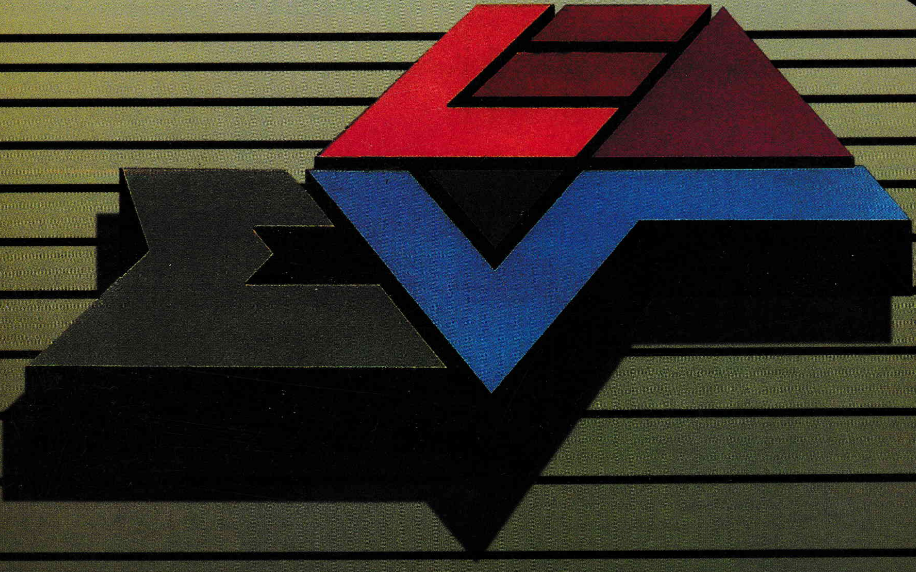
انتشارات پارتیان

ریاضیات گسسته



سیمور لیپ شوتس

مترجم: پروفسور علی اکبر عالم زاده

ریاضیات گسسته

نوشته: سیمور لیپ شوتس

ترجمه: دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده

MATH75.IR

سرشناسه	: لیپشوتز، سیمور. Lipschutz, Seymour
عنوان و پدیدآور	: ریاضیات گسسته/ نوشته سیمورلیپ شوتس؛ ترجمه علی‌اکبر عالم زاده
مشخصات نشر	: تهران: پارتیان، ۱۳۸۷.
مشخصات ظاهری	:۵۰۶ ص : مصور، جدول، نمودار.
شابک	:۴-۸-۹۰۷۱۷-۶۰۰-۹۷۸ ۷۵۰۰۰ ریال ؛
وضعیت فهرستنویسی	:فیپا
یادداشت	: عنوان اصلی:Schaum's outline of theory and problems of discrete mathematics.
یادداشت	: این کتاب توسط مترجمان و ناشران مختلف در سالهای متفاوت منتشرشده است
یادداشت	: واژه‌نامه
یادداشت	: نمایه
موضوع	:جبر مجرد — رئوس مطالب.
موضوع	:آنالیز ترکیبی — رئوس مطالب
موضوع	: منطق ریاضی — رئوس مطالب.
شناسه افزوده	: عالم زاده، علی‌اکبر، ۱۳۲۲ -، مترجم
رده بندی کنگره	:۱۳۸۷ ۹ ر ۹ ل / QA۱۶۲
رده بندی دیویی	: ۵۱۱/۰۲۰۲
شماره کتابشناسی ملی	: ۱۶۴۶۴۲۴

انتشارات پارتیان : ٦٦٤٠٨٩٥٨ - ٦٦٤٠٥٠٥٢ - ٦٦٤١٦٣٦٦

نام کتاب : ریاضیات گسسته

مؤلف : سیمور لیپ‌شوتز

مترجم : پرفسور علی‌اکبر عالم‌زاده

ناشر : انتشارات پارتیان

نوبت چاپ : هفتم (اول ناشر - ۱۳۸۸)

تیراژ : ۱۰۰۰

قیمت : ۷۵۰۰۰ ریال

شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۹۰۷۱۷-۸-۴

مرکز پخش: پخش صبور

خیابان انقلاب، خیابان اردیبهشت (منیری جاوید)، بن بست مبین، پلاک ۲

تلفن: ۶۶۴۰۸۹۵۸ — ۶۶۴۱۶۳۶۶ ، نمابر: ۶۶۴۰۵۰۵۲

پیشگفتار مترجم

ما در سالهای اخیر شاهد تحولات چشمگیری در برنامهٔ ریاضیات دانشگاه بوده ایم. این امر از یک سو به خاطر ازدیاد کتاب و از سوی دیگر به سبب پیشرفت حیرت آور کامپیوتر بوده است که تا اعماق فضاي علمی و زندگی روزمرهٔ ما راه یافته است. یکی از دروسی که بر اثر این تحولات ظاهر شده ریاضیات گسسته می‌باشد که شیفتگان بسیار یافته و به صورت یک درس رسمی دانشگاهی در آمده است. وضعیت ممتاز این درس مرا بر آن داشت که امور جاری را متوقف کرده و کتاب مناسبی برای تدریس آن مهیا سازم. از بین کتب موجود کتاب سیمورلیپ شوتس را از هر حیث شایسته دیدم و لذا ترجمه اش را تقدیم دوستداران این مبحث می‌نمایم. برگردان کتب مناسب دیگر در این زمینه اجر بسیار داشته و می‌تواند در شناخت روند فعلی ریاضیات نقش مؤثری داشته باشد.

علی اکبر عالم زاده
گروه آموزشی ریاضی
دانشگاه تربیت معلم

پیشگفتار مؤلف

ریاضیات گسسته (یعنی مطالعهٔ دستگاههای متناهی) با پیشرفت کامپیوتر اهمیت روز افزونی یافته است. کامپیوتر رقمی اساساً یک ساختار متناهی است و بسیاری از خواصش را می‌توان در چهار چوب دستگاههای ریاضی متناهی درک و تعبیر نمود. این کتاب را می‌توان همراه با مطالب اساسی دیگر در یک درس رسمی ریاضیات گسسته یا به عنوان مکملی برای تمام کتب متعارف فعلی در این زمینه به کار برد.

سه فصل اول مطالب متعارف راجع به مجموعه‌ها، رابطه‌ها، و تابعها را می‌پوشانند. سپس فصل مربوط به بردارها و ماتریسها می‌آید. و بعد سه فصل راجع به گرافها، گرافهای جهتدار، و درختها خواهیم داشت. در پایان، چند فصل مجزا در باب آنالیز ترکیبی، دستگاههای جبری، مجموعه‌های جم و شبکه‌ها، حساب گزاره‌ها، و جبر بول خواهد آمد. فصلهای مربوط به نظریهٔ گراف بحثهایی راجع به مسطح بودن و قابل عبور بودن گرافها، قضیهٔ چهار رنگ، مسیرهای مینیمال، و خودکارهای متناهی را شامل اند. فصل مربوط به دستگاههای جبری به زبانها و دستور زبانهای صوری نیز خواهد پرداخت. به علاوه، فصل مربوط به جبر بول شامل بحثهایی از مدارها و استفاده از نقشه‌های کارنف برای یافتن شکلهای نرمال فاصل مینیمال می‌باشد. فصلهای این کتاب طوری نگاشته شده‌اند که ترتیبشان را می‌توان به آسانی و بدون از دست دادن پیوستگی به هم زد.

هر فصل با بیان روشنی از تعاریف، اصول، و قضایای مربوطه همراه با شکل و مطالب توصیفی دیگر آغاز می‌شود. پس از آن مسائل حل شده و مسائل تکمیلی می‌آیند. مسائل حل شده مطالب را مجسم و تقویت می‌کنند و شامل برهان قضایا نیز می‌باشند، و مسائل تکمیلی مطالب فصل مربوطه را مرور می‌نمایند. بالأخره، هر فصل شامل مسائل برنامه‌نویسی کامپیوتر است که مستقیماً با مطالب آن فصل در ارتباط می‌باشند. مطالب این کتاب از اکثر دروس

نخستین بیشتر است. این کار بدان خاطر شده است که کتاب انعطاف بیشتری داشته، مرجع مفیدتری باشد، و انگیزهٔ بیشتری نسبت به مطالب ایجاد نماید.

مایلم از بسیاری از دوستان و همکاران، به ویژه آرتورپو (Arthur Poe)، به خاطر پیشنهادات و انتقاداتی که از دستنویس کرده‌اند تشکر نمایم. همچنین مراتب امتنان خود را نسبت به کارکنان بخش سری شام مک گراهیل، به خصوص

دیوید بکویت (David Bechwith)

به خاطر همکاری مداوشان ابراز می‌دارم.

سیمورلیپ شوتس

(Seymour Lipschutz)

دانشگاه تمپل، سپتامبر ۱۹۷۶

فهرست مطالب

۱
نظریهٔ مجموعه ها

۱.۱ مجموعه ها و عنصرها

مفهوم مجموعه درتمام شاخه های ریاضی ظاهر می شود. یک مجموعه شهوداً عبارت است ازلیست یا گردایهٔ مشخصی ازاشیاء و باحروف بزرگ $A, B, X, Y, \ldots$ نموده می شود. اشیاء سازای مجموعه عنصرها یا عضوهای آن نام داشته و با حروف کوچک $a, b, x, y, \ldots$ نشان داده می شود. گزارهٔ « p یک عنصر A است» یا، معادلاً، « p به A تعلق دارد» به صورت

$$p \in A$$

ونقیض $p \in A$ به صورت $p \notin A$ نوشته می شود.

این امر که یک مجموعه کاملاً بااعضایش مشخص است به وسیلهٔ اصل گسترش بیان می شود.

اصل گسترش. دو مجموعهٔ A و B مساویند اگر وفقط اگر عضوهای یکسانی داشته باشند.

طبق معمول، اگر مجموعه های A و B مساوی باشند، می نویسیم $A = B$ ، و اگر مساوی نباشند می نویسیم $A \neq B$.

برای مشخص کردن یک مجموعه اساساً دوراه موجوداست. یک راه ذکر کردن اعضای مجموعه است. به عنوان مثال،

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

مجموعه ای است که عناصرش حروف a, e, i, o, u می باشند. توجه کنید که عنصرها باویرگول ازهم جداشده و درآکولاد قرارگرفته اند. راه دوم بیان خواصی است که عناصر مجموعه راتوصیف می کنند. به عنوان مثال،

$$B = \{x : x > 0 ,\text{ یک عدد صحیح است} \ x\}$$

که خوانده می شود: «B مجموعهٔ x هایی است به طوری که x یک عدد صحیح بوده و x از 0 بزرگتر است»، مجموعه ای است که عنصرهایش اعداد صحیح مثبت می باشند. یک حرف، و معمولاً x ، برای نمایش عضو نوعی مجموعه به کارمی رود؛ دونقطه «به طوری که» و ویرگول «و» خوانده خواهد شد.

مثال ۱.۱

(آ) مجموعهٔ A ی فوق رامی توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$A = \{x : \text{صداداراست} \ x ,\text{ یکی از حروف الفبای انگلیسی است} \ x\}$$

توجه کنید که $b \notin A$ ، $e \in A$ ، و $p \notin A$.

(ب) همهٔ عناصر مجموعهٔ B ی فوق رانمی توان ذکر کرد؛ بااینحال، این مجموعه اغلب به صورت زیر نوشته می شود:

$$B = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

و فرض براین است که مقصود مابرای همه روشن می باشد. ملاحظه می کنیم که $8 \in B$ ولی $-6 \notin B$.

(پ) فرض کنیم $E = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$. به عبارت دیگر، E ازاعدادی تشکیل شده است که جواب معادلهٔ $x^2 - 3x + 2 = 0$ اند. این نوع مجموعه ها راگاهی مجموعهٔ جواب معادلهٔ داده شده می گویند. چون جوابهای معادله عبارتند از 1 و 2 ، نیز می توان نوشت $E = \{1, 2\}$.

(ت) فرض کنیم $E = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ، $F = \{2, 1\}$ ، و $G = \{1, 2, 2, 1, 6/3\}$. دراین صورت، $E = F = G$. توجه کنید که یک مجموعه به طرز نمایش عناصرش وابسته نیست. یک مجموعه درصورت تکرار یاتغییر ترتیب عناصرش تغییر نخواهد کرد.

بعضی ازمجموعه ها کراراً درمتن می آیند و لذابرای آنها علایم خاصی به کارمی بریم. قرار می دهیم

$\mathbf{N}$ = مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت: $1, 2, 3, \ldots$

$\mathbf{Z}$ = مجموعهٔ اعداد صحیح: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

$\mathbf{Q}$ = مجموعهٔ اعداد گویا

$\mathbf{R}$ = مجموعهٔ اعداد حقیقی

$\mathbf{C}$ = مجموعهٔ اعداد مختلط

مگر خلافش تصریح شود.

حتی اگر بتوان عناصر یک مجموعه راذکر کرد ممکن است این کار عملی نباشد. مثلاً، گرچه ممکن است، ما اعضای مجموعهٔ افرادی راکه درسال ۱۹۷۶ متولد شده اند لیست نمی کنیم. یعنی، مافقط وقتی یک مجموعه راباذکر عناصرش توصیف می کنیم که تعداد عنصرها کم باشد؛ درغیر این صورت، یک مجموعه راباخاصیتی که عناصرش رامشخص سازد توصیف می کنیم.

این امر که یک مجموعه رامی توان باخاصیتی توصیف کرد درقالب اصل تجرید بیان می شود.

اصل تجرید. به ازای هر مجموعهٔ U و هر خاصیت P ، یک مجموعه مانند A هست به طوری که عناصر A درست اعضایی از U اند که ازخاصیت P برخوردارند.

۲.۱ مجموعهٔ عمومی، مجموعهٔ تهی

درهر کاربرد ازنظریهٔ مجموعه ها، اعضای همهٔ مجموعه هامعمولاً به مجموعهٔ وسیع ثابتی به نام مجموعهٔ عمومی یا عالم سخن تعلق دارند. مثلاً، درهندسهٔ مسطحه، مجموعهٔ عمومی ازتمام نقاط صفحه متشکل است، و دربررسی جوامع انسانی، مجموعهٔ عمومی ازتمام افراد جهان تشکیل شده است. مامجموعهٔ عمومی راباعلامت

$$U$$

نشان می دهیم مگر خلافش تصریح یاایجاب شود.

به ازای مجموعهٔ U و خاصیت P ، ممکن است عنصری از U واجد خاصیت P موجود نباشد. به عنوان مثال، مجموعهٔ

$$S = \{x : x^2 = 3 \text{ یک عدد صحیح مثبت است، } x\}$$

دارای عنصری نیست چرا که هیچ عدد صحیح مثبتی خاصیت مطلوب راندارد.

مجموعهٔ بدون عنصر مجموعهٔ تهی یا مجموعهٔ خالی نامیده و با

$$\emptyset$$

نموده می شود. ازاصل گسترش نتیجه می شود که فقط یک مجموعهٔ تهی وجوددارد. به عبارت دیگر، هرگاه S و T هر دو تهی باشند، آنگاه $S = T$ زیرا هردو دارای عناصر یکسان (یعنی هیچ عنصر) می باشند.

۳.۱ زیر مجموعه ها

هرگاه هر عنصر مجموعهٔ A عنصری از مجموعهٔ B نیز باشد، آنگاه A را زیرمجموعهٔ B می نامیم. همچنین گوییم A مشمول B یا B شامل A است. این رابطه به صورت

$$A \subset B \quad \text{یا} \quad B \supset A$$

نوشته می شود. اگر A زیر مجموعهٔ B نباشد، یعنی دست کم یک عنصر A متعلق به B نباشد، می نویسیم $A \not\subset B$ یا $B \not\supset A$.

مثال ۲.۱

(آ) مجموعه های زیر رادرنظر می گیریم:

$$A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\} \qquad B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \qquad C = \{1, 5\}$$

در این صورت، $C \subset A$ و $C \subset B$ زیرا 1 و 5 (یعنی عنصرهای C) عضو A و B نیز هستند. ولی $B \not\subset A$ زیرابعضی از عناصرش (مثلاً 2 و 7) متعلق به A نیستند. به علاوه، چون عناصر A ، B ، و C باید به مجموعهٔ عمومی U نیز متعلق باشند، U باید دست کم شامل مجموعهٔ $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ باشد.

(بـ) فرض کنیم $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{Z}$ ، $\mathbf{Q}$ ، و $\mathbf{R}$ همانند بخش ۱.۱ تعریف شده باشند. در این

صورت،

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

(پ) مجموعهٔ $E = \{2,4,6\}$ زیر مجموعه ای ازمجموعهٔ $F = \{6,2,4\}$ است زیرا هر یک از اعداد 2 ، 4 ، و 6 که در E اند متعلق به F نیز هستند. در واقع، $E = F$. به همین نحو می توان نشان داد که هر مجموعه زیر مجموعهٔ خودش است.

هرمجموعهٔ A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ عمومی U است زیرا، طبق تعریف، همهٔ اعضای A متعلق به U می باشند. همچنین، مجموعهٔ تهی $\emptyset$ زیر مجموعهٔ A می باشد.

همانطور که دربالا گفتیم، هر مجموعهٔ A زیر مجموعهٔ خودش است زیرا عناصر A بداهتاً به A تعلق دارند.

هرگاه هر عنصر مجموعهٔ A به مجموعهٔ B تعلق داشته و هر عنصر B به مجموعهٔ C متعلق باشد، آنگاه هرعنصر A به وضوح عضو C خواهد بود. به عبارت دیگر، هرگاه $A \subset B$ و $B \subset C$ ، آنگاه $A \subset C$.

هرگاه $A \subset B$ و $B \subset A$، آنگاه A و B دارای عناصر یکسانند؛ یعنی، $A = B$. به عکس، هرگاه $A = B$، آنگاه $A \subset B$ و $B \subset A$ زیرا هر مجموعه زیر مجموعهٔ خودش می باشد.

ما این نتایج رابه طور صوری بیان می کنیم:

قضیهٔ ۱.۱

(یک) *به‌ازای هر مجموعهٔ* A *داریم* $\emptyset \subset A \subset U$.

(دو) *به ازای هر مجموعهٔ* A *داریم* $A \subset A$.

(سه) *هرگاه* $A \subset B$ *و* $B \subset C$ *، آنگاه* $A \subset C$.

(چهار) $A = B$ *اگر و فقط اگر* $A \subset B$ *و* $B \subset A$.

هرگاه $A \subset B$ ، آنگاه هنوز ممکن است $A = B$. وقتی $A \subset B$ ولی $A \neq B$ ، گوییم A زیرمجموعهٔ حقیقی B است. (بعضی ازمؤلفان برای آنکه A زیر

مجموعهٔ B باشد می نویسند $A\subseteq B$ و $A\subset B$ را به این معنی که A زیر مجموعهٔ حقیقی B است به کار می برند.) به عنوان مثال، هرگاه

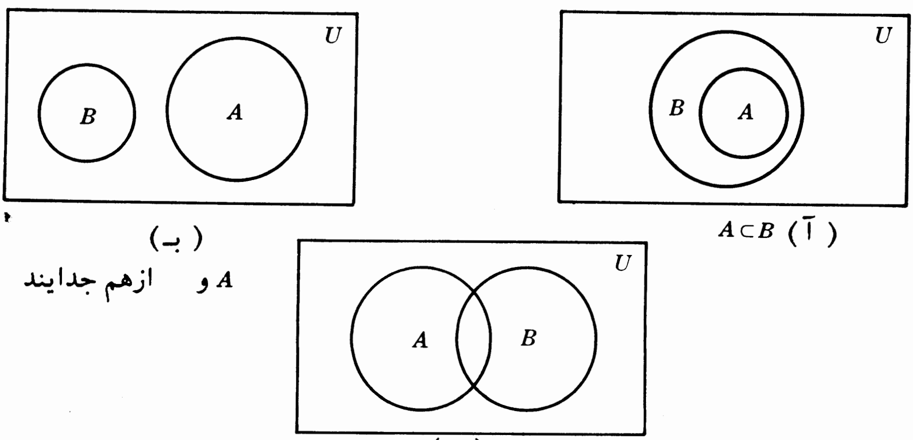
$$A = \{1,3\} \qquad B = \{1,2,3\} \qquad C = \{1,3,2\}$$

آنگاه A و B هردو زیر مجموعهٔ C اند ولی A زیر مجموعهٔ حقیقی C است درحالی که B به دلیل $B=C$ زیر مجموعهٔ حقیقی C نیست.

۴.۱ نمودارهای ون (Venn)

نمودار ون نمایش تصویری مجموعه ها به وسیلهٔ مجموعه هایی ازنقاط درصفحه است. مجموعهٔ عمومی U بادرون یک مستطیل نموده شده و سایر مجموعه ها با قرصهایی واقع در این مستطیل نشان داده می شوند. هرگاه $A\subset B$ ، آنگاه قرص نمایش A کاملاً درقرص نمایش B مانند شکل ۱.۱ (آ) جا دارد. هرگاه A و B از هم جدا باشند، یعنی عنصر مشترک نداشته باشند، آنگاه قرص نمایش A از قرص نمایش B مانند شکل ۱.۱ (بـ) جدا می باشد.

ولی اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، ممکن است اشیایی در A باشند ولی در B نباشند، اشیایی در B باشند ولی در A نباشند، اشیایی در هر دوی A و B باشند، و اشیایی نه در A باشند نه در B ؛ لذا، به طور کلی ما A و B راهمانند شکل ۱.۱ (پـ) نمایش می دهیم.



$A\subset B$ (آ)

(بـ) A و ازهم جدااند

(پـ)

شکل ۱.۱

۵.۱ اعمال با مجموعه ها

اجتماع دومجموعهٔ A و B ، که با $A \cup B$ نموده می شود، عبارت است از مجموعهٔ تمام عناصری که متعلق به A یا B باشند:

$$A \cup B = \{x: \quad x \in A \quad \text{یا} \quad x \in B\}$$

در اینجا «یا» به معنی و / یا خواهد بود.

اشتراک دو مجموعهٔ A و B ، که با $A \cap B$ نموده می شود، عبارت است از مجموعهٔ عناصری که متعلق به هردوی A و B اند:

$$A \cap B = \{x: \quad x \in A \quad \text{و} \quad x \in B\}$$

هرگاه $A \cap B = \emptyset$ ، یعنی هرگاه A و B عنصر مشترکی نداشته باشند، آنگاه گوییم A و B ازهم جدا یا غیر متقاطع می باشند.

متمم نسبی مجموعهٔ B نسبت به مجموعهٔ A یا تفاضل A و B که با $A \setminus B$ نموده می شود عبارت است از مجموعهٔ عناصری که متعلق به A بوده ولی تعلق به B نداشته باشند:

$$A \setminus B = \{x: \ x \in A, \ x \notin B\}$$

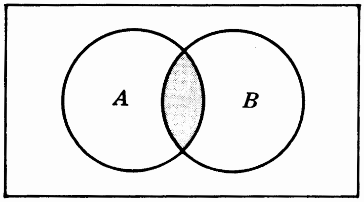
مجموعهٔ $A \setminus B$ خوانده می شود: « A منهای B ». در بسیاری از کتب $A \setminus B$ با $A - B$ نموده شده است.

همانطور که پیشتر گفتیم، تمام مجموعه های موردنظر در یک لحظه زیر مجموعهٔ مجموعهٔ عمومی ثابتی چون U اند. متمم مطلق یا فقط متمم مجموعهٔ A که با A^c نموده می شود عبارت است از مجموعهٔ عناصری که متعلق به U اند ولی تعلق به A ندارند:

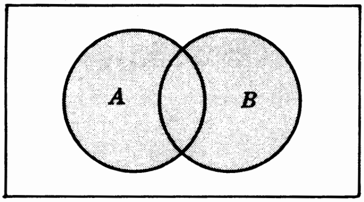
$$A^c = \{x: \ x \in U, \ x \notin A\}$$

یعنی، A^c تفاضل مجموعهٔ عمومی U و A می باشد. در بعضی ازکتابها این مجموعه با A' نموده شده است.

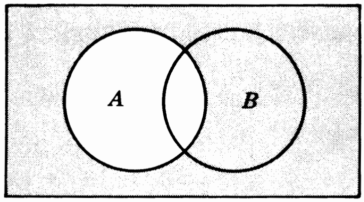
درنمودارهای ون شکل ۲.۱، اعمال فوق باسایه زدن مجموعه های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A \setminus B$ و A^c توضیح داده شده است.



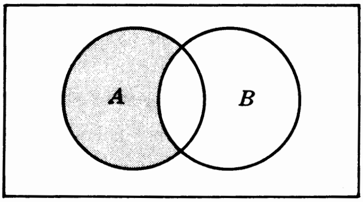
$A \cap B$ سایه داراست



$A \cup B$ سایه دار است



A^c سایه دار است



$A \setminus B$ سایه دار است

شکل ۲.۱

مثال ۳.۱. فرض کنیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6\}$ و نیز $U = \{1, 2, 3, \ldots\}$ یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشد. در این صورت،

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad A \cap B = \{3, 4\}$$

$$A \setminus B = \{1, 2\} \qquad A^c = \{5, 6, 7, \ldots\}$$

قضیهٔ بعدی ما رابطهٔ بین شمول مجموعه ها و اعمال اجتماع و اشتراک رانشان می دهد.

قضیهٔ ۲.۱. روابط $A \subset B$، $A \cap B = A$، $A \cup B = B$ هم ارز یکدیگرند.

(تذکر. این قضیه در مسئلهٔ ۲۱.۱ ثابت شده است. در مسئلهٔ ۳۱.۱ شرایط هم ارز دیگری برای $A \subset B$ داده شده است.)

۶.۱ جبر مجموعه ها، دوگانی

مجموعه ها تحت اعمال فوق درقوانین و اتحادهای مختلفی صدق می کنند که در جدول ۱.۱ ذکر شده اند. درواقع، داریم:

قضیهٔ ۱.۳. مجموعه ها در قوانین جدول ۱.۱ صدق می کنند.

جدول ۱.۱ قوانین جبر مجموعه ها

قوانین خودنمایی

۱ آ. $A \cup A = A$ ۱ ب. $A \cap A = A$

قوانین شرکتپذیری

۲ آ. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ۲ ب. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

قوانین تعویضپذیری

۳ آ. $A \cup B = B \cup A$ ۳ ب. $A \cap B = B \cap A$

قوانین پخشپذیری

٤ آ. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ٤ ب. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

قوانین همانی

۵ آ. $A \cup \emptyset = A$ ۵ ب. $A \cap U = A$

٦ آ. $A \cup U = U$ ٦ ب. $A \cap \emptyset = \emptyset$

قانون برگشت

۷. $(A^c)^c = A$

قوانین متممگیری

۸ آ. $A \cup A^c = U$ ۸ ب. $A \cap A^c = \emptyset$

۹ آ. $U^c = \emptyset$ ۹ ب. $\emptyset^c = U$

قوانین دمورگان (De Morgan)

۱۰ آ. $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$ ۱۰ ب. $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$

ما برای اثبات معادلات شامل اعمال مجموعه ای دو روش ارائه می دهیم. درروش اول عضویت شیء دلخواه x به هر طرف معادله رامعنی کرده و درروش دوم ازنمودارهای ون استفاده می کنیم. به عنوان مثال، اولین قانون دمورگان رادرنظر می گیریم:

$$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$$

روش ۱. ابتدا نشان می دهیم که $(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$. هرگاه $x\in(A\cup B)^c$ ، آنگاه $x\notin A\cup B$. لذا، $x\notin A$ و $x\notin B$ ؛ و درنتیجه، $x\in A^c$ و $x\in B^c$. بنابراین، $x\in A^c\cap B^c$.

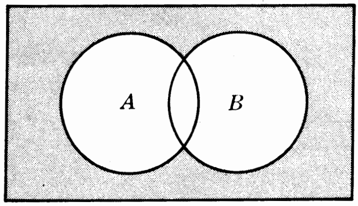
حال نشان می دهیم که $A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$. فرض کنیم $x\in A^c\cap B^c$. پس $x\in A^c$ و $x\in B^c$ ؛ در نتیجه، $x\notin A$ و $x\notin B$. لذا، $x\notin A\cup B$. در نتیجه، $x\in(A\cup B)^c$.

پس ثابت کرده ایم که هر عنصر $(A\cup B)^c$ متعلق به $A^c\cap B^c$ وهر عنصر $A^c\cap B^c$ متعلق به $(A\cup B)^c$ است. این روابط شمول باهم ثابت می کنند که مجموعه های موردبحث عناصر یکسانی دارند؛ یعنی، $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$.

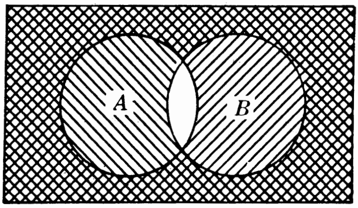
(تبصره. ما به طور ضمنی ازیک قانون منطقی مشابه که در فصل ۱۱ مطرح شده استفاده کرده ایم.)

روش ۲. درنمودار ون مربوط به $A\cup B$ در شکل ۲.۱ دیده می شود که $(A\cup B)^c$ باناحیهٔ سایه دار شکل ۳.۱ (آ) نموده می شود. برای یافتن $A^c\cap B^c$ ، یعنی سطح موجود در هر دوی A^c و B^c ، A^c را باخطوطی در یک جهت و B^c راباخطوطی در جهت دیگر مثل شکل ۳.۱ (ب) سایه می زنیم. در این صورت، $A^c\cap B^c$ باناحیهٔ سایه‌دار شکل ۳.۱ (پ) نموده خواهد شد.

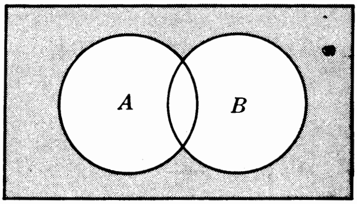
چون $(A\cup B)^c$ و $A^c\cap B^c$ باسطح یکسانی نموده شده اند، باهم مساوی می باشند.



(آ) $(A\cup B)^c$ سایه دار است



(ب) A^c با //// سایه دار شده است
B^c با \\\\ سایه دار شده است



(پ) $A^c\cap B^c$ سایه دار است

شکل ۱.۳

خواننده ممکن است ازآمدن اتحادهادرجدول ۱.۱ به صورت جفت (مثلاً ۲ آ و ۲ ب) تعجب کند. حال اصل موجوددرپشت این ترتیب راتوضیح می دهیم. فرض کنیم E یک معادله در جبر مجموعه ها باشد. دوگان E^* از E معادله ای است که از تعویض هرمورد $\cup$ ، $\cap$ ، U ، و $\varnothing$ در E به ترتیب با $\cap$ ، $\cup$ ، $\varnothing$ ، و U به دست می آید. به عنوان مثال، دوگان

$$(U\cap A)\cup(B\cap A) = A \quad \text{عبارت است از} \quad (\varnothing\cup A)\cap(B\cup A) = A$$

توجه کنید که هر جفت قانون در جدول ۱.۱ دوگان یکدیگر می باشند. نکته ای در جبر مجموعه هابه نام اصل دوگانی هست که می گوید: هرگاه معادلهٔ E یک اتحاد باشد، آنگاه دوگانش E^* نیز اتحاد می باشد.

۷.۱ مجموعه های متناهی، اصل شمارش

گوییم یک مجموعه متناهی است اگر درست شامل m عنصر متمایز باشد که m یک عدد صحیح نامنفی است. در غیر این صورت، یک مجموعه را نامتناهی می نامیم. به

عنوان مثال، مجموعهٔ تهی $\emptyset$ و مجموعهٔ حروف الفبای انگلیسی مجموعه هایی متناهی اند ولی مجموعهٔ اعداد صحیح زوج مثبت $\{2, 4, 6, \ldots\}$ نامتناهی می باشد.

اگر مجموعهٔ A متناهی باشد، $n(A)$ راتعداد عنصرهای A می گیریم. در بعضی از کتابها از $\#(A)$ به جای $n(A)$ استفاده شده است.

لم ۴.۱. هرگاه A و B مجموعه های متناهی از هم جدایی باشند، آنگاه $A \cup B$ متناهی است و

$$n(A \cup B) \;=\; n(A) + n(B)$$

برهان. درشمارش عناصر $A \cup B$ ابتدا عنصرهایی رامی شماریم که در A اند. تعداد آنها $n(A)$ است. تنها عناصر دیگر $A \cup B$ آنهایی هستند که در B بوده ولی در A نیستند. ولی چون A و B ازهم جدایند، هیچ عنصری از B در A نیست. پس تعداد $n(B)$ عنصر هست که در B بوده ولی در A نیستند. بنابراین،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

برای $n(A \cup B)$ حتی وقتی مجموعه ها از هم جدا نیستند نیز فرمول داریم. این فرمول درمسئلهٔ ۲۲.۱ ثابت شده است.

قضیهٔ ۵.۱. هرگاه A و B مجموعه هایی متناهی باشند، آنگاه $A \cup B$ و $A \cap B$ نیز متناهی اند و

$$n(A \cup B) \;=\; n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

این نتیجه را می توان برای به دست آوردن فرمول مشابهی برای سه مجموعه به کاربرد.

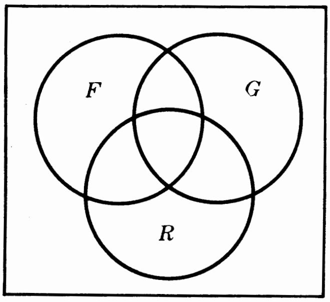
نتیجهٔ ۶.۱. هرگاه A، B، و C مجموعه هایی متناهی باشند، آنگاه مجموعهٔ $A \cup B \cup C$

نیز متناهی است و

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

این نتیجه را می توان به استقرای ریاضی (بخش ۱. ۱۰) به تعدادی متناهی مجموعه تعمیم داد.

مثال ۱.٤. فرض کنیم 100 تا از 120 دانشجوی ریاضی دست کم یکی از درسهای زبان فرانسه، آلمانی، و روسی را گرفته باشند. همچنین 65 نفر فرانسه، 45 نفر آلمانی، 42 نفر روسی، 20 نفر فرانسه و آلمانی، 25 نفر فرانسه و روسی، و 15 نفر آلمانی و روسی بخوانند. فرض کنیم F ، G ، و R مجموعهٔ دانشجویانی باشند که به ترتیب فرانسه، آلمانی، و روسی می‌خوانند. می خواهیم تعداد شاگردانی که هر سه زبان رامی خوانند یافته و تعداددانشجویان در هر یک از هشت ناحیهٔ نمودار ون شکل ۱.٤ رامشخص سازیم.



شکل ۱.٤

بنابر نتیجهٔ ۱.٦،

$$n(F \cup G \cup R) = n(F) + n(G) + n(R) - n(F \cap G) - n(F \cap R) - n(G \cap R) + n(F \cap G \cap R)$$

اما $n(F \cup G \cup R) = 100$ زیرا هریک از 100 دانشجو دست کم یکی از زبانها رامی خوانند. باجانشانی داریم

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + n(F\cap G\cap R)$$

ودرنتیجه، $n(F\cap G\cap R) = 8$ ؛ یعنی، 8 دانشجو هر سه زبان را می خوانند.

حال از این نتیجه برای پر کردن نمودار ون استفاده می کنیم. داریم:

8 نفر هر سه زبان را می خوانند؛

$20 - 8 = 12$ نفر فرانسه و آلمانی می خوانند ولی روسی نمی خوانند؛

$25 - 8 = 17$ نفر فرانسه و روسی می خوانند ولی آلمانی نمی خوانند؛

$15 - 8 = 7$ نفر آلمانی و روسی می خوانند ولی فرانسه نمی خوانند؛

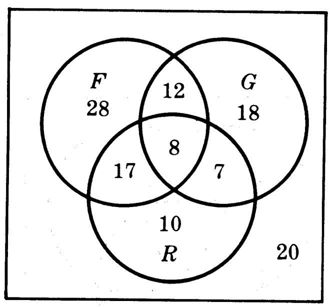
$65 - 12 - 8 - 17 = 28$ نفر فقط فرانسه می خوانند؛

$45 - 12 - 8 - 7 = 18$ نفر فقط آلمانی می خوانند؛

$42 - 17 - 8 - 7 = 10$ نفر فقط روسی می خوانند؛

$120 - 100 = 20$ نفر هیچ زبانی رانمی خوانند.

بدین ترتیب، نمودار کامل به شکل ۱. ۵ می باشد. توجه کنید که $28 + 18 + 10 = 56$ نفر فقط یکی از زبانها رامی خوانند.



شکل ۱. ۵

۱. ۸ رده های مجموعه ها، مجموعه های توان

حال به بعضی از زیر مجموعه های مجموعهٔ مفروض A می پردازیم. لذا، مجموعه ای از مجموعه ها را درنظر می گیریم. در یک چنین حالت، برای پرهیز از ابهام، به جای مجموعه ای از مجموعه ها از یک رده یا گردایه از مجموعه ها سخن می گوییم. چنانچه بخواهیم مجموعه هایی رادر یک رده از مجموعه ها در نظر بگیریم، از یک زیررده یا

زیر گرد[1] یه صحبت خواهیم کرد.

مثال ۵.۱. فرض کنیم $A = \{1,2,3,4\}$. همچنین $\mathcal{A}$ ردهٔ زیر مجموعه هایی از A باشد که درست سه عنصر از A رادارند. در این صورت،

$$\mathcal{A} = [\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}]$$

عنصرهای $\mathcal{A}$ عبارتند از مجموعه های $\{1,2,3\}$ ، $\{1,2,4\}$ ، $\{1,3,4\}$ ، و $\{2,3,4\}$.

فرض کنیم $\mathcal{B}$ ردهٔ زیر مجموعه های A باشد که شامل 2 و دو عنصر دیگر A اند. در این صورت،

$$\mathcal{B} = [\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}]$$

عنصرهای $\mathcal{B}$ عبارتند از مجموعه های $\{1,2,3\}$ ، $\{1,2,4\}$ ، و $\{2,3,4\}$. لذا، $\mathcal{B}$ یک زیر ردهٔ $\mathcal{A}$ است زیرا هر عنصر $\mathcal{B}$ یک عنصر $\mathcal{A}$ نیز هست. (برای احتراز از ابهام، گاهی مجموعه های یک رده رابه جای آکولاد در کروشه جا می دهیم.)

ما از ردهٔ تمام زیر مجموعه های مجموعهٔ A سخن می گوییم. این رده را مجموعهٔ توان A نامیده و با $\mathcal{P}(A)$ نشان می دهیم. هرگاه A متناهی باشد، آنگاه $\mathcal{P}(A)$ نیز چنین است. به علاوه، تعداد عنصرهای $\mathcal{P}(A)$ مساوی 2 به توان $n(A)$ می باشد:

$$n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}$$

به این دلیل است که گاهی مجموعهٔ توان A رابا 2^A نشان می دهند.

مثال ۶.۱ . فرض کنیم $A = \{1,2,3\}$. در این صورت،

$$\mathcal{P}(A) = [\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A]$$

توجه کنید که مجموعهٔ تهی $\emptyset$ متعلق به $\mathcal{P}(A)$ است زیرا $\emptyset$ زیر مجموعهٔ A می باشد. به همین نحو، A تعلق به $\mathcal{P}(A)$ دارد. همچنین توجه کنید که $\mathcal{P}(A)$ دارای $2^3 = 8$ عنصر می باشد.

۹.۱ استدلالها و نمودارهای ون

بسیاری از احکام لفظی رامی توان به احکامی هم ارز راجع به مجموعه ها که قابل

توصیف بانمودارهای ون اند بدل کرد. بدین ترتیب، اغلب از نموارهای ون برای تعیین اعتبار یک استدلال استفاده می شود.

مثال ۷.۱. استدلال زیر را که از کتاب منطق لوییس کارول (Lewis Carroll)، مؤلف کتاب *آلیس در سرزمین عجایب*، اخذ شده است بررسی نمایید:

S_1 : ماهی تابه های من تنها اشیایی از من است که از حلبی ساخته شده اند.

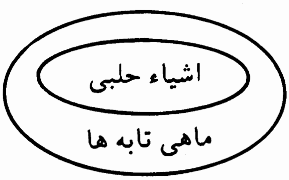
S_2 : تمام هدایای شما بسیار سودمندند.

S_3 : ماهی تابه های من کوچکترین فایده ای برای من ندارند.

S : هدایای شما از حلبی ساخته نشده اند.

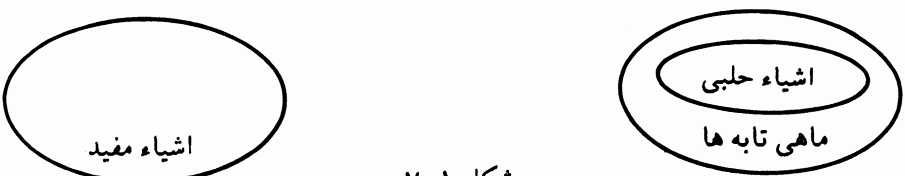
احکام S_1 ، S_2 ، و S_3 بالای خط افقی مفروضات و حکم S زیر این خط نتیجه می باشد. حال تعیین می کنیم که حکم S از مفروضات به طور منطقی نتیجه می شود یانه یعنی آیا S یک نتیجهٔ معتبر است یا نه.

اما، طبق S_1 ، اشیاء حلبی مشمول مجموعهٔ ماهی تابه ها است. لذا، نمودار ون شکل ٦.١ را می کشیم.



شکل ٦.١

بنابر S_3 ، مجموعهٔ ماهی تابه ها و مجموعهٔ اشیاء مفید از هم جدایند؛ لذا، شکل ۷.۱ رارسم می کنیم.



شکل ۷.۱

بنا بر S_2 ، مجموعهٔ « هدایای شما » زیر مجموعهٔ مجموعهٔ اشیاء مفید است؛ لذا، شکل ۸.۱ را می کشیم.

شکل ۸.۱

واضح است که نتیجه به وسیلهٔ نمودار ون فوق برقرار است زیرامجموعهٔ « هدایای شما » و مجموعهٔ اشیاء حلبی از هم جدا می باشند.

۱۰.۱ استقرای ریاضی

یکی از خواص مهم مجموعهٔ

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

که در بسیاری از برهانها به کار می‌رود، به قرارزیر می باشد:

اصل استقرای ریاضی I . فرض کنیم P حکمی باشد که براعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ تعریف شده است؛ یعنی، $P(n)$ به ازای هر n در $\mathbf{N}$ درست یا نادرست باشد. همچنین، P از دو خاصیت زیر برخوردارباشد:

(یک) $P(1)$ درست باشد؛

(دو) $P(n+1)$ در صورت درست بودن $P(n)$ درست باشد؛

در این صورت، P به ازای هر عدد صحیح مثبت درست است.

ما این اصل راثابت نمی کنیم. در واقع، وقتی $\mathbf{N}$ به صورت اصل موضوعی عنوان می شود، این اصل معمولاً به صورت اصل موضوع بیان می گردد.

مثال ۸.۱ . فرض کنیم حکم P یعنی مجموع n عدد فرد نخستین n^2 است؛ یعنی،

$$P(n): \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

(عدد فرد n م $2n-1$ و عدد فردبعدی $2n+1$ می باشد.) ملاحظه می کنیم که $P(n)$ به ازای $n = 1$ درست است:

$$P(1): \quad 1 = 1^2$$

بافرض درست بودن $P(n)$ ، $2n+1$ را به طرفین $P(n)$ می افزاییم:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

که مساوی $P(n+1)$ است. یعنی، $P(n+1)$ در صورت درست بودن $P(n)$ درست است. پس، طبق اصل استقرای ریاضی، P به ازای هر n درست می باشد.

شکلی از اصل استقرای ریاضی هست که گاهی درعمل مناسبتر می باشد. باآنکه صورت متفاوتی دارد، واقعاً بااصل استقراهم ارز می باشد.

اصل استقرای ریاضی II . فرض کنیم حکم P برمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ چنان تعریف شده باشد که

(یک) $P(1)$ درست باشد؛

(دو) $P(n)$ درصورت درست بودن $P(k)$ به ازای هر $1 \le k < n$ درست باشد. در این صورت P به ازای هر عدد صحیح مثبت درست خواهد بود.

مسائل حل شده

مجموعه ها، زیر مجموعه ها

۱.۱ . ازمجموعه های زیر کدامها مساویند:

$$\{r, t, s\}, \ \{s, t, r, s\}, \ \{t, s, t, r\}, \ \{s, r, s, t\}\,?$$

حل. همهٔ این مجموعه ها مساویند. ترتیب و تکراریک مجموعه راتغییر نمی دهند.

۲.۱ . عنصرهای مجموعه های زیرراذکر کنید؛ در اینجا $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

آ) $A = \{x : x \in \mathbf{N}, 3 < x < 12\}$

ب) $B = \{x : x \in \mathbf{N},$ زوج است $x, x < 15\}$

پ) $C = \{x : x \in \mathbf{N}, 4 + x = 3\}$.

حل. (آ) A ازاعداد صحیح مثبت بین 3 و 12 تشکیل شده است؛ لذا،

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

(ب) B ازاعداد صحیح مثبت زوج کمتر از 15 تشکیل شده است؛ لذا،

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

(پ) اعداد صحیح مثبتی که در شرط $4 + x = 3$ صادق باشند وجود ندارند؛ لذا، C شامل عنصری نیست. به عبارت دیگر، (مجموعهٔ تهی) $C = \emptyset$.

۱.۳. ثابت کنید $A = \{2, 3, 4, 5\}$ زیر مجموعهٔ $B = \{x: x \in \mathbf{N}$، x زوج است$\}$ نیست.

حل. باید نشان دهیم که دست کم یک عنصر در A هست که تعلق به B ندارد. گوییم $3 \in A$ و، چون B ازاعداد زوج تشکیل شده است، $3 \notin B$ ؛ لذا، A زیر مجموعهٔ B نیست.

۱.۴. مجموعه های زیر رادر نظر بگیرید:

$$\emptyset, \quad A = \{1\}, \quad B = \{1,3\}, \quad C = \{1,5,9\}, \quad D = \{1,2,3,4,5\},$$
$$E = \{1,3,5,7,9\}, \quad U = \{1,2, \ldots, 8,9\}$$

بین هر جفت از مجموعه های زیر علامت صحیح $\subset$ یا $\not\subset$ راقراردهید:

(آ) $\emptyset, A$ ؛ (ب) A, B ؛ (پ) B, C ؛ (ت) B, E ؛

(ث) C, D ؛ (ج) C, E ؛ (چ) D, E ؛ (ح) D, U .

حل. (آ) $\emptyset \subset A$ زیرا $\emptyset$ زیر مجموعهٔ هر مجموعه است.

(ب) $A \subset B$ زیرا 1 تنها عنصر A ست و این عنصر به B تعلق دارد.

(پ) $B \not\subset C$ زیرا $3 \in B$ ولی $3 \notin C$.

(ت) $B \subset E$ زیراعناصر B به E نیز تعلق دارند.

(ث) $C \not\subset D$ زیرا $9 \in C$ ولی $9 \notin D$.

(ج) $C \subset E$ زیرا عناصر C به E نیز تعلق دارند.

(چ) $D \not\subset E$ زیرا $2 \in D$ ولی $2 \notin E$.

(ح) $D \subset U$ زیرا عناصر D به U نیز تعلق دارند.

اعمال با مجموعه ها

در مسائل ۵.۱ تا ۷.۱ فرض کنید $U = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ و

$$A = \{1,2,3,4,5\} \qquad C = \{5,6,7,8,9\} \qquad E = \{2,4,6,8\}$$
$$B = \{4,5,6,7\} \qquad D = \{1,3,5,7,9\} \qquad F = \{1,5,9\}$$

۵.۱. مجموعه های زیر رابیابید:

(آ) $A \cup B$ و $A \cap B$ (ب) $B \cup D$ و $B \cap D$

(پ) $A \cup C$ و $A \cap C$ (ت) $D \cup E$ و $D \cap E$

(ث) $E \cup E$ و $E \cap E$ (ج) $D \cup F$ و $D \cap F$

حل. به یاد می آوریم که اجتماع $X \cup Y$ از عنصرهایی تشکیل شده است که در X یا Y (یاهردو) اند، و اشتراک $X \cap Y$ از عناصری تشکیل شده است که در هردوی X و Y می باشند.

(آ) $A \cap B = \{4, 5\}$ $\qquad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(ب) $B \cap D = \{5, 7\}$ $\qquad B \cup D = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

(پ) $A \cap C = \{5\}$ $\qquad A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\ 9\} = U$

(ت) $D \cap E = \emptyset$ $\qquad D \cup E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = U$

(ث) $E \cap E = \{2, 4, 6, 8\} = E$ $\qquad E \cup E = \{2, 4, 6, 8\} = E$

(ج) $D \cap F = \{1, 5, 9\} = F$ $\qquad D \cup F = \{1, 3, 5, 7, 9\} = D$

توجه کنید که $F \subset D$ ؛ پس، طبق قضیهٔ ۲.۱، باید داشته باشیم $D \cup F = D$ و $D \cap F = F$.

۶.۱. مجموعه های زیر رابیابید:

(آ) A^c و B^c (بـ) D^c و E^c

(پـ) $A \setminus B$ و $B \setminus A$ (تـ) $D \setminus E$ و $F \setminus D$

حل. به یاد می آوریم که X^c عبارت است از عناصری درمجموعهٔ عمومی U که تعلق به X ندارند، و $X \setminus Y$ عبارت است از عناصری در X که متعلق به Y نیستند.

(آ) $A^c = \{6, 7, 8, 9\}$ (بـ) $D^c = \{2, 4, 6, 8\} = E$

$B^c = \{1, 2, 3, 8, 9\}$ $E^c = \{1, 3, 5, 7, 9\} = D$

(پـ) $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$ (تـ) $D \setminus E = \{1, 3, 5, 7, 9\} = D$

$B \setminus A - \{6, 7\}$ $F \setminus D = \emptyset$

۷.۱. مجموعه های زیر رابیابید:

(آ) $A \cap (B \cup E)$ (بـ) $(A \setminus E)^c$

(پـ) $(A \cap D) \setminus B$ (تـ) $(B \cap F) \cup (C \cap E)$

حل. (آ) ابتدا حساب می کنیم $B \cup E = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$. سپس داریم

$$A \cap (B \cup E) = \{2, 4, 5\}$$

(بـ) $A \setminus E = \{1, 3, 5\}$. پس داریم $(A \setminus E)^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$.

(پـ) $A \cap D = \{1, 3, 5\}$. بنابراین، $(A \cap D) \setminus B = \{1, 3\}$.

(تـ) $B \cap F = \{5\}$ و $C \cap E = \{6, 8\}$. در نتیجه، $(B \cap F) \cup (C \cap E) = \{5, 6, 8\}$.

۸.۱. به فرض آنکه

$$A = \{\text{شهین ، زهرا ، فاطمه}\}$$

$B =$ {مهین ، شهین ، فاطمه }

$C =$ {مهین ، سوسن ، شهین، زهرا }

$D =$ {مهین ، سوسن ، زهرا ، فاطمه }

مجموعه های زیر رابیابید :

(آ) $A \cup B$ و $C \cup D$ (ب) $A \cap C$ و $B \cap D$

(پ) $B \setminus C$ و $D \setminus A$ (ت) $(A \cap D) \cup (C \setminus B)$

حل. (آ)

$A \cup B =$ {مهین ، شهین ، زهرا ، فاطمه }

$C \cup D =$ {مهین ، سوسن ، شهین ، زهرا ، فاطمه }

(ب)

$A \cap C =$ {شهین ، زهرا }

$B \cap D =$ {مهین ، فاطمه }

(پ)

$B \setminus C =$ {فاطمه}

$D \setminus A =$ {مهین ، سوسن }

(ت) ابتدا داریم { زهرا ، فاطمه } $= A \cap D$ و سپس { سوسن ، زهرا } $= C \setminus B$.
دراین صورت،

$(A \cap D) \cup (C \setminus B) =$ {سوسن ، زهرا ، فاطمه}

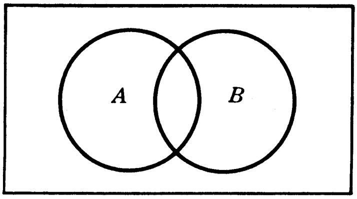
۱ . ۹. نشان دهید که می توان رابطهٔ $A \cap B = A \cap C$ رابدون $B = C$ داشت.

حل. فرض کنیم $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{2, 3\}$ ، و $C = \{2, 4\}$. پس داریم $A \cap B = \{2\}$ و $A \cap C = \{2\}$. لذا، $A \cap B = A \cap C$ ولی $B \neq C$.

نمودارهای ون

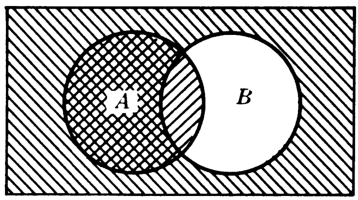
۱۰.۱ . مجموعه های (آ) $A \cap B^c$ و (ب) $(B \setminus A)^c$ در نمودار ون شکل ۹.۱

راسایه بزنید .

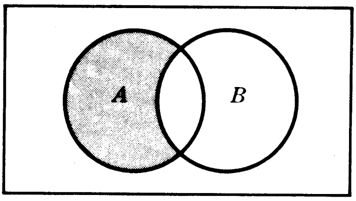


شکل ۹.۱

حل. (آ) همانند شکل ۱۰.۱ (آ)، A را باخطوطی در یک جهت (////) و B^c (سطح خارج B) رابا خطوطی در جهت دیگر (\\\\\\\\) سایه می زنیم. سطح شطرنجی اشتراک $A \cap B^c$ شکل ۱۰.۱ (بـ) می باشد. توجه کنید که $A \cap B^c = A \setminus B$.



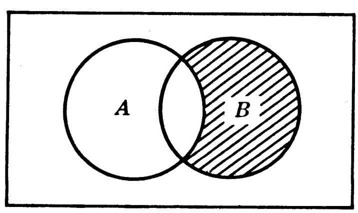
(آ) A و B^c سایه دارند



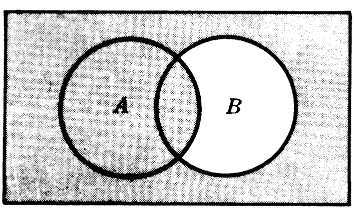
(بـ) $A \cap B^c$ سایه دار است

شکل ۱۰.۱

(بـ) همانند شکل ۱۱.۱ (آ)، $B \setminus A$ (سطحی از B که در A نیست) راسایه می زنیم. سپس $(B \setminus A)^c$ مساحت خارج $B \setminus A$ طبق شکل ۱۱.۱ (بـ) می باشد.



(آ) $B \setminus A$ سایه دار است

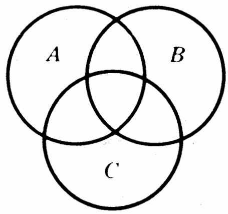


(بـ) $(B \setminus A)^c$ سایه دار است

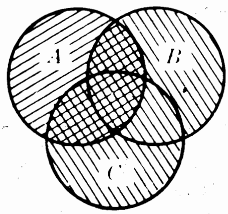
شکل ۱۱.۱

۱۱.۱. قانون پخشپذیری $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ را با نمودارهای ون توضیح دهید.

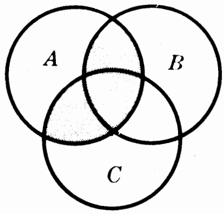
حل. سه دایرهٔ متقاطع A ، B ، و C را مثل شکل ۱۲.۱ (آ) می کشیم. سپس، مثل شکل ۱۲.۱ (ب)، A را با خطوطی در یک جهت و $B \cup C$ را با خطوطی در جهت دیگر سایه می زنیم. سطح ها شورخورده عبارت است از $A \cap (B \cup C)$ مثل شکل ۱۲.۱ (پ). حال $A \cap B$ و سپس $A \cap C$ را طبق شکل ۱۲.۱ (ت) سایه می زنیم. سطح کل سایه دار عبارت است از $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ مثل شکل ۱۲.۱ (ث).



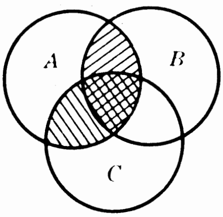
(آ)



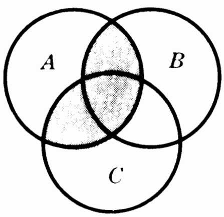
(ب) A و $B \cup C$ سایه دارند



(پ) $A \cap (B \cup C)$ سایه دار است



(ت) $A \cap B$ و $A \cap C$ سایه دارند



(ث) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ سایه دار است

شکل ۱۲.۱

همانطور که از قانون پخشپذیری انتظار می رود، $A \cap (B \cup C)$ و $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

هردو نمایش مجموعهٔ واحدی از نقاط می باشند.

جبرمجموعه ها، دوگانی

۱۲.۱. دوگان هر یک از معادلات مجموعه ای زیر رابنویسید:

(آ) $(A\cup B)\cap(A\cup B^c) = A\cup\emptyset$ (ب) $(A\cap U)\cup(B\cap A) = A$

حل. هرمورد از $\cup$، $\cap$، U، و $\emptyset$ رابه ترتیب با $\cap$، $\cup$، $\emptyset$، و U تعویض می کنیم:

(آ) $(A\cap B)\cup(A\cap B^c) = A\cap U$ (ب) $(A\cup\emptyset)\cap(B\cup A) = A$

۱۳.۱. اتحاد $(U\cap A)\cup(B\cap A) = A$ راباستفاده از قوانین جدول ۱.۱ در صفحهٔ ۹ ثابت کنید.

حل.

دلیل	استدلال
(قانون تعویضپذیری ۳ آ)	$(U\cap A)\cup(B\cap A) = (A\cap U)\cup(A\cap B)$
(قانون پخشپذیری ٤ بـ)	$= A\cap(U\cup B)$
(قانون تعویضپذیری ۳ آ)	$= A\cap(B\cup U)$
(قانون همانی ٦ آ)	$= A\cap U$
(قانون همانی ۵ بـ)	$= A$

۱٤.۱. اتحاد $(\emptyset\cup A)\cap(B\cup A) = A$ راثابت کنید.

حل. این دوگان اتحادی است که در مسئلهٔ ۱۳.۱ ثابت شده و لذا، طبق اصل دوگانی، درست می باشد. به عبارت دیگر، از تعویض هر مرحله از برهان مسئلهٔ ۱۳.۱ بادوگان آن به برهانی از این اتحاد دست خواهیم یافت.

مجموعه های متناهی، اصل شمارش

۱۵.۱ . ازمجموعه های زیر کدامها متناهی اند ؟

(آ) { فصلهای سال } $= A$

(بـ) { ایالات کشور آمریکا } $= B$

(پـ) { اعداد صحیح مثبت کمتر از 1 } $= C$

(تـ) { اعداد صحیح فرد } $= D$

(ثـ) { مقسوم علیه های صحیح و مثبت 12} $= E$

(جـ) { تعداد گربه های ایالات متحدهٔ آمریکا } $= F$

حل. (آ) A متناهی است زیرا هرسال چهارفصل دارد ؛ یعنی، $n(A) = 4$.

(بـ) B متناهی است زیرا آمریکا دارای 50 ایالت است؛ یعنی، $n(B) = 50$.

(پـ) عدد صحیح مثبتی کمتر از 1 وجودندارد ؛ لذا ، C تهی است. بنابراین، C متناهی بوده و $n(C) = 0$.

(تـ) D نامتناهی است.

(ثـ) مقسوم علیه های صحیح و مثبت 12 عبارتند از 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، و 12 . لذا ، E متناهی است و $n(E) = 6$.

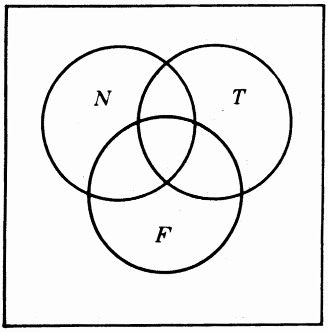
(جـ) با آنکه شمارش تعداد گربه های ایالات متحده مشکل است، ولی این تعداد متناهی است. لذا ، F متناهی می باشد .

۱۶.۱ . در تحقیقات از 60 نفر آمریکایی معلوم شده که 25 نفر روزنامهٔ نیوزویک، 26 نفر تایم، و 26 نفر فورچون می خوانند . همچنین 9 نفر نیوزویک و فورچون، 11 نفر نیوزویک و تایم، 8 نفر تایم و فورچون، و 8 نفر هیچ مجله ای رانمی خوانند .

(آ) تعداد افرادی که هر سه روزنامه رامی خوانند بیابید .

(بـ) هشت ناحیهٔ نمودار ون در شکل ۱ . ۱۳ رابا اعداد مربوطه پر کنید .

در اینجا N ، T ، و F مجموعهٔ افرادی هستند که به ترتیب نیوزویک، تایم، و فورچون



شکل ۱.۱۳

می خوانند .

(پـ) تعداد افرادی رابیابید که فقط یک روزنامه می خوانند .

حل. (آ) فرض کنیم $x = n(N\cap T\cap F)$ تعداد افرادی باشـد که هر سه روزنامه رامی خوانند . توجه کنید که $n(N\cup T\cup F) = 52$ زیرا 8 نفر هیچیک از این روزنامه ها را نمی خوانند . داریم

$$n(N\cup T\cup F) = n(N) + n(T) + n(F) - n(N\cap T) - n(N\cap F) - n(T\cap F) + n(N\cap T\cap F)$$

بنابراین،

$52 = 25 + 26 + 26 - 11 - 9 - 8 + x$ یا $x = 3$.

(بـ) نمودار ون مطلوب به شکل ۱.۱٤ است که به صورت زیر به دست می آید :

3 نفر هر سه روزنامه رامی خوانند ؛

$11 - 3 = 8$ نفرنیوزویک و تایم می خوانند ولی نه هر سه روزنامه را ؛

$9 - 3 = 6$ نفرنیوزویک و فورچون می خوانند ولی نه هر سه روزنامه را ؛

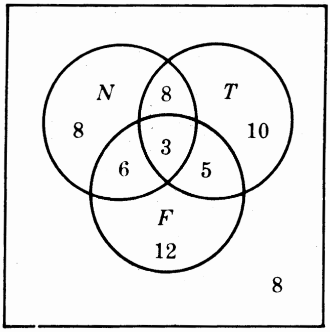
$8 - 3 = 5$ نفر تایم و فورچون می خوانند ولی نه هر سه روزنامه را ؛

$25 - 8 - 6 - 3 = 8$ نفر فقط نیوزویک می خوانند ؛

$26 - 8 - 5 - 3 = 10$ نفر فقط تایم می خوانند ؛

$26 - 6 - 5 - 3 = 12$ نفر فقط فورچون می خوانند ؛

(پـ) $8 + 10 + 12 = 30$ نفر فقط یک روزنامه می خوانند .



شکل ۱.۱٤

رده های مجموعه ها

۱.۱۷. مجموعهٔ توان $\mathcal{P}(A)$ مجموعهٔ $A = \{a, b, c, d\}$ راتعیین کنید.

حل. عنصرهای $\mathcal{P}(A)$ عبارتند از زیر مجموعه های A . لذا،

$$\mathcal{P}(A) = [A, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \emptyset]$$

ملاحظه می کنیم که $\mathcal{P}(A)$ دارای $2^4 = 16$ عنصر می باشد.

۱.۱۸. مجموعهٔ $A = [\{1,2,3\}, \{4,5\}, \{6,7,8\}]$ رادرنظر بگیرید.

(آ) عنصرهای A چیستند ؟

(بـ) درستی یانادرستی احکام زیر راتعیین کنید :

(یک) $1 \in A$ (دو) $\{1,2,3\} \subset A$

(سه) $\{6,7,8\} \in A$ (چهار) $\{\{4,5\}\} \subset A$

(پنج) $\emptyset \notin A$ (شش) $\emptyset \subset A$

حل. (آ) A یک رده از مجموعه هاست. عناصرش عبارتند از مجموعه های $\{1,2,3\}$ ، $\{4,5\}$ ، و $\{6,7,8\}$.

(بـ) (یک) نادرست. 1 عنصر A نیست.

(دو) نادرست. $\{1,2,3\}$ زیر مجموعهٔ A نیست؛ یکی از عناصر A است.

(سه) درست. $\{6,7,8\}$ یکی از عناصر A است.

(چهار) درست. $\{\{4,5\}\}$ ، یعنی مجموعهٔ مرکب از عنصر $\{4,5\}$ ، زیر مجموعهٔ A است.

(پنج) درست. مجموعهٔ تهی $\emptyset$ عنصری از A نیست؛ یعنی، یکی از سه مجموعهٔ مذکور در صورت مسئله نیست.

(شش) درست. مجموعهٔ تهی یک زیر مجموعهٔ هر مجموعه است؛ حتی رده ای از مجموعه ها.

مسائل گوناگون

۱۹.۱ . حکم P که مجموع n عدد صحیح مثبت نخستین مساوی $\frac{1}{2}n(n+1)$ است؛ یعنی،

$$P(n): \quad 1+2+3+\cdots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

راثابت کنید .

حل. حکم فوق به ازای $n=1$ برقراراست زیرا

$$P(1): \quad 1 = \tfrac{1}{2}(1)(1+1)$$

بافرض درست بودن $P(n)$ ، $n+1$ رابه طرفین $P(n)$ می افزاییم.

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n+(n+1) &= \tfrac{1}{2}n(n+1)+(n+1) \\ &= \tfrac{1}{2}[n(n+1)+2(n+1)] \\ &= \tfrac{1}{2}[(n+1)(n+2)] \end{aligned}$$

که $P(n+1)$ می باشد . یعنی، $P(n+1)$ در صورت درست بودن $P(n)$ درست است.

پس، طبق اصل استقرا، P به ازای هر n درست می باشد .

۲۰.۱ . فرضهای زیر رادر نظر بگیرید :

S_1 : شاعران مردمی خوشحالند ؛

S_2 : هر طبیب ثروتمند است؛

S_3 : هیچ فرد خوشحالی ثروتمند نیست.

اعتبارنتایج زیر رامشخص سازید.

(آ) هیچ شاعری ثروتمند نیست.

(بـ) اطباء مردمی خوشحالند.

(پـ) هیچکس نمی تواند هم شاعر و هم طبیب باشد.

حل. بنابر S_1 ، مجموعهٔ شعرا مشمول مجموعهٔ افراد خوشحال است و، بنا بر S_3 ، مجموعهٔ افراد خوشحال ازمجموعهٔ افراد ثروتمند جداست. لذا، نمودار ون شکل ۱.۱۵ رامی کشیم.

شکل ۱.۱۵

بنابر S_2 ، مجموعهٔ اطباء مشمول مجموعهٔ افراد ثروتمند است. لذا، نمودار ون شکل ۱.۱۶ رارسم می کنیم. از این نمودار معلوم می شود که (آ) و (پـ) معتبر و (بـ) بی اعتبار می باشد.

شکل ۱.۱۶

۱.۲۱. (آ) ثابت کنید $(A\cap B)\subset A\subset (A\cup B)$ و $(A\cap B)\subset B\subset (A\cup B)$.

(بـ) قضیهٔ ۱.۲ راثابت کنید: ثابت کنید احکام $A\cup B=B$ ، $A\cap B=A$ ، $A\subset B$ هم ارزند.

حل. (آ) چون هر عنصر در $A\cap B$ در هر دوی A و B است، پس اگر $x\in(A\cap B)$ ، داریم $x\in A$. لذا $(A\cap B)\subset A$. به علاوه، اگر $x\in A$ (طبق تعریف $A\cup B$) خواهیم داشت $x\in(A\cup B)$. پس $A\subset(A\cup B)$. این دو باهم یعنی $(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B)$. به همین نحو، $(A\cap B)\subset B\subset(A\cup B)$.

(ب) فرض کنیم $A\subset B$ و $x\in A$. پس $x\in B$ ؛ درنتیجه، $x\in A\cap B$ و $A\subset A\cap B$. بنابرقسمت (آ)، $(A\cap B)\subset A$. لذا، $A\cap B=A$. از آن سو، فرض کنیم $A\cap B=A$ و $x\in A$. پس $x\in(A\cap B)$ ؛ در نتیجه، $x\in A$ و $x\in B$. بنابراین، $A\subset B$. دو نتیجه نشان می دهند که $A\subset B$ هم ارز $A\cap B=A$ می باشد.

مجدداً فرض کنیم $A\subset B$. همچنین $x\in(A\cup B)$. پس $x\in A$ یا $x\in B$. هرگاه $x\in A$ ، آنگاه $x\in B$ زیرا $A\subset B$. در هر حالت، $x\in B$. بنابراین، $A\cup B\subset B$. بنابرقسمت (آ)، $B\subset A\cup B$. لذا، $A\cup B=B$. حال فرض کنیم $A\cup B=B$ و $x\in A$. پس طبق تعریف اجتماع مجموعه ها داریم $x\in A\cup B$. لذا، $x\in B=A\cup B$. بنابراین، $A\subset B$. دو نتیجه نشان می دهند که $A\subset B$ هم ارز $A\cup B=B$ می باشد.

لذا، $A\subset B$ ، $A\cap B=A$ ، و $A\cup B=B$ هم ارز یکدیگر می باشند.

۲۲.۱. قضیهٔ ۵.۱ راثابت کنید: هرگاه A و B مجموعه هایی متناهی باشند، آنگاه $A\cup B$ و $A\cap B$ نیز متناهی اند و

$$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

برهان. اگر A و B متناهی باشند، $A\cup B$ و $A\cap B$ به وضوح متناهی می باشند. بنابرمسئلهٔ ۳۰.۱، $A\cup B=B\cup(A\setminus B)$ ؛ و B و $A\setminus B$ ازهم جدایند. پس از لم ۴.۱ داریم

$$n(A\cup B) = n(B)+n(A\setminus B) \tag{1}$$

همچنین، بنابر مسئلهٔ ۳۰.۱، $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$ ؛ و $A\setminus B$ و $A\cap B$ از هم جدایند. پس، طبق لم ۴.۱،

$$n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B) \quad \text{یا} \quad n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B)$$

اگر در (۱) به جای $n(A \setminus B)$ قراردهیم نتیجهٔ مطلوب به دست خواهد آمد .

مسائل تکمیلی

مجموعه ها، زیر مجموعه ها

۱ . ۲۳. ازمجموعه های زیر کدامها باهم مساویند ؟

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,1\}, \{3,1,3\}, \{1,2,1\}$$

$A = \{x : x^2 - 4x + 3 = 0\}$ $\qquad$ $C = \{x : x \in \mathbf{N}, x < 3\}$

$B = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ $\qquad$ $D = \{x : x \in \mathbf{N}$، x فرداست ، $x < 5\}$

۱.۲٤. عنصرهای مجموعه های زیر رابه ازای مجموعهٔ عمومی $U = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$ ذکر کنید. ازاین مجموعه ها کدامها باهم مساویند ؟

$A = \{x :$ x یک حرف صداداراست $\}$

$B = \{x :$ x حرفی از کلمهٔ "little" است $\}$

$C = \{x :$ x درحروف الفبا از f جلوتر است $\}$

$D = \{x :$ x یکی از حروف کلمهٔ "title" است $\}$

۱.۲۵. فرض کنید $A = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ، $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ، $D = \{3, 4, 5\}$ ، و $E = \{3, 5\}$. باتوجه به اطلاعات زیر، ازاین مجموعه ها کدامها با X مساویند ؟

(آ) X و B ازهم جدایند؛ (ب) $X \subset D$ ولی $X \not\subset B$ ؛

(پ) $X \subset A$ ولی $X \not\subset C$ ؛ (ت) $X \subset C$ ولی $X \not\subset A$.

۱.۲٦. مجموعه های زیر را در نظر بگیرید :

$$\emptyset, \quad A = \{a\}, \quad B = \{c, d\}, \quad C = \{a, b, c, d\}, \quad D = \{a, b\}, \quad E = \{a, b, c, d, e\}$$

بین هر جفت از مجموعه های زیر علامت درست $\subset$ یا $\not\subset$ راقراردهید :

(آ) $\emptyset, A$ $\qquad$ (ب) D, E

(پ) A, B $\qquad$ (ت) D, A

(ث) B, C $\qquad$ (ج) D, C

(چ) C, D $\qquad$ (ح) B, D

اعمال با مجموعه ها

۱ . ۲۷. به فرض آنکه

$$A = \{a, b, c, d, e\} \qquad C = \{b, c, e, g, h\}$$
$$B = \{a, b, d, f, g\} \qquad D = \{d, e, f, g, h\}$$

مجموعه های زیر رابیابید :

(آ) $A \cup B$ (ب) $B \cap C$

(پ) $C \setminus D$ (ت) $A \cap (B \cup D)$

(ث) $B \setminus (C \cup D)$ (ج) $(A \cap D) \cup B$

(چ) $(A \cup D) \setminus C$

(ح) $B \cap C \cap D$

(خ) $(C \setminus A) \setminus D$

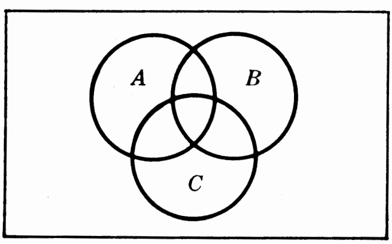
۱ .۲۸. نمودار ون شکل ۱ .۱۷ مجموعه های A ، B ، و C رانشان می دهد. مجموعه های زیر را سایه بزنید.

(آ) $A \cap B \cap C$ (ب) $A^c \cup B \cup C$

(پ) $A \cup (B \cap C)$ (ت) $A \setminus (B \cup C)$

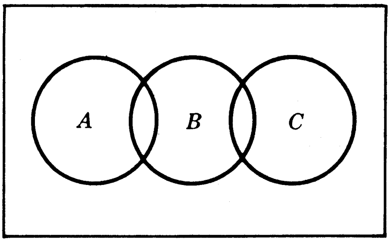
(ث) $(A \cup B) \setminus C$ (ج) $A^c \cap B^c \cap C$

(چ) $A^c \cap (B \cup C)$ (ح) $(A^c \cap B) \setminus C$



شکل ۱ .۱۷

۱ .۲۹. مسئلهٔ قبل رابرای نمودار ون شکل ۱ .۱۸ حل کنید.



شکل ۱.۱۸

۱.۳۰ فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. روابط زیر راثابت کنید:

(آ) $A\cup B = B\cup(A\setminus B)$ و $B\cap(A\setminus B) = \emptyset$ ؛

(بـ) $A = (A\setminus B)\cup(A\cap B)$ و $(A\setminus B)\cap(A\cap B) = \emptyset$.

۱.۳۱. ثابت کنید

(آ) $A\subset B$ اگر و فقط اگر $A\cap B^c = \emptyset$ ؛

(بـ) $A\subset B$ اگر و فقط اگر $A^c\cup B = U$ ؛

(پـ) $A\subset B$ اگر و فقط اگر $B^c\subset A^c$ ؛

(تـ) $A\subset B$ اگر و فقط اگر $A\setminus B = \emptyset$ ؛

(قس. قضیهٔ ۱.۲.)

۱.۳۲. قوانین جذب راثابت کنید:

(آ) $A\cup(A\cap B) = A$ ؛ (بـ) $A\cap(A\cup B) = A$.

۱. ۳۳. فرمول $A\setminus B = A\cap B^c$ عمل تفریق رابر حسب اعمال اشتراک و متمم تعریف می کند. فرمول معرف اجتماع دو مجموعه، یعنی $A\cup B$ ، برحسب اعمال اشتراک و متمم رابیابید.

۱. ۳٤. (آ) ثابت کنید $A\cap(B\setminus C) = (A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

(بـ) با مثال نشان دهید که $A\cup(B\setminus C) \neq (A\cup B)\setminus(A\cup C)$.

جبر مجموعه ها، دوگانی

۱. ۳۵. دوگان هر یک از معادلات مجموعه ای زیر رابنویسید:

(آ) $A \cup (A \cap B) = A$

(بـ) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) = U$

۱ . ۳۶. اتحادهای مجموعه ای زیر رابااستفاده از قوانین جدول ۱.۱ ثابت کنید :

(آ) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$

(بـ) $A \cup (A \cap B) = A$

(پـ) $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$

مجموعه های متناهی، اصل شمارش

۱ . ۳۷. ازمجموعه های زیر کدامها متناهی اند ؟

(آ) مجموعهٔ خطوط موازی محور x ؛

(بـ) مجموعهٔ حروف الفبای انگلیسی؛

(پـ) مجموعهٔ اعدادی که مضرب 5 اند ؛

(تـ) مجموعهٔ جانوران زنده در روی زمین؛

(ثـ) مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $x^{27} + 26x^{18} - 17x^{11} + 7x^3 - 10 = 0$ ؛

(جـ) مجموعهٔ دوایر ماربر مبدأ $(0,0)$.

۱ . ۳۸. نتیجهٔ ۱.٦ رابااستفاده از قضیهٔ ۱.۵ ثابت کنید: هرگاه A ، B ، و C مجموعه هایی متناهی باشند، آنگاه $A \cup B \cup C$ نیز چنین است و

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

۱ .۳۹. درآمارگیری از 100 دانشجو اطلاعات زیر به دست آمده است:

32 نفر ریاضیات می خوانند ؛

20 نفر فیزیک می خوانند ؛

45 نفر زیست شناسی می خوانند ؛

15 نفر ریاضیات و زیست شناسی می خوانند ؛

7 نفر ریاضیات و فیزیک می خوانند ؛

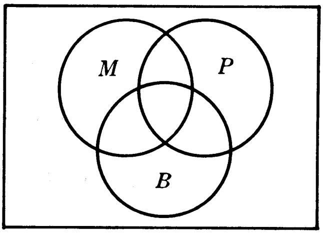
10 نفر فیزیک و زیست شناسی می خوانند ؛

30 نفر هیچیک از این سه مبحث را نمی خوانند .

(آ) تعداد شاگردانی که هر سه مبحث رامی خوانند بیابید .

(بـ) هشت ناحیهٔ نمودار ون (شکل ۱۹.۱) راپر کنید ؛ در این نمودار M ، P ، و B مجموعهٔ شاگردانی هستند که به ترتیب ریاضیات، فیزیک، و زیست شناسی می خوانند .

(پـ) تعداد شاگردانی که درست یکی از این مباحث را می خوانند بیابید .



شکل ۱۹.۱

رده های مجموعه ها

۱ . ٤۰ . مجموعهٔ توان $\mathcal{P}(A)$ مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ رابیابید .

۱ . ٤۱ به فرض آنکه $A = [\{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\}]$ ،

(آ) درستی یانادرستی روابط زیر رابیان دارید :

(یک) $a \in A$ ؛ (دو) $\{c\} \subset A$ ؛ (سه) $\{d, e, f\} \in A$ ؛ (چهار) $\{\{a, b\}\} \subset A$ ؛ (پنج) $\emptyset \subset A$.

(بـ) مجموعهٔ توان A را بیابید .

۱ . ٤۲. فرض کنید A یک مجموعهٔ متناهی بوده و $n(A) = m$. ثابت کنید $\mathcal{P}(A)$ دارای 2^m عنصر است.

استدلالها و نمودارهای ون

۱ . ٤۳ . نتیجهٔ مجموعه فرضهای زیر را (که از کتاب منطق لوییس کارول، مؤلف کتاب آلیس در سرزمین عجا یب، گرفته شده) به وسیلهٔ نمودارهای ون بیابید :

S_1 : کودکان غیر منطقی اند ؛

S_2 : کسی که می تواند سوسمار تربیت کند قابل سرزنش نیست؛

S_3 : افراد غیر منطقی سرزنش می شوند.

۱. ٤٤. فرضهای زیر رادر نظر بگیرید:

S_1 : من تمام درختهای گران قیمت خودراسال گذشته کاشتم؛

S_2 : تمام درختان میوهٔ من در با غ من است؛

S_3 : سال گذشته درختی در با غ من کاشته نشده است.

درستی یانادرستی هریک از نتایج زیر رامعین کنید:

(آ) درختان میوه سال گذشته کاشته شده اند؛

(بـ) هیچ درخت گران قیمت در با غ من وجود ندارد؛

(پـ) هیچ درخت میوه ای گران قیمت نیست.

استقرا

۱. ٤٥. ثابت کنید $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

۱. ٤٦. ثابت کنید $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{1}{2}n(3n-1)$

۱. ٤٧. ثابت کنید $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}$

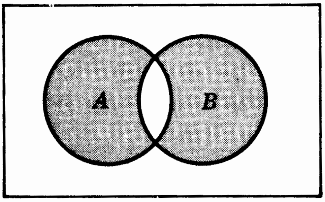
۱. ٤٨. ثابت کنید $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

مسائل گوناگون

۱. ٤٩. منظور از تفاضل متقارن مجموعه های A و B ، که با $A \triangle B$ نموده می شود، یعنی مجموعهٔ

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

یعنی $A \triangle B$ عبارت است از مجوعهٔ عناصری که متعلق به A یا B بوده ولی تعلق به هردوی آنها نداشته باشد. (ر.ک. شکل ۱. ۲۰ که نمودار ون $A \triangle B$ رانشان می دهد.)



$A \triangle B$ سایه دار است

شکل ۱. ۲۰

(آ) به فرض آنکه

$$A = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad C = \{1,3,5,7,9\}$$
$$B = \{4,5,6,7,8,9\} \qquad D = \{2,3,5,7,8\}$$

مجموعه های زیر را بیابید :

(یک) $A \triangle B$ ؛ (دو) $B \triangle C$ ؛ (سه) $C \triangle D$ ؛ (چهار) $A \triangle D$ ؛

(پنج) $A \cap (B \triangle D)$ ؛ (شش) $(A \cap B) \triangle (A \cap D)$.

(ب) خواص زیر از تفاضل متقارن راثابت کنید :

(یک) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (قانون شرکتپذیری)؛

(دو) $A \triangle B = B \triangle A$ (قانون تعویضپذیری)؛

(سه) هرگاه $A \triangle B = A \triangle C$ ، آنگاه $B = C$ (قانون حذف)؛

(چهار) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (قانون پخشپذیری).

مسائل برنامه نویسی کامپیوتر

۱. ۵۰. اولین کارت یک دسته کارت شامل پنج عدد صحیح است (عناصر مجموعهٔ A) و دومین کارت شامل هفت عدد صحیح (عناصر مجموعهٔ B) می باشد. برنامه ای بنویسید که (آ) $A \cap B$، (ب) $A \cup B$ ، (پ) $A \setminus B$ راچاپ کند.

برنامه را باورودیهای زیر امتحان کنید :

(یک) اولین کارت: $1, 3, -5, 8, -4$

دومین کارت: $7, -4, 2, 3, 8, -6, 5$

(دو) اولین کارت: $1, 3, -5, 8, -4$

دومین کارت: $7, -2, 3, 2, -6, 9, -4$

درمسائل ۱ . ۵۱ تا ۱.۵۳، A و B آرایه هایی یک بعدی‌به ترتیب با M و N عنصر می باشند. ما A و B را مجموعه هایی از عناصر در نظر می گیریم.

۱ . ۵۱. فرض کنید X یک عدد باشد. یک زیر برنامه به نام BLONG بنویسید به این نحو که BLONG(X,A,M) بسته به اینکه X متعلق به A است یانه دارای مقدار 1 یا 1− باشد.

۱ . ۵۲. یک زیر برنامه به نام SUBSET بنویسید به این نحو که SUBSET(A,M,B,N) بسته به اینکه A زیر مجموعهٔ B است یانه دارای مقدار 1 یا 1− باشد. (**راهنمایی.** از زیر برنامهٔ BLONG مسئلهٔ ۱ . ۵۱ استفاده کنید.)

۱ . ۵۳. یک زیر برنامه به نام EQUAL بنویسید به این نحو که EQUAL(A,M,B,N) بسته به اینکه A (به عنوان مجموعه) مساوی B است یا نه دارای مقدار 1 یا 1− باشد. (**راهنمایی.** از زیر برنامهٔ SUBSET مسئلهٔ ۱ . ۵۲ استفاده کنید.)

جواب مسائل تکمیلی

۱ . ۲۳. $\{1,3\} = \{3,1,3\} = A = D$ ، $\{1,2\} = \{2,1\} = \{1,2,1\} = B = C$

۱ . ۲٤. $C = \{a,b,c,d,e\}$ ، $B = D = \{l,i,t,e\}$ ، $A = \{a,e,i,o,u\}$

۱ . ۲۵. (آ) C و E ؛ (بـ) D و E ؛ (پـ) A ، B ، و D ؛ (تـ) هیچکدام

۱ . ۲٦. (آ) $\emptyset \subset A$ ؛ (بـ) $D \subset E$ ؛ (پـ) $A \not\subset B$ ؛ (تـ) $D \not\subset A$ ؛ (ثـ) $B \subset C$ ؛ (جـ) $D \subset C$ ؛ (چـ) $C \not\subset D$ ؛ (حـ) $B \not\subset D$.

۱ . ۲۷. (آ) $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ ؛

(بـ) $B \cap C = \{b,g\}$ ؛

(پـ) $C \setminus D = \{b,c\}$ ؛

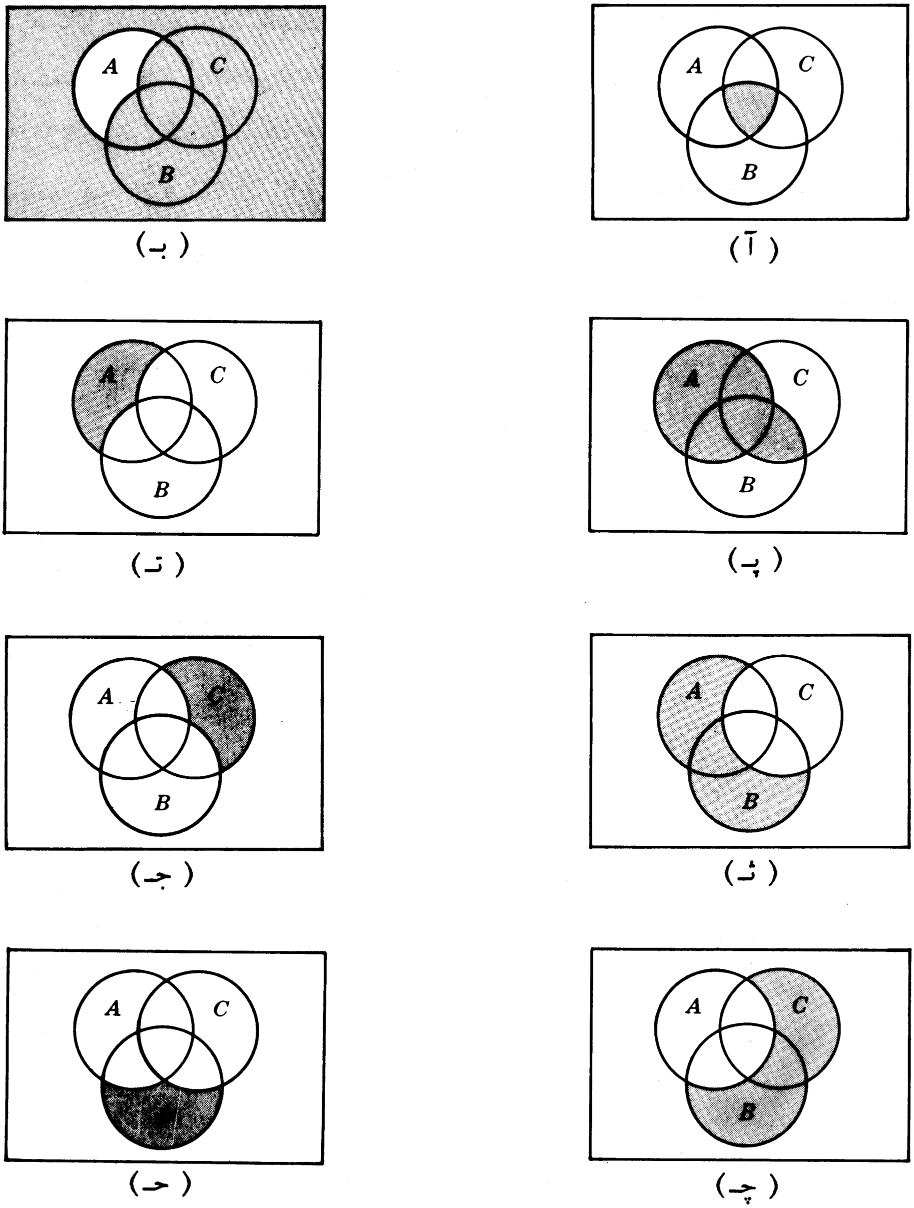
(تـ) $A \cap (B \cup D) = \{a,b,d,e\}$ ؛

(ثـ) $B \setminus (C \cup D) = \{a\}$ ؛ (جـ) $(A \cap D) \cup B = \{a,b,d,e,f,g\}$ ؛

(چـ) $(A \cup D) \setminus C = \{a,d,f\}$ ؛ (حـ) $B \cap C \cap D = \{g\}$ ؛

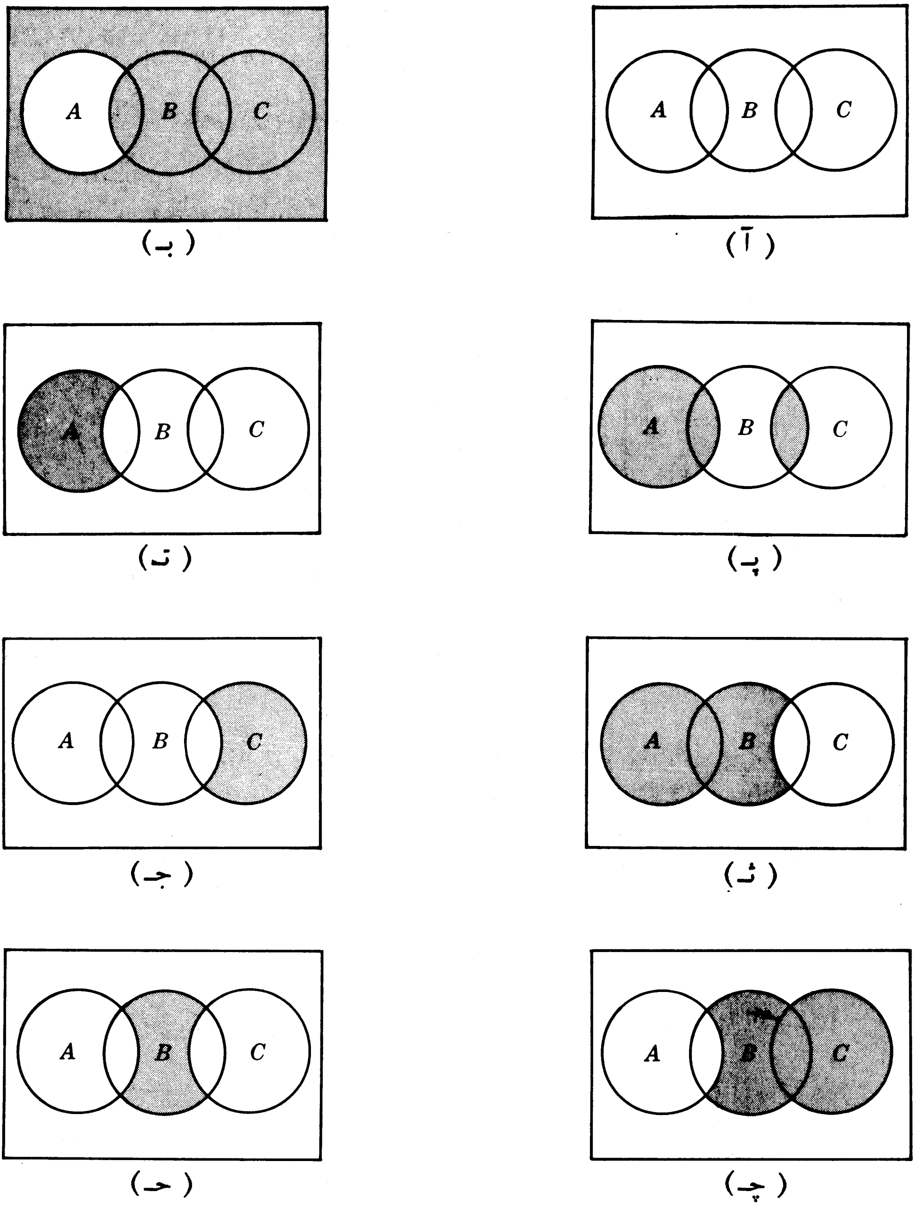
(خ) $(C \setminus A) \setminus D = \emptyset$.

۱.۲۸. ر.ک. شکل ۱.۲۱.



شکل ۲۱.۱

۱.۲۹. ر.ک. شکل ۲۲.۱.



شکل ۱.۲۲

۱.۳۳. $A\cup B = (A^c\cap B^c)^c$.

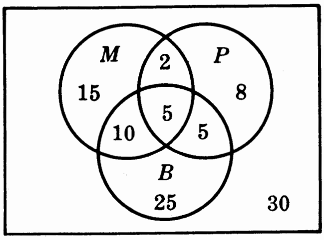
۱.۳۴. (ب) قرار می‌دهیم $A=\{1\},\ B=\{2\}, C=\{3\}$ پس $A\cup(B\setminus C)=\{1,2\}$

ولی $(A\cup B)\setminus(A\cup C)=\{2\}$.

۳۵.۱ (آ) $A\cap(A\cup B)=A$ ؛ (ب) $(A\cup B)\cap(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c)\cap(A^c\cup B^c)=\varnothing$

۳۷.۱ . (آ) نامتناهی ؛(ب) متناهی؛ (پ) نامتناهی؛ (ت) متناهی؛ (ث) متناهی؛ (ج) نامتناهی.

۳۹.۱ . (آ) 5 ؛ (ب) ر.ک. شکل ۲۳.۱ ؛ (پ) 48



شکل ۲۳.۱

۴۰.۱ .

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A)\ =\ [&\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\},\\ &\{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{1,2,3\},\\ &\{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{3,4,5\}, \{1,3,4\},\\ &\{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\},\\ &\{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, A]\end{aligned}$$

تعدادمجموعه های موجود در $\mathcal{P}(A)$ عبارت است از $2^5=32$.

۴۱.۱ . (آ) (یک) نادرست؛ (دو) نادرست؛ (سه) درست؛ (چهار) درست؛ (پنج) درست.

(ب) توجه کنید که $n(A)=3$. لذا، $\mathcal{P}(A)$ دارای $2^3=8$ عنصر می باشد:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A)\ =\ \{&A, [\{a,b\},\{c\}], [\{a,b\},\{d,e,f\}], [\{c\},\{d,e,f\}],\\ &[\{a,b\}], [\{c\}], [\{d,e,f\}], \varnothing\}\end{aligned}$$

۴۲.۱ . فرض می کنیم X عضو دلخواهی از $\mathcal{P}(A)$ باشد. به ازای هر $a\in A$ دو حالت موجود است: $a\in X$ یا $a\notin X$. ولی A دارای m عنصر است. پس

$$\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}^{m\ \text{تا}}\ =\ 2^m$$

مجموعهٔ مختلف X موجود است. یعنی، $\mathcal{P}(A)$ دارای 2^m عضو می باشد.

۲
رابطه ها

۱.۲ آشنایی

درفصل اول دیدیم که ترتیب عناصر یک مجموعه اهمیتی ندارد؛ یعنی

$$\{3, 5\} = \{5, 3\}$$

در این فصل جفتهای مرتب (a, b) از عناصر را در نظر می گیریم؛ دراینجا a را عنصر اول و b راعنصر دوم می گوییم. لذا، $(a, b) \neq (b, a)$ مگر آنکه $a = b$. به علاوه،

$$(a, b) = (c, d)$$

اگر و فقط اگر $a = c$ و $b = d$.

خواننده بابسیاری از روابط ریاضی مانند « کوچکتر از»، « موازی با »، « همنهشت با »، « زیر مجموعهٔ»، و غیره آشناست. این روابط به نوعی وجود یاعدم وجود رابطه ای بین جفتهایی از اشیاء که به ترتیب معینی اختیار شده اند را بازگو می کنند . مایک رابطه رابه طور صوری بر حسب جفتهای مرتبی از اشیاء تعریف می کنیم. سپس به بحث در روابطی که شبیه رابطهٔ تساوی اند پرداخته و ارتباط آنها راباافرازهای مجموعه ها نشان می دهیم. باآنکه ماتریسها در فصل ٤ مطرح می شوند ، ما ، جهت تکمیل بحث، ارتباط آنها رابا روابط در اینجا ذکر می نماییم. با اینحال، کسی که اطلاع قبلی از نظریهٔ ماتریسها ندارد می تواند این بخشها را حذف نماید .

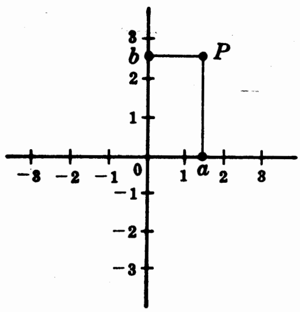
۲.۲ مجموعه های حاصل ضربی

دو مجموعهٔ دلخواه A و B را در نظر می گیریم. مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب (a,b) که $a \in A$ و $b \in B$ را حاصل ضرب یا حاصل ضرب دکارتی A و B می نامیم. نمایش مختصر این حاصل ضرب عبارت است از $A \times B$ که خوانده می شود: « A ضربدر B ». بنابر تعریف،

$$A \times B = \{(a,b) : b \in B \text{ و } a \in A\}$$

ما اغلب به جای $A \times A$ می نویسیم A^2.

مثال ۱.۲. $\mathbf{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است و لذا $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ مجموعهٔ جفتهای مرتب از اعداد حقیقی است. خواننده با نمایش هندسی $\mathbf{R}^2$ به صورت نقاط صفحه به شکل ۱.۲ آشناست. در اینجا هر نقطهٔ P نمایش جفت مرتبی از اعداد حقیقی مانند (a,b) است و بالعکس.



شکل ۱.۲

خط قائم ماربر P محور x رادر a و خط افقی ماربر P محور y رادر b قطع می کند. $\mathbf{R}^2$ را اغلب صفحهٔ دکارتی می نامند.

مثال ۲.۲. فرض کنیم $A = \{1,2\}$ و $B = \{a,b,c\}$. در این صورت،

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$$
$$B \times A = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$$

همچنین،

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

در مثال فوق دو نکته شایان توجه است. اولاً، $A \times B \neq B \times A$. ضرب دکارتی در رابطه باجفتهای مرتب است؛ لذا ترتیب مجموعه ها طبعاً مهم خواهد بود. ثانیاً،

$$n(A \times B) = 6 = 2 \cdot 3 = n(A) \cdot n(B)$$

که در آن $n(A)$ تعداد عناصر A می باشد. در واقع، به ازای هر دو مجموعهٔ متناهی A و B ، $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$. این رابطه از این امر نتیجه می شود که به ازای هر جفت مرتب (a, b) در $A \times B$ ، $n(A)$ حالت برای a موجود است، و به ازای هر یک از این حالات، $n(B)$ حالت برای b خواهیم داشت.

ایدهٔ ضرب مجموعه ها را می توان به هر تعداد متناهی مجموعه تعمیم داد. به ازای مجموعه های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ، مجموعهٔ تمام n تاییهای مرتب $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ که

$$a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$$

حاصل ضرب مجموعه های $A_1, \ldots, A_n$ نام داشته و با

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \quad \text{یا} \quad A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

نموده می شود. همانطور که به جای $A \times A$ می نویسیم A^2 ، به جای $A \times A \times \cdots \times A$ که داری n عامل مساوی A است خواهیم نوشت A^n . مثلاً، $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ نمایش فضای سه بعدی معمولی می باشد.

۳.۲ رابطه ها

فرض کنیم A و B مجموعه باشند. رابطهٔ دوتایی R از A به B یک زیر مجموعه از $A \times B$ است. اگر $(x, y) \in R$ ، گوییم x ، R مربوط y است و این امر را با

$$x\,R\,y$$

نشان می دهیم. اگر $(x, y) \notin R$ ، می نویسیم $x \not R\, y$ و گوییم x ، R مربوط y نیست. هرگاه R رابطه ای از A به A ، یعنی زیر مجموعهٔ $A \times A$ ، باشد، آنگاه

گوییم R یک رابطه بر A است.[۱]

چون ما عمدتاً با روابط دوتایی سروکار خواهیم داشت، «رابطه» به معنی رابطهٔ دوتایی است مگر خلافش تصریح شود.

قلمرو رابطهٔ R عبارت است از مجموعهٔ تمام عنصرهای اول جفتهای مرتب متعلق به R، و برد R عبارت است از مجموعهٔ عنصرهای دوم.

مثال ۲.۳

(آ) فرض کنیم $A = \{1, 2, 3\}$ و $R = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$. در این صورت، R یک رابطه بر A است چرا که زیر مجموعه ای از $A \times A$ می باشد. نسبت به این رابطه داریم

$1R2$ ، $1R3$ ، $3R2$ ، ولی $1\not R1$ ، $2\not R1$ ، $2\not R2$ ، $2\not R3$ ، $3\not R1$ ، $3\not R3$

قلمرو R عبارت است از $\{1,3\}$ و برد R عبارت است از $\{2,3\}$.

(بـ) فرض کنیم $A =$ { ذرت، شیر، تخم مرغها } و $B =$ { مرغها، بزها، گاوها }. رابطهٔ R از A به B را می توان با $(a,b) \in R$ اگر a توسط b تولید شود تعریف کرد. به عبارت دیگر،

$R =$ {(مرغها ، تخم مرغها) ، (گاوها ، شیر) ، (بزها ، شیر)}

نسبت به این رابطه داریم

مرغها R تخم مرغها، گاوها R شیر، و غیره.

(پـ) دو کشور را در صورتی مجاور گوییم که بخشی از مرزهایشان مشترک باشد. پس «مجاور بودن» رابطه ای است مانند R برتمام کشورهای جهان: مثلاً،

$\in R$ (سوییس ، ایتالیا) ولی $\notin R$ (مکزیک ، کانادا).

(تـ) یک رابطهٔ آشنا برمجموعهٔ $\mathbf{Z}$ از اعداد صحیح عبارت است از« m ، n را عاد می کند». نماد معمول برای این رابطه به این صورت است که وقتی m ، n راعاد می کند، می نویسیم $m \mid n$. مثلاً، $6 \mid 30$ ولی $7 \nmid 25$.

(ثـ) ازجمله روابط اساسی در هندسه عبارتند از «همنهشت بودن» و «متشابه بودن» که روابطی بر مجموعهٔ اشکال هندسی در صفحه می باشند.

(جـ) فرض کنیم A یک مجموعه باشد. یک رابطهٔ مهم بر A رابطهٔ تساوی است:

$$\{(a,a):\ a\in A\}$$

که معمولاً با "$=$" نموده می شود. این رابطه را رابطهٔ همانی در A نیز نامیده و گاهی با Δ_A نمایش می دهند.

(چـ) فرض کنیم A یک مجموعه باشد. در این صورت، $A\times A$ و $\emptyset$ زیر مجموعه های $A\times A$ اند و لذا روابطی بر A می باشند. این روابط را به ترتیب رابطهٔ عمومی و رابطهٔ تهی می‌نامیم.

۴.۲ نمایشهای تصویری رابطه ها

ابتدارابطه ای مانند S بر مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ (یعنی، S یک زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ است) رادرنظر می گیریم. چون $\mathbf{R}^2$ را می توان بامجموعه ای ازنقاط در صفحه نشان داد، S، بارسم نقاطی در صفحه که تعلق به S دارند قابل نمایش است. گاهی نمایش تصویری رابطه را گراف رابطه می نامند.

اغلب رابطهٔ S از تمام جفتهای مرتبی از اعداد حقیقی تشکیل شده است که در معادله ای چون

$$E(x,y)\ =\ 0$$

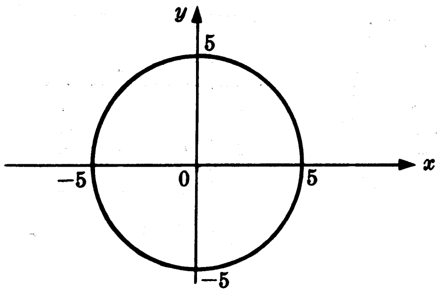
صدق می کنند. ما معمولاً رابطه را بامعادله اش شناسایی می کنیم؛ یعنی، از رابطهٔ $E(x,y)=0$ سخن می گوییم.

مثال ۴.۲. رابطهٔ S تعریف شده با معادلهٔ

$$x^2+y^2\ =\ 25$$

رادر نظر می گیریم. یعنی، S از تمام جفتهای مرتب (x_0,y_0) صادق در معادلهٔ فوق تشکیل شده است. گراف این معادله دایره به مرکز مبدأ و شعاع 5 می باشد. ر.ک. شکل ۲.۲.

حال فرض کنیم A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند. برای رسم رابطهٔ R از A به B سه



$x^2 + y^2 = 25$

شکل ۲.۲

راه مختلف ذکر می کنیم.

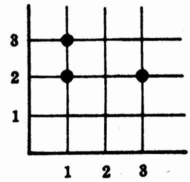
(یک) عنصرهای A را به صورت نقاط بر یک محورافقی و عنصرهای B را به صورت نقاط بر یک محور قائم نشان می دهیم. در این‌صورت، عناصر $A \times B$ با نقاط اشتراک خطوط قائم ماربر نقاط A و خطوط افقی ماربر نقاط B نموده می شوند. این نمایش یک نمودار مختصاتی $A \times B$ نام دارد. رابطهٔ R بانمودن نقاطی از $A \times B$ که تعلق به R دارند رسم خواهد شد.

(دو) یک آرایهٔ مستطیلی که سطرهایش با عناصر A و ستونهایش با عناصر B بر چسب خورده اند تشکیل می دهیم. در هر موضع بسته به اینکه $a \in A$ به‌عنصر $b \in B$ مربوط شده باشد یا نه 1 یا 0 قرار می دهیم. این آرایه ماتریس رابطه نام خواهد داشت.

(سه) عناصر A و B را در دو قرص از هم جدا نوشته و از $a \in A$ به $b \in B$ در صورت مربوط بودن a به b یک سهم می کشیم. تصویر حاصل نمودار سهمدار رابطه نامیده می شود.

در شکل ۳.۲ دو رابطهٔ اول مثال ۳.۲ را به سه طریق فوق رسم کرده ایم.

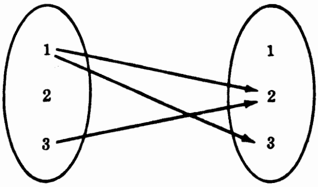
اگر یک رابطه ازیک مجموعهٔ متناهی به توی خودش باشد، راه دیگری نیز برای رسمش وجود دارد. ما عناصر این مجموعه رانوشته، اگر عنصر x به عنصر y مربوط باشد، از x به y یک سهم می کشیم. این نمودار را گراف جهتدار رابطه می نامند. شکل ۴.۲ گراف جهتدار یک رابطه مانند R بر مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ را به



(یک)

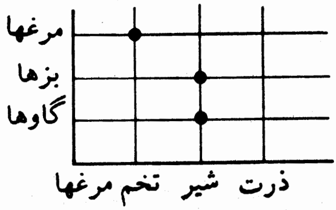
	1	2	3
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	0

(دو)



(سه)

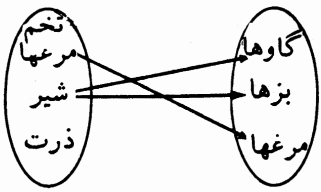
(آ) $R = \{(1,2), (1,3), (3,2)\}$



(یک)

	مرغها	بزها	گاوها
تخم مرغها	1	0	0
شیر	0	1	1
ذرت	0	0	0

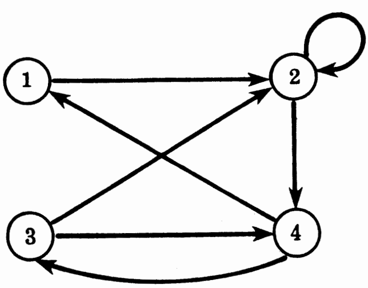
(دو)



(سه)

(ب) {(بزها، شیر)، (گاوها، شیر) ، (مرغها ، تخم مرغها)} = R

شکل ۳.۲



$R = \{(1,2), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)\}$

شکل ۴.۲

دست می دهد. توجه کنید که چون 2 به 2 مربوط است، یک سهم از 2 به خودش خواهیم داشت.

