
$$(A - 2I)\mathbf{b} = \mathbf{c}.$$

از اوّلین معادله نتیجه می شود $c = (3, 1, -2)^T$ (چرا؟) . دومین معادلهٔ دترمینانی برابر صفر دارد، $|A - 2I| = 0$ از این رو دارای جواب یکتا نیست . ولی بردار $\mathbf{b} = (3, 1, -\frac{3}{2})^T$ یک جواب است (تمرین ۵) . علاوه براین، بردارهای $(4, 1, -3)^T$ ، $(3, 1, -2)^T$ و $(3, 1, -\frac{3}{2})^T$ مستقل خطی اند (تمرین ۶) و از آنها می توان برای تشکیل یک مجموعه اساسی از جوابها استفاده کرد . پس جواب عمومی را می توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}e^t + c_2\left(\begin{pmatrix}3\\1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}te^{2t}\right).$$

امکان دارد که مقادیر ویژهٔ یک ماتریس مختلط باشند . در این صورت، بردارهای ویژه و مجموعهٔ اساسی جوابها عناصر مختلط دارند . ولی می توانیم با استفاده از فرمولهای اویلر این عناصر را به سینوس و کسینوس تبدیل سازیم . با یک مثال این روش را تشریح می کنیم .

**مثال ۱-۵-۳** جواب عمومی دستگاه زیر را بیابید .

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}2 & -1\\2 & 4\end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

**حل :** از معادلهٔ مشخصهٔ

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\2 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0,$$

مقادیر ویژهٔ $\lambda_1 = 3 + i$ و $\lambda_2 = 3 - i$ به دست می آید . به ازای $\lambda_1 = 3 + i$ داریم

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = (3+i)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

یا $2x_1 - x_2 = (3+i)x_1$ . پس

$$x_1 = \frac{-x_2}{i+1} = \frac{(i-1)}{2}x_2$$

و بردار ویژهٔ متناظر با $\lambda_1$ را می توان به صورت $(i-1, 2)^T$ نوشت . همین طور بردار ویژهٔ متناظر با $\lambda_2 = 3 - i$ به صورت $(i+1, -2)^T$ است . پس جواب عمومی چنین است

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} i-1 & i+1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \exp(3+i)t \\ k_2 \exp(3-i)t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (k_2 - k_1)e^{3t}(\cos t + \sin t) + i(k_1 + k_2)e^{3t}(\cos t - \sin t) \\ -2(k_2 - k_1)e^{3t}\cos t + 2i(k_1 + k_2)e^{3t}\sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 e^{3t}(\cos t + \sin t) + c_2 e^{3t}(\cos t - \sin t) \\ -2c_1 e^{3t}\cos t + 2c_2 e^{3t}\sin t \end{pmatrix} \\
&= c_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin t\right)e^{3t} + c_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\sin t\right)e^{3t},
\end{aligned}$$

(۸-۵-۱)

که در آن به جای $k_2 - k_1$ عدد $c_1$ و به جای $i(k_1 + k_2)$ عدد $c_2$ را قرار داده ایم . (تمرین ۲۹ را نیز ملاحظه کنید که در آن جا نشان داده شده است که $c_1$ و $c_2$ حقیقی اند . )

در این جا ذکر یک نکته ضروری است . چون بردارهای ویژه با تقریب یک ضریب مشخص می شوند ، امکان دارد جواب عمومی به دست آمده در نظر اوّل شبیه معادلهٔ (۱-۵-۸) نباشد . ولی قضیهٔ (۱-۵-۱) اطمینان می دهد که جواب یکتاست و جوابهایی که به ظاهر «متفاوت» هستند در واقع معادلند . برای مثال، می توان نشان داد (تمرین ۸) که جواب عمومی مثال (۱-۵-۳) به صورت زیر نیز نوشته می شود

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} = b_1&\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin t\right)e^{3t} \\
&+ b_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t\right)e^{3t}.
\end{aligned}$$

(۹-۵-۱)

توجه کنید که اگر $\mathbf{x}_1(t)$ و $\mathbf{x}_2(t)$ جوابهای مستقل خطی $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ باشد، آن گاه جواب عمومی به صورت زیر نوشته می شود

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t),$$

که $c_1$ و $c_2$ ثابتهای حقیقی اند .

تا این جا فقط دستگاه معادلات همگن را بررسی کرده ایم . حال مثالهایی از دستگاههای ناهمگن نشان می دهیم . روش ما همانند معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم ناهمگن است، یعنی، یک جواب خصوصی به دست می آوریم و آن را به جواب دستگاه همگن متناظر (جواب مکمل) اضافه می کنیم . خواهیم دید که روش تغییر پارامترها که در معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی مورد استفاده قرار می گیرد، در یافتن جواب خصوصی مفید خواهد بود . ولی تحت شرایطی، روش ضرایب نامعین محاسبه را آسان می کند . مثالهایی از هر دو روش را ارائه می کنیم .

**مثال ۱-۵-۴** یک جواب خصوصی برای دستگاه زیر بیابید

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 \\ 1 & -10 & 7 \\ 1 & -17 & 12 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 + 13t \\ 3 + 15t \\ 2 + 26t \end{pmatrix}.$$

*حل* : با استفاده از روش ضرایب نامعیّن، فرض می کنیم

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{a} + \mathbf{b}t, \qquad \dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{b},$$

که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ثابت هستند و باید تعیین شوند . با جایگزین نمودن در دستگاه داده شده، داریم

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 \\ 1 & -10 & 7 \\ 1 & -17 & 12 \end{pmatrix}(\mathbf{a} + \mathbf{b}t) + \begin{pmatrix} 1 + 13t \\ 3 + 15t \\ 2 + 26t \end{pmatrix},$$

که در واقع یک دستگاه خطی شامل شش معادله و شش مجهول است و مجهولات مؤلّفه های $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هستند . آسانتر است که ابتدا $\mathbf{b}$ را به دست آوریم . برای این کار ضرایب $t$ را در دو طرف معادله مساوی هم قرار می دهیم . به این ترتیب $\mathbf{b} = (1, 3, 2)^T$ و سپس $\mathbf{a} = (0, 0, 0)^T$ به دست می آید . (تمرین ۱۰) . پس یک جواب خصوصی عبارت است از

$$\mathbf{x}_p = (t, 3t, 2t)^T.$$

حال روش تغییر پارامترها را برای معادلهٔ

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{۱۰-۵-۱}$$

به کار می گیریم با این محدودیت که ماتریس $n \times n$ ، $A$ قطری شدنی است . هرچند ممکن است این شرط خیلی محدودکننده باشد اما مسائل زیادی از این نوع در ریاضیات کاربردی پیش

می‌آیند . به خاطر بیاورید که هر ماتریس متقارن قطری شدنی است و این یک واقعیت است که در مدل سازی مسائل فیزیکی با ماتریسهای متقارن زیاد مواجه می شویم .

اگر

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

جواب عمومی دستگاه همگن $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ باشد، فرض می کنیم

$$\mathbf{x}_p = u_1\mathbf{x}_1 + u_2\mathbf{x}_2 + \cdots + u_n\mathbf{x}_n, \tag{۱۱-۵-۱}$$

جواب خصوصی دستگاه ناهمگن (۱-۵-۱۰) باشد که $u_i$ها توابعی از $t$ هستند . از

$$\mathbf{x}_p = \sum_{i=1}^{n} u_i\mathbf{x}_i$$

به دست می آوریم

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \sum_{i=1}^{n} (u_i\dot{\mathbf{x}}_i + \dot{u}_i\mathbf{x}_i),$$

و با جایگذاری در معادلهٔ (۱-۵-۱۰) و تجدید آرایش خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(\dot{\mathbf{x}}_i - A\mathbf{x}_i) + \sum_{i=1}^{n} \dot{u}_i\mathbf{x}_i = \mathbf{f}(t).$$

اما مجموع اوّل برابر صفر است، زیرا $\mathbf{x}_i$ ها جوابهای دستگاه ناهمگن هستند . بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{u}_i\mathbf{x}_i = \mathbf{f}(t), \tag{۱۲-۵-۱}$$

که می توان آن را برحسب $\dot{u}_i$ ها حل نمود از آن جا $u_i$ ها با انتگرال گیری به دست می آیند . سپس با جایگزین کردن این مقادیر در معادلهٔ (۱-۵-۱۱) جواب خصوصی نتیجه می شود . توجه کنید که معادلهٔ (۱-۵-۱۲) یک دستگاه از معادلات خطی برحسب $\dot{u}_i$ هاست و آن را می توان با روش حذفی گاوس یا روشهای دیگری که قبلاً دیده ایم حل کرد . مطمئن هستیم که دستگاه دارای جواب یکتاست، زیرا ماتریس ضرایب دستگاه ناتکین است؛ در واقع این ماتریس مجموعهٔ جواب اساسی دستگاه $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ است . مفاهیم فوق را با مثالی تشریح می کنیم .

**مثال ۱-۵-۵** جواب عمومی دستگاه همگن

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

عبارت است از

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ 2\cos t - \sin t\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ 2\sin t + \cos t\end{pmatrix}e^t.$$

یک جواب خصوصی برای دستگاه ناهمگن زیر بیابید

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix}\cos t\\ 0\end{pmatrix}.$$

**حل** : جواب خصوصی را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\mathbf{x}_p = u_1\begin{pmatrix}\cos t\\ 2\cos t - \sin t\end{pmatrix}e^t + u_2\begin{pmatrix}\sin t\\ 2\sin t + \cos t\end{pmatrix}e^t, \qquad (۱۳-۵-۱)$$

از این معادله مشتق می گیریم و آن را در دستگاه داده شده جایگزین می کنیم . از معادلهٔ (۱-۵-۱۲)، داریم

$$\dot{u}_1 e^t \cos t + \dot{u}_2 e^t \sin t = \cos t,$$
$$\dot{u}_1(2\cos t - \sin t) + \dot{u}_2(2\sin t + \cos t) = 0,$$

اگر این معادلات را نسبت به $\dot{u}_1$ و $\dot{u}_2$ (با استفاده از قاعدهٔ کرامر یا حذفی) حل کنیم، آن گاه با استفاده از اتحدهای مثلثاتی به دست می آوریم

$$\dot{u}_1 = \frac{e^{-t}}{2}(1 + \cos 2t + 2\sin 2t),$$

$$\dot{u}_2 = \frac{-e^{-t}}{2}(2 + 2\cos 2t - \sin 2t).$$

با انتگرال گیری خواهیم داشت

$$u_1 = -\tfrac{1}{2}e^{-t}(1 + \cos 2t),$$
$$u_2 = \tfrac{1}{2}e^{-t}(2 - \sin 2t).$$

سرانجام با قرار دادن این مقادیر در معادلهٔ (۱-۵-۱۳) نتیجه می شود

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\sin t - \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\cos t.$$

با ارائه مثالی دیگر نشان می دهیم که چگونه مباحث این بخش به یکدیگر مربوطند .

**مثال ۱-۵-۶** جواب عمومی دستگاه زیر را بیابید

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2e^{t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

**حل :** فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} -2e^{t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

داریم

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

که نشان می دهد مقادیر ویژهٔ دستگاه همگن عبارتند از $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 3$ . به ازای $\lambda_1 = 2$ بردار ویژهٔ $(1, 1)^T$ و به ازای $\lambda_2 = 3$ بردار ویژهٔ $(2, 1)^T$ به دست می آید . بنابراین جواب مکمل (جواب دستگاه همگن) چنین است

$$\mathbf{x}_c = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t},$$

که $c_1$ و $c_2$ ثابتهای دلخواهند . حال تعریف می کنیم

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

این ماتریس ناتکین است و ستونهای آن بردارهای ویژهٔ $A$ هستند . داریم

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

و $P^{-1}AP = \text{diag}\,(2, 3)$ . پس، اگر قرار دهیم $\mathbf{x} = P\mathbf{v}$ و $\dot{\mathbf{x}} = P\dot{\mathbf{v}}$ ، دستگاه ناهمگن به صورت زیر در می آید

$$P\dot{\mathbf{v}} = AP\mathbf{v} + \mathbf{f}$$

یا

$$\dot{\mathbf{v}} = P^{-1}AP\mathbf{v} + P^{-1}\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{v} + P^{-1}\mathbf{f}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t}.$$

جواب این دستگاه مجموع جواب مکمل

$$\mathbf{v}_c = c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{3t},$$

و یک جواب خصوصی است . برای یافتن جواب اخیر ، فرض می کنیم

$$\mathbf{v}_p = u_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + u_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{3t};$$

در این صورت از معادلهٔ (۱-۵-۱۲) نتیجه می شود

$$\dot{u}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + \dot{u}_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{3t} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}.$$

از این معادله بسادگی به دست می آوریم

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= 2e^{-t} + 2e^{-4t},\\ \dot{u}_2 &= -2e^{-2t} - e^{-5t}.\end{aligned}$$

و با انتگرال گیری خواهیم داشت

$$\begin{aligned}u_1 &= -2e^{-t} - \tfrac{1}{2}e^{-4t},\\ u_2 &= e^{-2t} + \tfrac{1}{5}e^{-5t},\end{aligned}$$

بنابراین جواب خصوصی عبارت است از

$$\mathbf{v}_p = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}e^{t} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}e^{-2t}.$$

پس

$$\mathbf{v} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{3t} + \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}e^{t} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}e^{-2t}$$

و

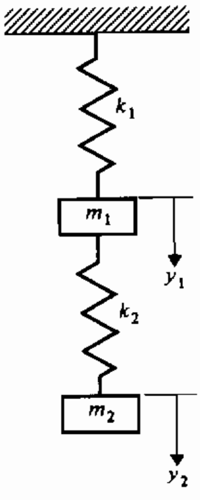
$$\mathbf{x} = P\mathbf{v} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{3t} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{t} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}e^{-2t}$$

جواب عمومی دستگاه داده شده است .

باید توجه داشت روشهای تبدیل لاپلاس نیز برای حل دستگاههای مورد بحث در این بخش قابل استفاده اند .

اگر ماتریس ضرایب $A$ در $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ یا $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ ثابت نباشد بلکه تابعی از $t$، مثلاً $A(t)$ باشد، آن گاه ممکن است محاسبات لازم برای به دست آوردن جواب خیلی زیادتر باشد. در این موارد روشهای عددی که در بخش بعد ارائه خواهد شد می توانند مفیدتر باشند.

دستگاههای معادلات دیفرانسیل ممکن است از مسائلی که در آنها بیش از یک متغیّر وابسته وجود دارد ناشی شده باشند؛ یک مثال از این قبیل مسائل دستگاه جرم ـ فنر است که در شکل ۱-۵-۱ نشان داده شده است. در این جا $m_1$ و $m_2$ جرمهای آویزان از فنرهایی با ثابتهای $k_1$ و $k_2$ هستند. جابه جایی دو جرم از نقاط تعادل با $y_1$ و $y_2$ نشان داده می شوند و جهت مثبت به طرف پایین اختیار شده است. فرض می کنیم جرمها در دو نقطه متمرکز شده اند، فنرها بدون وزن هستند و نیروی میرا وجود ندارد. این دستگاه را می توان با تغییر مکان اوّلیه و / یا سرعت اوّلیهٔ مشخص دو جرم و یا اعمال یک تابع نیرو به یک یا هر دو جرم به نوسان در آورد.




شکل ۱-۵-۱ دستگاه جرم ـ فنر

با استفاده از قانون دوم نیوتن و توجه به نیروهای وارد بر هر جرم می توانیم معادلات زیر را بنویسیم

$$m_1\ddot{y}_1 = k_2(y_2 - y_1) - k_1 y_1,$$
$$m_2\ddot{y}_2 = -k_2(y_2 - y_1).$$

در این جا $y_2 - y_1$ جابه‌جایی نسبی دو جرم است . معادلات را می توان به صورت زیر

$$\ddot{y}_1 = -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} y_1 + \frac{k_2}{m_1} y_2,$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{k_2}{m_2} y_1 - \frac{k_2}{m_2} y_2,$$

یا به شکل ماتریسی $\ddot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ نوشت ، که در آن

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} -\dfrac{(k_1 + k_2)}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} \end{pmatrix}.$$

این دستگاه با دستگاههایی که در این بخش بررسی نموده ایم از این جهت که در آن به جای مشتق اوّل ، مشتق دوم وجود دارد متفاوت است . می توانیم این مسأله را به صورتی در آوریم که با آن آشنا هستیم . قرار می دهیم $\mathbf{y} = \mathbf{x} \exp(\omega t)$ ، $\ddot{\mathbf{y}} = \omega^2 \mathbf{x} \exp(\omega t)$ آن گاه معادله $\ddot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ به صورت $A\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{x}$ در می آید . پس برای به دست آوردن جواب دستگاه ، باید بردارهای ویژه و مقادیر ویژهٔ متناظر را در ماتریس $A$ بیابیم . جزئیات این مسأله به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۱۵ را ملاحظه کنید) .

## تمرینهای ۱ - ۵

۱- ماتریس زیر مفروض است

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix},$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ متناظر با آنها را پیدا کنید .

۲- معکوس ماتریس زیر را بیابید .

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

۳- در معادلهٔ (۱-۵-۳) با استفاده از مقادیر اوّلیهٔ $\mathbf{x}(0) = (2, -12, 24)^T$ ، مقادیر $c_1$ ، $c_2$ و $c_3$ را بیابید .

۴- نشان دهید $\exp(2t)$ و $t\exp(2t)$ به ازای هر $t$ مستقل خطی اند . (*راهنمایی* : از معادلهٔ $c_1\exp(2t) + c_2 t\exp(2t) = 0$ مشتق بگیرید تا معادلهٔ دیگری به دست آید . )

۵- در مثال ۱-۵-۲ نشان دهید $\mathbf{b} = (3, 1 - \frac{3}{2})^T$ جواب معادلهٔ

$$(A - 2I)\mathbf{b} = (3, 1, -2)^T.$$

است .

۶- نشان دهید مجموعهٔ بردارهای

$$\{(4, 1, -3), (3, 1, -2), (3, 1, -\tfrac{3}{2})\}$$

یک مجموعهٔ مستقل خطی است .

۷- محاسبات مثال ۱-۵-۳ را بتفصیل انجام دهید .

۸- تحقیق کنید هر دو معادلهٔ (۱-۵-۸) و (۱-۵-۹) در دستگاه مثال ۱-۵-۳ صدق می کنند .

۹- معادلهٔ (۱-۵-۸) را از معادلهٔ (۱-۵-۹) نتیجه بگیرید .

۱۰- در مثال ۱-۵-۴ ، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را بیابید .

۱۱- جواب مکمل را در مثال (۱-۵-۴) به دست آورید .

۱۲- جواب عمومی دستگاه زیر را بیابید .

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

(با مثال ۱-۵-۵ مقایسه کنید . )

۱۳- محاسبات مثال ۱-۵-۵ را بتفصیل انجام دهید .

۱۴- در مثال ۱-۵-۶، $\dot{u}_1$ ، $\dot{u}_2$ ، $u_1$ و $u_2$ را بیابید .

۱۵- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با آنها را برای دستگاهی با دو درجهٔ آزادی، که در شکل ۱-۵-۱ نشان داده شده، در حالت خاص $k_1 = k_2 = k$ و $m_1 = m_2 = m$ بیابید .

۱۶- جواب عمومی هریک از دستگاههای همگن زیر را بیابید .

الف) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ب) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 12 & 17 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ پ) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

ت) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ث) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۱۷- هریک از مسائل مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید .

الف) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = (1, 0)^T$

ب) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (0, 1)^T$

پ) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = (4, 12)^T$

ت) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = (-2, 1)^T$

ث) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = (3, -5, 0)^T$

۱۸- هریک از دستگاههای ناهمگن زیر را حل کنید .

الف) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$ ب) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t$

پ) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$ ت) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}e^{2t}$

۱۹- در دستگاه جرم ـ فنر با دو درجهٔ آزادی که در شکل ۱-۵-۱ نشان داده شده، قرار دهید $y_3 = \dot{y}_1$ و $y_4 = \dot{y}_2$ ، و سپس معادلات را به صورت $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ بنویسید .

۲۰- در تمرین ۱۹ با جانشانیهای $m_1 = m_2 = 1$ ، $k_1 = 2$ و $k_2 = 3$ ، جواب عمومی را به دست آورید .

۲۱- جواب هریک از دستگاههای زیر را به دست آورید .

الف) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ب) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

پ) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ت) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۲۲- جواب عمومی هریک از دستگاههای زیر را بیابید .

الف) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ب) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۲۳- هریک از دستگاههای زیر را حل کنید.

الف) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ب) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

پ) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ت) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۲۴- جواب عمومی هریک از دستگاههای زیر را به دست آورید.

الف) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ب) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۲۵- نشان دهید دستگاه

$$t\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

دارای جواب غیربدیهی $\mathbf{x} = \mathbf{c}t^{\lambda}$ ، $t > 0$ است، که $\lambda$ مقدار ویژهٔ $A$ است.

۲۶- با استفاده از تمرین ۲۵ ، جواب هریک از دستگاههای زیر را برای $t > 0$ بیابید.

الف) $t\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ ب) $t\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

۲۷- ذرّه‌ای در $\mathbb{R}^2$ برطبق معادلهٔ

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x},$$

حرکت می کند که $a$ یک ثابت مثبت است.

الف) معادلات پارامتری مسیر آن را به دست آورید.

ب) نشان دهید مسیر یک دایره به مرکز مبدأ مختصات است.

۲۸- ذرّه‌ای در $\mathbb{R}^3$ برطبق معادلهٔ زیر حرکت می کند

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x},$$

معادلات پارامتری مسیر ذرّه را بیابید .

۲۹- الف) جواب عمومی مثال ۱-۵-۳ را به صورت

$$\mathbf{x} = (k_2 - k_1)\mathbf{u}_1 + i(k_1 + k_2)\mathbf{u}_2,$$

بنویسید که $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ حقیقی اند .

ب) نشان دهید $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ در معادلهٔ داده شده صدق می کنند .

پ) نشان دهید $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_3$ جوابهای مستقل خطی دستگاه داده شده هستند .

ت) نتیجه بگیرید که معادلهٔ (۱-۵-۸) با ضرایب حقیقی $c_1$ و $c_2$ جواب عمومی دستگاه است .

## ۱-۶ روشهای عددی

در تمرین ۲۶ بخش ۱-۲ ، به انواع دستگاههای معادلات جبری خطی که در عمل با آنها مواجه می شویم اشاره کردیم . عناصر ماتریس ضرایب ممکن است اعداد تقریبی باشند ، یعنی اعدادی که از داده های یک آزمایش به دست آمده باشند . وقتی این اعداد تقریبی در محاسبات عددی به کار برده می شوند ، مثلاً وقتی یک ماتریس به صورت پلکانی در می آید ، خطاهای کوچک ممکن است بزرگ شوند . در آن صورت می خواهیم بدانیم آیا نتیجهٔ نهایی باز هم معنی دارد . مطالعهٔ عمیق مسائلی از این نوع به متخصصان آنالیز عددی مربوط می شود . یکی از اهداف ما در این بخش اشاره به مشکلات استفاده از روشهای عددی است . اطلاعاتی که در این جا ارائه می شود برای ریاضی دانان کاربردی می توانند مفید باشند زیرا آنها اغلب جواب مسائل را به کمک کامپیوتر به دست می آورند .

### دستگاه معادلات جبری خطی

ابتدا روشهای مختلف حل یک دستگاه معادلات جبری خطی را بررسی می کنیم . قاعدهٔ معروف *کرامر* در صورت قابل استفاده بودن (یعنی ، اگر دستگاه معادلات جواب یکتا داشته باشد) ساده ترین روش است . در این روش باید دترمینانها محاسبه شوند که عیب بزرگی محسوب می شود . محاسبهٔ یک دترمینان به کمک بسط آن برحسب همهٔ عاملها کاری بیهوده است . برآورد شده است که برای حل یک دستگاه شامل ده معادله با قاعده کرامر در حدود

۷۰٫۰۰۰٫۰۰۰ عمل ضرب و تقسیم لازم است . بدیهی است حل دستگاههای بزرگ به وقت زیادی از کامپیوتر نیاز دارند . یک راه کم کردن این زمان استفاده از اعمال سطری است که در نتیجه ماتریسهای مربوط به مثلثی تبدیل می شوند . دترمینان یک ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب عناصر قطری آن است . بنابراین وقتی ماتریسها به شکل مثلثی باشند، اجرای قاعدهٔ کرامر عملی است .

اما اگر بخواهیم دستگاهی را به صورت مثلثی در آوریم، ساده ترین راه، استفاده از روش حذفی گاوس است . این روش به دستگاههایی که جواب یکتا دارند محدود نمی شود و برنامه نویسی آن هم تا اندازه ای ساده است زیرا تنها سه عمل سطری مقدماتی با کمی منطق به کار می رود . این روش نیاز به جانشانی از آخر دارد و به نظر می رسد که روش کاهش ***گاوس ـ ژردان*** که نتایج را بطور صریح می دهد کارایی بهتر دارد . اما برآورد شده است که برای $n$ بزرگ ($n$ تعداد متغیّرهاست) روش کاهش گاوس ـ ژردان در حدود ۵۰ درصد بیش از روش حذفی گاوس به عملیات نیاز دارد .

اما حتی روش حذفی گاوس نیز در معرض خطاست . در بعضی حالات ضرایب دستگاه طوری هستند که نتایج نسبت به گرد کردن حساس می باشند . در این صورت می گوییم که دستگاه ***نامساعد*** است، که بطور نادقیق به این معناست که ماتریس «تقریباً» تکین است، یعنی، دترمینان آن «نزدیک» به صفر می باشد . برای بحث کاملتر به یکی از کتابهای مرجع در این زمینه که در پایان کتاب ذکر شده اند، مراجعه نمایید .

روش حذفی گاوس ماتریس را به صورت پلکانی سطری در می آورد که لازم است در هر سطر غیرصفر، اوّلین عنصر غیرصفر، برابر واحد باشد . برای این کار باید عناصر یک سطر را به عددی مخالف صفر تقسیم کنیم، و اگر این عدد نزدیک به صفر باشد، از این تقسیم نتایج بی معنی به دست خواهد آمد . روشی به نام ***محورگیری*** وجود دارد که در آن با چنین مقسوم علیه های کوچکی مواجه نمی شویم . در این روش معادلات را به گونه ای تجدید آرایش می کنیم که در هر گام بزرگترین ضریب از حیث قدر مطلق روی قطر قرار گیرد .

یک منبع دیگر خطا از آن جا ناشی می شود که مجموعه ای از معادلات ممکن است متضمن روابط بین کمیتهایی باشد که با واحدهایی کاملاً متفاوت اندازه گیری شده اند . در نتیجه بعضی از معادلات ممکن است ضرایب بزرگ و بعضی ضرایب کوچک داشته باشند . این مشکل نیز می تواند با ***مقیاس بندی***، یعنی، تقسیم هر سطر بر بزرگترین ضریب از حیث قدر مطلق،

برطرف گردد .

اگر ماتریس ضرایب ناتکین باشد یافتن معکوس یک ماتریس روشی دیگر برای حل یک دستگاه از معادلات است . اگر ماتریس «تقریباً» تکین باشد، در آن صورت مشکلی که قبلاً به آن اشاره شد، پیش می‌آید . معکوس کردن یک ماتریس با روش کاهش گاوس ـ ژردان نیز عیوب همان روش را به همراه خواهد داشت . در این مورد باید متذکر شویم که یافتن معکوس با روش حذفی گاوس و کاهش گاوس ـ ژردان تقریباً به یک اندازه عملیات نیاز دارد . این نتیجه ای دور از انتظار است، از این نظر که در حل دستگاهها، روش حذفی گاوس کارایی خیلی بیشتری دارد . برای مقایسه، ارقام زیر توسط *اشتاینبرگ* داده شده اند . تمام ارقام به حل یک دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ شامل ده معادله و ده مجهول مربوط می شوند .

| | تعداد عمل جمع | تعداد عمل ضرب |
|---|---|---|
| الف) محاسبهٔ $\lvert A \rvert$ | ۲۸۵ | ۳۳۹ |
| ب) روش حذفی گاوس | ۳۷۵ | ۴۳۰ |
| پ) روش کاهش گاوس ـ ژردان | ۴۵۰ | ۵۹۵ |
| ت) محاسبهٔ $A^{-1}$ با روش حذفی گاوس | ۸۱۰ | ۱۰۰۰ |

روشهای حلّ دستگاهی از معادلات که تاکنون مورد بحث قرار گرفته اند در دسته ای قرار می گیرند که «روشهای مستقیم» نامیده می شوند . این نام گذاری حاکی از آن است که بعد از تعداد متناهی عمل حسابی و منطقی به جواب می رسیم . روشی کاملاً متفاوت به نام «روشهای تکراری» نیز وجود دارد . در این روشها یک تخمین برای جواب انتخاب و متوالیاً این تخمین تصحیح می شود تا تقریبی قابل قبول برای جواب به دست آید یا معلوم شود که روش همگرا نیست .

ساده ترین روش تکراری *روش تکراری ژاکوبی** است که برای اوّلین بار در سال ۱۸۴۶ به چاپ رسید . ابتدا این روش را تشریح می کنیم و سپس یک مثال می زنیم . اگر مجموعه ای از معادلات داشته باشیم آنها را به قسمی مرتب می کنیم که عناصر قطر از نظر اندازه بزرگترین مقدار ممکن را نسبت به اندازهٔ سایر عناصر در همان سطر داشته باشند (این عمل را «محورگیری» می نامند) . فرض می کنیم معادلات قبلاً «مقیاس بندی» شده اند . در این صورت اوّلین معادله را

* Carl G. J. Jacobi ، ریاضی دان آلمانی (۱۸۰۴-۱۸۵۱)

نسبت به $x_1$، دومی را نسبت به $x_2$ و الی آخر حل می کنیم . بنابراین متغیر $i$ ام به صورت زیر است

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{۱-۶-۱}$$

سپس مقادیر اوّلیه (حدس) متغیّرها را انتخاب کرده و آنها را $x_1^{(0)}$ ، $x_2^{(0)}$ ، ... ، $x_n^{(0)}$ می نامیم . این مقادیر را در طرف راست معادلهٔ (۱-۶-۱) قرار داده و مقادیر جدید $x_1^{(1)}$ ، $x_2^{(1)}$ ، ... ، $x_n^{(1)}$ را محاسبه می کنیم . با ادامهٔ این کار از معادلهٔ (۱-۶-۱) مجموعه ای از مقادیر را برای $x_i$ به دست می آوریم . وقتی مجموعهٔ $(k+1)$ ام با مجموعهٔ $k$ ام با تقریبی که از قبل معیّن شده یکسان باشد، فرآیند را می توان متوقف کرد . معادلهٔ (۱-۶-۱) را به صورت فرمول تکراری زیر نیز می توان نوشت :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{۲-۶-۱}$$

**مثال ۱-۶-۱** دستگاه زیر را با روش ژاکوبی تا سه رقم اعشار حل کنید .

$$\begin{aligned}
8x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 &= 8\\
2x_1 + \ \ x_2 + 9x_3 &= 12\\
x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -4,
\end{aligned}$$

حل : پس از محورگیری و نوشتن معادله به شکل (۱-۶-۱)، داریم (تمرین ۱ را ملاحظه کنید)

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 \qquad\qquad\quad - 0.125x_2 + 0.125x_3\\
x_2 &= 0.571 + 0.143x_1 \qquad\qquad + 0.286x_3\\
x_3 &= 1.333 - 0.222x_1 - 0.111x_2.
\end{aligned}$$

ساده ترین حدس اوّلیه عبارت است از $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ . نتایج در جدول زیر داده شده اند (تمرین ۲ را ملاحظه کنید) .

| $k =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1^{(k)}$ | 0 | 1.000 | 1.095 | 0.995 | 0.993 | 1.002 | 1.001 | 1.000 |
| $x_2^{(k)}$ | 0 | 0.571 | 1.095 | 1.026 | 0.990 | 0.998 | 1.001 | 1.000 |
| $x_3^{(k)}$ | 0 | 1.333 | 1.048 | 0.969 | 1.000 | 1.004 | 1.001 | 1.000 |

مثال بالا از کتاب آنالیز عددی کاربردی نوشته جرالد انتخاب شده است . اشتاینبرگ یک شرط کافی برای همگرایی روش ژاکوبی به دست آورده است، یعنی نشان داده است که $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} + A\mathbf{x}^{(k)}$ همگراست هرگاه

$$\max_{\text{for } i=1,2,\ldots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\} < 1. \qquad (۳-۶-۱)$$

به عبارت دیگر، مجموع قدر مطلقهای عناصر سطر $i$ ام باید برای هر $i$ کمتر از ۱ باشد تا همگرایی تضمین شود .

روش ژاکوبی، روش ***جابه‌جا سازی توأم*** نیز نامیده می‌شود، زیرا هر عنصر در بردار جواب قبل از آن که در تکرار بعدی مورد استفاده قرار گیرد، محاسبه می‌شود . روش بهتر آن است که از هر $x_i$ به مجرد آن که در دسترس باشد، برای محاسبهٔ عناصر باقیماندهٔ بردار جواب استفاده کنیم . این روش ***جابه‌جا سازی متوالی*** یا روش ***گاوس ـ سایدل**** نام دارد و معمولاً سریعتر از روش ژاکوبی همگراست . ثابت شده است که روش گاوس ـ سایدل به ازای هر حدس اوّلیه همگراست، به شرط آن که ماتریس ضرایب معین مثبت باشد، یعنی مقادیر ویژهٔ آن همگی مثبت باشند . مطلب اخیر در صورتی برقرار است که در هر سطر قدر مطلق عنصر قطری از مجموع قدر مطلقهای بقیهٔ عناصر بیشتر باشد، یعنی اگر

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

فادیوا بطور کلّی تر ثابت کرده است که یک شرط لازم و کافی برای آن که یک فرآیند تکراری با هر بردار اوّلیه و هر بردار ثابت $\mathbf{b}$ (که $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) همگرا باشد آن است که همهٔ مقادیر ویژهٔ $A$ از حیث قدر مطلق کمتر از ۱ باشند . او همچنین روشی برای تصحیح فرآیند تکراری ارائه کرده است .

**مقادیر ویژه و بردارهای ویژه**

در بخش ۱-۴ مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ متناظر یک ماتریس مربعی $A$ را پیدا کردیم .

---

* P. L. Seidel ، (۱۸۲۱-۱۸۹۶) که این روش را براساس نظر گاوس در سال ۱۸۷۴ به چاپ رساند .

در تمام حالات ماتریسها بزرگتر از ۳ × ۳ نبودند و مقادیر ویژه اعداد صحیح بودند . بنابراین محدودیتهایی را قائل شدیم که در عمل بندرت دیده می شود . حال به جنبه هایی از مسألهٔ مقدار ویژه توجه خواهیم نمود که روشهای محاسباتی را تقویت می کنند .

یک خاصیت مهم، مربوط به مجموع عناصر قطری یک ماتریس $A$ است . این مجموع را *اثر* $A$ نامیده و آن را به صورت زیر می نویسیم

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

می توان نشان داد که اگر $\lambda_1$ ، $\lambda_2$ ، ... ، $\lambda_n$ مقادیر ویژهٔ $A$ باشند (نه لزوماً متمایز)، آن گاه

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{و} \quad |A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \tag{۴-۶-۱}$$

که $\Pi$ «حاصل ضرب» را نشان می دهد . دانستن این مطلب که مجموع مقادیر ویژه برابر اثر و حاصل ضرب آنها برابر دترمینان ماتریس است، در یافتن ریشه های معادلهٔ مشخّصهٔ یک ماتریس مفید خواهد بود .

قبلاً اهمیت ماتریسهای متقارن را در ریاضیات کاربردی یادآور شدیم . خواص آنها را در قضیهٔ زیر بدون اثبات بیان می کنیم .

**قضیهٔ ۱-۶-۱ :** فرض کنید $A$ یک ماتریس متقارن $n \times n$ حقیقی باشد . آن گاه :

الف) مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ $A$ حقیقی اند ؛

ب) بردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ متمایز ، متعامدند ؛

پ) $A$ قطری‌شدنی است، یعنی ماتریس $P$ ای وجود دارد بطوری که $P^TAP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ که $\lambda_i$ ها مقادیر ویژهٔ $A$ هستند .

یک برآورد از بزرگترین مقدار ویژه چنان که بعداً خواهیم دید ارزشمند است . می توان نشان داد که اگر $\lambda_1$ بزرگترین مقدار ویژه از حیث قدر مطلق باشد، آن گاه

$$|\lambda_1| \le \max_{i=1,2,\ldots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}.$$

این محک برای به دست آوردن یک برآورد اوّلیه از بزرگترین مقدار ویژه از حیث قدر مطلق (موسوم به مقدار ویژهٔ *غالب*) وقتی از یک فرآیند تکراری استفاده می شود، قابل توجه

است . یک روش برای به دست آوردن بزرگترین مقدار ویژه از حیث قدر مطلق **روش توانی** نام دارد که ابتدا توسط فن میزز*(۱۹۲۹) پیشنهاد شد . اگر $\lambda_1$ مقدار ویژهٔ مطلوب، $\mathbf{x}_1$ بردار ویژهٔ متناظر با آن، و $\mathbf{v}^{(0)}$ برداری دلخواه باشد، آن‌گاه معادلات زیر را می توان نوشت :

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}^{(0)} &= c_1\mathbf{v}^{(1)}, \\ A\mathbf{v}^{(1)} &= c_2\mathbf{v}^{(2)}, \\ &\vdots \\ A\mathbf{v}^{(m)} &= c_{m+1}\mathbf{v}^{(m+1)}. \end{aligned}$$

معمولاً مؤلّفهٔ $i$ ام $\mathbf{v}^{(0)}$ برابر ۱ و بقیهٔ مؤلّفه های آن صفر انتخاب می شوند . در این صورت $c_1$ به قسمی خواهد بود که مؤلّفهٔ i ام $\mathbf{v}^{(1)}$ نیز برابر ۱ است . فرایند تکراری وقتی پایان می یابد که با دقّتی مطلوب $\mathbf{v}^{(m)} = \mathbf{v}^{(m+1)}$ و در آن صورت $c_{m+1}$ تقریبی برای $\lambda_1$ است . مثال زیر این روش را روشن خواهد کرد .

**مثال ۱-۶-۲** مقدار ویژهٔ غالب ماتریس متقارن زیر را بیابید . محاسبات را تا دو رقم اعشار انجام دهید

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

**حل :** فرض کنید $\mathbf{v}^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ . آن گاه $A\mathbf{v}^{(0)} = (5, -2, 0)^T = 5(1, -0.4, 0)^T = 5\mathbf{v}^{(1)}$ ، $A\mathbf{v}^{(1)} = (5.8, -3.2, 0.4)^T = 5.8(1, -0.5517, 0.0690)^T = 5.8\mathbf{v}^{(2)}$ و الی آخر . جدول زیر مقادیر $c_i$ و $\mathbf{v}^{(i)}$ را نشان می دهد . بنابراین مقدار ویژهٔ مطلوب برابر ۶٫۲۹ و بردار ویژهٔ متناظر با آن $(1, -0.65, 0.12)^T$ است

| $i =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | — | 5. | 5.8 | 6.104 | 6.220 | 6.264 | 6.280 | 6.266 | 6.268 |
| $\mathbf{v}^{(i)}$ | $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-0.4\\0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-0.552\\0.069\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-0.610\\0.102\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-0.632\\0.115\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-0.640\\0.119\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-0.643\\0.121\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-0.644\\0.122\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1\\-0.645\\0.122\end{pmatrix}$ |

روش توانی معایبی هم دارد؛ ممکن است در فرآیند تکراری وقتی دو مقدار ویژه خیلی نزدیک به یکدیگرند امّا مساوی نیستند، اشکال ایجاد شود . این وضعیت را می توان با افزودن

* Richard E. von Mises ، ریاضی دان کاربردی آلمانی (۱۸۸۳-۱۹۵۲)

یک عدد ثابت به هر مقدار ویژه تغییر داد . این عمل بردارهای ویژه را تغییر نمی دهد، امّا همگرایی فرآیند را سریعتر می سازد . برای مثال، اگر مقادیر ویژه ۴/۹-، ۲ و ۵ باشند، با افزودن ۳ به هرکدام به ۱/۹-، ۵ و ۸ می رسیم . بنابراین دو مقدار که از حیث قدر مطلق نزدیک به هم بودند، دیگر چنین نیستند . توجیه این عمل آن است که اگر $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ، آن گاه $A\mathbf{x} = (\lambda + c)\mathbf{x} - c\mathbf{x}$ یا $(A + cI)\mathbf{x} = (\lambda + c)\mathbf{x}$ که مانند معادلهٔ مقدار ویژهٔ اوّلیه است با این تفاوت که ماتریس و مقادیر ویژه تغییر یافته اند . این طرح را می توان برای یافتن یک مقدار ویژهٔ میانی نیز به کار برد (تمرین ۱۷) . اگر $\mathbf{v}^{(0)}$ تا حدّ ممکن به بردار ویژهٔ واقعی نزدیک شود، سرعت همگرایی بیشتر خواهد بود، ولی ممکن است این کار عملی نباشد .

در بعضی از مسائل، مانند تحلیل پیوند یک سازه بزرگترین مقدار ویژه از حیث قدر مطلق مورد توجه است و آن را می توان با روش فوق به دست آورد . ولی در مسائل ارتعاش داشتن کوچکترین مقدار ویژه از حیث قدر مطلق اهمیت دارد . این مقدار ویژه را می توان با به کار بردن روش قبل در مورد ماتریس $A^{-1}$ پیدا کرد، چون $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ معادل است با $A^{-1}\mathbf{x} = (1/\lambda)\mathbf{x}$ . به عبارت دیگر، بزرگترین مقدار ویژه از حیث قدر مطلق ماتریس $A^{-1}$ برابر کوچکترین مقدار ویژه از حیث قدر مطلق ماتریس $A$ است . البته این کار وقتی عملی است که $A$ ناتکین باشد .

سایر مقادیر ویژه (و بردارهای ویژه) را می توان با استفاده از خاصیت ماتریسهای حقیقی متقارن به دست آورد، یعنی این که بردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ متمایز، متعامدند . این خاصیت به ما اجازه می دهد که یک مسأله جدید ماتریسی را مطرح کنیم که فاقد بردار ویژه ای که قبلاً به دست آمده است، باشد .

### تمرینهای ۱-۶

۱- با استفاده از محورگیری و مقیاس بندی دستگاه مثال ۱-۶-۱ را به صورت (۱-۶-۱) بنویسید .

۲- محاسبات مثال ۱-۶-۱ را انجام دهید تا به نتایج جدول داده شده، دست یابید .

۳- بردارهای ویژهٔ متوالی نشان داده شده در جدول مثال ۱-۶-۲ را بیابید .

۴- دستگاه

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \phantom{+ 2x_3} &= 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

را با روشهای زیر حل کنید .

الف) روش حذفی گاوس ؛

ب) روش ژاکوبی (با چهار تکرار) ؛

پ) روش گاوس ـ سایدل (با چهار تکرار) ؛

**توجه :** در قسمتهای (ب) و (پ) با $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ شروع کنید .

۵- دستگاه

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 \qquad &= 2 \\ -4x_1 + 10x_2 - 5x_3 &= 0 \\ -5x_2 + 6x_3 &= -1 \end{aligned}$$

را با روشهای زیر حل کنید

الف) معکوس ماتریس

ب) روش حذفی گاوس

پ) روش گاوس ـ سایدل

۶- دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس حل کنید و محاسبات را تا سه رقم اعشار انجام دهید .

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 \qquad + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

۷- دستگاه زیر را با روش کاهش گاوس ـ ژردان حل کنید و محاسبات را تا سه رقم اعشار انجام دهید

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

۸- دستگاه زیر مفروض است

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 100 \\ -1 & 3 & 100 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 \\ 102 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

الف) آن را با استفاده از روش حذفی گاوس تا دو رقم اعشار حل کنید .

ب) معادلات را با تقسیم هر سطر بر قدر مطلق بزرگترین ضریب مقیاس بندی کنید، سپس آن را مانند قسمت (الف) حل کنید .

۹- دستگاه زیر مفروض است

$$\begin{pmatrix} -0.002 & 4.000 & 4.000 \\ -2.000 & 2.906 & -5.387 \\ 3.000 & -4.031 & -3.112 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7.998 \\ -4.481 \\ -4.143 \end{pmatrix}$$

الف) آن را با روش حذفی گاوس و استفاده از حساب چهار رقمی حل کنید، یعنی در هر عدد مجموعاً از چهار رقم استفاده شود .

ب) آن را با محورگیری حل کنید به این ترتیب که معادلات را مجدداً به ترتیب سوم، اوّل و دوم بنویسید و قسمت (الف) را تکرار کنید .

پ) دربارهٔ تفاوت بین دو مجموعهٔ نتایج توضیح دهید .

۱۰- دستگاه زیر مفروض است

$$\begin{pmatrix} 3.02 & -1.05 & 2.53 \\ 4.33 & 0.56 & -1.78 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1.61 \\ 7.23 \\ -3.38 \end{pmatrix}.$$

الف) مقدار دترمینان ماتریس ضرایب را پیدا کنید .

ب) دستگاه را با روش حذفی گاوس و حساب سه رقمی حل کنید . (**توجه** : ممکن است لازم باشد محاسبات با شش رقم اعشار انجام شود تا سه رقم آن معنی دار باشند ـ برای مثال ۰٫۰۰۰۳۶۲)

پ) ***نامساعدی*** را در این جا می توان با استفاده از دقت بالاتر در عملیات بهبود بخشید . قسمت (ب) را با استفاده از حساب شش رقمی تکرار کنید .

۱۱- دستگاه تمرین ۱۰ را در نظر بگیرید که دارای جواب واقعی $\mathbf{x} = (1, 2, -1)^T$ است . نشان دهید جواب نادرست

$$\mathbf{x} = (0.880,\ -2.35,\ -2.66)^T$$

«تقریباً» در دستگاه صدق می کند، به این ترتیب یک پدیدهٔ جالب دستگاههای نامساعد نشان داده می شود .

۱۲- برای دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ، که در آن

$$A = \begin{pmatrix} 2.38 & -1.42 & 3.24 \\ 1.36 & 2.54 & -1.62 \\ -1.82 & 3.65 & 1.81 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1.11 \\ 1.97 \\ 2.42 \end{pmatrix}.$$

هریک از موارد زیر را تا سه رقم اعشار بیابید .

الف) $|A|$

ب) $\mathbf{x}$ را با استفاده از قاعدهٔ کرامر

پ) $A^{-1}$

ت) $\mathbf{x}$ را با استفاده از روش گاوس ـ سایدل

۱۳- برای دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ، که در آن

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{x}$ را تا سه رقم اعشار و با هریک از روشهای زیر بیابید

الف) روش حذفی گاوس ؛

ب) روش کاهش گاوس ـ ژردان ؛

پ) روش گاوس ـ سایدل و با حدس اوّلیهٔ $(2, 2, -1)^T$ .

۱۴- برای دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ، که در آن

$$A = \begin{pmatrix} 2.51 & 1.48 & 4.53 \\ 1.48 & 0.93 & -1.30 \\ 2.68 & 3.04 & -1.48 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 1.03 \\ -0.53 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{x}$ را تا سه رقم اعشار و با هریک از روشهای زیر بیابید .

الف) روش تکراری ژاکوبی ؛

ب) روش گاوس ـ سایدل .

۱۵- الف) بزرگترین مقدار ویژهٔ غالب ماتریس زیر را بیابید

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

با بردار $(1, 0, 0)^T$ آغاز کنید و از سه رقم اعشار استفاده کنید .

ب) بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژه در قسمت (الف) چیست ؟

پ) قسمت (الف) را با بردار اوّلیهٔ $(0, 1, 0)^T$ تکرار کنید .

۱۶- برای ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

هریک از موارد زیر را تا سه رقم اعشار محاسبه کنید .

الف) مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ متناظر آن را با روش بخش ۱-۴ ؛

ب) بزرگترین مقدار ویژه از حیث قدر مطلق را با استفاده از $(1, 0, 0)^T$ به عنوان بردار اوّلیه

پ) $A^{-1}$

ت) مقدار ویژهٔ مغلوب را با استفاده از $A^{-1}$ در قسمت (پ) .

۱۷- برای ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

بزرگترین مقدار ویژه غالب و بردار ویژهٔ متناظر آن را بیابید . از روش توانی از سه رقم اعشار استفاده کنید .

۱۸- در تمرین ۱۷ ، $A^{-1}$ را بیابید و سپس کوچکترین مقدار ویژه از حیث قدر مطلق ماتریس $A$ و بردار ویژه نظیر آن را بیابید .

۱۹- تمام مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ نظیر ماتریس زیر را بیابید

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

در محاسبات از سه رقم اعشار استفاده کنید .

۲۰- بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه از حیث قدر مطلق را برای ماتریس زیر بیابید .

$$\begin{pmatrix} 9 & 10 & 8 \\ 10 & 5 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

۲۱- در هر یک از تمرینهای ۴، ۵، ۶ و ۷ ماتریس ضرایب دستگاه را در نظر بگیرید. کدام یک از این ماتریسها معین مثبت، یعنی همه مقادیر ویژهٔ آنها مثبتند؟

۲۲- بدون آن که مقادیر ویژه را محاسبه کنید، حداکثر اطلاعات ممکن را دربارهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس ضرایب هریک از دستگاههای تمرینهای ۴، ۵، ۶ و ۷ به دست آورید.

۲۳- محک (۱-۶-۳) را برای ماتریس مثال ۱-۶-۱ به کار برید؛ سپس توضیح دهید چرا روش همگراست.

۲۴- با مراجعه به تمرین ۱۷، پس از یافتن مقدار ویژهٔ غالب، مقدار آن را از هریک از عناصر قطری کم کرده و روش توانی را به کار برید. باید پس از آن که تفریق به وسیلهٔ یک جمع نظیر آن جبران شد، نتیجهٔ $\lambda = -0.834$. یعنی مقدار ویژهٔ میانی به دست آید.

۲۵- با فرض آن که جوابهای تمرینهای ۱۷ و ۱۸ را داشته باشیم، دو راه دیگر برای یافتن مقدار ویژهٔ میانی تمرین ۲۴ بیان کنید.

۲۶- یک مثال از نامساعدی توسط ماتریس هیلبرت* داده می شود که یک ماتریس نامتناهی است**. ماتریس هیلبرت ۴ × ۴ عبارت است از

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

الف) نشان دهید $H$ «تقریباً» تکنین است.

ب) جواب $H\mathbf{x} = \mathbf{b}$ را با استفاده از سه رقم بامعنی بیابید که در آن

$$\mathbf{b} = (2.083, 1.283, 0.950, 0.760)^T$$

پ) دربارهٔ طبیعت $H^{-1}$ چه می توان گفت؟

## ۱-۷ مباحث اضافی

در مطالعهٔ جبر خطی درگیر شدن با جزئیات ممکن است بآسانی اتفاق بیافتد. برای مثال، تعیین می کنیم که آیا مجموعه ای از بردارها مستقل خطی اند، یا این که دو بردار

* David Hilbert، ریاضی دان آلمانی (۱۸۶۲-۱۹۴۳)

** یک ماتریس $n \times n$ که $n$ نامتناهی است.

متعامدند، یا فضای پدید آمده توسط مجموعه ای از $n$ بردار یک فضای برداری $n$ بعدی است، و غیره . ولی دامنهٔ جبر خطی خیلی وسیعتر از این مثالهاست و در این بخش کوشش خواهیم کرد نشان دهیم که چگونه اصطلاحات و مفاهیم این فصل را می توان تعمیم داد تا بسیاری از مباحث ریاضیات را در بر گیرد . این توسیع یا تعمیم مفهوم عمیقتری را از ریاضیات به عنوان یک کلیت فراهم می سازد و در نتیجه مطالعهٔ بیشتر در این موضوع را ساده تر خواهدنمود . علاوه بر این، بخش حاضر مروری بر بسیاری از مباحث این فصل خواهد بود .

در مطالب بعدی فرض می کنیم که اصطلاح «اسکالر» به عضوی از یک میدان اطلاق می شود . مجموعهٔ اعداد گویا، مجموعهٔ اعداد حقیقی، و مجموعهٔ اعداد مختلط با اعمال جمع و ضرب معمولی و خواص مربوط به این اعمال مثالهای آشنایی از میدان هستند . پس می توانیم از ترکیبی خطی از بردارها در $\mathbb{R}^4$ روی میدان اعداد حقیقی به معنی، عبارتی مانند

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w},$$

که در آن $c_i$ ها اعداد حقیقی و $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهای (سطری یا ستونی) در $\mathbb{R}^4$ هستند صحبت کنیم . مثلاً، $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ ، که در آن $u_i$ ها اعداد حقیقی اند . همچنین عبارت

$$c_1A + c_2B + c_3C + c_4D,$$

که در آن $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ ماتریسهای $m \times n$ هستند، یک ترکیب خطی از آنهاست . همچنین ترکیبهای خطی زیر را داریم

$$c_1f(x) + c_2g(x) + c_3h(x)$$

و

$$c_1P_n(x) + c_2Q_n(x),$$

که $f$ ، $g$ و $h$ توابعی از یک متغیر حقیقی و بر بازهٔ $a \le x \le b$ پیوسته اند، و $P_n(x)$ و $Q_n(x)$ چندجمله ایهایی از $x$ و از درجهٔ $n$ هستند . از این پس منظور از اعضای یک میدان، اعداد حقیقی اند، مگر آن که خلاف آن تصریح شود .

حال یک فضای برداری مجرد را تعریف می کنیم .

**تعریف ۱-۷-۱** :مجموعه ای از اعضا (یا اشیاء) $V$ را یک فضای برداری مجرد می نامیم، هرگاه برای هر $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در $V$ ، و هر اسکالر $\alpha$ ، $\beta$ ، و اعمال $\oplus$ و $\odot$ ، خواص زیر برقرار باشند

i) $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ عضو $V$ باشد، و

۱- $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{b} \oplus \mathbf{a}$؛

۲- $\mathbf{a} \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c}$؛

۳- یک عضو یکتای $\mathbf{0}$ در $V$ باشد بطوری که برای هر $\mathbf{a}$ در $V$ ، $\mathbf{a} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{a}$؛

۴- به ازای هر $\mathbf{a}$ در $V$ یک عضو یکتای $-\mathbf{a}$ در $V$ باشد بطوری که $\mathbf{a} \oplus (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

ii) $\alpha \odot \mathbf{a}$ عضو $V$ باشد، و

۱- $\alpha \odot \mathbf{a} = \mathbf{a} \odot \alpha$؛

۲- $\alpha \odot (\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) = \alpha \odot \mathbf{a} \oplus \alpha \odot \mathbf{b}$؛

۳- $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{a} = \alpha \odot \mathbf{a} \oplus \beta \odot \mathbf{a}$؛

۴- $(\alpha\beta) \odot \mathbf{a} = \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{a})$؛

۵- $1 \odot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ و $0 \odot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

ابتدا به تشابه بین تعریف ۱-۷-۱ و ۱-۳-۱ توجه کنید. همچنین توجه کنید که در این جا هم، جمع اسکالرها با + (برای مثال $\alpha + \beta$) و ضرب اسکالرها با کنار هم گذاری (برای مثال، $\alpha\beta$) نشان داده می شود. ولی اعضای $V$ به بردارها محدود نمی شوند و به همین دلیل عمل جمع این اعضا با $\oplus$ و ضرب اسکالر با $\odot$ نشان داده می شوند. اگر اعضای $V$ بردار باشند، در آن صورت تعریف ۱-۷-۱ و تعریف ۱-۳-۱ یکی هستند و می نویسیم $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ و $\alpha\mathbf{a}$ چون این اعمال تعریف شده اند. در واقع، اگر اعضای $V$ ماتریس باشند، آن گاه $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ نیز به صورت $A + B$ و $\alpha \odot a$ به صورت $\alpha A$ نوشته می شود زیرا این اعمال تعریف شده اند. در مثال زیر سه مجموعهٔ $V$ را بررسی می کنیم که اعضای آنها نه بردارند و نه ماتریس.

**مثال ۱-۷-۱**

الف) فرض کنید $V$ مجموعهٔ همه چندجمله ایهای درجهٔ دو به صورت $y = ax^2 + bx + c$ بر بازهٔ $[0, 1]$ باشند. آن گاه، اگر $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ و $y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$ دو عضو $V$ باشند، $y_1 \oplus y_2$ را برابر $(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$ و $\alpha \odot y_1$ را برابر $\alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha c_1$ تعریف می کنیم. اثبات این که $V$ یک فضای برداری است به عنوان تمرین گذاشته می شود (تمرین ۱). ملاحظه کنید که $y$ را می توانیم به صورت $(a, b, c)$ نشان دهیم. بنابراین می توان تصور نمود که $V$ همان ساختار $\mathbb{R}^3$ ، فضای برداری

سه بعدی، را دارد . در این صورت می گوییم $V$ و $\mathbb{R}^3$ یک ریخت هستند، یعنی، نتایج اعمال در یک فضای برداری را می توان بطور منحصر به فرد به نتایج اعمال در فضای برداری دوم ربط داد .

ب) فرض کنید $V$ شامل تمام جوابهای معادلهٔ مرتبهٔ دوم خطی همگن $y'' + y = 0$ باشد . چون جوابهای این معادله دیفرانسیل تابع هستند، دو عمل $\oplus$ و $\odot$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(x) \oplus g(x) = (f + g)(x)$$

و

$$\alpha \odot f(x) = (\alpha f)(x).$$

به عبارت دیگر، به ازای هر مقدار $x$ در دامنهٔ $f$ و $g$ ، مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ را محاسبه کرده آنها را با هم جمع می کنیم تا مقدار $f + g$ در آن نقطه به دست آید . مجموعهٔ $V$ ، که به این صورت تعریف شد، یک فضای برداری است (تمرین ۲) .

پ) مجموعهٔ همه توابع پیوسته بر بازهٔ $[0, 1]$ را با $C[0, 1]$ نشان می دهیم . با اعمال $\oplus$ و $\odot$ تعریف شده در قسمت (ب)، این مجموعه یک فضای برداری است (تمرین ۳) . برای نشان دادن این مطلب از این نتایج در آنالیز استفاده می کنیم که مجموع دو تابع پیوسته تابعی پیوسته است و حاصل ضرب یک عدد در یک تابع پیوسته، تابعی پیوسته است . روشن است که تمام مجموعها و حاصل ضربها روی دامنهٔ تعریف ـ که در این جا $[0, 1]$ است، هستند .

ت) مجموعهٔ همهٔ بردارها در $\mathbb{R}^3$ را با دو عمل $\oplus$ و $\odot$ به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) \oplus (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 0)$$

و

$$\alpha \odot \mathbf{a} = \alpha \odot (a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, 0).$$

این مجموعه از بردارها یک فضای برداری تشکیل نمی دهد، زیرا شرط

$$1 \odot \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

برقرار نیست .

تعمیم یک فضای برداری نشان می دهد که اعضای فضای برداری لزوماً بردار به معنای هندسی کلمه نیستند . پس در یک فضای برداری مفروض می توانیم از پایه و بُعد فضا صحبت

کنیم . برای مثال، فضای برداری را که اعضایش چندجمله ایهای درجهٔ دوم از $x$ به صورت زیر هستند، در نظر بگیرید :

$$ax^2 + bx + c.$$

یک پایه برای این فضای برداری که اعضایش چندجمله ایهای درجهٔ دوم هستند، باید مجموعه ای از توابع باشد با این خاصیت که ترکیبات خطی این توابع، چندجمله ایهای درجهٔ دوم فضا را تولید نمایند . چون ضرایب اسکالر $a$ ، $b$ و $c$ یک چندجمله ای درجهٔ دوم را از چندجمله ای دیگر متمایز می سازند، روشن است که توابع $x^2$ ، $x$ ، و ۱ پایه برای فضا تشکیل می دهند . گزارهٔ اخیر نتیجه می دهد که : (الف) هر چندجمله ای درجهٔ دوم را می توان به صورت یک ترکیب خطی از اعضای پایه نوشت، و (ب) اعضای پایه مستقل خطی اند (تمرینهای ۵ و ۶). بنابراین نتیجه می شود فضای برداری که اعضای آن چندجمله ایهای درجهٔ دوم هستند بُعدش ۳ است . (چرا؟)

این سؤال را که پایهٔ فضای برداری $C[a, b]$ به چه صورتی است، در فصل ۳ پس از بررسی سریهای فوریه پاسخ خواهیم داد . در حال حاضر بیان می کنیم که پایه فضای برداری توابع پیوسته بر $[a, b]$ شامل تعدادی نامتناهی عضو است، یعنی این فضای برداری دارای بُعد نامتناهی است .

برای فضای برداری با بعد متناهی قضیه مهمّ زیر را داریم که آن را بدون اثبات بیان می کنیم .

**قضیهٔ ۱-۷-۱** : هر فضای برداری مجرّد $n$ بعدی با $\mathbb{R}^n$ یک ریخت است .

دو فضای برداری یک ریخت هستند هرگاه یک تناظر یک به یک بین اعضای آنها وجود داشته باشد بطوری که اعمال $\oplus$ و $\odot$ را محفوظ نگاه دارد . به عبارت دیگر، اگر $V$ و $W$ فضاهای برداری یک ریخت باشند، و $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{y}$ اعضای $V$ و $\mathbf{x}'$ ، $\mathbf{y}'$ اعضای متناظر با آنها در $W$ باشند، آن گاه تناظرهای زیر را نیز داریم

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}' \oplus' \mathbf{y}' \quad \text{and} \quad \alpha \odot \mathbf{x} \leftrightarrow \alpha \odot' \mathbf{x}'.$$

توجه کنید که پریم ها اعضا و اعمال در $W$ را نشان می دهند . تشخیص بین دو عمل $\oplus$ و $\oplus'$ ممکن است نیاز به دقت و توجه داشته باشد . برای مثال، اگر اعضای $V$ بردارهای با چهار مؤلّفه باشند، آن گاه $\oplus$ مربوط به جمع این بردارهاست که با جمع مؤلّفه های متناظر انجام می شود . اگر اعضای $W$ ماتریسهای ۲ × ۲ باشند، $\oplus'$ مربوط به جمع این ماتریسهاست که

این نیز با جمع عناصر متناظر دو ماتریس انجام می شود .

یک اصطلاح مفید در جبر خطی را در تعریف زیر می آوریم .

**تعریف ۱-۷-۲** :رتبهٔ یک ماتریس برابر با تعداد سطرهای غیرصفر در صورت پلکانی سطری آن است .

با استفاده از این مفهوم می توانیم مطالب زیر را بیان کنیم .

۱- یک دستگاه $n$ معادلهٔ جبری خطی با $n$ مجهول دارای جواب یکتاست اگر و فقط اگر رتبهٔ ماتریس ضرایب آن برابر با $n$ باشد .

۲- معادلهٔ $AX = B$ که $A$ یک ماتریس $n \times n$ است، سازگار است اگر و فقط اگر ماتریس $A$ و ماتریس افزودهٔ $A|B$ رتبه های برابر داشته باشند .

۳- معادلهٔ $AX = B$ که در آن $A$ یک ماتریس $n \times n$ و رتبهٔ آن $r$ کوچکتر از $n$ است دارای تعداد نامتناهی جواب است، که می توان آنها را برحسب $n - r$ مجهول دلخواه نوشت .

۴- اگر $A$ یک ماتریس $m \times n$ با رتبهٔ $r$ باشد، آن گاه

$$n = r + \dim (\ker A).$$

منظور از هستهٔ $A$ (یعنی $\ker A$) همان هستهٔ تبدیل خطی ای است که ماتریس آن $A$ می باشد .

رتبهٔ یک ماتریس را همچنین با استفاده از مفهوم دترمینانها می توانیم تعریف کنیم . به تعریف زیر توجه کنید .

**تعریف ۱-۷-۳** : فرض کنید $A$ یک ماتریس $m \times n$ باشد . آن گاه رتبهٔ $A$ برابر مرتبهٔ بزرگترین زیرماتریس مربعی ناتکین $A$ است . (**توجه** : یک ماتریس $s \times s$ را دارای مرتبهٔ $s$ گوییم .)

چون یک ماتریس ناتکین است اگر و فقط اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد، پس یافتن رتبهٔ یک ماتریس معادل است با یافتن بزرگترین زیرماتریسی که دترمینان مخالف صفر داشته باشد . ولی در بیشتر حالات به کار بردن تعریف ۱-۷-۲ ساده تر است .

**تعریف ۱-۷-۴** : فرض کنید $A$ ماتریسی $n \times n$ باشد، $A = (a_{ij})$ . **همعامل** $a_{ij}$ عبارت است از $(-1)^{i+j}c_{ij}$ ، که $c_{ij}$ دترمینان زیرماتریس $(n-1) \times (n-1)$ ی است که از حذف سطر $i$ ام و ستون $j$ ام $A$ به دست می آید . ماتریس $(c_{ji})$ ، یعنی ترانهادهٔ $(c_{ij})$ را **الحاقی** $A$ گویند و آن را با $\operatorname{adj} A$ نشان می دهند .

**مثال ۱-۷-۲** $\operatorname{adj} A$ را پیدا کنید که

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

***حل*** : داریم

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 5 & 5 & -5 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^{t}$$

توجه کنید که عنصر $c_{21}$ به وسیلهٔ $a_{21}$ در $A$ به صورت زیر محاسبه می شود :

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-5 = 5.$$

گاهی الحاقی یک ماتریس $A$ در یافتن $A^{-1}$ مفید است . قضیهٔ زیر را در این باره بدون اثبات می آوریم .

**قضیهٔ ۱-۷-۲** :اگر $A$ یک ماتریس $n \times n$ دلخواه باشد، آن گاه

$$A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = I|A|.$$

پس اگر $A$ ناتکین باشد، آن گاه

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\operatorname{adj} A).$$

**مثال ۱-۷-۳** برای ماتریس $A$ در مثال ۱-۷-۲ ، $A^{-1}$ را بیابید .

***حل*** : داشتیم

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

چون $|A| = 5$ (تمرین ۷)، بنابر قضیهٔ ۱-۷-۲ داریم،

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

به کمک قضیهٔ ۱-۷-۲، می توان قضیهٔ زیر را ثابت نمود .

**قضیهٔ ۱-۷-۳ *(قاعدهٔ کرامر)*** : دستگاه $n \times n$ ، $AX = B$ دارای جوابی یکتا به صورت زیر است

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

به شرط آن که $|A| \neq 0$ ، که $|A_k|$ دترمینان ماتریس حاصل از $A$ به وسیلهٔ تعویض ستون $k$ ام با بردار $B$ است .

***اثبات*** : چون $|A| \neq 0$ ، $A^{-1}$ موجود است . با ضرب $AX = B$ در $A^{-1}$ از چپ ، داریم $X = A^{-1}B$ . با استفاده از قضیهٔ ۱-۷-۲ ، می توان نوشت

$$X = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A)B. \qquad (۱-۷-۱)$$

سطر $k$ ام طرف چپ این معادله $x_k$ است . سطر $k$ ام $\text{adj } A$ شامل همعاملهای $c_{1k}$ ، $c_{2k}$ ، ... ، $c_{nk}$ است ؛ بنابراین معادله (۱-۷-۱) را می توان چنین نوشت

$$x_k = \frac{c_{1k}b_1 + c_{2k}b_2 + \cdots + c_{nk}b_n}{|A|}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (۲-۷-۱)$$

از طرف دیگر ، ماتریس $A_k$ که از $A$ به وسیلهٔ تعویض ستون $k$ ام $A$ با $B$ ساخته می شود دارای این خاصیت است که همعامل $b_j$ در $A_k$ برابر همعامل $a_{jk}$ در ماتریس $A$ است . پس صورت طرف راست معادلهٔ (۱-۷-۲) برابر بسط $|A_k|$ برحسب ستون $k$ ام آن است . بنابراین معادلهٔ (۱-۷-۲) به صورت زیر نوشته می شود

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

و اثبات قضیه کامل است .

این فصل را با مطلبی دربارهٔ ***تعویض پایه*** به پایان می بریم . هرچند بحث ما برای سادگی به $\mathbb{R}^3$ اختصاص خواهد داشت ، ولی برای فضای برداری در حالت کلّی نیز کاربرد دارد .

پایهٔ طبیعی $\mathbb{R}^3$ شامل بردارهای زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

در بخش ۱-۳ نشان دادیم که بردارهای

$$\mathbf{w}_1 = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{w}_2 = (1, 1, 0), \qquad \mathbf{w}_3 = (1, 1, 1)$$

نیز یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ هستند . بنابراین یک بردار دلخواه در $\mathbb{R}^3$ را می توان برحسب هریک از پایه ها نوشت . برای آن که اشتباهی رخ ندهد ، از اندیسهای $e$ و $w$ برای نشان دادن پایهٔ خاص به کار رفته استفاده می کنیم . مثلاً ، $(2, 3, 4)_e$ به معنی $2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$ ، و $(2, 3, 4)_w$ به معنی $2\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2 + 4\mathbf{w}_3$ خواهد بود . روشن است که اینها دو بردار ***متفاوت*** در $\mathbb{R}^3$ هستند .

اگر بدانیم بردارهای پایه چگونه تبدیل می شوند، در آن صورت تبدیل از یک پایه به پایهٔ دیگر در حالت کلّی معلوم خواهد شد . بنابراین

$$\begin{aligned}(1,0,0)_w &= (1,0,0)_e,\\ (0,1,0)_w &= (1,0,0)_e + (0,1,0)_e,\\ (0,0,1)_w &= (1,0,0)_e + (0,1,0)_e + (0,0,1)_e,\end{aligned} \qquad (۱-۷-۳)$$

بردارهای $w$ ـ پایه را برحسب بردارهای $e$ ـ پایه بیان می کند . این تبدیل در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشته می شود

$$T\mathbf{x}_w = \mathbf{x}_e, \qquad (۱-۷-۴)$$

که

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

توجه کنید که $T$ ترانهادهٔ ماتریس ضرایب در معادلات (۱-۷-۳) است .

**مثال ۱-۷-۴** بردار $(2, 3, 4)_w$ را به $e$ ـ پایه تبدیل کنید .

*حل* : مستقیماً داریم

$$\begin{aligned}(2,3,4)_w &= 2(1,0,0)_e + 3(1,1,0)_e + 4(1,1,1)_e\\ &= (9,7,4)_e.\end{aligned}$$

با استفاده از ماتریس $T$ داریم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_w = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}_e.$$

ماتریس $T$ لزوماً ناتکین است؛ بنابراین معادلهٔ (۱-۷-۴) به صورت زیر هم نوشته می شود

$$\mathbf{x}_w = T^{-1}\mathbf{x}_e, \qquad (۱-۷-۵)$$

که در آن (تمرین ۷ الف)

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

به عبارت دیگر با استفاده از $T$ و $T^{-1}$ بین نمایشها در دو پایه می توان ارتباط برقرار نمود .

در تمرین ۱۴ بخش ۱-۳ نشان داده شد که مجموعهٔ

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 3), \qquad \mathbf{v}_3 = (2, 2, 0)$$

یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است . می توان نشان داد (تمرین ۷ (ب))

$$S\mathbf{x}_v = \mathbf{x}_e,$$

که

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

و (تمرین ۷ (پ))

$$\mathbf{x}_v = S^{-1}\mathbf{x}_e,$$

که

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

حال بآسانی می توان ازطریق پایهٔ طبیعی از یک پایه به پایهٔ دیگر دست یافت . داریم

$$\mathbf{x}_v = S^{-1}\mathbf{x}_e = S^{-1}(T\mathbf{x}_w) = (S^{-1}T)\mathbf{x}_w$$

و

$$\mathbf{x}_w = T^{-1}\mathbf{x}_e = T^{-1}(S\mathbf{x}_v) = (T^{-1}S)\mathbf{x}_v.$$

همچنین نتیجه می شود که اگر یک تبدیل خطی دارای ماتریس $A$ در پایهٔ طبیعی باشد، در آن صورت در $w$ ـ پایه دارای ماتریس $T^{-1}AT$ و در $v$ ـ پایه دارای ماتریس $S^{-1}AS$ خواهد بود (تمرین ۷ ت) . این نکات در مثال زیر تشریح شده اند .

**مثال ۱-۷-۵** تبدیل خطی زیر را، از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}^3$ ، در نظر بگیرید

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$$

ماتریس این تبدیل را به ماتریسهای در $w$ ـ پایه و $v$ ـ پایه تبدیل کنید . سپس $(9, 7, 4)_e$ را به هریک از دو پایهٔ دیگر تبدیل کنید .

*حل* : اگر تبدیل داده شده را در مورد هریک از بردارهای پایهٔ طبیعی به کار بریم، ماتریس تبدیل را به صورت زیر به دست می آوریم

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_e .$$

در آن صورت (تمرین ۷ ث)

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}_w$$

و

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}_v .$$

بنابراین

$$A\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}_e ,$$

$$T^{-1}AT\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_w = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}_w ,$$

$$S^{-1}AS\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 28 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}_v .$$

## تمرینهای ۱ ـ ۷

۱ـ نشان دهید مجموعهٔ $V$ و دو عمل ذکر شده در مثال ۱ـ۷ـ۱ (الف) در تعریف ۱ـ۷ـ۱ صدق می کنند و در نتیجه $V$ یک فضای برداری است .

۲ـ نشان دهید مجموعهٔ $V$ و در عمل ذکر شده در مثال ۱ـ۷ـ۱ (ب) در تعریف ۱ـ۷ـ۱ صدق می کنند .

۳ـ نشان دهید مجموعهٔ $C[0, 1]$ و دو عمل ذکر شده در مثال ۱ـ۷ـ۱ (پ) در تعریف ۱ـ۷ـ۱ صدق می کنند .

۴ـ در مثال ۱ـ۷ـ۱ (ت) بیان شد که یک شرط از تعریف ۱ـ۷ـ۱ برقرار نیست . معین کنید چه شرایط دیگری از تعریف برقرار نیستند .

۵- نشان دهید $x^2$ ، $x$ و ۱ مستقل خطی اند.

۶- نشان دهید هرچندجمله ای درجهٔ دوم را می توان به صورت ترکیبی خطی از $x^2$ ، $x$ و ۱ نوشت.

۷- با فرض آن که

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$|A|$ را پیدا کنید.

۸- الف) ماتریس $T^{-1}$ را در معادلهٔ (۱-۷-۵) به دست آورید.

ب) با تبدیل بردارهای پایه از $v$ ـ پایه به پایهٔ طبیعی، ماتریس $S$ را به دست آورید.

پ) با توجه به قسمت (ب)، $S^{-1}$ را بیابید.

ت) نشان دهید $A\mathbf{x}_e$ را می توان به صورت $AT\mathbf{x}_w$ نوشت، که در $w$ ـ پایه به صورت $T^{-1}AT\mathbf{x}_w$ نوشته می شود. همچنین نشان دهید $A$ در $v$ ـ پایه به $S^{-1}AS$ تبدیل می شود.

ث) در مثال ۱-۷-۵، $T^{-1}AT$ و $S^{-1}AS$ را محاسبه کنید.

ج) در مثال ۱-۷-۵ نشان دهید

$$(16,\ 11,\ 13)_e = (5,\ -2,\ 13)_w = (28,\ -5,\ -3)_v.$$

۹- معین کنید کدام یک از مجموعه های زیر یک فضای برداری است. اگر مجموعهٔ داده شده فضای برداری نیست، معین کنید کدام شرط یا شرایط تعریف ۱-۷-۱ برقرار نیستند.

الف) مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m \times n$ با تعاریف معمولی جمع ماتریسی و ضرب اسکالر

ب) مجموعهٔ شامل فقط ماتریس صفر $m \times n$.

پ) مجموعهٔ همهٔ جوابهای $AX = O$ ، که $A$ یک ماتریس $n \times n$ است و دو عمل $\oplus$ و $\odot$ با تعاریف معمولی.

ت) $C[a, b]$ ، فضای توابع پیوسته بر $[a, b]$.

ث) $C^{(n)}[a, b]$ ، فضای توابعی که $n$ بار بر $[a, b]$ مشتق پذیرند.

ج) فضای چندجمله ایهای

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

که در آن $n$ صحیح و نامنفی است.

چ) مجموعهٔ همه جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی داده شده به صورت

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=0.$$

۱۰- الف) نشان دهید مجموعهٔ

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

یک پایه برای فضای برداری ماتریسهای ۳ × ۲ است.

ب) به چه طریقی این فضای برداری می تواند با $\mathbb{R}^6$ مربوط شود؟

۱۱- یک پایه برای فضای برداری داده شده در مثال ۱-۷-۱ (ب) بیابید.

۱۲- رتبهٔ هریک از ماتریسهای زیر را معین کنید.

الف) $\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&3&5\\1&5&3\end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix}-1&-2&0&1\\2&3&4&5\end{pmatrix}$

پ) $\begin{pmatrix}5&-6&-1&1\\0&2&-3&2\\1&2&-1&4\\-1&0&2&1\end{pmatrix}$ ت) $\begin{pmatrix}1&0&1&1\\-1&-1&0&1\\2&-1&3&4\\0&1&-1&-2\end{pmatrix}$.

۱۳- برای هریک از ماتریسهای زیر، $\operatorname{adj} A$ ، $|A|$ ، و $A^{-1}$ را بیابید.

الف) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&2\\-1&5&4\end{pmatrix}$ ب) $A=\begin{pmatrix}0&-1&1&4\\3&2&-2&1\\0&4&0&1\\1&0&-1&1\end{pmatrix}$

۱۴- با استفاده از قضیهٔ ۱-۷-۲، معکوس هریک از ماتریسهای زیر را در صورت وجود بیابید

الف) $\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&4\\1&-1&1\end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix}5&-6&-1&1\\0&2&-3&2\\1&2&-1&4\\-1&0&2&1\end{pmatrix}$

۱۵- الف) نشان دهید بردارهای

$$\mathbf{w}_1 = (1,\ -1,\ 0), \qquad \mathbf{w}_2 = (1,\ 0,\ -1), \qquad \mathbf{w}_3 = (0,\ 1,\ 1)$$

یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می دهند.

ب) ماتریس $T$ را در $T\mathbf{x}_w = \mathbf{x}_v$ بیابید .

پ) $T^{-1}$ را محاسبه کنید .

ت) ماتریس زیر را به $w$ ـ پایه تبدیل کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۱۶- الف) نشان دهید بردارهای

$$\mathbf{v}_1 = (1,\ 0,\ 1), \qquad \mathbf{v}_2 = (0,\ -1,\ -1), \qquad \mathbf{v}_3 = (1,\ 1,\ 0)$$

یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می دهند .

ب) ماتریس $S$ را در $S\mathbf{x}_v = \mathbf{x}_e$ بیابید .

ت) $S^{-1}$ را محاسبه کنید .

ث) ماتریس زیر را به $v$ ـ پایه تبدیل کنید

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

۱۷- الف) با استفاده از $w$ ـ پایه و $v$ ـ پایه در تمرینهای ۱۵ و ۱۶ ، $\mathbf{x}_w$ را به $\mathbf{x}_v$ تبدیل کنید .

ب) ماتریس $A$ در تمرین ۱۵ را به $v$ ـ پایه تبدیل کنید .

پ) ماتریس $B$ در تمرین ۱۶ را به $w$ ـ پایه تبدیل کنید .

۱۸- نشان دهید اگر یک ماتریس $A$ از چپ در یک ماتریس مقدماتی ضرب شود رتبهٔ $A$ تغییر نمی کند .

۱۹- نشان دهید رتبهٔ $r$ یک ماتریس $m \times n$ ، $A$ از ماگزیمم $m$ و $n$ بیشتر نیست ، یعنی $r \le \max\,(m, n)$ .

۲۰- ثابت کنید دستگاه $AX = B$ ، که $A$ ماتریس $n \times n$ است ، دارای جوابی یکتاست اگر و فقط اگر رتبهٔ $A$ برابر $n$ باشد .

۲۱- ثابت کنید دستگاه $AX = B$ ، که $A$ ماتریسی $n \times n$ است ، سازگار است اگر و فقط اگر رتبهٔ $A$ و رتبهٔ ماتریس افزودهٔ $A \,\vdots\, B$ با هم برابر باشند .

۲۲- ثابت کنید اگر $A$ یک ماتریس $m \times n$ با رتبهٔ $r$ باشد ، آن گاه

$$n = r + \dim\,(\ker A).$$

۲۳- اگر $E$ یک ماتریس مقدماتی باشد، ثابت کنید $|EA| = |E| \cdot |A|$

۲۴- اگر $A$ و $B$ ماتریسهای $n \times n$ باشند، آن گاه $|AB| = |A| \cdot |B|$ . (**راهنمایی**: حالتهای $A$ ی تکین و $A$ ی ناتکین را بطور جداگانه بررسی کنید. برای حالت اخیر، نشان دهید $A \sim I$ ؛ سپس از تمرین ۲۳ استفاده کنید.)

۲۵- نشان دهید الحاقی یک ماتریس تکین، تکین است. (**راهنمایی**: از $|AB| = |A| \cdot |B|$ در تمرین ۲۴ استفاده کنید.)

۲۶- الف) نشان دهید

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}$$

یک تبدیل خطی تعریف می کند (به بخش ۱-۳ رجوع کنید)

ب) اگر $(a, b, c)^T$ نمایانگر $ax^2 + bx + c$ باشد، توضیح دهید چرا تبدیل قسمت (الف) را می توان «مشتق گیری» نامید.

ت) هستهٔ تبدیل را بیابید.

ث) هم دامنهٔ تبدیل را توصیف کنید.

ج) یک پایه برای برد تبدیل بیابید. آیا این تبدیل پوشاست؟ آیا این تبدیل یک به یک است؟

۲۷- الف) یک پایه برای فضای برداری ای که اعضای آن چندجمله ایهای درجه سوم، $ax^3 + bx^2 + cx + d$ اند، بیابید.

ب) ماتریسی که یک عضو دلخواه این فضای برداری را به فضای مشتقهای این اعضا تبدیل می کند، چیست؟

۲۸- نشان دهید تعویض پایه در یک تبدیل خطی به ماتریسهایی منجر می شود که متشابه هستند. (تعریف ۱-۴-۱ را ملاحظه کنید.)

۲۹- ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

نشان دهید $A$ مجموعهٔ سه تاییهای فیثاغورثی را به خودش نقش می کند. سه تایی مرتب $(x, y, z)$ را یک سه تایی فیثاغورثی می نامیم، هرگاه خاصیت $x^2 + y^2 = z^2$ را داشته باشیم. نشان دهید $A(x, y, z)^T$ نیز دارای همین خاصیت است.

# فصل دوم

# معادلات با مشتقات جزئی

## ۲-۱ معادله های مرتبهٔ اوّل

معادله های دیفرانسیل *معمولی* نقشی بسیار مهم در ریاضیات کاربردی دارند . مسائل متنوّعی را در مهندسی و فیزیک می توان به زبان معادلات دیفرانسیل معمولی بیان کرد . اما چون همیشه نمی توان یک مسأله را با صرف نظر کردن از اصطکاك، مقاومت هوا، نیروی کوریولیس و ... به صورت ساده بیان کرد، نمی توانیم سایر متغیرهای مستقل را ندیده بگیریم . اغلب باید علاوه بر یک یا چند متغیر مکانی، زمان را نیز لزوماً در نظر بگیریم .

هرگاه لازم باشد بیش از یک متغیر مستقل در نظر گرفته شود، می توان یک مسأله را برحسب ***معادلات با مشتقات جزئی*** بیان کرد . چنین معادلاتی در این فصل، همچنین در فصلهای ۴ و ۵ بررسی خواهد شد . بیشتر اصطلاحاتی که در ارتباط با معادلات دیفرانسیل معمولی به کار می روند، بطور طبیعی برای معادلات با مشتقات جزئی تعمیم داده می شود . برای مثال، **مرتبهٔ** یک معادله برابر بالاترین مرتبهٔ مشتق موجود در آن معادله است .

در این کتاب تأکید روی معادلات با مشتقات جزئی **مرتبهٔ دوم** است . ولی در این بخش معادلات مرتبهٔ اوّل مورد بررسی قرار می گیرند، زیرا در آئرودینامیک، هیدرودینامیک، ترمودینامیک، حساب تغییرات، و احتمال کاربرد دارند .

کلی ترین معادلهٔ با مشتقات جزئی مرتبهٔ اوّل با دو متغیر مستقلّ به صورت زیر است :

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0, \qquad (۲-۱-۱)$$

که در آن باید $z(x, y)$ را بیابیم که در آن*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y.$$

فرض می کنیم تابع $F$ نسبت به هریک از پنج متغیّرش پیوسته است . معادلهٔ (۲-۱-۱) را **خطی** گوییم اگر $F$ نسبت به $z$ ، $z_x$ و $z_y$ خطی باشد . پس یک معادلهٔ خطی را می توان به صورت زیر نوشت :

$$a_0(x, y)z(x, y) + a_1(x, y)z_x + a_2(x, y)z_y = b(x, y), \qquad (۲-۱-۲)$$

اگر معادله به صورت زیر باشد، آن را **شبه خطی** گویند

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z). \qquad (۲-۱-۳)$$

توجه کنید که بعضی نویسندگان معادلهٔ (۲-۱-۳) را خطی می نامند . این نام گذاری ممکن است باعث ابهام شود، زیرا در این صورت معادله ای به صورت

$$\sin z\, z_x + z^2 z_y = z^3(x + y)$$

یک معادلهٔ خطی فرض می شود . به خاطر بیاورید که در معادلات دیفرانسیل خطی معمولی، متغیر وابسته نمی تواند با توانی بیش از یک ظاهر شود و حاصل ضرب متغیر وابسته و مشتقاتش نیز نباید در معادله وجود داشته باشد . در یک معادلهٔ شبه خطی مشتقهای مرتبهٔ اوّل $z_x$ و $z_y$ باید بطور خطی ظاهر شوند اما محدودیت دیگری ندارند .

ژوزف لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) فیزیک دان فرانسوی، نشان داد که جوابهای معادلاتی به شکل (۲-۱-۳) را با حل معادلات دیفرانسیل معمولی معینی می توان به دست آورد . به این دلیل معادلهٔ (۲-۱-۳) را گاهی ***معادلهٔ لاگرانژ*** می نامند . (**توجه** : نباید با معادلات نیوتنی که با شکلی کلی تر، معادلات لاگرانژ نامیده می شوند، اشتباه شود) . قضیهٔ زیر را بدون اثبات بیان می کنیم .

**قضیهٔ ۲-۱-۱** : جواب عمومی معادلهٔ با مشتقات جزئی مرتبهٔ اوّل شبه خطی

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z)$$

---

* نمادهای $p = z_x$ ، $q = z_y$ نیز به کار می رود .

به صورت $F(u, v) = 0$ است، که در آن $F$ دلخواه است، و $u(x, y, z) = c_1$ و $v(x, y, z) = c_2$ جواب عمومی دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیرند

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \qquad (۲-۱-۴)$$

توجه کنید (۲-۱-۴) معادل است با (چرا؟)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P} \quad \text{and} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{R}{P} \qquad (۲-۱-۵)$$

که در آن متغیر مستقل $x$ است. جواب عمومی معادلات (۲-۱-۵) را به صورت $y = y(x, c_1, c_2)$ و $z = z(x, c_1, c_2)$ می‌توان نوشت که از آنها می‌توان $u(x, y, z) = c_1$ و $v(x, y, z) = c_2$ را به دست آورد. شرح بیشتر را می‌توان در تمرینها یافت (تمرین ۲).

**مثال ۲-۱-۱** جواب عمومی معادلهٔ زیر را به دست آورید

$$zz_x + yz_y = x.$$

*حل*: از مقایسهٔ این معادله با نمادهای به‌کار رفته در قضیهٔ ۲-۱-۱، داریم $P = z$ ، $Q = y$ و $R = x$ ، که این توابع همه جا پیوسته مشتق‌پذیرند. پس داریم

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x},$$

که از آن $x^2 - z^2 = c_1$ نتیجه می‌شود. با کمی دقت می‌توان عبارتی به دست آورد که شامل $y$ باشد. در این جا از ترکیب $dx + dz$ استفاده می‌کنیم. پس

$$dx + dz = \frac{z}{y}\,dy + \frac{x}{y}\,dy = \frac{x + z}{y}\,dy$$

و با جدا کردن متغیّرها داریم

$$\frac{dx + dz}{x + z} = \frac{dy}{y},$$

که از آن به $(x + z)/y = c_2$ می‌رسیم (تمرین ۳). پس بنابه قضیهٔ ۲-۱-۱ جواب عمومی چنین است

$$F\left(x^2 - z^2, \frac{x + z}{y}\right) = 0. \qquad (۲-۱-۶)$$

یک مشخصهٔ مهم جواب عمومی فوق را مورد بحث قرار می دهیم :
این جواب به جای یک ثابت دلخواه، شامل یک تابع دلخواه است . همچنین توجه کنید که یک روش معادل برای نوشتن جواب عمومی چنین است

$$x^2 - z^2 = f\left(\frac{x+z}{y}\right) \quad \text{or} \quad \frac{x+z}{y} = g(x^2 - z^2),$$

که $f$ و $g$ توابعی دلخواهند . به دلیل وجود این توابع دلخواه در جواب عمومی معادلات با مشتقات جزئی، شکل جوابها می توانند بسیار متفاوت باشند . به این دلیل در کاربردها تأکید بر یافتن جوابهای خصوصی است که در شرایط اوّلیه و مرزی داده شده صدق کنند .

معادلات (۲-۱-۴) را می توان به شکل زیر نوشت

$$A(x, y, z)\,dx + B(x, y, z)\,dy + C(x, y, z)\,dz = 0.$$

که معادلهٔ دیفرانسیل ***پفافی**** با سه متغیّر نامیده می شود . این نوع معادله با دو متغیر در مبحث معادلات دیفرانسیل معمولی مطرح می شود . شرایط لازم و کافی برای وجود جواب یک معادله دیفرانسیل پفافی در کتاب مقدمات معادلات با مشتقات جزئی تألیف *اسندون* داده شده است .

حال به مسألهٔ تعیین شکل خاص تابع $F(u, v)$ در قضیهٔ ۲-۱-۱ می پردازیم . اگر $c_1$ و $c_2$ معلوم باشند، آن گاه $u(x, y, z) = c_1$ و $v(x, y, z) = c_2$ دو رویه را نشان می دهند و منحنی اشتراك آنها، در هر دو معادله صدق می کند . این منحنی، ***منحنی مشخّصه*** نامیده می شود و تمامی این منحنیها را یک ***سطح انتگرال*** می نامند . پس، اگر منحنی پارامتری

$$C: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

داده شده باشد، آن گاه $u(x, y, z) = c_1$ و $v(x, y, z) = c_2$ به ترتیب به صورتهای $u(x(t), y(t), z(t)) = c_1$ و $v(x(t), y(t), z(t)) = c_2$ هستند . با حذف $t$ بین این دو معادله می توانیم معادلهٔ سطح انتگرال را به دست آوریم . باید تأکید نمود که منحنی $C$ ، یک منحنی مشخصه نیست اما روی سطح انتگرال قرار دارد .

**مثال ۲-۱-۲** سطح انتگرال معادلهٔ

$$yz_x + xz_y = 0$$

---

* Johann F. Pfaff ، ریاضی دان آلمانی (۱۷۶۵-۱۸۲۵)

را که از منحنی

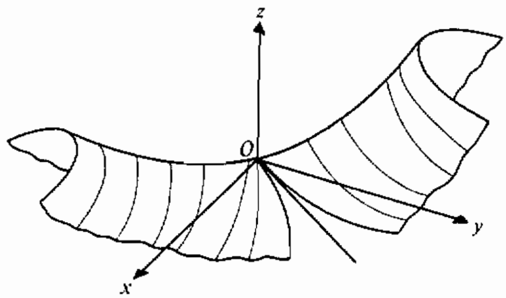
$$C: \quad x=0, \quad y=t, \quad z=t^4.$$

می گذرد، معین کنید .

***حل*** : با استفاده از قضیهٔ ۲-۱-۱ داریم

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0};$$

پس* $x^2-y^2=c_1$ و $z=c_2$ . درنتیجه جواب عمومی به صورت $F(x^2-y^2,\, z)=0$ یا $z=f(x^2-y^2)$ نوشته می شود . بنابراین، با استفاده از منحنی $C$ ، داریم $t^4=f(-t^2)$ یا $t^2=f(t)$ و $z=(x^2-y^2)^2$ (شکل ۲-۱-۱) .




شکل ۲-۱-۱ سطح انتگرال (مثال ۲-۱-۲)

توجه کنید که جواب فوق یکتاست . ولی اگر منحنی $C$ به وسیلهٔ هذلولی $x^2-y^2=1$ ، $z=1$ تعریف شود، آن گاه $C$ یک منحنی مشخصه است و تعداد بی شماری جواب وجود دارد (تمرین ۴) . از طرف دیگر، اگر $C$ به صورت

$$C: \quad x=t, \quad y=\sqrt{t^2-1}, \quad z=t$$

تعریف شود، جوابی وجود ندارد (تمرین ۵) . در این حالت $C$ یک منحنی مشخصه نیست اما تصویرش بر صفحه $xy$ بر تصویر یک منحنی مشخصه منطبق است .

* کسر $dz/0$ را باید به صورت $dz=0$ تعبیر نمود، بنابراین $z=a$ ، که $a$ ثابت است .

یک روش برای حل معادلات با مشتقات جزئی مرتبهٔ اوّل خطی، مشابه روشی است که برای معادلات دیفرانسیل معمولی به کار می رود. در آن جا، جواب عمومی برابر مجموع جواب همگن و یک جواب خصوصی است . مثال زیر این روش را برای معادلات با مشتقات جزئی تشریح می کند.

**مثال ۲-۱-۳** معادلهٔ زیر را حل کنید

$$z_x + xz = x^3 + 3xy.$$

*حل*: کار را با معادله همگن زیر شروع می کنیم

$$z_x + xz = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -xz.$$

چون از $\partial z/\partial x$ نتیجه می شود که $y$ ثابت است، معادلهٔ فوق را می توان یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی در نظر گرفت، مگر از جهت مقدار ثابت آن . جواب چنین است

$$z = f(y)\exp(-x^2/2),$$

که $f(y)$ تابعی دلخواه از $y$ است . یافتن جوابی خصوصی ممکن است قدری مشکل باشد . می توانیم از اصل برهم نهی جوابها استفاده کنیم . برای مثال، برای به دست آوردن جواب متناظر $x^3$ ، فرض می کنیم

$$z_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

که از آن نتیجه می شود $z_1 = x^2 - 2$ . برای یافتن جواب متناظر با $3xy$ ، فرض می کنیم

$$z_2 = Ex^2y + Fxy + Gy$$

که از آن نتیجه می شود $z_2 = 3y$ . بنابراین جواب عمومی چنین است

$$z = f(y)\exp(-x^2/2) + x^2 - 2 + 3y.$$

در بسیاری از معادلات خطی مرتبهٔ اوّل، جوابها را می توان با تجسّس به دست آورد . این مطلب بویژه وقتی $z_x$ یا $z_y$ در معادله نباشند، صادق است (تمرین ۲-۱-۵) . مثالهای زیر روشهای حل مسائل را در حالتهای گوناگون نشان می دهند .

**مثال ۲-۱-۴** معادلهٔ

$$xz_x - yz_y = 0.$$

را حل کنید .

*حل* : با استفاده از معادلات (۲-۱-۵) داریم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad و \qquad \frac{dz}{dx} = 0,$$

که جوابهای آنها عبارتند از $xy = c_1$ و $z = c_2$ (چرا؟) . پس جواب عمومی معادلهٔ داده شده، $z = f(xy)$ است، که $f$ تابعی دلخواه و مشتق پذیر است .

**مثال ۲-۱-۵** معادلهٔ

$$z_x = x^2 + y^2.$$

را حل کنید .

*حل* : چون در معادله $z$ وجود ندارد، بسادگی با انتگرال گیری به دست می آوریم

$$z = \frac{x^3}{3} + xy^2 + f(y).$$

**مثال ۲-۱-۶** معادلهٔ

$$xz_x + yz_y = \log x, \qquad x > 0, \qquad y > 0.$$

را حل کنید .

*حل* : اگرچه این معادله را با استفاده از قضیهٔ ۲-۱-۱ (تمرین ۷) می توان حل کرد، در این جا از روشی دیگر استفاده می کنیم . با تعویض متغیّرهای مستقل $u = \log x$ و $v = \log y$ ، داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{1}{x}$$

و مشتابهاً

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{y}$$

پس معادلهٔ داده شده به صورت زیر در می آید

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = u.$$

با حل این معادله به دست می آوریم (تمرین ۸)

$$u = v + c_1 \qquad و \qquad \frac{u^2}{2} = z + c_2,$$

بنابراین

$$z = \frac{u^2}{2} + f(u - v)$$

یا

$$z = \frac{1}{2}(\log x)^2 + f\left(\frac{x}{y}\right).$$

یک کاربرد مفید معادلات با مشتقات جزئی شبه خطی مرتبهٔ اوّل، یافتن خانواده‌ای از رویه‌هاست که بر یک خانواده از رویه‌های مفروض عمود باشد. فرض کنید $f(x, y, z) = c$ خانواده‌ای از رویه‌ها باشد* اعداد هادی قائم بر این خانواده در یک نقطهٔ $(x, y, z)$ عبارتند از

$(f_x, f_y, f_z)$.

برای سادگی این اعداد هادی را با $(P, Q, R)$ نشان می‌دهیم. حال فرض کنید $z = g(x, y)$ رویه‌ای باشد که هریک از رویه‌های یک خانواده مفروض را به زاویهٔ قائم قطع کند. اعداد هادی قائم بر $z = g(x, y)$ در یک نقطهٔ دلخواه عبارتند از $(z_x, z_y, -1)$ و برای عمود بودن باید داشته باشیم

$$Pz_x + Qz_y = R.$$

پس، بنابه قضیهٔ ۲-۱-۱ رویه‌های عمود بر $f(x, y, z) = c$ از منحنیهای مشخصهٔ معادله‌های زیر به دست می‌آیند

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \qquad (۲-۱-۷)$$

یک کاربرد رویه‌های متعامد را می‌توان در نظریهٔ پتانسیل یافت. فرض کنید $f(x, y, z) = c$ نمایانگر خانواده‌ای از رویه‌های هم‌پتانسیل باشد، یعنی، برای هر مقدار $c$، رویهٔ داده شده دارای پتانسیلی معینی است. آن‌گاه منحنیهای مشخصه معادله‌های

$$\frac{dx}{f_x} = \frac{dy}{f_y} = \frac{dz}{f_z}$$

خطوط نیرو را نشان می‌دهند.

**مثال ۲-۱-۷** رویه‌های عمود بر خانواده‌های زیر را بیابید

* چنین خانواده‌ای، به دلیل وجود پارامتر $c$، خانوادهٔ یک پارامتری نیز گفته می‌شود.

$$f(x, y, z) = \frac{z(x+y)}{z+1} = c.$$

**حل**: داریم

$$f_x = \frac{z}{z+1}, \qquad f_y = \frac{z}{z+1}, \qquad f_z = \frac{x+y}{(z+1)^2};$$

پس معادله های (۲-۱-۷) به صورت زیر نوشته می شود (تمرین ۹)

$$\frac{dx}{z(z+1)} = \frac{dy}{z(z+1)} = \frac{dz}{x+y}.$$

از دو معادلهٔ اوّل داریم $x = y + c_1$ یا $c_1 = x - y$. از دو معادلهٔ آخر داریم $(2y + c_1)dy = (z^2 + z)dz$ که از این جا نتیجه می شود $y^2 + c_1 y = z^3/3 + z^2/2 + c'_2$. از معادلهٔ اخیر به دست می آوریم

$$c_2 = 6xy - 2z^3 - 3z^2.$$

بنابراین رویه های عمود عبارتند از

$$F(x - y, 6xy - 2z^3 - 3z^2)$$

یا

$$6xy - 2z^3 - 3z^2 = g(x - y).$$

## تمرینهای ۲-۱

۱- نشان دهید معادله های (۲-۱-۳) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P}{Q} \quad \text{و} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{R}{Q}$$

که در آنها $y$ متغیر مستقل است. (با معادلات ۲-۱-۵ مقایسه کنید).

۲- نشان دهید جوابهای $y = y(x, c_1, c_2)$ و $z = z(x, c_1, c_2)$ معادله های (۲-۱-۵) را می توان به صورت $u(x, y, z) = c_1$ و $v(x, y, z) = c_2$ نوشت.

۳- معادله های

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x}$$

مربوط به مثال ۲-۱-۱ را حل کنید .

۴- نشان دهید تعدادی بی شمار از جوابهای معادلهٔ $yz_x + xz_y = 0$ از منحنی

$$C: \quad x = t, \quad y = \sqrt{t^2 - 1}, \quad z = 1.$$

می گذرد (با مثال ۲-۱-۲ مقایسه کنید) .

۵- نشان دهید معادلهٔ $yz_x + xz_y = 0$ جوابی ندارد که از منحنی زیر بگذرد

$$C: \quad x = t, \quad y = \sqrt{t^2 - 1}, \quad z = t.$$

(با مثال ۲-۱-۲ مقایسه کنید .)

۶- مثال ۲-۱-۳ را بتفصیل حل کنید .

۷- معادلهٔ زیر را با استفاده از قضیهٔ ۲-۱-۱ حل کنید .

$$xz_x + yz_y = \log x$$

(با مثال ۲-۱-۶ مقایسه کنید)

۸- معادلهٔ زیر را با استفاده از قضیهٔ ۲-۱-۱ حل کنید .

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = u$$

(با مثال ۲-۱-۶ مقایسه کنید)

۹- مثال ۲-۱-۷ را بتفصیل حل کنید .

۱۰- جواب عمومی هریک از معادله های زیر را به دست آورید .

الف) $(x + z)\, z_x + (y + z)\, z_y = 0$ (*راهنمایی* : معادلات ۲-۱-۴ در این جا $dx / (x + z) = dy / (y + z) = dz / 0$ هستند ، و بنابراین $dz = 0$ و $z = c_1$) .

ب) $xzz_x + yzz_y = -(x^2 + y^2)$

پ) $z_x + xz_y = z$

ت) $yz_x + z_y = z$

ث) $(y + x)z_x + (y - x)z_y = z$

ج) $x^2 z_x + y^2 z_y = (x + y)z$ (*راهنمایی* : ملاحظه کنید که $dx / x + dy / y - dz / z = 0$)

چ) $(xz + y)z_x - (x + yz)z_y = x^2 - y^2$ (*راهنمایی* : $y\, dx + x\, dy - dz$ را محاسبه کنید)

ح) $xz_x + yz_y = 0$

خ) $xz_x + yz_y = z$

۱۱- هریک از معادله های زیر را حل کنید .

الف) $z_y + 2yz = 0$ ب) $z_x - 2xyz = 0$
پ) $z_y = \sin(y/x)$ ت) $z_y = x^2 + y^2$
ث) $z_x - 2z_y = x^2$

۱۲- جواب معادلهٔ $z_x = z_y$ را که از منحنی زیر می گذرد به دست آورید

$$C: \quad x = t^2 + 1, \quad y = 2t, \quad z = (t+1)^4.$$

۱۳- الف) جواب عمومی معادلهٔ زیر را بیابید

$$z_x + zz_y = 1.$$

ب) جوابی را که از منحنی زیر می گذرد به دست آورید

$$C: \quad x = t, \quad y = t, \quad z = 2.$$

۱۴- هریک از معادله های زیر را حل کنید (یعنی جواب عمومی را به دست آورید)

الف) $z(yz_y - xz_x) = y^2 - x^2$
ب) $(x^2 - y^2 - z^2)z_x + 2xyz_y = 2xz$
پ) $(y+1)z_x + (x+1)z_y = z$
ت) $yzz_x + xzz_y = x + y$

۱۵- برای هریک از معادله های زیر، سطح انتگرال گیری را که شامل منحنی داده شده باشد، بیابید .

الف) $(y + xz)z_x + (x + yz)z_y = z^2 - 1;\ C: x = t, y = 2, z = t^2$
ب) $(y - z)z_x + (z - x)z_y = x - y;\ C: x = t, y = 2t, z = 0$
پ) $yz_x - xz_y = 2xyz;\ C: x = y = z = t$
ت) $x^2z_x + y^2z_y = z^2;\ C: x = t, y = 2t, z = 1$

۱۶- درزیر جوابهای عمومی معادلات با مشتقات جزئی معینی داده شده است . با مشتق گیری از هریک از آنها و حذف توابع دلخواه یک معادلهٔ دیفرانسیل با کمترین درجه به دست آورید .

الف) $z = e^{-x}F(x + 2y)$
ب) $z = yf(x)$
پ) $x + z = yf(x^2 - z^2)$
ت) $z(x - y) = xy\log\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{x - y}{xy}\right)$

۱۷- نشان دهید جواب عمومی

$$2xz_x - yz_y = 0$$

عبارت است از $z = f(xy^2)$ .

۱۸- ثابت کنید اگر $f(x, y)$ در معادلهٔ $z_x = z_y$ صدق کند، آن گاه $f$ تابعی از $x + y$ است .

۱۹- با استفاده از روش مثال ۲-۱-۶، هریک از معادله های زیر را حل کنید .

الف) $2xz_x - 3yz_y = 0$

ب) $xz_x - 2yz_y = x^2 y$

پ) $3xz_x - yz_y + 4z = x^2 \cos x$

۲۰- نشان دهید رویه های

$$z(x + y) = c(z + 1) \quad \text{and} \quad 6xy - 2z^3 - 3z^2 = g(x - y),$$

که در آن $c$ یک ثابت دلخواه و $g$ یک تابع مشتق پذیر دلخواه است، در صورت متقاطع بودن بر هم عمودند . (با مثال ۲-۱-۷ مقایسه کنید)

۲۱- معادلهٔ زیر را حل کنید

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

۲۲- معادلهٔ همگن زیر را حل کنید

$$az_x + bz_y = 0,$$

که $a$ و $b$ ثابتند .

۲۳- الف) رویه های عمود بر خانوادهٔ $x^2 + y^2 = C$ را به دست آورید

ب) چند رویه از این رویه های عمود بر هم را رسم کنید .

## ۲-۲ معادله های مراتب بالاتر

در مطالعهٔ معادله های با مشتقات جزئی مرتبه های بالاتر از یک، مناسب است که از نمادهای اندیس دار استفاده کنیم . برای مثال می نویسیم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = u_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \text{etc.}$$

چون با معادلات با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم بیشتر سر و کار داریم، عمومی ترین معادله از

این نوع را بررسی می کنیم که عبارت است از

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G. \qquad (۱-۲-۲)$$

اگر توابع $A$ ، $B$ ، ... ، $G$ به $x$ و $y$ بستگی داشته باشند (اما به $u$ یا مشتقاتش بستگی نداشته باشند)، معادله، خطی نامیده می شود. اگر $G \equiv 0$ ، آن گاه معادله همگن؛ و در غیر این صورت ناهمگن است.

منظور از جواب (۲-۲-۱) تابعی مانند $u(x, y)$ است که در معادله صدق کند. **جواب عمومی**، جوابی است که شامل دو تابع دلخواه مستقل (در مقابل دو ثابت دلخواه در یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم) باشد. **جواب خصوصی**، جوابی است که با انتخابی خاص برای توابع دلخواه از جواب عمومی به دست می آید.

معادله های خطی به شکل (۲-۲-۱) به شیوهٔ جالبی دسته بندی می شوند. از هندسهٔ تحلیلی به خاطر بیاورید که عمومی ترین معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب دو متغیّر چنین است

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

که $A$ ، $B$ ، ... ، $F$ ثابتند. این نوع معادلات مقاطع مخروطی (گاهی هم تباهیده) را به صورت زیر نشان می دهند:

بیضـی اگر $B^2 - 4AC < 0$

سهمی اگر $B^2 - 4AC = 0$

هذلولی اگر $B^2 - 4AC > 0$

به شیوهٔ مشابه، معادله های با مشتقات جزئی خطی به صورت (۲-۲-۱) **بیضوی**، **سهموی**، یا **هذلولی وار** نامیده می شوند برحسب این که $B^2 - 4AC$ به ترتیب منفی، صفر یا مثبت باشد. چون در معادلهٔ (۲-۲-۱) $A$ ، $B$ ، و $C$ توابعی از $x$ و $y$ هستند، امکان دارد که یک معادلهٔ با مشتقات جزئی از نوع **مخلوط** باشد. برای مثال، معادلهٔ

$$xu_{xx} + yu_{yy} + 2yu_x - xu_y = 0$$

بیضوی است هرگاه $xy > 0$ هذلولی وار است هرگاه $xy < 0$ ، و سهموی است هرگاه $xy = 0$ . اگر $x$ و $y$ **مختصات مکانی** باشند، آن گاه معادله در ربع اوّل و سوم بیضوی است، در ربع دوم و چهارم هذلولی وار، و روی محورهای مختصات سهموی است. نظریهٔ معادلات از **نوع مخلوط** را ابتدا **تریکومی*** در ۱۹۲۳ مطرح کرد. در مطالعهٔ جریان ترانسونیک با معادلهٔ تریکومی

* Francesco G. Tricomi ، (۱۸۹۷-      ) ریاضی دان ایتالیایی

$$y\Psi_{xx} + \Psi_{yy} = 0,$$

روبه رو می شویم . این معادله برای $y > 0$ بیضوی است و برای $y < 0$ ، هذلولی وار است .

بعداً در این بخش خواهیم دید که دسته بندی یک معادلهٔ با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم به انواع مختلف حایز اهمیت است چون برای هر نوع ، تحت شرایط مرزی مختلف جوابهای پایدار یکتا به دست می آید .

اگرچه عموماً $x$ و $y$ برای نشان دادن مختصات مکانی به کار می روند ، ولی همیشه چنین نیست . برای مثال ، ممکن است یکی از آنها مختص زمانی باشد . تنها محدودیتی که وجود دارد این است که $x$ و $y$ باید متغیّرهایی مستقل باشند . اگر متغیّرهای مستقل مکان داشته باشیم ، آن گاه با مشخص کردن مقادیر متغیر وابسته روی چند مرز ، که ***شرایط مرزی*** نام دارند ، می توانیم توابع دلخواه را در جواب عمومی تعیین کنیم و یک جواب خصوصی به دست آوریم . از سوی دیگر ، اگر یکی از متغیّرهای مستقل زمان باشد ، باید ***شرایط اوّلیه*** را نیز مشخص کنیم تا بتوانیم یک جواب خصوصی به دست آوریم . مسائلی که در آنها شرایط مرزی یا هر دو شرط مرزی و اوّلیه مشخص هستند ، ***مسائل مقدار مرزی*** نامیده می شوند . این مسائل را بتفصیل در فصلهای ۴ و ۵ بررسی خواهیم نمود .

حال مثالهایی برای تشریح سه نوع معادلهٔ مرتبهٔ دوم ارائه می کنیم . جوابهای خصوصی این مثالها در بخشهای بعدی ارائه خواهد شد .

**مثال ۲-۲-۱** مسألهٔ مقدار مرزی بیضوی .

معادله : $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad a < x < b, \quad c < y < d;$

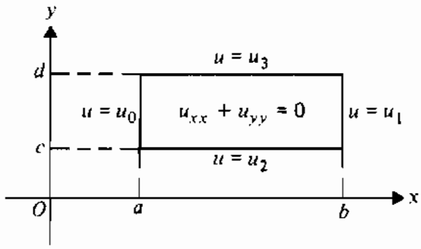
شرایط مرزی : $u(a, y) = u_0, \quad u(b, y) = u_1, \quad c < y < d,$

$u(x, c) = u_2, \quad u(x, d) = u_3, \quad a < x < b;$

که $a$ ، $b$ ، $c$ ، $d$ ، $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ثابتند . این معادلهٔ بیضوی ، ***معادلهٔ لاپلاس*** نامیده می شود* و آن را با تفصیل بیشتر در بخش ۲-۳ و همچنین در فصلهای ۴ و ۵ بررسی خواهیم نمود . شرایط مرزی نشان می دهند که $a \le x \le b$ و $c \le y \le d$ ، بنابراین مقادیر تابع مجهول $u(x, y)$ روی یک مستطیل در صفحه $xy$ معلوم هستند (شکل ۲-۲-۱) . معادلهٔ با مشتقات جزئی در این مثال بیان می کند $u(x, y)$ در هر نقطهٔ درون مستطیل باز در معادله صدق می کند .

---

* Pierre S. de Laplace ، (۱۷۴۹-۱۸۲۷) منجم و ریاضی دان فرانسوی




شکل ۲-۲-۱ معادلهٔ لاپلاس (مثال ۲-۲-۱)

این نوع مسائل مقدار مرزی، یعنی مسائلی که در آنها $u$ در معادلهٔ لاپلاس در یک ناحیهٔ باز صدق می‌کند و مقادیر معین را روی مرز ناحیه اختیار می‌کند (شکل ۲-۲-۲)، ***مسائل دیریکله**** نامیده می‌شوند. اگر شرایط مرزی فوق با شرایط زیر:

$$\begin{aligned} u_x(a, y) &= u_0, \qquad u_x(b, y) = u_1, \qquad c < y < d, \\ u_y(x, c) &= u_2, \qquad u_y(x, d) = u_3, \qquad a < x < b. \end{aligned}$$

تعویض شوند، آن گاه مشتقهای $u_x$ و $u_y$ معین هستند و مسأله را ***مسألهٔ نویمان***** نامند. در این حالت می گوییم که ***مشتق قائم***، $\partial u/\partial n$ ، یعنی آهنگ تغییر $u$ در جهت قائم بر مرز معین است (شکل ۲-۲-۳). البته مسائل مقدار مرزی، همان گونه که دربخش ۴-۳ خواهیم دید می‌توانند از نوع مخلوط باشند. نمادهای دیگری نیز برای $u_x(a, y) = u_0$ به کار می‌روند. بعضی از این نمادها عبارتند از:

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right|_{x=a} = u_0,$$

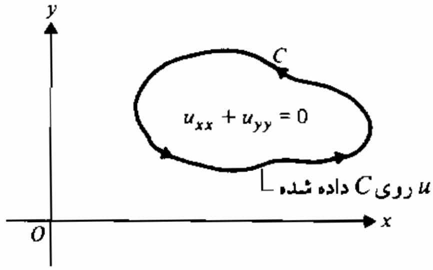
$$\lim_{x \to a^+} u_x(x, y) = u_0,$$

$$u_x(a^+, y) = u_0.$$

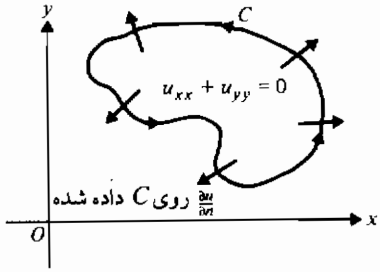
---

* Peter G. L. Dirichlet ، (۱۸۰۵-۱۸۵۹) ریاضی دان آلمانی

** Carl G. Neumann ، (۱۸۳۲-۱۹۲۵) ریاضی دان آلمانی




شکل ۲-۲-۲ مسألهٔ دیریکله در دو بعدی

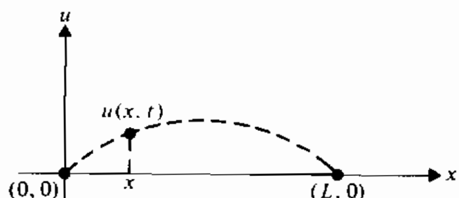



شکل ۲-۲-۳ مسألهٔ نویمان در دو بعدی

**مثال ۲-۲-۲** مسألهٔ مقدار مرزی هذلولی وار .

| | |
|---|---|
| معادله : | $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad t > 0, \qquad 0 < x < L;$ |
| شرایط مرزی : | $u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad t > 0;$ |
| شرط اولیه : | $u(x, 0) = u_0, \qquad u_t(x, 0) = u'_0, \qquad 0 < x < L.$ |

در این جا $a$ ثابت و $u$ مقدار تغییر مکان است و شرایط مرزی و شرایط اوّلیه هر دو داده شده‌اند . در این حالت $u$ باید در معادلهٔ داده شده برای مقادیر مثبت $t$ و به ازای هر $x$ در بازهٔ باز $0 < x < L$ صدق کند (شکل ۲-۲-۴) . شرایط مرزی بیان می کنند که برای مقادیر مثبت $t$ ، در $x = 0$ و $x = L$ داریم $u = 0$ ، در حالی که شرایط اوّلیه مقادیر تغییر مکان اوّلیه و سرعت اوّلیه را به ترتیب به صورت $u_0$ و $u'_0$ می دهند . معادلهٔ دیفرانسیل باید ازنظر بُعد درست باشد ، پس ثابت $a$ دارای بعد سرعت است (تمرین ۱) .




شکل ۲-۲-۴ معادلهٔ موج یك بعدی (مثال ۲-۲-۲)

معادلهٔ با مشتقات جزئی در مثال آخر *معادلهٔ موج* یک بعدی است. در بخش ۲-۴

این معادله و جواب عمومی آن را به دست خواهیم آورد. در بخش ۴-۴ حالتهای نیمه ـ نامتناهی $(0 < x < \infty)$ و نامتناهی $(-\infty < x < \infty)$ را با استفاده از تبدیل فوریه بررسی خواهیم کرد.

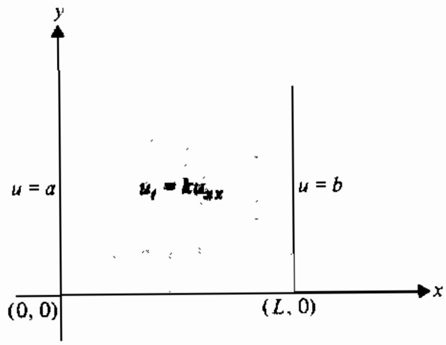
**مثال ۲-۲-۳** مسألهٔ مقدار مرزی سهموی.

معادله: $u_t = ku_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad k > 0;$

شرایط مرزی: $u(0, t) = a, \quad u(L, t) = b, \quad t > 0;$

شرط اولیه: $u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$

در این جا نیز $u(x, t)$ در یک معادلهٔ با مشتقات جزئی روی یک بازهٔ باز برای همهٔ مقادیر مثبت $t$ صدق می کند. شرایط مرزی مقدار $u$ را در نقاط انتهایی بازه داده شده معین می کنند (شکل ۲-۲-۵)، در حالی که شرط اوّلیه مقدار $u$ را در زمان $t = 0$ مشخص می کند. در این مثال معادلهٔ با مشتقات جزئی ***معادلهٔ پخش*** یک بعدی است. در بخش ۴-۳ این معادله را روی نواحی متناهی و در بخش ۴-۴ برای نواحی نامتناهی و نیمه نامتناهی حل خواهیم نمود.




شکل ۲-۲-۵ معادلهٔ پخش یک بعدی (مثال ۲-۲-۳)

وجود توابع دلخواه در جواب عمومی یک معادلهٔ با مشتقات جزئی به این معناست که توابعی که در چنین معادله ای صدق می کنند بسیار زیادند. برای مثال، توابع

$$\arctan \frac{y}{x}, \qquad e^x \sin y, \qquad \log \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \sin x \sinh y$$

کاملاً متفاوت هستند، با وجود این هرکدام در معادلهٔ لاپلاس صدق می کنند (تمرین ۲). ولی در کاربردهایی که شامل معادله های دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند. با توجه به اطلاعاتی که

در مورد یک سیستم فیزیکی داریم می توانیم جوابهای خصوصی را پیدا کنیم . بیشتر کار ما در بارهٔ مسائل مقدار مرزی متوجه این نکته خواهد بود .

مانند معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی مرتبهٔ اوّل ، ساده ترین معادلات با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم برای حل ، معادلات همگن با ضرایب ثابت هستند . حال معادله ای از این نوع را در نظر می گیریم که در آن مشتقات مرتبهٔ اوّل وجود ندارند ، یعنی

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0 \tag{۲-۲-۲}$$

و قرار می دهیم $u = f(y + rx)$ ، که در آن $r$ ثابت است . در این صورت $u_x = rf'(y + rx)$ و $u_{xx} = r^2 f''(y + rx)$ ، که در آنها پریم مشتق $f$ نسبت به متغیّر $y + rx$ را نشان می دهد .
با قرار دادن این مقادیر در معادلهٔ (۲-۲-۲) نتیجه می شود

$$(ar^2 + br + c)f''(y + rx) = 0$$

و از آن جا معادلهٔ مشخصه زیر را به دست می آوریم

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{۳-۲-۲}$$

اگر ریشه های معادلهٔ (۲-۲-۳) حقیقی و متمایز و مثلاً برابر با $r_1$ و $r_2$ باشند، آن گاه جواب عمومی (۲-۲-۲) را به صورت زیر می توان نوشت :

$$u(x, y) = f(y + r_1 x) + g(y + r_2 x),$$

که $f$ و $g$ دوبار مشتق پذیر، ولی دلخواهند . (تمرینهای ۳ و ۴) .

**مثال ۲-۲-۴** معادلهٔ هذلولی وار زیر را حل کنید

$$a^2 u_{xx} - b^2 u_{yy} = 0,$$

که در آن $a$ و $b$ ثابتهای حقیقی اند .

*حل :* معادلهٔ مشخّصه چنین است

$$a^2 r^2 - b^2 = 0$$

و جواب عمومی عبارت است از

$$u(x, y) = f\left(y + \frac{b}{a}x\right) + g\left(y - \frac{b}{a}x\right).$$

باید توجه داشت که اگر معادلهٔ مشخصه دارای دو ریشهٔ برابر باشد، آن گاه جواب عمومی به شکل زیر است

$$u(x, y) = f(y + rx) + xg(y + rx). \qquad (۴-۲-۲)$$

تمرینهای ۱۸-۲۰ درباره حالتی است که معادلهٔ مشخصه دو ریشهٔ مختلط دارد .

## تمرینهای ۲-۲

۱- نشان دهید ثابت $a$ در معادلهٔ موج بُعد سرعت را دارد .

۲- نشان دهید توابع زیر در معادلهٔ لاپلاس صدق می کنند

الف) $\arctan \frac{y}{x}$,    ب) $e^x \sin y$,

پ) $\log \sqrt{x^2 + y^2}$,    ت) $\sin x \sinh y$,

۳- تحقیق کنید که

$$u(x, y) = f(y + r_1 x) + g(y + r_2 x),$$

که در آن $r_1$ و $r_2$ در معادلهٔ

$$ar^2 + br + c = 0,$$

صدق می کنند، جواب عمومی معادلهٔ (۲-۲-۲) است .

۴- با مراجعه به تمرین ۳، تحقیق کنید

$$u(x, y) = c_1 f(y + r_1 x) + c_2 g(y + r_2 x)$$

نیز در معادلهٔ (۲-۲-۲) صدق می کند که $c_1$ و $c_2$ ثابتهای دلخواهند . این جواب را با جواب عمومی چگونه مقایسه می کنید؟

۵- هریک از معادلات با مشتقات جزئی زیر را به صورت بیضوی، هذلولی وار، یا سهموی دسته بندی کنید . در هر حالت مقادیر مناسب متغیرهای مستقل را بررسی کنید .

الف) $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x - 3u = xy$

ب) $xu_{xx} + u_{yy} - 2x^2 u_y = 0$

پ) $u_{xy} - u_x = x \sin y$

ت) $(y^2 - 1)u_{xx} - 2xyu_{xy} + (x^2 - 1)u_{yy} + e^x u_x + u_y = 0$

۶- اگر $f$ و $g$ دوبار مشتق پذیر ولی دلخواه باشند، نشان دهید $f(x + at)$ ، $g(x - at)$ ، و $f(x + at) + g(x - at)$ جوابهای $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ هستند . (**راهنمایی** : بنابه قاعدهٔ زنجیری،

$$g_t(x - at) = \frac{dg(x - at)}{d(x - at)} \frac{\partial(x - at)}{\partial t} = -ag'(x - at).$$

۷- نشان دهید

$$u = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)(c_3 \sin \lambda at + c_4 \cos \lambda at)$$

جوابی برای معادلهٔ موج $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ است، که $c_1$ ، $c_2$ ، $c_3$ ، $c_4$ و $\lambda$ ثابتند .

۸- نشان دهید تابع $u(x, t)$ در تمرین ۷ به صورت $c_5 \cos \lambda at \sin \lambda x$ در می‌آید اگر شرایط مرزی و اوّلیه به صورت زیر باشند :

$$u(0, t) = 0 \quad \text{و} \quad u_t(x, 0) = 0$$

۹- نشان دهید $u = \exp(-k\lambda^2 t)(c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)$ جواب معادلهٔ پخش $u_t = ku_{xx}$ است، که $c_1$ ، $c_2$ و $\lambda$ ثابتند .

۱۰- نشان دهید

$$u(x, t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\, ds$$

جواب معادلهٔ موج $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ است که در شرایط $u(x, 0) = 0$ ، $u_t(x, 0) = g(x)$ صدق می‌کند . (*راهنمایی* : از دستور لایبنیتس برای مشتق‌گیری از انتگرال استفاده کنید) .

۱۱- برای هریک از معادلات با مشتقات جزئی زیر : (i) مرتبه را مشخص کنید، (ii) تعیین کنید معادله خطی است یا نه؛ اگر خطی نیست، دلیل آن را توضیح دهید .

الف) $xu_x + yu_y = u$ ب) $u(u_{xx}) + (u_y)^2 = 0$

پ) $u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} = 1$ ت) $u_{xx} - 2u_y = 2x - e^u$

ث) $(u_x)^2 - x(u_{xy}) = \sin y$

۱۲- الف) نشان دهید اگر در معادلهٔ (۲-۲-۲)، $a = 0$ ، آن گاه روش داده شده در متن قابل استفاده نیست . ولی نشان دهید در این حالت با جایگزینی $u = f(x + ry)$ جواب عمومی به دست می‌آید .

ب) جواب عمومی $u_{xy} - 3u_{yy} = 0$ را به دست آورید .

پ) با استفاده از جایگزینی $u = f(x + ry)$ معادلهٔ $u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} = 0$ را حل کنید .

۱۳- نشان دهید اگر معادلهٔ مشخّصه دارای ریشه های برابر باشد، آن گاه جواب عمومی معادلهٔ (۲-۲-۲) با معادلهٔ (۲-۲-۴) داده می‌شود .

۱۴- می‌توان نشان داد که اگر $u = F(x, y)$ ، مشتقهای جزئی مرتبهٔ دوم $u_{xy}$ و $u_{yx}$ ، به شرط آن که این مشتقها موجود و پیوسته باشند، با هم برابرند . نشان دهید برای هریک از توابع

زیر این دو مشتق برابرند

الف) $u = e^x \cos y$ ب) $u = \arctan \dfrac{y}{x}$

پ) $u = e^{xy} \tan xy$ ت) $u = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$

۱۵- جواب معادلهٔ زیر را بیابید

$$u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} = 0.$$

۱۶- جواب عمومی هریک از معادله های زیر را به دست آورید

الف) $u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} = 0$ ب) $u_{xx} - 9u_{yy} = 0$

پ) $u_{xx} + 4u_{yy} = 0$ ت) $6u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0$

۱۷- هریک از معادله های زیر را به صورت بیضوی، هذلولی وار، و سهموی دسته بندی کنید

الف) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 4x^2$

ب) $u_{xx} - (2\sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} - (\cos x)u_y = 0$

پ) $u_{xx} + u_{xy} + u_{xy} + au = 0$ ($a$ ثابت است)

ت) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = xy$

ث) $4u_{xx} - 8u_{xy} + 4u_{yy} = 3$

۱۸- نشان دهید

$$u = f_1(x+iy) + f_2(x-iy)$$

جواب $u_{xx} + u_{yy} = 0$ است .

۱۹- نتیجهٔ تمرین ۱۸ را برای حالتی که معادلهٔ (۲-۲-۳) ریشهٔ مختلط دارد، تعمیم دهید .

۲۰- نشان دهید

$$u = f_1(y-ix) + xf_2(y-ix) + f_3(y+ix) + xf_4(y+ix)$$

جواب معادلهٔ

$$u_{xxxx} + 2u_{yyxx} + u_{yyyy} = 0.$$

است .

۲۱- روش ارائه شده در متن کتاب را می توان برای معادلات با مشتقات جزئی همگن مرتبهٔ چهار تعمیم داد . جواب عمومی هریک از معادله های زیر را به دست آورید .

الف) $$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0^*$$

ب) $$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

پ) $$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

۲۲- نشان دهید اگر $\psi_1$ و $\psi_2$ دو تابع همساز از $x$ و $y$ باشند، آن گاه هر تابع $\phi$ به صورت

$$\phi(x, y) = x\psi_1(x, y) + \psi_2(x, y)$$

در معادلهٔ دو همساز صدق می کند. (توجه: تابع همساز در معادلهٔ لاپلاس صدق می کند)

## ۲-۳ جداسازی متغیرها

معادلهٔ لاپلاس

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{۲-۳-۱}$$

یکی از معادلات با مشتقات جزئی کلاسیک ریاضی فیزیک است. این معادله را در حالت سه بعدی به دست خواهیم آورد و حالت دو بعدی را بعداً در این بخش بررسی خواهیم نمود. اهمیت این معادله به خاطر آن است که در بسیاری از شاخه های علوم ظاهر می شود.

در مطالعهٔ *الکتریسیته ساکن*، نشان داده شده که بردار شدت میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ ناشی از مجموعه ای از بارهای ساکن به صورت زیر داده می شود

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -(\phi_x\mathbf{i} + \phi_y\mathbf{j} + \phi_z\mathbf{k}),$$

که $\phi$ یک تابع نقطه ای اسکالر است و ***پتانسیل الکتریکی*** نام دارد. در بالا، $\nabla\phi$ گرادیان $\phi$ است و $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ به ترتیب بردارهای یکانی محورهای $x$، $y$ و $z$ می باشند. از طرفی قانون گاوس بیان می کند:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \nabla\cdot(-\nabla\phi) = -(\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}) = 4\pi\rho(x, y, z),$$

که $\rho(x, y, z)$ چگالی بار است. ثابت $4\pi$ به خاطر آن است که مساحت سطح کره ای به شعاع واحد را نشان می دهد و قانون گاوس عموماً به شکل یک انتگرال سطح بیان می شود. بنابراین پتانسیل $\phi$ در معادلهٔ زیر صدق می کند

---

* این معادله را دو همساز می نامند و در مطالعهٔ کشسانی و هیدرودینامیک به آن بر می خوریم.

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = -4\pi\rho(x, y, z) \qquad (۲-۳-۲)$$

این معادله، ***معادلهٔ پوآسون*** نام دارد . در یک ناحیهٔ بدون بار $\rho(x, y, z) = 0$ و معادلهٔ (۲-۳-۲) به معادلهٔ لاپلاس زیر تبدیل می‌شود :

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0. \qquad (۳-۳-۲)$$

در این حالت فرض می‌شود که پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهایی است که در خارج یا روی مرز ناحیهٔ بدون بار قرار دارند . این مطلب حایز اهمیت است که هر تابع پتانسیلی که از هر توزیع بار الکتریسیته ساکن به دست می‌آید باید در معادلهٔ (۲-۳-۳) در فضای تهی صدق کند .

به طریق مشابه در مغناطیس ساکن پتانسیل مغناطیسی به علت حضور قطبها در معادلهٔ (۲-۳-۳) در نواحی بدون قطب صدق می‌کند . همین طور پتانسیل گرانشی به علت حضور ماده در نواحی بدون ماده در معادلهٔ (۲-۳-۳) صدق می‌کند . در آئرودینامیک و هیدرودینامیک، پتانسیل سرعت $\phi$ دارای خاصیت $\nabla\phi = \mathbf{v}$ ، است که $\mathbf{v}$ میدان برداری سرعت است . برای یک سیال ایده‌آل ـ سیال تراکم ناپذیر و غیرچرخشی ـ پتانسیل سرعت در آن قسمتهایی از سیال که شامل چشمه یا چاه نباشد، در معادلهٔ (۲-۳-۳) صدق می‌کند . بنابراین معادلهٔ لاپلاس نقش مهمّی در نظریهٔ پتانسیل دارد . به این دلیل این معادله را اغلب ***معادلهٔ پتانسیل*** و توابعی را که در آن صدق می‌کنند ***توابع پتانسیل*** (و همچنین توابع همساز) می‌نامند .

معادلهٔ لاپلاس در شاخه های دیگر علوم نیز دارای اهمیت است . اگر غشایی با چگالی ثابت را روی یک چارچوب نگاه‌دارنده کشیده باشند، و تنها نیروی خارجی وارد بر غشا در محل چارچوب اعمال شود و اگر به چارچوب تغییر مکانی در جهت عمود بر صفحهٔ غشایی (صفحه $xy$) داده شود، آن گاه جابه جایی عرضی در حالت یکنواخت (مستقل از زمان) غشا، $z(x, y)$ در معادلهٔ دوبعدی لاپلاس صدق می‌کند . در این حالت فرض می‌شود که $z$ و مشتقهای آن، آن قدر کوچکند که بتوان از توانهای بالاتر $z$ ، $z_x$ و $z_y$ صرف نظر نمود . در بخش ۴-۳ خواهیم دید که دما حالت پایا (مستقل از زمان) در ماده ای که رسانایی گرمایی ثابت داشته و فاقد هرگونه چشمه یا چاه حرارتی باشد، نیز در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند .

از مطالب قبل معلوم می‌شود که ظاهر شدن معادلهٔ لاپلاس در موضوعاتی چنین گوناگون ارزش آن را دارد که توجه خود را به جواب آن معطوف کنیم . ابتدا کار را با یک مسألهٔ مقدار مرزی

ساده شامل معادلهٔ لاپلاس با دو متغیّر آغاز می کنیم .

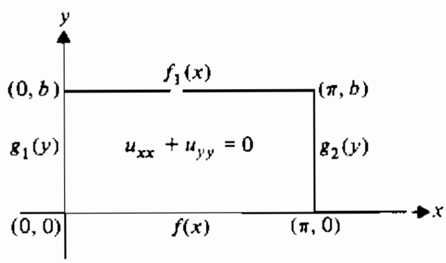
**مثال ۲-۳-۱** مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید .

معادله :
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \qquad 0 < y < b;$$
شرایط مرزی :
$$u(0, y) = g_1(y), \qquad u(\pi, y) = g_2(y), \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad u(x, b) = f_1(x), \qquad 0 < x < \pi.$$

**بحث :** باید تابعی مانند $u(x, y)$ بیابیم که درمعـادلهٔ با مشتقات جزئی درناحیهٔ مستطیل باز $0 < x < \pi$ ، $0 < y < b$ صدق کند و مقادیر معین $f(x)$ ، $f_1(x)$ ، $g_1(y)$ ، $g_2(y)$ را روی مرز ناحیهٔ (مستطیل) اختیار کند (شکل ۲-۳-۱) . به عبارت دیگر ، فرض می شود که توابع $f$ و $g$ معلوم هستند بطوری که در هر نقطه از مستطیل ، $u$ مقداری منحصر به فرد دارد . در نتیجه در چهار گوشهٔ مستطیل باید پیوستگی وجود داشته باشد ، یعنی باید داشته باشیم

$$\lim_{x\to\pi^-} u(x, 0) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{y\to 0^+} u(\pi, y) = \lim_{y\to 0^+} g_2(y)$$

و حدهایی مشابه برای سه گوشهٔ دیگر نیز باید برقرار باشد .




شکل ۲-۳-۱ مسألهٔ مقدار مرزی (مثال ۲-۳-۱)

مسألهٔ فوق را می توان تا حد قابل ملاحظه ای ساده نمود ، زیرا معادلهٔ لاپلاس یک معادلهٔ همگن ، خطی است و می توان *اصل برهم‌نهی* را به کار برد . پس اگر $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، و $u_4$ همه در معادلهٔ لاپلاس و شرایط مرزی

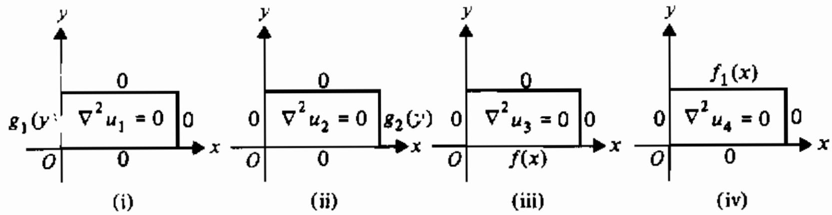
**i)** $u_1(0, y) = g_1(y), \quad u_1(\pi, y) = u_1(x, 0) = u_1(x, b) = 0,$

**ii)** $u_2(\pi, y) = g_2(y), \quad u_2(0, y) = u_2(x, 0) = u_2(x, b) = 0,$

**iii)** $u_3(x, 0) = f(x), \quad u_3(0, y) = u_3(\pi, y) = u_3(x, b) = 0,$

**iv)** $u_4(x, b) = f_1(x), \quad u_4(0, y) = u_4(\pi, y) = u_4(x, 0) = 0,$

صدق کنند (شکل ۲-۳-۲)، $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ جواب مسأله در مثال ۲-۳-۱ خواهد بود. از این مطلب نتیجه می شود که لازم است فقط یکی از این مسائل حل شود، چون سه مسألهٔ دیگر کاملاً مشابهند و بنابراین مسألهٔ مثال ۲-۳-۱ را مجدداً بیان می کنیم.




شکل ۲-۳-۲ استفاده از اصل برهم‌نهی (مثال ۲-۳-۱)

**مثال ۲-۳-۲** مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید.

معادله: $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < b;$

شرایط مرزی: $u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < b,$

$u(x, b) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \pi.$

*حل:* حال سه شرط مرزی همگن داریم و $u$ روی یک بازهٔ باز معلوم و برابر $f(x)$ است (شکل ۲-۳-۲ (iii)). در فصل ۳ طبیعت $f(x)$ و مقادیر $f(0)$ و $f(\pi)$ را مورد بحث قرار خواهیم داد. اهمیت مقدار $x = \pi$ در آن جا روشن خواهد شد.

ممکن است از قبل ندانیم که از میان گونه های بی شماری از توابع $u(x, y)$ که در معادلهٔ لاپلاس صدق می کنند، کدام یک در شرایط مرزی داده شده نیز صدق می کند. ولی می دانیم که $x$ و $y$ متغیّرهای مستقل هستند؛ از این رو روش حلی به نام ***جداسازی متغیّرها*** منطقی به نظر می رسد. علاوه بر این، بعداً خواهیم دید که این روش بخصوص وقتی که بیشتر شرایط مرزی همگن باشند، مفید است. سرانجام این که این روش به معادلات دیفرانسیل همگن معمولی با ضرایب ثابت منجر می شود که با آنها آشنا هستیم. بنابراین، جداسازی متغیّرها روشی مؤثّر است.

فرض کنید $u(x, y)$ را بتوان به صورت حاصل ضرب دو تابع، یک تابع تنها $x$ و دیگری تابع تنها $y$ نوشت؛ آن گاه

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{۲-۳-۴}$$

و

$$u_{xx} = X''Y, \qquad u_{yy} = XY'',$$

که در آنها، پریم مشتقهای معمولی را نشان می دهند، و مشتق گیری نسبت به متغیرهای توابع $X$ و $Y$ می باشد. با جای گذاری در معادلهٔ دیفرانسیل، داریم

$$X''Y + XY'' = 0.$$

توجه کنید اگرچه $u(x, y) = 0$ در معادلهٔ با مشتقات جزئی صدق می کند، می خواهیم جوابی غیر از این **جواب بدیهی** به دست آوریم. بنابراین هیچ یک از توابع $X(x)$ و $Y(y)$ نمی توانند متحد با صفر باشند و در نتیجه می توانیم معادلهٔ اخیر را بر $XY$ تقسیم کنیم. پس

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \tag{۲-۳-۵}$$

و متغیّرها جدا شده اند، زیرا طرف چپ معادلهٔ (۲-۳-۵) تابعی تنها از $x$ است و طرف راست تابعی تنها از $y$.

با تغییر $x$ در معادلهٔ (۲-۳-۵)، طرف چپ تغییر می کند اما طرف راست تغییر نمی کند، بنابراین، در حالت کلّی تساوی فقط وقتی برقرار است که دو طرف ثابت باشند، یعنی

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k. \tag{۲-۳-۶}$$

برای تعیین طبیعت ثابت $k$، مسألهٔ مقدار مرزی زیر را بررسی می کنیم:

$$X'' - kX = 0, \qquad X(0) = X(\pi) = 0, \tag{۲-۳-۷}$$

که شرایط $u(0, y) = 0$ و $u(\pi, y) = 0$ با توجه به معادلهٔ (۲-۳-۴) به ترتیب به $X(0) = 0$ و $X(\pi) = 0$ تبدیل شده اند. (توجه کنید که این تبدیل فقط با شرایط همگن امکان پذیر است.) حال سه حالت ممکن $k = 0$، $k > 0$، و $k < 0$ را تشخیص می دهیم.

**حالت I** $k = 0$

جواب عمومی $X'' = 0$ عبارت است از $X(x) = c_1x + c_2$ و از شرایط $X(0) = 0$ و $X(\pi) = 0$ به ترتیب به $c_2 = 0$ و $c_1 = 0$ می رسیم. پس این حالت به جواب بدیهی منجر می شود؛ بنابراین حالت $k = 0$ را کنار می گذاریم.

**حالت II** $k > 0$

جواب عمومی عبارت است از

$$X(x) = c_3 e^{\sqrt{k}x} + c_4 e^{-\sqrt{k}x},$$

و شرط $X(0) = 0$ نتیجه می دهد $c_3 + c_4 = 0$ . پس جواب به صورت زیر نوشته می شود

$$X(x) = c_3(e^{\sqrt{k}x} - e^{-\sqrt{k}x}).$$

(همواره سعی می کنیم جواب را با آخرین اطلاعاتی که از آن در دست است بنویسیم) . حال، شرط $X(\pi) = 0$ نتیجه می دهد

$$c_3(e^{\sqrt{k}\pi} - e^{-\sqrt{k}\pi}) = 0.$$

اما کمیت داخل پرانتز نمی تواند صفر باشد مگر آن که $k = 0$ (تمرین ۱)، که در این حالت ممکن نیست . پس $c_3 = 0$ و باز هم به جواب بدیهی می رسیم . بنابراین باید حالت $k > 0$ را نیز کنار گذاشت .

**حالت III** $k < 0$ ، برای مثال $k = -\lambda^2$

در این حالت جواب عمومی چنین است

$$X(x) = c_5 \cos \lambda x + c_6 \sin \lambda x,$$

از شرط $X(0) = 0$ نتیجه می شود $c_5 = 0$ و جواب با توجه به این مطلب به صورت زیر نوشته می شود

$$X(x) = c_6 \sin \lambda x.$$

از شرط $X(\pi) = 0$ نتیجه می شود که یا $c_6 = 0$ ، که قابل قبول نیست چون باز هم جواب بدیهی به دست می آید، یا $\sin \lambda\pi = 0$ . پس $\lambda$ باید عددی صحیح و غیرصفر باشد . قرار می دهیم

$$\lambda = n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{۲-۳-۸}$$

در این صورت جوابها عبارتند از

$$X_n(x) = c_n \sin nx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{۲-۳-۹}$$

در معادلهٔ (۲-۳-۹) تابع $X(x)$ و ثابت دلخواه را اندیس گذاری کرده ایم تا تأکید کنیم که مسألهٔ مقدار مرزی (۲-۳-۷) دارای تعدادی بی شمار جواب است که به $n$ بستگی دارند . مقادیر $n^2$ ،

یعنی، اعداد ۱، ۴، ۹ و ... **مقادیر ویژه** (۲-۳-۷) و توابع متناظر در (۲-۳-۹) ***توابع ویژه*** نامیده می شوند. بدون از دست دادن کلیت می توان $c_n \equiv 1$ گرفت چون توابع ویژه (مانند بردارهای ویژه در بخش ۱-۴) با اختلاف یک ضریب ثابت معلوم هستند. به عبارت دیگر، توابع ویژه در معادلهٔ (۲-۳-۹) را به صورت زیر می توان نوشت

$$X_n(x) = \sin nx, \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

حال می توان برای هر $n$، تابع $Y_n(y)$ را متناظر با $X_n$ به دست آورد. از معادلهٔ (۲-۳-۶) دیده می شود که $Y_n$ باید جواب مسألهٔ زیر باشد

$$Y_n'' - n^2 Y_n = 0, \qquad Y_n(b) = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \dots . \tag{۲-۳-۱۰}$$

شرط $u(x, b) = 0$ را به $Y_n(b) = 0$ تبدیل کرده ایم؛ اما نمی توان شرط $u(x, 0) = f(x)$ را به شرطی روی $Y_n(y)$ تبدیل کرد، زیرا f(x) صفر نیست. جوابهای معادله های (۲-۳-۱۰) عبارتند از

$$Y_n(y) = d_n e^{ny} + f_n e^{-ny}$$

و شرط $Y_n(b) = 0$ نتیجه می دهد

$$d_n e^{nb} + f_n e^{-nb} = 0.$$

پس

$$d_n = -f_n e^{-2nb}$$

و با توجه به روابط فوق جوابها عبارتند از

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= f_n(-e^{-2nb}e^{ny} + e^{-ny}) \\ &= f_n e^{-nb}(-e^{-nb}e^{ny} + e^{nb}e^{-ny}) \\ &= f_n e^{-nb}(e^{n(b-y)} - e^{-n(b-y)}) \\ &= 2f_n e^{-nb} \sinh n(b-y). \end{aligned}$$

ولی $2f_n e^{-nb}$ ثابتهای دلخواهند؛ اگر آنها را $g_n$ بنامیم آن گاه جوابهای (۲-۳-۱۰) به صورت زیر نوشته می شوند

$$Y_n(y) = g_n \sinh n(b-y). \tag{۲-۳-۱۱}$$

حال با توجه به معادلهٔ (۲-۳-۴) داریم

$$u_n(x, y) = B_n \sin nx \sinh n(b-y), \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{۲-۳-۱۲}$$

که در آنها $B_n\ (= c_n g_n)$ ثابتهای دلخواهند . هریک از این توابع در معادلهٔ با مشتقات جزئی داده شده و همچنین در سه شرط مرزی همگن صدق می کنند .

آنچه باقی می ماند آن است که جوابها در شرط مرزی ناهمگن $u(x, 0) = f(x)$ نیز صدق کنند . از عبارت

$$u_n(x, 0) = B_n \sinh nb \sin nx = f(x) \tag{۲-۳-۱۳}$$

روشن است که هیچ یک از جوابهای $u_n(x, y)$ در شرط فوق صدق نمی کنند مگر آن که $f(x) = C_n \sin nx$ ، به ازای ثابت $C_n$ ی . بحث مثال ۲-۳-۲ را در بخش ۴-۱ دنبال خواهیم نمود . در فصل ۳ خواهیم دید که برای $f(x)$ چه شرایطی باید در نظر گرفت و چگونه جوابهای (۲-۳-۱۲) را باید تغییر داد تا جوابها در یک شرط مرزی ناهمگن صدق کنند .

باید تأکید نمود که روش جداسازی متغیرها حل هر معادلهٔ با مشتقات جزئی خطی را تضمین نمی کند (تمرین ۴) . ازطرف دیگر این روش برای یافتن جوابهای خصوصی مناسب است نه جواب عمومی ، روش جداسازی متغیّرها را می توان برای معادلات مرتبهٔ اوّل ، همان گونه که در مثال زیر نشان داده شد است ، به کار برد .

**مثال ۲-۳-۳** جواب معادلهٔ

$$2xu_x - yu_y = 0$$

را که از منحنی

$$C: \quad x = t, \quad y = t, \quad u = t^3.$$

می گذرد (شکل ۲-۳-۳) به دست آوریدبا فرض آن که جواب را بتوان به صورت

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

نوشت .

*حل* : اگر از معادلهٔ فوق مشتق گرفته و در معادلهٔ با مشتقات جزئی داده شده قرار دهیم ، نتیجه می شود

$$2xX'(x)Y(y) - yX(x)Y'(y) = 0$$

یا

$$\frac{2xX'}{X} = \frac{yY'}{Y} = k.$$

با حل این دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اوّل، تفکیک پذیر، به دست می آوریم

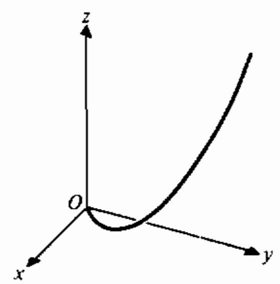
$$X = c_1 x^{k/2} \quad \text{و} \quad Y = c_2 y^k;$$

بنابراین

$$u = c_3(xy^2)^{k/2}.$$

حال، با به کار بردن شرط داده شده، نتیجه می شود $c_3 = 1$ و $k = 2$، بنابراین جواب مورد نظر $u = xy^2$ است . (با تمرین ۱۷ بخش ۲-۱ مقایسه کنید) .

روش جداسازی متغیّرها را اغلب برای حل مسائل مقدار مرزی که در دستگاههای مختصات مختلف در فصلهای ۴ و ۵ مطرح می شوند، به کار خواهیم برد .




شکل ۲-۳-۳ منحنی $c$ مثال ۲-۳-۳

**تمرینهای ۲-۳**

۱- نشان دهید از

$$\exp(\sqrt{k}\pi) - \exp(-\sqrt{k}\pi) = 0$$

نتیجه می شود $k = 0$ . (*راهنمایی*: تعریف $\sinh \sqrt{k}\,\pi$ را به یاد بیاورید)

۲- نشان دهید اگر در معادلهٔ (۲-۳-۸) $\lambda$ صحیح و منفی انتخاب شود، توابع ویژه در معادلهٔ (۲-۳-۹) تغییر نمی کنند .

۳- نشان دهید توابع داده شده در معادلهٔ (۲-۳-۱۲) در معادلهٔ با مشتقات جزئی و شرایط مرزی همگن مثال ۲-۳-۲ صدق می کنند .

۴- مشکل حل معادلهٔ

$$u_{xx} - u_{xy} + 2u_{yy} = 0$$

را با روش جداسازی متغیّرها توضیح دهید .

۵- مثال ۲-۳-۳ را بتفصیل حل کنید .

۶- نشان دهید هریک از توابع زیر یک تابع پتانسیل است .

الف) $u = c/r$ که $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و $c$ یک ثابت است

ب) $u = c \log r + k$ ، $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ، $c$ و k ثابتند

پ) $u = \arctan \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

۷- جواب خصوصی مسألهٔ مقدار مرزی زیر را به دست آورید .

معادله : $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < b;$

شرایط مرزی : $u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < b,$

$u(x, b) = 0, \quad u(x, 0) = 3 \sin x, \quad 0 < x < \pi.$

۸- در تمرین ۷، با انتخاب $b = 2$ مقدار $u(x, y)$ را در هریک از نقاط زیر محاسبه کنید .

الف) $(\pi/2, 0)$ ب) $(\pi, 1)$

پ) $(\pi/2, 2)$ ت) $(\pi/2, 1)$

در هریک از تمرینهای ۹-۱۱، روش جداسازی متغیرها را به کاربرید تا دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی به دست آورید . معادلات حاصل را حل نکنید .

۹- $u_t = k u_{xx}$ ، که $k$ یک ثابت است .

۱۰- $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ که $c$ یک ثابت است .

۱۱- $u_t = k u_{xx} + au$ ، که $a$ و $k$ ثابت هستند .

در تمرینهای ۱۲-۱۴، با استفاده از روش مثال ۲-۳-۲ جوابها را به دست آورید، تا آن جا که می توانید کار را ادامه دهید .

۱۲- مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید .

معادله : $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < b;$

شرایط مرزی : $u(0, y) = g_1(y), \quad u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < b,$

$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad 0 < x < \pi.$

۱۳- مسائل مقدار مرزی زیر را حل کنید .

معادله : $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < b;$

شرایط مرزی : $u(\pi, y) = g_2(y), \quad u(0, y) = 0, \quad 0 < y < b,$

$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad 0 < x < \pi.$

۱۴- مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید .

معادله : $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < b;$

شرایط مرزی : $u(x, b) = f_1(x), \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi,$

$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < b.$

۱۵- با مشتق گیری از طرف چپ معادلهٔ (۲-۳-۵) نسبت به $y$ ، نشان دهید که هر دو طرف باید ثابت باشند .

۱۶- حالت II مثال ۲-۳-۲ را با جواب عمومی به شکل زیر تکرار کنید

$$X(x) = C_3 \cosh \sqrt{k}x + C_4 \sinh \sqrt{k}x.$$

## ۲-۴ معادلهٔ تار مرتعش

اگرچه هدف اصلی، ارائهٔ روشهای گوناگون برای حل مسائل است، ولی بررسی طرز تشکیل یک مسألهٔ مقدار مرزی می تواند آموزنده باشد . بنابراین، این بخش به بحث دربارهٔ یک مسألهٔ فیزیکی، به فرضهایی ساده کننده که برای به دست آوردن معادله ای با مشتقات جزئی ساده ضروری است، و سرانجام به دست آوردن یک جواب خصوصی اختصاص می یابد .

تاری را به طول $L$ که بین دو نقطه بسته شده است در نظر بگیرید . محور $x$ها را وضعیت تار در نظر بگیرید در زمانی که هیچ نیروی خارجی برآن اثر نمی کند . فرض کنید $x = 0$ و $x = L$ نقاطی باشند که تار در آن نقاط بسته شده است . وقتی تار را به ارتعاش در آوریم، یک نقطه روی تار در لحظهٔ $t$ موقعیتی به مختصات $(x, y)$ خواهد داشت . می خواهیم معادله ای به دست آوریم که $y$ به عنوان تابعی از $x$ و $t$ در آن صدق کند . به عبارت دیگر، اگر $y\ (x, t)$ مقدار تغییر مکان عمودی تار به فاصلهٔ $x$ از انتهای چپ در لحظهٔ $t$ باشد، معادلهٔ با مشتقات جزئی که $y$ در آن صدق می کند، به چه صورت خواهد بود ؟

ابتدا چند فرض را در نظر می گیریم که یافتن معادله را ساده خواهد کرد . این مفروضات در زیر فهرست شده و مورد بحث قرار گرفته اند .

***تار مرتعش : مفروضات ساده کننده***

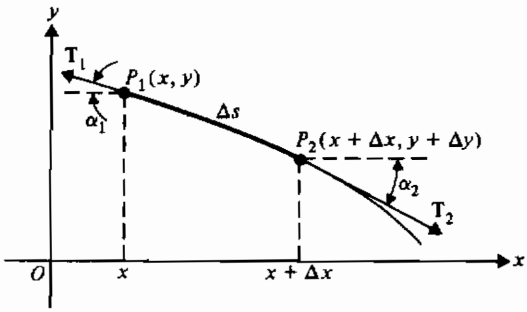
۱- تار همگن است، یعنی، مقطع عرضی و چگالی در سراسر آن ثابتند .

۲- هر نقطهٔ تار در طول خطی عمود بر محور $x$ ـ ها حرکت می کند .

۳- ماکزیمم جابه جایی در مقایسه با طول $L$ «کوچک» است . این فرض که به صورت نادقیق بیان شده به این معناست که برای یک تار یک متری، $y$ باید در حدود چند میلی متر باشد .

۴- تار کاملاً انعطاف پذیر است و در سراسر طول آن تحت کشش یکنواخت (ثابت) قرار دارد .

۵- از نیروهای خارجی، نظیر مقاومت هوا، و وزن تار صرف نظر می شود .




شکل ۲-۴-۱ قسمتی از تار مرتعش

حال قسمتی از تار را در نظر بگیرید که در شکل ۲-۴-۱ بسیار بزرگ نشان داده شده است . مختصات دو نقطهٔ مجاور $P_1$ و $P_2$ به ترتیب $(x, y)$ و $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ هستند . کشش را در دو نقطه به ترتیب با $T_1$ و $T_2$ نشان می دهیم . این دو نیروی کششی لزوماً در جهت مماسهای بر منحنی در دو نقطه اثر می کنند، این مماسها، مطابق شکل زوایای $\alpha_1$ و $\alpha_2$ با محور افقی می سازند . فرض کنید طول قطعهٔ مورد بررسی از تار $\Delta s$ و چگالی واحد طول تار $\delta$ باشد .

مؤلفه افقی $\mathbf{T}_1$ و $\mathbf{T}_2$ باید برابر باشند؛ در غیر این صورت فرض (۲) نقض می شود . پس*

$$-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0$$

یا

$$T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2 = T_0, \qquad \text{ثابت}$$

مؤلفهٔ قائم کشش بر قطعهٔ $\Delta s$ عبارت است از

$$T_1 \sin \alpha_1 - T_2 \sin \alpha_2$$

* توجه کنید که $T_1 = |\mathbf{T}_1|$ و $T_2 = |\mathbf{T}_2|$

یا

$$T_0(\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) = T_0\left(-\frac{\partial y(x,\, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x + \Delta x,\, t)}{\partial x}\right).$$

(می دانیم که مشتق در هر نقطه به صورت تانژانت زاویهٔ شیب تعریف می شود و آن زاویه ای است که خط مماس با جهت مثبت محور $x$ـ ها می سازد و در خلاف جهت عقربه های ساعت اندازه گیری می شود.)

بنابه قانون دوم نیوتن برای تعادل باید مجموع نیروهای وارد بر قطعهٔ $\Delta s$ برابر صفر باشد. بنابراین

$$T_0\left(-\frac{\partial y(x,\, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x + \Delta x,\, t)}{\partial x}\right) = \delta \Delta s\, \frac{\partial^2 y(\bar{x},\, t)}{\partial t^2}, \qquad (۲-۴-۱)$$

که $\bar{x}$ طول مرکز جرم قطعهٔ $\Delta s$ است. بنابه فرض (۳)، $\Delta s \doteq \Delta x$ و در نتیجه با تقسیم دو طرف معادلهٔ (۲-۴-۱) بر $\Delta x$ و گرفتن حد عبارت وقتی $\Delta x \to 0$ خواهیم داشت

$$T_0\, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \delta\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

یا

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad a^2 = \frac{T_0}{\delta}. \qquad (۲-۴-۲)$$

معادلهٔ (۲-۴-۲)، معادلهٔ تار مرتعش یا معادلهٔ موج یک بعدی است (با مثال ۲-۲-۲ مقایسه کنید). چون معادله هذلولی وار است، جواب عمومی آن مانند مثال ۲-۲-۴ به دست می آید و به صورت زیر داده می شود

$$y(x,\, t) = \phi(x + at) + \psi(x - at), \qquad (۲-۴-۳)$$

که $\phi$ و $\psi$ دوبار مشتق پذیر ولی دلخواهند.

حال اگر شرایط اولیه

$$y(x,\, 0) = f(x), \qquad y_t(x,\, 0) = 0, \qquad 0 < x < L, \qquad (۲-۴-۴)$$

را اعمال می کنیم، می توانیم توابع $\phi$ و $\psi$ را به دست آوریم. از معادلهٔ (۲-۴-۳) داریم

$$y_t(x,\, t) = a\phi'(x + at) - a\psi'(x - at),$$

کــه پریم مــشـــتق گـیــری نسـبت به مـتـغـیــرها را نشــان می دهـد بـرای مــثـال، $\phi'(x+at) = d\phi(x+at)/d(x+at)$ . بنابراین

$$\frac{\partial \phi(x+at)}{\partial t} = \frac{d\phi(x+at)}{d(x+at)} \frac{\partial (x+at)}{\partial t} = a\phi'(x+at).$$

پس داریم

$$a\phi'(x) - a\psi'(x) = 0,$$

که نشان می دهد $\phi'(x) = \psi'(x)$ ، یعنی اختلاف $\phi$ و $\psi$ حداکثر یک ثابت است ، $\phi(x) = \psi(x) + C$ . در نتیجه

$$y(x,0) = \phi(x) + \psi(x) = 2\psi(x) + C = f(x)$$

یا

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(f(x) - C)$$

و

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + C).$$

پس جواب معادلهٔ (۲-۴-۲) با شرایط اوّلیهٔ (۲-۴-۴) چنین است

$$y(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+at) + f(x-at)). \qquad (۲-۴-۵)$$

حال ملاحظه کنید که معادلهٔ (۲-۴-۵) بدون استفاده از این واقعیت که تار در $x = 0$ و $x = L$ محکم شده است، به دست آمد . در واقع معادلهٔ (۲-۴-۲) نیز مستقل از این شرایط مرزی حاصل شد . از این مطلب نتیجه می شود که معادلهٔ (۲-۴-۲) برای یک تار با طول نامتناهی نیز برقرار است، البته به شرط آن که فرضهای ساده کننده در تمام طول تار منظور گردند، پس می توانیم مطالب فوق را در مثال زیر خلاصه کنیم .

**مثال ۲-۴-۱**

معادله : $y_{tt} = a^2 y_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0;$

شرایط مرزی : $y(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty,$

$y_t(x,0) = 0, \qquad -\infty < x < \infty,$

این مسأله دارای جوابهایی به صورت زیر است

$$y(x,t)=\frac{1}{2}(f(x+at)+f(x-at)). \qquad (۲-۴-۶)$$

جواب خصوصی (۲-۴-۶) با تغییر مکان اوّلیهٔ معین و سرعت اوّلیهٔ صفر به دست آمد. در مثال بعدی حالتی را در نظر می گیریم که تغییر مکان اوّلیه برابر صفر و سرعت اوّلیه معین است.

**مثال ۲-۴-۲** مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید.

معادله: $y_{tt}=a^2y_{xx}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0;$

شرایط مرزی: $y(x,0)=0, \quad -\infty<x<\infty,$

$y_t(x,0)=g(x), \quad -\infty<x<\infty.$

*حل*: نقطهٔ شروع باز هم جواب عمومی داده شده به وسیلهٔ معادلهٔ (۲-۴-۳) است، یعنی

$$y(x,t)=\phi(x+at)+\psi(x-at).$$

در این جا شرط $y(x,0)=0$ نتیجه می دهد $\phi(x)=-\psi(x)$ ، بنابراین

$$y(x,t)=\phi(x+at)-\phi(x-at)$$

و

$$y_t(x,t)=a\phi'(x+at)+a\phi'(x-at$$

در نتیجه از $y_t(x,0)=g(x)$ نتیجه می شود

$$\phi'(x)=\frac{1}{2a}g(x)$$

و با استفاده از قضیهٔ اساسی حساب انتگرال،

$$\phi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x g(s)\,ds,$$

پس جواب عمومی به شکل زیر تبدیل می شود

$$y(x,t)=\frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at}g(s)\,ds-\int_0^{x-at}g(s)\,ds\right)$$
$$=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(s)\,ds. \quad \blacksquare \qquad (۲-۴-۷)$$

با استفاده از اصل برهم نهی (تمرین ۳) می توان جواب مثال زیر را به دست آورد.

**مثال ۲-۴-۳**

معادله : $y_{tt} = a^2 y_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0;$

شرایط مرزی : $y(x, 0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty,$

$y_t(x, 0) = g(x), \qquad -\infty < x < \infty,$

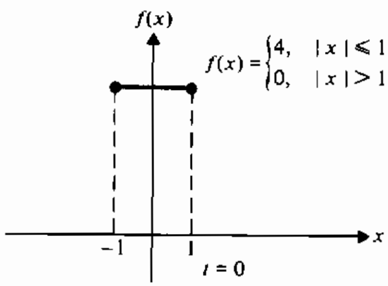
جواب این مسأله به صورت زیر است

$$y(x, t) = \frac{1}{2}\left(f(x + at) + f(x - at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\, ds. \qquad (۲-۴-۸)$$

جواب فوق، ***جواب دالامبر****نامیده می شود .

برای آن که اطلاعات بیشتری در مورد جواب (۲-۴-۸) به دست آوریم، یک تغییر مکان اوّلیه $f(x)$را مطابق شکل (۲-۴-۲) در نظر بگیرید اگر سرعت اوّلیهٔ تار صفر باشد و به آن یک تغییر مکان اوّلیه به صورت ضربه مستطیلی داده شود، در این صورت شکل مذکور وضعیت تار را در $t = 0$ نشان می دهد . وضعیت ضربه در زمانهای بعدی را می توان محاسبه کرد . برای مثال، در زمان $t = 1/2a$ ، می توان نمودار $y = \frac{1}{2}(f(x + \frac{1}{2}) + f(x - \frac{1}{2}))$ را با استفاده از مقادیر جدول زیر مطابق شکل (۲-۴-۳) رسم کرد .

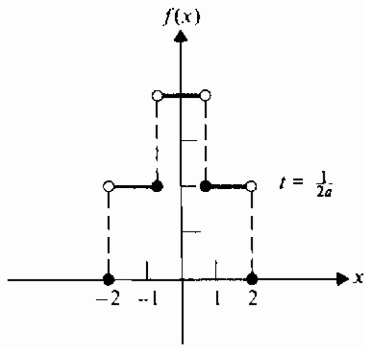
| x | 0 | $\pm\frac{1}{2}$ | $\pm 1$ | $\pm\frac{3}{2}$ | $\pm 2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 4 | 4 | 2 | 2 | 0 |




**شکل ۲-۴-۲ تغییر مکان اوّلیه**

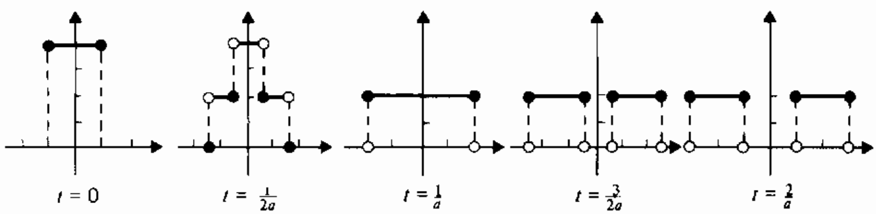
---

* Jean-Le Rond D'Alembert ، (۱۷۱۷-۱۷۸۳) ریاضی دان فرانسوی که کارهای او بیشتر در زمینهٔ مکانیک بوده است .




شکل ۲-۴-۳

به ازای $t = 1/a$ ، $3/2a$ ، و $2/a$ ، نمودارهایی به دست می‌آوریم که انتشار تغییر مکان اوّلیهٔ تار را در دو جهت نشان می‌دهند . این مطلب در شکل ۲-۴-۴ نشان داده شده است .




شکل ۲-۴-۴ تار مرتعش در زمانهای مختلف

این بخش را با بررسی ای کوتاه در مورد معادلهٔ موج یک بعدی د ر فیزیک اتمی ـ که شبیه به معادلهٔ موج در بالاست ـ به پایان می بریم ، داریم

$$y_{tt}(x, t) = c^2 y_{xx}(x, t), \qquad (۲-۴-۹)$$

که در آن $c$ سرعت نور است (تقریباً برابر $3 \times 10^{10}$ cm/sec) . اگر بنویسیم

$$y(x, t) = \phi(x)e^{i\omega t},$$

که یک راه ، استفاده از روش جداسازی متغیّرهاست ، در این صورت معادلهٔ (۲-۴-۹) به شکلِ

$$\phi_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0.$$

در می آید .

رابطهٔ بین طول موج دو بروی، $\lambda$ ، و بسامد زاویه ای، $\omega$ ، به صورت $\lambda = 2/\pi c/\omega$ است، بنابراین معادلهٔ فوق به صورت

$$\phi_{xx} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \phi = 0.$$

نوشته می شود .

در مورد یک اتم هلیوم منفرد یا سایر ذرّات بنیادی، $p$ ، اندازهٔ حرکت ذرّه، $\lambda$ ، طول موج، و $h$ ، ***ثابت پلانک*** ، در رابطهٔ $p = h/\lambda$ صدق می کنند . بنابراین معادلهٔ موج برای یک ذرّه در «جعبه» یک بعدی به صورت زیر در می آید

$$\phi_{xx} + \frac{4\pi^2 p^2}{h^2} \phi = 0.$$

آخر این که، اندازهٔ حرکت این ذرّهٔ آزاد به جرم آن، $m$ ، و انرژی، $E$ به صورت $p^2/2m = E$ وابسته است، پس داریم

$$\phi_{xx} + \frac{8\pi^2 mE}{h^2} \phi = 0. \qquad (۲-۴-۱۰)$$

معادله (۲-۴-۱۰)، ***معادلهٔ موج شرودینگر**** یک بعدی است و تابع $\phi$ تابع موج نام دارد، که دارای هیچ معنی صریح فیزیکی نیست .

## تمرینهای ۲-۴

۱- الف) با مراجعه به شکل ۲-۴-۱ ، نشان دهید

$$\mathbf{T}_1 = -T_1 \cos\alpha_1 \mathbf{i} + T_1 \sin\alpha_1 \mathbf{j},$$

که کشش در $P_1$ را به دو مؤلفهٔ افقی و قائم تجزیه می کند .

ب) بردار $\mathbf{T}_2$ را به همین روش تجزیه کنید .

پ) با مساوی قرار دادن مؤلفه های افقی $\mathbf{T}_1$ و $\mathbf{T}_2$ ، نشان دهید

$$T_1 \cos\alpha_1 = T_2 \cos\alpha_2 = T_0, \qquad \text{ثابت}$$

---

* Erwin Schrödinger ، (۱۸۸۷-۱۹۶۱) فیزیک دان اتریشی

ت) نشان دهید مؤلفهٔ قائم کشش بر قطعهٔ $\Delta s$ عبارت است از

$$T_1 \sin \alpha_1 - T_2 \sin \alpha_2.$$

۲- جزئیات لازم را برای به دست آوردن معادلهٔ (۲-۴-۲) بنویسید. (*راهنمایی*: از ریاضیات عمومی داریم

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x, t) - y(x, t)}{\Delta x};$$

حال به جای $y$ از $y_x$ استفاده کنید)

۳- جواب دالابر را برای معادلهٔ موج در مثال ۲-۴-۳ بدون استفاده از اصل برهم نهی به دست آورید؛ یعنی، شرایط اولیه را در جواب عمومی به کار برید.

۴- معادلهٔ (۲-۴-۲) را با شرایط اولیهٔ $y(x, 0) = \sin x$ ، $y_t(x, 0) = 0$ حل کنید.

۵- معدالهٔ (۲-۴-۲) را با شرایط اولیهٔ $y(x, 0) = 0$ ، $y_t(x, 0) = \cos x$ حل کنید.

۶- معادلهٔ (۲-۴-۲) را با شرایط اولیهٔ $y(x, 0) = \sin x$ ، $y_t(x, 0) = \cos x$ حل کنید.

۷- اگر به تاری تغییر مکانی اولیه به صورت

$$f(x) = \begin{cases} a(ax + 1), & -\frac{1}{a} \le x \le 0, \\ a(1 - ax), & 0 \le x \le \frac{1}{a}, \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

داده شود و سرعت اولیه برابر صفر باشد، نمودار جواب $y(x, t)$ معادلهٔ (۲-۴-۲) را در زمانهای زیر رسم کنید

الف) $t = 0$ ب) $t = \frac{1}{2a}$

پ) $t = \frac{1}{a}$ ت) $t = \frac{3}{2a}.$

۸- نشان دهید تغییر مکان اولیهٔ $f(x)$ در تمرین ۷، با سرعت $a$ از $x = 0$ به طرف $x = \infty$ و از $x = 0$ به طرف $x = -\infty$ حرکت می کند.

۹- معادلهٔ (۲-۴-۲) را با شرایط اولیهٔ $y(x, 0) = 0$ ، $y_t(x, 0) = f(x)$ که در تمرین ۷ تعریف شده حل کنید.

۱۰- نشان دهید اگر $f(x)$ یک تابع دوبار مشتق‌پذیر و $g(x)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد، آن گاه معادلهٔ (۲-۴-۸) در معادلهٔ (۲-۴-۲) صدق می کند.

۱۱- توضیح دهید چرا نتیجهٔ به دست آمده در معادلهٔ (۲-۴-۷) مستقل از ثابتی است که به عنوان کران پایین انتگرال در مرحله قبل به کار رفته است.

۱۲- در جواب عمومی معادلهٔ موج، نشان دهید به ازای ثابتی مثبت مانند $L$

$$y(x, t) = -y\left(L - x, t + \frac{L}{a}\right)$$

تعبیر فیزیکی این نتیجه را بیان کنید.

۱۳- یک تغییر در روش جداسازی متغیرها که در این بخش به آن اشاره شد با استفاده از جایگزینی زیر است

$$y(x, t) = X(x)e^{i\omega t}.$$

مسألهٔ زیر را با این روش حل کنید.

معادله: $y_{tt} = a^2 y_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0;$

شرایط مرزی: $\left.\begin{array}{l} y(0, t) = 0, \\ y(L, t) = 0, \end{array}\right\} t > 0;$

شرایط اولیه: $y(x, 0) = 3 \sin \frac{2\pi x}{L}, \quad 0 < x < L,$

$y_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L.$

تعبیر فیزیکی مسأله را بیان کنید و توضیح دهید چرا ثابت جداسازی ظاهر نمی شود.

۱۴- تمرین ۱۳ را با شرایط اوّلیهٔ زیر حل کنید

$$y(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$y_t(x, 0) = 2 \cos \frac{3\pi x}{L}, \quad 0 < x < L.$$

۱۵- اگر نیرویی خارجی در واحد طول به اندازهٔ $F$ بر تار وارد شود، نشان دهید معادلهٔ با مشتقات جزئی حاصل به صورت زیر است

$$y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t) + F/\delta.$$

۱۶- اگر نیروی خارجی در تمرین ۱۵ وزن تار باشد، نشان دهید معادله به صورت زیر در می آید

$$y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t) - g,$$

که $g$ شتاب گرانشی است .

۱۷- تغییر مکان ایستایی (مستقل از زمان) $y(x)$ نقاط تاری به طول $L$ را به دست آورید که تحت وزن خود آویزان و در حال سکون است . نشان دهید تار به شکل کمانی از یک سهمی است و ماکزیمم تغییر مکان را بیابید .

۱۸- اگر یک تار در محیطی که دارای ضریب میرایی $b$ $(b > 0)$ است ارتعاش کند، نشان دهید معادلهٔ با مشتقات جزئی آن به صورت زیر است

$$y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t) - \frac{b}{\delta} y_t(x, t).$$

۱۹- نشان دهید با تعویض متغیّر $\tau = at$ ، معادلهٔ موج یک بعدی به صورت زیر در می آید

$$y_{\tau\tau} = y_{xx}.$$

# فصل سوم

# سریهای فوریه و انتگرالهای فوریه

## ۳-۱ ضرایب فوریه

در مثال ۲-۳-۲ سعی کردیم یک مسألهٔ مقدار مرزی شامل معادلهٔ لاپلاس دوبعدی را حل کنیم . تابع $u(x, y)$ می بایست برای $0 < x < \pi$ ، $0 < y < b$ ، در معادله صدق می کرد؛ روی سه ضلع $x = 0$ ، $x = \pi$ ، و $y = b$ برابر صفر و روی ضلع چهارم، $y = 0$ ، برابر تابع داده شده $f(x)$ می بود . با روش جداسازی متغیرها توابع

$$u_n(x, y) = B_n \sinh n(b - y) \sin nx, \qquad n = 1, 2, 3, \ \ldots, \tag{۳-۱-۱}$$

را به دست آوردیم که در تمام شرایط صدق می کنند بجز این که وقتی که $y = 0$ ، این توابع برابر $f(x)$ نیستند . در این بخش این مشکل باقیمانده را حل خواهیم کرد .

این مسأله ای بود که ریاضی دانان در قرن هیجدهم با آن رو به رو بودند . در آن زمان در یک مسألهٔ نجوم بسط معکوس فاصلهٔ بین دو سیاره به صورت یک سری از کسینوسهای مضارب زاویهٔ بین بردارهای شعاعی مطرح بود . در سالهای ۱۷۴۹ و ۱۷۵۴ ، دالامبر و اویلر مقاله هایی به چاپ رساندند که در آنها بسط یک تابع به صورت یک سری از کسینوسها مورد بحث قرار گرفته بود. در ۱۸۱۱ فوریه* این مفهوم را تا به آن جا گسترش داد که توانست موارد

---

* Jean B. J. Fourier ، (۱۷۶۸-۱۸۳۰) ریاضی دان فرانسوی

استفادهٔ کلّی پیدا کند. فوریه درباره نظریهٔ ریاضی هدایت گرما مطالعه می کرد که در ضمن آن با حل مسأله ای همانند مثال ۲-۳-۲ مواجه شد.

چون معادلهٔ لاپلاس یک معادلهٔ با مشتقات جزئی همگن خطی است، هر ترکیب خطی از جوابها نیز یک جواب معادله است. علاوه بر این، چنین ترکیب خطی ای در شرایط مرزی همگن صدق می کند. به عبارت دیگر، مجموع

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{N} B_n \sinh n(b-y) \sin nx$$

به ازای هر مقدار متناهی $N$، همهٔ خاصیتهای توابع در (۳-۱-۱) را دارد. در نتیجه، طبیعی است که سؤال کنیم آیا سری نامتناهی

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh n(b-y) \sin nx \tag{۳-۱-۲}$$

نیز همان خاصیتها را دارد. واضح است که (۳-۱-۲) در شرایط مرزی همگن صدق می کند چون در $x = 0$، $x = \pi$، و $y = b$ برابر صفر است. اما این که آیا $u(x, y)$ در معادلهٔ لاپلاس صدق می کند یا خیر، موضوع دیگری است که فقط وقتی می توان به آن پاسخ داد که طبیعت ثابتهای $B_n$ را بدانیم و این که تحت چه شرایطی می توان از یک سری نامتناهی جمله به جمله مشتق گرفت. ابتدا ثابتها را بررسی می کنیم و به سؤال دوم بعداً پاسخ خواهیم داد.

از معادلهٔ (۳-۱-۲) با به کار بردن آخرین شرط مرزی در مثال ۲-۳-۲، داریم

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh nb \sin nx$$

یا

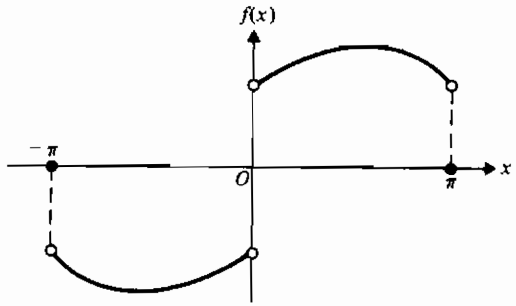
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{۳-۱-۳}$$

که برای سادگی به جای ثابتهای دلخواه $B_n \sinh nb$، از نماد $b_n$ استفاده شده است. تا این جا دربارهٔ تابع $f(x)$ چیزی نگفته ایم، جز این که برای تمام مقادیر $x$ در بازهٔ $\pi > x > 0$ تعریف شده است. حال بازهٔ تعریف تابع را توسعه می دهیم و محدودیتهایی برای $f(x)$ قائل می شویم. گیریم

$$f(x) = \begin{cases} -f(-x), & \text{for } -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{for } x = -\pi,\ x = 0,\ x = \pi, \end{cases}$$

و فرض کنید $f(x)$ برای $0 < x < \pi$ پیوسته* باشد، همان طور که در شکل ۳-۱-۱ نشان داده شده است . معادلهٔ (۳-۱-۳) را به صورت معادل زیر می نویسیم

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots ,$$



شکل ۳-۱-۱

حال راهی برای یافتن ضرایب $b_i$ جستجو می کنیم . فرض کنید می خواهیم $b_2$ را محاسبه کنیم . هر جملهٔ معادلهٔ قبل را در $\sin 2x$ ضرب کرده و از دو طرف از $x = -\pi$ تا $x = \pi$ انتگرال می گیریم . پس

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 2x \, dx = b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 2x \, dx + b_2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2x \, dx + b_3 \int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \sin 2x \, dx + \cdots . \tag{۳-۱-۴}$$

اما داریم (تمرین ۱)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0, \quad \text{if } n \neq m \tag{۳-۱-۵}$$

و

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi. \tag{۳-۱-۶}$$

* این فرض بعداً برداشته می شود .

بنابراین هریک از انتگرالهای طرف راست معادلهٔ (۳-۱-۴) بجز انتگرالی که شامل $b_2$ است صفر می شود، و داریم

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2x\,dx.$$

همین روش را می توان برای هر $b_i$ به کار برد، بنابراین بطور کلّی می توانیم بنویسیم

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{۳-۱-۷}$$

می توان معادلهٔ (۳-۱-۷) را قدری ساده تر نمود. $f(x)$ و $\sin nx$ توابع فردند، یعنی خاصیت

$$F(-x) = -F(x),$$

را دارند، به عبارت دیگر نسبت به مبدأ قرینه اند. [مثالهای دیگر از توابع فرد عبارتند از $x$، $x^3$، $x^5$، $\tan x$، $\csc x$، و $\sinh x$ (شکل ۳-۱-۲).]. اما حاصل ضرب دو تابع فرد، یک تابع زوج است، که خاصیت

$$F(-x) = F(x)$$

را دارد، یا نسبت به خط $x = 0$ قرینه است. [مثالهای دیگری از توابع زوج عبارتند از ۱، $x^2$، $x^4$، $\cos x$، $\sec x$، و $\cosh x$ (شکل ۳-۱-۳).] بنابراین

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{۳-۱-۸}$$

و با توجه به این که

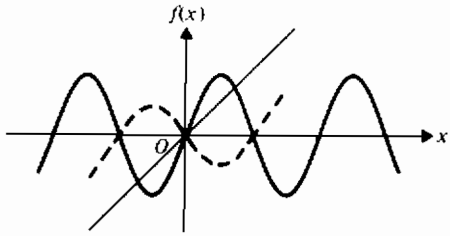
$$B_n = \frac{b_n}{\sinh nb},$$

معادلهٔ (۳-۱-۲) را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

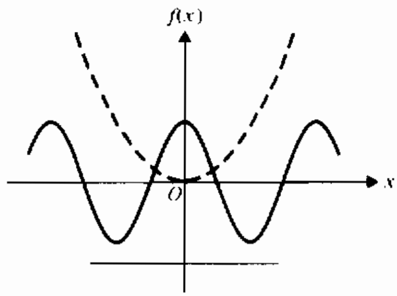
$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sinh nb}\sinh n(b-y)\sin nx$$

یا

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n(b-y)\sin nx}{\sinh nb}\int_{0}^{\pi} f(s)\sin ns\,ds. \tag{۳-۱-۹}$$




شکل ۳-۱-۲ توابع فرد




شکل ۳-۱-۳ توابع زوج

در معادلهٔ (۳-۱-۹) متغیر ظاهری انتگرال گیری را به $s$ تغییر داده ایم تا با متغیر مستقل $x$ در $u(x, y)$ اشتباه نشود .

حال ادعا می کنیم (۳-۱-۹) جواب مسألهٔ دیریکلهٔ مثال ۲-۳-۲ است . با قبول این ادعا، چندین سؤال بی پاسخ در این مرحله وجود دارند . بعضی از آنها عبارتند از :

۱- با توجه به خاصیت بیان شده در معادلهٔ (۳-۱-۵) آیا می توان بازهٔ $0 < x < \pi$ را به $0 < x < a$ به ازای مقداری ثابت مانند a تعمیم داد؟

۲- از یک سری نامتناهی تحت چه شرایطی می توان جمله به جمله انتگرال گرفت؟ این کار در محاسبهٔ مقدار $b_n$ در معادلهٔ ۳-۱-۸ انجام شد .

۳- آیا $f(x)$ باید بر $0 < x < \pi$ پیوسته باشد یا محدویت کمتری کفایت خواهد کرد؟

۴- آیا $f(x)$ باید طوری تعیین شود که $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$ ؟

۵- تحت چه شرایطی از یک سری نامتناهی می توان جمله به جمله مشتق گرفت؟ [این کار برای نشان دادن این که (۳-۱-۹) در معادلهٔ لاپلاس صدق می کند لازم است.]

این سؤالات و سؤالات دیگر را در بقیهٔ این فصل بررسی خواهیم کرد.

یک تابع $f(x)$ که بر بازهٔ $[-\pi, \pi]$ تعریف شده، دارای ***نمایش سری فوریه*** است اگر بتوان نوشت

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{۳-۱-۱۰}$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ns \, ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{۳-۱-۱۱}$$

و

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ns \, ds, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{۳-۱-۱۲}$$

به شرط آن که دو انتگرال اخیر همگرا باشند. ضرایب $a_n$ و $b_n$ ***ضرایب فوریه*** (یا ضرایب اویلر ـ فوریه) برای بازهٔ $[-\pi, \pi]$ نامیده می شوند. «تساوی» در معادلهٔ (۳-۱-۱۰) مفهومی خاص دارد که بعداً روشن خواهد شد. مقادیر $a_n$ و $b_n$ با استفاده از روابط (تمرین ۲)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \tag{۳-۱-۱۳}$$

و

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \qquad n \neq m, \tag{۳-۱-۱۴}$$

و معادلهٔ (۳-۱-۵) به دست می آیند. این سه رابطه، بر طبق تعریف زیر، ***روابط تعامدی*** نام دارند.

**تعریف ۳-۱-۱:** مجموعهٔ توابع

$$\{\phi_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \ldots\}$$

بر بازهٔ $(a, b)$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ متعامدند هرگاه

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)w(x)\,dx = 0, \qquad n \neq m,$$

و

$$\int_a^b (\phi_n(x))^2 w(x)\,dx \neq 0.$$

تعامد توابع به صورت تعریف ۳-۱-۱ تعمیم تعامد بردارهاست. توجه کنید که مجموع حاصل ضربها در ضرب اسکالر (یا نقطه ای) به انتگرال حاصل ضربها تبدیل شده است. اگرچه در این بخش تابع وزن $w(x)$ برابر واحد خواهد بود، آن را در نظر گرفته ایم چون در مباحث بعدی مقادیر دیگری اختیار خواهد کرد. تا این جا مجموعهٔ توابع متعامد زیر را بررسی کرده ایم

۱- مجموعهٔ

$$\{\sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

بر بازهٔ $(-\pi, \pi)$ نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ بنابر معادله های (۳-۱-۵) و (۳-۱-۶) متعامد است.

۲- مجموعهٔ

$$\{\cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

بربازهٔ $(-\pi, \pi)$ نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ مجموعه ای متعامدند. این مطلب از معادلهٔ (۳-۱-۱۴) و روابط زیر (تمرین ۲) نتیجه می شود

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{۳-۱-۱۵}$$

و

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi. \tag{۳-۱-۱۶}$$

۳- مجموعهٔ

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$$

بر بازهٔ $(-\pi, \pi)$ با تابع وزن $w(x) = 1$ بنابر معادلات (۳-۱-۵)، (۳-۱-۶)، و (۳-۱-۱۳) تا (۳-۱-۱۶) مجموعه ای متعامد است.

توابع متعامد در ریاضیات کاربردی نقشی مهم را برعهده دارند. قبلاً از خاصیت تعامد

توابع سینوسی برای کامل کردن جواب مسألهٔ مطرح شده در مثال ۲-۳-۲ استفاده کرده‌ایم. روشهای مشابهی را برای حل بسیاری از مسائل مقدار مرزی دیگر به کار خواهیم برد.

مجموعه‌ای از توابع با یک خاصیت اضافی، که در تعریف زیر داده می‌شود، پیش از این در کارهایمان با ارزش خواهد بود.

**تعریف ۳-۱-۲ :** مجموعهٔ توابع

$$\{\phi_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \ldots\}$$

بر بازهٔ $(a, b)$ با تابع وزن $w(x)$ یک مجموعهٔ ***متعامد یکه*** نامیده می‌شود اگر

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)w(x)\,dx = 0, \qquad n \neq m$$

و

$$\int_a^b (\phi_n(x))^2 w(x)\,dx = 1.$$

پس توابع متعامد یکه دارای همان خاصیت توابع متعامدند و علاوه بر آن، نرمال نیز شده‌اند.

دو رابطه در تعریف ۳-۱-۲ را می‌توان با استفاده از علامت ***دلتای کرونکر**** که به صورت

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

تعریف می‌شود ساده‌تر نوشت.

اگر از این علامت استفاده شود، آن‌گاه توابع در یک مجموعهٔ متعامد یکه دارای خاصیت زیر هستند

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)w(x)\,dx = \delta_{mn}. \qquad (۱۷-۱-۳)$$

مجموعهٔ توابع

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\} \qquad (۱۸-۱-۳)$$

بر بازهٔ $(-\pi, \pi)$ با تابع وزن $w(x) = 1$ یک مجموعهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهد.

حال ملاحظه کنید که اگر تابع $f(x)$ دارای نمایشی به سری فوریه معتبر به صورت

---

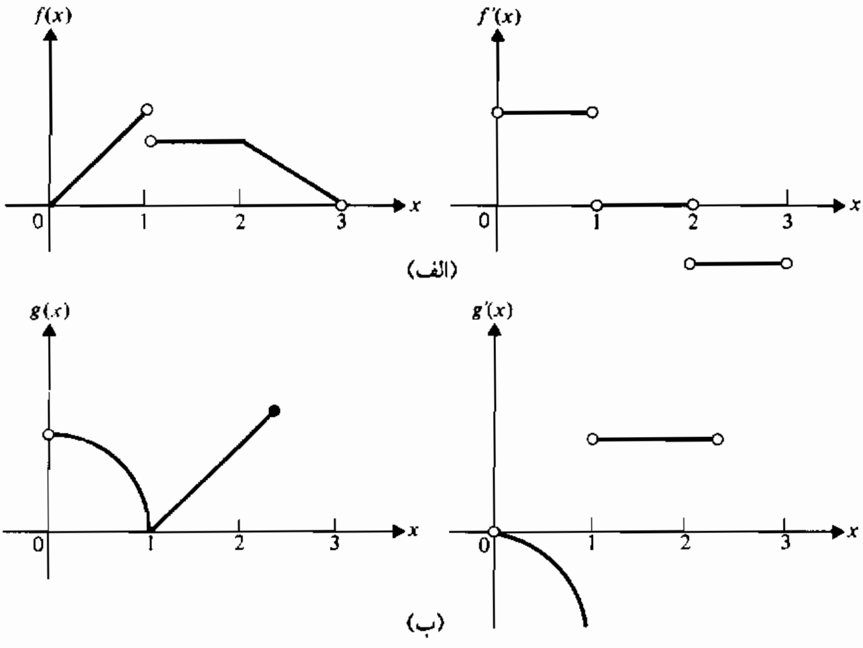
* Leopold Kronecker ، (۱۸۲۳-۱۸۹۱) ریاضی‌دان آلمانی

(۳-۱-۱۰) در بازه‌ای خارج از $[-\pi, \pi]$ باشد، آن گاه تابع باید **متناوب** باشد. این به دلیل آن است که هر جملهٔ سری متناوب است. یادآوری می کنیم که یک تابع را متناوب با دورهٔ متناوب $p$ گوییم هرگاه به ازای هر مقدار $x$،

$$f(x+p) = f(x)$$

هر جمله در (۳-۱-۱۰) متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi$ است. (توجه کنید تابع ثابت $f(x) = k$ به ازای هر مقدار $p$ در تعریف تابع متناوب صدق می کند.) پس یک تابع باید متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi$ باشد تا این که نمایش فوریهٔ آن در خارج بازهٔ $[-\pi, \pi]$ برقرار باشد. این شرط در مثال ۲-۳-۲ لازم نبود، چون در آن جا فقط نمایش تابع بر $(0, \pi)$ مورد توجه بود و اهمیتی نداشت که در خارج از این بازه سری به چه مقادیری ممکن است همگرا شود.

خاصیت دیگری که تابع $f(x)$ باید داشته باشد آن است که ***تکه‌ای ـ هموار*** باشد. تابع $f(x)$ را تکه‌ای ـ هموار گوییم هرگاه $f(x)$ و $f'(x)$ هر دو تکه‌ای ـ پیوسته باشند. شکل ۳-۱-۴ (الف) را نیز برای مثالی از یک تابع تکه‌ای ـ پیوسته ملاحظه کنید.

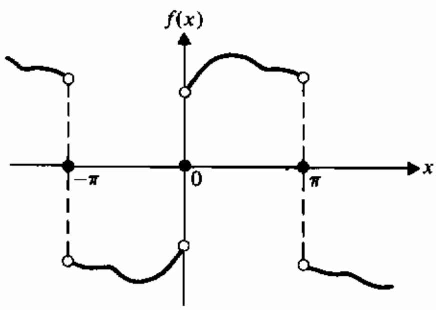



شکل ۳-۱-۴ (الف) $f(x)$ و $f'(x)$ هر دو تکه‌ای ـ پیوسته‌هستند؛ (ب) $g(x)$ تکه‌ای ـ پیوسته است اما $g'(x)$ نیست.

شرایط کافی (نه لازم) برای به دست آوردن نمایش سری فوریهٔ یک تابع در قضیهٔ ۳-۱-۱ داده شده‌اند . این شرایط ، ***شرایط دیریکله*** نامیده می شوند زیرا دیریکله آنها را در مقالاتی که در سالهای ۱۸۲۹ و ۱۸۳۷ به چاپ رساند مطرح کرد .

**قضیهٔ ۳-۱-۱** :اگر $f(x)$ یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi$ و برای $-\pi \leq x \leq \pi$ تکه‌ای ـ هموار باشد آن گاه سری فوریهٔ (۳-۱-۱۰) تابع $f(x)$ در تمام نقاطی که $f(x)$ پیوسته است، به $f(x)$ همگرا، و در نقاطی که $f(x)$ ناپیوسته است، به میانگین حدهای چپ و راست $f(x)$ در این نقاط همگراست .

اکنون آشکار می شود که چرا در مثال ۲-۳-۲ ، $f(-\pi)$ ، $f(0)$ ، و $f(\pi)$ صفر تعریف شدند. این مقادیر همان گونه که در شکل ۳-۱-۵ نشان داده شده است، میانگین حدهای چپ و راست تابع در نقاط ناپیوستگی هستند . در این نقاط $f(x)$ به هر صورتی تعریف شود، سری فوریهٔ بنابه قضیهٔ ۳-۱-۱ همگرا به صفر خواهد بود . تا این جا هنوز مسألهٔ همگرایی برای یک سری فوریه حل نشده است. می دانیم شرایط دیریکله لازم نیستند، و شرایط لازمی که به دست آمده اند کافی نیستند . کافی است که بگوییم شرایط* بیان شده در قضیهٔ ۳-۱-۱ در مورد دستهٔ بزرگی از توابع که در کاربردها پیش می آیند صدق می کنند؛ پس بیش از این وارد جزئیات نظریه نخواهیم شد. حال چگونگی به دست آوردن نمایش سری فوریه را با مثالهای زیر تشریح می کنیم .




**شکل ۳-۱-۵ مقادیر میانگین در نقاط ناپیوستگی**

* شرط متناوب بودن $f(x)$ در بخش ۳-۳ حذف خواهد شد .

**مثال ۳-۱-۱** نمایش سری فوریهٔ تابع زیر را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

حل : نمودار تابع در شکل ۳-۱-۶ نشان داده شده است . توجه کنید که این تابع در شرایط دیریکله قضیهٔ ۳-۱-۱ صدق می کند . با استفاده از معادلهٔ (۳-۱-۱۱) داریم

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos ns\, ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} s\cos ns\, ds \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{s}{n}\sin ns + \frac{1}{n^2}\cos ns\right)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) \\ &= \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n \text{ زوج} \\ -\dfrac{2}{\pi n^2}, & n \text{ فرد} \end{cases} \end{aligned}$$

انتگرال گیری را می توان با روش جزء به جزء یا با استفاده از جدول انجام داد . همچنین در محاسبه از رابطهٔ $\cos n\pi = (-1)^n$ استفاده کرده ایم . توجه کنید که روش فوق برای یافتن $a_n$ به ازای $n = 0$ معتبر نیست (چرا؟) . ولی می توانیم قبل از محاسبهٔ انتگرال قرار دهیم $n = 0$ ، در این صورت داریم

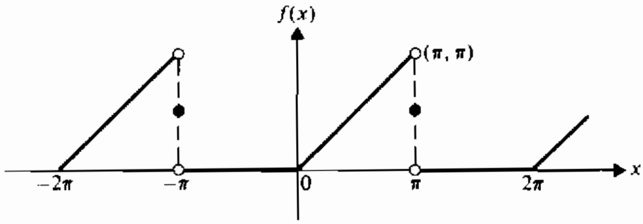
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} s\, ds = \frac{\pi}{2}.$$

جملهٔ ثابت در سری فوریه ، یعنی $\frac{1}{2}a_0$ ، میانگین* مقدار تابعی است که روی بازهٔ داده شده به صورت سری فوریه نمایش داده می شود، شکل (۳-۱-۷) .

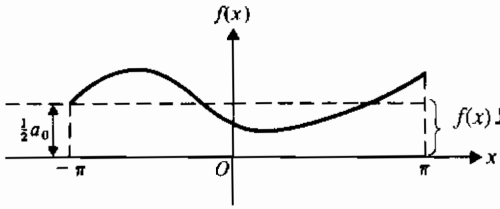
---

* در ریاضیات عمومی میانگین (یا مقدار متوسط) یک تابع $f(x)$ روی بازهٔ $a \le x \le b$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx.$$




شکل ۳-۱-۶ تابع مثال ۳-۱-۱




شکل ۳-۱-۷ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0$

حال محاسبهٔ ضرایب را با استفاده از معادلهٔ (۳-۱-۱۲) ادامه می دهیم، داریم

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin ns\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} s\sin ns\,ds \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{s}{n}\cos ns + \frac{1}{n^2}\sin ns\right)\Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{n}(-\cos n\pi) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

پس تابع را می توان به صورت زیر نمایش داد

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}&\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) \\ &+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - + \cdots\right) \end{aligned}$$

یا، اگر از نماد مجموع یابی استفاده کنیم، داریم

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right). \qquad (۱۹-۱-۳)$$

در این جا ذکر یک نکته در مورد استفاده از تساوی در (۳-۱-۱۹) ضروری است . برای مقادیری از $x$ که در آن نقاط تابع $f(x)$ پیوسته است، تساوی مناسب می باشد، به این معنی که سری به تابع همگراست . به عبارت دیگر، هرچه جملات بیشتری انتخاب شوند، مجموع به مقدار تابع در آن نقطه نزدیکتر خواهد بود ولی این همگرایی نقطه ای در نقاط ناپیوستگی برقرار نیست چون در آن نقاط سری به میانگین حدهای چپ و راست همگراست . پس برای نمایش سری فوریه تابع از علامت ~ به جای = استفاده خواهیم نمود . بنابراین معادلهٔ (۳-۱-۱۹) به صورت زیر نوشته می شود

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}, \quad \text{الی آخر}$$

علامت ~ $f(x)$ خوانده می شود «$f(x)$ دارای نمایش فوریهٔ» به مفهوم قضیهٔ ۳-۱-۱ است .