۵.۲ روابط معکوس

فرض کنیم R یک رابطه از A به B باشد. معکوس R ، که با R^{-1} نموده می شود، عبارت است از رابطه ای از B به A مرکب از جفتهای مرتبی که معکوسشان متعلق به R می باشند:

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

به عبارت دیگر، $bR^{-1}a$ اگر وفقط اگر aRb .

مثال ۵.۲

(آ) فرض کنیم R رابطهٔ زیر بر $A = \{1, 2, 3\}$ باشد:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

در این صورت،

$$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

(بـ) معکوس روابط

« x شوهر y است » و « x بلندتر از y است »

به ترتیب عبارتند از

« x زن y است » و « x کوتاهتر از y است ».

واضح است که اگر R یک رابطه باشد، $(R^{-1})^{-1} = R$. همچنین، قلمرو R^{-1} مساوی برد R و برد R^{-1} برابر قلمرو R است. به علاوه، اگر M_R ماتریس رابطهٔ R بین مجموعه های متناهی باشد، ماتریس $M_{R^{-1}}$ معکوس R^{-1} ترانهادهٔ ماتریس R می باشد:

$$M_{R^{-1}} = M_R^T$$

به عنوان مثال، ماتریسهای روابط مثال ۵.۲ (آ) به قرار زیرند:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad M_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_R^T$$

۶.۲ ترکیب روابط

فرض کنیم A ، B ، و C مجموعه و R رابطه ای از A به B و S رابطه ای از B به C باشد. یعنی، R زیر مجموعهٔ $A \times B$ و S زیر مجموعهٔ $B \times C$ می باشد. در این صورت، R و S رابطه ای از A به C به دست می دهند که با $R \circ S$ نموده شده و به صورت زیر تعریف می شود:

$a(R \circ S)c$ در صورتی که به ازای $b \in B$ ای داشته باشیم aRb و bSc .

یعنی،

$$R \circ S = \{(a,c) : \text{ای هست که } b \in B \quad (a,b) \in R \text{ و } (b,c) \in S\}$$

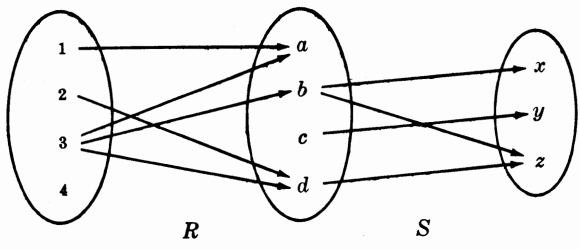
رابطهٔ $R \circ S$ را ترکیب R و S می نامیم. این رابطه گاهی فقط با RS نموده خواهد شد.

همانطور که مثال زیر نشان می دهد، نمودارهای سهمدار یک تعبیر هندسی از $R \circ S$ به دست می دهند.

مثال ۶.۲ . فرض کنیم $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $C = \{x,y,z\}$ و قرار می دهیم

$$R = \{(1,a), (2,d), (3,a), (3,b), (3,d)\}$$
$$S = \{(b,x), (b,z), (c,y), (d,z)\}$$

نمودارهای سهمدار R و S راطبق شکل ۵.۲ در نظر می گیریم. ملاحظه می کنیم که



شکل ۵.۲

یک سهم از 2 به d و سپس یک سهم از d به z وجود دارد. این دو سهم رامی توان یک « مسیر » گرفت که عنصر $2\in A$ را به عنصر $z\in C$ « مرتبط می سازد ». مثلاً،

$$2(R\circ S)z \quad \text{زیرا} \quad 2Rd \quad \text{و} \quad dSz$$

به همین نحو، مسیرهایی از 3 به x و از 3 به z وجود دارند. لذا،

$$3(R\circ S)x \qquad \text{و} \qquad 3(R\circ S)z$$

هیچ عنصر دیگری از A به عنصری از C مرتبط نیست. بنابراین،

$$R\circ S = \{(2,z), (3,x), (3,z)\}$$

$R\circ S$ رامی توان به طریقی دیگر نیز به دست آورد. فرض کنیم M_R و M_S به ترتیب ماتریسهای روابط R و S باشند. در این صورت،

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}\end{array} \qquad \text{و} \qquad M_S = \begin{array}{c} \\ a\\b\\c\\d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\end{array}$$

با ضرب M_R در M_S ماتریس زیر به دست می آید:

$$M = M_R M_S = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\1&0&2\\0&0&0 \end{pmatrix}\end{array}$$

درایه های ناصفر این ماتریس به ما عناصری را که توسط $R\circ S$ به هم مربوطند بازگو می کنند. لذا، $M = M_R M_S$ و $M_{R\circ S}$ درایه های ناصفر یکسانی خواهند داشت.

اولین قضیه به ما می گوید که ترکیب روابط شرکتپذیر است.

قضیهٔ ۲.۱. فرض کنیم A ، B ، C ، و D مجموعه باشند. همچنین R رابطه ای از A به B ، S رابطه ای از B به C ، و T رابطه ای از C به D باشد. در این صورت،

$$(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$$

این قضیه در مسئلهٔ ۱۰.۲ ثابت خواهد شد.

۷.۲ خواص رابطه ها

فرض کنیم R یک رابطه بر مجموعهٔ A باشد. ذیلاً چهارنوع رابطه ذکر شده است:

(۱) R منعکس است اگر به ازای هر a در A داشته باشیم $a\,R\,a$ ؛

(۲) R متقارن است اگر $a\,R\,b$ ایجاب کند که $b\,R\,a$ ؛

(۳) R پادمتقارن است اگر $a\,R\,b$ و $b\,R\,a$ تساوی $a=b$ راایجاب کنند؛

(٤) R متعدی است اگر $a\,R\,b$ و $b\,R\,c$ ایجاب کنند که $a\,R\,c$.

توجه کنید که این خواص فقط برای روابط بر یک مجموعه تعریف شده اند.

مثال ۷.۲

(آ) رابطهٔ $\subset$ شمول مجموعه ها را بر گردایهٔ C از مجموعه ها در نظر می گیریم. ملاحظه می کنیم که:

(۱) به ازای هر مجموعهٔ A در C ، $A\subset A$ ؛ پس $\subset$ منعکس است؛

(۲) $A\subset B$ شمول $B\subset A$ را ایجاب نمی کند؛ پس $\subset$ متقارن نیست؛

(۳) هرگاه $A\subset B$ و $B\subset A$ ، آنگاه $A=B$ ؛ پس $\subset$ پادمتقارن است؛

(٤) هرگاه $A\subset B$ و $B\subset C$ ، آنگاه $A\subset C$ ؛ پس $\subset$ متعدی است.

(فرض می کنیم C دارای بیش از یک مجموعه باشد.)

(بـ) رابطهٔ $=$ تساوی رابر مجموعهٔ A در نظر می گیریم. توجه کنید که $=$ در چهار خاصیت فوق صدق می کند؛ یعنی،

(۱) به ازای هر عنصر $a\in A$ ، $a=a$ ؛

(۲) هرگاه $a=b$ ، آنگاه $b=a$ ؛

(۳) هرگاه $a=b$ و $b=a$ ، آنگاه $a=b$ ؛

(٤) هرگاه $a=b$ و $b=c$ ، آنگاه $a=c$ ؛

این مثال نشان می دهد که روابط متقارن و پادمتقارن نقیض یکدیگر نیستند.

(پـ) رابطهٔ $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3)\}$ بر $A=\{1,2,3\}$ را در نظر می گیریم. در

این صورت،

(۱) 2 در A است ولی $2 \not R 2$ ؛ پس R منعکس نیست؛

(۲) $2R3$ ولی $3 \not R 2$ ؛ پس R متقارن نیست؛

(۳) $1R2$ و $2R1$ ولی $1 \neq 2$ ؛ پس R پادمتقارن نیست؛

(٤) $1R2$ و $2R3$ ولی $1 \not R 3$ ؛ پس R متعدی نیست.

(ت) رابطهٔ تعامد $\perp$ را برمجموعهٔ L خطوط در صفحهٔ اقلیدسی در نظر می گیریم. هرگاه a بر خط b عمود باشد، آنگاه b بر a عمود است؛ یعنی، هرگاه $a \perp b$ ، آنگاه $b \perp a$. لذا، $\perp$ متقارن است. ولی $\perp$ نه منعکس است نه پادمتقارن و نه متعدی.

۸.۲ افرازها

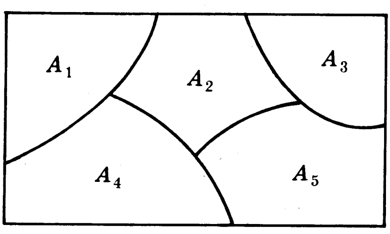
فرض کنیم S یک مجموعهٔ ناتهی باشد. افراز S عبارت است از یک تقسیم S به زیر مجموعه هایی رویهم نیفتاده و ناتهی. به بیان دقیق، افراز S عبارت است از گردایه ای مانند $\{A_i\}$ از زیر مجموعه های ناتهی S به طوری که

(یک) هر a در S به یکی از A_i ها تعلق داشته باشد؛

(دو) مجموعه های $\{A_i\}$ از هم جدا باشند؛ یعنی، هرگاه

$$A_i \neq A_j \text{ ، آنگاه } A_i \cap A_j = \emptyset$$

زیر مجموعه های موجود در یک افراز را سلول می نامیم. شکل ٦.۲ نمودار ون یک افراز مجموعهٔ مستطیلی از نقاط به پنج سلول می باشد.



شکل ٦.۲

مثال ۸.۲. گردایه های زیر از زیر مجموعه های $S = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ رادرنظر می

گیریم:

(یک) $[\{1,3,5\}, \{2,6\} \{4,8,9\}]$

(دو) $[\{1,3,5\}, \{2,4,6,8\}, \{5,7,9\}]$

(سه) $[\{1,3,5\}, \{2,4,6,8\}, \{7,9\}]$

گردایهٔ (یک) یک افراز S نیست زیرا 7 که در S است به هیچ زیر مجموعه ای تعلق ندارد.همچنین، گردایهٔ (دو) یک افراز S نیست زیرا $\{1,3,5\}$ و $\{5,7,9\}$ از هم جدا نیستند . از آن سو، گردایهٔ (سه) یک افراز S می باشد .

۹.۲ روابط هم ارزی

رابطهٔ R برمجموعهٔ S یک رابطهٔ هم ارزی است اگر R منعکس، متقارن، و متعدی باشد (ر.ک. بخش ۸.۲). ایدهٔ کلی در پشت رابطهٔ هم ارزی آن است که این رابطه یک رده بندی از اشیایی است که به نوعی « شبیه » می باشند . مثال ۷.۲ (بـ) نشان می دهد که تساوی خود یک رابطهٔ هم ارزی می باشد . ما در مثال ۹.۲ چند رابطهٔ هم ارزی دیگر ذکر خواهیم کرد .

مثال ۹.۲

(آ) مجموعهٔ L از خطوط و مجموعهٔ T از مثلثها در صفحهٔ اقلیدسی را در نظر می گیریم. رابطهٔ « موازی یا مساوی بودن » یک رابطهٔ هم ارزی بر L است، و همنهشتی و تشابه دو رابطهٔ هم ارزی بر T می باشند .

(بـ) رده بندی جانوران از حیث نوع، یعنی رابطهٔ « از یک نوع بودن »، یک رابطهٔ هم ارزی بر مجموعهٔ جانوران می باشد .

(پـ) رابطهٔ $\subset$ شمول مجموعه ها یک رابطهٔ هم ارزی نیست. این رابطه منعکس و متعدی است ولی متقارن نیست زیرا $A\subset B$ شمول $B\subset A$ را ایجاب نمی کند .

(تـ) فرض کنیم m عدد صحیح مثبت ثابتی باشد . دو عدد صحیح a و b را همنهشت به کالبد m گوییم و می نویسیم

$$a \equiv b \pmod m$$

اگر m تفاضل $a-b$ را عاد نماید. به عنوان مثال، به ازای $m=4$ داریم $11 \equiv 3 \pmod 4$ زیرا که 4 تفاضل $11-3$ راعاد می کند، و $22 \equiv 6 \pmod 4$ زیرا 4 تفاضل $22-6$ را عاد خواهد کرد. در مسئلهٔ ۱۶.۲ ثابت می کنیم که همنهشتی به کالبد m یک رابطهٔ هم ارزی است.

۲ . ۱۰ روابط هم ارزی و افرازها

فرض کنیم R یک رابطهٔ هم ارزی در مجموعهٔ A بوده و، به ازای هر $a \in A$ ، $[a]$ به نام ردهٔ هم ارزی A مجموعهٔ عناصری باشد که به a مربوطند:

$$[a] = \{x : (a, x) \in R\}$$

گردایهٔ رده های هم ارزی A ، که با A / R نموده می شود، خارج قسمت A بر R نام دارد:

$$A / R = \{[a] : a \in A\}$$

خاصیت اصلی یک مجموعهٔ خارج قسمتی در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۲.۲ . فرض کنیم R یک رابطهٔ هم ارزی در مجموعهٔ A باشد. در این صورت، مجموعهٔ خارج قسمتی A / R افرازی از A است. به طور مشخص،

(یک) به ازای هر $a \in A$ ، $a \in [a]$ ؛

(دو) $[a] = [b]$ اگر و فقط اگر $(a, b) \in R$ ؛

(سه) هرگاه $[a] \neq [b]$ ، آنگاه $[a]$ و $[b]$ از هم جدا یند.

ما قضیهٔ ۲.۲ را در مسئلهٔ ۲. ۲۰ ثابت خواهیم کرد.

مثال ۲. ۱۰

(آ) فرض کنیم $S = \{1, 2, 3\}$. رابطهٔ

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$$

یک رابطهٔ هم ارزی بر S است. تحت رابطهٔ R داریم

$[1] = \{1,2\}$ ، $[2] = \{1,2\}$ ، و $[3] = \{3\}$.

ملاحظه می کنیم که $[1] = [2]$ و $\{[1],[3]\}$ یک افراز S می باشد.

(ب) فرض کنیم R_5 رابطه ای در $\mathbf{Z}$ (مجموعهٔ اعداد صحیح) باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$x \equiv y \pmod 5$$

که خوانده می شود: « x همنهشت y به کالبد 5 است » و بدین معنی است که تفاضل $x-y$ بر 5 بخشپذیر است. در این صورت، R_5 یک رابطهٔ هم ارزی در $\mathbf{Z}$ است. درست پنج ردهٔ هم ارزی متمایز در $\mathbf{Z}/R_5$ موجود است:

$$A_0 = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$$
$$A_1 = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$$
$$A_2 = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$$
$$A_3 = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$$
$$A_4 = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$$

ملاحظه می شود که هر عدد صحیح x که منحصراً به شکل $x = 5q + r$ قابل بیان است که در آن $0 \leq r < 5$ عضوی از ردهٔ هم ارزی A_r است که در آن r باقیمانده می باشد. توجه کنید که رده های هم ارزی دو به دو از هم جدا بوده و

$$\mathbf{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

۱۱.۲ روابط ترتیب جزئی

حال ردهٔ مهم دیگری از روابط را تعریف می کنیم. رابطهٔ R بر مجموعهٔ S را یک ترتیب جزئی بر S نامیم اگر R منعکس، پاد متقارن، و متعدی باشد. ما در فصل ۱۰ ترتیبهای جزئی راباتفصیل بیشتری مطالعه می کنیم و در اینجا فقط به چند مثال می پردازیم.

مثال ۱۱.۲

(آ) رابطهٔ $\subset$ شمول مجموعه ها یک ترتیب جزئی بر هر گردایه از مجموعه هاست زیرا شمول مجموعه ها سه خاصیت مطلوب را دارد. یعنی، (یک) به ازای هر

مجموعهٔ A ، $A\subset A$ ؛ (دو) هرگاه $A\subset B$ و $B\subset A$ ، آنگاه $A=B$ ؛ و (سه) هرگاه $A\subset B$ و $B\subset C$ ، آنگاه $A\subset C$.

(بـ) رابطهٔ $\leq$ بر اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ منعکس، پادمتقارن، و متعدی است. لذا، $\leq$ یک ترتیب جزئی می باشد.

(پـ) رابطهٔ « a ، b را عاد می کند » یک ترتیب جزئی بر مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ است. ولی « a ، b را عاد می کند » بر مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ یک ترتیب جزئی نیست زیرا $a|b$ و $b|a$ تساوی $a=b$ را ایجاب نمی کنند. به عنوان مثال، $3|-3$ و $-3|3$ ولی $3\neq -3$.

۲ . ۱۲ روابط n تایی

ما تا کنون فقط روابط دوتایی رامطرح کرده ایم. یک رابطهٔ n تایی مجموعه ای است از n تاییهای مرتب. اگر S یک مجموعه باشد، هر زیر مجموعهٔ S^n یک رابطهٔ n تایی بر S نام دارد. بخصوص، هر زیر مجموعهٔ S^3 یک رابطهٔ سه تایی بر S نامیده می شود.

مثال ۲.۱۲

(آ) فرض کنیم L خطی در صفحه باشد. در این صورت، « بینیت » یک رابطهٔ سه تایی بر نقاط L می باشد.

(بـ) معادلهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ یک رابطهٔ سه تایی مانند T را بر مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ معین می کند. سه تایی (x,y,z) متعلق به T است اگر و فقط اگر (x,y,z) مختصات نقطه ای روی کره به شعاع 1 و مرکز مبدأ $(0,0,0)$ باشند.

مسائل حل شده

مجموعه های حاصل ضربی

۱.۲ . به فرض آنکه $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{a,b\}$ ، (آ) $A\times B$ ، (بـ) $B\times A$ ، (پـ) $B\times B$ را بیابید.

حل. (آ) $A \times B$ از تمام جفتهای مرتب (x, y) ی تشکیل شده است که $x \in A$ و $y \in B$. در نتیجه،

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

(ب) $B \times A$ از تمام جفتهای مرتب (y, x) ی تشکیل شده است که $y \in B$ و $x \in A$. در نتیجه،

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

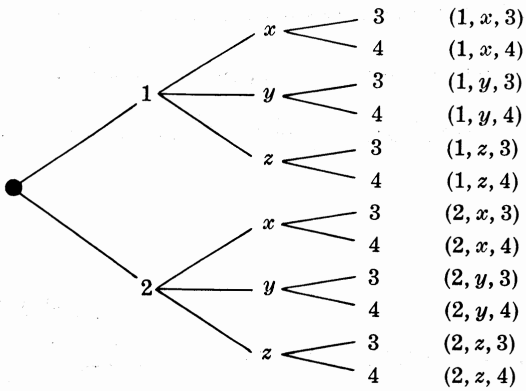
(پ) $B \times B$ از تمام جفتهای مرتب (x, y) ی تشکیل شده است که $x, y \in B$. در نتیجه،

$$B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

همانطور که انتظار می رفت، تعداد عنصرهای یک مجموعهٔ حاصل ضربی مساوی حاصل ضرب تعداد عناصر هر مجموعه می باشد.

۲.۲. بـه ازای $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{x, y, z\}$ ، و $C = \{3, 4\}$ ، $A \times B \times C$ را بیابید.

حل. $A \times B \times C$ از تمام سه تاییهای مرتب (a, b, c) تشکیل شده است که $a \in A, b \in B, c \in C$. عناصر $A \times B \times C$ را می توان از نمودار درختی زیر به طرزی اصولی به دست آورد (شکل ۷.۲).



شکل ۷.۲

عناصر $A \times B \times C$ دقیقاً 12 سه تایی مرتب سمت راست نمودار درختی می باشند.

ملاحظه می کنیم که $n(A) = 2$ ، $n(B) = 3$ ، و $n(C) = 2$ و، طبق انتظار،

$$n(A \times B \times C) = 12 = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C)$$

۳.۲. هرگاه $(2x, x+y) = (6, 2)$ ، x و y را پیدا نمایید.

حل. دو جفت مرتب مساویند اگر و فقط اگر مؤلفه های نظیرشان مساوی باشند. لذا، معادلات زیر به دست می آیند:

$$x + y = 2 \quad \text{و} \quad 2x = 6$$

از این دو معادله نتیجه می شود که $x = 3$ و $y = -1$.

۴.۲. هرگاه $A = \{1,2\}$ ، $B = \{a, b, c\}$ ، و $C = \{c, d\}$ ، مجموعه های

$$A \times (B \cap C) \quad \text{و} \quad (A \times B) \cap (A \times C)$$

رابیابید.

حل. داریم

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$
$$A \times C = \{(1, c), (1, d), (2, c), (2, d)\}$$

در نتیجه،

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, c), (2, c)\}$$

چون $B \cap C = \{c\}$ ،

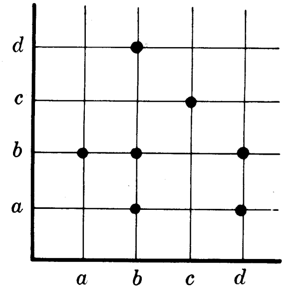
$$A \times (B \cap C) = \{(1, c,), (2, c)\}$$

ملاحظه می کنیم که $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$. این امر به ازای هر سه مجموعهٔ A ، B ، و C درست است (ر.ک. مسئلهٔ ۲. ۲۵).

رابطه ها و گرافهایشان

۲. ۵. فرض کنید $M = \{a, b, c, d\}$ و رابطهٔ R بر M مرکب از نقاطی باشد که روی

نمودار مختصات $M \times M$ در زیر دیده می شوند .



شکل ۸.۲

(آ) تمام عناصری در M را که به b مربوطند ، یعنی $\{x : (x, b) \in R\}$ را، بیابید .

(بـ) تمام عناصری در M را که d به آنها مربوط است ، یعنی $\{x : (d, x) \in R\}$ را، بیابید .

(پـ) رابطهٔ معکوس R^{-1} را بیابید .

حل. (آ) خط افقی ماربر b شامل تمام نقاطی از R است که در آنها b عنصر دوم می باشد : (a, b) ، (b, b) ، و (d, b) . لذا، مجموعهٔ مطلوب $\{a, b, d\}$ می باشد .

(بـ) خط قائم ماربر d شامل تمام نقاطی از R است که در آنها d عنصر اول می باشد : (d, a) و (d, b) . لذا، $\{a, b\}$ مجموعهٔ مطلوب می باشد .

(پـ) ابتدا R را به صورت مجموعه ای از جفتهای مرتب نوشته و سپس جفتها را به ترتیب عکس می نویسیم:

$$R = \{(a, b), (b, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, a), (d, b)\}$$
$$R^{-1} = \{(b, a), (a, b), (b, b), (d, b), (c, c), (a, d), (b, d)\}$$

۶.۲ . به فرض آنکه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{x, y, z\}$ ، رابطهٔ زیر از A به B را در نظر بگیرید :

$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}$$

(آ) R را روی نمودار مختصاتی $A \times B$ رسم کنید .

(بـ) ماتریس این رابطه را مشخص سازید.

(پـ) نمودار سهمدار R را بکشید.

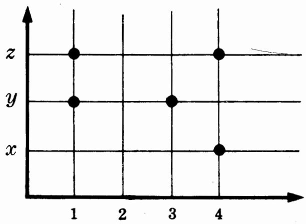
(تـ) رابطهٔ معکوس R^{-1} از R را بیابید.

(ثـ) قلمرو و برد R را معین نمایید.

حل. (آ) ر.ک. شکل ۹.۲ (آ).

(بـ) ر.ک. شکل ۹.۲ (بـ). ملاحظه می کنیم که سطرهای ماتریس با عناصر A و ستونهایش با عناصر B بر چسب خورده اند. همچنین درایهٔ نظیر $a \in A$ و $b \in B$ در صورت مربوط بودن a به b مساوی 1 و در غیر این صورت 0 است.

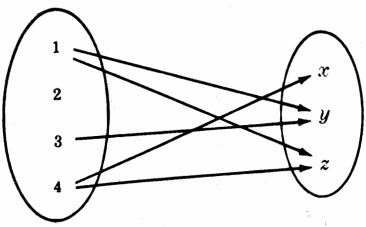
(پـ) ر.ک. شکل ۹.۲ (پـ). ملاحظه می کنیم که یک سهم از $a \in A$ به $b \in B$ است اگفگر a به b مربوط باشد؛ یعنی، اگفگر $(a,b) \in R$.



(آ)

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(بـ)



(پـ)

شکل ۹.۲

(تـ) با عکس کردن جفتهای مرتب R به R^{-1} دست می یابیم:

$$R^{-1} = \{(y,1), (z,1), (y,3), (x,4), (z,4)\}$$

ملاحظه می کنیم که باعکس کردن سهمهای شکل ۹.۲ (پـ) به نمودار سهمدار R^{-1} خواهیم رسید.

(ثـ) قلمرو R از عناصر اول جفتهای مرتب R و برد R از عناصر دوم تشکیل شده است. لذا،

قلمرو $R = \{1,3,4\}$ و، برد $R = \{x,y,z\}$

۷.۲. فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ و رابطهٔ R بر A با « x، y را عاد می کند » تعریف شده که به صورت $x|y$ نوشته می شود. (توجه کنید که $x|y$ اگفگر عدد صحیحی مانند z چنان باشد که $xz = y$.)

(آ) R را به صورت مجموعه ای از جفتهای مرتب بنویسید.

(بـ) R را روی نمودار مختصات $A \times A$ رسم کرده و گراف جهتدار آن را بکشید.

(پـ) رابطهٔ معکوس R^{-1} از R را بیابید. آیا می توان R^{-1} را لفظاً توصیف کرد؟

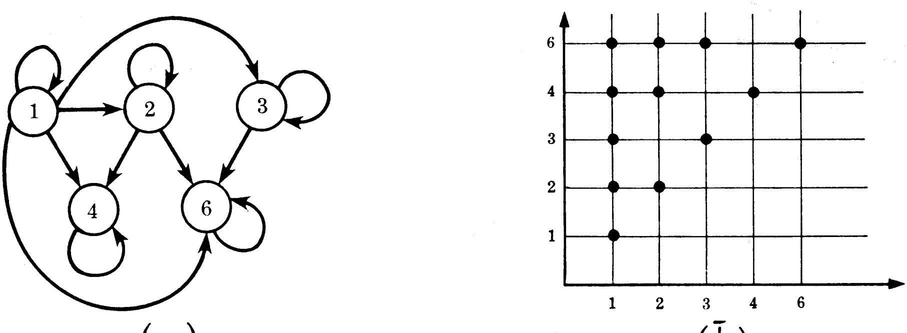
حل. اعدادی در A را می یابیم که بر 1، 2، 3، 4، و سپس 6 بخشپذیر باشند. این اعداد عبارتند از

$$1|1,\ 1|2,\ 1|3,\ 1|4,\ 1|6,\ 2|2,\ 2|4,\ 2|6,\ 3|3,\ 3|6, 4|4,\ 6|6$$

لذا،

$$\begin{aligned} R = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), \\ &(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (6,6)\} \end{aligned}$$

(بـ) ر.ک. شکل ۱۰.۲.



شکل ۱۰.۲

(پـ) با عکس کردن جفتهای مرتب R به R^{-1} دست می یابیم:

$$\begin{aligned} R^{-1} = \{&(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (6,1), (2,2), (4,2), \\ &(6,2), (3,3), (6,3), (4,4), (6,6)\} \end{aligned}$$

R^{-1} را می توان با کلمات « x مضربی از y است » توصیف کرد.

۸.۲. فرض کنید R و S روابط زیر بر $A = \{1,2,3\}$ باشند:

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$$

$$S = \{1,2), (1,3), (2,1), (3,3)\}$$

$R \cap S$، $R \cup S$ ، و R^c را بیابید.

حل. R و S را مجموعه گرفته و اشتراک و اجتماع می گیریم. برای R^c از این امر که $A \times A$ رابطهٔ عمومی بر A است استفاده می کنیم.

$$R \cap S = \{(1,2), (3,3)\}$$

$$R \cup S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,3)\}$$

$$R^c = \{(1,3), (2,1), (2,2), (3,2)\}$$

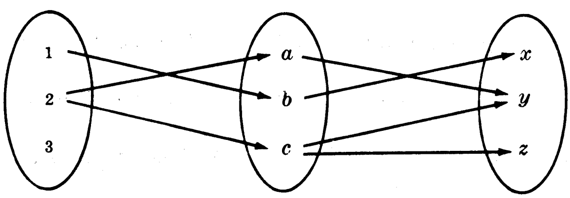
۹.۲. فرض کنید $A = \{1,2,3\}$ ، $B = \{a,b,c\}$ ، و $C = \{x,y,z\}$ و روابط R و S زیر را به ترتیب از A به B و از B به C در نظر بگیرید:

$$S = \{(a,y), (b,x), (c,y), (c,z)\} \quad \text{و} \quad R = \{(1,b), (2,a), (2,c)\}$$

(آ) رابطهٔ ترکیب $R \circ S$ را بیابید.

(ب) ماتریسهای M_R ، M_S ، و $M_{R \circ S}$ روابط R ، S ، و $R \circ S$ را یافته و $M_{R \circ S}$ را با حاصل ضرب $M_R M_S$ مقایسه نمایید.

حل. (آ) نمودار سهمدار روابط R و S را مثل شکل ۲. ۱۱ می کشیم.



شکل ۲. ۱۱

ملاحظه می کنیم که 1 در A به x در C با مسیر $1 \to b \to x$ « مرتبط » شده است؛ لذا، $(1,x)$ متعلق به $R \circ S$ می باشد. به همین نحو، $(2,y)$ و $(2,z)$ تعلق

به $R\circ S$ دارند. پس خواهیم داشت

$$R\circ S = \{(1,x),\ (2,y),\ (2,z)\}$$

(ر.ک. مثال ۲.۶.)

(بـ) ماتریسهای M_R ، M_S ، و $M_{R\circ S}$ به قرار زیرند:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_{R\circ S} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

از ضرب M_R و M_S در هم خواهیم داشت

$$M_R M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظه می کنیم که $M_{R\circ S}$ و $M_R M_S$ درایه های صفر یکسان دارند.

۱۰.۲. قضیهٔ ۲.۱ را ثابت کنید: فرض کنید A ، B ، C ، و D مجموعه باشند. همچنین R رابطه ای از A به B ، S رابطه ای از B به C ، و T رابطه ای از C به D باشد. در این صورت، $(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$.

حل. باید نشان دهیم که هر جفت مرتب در $(R\circ S)\circ T$ متعلق به $R\circ(S\circ T)$ است؛ یعنی، $(R\circ S)\circ T \subset R\circ(S\circ T)$ و بالعکس.

فرض کنیم (a,d) متعلق به $(R\circ S)\circ T$ باشد. در این صورت، c ای در C هست به طوری که $(a,c)\in R\circ S$ و $(c,d)\in T$. چون $(a,c)\in R\circ S$ ، عضوی مانند b در B هست به طوری که $(a,b)\in R$ و $(b,c)\in S$ ؛ چون $(b,c)\in S$ و $(c,d)\in T$ پس داریم $(b,d)\in S\circ T$ ؛ و چون $(a,b)\in R$ و $(b,d)\in S\circ T$ ، خواهیم داشت $(a,d)\in R\circ(S\circ T)$. لذا، $(R\circ S)\circ T \subset R\circ(S\circ T)$. به همین نحو، $R\circ(S\circ T)\subset(R\circ S)\circ T$. دو رابطهٔ شمول ثابت می کنند که

$$(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$$

خواص رابطه ها

۱۱.۲. معین کنید چه وقت رابطهٔ R بر مجموعهٔ A (آ) منعکس نیست؛ (بـ) متقارن نیست؛ (پـ) متعدی نیست؛ (تـ) پادمتقارن نیست.

حل. (آ) $a \in A$ ای هست به طوری که (a,a) تعلق به R ندارد.

(بـ) (a,b) ای در R هست به طوری که (b,a) تعلق به R ندارد.

(پـ) (a,b) و (b,c) ای در R هست به طوری که (a,c) تعلق به R ندارد.

(تـ) عناصری متمایز مانند a و b هستند به طوری که (a,b) و (b,a) تعلق به R دارند.

۱۲.۲. پنج رابطهٔ زیر بر مجموعهٔ $A = \{1,2,3\}$ رادرنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} R &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,3)\} \\ S &= \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\} \\ T &= \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3)\} \\ \emptyset &= \text{رابطهٔ تهی} \\ A \times A &= \text{رابطهٔ عمومی} \end{aligned}$$

(آ) منعکس، (بـ) متقارن، (پـ) متعدی، (تـ) پادمتقارن بودن یا نبودن هر یک از این روابط را بر A معین کنید.

حل. (آ) R منعکس نیست زیرا $2 \in A$ ولی $(2,2) \notin R$. T منعکس نیست زیرا $(3,3) \notin T$ و، به همین نحو، $\emptyset$ منعکس نیست. S و $A \times A$ منعکس اند.

(بـ) R متقارن نیست زیرا $(1,2) \in R$ ولی $(2,1) \notin R$ و، به همین نحو، T متقارن نیست. S ، $\emptyset$ ، و $A \times A$ متقارنند.

(پـ) T متعدی نیست زیرا $(1,2)$ و $(2,3)$ تعلق به T دارند ولی $(1,3)$ تعلق به T ندارد. چهار رابطهٔ دیگر متعدی می باشند.

(تـ) S پادمتقارن نیست زیرا $1 \neq 2$ و $(1,2)$ و $(2,1)$ هر دو تعلق به S دارند. به همین نحو، $A \times A$ پادمتقارن نیست. سه رابطهٔ دیگر پادمتقارن می باشند.

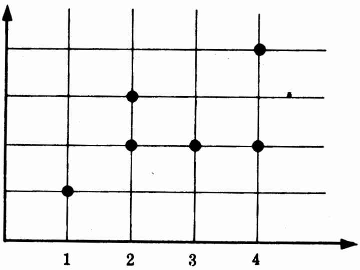
۱۳.۲. به فرض آنکه $A = \{1,2,3,4\}$ ، رابطهٔ زیر بر A را در نظر بگیرید:

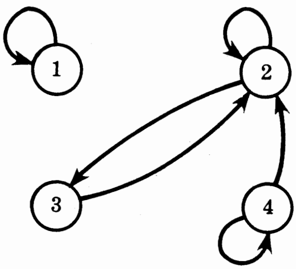
$$R = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (4,2), (4,4)\}$$

(آ) R را روی نمودار مختصات $A \times A$ کشیده و گـراف جهتدار آن رارسم کنید.

(بـ) آیا R (یک) منعکس، (دو) متقارن، (سه) متعدی، (چهار) پادمتقارن است؟

حل. (آ) ر.ک. شکل ۱۲.۲.





شکل ۱۲.۲

(بـ) (یک) R منعکس نیست زیرا $3 \in A$ ولی $3 \not R 3$ ؛ یعنی، $(3,3) \notin R$.

(دو) R متقارن‌نیست زیرا $4\,R\,2$ ولی $2 \not R 4$ ؛ یعنی، $(4,2) \in R$ ولی $(2,4) \notin R$.

(سـه) R متعدی نیست زیرا $4\,R\,2$ و $2\,R\,3$ ولی $4 \not R 3$ ؛ یعنی، $(4,2) \in R$ و $(2,3) \in R$

ولی $(4,3) \notin R$

(چهار) R پادمتقارن نیست زیرا $2\,R\,3$ و $3\,R\,2$ ولی $2 \neq 3$

۱۴.۲. رابـطهٔ R را بـر $A = \{1,2,3\}$ چـنـان مـثـال بـزنـیـد کـه خـاصـیـت ذکـر شـده رادارا باشد:

(آ) R هم متقارن و هم پادمتقارن باشد؛

(بـ) R نه متقارن و نه پادمتقارن باشد؛

(پـ) R متعدی بوده ولی $R \cup R^{-1}$ متعدی نباشد.

حل. در هرمورد چند مثال وجود دارد. یک دسته از مثالها به قرار زیرند:

(آ) $R = \{(1,1), (2,2)\}$

(بـ) $R = \{(1,2), (2,1), (2,3)\}$

(پـ) $R = \{(1,2)\}$

۱۵.۲ . به فرض آنکه R و S روابطی بر مجموعهٔ A باشند، ثابت کنید
(آ) هرگاه R و S متعدی باشند، آنگاه $R \cap S$ متعدی است؛
(بـ) هرگاه R پادمتقارن باشد، آنگاه $R \cap S$ پادمتقارن است.

حل. (آ) فرض کنیم (a,b) و (b,c) در $R \cap S$ باشند. در این صورت، (a,b) و (b,c) در هر دوی R و S اند. چون هردو رابطه متعدی اند، $(a,c) \in R$ و $(a,c) \in S$. لذا، $(a,c) \in R \cap S$ ؛ و در نتیجه، $R \cap S$ متعدی می باشد.

(بـ) فرض کنیم (a,b) و (b,a) هر دو در $R \cap S$ باشند. پس، بخصوص، (a,b) و (b,a) هر دو در R اند. چون R پادمتقارن است، $a = b$. لذا، $R \cap S$ پادمتقارن می باشد.

روابط هم ارزی و افرازها

۱۶.۲ . مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ و عدد صحیح $m > 1$ را در نظر بگیرید. گوییم x همنهشت y به کالبد m است و می نویسیم

$$x \equiv y \pmod m$$

اگر $x - y$ بر m بخشپذیرباشد. نشان دهید که این معرف یک رابطهٔ هم ارزی بر $\mathbf{Z}$ است.

حل. به ازای هر x در $\mathbf{Z}$ داریم $x \equiv x \pmod m$ زیرا $x - x = 0$ بر m بخشپذیر است. لذا، این رابطه منعکس می باشد.

فرض کنیم $x \equiv y \pmod m$ ؛ پس $x - y$ بر m بخشپذیر است. در این

صورت، $x-y$ $-(x-y)=y-x$ نیز بر m بخشپذیر است؛ در نتیجه، $y\equiv x \pmod m$. لذا، رابطهٔ فوق متقارن می باشد.

حال فرض کنیم $x\equiv y \pmod m$ و $y\equiv z \pmod m$ ؛ پس $x-y$ و $y-z$ هر دو بر m بخشپذیرند. پس مجموع

$$(x-y)+(y-z) = x-z$$

نیز بر m بخشپذیر است. لذا، $x\equiv z \pmod m$. بنابراین، رابطهٔ ما متعدی می باشد.

پس نشان داده ایم که رابطهٔ همنهشتی به کالبد m بر $\mathbf{Z}$ منعکس، متقارن، و متعدی است؛ لذا، یک رابطهٔ هم ارزی می باشد.

۱۷.۲. به فرض آنکه $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ، معین کنید از رده های زیر کدامها یک افراز بر X اند:

(آ) $[\{1,3,6\},\ \{2,8\},\ \{5,7,9\}]$

(بـ) $[\{1,5,7\},\ \{2,4,8,9\},\ \{3,5,6\}]$

(پـ) $[\{2,4,5,8\},\ \{1,9\},\ \{3,6,7\}]$

(تـ) $[\{1,2,7\},\ \{3,5\},\ \{4,6,8,9\},\ \{3,5\}]$

حل. (آ) افراز نیست زیرا $4\in X$ به هیچ سلولی متعلق نیست. به عبارت دیگر، X اجتماع سلولها نیست.

(بـ) افراز نیست زیرا $5\in X$ تعلق به دو سلول متمایز $\{1,5,7\}$ و $\{3,5,6\}$ دارد. به عبارت دیگر، دو سلول متمایز از هم جدا نیستند.

(پـ) افراز هست زیرا هر عنصر X دقیقاً به یک سلول تعلق دارد. به عبارت دیگر، سلولها از هم جدایند و اجتماعشان X می باشد.

(تـ) افراز هست. با آنکه 3 و 5 در دو جا ظاهر شده اند، سلولها از هم متمایز نیستند.

۱۸.۲. تمام افرازهای $X=\{a,b,c,d\}$ را بیابید.

حل. ابتدا توجه می کنیم که هر افراز X شامل 1 ، 2 ، 3 ، یا 4 مجموعهٔ متمایز است. افرازها به قرار زیرند:

(۱) $[\{a, b, c, d\}]$

(۲) $[\{a\}, \{b, c, d\}]$, $[\{b\}, \{a, c, d\}]$, $[\{c\}, \{a, b, d\}]$, $[\{d\}, \{a, b, c\}]$
$[\{a, b\}, \{c, d\}]$, $[\{a, c\}, \{b, d\}]$, $[\{a, d\}, \{b, c\}]$

(۳) $[\{a\}, \{b\}, \{c, d\}]$, $[\{a\}, \{c\}, \{b, d\}]$, $[\{a\}, \{d\}, \{b, c\}]$
$[\{b\}, \{c\}, \{a, d\}]$, $[\{b\}, \{d\}, \{a, c\}]$, $[\{c\}, \{d\}, \{a, b\}]$

(٤) $[\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}]$

پانزده افراز مختلف از X وجوددارد.

۱۹.۲ . فرض کنید R رابطهٔ هم ارزی زیر بر مجموعهٔ $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ باشد:

$$R = \{(1,1), (1,5), (2,2), (2,3), (2,6), (3,2), (3,3), (3,6), (4,4), (5,1), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)\}$$

افراز A القاشده به وسیلهٔ R رابیابید؛ یعنی، رده های هم ارزی R را پیدا کنید.

حل. عناصر مربوط به 1 عبارتند از 1 و 5 ؛ پس

$$[1] = \{1,5\}$$

یک عنصر که تعلق به $[1]$ ندارد، مثلاً 2 ، را اختیار می کنیم. عناصر مربوط به 2 عبارتند از 2 ، 3 ، و 6 . پس

$$[2] = \{2,3,6\}$$

تنها عنصر که تعلق به $[1]$ یا $[2]$ ندارد 4 است و تنها عنصر مربوط به 4 عدد 4 می باشد. لذا،

$$[4] = \{4\}$$

بنابراین،

$$[\{1,5\}, \{2,3,6\}, \{4\}]$$

افرازی از A است که به وسیلهٔ R القا شده است.

۲۰.۲. قضیهٔ ۲.۲ را ثابت کنید: فرض کنید R یک رابطهٔ هم ارزی در مجموعهٔ A باشد. در این صورت، مجموعهٔ خارج قسمتی A/R افرازی از A است. به طور مشخص،

(یک) به ازای هر $a \in A$ ، $a \in [a]$ ؛

(دو) $[a] = [b]$ اگر و فقط اگر $(a, b) \in R$ ؛

(سه) هرگاه $[a] \neq [b]$ ، آنگاه $[a]$ و $[b]$ از هم جدایند.

برهان (یک). چون R منعکس است، به ازای هر $a \in A$ داریم $(a, a) \in R$ و لذا $a \in [a]$.

برهان (دو). فرض کنیم $(a, b) \in R$. می خواهیم نشان دهیم که $[a] = [b]$. فرض کنیم $x \in [b]$ ؛ پس $(b, x) \in R$. ولی طبق فرض، $(a, b) \in R$ و در نتیجه، طبق خاصیت تعدی، $(a, x) \in R$. لذا، $x \in [a]$. بنابراین، $[b] \subset [a]$. برای اثبات $[a] \subset [b]$ ملاحظه می کنیم که $(a, b) \in R$ (به خاطر تقارن) ایجاب می کند که $(b, a) \in R$. سپس، با استدلالی مشابه، داریم $[a] \subset [b]$. در نتیجه، $[a] = [b]$. از آن سو، هرگاه $[a] = [b]$ ، آنگاه، بنابر (یک)، $b \in [b] = [a]$. در نتیجه، $(a, b) \in R$.

برهان (سه). ما عکس نقیض را ثابت می کنیم:

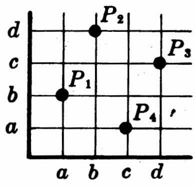
$$\text{هرگاه } [a] \cap [b] \neq \emptyset \text{ ، آنگاه } [a] = [b] \text{ .}$$

هرگاه $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ ، آنگاه عنصری مانند $x \in A$ هست که $x \in [a] \cap [b]$. لذا، $(a, x) \in R$ و $(b, x) \in R$. بنابر تقارن، $(x, b) \in R$ و، طبق تعدی، $(a, b) \in R$. در نتیجه، طبق (دو)، $[a] = [b]$.

مسائل تکمیلی

مجموعه های حاصل ضربی

۲۱.۲. به فرض آنکه $A = \{a, b, c, d\}$ ، جفتهای مرتب نظیر نقاط P_1 ، P_2 ، P_3 ، و P_4 آمده در نمودار مختصات زیر از $A \times A$ را بیابید (شکل ۱۳.۲).



شکل ۱۳.۲

۲۲.۲. x و y را درصورتی بیابید که (آ) $(x+2,4)=(5,2x+y)$ ، (ب) $(y-2,2x+1)=(x-1,y+2)$.

۲۳.۲. به فرض آنکه $W=$ { پل، اریک، مارک } و نیز { دیوید، اریک } $=V$ ، (آ) $W\times V$ ، (ب) $V\times W$ ، و (پ) $V\times V$ را بیابید.

۲۴.۲. به فرض آنکه $S=\{a,b,c\}$ ، $T=\{b,c,d\}$ ، و $W=\{a,d\}$ ، نمودار درختی $S\times T\times W$ را ساخته و سپس $S\times T\times W$ را بیابید.

۲۵.۲. ثابت کنید:

(آ) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ ؛ (ب) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times B)$.

رابطه ها

۲۶.۲. فرض کنید R رابطه ای بر $A=\{2,3,4,5,6\}$ باشد که با « x نسبت به y اول است»، یعنی تنها مقسوم علیه مثبت x و y عدد 1 است، تعریف شده است.

(آ) R را به صورت مجموعه ای از جفتهای مرتب بنویسید.

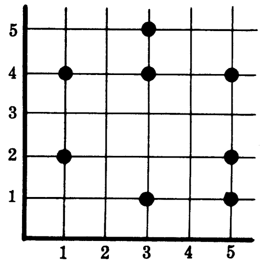
(ب) گراف جهتدار R را رسم کنید.

۲۷.۲. فرض کنید R رابطه ای بر $C=\{1,2,3,4,5\}$ باشد که با مجموعهٔ نقاط نمودار مختصات $C\times C$ در شکل ۱۴.۲ داده شده است.

(۱) درستی یانادرستی هر یک از احکام زیر را بیان دارید: (آ) $1\,R\,4$ ؛ (ب) $2\,R\,5$ ؛ (پ) $3\not R\,1$ ؛ (ت) $5\not R\,3$.

(۲) عنصرهای هر یک از زیر مجموعه های زیر از C را بیابید:

(آ) $\{x:3\,R\,x\}$ (ب) $\{x:(4,x)\in R\}$



شکل ۱٤.۲

(پـ) $\{x : (x, 2) \notin R\}$ (تـ) $\{x : x\,R\,5\}$

(۳) (آ) قلمرو R ، (بـ) برد R ، و (پـ) R^{-1} را بیابید .

(٤) گراف جهتدار R را بکشید .

۲۸.۲. فرض کنید R رابطهٔ زیر بر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد :

$$R = \{(1,3), (1,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$$

(آ) ماتریس M_R از R را بیابید .

(بـ) قلمرو و برد R را بیابید .

(پـ) R^{-1} را پیدا کنید .

(تـ) گراف جهتدار R را بکشید .

(ثـ) ترکیب $R \circ R$ را پیدا نمایید .

۲۹.۲. فرض کنید R و S روابط زیر بر $B = \{a, b, c, d\}$ باشند :

$$R = \{(a,a), (a,c), (c,b), (c,d), (d,b)\}$$
$$S = \{(b,a), (c,c), (c,d), (d,a)\}$$

ترکیبهای زیر بر B را بیابید :

(آ) $R \circ S$ ؛ (بـ) $S \circ R$ ؛ (پـ) $R \circ R$ ؛ (تـ) $S \circ S$.

۳۰.۲. فرض کنید رابطهٔ R بر اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ با معادلهٔ $x + 3y = 12$ تعریف شده باشد ؛ یعنی،

$$R = \{(x, y) : x + 3y = 12\}$$

(آ) R را به صورت مجموعه ای از جفتهای مرتب بنویسید .

(ب) (یک) قلمرو R ، (دو) برد R ، و (سه) R^{-1} را بیابید.

(پ) ترکیب $R \circ R$ را پیدا نمایید.

روابط منعکس، متقارن، پادمتقارن، و متعدی

۳۱.۲. فرض کنید $W = \{1, 2, 3, 4\}$ و روابط زیر بر W را در نظر بگیرید:

$$R_1 = \{(1,1), (2,1)\} \qquad R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$
$$R_2 = \{(1,1), (2,3), (4,1)\} \qquad R_5 = \{(1,3), (2,4)\}$$
$$R_3 = \{(3,4)\}$$

معین کنید کدام رابطه (آ) منعکس، (ب) متقارن، (پ) پادمتقارن، (ت) متعدی است.

۳۲.۲. هر یک از عبارات زیر معرف رابطه ای بر اعداد صحیح مثبت N است:
(۱) « x از y بزرگتر است» ؛ (۲) « xy مجذور یک عدد صحیح است»؛

(۳) $x + y = 10$ ؛

(٤) $x + 4y = 10$.

معین کنید کدام رابطه (آ) منعکس، (ب) متقارن، (پ) پادمتقارن، (ت) متعدی است.

۳۳.۲. فرض کنید $P(A)$ گردایهٔ تمام زیر مجموعه های $A = \{a, b, c\}$ باشد. هر یک از عبارات زیر معرف رابطه ای است بر $P(A)$:

(۱) « x زیر مجموعهٔ حقیقی y است»؛ (۲) « x و y از هم جدایند»؛

(۳) $x \cup y = A$.

معین کنید کدام رابطه (آ) منعکس، (ب) متقارن، (پ) پادمتقارن، (ت) متعدی است.

۳٤.۲. فرض کنید R و S روابطی بر مجموعهٔ A باشند. اگر A دست کم سه عنصر داشته باشد، از احکام زیر کدام درست و کدام نادرست است. در صورت نادرست بودن، یک مثال نقض بر مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3\}$ بزنید:

(آ) هرگاه R و S متقارن باشند، آنگاه $R \cap S$ متقارن است؛

(ب) هرگاه R و S متقارن باشند، آنگاه $R \cup S$ متقارن است؛

(پ) هرگاه R و S منعکس باشند، آنگاه منعکس است؛

(ت) هرگاه R و S منعکس باشند، آنگاه $R\cup S$ منعکس است؛

(ث) هرگاه R و S متعدی باشند، آنگاه $R\cup S$ متعدی است؛

(ج) هرگاه R و S پادمتقارن باشند، آنگاه $R\cup S$ پادمتقارن است؛

(چ) هرگاه R پادمتقارن باشد، آنگاه R^{-1} پادمتقارن است؛

(ح) هرگاه R منعکس باشد، آنگاه $R\cap R^{-1}$ تهی نیست؛

(خ) هرگاه R متقارن باشد، آنگاه $R\cap R^{-1}$ تهی نیست؛

افرازها و روابط هم ارزی

۳۵.۲. به فرض آنکه $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، از رده های زیر کدامها افرازی از W اند :

(آ) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}]$ (ب) $[\{1, 5\}, \{2\}, \{3, 6\}]$

(پ) $[\{1, 5\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 5\}, \{3, 6\}]$ (ت) $[\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}]$

۳۶.۲. جمیع افرازهای $V = \{1, 2, 3\}$ را بیابید.

۳۷.۲. فرض کنید $[A_1, A_2, \ldots, A_m]$ و $[B_1, B_2, \ldots, B_n]$ افرازهایی از مجموعهٔ X باشند. نشان دهید که گردایهٔ زیر از مجموعه ها

$$[A_i\cap B_j:\ i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, n]\setminus\emptyset$$

نیز افرازی (به نام افراز چلیپایی)از X است. (توجه کنید که ما مجموعهٔ تهی $\emptyset$ را حذف کرده ایم.)

۳۸.۲. ثابت کنید هرگاه R یک رابطهٔ هم ارزی بر مجموعهٔ A باشد، آنگاه R^{-1} نیز یک رابطهٔ هم ارزی بر A است.

۳۹.۲. فرض کنید $S = \{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ و رابطهٔ هم ارزی R بر S با $x \equiv y \pmod 5$ (یعنی، $x-y$ بر 5 بخشپذیر است) تعریف شده باشد. افراز S القا شده به وسیلهٔ R، یعنی مجموعهٔ خارج قسمتی S/R ، را بیابید.

۴۰.۲. فرض کنید $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ و رابطهٔ $\simeq$ بر $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$(a, b) \simeq (c, d) \quad \text{اگر} \quad ad = bc$$

ثابت کنید $\simeq$ یک رابطهٔ هم ارزی است.

۲. ۴۱. فرض کنید $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ و رابطهٔ ~ بر $A \times A$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{اگر} \quad a + d = b + c$$

(آ) ثابت کنید ~ یک رابطهٔ هم ارزی است.

(بـ) $[(2, 5)]$ ، یعنی ردهٔ هم ارزی $(2, 5)$ ، را بیابید.

مسائل برنامه نویسی کامپیوتر

فرض کنید رابطهٔ R بر مجموعهٔ $S = \{1, 2, 3, 4\}$ شامل شش عنصر باشد. همچنین یک دسته کارت حاوی شش کارت و هر کارت شامل یک جفت عدد صحیح باشد که عنصری از R است.

۲. ۴۲. یک برنامه بنویسید که (آ) قلمرو R و (بـ) برد R را چاپ کند.

۲. ۴۳. یک برنامه بنویسید که ترکیب $R \circ R = R^2$ را چاپ کند.

۲. ۴۴. یک برنامه بنویسید که بگوید R

(آ) منعکس، (بـ) متقارن، (پـ) متعدی، (تـ) پادمتقارن است یا نه.

۲. ۴۵. برنامه ای بنویسید که ماتریس 4×4 ، M رابطهٔ R را چاپ کند. برنامه های مسائل ۲. ۴۱ تا ۲. ۴۵ را به ازای روابط زیر امتحان کنید:

(یک) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (4, 4)\}$

(دو) $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (3, 3), (4, 3)\}$

(سه) $R = \{(1, 4), (2, 3), (4, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2)\}$

۲. ۴۶. حال فرض کنید R یک رابطهٔ هم ارزی بر S باشد. برنامه ای بنویسید که رده های هم ارزی $[1]$ ، $[2]$ ، $[3]$ ، و $[4]$ را چاپ کند. برنامه را با رابطهٔ

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$$

امتحان کنید.

جواب مسائل تکمیلی

۲. ۲۱. $P_1 = (a, b), \; P_2 = (b, d), \; P_3 = (d, c), \; P_4 = (c, a)$

۲. ۲۲. (آ) $x = 3, y = -2$ ؛ (بـ) $x = 2, y = 3$

۲. ۲۳. (آ)

$W \times V = \{$ (اریک ، پل) ، (دیوید ،اریک) ، (اریک ، اریک)
(دیوید ، مارک) ، (اریک ، مارک) ، (دیوید، پل) $\}$

(بـ)

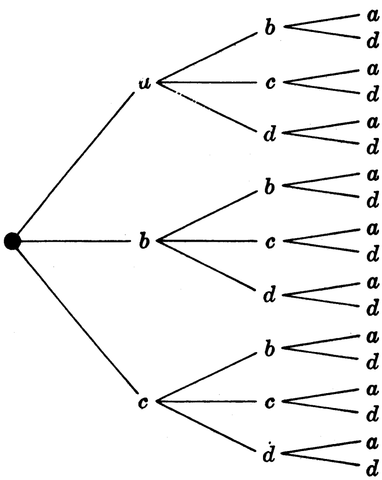
$V \times W = \{$ (پل ، اریک) ، (اریک ، دیوید) ، (اریک ، اریک)
(مارک ، دیوید) ، (مارک ، اریک) ، (پل، دیوید) $\}$

(پـ)

$V \times V = \{$ (دیوید، دیوید)، (اریک ، دیوید)، (دیوید، اریک)، (اریک، اریک) $\}$

۲. ۲٤. ر.ک. شکل ۲. ۱۵.

$$\begin{aligned} S \times T \times W = \{&(a, b, a), (a, b, d), (a, c, a), (a, c, d), (a, d, a), (a, d, d), \\ &(b, b, a), (b, b, d), (b, c, a), (b, c, d), (b, d, a), (b, d, d), \\ &(c, b, a), (c, b, d), (c, c, a), (c, c, d), (c, d, a), (c, d, d)\} \end{aligned}$$



شکل ۲. ۱۵

۲. ۲٦. $R = \{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 5)$
$(5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$

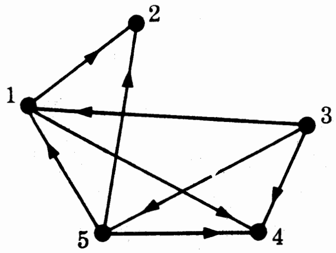
۲. ۲۷. (۱) (آ) درست، (بـ) نادرست، (پـ) نادرست، (تـ) درست

(۲) (آ) $\{1, 4, 5\}$ ، (ب) $\varnothing$ ، (پ) $\{2, 3, 4\}$ ، (ت) $\{3\}$

(۳) (آ) $\{1, 3, 5\}$ ، (ب) $\{1, 2, 4, 5\}$ ،

(پ) $R^{-1} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 3)\}$

(٤) ر.ک. شکل ۲. ۱۶.



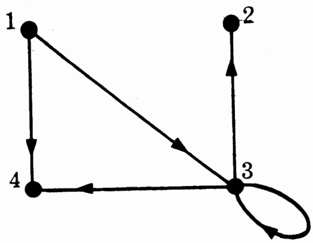
شکل ۲. ۱۶

۲. ۲۸. (آ) $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ،

(ب) $\{1, 3\} =$ قلمرو، $\{2, 3, 4\} =$ برد

(پ) $R^{-1} = \{(3, 1), (4, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$

(ت) ر.ک. شکل ۲. ۱۷.



شکل ۲. ۱۷

(ث) $R \circ R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

۲. ۲۹. (آ) $R \circ S = \{(a, c), (a, d), (c, a), (d, a)\}$

(ب) $S \circ R = \{(b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,a), (d,c)\}$

(پ) $R \circ R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (c,b)\}$

(ت) $S \circ S = \{(c,c), (c,a), (c,d)\}$

۲. ۳۰ (آ) $\{(9,1), (6,2), (3,3)\}$ ، (ب) (یک) $\{9,6,3\}$ ، (دو) $\{1,2,3\}$ ، (سه) $\{(1,9), (2,6), (3,3)\}$ ، (پ) $\{(3,3)\}$

۲. ۳۱. (آ) هیچکدام، (ب) R_4 ، (پ) همه، (ت) همه جز R_2

۲. ۳۲. (آ) هیچکدام، (ب) (۲) و (۳)، (پ) (۱) و (٤) ، (ت) همه جز (۳).

۲. ۳۳. (آ) هیچکدام، (ب) (۲) و (۳)، (پ) (۱)، (ت) (۱).

۲. ۳٤. همه درستند جز (ث) $R = \{(1,2)\}, \ S = \{(2,3)\}$ و

(ج) $R = \{(1,2)\}, \ S = \{(2,1)\}$

۲. ۳۵. (پ) و (ت).

۲. ۳٦. پنج افراز وجود دارد: $[\{1,2,3\}]$ ، $[\{1\}, \{2,3\}]$ ، $[\{2\}, \{1,3\}]$ ، $[\{3\}, \{1,2\}]$ و $[\{1\}, \{2\}, \{3\}]$

۲. ۳۹. $[\{1,6,11,16\}, \{2,7,12,17\}, \{3,8,13,18\}, \{4,9,14,19\}, \{5,10,15,20\}]$

۲. ٤۱. (ب) $\{(1,4), (2,5), (3,6), (4,7), (5,8), (6,9)\}$

۳
تابعها

۱.۳ آشنایی

یکی از مهمترین مفاهیم در ریاضیات مفهوم تابع است. این مفهوم در تمام شاخه های ریاضی ظاهر شده و نقش اصلی راایفا می کند. گاهی به جای « تابع» از اصطلاحات « نگاشت»، « نگار»، « تبدیل»، و بسیاری دیگر استفاده می شود. این انتخاب در موقعیتی خاص به عادت و زمینهٔ ریاضی شخص بستگی دارد.

دراین فصل خواص مقدماتی توابع را بررسی می کنیم.

۲.۳ تابعها

فرض کنیم به هر عنصر مجموعهٔ A عنصر منحصر به فردی از مجموعهٔ B منتسب شده باشد. گردایهٔ این انتسابات یک تابع از A به توی B نامیده می شود. مجموعهٔ A قلمرو تابع و مجموعهٔ B هم قلمرو آن نام خواهد داشت.

مامعمولاً یک تابع را با یک حرف (مثلاً f ، g ، و غیره) نمایش می دهیم. هرگاه f تابعی از A به B باشد، آنگاه می نویسیم

$$f: A \to B$$

که خوانده می شود: « f مجموعهٔ A را به توی B می برد (یا می نگارد)».
هرگاه $a \in A$ ، آنگاه عنصر منحصر به فردی از B که f به a منتسب می کند نقش a تحت f یا مقدار f در a نام دارد و با

$f(a)$

(بخوانید ا ف آ) نموده می شود . مجموعهٔ تمام نقشها را نقش f نامیده و با $\mathrm{Im}\,(f)$ یا $f(A)$ نشان می دهیم. توجه کنید که $\mathrm{Im}\,(f)$ زیر مجموعهٔ (احتمالاً زیر مجموعهٔ حقیقی) B می باشد .

هرگاه تابع f را بتوان با یک فرمول ریاضی بیان کرد ، آنگاه برای توصیف f چند راه موجود است. به عنوان مثال، فرض کنیم f تابعی از $\mathbf{R}$ به توی $\mathbf{R}$ باشد که هر عدد حقیقی را به مجذورش می فرستد . f را می توان به طریق زیر توصیف کرد :

$$y = x^2 \quad \text{یا} \quad x \mapsto x^2 \quad \text{یا} \quad f(x) = x^2$$

در اینجا سهم $\mapsto$ خوانده می شود : « می رود به». در آخرین نماد ، x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته گویند زیرا y وابسته به مقدار x می باشد .

تذکر. هرگاه تابع f با فرمولی شامل متغیر مستقل x مثل فوق داده شده باشد ، فرض است که f از $\mathbf{R}$ (یا وسیعترین زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}$ که f در آن با معنی است) به توی $\mathbf{R}$ است مگر خلافش تصریح شود .

مثال ۳ . ۱

(آ) تابع $f(x) = x^3$ را در نظر می گیریم؛ یعنی، f به هر عدد حقیقی مکعبش را منتسب می کند . در این صورت، نقش 2 عدد 8 است و لذا می توان نوشت $f(2) = 8$. (طبق قرار داد ، f یک تابع از $\mathbf{R}$ به توی $\mathbf{R}$ می باشد .)

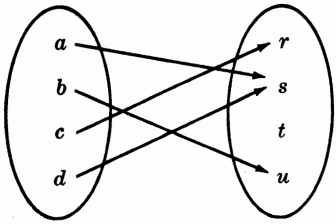
(ب) فرض کنیم f به هر کشور پایتختش را منتسب کند . در اینجا قلمرو f مجموعهٔ کشورهای جهان و هم قلمرو آن شهرهای جهان می باشد . نقش فرانسه پاریس می باشد ؛ یعنی، پاریس = (فرانسه) f .

(پ) شکل ۳ . ۱ معرف تابعی مانند f از $A = \{a, b, c, d\}$ به توی $B = \{r, s, t, u\}$ به نحوی روشن می باشد . در اینجا داریم

$$f(a) = s, \quad f(b) = u, \quad f(c) = r, \quad f(d) = s$$

نقش f از مقادیر نقش تشکیل شده است؛ لذا ،

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{r, s, u\}$$



شکل ۱.۳

توجه کنید که t به نقش f متعلق نیست زیرا t نقش هیچ عنصری تحت f نمی باشد.
(تـ) فرض کنیم A یک مجموعه باشد. تابعی از A به توی A که به هر عنصر خودش را منتسب کند تابع همانی بر A نام دارد و معمولاً با 1_A یا فقط 1 نموده می شود. به عبارت دیگر، به ازای هر عنصر a در A ،

$$1_A(a) = a$$

۳.۳ گراف یک تابع

توابع را می توان از دیدگاهی دیگر نیز در نظر گرفت. پیش از همه، هر تابع $f: A \to B$ رابطه ای از A به B به نام گراف f به دست می دهد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$f \text{ گراف } = \{(a,b):\ b=f(a) \text{ و } a\in A\}$$

دو تابع $f: A \to B$ و $g: A \to B$ مساوی تعریف می شوند و می نویسیم $f = g$ اگر به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $f(a) = g(a)$ ؛ یعنی، اگر دارای یک گراف باشند. بدین ترتیب، مابین یک تابع و گرافش فرقی نمی گذاریم.

گراف تابع $f: A \to B$ دارای خاصیت اساسی زیر است:

هر $a \in A$ متعلق به جفت مرتب منحصر به فردی در گراف است. $(*)$

از آن سو، فرض کنیم f رابطه ای از A به B باشد که در $(*)$ صدق می کند. در این صورت، f به هر $a \in A$ یک عنصر $b \in B$ منتسب می کند؛ یعنی، اگر $(a,b) \in f$ ، b به a منتسب شده است. به عبارت دیگر، f تابعی از A به

توی B می باشد. لذا، مفاهیم توابع و روابط صادق در $(*)$ یکی می باشند. در واقع، در بعضی از کتب تابع به صورت رابطه ای صادق در $(*)$ تعریف می شود.

با آنکه مابین یک تابع و گرافش تمایزی قایل نمی شویم، هنوز وقتی f رامجموعه ای از جفتهای مرتب می گیریم از اصطلاح « گراف f » استفاده می کنیم. به علاوه، چون گراف f یک رابطه است، می توان آن را همانطور که برای روابط به طور کلی شد رسم کرد، و این نمایش را گاهی گراف f می نامند. همچنین شرط معرف یک تابع که هر $a \in A$ متعلق به جفت منحصر به فردی مانند (a, b) در f است هم ارز این شرط هندسی است که هر خط قائم گراف را درست در یک نقطه قطع می کند.

مثال ۳. ۲

(آ) فرض کنیم $f: A \to B$ تابع تعریف شده در مثال ۳. ۱ (پ) باشد. در این صورت، گراف f مجموعهٔ جفتهای مرتب زیر می باشد:

$$\{(a, s), (b, u), (c, r), (d, s)\}$$

(ب) روابط زیر را بر مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3\}$ در نظر می گیریم:

$$f = \{(1,3), (2,3), (3,1)\}$$

$$g = \{(1,2), (3,1)\}$$

$$h = \{(1,3), (2,1), (1,2), (3,1)\}$$

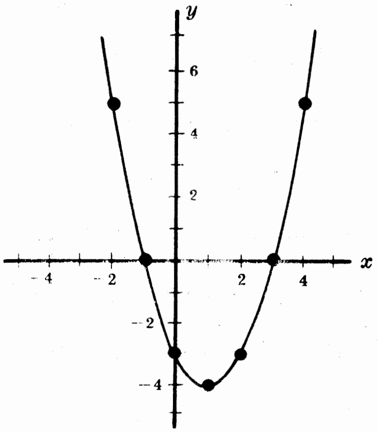
f یک تابع از A به توی A است زیرا هر عضو A در مختص‌اول درست یک جفت مرتب در f ظاهر می شود؛ در اینجا $f(1) = 3$ ، $f(2) = 3$ ، و $f(3) = 1$. g یک تابع از A به توی A نیست زیرا $2 \in A$ مختص اول هیچ جفت در g نیست و لذا g به 2 نقشی منتسب نمی کند. همچنین h یک تابع از A به توی A نیست زیرا $1 \in A$ مختص اول دو جفت مرتب متمایز در h ، یعنی $(1,3)$ و $(1,2)$ ، می باشد. اگر h بخواهد تابع باشد، نمی تواند هر دوی 3 و 2 را به عنصر $1 \in A$ منتسب نماید.

(پ) منظوراز یک تابع چند جمله ای حقیقی یعنی تابعی مانند $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به شکل

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

که در آن a_i ها اعدادی حقیقی اند. چون $\mathbf{R}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است، رسم هر نقطه

از گراف ناممکن می باشد. لیکن، گراف یک چنین تابع را می توان بارسم ابتدا چند نقطه از آن و سپس رسم یک منحنی هموار از این نقاط تقریب کرد. این نقاط معمولاً از جدولی که مقادیر مختلفی به x داده شده و مقادیر نظیر $f(x)$ حساب شده اند به دست می آیند. شکل ۳. ۲ این روش را با تابع $f(x) = x^2 - 2x - 3$ توضیح می دهد.



x	$f(x)$
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5

گراف $f(x) = x^2 - 2x - 3$

شکل ۳. ۲

(ت) (تابع ترکیب). دو تابع $f: A \to B$ و $g: B \to C$ را در نظر می گیریم؛ یعنی، هم قلمرو f قلمرو g می باشد. در این صورت، می توان یک تابع جدید از A به C به نام ترکیب f و g و با علامت $g \circ f$ به صورت زیر تعریف کرد:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

یعنی، نقش a تحت f و سپس نقش $f(a)$ تحت g را می یابیم. این تعریف واقعاً جدید نیست. هرگاه f و g را رابطه بگیریم، آنگاه این تابع همان ترکیب f و g به عنوان رابطه می باشد (ر.ک. بخش ۲. ۶) جز آنکه در اینجا برای ترکیب از نماد تابعی $g \circ f$ به جای نماد $f \circ g$ که برای روابط به کار رفت استفاده می کنیم.

هرگاه $f: A \to B$ یک تابع باشد، آنگاه

$$1_B \circ f = f \quad \text{و} \quad f \circ 1_A = f$$

که در آن 1_A و 1_B تابع همانی بر A و B می باشند.

۳. ٤ توابع یک به یک، برو، و معکوسپذیر

گوییم تابع $f:A\to B$ یک به یک است (و می نویسیم 1-1) اگر عناصر متفاوت در قلمرو A نقشهای متمایزی داشته باشند. راه دیگر بیان این امر آن است که f یک به یک است اگر $f(a)=f(a')$ تساوی $a=a'$ را ایجاب کند.

گوییم تابع $f:A\to B$ برو است اگر هر عنصر B نقش عنصری از A باشد. به عبارت دیگر، $f:A\to B$ بروست اگر نقش f تمام هم قلمرو باشد؛ یعنی، اگر $f(A)=B$. در چنین حالت گوییم f یک تابع از A به روی B است یا f مجموعهٔ A را به روی B می نگارد.

تابع $f:A\to B$ معکوسپذیر است اگر رابطهٔ معکوسش f^{-1} تابعی از B به A باشد. رابطهٔ معکوس f^{-1} در حالت کلی تابع نیست. قضیهٔ زیر محک ساده ای است که تابع بودن معکوس رابه ما می گوید.

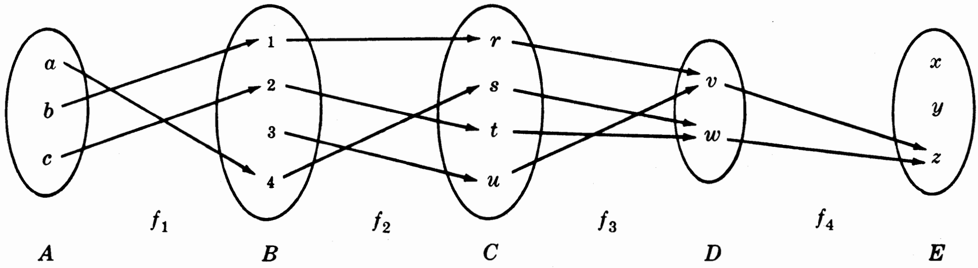
قضیهٔ ۳. ۱. تابع $f:A\to B$ معکوسپذیر است اگر و فقط اگر f یک به یک و برو باشد.

هرگاه $f:A\to B$ یک به یک و برو باشد، آنگاه f یک تناظر یک به یک بین A و B نام دارد. این امر ناشی از آن است که هر عنصر A نظیر یک عنصر منحصر به فرد از B است و بالعکس.

در بعضی از کتابها از اصطلاح انژکتیو برای تابع یک به یک، سورژکتیو برای تابع برو، و بیژکتیو برای تناظر یک به یک استفاده می شود.

مثال ۳. ۳. توابع $f_1:A\to B$ ، $f_2:B\to C$ ، $f_3:C\to D$ ، و $f_4:D\to E$ تعریف شده با نمودار شکل ۳.۳ را درنظر می گیریم. f_1 یک به یک است زیرا هیچ عنصری از B نقش بیش از یک عنصر از A نیست. به همین نحو، f_2 یک به یک می باشد. ولی توابع f_3 و f_4 یک به یک نیستند زیرا $f_3(r)=f_3(u)$ و $f_4(v)=f_4(w)$.

تا جایی که به برو مربوط باشد، f_2 و f_3 هر دو برویند زیراهر عنصر C نقش



شکل ۳.۳

عنصری از B تحت f_2 است و هر عنصر D نقش عنصری از C تحت f_3 می باشد؛ یعنی، $f_2(B) = C$ و $f_3(C) = D$. از آن سو، f_1 برونیست زیرا $3 \in B$ نقش عنصری از A تحت f_1 نیست، و f_4 برونیست زیرا $x \in E$ نقش هیچ عنصری از D تحت f_4 نمی باشد.

لذا، f_1 یک به یک است ولی برونیست، f_3 بروست ولی یک به یک نیست، و f_4 نه یک به یک است و نه برو. لیکن، f_2 هم یک به یک است و هم برو؛ یعنی، یک تناظر یک به یک بین A و B می باشد. بنابراین، f_2 معکوسپذیر است و f_2^{-1} تابعی از C به B می باشد.

چون توابع را می توان با گرافهایشان یکی کرد و گرافها را می توان رسم نمود، ممکن است بپرسیم آیا مفاهیم یک به یک و برو بودن تعبیر هندسی دارند یا خیر. نشان می دهیم که جواب مثبت می باشد.

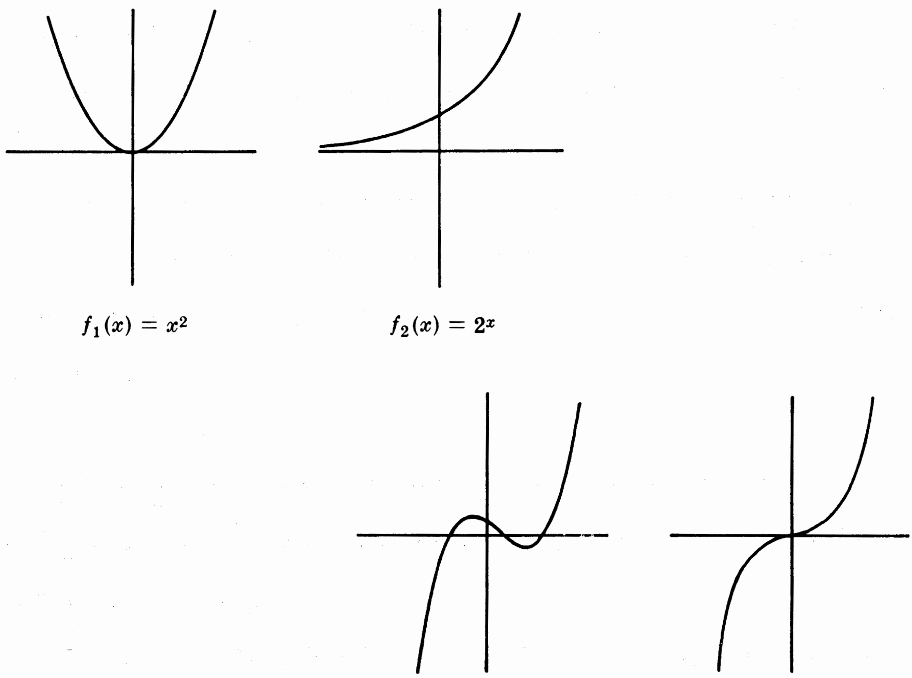
وقتی می گوییم تابع $f: A \to B$ یک به یک است یعنی هیچ دو جفت متمایز مانند (a_1, b) و (a_2, b) در گراف f وجود ندارند؛ لذا، هر خط افقی می تواند گراف f را حداکثر در یک نقطه قطع کند. از آن سو، گفتن اینکه f یک تابع بروست یعنی به ازای هر $b \in B$ باید دست کم یک $a \in A$ باشد که (a, b) متعلق به گراف f باشد؛ لذا، هر خط افقی باید گراف f را دست کم یکبار قطع کند. بنابراین، اگر f یک به یک و برو (یعنی معکوسپذیر) باشد، هرخط افقی گراف f را درست در یک نقطه قطع می کند.

مثال ۳. ٤. چهار تابع زیراز $\mathbf{R}$ به توی $\mathbf{R}$ را در نظر می گیریم:

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = 2^x, \quad f_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad f_4(x) = x^3$$

گراف این توابع در شکل ۳.٤ دیده می شود. ملاحظه می کنیم که خطوطی افقی وجود دارند که گراف f_1 را دوبار قطع می کنند و خطوطی افقی وجوددارند که گراف f_1 را اصلاً قطع نمی کنند؛ لذا، f_1 نه یک به یک است نه برو. به همین نحو، f_2 یک به یک است ولی برونیست، f_3 بروست ولی یک به یک نیست، و f_4 هم یک به یک است وهم برو. معکوس f_4 تابع ریشهٔ سوم است؛ یعنی،

$$f_4^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$



$f_1(x) = x^2$ $\quad$ $f_2(x) = 2^x$

$f_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ $\quad$ $f_4(x) = x^3$

شکل ۳. ٤

۳. ۵ رده های اندیسدار از مجموعه ها

حال نوع خاصی از تابع، به نام تابع اندیسگذار، را تعریف می کنیم. فرض کنیم I یک مجموعهٔ ناتهی و S رده ای از مجموعه ها باشد. یک تابع اندیسگذار

از I به S تابعی است مانند $f: I \to S$. به ازای هر $i \in I$ نقش $f(i)$ را با A_i نشان می دهیم. لذا، تابع اندیسگذار f معمولاً با

$$\{A_i : i \in I\} \text{ یا } \{A_i\}_{i \in I} \text{ یا فقط } \{A_i\}$$

نموده می شود. مجموعهٔ I را مجموعهٔ اندیسگذار و عناصر I را اندیس می نامیم. اگر f یک به یک و بروباشد، گوییم S به وسیلهٔ I اندیسدار شده است.

مفاهیم اجتماع و اشتراک یک ردهٔ اندیسدار از مجموعه ها را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\cup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ ، } i \in I \text{ به ازای ی}\}$$

و

$$\cap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ ، } i \in I \text{ به ازای هر}\}$$

در حالتی که I یک مجموعهٔ متناهی است، اینها همان تعاریف قبلی ما از اجتماع و اشتراک می باشند. اگر I مساوی $\mathbf{N}$ باشد، اجتماع و اشتراک را می توان به ترتیب با

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \quad \text{و} \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

نشان داد.

مثال ۳. ۵. فرض کنیم I مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ باشد. به هر عدد صحیح n زیر مجموعهٔ زیر از $\mathbf{R}$ را نسبت می دهیم:

$$A_n = \{x : x \leq n\}$$

(به عبارت دیگر، A_n بازهٔ نامتناهی $(-\infty, n]$ می باشد.) به ازای هر عدد حقیقی a اعداد صحیحی مانند n_1 و n_2 هستند به طوری که $n_1 < a < n_2$. پس $a \in A_{n_2}$ ولی $a \notin A_{n_1}$. لذا،

$$a \in \cup_n A_n \text{ ولی } a \notin \cap_n A_n$$

بنابراین،

$$\cup_n A_n = \mathbf{R} \quad \text{ولی} \quad \cap_n A_n = \emptyset$$

۳. ۶ اصلیت

گوییم دو مجموعهٔ A و B دارای یک اصلیت اند اگر تناظر یک به یکی

مانند $f: A \to B$ موجود باشد. مجموعهٔ A متناهی است اگر A تهی بوده یا همان اصلیت مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ به ازای عدد صحیح مثبتی مانند n را دارا باشد. یک مجموعه نامتناهی است در صورتی که متناهی نباشد. مثالهایی آشنا از مجموعه های نامتناهی عبارتند از اعداد طبیعی $\mathbf{N}$، اعداد صحیح $\mathbf{Z}$، اعداد گویای $\mathbf{Q}$، و اعداد حقیقی $\mathbf{R}$.

حال ایدهٔ «اعداد اصلی» را معرفی می کنیم. ما اعداد اصلی را صرفاً علایمی می گیریم منتسب به مجموعه ها به نحوی که دو مجموعه دارای علامت یکسانند اگر و فقط اگر دارای یک اصلیت باشند. عدد اصلی مجموعهٔ A معمولاً با

$$|A| \quad ، \quad n(A) \quad ، \quad \#(A) \quad ، \text{ یا } \operatorname{card}(A)$$

نموده می شود. ما از علامت $|A|$ استفاده خواهیم کرد.

ما برای اعداد اصلی مجموعه های متناهی از علایم آشکار استفاده می کنیم. یعنی، 0 را به مجموعهٔ تهی و n را به مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ منتسب می کنیم. لذا، $|A| = n$ اگر و فقط اگر A همان اصلیت $\{1, 2, \ldots, n\}$ را دارا باشد ایجابگر آنکه A دارای n عنصر می باشد.

عدد اصلی مجموعهٔ نامتناهی اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ عبارت است از $\aleph_0$ (الف صفر). این علامت به وسیلهٔ کانتور (Cantor) وضع شده است. لذا، $|A| = \aleph_0$ اگر و فقط اگر A همان اصلیت $\mathbf{N}$ را داشته باشد.

مثال ۳. ۶

(آ) $|\{x, y, z\}| = 3$ و $|\{1, 3, 5, 7, 9\}| = 5$.

(ب) فرض کنیم $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت زوج باشد. تابع $f: \mathbf{N} \to E$ با تعریف $f(n) = 2n$ یک تناظر یک به یک بین اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ و E است. لذا، E همان اصلیت $\aleph_0$ را دارد و لذا می توان نوشت

$$|E| = \aleph_0$$

یک مجموعه با اصلیت $\aleph_0$ را شمارا یا به طور شمارشپذیر نامتناهی می نامند.

یک مجموعه که متناهی یا شمارا باشد شمارشپذیر نام دارد. می توان نشان داد که مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$ شمارشپذیر است. در واقع، قضیهٔ زیر را داریم که متعاقباً از آن استفاده خواهیم کرد.

قضیهٔ ۳. ۲. اجتماع شمارشپذیر از مجموعه های شمارشپذیر شمارشپذیر است. به عبارت دیگر، هرگاه $A_1, A_2, \ldots$ مجموعه هایی شمارشپذیر باشند، آنگاه اجتماع

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

نیز شمارشپذیر است.

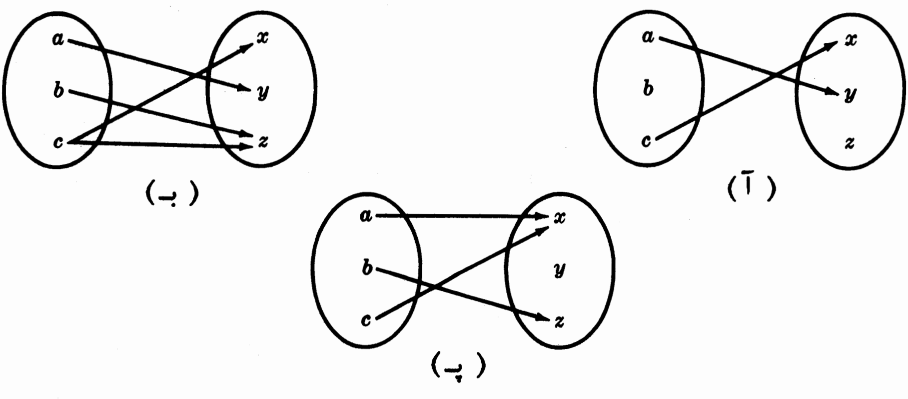
یک نمونهٔ مهم از مجموعه های نامتناهی که شمارش ناپذیر است (یعنی شمارشپذیر نیست) در قضیهٔ زیر داده شده است.

قضیهٔ ۳.۳. مجموعهٔ I تمام اعداد حقیقی بین 0 و 1 شمارش ناپذیر است.

مسائل حل شده

تابعها

۳. ۱. بگویید که هر یک از نمودارهای شکل ۳. ۵ معرف یک تابع



شکل ۳. ۵

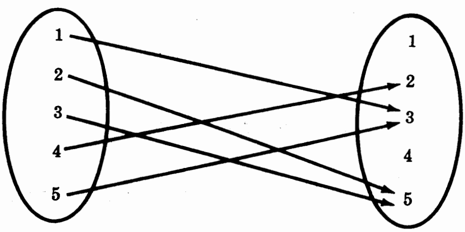
از $A = \{a, b, c\}$ به توی $B = \{x, y\, z\}$ است یا نه

حل. (آ) خیر. عنصری به عنصر $b \in A$ منتسب نشده است.

(بـ) خیر. دو عنصر x و z به $c \in A$ منتسب شده اند.

(پـ) بلی.

۳. ۲. فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و تابع $f : A \to A$ با شکل ۳. ۶ تعریف شده باشد.



شکل ۳. ۶

(آ) $f(A)$ ، یعنی نقش f ، را بیابید.

(بـ) گراف f بیابید؛ یعنی، f را به صورت مجموعه ای از جفتهای مرتب بنویسید.

حل. (آ) نقش $f(A)$ ی f مرکب است از تمام مقادیر نقش. چون 2 ، 3 ، و 5 نقش عناصر A اند، $f(A) = \{2, 3, 5\}$

(بـ) جفتهای مرتب $(a, f(a))$ که در آنها $a \in A$ گراف f را تشکیل می دهند. چون $f(1) = 3$ ، $f(2) = 5$ ، $f(3) = 5$ ، $f(4) = 2$ ، و $f(5) = 3$. لذا،

$$f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 2), (5, 3)\}$$

۳. ۳. با فرض $X = \{1, 2, 3, 4\}$ معین کنید که هر رابطهٔ زیر یک تابع از X به توی X است یا نه:

(آ) $f = \{(2,3), (1,4), (2,1), (3,2), (4,4)\}$

(ب) $g = \{(3,1), (4,2), (1,1)\}$

(پ) $h = \{(2,1), (3,4), (1,4), (2,1), (4,4)\}$

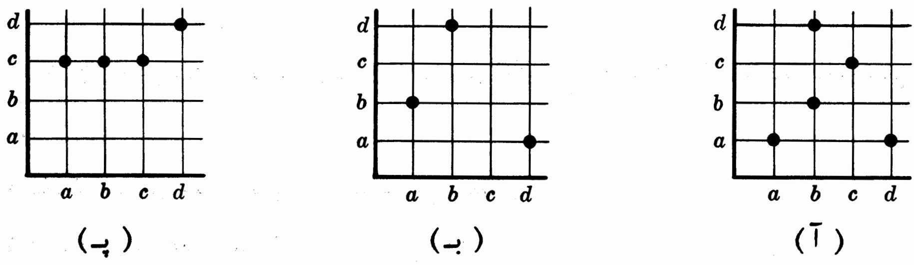
حل. به یاد می آوریم که زیر مجموعهٔ f از $X \times X$ یک تابع $f: X \to X$ است اگر و فقط اگر هر $a \in X$ مختص اول درست یک جفت مرتب در f باشد.

(آ) خیر. دو جفت مرتب مختلف $(2,3)$ و $(2,1)$ در f دارای عدد یکسان 2 در مختص اولشان می باشند.

(ب) خیر. عنصر $2 \in X$ در هیچ جفت مرتبی از g مختص اول نیست.

(پ) بلی. با آنکه $2 \in X$ مختص اول دوجفت مرتب در h است، این دو جفت مرتب مساوی می باشند.

۳. ٤. فرض کنید $W = \{a, b, c, d\}$. معین کنید که مجموعهٔ نقاط هر نمودار مختصات $W \times W$ (شکل ۳. ۷) یک تابع از W به توی W هست یا نه.



شکل ۳. ۷

حل. (آ) خیر. خط قائم مار بر b شامل دو نقطه از مجموعه است؛ یعنی، دو جفت مرتب مختلف (b,b) و (b,d) شامل عنصر اول b می باشند.

(ب) خیر. خط قائم ماربر c شامل نقطه ای از مجموعه نیست؛ یعنی، $c \in W$ عنصر اول هیچ جفت مرتبی نیست.

(پ) بلی. هر خط قائم شامل درست یک نقطه از مجموعه است.

۳. ۵. فرض کنید A مجموعهٔ شاگردان یک مدرسه باشد. معین کنید از انتسابهای زیر کدامها معرف یک تابع بر A اند.

(آ) به هر شاگرد سنش منتسب شده است.

(بـ) به هر شاگرد معلمش منتسب شده است.

(پـ) به هر شاگرد جنسیتش منتسب شده است.

(تـ) به هر شاگرد همسرش منتسب شده است.

حل. هر گردایه از انتسابها تابعی بر A است اگر و فقط اگر به هر عنصر a در A درست یک عنصر منتسب شده باشد. لذا:

(آ) بلی، زیرا هر شاگرد یک و فقط یک سن دارد.

(بـ) بلی، اگر هر شاگرد فقط یک معلم داشته باشد؛ خیر، اگر هر شاگرد بیش از یک معلم داشته باشد.

(پـ) بلی.

(تـ) خیر، اگر شاگردی ازدواج نکرده باشد.

۳. ۶. (آ) هر یک از توابع زیر از $\mathbf{R}$ به توی $\mathbf{R}$ را بااستفاده از یک فرمول بازنویسی کنید:

(یک) f به هر عدد مکعبش را نسبت می دهد.

(دو) g به هر عدد عدد 5 را نسبت می دهد.

(سه) h به هر عدد مثبت مجذورش و به هر عدد نامثبت عدد 4 را نسبت می دهد.

(بـ) مقادیر زیر را بیابید:

(یک) $f(4), f(-2), f(0)$ ؛ (دو) $g(4), g(-2), g(0)$ ؛ (سه) $h(4), h(-2), h(0)$

حل. (آ) (یک) چون f به هر عدد x مکعبش x^3 را نسبت می دهد، f را می توان با $f(x) = x^3$ تعریف کرد.

(دو) چون g به هر عدد x عدد 5 نسبت می دهد، می توان g را

با $g(x) = 5$ تعریف کرد.

(سه) برای تعریف h از دو قاعدهٔ مختلف استفاده شده است:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{اگر } x > 0 \\ 4 & \text{اگر } x \leqq 0 \end{cases}$$

(بـ) (یک) در اینجا به ازای هر عدد x ، $f(x) = x^3$ ؛ پس

$$f(4) = 4^3 = 64, \; f(-2) = (-2)^3 = -8, \; f(0) = 0^3 = 0$$

(دو) چون به ازای هر عدد x ، $g(x) = 5$ ، $g(4) = 5$ ، $g(-2) = 5$ ، و $g(0) = 5$.

(سه) هرگاه $x > 0$ ، آنگاه $h(x) = x^2$ ؛ پس $h(4) = 4^2 = 16$. از آن سو، هرگاه $x \leqq 0$ ، آنگاه $h(x) = 4$. لذا، $h(-2) = 4$ و $h(0) = 4$.

۳.۷. به فرض آنکه $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ با $f(x) = x^3$ تعریف شده باشد،

(آ) مقادیر زیر را بیابید: (یک) $f(3)$ ، (دو) $f(-2)$ ، (سه) $f(y)$ ، (چهار) $f(y+1)$ ، (پنج) $f(x+h)$ ، (شش) $[f(x+h) - f(x)]/h$ ؛

(بـ) f را روی نمودار مختصات $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ بکشید.

حل. (آ) (یک) $f(3) = 3^3 = 27$ ، (دو) $f(-2) = (-2)^3 = -8$ ،

(سه) $f(y) = (y)^3 = y^3$ ،

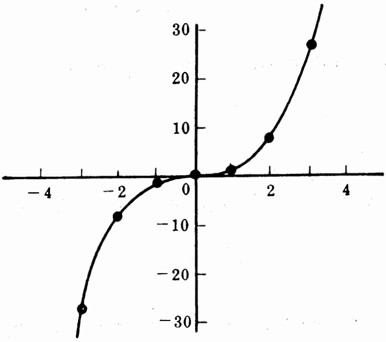
(چهار) $f(y+1) = (y+1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$ ،

(پنج) $f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

(شش)
$$[f(x+h) - f(x)]/h = (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3)/h = (3x^2h + 3xh^2 + h^3)/h$$
$$= 3x^2 + 3xh + h^2$$

(بـ) چون f یک تابع چند جمله ای است، آن را می توان ابتدا با رسم چند نقطه اش و سپس رسم یک منحنی هموار مار بر این نقاط کشید (شکل ۳.۸).

۳.۸. گرافهای زیر رابکشید:



x	$f(x)$
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

گراف $f(x) = x^3$

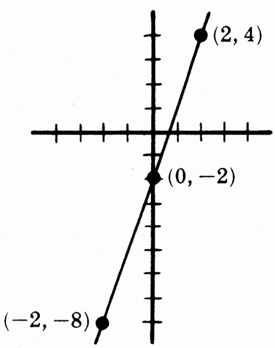
شکل ۳. ۸

(آ) $f(x) = 3x - 2$ ؛ (ب) $g(x) = x^2 + x - 6$ ؛ (پ) $h(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

حل. در (آ) تابع خطی است. برای رسم گرافش فقط دو نقطه (سه نقطه جهت امتحان) کافی است. با این سه مقدار x (مثلاً $x = -2, 0, 2$) جدولی درست کرده و مقادیر نظیر $f(x)$ را می یابیم:

$$f(-2) = 3(-2) - 2 = -8 \qquad f(0) = 3(0) - 2 = -2 \qquad f(2) = 3(2) - 2 = 4$$

از این نقاط خطی مانند شکل ۳. ۹ می گذرانیم.



x	$f(x)$
-2	-8
0	-2
2	4

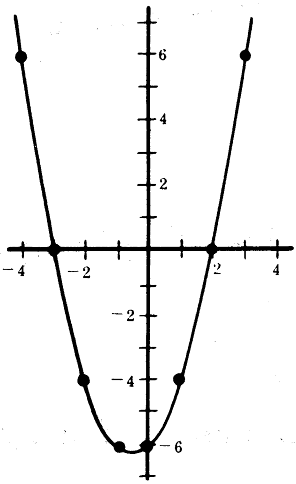
گراف f

شکل ۳. ۹

در (ب) و (پ) جدولی از مقادیر x ساخته و سپس مقادیر نظیر تابع را می

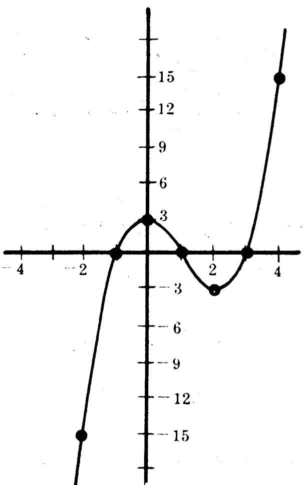
یابیم. نقاط را در یک نمودار مختصات رسم کرده و سپس از این نقاط یک منحنی پیوسته و هموار مانند شکل ۳. ۱۰ می گذرانیم.

x	$g(x)$
-4	6
-3	0
-2	-4
-1	-6
0	-6
1	-4
2	0
3	6



گراف g

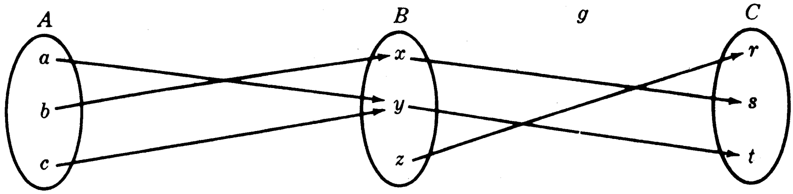
x	$h(x)$
-2	-15
-1	0
0	3
1	0
2	-3
3	0
4	15



گراف h

شکل ۳. ۱۰

۳. ۹. فرض کنید توابع $f: A \to B$ و $g: B \to C$ با شکل ۳. ۱۱ تعریف شده باشند. تابع ترکیب $g \circ f: A \to C$ را پیدا کنید.



شکل ۳. ۱۱

حل. از تعریف تابع ترکیب استفاده و حساب می کنیم:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$$
$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(x) = s$$
$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t$$

توجه کنید که اگر در نمودار «سهمها را تعقیب کنیم» به همین جواب می رسیم:

$$a \to y \to t, \quad b \to x \to s, \quad c \to y \to t$$

۳. ۱۰. فرض کنید توابع f و g با $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 - 2$ تعریف شده باشند. فرمول معرف تابع ترکیب $g \circ f$ را بیابید.

حل. $g \circ f$ را به صورت زیر حساب می کنیم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

ملاحظه می کنیم که همین جواب با نوشتن

$$z = g(y) = y^2 - 2 \quad \text{و} \quad y = f(x) = 2x + 1$$

و سپس حذف y از دو معادله به دست می آید:

$$z = y^2 - 2 = (2x+1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

توابع یک به یک، برو، و معکوسپذیر

۳. ۱۱. فرض کنید $A = \{a, b, c, d, e\}$ و B مجموعهٔ حروف الفبا باشد. همچنین توابع f ، g ، و h از A به توی B به صورت زیر تعریف شده باشند.

(آ)

f
$a \to r$
$b \to a$
$c \to s$
$d \to r$
$e \to e$

(بـ)

g
$a \to z$
$b \to y$
$c \to x$
$d \to y$
$e \to z$

(پـ)

h
$a \to a$
$b \to c$
$c \to e$
$d \to r$
$e \to s$

آیا هیچیک از این توابع یک به یک است؟

حل. به یاد آورید که یک تابع در صورتی یک به یک است که به عناصر متمایز در قلمرو نقشهای متمایزی نسبت دهد.

(آ) خیر. زیرا f حرف r را به هر دوی a و d نسبت می دهد.

(بـ) خیر. زیرا g حرف z را به هردوی a و e نسبت می دهد.

(پـ) بلی. زیرا h به عناصر متفاوت در قلمرو نقشهای متمایزی نسبت می دهد.

۳. ۱۲. از توابع زیر کدامها یک به یک اند:

(آ) به هر فرد در روی کرهٔ زمین سنش منتسب شده است؛

(بـ) به هر کشور طول و عرض جغرافیایی پایتختش منتسب شده است؛

(پـ) به هر کتاب نگاشته شده به وسیلهٔ فقط یک نویسنده، نویسنده منتسب شده است؛

(تـ) به هر کشوری که نخست وزیر دارد نخست وزیرش منتسب شده است.

حل. (آ) خیر. بسیاری از افراد در جهان هستند که دارای سن یکسانی می باشند.

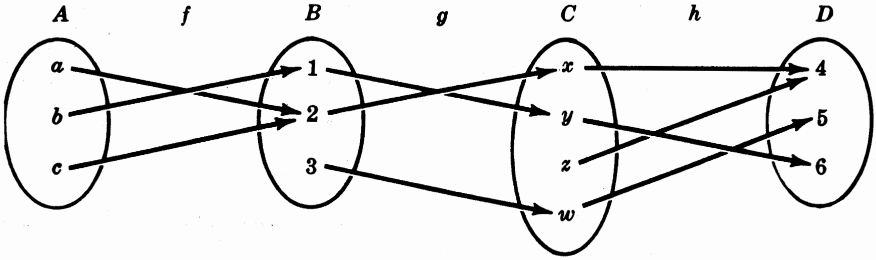
(بـ) بلی.

(پـ) خیر. کتابهای متفاوتی با یک نویسنده وجود دارند.

(تـ) بلی. کشورهای مختلف دارای نخست وزیرهای مختلف می باشند.

۳. ۱۳. فرض کنید توابع $f: A \to B$ ، $g: B \to C$ ، و $h: C \to D$ با شکل ۳. ۱۲ تعریف شده باشند. (آ) معین کنید که این توابع بروانند یا خیر. (بـ) تابع

ترکیب $h \circ g \circ f$ را بیابید.



شکل ۳. ۱۲

حل. (آ) تابع $f : A \to B$ برونیست زیرا $3 \in B$ نقش هیچ عنصری در A نیست.
تابع $g : B \to C$ برونیست زیرا $z \in C$ نقش هیچ عنصری در B نیست.
تابع $h : C \to D$ بروست زیراهر عنصر در D نقش عنصری از C می باشد.
(ب) داریم $a \to 2 \to x \to 4, \;\; b \to 1 \to y \to 6, \;\; c \to 2 \to x \to 4$
لذا،

$$h \circ g \circ f = \{(a, 4), (b, 6), (c, 4)\}$$

۳. ۱٤. توابع $f : A \to B$ و $g : B \to C$ را در نظر گرفته و احکام زیر راثابت کنید:
(آ) هرگاه f و g یک به یک باشند، آنگاه تابع ترکیب $g \circ f$ یک به یک است؛
(ب) هرگاه f و g بروباشند، آنگاه $g \circ f$ نیز برو می باشد.

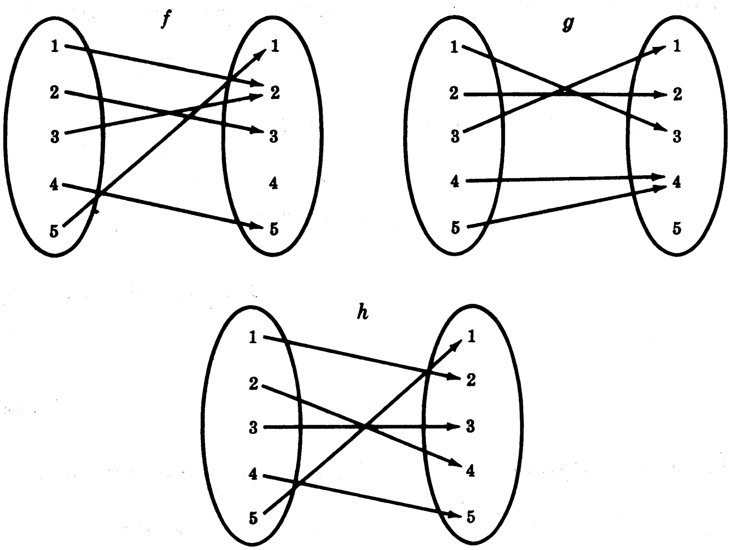
حل. (آ) فرض کنیم $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ ؛ پس $g(f(x)) = g(f(y))$
لذا، $f(x) = f(y)$ زیرا g یک به یک می باشد. به علاوه، $x = y$ زیرا f یک به یک می باشد. بنابراین، $g \circ f$ یک به یک است.
(ب) فرض کنیم c عنصر دلخواهی از C باشد. چون g بروست، عنصری مانند $b \in B$ هست به طوری که $g(b) = c$. و چون f بروست، عنصری مانند $a \in A$ هست به طوری که $f(a) = b$. ولی در این صورت

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

لذا، هر $c \in C$ نقش عنصری مانند $a \in A$ است. بنابراین، $g \circ f$ یک تابع برو می

باشد.

۳.۱۵. فرض کنید $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f : W \to W$ ، $g : W \to W$ ، و $h : W \to W$ با نمودار شکل ۳.۱۳ تعریف شده باشند. معین کنید که هر تابع معکوسپذیر است یا نه و، در صورت بودن، تابع معکوسش را بیابید.



شکل ۳.۱۳

حل. برای آنکه یک تابع معکوسپذیر باشد، باید تابع هم یک به یک و هم بروباشد. فقط h یک به یک و بروست؛ پس فقط h معکوسپذیر است. برای یافتن h^{-1} (معکوس h) جفتهای مرتب متعلق به h را مقلوب می کنیم. توجه کنید که

$$h = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 5), (5, 1)\}$$

در نتیجه،

$$h^{-1} = \{(2, 1), (4, 2), (3, 3), (5, 4), (1, 5)\}$$

ملاحظه می کنیم که h^{-1} رامی توان با معکوس کردن سهمهای نمودار مربوط به h به دست آورد.

۳. ۱۶. فرض کنید $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ با $f(x) = 2x - 3$ تعریف شده باشد. f یک به یک و بروست؛ پس f دارای تابع معکوس f^{-1} می باشد. برای f^{-1} فرمول بیابید.

حل. فرض کنیم y نقش x تحت تابع f باشد:

$$y = f(x) = 2x - 3$$

در نتیجه، x نقش y تحت تابع معکوس f^{-1} می باشد. معادلهٔ فوق را نسبت به x و بر حسب y حل می کنیم:

$$x = (y+3)/2$$

پس

$$f^{-1}(y) = (y+3)/2$$

فرمول معرف تابع معکوس می باشد.

مجموعه های اندیسدار

۳. ۱۷. به ازای هر عدد صحیح مثبت n در $\mathbf{N}$، D_n را زیر مجموعهٔ زیر از $\mathbf{N}$ بگیرید:

$$D_n = \{n, 2n, 3n, 4n, \dots\} = \{\text{مضربهای } n\}$$

مجموعه های زیر را بیابید:

(آ) $D_3 \cap D_5$ (ب) $D_4 \cup D_8$

(پ) $D_3 \cap D_6$ (ت) $\cup\{D_n :\ n \in \mathbf{N}\}$

(ث) $\cap\{D_n :\ n \in \mathbf{N}\}$ (ج) $\cup\{D_p :$ p یک عدد اول است $\}$

حل. (آ) $D_3 \cap D_5$ از مضارب 3 و نیز مضارب 5 و در نتیجه از مضارب 15 تشکیل شده است. یعنی، $D_3 \cap D_5 = D_{15}$.

(ب) $D_8 \subset D_4$ زیرا هر مضرب 8 مضربی از 4 نیز هست؛ پس $D_4 \cup D_8 = D_4$.

(پ) $D_6 \subset D_3$ زیرا هر مضرب 6 مضربی از 3 نیز هست؛ پس $D_3 \cap D_6 = D_6$.

(ت) $\cup\{D_n : n \in \mathbf{N}\} = \mathbf{N}$

(ث) $\cap\{D_n : n \in \mathbf{N}\} = \emptyset$

(جـ) $\cup_p D_p = \{2, 3, \ldots\} = N \setminus \{1\}$ زیرا هر عدد صحیح مثبت جز 1 مضربی از یک عدداول است.

۳. ۱۸. تعمیم زیر از قانون دمورگان را ثابت کنید: به ازای هر رده از مجموعه ها مانند $\{A_i\}$ داریم $(\cup_i A_i)^c = \cap_i A_i^c$.

حل. داریم

$x \in (\cup_i A_i)^c$ اگفگر $x \notin \cup_i A_i$

اگفگر $\forall_i \in I,\ x \notin A_i$

اگفگر $\forall_i \in I,\ x \in A_i^c$

اگفگر $x \in \cap_i A_i^c$

بنابراین، $(\cup_i A_i)^c = \cap_i A_i^c$. (دراینجا از نمادهای منطقی اگفگر برای « اگر و فقط اگر» و $\forall$ برای « به ازای هر» استفاده کرده ایم.)

اصلیت

۳. ۱۹. عدد اصلی مجموعه های زیر را بیابید:

(آ) $A = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$ (بـ) $B = \{1, -3, 5, 11, -28\}$

(پـ) $C = \{x : x \in \mathbf{N}, x^2 = 5\}$ (تـ) $D = \{10, 20, 30, 40, \ldots\}$

(ثـ) $E = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$

حل. (آ) $|A| = 26$ زیرا در الفبای انگلیسی 26 حرف وجود دارد.

(بـ) $|B| = 5$.

(پـ) $|C| = 0$ زیرا عدد صحیح مثبتی که مجذورش 5 باشد وجود ندارد؛ یعنی، چون C تهی می باشد.