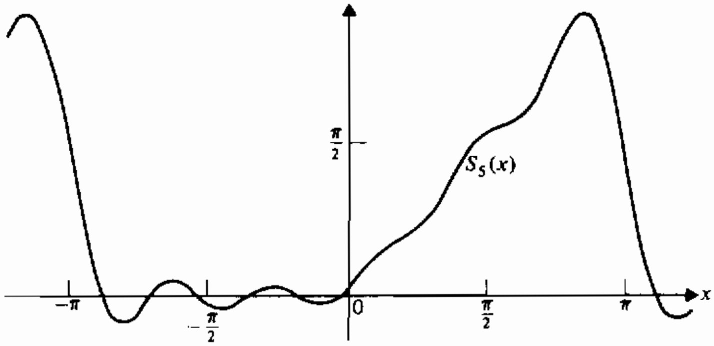
هرچند نمی توانیم نتیجهٔ حاصل از معادلهٔ (۳-۱-۱۹) را رسم کنیم، ولی می توانیم تقریبهایی برای سری نامتناهی به صورت مجموعهای جزئی رسم کنیم . فرض کنید $S_N$ مجموع $N$ جملهٔ اوّل یک سری نامتناهی باشد، در این مثال

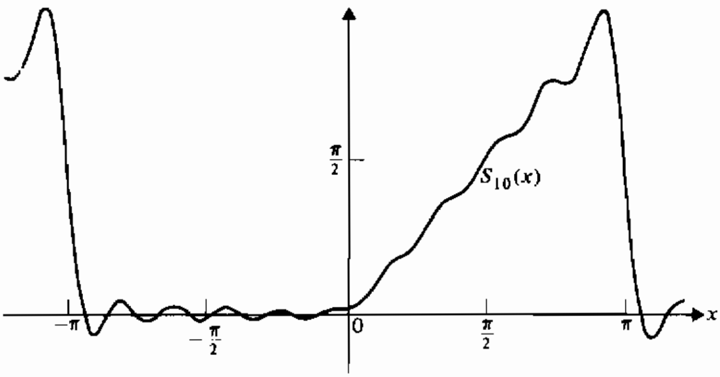
$$S_N=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{N}\left(-\frac{2}{\pi}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right). \qquad (۲۰-۱-۳)$$

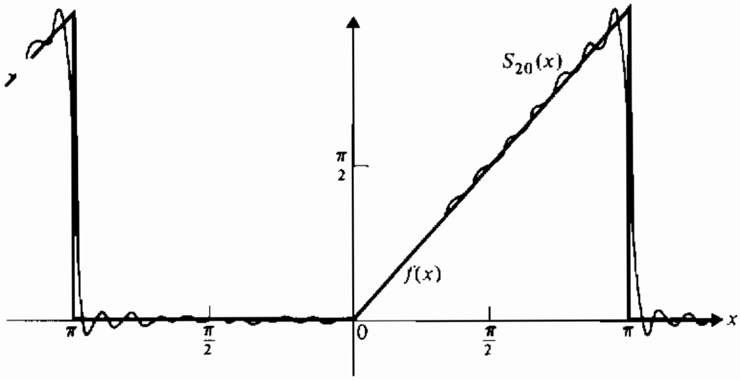
نمودارهای معادلهٔ (۳-۱-۲۰) در شکل ۳-۱-۸ برای $N=$ ۵، ۱۰، ۲۰ نشان داده شده اند . به مشابهت نسبةً خوب $S_5$ با تابع اصلی توجه کنید .

در شکل ۳-۱-۸ **فراجهش** در $x=\pi^-$ و **فروجهش** در $x=\pi^+$ یکی از مشخصه های سری فوریه (و سایر سریها) در نقاط ناپیوستگی است و به **پدیده گیبس*** مشهور است. عموماً فراجهش و فروجهش هر دو در حدود ۱۸ درصد مقادیر تابع در یک نقطهٔ ناپیوستگی است . این پدیده حتی اگر تعداد زیادی جملهٔ سری با هم جمع شوند، باز هم وجود دارد . یک نمودار تولید شده به وسیلهٔ کامپیوتر از پدیده گیبس در شکل ۳-۱-۹ نشان داده شده است . در این جا تابع $f(x)=1$ توسط $S_N$ برای $N=$ ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴ نمایش داده شده است . با افزایش $N$ بالاترین نقطه در نمودارها به ناپیوستگی در $x=1$ نزدیک می شود ولی فراجهش تقریباً ۱/۰۹ باقی می ماند .

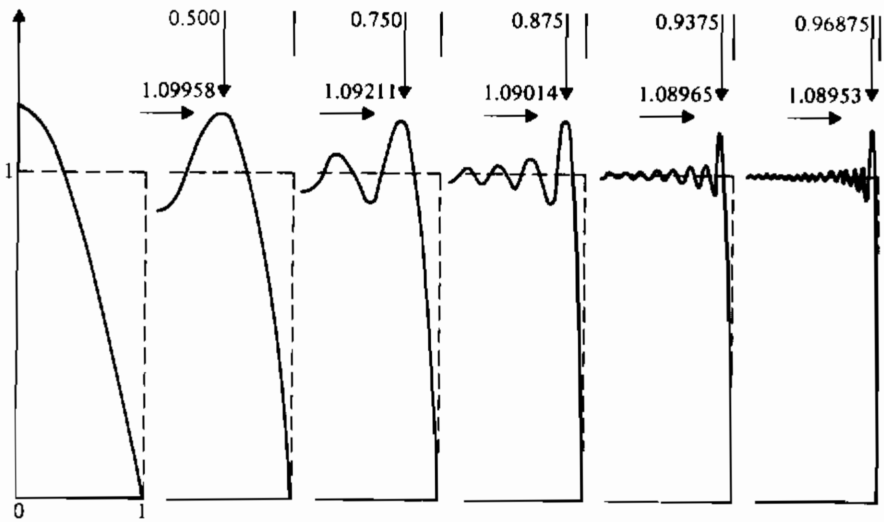
* Josiah W. Gibbs، (۱۸۳۹-۱۹۰۳) فیزیک دان و ریاضی دان امریکایی




شکل ۳-۱-۸ نمودار معادلهٔ (۳-۱-۲۰) برای N = ۵, ۱۰, ۲۰



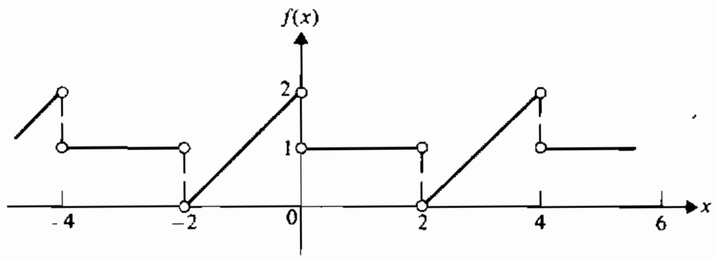

شکل ۳-۱-۹ پدیدهٔ گیبس

**مثال ۳-۱-۲** نمایش سری فوریهٔ تابع زیر را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 2, \end{cases}$$
$$f(x + 4) = f(x).$$

*حل* : این تابع که در شکل ۳-۱-۱۰ نشان داده شده است همهٔ شرایط قضیهٔ ۳-۱-۱ را دارد جز این‌که دورهٔ تناوب آن به جای $2\pi$ برابر ۴ است . ولی بآسانی می توانیم این مشکل را با تغییری در مقیاس برطبق تناسب زیر برطرف سازیم

$$\frac{x}{\pi} = \frac{t}{2}.$$




شکل ۳-۱-۱۰

پس $x = \pi t/2$ ، $dx = \pi\ dt/2$ ، بنابراین معادله های (۳-۱-۱۱) و (۳-۱-۱۲) به صورتهای زیر در می آیند

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(s)\cos\frac{n\pi s}{2}\,ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

و

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(s)\sin\frac{n\pi s}{2}\,ds, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

پس داریم

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} (s+2)\cos\frac{n\pi s}{2}\,ds + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi s}{2}\,ds$$

$= \dfrac{4}{n^2\pi^2}$ اگر $n$ فرد باشد، در غیر این صورت $0$

$$a_0 = 2;$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} (s+2)\sin\frac{n\pi s}{2}\,ds + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi s}{2}\,ds$$

$= -\dfrac{2}{n\pi}$ اگر $n$ زوج باشد، در غیر این صورت $0$

بنابراین

$$f(x) \sim 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi x}{m}. \qquad (۳-۱-۲۱)$$

همگرایی نمایش سری فوریهٔ یک تابع را مورد بحث قرار دادیم (قضیهٔ (۳-۱-۱)) . کوشش کردیم تا همگرایی را با نمودار و با رسم مجموعهای جزئی $S_N$ در شکلهای ۳-۱-۸ و ۳-۱-۹ نشان دهیم . حال به مسألهٔ همگرایی با تفصیل بیشتر خواهیم پرداخت .

مانند قبل فرض کنید $S_N(x)$ مجموعهای جزئی نمایش سری فوریهٔ تابع $f(x)$ بر $[-\pi, \pi]$ را نشان دهد . انتظار داریم که عبارت

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x))^2\,dx$$

«کوچک» باشد، چون معیاری برای اندازهٔ خطای نمایش است. اگر برای کلاس معینی از توابع $f$،

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x))^2 \, dx = 0, \qquad (۳-۱-۲۲)$$

آن گاه گفته می شود که توابع متعامد یکه (۳-۱-۱۸) یک ***مجموعهٔ کامل*** نسبت به کلاس مفروض تشکیل می دهند. عبارتی معادل برای بیان معادلهٔ (۳-۱-۲۲) چنین است

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\; S_N(x) = f(x), \qquad (۳-۱-۲۳)$$

که "l.i.m" را «حد در میانگین» می خوانیم و می گوییم $S_N(x)$ در ***میانگین همگرا*** به $f(x)$ است. می توان نشان داد که مجموعهٔ متعامد یکهٔ توابع مثلثاتی (۳-۱-۱۸) نسبت به کلاس همه ***توابع تکه ای ـ هموار کامل*** است. واضح است که کامل بودن خاصیتی مهم در مجموعه ای از توابع متعامد یکه است و در بخشهای ۴-۵، ۵-۳، و ۵-۴ به این خاصیت اشاره خواهیم نمود.

این بخش را با ارائه یک نتیجهٔ مفید که از نمایش سری فوریه در (۳-۱-۱۲) به دست می آید به پایان می بریم. اگر قرار دهیم $x = 0$، آن گاه

$$f(0) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}.$$

اما از قضیهٔ ۳-۱-۱ می دانیم که $f(0) = \frac{3}{2}$ (چرا؟). بنابراین

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

این نتیجه را با روشهای دیگر نیز می توان به دست آورد.

## تمرینها ۳-۱

۱- الف) نشان دهید اگر $n \neq m$، آن گاه

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0,$$

ب)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi.$$

۲- هریک از روابط زیر را ثابت کنید

الف) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0$

ب) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \qquad n \neq m$

پ) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi, \quad n = 1, 2, \ldots$

۳- نشان دهید مجموعهٔ توابع در (۳-۱-۱۸) بربازهٔ $(-\pi, \pi)$ با تابع وزن $w(x) = 1$ یک مجموعهٔ متعامد یکه است.

۴- نشان دهید تابع $f(x)$ در مثال ۳-۱-۲ بربازهٔ $-2 < x < 2$ تکه ای ـ هموار است.

۵- محاسبه های مثال ۳-۱-۲ را بتفصیل انجام دهید.

۶- تحقیق کنید هریک از توابع زیر تابعی فرد است. برای این کار نشان دهید هرکدام خاصیت $F(-x) = -F(x)$ را دارد.

الف) $x^3$ ب) $\tan x$

پ) $\csc x$ ت) $\sinh x$

۷- تحقیق کنید هریک از توابع زیر تابعی زوج است. برای این کار نشان دهید هرکدام خاصیت $F(-x) = F(x)$ را دارد.

الف) ۱ ب) $\cos x$ پ) $\sec x$

ت) $\cosh x$ ث) $(x-a)^2$

۸- نشان دهید هریک از توابع زیر نه فرد است و نه زوج

الف) $ax^2 + bx + c$ ب) $\log x$

پ) $e^x$ ت) $x^2/(1+x)$

۹- جدول ضرب زیر را که مربوط به ضرب توابع فرد و زوج است به دست آورید

| $x$ | فرد | زوج |
|---|---|---|
| فرد | زوج | فرد |
| زوج | فرد | زوج |

(توجه : درآیهٔ سطر اوّل و ستون دوم نشان می دهد که حاصل ضرب یک تابع فرد و یک تابع زوج تابعی فرد است.)

۱۰- نشان دهید تابع $f(x) = c$ ، $c$ ثابت، به ازای هر مقدار $p$ ، تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $p$ است .

۱۱- کوچکترین مقدار $p$ که به ازای آن $f(x+p) = f(x)$ ، دورهٔ تناوب اساسی تابع $f(x)$ نامیده می شود . دورهٔ تناوب اساسی هریک از توابع زیر را بیابید .

الف) $\sin \frac{1}{2} x$ ب) $\cos 2x$ پ) $\cos 3\pi x$

ت) $\sin \pi x$ ث) $\cos \frac{\pi}{2} x$

۱۲- الف) اگر در معادلهٔ (۳-۱-۹) داشته باشیم $f(x) = 1$ ، انتگرال را محاسبه کنید و $u(x, y)$ را بیابید.

ب) فرض کنید که از سری نامتناهی بتوان جمله به جمله مشتق گرفت . نشان دهید تابع $u(x, y)$ که در قسمت (الف) به دست می آید در معادلهٔ لاپلاس صدق می کند .

۱۳- اگر در معادلهٔ (۳-۱-۹) داشته باشیم $f(x) = x$ ، انتگرال را محاسبه کنید و $u(x, y)$ را بیابید.

۱۴- با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۱۳ ، و قرار دادن $b = 2$ و استفاده از جدول یا ماشین حساب، $u(\pi/2, 1)$ را با سه رقم اعشار حساب کنید .

۱۵- الف) ثابت کنید

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

برای اثبات $f(2)$ را از معادلهٔ (۳-۱-۲۱) محاسبه کنید .

ب) ده جملهٔ اوّل سری در قسمت (الف) را محاسبه و نتیجهٔ حاصل را با مقدار واقعی مقایسه کنید .

۱۶- ثابت کنید اگر یک تابع متناوب دارای دورهٔ تناوب $p$ باشد، آن گاه با دورهٔ تناوب $np$ ، $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ نیز متناوب است .

۱۷- اگر $f(x) = x - x^2$ که $0 < x < 1$ و $f(x)$ متناوب با دورهٔ تناوب ۱ باشد، نشان دهید $f(x)$ تابعی زوج است .

۱۸- نشان دهید، اگرچه بیشتر توابع نه فردند و نه زوج، هر تابع تعریف شده بر $(-c, c)$ را می توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد با توجه به اتحاد زیر نوشت

$$f(x) \equiv \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

۱۹- نشان دهید مجموعهٔ توابع مثلثاتی

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, n = 1, 2, \ldots\right\}$$

نسبت به کلاس توابع پیوسته بر $[-\pi, \pi]$ کامل **نیست** . برای این کار نشان دهید $f(x) = \sin x$ را نمی توان به صورت یک سری از توابع در مجموعهٔ داده شده نوشت .

## ۳-۲ سریهای سینوسی، کسینوسی و نمایی

در بسیاری از کاربردهای سری فوریه، تابع $f(x)$ بر بازه ای به صورت $0 < x < L$ تعریف می شود . در این صورت تابع را می توان به صورت یک سری فقط شامل جملات سینوسی یا یک سری فقط شامل جملات کسینوسی نوشت، این کار به ترتیب با ساختن یک ***توسیع تناوبی*** فرد یا زوج از تابع داده شده انجام می شود .

با تعمیم فرمولهای مثال ۳-۱-۲، داریم (تمرینهای ۱، ۲، و ۳)

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad (۳-۲-۱)$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(s)\cos\frac{n\pi s}{L}\,ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۳-۲-۲)$$

و

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(s)\sin\frac{n\pi s}{L}\,ds, \qquad n = 1, 2, \ldots . \qquad (۳-۲-۳)$$

توجه کنید که سه رابطهٔ فوق در حالت $L = \pi$ به معادلات (۳-۱-۱۰)، (۳-۱-۱۱)، و (۳-۱-۱۲) تبدیل می شوند .

### سری کسینوسی

اگر $f(x)$ بر $0 < x < L$ تعریف شده باشد و بخواهیم آن را به صورت یک سری از

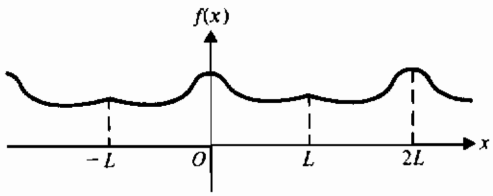
کسینوسها نمایش دهیم یک **توسیع تناوبی زوج** از $f(x)$ مطابق شکل ۳-۲-۱ بنا می کنیم . تابع حاصل که به صورت

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L, \\ f(-x), & -L < x < 0, \end{cases}$$

$$f(x + 2L) = f(x), \qquad f(0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(\varepsilon), \qquad f(L) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(L - \varepsilon),$$

تعریف می شود یک تابع تناوبی زوج است؛ پس $b_n \equiv 0$ ، $n = 1, 2, \ldots$ و فرمول (۳-۲-۲) را می توان به صورت زیر ساده نمود

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(s) \cos \frac{n\pi s}{L}\, ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{۳-۲-۴}$$




شکل ۳-۲-۱ توسیع تناوبی زوج

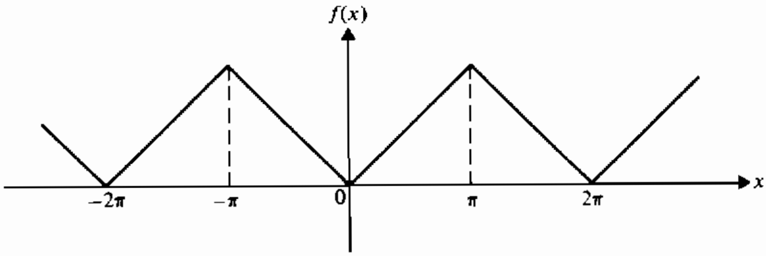
**مثال ۳-۲-۱** نمایش سری فوریهٔ کسینوسی تابع $f(x) = x$ ، $0 \le x \le \pi$ را به دست آورید .

***حل*** : توسیع تناوبی زوج تابع در شکل ۳-۲-۲ نشان داده شده است . با استفاده از معادلهٔ (۳-۲-۴) داریم

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi s \cos ns\, ds,$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{زوج } n \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi s\, ds = \pi.$$




شکل ۳-۲-۲

بنابراین سری مطلوب به صورت زیر نوشته می شود (تمرین ۵)

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos (2m-1)x}{(2m-1)^2}. \qquad (۳-۲-۵)$$

***سری سینوسی***

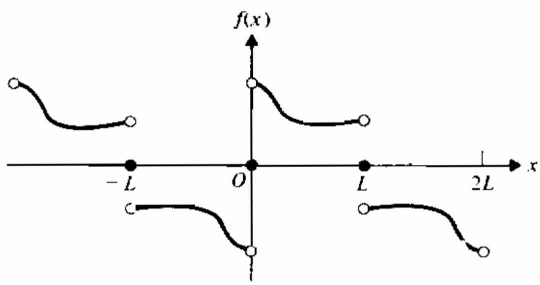
اگر $f(x)$ بر $0 < x < L$ تعریف شده باشد و بخواهیم آن را به صورت یک سری از سینوسها نمایش دهیم یک **توسیع تناوبی فرد** از $f(x)$ مطابق شکل ۳-۲-۳ بنا می کنیم . تابع حاصل که به صورت

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L, \\ -f(-x), & -L < x < 0, \end{cases}$$

$$f(x+2L) = f(x), \qquad f(0) = f(L) = 0,$$

تعریف می شود یک تابع تناوبی فرد است، پس $a_n \equiv 0$ ، $n = 0, 1, 2, \ldots$ و معادلهٔ (۳-۲-۳) را به صورت زیر می توان ساده نمود

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(s) \sin \frac{n\pi s}{L}\, ds, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (۳-۲-۶)$$




شکل ۳-۲-۳ توسیع تناوبی فرد

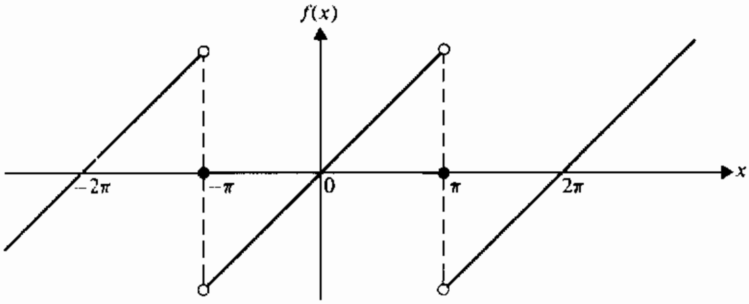
**مثال ۳-۲-۲** نمایش سری فوریهٔ سینوسی تابع $f(x) = x$ ، $0 \le x < \pi$ ، $f(\pi) = 0$ را به دست آورید .

*حل* : توسیع تناوبی فرد تابع در شکل ۳-۲-۴ نشان داده شده است . با استفاده از معادلهٔ (۳-۲-۶) داریم

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi s \sin ns \, ds = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

بنابراین سری مطلوب به صورت زیر نوشته می شود (تمرین ۷)

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}. \qquad (۳-۲-۷)$$




شکل ۳-۲-۴

باید توجه داشت اگرچه عبارتهای (۳-۱-۱۹) ، (۳-۲-۵) ، و (۳-۲-۷) همگی متفاوت هستند ، ولی همهٔ آنها تابع $f(x) = x$ را بر بازهٔ $0 < x < \pi$ نمایش می دهند . این کارایی نمایشِ سری فوریه آن را روشی با ارزش در ریاضیات کاربردی می سازد . قبلاً دیده ایم که در بعضی از مسائل مقدار مرزی لازم است که تابعی مفروض را به صورت یک سری سینوسی (با معادلهٔ ۳-۱-۳ مقایسه کنید) نمایش دهیم و در فصلهای ۴ و ۵ خواهیم دید که در بعضی از مسائل ممکن است سری کسینوسی مورد نیاز باشد . تمرینهای پایان این بخش برای تشریح هر دو نمایش طرح شده اند .

### *سری نمایی*

یک شکل مفید دیگر سریهای فوریه ، ***شکل نمایی*** است . این سری از شکل متعارف

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

(معادلهٔ ۳-۱-۱۰ را ببینید)، و با استفاده از فرمولهای اویلر زیر به دست می‌آید

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx.$$

داریم

$$\cos nx = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}),$$

$$\sin nx = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}),$$

پس می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e^{inx} + e^{-inx}) - ib_n(e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)e^{inx} + (a_n + ib_n)e^{-inx} \end{aligned}$$

حال اگر ضرایب فوریهٔ مختلط را به صورت زیر تعریف کنیم

$$c_0 = \tfrac{1}{2}a_0, \quad c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n = 1, 2, \dots, \qquad (۳-۲-۸)$$

داریم

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad (۳-۲-۹)$$

که ***شکل مختلط*** (یا شکل نمایی) سری فوریه است. از این شکل عموماً به خاطر سادگی نماد در فیزیک و مهندسی استفاده می‌شود.

در به دست آوردن شکل نمایی فرض کردیم که $f(x)$ دارای دورهٔ تناوب $2\pi$ باشد، اما این شرط فقط به خاطر سادگی نماد است. اگر دورهٔ تناوب $2L$ باشد، می‌نویسیم

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

و تغییرات متناظر را برای $c_n$ نیز در نظر می گیریم . جزئیات این تغییرات و نیز به دست آوردن فرمول

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\,ds, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots, \tag{۳-۲-۱۰}$$

به عنوان تمرین گذاشته می شود .

### *مشتق گیری از سریهای فوریه*

در مثال ۳-۲-۱ نمایش زیر را برای تابع $f(x) = x$ ، $0 \le x \le \pi$ به دست آوریم

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2} \tag{۳-۲-۵}$$

اگر از دو طرف معادلهٔ (۳-۲-۵) مشتق بگیریم، به دست می آوریم

$$f'(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}.$$

می توان نشان داد (تمرین ۲۴) که سری فوق نمایش $f'(x) = 1$ بر بازهٔ $0 < x < \pi$ است و چنان که انتظار می رود، $f'(0) = f'(\pi) = 0$. از طرف دیگر، اگر از (۳-۲-۷) مشتق بگیریم، داریم

$$f'(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos nx,$$

این سری به ازای هیچ مقداری از $x$ همگرا نیست، زیرا حد جملهٔ $n$ ام وقتی $n \to \infty$ ، به سمت صفر میل نمی کند، یعنی شرط لازم همگرایی را ندارد . واضح است، شرایطی که تحت آن شرایط می توان از نمایش سری فوریه، جمله به جمله مشتق گرفت باید بررسی شوند . شرایط کافی در قضیهٔ زیر داده می شوند که آن را بدون اثبات می پذیریم .

**قضیهٔ ۳-۲-۱** : فرض کنید $f(x)$ بر $-\pi \le x \le \pi$ دارای نمایش سری فوریه به صورت زیر باشد

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

که

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos ns\, ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

و

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin ns\, ds, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

آن گاه نمایش سری فوریه در هر نقطه ای که $f''(x)$ موجود باشد مشتق پذیر است، به شرط آن که بر $-\pi \le x \le \pi$ ، $f(x)$ پیوسته و $f'(x)$ تکه ای ـ پیوسته باشد و $f(-\pi) = f(\pi)$ . علاوه بر این

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin nx + b_n \cos nx), \qquad -\pi < x < \pi.$$

### *انتگرال گیری از یک سری فوریه*

انتگرال گیری از یک سری فوریه کار خیلی ساده تری است . این انتظار هم هست، زیرا انتگرال گیری یک فرآیند «هموار کردن» است که ناپیوستگیها را از بین می برد، در حالی که مشتق گیری اثری متقابل دارد . قضیهٔ زیر برای انتگرال گیری از یک سری فوریه به کار می رود .

**قضیهٔ ۳-۲-۲ :** فرض کنید $f(x)$ بر $-\pi < x < \pi$ تکه ای ـ پیوسته و دارای نمایش سری فوریه

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

باشد که مقادیر $a_n$ و $b_n$ مانند قبل هستند . آن گاه برای $-\pi \le x \le \pi$ ،

$$\int_{-\pi}^{x} f(s)\, ds = \frac{1}{2}a_0(x+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(a_n \sin nx - b_n(\cos nx - \cos n\pi)\right)$$

### تمرینهای ۳-۲

۱- هریک از روابط تعامدی زیر را ثابت کنید .

الف) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = 0$

ب) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = 0, \qquad n \ne m$

پ)
$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0, \qquad n \neq m$$

۲- نشان دهید

$$\int_{-L}^{L} \sin^2\frac{n\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L} \cos^2\frac{n\pi x}{L}\,dx = L, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

۳- با استفاده از نتایج تمرینهای ۱ و ۲ ، دربارهٔ مجموعهٔ زیر چه می توان گفت ؟

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{\cos\frac{n\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\sin\frac{n\pi x}{L}}{\sqrt{L}}\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots ?$$

۴- توضیح دهید چگونه تابع مثال ۳-۲-۱ در تعریف توسیع تناوبی زوج که در متن داده شد صدق می کند .

۵- جزئیات لازم برای به دست آوردن نتیجهٔ (۳-۲-۵) را در مثال ۳-۲-۱ انجام دهید .

۶- توضیح دهید چگونه تابع مثال ۳-۲-۲ در تعریف توسیع تناوبی فرد که در متن داده شد صدق می کند .

۷- جزئیات لازم برای به دست آوردن نتیجهٔ (۳-۲-۷) را در مثال ۳-۲-۲ انجام دهید .

۸- الف) نشان دهید

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2\pi, & n = m. \end{cases}$$

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) مجموعه ای به دست آورید که بر $[-\pi, \pi]$ متعامد یکه باشد . (توجه : نوع تعامد در این جا ، ***تعامد هرمیتی**** نامیده می شود . اگر مجموعه ای از توابع مختلط از متغیر حقیقی $x$ مانند

$$\{\phi_n(x)\}, \qquad n = 1, 2, \ldots ,$$

دارای خاصیت

$$\int_a^b \phi_n(x)\overline{\phi_m(x)}\,dx = 0, \qquad n \neq m,$$

باشند ، آن گاه مجموعه بر $(a, b)$ با تابع وزن ۱ (به مفهوم هرمیتی) متعامد نامیده می شود . علامت بار مزدوج مختلط را نشان می دهد (بخش ۱۰-۱ را ملاحظه

* Charles Hermite ، (۱۸۲۲-۱۹۰۱) ریاضی دان فرانسوی

کنید) . در حالتی که توابع حقیقی باشند، تعریف فوق همان تعریف تعامد در تعریف ۳-۱-۱ است .

در تمرینهای ۹ تا ۱۴ ، (الف) نمایش فوریهٔ سینوسی و (ب) نمایش فوریهٔ کسینوسی توابع داده شده را به دست آورید .

۹- $f(x) = 2 - x, \quad 0 < x \le 2$

۱۰- $f(x) = a, \quad 0 < x \le 3, \quad a > 0$

۱۱- $f(x) = x^2, \quad 0 \le x < 1$

۱۲- $f(x) = e^x, \quad 0 < x < 2$

۱۳- $f(x) = \sin \pi x, \quad 0 \le x < 1$

۱۴- $f(x) = \cos x, \quad 0 < x \le \pi/2$

۱۵- تابع تمرین ۱۱ را با یک سری فوریه که شامل سینوس و کسینوس باشد نمایش دهید . (*راهنمایی* : یک توسیع تناوبی تعریف کنید که نه فرد و نه زوج باشد . برای این کار بی‌نهایت راه وجود دارد . )

۱۶- یک نمایش سری فوریهٔ سینوسی برای تابع $1 - x$ بر بازهٔ $1 < x < 2$ بیابید .

۱۷- یک نمایش سری فوریهٔ کسینوسی برای تابع $x - 1$ بر بازهٔ $1 < x < 2$ بیابید .

۱۸- الف) نمایش سری فوریهٔ تابع زیر را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x \le 0, \\ -x + 1, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

$$f(x + 2) = f(x).$$

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) نشان دهید

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

۱۹- نمایش سری فوریه سینوسی تابع $f(x) = 1$ ، $0 < x < \pi$ ، $f(0) = f(\pi) = 0$ را بیابید .

۲۰- هریک از روابط زیر را به دست آورید

الف) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$$

ب) $$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + + - - \cdots\right)$$

(*راهنمایی* : از نتیجهٔ تمرین ۱۹ با مقادیر مناسب برای x استفاده کنید . )

۲۱- تابع مثلثی زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 1 < x < 2, \\ x - 2, & 2 < x < 3. \end{cases}$$

الف) یک نمایش فوریهٔ سینوسی از این تابع به دست آورید .

ب) یک نمایش فوریهٔ کسینوسی از این تابع به دست آورید .

۲۲- تابع زیر مفروض است

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2, \\ -1, & -2 < x < 0, \end{cases}$$

$$f(x + 4) = f(x),\ f(0) = f(2) = 0$$

شکل نمایی نمایش سری فوریهٔ این تابع را بنویسید . (*راهنمایی* : تمرین ۳۰ را برای ضرایب ملاحظه کنید)

۲۳- تابع زیر مفروض است

$$f(x) = 1, \qquad -\infty < x < \infty,$$

شکل نمایی نمایش سری فوریهٔ این تابع را بنویسید .

۲۴- نشان دهید اگر از تابع $f(x)$ در (۳-۲-۵) مشتق گرفته شود، نتیجه برای $0 < x < \pi$ همگرا به $f'(x)$ است و در $x = 0$ و $x = \pi$ همگرا به صفر است . نمودار $f'(x)$ را رسم کنید و آن را با نمودار $f(x)$ که در متن نشان داده شد، مقایسه کنید .

۲۵- توضیح دهید چگونه $f(x)$ در (۳-۲-۵) در شرایط قضیهٔ ۳-۲-۱ صدق می کند .

۲۶- از چه جهاتی تابع (۳-۲-۷) در شرایط قضیهٔ ۳-۲-۱ صدق نمی کند ؟

۲۷- یک نمایش سری فوریه برای $f(x) = x$ بر بازهٔ $0 \le x < 1$ با مشتق گیری از نمایش $x^2$ در تمرین ۱۱ به دست آورید . به ازای چه مقادیری از $x$ نتیجه معتبر است ؟

۲۸- نشان دهید مجموعهٔ

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

بر $[0, L]$ یک مجموعهٔ متعامد یکه است . *راهنمایی* : از فرمول زیر استفاده کنید

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}}{2i}.$$

۲۹- فرمول (۳-۲-۱۰) را از معادله های (۳-۱-۱۱)، (۳-۱-۱۲)، و (۳-۲-۸) به دست آورید .

۳۰- نشان دهید برای یک تابع، با دورهٔ تناوب $2L$ ضرایب فوریهٔ مختلط به صورت زیر داده می شوند

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(s)e^{-in\pi s/L}ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

۳۱- توابع پله ای در مدل سازی کنترلهای قطع ـ وصل در سیستمهای مکانیکی پیش می آیند. چنین تابعی به صورت زیر داده می شود

$$f(x) = (-1)^n h, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n < x < n + 1.$$

الف) تابع را رسم کنید.

ب) نمایش سری فوریهٔ این تابع را به دست آورید.

پ) اوّلین جملهٔ نمایش سری فوریه را رسم کنید.

ت) دو جملهٔ اوّل نمایش سری فوریه را رسم کنید.

۳۲- تابع زیر داده شده است

$$f(x) = 2 - x, \qquad 0 < x < 2,$$

تابعی تعریف کنید که نمایش سری فوریهٔ سینوسی آن به ازای همهٔ مقادیر $x$ همگرا به $f(x)$ باشد. (توجه: جواب منحصر به فرد نیست.)

## ۳-۳ انتگرالهای فوریه و تبدیلات

توسیعی از سری فوریه به انتگرال فوریه که در زیر آمده است به جای آن که دلیل ریاضی داشته باشد جنبهٔ توجیهی دارد؛ زیرا بررسی دقیق این موضوع ما را از بحث اصلی خیلی دور خواهد کرد.

هر تابع تناوبی $f(x)$ را که در شرایط دیریکله، قضیهٔ ۳-۱-۱ صدق کند می توان با یک سری فوریه نمایش داد. شرایط دیریکله کافی هستند، ولی لازم نیستند. نمایش به این مفهوم است که سری به میانگین یا مقدار متوسط تابع در نقاطی که $f(x)$ ناپیوستگی جهشی دارد میل می کند.

برای مثال، تابع

$$f(x) = e^{-|x|}, \qquad -L < x < L, \qquad (۱-۳-۳)$$
$$f(x + 2L) = f(x)$$

دارای نمایش سری فوریهٔ زیر است

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad (۲-۳-۳)$$

که

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(s)\cos\frac{n\pi s}{L}\,ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(s)\sin\frac{n\pi s}{L}\,ds, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

در این جا از $s$ به عنوان متغیّر ظاهری انتگرال گیری استفاده شده است . برای مثال داده شده با معادله های (۳-۳-۱) برای همهٔ مقادیر $n$ ، داریم $b_n = 0$ و برای $a_n$ یک فرمول ساده به دست می آید، زیرا $f(x)$ تابعی زوج است .

اگر تابع تعریف شده با معادله های (۳-۳-۱) را با $f_L(x)$ نشان دهیم، که در آن $L$ نشانهٔ تناوبی بودن تابع و برابر نصف دورهٔ تناوب است، آن گاه یک مطلب بدیهی به دست می آید . نمایش سری فوریهٔ داده شده در (۳-۳-۲) برای هر مقدار بزرگ ولی متناهی $L$ معتبر است. بنابراین طبیعی است که تابع $f(x)$ را که به صورت زیر تعریف می شود، بررسی کنیم

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x).$$

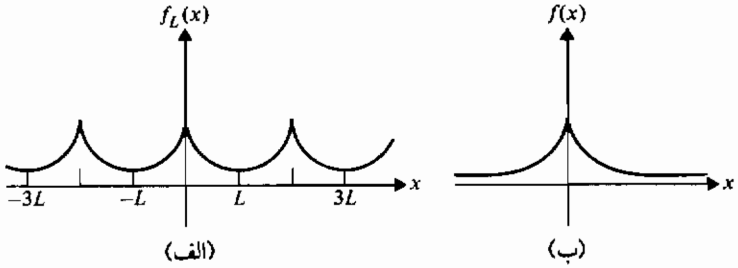
نمودارهای توابع $f(x)$ و $f_L(x)$ در شکل ۳-۳-۱ نشان داده شده اند . حال تابع $f(x)$ دیگر متناوب نیست ولی تکه ای ـ هموار است . یک شرط دیگر روی $f(x)$ می گذاریم، یعنی فرض می کنیم بر خط حقیقی بطور مطلق انتگرال پذیر باشد، به این معنی که

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

متناهی باشد . برای تابع مورد بحث خودمان داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-|x|}|\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 2\lim_{L\to\infty}\int_0^L e^{-x}\,dx.$$

بسادگی می توان نشان داد که مقدار انتگرال برابر ۲ است (تمرین ۱) . چنان که معمول است به جای $\lim_{L\to\infty}\int_0^L f(x)\,dx$ می نویسیم $\int_0^\infty f(x)\,dx$




شکل ۳-۳-۱ (الف) تابع تناوبی. (ب) تابع غیرتناوبی

حال با جای گذاری $\alpha_n = n\pi/L$ و قرار دادن مقادیر $a_n$ و $b_n$ در (۳-۳-۲)، داریم

$$f_L(x) \sim \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(s)\,ds + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\cos(\alpha_n x)\int_{-L}^{L} f_L(s)\cos(\alpha_n s)\,ds + \sin(\alpha_n x)\int_{-L}^{L} f_L(s)\sin(\alpha_n s)\,ds\Big). \tag{۳-۳-۳}$$

چون

$$\Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L},$$

می توانیم (۳-۳-۳) را به صورت زیر بنویسیم

$$f_L(x) \sim \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(s)\,ds + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos(\alpha_n x)\,\Delta\alpha\int_{-L}^{L} f_L(s)\cos(\alpha_n s)\,ds + \sin(\alpha_n x)\,\Delta\alpha\int_{-L}^{L} f_L(s)\sin(\alpha_n s)\,ds\right). \tag{۴-۳-۳}$$

نمایش فوق برای تابع تکه ای ـ هموار و متناوب $f_L(x)$ برای هر مقدار متناهی $L$ معتبر است.

حال $L$ را به $\infty$ میل می دهیم. در آن صورت انتگرال اوّل طرف راست (۳-۳-۴)

به سمت صفر میل می کند زیرا $f(x)$ بطور مطلق انتگرال پذیر است*. علاوه براین موجه به نظر می رسد که سری نامتناهی برابر یک انتگرال از 0 تا $\infty$ شود . پس

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\cos(\alpha x)\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cos(\alpha s)\,ds + \sin(\alpha x)\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\sin(\alpha s)\,ds\right)d\alpha, \qquad (۵-۳-۳)$$

که نمایش ***انتگرال فوریه*** $f(x)$ است . معادلهٔ (۳-۳-۵) اغلب به شکل زیر نوشته می شود

$$f(x) = \int_0^{\infty}(A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x)\,d\alpha, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad (۶-۳-۳)$$

که

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cos\alpha s\,ds \qquad (۷-۳-۳)$$

و

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\sin\alpha s\,ds.$$

به شباهت نزدیک بین ضرایب در انتگرال فوریه و سری فوریه توجه کنید .

شرایط کافی برای برقراری معادلهٔ (۳-۳-۵) را به شکل قضیهٔ زیر می توان بیان نمود .

**قضیهٔ ۳-۳-۱** : اگر $f(x)$ تکه ای ـ هموار و بر خط حقیقی بطور مطلق انتگرال پذیر باشد، آن گاه $f(x)$ را می توان با یک انتگرال فوریه نمایش داد . در نقطه ای که $f(x)$ ناپیوسته است، مقدار انتگرال فوریه برابر متوسط حدهای چپ و راست $f(x)$ در آن نقطه است .

انتگرال فوریه را می توان به شکلی فشرده تر نوشت . اگر به معادلهٔ (۳-۳-۵) دقت کنیم، می بینیم که $\cos(\alpha x)$ و $\sin(\alpha x)$ به $s$ بستگی ندارند، از این رو این جملات را می توان در داخل انتگرالها قرار داد . در آن صورت داریم

---

* یادآوری می کنیم که یک انتگرال ناسره انتگرال پذیر است هرگاه بطور مطلق انتگرال پذیر باشد .

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(s)(\cos\alpha x \cos\alpha s + \sin\alpha x \sin\alpha s)\, ds\, d\alpha \qquad (۳-۳-۸)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(s)\cos\alpha(s - x)\, ds\, d\alpha. \qquad (۳-۳-۹)$$

اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، $f(s)\sin\alpha s$ تابعی فرد از متغیر $s$ است و معادلهٔ (۳-۳-۸) به صورت زیر ساده می شود

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(s)\cos\alpha x \cos\alpha s\, ds\, d\alpha. \qquad (۳-۳-۱۰)$$

اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، $f(s)\cos\alpha s$ تابعی فرد از $s$ است و معادلهٔ (۳-۳-۸) به صورت زیر ساده می شود

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(s)\sin\alpha x \sin\alpha s\, ds\, d\alpha. \qquad (۳-۳-۱۱)$$

از معادلهٔ (۳-۳-۹) می بینیم که انتگرال داخلی تابع زوج از $\alpha$ است؛ پس می توانیم بنویسیم

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(s)\cos\alpha(s - x)\, ds\, d\alpha. \qquad (۳-۳-۱۲)$$

از طرف دیگر

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(s)\sin\alpha(s - x)\, ds\, d\alpha = 0 \qquad (۳-۳-۱۳)$$

زیرا انتگرال داخلی تابعی فرد از $\alpha$ است. بنابراین با جمع معادله های (۳-۳-۱۲) و (۳-۳-۱۳) به دست می آوریم

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(s)e^{i\alpha(s-x)}\, ds\, d\alpha, \qquad (۳-۳-۱۴)$$

که ***شکل مختلط*** انتگرال فوریه است.

### تبدیل فوریه

تبدیل فوریه از معادلهٔ (۳-۳-۱۴) به صورت زیر به دست می آید. معادلهٔ (۳-۳-۱۴) را به صورت یک انتگرال مکرر می نویسیم

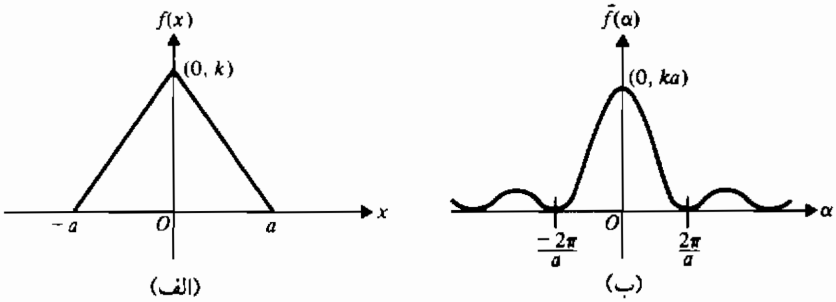
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\, d\alpha.$$

حال توجه کنید که $s$ یک متغیر ظاهری است و می توان به جای آن هر حرف دیگر، ازجمله $x$ ، را قرار داد . انتگرال اوّل تابعی است از $\alpha$ ، بنابراین جفت معادلات زیر را داریم

$$\bar{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha)e^{-i\alpha x}\, d\alpha. \qquad (۱۵-۳-۳)$$

این دو معادله را یک ***جفت تبدیل فوریه*** نامند . $\bar{f}(\alpha)$ را***تبدیل فوریهٔ*** $f(x)$ می نامیم . معادلهٔ دوم در (۳-۳-۱۵)، $f(x)$ را تعریف می کند، که تبدیل فوریهٔ معکوس $\bar{f}(\alpha)$ نامیده می شود . مثالی از یک تابع ساده و تبدیل فوریهٔ آن در شکل ۳-۳-۲ نشان داده شده است .




شکل ۳-۳-۲ یك جفت تبدیل فوریه

قبل از ارائهٔ مثالی دربارهٔ کاربرد تبدیل فوریه، ذکر چند نکته ضروری است . بعضی نویسندگان برای حفظ تقارن جفت، یک جفت تبدیل فوریه را به صورت زیر تعریف می کنند

$$\bar{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha)e^{-i\alpha x}\, d\alpha$$

بعضی دیگر علامتهای منفی را در نماها تغییر می دهند، و بعضی هم ترکیبی از این دو تغییر را به کار می برند. به علت علامت منفی فقط در یکی از نماها تقارن کامل در جفت وجود ندارد. مطلب مهم این است که هر جفت مفروض باید به معادلهٔ (۳-۳-۱۴) یا معادل آن خلاصه شود. پس در کاربردها مهم نیست که از ضریب $1/2\pi$ وقتی تابع تبدیل می شود استفاده شود، یا وقتی تبدیل معکوس یافت می شود. پس باید وقتی از جدولهای تبدیلات فوریه استفاده می کنید این مطلب را به یاد داشته باشید.

تبدیلات در ریاضیات متداولند، چون بسیاری از مسائل با استفاده از تبدیلات به صورتهایی در می آیند که بآسانی قابل حل هستند. برای مثال، لگاریتمها برای تبدیل ضرب به جمع مفیدند، تبدیل لاپلاس برای برگرداندن معادلات دیفرانسیل معمولی به معادلات جبری مفید است و تبدیل فوریه برای برگرداندن معادلات با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی مفید خواهد بود. در هر حالت یک فرآیند عکس ضروری است.

برای داشتن آمادگی برای مثال بعد، تبدیل فوریه $du/dx$ و $d^2u/dx^2$ را محاسبه می کنیم. فرض می کنیم $u$ و $du/dx$ هر دو وقتی $x \to \pm\infty$، به سمت صفر میل کنند، همچنین $u$ در شرایط دیریکله صدق کند، و بر خط حقیقی بطور مطلق انتگرال پذیر باشد. پس از انتگرال گیری جزء به جزء و استفاده از مفروضات داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dx} e^{i\alpha x} dx = ue^{i\alpha x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} ue^{i\alpha x} dx$$
$$= -i\alpha\bar{u}(\alpha), \qquad (۳-۳-۱۶)$$

برای مشتق دوم، پس از انتگرال گیری با روش جزء به جزء و استفاده از معادلهٔ (۳-۳-۱۶) داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2u}{dx^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{du}{dx} e^{i\alpha x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \alpha i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dx} e^{i\alpha x} dx$$
$$= -i\alpha(-i\alpha\bar{u}(\alpha)) = -\alpha^2\bar{u}(\alpha), \qquad (۳-۳-۱۷)$$

نتایج معادله های (۳-۳-۱۶) و (۳-۳-۱۷) را به صورت زیر نیز می توان نوشت

$$\mathscr{F}\left(\frac{du}{dx}\right) = -i\alpha\mathscr{F}(u) = -i\alpha\bar{u}(\alpha)$$

و

$$\mathscr{F}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = -\alpha^2\mathscr{F}(u) = -\alpha^2\bar{u}(\alpha),$$

با توجه به نمادگذاری درمبحث تبدیلات لاپلاس که $\mathscr{L}(f(x))$ را برای تبدیل لاپلاس $f(x)$ به کار می برند، از $\mathscr{F}(f(x))$ برای نشان دادن تبدیل فوریهٔ $f(x)$ استفاده می کنیم. علاوه بر این بین دو تبدیل با نوشتن $\bar{f}(\alpha)$ برای تبدیل فوریهٔ $f(x)$ و $F(s)$ برای تبدیل لاپلاس $f(x)$، تمایز می گذاریم.

علاوه بر جفت تبدیل فوریهٔ تعریف شده در (۳-۳-۱۵)، دو جفت فوریهٔ سینوسی و کسینوسی را نیز داریم که در بخش ۳-۴ تعریف خواهند شد. در آن جا کاربردهای این دو تبدیل را ارائه خواهیم کرد. این بخش را با یک مثال به پایان می بریم.

**مثال ۳-۳-۱** معادلهٔ حرارت یک بعدی زیر را حل کنید

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \qquad -\infty < x < \infty, \qquad 0 < t,$$

با فرض آن که $u(x, 0) = f(x)$ و $|u(x, t)| < \infty$.

**حل:** فرض می کنیم $u(x, t)$ و $u_x(x, t)$ وقتی $x \to \pm\infty$، به سمت صفر میل کنند و $f(x)$ تکه ای ـ هموار و بطور مطلق انتگرال پذیر باشد. در آن صورت $f(x)$ دارای تبدیل فوریه به صورت زیر است

$$\begin{aligned}\bar{f}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s}\,ds,\end{aligned}$$

که متغیر ظاهری انتگرال را برای جلوگیری از اشتباه عوض کرده ایم. تبدیل فوریهٔ $u_t(x, t)$ عبارت است از

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\, e^{i\alpha x}\,dx &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{i\alpha x}\,dx\\ &= \frac{\partial \bar{u}(\alpha, t)}{\partial t} = \frac{d\bar{u}(\alpha, t)}{dt},\end{aligned}$$

که فرض کرده ایم مشتق گیری و انتگرال گیری را می توان تعویض نمود و توجه داریم که $\alpha$ در به دست آوردن تبدیل نقش یک پارامتر را دارد.

با تبدیل کردن معادلهٔ با مشتقات جزئی و شرط اولّیه داده شده، به دست می آوریم

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + \alpha^2\bar{u} = 0, \qquad \bar{u}(\alpha, 0) = \bar{f}(\alpha).$$

جواب این مسأله بسادگی به دست می آید (تمرین ۴) و عبارت است از

$$\bar{u}(\alpha, t) = \bar{f}(\alpha)e^{-\alpha^2 t}.$$

با استفاده از فرمول تبدیل معکوس (۳-۳-۱۵) می توانیم $u(x, t)$ را به دست آوریم، داریم

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\alpha, t)e^{-i\alpha x}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha)e^{-\alpha^2 t}e^{-i\alpha x}\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s}e^{-\alpha^2 t}e^{-i\alpha x}\, d\alpha\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha(s-x)}e^{-\alpha^2 t}\, d\alpha\, ds.$$

حال

$$e^{-\alpha^2 t}e^{i\alpha(s-x)} = e^{-\alpha^2 t}(\cos \alpha(s-x) + i \sin \alpha(s-x))$$

و اوّلین جملهٔ این مجموع تابعی زوج از $\alpha$ است، در صورتی که جملهٔ دوم تابعی فرد از $\alpha$ است . بنابراین

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(s) \cos \alpha(s-x)e^{-\alpha^2 t}\, d\alpha\, ds. \qquad (۳\text{-}۳\text{-}۱۸)$$

ملاحظه کنید اگر $f(x)$ معلوم باشد، جواب فوق را می توان ساده کرد . در آن صورت می توان ترتیب انتگرال گیری در معادلهٔ (۳-۳-۱۸) را تغییر داد و انتگرال گیری را نسبت به $s$ انجام داد . مثالهایی از این روش را می توان در تمرینها یافت . ازنظر عملی، محاسبهٔ $u(x, t)$ در معادلهٔ (۳-۳-۱۸) را برای مقادیر مختلف $x$ و $t$ به صورت عددی می توان انجام داد . در این حالت استفاده از روش ***تبدیل فوریهٔ سریع*** (FFT) توصیه می شود .

### تمرینهای ۳-۳

۱- نشان دهید تابع

$$f(x) = e^{-|x|}$$

بر خط حقیقی بطور مطلق انتگرال پذیر است .

۲- اگر $f(x)$ بر خط حقیقی بطور مطلق انتگرال پذیر باشد و

$$\lim_{L \to \infty} f_L(x) = f(x),$$

نشان دهید

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(x)\, dx = 0.$$

۳- جزئیات انتگرال گیری با روش جزء به جزء را برای به دست آوردن معادلات (۳-۳-۱۶) و (۳-۳-۱۷) انجام دهید .

۴- جواب زیر را در مثال ۳-۳-۱ به دست آورید

$$\bar{u}(\alpha, t) = \bar{f}(\alpha)e^{-\alpha^2 t}$$

۵- معین کنید کدام یک از توابع زیر بر خط حقیقی بطور مطلق انتگرال پذیر است .

الف) $f(x) = |1 - x|$ ، $-1 \le x \le 1$

ب) $f(x) = \sin \pi x$

پ) $f(x) = x^{1/3}$

۶- از معادله های (۳-۳-۶) و (۳-۳-۷) نشان دهید اگر

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1, \end{cases}$$

آن گاه $f(x)$ در شرایط قضیهٔ ۳-۳-۱ صدق می کند، و از این رو دارای یک نمایش انتگرال فوریهٔ معتبر به ازای همهٔ مقادیر $x$ است و به صورت زیر داده می شود

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha \cos \alpha x}{\alpha}\, d\alpha, \qquad -\infty < x < \infty.$$

۷- با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۶ نشان دهید

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

۸- ثابت کنید

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad a > 0 \text{ اگر}$$

(*راهنمایی* : از یک تعویض متغیّر در تمرین ۷ استفاده کنید)

۹- تابع زیر مفروض است

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

نشان دهید $f(x)$ در شرایط قضیهٔ ۳-۳-۱ صدق می کند، از این رو دارای یک نمایش انتگرال فوریهٔ معتبر به ازای هر $x$ است و به صورت زیر داده می شود

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x}{1 + \alpha^2}\, d\alpha, \qquad -\infty < x < \infty.$$

۱۰- با استفاده از تمرین ۹ ثابت کنید

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + \alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

۱۱- نمایش انتگرال فوریهٔ تابع $e^{-|x|}$ را به دست آورید . به ازای چه مقادیری از $x$ این نمایش معتبر است؟

۱۲- نشان دهید تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & x \ge \pi, \end{cases}$$

دارای یک نمایش انتگرال فوریه به صورت زیر است

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x + \cos \alpha(\pi - x)}{1 - \alpha^2}\, d\alpha, \qquad -\infty < x < \infty.$$

۱۳- با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۱۲ نشان دهید

$$\int_0^\infty \frac{\cos (\pi\alpha/2)}{1 - \alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

۱۴- نمایش انتگرال فوریهٔ تابع زیر را به دست آورید

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(*راهنمایی* : $\sin \alpha x/(1 + x^2)$ تابع فردی از $x$ است ؛ سپس از نتیجهٔ تمرین ۱۱ با تعویض

$\alpha$ و $x$ با یکدیگر استفاده کنید .)

۱۵- نمایش انتگرال فوریهٔ تابع

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\cdot$$

را بیابید .

۱۶- نشان دهید تابع تمرین ۱۵ بطور مطلق انتگرال پذیر نیست، با وجود این نمایش انتگرال فوریهٔ آن معتبر است . آیا این مطلب قضیهٔ ۳-۳-۱ را نقض می کند؟ توضیح دهید .

۱۷- ثابت کنید تبدیل فوریه یک تبدیل خطی است .

۱۸- $f(x)$ و تبدیل فوریهٔ آن $\bar{f}(\alpha)$ را برای مثال نشان داده شده در شکل ۳-۳-۲ بیابید .

## ۳-۴ کاربردها

در این بخش با ارائه چند مثال نشان می دهیم که چگونه از تبدیلات فوریه در حل مسائل مقدار اوّلیه استفاده می شود . روشهای تبدیل بخصوص وقتی مفیدند که ناحیهٔ مورد بحث نامتناهی یا نیمه نامتناهی باشد . برای حالت اخیر شکلهای خاص تبدیل فوریه را تعریف می کنیم .

اگر $f(x)$ تابعی **فرد** باشد، جفت ***تبدیل فوریهٔ سینوسی*** را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_s(f(x)) = \bar{f}_s(\alpha) &= \int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\,dx,\\ f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \bar{f}_s(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha.\end{aligned} \qquad (۳-۴-۱)$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء تبدیل فوریهٔ سینوسی $d^2u/dx^2$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{d^2u}{dx^2}\sin\alpha x\,dx &= \frac{du}{dx}\sin\alpha x\Big|_0^\infty - \alpha\int_0^\infty \frac{du}{dx}\cos\alpha x\,dx\\ &= -\alpha\int_0^\infty \frac{du}{dx}\cos\alpha x\,dx\\ &= -\alpha u\cos\alpha x\Big|_0^\infty - \alpha^2\int_0^\infty u\sin\alpha x\,dx.\end{aligned}$$

پس

$$\mathscr{F}_s\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\right\} = \alpha u(0) - \alpha^2 \bar{u}_s(\alpha). \tag{۲-۴-۳}$$

در محاسبهٔ فوق فرض کرده ایم که $u$ و $du/dx$ وقتی $x \to \infty$ ، به سمت صفر میل می کنند و

$$\int_0^\infty |u|\,dx$$

متناهی است .

اگر $f(x)$ تابعی **زوج** باشد ، جفت ***تبدیل فوریهٔ کسینوسی*** را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_c(f(x)) = \bar{f}_c(\alpha) &= \int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx,\\ f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \bar{f}_c(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha.\end{aligned} \tag{۳-۴-۳}$$

با روشی مشابه روش قبل می توانیم تبدیل فوریهٔ کسینوسی $d^2u/dx^2$ را با همان مفروضات قبلی به صورت زیر به دست آوریم (تمرین ۱)

$$\mathscr{F}_c\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\right\} = -u'(0) - \alpha^2 \bar{u}_c(\alpha) \tag{۴-۴-۳}$$

وقتی احتمال اشتباه در کار نباشد اندیسهای "$s$" و "$c$" را برای ساده کردن نماد حذف می کنیم .

**مثال ۳-۴-۱** مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید (شکل ۳-۴-۱) .

معادله : $u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t;$

شرط مرزی : $u(0, t) = 0, \quad 0 < t;$

شرط اولیه : $u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \infty.$

***حل*** : چون $0 < x < \infty$ ، می توانیم یک توسیع فرد یا زوج از تابع داده شدهٔ $f(x)$ بنا کنیم . به عبارت دیگر ، به نظر می رسد که مسأله با استفاده از تبدیل فوریهٔ سینوسی یا کسینوسی قابل حل است . ولی ملاحظه می کنیم که در شرط مرزی مقدار $u(x, t)$ در $x = 0$ داده شده است به این دلیل تبدیل سینوسی را انتخاب می کنیم . فرض می کنیم $u$ و $du/dt$ وقتی $x \to \infty$ ، به سمت صفر میل می کنند و $u(x, t)$ و $f(x)$ هر دو بر $0 < x < \infty$ بطور مطلق انتگرال پذیرند . در این صورت

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \bar{u}(\alpha, t)\sin \alpha x \, d\alpha,$$

و اگر از معادلهٔ (۳-۴-۲) استفاده کنیم، معادلهٔ با مشتقات جزئی به صورت زیر تبدیل می شود

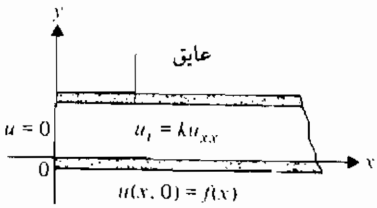
$$\frac{d\bar{u}}{dt} + \alpha^2 k \bar{u} = 0, \qquad \bar{u}(0) = \bar{f}(\alpha).$$

(مثال ۳-۳-۱ را نیز ملاحظه کنید) . بنابراین

$$\bar{u} = \bar{f}(\alpha)e^{-\alpha^2 kt}$$

و با استفاده از تبدیل سینوسی معکوس، داریم

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \bar{f}(\alpha)e^{-\alpha^2 kt}\sin \alpha x \, d\alpha.$$




شکل ۳-۴-۱

اما

$$\begin{aligned}\bar{f}(\alpha) &= \int_0^\infty f(x)\sin \alpha x \, dx \\ &= \int_0^\infty f(s)\sin \alpha s \, ds.\end{aligned}$$

بنابراین

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(s)\sin \alpha s \, ds \int_0^\infty e^{-\alpha^2 kt}\sin \alpha x \, d\alpha.$$

**مثال ۳-۴-۲** مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید .

معادله : $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t;$

شرایط مرزی : $u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty,$

$u_t(x,0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty.$

*حل* : این مسأله را می توان با روشی مشابه حل معادلهٔ گرما در مثال ۳-۳-۱ حل نمود . فرض می کنیم $u$ ، $f(x)$ ، و $g(x)$ همگی دارای تبدیلات فوریه هستند . در این صورت معادلهٔ با مشتقات جزئی به صورت زیر تبدیل می شود

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} + \alpha^2 a^2 \bar{u} = 0$$

و شرایط اوّلیه عبارتند از

$$\bar{u}(0) = \bar{f}(\alpha) \qquad \text{و} \qquad \bar{u}'(0) = \bar{g}(\alpha).$$

بنابراین

$$\bar{u}(\alpha, t) = c_1(\alpha) \cos \alpha a t + c_2(\alpha) \sin \alpha a t,$$

که $c_1(\alpha) = \bar{f}(\alpha)$ . داریم

$$\bar{u}'(\alpha, t) = -\alpha a \bar{f}(\alpha) \sin \alpha a t + c_2(\alpha)\, \alpha a \cos \alpha a t$$

و از شرط

$$\bar{u}'(0) = \bar{g}(\alpha)$$

نتیجه می شود

$$c_2(\alpha) = \bar{g}(\alpha)/\alpha a.$$

پس

$$\bar{u}(\alpha, t) = \bar{f}(\alpha) \cos \alpha a t + \frac{\bar{g}(\alpha) \sin \alpha a t}{\alpha a}$$

و

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \bar{f}(\alpha) \cos \alpha a t + \frac{\bar{g}(\alpha) \sin \alpha a t}{\alpha a} \right) e^{-i\alpha x}\, d\alpha.$$

رابطهٔ اخیر را می توان با استفاده از روابط اویلر

$$\sin x = -\tfrac{1}{2} i (e^{ix} - e^{-ix})$$

و

$$\cos x = \tfrac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}).$$

به شکل خیلی ساده تر نوشت . با استفاده از این دو رابطه جواب مسأله به صورت زیر در می آید

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha)\,\frac{e^{-i\alpha(x-at)} + e^{-i\alpha(x+at)}}{2}\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\alpha)\,\frac{e^{-i\alpha(x-at)} - e^{-i\alpha(x+at)}}{2\alpha a i}\,d\alpha.$$

اما

$$f(x-at) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha)e^{-i\alpha(x-at)}\,d\alpha,$$

بنابراین اوّلین انتگرال در جواب برابر است با

$$\tfrac{1}{2}(f(x-at) + f(x+at)).$$

علاوه بر این، از

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha,$$

به ازای مقادیر دلخواه $c$ و $d$ نتیجه می شود

$$\begin{aligned}\int_c^d g(x)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\alpha)\,d\alpha \int_c^d e^{-i\alpha x}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\alpha)\,d\alpha \left(\frac{e^{-i\alpha x}}{-i\alpha}\right)\Bigg|_c^d\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\alpha)\,\frac{e^{-i\alpha c} - e^{-i\alpha d}}{i\alpha}\,d\alpha,\end{aligned}$$

البته با این فرض که بتوان ترتیب انتگرال گیری را تغییر داد . پس

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\alpha)\,\frac{e^{-i\alpha(x-at)} - e^{-i\alpha(x+at)}}{2ai\alpha}\,d\alpha = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds$$

و جواب نهایی مسأله به شکل آشنای زیر نوشته می شود

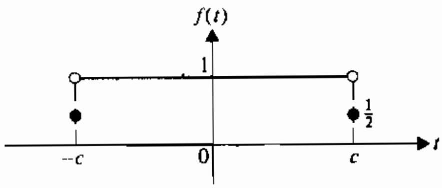
$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+at) + f(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds \qquad (۵-۴-۳)$$

(معادلهٔ ۲-۴-۸ را ملاحظه کنید)

حال یک کاربرد خاص مهم را ارائه می کنیم . فرض کنید یک تپش مستطیلی به طول زمان $2c$ داریم که به صورت زیر تعریف شده است

$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<c,\\ 0, & |t|>c,\\ \frac{1}{2}, & |t|=c.\end{cases}$$

این تپش در شکل ۳-۴-۲ نشان داده شده است .




شکل ۳-۴-۲ تپش مستطیلی

چون $f(x)$ تکه ای ـ هموار و بطور مطلق انتگرال پذیر است، می توانیم تبدیل فوریهٔ آن را (که **طیف** نیز نامیده می شود) به صورت زیر محاسبه کنیم :

$$\begin{aligned}\bar{f}(\alpha) &= \int_{-c}^{c} f(t)e^{i\alpha t}\,dt = \int_{-c}^{c} e^{i\alpha t}\,dt\\ &= \left.\frac{e^{i\alpha t}}{i\alpha}\right|_{-c}^{c} = \frac{1}{i\alpha}\left(e^{i\alpha c}-e^{-i\alpha c}\right).\end{aligned}$$

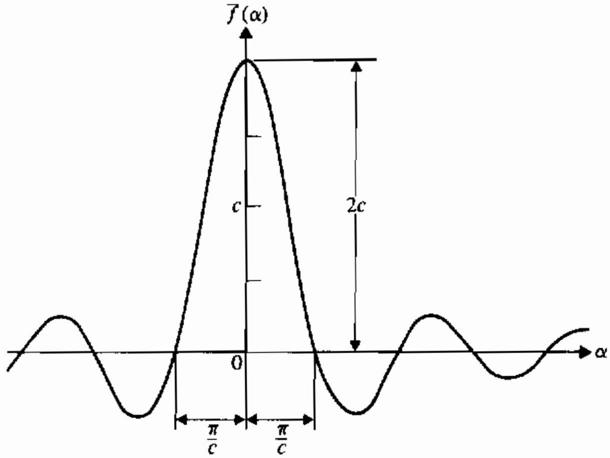
حال با استفاده از رابطهٔ

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sin x,$$

به دست می آوریم

$$\bar{f}(\alpha)=\frac{2\sin\alpha c}{\alpha}.$$

نمودار $\bar{f}(\alpha)$ ، طیف $f(t)$ ، در شکل ۳-۴-۳ نشان داده شده است .




**شکل ۳-۴-۳ طیف یك تپش مستطیلی**

توجه کنید که $\bar{f}(0)$ را می توان با استفاده از حد زیر محاسبه کرد

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1.$$

پس $\bar{f}(0)=2c$ ، همان گونه که در شکل ۳-۴-۳ نشان داده شده است. وقتی $c\to\infty$ ، تپش $f(t)$ با زمان بزرگ می شود. از طرف دیگر، قلهٔ مرکزی $\bar{f}(\alpha)$ بطور فزاینده ای بلندتر و باریکتر می شود. بنابراین بیشترین انرژی تپش درون این قلهٔ مرکزی به عرض $2\pi/c$ قرار می گیرد. بنابراین هرچه تپش طویلتر باشد، عرض ***نوار طیفی*** که انرژی در آن متمرکز شده است، باریکتر می شود.

اگر $\alpha$ را به عنوان بسامد زاویه ای $(\alpha=2\pi f)$ در نظر بگیریم و فرض کنیم $\Delta\alpha$ بسامد زاویه ای جداکنندهٔ ماکزیمم $\bar{f}(\alpha)$ در $\alpha=0$ از اولّین صفر در $\alpha=\pi/c$ باشد، آن گاه $\Delta\alpha=\pi/c$ . اما، $c$ مدت متناظر با تپش در حوزهٔ زمان را نشان می دهد، که آن را $\Delta t$ می نامیم؛ پس $(\Delta\alpha)(\Delta t)=\pi$ ، یا $2\pi\,\Delta f\,\Delta t=\pi$ یا $\Delta f\,\Delta t=\frac{1}{2}$ . بنابراین یک رابطهٔ ثابت بین فاصلهٔ زمانی تپش و عرض نوار بسامد آن وجود دارد. به عبارت دیگر، شکل یک تپش در حوزهٔ زمانی و شکل دامنهٔ طیف آن در حوزهٔ بسامد مستقل نیستند. رابطه ای از این نوع مبنای اصل عدم

قطعیت هایزنبرگ* را در مکانیک کوانتومی تشکیل می دهد که به صورت رابطهٔ عدم قطعیت بین اندازه گیریهای مکان و اندازهٔ حرکت تجلی می کند .

از روابط قبل می توان فرمولی بین حوزه های زمان و بسامد به دست آورد . تصور کنید که همهٔ مؤلفه های هارمونیک (سینوسی) که با $f(\alpha)$ نشان داده شده اند، به صورت توابعی از زمان رسم شده باشند . حال اگر عرضهای از مبدأ این توابع را با هم جمع کنیم، نتیجه یک تابع پله ای $f(t)$ است . به عبارت دیگر، چون هر مؤلفهٔ هارمونیک از $t=-\infty$ تا $t=+\infty$ گسترش می یابد، برهم نهی خطی مؤلفه های هارمونیک نتیجه اش حذف کامل یکدیگر برای $|t|>c$ ، برابر واحد برای $|t|<c$ ، و برابر $\frac{1}{2}$ برای $|t|=c$ می شود . یک طریقهٔ دیگر برای بیان این مطلب به صورت ریاضی عبارت است از

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\alpha)e^{-i\alpha t}\,d\alpha.$$

در این جا یک نتیجه فرعی مهم از مثال تپش مستطیلی را ذکر می نماییم . اگر $c$ به سمت بی نهایت میل کند، انرژی تپش در باندی به پهنای صفر محدود می شود . تحت این شرط حدی، $\bar{f}(\alpha)$ ***تابع دلتای دیراک*** $\delta(\alpha)$ می شود، که دارای خواص غیرعادی زیر است

$$\delta(\alpha)=0 \quad , \quad \alpha\neq 0$$

و

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha)\,d\alpha=1.$$

تابع دلتای دیراک در معادلات دیفرانسیل معمولی وقتی توابع نیرو به صورت ضربه باشند، نقش مهمی دارد .

**مثال ۳-۴-۳** یک تابع همساز** $u(x,y)$ در صفحهٔ $xy$ بیابید که برای $y\geq 0$ کران دار باشد و

$$\lim_{y\to 0^+} u(x,y)=f(x).$$

***حل*** : معادلهٔ لاپلاس

$$u_{xx}+u_{yy}=0,$$

---

* Werneer Heisenberg ، (۱۹۰۱-۱۹۷۶) فیزیک دان آلمانی

** تابع همساز (یا تابع پتانسیل) تابعی است که در معادلهٔ لاپلاس صدق کند .

را با روش جداسازی متغیّرها حل می کنیم . این روش دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر را نتیجه می دهد

$$X'' + \alpha^2 X = 0$$

و

$$Y'' - \alpha^2 Y = 0,$$

جوابهای این معادله ها به ترتیب عبارتند از

$$X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

و

$$Y(y) = c_3 e^{\alpha y} + c_4 e^{-\alpha y},$$

چون جواب باید برای $y \geq 0$ کران دار باشد، پس $c_3$ را برابر با صفر انتخاب می کنیم . در نتیجه جواب به شکل زیر نوشته می شود

$$u(x, y) = \int_0^\infty e^{-\alpha y}(A \cos \alpha x + B \sin \alpha x)\, d\alpha$$

با در نظر گرفتن $A$ و $B$ به صورت تابعی از $\alpha$ ، می توانیم شرط مرزی داده شده را برآورده سازیم . پس

$$u(x, y) = \int_0^\infty e^{-\alpha y}(A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x)\, d\alpha$$

و

$$f(x) = \int_0^\infty (A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x)\, d\alpha.$$

با توجه به معادلهٔ (۳-۳-۵)، معادلهٔ اخیر برقرار است اگر

$$A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(s) \cos \alpha(s - x)\, ds.$$

در آن صورت

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(s) \cos \alpha(s - x)\, ds\right) e^{-\alpha y}\, d\alpha.$$

با تعویض ترتیب انتگرال گیری، داریم

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \cos \alpha(s - x)\, d\alpha \right) f(s)\, ds.$$

در نتیجه با محاسبهٔ انتگرال داخلی (تمرین ۵) به دست می آوریم

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(s)}{y^2 + (s - x)^2}\, ds.$$

مثالهای دیگر از کاربرد روشهای تبدیل برای حل مسائل مقدار مرزی در فصل ۴ داده خواهد شد . این بخش را با یک کاربرد پزشکی از آنالیز فوریه به پایان می بریم

استفاده از امواج صوتی با بسامد بالا در تشخیص پزشکی متداول شده است . امواج صوتی برخلاف اشعهٔ x عوارض جانبی ندارند و از آن می توان با اطمینان برای معاینه محل و رشد جنین استفاده نمود . قلب انسان را می توان با ارسال تپشهای کوتاه صوتی از طریق قفسهٔ سینه و ضبط انعکاسهای صدا معاینه کرد . چون بخشهای مختلف قلب دارای امپدانسهای صوتی متفاوت است، یک ***اکوکاردیوگرام*** در تشخیص مفید است . اگر $f(t)$ نشان دهندهٔ دامنهٔ یک موج الکتروکاردیوگرام باشد که با زمان متغیر است، آن گاه نمایش سری متناهی فوریهٔ $f(t)$ به شکل زیر داده می شود

$$f(t) = \sqrt{C_0} + \sum_{n=1}^{N} \sqrt{C_n} \sin(n\omega_0 t + \theta_n) + e(t).$$

در این جا $\omega_0$ بسامد اصلی سری، $2\pi$ برابر معکوس تناوب قلب است، جملهٔ $e(t)$ نشان دهنده خطای ناشی از استفاده مقدار متناهی برای $N$ است . کمیتهای $C_n$ و $\theta_n$ به ترتیب «توان» و «زاویهٔ فاز» هارمونیک $n$ ام است . ریساید* و همکارانش نشان داده اند که دانستن فقط $C_0$ و $C_1$ برای تشخیص بین افراد دارای قلب سالم و آنهایی که دارای یکی از سه نوع مشکل قلبی اند، کافی است .

## تمرینهای ۳-۴

۱- جزئیات لازم برای به دست آوردن معادلهٔ (۳-۴-۴) را انجام دهید .

۲- جواب مسأله مثال ۳-۴-۱ را پیدا کنید در صورتی که $f(x) = e^{-x}$

* D. E. Raeside, W. K. Chu, and P. A. N. Chandraratna, "Medical Application of Fourier Analysis" *SIMA Review* **20**, no. 4(1978), pp. 850-854.

$f(x) = e^{-x}$?

۳- مثال ۳-۴-۱ را حل کنید در صورتی که شرط $u_x(0, t) = 0$ جانشین $u(0, t) = 0$ شود، یعنی اگر انتهای واقع در $x = 0$ عایق شده باشد.

۴- مثال ۳-۴-۳ را با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید.

۵- در مثال ۳-۴-۳، انتگرال

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \cos \alpha(s - x)\, d\alpha$$

را محاسبه کنید و نتیجهٔ به دست آمده در متن را بیابید.

۶- نشان دهید سری فوریهٔ $f(t)$ در کاربرد پزشکی به صورتی که در متن داده شده، نوشته می شود (***راهنمایی***: اتحاد مثلثاتی مربوط به $\sin(A + B)$ را به کار برید)

۷- دمای $u(x, t)$ را در یک میلهٔ نیمه ـ نامتناهی، در صورتی که دمای اوّلیهٔ آن صفر باشد و یک انتهای آن در دمای ثابت $u_0$ نگه داری شود، به دست آورید. فرضهای لازم برای حل این مسأله را با استفاده از تبدیل فوریهٔ سینوسی بیان کنید.

۸- یک سر یک میلهٔ نیمه نامتناهی عایق بندی شده و توزیع دمای اوّلیهٔ آن با تابع $e^{-ax}$، $a > 0$ داده شده است. دمای $u(x, t)$ را با روشهای زیر بیابید:

الف) با استفاده از جداسازی متغیّرها؛

ب) با استفاده از تبدیل فوریهٔ کسینوسی.

پ) نشان دهید نتایج قسمتهای (الف) و (ب) یکسانند.

۹- دمای یک سر یک میلهٔ نیمه نامتناهی برابر صفر است و توزیع حرارت اوّلیه در آن با تابع $f(x)$ داده می شود. این مسأله را در حالت زیر حل کنید

$$f(x) = \begin{cases} u_0, & 0 < x < L, \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

(***راهنمایی***: با مثال ۳-۴-۱ مقایسه کنید.)

۱۰- الف) طیف تابع زیر را به دست آورید

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & -\pi/2 \le t \le \pi/2, \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

ب) نمودار تابع و طیف آن را رسم کنید.

۱۱- با استفاده از تبدیل فوریهٔ کسینوسی، نشان دهید دمای حالت پایا در یک تیغهٔ نیمه‌نامتناهی $y > 0$ ، وقتی لبهٔ $y = 0$ آن روی بازهٔ $|x| < c$ در دمای واحد و خارج این بازه در دمای صفر نگه‌داری شود، به صورت زیر است

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{c+x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{c-x}{y}\right)\right).$$

(*راهنمایی*: نتیجهٔ

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{-1}\sin bx\,dx = \arctan\frac{b}{a},$$

$b > 0$ ، $a > 0$ می‌تواند مفید باشد)

۱۲- جواب تمرین ۹ را برحسب ***تابع خطای***

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2}\,ds.$$

بنویسید (*راهنمایی*: از نتیجهٔ

$$\frac{\sin \alpha x}{\alpha} = \int_0^x \cos \alpha s\,ds$$

و این که تبدیل فوریهٔ

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi a}}e^{-x^2/4a}$$

برابر است با $e^{-a\alpha^2}$ ، $a > 0$ استفاده کنید.)

۱۳- یک کاربرد مهمّ تبدیل فوریه تجزیهٔ یک موج سینوسی **متناهی** به نامتناهی است. اگر $\sin \omega_0 t$ کوتاه شود بطوری که $N$ سیکل باقی بماند، آن گاه

$$f(t) = \begin{cases}\sin \omega_0 t, & |t| < \dfrac{N\pi}{\omega_0},\\ 0, & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

با استفاده از تبدیل فوریهٔ سینوسی نشان دهید

$$\bar{f}_s(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{N\pi/\omega_0}\sin \omega_0 t\,\sin \alpha t\,dt.$$

$\bar{f}_s(\omega_0)$ را محاسبه کنید و مفهوم این مقدار را توضیح دهید.

۱۴- فرض کنید $f(x)$ بر $-\infty < x < \infty$ بطور مطلق انتگرال پذیر و تبدیل فوریهٔ آن $\bar{f}(\alpha)$ باشد . نشان دهید برای $a > 0$ :

الف) $\frac{1}{a}f(x/a)$ دارای تبدیل $\bar{f}(a\alpha)$ است . ب) $f(ax)$ دارای تبدیل $\frac{1}{a}\bar{f}(\alpha/a)$ است .

پ) $\bar{f}(x)$ دارای تبدیل $2\pi f(-\alpha)$ است .

۱۵- فرض کنید $f(x)$ بر $-\infty < x < \infty$ بطور مطلق انتگرال پذیر و تبدیل فوریهٔ آن $\bar{f}(\alpha)$ باشد . به ازای هر عدد حقیقی $b$ ، نشان دهید

الف) $f(x-b)$ دارای تبدیل $e^{i\alpha b}\bar{f}(\alpha)$ است .

ب) $\frac{1}{2}(f(x-b)+f(x+b))$ دارای تبدیل فوریهٔ $(\cos \alpha b)\bar{f}(\alpha)$ است .

۱۶- معادلهٔ انتقالی که توصیف کنندهٔ توزیع نوترون از یک چشمهٔ تخت در $x = 0$ در یک محیط نامتناهی می باشد عبارت است از

$$\theta \frac{\partial \Psi(x, \theta)}{\partial x} + S\psi(x, \theta) = \frac{1}{2} nS \int_{-1}^{1} \Psi(x, \theta)\, d\theta + \delta(x)/4\pi.$$

در این جا $\Psi$ شار نوترون بر یک سانتی متر مربع در ثانیه ، $\theta$ کسینوس زاویهٔ فضایی ، $n$ تعداد هسته ها بر سانتی متر مکعب ، $\delta(x)$ تابع دلتای دیراك است ، و $S$ مجموع مقطعهای عرضی پراکندگی کشسان ، پراکندگی غیر کشسان و شکافت می باشد .

معادلهٔ فوق را می توان به وسیلهٔ تبدیل فوریه با در نظر گرفتن مراحل زیر حل نمود .

الف) معادله را در $\exp(-i\alpha x)$ ضرب کرده و نسبت به $x$ انتگرال بگیرید تا به دست آورید

$$(S + i\alpha\theta)\overline{\Psi}(\alpha, \theta) = \frac{1}{2} nS \int_{-1}^{1} \overline{\Psi}(\alpha, \theta)\, d\theta + \frac{1}{4\pi}.$$

ب) طرف راست معادله در قسمت (الف) مستقل از $\theta$ است ، آن را $F(\alpha)$ بنامید . نشان دهید که

$$F(\alpha) = \frac{1}{2} nSF(\alpha)(1/i\alpha) \log\left(\frac{S + i\alpha}{S - i\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi}.$$

پ) با استفاده از این که

$$\frac{1}{2i} \log\left(\frac{S + i\alpha}{S - i\alpha}\right) = \arctan(\alpha/S)$$

حقیقی است ، نشان دهید

$$F(\alpha) = \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{nS}{\alpha}\arctan\frac{\alpha}{S}\right)^{-1}.$$

ت) با وارون کردن $\overline{\Psi}(\alpha, \theta)$ ، نشان دهید

$$\Psi(x, \theta) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha x)(S + i\alpha\theta)^{-1}\left(1 - \frac{nS}{2i\alpha}\log\frac{S + i\alpha}{S - i\alpha}\right)^{-1} d\alpha.$$

۱۷- تبدیل فوریهٔ حاصل ضرب $xy(x)$ را به دست آورید (*راهنمایی* : از طرفین

$$\bar{y}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)e^{i\alpha x}\,dx$$

نسبت به $\alpha$ مشتق بگیرید) .

# فصل چهارم

# مسائل مقدار مرزی در مختصات قائم

## ۴-۱ معادلهٔ لاپلاس

در بخش ۲-۳ اشاره کردیم که یکی از متداولترین معادلات با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم معادلهٔ لاپلاس است،

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{۴-۱-۱}$$

تا این جا این معادله را در حالتهای یک بعدی و دو بعدی بررسی کردیم . حال مثالی از مسألهٔ مقدار مرزی سه بعدی ارائه می دهیم .

**مثال ۴-۱-۱** مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید

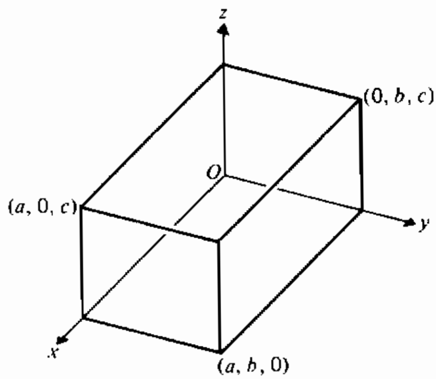
معادله : $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c;$

شرایط مرزی : $u(0, y, z) = u(a, y, z) = 0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c,$

$u(x, 0, z) = u(x, b, z) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < z < c,$

$u(x, y, c) = 0, \quad u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$

حل : این مسأله می تواند در یافتن یک تابع پتانسیل درون یک مکعب مستطیل که چهار وجه جانبی و سطح فوقانی آن دارای پتانسیل صفر و پتانسیل سطح تحتانی آن به صورت تابعی از $x$ و $y$ داده شده ، پیش آید (شکل ۴-۱-۱ را ملاحظه کنید) . بعداً خواصی را که این تابع باید داشته باشد ، مشخص می کنیم .




شکل ۴-۱-۱

مسأله را با روش جداسازی متغیرها حل می کنیم . فرض کنید

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

اگر از آن مشتق گرفته و در معادلهٔ (۴-۱-۱) جانشین کنیم، به دست می آوریم

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0.$$

در این معادله پریمها مشتقهای معمولی را نسبت به متغیرهای تابع نشان می دهند . طبق معمول چون می خواهیم جوابی غیر بدیهی به دست آوریم می توانیم معادلهٔ اخیر را بر حاصل ضرب $XYZ$ تقسیم کنیم . در این صورت

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = \lambda, \qquad (۴-۱-۲)$$

که $\lambda$ ثابت جداسازی است و مقدار دقیق آن با شرایط مرزی معین می شود . توجه کنید اگرچه جداسازی متغیرها کامل نیست، طرف چپ معادلهٔ (۴-۱-۲) به $x$ بستگی ندارد در حالی که جملهٔ طرف راست شامل فقط $x$ است و این امر همان طور که نشان داده شده است، تنها در صورتی ممکن است که هر دو جمله ثابت باشند .

مسألهٔ مقدار مرزی برحسب $X$ به صورت زیر نوشته می شود

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(a) = 0. \qquad (۴-۱-۳)$$

به عنوان تمرین نشان دهید (تمرین ۱ را ملاحظه کنید) که $\lambda = 0$ و $\lambda < 0$ به جوابهای بدیهی منتهی می شوند . پس

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

و از شرط $X(0)$ نتیجه می شود $c_1 = 0$ در صورتی که از شرط $X(a) = 0$ نتیجه می شود $\sqrt{\lambda} = n\pi / a$ ، $n = 1, 2, \ldots$ . بنابراین مقادیر ویژهٔ (۸-۱-۳) عبارتند از

$$\lambda = n^2\pi^2/a^2, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

و توابع ویژهٔ متناظر به صورت زیرند

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

ثابت دلخواه را ننوشته ایم، چون هر مضرب ثابتی از تابع ویژهٔ فوق یک جواب مسألهٔ مقدار مرزی (۴-۱-۳) نیز هست .

یک بار دیگر با جداسازی متغیّرها داریم

$$\frac{Z''}{Z} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} = -\frac{Y''}{Y} = \mu.$$

مسألهٔ مقدار مرزی برحسب $Y$ دقیقاً به همان شکل (۴-۱-۳) است؛ بنابراین

$$\mu = m^2\pi^2/b^2, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

و توابع ویژه عبارتند از

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

اگرچه هر دو ثابت جداسازی توابعی از اعداد صحیح و مثبت هستند ولی از یکدیگر مستقلند .

مسألهٔ برحسب $Z$ را به صورت زیر می توان نوشت

$$Z'' - \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)Z = 0, \qquad Z(c) = 0,$$

یا با قرار دادن

$$\omega_{mn}^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right),$$

نتیجه می شود

$$Z'' - \omega_{mn}^2 Z = 0, \qquad Z(c) = 0.$$

جواب این مسأله برای مقادیر معین $m$ و $n$ چنین است (تمرین ۲ را ملاحظه کنید)

$$Z_{mn}(z) = B_{mn} \sinh \omega_{mn}(c - z),$$

که $B_{mn}$ ثابتی است که به $m$ و $n$ بستگی دارد. این ثابت با استفاده از آخرین شرط مرزی (ناهمگن) محاسبه خواهد شد.

چون $m$ و $n$ مستقل هستند، باید ترکیبی خطی از ترکیب خطی حاصل ضربها را برای جواب نهایی در نظر بگیریم. در این صورت ***سری نامتناهی مضاعف*** زیر را داریم

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sinh \omega_{mn}(c - z) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right), \qquad (۴-۱-۴)$$

که باید به این صورت تعبیر شود: به ازای هر مقدار $n$، عدد $m$ مقادیر $m = 1, 2, 3, \ldots$ را اختیار می کند که به این ترتیب سری ***مضاعف*** به وجود می آید.

با استفاده از آخرین شرط مرزی داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sinh (c\omega_{mn}) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) = f(x, y) \qquad (۵-۱-۴)$$

و پرانترها نشان می دهند که برای هر $m$ باید

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sinh (c\omega_{mn}) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) = \frac{2}{a} \int_0^a f(s, y) \sin\left(\frac{n\pi s}{a}\right) ds. \qquad (۶-۱-۴)$$

موجود باشد؛ به عبارت دیگر به ازای هر مقدار ثابت $y$ $(0 < y < b)$، معادلهٔ (۴-۱-۵) نشان می دهد که $(x, y)$ باید به صورت یک سری فوریهٔ سینوسی نسبت به $x$ نوشته شود. از سوی دیگر، طرف راست معادلهٔ (۴-۱-۶) به ازای هر $n$، تابعی از $y$ است، که اگر آن را $F_n(y)$ بنامیم، می توانیم بنویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sinh (c\omega_{mn}) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) = F_n(y).$$

این معادله بیان می کند که $F_n(y)$ توسط یک سری فوریهٔ سینوسی نسبت به $y$ نمایش داده می شود،

پس ضرایب آن به صورت زیرند

$$B_{mn} \sinh (c\omega_{mn}) = \frac{2}{b} \int_0^b F_n(t) \sin\left(\frac{m\pi}{b} t\right) dt.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} B_{mn} &= \frac{2}{b \sinh (c\omega_{mn})} \int_0^b F_n(t) \sin\left(\frac{m\pi}{b} t\right) dt \\ &= \frac{4}{ab \sinh (c\omega_{mn})} \int_0^b \int_0^a f(s, t) \sin\left(\frac{n\pi}{a} s\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} t\right) ds\, dt. \end{aligned} \qquad (۷-۱-۴)$$

بنابراین جواب مسأله به صورت (۴-۱-۴) است که $B_{mn}$ در (۴-۱-۷) داده شده است و $\omega_{mn}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\omega_{mn} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}.$$

ملاحظه می کنیم که تابع $f(x, y)$ در مثال (۴-۱-۱) باید در شرایط دیریکله نسبت به هر دو متغیر صدق کند؛ یعنی، برای $y = y_0$ ثابت $(0 < y_0 < b)$ ، $f(x, y_0)$ باید تابع تکه ای ـ هموار از $x$ ، $(0 < x < a)$ ، باشد. همین طور، برای $x = x_0$ ثابت $(0 < x_0 < a)$ ، $f(x_0, y)$ باید یک تابع تکه ای ـ هموار از $y$ ، $(0 < y < b)$ باشد.

در مثال بعدی معادلهٔ لاپلاس را در یک حوزهٔ نیمه نامتناهی حل می کنیم.

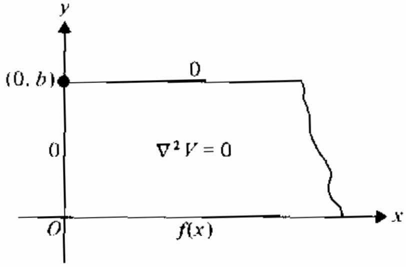
**مثال ۴-۱-۲** پتانسیل $V(x, y)$ را در نقاط یک صفحهٔ محدود به خطوط $x = 0$ و $y = b$ بیابید، در صورتی که $V(0, y) = V(x, b) = 0$ و $V(x, 0) = f(x)$.

*حل*: مسأله را با فرمولهای ریاضی بیان می کنیم با توجه به این که دامنهٔ تغییرات متغیّرها را هم باید مشخص کنیم (شکل ۴-۱-۲)

معادله: $V_{xx} + V_{yy} = 0, \qquad 0 < x < \infty, \qquad 0 < y < b;$

شرایط مرزی:

$$\begin{aligned} &V(0, y) = 0, && 0 < y < b, \\ &V(x, b) = 0, && 0 < x < \infty, \\ &V(x, 0) = f(x), && 0 < x < \infty. \end{aligned}$$




شکل ۴-۱-۲

از تبدیل فوریهٔ سینوسی استفاده می کنیم و $x$ را تبدیل می کنیم زیرا $V(0, y) = 0$ و $0 < x < \infty$ . در این صورت

$$\bar{V}(\alpha, y) = \int_0^{\infty} V(x, y) \sin \alpha x \, dx$$

و اگر از معادلهٔ (۳-۴-۲) استفاده کنیم، معادلهٔ با مشتقات جزئی به صورت

$$-\alpha^2 \bar{V}(\alpha, y) + \frac{d^2 \bar{V}(\alpha, y)}{dy^2} = 0.$$

در می آید .

تبدیل سینوسی $V(x, b) = 0$ عبارت است از $\bar{V}(\alpha, b) = 0$ و تبدیل $V(x, 0) = f(x)$ عبارت است از $\bar{V}(\alpha, 0) = \bar{f}(\alpha)$ . برای آن که این تبدیلات به دست آید باید فرض کنیم

$$\lim_{x \to \infty} V(x, y) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to \infty} V_x(x, y)$$

هر دو صفرند و $f(x)$ بر نیم خط حقیقی $0 < x < \infty$ بطور مطلق انتگرال پذیر است . (چرا؟)

جواب معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم، معمولی، همگن و با ضرایب ثابت فوق چنین است

$$\bar{V}(\alpha, y) = C_1(\alpha) \cosh (\alpha y) + C_2(\alpha) \sinh (\alpha y).$$

از شرط $\bar{V}(\alpha, b) = 0$ نتیجه می شود

$$C_1 = -C_2 \frac{\sinh (\alpha b)}{\cosh (\alpha b)}$$

پس جواب به صورت زیر نوشته می شود (تمرین ۵)

$$\bar{V}(\alpha, y) = -C_2(\alpha)\frac{\sinh(\alpha b)}{\cosh(\alpha b)}\cosh(\alpha y) + C_2(\alpha)\sinh(\alpha y)$$

$$= \frac{C_2(\alpha)\sinh\alpha(y-b)}{\cosh(\alpha b)}$$

حال از شرط $\bar{V}(\alpha, 0) = \bar{f}(\alpha)$ به دست می آوریم

$$C_2(\alpha) = \frac{-\bar{f}(\alpha)\cosh(\alpha b)}{\sinh(\alpha b)}$$

در نتیجه جواب به صورت زیر است

$$\bar{V}(\alpha, y) = \frac{\bar{f}(\alpha)\sinh\alpha(b-y)}{\sinh(\alpha b)}.$$

با استفاده از تبدیل معکوس (۳-۴-۱)، داریم

$$V(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\bar{f}(\alpha)\sinh\alpha(b-y)}{\sinh(\alpha b)}\sin(\alpha x)\,d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(s)\sin\alpha s\,\frac{\sinh\alpha(b-y)}{\sinh(\alpha b)}\sin(\alpha x)\,ds\,d\alpha.$$

توجه کنید که جواب فوق را به صورت ساده تر از این نمی توان نوشت، مگر آن که $f(x)$ معلوم باشد. (تمرین ۶ را ملاحظه کنید)

تابعی که در معادلهٔ لاپلاس صدق کند، ***تابع همساز*** نامیده می شود. توابع همساز خاصیتهای ویژه دارند که آنها را در قضایای زیر بیان می کنیم.

**قضیهٔ ۴-۱-۱** :اگر یک تابع $f$ در یک ناحیهٔ کران دار همساز و در هر نقطه روی مرز ناحیه برابر صفر باشد، آن گاه $f$ در تمام ناحیه برابر صفر است.

**قضیهٔ ۴-۱-۲** :اگر یک تابع $f$ در یک ناحیهٔ کران دار همساز و مشتق قائم آن $\frac{\partial f}{\partial n}$، در هر نقطه روی مرز ناحیه صفر باشد، آن گاه $f$ در این ناحیه ثابت است.

یک ***مسألهٔ دیریکله*** عبارت است از یافتن یک تابع که در یک ناحیهٔ مفروض همساز و روی مرز ناحیه مقادیر معینی داشته باشد.

**قضیهٔ ۴-۱-۳ :** اگر یک مسألهٔ دیریکله در یک ناحیهٔ کران دار دارای جواب باشد، آن گاه جواب آن یکتاست .

یک ***مسألهٔ نویمان*** عبارت است از یافتن یک تابع $f$ که در یک ناحیه مفروض همساز بوده و مشتق قائم آن $\frac{\partial f}{\partial n}$ ، روی مرز ناحیه مقادیری معیّن داشته باشد .

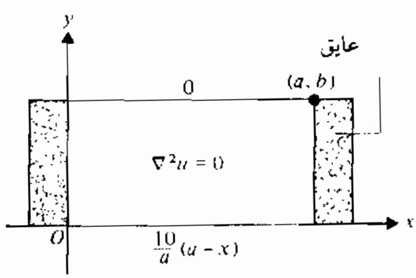
**قضیهٔ ۴-۱-۴ :** اگر یک مسألهٔ نویمان در یک ناحیهٔ کران دار دارای جواب باشد، آن گاه آن جواب با اختلاف یک ثابت جمعی یکتاست .

مسائل دیریکله و نویمان طبیعةً از معادلهٔ رسانایی گرما (یا انتشار) وقتی که جواب حالت پایا مورد نظر باشد، به وجود می آیند . معادلهٔ رسانایی گرما در دو بعدی چنین است

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}),$$

که $u$ دما و $k$ ثابتی است کـه پخشندگی نامیـده می شـود . اگـر دمـای حـالت پایـا، یعنی، دمـا پس از گـذشت مدت زمـان طـولانی را بخـواهیـم، آن گـاه $u$ مـسـتقل از $t$ است و معـادلهٔ بالا به صـورت معـادلهٔ لاپلاس دو بعدی خـلاصه می شـود . وضعیتی مـشابه برای حـالت سه بعـدی برقرار است .

**مثال ۴-۱-۳** دمـای حـالت پایا را در یک صـفـحـهٔ مـسـتطیلی به طول $a$ و عرض $b$ پیـدا کنیـد در صورتی که لبدهای $x=0$ و $x=a$ کاملاً عایق شده اند، لبهٔ $y=b$ در دمای صفر قرار دارد، و توزیع حرارت در لبهٔ $y=0$ با $(10/a)(a-x)$ داده می شود . شکل ۴-۱-۳ را ملاحظه کنید .




شکل ۴-۱-۳

**حل :** یادآوری می کنیم که برطبق قـانون سرد شدن نیوتن، آهنگ تغییر دما در امتداد مرز مشترک

دو محیط و در جهت قائم بر مرز متناسب با تفاضل دمای دو محیط است . «عایق بندی کامل» ایجاب می کند که این مشتق قائم باید صفر باشد . بنابراین، مسألهٔ مقدار مرزی زیر را می توانیم بیان کنیم :

معادله :
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

شرایط مرزی :
$$\left.\begin{aligned} u_x(0, y) = 0, \\ u_x(a, y) = 0, \end{aligned}\right\} \quad 0 < y < b,$$
$$\left.\begin{aligned} u(x, b) &= 0, \\ u(x, 0) &= \frac{10}{a}(a - x), \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < a.$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها، مسألهٔ مقدار مرزی زیر نتیجه می شود

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad X'(0) = 0, \qquad X'(a) = 0.$$

توابع ویژه عبارتند از (تمرینهای ۹، ۱۰، و ۱۱)

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

همچنین داریم

$$Y_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} Y_n = 0, \qquad Y_n(b) = 0,$$

که جوابهای آن (تمرین ۱۲) عبارتند از

$$Y_n(y) = \frac{c_n}{\cosh\left(\dfrac{n\pi b}{a}\right)} \sinh\frac{n\pi}{a}(y - b), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

حال که همهٔ شرایط مرزی همگن برقرارند، می توانیم یک ترکیب خطی از حاصل ضربهای توابع ویژه تشکیل دهیم . در این صورت (تمرین ۱۳)

$$u(x, y) = c_0(y - b) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \frac{\sinh\dfrac{n\pi}{a}(y - b)}{\cosh\left(\dfrac{n\pi b}{a}\right)}$$

با به کار بردن چهارمین شرط مرزی، به دست می آوریم

$$-bc_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\frac{-\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)=\frac{10}{a}(a-x)$$

یا

$$-bc_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)=\frac{10}{a}(a-x).$$

آخرین معادله نشان می دهد که برای نمایش دادن آن به صورت یک سری فوریهٔ کسینوسی (شکل ۴-۱-۴) می توانیم یک توسیع تناوبی زوج از تابع $(10/a)(a-x)$ بسازیم. در این صورت

$$a_0=\frac{2}{a}\int_0^a\frac{10}{a}(a-s)\,ds=10;$$

پس، $-bc_0=\frac{1}{2}a_0=5$ که از آن نتیجه می شود $c_0=-5/b$ . همچنین داریم (تمرین ۱۴)

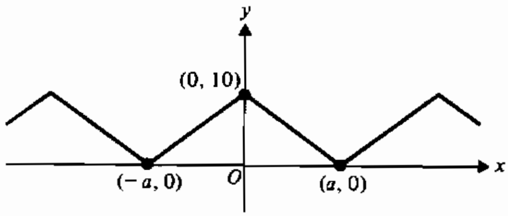
$$a_n=\frac{2}{a}\int_0^a\frac{10}{a}(a-s)\cos\left(\frac{n\pi}{a}s\right)ds$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{ زوج}\\ \dfrac{40}{n^2\pi^2}, & n\text{ فرد}\end{cases}$$

حال این جواب به صورت زیر نوشته می شود

$$u(x,y)=\frac{5}{b}(b-y)+\frac{40}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{a}\sinh\dfrac{(2n-1)\pi}{a}(b-y)}{(2n-1)^2\sinh\dfrac{(2n-1)\pi b}{a}}.$$

تأکید می کنیم هرچند سه شرط از چهار شرط مرزی در مثال فوق همگن هستند، محاسبه های جبری لازم در به دست آوردن جواب ممکن است تا حدودی پیچیده باشد. به این دلیل وقتی بیش از یک شرط مرزی ناهمگن در مسأله ای وجود دارد، اصل برهم نهی جوابها توصیه می شود (بخش ۲-۳ را ملاحظه کنید).




شکل ۴-۱-۴ توسیع تناوبی زوج (مثال ۴-۱-۳)

## تمرینهای ۴-۱

۱- نشان دهید اگر $\lambda = 0$ یا $\lambda < 0$ ، تنها جواب (۴-۱-۳) عبارت است از $X(x) = 0$ .

۲- نشان دهید جواب مسألهٔ

$$Z'' - \omega_{mn}^2 Z = 0, \qquad Z(c) = 0,$$

عبارت است از

$$B_{mn} \sinh \omega_{mn}(c - z),$$

که $B_{mn}$ ثابتی دلخواه است که مقدار آن هم به $m$ و هم به $n$ ، بستگی دارد .

۳- مسألهٔ مثال ۴-۱-۱ را حل کنید در صورتی که $a = b = c = \pi$ .

۴- در مثال ۴-۱-۱ $B_{mn}$ را بیابید در صورتی که

$$f(x, y) = xy.$$

۵- در مثال ۴-۱-۲ نتیجهٔ

$$\bar{V}(\alpha, y) = \frac{c_2(\alpha) \sinh \alpha(y - b)}{\cosh (\alpha b)}$$

را از مرحلهٔ قبلی به دست آورید .

۶- جواب مسألهٔ ۴-۱-۲ را به دست آورید، اگر $f(x) = e^{-x}$. آیا این تابع شرایط لازم را دارد؟

۷- جواب مسألهٔ ۴-۱-۲ را به دست آورید اگر

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

۸- مثال ۴-۱-۲ را حل کنید در صورتی که $b = 1$ و شرط $V_x(0, y) = 0$ جایگزین شرط

$V(0, y) = 0$ شود .

۹- نشان دهید در مثال ۴-۱-۳ ، $X_0 = 1$ یک تابع ویژه متناظر با مقدار ویژهٔ $\lambda = 0$ است.

۱۰- در مثال ۴-۱-۳ نشان دهید

$$X'' - \lambda^2 X = 0, \qquad X'(0) = X'(a) = 0,$$

فقط دارای جواب بدیهی است .

۱۱- توابع ویژهٔ

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

را در مثال ۴-۱-۳ به دست آورید .

۱۲- توابع ویژهٔ

$$Y_n(y) = \frac{c_n}{\cosh\left(\dfrac{n\pi b}{a}\right)} \sinh\frac{n\pi}{a}(y - b), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

را در مثال ۴-۱-۳ به دست آورید .

۱۳- در مثال ۴-۱-۳ نشان دهید

$$Y_0(y) = y - b$$

جواب متناظر مقدار ویژه $n = 0$ است .

۱۴- در مثال ۴-۱-۳ نشان دهید

$$a_{2n-1} = \frac{40}{(2n-1)^2\pi^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

۱۵- مسألهٔ داده شده در مثال ۴-۱-۳ را حل کنید در صورتی که $a = b = \pi$ و $u(x, 0) = \sin x$ .

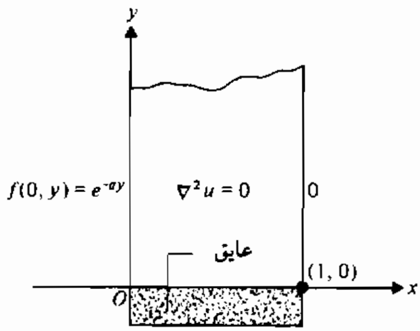
۱۶- مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید (شکل ۴-۱-۵)

معادله : $u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y > 0;$

شرایط مرزی : $u(1, y) = 0, \quad y > 0,$

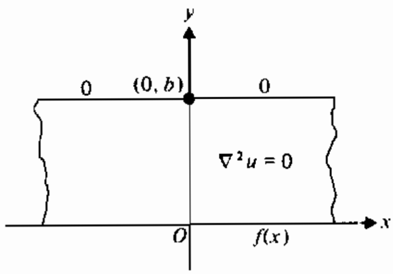
$u(0, y) = e^{-ay}, \quad a > 0, \quad y > 0,$

$u_y(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$




شکل ۴-۱-۵

۱۷- معادلهٔ لاپلاس را در نوار نامتناهی $b > y > 0$ حل کنید با فرض آن که روی خط $y = b$ ، پتانسیل برابر صفر و وقتی $y = 0$ ، پتانسیل برابر $f(x)$ است (شکل ۴-۱-۶) . هر شرط دیگری را که باید برقرار باشد، بیان کنید. (*راهنمایی* : از تبدیل فوریه استفاده کنید.)




شکل ۴-۱-۶

۱۸- دو لبهٔ $y = 0$ و $y = b$ یک صفحهٔ مستطیلی کاملاً عایق شده‌اند، و دو لبهٔ $x = 0$ و $x = a$ آن در دمای صفر قرار دارند. با استفاده از روش جداسازی متغیّرها دمای حالت پایا را در صفحه بیابید. آیا نتیجه با آنچه از قضایای ۴-۱-۱ و ۴-۱-۲ انتظار دارید، مطابقت می‌کند؟

۱۹- مسألهٔ مثال ۴-۱-۱ را حل کنید در صورتی که روی وجه $x = 0$ ، $u(0, y, z) = \sin(\pi y/b)\sin(\pi z/c)$ و روی تمام وجوه دیگر ، $u = 0$ .

۲۰- در مثال ۴-۱-۱ قرار دهید $a = 1$ و $b = 2$ و $\omega_{11}$ ، $\omega_{12}$ ، $\omega_{21}$ ، $\omega_{22}$ را محاسبه کنید .

۲۱- فرض کنید $u(x, y) = f(\phi)$ ، که $\phi(x, y)$ یک تابع همساز غیرثابت است . تحت چه شرایطی $u$ همساز است ؟

۲۲- نشان دهید جوابهای تفکیک پذیر مثال ۴-۱-۱ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\exp(\pm i\alpha x)\exp(\pm i\beta y)\exp(\pm\gamma z).$$

۲۳- قضیهٔ ۴-۱-۱ را با تغییر «صفر» به «یک ثابت $c$» دو مرتبه بیان کنید . توضیح دهید چگونه این تغییر را می توان توجیه نمود .

## ۴-۲ معادلهٔ موج

در بخش ۲-۴ معادلهٔ تار مرتعش را با چند فرض ساده کننده به دست آوردیم . این روش یافتن معادله را می توان به طریق طبیعی (تمرین ۱) به یک غشای مرتعش (نظیر رویهٔ طبل) تعمیم داد تا معادلهٔ موج دو بعدی

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}). \tag{۴-۲-۱}$$

به دست آید . در این جا ثابت $c$ به جای $a$ در بخش ۲-۴ به کار رفته است . این ثابت به صورت $Tg/w$ تعریف می شود که $T$ کشش (ثابت) واحد طول، $w$ وزن واحد سطح، و $g$ شتاب گرانشی است . یک مسألهٔ مقدار مرزی شامل این معادله در مختصات قائم عموماً چهار شرط مرزی و دو شرط اوّلیهٔ معین خواهد داشت . با یک مثال مسأله را تشریح می کنیم .

**مثال ۴-۲-۱** مسألهٔ زیر را حل کنید .

معادله : $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0;$

شرایط مرزی : $u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, \quad 0 < y < b, \quad t > 0,$

$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \quad 0 < x < a, \quad t > 0;$

شرط اولیه : $u_t(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$

**حل** : از روش جداسازی متغیرها به شکل متفاوت با آنچه قبلاً به کار بردیم، استفاده می کنیم . فرض می کنیم

$$u(x, y, t) = \Phi(x, y)T(t)$$

و آن را در معادلهٔ با مشتقات جزئی جایگزین می کنیم . در این صورت

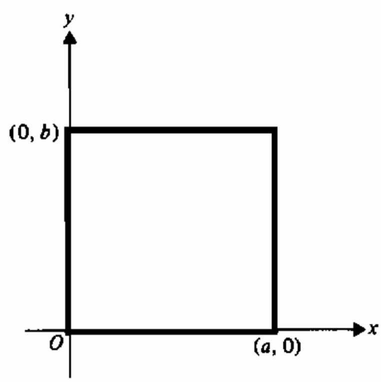
$$\dot{T}\Phi = c^2 T(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}),$$

که نقطه، مشتق گیری نسبت به $t$ را نشان می دهد . با تقسیم بر $c^2\Phi T$ ، جداسازی مطلوب به دست می آید

$$\frac{\dot{T}}{c^2 T} = \frac{(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})}{\Phi} = -\lambda^2, \tag{۴-۲-۲}$$

که $-\lambda^2$ یک ثابت منفی است .

تعبیر فیزیکی این مسأله (شکل ۴-۲-۱ را ملاحظه کنید) چنین است : یک غشای مستطیلی در طول چهار ضلع آن به یک چارچوب محکم شده است که به آن یک تغییر مکان اوّلیه در امتداد $z$ ها به صورت $f(x, y)$ داده می شود . چون نیروهایی میرا یا نیروهای خارجی دیگری اثر نمی کنند، انتظار داریم که هر نقطهٔ درونی از غشا بی نهایت بار ارتعاش کند . به این دلیل ثابت جداسازی منفی انتخاب می شود . در واقع، انتخاب $u$ به شکل حاصل ضرب فوق با علم به این که $u$ باید نسبت به $t$ متناوب باشد صورت گرفته است .




شکل ۴-۲-۱

از معادلهٔ (۴-۲-۲) و با استفاده از شرط اوّلیهٔ همگن داریم

$$\ddot{T} + c^2\lambda^2 T = 0, \qquad \dot{T}(0) = 0,$$

جواب این مسأله عبارت است از (تمرین ۲)

$$T(t) = \cos(c\lambda t),$$

که $\lambda$ باید تعیین شود .

از معادلهٔ (۴-۲-۲) با جای گذاری $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$ نتیجه می شود

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2.$$

اما این دقیقاً همان مسأله ای است که در مثال ۴-۱-۱ حل کردیم (با همان شرایط مرزی) . پس جوابهای مسألهٔ حاضر حاصل ضرب توابع زیر هستند

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

$$T_{mn}(t) = \cos(c\omega_{mn}t),$$

که $m$ و $n$ مستقلّند و

$$\omega_{mn}^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right).$$

ترکیبی خطی از این حاصل ضربها که روی $m$ و $n$ جمع بندی شود ، عبارتی است که هنوز شامل ثابتهای اختیاری است . این ثابتها را می توان با استفاده از آخرین شرط ، یعنی شرط اوّلیهٔ ناهمگن مانند مثال ۴-۱-۱ به دست آورد . پس

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos(c\omega_{mn}t)$$

که

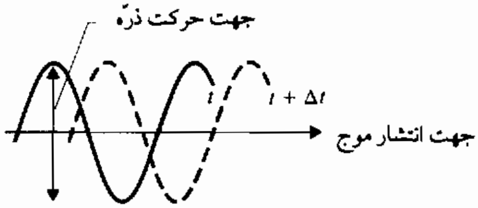
$$B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx\, dy.$$

ملاحظه می کنیم که $f(x, y)$ ، $f_x(x, y)$ ، و $f_y(x, y)$ همه باید بر $0 < x < a$ ، $0 < y < b$ ، پیوسته ، و روی مرزهای مستطیل صفر شوند . توجه کنید که بسامد زاویه ای غشای مرتعش ($c\omega_{mn}$) هم به $m$ و هم به $n$ بستگی دارد و با مضارب صحیحی از بسامد پایه ای ثابت تغییر نمی کند . در نتیجه ، غشای مرتعش مانند تار مرتعش یک نت موسیقی تولید نمی کند (تمرین ۵) .

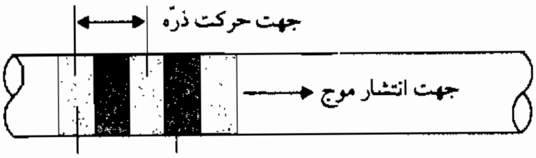
### امواج طولی

موجهای تولید شده در یک تار مرتعش، ***موجهای عرضی*** هستند (شکل ۴-۲-۲)، یعنی، جهت حرکت هر ذرّه از تار عمود بر جهت انتشار امواج است (با بخش ۲-۴ مقایسه کنید). ولی در یک میله فلزی سخت، امواج کشسان که ***امواج طولی*** هستند می توانند رخ دهند، یعنی، جهت حرکت هر ذرّه در همان جهت انتشار امواج است (شکل ۴-۲-۳).

میله ای با مقطع عرضی و چگالی یکنواخت را در طول محور $x$ ها از مبدأ تا نقطهٔ $(0, L)$ در نظر می گیریم. فرض می کنیم میله کاملاً کشسان است، به این معنی که اگر نیروهای خارجی بر دو انتها اثر کنند بطوری که انبساط طولی ایجاد شود، نیروهای کششی در جهت محور $x$ ها به وجود خواهند آمد. حال اگر نیروهای خارجی حذف شوند، میله برطبق قوانین کشسانی ارتعاش طولی خواهد کرد.




شکل ۴-۲-۲ موج عرضی




شکل ۴-۲-۳ موج طولی

فرض کنید میله دارای چگالی $\rho$ (جرم واحد حجم)، سطح مقطع $A$، و مدول کشسانی یانگ $E$ باشد. فرض کنید مقطعی از میله در $x$ به اندازهٔ $u$ مطابق شکل ۴-۲-۴ جابه جا شود. بنابه تعریف مدول یانگ $E$، نیروی وارد بر سطح مقطع در $x$ عبارت است از

$$EA\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

زیرا $\partial u/\partial x$ انبساط طولی در واحد طول را نشان می دهد. از طرف دیگر، نیروی وارد بر قطعه ای به طول $\Delta x$ نیز برابر است با

$$\rho A\ \Delta x\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

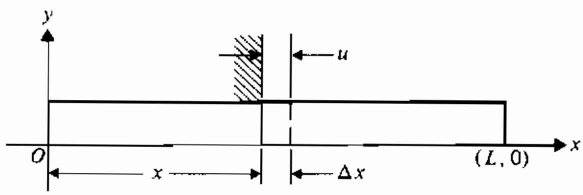
که $\partial^2 u/\partial t^2$ در نقطه ای بین $x$ و $x+\Delta x$، مثلاً در مرکز جرم قطعه محاسبه می شود. نیروی خالص در واحد طول چنین است

$$\frac{EA}{\Delta x}\left(\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)$$

با مساوی قرار دادن دو نیرو و گرفتن حد وقتی $\Delta x \to 0$، داریم

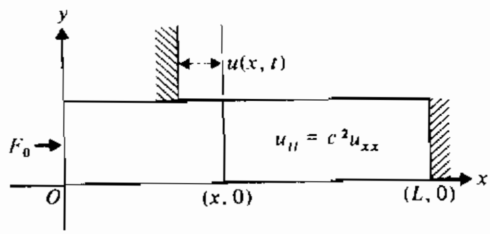
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (۴-۲-۳)$$

پس از ارتعاشات طولی کوچک یک میلهٔ کشسان در معادلهٔ موج یک بعدی صدق می کند (تمرین ۷)




شکل ۴-۲-۴ امواج طولی در یك میله

**مثال ۴-۲-۲** انتهای $x=L$ یک میلهٔ بلند نازك ثابت نگاه داشته شده و یک نیروی تراکمی ثابت $F_0$ در واحد سطح به انتهای $x=0$ وارد می شود (شکل ۴-۲-۵). اگر میله ابتدا در حال سکون بوده و تحت کرنش نباشد، تغییر مکان طولی یک مقطع عرضی دلخواه را در هر زمان $t$ پیدا کنید.




شکل ۴-۲-۵

*حل* : باید مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنیم :

معادله : $u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad c^2 = E/\rho$:

شرایط مرزی : $u(L, t) = 0, \quad t > 0$

$Eu_x(0, t) = F_0, \quad t > 0$

شرایط اولیه : $u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L$

$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L$

در فرمول بندی فوق نشان داده ایم که چگونه ***واقعیتهای فیزیکی*** به زبان ریاضی بیان می شوند . چون $u(x, t)$ تغییر مکان میله را نشان می دهد، پس $u(L, t) = 0$ نشان می دهد که در $x = L$ تغییر مکان صفر است ، یعنی ، انتهای $x = L$ ثابت است . چنان که قبلاً گفته شد ، نیروی وارد بر مقطع عرضی در $x$ عبارت است از

$$EA\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

و در انتهای $x = 0$ این نیرو به صورت $F_0A$ داده می شود . در نتیجه

$$Eu_x(0, t) = F_0.$$

چون میله در ابتدا تحت کرنش نیست ، پس نمی تواند تغییر مکانی در $t = 0$ داشته باشد ، یعنی ، $u(x, 0) = 0$ . سرانجام این که میله در ابتدا بدون حرکت است ، یعنی ، در زمان $t = 0$ ، سرعت $u_t$ برابر صفر است . توانایی بیان پدیدهٔ فیزیکی به زبان ریاضی کمکی بسیار مؤثر در حل مسائل است .

اگرچه سه شرط مرزی همگن وجود دارند ، روش جداسازی متغیرها فقط جواب بدیهی را خواهد داد (تمرین ۸) . می توانیم با تعویض متغیر زیر یک جواب غیربدیهی به دست آوریم

$$u(x, t) = U(x, t) + \phi(x),$$

که $\phi(x)$ باید تعیین شود . در این صورت مسأله به صورت زیر در می آید

معادله : $U_{tt} = c^2(U_{xx} + \phi''(x)), \quad 0 < x < L, \quad t > 0;$

شرایط مرزی :
$$\left.\begin{aligned} &U(L, t) + \phi(L) = 0, \\ &EU_x(0, t) + E\phi'(0) = F_0, \end{aligned}\right\} \quad t > 0;$$

شرایط اولیه :
$$\left.\begin{aligned} &U(x, 0) + \phi(x) = 0, \\ &U_t(x, 0) = 0, \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < L.$$

حال اگر قرار دهیم

$$\phi''(x) = 0, \qquad \phi(L) = 0, \qquad \phi'(0) = F_0/E,$$

آن گاه $\phi(x) = (F_0/E)(x - L)$ (تمرین ۹) . پس مسأله به صورت آشنای زیر تبدیل می شود :

معادله : $U_{tt} = c^2 U_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0;$

شرایط مرزی : $\left.\begin{array}{l} U(L, t) = 0, \\ U_x(0, t) = 0, \end{array}\right\} \quad t > 0;$

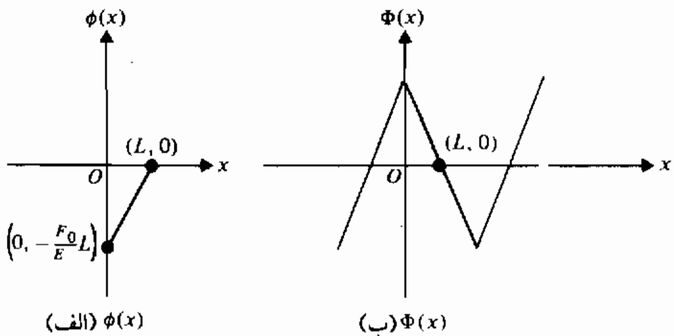
شرایط اولیه : $\left.\begin{array}{l} U(x, 0) = \dfrac{F_0}{E}(L - x), \\ U_t(x, 0) = 0, \end{array}\right\} \quad 0 < x < L.$

جواب این مسأله به صورت زیر است (معادلهٔ ۲-۴-۶ را در مثال ۲-۴-۱ ملاحظه کنید)

$$U(x, t) = \frac{F_0}{2E}(\Phi(x + ct) + \Phi(x - ct)),$$

که $\Phi(x)$ توسیع تناوبی زوج $x - L$ است و برای $-\infty < x < \infty$ تعریف می شود (شکل ۴-۲-۶ را ملاحظه کنید) . جواب مسألهٔ اصلی به صورت زیر است

$$u(x, t) = \frac{F_0}{E}(x - L) + \frac{F_0}{2E}(\Phi(x + ct) + \Phi(x - ct)). \tag{۴-۲-۴}$$




شکل ۴-۲-۶ $\phi(x)$ و توسیع تناوبی زوج منفی آن $\Phi(x)$

به عنوان تمرین نشان دهید که جواب فوق در معادلهٔ با مشتقات جزئی و تمام شرایط داده شده صدق می کند (تمرینهای ۱۰ و ۱۱ را ببینید) .

در مسألهٔ مثال ۴-۲-۲ نشان دادیم که چگونه یک شرط مرزی ناهمگن را می توان با تغییری در متغیّر وابسته به همگن تبدیل نمود. مثالهای دیگری از این روش در بخش ۴-۳ داده می شود.

حال مسألهٔ دیگری را که در آن از معادلهٔ موج استفاده می شود بررسی می کنیم. فرض کنید $\theta$ تغییر مکان زاویه ای یک مقطع عرضی از یک میلهٔ مدور یکنواخت از یک وضعیت تعادل باشد. اگر $\theta$ کوچک باشد، آن گاه برطبق نظریهٔ کشسانی، $\theta$ در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می کند

$$\theta_{tt} = c^2\theta_{xx}, \qquad (۴-۲-۵)$$

که $c^2 = Gg/\rho$، $G$ مدول برشی، $\rho$ چگالی (جرم واحد حجم)، و $g$ شتاب ناشی از گرانش است.

**مثال ۴-۲-۳** فرض کنید میل گردانی با سطح مقطع دایره ای و طول $L$ در یک انتها بسته شده و انتهای دیگر آن پیچانده شده و سپس رها می گردد. در حالی که میل گردان نوسان می کند، انتهای آزاد آن در لحظهٔ $t = t_0$ بسته می شود. در این لحظه سرعت زاویه ای $\omega_0 x/L$ و زاویهٔ $\theta$ برابر صفر است. تمام شرایط را بیان و مسألهٔ مقدار مرزی را حل کنید.

**حل**: مختصات را طوری می گیریم که میل گردان در طول محور $x$ ها قرار گیرد و انتهای آزاد آن در $x = L$ باشد. در آن صورت داریم

معادله: $\theta_{tt} = c^2\theta_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0;$

شرایط مرزی: $\theta(0, t) = 0, \quad t > 0$ (در یک انتها بسته شده است)

$\theta(L, t) = 0, \quad t > t_0$ (انتهای آزاد که در $t = t_0$ بسته شده است)

شرایط اولیه: $\left.\begin{aligned}&\theta(x, t_0) = 0,\\ &\theta_t(x, t_0) = \omega_0 x/L,\end{aligned}\right\} \quad 0 < x < L.$

مسأله را می توان با انتخاب $t_0 = 0$ تا حد زیادی ساده کرد و در این صورت مختص زمان به اندازهٔ $t_0$ انتقال پیدا می کند. حال با استفاده از جداسازی متغیّرها، داریم

$$\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

ثابت جداسازی باید منفی باشد، زیرا با نوسانهای تناوبی در زمان سر و کار داریم. پس مسألهٔ

مقدار مرزی

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(L) = 0,$$

دارای جوابهایی به صورت زیر است

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

و مسألهٔ مقدار اوّلیه

$$\ddot{T}_n + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}T_n = 0, \qquad T_n(0) = 0,$$

جوابهایی به شکل زیر دارد (تمرین ۱۳)

$$T_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

بنابراین

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

که

$$\frac{n\pi c}{L}b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{\omega_0 s}{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right)ds$$

یا

$$b_n = \frac{2\omega_0 L}{c\pi^2}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}. \quad \blacksquare$$

(تمرین ۱۴ را ملاحظه کنید)

## تمرینهای ۴-۲

۱- فرضهای ساده کننده را بیان کنید تا بتوان معادلهٔ موج دو بعدی (۴-۲-۱) را به دست آورد. (راهنمایی: بخش ۲-۴ را ملاحظه کنید)

۲- جوابهای مسألهٔ زیر را بیابید

$$\ddot{T} + c^2\lambda^2 T = 0, \qquad \dot{T}(0) = 0.$$

۳- جزئیات باقیمانده در مثال ۴-۲-۱ را انجام دهید

۴- مسألهٔ مثال ۴-۲-۱ را با فرض $f(x, y) = xy(a-x)(b-y)$ حل کنید . نشان دهید این تابع در شرایط مثال صدق می کند .

۵- در مثال ۴-۲-۱ جواب را به دست آورید، اگر

$$u(x, y, 0) = k \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

که در آن $k$ ثابت است . توجه کنید که با این شرط غشای مرتعش نُت موسیقی تولید نمی کند . بسامد نُت چیست ؟

۶- بسامدهای $\omega_{mn}$ در مثال ۴-۲-۱ ، **بسامدهای مشخصه** نامیده می شود . شش بسامد مشخصهٔ اوّل غشای مستطیلی مرتعش یعنی، $\omega_{11}$ ، $\omega_{12}$ ، $\omega_{21}$ ، $\omega_{22}$ ، $\omega_{13}$ ، $\omega_{31}$ را فهرست کنید . در صورتی که $a = b = \pi$ .

۷- نشان دهید در معادلهٔ (۴-۲-۳)، $E/\rho$ دارای بعد مربع سرعت است .

۸- در مثال ۴-۲-۳ روش جداسازی متغیرها را به کار برید تا نشان دهید که معادله برحسب $t$ بدون توجه به انتخاب ثابت (حقیقی) جداسازی، فقط جواب بدیهی دارد .

۹- مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید

$$\phi''(x) = 0, \qquad \phi(L) = 0, \qquad \phi'(0) = F_0/E.$$

۱۰- نشان دهید معادلهٔ (۴-۲-۴) در معادلهٔ موج یک بعدی صدق می کند .

۱۱- نشان دهید معادلهٔ (۴-۲-۴) در شرایط اوّلیه و مرزی مسأله در مثال ۴-۲-۲ صدق می کند (*راهنمایی* : توجه کنید که $\Phi$ تابعی زوج است . )

۱۲- مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسألهٔ مقدار مرزی زیر را بیابید

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(L) = 0.$$

۱۳- مسألهٔ زیر را حل کنید

$$\dot{T} + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2} T = 0, \qquad T(0) = 0.$$

۱۴- در مثال ۴-۲-۳ ضرایب $b_n$ را به دست آورید .

۱۵- الف) نشان دهید ثابت $c$ در معادلهٔ (۴-۲-۱) دارای بُعد سرعت است .

ب) بُعد $E$ در معادلهٔ (۴-۲-۳) و بُعد $G$ در معادلهٔ (۴-۲-۵) را به دست آورید .

۱۶- اگر شرایط اوّلیه مسألهٔ مثال ۴-۲-۱ به صورت

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y), \qquad u(x, y, 0) = 0,$$

باشند، جواب $u(x, y, t)$ چیست؟

۱۷- با استفاده از اصل برهم نهی، مسألهٔ مثال ۴-۲-۱ را حل کنید در صورتی که شرایط اوّلیه به صورت $u(x, y, 0) = f(x, y)$ ، $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$ باشند.

۱۸- الف) با مراجعه به تمرین ۵، پیدا کنید

$$u_t\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right).$$

ب) نتیجهٔ قسمت (الف) را ازنظر فیزیکی تعبیر نمایید.

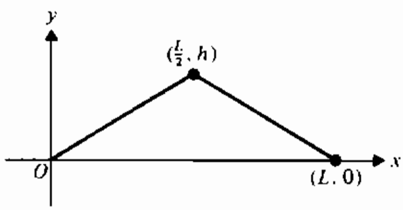
۱۹- مثال ۴-۲-۳ را حل کنید در صورتی که $\theta_t(x, t_0) = k$ ، مقداری ثابت باشد و بقیهٔ شرایط تغییر نکنند.

۲۰- معادلهٔ تار مرتعش را برای حالت تار کشیده شد به طول $L$ حل کنید، یعنی، برای شرایط اوّلیهٔ

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{2h}{L}x, & 0 \le x \le \dfrac{L}{2}, \\ \dfrac{2h}{L}(L - x), & \dfrac{L}{2} \le x \le L, \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = 0.$$

(شکل ۴-۲-۷ را ملاحظه کنید)




شکل ۴-۲-۷

## ۴-۳ معادلهٔ انتشار

مثالی کلاسیک از یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم از نوع سهموی

معادلهٔ انتشار است . این معادله به صورت زیر است

$$u_t = k\nabla^2 u, \tag{۱-۳-۴}$$

که $\nabla^2$ عملگر لاپلاسی است

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

این عملگر را در این جا در سه بعد و در مختصات قائم نشان می دهیم .

چون گرما را می توان به عنوان یک «سیال» درون ماده در نظر گرفت، معادلهٔ انتشار، نقشی مهم در مسائل رسانایی گرمایی دارد . در این کاربرد $u$ دما را در یک جسم نشان می دهد، و ثابت $k$ که آن را **پخشندگی گرمایی** می نامند، به صورت

$$k = \frac{K}{\sigma\rho},$$

تعریف می شود، که در آن $K$ *رسانندگی گرمایی*، $\sigma$ گرمای ویژه، و $\rho$ چگالی (جرم واحد حجم) است . گاهی $k$ را برابر با یک انتخاب می کنیم، چون این مقدار خاص را می توان با تغییری در مقیاس $t$ به دست آورد . (تمرین ۱ را ملاحظه کنید)

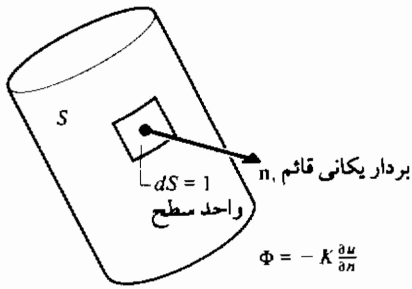
فرض کنید $S$ رویهٔ هموار یک جسم توپُر باشد . فرض کنید گرما به وسیلهٔ رسانایی درون جسم منتقل می شود و از نواحی با دمای بالاتر به نواحی با دمای پایینتر «جریان» می یابد . در یک نقطه از رویهٔ $S$ ، شار گرما، $\Phi$ ، را مقدار گرمایی تعریف می کنیم که از واحد سطح، در واحد زمان در آن نقطه از $S$ عبور می کند . شار $\Phi$ متناسب با مشتق سویی دمای $u$ در جهت قائم بر $S$ است، یعنی،

$$\Phi = -K\frac{\partial u}{\partial n}, \tag{۲-۳-۴}$$

که ثابت تناسب $K$ ، که مثبت است، رسانندگی گرمایی و $\partial u/\partial n$ آهنگ تغییر دما در امتداد قائم خارجی است (شکل ۴-۳-۱) . واحد شار در سیستم متریک عبارت است از $\text{cal/cm}^2\text{/sec}$ .

اگر انتقال حرارت بین جسم و محیط اطراف باشد، در آن صورت قانون سرد شدن نیوتن بیان می کند که شار، متناسب با تفاضل دما بین جسم و محیط اطراف است . به کار بردن کلمهٔ «سرد شدن» نشان می دهد که دمای جسم بالاتر از دمای محیط است، اما عکس این هم ممکن است درست باشد .

در مثالهای ۴-۳-۱ ، ۴-۳-۲ ، و ۴-۳-۳ تشریح خواهیم نمود که چگونه می توان با شرایط مرزی گوناگون مواجه شد . در این مثالها تیغهٔ باریکی را در نظر می گیریم که چنان عایق شده که رسانایی گرما فقط در امتداد محور $x$ هاست . پس با معادلهٔ یک بعدی حرارت در مختصات قائم سر و کار خواهیم داشت . معادلهٔ حرارت برای یک تیغهٔ نیمه نامتناهی نیز که لبه های آن در دمای ثابت نگاه داشته می شوند یا این که عایق شده اند به کار می رود .




شکل ۴-۳-۱ شار

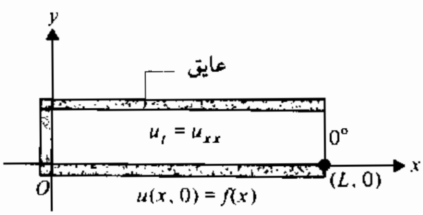
**مثال ۴-۳-۱** مسألهٔ زیر را حل کنید

معادله :
$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0;$$

شرایط مرزی :
$$\left.\begin{array}{l} -u_x(0, t) = 0, \\ u(L, t) = 0, \end{array}\right\} \quad t > 0;$$

شرط اولیه :
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

این مسأله رسانایی گرما در میله ای است که انتهای چپ آن کاملاً عایق شده، انتهای راست آن در دمای صفر قرار دارد و در طول میله یک توزیع دمای اوّلیه که با $f(x)$ تعریف شده، وجود دارد . (شکل ۴-۳-۲ را ملاحظه کنید)




شکل ۴-۳-۲

*حل* : از روش جداسازی متغیرها استفاده می کنیم . قرار می دهیم $u(x, t) = X(x)T(t)$ و آن را در معادلهٔ با مشتقات جزئی جایگزین می کنیم . در این صورت داریم

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

و با تقسیم بر $X(x)T(t)$ ، به دست می آوریم

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

مسألهٔ مقدار مرزی برحسب $X$ چنین است

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad X'(0) = 0, \qquad X(L) = 0,$$

و جوابهای آن عبارتند از

$$X_n(x) = \cos\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}x, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

چون معادلهٔ

$$T'_n(t) + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}T_n(t) = 0$$

جوابهایی به صورت

$$T_n(t) = \exp\left(\frac{-\pi^2(2n-1)^2}{4L^2}t\right),$$

دارد، پس برای $u(x, t)$ ترکیب خطی زیر را در نظر می گیریم

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\exp\left(\frac{-\pi^2(2n-1)^2}{4L^2}t\right)\cos\frac{(2n-1)\pi}{2L}x. \tag{۳-۳-۴}$$

حال با استفاده از شرط اوّلیه داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2L}x = f(x).$$

اگر $f(x)$ شرایط لازم را داشته باشد، آن گاه می توان آن را به صورت یک سری فوریهٔ کسینوسی بسط داد و بنابراین

$$a_{2n-1} = \frac{2}{L}\int_0^L f(s)\cos\frac{(2n-1)\pi}{2L}s\,ds, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{۴-۳-۴}$$

جواب نهایی با (۴-۳-۳) داده می شود که $a_{2n-1}$ با (۴-۳-۴) تعریف می شود .

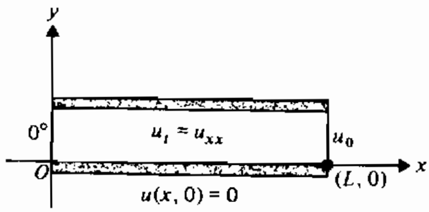
مثال بعدی تشریح خواهد نمود که چگونه یک ***شرط مرزی ناهمگن*** را می توان همگن کرد .

**مثال ۴-۳-۲** مسألهٔ زیر را حل کنید (شکل ۴-۳-۳ را ملاحظه کنید)

معادله : $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0;$

شرایط مرزی :
$$\left.\begin{array}{l} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = u_0, \quad \text{ثابت} \end{array}\right\} \quad t > 0;$$

شرط اولیه : $u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L.$




شکل ۴-۳-۳

*حل* : در این جا روش جداسازی متغیرها کاربرد ندارد، زیرا به جواب بدیهی منجر خواهد شد . (تمرین ۶) ولی اگر از یک تعویض متغیّر استفاده کنیم، مشکل را می توان برطرف کرد . بنابراین، فرض کنید

$$u(x, t) = U(x, t) + \phi(x),$$

در این صورت مسأله به صورت زیر در می آید

معادله : $U_t = U_{xx} + \phi''(x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0;$

شرایط مرزی :
$$\left.\begin{array}{l} U(0, t) + \phi(0) = 0, \\ U(L, t) + \phi(L) = u_0, \end{array}\right\} \quad t > 0;$$

شرط اولیه : $U(x, 0) + \phi(x) = 0, \quad 0 < x < L.$

حال اگر $\phi(x)$ را طوری انتخاب کنیم که

$$\phi''(x) = 0, \qquad \phi(0) = 0, \qquad \phi(L) = u_0, \tag{۴-۳-۵}$$

آن گاه معادلهٔ حاصل برحسب $U(x, t)$ را می توان با روش جداسازی متغیّرها حل نمود. جزئیات به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرینهای ۷ و ۸ را ملاحظه کنید).

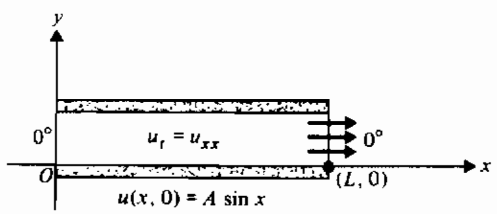
شیوه ای که در حل مسألهٔ مثال ۴-۳-۲ به کار رفت، تشریح روشی توانمند در ریاضیات است، یعنی، تبدیل و ساده کردن مسأله به صورتی که جواب آن معلوم باشد. مثالهایی دیگر کاربرد این شیوه در محاسبهٔ انتگرالهاست که از جانشانی استفاده می شود و یا در معادلات دیفرانسیل معمولی که دستهٔ معینی از معادلات مرتبهٔ دوم به معادلات مرتبهٔ اوّل تبدیل می شوند تمرینهای ۱۹ و ۲۰ را نیز ملاحظه کنید.

دقت کنید که مثال ۴-۳-۲ را می توان به طریق زیر نیز مورد بررسی قرار داد. یک انتهای میله را در دمای صفر ثابت نگاه داشته، و انتهای دیگر آن در دمای ثابت $u_0$. دمای اوّلیهٔ تمام میله برابر صفر است. ازنظر فیزیکی آشکار است که وقتی $t \to \infty$، دمای $u(x)$ برای $0 < x < L$ به سمت $u_0x/L$ میل خواهد کرد. ولی این بیان دیگری است برای آن که $u_0x/L$ جواب ***حالت پایای*** (مستقل از زمان $t$) مسأله است. این مسأله را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$u''(x) = 0, \qquad u(0) = 0, \qquad u(L) = u_0.$$

پس تابع $\phi(x)$ در (۴-۳-۵) جواب حالت پایای مسأله است. وقتی این جواب به ***جواب گذرا*** اضافه شود نتیجه جواب نهایی است که در تمرین ۸ به دست آمده است.

**مثال ۴-۳-۳** یک میلهٔ استوانه ای به طول $L$ در ابتدا دارای دمای $A \sin x$ $(A > 0)$ است، انتهای چپ آن در دمای صفر نگاه داشته شده و گرما از انتهای راست آن به محیط خارج که دمای آن صفر است منتقل می شود (شکل ۴-۳-۴). $u(x, t)$ را پیدا کنید.




شکل ۴-۳-۴

***حل :*** در این جا مسأله را می توانیم به صورت زیر بیان کنیم

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0;$$
$$\left.\begin{array}{l} u(0, t) = 0, \\ u_x(L, t) = hu(L, t), \quad h > 0, \end{array}\right\} \quad t > 0;$$
$$u(x, 0) = A \sin x, \quad 0 < x < L.$$

با جداسازی متغیرها داریم

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2,$$

بنابراین

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

از اوّلین شرط مرزی نتیجه می شود که $c_1 = 0$ ، و از شرط دوم نتیجه می شود

$$\tan \lambda L = \lambda / h. \tag{۶-۳-۴}$$

پس یک جواب را می توان به صورت زیر نوشت

$$u(x, t) = c_2 e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x$$

و اگر شرط اوّلیه را به کار بریم، داریم

$$u(x, 0) = c_2 \sin \lambda x = A \sin x,$$

که این شرط با انتخاب $\lambda = 1$ و $c_2 = A$ برآورده می شود . پس جواب نهایی چنین است

$$u(x, t) = Ae^{-t} \sin x \tag{۷-۳-۴}$$

تحقیق این که تابع فوق جواب مسأله است به عنوان تمرین واگذار می شود . (تمرین ۱۰ را ملاحظه کنید)

واضح است که **شکل** شرط اوّلیه در آخرین مثال یافتن جواب (۴-۳-۷) را تا حد زیادی ساده کرده است . اگر شرط اوّلیه تابع دیگری باشد، شاید نتوانیم آن را به صورت یک سری نامتناهی از توابع متعامد یکه بنویسیم، زیرا ممکن است چنین توابعی در دسترس نباشند . این حالت را در بخش ۴-۵ بررسی خواهیم نمود .

این بخش را با معرفی معادلهٔ یک بُعدی طول عمر فرمی* برای *انتشار نوترون* در محیطی نظیر گرافیت به پایان می بریم این معادله به صورت زیر است

---

* Enrico Fermi ، (۱۹۰۱-۱۹۵۴) فیزیک دان ایتالیایی که سرپرستی ساخت اوّلین رآکتور اتمی را به عهده داشته است .

$$\frac{\partial^2 q(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial q(x, \tau)}{\partial \tau}.$$

در این جا $q$ نمایانگر تعداد نوترونهایی است که «کند» می شوند، یعنی انرژی آنها از سطحی معین در ثانیه در واحد حجم پایینتر آمده است. طول عمر فرمی، $\tau$، معیاری برای انرژی از دست رفته است.

## تمرینهای ۴-۳

۱- نشان دهید تغییری در مقیاس زمانی به صورت $\tau = kt$ معادلهٔ انتشار (۴-۳-۱) را به شکل زیر تبدیل می کند

$$u_\tau = \nabla^2 u.$$

۲- در مثال ۴-۳-۱ نشان دهید:

الف) انتخاب $\lambda = 0$ به جواب بدیهی منتهی می شود؛

ب) انتخاب $+\lambda^2$ برای ثابت جداسازی به جواب بدیهی منتهی می شود.

۳- مقادیر ویژه و توابع ویژه در مسألهٔ زیر را بیابید

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad X'(0) = 0, \qquad X(L) = 0.$$

۴- توضیح دهید چرا جملهٔ شامل $a_0$ در جواب مثال ۴-۳-۱ وجود ندارد.

۵- بطور کامل نشان دهید جواب مثال ۴-۳-۱ در معادله صدق می کند.

۶- روش جداسازی متغیرها را برای مسألهٔ مثال ۴-۳-۲ به کار برید و نشان دهید که نتیجه، جواب بدیهی است (راهنمایی: مسأله را برحسب $T(t)$ بررسی کنید)

۷- نشان دهید جواب معادلهٔ (۴-۳-۵) عبارت است از

$$\phi(x) = \frac{u_0}{L} x.$$

۸- با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۷، مسألهٔ مثال ۴-۳-۲ را حل کنید.

۹- در مثال ۴-۳-۳ نشان دهید:

الف) $\lambda = 0$ به جواب بدیهی منجر می شود؛

ب) ثابت جداسازی $+\lambda^2$ به جواب بدیهی منجر می شود [*راهنمایی*: نشان دهید $f(\lambda) = \tanh \lambda L - (\lambda/h)$ به ازای $\lambda = 0$ صفر است اما با بررسی $f'(\lambda)$ نشان دهید به ازای

هیچ مقدار دیگری صفر نمی شود. ]

۱۰- نتیجهٔ داده شده در معادلهٔ (۴-۳-۷) را تحقیق کنید.

۱۱- مسألهٔ زیر را حل کنید.

معادله: $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0;$

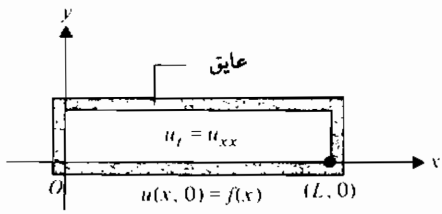
شرایط مرزی: $\left.\begin{array}{l} u_x(L, t) = 0, \\ u(0, t) = 0, \end{array}\right\} \quad t > 0;$

شرط اولیه: $u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$

۱۲- مسألهٔ تمرین ۱۱ را در حالت زیر حل کنید

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \dfrac{L}{2}, \\ L - x, & \dfrac{L}{2} \le x \le L. \end{cases}$$

۱۳- دو انتهای یک میلهٔ استوانه‌ای نازك به طول $L$ کاملاً عایق شده و توزیع دمای اولّیه در آن با $f(x)$ داده می شود. (شکل ۴-۳-۵ را ملاحظه کنید) دما را در هر نقطه میله و در هر زمان $t$ بیابید.




شکل ۴-۳-۵

۱۴- اگر گرما بطور یکنواخت در سراسر یک تیغهٔ نیمه نامتناهی به عرض $L$ با آهنگ ثابت $C$ تولید شود، معادلهٔ گرما در یک بُعد به شکل زیر است

$$u_t = u_{xx} + C, \qquad C > 0.$$

این معادله را با فرض آن که لبه های $x = 0$ و $x = L$ تیغهٔ در دمای صفر نگاه داشته شود، سطح تیغه عایق شود، و توزیع دمای اولّیه $f(x)$ باشد، حل کنید. (*راهنمایی*: از تعویض متغیّر $u(x, t) = U(x, t) + \phi(x)$ استفاده کنید)

۱۵- در تمرین ۱۴ قرار دهید $f(x) = 0$ و جواب را به دست آورید. (توجه : این مسأله ساده شدهٔ مسأله ای است که در ساخت تخته چندلایی پیش می آید که در آن حرارت توسّط بسامد بالا تأمین می شود)

۱۶- مسألهٔ زیر را حل کنید .

معادله : $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$

شرایط مرزی : $\left.\begin{array}{l} u_x(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0, \end{array}\right\} \quad t > 0;$

شرط اولیه $u(x, 0) = ax, \quad a > 0, \quad 0 < x < 2.$

۱۷- مسألهٔ زیر را حل کنید .

معادله : $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$

شرایط مرزی : $\left.\begin{array}{l} u(0, t) = 0, \\ u_x(1, t) = 0, \end{array}\right\} \quad t > 0;$

شرط اولیه : $u(x, 0) = u_0 x, \quad u_0 > 0, \quad 0 < x < 1.$

۱۸- اگر $f(x)$ در مثال ۴-۳-۱ به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \dfrac{L}{2}, \\ L, & \dfrac{L}{2} \le x \le L, \end{cases}$$

تعریف شود، نتیجهٔ زیر را به دست آورید

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{2L}{\pi} \bigg( & \exp\left(\frac{-\pi^2 t}{4L^2}\right)(2 - \sqrt{2}) \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \\ & - \exp\left(\frac{-3\pi^2 t}{4L^2}\right)\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3}\right)\cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) \\ & + \exp\left(\frac{-5\pi^2 t}{4L^2}\right)\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{5}\right)\cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) + \cdots \bigg). \end{aligned}$$

۱۹- وجوه $x = 0$ ، $x = a$ ، $y = 0$ ، و $y = b$ یک متوازی السطوح توپُر نیمه نامتناهی در دمای صفر نگاه داشته می شود و توزیع دمای اوّلیه بر روی وجه پایین با $f(x, y)$ داده می شود . دما را در درون این جسم در هر لحظهٔ $t$ بیابید . (*راهنمایی* : با مثال ۴-۱-۱ مقایسه کنید)

۲۰- اطراف یک میله به طول واحد کاملاً عایق شده بطوری که رسانایی گرما می تواند فقط در جهت $x$ ها باشد . انتهای چپ در دمای صفر نگاه داشته شده و انتهای راست عایق شده است . اگر دما اولّیه با تابع $ax^2$ ($a$ ثابت مثبت) داده شود، دما را در میله در هر لحظهٔ $t$ بیابید . (*راهنمایی* : تمرین ۱۷ را ملاحظه کنید) .

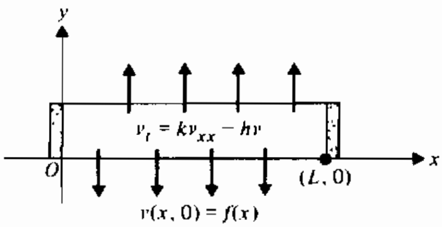
۲۱- دو انتهای یک میله به طول $L$ عایق شده و توزیع دمای اولّیه در آن با $f(x)$ داده می شود . اگر یک انتقال گرمای خطی بین سطح میله و محیط اطراف آن وجود داشته باشد، آن گاه معادلهٔ زیر به کار می رود

$$v_t(x, t) = kv_{xx}(x, t) - hv(x, t),$$

که در آن $h$ یک ثابت مثبت است . (شکل ۴-۳-۶) . با استفاده از جایگزینی

$$v(x, t) = \exp(-ht)\, u(x, t),$$

این معادله را به شکلی که قبلاً حل شده است، ساده کنید (با مثال ۱۳ مقایسه کنید) .




شکل ۴-۳-۶

۲۲- تمرین ۲۱ را حل کنید با شرط آن که دو انتهای میله به جای عایق شدن در دمای صفر نگاه داشته شوند .

## ۴-۴ روشهای تبدیل

هر وقت لازم باشد که یک مسألهٔ مقدار مرزی را روی یک حوزهٔ نامتناهی یا نیمه نامتناهی حل کنیم، روشهای تبدیل مناسب هستند . در بخش ۳-۳ و ۳-۴ چند مثال با استفاده از تبدیل فوریه ارائه کردیم . در این بخش مثالهای بیشتری با استفاده از هر دو روش تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس ارائه می کنیم .

**مثال ۴-۴-۱** تابع همساز کران دار $v(x, y)$ را در نوار نیمه نامتناهی $0 < x < c$ ، $y > 0$ چنان بیابید که در شرایط زیر صدق کند

الف) $v(0, y) = 0$

ب) $v_y(x, 0) = 0$

پ) $v_x(c, y) = f(y)$

این مسأله را از نظر فیزیکی تفسیر نمایید .

*حل* : معادلهٔ لاپلاس

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \qquad 0 < x < c, \qquad y > 0$$

باید حل شود .

از تبدیل فوریهٔ کسینوسی استفاده می کنیم و با توجه به شرط (ب)، متغیّر $y$ را تبدیل می کنیم . پس (به معادلهٔ ۳-۴-۴ مراجعه کنید)

$$\frac{d^2\bar{v}(x, \alpha)}{dx^2} - \alpha^2\bar{v}(x, \alpha) = 0$$

$$(\mathrm{a}')\ \bar{v}(0, \alpha) = 0, \qquad (\mathrm{c}')\ \frac{d\bar{v}(c, \alpha)}{dx} = \bar{f}(\alpha),$$

که

$$\bar{f}(\alpha) = \int_0^{\infty} f(y) \cos \alpha y \, dy.$$

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم عبارت است از

$$\bar{v}(x, \alpha) = c_1(\alpha) \cosh (\alpha x) + c_2(\alpha) \sinh (\alpha x),$$

که با توجه به شرط (الف)، $c_1(\alpha) = 0$ و با توجه به شرط (پ)،

$$c_2(\alpha) = \frac{\bar{f}(\alpha)}{\alpha \cosh (\alpha c)}$$

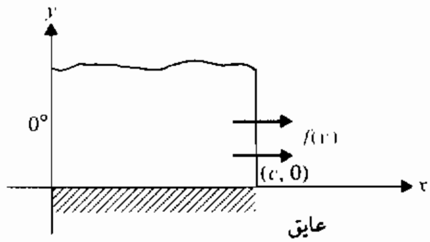
بنابراین

$$\bar{v}(x, \alpha) = \frac{\bar{f}(\alpha) \sinh (\alpha x)}{\alpha \cosh (\alpha c)}$$

و تبدیل وارون چنین است

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\bar{f}(\alpha)\sinh(\alpha x)}{\alpha\cosh(\alpha c)}\cos(\alpha y)\, d\alpha$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sinh(\alpha x)\cos(\alpha y)}{\alpha\cosh(\alpha c)}\, d\alpha \int_0^\infty f(s)\cos(\alpha s)\, ds.$$

با مراجعه به شکل ۴-۴-۱ ، می‌توانیم مسأله را به عنوان یافتن دمای حالت پایا در یک تیغهٔ نیمه نامتناهی به عرض $c$ تعبیر کنیم، با این شرط که لبهٔ چپ تیغه در دمای صفر نگاه داشته شده، لبهٔ پایین آن کاملاً عایق شده و شار در امتداد لبهٔ راست برابر تابع مفروض $f(y)$ است .




شکل ۴-۴-۱

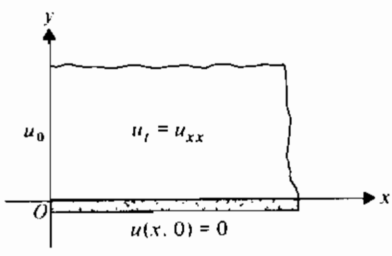
در مثال بعدی از تبدیل فوریهٔ سینوسی استفاده می‌کنیم .

**مثال ۴-۴-۲** مسألهٔ زیر را حل کنید (شکل ۴-۴-۲) .

معادله : $u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$

شرایط مرزی : $u(0, t) = u_0, \quad t > 0;$

شرط اولیه : $u(x, 0) = 0, \quad x > 0.$




شکل ۴-۴-۲

*حل* : با استفاده از تبدیل فوریهٔ سینوسی $_s$ $u$ را تبدیل می کنیم . پس (به معادلهٔ ۳-۴-۲ مراجعه کنید)

$$\frac{d\bar{u}(\alpha, t)}{dt} = \alpha u_0 - \alpha^2 \bar{u}(\alpha, t)$$

و جواب این معادلهٔ دیفرانسیل معمولی ، ناهمگن ، مرتبهٔ اوّل با استفاده از شرط اوّلیه $\bar{u}(\alpha, 0) = 0$ به صورت زیر است (تمرین ۳)

$$\bar{u}(\alpha, t) = \frac{u_0}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha^2 t)),$$

تبدیل فوریهٔ سینوسی وارون $\bar{u}(\alpha, t)$ عبارت است از

$$u(x, t) = \frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty (1 - \exp(-\alpha^2 t)) \sin \alpha x \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

اما بنابر تمرین ۸ در بخش ۴-۳ داریم

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \, d\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \quad \text{if } x > 0.$$

بنابراین

$$u(x, t) = u_0 - \frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty \exp(-\alpha^2 t) \sin \alpha x \frac{d\alpha}{\alpha}$$

و با استفاده از این که

$$\frac{\sin \alpha x}{\alpha} = \int_0^x \cos \alpha s \, ds,$$

داریم

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 - \frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty \exp(-\alpha^2 t)\, d\alpha \int_0^x \cos \alpha s \, ds \\ &= u_0 - \frac{2u_0}{\pi}\int_0^x ds \int_0^\infty \exp(-\alpha^2 t) \cos \alpha s \, d\alpha. \end{aligned}$$

انتگرال نسبت به $\alpha$ در جدولهای انتگرالهای معین وجود دارد ، بنابراین

$$u(x, t) = u_0 - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{\exp(-s^2/4t)\, ds}{\sqrt{t}}.$$

حال با استفاده از جانشانی $v^2 = s^2/4t$ نتیجه به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 - \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} \exp(-v^2)\, dv \\ &= u_0 - u_0 \operatorname{erf}(x/2\sqrt{t}) \\ &= u_0(1 - \operatorname{erf}(x/2\sqrt{t})) \\ &= u_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \end{aligned}$$

که در آن erfc ، ***متمّم تابع خطا***، به صورت زیر تعریف می شود

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-s^2}\, ds,$$

و ***تابع خطا***، $\operatorname{erf} x$ به شکل زیر تعریف می شود (تمرین ۱۲ در بخش ۳-۴ را ملاحظه کنید)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2}\, ds. \quad \blacksquare$$

مسألهٔ مثال ۴-۴-۲ را دوباره حل می کنیم، این بار از تبدیل لاپلاس استفاده می کنیم. می دانیم که تبدیل لاپلاس $u(t)$ عبارت است از

$$U(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t)\, dt, \qquad s > 0.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\, dt &= e^{-st} u(x, t)\Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t)\, dt \\ &= sU(x, s), \end{aligned}$$

با توجه به این که $u(x, 0) = 0$ ، معادلهٔ با مشتقات جزئی $u_t = u_{xx}$ پس از تبدیل به صورت زیر در می آید

$$\frac{d^2 U(x, s)}{dx^2} - sU(x, s) = 0$$

و

$$U(0, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u_0\, dt = \frac{u_0}{s}.$$

حال جواب این معادلهٔ دیفرانسیل معمولی، همگن، مرتبهٔ دوم چنین است

$$U(x, s) = c_1(s)e^{\sqrt{s}x} + c_2(s)e^{-\sqrt{s}x}.$$

مقدار $c_1(s)$ را صفر اختیار می کنیم، چون در این صورت $U(x, s)$ برای $x > 0$ کران دار باقی خواهد ماند و با به کار بردن شرط $U(0, s) = u_0/s$ ، داریم

$$U(x, s) = \frac{u_0}{s} e^{-\sqrt{s}x}.$$

با استفاده از جدول تبدیلات لاپلاس، جدول ۱ ، مانند قبل خواهیم داشت

$$u(x, t) = u_0 \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{t})$$

مثال آخری اثر شرط مرزی ناهمگن را تشریح می کند . چنین شرطی در تبدیل به یک معادله دیفرانسیل ناهمگن منجر می شود . در بخش ۴-۳ روش دیگری را در مواجه شدن با شرط مرزی ناهمگن ارائه نمودیم . (مثال ۴-۳-۲ را ملاحظه کنید). مثال زیر نشان می دهد که چگونه از تبدیل لاپلاس می توان بعضی از مسائل با شرط مرزی ناهمگن را بسادگی حل کرد .

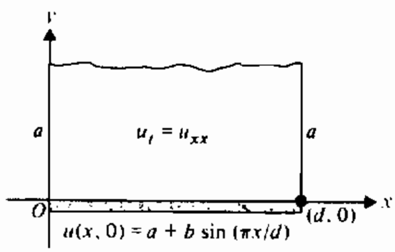
**مثال ۴-۴-۳** مسألهٔ مقدار مرزی زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید (شکل ۴-۴-۳) .

معادله : $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < d, \quad t > 0;$

شرایط مرزی : $\left.\begin{aligned} u(0, t) &= a, \\ u(d, t) &= a, \end{aligned}\right\} \quad t > 0;$

شرط اولیه : $u(x, 0) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{d}x\right), \quad 0 < x < d,$

که $a$ و $b$ ثابتند .




شکل ۴-۴-۳

**حل** : با تبدیل معادله و شرایط مرزی مسألهٔ زیر نتیجه می شود

$$\frac{d^2U(x, s)}{dx^2} - sU(x, s) = -a - b\sin\left(\frac{\pi}{d}x\right),$$

$$U(0, s) = \frac{a}{s},$$

$$U(d, s) = \frac{a}{s}.$$

این یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی با جواب متمّم زیر است :

$$U_c(x, s) = c_1(s)e^{\sqrt{s}x} + c_2(s)e^{-\sqrt{s}x}.$$

می توان یک جواب خصوصی به شکل

$$U_p(x, s) = \frac{a}{s} + \frac{bd^2}{d^2s + \pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{d}x\right).$$

با روش ضرایب نامعین برای معادله به دست آورد . مجموع $U_c(x, s)$ و $U_p(x, s)$ جواب عمومی است، و با محاسبهٔ $c_1(s)$ و $c_2(s)$ به کمک $U(0, s) = U(d, s) = a/s$ ، داریم

$$U(x, s) = \frac{a}{s} + \frac{bd^2}{d^2s + \pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{d}x\right).$$

در یافتن تبدیل وارون، توجه داریم که $\sin(\pi x/d)$ را می توان ثابت در نظر گرفت . در این صورت

$$u(x, t) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{d}x\right)\exp(-\pi^2 t/d^2).$$

جزئیات مسأله به عنوان تمرین واگذار می شود . (تمرین ۵ را ملاحظه کنید)

**مثال ۴-۴-۴** مسألهٔ زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید .

معادله : $u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < c, \quad t > 0;$

شرایط مرزی : $\left.\begin{aligned} u(0, t) = 0, \\ u(c, t) = 0, \end{aligned}\right\} \quad t > 0;$

شرایط اولیه :

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= b\sin\left(\frac{\pi}{c}x\right),\\ u_t(x,0) &= -b\sin\left(\frac{\pi}{c}x\right),\end{aligned}\right\} \quad 0 < x < c.$$

*حل* : با تبدیل معادله و شرایط مرزی نتیجه می شود

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} = s^2U(x,s) - bs\sin\left(\frac{\pi}{c}x\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{c}x\right),$$

$$U(0,s) = U(c,s) = 0,$$

جواب این مسأله به صورت زیر است (تمرین ۷)

$$U(x,s) = \frac{c^2b(s-1)}{c^2s^2+\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{c}x\right).$$

بنابراین

$$u(x,t) = b\sin\left(\frac{\pi}{c}x\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{c}t\right) - \frac{c}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{c}t\right)\right). \quad \blacksquare$$

در مثال بعدی شرایط مثال ۴-۴-۴ را ساده خواهیم نمود و نشان می دهیم که، علی رغم این ساده سازی، حل مسأله با روش تبدیل لاپلاس سخت است .

**مثال ۴-۴-۵** مسألهٔ زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید (شکل ۴-۴-۴) .

معادله :

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$

شرایط مرزی :

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= 1,\\ u(1,t) &= 1,\end{aligned}\right\} \quad t > 0;$$

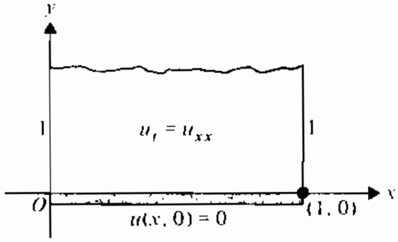
شرط اولیه :

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

مسألهٔ تبدیل شده عبارت است از

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} = sU(x,s),$$

$$U(0,s) = \frac{1}{s}, \qquad U(1,s) = \frac{1}{s},$$




شکل ۴-۴-۴

که ساده به نظر می رسد . ولی جواب آن (تمرین ۹) به صورت زیر است

$$U(x, s) = \frac{1}{s}\cosh\sqrt{s}x + \frac{(1-\cosh\sqrt{s})\sinh\sqrt{s}x}{s\sinh\sqrt{s}}$$
$$= \frac{\sinh\sqrt{s}x + \sinh\sqrt{s}(1-x)}{s\sinh\sqrt{s}}. \quad \blacksquare$$

حتی با استفاده از جدولهای تبدیلات لاپلاس نسبةً جامع که در دسترس باشد، نمی توان انتظار داشت تابع $U(x, s)$ در مثال ۴-۴-۵ یافت شود . آنچه در این جا لازم است یک روش کلّی برای به دست آوردن تبدیل لاپلاس وارون یک تابع است، همانند روشی که در بخش ۳-۳ برای به دست آوردن تبدیل فوریهٔ وارون به کار بردیم . یافتن تبدیل لاپلاس وارون محاسبه با متغیرهای مختلط و در حالت خاص انتگرال گیری مسیری را شامل می شود . این مبحث را در بخش ۶-۵ خواهیم دید . ولی برای روش حل مسألهٔ حاضر، تمرین ۱۰ را ملاحظه کنید .

### تمرینهای ۴-۴

۱- مثال ۴-۴-۱ را بتفصیل حل کنید .

۲- مثال ۴-۴-۱ را با فرض $f(y) = e^{-y}$ حل کنید .

۳- مسألهٔ مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید

$$\frac{d\bar{u}(t)}{dt} + \alpha^2\bar{u}(t) = \alpha u_0, \qquad \bar{u}(0) = 0,$$

که $\alpha$ و $u_0$ ثابتند . (با مثال ۴-۴-۲ مقایسه کنید)

۴- جزئیات لازم برای رسیدن به جواب مثال ۴-۴-۲ را بنویسید .

۵- با فرض آن که

$$\frac{d^2U(x, s)}{dx^2} - sU(x, s) = -a - b\sin\left(\frac{\pi}{d}x\right),$$

$$U(0, s) = U(d, s) = \frac{a}{s}.$$

الف) جواب متمّم، $U_c(x, s)$ را به دست آورید .

ب) یک جواب خصوصی با روش ضرایب نامعین به دست آورید .

پ) جواب کامل زیر را به دست آورید .

$$U(x, s) = \frac{a}{s} + \frac{bd^2}{d^2s + \pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{d}x\right).$$

ت) تبدیل لاپلاس وارون تابع $U(x, s)$ در قسمت (پ) را بیابید .

۶- نشان دهید جواب به دست آمده در مثال ۴-۴-۳ در معادله و شرایط آن صدق می کند .

۷- مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید .

$$\frac{d^2U(x, s)}{dx^2} - s^2U(x, s) = b(1 - s)\sin\frac{\pi}{c}x,$$

$$U(0, s) = U(c, s) = 0.$$

(با مثال ۴-۴-۴ مقایسه کنید)

۸- تبدیل لاپلاس وارون تابع $U(x, s)$ در مثال ۴-۴-۴ را به دست آورید .

۹- مسألهٔ مقدار مرزی در مثال ۴-۴-۵ را برای یافتن $U(x, s)$ حل کنید .

۱۰- در مسألهٔ مثال ۴-۴-۵ جا نشانی زیر را در نظر بگیرید

$$u(x, t) = U(x, t) + \phi(x).$$

سپس مسأله را با روش جداسازی متغیّرها حل کنید .

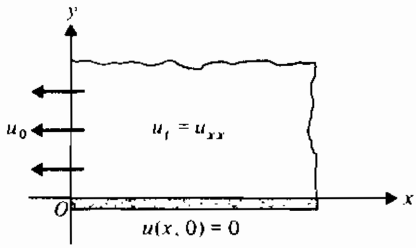
۱۱- مسألهٔ زیر را با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید (شکل ۴-۴-۵)

معادله : $u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$

شرایط مرزی : $u_x(0, t) = u_0, \quad t > 0;$

شرط اولیه : $u(x, 0) = 0, \quad x > 0.$

این مسأله را ازنظر فیزیکی تعبیر نمایید .




شکل ۴-۴-۵

۱۲- تمرین ۱۱ را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید .

۱۳- الف) تابع کران دار و همساز $v(x, y)$ را بر نوار نیمه نامتناهی $0 < x < c$ ، $y > 0$ به دست آورید بطوری که در شرایط زیر صدق کند :

**i)** $v(0, y) = 0;$
**ii)** $v_y(x, 0) = 0;$
**iii)** $v_x(c, y) = f(y).$

ب) این مسأله را ازنظر فیزیکی تعبیر نمایید .

۱۴- الف) تابع کران دار و همساز $v(x, y)$ را بر نوار نیمه نامتناهی $0 < y < b$ ، $x > 0$ به دست آورید بطوری که در شرایط زیر صدق کند :

**i)** $v_y(x, 0) = 0;$
**ii)** $v_x(0, y) = 0;$
**iii)** $v(x, b) = f(x).$

ب) این مسأله را ازنظر فیزیکی تعبیر نمایید .

۱۵- مسألهٔ زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید

معادله : $u_{tt} = u_{xx} + \sin\frac{\pi x}{c}\sin\omega t, \quad 0 < x < c, \quad t > 0;$

شرایط مرزی : $u(0, t) = 0, \quad u(c, t) = 0, \quad t > 0;$

شرایط اولیه : $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < c.$

۱۶- نشان دهید

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-ax)}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad a > 0.$$

۱۷- الف) نمودار $f(x) = \exp(-x^2)$ را رسم کنید.

ب) نمودار $f(x) = \operatorname{erf} x$. (*راهنمایی*: مقادیر $\operatorname{erf} x$ را در جدولها می توان یافت)

پ) نمودار $f(x) = \operatorname{erfc} x$ را رسم کنید.

ت) نمودار $u(x,t) = u_0 \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{t})$ را برای مقادیر مختلف $t$ رسم کنید؛ برای راحتی $u_0 = 1$ بگیرید.

## ۴-۵ مسائل اشترم ـ لیوویل

مسألهٔ مقدار مرزی به شکل

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \lambda w(x))y = 0, \tag{۴-۵-۱}$$

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0,\\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0, \end{aligned} \tag{۴-۵-۲}$$

یک دستگاه اشترم ـ لیوویل نامیده می شود به شرط این که ثابتها و توابع فوق دارای خواصی معیّن باشند که بعداً توصیف خواهیم کرد. اشترم ریاضی دان سوئیسی و لیوویل ریاضی دان فرانسوی همراه با کشی همکار لیوویل شرایطی را بررسی کرده اند که تحت آنها یک تابع را می توان برحسب یک سری از توابع متعامد بسط داد. ***مسألهٔ اشترم ـ لیوویل*** عبارت است از یافتن مقادیر $\lambda$ و مقادیر نظیر $y$ که در دستگاه صدق کنند. چون دستگاههایی که با معادلات (۴-۵-۱) و (۴-۵-۲) توصیف شده اند، کاربردهای گوناگون دارند، نظریهٔ اشترم ـ لیوویل بسط و توسعهٔ زیادی یافته است.

در معادلهٔ (۴-۵-۱) فرض می کنیم $r(x)$ تابعی حقیقی است که بربازهٔ $a \le x \le b$ پیوسته و دارای مشتق پیوسته است. همچنین فرض می کنیم در همان بازه $q(x)$ حقیقی و پیوسته و $w(x)$ مثبت باشد. ممکن است در نقاط تنهای بازه داشته باشیم $w(x) = 0$. علاوه بر این می خواهیم $\lambda$ یک ثابت (مستقل از $x$) باشد و در معادلهٔ (۴-۵-۲) $a_1$ و $a_2$ هر دو صفر نباشند و $b_1$ و $b_2$ هر دو صفر نباشند. اگر برای $a \le x \le b$، $r(x) > 0$، مسألهٔ اشترم ـ لیوویل منظم نامیده می شود.

منظور از حل یک مسألهٔ اشترم ـ لیوویل منظم، یافتن مقادیر $\lambda$ (که **مقادیر ویژه** یا مقادیر مشخّصه نامیده می شوند) و مقادیر متناظر $y$ (که **توابع ویژه** یا توابع مشخصه نامیده می شوند) است. این کار با توجه به واقعیتهای زیر که آنها را بدون اثبات بیان می کنیم، ساده تر می شود.

۱- همهٔ مقادیر ویژه حقیقی اند.

۲- تعدادی نامتناهی مقادیر ویژه وجود دارند و آنها را می توان به صورت $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots$ مرتب نمود.

۳- به هر مقدار ویژه یک تابع متناظر می گردد.

۴- توابع ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ متفاوت مستقل خطی اند.

۵- توابع ویژه بر بازهٔ $a < x < b$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ مجموعه ای متعامد تشکیل می دهند.

۶- $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$.

حال چند مثال می آوریم و در این مثالها موارد فوق را تحقیق می کنیم.

**مثال ۴-۵-۱** دستگاه زیر را حل کنید:

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0.$$

***حل***: در این جا $r(x) = 1$، $q(x) = 0$، $w(x) = 1$، $a = 0$، $b = \pi$، $a_1 = b_1 = 1$ و $a_2 = b_2 = 0$.

جواب معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$y = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

با فرض $\lambda > 0$. اگر $\lambda \le 0$، آن گاه دستگاه فقط جواب بدیهی $y = 0$ را دارد (تمرین ۱). این جواب مورد نظر نیست، زیرا هر دستگاه اشترم ـ لیوویل یک جواب بدیهی دارد. توجه کنید که صفر را به عنوان مقداری ویژه می پذیریم ولی به عنوان تابعی ویژه نه.

شرط $y(0) = 0$ نتیجه می دهد که $c_1 = 0$؛ پس جواب با این شرط چنین است

$$y = c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

از شرط دوم $y(\pi) = 0$ نتیجه می شود که یا $c_2 = 0$ (که به جواب بدیهی منتهی می شود) یا $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$، یعنی، $\lambda = n^2$، $n = 1, 2, 3, \ldots$. پس مقادیر ویژهٔ دستگاه عبارتند از $\lambda_1 = 1$، $\lambda_2 = 4$، $\lambda_3 = 9$، ... . توابع ویژهٔ متناظر عبارتند از

$$y_1(x) = \sin x, \qquad y_2(x) = \sin 2x, \qquad y_3(x) = \sin 3x, \ldots$$

و بطور کلّی (شکل ۴-۵-۱)،

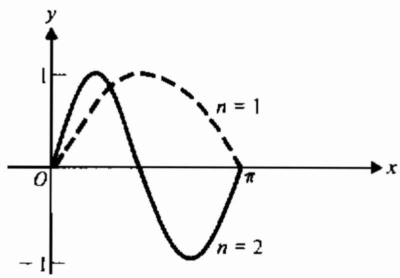
$$y_n(x) = \sin nx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

که ثابتهای دلخواه برابر یک انتخاب شده اند .

حال بسادگی می توان تحقیق نمود که این توابع ویژه بر بازهٔ $0 < x < \pi$ نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ مجموعه ای متعامد تشکیل می دهند . برای $m \neq n$ داریم

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx \, dx = \frac{\sin (n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\sin (n+m)x}{2(n+m)}\bigg|_0^\pi = 0,$$

همان طور که در بخش ۳-۲ دیدیم تعامد این توابع ویژه در بسطهای سری فوریه از اهمیتی ویژه برخوردار است .




شکل ۴-۵-۱ توابع ویژه (مثال ۴-۵-۱)

**مثال ۴-۵-۲** دستگاه زیر را حل کنید

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y'(\pi) = 0.$$

**حل** : در این جـــا داریـم $r(x) = w(x) = 1$ ، $q(x) = 0$ ، $a = 0$ ، $b = \pi$ ، $a_1 = b_1 = 0$ ، و $a_2 = b_2 = 1$ . جواب این معادلهٔ دیفرانسیل باز هم به صورت زیر است

$$y = c_1 \cos (\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin (\sqrt{\lambda} x), \qquad \lambda \geq 0.$$

که از آن داریم

$$y' = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin (\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sqrt{\lambda} \cos (\sqrt{\lambda} x).$$

اوّلین شرط $y'(0) = 0$ نتیجه می دهد $c_2 = 0$ ، بنابراین جواب به صورت زیر در می آید

$$y = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad \text{و} \quad y' = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

شرط دوم $y'(\pi) = 0$ نتیجه می دهد $\sqrt{\lambda} = n$ ، $\lambda = n^2$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$ . پس مقادیر ویژه عبارتند از $\lambda_0 = 0$ ، $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 4$ ، $\lambda_3 = 9$ ، ... ، و توابع ویژه متناظر عبارتند از $y_0 = 1$ ، $y_1 = \cos x$ ، $y_2 = \cos 2x$ ، $y_3 = \cos 3x$ ، ... ، که در این جا هم ثابتهای دلخواه برابر یک قرار داده شده اند .

تعامد توابع ویژه را به صورت زیر می توان تحقیق کرد :

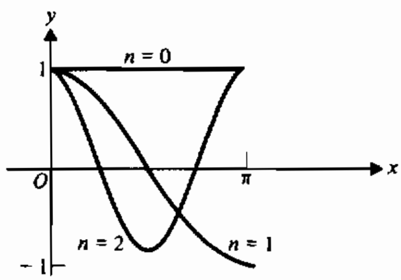
$$\int_0^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} + \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}\bigg|_0^{\pi} = 0$$

بنابراین مجموعهٔ (شکل ۴-۵-۲)

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}$$

بر بازهٔ $0 < x < \pi$ نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ مجموعه ای متعامد است . این خاصیت در بسطهای سری فوریه نیز مفید است .

در این مثال $\lambda = 0$ مقدار ویژه است . می توان نشان داد (تمرین ۲) که $\lambda < 0$ به جواب بدیهی منجر می شود .




شکل ۴-۵-۲ توابع ویژه (مثال ۴-۵-۲)

**مثال ۴-۵-۳** دستگاه زیر را حل کنید :

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) + y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

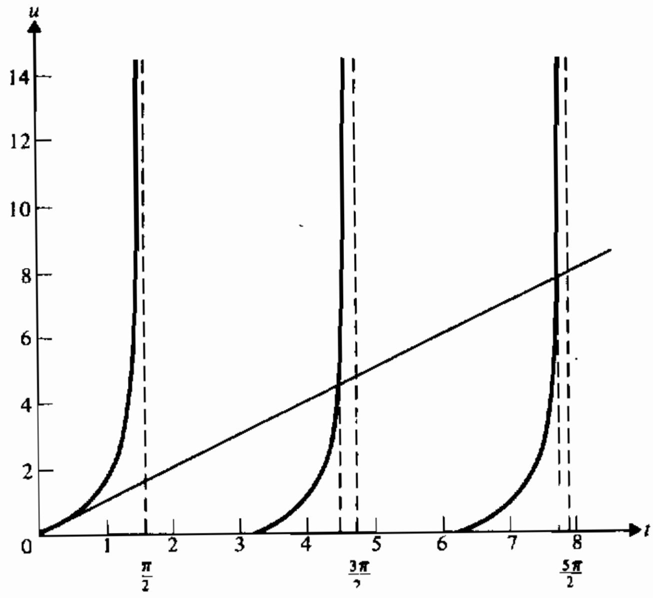
**حل** : داریم $r(x) = w(x) = 1$ ، $q(x) = 0$ ، $a = 0$ ، $b = 1$ ، $a_1 = a_2 = b_1 = 1$ ، و $b_2 = 0$ . اگر $\lambda < 0$ ، جواب بدیهی خواهیم داشت (تمرین ۳) . اگر $\lambda = 0$ ، آن گاه $y = k_1 + k_2 x$ که با توجه

به شرایط مسأله نتیجه می شود که تابع ویژهٔ متناظر با $\lambda = 0$ ، $1 - x$ است .

اگر $\lambda > 0$ ، جواب معادلهٔ دیفرانسیل چنین است

$$y = c_1 \cos (\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin (\sqrt{\lambda}x).$$

شرط $y(0) + y'(0) = 0$ نتیجه می دهد که $c_1 + c_2\sqrt{\lambda} = 0$ ، یعنی $c_1 = -c_2\sqrt{\lambda}$ . از شرط $y(1) = 0$ نتیجه می شود که $\sqrt{\lambda} = \tan \sqrt{\lambda}$ . پس مقادیر ویژه مجذور جوابهای معادله متعالی $t = \tan t$ هستند . این معادله را با روشهای جبری نمی توان حل کرد، بنابراین نمودارهای $u = t$ و $u = \tan t$ را رسم کرده و مقادیر $t$ را که به ازای آنها دو منحنی متقاطعند در نظر می گیریم . شکل ۴-۵-۳ دو مقدار ویژهٔ اوّل، $\lambda_1 \doteq (4.5)^2$ و $\lambda_2 \doteq (7.7)^2$ ، و مقدار ویژهٔ $\lambda = 0$ که قبلاً به دست آمده است را نشان می دهد .




شکل ۴-۵-۳ جوابهای مشترک $u = t$ و $u = \tan t$

از شکل پیداست که تعدادی نامتناهی مقادیر ویژه وجود دارند که به سمت مجذور مضارب فرد $\pi/2$ میل می کنند . به عبارت دیگر ،

$$\lambda_n \doteq \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4},$$

و هر قدر عدد صحیح و مثبت $n$ بزرگتر شود، تقریب بهتر می شود . برای به دست آوردن مقادیر ویژه، استفاده از کامپیوتر مفید خواهد بود . برای مثال، طرح زیر محاسبهٔ $\lambda_1$ را تا سه رقم اعشار به کمک ماشین حساب نشان می دهد .

| $t$ | $\tan t$ |
|---|---|
| ۴٫۵ | ۶٫۶۳۷ |
| ۴٫۴ | ۳٫۰۹۶ |
| ۴٫۴۵ | ۳٫۷۲۳ |
| ۴٫۴۹ | ۴٫۴۲۲ |
| ۴٫۴۹۵ | ۴٫۵۲۷ |
| ۴٫۴۹۳۵ | ۴٫۴۹۵ |
| ۴٫۴۹۳۴ | ۴٫۴۹۳ |

پس $\lambda_1 \doteq ۲۰/۱۸۷$

مقادیر $\tan t$ راهنمایی برای انتخاب مقدار بعدی $t$ است . مقادیر ویژهٔ این مسأله را در جدولها نیز می توان یافت .

توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژهٔ $\lambda_n$ ، $n = 1, 2, \ldots$ عبارتند از

$$y_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x) - \sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}x).$$

نظریهٔ اشترم ـ لیوویل تعامد این توابع ویژه را بر بازهٔ $0 < x < 1$ تضمین می کند . به عبارت دیگر، اگر $m \neq n$ ، آن گاه

$$\int_0^1 (\sin(\sqrt{\lambda_n}x) - \sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}x))(\sin(\sqrt{\lambda_m}x) - \sqrt{\lambda_m}\cos(\sqrt{\lambda_m}x))\,dx = 0$$

به عنوان مثال، انتگرال فوق را برای $n = 1$ و $m = 2$ محاسبه می کنیم، یعنی، $\lambda_1 = 4.493$ و $\lambda_2 = 7.725$ . داریم

$$\int_0^1 (\sin 4.493x - 4.493\cos 4.493x)(\sin 7.725x - 7.725\cos 7.725x)\,dx = -0.002.$$

به دلیل استفاده از مقادیر تقریبی مقادیر ویژه و همچنین خطای گرد کردن مقدار انتگرال فوق برابر صفر نشده است .

تا این جا تمام مثالهای ارائه شده شامل یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم بسیار ساده بودند. ولی نشان می دهیم که هر معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم، خطی، همگن را می توان به شکل (۴-۵-۱) تبدیل نمود. معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0, \qquad (۴-۵-۳)$$

با فرض $A'(x) \neq B(x)$. توجه کنید که اگر این محدودیت اعمال نشود، معادلهٔ (۴-۵-۳) بجز در مورد ثابت $\lambda$، شکل مطلوب را خواهد داشت. اگر معادلهٔ (۴-۵-۳) را در

$$\frac{1}{A(x)} \exp\left(\int^x \frac{B(t)\,dt}{A(t)}\right) = \mu(x)/A(x),$$

ضرب کنیم، نتیجه به صورت زیر نوشته می شود

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)\frac{dy}{dx}\right) + \frac{C(x)}{A(x)}\mu(x)y = 0,$$

که شکل مطلوب برای یک دستگاه اشترم ـ لیوویل است. البته پارامتر $\lambda$، قسمت اساسی دستگاه می باشد.

برای سادگی نماد یک عملگر دیفرانسیل $L$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$L \equiv \frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x), \qquad (۴-۵-۴)$$

یعنی،

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = (ry')' + qy,$$

پریم مشتق گیری نسبت به $x$ را نشان می دهد. با این نماد معادلهٔ (۴-۵-۱) به صورت زیر نوشته می شود

$$Ly = -\lambda wy, \qquad (۴-۵-۵)$$

از معادلهٔ فوق بیشتر آشکار می شود که چرا $\lambda$ را مقدار ویژهٔ متناظر با تابع ویژهٔ $y$ می نامند. (با بخش ۴-۱ مقایسه کنید)

اگر $y_1$ و $y_2$ توابعی باشند که دوبار بر بازهٔ $[a, b]$ مشتق پذیرند، آن گاه

$$\begin{aligned} y_1Ly_2 - y_2Ly_1 &= y_1(ry_2')' - y_2(ry_1')' \\ &= y_1(ry_2'' + r'y_2') - y_2(ry_1'' + r'y_1') \\ &= r'(y_1y_2' - y_2y_1') + r(y_1y_2'' - y_2y_1'') \\ &= (r(y_1y_2' - y_2y_1'))'. \end{aligned}$$

از طرف دیگر، اگر $\lambda_1$ مقدار ویژهٔ متناظر با $y_1$ و $\lambda_2$ مقدار ویژهٔ متناظر با $y_2$ باشد، آن گاه از معادلهٔ (۴-۵-۵) داریم

$$y_1Ly_2 - y_2Ly_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)wy_1y_2.$$

پس، با مساوی قرار دادن دو کمیت، به دست می آوریم

$$(\lambda_1 - \lambda_2)wy_1y_2 = (r(y_1y_2' - y_2y_1'))'$$

و با انتگرال گیری از $a$ تا $b$ نتیجه می شود

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b w(x)y_1(x)y_2(x)\,dx = r(y_1y_2' - y_2y_1')\Big|_a^b. \tag{۴-۵-۶}$$

حال دیده می شود که اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، آن گاه $y_1(x)$ و $y_2(x)$ بر بازهٔ $[a, b]$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ متعامدند، به شرط آن که شرایط مرزی طوری باشند که طرف راست معادلهٔ (۴-۵-۶) صفر شود. به عنوان تمرین نشان دهید که شرایط مرزی مثال ۴-۵-۳، عبارت $y_ny'_m - y_my'_n$ را در $x = 0$ و $x = 1$ صفر می کنند (تمرین ۴ را ملاحظه کنید) در کتابهای پیشرفته تر نشان داده می شود که توابع ویژهٔ یک دستگاه اشترم ـ لیوویل بر بازهٔ $(a, b)$ نسبت به توابع تکه ای ـ هموار یک **مجموعهٔ کامل** تشکیل می دهند. (معادلهٔ ۳-۱-۲۲ را ملاحظه کنید) به خاطر بیاورید این بدان معناست که مجموعهٔ

$$\{\phi_n(x),\, n = 1, 2, \ldots\}$$

شامل توابع ویژهٔ نرمال شده معادلهٔ (۴-۵-۱) است و اگر $f$ بر بازهٔ $(a, b)$ تکه ای ـ هموار باشد،

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b\left(f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n(x)\right)^2 w(x)\,dx = 0. \tag{۴-۵-۷}$$

به عبارت دیگر، $f$ را می توان به وسیلهٔ یک سری از توابع ویژه نمایش داد، یعنی

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)$$

با

$$c_n = \int_a^b f(s)\phi_n(s)w(s)\,ds, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

و بطوری که معادله (۴-۵-۷) برقرار باشد .

تا این جا با مسائل منظم سر و کار داشتیم . یک مسألهٔ اشترم ـ لیوویل را تکین نامیم اگر $r(a) = 0$ و $a_1 = a_2 = 0$ ، یا $r(b) = 0$ و $b_1 = b_2 = 0$ . در این حالتها توابع ویژه باز هم متعامدند (تمرین ۵ را ملاحظه کنید) . مسائل تکین نیز وقتی پیش می آید که $r(x)$ یا $w(x)$ در $x = a$ یا $x = b$ صفر شود، وقتی که $q(x)$ در این نقاط ناپیوسته باشد، یا وقتی که بازهٔ $a \le x \le b$ ، بی کران باشد .

## تمرینهای ۴-۵

۱- تحقیق کنید اگر $\lambda \le 0$ ، مسألهٔ مثال ۴-۵-۱ فقط جواب بدیهی دارد .

۲- نشان دهید در مثال ۴-۵-۲ ، $\lambda < 0$ به جواب بدیهی منجر می شود .

۳- نشان دهید در مسأله مثال ۴-۵-۳ ، $\lambda < 0$ به جواب بدیهی می انجامد .

۴- نشان دهید تابع ویژهٔ $y_n(x)$ و شرایط مرزی مثال ۴-۵-۳ به قسمی هستند که $y_n y'_m - y_m y'_n$ در $x = 0$ و در $x = 1$ صفر می شود .

۵- در معادلات (۴-۵-۱) و (۴-۵-۲) اگر $r(a) = a_1 = a_2 = 0$ ، توضیح دهید چرا توابع ویژه متعامدند . (*راهنمایی* : طرف راست معادلهٔ ۴-۵-۶ را بررسی کنید)

۶- مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ متناظر را در دستگاه اشترم ـ لیوویل منظم زیر بیابید .

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0.$$

در تمرینهای ۷ تا ۱۱ ، مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ هر دستگاه را بیابید

۷- $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(-\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

۸- $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

۹- $y'' + (1 + \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

۱۰- $y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

۱۱- $y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

۱۲- معادلهٔ دیفرانسیل تمرین ۱۱ را به شکل (۴-۵-۱) تبدیل کنید . (*راهنمایی* : $\mu(x)$ را

به صورتی که در متن نشان داده شده است بیابید.)

۱۳- رابطهٔ تعامد را برای توابع ویژه در تمرینهای ۸ تا ۱۱ بیان کنید، یعنی، تابع وزن و بازهٔ تعامد را برای هریک مشخص کنید.

۱۴- در معادلهٔ (۴-۵-۱) چرا شرط $r(x) > 0$ ، $a \le x \le b$ ، برای یک مسألهٔ اشترم ـ لیوویل منظم لازم است؟

۱۵- مسألهٔ زیر مفروض است

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(-c) = y(c), \qquad y'(-c) = y'(c)$$

در این جا شرایط مرزی را ***شرایط مرزی تناوبی*** گویند.

الف) نشان دهید $\lambda = 0$ یک مقدار ویژهٔ متناظر با تابع ویژه $y_0(x) = 1$ است.

ب) نشان دهید $\lambda < 0$ به جواب بدیهی منجر می شود.

پ) برای $\lambda > 0$ مقادیر ویژهٔ $\lambda_n = (n\pi/c)^2$ ، $n = 1, 2, \ldots$ با توابع ویژهٔ متناظر

$$y_n(x) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{c}x\right),$$

را به دست آورید که $a_n$ و $b_n$ هر دو صفر نیستند ولی دلخواهند.

ت) در کجا از این واقعیت استفاده شده که توابع ویژه بر بازهٔ $-c < x < c$ نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ متعامدند؟

۱۶- معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$Ly(x) = A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y,$$

که $A(x)$ ، $B(x)$ ، و $C(x)$ توابع حقیقی از $x$ اند بطوری که $A(x)$ دوبار بطور پیوسته مشتق پذیر است، $B(x)$ بطور پیوسته مشتق پذیر است، و $C(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته است. علاوه بر این، $A(x)$ بر $(a, b)$ صفر نمی شود. در آن صورت

$$L^*y(x) = \frac{d^2}{dx^2}(A(x)y(x)) - \frac{d}{dx}(B(x)y(x)) + C(x)y(x)$$

***الحاقی*** $y(x)$ نامیده می شود.

الف) نشان دهید

$$L^*y = Ay'' + (2A' - B)y' + (A'' - B' + C)y.$$

ب) نشان دهید $L$ **خودالحاق** است، یعنی $L = L^*$ اگر و فقط اگر $A' = B$ .

پ) نشان دهید معادلهٔ اشترم ـ لیوویل (۴−۵−۱) خودالحاق است .

۱۷− نشان دهید عملگر دیفرانسیل، $L$ ، که در معادلهٔ (۴−۵−۴) تعریف شده یک عملگر خطی است .

۱۸− معادله **لاگر**

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0,$$

در مکانیک کوانتومی از اهمیتی ویژه برخوردار است .

الف) این معادله را به شکل (۴−۵−۱) تبدیل کنید .

ب) تابع وزن چیست ؟

۱۹− معادلهٔ دیفرانسیل **هرمیت**

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0,$$

در نظریه مکانیک کوانتومی نوسانگر خطی ظاهر می شود .

الف) معادله را به شکل (۴−۵−۱) تبدیل کنید .

ب) تابع وزن چیست ؟

۲۰− معادلهٔ دیفرانسیل **چبیشف**

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0,$$

در ریاضی فیزیک کاربرد دارد .

الف) معادله را به شکل خودالحاق تبدیل کنید .

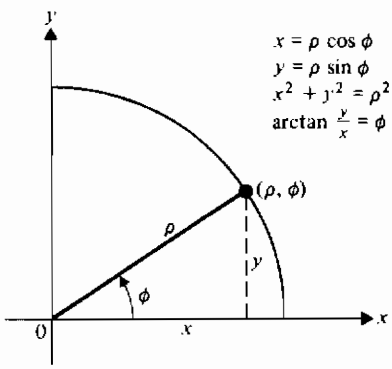
ب) تابع وزن چیست ؟

# فصل پنجم

# مسائل مقدار مرزی در دیگر دستگاههای مختصات

## ۵-۱ مسائل مقدار مرزی در نواحی دایره‌ای

وقتی ناحیه‌ای دارای تقارن دایره‌ای باشد معمولاً استفاده از ***مختصات قطبی*** مناسبتر است . رابطهٔ بین مختصات قائم و قطبی در شکل ۵-۱-۱ نشان داده شده است .




**شکل ۵-۱-۱ مختصات قطبی**

از این روابط می توانیم مشتقهای جزئی را محاسبه کنیم :

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \phi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \phi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \phi} = \rho \cos \phi.$$

اگر $u(x, y)$ تابعی باشد که نسبت به $x$ و $y$ دوبار مشتق‌پذیر است، آن‌گاه بنابه قاعدهٔ زنجیری،

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos \phi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin \phi. \qquad (۵-۱-۱)$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos \phi + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \rho}(\cos \phi) + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\sin \phi + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \rho}(\sin \phi)$$
$$= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos \phi + \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\sin \phi,$$

زیرا دو جملهٔ دیگر برابر صفرند.

برای محاسبهٔ جمله‌ای مانند $\frac{\partial}{\partial \rho}(\partial u / \partial x)$ ملاحظه می‌کنیم که معادلهٔ (۵-۱-۱) نه تنها برای $u(x, y)$ به کار می‌رود بلکه می‌توان آن را برای هر تابع مشتق‌پذیر دیگری از $x$ و $y$ نیز به کار برد. در واقع معادلهٔ (۵-۱-۱) را می‌توانیم به صورت نمادی زیر بنویسیم

$$\frac{\partial(\ )}{\partial \rho} = \frac{\partial(\ )}{\partial x}\cos \phi + \frac{\partial(\ )}{\partial y}\sin \phi.$$

پس

$$\frac{\partial u_x}{\partial \rho} = u_{xx}\cos \phi + u_{xy}\sin \phi$$

و

$$\frac{\partial u_y}{\partial \rho} = u_{yx}\cos \phi + u_{yy}\sin \phi.$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = u_{xx}\cos^2 \phi + 2u_{xy}\sin \phi \cos \phi + u_{yy}\sin^2 \phi,$$

با فرض آن که $u_{xy} = u_{yx}$ ، که برای توابع مورد بحث ما چنین رابطه ای برقرار است .

به همین طریق به دست می آوریم

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = u_{xx}\sin^2\phi - 2u_{xy}\sin\phi\cos\phi + u_{yy}\cos^2\phi$$
$$-\frac{1}{\rho}u_x\cos\phi - \frac{1}{\rho}u_y\sin\phi$$

و چون

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}u_x\cos\phi + \frac{1}{\rho}u_y\sin\phi,$$

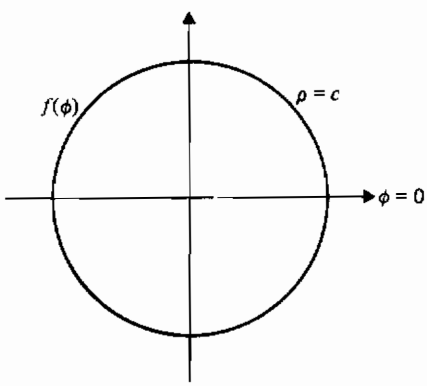
داریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \qquad (۵-۱-۲)$$

در معادلهٔ (۵-۱-۲) لاپلاسی دوبعدی را هم در دستگاه مختصات قائم و هم در دستگاه مختصات قطبی داریم . اگر $u$ *مستقل* از $\phi$ باشد، نتیجهٔ ساده‌تر زیر را داریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right). \qquad (۵-۱-۳)$$

**مثال ۵-۱-۱** دمای کران دار، حالت پایا را در یک قرص فلزی مدوّر به شعاع $c$ پیدا کنید، اگر دما روی لبهٔ قرص با $f(\phi)$ داده شود . شکل ۵-۱-۲ را ملاحظه کنید .




شکل ۵-۱-۲ دما در یک قرص

*حل* : ابتدا ملاحظه می کنیم که $f(\phi)$ باید یک تابع تکه ای ـ هموار و تناوبی با دورهٔ تناوب $2\pi$ باشد . همچنین توجه داریم که $u(-\rho, \phi) = u(\rho, \phi)$ و $u_\rho(-\rho, \phi) = u_\rho(\rho, \phi)$ . این قیدها ضروری اند چون در این صورت دماها بطور یکتا معین خواهند شد . پس مسألهٔ زیر را داریم :

معادله : $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho u_\rho) + \frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi} = 0, \quad 0 < \rho < c, \quad -\pi < \phi \le \pi;$$

شرایط مرزی : $$u(c, \phi) = f(\phi), \quad -\pi < \phi \le \pi.$$

به نظر می رسد که شرایط مرزی برای حل مسأله کافی نیستند اما این واقعیت که دماها باید کران دار باشند یک اطلاع اضافی در اختیار ما قرار می دهد . از روش جداسازی متغیّرها استفاده می کنیم و فرض می کنیم بتوانیم بنویسیم

$$u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi).$$

در این صورت

$$\frac{\Phi}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{R}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$$

یا با تقسیم بر $R\Phi/\rho^2$ داریم

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = n^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

ثابت جداسازی را طوری انتخاب کرده ایم که اطمینان داشته باشیم $\Phi$ (و $u(\rho, \phi)$) تناوبی با دورهٔ متناوب $2\pi$ نسبت به $\phi$ باشد . این انتخاب را طبیعت فیزیکی مسأله به ما تحمیل می کند .

پس معادلهٔ

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + n^2\Phi = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

دارای جوابهای زیر است

$$\Phi_n(\phi) = a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi.$$

معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم را می توان به صورت زیر نوشت

$$\rho^2\frac{d^2R_n}{d\rho^2} + \rho\frac{dR_n}{d\rho} - n^2R_n = 0. \tag{۴-۱-۵}$$

ابتدا حالت $n = 0$ را در نظر می گیریم و معادلهٔ حاصل را با روش کاهش مرتبه حل می کنیم .

در این صورت خواهیم داشت (تمرین ۲)

$$R_0(\rho) = c_1 \log \rho + c_2.$$

برای آن که این جواب در همسایگی $\rho = 0$ کران دار باقی بماند باید قرار دهیم $c_1 = 0$ . (چرا؟) بنابراین جواب متناظر با $n = 0$ ، یک ثابت است که می توان آن را برابر واحد در نظر گرفت .

معادلهٔ (۵-۱-۴) یک معادلهٔ کشی ـ اویلر است که جوابهای آن عبارتند از (تمرین ۳)

$$R_n(\rho) = A_n\rho^n + B_n\rho^{-n}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

و باید قرار دهیم $B_n = 0$ چون $R_n(\rho)$ (و $u(\rho, \phi)$) در $\rho = \varepsilon > 0$ ، یعنی در همسایگی $\rho = 0$ ، کران دار باقی خواهد ماند . همچنین بدون آن که از کلّیت مسأله کاسته شود می توانیم $A_n$ را برابر ۱ اختیار کنیم . در آن صورت

$$u_n(\rho, \phi) = (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi)\rho^n$$

توابعی کران دارند که در معادلهٔ با مشتقات جزئی داده شده صدق می کنند . برای آن که شرایط مرزی پر آورده شود ترکیبی از جوابها را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$u(\rho, \phi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi)\rho^n \tag{۵-۱-۵}$$

و به عنوان تمرین (تمرین ۴) نشان دهید جواب مسأله با معادلهٔ (۵-۱-۵) داده می شود که ضرایب $a_n$ و $b_n$ آن به صورت زیر تعریف می شوند :

$$a_n = \frac{1}{\pi c^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ns\, ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(۵-۱-۶)

$$b_n = \frac{1}{\pi c^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ns\, ds, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

چون تابع $f(\phi)$ به وسیلهٔ یک سری فوریه نمایش داده می شود، این تابع باید در شرایط لازم برای چنین نمایشی صدق کند (بخش ۳-۱ را ملاحظه کنید)

در مثال بعدی، شیوهٔ فوق را برای سه بعد تعمیم می دهیم، یعنی، از ***مختصات استوانه ای*** استفاده می کنیم .