(تـ) $|D| = \aleph_0$ زیرا $f : \mathbf{N} \to D$ با تعریف $f(n) = 10n$ یک تناظر یک به یک بین $\mathbf{N}$ و D است.

(ثـ) $|E| = \aleph_0$ زیرا $g : \mathbf{N} \to E$ با تعریف $g(n) = n + 5$ یک تناظر یک به یک

بین $\mathbf{N}$ و E است.

۳. ۲۰. نشان دهید که مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ دارای اصلیت $\aleph_0$ است.

حل. نمودار زیر یک تناظر یک به یک بین $\mathbf{N}$ و $\mathbf{Z}$ به دست می دهد:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{N} & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbf{Z} & = & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & \ldots \end{array}$$

یعنی، تابع $f:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{Z}$ زیر یک به یک و بروست:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \\ (1-n)/2 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

بنابراین، $|\mathbf{Z}| = |\mathbf{N}| = \aleph_0$

۳. ۲۱. فرض کنید $A_1, A_2, \ldots$ تعدادی شمارشپذیر از مجموعه های متناهی باشد. ثابت کنید اجتماع $S = \cup_i A_i$ شمارشپذیر است.

حل. عناصر A_1 را لیست کرده، سپس عناصری از A_2 که تعلق به A_1 ندارند، سپس عناصری از A_3 که تعلق به A_1 یا A_2 ندارند، یعنی عناصری که قبلاً لیست شده اند، را لیست کرده و همین طور ادامه می دهیم. چون A_i متناهی است، همواره می توان عناصر هر مجموعه رالیست کرد. این عمل در زیر به طور صوری انجام می گیرد.

ابتدا مجموعه های $B_1, B_2, \ldots$ را این طور تعریف می کنیم که B_i شامل عناصری از A_i باشد که به مجموعه های قبلی تعلق ندارند؛ یعنی، تعریف می کنیم

$$B_k = A_k \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k-1}) \quad \text{و} \quad B_1 = A_1$$

در این صورت، B_i ها از هم جدایند و $S = \cup_i B_i$. فرض کنیم $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im_i}$ عناصر B_i باشند. در این صورت، $S = \{b_{ij}\}$. فرض کنیم $f:S\rightarrow\mathbf{N}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(b_{ij}) = m_1 + m_2 + \cdots + m_{i-1} + j$$

هرگاه S متناهی باشد، آنگاه S شمارشپذیر است. هرگاه S نامتناهی باشد، آنگاه f یک تناظر یک به یک بین S و $\mathbf{N}$ است. لذا، S شمارشپذیر می باشد.

۳. ۲۲. قضیهٔ ۳. ۲ را ثابت کنید: اجتماع شمارشپذیراز مجموعه های شمارشپذیر شمارشپذیر است.

حل. فرض کنیم... ,A_1, A_2, A_3 تعدادی شمارشپذیر از مجموعه های شمارشپذیر باشد. به خصوص، فرض کنیم... ,a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} عنصرهای A_i باشند. مجموعه های ... ,B_2, B_3, B_4 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$B_k = \{a_{ij} : i + j = k\}$$

ملاحظه کنید که هر B_k متناهی است و

$$S = \cup_i A_i = \cup_k B_k$$

بنابر مسئلهٔ قبل، $\cup_k B_k$ شمارشپذیر است. لذا، $S = \cup_i A_i$ شمارشپذیر بوده و قضیه ثابت می باشد.

۳. ۲۳. قضیهٔ ۳. ۳ را ثابت کنید: مجموعهٔ I مرکب از تمام اعداد حقیقی بین 0 و 1 (و این دو عدد) شمارش ناپذیر است.

حل. مجموعهٔ I به وضوح نامتناهی است زیرا شامل ... $1, 1/2, 1/3,$ می باشد. فرض کنیم I شمارا باشد. در این صورت، یک تناظر یک به یک مانند $f : \mathbf{N} \to I$ وجود دارد. فرض کنیم ... ,$f(1) = a_1, \ f(2) = a_2$؛ یعنی، $I = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. عنصرهای ... ,$a_1, a_2$ را در یک ستون نوشته و هر یک را به صورت بسط اعشاری بیان می کنیم:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0.x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}\ldots \\
a_2 &= 0.x_{21}x_{22}x_{23}x_{24}\ldots \\
a_3 &= 0.x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}\ldots \\
a_4 &= 0.x_{41}x_{42}x_{43}x_{44}\ldots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

که در آنها $x_{ij} \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. (از اعدادی که قابل بیان به صورت دو بسط اعشاری مختلفند، مثلاً $0.1999999\ldots = 0.2000000\ldots$ ، بسطی را اختیار می کنیم که به نه ختم می شود.)

فرض کنیم $b = 0.y_1y_2y_3y_4\ldots$ عددی حقیقی باشد که به صورت زیر به دست می آید:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x_{ii} \neq 1 \text{ ،} \\ 2 & \text{اگر } x_{ii} = 1 \text{ ،} \end{cases}$$

داریم $b \in I$. ولی

$b \neq a_1$ زیرا $y_1 \neq x_{11}$

$b \neq a_2$ زیرا $y_2 \neq x_{22}$

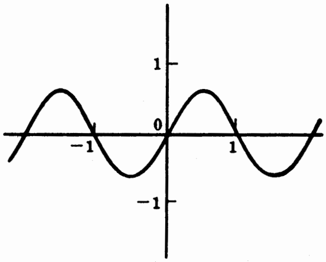
$b \neq a_3$ زیرا $y_3 \neq x_{33}$

....

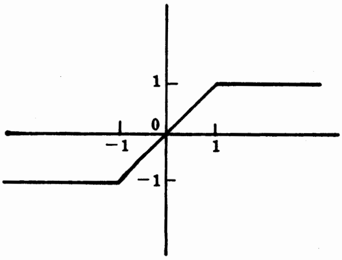
لذا، b تعلق به $I = \{a_1, a_2, \ldots\}$ ندارد. این امر عضویت $b \in I$ را نقض می کند. پس، فرض شمارا بودن I باید نادرست باشد؛ بنابراین، I شمارش ناپذیر می باشد.

مسائل گوناگون

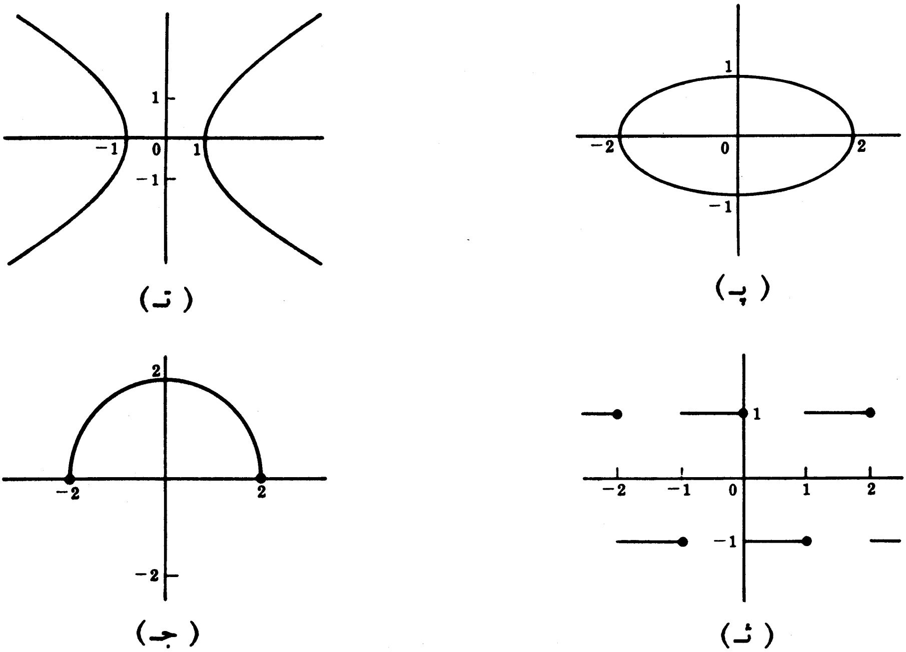
۳. ۲٤. از گرافهای شکل ۳. ۱٤ کدامها تابعی از $\mathbf{R}$ به توی $\mathbf{R}$ اند؟



(آ)



(ب)



شکل ۳. ۱۴

حل. به بیان هندسی، یک مجموعه از نقاط در یک نمودار مختصات تابع است اگر و فقط اگر هر خط قائم شامل درست یک نقطه از مجموعه باشد. (آ) بلی. (ب) بلی. (پ) خیر. (ت) خیر. (ث) بلی. (ج) خیر؛ ولی این گراف تابعی از D به توی $\mathbf{R}$ تعریف می کند که $D = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$.

۳. ۲۵. قلمرو D هر یک از توابع حقیقی از یک متغیر حقیقی زیر رابیابید:

(آ) $f(x) = 1/(x-2)$ (ب) $f(x) = x^2 - 3x - 4$

(پ) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (ت) $f(x) = x^2$ که در آن $0 \leq x \leq 2$

حل. هرگاه یک تابع حقیقی از یک متغیر حقیقی با فرمول $f(x)$ داده شده باشد، آنگاه قلمرو D و سیعترین زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}$ است که در آن $f(x)$ بامعنی و حقیقی است مگر خلافش تصریح شود.

(آ) f به ازای $x-2=0$ ، یعنی $x=2$ ، تعریف نشده است؛ پس $D=\mathbf{R}\setminus\{2\}$.

(ب) f به ازای هر عدد حقیقی تعریف شده است؛ پس $D=\mathbf{R}$.

(پ) f وقتی $25-x^2$ منفی است تعریف نشده است؛ پس

$$D = [-5,5] = \{x:\ -5 \leqq x \leqq 5\}$$

(ت) با آنکه فرمول مربوط به f به ازای هر عدد حقیقی با معنی است، قلمرو f صریحاً به صورت $D=\{x: 0\leqq x\leqq 2\}$ داده شده است.

۳ . ۲۶. در اعداد اصلی می توان نامساوی تعریف کرد: به ازای هر دو مجموعهٔ A و B تعریف می کنیم $|A|\leqq|B|$ اگر تابعی یک به یک مانند $f:A\to B$ موجود باشد. همچنین می نویسیم $|A|<|B|$ اگر $|A|\leqq|B|$ ولی $|A|\neq|B|$. قضیهٔ کانتور را ثابت کنید: به ازای هر مجموعهٔ A داریم $|A|<|P(A)|$ (که در آن $P(A)$ گردایهٔ زیر مجموعه های A است یعنی مجموعهٔ توان A).

حل. تابع $g:A\to P(A)$ که هر a در A را به مجموعهٔ مرکب از فقط a می برد، یعنی با $g(a)=\{a\}$ تعریف می شود، به وضوح یک به یک است. لذا، $|A|\leqq|P(A)|$.

هرگاه نشان دهیم که $|A|\neq|P(A)|$ ، آنگاه قضیه ثابت است. فرض کنیم چنین نباشد؛ یعنی، $|A|=|P(A)|$ و $f:A\to P(A)$ یک تابع یک به یک و بروباشد. عنصر $a\in A$ را یک عنصر « بد » نامیم اگر $a\notin f(a)$ ، و فرض کنیم B مجموعهٔ عناصر « بد » باشد. به عبارت دیگر،

$$B = \{x:\ x\in A,\ x\notin f(x)\}$$

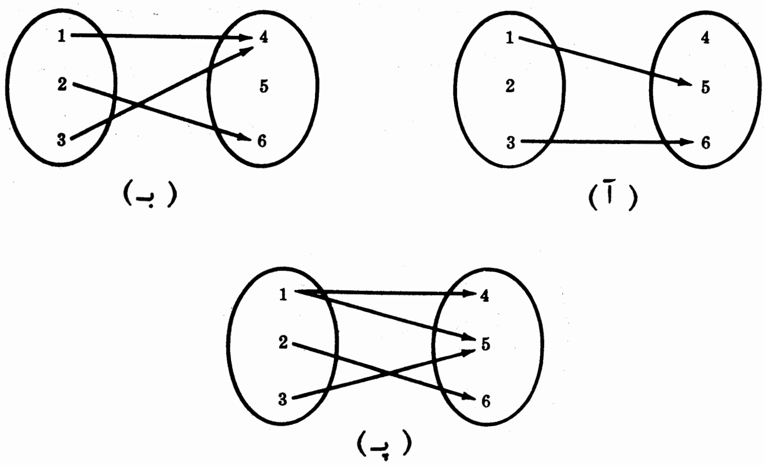
B زیر مجموعهٔ A است. چون $f:A\to P(A)$ بروست، عنصری مانند $b\in A$ هست به طوری که $f(b)=B$. آیا b یک عنصر « بد » است یا «خوب»؟ هرگاه $b\in B$ ، آنگاه، طبق تعریف B ، $b\notin f(b)=B$ ، که نامکن است. به همین نحو، هرگاه $b\notin B$ ، آنگاه $b\in f(b)=B$ که این نیز نامکن است. لذا،

فرض اصلی $|A| = |P(A)|$ به تناقض می انجامد. بنابراین، فرض مزبور نادرست بوده و در نتیجه قضیه درست می باشد.

مسائل تکمیلی

تابعها

۳. ۲۷. آیا هر یک از نمودارهای شکل ۳. ۱۵ معرف یک تابع از $\{1,2,3\}$ به توی $\{4,5,6\}$ است یا نه.



شکل ۳. ۱۵

۳. ۲۸. هر یک از توابع زیر از $\mathbf{R}$ به توی $\mathbf{R}$ را با فرمول تعریف کنید:

(آ) f به هر عدد مجذور آن به علاوهٔ 3 را نسبت می دهد؛

(ب) g به هر عدد مکعبش به علاوهٔ دوبرابر آن عدد را نسبت می دهد؛

(پ) h به هر عدد ناکمتر از 3 مجذور آن و به هر عدد کمتر از 3 عدد -2 را نسبت می دهد.

۳. ۲۹. تعداد توابع از $\{a,b\}$ به توی $\{1,2,3\}$ را معین کنید.

۳. ۳۰. فرض کنید $g: R \to R$ با

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x \text{ ،} & \text{اگر } x \geq 2 \\ x+2 \text{ ،} & \text{اگر } x < 2 \end{cases}$$

تعریف شده باشد. $g(5)$ ، $g(0)$ ، و $g(-2)$ را بیابید.

۳. ۳۱. فرض کنید $W = \{a, b, c, d\}$ و بگویید هر یک از مجموعه جفتهای مرتب زیر یک تابع از W به توی W هست یا نه:

(آ) $\{(b, a), (c, d), (d, a), (c, d), (a, d)\}$ (بـ) $\{(d, d), (c, a), (a, b), (d, b)\}$

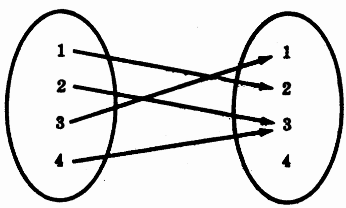
(پـ) $\{(a, b), (b, b), (c, b), (d, b)\}$ (تـ) $\{(a, a), (b, a), (a, b), (c, d)\}$

۳. ۳۲. فرض کنید تابع g به هر نام در مجموعهٔ

{Betty, Martin, David, Alan, Rebecca}

تعداد حروف مختلف لازم برای هجی کردن آن را نسبت دهد. گراف g را بیابید؛ یعنی، g را به صورت مجموعه ای از جفتهای مرتب بنویسید.

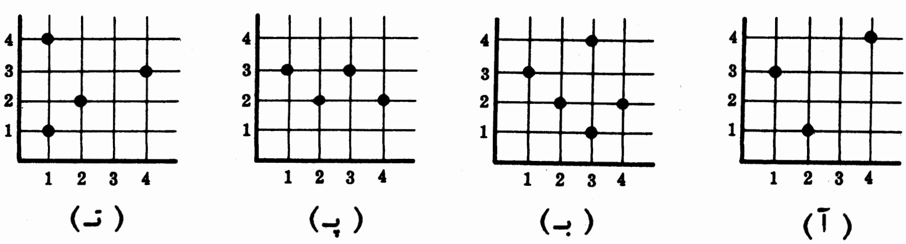
۳. ۳۳. فرض کنید $W = \{1, 2, 3, 4\}$ و نیز $g : W \to W$ با شکل ۳. ۱۶ تعریف شده باشد. (آ) g را به صورت مجموعه ای از جفتهای مرتب بنویسید؛ (بـ) نقش g را بیابید؛



شکل ۳. ۱٦

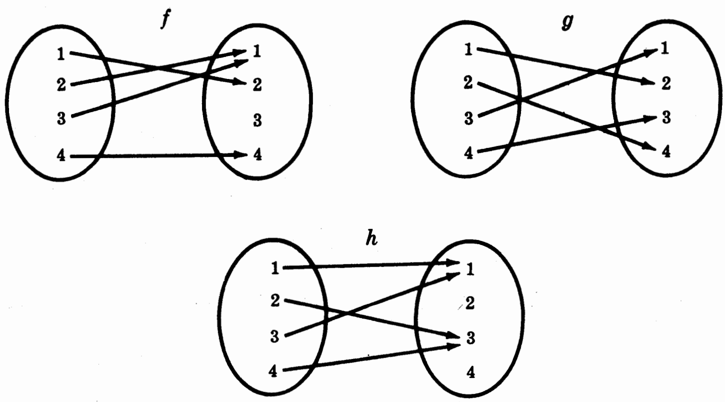
(پـ) تابع ترکیب $g \circ g$ را به صورت مجموعه ای از جفتهای مرتب بنویسید.

۳. ۳٤. فرض کنید $V = \{1, 2, 3, 4\}$ و معین کنید که مجموعهٔ نقاط در هرنمودار مختصات از $V \times V$ (شکل ۳. ۱۷) یک تابع از V به توی V هست یا نه.



شکل ۳. ۱۷

۳ . ۳۵. نمودارهای شکل ۳ . ۱۸ معرف توابع f ، g ، و h اند که مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ را به توی خودش می نگارند.



شکل ۳ . ۱۸

(آ) نقشهای f ، g ، و h را بیابید.

(بـ) توابع ترکیب (۱) $f\circ g$ ، (۲) $h\circ f$ ، (۳) g^2 یعنی $g\circ g$ را پیدا نمایید.

۳ . ۳۶. توابع $f(x)=x^2+3x+1$ و $g(x)=2x-3$ را در نظر گرفته و فرمولهای معرف توابع ترکیب (آ) $f\circ g$ ، (بـ) $g\circ f$ را پیدا کنید.

توابع یک به یک، برو، و معکوسپذیر

۳ . ۳۷. از توابع مسئلهٔ ۳ . ۳۵ کدامها (آ) یک به یک، (بـ) بروهستند ؟

۳ . ۳۸. فرض کنید $f:R\to R$ با $f(x)=3x-7$ تعریف شده باشد. برای تابع معکوس $f^{-1}:R\to R$ فرمول پیدا کنید.

۳ . ۳۹. فرض کنید $g:R\to R$ با $g(x)=x^3+2$ تعریف شده باشد. برای تابع معکوس $g^{-1}:R\to R$ فرمول پیدا کنید.

۳ . ۴۰. ثابت کنید هرگاه $f:A\to B$ و $g:B\to A$ در $g\circ f=1_A$ صدق کنند، آنگاه f یک به یک و g بروست.

۳ . ۴۱. قضیهٔ ۳ . ۱ را ثابت کنید: تابع $f:A\to B$ معکوسپذیر است اگر و فقط

اگر f یک به یک و برو باشد.

۳. ٤۲. ثابت کنید هرگاه $f: A \to B$ معکوسپذیر با تابع معکوس $f^{-1}: B \to A$ باشد، آنگاه $f^{-1} \circ f = 1_A$ و $f \circ f^{-1} = 1_B$.

مجموعه های اندیسدار

۳. ٤۳. به ازای هر عدد صحیح مثبت n در $\mathbf{N}$ ، D_n را زیر مجموعهٔ زیر از $\mathbf{N}$ بگیرید:

$$D_n = \{n, 2n, 3n, 4n, \ldots\} = \{\text{مضربهای } n\}$$

(آ) مجموعه های (۱) $D_2 \cap D_7$ ، (۲) $D_6 \cap D_8$ ، (۳) $D_3 \cup D_{12}$ ، (۴) $D_3 \cap D_{12}$ را بیابید.

(ب) ثابت کنید $\cap(D_i : i \in J) = \emptyset$ که در آن J یک زیر مجموعهٔ نامتناهی از $\mathbf{N}$ است.

۳. ٤٤. به ازای هر عدد صحیح مثبت n در $\mathbf{N}$ ، A_n را زیر مجموعهٔ زیر از اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ بگیرید:

$$A_n = (0, 1/n) = \{x : 0 < x < 1/n\}$$

و مجموعه های زیر را پیدا نمایید.

(آ) $A_5 \cup A_8$ (ب) $A_3 \cap A_7$

(پ) $\cup(A_i : i \in J)$ (ت) $\cap(A_i : i \in J)$

(ث) $\cup(A_i : i \in K)$ (ج) $\cap(A_i : i \in K)$

که درآنها J یک زیر مجموعهٔ متناهی $\mathbf{N}$ و K یک زیر مجموعهٔ نامتناهی $\mathbf{N}$ می باشد.

۳. ٤٥. ردهٔ اندیسدار $\{A_i : i \in I\}$ از مجموعه ها، مجموعهٔ B ، و اندیس i_0 در I را در نظر گرفته و ثابت کنید

(آ) $B \cap (\cup_i A_i) = \cup_i (B \cap A_i)$ (ب) $\cap(A_i : i \in I) \subset A_{i_0} \subset \cup(A_i : i \in I)$

اعداد اصلی

۳. ٤٦. عدد اصلی مجموعه های زیر را بیابید:

(آ) {یکشنبه ، . . . . ، سه شنبه ، دوشنبه } ؛

(بـ) $\{x$: x یک حرف از کلمهٔ "BASEBALL" است$\}$ ؛

(پـ) $\{x : x^2 = 9,\ 2x = 8\}$ ؛

(تـ) مجموعهٔ توان $P(A)$ از $A = \{1, 3, 7, 11\}$ ؛

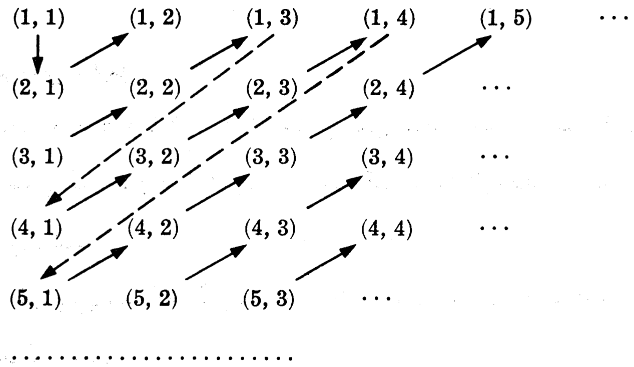
(ثـ) گردایهٔ توابع از $A = \{a, b, c\}$ به توی $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ؛

(جـ) مجموعهٔ روابط بر $A = \{a, b, c\}$.

۳. ۴۷. در شکل ۳. ۱۹ عناصر $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ لیست شده اند. نشان دهید که این لیست هم ارز تابع $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(r, s) = 1 + 2 + \cdots + (r + s - 2) + s = \tfrac{1}{2}(r + s - 2)(r + s - 1) + s$$

و نشان دهید که f یک به یک و بروست؛ پس $|\mathbf{N} \times \mathbf{N}| = \aleph_0$.



شکل ۳. ۱۹

۳. ۴۸. ثابت کنید: (آ) $|A \times B| = |B \times A|$ ؛ (بـ) هرگاه $A \subset B$ ، آنگاه $|A| \leq |B|$ ؛

(پـ) هرگاه $|A| = |B|$ ، آنگاه $|P(A)| = |P(B)|$.

۳. ۴۹. ثابت کنید:

(آ) هرمجموعهٔ نامتناهی A زیر مجموعه ای شمارا چون D دارد؛

(بـ) هر زیر مجموعهٔ یک مجموعهٔ شمارا متناهی یا شماراست؛

(پـ) هرگاه A و B شمارا باشند، آنگاه $A \times B$ شماراست؛

(تـ) مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$ شماراست.

مسائل گوناگون

۳. ۵۰. قلمرو D هر یک از توابع حقیقی از یک متغیر حقیقی زیر رابیابید (ر.ک. مسئلهٔ ۳. ۲۵):

(آ) $f(x) = 1/(x+3)$ (بـ) $f(x) = 1/(x-3)$ که در آن $x > 0$

(پـ) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ (تـ) $f(x) = \log(x+3)$

۳. ۵۱. گراف هر یک از توابع زیر رارسم کنید:

(آ) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ (بـ) $g(x) = x^3 - 3x + 2$

(پـ) $$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ ، } x = 0 & \text{اگر} \\ 1/x \text{ ، } x \neq 0 & \text{اگر} \end{cases}$$

مسائل برنامه نویسی کامپیوتر

رابطهٔ f برمجموعهٔ $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ شامل شش عنصر است. فرض کنید یک دسته کارت دارای شش کارت و هر کارت حاوی یک جفت از اعداد صحیح است که عنصری از f می باشد.

۳. ۵۲. برنامه ای بنویسید که بگوید f یک تابع است یا نه. این برنامه رابا هریک از روابط زیر امتحان کنید:

(یک) $f = \{(1,3,) (4,3,) (2,4,) (6,3), (3,6), (5,6)\}$

(دو) $f = \{(1,3), (2,4), (6,3), (4,4), (2,2), (5,3)\}$

۳. ۵۳. با فرض تابع بودن f برنامه ای بنویسد که (آ) $\operatorname{Im}(f)$ را چاپ کند، (بـ) $f \circ f = f^2$ را چاپ کند، (پـ) یک به یک بودن یا نبودن f را معین سازد. این برنامه را با روابط زیر امتحان نمایید:

(یک) $f = \{(1,4), (4,3), (2,3), (6,5), (3,4), (5,6)\}$

(دو) $f = \{(1,5), (2,3), (6,4), (4,1), (3,2), (5,1)\}$

جواب مسائل تکمیلی

۳. ۲۷. (آ) خیر، (بـ) بلی، (پـ) خیر.

۳. ۲۸. (آ) $f(x) = x^2 + 3$ ؛ (ب) $g(x) = x^3 + 2x$ ؛

(پ) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{اگر } x \geqq 3 \\ -2 & \text{اگر } x < 3 \end{cases}$

۳. ۲۹. نه تا

۳. ۳۰. $g(5) = 10,\ g(0) = 2,\ g(-2) = 0$

۳. ۳۱. (آ) بلی، (ب) خیر، (پ) بلی، (ت) خیر

۳. ۳۲. $g = \{(\text{Betty}, 4), (\text{Martin}, 6), (\text{David}, 4), (\text{Alan}, 3), (\text{Rebecca}, 5)\}$

۳. ۳۳ (آ) $g = \{(1,2), (2,3), (3,1), (4,3)\}$ ؛

(ب) $\{1, 2, 3\}$ ؛ (پ) $g \circ g = \{(1,3), (2,1), (3,2), (4,1)\}$.

۳. ۳۴. (آ) خیر، (ب) خیر، (پ) بلی، (ت) خیر.

۳. ۳۵. (آ) $\text{Im}\,(f) = \{1, 2, 4\},\ \text{Im}\,(g) = \{1, 2, 3, 4\},\ \text{Im}\,(h) = \{1, 3\}$

(ب)

x	$(f \circ g)(x)$	$(h \circ f)(x)$	$g^2(x)$
1	1	3	4
2	4	1	3
3	2	1	2
4	1	3	1

۳. ۳۶. (آ) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 1$ ، (ب) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 6x - 1$

۳. ۳۷. (آ) فقط g یک به یک است، (ب) فقط g یک تابع بروست.

۳. ۳۸. $f^{-1}(x) = (x + 7)/3$

۳. ۳۹. $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

۳. ۴۳. (۱) D_{14} ، (۲) D_{24} ، (۳) D_3 ، (٤) D_{12} .

۳. ٤٤. (آ) A_5 ؛ (ب) A_7 ؛ (پ) A_r که در آن r کوچکترین عدد صحیح در J است؛ (ت) A_s که در آن s بزرگترین عدد صحیح در J است؛ (ث) A_r که در آن r کوچکترین عدد صحیح در K است؛ (ج) $\emptyset$.

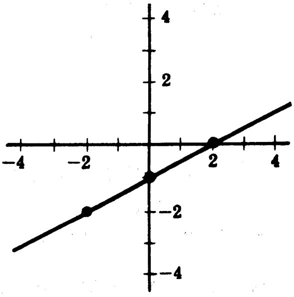
۳. ٤٦. (آ) 7 ؛ (ب) 5 ؛ (پ) 0 ؛ (ت) 16 ؛ (ث) $4^3 = 64$ ؛ $2^9 = 512$.

۳. ۵۰. (آ) $\mathbf{R} \setminus \{-3\}$ ؛ (ب) $\{x : x > 0, x \neq 3\}$ ؛ (پ) $-4 \leqq x \leqq 4$ ؛

(ت) $x > -3$.

۳. ۵۱. (آ)

x	$f(x)$
-2	-2
0	-1
2	0

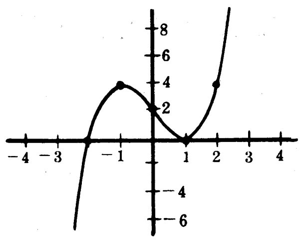


گراف f

شکل ۳. ۲۰

(ب)

x	$g(x)$
-3	-16
-2	0
-1	4
0	2
1	0
2	4
3	20

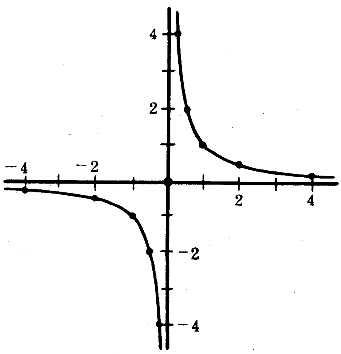


گراف g

شکل ۳. ۲۱

(پ)

x	$h(x)$
4	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{2}$
1	1
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{4}$	4
0	0
$-\frac{1}{4}$	-4
$-\frac{1}{2}$	-2
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-4	$-\frac{1}{4}$



گراف h

شکل ۳. ۲۲

۴
بردارها و ماتریسها

۱.۴ آشنایی

داده ها اغلب به صورت آرایه هایی مرتب شده اند؛ یعنی، مجموعه هایی که عناصرشان با یک یا چند زیر نویس اندیسگذاری شده اند. به طور صوری، یک آرایهٔ یک بعدی را بردار و یک آرایهٔ دو بعدی را ماتریس می نامند. (بعد تعداد زیر نویسها را نشان می دهد.) بردارها را می توان نوع خاصی از ماتریسها نیز در نظر گرفت.

در این فصل خواص اصلی بردارها و ماتریسها را که درایه هایشان اعدادی حقیقی اند مطالعه می کنیم. در این محدوده، اعداد حقیقی اسکالر نامیده می شوند.

۲.۴ بردارها

منظور از بردار u یعنی یک لیست (یا n تایی) از اعداد مانند

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

اعداد u_i را مؤلفه های u می نامیم. هرگاه همهٔ $u_i = 0$، آنگاه u را بردار صفر می نامیم. دو بردار u و v مساوی اند، و می نویسیم $u = v$، اگر تعداد مؤلفه هایشان یکی بوده و مؤلفه های نظیرشان مساوی باشند.

مجموع دو بردار u و v با تعداد مؤلفه های یکسان به صورت $u+v$ نوشته می شود و برداری است که از جمع مؤلفه های نظیر u و v به دست می آید:

$$u + v = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

حاصل ضرب اسکالر k در بردار u به صورت $k \cdot u$ یا فقط ku نوشته می شود و برداری است که از ضرب هر مؤلفهٔ u در k به دست می آید:

$$k \cdot u = k(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

همچنین تعریف می کنیم

$$u - v = u + (-v) \quad \text{و} \quad -u = -1 \cdot u$$

و بردار صفر را با 0 نشان می دهیم.

حاصل ضرب نقطه ای یا حاصل ضرب داخلی بردارهای $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ و $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ به صورت

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

و نرم (یا طول) u به صورت زیر نموده و تعریف می شود:

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

ملاحظه می کنیم که $\|u\| = 0$ اگر و فقط اگر $u = 0$.

مثال ۴ . ۱ . فرض کنیم $u = (2, 3, -4)$ و $v = (1, -5, 8)$. در این صورت،

$$\begin{aligned}
u + v &= (2+1, 3-5, -4+8) = (3, -2, 4) \\
5u &= (5 \cdot 2, 5 \cdot 3, 5 \cdot (-4)) = (10, 15, -20) \\
-v &= -1 \cdot (1, -5, 8) = (-1, 5, -8) \\
2u - 3v &= (4, 6, -8) + (-3, 15, -24) = (1, 21, -32) \\
u \cdot v &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) + (-4) \cdot 8 = 2 - 15 - 32 = -45 \\
\|u\| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}
\end{aligned}$$

بردارها تحت اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر خواص مختلفی دارند ازجمله

$$k(u + v) = ku + kv$$

که در آن k اسکالر و u و v بردار می باشند. چون بردارها را می توان حالت خاصی از ماتریسها گرفت، قضیهٔ ۴ . ۱ (ر.ک. بخش ۴ . ۴) حاوی لیستی از این خواص خواهد بود.

۴ . ۳ ماتریسها

منظور از ماتریس A یعنی یک آرایهٔ مستطیلی از اعداد مانند

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m ، n تایی افقی

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),\ (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),\ \dots,\ (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

سطرهای A و n ، m تایی قائم

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \dots,\ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

ستونهای آن نام دارند. توجه کنید که عنصر a_{ij} ، به نام درایهٔ ij ، در سطر i م و ستون j م ظاهر می شود. ما یک چنین ماتریس را اغلب فقط با $A = (a_{ij})$ نشان خواهیم داد.

هر ماتریس دارای m سطر و n ستون را یک ماتریس m در n نامیده و با $m \times n$ نشان می دهیم. جفت اعداد m و n اندازهٔ ماتریس نام دارد. دو ماتریس A و B مساوی اند، و می نویسیم $A = B$ ، اگر دارای یک اندازه بوده و عناصر نظیرشان برابر باشند.

گاهی یک ماتریس که فقط دارای یک سطر است بردارسطری و یک ماتریس که فقط دارای یک ستون است یک بردار ستونی نامیده می شود. هر ماتریس که تمام درایه هایش صفر باشند یک ماتریس صفر نام داشته و معمولاً با 0 نموده می شود.

مثال ۴ . ۲

(آ) آرایهٔ مستطیلی $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ یک ماتریس 2×3 است. سطرهایش عبارتند از $(1, -3, 4)$ و $(0, 5, -2)$ و ستونهایش عبارتند از $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ، و $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(بـ) ماتریس صفر 2×4 عبارت است از

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(پـ) حکم

$$\begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

هم ارز دستگاه معادلات زیراست:

$$\begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 1 \\ 2z+w = 5 \\ z-w = 4 \end{cases}$$

و جواب این دستگاه معادلات عبارت است از $x=2,\ y=1,\ z=3,\ w=-1$.

۴ . ۴ جمع ماتریسی و ضرب اسکالر

فرض کنیم A و B دو ماتریس با یک اندازه باشند؛ یعنی، تعداد سطرها و ستونهای یکسانی داشته باشند. مجموع A و B ، که به صورت $A+B$ نوشته می شود، ماتریسی است که از جمع عناصر نظیر A و B به دست می آید:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

ملاحظه می کنیم که $A+B$ همان اندازهٔ A و B رادارد. مجموع دو ماتریس با اندازه های مختلف تعریف نشده است.

حاصل ضرب اسکالر k در ماتریس A ، که به صورت kA یا Ak نوشته می شود، ماتریسی است که از ضرب هر عنصر A در k به دست می آید:

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

توجه کنید که A و kA دارای یک اندازه اند. همچنین تعریف می کنیم

$$A - B = A + (-B) \quad \text{و} \quad -A = (-1)A$$

ماتریس $-A$ قرینهٔ ماتریس A نام دارد.

مثال ٤ . ٣

(آ)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+(-6) \\ 0+2 & 4+(-3) & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(ب)
$$3\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 3 & 3\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 12 & 9 & -15 \end{pmatrix}$$

(پ)
$$2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 3 & 27 \end{pmatrix}$$

ماتریسها تحت جمع ماتریسی و ضرب اسکالر از خواص زیر بهره مندند:

قضیهٔ ٤ . ١. فرض کنیم A ، B ، و C ماتریسهایی با اندازهٔ یکسان بوده و k و k' اسکالر باشند. در این صورت،

(یک) $(A+B)+C = A+(B+C)$ ؛ یعنی، جمع شرکتپذیر است؛

(دو) $A+B = B+A$ ؛ یعنی، جمع تعویضپذیر است؛

(سه) $A+0 = 0+A = A$ ؛

(چهار) $A+(-A) = (-A)+A = 0$ ؛

(پنج) $k(A+B) = kA+kB$ ؛

(شش) $(k+k')A = kA+k'A$ ؛

(هفت) $(kk')A = k(k'A)$ ؛

(هشت) $1A = A$.

چون بردارهای n مؤلفه ای را می توان باماتریسهای $n\times 1$ یا $1\times n$ یکی کرد، قضیهٔ فوق برای بردارها تحت جمع برداری و ضرب اسکالر نیز برقرار می باشد.

۴ . ۵ علامت جمعبندی

پیش از تعریف ضرب ماتریسی بهتر است ابتدا علامت جمعبندی Σ (حرف یونانی سیگما) را معرفی کنیم.

فرض کنیم $f(k)$ یک عبارت جبری شامل متغیر k باشد. در این صورت، عبارت

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \text{یا معادلاً} \quad \textstyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

به معنی زیر می باشد: ابتدا در $f(k)$ قرار می دهیم $k=1$ تا به دست آید $f(1)$. سپس در $f(k)$ قرار می دهیم $k=2$ تا $f(2)$ به دست آید و این را به $f(1)$ می افزاییم تا داشته باشیم

$$f(1)+f(2)$$

بعد در $f(k)$ قرار می‌دهیم $k=3$ تا به دست آید $f(3)$ و این را به مجموع قبل می افزاییم تا به دست آید

$$f(1)+f(2)+f(3)$$

این عمل را آنقدر ادامه می دهیم تا مجموع زیر به دست آید:

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)+f(n)$$

توجه کنید که در هر مرحله مقدار k را یکی زیاد می کنیم تا k مساوی n شود. طبیعی است که می توان متغیری غیر از k را به کاربرد.

این تعریف را با این فرض که مجموع می تواند از عدد صحیح دلخواه n_1 تا عدد صحیح دلخواه n_2 که $n_1\leq n_2$ تغییر کند، یعنی

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} f(k) = f(n_1)+f(n_1+1)+f(n_1+2)+\cdots+f(n_2)$$

تعمیم می دهیم. لذا، مثلاً داریم

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$\sum_{j=2}^{5} j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}$$

۴ . ۶ ضرب ماتریسی

حال فرض کنیم دو ماتریس A و B چنان باشند که عدهٔ ستونهای A مساوی تعداد سطرهای B باشد، مثلاً A یک ماتریس $m \times p$ و B یک ماتریس $p \times n$ باشد. در این صورت، حاصل ضرب A و B، که به صورت AB نوشته می شود، ماتریس $m \times n$ ی است که درایهٔ ij آن با ضرب عناصر سطر i م A در عناصر نظیر ستون j م B و سپس افزودن آنها به هم به دست می آید:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & c_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

که در آن

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

هرگاه تعداد ستونهای A مساوی تعداد سطرهای B نباشد، مثلاً A، $m \times p$ و B، $q \times n$ باشد که $p \neq q$، آنگاه حاصل ضرب AB تعریف نشده است.

مثال ۴ . ۴

(آ)

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$$

(ب)

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot2\\3\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot1+4\cdot2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 5\\3 & 11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot3 & 1\cdot2+1\cdot4\\0\cdot1+2\cdot3 & 0\cdot2+2\cdot4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 6\\6 & 8\end{pmatrix}$$

(پ) یک دستگاه از معادلات خطی نظیر

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4\\ 5x - 6y + 8z = 8\end{cases}$$

هم ارز معادلهٔ ماتریسی

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\5 & -6 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$$

است؛ یعنی، هر جواب دستگاه معادلات فوق جواب معادلهٔ ماتریسی بالاست و بالعکس.

در مثال قبل دیدیم که ماتریسها تحت عمل ضرب ماتریسی در قانون تعویضپذیری صدق نمی کنند؛ یعنی، حاصل ضربهای AB و BA لازم نیست مساوی باشند.

ولی ضرب ماتریسی از خواص زیر بهره مند است:

قضیهٔ ٤ . ٢ . (یک) $(AB)C = A(BC)$؛

(دو) $A(B+C) = AB + AC$؛

(سه) $(B+C)A = BA + CA$؛

(چهار) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$، که در آن k یک اسکالر است.

فرض است که در قضیهٔ فوق مجموعها و حاصل ضربها تعریف شده اند.

٤ . ٧ ترانهاده

ترانهادهٔ ماتریس A، که به صورت A^T نوشته می شود، ماتریسی است که از نوشتن سطرهای A به صورت ستون به دست می آید:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

توجه کنید که هرگاه A یک ماتریس $m \times n$ باشد، آنگاه A^T یک ماتریس $n \times m$ است. همچنین، هرگاه $B = (b_{ij})$ ترانهادهٔ $A = (a_{ij})$ باشد، آنگاه به ازای هر i و j ، $b_{ij} = a_{ji}$.

مثال ٤ . ٥.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

عمل ترانهاده بر ماتریسها از خواص زیر برخوردار است:

قضیهٔ ٤ . ٣. (یک) $(A+B)^T = A^T + B^T$ ؛

(دو) به ازای هر اسکالر k ، $(kA)^T = kA^T$ ؛

(سه) $(AB)^T = B^T A^T$ ؛

(چهار) $(A^T)^T = A$.

٤ . ٨ ماتریسهای مربعی

هر ماتریس که تعداد سطرها و ستونهایش یکی باشد یک ماتریس مربعی نام دارد. یک ماتریس مربعی با n سطر و n ستون را از مرتبهٔ n گفته و آن را یک ماتریس n مربعی می نامیم. قطر اصلی، یا فقط قطر، ماتریس امربعی $A = (a_{ij})$ مرکب است از اعداد $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

مثال ٤ . ٦. ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ 3 است. اعداد در

امتداد قطر اصلی عبارتند از 1 ، 4− ، و 2 .

ماتریس n مربعی که در امتداد قطر اصلی اش 1 و در سایر جاها 0 داشته باشد، مثلاً

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ماتریس یکه نام دارد و با I نموده می شود. ماتریس یکهٔ I همان نقشی در ضرب ماتریسی دارد که عدد 1 در ضرب معمولی اعداد ایفا می کند. به طور مشخص، به ازای هر ماتریس مربعی A ،

$$AI = IA = A$$

توانهای ماتریس مربعی A را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$A^2 = AA \;،\; A^3 = A^2A \;،\; \cdots \;،\text{و}\; A^0 = I$$

همچنین می توان چند جمله ایها از A را تشکیل داد. یعنی، به ازای هر چند جمله ای

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$f(A)$ را ماتریس زیر تعریف می کنیم:

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

در حالتی که $f(A)$ ماتریس صفر باشد، A یک صفر یا ریشهٔ چند جمله ای $f(x)$ نامیده می شود.

مثال ۴ . ۷. فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. پس داریم $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$.

هرگاه $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ ، آنگاه

$$f(A) = 2\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{pmatrix}$$

از آن سو، هرگاه $g(x) = x^2 + 3x - 10$ ، آنگاه

$$g(A) = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - 10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

لذا، A یک صفر چند جمله ای $g(x)$ می باشد.

۴ . ۹ ماتریسهای معکوسپذیر

گوییم ماتریس مربعی A معکوسپذیر است اگر ماتریسی چون B موجود باشد به طوری که

$$AB = BA = I \text{ (ماتریس همانی)}$$

یک چنین B که منحصر به فرداست معکوس A نام دارد و با A^{-1} نموده می شود. توجه کنید که B معکوس A است اگر و فقط اگر A معکوس B باشد. مثلاً، فرض کنیم

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

در این صورت،

$$AB = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و

$$BA = \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لذا، A و B معکوس یکدیگر می باشند.

معلوم شده که $AB = I$ اگر و فقط اگر $BA = I$. لذا، برای تعیین معکوس هم بودن دو ماتریس کافی است فقط یک حاصل ضرب امتحان شود؛ ر.ک. مثال زیر.

مثال ۴ . ۸

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لذا، دو ماتریس معکوسپذیر و معکوس یکدیگر می باشند.

۴ . ۱۰ دترمینانها

به هر ماتریس n مربعی $A = (a_{ij})$ عدد معینی به نام دترمینان A منتسب کرده و آن را با $\det(A)$، یا $|A|$ یا

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

نشان می دهیم. تأکید می کنیم که یک آرایهٔ مربعی از اعداد بین دو خط قائم که دترمینان مرتبهٔ n نامیده می شود ماتریس نبوده بلکه مبین عددی است که تابع دترمینان به این آرایه از اعداد محصور شده، یعنی ماتریس مربعی مربوطه، نسبت می دهد.

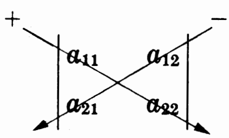
دترمینانهای مرتبهٔ یک، دو، و سه به صورت زیر تعریف می شوند:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

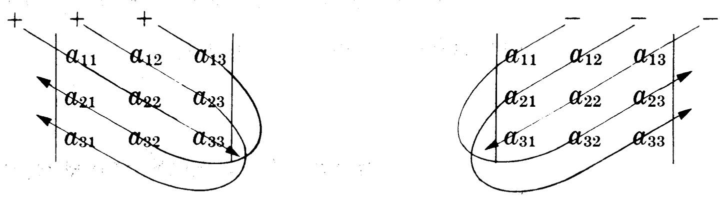
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

نمودار زیر ممکن است در به خاطر آوردن دترمینان مرتبهٔ دو یاری دهنده باشد:



یعنی، دترمینان مساوی حاصل ضرب عناصر در امتداد سهم با علامت به علاوه منهای حاصل ضرب عناصر در امتداد سهم با علامت منها می باشد. برای به خاطر آوردن یک دترمینان مرتبهٔ سه نیز راه مشابهی وجود دارد. برای ساده تر شدن نماد، سهمها با علامت به علاوه و باعلامت منها را جدا کرده ایم.



تأکید می کنیم که ، برای به خاطر آوردن دترمینانهای مرتبهٔ بالاتر، یک چنین ترفند نموداری وجود ندارد.

مثال ٤ . ٩

(آ)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 1\cdot(-4) = 12 + 4 = 16 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3 - 4\cdot 2 = 15 - 8 = 7$$

(بـ)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 6\cdot 0 + 1\cdot(-1)\cdot 5 + 3\cdot 4\cdot 1 - 3\cdot 6\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot 0 - 2\cdot(-1)\cdot 1$$

$$= 0 - 5 + 12 - 90 - 0 + 2 = -81$$

تعریف کلی یک دترمینان مرتبهٔ n به قرارزیراست:

$$\det(A) = \sum \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

که درآن مجموع روی تمام جایگشتهای $\sigma = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ از $\{1, 2, \ldots, n\}$ گرفته شده است. در اینجا $\operatorname{sgn}(\sigma)$ مساوی به علاوه یا منهای یک است و این بسته به آن دارد که برای تغییر σ به نحوی که اعدادش ترتیب عادی به خود بگیرند تعدادی زوج یافرد جابجایی لازم باشد. ما برای تکمیل بحث، تعریف کلی تابع دترمینان را آورده ایم. خواننده برای روشهای محاسبهٔ دترمینانهای مرتبهٔ بزرگتر از سه می تواند به کتب نظریهٔ ماتریسها یا جبر خطی مراجعه کند. جایگشتها در فصل ۸ مطالعه خواهند شد.

یک خاصیت مهم تابع دترمینان ضربی بودن آن است. یعنی،

قضیهٔ ۴ . ۴. به ازای هر دو ماتریس n مربعی A و B داریم

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$$

۴ . ۱۱ ماتریسهای معکوسپذیر و دترمینانها

حال معکوس ماتریس 2×2 کلی $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را حساب می کنیم.

اسکالرهای x ، y ، z، و w را طوری می یابیم که

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

یا

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که به حل دو دستگاه معادلات خطی دو مجهولی زیر تحویل می شود:

$$\begin{cases} ax+bz = 1 \\ cx+dz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ay+bw = 0 \\ cy+dw = 1 \end{cases}$$

هرگاه $|A| = ad-bc$ صفر نباشد، آنگاه می توان دستگاهها را نسبت به مجهولات x ، y ، z ، و w حل کرد و به دست آورد:

$$x = \frac{d}{ad-bc} = \frac{d}{|A|},\quad y = \frac{-b}{ad-bc} = \frac{-b}{|A|},\quad z = \frac{-c}{ad-bc} = \frac{-c}{|A|},$$

$$w = \frac{a}{ad-bc} = \frac{a}{|A|}$$

بنابراین،

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

به بیان دیگر، می توان معکوس یک ماتریس 2×2 با دترمینان ناصفر را به وسیلهٔ (یک) تعویض عناصر قطر اصلی، (دو) گرفتن قرینهٔ سایر عنصرها، و (سه) تقسیم هر عنصر بر دترمینان ماتریس اصلی به دست آورد.

به عنوان مثال، هرگاه

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$$ ، آنگاه $|A| = -2$ ؛ و در نتیجه،

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}5&-3\\-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\2&-1\end{pmatrix}$$

به عبارت دیگر، هرگاه $|A|$ صفر باشد، نمی توان دستگاهها را نسبت به x ، y ، z ، و w حل کرد و A^{-1} وجود نخواهد داشت. با آنکه فرمول ساده ای برای ماتریسهای مرتبهٔ بالاتر وجود ندارد، این نتیجه در حالت کلی برقرار است. یعنی:

قضیهٔ ۴ . ۵. یک ماتریس معکوسپذیر است اگر و فقط اگر دارای دترمینان ناصفر باشد.

مسائل حل شده

بردارها

۴ . ۱. به فرض آنکه $u=(2,-7,1)$ ، $v=(-3,0,4)$ ، و $w=(0,5,-8)$ ، بردارهای (آ) $u+v$ ، (بـ) $v+w$ ، (پـ) $-3u$ ، (تـ) $-w$ را بیابید.

حل. (آ) مؤلفه های نظیر را با هم جمع می کنیم:

$$u+v = (2,-7,1)+(-3,0,4) = (2-3,-7+0,1+4)= (-1,-7,5)$$

(بـ) مؤلفه های نظیر را با هم جمع می کنیم:

$$v+w = (-3,0,4)+(0,5,-8) = (-3+0,0+5,4-8) = (-3,5,-4)$$

(پـ) هر مؤلفهٔ u را در اسکالر -3 ضرب می کنیم:

$$-3u = -3(2,-7,1) = (-6,21,-3)$$

(تـ) هرمؤلفهٔ w را در -1 ضرب می کنیم؛ یعنی، علامت هر مؤلفه را تغییر می دهیم:

$$-w = -(0,5,-8) = (0,-5,8)$$

۴ . ۲. اگر u ، v ، و w بردارهای سطری مسئلهٔ قبل باشند، بردارهای

(آ) $3u-4v$ ، (بـ) $2u+3v-5w$ را بیابید.

حل. ابتدا ضرب اسکالر را انجام داده و سپس جمع برداری می کنیم.

(آ) $3u - 4v = 3(2,-7,1) - 4(-3,0,4) = (6,-21,3) + (12,0,-16) = (18,-21,-13)$

(بـ)
$$\begin{aligned} 2u + 3v - 5w &= 2(2,-7,1) + 3(-3,0,4) - 5(0,5,-8) \\ &= (4,-14,2) + (-9,0,12) + (0,-25,40) \\ &= (4-9+0, -14+0-25, 2+12+40) = (-5,-39,54) \end{aligned}$$

۴ . ۳. x و y را در صورتی بیابید که $x(1,1) + y(2,-1) = (1,4)$.

حل. ابتدا در اسکالرهای x و y ضرب کرده و سپس جمع می کنیم:

$$x(1,1) + y(2,-1) = (x,x) + (2y,-y) = (x+2y, x-y) = (1,4)$$

حال مؤلفه های نظیر را مساوی هم قرار داده به دست می آوریم

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x - y &= 4 \end{aligned}$$

باحل این دستگاه معادلات خواهیم داشت $x=3$ و $y=-1$.

۴ . ۴. اگر u ، v ، و w بردارهای مسئلهٔ ۴ . ۱ باشند، مقادیر

(آ) $u\cdot v, u\cdot w, v\cdot w$

(بـ) $\|u\|, \|v\|, \|w\|$ را پیدا کنید:

حل. (آ) مؤلفه های نظیر را در هم ضرب کرده و سپس جمع می کنیم:

$$\begin{aligned} u\cdot v &= 2\cdot(-3) + (-7)\cdot 0 + 1\cdot 4 = -6+0+4 = -2 \\ u\cdot w &= 0 - 35 - 8 = -43 \\ v\cdot w &= 0 + 0 - 32 = -32 \end{aligned}$$

(بـ) ریشهٔ دوم مجموع مجذورات مؤلفه ها را می گیریم:

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 49 + 1} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$
$$\|v\| = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = 5$$
$$\|w\| = \sqrt{0 + 25 + 64} = \sqrt{89}$$

جمع ماتریسی و ضرب اسکالر

۴ . ۵. حساب کنید:

(آ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ (ب) $-2\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(پ) $-\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

حل. (آ) عنصرهای نظیر را با هم جمع می کنیم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+(-1) & 3+2 \\ 4+0 & 5+3 & 6+(-5) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

(ب) هر عنصر ماتریس را در اسکالر -2 ضرب می کنیم:

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 7 \\ (-2)\cdot 2 & (-2)\cdot(-3) \\ (-2)\cdot 0 & (-2)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -14 \\ -4 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(پ) هر عنصر ماتریس را در -1 ضرب می کنیم یا معادلاً علامت هر عنصر ماتریس را تغییر می دهیم:

$$-\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -8 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

۴ . ۶. حساب کنید:

$$3\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

حل. ابتدا ضرب اسکالر و سپس جمع ماتریسی را انجام می دهیم:

$$3\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}6 & -15 & 3\\ 9 & 0 & -12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 4 & -8\\ 4 & -4 & -4\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}6+(-2)+0 & -15+4+4 & 3+6+(-8)\\ 9+0+4 & 0+2+(-4) & -12+(-10)+(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -7 & 1\\ 13 & -2 & -26\end{pmatrix}$$

۴ . ۷. x ، y ، z ، و w را در صورتی بیابید که

$$3\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{pmatrix}$$

حل. ابتدا هر طرف را به صورت یک ماتریس می نویسیم:

$$\begin{pmatrix}3x & 3y\\ 3z & 3w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+4 & x+y+6\\ z+w-1 & 2w+3\end{pmatrix}$$

حال عناصر نظیر را مساوی هم قرار می دهیم تا چهار معادلهٔ خطی به دست آید:

$$\begin{aligned}3x &= x+4\\ 3y &= x+y+6\\ 3z &= z+w-1\\ 3w &= 2w+3\end{aligned} \qquad \text{یا} \qquad \begin{aligned}2x &= 4\\ 2y &= 6+x\\ 2z &= w-1\\ w &= 3\end{aligned}$$

جواب این دستگاه معادلات عبارت است از $x=2,\ \ y=4,\ \ z=1,\ \ w=3$.

ضرب ماتریسی

۴ . ۸. فرض کنید $(r\times s)$ یک ماتریس $r\times s$ باشد. اندازهٔ حاصل ضربهای ماتریسی زیر را در صورتی که تعریف شده باشند بیابید:

آ) $(2\times 3)(3\times 4)$ ب) $(4\times 1)(1\times 2)$

پ) $(1\times 2)(3\times 1)$ ت) $(5\times 2)(2\times 3)$

ث) $(4\times 4)(3\times 3)$ ج) $(2\times 2)(2\times 4)$

حل. در هر حالت حاصل ضرب در صورتی تعریف شده است که اعداد داخلی مساوی

باشند و، در این صورت، حاصل ضرب اندازهٔ اعداد خارجی به ترتیب داده شده را خواهد داشت.

(آ) حاصل ضرب یک ماتریس 4×2 است.

(بـ) حاصل ضرب یک ماتریس 2×4 است.

(پـ) حاصل ضرب تعریف نشده است زیرااعداد داخلی 2 و 3 مساوی نیستند.

(تـ) حاصل ضرب یک ماتریس 3×5 است.

(ثـ) حاصل ضرب تعریف نشده است زیرا اعداد داخلی 4 و 3 مساوی نیستند.

(جـ) حاصل ضرب یک ماتریس 4×2 است.

۴.۹. به فرض آنکه $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$، (آ) AB و (بـ) BA را بیابید.

حل. (آ) A یک ماتریس 2×2 و B یک ماتریس 2×3 است؛ پس ماتریس حاصل ضرب AB تعریف شده است و یک ماتریس 2×3 می باشد. برای به دست آوردن عناصر سطر اول ماتریس حاصل ضرب AB ، سطر اول $(1, 3)$ ماتریس A را در ستونهای $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ، و $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ماتریس B ضرب می کنیم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 3 & 1\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-4) + 3\cdot 6 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ & & \end{pmatrix}$$

برای به دست آوردن عناصر سطر دوم ماتریس حاصل ضرب AB ، سطر دوم $(2, -1)$ ماتریس A را در ستونهای B ضرب می کنیم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 2\cdot 2 + (-1)\cdot 3 & 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) & 2\cdot(-4) + (-1)\cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix} = AB$$

(بـ) B یک ماتریس 2×3 و A یک ماتریس 2×2 است. چون اعداد

داخلی 3 و 2 مساوی نیستند، حاصل ضرب BA تعریف نشده است.

۴.۱۰. به فرض آنکه $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$، AB را بیابید.

حل. A یک ماتریس 3×2 و B یک ماتریس 2×3 است؛ پس حاصل ضرب AB تعریف شده و یک ماتریس 3×3 می باشد. برای به دست آوردن سطر اول ماتریس حاصل ضرب AB، سطر اول A را در هر ستون B ضرب می کنیم:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & -4-4 & -10+0 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

برای به دست آوردن سطر دوم ماتریس حاصل ضرب AB، سطر دوم A را در هر ستون B ضرب می کنیم:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1+0 & -2+0 & -5+0 \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ & & \end{pmatrix}$$

برای به دست آوردن سطر سوم ماتریس حاصل ضرب AB، سطر سوم A را در هر ستون B ضرب می کنیم:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3+12 & 6+16 & 15+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

لذا،

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

۴.۱۱. فرض کنید $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(آ) اندازهٔ AB را معین کنید. (بـ) فرض کنید c_{ij} عنصر سطر i م و ستون j م ماتریس حاصل ضرب AB باشد؛ یعنی، $AB = (c_{ij})$. عنصرهای c_{23} ، c_{14} ، c_{21} ، و c_{12} را بیابید.

حل. (آ) چون A یک ماتریس 2×3 و B یک ماتریس 3×4 است، حاصل ضرب AB یک ماتریس 2×4 است.

(بـ) c_{ij} مساوی حاصل ضرب سطر i م A در ستون j م B تعریف شده است. لذا،

$$c_{23} = (1, 0, -3)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 0\cdot 3 + (-3)\cdot(-2) = 0 + 0 + 6 = 6$$

$$c_{14} = (2, -1, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 = 2 + 1 + 0 = 3$$

$$c_{21} = (1, 0, -3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + (-3)\cdot 4 = 1 + 0 - 12 = -11$$

$$c_{12} = (2, -1, 0)\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\cdot(-4) + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 = -8 + 1 + 0 = -7$$

۴ . ۱۲ . حساب کنید:

(آ) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (بـ) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

(پ) $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ (تـ) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}(3, 2)$

(ثـ) $(2, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

حل.(آ)عامل اول وعامل دوم هر دو 2×2 اند؛ پس حاصل ضرب تعریف شده و یک ماتریس 2×2 می باشد:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 6\cdot 2 & 1\cdot 0 + 6\cdot(-1) \\ (-3)\cdot 4 + 5\cdot 2 & (-3)\cdot 0 + 5\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

(بـ) عامل اول 2×2 و عامل دوم 2×1 است؛ پس حاصل ضرب تعریف شده و یک ماتریس 2×1 می باشد:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 6\cdot(-7) \\ (-3)\cdot 2 + 5\cdot(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ -41 \end{pmatrix}$$

(پـ) عامل اول 2×1 و عامل دوم 2×2 است. چون اعداد داخلی 1 و 2 متمایزند، حاصل ضرب تعریف نشده است.

(تـ) در اینجا عامل اول 2×1 و عامل دوم 1×2 است؛ پس حاصل ضرب تعریف شده است و یک ماتریس 2×2 می باشد:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}(3, 2) = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 & 1\cdot 2 \\ 6\cdot 3 & 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$$

(ثـ) عامل اول 1×2 و عامل دوم 2×1 است؛ پس حاصل ضرب تعریف شده و یک ماتریس 1×1 است که اغلب به صورت اسکالر نوشته می شود:

$$(2, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} = (2\cdot 1) + (-1)\cdot(-6) = (8) = 8$$

ترانهاده

۴. ۱۳. فرض کنید A یک ماتریس دلخواه باشد. تحت چه شرایطی حاصل ضرب AA^T تعریف شده است؟

حل. فرض کنیم A یک ماتریس $m\times n$ باشد؛ پس A^T یک ماتریس $n\times m$ است. لذا، حاصل ضرب AA^T همواره تعریف شده است. ملاحظه کنید که A^TA نیز تعریف شده است. در اینجا AA^T یک ماتریس $m\times m$ است ولی A^TA یک ماتریس $n\times n$ می باشد.

۴. ۱۴. به فرض آنکه $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$، (آ) AA^T و (بـ) A^TA را بیابید.

حل. برای به دست آوردن A^T ، سطرهای A را به صورت ستون می نویسیم: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

در این صورت،

(آ) $$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+0 & 3-2+0 \\ 3-2+0 & 9+1+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$$

(ب) $$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2-3 & 0+12 \\ 2-3 & 4+1 & 0-4 \\ 0+12 & 0-4 & 0+16 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}$$

ماتریسهای مربعی

۴. ۱۵. به فرض آنکه $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ ، ماتریسهای (آ) A^2 ، (ب) A^3 ، (پ) $f(A)$ که در آن $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ را بیابید؛ (ت) نشان دهید که A یک صفر چند جمله ای $g(x) = x^2 + 2x - 11$ می باشد.

حل. (آ).
$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) \\ 4\cdot 1 + (-3)\cdot 4 & 4\cdot 2 + (-3)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

(ب) $$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 9 + 2\cdot(-8) & 1\cdot(-4) + 2\cdot 17 \\ 4\cdot 9 + (-3)\cdot(-8) & 4\cdot(-4) + (-3)\cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix}$$

(پـ) برای یافتن $f(A)$ ابتدا در چند جمله ای داده شده $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ ، A را به جای x و $5I$ را به جای ثابت 5 می گذاریم:

$$f(A) = 2A^3 - 4A + 5I = 2\begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سپس ماتریسها را در اسکالر مربوط بـه آنها ضرب می کنیم:

$$f(A) = \begin{pmatrix} -14 & 60 \\ 120 & -134 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -16 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

و در پایان، عناصر نظیر در ماتریسها را با هم جمع می کنیم:

$$f(A) = \begin{pmatrix} -14 - 4 + 5 & 60 - 8 + 0 \\ 120 - 16 + 0 & -134 + 12 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{pmatrix}$$

(تـ) A در صورتی صفر $g(x)$ است که ماتریس $g(A)$ ماتریس صفر باشد. $g(A)$ را همانند $f(A)$ حساب می کنیم؛ یعنی، ابتدا در $g(x) = x^2 + 2x - 11$ ماتریس A را به جای x و $11I$ را به جای ثابت 11 می گذاریم:

$$g(A) = A^2 + 2A - 11I = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سپس هر ماتریس را در اسکالر قبل خود ضرب می کنیم:

$$g(A) = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

و بالأخره، عناصر نظیر در ماتریسها را به می افزاییم:

$$g(A) = \begin{pmatrix} 9 + 2 - 11 & -4 + 4 + 0 \\ -8 + 8 + 0 & 17 - 6 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

چون $g(A) = 0$ ، A یک صفر چند جمله ای $g(x)$ می باشد.

۴. ۱۶. دترمینان هر یک از ماتریسهای زیر را حساب کنید:

(آ) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (بـ) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(پـ) $\begin{pmatrix} a - b & b \\ b & a + b \end{pmatrix}$ (تـ) $\begin{pmatrix} a - b & a \\ a & a + b \end{pmatrix}$

حل. (آ) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - (-2)\cdot 4 = 15 + 8 = 23$

(ب) $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot 4 - 6\cdot 0 = -4$

(پ) $\begin{vmatrix} a-b & b \\ b & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(a+b) - b\cdot b = a^2 - b^2 - b^2$

$$= a^2 - 2b^2$$

(ت) $\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(a+b) - a\cdot a = a^2 - b^2 - a^2 = -b^2$

۴ . ۱۷ . دترمینان هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید:

(آ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(پ) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ (راهنمایی. از نمودار صفحهٔ ۱۲۹ استفاده کنید.)

حل. (آ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 60 - 0 - 15 + 8 = 55$

(ب) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 15 + 0 + 20 + 24 + 0 = 67$

(پ) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 9 - 8 + 8 - 12 + 15 = 14$

۴ . ۱۸ . معکوس $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ را بیابید.

حل. روش ۱. اسکالر های x ، y ، z ، و w را طوری می یابیم که

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

یا

$$\begin{pmatrix} 3x + 5z & 3y + 5w \\ 2x + 3z & 2y + 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

یا

$$\begin{cases} 3x + 5z = 1 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} 3y + 5w = 0 \\ 2y + 3w = 1 \end{cases}$$

برای حل اولین دستگاه، معادلهٔ اول را در 2 و معادلهٔ دوم را در -3 ضرب و سپس حاصل را به هم می افزاییم:

$$\begin{array}{rl} 2 \times \text{اول}: & 6x + 10z = 2 \\ -3 \times \text{دوم}: & -6x - 9z = 0 \\ \hline \text{جمع}: & z = 2 \end{array}$$

با گذاردن $z = 2$ در معادلهٔ اول داریم

$3x + 5 \cdot 2 = 1$ یا $3x + 10 = 1$

یا $3x = -9$ یا $x = -3$

برای حل دومین دستگاه، معادلهٔ اول را در 2 و معادلهٔ دوم را در -3 ضرب و حاصل رابه هم می افزاییم:

$$\begin{array}{rl} 2 \times \text{اول}: & 6y + 10w = 0 \\ -3 \times \text{دوم}: & -6y - 9w = -3 \\ \hline \text{جمع}: & w = -3 \end{array}$$

با گذاردن $w = -3$ در معادلهٔ اول به دست می آوریم

$3y + 5 \cdot (-3) = 0$ یا $3y - 15 = 0$

یا $3y = 15$ یا $y = 5$

لذا، معکوس ماتریس داده شده $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ می باشد.

روش ۲. از فرمول کلی معکوس یک ماتریس 2×2 استفاده می کنیم. ابتدا دترمینان ماتریس داده شده را می یابیم:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 9 - 10 = -1$$

حال عناصر قطر اصلی ماتریس داده شده را باهم عوض کرده و قرینهٔ سایر عناصر را می گیریم:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

و در پایان، هر عنصر این ماتریس را بر دترمینان ماتریس داده شده ، یعنی -1، تقسیم می کنیم:

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

این ماتریس معکوس مطلوب خواهد بود.

برهانها

۴. ۱۹. قضیهٔ ۴. ۲ (یک) را ثابت کنید: $(AB)C = A(BC)$.

حل. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ ، $B = (b_{jk})$ ، و $C = (c_{kl})$. به علاوه، فرض کنیم $AB = S = (s_{ik})$ و $BC = T = (t_{jl})$. در این صورت،

$$s_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

$$t_{jl} = b_{j1}c_{1l} + b_{j2}c_{2l} + \cdots + b_{jn}c_{nl} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}c_{kl} =$$

حال با ضرب S در C ، یعنی (AB) در C ، عنصر سطر i م و ستون l م ماتریس $(AB)C$ عبارت است از

$$s_{i1}c_{1l} + s_{i2}c_{2l} + \cdots + s_{in}c_{nl} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij}b_{jk})c_{kl}$$

از آن سو، باضرب A در T ، یعنی A در BC ، عنصر سطر i.م و ستون l.م ماتریس $A(BC)$ خواهد بود

$$a_{i1}t_{1l} + a_{i2}t_{2l} + \cdots + a_{im}t_{ml} = \sum_{j=1}^{m} a_{ik}t_k = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}c_{kl})$$

چون مجموعهای فوق مساویند، قضیه ثابت خواهد بود.

۴.۲۰. قضیهٔ ۴.۳ (سه) را ثابت کنید: $(AB)^T = B^T A^T$.

حل. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{jk})$. پس عنصر سطر i م و ستون j م ماتریس AB عبارت است از

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} \qquad (۱)$$

لذا، (۱) عنصری است که در سطر j م و ستون i م ماتریس ترانهادهٔ $(AB)^T$ ظاهر می شود.

از آن سو، سطر j م B^T از عناصر ستون j م B تشکیل شد. است:

$$(b_{1j} \quad b_{2j} \quad \cdots \quad b_{mj}) \qquad (۲)$$

به علاوه، ستون i م A^T از عناصر سطر i م A متشکل است:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{im} \end{pmatrix} \qquad (۳)$$

در نتیجه، عنصر آمده در سطر j م و ستون i.م ماتریس $B^T A^T$ حاصل ضرب (۲) در (۳) است که (۱) را به دست می دهد. لذا، $(AB)^T = B^T A^T$.

مسائل تکمیلی

بردارها

۴.۲۱. به فرض آنکه $u = (2, -1, 0, -3)$ ، $v = (1, -1, -1, 3)$ ، و $w = (1, 3, -2, 2)$ ،

بردارهای (آ) $3u$ ، (ب) $u+v$ ، (پ) $2u - 3v$ ،

(ت) $5u - 3v - 4w$ ، و (ث) $-u + 2v - 2w$ را بیابید.

۴. ۲۲. x و y را در صورتی بیابید که

(آ) $(x, x+y) = (y-2, 6)$ ؛ (ب) $x(3,2) = 2(y,-1)$.

۴. ۲۳. x ، y ، و z را در صورتی بیابید که

$$x(1,1,0) + y(2,0,-1) + z(0,1,1) = (-1,3,3)$$

۴. ۲۴. مقادیر زیر رادر صورتی حساب کنید که u ، v ، و w بردارهای مسئلهٔ ۴. ۲۱ باشند:

(آ) $u \cdot v$ ؛ (ب) $u \cdot w$ ؛ (پ) $w \cdot v$ ؛ (ت) $\|u\|$ ؛ (ث) $\|v\|$ ؛ (ج) $\|w\|$.

اعمال ماتریسی

در مسائل ۴. ۲۵ تا ۴. ۲۷ فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} ، \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} ،$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ، \text{ و } \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

۴. ۲۵. ماتریسهای زیر را بیابید:

(آ) $A+B$ ؛ (ب) $A+C$ ؛ (پ) $3A-4B$.

۴. ۲۶. ماتریسهای زیر رابیابید:

(آ) AB ؛ (ب) AC ؛ (پ) AD ؛ (ت) BC ؛ (ث) BD ؛ (ج) CD .

۴. ۲۷. ماتریسهای زیر را بیابید:

(آ) A^T ؛ (ب) A^TC ؛ (پ) D^TA^T ؛ (ت) B^TA ؛ (ث) D^TD ؛ (ج) DD^T .

ماتریسهای مربعی

۴. ۲۸. به فرض آنکه $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ، (آ) A^2 و A^3 را بیابید؛ (ب)

اگر $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$ ، $f(A)$ را بیابید؛ (پ) اگر $g(x) = x^2 - x - 8$ ، $g(A)$ را بیابید.

۴. ۲۹. به فرض آنکه $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ، (آ) $f(B)$ را به ازای تابع $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ بیابید؛ (ب) $g(B)$ را به ازای $g(x) = x^2 - 4x - 12$ بیابید؛ (پ) بردار ستونی ناصفر $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ را چنان بیابید که $Bu = 6u$.

۴. ۳۰. گوییم ماتریسهای A و B تعویض می شوند اگر $AB = BA$. تمام ماتریسهای $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ را که با $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ تعویض می شوند بیابید.

۴. ۳۱. به فرض آنکه $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، A^n را بیابید.

دترمینانها

۴. ۳۲. دترمینان هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید:

(آ) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ؛ (ب) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ؛ (پ) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ؛

(ت) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ؛ (ث) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ ؛ (ج) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

۴. ۳۳. دترمینان هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید:

(آ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

(پ) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ت) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

۴. ۳۴. معکوس هر یک از ماتریسهای (آ) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ و (ب) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ رابیابید.

مسائل برنامه نویسی کامپیوتر

۴. ۳۵. اولین کارت یک دسته شامل 5 عدد حقیقی (عناصر بردار u) و دومین

کارت شامل 5 عدد حقیقی (عناصر بردار v) می باشد. برنامه ای بنویسید که (آ) $2u-3v$ ؛ (ب) $u \cdot v$ ؛ (پ) $\|u\|$ را چاپ کند. این برنامه را با داده های زیر امتحان کنید:

$$u = (3.0, 1.2, -4.0, 7.3, -2.8), \quad v = (5.4, -2.0, -6.3, 0.0, -5.8)$$

۴. ۳۶. فرض کنید A ، B ، و C ماتریسهایی 2×2 باشند. همچنین A ، B ، و C در یک دسته کارت پانچ شده باشند؛ مثلاً، این دسته می تواند شامل شش کارت و هر کارت می تواند حاوی سطری از یک ماتریس باشد. برنامه ای بنویسید که (آ) $3A-2B$ ؛ (ب) AB ؛ (پ) $|A|$ ؛ (ت) A^{-1} را چاپ کند. این برنامه را با داده های زیر امتحان کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 4.0 & 3.0 \\ 9.0 & 8.0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3.1 & -8.2 \\ 5.0 & 2.5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4.0 & 2.0 \\ 0.0 & 7.0 \end{pmatrix}$$

۴. ۳۷. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ (حقیقی) باشند. یک زیر جریان به نام PRDCT بنویسید که ماتریس حاصل ضرب $C = AB$ را حساب کند.

۴. ۳۸. فرض کنید A یک ماتریس $m \times k$ و B یک ماتریس $k \times n$ باشد. یک زیر جریان به نام PRDCT2 بنویسید که ماتریس $C = AB$ را حساب کند.

۴. ۳۹. فرض کنید A یک ماتریس $n \times 2$ و Y , X یک جفت عدد باشند. یک زیر برنامه به نام BLNG بنویسید که $\text{BLNG}(A, N, X, Y)$ بسته به اینکه (X, Y) یک سطر A است یا نه دارای مقدار 1 یا -1 باشد.

جواب مسائل تکمیلی

۴. ۲۱. (آ) $3u = (6, -3, 0, -9)$ (ب) $u + v = (3, -2, -1, 0)$

(پ) $2u - 3v = (1, 1, 3, -15)$ (ت) $5u - 3v - 4w = (3, -14, 11, -32)$

(ث) $-u + 2v - 2w = (-2, -7, 2, 5)$

۴. ۲۲. (آ) $x = 2, \ y = 4$ ؛ (ب) $x = -1, \ y = -3/2$

۴. ۲۳. $x = 1, \ y = -1, \ z = 2$

۴. ۲۴. (آ) -6 ؛ (ب) -7 ؛ (پ) 6 ؛ (ت) $\sqrt{14}$ ؛

(ث) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ؛ (ج) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

۴.۲۵ (آ) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$؛ (ب) تعریف نشده است؛ (پ) $\begin{pmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{pmatrix}$

۴.۲۶. (آ) تعریف نشده است؛ (ب) $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 & 5 \\ 11 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}$؛

(پ) $\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$؛ (ت) $\begin{pmatrix} 11 & -12 & 0 & -5 \\ -15 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$؛ (ث) $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$؛ (ج) تعریف نشده است.

۴.۲۷. (آ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$؛ (ب) تعریف نشده است؛ (پ) $(9, 9)$؛

ت) $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \\ -3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$؛ (ث) 14؛ (ج) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

۴.۲۸. (آ) $A^3 = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

(ب) $f(A) = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}$؛ (پ) $g(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

۴.۲۹. (آ) $f(B) = \begin{pmatrix} 31 & 12 \\ 20 & 39 \end{pmatrix}$؛ (ب) $g(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$؛

(پ) $k \neq 0$, $\begin{pmatrix} 3k \\ 5k \end{pmatrix}$ یا $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

۴.۳۰. تنها ماتریسها به شکل $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ با $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ تعویض می شوند.

۴.۳۱. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

۴.۳۲. (آ) -18؛ (ب) -15؛ (پ) 8؛ (ت) 1؛ (ث) 44؛

(ج) -57.

۴.۳۳. (آ) 21؛ (ب) -11؛ (پ) 102؛ (ت) 0.

۴. ۳۴. (آ) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$؛ (ب) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

۵
نظریهٔ گراف

۱.۵ آشنایی

اصطلاح « گراف» در ریاضیات معانی مختلفی دارد. ما مثلاً از « گراف» یک تابع و یک رابطه سخن رانده ایم. حال از واژهٔ « گراف» در محدودهٔ متفاوتی استفاده می کنیم. با اینحال، ایدهٔ گراف جهتدار (که در فصل ۷ مطرح شده) قبلاً در فصل ۲ راجع به روابط ظاهر شده است.

۲.۵ گرافها و چند گرافها

گراف G از دو شیء تشکیل شده است:

(یک) مجموعهٔ V که عناصرش رأسها، نقاط، یا گرهها نام دارند؛

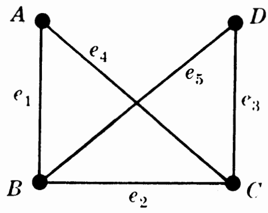
(دو) مجموعهٔ E از جفتهای نامرتب از رئوس متمایز که اضلاع نامیده می شوند.

وقتی بخواهیم بر دو قسمت G تأکید کنیم، گراف را با $G(V,E)$ نشان می دهیم. رئوس u و v را مجاور گوییم اگر یک ضلع مانند $\{u,v\}$ موجود باشد.

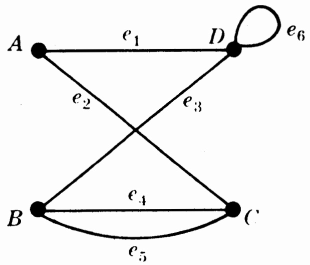
گرافها را با نمودارهایی در صفحه به طور طبیعی نشان می دهیم. یعنی، هر رأس v در V با یک نقطه (یا دایرهٔ کوچک) و هر ضلع $e=\{v_1,v_2\}$ با یک منحنی که نقاط انتهایی اش v_1 و v_2 را به هم وصل می کند نموده می شود. مثلاً، شکل ۱.۵ (آ) نمایش گراف $G(V,E)$ است که در آن (یک) V از چهار رأس A, B, C, D تشکیل شده است و (دو) E از پنج ضلع

$$e_1=\{A,B\},\ e_2=\{B,C\},\ e_3=\{C,D\},\ e_4=\{A,C\},\ e_5=\{B,D\}$$

متشکل می باشد. در واقع، ما معمولاً یک گراف را به جای ذکر رئوس و اضلاع با رسم نمودارش نشان خواهیم داد.



(آ) گراف



(بـ) چند گراف

شکل ۱.۵

نمودار شکل ۱.۵ (بـ) گراف نیست بلکه چند گراف است. دلیلش آن است که e_4 و e_5 اضلاع چندگانه‌اند؛ یعنی، اضلاعی که نقاط انتهایی یکسانی را به هم وصل می کنند. همچنین، e_6 یک خفت است؛ یعنی، ضلعی که نقاط انتهایی اش رأس واحدی می باشند. در تعریف گراف اضلاع چندگانه یا خفتها مجاز نمی باشند. به عبارت دیگر، می توان یک گراف را چند گرافی تعریف کرد که اضلاع چند گانه یا خفت ندارد.

فرض کنیم $G(V, E)$ یک گراف باشد. همچنین V' زیر مجموعه ای از V و E' زیر مجموعه ای از E باشد که نقاط انتهایی اش متعلق به V' اند. در این صورت، $G(V', E')$ یک گراف است و آن را زیر گراف $G(V, E)$ می نامند. هرگاه E' شامل تمام اضلاع E باشد که نقاط انتهایی شان در V' اند، آنگاه $G(V', E')$ را زیر گراف تولید شده به وسیلهٔ V' می نامند.

گوییم یک چند گراف متناهی است اگر تعداد رئوس و تعداد اضلاعش متناهی باشد. توجه کنید که یک گراف با تعدادی متناهی رأس خود بخود تعدادی متناهی ضلع دارد و لذا باید متناهی باشد. گراف متناهی مرکب از یک رأس و بدون ضلع (یعنی یک نقطه) را گراف بدیهی می نامیم. چند گرافها در این کتاب متناهی اند مگر خلافش تصریح شود.

۵ . ۳ درجه

هرگاه v یک نقطهٔ انتهایی ضلع e باشد، آنگاه گوییم e روی v واقع است. درجهٔ رأس v ، که به صورت $\deg(v)$ نوشته می شود، تعداد اضلاعی است که v روی آنها واقع است. چون در محاسبهٔ درجهٔ رئوس یک گراف هر ضلع دوبار شمرده می شود، نتیجهٔ ساده ولی مهم زیر را خواهیم داشت.

قضیهٔ ۵ . ۱ . مجموع درجات رئوس یک گراف مساوی دو برابر تعداد اضلاع است.

مثلاً، در شکل ۵ . ۱ (آ) داریم

$$\deg(A) = 2, \quad \deg(B) = 3, \quad \deg(C) = 3, \quad \deg(D) = 2$$

مجموع درجات مساوی ده است که، طبق انتظار، دو برابر تعداد اضلاع می باشد.
گوییم یک رأس زوج یا فرد است اگر درجه اش زوج یا فرد باشد. مثلاً، A و D رئوسی زوجند در حالی که B و C فرد می باشند.

قضیهٔ ۵ . ۱ برای چند گرافهایی که در آنها یک خفت در محاسبهٔ درجهٔ نقطهٔ انتهایی اش دوبار شمرده شود نیز برقرار است. مثلاً، در شکل ۵ . ۱ (ب) داریم $\deg(D) = 4$ زیرا ضلع e_6 دوبار حساب می شود؛ لذا، D یک رأس زوج می باشد.

هر رأس از درجهٔ صفر را یک رأس تنها می نامیم.

۵ . ۴ همبندی

راه در یک چند گراف عبارت است از یک دنبالهٔ متناوب از رئوس و اضلاع به شکل

$$v_0,\ e_1,\ v_1,\ e_2,\ v_2,\ \ldots,\ e_{n-1},\ v_{n-1},\ e_n,\ v_n$$

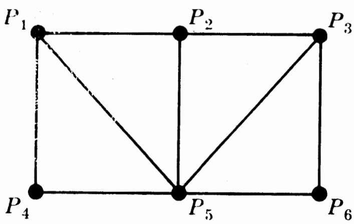
که درآن هر ضلع e_i از v_{i-1} و v_i می گذرد. تعداد n اضلاع را طول راه می نامیم. وقتی ابهامی در کار نباشد، یک راه را با دنبالهٔ اضلاعش $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یا با دنبالهٔ رئوسش $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ نشان می دهیم. گوییم یک راه بسته است اگر $v_0 = v_n$. در غیر این صورت، گوییم راه از v_0 تا v_n یا بین v_0 و v_n است

یا v_0 را به v_n وصل می کند.

یک جاده راهی است که در آن همهٔ اضلاع متمایز می باشند. یک مسیر راهی است که در آن همهٔ رئوس متمایز باشند. لذا، یک مسیر باید یک جاده باشد. یک دور راه بسته ای است که در آن همهٔ رئوس جز $v_0 = v_n$ متمایزیند. هر دور به طول k را k - دور می نامیم. در یک گراف هر دور باید به طول سه یا بیشتر باشد.

مثال ۵ . ۱ . گراف شکل ۵ . ۲ را در نظر می گیریم. در این صورت،

$$(P_4, P_1, P_2, P_5, P_1, P_2, P_3, P_6)$$



شکل ۵ . ۲

یک راه از P_4 به P_6 است. این راه یک جاده نیست زیرا ضلع $\{P_1, P_2\}$ دوبار استفاده شده است. دنبالهٔ

$$(P_4, P_1, P_5, P_2, P_6)$$

یک راه نیست زیرا ضلع $\{P_2, P_6\}$ وجود ندارد. دنبالهٔ

$$(P_4, P_1, P_5, P_2, P_3, P_5, P_6)$$

یک جاده است زیرا هیچ ضلعی دوبار به کار نرفته است، ولی یک مسیر نیست زیرا رأس P_5 دوبار استفاده شده است. دنبالهٔ

$$(P_4, P_1, P_5, P_3, P_6)$$

یک مسیر از P_4 به P_6 است. کوتاهترین مسیر (نسبت به طول) از P_4 به P_6 عبارت است از (P_4, P_5, P_6) که به طول 2 می باشد.

با حذف اضلاع ناضرور، به آسانی معلوم می شود که هر راه از رأس u به

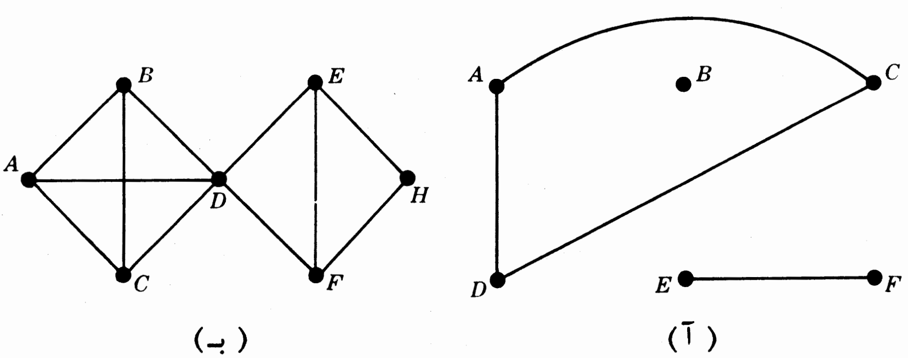
رأس v را می توان با یک مسیر از u به v عوض کرد. ما این نتیجه را به طور صوری بیان می کنیم.

قضیهٔ ۵ . ۲. یک راه از رأس u به رأس v وجود دارد اگر و فقط اگر یک مسیر از u به v موجود باشد.

گوییم یک گراف همبند است اگر بین هر دو رأسش یک مسیر وجود داشته باشد. گراف شکل ۵ . ۲ همبند است ولی گراف شکل ۵ . ۳ (آ) همبند نیست زیرا، مثلاً، یک مسیر بین D و E موجود نیست.

فرض کنیم $G(V,E)$ یک گراف باشد. هر زیر گراف همبند $G(V,E)$ را یک مؤلفهٔ همبند نامیم اگر مشمول زیر گراف همبند وسیعتر نباشد. شهوداً واضح است که هر گراف را می توان به مؤلفه های همبندش افراز کرد. مثلاً، گراف شکل ۵ . ۳ (آ) دارای سه مؤلفهٔ همبند می باشد.

فاصلهٔ بین رئوس u و v یک گراف همبند G ، که به صورت $d(u, v)$ نوشته می شود، طول کوتاهترین مسیر بین u و v می باشد. قطر گراف همبند G فاصلهٔ ماکزیمم بین هر دو رأسش می باشد. در شکل ۵ . ۳ (ب)، $d(A, F) = 2$ و قطر گراف 3 می باشد. (با آنکه اضلاع $\{A, D\}$ و $\{B, C\}$ در شکل ۵ . ۳ (ب) متقاطع به نظر می رسند، ولی در یک رأس تقاطع ندارند.)

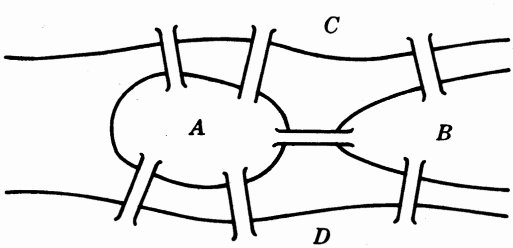


شکل ۵ . ۳

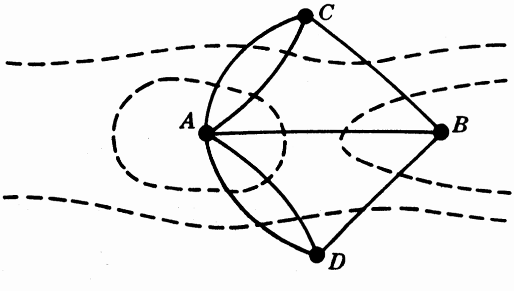
فرض کنیم v یک رأس در گراف G باشد. منظور از $G-v$ یعنی گراف حاصل از G پس از حذف v و تمام اضلاع ماربر v . رأس v در گراف همبند G را نقطهٔ بریدگی نامیم اگر $G-v$ ناهمبند باشد. در شکل ۵. ۳ (بـ) رأس D یک نقطهٔ بریدگی می باشد.

۵. ۵ پلهای کونیگزبرگ، چند گرافهای قابل عبور

در قرن هجده شهر کونیگزبرگ در پروس شرقی از دو جزیره و هفت پل طبق شکل ۵. ٤ (آ) تشکیل شده بود. سؤال: آیا می‌توانیم طوری حرکت کنیم که از هر هفت پل گذشته ولی هیچ پلی را دوبار طی نکرده باشیم؟ اهالی کونیگزبرگ این مسئله را بـه ال. اویلر (L. Euler) ، ریاضیدان مشهور سوییسی، نوشتند. وی در سال ۱۷۳٦ ثابت کرد این کار ناممکن است. اوبا نشان دادن جزایر و دو طرف رودخانه به وسیلهٔ نقاط و پلها به وسیلهٔ منحنیها، به شکل ۵. ٤ (بـ) دست یافت.



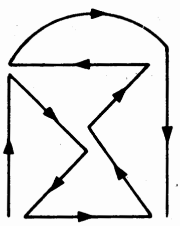
(آ) شهر کونیگزبرگ در سال ۱۷۳٦



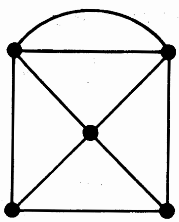
(بـ) نمایش تصویری اویلر

شکل ۵. ۴

ملاحظه می کنیم که شکل ۵. ٤ (بـ) یک چند گراف است. گوییم یک چند گراف قابل عبور است اگر بتوان آن را بدون شکسته شدن منحنی و بدون تکرار هیچ ضلعی رسم کرد؛ یعنی، اگر یک راه وجودداشته باشد که شامل همهٔ رئوس بوده و از هر ضلع فقط یکبار استفاده کرده باشد. یک چنین راه باید یک جاده باشد(زیرا هیچ ضلعی دوبار به کار نرفته است) و آن را یک جادهٔ قابل عبور می نامیم. واضح است که یک چند گراف قابل عبور باید متناهی و همبند باشد. شکل ۵. ۵ (بـ) یک جادهٔ قابل عبور چند گراف شکل ۵. ۵ (آ) را نشان می دهد. برای نشان دادن جهت جاده، نمودار رئوس تماس را که عملاً پیموده می شوند از دست می دهد. حال به آسانی معلوم می شود که راه در کونیگزبرگ ممکن است اگر و فقط اگر چند گراف شکل ۵. ٤ (بـ) قابل عبور باشد.



(بـ)



(آ)

شکل ۵. ۵

اینک نشان می دهیم که چگونه اویلر قابل عبور نبودن چند گراف شکل ۵. ٤ (بـ) را ثابت کرد و لذا راه درکونیگزبرگ نامکن می باشد. ابتدا به یاد می آوریم که یک رأس زوج یا فرد است اگر درجه اش زوج یا فرد باشد. فرض کنیم یک چند گراف قابل عبور بوده و یک جادهٔ قابل عبور در رأس P شروع یا ختم نشده باشد. حکم می کنیم که P یک رأس زوج می باشد. زیرا هرگاه جادهٔ قابل عبور توسط ضلعی وارد P شود، همواره باید یک ضلع باشد که قبلاً استفاده نشده است و جاده بتواند به وسیلهٔ آن P را ترک نماید. لذا، اضلاع جاده که از P می گذرند باید به صورت جفت ظاهر شوند؛ و در نتیجه، P یک رأس زوج می باشد. بنابراین، اگر رأس Q فرد باشد، جادهٔ قابل عبور باید در Q شروع یا ختم شده باشد. در نتیجه، یک

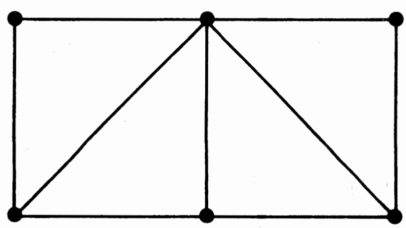
چند گراف با بیش از دو رأس فرد نمی تواند قابل عبور باشد. ملاحظه کنید که چند گراف مسئلهٔ پلهای کونیگزبرگ دارای چهار رأس فرد است. لذا، شخص نمی تواند در کونیگزبرگ طوری راه برود که از هر پل درست یکبار بگذرد.

اویلر در واقع عکس مسئلهٔ فوق را ثابت کرد که مضمون قضیه و نتیجهٔ زیر است. (این قضیه در مسئلهٔ ۵.۸ ثابت شده است.) گراف G یک گراف اویلری است اگر یک جادهٔ قابل عبور بسته به نام جادهٔ اویلری موجود باشد.

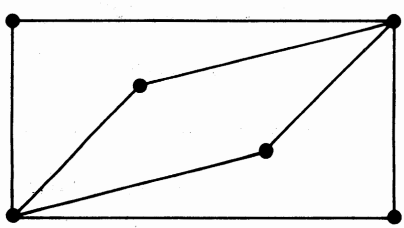
قضیهٔ ۵.۳ (اویلر). یک گراف همبند متناهی اویلری است اگر و فقط اگر هر رأس دارای درجهٔ زوج باشد.

نتیجهٔ ۵.۴. هر گراف همبند متناهی با دو رأس فرد قابل عبوراست. یک جادهٔ قابل عبور می تواند در یک رأس فرد شروع و در رأس فرد دیگر ختم شود.

مسئلهٔ دیگر، که ارتباط نزدیکی با مسئلهٔ فوق دارد، ابتدا توسط دبلیو. آر. هامیلتون (W. R. Hamilton) ریاضیدان مطرح شد. وی پرسید: آیا یک گراف شامل یک راه بسته که هر رأس را درست یکبار شامل باشد وجود دارد یا نه. یک چنین راه باید یک دور باشد وآن را یک دور هامیلتونی می نامند. هر گراف دارای یک دور هامیلتونی یک گراف هامیلتونی نامیده می شود. شکل ۵.۶ مثالی از یک گراف هامیلتونی که اویلری نیست و نیز مثالی در جهت عکس را نشان می دهد. تأکید کنیم که محکی ساده برای



(آ) هامیلتونی و غیر اویلری



(بـ) اویلری و غیر هامیلتونی

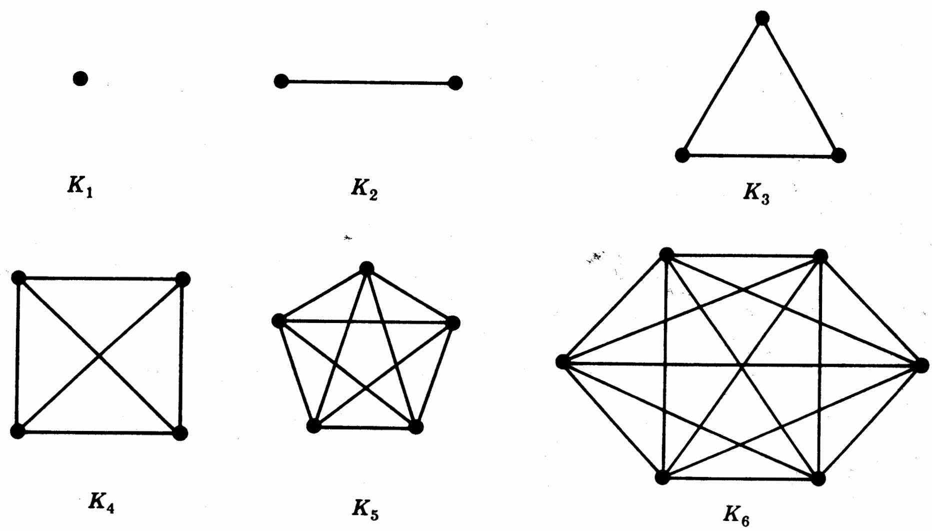
شکل ۵.۶

هامیلتونی بودن یک گراف همانند محک برای اویلری بودن وجود ندارد. ملاحظه می کنیم که این مسئله با «مسئلهٔ دستفروش دوره گرد» رابطهٔ نزدیکی دارد؛ یعنی، یافتن یک راه بستهٔ مینیمم که همهٔ رئوس را شامل باشد و مینیمم در رابطه با اضلاع است که طولهای منتسب شده دارند. (به عبارت دیگر، رئوس را شهرها و طول اضلاع را فواصل جاده های بین شهرها می گیریم.)

۵.۶ گرافهای خاص

گرافها انواع متعددی دارند. ما در اینجا چهارنوع آنها را تعریف می کنیم که عبارتند از گرافهای تام، منتظم، دوبخشی، و درختی.

یک گراف در صورتی تام است که هر رأسش به هر رأس دیگر وصل شده باشد. یک گراف تام دارای n رأس را با K_n نشان می دهیم. شکل ۵.۷ گرافهای $K_1, K_2, \ldots, K_6$ را نشان می دهد.



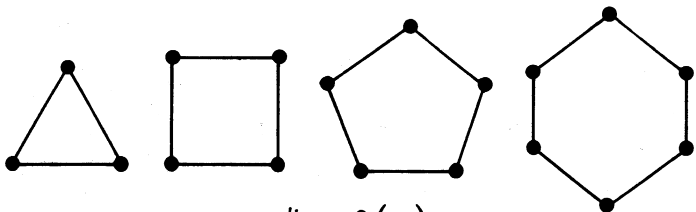
شکل ۵.۷

گراف G در صورتی منتظم از درجهٔ k یا k-منتظم است که هر رأس دارای درجهٔ k باشد. به عبارت دیگر، یک گراف در صورتی منتظم است که تمام رئوسش

درجهٔ یکسان داشته باشند.

گرافهای منتظم همبند از درجات 0 ، 1 ، یا 2 به آسانی قابل توصیف اند. گراف 0-منتظم همبند گراف بدیهی دارای یک رأس و بدون ضلع می باشد. گراف 1- منتظم همبند گراف دارای دو رأس است که ضلعی آنها را به هم وصل می کند. گراف 2- منتظم همبند با n رأس تنها از یک n-دور تشکیل شده است. ر.ک. شکل ۵ . ۸.

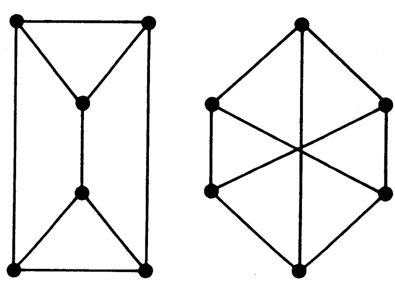
(یک) 0-منتظم (دو) 1- منتظم



(سه) 2- منتظم

شکل ۵ . ۸

گرافهای 3 ـ منتظم باید دارای تعدادی زوج رأس باشند چرا که مجموع درجات رئوس عددی زوج است (قضیهٔ ۵ . ۱). شکل ۵ . ۹ دو گراف 3- منتظم همبند با شش رأس را نشان می دهد. گرافهای منتظم در حالت کلی می توانند

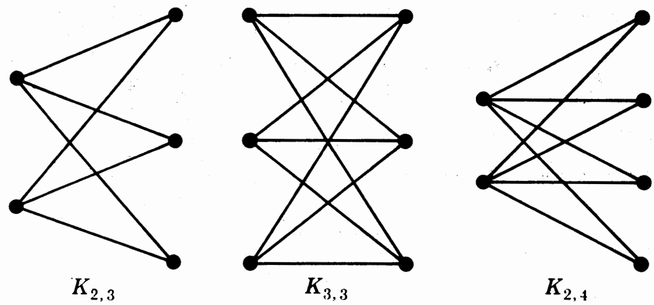


شکل ۵ . ۹

تا حدودی پیچیده باشند. مثلاً، نوزده گراف 3ـ منتظم هر یک با ده رأس وجود

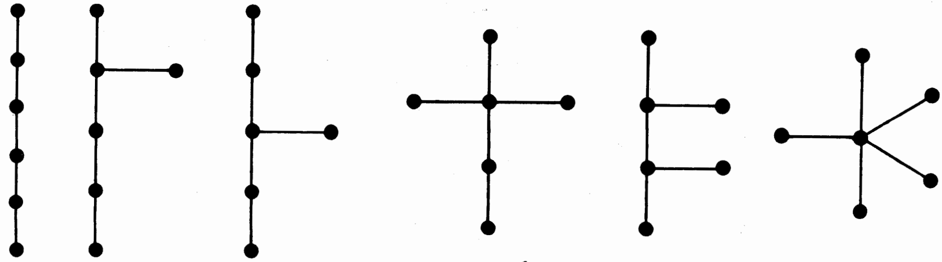
دارد. توجه کنید که گراف تام K_n با n رأس منتظم از درجهٔ $n-1$ می باشد.

گراف G را دوبخشی گوییم اگر رئوسش V را بتوان به دو زیر مجموعهٔ M و N چنان افراز کرد که هر ضلع G یک رأس M را به یک رأس N وصل کند. منظور از یک گراف دوبخشی تام یعنی هر رأس M به هر رأس N وصل شده است؛ این گراف رابا $K_{m,n}$ نشان می دهیم که در آن m تعداد رئوس در M و n تعداد رئوس در N است و، به خاطر متعارف شدن وضع، فرض می کنیم $m \leq n$. شکل ۵. ۱۰ گرافهای $K_{2,3}$ ، $K_{3,3}$ ، و $K_{2,4}$ را نشان می دهد. واضح است که گراف $K_{m,n}$ دارای mn ضلع است.



شکل ۵. ۱۰

گوییم یک گراف فارغ از دور یا نادوری است اگر دارای دور نباشد. هر گراف همبند بدون دور را یک درخت می نامیم. چون درختها در بسیاری از بخشهای ریاضی ظاهر می شوند، ما درختها را در فصل بعد کاملتر بررسی خواهیم کرد. در اینجا فقط به تعریف و چند مثال از آن را می پرداریم. شکل ۵. ۱۱ شش درخت دارای شش رأس را نشان می دهد.



شکل ۵. ۱۱

۷.۵ ماتریسها و گرافها

فرض کنیم G یک گراف با رئوس $v_1, v_2, \ldots, v_m$ و اضلاع $e_1, e_2, \ldots, e_n$ باشد. گاهی اوقات نمایش G با یک ماتریس (به خصوص از لحاظ محاسبه) استفادهٔ عملی دارد. توجه کنید که اضلاع G را می توان با یک ماتریس‌صحیح $n \times 2$ مانند ماتریس B نمایش داد که در آن هر سطر B یک ضلع G است؛ مثلاً، سطر $(3,4)$ ضلع $\{v_3, v_4\}$ می باشد. این ماتریس اضلاع B، G را کاملاً توصیف نمی کند مگر آنکه تعداد m رئوس G نیز داده شده باشد. ما دو نمایش ماتریسی دیگر G را که به طور وسیعی کاربرد دارند مورد بحث قرار می دهیم.

(۱) **ماتریس مجاور.** فرض کنیم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $m \times m$ با تعریف زیر باشد:

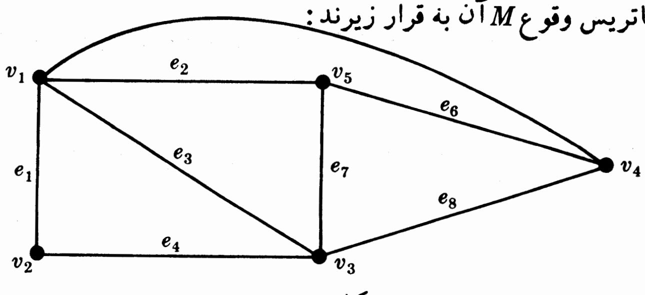
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \{v_i, v_j\} \text{ یک ضلع باشد؛ یعنی، اگر } v_i \text{ مجاور } v_j \text{ باشد،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

در این صورت، A ماتریس مجاور G نام دارد. ملاحظه می کنیم که $a_{ij} = a_{ji}$؛ پس A یک ماتریس متقارن می باشد. (ماتریس مجاور یک چند گراف را می توان با فرض a_{ij} مساوی تعداد اضلاع $\{v_i, v_j\}$ تعریف کرد.)

(۲) **ماتریس وقوع.** فرض کنیم $M = (m_{ij})$ یک ماتریس $m \times n$ باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر رأس } v_i \text{ بر ضلع } e_j \text{ واقع باشد،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

مثلاً، گراف شکل ۵. ۱۲ را در نظر می گیریم. ماتریس اضلاع B، ماتریس مجاور A، وماتریس وقوع M آن به قرار زیرند:



شکل ۵. ۱۲

برای تسهیل در خواندن، سطرها و ستونهای A و M را با رئوس و اضلاع نظیر بر چسب زده ایم.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

با آنکه ماتریس اضلاع B گراف G فشرده ترین نمایش است، ولی همیشه مفید ترین نمایش نیست. به خاطر قضیهٔ زیر، ماتریس مجاور در تصمیم گیری همبندی بسیار سودمند می باشد.

قضیهٔ ۵ . ۵. فرض کنیم A ماتریس مجاور گراف G با m رأس باشد که $m > 1$. در این صورت، درایهٔ ij ماتریس A^n تعداد راهها از رأس v_i به رأس v_j به طول n می باشد.

(قضیهٔ ای مشابه برای گرافهای جهتدار (قضیهٔ ۷ . ۳) وجود دارد که در فصل ۷ بیان و اثبات می شود.)

چون G دارای m رأس است هر مسیر از v_i به v_j باید به طول $m-1$ یا کمتر باشد. لذا، ماتریس

$$A + A^2 + \cdots + A^{m-1}$$

فقط وقتی می تواند دارای درایهٔ ij صفر باشد. که مسیری از v_i به v_j موجود نباشد.

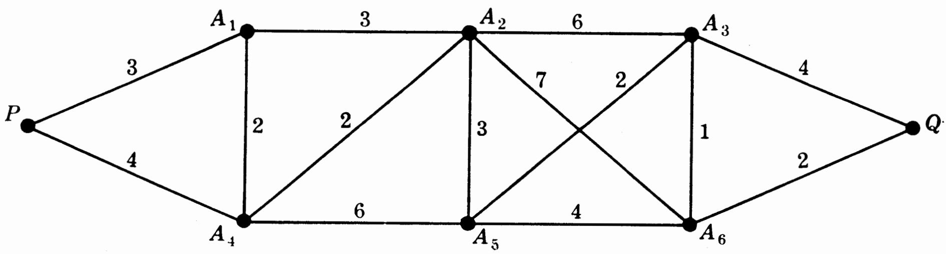
منظور از ماتریس‌همبندی‌گراف G با m رأس یعنی ماتریس $m \times m$ ، $C = (c_{ij})$ که در آن

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i=j \text{ یا مسیری از } v_i \text{ به } v_j \text{ موجود باشد،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

توجه کنید که G همبند است اگرو فقط اگر C درایهٔ صفر نداشته باشد. بحث فوق نشان می دهد که C و ماتریس $A + A^2 + \cdots + A^{m-1}$ خارج از قطر اصلی درایه های صفر یکسان خواهند داشت.