**مثال ۵-۱-۲** مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید .

$$\nabla^2 u = 0 \qquad b < \rho < c,$$ معادله در مختصات استوانه ای
$$-\pi < \phi \leq \pi, \quad -\infty < z < \infty;$$
شرایط مرزی : $$u(b, \phi, z) = f(\phi), \quad -\pi < \phi \leq \pi, \quad -\infty < z < \infty,$$
$$u(c, \phi, z) = 0, \quad -\pi < \phi \leq \pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

**حل** : شرایط مرزی نشان می دهند که $u$ مستقل از z است ؛ در نتیجه مسألهٔ سه بعدی به یک مسألهٔ دو بعدی کاهش می یابد (شکل ۵-۱-۳) . با استفاده از جداسازی متغیّرها ، معادلات دیفرانسیل معمولی زیر و شرایط مرزی زیر را به دست می آوریم (با مثال ۵-۱-۱-۱ مقایسه کنید) :

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0, \qquad \Phi(-\pi) = \Phi(\pi), \qquad \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$\rho^2 R_n'' + \rho R_n' - n^2 R_n = 0, \qquad R_n(c) = 0.$$

جوابهای این معادلات را می توان به ترتیب به صورتهای زیر نوشت (تمرینهای ۷ و ۸)

$$\Phi(n\phi) = A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi$$

و

$$R_n(\rho) = \left(\frac{c}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{c}\right)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

حالت $n = 0$ باید جداگانه بررسی شود (چرا ؟) که نتیجه می دهد ، ثابت $= \Phi$ و $R = \log(\rho/c)$ . با تشکیل ترکیبی خطی از حاصل ضربها ، داریم

$$u(\rho, \phi) = A_0 \log\left(\frac{\rho}{c}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{c}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{c}\right)^n\right)(A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi).$$

حال شرط مرزی ناهمگن نتیجه می دهد

$$u(b, \phi) = f(\phi)$$
$$= A_0 \log\left(\frac{b}{c}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{c}{b}\right)^n - \left(\frac{b}{c}\right)^n\right)(A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi).$$

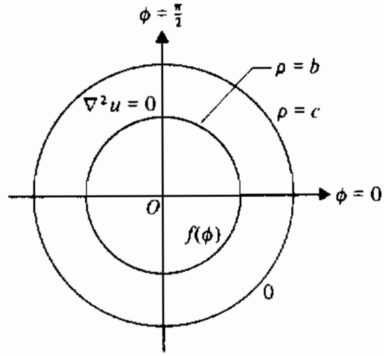
این یک نمایش سری فوریه از $f(\phi)$ است ؛ بنابراین ، با استفاده از جانشانیهای

$$\frac{1}{2} a_0 = A_0 \log\left(\frac{b}{c}\right), \qquad a_n = \left(\left(\frac{c}{b}\right)^n - \left(\frac{b}{c}\right)^n\right)A_n, \qquad b_n = \left(\left(\frac{c}{b}\right)^n - \left(\frac{b}{c}\right)^n\right)B_n,$$

جواب نهایی زیر را داریم

$$u(\rho, \phi) = \frac{\log\left(\frac{\rho}{c}\right)}{2\log\left(\frac{b}{c}\right)} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{c}\right)^n}{\left(\frac{c}{b}\right)^n - \left(\frac{b}{c}\right)^n} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi),$$

که $a_0$ ، $a_n$ ، و $b_n$ ضرایب فوریه در بسط $f(\phi)$ هستند .




شکل ۵-۱-۳

قبل از آن که حل معادلات موج و انتشار را در مختصات استوانه ای بررسی کنیم ، لازم است کـمی دربارهٔ توابع بسل بدانیم . این به نوبهٔ خود ایجاب می کند کـه نوعی از معـادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم ، خطی ، همگن را بررسی کنیم . این مبحث را در بخش بعدی بررسی خواهیم کرد .

### تمرینهای ۵-۱

۱- الف) در مثال ۵-۱-۱ با بیان فیزیکی توضیح دهید که چرا $u(\rho, \phi)$ باید تناوبی با دورهٔ تناوب $2\pi$ نسبت به $\phi$ باشد .

ب) توضیح دهید چرا حالت $n = 0$ در مثال ۵-۱-۱ منظور شده است .

۲- معادلهٔ زیر را با روش کاهش مرتبه حل کنید (با مثال ۵-۱-۱ مقایسه کنید)

$$\rho^2 \frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} = 0$$

۳- معادلات کشی ـ اویلر زیر را حل کنید

$$\rho^2 \frac{d^2R_n}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_n}{d\rho} - n^2R_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

(با مثال ۵-۱-۱ مقایسه کنید)

۴- در مثال ۵-۱-۱ بتفصیل نشان دهید که جواب با معادلهٔ (۵-۱-۵) داده می شود که در آن ثابتها با معادلهٔ (۵-۱-۶) تعریف می شوند .

۵- تعبیر فیزیکی برای مسألهٔ مثال ۵-۱-۲ ارائه دهید .

۶- در مثال ۵-۱-۲ توضیح دهید چرا از شرایط مرزی نتیجه می شود که $u$ مستقل از $z$ است . آیا این مطلب با وضعیت فیزیکی سازگار است ؟

۷- در مثال ۵-۱-۲ نشان دهید که جوابهای

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0, \qquad \Phi(-\pi) = \Phi(\pi), \qquad \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi), \qquad n = 0, 1, \ldots ,$$

عبارتند از

$$\Phi(n\phi) = A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi.$$

(**توجه** : در این جا شرایط مرزی «شرایط مرزی تناوبی نامیده می شوند»)

۸- در مثال ۵-۱-۲ نشان دهید جوابهای

$$\rho^2R_n'' + \rho R_n' - n^2R_n = 0, \qquad R_n(c) = 0$$

عبارتند از

$$R_n(\rho) = \left(\frac{c}{\rho}\right)^n - \left(\frac{\rho}{c}\right)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

و

$$R_0(\rho) = \log(\rho/c).$$

۹- در مثال ۵-۱-۱ جواب را با فرض آن که ثابت = $f(\phi) = u_0$ ، به دست آورید . آیا نتیجه با واقعیتهای فیزیکی مطابقت دارد ؟ توضیح دهید .

۱۰- الف) در مثال ۵-۱-۱ اگر $f(\phi)$ به صورت زیر داده شود

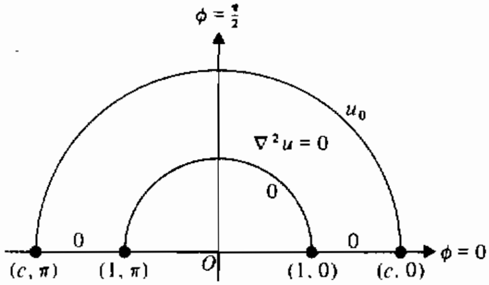
$$f(\phi) = \begin{cases} 0, & -\pi < \phi < 0, \\ u_0, & 0 < \phi < \pi. \end{cases}$$

جواب را به دست آورید .

ب) حساب کنید $u(c, 0)$ ، $u(c, \pi/2)$ ، $u(c, \pi)$ ، $u(c, -\pi)$ ، و $u(0, 0)$ .

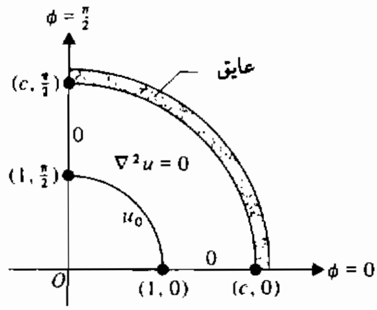
۱۱- مثال (۵-۱-۲) را چنان تغییر دهید که سطح خارجی عایق باشد و مسألهٔ حاصل را حل کنید.

۱۲- تابع همساز را در ناحیهٔ $1 < \rho < c$ ، $0 < \phi < \pi$ بیابید، اگر وقتی $\rho = c$ ، داشته باشیم $u = u_0$ و مرزهای دیگر همه در صفر نگاه داشته شوند (شکل ۵-۱-۴) .




شکل ۵-۱-۴

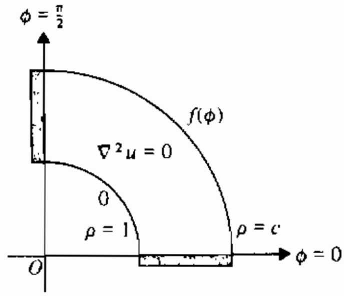
۱۳- دماهای حالت پایا را در درون ربع دایره $0 < \rho < c$ ، $0 < \phi < \pi/2$ بیابید، اگر مرزهای $\phi = 0$ و $\phi = \pi/2$ در صفر نگاه داشته شوند، مرز $\rho = 0$ عایق شود، و مرز باقیمانده در دمای ثابت $u_0$ نگاه داشته شود (شکل ۵-۱-۵) .




شکل ۵-۱-۵

۱۴- دماهای حالت پایا را در ناحیه $1 < \rho < c$ ، $0 < \phi < \pi/2$ بیابید، اگر دماهای

مـرزهای $\rho = 1$ و $\rho = c$ به ترتیب در صفر و $f(\phi)$ نگاه داشته شوند، و دو مرز دیگر عایق شوند (شکل ۵-۱-۶).




شکل ۵-۱-۶

۱۵- دمـاهـای حالت پایا، کـران دار را در ناحیهٔ بی کران $\rho < c$ بیابید، اگر $u(c, \phi) = f(\phi)$ ، $-\pi < \phi \leq \pi$ .

۱۶- الف) در مثال ۵-۱-۱، $u(0, \phi)$ را حساب کنید.

ب) آیا نتیجهٔ به دست آمده در قسمت (الف) با واقعیت فیزیکی مطابقت دارد؟

پ) این تناقض ظاهری را توضیح دهید.

۱۷- درستی نتیجهٔ به دست آمده در مثال ۵-۱-۲ را تحقیق نمایید.

۱۸- الف) مسـألهٔ زیر را کـه مربـوط به تـغییـر مـکان عـرضی یک غـشـای ایستـاست، حل کنید:

معادله:
$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\,\frac{dz}{d\rho}\right) = 0, \quad 1 < \rho < \rho_0;$$

شرایط مرزی:
$$z(1) = 0, \quad z(\rho_0) = z_0.$$

ب) مسألهٔ قسمت (الف) را ازنظر فیزیکی تعبیر نمایید.

پ) مسألهٔ قسمت (الف) را با فرض آن که شعاع دایرهٔ درونی برابر ۱۰ سانتی متر، شعاع دایرهٔ بیرونی برابر ۲۰ سانتی متر و حلقهٔ بیرونی در ابتدا به اندازهٔ ۲ سانتی متر جابه جا شود حل کنید.

۱۹- در مثال ۵-۱-۲ جواب را وقتی $c \to 0$ بررسی کنید. بعد، روش جداسازی را با $c = 0$ به کار برید و تا حد امکان کار را ادامه دهید.

## ۵-۲ جوابهای به صورت سری معادلات دیفرانسیل معمولی

در این بخش به منظور بررسی روشی توانمند برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، خطی کمی از موضوع قبلی منحرف می شویم . چون این روش سریهای نامتناهی را شامل می شود، مناسب است که ابتدا بعضی جنبه های آن را مرور کنیم .

هریک از عبارات زیر مثالی از یک سری از ثابتهاست :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + \cdots; \qquad (۵-۲-۱)$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots; \qquad (۵-۲-۲)$$

$$0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots; \qquad (۵-۲-۳)$$

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots; \qquad (۵-۲-۴)$$

$$a(1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots); \qquad (۵-۲-۵)$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots. \qquad (۵-۲-۶)$$

سری (۵-۲-۱) ***واگراست*** زیرا ***مجموعهای جزئی***

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 1 + 2, \qquad S_3 = 1 + 2 + 3, \qquad S_4 = 1 + 2 + 3 + 4, \ldots$$

تشکیل ***دنبالهٔ***

$$\{S_1, S_2, S_3, \ldots\} = \{1, 3, 6, 10, \ldots\}.$$

را می دهند که ***نقطهٔ حدی**** ندارد .

از طرف دیگر، سری (۵-۲-۲) واگراست زیرا دنبالهٔ مجموعهای جزئی آن دارای دو نقطهٔ حدی 1+ و 0 است . سری (۵-۲-۳) مثالی بدیهی از یک سری همگراست، چون دنبالهٔ مجموعهای جزئی آن دارای یک نقطهٔ حدی یکتاست، که همان صفر است .

با آزمونی بهتر (*آزمون انتگرال*) می توان نشان داد که سری (۵-۲-۴) برای $p > 1$

---

* نقطه ای را نقطهٔ حدی یک دنباله نامند هرگاه تعداد نامتناهی از جملات دنباله در یک ε ـ همسایگی آن نقطه قرار گیرند، که ε یک عدد مثبت کوچک دلخواه است . نقطهٔ حدی لزوماً یکتا نیست و لزوماً عضو دنباله هم نیست برای مثال، نقطهٔ حدی یکتای دنباله زیر برابر یک است

$$\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}, \tfrac{15}{16}, \ldots\}.$$

همگراست و برای $p \leq 1$ واگراست . سری (۵-۲-۵) ***سری هندسی*** است که جملهٔ اوّل آن $a$ و ***قدر نسبت*** آن $r$ است ، و با ***آزمون نسبت*** می توان نشان داد که (۵-۲-۵) همگراست اگر $|r| < 1$ ، و واگراست اگر $r \geq 1$ و $a \neq 0$ . مجموع (۵-۲-۵) به صورت مختصر زیر نوشته می شود

$$a \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{a}{1-r}, \qquad |r| < 1.$$

سرانجام ، سری (۵-۲-۶) مثالی از یک ***سری متناوب*** است که می توان ثابت نمود (با استفاده از قضیهٔ لایب نیتس) همگرا است زیرا دو شرط زیر برقرار است :

۱- قدر مطلق هرجمله کمتر یا مساوی قدر مطلق جملهٔ قبلی است .

۲- حدّ جملهٔ $n$ ام وقتی $n \to \infty$ ، برابر صفر است .

توجه کنید تعیین این که یک سری همگراست و این که به چه چیزی همگراست دو موضوع جداگانه اند . برای مثال مجموع سری (۵-۲-۶) برابر $\pi/4$ است . این نتیجه و چند نتیجهٔ دیگر را در تمرینهای بخش ۳-۲ به دست آورده ایم (تمرینهای ۱۸ و ۲۰ را در آن بخش ملاحظه کنید) .

جالبتر از سری ثابتها برای ما ، ***سری توانی*** خواهد بود که به شکل زیر است

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots. \qquad (۵-۲-۷)$$

چنین سری ای را یک سری توانی از $x - x_0$ نامند . سری توانی **همیشه همگراست** . برای مثال ، (۵-۲-۷) به ازای $x = x_0$ همگراست ، ولی برای ما همگرایی بر یک بازه مانند $(x_0 - R, x_0 + R)$ مهمّ است . $R$ را ***شعاع همگرایی*** سری توانی می نامیم و مقدار آن را می توان با استفاده از آزمون نسبت به دست آورد ، چنان که در مثال زیر نشان داده شده است .

**مثال ۵-۲-۱** شعاع همگرایی سری زیر را بیابید

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + - \cdots.$$

***حل*** : بهتر است سری را با استفاده از نماد مجموع یابی بنویسیم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}.$$

برطبق آزمون نسبت سری همگراست هرگاه

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1,$$

که در آن $u_n$ جمله $n$ ام سری است . در این مثال

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(x-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^{n+1}(x-1)^n}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\,|x-1|=|x-1|<1.$$

پس $-1<x-1<1$ یا $0<x<2$ ، که نشان می دهد شعاع همگرایی برابر ۱ است . در بسیاری از مسائل لازم است که نقاط انتهایی ***بازهٔ همگرایی*** را نیز بررسی کنیم و این کار باید جداگانه انجام شود . می توان نشان داد (تمرین ۱) که در این جا بازهٔ همگرایی $0<x\le 2$ است .

به دو قضیه زیر نیاز خواهیم داشت که آنها را بدون اثبات بیان می کنیم .

**قضیهٔ ۵-۲-۱ :** سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ و مشتق آن $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$ دارای شعاع همگرایی یکسان هستند .

**قضیهٔ ۵-۲-۲ :** فرض کنید تابع $f(x)$ با سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ در درون بازهٔ همگرایی آن نمایش داده شده باشد . آن گاه تابع در درون بازهٔ همگرایی سری مشتق پذیر است و مشتق آن به صورت زیر داده می شود

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

حال آماده ایم که با استفاده از سریها به حل یک معادلهٔ دیفرانسیل ساده بپردازیم . برای شروع کار $x_0$ را برابر صفر می گیریم . بعداً نشان خواهیم داد که چرا همیشه این کار امکان پذیر نیست .

**مثال ۵-۲-۲** یک جواب معادلهٔ $y''-xy=0$ را بیابید .

***حل :*** فرض می کنیم جوابی به صورت زیر وجود داشته باشد

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

در این صورت

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \qquad \text{و} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

با جای گذاری این مقادیر در معادلهٔ داده شده نتیجه می شود

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

برای ساده کردن جملات بهتر است $x^n$ را در هر دو مجموع یابی داشته باشیم . این کار با توجه به این که $n$ یک اندیس ظاهری در مجموع یابی است و می تواند با هر حرف دیگر تعویض شود، انجام می شود. بنابراین، در اوّلین مجموع هر $n$ را به $n+2$ و در دومین مجموع، هر $n$ را به $n-1$ تبدیل می کنیم . در این صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0.$$

حال دو مجموع را به صورت یک مجموع که در آن $n$ از ۱ تا $\infty$ تغییر می کنند می نویسیم، و هر جمله ای را که به حساب نیامده باشد به آن اضافه می کنیم . پس

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1})x^n + 2a_2 = 0,$$

که ترکیبی خطی از ۱ ، $x$ ، $x^2$ ، ... ، است . چون مجموعهٔ

$$\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$$

مستقل خطی است، ترکیبی خطی از این توابع برابر صفر است اگر و فقط اگر هر ضریبی برابر صفر باشد . بنابراین

$$2a_2 = 0$$

و

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0.$$

از معادلهٔ اوّل نتیجه می شود، $a_2 = 0$ و از دومی **فرمول برگشتی** زیر را به دست می آوریم

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

برای $n = 1$ داریم $a_3 = a_0/(3 \cdot 2)$ ، و بنابراین $a_0$ می تواند اختیاری باشد . برای $n = 2$ داریم $a_4 = \frac{a_1}{(4.3)}$ ، بنابراین $a_1$ می تواند اختیاری باشد . برای $n = 3$ داریم $a_5 = a_2/(5 \cdot 4) = 0$ ؛

در نتیجه $a_2$ ، $a_5$ ، $a_8$ ، ... ، همه صفرند . برای $n = 4$ داریم $a_6 = a_0/(3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5)$ . برای $n = 5$ داریم $a_7 = \frac{a_4}{(7.6)} = \frac{a_1}{(4.3.7.6)}$ ، و الی آخر . پس جواب معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{6} x^3 + \frac{a_1}{12} x^4 + \frac{a_0}{180} x^6 + \frac{a_1}{504} x^7 + \cdots .$$

معادلهٔ اخیر به صورت زیر نیز نوشته می شود

$$y = a_0\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} \cdots\right),$$

که شامل دو ثابت دلخواه مورد انتظار در جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم است . می توان نشان داد (تمرین ۲) که هر دو سری برای $-\infty < x < \infty$ همگرا هستند .

اگرچه بسیاری از سریها را می توان به صورت بسته نوشت، برای مثال

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots ; \qquad (۵-۲-۸)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots \qquad (۵-۲-۹)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots ; \qquad (۵-۲-۱۰)$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \qquad (۵-۲-۱۱)$$

ولی این کار همیشه امکان پذیر نیست . اگر تابعی را بتوان در یک بازهٔ باز شامل $x_0$ با یک سری همگرا به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ نمایش داد، آن گاه تابع را در $x = x_0$ ***تحلیلی*** نامند . توابع معادله های (۵-۲-۸) تا (۵-۲-۱۱) همه در $x = 0$ تحلیلی اند . اگر تابعی در هر نقطه از حوزهٔ تعریف خود تحلیلی باشد آن را یک ***تابع تحلیلی*** نامند . تمام چندجمله ایها تحلیلی اند همچنین توابع گویا بجز در نقاطی که مخرج آنها صفر می شود، تحلیلی اند .

حال به مثالی دیگر از جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل به صورت سری توجه کنید .

**مثال ۵-۲-۳** معادلهٔ زیر را حل کنید .

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 0.$$

**حل** : مانند، قبل فرض کنید*

$$y = \sum_{0} a_n x^n, \qquad y' = \sum_{1} n a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{2} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

و آنها را در معادلهٔ دیفرانسیل داده شده جایگزین نمایید

$$\sum_{2} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{2} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{1} n a_n x^n + \sum_{0} a_n x^n = 0.$$

در اولّین مجموع $n$ را به $n+1$ و در دومین مجموع $n$ را به $n+2$ تبدیل می کنیم، داریم

$$\sum_{1} (n+1)n a_{n+1} x^n - \sum_{0} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{1} n a_n x^n + \sum_{0} a_n x^n = 0$$

یا

$$\sum_{1} (n(n+1)a_{n+1} - (n+1)(n+2)a_{n+2} - n a_n + a_n)x^n - 2a_2 + a_0 = 0.$$

با مساوی صفر، قرار دادن ضرایب توانهای مختلف $x$، به دست می آوریم

$$a_2 = \frac{1}{2} a_0;$$

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)a_{n+1} + (1-n)a_n}{(n+1)(n+2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{2 \cdot 3} = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3 \cdot 2};$$

$$a_4 = \frac{6a_3 - a_2}{3 \cdot 4} = \frac{a_3}{2} - \frac{a_2}{12} = \frac{a_0}{12} - \frac{a_0}{24} = \frac{a_0}{4!};$$

الی آخر

که $a_0$ و $a_1$ دلخواه هستند.

بنابراین

$$y = a_1 x + a_0\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right),$$

---

* در بقیهٔ این بخش برای سادگی نمادها، کران بالای مجموعها را حذف می کنیم.

و می توان نشان داد که (تمرین ۳) $x$ و $e^x$ دو جواب مستقل خطی معادلهٔ داده شده هستند. در این جا برخلاف مثال ۵-۲-۲ (تمرین ۴) می توان جواب را به صورت بسته نوشت.

متأسفانه، روش سریها برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی همیشه به سادگی دو مثال قبل نیست. معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$2x^2y'' + 5xy' + y = 0.$$

به عنوان تمرین (تمرین ۵) نشان دهید که روش سریها با $x_0 = 0$ فقط جواب بدیهی $y = 0$ را می دهد. با این حال معادلهٔ داده شده یک معادلهٔ کشی ـ اویلر است و $x^{-1/2}$ و $1/x$ هر دو جواب آن هستند (تمرین ۶) پاسخ به این معضل در این واقعیت نهفته است که جوابهای یک معادلهٔ کشی ـ اویلر بر هر بازه‌ای که مبدأ را شامل باشد مستقل خطی نیستند.

کلّی ترین شکل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم، خطی، همگن را در نظر بگیرید،

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \qquad (۵-۲-۱۲)$$

مقادیری از $x$، مثلاً $x_0$ که در آنها $P(x)$ و $Q(x)$ هر دو تحلیلی باشند، ***نقاط معمولی*** معادلهٔ (۵-۲-۱۲) نامیده می شوند. اگر $P(x)$ یا $Q(x)$ در $x_0$ تحلیلی نباشد، آن گاه $x_0$ یک ***نقطهٔ تکین*** معادلهٔ (۵-۲-۱۲) است ولی اگر $x_0$ یک نقطهٔ تکین باشد و $(x - x_0)P(x)$ و $(x - x_0)^2Q(x)$ هر دو در $x = x_0$ تحلیلی باشند، آن گاه $x_0$ یک نقطهٔ تکین منظم معادلهٔ (۵-۲-۱۲) نامیده می شود. سایر نقاط تکین، ***نقاط تکین نامنظم*** نام دارند.

**مثال ۵-۲-۴** نقاط تکین معادلهٔ زیر را دسته بندی کنید.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0,$$

*حل*: تنها نقاط تکین عبارتند از $x_0 = \pm 1$. اگر $x_0 = -1$، آن گاه

$$\frac{(x + 1)(-2x)}{1 - x^2} = \frac{2x}{x - 1} \quad و \quad \frac{(x + 1)^2 n(n + 1)}{1 - x^2} = \frac{n(n + 1)(x + 1)}{1 - x}.$$

چون این دو تابع گویا در $x = -1$ تحلیلی اند، پس $x_0 = -1$ یک نقطهٔ تکین منظم است. همین طور برای $x_0 = 1$ داریم

$$\frac{(x - 1)(-2x)}{1 - x^2} = \frac{2x}{x + 1} \quad و \quad \frac{(x - 1)^2 n(n + 1)}{1 - x^2} = \frac{n(n + 1)(1 - x)}{1 + x},$$

بنابراین $x_0 = 1$ نیز یک نقطهٔ تکین منظم است.

تمام این نکات در قضیهٔ فوخس* آمده است، که بیان می کند همواره می توان **حداقل** یک جواب به صورت سری توانی برای معادلات دیفرانسیل خطی به دست آورد به شرط آن که این جواب در حول یک نقطهٔ معمولی یا، حول یک نقطهٔ تکین منظم باشد.

کارهای فوخس توسّط فروبینوس (۱۹۱۷-۱۸۴۹) ریاضی دان آلمانی توسعه یافت. وی پیشنهاد نمود که به جای فرض کردن یک جواب به صورت $\sum_0 a_n x^n$، باید جواب را به صورت $\sum_0 a_n x^{n+r}$ در نظر گرفت. امروزه استفاده از این صورت برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، خطی، **روش فروبینوس** نامیده می شود. با یک مثال و استفاده از معادلهٔ کشی ـ اویلر روش را تشریح می کنیم.

**مثال ۵-۲-۵** معادلهٔ زیر را با روش فروبینوس حل کنید.

$$x^2y'' - xy' - 3y = 0$$

**حل** : داریم

$$y = \sum_0 a_n x^{n+r},$$

$$y' = \sum_0 (n+r)a_n x^{n+r-1},$$

$$y'' = \sum_0 (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2},$$

و با جای گذاری در معادلهٔ داده شده، داریم

$$\sum_0 ((n+r)(n+r-1) - (n+r) - 3)a_n x^{n+r} = 0.$$

چون ضریب $x^{n+r}$ برای $n = 0, 1, 2, \ldots$ باید صفر باشد، برای $n = 0$ داریم

$$(r^2 - 2r - 3)a_0 = 0.$$

با انتخاب $a_0$ دلخواه، یعنی، مخالف صفر، نتیجه می شود

$$r^2 - 2r - 3 = 0,$$

که آن را ***معادلهٔ اندیسی*** می نامند. ریشه های آن ۱- و ۳ هستند. در حالت کلّی

* Lazarus Fuchs، (۱۹۰۲-۱۸۳۳) ریاضی دان آلمانی

$$a_n(n^2 + 2nr - 2n) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

که فقط وقتی می‌تواند برقرار باشد که $a_n = 0$ ، $n = 1, 2, \ldots$ . بنابراین دو امکان وجود دارد

$$y_1(x) = a_0 x^{-1} \qquad \text{و} \qquad y_2(x) = b_0 x^3$$

که ثابتها دلخواهند . توجه کنید که هر ریشهٔ معادلهٔ اندیسی به یک سری نامتناهی منجر می‌شود، ولی در این مثال هر سری شامل فقط یک جمله است .

وقتی معادله‌های دیفرانسیل مرتبهٔ دوم، خطی را با روش فروبینوس حل می‌کنیم، معادلهٔ اندیسی یک معادلهٔ درجهٔ دوم است و سه امکان وجود دارد که در این جا آنها را فهرست کنیم .

۱- اگر ریشه‌های معادلهٔ اندیسی برابر باشند آن‌گاه فقط یک جواب می‌توان به دست آورد .

۲- اگر تفاضل دو ریشهٔ معادلهٔ اندیسی عددی غیرصحیح باشد، آن‌گاه دو جواب مستقل خطی می‌توان به دست آورد .

۳- اگر تفاضل ریشه‌های معادلهٔ اندیسی عدد صحیح باشد، آن‌گاه عدد بزرگتر یک جواب ارائه می‌کند، در صورتی که عدد کوچکتر ممکن است یک جواب ارائه کند یا جوابی ارائه نکند .

این بخش را با حل دو معادلهٔ دیفرانسیل مهم که در دو بخش بعدی مجدداً مورد استفاده قرار می‌گیرند، به پایان می‌بریم .

**مثال ۵-۲-۶** یک جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل زیر به دست آورید

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (۱۳-۲-۵)$$

این معادله، ***معادلهٔ دیفرانسیل بسل*** نامیده می‌شود، و ابتدا توسّط بسل (۱۸۴۶-۱۷۸۴) ریاضی دان آلمانی ضمن مطالعات وی دربارهٔ حرکت سیارات به دست آمد . از آن زمان این معادله در مسائل رسانایی گرما، نظریهٔ الکترومغناطیس، و آکوستیک که در مختصات استوانه‌ای بیان شوند، ظاهر شده است .

*حل* : چون ضرایب ثابت نیستند، جوابی به صورت سری جستجو می‌کنیم . با ضرب معادلهٔ (۵-۲-۱۳) در $x^2$ ، به دست می‌آوریم

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \qquad (۱۴-۲-۵)$$

توجه کنید که $x = 0$ یک نقطهٔ تکین منظم است، بنابراین، روش فروبینوس را به کار می بریم. فرض کنید

$$y = \sum_{m=0} a_m x^{m+r},$$

$$y' = \sum_{m=0} a_m (m+r) x^{m+r-1},$$

$$y'' = \sum_{m=0} a_m (m+r)(m+r-1) x^{m+r-2},$$

و آنها را در معادلهٔ (۵-۲-۱۴) جایگزین نمایید. در این صورت

$$\sum_{m=0} a_m (m+r)(m+r-1) x^{m+r} + \sum_{m=0} a_m (m+r) x^{m+r} + \sum_{m=0} a_m x^{m+r+2} - n^2 \sum_{m=0} a_m x^{m+r} = 0.$$

اگر در سری سوم، به جای $m$ ، $m-2$ را قرار دهیم، معادلهٔ فوق به صورت زیر نوشته می شود

$$\sum_{m=2} (a_m(m+r)(m+r-1) + a_m(m+r) + a_{m-2} - n^2 a_m) x^{m+r} + a_0 r(r-1) x^r + a_0 r x^r - n^2 a_0 x^r + a_1 r(r+1) x^{r+1} + a_1 (r+1) x^{r+1} - n^2 a_1 x^{r+1} = 0.$$

با ساده کردن به دست می آوریم

$$\sum_{m=2} (a_m((m+r)^2 - n^2) + a_{m-2}) x^{m+r} + a_0 (r^2 - n^2) x^r + a_1 (r^2 + 2r + 1 - n^2) x^{r+1} = 0.$$

ضریب $x^r$ باید صفر باشد، پس اگر فرض کنیم که $a_0 \neq 0$ ، آن گاه به دست می آوریم $r = \pm n$ . علامت مثبت را انتخاب می کنیم زیرا $n$ در (۵-۲-۱۳) یک عدد صحیح نامنفی تعریف شده بود. چون ضریب $x^{r+1}$ نیز باید صفر باشد، $a_1$ را برابر صفر انتخاب می کنیم. در آن صورت فرمول برگشتی با صفر گرفتن ضریب $x^{m+r}$ ، به دست می آید. پس

$$a_m = \frac{-a_{m-2}}{m(m+2n)}, \qquad m = 2, 3, \ldots .$$

چند ضریب اوّل را می توان از این فرمول محاسبه نمود که به صورت زیرند :

$$m = 2: \quad a_2 = \frac{-a_0}{2^2(n+1)};$$

$$m = 4: \quad a_4 = \frac{-a_2}{2^3(n+2)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2(n+1)(n+2)};$$

$$m = 6: \quad a_6 = \frac{-a_4}{2^2 \cdot 3(n+3)} = \frac{-a_0}{2^6 \cdot 3!(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

در حالت کلی داریم

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

و یک جواب برای معادلهٔ (۵-۲-۱۳) به صورت زیر نوشته می شود

$$y_n(x) = a_0 \sum_{m=0} \frac{(-1)^m x^{2m+n}}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$
$$= 2^n n! a_0 \sum_{m=0} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}. \quad \blacksquare$$

***تابع بسل نوع اوّل مرتبه*** $n$ با انتخاب مقدار $\frac{1}{2^n n!}$ برای $a_0$ تعریف می شود . بنابراین داریم

$$J_n(x) = \sum_{m=0} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{۵-۲-۱۵}$$

و این جواب خصوصی معادلهٔ بسل است . این تابع را با تفصیل بیشتر در بخش ۵-۳ بررسی خواهیم کرد .

**مثال ۵-۲-۷** جواب معادلهٔ زیر را به دست آورید

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{۵-۲-۱۶}$$

این معادله را ***معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر**** می نامند .

***حل :*** چون $x = \pm 1$ نقاط تکین منظم هستند (مثال ۵-۲-۴) می توانیم جواب را به صورت سری

---

* A. M. Legendre ، (۱۷۵۲-۱۸۳۳) ریاضی دان فرانسوی

توانی در حول $x = 0$ که یک نقطهٔ عادی است، فرض کنیم . بنابراین قرار می دهیم

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \qquad y' = \sum_{m=1} a_m m x^{m-1}, \qquad y'' = \sum_{m=2} a_m m(m-1)x^{m-2}.$$

با جای گذاری کردن این مقادیر در معادلهٔ (۵-۲-۱۶) نتیجه می شود

$$\sum_{m=2} a_m m(m-1)x^{m-2} - \sum_{m=2} a_m m(m-1)x^m$$
$$- 2\sum_{m=1} a_m m x^m + n(n+1)\sum_{m=0} a_m x^m = 0.$$

با تبدیل $m$ به $m+2$ در اوّلین مجموع، به دست می آوریم

$$\sum_{m=0} a_{m+2}(n+2)(m+1)x^m - \sum_{m=2} a_m m(m-1)x^m$$
$$- 2\sum_{m=1} a_m m x^m + n(n+1)\sum_{m=0} a_m x^m = 0,$$

یا

$$\sum_{m=2} (a_{m+2}(m+2)(m+1) - a_m m(m-1) - 2a_m m + a_m n(n+1))x^m$$
$$+ 2a_2 + 6a_3 x - 2a_1 x + n(n+1)a_0 + n(n+1)a_1 x = 0.$$

با صفر قرار دادن ضریب هرکدام از توانهای $x$ در بالا، داریم

$$2a_2 + n(n+1)a_0 = 0, \qquad a_2 = \frac{-n(n+1)a_0}{2}, \qquad a_0 \text{ دلخواه}$$

$$6a_3 - 2a_1 + n(n+1)a_1 = 0, \qquad a_3 = \frac{(2 - n(n+1))a_1}{6}, \qquad a_1 \text{ دلخواه}$$

بطور کلّی

$$a_{m+2}(m+2)(m+1) - (m(m-1) + 2m - n(n+1))a_m = 0;$$

$$a_{m+2} = \frac{m(m+1) - n(n+1)}{(m+2)(m+1)} a_m;$$

$$a_{m+2} = \frac{(m-n)(m+n+1)}{(m+2)(m+1)} a_m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (۵-۲-۱۷)$$

معادلهٔ (۵-۲-۱۷) رابطه ای برگشتی است که ضرایب را به کمک آن می توان یافت.
محاسبهٔ چند ضریب اوّل نتیجه می دهد

$$a_2 = \frac{-n(n+1)}{1\cdot 2}\,a_0,$$

$$a_4 = \frac{(2-n)(n+3)}{4\cdot 3}\,a_2 = \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}\,a_0,$$

$$a_6 = \frac{(4-n)(n+5)}{6\cdot 5}\,a_4 = \frac{-n(n-2)(n-4)(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}\,a_0,$$

$$a_3 = \frac{(1-n)(n+2)}{3\cdot 2}\,a_1 = \frac{-(n-1)(n+2)}{3!}\,a_1,$$

$$a_5 = \frac{(3-n)(n+4)}{5\cdot 4}\,a_3 = \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}\,a_1,$$

$$a_7 = \frac{(5-n)(n+6)}{7\cdot 6}\,a_5 = \frac{-(n-1)(n-3)(n-5)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}\,a_1.$$

بنابراین جواب معادلهٔ لژاندر به صورت زیر نوشته می شود

$$\begin{aligned} y_n(x) = a_0\Bigg(1 &- \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 \\ &- \frac{n(n-2)(n-4)(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + - \cdots\Bigg) \\ &+ a_1\Bigg(x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 \\ &- \frac{(n-1)(n-3)(n-5)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + - \cdots\Bigg). \quad (۵\text{-}۲\text{-}۱۸) \end{aligned}$$

هر دو سری برای $-1 < x < 1$ همگرا هستند.

اگر $n = 0, 2, 4, \ldots$ و $a_1$ صفر انتخاب شود، آن گاه جوابها با استفاده از معادلهٔ (۵-۲-۱۸) عبارتند از

$$y_0(x) = a_0,$$
$$y_2(x) = a_0(1 - 3x^2),$$
$$y_4(x) = a_0(1 - 10x^2 + \tfrac{35}{3}x^4), \quad \text{الی آخر}$$

اگر شرط $y_n(1)=1$ را نیز اعمال کنیم، می توانیم $a_0$ را محاسبه کرده و به دست آوریم

$$P_0(x)=1, \qquad P_2(x)=\tfrac{1}{2}(3x^2-1), \qquad P_4(x)=\tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), \ldots . \tag{۱۹-۲-۵}$$

این چندجمله ایها را، ***چندجمله ایهای لژاندر با درجهٔ زوج*** می نامند .

اگر $n=1, 3, 5, \ldots$ و $a_0$ صفر انتخاب شود، آن گاه جوابها با استفاده از معادلهٔ (۵-۲-۱۸) عبارتند از

$$y_1(x)=a_1x,$$
$$y_3(x)=a_1(x-\tfrac{5}{3}x^3),$$
$$y_5(x)=a_1(x-\tfrac{14}{3}x^3+\tfrac{21}{5}x^5), \quad \text{الی آخر}$$

مجدداً اگر شرط $y_n(1)=1$ را اعمال کنیم، می توانیم $a_1$ را محاسبه کرده و تساویهای زیر را به دست آوریم

$$P_1(x)=x, \qquad P_3(x)=\tfrac{1}{2}(5x^3-3x), \qquad P_5(x)=\tfrac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x), \ldots . \tag{۲۰-۲-۵}$$

این چندجمله ایها را، ***چندجمله ایهای لژاندر با درجهٔ فرد*** می نامند .

چندجمله ایهای لژاندر در بخش ۵-۴ کاربرد خواهند داشت زیرا در مسائل مقدار مرزی که در مختصات کروی بیان شده باشند، ظاهر می شوند .

## تمرینهای ۵-۲

۱- نشان دهید بازه همگرایی سری مثال ۵-۲-۱ عبارت است از $0<x\leq 2$ .

۲- الف) نشان دهید یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل $y''-xy=0$ در مثال ۵-۲-۲ به صورت زیر نوشته می شود

$$y_1(x)=a_0\sum_{n=0}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}.$$

ب) جواب دوم را به صورتی مشابه بنویسید .

پ) شعاع همگرایی سری قسمت (الف) را بیابید .

۳- تحقیق کنید که $y_1(x)=x$ و $y_2(x)=e^x$ جوابهای مستقل خطی معادلهٔ $(x-1)y''-xy'+y=0$ هستند .

۴- الف) نشان دهید جواب به دست آمده در مثال ۵-۲-۳ معادل است با

$$y(x) = c_1 x + c_2 e^x.$$

ب) به ازای چه مقادیری از $x$ جواب فوق معتبر است؟

۵- نشان دهید فرض جوابی به شکل $y = \sum_0 a_n x^n$ برای معادلهٔ

$$2x^2y'' + 5xy' + y = 0$$

به جواب بدیهی $y = 0$ منجر می شود.

۶- ثابت کنید که بر هر بازه‌ای که شامل مبدأ نباشد $x^{-1/2}$ و $1/x$ جوابهای مستقل خطی معادلهٔ داده شده در تمرین ۵ هستند.

۷- دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}, \tfrac{15}{16}, \ldots\}.$$

الف) جملهٔ $n$ ام دنباله را بنویسید.

ب) نشان دهید ۱ نقطهٔ حدی دنباله است.

۸- با استفاده از آزمون نسبت نشان دهید سری (۵-۲-۵)، برای $|r| < 1$ همگراست.

۹- الف) سری زیر را مشخص کنید

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots.$$

ب) مجموع سری را بیابید.

۱۰- شعاع همگرایی هریک از سریهای زیر را بیابید.

الف) $$(x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^5}{5} + \cdots$$

ب) $$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

پ) $$1 + \frac{(x+3)}{2} + \frac{(x+3)^2}{3} + \frac{(x+3)^3}{4} + \cdots$$

ت) $$x + \frac{2!x^2}{2^2} + \frac{3!x^3}{3^3} + \frac{4!x^4}{4^4} + \cdots$$

(*راهنمایی*: از تعریف حدی $e$ استفاده کنید)

ث) $$1 + \frac{(x+2)}{3} + \frac{(x+2)^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{(x+2)^3}{3 \cdot 3^3} + \cdots$$

ج) $$1 + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{(x-1)^6}{6!} + \cdots$$

۱۱- نقاط تکین هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را دسته بندی کنید .

الف) $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

ب) $x^3y'' - xy' + y = 0$

پ) $x^2y'' + (4x - 1)y' + 2y = 0$

ت) $x^3(x-1)^2y'' + x^4(x-1)^3y' + y = 0$

۱۲- با استفاده از سریهای توانی هریک از معادلات زیر را حل کنید .

الف) $y'' + y = 0$

ب) $y'' - y = 0$

پ) $y' - y = x^2$ (توجه کنیدکه‌روش سریهای توانی‌به معادلات‌همگن منحصر نمی‌شود)

ت) $y' - xy = 0$ (در صورت امکان جواب را به شکل بسته بنویسید)

ث) $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$

۱۳- هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را با روش فروبینوس حل کنید .

الف) $xy'' + y' + xy = 0$

ب) $4xy'' + 2y' + y = 0$

پ) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$

۱۴- معادلهٔ زیر را با دو روش حل کنید

$$xy'' + 2y' = 0$$

(*راهنمایی* : $x$ یک عامل انتگرال ساز است)

۱۵- معادلهٔ

$$y'' - xy' - y = 0$$

را با فرض داشتن جوابی به صورت یک سری توانی از $x - 1$ حل کنید . در این حالت ضریب $x$ نیز باید برحسب $x - 1$ نوشته شود . این کار را می توان با فرض $x = A(x-1) + B$ و سپس تعیین $A$ و $B$ انجام داد .

۱۶- معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - xy = 0$$

***معادله ایری**** و جوابهای آن را که در نظریه انکسار کاربردهایی دارند ***توابع ایری*** نامند

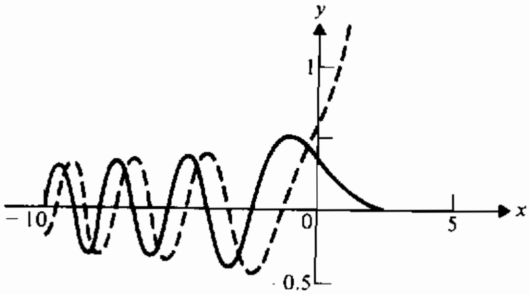
---

* G. Airy ، (۱۸۰۱-۱۸۹۲) ریاضی دان و منجّم انگلیسی

(شکل ۵-۲-۱)

الف) جواب را برحسب یک سری توانی از $x$ به دست آورید .

ب) جواب را برحسب یک سری توانی از $(x-1)$ به دست آورید . (با مثال ۱۵ مقایسه کنید)




شکل ۵-۲-۱ توابع ایری

۱۷- قضیهٔ ۵-۲-۱ را با مشتق گیری از سریهای تمرین ۱۰ و یافتن شعاع همگرایی سریهای مشتق تشریح کنید (توجه کنید که این کار اثباتی برای قضیه نیست .)

۱۸- الف) قضیهٔ ۵-۲-۲ را با مشتق گیری از توابع و سریها در معادلات (۵-۲-۸) تا (۵-۲-۱۱) تشریح کنید .

ب) شعاع همگرایی سریها در معادلات (۵-۲-۸) تا (۵-۲-۱۱)، چیست؟ (توجه : باید از این واقعیت استفاده کنید که اگر سری قدر مطلقها همگرا باشد آن گاه سری متناوب نیز همگراست .)

۱۹- جوابهای تمرین ۱۶ را با جوابهای $y''-y=0$ مقایسه کنید . نظر خود را بیان نمایید .

## ۵-۳ توابع بسل

معادلهٔ لاپلاس در مختصات استوانه ای $(\rho, \phi, z)$ به شکل زیر است (تمرین ۱)

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (۵-۳-۱)$$

روش جداسازی متغیّرها را با این فرض که $u$ به صورت حاصل ضربی از توابع $\rho$ ، $\phi$ و $z$ است، به کار می بریم، یعنی :

$$u = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z),$$

با جایگزین نمودن مشتقهای مناسب در معادلهٔ با مشتقات جزئی، خواهیم داشت

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{RZ}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + R\Phi\frac{d^2Z}{dz^2} = 0,$$

و با تقسیم بر $R\Phi Z/\rho^2$ نتیجه می شود

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{\rho^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}.$$

چون طرف چپ این معادله مستقل از $\phi$ است، پس معادله فقط وقتی می تواند صادق باشد که هر دو طرف برابر مقداری ثابت باشند. بنابراین

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = n^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

و دومین جداسازی نتیجه می دهد

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\lambda^2.$$

اوّلین ثابت جداسازی را $n^2$ نامیده ایم زیرا در این صورت $\Phi$ (و $u$) تناوبی با دورهٔ متناوب $2\pi$ برحسب $\phi$ خواهند بود و این در بسیاری از مسائل کاربردی وضعیتی مطلوب است. دومین ثابت جداسازی را $\lambda^2$ نامیده ایم زیرا نمی خواهیم $Z$ (و $u$) برحسب $z$ تناوبی باشند.

مقادیر ثابتهای جداسازی $n$ و $\lambda$ در واقع از طبیعت شرایط مرزی که $u$ باید در آنها صدق کند نتیجه می شوند. در این جا مقادیری را انتخاب کرده ایم که با شرایط مرزی اغلب مسائل مربوط به این مبحث تطبیق می کنند.

پس، با جداسازی متغیّرها، معادلهٔ لاپلاس را به سه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی، خطی و همگن زیر تبدیل کرده ایم:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0, \tag{۲-۳-۵}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + n^2\Phi = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{۳-۳-۵}$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R = 0. \tag{۴-۳-۵}$$

جوابهای دو معادلهٔ اوّل بآسانی به دست می‌آیند و به ترتیب عبارتند از

$$Z(\lambda z) = Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z} \tag{۵-۳-۵}$$

و

$$\Phi(n\phi) = C\cos n\phi + D\sin n\phi, \tag{۶-۳-۵}$$

معادلهٔ (۵-۳-۴) یک معادلهٔ بسل با جوابهای $J_n(\lambda\rho)$ و $Y_n(\lambda\rho)$ است. (مثال ۵-۲-۶ را ملاحظه کنید). جواب اوّل، ***تابع بسل نوع اوّل مرتبهٔ*** $n$ و جواب دوم ***تابع بسل نوع دوم مرتبهٔ*** $n$* نامیده می‌شود. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۵-۳-۴) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$R_n(\lambda\rho) = EJ_n(\lambda\rho) + FY_n(\lambda\rho). \tag{۷-۳-۵}$$

توجه کنید که جوابهای معادلهٔ لاپلاس در مختصات استوانه ای از حاصل ضرب، توابع در معادله های (۵-۳-۵)، (۵-۳-۶)، و (۵-۳-۷) به دست می‌آیند. تابع $u$ که در معادلهٔ $\nabla^2 u = 0$ صدق کند یک ***تابع همساز*** نامیده می‌شود؛ از این رو حاصل ضربهای فوق را ***همسازهای استوانه ای*** می‌نامند. چون $J_n(\lambda\rho)$ در $\rho = 0$ تعریف می‌شود ولی $Y_n(\lambda\rho)$ در این نقطه تعریف نمی‌شود (همان گونه که بعداً خواهیم دید)، پس اگر $u$ بخواهد در مبدأ کران دار باشد، ثابت $F$ را صفر اختیار می‌کنیم. همچنین اگر $\lambda > 0$ و بخواهیم $\lim_{z\to\infty}|u|$ موجود باشد، $A$ را صفر اختیار می‌کنیم. علاوه بر این، یکی از شرایط مرزی ممکن است ایجاب کند که $C$ یا $D$ صفر باشد. پس، در عمل، همسازهای استوانه ای آن طور هم که ممکن است به نظر آیند، توابع پیچیده ای نیستند.

در بخش ۵-۵ چند کاربرد را که شامل توابع بسل هستند خواهیم دید اما در این بخش این توابع را با تفصیل بیشتر بررسی می‌کنیم. معادلهٔ (۵-۳-۴) به شکل معادلهٔ مثال ۵-۲-۶ است که جواب آن به صورت زیر است (تمرین ۲)

$$J_n(x) = \sum_{m=0} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{۸-۳-۵}$$

حال $J_0(x)$ و $J_1(x)$ را بتفصیل بررسی می‌کنیم. از معادلهٔ (۵-۳-۸) داریم

* توابع بسل نوع دوم را بعداً در این بخش مورد بحث قرار خواهیم داد.

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + - \cdots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + - \cdots.$$

با مقایسهٔ این توابع با سریهای مکلورن برای $\cos x$ و $\sin x$ ،

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots,$$

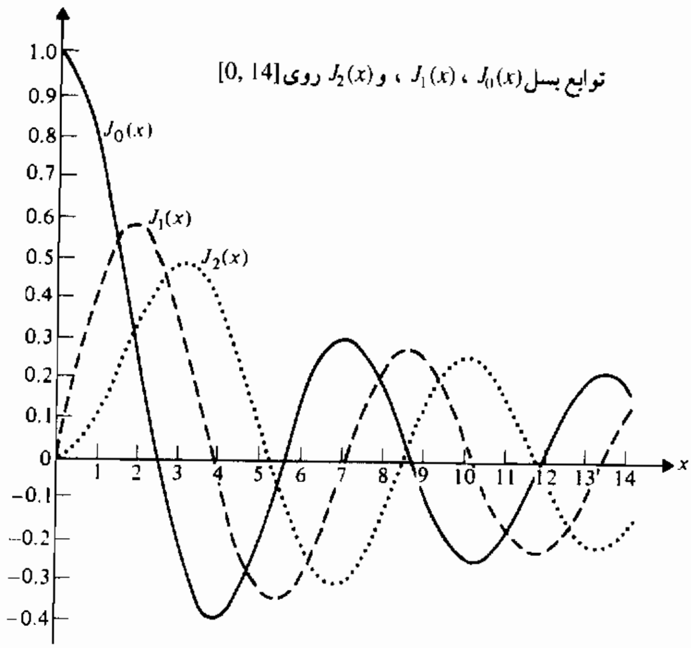
شباهتی بین $J_0(x)$ و $\cos x$ و همچنین $J_1(x)$ و $\sin x$ دیده می شود . برای مثال (تمرین ۴)

$$\begin{array}{ll}
J_0(0) = 1, & \cos 0 = 1; \\
J_0(-x) = J_0(x), & \cos(-x) = \cos x; \\
J_0'(0) = 0, & \left.\dfrac{d}{dx}(\cos x)\right|_{x=0} = 0; \\
J_1(0) = 0, & \sin 0 = 0; \\
J_1(-x) = -J_1(x), & \sin(\quad x) = -\sin x; \\
J_0'(x) = -J_1(x), & \dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.
\end{array}$$

این شباهتها را می توان در نمودارهای $J_0(x)$ و $J_1(x)$ در شکل ۵-۳-۱ ملاحظه کرد . توجه کنید توابع بسل نوع اوّل تقریباً تناوبی هستند با دوره تناوب متغیّر نزدیک به $2\pi$ . در واقع وقتی $x \to \infty$ دورهٔ تناوب به $2\pi$ میل می کند . همچنین توجه کنید که با افزایش $x$ ، دامنه ها کاهش می یابند .

در حل مسائل مقدار مرزی صفرهای $J_n(x)$ ، یعنی، ریشه های $J_n(x) = 0$ از اهمیتی خاص برخوردارند . مقادیر تقریبی چند صفر اوّل $J_0(x)$ و $J_1(x)$ در زیر فهرست می شوند

| | اوّلین | دومین | سومین | چهارمین | پنجمین | ششمین |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_0(x)$ | ۲٫۴۰۵ | ۵٫۵۲۰ | ۸٫۶۵۴ | ۱۱٫۷۹۲ | ۱۴٫۹۳۱ | ۱۸٫۰۷۱ |
| $J_1(x)$ | ۰ | ۳٫۸۳۲ | ۷٫۰۱۶ | ۱۰٫۱۷۳ | ۱۳٫۳۲۳ | ۱۶٫۴۷۱ |




شکل ۵-۳-۱

یک رابطهٔ مفید دیگر، یعنی،

$$\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{۵-۳-۹}$$

بسادگی از معادلهٔ (۵-۳-۸) به دست می آید (تمرین ۴). در شکل دیفرانسیلی، معادلهٔ (۵-۳-۹) به صورت زیر نوشته می شود

$$d(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)\, dx$$

و با انتگرال گیری از 0 تا $c$ ($c > 0$)، داریم

$$x^n J_n(x)\Big|_0^c = \int_0^c x^n J_{n-1}(x)\, dx$$

یا

$$\int_0^c x^n J_{n-1}(x)\,dx = c^n J_n(c).$$

به ازای $n = 1$ ، داریم

$$\int_0^c xJ_0(x)\,dx = cJ_1(c), \tag{۱۰-۳-۵}$$

نتیجه ای که در بخش ۵-۵ از آن استفاده خواهد شد .

### *تعامد توابع بسل*

توابع بسل نوع اوّل تحت شرایط معینی در یک ***رابطهٔ تعامد*** صدق می کنند که این خاصیت را در این جا خواهیم دید .

معادلهٔ دیفرانسیل بسل مرتبهٔ $n$ به صورت زیر نوشته می شود

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + (\lambda^2x^2 - n^2)u = 0. \tag{۱۱-۳-۵}$$

یک جواب خصوصی این معادله $J_n(x)$ ، تابع بسل نوع اوّل مرتبهٔ $n$ است . همین طور ، $J_n(\mu x)$ یک جواب خصوصی معادلهٔ زیر است

$$x^2\frac{d^2v}{dx^2} + x\frac{dv}{dx} + (\mu^2x^2 - n^2)v = 0. \tag{۱۲-۳-۵}$$

حال معادلهٔ (۵-۳-۱۱) را در $v/x$ و معادلهٔ (۵-۳-۱۲) را در $u/x$ ضرب کرده و از هم کم می کنیم

$$vx\frac{d^2u}{dx^2} + v\frac{du}{dx} + (\lambda^2x^2 - n^2)\frac{uv}{x} - ux\frac{d^2v}{dx^2} - u\frac{dv}{dx} - (\mu^2x^2 - n^2)\frac{uv}{x} = 0.$$

این معادله را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}(\lambda^2 - \mu^2)xuv &= ux\frac{d^2v}{dx^2} - vx\frac{d^2u}{dx^2} + u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\\ &= \frac{d}{dx}\left(x\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right)\end{aligned}$$

بنابراین، برای هر $c > 0$ ،

$$(\lambda^2-\mu^2)\int_0^c xuv\,dx=\int_0^c d\left(x\left(u\frac{dv}{dx}-v\frac{du}{dx}\right)\right)$$

یا اگر به جای $u$ و $v$ به ترتیب مقادیرشان $J_n(\lambda x)$ و $J_n(\mu x)$ را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$(\lambda^2-\mu^2)\int_0^c xJ_n(\lambda x)J_n(\mu x)\,dx=x(\mu J_n(\lambda x)J_n'(\mu x)-\lambda J_n(\mu x)J_n'(\lambda x))\Big|_0^c$$
$$=c(\mu J_n(\lambda c)J_n'(\mu c)-\lambda J_n(\mu c)J_n'(\lambda c)).$$

پس داریم

$$\int_0^c xJ_n(\lambda x)J_n(\mu x)\,dx=\frac{c}{\lambda^2-\mu^2}(\mu J_n(\lambda c)J_n'(\mu c)-\lambda J_n(\mu c)J_n'(\lambda c)).$$

که از آن نتیجه می شود

$$\int_0^c xJ_n(\lambda x)J_n(\mu x)\,dx=0,$$

به شرط آن که $\lambda\neq\mu$ و

$$\mu J_n(\lambda c)J_n'(\mu c)-\lambda J_n(\mu c)J_n'(\lambda c)=0. \qquad (۵-۳-۱۳)$$

حال معادلهٔ (۵-۳-۱۳) برقرار است اگر $\lambda c$ و $\mu c$ ریشه های متمایز معادلات زیر باشند:

الف) $Jn(x)=0$ ، زیرا در این صورت $J_n(\lambda c)=0$ و $J_n(\mu c)=0$ ؛

ب) $J'_n(x)=0$ ، زیرا در این صورت $J'_n(\mu c)=0$ و $J'_n(\lambda c)=0$ ؛

پ) $hJ_n(x)+xJ'_n(x)=0$ ، که $h>0$

برای دیدن شرط آخر توجه کنید که اگر $\lambda c$ و $\mu c$ ریشه های متمایز $hJ_n(x)+xJ'_n(x)=0$ باشند، نتیجه می شود

$$hJ_n(\lambda c)+\lambda cJ_n'(\lambda c)=0 \qquad \text{و} \qquad hJ_n(\mu c)+\mu cJ_n'(\mu c)=0.$$

با ضرب اولی در $\mu J'_n(\mu c)$ و دومی در $\lambda J'_n(\lambda c)$ خواهیم داشت

$$h\mu J_n'(\mu c)J_n(\lambda c)+c\lambda\mu J_n'(\lambda c)J_n'(\mu c)=0,$$
$$h\lambda J_n'(\lambda c)J_n(\mu c)+c\lambda\mu J_n'(\lambda c)J_n'(\mu c)=0.$$

از تفریق این معادله ها، داریم

$$h(\mu J_n(\lambda c)J_n'(\mu c)-\lambda J_n(\mu c)J_n'(\lambda c))=0$$

یا

$$\mu J_n(\lambda c)J_n'(\mu c) - \lambda J_n(\mu c)J_n'(\lambda c) = 0,$$

که همان معادلهٔ (۵-۳-۱۳) است.

سرانجام ملاحظه کنید که اگر در شرط (پ) بالا $h = 0$ ، آن گاه شرط (پ) معادل شرط (ب) است . بنابراین می توانیم در شرط (پ)، فرض کنیم $h \geq 0$ .

در بالا نشان دادیم که توابع بسل $J_n(\lambda x)$ و $J_n(\mu x)$ بر بازهٔ $0 < x < c$ نسبت به تابع وزن $x$ متعامدند به شرط آن که $\mu \neq \lambda$ و یکی از شرایط (الف)، (ب) یا (پ) برقرار باشند .

## *سریهای فوریه ـ بسل*

توجه کنید که، هرچند معادلهٔ دیفرانسیل بسل شرایط لازم برای دستگاه اشترم ـ لیوویل منظم (۴-۵-۱) را ندارد، ولی در یک ردهٔ خاص از دستگاههای تکین قرار دارد که باختصار در انتهای بخش ۴-۵ بحث شد . همچنین می توان نشان داد توابع ویژه ای که در این فصل به دست خواهیم آورد یک ***مجموعهٔ کامل*** بر بازهٔ $(0, c)$ ، $c > 0$ نسبت به کلاس توابع تکه ای ـ هموار تشکیل می دهند . پس می توانیم توابع تکه ای ـ هموار را با یک سری از توابع بسل نوع اوّل به نام ***سری فوریه ـ بسل*** نمایش دهیم .

فرض کنید $c\lambda_j$ ، $j = 1, 2, 3, \ldots$ ریشه های مثبت (صفرهای) $J_n(\lambda c) = 0$ باشند . این ریشه ها را می توان به منظورهای محاسباتی در جدولهای ریاضی یافت . برای مثال، اگر $n = 0$ ، آن گاه، بطور تقریبی $\lambda_1 c = 2.405$ ، $\lambda_2 c = 5.520$ ، $\lambda_3 c = 8.645$ و الی آخر .

حال نمایش $f$ را بر بازهٔ $(0, c)$ در نظر بگیرید :

$$f(x) = A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + A_3 J_n(\lambda_3 x) + \cdots . \tag{۵-۳-۱۴}$$

برای مثال اگر بخواهیم مقدار $A_2$ را بیابیم، آن گاه هرجمله را در $xJ_n(\lambda_2 x)dx$ ضرب کرده و از 0 تا $c$ انتگرال می گیریم . در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\int_0^c xf(x)J_n(\lambda_2 x)\,dx = A_1 &\int_0^c xJ_n(\lambda_1 x)J_n(\lambda_2 x)\,dx \\ &+ A_2 \int_0^c xJ_n(\lambda_2 x)J_n(\lambda_2 x)\,dx \\ &+ A_3 \int_0^c xJ_n(\lambda_3 x)J_n(\lambda_2 x)\,dx + \cdots .\end{aligned}$$

به علت تعامد توابع بسل، تمام انتگرالها در طرف راست بجز انتگرال دوم برابر صفرند. پس داریم

$$\int_0^c xf(x)J_n(\lambda_2 x)\,dx = A_2\int_0^c xJ_n^2(\lambda_2 x)\,dx,$$

که از آن به دست می آوریم

$$A_2 = \frac{\int_0^c xf(x)J_n(\lambda_2 x)\,dx}{\int_0^c xJ_n^2(\lambda_2 x)\,dx}.$$

چون همین روش را برای هر ضریب می توان به کار برد، در حالت کلّی داریم

$$A_j = \frac{\int_0^c xf(x)J_n(\lambda_j x)\,dx}{\int_0^c xJ_n^2(\lambda_j x)\,dx}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots . \tag{۱۵-۳-۵}$$

حال مخرج عبارت فوق را محاسبه می کنیم. برای این کار به معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ $n$ بر می گردیم

$$xu'' + u' + \left(\lambda_j^2 x - \frac{n^2}{x}\right)u = 0.$$

یک جواب خصوصی این معادله $u = J_n(\lambda_j x)$ است. با ضرب در عامل انتگرال ساز $2u'x$ نتیجه می گیریم

$$2x^2u'u'' + 2(u')^2x + \left(\lambda_j^2 x - \frac{n^2}{x}\right)2xu'u = 0$$

یا

$$2xu'(xu'' + u') + (\lambda_j^2x^2 - n^2)2uu' = 0. \tag{۱۶-۳-۵}$$

با استفاده از این واقعیت که

$$\frac{d}{dx}(xu')^2 = 2xu'(xu'' + u')$$

و

$$\frac{d}{dx}(u^2) = 2uu',$$

می توانیم معادلهٔ (۵-۳-۱۶) را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{d}{dx}(xu')^2 + (\lambda_j^2 x^2 - n^2)\frac{d}{dx}(u^2) = 0.$$

بنابراین، با انتگرال گیری از 0 تا $c$ ، داریم

$$\int_0^c d(xu')^2 + \int_0^c (\lambda_j^2 x^2 - n^2)\, d(u^2) = 0.$$

انتگرال دوم را با روش جزء به جزء محاسبه می کنیم :

$$w = \lambda_j^2 x^2 - n^2, \qquad dv = d(u^2),$$
$$dw = 2\lambda_j^2 x\, dx, \qquad v = u^2,$$
$$(xu')^2\Big|_0^c + u^2(\lambda_j^2 x^2 - n^2)\Big|_0^c - 2\lambda_j^2 \int_0^c xu^2\, dx = 0.$$

اما $u = J_n(\lambda_j x)$ و $u' = \lambda_j J'_n(\lambda_j x)$ ، بنابراین عبارت آخری به صورت زیر در می آید

$$\lambda_j^2 c^2 [J'_n(\lambda_j c)]^2 + J_n^2(\lambda_j c)(\lambda_j^2 c^2 - n^2) + n^2 J_n^2(0) = 2\lambda_j^2 \int_0^c xJ_n^2(\lambda_j x)\, dx. \tag{۱۷-۳-۵}$$

چون $J_n(\lambda_j c) = 0$ و $J_n(0) = 0$ ، برای $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، معادلهٔ (۵-۳-۱۷) به صورت زیر خلاصه می شود

$$\int_0^c xJ_n^2(\lambda_j x)\, dx = \frac{c^2}{2}[J'_n(\lambda_j c)]^2. \tag{۱۸-۳-۵}$$

بنابراین در معادلهٔ (۵-۳-۱۵) ضرایب به صورت زیر در می آیند

$$A_j = \frac{2}{c^2 [J'_n(\lambda_j c)]^2} \int_0^c xf(x) J_n(\lambda_j x)\, dx,$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots \tag{۱۹-۳-۵}$$

توجه کنید که در انتگرال معین فوق متغیّر $x$ را با حرفی دیگر می توان تعویض نمود . پس سری فوریه ـ بسل در معادلهٔ (۵-۳-۱۴) به صورت زیر نوشته می شود

$$f(x) = \frac{2}{c^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_j x)}{[J'_n(\lambda_j c)]^2} \int_0^c sf(s) J_n(\lambda_j s)\, ds.$$

در این نمایش $f(x)$ ، تساوی به صورت واقعی به کار رفته است . این سری، مانند حالت سریهای فوریه، به مقدار متوسط تابع در نقاطی که $f$ دارای ناپیوستگی جهشی است همگرا خواهد بود . در نقاطی که $f$ پیوسته است سری به مقدار تابع در آن نقطه همگرا خواهد بود .

معادلهٔ (۵-۳-۱۸) **مجذور نرم تابع ویژهٔ** $J_n(\lambda_j x)$ را بیان می کند . پس به عنوان نرم داریم

$$\|J_n(\lambda_j x)\| = \frac{c}{\sqrt{2}} J_n'(\lambda_j c).$$

مجموعهٔ

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{c}\frac{J_n(\lambda_1 x)}{J_n'(\lambda_1 c)}, \frac{\sqrt{2}}{c}\frac{J_n(\lambda_2 x)}{J_n'(\lambda_2 c)}, \ldots\right\}$$

یک مجموعهٔ متعامد یکه بر بازهٔ $(0, c)$ نسبت به تابع وزن $x$ است هرگاه $\lambda_j$ قسمی باشند که $J_n(\lambda_j c) = 0$ .

اگر $\lambda_j$ به قسمی باشند که $hJ_n(\lambda_j c) + \lambda_j c J'_n(\lambda_j x) = 0$ ، آن گاه داریم

$$J_n'(\lambda_j c) = -\frac{h}{\lambda_j c} J_n(\lambda_j c). \tag{۵-۳-۲۰}$$

با جایگزین نمودن این مقدار در معادلهٔ (۵-۳-۱۷) نتیجه می شود

$$\int_0^c x J_n^2(\lambda_j x)\, dx = \frac{\lambda_j^2 c^2 - n^2 + h^2}{2\lambda_j^2} J_n^2(\lambda_j c).$$

پس در این حالت ، به جای معادلهٔ (۵-۳-۱۹)، فرمول زیر را برای ضرایب سری فوریه ـ بسل به کار می بریم :

$$A_j = \frac{2\lambda_j^2}{(\lambda_j^2 c^2 - n^2 + h^2) J_n^2(\lambda_j c)} \int_0^c x f(x) J_n(\lambda_j x)\, dx, \quad j = 1, 2, 3, \ldots . \tag{۵-۳-۲۱}$$

فرمول (۵-۳-۲۱) به ازای $j = 1$ در حالت $h = 0$ و $n = 0$ برقرار نیست، زیرا در این حالت معادلهٔ (۵-۳-۲۰) به صورت زیر در می آید

$$J_0'(\lambda_j c) = 0,$$

یعنی، $\lambda_j c$ یک صفر $J'_0(x)$ است . اما اوّلین صفر $J'_0(x)$ در $x = 0$ است، بنابراین $\lambda_1 = 0$ ، که اوّلین صفر $J'_0(\lambda c)$ می باشد . حال چون $J_0(0) = 1$ ، ضریب انتگرال در معادلهٔ (۵-۳-۲۱) را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال می توان محاسبه کرد . بنابراین

$$A_1 = \frac{2}{c^2}\int_0^c x f(x)\, dx, \tag{۵-۳-۲۲}$$

و $A_j$ ، $j = 2, 3, \ldots$ با معادله (۵-۳-۲۱) داده می شوند .

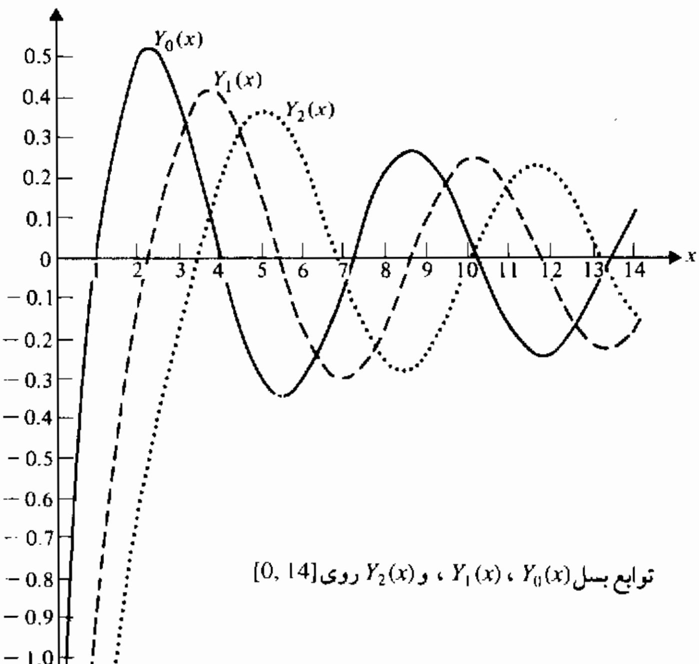
### توابع بسل نوع دوم

این بخش را با مراجعهٔ مختصر به تابع بسل نوع دوم مرتبهٔ $n$ به پایان می بریم . این تابع جواب دوم مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل بسل است که می توان آن را با روش تغییر پارامترها به دست آورد . در این جا وارد جزئیات نخواهیم شد و فقط $Y_0(x)$ و نمودارهای این تابع و توابع $Y_1(x)$ و $Y_2(x)$ را در شکل ۵-۳-۲ ارائه خواهیم نمود . تابع بسل نوع دوم مرتبهٔ صفر به صورت زیر داده می شود

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left(J_0(x)\left(\log\frac{x}{2}+\gamma\right)\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{3x^4}{128}+\frac{11x^6}{13{,}824}+-\cdots\right), \quad (۲۳\text{-}۳\text{-}۵)$$

که در آن $\gamma$ را ثابت اویلر می نامند و عددی است گنگ که به شکل زیر تعریف می شود

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right) \doteq 0.577215.$$




شکل ۵-۳-۲

مطلب قابل اهمیت در کارهای آینده مان این واقعیت است که تمام توابع بسل نوع دوم شامل جملهٔ $\log x/2$ است . در نتیجه، $Y_n(0)$ تعریف نمی شود، همان طور که شکل ۵-۳-۲ نشان می دهد . به لحاظ این که کاربردهای شامل توابع بسل در این کتاب به گونه ای هستند که $x > 0$ ، از توابع بسل نوع دوم استفاده نخواهیم کرد . اما باید توجه داشت که این توابع در بعضی موارد، برای مثال، در حل مسائل شامل امواج الکترومغناطیسی در کابلهای هم محور لازم می شوند .

## تمرینهای ۵-۳

۱- معادلهٔ (۵-۳-۱) را از معادلهٔ (۵-۱-۲) به دست آورید .

۲- با جایگذاری $y = R$ و $x = \lambda\rho$ ، نشان دهید معادلهٔ (۵-۳-۴) به معادلهٔ (۵-۲-۱۳) تبدیل می شود .

۳- با استفاده از آزمون نسبت نشان دهید سری (۵-۳-۸) که نمایانگر تابع بسل نوع اوّل مرتبهٔ $n$ است به ازای همهٔ مقادیر $x$ همگراست .

۴- با استفاده از معادلهٔ (۵-۳-۸) هریک از روابط زیر را ثابت کنید .

الف) $J_0'(0) = 0$ ب) $J_1(0) = 0$

پ) $J_1(-x) = -J_1(x)$ ت) $J_0'(x) = -J_1(x)$

ث) $xJ_n'(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots$

ج) $\dfrac{d}{dx}\left(x^nJ_n(x)\right) = x^nJ_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots$

۵- تحقیق کنید که $x = 0$ یک نقطهٔ تکین منظّم معادلهٔ بسل (۵-۳-۱۱) است .

۶- جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را با جستجو به دست آورید .

الف) $\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right) + xy = 0$ ب) $4xy'' + 4y' + y = 0$

پ) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + ye^x = 0$

(*راهنمایی* : فرض کنید $u = e^x$)

۷- اگر $J_0(\lambda) = 0$ ، آن گاه هریک از روابط زیر را به دست آورید .

الف) $\int_0^1 J_1(\lambda_j s)\, ds = 1/\lambda_j$ ب) $\int_0^{\lambda_j} J_1(s)\, ds = 1$

پ) $\int_0^{x} J_1(\lambda_j s)\, ds = 0$

۸- هریک از روابط زیر را به دست آورید .

الف) $\int^x J_0(s)J_1(s)\,ds = -\frac{1}{2}(J_0(x))^2$ ب) $\int^x s^2J_0(s)J_1(s)\,ds = \frac{1}{2}x^2\ J_1(x))^2$

۹- هریک از توابع زیر را به یک سری فوریه ـ بسل از توابع $J_0(\lambda_j x)$ بر بازهٔ $0 < x < c$ بسط دهید، که $J_0(\lambda_j c) = 0$ (توجه : ضرایب با معادلهٔ (۵-۳-۱۹) داده می‌شوند ولی انتگرال در همهٔ حالات قابل محاسبه نیست)

الف) $f(x) = 1$

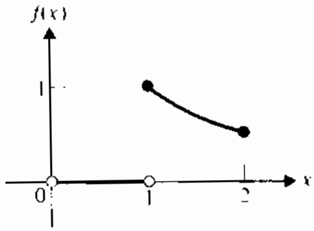
ب) $f(x) = x^2$

(توجه : فرمول کاهشی زیر را به کار برید :

$$\int_0^x s^n J_0(s)\,ds = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1}J_0(x) - (n-1)^2\int_0^x s^{n-2}J_0(s)\,ds,$$
$$n = 2, 3, \ldots .)$$

پ) $$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ 1/x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(شکل ۵-۳-۳ را ملاحظه کنید)




شکل ۵-۳-۳

۱۰- معادلهٔ دیفرانسیل بسل به خاطر شکل ظاهری متفاوت آن مشهور است . نشان دهید هریک از معادله های زیر یک معادلهٔ دیفرانسیل بسل است

الف) $$\frac{dy}{dx} + ay^2 + \frac{1}{x}y + \frac{1}{a} = 0$$

(این یک ***معادلهٔ ریکاتی*** است اما با جایگذاری $y = \frac{1}{az}\frac{dz}{dx}$ به معادلهٔ بسل تبدیل می‌شود)

$$y = \frac{1}{az}\frac{dz}{dx}$$

ب) $r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + (\lambda^2 r^2 - n(n+1))R = 0$

(این معادله وقتی معادلهٔ ***هلمهلتز**** درمختصات کروی باروش جداسازی متغیرها حل می شود به دست می آید. با استفاده از جایگذاری

$$R(\lambda r) = \frac{Z(\lambda r)}{(\lambda r)^{1/2}}$$

آن را به یک معادلهٔ بسل مرتبهٔ $n + \frac{1}{2}$ تبدیل کنید.)

پ) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{n}{k}y = 0$

(این ***معادلهٔ فوریه*** است ولی جایگذاری $z = \sqrt{(n/k)}\,x$ آن را به یک معادلهٔ بسل تبدیل می کند.)

۱۱- در معادلهٔ دیفرانسیل بسل مرتبه $\frac{1}{2}$ با استفاده از جایگذاری $y = u/\sqrt{x}$ ، معادلهٔ زیر را به دست آورید

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0.$$

با حل این معادله نشان دهید

$$y = c_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + c_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

و طبیعت کیفی $J_{1/2}(x)$ را توضیح دهید، یعنی، تباهیدن دامنهٔ این تابع را بررسی کنید.

۱۲- الف) تابع تمرین ۹ (پ) را به صورت یک سری فوریه ـ بسل برحسب $J_1(\lambda_j x)$ بسط دهید که $\lambda_j$ ها در $J_1(2\lambda_j) = 0$ صدق می کنند.

ب) سری به ازای $x = 1$ ، به چه مقداری همگرا خواهد بود؟ توضیح دهید.

۱۳- الف) ثابت کنید

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}\,\sin x.$$

(***راهنمایی***: از سری مکلورن $\sin x$ استفاده کنید)

ب) ثابت کنید

---

* Helmholtz ، (۱۸۲۱-۱۸۹۴) ریاضی دان و فیزیک دان آلمانی

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}\cos x.$$

۱۴- انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int^x s^n J_{n-1}(s)\, ds.$$

(*راهنمایی* : از تمرین ۴ ج استفاده کنید.)

۱۵- الف) ثابت کنید

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n}J_n(x)\right) = -x^{-n}J_{n+1}(x).$$

ب) حساب کنید

$$\int^x \frac{J_{n+1}(s)}{s^n}\, ds.$$

۱۶- الف) معادلهٔ

$$y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0$$

را ***معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر تعدیل شده*** می نامند. نشان دهید یک جواب این معادله به صورت زیر است

$$J_0(ix) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots.$$

همچنین می نویسیم $I_0(x) = J_0(ix)$ ، که $I_0(x)$ را ***تابع بسل نوع اوّل مرتبهٔ صفر تعدیل شده*** می نامند.

ب) بازهٔ همگرایی $I_0(x)$ را بیابید.

۱۷- ثابت کنید

$$Y_0'(x) = -Y_1(x).$$

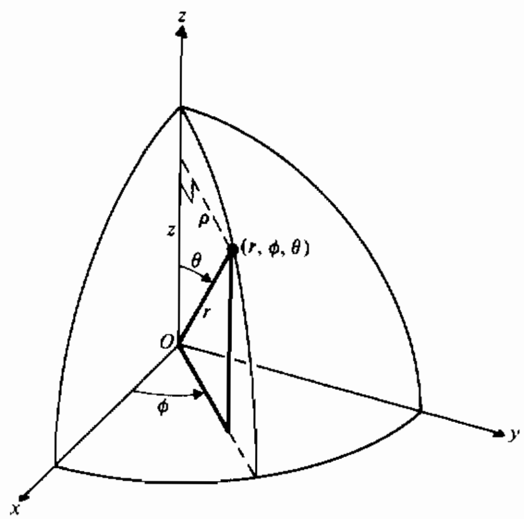
۱۸- الف) با تقسیم معادلهٔ بسل (۵-۳-۱۱) بر $x$، نشان دهید که به صورت معادلهٔ اشترم ـ لیوویل (۴-۵-۱) است.

ب) با استفاده از نماد بخش ۴-۵، نشان دهید $r(a) = 0$ و $a_1 = a_2 = 0$.

پ) نشان دهید در تابع بسل نوع اوّل شرط مرزی دوم (۴-۵-۲) صدق می کند.

## ۵-۴ چندجمله ایهای لژاندر

***مختصات کروی*** $(r, \phi, \theta)$ را می توان برطبق شکل ۵-۴-۱ تعریف نمود. داریم $r \geq 0$ ، $0 \leq \phi < 2\pi$ و $0 \leq \theta \leq \pi$ . ذکر یک نکته در این جا ضروری است. بعضی مؤلفان به جای $r$ از $\rho$ استفاده می کنند، بعضی جای $\theta$ و $\phi$ را عوض می کنند، و بعضی هر دو عمل را انجام می دهند. بنابراین توجه به تعریف خاص هر نویسنده ضروری است.




شکل ۵-۴-۱ مختصات کروی

در ***مختصات استوانه ای*** $(\rho, \phi, z)$ لاپلاسی عبارت است از

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \qquad (۱-۴-۵)$$

رابطهٔ بین مختصات کروی و قائم به صورت زیر داده می شود

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \qquad y = r \sin\theta \sin\phi, \qquad z = r\cos\theta,$$

و از این روابط می توانیم لاپلاسی را در مختصات کروی به دست آوریم. ولی کمی ساده تر و آموزنده تر است که با معادلهٔ (۵-۴-۱) شروع کرده و چهار جملهٔ آن مجموع را در مختصات کروی محاسبه کنیم.

اگر $\phi$ را ثابت نگاه داریم، آن گاه $u$ تابعی از $\rho$ و $z$ است و با توجه به روابط

$$z = r\cos\theta, \qquad \rho = r\sin\theta,$$

$u$ تابعی از $r$ و $\theta$ است . سپس بنابه قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \rho}\\ &= \frac{\rho}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{z}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}.\end{aligned} \tag{۲-۴-۵}$$

در معادلهٔ (۵-۴-۲) برای یافتن $\partial r/\partial\rho$ و $\partial\theta/\partial\rho$ از روابط $z^2 + \rho^2 = r^2$ و $\rho/z = \tan\theta$ استفاده کرده‌ایم . توجه کنید که وقتی از این روابط نسبت به $\rho$ مشتق جزئی می گیریم، $z$ را ثابت نگاه می داریم، حال داریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\rho}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{z}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

و می توانیم معادلهٔ (۵-۴-۲) را به کار بریم چون از آن به عنوان فرمولی برای مشتق گیری از هر تابعی از $r$ و $\theta$ استفاده می شود . به صورت نمادی داریم

$$\frac{\partial(\ \ )}{\partial \rho} = \frac{\partial(\ \ )}{\partial r}\frac{\rho}{r} + \frac{\partial(\ \ )}{\partial \theta}\frac{z}{r^2}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial u_r}{\partial \rho}\frac{\rho}{r} + \frac{1}{r}u_r + u_r\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho}\frac{z}{r^2} + u_\theta z\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{r^2}\right)\\ &= \frac{\rho}{r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\rho}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta\,\partial r}\frac{z}{r^2}\right) + \frac{1}{r}u_r + u_r\rho\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\rho}{r}\right)\\ &\quad + \frac{z}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \theta}\frac{\rho}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{z}{r^2}\right) + u_\theta z\left(-\frac{2}{r^3}\frac{\rho}{r}\right)\\ &= \frac{\rho^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\rho z}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\rho^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{z^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2\rho z}{r^4}\frac{\partial u}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

با روشی مشابه می توانیم $\partial^2 u/\partial z^2$ را محاسبه می کنیم؛ داریم

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{z}{r}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(-\frac{\rho}{r^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\\&=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+z\frac{\partial u}{\partial r}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{z}{r}+\frac{z}{r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{z}{r}-\frac{\rho}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \theta}\right)\\&\quad-\rho\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(-\frac{2}{r^3}\right)\frac{z}{r}-\frac{\rho}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\,\partial r}\frac{z}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(-\frac{\rho}{r^2}\right)\right)\\&=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{z^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{z^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2\rho z}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \theta}+\frac{2\rho z}{r^4}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\rho^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}u_{zz}+u_{\rho\rho}&=\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{r^2-z^2+r^2-\rho^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{z^2+\rho^2}{r^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{z^2+\rho^2}{r^4}\right)\\&=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.\end{aligned}$$

سرانجام با افزودن معادل جملات

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} \quad \text{و} \quad \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2},$$

داریم

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \tag{۳-۴-۵}$$

که لاپلاسی در مختصات کروی است . معادلهٔ فوق متناظر با معادلهٔ (۵-۴-۱) در مختصات استوانه‌ای و متناظر با

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

در مختصات قائم است .

### جوابهای معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی

معادلهٔ لاپلاس (یا معادلهٔ پتانسیل) در مختصات کروی به صورت زیر نوشته می شود

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

که آن را به صورت زیر نیز می توان نوشت (تمرین ۱)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0. \qquad (۴-۴-۵)$$

یک جواب این معادله را با روش جداسازی متغیّرها پیدا می کنیم . فرض کنید

$$u(r,\phi,\theta) = R(r)\Phi(\phi)\Theta(\theta)$$

و آن را در معادلهٔ (۵-۴-۴) جایگزین نمایید . در آن صورت

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\Phi\Theta\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(R\Phi\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}R\Theta\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0.$$

حال، با تقسیم هر جمله بر $R\Phi\Theta/r^2\sin^2\theta$ به دست می آوریم

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}.$$

چون طرف چپ مستقل از $\phi$ است، داریم

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = m^2, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (۵-۴-۵)$$

که اوّلین ثابت جداسازی $m$ صحیح و نامنفی انتخاب می شود تا تابع $\Phi$ (و همچنین $u$) تناوبی با دورهٔ تناوب $2\pi$ نسبت $\phi$ باشد . همان گونه که بعداً خواهیم دید این مطلب اغلب با توجه به ملاحظات فیزیکی لازم می شود .

یک بار دیگر جداسازی متغیّرها نتیجه می دهد

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\left(\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) = \lambda,$$

که دومین ثابت جداسازی را $\lambda$ نامیده ایم . در این مرحله اطلاع بیشتری دربارهٔ این کمیت در دست نیست .

پس معادله لاپلاس را به سه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی، همگن، خطی، مرتبه دوم تبدیل کرده‌ایم :

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0, \qquad (۵-۴-۶)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0, \qquad (۵-۴-۷)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0. \qquad (۵-۴-۸)$$

توجه کنید که معادلهٔ اوّل و سوم هریک شامل یکی از دو ثابت جداسازی هستند، در صورتی که معادلهٔ دوم شامل هر دو ثابت است. حاصل ضربهای جوابهای این سه معادله، ***همسازهای کروی*** نامیده می شوند.

معادلهٔ (۵-۴-۶) ضرایب ثابت دارد، بنابراین جواب آن بسادگی به دست می آید و عبارت است از

$$\Phi(m\phi) = A_m\cos m\phi + B_m\sin m\phi, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (۵-۴-۹)$$

که $A_m$ و $B_m$ ثابتهای دلخواهند و می توانند با شرایط مرزی داده شده تعیین شوند.

حال معادلهٔ (۵-۴-۸) در نظر می گیریم که می توان آن را به شکل معادل آن نوشت :

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - \lambda R = 0.$$

این یک معادلهٔ کشی ـ اویلر است. آن را با استفاده از جایگذاری $R = r^k$ حل می کنیم. دراین صورت معادله به صورت زیر در می آید

$$r^2k(k-1)r^{k-2} + 2rkr^{k-1} - \lambda r^k = 0$$

یا

$$(k^2 + k - \lambda)r^k = 0.$$

بنابراین $R = r^k$ جواب معادلهٔ (۵-۴-۸) است، به شرط آن که $k^2 + k - \lambda = 0$. یافتن یک جواب مستقل خطی دیگر ممکن است به این سادگی نباشد. اگر $k$ را برابر $n$ صحیح و نامنفی انتخاب کنیم، آن گاه $\lambda = n(n+1)$ و اگر (با زیرکی) $k$ را برابر $-(n+1)$ انتخاب کنیم، باز هم $\lambda = n(n+1)$ نتیجه می شود. پس با $\lambda = n(n+1)$ معادلهٔ (۵-۴-۸) دارای دو جواب مستقل

خطی $r^n$ و $r^{-(n+1)}$ است (تمرین ۲) . بنابراین جواب عمومی به صورت زیر نوشته می شود

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}. \tag{۵-۴-۱۰}$$

برای آن که معادلهٔ (۵-۴-۷) را حل کنیم از جایگذاری زیر استفاده می کنیم :

$$x = \cos\theta, \qquad \Theta(\theta) = y(x), \qquad \frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx} = -\sin\theta\frac{d}{dx}.$$

در این صورت

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) &= -\sin\theta\frac{d}{dx}\left(\sin\theta\frac{dx}{d\theta}\frac{d\Theta}{dx}\right)\\ &= -\sin\theta\frac{d}{dx}\left(-\sin^2\theta\frac{dy}{dx}\right)\\ &= \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right).\end{aligned}$$

با این جایگذاریها معادلهٔ (۵-۴-۷) به صورت زیر

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0$$

یا به صورت معادل

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0. \tag{۵-۴-۱۱}$$

در می آید .

معادلهٔ (۵-۴-۱۱) ***معادلهٔ دیفرانسیل وابستهٔ لژاندار*** است . جواب عمومی آن، که با روش سریها به دست می آید، عبارت است از

$$y_{n,m}(x) = c_{n,m}P_n^m(x) + d_{n,m}Q_n^m(x),$$

که $P_n^m(x)$ و $Q_n^m(x)$ را به ترتیب ***توابع وابستهٔ لژاندر نوع اوّل و نوع دوم*** می نامند . استفاده از اندیسهای بالا و پایین نشان می دهد که این توابع علاوه بر متغیّر $x$ ، به $m$ و $n$ نیز بستگی دارند .

اگر $m = 0$ و $n$ صحیح و نامنفی باشد، آن گاه معادلهٔ (۵-۴-۱۱) به صورت زیر در می آید

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0, \tag{۵-۴-۱۲}$$

که آن را ***معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر*** می نامند . یک جواب خصوصی آن عبارت است از $y = P_n(x)$ .

که چندجمله ای لژاندر درجه $n$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$ نامیده می شود (مثال ۵-۲-۷ را ملاحظه کنید)

یک جواب مستقل خطی دیگر $Q_n(x)$ است . چون $x = \pm 1$ نقاط تکین $Q_n(x)$ هستند، (همان طور که بعداً خواهیم دید) می توان آن را فقط وقتی $x \neq 1$ $(\theta \neq 0)$ و وقتی $x \neq -1$ $(\theta \neq \pi)$ به کار برد .

حالتی که* $m = 0$ و $n$ صحیح و نامنفی باشد، معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی (۵-۴-۴)، به صورت زیر نوشته می شود

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0,$$

و دارای جوابهایی است که حاصل ضربهای توابع زیرند :

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}$$

و

$$\Theta_n(\theta) = E_n P_n(\cos\theta) + F_n Q_n(\cos\theta), \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

برای حل معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی، ظاهراً تعدادی فرض ساده کننده در نظر گرفته ایم . این کار تنها برای ساده کردن جنبه های ریاضی صورت نگرفته است . در بخش ۵-۵ خواهیم دید که بسیاری از کاربردها به همین شکل ساده شده منجر می شوند . ولی باید در نظر داشت که طبیعت ثابتهای جداسازی $m$ و $\lambda$ به شرایط مرزی در هر مسألهٔ مفروض بستگی دارند .

### چندجمله ایهای لژاندر

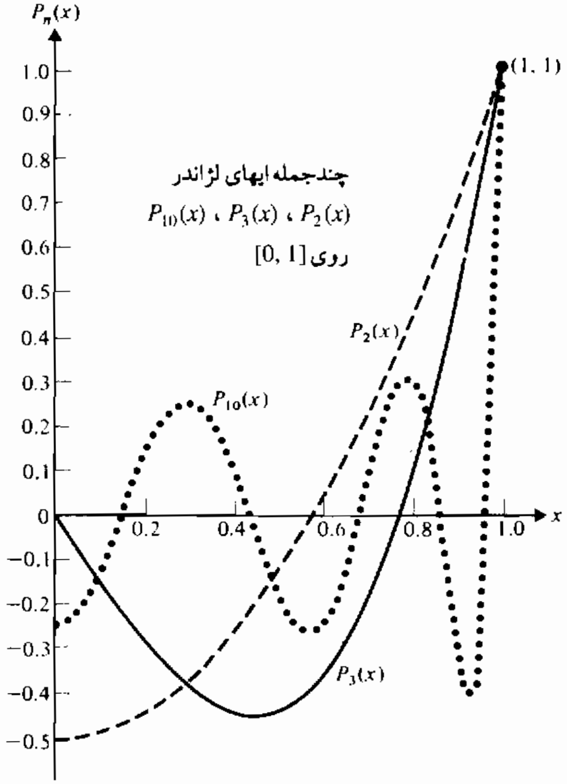
در مثال ۵-۴-۷ معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر (۵-۴-۱۲) را با روش فروبینوس حل کردیم و جوابهای خصوصی $P_n(x)$ ، به نام ***چندجمله ایهای لژاندر*** را به دست آوردیم . برای مراجعه تعدادی از چندجمله ایهای لژاندر را در این جا فهرست می کنیم (شکل ۵-۴-۲) :

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1),$$
$$P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x), \qquad P_4(x) = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

تعدادی از خواص چندجمله ایهای لژاندر که در حل بعضی از مسائل مقدار مرزی مفیدند در زیر فهرست می شوند . (تمرین ۳ را نیز ملاحظه کنید)

---

* توجه کنید $m = 0$ نتیجه می دهد که معادلهٔ لاپلاس مستقل از $\phi$ است (معادلهٔ ۵-۴-۹ را ملاحظه کنید) .




شکل ۵-۴-۲ چندجمله ایهای لژاندر

(۵-۴-۱۳)

الف) $P_{2n+1}(0) = 0$

ب ) $P_n(1) = 1$

پ) $P_n(-1) = (-1)^n$

ت) $P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$

ث) $xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$

ج) $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$

توجه کنید که خاصیت (ج) مجموع خواص (ت) و (ث) است. می توانیم خاصیت (ت) را از *تعریف چندجمله ایهای لژاندر*،

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-2k)!(n-k)!}\, x^{n-2k}, \qquad (۱۴-۴-۵)$$

ثابت کنیم که $N = n/2$ اگر $n$ زوج باشد و $N = (n-1)/2$ اگر $n$ فرد باشد . داریم

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k+2)!}{k!(n-2k+1)!(n-k+1)!}\, x^{n-2k+1}$$

$$P'_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k+2)!(n-2k+1)}{k!(n-2k+1)!(n-k+1)!}\, x^{n-2k}$$

$$P'_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k)!(n-2k)}{k!(n-2k)!(n-k)!}\, x^{n-2k-1}$$

$$xP'_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k)!(n-2k)}{k!(n-2k)!(n-k)!}\, x^{n-2k}$$

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k+2)(2n-2k+1)(2n-2k)!}{k!(n-2k)!(n-k+1)(n-k)!}\, x^{n-2k}$$

$$-\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k)!(n-2k)}{k!(n-2k)!(n-k)!}\, x^{n-2k}$$

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (2n-2k+1-n+2k)\,\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-2k)!(n-k)!}\, x^{n-2k}$$

$$= (n+1)P_n(x).$$

خاصیت (ث) را با روشی مشابه می توان ثابت کرد (تمرین ۳)

### *تعامد چندجمله ایهای لژاندر*

حال نشان می دهیم تحت چه شرایطی چندجمله ایهای لژاندر متعامدند . این خاصیت همان گونه که در بخش بعد خواهیم دید، در حل مسائل مقدار مرزی اساسی است .

چندجمله ایهای لژاندر $P_n(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر زیر صدق می کنند،

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)P'_n(x)\right) + n(n+1)P_n(x) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

با ضرب این معادله در $P_n(x)$ و انتگرال گیری از ۱- تا ۱ نتیجه می شود

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\frac{d}{dx}((1-x^2)P_n'(x))\,dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0. \quad (۱۵-۴-۵)$$

انتگرال اوّل را می توان با روش جزء به جزء محاسبه کرد، قرار می دهیم

$$u = P_m(x), \qquad du = P_m'(x)\,dx,$$

$$dv = \frac{d}{dx}((1-x^2)P_n'(x))\,dx, \qquad v = (1-x^2)P_n'(x).$$

آن گاه

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\frac{d}{dx}((1-x^2)P_n'(x))\,dx$$

$$= P_m(x)P_n'(x)(1-x^2)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)\,dx.$$

اوّلین جملهٔ طرف راست در دو حد به خاطر جملهٔ $(1-x^2)$ صفر می شود. پس معادلهٔ (۵-۴-۱۵) به صورت زیر خلاصه می شود

$$-\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)\,dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0.$$

در معادلهٔ اخیر $m$ و $n$ معنی خاصی ندارند بجز این که هر دو صحیح و نامنفی اند بنابراین می توان $m$ و $n$ را تعویض نمود. در این صورت داریم

$$-\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m'(x)P_n'(x)\,dx + m(m+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0.$$

اگر این معادله را از قبلی کم کنیم، خواهیم داشت

$$(n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0.$$

حال فرض کنید $n \neq m$. آن گاه $n-m \neq 0$ و $n+m+1=0$ غیرممکن است. (چرا؟). بنابراین نتیجهٔ زیر به دست می آید

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n. \quad (۱۶-۴-۵)$$

این نشان می دهد که مجموعهٔ

$$\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\}$$

بر بازهٔ $(-1, 1)$ نسبت به تابع وزن ۱ متعامد است .

چندجمله ایهای لژاندر در کاربردها اغلب برحسب $\theta$ نوشته می شوند . فرض کنید $x = \cos\theta$ و $dx = -\sin\theta\, d\theta$ ، و کرانهای انتگرال گیری را با این فرض تغییر دهیم . درآن صورت معادلهٔ (۵-۴-۱۶) به صورت زیر در می آید

$$\int_{\pi}^{0} P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta)(-\sin\theta\, d\theta) = 0, \qquad m \neq n$$

یا

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\, d\theta = 0, \qquad m \neq n.$$

پس مجموعهٔ

$$\{P_0(\cos\theta), P_1(\cos\theta), P_2(\cos\theta), \ldots\}$$

بر بازهٔ $0 < \theta < \pi$ نسبت به تابع وزن $\sin\theta$ متعامد است .

اگر در معادلهٔ (۵-۴-۱۶) $n$ را به $2n$ و $m$ را به $2m$ تبدیل کنیم ، به دست می آوریم

$$\int_{-1}^{1} P_{2m}(x)P_{2n}(x)\, dx = 2\int_0^1 P_{2m}(x)P_{2n}(x)\, dx = 0, \qquad n \neq m.$$

به عبارت دیگر ، چندجمله ایهای لژاندر درجه زوج بر بازهٔ $0 < x < 1$ نسبت به تابع وزن ۱ متعامدند . همین طور ، چندجمله ایهای لژاندر درجهٔ فرد بر بازه $0 < x < 1$ نسبت به تابع وزن ۱ متعامدند (تمرین ۴) .

### *سری لژاندر*

خاصیت تعامد چندجمله ایهای لژاندر نمایش توابعی معیّن مانند $f$ را به ***سری لژاندر***، یعنی ، یک سری از چندجمله ایهای لژاندر ، ممکن می سازد . این نمایش امکان پذیر است زیرا معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر (۵-۴-۱۲) ، همراه با شرط مرزی مناسب ، یک مسألهٔ اشترم ـ لیوویل ویژه ، از نوعی که در انتهای بخش ۴-۵ مورد بحث قرار گرفت تشکیل می دهد (تمرین ۲۲ را ملاحظه کنید) . علاوه بر این می توان نشان داد که چندجمله ایهای لژاندر نرمال شده که

در این بخش به دست خواهیم آورد بر بازهٔ $(-1, 1)$ نسبت به توابع تکه‌ای ـ هموار یک **مجموعهٔ متعامد یکهٔ کامل** تشکیل می دهند .