۸.۵ گرافهای بر چسب دار

گراف G را یک گراف برچسب دار نامیم اگر به اضلاع و / یا رئوسش داده هایی منتسب شده باشند. به خصوص، هرگاه به هر ضلع e از G عدد نامنفی $\ell(e)$ منتسب شده باشد، آنگاه $\ell(e)$ را وزن یا طول e می نامند. شکل ۱۳.۵ یک گراف بر چسب دار را نشان می دهد که در آن



شکل ۱۳.۵

طول هر ضلع به نحوی روشن داده شده است. یک مسئلهٔ مهم در نظریهٔ گراف یافتن مسیر مینیمم بین دو نقطهٔ داده شده است. در شکل ۱۳.۵ یک مسیر مینیمم بین P و Q عبارت است از

$$(P, A_1, A_2, A_5, A_3, A_6, Q)$$

که به طول 14 می باشد. خواننده می تواند مسیر مینیمم دیگری را نیز پیدا نماید.

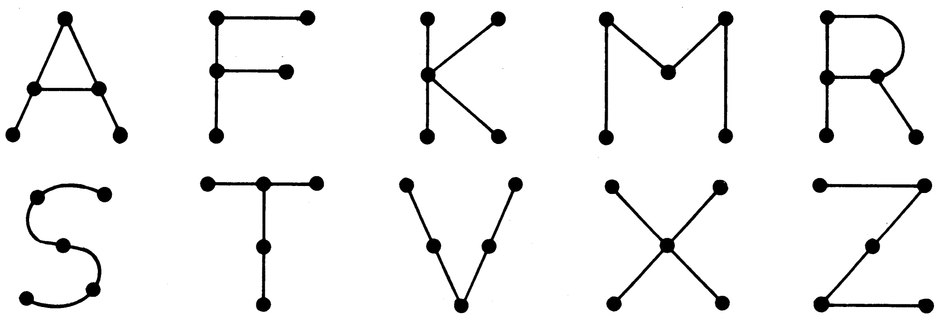
در فصل ۷ یک الگوریتم « هرس »بیان می کنیم که مسیر مینیمم حالت ساده تر

یک گـراف جهتدار را به دست می دهد(که مسیرهای ممکن بین نقاط را مینیمم می سازد). صورت تعمیم یافتهٔ یک چنین الگوریتم را می توان برای حالت غیر جهتدار مطرح شده در اینجا به کار برد.

۵. ۹ گرافهای یکریخت

فرض کنیم $G(V,E)$ و $G^*(V^*,E^*)$ دو گراف بوده و $f:V\to V^*$ یک تناظر یک به یک بین مجموعهٔ رئوس باشد به طوری که $\{u,v\}$ یک ضلع G است اگر و فقط اگر $\{f(u),f(v)\}$ یـک ضـلـع G^* بـاشـد. در ایـن صـورت، f را یـک یکریختی بین G و G^* نامیده و گوییم گرافهای G و G^* یکریخت اند. ما معمولاً بین گرافهای یکریخت (ولو اینکه نمودارهایشان « متفاوت به نظر رسند ») فرقی نمی گذاریم. لذا، می توان گفت که شکل ۵. ۱۱ تمام درختهای ممکن با شش رأس را به دست می دهد.

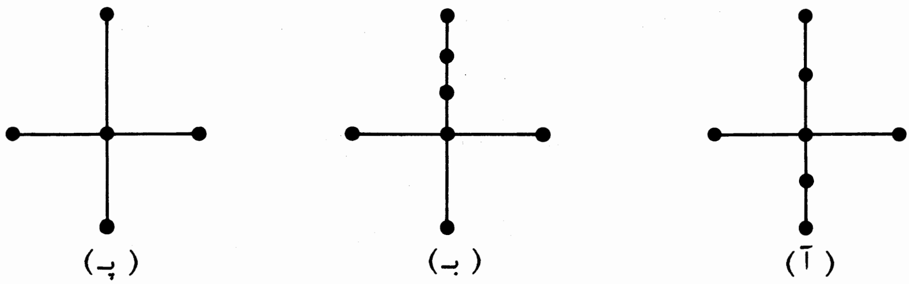
هر گاه G و G^* گرافهای یکریخت باشند، آنگاه رئوس نظیر باید از خواص گرافیک یکسانی (مانند درجه، یک نقطهٔ بریدگی بودن، و غیره) بهره مند باشند. شکل ۵. ۱٤ ده گراف به صورت تصویر حروف انگلیسی را نشان می دهد. توجه می کنیم که A و R ، F و T ، K و X ، وM ، S ، V ، و Z گرافهایی یکریخت می باشند.



شکل ۵. ١٤

از گراف G می توان با تقسیم یک ضلع G به رئوس اضافی گراف جدیدی به دست آورد. دو گـراف G و G^* را همانریخت خوانیم اگر آنها را بتوان از گرافهای

یکریخت به وسیلهٔ این روش به دست آورد. گرافهای (آ) و (بـ) شکل ۵. ۱۵ یکریخت نیستند ولی همانریخت اند زیرا هر یک را می توان از (پـ) با افزودن رئوس مناسب به دست آورد.



شکل ۵. ۱۵

مسائل حل شده

گرافها، همبندی

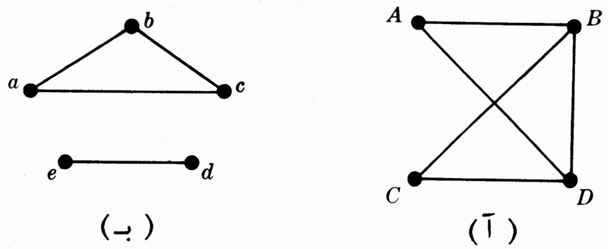
۵. ۱. نمودار هر یک از گرافهای $G(V,E)$ زیر را رسم کنید:

(آ) $V = \{A,B,C,D\}, \;\; E = [\{A,B\}, \{A,C\}, \{B,C\}, \{B,D\}, \{C,D\}]$

(بـ) $V = \{a,b,c,d,e\}, \;\; E = [\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{d,e\}]$

از این گرافها کدامها همبندند؟

حل.

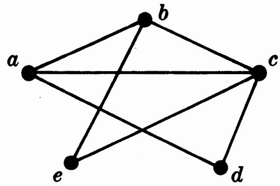


شکل ۵. ۱۶

به ازای هر رأس v در V یک نقطه و به ازای هر ضلع $\{x,y\}$ در E یک منحنی از رأس x به رأس y مثل شکل ۵. ۱۶ می کشیم. گراف (آ) همبند است . ولی گراف

(ب‍ـ)همبند نیست زیرا، مثلاً، هیچ مسیری از رأس a به رأس d موجود نیست.

۵ . ۲. شکل ۵ . ۱۷ را در نظر بگیرید. (آ) گراف G این نمودار را به طور صوری توصیف کنید. (بـ) درجهٔ هر رأس را یافته و قضیهٔ ۵ . ۱ را برای این گراف تحقیق کنید.



شکل ۵ . ۱۷

حل. (آ) پنج رأس داریم؛ پس $V = \{a, b, c, d, e\}$. هفت جفت $\{x, y\}$ از رئوس داریم که در آنها رأس x به رأس y وصل شده است؛ پس

$$E = [\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}]$$

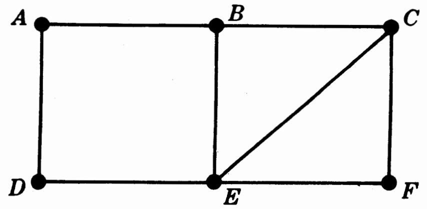
(بـ) درجهٔ یک رأس مساوی تعداد اضلاعی است که به آن تعلق دارد؛ مثلاً، $\deg(a) = 3$ زیرا a متعلق به سه ضلع $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}$ می باشد. به همین نحو، $\deg(b) = 3, \quad \deg(c) = 4, \; \deg(d) = 2, \; \deg(e) = 2$

مجموع درجات رئوس عبارت است از

$$3 + 3 + 4 + 2 + 2 = 14$$

که مساوی دو برابر تعداد اضلاع می باشد.

۵ . ۳. گراف شکل ۵ . ۱۸ را در نظر بگیرید. (آ) تمام مسیرها از رأس A به رأس F را بیابید؛
(بـ) تمام جاده ها از A به F را بیابید؛ (پـ) فاصلهٔ بین A و F را بیابید؛ (تـ) قطر گراف را پیدا کنید.



شکل ۵ . ۱۸

حل. (آ) یک مسیر از A به F راهی است که هیچ رأس و در نتیجه هیچ ضلع تکرار نشده باشد. از این نوع مسیرها هفت تا موجود است:

(A, B, C, F) (A, D, E, F)
(A, B, C, E, F) (A, D, E, B, C, F)
(A, B, E, F) (A, D, E, C, F)
(A, B, E, C, F)

(بـ) یک جاده از A به F راهی است که هیچ ضلع تکرار نشده باشد. از این جاده ها نه تا موجود است، هفت مسیر قسمت (آ) همراه با

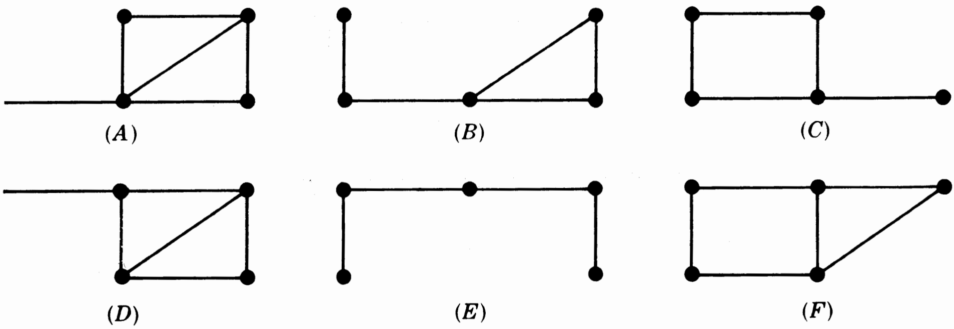
(A, D, E, C, B, E, F) و (A, D, E, B, C, E, F)

(پـ) فاصلهٔ از A به F مساوی 3 است زیرا یک مسیر، مثلاً (A, B, C, F) ، از A به F به طول 3 وجود دارد و هیچ مسیری کوتاهتر از A به F وجود ندارد.

(تـ) فاصلهٔ بین هر دو رأس از 3 بیشتر نیست، و فاصلهٔ بین A و F مساوی 3 است؛ پس قطر گراف 3 می باشد.

۵ . ٤ .گراف شکل ۵ . ۱۸ را در نظر بگیرید. زیر گرافهای حاصل از حذف هر یک از رئوس را به دست آورید. آیا این گراف نقاط بریدگی دارد؟

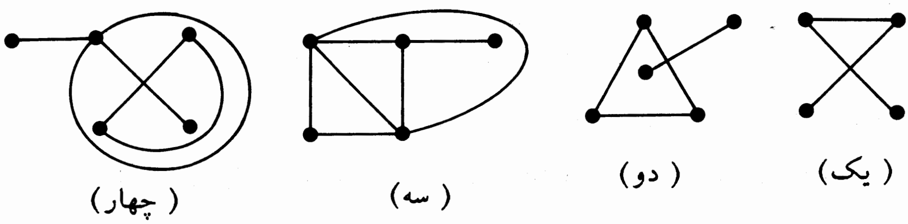
حل. وقتی از یک گراف یک رأس را حذف کنیم باید همهٔ اضلاع ماربر آن رأس را نیز حذف نماییم. در شکل ۵ . ۱۹ شش گراف حاصل از حذف هر یک از رئوس شکل ۵ . ۱۸ نموده شده اند.



شکل ۵ . ۱۹

همهٔ این شش گراف همبندند ؛ پس هیچ رأسی یک نقطهٔ برید گی نیست.

۵ . ۵ . از چند گرافهای شکل ۵ . ۲۰ کدامها (آ) همبند ، (بـ) فارغ از خفت (یعنی بدون خفت)، (پـ) گراف می باشند ؟



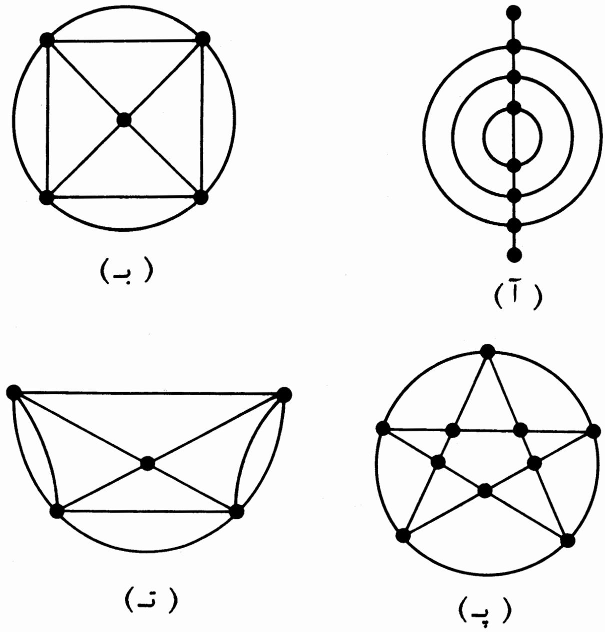
شکل ۵ . ۲۰

حل. (آ) فقط (یک) و (سه) همبندند .

(بـ) فقط (چهار) دارای یک خفت است؛ یعنی، ضلعی با نقاط انتهایی یکسان.

(پـ) تنها (یک) و (دو) گرافند . چند گراف (سه) دارای اضلاع چند گانه است و چند گراف (چهار) دارای اضلاع چند گانه و یک خفت می باشد .

۵ . ٦ . از چند گرافهای شکل ۵ . ۲۱ کدامها قابل عبورند ؟



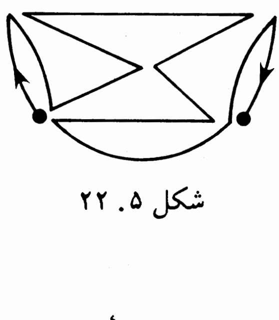
شکل ۵ . ۲۱

حل. (آ) قابل عبور است زیرا شش رأس زوجند و دو رأس فرد می باشند.

(ب) غیر قابل عبور است زیرا چهار رأس فرد وجود دارد.

(پ) قابل عبور است زیرا هر ده رأس زوج می باشند.

(ت) قابل عبور است زیرا دو رأس فرد وجود دارد. مسیر قابل عبور باید از یکی از رئوس فرد شروع شود. مثلاً، ر.ک. شکل ۵ . ۲۲.



شکل ۵ . ۲۲

۵ . ۷. قضیهٔ ۵ . ۲ را ثابت کنید: یک راه از رأس u به رأس v وجود دارد اگر و فقط اگر یک مسیر از u به v موجود باشد.

برهان. چون هر مسیر یک راه است، کافی است ثابت کنیم هرگاه یک راه مانند W از u به v باشد، آنگاه یک مسیر از u به v وجود دارد. اثبات به استقرا بر طول W صورت می گیرد. فرض کنیم طول W یک باشد؛ یعنی، $W = (u, v)$. در این صورت، W یک مسیر از u به v است. از آن سو، فرض کنیم طول W مساوی $n > 1$ باشد؛ مثلاً،

$$W = (u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v = v_n)$$

هرگاه هیچ رأسی تکرار نشده باشد، آنگاه W یک مسیر از u به v است. فرض کنیم یک رأس تکرار شده باشد؛ مثلاً، $v_i = v_j$ که در آن $i < j$. در این صورت،

$$W' = (v_0, v_1, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$

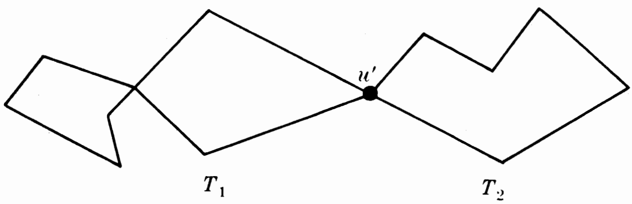
یک راه از $u = v_0$ به $v = v_n$ به طول کمتر از n است. بنابر استقرا، یک مسیر از u به v وجود دارد.

۵. ۸. قضیهٔ ۵. ۳ (اویلر) را ثابت کنید: گراف همبند متناهی G اویلری است اگر و فقط اگر هر رأس دارای درجهٔ زوج باشد.

برهان. فرض کنیم G اویلری بوده و T یک جادهٔ اویلری بسته باشد. به ازای هر رأس v از G ، جادهٔ T به دفعات مساوی به v وارد و از آن خارج می شودو این کار بدون تکرار یک ضلع صورت می گیرد. لذا، v دارای درجهٔ زوج می باشد.

به عکس، فرض کنیم هر رأس G دارای درجهٔ زوج باشد. یک جادهٔ اویلری می سازیم. با جادهٔ T_1 در ضلع دلخواه e شروع می کنیم. T_1 را باافزودن یک ضلع پس از دیگری بسط می دهیم. هرگاه T_1 در هیچ مرحله ای بسته نباشد، مثلاً T_1 در u شروع ولی در $v \neq u$ ختم شود، آنگاه فقط تعدادی فرد از اضلاع ماربر v در T_1 ظاهر می شوند؛ لذا، می توان T_1 را با ضلع دیگری ماربر v بسط داد. بنابراین، می توان به بسط T_1 تا آنجا ادامه داد که T_1 به رأس شروع خود u باز گردد؛ یعنی، تاوقتی T_1 بسته شود. هرگاه T_1 همهٔ اضلاع G را شامل شود، آنگاه T_1 جادهٔ اویلری ما می باشد.

فرض کنیم T_1 شامل همهٔ اضلاع G نباشد. گراف H حاصل از حذف تمام اضلاع T_1 از G را در نظر می گیریم. H ممکن است همبند باشد، ولی هر رأس H دارای درجهٔ زوج است زیرا T_1 شامل تعدادی زوج ضلع ماربر یک رأس دلخواه می باشد. چون G همبند است، یک ضلع مانند e' از H هست که دارای نقطهٔ انتهایی u' در T_1 می باشد. جادهٔ T_2 را در H با شروع از u' و استفاده از e' می سازیم. چون همهٔ رئوس در H دارای درجهٔ زوجند، می توان به بسط T_2 در H ادامه داد تا T_2 به u' طبق شکل ۵. ۲۳ باز گردد. واضح است که می توان T_1 و T_2 را درکنار



شکل ۵. ۲۳

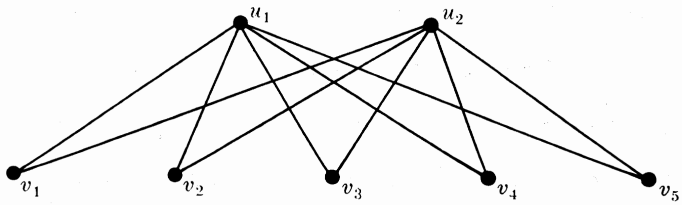
هم قرارداد و یک جادهٔ بستهٔ بزرگتر در G تشکیل داد. این عمل را آنقدر ادامه می دهیم که همهٔ اضلاع G به کار روند. بالأخره، یک جادهٔ اویلری به دست می آید؛ و در نتیجه، G اویلری می باشد.

گرافهای خاص، نمایشهای ماتریسی

۵. ۹. گراف $K_{2,5}$ را رسم کنید.

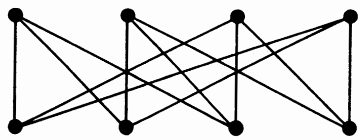
حل. $K_{2,5}$ از هفت رأس تشکیل شده است که به مجموعهٔ M مرکب از دو رأس u_1 و u_2 و مجموعهٔ N مرکب از پنج رأس v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 ، و v_5 افراز می شود و دارای تمام اضلاع ممکن از رأس u_i به رأس v_j می باشد. این گراف در شکل ۵. ۲۴ نموده شده است.

۵. ۱۰. چه گرافهای همبندی می توانند هم منتظم و هم دوبخشی باشند؟



شکل ۵. ۲٤

حل. گراف دو بخشی $K_{m,m}$ منتظم از درجهٔ m است زیرا هر رأس به m رأس دیگر وصل شده است و در نتیجه از درجهٔ m می باشد. زیر گرافهای $K_{m,m}$ نیز می توانند منتظم باشند و این در صورتی است که m ضلع از هم جدا حذف شده باشند. مثلاً، زیر گراف $K_{4,4}$ شکل ۵. ۲۵، 3-منتظم است.

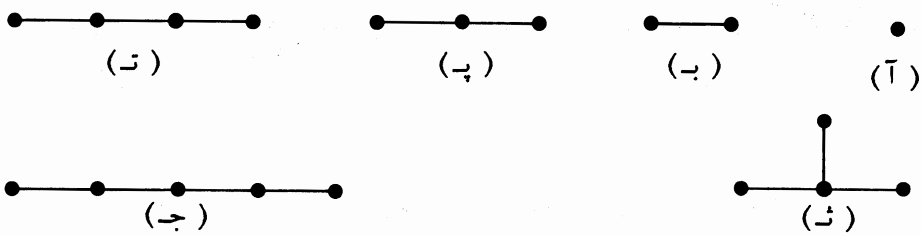


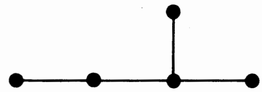
شکل ۵. ۲۵

می توان به حذف m ضلع از هم جدا ادامه داد و هر بار یک گراف منتظم با یک درجه کمتر به دست آورد. این گرافها ممکن است ناهمبند باشند، ولی در هر حالت مؤلفه های همبند آنها دارای خواص مطلوب می باشند.

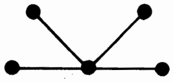
۵. ۱۱. جمیع درختها با پنج رأس یا کمتر را رسم کنید.

حل. ازاین درختها هشت تا وجود دارند که در شکل ۵. ۲٦ دیده می شوند.





(چ)

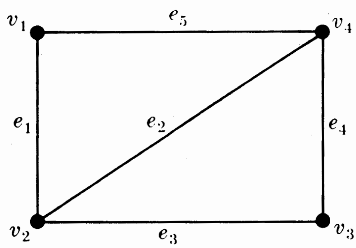


(ح)

شکل ۵ . ۲۶

گراف دارای یک رأس و بدون ضلع درخت بدیهی نام دارد .

۵ . ۱۲. ماتریس مجاور $A = (a_{ij})$ و ماتریس وقوع $M = (m_{ij})$ گراف شکل ۵ . ۲۷ را بیابید .



شکل ۵ . ۲۷

حل. ماتریس مجاور $A = (a_{ij})$ با تعریف $a_{ij} = 1$ است اگر یک ضلع مانند $\{v_i, v_j\}$ موجود باشد و $a_{ij} = 0$ در غیر این صورت. لذا،

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس وقوع $M = (m_{ij})$ با تعریف $m_{ij} = 1$ است اگر رأس v_i روی ضلع e_j باشد و $m_{ij} = 0$ در غیر این صورت. لذا،

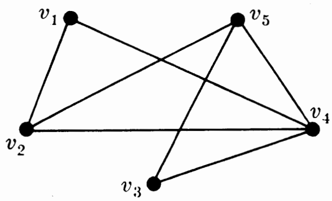
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

۵ . ۱۳. گراف G با ماتریس مجاور $A = (a_{ij})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

را رسم کنید.

حل. چون A یک ماتریس 5 مربعی است، G دارای پنج رأس مثلاً $v_1, \ldots, v_5$ می باشد. اگر $a_{ij} = 1$ ، یک ضلع از v_i به v_j می کشیم. این گراف در شکل ۵ . ۲۸ نموده شده است.



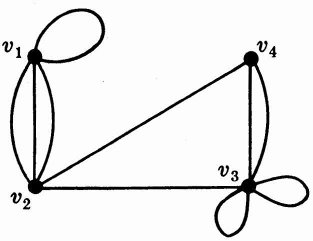
شکل ۵ . ۲۸

۵ . ۱٤. چند گراف G با ماتریس مجاور $A = (a_{ij})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

را رسم کنید.

حل. چون A یک ماتریس 4 مربعی است، G دارای چهار رأس مثلاً $v_1, \ldots, v_4$ می باشد. اگر $a_{ij} = n$ ، n ضلع از v_i به v_j می کشیم. توجه کنید که اگر $a_{ii} = n$ ، v_i دارای n خفت است. این چند گراف در شکل ۵ . ۲۹ دیده می شود.

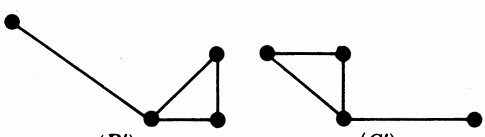


شکل ۵. ۲۹

۵. ۱۵. نشان دهید که شش گراف به دست آمده در مسئلهٔ ۵. ٤ متمایزند؛ یعنی، هیچ دو تای آنها یکریخت نیستند. همچنین نشان دهید که (B) و (C) همانریخت اند.

حل. درجات پنج رأس هیچ گرافی را نمی توان با درجات گراف دیگر، جز در مورد (B) و (C)، جفت کرد. لذا، هیچ دو گراف جز احتمالاً (B) و (C) یکریخت نیستند.

اما اگر رأس از درجهٔ 3 در (B) و در (C) را حذف کنیم، زیر گرافهای متمایزی به دست می آوریم. لذا، (B) و (C) غیر یکریخت نیز هستند؛ پس تمام شش گراف با هم متمایز می باشند. ولی (B) و (C) همانریخت اند زیرا آنها را می توان از گرافهای یکریخت در شکل ۵. ۳۰ با افزودن رئوس مناسب به دست آورد.



شکل ۵. ۳۰

مسائل تکمیلی

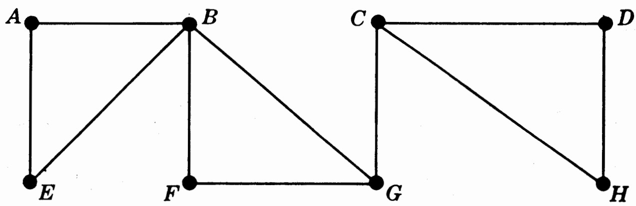
۵. ۱٦. به فرض آنکه $V = \{u, v, w, x, y\}$ ، نمودار هر یک از گرافهای $G(V, E)$ را که

آ) $E = [\{u, v\}, \{u, x\}, \{v, w\}, \{v, x\}, \{v, y\}, \{x, y\}]$

(ب) $E = [\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, x\}, \{w, y\}, \{x, y\}]$

رسم کنید. درجهٔ هر رأس و قطر هر گراف را بیابید.

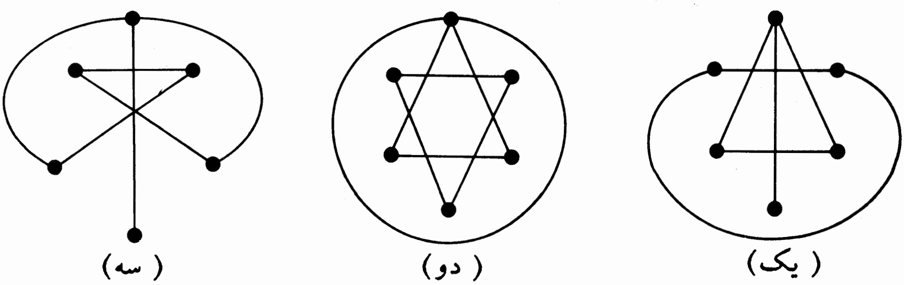
۵. ۱۷. گراف شکل ۵. ۳۱ را در نظر بگیرید. (آ) تمام مسیرها از رأس A به رأس H را بیابید؛



شکل ۵. ۳۱

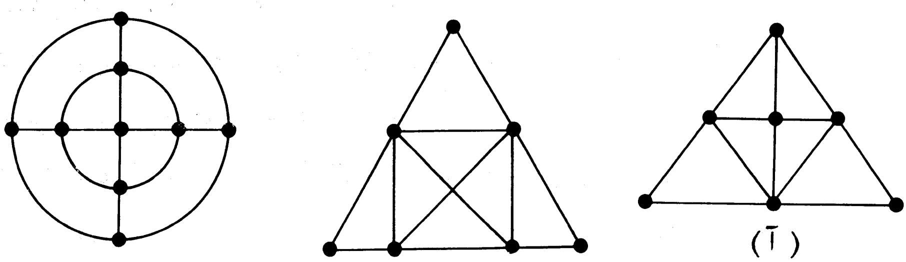
(ب) قطر گراف را بیابید؛ (پ) درجهٔ هر رأس را پیدا کنید؛ (ت) چه رئوسی نقاط بریدگی اند؟ (ث) ضلع e در گراف همبند G یک پل نام دارد اگر $G-e$ ، یعنی زیر گراف حاصل از G با حذف ضلع e ، ناهمبند باشد. چه اضلاعی پل می باشند؟

۵. ۱۸. از چند گرافهای شکل ۵. ۳۲ کدامها (آ) همبند، (ب) فارغ از خفت (یعنی‌بدون خفت)، (پ) گراف می باشند؟



شکل ۵. ۳۲

۵. ۱۹. از چند گرافهای شکل ۵. ۳۳ کدامها قابل عبورند؟ اگر چند گراف قابل عبور بود، یک جادهٔ قابل عبور بیابید.



(آ) (بـ) (پـ)

شکل ۵. ۳۳

۵. ۲۰. گرافهای (آ) K_7 ، (بـ) $K_{2,6}$ ، (پـ) $K_{3,4}$ را رسم کنید.

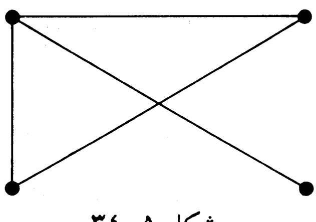
۵. ۲۱. جمیع درختهای دارای هفت رأس را رسم کنید.

۵. ۲۲. قطر یک گراف دوبخشی تام را معین کنید.

۵. ۲۳. نشان دهید که هر درخت یک گراف دو بخشی است.

۵. ۲۴. دو گراف 3-منتظم و دارای هشت رأس را رسم کنید.

۵. ۲۵. ماتریس مجاور A و ماتریس وقوع M گراف شکل ۵. ۳۴ را بیابید.



شکل ۵. ۳۴

۵. ۲۶. فرض کنید گراف G دو بخشی باشد. نشان دهید که می توان رئوس G را طوری مرتب کرد که ماتریس مجاورش A به شکل زیر باشد:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

۵. ۲۷. تمام گرافهای همبند با چهار رأس را بیابید.

۵. ۲۸. دو مرحلهٔ زیر را روی گراف G در نظر بگیرید: (۱) حذف یک ضلع؛ (۲) حذف یک رأس و تمام اضلاع ماربر آن. نشان دهید که هر زیر گراف گراف

متناهی G را می توان با دنباله ای مرکب از این دو مرحله به دست آورد.

۵. ۲۹. ثابت کنید هر گراف G را می توان با انتخاب رابطهٔ هم ارزی مناسب بر رئوس G به زیر گرافهای همبند از هم جدای ماکزیمال افراز کرد.

۵. ۳۰. چند گراف نظیر هر یک از ماتریسهای مجاور زیر را رسم کنید:

(آ) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ (ب) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

۵. ۳۱. ثابت کنید یک درخت متناهی (با دست کم یک ضلع) دست کم دورأس از درجهٔ ۱ دارد.

۵. ۳۲. فرض کنید G یک گراف همبند باشد. ثابت کنید

(آ) هرگاه G شامل دور C باشد که حاوی یک ضلع مانند e است، آنگاه $G-e$ هنوز همبند است؛

(ب) هرگاه $e = \{u, v\}$ یک ضلع باشد به طوری که $G-e$ ناهمبند است، آنگاه u و v متعلق به مؤلفه های مختلف $G-e$ می باشند.

۵. ۳۳. ثابت کنید یک گراف همبند با n رأس باید دست کم $n-1$ ضلع داشته باشد.

۵. ۳٤. از درختهای شکل ۵. ۱۱ کدام دو تا همانریخت اند؟

۵. ۳۵. فرض کنید گرافهای G و G^* همانریخت باشند. نشان دهید G قابل عبور است اگر و فقط اگر G^* قابل عبور باشد.

۵. ۳٦. فرض کنید گرافهای G و G^* غیر یکریخت ولی دارای ماتریس اضلاع B یکسان باشند. نشان دهید یکی از این گرافها را می توان فقط با افزودن رئوس تنها از دیگری به دست آورد.

۵. ۳۷. فرض کنید G گرافی بدون ضلع $e = \{v_r, v_s\}$ باشد. همچنین، با افزودن e به G به گراف $H = G + e$ دست می یابیم. و نیز $C = (c_{ij})$ و $D = (d_{ij})$ به ترتیب ماتریسهای همبندی G و H باشند.

(آ) فرض کنید $c_{rs} = 1$؛ یعنی، G شامل یک مسیر از v_r به v_s باشد. ثابت

کنید $D = C$ و H حاوی یک دور شامل e می‌باشد.

(ب) فرض کنید $c_{rs} = 0$ ؛ یعنی، v_r و v_s در G به هم مرتبط نیستند. ثابت کنید

(یک) $d_{ij} = 1$ اگر و فقط اگر $c_{ij} = 1$ یا $c_{ir} = c_{sj} = 1$ ؛

(دو) هرگاه G فارغ از دور باشد، آنگاه H فارغ از دور است.

مسائل برنامه نویسی کامپیوتر

در مسائل ۵. ۳۸ تا ۵. ۴۰ فرض کنید G یک گراف با شش رأس $v_1, v_2, \ldots, v_6$ و هفت ضلع باشد. همچنین B ماتریس اضلاع 7×2 گراف G باشد. (به یاد آورید که هر سطر B نشانگر ضلعی از G است؛ مثلاً، سطر $(3,4)$ نشانگر ضلع $\{v_3, v_4\}$ می باشد.) فرض کنید B روی یک دسته کارت پانچ شده باشد.

۵. ۳۸. یک برنامه بنویسید که درجهٔ هر رأس G را چاپ کند.

۵. ۳۹. یک برنامه بنویسید که ماتریس مجاور 6×6 ، A از G را چاپ کند.

۵. ۴۰. یک برنامه بنویسید که همبند بودن یا نبودن G را معین سازد. (راهنمایی. از مسئلهٔ ۵. ۳۹ و قضیهٔ ۵. ۵ استفاده کنید.)

سه برنامهٔ فوق را باداده های زیر امتحان کنید:

(یک) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 5 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ؛ (دو) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ؛

(سه) $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 6 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

در مسائل ۵. ۴۱ و ۵. ۴۲ فرض کنید A ماتریس مجاور $m \times m$ گراف H بوده و A و m پارامترهای ورودی باشند.

۵ . ۴۱. یک زیر برنامه به نام DEG بنویسید که DEG درجات رئوس H را حساب کند.

۵ . ۴۲. یک زیر برنامه به نام CON بنویسید که CON همبند بودن یا نبودن H را معین سازد.

۵ . ۴۳. فرض کنید C ماتریس همبندی $m \times m$ گراف G بوده و ضلع $\{v_r, v_s\}$ به G افزوده شده باشد. یک زیر برنامه به نام CONMAT بنویسید که CONMAT ماتریس همبندی $m \times m$ جدید را حساب کند (راهنمایی. از مسئلهٔ ۵ . ۳۷ استفاده کنید.)

در مسائل ۵ . ۴۴ تا ۵ . ۴۷ فرض کنید B ماتریس اضلاع $n \times 2$ ، گراف G با m رأس بوده و B ، n ، و m پارامترهای ورودی باشند.

۵ . ۴۴. یک زیر برنامه به نام DEGREE بنویسید که DEGREE درجهٔ هر یک از m رأس را حساب کند.

۵ . ۴۵. یک زیر برنامه به نام ADJ بنویسید که ADJ ماتریس مجاور $m \times m$ را حساب کند.

۵ . ۴۶. یک زیر برنامه به نام CNMTX بنویسید که CNMTX ماتریس همبندی G را حساب کند. (راهنمایی. با استفاده از مسئلهٔ ۵ . ۴۳ در هر مرحله، مرتب ضلع اضافه کنید.)

۵ . ۴۷. یک زیر برنامه به نام CONCT بنویسید که CONCT همبند بودن یا نبودن G را معین کند. (راهنمایی. از مسئلهٔ ۵ . ۴۶ استفاده کنید یا مسائل ۵ . ۴۵ و ۵ . ۴۲ را به کار بندید.)

جواب مسائل تکمیلی

۵ . ۱۶. (آ) $\operatorname{diam}(G) = 2$ ؛ (ب) $\operatorname{diam}(G) = 3$

۵ . ۱۷. (آ) هشت مسیر وجود دارد:

(A, B, G, C, H) (A, B, F, G, C, H) (A, B, G, C, D, H) (A, B, F, G, C, D, H)

(A, E, B, G, C, H) (A, E, B, F, G, C, H) (A, E, B, G, C, D, H) (A, E, B, F, G, C, D, H)

(بـ) 4 ؛ (پـ) $\deg(B) = 4,\ \deg(C) = \deg(G) = 3$ ، بقیه دارای درجهٔ 2 اند ؛ (تـ) B ، C ، و G ؛ (ثـ) $\{C, G\}$.

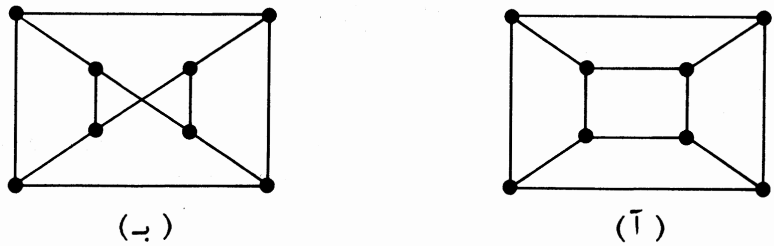
۵ . ۱۸ . (آ) (سه)، (بـ) (یک) و (سه)، (پـ) (سه).

۵ . ۱۹ . (آ) و (بـ). یک جادهٔ قابل عبور باید در یک رأس فرد شروع شود زیرا (آ) و (بـ) دارای دو رأس فرداند .

۵ . ۲۱ . تعداد این نوع درختها ده تاست.

۵ . ۲۲ . $\mathrm{Diam}(K_{1,1}) = 1$ ؛ بقیه دارای قطر 2 می باشند .

۵ . ۲٤ . دو گراف 3-منتظم شکل ۵ . ۳۵ یکریخت نیستند زیرا (بـ) دارای یک 5-دور است ولی (آ) دارای این خاصیت نیست.

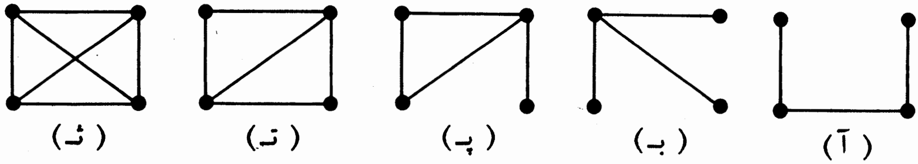


شکل ۵ . ۳۵

۵ . ۲۵ .
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۵ . ۲٦ . فرض کنید M و N دو مجموعهٔ از هم جدا از رئوس باشند که گراف دو بخشی را معین می کنند . ابتدا رئوس در M را مرتب کرده و سپس رئوس در N را مرتب نمایید .

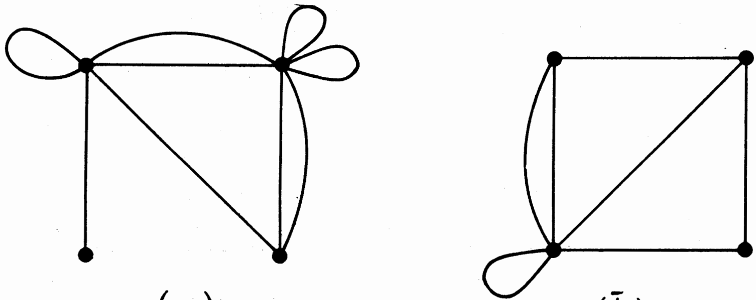
۵ . ۲۷ . همانطور که شکل ۵ . ۳٦ نشان می دهد ، از این گرافها پنج تا وجود دارد .



شکل ۵ . ۳٦

۵ . ۲۹. فرض کنید $u \sim v$ اگر $u = v$ یا اگر یک مسیر از u به v موجود باشد. نشان دهید که $\sim$ یک رابطهٔ هم ارزی است.

۵ . ۳۰.



(آ) (بـ)

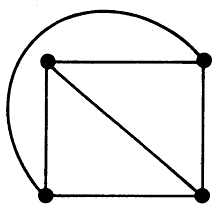
شکل ۵ . ۳۷

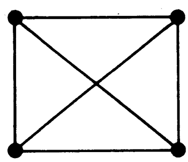
۵ . ۳٤. دومی و سومی.

۶
گرافهای مسطح، رنگ آمیزی، درختها

۱.۶ آشنایی

یک گراف یا چند گراف را که بتوان در صفحه طوری رسم کرد که اضلاعش متقاطع نباشند مسطح نام داده اند. با آنکه گراف تام با چهار رأس K_4 را معمولاً با اضلاع متقاطع مثل شکل ۱.۶ (آ) می کشند، می توان آن را مانند شکل ۱.۶ (بـ) بدون تقاطع اضلاع رسم کرد. لذا، K_4 یک


(بـ)


(آ)

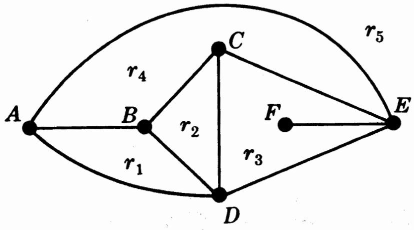
شکل ۱.۶

گراف مسطح می باشد. در این فصل گرافهای مسطح را بررسی کرده و طرز ارتباطشان را با مسئلهٔ معروف چهاررنگ نشان می دهیم. همچنین ردهٔ مهمی از گرافهای مسطح به نام درختها را مطالعه خواهیم کرد.

۲.۶ نقشه ها، ناحیه ها

هر نمایش مسطح خاص از یک چند گراف مسطح متناهی یک نقشه نام دارد. گوییم

یک نقشه همبند است اگر چند گراف زمینهٔ آن همبند باشد. یک نقشه صفحه را به دو ناحیهٔ مختلف تقسیم می کند. به عنوان مثال، نقشهٔ شکل ۶ . ۲



شکل ۶ . ۲

با شش رأس و نه ضلع صفحه را به پنج ناحیه تقسیم می کند. ملاحظه می کنیم که چهارناحیه کراندارند ولی ناحیهٔ پنجم (خارج نمودار) بی کران می باشد. لذا، اگر فرض کنیم نقشهٔ ما به جای تمام صفحه مشمول مستطیل بزرگی است، به کلیت خللی وارد نشده است.

توجه کنید که مرز هر ناحیهٔ یک نقشه از اضلاع تشکیل شده است. گاهی اضلاع یک دور تشکیل می دهند و گاهی چنین نیست. مثلاً، در شکل ۶ . ۲ مرزهای جمیع نواحی دوراند جز در مورد r_3 . ولی اگر حول r_3 و مثلاً از رأس C خلاف عقربه های ساعت بگردیم، راه بستهٔ

$$(C, D, E, F, E, C)$$

به دست می آید که در آن ضلع $\{E, F\}$ دوبار رخ خواهد داد. منظور از درجهٔ ناحیهٔ r ، که به صورت $\deg(r)$ نوشته می شود، یعنی طول دور یا راه بسته ای که مرز r می باشد. توجه می کنیم که هر ضلع یا مرز دو ناحیه است یا مشمول ناحیه ای ودر هر راه در امتدادمرز ناحیه دوبار ظاهر می شود. لذا، قضیه ای برای نواحی داریم که شبیه قضیهٔ ۵ . ۱ برای رئوس می باشد.

قضیهٔ ۶ . ۱ . مجموع درجات نواحی یک نقشه دو برابر تعداد اضلاع می باشد.

درجات نواحی شکل ۶ . ۲ عبارتند از

$\deg(r_1) = 3,\ \deg(r_2) = 3,\ \deg(r_3) = 5,\ \deg(r_4) = 4,\ \deg(r_5) = 3$

مجموع درجات 18 است که، طبق انتظار، دو برابر تعداد اضلاع می باشد.

برای تسهیل در نمادگذاری، رئوس یک نقشه را با نقاط یا دوایر کوچک می کشیم یا فرض می کنیم هر اشتراک خطوط یا منحنیها در صفحه رأس می باشد.

۶ . ۳ فرمول اویلر

اویلر فرمولی به دست آورد که تعداد V رئوس، تعداد E اضلاع، و تعداد R نواحی هر نقشهٔ همبند را به هم ربط می دهد.

قضیهٔ ۶ . ۲ (اویلر). $V - E + R = 2$.

تأکید می کنیم که نمودار زمینهٔ نقشه باید همبند باشد والاّ فرمول برقرار نیست. در شکل ۶ . ۲ داریم $V = 6$ ، $E = 9$ ، و $R = 5$ و، همانطور که از فرمول اویلر انتظار می رود،

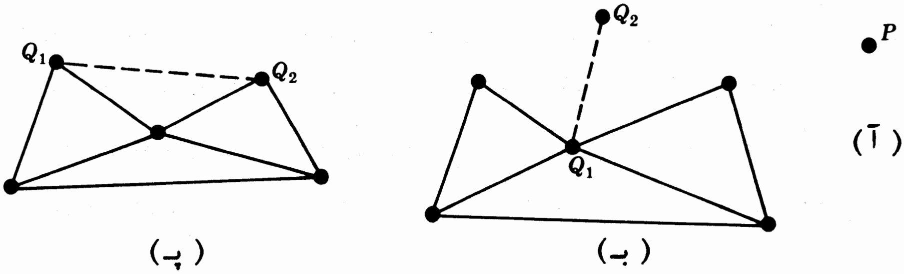
$$V - E + R = 6 - 9 + 5 = 2$$

برهان فرمول اویلر. فرض کنیم M یک نقشهٔ همبند باشد. همچنین M از تنها رأس P مثل شکل ۶ . ۳ (آ) تشکیل شده باشد. در این صورت، $V = 1$ و $E = 0$ ، و یک ناحیه وجود دارد؛ یعنی، $R = 1$. لذا، در این حالت داریم $V - E + R = 2$.
در غیر این صورت، M را می توان از تنها یک رأس با دو مرحلهٔ زیر ساخت:

(۱) رأس جدید Q_2 را افزوده و آن را به رأس موجود Q_1 به وسیلهٔ یک ضلع که هیچ ضلع موجود را قطع نکند مثل شکل ۶ . ۳ (ب) وصل می کنیم؛

(۲) دو رأس موجود Q_1 و Q_2 را به ضلع e که هیچ ضلع موجود را قطع نکند مثل شکل ۶ . ۳ (پ) وصل می کنیم.

اولین عمل مقدار $V - E + R$ را تغییر نمی دهد زیرا هر دوی V و E به اندازهٔ 1 اضافه شده اند، ولی تعداد R نواحی تغییر نکرده است. عمل دوم نیز



شکل ۶.۳

مقدار $V-E+R$ را تغییر نمی دهد زیرا V تغییر نکرده است، E یکی زیاد شده است، و می توان نشان داد که تعداد R نواحی نیز یکی افزوده شده است. لذا، M باید همان مقدار $V-E+R$ را در زمانی داشته باشد که نقشه از یک رأس تشکیل شده بود؛ یعنی، $V-E+R=2$ و قضیه به اثبات می رسد.

فرض کنیم G یک چند گراف مسطح همبند با سه رأس یا بیشتر باشد؛ پس G نه K_1 است نه K_2. فرض کنیم M یک نمایش مسطح G باشد. به آسانی معلوم می شود که (۱) یک ناحیه از M فقط وقتی می تواند درجهٔ 1 داشته باشد که مرزش یک خفت باشد، و (۲) یک ناحیه از M فقط وقتی می تواند دارای درجهٔ 2 باشد که مرزش از دو ضلع چند گانه متشکل باشد. بنابراین، هرگاه G یک گراف باشد (نه یک چند گراف)، آنگاه هر ناحیه از M باید از درجهٔ 3 یا بیشتر باشد. از این نکته و فرمول اویلر در اثبات نتیجهٔ زیر راجع به گرافهای مسطح استفاده خواهد شد.

قضیهٔ ۶.۳. هرگاه G یک گراف مسطح همبند با p رأس و q ضلع باشد که $p \geq 3$، آنگاه $q \leq 3p-6$.

توجه کنید که قضیه برای K_1 که در آن $p=1$ و $q=0$ درست نیست، و در مورد K_2 که در آن $p=2$ و $q=1$ نیز درست نخواهد بود.

برهان. فرض کنیم r تعداد نواحی یک نمایش مسطح G باشد. بنابر فرمول اویلر،

$$p - q + r = 2$$

اما مجموع درجات نواحی طبق قضیهٔ ۶ . ۱ مساوی $2q$ است. ولی هر ناحیه از درجهٔ 3 یا بیشتر است؛ پس

$$2q \geqq 3r$$

لذا، $r \leqq 2q/3$. با گذاردن این در فرمول اویلر داریم

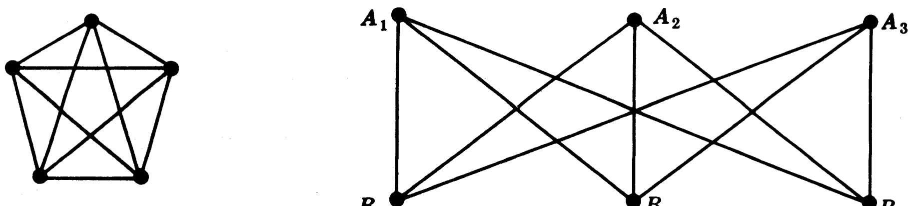
$$2 = p - q + r \leqq p - q + 2q/3 \quad \text{یا} \quad 2 \leqq p - q/3$$

با ضرب نامساوی اخیر در 3 داریم $6 \leqq 3p - q$ که نتیجهٔ مطلوب را به دست خواهد داد.

۶ . ۴ گرافهای نامسطح، قضیهٔ کوراتسکی (KURATOWSKI)

حال دو گراف نامسطح مثال می زنیم. ابتدا گراف سودمندی را در نظر می گیریم؛ یعنی، می خواهیم سه خانهٔ A_1, A_2, A_3 را به لوله‌های آب، گاز، و برق B_1, B_2, B_3 طبق شکل ۶ . ۴ (آ) وصل نماییم. ملاحظه می کنیم که این گراف $K_{3,3}$ است و دارای $p = 6$ رأس و $q = 9$ ضلع است. فرض کنیم گراف مسطح باشد. طبق فرمول اویلر، یک نمایش مسطح دارای $r = 5$ ناحیه است. ملاحظه می کنیم هیچ سه رأس به یکدیگر وصل نشده اند؛ پس درجهٔ هر ناحیه باید 4 یا بیشتر باشد و لذا مجموع درجات نواحی باید 20 یا بیشتر باشد. بنا بر قضیهٔ ۶ . ۱، گراف باید 10 ضلع یا بیشتر داشته باشد. این امر با اینکه گراف $q = 9$ ضلع دارد در تضاد می باشد. لذا، گراف سودمندی $K_{3,3}$ نامسطح می باشد.

حال گراف ستاره در شکل ۶ . ۴ (ب) را در نظر می گیریم. این گراف



(ب) K_5

(آ) $K_{3,3}$

شکل ۶ . ۴

تام K_5 با $p = 5$ رأس و $q = 10$ ضلع است. هرگاه گراف مسطح باشد، آنگاه، بنا بر قضیهٔ ۶ . ۳،

$$10 = q \leq 3p - 6 = 15 - 6 = 9$$

که ناممکن است. لذا، K_5 نامسطح می باشد.

سالهای زیادی است که ریاضیدانان برای توصیف گرافهای مسطح و نامسطح تلاش می کنند. این مسئله بالأخره در سال ۱۹۳۰ توسط کا. کوراتسکی، ریاضیدان لهستانی، حل شد. برهان این امر، که ذیلاً بیان شده، از حوصلهٔ این کتاب خارج است.

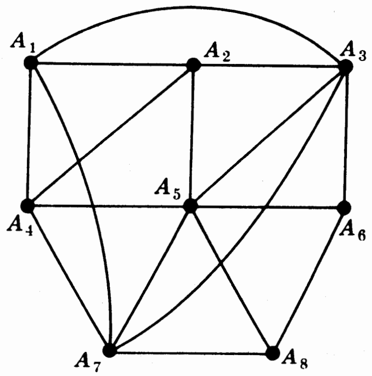
قضیهٔ ۶ . ٤ (کوراتسکی). یک گراف نامسطح است اگر و فقط اگر شامل یک زیر گراف همانریخت با $K_{3,3}$ یا K_5 باشد.

۶ . ۵ گرافهای رنگ شده

یک رنگ آمیزی رأسی یا فقط رنگ آمیزی گراف G عبارت است از انتساب رنگهایی به رئوس G به طوری که رئوس مجاور رنگهای مختلفی داشته باشند. گوییم G ، n-رنگ پذیر است اگر یک رنگ آمیزی از G باشد که در آن از n رنگ استفاده شده است. کمترین تعداد رنگ لازم برای رنگ آمیزی G عدد فامی G نام دارد و با $\chi(G)$ نموده می شود.

ما برای رنگ آمیزی گراف G الگوریتمی ارائه می دهیم که توسط ولچ (Welch) و پاول(Powell) ابداع شده است. ابتدا رئوس G را برحسب نزول درجات مرتب می کنیم. (این ترتیب لزوماً منحصر به فرد نیست زیرا بعضی از رئوس ممکن است درجهٔ یکسان داشته باشند.) سپس از اولین رنگ برای رنگ آمیزی اولین رأس و هر رأسی که مجاور یک رأس رنگ شدهٔ قبلی (با همان رنگ) نیست استفاده می کنیم. این عمل را با استفاده از دومین رنگ و رئوس رنگ نشدهٔ بعدی تکرار می کنیم و سپس به سومین رنگ می پردازیم و همین طور ادامه می دهیم تا تمام رئوس رنگ شوند.

حال، با استفاده از الگوریتم ولچ - پاول، نمودار G شکل ۶ . ۵



شکل ۶. ۵

را رنگ می زنیم. رئوس را به ترتیب نزول درجات مرتب کرده و دنبالهٔ

$$A_5, A_3, A_7, A_1, A_2, A_4, A_6, A_8$$

را به دست می آوریم. اولین رنگ برای رنگ آمیزی رئوس A_5 و A_1 به کار می رود؛ دومین رنگ برای رنگ آمیزی رئوس A_3 ، A_4 ، و A_8 به کار می رود؛ و سومین رنگ برای رنگ آمیزی رئوس A_7 ، A_2 ، و A_6 به کار خواهد رفت. لذا، G ، 3-رنگ پذیر می باشد. توجه کنید که G ، 2-رنگ پذیر نیست زیرا A_1 ، A_2 ، و A_3 باید رنگهای متفاوتی داشته باشند. بنابراین، $\chi(G) = 3$.

برای تعیین n-رنگ پذیری یک گراف دلخواه راه ساده ای موجود نیست. ولی قضیهٔ زیر (که در مسئلهٔ ۶. ۶ ثابت شده است) توصیف ساده ای از گرافهای 2-رنگ پذیر به دست خواهد داد.

قضیهٔ ۶. ۵. احکام زیر برای گراف G هم ارزند:

(یک) G ، 2-رنگ پذیر است؛

(دو) G دو بخشی است؛

(سه) هر دور از G دارای طول زوج می باشد.

واضح است که گراف تام K_n با n رأس نیاز به n رنگ دارد زیرا هر رأس مجاور

هر رأس دیگر می باشد. از آن سو، گرافهای مسطح با هر تعداد رأس دارای خاصیت زیر می باشد. (برای برهان، ر.ک. مسئلهٔ ۶.۸.)

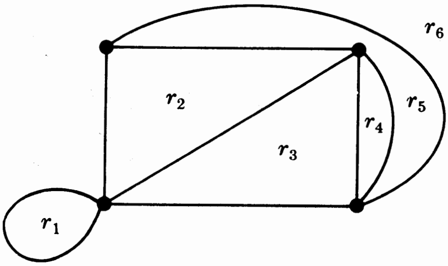
قضیهٔ ۶.۶. گراف مسطح G ، 5-رنگ پذیر است.

در واقع، ریاضیدانان حدس می زنند که گرافهای مسطح 4-رنگ پذیرند زیرا هر گراف مسطح معلوم 4-رنگ پذیر می باشد. این حدس هم ارز قضیهٔ معروف چهار رنگ است که در بخش بعد مطرح خواهد شد.

۶.۶ قضیهٔ چهاررنگ

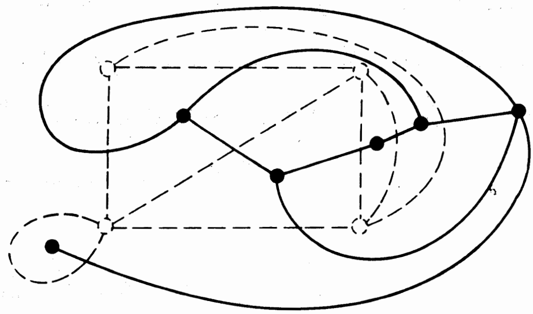
نقشهٔ M (یعنی، یک نمایش مسطح یک چند گراف مسطح متناهی) را در نظر می گیریم. گوییم دو ناحیه از M مجاورند اگر دارای یک ضلع مشترک باشند. به عنوان مثال، نواحی r_2 و r_5 در شکل ۶.۶ (آ) مجاورند ولی نواحی r_3 و r_5 چنین نیستند. منظور از رنگ آمیزی M یعنی انتساب یک رنگ به هر ناحیهٔ M به طوری که نواحی مجاور رنگهای متفاوتی داشته باشند. نقشهٔ M ، n-رنگ پذیر است اگر یک رنگ آمیزی از M باشد که در آن n رنگ به کار رفته باشد. نقشهٔ شکل ۶.۶ (آ)، 3-رنگ پذیر است زیرا نواحی آن را می توان به صورت زیر رنگ کرد:

r_1 قرمز، r_2 سفید، r_3 قرمز، r_4 سفید، r_5 قرمز، r_6 آبی



(آ)

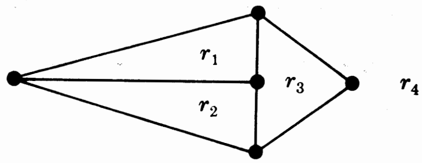
شکل ۶.۶



(ب)

ادامهٔ شکل ۶ . ۶

شکل ۶ . ۷ . نقشهٔ بسیار ساده ای را نشان می دهد که در هر رنگ آمیزی نیاز به چهاررنگ دارد.



شکل ۶ . ۷

به تشابه بین بحث فوق راجع به رنگ آمیزی نقشه ها و بحث پیشتر راجع به رنگ آمیزی گرافها توجه نمایید . در واقع، رنگ آمیزی نقشه ها هم ارز رنگ آمیزی رأسی گرافهای مسطح در پرتو مفهوم نقشهٔ دوگان است که ذیلاً تعریف شده است.

نقشهٔ M را در نظر می گیریم. در هر ناحیه از M یک نقطه اختیار می کنیم، و اگر دو ناحیه ضلع مشترک داشته باشند، نقاط نظیر را با یک منحنی مار بر ضلع مشترک به هم وصل می کنیم. این منحنیها را می توان طوری کشید که متقاطع نباشند . لذا، یک نقشهٔ جدید مانند M^* به نام دوگان M به دست می آید که هر رأس M^* نظیر درست یک ناحیه از M می باشد . شکل ۶ . ۶ (ب) دوگان نقشهٔ شکل ۶ . ۶ (آ) را نشان می دهد . می توان ثابت کرد که هر ناحیهٔ M^* درست یک رأس از M را شامل است و هر ضلع از M^* درست یکی از اضلاع M را قطع می کند و بالعکس. لذا ، M دوگان نقشهٔ M^* می باشد .

ملاحظه می کنیم که هر رنگ آمیزی از نواحی نقشهٔ M نظیر یک رنگ آمیزی رئوس نقشهٔ دوگان M^* می باشد. به عبارت دیگر، نقشهٔ M ، n-رنگ پذیر است اگر و فقط اگر گراف مسطح نقشهٔ دوگان M^* ، n-رنگ پذیر باشد. لذا، می توان قضیهٔ ۶.۶ را به صورت زیر مجدداً بیان کرد.

قضیهٔ ۶.۷. هر نقشهٔ M ، 5-رنگ پذیر است.

از آن سو، هیچ نقشه ای یافت نشده است که در هر رنگ آمیزی نیاز به پنج رنگ داشته باشد. این امر ریاضیدانان را به تلاش برای اثبات قضیهٔ معروف زیر کشانیده است.

قضیهٔ چهاررنگ. هرگاه نواحی نقشهٔ M طوری رنگ آمیزی شده باشند که نواحی مجاور رنگهای متفاوتی داشته باشند، آنگاه بیش از چهاررنگ لازم نخواهد بود.

همانطور که در بالا گفتیم، این قضیه را می توان به صورت زیر بیان مجدد کرد.

قضیهٔ چهاررنگ. هر گراف مسطح 4-(رأس)-رنگ پذیر است.

در سال ۱۹۷۶، اپل (Appel) و هاکن (Haken) برهانی از این قضیه را عرضه کردند که در آن از کامپیوتر برای تحلیل تقریباً 2000 گراف و مستلزم میلیونها حالت استفاده شده بود. چون برنامه های کامپیوتری طولانی و پیچیده و در نتیجه مستعد خطایند، برهان مزبور توسط افراد مختلفی در سراسر جهان امتحان شدند.

۶.۷ درختها

به یاد آورید که گراف G را نادوری یا فارغ از دور گوییم اگر شامل هیچ دوری نباشد. یک درخت گراف همبندی است که دارای دور نمی باشد. یک جنگل گرافی است که دارای دور نباشد؛ پس مؤلفه های همبند یک جنگل درخت می باشند. شکل

۵. ۱۱ در فصل قبل جمیع درختها با شش رأس را نشان می دهد. هر درخت مرکب از تنها یک رأس و بدون ضلع را درخت تباه شده می نامیم.

همانطور که قضیهٔ زیر نشان می دهد (که در مسئلهٔ ۶. ۱۵ ثابت شده است)، برای تعریف درخت چند راه هم ارز وجوددارد.

قضیهٔ ۶. ۸. فرض کنیم G یک گراف با بیش از یک رأس باشد. در این صورت، احکام زیر هم ارز می باشند:

(یک) G یک درخت است؛

(دو) هر جفت از رئوس درست با یک مسیر به هم مرتبطند؛

(سه) G همبند است ولی اگر یک ضلع را حذف کنیم، گراف حاصل همبندنیست؛

(چهار) G فارغ از دور است ولی اگر یک ضلع به گراف افزوده شود، گراف حاصل درست یک دور خواهد داشت.

در حالتی که گرافهایمان متناهی باشند، راههای دیگری نیز برای تعریف یک درخت وجود دارد.

قضیهٔ ۶. ۹. فرض کنیم G یک گراف متناهی با $n > 1$ رأس باشد. در این صورت، احکام زیر هم ارز می باشند:

(یک) G یک درخت است؛

(دو) G فارغ از دور بوده و دارای $n-1$ ضلع است؛

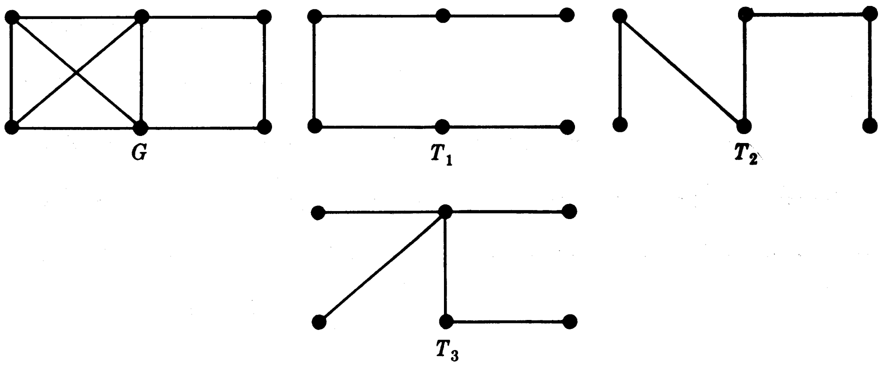
(سه) G همبند بوده و دارای $n-1$ ضلع است.

این قضیه به خصوص به ما می گوید که یک درخت متناهی با n رأس دارای $n-1$ ضلع می باشد. خاصیت دیگر درختها به قرار زیر است.

قضیهٔ ۶. ۱۰. درختها (و در نتیجه، جنگلها) 2_رنگ پذیرند.

لذا، درختها گرافهایی دوبخشی می باشند. عکس این مطلب درست نیست زیرا، مثلاً، گراف دوبخشی تام نامسطح $K_{3,3}$ یک درخت نیست.

زیر گراف T از گراف G را یک درخت پیمایش G نامیم اگر T درخت بوده و T شامل تمام رئوس G باشد. شکل ۸.۶ گراف G و درختهای پیمایش T_1 ، T_2 ، و T_3 گراف G را نشان می دهد.



شکل ۸.۶

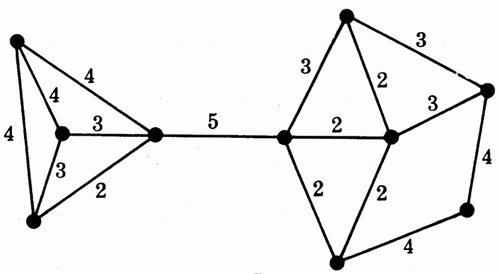
هرگاه G گرافی باشد که اضلاعش دارای طول باشند، آنگاه درخت پیمایش مینیمال G یک درخت پیمایش G است که مجموع طول اضلاعش در بین تمام درختهای پیمایش G مینیمم باشد.

برای یافتن یک درخت پیمایش مینیمال گراف بر چسب دار همبند متناهی G با m رأس دوالگوریتم ارائه می دهیم. ابتدا اضلاع G را طبق طولهای نزولی مرتب می کنیم. سپس اضلاعی که گراف را ناهمبند نسازند یکی یکی حذف می کنیم تا $m-1$ ضلع باقی بماند. این اضلاع یک درخت پیمایش مینیمال G را تشکیل خواهند داد. این الگوریتم به دانستن اینکه گراف ما همبند است یا نه وابسته است که در حالت کلی به آسانی قابل برنامه ریزی نیست.

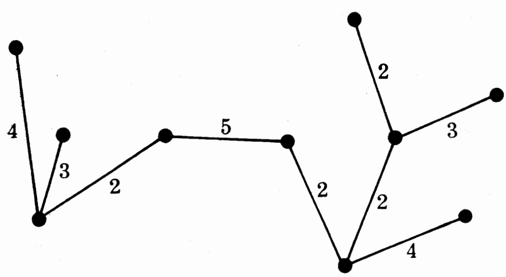
الگوریتم دوم با مرتب کردن اضلاع بر حسب طولهای صعودی شروع می شود. سپس با شروع از رئوس G متوالیاً ضلع می افزاییم به طوری که هر ضلع به طول

مینیمال بوده و تشکیل دور ندهد. پس از افزودن $m-1$ ضلع به یک درخت پیمایش مینیمال دست می یابیم. بنابر مسئلهٔ ۵. ۳۷، می توان هر وقت درایهٔ rs در ماتریس همبندی صفر بود ضلع $\{v_r, v_s\}$ را افزود. این الگوریتم را می توان با داشتن کامپیوتر که بتوان ماتریس همبندی را پس از افزودن هر ضلع تعقیب کرد به طرز مؤثری برنامه ریزی نمود.

تأکید می کنیم که چون بعضی از اضلاع دارای طول یکسانند، می توان درختهای پیمایش مینیمال مختلف به دست آورد. شکل ۶. ۹ گراف همبند بر چسب دار G و درخت پیمایش مینیمال M را به ما می دهد.



G



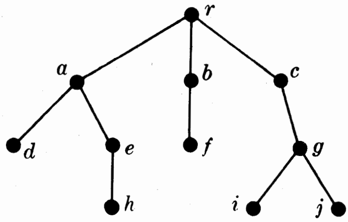
M

شکل ۶. ۹

۶. ۸ درختان ریشه دار

درخت ریشه دار R از یک گراف درختی همراه با یک رأس مشخص r به نام ریشهٔ درخت تشکیل شده است. چون از r به هر رأس دیگر v یک مسیر منحصر به فرد وجود دارد، این به اضلاع R جهت خواهد داد. طول مسیر از ریشهٔ r به v را سطح یا عمق v می‌نامند. رئوس با درجهٔ یک غیر از r را برگهای درخت ریشه دار می نامند.

یک مسیر جهتدار از یک رأس به یک برگ را یک شاخه می نامیم. شکل ٦. ١٠ یک درخت ریشه دار را نشان می دهد؛

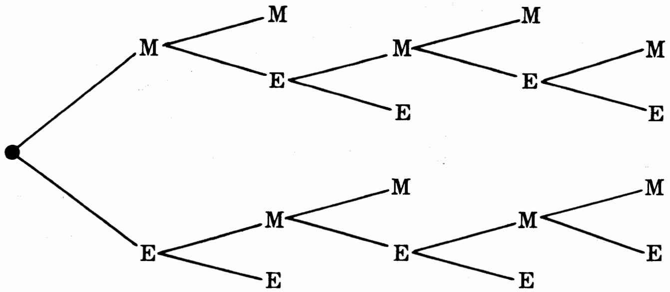


شکل ٦. ١٠

ریشهٔ r در بالای درخت می باشد. این درخت دارای پنج برگ d ، f ، h ، i ، و j است. سطح a مساوی 1 ، سطح f مساوی 2 ، و سطح j برابر 3 می باشد. تأکید می کنیم که هر درخت را می توان با انتخاب یکی از رئوس به نام ریشه به یک درخت ریشه دار تبدیل کرد.

چون یک درخت ریشه دار جهتی به اضلاع می دهد، گوییم رأس u قبل از رأس v است یا v بعد از u است اگر مسیر از ریشهٔ r تا v شامل u باشد. به خصوص، گوییم v بلافاصله بعد از u است اگر v بعد از u و مجاور u باشد. در شکل ٦. ١٠ رأس j بعد از c است ولی بلافاصله بعد از g می باشد. ملاحظه می کنیم که هر رأس غیر از ریشهٔ r بلافاصله بعد از یک رأس منحصر به فرد است ولی بلافاصله بعد از آن ممکن است بیش از یک رأس باشد؛ رئوس i و j هر دو بلافاصله بعد از g می باشند.

یک درخت ریشه دار طرح مفیدی برای شمارش تمام حالات منطقی یک دنباله از پیشامدها است که هر پیشامد بتواند به تعدادی متناهی راه رخ دهد. به عنوان مثال، فرض کنیم دو مرد به نامهای مارک و اریک مسابقهٔ تنیس بدهند به این نحو که اگر کسی دوبار متوالی یا جمعاً سه بار ببرد برنده باشد. درخت ریشه دار شکل ٦. ١١ طرق مختلفی را که بازی می تواند جریان یابد نشان می دهد. ملاحظه می کنیم که ده برگ داریم که نظیر ده راهی است که بازی می تواند جریان یابد:



شکل ۶ . ۱۱

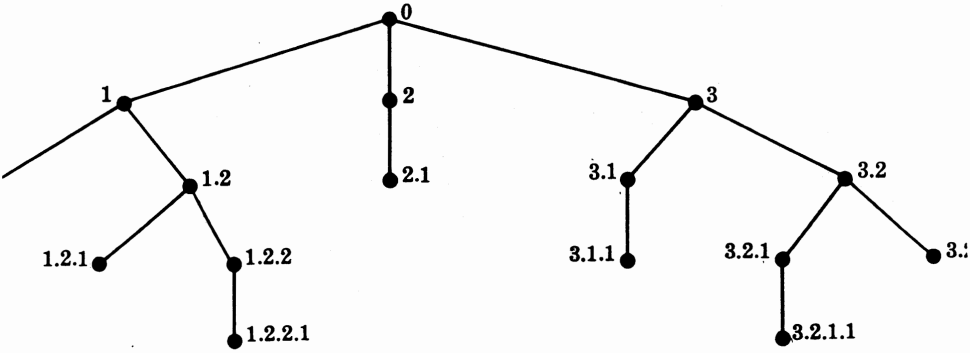
MM, MEMM, MEMEM, MEMEE, MEE, EMM, EMEMM, EMEME,
EMEE, EE

به طور مشخص، مسیر از ریشه به برگ مشخص می کند که چه کسی کدام بازی را برده است.

۶ . ۹ درختان ریشه دار مرتب

درخت ریشه دار R را در نظر می گیریم که در آن اضلاعی که هر رأس را ترک می کنند مرتب شده باشند. در این صورت، مفهوم درخت ریشه دار مرتب را خواهیم داشت. رئوس یک چنین درخت را می توان به طور اصولی به صورت زیر بر چسب زد: ابتدا به ریشهٔ r عدد 0 را نسبت می دهیم. سپس اعداد $1, 2, 3, \ldots$ را به رئوس بلافاصله بعد از r بر طبق ترتیب اضلاع منتسب می کنیم. و سپس بقیهٔ رئوس را به صورت زیر برچسب می زنیم. هر گاه a بر چسب رأس v باشد، آنگاه $a.1, a.2, \ldots$ به رئوس بلافاصله بعد از v طبق ترتیب اضلاع منتسب می شوند. این دستگاه انتساب برچسب در شکل ۶ . ۱۲ توضیح داده شده است که در آن اضلاع بر طبق ترتیبشان از چپ به راست رسم شده اند.

ملاحظه می کنیم که تعداد نقاط اعشاری در هر بر چسب یکی کمتر از سطح رأس است. ما این دستگاه انتساب بر چسب را دستگاه نشانی عمومی برای یک درخت ریشه دار مرتب می نامیم.



شکل ٦. ١٢

دستگاه نشانی عمومی روش مهمی برای توصیف خطی (یا ذخیرهٔ) یک درخت ریشه دار مرتب به دست می دهد. به طور مشخص، اگر نشانیهای a و b داده شده باشند، قرار می دهیم $a < b$ اگر a یک قطعهٔ شروع b باشد؛ یعنی، اگر $b = a.c$ ، یا اگر اعداد صحیح مثبتی مانند m و n با $m < n$ باشند به طوری که

$$b = \text{r.n.t} \qquad \text{و} \qquad a = \text{r.m.s}$$

این ترتیب را ترتیب قاموسی نامند زیرا شبیه ترتیب لغات در یک فرهنگ می باشد. به عنوان مثال، نشانیهای شکل ٦. ١٢ به صورت زیر به طور خطی مرتب شده اند:

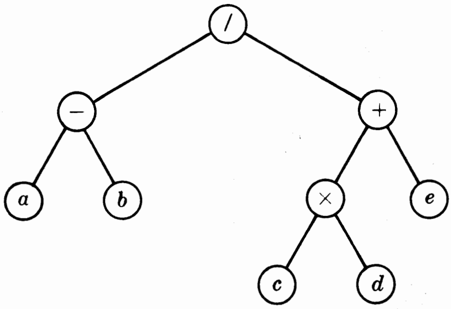
0	1.2.1	2.1	3.2
1	1.2.2	3	3.2.1
1.1	1.2.2.1	3.1	3.2.1.1
1.2	2	3.1.1	3.2.2

این ترتیب قاموسی با ترتیب حاصل از حرکت از شاخهٔ درخت سمت چپ به پایین، سپس در شاخهٔ بعد سمت راست، سپس شاخهٔ دیگر سمت راست، و غیره یکی می باشد.

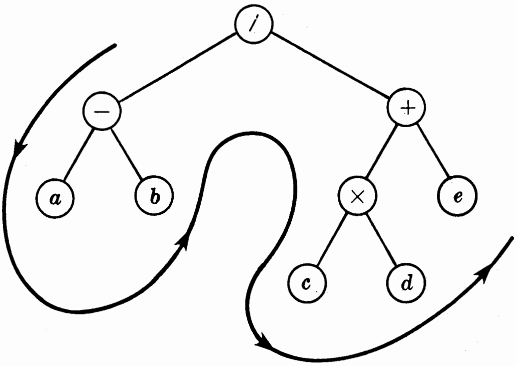
هر عبارت جبری شامل اعمال دوتایی (مثلاً، جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم) را می توان با یک درخت ریشه دار مرتب نمایش داد. به عنوان مثال، شکل ٦. ١٣ (آ) نمایش عبارت حسابی

$$(a-b)/((c \times d)+e) \qquad (۱.۶)$$

می باشد. توجه کنید که متغیرهای این عبارت، یعنی a ، b ، c ، d ،و e ، به صورت برگ ظاهر می شوند و اعمال به صورت سایر رئوس ظاهر خواهند شد. درخت باید مرتب باشد زیرا $a-b$ و $b-a$ درخت واحدی به دست می دهند ولی نه درخت مرتب واحدی.



(آ)



(ب)

شکل ۶. ۱۳

لوکاسیویچ (Lukasiewicz)، ریاضیدان لهستانی، دید که با گذاردن علامت عمل دوتایی پیش از شناسه هایش، مثلاً

$$+ab \text{ به جای } a+b \quad \text{و} \quad /cd \text{ به جای } c/d$$

دیگر لازم نیست از پرانتز استفاده شود. این نماد را نماد لهستانی به شکل پیشوند می نامند. (به همین نحو، می توان علامت را بعد از شناسه ها نیز قرار داد و به آن نماد لهستانی به شکل پسوند می نامند.) با نوشتن (۶. ۱) به شکل پیشوند به دست می آوریم

$$/-ab+\times cde$$

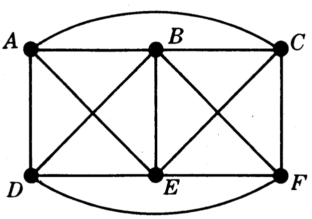
ملاحظه می کنیم که این دقیقاً ترتیب قاموسی رئوس در درخت مربوطه است که می توان آن را با پویش درختی مثل شکل ٦. ۱۳ (بـ) به دست آورد.

مسائل حل شده

گرافهای مسطح، نقشه ها

٦. ۱. نمایش مسطح هر یک از گرافهای شکل ٦. ١٤ را در صورت امکان بکشید.

(بـ) (آ)



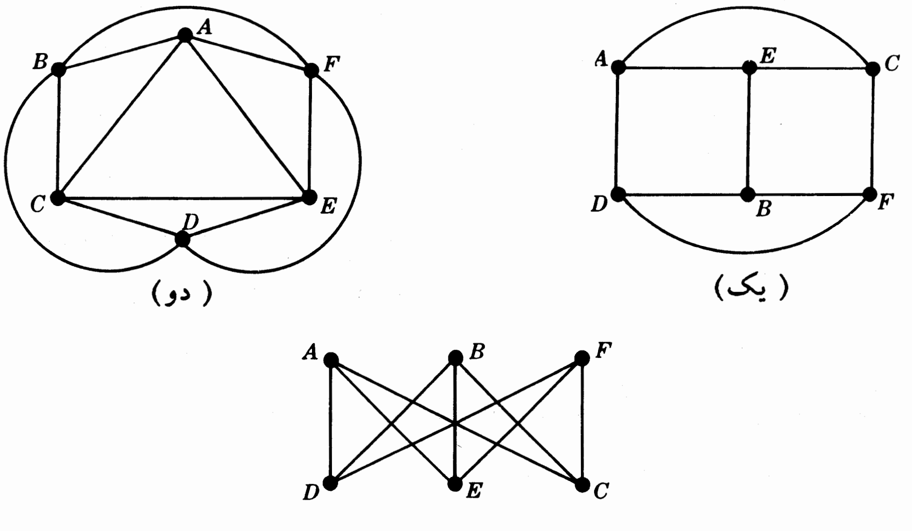
(پـ)

شکل ٦. ١٤

حل. (آ) مواضع رئوس B و E را دوباره کشیده ویک نمایش مسطح گراف مانند شکل ٦. ۱۵ (یک) به دست می آوریم.

(بـ) این گراف ستارهٔ K_5 نیست. این گراف دارای نمایش مسطحی مانند شکل ٦. ۱۵ (دو) می باشد.

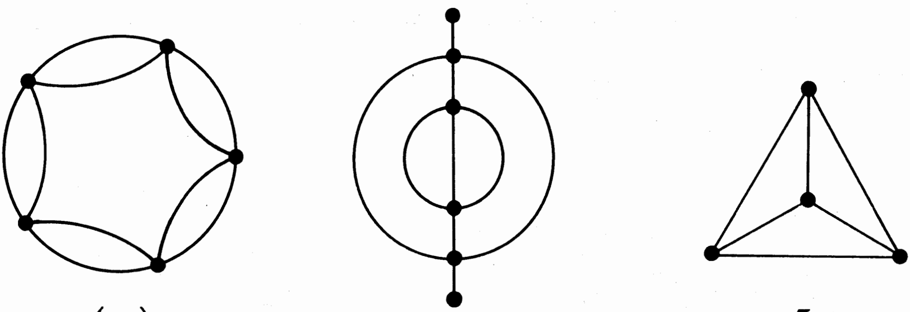
(پـ) این گراف نامسطح است. گراف سودمندی $K_{3,3}$ یک زیر گراف مانند شکل ٦. ۱۵ (سه) است که در آن مواضع C و F را مجدداً کشیده ایم.



(یک) (دو) (سه)

شکل ۶. ۱۵

۶. ۲. تعداد V رئوس، تعداد E اضلاع، و تعداد R نواحی هر یک از نقشه های شکل ۶. ۱۶ را شمرده و فرمول اویلر را تحقیق کنید. همچنین درجهٔ ناحیهٔ خارجی را به دست آورید.



(آ) (ب) (پ)

شکل ۶. ۱۶

حل. (آ) $V = 4,\ E = 6,\ R = 4$. پس

$V-E+R=4-6+4=2$. همچنین $d=3$.

(ب) $V=6,\ E=9,\ R=5$ ؛ پس

$V-E+R=6-9+5=2$. در اینجا $d=6$ زیرا دو تا از ضلعها دوبار حساب شده اند.

(پ) $V=5,\ E=10,\ R=7$ ؛ پس

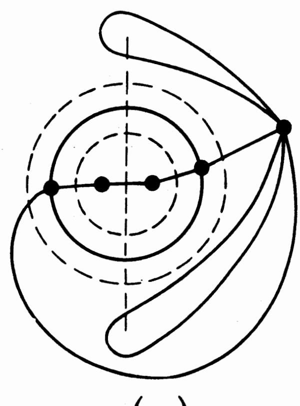
$V-E+R=5-10+7=2$. در اینجا $d=5$.

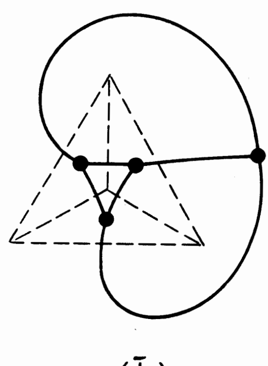
۶. ۳. تعداد مینیمم n رنگهای لازم برای رنگ آمیزی هر یک از نقشه های شکل ۶. ۱۶ را بیابید.

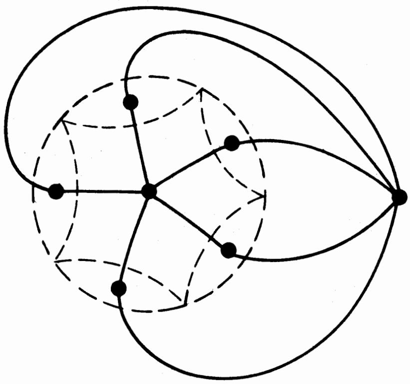
حل. (آ) $n=4$ ، (ب) $n=3$ ، (پ) فقط دو رنگ لازم است؛ یعنی، $n=2$.

۶. ٤. نقشهٔ دوگان هر یک از نقشه های شکل ۶. ۱۶ را رسم کنید.

حل. در هر ناحیه یک نقطه اختیار کرده و اگر نواحی نظیر دارای یک ضلع مشترک باشند، دو رأس را به هم وصل می کنیم. تأکید می کنیم که یک نقشه و دوگانش باید یک تعداد ضلع داشته باشند. نتایج در شکل ۶. ۱۷ نموده شده است. ملاحظه می کنیم که در شکل ۶. ۱۷ (ب) دو خفت وجود دارند که نظیر دو ضلع در نقشهٔ


(ب)


(آ)

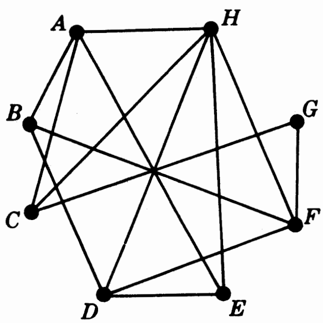


(پ)

شکل ۶ . ۱۷

اصلی که کاملاً مشمول ناحیهٔ « خارجی» اند می باشند.

۶ . ۵. گراف شکل ۶ . ۱۸ را با استفاده از الگوریتم ولچ ـ پاول رنگ



شکل ۶ . ۱۸

زده و عدد فامی n گراف را پیدا کنید.

حل. ابتدا رئوس را بر حسب نزول درجات مرتب می کنیم تا دنبالهٔ زیر به دست آید:

$$H, A, D, F, B, C, E, G$$

از اولین رنگ برای رنگ آمیزی رئوس H ، B ، و سپس G استفاده می کنیم.

(A ، D ، یا F را نمی توان با اولین رنگ رنگ آمیزی کرد زیرا هر یک از آنها به H متصل شده است، و برای C یا E نیز نمی توان از اولین رنگ استفاده نمود زیرا هر یک به H یا B مرتبط می باشد.) حال از دومین رنگ برای رئوس A و D استفاده می کنیم. رئوس باقیماندهٔ F ، C ، و E را می توان با سومین رنگ رنگ آمیزی کرد. لذا، عدد فامی n نمی تواند از 3 بزرگتر باشد. ولی، در هر رنگ آمیزی، H ، D ، و E باید رنگهای متفاوتی داشته باشند و دلیلش مرتبط بودن به یکدیگر می باشد. بنابراین، $n = 3$.

۶.۶. قضیهٔ ۶.۵ راثابت کنید: احکام زیر برای گراف G هم ارزند: (یک) G ، 2 ـ رنگ پذیر است؛ (دو) G دو بخشی است؛ (سه) هر دور G دارای طول زوج می باشد.

برهان. (یک) حکم (دو) را ایجاب می کند. فرض کنیم G ، 2ـرنگ پذیر باشد. همچنین M مجموعهٔ رئوس رنگ شده با اولین رنگ و N مجموعهٔ رئوس رنگ شده با دومین رنگ باشد. دراین صورت، M و N یک افراز دوبخشی از رئوس G تشکیل می دهند زیرا هیچیک از رئوس M یا N نمی تواند به دلیل یک رنگ داشتن مجاور هم باشند.

(دو) حکم (سه) را ایجاب می کند. فرض کنیم G دو بخشی بوده و M و N یک افراز دوبخشی از رئوس G را تشکیل دهند. هرگاه یک دور در رأس u از مثلاً M شروع شود، آنگاه به رأسی از N خواهد رفت و سپس به رأسی از M و سپس به رأسی از N و همین طور تا آخر. لذا، وقتی دور به u باز می گردد باید به طول زوج باشد. یعنی، هر دور G دارای طول زوج می باشد.

(سه) حکم (یک) را ایجاب می کند. بالأخره، فرض کنیم هر دور از G دارای طول زوج باشد. در هر مؤلفهٔ همبند یک رأس اختیار کرده و آن را با اولین رنگ (مثلاً قرمز) رنگ آمیزی می کنیم. سپس همهٔ رئوس را متوالیاً به صورت زیر رنگ می زنیم: هرگاه رأسی قرمز باشد، آنگاه هر رأس مجاورش با دومین رنگ (مثلاً آبی) رنگ

خواهد شد. هرگاه یک رأس آبی باشد، آنگاه هر رأس مجاورش قرمز خواهد شد. چون هر دور دارای طول زوج است، هیچ دو رأس مجاور رنگ واحدی نخواهند داشت. لذا، G ، 2ـرنگ پذیر بوده و قضیه ثابت خواهد شد.

۶. ۷. فرض کنید G یک گراف مسطح همبند متناهی با دست کم سه رأس باشد. نشان دهید G دست یک کم رأس از درجهٔ 5 یا کمتر دارد.

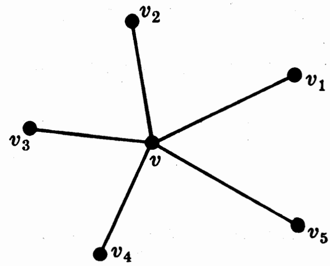
حل. فرض کنیم p تعداد رئوس و q تعداد اضلاع G بوده و به ازای هر رأس u از G ، $\deg(u) \geq 6$. ولی $2q$ مساوی مجموع درجات رئوس G است (قضیهٔ ۱. ۵)؛ $2q \geq 6p$. بنابراین،

$$q \geq 3p > 3p - 6$$

این امر قضیهٔ ۶. ۳ را نقض می کند. لذا، رأسی از G هست که درجه اش 5 یا کمتر از آن می باشد.

۶. ۸. قضیهٔ ۶. ۶ را ثابت کنید: گراف مسطح G ، 5ـرنگ پذیر است.

برهان. برهان به استقرا بر تعداد p رئوس G صورت می گیرد. هرگاه $p \leq 5$ ، آنگاه قضیه به وضوح برقرار است. فرض کنیم $p > 5$ و قضیه برای گرافهای با تعداد رئوس کمتر از p برقرار باشد. بنا بر مسئلهٔ قبل، G دارای رأسی چون v است به طوری که $\deg(v) \leq 5$. بنا بر استقرا، زیر گراف $G - v$ ، 5ـرنگ پذیر است. یکی از این نوع رنگ آمیزیها را در نظر می گیریم. هرگاه در رنگ آمیزی رئوس مجاور v کمتر از پنج رنگ استفاده شده باشد، آنگاه v را با یکی از رنگهای باقیمانده رنگ کرده و یک 5ـرنگ آمیزی برای G به دست می آوریم. حالتی که باقیمانده وقتی است که v مجاور پنج رأسی باشد که رنگهای متفاوت دارند. فرض کنیم این رأسها خلاف عقربه های ساعت حول v به صورت $v_1, \ldots, v_5$ باشند و به ترتیب با رنگهای $c_1, \ldots, c_5$ رنگ شده باشند (ر.ک. شکل ۶. ۱۹)

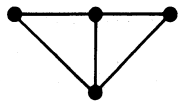


شکل ٦. ١٩

حال زیر گراف H از G تولید شده به وسیلهٔ رئوس به رنگهای c_1 و c_3 را در نظر می گیریم. توجه کنید که H شامل v_1 و v_3 است. هرگاه v_1 و v_3 تعلق به مؤلفه‌های مختلف H داشته باشند، آنگاه می‌توان رنگهای c_1 و c_3 در مؤلفهٔ شامل v_1 را معاوضه کرد بدون اینکه رنگ آمیزی $G-v$ از بین برود. در این صورت، v_1 و v_3 با c_3 رنگ شده اند، c_1 را می توان برای رنگ کردن v به کار برد، و یک 5ـرنگ آمیزی برای G خواهیم داشت. از آن سو، فرض کنیم v_1 و v_3 در مؤلفهٔ واحدی از H قرار داشته باشند. در این صورت، یک مسیر مانند P از v_1 به v_3 هست که رئوسش با c_1 یا c_3 رنگ شده اند. مسیر P همراه بااضلاع $\{v, v_1\}$ و $\{v, v_3\}$ یک دور مانند C تشکیل می دهد که v_2 یا v_4 را در بردارد. حال زیر گراف K تولید شده به وسیلهٔ رئوس رنگ شده با c_2 یا c_4 را در نظر می گیریم. چون C شامل v_2 یا v_4 (ولی نه هردو) است، رئوس v_2 و v_4 به مؤلفه های مختلف K تعلق دارند. لذا، می توان رنگهای c_2 و c_4 در مؤلفهٔ شامل v_2 را بدون خراب کردن رنگ آمیزی $G-v$ با هم عوض کرد. در این صورت، v_2 و v_4 به وسیلهٔ c_4 رنگ شده اند، و می توان c_2 را برای رنگ کردن v به کار برد و یک 5ـرنگ آمیزی برای G به دست آورد. لذا، G ، 5ـرنگ پذیر بوده و قضیه ثابت می باشد.

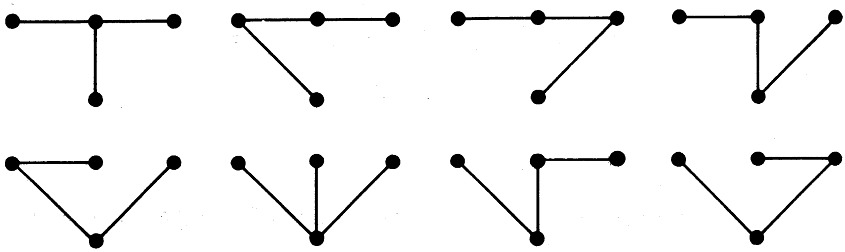
درختها

٦. ٩. تمام درختان پیمایش گراف G شکل ٦. ٢٠ را بیابید.



شکل ۶. ۲۰

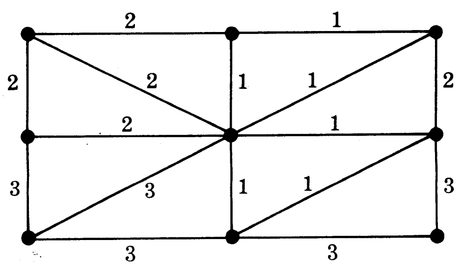
حل. از این درختان پیمایش هشت تا وجود دارند که در شکل ۶. ۲۱ دیده می شوند. هر درخت پیمایش باید دارای $3 = 1 - 4$ ضلع باشد زیرا G دارای چهار رأس می باشد.



شکل ۶. ۲۱

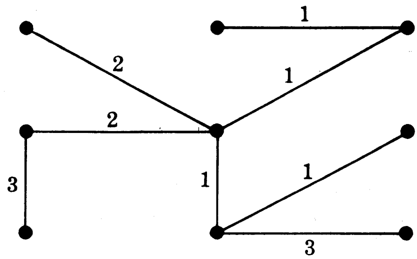
لذا، هر درخت را می توان با حذف دو ضلع از پنج ضلع G به دست آورد. این امر به ده راه انجام پذیر است جز آنکه دو راه ما را به گرافهای ناهمبند می رساند. لذا، هشت درخت پیمایش فوق همهٔ درختان پیمایش G می باشند.

۶. ۱۰. برای گراف با اضلاع بر چسب دار شکل ۶. ۲۲ یک درخت پیمایش مینیمم بیابید.



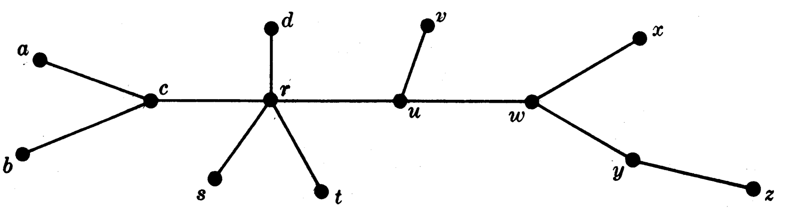
شکل ۶. ۲۲

حل. اضلاع با طول ماکزیمم را بدون ناهمبند کردن گراف یکی یکی حذف می کنیم. به صورت دیگر، با نه رأس شروع کرده و اضلاع با طول مینیمم را بدون تشکیل دور یکی یکی اضافه می کنیم. هر دو روش یک درخت پیمایش مینیمم نظیر شکل ۶ . ۲۳ به دست می دهند.



شکل ۶ . ۲۳

۶ . ۱۱ . درخت شکل ۶ . ۲۴ را در نظر بگیرید. (آ) چه رئوسی نقاط



شکل ۶ . ۲۴

برید گی اند؟ چه اضلاعی پل می باشند؟ (بـ) اگر رأس انتخاب شده به عنوان ریشه (یک) u، (دو) w باشد، جمیع رئوس در سطح 3 را بیابید.

حل. (آ) هر رأس از درجهٔ بیش از 1 یک نقطهٔ بریدگی در یک درخت است؛ پس c ، r ، u ، w ، و y نقاط بریدگی اند. هر ضلع در یک درخت پل است زیرا حذف هر ضلع گراف را ناهمبند می سازد (قضیهٔ ۶ . ۸).

(بـ) جمیع مسیرها به طول 3 از ریشه را می یابیم تا رئوس در سطح (یا عمق) 3 به دست آیند. لذا، (یک) a ، b ، و z ، (دو) c ، d ، s ، و t .

۶ . ۱۲ . فرض کنید یک دستگاه نشانی عمومی شامل نشانی $x = 4.5.2.3$ باشد . چه نشانیهای دیگری باید در این دستگاه موجود باشند ؟

حل. باید جمیع نشانیهای y را بیابیم که $y = a.m$ و $x = a.n.b$ که در آنها m و n اعدادی صحیح با $m \leq n$ می باشند . این نشانیها را می توان به طور اصولی به صورت زیر یافت. ابتدا قطعات شروع x را می یابیم که عبارتند از

$a = 4.5.2.3$ ، $b = 4.5.2$ ، $c = 4.5$ ، و $d = 4$

به ازای هر قطعهٔ شروع، تمام نشانیهای قبلی رابا همان طول و با همان هجی جز آخرین عدد تشکیل می دهیم. نظیر $a = 4.5.2.3$ سه نشانی زیر را داریم:

4.5.2.1 ، 4.5.2.2 ، و 4.5.2.3

نظیر $b = 4.5.2$ دو نشانی زیر را داریم:

4.5.1 و 4.5.2

و نظیر $c = 4.5$ پنج نشانی زیر را خواهیم داشت:

4.1 ، 4.2 ، 4.3 ، 4.4 ، و 4.5

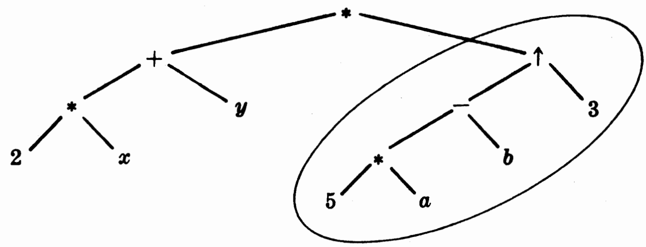
نظیر قطعهٔ شروع $d = 4$ نشانیهای زیر را داریم:

0 ، 1 ، 2 ، 3 ، و 4

اگر x در دستگاه باشد ، پانزده نشانی فوق نیز باید در دستگاه باشند .

۶ . ۱۳ . عبارت جبری $(2x + y)(5a - b)^3$ را در نظر بگیرید . (آ) درخت ریشه دار مرتب نظیر را رسم کنید . (ب) دیدگاه عمل توان سازی را بیابید . (دیدگاه رأس v در یک درخت ریشه دار زیر درخت تولید شده به وسیلهٔ v و رئوس بعد از v با v به عنوان ریشه می باشد .) (پ) عبارت فوق را با نماد لهستانی به شکل پیشوند بازنویسی کنید .

حل. برای توان سازی از سهم (↑) و برای ضرب از ستاره (*) استفاده کرده درخت شکل ۶ . ۲۵ را به دست می آوریم.



شکل ۶. ۲۵

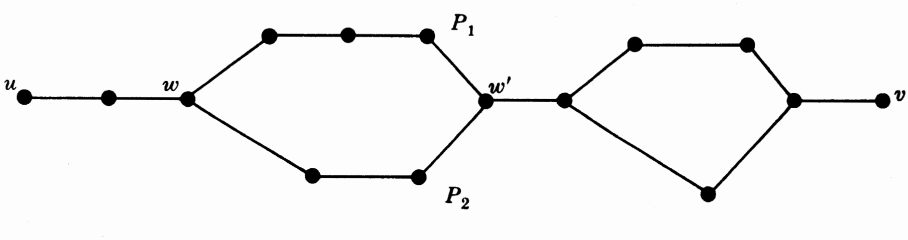
(بـ) دیدگاه ↑ درختی است که در نمودار دورش خط کشیده شده است. این درخت نظیر $(5a-b)^3$ می باشد.

(پـ) درخت را مثل شکل ۶. ۱۳ (بـ) پویش می کنیم:

$$* + * 2\, x\, y \uparrow - * 5\, a\, b\, 3$$

۶. ۱۴. فرض کنید دو مسیر متمایز (مثلاً P_1 و P_2) از رأس u به رأس v در گراف G موجود باشند. ثابت کنید G شامل یک دور است.

حل. فرض کنیم w یک رأس روی P_1 و P_2 باشد به طوری که رئوس بعدی روی P_1 و P_2 متمایز باشند. فرض کنیم w' اولین رأس بعد از w باشد که روی هر دوی P_1 و P_2 قرار دارد. (ر.ک. شکل ۶. ۲۶). در این صورت، زیر مسیرهای P_1 و P_2 بین w و w' رأس مشترکی جز w و w' ندارند؛ پس این دو زیر مسیر یک دور تشکیل می دهند.



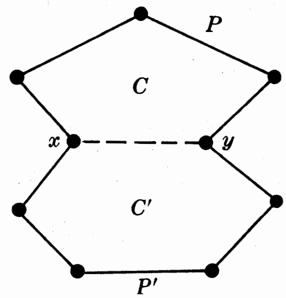
شکل ۶. ۲۶

۶ . ۱۵ . قضیهٔ ۶ . ۸ را ثابت کنید: فرض کنید G یک گراف با بیش از یک رأس باشد . در این صورت، احکام زیر هم ارز می باشند: (یک) G یک درخت است؛ (دو) هرجفت از رئوس درست با یک مسیر به هم وصل شده اند؛ (سه) G همبند است، ولی اگر یک ضلع حذف شود، گراف حاصل ناهمبند می باشد؛ (چهار) G فارغ از دور است، ولی اگر یک ضلع به گراف افزوده شود، گراف حاصل درست یک دور خواهد داشت.

برهان. (یک) حکم (دو) را ایجاب می کند. فرض کنیم u و v دو رأس در G باشند. چون G یک درخت است، G همبند می باشد؛ پس دست کم یک مسیر بین u و v وجود دارد. بنا بر مسئلهٔ ۶. ۱۴، فقط می تواند یک مسیر بین u و v وجود داشته باشد. چه در غیر این صورت G شامل یک دور خواهد بود.

(دو) حکم (سه) را ایجاب می کند. فرض کنیم ضلع $e = \{u, v\}$ از G حذف شده باشد. توجه کنید که e یک مسیر از u به v است. فرض کنیم گراف $G-e$. حاصل دارای مسیر P از u به v باشد. در این صورت، P و e دو مسیر متمایز از u به v است که فرض را نقض می کند. لذا، مسیری بین u و v در گراف $G-e$ وجود ندارد: پس $G-e$ ناهمبند می باشد.

(سه) حکم (چهار) را ایجاب می کند. فرض کنیم G شامل دور C باشد که حاوی ضلع $e = \{u, v\}$ است. طبق فرض، G همبند است ولی $G' = G - e$ ناهمبند است با u و v که متعلق به مؤلفه های متفاوتی از G' می باشند. (مسئلهٔ ۵. ۳۲). این امر ناقض آن است که u و v با مسیر $P = C - e$ که در G' قرار دارد به هم وصل شده اند. لذا، G فارغ از دور می باشد. حال فرض کنیم x و y رئوسی در G بوده و H گراف حاصل به وسیلهٔ افزودن ضلع $e = \{x, y\}$ به G باشد. چون G همبند است، یک مسیر مانند P از x به y در G وجود دارد؛ پس $C = Pe$ یک دور در H تشکیل می دهد. فرض کنیم H شامل دور دیگری مانند C' باشد. چون G فارغ از دور است، C' باید شامل ضلع e باشد؛ مثلاً، $C' = P'e$. در این صورت، P و P' دو مسیر در G از x به y می باشند. (ر.ک. شکل ۶. ۲۷.) بنا برمسئلهٔ ۶. ۱۴،



شکل ۶ . ۲۷

G شامل یک دور است که فارغ از دور بودن G را نقض می کند. لذا، H فقط شامل یک دور می باشد.

(چهار) حکم (یک) را ایجاب می کند. چون افزودن ضلع $e = \{x, y\}$ به G یک دور تولید می کند، رئوس x و y باید قبلاً در G مرتبط به هم باشند. لذا، G همبند است و، بنا به فرض، G فارغ از دور می باشد؛ یعنی، G یک درخت می باشد.

۶ . ۱۶ . قضیهٔ ۶ . ۹ راثابت کنید: فرض کنید G یک گراف متناهی با n رأس باشد. در این صورت، احکام زیر هم ارز می باشند: (یک) G یک درخت است؛ (دو) G فارغ از دور بوده و دارای $n-1$ ضلع است؛ (سه) G همبند بوده و دارای $n-1$ ضلع می باشد.

برهان. برهان به استقرا روی تعداد n رئوس G پیش می رود. فرض کنیم $n = 1$؛ یعنی، G فقط یک رأس داشته باشد. پس G دارای $0 = 1 - 1$ ضلع است و در نتیجه G همبند و فارغ از دور می باشد. لذا، قضیه به ازای $n = 1$ برقرار می باشد.

فرض کنیم $n > 1$؛ یعنی، G بیش از یک رأس داشته باشد. نشان می دهیم که (یک)، (دو)، و (سه) برای G هم ارزند با این فرض که این احکام برای تمام گرافها با تعداد رئوس کمتر از n هم ارز باشند.

(یک) حکم (دو) را ایجاب می کند. فرض کنیم G یک درخت باشد. دراین

صورت، G فارغ از دور است؛ پس کافی است نشان دهیم G دارای $n-1$ ضلع می باشد. بنا بر مسئلهٔ ۵. ۳۱، G رأسی از درجهٔ 1 دارد. با حذف این رأس و ضلعش، یک درخت مانند T به دست می آوریم که $n-1$ رأس داشته باشد. قضیه برای T برقرار است؛ پس T دارای $n-2$ ضلع می باشد. لذا، G دارای $n-1$ ضلع خواهد بود.

(دو) حکم (سه) را ایجاب می کند. فرض کنیم G فارغ از دور بوده و $n-1$ ضلع داشته باشد. کافی است نشان دهیم G همبند است. فرض کنیم G ناهمبند بوده و دارای k مؤلفهٔ $T_1, \ldots, T_k$ باشد که درخت اند زیرا هر یک همبند و فارغ از دور می باشد. فرض کنیم T_i دارای n_i رأس باشد. توجه کنید که $n_i < n$. لذا، قضیه برای T_i برقرار است؛ پس T_i دارای $n_i - 1$ ضلع می باشد. لذا،

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

و

$$n-1 = (n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1) = n_1+n_2+\cdots+n_k-k = n-k$$

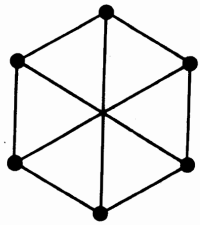
بنا براین، $k=1$. ولی این فرض ناهمبند بودن و دارای $k>1$ مؤلفه بودن G را نقض می کند. لذا، G همبند می باشد.

(سه) حکم (یک) را ایجاب می کند. فرض کنیم G همبند و دارای $n-1$ ضلع باشد. کافی است نشان دهیم G فارغ از دور است. فرض کنیم G دارای دوری شامل ضلع e باشد. با حذف e گراف $H = G - e$ به دست می آید که این نیز همبند است. ولی H داری n رأس و $n-2$ ضلع است و این امر مسئلهٔ ۵. ۳۳ را نقض می کند. لذا، G فارغ از دور است و در نتیجه یک درخت می باشد.