برای چنین تابعی می نویسیم

$$f(x) = A_0P_0(x) + A_1P_1(x) + A_2P_2(x) + A_3P_3(x) + \cdots .$$

برای مثال به منظور یافتن $A_2$ ، دو طرف رابطهٔ فوق را در $P_2(x)dx$ ضرب کرده و از ۱ - تا ۱ انتگرال می گیریم . در این صورت

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)\,dx = A_0\int_{-1}^{1} P_0(x)P_2(x)\,dx + A_1\int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)\,dx + A_2\int_{-1}^{1} P_2(x)P_2(x)\,dx + A_3\int_{-1}^{1} P_3(x)P_2(x)\,dx + \cdots .$$

به علت خاصیت تعامد $P_n(x)$ ، هر انتگرال طرف راست بجز سومی برابر صفر است . پس

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)\,dx = A_2\int_{-1}^{1} (P_2(x))^2\,dx,$$

که از آن به دست می آوریم

$$A_2 = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} (P_2(x))^2\,dx}.$$

هر ضریب $A_n$ را می توان به همین روش به دست آورد، بنابراین در حالت کلی ،

$$A_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\,dx}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{۱۷-۴-۵}$$

حال ، مخرج معادلهٔ فوق را محاسبه می کنیم . این کمیت را *مربع نرم* نامند و آن را با $\|P_n\|^2$ نشان می دهند . برای محاسبهٔ این مقدار ، ابتدا به نتیجه ای که **فرمول رودریگ*** نامیده می شود ، نیاز داریم .

شروع کار با بسط دو جمله ای $(x^2 - 1)^n$ است ، که به صورت زیر نوشته می شود

---

* Rodrigues ، (۱۷۹۴-۱۸۵۱) اقتصاددان و ریاضی دان فرانسوی

$$(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}.$$

اگر $n$ بار از آن مشتق بگیریم، داریم (تمرین ۱۶)

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k n!(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}, \qquad (۵-۴-۱۸)$$

که در آن جملهٔ آخر ثابت است. اما $n-2N=0$ نتیجه می دهد $N=n/2$ در صورتی که $n-1-2N=0$ نتیجه می دهد $N=(n-1)/2$. در این صورت، چون $N$ یک عدد صحیح نامنفی است، در معادلهٔ (۵-۴-۱۸) وقتی که $n$ زوج باشد به صورت $n/2$ و وقتی که $n$ فرد باشد به صورت $\frac{(n-1)}{2}$ تعریف می شود.

تعریف $P_n(x)$ را به شکل مجموع یابی زیر به خاطر بیاورید

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-2k)!(n-k)!}x^{n-2k}, \qquad (۵-۴-۱۴)$$

که در آن $N$ با معادلهٔ (۵-۴-۱۸) تعریف می شود. از مقایسهٔ معادله های (۵-۴-۱۴) و (۵-۴-۱۸) نتیجه می شود

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \qquad n=0,1,2,\ldots, \qquad (۵-۴-۱۹)$$

که ***فرمول رودریگ*** است.

می توانیم معادلهٔ (۵-۴-۱۹) را برای محاسبهٔ $\|P_n\|^2$ به صورت زیر به کار بریم. داریم

$$\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2\,dx=\int_{-1}^{1}P_n(x)\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx$$

و انتگرال گیری جزء به جزء با

$$u=P_n(x), \qquad dv=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx,$$

$$du=P_n'(x)\,dx, \qquad v=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n,$$

نتیجه می دهد

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\, dx$$
$$= \frac{1}{2^n n!}\left[P_n(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_n'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\, dx\right].$$

اوّلین جملهٔ طرف راست در هر دو حد به خاطر جملهٔ $(x^2-1)$ صفر می شود . بنابراین پس از $(n-1)$ بار انتگرال گیری با روش جزء به جزء داریم

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\, dx = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P_n^{(n-1)}(x)\frac{d}{dx}(x^2-1)^n\, dx$$

یک بار انتگرال گیری دیگر نتیجه می دهد

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\, dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(x)(x^2-1)^n\, dx.$$

حال ملاحظه می کنیم که با توجه به معادلهٔ (۵-۴-۱۴)

$$P_n^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}$$

با استفاده از فرمول کاهش که در اکثر جدولهای انتگرال یافت می شود، داریم

$$\int x^m(ax^n+b)^p\, dx = \frac{1}{m+np+1}\left(x^{m+1}(ax^n+b)^p + npb\int x^m(ax^n+b)^{p-1}\, dx\right),$$

و با $n$ بار انتگرال گیری، داریم

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\, dx = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

پس، با در نظر گرفتن همهٔ نتایج (تمرین ۵)، داریم

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\, dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{(2n)!}{2^n(n!)}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

یا

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{۵-۴-۲۰}$$

بنابراین مجموعهٔ

$$\left\{\frac{P_0(x)}{\sqrt{2}}, \frac{P_1(x)}{\sqrt{2/3}}, \frac{P_2(x)}{\sqrt{2/5}}, \dots\right\}$$

یک مجموعهٔ متعامد یکه بر بازهٔ $-1 < x < 1$ نسبت به تابع وزن ۱ است . همچنین معادلهٔ (۵-۴-۱۷) با توجه به نتایج فوق به صورت زیر نوشته می شود

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{۵-۴-۲۱}$$

سری لژاندر با سری فوریه خاصیتهایی مشترك دارد . اگر تابعی بر بازهٔ $(0, 1)$ تعریف شود، می توان آن را با یک سری از چندجمله ایهای لژاندر درجهٔ زوج نمایش داد . برای این کار توسیع زوجی از تابع مانند آنچه که برای به دست آوردن سری فوریه کسینوسی در بخش ۳-۲ انجام دادیم، می سازیم . روش را برای این حالت و برای یک توسیع فرد در مثال زیر تشریح می کنیم .

**مثال ۵-۴-۱** تعریف می کنیم

$$f(x) = 2(1 - x), \qquad 0 < x < 1.$$

دو جملهٔ اوّل نمایش سری لژاندر این تابع را با استفاده از (الف) چندجمله ایهای درجه زوج و (ب) چندجمله ایهای درجهٔ فرد به دست آورید .

*حل*: برای (الف) یک توسیع زوج بنا می کنیم و معادلهٔ (۵-۴-۲۱) را به صورت زیر تغییر می دهیم

$$A_{2n} = (4n+1)\int_0^1 f(x)P_{2n}(x)\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{۵-۴-۲۲}$$

چون تابع انتگرال زوج است، می توانیم از تقارن استفاده کرده و حدود انتگرال گیری را عوض کنیم . حال داریم

$$A_0 = 2\int_0^1 (1 - x)\,dx = 1,$$

$$A_2 = 5\int_0^1 (1 - x)(3x^2 - 1)\,dx = -\frac{5}{4};$$

بنابراین

$$f(x) \sim P_0(x) - \frac{5}{4}P_2(x) + \cdots .$$

برای (ب) می‌توانیم یک توسیع فرد بسازیم و معادلهٔ (۵-۴-۲۱) را به صورت زیر تغییر دهیم

$$A_{2n+1} = (4n+3)\int_0^1 f(x)P_{2n+1}(x)\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{۵-۴-۲۳}$$

توجه کنید که تابع انتگرالده در این جا هم زوج است . پس

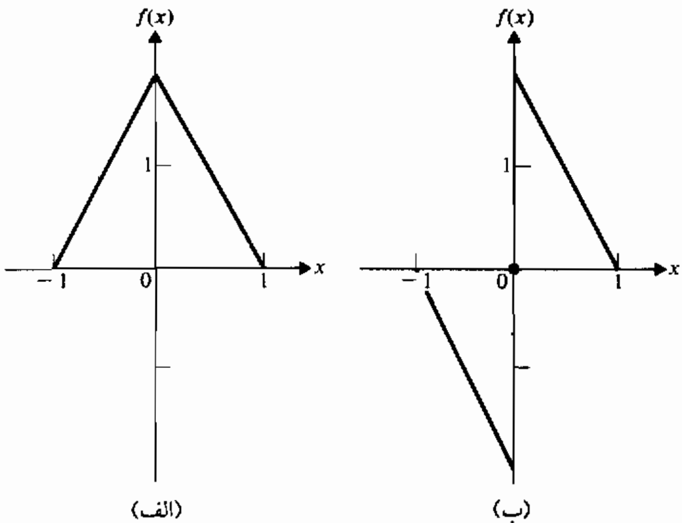
$$A_1 = 6\int_0^1 (1-x)x\,dx = 1,$$

$$A_3 = 7\int_0^1 (1-x)(5x^3-3x)\,dx = -\frac{7}{4},$$

بنابراین

$$f(x) \sim P_1(x) - \frac{7}{4}P_3(x) + \cdots .$$

توسیعهای زوج و فرد در شکل ۵-۴-۳ نشان داده شده‌اند . توجه کنید که در (ب) $f(0) = 0$ . (چرا؟)




شکل ۵-۴-۳ (الف) توسیع زوج . (ب) توسیع فرد .

مسائل مثال ۵-۴-۱ را بدون آن که نیازی به ساختن توسیعهای زوج و فرد تابع مفروض

$f(x)$ باشد، می توان حل کرد . چون $f(x)$ فقط بر $(0, 1)$ تعریف می شود و چون چندجمله ایهای لژاندر زوج و فرد جداگانه بر این بازه متعامدند، پس بلافاصله می توان از معادله های (۵-۴-۲۲) و (۵-۴-۲۳) ضرایب مناسب را به دست آورد .

## *توابع لژاندر نوع دوم*

این بخش را با بحثی دربارهٔ توابع لژلندر نوع دوم به پایان می بریم . ترکیبهای خطی این توابع و چندجمله ایهای لژاندر جواب عمومی معادلهٔ لژاندر (۵-۴-۱۲) را تشکیل می دهند .

یک جواب معادلهٔ لژاندر

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \qquad -1 < x < 1,$$

عبارت است از

$$u = P_n(x). \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

که چندجمله ای لژاندر درجهٔ $n$ است . با روشی به نام تغییر پارامترها یک جواب دوم مستقل خطی به دست می آوریم .

فرض کنید $y = uv$ یک جواب باشد . آن گاه $y' = uv' + vu'$ و $y'' = uv'' + 2u'v' + vu''$ و با جایگزین کردن در معادلهٔ دیفرانسیل نتیجه می شود

$$uv'' + 2u'v' + vu'' - x^2(uv'' + 2u'v' + vu'') - 2x(uv' + vu') + n(n+1)uv = 0$$

یا

$$v[u'' - x^2u'' - 2xu' + n(n+1)u] + uv'' + 2u'v' - x^2uv'' - 2x^2u'v' - 2xuv' = 0.$$

اما کمیت داخل کروشه برابر صفر است، چون $u$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر می باشد . بنابراین خواهیم داشت

$$v''(1 - x^2)u + v'(2u' - 2x^2u' - 2xu) = 0$$

یا

$$v'' + v'\left(\frac{2u'}{u} - \frac{2x}{1 - x^2}\right) = 0.$$

معادلهٔ اخیر را می توان با روشی به نام کاهش مرتبه حل نمود . فرض کنید $w = v'$ و

$w' = v''$ . آن گاه

$$w' + w\left(\frac{2u'}{u} - \frac{2x}{1-x^2}\right) = 0, \tag{۲۴-۴-۵}$$

یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اوّل است . عامل انتگرال ساز عبارت است از

$$\exp\left(2\int^u \frac{t'}{t}\,dt + \int^x \frac{-2t\,dt}{1-t^2}\right) = \exp\left(\log u^2 + \log(1-x^2)\right)$$
$$= u^2(1-x^2).$$

با ضرب معادلهٔ (۵-۴-۲۴) در این عامل انتگرال ساز نتیجه می شود

$$w'u^2(1-x^2) + w(2(1-x^2)uu' - 2xu^2) = 0$$

یا

$$d(wu^2(1-x^2)) = 0.$$

در نتیجه

$$w = \frac{dv}{dx} = \frac{A}{u^2(1-x^2)}$$

و

$$v = B + A\int\frac{dx}{u^2(1-x^2)},$$

بنابراین جواب مورد نظر به صورت زیر است

$$y_n(x) = vP_n(x) = B_nP_n(x) + A_nP_n(x)\int\frac{dx}{(1-x^2)(P_n(x))^2}. \tag{۲۵-۴-۵}$$

***تابع لژاندر نوع دوم***، $Q_n(x)$ ، از معادلهٔ (۵-۴-۲۵) با قرار دادن $A_n = 1$ و $B_n = 0$ به دست می آید . پس

$$Q_0(x) = \int^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

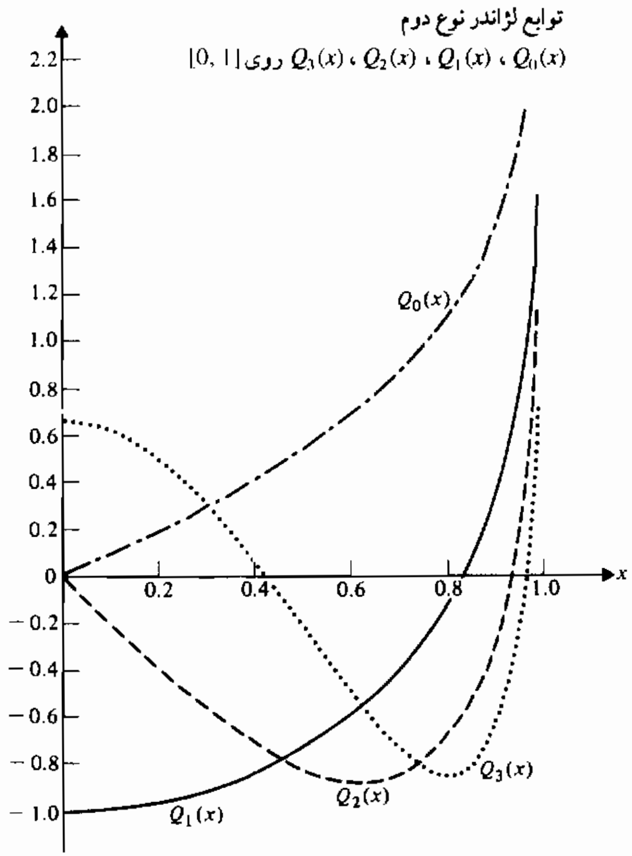
$$Q_1(x) = x\int^x \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1.$$

با ادامهٔ این روش، داریم

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 1)\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3}{2}x,$$

$$Q_3(x) = \frac{x}{4}(5x^2 - 3)\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}.$$

نمودارهای این توابع در شکل ۵-۴-۴ نشان داده شده‌اند .




شکل ۵-۴-۴

از تعریف $Q$ ـ تابع لژاندر،

$$Q_n(x) = P_n(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)(P_n(x))^2}, \tag{۵-۴-۲۶}$$

نتیجه می شود

$$\begin{aligned} Q_{2n}(-x) &= P_{2n}(-x) \int \frac{-dx}{(1-x^2)(P_{2n}(-x))^2} \\ &= -P_{2n}(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)(P_{2n}(x))^2} = -Q_{2n}(x) \end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} Q_{2n+1}(-x) &= P_{2n+1}(-x) \int \frac{-dx}{(1-x^2)(P_{2n+1}(-x))^2} \\ &= P_{2n+1}(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)(P_{2n+1}(x))^2} = Q_{2n+1}(x). \end{aligned}$$

از ترکیب این نتایج به دست می آوریم

$$Q_n(-x) = (-1)^{n+1}\ Q_n(x).$$

به این دلیل است که نمودارها در شکل ۵-۴-۴ فقط بر بازهٔ $0 \le x < 1$ نشان داده شده اند.

جملهٔ

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

در Q ـ توابع نشان می دهد که $x = \pm 1$ نقاط تکین این توابع هستند. در مختصات کروی $(r, \phi, \theta)$ این نقاط تکین توسّط رابطهٔ $x = \cos\ \theta$ به نقاط تکین $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ انتقال می یابند.

توابع لژاندر نوع دوم ($Q$ـ توابع) را به صورت بسته به دست آورده ایم. این توابع را می توان به صورت یک سری نامتناهی با بسط $\log\ (1+x)/(1-x)$ به سری مکلورن نیز بیان نمود، یعنی،

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right), \qquad -1 < x < 1.$$

## تمرینهای ۵-۴

۱- نشان دهید معادله های (۵-۴-۳) و (۵-۴-۴) صورتهای معادل معادلهٔ لاپلاس در مختصات کروی هستند .

۲- تحقیق کنید $r^n$ و $r^{-(n+1)}$ جوابهای مستقل خطی معادلهٔ (۵-۴-۸) هستند (*راهنمایی* : از دترمینان رونسکی استفاده کنید و توجه کنید که $n$ صحیح و نامنفی است)

۳- خواص زیر را درمورد چندجمله ایهای لژاندر ثابت کنید(با معادلهٔ ۵-۴-۱۳ مقایسه کنید) .

الف) $P_n(-1) = (-1)^n$ ب) $P_{2n+1}(0) = 0$

پ) $xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$

ت) $P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ ث) $P_{2n}'(0) = 0$

۴- ثابت کنید چندجمله ایهای لژاندر درجهٔ فرد بر بازهٔ $0 < x < 1$ نسبت به تابع وزن ۱ متعامدند .

۵- جزئیات لازم برای رسیدن به معادلهٔ (۵-۴-۲۰) را انجام دهید .

۶- با محاسبه مستقیم نرم از $P_n(x)$ معادلهٔ (۵-۴-۲۰) را برای $n = 0, 1, 2, 3$ تحقیق کنید .

۷- با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که $P_0(x)$ ، $P_1(x)$ ، و $P_2(x)$ بر بازهٔ $-1 < x < 1$ نسبت به تابع وزن ۱ متعامدند .

۸- نشان دهید بازهٔ همگرایی $Q_n(x)$ ، $-1 < x < 1$ است .

۹- نشان دهید

$$\int_0^1 P_{2n}(x)\, dx = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

(*راهنمایی* : $P_0(x) = 1$)

۱۰- نشان دهید

$$\int_{-1}^1 P_n'(x) P_m(x)\, dx = 1 - (-1)^{n+m},$$

که $0 \le m \le n$ . (*راهنمایی* : از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده کنید)

۱۱- نشان دهید

$$\int_{-1}^1 x(P_n(x))^2\, dx = 0.$$

۱۲- هریک از چندجمله ایهای زیر را برحسب چندجمله ایهای لژاندر بنویسید

الف) $ax + b$

ب) $ax^2 + bx + c$

پ) $ax^3 + bx^2 + cx + d$

۱۳- ثابت کنید

$$P_n'(1) = \frac{n}{2}(n+1).$$

۱۴- الف) در مثال ۵-۴-۱ ضرایب $A_0$ ، $A_2$ ، $A_1$ ، $A_3$ را به دست آورید .

ب) $A_4$ و $A_5$ را محاسبه کنید .

پ) سه ضریب در نمایش سری لژاندر تابع زیر را به دست آورید

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 2(1-x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

ت) $f(0)$ را در قسمت (پ) محاسبه کنید .

۱۵- سه ضریب اوّل غیر صفر در نمایش سری لژاندر هریک از توابع زیر را به دست آورید .

الف)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

(**راهنمایی**: از نتیجه تمرین ۳ (ث) استفاده کنید) .

ب)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

پ) $f(x) = |x|, \ -1 < x < 1$

۱۶- معادلهٔ (۵-۴-۱۸) را ثابت کنید . توضیح دهید چرا جملهٔ آخر در مجموع یابی ثابت است .

۱۷- فرمول زیر را به دست آورید

$$\int_x^1 P_n(s)\, ds = \frac{1}{2n+1}\left(P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)\right), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

(**راهنمایی**: از معادلهٔ ۵-۴-۱۳ (ج) استفاده کنید) .

۱۸- اگر $f(x)$ یک چندجمله ای از درجهٔ $m < n$ باشد، نشان دهید

$$\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)\, dx = 0.$$

۱۹- یک نمایش انتگرالی $P_n(x)$ به صورت زیر داده می شود

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + (x^2 - 1)^{1/2}\cos\phi)^n\, d\phi.$$

این نمایش را برای $n = 0, 1, 2$ تحقیق کنید .

۲۰- الف) با استفاده از فرمول رودریگ ثابت کنید

$$2^n n!P_{n+1}(x) = (2n+1)\frac{d^{(n-1)}u^n}{dx^{(n-1)}} + 2n\frac{d^{(n-1)}u^{n-1}}{dx^{(n-1)}},$$

که در آن $u = x^2 - 1$ .

ب) در رابطهٔ به دست آمده در قسمت (الف) با استفاده از جایگزینی

$$2^{n-1}(n-1)!P_{n-1}(x) = \frac{d^{(n-1)}u^{n-1}}{dx^{(n-1)}}$$

نشان دهید

$$P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{2^n n!}\frac{d^{(n-1)}u^n}{dx^{(n-1)}}.$$

۲۱- با مراجعه به معادلهٔ (۵-۴-۱۰)، تعیین کنید تحت چه شرایطی $r^n$ و $r^{-(n+1)}$ مستقل خطی اند .

۲۲- الف) معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر (۵-۴-۱۲) را به صورت معادلهٔ اشترم ـ لیوویل (۵-۵-۱) بنویسید .

ب) با استفاده از نماد بخش ۴-۵، نشان دهید $r(b) = 0$ و اوّلین شرط مرزی معادلهٔ (۵-۴-۲) برقرار است .

## ۵-۵ کاربردها

حال آماده ایم که چند مسأله را در حالت سه بعدی با استفاده از مختصات استوانه ای و کروی حل کنیم . درمثال زیر خیلی از نتایج به دست آمده در بخشهای ۵-۳ و ۵-۴ را به کار خواهیم برد .

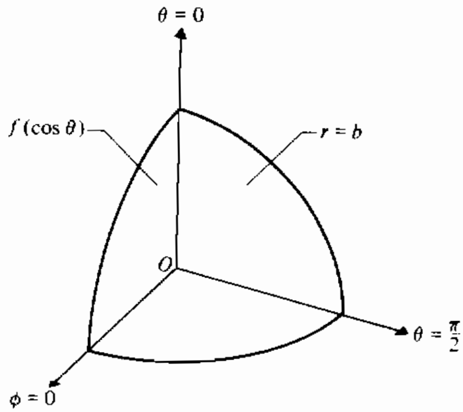
**مثال ۵-۵-۱** دماهای کران دار حالت پایا را در درون یک کرهٔ توپُر به شعاع $b$ بیابید هرگاه دماهای روی سطح کره با $f(\cos\theta)$ داده شود .

*حل* : چون دمای سطح کره به صورت تابعی فقط از $\theta$ معلوم است، دماها مستقل از $\phi$ هستند . بنابراین مسألهٔ زیر را داریم (معادلهٔ ۵-۴-۳ را ببینید) :

معادله : $$\nabla^2 u(r,\theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad 0 < r < b, \quad 0 < \theta < \pi;$$

شرایط مرزی : $$u(b,\theta) = f(\cos\theta), \quad 0 < \theta < \pi.$$

قسمتی از کره که در ربع اوّل واقع است در شکل ۵-۵-۱ نشان داده می شود .




شکل ۵-۵-۱

شرایط مرزی دیگری هم از این واقعیت که دماها باید کران دار باشند، به دست می آیند . با استفاده از جداسازی متغیّرها و با فرض این که جواب به شکل

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

است، داریم

$$\Theta\frac{d^2R^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\Theta\frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{R\cot\theta}{r^2}\frac{d\Theta}{d\theta} = 0$$

یا

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2r}{R}\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - \frac{\cot\theta}{\Theta}\frac{d\Theta}{d\theta} = \lambda.$$

و آن نتیجه می شود

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0,$$

که برای $\lambda = n(n+1)$ ، دارای جوابهایی به صورت

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

است، همان طور که در معادلهٔ (۵-۴-۱۰) داده شده بود . می توان نشان داد که معادلهٔ دوم، معادل معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر زیر است (تمرین ۱)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + n(n+1)\Theta = 0,$$

و جواب عمومی آن به صورت زیر است

$$\Theta_n(\theta) = E_n P_n(\cos\theta) + F_n Q_n(\cos\theta), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

برای آن که $u$ کران دار بماند باید $D_n = 0$ و $F_n = 0$ (تمرین ۲) . پس $u(r, \theta)$ به صورت حاصل ضربهای

$$r^n P_n(\cos\theta),$$

است و برای آن که $u$ در شرط مرزی ناهمگن باقی مانده صدق کند، ترکیبی خطی از جوابهای فوق در نظر می گیریم . در آن صورت*

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0} A_n r^n P_n(\cos\theta),$$

که $A_n$ ها باید تعیین شوند . با استفاده از دماهای داده شده روی سطح داریم

$$u(b, \theta) = \sum_{n=0} A_n b^n P_n(\cos\theta) = f(\cos\theta),$$

که نشان می دهد $f(\cos\theta)$ باید به صورت یک سری لژاندر بیان شود . بنابر معادلهٔ (۵-۴-۲۱)،

$$A_n b^n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

بنابراین جواب به صورت زیر نوشته می شود

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}\left(\frac{r}{b}\right)^n P_n(\cos\theta)(2n+1)\int_{-}^{1} f(x)P_n(x)\,dx. \quad \blacksquare \qquad (۵-۵-۱)$$

---

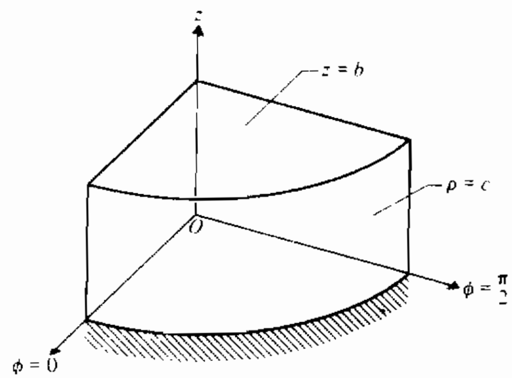
* در این بخش کران بالا را در مجموع یابیها حذف می کنیم، چون همهٔ آنها سریهای نامتناهی را نشان می دهند .

**مثال ۵-۵-۲** دماهای کران دار، حالت پایا را در درون یک استوانهٔ توپُر به شعاع $c$ و ارتفاع $b$ بیابید، با فرض آن که دمای سطح جانبی در صفر نگاه داشته شود، قاعدهٔ پایین عایق باشد، و قاعدهٔ بالا در °۱۰۰ نگاه داشته شود:

*حل*: محور استوانه را در امتداد محور $z$ ها می گیریم و مطابق شکل ۵-۵-۲ از مختصات استوانه ای استفاده می کنیم. در این صورت مسألهٔ زیر را داریم (تمرین ۳):

معادله:
$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + u_{zz} = 0, \quad 0 < \rho < c, \quad 0 < z < b;$$

شرایط مرزی:
$$u(c, z) = 0, \quad 0 < z < b,$$
$$u_z(\rho, 0) = 0, \quad 0 < \rho < c,$$
$$u(\rho, b) = 100, \quad 0 < \rho < c.$$




شکل ۵-۵-۲

فرض می کنیم جواب به صورت $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$ باشد، در این صورت معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت زیر در می آید

$$ZR'' + \frac{1}{\rho} ZR' + RZ'' = 0$$

یا

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{\rho R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2.$$

ثابت جدا سازی را منفی در نظر گرفته ایم تا $Z$ (و $u$) نسبت به $z$ متناوب نشوند. (چرا؟) معادلات دیفرانسیل حاصل با شرایط مرزی آنها (در این جا فقط از شرایط مرزی همگن می توان استفاده کرد) عبارتند از

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0, \qquad Z'(0) = 0,$$

و

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \lambda^2 R = 0, \qquad R(c) = 0.$$

این معادلات دیفرانسیل به ترتیب مشابه معادلات (۵-۳-۲) و (۵-۳-۴) هستند؛ بنابراین، جوابهای عمومی زیر را داریم

$$Z(\lambda z) = Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z}$$

و

$$R_0(\lambda\rho) = EJ_0(\lambda\rho) + FY_0(\lambda\rho).$$

برای ان که جواب کران دار باشد $F$ را برابر با صفر می گیریم. از شرط $R(c) = 0$ نتیجه می شود $J_0(\lambda c) = 0$، یعنی، $\lambda c$ یک صفر تابع بسل $J_0(x)$ است. این صفرهای مثبت را، $\lambda_j c$، $j = 1, 2, \ldots$ می نامیم، یعنی، $\lambda_1 c \doteq 2.405$، $\lambda_2 c \doteq 5.520$، و غیره. جوابهای معادله برحسب $z$ عبارتند از (تمرین ۵)

$$Z(\lambda_j z) = \cosh(\lambda_j z), \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

پس

$$u(\rho, z) = \sum_{j=1} a_j \cosh(\lambda_j z) J_0(\lambda_j \rho)$$

و، با به کار بردن شرط مرزی ناهمگن، داریم

$$u(\rho, b) = \sum_{j=1} a_j \cosh(\lambda_j b) J_0(\lambda_j \rho) = 100,$$

که نشان می دهد $f(\rho) = 100$ باید به صورت یک سری فوریه ـ بسل بر بازهٔ $0 < \rho < c$ بیان شود. با استفاده از معادلهٔ (۵-۳-۱۹) و جایگزینی $s = \lambda_j x$، می توان نوشت

$$A_j = a_j \cosh(\lambda_j b) = \frac{2}{c^2(J_0'(\lambda_j c))^2}\int_0^c 100xJ_0(\lambda_j x)\,dx$$
$$= \frac{200}{c^2(J_0'(\lambda_j c))^2}\,\frac{1}{\lambda_j^2}\int_0^{\lambda_j c} sJ_0(s)\,ds$$

آن گاه، با استفاده از معادلهٔ (۵-۳-۱۰)، و با توجه به $J_0'(x) = -J_1(x)$ و ساده کردن داریم (تمرین ۶)

$$A_j = a_j \cosh(\lambda_j b) = \frac{200}{\lambda_j c J_1(\lambda_j c)},$$

پس

$$u(\rho, z) = \frac{200}{c}\sum_{j=1}\frac{J_0(\lambda_j \rho)\cosh(\lambda_j z)}{\lambda_j \cosh(\lambda_j b) J_1(\lambda_j c)}. \quad \blacksquare \tag{۵-۵-۲}$$

در مثال بعد معادلهٔ موج دو بعدی را در یک ناحیهٔ دایره ای در نظر می گیریم

**مثال ۵-۵-۳** مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید .

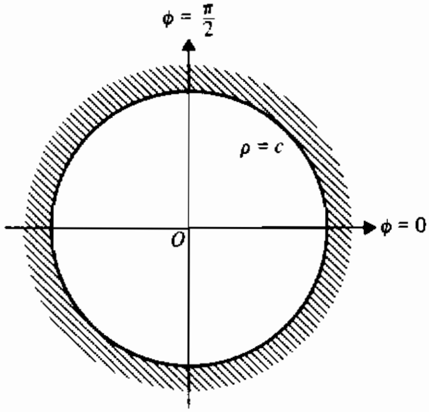
معادله :
$$z_{tt} = \frac{a^2}{\rho}(\rho z_\rho)_\rho, \quad 0 < \rho < c, \quad t > 0;$$

شرایط مرزی :
$$z(c, t) = 0, \quad t > 0;$$

شرایط اولیه :
$$z_t(\rho, 0) = 0, \quad 0 < \rho < c,$$
$$z(\rho, 0) = f(\rho), \quad 0 < \rho < c.$$

*حل* : در این جا یک غشای همگن (با مثال ۴-۲-۱ مقایسه کنید) با شعاع $c$ داریم که در طول لبهٔ دایره ای آن به یک قاب بسته شده است . (شکل ۵-۵-۳ را ملاحظه کنید) . به این قاب یک تغییر مکان اوّلیه $f(\rho)$ در امتداد محور $z$ ها داده می شود . می خواهیم تغییر مکانها را در یک نقطهٔ دلخواه از غشاء و در هر زمان $t$ به دست آوریم . این واقعیت که تغییر مکان اوّلیه تابعی فقط از $\rho$ است نشان می دهد که $z$ از $\phi$ مستقل می باشد . با استفاده از جداسازی متغیّرها، به معادلات دیفرانسیل معمولی و شرایط همگن زیر می رسیم (تمرین ۷)

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0, \qquad T'(0) = 0,$$
$$\rho^2 R'' + \rho R' + \lambda^2 \rho^2 R = 0, \qquad R(c) = 0.$$




شکل ۵-۵-۳

ثابت جداسازی به گونه‌ای انتخاب شده است که $T$ (و $z$) برحسب $t$ متناوب شوند تا با واقعیت فیزیکی هم‌سازگار گردد. معادلهٔ دوم دارای جوابهایی به صورت $J_0(\lambda_j c)$ است که $J_0(\lambda_j c) = 0$، $j = 1, 2, \ldots$ . معادلهٔ اوّل دارای جوابهایی به صورت $\cos(\lambda_j at)$ ، $j = 1, 2, \ldots$ است، بنابراین ترکیبی خطی از حاصل ضرب اینها را در نظر می گیریم، یعنی،

$$z(\rho, t) = \sum_{j=1} A_j J_0(\lambda_j \rho) \cos(\lambda_j at).$$

برای آن که شرط اوّلیهٔ ناهمگن برقرار شود مجدداً معادلهٔ (۵-۳-۱۹) را برای تعیین $A_j$ به کار می بریم . پس

$$A_j = \frac{2}{c^2 (J_1(\lambda_j c))^2} \int_0^c x f(x) J_0(\lambda_j x)\, dx, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

و

$$z(\rho, t) = \frac{2}{c^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cos(\lambda_j at)}{(J_1(\lambda_j c))^2} \int_0^c x f(x) J_0(\lambda_j x)\, dx, \qquad (۵-۵-۳)$$

که $\lambda_j c$ ریشه های مثبت $J_0(x) = 0$ هستند .

در مثال بعد معادلهٔ دو بعدی گرما را روی یک ناحیهٔ دایره ای بررسی می کنیم .

**مثال ۵-۵-۴** مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید .

معادله :
$$u_t = \frac{k}{\rho}(\rho u_\rho)_\rho, \quad 0 < \rho < c, \quad t > 0;$$

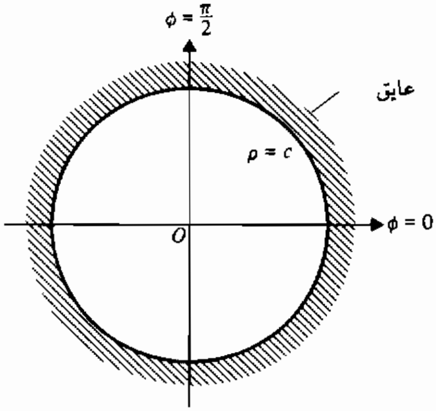
شرط مرزی :
$$u_\rho(c, t) = 0, \quad t > 0;$$

شرط اولیه :
$$u(\rho, 0) = f(\rho), \quad 0 < \rho < c.$$

*حل* : در این جا یک قرص دایره‌ای همگن به شعاع $c$ داریم که لبهٔ خارجی آن عایق شده است (شکل ۵-۵-۴) . فرض می کنیم که جریان گرما دو بعدی است، یعنی، قرص نازك است و سطوح دایره‌ای بالا و پایین آن نیز عایق شده است . علاوه بر این، دما از $\phi$ مستقل است، چون توزیع دمای اوّلیه تابعی فقط از $\rho$ است . می خواهیم دمای قرص را در هر زمان $t$ بیابیم . با استفاده از جداسازی متغیّرها، معادلات دیفرانسیل معمولی زیر را به دست می آوریم (تمرین ۸)

$$T' + k\lambda^2 T = 0,$$

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \lambda^2 R = 0, \qquad R'(c) = 0.$$




شکل ۵-۵-۴

در این جا نیز ثابت جداسازی منفی انتخاب شده است، به این دلیل که حد $u_\rho(\rho, t)$ وقتی $t \to \infty$ ، صفر شود (تمرین ۹) .

معادلهٔ دوم، معادلهٔ دیفرانسیل بسل مرتبهٔ صفر است و دارای جواب کران دار

$J_0(\lambda\rho)$ می باشد . با به کار بردن شرط داده شده و استفاده از تمرین ۴ (d) در بخش ۵-۳ داریم

$$J_0'(\lambda c) = -\lambda J_1(\lambda c) = 0,$$

که نشان می دهد $\lambda c$ یک صفر $J_1(x) = 0$ است . این صفرهای نامنفی را $\lambda_j c$ ، $j = 1, 2, \ldots$ می نامیم، یعنی، $\lambda_1 c = 0$ ، $\lambda_2 c \doteq 3.832$ ، $\lambda_3 c \doteq 7.016$ ، و غیره . پس

$$u(\rho, t) = \sum_{j=1} A_j \exp(-k\lambda_j^2 t) J_0(\lambda_j \rho),$$

و برای آن که این جواب در شرط اوّلیه ناهمگن صدق کند، $A_j$ ها را با استفاده از معادلهٔ (۵-۳-۲۱) با $h = n = 0$ در معادلهٔ (۵-۳-۲۲) محاسبه می کنیم . بنابراین

$$A_1 = \frac{2}{c^2}\int_0^c xf(x)\,dx,$$

$$A_j = \frac{2}{c^2(J_0(\lambda_j c))^2}\int_0^c xf(x)J_0(\lambda_j x)\,dx, \qquad j = 2, 3, \ldots,$$

بنابراین جواب نهایی عبارت است از

$$u(\rho, t) = A_1 + \sum_{j=2} A_j \exp(-k\lambda_j^2 t) J_0(\lambda_j \rho), \tag{۵-۵-۴}$$

که $A_1$ و $A_j$ در بالا تعریف شده اند و $J_1(\lambda_j c) = 0$ ، $j = 1, 2, 3, \ldots$

**مثال ۵-۵-۵** یک نیمکرهٔ توپُر به شعاع $b$ را در نظر بگیرید که سطح قاعدهٔ آن کاملاً عایق شده است و دمای سطح خمیدهٔ آن با $f(\cos\theta)$ داده می شود . دمای کران دار، حالت پایا را در هر نقطهٔ درون آن بیابید .

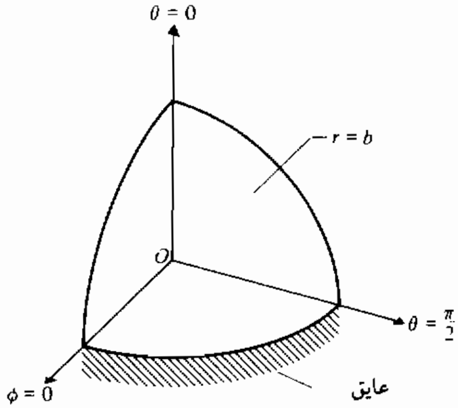
**حل :** شکل ۵-۵-۵ یک چهارم نیمکره را نشان می دهد . چون دمای سطح مستقل از $\phi$ است، پس مسألهٔ زیر را داریم .

معادله : $\nabla^2 u = 0$ در مختصات کروی مستقل از $\phi$

شرایط مرزی : $0 < r < b,\ 0 < \theta < \pi/2;$

$u_z(r, \pi/2) = 0, \quad 0 < r < b,$

$u(b, \theta) = f(\cos\theta), \quad 0 < \theta < \pi/2.$




شکل ۵-۵-۵

چون متغیّر $z$ یکی از مختصات دستگاه مختصات کروی نیست، لازم است که شرط مرزی همگن را تغییر دهیم. با مراجعه به شکل ۵-۴-۱، داریم

$$z = r \cos \theta,$$

بنابراین

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial z}.$$

پس، در $\theta = \pi/2$ داریم

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

و شرط $u_z = 0$ نتیجه می دهد که در $\theta = \pi/2$ ، $u_\theta = 0$ .

با مراجعه به مثال ۵-۵-۱، داریم

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0} A_n r^n P_n(\cos \theta),$$

که در معادلهٔ لاپلاس صدق می کند. حال

$$u_\theta(r, \theta) = \sum_{n=0} A_n r^n P_n'(\cos \theta)(-\sin \theta)$$

بنابراین

$$u_\theta(r, \pi/2) = \sum_{n=0} A_n r^n P_n'(0)(-1) = 0,$$

که از آن نتیجه می شود که $n$ زوج است (تمرین ۳ (ت) در بخش ۵-۴ را ملاحظه کنید)؛ آن را $2m$ می نامیم . پس جواب به صورت زیر نوشته می شود

$$u(r, \theta) = \sum_{m=0} A_{2m} r^{2m} P_{2m}(\cos \theta).$$

حال اگر شرط مرزی ناهمگن را به کار بریم، به دست می آوریم

$$u(b, \theta) = \sum_{m=0} A_{2m} b^{2m} P_{2m}(\cos \theta) = f(\cos \theta),$$

یعنی، $f(\cos \theta)$ باید به صورت یک سری از چندجمله ایهای لژاندر درجه زوج بر بازهٔ $0 < \theta < \pi/2$ نشان داده شود . این کار امکان پذیر است زیرا این چندجمله ایها بربازهٔ داده شده متعامدند و می توانیم معادلهٔ (۵-۴-۲۲) را برای محاسبه ضرایب به کار بریم . بنابراین،

$$A_{2m} b^{2m} = (4m+1) \int_0^{\pi/2} f(\cos \theta) P_{2m}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

و جواب نهایی به صورت زیر نوشته می شود

$$u(r, \theta) = \sum_{m=0} (4m+1) \left(\frac{r}{b}\right)^{2m} P_{2m}(\cos \theta) \int_0^1 f(x) P_{2m}(x)\, dx. \quad \blacksquare$$

روش به کار رفته در مثال آخر، یعنی به هنگام در آوردن جواب را هر گاه که اطلاع جدیدی دربارهٔ آن به دست آید، توصیه می کنیم . بطور کلّی، بهتر است که شرایط **همگن** را برای توابع ویژهٔ متمایز، یعنی، قبل از آن که حاصل ضرب توابع ویژه تشکیل شود به کار بریم . ولی در مثال آخر، می توانیم بدون رو به رو شدن با مشکلی، این روش را به کار نبریم . (چرا؟)

با چند مثال نشان داده ایم که چگونه تقارن دایره ای در یک مسأله می تواند به توابع بسل و تقارن کروی به چندجمله ایهای لژاندر منجر شود . روش جداسازی متغیّرها را برای حل مسائل مقدار مرزی به کار برده ایم، چون این روش به ما اجازه می دهد که شرایط مرزی **همگن** را به معادلات دیفرانسیل **معمولی** جداگانه منتقل کنیم . همچنین از دانسته هایمان دربارهٔ وضعیت فیزیکی در صورت امکان استفاده کنیم تا مقادیری خاص را به ثابتهای جداسازی نسبت دهیم .

## تمرینهای ۵-۵

۱- در مثال ۵-۵-۱ نشان دهید

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{\cot\theta}{\Theta}\frac{d\Theta}{d\theta} = -n(n+1)$$

معادل است با

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + n(n+1)\Theta = 0.$$

۲- نشان دهید در مثال ۵-۵-۱ باید $D_n = F_n = 0$ اختیار شود گرچه ناحیه‌ای که جواب را در آن جستجو می‌کنیم شامل نقاط $r = 0$ ، $(b, 0)$ ، و $(b, \pi)$ نیست. چرا باید این نقاط را خارج نمود؟ (*راهنمایی*: به معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مورد بحث توجه کنید)

۳- هریک از شرایط مرزی داده شده در مثال ۵-۵-۲ را به گزاره‌های ریاضی برگردانید.

۴- در مثال ۵-۵-۲، جزئیات را در مورد جداسازی متغیّرها انجام دهید.

۵- معادلهٔ زیر را حل کنید

$$Z'' - \lambda_j^2 Z = 0, \qquad Z'(0) = 0.$$

(با مثال ۵-۵-۲ مقایسه کنید)

۶- در مثال ۵-۵-۲ جزئیات لازم را برای محاسبهٔ $A_j$ بنویسید.

۷- در مثال ۵-۵-۳ روش جداسازی متغیرها را به کار برید تا معادلات دیفرانسیل معمولی و شرایط مرزی را به دست آورید.

۸- در مثال ۵-۵-۴، روش جداسازی متغیرها را به کار برید تا دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی به دست آورید.

۹- در مثال ۵-۵-۴ توضیح دهید چرا باید داشته باشیم

$$\lim_{t\to\infty} u_\rho(\rho, t) = 0.$$

۱۰- جواب مسألهٔ مثال ۵-۵-۱ را به دست آورید با فرض آن که دمای سطح در $100°$ ثابت باشد. آیا این نتیجه با واقعیت فیزیکی و قضیهٔ ۴-۱-۱ مطابقت دارد؟

۱۱- جواب مسألهٔ مثال ۵-۵-۱ را اگر دمای سطح به صورت $f(\cos\theta) = \cos\theta$ داده شود، به دست آورید. (*راهنمایی*: از بخش ۵-۴ به خاطر بیاورید که $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$.)

۱۲- الف) در معادلهٔ (۵-۵-۲) قرار دهید $b = c = 1$ و سه جملهٔ اوّل مجموع را بنویسید.
ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف)، $u(0, 0)$ را محاسبه کنید.
پ) آیا نتیجهٔ قسمت (ب) همان چیزی است که انتظار دارید؟ توضیح دهید.

۱۳- مسألهٔ مثال ۵-۵-۲ را حل کنید با فرض آن که قاعده و سطح جانبی هر دو در دمای صفر و سطح فوقانی در دمای °۱۰۰ نگاه داشته شوند.

۱۴- اگر ثابت جداسازی در مثال ۵-۵-۳ نامنفی باشد نتیجه چه خواهد بود؟ آیا این نتیجه با واقعیت فیزیکی مطابقت دارد؟ توضیح دهید.

۱۵- در مثال ۵-۵-۳، $f(\rho)$ را به ۱ تغییر دهید و جواب متناظر را برای معادلهٔ (۵-۵-۳) به دست آورید. آیا چنین تغییر مکان اوّلیه‌ای ازنظر فیزیکی امکان‌پذیر است؟ توضیح دهید.

۱۶- برطبق معادلهٔ (۵-۵-۴)

$$\lim_{t \to \infty} u(\rho, t) = A_1.$$

این نتیجه را توضیح دهید.

۱۷- مسألهٔ مثال ۵-۵-۴ را حل کنید در صورتی که لبهٔ خارجی به جای عایق شدن، در دمای صفر نگاه داشته شود و سایر شرایط تغییر نکنند.

۱۸- دماهای کران‌دار حالت پایا، را درون یک نیمکرهٔ توپر به شعاع $b$ بیابید با فرض آن که سطح پایین در دمای صفر نگاه داشته شود و توزیع دما درسطح کره با $f(\cos\theta)$ داده شود.

۱۹- تمرین ۱۸ را چنان تغییر دهید تا $f(\cos\theta) = 100$ و جواب را برای این مسأله به دست آورید.

۲۰- در مثال ۵-۵-۵ شرط $f(\cos\theta) = 100$ را به کار برید و جواب را بیابید.

۲۱- یک کره نارسانای الکتریکی* به شعاع $b$ در یک میدان الکتریکی یکنواخت به شدت $E$ درجهت $z$ قرار داده می‌شود. پتانسیل داخل کره و خارج کره را تعیین کنید. (*راهنمایی*: پتانسیل داخل ($u$) و پتانسیل خارج ($U$) هر دو باید در معادلهٔ پتانسیل صدق کنند. شرایط پیوستگی به صورت زیر داده می‌شوند

$$u(b, \theta) = U(b, \theta), \qquad 0 < \theta < \pi,$$

* این یک کره صلب (توپر) نیست.

و

$$Ku_r(b,\theta)=U_r(b,\theta),\qquad 0<\theta<\pi,\qquad K>0.$$

علاوه بر این،

$$\lim_{r\to\infty} U(r,\theta)=-Ez=-Er\cos\theta.$$

۲۲- پتانسیل یک کرهٔ رسانای ساکن به شعاع $b$ را که در یک میدان الکتریکی یکنواخت به شدت $E$ در جهت محور $z$ ها قرار داده شده است بیابید. ***راهنمایی***: داریم $\nabla^2 u=0$ با

$$u(b,\theta)=0$$

و

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta)=-Ez=-Er\cos\theta.$$

۲۳- کره های هم مرکز به شعاعهای $a$ و $b$ به ترتیب در پتانسیلهای ثابت $u_1$ و $u_2$ نگاه داشته می شوند. پتانسیل را در هر نقطهٔ بین کره ها تعیین کنید.

## ۶-۵ روشهای عددی

تا این جا تمام مسائل مقدار مرزی مورد بررسی به گونه ای بودند که جوابهایشان را می توانستیم بطور تحلیلی به دست آوریم. ولی در عمل بندرت اتفاق می افتد که یک مسألهٔ داده شده در رده ای قرار گیرد که آن را با روشهای بحث شده بتوان حل کرد. روشهای کلاسیک ممکن است به یک یا چند دلیل زیر قابل اجرا نباشند:

الف) معادله با مشتقات جزئی غیرخطی باشد و نتوانیم بدون آن که تأثیر جدی در نتیجه داشته باشد، آن را خطی کنیم.

ب) مرز نامنظم باشد.

پ) شرایط مرزی از نوع مخلوط باشند.

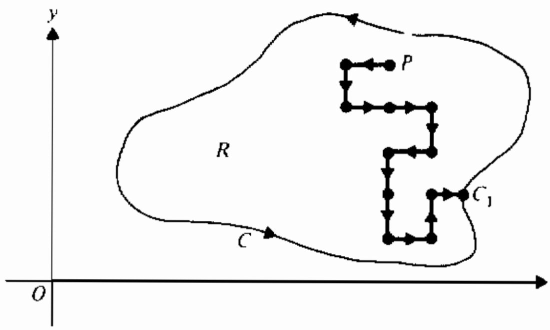
ت) شرایط مرزی وابسته به زمان باشند.

ث) موادی باید بررسی شوند که همگن و همسانگرد نباشند.

بعضی از موارد بالا می توانند پیچیدگیهایی را باعث شوند که هر روشی بجز روش عددی را غیرممکن سازند. البته روشهای عددی نیز مشکلات مربوط به خود را دارند که بعداً خواهیم دید.

ابتدا یک روش عددی غیرمعمول را، که از یک اصل در نظریهٔ احتمال استفاده می کند، ارائه می دهیم. فرض کنید می خواهیم یک مسألهٔ دیریکله ($\nabla^2 u = 0$، با مقادیر معلوم $u$ روی مرز) را در یک ناحیهٔ $R$ در صفحه با مرز نامنظم $C$ حل کنیم. بخصوص می خواهیم مقدار $u$ را در نقطهٔ مفروض $P$ به دست آوریم.

اگر از نقطهٔ $P$ شروع کنیم یک گام برداری تصادفی سرانجام ما را به یک نقطهٔ مرزی می رساند؛ آن را $C_1$ می نامیم. هر ***گام برداری تصادفی*** شامل گامهای به طول واحد در امتدادهای موازی محورهاست. مثالی از چنین گام برداری در شکل ۵-۶-۱ نشان داده شده است. چون مقدار $u$ در $C_1$ معلوم است، آن را ثبت می کنیم؛ این مقدار را $u(C_1)$ می نامیم. مجدداً از $P$ شروع می کنیم و گام برداری دومی را آغاز می کنیم تا $u(C_2)$ را به دست آوریم، و الی آخر.




شکل ۵-۶-۱ گام برداری تصادفی

نظریهٔ احتمال بیان می کند که احتمال رسیدن به قسمتی از مرز که به $P$ نزدیک است از احتمال رسیدن به قسمتی از مرز که از $P$ دور است بزرگتر است. اما این طریقه دیگری است برای بیان این که مقادیر مرزی نزدیک به $P$ نسبت به نقاط دورتر تأثیری بزرگتر در تعیین $u(P)$ دارند. این گزاره را می توان با آزمایش در حالی که $R$ یک صفحهٔ فلزی و $u$ دماست، و در جستجوی حالت پایا در نقطه ای مانند $P$ هستیم، بسادگی تحقیق نمود.

بنابراین، پس از تعداد زیادی گام برداری (مثلاً، ۱۰۰۰) انتظار داریم که مقدار متوسط

$$\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} u(C_i),$$

به مقدار مطلوب $u(P)$ نزدیک باشد . می توان نشان داد که از لحاظ نظری

$$u(P) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u(C_i). \qquad (۱-۶-۵)$$

روش توصیف شده در بالا را ***روش مونت کارلو*** برای حل یک مسألهٔ دیریکله می نامند . این روش بخصوص وقتی جوابها در تعدادی نقطهٔ جداگانه مورد نظر باشد، مفید است . ولی معمولاً جوابها در نقاط متعدّدی لازم می شوند، که حالت مهم آن منحنیهایی هستند که در روی هریک از آنها $u$ مقداری ثابت دارد . در یک مسألهٔ دما حالت پایا، این منحنیها را ***همدما*** می نامند .

روشی عددی که جواب را در یک سری از نقاط نزدیک به دست می دهد، ***روش تفاضل متناهی*** است . این روش را، ***روش لیبمان**** و ***روش تخفیف*** نیز می نامند . لازمهٔ استفاده از این روش پوشاندن ناحیهٔ $R$ با شبکه‌ای از مربعهاست و با هر ظرافتی که لازم باشد . محاسبه در هر نقطهٔ شبکه (یا گره) براساس این واقعیت انجام می شود که مقدار $u$ را در هر نقطه می توان به صورت تابعی از مقادیر $u$ در نقاط مجاور بیان نمود . این رابطهٔ تابعی با استفاده از یک خارج قسمت تفاضلی به دست می آید . برای مثال، می توان دید که مشتق

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

در هر نقطهٔ مفروض $x$ را می توان به وسیلهٔ خارج قسمت تفاضلی

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

تقریب نمود به شرط آن که $h$ به قدر کافی کوچک باشد . بطور مشابه به جای

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{du(x+h)}{dx} - \frac{du(x)}{dx}\right)\\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{u(x+2h) - u(x+h)}{h} - \frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right)\end{aligned}$$

عبارت زیر جایگزین می شود

$$\frac{1}{h^2}\left(u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)\right).$$

---

* K.O.H. Liebmann ، (۱۸۷۴-۱۹۳۹) ریاضی دان آلمانی

با حرکت به چپ به اندازهٔ $h$ ، عبارت فوق به صورت زیر نوشته می شود

$$\frac{d^2u}{dx^2} \doteq \frac{1}{h^2}\left(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\right).$$

اگر $u$ تابعی از دو متغیّر $x$ و $y$ باشد، آن گاه

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \doteq \frac{1}{h^2}\left(u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)\right)$$

و

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \doteq \frac{1}{h^2}\left(u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)\right);$$

بنابراین معادلهٔ پتانسیل به صورت زیر تقریب زده می شود

$$u_{xx} + u_{yy} \doteq \frac{1}{h^2}\left(u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y)\right) = 0,$$

بنابراین

$$u(x, y) = \tfrac{1}{4}\left(u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h)\right) \qquad (۵-۶-۲)$$

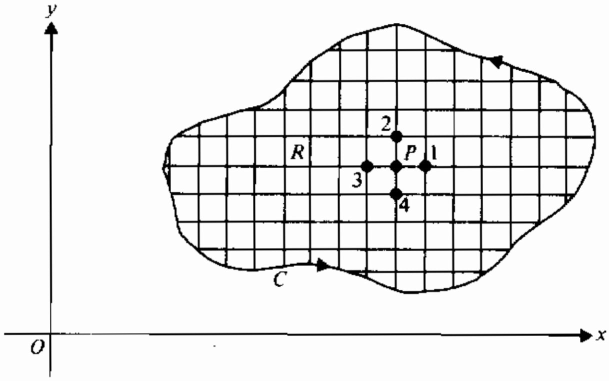
یک تقریب تفاضل متناهی برای معادلهٔ لاپلاس است . برحسب یک شبکه روی ناحیهٔ $R$ ، شکل ۵-۶-۲ نشان می دهد که مقدار $u$ در نقطهٔ $P$ ، برابر با مقدار متوسط مقادیر $u$ در چهار نقطهٔ مجاور با شماره های ۱ ، ۲ ، ۳ ، و ۴ است . به عبارت دیگر

$$u(P) = \tfrac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4).$$

این رابطه باید برای هر نقطه از شبکه برقرار باشد . بنابراین این روش دستگاهی از معادلات جبری خطی تولید می کند که می توان آن را به کمک کامپیوتر حل کرد . توجه کنید که بعضی از نقاط شبکه روی مرز قرار می گیرند و بنابراین معلوم هستند . اگر مرز، بین دو نقطه از شبکه واقع شود، آن گاه می توان از درون یابی استفاده نمود . مقادیر اوّلیه برای نقاط درونی انتخاب می شوند و این مقادیر با ادامهٔ محاسبه تصحیح می شوند . باید خاطرنشان ساخت که هرچه تقریب اوّلیه بهتر باشد، همگرایی سریعتر خواهد بود .

اغلب روشهای عددی برای معادلات با مشتقات جزئی مبتنی بر یک روش تفاضل متناهی

است به عبارت دیگر، یک معادلهٔ با مشتقات جزئی به کمک دستگاهی از معادلات جبری تقریب زده می شود . در این صورت این دستگاه را با روشهای عددی مختلف می توان حل کرد، که بعضی از این روشها در بخش ۱-۶ توصیف شدند .




شکل ۵-۶-۲ تقریب تفاضل متناهی

به نظر می رسد که به کمک یک روش تفاضل متناهی به هر درجه از دقّت مطلوب می توان دست یافت، به این صورت که شبکه را به قدر کافی ظریف کنیم . ولی در عمل چنین نیست، زیرا خطاهای گردکردن و سایر خطاها دقت محاسبات را از بین می برند . علاوه بر این، یک شبکهٔ ظریف به معنای آن است که دستگاه بزرگی از معادله های جبری باید حل شوند، که این به نوبهٔ خود ممکن است به حافظهٔ کامپیوتری بیش از ظرفیتی که در دسترس است، نیاز داشته باشد . این مشکل و مشکلات دیگر، روشهای عددی را کمتر از آنچه انتظار می رود قابل استفاده می سازد . تحلیلی کامل از این مسائل در حیطه آنالیز عددی است . بررسی مقدماتی خیلی خوب در این باره را می توان در کتاب ***آنالیز عددی کاربردی*** تألیف جرالد* یافت . جرالد سه فصل را به این موضوع اختصاص می دهد، هر فصل به یکی از سه نوع معادلات با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم خطی : بیضوی، سهموی، و هذلولی وار . برنامه های کامپیوتری نمونه ای داده می شوند و مقایسه با روشهای تحلیلی صورت می گیرد .

* C. E. Gerald, Applied Numerical Analysis, 2nd ed. (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1978).

## تمرینهای ۵-۶

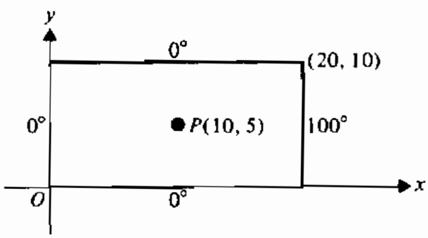
۱- مجموعه ای از ۱۰۰ عدد تصادفی به صورت زیر تولید کنید. یک کتاب راهنمای تلفن انتخاب کرده و از یکی از صفحات شروع کنید و دو رقم آخر هر شماره تلفن در بالا و پایین هر ستون را ثبت کنید. هر عدد این مجموع را بارها* (در صورت لزوم) بر چهار تقسیم کنید و باقی مانده را ثبت کنید. به این ترتیب مجموعه ای مانند زیر تولید نمایید

$\{2, 1, 0, 3, 1, 2, 2, 0, 3, \ldots\}.$

۲- مسألهٔ دیریکله را روی یک صفحهٔ مستطیلی به ابعاد ۲۰ × ۱۰ سانتی متر در نظر بگیرید که یکی از اضلاع کوچک آن در دمای °۱۰۰ و سه ضلع دیگر در دمای صفر نگاه داشته می شوند. محورهای مختصات را مطابق شکل ۵-۶-۳ انتخاب کنید. دما را در مرکز صفحه با ۱۰ گام برداری تصادفی و استفاده از اعداد تولید شده در تمرین ۱ پیدا کنید. اعداد را می توان به صورت زیر تعبیر کرد:

| | |
|---|---|
| ۰ | ۲ سانتی متر حرکت به راست |
| ۱ | ۲ سانتی متر حرکت به بالا |
| ۲ | ۲ سانتی متر حرکت به چپ |
| ۳ | ۲ سانتی متر حرکت به پایین |

وقتی یک گام برداری تمام می شود، از مجموعهٔ اعداد مجدداً برای گام برداری تصادفی دوم استفاده می شود، و الی آخر. اگر به اعداد بیشتری نیاز باشد، مجموعه تان را بزرگتر کنید.




شکل ۵-۶-۳

* عدد ۲۵ تقسیم بر ۴ می شود ۶، که آن را مجدداً می توان بر ۴ تقسیم کرده و باقی ماندهٔ ۲ را به دست آورد.

۳- ناحیهٔ تمرین ۲ را به ۸ زیرناحیه با رسم خطهای موازی محورها به فاصلهٔ ۵ سانتی متر از هم تقسیم کنید بطوری که سه نقطهٔ درونی به دست آید. با استفاده از معادلهٔ (۵-۶-۲) یک دستگاه معادلات جبری تشکیل دهید. این معادله ها را حل کنید.

۴- در تمرین ۳ فاصلهٔ خطوط شبکه را از ۵ سانتی متر به ۲/۵ سانتی متر تغییر دهید. حال چند نقطهٔ (و چند معادله) خواهیم داشت؟

۵- فاصلهٔ خطوط شبکه را در تمرین ۳ به $۳\frac{۱}{۳}$ سانتی متر تغییر دهید و دستگاه معادلات حاصل را حل کنید. (*راهنمایی*: از تقارن استفاده کنید.)

۶- نشان دهید معادلهٔ موج یک بعدی و شرایط اولیهٔ $u_{tt} = u_{xx}$ ، $u(x, 0) = f(x)$ ، $u_t(x, 0) = g(x)$ را می توان با معادله های تفاضلی زیر تقریب نمود.

$$U(x, t+k) = 2U(x, t) - U(x, t-k) + \lambda^2(U(x+h, t) - 2U(x, t) + U(x-h, t)),$$
$$U(x, 0) = f(x),$$
$$U(x, k) = kg(x) + f(x),$$

که $\lambda = k/h$. (توجه: می توان نشان داد که برای همگرایی $U$ به $u$ لازم است که $\lambda < 1$)

۷- نشان دهید که معادلهٔ انتشار یک بعدی و شرط اولیهٔ

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x, 0) = f(x)$$

را می توان به وسیلهٔ معادلات تفاضل متناهی زیر تقریب نمود

$$U(x, t+k) = \lambda U(x+h, t) + (1-2\lambda)U(x, t) + \lambda U(x-h, t),$$
$$U(x, 0) = f(x),$$

که $\lambda = k/h^2$. (توجه: می توان نشان داد که معادلهٔ تفاضلی برای $\lambda > \frac{1}{2}$ ناپایدار است*.)

* یعنی با ادامهٔ محاسبات، $U$ از مقدار واقعی $u$ بتدریج فاصله می گیرد.

# فصل ششم

# متغیرهای مختلط

## ۶-۱ جبر اعداد مختلط

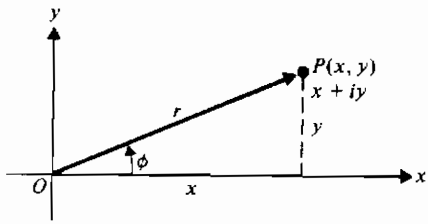
اعداد مختلط می توانند در زمینه های مختلف در حل مسائل بسیار مفید باشند . در این فصل دانسته هایمان را از اعداد مختلط به جبر اعداد مختلط و سپس به توابع مختلط ، یعنی ، توابعی از یک متغیر مختلط تعمیم خواهیم داد .

یک ***عدد مختلط*** عددی است که به شکل $x + iy$ ، که $x$ و $y$ اعداد حقیقی اند و $i$ در معادلهٔ $i^2 = -1$ صدق می کنند . همچنین می توان عدد مختلط $x + iy$ را با زوج مرتب $(x, y)$ ربط داد . این کار بخصوص از آن جهت که نوعی تناظر یک به یک بین اعداد مختلط و نقاط صفحهٔ اقلیدسی فراهم می آورد مفید است . نقطهٔ $P$ را چنان که در شکل ۶-۱-۱ نشان داده شده است می توان با زوج مرتب $(x, y)$ یا با عدد مختلط $x + iy$ مربوط نمود . در واقع می توانیم بردار از $O$ به $P$ را با عدد مختلط $x + iy$ وابسته نماییم . تعبیر هندسی اعداد مختلط را ابتدا در سال ۱۸۰۶ آرگان* ارائه کرد . به این دلیل صفحهٔ مختلط (شکل ۶-۱-۱) را گاهی ***نمودار آرگان*** نامند .

به خاطر بیاورید که دو بردار برابرند هرگاه دارای جهت یکسان و طول برابر باشند ؛ ولی دو عدد مختلط $a + bi$ و $c + di$ برابرند اگر و فقط اگر $a = c$ و $b = d$ .

---

* J.R. Argand ، (۱۷۶۸-۱۸۲۲) ریاضی دان سوئیسی

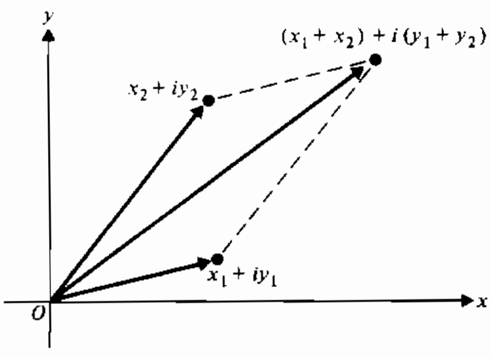



شکل ۶-۱-۱ یك صفحهٔ مختلط

جمع دو عدد مختلط بطور طبیعی انجام می شود . اگر $x_1 + iy_1$ و $x_2 + iy_2$ دو عدد مختلط باشند، جمع این دو عدد را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \qquad (۶-۱-۱)$$

به صورت نموداری، مجموع دو عدد مختلط، که به صورت بردار در نظر گرفته می شوند، قطر متوازی الاضلاعی است که دو بردار اضلاع آن باشند (شکل ۶-۱-۲ را ملاحظه کنید) . توجه کنید که این تعریف نموداری از جمع، با جمع (برآیند) نیروها در فیزیک متناظر است .




شکل ۶-۱-۲ جمع اعداد مختلط

چون $x_i$ و $y_i$ در تعریف جمع (۶-۱-۱) اعدادی حقیقی اند، قضیهٔ زیر فوراً نتیجه می شود که اثبات آن را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرین ۱ را ملاحظه کنید) .

**قضیهٔ ۶-۱-۱ :** فرض کنید $x_1 + iy_1$ ، $x_2 + iy_2$ ، و $x_3 + iy_3$ سه عدد مختلط باشند . آن گاه :

الف) $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$ یک عدد مختلط است (خاصیت بسته بودن)؛

ب) $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1)$ (خاصیت تعویض پذیری)؛

پ) $[(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)] + (x_3 + iy_3) = (x_1 + iy_1) + [(x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3)]$ (خاصیت شرکت پذیری)؛

ت) $(x_1 + iy_1) + (0 + 0i) = (x_1 + iy_1)$ (وجود عضو همانی جمعی) .

می توان نشان داد (تمرین ۲) که عدد مختلط صفر، $0 + 0i$ ، همان خواصی را برای اعداد مختلط دارد که عدد حقیقی صفر، برای اعداد حقیقی دارد . پس طبیعی است که تناظر زیر را برقرار کنیم

$$0 + 0i \leftrightarrow 0.$$

می توانیم این تناظر را یک گام به جلو ببریم و یک تناظر یک به یک بین همهٔ اعداد حقیقی و همهٔ اعداد مختلط به شکل $x + 0i$ به دست آوریم، یعنی،

$$x + 0i \leftrightarrow x. \tag{۶-۱-۲}$$

طریقهٔ دیگر تعبیر (۶-۱-۲) استفاده از زبان مجموعه هاست که بگوییم مجموعهٔ اعداد حقیقی زیرمجموعه ای از مجموعهٔ اعداد مختلط است . به اختصار، هر عدد حقیقی یک عدد مختلط نیز هست، دیدگاهی که می تواند در رفع بعضی از ابهامات در مورد اعداد مختلط کمک کند .

تا این جا فقط در مورد جمع اعداد مختلط بحث کردیم . قبل از آن که تفریق را بررسی کنیم، معنی ضرب یک عدد مختلط را در یک عدد حقیقی تعریف می کنیم . اگر $a$ یک عدد حقیقی باشد، آن گاه

$$a(x + iy) = ax + iay. \tag{۶-۱-۳}$$

در این جا نیز، مقایسه ای با بردارها برای درك بهتر این عمل مفید است (تمرین ۳) .

اگر در معادلهٔ (۶-۱-۳) قرار دهیم $a = -1$ ، داریم

$$-(x + iy) = -x - iy,$$

که منفی عدد مختلط $x + iy$ است . حال نتیجه می شود که

$$(x + iy) + (-x - iy) = 0 + 0i,$$

یعنی، $-(x+iy)$ وارون جمعی $x+iy$ است . استفاده از وارون جمعی همان گونه که در مثال بعد نشان داده شده است، به عمل تفریق منجر می شود .

**مثال ۶-۱-۱** معادلهٔ زیر را حل کنید

$$x + iy + 2 - 3i = 1 + 2i.$$

*حل* : وارون جمعی $2-3i$ عبارت است از $-2+3i$ . اگر این عبارت را به دو طرف معادلهٔ داده شده اضافه کنیم نتیجه می شود

$$x + iy = -1 + 5i.$$

گزارهٔ اخیر را می توان به این صورت تعبیر نمود «عدد مختلط $x+iy$ دارای مقدار $-1+5i$ است . » یا «$x=-1$ ، $y=5$ . »

اگر از مختصات قطبی استفاده کنیم، نقطهٔ $P$ در شکل ۶-۱-۱ را می توان با $(r\cos\phi,\ r\sin\phi)$ نیز نشان داد، بنابراین می توانیم بنویسیم

$$x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi), \qquad (۶-۱-۴)$$

کمیت داخل پرانتز را اغلب به صورت مختصر $\mathrm{cis}\ \phi$ می نویسند . ملاحظه می شود که زاویهٔ $\phi$ منحصربه فرد نیست، بنابراین اگر مضارب $2\pi$ به آن اضافه شود، نمایش قطبی تغییر نخواهد کرد .

*شکل قطبی* عدد مختلط (۶-۱-۴) گاهی ترجیح دارد، زیرا اعمال جبری شامل ضرب و تقسیم را ساده می کند . برای مثال، اگر $x_1+iy_1=r_1\ \mathrm{cis}\ \phi_1$ و $x_2+iy_2=r_2\ \mathrm{cis}\ \phi_2$ آن گاه روابط زیر را بسادگی می توان نشان داد . (تمرین ۵)

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = r_1 r_2\ \mathrm{cis}\ (\phi_1 + \phi_2), \qquad (۶-۱-۵)$$

(شکل ۶-۱-۳ را ملاحظه کنید)؛

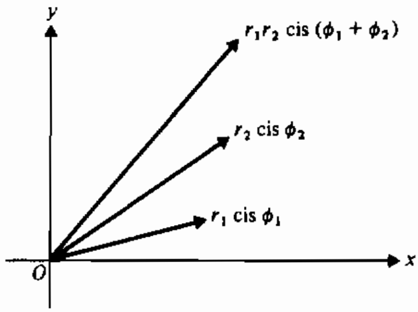
$$\frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} = \frac{r_1}{r_2}\ \mathrm{cis}\ (\phi_1 - \phi_2), \qquad r_2 \neq 0, \qquad (۶-۱-۶)$$

(شکل ۶-۱-۴ را ملاحظه کنید)؛

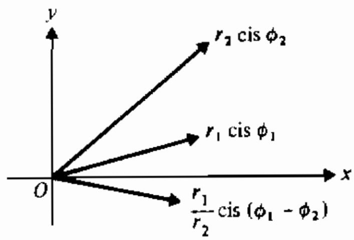
$$(x + iy)^n = r^n\ \mathrm{cis}\ n\phi, \qquad n = 1, 2, \ldots . \qquad (۶-۱-۷)$$

وقتی در معادلهٔ (۶-۱-۷) $r=1$ قرار دهیم، داریم

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi, \qquad (۶-۱-۸)$$




شکل ۶-۱-۳ ضرب اعداد مختلط




شکل ۶-۱-۴ تقسیم یك عدد مختلط

که آن را ***فرمول دوموآور**** نامند . این فرمول در به دست آوردن **ریشه های** اعداد مختلط مفید است .

تا این جا از عبارت «عدد مختلط $x + iy$» استفاده کرده ایم . برای ساده کردن نماد، نشان دادن یک عدد مختلط با یک حرف مناسبتر است . در بقیهٔ این فصل $z$ را برای $x + iy$ و $z_1$ را برای $x_1 + iy_1$ و غیره به کار خواهیم برد .

**مثال ۶-۱-۲** معادلهٔ زیر را حل کنید

$$z^2 - i = 0.$$

***حل :*** چون $i = 0 + 1i$ ، می توانیم آن را به شکل قطبی به صورت $\cos \pi/2 + i \sin \pi/2$ بنویسیم .

* A. de Moiver ، (۱۷۵۴-۱۶۶۷) ریاضی دان فرانسوی مقیم انگلستان

پس یک عدد مختلط $z$ جستجو می کنیم بطوری که $z^2 = \text{cis}\ \pi/2$ ، یعنی

$$z = \left(\text{cis}\,\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} = \text{cis}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+i).$$

توجه کنید این را می توانستیم به صورت $z^2 = \text{cis}\ 5\pi/2$ نیز بنویسیم (چرا؟) که از آن به دست می آوریم

$$z = \left(\text{cis}\,\frac{5\pi}{2}\right)^{1/2} = \text{cis}\,\frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\,(1+i),$$

همان چیزی که از $z = \pm\sqrt{i}$ انتظار داریم. پس نشان داده یم که $\sqrt{i} = (\sqrt{2}/2)(1+i)$ .

مثال ۶-۱-۲ را می توان تعمیم داد و نشان داد که اگر $z = r\ \text{cis}\ \phi$ ، آن گاه

$$z^{1/n} = r^{1/n}\,\text{cis}\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (۹-۱-۶)$$

در معادلهٔ (۶-۱-۹) $r > 0$ و $r = 0$ اگر و فقط اگر $z = 0$ . برای $z = x + iy$ ، داریم

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|,$$

که عدد حقیقی $|z|$ **قدرمطلق** یا **هنگ** عدد مختلط $z$ نام دارد. زاویهٔ $\phi$ را **شناسه** یا **فاز** عدد $z$ نامند و می نویسیم $\phi = \arg z$ . اگر $\phi$ شناسهٔ $z$ باشد، آن گاه $\phi + 2n\pi$ ، $n = 1, 2, 3, \ldots$ نیز شناسهٔ $z$ است.

مثالی دیگر از معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه می دهیم.

**مثال ۶-۱-۳** جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن مرتبهٔ چهار زیر را به دست آورید

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 8\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

*حل* : معادلهٔ مشخصه برحسب متغیر $z$ چنین است

$$z(z^3 - 8) = 0.$$

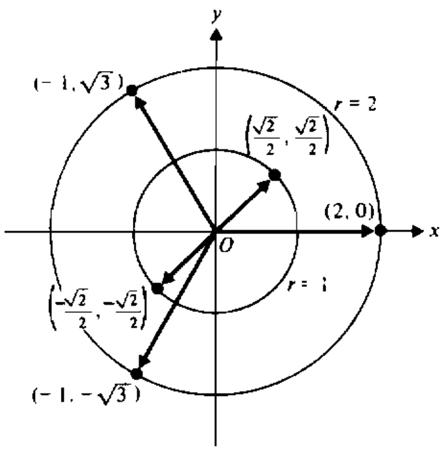
علاوه بر $z = 0$ ، باید سه مقدار $z$ را که در معادلهٔ $z^3 - 8 = 0$ صدق می کنند بیابیم. با استفاده از معادلهٔ (۶-۱-۹) داریم

$$z^{1/3} = 8^{1/3}\,\text{cis}\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right), \qquad k = 0, 1, 2,$$

که از آن سه مقدار 2 و $-1 \pm \sqrt{3}\, i$ را به دست می آوریم . بنابراین جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل چنین است

$$y(x) = c_1 + c_2 \exp(2x) + \exp(-x)(c_3 \cos\sqrt{3}x + c_4 \sin\sqrt{3}x). \quad \blacksquare$$

قابل توجه است که ریشه های $n$ ام یک عدد مختلط با فاصله های مساوی روی یک دایره که شعاع آن ریشهٔ $n$ ام قدرمطلق آن عدد است قرار دارند . در مثال ۶-۱-۳، معادلهٔ $z^3 - 8 = 0$ دارای یک ریشه در $(2, 0)$ و ریشه های مختلط واقع در محل تلاقی $\phi = 2\pi/3$ و $\phi = 4\pi/3$ با دایرهٔ $|z| = 2$ است . این ریشه ها، همچنین نتایج مثال ۶-۱-۲ در شکل ۶-۱-۵ نشان داده شده است .




شکل ۶-۱-۵ ریشه های اعداد مختلط

در جبر می دانیم که ریشه های مختلط معادله های حقیقی همیشه به صورت زوجهای مزدوج هستند . به عبارت دیگر اگر $P_n(z) = 0$ یک معادلهٔ چندجمله ای با ضرایب حقیقی، و $z = x + iy$ یک ریشهٔ آن باشد، آن گاه $\bar{z} = x - iy$ نیز یک ریشه است . عدد $\bar{z}$ ***مزودج مختلط*** $z$ نامیده می شود ؛ عمل مزدوج گیری ازنظر نمادی به صورتی ساده نوشته می شود که در بخشهای بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت . در حال حاضر بعضی از خواص مزدوج گیری را فهرست می کنیم ـ عملی که ازنظر هندسی انعکاس یک نقطه نسبت به محور $x$ هاست :

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \qquad (۶-۱-۱۰)$$

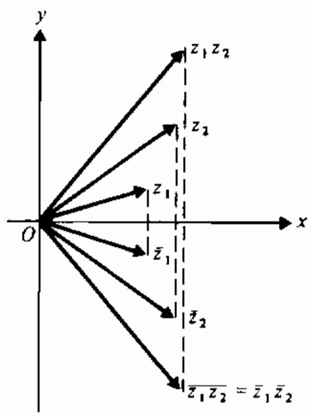
$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \qquad (۶-۱-۱۱)$$

(شکل ۶-۱-۶ را ملاحظه کنید)؛

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \qquad z_2 \neq 0, \tag{۱۲-۱-۶}$$

اگر $w = \bar{z}$ آن‌گاه $\bar{w} = z$ (۱۳-۱-۶)

اثبات روابط فوق به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۶ را ملاحظه کنید) .




شکل ۶-۱-۶ نمودار معادلهٔ (۶-۱-۱۱)

یکی از کاربردهای مهم مزدوج مختلط از این واقعیت ناشی می شود که $z\bar{z}$ حقیقی است (تمرین ۷) . اگر $z_1$ و $z_2 \neq 0$ (یعنی، $x_2 y_2 \neq 0$) داده شده باشند، **خارج قسمت** $z_1/z_2$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم

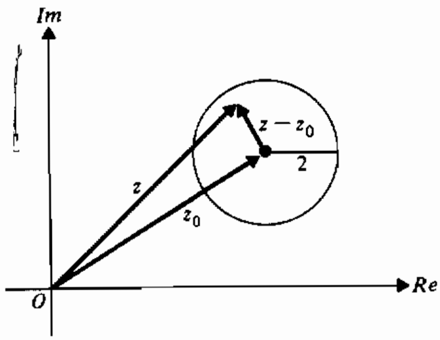
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} \cdot \frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)}$$
$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{۱۴-۱-۶}$$

توجه کنید که نتیجهٔ آخر را می توان به صورت $(x+iy)$ نوشت . در واقع، معادلهٔ (۶-۱-۱۴) را می توان فرمولی برای تقسیم یک عدد مختلط بر یک عدد مختلط غیر صفر تصور کرد .

چون یک عدد مختلط شامل دو قسمت است (اعداد حقیقی بدون $i$ و با $i$) معمول است که

آن گاه $\mathrm{Re}(z) = x$ و $\mathrm{Im}(z) = y$ ، این دو کمیت هر دو اعداد حقیقی اند . پس نوعی ناسازگاری در بیان عبارت «قسمت موهومی عدد مختلط $z$ عدد حقیقی $y$ است» ، وجود دارد .

در پایان این بخش یادآور می شویم که چون اعداد مختلط با نقاط **صفحه** متناظر می شوند نه با نقاط روی **خط** ، رابطهٔ > را در اعداد مختلط نمی توان به کار برد . به عبارت دیگر ، اعداد مختلط را نمی توان مرتب نمود . ولی می توانیم بگوییم که $|z_1| > |z_2|$ ، $|z - z_0| \le 2$ و غیره . رابطهٔ اخیر تمام نقاط $z$ را که در قرصی بسته به مرکز $z$ و به شعاع $z_0$ قرار دارند ، تعریف می کند ، (شکل ۶-۱-۷) . توجه کنید که اعداد مختلط را می توان با بردارها و همچنین با نقاط ، همان طور که شکل نشان می دهد ، نمایش داد .




شکل ۶-۱-۷

## تمرینهای ۶-۱

۱- قضیهٔ ۶-۱-۱ را ثابت کنید (*راهنمایی* : خواص آشنای میدان اعداد حقیقی را به کار برید)

۲- نشان دهید عدد مختلط $0 + 0i$ خواص زیر را دارد

الف) $(x + iy) + (0 + 0i) = (x + iy)$

ب) $(x + iy)(0 + 0i) = (0 + 0i)$

پ) $(0 + 0i)/(x + iy) = (0 + 0i)$ ، اگر $xy \neq 0$

۳- اگر $x + iy$ عددی مختلط باشد و $xy \neq 0$ ، هریک از اعداد زیر را به صورت نموداری نشان دهید

الف) $2(x + iy)$ ب) $-(x + iy)$ پ) $0.5(x + iy)$

۴- با مراجع به تمرین ۳، درمورد ضرب یک عدد مختلط در یک عدد حقیقی چه نتیجه گیری می کنید ؟

۵- اگر $x + iy = r\,\mathrm{cis}\,\phi$ و $x_j + iy_j = r_j\,\mathrm{cis}\,\phi_j$ ، هریک از روابط زیر را ثابت کنید .

الف) (۶-۱-۵) $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = r_1 r_2\,\mathrm{cis}\,(\phi_1 + \phi_2)$

(*راهنمایی* : از اتحادهای مثلثاتی برای $\cos(A + B)$ و $\sin(A + B)$ استفاده کنید . )

ب) (۶-۱-۶) $\dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\,\mathrm{cis}\,(\phi_1 - \phi_2), \quad r_2 \neq 0$

(*راهنمایی* : صورت و مخرج طرف چپ را در $x_2 - iy_2$ ضرب کنید . )

پ) (۶-۱-۷) $(x + iy)^n = r^n\,\mathrm{cis}\,n\phi, \quad n = 1, 2, \ldots$

(*راهنمایی* : از استقرای ریاضی استفاده کنید . )

۶- اگر $z = x + iy$ و $\bar{z} = x - iy$ ، هریک از روابط زیر را ثابت کنید .

الف) (۶-۱-۱۰) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

ب) (۶-۱-۱۱) $z_1 z_2 = z_1 z_2$

پ) (۶-۱-۱۲) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$

ت) (۶-۱-۱۳) $\bar{w} = z$ که $w = \bar{z}$

۷- نشان دهید $z\bar{z}$ حقیقی است .

۸- حاصل عبارات زیر را به صورت $x + iy$ بنویسید .

الف) $3(2 + i) - 2i(i - 2) + 5$    ب) $(2i - 3)(3 + i)$

پ) $(1 - i) \div (2 + i)$    ت) $(i - 1)^2(2 + i)^3$

۹- هریک از اعداد زیر را به صورت قطبی بنویسید .

الف) $1 + i$    ب) $1 - i$    پ) $3$

ت) $-i$    ث) $-\sqrt{3} + 3i$    ج) $1 - \sqrt{3}\,i$

چ) $2 - 3i$

۱۰- قدرمطلق و شناسهٔ هریک از اعداد مختلط زیر را بیابید

الف) $1 + \sqrt{3}\,i$    ب) $(4\,\mathrm{cis}\,\pi/6)^{1/2}$    پ) $(i - 2)^3$

ت) $-5$    ث) $0$    ج) $(2 - 2i)^2$

۱۱- الف) معادلهٔ زیر را حل کنید

$$z^2 + i = 0.$$

ب) با استفاده از قسمت (الف) و مثال ۶-۱-۲ جواب عمومی معادلهٔ زیر را بیابید

$$\frac{d^4y}{dx^4} + y = 0.$$

۱۲- هریک از عبارات زیر را ازنظر هندسی توصیف کنید

الف) $|z| < 1$ ب) $\mathrm{Re}(z) > -1$ پ) $0 < \mathrm{Im}(z) < 1$

ت) $2 < |z| < 5$ ث) $|z + 2| < 3$

۱۳- با استفاده از بردارها برای نمایش اعداد مختلط، نامساویهای مثلثی زیر را ازنظر هندسی تشریح و هر رابطه را با کلمات بیان کنید.

الف) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ب) $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$

۱۴- با استفاده از چهار ریشهٔ معادلهٔ $z^4 + 1 = 0$ ، عبارت $z^4 + 1$ را به صورت حاصل ضرب دو عامل درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی بنویسید.

۱۵- شکل مثلثاتی $1 - \cos\phi + i\sin\phi$ را بیابید.

۱۶- مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $(-64)^{1/6}$ ب) $\sqrt{3 + 4i}$ پ) $\sqrt[3]{i - 1}$

۱۷- معادله های زیر را حل کنید و در هر حالت نتیجه را به صورت $x + iy$ بنویسید.

الف) $z^2 - 2iz - 5 = 0$

ب) $z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0$

۱۸- الف) نشان دهید ضرب یک عدد مختلط $z$ در $i$ ، $\arg z$ را به اندازه $\pi/2$ افزایش می دهد.

ب) چگونه این مطلب بطور طبیعی به تعریف $i^2 = -1$ منجر می شود؟

۱۹- الف) معادلهٔ درجه دومی بنویسید که یک ریشهٔ آن $2 - i$ باشد.

ب) ثابت کنید اگر $z = x + iy$ ریشهٔ یک معادلهٔ درجه دوم با ضرایب حقیقی باشد، آن گاه $\bar{z}$ نیز یک ریشه است.

۲۰- هریک از کمیتهای زیر را به صورت $x + iy$ بنویسید

الف) $4\,\mathrm{cis}\,\pi/3$ ب) $3\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,3\pi/4$

پ) $3\,\mathrm{cis}\,\pi$ ت) $\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\pi/4$

۲۱- ثابت کنید $0 + 0i$ عضو همانی جمعی برای اعداد مختلط منحصر به فرد است .
(**راهنمایی** : فرض کنید یک عدد مختلط $a + bi$ وجود دارد بطوری که $(x + iy) + (a + bi) = (x + iy)$ ؛ در این صورت در مورد $a + bi$ نتیجه گیری کنید . )

۲۲- ثابت کنید وارون جمعی یک عدد مختلط یکتاست . (با مثال ۲۱ مقایسه کنید . )

۲۳- نشان دهید فرمول تقسیم (۶-۱-۱۴) وقتی $z_2$ حقیقی باشد نتیجهٔ صحیح را می دهد .

۲۴- نامساوی مثلثی تمرین ۱۳ (الف) را بطور جبری ثابت کنید . (**راهنمایی** : با اتحاد $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$ شروع کنید . )

۲۵- ثابت کنید اگر $z^2 = (\bar{z})^2$ ، آن گاه یا $\mathrm{Re}(z) = 0$ یا $\mathrm{Im}(z) = 0$

۲۶- هریک از روابط زیر را ثابت کنید .

الف) $z\bar{z} = |z|^2$ ، یعنی ، $z\bar{z}$ برای هر $z$ حقیقی است .

ب) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ ، یعنی ، $z + \bar{z}$ برای هر $z$ حقیقی است .

پ) $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ ، یعنی ، $\mathrm{Re}(z - \bar{z}) = 0$ .

۲۷- ثابت کنید به ازای $n = 1, 2, \ldots$ هر عدد حقیقی منفی ، دارای یک ریشهٔ $(2n - 1)$ ام حقیقی منفی است .

۲۸- مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ متناظر با آنها را در ماتریس زیر بیابید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

## ۶-۲ توابع مقدماتی

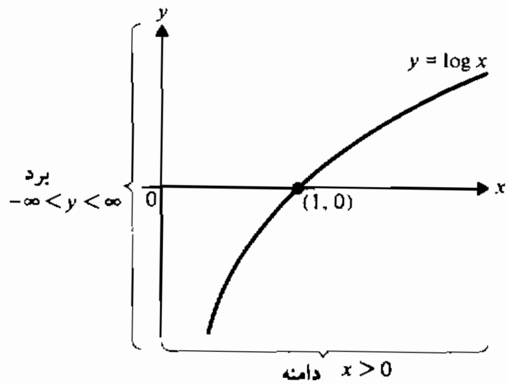
وقتی می نویسیم $y = f(x)$ که در آن $x$ و $y$ اعداد حقیقی هستند ، یک ***تابع از یک متغیر حقیقی*** را نشان می دهیم . مقادیر مجاز $x$ (***دامنهٔ*** تابع) زیرمجموعه ای از خط حقیقی (محور $x$ ها) را تشکیل می دهند . مقادیر متناظر $y$ (برد تابع) نیز زیرمجموعه ای از خط حقیقی است (محور $y$ ها) . شکل ۶-۲-۱ مثالی از یک تابع حقیقی را نشان می دهد .

ازطرف دیگر ، نماد $w = f(z)$ یک ***تابع از یک متغیّر مختلط*** (با مقادیر مختلط) را نشان می دهد . با نوشتن $z = x + iy$ و $w = u + iv$ ، داریم

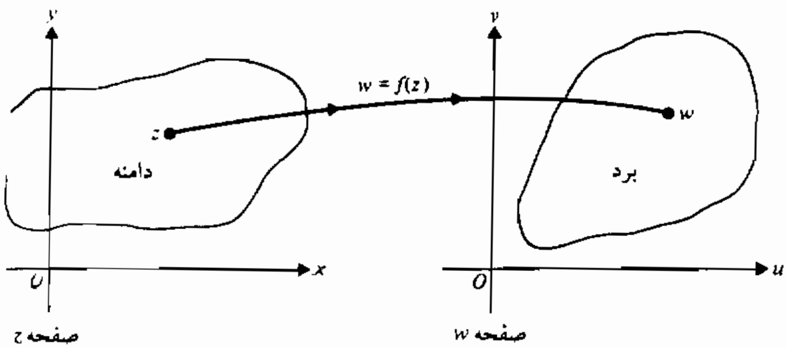
$$w = u + iv = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

بنابراین هر دو متغیّر مختلط $w$ و $z$ دارای قسمتهای حقیقی و موهومی هستند . در نتیجه ، تابع $f$

یک نگاشت از یک صفحهٔ (صفحه $z$) به صفحهٔ دیگر (صفحهٔ $w$) تعریف می کند. *دامنهٔ تعریف* تابع قسمتی از صفحه $xy$ است، در حالی که برد تابع قسمتی از صفحهٔ $uv$ می باشد. درشکل ۶-۲-۲ مثالی از یک نگاشت را نشان می دهیم و در مثال زیر یک نگاشت مشخص را بررسی می کنیم.




شکل ۶-۲-۱ تابعی از یك متغیّر حقیقی




شکل ۶-۲-۲ تابعی از یك متغیّر مختلط

**مثال ۶-۲-۱ نگاشت**

$$w = \frac{1}{z}, \qquad 1 \le |z| \le 2,$$

را بطور جبری و هندسی تحلیل نمایید.

**حل** : داریم

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}.$$

بنابراین

$$w = u + iv = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

در نتیجه

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

و

$$v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

دامنهٔ تعریف $f$ ناحیه ای بسته و شامل همهٔ نقاطی از صفحهٔ $xy$ است که در نامساویهای زیر صدق می کنند

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

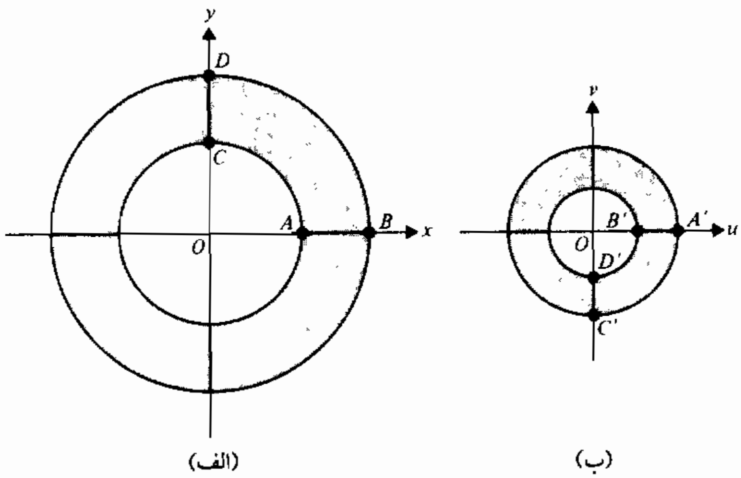
این ناحیهٔ بسته در شکل ۶-۲-۳ (الف) با سایه نشان داده شده است . برای هر نقطه در ناحیهٔ سایه دار در صفحهٔ $z$ ، می توانیم توابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ را برای محاسبهٔ نقطهٔ نظیر آن در ناحیهٔ سایه دار در صفحهٔ $w$ به کار بریم . برای مثال ، نقطهٔ $A$ دارای مختصات $(1, 0)$ است؛ بنابراین به نقطهٔ $A'(1, 0)$ در صفحهٔ $w$ نقش می شود. بطور مشابه ، $B(2, 0)$ به $B'(\frac{1}{2}, 0)$ نقش می شود . به عنوان تمرین نشان دهید $C$ و $D$ به صورتی که نشان داده شده است ، به ترتیب به $C'$ و $D'$ نقش می شوند (تمرین ۱) . در حقیقت می توان نشان داد (تمرین ۲) که

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$$

در نتیجه برد تابع ناحیه ای بسته در صفحهٔ $w$ است که شامل نقاط زیر است

$$\tfrac{1}{4} \leq u^2 + v^2 \leq 1. \quad \blacksquare$$

در ریاضیات عمومی با توابع مقدماتی از یک متغیر حقیقی آشنا شده ایم . حال می خواهیم توابع مقدماتی از یک متغیر مختلط را در حالت کلی مورد بحث قرار دهیم و مناسب است از اصطلاح «مقدماتی» تعریفی دقیقتر داشته باشیم . این کار را با دو تعریف زیر انجام می دهیم .




شکل ۶-۲-۳ تابع $1/z$ به‌عنوان یك نگاشت

**تعریف ۶-۲-۱** :فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ توابعی از یک متغیّر مختلط $z$ باشند و $\alpha$ عدد مختلط ثابتی باشد . آن گاه ***اعمال مقدماتی*** روی توابع $f(z)$ و $g(z)$ عبارتند از :

$$f(z) \pm g(z), \qquad f(z)\cdot g(z), \qquad \frac{f(z)}{g(z)}, \qquad (f(z))^{a}, \qquad (\alpha)^{f(z)}, \qquad \log\,(f(z)),$$

به شرط آن که اعمال فوق تعریف شده باشند .

**تعریف ۶-۲-۲** :یک ***تابع مقدماتی*** از یک متغیر مختلط $z$ تابعی است که از ثابتها (حقیقی یا مختلط) و متغیر $z$ به وسیله تعدادی متناهی عمل مقدماتی به دست آید .

تابع $w = 1/z$ یک تابع ***یک مقداری*** است و هر وقت از یک تابع با متغیر مختلط صحبت می کنیم منظور همین است . ازطرف دیگر $w = z^{1/2}$ یک تابع چند مقداری است (تمرین ۳) .

تعاریف تعدادی از توابع مقدماتی اساسی از یک متغیر مختلط از فرمول اویلر ناشی می شوند . برای مثال، ***تابع نمایی*** زیر را داریم

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y). \qquad (۶-۲-۱)$$

این تعریف با آنچه دربارهٔ توابع نمایی و مثلثاتی از یک متغیر حقیقی می دانیم مطابقت دارد .

برای مثال، سری مکلورن برای $e^x$ ، $\cos y$ ، $\sin y$ ، و $e^{iy}$ در رابطهٔ نشان داده شده در معادلهٔ (۶-۲-۱) صدق می کنند (تمرین ۴) .

همچنین ***توابع هذلولی وار*** زیر را داریم

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{۶-۲-۲}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{۶-۲-۳}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}. \tag{۶-۲-۴}$$

از تعاریف فوق، و به کمک تمرین ۵ (پ)، می‌توان دید که $\sinh z$ و $\cosh z$ تناوبی با دورهٔ تناوب مختلط $2\pi i$ هستند. همچنین می توانیم نشان دهیم که $\tanh z$ تناوبی با دورهٔ تناوب $\pi i$ است (تمرین ۶) .

حال ***توابع مثلثاتی*** از این تعاریف به دست می آیند :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{۶-۲-۵}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{۶-۲-۶}$$

به عنوان تمرین نشان دهید که تعاریف فوق به اتحادهای مثلثاتی آشنا منجر می شوند (تمرین ۷) . همچنین می توانیم نشان دهیم (تمرین ۸) که $\sin z$ و $\cos z$ دورهٔ تناوب $2\pi$ دارند . از این مطلب می توانیم نتیجه بگیریم (تمرین ۹) که $\sin z = 0$ اگر و فقط اگر $z = n\pi$ ، که $n$ عددی صحیح است . به عبارت دیگر، $\sin z$ فقط صفرهای حقیقی دارد . چنان که مثال بعدی نشان می دهد، وضعیتی مشابه برای $\cos z$ برقرار است .