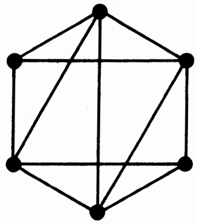
مسائل تکمیلی

گرافهای مسطح، نقشه ها، رنگ آمیزی

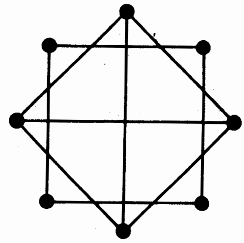
۶. ۱۷. برای هر یک از گرافهای شکل ۶. ۲۸ در صورت امکان یک نمایش مسطح، رسم کنید؛ در غیر این صورت، نشان دهید که زیر گرافی همانریخت با K_5 یا $K_{3,3}$ دارد.



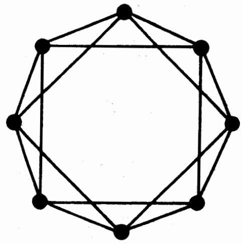
(آ)



(بـ)



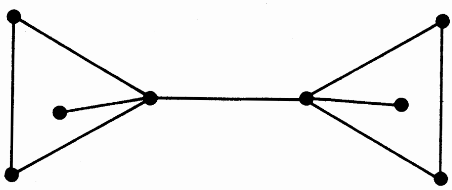
(پـ)



(تـ)

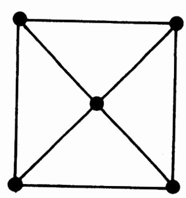
شکل ٦ . ۲۸

٦ . ۱۸ . در نقشهٔ شکل ٦ . ۲۹ درجهٔ هر ناحیه را یافته و تحقیق کنید که مجموع درجات نواحی دو برابر تعداد اضلاع می باشد .

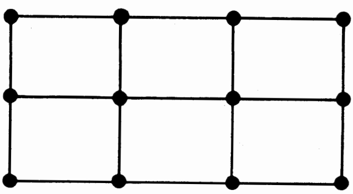


شکل ۶ . ۲۹

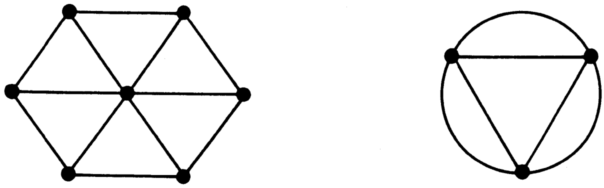
٦ . ۱۹ . تعداد V ی رئوس، تعداد E ی اضلاع، وتعداد R نواحی هر یک از نقشه های شکل ٦ . ۳۰ را حساب کرده و فرمول اویلر را تحقیق نمایید .



(آ)



(بـ)



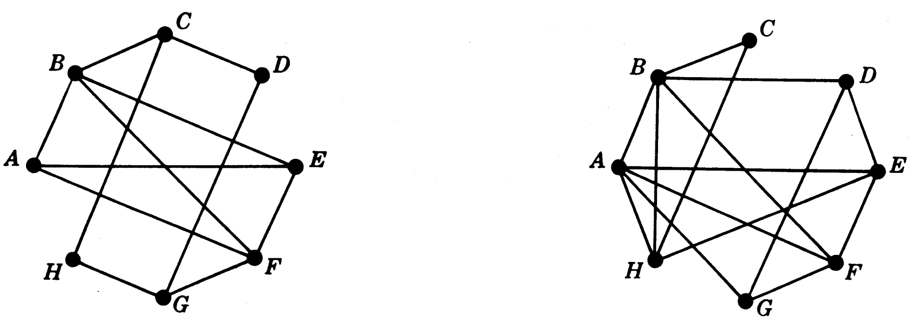
(ت)   (پ)

شکل ۶. ۳۰

۶.۲۰. کمترین تعداد رنگ لازم برای رنگ آمیزی نواحی هر یک از نقشه های شکل ۶. ۳۰ را بیابید.

۶. ۲۱. نقشهٔ دوگان هر یک از نقشه های شکل ۶. ۳۰ را رسم کنید.

۶. ۲۲. هر یک از گرافهای شکل ۶. ۳۱ را با استفاده از الگوریتم ولچ - پاول زنگ برنید. عدد فامی n هر گراف را پیدا نمایید.



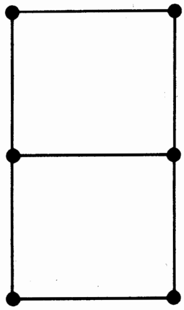
(ب)   (آ)

شکل ۶. ۳۱

۶. ۲۳. فرض کنید n درجهٔ ماکزیمم یکی از رئوس گراف G باشد. ثابت کنید $\chi(G) \leqslant n+1$ که در آن $\chi(G)$ عدد فامی G است.

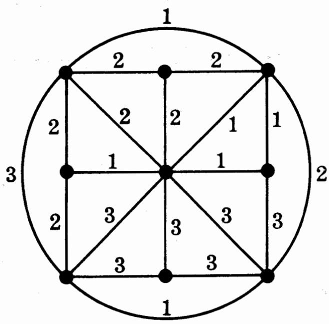
درختها

۶. ۲۴. تعداد درختان پیمایش شکل ۶. ۳۲ را بیابید.



شکل ۶ . ۳۲

۶ . ۲۵. درخت پیمایش مینیمال شکل ۶ . ۳۳ را بیابید .



شکل ۶ . ۳۳

۶ . ۲۶. فرض کنید یک دستگاه نشانی عمومی شامل نشانی $x = 4.3.6.2$ باشد . چه نشانیهای دیگری باید در دستگاه باشد ؟

۶ . ۲۷. نشانی x درخت ـ قبل نشانی y است اگر x به عنوان رأس در درخت ریشه دار زمینه (نه به ترتیب قاموسی) قبل از y باشد .

(آ) نشان دهید که نشانی x درخت ـ قبل نشانی y است اگر x و y به شکل $x = a.m$ و $y = a.n.b$ باشند که در آنها m و n صحیح بوده و $m \leq n$ و نیز a و b نشانیهایی جزئی (احتمالاً تهی) باشند .

(ب) معین کنید که x درخت ـ قبل y است یا نه که

(یک) $x = 3.5.4,\ y = 3.2.6.7$ (دو) $x = 4.2,\quad y = 5.3.6$

(سه) $x = 3.4, \quad y = 3.5.1$ (چهار) $x = 4.1.3, \quad y = 4.1.4$

۶. ۲۸. گوییم نشانیهای $x_1, x_2, \ldots, x_k$ مستقل‌اند اگر هیچیک درخت ـ قبل دیگری نباشد. معین کنید که مجموعه های زیر از نشانیها مستقل اند:

(آ) $x_1 = 3.2.5, \ x_2 = 3.1, \ x_3 = 2.3$ (بـ) $x_1 = 2.5.4, \ x_2 = 3.1, \ x_3 = 1.2.3$

۶. ۲۹. ثابت کنید هر رأس در یک درخت از درجهٔ 2 یا بیشتر یک نقطهٔ بریدگی است.

۶. ۳۰. عبارت جبری

$$\frac{(3x - 5z)^4}{a(2b + c^2)}$$

را در نظر بگیرید.

(آ) درخت ریشه دار مرتب نظیر را با استفاده از سهم ($\uparrow$) برای توان سازی، ستاره ($*$) برای ضرب، و کسر ($/$) برای تقسیم رسم کنید.

(بـ) عبارت فوق را (یک) با نماد لهستانی به شکل پیشوند،

(دو) با نماد لهستانی به شکل پسوند بازنویسی کنید.

(پـ) دیدگاه هر عمل ضرب را بیابید.

مسائل برنامه نویسی کامپیوتر

فرض کنیم G یک گراف با شش رأس به صورت $v_1, v_2, \ldots, v_6$ و ده ضلع باشد. همچنین B ماتریس اضلاع 2×10 از G باشد. فرض کنیم B در یک دستهٔ 10 تایی کارت که هر کارت شامل سطری از B است پانچ شده باشد.

۶. ۳۱. برنامه ای بنویسید که رئوس G را طبق الگوریتم ولچ ـ پاول رنگ بزنند. این برنامه را با ماتریسهای B_1 و B_2 زیر امتحان کنید.

۶. ۳۲. فرض کنید به اضلاع G طولهایی (که اعداد صحیح مثبتی هستند) منتسب کنیم و ستون سومی به ماتریس اضلاع طوری بیفزاییم که درایهٔ سوم در هر سطر طول ضلع داده شده با دو درایهٔ اول آن سطر باشد. برنامه ای بنویسید که اضلاع درخت پیمایش مینیمال T از G را چاپ کند. این برنامه را با ماتریسهای B_3 و B_4 زیر امتحان کنید. (**راهنمایی.** از الگوریتم درخت پیمایش مینیمال دوم در بخش ۶. ۸

همراه با مسئلهٔ ۵. ۴۳ استفاده کنید.)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 6 \\ 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

جواب مسائل تکمیلی

۶. ۱۷. فقط (آ) نامسطح است.

۶. ۱۸. ناحیهٔ خارجی دارای درجهٔ 8 است و دو ناحیهٔ دیگر از درجهٔ 5 می باشند.

۶. ۱۹. (آ) $V = 5,\ E = 8,\ R = 5$

(ب) $V = 12,\ E = 17,\ R = 7$

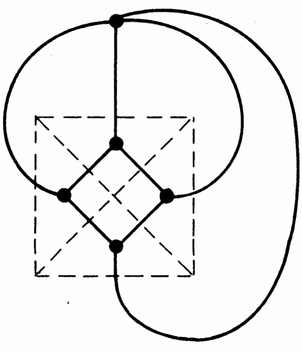
(پ) $V = 3,\ E = 6,\ R = 5$

(ت) $V = 7,\ E = 12,\ R = 7$

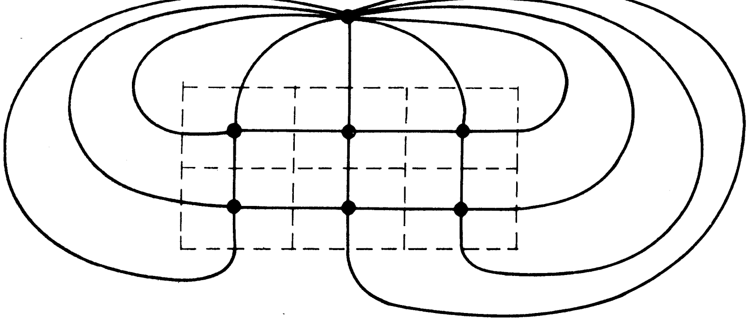
۶. ۲۰. (آ) 3 ، (ب) 3 ،

(پ) 2 ، (ت) 3

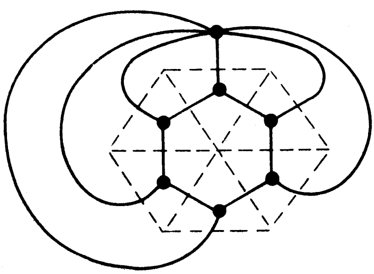
۶. ۲۱. ر.ک. شکل ۶. ۳۴.



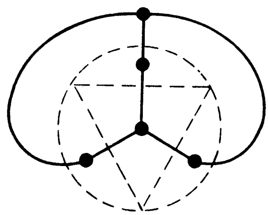
(آ)



(ب)



(ت)



(پ)

شکل ۶.۳۴

۶.۲۲. (آ) $n = 3$ ، (ب) $n = 4$

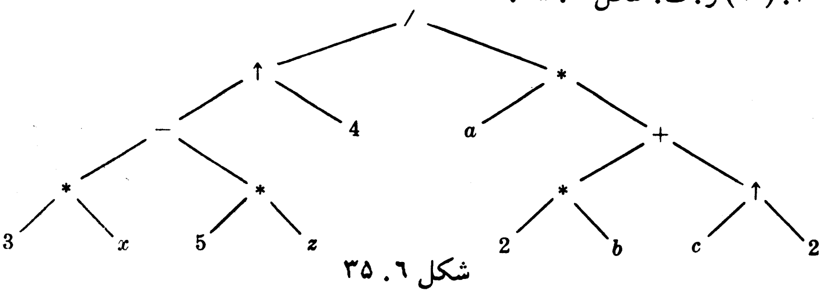
۶.۲۴. 15

۶.۲۶. 0, 1, 2, 3, 4, 4.1, 4.2, 4.3, 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4, 4.3.5, 4.3.6, 4.3.6.1

۶.۲۷. (ب) (یک) خیر، (دو) خیر، (سه) بلی، (چهار) بلی

۶.۲۸. (آ) خیر زیرا x_2 قبل از x_1 است، (ب) بلی

۶.۳۰. (آ) ر.ک. شکل ۶.۳۵.



شکل ۶.۳۵

ب) (یک) $/\uparrow - * 3\,x * 5\,z\,4 * a + \; * 2\,b \uparrow c\,2$ (دو) $3\,x * 5\,z * - 4 \uparrow a\,2\,b * c\,2 \uparrow + * /$

پ) $3x,\ 5z,\ a(2b + c^2),\ 2b$

۷
گرافهای جهتدار، ماشینهای با وضعیت متناهی

۱.۷ آشنایی

مفهوم گراف جهتدار در شرایط دینامیکی(مثلاً کامپیوتر های رقمی یا دستگاههای شارش) اغلب از گراف غیر جهتدار مفیدتر است. در این فصل تعاریف اصلی و خواص گرافهای جهتدار و نیز مثال مهمی از یک گراف جهتدار بر چسب دار، یعنی ماشین باوضعیت متناهی، را می آوریم.

۲.۷ گرافهای جهتدار

گراف جهتدار D یا دیگراف از دو چیز تشکیل شده است:

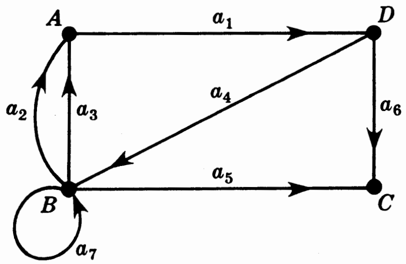
(یک) یک مجموعهٔ V که عناصرش را رئوس، نقاط، یا گرهها می نامیم؛

(دو) یک مجموعهٔ A از جفتهای مرتب از رئوس به نام قوسها.

در صورتی که بخواهیم بر دو قسمت D تأکید کنیم دیگراف را با $D(V, A)$ نشان خواهیم داد.

ماهمچنین دیگرافها را با نمودارهایی در صفحه می کشیم. مجدداً هر رأس v در V با یک نقطه (یا دایرهٔ کوچک) نموده می شود؛ ولی هر قوس $a = \langle u, v\rangle$ با یک سهم (یعنی منحنی جهتدار) از نقطهٔ شروع u از a به نقطهٔ پایان v نموده می شود. به عنوان مثال، شکل ۱.۷ نمایش دیگراف $D(V, A)$ است که در آن

(یک) V از چهار رأس A, B, C, D تشکیل شده است؛ و



شکل ۷. ۱

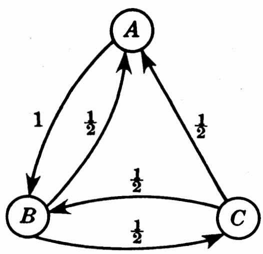
(دو) A از هفت قوس زیر مرکب می باشد :

$$a_1 = \langle A,D\rangle,\quad a_2 = \langle B,A\rangle,\quad a_3 = \langle B,A\rangle,\quad a_4 = \langle D,B\rangle,$$
$$a_5 = \langle B,C\rangle,\quad a_6 = \langle D,C\rangle,\quad a_7 = \langle B,B\rangle$$

قوس a_7 را یک خفت نامیم زیرا نقطهٔ شروعش B همان نقطهٔ پایانش می باشد. قوسهای a_2 و a_3 را قوسهای موازی نامند زیرا دارای نقطهٔ شروع B و نقطهٔ پایان A می باشند.

ما معمولاً یک دیگراف را به جای ذکر رئوس و قوسهایش با رسم نمودارش نشان می دهیم.

هرگاه قوسها و/ یا رئوس یک گراف جهتدار با نوعی از داده ها بر چسب خورده باشند، آنگاه گوییم یک گراف جهتدار بر چسب دار داریم. این نوع گرافها اغلب برای ترسیم وضعیتهای دینامیکی به کار می روند. مثلاً، فرض کنیم سه پسر بچهٔ A, B, C یک توپ را به سوی هم چنان پرتاب کنند که A همیشه توپ را به سوی B بیندازد ولی B و C توپ را به A یا به یکدیگر پرتاب کنند. شکل ۷. ۲ این وضعیت دینامیکی را نشان می دهد که در آن



شکل ۷. ۲

قوسها با احتمالات مربوطه بر چسب خورده اند؛ یعنی، A توپ را با احتمال 1 به سوی B می اندازد، B توپ را با احتمال $\frac{1}{2}$ به سوی A و C می اندازد، و C توپ را با احتمال $\frac{1}{2}$ به سوی A و B خواهد انداخت.

فرض کنیم $D(V, A)$ یک دیگراف باشد. گوییم $D(V, A)$ متناهی است اگر مجموعهٔ V از رئوسش متناهی بوده و مجموعهٔ A از قوسهایش متناهی باشد. فرض کنیم V' زیر مجموعه ای از V بوده و A' زیر مجموعه‌ای از A باشد که نقاط انتهایی اش متعلق به V' باشند. در این صورت، $D(V', A')$ یک گراف جهتدار است و یک زیر گراف $D(V, A)$ نام دارد. هر گاه A' شامل تمام قوسهایی از A باشد که نقاط انتهایی شان تعلق به V' دارند، آنگاه $D(V', A')$ زیرگراف تولید شده به وسیلهٔ V' نامیده می شود.

۷ . ۳ تعاریف اصلی

فرض کنیم D یک گراف جهتدار باشد. گوییم قوس $a = \langle u, v\rangle$ از نقطهٔ شروعش u شروع شده و در نقطهٔ پایانش v پایان می یابد. درجهٔ خارجی و درجهٔ داخلی رأس v به ترتیب مساوی تعداد قوسهایی است که در v شروع می شوند و پایان می یابند. چون هر قوس در یک رأس شروع شده و پایان می یابد، پس معلوم می‌شود که مجمـــــــــوع درجات خارجی رئوس مساوی مجموع درجات داخلی رئوس است که مساوی تعداد قوسها می باشد. یک رأس با درجهٔ داخلی صفر یک منبع نام دارد، ویک رأس با درجهٔ خارجی صفر یک حفره نامیده می شود. در شکل ۷ . ۱، مثلاً، رأس C یک حفره است ولی دیگراف دارای هیچ منبعی نیست. همچنین، درجهٔ خارجی D مساوی 2 و درجهٔ داخلی اش 1 می باشد.

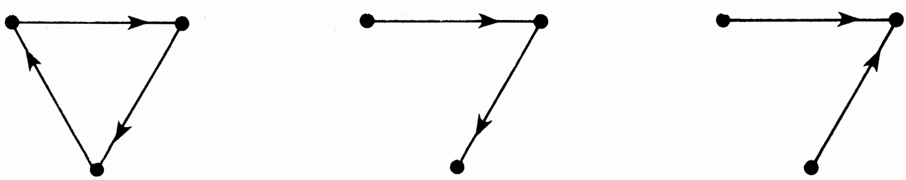
مفاهیم راه، جاده، مسیر، و دور از گرافهای غیر جهتدار منتقل می شوند جز آنکه جهت قوسها باید با جهت راه سازگار باشد. به طور مشخص، یک راه (جهتدار) W در دیگراف D یک دنبالهٔ متناوب از رئوس و قوسهاست:

$$W = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, a_n, v_n)$$

به طوری که هر قوس a_i در v_{i-1} شروع شده و در v_i پایان یابد. اگر ابهامی در کار

نباشد، W را با دنبالهٔ رئوس یا دنبالهٔ قوسهایش نشان می دهیم. طول W مساوی n ، یعنی تعداد قوسهایش، می باشد. یک راه بسته دارای رأس اول و آخر یکسان است، و یک راه پیمایش شامل تمام رئوس دیگراف می باشد. یک جاده راهی است با قوسهای متمایز، و یک مسیر راهی با رئوس متمایز می باشد. یک دور راه بسته ای است با رئوس متمایز (جز رأس اول و آخر). رأس u قابل وصول از رئوس v است اگر مسیری از v به u موجود باشد. هر نیمه راه یک راه است جز آنکه قوس a_i ممکن است در v_{i-1} یا v_i شروع شده و در رأس دیگر پایان یابد. نیمه جاده ها و نیمه مسیرها تعاریف مشابهی خواهند داشت.

در دیگراف D سه نوع همبندی وجود دارد. گوییم D به طور ضعیف همبند یا ضعیف است اگر یک نیمه مسیر بین هر دو رأس u و v از D موجود باشد. گوییم D به طور همجانبی همبند یا همجانب است اگر به ازای هر دو رأس u و v از D ، یا u از v یا v از u قابل وصول باشد؛ یعنی، یک مسیر از یکی از آنها به دیگری موجود باشد. گوییم D به طور قوی همبند یا قوی است اگر به ازای هر دو رأس u و v از D ، u از v و v از u قابل وصول باشد؛ یعنی، یک مسیر از u به v و یک مسیر از v به u موجود باشد. ملاحظه می کنیم که به طور قوی همبند بودن به طور همجانبی همبند بودن را ایجاب می کند و به طور همجانبی همبند بودن به طور ضعیف همبند بودن را ایجاب خواهد کرد. گوییم D اکیداً همجانبی است اگر همجانبی بوده ولی قوی نباشد و گوییم D اکیداً ضعیف است اگر ضعیف بوده ولی همجانبی نباشد. در شکل ۷ . ۳، (آ) اکیداً ضعیف است، (ب) اکیداً همجانبی است، و (پ) قوی می باشد.



(پ) (ب) (آ)

شکل ۷ . ۳

همبندی را می توان بر حسب راههای پیمایش به شرح زیر توصیف کرد:

قضیهٔ ۷ . ۱ . فرض کنیم D یک گراف جهتدار متناهی باشد. در این صورت،

(آ) D ضعیف است اگر و فقط اگر D دارای یک نیمه راه پیمایش باشد؛

(بـ) D همجانبی است اگر و فقط اگر D دارای یک راه پیمایش باشد؛

(پـ) D قوی است اگر وفقط اگر D دارای یک راه پیمایش بسته باشد.

دیگرافهای دارای منبع و حفره در بسیاری از کاربردها ظاهر می شوند(مثلاً، در نمودارهای شارش). یک شرط کافی برای وجود این نوع رئوس به قرار زیر است:

قضیهٔ ۷ . ۲ . فرض کنیم دیگراف متناهی D شامل هیچ دور (جهتدار) نباشد. در این صورت، D شامل یک منبع و یک حفره می باشد.

برهان. فرض‌کنیم $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ یک مسیر با طول ماکزیمم باشدکه به دلیل متناهی بودن D وجود دارد. در این صورت، رأس آخر v_n باید یک حفره باشد؛ در غیر این صورت، یک قوس مانند $\langle v_n, u\rangle$ یا از P بسط می یابد یا یک دور تشکیل می دهد اگر به ازای i ای $u = v_i$. به همین نحو، رأس اول v_0 باید یک منبع باشد.

۷ . ٤ دیگرافها، رابطه ها، ماتریسهای مربعی صحیح نامنفی

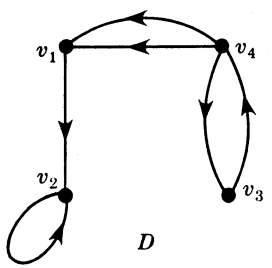
فرض کنیم $D(V, A)$ یک گراف جهتدار بدون قوسهای موازی باشد. در این صورت، A چیزی جز یک زیر مجموعهٔ $V \times V$ نیست و لذا A یک رابطه بر V می باشد. به عکس، هرگاه R یک رابطه بر مجموعهٔ V باشد، آنگاه $D(V, R)$ یک گراف جهتدار بدون اضلاع موازی می باشد. لذا، مفاهیم رابطه بر یک مجموعه و دیگراف بدون اضلاع موازی با هم یکی می باشند. در واقع، در فصل ۲ ما قبلاً گراف جهتدار نظیر یک رابطه بر یک مجموعه را معرفی کرده ایم.

حال فرض کنیم D یک گراف جهتدار با رئوس $v_1, v_2, \ldots, v_m$ **باشد**.

ماتریس D ماتریس $m \times m$ ، $M_D = (m_{ij})$ است که در آن

$$m_{ij} = \text{تعداد قوسهایی که در } v_i \text{ شروع و در } v_j \text{ پایان می‌یابند}$$

هرگاه D قوسهای موازی نداشته باشد، آنگاه درایه های M_D فقط صفر و یک می باشند؛ در غیر این صورت، درایه ها اعداد صحیح نامنفی می باشند. به عکس، هر ماتریس $m \times m$ مانند M با درایه های صحیح نامنفی معرف یک دیگراف با m رأس به طور منحصر به فرد می باشد. شکل ۷. ٤ یک دیگراف D و ماتریسش M را نشان می دهد.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

شکل ۷. ٤

ماتریس یک دیگراف در مسائل قابل وصول بودن گراف سودمند است. این امر از نتیجهٔ زیر حاصل می شود که در مسئلهٔ ۷. ۵ به ثبوت رسیده است.

قضیهٔ ۷. ۳. فرض کنیم M ماتریس دیگراف D باشد. در این صورت، درایهٔ ij ماتریس M^n تعداد راهها به طول n از رأس v_i به رأس v_j را به دست می دهد.

فرض کنیم D دارای m رأس باشد. در این صورت، هر مسیر D نمی تواند حاوی بیش از m رأس باشد و لذا باید به طول $m-1$ یا کمتر باشد. لذا، D به طور قوی همبند است اگر به ازای هر دو رأس u و v یک مسیر از u به v و یک مسیر از v به u ، هر یک به طول $m-1$ یا کمتر، موجود باشد.

نتیجهٔ ۷. ٤. فرض کنیم M ماتریس دیگراف D با m رأس باشد. قرار می دهیم

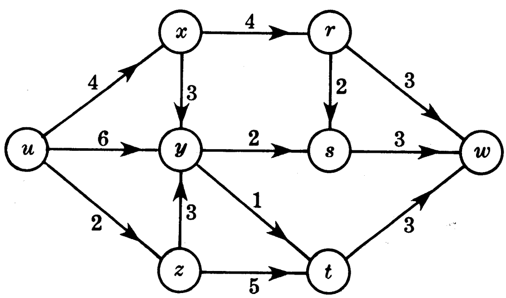
$$C = M + M^2 + M^3 + \cdots + M^{m-1}$$

در این صورت، D به طور قوی همبند است اگر و فقط اگر C درایهٔ صفری خارج قطر اصلی نداشته باشد.

برهان. درایهٔ ij ی C صفر است اگر و فقط اگر درایه های ij ی $M, M^2, \ldots, M^{m-1}$ همه صفر باشند. این یعنی هیچ راهی از v_i به v_j به طول $m-1$ یا کمتر موجود نیست و لذا، مسیری از v_i به v_j وجود ندارد. بنابراین، D به طور قوی همنبد است اگرو فقط اگر درایه های ij ی C به ازای $i \neq j$ ناصفر باشند.

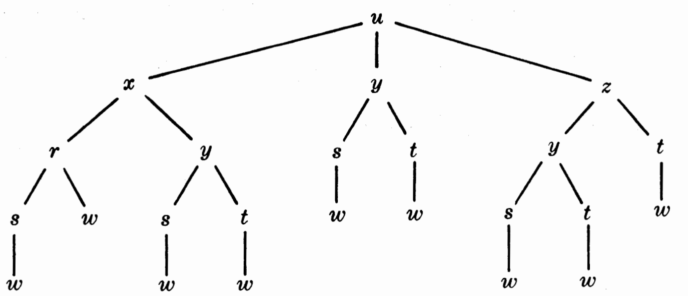
۷. ۵ الگوریتم هرس برای مسیر مینیمال

گراف جهتدار D را در نظر می گیریم که اضلاعش با طول (یعنی، اعدادی مثبت) بر چسب خورده اند. کوتاهترین مسیر $P(D)$ بین دو رأس داده شده، مثلاً u و w ، را جستجو می کنیم. فرض کنیم D متناهی باشد. پس در هر مرحله تعدادی متناهی حرکت ممکن است، و ما فرض می کنیم D دارای دور نباشد. لذا، جمیع مسیر های ممکن بین u و w را می توان با یک درخت ریشه دار عرضه کرد. به عنوان مثال، شکل ۷. ۵ (ب) جمیع مسیرهای بین u و w در دیگراف شکل ۷. ۵ (آ) را برمی شمارد.



(آ)

شکل ۷. ۵



(بـ)

ادامهٔ شکل ۷ . ۵

یک راه یافتن کوتاهترین مسیر محاسبهٔ جمیع مسیرهای درخت است. ملاحظه می کنیم که اگر دو مسیر جزئی به یک رأس میانی v منجر شوند، کافی است از آنجا به بعد مسیر جزئی کوتاهتر را در نظر بگیریم؛ یعنی، درخت را در رأس نظیر مسیر جزئی طویلتر هرس کنیم. این الگوریتم هرس ذیلاً به طور صوری توصیف شده است.

در این الگوریتم، به هر رأس v' عدد $\ell(v')$ منتسب شده که مبین طول مینیمال جاری از نقطهٔ شروع u به v' است و یک‌مسیر $p(v')$ از u به v' که دارای طول $\ell(v')$ می باشد. در هر مرحله از الگوریتم، یک قوس مانند $\langle v', v\rangle$ از v' به v را امتحان می کنیم که مثلاً به طول k است. هرگاه این اولین باری باشد که وارد v می شویم، آنگاه انتسابهای زیر را انجام می دهیم:

$$p(v) = p(v')v \quad \text{و} \quad \ell(v) = \ell(v') + k \tag{۷.۱}$$

هرگاه قبلاً در v بوده ایم، آنگاه امتحان می کنیم که آیا

$$\ell(v') + k < \ell(v)$$

یا نه. اگر چنین بود، یک مسیر کوتاهتر به v یافته ایم و $\ell(v)$ و $p(v)$ را مانند (۷. ۱) تغییر می دهیم؛ در غیر این صورت، $\ell(v)$ و $p(v)$ را به همین صورت می گذاریم. همچنین، هرگاه قوسهای امتحان نشدهٔ دیگری که به v وارد می شوند موجود نباشند، آنگاه گوییم $p(v)$ معین شده است. با قرار دادن $\ell(u) = 0$ و نیز $p(u) = u$ شروع می کنیم که در آنها u نقطهٔ شروع می باشد. معمولاً بهترین کار امتحان یک قوس است که در یک رأس که مسیرش معین شده شروع شده باشد.

حال الگوریتم فوق را در مورد گراف ۷. ۵ (آ) به کار می بریم:

از u : رئوس متوالیی که برای اولین بار وارد آنها می شویم عبارتند از x ، y ، و z . لذا،

$$\ell(x) = 4,\ p(x) = ux; \quad \ell(y) = 6,\ p(y) = uy; \quad \ell(z) = 2,\ p(z) = uz$$

توجه کنید که $p(x)$ و $p(z)$ معین شده اند.

از x : رئوس متوالی عبارتند از r (که اول بار وارد می شویم) و y . لذا،

$$p(r) = p(x)r = uxr \quad \text{و} \quad \ell(r) = 4 + 4 = 8$$

همچنین، $p(r)$ معین شده است. حال امتحان می کنیم که

$\ell(x) + k = 4 + 3$ از $\ell(y) = 6$ کمتر نیست.

لذا، $\ell(y)$ و $p(y)$ را به همین صورت می گذاریم.

از z : رئوس متوالی عبارتند از t (که اول بار وارد می شویم) و y . لذا،

$$p(t) = p(z)t = uzt \quad \text{و} \quad \ell(t) = 2 + 5 = 7$$

حال امتحان می کنیم که

$\ell(z) + k = 2 + 3 = 5$ از $\ell(y) = 6$ کمتر است.

لذا، یک مسیر کوتاهتر به y یافته ایم و $\ell(y)$ و $p(y)$ را به صورت زیر تغییر می دهیم:

$$p(y) = p(z)y = uzy \quad \text{و} \quad \ell(y) = \ell(z) + k = 5$$

حال $p(y)$ معین شده است.

از y : رئوس متوالی عبارتند از s (که اول بار وارد می شویم) و t . لذا،

$$p(s) = p(y)s = uzys \quad \text{و} \quad \ell(s) = \ell(y) + k = 5 + 2 = 7$$

حال امتحان می کنیم که

$\ell(y) + k = 5 + 1 = 6$ از $\ell(t) = 7$ کمتر است.

لذا، $\ell(t)$ و $p(t)$ را به صورت زیر تغییر می دهیم:

$$p(t) = p(y)t = uzyt \quad \text{و} \quad \ell(t) = \ell(y) + 1 = 6$$

حال $p(t)$ معین شده است.

از r : رئوس متوالی عبارتند از w (که اول بار وارد می شویم) و s . لذا،

$$p(w) = uxrw \qquad \text{و} \qquad \ell(w) = \ell(r) + 3 = 11$$

حال امتحان می کنیم که

$\ell(r) + k = 8 + 2 = 10$ از $\ell(s) = 7$ کمتر نیست.

لذا، $\ell(s)$ و $p(s)$ را تغییر نمی دهیم. حال $p(s)$ معین شده است.

از s : رأس متوالی عبارت است از w . توجه می کنیم که

$\ell(s) + k = 7 + 3$ از $\ell(w) = 11$ کمتراست.

لذا، $\ell(w)$ و $p(w)$ را به صورت زیر تغییر می دهیم:

$$p(w) = p(s)w = uzysw \qquad \text{و} \qquad \ell(w) = \ell(s) + 3 = 10$$

از t : رأس متوالی عبارت است از w . توجه می کنیم که

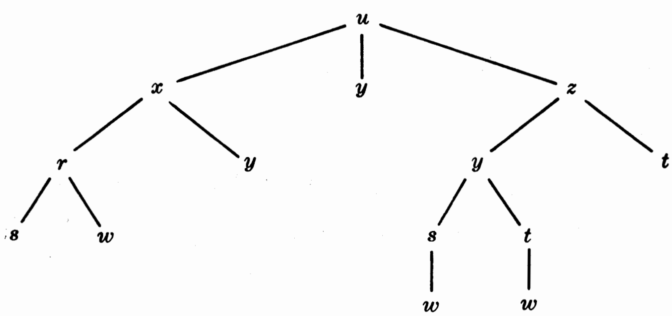
$\ell(t) + k = 6 + 3 = 9$ از $\ell(w) = 10$ کمتر است.

لذا، $\ell(w)$ و $p(w)$ را تغییر می دهیم:

$$p(w) = p(t)w = uzytw \qquad \text{و} \qquad \ell(w) = \ell(t) + 3 = 9$$

بنابراین، $p(w)$ معین شده است و کوتاهترین مسیر مطلوب می باشد؛ طول این مسیر $\ell(w) = 9$ می باشد.

شکل ۷. ۶ درخت قوسهای امتحان شده را به دست می دهد. این همان



شکل ۷. ۶

درخت شکل ۷. ۵ (بـ) است که در رئوس متعلق به مسیرهای جزئی طویلتر هرس شده است. ملاحظه می‌کنیم که فقط می‌بایست سیزده‌قوس‌ازبیست و سه قوس درخت مورد امتحان قرار می‌گرفت.

وقتی الگوریتم فوق به کار می رود، بهتر است ابتدا به هر رأس v غیر از رأس شروع $\ell(v) = \infty$ منتسب شود. پس وقتی اول بار وارد v می شویم، همواره

$$\ell(v') + k < \ell(v)$$

۷ . ۶ ماشینهای با وضعیت متناهی

یک کامپیوتر رقمی را می توان ماشینی انگاشت که در هر لحظه در یک « وضعیت داخلی» است. کامپیوتر یک علامت ورودی را « می خواند » و سپس یک علامت خروجی را « چاپ می کند » و « وضعیت» خود را تغییر می دهد. علامت خروجی فقط تابع علامت ورودی و وضعیت داخلی ماشین است و وضعیت داخلی ماشین فقط تابع وضعیت قبلی ماشین و علامت ورودی قبلی می باشد. فرض است که تعداد وضعیتها، علایم ورودی، و علایم خروجی متناهی اند. این ایده ها در تعریف زیر صوری شده اند.

یک ماشین با وضعیت متناهی (یا ماشین دنباله ای تام) M از پنج چیز تشکیل شده است:

(۱) یک مجموعهٔ متناهی مانند A از علایم ورودی؛

(۲) یک مجموعهٔ متناهی مانند S از وضعیتهای داخلی؛

(۳) یک مجموعهٔ متناهی مانند Z از علایم خروجی؛

(٤) یک تابع وضعیت بعدی مانند f از $S \times A$ به توی S ؛

(۵) یک تابع خروجی مانند g از $S \times A$ به توی Z .

این ماشین M در صورتی که بخواهیم بر پنج جزئش تأکید داشته باشیم با $M = \langle A, S, Z, f, g\rangle$ نموده می شود. گاهی وضعیت شروع q_0 در S نیز داده شده است، و در این صورت ماشین M با شش تایی $M = \langle A, S, Z, q_0, f, g\rangle$ نموده می شود.

مثال ۷ . ۱ . داده های زیر معرف یک ماشین با وضعیت متناهی با دو علامت ورودی، سه وضعیت داخلی، و سه علامت خروجی می باشند:

(۱) $A = \{a, b\}$

(۲) $S = \{q_0, q_1, q_2\}$

(۳) $Z = \{x, y, z\}$

(٤) تابع وضعیت بعدی $f: S \times A \to S$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(q_0, a) = q_1 \qquad f(q_1, a) = q_2 \qquad f(q_2, a) = q_0$$
$$f(q_0, b) = q_2 \qquad f(q_1, b) = q_1 \qquad f(q_2, b) = q_1$$

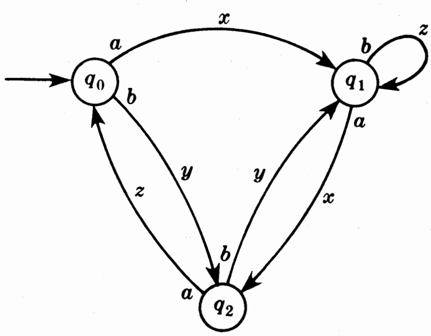
(۵) تابع خروجی $g: S \times A \to Z$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$g(q_0, a) = x \qquad g(q_1, a) = x \qquad g(q_2, a) = z$$
$$g(q_0, b) = y \qquad g(q_1, b) = z \qquad g(q_2, b) = y$$

معمولاً از حرف q برای وضعیتهای یک ماشین و علامت q_0 برای وضعیت شروع استفاده می شود.

برای نمایش یک ماشین با وضعیت متناهی به شکل فشرده دو راه وجود دارد. یک راه توسط جدول است که جدول وضعیت ماشین نام دارد، و راه دیگر به وسیلهٔ یک گراف جهتدار بر چسب دار به نام نمودار وضعیت ماشین می باشد.

در شکل ۷.۷ جدول وضعیت ماشین مثال ۷.۱ نموده شده است.



	a	b
q_0	q_1, x	q_2, y
q_1	q_2, x	q_1, z
q_2	q_0, z	q_1, y

شکل ۷.۷

ملاحظه می کنیم که درایهٔ نظیر q_i و a_j در جدول عبارت است از جفت $f(q_i, a_j), g(q_i, a_j)$.

نمودار وضعیت D ماشین متناهی $M = \langle A, S, Z, f, g\rangle$ یک گراف جهتدار بر

چسب دار است. رئوس D وضعیتهای M اند، و هر گاه

$$g(q_i, a_j) = z_r \quad \text{و} \quad f(q_i, a_j) = q_k$$

آنگاه یک قوس از q_i به q_k هست که با جفت a_j و z_r بر چسب خورده است. ما معمولاً علامت ورودی a_j را نزدیک پایهٔ سهم (نزدیک q_i) و علامت خروجی z_r را نزدیک مرکز سهم قرار می دهیم. در حالتی که وضعیت اولیهٔ q_0 داده شده باشد، رأس q_0 را با رسم یک سهم اضافی به توی q_0 بر چسب می زنیم. به عنوان مثال، شکل ۷.۷ نمودار وضعیت ماشین مثال ۷.۱ با q_0 به عنوان وضعیت اولیه می باشد.

۷.۷ رشته ها، نوارهای ورودی و خروجی

در بخش قبل کیفیت دینامیکی یک ماشین را نشان ندادیم. فرض کنیم به ماشین با وضعیت متناهی M یک رشته از علایم ورودی مانند

$$U = a_1 a_2 \cdots a_n$$

داده باشیم. ما این علایم را روی یک « نوار ورودی» تجسم می کنیم؛ماشین M این علایم ورودی را یکی یکی می خواند و همزمان با آن به یک رشته از وضعیتها مانند

$$V = s_0 s_1 s_2 \cdots s_n$$

که در آن s_0 وضعیت شروع است تغییر می کند و ضمناً یک رشته از علایم خروجی مانند

$$W = z_1 z_2 \cdots z_n$$

را روی یک « نوار خروجی» چاپ می کند. به طور صوری، وضعیت شروع s_0 و رشتهٔ ورودی U رشته های V و W را با

$$z_i = g(s_{i-1}, a_i) \quad \text{و} \quad s_i = f(s_{i-1}, a_i)$$

که در آنها $i = 1, 2, \ldots, n$ معین می سازند. (توجه کنید که اصطلاح « رشته» به جای « n تایی» یا « لیست» برای یک دنبالهٔ متناهی به کار رفته است.)

مثال ۲. فرض کنیم q_0 وضعیت شروع ماشین مثال ۷.۱ بوده و به ماشین رشتهٔ ورودی

$$abaab$$

داده شده باشد. رشتهٔ وضعیتها و رشتهٔ علایم خروجی را از نمودار وضعیت با شروع در رأس q_0 و تعقیب سهمها که با علایم ورودی بر جسب خورده اند حساب می کنیم:

$$q_0 \xrightarrow{a,x} q_1 \xrightarrow{b,z} q_1 \xrightarrow{a,x} q_2 \xrightarrow{a,z} q_0 \xrightarrow{b,y} q_2$$

این کار رشته وضعیتها و علایم خروجی

$$xzxzy \quad \text{و} \quad q_0q_1q_1q_2q_0q_2$$

را به دست می دهد.

حال می خواهیم ماشینی را توصیف کنیم که بتواند عمل دوتایی انجام دهد. با افزودن 0 به ابتدای اعداد می توان فرض کرد اعدادمان تعداد رقمهای مساوی دارند. هرگاه به ماشین ورودی

$$\begin{array}{r} 1101011 \\ +\ 0111011 \\ \hline \end{array}$$

داده شده باشد، آنگاه می خواهیم خروجی مجموع دوتایی

$$10100110$$

باشد. به طور مشخص، ورودی رشته جفتهایی از ارقام است که باید با هم جمع شوند:

$$11,\ 11,\ 00,\ 11,\ 01,\ 11,\ 10,\ b$$

که در آن b مبین فضاهای خالی بوده و خروجی باید رشتهٔ

$$0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1$$

باشد. همچنین می خواهیم وقتی جمع تمام شد ماشین وارد وضعیتی به نام «توقف» شود.

علایم ورودی عبارتند از

$$A = \{00, 01, 10, 11, b\}$$

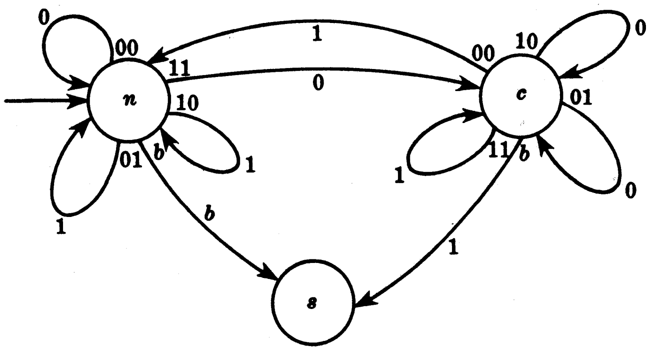
و علایم خروجی عبارتند از

$$Z = \{0, 1, b\}$$

ماشینی که «می سازیم» دارای سه وضعیت می باشد:

$S = \{$ انجام دادن (c)، انجام ندادن (n)، توقف (s) $\}$

در اینجا n وضعیت شروع می باشد. این ماشین در شکل ۷ . ۸ نموده شده است.



شکل ۷ . ۸

برای نشان دادن محدودیتهای ماشینهای ما، قضیهٔ زیر را بیان می کنیم.

قضیهٔ ۷ . ۵. *ماشینی متناهی که بتواند ضرب دوتایی را انجام دهد وجود ندارد.*

هر گاه اندازهٔ اعدادی را که ضرب می کنیم محدود کنیم، آنگاه چنین ماشینهایی موجودند. کامپیوترها مثالهای مهمی از ماشینهای متناهی اند که اعداد را در هم ضرب می کنند ولی اعداد از حیث اندازه شان محدود شده اند.

۷ . ۸ خود کارهای متناهی

یک خود کار متناهی شبیه ماشین با وضعیت متناهی است جز آنکه به جای خروجی دارای وضعیتهای « قبول» و « رد » می باشد. به طور مشخص، خود کار متناهی M از پنج چیز تشکیل شده است:

(۱) یک مجموعهٔ متناهی A از علایم ورودی؛

(۲) یک مجموعهٔ متناهی S از وضعیتهای *داخلی*؛

(۳) یک زیر مجموعه از S مانند T (که عناصرش را وضعیتهای *قبول* می نامند)؛

(٤) یک وضعیت شروع مانند q_0 در S ؛

(۵) یک تابع وضعیت بعدی مانند f از $S \times A$ به توی S .

وقتی بخواهیم بر پنج قسمت فوق تأکید کنیم، M را با $M = \langle A, S, T, q_0, f \rangle$ نشان می دهیم.

مثال ۷ . ۳. روابط زیر معرف یک خود کار متناهی با دو علامت ورودی و سه وضعیت می باشند:

(۱) $A = \{a, b\}$ ، علایم ورودی؛

(۲) $S = \{q_0, q_1, q_2\}$ ، وضعیتها؛

(۳) $T = \{q_0, q_1\}$ ، وضعیتهای قبول؛

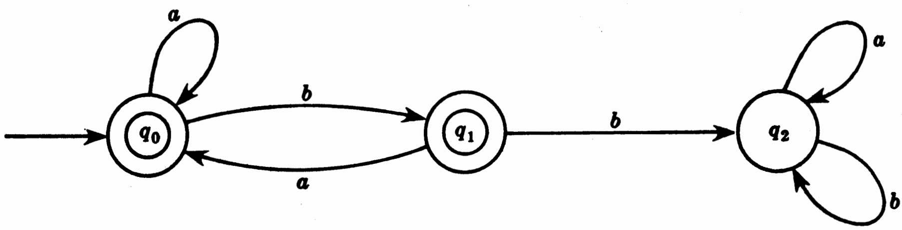
(٤) q_0، وضعیت شروع

(۵) تابع وضعیت بعدی $f: S \times A \to S$ تعریف شده با جدول زیر:

f	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
q_2	q_2	q_2

همانطور که برای ماشینهای با وضعیت متناهی شد، خود کار متناهی M را می توان با نمودار وضعیتش به طور فشرده توصیف کرد جز آنکه در اینجا برای وضعیتهای قبول از دوایر مضاعف استفاده کرده و هر ضلع را فقط با علامت ورودی بر چسب می زنیم. به طور مشخص، نمودار وضعیت D از M گراف جهتدار بر چسب داری است که رئوسش وضعیتهای S بوده و وضعیتهای قبول با دایرهٔ مضاعف بر چسب خورده اند و هرگاه $f(q_j, a_i) = q_k$ ، آنگاه یک قوس از q_j به q_k وجود دارد که بر چسبش a_i می باشد. همچنین، وضعیت شروع q_0 باداشتن سهم ورود به رأس q_0 نموده می شود. به عنوان مثال، در شکل ۷. ۹ نمودار وضعیت خود کار M مثال ۷. ۳ داده شده است.

فرض کنیم $W = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ یک رشتهٔ متناهی از علایم ورودی خود کار M باشد. یک دنباله از وضعیتهای $s_0 s_1 s_2 \cdots s_n$ به دست می آوریم که در آن s_0 وضعیت شروع بوده و به ازای $i > 0$ ، $s_i = f(s_{i-1}, a_i)$.



شکل ۷. ۹

گوییم M رشتهٔ W را تشخیص می دهد یا قبول می کند اگر وضعیت نهایی s_n یک وضعیت قبول باشد؛ یعنی، اگر $s_n \in T$. ما مجموعهٔ تمام رشته هایی که توسط M تشخیص داده می شوند را با $L(M)$ نشان می دهیم. به عنوان مثال، می توان نشان داد که خودکار M مثال ۷. ۳ رشته هایی را که دو b ی متوالی ندارند تشخیص می دهد. مثلاً، M رشته های

$$aababaaba,\ aaa,\ baab,\ abaaababab,\ b,\ aabaaab$$

را قبول می کند ولی رشته های

$$aabaabba,\ bbaaa,\ ababbaab,\ bb,\ abbbbaa$$

را رد می کند. ما در فصل ۹ رابطهٔ بین خودکارهای متناهی و زبانها را نشان خواهیم داد.

تبصره. خودکار متناهی M را می توان یک ماشین با وضعیت متناهی با دو علامت خروجی (مثلاً بلی و خیر) نیز در نظر گرفت، که در آن اگر M به یک وضعیت قبول برود خروجی بلی است و اگر M به یک وضعیت ناقبول برود خروجی خیرمی باشد. به عبارت دیگر، ما M را با تعریف یک تابع خروجی g از $S\times A$ به نوی $Z = \{$ خیر ، بلی $\}$ به صورت زیر:

$$g(q_i, a_j) = \begin{cases} \text{بلی، اگر } f(q_i, a_j) \text{ قبول است (متعلق به } T \text{ است)} \\ \text{خیر، اگر } f(q_i, a_j) \text{ ناقبول است} \end{cases}$$

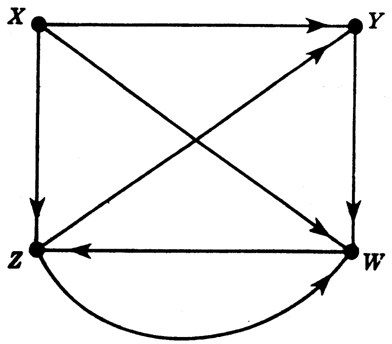
به یک ماشین باوضعیت‌متناهی تبدیل‌می‌کنیم. به عکس، یک ماشین با وضعیت متناهی

با دو علامت خروجی را می توان، به نحو مشابه، یک خود کار متناهی تجسم نمود.

مسائل حل شده

گرافهای جهتدار

۷. ۱ دیگراف D شکل ۷. ۱۰ را در نظر بگیرید. (آ) D را به طور صوری توصیف کنید. (ب) تعداد مسیرها از X به Z را بیابید.



شکل ۷. ۱۰

(پ) تعداد مسیر ها از Y به Z را بیابید. (ت) آیا منبع یا حفره ای وجود دارد؟ (ث) ماتریس M_D دیگراف D را بیابید. (ج) آیا D به طور ضعیف همبند است؟ به طور همجانبی همبند است؟ به طور قوی همبند است؟

حل. چهار رأس وجود دارد: X, Y, Z, W ؛ و هفت قوس وجود دارد:

$$\langle X, Y\rangle,\ \langle X, W\rangle,\ \langle X, Z\rangle,\ \langle Y, W\rangle, \langle Z, Y\rangle,\ \langle Z, W\rangle,\ \langle W, Z\rangle$$

(ب) سه مسیر از X به Z وجود دارد: (X, Z) ، (X, W, Z) ، و (X, Y, W, Z) .

(پ) فقط یک مسیر از Y به Z وجود دارد: (Y, W, Z) .

(ت) X یک منبع است زیرا نقطهٔ پایان هیچ قوسی نیست؛ یعنی، درجهٔ داخلی اش صفر می باشد. حفره ای وجود ندارد زیرا هر رأس دارای یک درجهٔ خارجی ناصفر است؛ یعنی، هر رأس نقطهٔ شروع قوسی می باشد.

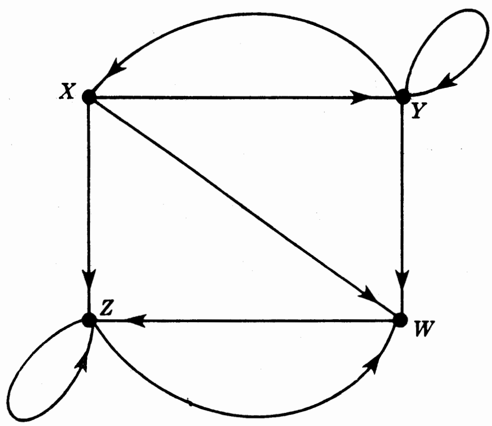
(ثـ) ماتریس M_D ی D به قرار زیر است:

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(در اینجا سطرها و ستونهای M_D به ترتیب با X, Y, Z, W بر چسب خورده اند.)
درایهٔ m_{ij} تعدادِ قوسها از رأس i م به رأس j م می باشد.

(جـ) دیگراف به طور قوی همبند نیست زیرا X یک منبع است و لذا مسیری از هیچ رأس دیگر (مثلاً Y) به X وجود ندارد. ولی D به طورهمجانبی همبند است زیرا مسیر (X, Y, W, Z) از جمیع رأسها می گذرد و در نتیجه یک زیر مسیر وجود دارد که هر جفت از رئوس را به هم وصل می کند.

۷. ۲. دیگراف D شکل ۷. ۱۱ را در نظر بگیرید.



شکل ۷. ۱۱

(آ) آیا منبع یا حفره ای وجود دارد؟

(بـ) با استفاده از نتیجهٔ ۷. ٤ نشان دهید که D به طور قوی همبند نیست.

حل. (آ) هیچ منبع یا حفره ای وجود ندارد.

(ب ـ) ماتریس M از D را می یابیم. M^2 ، M^3 ، و $C = M + M^2 + M^3$ را حساب می کنیم.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

سطرها و ستونهای این ماتریسها به ترتیب با رئوس X, Y, Z, W بر چسب خورده اند. درایه های صفر در C (خارج از قطر اصلی) نشان می دهند که D به طور قوی همبند نیست. به خصوص، C به ما می گوید که هیچ مسیری از Z یا W به X یا Y وجود ندارد.

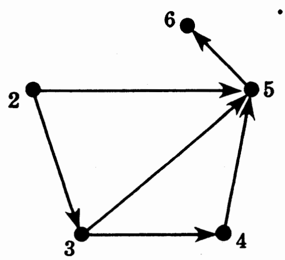
۷. ۳. فرض کنید $V = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ و R رابطه ای بر V باشد که با xRy اگر x کوچکتر از y بوده و x نسبت به y اول است تعریف می شود.

(آ) R را به صورت مجموعه ای از جفتهای مرتب بنویسید.

(ب ـ) نمودار گراف جهتدار نظیر R را رسم کنید.

حل. (آ) $R = \{(2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5), (5,6)\}$

(ب ـ) همانطور که شکل ۷. ۱۲ نشان می دهد، اگر (x, y) متعلق به R باشد، یک قوس از x به y رسم می کنیم.



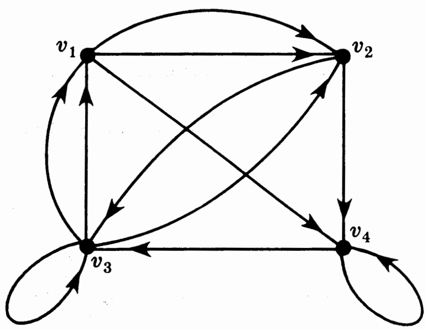
شکل ۷. ۱۲

MATH75.IR

۷ . ٤ . دیگراف D نظیر ماتریس M زیر را که دارای درایه های صحیح نامنفی است رسم کنید:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حل. چون M یک ماتریس 4×4 است، D چهار رأس (مثلاً v_1, v_2, v_3, v_4) دارد. به ازای هر درایهٔ m_{ij}، m_{ij} قوس از رأس v_i به رأس v_j رسم کرده و دیگراف شکل ۷ . ۱۳ را به دست می آوریم.



شکل ۷ . ۱۳

۷ . ۵ . قضیهٔ ۷ . ۳ را ثابت کنید: فرض کنید M ماتریس دیگراف D باشد. در این صورت، درایهٔ ij ماتریس M^n تعداد راهها به طول n از رأس v_i به رأس v_j را به دست می دهد.

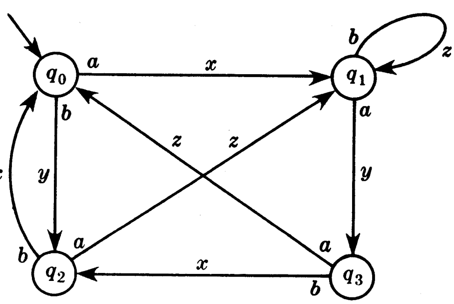
برهان. برهان به استقرا بر n صورت می گیرد. ابتدا توجه کنید که یک راه به طول 1 از v_i به v_j دقیقاً یک قوس مانند $\langle v_i, v_j \rangle$ است. لذا، قضیه به ازای $n = 1$ برقرار است زیرا درایهٔ ij ی M تعداد قوسهای $\langle v_i, v_j \rangle$ را به دست می دهد که تعداد راهها به

طول 1 از v_i به v_j می باشد.

فرض کنیم $n > 1$ و $M^{n-1} = (a_{ik})$ ، $M = (b_{kj})$ ، و $M^n = (c_{ij})$. در این صورت، $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. بنابر استقرا، a_{ik} مساوی تعداد راهها به طول $n-1$ از v_i به v_k است. همچنین، b_{kj} تعداد قوسها از v_k به v_j می باشد. لذا، $a_{ik}b_{kj}$ تعداد راهها به طول n از v_i به v_j است که v_k رأس ماقبل آخر راه می باشد. لذا، تمام راهها به طول n از v_i به v_j را می توان با جمعبندی $a_{ik}b_{kj}$ به ازای جمیع k ها به دست آورد. یعنی، c_{ij} تعداد راهها به طول n از v_i به v_j می باشد. بنابراین، قضیه ثابت می باشد.

ماشینهای متناهی

۷. ٦. ماشین با وضعیت متناهی M با علایم ورودی a و b و علایم خروجی x و y و z و نمودار وضعیت شکل ۷. ۱٤ را در نظر بگیرید. (آ) جدول وضعیت برای M را بیابید.



شکل ۷. ۱٤

(بـ) اگر ورودی رشته علایم $W = aababaabbab$ باشد، خروجی را تعیین کنید.

حل. (آ) سطرهای جدول را با چهار وضعیت q_0, q_1, q_2, q_3 و ستونها را با علایم ورودی a و b بر چسب می زنیم. با استفاده از نمودار وضعیت شکل ۷. ۱٤، درایه های جدول را به قرار زیر به دست می آوریم. از وضعیت q_0 ، سهم با بر چسب a به

وضعیت q_1 می رود و با علامت خروجی x بر چسب می خورد. لذا، q_1 و x را در موضع نظیر سطر q_0 و ستون a در جدول قرار می دهیم. درایه های دیگر جدول وضعیت زیر به همین نحو به دست می آیند.

	a	b
q_0	q_1, x	q_2, y
q_1	q_3, y	q_1, z
q_2	q_1, z	q_0, x
q_3	q_0, z	q_2, x

(بـ) با شروع از q_0 (وضعیت شروع) به وسیلهٔ سهمهایی که با علایم ورودی داده شده بر چسب خورده اند از یک وضعیت به وضعیت دیگر می رویم:

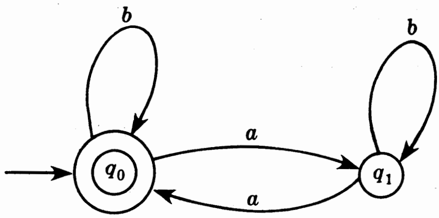
$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_1$$

علایم خروجی بالای سهمها به ترتیب $xyxzzyzyxxz$ می باشند.

۷.۷. فرض کنید a و b علایم ورودی باشند. خودکار متناهی M را طوری بسازید که درست رشته هایی از a و b را قبول کند که در آنها تعداد a ها زوج است. (مثلاً، $aababbab$ ، aa ، bbb ، $ababaa$ قبول شده ولی $ababa$ ، aaa ، و $bbabb$ رد شوند.)

حل. فقط دو وضعیت مانند q_0 و q_1 مورد نیاز است. فرض کنیم M بر حسب اینکه تعداد a ها تا مرحلهٔ داده شده زوج یا فرد است در وضعیت q_0 یا q_1 باشد. (لذا، q_0 وضعیت قبول است ولی q_1 وضعیت ناقبول می باشد.) در این صورت، فقط a وضعیت را تغییر خواهد داد. همچنین، q_0 وضعیت شروع می باشد. شکل ۷.۱۵ نمودار وضعیت M رانشان می دهد.

۸.۷. فرض کنید $M = \langle A, S, T, q_0, f\rangle$ و $M' = \langle A, S', T', q'_0, f'\rangle$ دو خودکار متناهی با مجموعهٔ یکسان A از علایم ورودی باشند. همچنین مجموعه‌های $L(M)$ و $L(M')$



شکل ۷ . ۱۵

مجموعه رشته هایی باشند که به ترتیب توسط M و M' قبول می شوند . خود کار متناهی N را با مجموعهٔ علایم ورودی A طوری بسازید که درست $L(M) \cap L(M')$ را قبول کند ؛ یعنی، آن رشته هایی که در هر دوی $L(M)$ و $L(M')$ قرار دارند .

حل. فرض کنیم $S \times S'$ مجموعهٔ وضعیتهای N باشد . همچنین (q, q') در صورتی وضعیت قبول N باشد که q و q' به ترتیب وضعیتهای قبول M و M' باشند ، و (q_0, q'_0) وضعیت شروع N باشد . تابع وضعیت بعدی

$$g : (S \times S') \times A \to (S \times S')$$

از N به صورت زیر تعریف می شود :

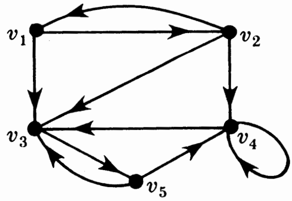
$$g((q, q'), a) = (f(q, a), f'(q', a))$$

در این صورت، N درست رشته های در $L(M) \cap L(M')$ را قبول خواهد کرد .

مسائل تکمیلی

گرافهای جهتدار

۷ . ۹ . دیگراف D شکل ۷ . ۱۶ را در نظر بگیرید .



شکل ۷ . ۱۶

MATH75.IR

(آ) درجهٔ داخلی و درجهٔ خارجی هر رأس را بیابید.

(بـ) تعداد مسیرها از v_1 به v_4 را بیابید.

(پـ) آیا منبع یا حفره ای وجود دارد؟

(تـ) ماتریس M دیگراف D را بیابید.

(ثـ) تعداد راهها به طول 3 یا کمتر از v_1 تا v_3 را بیابید.

(جـ) آیا D به طور همجانبی همبند است؟ به طور قوی همبند است؟

۷. ۱۰. فرض کنید D دیگراف با رئوس v_1, v_2, v_3, v_4 نظیر ماتریس

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

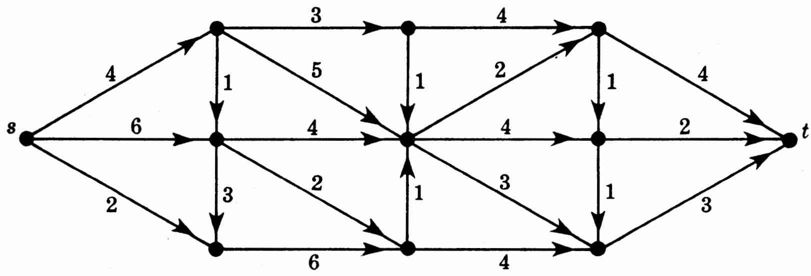
باشد.

(آ) دیگراف D را رسم کنید. (بـ) تعداد راهها به طول 3 از v_1 تا (یک) v_1 ، (دو) v_2 ، (سه) v_3 ، (چهار) v_4 را بیابید. (پـ) آیا D به طور همجانبی همبند است؟ به طور قوی همبند است؟

۷. ۱۱. فرض کنید رابطهٔ R بر $V = \{2, 3, 4, 9, 15\}$ با « x از y کوچکتر و نسبت به آن اول است » تعریف شده باشد. (آ) نمودار دیگراف R را رسم کنید. (بـ) آیا R به طور ضعیف همبند است؟ به طور همجانبی همبند است؟ به طور قوی همبند است؟

۷. ۱۲. دیگراف D در صورتی تام است که به ازای هر جفت رأس متمایز مانند v_i و v_j ، یا $\langle v_i, v_j\rangle$ یک قوس باشد یا $\langle v_j, v_i\rangle$ یک قوس باشد. نشان دهید که دیگراف تام متناهی D دارای مسیری است که تمام رئوس را شامل می باشد. (این امر به وضوح برای گرافهای تام غیر جهتدار برقرار می باشد.) لذا، D به طور همجانبی همبند می باشد.

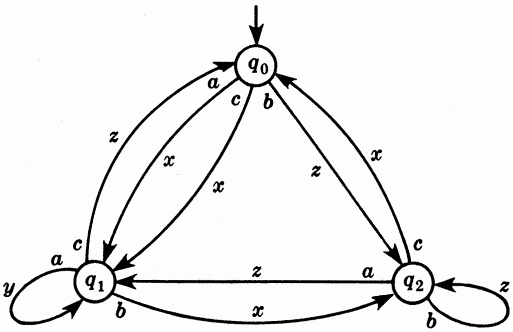
۷. ۱۳. با استفاده از الگوریتم هرس (بخش ۷. ۵)، کوتاهترین مسیر از s به t در شکل ۷. ۱۷ را بیابید.



شکل ۷ . ۱۷

ماشینهای متناهی

۷ . ۱٤ . ماشین با وضعیت متناهی M با علایم ورودی a, b, c و علایم خروجی x, y, z و نمودار وضعیت شکل ۷ . ۱۸ را در نظر بگیرید . (آ) جدول وضعیت M را بسازید .



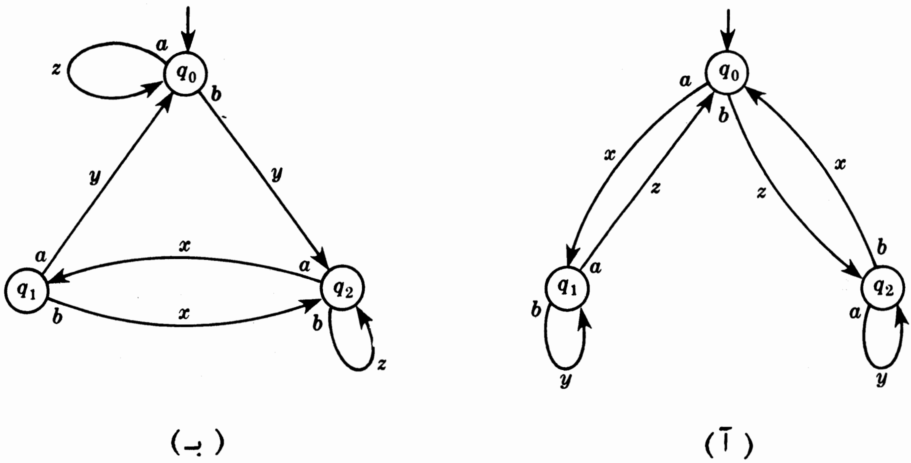
	a	b
q_0	q_2, y	q_1, z
q_1	q_2, x	q_3, y
q_2	q_2, y	q_1, z
q_3	q_3, z	q_0, x

شکل ۷ . ۱۸

(بـ) اگر ورودی رشتهٔ $W = caabbaccab$ باشد ، خروجی را پیدا کنید .

۷ . ۱۵ . فرض کنید M یک ماشین با وضعیت متناهی باشد که جدول وضعیتش در کنار شکل ۷ . ۱۸ دیده می شود . (آ) نمودار وضعیت M را با وضعیت شروع q_0 رسم کنید . (بـ) خروجی رادر صورتی بیابید که ورودی رشتهٔ $W = aabbabbaab$ باشد .

۷ . ۱٦ . به ازای هر یک از ماشینهای شکل ۷ . ۱۹ با علایم ورودی a, b و علایم خروجی x, y, z ، خروجی را در صورتی بیابید که ورودی رشتهٔ $W = abaabbabbaabaa$ باشد .



شکل ۷. ۱۹

۷. ۱۷. خودکار متناهی M را با علایم ورودی a, b چنان بسازید که فقط آن رشته هایی از a و b را قبول کند که تعداد b ها در آنها بر 3 بخشپذیر باشد.
(**راهنمایی.** سه وضعیت مورد نیاز است.)

۷. ۱۸. خودکار متناهی M با علایم ورودی a و b را چنان بسازید که فقط آن رشته هایی از a و b را قبول کند که تعداد a ها زوج و تعداد b ها بر 3 بخشپذیر باشد.
(**راهنمایی.** از مسائل ۷. ۷، ۷. ۸، و ۷. ۱۷ استفاده کنید.)

۷. ۱۹. خودکار متناهی M با علایم ورودی a و b را چنان بسازید که فقط آن رشته هایی از a و b را قبول کند که $aabb$ زیر رشته باشد. مثلاً،
$ba(aabb)ba$ و $bab(aabb)a$ قبول شده ولی $babbaa$ و $aababaa$ قبول نشود.

۷. ۲۰. فرض کنید $M = \langle A, S, T, q_0, f\rangle$ و $M' = \langle A, S', T', q'_0, f'\rangle$ دو خودکار متناهی با مجموعهٔ یکسان A از علایم ورودی باشند. همچنین $L(M)$ و $L(M')$ به ترتیب مجموعه های مورد قبول از رشته ها به وسیلهٔ M و M' باشند. خودکار متناهی N با علایم ورودی A را چنان بسازید که درست (آ) $L(M)^c$، یعنی مجموعهٔ رشته هایی که تعلق به $L(M)$ ندارند، را قبول کند، (ب) $L(M)\cup L(M')$، یعنی مجموعهٔ رشته هایی که تعلق به $L(M)$ یا $L(M')$ دارند، را قبول کند.

مسائل برنامه‌نویسی کامپیوتر

فرض کنیم D یک دیگراف با شش رأس $v_1, v_2, \ldots, v_6$ و هشت قوس باشد. همچنین B ماتریس قوسی 8×2 دیگراف D باشد؛ یعنی، یک سطر مثلاً $(4,2)$ ماتریس B قوس $\langle v_4, v_2 \rangle$ می باشد. فرض کنید B در یک دسته کارت پانچ شده باشد.

۷ . ۲۱. برنامه ای بنویسید که درجهٔ داخلی و درجهٔ خارجی هر رأس را چاپ کند.

۷ . ۲۲. برنامه ای بنویسید که ماتریس M دیگراف D را چاپ کند.

۷ . ۲۳. برنامه ای بنویسد که به طور ضعیف، به طور همجانبی، یا به طور قوی همبند بودن یا نبودن D را باز گو کند.

سه برنامهٔ فوق را با ماتریسهای زیر امتحان کنید:

(یک) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 6 & 5 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 4 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ (دو) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 4 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (سه) $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 6 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

جواب مسائل تکمیلی

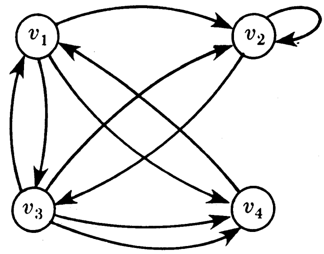
۷ . ۹. (آ) درجات داخلی: $1, 1, 4, 3, 1$. درجات خارجی: $2, 3, 1, 2, 2$.

(بـ) سه تا: $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_4), (v_1, v_3, v_5, v_4), (v_1, v_2, v_4)$. (پـ) خیر.

(تـ) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، (ثـ) 5،

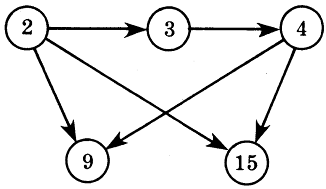
(جـ) همجانبی ولی نه قوی.

۷ . ۱۰. (آ) ر.ک. شکل ۷ . ۲۰. (بـ) $3, 5, 4, 4$.(پـ) همجانبی و قوی.



شکل ۷. ۲۰

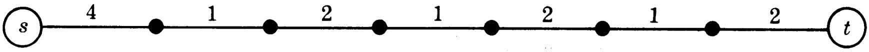
۷. ۱۱. (آ) ر.ک. شکل ۷. ۲۱. (بـ) فقط به طور ضعیف همبند.



شکل ۷. ۲۱

۷. ۱۲. راهنمایی. فرض کنید $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ **بلندترین مسیر در** D **بوده و شامل راس** u **نباشد. در این صورت،** $\langle u, v_1\rangle$ **و** $\langle v_m, u\rangle$ **قوس نیستند چرا که اگر باشند، مسیر قابل بسط می باشد. لذا،** $\langle v_1, u\rangle$ **و** $\langle u, v_m\rangle$ **قوس می باشند. فرض کنید** k **کوچکترین عدد صحیحی باشد که** $\langle v_k, u\rangle$ **و** $\langle u, v_{k+1}\rangle$ **قوس اند. دراین صورت،** $(v_1, \ldots, v_k, u, v_{k+1}, \ldots, v_m)$ **یک مسیر طویلتر می باشد.**

۷. ۱۳.

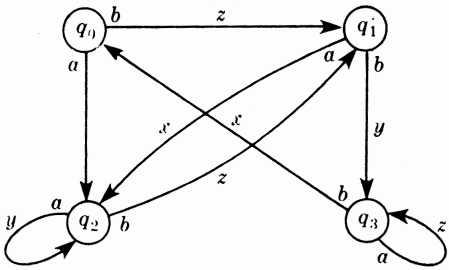


۷. ۱۴. (آ)

	a	b	c
q_0	q_1, x	q_2, z	q_1, x
q_1	q_1, y	q_2, x	q_0, z
q_2	q_1, z	q_2, z	q_0, x

(بـ) $xyyxzzzxyx$

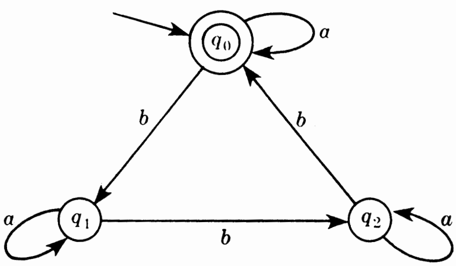
۷ . ۱۵ . (آ) ر.ک. شکل ۷ . ۲۲ . (ب) $yyzyzxzxyz$



شکل ۷ . ۲۲

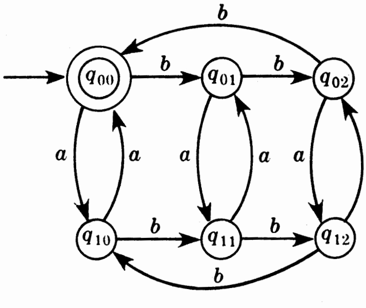
۷ . ۱٦ . (آ) $xyzxyyzzxxzzyy$ ، (ب) $zyxyyzxxzxyyxy$

۷ . ۱۷ . ر.ک. شکل ۷.۲۳.



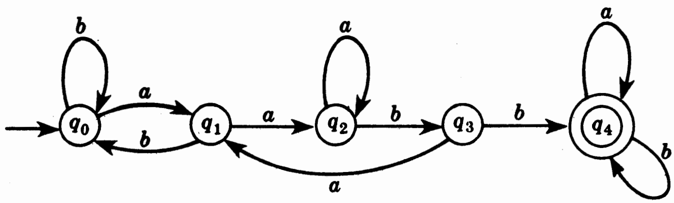
شکل ۷ . ۲۳

۷ . ۱۸ . ر.ک. شکل ۷ . ۲٤.



شکل ۷ . ۲٤

۷ . ۱۹ . ر.ک. شکل ۷ . ۲۵.



شکل ۷ . ۲۵

۷ . ۲۰ . (آ) $N = \langle A, S, S \setminus T, q_0, f \rangle$

(ب) $N = \langle A, S \times S', (S \times T') \cup (T \times S'), (q_0, q'_0), g \rangle$ که در آن

$$g((q, q'), a) = (f(q, a), f'(q', a))$$

۸
آنالیز ترکیبی

۸. ۱ اصل اساسی شمارش

آنالیز ترکیبی، که عبارت است از مطالعهٔ جایگشتها، ترکیبات، و افرازها، به تعیین تعداد حالات منطقی یک پیشامد بدون شمارش آنها می پردازد. در این راه، اصل اساسی شمارش مذکور در زیر به کار خواهد رفت.

اصل اساسی شمارش. هرگاه پیشامدی به n_1 طریق مختلف رخ دهد و سپس پیشامد دوم به n_2 طریق مختلف رخ دهد و پس از آن پیشامد سوم به n_3 طریق مختلف رخ دهد، . . . ، آنگاه تعداد طرقی که این پیشامدها می توانند به ترتیب ذکر شده رخ دهند عبارت است از $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots$.

مثال ۸. ۱

(آ) فرض کنیم یک پلاک اتومبیل شامل دو حرف انگلیسی و پس آن سه رقم باشد که اولین آنها صفر نیست. چند پلاک اتومبیل خواهیم داشت؟

حل. هر حرف را می توان به بیست و شش طریق مختلف و رقم اول را به نه طریق و هر یک از دو رقم دیگر را به ده طریق اختیار کرد. لذا،

$$26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 608{,}400$$

پلاک مختلف خواهیم داشت.

(بـ) یک سازمان بیست وشش عضوی به چند طریق می تواند رئیس، خزانه دار، و منشی انتخاب کند (فرض است که یک شخص نمی تواند بیش از یک پست را اشغال نماید)؟

حل. رئیس را می توان به بیست و شش طریق مختلف انتخاب کرد؛ سپس خزانه دار را می توان به بیست و پنج طریق مختلف انتخاب کرد (زیرا شخصی که به عنوان رئیس انتخاب شده دیگر نمی تواند خزانه دار باشد)؛ و، سپس، منشی را می توان به بیست و چهار طریق مختلف انتخاب نمود. لذا، طبق اصل شمارش فوق،

$$26 \cdot 25 \cdot 24 = 15,600$$

راه برای انتخاب افراد فوق در این سازمان وجود خواهد داشت.

۲.۸ نماد فاکتوریل

حاصل ضرب اعداد صحیح مثبت از 1 تا n با $n!$ (بخوانید: « n فاکتوریل») نموده می شود:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot (n-2)(n-1)n$$

به عبارت دیگر، $n!$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$1! = 1 \qquad \text{و} \qquad n! = n\cdot (n-1)!$$

همچنین شایسته است که تعریف کنیم $0! = 1$.

مثال ۲.۸

(آ) $2! = 1\cdot 2 = 2 \qquad 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \qquad 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$

$5! = 5\cdot 4! = 5\cdot 24 = 120 \qquad 6! = 6\cdot 5! = 6\cdot 120 = 720$

(بـ) $\dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6!}{6!} = 8\cdot 7 = 56 \qquad 12\cdot 11\cdot 10 = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{9!} = \dfrac{12!}{9!}$

$\dfrac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 12\cdot 11\cdot 10\cdot \dfrac{1}{3!} = \dfrac{12!}{3!\,9!}$

(پـ)

$$n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)r} = n(n-1)\cdots(n-r+1)\cdot\frac{1}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!}\cdot\frac{1}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

۸ . ۳ ضرایب دو جمله ای

علامت $\binom{n}{r}$ (بخوانید: « $“nCr”$ ») که در آن r و n اعداد صحیح مثبتی بوده و $r \leq n$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)r}$$

از مثال ۸ . ۲ (پـ) معلوم می شود که

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ولی $n-(n-r) = r$ ؛ پس رابطهٔ مهم زیر را خواهیم داشت:

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$$

یا، به عبارت دیگر، هرگاه $a+b=n$ ، آنگاه $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$.

مثال ۸ . ۳

(آ)

$$\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} = 28 \qquad \binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120 \qquad \binom{13}{1} = \frac{13}{1} = 13$$

$$\binom{12}{5} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792$$

توجه کنید که $\binom{n}{r}$ درست r عامل در صورت و در مخرج دارد.

(ب) $\binom{10}{7}$ را حساب می کنیم. طبق تعریف،

$$\binom{10}{7} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 120$$

از آن سو، $10-7=3$ و لذا می توان $\binom{10}{7}$ را به صورت زیر نیز حساب کرد:

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$$

توجه کنید که روش دوم از حیث وقت و جا با صرفه تراست.

اعداد $\binom{n}{r}$ را ضرایب دو جمله ای نامند زیرا به صورت ضرایب بسط $(a+b)^n$ ظاهر می شوند. به طور مشخص، می توان ثابت کرد که

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ضرایب توانهای متوالی $a+b$ را می توان به صورت یک آرایهٔ مثلثی از اعداد به نام مثلث پاسکال (Pascal) به صورت زیر مرتب کرد:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
....

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4

1 5 10 10 5

1 6 15 20 15 6

...

مثلث پاسکال از خواص جالب زیر برخوردار است:

(یک) اولین و آخرین عدد در هر سطر 1 است؛

(دو) هر عدد دیگر در این آرایه را می توان با جمع دو عدد مستقیماً در بالای آن به دست آورد. به عنوان مثال، $10 = 4+6,\ 15 = 5+10,\ 20 = 10+10$.

چون اعداد آمده در مثلث پاسکال ضرایب دوجمله ای اند، خاصیت (دو) مثلث پاسکال از قضیهٔ زیر (که در مسئلهٔ ۸. ۸ ثابت شده است) ناشی خواهد شد.

قضیهٔ ۸. ۱. $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

۸. ٤ جایگشتها

هر آرایش از یک مجموعهٔ n شیی به ترتیبی معین یک جایگشت از اشیاء (که همه باهم اختیار شده اند) نام دارد. هر آرایش از $r \leq n$ تا از این اشیاء به ترتیبی معین یک r-جایگشت یا یک جایگشت از n شیْی r به r نامیده می شود. مثلاً، مجموعهٔ حروف a، b، c، و d را در نظر می گیریم. در این صورت،

(یک) $bdca$، $dcba$، و $acdb$ جایگشتهایی از چهار حرف (که همه با هم گرفته شده اند) می باشند؛

(دو) bad، adb، cbd، و bca جایگشتهای چهار حرف سه به سه می باشند؛

(سه) ad، cb، da، و bd جایگشتهای چهار حرف دو به دو می باشند.

تعداد جایگشتهای n شیْی r به r با

$$P(n,r) \text{ ، } {}_nP_r \text{ ، } P_{n,r} \text{ ، } P_r^n \text{ ، یا } (n)_r$$

نموده می شود. ما از علامت $P(n,r)$ استفاده خواهیم کرد. پیش از به دست آوردن فرمول کلی برای $P(n,r)$ به حالتی خاص می پردازیم.

مثال ۸. ٤. تعداد جایگشتهای شش شیْ، مثلاً a، b، c، d، e، و f، سه به سه چند تاست؟ به عبارت دیگر، می خواهیم تعداد «کلمات سه حرفی» حاصل از شش حرف بدون تکرار را پیدا کنیم.

حل. فرض کنیم کلمهٔ سه حرفی کلی با سه جعبهٔ زیر نموده شده باشد:

$$\square \quad \square \quad \square$$

اولین حرف را می توان به شش طریق مختلف اختیار کرد؛ سپس دومین حرف را می توان به پنج طریق مختلف اختیار کرد و، پس از آن، آخرین حرف را می توان به چهار طریق مختلف اختیار نمود. هر عدد را در جعبهٔ مربوطه به صورت زیر می نویسیم:

$$\boxed{6}\quad \boxed{5}\quad \boxed{4}$$

لذا، طبق اصل اساسی شمارش، $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ کلمهٔ سه حرفی از شش حرف بدون تکرار وجود دارد یا 120 جایگشت از شش شیءِ سه به سه خواهیم داشت:

$$P(6,3) = 120$$

فرمول تعداد جایگشتهای n شی r به r یا تعداد r- جایگشت از n شیء، یعنی $P(n,r)$، از روند به کار رفته در مثال قبل به دست می آید. اولین عنصر در یک r-جایگشت n شی را می توان به n طریق مختلف اختیار کرد؛ سپس، دومین عنصر جایگشت را می توان به $n-1$ طریق اختیار کرد؛ و، پس از آن، سومین عنصر جایگشت را می توان به $n-2$ طریق اختیار نمود. به همین سیاق معلوم می شود که r مین (آخرین) عنصر r-جایگشت را می توان به $n-(r-1) = n-r+1$ طریق اختیار کرد. لذا، طبق اصل اساسی شمارش، داریم

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

از مثال ۸. ۲ (پ) معلوم می شود که

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

لذا، قضیهٔ زیر را ثابت کرده ایم:

قضیهٔ ۸. ۲. $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

در حالت خاص که $r = n$ داریم

$$P(n,n) = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

بنابراین،

نتیجهٔ ۸. ۳. تعداد جایگشتهای n شیٔ (که همه با هم گرفته شده اند) $n!$ می باشد.

به عنوان مثال، تعداد جایگشتهای سه حرف a ، b ، و c مساوی $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ است. این جایگشتها عبارتند از $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

۸. ۵ جایگشتها و تکرارها

ما اغلب می خواهیم تعداد جایگشتهای اشیایی را بیابیم که بعضی از آنها یکسانند. مثالهای زیر این امر را توضیح می دهند. فرمول کلی به قرار زیر است:

قضیهٔ ۸. ٤. تعداد جایگشتهای n شی که n_1 تا با هم، n_2 تا با هم، ... ، و n_r تا با هم یکسانند مساوی است با

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

برهان. قضیهٔ فوق را با یک مثال توضیح می دهیم. فرض کنید بخواهیم تمام «کلمات» پنج حرفی را با استفاده از حروف کلمهٔ « "DADDY" » تشکیل دهیم. تعداد جایگشتهای حروف D_1, A, D_2, D_3, Y که در آنها سه D متمایزند مساوی است با $5! = 120$. توجه کنید که شش جایگشت

$D_1D_2D_3AY$ ، $D_2D_1D_3AY$ ، $D_3D_1D_2AY$ ، $D_1D_3D_2AY$ ، $D_2D_3D_1AY$
و $D_3D_2D_1AY$

پس از برداشتن زیر نویس یکی اند. این 6 ناشی از آن است که به $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ طریق مختلف می توان سه D را در سه موضع اول جایگشت قرارداد. این امر در هر مجموعه از سه موضع که D ها می توانند در آنها ظاهر شوند درست است. لذا، تعداد

کلمات پنج حرفی مختلف حاصل از حروف کلمهٔ "DADDY" مساوی است با

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

مثال ۸. ۵

(آ) از کلمهٔ "BENZENE" چند کلمهٔ هفت حرفی می توان تشکیل داد ؟

حل. تعداد جایگشتهای هفت شیٔ که سه تای آنها (سه E) با هم و همچنین دوتای آنها (دو N) با هم یکسانند را پیدا می کنیم. بنا بر قضیهٔ ۸. ٤، تعداد این کلمات مساوی است با

$$\frac{7!}{3!\,2!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = 420$$

(بـ) از یک مجموعه مرکب از چهار پرچم قرمز غیر قابل تمیز، سه پرچم سفید غیر قابل تمیز، و یک پرچم آبی چند علامت مختلف هر یک مرکب از هر هشت پرچم که به طور قائم آویزان شده اند می توان ترتیب داد ؟

حل. ما تعداد جایگشتهای هشت شیٔ که چهارتای آنها با هم و سه تای آنها با هم یکسانند را جستجو می کنیم. تعداد این علایم مختلف مساوی است با

$$\frac{8!}{4!\,3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = 280$$

۸. ٦ ترکیبات

فرض کنید گردایه ای از n شی داشته باشیم. یک ترکیب از این n شیٔ r به rطبق تعریف انتخابی است از r شیٔ که در آن ترتیب ملحوظ نیست. به عبارت دیگر،

یک r- ترکیب مجموعه ای از n شیئ زیر مجموعهٔ دلخواهی از r عنصر می باشد. به عنوان مثال، ترکیبات سه به سه از حروف a, b, c, d عبارتند از

$$\{a,b,c\},\ \{a,b,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d\}$$

یا فقط

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd$$

توجه کنید که ترکیبات زیر مساویند:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab \text{ and } cba$$

یعنی، هر یک مبین مجموعهٔ $\{a,b,c\}$ می باشد.

تعداد ترکیبات n شیئ r به r با $C(n,r)$ نموده می شود. علایم $_nC_r$ ، $C_{n,r}$ ، و C_r^n نیز در کتب مختلف به کار رفته اند. پیش از ارائهٔ فرمول کلی برای $C(n,r)$ ، به یک حالت خاص می پردازیم.

مثال ۸. ۶. تعداد ترکیبات چهار شیٔ a ، b ، c ، و d سه به سه چند تاست؟

حل. هر ترکیب مرکب از سه شیٔ $3! = 6$ جایگشت از اشیاء آمده در ترکیب را معین می سازد.

ترکیبات	جایگشتها
abc	$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba$
abd	$abd,\ adb,\ bad,\ bda,\ dab,\ dba$
acd	$acd,\ adc,\ cad,\ cda,\ dac,\ dca$
bcd	$bcd,\ bdc,\ cbd,\ cdb,\ dbc,\ dcb$

لذا، تعداد ترکیبات ضربدر $3!$ مساوی تعداد جایگشتها می باشد:

$$C(4,3) = \frac{P(4,3)}{3!} \quad \text{یا} \quad C(4,3)\cdot 3! = P(4,3)$$

ولی $P(4,3) = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$ و $3! = 6$ ؛ پس، همانطور که در بالا ذکر شد، $C(4,3) = 4$.

چون هر ترکیب n شیٔ r به r تعداد $r!$ تا جایگشت از اشیاء موجود در ترکیب را به دست می دهد، می توان نتیجه گرفت که

$$P(n,r) = r!\,C(n,r)$$

لذا، داریم:

قضیهٔ ۸ . ۵. $C(n,r) = \dfrac{P(n,r)}{r!} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

به یاد آورید که ضریب دو جمله ای $\binom{n}{r}$ مساوی $\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ تعریف شد؛ پس داریم

$$C(n,r) = \binom{n}{r}$$

ما از هر دو علامت $C(n,r)$ و $\binom{n}{r}$ به یک معنی استفاده خواهیم کرد.

مثال ۸ . ۷

(آ) از هشت نفر چند کمیتهٔ سه نفری می توان تشکیل داد؟

حل. هر کمیته اساساً ترکیبی از هشت نفر سه به سه می باشد. لذا، تعداد

$$C(8,3) = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$$

کمیتهٔ مختلف قابل تشکیل می باشد.

(ب) دهقانی از یک شخص که صاحب شش گاو، پنج خوک، و هشت مرغ است سه گاو، دو خوک، و چهار مرغ خریداری می کند. این دهقان چند حق انتخاب دارد؟

حل. دهقان می تواند گاوها را به $\binom{6}{3}$ طریق، خوکها را به $\binom{5}{2}$ طریق، و مرغها را

به $\binom{8}{4}$ طریق انتخاب کند. لذا، رویهم می تواند جانوران را به

$$\binom{6}{3}\binom{5}{2}\binom{8}{4} = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{5\cdot4}{1\cdot2}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 20\cdot10\cdot70 = 14{,}000$$

راه انتخاب نماید.

۸ . ۷ افرازهای مرتب

فرض کنیم کیسهٔ A شامل هفت گوی با شماره های 1 تا 7 باشد. تعداد طرقی که می توان ابتدا دو گوی، سپس سه گوی، و بالأخره دوگوی از کیسه استخراج کرد را حساب می کنیم. به عبارت دیگر، می خواهیم تعداد [1] افرازهای مرتب

$$(A_1, A_2, A_3)$$

مجموعهٔ هفت گویی به سلولهای A_1 شامل دوگوی، A_2 شامل سه گوی، و A_3 شامل دوگوی را حساب کنیم. ما اینها را افرازهای مرتب می نامیم زیرا بین

$$(\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7\}) \quad \text{و} \quad (\{6,7\}, \{3,4,5\}, \{1,2\})$$

که هر دو افراز واحدی از A را معین می سازند تمایز قایل می شویم.

حال با هفت گوی موجود در کیسه شروع می کنیم؛ پس به $\binom{7}{2}$ راه می توان دوگوی اول را استخراج کرد یا اینکه اولین سلول A_1 را معین نمود؛ سپس پنج گوی در کیسه مانده است و لذا به $\binom{5}{3}$ طریق می توان سه گوی استخراج کرد یعنی سلول دوم A_2 را معین نمود؛ بالأخره، دوگوی در کیسه مانده است و در نتیجه به $\binom{2}{2}$ طریق می توان آخرین سلول A_3 را معین ساخت. لذا، تعداد افرازهای مرتب مختلف A به سلولهای A_1 شامل دو گوی، A_2 شامل سه گوی، و A_3 حاوی دوگوی مساوی است با

$$\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{7\cdot6}{1\cdot2}\cdot\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{2\cdot1}{1\cdot2} = 210$$

حال ملاحظه می کنیم که

$$\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{7!}{2!5!}\cdot\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{2!}{2!0!} = \frac{7!}{2!3!2!}$$

زیرا هر صورت بعد از اولی با جملهٔ دوم مخرج عامل قبل حذف شده است.

می توان نشان داد که بحث فوق در حالت کلی برقرار است. یعنی،

قضیهٔ ۸. ۶. فرض کنیم A شامل n عنصر بوده و $n_1, n_2, \ldots, n_r$ اعداد صحیح مثبتی باشند که $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. در این صورت، تعداد افرازهای مرتب مختلف A به شکل $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ که در آن A_1 شامل n_1 عنصر، A_2 شامل n_2 عنصر، . . .، و A_r شامل n_r عنصر است مساوی است با

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \cdots n_r!}$$

ما این قضیه را درمثال بعدی به کار می بریم.

مثال ۸. ۸. به چند طریق می توان نه اسباب بازی را بین چهار کودک طوری تقسیم کرد که کوچکترین کودک سه اسباب بازی و هر یک از سه کودک دیگر دو اسباب بازی دریافت کنند؟

حل. می خواهیم تعداد افرازهای مرتب نه اسباب بازی به چهار سلول و به ترتیب شامل 3 ، 2 ، 2 ، و 2 را بیابیم. بنا بر قضیهٔ ۸. ۶، تعداد این افرازهای مرتب مساوی

$$\frac{9!}{3!\,2!\,2!\,2!} = 7560$$

می باشد.

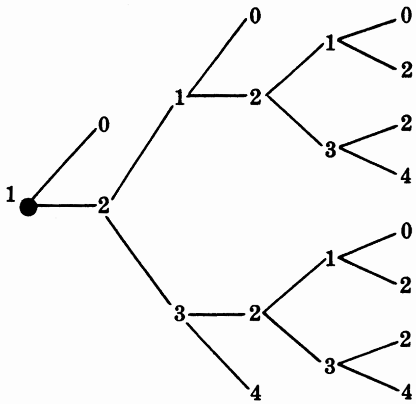
۸. ۸ نمودارهای درختی

یک نمودار درختی (ریشه دار) طرحی مفید برای شمارش کلیهٔ حالات منطقی یک دنباله از پیشامدهاست که هرپیشامد بتواند به تعدادی متناهی راه رخ دهد. ما این روش را با یک مثال توضیح می دهیم.

مثال ۸. ۹. شخصی فرصت دارد که حداکثر پنج بار رولت بازی کند. وی در هر

بازی یک دلار می برد یا می بازد. این شخص با یک دلار شروع می کند و اگر تمام پولش را ببازد یا سه دلار ببرد (یعنی چهار دلار داشته باشد) پیش از پنج بار از بازی دست می کشد. نمودار درختی نحوهٔ شرط بندی را توضیح می دهد. هر عدد در نمودار مبین تعداد دلارهایی است که وی در آن لحظه دارد.

حل. شرط بندی به یازده طریق مختلف صورت می گیرد. توجه کنید که وی فقط در سه حالت پیش از پنج بار از بازی دست می کشد.



شکل ۸. ۱

مسائل حل شده

نماد فاکتوریل و ضرایب دوجمله ای

۸. ۱. $4!$ ، $5!$ ، $6!$ ، $7!$ ، و $8!$ را حساب کنید.

حل.

$4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$

$5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 5\cdot4! = 5\cdot24 = 120$

$6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 6\cdot5! = 6\cdot120 = 720$

$7! = 7\cdot6! = 7\cdot720 = 5040$

$8! = 8\cdot7! = 8\cdot5040 = 40{,}320$

۸. ۲. کسرهای زیر را حساب کنید: (آ) $\dfrac{13!}{11!}$ ؛ (ب) $\dfrac{7!}{10!}$

حل. (آ) $\frac{13!}{11!} = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 13\cdot12 = 156$

یا

$$\frac{13!}{11!} = \frac{13\cdot12\cdot11!}{11!} = 13\cdot12 = 156$$

(ب) $\frac{7!}{10!} = \frac{7!}{10\cdot9\cdot8\cdot7!} = \frac{1}{10\cdot9\cdot8} = \frac{1}{720}$

۸. ۳. عبارات زیر را بر حسب فاکتوریل بنویسید: (آ) $27\cdot26$ ؛

(ب) $\frac{1}{14\cdot13\cdot12}$

حل. (آ) $27\cdot26 = \frac{27\cdot26\cdot25!}{25!} = \frac{27!}{25!}$

(ب) $\frac{1}{14\cdot13\cdot12} = \frac{11!}{14\cdot13\cdot12\cdot11!} = \frac{11!}{14!}$

۸. ٤. کسرهای زیر را ساده کنید: (آ) $\frac{n!}{(n-1)!}$ ؛ (ب) $\frac{(n+2)!}{n!}$

حل. (آ) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1} = n$

یا فقط $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

(ب)

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1} = (n+2)(n+1) = n^2+3n+2$$

یا فقط

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)\cdot n!}{n!} = (n+2)(n+1) = n^2+3n+2$$

۸ . ۵. عبارات زیر را حساب کنید: (آ) $\binom{16}{3}$ ؛ (ب) $\binom{12}{4}$ ؛ (پ) $\binom{15}{5}$.

حل. به یاد آورید که تعداد عوامل صورت و مخرج یکی است.

(آ) $\binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 560$ ؛ (ب) $\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$

(پ) $\binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$

۸ . ۶. عبارات زیر را حساب کنید: (آ) $\binom{8}{5}$ ؛ (ب) $\binom{9}{7}$.

حل. (آ) $\binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56$. توجه کنید که $8 - 5 = 3$ ؛ پس می توان $\binom{8}{5}$ را به صورت زیر نیز حساب کرد:

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

(ب) چون $9 - 7 = 2$ ، $\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$.

۸ . ۷. ثابت کنید که $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$.

حل. داریم $\binom{16}{5} + \binom{16}{6} = \frac{16!}{5!\,11!} + \frac{16!}{6!\,10!}$

با ضرب کسر اول در $\frac{6}{6}$ و کسر دوم در $\frac{11}{11}$ ، هر دو کسر مخرج واحدی می یابند. حال آنها را با هم جمع می کنیم:

$$\binom{16}{5} + \binom{16}{6} = \frac{6 \cdot 16!}{6 \cdot 5! \cdot 11!} + \frac{11 \cdot 16!}{6! \cdot 11 \cdot 10!} = \frac{6 \cdot 16!}{6! \cdot 11!} + \frac{11 \cdot 16!}{6! \cdot 11!}$$

$$= \frac{6 \cdot 16! + 11 \cdot 16!}{6! \cdot 11!} = \frac{(6+11) \cdot 16!}{6! \cdot 11!} = \frac{17 \cdot 16!}{6! \cdot 11!} = \frac{17!}{6! \cdot 11!} = \binom{17}{6}$$

۸. ۸. قضیهٔ ۸. ۱ را ثابت کنید: $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$.

(روش ما در این برهان شبیه روش مسئلهٔ قبل است.)

برهان. داریم

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)! \cdot (n-r+1)!} + \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

برای به دست آوردن مخرج واحد در هر دو کسر، کسر اول را در $\frac{r}{r}$ و کسر دوم را در $\frac{n-r+1}{n-r+1}$ ضرب می کنیم. بنابراین،

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} &= \frac{r \cdot n!}{r \cdot (r-1)! \cdot (n-r+1)!} + \frac{(n-r+1) \cdot n!}{r! \cdot (n-r+1) \cdot (n-r)!} \\
&= \frac{r \cdot n!}{r!\,(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1) \cdot n!}{r!\,(n-r+1)!} \\
&= \frac{r \cdot n! + (n-r+1) \cdot n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{[r+(n-r+1)] \cdot n!}{r!\,(n-r+1)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!} = \binom{n+1}{r}
\end{aligned}$$

جایگشتها

۸. ۹. بین A و B چهار خط اتوبوس وجود دارد؛ و بین B و C سه خط اتوبوس داریم. به چند طریق می توان با اتوبوس (آ) از A به C از طریق B رفت؟ (ب) از A به C از طریق B رفت و برگشت؟ (پ) از نقطهٔ A به C از طریق B رفت و برگشت ونخواهیم از یک خط اتوبوس بیش از یکبار استفاده کنیم؟

حل. (آ) به چهار طریق می توان از A به B و به سه طریق از B به C رفت؛ پس به $4 \cdot 3 = 12$ طریق می توان از A به C از طریق B رفت.

(ب) به دوازده طریق می توان از A به C از طریق B رفت و به 12 طریق برگشت. لذا،

به $144 = 12 \cdot 12$ طریق می توان این رفت و برگشت را انجام داد.

(پـ) می توان از A به B به C به B به A رفت. بین این حروف سهمهای مرتبط می گذاریم:

$$A \to B \to C \to B \to A$$

به چهار طریق می توان از A به B و به سه طریق از B به C رفت؛ ولی فقط به دو طریق می توان از C به B و به سه طریق از B به A رفت زیرا نمی خواهیم از یک خط اتوبوس بیش از یکبار استفاده کنیم. این اعداد را روی سهمهای نظیر به قرار زیر می گذاریم:

$$A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{3} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} A$$

لذا، به $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ طریق می توان این رفت و برگشت را بدون استفادهٔ بیش از یکبار از یک خط اتوبوس انجام داد.

۸. ۱۰. فرض کنید تکرار مجاز نباشد. (آ) از 6 رقم 2، 3، 5، 6، 7، و 9 چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟ (بـ) چند تا از این اعداد کمتر از 400 هستند؟ (پـ) چند تا از آنها زوجند؟ (تـ) چند تا از آنها فردند؟ (ثـ) چند تا از آنها مضرب 5 اند؟

حل. در هر حالت عدد دلخواه را با سه جعبهٔ $\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$ نشان داده و سپس در هر جعبه تعداد ارقامی که می توان در آن گذارد می نویسیم.

(آ) جعبهٔ سمت چپ را می توان به شش طریق پر کرد؛ پس از آن، جعبهٔ وسطی را می توان به پنج طریق پر کرد؛ و، بالأخره، جعبهٔ سمت راست را می توان به چهار طریق پر نمود: $\boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}$. لذا، تعداد اعداد $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ می باشند.

(بـ) جعبهٔ سمت چپ را می توان فقط به دو طریق (با 2 یا 3) پر کرد زیرا هر عدد باید از 400 کمتر باشد؛ جعبهٔ وسطی را می توان به پنج طریق پر کرد؛ و، بالأخره، جعبهٔ سمت راست را می توان به چهار طریق پر نمود: $\boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{2}$. لذا، تعداد اعداد $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ می باشد.

(پـ) جعبهٔ سمت راست را می توان فقط به دو طریق (با 2 یا 6) پر کرد زیرا اعداد باید زوج باشند؛ جعبهٔ سمت چپ را می توان به پنج طریق پر کرد؛ و، بالأخره، جعبهٔ وسطی را می توان به چهار طریق پرنمود: $\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{2}$. لذا، تعداد اعداد $40 = 5 \cdot 4 \cdot 2$ می باشد.

(تـ) جعبهٔ سمت راست را می توان فقط به چهار طریق (با 3 ، 5 ، 7 ، یا 9) پر کرد زیرا اعداد باید فرد باشند؛ جعبهٔ سمت چپ را می توان به پنج طریق پر کرد؛ و، بالأخره، جعبهٔ وسطی را می توان به چهار طریق پرنمود: $\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{4}$. لذا، تعداد اعداد $80 = 5 \cdot 4 \cdot 4$ می باشد.

(ثـ) جعبهٔ سمت راست را می توان فقط به یک طریق (با 5) پر کرد زیرا اعداد باید مضرب 5 باشند؛ جعبهٔ سمت چپ را می توان به پنج طریق پر کرد؛ و، بالأخره، جعبهٔ وسطی را می توان به چهار طریق پر نمود: $\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{1}$
لذا، تعداد اعداد $20 = 5 \cdot 4 \cdot 1$ می باشد.

۸ . ۱۱ . به چند طریق می توان یک گروه هفت نفری را (آ) روی هفت صندلی به خط مستقیم؛ (بـ) دور یک میز مستدیر نشانید؟

حل. (آ) هفت نفر را می توان به $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ طریق در یک صف مرتب کرد.

(بـ) یک نفر می تواند در هر جای یک میز مستدیر بنشیند. شش نفر دیگر می توانند به $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ طریق دور میز بنشینند.

این مثالی است از یک جایگشت مستدیر. به طور کلی، n شیٔ را می توان به $(n-1)! = (n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ طریق دور دایره چید.

۸ . ۱۲ . (آ) به چند طریق می توان سه پسر و دو دختر را در یک صف قرار داد؟ (بـ) اگر پسرها و دخترها بخواهند با هم بنشینند، به چند طریق می توان آنها را در یک صف قرار داد؟ (پـ) اگر فقط دخترها بخواهند با هم بنشینند، به چند طریق می

توان آنها را کنار هم نشانید؟

حل. (آ) پنج نفر را می توان به $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5! = 120$ طریق در یک صف قرار داد. (ب) به دو طریق می توان آنها را بر حسب جنسیت به صف کرد: BBBGG یا GGBBB . در هر حالت، پسرها می توانند به $3\cdot 2\cdot 1 = 3! = 6$ طریق و دخترها می توانند به $2\cdot 1 = 2! = 2$ طریق کنار هم بنشینند. لذا، رویهم، $2\cdot 3!\cdot 2! = 2\cdot 6\cdot 2 = 24$ راه برای به صف کردن آنها وجود دارد.
(پ) به چهار طریق می توان آنها را بر حسب جنسیت به صف کرد: به صورت GGBBB، BGGBB ، BBGGB ، BBBGG . توجه کنید که هر طریق نظیر تعداد 0 ، 1 ، 2 ، یا 3 پسرهاست که سمت چپ دخترها می نشینند. در هر حالت، پسرها می توانند به $3!$ طریق و دخترها به $2!$ طریق بنشینند. لذا، رویهم،

$$4\cdot 3!\cdot 2! = 4\cdot 6\cdot 2 = 48$$

طریق وجود خواهد داشت.

۸. ۱۳. مسئلهٔ قبل را در حالت r پسر و s دختر حل کنید. (جوابها به فاکتوریل باشند.)

حل. (آ) $r+s$ نفر می توانند به $(r+s)!$ طریق در یک ردیف بنشینند.
(ب) هنوز دو راه برای به صف کردن آنها بر حسب جنسیت وجود دارد به این طریق که پسرها سمت چپ یا دخترها سمت چپ باشند. در هر حالت پسرها می توانند به $r!$ طریق و دخترها به $s!$ طریق بنشینند. لذا، رویهم، $2\cdot r!\cdot s!$ طریق وجود خواهد داشت.
(پ) $r+1$ طریق برای به صف کردن آنها بر حسب جنسیت وجود دارد و هر طریق نظیر تعداد $0, 1, \ldots, r$ پسرهاست که سمت چپ دخترها نشسته اند. در هر حالت، پسرها می توانند به $r!$ طریق و دخترها به $s!$ طریق بنشینند. لذا، رویهم، $(r+1)\cdot r!\cdot s!$ طریق وجود خواهد داشت.

۸. ۱۴. تعداد جایگشتهای متمایزی را که می توان از تمام حروف هر یک از کلمات زیر ساخت بیابید: (آ) THEM ؛ (بـ) THAT ؛ (پـ) RADAR ؛ (تـ) UNUSUAL ؛ (ثـ) SOCIOLOGICAL .

حل. (آ) $4! = 24$ زیرا چهار حرف وجود دارد و تکراری در کار نیست.

(بـ) $\frac{4!}{2!} = 12$ زیرا چهار حرف وجود دارد که دو تای آنها T اند.

(پـ) $\frac{5!}{2!\,2!} = 30$ زیرا پنج حرف وجود دارد که دو تای آنها R و دو تای آنها A اند.

(تـ) $\frac{7!}{3!} = 840$ زیرا هفت حرف وجود دارد که سه تای آنها U اند.

(ثـ) $\frac{12!}{3!\,2!\,2!\,2!}$ زیرا دوازده حرف وجود دارد که سه تای آنها O ، دو تای آنها C ، دوتای آنها I ، و دوتای آنها L اند.

۸. ۱۵. به چند طریق می توان چهار کتاب ریاضی، سه کتاب تاریخ، سه کتاب شیمی، و دو کتاب جامعه شناسی را طوری در قفسه جا داد که کتب دارای موضوع واحد در کنار هم باشند؟

حل. ابتدا باید کتابها در چهارواحد طبق موضوع آنها قرار گیرند: $\square\ \square\ \square\ \square$ جعبهٔ سمت چپ را می توان با هر یک از چهار موضوع پر کرد؛ سپس سه موضوع باقی می ماند؛ بعد دو موضوع خواهد ماند؛ و جعبهٔ سمت راست با آخرین موضوع پر خواهد شد: $\boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}$. لذا، به $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1$ طریق می توان کتابها را بر طبق موضوع در قفسه جا داد.

درهریک ازحالات فوق، کتب ریاضی را می توان به $4!$ طریق، کتب تاریخ را به $3!$ طریق، کتب شیمی را به $3!$ طریق، و کتب جامعه شناسی را به $2!$ طریق مرتب کرد. لذا، تعداد طرق رویهم خواهد بود $4!\,4!\,3!\,3!\,2! = 41{,}472$.

۸. ۱۶. تعداد کل اعداد صحیح مثبتی را که می توان از ارقام 1 ، 2 ، 3 ، و 4 بدون

تکرار تشکیل داد بیابید.

حل. توجه کنید که هیچ عدد صحیحی نمی تواند بیش از چهار رقم داشته باشد. فرض کنیم s_1 ، s_2 ، s_3 ، و s_4 به ترتیب تعداد اعداد صحیحی باشند که شامل 1 ، 2 ، 3 ، و 4 رقم می باشند. حال هر s_i را جدا حساب می کنیم.

چون چهار رقم داریم، چهار عدد صحیح وجود دارند که درست شامل یک رقم اند؛ یعنی، $s_1 = 4$. همچنین، از آنجا که چهاررقم موجود است، $4\cdot 3 = 12$ عدد صحیح وجود دارند که شامل دو رقم اند؛ یعنی، $s_2 = 12$. به همین نحو، $4\cdot 3\cdot 2 = 24$ عدد صحیح وجود دارند که شامل سه رقم اند و $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ عدد صحیح وجود دارند که شامل چهار رقم اند؛ یعنی، $s_3 = 24$ و $s_4 = 24$. لذا، رویهم

$$s_1+s_2+s_3+s_4 = 4+12+24+24 = 64$$

عدد صحیح وجودخواهند داشت.

۸.۱۷. n را در صورتی بیابید که (آ) $P(n,2) = 72$ ؛ (ب) $P(n,4) = 42P(n,2)$ ؛ (پ) $2P(n,2)+50 = P(2n,2)$.

حل. (آ) $P(n,2) = n(n-1) = n^2-n$ ؛ پس $n^2-n = 72$ یا $n^2-n-72 = 0$ یا $(n-9)(n+8) = 0$. چون n باید مثبت باشد، تنها جواب $n = 9$ می باشد.

(ب) $P(n,4) = n(n-1)(n-2)(n-3)$ و $P(n,2) = n(n-1)$. لذا،

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 42n(n-1)$$

یا، اگر $n\neq 0, n\neq 1$ ، $(n-2)(n-3) = 42$ یا $n^2-5n+6 = 42$ یا $n^2-5n-36 = 0$ یا $(n-9)(n+4) = 0$. چون n باید مثبت باشد، تنها جواب $n = 9$ خواهد بود. (پ) $P(n,2) = n(n-1) = n^2-n$

و $P(2n,2) = 2n(2n-1) = 4n^2-2n$. لذا،

$2(n^2-n)+50 = 4n^2-2n$ یا $2n^2-2n+50 = 4n^2-2n$ یا $50 = 2n^2$ یا $n^2 = 25$.

چون n باید مثبت باشد، تنها جواب $n=5$ خواهد بود.

ترکیبات

۸ . ۱۸ . به چند طریق می توان از هفت مرد و پنج زن گروهی مرکب از سه مرد و دو زن تشکیل داد؟

حل. به $\binom{7}{3}$ طریق می توان سه مرد از هفت مرد انتخاب کرد، و به $\binom{5}{2}$ طریق می توان دو زن از پنج زن انتخاب نمود. لذا، به

$$\binom{7}{3}\binom{5}{2} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 350$$

طریق می توان گروه فوق الذکر را انتخاب نمود.

۸ . ۱۹ . کیسه ای شامل شش گوی سفید و پنج گوی سیاه است. به چند طریق می توان چهار گوی از کیسه استخراج کرد به شرط آنکه (آ) رنگهای آنها دلخواه باشد؛ (بـ) دو تا سفید و دو تا سیاه باشند؛ (پـ) همه از یک رنگ باشند.

حل. (آ) چهار گوی (با هر رنگ) را می توان از هفت گوی به

$$\binom{11}{4} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 330$$

طریق انتخاب کرد.

(بـ) به $\binom{6}{2}$ طریق می توان دوگوی سفید و به $\binom{5}{2}$ طریق می توان دوگوی سیاه انتخاب کرد. لذا، به $\binom{6}{2}\binom{5}{2} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 150$ طریق می توان دوگوی سفید و دوگوی سیاه انتخاب نمود.

(پـ) به $\binom{6}{4} = 15$ طریق می توان چهارگوی سفید و به $\binom{5}{4} = 5$ طریق می توان چهارگوی سیاه استخراج کرد. لذا، به $15+5=20$ طریق می توان چهارگوی با رنگ

یکسان استخراج نمود.

۸. ۲۰. در یک کالج هر سال چهاردانشجوی نماینده برای شرکت در جلسهٔ سالانهٔ انجمن دانشجویان انتخاب می شوند. (آ) اگر دوازده دانشجوی واجد شرایط داشته باشیم، به چند طریق این نماینده ها قابل انتخابند؟ (بـ) اگر دو دانشجوی واجد شرایط با هم در جلسه حضور نیابند، به چند طریق این کار میسر است؟
(پـ) اگر دو دانشجوی واجد شرایط ازدواج کرده باشند و فقط با هم در جلسه حضور یابند، به چند طریق این کار انجام پذیر است؟

حل. (آ) به $\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$ طریق می توان از دوازده دانشجو چهارنفر انتخاب کرد.
(بـ) فرض کنیم A و B دانشجویانی باشند که با هم در جلسه حضور نمی یابند.
روش ۱. هرگاه هم A و هم B جزو انتخاب شده ها نباشند، به

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$$

طریق می توان نماینده ها را انتخاب کرد. اگر A یا B ولی نه هردو جزو انتخاب شده ها باشد، به $2 \cdot \binom{10}{3} = 2 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 240$ طریق می توان نماینده ها را انتخاب نمود. لذا، رویهم، نماینده ها را می توان به $210 + 240 = 450$ طریق انتخاب نمود.
روش ۲. هرگاه A و B هر دو جزو انتخاب شده ها باشند، آنگاه دو عضو دیگر را می توان به $\binom{10}{2} = 45$ طریق انتخاب نمود. پس اگر A و B جزو انتخاب شده ها نباشند، به $495 - 45 = 450$ طریق می توان نماینده ها را انتخاب نمود.
(پـ) فرض کنیم C و D دانشجویان متأهل باشند. اگر C و D به جلسه نروند، نمایندگان را می توان به $\binom{10}{4} = 210$ طریق انتخاب کرد. اگر C و D هر دو به جلسه بروند، نمایندگان را می توان به $\binom{10}{2} = 45$ طریق انتخاب نمود. پس رویهم می توان نمایندگان را به $210 + 45 = 255$ طریق انتخاب نمود.

۸. ۲۱. در یک امتحان شاگرد باید به هشت سؤال از ده سؤال پاسخ دهد.
(آ) این شاگرد چند انتخاب دارد؟ (ب) اگر باید به سه سؤال اول پاسخ دهد چند انتخاب دارد؟ (پ) اگر باید دست کم به چهار سؤال از پنج سؤال اول پاسخ دهد چند انتخاب دارد؟

حل. (آ) به $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ طریق می توان هشت سؤال را انتخاب کرد.

(ب) هرگاه به سه سؤال اول پاسخ دهد، آنگاه می تواند پنج سؤال دیگر را به $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ طریق از هفت سؤال آخر انتخاب نماید.

(پ) هرگاه به هر پنج سؤال اول پاسخ دهد، آنگاه به $\binom{5}{3} = 10$ طریق می تواند سه سؤال دیگر را از پنج سؤال آخر انتخاب نماید. از آن سو، هرگاه فقط به چهار سؤال از پنج سؤال اول پاسخ دهد، آنگاه می تواند این چهار سؤال را به $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ طریق انتخاب کرده و چهار سؤال دیگر را به $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ طریق از پنج سؤال آخر انتخاب نماید. لذا، به $5 \cdot 5 = 25$ طریق می تواند هشت سؤال را انتخاب نماید. بنابراین، وی کلاً سی و پنج انتخاب خواهد داشت.

۸. ۲۲. در یک صفحه دوازده نقطهٔ $A, B, \ldots$ داریم که هیچ سه تای آنها روی یک خط نیستند. (آ) این نقاط چند خط را معین می کنند؟ (ب) چند خط از نقطهٔ A می گذرند؟ (پ) این نقاط چند مثلث به وجود می آورند؟ (ت) نقطهٔ A رأس چند تا از این مثلثهاست؟

حل. (آ) چون هر دو نقطه یک خط را معین می کنند، $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$ تا خط

خواهیم داشت.

(بـ) برای تعیین یک خط ماربر A باید نقطهٔ دیگری نیز اختیار شود؛ پس یازده‌خط از A خواهد گذشت.

(پـ) چون سه نقطه یک مثلث را معین می کنند، تعداد مثلثها

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$$

مثلث می باشد.

(تـ) روش ۱. برای تعیین یک مثلث به رأس A باید دو نقطه دیگر نیز اختیار کنیم؛ پس A یک رأس $55 = \frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} = \binom{11}{2}$ مثلث می باشد.

روش ۲. $165 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{11}{3}$ مثلث وجود دارد که A یک رأس آنها نیست.

لذا، $55 = 165 - 220$ مثلث وجود دارد که A یک رأس آنها می باشد.

۸. ۲۳. از دوازده نفر به چند طریق می توان گروهی پنج نفره با رئیس معلوم انتخاب کرد؟

حل. رئیس را می توان به دوازده طریق انتخاب کرد و سپس چهار نفر دیگر گروه را می توان از یازده نفر باقیمانده به $\binom{11}{4}$ طریق انتخاب نمود. لذا، تعداد طرق انتخاب این گروه $3960 = 12 \cdot 330 = \binom{11}{4} \cdot 12$ می باشد.

۸. ۲٤. تعداد زیر محموعه های مجموعهٔ X شامل n عنصر را بیابید.

حل. روش ۱. تعداد زیر مجموعه های X با $r \leq n$ عنصر مساوی است با $\binom{n}{r}$. لذا، رویهم

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

زیر مجموعه از X خواهیم داشت. مجموع فوق مساوی 2^n است (مسئلهٔ ۸. ۴۱)؛ و در نتیجه، تعداد زیر مجموعه های X مساوی 2^n می باشد.

روش ۲. برای هر عنصر X دو حالت وجود دارد: یا تعلق به زیر مجموعه دارد یا ندارد؛ پس برای تشکیل یک زیر مجموعه

$$\overbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}^{\text{بار } n} = 2^n$$

راه وجود دارد؛ یعنی، 2^n زیر مجموعهٔ مختلف از X خواهیم داشت.

۸. ۲۵. یک معلم به چند طریق می تواند از شش شاگرد یک یا چند نفر را انتخاب کند؟

حل. روش ۱. بنا بر مسئلهٔ قبل، مجموعهٔ مرکب از شش شاگرد دارای $2^6 = 64$ زیر مجموعه است. ولی مجموعهٔ تهی را باید حذف کرد زیرا معلم می خواهد یک یا چند شاگرد انتخاب نماید. بنابراین، معلم به $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ طریق می تواند شاگردان مورد نیازش را انتخاب نماید.

روش ۲. 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، یا 6 شاگرد انتخاب می شوند. لذا، تعداد انتخابها مساوی است با

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} =$$

$$6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$$

۸. ۲۶. به چند طریق می توان از بین دوازده نفر سه نفر یا بیشتر را انتخاب کرد؟

حل. به $2^{12}-1 = 4096-1 = 4095$ طریق می توان یک نفر یا بیشتر را از بین دوازده نفر انتخاب کرد. اما به $\binom{12}{1}+\binom{12}{2} = 12+66 = 78$ طریق می توان یک یا دو نفر را از بین دوازده نفر انتخاب نمود. لذا، به $4095-78 = 4017$ طریق می توان سه نفر یا بیشتر را انتخاب نمود.

افرازهای مرتب و نامرتب

۸ . ۲۷. به چند طریق می توان هفت اسباب بازی را بین سه کودک در صورتی تقسیم کرد که کوچکترین بچه سه اسباب بازی و دو بچهٔ دیگر هر یک دو اسباب بازی دریافت کنند؟

حل. ما تعداد افرازهای مرتب از هفت شیٔ به سلولهایی به ترتیب شامل 3 ، 2 ، و 2 شیٔ را پیدا می کنیم. بنا بر قضیهٔ ۸ . ٦، تعداد این افرازها $\frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$ می باشد.

۸ . ۲۸. در یک کلاس دوازده شاگرد وجود دارد. این شاگردان به چند طریق می توانند در سه آزمون مختلف شرکت کنند با این شرط که چهار شاگرد باید در هر یک از آزمونها شرکت نمایند؟

حل. روش ۱. تعداد افرازهای مرتب دوازده شاگرد به سلولهایی هر یک شامل چهار شاگرد را پیدا می کنیم. بنا بر مسئلهٔ ۸ . ٦، تعداد این افرازها $\frac{12!}{4!\,4!\,4!} = 34{,}650$ می باشد.

روش ۲. به $\binom{12}{4}$ طریق می توان چهارشاگرد را انتخاب کرد که در آزمون اول شرکت کنند. سپس به $\binom{8}{4}$ طریق می توان چهار شاگرد انتخاب کرد که در آزمون دوم شرکت کنند. بقیهٔ شاگردان در آزمون سوم شرکت خواهند کرد. لذا، رویهم به

$$\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4} = 495\cdot 70 = 34{,}650$$

طریق می توان شاگردان را در آزمونها شرکت داد.

۸. ۲۹. به چند طریق می توان دوازده شاگرد را به سه تیم A_1 ، A_2 ، و A_3 چنان تقسیم کرد که هر تیم شامل چهارشاگرد باشد؟

حل. روش ۱. ملاحظه می کنیم که هر افراز $\{A_1, A_2, A_3\}$ از شاگردان را می توان به $3! = 6$ طریق به صورت یک افراز مرتب در آورد. چون (ر. ک. مسئلهٔ قبل) تعداد این افرازهای مرتب $\frac{12!}{4!\,4!\,4!} = 34{,}650$ تاست، تعداد افرازهای نامرتب $34{,}650/6 = 5775$ تا می باشد.

روش ۲. فرض کنیم A یکی از این شاگردان باشد. در این صورت، به $\binom{11}{3}$ طریق می توان سه شاگرد دیگر را انتخاب و در تیم A قرار داد. حال فرض کنیم شاگرد B در تیم A نباشد؛ پس به $\binom{7}{3}$ طریق می توان سه شاگرد هم تیم B را انتخاب نمود. چهار شاگرد باقیمانده تیم سوم را تشکیل می دهند. لذا، رویهم به

$$\binom{11}{3}\cdot\binom{7}{3} = 165\cdot 35 = 5775$$

طریق می توان شاگردان را افراز نمود.

۸. ۳۰. به چند طریق می توان شش شاگرد را به (آ) دو تیم هر یک شامل سه شاگرد؛ (ب) سه تیم هر یک شامل دو شاگرد افراز نمود؟

حل. (آ) روش۱. تعداد $\frac{6!}{3!\,3!} = 20$ افراز مرتب به دو سلول هر یک شامل سه شاگرد وجود دارد. چون هر افراز نامرتب $2! = 2$ افراز مرتب معین می کند، $20/2 = 10$ افراز نامرتب خواهیم داشت.

روش ۲. فرض کنیم A یکی از شاگردان باشد. پس به $\binom{5}{2} = 10$ طریق می توان دو شاگرد هم تیم A را انتخاب کرد. سه شاگرد دیگر تیم دوم را تشکیل می دهند. به عبارت دیگر، به ده طریق می توان شاگردان را افراز نمود.

(ب) روش ۱. تعداد افرازهای مرتب به سه سلول هر یک شامل دو شاگرد مساوی $90 = \frac{6!}{2!\,2!\,2!}$ است. چون هر افراز نامرتب $3! = 6$ افراز مرتب معین می کند، تعداد افرازهای نامرتب $90/6 = 15$ می باشد.

روش ۲. فرض کنیم A یکی از شاگردان باشد. در این صورت، پنج راه برای انتخاب شاگرد دیگر که هم تیم A باشد وجود دارد. فرض کنیم B یک شاگرد باشد که هم تیم A نیست؛ پس به سه طریق می توان شاگرد دیگری هم تیم B انتخاب کرد. دو شاگرد باقیمانده تیم دیگر را تشکیل می دهند. لذا، رویهم به $5 \cdot 3 = 15$ طریق می توان شاگردان را افراز کرد.

۸. ۳۱. به چند طریق می توان کلاس X مرکب از ده شاگرد را به چهار تیم A_1, A_2, B_1, B_2 طوری افراز کرد که A_1 و A_2 هر یک شامل دو شاگرد و B_1 و B_2 هر یک شامل سه شاگرد باشند؟

حل. روش ۱. تعداد افرازهای مرتب X به چهار سلول شامل 2 ، 2 ، 3 ، و 3 شاگرد مساوی $25{,}200 = \frac{10!}{2!\,2!\,3!\,3!}$ است. ولی هر افراز نامرتب $\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ از مجموعهٔ X تعداد $2! \cdot 2! = 4$ تا افراز مرتب X را معین می سازد. لذا، تعداد افرازهای نامرتب رویهم $25{,}200/4 = 6300$ می باشد.

روش ۲. به $\binom{10}{4}$ طریق می توان چهار شاگرد انتخاب کرد که در تیمهای A_1 و A_2 باشند و به سه طریق می توان هر چهار شاگرد را به دو تیم هر یک شامل دو شاگرد افراز نمود. از آن سو، ده راه (ر.ک. مسئلهٔ ۸. ۳۰) برای افراز شش شاگرد بقیه به دو تیم هر یک شامل سه شاگرد وجود دارد. لذا، رویهم

$$\binom{10}{4} \cdot 3 \cdot 10 = 210 \cdot 3 \cdot 10 = 6300$$

راه برای افراز شاگردان موجود است.

۸. ۳۲. به چند طریق می توان نه شاگرد را به سه تیم شامل 4 ، 3 ، و 2 شاگرد افراز کرد؟

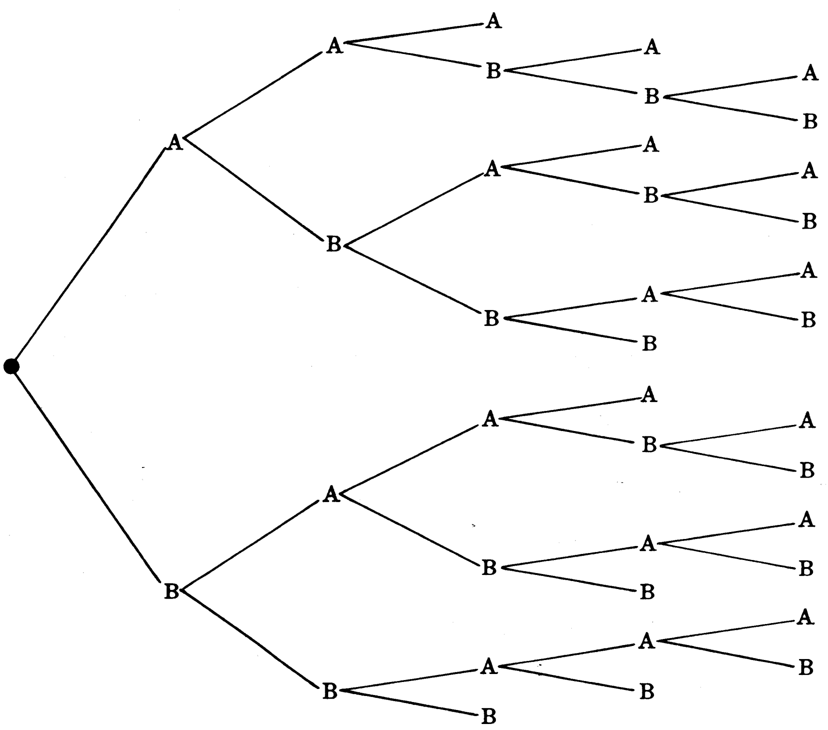
حل. چون تمام سلولها تعداد مختلفی شاگرد دارند، تعداد افرازهای نامرتب مساوی تعداد افرازهای مرتب، یعنی $\frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260$ ، می باشد.

نمودارهای درختی

۸. ۳۳. تیمهای A و B با هم مسابقهٔ بسکتبال می دهند. هر تیم که اول سه بار متوالی ببرد پیروز خواهد بود. تعداد طرقی را که مسابقه می تواند برگزار شود بیابید.

حل. نمودار درختی مناسبی مانند شکل ۸. ۲ را در نظر می گیریم. مسابقه به بیست طریق می تواند رخ دهد:

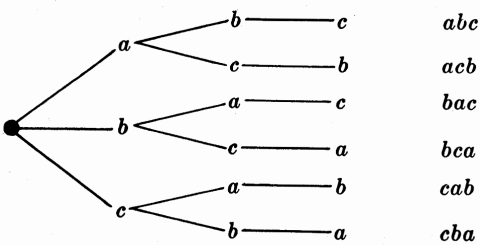
AAA, AABA, AABBA, AABBB, ABAA, ABABA, ABABB, ABBAA, ABBAB, ABBB
BAAA, BAABA, BAABB, BABAA, BABAB, BABB, BBAAA, BBAAB, BBAB, BBB



شکل ۸. ۲

۸. ۳۴. جایگشتهای $\{a, b, c\}$ را پیدا نمایید.

حل. نتیجهٔ ۸. ۳ به ما می گوید که تعداد این جایگشتها $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ است. با اینحال، همانطور که در زیر می بینید، می توان آنها را از یک نمودار درختی به دست آورد.



شکل ۸. ۳

شش جایگشت در سمت راست نمودار ذکر شده است.

مسائل تکمیلی

نماد فاکتوریل و ضرایب دوجمله ای

۸. ۳۵. فاکتوریلهای زیر را حساب کنید: (آ) $9!$ ؛ (بـ) $10!$ ؛ (پـ) $11!$.

۸. ۳۶. عبارات زیر را حساب کنید: (آ) $\frac{16!}{14!}$ ؛ (بـ) $\frac{14!}{11!}$ ؛ (پـ) $\frac{8!}{10!}$ ؛ (تـ) $\frac{10!}{13!}$.

۸. ۳۷. عبارات زیر را بر حسب فاکتوریل بنویسید: (آ) $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ ؛ (بـ) $\frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12}$.

۸. ۳۸. عبارات زیر را ساده کنید: (آ) $\frac{(n+1)!}{n!}$ ؛ (بـ) $\frac{n!}{(n-2)!}$ ؛

(پـ) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$ ؛ (تـ) $\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$.

۸. ۳۹. ترکیبات زیر را حساب کنید: (آ) $\binom{5}{2}$ ؛ (بـ) $\binom{7}{3}$ ؛ (پـ) $\binom{14}{2}$ ؛

(ت) $\binom{6}{4}$ ؛ (ث) $\binom{20}{17}$ ؛ (ج) $\binom{18}{15}$.

۸ . ۴۰ . سطر هشتم مثلث پاسکال به قرار زیر است:

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

سطرهای نهم و دهم این مثلث را حساب کنید .

۸ . ۴۱ . نشان دهید که

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

۸ . ۴۲ . نشان دهید که

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots \pm \binom{n}{n} = 0$$

جایگشتها

۸ . ۴۳ . (آ) اگر یک پلاک اتومبیل شامل دو حرف مختلف و پس از آن سه رقم مختلف باشد ، چند پلاک می توان با این مشخصات ساخت؟ (ب) مسئله را در صورتی حل کنید که اولین رقم 0 نباشد .

۸ . ۴۴ . بین A و B شش جاده و بین B و C چهار جاده وجود دارد .

(آ) به چند طریق می توان از طریق B از A به C رفت؟

(ب) به چند طریق می توان از طریق B از A به C رفت و برگشت؟

(پ) به چند طریق می توان بدون استفادهٔ دوبار از یک جاده از A به C رفت و برگشت؟

۸ . ۴۵ . به چند طریق شش نفر می توانند یک سورتمه را برانند با این شرط که یکی از سه تا باید راننده باشد ؟

۸ . ۴۶ . (آ) تعداد طرقی را که پنج نفر می توانند در یک ردیف بنشینند بیابید .

(ب) اگر دو نفر بخواهند کنار هم بنشینند ، این تعداد چند تا خواهد بود ؟

۸ . ۴۷ . مسئلهٔ قبل را در صورتی حل کنید که افراد دور یک میز مستدیر بنشینند .

۸ . ۴۸ . تعداد طرقی که یک داور می تواندجایزه های اول، دوم، و سوم را به ده شرکت

کنندهٔ یک مسابقه اعطا کند بیابید.

۸. ۴۹. از چهار پرچم قرمز، دو پرچم آبی، و دو پرچم سبز چند علامت مختلف هر یک شامل هشت پرچم که به طور قائم آویزان می شوند می توان ساخت؟

۸. ۵۰. تعداد جایگشتهای حاصل از حروف هر یک از کلمات زیر را بیابید:

(آ) QUEUE ؛(بـ) COMMITTEE ؛(پـ) PROPOSITION ؛

(تـ) BASEBALL .

۸. ۵۱. (آ) تعداد طرق نشاندن چهار پسر و چهار دختر در یک ردیف را در صورتی بیابید که پسر ها و دخترها یک در میان قرار گرفته باشند.

(بـ) این تعداد را در صورتی بیابید که پسرها و دخترها یک در میان قرار گرفته و یک پسر و یک دختر مجاور هم نشسته باشند.

(پـ) این تعداد را در صورتی بیابید که پسر ها و دخترها یک در میان قرار گرفته و یک پسر و یک دختر نباید کنار هم نشسته باشند.

۸. ۵۲. تعداد طرق قرار دادن پنج کتاب بزرگ، چهار کتاب متوسط، و سه کتاب کوچک در یک قفسه به طوری که تمام کتابهای یک اندازه کنار هم باشند چند تاست؟

۸. ۵۳. تمام اعداد صحیح مثبت با سه رقم متفاوت را در نظر بگیرید: (توجه کنید که 0 نمی تواند اولین رقم باشد.) (آ) چند تای آنها از 700 بزرگتر است؟

(بـ) چند تای آنها فرد است؟ (پـ) چند تای آنها زوج است؟ (تـ) چند تای آنها بر 5 بخشپذیر است؟

۸. ۵۴. (آ) تعداد جایگشتهای حاصل از حروف کلمهٔ ELEVEN را بیابید.

(بـ) چند تای آنها با E شروع و ختم می شوند؟ (پـ) چند تای آنها هر سه E را کنار هم دارند؟ (تـ) چند تای آنها با E شروع و به N ختم می شوند؟

ترکیبات

۸. ۵۵. یک کلاس شامل نه پسر و سه دختر است. (آ) معلم به چند طریق می تواند یک تیم چهارنفره تشکیل دهد؟ (بـ) چند تای آنها شامل دست کم یک دختر است؟

(پـ) چند تای آنها حاوی درست یک دختر است؟

۸ . ۵۶. خانمی یازده دوست صمیمی دارد. (آ) وی به چند طریق می تواند پنج تای آنها را به شام دعوت کند؟ (بـ) اگر دو نفر از دوستان ازدواج کرده و جدا از هم به مهمانی نیایند، این تعداد طرق چند تاست؟ (پـ) اگر دو نفر از دوستان با هم قهر باشند و با هم به مهمانی نیایند، این تعداد چند تاست؟

۸ . ۵۷. خانمی یازده دوست صمیمی دارد که شش تای آنها زن اند. (آ) وی به چند طریق می تواند سه تا یا بیشتر آنها را به مهمانی دعوت کند؟ (بـ) اگر بخواهد تعداد مهمانان زن و مرد (به انضمام خودش) مساوی باشند، به چند طریق می تواند سه یا بیشتر آنها را دعوت نماید؟

۸ . ۵۸. در یک صفحه ده نقطهٔ $A, B, \ldots$ وجود دارد که هیچ سه تای آنها روی یک خط نیستند. (آ) این نقاط چند خط معین می سازند؟ (بـ) چند تا از این خطوط از A یا B نمی گذرند؟ (پـ) این نقاط چند مثلث تشکیل خواهند داد؟ (تـ) چند تا از این مثلثها شامل نقطهٔ A اند؟ (ثـ) چند تا از این مثلثها شامل ضلع AB اند؟

۸ . ۵۹. یک شاگرد باید به ده سؤال از سیزده سؤال امتحان پاسخ دهد. (آ) این شاگرد چند انتخاب دارد؟ (بـ) اگر باید به دو سؤال اول پاسخ دهد چند انتخاب دارد؟ (پـ) اگر باید به سؤال اول یا دوم ولی نه هر دو پاسخ دهد چند انتخاب دارد؟ (تـ) اگر باید درست به سه سؤال از پنج سؤال اول جواب دهد چند انتخاب دارد؟ (ثـ) اگر باید به دست کم سه سؤال از پنج سؤال اول جواب دهد چند انتخاب دارد؟

۸ . ۶۰. (آ) رئوس یک هشت ضلعی چند مثلث معین می کنند؟

(بـ) اگر اضلاع هشت ضلعی نباید اضلاع یک مثلث باشند، چند مثلث خواهیم داشت؟

۸ . ۶۱. رئوس یک n ضلعی منتظم با این فرض که اضلاعش اضلاع یک مثلث نباشند چند مثلث به وجود می آورند؟

۸ . ۶۲. شخصی در بازی پوکر دارای پنج کارت از یک دسته ورق معمولی است. به چند طریق می تواند (آ) استریت فلاش؛ (بـ) چهار کارت از یک نوع؛ (پـ)

استریت؛ (ت) یک جفت آس؛ (ث) دو تا از یک نوع (یک جفت) داشته باشد ؟

۸. ۶۳. الفبای انگلیسی دارای بیست و شش حرف است که پنج تای آنها صدا دارند. فقط « کلماتی» را در نظر بگیرید مرکب از پنج حرف که سه تای آنها مختلف و بی صدا و دو تای آنها مختلف و صدادار باشند. از این کلمات چند تا (آ) می توان تشکیل داد؛ (ب) شامل حرف B اند؛ (پ) شامل حروف B و C اند؟ (ت) با B شروع شده و شامل حرف C اند؛ (ث) با B شروع شده و به C ختم می شوند؟ (ج) شامل حروف A و B اند؟ (چ) با A شروع شده و شامل B اند؟ (ح) با B شروع شده و شامل A اند؟ (خ) با A شروع شده و به B ختم می شوند؟ (د) شامل حروف A ، B ، و C اند؟

افرازهای مرتب و نامرتب

۸. ۶۴. به چند طریق می توان نه اسباب بازی را بین سه کودک به تساوی تقسیم کرد؟

۸. ۶۵. به چند طریق می توان نه شاگرد را به سه تیم به تساوی تقسیم کرد؟

۸. ۶۶. به چند طریق می توان ده شاگرد را به سه تیم چنان تقسیم کرد که یکی شامل چهار شاگرد و دو تیم دیگر هر یک شامل سه شاگرد باشند؟

۸. ۶۷. در یک کیسه دوازده گوی وجود دارد. به چند طریق می توان سه گوی در چهار بار متوالی استخراج کرد؟

۸. ۶۸. به چند طریق می توان یک کلوب دوازده عضوی را به سه کمیته با تعداد اعضای 5 ، 4 ، و 3 افراز کرد؟

۸. ۶۹. به چند طریق می توان n شاگرد را به دو تیم هر یک دست کم شامل یک شاگرد افراز کرد؟

۸. ۷۰. به چند طریق می توان چهارده مرد را به شش کمیته چنان افراز کرد که دو کمیته شامل سه مرد و سایر کمیته ها شامل دو مرد باشند؟

۸. ۷۱. (آ) با این فرض که یک سلول می تواند تهی باشد، به چند طریق می توان یک مجموعهٔ سه عنصری را به (یک) سه سلول مرتب؛ (دو) سه سلول نامرتب افراز کرد؟ (ب) به چند طریق می توان یک مجموعهٔ چهار عنصری را به (یک) سه سلول

مرتب؛ (دو) سه سلول نامرتب افراز کرد ؟

۸. ۷۲. در بازی بریج به هر یک از چهار بازیکن به نام شمال، جنوب، شرق، و غرب، سیزده کارت داده می شود. توزیع کارتها را یک دست بریج می نامند. (آ) تعداد دستهای بریج چند تاست؟ (ب) یک بازیکن به چند طریق می تواند هر چهار آس را داشته باشد ؟ (پ) در چند دست هر بازیکن یک آس دارد ؟ (ت) در چند دست بازیکن شمال هشت گشنیز و بازیکن جنوب پنج گشنیز دیگر را دارد ؟ (ث) در چند دست بازیکنهای شمال و جنوب با هم هر چهار آس را دارند ؟ (جوابها به فاکتوریل باشند.)

نمودارهای درختی

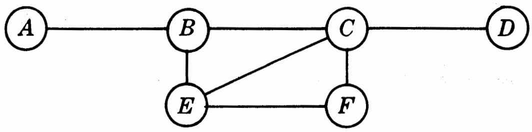
۸. ۷۳. مجموعهٔ حاصل ضربی $\{1,2\} \times \{a,b,c\} \times \{3,4\}$ را باساختن نمودار درختی مناسب بیابید.

۸. ۷۴. تیمهای A و B در مسابقات جهانی بیس بال بازی می کنند و تیمی که چهاربار متوالی ببرد برندهٔ مسابقات خواهد بود. با این فرض که A بار اول می برد و تیمی که بار دوم برده بار چهارم را نیز می برد، این مسابقات به چند طریق صورت خواهد گرفت؟

۸. ۷۵. شخصی در مبدأ محور x است و یک واحد به چپ یا راست می رود. اگر به 3 یا -3 برسد یا به جایی غیر از مبدأ بیش از یکبار برسد توقف خواهد کرد. تعداد مسیرهای مختلفی را که این شخص می تواند بپیماید بیابید.

۸. ۷۶. شخصی می‌تواند پنج بار رولت بازی کند. او در هر بازی یک دلار می‌برد یا می‌بازد. این شخص با دو دلار شروع می‌کند و اگر همهٔ پولش را ببازد یا سه دلار ببرد (یعنی، پنج دلار داشته باشد) پیش از پنج بار از بازی دست می‌کشد. تعداد طرقی راکه بازی می‌تواند رخ دهد پیدا نمایید.

۸. ۷۷. در نمودار زیر فرض کنید $A, B, \ldots, F$ جزیره بوده و خطوط بین آنها پل باشند. شخصی از A شروع کرده و از یک جزیره به جزیره دیگر می رود. وقتی نتواند بدون گذشتن دو بار از یک پل ادامه دهد برای ناهار توقف می کند. تعداد طرقی را که وی می تواند پیش از ناهار حرکت کند بیابید.



شکل ۸. ٤

۸. ۷۸. تیمهای A و B با هم مسابقهٔ بسکتبال می دهند. تیمی که دوبار متوالی یا جمعاً چهار بار ببرد پیروز خواهد بود. تعداد طرقی را که بازی می تواند رخ دهد بیابید.

مسائل برنامه‌نویسی کامپیوتر

۸. ۷۹. یک زیر برنامه به نام NFACT بنویسید که NFACT(K) ، K فاکتوریل را حساب کند.

۸. ۸۰. یک زیر برنامه به نام NPERM بنویسید که NPERM(M, K) تعداد جایگشتهای m شی k به k ، یعنی $P(m, k)$ ، را حساب کند.

۸. ۸۱. یک زیر برنامه به نام NCOMB بنویسید که NCOMB(M, K) تعداد ترکیبات m شی k به k ، یعنی $\binom{m}{k}$ ، را حساب کند.

۸. ۸۲. یک کارت از داده ها شامل پنج حرف است که ممکن است متمایز باشند یا نباشند. برنامه ای بنویسید که جمیع کلمات پنج حرفی متمایز با استفاده از پنج حرف را چاپ کند. این برنامه را با داده های ورودی زیر امتحان کنید:

(یک) A, B, A, C, D (دو) A, B, B, C, A ؛ (سه) A, B, B, A, A .

جواب مسائل تکمیلی

۸. ۳۵. (آ) 362,880 ؛ (ب) 3,628,800 ؛ (پ) 39,916,800 .

۸. ۳٦. (آ) 240 ؛ (ب) 2184 ؛ (پ) 1/90 ؛ (ت) 1/1716 .

۸. ۳۷. (آ) 24!/20! ؛ (ب) 9!/12! .

۸. ۳۸. (آ) $n+1$ ؛ (ب) $n(n-1) = n^2 - n$ ؛ (پ) $1/[n(n+1)(n+2)]$ ؛

ت) $(n-r)(n-r+1)$.

۸ .۳۹ (آ) 10 ؛ (ب) 35 ؛ (پ) 91 ؛ (ت) 15 ؛ (ث) 1140 ؛

(ج) 816 .

۸ .۴۰ .

	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

۸ .۴۱ . راهنمایی. $(1+1)^n$ را بسط دهید.

۸ .۴۲ . راهنمایی. $(1-1)^n$ را بسط دهید.

۸ .۴۳ . (آ) $26\cdot25\cdot10\cdot9\cdot8=468{,}000$ ؛ (ب) $26\cdot25\cdot9\cdot9\cdot8=421{,}200$.

۸ .۴۴ (آ) 24 ؛ (ب) 576 ؛ (پ) 360 .

۸ .۴۵ . 360

۸ .۴۶ . (آ) 120 (ب) 48

۸ .۴۷ . (آ) 24 (ب) 12

۸ .۴۸ . 720

۸ .۴۹ . 420

۸ .۵۰ . (آ) 30 ؛ (ب) $\frac{9!}{2!\,2!\,2!}=45{,}360$ ؛

(پ) $\frac{11!}{2!\,3!\,2!}=1{,}663{,}200$ ؛ (ت) $\frac{8!}{2!\,2!\,2!}=5040$.

۸ .۵۱ . (آ) 1152 ؛ (ب) 504 ؛ (پ) 648

۸ .۵۲ . $3!\,5!\,4!\,3!=103{,}680$

۸ .۵۳ . (آ) 216 ؛ (ب) 320 ؛ (پ) 328 ؛ (ت) 136 .

۸ .۵۴ . (آ) 120 ؛ (ب) 24 ؛ (پ) 24 ؛ (ت) 12 .

۸ .۵۵ . (آ) 495 ؛ (ب) 369 ؛ (پ) 252 .

۸ .۵۶ . (آ) 462 ؛ (ب) 210 ؛ (پ) 252 .

۸ .۵۷ . (آ) $2^{11}-1-\binom{11}{1}-\binom{11}{2}=1981$ یا

$$\binom{11}{3}+\binom{11}{4}+\cdots+\binom{11}{11} = 1981$$

ب) $\binom{5}{5}\binom{6}{4}+\binom{5}{4}\binom{6}{3}+\binom{5}{3}\binom{6}{2}+\binom{5}{2}\binom{6}{1} = 325$

۸.۵۸. (آ) 45 ؛ (ب) 28 ؛ (پ) 120 ؛ (ت) 36 ؛ (ث) 8

۸.۵۹. (آ) 286 ؛ (ب) 165 ؛ (پ) 110 ؛ (ت) 80 ؛ (ث) 276

۸.۶۰. (آ) 56 ؛ (ب) 16 .

۸.۶۱. $\binom{n}{3} - n\binom{n-4}{1} - n = \frac{n}{6}(n-5)(n-4)$

۸.۶۲. (آ) $4 \cdot 10 = 40$ ؛ (ب) $13 \cdot 48 = 624$ ؛ (پ) $10 \cdot 4^5 - 40 = 10{,}200$

(تعداد استریت فلاشها را کم می کنیم.)؛ (ت) $\binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3 = 84{,}480$ ؛

(ث) $13 \cdot \binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3 = 1{,}098{,}240$

۸.۶۳. (آ) $\binom{21}{3}\binom{5}{2} \cdot 5! = 1{,}596{,}000$ (ب) $\binom{20}{2}\binom{5}{2} \cdot 5! = 228{,}000$

(پ) $19 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5! = 22{,}800$ (ت) $19 \cdot \binom{5}{2} \cdot 4! = 4560$

(ث) $19 \cdot \binom{5}{2} \cdot 3! = 1140$ (ج) $4 \cdot \binom{20}{2} \cdot 5! = 91{,}200$

(چ) $4 \cdot \binom{20}{2} \cdot 4! = 18{,}240$ (ح) $18{,}240$

(خ) $4 \cdot \binom{20}{2} \cdot 3! = 4456$ (د) $4 \cdot 19 \cdot 5! = 9120$

۸.۶۴. $\frac{9!}{3!\,3!\,3!} = 1680$

۸.۶۵. $\frac{1680}{3!} = 280$ یا $\binom{8}{2}\binom{5}{2} = 280$

۸.۶۶. $\frac{10!}{4!\,3!\,3!} \cdot \frac{1}{2!} = 2100$ یا $\binom{10}{4}\binom{5}{2} = 2100$

۸ .۶۷. $\dfrac{12!}{3!\,3!\,3!\,3!} = 369{,}600$

۸ .۶۸. $\dfrac{12!}{5!\,4!\,3!} = 27{,}720$

۸ .۶۹. $2^{n-1} - 1$

۸ .۷۰. $\dfrac{14!}{3!\,3!\,2!\,2!\,2!\,2!} \cdot \dfrac{1}{2!\,4!} = 3{,}153{,}150$

۸ .۷۱. (آ) (یک) $3^3 = 27$ (هر عنصر را می توان در هر یک از سه سلول قرار داد)؛ (دو) تعداد عناصر در سه سلول را می توان به قرار زیر توزیع کرد:

(آ) $[\{3\}, \{0\}, \{0\}]$ ؛ (ب) $[\{2\}, \{1\}, \{0\}]$ ؛ (پ) $[\{1\}, \{1\}, \{1\}]$. لذا، تعداد افرازها خواهد بود $1 + 3 + 1 = 5$.

(ب) (یک) $3^4 = 81$

(دو) تعداد عناصر در سه سلول را می توان به قرار زیر توزیع کرد:

(آ) $[\{4\}, \{0\}, \{0\}]$ ؛ (ب) $[\{3\}, \{1\}, \{0\}]$ ؛ (پ) $[\{2\}, \{2\}, \{0\}]$ ؛ (ت) $[\{2\}, \{1\}, \{1\}]$.

لذا، تعداد افرازها خواهد بود $1 + 4 + 3 + 6 = 14$.

۸ .۷۲. (آ) $\dfrac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}$ ؛ (ب) $4 \cdot \dfrac{48!}{9!\,13!\,13!\,13!}$ ؛ (پ) $4! \cdot \dfrac{48!}{12!\,12!\,12!\,12!}$

(ت) $\dbinom{13}{8} \dfrac{39!}{5!\,8!\,13!\,13!}$

(ث)

$$2 \cdot \frac{48!}{9!\,13!\,13!\,13!} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{48!}{10!\,12!\,13!\,13!} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{48!}{11!\,11!\,13!\,13!} = 2300\,\frac{48!}{11!\,13!\,13!\,13!}$$

۸ .۷۴. 15

۸ .۷۵. 14

۸ .۷۶. 20

۸ .۷۷. 11

۸ .۷۸. 14

۹
دستگاههای جبری، زبانهای صوری

۹. ۱ اعمال و نیمگروهها

یک عمل n تایی بر مجموعهٔ S نگاشتی است از S^n به توی S . به خصوص، یک عمل دو تایی نگاشتی از $S \times S$ به توی S می باشد. ما در این فصل عمدتاً به اعمال دو تایی می پردازیم؛ لذا، منظور ما از عمل یعنی عمل دوتایی مگر خلافش تصریح شود.

فرض کنیم $*$ یک عمل دوتایی بر مجموعهٔ S باشد. ما معمولاً به جای $*(a, b)$ می نویسیم

$$a * b \quad \text{یا فقط} \quad ab$$

هرگاه S یک مجموعهٔ متناهی باشد، آنگاه عمل را می توان با جدول عمل مشخص کرد که در آن درایهٔ سطر a و ستون b مساوی $a * b$ می باشد. هرگاه A زیر مجموعهٔ S باشد، آنگاه گوییم A تحت $*$ بسته است اگر به ازای هر دو عنصر a و b در A ، $a * b$ متعلق به A باشد. به عنوان مثال، فرض کنیم S مجموعهٔ اعداد صحیح و A زیر مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشد. در این صورت، A تحت جمع بسته است ولی تحت تفریق چنین نیست.

گوییم عمل $*$ بر S درقانون شرکتپذیری صدق می کند یا شرکتپذیر است اگر به ازای هر سه عنصر a, b, c در S ،

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

عنصر e در S را یک عنصر همانی برای $*$ نامیم اگر به ازای هر عنصر a در S داشته

باشیم
$$a*e = e*a = a$$

به طور کلی، e یک همانی راست است اگر به ازای هر a در S ، $a*e=a$ ، و یک همانی چپ است اگر به ازای هر a در S ، $e*a=a$.

قضیهٔ ۹. ۱. فرض کنیم e یک همانی چپ و f یک همانی راست برای یک عمل باشد. در این صورت، $e=f$.

برهان بسیار ساده است. چون e یک همانی چپ است، $ef=f$ ؛ ولی چون f یک همانی راست است، $ef=e$. لذا، $e=f$. این قضیه به خصوص به ما می گوید که یک عنصر همانی منحصر به فرد است، و اگر عملی بیش از یک همانی چپ داشته باشد، همانی راست ندارد و به عکس.

گوییم عمل $*$ بر S در قانون حذف چپ صدق می کند اگر

$a*b = a*c$ تساوی $b = c$ را ایجاب کند،

و در قانون حذف راست صدق می کند اگر

$b*a = c*a$ تساوی $b = c$ را ایجاب کند.

گوییم عمل تعویضپذیر است یا در قانون تعویضپذیری صدق می کند اگر به ازای هر a, b در S داشته باشیم
$$a*b = b*a$$

فرض کنیم عمل $*$ بر مجموعهٔ S دارای عنصر همانی e باشد. معکوس عنصر a در S ، که معمولاً با a^{-1} نموده می شود، عنصری است با خاصیت زیر:
$$a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$$

هرگاه عمل شرکتپذیر باشد، آنگاه معکوس a ، در صورت وجود، منحصر به فرد است (مسئلهٔ ۹. ۳).

مجموعهٔ S همراه با عمل شرکتپذیر $*$ را یک نیمگروه می نامیم. ما نیمگروه را

با $(S,*)$ و، در صورت مشخص بودن عمل، فقط با S نشان خواهیم داد.

مثال ۱.۹

(آ) مجموعهٔ $\mathbf{Z} = \{\ldots,-1,0,1,\ldots\}$ از اعداد صحیح را در نظر می گیریم. $(\mathbf{Z},+)$ یک نیمگروه است زیرا جمع شرکتپذیر است؛ یعنی، به ازای هر a, b, c در $\mathbf{Z}$ ،

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

در واقع، $(\mathbf{Z},+)$ یک نیمگروه تعویضپذیر با عنصر همانی 0 است زیرا به ازای هر دو عدد صحیح a, b در $\mathbf{Z}$ ،

$$a+0 = 0+a = a \quad \text{و} \quad a+b = b+a$$

از آن سو، $(\mathbf{Z},-)$ نیمگروه نیست زیرا تفریق شرکتپذیر نیست. مثلاً،

$$(12-6)-2 \neq 12-(6-2)$$

(ب) مجموعهٔ $\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ از اعداد صحیح مثبت را در نظر می گیریم. فرض کنیم

$$a*b = \gcd(a,b)$$
$$a\circ b = a^b$$

که در آن $\gcd(a,b)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است. $(\mathbf{N},*)$ یک نیمگروه است زیرا عمل $*$ شرکتپذیر می باشد. ولی $(\mathbf{N},\circ)$ زیر گروه نیست زیرا عمل $\circ$ شرکت ناپذیر است. به عنوان مثال،

$$(2\circ 2)\circ 3 = (2^2)^3 = 4^3 = 64$$

ولی

$$2\circ(2\circ 3) = 2^{2^3} = 2^8 = 256$$

(پ) فرض کنیم S یک مجموعهٔ ناتهی با عمل

$$a*b = a$$

باشد. در این صورت، S نیمگروه است زیرا عمل فوق شرکتپذیر است. در واقع،

$$a*(b*c) = a*b = a \quad \text{و} \quad (a*b)*c = a*c = a$$

۹ . ۲ نیمگروههای آزاد ، زبانها

مجموعهٔ S از علایم را در نظر می گیریم. یک *کلمه* بر S دنباله ای است متناهی از عناصر آن. به عنوان مثال،

$$V = accba \quad و \quad U = ababb$$

کلماتی بر $S = \{a, b, c\}$ می باشند. در بحث کلمات بر S ، اغلب S را الفبا و عناصرش را حروف می نامیم. برای راحتی، دنبالهٔ تهی را با ϵ یا 1 نموده و آن را نیز یک کلمه بر S می گیریم. همچنین، به جای aa می نویسیم a^2 ، به جای aaa می نویسیم a^3 ، و غیره. مجموعهٔ تمام کلمات بر S را معمولاً با S^* نشان می دهند.

حال دو کلمهٔ U و V بر S را در نظر می گیریم. با نوشتن حروف V بعد از حروف U می توان کلمهٔ UV را تشکیل داد. به عنوان مثال، هر گاه U و V کلمات فوق باشند ، آنگاه

$$UV = ababbaccba = abab^2ac^2ba$$

این عمل را تسلسل می نامند. شرکتپذیری این عمل واضح است. لذا، کلمات بر S تحت عمل تسلسل یک نیمگروه تشکیل می دهند. این نیمگروه را نیمگروه آزاد بر S یا تولید شده به وسیلهٔ S می نامیم. واضح است که کلمهٔ تهی ϵ عنصر همانی برای نیمگروه است، و نیمگروه در هر دو قانون حذف راست و چپ صدق می کند.

مجدداً فرض کنیم S یک مجموعهٔ نا تهی از علایم باشد. عناصر S را کلمه و دنباله های متناهی از عناصر S را جمله می گیریم. همچنین می توان یک زبان را مجموعه ای از جملات با معنی تصور کرد. در واقع، زبان L بر مجموعهٔ S را به طور صوری گردایه ای از کلمات بر S تعریف می کنیم. مثلاً، فرض کنیم $S = \{a, b\}$. در این صورت، گردایه های زیر زبانهایی بر S می باشند:

$$L_1 = \{a, ab, ab^2, ab^3, \dots\}$$

$$L_2 = \{a^nb^m : \text{اعداد صحیح نامنفی اند } m \text{ و } n\}$$

$$L_3 = \{b^nab^m : \text{اعداد صحیح نامنفی اند } m \text{ و } n\}$$

ملاحظه می کنیم که L_1 یک زیر زبان L_2 است مرکب از تمام کلماتی که با a ها

شروع شده و به b ها ختم می شوند. همچنین، L_1 یک زیر زبان L_3 است مرکب از تمام کلماتی که درست یک a دارند.

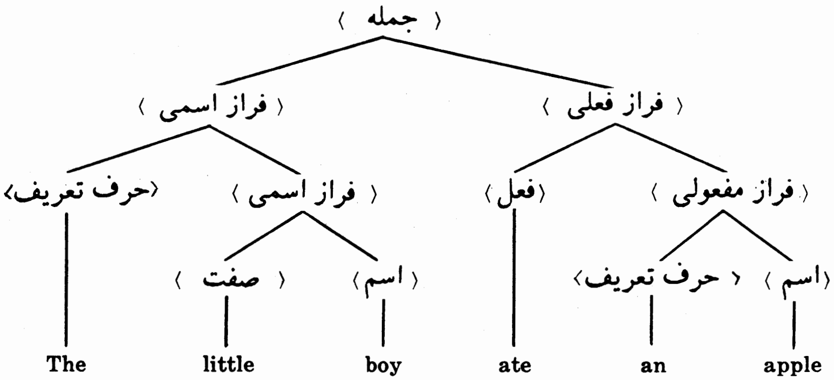
۹ . ۳ زبانها و دستور زبانها

شکل ۹ . ۱ ساختار دستوری یک جمله را نشان می دهد. توجه کنید که (۱) متغیر های مختلفی وجود دارند؛ مثلاً، <جمله>، <فراز اسمی>، . . . ؛ (۲) کلمات پایانهٔ مختلفی وجوددارند؛ مثلاً، « The »، « boy »، . . . ؛ (۳) یک متغیر شروع <جمله> داریم؛ و (۴) جانشانیها یا فرآورده های مختلفی وجود دارند؛ مثلاً،

<جمله> → <فراز اسمی><فراز فعلی>

<فراز مفعولی> → <حرف تعریف><اسم>

<اسم> → apple



شکل ۹ . ۱

جملهٔ نهایی فقط شامل پایانه هاست اگر چه هم متغیرها و هم پایانه ها در ساختارش به صورت فرآورده ظاهر شده اند. این توصیف شهودی انگیزهٔ تعریف زیر از یک دستور زبان و زبان تولید شده به وسیلهٔ آن خواهد بود.

دستور زبان G از چهار چیز تشکیل شده است:

(۱) مجموعهٔ متناهی V از عناصر را متغیرها یا ناپایانه ها می نامیم.

(۲) مجموعهٔ متناهی T از عناصر را پایانه ها می نامیم.

(۳) یک‌عنصر S در V را علامت شروع می نامیم.

(٤) مجموعهٔ متناهی P از فرآورده ها. یک فرآورده جفت مرتبی است مانند (α, β) که معمولاً به صورت $\alpha \to \beta$ نوشته می شود که در آن α و β کلماتی در $V \cup T$ می باشند. دست کم یکی از α ها باید شامل یک متغیر باشد.

ما در صورتی که بخواهیم بر قسمتهای G تأکید داشته باشیم، دستور زبان فوق را با $G = G(V, T, S, P)$ نشان می دهیم. همچنین فرض می کنیم هیچ عنصری نتواند هم پایانه و هم ناپایانه باشد؛ یعنی، T و V از هم جدا باشند.

فرض کنیم G یک دستور زبان و W و W' کلماتی در $V \cup T$ باشند. می نویسیم

$$W \Rightarrow W'$$

اگر W' را بتوان با استفاده از یکی از فرآورده ها از W به دست آورد؛ یعنی، اگر

$$W = L\alpha M \text{ ، } W' = L\beta M \text{ ، }$$

و $\alpha \to \beta$ یک فرآورده باشد. می نویسیم

$$W \Rightarrow\Rightarrow W'$$

اگر W' را بتوان از W با استفاده از یک دنبالهٔ متناهی از فرآورده ها به دست آورد.

زبان G، که با $L(G)$ نموده می شود، عبارت است از تمام کلماتی در پایانه ها که بتوان آنها را از علامت شروع S با فرایند فوق به دست آورد؛ یعنی،

$$L(G) = \{W : S \Rightarrow\Rightarrow W\}$$

مثال ۹ . ۲. دستور زبان G زیر را در نظر می گیریم:

$$V = \{A, B, S\}, \quad T = \{a, b\}$$
$$P = \{S \to AB,\ A \to Aa,\ B \to Bb,\ A \to a,\ B \to b\}$$

به آسانی معلوم می شود که $L(G)$ از تمام کلماتی به شکل

$$a^n b^m$$

یعنی کلماتی که با رشته ای از a ها شروع شده و سپس رشته ای از b ها می آ

تشکیل شده است. به عنوان مثال، a^2b^4 را می توان از S به صورت زیر به دست آورد:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow AaB \Rightarrow aaB \Rightarrow aaBb \Rightarrow aaBbb \Rightarrow aaBbbb \Rightarrow aabbbb = a^2b^4$$

در اینجا به ترتیب از فرآورده‌های 1، 2، 4، 3، 3، 3، و 5 استفاده می کنیم. لذا، می توان نوشت $S \Rightarrow\Rightarrow a^2b^4$.

گوییم دستور زبان در تعریف فوق از نوع 0 است. با گذاردن قیودی بر نوع فرآورده های مجاز، دستور زبانهایی از نوع 1، 2، و 3 به دست می آیند. این دستورها ذیلاً تعریف می شوند که در آنها A و B متغیر، a یک پایانه و α، α'، و β کلمات (احتمالاً) بر $V \cup T$ می باشند:

(۱) دستور زبان G را حساس زمینه ای یا از نوع ۱ گوییم هرگاه فرآورده ها به شکل زیر باشند:

$$\alpha A\alpha' \to \alpha\beta\alpha'$$

نام «حساس زمینه ای» از آنجا ناشی شده است که فقط وقتی می توان متغیر A را در یک کلمه با β عوض کرد که A بین α و α' باشد.

(۲) دستور زبان G را فارغ از زمینه یا از نوع ۲ گوییم هرگاه فرآورده ها به شکل زیر باشند:

$$A \to \beta$$

نام «فارغ از زمینه» از آنجا ناشی شده که در اینجا می توان متغیر A را بی توجه به جای ظاهر شدن A با β عوض کرد.

(۳) گوییم دستور زبان G منتظم یا از نوع ۳ است هرگاه فرآورده ها به شکل

$$A \to a \quad \text{یا} \quad A \to aB$$

باشند.

توجه کنید که هر دستور زبان متعلق به نوع ما قبل خود است؛ یعنی، هر دستور زبان از نوع ۳ از نوع ۲، هر دستور زبان از نوع ۲ از نوع ۱، و هر دستور زبان از نوع ۱ از نوع 0 می باشد.

گوییم زبان L حساس زمینه ای، فارغ از زمینه، یا منتظم است اگر قابل تولید به

وسیلهٔ یک دستور زبان حساس زمینه ای، فارغ از زمینه، یا منتظم باشد. به عنوان مثال، زبان $L = \{a^n b^m\}$ ، که در آن n و m اعداد صحیح مثبتی هستند، یک زبان فارغ از زمینه است زیرا به وسیلهٔ دستور زبان G در مثال ۹. ۲ که فارغ از زمینه است تولید می شود. در واقع، مسئلهٔ ۹. ۱۰ نشان می دهد که L را می توان با یک دستور زبان از نوع ۳ نیز تولید کرد؛ یعنی، L منتظم می باشد.

بین دستور زبانهای منتظم و خودکاری متناهی (ر.ک. فصل ۷) رابطه ای اساسی وجود دارد:

قضیهٔ ۹. ۲. زبان L را می توان با یک دستور زبان از نوع ۳ تولید کرد (یعنی، L منتظم است) اگر و فقط اگر یک خودکار متناهی مانند M موجود باشد که L را قبول کند.

در بحث زبانها و دستور زبانها از نماد زیر استفاده می کنیم مگر خلافش بیان یا ایجاب شود. پایانه ها با حروف لاتین کوچک ایتالیک $a, b, c, \ldots$ و متغیرها با حروف لاتین بزرگ ایتالیک $A, B, C, \ldots$ ، و متغیر شروع با S نموده می شود. همچنین حروف یونانی $\alpha, \beta, \ldots$ نشانگر کلمات هم در متغیرها و هم در پایانه ها می باشند. به علاوه، برای فرآورده های $\alpha \to \beta_1, \ldots, \alpha \to \beta_k$ می نویسیم

$$\alpha \to (\beta_1, \ldots, \beta_k)$$

۹. ٤ گروهها

فرض کنیم G یک مجموعهٔ ناتهی با عملی دوتایی (که با پهلوی هم قرار دادن نموده می شود) باشد. در این صورت، G یک گروه است اگر اصول موضوع زیر برقرار باشند:

[G₁] قانون شرکتپذیری؛ یعنی، به ازای هر a, b, c در G داشته باشیم

$$(ab)c = a(bc) \quad ;$$

[G₂] عنصر همانی؛ یعنی، عنصری مانند e در G باشد به طوری که به ازای هر

عنصر a در G ، $ae = ea = a$ ؛

[G_3] معکوسها؛ یعنی، به ازای هر a در G عنصری مانند a^{-1} (معکوس a) در G باشد به طوری که $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

گوییم گروه G آبلی (یا تعویضپذیر) است اگر قانون تعویضپذیری برقرار باشد؛ یعنی، اگر به ازای هر $a, b \in G$ ، $ab = ba$.

وقتی عمل دوتایی مثل فوق با پهلوی هم قرار دادن نموده شود، گوییم گروه G به طور ضربی نوشته شده است. گاهی اوقات، وقتی G آبلی است، عمل دو تایی با $+$ نموده شده و گوییم G به طور جمعی نوشته شده است. در یک چنین حالت عنصر همانی با 0 نموده شده و آن را عنصر صفر می نامیم، و معکوس با $-a$ نموده شده و قرینهٔ a نام خواهد داشت.

تعداد عناصر گروه G ، که با $|G|$ نموده می شود، مرتبهٔ G نام دارد، و G را یک گروه متناهی نامیم اگر مرتبه اش متناهی باشد. هرگاه A و B زیر مجموعه هایی از G باشند، آنگاه می نویسیم

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\} \quad \text{یا} \quad A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

مثال ۹ . ۳

(آ) مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ تحت عمل جمع یک گروه آبلی است. عنصر همانی 0 و $-a$ معکوس جمعی a در $\mathbf{Z}$ می باشد.

(بـ) اعداد گویای ناصفر $Q \setminus \{0\}$ تحت ضرب یک گروه آبلی تشکیل می دهند. عدد 1 عنصر همانی بوده و q/p معکوس ضربی عدد گویای p/q می باشد.

(پـ) فرض کنیم S مجموعهٔ ماتریسهای 2×2 با درایه های گویا تحت عمل ضرب ماتریسی باشد. S گروه نیست زیرا معکوسها همیشه وجود ندارند. ولی فرض کنیم G زیر مجموعهٔ ماتریسهای 2×2 با دترمینان ناصفر باشد. G تحت ضرب ماتریسی یک گروه است. عنصر همانی عبارت است از

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

معکوس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ عبارت است از $A^{-1} = \begin{pmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{pmatrix}$. این مثالی است از یک گروه غیر آبلی زیرا ضرب ماتریسی تعویض ناپذیر می باشد.

مثال ۹. ٤. نگاشت یک به یک σ از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ به روی خودش یک جایگشت نام دارد. این جایگشت را با

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

نشان می دهیم که در آن $j_i = \sigma(i)$.

مجموعهٔ این جایگشتها را با S_n نشان می دهیم، و تعداد این جایگشتها عبارت است از $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$. توجه می کنیم که ترکیب جایگشتها در S_n متعلق به S_n است، تابع همانی ϵ متعلق به S_n است، و معکوس جایگشتها در S_n تعلق به S_n دارند. لذا، S_n تحت ترکیب توابع یک گروه به نام گروه متقارن از درجهٔ n می باشد. ما در اینجا به بررسی S_3 می پردازیم؛ عناصرش عبارتند از

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

جدول ضرب S_3 به قرار زیر است:

	ϵ	σ_1	σ_2	σ_3	ϕ_1	ϕ_2
ϵ	ϵ	σ_1	σ_2	σ_3	ϕ_1	ϕ_2
σ_1	σ_1	ϵ	ϕ_1	ϕ_2	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	ϕ_2	ϵ	ϕ_1	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	ϕ_1	ϕ_2	ϵ	σ_1	σ_2
ϕ_1	ϕ_1	σ_3	σ_1	σ_2	ϕ_2	ϵ
ϕ_2	ϕ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ϵ	ϕ_1

۹. ۵ زیر گروهها و زیر گروههای نرمال

زیر مجموعهٔ H از گروه G را یک زیر گروه G نامیم اگر H تحت عمل G خود یک گروه باشد. می توان نشان داد که H در صورتی زیر گروه است که از سه خاصیت زیر

برخوردار باشد: (یک) عنصر همانی e متعلق به H باشد؛ (دو) H تحت عمل G بسته باشد، یعنی هرگاه $a,b \in H$، آنگاه $ab \in H$؛ (سه) H تحت معکوس گیری بسته باشد، یعنی هرگاه $a \in H$، آنگاه $a^{-1} \in H$. هر گروه G دارای زیر گروههای $\{e\}$ و خود G است. هر زیر گروه دیگر G یک زیر گروه نابدیهی نام دارد.

هرگاه H زیر گروه G بوده و $a \in G$، آنگاه مجموعهٔ

$$Ha = \{ha : h \in H\}$$

یک هم مجموعهٔ راست H نام دارد. (به همین نحو، aH یک هم مجموعهٔ چپ H نام دارد.) نتایج مهم زیر (که در مسائل ۹. ۱۳ و ۹. ۱۵ ثابت شده است) در دست است:

قضیهٔ ۹. ۳. فرض کنیم H یک زیر گروه گروه G باشد. در این صورت، هم مجموعه های راست Ha افرازی از G را تشکیل می دهند.

قضیهٔ ۹. ٤ (لاگرانژ Lagrange). فرض کنیم H زیر گروه گروه متناهی G باشد. در این صورت، مرتبهٔ H مرتبهٔ G را عاد می کند.

در واقع، می توان نشان داد که تعداد هم مجموعه های راست H در G، به نام شاخص H در G، مساوی تعداد هم مجموعه های چپ H در G بوده و این دو عدد مساوی $|G|$ بخش بر $|H|$ می باشند.

تعریف. زیر گروه H از G یک زیر گروه نرمال نام دارد اگر به ازای هر $a \in G$ داشته باشیم $a^{-1}Ha \subset H$. به بیان معادل، H در صورتی نرمال است که به ازای هر $a \in G$، $aH = Ha$؛ یعنی، هم مجموعه های راست و چپ H یکی باشند.

توجه کنید که هر زیر گروه یک گروه آبلی نرمال است.

قضیهٔ ۹ . ۵. فرض کنیم H یک زیر گروه نرمال G باشد. در این صورت، هم مجموعه های H در G تحت ضرب هم مجموعه ها یک گروه تشکیل می دهند. این گروه را گروه خارج قسمتی نامیده و آن را با G/H نشان می دهیم.

مثال ۹ . ۵. گروه اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ تحت عمل جمع را در نظر می گیریم. فرض کنیم H مجموعهٔ مضارب 5 باشد؛ یعنی،

$$H = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$$

پس H یک زیر گروه (لزوماً نرمال) $\mathbf{Z}$ است. هم مجموعه های H در $\mathbf{Z}$ به قرار زیرند:

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= 0 + H = H = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}\\
\bar{1} &= 1 + H = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}\\
\bar{2} &= 2 + H = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}\\
\bar{3} &= 3 + H = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}\\
\bar{4} &= 4 + H = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}
\end{aligned}$$

به ازای هر عدد صحیح دیگر $n \in \mathbf{Z}$ ، $\bar{n} = n + H$ بر یکی از هم مجموعه های فوق منطبق است. لذا، طبق قضیهٔ فوق، $\mathbf{Z}/H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ تحت جمع هم مجموعه ها یک گروه تشکیل می دهد؛ جدول جمع آن به قرار زیر است:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

این گروه خارج قسمتی $\mathbf{Z}/H$ را گروه اعداد صحیح به کالبد 5 نامیده و اغلب با $\mathbf{Z}_5$ نشان می دهیم. به همین نحو، به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، گروه خارج قسمتی $\mathbf{Z}_n$ وجود دارد که گروه اعداد صحیح به کالبد n نامیده می شود.

مثال ۹ . ۶

(آ) گروه جایگشتی S_3 از درجهٔ 3 را که در مثال ۹ . ٤ بررسی شد در نظر می گیریم. مجموعهٔ $H = \{\epsilon, \sigma_1\}$ یک زیر گروه S_3 است. هم مجموعه های راست و چپ به

قرار زیر ند:

هم مجموعه های چپ	هم مجموعه های راست
$H = \{\epsilon, \sigma_1\}$	$H = \{\epsilon, \sigma_1\}$
$\phi_1 H = \{\phi_1, \sigma_3\}$	$H\phi_1 = \{\phi_1, \sigma_2\}$
$\phi_2 H = \{\phi_2, \sigma_2\}$	$H\phi_2 = \{\phi_2, \sigma_3\}$

توجه کنید که هم مجموعه های راست و چپ متمایزند؛ لذا، H زیر گروه نرمال S_3 نیست.

(ب) گروه G ی ماتریسهای 2×2 با درایه های گویا و دترمینان ناصفر را در نظر می گیریم. [ر. ک. مثال ۹. ۳ (پ).] فرض کنیم زیر مجموعهٔ H از G مرکب از تمام ماتریسهایی باشد که درایهٔ راست بالایی شان صفر است؛ یعنی، ماتریسهایی به شکل

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

در این صورت، H زیر گروه G است زیرا H تحت عمل ضرب و معکوس گیری بسته است و $I \in H$. ولی H یک زیر گروه نرمال نیست زیرا، مثلاً،

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

تعلق به H ندارد.

از آن سو، فرض کنیم زیر مجموعهٔ K از G مرکب از ماتریسها با دترمینان 1 باشد. می توان نشان داد که K نیز زیر گروه G است. به علاوه، به ازای هر ماتریس X در G و هر ماتریس A در K داریم

$$\det(X^{-1}AX) = 1$$

لذا، $X^{-1}AX$ متعلق به K است؛ پس K یک زیر گروه نرمال G می باشد.

(پ) فرض کنیم G یک گروه و a عنصر دلخواهی از G باشد. طبق معمول، تعریف می کنیم $a^0 = e$ و $a^{n+1} = a^n \cdot a$. واضح است که به ازای هر دو عدد صحیح m و n، $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ و $(a^m)^n = a^{mn}$. تمام توانهای a :

$$\ldots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, a^3, \ldots$$

یک زیر گروه G به نام گروه دوری تولید شده به وسیلهٔ a را تشکیل می دهند که با $gp(a)$ نموده می شود. فرض کنیم توانهای a متمایز نباشند؛ مثلاً $a^r = a^s$ و در آن

مثلاً $r > s$. در این صورت، $a^{r-s} = e$ که در آن $r - s > 0$. کوچکترین عدد صحیح مثبت m که $a^m = e$ مرتبهٔ a نام دارد و با $|a|$ نموده می شود. هرگاه $|a| = m$ ، آنگاه زیر گروه دورش اش $gp(a)$ دارای m عنصر به صورت زیر است:

$$gp(a) = \{e, a, a^2, a^3, \ldots, a^{m-1}\}$$

به عنوان مثال، عنصر ϕ_1 در گروه متقارن S_3 مثال ۹. ٤ را در نظر می گیریم. داریم

$$\phi_1^1 = \phi_1, \ \ \phi_1^2 = \phi_2, \ \ \phi_1^3 = \phi_2 \cdot \phi_1 = \epsilon$$

لذا، $|\phi_1| = 3$ و $gp(\phi_1) = \{\epsilon, \phi_1, \phi_2\}$. توجه کنید که $|\phi_1|$ مرتبهٔ S_3 را عاد می کند. این امر در حالت کلی درست است؛ یعنی، به ازای هر عنصر a در گروه G ، $|a|$ مساوی مرتبهٔ $gp(a)$ است که، طبق قضیهٔ لاگرانژ ۹. ٤، $|G|$ را عاد می کند. همچنین، متذکر می شویم که گروه G در صورتی دوری است که دارای عنصری مانند a باشد که $G = gp(a)$.

نگاشت f از گروه G به توی گروه G' را یک همریختی گوییم اگر به ازای هر a, b در G ،

$$f(ab) = f(a) f(b)$$

به علاوه، هرگاه f یک به یک و برو باشد، آنگاه f یکریختی است و G و G' را یکریخت نامیده و می نویسیم $G \simeq G'$.

هرگاه $f : G \to G'$ یک همریختی باشد، آنگاه هستهٔ f ، که به صورت $\operatorname{Ker} f$ نوشته می شود، مجموعهٔ عناصری از G است که نقششان عنصر همانی e' از G' می باشد:

$$\operatorname{Ker} f = \{a \in G : f(a) = e'\}$$

به یاد آورید که نقش f ، که به صورت $f(G)$ یا $\operatorname{Im} f$ نوشته می شود، عبارت است از نقش عناصر تحت f :

$$\operatorname{Im} f = \{b \in G' : f(a) = b \ \text{هست که} \ a \in G \ \text{عنصری مانند}\}$$

قضیهٔ زیر (که در مسئلهٔ ۹. ۱۷ ثابت شده است) در نظریهٔ گروهها از اساس می باشد.

قضیهٔ ۹ . ۶. فرض کنیم $f: G \to G'$ یک همریختی با هستهٔ K باشد. در این صورت، K یک زیر گروه نرمال G است و گروه خارج قسمتی G/K با نقش f یکریخت می باشد.

مثال ۹ . ۷

(آ) فرض کنیم G گروه اعداد حقیقی تحت جمع و G' گروه اعداد حقیقی مثبت تحت ضرب باشد. نگاشت $f: G \to G'$ تعریف شده با $f(a) = 2^a$ یک همریختی است زیرا

$$f(a+b) = 2^{a+b} = 2^a 2^b = f(a)\, f(b)$$

در واقع، f یک به یک و برو نیز هست؛ پس G و G' یکریخت می باشند.

(ب) فرض کنیم G گروه اعداد مختلط ناصفر تحت ضرب و G' گروه اعداد حقیقی ناصفر تحت ضرب باشد. نگاشت $f: G \to G'$ با تعریف $f(z) = |z|$ یک همریختی است زیرا

$$f(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| = f(z_1)\, f(z_2)$$

هستهٔ K ی f از اعداد مختلطی مانند z تشکیل شده است که روی دایرهٔ یکه واقعند؛ یعنی، $|z| = 1$. لذا، G/K با نقش f ، یعنی گروه اعداد حقیقی مثبت تحت ضرب، یکریخت است.

(پ) فرض کنیم a عنصر دلخواهی در گروه G باشد. تابع $f: \mathbf{Z} \to G$ با تعریف $f(n) = a^n$ یک همریختی است زیرا

$$f(m+n) = a^{m+n} = a^m \cdot a^n = f(m) \cdot f(n)$$

نقش f مساوی $gp(a)$ ، یعنی زیر گروه دوری تولید شده به وسیلهٔ a ، است. بنا بر قضیهٔ ۹ . ۶،

$$gp(a) \simeq \mathbf{Z}/K$$

که در آن K هستهٔ f می باشد. هرگاه $K = \{0\}$ ، آنگاه $gp(a) \simeq \mathbf{Z}$. از آن سو، اگر m مرتبهٔ a باشد، $K = \{$ مضارب m $\}$ ؛ و در نتیجه، $gp(a) \simeq \mathbf{Z}_m$. به عبارت دیگر، هر گروه دوری با اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ تحت جمع یا اعداد صحیح $\mathbf{Z}_m$ تحت جمع به کالبد m یکریخت است.

۶ . ۹ حلقه ها، قلمروهای صحیح، و میدانها

فرض کنیم R یک مجموعهٔ ناتهی با دو عمل دو تایی به نام جمع (با علامت +) و ضرب (با کنار هم گذاردن نموده می‌شود) باشد. R را یک حلقه گوییم اگر اصول موضوع زیر برقرار باشند:

$[R_1]$ به ازای هر $a, b, c \in R$ داشته باشیم $(a+b)+c = a+(b+c)$ ؛

$[R_2]$ عنصری مانند $0 \in R$ به نام عنصر صفر باشد به طوری که به ازای هر $a \in R$ ، $a+0 = 0+a = a$ ؛

$[R_3]$ به ازای هر $a \in R$ عنصری مانند $-a \in R$ به نام قرینهٔ a باشد به طوری که $a+(-a) = (-a)+a = 0$ ؛

$[R_4]$ به ازای هر $a, b \in R$ داشته باشیم $a+b = b+a$ ؛

$[R_5]$ به ازای هر $a, b, c \in R$ داشته باشیم $(ab)c = a(bc)$ ؛

$[R_6]$ به ازای هر $a, b, c \in R$ داشته باشیم

(یک) $a(b+c) = ab+ac$ و (دو) $(b+c)a = ba+ca$.

توجه کنید که اصول موضوع $[R_1]$ تا $[R_4]$ را می توان خلاصه کردو گفت که R یک گروه آبلی تحت جمع است.

تفریق در R با $a-b \equiv a+(-b)$ تعریف می شود.

می توان نشان داد (ر. ک. مسئلهٔ ۹. ۲۲) که به ازای هر $a \in R$ ،

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

R را یک حلقهٔ تعویضپذیر نامیم اگر به ازای هر $a, b \in R$ ، $ab = ba$.

همچنین گوییم R یک حلقه با عنصر همانی است اگر عنصر ناصفری مانند $1 \in R$ باشد به طوری که به ازای هر $a \in R$ ، $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

زیر مجموعهٔ ناتهی J از حلقهٔ R را یک ایده آل R نامیم اگر(یک) هرگاه $a, b \in J$ ، آنگاه $a-b \in J$ و (دو) هرگاه $r \in R,\ a \in J$ ، آنگاه $ra, ar \in J$. ابتدا توجه می کنیم که J یک زیر حلقهٔ R است. همچنین، J یک زیر گروه (لزوماً نرمال) گروه جمعی R می باشد. لذا، می توان گردایهٔ هم مجموعه های

$$\{a+J:\ a\in R\}$$

را در نظر گرفت که یک افراز R را تشکیل می دهند.

قضیهٔ ۹ . ۷. فرض کنیم J یک ایدهٔ آل در حلقهٔ R باشد. در این صورت، هم مجموعه های $\{a+J:\ a\in R\}$ تحت اعمال هم مجموعه ای

$$(a+J)(b+J) = ab+J \quad \text{و} \quad (a+J)+(b+J) = a+b+J$$

یک حلقه تشکیل می دهند.

این حلقه را با R/J نموده و حلقهٔ خارج قسمتی می نامیم.

حال فرض کنیم R یک حلقهٔ تعویضپذیر با عنصر همانی باشد. به ازای هر $a\in R$ ، مجموعهٔ $(a)=\{ra:\ r\in R\}$ یک ایده آل است و آن را ایده آل اصلی تولید شده به وسیلهٔ a می نامند. هرگاه هر ایده آل در R یک ایدهٔ آل اصلی باشد، آنگاه R یک حلقهٔ ایده آل اصلی نام دارد.

عنصر ناصفر a در حلقهٔ تعویضپذیر R یک مقسوم علیه صفر است اگر عنصر ناصفری مانند b چنان موجود باشد که $ab=0$.

تعریف. حلقهٔ تعویضپذیر R با عنصر همانی یک قلمرو صحیح نام دارد اگر R مقسوم علیه صفر نداشته باشد؛ یعنی، هرگاه $ab=0$ تساوی $a=0$ یا $b=0$ را ایجاب نماید.

تعریف. حلقهٔ تعویضپذیر R با عنصر همانی 1 (غیر مساوی با 0) یک میدان است اگر هر عنصر ناصفر $a\in R$ دارای معکوس ضربی باشد؛ یعنی، عنصری مانند $a^{-1}\in R$ چنان موجود باشد که $aa^{-1}=a^{-1}a=1$.

هر میدان لزوماً یک قلمرو صحیح است چرا که اگر $ab=0$ و $a\neq 0$ ، داریم

$$b = 1\cdot b = a^{-1}ab = a^{-1}\cdot 0 = 0$$

توجه کنید که هر میدان را می توان یک حلقهٔ تعویضپذیر گرفت که در آن عناصر ناصفر تحت ضرب یک گروه تشکیل می دهند.

مثال ۹ . ۸

(آ) مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ با اعمال معمولی جمع وضرب مثالی کلاسیک از یک قلمرو صحیح (با عنصر همانی) است. هر ایده آل J در $\mathbf{Z}$ یک ایده آل اصلی است؛ یعنی، به ازای عدد صحیحی مانند m ، $J = (m)$. حلقهٔ خارج قسمتی $\mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}/(m)$ حلقهٔ اعداد صحیح به کالبد m نام دارد. هرگاه m اول باشد، آنگاه $\mathbf{Z}_m$ یک میدان است. از آن سو، هرگاه m اول نباشد، آنگاه $\mathbf{Z}_m$ دارای مقسوم علیه های صفر می باشد. به عنوان مثال، در حلقهٔ $\mathbf{Z}_6$ داریم

$$\bar{3} \neq \bar{0} \quad \text{و} \quad \bar{2} \neq \bar{0} \quad \text{ولی} \quad \bar{2}\cdot\bar{3} = \bar{0}$$

(بـ) اعداد گویای $\mathbf{Q}$ و اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ هر یک نسبت به اعمال معمولی جمع و ضرب یک میدان تشکیل می دهند.

(پـ) فرض کنیم $\mathbf{C}$ مجموعهٔ جفتهای مرتب از اعداد حقیقی با جمع و ضرب تعریف شده به صورت زیر باشد:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)\cdot(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$\mathbf{C}$ از جمیع خواص لازم برای یک میدان بهره مند است. در واقع، $\mathbf{C}$ همان میدان اعداد مختلط می باشد.

(تـ) مجموعهٔ تمام ماتریسهای 2 در 2 ی M با درایه های حقیقی تحت اعمال جمع و ضرب ماتریسی یک حلقهٔ تعویض ناپذیر با مقسوم علیه های صفر تشکیل می دهد.

(ثـ) فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت، مجموعهٔ تمام چند جمله ایهای $R[x]$ روی R نسبت به اعمال معمولی جمع و ضرب چند جمله ایها یک حلقه تشکیل می دهد. به علاوه، هرگاه R یک قلمرو صحیح باشد، آنگاه $R[x]$ نیز یک قلمرو صحیح می باشد.

حال فرض کنیم D یک قلمرو صحیح باشد. گوییم b ، a را در D عاد می کند

اگر به ازای $c \in D$ ای، $a = bc$. عنصر $u \in D$ را یک یکه نامیم اگر u ، 1 را عاد کند؛ یعنی، u دارای یک معکوس ضربی باشد. عنصر $b \in D$ یک شریک $a \in D$ است اگر به ازای یکه ای مانند $u \in D$ ، $b = ua$. عنصر نایکهٔ $p \in D$ تحویل ناپذیر است اگر $p = ab$ یکه بودن a یا b را ایجاب کند.

قلمرو صحیح D را یک قلمرو یکتایی تجزیه نامند اگر هر عنصر نایکهٔ $a \in D$ را بتوان به طور منحصر به فرد (با تقریب شریک و ترتیب) به صورت حاصل ضربی از عناصر تحویل ناپذیر نوشت.

مثال ۹ . ۹

(آ) حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ یک مثال کلاسیک از قلمرو یکتایی تجزیه است. یکه های $\mathbf{Z}$ عبارتند از 1 و -1 . تنها شریکهای $n \in \mathbf{Z}$ عبارتند از n و $-n$. عناصر تحویل ناپذیر $\mathbf{Z}$ اعداد اول می باشند.

(ب) مجموعهٔ $D = \{a + b\sqrt{13} :$ صحیح اند $a, b\}$ یک قلمرو صحیح است. یکه های D عبارتند از ± 1 ، $18 \pm 5\sqrt{13}$ ، و $-18 \pm 5\sqrt{13}$. عناصر 2 ، $3 - \sqrt{13}$ ، و $-3 - \sqrt{13}$ در D تحویل ناپذیرند. توجه کنید که $4 = 2 \cdot 2 = (3 - \sqrt{13})(-3 - \sqrt{13})$. لذا، D یک قلمرو یکتایی تجزیه نمی باشد.
(ر. ک. مسئلهٔ ۹ . ۸۱.)

مسائل حل شده

اعمال و نیمگروهها

۹ . ۱ . مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ را در نظر گرفته و فرض کنید * عمل کوچکترین مضرب مشترک (l.c.m.) بر $\mathbf{N}$ باشد.

(آ) $4 * 6$ ، $3 * 5$ ، $9 * 18$ ، و $1 * 6$ را بیابید.

(ب) آیا $(\mathbf{N}, *)$ یک نیمگروه است؟ آیا تعویضپذیر است؟

(پ) عنصر همانی * را بیابید.

(ت) چه عناصری در $\mathbf{N}$ دارای معکوسند و این عنصرها کدامند؟

حل. چون $x*y$ کوچکترین مضرب مشترک x و y است، داریم

$$4*6 = 12, \quad 3*5 = 15, \quad 9*18 = 18, \quad 1*6 = 6$$

(ب) در نظریهٔ اعداد ثابت می شود که $(a*b)*c = a*(b*c)$ ؛ یعنی، عمل .l.c.m شرکتپذیر است، و $a*b = b*a$ ؛ یعنی، عمل .l.c.m تعویضپذیر است. لذا، $(\mathbf{N}, *)$ یک نیمگروه تعویضپذیر می باشد.

(پ) عدد صحیح 1 عنصر همانی است زیرا .l.c.m عدد 1 و عدد صحیح مثبت a خود a است؛ یعنی، به ازای هر $a \in \mathbf{N}$ ، $1*a = a*1 = a$.

(ت) چون $\text{l.c.m.}(a,b) = 1$ اگر و فقط اگر $a = 1$ و $b = 1$ ، تنها عددی که دارای معکوس است 1 بوده و معکوسش خودش می باشد.

۹.۲. مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$ را در نظر گرفته و فرض کنید عمل $*$ بر $\mathbf{Q}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$a*b = a+b-ab$$

(آ) $3*4$ ، $2*(-5)$ ، و $7*\frac{1}{2}$ را بیابید.

(ب) آیا $(\mathbf{Q}, *)$ یک نیمگروه است؟ آیا تعویضپذیر است؟

(پ) عنصر همانی $*$ را بیابید.

(ت) آیا عناصری در $\mathbf{Q}$ دارای معکوسند؟ این عنصرها چیستند؟

حل. (آ)

$$3*4 = 3+4-3\cdot 4 = 3+4-12 = -5$$
$$2*(-5) = 2+(-5)-2\cdot(-5) = 2-5+10 = 7$$
$$7*\tfrac{1}{2} = 7+\tfrac{1}{2}-7(\tfrac{1}{2}) = 4$$

(ب) داریم

$$\begin{aligned}(a*b)*c &= (a+b-ab)*c \\ &= (a+b-ab)+c-(a+b-ab)c \\ &= a+b-ab+c-ac-bc+abc \\ &= a+b+c-ab-ac-bc+abc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a*(b*c) &= a*(b+c-bc) \\ &= a+(b+c-bc)-a(b+c-bc) \\ &= a+b+c-bc-ab-ac+abc\end{aligned}$$

لذا، * شرکتپذیر بوده و $(\mathbf{Q}, *)$ یک نیمگروه می باشد. همچنین،

$$a*b = a+b-ab = b+a-ba = b*a$$

لذا، $(\mathbf{Q}, *)$ یک نیمگروه تعویضپذیر می باشد.

(پ) عنصر e یک عنصر همانی است اگر به ازای هر $a \in \mathbf{Q}$ ، $a*e=a$. به صورت زیر حساب می کنیم:

$$a*e = a,\quad a+e-ae = a,\quad e-ea = 0,\quad e(1-a) = 0,\quad e = 0$$

بنابراین، 0 عنصر همانی می باشد.

(ت) برای آنکه a دارای معکوس x باشد باید داشته باشیم $a*x = 0$ زیرا 0 ، طبق قسمت (پ)، عنصر همانی است. به صورت زیر حساب می کنیم:

$$a*x = 0,\quad a+x-ax = 0,\quad a = ax-x,\quad a = x(a-1),\quad x = a/(a-1)$$

لذا، هرگاه $a \neq 1$ ، آنگاه a دارای معکوس $a/(a-1)$ می باشد.

۹. ۳. فرض کنید S یک نیمگروه با عنصر همانی e بوده و b و b' معکوسهای a باشند. نشان دهید که $b = b'$ ؛ یعنی، معکوسها در صورت وجود منحصر به فردند.

حل. داریم

$$(b*a)*b' = e*b' = b' \quad \text{و} \quad b*(a*b') = b*e = b$$

چون S شرکتپذیر است، $(b*a)*b' = b*(a*b')$ ؛ پس $b = b'$.

۹. ٤. آیا زیر مجموعه های زیر از اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ تحت عمل ضرب بسته‌اند یا نه:

(آ) $A = \{0,1\}$ (ب) $B = \{1,2\}$

(پ) $C = \{x : x \text{ اول است}\}$

(ت) $D = \{2,4,6,\ldots\} = \{x : x \text{ زوج است}\}$

(ث) $E = \{1,3,5,\ldots\} = \{x : x \text{ فرد است}\}$

(ج) $F = \{2,4,8,\ldots\} = \{x : x = 2^n, n \in \mathbf{N}\}$

حل. (آ) داریم

$$0 \cdot 0 = 0 \text{ ، } 0 \cdot 1 = 0 \text{ ، } 1 \cdot 0 = 0 \text{ ، و } 1 \cdot 1 = 1$$

لذا، A تحت عمل ضرب بسته است.

(بـ) چون $2 \cdot 2 = 4$ ، که متعلق به B نیست، مجموعهٔ B تحت عمل ضرب بسته نیست.

(پـ) توجه کنید که 2 و 3 اولند ولی $2 \cdot 3 = 6$ چنین نیست؛ لذا، C تحت عمل ضرب بسته نیست.

(تـ) حاصل ضرب اعداد زوج زوج است؛ پس D تحت عمل ضرب بسته می باشد.

(ثـ) حاصل ضرب اعداد فرد فرد است؛ پس E تحت عمل ضرب بسته می باشد.

(جـ) چون $2^r \cdot 2^s = 2^{r+s}$ ، F تحت عمل ضرب بسته می باشد.

۹ . ۵. آیا مجموعه های مسئلهٔ ۹ . ٤ تحت عمل جمع بسته اند یا نه.

حل. چون مجموع دو عدد صحیح زوج زوج است، مجموعهٔ D تحت عمل جمع بسته است. ولی هیچیک از مجموعه های دیگر تحت عمل جمع بسته نیست زیرا، مثلاً،

$$\begin{aligned} 1+1 &= 2 \notin A \qquad & 1+3 &= 4 \notin E \\ 1+2 &= 3 \notin B \qquad & 2+4 &= 6 \notin F \\ 3+5 &= 8 \notin C \end{aligned}$$

زبانها و دستور زبانها

۹ . ٦. فرض کنید دستور زبان G دارای فرآورده های زیر باشد:

(آ) $S \to aA,\ A \to aAB,\ B \to b,\ A \to a$

(بـ) $S \to aAB,\ AB \to bB,\ B \to b,\ A \to aB$

(پـ) $S \to aAB,\ AB \to c,\ A \to b,\ B \to AB$

(تـ) $S \to aB,\ B \to bA,\ B \to b,\ B \to a,\ A \to aB,\ A \to a$

G چه نوع دستور زبانی است؟

حل. (آ) چون هر فرآورده به شکل $A \to \alpha$ است، یعنی یک متغیر سمت چپ است، G فارغ از زمینه یا از نوع ۲ می باشد.

(بـ) هر فرآورده به شکل $\alpha A\beta \to \alpha\gamma\beta$ است؛ یعنی، متغیر A را می توان با γ عوض کرد مشروط بر اینکه A بین α و β قرار داشته باشد. مثلاً، در فرآوردهٔ دوم، می توان متغیر A را فقط وقتی با b عوض کرد که B بعد از A بیاید. لذا، G از نوع 1 می باشد.

(پـ) فرآوردهٔ $AB \to c$ یعنی G از نوع 0 می باشد.

(تـ) G یک دستور زبان منتظم یا از نوع ۳ است زیرا هر فرآورده به شکل $A \to a$ یا $A \to aB$ می باشد.

۹ . ۷. دستور زبان فارغ از زمینهٔ G با فرآورده های زیر را در نظر بگیرید:

$$S \to aAB,\ A \to Bba,\ B \to bB,\ B \to c$$

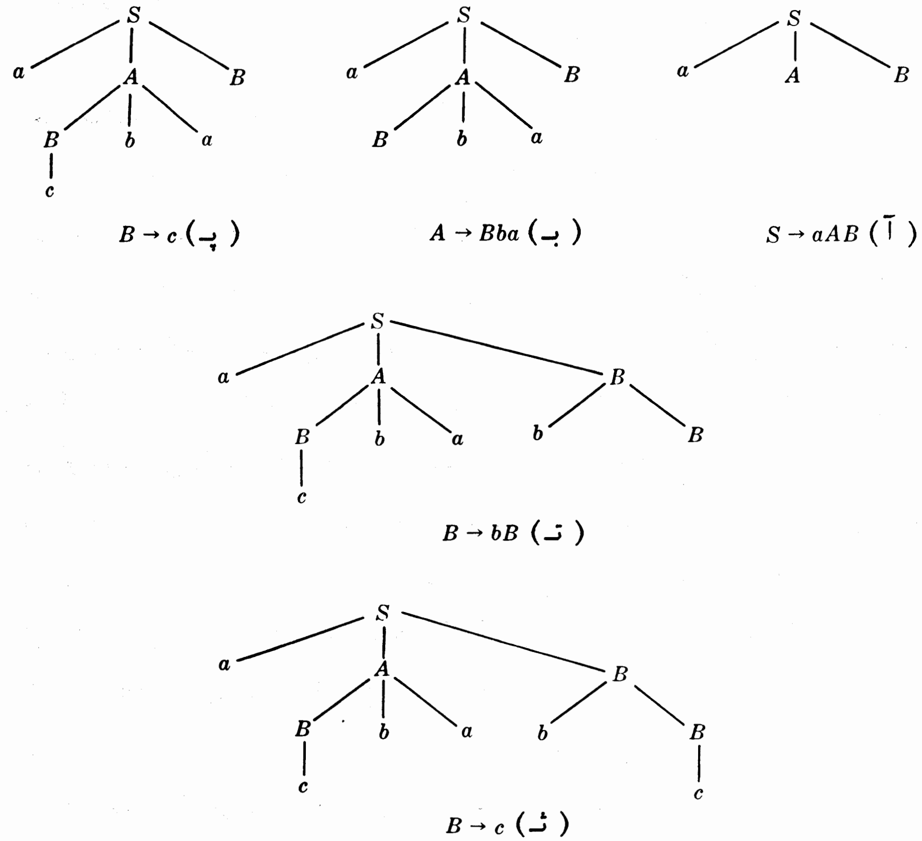
کلمهٔ $W = acbabc$ را می توان از S به صورت زیر به دست آورد:

$$S \Rightarrow aAB \Rightarrow a(Bba)B \Rightarrow acbaB \Rightarrow acba(bB) \Rightarrow acbabc$$

درخت *اشتقاق* T از W را رسم کنید.

حل. درخت اشتقاق T از W درخت ریشه دار مرتب شکل ۹ . ۲ (ثـ) است. توجه کنید که S ریشهٔ T است و برگهای مرتب T کلمهٔ W را تولید می کنند. همچنین، هر نابرگ T یک متغیر است (مثلاً A) و تالیهای بلافصل A یک کلمه مانند α را تشکیل می دهند که $A \to \alpha$ یک فرآوردهٔ G است که در اشتقاق W از S به کار رفته است. شکل ۹ . ۲ طرز ساختن T را نشان می دهد. (ملاحظه می کنیم که درختهای اشتقاق فقط برای دستور زبانهای نوع ۲ و ۳ مفید است.)

۹ . ۸. زبان $L(G)$ تولید شده به وسیلهٔ دستور زبان G با متغیرهای S, A, B ، پایانه های a, b ، و فرآورده های $S \to aB,\ B \to b,\ B \to bA,\ A \to aB$ را بیابید. نوع زبان $L(G)$ چیست؟



شکل ۹. ۲

حل. توجه کنید که فقط یکبار می توان از فرآوردهٔ اول استفاده کرد زیرا علامت شروع S جای دیگر ظاهر نشده است. همچنین یک کلمهٔ پایانه را تنها می توان مآلاً با استفاده از فرآوردهٔ دوم به دست آورد. در غیر این صورت، با استفاده از فرآورده های سوم و چهارم، متناوباً a ها و b ها را می افزاییم. به بیان دیگر،

$$L(G) = \{(ab)^n = ababab\ldots ab : n \in \mathbf{N}\}$$

$L(G)$ از نوع ۳، یعنی منتظم، است زیرا فرآورده ها در دستور زبانش به شکل $A \to a$ یا $A \to aB$ می باشند.

۹. ۹. فرض کنید L مجموعهٔ تمام کلمات از a و b بوده و تعداد a ها زوج باشد.

دستور زبان منتظم G را طوری بیابید که L را تولید نماید. (قس. مسئلهٔ ۷ . ۷)

حل. حکم می کنیم که دستور زبان G با فرآورده های زیر L را تولید می کنند:

$$S \to aA,\ S \to bB,\ B \to bB,\ B \to aA,\ A \to aB,\ A \to bA,\ A \to a,\ B \to b$$

توجه کنید که مجموع a ها و A ها در هر کلمه مانند α در اعمال یک فرآورده بر α یا ثابت مانده یا به اندازهٔ 2 افزایش می یابد. لذا، هر کلمه مانند W از پایانه های a و b که از S ناشی می شود باید شامل تعداد زوجی a باشد. به عبارت دیگر، $L(G) \subset L$. از آن سو، واضح است که برای چاپ کردن کلمهٔ V در L از چه فرآورده هایی باید استفاده کرد؛ یعنی، بسته به اینکه V با a یا b شروع شود از $S \to aA$ یا $S \to bB$ استفاده می کنیم، و اگر حرف بعدی یک a باشد از $A \to aB$ یا $B \to aA$ استفاده می کنیم، و اگر حرف بعدی b باشد از $A \to bA$ یا $B \to bB$ استفاده خواهیم کرد. برای آخرین حرف V از $A \to a$ یا $B \to b$ استفاده می نماییم. بنابراین، $L(G) = L$.

۹ . ۱۰ . دو زبان زیر بر حروف a و b را در نظر بگیرید:

$$L' = \{a^n b^n :\ n > 0\} \quad \text{و} \quad L = \{a^r b^s :\ r, s > 0\}$$

توجه کنید که هر دو زبان از کلماتی تشکیل شده اند که با a ها شروع شده و به b ها ختم می شوند ولی در L' تعداد a ها باید مساوی تعداد b ها باشد.

(آ) دستور زبان منتظم G را طوری بیابید که L را تولید نماید.

(ب) دستور زبان فارغ از زمینهٔ G' را طوری بیابید که L' را تولید نماید.

حل. واضح است که دستور زبان G با فرآورده های زیر L را تولید می کند:

$$S \to aA,\ A \to aA, A \to b,\ A \to bB,\ B \to bB,\ B \to b$$

توجه کنید که G یک دستور زبان منتظم می باشد.

(ب) واضح است که دستور زبان G' با فرآورده های زیر L' را تولید خواهد کرد:

$$S \to ab,\ S \to aSb$$

توجه کنید که G' یک دستور زبان فارغ از زمنیه است. تأکید می کنیم که L' یک زبان منتظم نیست؛ اثبات این امر از حوصلهٔ این کتاب خارج می باشد.

گروهها

۹. ۱۱. گروه متقارن S_3 مثال ۹. ٤ را در نظر بگیرید.

(آ) مرتبه و گروه تولید شده به وسیلهٔ هر عنصر S_3 را بیابید. (از جدول ضرب S_3 در مثال ۹. ٤ استفاده کنید.)

(بـ) تمام زیر گروههای S_3 و تعداد آنها را بیابید.

(پـ) به فرض آنکه $A = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ و $B = \{\phi_1, \phi_2\}$ ، AB ، $\sigma_3 A$ ، و $A\sigma_3$ را بیابید.

(تـ) به فرض آنکه $H = gp(\sigma_1)$ و $K = gp(\sigma_2)$ ، نشان دهید که HK زیر گروه G نیست. (قس. مسئلهٔ ۹. ۲۰.)

(ثـ) آیا S_3 دوری است؟

حل. (آ) $\epsilon^1 = \epsilon$ ؛ پس $|\epsilon| = 1$ و $gp(\epsilon) = \{\epsilon\}$. $\sigma_1^1 = \sigma_1,\ \sigma_1^2 = \epsilon$ ؛ پس $|\sigma_1| = 2$ و $gp(\sigma_1) = \{\sigma_1, \epsilon\}$. به همین نحو، $gp(\sigma_2) = \{\sigma_2, \epsilon\}$ و $|\sigma_2| = 2,$ ؛ و $gp(\sigma_3) = \{\sigma_3, \epsilon\}$ و $|\sigma_3| = 2,$. بنا بر مثال ۹. ٦ (پـ)، $|\phi_1| = 3$ و نیز داریم $gp(\phi_1) = \{\epsilon, \phi_1, \phi_2\}$. همچنین، $\phi_2^1 = \phi_2,\ \phi_2^2 = \phi_1,\ \phi_2^3 = \phi_1 \cdot \phi_2 = \epsilon$ ؛ پس $|\phi_2| = 3$ و $gp(\phi_2) = \{\epsilon, \phi_2, \phi_1\}$.

(بـ) پیش از همه، $H_1 = \{\epsilon\}$ و $H_2 = S_3$ زیر گروههایی از S_3 اند. هر زیر گروه دیگر S_3 باید از مرتبهٔ 2 یا 3 باشد زیرا مرتبه اش باید $|S_3| = 6$ را عاد نماید. چون 2 و 3 اعدادی اولند، این زیر گروهها باید دوری باشند (مسئلهٔ ۹. ۵۲)؛ و در نتیجه، باید در قسمت (آ) آمده باشند. لذا، سایر زیر گروههای S_3 عبارتند از

$$H_3 = \{\epsilon, \sigma_1\},\ H_4 = \{\epsilon, \sigma_2\},\ H_5 = \{\epsilon, \sigma_3\},\ H_6 = \{\epsilon, \phi_1, \phi_2\}$$

بنابراین، S_3 دارای شش زیر گروه خواهد بود.

(پـ) هر عنصر A را در هر عنصر B ضرب می کنیم:

$$\sigma_1\phi_1 = \sigma_2, \quad \sigma_1\phi_2 = \sigma_3, \quad \sigma_2\phi_1 = \sigma_3, \quad \sigma_2\phi_2 = \sigma_1$$

لذا، $AB = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

σ_3 را در هر عنصر A ضرب می کنیم:

$\sigma_3\sigma_1 = \phi_1, \quad \sigma_3\sigma_2 = \phi_2$ ؛ پس $\sigma_3 A = \{\phi_1, \phi_2\}$

هر عنصر A را در σ_3 ضرب می کنیم:

$\sigma_1\sigma_3 = \phi_2, \quad \sigma_2\sigma_3 = \phi_1$ ؛ پس $A\sigma_3 = \{\phi_1, \phi_2\}$

(تـ) $H = \{\epsilon, \sigma_1\}, \ K = \{\epsilon, \sigma_2\}$ و در این صورت $HK = \{\epsilon, \sigma_1, \sigma_2, \phi_1\}$ که زیر گروه S_3 نیست زیرا HK دارای چهار عنصر می باشد.

(ثـ) S_3 دوری نیست زیرا S_3 با هیچیک از عناصر خود تولید نشده است.

۹. ۱۲. گروه $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ تحت عمل ضرب به کالبد 7 را در نظر بگیرید.

(آ) جدول ضرب G را بیابید.

(بـ) $2^{-1}, \ 3^{-1}, \ 6^{-1}$ را بیابید.

(پـ) مرتبه ها و زیر گروههای تولید شده به وسیلهٔ 2 و 3 را پیدا کنید.

(تـ) آیا G دوری است؟

حل. (آ) برای یافتن $a*b$ در G ، باقیماندهٔ حاصل ضرب ab در تقسیم بر 7 را می یابیم. به عنوان مثال، $5\cdot 6 = 30$ که در تقسیم بر 7 باقیماندهٔ 2 می گذارد؛ پس در G داریم $5*6 = 2$. جدول ضرب G به قرار زیر است:

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

(ب) ابتدا توجه می کنیم که 1 عنصر همانی G است. به یاد آورید که a^{-1} عنصری از G است که $aa^{-1}=1$. لذا، $2^{-1}=4$ ، $3^{-1}=5$ ، و $6^{-1}=6$.

(پ) داریم $2^1=2,\ \ 2^2=4$ ولی $2^3=1$. پس $|2|=3$ و $gp(2)=\{1,2,4\}$.

داریم $3^1=3,\ 3^2=2,\ 3^3=6,\ 3^4=4,\ 3^5=5,\ 3^6=1$. پس $|3|=6$ و $gp(3)=G$.

(ت) G دوری است زیرا $G=gp(3)$.

۹ . ۱۳ . قضیهٔ ۹ . ۳ را ثابت کنید: فرض کنید H زیر گروه گروه G باشد. در این صورت، هم مجموعه های راست Ha یک افراز G را تشکیل می دهند.

حل. چون $e\in H$ ، $a=ea\in Ha$ ؛ پس هر عنصر متعلق به یک هم مجموعه است. در واقع، $a\in Ha$. حال فرض کنیم Ha و Hb از هم جدا نباشند. مثلاً $c\in Ha\cap Hb$. برهان در صورتی کامل است که تساوی $Ha=Hb$ را نشان دهیم.

چون c به هر دوی Ha و Hb متعلق است، داریم $c=h_1a$ و $c=h_2b$ که در آنها $h_1,h_2\in H$. در این صورت، $h_1a=h_2b$ ؛ و در نتیجه، $a=h_1^{-1}h_2b$. فرض کنیم $x\in Ha$. در این صورت،

$$x \ = \ h_3a \ = \ h_3h_1^{-1}h_2b$$

که درآن $h_3\in H$. چون H یک زیر گروه است، $h_3h_1^{-1}h_2\in H$ ؛ پس $x\in Hb$. و چون x عنصر دلخواهی از Ha بود، داریم $Ha\subset Hb$. به همین نحو، $Hb\subset Ha$. این دو شمول ایجاب می کنند که $Ha=Hb$ و قضیه ثابت می شود.

۹ . ۱٤ . فرض کنید H یک زیر گروه متناهی از G باشد. نشان دهید H و هر هم مجموعهٔ Ha تعداد عناصر یکسانی دارند.

حل. فرض کنیم $H=\{h_1,h_2,\ldots,h_k\}$ که در آن H داری k عنصر است. در این صورت، $Ha=\{h_1a,h_2a,\ldots,h_ka\}$. اما $h_ia=h_ja$ ایجاب می کند که $h_i=h_j$ ؛

پس k عنصر لیست شده در Ha متمایز می باشند. لذا، H و Ha تعداد عناصر یکسانی خواهند داشت.