**مثال ۶-۲-۲** تمام مقادیر $z$ را که در معادلهٔ $\cos z = 0$ صدق می کنند تعیین کنید

***حل*** : از معادلهٔ (۶-۲-۶) داریم

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x))$$

$$= \cos x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) - i\sin x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$
$$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

حال توجه داریم که یک عدد مختلط $z$ صفر است اگر و فقط اگر $|z|^2 = 0$ . این جا

$$\begin{aligned}|\cos z|^2 &= \cos^2 x\cosh^2 y + \sin^2 x\sinh^2 y\\ &= \cos^2 x(1+\sinh^2 y) + (1-\cos^2 x)\sinh^2 y\\ &= \cos^2 x + \sinh^2 y\\ &= 0\end{aligned}$$

اگر و فقط اگر $\cos x = 0$ و $\sinh y = 0$ . این دو معادله به ازای مقادیر زیر برقرارند

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \quad \text{and} \quad y = 0.$$

پس صفرهای $\cos z$ حقیقی اند و عبارتند از

$$z = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots . \quad \blacksquare$$

همچنین به یک رابطهٔ جالب بین توابع حقیقی و مختلط توجه کنید (تمرین ۱۰) . اگر $x$ حقیقی باشد، آن گاه

$$\sin x = -i\sinh ix$$

و

$$\cos x = \cosh ix.$$

حال، عکس تابع نمایی را بررسی می کنیم . اگر $z = \exp w$ ، آن گاه می خواهیم $w = \log z$ را به عنوان عکس تابع نمایی تعریف کنیم . ولی دیده ایم که برای هر عدد صحیح $n$ ،

$$\exp(w + 2n\pi i) = \exp w$$

بنابراین $\log z$ دارای بی نهایت مقدار است و به عنوان تابعی تک مقداری قابل قبول نیست . در مختصات قطبی

$$z = |z|e^{i\phi} = |z|e^{i(\phi + 2n\pi)},$$

بنابراین برای $z \neq 0$ ،

$$\log z = \text{Log}\,|z| + i(\phi + 2n\pi), \tag{۶-۲-۷}$$

که حرف بزرگ "L" لگاریتم عدد حقیقی را نشان می دهد . معادلهٔ (۶-۲-۷) را به عنوان تعریف لگاریتم یک عدد مختلط می پذیریم که در آن $\phi$ یک مقدار خاص شناسهٔ $z$ است . بعداً مناسب خواهد بود که ***تابع لگاریتمی*** را بررسی کنیم ؛ بنابراین تعریف می کنیم

$$w = \operatorname{Log} z = \operatorname{Log} |z| + i \operatorname{Arg} z. \qquad (۶-۲-۸)$$

مقدار $\operatorname{Log} z$ در معادلهٔ (۶-۲-۸) ***مقدار اصلی*** $\log z$ نامیده می شود و از معادلهٔ (۶-۲-۷) با قرار دادن $n = 0$ به دست می آید . در معادلهٔ (۶-۲-۸) داریم $-\pi < \operatorname{Arg} z \le \pi$ بنابراین $\operatorname{Log} z$ تابعی تک مقداری است که برای هر $z$ بجز $z = 0$ و نقاط روی نیمهٔ منفی محور $x$ ها تعریف شده است .

اگر $z$ یک عدد مختلط و $a \neq 0$ ، آن گاه تعریف می کنیم

$$a^z = \exp (z \log a), \qquad (۶-۲-۹)$$

که

$$\log a = \operatorname{Log} |a| + i(\arg a + 2n\pi),$$

و $n$ عددی صحیح است . تعریف فوق نشان می دهد که $a^z$ در حالت کلی چندمقداری است ، زیرا $\log a$ چندمقداری است . ولی مطلب مهمتر این است که $a^z$ از ***تمام*** قوانین نماها پیروی نمی کند . برای مثال، نمی توانیم بگوییم که $(a^z)^n = a^{zn}$ (تمرین ۲۴) یا این که $(a^z)^3 = (a^3)^z$ (تمرین ۲۵) .

**مثال ۶-۲-۳** همهٔ مقادیر $(-3)^i$ را تعیین کنید .

***حل*** : با استفاده از معادلهٔ (۶-۲-۹) و سپس معادلهٔ (۶-۲-۷)، داریم

$$\begin{aligned}(-3)^i &= \exp (i \log (-3)) \\ &= \exp (i(\operatorname{Log} 3 + i(\pi + 2n\pi))) \\ &= \exp (i \operatorname{Log} 3) \exp (-\pi - 2n\pi), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \quad \blacksquare\end{aligned}$$

نتیجهٔ مثال (۶-۲-۳) را می توانیم با استفاده از فرمول اویلر ساده تر کنیم . برای مثال، چون

$$\begin{aligned}\exp (i \operatorname{Log} 3) &= \cos (\operatorname{Log} 3) + i \sin (\operatorname{Log} 3) \\ &\doteq 0.9998 + 0.0192i,\end{aligned}$$

پس مقدار $(-3)^i$ متناظر با $n = 0$ تقریباً برابر $0.0432 + 0.0008i$ است .

## تمرینهای ۶-۲

۱- تحقیق کنید نقاط $A$ ، $B$ ، $C$ ، و $D$ از شکل ۶-۲-۳ (الف) توسط تابع $w = 1/z$ به ترتیب به نقاط $A'$ ، $B'$ ، $C'$ ، و $D'$ از شکل ۶-۲-۳ (ب) نقش می شوند .

۲- در مثال ۶-۲-۱ تحقیق کنید تابع $w = 1/z$ دوایر در صفحهٔ $z$ را به دوایر در صفحهٔ $w$ نقش می کند . چه رابطه ای وجود دارد :

الف) بین شناسه ها در صفحهٔ $z$ و صفحهٔ $w$ ؟

ب) بین هنگها در دو صفحه ؟

۳- نشان دهید $w = z^{1/2}$ تابعی دو مقداری است .

۴- الف) در سری ماکلورن برای $e^x$ ، به جای $x$ ، $iy$ قرار دهید تا یک سری برای $e^{iy}$ به دست آید .

ب) نشان دهید سری مربوط به $e^{iy}$ در قسمت (الف) با سری حاصل از جمع سریهای $\cos y$ و $i \sin y$ یکسان است .

پ) از معادلهٔ (۶-۲-۱) نتیجه بگیرید که $e^z$ برای همهٔ مقادیر $z$ همگرا است .

۵- نشان دهید $e^z$ خاصیتهای زیر را دارد

الف) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

ب) $e^{z_1} / e^{z_2} = e^{z_1 - z_2}$

پ) $e^z$ تناوبی با دورهٔ تناوب مختلط $2\pi i$ است .

ت) $e^z = 1$ اگر و فقط اگر $z = 2n\pi i$ ، که $n$ یک عدد صحیح است .

ث) $e^{z_1} = e^{z_2}$ اگر و فقط اگر $z_1 = z_2 + 2n\pi i$ ، که $n$ یک عدد صحیح است .

۶- نشان دهید $\tanh z$ تناوبی با دورهٔ تناوب $\pi i$ است . ***راهنمایی*** : $\tanh z$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1 - e^{-2z}}{1 + e^{-2z}}.$$

۷- با استفاده از معادله های (۶-۲-۵) و (۶-۲-۶) هریک از اتحادهای زیر را به دست آورید .

الف) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

ب) $\sin (z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$

پ) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

ت) $\sin 2z = 2\sin z \cos z$

ج) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

۸- الف) نشان دهید $e^{iz}$ تناوبی با دورهٔ تناوب حقیقی $2\pi$ است .

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید $\sin z$ و $\cos z$ تناوبی با دورهٔ تناوب حقیقی $2\pi$ هستند .

۹- ثابت کنید $\sin z = 0$ اگر و تنها اگر $z = n\pi$ ، که $n$ یک عدد صحیح است .

۱۰- نشان دهید :

الف) $\sin x = -i \sinh ix$ ؛ ب) $\cos x = \cosh ix$

۱۱- نشان دهید $\log z$ خاصیتهای زیر را دارد* .

الف) $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$

ب) $\log \dfrac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$

۱۲- مقادیر $(-3)^i$ را در مثال ۶-۲-۳ برای (الف) $n = 1$ و (ب) برای $n = -1$ به دست آورید .

۱۳- با استفاده از تابع $w = 1/z$ ناحیهٔ بی کران $1 < \arg z < \pi/4$ را به صفحهٔ $w$ نقش کنید .

۱۴- با استفاده از تابع $w = z^2$ ناحیهٔ $1 \le |z| \le 2$ ، $\mathrm{Im}(z) \ge 0$ را به صفحهٔ $w$ نقش کنید . نگاشت را مانند مثال ۶-۲-۱ تحلیل کنید .

۱۵- در هریک از موارد زیر، $\log z$ و $\mathrm{Log}\, z$ را بیابید .

الف) $z = 2$ ب) $z = i - 1$ پ) $z = -1$

۱۶- نشان دهید :

الف) $\cos(iy) = \cosh y$ ؛ ب) $\sin(iy) = i \sinh y$

(*راهنمایی* : معادله های ۶-۲-۵ و ۶-۲-۶ را به کار برید)

۱۷- هریک از توابع زیر را به شکل $w = u(x, y) + iv(x, y)$ بنویسید .

الف) $w = f(z) = z^2 - 2z$ ب) $w = f(z) = z^3$

پ) $w = f(z) = \dfrac{(z+i)}{(z^2+1)}$ ت) $w = f(z) = \dfrac{(z^2-3)}{|z-1|}$

۱۸- با استفاده از تعاریف (۶-۲-۵) و (۶-۲-۶) هریک از توابع مثلثاتی زیر را تعریف کنید .

الف) $\tan z$ ب) $\cot z$

پ) $\sec z$ ت) $\csc z$

---

* توجه کنید که شناسهٔ هرجمله باید مناسب انتخاب شود .

۱۹- بااستفاده از تعاریف(۶-۲-۲)و(۶-۲-۳) هریک ازتوابع هذلولی وار زیر را تعریف کنید .

الف) $\coth z$ ب) $\operatorname{sech} z$ پ) $\operatorname{csch} z$

۲۰- هریک از توابع زیر را به صورت $u(x, y) + iv(x, y)$ بیان کنید .

الف) $\sin z$ ب) $\cos z$ پ) $\tan z$

ت) $\sinh z$ ث) $\cosh z$

۲۱- هریک از اعداد مختلط زیر را به صورت $a + bi$ بنویسید

الف) $\sin i$ ب) $\cos (2 - i)$

پ) $\sinh (1 - i\pi)$ ت) $\exp (3 - i\pi/4)$

۲۲- همهٔ مقادیر $(-2)^i$ را تعیین کنید .

۲۳- هریک از اتحادهای زیر را به دست آورید ,

الف) $\sinh (z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$

ب) $\cosh (z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$

پ) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

۲۴- نشان دهید $(-1)^{2i} = \exp (-2(2n + 1)\pi)$ ، که $n$ یک عدد صحیح است، در صورتی که

$$(-1)^{2i} = ((-1)^2)^i = 1^i = e^{i \log 1} = e^{-2n\pi},$$

که در این جا نیز $n$ عددی صحیح است . پس در حالت کلی، $(a^z)^w \neq a^{zw}$ .

۲۵- نشان دهید

$$(a^z)^w = a^{wz} \exp (2n\pi i)w,$$

که $n$ عددی صحیح است . پس در حالت کلی، $(a^z)w \neq (a^w)^z$ .

۲۶- ثابت کنید به ازای همهٔ اعداد صحیح $n$ ، $(\exp z)^n = \exp (nz)$ .

۲۷- نشان دهید از $|\exp (z)| = 1$ نتیجه شود $\operatorname{Re}(z) = 0$ .

۲۸- تابع

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1},$$

را که تبدیل لاپلاس، تابعی مانند $f(t)$ است، در نظر بگیرید . با نوشتن

$$F(s) = \frac{A}{s + i} + \frac{B}{s - i}$$

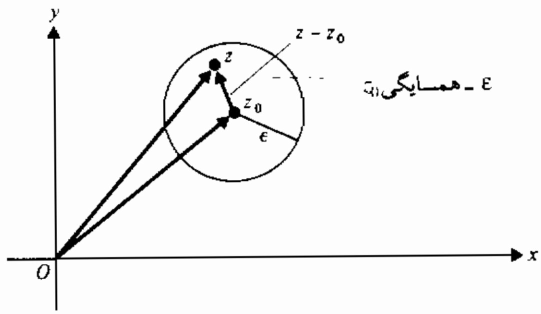
$A$ و $B$ را بیابید . آن گاه با استفاده از جدول تبدیلات لاپلاس $f(t)$ را به دست آورید .

## ۶-۳ مشتق

در این بخش مشتقات توابع یک متغیر مختلط را بررسی می کنیم . برای آماده شدن، به مفاهیمی در مورد مجموعه های نقاط در صفحهٔ $z$ یا صفحهٔ $xy$ نیاز داریم .

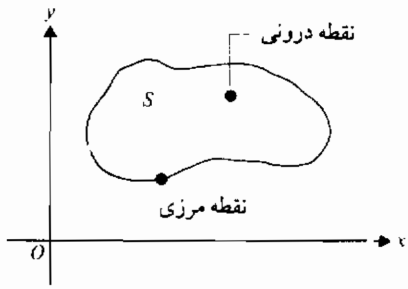
$\varepsilon$ -**همسایگی** یک نقطهٔ $z_0$ (شکل ۶-۳-۱) شامل همهٔ نقاط $z$ است بطوری که

$$|z - z_0| < \varepsilon,$$




شکل ۶-۳-۱ $\varepsilon$ - همسایگی یك نقطه

که $\varepsilon$ یک عدد مثبت مفروض است . یک مجموعه از نقاط در صفحهٔ $z$ را با $S$ نشان می دهیم . نقطهٔ $z_1$ را **نقطهٔ درونی مجموعه** $S$ گوییم هرگاه یک $\varepsilon$ - همسایگی از $z_1$ وجود داشته باشد که فقط شامل نقاط $S$ باشد (شکل ۶-۳-۲) . اگر هر نقطه از یک مجموعه، نقطه‌ای درونی باشد، مجموعه را **باز** گوییم . یک نقطه را **نقطهٔ مرزی** یک مجموعهٔ $S$ گوییم اگر هر $\varepsilon$ - همسایگی آن حداقل یک نقطه از $S$ و حداقل یک نقطه را که در $S$ نباشد شامل شود . مجموعهٔ تمام نقاط مرزی $S$ را **مرز** $S$ گویند . یک مجموعه که همهٔ نقاط مرزی اش را شامل باشد، یک **مجموعهٔ بسته** نامیده می شود .




شکل ۶-۳-۲ نقاط درونی و مرزی

**مثال ۶-۳-۱** هریک از مجموعه های زیر را در نظر بگیرید .

الف) $|z - i| < 1$

ب) $1 \le |z| \le 2$

مجموعهٔ (الف) یک مجموعهٔ باز است : هرنقطهٔ آن نقطه ای درونی است . برای مثال، $z = 0.01\,i$ یک نقطهٔ درونی است، چون هر $\varepsilon$ − **همسایگی نقطه**، با $\varepsilon = 0.001$ شامل فقط مجموعهٔ (الف) است . ازنظر هندسی، این مجموعه شامل تمام نقاطی است که داخل دایرهٔ به شعاع ۱ و به مرکز $i$ قرار دارند . مجموعهٔ (ب) یک مجموعهٔ بسته است . نقاط مرزی آن همهٔ نقاط روی دایرهٔ واحد و همهٔ نقاط روی دایرهٔ به شعاع ۲ هستند . مرکز هر دو دایره مبدأ مختصات است (شکل ۶-۲-۳ الف) .

توجه کنید که یک مجموعهٔ بسته باید شامل همهٔ نقاط مرزی اش باشد . بنابراین بعضی از مجموعه ها را نمی توان به صورت باز یا بسته دسته بندی نمود . مجموعهٔ $1 < \operatorname{Re} z \le 2$ از این نوع است (تمرین ۱).

مفاهیم فوق را می توان برای تعریف یک تابع پیوسته به کار برد . فرض کنید $f$ تابعی باشد که در یک همسایگی $z_0$ و نه لزوماً در خود $z_0$ ، تعریف شده باشد؛ گوییم حد $f(z)$ وقتی $z$ به $z_0$ میل می کند برابر $w_0$ است، به شرط آن که برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک عدد مثبت $\delta$ وجود داشته باشد بطوری که

اگر $|z - z_0| < \delta$ ، آن گاه $|f(z_0) - w_0| < \varepsilon$

باختصار می نویسیم

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

با فرض $w_0 = f(z_0)$ ، یعنی، اگر

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),$$

می گوییم $f$ در $z_0$ **پیوسته** است . اگر $f$ در هر نقطه از یک مجموعهٔ $S$ پیوسته باشد، گوییم $f$ بر $S$ **پیوسته** است .

تعریف حد مستقیماً به تعریف حد برای توابع یک متغیّر حقیقی وابسته است . بنابراین تعجب آور نیست که خاصیتهای زیر در مورد حدود برقرار باشند .

**قضیهٔ ۶-۳-۱** : اگر $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$ و $\lim_{z\to z_0} g(z) = w_2$ ، آن گاه

الف) $\lim_{z\to z_0} (f(z) \pm g(z)) = w_1 \pm w_2;$

ب) $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = w_1 w_2;$

پ) $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{w_1}{w_2},$ به شرط آن که $w_2 \neq 0$

از قضیهٔ ۶-۳-۱ مستقیماً نتیجه می شود که مجموع، تفاضل، و حاصل ضرب توابع پیوسته نیز پیوسته اند، همین طور خارج قسمت مگر به ازای مقادیری از $z$ که مخرج صفر می شود. علاوه براین، اگر $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، آن گاه نتیجه می شود که $f$ پیوسته است اگر و فقط اگر $u(x, y)$ و $v(x, y)$ هر دو پیوسته باشند (تمرین ۲) . پس، برای مثال، می توانیم نتیجه بگیریم که

$$f(z) = (2x + y) + i(x^2y)$$

همه جا پیوسته است، چون مؤلّفه های $2x + y$ و $x^2y$ در هر نقطه توابعی پیوسته از $x$ و $y$ هستند.

نقطهٔ ثابت $z_0$ را در دامنهٔ تعریف تابع $f$ در نظر بگیرید. فرض کنید $z$ نقطه ای در همسایگی $z_0$ باشد و فرض کنید $\Delta z = z - z_0$ . در این صورت $f$ در $z_0$ **مشتق پذیر** و مشتق آن $f'(z_0)$ است که به صورت

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \qquad (۶-۳-۱)$$

داده می شود، به شرط آن که حد برای هر انتخاب $\Delta z$ موجود باشد. از تعریف مشتق (۶-۳-۱) نتیجه می شود که $f$ در هر نقطه که مشتق پذیر باشد پیوسته است.

ما بیشتر به نوعی معیّن از مشتق پذیری که در زیر تعریف می شود، علاقه مند هستیم.

**تعریف ۶-۳-۱** : تابع $f$ با مقادیر مختلط را بر یک مجموعهٔ باز $S$ ***تحلیلی*** گوییم اگر در هر نقطهٔ $S$ مشتق پذیر باشد.

لازمه تعریف بالا این واقعیت است که اگر تابع $f$ در نقطهٔ $z_0$ تحلیلی باشد، آن گاه نه تنها $f'(z_0)$ موجود است بلکه $f'(z)$ در هر نقطهٔ $z$ در یک همسایگی $z_0$ وجود دارد. اگر تابعی در هر نقطه از صفحهٔ مختلط تحلیلی باشد، آن را ***تابع تام*** نامند. ساده ترین مثالها از توابع تام چندجمله ایها هستند. قبل از ارائهٔ مثالهای دیگر، به قضیهٔ مهم زیر نیاز داریم.

**قضیهٔ ۶-۳-۲** : یک شرط لازم برای آن که تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در نقطهٔ $z_0$ تحلیلی باشد آن است که $\partial u/\partial x$ ، $\partial u/\partial y$ ، $\partial v/\partial x$ و $\partial v/\partial y$ در $z_0$ موجود باشند و در **معادلات کشی ـ ریمان***

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{۶-۳-۲}$$

در نقطهٔ $z_0$ صدق کنند. علاوه بر این، داریم

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{۶-۳-۳}$$

معادلات کشی ـ ریمان نقش مهمّی در کاربرد آنالیز مختلط در جریان سیال، نظریهٔ پتانسیل، و مسائلی دیگر در فیزیک دارند. اثبات قضیهٔ ۶-۳-۲ را می توان در کتابهای آنالیز مختلط یافت. توجه کنید که این قضیه فقط یک شرط لازم را ارائه می دهد. شرایط کافی برای مشتق پذیری ایجاب می کنند که مشتقهای جزئی مرتبهٔ اوّل $u$ و $v$ نسبت به $x$ و $y$ نه تنها باید در $z_0$ موجود باشند بلکه در این نقطه باید پیوسته هم باشند.

**مثال ۶-۳-۲** تابع

$$f(z) = e^z$$

تابعی تام است. داریم

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y;$$

بنابراین

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{و} \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

پس

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

* A.L. Cauchy ، (۱۷۸۹-۱۸۵۷)ریاضی دان فرانسوی و G.F. Riemann ، (۱۸۲۶-۱۸۶۶) ریاضی دان آلمانی.

بنابراین معادلات کشی ـ ریمان (۶-۳-۲) برقرارند. علاوه براین، $e^x \cos y$ و $e^x \sin y$ به ازای همهٔ مقادیر $x$ و $y$ و در نتیجه برای تمام $z$ ها وجود دارند. بنابر معادلهٔ (۶-۳-۳)،

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z)$$

همان طور که انتظار داشتیم.

**مثال ۶-۳-۳** تابع

$$f(z) = (x^2 - y^2) - 2ixy$$

در هیچ نقطه ای تحلیلی نیست. در این جا داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = 2y,$$

بنابراین معادلات کشی ـ ریمان فقط وقتی برابرند که $x = y = 0$، یعنی، $z = 0$. اما تحلیلی بودن مستلزم مشتق پذیری در یک همسایگی است؛ بنابراین تابع داده شده هیچ جا تحلیلی نیست.

حال به کمک قضیهٔ ۶-۳-۲ می توانیم چند فرمول برای مشتق گیری از بعضی توابع با متغیّر مختلط به دست آوریم. برای مثال با استفاده از تمرین ۱۶ بخش ۶-۲، داریم

$$\begin{aligned}\sin z = \sin (x + iy) &= \sin x \cos (iy) + \cos x \sin (iy)\\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,\end{aligned}$$

در نتیجه، $u(x, y) = \sin x \cosh y$ و $v(x, y) = \cos x \sinh y$. حال با استفاده از معادلهٔ (۶-۳-۳) داریم

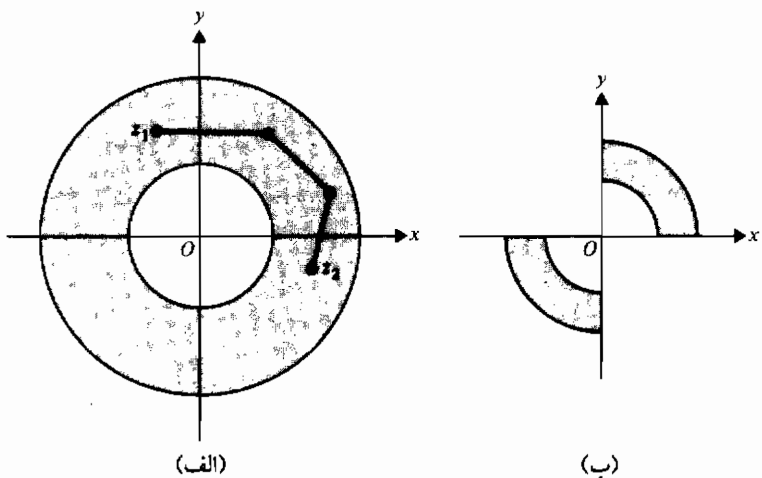
$$\begin{aligned}\frac{d(\sin z)}{dz} &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\\ &= \cos x \cos (iy) - \sin x \sin (iy)\\ &= \cos (x + iy) = \cos z.\end{aligned}$$

به عنوان تمرین نشان دهید $\sin z$ و $\cos z$ توابع تام هستند (تمرین ۳)

در این جا تعریف نوعی خاص از مجموعهٔ باز یعنی مجموعهٔ همبند، مناسب خواهد بود. مجموعهٔ باز $S$ را همبند گوییم اگر هر دو نقطه از مجموع را بتوان با یک زنجیر پیوسته متشکل از تعدادی متناهی پاره خط که همهٔ آنها تماماً در $S$ قرار داشته باشند، به هم وصل کرد. برای مثال، مجموعهٔ شکل ۶-۳-۳ (الف) همبند است، و مجموعهٔ شکل ۶-۳-۳ (ب) همبند نیست.

یک مجموعهٔ باز همبند را **حوزه** می‌نامند بنابراین موضوع بحث ما تابعی مشتق‌پذیر در یک حوزه یا تابعی تحلیلی در یک حوزه خواهد بود .

توابع تحلیلی خاصیتی مهم دارند که قبلاً در بخشهای ۲-۲ و ۴-۱ به‌آن اشاره کردیم . اگر $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ و $f(z)$ در یک حوزهٔ $D$ تحلیلی باشد، آن گاه هم $u(x, y)$ و هم $v(x, y)$ در معادلهٔ لاپلاس در $D$ صدق می کنند . این مطلب مستقیماً از معادلات کشی ـ ریمان (۶-۳-۲) نتیجه می شود . چنان که در بخشهای قبل گفته شد، توابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ را توابع همساز می نامند .




شکل ۶-۳-۳ (الف) مجموعه همبند. (ب) مجموعه ناهمبند

**مثال ۶-۳-۴** تحقیق کنید که قسمتهای حقیقی و موهومی تابع

$$f(z)=(z+1)^2$$

توابع همساز هستند .

*حل* : داریم

$$\begin{aligned}(z+1)^2 &= (x+iy)^2+2(x+iy)+1\\ &= (x+1)^2-y^2+2yi(x+1).\end{aligned}$$

بنابراین

$$u(x, y) = (x+1)^2 - y^2, \qquad v(x, y) = 2y(x+1),$$

که در نتیجه

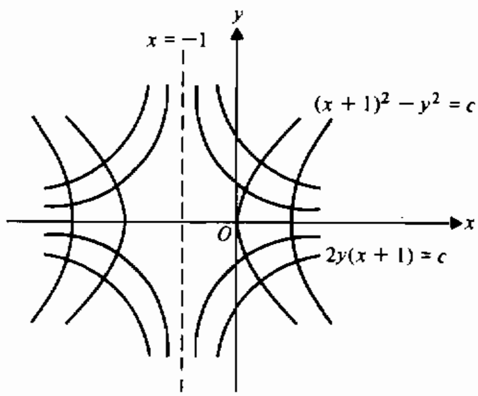
$$u_{xx} = 2, \qquad u_{yy} = -2, \qquad \text{و} \qquad v_{xx} = v_{yy} = 0.$$

پس $u(x, y)$ و $v(x, y)$ هر دو توابعی همسازند .

در مثال ۶-۳-۴ نشان دادیم که یک همبستگی نزدیک بین توابع تحلیلی و توابع همساز وجود دارد . هر دو قسمت حقیقی و موهومی تابع تحلیلی $(z+1)^2$ همسازند . ولی آنچه ازنظر عملی اهمیت دارد این واقعیت است که خانوادهٔ منحنیهای

$$u(x, y) = \text{ثابت} \qquad \text{و} \qquad v(x, y) = \text{ثابت}$$

در هرجا که متقاطع باشند و مماس بر آنها تعریف شده باشد، برهم عمودند . برای مثال دریک مسألهٔ الکتریسیته ساکن دو بعدی، منحنیهای ثابت = $u$ می توانند خطوط نیرو باشند که در آن حالت منحنیهای ثابت = $v$ خطوط هم پتانسیل را تعریف می کنند . در شکل ۶-۳-۴ خانوادهٔ منحنیهای عمود بر هم مربوط به مثال ۶-۳-۴ نشان داده شده است .




شکل ۶-۳-۴ خانوداه منحنیهای متعامد (مثال ۶-۳-۴)

این بخش را با توجه دادن به این نکته که هر تابع همساز قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است، به پایان می بریم به عبارت دیگر ، اگر تابع همساز $u(x, y)$ داده شده باشد، می توانیم یک تابع همساز دیگر مانند $v(x, y)$ بیابیم بطوری که

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

تابعی تحلیلی باشد . با یک مثال مطلب را روشن می کنیم .

**مثال ۶-۳-۵** تابع همساز زیر داده شده است

$$u(x, y) = \cosh x \cos y,$$

یک تابع تحلیلی $f(z)$ بسازید که قسمت حقیقی آن $u(x, y)$ باشد .

*حل* : با استفاده از معادلات کشی ـ ریمان (۶-۳-۲)، داریم

$$u_x = \sinh x \cos y = v_y;$$

بنابراین

$$v(x, y) = \sinh x \sin y + \phi(x).$$

در این صورت

$$\begin{aligned} v_x &= \cosh x \sin y + \phi'(x) \\ &= \cosh x \sin y = -u_y, \end{aligned}$$

در نتیجه $\phi'(x) = 0$ یا $\phi(x) = C$ که $C$ یک ثابت حقیقی است . پس

$$v(x, y) = \sinh x \sin y + C.$$

با استفاده از تمرین ۴ ، در می یابیم که تابع تحلیلی مطلوب عبارت است از

$$f(z) = \cosh z + \alpha,$$

که $\alpha$ یک ثابت موهومی محض است .

تابع $v(x, y)$ در مثال ۶-۳-۵ را که از تابع همساز $u(x, y)$ به دست آمده ، **مزدوج همساز** $u$ می نامند . توجه کنید که در این جا کلمهٔ «مزدوج» به معنایی متفاوت با عبارت «مزدوج مختلط» که در بخش ۶-۱ تعریف شد، به کار رفته است .

## تمرینهای ۶-۳

۱- نقاط مرزی مجموعهٔ $1 < \mathrm{Re}\, z \le 2$ را مشخص کنید . آیا مجموعه بسته است ؟ چرا ؟

۲- ثابت کنید اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، آن گاه $f$ پیوسته است اگر و فقط اگر $u(x, y)$ و $v(x, y)$ هر دو پیوسته باشند .

۳- نشان دهید هریک از توابع زیر تابعی تام است

الف) $\sin z$ ب) $\cos z$

۴- نشان دهید $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$ (***راهنمایی***: از معادله های ۶-۲-۲، ۶-۲-۳، و ۶-۲-۵ ۶-۲-۶ استفاده کنید.)

۵- هریک از مجموعه های زیر را توصیف کنید. مرز را در هر مورد مشخص کنید.

الف) $0 \le \arg z \le \pi/2$ ب) $|z - z_0| < \rho$ پ) $\rho_1 \le |z| \le \rho_2$

ت) $\mathrm{Re}\, z \le 0$ ث) $\mathrm{Im}\, z > 0$

۶- هریک از مجموعه های زیر را مشخص کنید و نقاط مرزی آنها را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $|z - i| \le 1$ ب) $1 < |z| < 2$ پ) $1 \le |z| < 2$

۷- ثابت کنید هریک از توابع زیر همه جا بجز احتمالاً در بعضی از نقاط پیوسته اند. استثناها را بیان کنید.

الف) $w = 1 + z^2$ ب) $w = |z|$ پ) $w = 1/z$

ت) $w = \mathrm{Im}(z)$ ث) $w = \bar{z}$ ج) $w = \dfrac{z+2}{z^2 + z - 2}$

۸- توضیح دهید چرا $f(z) = \bar{z}$ هیچ جا مشتق پذیر نیست. (***راهنمایی***: از معادلهٔ ۶-۳-۱ استفاده کنید و نشان دهید حد موجود نیست.)

۹- با محاسبهٔ $f'(z)$ از معادلهٔ (۶-۳-۱)، نشان دهید $f(z) = z$ تابعی تام است.

۱۰- $f'(z)$ را برای هریک از توابع زیر بیابید

الف) $f(z) = \cos z$ ب) $f(z) = \tan z$ پ) $f(z) = \sinh z$

ت) $f(z) = \cosh z$ ث) $f(z) = 1/z$ ج) $f(z) = z^{1/2}$

۱۱- الف) نشان دهید تابع $\mathrm{Log}\, z$ همه جا بجز برای نقاط واقع بر محور حقیقی نامثبت تحلیلی است.

ب) نشان دهید برای همه $z$ هایی که $\mathrm{Log}\, z$ تحلیلی است، داریم

$$\frac{d}{dz}(\mathrm{Log}\, z) = \frac{1}{z}$$

۱۲- تحقیق کنید هر دو قسمت حقیقی و موهومی توابع زیر همسازند

الف) $f(z) = 1/z$ ب) $f(z) = z^3 - i(z+1)$

ت) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$

۱۳- مزدوجهای همساز هریک از توابع زیر را بیابید

الف) $x^3 - 3xy^2 + y$   ب) $x^3 - 3xy^2$

پ) $\frac{1}{2}\log(x^2+y^2), \quad xy \neq 0$

۱۴- نشان دهید اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، آن گاه هریک از توابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ هرجا که $f(z)$ تحلیلی باشد همساز است .

۱۵- قضیهٔ (۶-۱-۱) را ثابت کنید . ***راهنمایی*** : با $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، $z = x + iy$ ، $z_0 = x_0 + iy_0$ ، و $w_1 = u_1 + iv_1$ ، $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$ نتیجه می دهد که

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x, y) = u_1 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x, y) = v_1.$$

۱۶- اگر $f(z)$ و $g(z)$ در $z_0$ پیوسته باشند، ثابت کنید

الف) $f(z) \pm g(z)$ در $z_0$ پیوسته است .   ب) $f(z)g(z)$ در $z_0$ پیوسته است .

پ) $\frac{f(z)}{g(z)}$ در $z_0$ پیوسته است، به شرط آن که $g(z_0) \neq 0$ .

۱۷- با مراجعه به تمرین ۱۳ ، تابع تحلیلی را در هر حالت معیّن کنید .

## ۶-۴ نگاشت

در مثال ۶-۲-۱ نگاشتی را که با $w = 1/z$ تعریف شده و ***انعکاس*** نامیده می شود، ارائه نمودیم . در این بخش به مطالعهٔ چند نگاشت خواهیم پرداخت و مشخّصه های هریک را با دیدگاهی که بعداً از آنها برای حل مسائل مقدار مرزی معینی استفاده خواهد شد، بررسی می کنیم . مثال زیر نشان می دهد که چگونه این کار را می توان در حالتی ساده انجام داد .

**مثال ۶-۴-۱** مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید (شکل ۶-۴-۱) .

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x^2 + y^2 > 1;$$
$$u = x + 1, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad |u| \text{ کراندار است}$$

**حل** : در این جا در جستجوی یک تابع همساز، کران دار در ناحیهٔ بی کران خارج دایرهٔ واحد هستیم که در روی دایره برابر $x + y$ است . تعریف می کنیم $z = x + iy$ و $\zeta = \xi + i\eta$ و از نگاشت انعکاس $\zeta = 1/z$ استفاده می کنیم . مسأله به صورت زیر در می آید

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 < 1;$$
$$U = \xi + 1, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

در این جا

$$U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

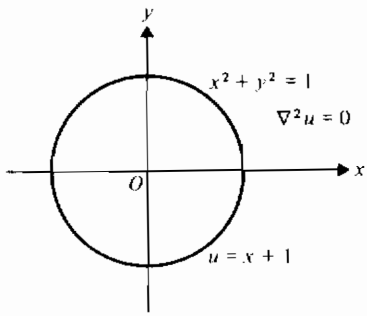
و واضح است که (تمرین ۱۸ را ببینید) $U = \xi + 1$ یک جواب است (در واقع، تنها جواب است). اما نگاشت انعکاس (مثال ۶-۲-۱ را ملاحظه کنید) نشان می دهد که

$$\xi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

بنابراین جواب مسألهٔ داده شده عبارت است از

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + 1. \qquad (۶-۴-۱)$$

ملاحظه می کنیم که $u(x, y) = x + 1$ در معادلهٔ با مشتقات جزئی و شرط مرزی داده شده صدق می کند اما کران دار نیست، در حالی که معادلهٔ (۶-۴-۱) یک جواب کران دار می دهد (تمرین ۱).




شکل ۶-۴-۱

نگاشت انعکاس حالتی خاص از نگاشتی است که به صورت

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \qquad (۶-۴-۲)$$

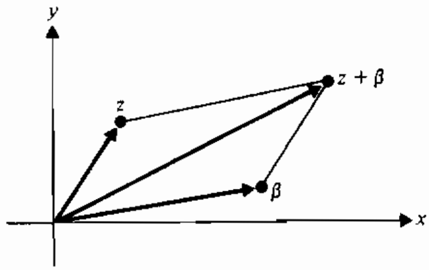
تعریف می شود و آن را یک *تبدیل دوخطی** (یا نگاشت دوخطی) می نامند. ثابتهای $\alpha$ ، $\beta$ ،

* تبدیل موبیوس و تبدیل خطی ـ کسری نیز می نامند.

$\gamma$ و $\delta$ ثابتهای مختلط هستند و برقراری محدودیت $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ برای آن که نگاشت ثابت نباشد لازم است (تمرینهای ۳ و ۴) .

ملاحظه کنید که نگاشت $w = 1/z$ حالتی خاص از تبدیل دو خطی تعریف شده در معادلهٔ (۶-۴-۲) است . حال باختصار به مطالعه این نگاشت و سایر حالتهای خاص می پردازیم .

۱- $\alpha = \delta = 1$ و $\gamma = 0$ نتیجه می دهد $w = z + \beta$ . این نگاشت را ***انتقال*** می نامند؛ و نقطهٔ $z$ را به نقطهٔ دیگر $z + \beta$ انتقال می دهد، مطابق شکل ۶-۴-۲ . توجه کنید که هر انتقال را می توان نتیجهٔ جمع دو برابر در نظر گرفت .




شکل ۶-۴-۲ انتقال

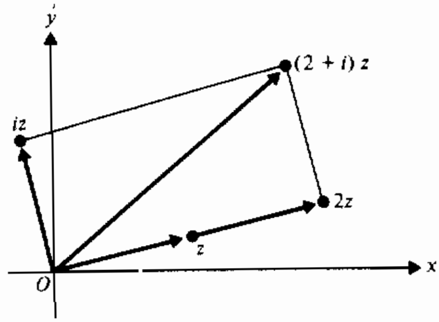
۲- $\beta = \gamma = 0$ و $\delta = 1$ نتیجه می دهد $w = \alpha z$ . این نگاشت یک ***دوران*** توأم با یک ***تجانس*** است . داریم

$w = |\alpha|\,|z| \exp\,(i \arg\,(\alpha + z))$

بنابراین $|\alpha| > 1$ باعث بزرگ شدن ابعاد و $|\alpha| < 1$ باعث انقباض می شود . مثالی از این نگاشت $w = (2 + i)z$ است که در شکل ۶-۴-۳ نشان داده شده است .

۳- $\gamma = 0$ و $\delta = 1$ نتیجه می دهد $w = \alpha z + \beta$ ، که ترکیبی از حالتهای (۱) و (۲) بالاست؛ یعنی، دورانی به اندازهٔ زاویهٔ $\arg \alpha$ و تجانسی به اندازهٔ $|\alpha|$ و سپس یک انتقال به اندازهٔ بردار $\beta$ .

۴- $\alpha = \delta = 0$ و $\beta = \gamma = 1$ تبدیل انعکاس را نتیجه می دهد که قبلاً بررسی شده است . این تبدیل خطوط مستقیم و دایره ها را به خودشان نقش می کند (تمرین ۵ را برای قسمتی از اثبات این گزاره ملاحظه کنید) .

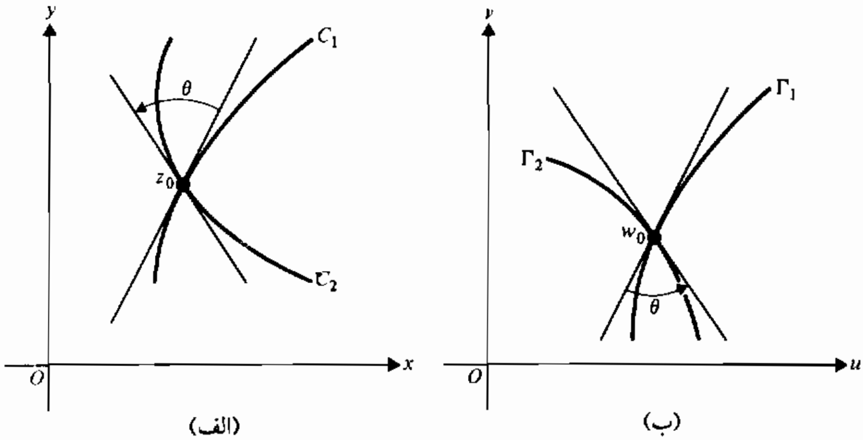



شکل ۶-۴-۳ نگاشت $w = (2+i)z$

از این مثالهای خاص می توان دید که هر تبدیل دو خطی را می توان به صورت یک دنبالهٔ متناهی از انتقالها، تجانسها، دورانها و انعکاسها بیان نمود. ولی تبدیلات دو خطی یک خاصیت مهم دیگر هم دارند. این تبدیلها برای هر $z$ بجز $z = -\delta/\gamma$ همدیس (یا نگه دارندهٔ زاویه) هستند که این مفهوم در تعریف زیر مشخص خواهد شد.

**تعریف ۶-۴-۱** : فرض کنید نگاشتی به صورت $w = f(z)$ داده شده باشد. این نگاشت در $z_0$ **همدیس** است هرگاه $w_0 = f(z_0)$ و هر دو منحنی هموار $C_1$ و $C_2$ که از $z_0$ می گذرند و یکدیگر را با زاویهٔ $\theta$ قطع می کنند به دو منحنی $\Gamma_1$ و $\Gamma_2$ نقش شوند که از $w_0$ می گذرند و یکدیگر را با زاویهٔ $\theta$ قطع کنند.

در تعریف بالا این واقعیت نهفته است که یک نگاشت همدیس هم اندازه و هم جهت یک زاویه را حفظ می کند. شکل ۶-۴-۴ یک نگاشت همدیس را نشان می دهد. می توان نشان داد که نگاشت $w = f(z)$ در هر نقطهٔ $z$ از یک حوزه که $f$ در آن تحلیلی باشد و $f'(z) \neq 0$، همدیس است.




شکل ۶-۴-۴ نگاشت همدیس: (الف) صفحهٔ $z$ ؛ (ب) صفحهٔ $w$

**مثال ۶-۴-۲** نگاشت زیر را بررسی کنید

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

*حل*: ابتدا ملاحظه می‌کنیم که این نگاشت یک تبدیل دو خطی نیست. داریم

$$\begin{aligned} w = u + iv &= \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{1}{x + iy}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \frac{i}{2}\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right); \end{aligned}$$

بنابراین

$$u = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{و} \quad v = \frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

پس

$$u_x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) = v_y$$

و

$$u_y = \frac{-xy}{2(x^2+y^2)^2} = -v_x.$$

این نشان می دهد که $f$ هرجا بجز در $z=0$ تحلیلی است . علاوه براین

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2-1}{z^2}\right);$$

بنابراین $f$ بجز در $z=0$ و $z=\pm 1$ همدیس است . در شکل قطبی این تبدیل به صورت زیر نوشته می شود

$$w = \frac{1}{2}\left(|z|e^{i\phi} + \frac{e^{-i\phi}}{|z|}\right).$$

و از این جا ملاحظه می کنیم که اگر $|z| = c > 1$ ، آن گاه

$$w = \frac{1}{2}\left(c(\cos\phi + i\sin\phi) + \frac{1}{c}(\cos\phi - i\sin\phi)\right)$$

که نتیجه می شود

$$u = \frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{c}\right)\cos\phi, \qquad v = \frac{1}{2}\left(c-\frac{1}{c}\right)\sin\phi,$$

بنابراین با به دست آوردن $\sin\phi$ و $\cos\phi$ و مربع کردن و جمع کردن آنها به دست می آوریم

$$4\left(\frac{c}{c^2+1}\right)^2 u^2 + 4\left(\frac{c}{c^2-1}\right)^2 v^2 = 1,$$

که نشان می دهد دایره های به مرکز مبدأ به بیضیهایی به مرکز مبدأ تصویر می شوند . ازطرف دیگر اگر $y = mx$ ، که $m$ یک عدد حقیقی ثابت است ، آن گاه

$$u = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x(1+m)^2}\right), \qquad v = \frac{m}{2}\left(x - \frac{1}{x(1+m^2)}\right)$$

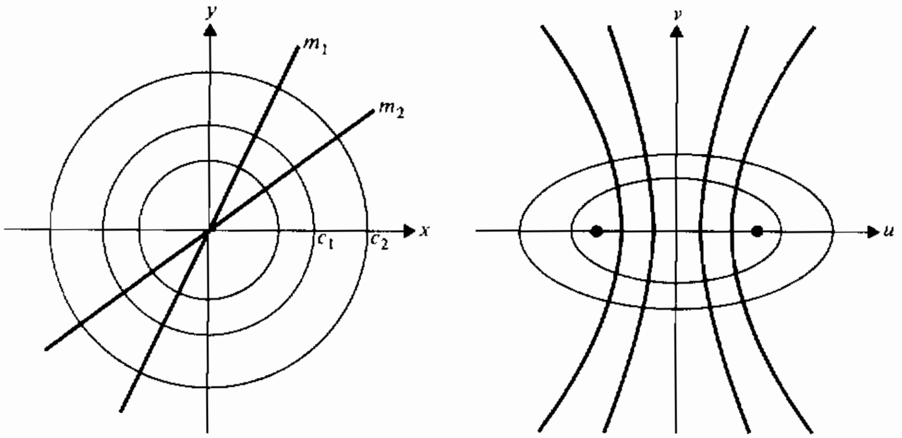
و

$$m^2u^2 - v^2 = \frac{m^2}{1+m^2}.$$

بنابراین خطهای مستقیم که از مبدأ می گذرند به هذلولیهایی به مرکز مبدأ تصویر می شوند . می توان نشان داد که کانونهای بیضیها و هذلولیها در $w=\pm 1$ هستند . تعدادی از این منحنیها در شکل ۶-۴-۵ نشان داده شده اند . تبدیل در این مثال در دینامیک سیالات مورد توجه است

(تمرین ۶ را در این ارتباط ببینید) .

در مثال بعد نشان می دهیم که یک تابع تام را می توان به صورتی مفید برای نگاشت به کار برد .




(الف) (ب)

شکل ۶-۴-۵ تبدیل $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ (مثال ۶-۴-۲) : (الف) صفحهٔ $z$ ؛ (ب) صفحهٔ $w$

**مثال ۶-۴-۳** نگاشت $w = \sin z$ را بررسی کنید .

*حل* : چون $\sin z$ تناوبی با دورهٔ تناوب $2\pi$ است، کافی است نوار اصلی $-\pi/2 < x \le \pi/2$ ، $-\infty < y < \infty$ را بررسی کنیم؛ داریم

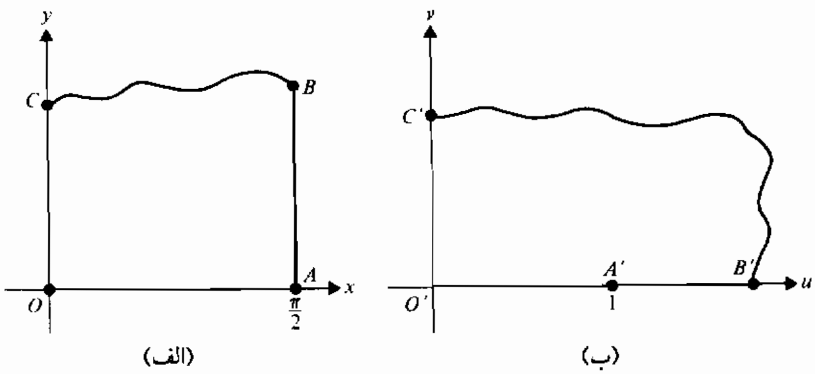
$$\begin{aligned} w = u + iv = \sin z &= \sin(x + iy) \\ &= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \end{aligned}$$

بنابراین

$$u = \sin x \cosh y, \qquad v = \cos x \sinh y. \tag{۶-۴-۳}$$

دو معادلهٔ اخیر نشان می دهند آن قسمت از محور $x$ ها، که $0 \le x \le \pi/2$ به قسمتی از محور $u$ ها که $0 \le u \le 1$ نقش می شود؛ خط $x = \pi/2$ ، $y \ge 0$ به قسمتی از محور $u$ ها که $u \ge 1$ نقش

می شود؛ نیمهٔ نامنفی محور $y$ها به نیمهٔ نامنفی محور $v$ ها نقش می شود. شکل ۶-۴-۶ این نگاشت را با نقاط متناظر که با حروف پریم دار و بدون پریم مشخص شده اند، نشان می دهد. در بخش ۶-۶ این نگاشت را به معنای معکوس به کار خواهیم برد، یعنی، نیم صفحهٔ بالایی را به یک نوار نیمه نامتناهی به عرض $\pi$ به وسیلهٔ $z = \sin w$ نقش خواهیم نمود (تمرین ۷ را برای یک مثال دیگر ببینید).



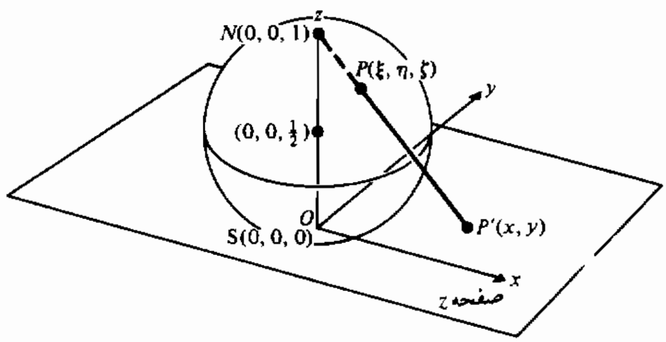

شکل ۶-۴-۶ نگاشت $w = \sin z$ (مثال ۶-۴-۳): (الف) صفحهٔ $z$ ؛ (ب) صفحهٔ $w$

این بخش را با یک نگاشت که اندازهٔ زوایا را حفظ می کند ولی جهت را حفظ نمی کند به پایان می بریم. نگاشتهای با این خاصیت را **حافظ زاویه** می نامند (تمرین ۸ را برای یک مثال دیگر ببینید). یک نگاشت حافظ زاویهٔ خاص به نام **تصویر گنجنگاری** را مورد بررسی قرار می دهیم. کره ای به شعاع $\frac{1}{2}$ در نظر بگیرید که بر صفحهٔ $z$ در مبدأ مماس است. یک دستگاه مختصات $(\xi, \eta, \zeta)$ چنان انتخاب کنید که نقطهٔ تماس در $(0, 0, 0)$، مرکز کره در $(0, 0, \frac{1}{2})$ و «قطب شمال» در $(0, 0, 1)$ باشد. این نقاط در شکل ۶-۴-۷ نشان داده شده اند. تصویر گنجنگاری به صورت زیر تعریف می شود: نقطهٔ $P(\xi, \eta, \zeta)$ روی کره به نقطهٔ $P'(x, y)$ در صفحهٔ $xy$ محل برخورد امتداد خط $\overrightarrow{NP}$ با صفحهٔ $xy$، نقش می شود. این نگاشت یک **همسان ریختی** است، به این معنی که نقاط در همسایگی $P$ روی کره به نقاط در همسایگی $P'$ در صفحهٔ $xy$ نقش خواهند شد، و برعکس نقاط «نزدیک به» $P'$ نیز «نزدیک به» $P$ خواهند بود. برای آن که نگاشت و معکوس آن یک به یک باشند لازم است نقطه ای مانند $N'$ را با نقطهٔ $N$ متناظر سازیم.

بنابراین $z = \infty$ را با $N$ متناظر می‌کنیم و آن را **نقطهٔ در بی‌نهایت** می‌نامیم . با افزودن این «نقطه» **صفحهٔ مختلط تعمیم یافته** را خواهیم داشت . حال می‌توانیم بنویسیم $z \to \infty$ و برای مثال

$$f(z) = \frac{3z+1}{z-2}$$

را در $z = \infty$ و $z = 2$ محاسبه کنیم . بسادگی در می‌یابیم که $f(2) = \infty$ و $f(\infty) = 3$ . مسائل دیگر شامل تصویر گنجنگاری و نقطهٔ در بی‌نهایت در تمرینها دیده می‌شوند .




شکل ۶-۴-۷ تصویر گنجنگاری

## تمرینهای ۶-۴

۱- الف) نشان دهید $u(x, y) = x + y$ در معادلهٔ با مشتقات جزئی و شرط مرزی مثال ۶-۴-۱ صدق می‌کند اما کران‌دار نیست .

ب) نشان دهید $u(x, y) = x/(x^2 + y^2) + 1$ در معادلهٔ با مشتقات جزئی و شرط مرزی مثال ۶-۴-۱ صدق می‌کند و کران‌دار نیز هست . (*راهنمایی* : معادلهٔ ۶-۴-۱ را به صورت $1 + [\cos(\arg z)/|z|]$ بنویسید و حد را وقتی $|z| \to \infty$ ، بیابید . )

۲- نشان دهید یک تبدیل دو خطی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$Awz + Bw + Cz + D = 0,$$

که نسبت به $w$ و $z$ هر دو خطی است و به این علت آن را «دو خطی» نامیده‌اند .

۳- نشان دهید هر تبدیل دو خطی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$w = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma}\frac{1}{\gamma z + \delta} + \frac{\alpha}{\gamma};$$

بنابراین $w$ ثابت است اگر $\alpha\delta = \beta\gamma$ . (*راهنمایی* : فرض کنید $\gamma \neq 0$ ؛ آن‌گاه $\alpha\delta/\gamma$ را در صورت کسر معادلهٔ ۶-۴-۲ اضافه و کم کنید .)

۴- اگر در یک تبدیل دو خطی $\gamma = 0$ (تمرین ۳ را ملاحظه کنید)، آن‌گاه $\delta \neq 0$ و $\alpha\delta = \beta\gamma$ باز هم نتیجه می دهد که $w$ یک ثابت است . دلیل این مطلب را بتفصیل بیان کنید .

۵- نگاشت انعکاس $w = 1/z$ را در نظر بگیرید که در این بخش و در مثال ۶-۲-۱ به‌آن اشاره شد،

الف) نشان دهید خطوط مستقیمی که از مبدأ می گذرند به‌خطوط مستقیمی که از مبدأ می گذرند نقش می شوند رابطهٔ بین شیبهای این خطوط چیست ؟

ب) نشان دهید دایره های $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ به خطهای $u = 1/2a$ نقش می شوند .

پ) نشان دهیددایره های $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ به خطهای $v = -1/2a$ نقش می شوند .

ت) نقاط فصل مشترك دایره ها در قسمتهای (ب) و (پ) به کجا نقش می شوند ؟

۶- نگاشت

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

مثال ۶-۴-۲ را در نظر بگیرید .

الف) حالت $|z| = 1$

ب) حالت $|z| < 1$ را بررسی کنید . درحالت خاص، نشان دهید $|z| = 1/C$ و $|z| = C$ به بیضیهای یکسان نقش می شوند .

پ) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (ب) توضیح دهید چرا در عمل نگاشت به $|z| > 1$ محدود می شود ؟

۷- با استفاده از معادله های (۶-۴-۳) ناحیهٔ مستطیلی $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ ، $0 \le y \le c$ را به یک ناحیهٔ نیمه بیضوی نقش کنید . نقاط متناظر را روی شکل مشخص کنید .

۸- فرض کنید $f$ بر یک حوزهٔ $D$ تابعی تحلیلی باشد . نشان دهید نگاشت $w = f(\bar{z})$ اندازهٔ زاویه ها را حفظ می کند اما جهت آنها را عکس می کند .

۹- نشان دهید تبدیل دو خطی

$$w = \frac{1}{z}$$

نوار نامتناهی $\frac{a}{2} > y > 0$ را به حوزهٔ زیر نقش می کند

$$u^2 + (v + a)^2 > a^2, \qquad v < 0.$$

۱۰- نشان دهید تبدیل دوخطی

$$w = \frac{z}{z-1}$$

قرص $|z| \leq 1$ را به نیم صفحهٔ $u \leq \frac{1}{2}$ نقش می کند.

۱۱- نشان دهید تبدیل دوخطی

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

قرص $|z| < 1$ را به نیم صفحهٔ $u < 0$ نقش می کند.

۱۲- ***نقاط ثابت*** (یا نقاط ناوردای) یک تبدیل خطی $w = f(z)$ با جوابهای $z = f(z)$ داده می شوند؛ . ثابت کنید یک تبدیل دوخطی حداکثر می تواند دو نقطهٔ ثابت داشته باشد.

۱۳- نقاط ثابت هریک از تبدیلات زیر را بیابید.

الف) $w = \frac{1}{z}$ ب) $w = \frac{z}{z-1}$ پ) $w = z + \frac{1}{z}$

۱۴- یک مقدار $z_0$ که به ازای آن $f'(z_0) = 0$ یک ***نقطهٔ بحرانی*** $w = f(z)$ نامیده می شود. نقاط بحرانی هریک از تبدیلات زیر را بیابید.

الف) $w = \frac{1}{z}$ ب) $w = \frac{z-i}{z+i}$

پ) $w = \sin z$ ت) $w = z^2$

۱۵- الف) نشان دهید اگر $P(\xi, \eta, \zeta)$ نقطه ای بر کرهٔ گنجنگاری باشد، آن گاه

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta).$$

ب) اگر $P'(x, y)$ تصویر $P$ باشد، آن گاه

$$z = x + iy = \frac{\xi + \eta i}{1 - \zeta}.$$

پ) نقاط $N$ ، $P$ ، و $P'$ هم خط هستند؛ در نتیجه نشان دهید عدد حقیقی ثابتی مانند $t$ وجود دارد که

$$\xi = tx, \qquad \eta = ty, \qquad \zeta - 1 = -t,$$

با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف)، $t$ را بیابید و در این صورت نشان دهید

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \qquad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \qquad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

۱۶- نگاشت $w = \cos z$ را که دارای، نوار اصلی $-\pi < x \le \pi$ ، $-\infty < y < \infty$ است در نظر بگیرید .

الف) نقش نیم خط $x = \pi$ ، $-\infty < y \le 0$ را بیابید .

ب) نقش نیم‌نوار $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ ، $\operatorname{Im} z < 0$ را بیابید .

پ) با نقش کردن مزرها، نقش مستطیل $0 < x < \pi$ ، $-1 < y < 1$ را بیابید .

۱۷- نگاشت $w = e^z$ را در نظر بگیرید .

الف) در کجا این نگاشت همدیس است؟

ب) نقش نوار اصلی $-\pi < y \le \pi$ ، $-\infty < x < \infty$ را بیابید .

پ) نقش پاره خط $x = a$ ، $-\pi < y \le \pi$ را بیابید .

ت) نقش نوار نیمه نامتناهی $x \le 0$ ، $0 \le y \le \pi$ را بیابید .

ث) نقش مستطیل $c_1 \le x \le c_2$ ، $0 \le y \le \pi$ را بیابید .

۱۸- الف) نشان دهید مسألهٔ

معادله : $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 < 1;$

شرایط مرزی : $U = \xi + 1, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1,$

مربوطه به مثال ۶-۴-۱ را می توان در مختصات قطبی به صورت زیر نوشت

معادله : $\rho^2 U_{\rho\rho} + \rho U_\rho + U_{\phi\phi} = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad -\pi < \phi < \pi;$

شرایط مرزی : $U(1, \phi) = \cos \phi + 1, \quad -\pi < \phi < \pi.$

ب) مسألهٔ فوق را با روش جداسازی متغیّرها حل کنید و نتیجهٔ زیر را به دست آورید

$$U(\rho, \phi) = \rho \cos \phi + 1 = \xi + 1.$$

(توجه : تابع $\cos \phi + 1$ تابعی زوج است .)

۱۹- با استفاده از نگاشت $w = (1 + i)$ تصویر نیم صفحهٔ $y > 0$ را :

الف) با استفاده از مختصات قائم؛

ب) با استفاده از مختصات قطبی،

پیدا کنید . ناحیهٔ حاصل را رسم نمایید .

۲۰- یک تبدیل دو خطی پیدا کنید که نقاط را به صورت زیر نقش کند :

$$z_1 = -1 \to w_1 = 1, \qquad z_2 = 0 \to w_2 = \infty, \qquad z_3 = 1 \to w_3 = i.$$

۲۱- تبدیل $w = z^2$ را در نظر بگیرید

الف) نقش ربع اوّل صفحهٔ $z$ را بیابید . (**راهنمایی** : از مختصات قطبی استفاده کنید)

ب) نقش محور حقیقی مثبت و منفی را در صفحهٔ $z$ بیابید . چگونه از نتیجه معلوم می شود که نگاشت یک به یک نیست ؟

پ) نقش دایره های ثابت = $|z|$ را بیابید .

۲۲- نشان دهید تبدیل مثال ۶-۴-۲ دایرهٔ $|z| = 2$ را به یک بیضی نقش می کند . شکلی رسم کنید و نقاط متناظر را در صفحهٔ $z$ و صفحهٔ $w$ مشخص کنید .

## ۶-۵ انتگرال مختلط

انتگرال معین تابع $f$ از یک متغیر مختلط را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\int_\alpha^\beta f(z)\, dz,$$

که $\alpha$ و $\beta$ اعداد مختلط هستند . اگر معنای معمول را برای این انتگرال در نظر بگیریم ، یعنی ، اگر $z$ مقدار اوّلیهٔ $z = \alpha$ و مقدار نهایی $z = \beta$ را داشته باشد ، آن گاه نتیجه می شود که $z$ مقادیر صفحه را از نقطهٔ $\alpha$ تا نقطهٔ $\beta$ اختیار می کند . بدیهی است انتگرال معین بالا نیاز به مسیری بین $\alpha$ و $\beta$ دارد که باید از قبل مشخص شده باشد . پس نتیجه می شود که انتگرال معین یک تابع مختلط $f$ در واقع یک ***انتگرال منحنی الخط*** است .

در این جا شاید مرور مطالب مربوط به انتگرال منحنی الخط مفید باشد . بخصوص مفهوم یک میدان نیروی پایستار و این واقعیت که انتگرالهای منحنی الخط معیّنی که در طول مسیری بسته در میدان پایستار محاسبه می شوند برابر صفر هستند . همچنین از اصطلاح «کمان هموار» که در ریاضیات عمومی تعریف می شود ، استفاده خواهیم نمود . مسیر یک زنجیر پیوسته متشکل از تعدادی متناهی کمانهای هموار است ، به این جهت انتگرالهای منحنی الخط را ، ***انتگرالهای مسیری*** نیز می نامند .

**مثال ۶-۵-۱** انتگرال مسیری

$$\oint_C \bar{z}\, dz$$

را بر مسیر $C$ که نیمهٔ پایین نیم دایرهٔ واحد بسته به مرکز مبدأ است ، بیابید .

***حل*** : مسیر بستهٔ $C$ با جهت مثبت در شکل ۶-۵-۱ نشان داده شده است . داریم $z = x + iy$ ،

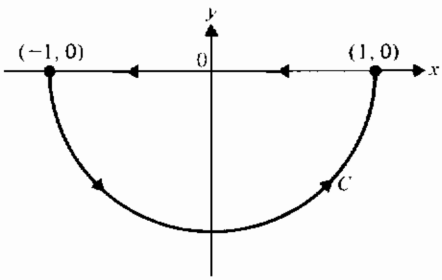
$\bar{z} = x - iy$ ، $dz = dx + i\,dy$ ، و، برای قسمت مستقیم مسیر، $y = 0$ ، $dy = 0$ . بنابراین برای این قسمت،

$$\int_1^{-1} x\,dx = 0.$$

برای قسمت منحنی بهتر است از مختصات قطبی استفاده کنیم، در این صورت $z = e^{i\phi}$ ، $dz = ie^{i\phi}\,d\phi$ ، $\bar{z} = e^{-i\phi}$ ، بنابراین،

$$i\int_{\pi}^{2\pi} d\phi = \pi i.$$

پس انتگرال در روی مسیر بسته برابر $\pi i$ است .




شکل ۶-۵-۱

پارامتری کردن مسیر انتگرال گیری اغلب مزایایی دربر دارد. وقتی این کار صورت گیرد، یک مسیر $C$ را می توان به صورت زیر توصیف نمود :

$$C:\quad x = x(t),\quad y = y(t),\quad a \le t \le b.$$

پس

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$$

و

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b \big(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\big)\left(\frac{dx}{dt} + i\,\frac{dy}{dt}\right)dt$$
$$= \int_a^b \left(u(x(t), y(t))\,\frac{dx}{dt} - v(x(t), y(t))\,\frac{dy}{dt}\right)dt$$

$$+ i \int_a^b \left( v(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + u(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt$$

یا، اگر نماد را ساده کنیم

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C (u\, dx - v\, dy) + i \int_C (v\, dx + u\, dy).$$

حال هر دو انتگرال طرف راست انتگرالهای حقیقی اند و، اگر $C$ یک مسیر بسته باشد و فرض کنیم $u$ و $v$ پیوسته مشتق پذیر باشند، آن گاه می توانیم از قضیهٔ گرین در صفحه استفاده کنیم و بنویسیم

$$\int_C (u\, dx - v\, dy) = -\iint_R \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\, dy$$

و

$$\int_C (v\, dx + u\, dy) = \iint_R \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

که $R$ یک ناحیهٔ بستهٔ محدود به $C$ است، و مرز در جهت مثبت تعریف می شود. اگر $f(z)$ در $R$ تحلیلی باشد، آن گاه انتگرالده ها در هر دو انتگرال دوگانه بنابر معادله های کشی ـ ریمان (معادله های ۶-۳-۲) برابر صفر است. اگر این مفاهیم را با هم در نظر بگیریم، قضیهٔ زیر نتیجه می شود.

**قضیهٔ ۶-۵-۱** : در تمام نقاط درون و روی یک مسیر بسته $C$ اگر $f$ تحلیلی و $f'$ پیوسته باشد، آن گاه $\oint_C f(z)\, dz = 0.$

قضیهٔ ۶-۵-۱ جالب توجه است زیرا بیان می کند که توابع تحلیلی انتگرال منحصربه فرد و همچنین مشتق منحصر به فرد دارند. ولی مهمتر از این، تعمیم قضیه برای توابع غیرتحلیلی است که بعداً در این بخش در مبحث مانده ها بررسی خواهند شد. نتیجهٔ دیگر این قضیه آن است که انتگرال یک تابع تحلیلی، یک تابع تحلیلی از حد بالای آن است، به شرط آن که مسیر انتگرال گیری یک حوزهٔ همبند ساده بوده و در سراسر آن تابع انتگرالده تحلیلی باشد.

این قضیه را ابتدا کشی ثابت کرد و در ۱۸۸۳ گورسا* (با ضعیف کردن مفروضات)

* Edouard Goursat ، (۱۸۵۸-۱۹۳۶) ریاضی دان فرانسوی

در تقویت آن کوشید . در این جا شکل تقویت شدهٔ قضیه را که امروزه به نام قضیهٔ کشی یا قضیهٔ کشی ـ گورسا معروف است . ارائه می دهیم .

**قضیهٔ ۶-۵-۲ *(قضیهٔ کشی)*** :اگر تابع $f$ در تمام نقاط درون و روی یک مسیر بسته $C$ تحلیلی باشد، آن گاه

$$\oint_C f(z)\, dz = 0.$$

قضیهٔ کشی کاربردهای متعدد دارد و به همین دلیل درنظریهٔ توابع تحلیلی آن را ***قضیهٔ اساسی*** می نامند . توجه کنید اگرچه این قضیه بیان می کند که انتگرال روی یک مسیر بسته برابر صفر است، $C$ را در جهت مثبت تعریف می کنیم؛ یعنی، همچنان که روی $C$ حرکت می کنیم، ناحیهٔ بسته در طرف چپ قرار می گیرد . دلیل این قرارداد آن است که بعداً قضیهٔ کشی را برای حالاتی تعمیم خواهیم داد که در آن جا نتیجه برابر صفر نخواهد بود .

**مثال ۶-۵-۲** حساب کنید

$$\int_C \frac{dz}{z^2(z^2+9)},$$

که $C$ مرز ناحیهٔ $1 < |z| < 2$ است .

***حل*** : شکل ۶-۵-۲ مسیر $C$ را که در جهت مثبت توصیف شده است، نشان می دهد . نشان می دهیم که مسیر از $z = 1$ شروع و به همین نقطه ختم می شود. برش بین $z = 1$ و $z = 2$ ساختگی است و این برش را در جای دیگری می توان ایجاد کرد تا دو دایره به هم وصل شوند و یک منحنی سادهٔ بستهٔ $C$ به وجود آید . تابع انتگرالده همه جا بجز در $z = 0$ ، $z = \pm 3i$ تحلیلی است . چون هر سه این نقاط خارج ناحیهٔ بستهٔ محدود به $C$ قرار دارند، انتگرال فوق بنابر قضیه کشی صفر است .

نقطهٔ $z_0$ را یک ***نقطهٔ تکین***، یا ***تکینی***، تابع $f$ می نامیم هرگاه $f$ در $z_0$ تحلیلی نباشد، اما هر $\varepsilon$- همسایگی $z_0$ شامل نقاطی باشد که در آنها $f$ تحلیلی باشد . در حالت خاص، اگر $f$ در هر $\varepsilon$- همسایگی $z_0$ بجز در خود $z_0$ ، تحلیلی باشد، آن گاه $z_0$ را یک ***نقطهٔ تکین تنهای*** $f$ می نامند . تابع

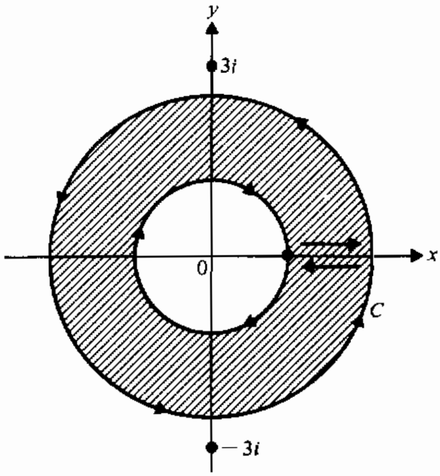
$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+9)} \tag{۶-۵-۱}$$

در $z = 0$ و $z = \pm 3i$ دارای نقاط تکین تنهاست .

اگر $z_0$ یک نقطهٔ تکین تنهای $f$ باشد اما

$$(z - z_0)^m f(z)$$

به ازای $m$ای صحیح و بزرگتر از ۱ تحلیلی باشد، آن گاه $z_0$ یک **قطب مرتبهٔ** $m$ تابع $f$ نامیده می شود. اگر $m = 1$، قطب، **قطب ساده** نامیده می شود. تابع در معادلهٔ (۶-۵-۱) دارای یک قطب مرتبهٔ ۲ در $z = 0$ و قطبهای ساده در $z = \pm 3i$ است .




شکل ۶-۵-۲

از شکل ۶-۵-۲ پیداست که مقدار انتگرال بستگی به دایره های خاص انتخاب شده ندارد، هر مسیر بستهٔ دیگر همین نتیجه را خواهد داد، به شرط آن که تابع انتگرالده در ناحیهٔ محدود به آن مسیر و روی مرزش تحلیلی باقی بماند .

حال فرض کنید یک تابع تحلیلی $f(z)$ دارای یک نقطهٔ تکین تنها در $z = z_0$ باشد . در این صورت کمّیت

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\, d\zeta$$

**مانده** $f(z)$ در $z_0$ نامیده می شود، به شرط آن که مسیر $C$ هیچ نقطه ای تکین بجز $z_0$ را در بر نگیرد ؛ می نویسیم

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\, d\zeta. \qquad (۶-۵-۲)$$

برای فهم روشنتر تعریف بالا، انتگرال زیر را محاسبه می کنیم

$$\int_C (z - z_0)^m\, dz, \qquad (۶-۵-۳)$$

که در آن $C$ دایره‌ای به شعاع $\rho$ و به مرکز $z_0$ در جهت مثبت است (شکل ۶-۵-۳) . برحسب پارامتر $t$ ، مسیر $C$ را می توان به صورت زیر نوشت

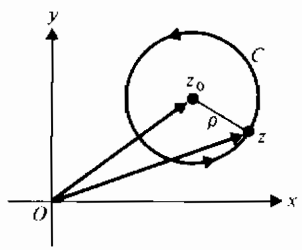
$$z = z_0 + \rho(\cos t + i \sin t), \qquad 0 < t \le 2\pi.$$

بنابراین انتگرال (۶-۵-۳) به صورت زیر در می آید

$$\int_0^{2\pi} (\rho(\cos t + i \sin t))^m \rho(-\sin t + i \cos t)\, dt$$
$$= i\rho^{m+1}\int_0^{2\pi} (\cos (m+1)t + i \sin (m+1)t)\, dt$$
$$= 0$$

برای تمام مقادیر صحیح $m$ بجز $m = -1$ (تمرین ۱ را ملاحظه کنید) . پس

$$\int_C (z - z_0)^m\, dz = \begin{cases} 2\pi i, & m = -1, \\ 0, & \text{برای سایر مقادیر صحیح } m \end{cases}$$



شکل ۶-۵-۳ مسیر $C$ برای (۶-۵-۳)

حال نتیجه می شود که اگر $f(z)$ در یک ناحیهٔ $R$ بجز در قطب سادهٔ $z_0$ تحلیلی باشد، آن گاه $f(z)$ را می توان به صورت یک سری تیلور حول نقطهٔ $z_0$ بسط داد . سری حاصل به شکل زیر است

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

و انتگرال روی هر مسیر بستهٔ ساده شامل فقط نقطهٔ تکین $z_0$ ، نشان می دهد که

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\, d\zeta = \text{Res}[f(z), z_0]. \tag{۶-۵-۴}$$

معادلهٔ (۶-۵-۴) یک راه دیگر برای یافتن ماندهٔ تابع $f(z)$ در $z_0$ وقتی $z_0$ یک قطب ساده باشد، پیشنهاد می کند . داریم

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = a_{-1} = \text{Res}[f(z), z_0]. \tag{۶-۵-۵}$$

این نتیجه حالتی خاص از قضیهٔ زیر است، که بدون اثبات آن را بیان می کنیم .

**قضیهٔ ۶-۵-۳** :فرض کنید $f(z)$ در یک همسایگی $z_0$ بجز در $z_0$ که دارای یک قطب مرتبهٔ $m$ است تحلیلی باشد . آن گاه

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z - z_0)^m f(z)). \tag{۶-۵-۶}$$

همان طور که در قضیهٔ کشی زیر نشان داده می شود، مانده ها در محاسبه انتگرالهای مسیری بسیار مهم هستند .

**قضیه ۶-۵-۴** ***(قضیهٔ مانده)*** : فرض کنید $C$ یک مسیر سادهٔ بسته و $f(z)$ بر $C$ و در ناحیهٔ محدود به $C$ بجز در تعداد متناهی نقاط تکین $z_1$ ، $z_2$ ، ... ، $z_n$ درون $C$ تحلیلی باشد . در این صورت

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Res}[f(z), z_j], \tag{۶-۵-۷}$$

که $C$ در جهت مثبت پیموده می شود .

**مثال ۶-۵-۳** انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_C \frac{3z + 1}{z^2 - z}\, dz,$$

که $C$ دایره ای به شعاع ۲ و به مرکز مبدأ است و در جهت مثبت پیموده می شود (شکل ۶-۵-۴) .

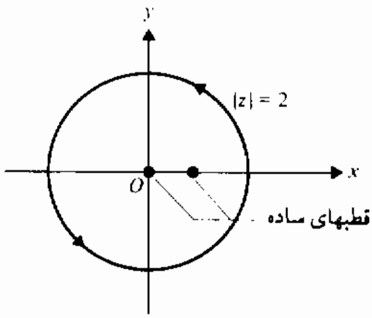
***حل*** : داریم

$$\lim_{z \to 0}\frac{z(3z + 1)}{z(z - 1)} = -1$$

و

$$\lim_{z \to 1} \frac{(z-1)(3z+1)}{z(z-1)} = 4;$$

بنابراین مجموع مانده‌ها برابر ۳ است، و بنابر قضیهٔ ۶-۵-۴ مقدار انتگرال $6\pi i$ می‌باشد .




شکل ۶-۵-۴

**مثال ۶-۵-۲** حساب کنید

$$\int_C z^2 \exp(2/z)\, dz,$$

که $C$ دایره‌ای به شعاع ۲ و به مرکز مبدأ است .

**حل** : با سری تیلور تابع $\exp z$ حول نقطهٔ $z = 0$ شروع می‌کنیم :

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots,$$

$$\exp\left(\frac{2}{z}\right) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{2!z^2} + \frac{2^3}{3!z^3} + \frac{2^4}{4!z^4} + \cdots,$$

$$f(z) = z^2 \exp\left(\frac{2}{z}\right)$$

$$= z^2 + 2z + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!z} + \frac{2^4}{4!z^2} + \cdots. \qquad (۶-۵-۸)$$

پس $z = 0$ تنها نقطهٔ تکین در ناحیهٔ محدود به $C$ است . در نتیجه ضریب $z^{-1}$ در معادلهٔ (۶-۵-۸) برابر است با

$$a_{-1} = \text{Res}[f(z), 0] = \frac{2^3}{3!}$$

و مقدار انتگرال داده شده برابر $8\pi i/3$ است .

یک سری مانند معادلهٔ (۶-۵-۸) را که شامل توانهای مثبت، منفی و صفر است، ***سری لوران**** می نامند . این سری ، تعمیم سری تیلور است و می توان نشان داد که ضرایب سری لوران تابع $f(z)$ ، یعنی ،

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

به صورت زیر داده می شوند

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \qquad (۶-۵-۹)$$

و منحصربه فردند . قسمتی از سری که شامل نماهای نامنفی $(z - z_0)$ است ، **قسمت منظم** ، و آن قسمت از سری که شامل نماهای منفی از $(z - z_0)$ است ، ***قسمت اصلی*** سری لوران نام دارد . سری در یک ناحیهٔ حلقوی ، یعنی ناحیهٔ بین دو دایره همگراست (تمرین ۲ را ملاحظه کنید) .

یکی از مهمترین قضایا در نظریهٔ توابع تحلیلی ، فرمول انتگرال کشی است . این قضیه یک *فرمول* نامیده می شود زیرا نشان می دهد که مقدار یک تابع تحلیلی در یک نقطهٔ تکین تنها را با استفاده از انتگرالی مسیری می توان محاسبه کرد . قضیهٔ را بدون اثبات بیان می کنیم .

**قضیهٔ ۶-۵-۵** ***(فرمول انتگرال کشی)*** : فرض کنید $C$ یک مسیر سادهٔ بسته باشد که در جهت مثبت پیموده شده است . فرض کنید $f(z)$ در یک ناحیه محدود به $C$ و روی $C$ تحلیلی باشد . آن گاه

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \qquad (۶-۵-۱۰)$$

اگر از تساوی (۶-۵-۱۰) از تابع انتگرال نسبت به $z_0$ بطور پیاپی مشتق بگیریم ، خواهیم داشت

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (۶-۵-۱۱)$$

---

* Pierre A. Laurent ، (۱۸۱۳-۱۸۵۴) نظامی و مهندس فرانسوی

**مثال ۶-۵-۵** انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_C \frac{5z^2+2z+1}{(z-i)^3}\,dz,$$

که $C$ دایره $|z|=2$ است که در جهت حرکت عقربه های ساعت جهت دار شده است .

***حل*** : ملاحظه می کنیم که $f(z)=5z^2+2z+1$ تابعی تام است و می توانیم معادلهٔ (۶-۵-۱۱) را با $n=2$ و $z_0=i$ به کار بریم . چون $f''(i)=10$ انتگرال مسیری مقدارش برابر $-10\pi i$ می باشد، که علامت منفی به خاطر جهت منفی مسیر است .

این بخش را با یک قضیهٔ مهم در مورد توابع تحلیلی به پایان می بریم .

**قضیهٔ ۶-۵-۶** ***(قضیهٔ لیوویل)*** : تنها توابع تام کران دار، توابع ثابت هستند .

***اثبات*** : فرض کنید $f(z)$ یک تابع تام کران دار باشد . پس یک ثابت $M$ وجود دارد بطوری که

$$|f(z)|\le M$$

در این صورت بنابر معادلهٔ (۶-۵-۱۱) با $n=1$ و $z_0$ دلخواه

$$|f'(z_0)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right|\le \frac{1}{2\pi}\int_C\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right|dz$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^2}\cdot 2\pi r=\frac{M}{r},$$

که $|z-z_0|=r$ . بنابراین با انتخاب $r$ به دلخواه بزرگ، می توان $|f'(z_0)|$ را به دلخواه کوچک کرد . به عبارت دیگر، $f'(z_0)=0$ و، چون $z_0$ دلخواه است، $f'(z)=0$، برای هر z ، یعنی، $f(z)$ ثابت است .

## تمرینهای ۶-۵

۱- الف) نشان دهید

$$\int_0^{2\pi}\cos(m+1)t\,dt=\begin{cases}2\pi, & m=-1,\\ 0, & \text{برای سایر مقادیر صحیح } m\end{cases}$$

ب)

$$\int_0^{2\pi}\sin(m+1)t\,dt=0$$

برای همهٔ مقادیر صحیح $m$ .

۲- الف) اگر بخواهیم تابع

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z^2 - 3z + 2)}$$

را به صورت یک سری لوران برحسب توانهای $z + 1$ بنویسیم، ابتدا لازم است که تابع را برحسب توانهای $z + 1$ بنویسیم . نشان دهید نتیجه به صورت زیر است

$$f(z) = \frac{(z + 1)^2 - 2(z + 1) + 2}{(z + 1 - 1)(z + 1 - 2)(z + 1 - 3)}.$$

ب) با فرض $\zeta = z + 1$ و تجزیه به کسرهای جزئی به دست می‌آوریم

$$\frac{\zeta^2 - 2\zeta + 2}{(\zeta - 1)(\zeta - 2)(\zeta - 3)} = \frac{1}{2(\zeta - 1)} - \frac{2}{\zeta - 2} + \frac{5}{2(\zeta - 3)}$$

پ) سری لوران زیر را به دست آورید

$$\frac{1}{2\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\zeta^n} - \frac{2}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\zeta}\right)^n + \frac{5}{2\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{\zeta}\right)^n,$$

که برای $|\zeta| > 3$ معتبر است .

ت) بنابراین نشان دهید

$$\frac{z^2 + 1}{z(z^2 - 3z + 2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1 - 2^{n+2} + 5(3)^n)(z + 1)^{-(n+1)},$$

برای $|z + 1| > 3$ معتبر است .

۳- توضیح دهید چگونه فرض قضیهٔ ۶-۵-۲ در مقایسه با فرض قضیهٔ ۶-۵-۱ قویتر شده است .

۴- معادلهٔ (۶-۵-۱۱) را از معادلهٔ (۶-۵-۱۰) به دست آورید .

۵- انتگرال

$$\int_C f(z)\,dz$$

را در هر حالت اگر $f(z) = \bar{z}$ و $C$ به صورتهای زیر باشد، محاسبه کنید .

الف) در جهت عقربه های ساعت $C: z = e^{i\phi}, 0 \le \phi \le \pi;$

ب) در جهت خلاف عقربه های ساعت $C: z = e^{i\phi}, 0 \le \phi \le 2\pi;$

پ) $C$ مربعی است به ضلع ۲ به مرکز مبدأ که از نقطهٔ $(1, 0)$ می گذرد؛ در جهت عقربه های ساعت .

۶- انتگرال

$$\int_C f(z)\, dz$$

را در هر حالت اگر $f(z) = \frac{(z+2)}{z}$ و $C$ به صورتهای زیر باشد، محاسبه کنید .

الف) از (۰ ، ۲) تا (۰ ، ۲-) ؛ در خلاف جهت عقربه های ساعت $C: x^2 + y^2 = 4$

ب) مسیر بسته؛ در خلاف عقربه های ساعت $C: x^2 + y^2 = 4$

پ) از (۰ ، ۲) تا (۰ ، ۲-) ؛ در جهت عقربه های ساعت $C: x^2 + y^2 = 4$

۷- توضیح دهید چرا توابع تمرینهای ۵ و ۶ در شرایط قضیهٔ ۶-۵-۱ صدق نمی کنند .

۸- انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_C \frac{(9z^2 - iz + 4)}{z(z^2+1)}\, dz,$$

که $C$ دایرهٔ $|z| = 2$ و در جهت مثبت است . (*راهنمایی* : از تجزیه به کسرهای جزئی استفاده کنید.)

۹- اگر $P_n(z)$ یک چندجمله ای از درجهٔ $n$ و $C$ مسیری بسته باشد، توضیح دهید چرا

$$\int_C P_n(z)\, dz = 0.$$

۱۰- فرض کنید $C$ یک مسیر بسته باشد که در جهت مثبت پیموده شده است . نشان دهید

$$\int_C \frac{z^3 + 2z}{(z - z_0)^3}\, dz = \begin{cases} 6\pi i z_0, & \text{اگر } z_0 \text{ درون } C \text{ باشد} \\ 0, & \text{اگر } z_0 \text{ بیرون } C \text{ باشد} \end{cases}$$

۱۱- انتگرال

$$\int_C \frac{\sqrt{z}}{(z-1)^3}\, dz,$$

را حساب کنید، که $C$ مسیر بستهٔ $|z - 1| = 1/2$ و در جهت مثبت است

۱۲- انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_C \frac{e^z + \sin z}{z}\, dz,$$

که $C$ مسیر بستهٔ $|z - 2| = 3$ است که در جهت مثبت پیموده می شود .

۱۳- توضیح دهید چگونه از قضیهٔ ۶-۵-۶ نتیجه می شود که توابع زیر کران دار نیستند .

الف) $P_n(z)$ ، چندجمله ایهای درجه $n \geq 1$

ب) $e^z$      پ) $\sin z$

ت) $\sinh z$      ث) $\cosh z$

۱۴- با توجه به این که تنها قطب تابع

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

در نیم صفحهٔ بالایی قطب سادهٔ $z = i$ است، نتیجهٔ زیر را به دست آورید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

۱۵- با استفاده از روشی مشابه تمرین ۱۴ ، نتیجهٔ زیر را به دست آورید

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

۱۶- نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{a} \exp(-\omega a), \qquad a > 0.$$

۱۷- الف) با تقسیم طولانی نشان دهید

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots.$$

ب) با تقسیم طولانی نشان دهید

$$\frac{1}{-z+1} = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right).$$

پ) با استفاده از آزمون نسبت نشان دهید سری قسمت (الف) برای $|z| < 1$ و سری قسمت (ب) برای $|z| > 1$ همگراست .

۱۸- الف) با استفاده از تجزیه به کسرهای جزئی ، نشان دهید

$$\frac{1}{(1-z)(2-z)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

ب) با نوشتن

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)},$$

نشان دهید

$$-\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n},$$

و این که برای $|z| > 1$ معتبر است.

پ) با تقسیم طولانی نشان دهید

$$\frac{1}{-2+z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}},$$

و این برابری برای $|z| < 2$ معتبر است .

ت) سری لوران را برای

$$\frac{1}{(1-z)(2-z)},$$

طوری بنویسید که برای $1 < |z| < 2$ معتبر باشد .

۱۹- سری لوران را برای

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)},$$

که برای $1 < |z| < 3$ معتبر باشد، بنویسید .

۲۰- چندجمله ایهای لژاندر $P_n(z)$ با فرمول **رودریگ** به صورت زیر تعریف می شود :

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(z^2-1)^n}{dz^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

به کمک معادلهٔ (۶-۵-۱۱) ***نمایش انتگرالی*** زیر را به دست آورید .

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-z)^{n+1}} \, d\zeta,$$

که $C$ مسیر بستهٔ ساده ای است که نقطهٔ $z$ را در بر دارد .

۲۱- توابع بسل نوع اوّل مرتبهٔ $n$ $(n \geq 0)$ را می توان با ***تابع مولّد*** زیر تعریف نمود

$$\exp\left(z\left(t-\frac{1}{t}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n.$$

وقتی طرف چپ برحسب سری توانی از $t$ بسط داده شود و ضرایب $t^n$ مساوی هم قرار داده شوند ، نتیجه عبارتی برای $J_n(z)$ خواهد بود . با استفاده از معادلهٔ (۶-۵-۹)

*نمایش انتگرالی* زیر را به دست آورید

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos (n\theta - z \sin \theta)\, d\theta.$$

۲۲- اگر $f(z)$ تابعی تام باشد. نشان دهید

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$$

مستقل از مسیر بین $z_1$ و $z_2$ است.

## ۶-۶ کاربردها

در این بخش چند کاربرد از کاربردهای فراوان نظریهٔ توابع مختلط را ارائه می کنیم. چون نظریهٔ توابع تحلیلی، کاربردهای فراوان و گوناگون دارد، مثالهایی که در این جا داده می شود به هیچ وجه همهٔ جنبه ها را دربر نمی گیرند. مثالهای دیگر را در کتابهایی که در مراجع پایان کتاب فهرست شده اند، می توان یافت.

### *تجزیه به کسرهای جزئی*

تجزیه به کسرهای جزئی توابع گویا، یعنی توابعی به صورت $P(z)/Q(z)$ که $P$ و $Q$ چندجمله ای هستند، کاربردهای زیاد دارد. در ریاضیات عمومی، این شیوه به عنوان یکی از روشهای انتگرال گیری مطالعه می شود. مثلاً در یافتن تبدیل معکوس لاپلاس، و یا برای به دست آوردن بسط سری لوران یک تابع مفروض و یافتن مانده ها از این شیوه استفاده می شود.

برای بحث حاضر، فرض خواهیم کرد که در $P(z)/Q(z)$ درجهٔ $P(z)$، $m$ و درجهٔ $Q(z)$ برابر با $n$ است و $m < n$. اگر $m \geq n$، آن گاه با انجام عمل تقسیم، باقی مانده را می توان به عنوان تابعی گویا در نظر گرفت که در آن درجهٔ صورت از مخرج کمتر است. بنابر قضیه اساسی جبر* هرچند جمله ای غیرثابت $Q(z)$ را می توان به عوامل خطی تجزیه نمود. ابتدا فرض کنید این عوامل همگی متمایز باشند. آن گاه

---

* هرچند جمله ای غیرثابت $Q(z)$ با ضرایب حقیقی یا مختلط حداقل دارای یک ریشه در صفحهٔ مختلط است.

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{A_n}{z-z_n}$$

و می توانیم بنویسیم

$$(z-z_j)f(z)=\phi_j(z).$$

بنابراین

$$\phi_j(z_j)=A_j, \qquad j=1,2,\ldots,n,$$

یعنی

$$A_j=\text{Res}[f(z),z_j], \tag{۶-۶-۱}$$

که ماندهٔ $f(z)$ در $z_j$ است (معادلهٔ ۶-۵-۵ را ملاحظه کنید).

**مثال ۶-۶-۱** تابع گویای زیر را به کسرهای جزئی تجزیه کنید

$$f(z)=\frac{-7z-1}{z^3-7z+6}$$

*حل*: چون $z=1$، یک ریشهٔ $z^3-7z+6=0$ است، پس $(z-1)$ یک عامل مخرج $f(z)$ می باشد. عوامل دیگر بسادگی با تقسیم به دست می آیند؛ پس

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{-7z-1}{z^3-7z+6}=\frac{-7z-1}{(z-1)(z-2)(z+3)}\\&=\frac{A_1}{z-1}+\frac{A_2}{z-2}+\frac{A_3}{z+3},\end{aligned}$$

و با استفاده از معادلهٔ (۶-۶-۱)، داریم

$$A_1=2, \qquad A_2=-3, \qquad A_3=1. \quad \blacksquare$$

بعد حالتی را در نظر می گیریم که $f(z)=P(z)/Q(z)$ یک قطب مرتبهٔ $n$ در $z_1$ داشته باشد. در آن صورت

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{(z-z_1)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(z-z_1)^n}$$

بنابراین، با

$$\begin{aligned}\phi(z)&=(z-z_1)^nf(z)\\&=A_1(z-z_1)^{n-1}+A_2(z-z_1)^{n-2}+\cdots+A_n,\end{aligned}$$

داریم

$$A_n = \phi(z_1).$$

بطور کلی (تمرین ۱) .

$$A_j = \frac{\phi^{(n-j)}(z_1)}{(n-j)!} = \mathrm{Res}[f(z), z_1],$$

که با معادلهٔ (۶-۵-۶) هماهنگی دارد .

**مثال ۶-۶-۲** تابع گویای زیر را به کسرهای جزئی تجزیه کنید

$$f(z) = \frac{3z^2 + 8z + 6}{(z+2)^3}$$

*حل* : در این جا داریم

$$\begin{aligned}\phi(z) &= (z+2)^3 f(z)\\ &= 3z^2 + 8z + 6\\ &= A_1(z+2)^2 + A_2(z+2) + A_3;\end{aligned}$$

بنابراین ،

$$A_3 = \phi(-2) - 2.$$

همچنین

$$\phi'(z) = 2A_1(z+2) + A_2$$

و

$$\phi''(z) = 2A_1,$$

بنابراین

$$A_2 = \phi'(-2) = 6(-2) + 8 = -4$$

و

$$A_1 = \frac{\phi''(-2)}{2} = 3.$$

پس

$$\frac{3z^2 + 8z + 6}{(z+2)^3} = \frac{3}{z+2} - \frac{4}{(z+2)^2} + \frac{2}{(z+2)^3}. \quad \blacksquare$$

توابعی را که هم قطبهای ساده و هم قطبهای مرتبهٔ $n > 1$ دارند می توان با استفاده از ترکیبی از روشهایی که در دو مثال بالا تشریح شد، تجزیه نمود. مسائلی از این نوع را می توان در تمرینها یافت.

## تبدیل لاپلاس

یادآوری می کنیم که تبدیل فوریه (معادلهٔ ۳-۳-۱۵ را ببینید) به صورت زیر تعریف می شود.

$$\bar{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}\, dt. \qquad (۶-۶-۲)$$

اگر $f(t)$ را برای همهٔ مقادیر $t \geq 0$ تعریف کنیم و برای $t < 0$، قرار دهیم $f(t) = 0$، آن گاه $f$ بر تمام خط حقیقی تعریف شده است. بنابراین می توان معادلهٔ (۶-۶-۲) را به صورت زیر نوشت

$$\bar{f}(\alpha) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}\, dt,$$

و اگر به جای $\alpha$ قرار دهیم $(i)(s)$ که $s > 0$، آن گاه به دست می آوریم

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt, \qquad (۶-۶-۳)$$

که همان تعریف تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است. می توان نشان داد که هرگاه برای مقادیر مثبت $M$ و $a$،

$$|f(t)| \leq M \exp(at)$$

آن گاه انتگرال معادلهٔ (۶-۶-۳) برای هر $s$ ***مختلط*** که $\mathrm{Re}(s) > a$ همگراست. پس، به مفهوم کلی، تبدیل لاپلاس یک تبدیل از حوزهٔ $t$ به حوزهٔ ***مختلط*** $s$ است. بنابراین، زوجهای تبدیل لاپلاس که در حالت حقیقی عبارتند از

$$f(t) = \exp(at) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a,$$

در این جا به صورت زیر نوشته می شوند

$$f(t) = \exp(at) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}, \qquad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a). \qquad (۶-۶-۴)$$

در این جا **فرمول انعکاس لاپلاس** مورد توجه است، چون نمی توان انتظار داشت که هر تابع مورد نظر را در یک جدول تبدیلات لاپلاس بتوان یافت . با دانستن این مطلب که تبدیل فوریه دارای یک فرمول انعکاس است و دو تبدیل با هم ارتباط دارند، به صورت زیر عمل می کنیم .

به خاطر بیاورید برای آن که تبدیل فوریهٔ $f(t)$ موجود باشد، $f(t)$ باید بر خط حقیقی بطور مطلق انتگرال پذیر باشد (قضیهٔ ۳-۳-۱ را ملاحظه کنید) . متأسفانه بسیاری از توابع مورد توجه در ریاضیات کاربردی بطور مطلق انتگرال پذیر نیستند ($\sin \omega t$ مثالی ساده است) . از طرف دیگر، اگر تعریف کنیم $f(t) = 0$ برای $-\infty < t < 0$ و در نظر بگیریم

$$\phi(t) = \exp(-\gamma t) f(t), \qquad \gamma > 0, \tag{۶-۶-۵}$$

آن گاه $\phi(t)$ بر خط حقیقی بطور مطلق انتگرال پذیر است (تمرین ۲) . بنابراین $\phi(t)$ دارای یک نمایش انتگرال فوریه است که به صورت زیر داده می شود (معادلهٔ ۳-۳-۱۴ را ببینید)

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\eta t)\, d\eta \int_0^{\infty} \phi(\xi) \exp(-i\xi\eta)\, d\xi.$$

اگر به جای $\phi(t)$ از معادلهٔ (۶-۶-۵) قرار دهیم، داریم

$$f(t) = \frac{\exp(\gamma t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\eta t)\, d\eta \int_0^{\infty} f(\xi) \exp(-\xi(\gamma + i\eta))\, d\xi.$$

سرانجام با جایگزینی

$$s = \gamma + i\eta, \qquad ds = i\, d\eta, \qquad F(s) = \int_0^{\infty} f(\xi) \exp(-s\xi)\, d\xi,$$

به دست می آوریم (تمرین ۳)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) \exp(st)\, ds, \tag{۶-۶-۶}$$

که **فرمول معکوس سازی تبدیل لاپلاس** است .

در معادلهٔ (۶-۶-۶) $s$ یک متغیر مختلط و $\gamma$ یک عدد مثبت حقیقی است ؛ بنابراین انتگرال انعکاسی در طول یک مسیر به صورت خط مستقیم در صفحهٔ مختلط است . این مسیر، **مسیر برومویچ*** نیز نامیده می شود . اگرچه انتگرال مختلط معادلهٔ (۶-۶-۶) را می توان

* T. J. I.A. Bromwich (۱۸۷۵-۱۹۲۰) ریاضی دان انگلیسی

بسادگی به یک انتگرال منحنی الخط حقیقی تبدیل کرد، ولی محاسبهٔ آن تا حدی مشکل است . اغلب خیلی ساده تر است که از انتگرال گیری مسیری و نظریهٔ مانده ها استفاده کنیم . با یک مثال روش را تشریح می کنیم .

**مثال ۶-۶-۳** تابع زیر داده شده است

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

$f(t)$ را با استفاده از فرمول انعکاس تبدیل لاپلاس (۶-۶-۶) بیابید

**حل** : داریم

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{s \exp{(st)}}{s^2 + \omega^2}\, ds.$$

مسیر بستهٔ نشان داده شده در شکل ۶-۶-۱ را در نظر بگیرید . $\gamma$ را یک عدد مثبت دلخواه و $\beta$ را عددی به قدر کافی بزرگ اختیار کرده ایم چنان که دایره ای به مرکز مبدأ که از نقاط $\gamma \pm i\beta$ می گذرد قطبهای سادهٔ $\pm i\omega$ را دربر بگیرد . در این صورت می توان نوشت

$$f(t) = \lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\gamma + C_\beta} \frac{s \exp{(st)}}{s^2 + \omega^2}\, ds - \lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\beta} \frac{s \exp{(st)}}{s^2 + \omega^2}\, ds.$$

می توان نشان داد که در این حالت حد دوم برابر صفر است، همین طور این حد برای دیگر توابع $F(s)$ تحت شرایطی معیّن صفر است (تمرین ۲۶) . اوّلین انتگرال روی یک مسیر بستهٔ ساده است که دو قطب ساده را دربر دارد، بنابراین مقدار آن بنابر معادلهٔ (۶-۵-۷) عبارت است از :

$$\frac{i\omega \exp{(i\omega t)}}{2i\omega} + \frac{-i\omega \exp{(-i\omega t)}}{-2i\omega} = \cos \omega t. \quad \blacksquare$$

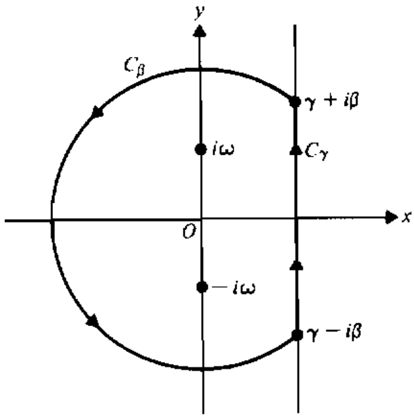
در کاربردها $F(s)$ بیشتر به شکل زیر است

$$F(s) = \frac{p(s)}{Q(s)},$$

که $Q(s)$ چندجمله ای از درجهٔ $n$ و کمتر از درجهٔ $p(s)$ است . اگر $Q(s)$ را بتوان به عوامل خطی متمایز $(s - s_j)$ ، $j = 1, 2, \ldots, n$ تجزیه نمود، آن گاه فرمول انعکاس تبدیل لاپلاس را می توان به صورت زیر نوشت

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{p(s_j) \exp{(s_j t)}}{Q'(s_j)}. \tag{۶-۶-۷}$$

فرمول اخیر را ***فرمول بسط هویساید*** (Heaviside) نیز می نامند . در تمام بحث قبلی فرض کرده ایم $p(s_j) \neq 0$ .