۹. ۱۵. قضیهٔ ۹. ٤ (لاگرانژ) را ثابت کنید: فرض کنید H زیر گروه گروه G باشد؛ در این صورت، مرتبهٔ H مرتبهٔ G را عاد می کند.

برهان. فرض کنیم H دارای r عنصر بوده و s هم مجموعهٔ راست موجود باشد؛ مثلاً،

$$Ha_1,\ Ha_2,\ \ldots,\ Ha_s$$

بنا برقضیهٔ ۹. ۳، هم مجموعه ها G را افراز می کنند و، بنا بر مسئلهٔ ۹. ١٤، هر هم مجموعه دارای r عنصر است. لذا، G دارای rs عنصر بوده؛ و در نتیجه، مرتبهٔ H مرتبهٔ G را عاد خواهد کرد.

۹. ۱٦. فرض کنید $f: G \to G'$ یک همریختی گروهها باشد. ثابت کنید (آ) $f(e) = e'$ و (ب) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

حل. (آ) چون $e = ee$ و f همریختی است، داریم

$$f(e) = f(ee) = f(e)\,f(e)$$

با ضرب طرفین در $f(e)^{-1}$ به نتیجهٔ مطلوب دست خواهیم یافت.

(ب) با استفاده از قسمت (آ) و اینکه $aa^{-1} = a^{-1}a = e$، داریم

$$e' = f(e) = f(aa^{-1}) = f(a)\,f(a^{-1})$$

و

$$e' = f(e) = f(a^{-1}a) = f(a^{-1})\,f(a)$$

لذا، $f(a^{-1})$ معکوس $f(a)$ است؛ یعنی، $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

۹. ۱۷. قضیهٔ ۹. ٦ را ثابت کنید: فرض کنید $f: G \to G'$ یک همریختی با هستهٔ K باشد. در این صورت، K یک زیر گروه نرمال G بوده و گروه خارج

قسمتی G/K با نقش f یکریخت می باشد.

برهان نرمال بودن K. بنا بر مسئلهٔ ۹. ۱۶، $f(e) = e'$ ؛ پس $e \in K$. حال فرض کنیم $a, b \in K$ و $g \in G$. در این صورت، $f(a) = e'$ و $f(b) = e'$. لذا،

$$\begin{aligned} f(ab) &= f(a)\,f(b) = e'e' = e' \\ f(a^{-1}) &= f(a)^{-1} = e'^{-1} = e' \\ f(gag^{-1}) &= f(g)\,f(a)\,f(g^{-1}) = f(g)e'\,f(g)^{-1} = e' \end{aligned}$$

لذا، ab ، a^{-1} ، و gag^{-1} متعلق به K اند؛ پس K یک زیر گروه نرمال می باشد.

برهان $G/K \cong H$ که در آن H نقش f است. فرض کنیم $\phi: G/K \to H$ با

$$\phi(Ka) = f(a)$$

تعریف شده باشد. نشان می دهیم ϕ تعریف شده است؛ یعنی، هرگاه $Ka = Kb$ ، آنگاه $\phi(Ka) = \phi(Kb)$. فرض کنیم $Ka = Kb$. پس $ab^{-1} \in K$ (مسئلهٔ ۹. ۴۸).
در این صورت، $f(ab^{-1}) = e'$ ؛ و در نتیجه،

$$f(a)\,f(b)^{-1} = f(a)\,f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) = e'$$

لذا، $f(a) = f(b)$ ؛ و در نتیجه، $\phi(Ka) = \phi(Kb)$. بنابراین، ϕ تعریف شده است.
حال نشان می دهیم که ϕ یک همریختی است:

$$\phi(KaKb) = \phi(Kab) = f(ab) = f(a)\,f(b) = \phi(Ka)\,\phi(Kb)$$

لذا، ϕ یک همریختی می باشد. حال یک به یک بودن ϕ رانشان می دهیم. فرض کنیم $\phi(Ka) = \phi(Kb)$. در این صورت،

$$f(a) = f(b) \quad \text{یا} \quad f(a)\,f(b)^{-1} = e'$$

یا

$$f(a)\,f(b^{-1}) = e' \quad \text{یا} \quad f(ab^{-1}) = e'$$

لذا، $ab^{-1} \in K$ و، بنا بر مسئلهٔ ۹. ۴۸، داریم $Ka = Kb$. بنابراین، ϕ یک به یک می باشد. حال برو بودن ϕ را نشان می دهیم. فرض کنیم $h \in H$.
چون H نقش f است، عنصری مانند $a \in G$ چنان هست که $f(a) = h$.
لذا، $\phi(Ka) = f(a) = h$ ؛ و در نتیجه، ϕ برو می باشد. در نتیجه، $G/K \cong H$ و قضیه ثابت می شود.

۹. ۱۸. فرض کنید G یک گروه بوده و $g \in G$. تابع $\hat{g}: G \to G$ را با $\hat{g}(x) = gxg^{-1}$ تعریف کنید. نشان دهید که $\hat{g}$ یک یکریختی از G به روی G است؛ یعنی، نشان دهید: (آ) $\hat{g}$ یک همریختی است؛ (ب) $\hat{g}$ یک به یک است؛ (پ) $\hat{g}$ برو می باشد.

حل. (آ) داریم $\hat{g}(xy) = gxyg^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = \hat{g}(x)\,\hat{g}(y)$ پس g یک همریختی است.

(ب) فرض کنیم $\hat{g}(x) = \hat{g}(y)$. در این صورت، $gxg^{-1} = gyg^{-1}$. بنا بر حذف، $x = y$. لذا، $\hat{g}$ یک به یک می باشد.

(پ) فرض کنیم $z \in G$. در این صورت، $\hat{g}(g^{-1}zg) = gg^{-1}zgg^{-1} = z$. لذا، $\hat{g}$ برو می باشد.

۹. ۱۹. ثابت کنید هر زیر گروه گروه دوری G دوری است.

حل. چون G دوری است، عنصری مانند a در G هست به طوری که $G = gp(a)$. فرض کنیم H یک زیر گروه G باشد. هرگاه $H = \{e\}$ ، آنگاه $H = gp(e)$ و این گروه دوری است. در غیر این صورت، H شامل توان ناصفری از a می باشد. فرض کنیم m کوچکترین توانی از a باشد که a^m متعلق به H است. حکم می کنیم که $b = a^m$ گروه H را تولید می کند. فرض کنیم x عنصر دیگری از H باشد؛ چون x متعلق به G است، به ازای عدد صحیحی مانند n ، $x = a^n$. از تقسیم n بر m خارج قسمت q و باقیماندهٔ r به دست می آید؛ یعنی،

$$n = mq + r$$

که در آن $0 \leq r < m$. در این صورت،

$$a^n = a^{mq+r} = a^{mq} \cdot a^r = b^q \cdot a^r$$

در نتیجه، $a^r = b^{-q}a^n$. ولی $a^n, b \in H$. چون H یک زیر گروه است، $b^{-q}a^n \in H$ که به معنی $a^r \in H$ می باشد. ولی m کوچکترین توان

مثبت a متعلق به H بود. بنابراین، $r = 0$. در نتیجه، $a^n = b^q$. لذا، b گروه H را تولید می کند؛ و در نتیجه، H دوری می باشد.

۹. ۲۰. فرض کنید H یک زیر گروه بوده و K زیر گروه نرمالی از گروه G باشد. ثابت کنید HK یک زیر گروه G است.

حل. باید نشان دهیم $e \in HK$ و HK تحت ضرب و معکوسها بسته است. چون H و K زیر گروهند، $e \in H$ و $e \in K$. لذا، $e = e \cdot e$ متعلق به HK می باشد. فرض کنیم $x, y \in HK$. پس $x = h_1k_1$ و $y = h_2k_2$ که در آنها داریم $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$. در این صورت،

$$xy = h_1k_1h_2k_2 = h_1h_2(h_2^{-1}k_1h_2)k_2$$

چون K نرمال است، $h_2^{-1}k_1h_2 \in K$ ؛ و چون H و K زیر گروهند، $h_1h_2 \in H$ و همچنین $(h_2^{-1}k_2h_2)k_2 \in K$. لذا، $xy \in HK$؛ و در نتیجه، HK تحت ضرب بسته است. همچنین داریم

$$x^{-1} = (h_1k_1)^{-1} = k_1^{-1}h_1^{-1} = h_1^{-1}(h_1k_1^{-1}h_1^{-1})$$

چون K یک زیر گروه نرمال است، $h_1k_1^{-1}h_1^{-1}$ تعلق به K دارد. همچنین، h_1^{-1} متعلق به H است. لذا، $x^{-1} \in HK$ ؛ و در نتیجه، HK تحت معکوسها بسته می باشد. در نتیجه، HK یک زیر گروه خواهد بود.

حلقه ها، قلمروهای صحیح، میدانها

۹. ۲۱. حلقهٔ $\mathbf{Z}_{10} = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ از اعداد صحیح به کالبد ۱۰ را در نظر بگیرید.

(آ) یکه های $\mathbf{Z}_{10}$ را بیابید.

(بـ) -3 ، -8 ، و 3^{-1} را بیابید.

(پـ) به فرض آنکه $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$ ، ریشه های $f(x)$ روی $\mathbf{Z}_{10}$ را بیابید.

حل. (آ) بنا بر مسئلهٔ ۹. ۷۱، اعداد صحیحی که به کالبد $m = 10$ نسبت به هم

اولند یکه های $\mathbf{Z}_{10}$ می باشند. لذا، یکه ها عبارتند از 1 ، 3 ، 7 ، و 9 .

(ب) منظور از $-a$ در حلقهٔ R یعنی عنصری که $a+(-a)=(-a)+a=0$.
لذا، $-3=7$ زیرا در $\mathbf{Z}_{10}$ داریم $3+7=7+3=0$. به همین نحو، $-8=2$.
منظور از a^{-1} در حلقهٔ R یعنی عنصری که $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$.
لذا، $3^{-1}=7$ زیرا در $\mathbf{Z}_{10}$ داریم $3\cdot 7=7\cdot 3=1$.

(پ) هر یک از ده عنصر $\mathbf{Z}_{10}$ را در $f(x)$ می گذاریم تا ببینیم کدام عنصرها 0 به دست می دهند. داریم

$$f(0)=4,\quad f(2)=0,\quad f(4)=2,\quad f(6)=0,\quad f(8)=4$$
$$f(1)=0,\quad f(3)=4,\quad f(5)=4,\quad f(7)=0,\quad f(9)=2$$

لذا، ریشه ها عبارتند از 1 ، 2 ، 6 ، و 7 . (این مثال نشان می دهد که یک چند جمله ای از درجهٔ n روی یک حلقهٔ دلخواه می تواند بیش از n ریشه داشته باشد. این امر در یک میدان امکان پذیر نخواهد بود.)

۹ . ۲۲ . ثابت کنید در حلقهٔ R داریم:
(یک) $a\cdot 0=0\cdot a=0$ ؛ (دو) $a(-b)=(-a)b=-ab$ ؛ (سه) اگر R دارای عنصر همانی 1 باشد، $(-1)a=-a=a(-1)$.

حل. (یک) چون $0=0+0$ ، داریم

$$a\cdot 0 = a(0+0) = a\cdot 0+a\cdot 0$$

با افزودن $-(a\cdot 0)$ به طرفین خواهیم داشت $0=a\cdot 0$. به همین نحو، $0=0\cdot a$.

(دو) با استفاده از $b+(-b)=(-b)+b=0$ داریم

$$ab+a(-b) = a(b+(-b)) = a\cdot 0 = 0$$
$$a(-b)+ab = a((-b)+b) = a\cdot 0 = 0$$

لذا، $a(-b)$ قرینهٔ ab است؛ یعنی، $a(-b)=-ab$. به همین نحو، $(-a)b=-ab$.

(سه) داریم

$$a+(-1)a = 1\cdot a+(-1)a = (1+(-1))a = 0\cdot a = 0$$
$$(-1)a+a = (-1)a+1\cdot a = ((-1)+1)a = 0\cdot a = 0$$

لذا، $(-1)a$ قرینهٔ a است؛ یعنی، $(-1)a=-a$.

۹. ۲۳. در قلمرو صحیح D نشان دهید هرگاه $ab=ac$ که در آن $a\neq 0$ ، آنگاه $b=c$.

حل. چون $ab=ac$ ، داریم

$ab-ac = 0$ ؛ و در نتیجه، $a(b-c) = 0$.

چون $a\neq 0$ ، باید داشته باشیم $b-c=0$ زیرا D دارای مقسوم علیه صفر نیست. بنابراین، $b=c$.

۹. ۲٤. فرض کنید J و K ایده آلهایی در حلقهٔ R باشند. ثابت کنید $J\cap K$ یک ایده آل در R می باشد.

حل. چون J و K ایده آل اند، $0\in J$ و $0\in K$. لذا، $0\in J\cap K$. حال فرض کنیم $a,b\in J\cap K$ و $r\in R$. در این صورت، $a,b\in J$ و $a,b\in K$. چون J و K ایده آل اند،

$$a-b,\ ra,\ ar\in J \quad \text{و} \quad a-b,\ ra,\ ar\in K$$

لذا، $a-b,\ ra,\ ar\in J\cap K$. بنابراین، $J\cap K$ یک ایده آل می باشد.

۹. ۲۵. فرض کنید J یک ایده آل در حلقهٔ R با عنصر همانی 1 باشد. ثابت کنید:
(آ) هرگاه $1\in J$ ، آنگاه $J=R$ ؛ (ب) هرگاه یکه ای مانند $u\in J$ ، آنگاه $J=R$.

حل. (آ) هرگاه $1\in J$ ، آنگاه به ازای هر $r\in R$ داریم $r\cdot 1\in J$ یا $r\in J$. لذا، $J=R$.

(ب) هرگاه $u\in J$ ، آنگاه $u^{-1}\cdot u\in J$ یا $1\in J$ ، لذا، طبق قسمت

(آ)، $J = R$.

۹ . ۲۶. ثابت کنید: (آ) قلمرو صحیح متناهی D یک میدان است:
(ب) $\mathbf{Z}_p$ ، که در آن p یک عدد اول است، میدان می باشد؛
(پ) (فرما Fermat) هرگاه p اول باشد، آنگاه به ازای هر عدد صحیح a ،

$$a^p \equiv a \pmod p$$

حل. (آ) فرض کنیم D دارای n عنصر باشد؛ مثلاً، $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. همچنین a عنصر ناصفری از D باشد. n عنصر

$$aa_1,\ aa_2,\ \ldots,\ aa_n$$

را در نظر می گیریم. چون $a \neq 0$ ، رابطهٔ $aa_i = aa_j$ تساوی $a_i = a_j$ را ایجاب می کند (مسئلهٔ ۹ . ۲۳). لذا، n عنصر فوق از هم متمایزند؛ و در نتیجه، باید تجدید آرایشی از عناصر D باشند . یکی از آنها، مثلاً aa_k ، باید مساوی عنصر همانی 1 از D باشد؛ یعنی، $aa_k = 1$. لذا، a_k معکوس a می باشد. چون a عنصر ناصفر دلخواهی از D بود، D یک میدان می باشد.

(ب) به یاد آورید که $\mathbf{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. نشان می دهیم که $\mathbf{Z}_p$ مقسوم علیه صفر ندارد. چون در $\mathbf{Z}_p$ داریم $a * b = 0$ ، یعنی $ab \equiv 0 \pmod p$ ، پس p ، ab را عاد می کند. چون p اول است، p ، a را عاد می کند یا p ، b را عاد می نماید. لذا، $a \equiv 0 \pmod p$ یا $b \equiv 0 \pmod p$ ؛ یعنی، $a \equiv 0$ یا $b \equiv 0$ در $\mathbf{Z}_p$. بنابراین، $\mathbf{Z}_p$ مقسوم علیه صفر ندارد؛ و در نتیجه، یک قلمرو صحیح می باشد. بنا بر قسمت (آ)، $\mathbf{Z}_p$ یک میدان می باشد.

(پ) هرگاه p ، a را عاد کند، آنگاه $a \equiv 0 \pmod p$ ؛ و لذا، $a^p \equiv a \equiv 0 \pmod p$ فرض کنیم p عنصر a را عاد نکند؛ پس a را می توان یک عنصر ناصفر از $\mathbf{Z}_p$ در نظر گرفت. چون $\mathbf{Z}_p$ میدان است، عناصر ناصفرش یک گروه مانند G تحت ضرب از مرتبهٔ $p-1$ تشکیل می دهند. بنا بر مسئلهٔ ۹ . ۴۷ (جـ)، در $\mathbf{Z}_p$ داریم $a^{p-1} = 1$. به عبارت دیگر، $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. با ضرب

در a داریم $a^p \equiv a \pmod p$ و قضیه به اثبات می رسد.

مسائل تکمیلی

اعمال و نیمگروهها

۹. ۲۷. فرض کنید عمل $*$ بر اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$a * b = a + b + 2ab$$

(آ) $2 * 3$ ، $3 * (-5)$ ، و $7 * \frac{1}{2}$ را بیابید.

(بـ) آیا $(R, *)$ نیمگروه است؟ آیا تعویضپذیر است؟

(پـ) عنصر همانی را بیابید.

(تـ) چه عناصری دارای معکوسند و این عنصرها کدامند؟

۹. ۲۸. فرض کنید A یک مجموعهٔ ناتهی با عمل $*$ باشد که به صورت $a * b = a$ تعریف شده است. همچنین، A بیش از یک عنصر داشته باشد.

(آ) آیا A نیمگروه است؟

(بـ) آیا A تعویضپذیر است؟ (پـ) آیا A عنصر همانی دارد؟ (تـ) چه عناصری دارای معکوسند و این عنصرها کدامند؟

۹. ۲۹. به فرض آنکه $A = \{a, b\}$ ، تعداد اعمال بر A را یافته و عملی را که نه شرکتپذیر و نه تعویضپذیر است مشخص سازید.

۹. ۳۰. فرض کنید S مجموعهٔ $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ از جفتهای مرتب از اعداد گویا با عمل $*$ باشد که به صورت زیر تعریف شده است:

$$(a, b) * (x, y) = (ax, ay + b)$$

(آ) $(3, 4) * (1, 2)$ و $(-1, 3) * (5, 2)$ را بیابید.

(بـ) آیا S نیمگروه است؟ آیا تعویضپذیر است؟

(پـ) عنصر همانی S را بیابید.

(تـ) چه عناصری دارای معکوسند و این عنصرها کدامند؟

۹. ۳۱. فرض کنید $A = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$ ؛ یعنی، مجموعهٔ مضارب سه باشد. آیا A تحت (آ) جمع، (بـ) ضرب، (پـ) تفریق، (تـ) تقسیم (جز بر صفر)

بسته است؟

۹. ۳۲. مجموعهٔ A از سه عدد حقیقی بیابید که تحت (آ) ضرب، (بـ) جمع بسته باشد.

۹. ۳۳. فرض کنید S یک مجموعهٔ نامتناهی باشد. همچنین A گردایهٔ زیر مجموعه های متناهی S و B گردایهٔ زیر مجموعه های نامتناهی S باشد.

(آ) آیا A تحت (یک) اجتماع، (دو) اشتراک، (سه) متممها بسته است؟

(بـ) آیا B تحت (یک) اجتماع، (دو) اشتراک، (سه) متممها بسته است؟

۹. ۳٤. فرض کنید S یک مجموعه با عمل $*$ باشد. توجه کنید که حاصل ضرب $a*b*c$ سه عنصر را می توان به دو راه تعریف کرد: $(a*b)*c$ و $a*(b*c)$.

(آ) به چند طریق می توان حاصل ضرب $a*b*c*d$ چهار عنصر را تعریف کرد؟

(بـ) ثابت کنید هرگاه $*$ شرکتپذیر باشد، آنگاه حاصل ضرب n عنصر، یعنی $a_1*a_2*\cdots*a_n$ ، به ازای هر تجدید آرایش پرانتزی یکسان است.

زبانها و دستور زبانها

۹. ۳۵. کلمات $U=a^2ba^3b^2$ و $V=bab^2a$ بر $A=\{a,b\}$ را در نظر گرفته و UV ، VU ، و V^2 را پیدا نمایید.

۹. ۳۶. الفبای شمارشپذیر $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ را در نظر گرفته و فرض کنید B_k مجموعهٔ کلماتی بر A باشد که مجموع زیر نویسهای حروف هر یک مساوی k است. مثلاً، $W=a_2a_3a_3a_6a_4$ در B_{18} است زیرا $2+3+3+6+4=18$.

(آ) B_4 را بیابید. (بـ) ثابت کنید هر B_k متناهی است. (پـ) ثابت کنید مجموعهٔ $W(A)$ تمام کلمات بر A شمارشپذیر است. (تـ) ثابت کنید هر زبان بر A مانند L شمارشپذیر است.

۹. ۳۷. دستور زبان منتظم G را بیابید که زبان L مرکب از تمام کلمات از a و b با درست یک b ، یعنی

$$L = \{b, a^rb, ba^s, a^rba^s : r, s>0\}$$

را تولید نماید.

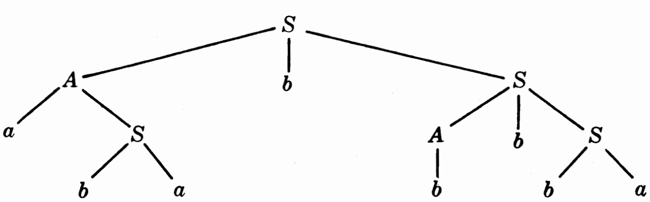
۹. ۳۸. دستور زبان منتظم G را بیابید که زبان L مرکب از تمام کلمات از a و b که در آنها هیچ دو a کنار هم نباشند را تولید نماید.

۹. ۳۹. دستور زبان منتظم G را بیابید که زبان L مرکب از تمام کلمات به شکل $a^r b^s c^t,\ r, s, t > 0$ ، یعنی پس از a ها b ها و سپس c ها می آیند، را تولید نماید.

۹. ۴۰. دستور زبان فارغ از زمینهٔ G را بیابید که زبان L مرکب از تمام کلمات از a و b که تعداد a ها دوبرابر b ها باشد را تولید نماید.

۹. ۴۱. دستور زبان فارغ از زمینهٔ G با فرآورده های $S \to (a, aAS)$ و $A \to bS$ را در نظر گرفته و درخت اشتقاق کلمهٔ $W = abaabaa$ را بیابید.

۹. ۴۲. دستور زبان فارغ از زمینهٔ G را در نظر گرفته و فرض کنید شکل ۹. ۳ درخت اشتقاق کلمهٔ W را به دست دهد.



شکل ۹. ۳

(آ) W را بیابید. (بـ) چه پایانه ها، متغیرها، و فرآورده ها باید در G باشند؟

گروهها

۹. ۴۳. $\mathbf{Z}_{20} = \{0, 1, \ldots, 19\}$ را تحت جمع به کالبد 20 در نظر گرفته و فرض کنید H گروه تولید شده به وسیلهٔ 5 باشد. (آ) عنصرها و مرتبهٔ H را بیابید. (بـ) هم مجموعه های H در $\mathbf{Z}_{20}$ را بیابید.

۹. ۴۴. $G = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$ را تحت ضرب به کالبد 18 در نظر بگیرید.

(آ) جدول ضرب G را در نظر بگیرید.

(بـ) 5^{-1} ، 7^{-1} ، و 17^{-1} را بیابید.

(پـ) مرتبه و گروه تولید شده به وسیلهٔ (یک) 5 ، (دو) 13 را بیابید.

(تـ) آیا G دوری است؟

۹. ٤٥. $G = \{1, 5, 7, 11\}$ را تحت ضرب به کالبد 12 در نظر بگیرید. (آ) مرتبهٔ هر عنصر را بیابید. (بـ) آیا G دوری است؟ (پـ) جمیع زیر گروهها را بیابید.

۹. ٤٦. گروه متقارن S_4 را در نظر بگیرید. (ر. ک. مثال ۹. ٤.) به فرض آنکه

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(آ) $\alpha\beta$ ، $\beta\alpha$ ، α^2 ، و α^{-1} را بیابید؛

(بـ) مرتبهٔ α ، β ، و $\alpha\beta$ را پیدا نمایید.

۹. ٤٧. احکام زیر را در مورد گروه G ثابت کنید.

(آ) عنصر همانی e منحصر به فرد است.

(بـ) هر a در G دارای معکوس منحصر به فرد a^{-1} است.

(پـ) $(a^{-1})^{-1} = a$ ، $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ و، به طور کلی،

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{-1} = a_k^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1}$$

(تـ) رابطهٔ $ab = ac$ تساوی $b = c$ و رابطهٔ $ba = ca$ تساوی $b = c$ را ایجاب می کند.

(ثـ) به ازای هر دو عد دصحیح r و s داریم $a^ra^s = a^{r+s}$ و $(a^r)^s = a^{rs}$.

(جـ) هر گاه G متناهی باشد، $a^{|G|} = e$.

(چـ) G آبلی است اگر و فقط اگر به ازای هر $a, b \in G$ ، $(ab)^2 = a^2b^2$.

۹. ٤٨. فرض کنید H زیر گروه G باشد. ثابت کنید

(آ) $H = Ha$ اگر و فقط اگر $a \in H$ ؛ (بـ) $Ha = Hb$ اگر و فقط اگر $ab^{-1} \in H$.

۹. ٤٩. فرض کنید H زیر مجموعه ای از گروه G باشد. نشان دهید H یک زیر گروه است اگر (آ) $e \in H$ ؛ (بـ) به ازای هر $a, b \in H$ داشته باشیم $ab, a^{-1} \in H$.

۹. ٥٠. ثابت کنید اشتراک هر تعداد زیر گروه (زیر گروه نرمال) G یک زیر گروه (زیر گروه نرمال) G است.

۹. ٥١. فرض کنید G یک گروه آبلی باشد. نشان دهید هرگروه عاملی G/H نیز

آبلی است.

۹. ۵۲. فرض کنید $|G| = p$ که در آن p عددی اول است. ثابت کنید: (آ) G زیر گروهی جز G و $\{e\}$ ندارد؛ (بـ) G دوری است و هر عنصر $a \neq e$ گروه G را تولید می کند.

۹. ۵۳. فرض کنید G زیرگروهی جز G و $\{e\}$ نداشته باشد. نشان دهید G دوری با مرتبهٔ اول است.

۹. ۵٤. نشان دهید $G = \{1, -1, i, -i\}$ یک گروه تحت ضرب است ونیز، با ارائهٔ یک یکریختی مانند $f: G \to \mathbf{Z}_4$ ، $G \cong \mathbf{Z}_4$.

۹. ۵۵. فرض کنید H یک زیر گروه G با فقط دو هم مجموعهٔ راست باشد. ثابت کنید H نرمال است.

۹. ۵٦. فرض کنید G یک گروه آبلی و n عدد صحیح ثابتی باشد. نشان دهید تابع $f: G \to G$ با تعریف $f(a) = a^n$ یک همریختی است.

۹. ۵۷. فرض کنید G گروه ضربی اعداد مختلط z با خاصیت $|z| = 1$ بوده و $\mathbf{R}$ گروه جمعی اعداد حقیقی باشد. ثابت کنید $G \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

۹. ۵۸. فرض کنید H و K گروه بوده و G مجموعهٔ حاصل ضربی $H \times K$ با عمل زیر باشد:

$$(h, k) * (h', k') = (hh', kk')$$

(آ) نشان دهید G یک گروه (به نام حاصل ضرب مستقیم H و K) است.

(بـ) به فرض آنکه $H' = H \times \{e\}$ ، نشان دهید که (یک) $H' \cong H$ ؛ (دو) H' زیر گروه نرمال G است؛ (سه) $G/H' \cong K$.

۹. ۵۹. نشان دهید فقط دو گروه نایکریخت از مرتبهٔ 4 وجود دارند که عبارتند از $\mathbf{Z}_4$ و $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

۹. ٦۰. فرض کنید H و N زیر گروه G بوده و N نرمال باشد. ثابت کنید $H \cap N$ در H نرمال است و $H/(H \cap N) \cong HN/N$.

حلقه ها

۹. ۶۱. حلقهٔ $\mathbf{Z}_{12} = \{0, 1, \ldots, 11\}$ از اعداد صحیح به کالبد 12 را در نظر بگیرید.

(آ) یکه های $\mathbf{Z}_{12}$ را بیابید.

(ب) ریشه های $f(x) = x^2 + 4x + 4$ روی $\mathbf{Z}_{12}$ را بیابید.

(پ) شریکهای 2 را بیابید.

۹. ۶۲. حلقهٔ $\mathbf{Z}_{30} = \{0, 1, \ldots, 29\}$ از اعداد صحیح به کالبد 30 را در نظر بگیرید.

(آ) -2 ، -7 ، و -11 را بیابید. (ب) 7^{-1} ، 11^{-1} ، و 26^{-1} را بیابید.

۹. ۶۳. نشان دهیددر حلقهٔ R :

(آ) $(-a)(-b) = ab$ ؛ (ب) اگر R دارای عنصر همانی 1 باشد، $(-1)(-1) = 1$.

۹. ۶۴. فرض کنید به ازای هر $a \in R$ ، $a^2 = a$. (چنین حلقه را یک حلقهٔ بول می نامند) ثابت کنید R تعویضپذیر است.

۹. ۶۵. فرض کنید R یک حلقه با عنصر همانی باشد. R را با تعریف

$$a \oplus b = a + b + 1 \quad \text{و} \quad a \cdot b = ab + a + b$$

به حلقهٔ دیگری چون R' بدل می کنیم. (آ) تحقیق کنید که R' یک حلقه است. (ب) عنصر 0 و عنصر 1 حلقهٔ R' را تعیین نمایید.

۹. ۶۶. فرض کنید G یک گروه آبلی (جمعی) باشد. ضرب در G را به ازای هر $a, b \in G$ با $a \cdot b = 0$ تعریف کرده و نشان دهید این عمل G را به یک حلقه تبدیل می کند.

۹. ۶۷. فرض کنید J و K ایده آلهایی در حلقهٔ R باشند. ثابت کنید $J + K$ و $J \cap K$ نیز ایده آل اند.

۹. ۶۸. فرض کنید R یک حلقه با عنصر همانی باشد. نشان دهید $(a) = \{ra : r \in R\}$ کوچکترین ایده آل شامل a است.

۹. ۶۹. نشان دهید R و $\{0\}$ ایده آلهای هر حلقهٔ R می باشند.

۹. ۷۰. نشان دهید چرا هر ایده آل ناصفر J از $\mathbf{Z}$ به شکل (m) است که در آن m کوچکترین عدد صحیح مثبت در J می باشد.

۹. ۷۱. ثابت کنید: (آ) یکه های حلقهٔ R تحت ضرب یک گروه تشکیل می دهند؛

(بـ) یکه های $\mathbf{Z}_m$ آن اعداد صحیح اند که نسبت به m اول می باشند.

۹. ۷۲. قضیهٔ ۹. ۷ را ثابت کنید: فرض کنید J یک ایده آل در حلقهٔ R باشد. در این صورت، هم مجموعه های $\{a+J : a\in R\}$ تحت اعمال هم مجموعه ای

$$(a+J)+(b+J) = a+b+J \quad \text{و} \quad (a+J)(b+J) = ab+J$$

یک حلقه تشکیل می دهند.

۹. ۷۳. فرض کنید R و R' دو حلقه باشند. نگاشت $f: R\to R'$ یک همریختی (یا همریختی حلقه ها) نام دارد اگر به ازای هر $a, b\in R$ ،

(یک) $f(a+b) = f(a)+f(b)$ و (دو) $f(ab) = f(a)f(b)$.

ثابت کنید هرگاه $f: R\to R'$ یک همریختی باشد، آنگاه مجموعهٔ $K = \{r\in R : f(r)=0\}$ یک ایده آل در R است. (مجموعهٔ K هستهٔ f نام دارد.)

۹. ۷٤. تحقیق کنید که $m\mathbf{Z} = \{rm : r\in \mathbf{Z}\}$ به ازای هر عدد صحیح مثبت m یک حلقه است. ثابت کنید $2\mathbf{Z}$ و $3\mathbf{Z}$ یکریخت نیستند. (حلقه های R و R' یکریخت اند اگر یک همریختی مانند $f: R\to R'$ که یک به یک و بروست موجود باشد.)

قلمروهای صحیح و میدانها

۹. ۷۵. ثابت کنید هرگاه در قلمرو صحیح D داشته باشیم $x^2 = 1$ ، آنگاه $x = 0$ یا $x = 1$.

۹. ۷٦. فرض کنید R یک حلقهٔ تعویضپذیر متناهی بدون مقسوم علیه صفر باشد. نشان دهید R یک قلمرو صحیح است؛ یعنی، R دارای عنصر همانی 1 می باشد.

۹. ۷۷. ثابت کنید $F = \{a+b\sqrt{2} : \text{گویا } a, b\}$ یک میدان است.

۹. ۷۸. ثابت کنید $D = \{a+b\sqrt{2} : \text{صحیح } a, b\}$ یک قلمرو صحیح است ولی یک میدان نیست.

۹. ۷۹. عدد مختلط $a+bi$ که در آن a, b صحیح اند یک عدد صحیح گاوسی نام دارد. نشان دهید که مجموعهٔ اعداد صحیح گاوسی G یک قلمرو صحیح است. همچنین نشان دهید که یکه ها عبارتند از ± 1 و $\pm i$.

۹. ۸۰. فرض کنید D یک قلمرو صحیح و I ایده الی در D باشد. ثابت کنید حلقهٔ

عاملی D/I یک قلمرو صحیح است اگر وفقط اگر I یک ایده آل اول باشد. (ایده آل I اول است اگر $ab \in I$ تعلق $a \in I$ یا $b \in I$ را ایجاب کند.)

۹. ۸۱. قلمرو صحیح $D = \{a + b\sqrt{13} :$ صحیح $a, b\}$ [ر.ک. مثال ۹. ۹ (بـ)] را در نظر بگیرید. اگر $\alpha = a + b\sqrt{13}$ ، تعریف می کنیم $N(\alpha) = a^2 - 13b^2$. ثابت کنید: (یک) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)\,N(\beta)$ ؛ (دو) α یکه است اگر و فقط اگر $N(\alpha) = \pm 1$ ؛ (سه) یکه های D عبارتند از ± 1 ، $18 \pm 5\sqrt{13}$ ، و $-18 \pm 5\sqrt{13}$ ؛ (چهار) اعداد 2 ، $3 - \sqrt{13}$ ، و $-3 - \sqrt{13}$ تحویل ناپذیرند.

مسائل برنامه‌نویسی کامپیوتر

عمل * بر مجموعهٔ $S = \{a, b, c, d\}$ با یک ماتریس 4×4 که عناصرش در S اند داده شده است.

۹. ۸۲. یک برنامه بنویسید که عنصر همانی * را در صورت وجود چاپ کند.

۹. ۸۳. یک برنامه بنویسید که تعویضپذیر بودن یا نبودن * را معین سازد. در صورت نبودن، برنامه باید یک جفت عنصر مانند x, y که $xy \neq yx$ راچاپ نماید.

۹. ۸۴. یک برنامه بنویسید که شرکتپذیر بودن یا نبودن * را معین سازد. در صورت نبودن، برنامه باید یک سه تایی مانند x, y, z که $(xy)z \neq x(yz)$ را چاپ نماید.

سه برنامهٔ فوق را با داده های زیر امتحان نمایید:

(یک) $\begin{pmatrix} d & a & b & c \\ a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$ (دو) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ (سه) $\begin{pmatrix} a & a & b & b \\ a & a & b & b \\ c & c & d & d \\ c & c & d & d \end{pmatrix}$

۹. ۸۵. یک برنامه بنویسید که بسته بودن یا نبودن یک زیر مجموعهٔ

$$\mathbf{Z}_{24} = \{0, 1, 2, \ldots, 23\}$$

تحت ضرب به کالبد 24 را معین سازد. برنامه را با داده های ورودی زیر امتحان کنید:

(یک) $0, 6, 18, 1, 12$ (دو) $0, 2, 4, 8, 16$

(سه) $1, 5, 7, 11$ (چهار) $0, 1, 17, 23, 5$

(پنج) $1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ (شش) $1, 3, 9, 7, 15$

جواب مسائل تکمیلی

۹.۲۷. (آ) $17, -32, 29/2$ ؛ (ب) بلی، بلی؛ (پ) صفر؛ (ت) هرگاه $a \neq \frac{1}{2}$ ، آنگاه a دارای معکوس $-a/(1+2a)$ می باشد.

۹.۲۸. (آ) بلی؛ (ب) خیر؛ (پ) خیر؛ (ت) وقتی عنصر همانی موجود نباشد، صحبت راجع به معکوس بی معنی است.

۹.۲۹. شانزده تا، زیرا به ازای هر یک از چهار حاصل ضرب aa ، ab ، ba ، و bb دو انتخاب (a یا b) وجود دارد. در جدول زیر، $ab \neq ba$. همچنین، $(aa)b = bb = a$

*	a	b
a	b	a
b	b	a

ولی $a(ab) = aa = b$.

۹.۳۰. (آ) $(3, 10), (-5, 1)$ ؛ (ب) بلی، خیر؛ (پ) $(1, 0)$ ؛ (ت) اگر $a \neq 0$ ، عنصر (a, b) دارای معکوس $(1/a, -b/a)$ است.

۹.۳۱. (آ) بلی؛ (ب) بلی؛ (پ) بلی؛ (ت) خیر.

۹.۳۲. (آ) $\{1, -1, 0\}$ ؛ (ب) مجموعه ای وجود ندارد.

۹.۳۳. (آ) بلی، بلی، خیر؛ (ب) بلی، خیر، خیر.

۹.۳۴. (آ) پنج تا: $(ab)(cd)$ ، $a((bc)d)$ ، $a(b(cd))$ ، $((ab)c)d$ ، و $(a(bc))d$.

۹.۳۵. $UV = a^2ba^3b^3ab^2a,\ VU = bab^2a^3ba^3b^2,\ V^2 = bab^2abab^2a$

۹.۳۶. (آ) $a_1^4, a_1^2a_2, a_1a_2a_1, a_2a_1^2, a_1a_3, a_3a_1, a_2^2, a_4$

(ب) هیچ کلمه ای در B_k نمی تواند بیش از k حرف داشته باشد و هیچ زیر نویسی نمی تواند از k بزرگتر باشد؛ پس B_k متناهی است.

(پ) $W(A) = \cup_k B_k$ و B_k ها متناهی اند.

(ت) L یک زیر مجموعهٔ مجموعهٔ شمارشپذیر $W(A)$ است.

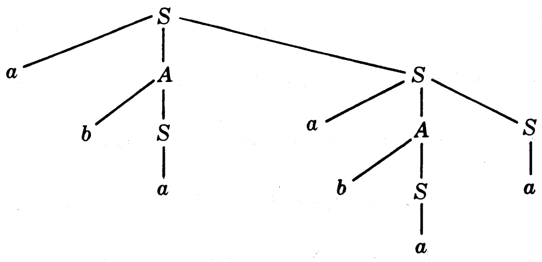
۹.۳۷. $S \to (b, aA),\ A \to (b, aA, bB),\ B \to (a, aB)$

۹.۳۸. $S \to (a, b, aB, bA),\ A \to (bA, ab, a, b),\ B \to (b, bA)$

۹.۳۹. $S \to aA,\ \ A \to (aA, bB),\ \ B \to (bB, c, cC),\ \ C \to (c, cC)$

۹.۴۰. $S \to (AAB, ABA, BAA),\ \ A \to (a, BAAA, ABAA, AABA, AAAB),$
$B \to (b, BBAA, BABA, BAAB, ABAB, AABB)$

۹.۴۱. ر.ک. شکل ۹.۴.



شکل ۹.۴

۹.۴۲. (آ) $ababbbba$؛ (ب) a, b باید پایانه ها، A, S باید متغیر ها، و $S \to (AbS, ba),\ A \to (aS, b)$ باید فرآورده ها باشند.

۹.۴۳. (آ) $H = \{0, 5, 10, 15\}$ و $|H| = 4$.

(ب) $H,\ \ 1 + H = \{1, 6, 11, 16\},\ \ 2 + H = \{2, 7, 12, 17\},\ \ 3 + H = \{3, 8, 13, 18\},$

$4 + H = \{4, 9, 14, 19\}$

۹.۴۴. (آ) ر. ک. جدول زیر.

(ب) $5^{-1} = 11,\ \ 7^{-1} = 13,\ \ 17^{-1} = 17$

(پ) (یک) $gp(5) = G,\ \ |5| = 6$؛ (دو) $gp(13) = \{1, 7, 13\},\ \ |13| = 3$

(ت) بلی، زیرا $G = gp(5)$.

1	5	7	11	13	17
5	7	17	1	11	13
7	17	13	5	1	11
11	1	5	13	17	7
13	11	1	17	7	5
17	13	11	7	5	1

۹.۴۵. $|1| = 1,\ |5| = 2,\ |7| = 2,\ |11| = 2$ (ب) خیر؛ (پ) $G, \{1\}, \{1,7\}, \{1,5\}, \{1,11\}$

۹.۴۶. (آ) $\alpha\beta = 3142,\ \beta\alpha = 4123,\ \alpha^2 = 2143,\ \alpha^{-1} = 4312$ ،

(ب) $|\alpha| = 4,\ |\beta| = 3,\ |\alpha\beta| = 4$.

۹.۵۴. $f(1) = 0,\ f(i) = 1,\ f(-1) = 2,\ f(-i) = 3$.

۹.۶۱. (آ) $1, 5, 7, 11$؛ (ب) $4, 10$ (پ) $\{2, 10\}$.

۹.۶۲. (آ) $-2 = 28,\ -7 = 23,\ -11 = 19$؛ (ب) $7^{-1} = 13$ ، $11^{-1} = 11$ ، 26^{-1} وجود ندارد زیرا 26 یکه نیست.

۹.۶۴. با استفاده از $a + a = (a + a)^2$ نشان دهید که $-a = a$.

سپس به وسیلهٔ $a + b = (a + b)^2$ نشان دهید که $ab = -ba$.

۹.۶۵. (ب) -1 عنصر 0 است و 0 عنصر 1 می باشد.

۱۰
مجموعه های جم و شبکه ها

۱.۱۰ مجموعه های جزئی مرتب

رابطهٔ R بر مجموعهٔ S یک ترتیب جزئی بر S است اگر

(۱) منعکس باشد؛ یعنی، به ازای هر a در S ، aRa ؛

(۲) پادمتقارن باشد؛ یعنی، هرگاه aRb و bRa ، آنگاه $a=b$ ؛ و

(۳) متعدی باشد؛ یعنی، هرگاه aRb و bRc ، آنگاه aRc .

مجموعهٔ S همراه با یک ترتیب جزئی بر S یک مجموعهٔ جزئی مرتب یا مجموعهٔ حجم نام دارد.

مثال ۱.۱۰

(آ) فرض کنیم $\mathcal{C}$ رده ای از مجموعه ها باشد. شمول مجموعه ها، یعنی $\subset$ ، یک ترتیب جزئی بر $\mathcal{C}$ است. زیــرا به ازای هر مجموعه در $\mathcal{C}$ ، $A\subset A$ ؛ هرگاه $A\subset B$ و $B\subset A$ ، آنگاه $A=B$ ؛ و هرگاه $A\subset B$ و $B\subset C$ ، آنگاه $A\subset C$.

(بـ) مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ را در نظر می گیریم. گوییم « ، b را عاد می کند» ، و می نویسیم $a\,|\,b$ ، اگر عدد صحیحی مانند c چنان باشد که $ac=b$. به عنوان مثال، $2\,|\,4, 3\,|\,12, 7\,|\,21$ ، و غیره. این رابطهٔ بخشپذیری یک ترتیب جزئی بر $\mathbf{N}$ است.

(پـ) رابطهٔ $\leqslant$ نیز بر مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ یک ترتیب جزئی است. (در واقع، $\leqslant$ بر هر زیر مجموعهٔ اعداد حقیقی یک ترتیب جزئی است.) این رابطه را

گاهی ترتیب معمولی بر N می نامند.

ما معمولاً یک رابطهٔ ترتیب جزئی را با $\precsim$ نشان می دهیم، و

$$a \precsim b$$

را می خوانیم: « a قبل از b است». در این نمادگذاری از نمادهای دیگر زیر نیز استفاده می کنیم:

$a \prec b$ یعنی $a \precsim b$ و $a \neq b$ و می خوانیم: « a اکیداً قبل از b است»؛

$b \succsim a$ یعنی $a \precsim b$ و می خوانیم: « b بعد از a است»؛

$b \succ a$ یعنی $a \prec b$ و می خوانیم: « b اکیداً بعد از a است».

معانی $\not\precsim$ ، $\not\prec$ ، $\not\succsim$ ،و $\not\succ$ خودبخود واضح خواهند بود.

وقتی ابهامی در کار نباشد، از علایم $\leqslant$ ، $<$ ، $>$ ،و $\geqslant$ به جای $\precsim$ ، $\prec$ ، $\succ$ ، و $\succsim$ استفاده می کنیم. همچنین توجه می کنیم که اگر $\precsim$ یک ترتیب جزئی بر مجموعهٔ S باشد، رابطهٔ معکوس $\succsim$ است و این نیز یک ترتیب جزئی بر S به نام ترتیب معکوس می باشد.

دو عنصر a و b در یک مجموعهٔ جم را قیاسپذیر گوییم اگر

$$a \precsim b \quad \text{یا} \quad b \precsim a$$

یعنی اگر یکی قبل از دیگری باشد؛ در غیر این صورت، گوییم a و b قیاس ناپذیر می باشند. مثلاً، اعداد صحیح 3 و 5 در مثال ۱۰.۱ (ب) قیاس ناپذیرند زیرا هیچیک بر دیگری بخشپذیر نیست.

واژهٔ « جزئی» از آنرو در تعریف مجموعهٔ جزئی مرتب A به کار رفته است که بعضی از عناصر A لزوماً قیاسپذیر نیستند. از آن سو، اگر هر جفت از عناصر مجموعهٔ جم A قیاسپذیر باشند، گوییم A کلی مرتب یا خطی مرتب است و A یک زنجیر می باشد. به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت N با ترتیب جزئی $\leqslant$ یک مجموعهٔ خطی مرتب می باشد.

هرگاه S و T دو مجموعهٔ کلی مرتب باشند، آنگاه مجموعهٔ حاصل ضربی $S \times T$ را می توان به قرار زیر کلی مرتب کرد:

$(a,b) \prec (a',b')$ اگر $a \prec a'$ یا اگر $a = a'$ و $b \prec b'$.

این ترتیب را ترتیب قاموسی بر $S \times T$ نامیم زیرا شبیه ترتیب کلمات در یک فرهنگ (قاموس) می باشد.

هر زیر مجموعهٔ A از مجموعهٔ جم S به وسیلهٔ رابطهٔ بر S جزئی مرتب است؛ یعنی، به ازای هر a, b در A ، اگر به عنوان عناصری از S داشته باشیم $a \preccurlyeq b$ ، به عنوان عناصری از A قرار می دهیم $a \preccurlyeq b$. توجه کنید که زیر مجموعه های S ممکن است خطی مرتب باشند ولی S نباشد. به عنوان مثال، $\{2, 4, 16, 64\}$ یک زیر مجموعهٔ خطی مرتب از مجموعهٔ غیر خطی مرتب $\mathbf{N}$ از اعداد صحیح مثبت به وسیلهٔ بخشپذیری است.

۱۰ . ۲ نمودار یک مجموعهٔ جم

فرض کنیم S یک مجموعهٔ جزئی مرتب باشد. گوییم a در S سابق بلافصل b در S است یا b تالی بلافصل a است، و می نویسیم

$$a \ll b$$

اگر $a < b$ ولی هیچ عنصری از S بین a و b نباشد؛ یعنی، x ی در S با خاصیت $a < x < b$ موجود نباشد.

فرض کنیم S یک مجموعهٔ جم متناهی باشد. در این صورت، اگر جمیع جفتهای a, b در S که $a \ll b$ را بدانیم، رابطهٔ $\ll$ بر S کاملاً معلوم خواهد بود. این امر از آنجا ناشی می شود که $x < y$ اگر و فقط اگر عنصرهایی مانند $x = a_0, a_1, \ldots, a_m = y$ باشند به طوری که به ازای $i = 1, \ldots, m$ ، $a_{i-1} \ll a_i$

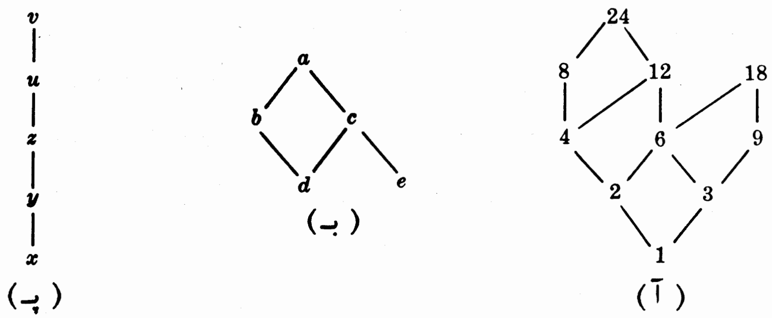
منظور از نمودار مجموعهٔ جم متناهی S یعنی گراف جهتداری که رئوسش عناصر S بوده و در آن اگر در S داشته باشیم $a \ll b$ ، یک قوس از a به b موجود است. (گاهی به جای رسم یک سهم از a به b ، b را در نمودار بالاتر از a قرار داده و یک خط از a به b که تمایل به بالا دارد می کشیم.) در نمودار S یک مسیر (جهتدار) از رأس x به رأس y وجود دارد اگر و فقط اگر $x < y$. همچنین در نمودار S دور وجود ندارد زیرا رابطهٔ ترتیبی پادمتقارن می باشد.

مثال ۱۰ . ۲

(آ) فرض کنیم $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$ با رابطهٔ « x ، y را عاد می کند» مرتب شده باشد. در شکل ۱۰ . ۱ (آ) نمودار A داده شده است. (جهت یک خط در نمودار یک مجموعهٔ جم، برخلاف درختهای ریشه دار، همواره به بالا می باشد.)

(بـ) فرض کنیم $B = \{a, b, c, d, e\}$. نمودار شکل ۱۰ . ۱ (بـ) یک ترتیب جزئی بر B به طور طبیعی تعریف می کند. یعنی، $e \preceq c$ ، $d \preceq a$, $d \preceq b$, و غیره.

(پـ) نمودار یک مجموعهٔ خطی مرتب متناهی، یعنی یک زنجیر متناهی، فقط از یک مسیر تشکیل شده است. به عنوان مثال، شکل ۱۰ . ۱ (پـ) نمودار یک زنجیر با پنج عنصر را نشان می دهد.



شکل ۱۰ . ۱

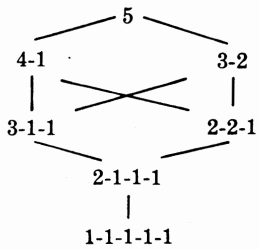
مثال ۱۰ . ۳. یک افراز عدد صحیح مثبت m مجموعه ای است از اعداد صحیح مثبت که مجموعش m می باشد. به عنوان مثال، عدد $m = 5$ دارای 7 افراز است:

5, 3-2, 2-2-1, 1-1-1-1-1, 4-1, 3-1-1, 2-1-1-1

افرازهای عدد صحیح m را به قرار زیر مرتب می کنیم. افراز P_1 قبل از افراز P_2 است اگر با جمع اعداد صحیح در P_1 بتوان اعداد صحیح در P_2 را به دست آورد یا، معادلاً، با تقسیم اعداد صحیح در P_2 بتوان اعداد صحیح در P_1 را به دست آورد. به عنوان مثال،

2-2-1 قبل از 3-2 می باشد

زیرا $2 + 1 = 3$. از آن سو، 1-1-3 و 1-2-2 قیاسپذیر نیستند. شکل ۱۰ . ۲ نمودار افرازهای $m = 5$ را به دست می دهد.



شکل ۱۰ . ۲

ما اغلب می خواهیم اعداد صحیح مثبت را به عناصر مجموعهٔ جزئی مرتب متناهی S طوری منتسب کنیم که ترتیب S حفظ گردد. یعنی، تابعی چون $f : S \to \mathbf{N}$ جستجو می کنیم که اگر $a \preceq b$ ، $f(a) \leq f(b)$. یک چنین تابع را شمارش سازگار بر S می نامیم. میسر بودن این کار مضمون قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۱۰ . ۱ . برای هر مجموعهٔ جم متناهی S یک شمارش سازگار وجود دارد.

تأکید می کنیم که یک چنین شمارش لازم نیست منحصر به فرد باشد. به عنوان مثال، ذیلاً دو شمارش سازگار برای مجموعهٔ جم شکل ۱۰ . ۱ (بـ) ذکر شده است:

(یک) $f(d) = 1,\ f(e) = 2,\ f(b) = 3,\ f(c) = 4,\ f(a) = 5$

(دو) $g(e) = 1,\ g(d) = 2,\ g(c) = 3,\ g(b) = 4,\ g(a) = 5$

ولی اگر مجموعه را به توی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ بنگاریم، زنجیر شکل ۱۰ . ۱ (پـ) فقط یک شمارش سازگار خواهد پذیرفت. به طور مشخص، داریم

$$h(x) = 1, \quad h(y) = 2, \quad h(z) = 3, \quad h(u) = 4, \quad h(v) = 5$$

عنصر a در مجموعهٔ جم S را ماکزیمال گوییم اگر هیچ عنصری بعد از a نباشد؛ یعنی، اگر $a \leq x$ تساوی $x = a$ را ایجاب نماید. به همین نحو، عنصر b در مجموعهٔ جم S را مینیمال گوییم اگر هیچ عنصری قبل از b نباشد؛ یعنی، اگر $y \leq b$ تساوی $y = b$ را ایجاب نماید. ممکن است بیش از یک عنصر ماکزیمال یا عنصر مینیمال داشته باشیم. در شکل ۱۰ . ۱ (آ)

اعداد 18 و 24 عناصر ماکزیمال اند ولی فقط 1 عنصر مینیمال می باشد. در شکل ۱۰ . ۱ (بـ)، d و e، عناصر مینیمال اند ولی فقط a عنصر ماکزیمال می باشد. در شکل ۱۰ . ۱ (پـ)، x تنها عنصر مینیمال و v تنها عنصرماکزیمال می باشد.

یک مجموعهٔ جم نامتناهی ممکن است نه عنصر ماکزیمال داشته باشد، نه عنصر مینیمال. به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ با ترتیب معمولی عنصر ماکزیمال و مینیمال ندارد. ولی قضیهٔ ۱۰ . ۱ نشان می دهد که مجموعهٔ جم متناهی S باید دست کم یک عنصر مینیمال و یک عنصر ماکزیمال داشته باشد. به طور مشخص، اگر a در S عنصری باشد که یک شمارش سازگار کوچکترین (بزرگترین) عدد صحیح را به آن منتسب کرده است، a یک عنصر مینیمال (ماکزیمال) می باشد.

۱۰ . ۳ سوپرمم و اینفیمم

فرض کنیم A زیر مجموعه ای از مجموعهٔ جزئی مرتب S باشد. عنصر M در S یک کران بالایی A است اگر M بعد از هر عنصر A باشد؛ یعنی، اگر به ازای هر x در A داشته باشیم

$$x \precsim M$$

هرگاه یک کران بالایی A قبل از هر کران بالایی دیگر A باشد، آن را سوپرمم A نامیده و با

$$\sup(A)$$

نشان می دهیم. همچنین اگر A از عناصر $a_1, \ldots, a_n$ تشکیل شده باشد، به جای $\sup(A)$ می نویسیم $\sup(a_1, \ldots, a_n)$. تأکید می کنیم که حداکثر یک $\sup(A)$ بیشتر وجود ندارد؛ ولی ممکن است $\sup(A)$ موجود نباشد. مثلاً، در شکل ۱۰ . ۲، افرازهای 1-4 ، 2-3 ، و 5 کرانهای بالایی برای 1-1-3 و 1-2-2 هستند ولی $\sup(3\text{-}1\text{-}1, 2\text{-}2\text{-}1)$ موجود نیست زیرا هیچ کران بالایی قبل از دوتای دیگر نیست.

به همین نحو، عنصر m در مجموعهٔ جم S یک کران پایینی زیر

مجموعهٔ A از S است اگر m قبل از هر عنصر A باشد؛ یعنی، اگر به ازای هر y در A داشته باشیم

$$m \precsim y$$

هرگاه یک کران پایینی A بعد از هر کران پایینی دیگر A باشد، آنگاه آن را اینفیمم A نامیده و با[1]

$$\inf(A)$$

یا، اگر A از عناصر $a_1, \ldots, a_n$ تشکیل شده باشد، با

$$\inf(a_1, \ldots, a_n)$$

نشان می دهیم. حداکثر یک $\inf(A)$ وجود دارد و ممکن است $\inf(A)$ موجود هم نباشد. مثلاً، در شکل ۱۰. ۲، افرازهای 1-4 و 2-3 دارای چهار کران پایینی اند ولی $\inf\{4\text{-}1, 3\text{-}2\}$ وجود ندارد زیرا هیچ کران پایینی بعد از سه تای دیگر نیست.

در برخی از کتب به جای سوپرمم کوچکترین کران بالایی، به جای اینفیمم بزرگترین کران پایینی، برای $\sup(A)$ علامت $\text{lub}(A)$، و برای $\inf(A)$ علامت $\text{glb}(A)$ به کار می برند.

حال چند مثال مهم از مجموعه های جم می آوریم که در آنها مقادیر $\sup(a, b)$ و $\inf(a, b)$ به ازای هر جفت عنصر a و b وجود دارند.

مثال ۱۰. ٤

(آ) فرض کنیم مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ به وسیلهٔ بخشپذیری جزئی مرتب شده باشد و a, b در $\mathbf{N}$ باشند. بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b، که با

$$\gcd(a, b)$$

نموده می شود، بزرگترین عدد صحیحی است که a و b را عاد می کند. کوچکترین مضرب مشترک a و b، که با

$$\text{lcm}(a, b)$$

نموده می شود، کوچکترین عدد صحیحی است که بر هر دوی a و b بخشپذیر است.

قضیهٔ مهمی در نظریهٔ اعداد می گوید که هر مقسوم علیه مشترک a و b، $\gcd(a, b)$،

را عاد می کنــــد. همچنین می توان ثابت کرد که $\mathrm{lcm}\,(a, b)$ هر مضرب a و b را عاد خواهد کرد. لذا،

$$\mathrm{lcm}\,(a, b) = \sup\,(a, b) \quad \text{و} \quad \mathrm{gcd}\,(a, b) = \inf\,(a, b)$$

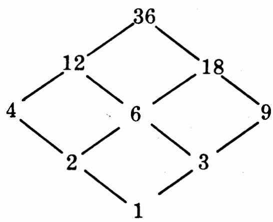
بـه عـبـارت دیـگـر، $\inf\,(a, b)$ و $\sup\,(a, b)$ بـه ازای هـر جـفـت عـنـصـر از $\mathbf{N}$ کـه بـا بخشپذیری مرتب شده است موجودند.

(بـ) فرض کنیم D_m ، به ازای هر عدد صحیح مثبت m ، مجموعهٔ مقسوم علیه های m باشد که به وسیلهٔ بخشپذیری مرتب شده است. نمودار

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

در شکل ۳.۱۰ دیده می شود. مجدداً،

$$\sup\,(a, b) = \mathrm{lcm}\,(a, b) \quad \text{و} \quad \inf\,(a, b) = \mathrm{gcd}\,(a, b)$$



شکل ۳.۱۰

وجود دارند.

۴.۱۰ شبکه ها

فرض کنیم L یک مجموعهٔ ناتهی باشد که تحت دو عمل دوتایی به نام تماس و الحاق، که به ترتیب با $\wedge$ و $\vee$ نموده می شوند، بسته باشد. در این صورت، L یک شبکه است اگر اصول زیر به ازای هر a, b, c در L برقرار باشند:

[L₁] قوانین تعویضپذیری:

(۱ آ) $a \wedge b = b \wedge a$ (۱ بـ) $a \vee b = b \vee a$

[L₂] قوانین شرکتپذیری:

(۲ آ) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (۲ بـ) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

[L₃] قوانین جذب:

(۳ آ) $a \wedge (a \vee b) = a$ (۳ بـ) $a \vee (a \wedge b) = a$

گاهی که می خواهیم اعمال مربوطه رانشان دهیم، شبکه را با $(L, \wedge, \vee)$ نشان می دهیم.

دوگان یک حکم در شبکهٔ $(L, \wedge, \vee)$ حکمی است که از تعویض $\wedge$ و $\vee$ با هم به دست می آید. مثلاً، دوگان

$$a \wedge (b \vee a) = a \vee a$$

عبارت است از

$$a \vee (b \wedge a) = a \wedge a$$

توجه کنید که دوگان هر اصل موضوع یک شبکه یک اصل موضوع است. لذا، اصل دوگانی برقرار است؛ یعنی:

قضیهٔ ۱۰ . ۲ (اصل دوگانی). دوگان هر قضیه در یک شبکه نیز یک قضیه است.

این قضیه از این امر ناشی می شود که قضیهٔ دوگان را می توان با استفاده از دوگان هر مرحلهٔ برهان قضیهٔ اصلی ثابت کرد.

یکی از خواص مهم شبکه ها مستقیماً از قوانین جذب نتیجه می شود.

قضیهٔ ۱۰ . ۳ (قانون خودنمایی). (یک) $a \wedge a = a$ ؛ (دو) $a \vee a = a$.

برهان قسمت (یک) تنها از دو سطر تشکیل شده است:

$$a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b)) \quad \text{(با استفاده از (۳ بـ))}$$
$$= a \quad \text{(با استفاده از (۳ آ))}$$

برهان قسمت (دو) از اصل دوگانی فوق نتیجه می شود (یا می توان آن را به نحوی مشابه ثابت کرد).

فرض کنیم L یک شبکه باشد. می توان یک ترتیب جزئی بر L به قرار زیر تعریف کرد:

$$a \precsim b \quad \text{اگر} \quad a \wedge b = a$$

به همین نحو، می توان تعریف کرد

$$a \precsim b \quad \text{اگر} \quad a \vee b = b$$

ما این نتایج را به صورت یک قضیه بیان می کنیم.

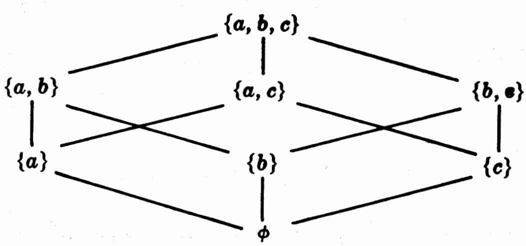
قضیهٔ ۱۰ . ۴. فرض کنیم L یک شبکه باشد. در این صورت،

(یک) $a \wedge b = a$ اگر و فقط اگر $a \vee b = b$؛

(دو) رابطهٔ $a \precsim b$ (تعریف شده با $a \wedge b = a$ یا $a \vee b = b$) یک ترتیب جزئی بر L است.

حال که یک ترتیب جزئی بر شبکهٔ دلخواه L داریم، می توانیم L را، همانطور که در موردمجموعه های جزئی مرتب در حالت کلی شد، با یک نمودار مجسم کنیم.

مثال ۱۰ . ۵. فرض کنیم C گردایه ای از مجموعه ها باشد که تحت اشتراک و اجتماع بسته است. در این صورت، $(C, \cap, \cup)$ یک شبکه است. در این شبکه، رابطهٔ ترتیب جزئی همان رابطهٔ شمول مجموعه هاست. شکل ۱۰ . ۴ نمودار شبکهٔ L جمیع زیر مجموعه های $\{a, b, c\}$ را نشان می دهد.



شکل ۱۰ . ۴

ما طرز تعریف یک ترتیب جزئی بر شبکهٔ L را نشان دادیم. قضیهٔ زیر به ما زمان

امکان تعریف یک شبکه بر مجموعهٔ جزئی مرتب P به نحوی که شبکه ترتیب اصلی بر P را بازگرداند خواهد گفت.

قضیهٔ ۱۰ . ۵. فرض کنیم P یک مجموعهٔ جم باشد به طوری که مقـــادیر $\inf(a, b)$ و $\sup(a, b)$ به ازای هر a, b در P موجود باشند. با فرض

$$a \vee b = \sup(a, b) \quad و \quad a \wedge b = \inf(a, b)$$

$(P, \wedge, \vee)$ یک شبکه می باشد. به علاوه، ترتیب جزئی القا شده به وسیلهٔ این شبکه بر P همان ترتیب جزئی اصلی بر P می باشد.

عکس قضیهٔ فوق نیز درست است. یعنی، فرض کنیم L یک شبکه بوده و $\precsim$ ترتیب جزئی القایی بر L باشد. در این صورت، $\inf(a, b)$ و $\sup(a, b)$ به ازای هر جفت a, b در L موجود بوده و شبکهٔ حاصل از مجموعهٔ جم $(L, \precsim)$ شبکهٔ اصلی می باشد. لذا، تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف دیگر. هر شبکه یک مجموعهٔ جزئی مرتب است که در آن

$$a \vee b = \sup(a, b) \quad و \quad a \wedge b = \inf(a, b)$$

به ازای هر جفت عنصر a و b موجودند.

ابتدا توجه می کنیم که هر مجموعهٔ خطی مرتب یک شبکه است چرا که اگر $a \precsim b$ ، $\inf(a, b) = a$ و $\sup(a, b) = b$. بنا بر مثال ۱۰ . ٤، مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ و مجموعهٔ مقسوم علیه های m یعنی D_m تحت رابطهٔ بخشپذیری شبکه می باشند.

فرض کنیم M یک زیر مجموعهٔ ناتهی از شبکهٔ L باشد. گوییم M یک زیر شبکهٔ L است اگر M خود (نسبت به اعمال L) یک شبکه باشد. توجه کنید که M یک زیر شبکهٔ L است اگر و فقط اگر M تحت اعمال $\wedge$ و $\vee$ از L بسته باشد. به عنوان مثال، مجموعهٔ D_m از مقسوم علیه های m یک زیر شبکه از مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت تحت بخشپذیری می باشد.

دو شبکهٔ L و L' را یکریخت گوییم اگر یک تناظر یک به یک مانند $f: L \to L'$ چنان باشد که به ازای هر دو عنصر a, b در L

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \quad \text{و} \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$$

۱۰ . ۵ شبکه های کراندار

گوییم شبکهٔ L دارای کران پایینی 0 است اگر به ازای هر عنصر x در L داشته باشیم $0 \precsim x$. به همین نحو، گوییم L دارای کران بالایی I است اگر به ازای هر x در L داشته باشیم $x \precsim I$. گوییم L کرانداراست اگر L هم کران پایینی 0 و هم کران بالایی I داشته باشد. در یک چنین شبکه اتحادهای زیر به ازای هر عنصر a در L برقرارند:

$$a \vee I = I, \quad a \wedge I = a, \quad a \vee 0 = a, \quad a \wedge 0 = 0$$

مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی با ترتیب معمولی

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \cdots$$

دارای کران پایینی 0 است ولی کران بالایی ندارد. از آن سو، شبکهٔ $P(U)$ جمیع زیر مجموعه های مجموعهٔ عمومی U یک شبکهٔ کراندار، با کران بالایی U و کران پایینی $\emptyset$ می باشد.

فرض کنیم $L = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ یک شبکهٔ متناهی باشد. در این صورت،

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n \quad \text{و} \quad a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$$

به ترتیب کران بالایی و پایینی L می باشند. لذا، خواهیم داشت:

قضیهٔ ۱۰ . ۶. هر شبکهٔ متناهی L کراندار است.

۱۰ . ۶ شبکه های پخشپذیر

گوییم شبکهٔ L پخشپذیر است اگر به ازای هر سه عنصر a, b, c در L داشته باشیم:

[L_4] قوانین پخشپذیری

(٤ آ) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (٤ بـ) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

در غیر این صورت، L را پخش ناپذیر می نامیم. توجه کنید که، بنا بر اصل دوگانی،شرط (٤ آ) برقرار است اگر و فقط اگر (٤ ب) برقرار باشد.

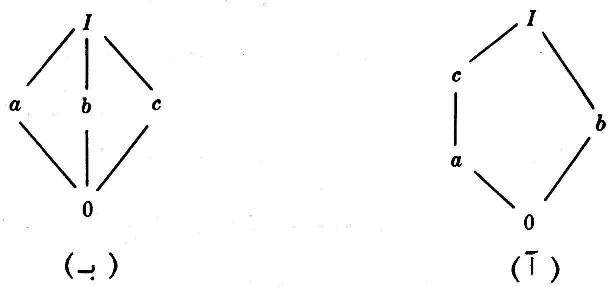
شکل ۱۰ . ۵ (آ) یک شبکهٔ پخش ناپذیر است زیرا

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$$

ولی

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = I \wedge c = c$$

شکل ۱۰ . ۵ (ب) نیز یک شبکهٔ پخش ناپذیر است. در واقع، از این شبکه ها توصیف زیر را خواهیم داشت.



شکل ۱۰ . ۵

قضیهٔ ۱۰ . ۷. شبکهٔ L پخش ناپذیر است اگر و فقط اگر شامل زیر شبکه ای یکریخت با شکل ۱۰ . ۵ (آ) یا (ب) باشد.

شکل ۱۰ . ٦

اثبات این قضیه از حوصلهٔ این کتاب خارج است.

فرض کنیم L شبکه ای با کران پایینی 0 باشد. گوییم عنصر a در L تحویل ناپذیر الحاقی است اگر $a = x \vee y$ تساوی $a = x$ یا $a = y$ را ایجاب نماید. (اعداد اول تحت ضرب از این خاصیت برخوردارند؛ یعنی، هرگاه $p = ab$ ، آنگاه $p = a$ یا $p = b$ که در آنها p اول می باشد.) واضح است که 0 تحویل ناپذیر الحاقی می باشد. هرگاه a دست کم دو سابق بلافصل، مثلاً b_1 و b_2 مانند شکل ۱۰. ۶ (آ)، داشته باشد، آنگاه $a = b_1 \vee b_2$ ؛ و در نتیجه، a تحویل ناپذیر الحاقی نیست. از آن سو، اگر a دارای سابق بلافصل منحصر به فرد c باشد، به ازای هر دو عنصر دیگر b_1 و b_2 ، داریم $a \neq \sup(b_1, b_2) = b_1 \vee b_2$ زیرا c مانند شکل ۱۰. ۶ (ب) بین b ها و a قرار دارد. به عبارت دیگر، می‌توان حکم کرد که عنصر ناصفر $a \neq 0$ تحویل ناپذیر الحاقی است اگر و فقط اگر a دارای سابق بلافصل منحصر به فرد باشد. عناصری که بلافاصله بعد از 0 اند (که آنها را اتمها می نامند) تحویل ناپذیر الحاقی می باشند. ولی شبکه ها می توانند عناصر تحویل ناپذیر الحاقی دیگری نیز داشته باشند. مثلاً، عنصر c در شکل ۱۰. ۵ (آ) یک اتم نیست ولی تحویل ناپذیر الحاقی است زیرا a تنها سابق بلافصل آن می باشد.

هرگاه عنصر a در شبکهٔ متناهی L تحویل ناپذیر الحاقی نباشد، آنگاه می توان نوشت $a = b_1 \vee b_2$. در این صورت، اگر b_1 و b_2 تحویل ناپذیر الحاقی نباشند، می توان این دو را به صورت الحاق سایر عناصر نوشت؛ و غیره. چون L متناهی است، مآلاً داریم

$$a = d_1 \vee d_2 \vee \cdots \vee d_n$$

که در آن d ها تحویل ناپذیر الحاقی می باشند. هرگاه d_i پیش از d_j باشد، آنگاه $d_i \vee d_j = d_j$ ؛ پس می توان d_i را از عبارت فوق حذف کرد. به عبارت دیگر، می توان فرض کرد که d ها غیرزاید اند؛ یعنی، هیچ d ای قبل از d دیگر نیست. تأکید می کنیم که این عبارت لزوماً منحصر به فرد نیست؛ مثلاً، در هر دو شبکهٔ شکل ۱۰. ۵ داریم $I = a \vee b$ و $I = b \vee c$. حال قضیهٔ اصلی این بخش را (که در مسئلهٔ ۱۰. ۱۵ ثابت شده است) بیان می داریم.

قضیهٔ ۱۰ . ۸. فرض کنیم L یک شبکهٔ پخشپذیر متناهی باشد. در این صورت، هر a در L را می توان به طور منحصر به فرد(جز در ترتیب) به صورت عناصری تحویل ناپذیر الحاقی غیر زاید نوشت.

این قضیه را در واقع می توان به شبکه هایی با طول متناهی تعمیم داد؛ یعنی، در جایی که تمام زیر مجموعه های خطی مرتب متناهی اند. (مسئلهٔ ۱۰. ۱۰ یک شبکهٔ نامتناهی با طول متناهی به دست می دهد.)

۱۰. ۷ شبکه های تام

فرض کنیم L یک شبکهٔ کراندار با کران پایینی 0 و کران بالایی I باشد. همچنین a عنصری از L باشد. عنصر x در L را متمم a نامیم اگر

$$a \wedge x = 0 \quad \text{و} \quad a \vee x = I$$

متممها لزوماً وجود ندارند والزاماً منحصر به فرد نیستند. مثلاً، در شکل ۱۰. ۵ (آ) عناصر a و c هر دو متمم b اند. همچنین، عناصر y ، z ، و u در زنجیر شکل ۱۰. ۱ دارای متمم نیستند. در این باب نتیجهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۱۰ . ۹. فرض کنیم L یک شبکهٔ پخشپذیر کراندار باشد. در این صورت، متممها در صورت وجود منحصر به فردند.

برهان. فرض کنیم x و y متممهای عنصر دلخواه a در L باشد. در این صورت،

$$a \vee x = I, \quad a \vee y = I, \quad a \wedge x = 0, \quad a \wedge y = 0$$

بااستفاده از پخشپذیری داریم

$$x = x \vee 0 = x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge (x \vee y) = I \wedge (x \vee y) = x \vee y$$

به همین نحو،

$$y = y \vee 0 = y \vee (a \wedge x) = (y \vee a) \wedge (y \vee x) = I \wedge (y \vee x) = y \vee x$$

لذا،

$$x = x \vee y = y \vee x = y$$

و قضیه به اثبات می رسد.

گوییم شبکهٔ L تام است اگر L کراندار بوده و هر عنصر در L دارای متمم باشد. شکل ۱۰. ۵ (بـ) یک شبکهٔ تام را نشان می دهد که در آن متممها منحصر به فرد نیستند. از آن سو، شبکهٔ $P(U)$ تمام زیر مجموعه های مجموعهٔ عمومی U تام است، و هر زیر مجموعهٔ A از U دارای متمم منحصر به فرد $A^c = U \setminus A$ می باشد.

قضیهٔ ۱۰. ۱۰. فرض کنیم L یک شبکهٔ تام با متممهای منحصر به فرد باشد. در این صورت، عناصر تحویل ناپذیر الحاقی L غیر از 0 اتمهای آن می باشند.

از تلفیق این قضیه با قضایای ۱۰. ۸ و ۱۰. ۹ به نتیجهٔ مهم زیر خواهیم رسید.

قضیهٔ ۱۰. ۱۱. فرض کنیم L یک شبکهٔ پخشپذیر تام متناهی باشد. در این صورت، هر عنصر a در L الحاق مجموعهٔ منحصر به فردی از اتمها می باشد.

تبصره. در بعضی از کتابها شبکهٔ L در صورتی تام تعریف می شود که هر a در L متمم منحصر به فرد داشته باشد. در این صورت، قضیهٔ ۱۰. ۱۰ به شکل متفاوتی بیان خواهد شد.

مسائل حل شده

مجموعه ها و زیر مجموعه های مرتب

۱۰. ۱. فرض کنید مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ به وسیلهٔ بخشپذیری مرتب شده باشد (ر.ک. مثال ۱۰. ۱ (بـ)).

(۱) بین هر جفت از اعداد زیر علامت صحیح $<$ ، $>$ ، یا $\parallel$ (قیاس ناپذیر) را قرار دهید:

(آ) $8 \_\_\_ 2$ ؛ (ب) $24 \_\_\_ 18$ ؛ (پ) $3 \_\_\_ 9$ ؛ (ت) $15 \_\_\_ 5$.

(۲) معین کنید که هر یک از زیر مجموعه های زیر از $\mathbf{N}$ خطی مرتب است یا نه:

(آ) $\{24, 2, 6\}$ ؛ (ب) $\{3, 15, 5\}$ ؛ (پ) $\{15, 5, 30\}$ ؛

(ت) $\{2, 8, 32, 4\}$ ؛ (ث) $\{1, 2, 3, \ldots\}$ ؛ (ج) $\{7\}$.

حل. (۱) (آ) چون 2 عدد 8 را عاد می کند، 2 قبل از 8 است؛ یعنی، $2 \prec 8$.

(ب) 18 عدد 24 را عاد نمی کند و 24 نیز عدد 18 را عاد نخواهد کرد؛ پس $24 \parallel 18$.

(پ) چون 9 بر 3 بخشپذیر است، $9 \succ 3$.

(ت) چون 5 عدد 15 را عاد می کند، $5 \prec 15$.

(۲) (آ) چون 2 عدد 6 را عاد می کند و این عدد 24 را عاد می نماید، مجموعه کلی مرتب می باشد.

(ب) چون 3 و 5 قیاس پذیر نیستند، مجموعه کلی مرتب نیست.

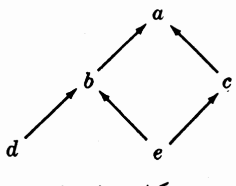
(پ) این مجموعه کلی مرتب است زیرا 5 عدد 15 را عاد می کند و این عدد 30 را عاد می نماید.

(ت) این مجموعه به دلیل $2 \prec 4 \prec 8 \prec 32$ کلی مرتب است.

(ث) این مجموعه به این دلیل که 2 و 3 قیاس پذیر نیستند کلی مرتب نیست.

(ج) هر مجموعه مرکب از فقط یک عنصر کلی مرتب است.

۱۰ . ۲. فرض کنید $V = \{a, b, c, d, e\}$ با نمودار شکل ۷.۱۰ مرتب شده باشد. بین



شکل ۷.۱۰

هر جفت از عناصر زیر علامت صحیح $\prec$ ، $\succ$ ، یا $\parallel$ (قیاس ناپذیر) بگذارید:

(آ) $a\_\_\_e$ (ب) $b\_\_\_c$

(پ) $d\_\_\_a$ (ت) $c\_\_\_d$

حل. (آ) چون یک « مسیر» از e به c به a وجود دارد، e قبل از a می باشد؛ پس $a \succ e$.

(ب) هیچ مسیری از b به c یا به عکس وجود ندارد؛ پس $b \parallel c$.

(پ) یک مسیر از d به b به a وجود دارد؛ پس $d \prec a$.

(ت) نه $d \prec c$ برقرار است نه $c \prec d$ ؛ پس $c \parallel d$.

۱۰ . ۳. فرض کنید $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ با ترتیب قاموسی مرتب شده باشد. بین هر جفت از عناصر در $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ علامت صحیح $\succ$ یا $\prec$ بگذارید:

(آ) $(5,78)\_\_\_(7,1)$ ؛ (ب) $(4,6)\_\_\_(4,2)$ ؛ (پ) $(5,5)\_\_\_(4,23)$ ؛ (ت) $(1,3)\_\_\_(1,2)$.

حل. توجه کنید که، بنابر ترتیب قاموسی،

$(a,b) \prec (a',b')$ اگر $a < a'$ یا اگر $a = a'$ ولی $b < b'$.

(آ) $(5,78) \prec (7,1)$ زیرا $5 < 7$.

(ب) $(4,6) \succ (4,2)$ زیرا $4 = 4$ ولی $6 > 2$.

(پ) $(5,5) \succ (4,23)$ زیرا $5 > 4$.

(ت) $(1,3) \succ (1,2)$ زیرا $1 = 1$ ولی $3 > 2$.

۱۰ . ٤. فرض کنید $A = \{2,3,4,\ldots\} = \mathbf{N} \setminus \{1\}$ با رابطهٔ « x ، y را عاد می کند» مرتب شده باشد.

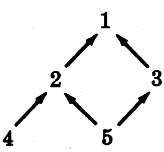
(آ) جمیع عناصر مینیمال را بیابید. (ب) جمیع عناصر ماکزیمال را بیابید.

حل. (آ) هرگاه p یک عدد اول باشد، آنگاه فقط p عدد p را عاد می کند

(زیرا $1 \notin A$)؛ پس تمام اعداد اول عنصر مینیمال می باشند. به علاوه، هرگاه $a \in A$ یک عدد اول نباشد، آنگاه عددی صحیح مانند $b \in A$ غیر از a هست که a را عاد می کند. لذا، تنها عناصر مینیمال A اعداد اول می باشند.

(ب) هیچ عنصر ماکزیمال در A نیست زیرا، به ازای هر عنصر $a \in A$ ، a ، مثلاً، $2a$ را عاد می کند.

۱۰ . ۵. فرض کنید $B = \{1,2,3,4,5\}$ به وسیلهٔ نمودار شکل ۱۰ . ۸ مرتب شده باشد.



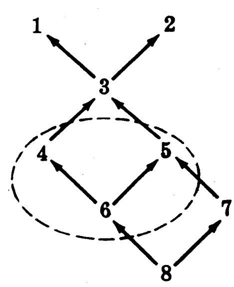
شکل ۱۰ . ۸

(آ) جمیع عناصر مینیمال B را بیابید. (ب) جمیع عناصر ماکزیمال B را بیابید.

حل. (آ) هیچ عنصری اکیداً قبل از 4 یا 5 نیست؛ پس 4 و 5 عناصر مینیمال B می باشند.

(ب) تنها عنصر ماکزیمال 1 است.

۱۰ . ۶. فرض کنید $W = \{1,2,\ldots,7,8\}$ همانند شکل ۱۰ . ۹ مرتب شده باشد.

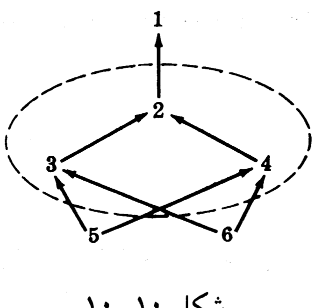


شکل ۱۰ . ۹

زیر مجموعهٔ $V = \{4, 5, 6\}$ از W را در نظر بگیرید. (آ) مجموعهٔ کرانهای بالایی V را بیابید.
(بـ) مجموعهٔ کرانهای پایینی V را بیابید. (پـ) آیا $\sup(V)$ موجود است؟ آیا $\inf(V)$ وجود دارد؟

حل. (آ) هر عنصر در $\{1, 2, 3\}$، و فقط همین عناصر، بعد از هر عنصر در V بوده و لذا یک کران بالایی V می باشد.
(بـ) فقط 6 و 8 قبل از هر عنصر V اند؛ پس $\{6, 8\}$ مجموعهٔ کرانهای پایینی V است. توجه کنید که 7 یک کران پایینی V نیست زیرا 7 قبل از 4 یا 6 نمی باشد.
(پـ) چون 3 قبل از تمام کرانهای بالایی V است، $\sup(V) = 3$. توجه کنید که 3 به V تعلق ندارد. چون 6 بعد از هر کران پایینی V است، $\inf(V) = 6$. توجه کنید که 6 به V تعلق دارد.

۱۰.۷. فرض کنید $D = \{1,2,3,4,5,6\}$ همانند شکل ۱۰.۱۰ مرتب شده باشد.



شکل ۱۰.۱۰

زیر مجموعهٔ $E = \{2, 3, 4\}$ از D را در نظر بگیرید. (آ) کرانهای بالایی E را بیابید. (بـ) کرانهای پایینی E را بیابید. (پـ) آیا $\sup(E)$ وجود دارد؟ آیا $\inf(E)$ موجود است؟

حل. (آ) هر دوی 1 و 2 (و فقط همین دو عدد) بعد از هر عنصر E اند؛ و لذا، کرانهای بالایی E می باشند.

(ب) تنها 5 و 6 قبل از هر عنصر E اند؛ و در نتیجه، کرانهای پایینی E می باشند.

(پ) چون 2 قبل از تمام کرانهای بالایی E است، داریم $\sup(E) = 2$. هیچ کران پایینی بعد از تمام کرانهای پایینی نیست؛ پس $\inf(E)$ وجود نخواهد داشت.

۱۰ . ۸. قضیهٔ ۱۰ . ۱ را ثابت کنید: به ازای هر مجموعهٔ جم متناهی S یک شمارش سازگار وجود دارد.

حل. برهان به استقرا بر تعداد عناصر S صورت می گیرد. هرگاه $S = \{s\}$ فقط دارای یک عنصر باشد، آنگاه $f: S \to \mathbf{N}$ با تعریف $f(s) = 1$ یک شمارش سازگار S است. حال فرض کنیم S دارای $n > 1$ عنصر بوده و قضیه برای مجموعه های جم با تعداد عناصر کمتر از n برقرار باشد. همچنین $b \in S$ و زیر مجموعهٔ $T = S \setminus \{b\}$ از S را در نظر می گیریم. چون T دارای $n - 1$ عنصر است، یک شمارش سازگار مانند $g: T \to \mathbf{N}$ از T وجود دارد. پس تابع $h: T \to \mathbf{N}$ با تعریف به صورت $h(x) = 2g(x)$ نیزیک شمارش سازگار است.(ثابت کنید!) توجه کنید که نقش h فقط شامل اعداد زوج می باشد. فرض کنیم $f: S \to \mathbf{N}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = h(x) \text{ ، اگر } x \neq b$$

$$f(b) = \begin{cases} f(a) + 1 & \text{اگر } a \text{ اکیداً قبل از } b \text{ باشد ،} \\ 1 & \text{اگر هیچ عنصری قبل از } b \text{ نباشد ،} \end{cases}$$

در این صورت، f یک شمارش سازگار S خواهد بود.

شبکه ها

۱۰ . ۹. دوگان هر یک از احکام زیر را بنویسید:

(آ) $(a \wedge b) \vee c = (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

(ب) $(a \wedge b) \vee a = a \wedge (b \vee a)$

حل. در هر یک از احکام $\vee$ را با $\wedge$ و $\wedge$ را با $\vee$ عوض کرده حکم دوگان را به دست می آوریم:

(آ) $(a \vee b) \wedge c = (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$

(ب) $(a \vee b) \wedge a = a \vee (b \wedge a)$

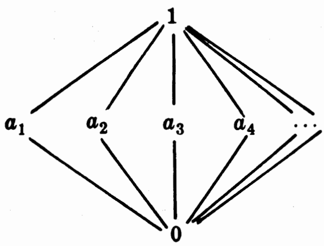
۱۰ . ۱۰ . شبکهٔ نامتناهی L را طوری مثال بزنید که طولش متناهی باشد .

حل. فرض کنید

$$L = \{0, 1, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

و L همانند شکل ۱۰ . ۱۱ مرتب شده باشد ؛ یعنی، به ازای هر $n \in \mathbf{N}'$ داشته باشیم

$$0 < a_n < 1$$



شکل ۱۰ . ۱۱

L دارای طول متناهی است زیرا L زیر مجموعه ای که خطی مرتب و نامتناهی باشد ندارد .

۱۰ . ۱۱ . قضیهٔ ۱۰ . ٤ را ثابت کنید : فرض کنید L یک شبکه باشد . در این صورت: (یک) $a \wedge b = a$ اگر و فقط اگر $a \vee b = b$ ؛ (دو) رابطهٔ $a \precsim b$ (تعریف شده با $a \wedge b = a$ یا $a \vee b = b$) یک ترتیب جزئی بر L است.

حل. (یک) فرض کنیم $a \wedge b = a$. بااستفاده از قانون جذب در مرحلهٔ اول داریم

$$b = b \vee (b \wedge a) = b \vee (a \wedge b) = b \vee a = a \vee b$$

حال فرض کنیم $a \vee b = b$. مجدداً بااستفاده از قانون جذب در مرحلهٔ اول خواهیم داشت

$$a = a \wedge (a \vee b) = a \wedge b$$

لذا، $a \wedge b = a$ اگر و فقط اگر $a \vee b = b$.

(دو) به ازای هر a در L ، طبق قانون خودنمایی داریم $a \wedge a = a$. لذا، $a \precsim a$ ؛ و در نتیجه، $\precsim$ منعکس است.

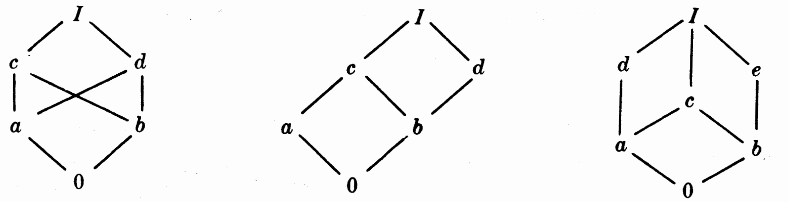
فرض کنیم $a \precsim b$ و $b \precsim a$. پس $a \wedge b = a$ و $b \wedge a = b$. لذا، $a = a \wedge b = b \wedge a = b$ ؛ و در نتیجه، $\precsim$ پادمتقارن می باشد.

بالأخره، فرض کنیم $a \precsim b$ و $b \precsim c$. پس $a \wedge b = a$ و $b \wedge c = b$. لذا،

$$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$$

بنابراین، $a \precsim c$ ؛ و در نتیجه، $\precsim$ متعدی می باشد. بنابراین، $\precsim$ یک ترتیب جزئی بر L می باشد.

۱۰. ۱۲. از مجموعه های جزئی مرتب شکل ۱۰. ۱۲ کدامها شبکه اند؟



(پ) (ب) (آ)

شکل ۱۰. ۱۲

حل. یک مجموعهٔ جزئی مرتب شبکه است اگرو فقط اگر $\sup(x, y)$ و $\inf(x, y)$ به ازای هر جفت x, y در این مجموعه موجود باشند. فقط (پ) شبکه نیست زیرا $\{a, b\}$ دارای سه کران بالایی c ، d ، و I بوده و هیچیک از آنها قبل از دوتای دیگر نیست؛ یعنی، $\sup(a, b)$ وجود نخواهد داشت.

۱۰ . ۱۳. شبکهٔ L در شکل ۱۰ . ۱۲ (آ) را در نظر بگیرید .

(آ) از عناصر ناصفر کدامها تحویل ناپذیر الحاقی اند ؟

(بـ) چه عناصر اتم می باشند ؟

(پـ) از مجموعه های زیر کدامها زیر شبکهٔ L اند ؟

$$L_1 = \{0, a, b, I\} \qquad L_3 = \{a, c, d, I\}$$
$$L_2 = \{0, a, e, I\} \qquad L_4 = \{0, c, d, I\}$$

(تـ) آیا L پخشپذیر است؟

(ثـ) متممهای عناصر a' ، b ، و c را در صورت وجود بیابید .

(جـ) آیا L یک شبکهٔ تام است.

حل. (آ) عناصر ناصفری که دارای سابق بلافصل منحصر به فرد باشند تحویل ناپذیر الحاقی می باشند. پس a ، b ، d ، و e تحویل ناپذیر الحاقی خواهند بود .

(بـ) عناصری که بلافاصله بعد از 0 باشند اتم اند؛ پس a و b اتم خواهند بود .

(پـ) زیر مجموعهٔ L' یک زیر شبکه است اگر تحت $\wedge$ و $\vee$ بسته باشد . L_1 یک زیر شبکه نیست زیرا $a \vee b = c$ که تعلق به L_1 ندارد. مجموعهٔ L_4 یک زیر شبکه نیست زیرا $c \wedge d = a$ تعلق به L_4 ندارد. دو مجموعهٔ دیگر، یعنی L_2 و L_3 ، زیر شبکه می‌باشند.

(تـ) L پخشپذیر نیست زیرا $M = \{0, a, d, e, I\}$ زیر شبکه ای است که با شبکهٔ پخش ناپذیر شکل ۱۰ . ۵ (آ) یکریخت است.

(ثـ) داریم $a \wedge e = 0$ و $a \vee e = I$ ؛ پس a و e متمم می باشند. همچنین، b و d متمم اند. ولی c دارای متمم نمی باشد .

(جـ) L یک شبکهٔ تام نیست زیرا c دارای متمم نمی باشد .

۱۰ . ۱٤. شبکهٔ M شکل ۱۰ . ۱۲ (بـ) را در نظر بگیرید .

(آ) عناصر تحویل ناپذیر الحاقی ناصفر و اتمهای M را بیابید .

(بـ) آیا M پخشپذیر است؟

(پ) آیا M تام است؟

حل. (آ) عناصر ناصفر با سابق منحصر به فرد عبارتند از a ، b ، و d ، و از این سه تا فقط a و b اتم اند زیرا سابق منحصر به فرد آنها 0 می باشد.

(ب) M پخشپذیر است زیرا M زیر شبکه ای که با یکی از شبکه های شکل ۱۰ .۵ یکریخت باشد ندارد.

(پ) M تام نیست زیرا b دارای متمم نمی باشد. توجه کنید که a تنها جواب $b \wedge x = 0$ است ولی $b \vee a = c \neq I$.

۱۰ .۱۵. قضیهٔ ۱۰ .۸ را ثابت کنید: فرض کنید L یک شبکهٔ پخشپذیر متناهی باشد. در این صورت، هر a در L را می توان به طور منحصر به فرد (جز در مورد ترتیب) به صورت الحاق عناصر تحویل ناپذیر الحاقی غیر زاید نوشت.

حل. چون L متناهی است، می توان a را به صورت الحاق عناصر تحویل ناپذیر الحاقی غیر زاید به صورت مطرح شده در بخش ۱۰ .۶ نوشت. لذا، کافی است یکتایی را ثابت کنیم. فرض کنیم

$$a = b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_r = c_1 \vee c_2 \vee \cdots \vee c_s$$

که در آن b ها غیر زاید و تحویل ناپذیر الحاقی بوده و c ها غیر زاید و تحویل ناپذیر می باشند. به ازای هر i داریم

$$b_i \precsim (b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_r) = (c_1 \vee c_2 \vee \cdots \vee c_s)$$

لذا،

$$b_i = b_i \wedge (c_1 \vee c_2 \vee \cdots \vee c_s) = (b_i \wedge c_1) \vee (b_i \wedge c_2) \vee \cdots \vee (b_i \wedge c_s)$$

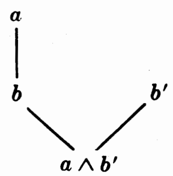
چون b_i ها تحویل ناپذیر الحاقی اند، j ای هست به طوری که $b_i = b_i \wedge c_j$ ؛ و در نتیجه، $b_i \precsim c_j$. با استدلالی مشابه معلوم می شود که به ازای یک c_j یک b_k هست به طوری که $c_j \precsim b_k$. لذا،

$$b_i \precsim c_j \precsim b_k$$

که به دلیل غیر زاید بودن b ها $b_i = c_j = b_k$ را به دست می دهد. بنابراین، b ها و c ها را می توان با هم جفت کرد. لذا، نمایش a جز در مورد ترتیب منحصر به فرد می باشد.

۱۰. ۱۶. قضیهٔ ۱۰. ۱۰ را ثابت کنید. فرض کنید L یک شبکهٔ تام با متممهای منحصر به فرد باشد. در این صورت، عناصر تحویل ناپذیر الحاقی L، غیر از 0، اتمهای آن می باشند.

حل. فرض کنیم a تحویل ناپذیر الحاقی بوده و اتم نباشد. در این صورت، a دارای سابق بلافصل منحصر به فرد $b \neq 0$ می باشد. فرض کنیم b' متمم b باشد. چون $b \neq 0$، داریم $b' \neq I$. هرگاه a قبل از b' باشد، آنگاه $b \lesssim a \lesssim b'$؛ و در نتیجه، $b \wedge b' = b'$ که به دلیل $b \wedge b' = I$ ناممکن است. لذا، a قبل از b' نیست؛ و در نتیجه، $a \wedge b'$ باید اکیداً قبل از a باشد. چون b سابق بلافصل منحصر به فرد a است، پس $a \wedge b'$ نیز طبق شکل ۱۰. ۱۳ قبل از b می باشد. ولی



شکل ۱۰. ۱۳

$a \wedge b'$ قبل از b' است. بنابراین،

$$a \wedge b' \lesssim \inf(b, b') = b \wedge b' = 0$$

لذا، $a \wedge b' = 0$. چون $a \vee b = a$، نیز خواهیم داشت

$$a \vee b' = (a \vee b) \vee b' = a \vee (b \vee b') = a \vee I = I$$

بنابراین، b' متمم a می باشد. چون متممها منحصر به فردند، $a = b$. این با فرض آنکه b یک سابق بلافصل a است در تضاد می باشد. لذا، تنها عناصر تحویل ناپذیر

الحاقی L اتمهایش می باشند.

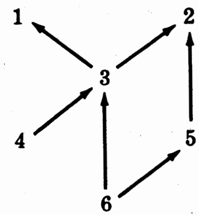
مسائل تکمیلی

مجموعه ها و زیر مجموعه های مرتب

۱۰. ۱۷. فرض کنید

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

همانند شکل ۱۰. ۱۴ مرتب شده باشد.



شکل ۱۰. ۱۴

(آ) جمیع عناصر مینیمال و ماکزیمال V را بیابید.

(ب) جمیع زیر مجموعه های خطی مرتب V که هر یک دست کم سه عنصر داشته باشند را بیابید.

۱۰. ۱۸. فرض کنید $M = \{2, 3, 4, \ldots\}$ و $M \times M$ به طریق زیر مرتب شده باشد:

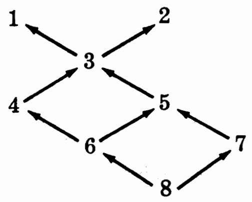
$$(a, b) \precsim (c, d)$$

اگر a، c را عاد کند و اگر b از d کوچکتر یا مساوی باشد، جمیع عناصر مینیمال و ماکزیمال $M \times M$ را بیابید.

۱۰. ۱۹. فرض کنید $A = (\mathbf{N}, \leqslant)$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت با ترتیب معمولی، $B = (\mathbf{N}, \geqslant)$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت با ترتیب عکس، و $A \times B$ به طور قاموسی مرتب باشد. بین هر جفت از عناصر $A \times B$ علامت صحیح $>$ یا $<$ را بگذارید:

(آ) $(1, 5)$____$(1, 3)$؛ (ب) $(2, 18)$____$(4, 1)$؛ (پ) $(4, 4)$____$(4, 30)$؛
(ت) $(15, 15)$____$(2, 2)$.

۱۰ . ۲۰. فرض کنید $W = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$ همانند شکل ۱۰ . ۱۵ مرتب شده باشد.



شکل ۱۰ . ۱۵

(۱) زیر مجموعهٔ $A = \{4, 5, 7\}$ از W را در نظر بگیرید.

(آ) مجموعهٔ کرانهای بالایی A را بیابید.

(بـ) مجموعهٔ کرانهای پایینی A را بیابید.

(پـ) آیا $\sup(A)$ وجود دارد؟

(تـ) آیا $\inf(A)$ وجود دارد؟

(۲) زیر مجموعهٔ $B = \{2, 3, 6\}$ از W را در نظر بگیرید.

(آ) مجموعهٔ کرانهای بالایی B را بیابید.

(بـ) مجموعهٔ کرانهای پایینی B را بیابید.

(پـ) آیا $\sup(B)$ وجود دارد؟

(تـ) آیا $\inf(B)$ وجود دارد؟

(۳) زیر مجموعهٔ $C = \{1, 2, 4, 7\}$ از W را در نظر بگیرید.

(آ) مجموعهٔ کرانهای بالایی C را بیابید.

(بـ) مجموعهٔ کرانهای پایینی C را بیابید.

(پـ) آیا $\sup(C)$ وجود دارد؟

(تـ) آیا $\inf(C)$ وجود دارد؟

(٤) تعداد زیر مجموعه های خطی مرتب W با (آ) پنج عنصر؛ (بـ) شش عنصر را بیابید.

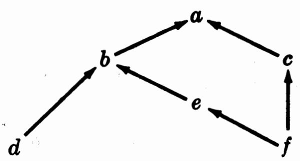
۱۰ . ۲۱. نمودار افرازهای m (ر.ک. مثال ۱۰ . ۳) که (آ) $m = 4$ ؛ (بـ) $m = 6$ را رسم نمایید.

۱۰ . ۲۲. فرض کنید D_m مجموعهٔ مقسوم علیه های مثبت m باشد که بابخشپذیری مرتب شده است. نمودار (آ) D_{12} ، (بـ) D_{15} ، (پـ) D_{16} ، و (تـ) D_{17} را رسم نمایید.

۱۰ . ۲۳. فرض کنید

$$B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

همانند شکل ۱۰ . ۱۶ مرتب شده باشد.



شکل ۱۰ . ۱۶

(آ) عناصر مینیمال و ماکزیمال B را بیابید.

(بـ) دو تا از شمارشهای سازگار B به توی مجموعهٔ

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

را ذکر کرده و تعداد آنها را پیدا نمایید.

۱۰ . ۲٤. فرض کنید $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ یک مجموعهٔ جم بوده و درست شش جفت عنصر موجود باشد به طوری که اولی سابق بلافصل دومی باشد:

$$f \ll a, \quad f \ll d, \quad e \ll b, \quad c \ll f, \quad e \ll c, \quad b \ll f$$

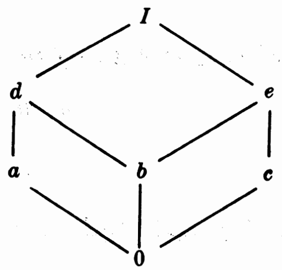
(آ) جمیع عناصر ماکزیمال S را بیابید. (بـ) جمیع عناصر مینیمال S را بیابید.

(پـ) جمیع جفتهای عناصر که قیاس ناپذیرند را (در صورت وجود) پیدا کنید.

شبکه ها

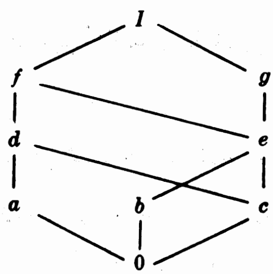
۱۰ . ۲۵. شبکه های L شکل ۱۰ . ۱۷ را در نظر بگیرید. (آ) جمیع زیر شبکه ها بـا پنج عنصر را بیابید. (بـ) جمیع (یک) عناصر تحویل ناپذیر الحاقی؛ (دو) اتمها را بیابید. (پـ) جمیع متممهای a و b را در صورت وجود بیابید.

(تـ) آیا L پخشپذیر است؟ تام است؟



شکل ۱۰ . ۱۷

۱۰ . ۲۶ . شبکهٔ M شکل ۱۰ . ۱۸ را در نظر بگیرید . (آ) عناصر تحویل ناپذیر الحاقی را بیابید . (بـ) اتمها را بیابید . (پـ) متممهای a و b را در صورت وجود بیابید . (تـ) هر x در M رابه صورت الحاق عناصر تحویل ناپذیر الحاقی غیر زاید بیان دارید . (ثـ) آیا M پخشپذیر است؟ تام است؟



شکل ۱۰ . ۱۸

۱۰ . ۲۷ . شبکهٔ $D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ را در نظر بگیرید که مجموعهٔ مقسوم علیه های 60 است که بابخشپذیری مرتب شده است. (آ) نمودار D_{60} را رسم کنید . (بـ) چه عناصری تحویل ناپذیر الحاقی اند ؟ چه عناصری اتم اند ؟ (پـ) متممهای 2 و 10 را در صورت وجود بیابید . (تـ) هر عدد x را به صورت الحاق کمترین تعداد از عناصر تحویل ناپذیر الحاقی غیر زاید بیان دارید .

۱۰ . ۲۸ . شبکهٔ $\mathbf{N}$ مرکب از اعداد صحیح مثبت که با بخشپذیری مرتب شده است را در نظر بگیرید . (آ) چه عناصری تحویل ناپذیر الحاقی اند ؟ (بـ) چه عناصری اتم

می باشند؟

۱۰ . ۲۹. نشان دهید که قوانین پخشپذیری «ضعیف» زیر در هر شبکه برقرارند:

(آ) $a \vee (b \wedge c) \leqq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(بـ) $a \wedge (b \vee c) \geqq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

۱۰ . ۳۰. با استفاده از قضیهٔ ۱۰ . ۷ ثابت کنید: (آ) هر مجموعهٔ خطی مرتب یک شبکهٔ پخشپذیر است (بـ) هر زیر شبکهٔ یک شبکهٔ پخشپذیر نیز پخشپذیر است.

۱۰ . ۳۱. گوییم شبکهٔ M کالبدی است اگر هر وقت $a \leqq c$ قانون زیر را داشته باشیم:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

(آ) ثابت کنید هر شبکهٔ پخشپذیر کالبدی است.

(بـ) تحقیق کنید که شبکهٔ پخش ناپذیر شکل ۱۰ . ۵ (بـ) کالبدی است؛ پس عکس (آ) درست نخواهد بود.

(پـ) ثابت کنید شبکهٔ پخش ناپذیر شکل ۱۰ . ۵ (آ) غیر کالبدی است. [در واقع، می توان ثابت کرد که هر شبکهٔ غیر کالبدی شامل زیر شبکه ای یکریخت با شکل ۱۰ . ۵ (آ) می باشد.]

۱۰ . ۳۲. گوییم عنصر a در شبکهٔ L تحویل ناپذیر تماسی است اگر $a = x \wedge y$ ایجاب کند که $a = x$ یا $a = y$. جمیع عناصر تحویل ناپذیر تماسی در (آ) شکل ۱۰ . ۱۷؛ (بـ) شکل ۱۰ . ۱۸؛ (پـ) D_{60} را بیابید (ر. ک. مسئلهٔ ۱۰ . ۲۷).

۱۰ . ۳۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. همچنین L گردایهٔ تمام ایده آلهای R باشد. به ازای هر دو ایده آل J و K از R تعریف می کنیم

$$J \wedge K = J \cap K \quad و \quad J \vee K = J + K$$

ثابت کنید L یک شبکهٔ کراندار می باشد.

۱۰ . ۳۴. فرض کنید $S = \{1, 2, 3, 4\}$. سه افراز از S عبارتند از

$$P_1 = \{\overline{1, 2}, \bar{3}, \bar{4}\} = [\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}], \quad P_2 = \{\overline{1, 2}, \overline{3, 4}\}, \quad P_3 = \{\overline{1, 3}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

(آ) نه افراز دیگر S را بیابید.

(بـ) فرض کنید L گردایهٔ دوازده افراز S باشد که با تظریف مرتب شده است؛

یعنی، $P_i \precsim P_j$ اگر هر سلول P_i زیر مجموعه ای از یک سلول P_j باشد. به عنوان مثال، $P_1 \precsim P_2$، ولی P_2 و P_3 قیاس ناپذیرند. نشان دهید که L یک شبکهٔ کراندار است و نمودارش را رسم نمایید.

مسائل برنامه‌نویسی کامپیوتر

فرض کنید $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ با رابطهٔ سابق بلافصل $\ll$ جزئی مرتب شده باشد، که در آن $\ll$ شامل شش عنصر می باشد. همچنین $\ll$ در یک دسته کارت شش تایی چنان پانچ شده باشد که هر کارت شامل عنصری از $\ll$ باشد.

۱۰ . ۳۵. برنامه ای بنویسید که (آ) جمیع عناصر ماکزیمال و (بـ) جمیع عناصر مینیمال S را چاپ کند.

۱۰ . ۳۶. برنامه ای بنویسید که بگوید به ازای هر دو عنصر m, n در S آیا $m \prec n$ یا خیر.

۱۰ . ۳۷. برنامه ای بنویسید که یک شمارش سازگار S به توی $\{1, 2, \ldots, 6\}$ را چاپ نماید.