شکل ۶-۶-۱ مسیر برومویچ

### *مکانیک سیالات*

در مکانیک سیالات (آئرودینامیک و هیدرودینامیک) فرضهای ساده کنندهٔ معینی را در نظر می گیریم . جریانها را در یک صفحه در نظر می گیریم، یعنی، رفتار سیال در ***صفحات موازی*** صفحهٔ $xy$ دقیقاً مانند رفتار آن در صفحهٔ $xy$ است . تمام موانع جریان نیز در صفحهٔ $xy$ فرض می شوند . همچنین فرض می کنیم که جریان سیال مستقل از زمان، تراکم ناپذیر، و غیرچرخشی است . چنین سیالی را ***سیال ایده آل*** نیز می نامند .

چون سیال تراکم ناپذیر است، بردار سرعت آن $\mathbf{V}$ برابر گرادیان یک تابع اسکالر $\phi$ است، که آن را ***پتانسیل سرعت*** می نامند . علاوه بر این $\phi$ در معادلهٔ لاپلاس در هر ناحیه ای که بدون چشمه و چاه باشد، صدق می کند . این مطلب را می توان با بررسی میدان برداری سرعت $\mathbf{V}$ با مؤلفه های $V_x$ و $V_y$ نشان داد . بنابر قضیهٔ گرین

$$\int_C (V_x\,dx + V_y\,dy) = \iint_R \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

که $C$ یک منحنی بستهٔ ساده است که ناحیهٔ $R$ را احاطه می کند . اگر سیال غیرچرخشی باشد

$(\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0})$ ، آن گاه طرف راست برابر صفر است (تمرین ۴)؛ بنابراین طرف چپ، که گردش پیرامون $C$ است نیز برابر صفر است . این به نوبه خود وجود یک تابع اسکالر $\phi(x, y)$ را ایجاب می کند، بطوری که

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = V_x \quad \text{و} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_y.$$

بنابراین بردار $\mathbf{V}$ به عنوان یک متغیّر مختلط به صورت زیر نوشته می شود

$$\mathbf{V} = V_x + i V_y = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

که نشان می دهد $\mathbf{V}$ گرادیان $\phi$ است .

چون بردار سرعت $\mathbf{V}$ با مؤلّفه های $V_x$ و $V_y$ در جهت جریان است، مؤلّفه های بردار عمود بر جریان عبارتند از $-V_y$ و $V_x$ (تمرین ۵) . شرط تراکم ناپذیری آن است که

$$\int_C (-V_y\, dx + V_x\, dy) = 0,$$

که شار عبوری از مرز $C$ را بیان می کند . مجدداً با استفاده از قضیهٔ گرین در صفحه، داریم

$$\int_C (-V_y\, dx + V_x\, dy) = \iint_R \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

بنابراین تابع اسکالر $\phi(x, y)$ وجود دارد بطوری که

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_y \quad \text{و} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x.$$

علاوه براین، $\phi(x, y)$ و $\psi(x, y)$ در معادله های کشی ـ ریمان صدق می کنند و بنابراین می توانیم تابع تحلیلی

$$w = f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y),$$

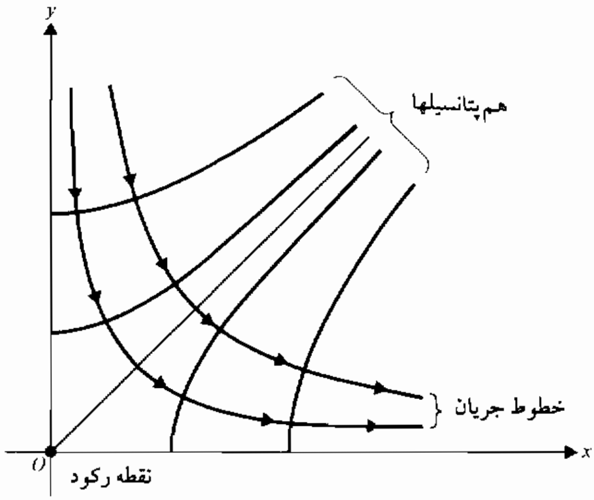
را تشکیل دهیم که ***پتانسیل مختلط*** جریان نامیده می شود . منحنیهای، ثابت $= \phi(x, y)$ ***هم پتانسیلها*** و منحنیهای ثابت $= \psi(x, y)$ ، ***خطوط جریان*** نامیده می شوند . نگاشت $w = f(z)$ بجز در نقاطی که $f'(z) = 0$ ، و این نقاط را، ***نقاط رکود*** یا ***نقاط بحرانی*** می نامند، همدیس است .

**مثال ۶-۶-۴** جریانی را تحلیل کنید که پتانسیل مختلط آن $w = z^2$ است، $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ و $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ .

***حل*** : در این جا داریم

$w = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy);$

بنابراین هم‌پتانسیلها هذلولیهای $x^2 - y^2 = c_1$ و خطوط جریان هذلولیهای $xy = c_2$ هستند . مبدأ یک نقطه رکود است و سیال را می توان به عنوان جریانی پیرامون یک گوشه در نظر گرفت بطوری که محورهای $x$ و $y$ یک مانع تشکیل بدهند . بعضی از هم‌پتانسیلها و خطوط جریان در شکل ۶-۶-۲ نشان داده شده‌اند .




شکل ۶-۶-۲ جریان $w = z^2$

## *حلّ مسائل مقدار مرزی به کمک نگاشت*

قبلاً یک کاربرد نگاشت همدیس را در مثال ۶-۴-۱ دیده‌ایم . حال مسائل مشکلتری را بررسی می کنیم تا امتیازات فراوان نگاشت را نشان دهیم .

نگاشتی که با یک تابع تحلیلی تعریف می شود بخصوص در مسائل شامل معادلهٔ پتانسیل ، دارای اهمیت است . دلیل آن در قضیه زیر نهفته است ، که از اثبات آن چشم می پوشیم .

**قضیهٔ ۶-۶-۱** : اگر $f$ تابعی تحلیلی باشد ، آن گاه تعویض متغیّرهای

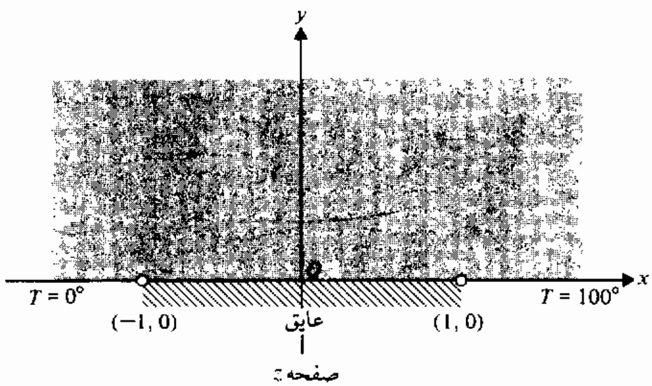
$x + iy = f(u + iv)$

هر تابع همساز از $x$ و $y$ را به یک تابع همساز از $u$ و $v$ نقش می کند .

علاوه بر این، نگاشت به وسیلهٔ یک تابع تحلیلی، نه تنها لاپلاسی را حفظ می کند، بلکه بعضی از شرایط مرزی متداول را که پیش می آیند نیز حفظ می کند . این مطلب را با مثالی تشریح می کنیم .

**مثال ۶-۶-۵** دماهای حالت پایا و کران دار را در یک صفحهٔ نیمه نامتناهی $y > 0$ که در شکل ۶-۶-۳ نشان داده شده اند، بیابید .

***حل*** : این مسأله را نمی توان با روشهای مطرح شده در فصل ۴ حل کرد، زیرا روی قسمتی از مرز دما معلوم و در باقیماندهٔ مرز مشتق قائم دما معلوم است . شرایط مرزی از این نوع را از ***نوع مخلوط***، در مقابل شرایط دیریکله و نویمان نامند .




شکل ۶-۶-۳

مسألهٔ داده شده را به صورت ریاضی به شکل زیر می توان فرمول بندی نمود :

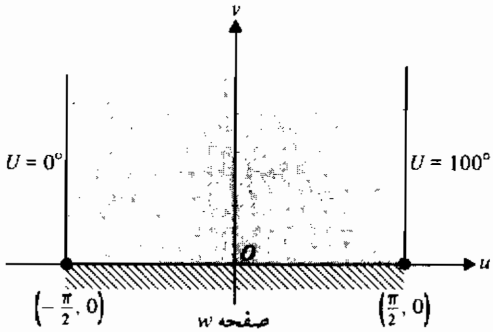
معادله : $T_{xx} + T_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0;$

شرایط مرزی :

$$T(x, 0) = 0, \quad x < -1,$$
$$T_y(x, 0) = 0, \quad -1 < x < 1,$$
$$T(x, 0) = 100, \quad x > 1.$$

نگاشت $z = \sin w$ ، یا معادل آن $w = \sin^{-1} z$ ، مسأله را به صورتی که حل آن خیلی ساده است تبدیل می کند . این نگاشت بتفصیل در مثال ۶-۴-۳ بررسی شد . به عنوان تمرین از دانشجویان

می خواهیم نشان دهند نمودار تبدیل شده همان است که در شکل ۶-۶-۴ نشان داده شده است (تمرین ۶) .




شکل ۶-۶-۴

چون $U$ به $v$ بستگی ندارد (چرا؟)، مسألهٔ تبدیل یافته را می توان به صورت زیر فرمول بندی نمود :

$$\frac{d^2U}{du^2} = 0, \qquad U\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad U\left(\frac{\pi}{2}\right) = 100.$$

جواب به صورت زیر است (تمرین ۷)

$$U(u) = 50\left(1 + \frac{2}{\pi}u\right).$$

اما همان طور که اغلب اتفاق می افتد، سادگی حل مسأله تبدیل شده با مشکلی که برای برگشت به متغیرهای اصلی با آن روبرو می شویم، جبران می شود . داریم

$$\begin{aligned} z = x + iy = \sin w &= \sin(u + iv) \\ &= \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v; \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{x}{\sin u} = \cosh v \quad \text{و} \quad \frac{y}{\cos u} = \sinh v.$$

و از این جا به دست می آوریم

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1,$$

که یک هذلولی است به مرکز مبدأ، با رئوس $(\pm\sin u, 0)$ و کانونهای $(\pm 1, 0)$ . بنابه تعریف، یک نقطهٔ $(x, y)$ روی هذلولی دارای این خاصیت است که تفاضل فواصل $(x, y)$ تا کانونها برابر $2 \sin u$ است . به عبارت دیگر

$$\sin u = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right). \qquad (۶-۶-۸)$$

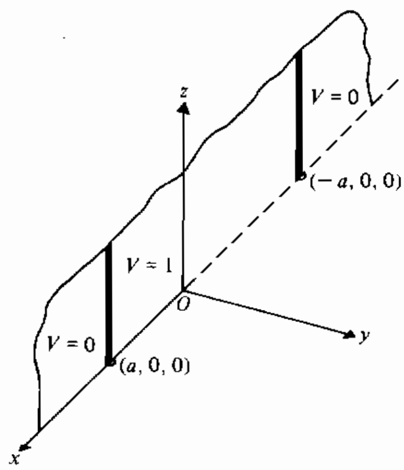
سرانجام جواب مسأله عبارت است از

$$T(x, y) = 50\left(1 + \frac{2}{\pi}\, u\right), \qquad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2},$$

که $u$ با معادلهٔ (۶-۶-۸) تعریف می‌شود . تحقیق کامل این جواب را به عنوان تمرین می گذاریم (تمرین ۸) .

در مثال بعد مسأله ای را در مورد پتانسیل الکتریسیته ساکن ناشی از یک ورقهٔ رسانا بررسی می کنیم .

**مثال ۶-۶-۶** در شکل ۶-۶-۵ یک ورقهٔ رسانای نیمه نامتناهی در صفحهٔ $xz$ نشان داده شده است . نوار بین $x = -a$ و $x = a$ از این ورقه عایق شده بطوری که پتانسیل این نوار را می توان در $V = 1$ نگه داشت در حالی که پتانسیل ورقه در هریک از دو طرف در صفر نگه داشته می شود . پتانسیل $V(x, y, z)$ را در یک نقطهٔ دلخواه $(x, y, z)$ با $y > 0$ ، $z > 0$ پیدا کنید .




شکل ۶-۶-۵

**حل :** واضح است که پتانسیل به $z$ بستگی نخواهد داشت (چرا؟)؛ از این رو مسأله را می توان به صورت مسألهٔ دو بعدی زیر خلاصه کرد .

معادله : $V_{xx} + V_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0;$

شرایط مرزی : $V(x, 0) = 0, \quad |x| > a,$

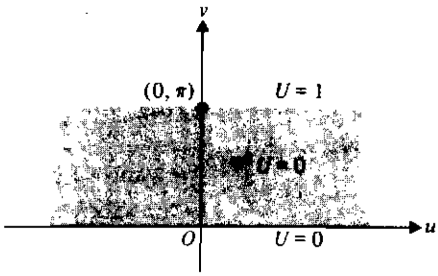
$V(x, 0) = 1, \quad |x| < a,$

$|V(x, y)| < M, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0.$

این مسأله را می توان با استفاده از تبدیل* زیر خیلی ساده کرد

$$w = \mathrm{Log}\left(\frac{z-a}{z+a}\right).$$

این تبدیل صفحهٔ $xy$ را به صفحهٔ $uv$ تبدیل می کند و حال مسألهٔ نشان داده شده در شکل ۶-۶-۶ را داریم (تمرین ۹) . مجدداً این مسأله ای ساده است زیرا جواب به $u$ بستگی ندارد و بنابراین یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی است . جواب عبارت است از $U(u, v) = v/\pi$ (تمرین ۱۰) .




شکل ۶-۶-۶

حال $v$ را برحسب $x$ و $y$ تعیین می کنیم؛ داریم

$$\mathrm{Log}\,(z-a) = \mathrm{Log}\,\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + i \arctan \frac{y}{x-a}$$

بنابراین

---

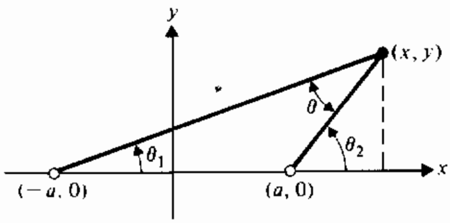
* انتخاب تبدیل مناسب مهم است . برای این منظور استفاده از یک جدول تبدیلات مفید می باشد .

$$v = \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a}$$
$$= \theta_2 - \theta_1,$$

که $\theta_1$ و $\theta_2$ در شکل ۶-۶-۷ نشان داده شده اند . در تمرین ۱۱ خواسته شده که نشان دهید $\theta = \theta_2 - \theta_1$ و تحقیق کنید که

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \qquad (۶-۶-۹)$$

با $0 \leq \theta \leq \pi$ . این نتیجه نشان می دهد پتانسیل در هر نقطه ، تابعی فقط از زاویهٔ مقابل به نواری به عرض $2a$ است .




شکل ۶-۶-۷

در این بخش کوشش کرده ایم که نمونه هایی از کاربردهای متعدد آنالیز مختلط را ارائه کنیم . مطالب نوشته شده در این موضوع نسبتاً فراوان است . برای جزئیات بیشتر باید از مراجعی که در پایان کتاب آورده شده بهره گرفت .

## تمرینهای ۶-۶

۱- با فرض آن که

$$\phi(z) = (z - z_1)^n f(z),$$

نشان دهید

$$\phi^{(n-1)}(z_1) = \text{Res}[f(z), z_1].$$

۲- نشان دهید اگر برای $-\infty < t < 0$ ، $f(t) = 0$ ، آن گاه

$$\phi(t) = \exp(-\gamma t)f(t), \qquad \gamma > 0$$

برخط حقیقی بطور مطلق انتگرال پذیر است .

۳- جزئیات لازم را برای رسیدن به معادلهٔ (۶-۶-۶) انجام دهید .

۴- الف) اگر بردار دو بعدی $\mathbf{V}$ دارای مؤلفه های $V_x$ و $V_y$ باشد و تاو $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ ، نشان دهید بر هر ناحیهٔ $R$ .

$$\iint_R \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\, dy = 0$$

ب) اگر

$$\int_C (V_x\, dx + V_y\, dy) = 0$$

بر هر منحنی بسته سادهٔ $C$ ، نشان دهید یک تابع اسکالر $\phi(x, y)$ وجود دارد بطوری که

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = V_x \quad \text{و} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_y.$$

۵- نشان دهید اگر بردار سرعت $\mathbf{V}$ دارای مؤلفه های $V_x$ و $V_y$ باشد، آن گاه یک بردار عمود بر $\mathbf{V}$ دارای مؤلفه های $-V_y$ و $V_x$ است .

۶- در مثال ۶-۶-۵ از نگاشت $w = \sin^{-1} z$ (یعنی $z = \sin w$) برای تبدیل ناحیهٔ داده شده و شرایط مرزی نشان داده شده استفاده کنید . خطوط ثابت = $x$ و ثابت = $y$ با چه منحنیهایی متناظرند؟

۷- مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید

$$\frac{d^2U}{du^2} = 0, \qquad U\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad U\left(\frac{\pi}{2}\right) = 100.$$

(با مثال ۶-۶-۵ مقایسه کنید)

۸- الف) تحقیق کنید جواب مسألهٔ ۶-۶-۵ در معادلهٔ لاپلاس و تمام شرایط مرزی صدق می کند .

ب) $T(0, 0)$ ، $T(-1, 0)$ ، و $T(1, 0)$ را حساب کنید . آیا این نتایج قابل قبولند؟

پ) $T(0, y)$ را حساب کنید و نتیجه را توضیح دهید .

۹- در مثال ۶-۶-۶ ، تحقیق کنید تبدیل

$$w = \operatorname{Log}\left(\frac{z - a}{z + a}\right)$$

همان طور که نشان داده شد، مسألهٔ داده شده را به مسأله ای برحسب $U$ تبدیل می کند .

۱۰- مسألهٔ مقدار مرزی مثال ۶-۶-۶ را حل کنید،

$$\frac{d^2U}{du^2} = 0, \qquad U(0) = 0, \qquad U(\pi) = 1.$$

۱۱- الف) در مثال ۶-۶-۶ نشان دهید $\theta = \theta_2 - \theta_1$ ، که $\theta$ زاویهٔ مقابل به قطعهٔ $-a \le x \le a$ است .

ب) رابطهٔ زیر را به دست آورید

$$\tan\,\theta = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

پ) تحقیق کنید جواب (۶-۶-۹) در معادلهٔ پتانسیل و همهٔ شرایط مرزی صدق می کند . (راهنمایی : بررسی کنید وقتی $y \to 0$ ، برای $\theta$ چه اتفاقی می افتد) .

۱۲- الف) با فرض آن که

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2},$$

این تابع را به کسرهای جزئی تجزیه کنید .

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)$ را بیابید .

۱۳- کسر

$$f(z) = \frac{z^2 - 5}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

را به کسرهای جزئی تجزیه کنید .

۱۴- کسر

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

را به کسرهای جزئی تجزیه کنید .

۱۵- هریک از کسرهای زیر را به کسرهای جزئی تجزیه کنید .

۱۶- تبدیل لاپلاس معکوس هریک از توابع زیر را بدون استفاده از تجزیه به کسرهای جزئی، به دست آورید.

الف) $\dfrac{2s+1}{s(s^2+1)}$ ب) $\dfrac{s}{s^4-2s^2+1}$ پ) $\dfrac{1}{s^4-1}$

۱۷- تبدیل لاپلاس معکوس هریک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $$F(s) = \frac{s}{(s+1)^2(s^2+3s-10)}$$

ب) $$F(s) = \frac{s+1}{s(s+3)^2}$$

۱۸- با استفاده از فرمول معکوس سازی تبدیل لاپلاس (۶-۶-۶) و فرمول بسط هویساید (۶-۶-۷) تبدیل لاپلاس معکوس هریک از توابع زیر را بیابید.

الف) $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ب) $\dfrac{s-b}{(s-b)^2+\omega^2}$ پ) $\dfrac{\omega}{(s-b)^2+\omega^2}$

ت) $\dfrac{s}{s^2-a^2}$ ث) $\dfrac{a}{s^2-a^2}$

۱۹- مسألهٔ مثال ۶-۶-۳ را با استفاده از مسیر مستطیلی $\gamma - i\beta$ به $\gamma + i\beta$ به $-\gamma + ib$ به $-\gamma - ib$ به $\gamma - i\beta$ حل کنید. چه فرضهایی باید در نظر گرفت؟

۲۰- در شکل ۶-۶-۲ (مثال ۶-۶-۴)، هم‌پتانسیلهایی که برای آنها $c_1 > 0$، $c_1 = 0$، $c_1 < 0$ کدامند؟

۲۱- خطوط جریان و هم‌پتانسیلها را با فرض آن که پتانسیل مختلط $f(z) = z$ است، رسم کنید.

۲۲- الف) خطوط جریان و هم‌پتانسیلها را با فرض آن که پتانسیل مختلط $f(z) = \log |z|$ است، رسم کنید.

ب) اهمیت فیزیکی مبدأ در چیست؟

۲۳- جریانی را که تابع پتانسیل آن به صورت زیر داده شد، تحلیل کنید

$$f(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right).$$

(توجه : از ماشین حساب می توان در رسم منحنیها کمک گرفت . از تقارن استفاده کنید و فقط ناحیهٔ $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ را در نظر بگیرید . )

۲۴- دماهای حالت پایا، کران دار $T(x, y)$ را در ناحیهٔ بی کران $y > 0$ بیابید اگر $T(x, 0) = 0$ برای $x > 0$ و $T(x, 0) = \pi$ برای $x < 0$ . (**راهنمایی** : از نگاشت $z = e^w$ استفاده کنید؛ تمرین ۱۷ بخش ۶-۴ را ملاحظه کنید . )

۲۵- مسائل دیریکلهٔ زیر را حل کنید .

الف) $x > 0$ ، $y > 0$ ، $T(x, 0) = 0$ ، $T(0, y) = 100$

(**راهنمایی** : از تبدیل $w = z^2$ و سپس از $\zeta = e^w$ استفاده کنید)

ب) $\rho < 1$ ، $0 < \phi < \pi$ ، $T_\rho(1, \phi) = 0$ ، $T(\rho, 0) = 0$ ، $T(\rho, \pi) = 100$

(**راهنمایی** : از تبدیل $w = \log z$ استفاده کنید)

پ) برای $\rho < 1$ ، $-\pi < \phi < \pi$ و برای $0 < \phi < \pi$ ، $T(1, \phi) = 0$ و برای $-\pi < \phi < 0$ ، $T(1, \phi) = 0$ (از تبدیل $w = (i - z)/(i + z)$ و تبدیل $w = \log \zeta$ استفاده کنید) .

۲۶- در تمرین ۶-۶-۳ اگر $C_\beta$ یک کمان دایره ای، و $F(s)$ تحلیلی باشد مگر در نقاط تکین منزوی واقع در نیم صفحه $x < \gamma$ ، و برای ثابتهای مثبت $M$ و $k$

$$|F(s)| < \frac{M}{|s|^k}$$

نشان دهید

$$\lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\beta} F(s) \exp(st)\, ds = 0.$$

۲۷- تابع نمایی

$$f(x) = A \exp\left(-\frac{x}{a}\right), \qquad x > 0,$$

را در نظر بگیرید که $A$ و $a$ ثابتهای مثبت هستند . تبدیل فوریهٔ $\bar{f}(\alpha)$ تابع $f(x)$ را پیدا کنید .

# جدولها

جدول ۱- تبدیلات لاپلاس

| $F(s)$ | $f(t)$ |
|---|---|
| 1. $\frac{a}{s}$ | $a$ |
| 2. $\frac{1}{s^2}$ | $t$ |
| 3. $\frac{2}{s^3}$ | $t^2$ |
| 4. $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $t^n$, $n$ صحیح و مثبت |
| 5. $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ | $t^\alpha$, $\alpha$ عدد حقیقی $\alpha > -1$ |
| 6. $\frac{a}{s^2+a^2}$ | $\sin at$ |
| 7. $\frac{s}{s^2+a^2}$ | $\cos at$ |
| 8. $\frac{1}{s-a}$, $s > a$ | $\exp(at)$ |
| 9. $\frac{1}{(s-a)^2}$ | $t \exp(at)$ |
| 10. $\frac{2}{(s-a)^3}$ | $t^2 \exp(at)$ |
| 11. $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ | $t^n \exp(at)$, $n$ صحیح و مثبت |
| 12. $\frac{a}{s^2-a^2}$ | $\sinh at$ |
| 13. $\frac{s}{s^2-a^2}$ | $\cosh at$ |
| 14. $\frac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}$ | $\cos^2 at$ |
| 15. $\frac{s^2-2a^2}{s(s^2-4a^2)}$ | $\cosh^2 at$ |
| 16. $\frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$ | $\sin^2 at$ |

ادامهٔ جدول ۱

| $F(s)$ | $f(t)$ |
|---|---|
| 17. $\dfrac{2a^2}{s(s^2-4a^2)}$ | $\sinh^2 at$ |
| 18. $\dfrac{2a^2s}{s^4+4a^4}$ | $\sin at \sinh at$ |
| 19. $\dfrac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$ | $\cos at \sinh at$ |
| 20. $\dfrac{a(s^2+2a^2)}{s^4+4a^4}$ | $\sin at \cosh at$ |
| 21. $\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$ | $\cos at \cosh at$ |
| 22. $\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$ | $t \sin at$ |
| 23. $\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ | $t \cos at$ |
| 24. $\dfrac{2as}{(s^2-a^2)^2}$ | $t \sinh at$ |
| 25. $\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$ | $t \cosh at$ |
| 26. $\dfrac{a}{(s-b)^2+a^2}$ | $\exp(bt) \sin at$ |
| 27. $\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$ | $\exp(bt) \cos at$ |
| 28. $\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$ | $\dfrac{\exp(at)-\exp(bt)}{a-b}$ |
| 29. $\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$ | $\dfrac{a\exp(at)-b\exp(bt)}{a-b}$ |
| 30. $\dfrac{1}{s(s-a)(s-b)}$ | $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{b\exp(at)-a\exp(bt)}{ab(a-b)}$ |
| 31. $\dfrac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$ | $\dfrac{(c-b)e^{at}+(a-c)e^{bt}+(b-a)e^{ct}}{(a-b)(a-c)(c-b)}$ |
| 32. $\dfrac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$ | $\dfrac{a(b-c)e^{at}+b(c-a)e^{bt}+c(a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$ |
| 33. $\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$ | $\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$ |
| 34. $\dfrac{1}{s(s^2-a^2)}$ | $\dfrac{1}{a^2}(\cosh at-1)$ |
| 35. $1$ | $\delta(t)$ |
| 36. $\exp(-as)$ | $\delta(t-a)$ |
| 37. $\dfrac{1}{s}\exp(-as)$ | $u_a(t)$ |
| 38. $(s^2+a^2)^{-1/2}$ | $J_0(at)$ |
| 39. $\dfrac{1}{s}\log s$ | $-\log t - C$ |

ادامهٔ جدول ۱

| $F(s)$ | $f(t)$ |
|---|---|
| 40. $\log \dfrac{s-a}{s}$ | $\dfrac{1}{t}(1 - \exp(at))$ |
| 41. $\log \dfrac{s-a}{s-b}$ | $\dfrac{1}{t}(\exp(bt) - \exp(at))$ |
| 42. $\log \dfrac{s+a}{s-a}$ | $\dfrac{2}{t}\sinh at$ |
| 43. $\arctan\left(\dfrac{a}{s}\right)$ | $\dfrac{1}{t}\sin at$ |
| 44. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(\dfrac{s^2}{4}\right)\operatorname{erfc}\left(\dfrac{s}{2}\right)$ | $\exp(-t^2)$ |
| 45. $\dfrac{1}{b}F\left(\dfrac{s}{b}\right), \quad b > 0$ | $f(bt)$ |
| 46. $F(s-b)$ | $\exp(bt)f(t)$ |
| 47. $\dfrac{1}{s}\exp(-k\sqrt{s}), \ k > 0$ | $\operatorname{erfc}(k/2\sqrt{t})$ |

# پاسخ و راهنمایی برای تمرینهای انتخابی

## فصل اول

**بخش ۱-۱ ، صفحه ۱۰**

۵- الف) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix};$

پ) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}, (44, 64), \begin{pmatrix} 34 & 52 \\ 94 & 124 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -7 & 16 \end{pmatrix}$

۶- ب) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 5 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 & -7 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 & 0 & 17 \\ 6 & 5 & -4 \\ 15 & -4 & 19 \end{pmatrix};$

ت) $\begin{pmatrix} 32 & 12 & 6 \\ 12 & -4 & 12 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

۷- $\begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$

۹- الف) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}, 16A^2$

ب) $O$ ، ماتریس $3 \times 3$ صفر

۱۰- اگر $CA = A$ و $AC = A$ ، آن‌گاه $C$ ماتریس همانی است .

۱۱- $B^2 - 7B + 6I$ را محاسبه کنید و نشان دهید نتیجه ماتریس $2 \times 2$ صفر است .

۱۲- $a_{11}$ و $a_{12}$ دلخواهند $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

۱۳- $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{11} + 2b_{12} \end{pmatrix}$

۱۴- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

۱۶- الف) $A^2 - AB + BA - B^2$ ؛ ب) اگر $A$ و $B$ تعویض پذیر باشند

۲۷- الف) برای آن که نشان دهیم $AA^T$ متقارن است باید نشان دهیم $AA^T = (AA^T)^T$ ؛
ب) $(A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$ ، که نشان می دهد $A - A^T$ متقارن اریب است.

## بخش ۱-۲ ، صفحه ۲۸

۲- 96

۳- در قسمت (الف) سطر دوم را در 2- ضرب کنید و نتیجه را به سطر اوّل اضافه کنید؛ سطر سوم را در 5- ضرب کنید و نتیجه را به سطر دوم اضافه کنید؛ سطر سوم را در 7 ضرب کنید و نتیجه را به سطر اوّل اضافه کنید. در قسمت (پ) سطر دوم را در 4- ضرب کنید و نتیجه را به سطر اوّل اضافه کنید.

۴- برای تبدیل به صورت پلکانی: در قسمت (ت) سطر دوم را در 1- ضرب کنید و نتیجه را به سطر سوم اضافه کنید؛ سپس سطر سوم را در $-\frac{1}{5}$ ضرب کنید. در قسمت (ث) سطرهای سوم و چهارم را تعویض کنید. در قسمت (ج) سطرهای اوّل و دوم را تعویض کنید

۹- الف) $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; ت) $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + ca_{21} & a_{32} + ca_{22} & a_{33} + ca_{23} \end{pmatrix}$

۱۳- الف) $\{(1, 2, 3)\}$ ؛ پ) $\{(2c, -5c, c)\}$

۱۴- الف) جواب ندارد؛ دستگاه ناسازگار است؛ ب) $\{(0, 0, 0)\}$

۱۵- الف) $\{(-2, 3)\}$ ؛ ب) $\{(0, 0, 0)\}$ ؛ پ) $\{(2, -1)\}$ ؛ ت) $\{(1, -3, -2)\}$

۱۷- الف) 12 ؛ ب) 1 ؛ پ) 42- ؛ ت) 27 ؛ ث) $8.3 \times 10^{-2}$ ؛
ج) $4.6 \times 10^{-4}$ ؛ چ) 12- ؛ ح) 51

۱۸- الف) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$; ب) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$;

پ) $\begin{pmatrix}1&0&k&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$; ت) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&3&0&1\end{pmatrix}$

۱۹- الف) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$; ب) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1\,c&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$;

پ) $\begin{pmatrix}1&0&-k&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$; ت) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&1&0\\0&-3&0&1\end{pmatrix}$

۲۲- $\{(23/9, 31/18, -19/18)^T\}$ یا تقریباً $\{(2.556, 1.722, -1.056)^T\}$

۲۳- الف) و ب) تکین هستند

۲۵- الف) $\{(-6.3333c, -4.8182c, -2.3939c, c)^T\}$

پ) $x_1 = -2x_2 - \frac{5}{2}x_4 + \frac{7}{2}$ , $x_3 = \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}$ ، $x_2$ و $x_4$ دلخواه

۲۶- پ) $\{(1.45, -1.59, -0.27)^T\}$

۲۷- الف) $4b - a = 3$ ؛ ب) $4b - a \neq 3$

۲۸- الف) جواب ندارد؛ پ) $\{(8, 0, 20)\}$

۲۹- از $A = A^T$ نتیجه می شود $A^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ، بنابراین $A^{-1}$ متقارن است.

۳۰- $A^{-1}BA = A^{-1}AB = B$ درنتیجه $A^{-1}BAA^{-1} = BA^{-1}$ ، که نشان می‌دهد $A^{-1}B = BA^{-1}$ .

## بخش ۱-۳ ، صفحه ۴۷

۱- مجموعه نه تحت عمل جمع بسته است و نه تحت عمل ضرب.

۵- الف) $c\mathbf{u} = \mathbf{0}$ فقط اگر $c = 0$ ؛ ب) $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ برای $c$ غیرصفر برقرار است؛

پ) $c_1\mathbf{0} + 0\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 + \dots + 0\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ برای $c_1 \neq 0$ برقرار است.

۶- $c_1(1, 0, 0) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$ به دستگاه زیر منجر می شود

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ \quad\; c_2 + c_3 = 0, \\ \qquad\quad c_3 = 0, \end{cases}$$

که دارای جواب منحصربه فرد $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ است.

۷- الف) $a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) + d(-1, 2, 3) = (x_1, x_2, x_3)$ منجر می شود به

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & x_3 \end{pmatrix}$$

بنابراین با انتخاب $d = 0$ ، داریم $a = x_1 - x_2$ ، $b = x_2 - x_3$ ، $c = x_3$ ، که نشان می دهد هر بردار در $\mathbb{R}^3$ را می توان بطور منحصربه فرد به صورت یک ترکیب خطی از $(1, 0, 0)$ ، $(1, 1, 0)$ ، و $(1, 1, 1)$ نوشت.

۸- ب) $a(1, 0, 0) + b(1, 1, 1) = (x_1, x_2, x_3)$ را نمی توان بطور منحصربه فرد برای $a$ و $b$ حل کرد مگر آن که $x_2 = x_3$

۹- $L(u_1, u_2, u_3) + L(v_1, v_2, v_3) = L(u_1 + v_1, u_2 + v_2, 0)$ و همچنین
$L[(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] = L(u_1 + v_1, u_2 + v_2, 0)$ . علاوه بر این
$L(cu_1, cu_2, cu_3) = L(cu_1, cu_2, 0) = cL(u_1, u_2, u_3)$

۱۰- نشان دهید $\ker L$ تحت عمل جمع و ضرب اسکالر بسته است.

۱۲- الف) فرض کنید $L(u_1, u_2) = (u_2, u_1, 1) = (v_1, v_2, v_3)$ . در این صورت $v_1 = u_2$ ، $v_2 = u_1$ ، $v_3 = 1$ ، که نشان می دهد نگاشت یک مقداری است.

پ) یک نقطه در صفحه $u_1u_2$ در امتداد خطی موازی محور $u_3$ در صفحه $u_3 = 1$ تصویر می شود، سپس در صفحه $u_1 = u_2$ منعکس می شود.

۱۳- الف) و ب) فضای $\mathbb{R}^3$ را پدید می آورند.

۱۴- ب) برای مثال، $a(1, 1, 1) + b(1, 2, 3) + c(2, 2, 0) = (1, 0, 0)$ بسه $3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1$ منجر می شود.

۱۸- بردارها زیرفضایی شامل همه بردارها به صورت $(x_1, x_2, 0)$ پدید می آورند، زیرفضایی

با بُعد دو.

۱۹- الف) و پ)

۲۰- $a(1, 0, 0, -1) + b(0,1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 1) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ به $a = x_1$ ، $b = x_2$ ، $c = x_3$ ، $x_4 = -x_1 + x_2 + x_3$ منجر می شود.

۲۱- ب) تبدیل انعکاس یک نقطه در صفحه $xy$ نسبت به محور $y$ هاست.

۲۲- الف) بردار $(0, 0, 0)$ یک پایه برای هسته است؛ مجموعه $\{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ یک پایه برای بُرد است.

پ) بردار $(1, -1, -1)$ یک پایه برای هسته است؛ مجموعه $\{(1, 0, -3), (0, 1, 1)\}$ یک پایه برای بُرد است.

ث) تبدیل را می توان به صورت زیر نوشت

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = (0, x_1 + x_2 + x_3, x_2 - x_3, 2x_1 + 4x_3).$$

یک پایه برای هسته بردار $(-2, 1, 1)$ است. یک پایه برای بُرد مجموعه $\{(0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -2)\}$ است.

۲۴- الف) صفحه ای که توسط سه نقطه غیرواقع بریک امتداد $(0, 0, 0)$ ، $(-1, 2, 1)$ ، و $(2, 1, 3)$ معیّن می شود.

۲۶- الف) $0(1, 1, 0, 0) + 2(1, 0, 1, 0) - 3(0, 1, 1, 0) + 3(0, 1, 0, 1) = (2, 0, -1, 3)$

۲۷- ب) ، پ) ، و ت) وابسته خطی اند.

۲۹- الف) 3 ؛ ب) 2

۳۰- الف)، ب)، و پ) مستقل خطی اند.

۳۱- الف) دوران به زاویه $(3\pi/2) - 2\theta$ ، که $\theta = \arctan(x_2/x_1)$ ؛

پ) انعکاس نسبت به مبدأ؛

ث) تصویر بر محور $x_1$ در امتداد خطی با شیب ۱- .

۳۳- $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$

۳۶- یک جفت عبارت است از $(0, 1, 0, 0)$ و $(0, 0, 1, 0)$ ؛ جفت دیگر $(1, 0, 0, 0)$ و $(0, 1, 0, 0)$ .

۳۷- الف) $LM\,(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3),$

$ML\,(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -2x_1 - 2x_2 - x_3);$

ب) $LM\,(x_1, x_2, x_3) = (x_2, 0, x_2),$

$ML\,(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_1 + x_3, -2x_1 - 2x_2 - 2x_3);$

هیچ یک از جفتها تعویض پذیر نیستند.

۳۹- $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0)\}$

## بخش ۱-۴ ، صفحه ۶۱

۲- $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 1 + i$ ، $\lambda_3 = 1 - i$

۴- یک ترکیب خطی از $(1, 0, 1)^T$ و $(1, 1, 0)^T$ به صورت زیر است

$(x_3 + x_2, x_2, x_3)^T.$

باید نشان دهیم که بردارهایی به این شکل تحت عمل جمع و ضرب اسکالر بسته است. قضیه ۱-۳-۱ را ببینید.

۵- دترمینان را با استفاده از عناصر سطر سوم بسط دهید.

۹- الف) $\lambda_1 = -1, (1, -1)^T; \lambda_2 = 3, (1, 1)^T;$

پ) $\lambda_1 = 0, (2, -1)^T; \lambda_2 = 3, (1, 1)^T$

۱۰-

الف) $\lambda_1 = -1, (6, 2, -7)^T; \lambda_2 = 1, (0, 1, -1)^T; \lambda_3 = 4, (3, 1, -1)^T;$

پ) $\lambda_1 = 0, (1, 1, 1)^T; \lambda_2 = 1, (1, -1, 2)^T; \lambda_3 = 2, (2, 1, 2)^T$

۱۱- الف) $\lambda_1 = -1, (0, 1, -1)^T; \lambda_2 = 3, (1, 0, 0)^T; \lambda_3 = 7, (0, 1, 1)^T;$

پ) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, (1, 0, -1)^T$ و $(1, -1, 0)^T; \lambda_3 = 4, (1, 1, 1)^T$

۱۲- الف) $\lambda_1 = 1, (4, 3, -1)^T; \lambda_2 = -i, (1 - i, 1, -1)^T; \lambda_3 = i, (1 + i, 1, -1)^T;$

پ) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, (1, 0, -1)^T$ و $(1, -1, 0)^T; \lambda_3 = 3, (1, 1, 1)^T$

۱۳- الف) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, (1, 3, 0)^T$ و $(0, -2, 1)^T; \lambda_3 = 2, (2, 1, 2)^T;$

ب) $\lambda_1 = \lambda_2 = -3, (-2, 1, 0)^T$ و $(3, 0, 1)^T; \lambda_3 = 5, (1, 2, -1)^T;$

ت) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, (1, 0, 2)^T$ و $(0, 1, 2)^T; \lambda_3 = 7, (2, 2, -1)^T;$

چ) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, (1, 0, 0)^T;$ ج) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, (-3, 1, 1)^T$

۱۴- الف) $\lambda_1 = 0, (1, 0, 0)^T; \lambda_2 = 1, (0, 1, 0)^T; \lambda_3 = 2, (1, 0, 1)^T;$

ب) $\lambda_1 = -\sqrt{2}, (1, 0, -1 - \sqrt{2})^T; \lambda_2 = \sqrt{2}, (1, 0, \sqrt{2} - 1)^T; \lambda_3 = 2, (0, 1, 0)^T;$

پ) $\lambda_1 = 1, (3, -1, 3)^T; \lambda_2 = \lambda_3 = 2, (2, 1, 0)^T$ و $(2, 0, 1)^T;$

ت) $\lambda_1 = 0, (3, -2, 1)^T; \lambda_2 = (5 + \sqrt{5})/2, (2, 2, \sqrt{5} - 1)^T; \lambda_3 = (5 - \sqrt{5})/2,$
$(2, 2, -\sqrt{5} - 1)^T;$

ث) همه قطری شدنی هستند.

۱۵- ب) $\lambda_1 = -1, (1, 0, 0, 0)^T; \lambda_2 = 0, (2, 1, 0, 0)^T; \lambda_3 = 2, (1, 3, -3, 0)^T;$
$\lambda_4 = 4, (7, 10, -15, 10)^T$

۱۶- الف) $P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{diag}(4, 2);$ ب) $P = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \text{diag}(3, -2);$

ت) $P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \text{diag}(0, 2)$

۱۷- ب)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}; \text{diag}(3, 6, 9);$$

ت)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}; \text{diag}(0, 2, 5)$$

۱۸- معادله مشخصه عبارت است از $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$ که به صورت $(\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9) = 0$ تجزیه می شود.

## بخش ۱-۵ ، صفحه ۷۷

۶- کافی است نشان دهیم دترمینان ماتریسی که سطرهایش بردارهای داده شده هستند صفر نیست.

۱۵- $\lambda_1 = \frac{k}{2m}(-3 + \sqrt{13}), (2, 1 + \sqrt{13})^T; \lambda_2 = \frac{k}{2m}(-3 - \sqrt{13}), (2, 1 - \sqrt{13})^T$

۱۶- الف) $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\exp(t) + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\exp(4t);$

پ) $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\exp(3t) + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\exp(-3t);$

ث) $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\exp(-2t) + c_2\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\exp(-t) + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\exp(2t)$

۱۷- الف) $\mathbf{x} = (\exp(t), 0)^T$

پ) $$\mathbf{x} = 4\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\exp(2t) - 8\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\exp(-2t);$$

ث) $$\mathbf{x} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\exp(-2t) - \frac{13}{6}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\exp(t) + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\exp(3t)$$

۱۸- الف) $$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\exp(2t) + c_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\exp(-2t) - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\sin t + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cos t;$$

ب) $$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\exp(t) + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\exp(-t) - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}t$$

۲۱- ب) $$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}\exp(5t) + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\exp(-t);$$

پ) $$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\exp(t) + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\exp(-t)$$

۲۲- ب) $$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\exp(t) + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\exp(-2t) + c_3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\exp(3t)$$

۲۳- الف) $$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\exp(t) + c_2\left(\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}t\exp(t) + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\exp(t)\right);$$

ب) $$\mathbf{x} = c_1\left(\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin t\right) + c_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\sin t\right);$$

پ) $$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\exp(2t) + c_2\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}t\exp(2t) + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\exp(2t)\right);$$

ت) $$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} + c_2\left(\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

۲۴- ب) $$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\exp(2t) + c_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}t\exp(2t) + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\exp(2t)\right)$$
$$+ c_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}\right)\exp(2t)$$

۲۶- الف) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^2 + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^4$

۲۷- الف) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} \sin at \\ \cos at \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos at \\ -\sin at \end{pmatrix}$; ب) $x_1^2 + x_2^2 = c_1^2 + c_2^2$

## بخش ۱-۶ ، صفحه ۸۸

۴- الف) $x_1 = 1.200,\ x_2 = -0.400,\ x_3 = 0.200$;

ب) $x_1 = 1.125,\ x_2 = -0.344,\ x_3 = 0.125$;

پ) $x_1 = 1.189,\ x_2 = -0.395,\ x_3 = 0.198$

۶- $x_1 = -0.591,\ x_2 = -1.340,\ x_3 = 4.500,\ x_4 = 3.477$

۷- $x_1 = -1.500,\ x_2 = -3.625,\ x_3 = -2.875$

۸- الف) $x_1 = 1.00,\ x_2 = 1.09,\ x_3 = 0.94$ ؛ ب) $x_1 = x_2 = x_3 = 1.00$

۹- الف) $x_1 = -1496.000,\ x_2 = 2.000,\ x_3 = 0.000$ ؛ ب) $x_1 = x_2 = x_3 = 1.000$

پ) اختلاف به علت خطاهای بزرگ گردکردن است بخصوص در سطر سوم در قسمت (الف)

۱۰- ب) $x_1 = 0.880,\ x_2 = -2.35,\ x_3 = -2.66$

پ) $x_1 = 0.9998,\ x_2 = 1.9995,\ x_3 = -1.002$

۱۲- الف) $55.385$ ؛ ب) $(0.464,\ 0.733,\ 0.323)^T$

پ) $\begin{pmatrix} 0.190 & 0.260 & -0.107 \\ 0.009 & 0.184 & 0.149 \\ 0.173 & -0.110 & 0.144 \end{pmatrix}$

۱۳- الف) $\mathbf{x} = (2.556,\ 1.722,\ -1.056)^T$

۱۴- $\mathbf{x} = (1.453,\ -1.589,\ -0.275)^T$

۱۵- الف) $7.004$ ؛ ب) $(1.000,\ 0.691,\ 1.812)^T$

۱۶- الف) $\lambda_1 = 4,\ (1,\ 0,\ 0)^T;\ \lambda_2 = 2,\ (-1/2,\ 1,\ 0)^T;\ \lambda_3 = -1,\ (1/15,\ -1/3,\ 1)^T$

ب) $4.053,\ (1.000,\ 0.053,\ -0.001)^T$

۱۷- $3.491,\ (1.000,\ 0.936,\ 0.777)^T$

۱۹- $\lambda_1 = 8.387, (0.808, 0.772, 1)^T;\ \lambda_2 = 4.487, (0.217, 1, -0.947)^T;$
$\lambda_3 = 2.126, (1, -0.567, -0.370)^T$

۲۰- 19.29 مقدار ویژه غالب است.

۲۱- ماتریسهای ضرایب در تمرینهای ۴ و ۵ معیّن مثبت هستند.

۲۵- مقدار ویژه میانی را می توان با استفاده از اثر و دترمینان همان گونه که در معادله ۱-۶-۴ نشان داده شده، به دست آورد.

۲۶- الف) $|H| \doteq 1.65 \times 10^{-7}$

**بخش ۱-۷، صفحه ۱۰۳**

۹- همه آنها فضاهای برداری هستند.

۱۱- $\{(\cos x, 0), (0, \sin x)\}$

۱۲- الف) دو؛ ب) دو؛ پ) دو؛ ت) چهار

۱۳- الف) $\text{adj}\ A = \begin{pmatrix} -26 & 7 & 16 \\ -2 & 7 & -2 \\ -4 & -7 & -4 \end{pmatrix}, |A| = -42;$

ب) $\text{adj}\ A = \begin{pmatrix} 6 & 21 & -9 & -36 \\ -1 & 1 & 6 & -3 \\ 10 & 17 & -6 & -51 \\ 4 & -4 & 3 & 12 \end{pmatrix}, |A| = 27$

۱۴- الف) $\text{adj}\ A = \begin{pmatrix} 8 & -8 & -8 \\ 2 & -4 & 6 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}, |A| = -16$

۱۵- ب) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$ پ) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

۲۶- پ) فضای پدید آمده به وسیله بردار صفر، یعنی یک فضای برداری با بُعد صفر.

۲۷- الف) $\{x^3, x^2, x, 1\};$ ب) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

# فصل ۲

## بخش ۲-۱ ، صفحه ۱۱۷

۱۰- الف) $F\left(z, \frac{x+z}{y+z}\right) = 0;$ ب) $F\left(\frac{y}{x}, x^2+y^2+z^2\right) = 0;$

پ) $F(2y - x^2, z\exp(-x)) = 0;$ ت) $F(2x - y^2, z\exp(-y)) = 0;$

ج) $F\left(\frac{xy}{z}, \frac{x-y}{z}\right) = 0;$ چ) $F(x^2+y^2-z^2, xy+z) = 0;$

ح) $z = f\left(\frac{y}{x}\right);$ خ) $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$

۱۱- الف) $z = f(x)\exp(-y^2)$ ؛ ب) $z = f(y)\exp(x^2 y)$

پ) $z = -x\cos(y/x) + f(x)$ ؛ ت) $z = y^3/3 + x^2 y + f(x)$

ث) $z = x^3/3 + f(2x+y)$

۱۲- $z = (x+y)^2$

۱۳- الف) $F(x-z, y-z^2/2) = 0$ ؛ ب) $z = 1 + \sqrt{1-2(x-y)}$

۱۴- الف) $F(xy, x^2+y^2+z^2) = 0$

۱۶- الف) $2z_x + z_y = 0$ ؛ ب) $yz_y - z = 0$ ؛ پ) $zz_x + yz_y = x$

ت) $x^2 z_x + y^2 z_y = xy$

۱۹- الف) $z = f(x^3 y^2)$

۲۲- $z = f(bx - ay)$

۲۳- الف) $z = ky$ ، صفحات شامل محورz ها

## بخش ۲-۲ ، صفحه ۱۲۷

۵- ب) بیضوی وقتی $x > 0$ ؛ هذلولی وار وقتی $x < 0$ ، سهموی وقتی $x = 0$

ت) خارج دایره واحد به مرکز مبدأ، هذلولی وار؛ درون دایره واحد بیضوی؛ روی دایره واحد سهموی است.

۱۱- ب) ، ت) ، و ث) خطی نیستند

۱۷- الف) سهموی؛ ب) هذلولی وار؛ پ) بیضوی؛

ت) سهموی اگر $x = 0$ یا $y = 0$ ، در غیر این صورت هذلولی وار است.

**بخش ۲-۳ ، صفحه ۱۳۸**

۷- $u(x, y) = \dfrac{3 \sin x \sinh (b-y)}{\sinh b}$

۸- الف) 3 ؛ ب) 0 ؛ پ) 0 ؛ ت) 0.9721

۱۲- $u_n(0, y) = g_1(y)$ با $u_n(x, y) = \dfrac{B_n}{\cosh (n\pi^2/b)} \sin \dfrac{n\pi}{b} y \sinh \dfrac{n\pi}{b}(x-\pi)$

**بخش ۲-۴ ، صفحه ۱۴۷**

۴- $y(x, t) = \frac{1}{2}(\sin (x+at) + \sin (x-at)) = \sin x \cos at$

۵- $y(x, t) = \dfrac{1}{a} \cos x \sin at$

۱۳- $y(x, t) = 3 \sin \dfrac{2\pi}{L} x \cos \dfrac{2\pi at}{L}$ (توجه کنید که $\exp(i\omega t) = \cos \omega t + i \sin \omega t$ و شرط $y_t(x, 0) = 0$ ایجاب می کند که فقط جمله کسینوس باقی بماند.)

۱۴- $y(x, t) = \dfrac{2L}{3\pi a} \sin \dfrac{3\pi x}{L} \sin \dfrac{3\pi at}{L}$

۱۷- مسأله مقدار مرزی چنین است (تمرین ۱۶ را ببینید) $a^2y''(x) - g = 0$ ، $y(0) = y(L) = 0$ ، که جواب آن عبارت است از $4g(x - L/2)^2 = 8a^2y + gL^2$ ، که سهمی است. به ازای $x = L/2$ داریم $dy/dx = 0$ و ماکزیمم تغییر مکان $-gL^2/8a^2$ است.

# فصل ۳

**بخش ۳-۱ ، صفحه ۱۶۷**

۹- اگر $f(x)$ فرد باشد. آن گاه $f(x) = -f(-x)$. اگر $g(x)$ زوج باشد، آن گاه $g(x) = g(-x)$. بنابراین $f(x)g(x) = -f(-x)g(-x)$ ، که نشان می دهد $f(x)g(x)$ فرد است.

۱۱- الف) $4\pi$ ؛ پ) 2/3 ؛ ث) 4

۱۲- الف) $u(x, y) = \dfrac{4}{\pi} \sum_{m=1} \dfrac{\sinh (2m-1)(b-y) \sin (2m-1)x}{(2m-1) \sinh (2m-1)b}$ ، با استفاده از این که $\cos n\pi = (-1)^n$ .

۱۳- $u(x, y) = 2 \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1} \sinh n(b-y) \sin nx}{n \sinh (nb)}$

۱۴- 0.617

۱۵- ب) از 10 جملهٔ اوّل 1.2087 به دست می‌آید. مقدار واقعی 1.2337 است.

۱۷- $f(x) = f(x+1) = (x+1) - (x+1)^2 = -x^2 - x = f(-x)$

**بخش ۳-۲، صفحه ۱۷۶**

۳- مجموعه بر بازه $[-L, L]$ نسبت به تابع وزن یک متعامد یکه است.

۴- برای $-\pi < x < 0$، $f(x)$ به صورت $-x$ تعریف می‌شود که مانند $-f(x)$ است.

۶- برای $-\pi < x < 0$، $f(x)$ به صورت $x$ تعریف می‌شود که مانند $-f(-x) = -(-x)$ است.

۹- الف) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1} \frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{n}$

۱۰- ب) $a$

۱۱- الف) $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1} \frac{1}{n} \left( (-1)^{n+1} - 2 \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2} \right) \sin n\pi x;$

ب) $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x$

۱۲- ب) $\frac{1}{2}(e^2 - 1) + 4 \sum_{n=1} \frac{(-1)^n e^2 - 1}{4 + n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$

۱۳- الف) $\sin \pi x;$ ب) $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1} \frac{\cos 2n\pi x}{1 - 4n^2}$

۱۴- الف) $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1};$ ب) $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{1 - 4n^2}$

۱۸- الف) $\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1} \frac{\cos (2n-1)\pi x}{(2n-1)^2};$ ب) در نتیجهٔ قسمت (الف)، $x = 1$ قرار دهید

۱۹- $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1}$

۲۰- الف) در نتیجه تمرین ۱۹ ، $x = \pi/2$ قرار دهید
ب) در نتیجه تمرین ۱۹ ، $x = \pi/4$ قرار دهید
۲۱- الف) یک شیوه آن است که تعریف کنیم

$$f(s) = \begin{cases} 1 - s, & 0 < s < 1, \\ s - 1, & 1 < s < 2. \end{cases}$$

توسیع تناوبی فرد این تابع دارای نمایش سری فوریه زیر است

$$f(s) \sim \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\sin\frac{\pi s}{2} + \frac{4}{3\pi}\left(1 + \frac{2}{3\pi}\right)\sin\frac{3\pi s}{2} + \frac{4}{5\pi}\left(1 - \frac{2}{5\pi}\right)\sin\frac{5\pi s}{2} + \cdots.$$

با جایگزین کردن $x - 1$ به جای $s$ در بالا ، نمایش تابع داده شده به دست می آید. رسم نمودار $f(s)$ مفید خواهد بود. ملاحظه کنید که سری فوریه برحسب $x$ در این حالت، در واقع یک سری کسینوسی است.

۲۲- $c_n = 0$ ، اگر n زوج باشد (و $n = 0$) و $c_n = 2/(in\pi)$ اگر $n$ فرد باشد؛

$$f(x) \sim \frac{2}{i\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\exp\,(i(2n-1)\pi x/2).$$

توجه کنید که این را می توان به صورت زیر نوشت

$$f(x) \sim \frac{2}{i\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x + i\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right).$$

حال ملاحظه کنید که جملات کسینوس صفر می شوند ولی جملات سینوس دو برابر می شوند، بنابراین داریم

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x,$$

که با نتیجه ای که از معادله (۳-۲-۶) به دست آمده مطابقت دارد.

۲۳- یک توسیع تناوبی زوج از تابع $f(x) = 1$ ، $-1 < x < 1$ به دست آورید. آن گاه $c_0 = 1$ و برای سایر ضرایب $c_n = 0$ .

۲۸- $\sin\dfrac{n\pi x}{L}\sin\dfrac{m\pi x}{L}$ را محاسبه کنید، و سپس انتگرال بگیرید و توجه کنید که نتیجه

برابر صفر است مگر آن که $m = n$ .

۳۱- ب) $\frac{4h}{\pi}\sum_{n=1} \frac{\sin (2n-1)\pi x}{2n-1}$

**بخش ۳-۳ ، صفحه ۱۸۸**

۵- فقط تابع قسمت (الف) بطور مطلق انتگرال پذیر است

۱۱- $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha$ is valid for $-\infty < x < \infty$

۱۸- $\bar{f}(\alpha) = a\,\frac{k \sin^2 (a\alpha/2)}{(a\alpha/2)^2}$

**بخش ۳-۴ ، صفحه ۲۰۰**

۲- $u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\alpha \exp(-\alpha^2 kt) \sin \alpha x \, d\alpha}{\alpha^2+1}$

۳- $u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(s) \cos \alpha s\, ds \int_0^{\infty} \exp(-\alpha^2 kt) \cos \alpha x\, d\alpha$

۷- $u(x,t) = \frac{2u_0}{\pi}\int_0^{\infty} \left(1 - \exp(-\alpha^2 kt)\right)\frac{\sin \alpha x}{\alpha}\, d\alpha$

۹- $u(x,t) = \frac{2u_0}{\pi}\int_0^{\infty} (1-\cos \alpha L) \exp(-\alpha^2 kt)\, \frac{\sin \alpha x}{\alpha}\, d\alpha$

۱۰- الف) $\bar{f}(\alpha) = \frac{2 \cos (\alpha\pi/2)}{1-\alpha^2}$

۱۲- $u(x,t) = u_0\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x+L}{\sqrt{4kt}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-L}{\sqrt{4kt}}\right)\right)$

۱۳- $\bar{f}_s(\omega_0) = N/\omega_0$ که نمایانگر ماکزیمم مقدار تبدیل موج متناهی است.

۱۷- $\mathscr{F}(xy) = -i\,\frac{d\bar{y}(\alpha)}{d\alpha}$

# فصل ۴

**بخش ۴-۱ ، صفحه ۲۱۵**

۲- از اتحاد $\sinh (A-B) = \sinh A \cosh B - \cosh A \sinh B$ استفاده کنید.

۳- $u(x, y, z) = \sum_{n=1} \sum_{m=1} B_{mn} \sinh \omega_{mn}(\pi - z) \sin (my) \sin (nx)$

$$B_{mn} = \frac{4}{\pi^2 \sinh (\pi\omega_{mn})} \int_0^\pi \int_0^\pi f(s, t) \sin (ns) \sin (mt)\, ds\, dt \quad \text{و} \quad \omega_{mn} = \sqrt{n^2 + m^2}.$$

۴- $B_{mn} = \dfrac{4(-1)^{m+n}ab}{\pi^2 mn \sinh (c\omega_{mn})}$

۵- از همان اتحاد تمرین ۲ استفاده کنید.

۶- $V(x, y) = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\infty \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \dfrac{\sinh \alpha(b - y)}{\sinh (\alpha b)} \sin (\alpha x) dx$ ، با استفاده از این که اگر $a > 0$ آن گاه $\int_0^\infty \exp(-ax) \sin bx\, dx = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + b^2}$ که در جدول انتگرالها یافت می‌شود.

۷- $V(x, y) = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\pi \dfrac{\sin \alpha\pi}{1 - \alpha^2} \dfrac{\sinh \alpha(b - y)}{\sinh (\alpha b)} \sin \alpha x\, d\alpha$

۱۵- $u(x, y) = \dfrac{4}{\pi} \sum_1 \dfrac{\cos 2nx \sinh 2n(\pi - y)}{(1 - 4n^2) \sinh 2n\pi} + \dfrac{2}{\pi^2} (\pi - y)$

۱۶- $u(x, y) = \dfrac{2a}{\pi} \int_0^\infty \dfrac{\sinh (\alpha(1 - x)) \cos (\alpha y)}{(a^2 + \alpha^2) \sinh \alpha} d\alpha$

۲۱- اگر $\phi_x(x, y) = -\phi_y(x, y)$

**بخش ۳-۲ ، صفحه ۲۲۶**

۴- $B_{mn} = \dfrac{64a^2b^2}{\pi^6(2n - 1)^3(2m - 1)^3}, n = 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots$

۵- $u(x, y, t) = k \sin\left(\dfrac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\dfrac{c\pi}{ab} \sqrt{a^2 + b^2}\, t\right);$

$$f = \frac{c}{2ab} \sqrt{a^2 + b^2} \sec^{-1}$$

۱۶- $u(x, y, t) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} A_{mn} \sin\left(\dfrac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\dfrac{n\pi a}{x}\right) \sin (c\omega_{mn} t)$

$$A_{mn} = \frac{4}{abc\omega_{mn}} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy\, dx$$

۱۹- $b_{2n-1} = 4kL/c\pi^2(2n - 1)^2, n = 1, 2, \ldots$

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{c\pi t}{L}\right)\right) - \frac{1}{9}\sin(3\pi x/L)\cos(3c\pi t/L) + - \cdots$$ -۲۰

## بخش ۴-۳ ، صفحه ۲۳۵

-۴ جواب حالت پایا برابر صفر است

-۱۱
$$u(x,t) = \sum_{n=1} b_{2n-1}\exp\left(\frac{-\pi^2(2n-1)^2}{4L^2}t\right)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2L}x$$

$$b_{2n-1} = \frac{2}{L}\int_0^L f(s)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2L}s\,ds,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_1 \doteq 0.213\,L$$

-۱۲
$$u(x,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1} a_n\exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{L^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}$$

-۱۳
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(s)\cos\frac{n\pi s}{L}ds,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$u(x,t) = \frac{Cx(L-x)}{2} + \sum_{n=1} b_n\exp(-n^2\pi^2 t/L^2)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

-۱۴
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L\left(\frac{Cs(s-L)}{2} + f(s)\right)\sin\frac{n\pi s}{L}ds$$

$$u(x,t) = \frac{Cx(L-x)}{2} - \frac{4CL^2}{\pi^3}\sum_{n=1}\frac{\exp[-(2n-1)^2\pi^2 t/L^2]}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)\frac{\pi x}{L}$$ -۱۵

$$u(x,t) = \sum_{n=1} c_n\exp\left(\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t/L}{4}\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$ -۱۷

برای یافتن $c_n$ ، باید این شرط را داشته باشیم‌که توابع $\sin((2n-1)\pi x/2)$ بربازه $0 < x < 1$ متعامد باشند. تحقیق کنید که این شرط برقرار است. سپس پیدا کنید

$$c_n = \frac{(-1)^{n+1}8u_0}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}\sum_{n=1} B_{mn}\exp\left(-k\pi^2 t\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$ -۱۹

$$B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\sin\left(\frac{n\pi v}{c}\right)dv\int_0^a f(s,v)\sin\left(\frac{m\pi s}{a}\right)ds$$

$$c_n = \frac{16a}{\pi^3(2n-1)^3}((-1)^{n+1}\pi(2n-1) - 2)$$ -۲۰

## بخش ۲-۲ ، صفحه ۲۴۶

۲- $v(x, y) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\sinh(\alpha x)\cos(\alpha y)}{\alpha(1+\alpha^2)\cosh(\alpha c)}\, d\alpha$

۳- از روش ضرایب نامعین برای یافتن یک جواب خصوصی استفاده کنید.

۷- مانند تمرین ۲ از روش ضرایب نامعین استفاده کنید. توجه کنید که شرایط مرزی قسمی هستند که جواب مکمّل صفر می‌شود.

۱۳- $v(x, y) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\sinh(\alpha x)\cos(\alpha y)}{\alpha \cosh \alpha c} \int_0^{\infty} f(s)\cos \alpha s\, ds\, d\alpha$

۱۴- $v(x, y) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\cos(\alpha x)\cosh(\alpha y)}{\cosh(\alpha b)}\, d\alpha \int_0^{\infty} f(s)\cos \alpha s\, ds$

۱۵- $u(x, t) = c^2 \sin \dfrac{\pi}{c} x/(\pi^2 - c^2\omega^2)\left[\sin \omega t - \dfrac{c\omega}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{c} t\right]$

## بخش ۲-۵ ، صفحه ۲۵۷

۶- $\lambda_n = \left(\dfrac{2n-1}{2}\right)^2, n = 1, 2, \ldots ; y_n(x) = \cos\left(\dfrac{2n-1}{2}\right)x$

۷- $\lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, \ldots$ ؛ $y_n(x) = \cos nx$ ؛ همچنین $\lambda_n = (2n+1)^2/4, n = 0, 1, 2, \ldots$ ؛ $y_n(x) = \sin(2n+1)x/2$

۹- $\lambda_n = n^2 - 1, n = 1, 2, 3, \ldots$ ؛ $y_n(x) = \sin nx$

۱۰- $\lambda_n = -n^2\pi^2, n = 1, 2, 3, \ldots$ ؛ $y_n(x) = \exp(-x)\sin n\pi x$

۱۱- $\lambda_n = -n^2, n = 1, 2, 3, \ldots$ ؛ $y_n(x) = (n\cos nx + \sin nx)\exp(-x)$ ؛ همچنین $\lambda = 1$ ، $y(x) = 1$

۱۸- ب) $\exp(-x)$

۱۹- ب) $\exp(-x^2)$

۲۰- ب) $(1-x^2)^{-1/2}$

۵- یک تعبیر آن است که دمای حالت پایا را در یک لوله بلند که شعاع داخلی آن $b$ و شعاع خارجی آن $c$ است بیابیم. سطح خارجی لوله در دمای صفر نگاه داشته می‌شود، و دمای سطح خارجی آن با $f(\phi)$ داده می‌شود.

۶- طول لوله بی‌نهایت بلند است، یعنی $-\infty < z < \infty$ . بنابراین مرزی در جهت $z$ وجود ندارد علاوه براین، مقادیر مرزی سطوح داخلی و خارجی مستقل از $z$ هستند.

۸- توجه کنید که معادله دیفرانسیل، یک معادله کُشی ـ اویلر است.

۱۲- $$u(\rho, \phi) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1} \left(\frac{\rho^{2n-1} - \rho^{-(2n-1)}}{c^{2n-1} - c^{-(2n-1)}}\right) \frac{\sin (2n-1)\phi}{2n-1}$$

۱۴- $$u(\rho, \phi) = \frac{\log \rho}{2 \log c} a_0 + \sum_{n=1} a_n \frac{\rho^{2n} - \rho^{-2n}}{c^{2n} - c^{-2n}} \cos (2n\phi)$$

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(s)\, ds \text{ and } a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(s) \cos 2ns\, ds,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

۱۸- الف) $$z(\rho) = z_0 \frac{\log \rho}{\log \rho_0},\ 1 \le \rho \le \rho_0;$$

ب) جواب نمایانگر تغییرمکانهای عرضی ایستای یک غشای همگن به شکل یک واشر است. غشاء به یک چارچوب در طول دایره‌های $\rho = 1$ و $\rho = \rho_0$ محکم شد است. چارچوب داخلی ثابت نگاه داشته شده درحالی که به چارچوب خارجی یک تغییرمکان $z_0$ داده شده است.

## بخش ۵-۲ ، صفحه ۲۸۴

۱- از آزمون همگرایی سریهای متناوب استفاده کنید تا همگرایی در $x = 2$ ثابت شود.

۲- ب) $$y_2(x) = a_1 \sum_{n=0} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}$$

(توجه: در این جا و در قسمت (الف) وقتی $n = 0$ ، به جای صورت 1 قرار دهید)

۷- الف) $(2^n - 1)/2^n$

۹- الف) این یک سری هندسی است با جمله اوّل 1/10 و قدر نسبت 1/10 ؛

ب) 1/9

۱۰- الف) 1 ؛ ب) $\infty$ ؛ پ) 1 ؛ ت) $e$ ؛ ث) 3 ؛ ج) $\infty$

۱۱- الف) $x = 0$ یک نقطه تکین منظم است؛

ت) $x = 1$ یک نقطه تکین منظم است؛ $x = 0$ یک نقطه تکین نامنظم است.

۱۲- الف) $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$؛ ب) $y = a_0 \cosh x + a_1 \sinh x$؛

پ) $y = (a_0 + 2) \exp(x) - x^2 - 2x - 2$؛ ت) $y = a_0 \exp(x^2/2)$

ث) $y = a_0(1 + x \arctan x) + a_1 x$

۱۳- الف) $y = a_0 J_0(x) = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + - \cdots\right);$

ب) $y = a_0 \cos \sqrt{x} + a_1 \sin \sqrt{x};$ پ) $y = a_0 x + a_1 x^{-2}$

۱۵-
$$y = a_0\left(1 + \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{6}(x-1)^3 + \tfrac{1}{6}(x-1)^4 + \cdots\right)$$
$$+ a_1\left((x-1) + \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{2}(x-1)^3 + \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots\right)$$

## بخش ۵-۳، صفحه ۲۹۹

۶- الف) $y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x);$ ب) $y = c_1 J_0(\sqrt{x}) + c_2 Y_0(\sqrt{x});$

پ) $y = c_1 J_0(e^x) + c_2 Y_0(e^x)$

۷- الف) قرار دهید $u = \lambda_j s$، $du = \lambda_j ds$. انتگرال به صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{1}{\lambda_j}\int_0^{\lambda_j} J_1(u)\,du = \frac{1}{\lambda_j}(-J_0(u))\Big|_0^{\lambda_j} = \frac{1}{\lambda_j};$$

پ) مانند قسمت (الف) $\int_0^b J_1(\lambda_j s)\,ds$ را محاسبه کنید، سپس قرار دهید $b \to \infty$.

۸- الف) از انتگرال گیری جزءبه‌جزء با $u = J_0(s)$، $dv = J_1(s)ds$ استفاده کنید.

۹- الف) $\frac{2}{c}\sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j x)}{\lambda_j J_1(\lambda_j c)};$ ب) $\frac{2}{c}\sum_{j=1} \frac{(\lambda_j c)^2 - 4}{\lambda_j^3 J_1(\lambda_j c)} J_0(\lambda_j x)$

۱۰- الف) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{az}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{az^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2;$

ب) معادله تبدیل شده عبارت است از $r^2 \frac{d^2Z}{dr^2} + r\frac{dZ}{dr} + \left(\lambda^2 r^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)Z = 0$.

۱۲- الف) $\frac{1}{2}\sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j) - J_0(2\lambda_j)}{\lambda_j (J_2(2\lambda_j))^2} J_1(\lambda_j x);$

ب) $\frac{1}{2}$، مقدار متوسط ناپیوستگی جهشی در $x = 1$.

۱۴- $x^n J_n(x)$

۱۵- ب) $-x^{-n} J_n(x)$

## بخش ۵-۴ ، صفحه ۳۲۳

۳- ب) از معادله (۵-۴-۱۴) نتیجه می شود که $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ ، $n = 0, 1, 2, \ldots$

ت) $P'_{2n}(x)$ شامل جملات برحسب $x^{2n-2k-1}$ است، پس تنها راه به دست آوردن جملات غیرصفر وقتی $x = 0$ ، این است که $2n - 2k - 1 = 0$ . اما این غیرممکن است زیرا نتیجه می دهید $2(n-k) = 1$ . بنابراین $P'_{2n}(0) = 0$

ث) از معادله (۵-۴-۱۴)

$$P_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (4n-2k)!}{(2n-2k)!(2n-k)!} x^{2n-2k}.$$

وقتی x = 0 ، تنها جمله غیرصفر این مجموع به ازای n = k رخ می دهد و در این صورت $P_{2n}(0)$ مقدار مطلوب را دارد .

۷- نشان دهید $P_0$ و $P_1$ ، $P_1$ و $P_2$ ، و $P_0$ و $P_2$ جفتهای متعامدند .

۱۲- الف) $aP_1(x) + bP_0(x)$; ب) $\frac{2}{3} aP_2(x) + bP_1(x) + \left(c + \frac{a}{3}\right) P_0(x)$;

پ) $\frac{2}{5} aP_3(x) + \frac{2}{3} bP_2(x) + \left(c + \frac{3a}{5}\right) P_1(x) + \left(d + \frac{b}{3}\right) P_0(x)$

۱۵- ب)

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= \tfrac{1}{2}(4n+3) \int_0^1 xP_{2n+1}(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ &= \tfrac{1}{2}(4n+3) \int_0^1 P_1(x) P_{2n+1}(x)\, dx = 0 \end{aligned}$$

برای هر $n$ بجز $n = 0$

۱۸- از فرمول رودریگ استفاده کنید .

## بخش ۵-۵ ، صفحه ۳۳۶

۱۱- $u(r, \theta) = \frac{r}{b} \cos\ \theta$

۱۲- الف)

$$\begin{aligned} u(\rho, z) = 28.63 J_0(2.405\rho) \cosh(2.405z) \\ - 0.85 J_0(5.520\rho) \cosh(5.520z) \\ + 0.03 J_0(8.654\rho) \cosh(8.654z) + \cdots; \end{aligned}$$

ب) $u(0, 0) \doteq 27.81$

۱۳- $u(\rho, z) = \frac{200}{c}\sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho)\sinh(\lambda_j z)}{\lambda_j \sinh(\lambda_j b) J_1(\lambda_j c)}$

۱۵- $z(\rho, t) = \frac{2}{c}\sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho)\cos(\lambda_j a t)}{\lambda_j J_1(\lambda_j c)}$

۱۸- $u(r, \theta) = \sum_{m=0} (4m+3)\left(\frac{r}{b}\right)^{2m+1} P_{2m+1}(\cos\theta)\int_0^{\pi/2} f(\cos\theta) P_{2m+1}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$

۲۰- $u(r, \theta) = 100$ ؛ نتیجه باید بدیهی باشد، ولی مراحل مثال ۵-۵-۵ را انجام دهید.

۲۱- $u(r, \theta) = -\frac{3E}{K+2} r\cos\theta, r < b;$

$U(r, \theta) = -Er\cos\theta + Eb^3\left(\frac{K-1}{K+2}\right) r^{-2}\cos\theta, r > b$

۲۲- $u(r, \theta) = -Er\cos\theta + E\frac{b^3}{r^2}\cos\theta$

۲۳- $u(r) = \frac{1}{r(b-a)}(u_1 a(b-r) + u_2 b(r-a))$

**بخش ۵-۶ ، صفحه ۳۴۳**

۳- $u(5, 5) = 1.786,\ u(10, 5) = 7.143,\ u(15, 5) = 26.786$

۴- 21

۵- $u(10/3, 10/3) = 0.69,\ u(20/3, 10/3) = 2.08,\ u(10, 10/3) = 5.56$

$u(40/3, 10/3) = 14.58,\ u(50/3, 10/3) = 38.19$

$u(x, 20/3) = u(x, 10/3)$ بنابر تقارن. توجه کنید که پنج معادله حاصل را می توان بسادگی با روش حذفی حل کرد.

# فصل ۶

**بخش ۶-۱ ، صفحه ۳۵۳**

۴- هنگ تغییر می کند ولی شناسه تغییر نمی کند.

۸- الف) $13 + 7i$ ؛ پ) $\frac{1}{5}(1-3i)$ ؛ ت) $22 - 4i$

۹- ب) $\sqrt{2}\,\text{cis}(-\pi/4)$ ؛ ت) $\text{cis}\,3\pi/2$ ؛ ج) $2\,\text{cis}(-\pi/3)$

۱۰- الف) $2, \pi/3$ ؛ پ) $5\sqrt{5}, \arctan(-11/2)$ یا $11.180, -1.391$
ت) $5, \pi$ ؛ ج) $8, 3\pi/2$

۱۱- الف) $\pm\sqrt{2}(-1+i)/2$;
ب) $y = \exp(\sqrt{2}x/2)(c_1 \cos(\sqrt{2}x/2) + c_2 \sin(\sqrt{2}x/2)) + \exp(-\sqrt{2x}/2)(c_3 \cos(\sqrt{2}x/2) + c_4 \sin(\sqrt{2}x/2))$

۱۲- ب) نیم صفحه طرف راست خط $x=-1$
ت) ناحیه بین دایره های $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=25$

۱۳- الف) طول هیچ ضلع مثلثی از مجموع طولهای دو ضلع دیگر بیشتر نیست.
ب) طول هیچ ضلع مثلثی از تفاضل طولهای دو ضلع دیگر کمتر نیست.

۱۴- $(z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)$

۱۵- $2 \sin \frac{\phi}{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi - \phi}{2}\right)$

۱۶- الف) $2 \operatorname{cis} \frac{(2k+1)\pi}{6}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$
پ) $2^{1/6} \operatorname{cis} (8k+3) \frac{\pi}{12}, k = 0, 1, 2$

۱۷- الف) $\pm 2 + i$ ؛ ب) $1+i, 1+2i$

۱۹- الف) $z^2 - 4z + 5 = 0$

۲۰- الف) $2(1+\sqrt{3}i)$ ؛ ب) $-3(1-i)$ ؛ پ) $-3$ ؛ ت) $1+i$

۲۸- $\lambda_1 = 1$ ، $(1, 0, 0)^T$ ؛ $\lambda_2 = 2i$ ، $(0, 1, 2i)^T$ ؛ $\lambda_3 = -2i$ ، $(0, 1, -2i)^T$

## بخش ۶-۲ ، صفحه ۳۶۳

۳- از معادله (۶-۱-۹) برای بیان $z^{1/2}$ استفاده کنید.

۵- الف) از اتحادهای مثلثاتی زیر استفاده کنید.

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$
$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

پ) با استفاده از معادله (۶-۲-۱)، نشان دهید $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$

ت) اگر $e^z = 1$ ، آن گاه $|e^z| = e^x = 1$ و $x = 0$ ؛ بنابراین $e^z = e^{iy} = \cos y + i\sin y = 1$ که از آن نتیجه می شود که $\cos y = 1$ ، $\sin y = 0$ ، و $y = 2n\pi$ . برعکس اگر $z = 2n\pi i$ ، آن گاه $e^z = 1$ .

ث) با استفاده از قسمت (ب) داریم $\exp(z_1) = \exp(z_2)$ اگر و فقط اگر $\exp(z_1 - z_2) = \exp(0) = 1$ و این رابطه اخیر بنابه قسمت (ت) برقرار است هرگاه $z_1 - z_2 = 2n\pi i$ .

۹- مانند مثال ۶-۲-۲ .

۱۲- الف) $0.0001$ ؛ ب) $23.1361 + 0.4443i$

۱۵- الف) $\log 2 \doteq 0.693 + 2n\pi i$ ؛ که در آن $n$ صحیح است ، $\operatorname{Log} 2 \doteq 0.693$

ب) $\log(i-1) \doteq 0.346 + (3\pi/4 + 2n\pi)i$

$$\operatorname{Log}(i-1) \doteq 0.346 + 2.356i$$

پ) $\log(-1) = (2n+1)\pi i$ ، $\operatorname{Log}(-1)$ تعریف نمی شود .

۱۷- ب) $(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ ؛ ت) $((x-1)^2 + y^2)^{-1/2}(x^2 - y^2 - 3 + 2xyi)$

۲۱- الف) $i\sinh e$ ؛ ت) $(e^3\sqrt{2}/2)(1-i) \doteq 14.203(1-i)$

۲۲- $\exp(i\operatorname{Log} 2)\exp(-\pi - 2n\pi),\ n = 0, 1, 2, \ldots$

۲۵-

$$\begin{aligned}(a^z)^w &= (\exp(z\log a))^w = \exp(w\log(\exp(z\log a)))\\ &= \exp(w(z\log a + 2n\pi i)) = \exp(wz\log a)\exp(2n\pi i)w\\ &= a^{wz}\exp(2n\pi i)w \neq a^{wz}\end{aligned}$$

۲۸- $\frac{1}{s^2+1} = -\frac{1}{2i}\frac{1}{s+i} + \frac{1}{2i}\frac{1}{s-i}$, $f(t) = \frac{i}{2}\exp(-it) + \frac{1}{2i}\exp(it)$ یا

$$f(t) = \frac{i}{2}(\cos t - i\sin t) + \frac{1}{2i}(\cos t + i\sin t) = \sin t$$

## بخش ۶-۳ ، صفحه ۳۷۳

۱- تمام $z$ ها که $z = 1 + iy$ یا $z = 2 + iy$ . مجموعه بسته نیست چون شامل همه نقاط مرزی اش نیست .

۳- الف) $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$ ، که به ازای تمام مقادیر $x$ و $y$ تحلیلی است .

۵- ب) مجموعه نقاط داخل دایره به شعاع $\rho$ و به مرکز $z_0$ .
ت) نیم صفحه چپ صفحه $z$ و محور $y$ ها .

۶- الف) این یک مجموعه بسته شامل همه نقاط درون و روی دایره واحد به مرکز $z = i$ است . نقاط مرزی عبارتند از نقاط روی دایره، یعنی همه نقاط $(x, y)$ که در معادله $x^2 + (y-1)^2 = 1$ صدق می کنند .

۱۱- الف) داریم $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}|z| + i \operatorname{Arg} z$ ، بنابراین $\operatorname{Log} z$ در $z = 0$ پیوسته نیست . فرض کنید $x_0$ نقطه دلخواهی روی محور حقیقی منفی باشد . آن گاه چون $-\pi < \operatorname{Arg} z \le \pi$ ، وقتی از نیم صفحه بالا $z \to x_0$ ، $\operatorname{Arg} z \to \pi$ و، وقتی از نیم صفحه پایین $z \to x_0$ ، $\operatorname{Arg} z \to -\pi$ . در نتیجه $\operatorname{Log} z$ در $z = x_0$ پیوسته نیست، و از این رو تحلیلی نیست .

۱۳- الف) $3x^2y - y^3 - x + C$ ؛ پ) $\arctan(y/x) + C$

۱۷- الف) $z^3 - i(z - C)$ ؛ پ) $\operatorname{Log} z + \alpha$ ، که $\alpha$ یک ثابت مختلط است .

**بخش ۶-۴ ، صفحه ۳۸۳**

۵- الف) $y = mx$ به $v = -mu$ نقش می شود .
ت) دو نقطه تقاطع وجود دارند، $(0, 0)$ و $(a, a)$ . مبدأ به نقطه در بی نهایت نقش می شود، و نقطه $(a, a)$ به $(1/2a, -1/2a)$ نقش می شود .

۶- الف) دایره $|z| = 1$ به $|u| \le 1$ نقش می شود
پ) با محدود کردن نگاشت به $|z| > 1$ یک نگاشت یک به یک به دست می آید، که در کاربردها وضعیت مطلوب را دارد .

۷- ناحیه مستطیلی به $\dfrac{u^2}{\cosh^2 c} + \dfrac{v^2}{\sinh^2 c} = 1,\ v \ge 0$ نقش می شود .

۱۳- الف) $\pm 1$ ؛ پ) نقطه در بی نهایت .

۱۵- الف) معادله کره عبارت است از $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

۱۶- الف) $-\infty < u \le -1$ ، $v = 0$ ؛ ب) $\operatorname{Im} w > 0$
پ) درون بیضی $\dfrac{u^2}{\cosh^2 1} + \dfrac{v^2}{\sinh^2 1} = 1$ ، بجز قطعه خطهای حقیقی $-\cosh 1 \le x \le -1$ و $1 \le x \le \cosh 1$ .

۱۷- الف) همه جا؛ پ) دایره واحد به مرکز مبدأ.
ث) حلقه نیم دایره ای به مرکز مبدأ بالای محور $v$ و محدود به دایره های به مرکز $c_1$ و $c_2$.
۲۲- $|z|=2$ به $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2=1$ نقش می شود.

## بخش ۶-۵ ، صفحه ۳۹۶

۲- ت) از آزمون نسبت استفاده کنید و صورت و مخرج را بر $3^n$ قبل از حدگیری تقسیم کنید.
۵- الف) $-\pi i$؛ پ) صفر
۶- الف) $-4+2\pi i$؛ ب) $4\pi i$
۷- تابع $f(z)=\bar{z}$ در هیچ نقطه ای مشتق پذیر نیست، پس تحلیلی نیست؛ تابع $(z+2)/z$ در مبدأ تحلیلی نیست.
۸- $18\pi i$
۱۱- $-i\pi/12$
۱۲- $2\pi i$

## بخش ۶-۶ ، صفحه ۴۱۴

۵- ضرب داخلی برابر صفر است

۱۲- الف) $F(s)=\frac{i}{4}\frac{1}{(s+i)^2}-\frac{i}{4}\frac{1}{(s-i)^2}$;

ب) $\frac{i}{4}(te^{-it}-te^{it})=\frac{t}{2}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)=\frac{t}{2}\sinh(it)=\frac{t}{2}\sin t$

۱۳- $\frac{-2}{z-1}+\frac{1}{z-2}+\frac{2}{z-3}$

۱۴- $\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1}$

۱۵- الف) $-\frac{1}{2}\frac{1}{z-2}+\frac{5}{3}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{z-4}$;

ب) $\frac{3}{8}\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{z^3}-\frac{3}{8}\frac{1}{z-2}+\frac{5}{4}\frac{1}{(z-2)^2}$;

پ) $\dfrac{-4}{z} - \dfrac{2}{z^2} + \dfrac{5}{z-1} - \dfrac{1}{(z-1)^2}$

۱۶- الف) $1 + 2\sin t - \cos t$؛ پ) $\frac{1}{2}(\sinh t - \sin t)$

۱۷- الف) $\dfrac{e^{-t}}{12}\left(t - \dfrac{11}{12}\right) + \dfrac{5}{112}e^{-5t} + \dfrac{2}{63}e^{2t}$; ب) $\dfrac{1}{9}(6te^{-3t} - e^{-3t} + 1)$

۱۸- الف) $\sin \omega t$؛ پ) $\exp(bt)\sin \omega t$؛ ث) $\sinh at$

۲۰- $c_1 = 0$ متناظر با $y = x$ است، $c_1 > 0$ متناظر با هم پتانسیلهای زیر $y = x$ است، و $c_1 < 0$ متناظر با هم پتانسیلهای بالای $y = x$ است.

۲۱- ثابت $= y$ خطوط جریان هستند، ثابت $= x$ هم پتانسیلها هستند.

۲۲- الف) پرتوهایی که از مبدأ رسم می شوند خطوط جریان هستند، دوایر به مرکز مبدأ هم پتانسیلها هستند.

ب) مبدأ یک چاه است.

۲۴- $T(x, y) = \arctan(y/x)$

۲۵- الف $T(x, y) = \dfrac{100}{\pi}\arctan\left(\dfrac{2xy}{x^2 - y^2}\right)$; ب) $T(\rho, \phi) = \dfrac{100}{\pi}\phi$;

پ) $T(x, y) = 1 - \dfrac{1}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1 - x^2 - y^2}{2y}\right)$

۲۷- $\bar{f}(\alpha) = \dfrac{aA}{1 + ia\alpha}$

# مراجع


Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, 2d ed. New York: Academic Press, 1973.

Churchill, R. V., J. W. Brown, and R. F. Verhey, *Complex Variables and Applications*, 3d ed. New York: McGraw-Hill, 1974.

Churchill, R. V., *Operational Mathematics*, 3d ed. New York: McGraw-Hill, 1972.

Erdelyi, A. (ed.), *Tables of Integral Transforms,* vol. I. New York: McGraw-Hill, 1954.

Faddeeva, V. N., *Computational Methods of Linear Algebra.*(Translated from the Russian by Curtis D. Benster). New York: Dover, 1959.

Gerald, C. F., *Applied Numerical Analysis*, 2d ed. Reading, Mass.: Addison Wesley, 1978.

Greenleaf, F. P., *Introduction to Complex Variables.* Philadelphia: W. B. Saunders, 1972.

Grossman, S. I., *Elementary Linear Algebra*, 2d ed. Wadsworth Poblishing Company, 1984.

Henrici, P., *Applied and Computational Complex Analysis*, 2 vols. New York: John- Wiley,1977.

Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2d ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1976.

Jennings, A., *Matrix Computation for Engineers and Scientists.* New York:

Wiley, 1977.

Kaplan, W., *Advanced Mathematics for Engineers*. Reading Mass.: Addison Wesley, 1981.

Marsden, J. E., *Basic Complex Analysis*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.

Noble, B., *Applied Linear Algebra*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1969.

Ralston, A., and P.Rabinowitz, *A First Course in Numerical Analysis*,2d ed. New York: McGraw-Hill, 1978.

Rice, J. R., *Matrix Computation and Mathematical Software*. New York: McGraw-Hill, 1981.

Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3d ed. New York: McGraw-Hill, 1976.

Silverman, R. A., *Complex Analysis with Applications*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1974.

Williams, G., *Computational Linear Algebra with Models*, 2d ed. Boston : Allyn & Bacon, 1978.

# واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

| | |
|---|---|
| Absolutetly integrable | بطور مطلق انتگرال پذیر |
| Abstract vector space | فضای برداری مجرّد |
| Adjoint | الحاقی |
| of a differential operator | - یک عملگر دیفرانسیل |
| of a matrix | - یک ماتریس |
| Alternating series | سری متناوب |
| Amplitude | دامنه |
| Annihilator property | خاصیّت پوچ ساز |
| Argand diagram | نمودار آرگان |
| Argument | شناسه |
| | |
| Bar | میله |
| Back substitution | جانشانی از آخر |
| Basis | پایه |
| change of | - تغییر |
| natural | - طبیعی |
| Bilinear transformation | تبدیل دوخطی |
| Block multiplication | ضرب بلوکه‌ای |
| Boundary condition | شرط مرزی |
| nonhomogeneous | - ناهمگن |
| periodic | - متناوب |

| | |
|---|---|
| Boundary-value problem | مساله مقدار مرزی |
| Bromwich contour | مسیر برمویچ |
| | |
| Cauchy's integral formula | فرمول انتگرال کشی |
| Characteristic | مشخّصه |
| equation | - معادله |
| frequency | - بسامد |
| value | - مقدار |
| Codomain | هم دامنه |
| Cofactor | همعامل |
| Complex conjugate | مزدوج مختلط |
| Complex Fourier coefficients | ضرایب فوریه مختلط |
| Condition | شرط |
| boundary | - مرزی |
| initial | - اولیّه |
| periodic boundary | - مرزی متناوب |
| Conformal mapping | نگاشت همدیس |
| Consistent system | دستگاه سازگار |
| Convergent series | سری همگرا |
| | |
| de Broglie wavelenght | طول موج دوبروی |
| Decomposition into partial fractions | تجزیه به کسرهای جزئی |
| Deflection | جابه جایی |
| Definite integral | انتگرال معّین |
| Dielectric sphere | کره نارسانای الکتریکی |
| Differnce quotient | خارج قسمت تفاضلی |
| Differential operator | عملگر دیفرانسیل |
| Displacement | تغییر مکان |
| Domain | دامنه |
| | |
| Echocardiogram | اکوکاردیوگرام |
| Eigenfunction | تابع ویژه |

| | |
|---|---|
| Eigenspace | فضای ویژه |
| Eigenvalue | مقدار ویژه |
| Eigenvector | بردار ویژه |
| Elasticity | کشسانی |
| Electric potential | پتانسیل الکتریکی |
| Electrostatic | الکتریسیته ساکن |
| Elementary row operation | عمل سطری مقدماتی |
| Equation | معادله |
| biharmonic | - دو همساز |
| diffusion | - پخش ، انتشار |
| elliptic | - بیضوی |
| heat | - گرما |
| hyperbolic | - هذلولی وار |
| indicial | - اندیسی |
| quasilinear | - شبه خطی |
| wave | - موج |
| Equipotential surfaces | سطوح همپتانسیل |
| Even periodic extension | توسیع تناوبی زوج |
| Extended complex plane | صفحه مختلط تعمیم یافته |
| Fast Fourier transform | تبدیل فوریه سریع |
| Finite-difference method | روش تفاضل متناهی |
| Fluid | سیّال |
| compressible | - تراکم پذیر |
| ideal | - ایده آل |
| incompressible | - تراکم ناپذیر |
| irrotational | - غیر چرخشی |
| Fluid dynamics | دینامیک سیّال |
| Fluid mechanics | مکانیک سیّال |
| Function(s) | تابع |
| Airy | - ایری |
| analytic | - تحلیلی |

| | |
|---|---|
| Bessel | - بسل |
| complementary error | - متمّم خطا |
| Dirac delta | - دلتای دیراک |
| entire | - تام |
| exponential | - نمایی |
| harmonic | - همساز |
| Legendre | - لژاندر |
| normalized | - نرمال |
| orthogonal | - متعامد |
| orthonormal | - متعامدیکه |
| piecewise smooth | - تکه‌ای - هموار |
| scaler | - اسکالر |
| spectrum of | - طیف |
| weight | - وزن |
| Fundamental | اصلی |
| period | - تناوب |
| strip | - نوار |
| Gaussian elimination | حذفی گاوس |
| Gaussian reduction | تحویل گاوسی |
| Gauss-Jordan reduction | تحویل گاوس - ژردان |
| Gauss-Seidel method | روش گاوس - سایدل |
| Gibbs phenomenon | پدیده گیبس |
| Gravitational potential | پتانسیل گرانشی |
| Harmonic conjugate | مزدوج همساز |
| Harmonics | همسازها |
| cylindrical | - استوانه‌ای |
| spherical | - کروی |
| Heat conduction | رسانایی گرمایی |
| Heaviside's expansion formula | فرمول بسط هویساید |
| Heisenberg uncertainty principle | اصل عدم قطعیّت هایزنبرگ |

| | |
|---|---|
| Hermitian orthogonality | تعامد هرمیتی |
| Hydrodynamics | هیدرودینامیک |
| | |
| Ill-conditioned system | دستگاه نامساعد |
| Impulse | ضربه |
| Inconsistent system | دستگاه ناسازگار |
| Integral surface | سطح انتگرال |
| Integrating factor | عامل انتگرال ساز |
| Inverse | وارون |
| Fourier transform | - تبدیل فوریه |
| Laplace transform | - تبدیل لاپلاس |
| | |
| Kronecker delta | دلتای کرونکر |
| | |
| Law | قانون |
| of cooling | - سردشدن |
| of elasticity | - کشسانی |
| of nullity | - پوچی |
| Linear | خطی |
| fractional transformation | - تبدیل کسری |
| oscillator | - نوسانگر |
| Linearly dependent | وابسته خطی |
| Linearly independent | بطور خطی مستقل |
| Longitudinal waves | امواج طولی |
| | |
| Magnetostatic | مغناطیس ساکن |
| Magnification | تجانس ، بزرگنمایی |
| Mapping | نگاشت |
| bicontinuous | - همسان ریختی |
| conformal | - همدیس |
| isogonal | - حافظ زاویه |

| | |
|---|---|
| Matrix | ماتریس |
| augmented | ـ افزوده |
| diagonalizable | ـ قطری شدنی |
| elementary | ـ مقدّماتی |
| idempotent | ـ خودتوان |
| nilpotent | ـ پوچ توان |
| orthogonal | ـ متعامد |
| positive definite | ـ معیّن مثبت |
| rank of | ـ رتبه |
| sparse | ـ تنک |
| singular | ـ تکین |
| skew-symmetric | ـ متقارن اریب |
| stochastic | ـ احتمال |
| symmetric | ـ متقارن |
| trace of | ـ اثر |
| traspose of | ـ ترانهاده |
| triangular | ـ مثلثی |
| Modulus | مدول، هنگ |
| Neutron | نوترون |
| transport | ـ انتقال |
| diffusion of | ـ انتشار |
| Normal derivative | مشتقّ قائم |
| Normalized eigenfunction | توابع ویژه نرمال |
| Nullity | پوچی |
| Odd periodic extension | توسیع تناوبی فرد |
| Overshoot | فراجهش |
| Partial sums | جمعهای جزئی |
| Partitioning of matrices | افراز ماتریسها |
| Phase | فاز |

| | |
|---|---|
| Plucked string | تار کشیده شده |
| Point | نقطه |
| boundary | - مرزی |
| critical | - بحرانی |
| interior | - درونی |
| stagnation | - رکود |
| isolated singular | - تکین تنها |
| regular singular | - تکین منظّم |
| Potential | پتانسیل |
| electrostatic | - الکتریسیته ساکن |
| gravitational | - گرانشی |
| magnetic | - مغناطیسی |
| Principal | اصلی |
| axes | - محورها |
| value | - مقدار |
| of superposition | - برهم‌نهی |
| Pulse | تپش |
| Recurrence relation | رابطه برگشتی |
| Reduced row echelon form | شکل پلکانی سطری تحویل یافته |
| Reduction of order | کاهش مرتبه |
| Relaxtion method | روش تخفیف |
| Residue | مانده |
| Resultant | برآیند |
| Riemann sphere | کره ریمان |
| Schrodinger wave equation | معادله موج شرودینگر |
| Shaft | میل گردان |
| Self-adjoint operator | عملگر خود الحاق |
| Set | مجموعه |
| boundary of | - مرز |
| closed | - بسته |

| | |
|---|---|
| complete orthonormal | - متعامد یکه کامل |
| connected | - همبند |
| fundamental | - اساسی |
| spanning | - پدیدآورنده |
| Simple pole | قطب ساده |
| Shear modulus | مدول برشی |
| Simultaneous displacement | جابه جا سازی توام |
| Sink | چاه |
| Slab | تیغه |
| Solution | جواب |
| Complementary | - متمّم |
| D'Alembert's | - دالامبر |
| particular | - خصوصی |
| steady-state | - حالات پایا |
| transient | - گذرا |
| trivial | - بدیهی |
| updated | - بهنگام |
| Source | چشمه |
| Space(s) | فضای |
| isomorphic | - یکریخت |
| null | - پوچ |
| Specific heat | گرمای ویژه |
| Spectral bandwidth | عرض نوار طیفی |
| Spherical coordinate system | دستگاه مختصات کروی |
| Static displacement | تغییر مکان ایستایی |
| Steady-state temperature | دمای حالت پایا |
| Stereographic projection | تصویر گنجنگاری |
| Strain | تنش |
| Streamlines | خطوط جریان |
| Strip | نوار |
| Successive displacement | جابه جا سازی متوالی |

| | |
|---|---|
| Surface(s) | سطح |
| equipotential | - همپتانسیل |
| Temperature | دما |
| Thermal | گرمایی |
| conductivity | - رسانندگی |
| diffusivity | - پخشندگی |
| Transformation | تبدیل |
| bilinear | - دوخطی |
| Mobius | - موبیوس |
| Translation | انتقال |
| Transonic flow | جریان ترانسونیک |
| Transposition | ترانهش |
| Transverse waves | موجهای عرضی |
| Undershoot | فروجهش |
| Vector | بردار |
| column | - ستونی |
| row | - سطری |
| Vibrating membrane | غشاء مرتعش |
| Vibration | ارتعاش |
| Wave propagation | انتشار موج |
| Young's modulus | مدول یانگ |

# فهرست راهنما

FERDOWSI UNIVERSITY OF MASHHAD

Publication No. 237

# ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

**Ladis D. Kovach**

Translated by

**A. Kerayechian**

**A. Bozorgnia**

FERDOWSI UNIVERSITY PRESS

1998