سه برنامهٔ فوق را با داده های زیر امتحان نمایید:

(یک) $3 \ll 2,\ 6 \ll 4,\ 2 \ll 5,\ 3 \ll 1,\ 4 \ll 5,\ 6 \ll 1$

(دو) $2 \ll 5,\ 3 \ll 6,\ 5 \ll 4,\ 5 \ll 1,\ 2 \ll 3,\ 5 \ll 6$

(سه) $6 \ll 1,\ 6 \ll 4,\ 5 \ll 2,\ 3 \ll 6,\ 5 \ll 3,\ 2 \ll 6$

۱۰ . ۳۸. زیر برنامه ای به نام LGCD بنویسید که LGCD (M, N) بزرگترین مقسوم علیه مشترک M و N را حساب کند، و زیر برنامه ای به نام LCM بنویسید که LCM(M, N) کوچکترین مضرب مشترک M و N را محاسبه نماید.

جواب مسائل تکمیلی

۱۰ . ۱۷. (آ) 6 مینیمال و 1 و 2 ماکزیمال اند.

(بـ) $\{1, 3, 4\},\ \{1, 3, 6\},\ \{2, 3, 4\},\ \{2, 3, 6\},\ \{2, 5, 6\}$

۱۰ . ۱۸. هر جفت مرتب $(p, 2)$ که در آن p اول باشد یک عنصر مینیمال است.

عنصر ماکزیمال وجود ندارد.

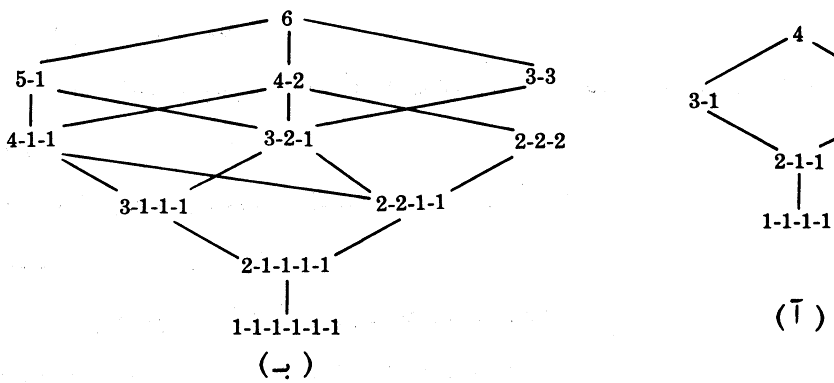
۱۰. ۱۹. (آ) $(1,3) \succ (1,5)$ ؛ (ب) $(4,1) \succ (2,18)$ ؛ (پ) $(4,30) \prec (4,4)$ ؛ (ت) $(2,2) \prec (15,15)$.

۱۰. ۲۰. (۱) (آ) $\{1,2,3\}$ ؛ (ب) $\{8\}$ ؛ (پ) $\sup(A) = 3$ ؛ (ت) $\inf(A) = 8$.

(۲) (آ) $\{2\}$ ؛ (ب) $\{6,8\}$ ؛ (پ) $\sup(B) = 2$ ؛ (ت) $\inf(B) = 6$.

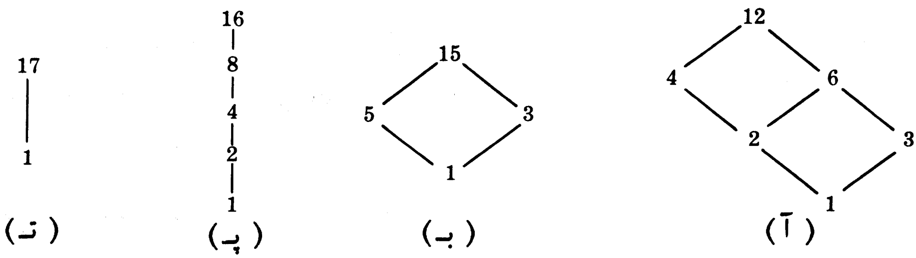
(۳) (آ) $\varnothing$. کران بالایی وجود ندارد. (ب) $\{8\}$ ؛ (پ) خیر؛ (ت) $\inf(C) = 8$.

۱۰. ۲۱. ر. ک. شکل ۱۰. ۱۹.



شکل ۱۰. ۱۹

۱۰. ۲۲. ر. ک. شکل ۱۰. ۲۰.



شکل ۱۰. ۲۰

۱۰. ۲۳. (آ) a ماکزیمال و d و f مینیمال اند.

(بـ) تعداد آنها یازده تاست:

$dfebca$, $dfecba$, $dfceba$, $fdebca$, $fdecba$, $fdceba$, $fedbca$, $fedcba$, $fcdeba$, $fecdba$, $fcedba$

۱۰ . ۲۴. (آ) a و d ؛ (بـ) e ؛ (پـ) $(b, c), (a, d)$.

۱۰ . ۲۵. (آ) تعداد آنها شش تاست: $0abdI$, $0acdI$, $0adeI$, $0bceI$, $0aceI$, $0cdeI$

(بـ) (یک) $a, b, e, 0$ ؛ (دو) a, b, c .

(پـ) c و e متممهای a اند . b دارای متمم نیست.

(تـ) خیر. خیر.

۱۰ . ۲۶. (آ) $a, b, c, g, 0$

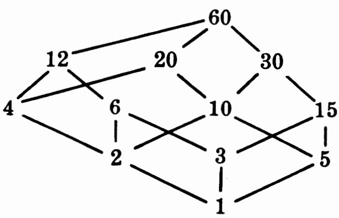
(بـ) a, b, c

(پـ) g تنها متمم a است. b دارای متمم نیست.

(تـ) $d = a \vee c$, $e = b \vee c$, $f = a \vee b = a \vee c$, $I = a \vee g$ سایر عناصر تحویل ناپذیر الحاقی اند .

(ثـ) خیر. خیر.

۱۰ . ۲۷. (آ) ر.ک. شکل ۱۰ . ۲۱.



شکل ۱۰ . ۲۱

(بـ) $1, 2, 3, 4, 5$. اتمها عبارتند از 2 ، 3 ، و 5 .

(پـ) 2 دارای متمم نیست؛ 3 متمم 10 می باشد .

(تـ) $60 = 4 \vee 3 \vee 5$, $30 = 2 \vee 3 \vee 5$, $20 = 4 \vee 5$,
$15 = 3 \vee 5$, $12 = 3 \vee 4$, $10 = 2 \vee 5$, $6 = 2 \vee 3$

۱۰ . ۲۸. (آ) توانهای اعداد اول و 1 . (بـ) اعداد اول.

۱۰ . ۳۱. (آ) هرگاه $a \leq c$ ، آنگاه $a \vee c = c$. لذا،

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$$

(پ) در اینجا $a \preccurlyeq c$. ولی $a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$ و $(a \vee b) \wedge c = I \wedge c = c$ ؛ پس $a \vee (b \wedge c) \neq (a \vee b) \wedge c$.

۱۰. ۳۲. به طور هندسی، عنصر $a \neq I$ تحویل ناپذیر تماسی است اگر و فقط اگر a فقط دارای یک تالی بلافصل باشد. (آ) a, c, d, e, I ؛ (ب) a, b, d, f, g, I ؛ (پ) $4, 6, 10, 12, 15, 60$.

۱۰. ۳٤. (آ) $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}, \{\overline{1, 4}, \bar{2}, \bar{3}\}, \{\overline{1, 3}, \overline{2, 4}\}, \{\overline{1, 4}, \overline{2, 3}\}, \{\overline{1, 2, 3}, \bar{4}\}$
$\{\overline{1, 2, 4}, \bar{3}\}, \{\overline{1, 3, 4}, \bar{2}\}, \{\overline{2, 3, 4}, \bar{1}\}, \{\overline{1, 2, 3, 4}\}$

۱۱
حساب گزاره ها

۱ . ۱۱ گزاره ها و گزاره های مرکب

گزاره ها با حروف

$$p, q, r$$

(با یا بدون زیر نویس) نموده می شوند . خاصیت اصلی یک گزاره این است که یا راست است یا دروغ ولی نه هر دو. راست یا دروغ بودن یک گزاره را ارزش راستی آن می نامند. بعضی از گزاره ها مرکب اند؛ یعنی، از چند زیر گزاره و رابط که بعداً مطرح می شوند تشکیل شده اند. این گزاره ها را گزاره های مرکب می نامیم.

مثال ۱ . ۱۱

(آ) « گلهای رز قرمز و گلهای بنفشه آبی اند » یک گزارهٔ مرکب است و زیر گزاره هایش عبارتند از « گلهای رز قرمزند » و « گلهای بنفشه آبی اند ».

(ب) گزارهٔ « او با هوش است یا هر شب مطالعه می کند » به طور ضمنی مرکب است با زیر گزاره های « او باهوش است» و « او هر شب مطالعه می کند ».

(پ) « کجا می روی؟» یک گزاره نیست زیرا نه راست است نه دروغ.

خاصیت اصلی یک گزارهٔ مرکب آن است که ارزش راستی اش را می توان با ارزشهای راستی زیر گزاره هایش همراه با نحوهٔ ارتباط آنها کاملاً معین کرد. بحث را با مطالعهٔ بعضی از این رابطها آغاز می کنیم.

۱۱ . ۲ ترکیب عطفی، $p \wedge q$

هر دو گزاره را می توان با حرف « و» با هم ترکیب و گزارهٔ مرکبی به نام ترکیب عطفی گزاره های اصلی تشکیل داد. با علامت،

$$p \wedge q$$

ترکیب عطفی گزاره های p و q است و خوانده می شود: « p و q ».

در جدول زیر ارزش راستی گزارهٔ مرکب $p \wedge q$ داده شده است:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

در اینجا اولین سطر بیان کوتاه این امر است که اگر p و q هر دو راست باشند، $p \wedge q$ نیز راست می باشد. سطر های دیگر معنی مشابهی خواهند داشت. ما این جدول را معرف ارزش راستی گزارهٔ مرکب $p \wedge q$ به صورت تابعی از ارزشهای راستی p و q می گیریم. توجه کنید که $p \wedge q$ فقط در حالتی راست است که هر دو زیر گزاره راست باشند.

مثال ۱۱ . ۲. چهار گزارهٔ زیر را در نظر می گیریم.

(یک) پاریس در فرانسه است و $2+2=4$ ؛

(دو) پاریس در فرانسه است و $2+2=5$ ؛

(سه) پاریس در انگلستان است و $2+2=4$ ؛

(چهار) پاریس در انگلستان است و $2+2=5$.

تنها گزارهٔ اول راست است. سایر گزاره ها دروغند زیرا دست کم یکی از زیر گزاره هایشان دروغ می باشد.

۱۱ . ۳ ترکیب فصلی، $p \vee q$

هر دو گزاره را می توان با کلمهٔ « یا» (به معنی « و / یا») برای تشکیل گزارهٔ

جدیدی که ترکیب فصلی دو گزارهٔ اصلی نام دارد ترکیب کرد. علامت

$$p \vee q$$

ترکیب فصلی p و q را نشان می دهد و خوانده می شود: « p یا q ».

ارزش راستی $p \vee q$ با جدول زیر داده می شود که ما آن را معرف $p \vee q$ می گیریم:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

توجه کنید که $p \vee q$ فقط وقتی دروغ است که هر دو زیر گزاره دروغ باشند.

مثال ۱۱ . ۳. چهار گزارهٔ زیر را در نظر می گیریم:

(**یک**) پاریس در فرانسه است یا $2+2=4$ ؛

(**دو**) پاریس در فرانسه است یا $2+2=5$ ؛

(**سه**) پاریس در انگلستان است یا $2+2=4$ ؛

(**چهار**) پاریس در انگلستان است یا $2+2=5$.

تنها گزارهٔ (چهار) دروغ است. سایر گزاره ها راست اند زیرا دست کم یکی از زیر گزاره ها یشان راست می باشد.

تبصره. کلمهٔ « یا » معمولاً به دو راه متمایز به کار می رود. گاهی به معنی « p یا q یا هر دو» به کار می رود؛ یعنی، مثل فوق، دست کم یکی از دو حالت رخ می دهد، و گاهی به معنی « p یا q ولی نه هر دو» استفاده می شود؛ یعنی، درست یکی از دو حالت رخ خواهد داد. به عنوان مثال، در جملهٔ « او به دانشگاه تهران یا دانشگاه آزاد می رود» « یا » به معنی دوم است که یای منع جمع نام دارد. ما « یا » را به معنی اول می گیریم مگر خلافش تصریح شود. این بحث به دقت ناشی از زبان علامتی ما اشاره دارد: $p \vee q$ با جدول راستی اش تعریف شده است و همیشه به معنی

« p و / یا q » می باشد.

۱۱ . ٤ نقیض، $\sim p$

از هر گزارهٔ p می توان گزاره ای دیگر به نام نقیض p را با گذاردن « چنین نیست که» در جلو p یا (در صورت امکان) با درج « نه» در p به دست آورد. علامت

$$\sim p$$

نقیض p را نشان می دهد (بخوانید: « چنین نیست که p »).

ارزش راستی $\sim p$ با جدول زیر داده می شود:

p	$\sim p$
T	F
F	T

به عبارت دیگر، اگر p راست باشد، $\sim p$ دروغ است و اگر p دروغ باشد، $\sim p$ راست می باشد. لذا، ارزش راستی نقیض یک گزاره همواره مخالف ارزش راستی گزارهٔ اصلی خواهد بود.

مثال ۱۱ . ٤. گزاره های زیر را در نظر می گیریم:

(آ) پاریس در فرانسه است؛

(بـ) چنین نیست که پاریس در فرانسه است؛

(پـ) پاریس در فرانسه نیست؛

(تـ) $2+2=5$؛

(ثـ) چنین نیست که $2+2=5$؛

(جـ) $2+2\neq 5$.

در این صورت، (بـ) و (پـ) هر یک نقیض (آ) اند، و (ثـ) و (جـ) هر یک نقیض (تـ) می باشند. چون (آ) راست است، گزاره های (بـ) و (پـ) دروغ می باشند؛ و چون (تـ) دروغ است، گزاره های (ثـ) و (جـ) راست می باشند.

تبصره. نمادهای منطقی رابطهای « و»، « یا»، و « چنین نیست که» کاملاً متعارف

نیستند. مثلاً در بعضی از کتابها

به جای $p \wedge q$ از علامت $p \& q$ ، $p \cdot q$ ، یا pq

به جای $p \vee q$ از علامت $p + q$

به جای $\sim p$ از علامت p' ، $\bar{p}$ ، یا $\neg p$

استفاده شده است.

۱۱ . ۵ ترکیبات منطقی و جداول راستی

با استفادهٔ مکرر از رابطهای منطقی ($\wedge$ ، $\vee$ ، $\sim$ ، و سایر رابطها که بعداً می آیند) می توان گزاره های مرکبی را که پیچیده ترند ساخت. در حالتی که زیر گزاره های $p, q, \ldots$ گزارهٔ مرکب $P(p, q, \ldots)$ متغیر باشند، گزارهٔ مرکب را یک ترکیب منطقی می نامیم.

ارزش راستی یک ترکیب منطقی فقط تابع ارزشهای راستی متغیرهایش است؛ یعنی، ارزش راستی یک ترکیب منطقی با دانستن ارزشهای راستی متغیرهایش معلوم می شود. یک راه ساده برای نشان دادن این رابطه جدول راستی می باشد. مثلاً، جدول راستی ترکیب منطقی $\sim(p \wedge \sim q)$ به قرار زیر می باشد:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

ملاحظه می کنیم که ستونهای اول برای متغیرهای $p, q, \ldots$ بوده و آنقدر سطر در جدول داریم که جمیع ترکیبات ممکن T و F برای این متغیرها را داشته باشیم.

(برای 2 متغیر، مثل بالا، 4 سطر لازم است؛ برای 3 متغیر 8 سطر لازم است؛ و، در حالت کلی، برای n متغیر 2^n سطر لازم خواهد بود.) پس برای هر مرحلهٔ «مقدماتی» ساخت ترکیب منطقی یک ستون وجود دارد و ارزش راستی در هر مرحله را می توان از مراحل قبل به وسیلهٔ تعاریف رابطهای $\sim$ ، $\vee$ ، $\wedge$ معین کرد. در پایان، ارزش راستی ترکیب منطقی به دست می آید که در آخرین ستون دیده می شود.

تبصره. جدول راستی ترکیب منطقی فوق درست از ستونهای زیر متغیرها و ستون زیر ترکیب منطقی تشکیل شده است:

p	q	$\sim(p \wedge \sim q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

سایر ستونها صرفاً برای ساختن جدول راستی به کار می رود.

راه دیگر ساختن جدول راستی فوق برای $\sim(p \wedge \sim q)$ به قرار زیر است. ابتدا جدول زیر را می سازیم:

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

مرحله

توجه کنید که ترکیب منطقی در سطر فوقانی و سمت راست متغیرهایش نوشته شده و زیر هر متغیر یا رابط ترکیب منطقی یک ستون می آید. سپس ارزشهای راستی در مراحل مختلف وارد جدول راستی می شوند (ر.ک. صفحهٔ بعد)

در این صورت، جدول راستی ترکیب منطقی از ستونهای اصلی زیر متغیرها و آخرین ستون وارد شده در جدول، یعنی آخرین مرحله، تشکیل شده است.

۱۱ . ۶ راستگوها و تناقضات

بعضی از ترکیبات منطقی $P(p, q, \ldots)$ در آخرین ستون جدول راستی خود فقط شامل T اند؛ یعنی، به ازای جمیع ارزشها برای متغیرهایشان راست اند. این ترکیبات را راستگو می نامیم. به همین نحو، ترکیب منطقی $P(p, q, \ldots)$ را یک تناقض نامیم اگر در آخرین ستون جدول ارزش خود فقط شامل F باشد؛ یعنی، به ازای جمیع ارزشهای مقادیر خود دروغ باشد. به عنوان مثال، ترکیب منطقی « p یا چنین نیست

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T		T			T
T	F		T			F
F	T		F			T
F	F		F			F
مرحله			1			1

(آ)

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T		T		F	T
T	F		T		T	F
F	T		F		F	T
F	F		F		T	F
مرحله			1		2	1

(ب)

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T		T	F	F	T
T	F		T	T	T	F
F	T		F	F	F	T
F	F		F	F	T	F
مرحله			1	3	2	1

(پ)

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T	F
مرحله		4	1	3	2	1

(ت)

که p »، یعنی $p \vee \sim p$ ، یک راستگوست و ترکیب منطقی « p و چنین نیست که p »، یعنی $p \wedge \sim p$ ، یک تناقض می باشد. این امر با ساختن جداول راستی آنها تحقیق می شود:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

ملاحظه می کنیم که نقیض هر راستگو یک تناقض است زیرا همیشه دروغ می باشد، و نقیض هر تناقض یک راستگوست زیرا همواره راست خواهد بود.

حال فرض کنیم $P(p, q, \ldots)$ یک راستگو بوده و

$$P_1(p, q, \ldots), P_2(p, q, \ldots), \ldots$$

ترکیباتی منطقی باشند. چون $P(p, q, \ldots)$ به ارزشهای راستی خاصی از متغیرهای $p, q, \ldots$ وابسته نیست، می توان در راستگوی $P(p, q, \ldots)$ به جای p، P_1، به جای q، P_2، و غیره گذارد و یک راستگو به دست آورد. به عبارت دیگر:

قضیهٔ ۱.۱۱ (اصل جانشانی). هرگاه $P(p, q, \ldots)$ یک راستگو باشد، آنگاه $P(P_1, P_2, \ldots)$ به ازای ترکیبات منطقی $P_1, P_2, \ldots$ یک راستگو خواهد بود.

۷.۱۱ هم ارزي منطقی

گوییم دو ترکیب منطقی $P(p, q, \ldots)$ و $Q(p, q, \ldots)$ به طور منطقی هم ارز یا فقط هم ارز یا مساوی اند، و آن را با

$$P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$$

نشان می دهیم اگر دارای جداول راستی یکسان باشند. مثلاً، جداول راستی $\sim(p \wedge q)$ و $\sim p \vee \sim q$ را در نظر می گیریم:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

چون دو جدول راستی یکسانند، یعنی دو ترکیب در حالت اول دروغ و در سه حالت

دیگر راست است، ترکیبات $\sim(p \wedge q)$ و $\sim p \vee \sim q$ به طور منطقی هم ارزند و می توان نوشت:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

حال گزارهٔ زیر را در نظر می گیریم:

«چنین نیست که گلهای رز قرمز و گلهای بنفشه آبی اند»

این گزاره را می توان به شکل $\sim(p \wedge q)$ نوشت که در آن p عبارت است از «گلهای رز قرمزند» و q عبارت است از «گلهای بنفشه آبی اند». ولی از جداول راستی فوق معلوم می شود که $\sim(p \wedge q)$ به طور منطقی هم ارز $\sim p \vee \sim q$ می باشد. لذا، گزارهٔ داده شده به معنی گزارهٔ زیر می باشد:

«گلهای رز قرمزنیستند یا گلهای بنفشه آبی نیستند»

۸.۱۱ جبر ترکیبات منطقی

ترکیبات منطقی در قوانین مختلف مذکور در جدول ۱.۱۱ صدق می کنند. (در این جدول، t و f به ترتیب ارزشهای «راست» و «دروغ» خواهند داشت.) ما این نتیجه را به طور صوری بیان می کنیم.

قضیهٔ ۲.۱۱. ترکیبات منطقی در قوانین جدول ۱.۱۱ صدق می کنند.

۹.۱۱ گزاره های شرطی و دو شرطی

بسیاری از گزاره ها، به خصوص در ریاضیات، به شکل «هرگاه p، آنگاه q» اند. این گزاره ها را گزاره های شرطی نامند و با

$$p \rightarrow q$$

نشان می دهند. گزارهٔ شرطی $p \rightarrow q$ را اغلب به صورت «p، q را ایجاب می کند» یا «p فقط اگر q» می خوانند.

گزارهٔ معمول دیگر به شکل «p اگر و فقط اگر q» است. این گزاره ها را گزاره های دو شرطی نامیده و با

جدول ۱۱ . ۱ قوانین جبر ترکیبات منطقی

قوانین خودنمایی

۱ آ. $p \vee p \equiv p$ — ۱ ب. $p \wedge p \equiv p$

قوانین شرکتپذیری

۲ آ. $p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ — ۲ ب. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

قوانین تعویضپذیری

۳ آ. $p \vee q \equiv q \vee p$ — ۳ ب. $p \wedge q \equiv q \wedge p$

قوانین پخشپذیری

٤ آ. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ — ٤ ب. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

قوانین همانی

۵ آ. $p \vee f \equiv p$ — ۵ ب. $p \wedge t \equiv p$

٦ آ. $p \vee t \equiv t$ — ٦ ب. $p \wedge f \equiv f$

قوانین متممگیری

۷ آ. $p \vee \sim p \equiv t$ — ۷ ب. $p \wedge \sim p \equiv f$

۸ آ. $\sim t \equiv f$ — ۸ ب. $\sim f \equiv t$

قانون برگشت

۹. $\sim \sim p \equiv p$

قوانین دمورگان

۱۰ آ. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ — ۱۰ ب. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$$p \leftrightarrow q$$

نشان می دهیم.

ارزشهای راستی $p \to q$ و $p \leftrightarrow q$ در جدول زیر داده شده است:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

توجه کنید که گزارهٔ شرطی $p \to q$ فقط وقتی دروغ است که اولین قسمت p راست و دومین قسمت q دروغ باشد. در حالت دروغ بودن p ، گزارهٔ شرطی $p \to q$ صرف نظر از ارزش راستی q راست است. همچنین ملاحظه می کنیم که $p \leftrightarrow q$ وقتی راست است که p و q هم ارزش باشند.

حال جدول راستی ترکیب منطقی $\sim p \vee q$ را در نظر می گیریم:

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

ملاحظه می کنیم که جدول راستی فوق با جدول راستی $p \to q$ یکی است. لذا، $p \to q$ هم ارز منطقی ترکیب $\sim p \vee q$ می باشد:

$$p \to q \equiv \sim p \vee q$$

به عبارت دیگر، گزارهٔ شرطی « هرگاه p ، آنگاه q » هم ارز منطقی گزارهٔ « چنین نیست که p یا q » است که فقط شامل رابطهای $\vee$ و $\sim$ بوده و لذا بخشی از زبان ما می باشد. $p \to q$ را می توان اختصاری برای یک گزارهٔ متداول در نظر گرفت.

۱۱ . ۱۰ استدلالها

یک استدلال اظهار مثبتی است که می گوید: مجموعهٔ داده شده ای از گزاره ها مانند $P_1, P_2, \ldots, P_n$ به نام مفروضات گزارهٔ دیگری مانند Q به نام نتیجه را به دست می دهد. یک چنین استدلال را با

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

نشان می دهیم. مفهوم « استدلال منطقی» یا « استدلال معتبر» به قرار زیر صوری می شود:

گوییم استدلال $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ معتبر است اگر وقتی همهٔ مفروضات $P_1, P_2, \ldots, P_n$ راست باشند، Q راست باشد.

استدلالی که معتبر نباشد یک مغالطه نام دارد.

مثال ۱۱ . ۵

(آ) استدلال زیر معتبر است:

$$p, p \to q \vdash q$$ (قانون تفکیک)

برهان این قاعده از جدول راستی زیر نتیجه می شود :

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

چون p در حالات (سطرهای) ۱ و ۲ راست بوده و $p \to q$ در حالت ۱، ۳، و ٤ راست است، پس p و $p \to q$ در حالت ۱ همزمان راست اند . و چون در این حالت q راست است، استدلال معتبر خواهد بود .

(بـ) استدلال زیر یک مغالطه است:

$$p \to q, q \vdash p$$

زیرا $p \to q$ و q هر دو در حالت (سطر) ۳ جدول راستی فوق راست اند ولی در این حالت p دروغ می باشد .

حال گوییم ترکیبات منطقی $P_1, P_2, \ldots, P_n$ همزمان راست اند اگر و فقط اگر ترکیب منطقی $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ راست باشد . لذا، استدلال

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

معتبر است اگر و فقط اگر هر وقت $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ راست باشد، Q راست باشد یا، معادلاً، ترکیب منطقی $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \to Q$ یک راستگو باشد . ما این نتیجه را به طور صوری بیان می کنیم.

قضیهٔ ۱۱ . ۳. استدلال $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ معتبر است اگر و فقط اگر ترکیب منطقی $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \to Q$ راستگو باشد.

ما این قضیه را در مثال زیر به کار می بریم.

مثال ۱۱ . ۶ . اصل اساسی استدلال منطقی می گوید که:

« هرگاه p ، q و q ، r را ایجاب کند، آنگاه p ، r را ایجاب خواهد کرد.»

یعنی، استدلال زیر معتبر می باشد:

$$p \to q, q \to r \vdash p \to r \quad (\text{قانون تعدی})$$

این امر را می توان با جدول راستی زیر تحقیق کرد که راستگو بودن ترکیب

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

را نشان می دهد.

p	q	r	$[(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$r)]$	$\to$	$(p$	$\to$	$r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
مرحله			1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

به عبارت معادل، استدلال به این دلیل معتبر است که مقدمات $p \to q$ و $q \to r$ فقط در حالات (سطور) ۱، ۵، ۷، و ۸ همزمان راست اند و در این حالات نتیجهٔ $p \to r$ نیز راست می باشد. (ملاحظه می کنیم که جدول راستی دارای $8 = 2^3$ سطر است و این به دلیل داشتن سه متغیر p ، q ، و r می باشد.)

حال نظریهٔ فوق رادر استدلالهایی مستلزم گزاره هایی خاص به کار می گیریم. تأکید کنیم که اعتبار یک استدلال به ارزشها و محتوای گزاره های آمده در استدلال بستگی نداشته و فقط تابع شکل خاص استدلال می باشد. این امر در مثالهای زیر توضیح داده شده است.

مثال ۱۱ . ۷. استدلال زیر را در نظر می گیریم:

S_1 : هرگاه شخصی مجرد باشد، آنگاه او ناشاد است؛

S_2 : هرگاه شخصی ناشاد باشد، آنگاه او در جوانی می میرد.

. . . .

S : مجردها در جوانی می میرند.

در اینجا گزارهٔ S زیر خط نقطه چین نتیجهٔ استدلال و گزاره های S_1 و S_2 بالای این خط مقدمات می باشند. حکم می کنیم که استدلال $S_1, S_2 \vdash S$ معتبر است، زیرا این استدلال به شکل زیر است:

$$p \to q,\ q \to r \ \vdash\ p \to r$$

که در آن p عبارت است از «او یک مجرد است»، q عبارت است از «او ناشاد است»، و r عبارت است از «او در جوانی می میرد»؛ و، بنابر مثال ۱۱ . ۶، این استدلال (قانون تعدی) معتبر می باشد.

۱۱ . ۱۱ استلزام منطقی

گوییم ترکیب منطقی $P(p, q, \ldots)$ ترکیب منطقی $Q(p, q, \ldots)$ را به طور منطقی ایجاب می کند[1] و می نویسیم

$$P(p, q, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, \ldots)$$

اگر هر وقت $P(p, q, \ldots)$ راست باشد $Q(p, q, \ldots)$ نیز راست باشد.

مثال ۱۱ . ۸. حکم می کنیم که p به طور منطقی $p \vee q$ را ایجاب می کند. ذیلاً جداول راستی p و $p \vee q$ را در نظر می گیریم. ملاحظه می کنیم که p در حالات (سطور) ۱ و ۲ راست است و $p \vee q$ نیز در این حالات راست می باشد. به عبارت دیگر، p به طور منطقی $p \vee q$ را ایجاب خواهد کرد.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

حال گوییم هرگاه $Q(p, q, \ldots)$ به ازای راست بودن $P(p, q, \ldots)$ راست باشد، آنگاه استدلال

$$P(p, q, \ldots) \vdash Q(p, q, \ldots)$$

معتبر می باشد و بالعکس. به علاوه، استدلال $P \vdash Q$ معتبر است اگر و فقط اگر گزارهٔ شرطی $P \rightarrow Q$ همواره راست (یعنی یک راستگو) باشد. ما این نتیجه را به طور صوری بیان می کنیم.

قضیهٔ ۱۱ . ٤. به ازای ترکیبات منطقی $P(p, q, \ldots)$ و $Q(p, q, \ldots)$ ، سه گزارهٔ زیر هم ارز می باشند:

(یک) $P(p, q, \ldots)$ ترکیب $Q(p, q, \ldots)$ را منطقاً ایجاب می کند؛

(دو) استدلال $P(p, q, \ldots) \vdash Q(p, q, \ldots)$ معتبر است؛

(سه) ترکیب منطقی $P(p, q, \ldots) \rightarrow Q(p, q, \ldots)$ یک راستگو می باشد.

تذکار دهیم که بعضی از منطقیون و بسیاری از کتابها واژهٔ «ایجاب می کند»را به معنی « منطقاً ایجاب می کند »به کار می برند و لذا بین « ایجاب می کند » و «هرگاه . . .، آنگاه » فرق می گذارند. اما، همانطور که از قضیهٔ فوق دیده می شود، این دو مفهوم متمایز ارتباط نزدیکی با هم دارند.

مسائل حل شده

گزاره و گزاره های مرکب

۱۱. ۱ فرض کنید p عبارت باشد از « هوا سرد است» و q عبارت باشد از « باران می آید». گزاره های زیر را با لفظ ساده بیان نمایید:

(۱) $\sim p$ ؛ (۲) $p \wedge q$ ؛ (۳) $p \vee q$ ؛ (٤) $q \vee \sim p$ ؛ (۵) $\sim p \wedge \sim q$ ؛ (٦) $\sim \sim q$.

حل. ما در هر حالت $\wedge$ ، $\vee$ ، و $\sim$ را به « و»، « یا »، و « چنین نیست که »

یا « نفی» ترجمه کرده و سپس جملـه را ساده می نماییم.

(۱) هوا سرد نیست. (۲) هوا سرد و بارانی است.

(۳) هوا سرد یا بارانی است (٤) هوا بارانی است یا سرد نیست.

(۵) هوا سرد نیست و بارانی نیست (٦) چنین نیست که باران نمی‌آید.

۱۱ . ۲. فرض کنید p عبارت باشد از « او قد بلند است» و q عبارت باشد از « او خوش قیافه است». هر یک از گزاره های زیر را با استفاده از p و q به شکل علامتی بنویسید.

(۱) او قد بلند است و خوش قیافه است؛

(۲) او قد بلند است ولی خوش قیافه نیست؛

(۳) چنین نیست که او قد کوتاه یا خوش قیافه است؛

(٤) او نه قد بلند است نه خوش قیافه؛

(۵) او قد بلند است یا او قد کوتاه و خوش قیافه است؛

(٦) چنین نیست که او قد کوتاه است یا خوش قیافه نیست.

حل. (فرض کنیم « او قد کوتاه است» به معنی « او قد بلند نیست» یعنی $\sim p$ باشد.)

(۱) $p \wedge q$ ؛

(۲) $p \wedge \sim q$ ؛

(۳) $\sim(\sim p \vee q)$ ؛

(٤) $\sim p \wedge \sim q$ ؛

(۵) $p \vee (\sim p \wedge q)$ ؛

(٦) $\sim(\sim p \vee \sim q)$.

ترکیبات منطقی و جداول راستی آنها

۱۱ . ۳. جدول راستی $\sim p \wedge q$ را بیابید.

حل.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

روش ۱

p	q	$\sim$	p	$\wedge$	q
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	F
مرحله		2	1	3	1

روش ۲

۱۱ . ٤ . جدول راستی $\sim(p \vee q)$ را بیابید .

حل.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

روش ۱

p	q	$\sim$	$(p$	$\vee$	$q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F
مرحله		3	1	2	1

روش ۲

۱۱ . ۵ . جدول راستی $\sim(p \vee \sim q)$ را بیابید .

حل.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$
T	T	F	T	F
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

روش ۱

p	q	$\sim$	$(p$	$\vee$	$\sim$	$q)$
T	T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	F	F	T
F	F	F	F	T	T	F
مرحله		4	1	3	2	1

روش ۲

راستگو ها و تناقضها

۱۱ . ۶. تحقیق کنید که ترکیب منطقی $p \vee \sim(p \wedge q)$ یک راستگوست.

حل. جدول راستی $p \vee \sim(p \wedge q)$ را می سازیم:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

چون ارزش راستی $p \vee \sim(p \wedge q)$ به ازای جمیع ارزشهای p و q مساوی T است، پس این ترکیب یک راستگو می باشد.

۱۱ . ۷. تحقیق کنید که ترکیب منطقی $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ یک تناقض است.

حل. جدول راستی $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ را می سازیم:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

چون ارزش راستی $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ به ازای جمیع ارزشهای p و q مساوی F است،

این گزاره یک تناقض می باشد.

هم ارزی منطقی

۱۱ . ۸. ثابت کنید که فاصل روی عاطف پخشپذیر است؛ یعنی، قانون پخشپذیری را ثابت کنید: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

حل. جداول راستی لازم را می سازیم:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

چون جداول راستی یکی اند، ترکیبات هم ارز می باشند.

۱۱ . ۹. ثابت کنید که می توان عمل فاصل را بر حسب اعمال عاطف و ناقض نوشت. به طور مشخص، $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$.

حل. جداول راستی لازم را می سازیم.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	F

چون جداول راستی یکی اند، ترکیبات هم ارز می باشند.

۱۱ . ۱۰. هر یک از ترکیبات منطقی زیر را با استفاده از قوانین جدول ۱۱ . ۱ ساده

کنید: (آ) $p \vee (p \wedge q)$ ؛ (بـ) $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$.

حل. (آ)

	شرح	دلیل
(۱)	$p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge t) \vee (p \wedge q)$	(۱) قانون همانی
(۲)	$\equiv p \wedge (t \vee q)$	(۲) قانون پخشپذیری
(۳)	$\equiv p \wedge t$	(۳) قانون همانی
(٤)	$\equiv p$	(٤) قانون همانی

(بـ)

	شرح	دلیل
(۱)	$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$	(۱) قانون دمورگان
(۲)	$\equiv \sim p \wedge (\sim q \vee q)$	(۲) قانون پخشپذیری
(۳)	$\equiv \sim p \wedge t$	(۳) قانون متممگیری
(٤)	$\equiv \sim p$	(٤) قانون همانی

نقیض

۱۱ . ۱۱. قوانین دمورگان را ثابت کنید:

(آ) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ؛

(بـ) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

حل. در هر حالت جداول راستی لازم را می سازیم.

(آ)

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

(بـ)

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

۱۱ . ۱۲. تحقیق کنید که $\sim \sim p \equiv p$.

حل.

p	$\sim p$	$\sim \sim p$
T	F	T
F	T	F

۱۱ . ۱۳. گزاره های زیر را با استفاده از مسائل قبل ساده کنید :

(آ) چنین نیست که مادرش انگلیسی یا پدرش فرانسوی است؛

(بـ) چنین نیست که او فیزیک می خواند ولی ریاضی نمی خواند ؛

(پـ) چنین نیست که فروش در حال کاهش و قیمتها در حال افزایش است؛

(تـ) چنین نیست که هوا سرد نیست یا باران می بارد .

حل. (آ) فرض کنیم p عبارت باشد از « مادرش انگلیسی است» و q عبارت باشد از « پدرش فرانسوی است». در این صورت، گزارهٔ مورد نظر عبارت است از $\sim(p \vee q)$. ولی $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$. لذا، گزارهٔ ما منطقاً هم ارز گزارهٔ «مادرش انگلیسی نیست و پدرش فرانسوی نیست» می باشد . (بـ) فرض کنیم p عبارت باشد از « او فیزیک می خواند » و q عبارت باشد از « او ریاضی می خواند ». در این صورت، گزارهٔ مورد نظر عبارت است از $\sim(p \wedge \sim q)$. ولی $\sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee \sim \sim q \equiv \sim p \vee q$. لذا، گزارهٔ داده شده منطقاً هم ارز گزارهٔ

«او فیزیک نمی خواند یا او ریاضی می خواند» می باشد.

(پ) چون $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ، گزارهٔ مورد نظر منطقاً هم ارز گزارهٔ « فروش در حال افزایش است یا قیمتها در حال کاهش اند» می باشد.

(ت) چون $\sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$ ، گزارهٔ مورد نظر منطقاً هم ارز گزارهٔ « هوا سرد است و باران نمی آید» می باشد.

گزاره های شرطی و دو شرطی

۱۱. ۱٤. گزاره های زیر را از حالت شرطی خارج کنید:

(آ) اگر هوا سرد است، او کلاه بر سر می گذارد؛

(ب) اگر تولید افزایش یابد، دستمزدها بالا می روند.

حل. به یاد آورید که « هرگاه p ، آنگاه q » هم ارز « چنین نیست که p یا q » است؛ یعنی، $p \to q \equiv \sim p \vee q$.

(آ) هوا سرد نیست یا او کلاه بر سر می گذرد.

(ب) تولید افزایش نمی یابد یا دستمزد ها بالا می روند.

۱۱. ۱۵. (آ) نشان دهید که « p ، q و q ، p را ایجاب می کند » منطقاً هم ارز گزارهٔ دو شرطی « p اگر و فقط اگر q »است؛ یعنی، $(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv p \leftrightarrow q$.

(ب) نشان دهید که گزارهٔ دو شرطی $p \leftrightarrow q$ را می توان بر حسب سه رابط اصلی $\vee$ ، $\wedge$ ، و $\sim$ نوشت.

حل. (آ)

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

(ب) داریم $p \to q \equiv \sim p \vee q$ و $q \to p \equiv \sim q \vee p$ ؛ پس

$$p \leftrightarrow q \;\equiv\; (p \to q) \wedge (q \to p) \;\equiv\; (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

۱۱ . ۱۶ . جدول راستی $(p \to q) \to (p \wedge q)$ را معین کنید .

حل.

p	q	$p \to q$	$p \wedge q$	$(p \to q) \to (p \wedge q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F

۱۱ . ۱۷ . جدول راستی $(p \to q) \vee \sim (p \leftrightarrow \sim q)$ را معین کنید .

حل.

p	q	$(p$	$\to$	$q)$	$\vee$	$\sim$	$(p$	$\leftrightarrow$	$\sim$	$q)$
T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T	T	T	F
F	T	F	T	T	T	F	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T	T	F	F	T	F
مرحله		1	2	1	5	4	1	3	2	1

۱۱ . ۱۸ . ترکیب شرطی $p \to q$ و سایر ترکیبات سادهٔ شامل p و q :

$$q \to p \text{ ، } \sim p \to \sim q \text{ ، و } \sim q \to \sim p$$

را در نظر بگیرید . این ترکیبات را به ترتیب، عکس، معکوس، و عکس نقیض ترکیب شرطی $p \to q$ می نامند . از این ترکیبات کدامها با $p \to q$ منطقاً هم ارزند ؟

حل. جداول راستی آنها را در نظر می گیریم.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	شرطی $p \to q$	عکس $q \to p$	معکوس $\sim p \to \sim q$	عکس نقیض $\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

تنها عکس نقیض $\sim q \to \sim p$ با ترکیب شرطی اصلی $p \to q$ منطقاً هم ارز است.

استدلالها و استلزام منطقی

۱۱. ۱۹. نشان دهید که استدلال زیر معتبر است: $p \leftrightarrow q,\ q \vdash p$.

حل. روش ۱. جدول راستی زیر را در نظر می گیریم. $p \leftrightarrow q$ در حالات (سطرهای)

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

۱ و ٤ راست بوده و q در حالات ۱ و ۳ راست است؛ لذا، $p \leftrightarrow q$ و q فقط در حالت ۱ که p نیز راست است همزمان راست می باشند. بنابراین، استدلال $p \leftrightarrow q,\ q \vdash p$ معتبر خواهد بود.

روش ۲. جدول راستی $[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \to p$ را در نظر می گیریم:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge q$	$[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \to p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

چون $[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \to p$ راستگوست، استدلال معتبر می باشد.

۱۱. ۲۰. اعتبار استدلال زیر را بیازمایید:

هرگاه من مطالعه کنم، آنگاه در ریاضی رد نمی شوم؛

هر گاه من بسکتبال بازی نکنم، آنگاه مطالعه خواهم کرد؛

ولی من در ریاضی رد شدم.

. . . .

بنابراین، من بسکتبال بازی کردم.

حل. ابتدا مطالب را به شکل علامتی در می آوریم. فرض کنیم p عبارت باشد از « من مطالعه می کنم»، q عبارت باشد از « من در ریاضی رد می شوم»، و r عبارت باشد از « من بسکتبال بازی می کنم». در این صورت، استدلال فوق به قرار زیر خواهد بود:

$$p \to \sim q,\ \sim r \to p,\ q \ \vdash\ r$$

برای امتحان کردن اعتبار استدلال، جداول راستی گزاره های $p \to \sim q$ ، $\sim r \to p$ ، q و r را می سازیم:

p	q	r	$\sim q$	$p \to \sim q$	$\sim r$	$\sim r \to p$
T	T	T	F	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	T
F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F

چون مقدمات $p \to \sim q$ ، $\sim r \to p$ ، و q فقط در حالت (سطر) ۵ همزمان راست بوده و در این حالت نتیجهٔ r نیز راست است؛ پس استدلال معتبر می باشد.

۱۱ . ۲۱. نشان دهید که $p \leftrightarrow q$ منطقاً $p \to q$ را ایجاب می کند.

حل. روش ۱. جداول راستی $p \leftrightarrow q$ و $p \to q$ را می سازیم(ر.ک. صفحهٔ بعد)

چون $p \leftrightarrow q$ در سطرهای ۱ و ٤ راست است و در این حالات $p \to q$ نیز راست می باشد، لذا، $p \leftrightarrow q$ منطقاً $p \to q$ را ایجاب خواهد کرد.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	T	T

روش ۲. جدول راستی $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ را می سازیم. این یک راستگوست؛ پس، بنا بر قضیهٔ ۱۱. ٤، $p \leftrightarrow q$ منطقاً $p \rightarrow q$ را ایجاب خواهد کرد.

۱۱. ۲۲. نشان دهید که $p \leftrightarrow \sim q$ منطقاً $p \rightarrow q$ را ایجاب نخواهد کرد.

حل. روش ۱. جداول راستی $p \leftrightarrow \sim q$ و $p \rightarrow q$ را می سازیم:

p	q	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

به یاد آورید که $p \leftrightarrow \sim q$ در صورتی منطقاً $p \rightarrow q$ را ایجاب می کند که هر وقت $p \leftrightarrow \sim q$ راست باشد $p \rightarrow q$ نیز راست باشد. ولی $p \leftrightarrow \sim q$ در حالت (سطر) ۲ جدول فوق راست بوده و در این حالت $p \rightarrow q$ دروغ است. لذا، $p \leftrightarrow \sim q$ منطقاً $p \rightarrow q$ را ایجاب نخواهد کرد.

روش ۲. جدول راستی ترکیب $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ را می سازیم. این یک راستگو نیست. پس، طبق قضیهٔ ٤. ۲، $p \leftrightarrow \sim q$ منطقاً $p \rightarrow q$ را ایـجاب نمی‌کند.

مسائل گوناگون

۱۱. ۲۳. فرض کنید Apq نمایش $p \wedge q$ و Np نمایش $\sim p$ باشد. ترکیبات زیر را با استفاده از A و N به جای $\wedge$ و $\sim$ بازنویسی کنید:

(آ) $p \wedge \sim q$ ؛ (ب) $\sim(\sim p \wedge q)$ ؛ (پ) $\sim p \wedge (\sim q \wedge r)$ ؛

(ت) $\sim(p \wedge \sim q) \wedge (\sim q \wedge \sim r)$.

حل. (آ) $p \wedge \sim q = p \wedge Nq = ApNq$

(ب) $\sim(\sim p \wedge q) = \sim(Np \wedge q) = \sim(ANpq) = NANpq$

(پ) $\sim p \wedge (\sim q \wedge r) = Np \wedge (Nq \wedge r) = Np \wedge (ANqr) = ANpANqr$

(ت) $\sim(p \wedge \sim q) \wedge (\sim q \wedge \sim r) = \sim(ApNq) \wedge (ANqNr) = (NApNq) \wedge (ANqNr)$
$= ANApNqANqNr$

توجه کنید که در جواب آخری، وقتی A و N به جای $\wedge$ و $\sim$ به کار رود، پرانتز وجود نخواهد داشت. ثابت شده است که پرانتز لازم نیست. به علاوه، چون هر رابط منطقاً هم ارز A و N یعنی $\wedge$ و $\sim$ است، نمادگذاری فوق برای هر بحثی از جبر گزاره ها کافی خواهد بود.

۱۱. ۲۴. ترکیبات زیر را با استفاده $\wedge$ و $\sim$ به جای A و N بازنویسی کنید:
(آ) $NApq$ ؛ (ب) $ANpq$ ؛ (پ) $ApNq$ ؛ (ت) $ApAqr$ ؛
(ث) $NAANpqr$ ؛ (ج) $ANpAqNr$.

حل. (آ) $Napq = N(p \wedge q) = \sim(p \wedge q)$

(ب) $ANpq = A(\sim p)q = \sim p \wedge q$

(پ) $ApNq = Ap(\sim q) = p \wedge \sim q$ (ت) $ApAqr = Ap(q \wedge r) = p \wedge (q \wedge r)$

(ث) $NAANpqr = NAA(\sim p)qr = NA(\sim p \wedge q)r = N[(\sim p \wedge q) \wedge r] = \sim[(\sim p \wedge q) \wedge r]$

(ج) $ANpAqNr = ANpAq(\sim r) = ANp(q \wedge \sim r) = A(\sim p)(q \wedge \sim r) = \sim p \wedge (q \wedge \sim r)$

توجه کنید که ترکیبـات شامل A و N از راست به چپ درگیر می شوند.

۱۱. ۲۵. رابط گزاره ای $\veebar$ را فاصل منبع جمع گفته و $p \veebar q$ را می خوانند:
«p یا q ولی نه هر دو».
(۱) جدول راستی $p \veebar q$ را بسازید.
(۲) ثابت کنید $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$. لذا، $\veebar$ را می توان بر حسب سه رابط اصلی $\vee$ ، $\wedge$ ، و $\sim$ نوشت.

حل. (۱) $p \veebar q$ در صورتی راست است که p راست بوده ولی هر دوی p و q راست نباشند. پس جدول راستی $p \veebar q$ به قرار زیر است:

p	q	$p \veebar q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(۲) جدول راستی زیر را در نظر می گیریم:

p	q	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$
T	T	T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T	F	F	T
F	F	F	F	F	F	T	F	F	F
مرحله		1	2	1	4	3	1	2	1

چون جداول راستی $p \veebar q$ و $(p \vee q) \wedge \sim(p \vee q)$ یکی اند، $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$.

۱۱. ۲۶. رابط گزاره های $\downarrow$ را نفی مشترک می نامند؛ $p \downarrow q$ چنین خوانده می شود: «نه p نه q».

(۱) جدول راستی $p \downarrow q$ را بسازید.

(۲) ثابت کنید سه رابط $\vee$، $\wedge$، و $\sim$ را می توان بر حسب رابط $\downarrow$ به صورت زیر بیان کرد:

(آ) $\sim p \equiv p \downarrow p$ ؛

(ب) $p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ ؛

(پ) $p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.

حل. (۱) توجه کنید که $p \downarrow q$ در صورتی راست است که نه p راست باشد نه q .

پس جدول راستی $p \downarrow q$ به قرار زیر می باشد:

p	q	$p\downarrow q$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(۲) (آ)

p	$\sim p$	$p\downarrow p$
T	F	F
F	T	T

(ب)

p	q	$p\wedge q$	$p\downarrow p$	$q\downarrow q$	$(p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	F

(پ)

p	q	$p\vee q$	$p\downarrow q$	$(p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	F	T	F

مسائل تکمیلی

گزاره‌ها و گزاره‌های مرکب

۱۱ . ۲۷. فرض کنید p عبارت باشد از «مارک ثروتمند است» و q عبارت باشد از «مارک خوشحال است». گزاره‌های زیر را به شکل علامتی بنویسید:

(آ) مارک فقیر ولی خوشحال است؛

(ب) مارک نه ثروتمند است نه خوشحال؛

(پ) مارک یا ثروتمند است یا غیر خوشحال؛

(ت) مارک فقیر است یا در غیر این صورت هم ثروتمند است و هم غیر خوشحال.

۱۱. ۲۸. فرض کنید p عبارت باشد از « اریک نیوزویک می خواند »، q عبارت باشد از « اریک نیویورکر می خواند »، و r عبارت باشد از « اریک تایم می خواند ». گزاره های زیر را به شکل علامتی بنویسید:

(آ) اریک نیوزویک یا نیویورکر می خواند ولی تایم نمی خواند؛

(بـ) اریک نیوزویک و نیویورکر می خواند یا نیوزویک و تایم نمی خواند؛

(پـ) چنین نیست که اریک نیوزویک می خواند ولی تایم نمی خواند؛

(تـ) چنین نیست که اریک تایم یا نیویورکر می خواند ولی نیوزویک نمی خواند.

۱۱. ۲۹. فرض کنید p عبارت باشد از « آدری فرانسه صحبت می کند » و q عبارت باشد از « آدری دانمارکی صحبت می کند ». گزاره های زیر را به زبان ساده بیان دارید:

(آ) $p \vee q$ ؛ (بـ) $p \wedge q$ ؛ (پـ) $p \wedge \sim q$ ؛ (تـ) $\sim p \vee \sim q$ ؛ (ثـ) $\sim\sim p$ ؛

(جـ) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$.

ترکیبات منطقی و جداول راستی آنها

۱۱. ۳۰. جدول راستی هر یک از ترکیبات منطقی زیر را بیابید:

(آ) $p \vee \sim q$ ؛ (بـ) $\sim p \wedge \sim q$ ؛ (پـ) $\sim(\sim p \wedge q)$ ؛ (تـ) $\sim(\sim p \vee \sim q)$.

۱۱. ۳۱. جدول راستی هر یک از ترکیبات زیر را بیابید:

(آ) $(p \wedge \sim q) \vee r$ ؛ (بـ) $\sim p \vee (q \wedge \sim r)$ ؛ (پـ) $(p \vee \sim r) \wedge (q \vee \sim r)$.

هم ارزی منطقی

۱۱. ۳۲. قانون شرکتپذیری برای فاصل را ثابت کنید: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.

۱۱. ۳۳. ثابت کنید عاطف روی فاصل پخشپذیر است:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge r)$$

۱۱. ۳۴. با ساختن جداول راستی مناسب ثابت کنید $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ [ر.ک. مسئلهٔ ۱۱. ۱۰ (آ)].

۱۱. ۳۵. با ساختن جدول راستی مناسب ثابت کنید $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$

[ر.ک. مسئلهٔ ۱۱. ۱۰ (بـ)].

۱۱. ۳۶. (آ) $\vee$ را بر حسب $\wedge$ و $\sim$ بیان دارید.

(بـ) $\wedge$ را بر حسب $\vee$ و $\sim$ بیان دارید.

۱۱. ۳۷. ساده کنید: (آ) $\sim(p \wedge \sim q)$ ؛ (بـ) $\sim(\sim p \vee q)$ ؛ (پـ) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$.

۱۱. ۳۸. نقیض هر یک از گزاره های زیر را به ساده ترین وجه بنویسید:

(آ) او قد بلند است ولی خوش قیافه است؛

(بـ) او دارای موهای بلوند یا چشمان آبی است؛

(پـ) او نه ثروتمند است نه خوشحال؛

(تـ) او کارش را از دست داد یا امروز سر کار نرفت؛

(ثـ) هم مارک و هم اریک ناشادند؛

(جـ) آدری اسپانیایی یا فرانسه صحبت می کند ولی آلمانی صحبت نمی کند.

۱۱. ۳۹. هم ارزیهای زیر را با استفاده از قوانین جبر ترکیبات منطقی مذکور در جدول ۱۱. ۱ ثابت کنید:

(آ) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ ؛ (بـ) $(p \wedge q) \vee \sim p \equiv \sim p \vee q$ ؛ (پـ) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

گزاره های شرطی و دو شرطی

۱۱. ۴۰. جدول راستی هر یک از ترکیبات منطقی زیر را بیابید:

(آ) $(\sim p \vee q) \to p$ ؛ (بـ) $q \leftrightarrow (\sim q \wedge p)$.

۱۱. ۴۱. جدول راستی هر یک از ترکیبات منطقی زیر را بیابید:

(آ) $(p \leftrightarrow \sim q) \to (\sim p \wedge q)$ ؛

(بـ) $(\sim q \vee p) \leftrightarrow (q \to \sim p)$.

۱۱. ۴۲. جدول راستی هر یک از ترکیبات منطقی زیر را بیابید:

(آ) $[p \wedge (\sim q \to p)] \wedge \sim[(p \leftrightarrow \sim q) \to (q \vee \sim p)]$ ؛ (بـ) $[q \leftrightarrow (r \to \sim p)] \vee [(\sim q \to p) \leftrightarrow r]$.

۱۱. ۴۳. ثابت کنید: (آ) $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$ ؛

(بـ) $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge \sim r) \to \sim q$.

۱۱. ۴۴. عکس نقیض هر یک از گزاره های زیر را بنویسید:

(آ) اگر او جرأت داشته باشد پیروز خواهد شد ؛

(بـ) او فقط اگر خسته نباشد برنده خواهد شد .

۱۱ . ۴۵ . گزاره های زیر را بیابید :

(آ) عکس نقیض $p \to \sim q$ ؛ (بـ) عکس نقیض $\sim p \to q$ ؛

(پـ) عکس نقیض عکس $p \to \sim q$ ؛ (تـ) عکس عکس نقیض $\sim p \to \sim q$.

استدلالها و استلـزام منطقی

۱۱ . ٤٦ . اعتبار هر یک از استدلالهای زیر را بیازمایید :

(آ) $\sim p \to q, p \vdash \sim q$ ؛

(بـ) $\sim p \to q, q \vdash p$.

۱۱ . ٤٧ . اعتبار هر یک از استدلالهای زیر را بیازمایید :

(آ) $p \to q, r \to \sim q \vdash r \to \sim p$ ؛

(بـ) $p \to \sim q, \sim r \to \sim q \vdash p \to \sim r$ ،

۱۱ . ٤٨ . اعتبار هر یک از استدلالهای زیر را بیازمایید :

(آ) $p \to \sim q, r \to p, q \vdash \sim r$ ؛ (بـ) $p \to q, r \vee \sim q, \sim r \vdash \sim p$.

۱۱ . ٤٩ . استدلالهای زیر را به شکل علامتی در آورده و اعتبار آنها را بیازمایید :

(آ) هرگاه 6 زوج باشد ، آنگاه 2 ، 7 را عاد نمی کند ؛

یا 5 اول است یا 2 ، 7 را عاد می کند ؛

ولی 5 اول است.

لذا، 6 فرد (نه زوج) می باشد .

(بـ) من در روز تولد همسرم برایش گل می آورم؛

یا روز تولد همسرم است یا تا دیر وقت کار می کنم؛

من امروز برای همسرم گل نیاوردم.

لذا، امروز من تا دیر وقت کار کردم.

(پ) اگر کار کنم نمی توانم مطالعه کنم؛
یا من کار می کنم یا در امتحان ریاضی قبول می شوم؛
من در امتحان ریاضی قبول شدم:

لذا، من مطالعه کردم.

(ت) اگر من کار کنم نمی توانم مطالعه کنم؛
یا من مطالعه می کنم یا در امتحان ریاضی قبول می شوم؛
من کار کردم.

لذا، من در امتحان ریاضی قبول شدم.

۱۱ . ۵۰. نشان دهید که (آ) $p \wedge q$ منطقاً p را ایجاب می کند؛
(ب) $p \vee q$ منطقاً p را ایجاب نمی کند.

۱۱ . ۵۱. نشان دهید که (آ) q منطقاً $p \to q$ را ایجاب می کند؛
(ب) $\sim p$ منطقاً $p \to q$ را ایجاب می کند.

۱۱ . ۵۲. نشان دهید که $p \wedge (q \vee r)$ منطقاً $(p \wedge q) \vee r$ را ایجاب می کند.

۱۱ . ۵۳. ترکیباتی را بیابید که منطقاً (آ) یک راستگو؛ (ب) یک تناقض را ایجاب نمایند.

مسائل گوناگون

۱۱ . ۵۴. فرض کنید Apq نشانگر $p \wedge q$ و Np نشانگر $\sim p$ باشد. (ر. ک. مسئلهٔ ۱۱ . ۲۳.) ترکیبات زیر را با استفاده از A و N به جای $\wedge$ و $\sim$ بازنویسی کنید:

(آ) $\sim p \wedge q$؛ (ب) $\sim p \wedge \sim q$؛ (پ) $\sim(p \wedge \sim q)$؛ (ت) $(\sim p \wedge q) \wedge \sim r$.

۱۱ . ۵۵. ترکیبات زیر را با استفاده از $\wedge$ و $\sim$ به جای A و N بازنویسی کنید:

(آ) $NApNq$

(ب) $ANApqNr$

(پ) $AApNrAqNp$

(تـ) $ANANpANqrNp$

جواب مسائل تکمیلی

۱۱. ۲۷. (آ) $\sim p \wedge q$ ؛ (بـ) $\sim p \wedge \sim q$ ؛ (پـ) $p \vee \sim q$ ؛ (تـ) $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$.

۱۱. ۲۸. (آ) $(p \vee q) \wedge \sim r$ ؛ (بـ) $(p \wedge q) \vee \sim(p \wedge r)$ ؛ (پـ) $\sim(p \wedge \sim r)$ ؛
(تـ) $\sim[(r \vee q) \wedge \sim p]$.

۱۱. ۲۹. (آ) آدری فرانسه یا دانمارکی صحبت می کند.

(بـ) آدری فرانسه و دانمارکی صحبت می کند.

(پـ) آدری فرانسه صحبت می کند ولی دانمارکی صحبت نمی کند.

(تـ) آدری فرانسه صحبت نمی کند یا دانمارکی صحبت نمی کند.

(ثـ) چنین نیست که آدری فرانسه صحبت نمی کند.

(جـ) چنین نیست که آدری نه فرانسه صحبت می کند نه دانمارکی.

۱۱. ۳۰.

p	q	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(\sim p \wedge q)$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	F

۱۱. ۳۱.

p	q	r	(آ)	(بـ)	(پـ)
T	T	T	T	F	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	F
F	F	F	F	T	T

۱۱. ۳۶. (آ) $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ ؛ (بـ) $p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$.

۱۱. ۳۷. (آ) $\sim p \vee q$ ؛ (بـ) $p \wedge \sim q$ ؛ (پـ) $p \vee q$.

۱۱ . ۳۸. (پـ) او ثروتمند است یا شاد است. (جـ) آدری آلمانی صحبت می کند یا نه اسپانیایی صحبت می کند نه فرانسه.

۱۱ . ۳۹. (آ) $p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee f) \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (f \wedge q) \equiv p \vee f \equiv p$.

۱۱ . ۴۰. (آ) TTFF ؛ (بـ) FFFT .

۱۱ . ۴۱. (آ) TFTT ؛ (بـ) FTFT .

۱۱ . ۴۲. (آ) FTFF ؛ (بـ) TTTFTTFT .

۱۱ . ۴۳. **راهنمایی.** جداول راستی مناسب را بسازید.

۱۱ . ۴۴. (آ) هرگاه او پیروز نشود، آنگاه او جرأت ندارد. (بـ) هرگاه او خسته باشد، آنگاه او برنده نخواهد شد.

۱۱ . ۴۵. (آ) $q \to \sim p$ ؛ (بـ) $\sim q \to p$ ؛ (پـ) $\sim p \to q$ ؛ (تـ) $p \to q$.

۱۱ . ۴۶. (آ) مغالطه؛ (بـ) معتبر.

۱۱ . ۴۷. (آ) معتبر؛ (بـ) مغالطه.

۱۱ . ۴۸. (آ) معتبر؛ (بـ) معتبر.

۱۱ . ۴۹. (آ) $p \to \sim q, \sim r \vee q, r \vdash \sim p$ ؛ معتبر.

(بـ) $p \to q, p \vee r, \sim q \vdash r$ ؛ معتبر.

(پـ) $p \to \sim q, p \vee r, r \vdash q$ ؛ مغالطه.

(تـ) $p \to \sim q, q \vee r, p \vdash r$ ؛ معتبر.

۱۱ . ۵۳. (آ) هر ترکیب منطقی منطقاً یک راستگو را ایجاب می کند.

(بـ) تنها یک تناقض منطقاً یک تناقض را ایجاب می کند.

۱۱ . ۵۴. (آ) $ANpq$ ؛ (بـ) $ANpNq$ ؛ (پـ) $NApNq$ ؛ (تـ) $AANpqNr$.

۱۱ . ۵۵. (آ) $\sim(p \wedge \sim q)$ ؛ (بـ) $\sim(p \wedge q) \wedge \sim r$ ؛ (پـ) $(p \wedge \sim r) \wedge (q \wedge \sim p)$ ؛

(تـ) $\sim(\sim p \wedge (\sim q \wedge r)) \wedge \sim p$.

۱۲
جبر بول

۱.۱۲ تعاریف اصلی

مجموعه‌هاو ترکیبات منطقی خواص مشابهی‌دارند ؛ یعنی، در قوانین یکسانی صدق می کنند. این قوانین در تعریف یک ساختار ریاضی مجرد به نام جبر بول، که به افتخار جرج بول(George Boole ، 1813–1864)ریاضیدان نامگذاری شده، به کار می روند.

فرض کنیم B یک مجموعهٔ ناتهی با دو عمل دو تایی + و * ، عمل یکتایی ′ ، و دو عنصر متمایز 0 و 1 باشد. در این صورت، B را یک جبر بول نامیم اگر اصول موضوع زیر به ازای هر a, b, c در B برقرار باشند:

[B_1] قوانین تعویضپذیری:

(۱ آ) $a+b = b+a$ (۱ ب) $a*b = b*a$

[B_2] قوانین شرکتپذیری:

(۲ آ) $a+(b*c) = (a+b)*(a+c)$ (۲ ب) $a*(b+c) = (a*b)+(a*c)$

[B_3] قوانین همانی:

(۳ آ) $a+0 = a$ (۳ آ) $a*1 = a$

[B_4] قوانین متممگیری:

(٤ آ) $a+a' = 1$ (٤ ب) $a*a' = 0$

گاهی که بخواهیم بر شش قسمت یک جبر بول تأکید داشته باشیم آن را با $\langle B, +, *, ', 0, 1\rangle$ نشان می دهیم. گوییم 0 عنصر صفر و 1 عنصر یکه

و a' متمم a می باشد. ما معمولاً علامت $*$ را حذف کرده و عناصر را کنار هم قرار می دهیم. در این صورت، (۲ ب) به صورت $a(b+c) = ab+ac$ نوشته می شود که اتحاد جبری آشنای حلقه ها و میدانها می باشد. ولی (۲ آ) به صورت

$$a+bc = (a+b)(a+c)$$

در می آید که یک اتحاد معمول در جبر نیست.

اعمال $+$ ، $*$ ، و $'$ را به ترتیب جمع، ضرب، و متممگیری می نامند. ما قرار داد معمول را پذیرفته و $'$ را مقدم بر $*$ و $*$ را مقدم بر $+$ می دانیم مگر پرانتز ها چیز دیگری القا کنند. به عنوان مثال،

$a+b*c$ به معنی $a+(b*c)$ است نه $(a+b)*c$

و

$a*b'$ به معنی $a*(b')$ است نه $(a*b)'$.

البته وقتی $a+b*c$ به صورت $a+bc$ نوشته شود معنی اش روشن خواهد بود.

مثال ۱۲ . ۱

(آ) فرض کنیم B مجموعهٔ دو عنصری $\{0,1\}$ با اعمال دو تایی $+$ و $*$ تعریف شده به وسیلهٔ

$+$	1	0
1	1	1
0	1	0

$*$	1	0
1	1	0
0	0	0

و عمل یکتایی $'$ تعریف شده به وسیلهٔ $1 = '0$ و $0 = '1$ باشد. در این صورت، B یک جبر بول می باشد.

(ب) فرض کنیم C گردایه ای از مجموعه ها باشد که تحت اجتماع، اشتراک، و متممگیری بسته است. در این صورت، C یک جبر بول است که در آن مجموعهٔ تهی $\varnothing$ عنصر صفر و مجموعهٔ عمومی U عنصر یکه می باشد.

(پ) فرض کنیم $D_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$ یعنی مجموعهٔ مقسوم علیه های 70 باشد. $+$ ، $*$ ، و $'$ را بر D_{70} به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$a+b = \operatorname{lcm}(a,b), \qquad a*b = \gcd(a,b), \qquad a' = 70/a$$

در این صورت، D_{70} یک جبر بول است که در آن 1 عنصر صفر و 70 عنصر یکه می باشد.

فرض کنیم C یک زیر مجموعهٔ ناتهی از جبر بول B باشد. گوییم C یک زیر جبر B است اگر C خود (نسبت به اعمال B) یک جبر بول باشد. توجه می کنیم که C یک زیرجبر B است اگر و فقط اگر C تحت سه عمل B ، یعنی $+$ ، $*$ ، و $'$ ، بسته باشد. به عنوان مثال، $\{1, 2, 35, 70\}$ یک زیر جبر D_{70} مثال ۱.۱۱ (پ) می باشد.

گوییم دو جبر بول B و B' یکریخت اند اگر تناظر یک به یکی مانند $f : B \to B'$ موجود باشد که سه عمل را حفظ نماید؛ یعنی، به ازای هر دو عنصر a, b در B ،

$f(a+b) = f(a) + f(b)$ ، $f(a*b) = f(a) * f(b)$ ، و $f(a') = f(a)'$.

۲.۱۲ دوگانی

دوگان یک گزاره در جبر بول B گزاره ای است که از تعویض اعمال $+$ و $*$ با هم و عناصر همانی 0 و 1 با هم در گزارهٔ اصلی به دست می آید. به عنوان مثال، دوگان

$$(1 + a) * (b + 0) = b$$

عبارت است از

$$(0 * a) + (b * 1) = b$$

به تقارن موجود در اصول موضوع جبر بول B توجه کنید. یعنی، دوگان مجموعهٔ اصول موضوع B همان مجموعهٔ اصول موضوع است. لذا، اصل مهم دوگانی در B برقرار می باشد؛ یعنی:

قضیهٔ ۱.۱۲ (اصل دوگانی). دوگان هر قضیه در یک جبر بول نیز یک قضیه می باشد.

به عبارت دیگر، هرگاه گزاره ای نتیجهٔ اصول موضوع یک جبر بول باشد، آنگاه دوگان آن نتیجهٔ این اصول است چرا که گزارهٔ دوگان را می توان با استفاده از دوگان هر مرحله از برهان گزارهٔ اصلی ثابت کرد.

۱۲ . ۳ قضایای اصلی

قضیهٔ زیر را با استفاده از اصول موضوع [B1] تا [B4] ثابت می کنیم (مسئلهٔ ۱۲ . ٤).

قضیهٔ ۱۲ . ۲. فرض کنیم a, b, c عناصر دلخواهی در جبر بول B باشند.

(یک) قوانین خودنمایی:

(۵ آ) $a + a = a$ (۵ ب) $a * a = a$

(دو) قوانین کرانداری:

(٦ آ) $a + 1 = 1$ (٦ ب) $a * 0 = 0$

(سه) قوانین جذب:

(۷ آ) $a + (a * b) = a$ (۷ ب) $a * (a + b) = a$

(چهار) قوانین شرکتپذیری:

(۸ آ) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (۸ ب) $(a * b) * c = a * (b * c)$

قضیهٔ ۱۲ . ۲ و اصول موضوع ما هنوز شامل تمام خواص مجموعه های مذکور در جدول ۱ . ۱ نیست. دو قضیهٔ بعد خواص باقیمانده را به ما خواهند داد.

قضیهٔ ۱۲ . ۳. فرض کنیم a عنصر دلخواهی در جبر بول B باشد.

(یک) (یکتایی متمم)

هرگاه $a + x = 1$ و $a * x = 0$، آنگاه $x = a'$.

(دو) (قانون برگشت) $(a')' = a$.

(سه) (۹ آ) $0' = 1$ (۹ ب) $1' = 0$

قضیهٔ ۱۲. ۴ (قوانین دمورگان). (۱۰ آ) $(a+b)' = a' * b'$ ؛ (۱۰ ب) $(a * b)' = a' + b'$.

ما این قضایا را در مسائل ۱۲. ۵ و ۱۲. ۶ ثابت خواهیم کرد.

۱۲. ۴ جبرهای بول به عنوان شبکه

بنا بر قضیهٔ ۱۲. ۲ و اصل موضوع $[\mathbf{B_1}]$ ، هر جبر بول B در قوانین شرکتپذیری، تعویضپذیری، و جذب صدق می کند و لذا یک شبکه است که در آن + و * به ترتیب اعمال الحاق و تماس می باشند. در این شبکه $a+1=1$ نامساوی $a \leq 1$ و تساوی $a*0=0$ نامساوی $0 \leq a$ را به ازای هر $a \in B$ ایجاب می کند. لذا، B یک شبکهٔ کراندار می باشد. به علاوه، اصول موضوع $[\mathbf{B_2}]$ و $[\mathbf{B_4}]$ نشان می دهند که B پخشپذیر و تام نیز می باشد. به عکس، هر شبکهٔ کراندار، پخشپذیر، و تام L در اصول موضوع $[\mathbf{B_1}]$ تا $[\mathbf{B_4}]$ صدق می کند. لذا، تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف دیگر. هر جبر بول B یک شبکهٔ کراندار، پخشپذیر، و تام می باشد.

چون جبر بول B شبکه است، دارای ترتیب جزئی طبیعی است (و لذا می توان نمودارش را کشید). به یاد آورید (فصل ۱۰) که وقتی شرطهای هم ارز $a+b=b$ و $a*b=a$ برقرار بودند تعریف کردیم $a \leq b$. چون در یک جبر بول هستیم، می توانیم عملاً بیش از اینها سخن بگوییم.

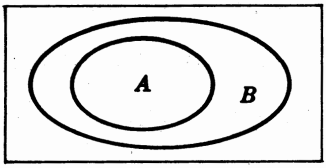
قضیهٔ ۱۲. ۵. در یک جبر بول روابط زیر هم ارز می باشند:

(۱) $a+b=b$ ؛ (۲) $a*b=a$ ؛ (۳) $a'+b=1$ ؛ (۴) $a*b'=0$.

لذا، در یک جبر بول اگر یکی از چهار شرط فوق برقرار باشد می توان نوشت $a \leq b$.

مثال ۱۲ . ۲

(آ) جبر بول مجموعه ها را در نظر می گیریم. در این صورت، مجموعهٔ A قبل از مجموعهٔ B است اگر A زیر مجموعهٔ B باشد. قضیهٔ ۱۲ . ٤ می گوید که اگر $A \subset B$ (طبق نمودار ون شکل ۱۲ . ۱)، شرایط زیر برقرارند:



A زیر مجموعهٔ B است
شکل ۱۲ . ۱

(۱) $A \cup B = B$ (۲) $A \cap B = A$

(۳) $A^c \cup B = U$ (٤) $A \cap B^c = \emptyset$

(بـ) جبر بول حساب گزاره ها را در نظر می گیریم. در این صورت، ترکیب P قبل از ترکیب Q است اگر P منطقاً Q را ایجاب کند یعنی اگر $P \Rightarrow Q$.

۱۲ . ۵ قضیهٔ نمایش

فرض کنیم B یک جبر بول متناهی باشد. به یاد آورید (بخش ۱۰ . ٦) که عنصر a در B یک اتم است اگر a تالی بلافصل 0 باشد؛ یعنی، $0 \ll a$. فرض کنیم A مجموعهٔ اتمهای B بوده و $P(A)$ جبر بول تمام زیر مجموعه های مجموعهٔ A از اتمها باشد. بنا بر قضیهٔ ۱۰ . ۱۱، هر $x \neq 0$ در B را می توان به طور منحصر به فرد (جز در مورد ترتیب) به صورت مجموع (الحاق) اتمها، یعنی عناصر A ، بیان کرد. مثلاً،

$$x = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$$

یک چنین نمایش است. تابع $f: B \to P(A)$ را با تعریف

$$f(x) = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$$

در نظر می گیریم. این نگاشت تعریف شده است زیرا نمایش منحصر به فرد می باشد.

قضیهٔ ۱۲ . ۶. نگاشت $f: B \to P(A)$ فوق یک یکریختی می باشد.

لذا، رابطهٔ نزدیک موجود بین نظریهٔ مجموعه ها و جبرهای بول مجرد دیده می شود به این نحو که هر جبر بول متناهی ساختار جبر بول مجموعه ها را دارد.

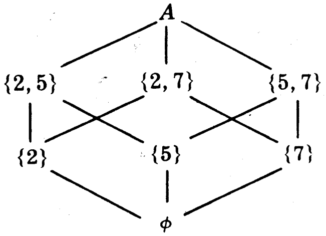
هرگاه مجموعهٔ A دارای n عنصر باشد، آنگاه مجموعهٔ توان آن $P(A)$ دارای 2^n عنصر است. لذا، قضیهٔ فوق نتیجهٔ زیر را به ما خواهد داد.

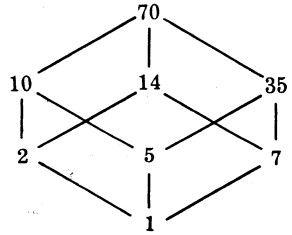
نتیجهٔ ۱۲ . ۷. هر جبر بول متناهی دارای 2^n (به ازای عدد صحیح مثبتی مانند n) عنصر می باشد.

مثال ۱۲ . ۳. جبر بول $D_{70} = \{1, 2, 5, \ldots, 70\}$ مقسوم علیه های 70 را در نظر می گیریم. [ر. ک. مثال ۱۲ . ۱ (پ).] نمودارش در شکل ۱۲ . ۲ (آ) داده شده است. توجه کنید که $A = \{2, 5, 7\}$ مجموعهٔ اتمهای D_{70} است. داریم

$$10 = 2 \vee 5,\ \ 14 = 2 \vee 7,\ \ 35 = 5 \vee 7,\ \ 70 = 2 \vee 5 \vee 7$$

که نمایش منحصر به فرد غیر اتمها به وسیلهٔ اتمها می باشد. شکل ۱۲ . ۲ (ب) نمودار جبر بول مجموعهٔ توان $P(A)$ از A را نشان می دهد. توجه کنید که دو نمودار دارای ساختار یکسانی می باشند.

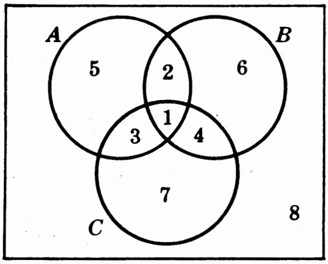




$P(A)$ (ب)   شکل ۱۲ . ۲ D_{70} (آ)

۱۲ . ۶ شکل نرمال فاصل برای مجموعه ها

شکل نرمال فاصل از مثالی در نظریهٔ مجموعه ها ناشی می شود. نمودار ون شکل ۱۲ . ۳ از سه مجموعهٔ A ، B ، و C را در نظر می گیریم. ملاحظه می کنیم که این سه



شکل ۱۲ . ۳

مجموعه مستطیل (مجموعهٔ عمومی) را به هشت مجموعهٔ شماره دار افراز می کنند که می توان آنها را به قرار زیر نمایش داد:

(۱) $A\cap B\cap C$ (۲) $A\cap B\cap C^c$

(۳) $A\cap B^c\cap C$ (٤) $A^c\cap B\cap C$

(۵) $A\cap B^c\cap C^c$ (٦) $A^c\cap B\cap C^c$

(۷) $A^c\cap B^c\cap C$ (۸) $A^c\cap B^c\cap C^c$

هر یک از این هشت مجموعه به شکل $A^*\cap B^*\cap C^*$ است که در آن A^* مساوی A یا A^c است، B^* مساوی B یا B^c است، و C^* برابر C یا C^c می باشد. هر مجموعهٔ ناتهی به صورت عبارتی شامل A ، B ، و C ، مثلاً

$$[(A\cap B^c)^c\cup(A^c\cap C^c)]\cap[(B^c\cup C)^c\cap(A\cup C^c)]$$

مساحتی در شکل ۱۲ . ۳ را نمایش می دهد و لذا درست مساوی اجتماع یک یا چند تا از هشت مجموعه می باشد. این نمایش منحصر به فرد همان شکل نرمال فاصل برای جبرهای بول است که ذیلاً مطرح خواهد شد.

۱۲ . ۷ شکل نرمال فاصل

یک مجموعه از متغیرها (یا حروف یا علامات) مثلاً $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را در نظر می

گیریم. منظور از عبارت بولی E از این متغیرها، که گاهی به صورت $E(x_1, \ldots, x_n)$ نوشته می شود، یعنی متغیر یا عبارتی که از این متغیرها با استفاده از اعمال بولی $+$، $*$، و $'$ به دست می آید. مثلاً

$$F = ((xy'z' + y)' + x'z)' \quad \text{و} \quad E = (x + y'z)' + (xyz' + x'y)'$$

دو عبارت بولی از x، y، و z می باشند.

یک حرف یک متغیر یا متغیرمتمم می باشد از قبیل x, x', y, y' و غیره. منظور از یک حاصل ضرب اساسی یعنی یک حرف یا حاصل ضرب دو یا چند حرف که در آن هیچ دو حرفی شامل متغیر یکسانی نباشند. به عنوان مثال،

$$xz',\ xy'z,\ x,\ y',\ yz',\ x'yz$$

حاصل ضربهایی اساسی اند ولی $xyx'z$ و $xyzy$ چنین نیستند.

گوییم حاصل ضرب اساسی P_1 مشمول حاصل ضرب اساسی P_2 است یا در آن گنجانده شده است اگر حروف P_1 حروف P_2 نیز باشند. مثلاً، حاصل‌ضرب $x'z$ در $x'yz$ گنجانده شده ولی در $xy'z$ گنجانده نشده است زیرا x' یک حرف در حاصل ضرب دوم نیست. هرگاه P_1 در P_2 گنجانده شده باشد، آنگاه، طبق قانون جذب،

$$P_1 + P_2 = P_1$$

گوییم عبارت بولی E به شکل نرمال فاصل (شنف) است اگر E یک حاصل ضرب اساسی یا مجموع دو یا چند حاصل ضرب اساسی باشد که هیچیک در دیگری گنجانده نشده باشد. مثلاً، عبارات زیر را در نظر می گیریم:

$$E_2 = xz' + x'yz' + xy'z \quad \text{و} \quad E_1 = xz' + y'z + xyz'$$

اولی به شکل نرمال فاصل نیست زیرا xz' مشمول xyz' است، ولی دومی به شنف می باشد.

با استفاده از قوانین جبر بول می توان الگوریتمی برای تبدیل عبارت بولی E به شکل نرمال فاصل به قرار زیر ساخت:

(۱) با استفاده از قوانین دمورگان و برگشت می توان عمل متممگیری را به داخل هر پرانتز آنقدر حرکت داد که مآلاً فقط بر متغیرها اعمال شود. در این صورت، E فقط از مجموعها و حاصل ضربهای حروف تشکیل شده است.

(۲) با استفاده از قانون پخشپذیری می توان E را به مجموعی از حاصل ضربها تبدیل کرد؛ و سپس، با استفاده از قوانین تعویضپذیری، خودنمایی، و جذب E را مآلاً به شکل نرمال فاصل تبدیل نمود.

مثلاً، بنا بر (۱)،

$$\begin{aligned} E &= ((ab)'c)'((a'+c)(b'+c'))' = ((ab)''+c')((a'+c)'+(b'+c')') \\ &= (ab+c')(ac'+bc) \end{aligned}$$

و، بنا بر (۲) ،

$$\begin{aligned} E &= abac' + abbc + ac'c' + bcc' = abc' + abc + ac' + 0 \\ &= ac' + abc \end{aligned}$$

که به شنف می باشد. ملاحظه می کنیم که ac' در abc' گنجانده شده است؛ پس، بنا بر قانون جذب،

$$ac' + (ac' * b) = ac'$$

گوییم عبارت بولی $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ به شکل نرمال فاصل کامل است اگر به شنف بوده و هر حاصل ضرب اساسی شامل جمیع متغیرها باشد. به آسانی می توان هر عبارت بولی E به شنف رابا ضرب هرحاصل ضرب اساسی P از E در عبارت $x_i + x_i'$ (اگر P شامل x_i نباشد) به شکل نرمال فاصل کامل در آورد. مثلاً، $E = E(a, b, c)$ فوق را با

$$E = ac' + abc = ac'(b+b') + abc = abc' + ab'c' + abc$$

به شکل نرمال فاصل کامل در می آوریم. ملاحظه می کنیم که $x_i + x_i' = 1$ ؛ پس ضرب P در $x_i + x_i'$ مجاز می باشد. در این باب قضیهٔ زیر قابل بیان است.

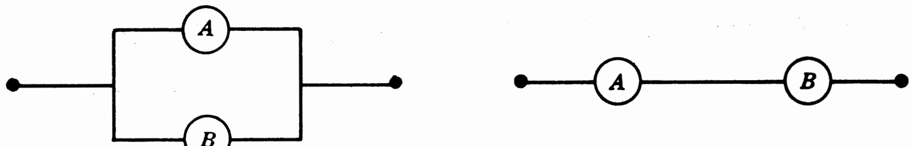
قضیهٔ ۱۲ . ۸. هر عبارت بولی ناصفر $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را می توان به شکل نرمال فاصل کامل در آورد و یک چنین نمایش منحصر به فرد می باشد.

تذکار. اصطلاحات این بخش متعارف نیستند. مثلاً، بعضی از کتابها عبارت «شکل نرمال فاصل» را به جای عبارت «شکل فاصل کامل» به کار می‌برند و به جای عبارت «شکل نرمال فاصل» می‌گویند «مجموع حاصل ضربها». همچنین بعضی کتب از عبارت «شکل کانونی فاصل» به جای

« شکل نرمال فاصل کامل» استفاده می کنند. لذا، خواننده همیشه باید در هر کتابی که بخشهایی راجع به جبر بول دارد مواظب معنی « شکل نرمال فاصل» باشد.

۱۲ . ۸ طرحهای مداری کلید دار

فرض کنیم $A, B, \ldots$ کلیدهایی الکتریکی بوده و کلیدهای A و A' دارای این خاصیت باشند که اگر یکی باز است دیگری بسته باشد و به عکس. دو کلید، مثلاً A و B، را می توان باسیم به صورت سری یا موازی طبق شکل ۱۲ . ٤ به هم وصل کرد.



ترکیب موازی، $A \vee B$ ترکیب سری، $A \wedge B$

شکل ۱۲ . ٤

فرض کنیم

$$A \vee B \quad \text{و} \quad A \wedge B$$

به ترتیب ترکیب A و B به سری یا به موازی باشند.

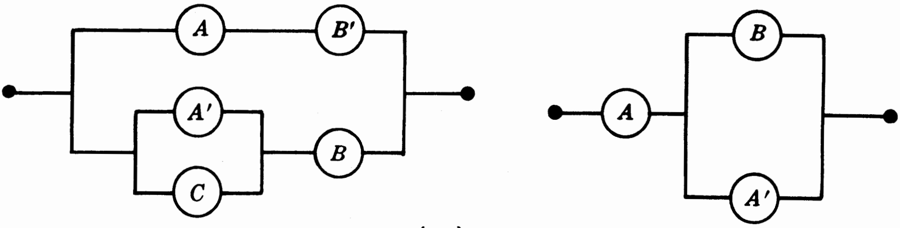
یک طرح مداری کلید دار بولی یعنی آرایشی از سیمها و کلیدها که با استفادهٔ مکرر از ترکیبات سری و موازی ساخته شده باشد؛ لذا، آن را می توان با استفاده از رابطهای $\wedge$ و $\vee$ توصیف کرد.

مثال ۱۲ . ٤. مدار (۱) شکل ۱۲ . ۵ را می توان با $A \wedge (B \vee A')$ و مدار (۲) را می توان با $(A \wedge B') \vee [(A' \vee C) \wedge B]$ توصیف کرد.

در یک مدار کلید دار فرض می کنیم

$$1 \quad \text{و} \quad 0$$

مبین باز و بسته بودن مدار باشند. دو جدول زیر رفتار یک مدار به سری $A \wedge B$ و



(۱): $A \wedge (B \vee A')$

(۲) $(A \wedge B') \vee [(A' \vee C) \wedge B]$

شکل ۱۲ . ۵

یک مدار به موازی $A \vee B$ را توصیف می کنند .

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

جدول زیر رابطهٔ بین کلید A و کلید A' را نشان می دهد .

A	A'
1	0
0	1

توجه کنید که سه جدول فوق با جداول عاطف، فاصل، و نقیض در مورد گزاره ها (و ترکیبات منطقی) یکی است. تنها تفاوت این است که در اینجا ۱ و ۰ به جای T و F به کار رفته اند . لذا :

قضیهٔ ۱۲ . ۹ . جبر مدارهای کلیددار بولی یک جبر بول می باشد .

برای یافتن رفتار یک مدار کلید دار بولی جدولی ساخته شده که با جداول راستی ترکیبات منطقی شبیه می باشد .

مثال ۱۲ . ۵

(آ) مدار (۱) شکل ۱۲ . ۵ را در نظر می گیریم. رفتار این مدار چیست؛ یعنی، چه

وقت مدار باز است (یعنی، چه وقت جریان در حال عبور است) و چه وقت مدار بسته می باشد؟ برای $A \wedge (B \vee A')$ می توان جدول « راستی» زیر را ساخت:

A	B	A'	$B \vee A'$	$A \wedge (B \vee A')$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

لذا، فقط وقتی جریان در حال عبور است که هر دوی A و B باز باشند.

(ب) رفتار مدار (۲) شکل ۱۲. ۵ را می توان با جدول راستی زیر برای $(A \wedge B') \vee [(A' \vee C) \wedge B]$ نشان داد:

A	B	C	$(A$	$\wedge$	$B')$	$\vee$	$[(A'$	$\vee$	$C)$	$\wedge$	$B]$
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
مرحله			1	2	1	4	1	2	1	3	1

۱۲. ۹ الزامهای اول، روش توافق

فرض کنیم P_1 و P_2 حاصل ضربهای اساسی باشند به طوری که درست یک متغیر، مثلاً x_k ، به طور متمم در یکی از P_1 و P_2 و به طور نامتمم در دیگری ظاهر شده باشد. در این صورت، توافق P_1 و P_2 یعنی Q حاصل ضرب (بدون تکرار) حرفهای P_1 و حرفهای P_2 پس از حذف x_k و x'_k می باشد. به عنوان مثال:

$xyz's$ و $xy't$ داری توافق $xz'st$ اند

xy' و y دارای توافق x اند

$x'yz$ و $x'yt$ دارای توافق نیستند

$x'yz$ و xyz' دارای توافق نیستند.

هرگاه Q توافق P_1 و P_2 بوده و Q ، P_1 ، و P_2 را به شنف کامل بنویسیم، آنگاه هرجمعوند Q در بین جمعوندهای P_1 یا جمعوندهای P_2 ظاهر می شود. یعنی:

لم ۱۲. ۱۰. هرگاه Q توافق P_1 و P_2 باشد، آنگاه

$$P_1+P_2+Q=P_1+P_2.$$

حاصل ضرب اساسی P را یک الزام اول عبارت بولی E نامیم اگر $P+E=E$ ولی هیچ حاصل ضرب اساسی گنجانده شده در P واجد این خاصیت نباشد. مثلاً، فرض کنیم $E=xy'+xyz'+x'yz'$. بنا بر مسئلهٔ ۱۲. ۱۰، $xz'+E=E$ ولی $x+E\neq E$ و $z'+E\neq E$ ؛ پس xz' یک الزام اول E می باشد. حال روش توافق برای یافتن الزامهای اول E را مطرح می سازیم.

عبارت بولی $E=P_1+P_2+\cdots+P_n$ را در نظر می گیریم که در آن P ها حاصل ضربهای اساسی می باشند. اعمال دو مرحلهٔ زیر بر E روش توافق نام دارد.

مرحلهٔ ۱. هر حاصل ضرب اساسی P_i که شامل حاصل ضرب اساسی دیگر P_j است را حذف می کنیم. (این کار طبق قانون جذب مجاز است.)

مرحلهٔ ۲. توافق Q ی هر P_i و هر P_j را اضافه می کنیم مشروط بر اینکه Q شامل هیچ P ای نباشد (این کار طبق لم ۱۲. ۱۰ مجاز است.)

قضیهٔ زیر خاصیت اصلی این روش را نشان خواهد داد.

قضیهٔ ۱۲. ۱۱. روش توافق بر عبارت بولی E مآلاً متوقف شده و در این صورت E مجموع الزامهای اول خود خواهد بود.

مثال ۱۲. ۶. فرض کنیم $E=xyz+x'z'+xyz'+x'y'z+x'yz'$. در این صورت،

$$E=xyz+x'z'+xyz'+x'y'z \quad (\text{شامل } x'z' \text{ است } x'yz')$$

$$=xyz+x'z'+xyz'+x'y'z+xy \quad (\text{توافق } xyz \text{ و } xyz')$$

$$=x'z'+x'y'z+xy \quad (xyz \text{ و } xyz' \text{ شامل } xy \text{ اند})$$

$= x'z' + x'y'z + xy + x'y'$ (توافق $x'z'$ و $x'y'z$)

$= x'z' + xy + x'y'$ ($x'y'z$ شامل $x'y'$ است)

$= x'z' + xy + x'y' + yz'$ (توافق $x'z'$ و xy)

چون هیچ مرحله ای در روش توافق E را دیگر تغییر نمی دهد، الزامهای اول E عبارتند از $x'z'$ ، xy ، $x'y'$ ، و yz' .

۱۲ . ۱۰ عبارات بولی مینیمال

برای نمایش عبارت بولی E طرق متعددی در دست است. چون E ممکن است یک مدار کلید دار باشد، امکان دارد نمایشی را طالب باشیم که به یک معنی مینیمال است. در اینجا شکلهای نرمال فاصل مینیمال را تعریف می‌کنیم. شکلهای مینیمال از نوع دیگر نیز موجودند ولی بررسی آنها از حوصلهٔ این کتاب خارج می باشد.

عبارت بولی E را به شکل نرمال فاصل در نظر می گیریم. فرض کنیم E_L تعداد حروف E و E_S تعداد جمعوندهای E باشد. مثلاً، هرگاه

$$E = abc' + a'b'd + ab'c'd + a'bcd$$

آنگاه $E_L = 14$ و $E_S = 4$. فرض کنیم E و F عبارات بولی هم ارز به شنف باشد. گوییم E از F ساده تر است اگر $E_L \leq F_L$ و $E_S \leq F_S$ و یکی از نامساویها تساوی نباشد. گوییم E مینیمال است اگر عبارتی ساده تر از E موجود نباشد.

قضیهٔ زیر رابطهٔ اصلی بین شنفهای مینیمال و الزامهای اول را نشان می دهد.

قضیهٔ ۱۲ . ۱۲ . هر شکل نرمال فاصل مینیمال عبارت بولی E مجموع الزامهای اول E می باشد.

با استفاده از روش توافق می توان هر E را به صورت مجموع تمام الزامهای اولش بیان کرد. یک روش یافتن شنف مینیمالش بیان هر الزام اول به شنف کامل و حذف یکی یکی الزامهای اولی است که جمعوند هایشان در بین سایرین ظاهر می شوند. مثلاً،

$$E = x'z' + xy + x'y' + yz'$$

به صورت مجموع تمام الزامهای اولش بیان شده است (مثال ۱۲ . ۶). در این صورت،

$$\begin{aligned} x'z' &= x'z'(y+y') &&= x'yz' + x'y'z' \\ xy &= xy(z+z') &&= xyz + xyz' \\ x'y' &= x'y'(z+z') &&= x'y'z + x'y'z' \\ yz' &= yz'(x+x') &&= xyz' + x'yz' \end{aligned}$$

توجه کنید که $x'z'$ قابل حذف است زیرا جمعوند هایش $x'yz$ و $x'y'z'$ در بین سایرین دیده می شود. لذا،

$$E = xy + x'y' + yz'$$

و این یک شنف مینیمال برای E است زیرا هیچیک از الزامهای اول زاید نیست؛ یعنی، هیچیک را نمی توان بدون تغییر E حذف کرد.

روش یافتن شنف مینیمال فوق مستقیم است ولی کارا نیست. در بخش بعد، برای وقتی که تعداد متغیرها زیاد نیست یک روش هندسی برای یافتن شنفهای مینیمال ارائه می دهیم. خواننده می تواند برای سایر تکنیکهای یافتن شنفهای مینیمال به سایر کتابها رجوع نماید.

۱۲. ۱۱ نقشه های کارنف (Karnaugh)

نقشه های کارنف طرحهایی تصویری اند که برای یافتن الزامهای اول و شکلهای نرمال فاصل مینیمال برای عبارات بولی شامل حداکثر شش متغیر به کار می روند. ما فقط به حالات دو، سه، یا چهار متغیر خواهیم پرداخت.

در نقشه های کارنف، حاصل ضربهای اساسی از متغیرهای یکسان با مربع نموده می شوند. گوییم دو حاصل ضرب اساسی P_1 و P_2 از این نوع (یا مربعهای نظیر P_1 و P_2) مجاوراند اگر P_1 و P_2 فقط در یک حرف فرق داشته باشند که این حرف باید یک متغیرمتمم در یک حاصل ضرب و یک متغیر غیرمتمم در دیگری باشد. لذا، مجموع دو حاصل ضرب مجاور یک حاصل ضرب اساسی با یک حرف کمتر می باشد. به عنوان مثال،

$$xyz' + xy'z' = xz'(y+y') = xz'(1) = xz'$$

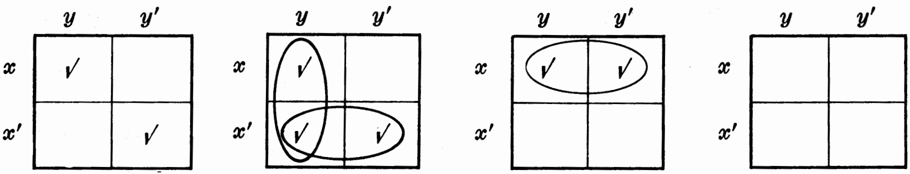
$$x'yzt + x'yz't = x'yt(z+z') = x'yt(1) = x'yt$$

توجه کنید که $x'yzt$ و $xyz't$ مجاور نیستند. همچنین ملاحظه کنید که xyz' و $xyzt$ در نقشهٔ کارنف واحدی ظاهر نمی شوند زیرا شامل متغیرهای مختلفی می باشند. ما گاهی در بحث نقشه های کارنف از اصطلاحات مربع و حاصل ضربهای اساسی به جای هم استفاده خواهیم کرد.

دومتغیر: x و y. چهار حاصل ضرب اساسی وجود دارند که عبارتند از xy ، xy' ، $x'y$ ، و $x'y'$ که نظیر چهار مربع در نقشهٔ کارنف شکل ۶.۱۲ (آ) به نحوی روشن خواهند بود. هر عبارت بولی $E(x,y)$ به شنف کامل را می توان با علامت امتحان در مربعهای مناسب نمایش داد. مثلاً،

$$E_1 = xy + xy', \quad E_2 = xy + x'y + x'y', \quad E_3 = xy + x'y'$$

به ترتیب در شکلهای ۶.۱۲ (ب)، (پ)، و (ت) نموده شده اند. (خفتها بعداً توضیح داده می شوند.)



(آ) E_1(ب) E_2(پ) E_3(ت)

شکل ۶.۱۲

دو مربع در شکل ۶.۱۲ (آ) مجاورند اگر دارای یک ضلع مشترک باشند. هر الزام اول عبارت $E(x,y)$ یا یک جفت مربع مجاور است یا یک مربع تنها؛ یعنی، مربعی که مجاور هیچ مربع دیگری از $E(x,y)$ نیست. به عنوان مثال، E_1 از دو مربع مجاور نموده شده با خفت شکل ۶.۱۲ (ب) تشکیل شده است. این جفت از مربعهای مجاور نمایش متغیر x است؛ پس x یک (و تنها یک) الزام اول E_1 است و

$$E_1 = x$$

شنف مینیمال آن می باشد. ملاحظه می کنیم که مربع E_2 شامل دو جفت مربع مجاور (نموده شده با دو خفت) است که جمیع مربعهای E_2 را شامل می باشند. جفت قائم

نمایش y و جفت افقی نمایش x' است؛ پس y و x' الزامهای اول E_2 بوده و

$$E_2 = x' + y$$

شنف مینیمال آن می باشد. از آن سو، E_3 از دو مربع تنها تشکیل شده که نمایش xy و $x'y'$ می باشند؛ پس xy و $x'y'$ الزامهای اول E_3 اندو

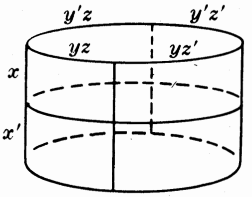
$$E_3 = xy + x'y'$$

شنف مینیمالش می باشد.

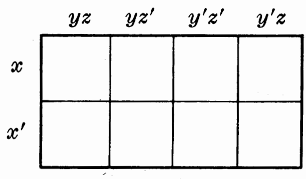
سه متغیر x, y, z . در اینجا هشت حاصل ضرب اساسی داریم:

$$xyz,\ xyz',\ xy'z,\ xy'z',\ x'yz,\ x'yz',\ x'y'z,\ x'y'z'$$

که نظیر هشت مربع در نقشهٔ کارنف شکل ۷.۱۲ (آ) به نحوی روشن می باشند. توجه کنید که بالای نقشه طوری بر چسب خورده که حاصل ضربهای مجاور در یک حرف فرق داشته باشند. به علاوه، برای آنکه مربعهای مجاور یک ضلع مشترک داشته باشند، باید ضلع چپ و ضلع راست نقشه را یکی کنیم زیرا xyz و $xy'z$ حاصل ضربهای مجاور و $x'yz$ و $x'y'z$ حاصل ضربهای مجاور می باشند. به عبارت دیگر، اگر نقشه را در امتداد ضلع یکی شده بریده، خم کرده، و سپس بچسبانیم، استوانهٔ شکل ۷.۱۲ (بـ) به دست می آید.



(بـ)



(آ)

شکل ۷.۱۲

در این صورت، مربعهای مجاور روی استوانه یک ضلع مشترک خواهند داشت. مثل قبل، هر عبارت بولی $E(x, y, z)$ به شنف کامل با چک کردن مربعهای مناسب روی نقشهٔ کارنف نموده می شود.

منظور از یک مستطیل اساسی در نقشهٔ کارنف یعنی یک مربع، دو مربع مجاور، یا چهار مربع است که یک مستطیل یک در چهار یا دو در دو تشکیل می دهند. این

مستطیلهای اساسی به ترتیب نظیر حاصل ضربهای اساسی سه، دو، و یک حرف می باشند . به علاوه، یک مستطیل اساسی نمایش حاصل ضرب اساسیــــــــــی است که حاصل ضرب حروفی است که در تمام مربعهای مستطیل ظاهر می شوند .

عبارت بولی $E = E(x, y, z)$ را که با یک نقشهٔ کارنف نموده شده است در نظر می گیریم. الزام اول E یک مستطیل اساسی ماکزیمال در E است ؛ یعنی، مستطیلی که مشمول مستطیل اساسی بزرگتری نیست. یک شنف مینیمال برای E مرکب است از یک پوشش مینیمال E ؛ یعنی، تعداد مینیمالی مستطیل اساسی ماکزیمال که تمام مربعهای E را در بردارند .

مثال ۱۲ . ۷

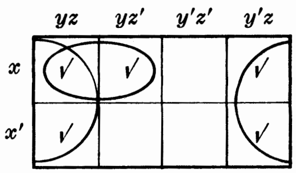
(آ) فرض کنیم $E_1 = xyz + xyz' + x'yz' + x'y'z$. شکل ۱۲ . ۸(آ) نمایش E_1 است. ملاحظه می کنیم که E_1 دارای سه الزام اول (مستطیلهای اساسی ماکزیمال) است که با دایره نموده شده اند و نمایش xy ، yz' ، و $x'y'z$ می باشند. چون هر سه برای پوشش E_1 لازم می شوند ، شنف مینیمال مساوی است با

$$E_1 = xy + yz' + x'y'z$$

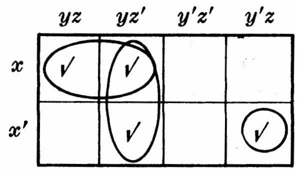
(بـ) فرض کنیم $E_2 = xyz + xyz' + xy'z + x'yz + x'y'z$. شکل ۱۲ . ۸ (بـ) نمایش E_2 است. توجه کنید که E_2 دارای دو الزام اول است، دو مربع مجاور که نمایش xy اند و مربع دو در دو (ضلع یکی شده مشترک است) که نمایش z می باشد . چون این مستطیلها E_2 را می پوشانند ،

$$E_2 = xy + z$$

شنف مینیمال برای E_2 می باشد .



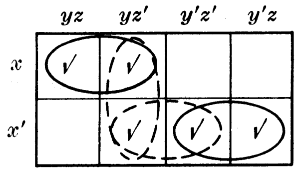
E_2 (بـ)



E_1 (آ)

شکل ۱۲ . ۸

(پـ) فرض کنیم $E_3 = xyz + xyz' + x'yz' + x'y'z' + x'y'z$. شکل ۱۲ . ۹ نمایش E_3 است. در اینجا

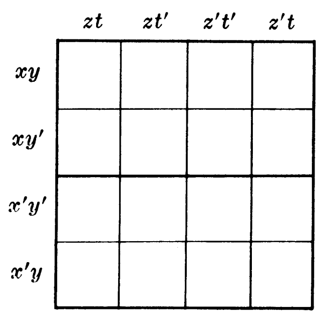


شکل ۱۲ . ۹

E_3 دارای چهار الزام اول xy ، yz' ، $x'z'$ ، و $x'y'$ است. ولی فقط یکی از دو الزام نقطه چین، یعنی یکی از yz' یا $x'z'$ ، در یک پوشش مینیمال E_3 لازم می شود. لذا، E_3 دارای دو شنف مینیمال می باشد:

$$E_3 = xy + yz' + x'y' = xy + x'z' + x'y'$$

چهار متغیر: x, y, z, t. شانزده حاصل ضرب اساسی وجود دارد که نظیر شانزده مربع در نقشهٔ کارنف شکل ۱۲ . ۱۰ به نحوی روشن می باشند. ملاحظه

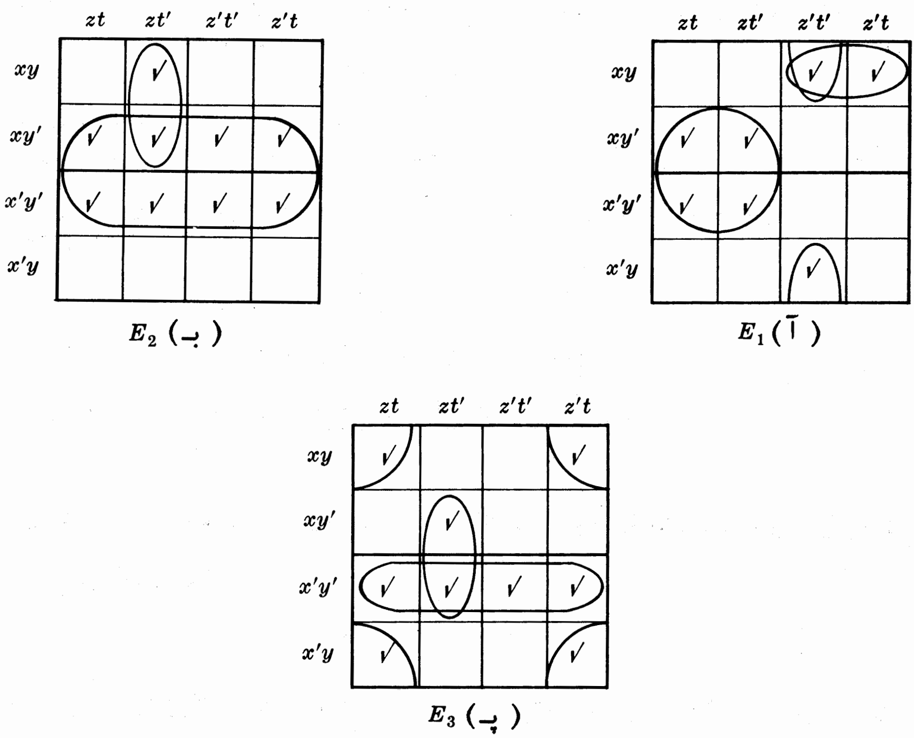


شکل ۱۲ . ۱۰

می کنیم که ضلع بالایی و ضلع چپ چنان بر چسب خورده اند که حاصل ضربهای مجاور در یک حرف تفاوت دارند. مجدداً باید ضلع چپ را با ضلع راست (مثل حالت سه متغیر) یکی کنیم ولی باید ضلع بالایی و ضلع پایینی را نیز یکی نماییم.
(این انطباق یک سطح به شکل نان روغنی به دست می دهد به نام چنبره، و می توانیم نقشه مان را در واقع یک چنبره در نظر بگیریم.)

یک مستطیل اساسی عبارت است از یک مربع، دو مربع مجاور، چهار مربع که یک مستطیل یک در چهار یا یک مستطیل دو در دو تشکیل می دهند، یا هشت مربع که یک مستطیل دو در چهار تشکیل می دهند. این مستطیلها نظیر حاصل ضربهای اساسی است که به ترتیب دارای چهار، سه، دو، و یک حرف می باشند. مجدداً، مستطیلهای اساسی ماکزیمال الزامهای اول می باشند. روش مینیمم سازی برای عبارت بولی $E(x, y, z, t)$ مثل قبل می باشد.

مثال ۱۲ . ۸. سه عبارت بولی E_1, E_2, E_3 از متغیرهای x, y, z, t را که با نقشه های کارنف شکل ۱۲ . ۱۱ داده شده در نظر می گیریم.



شکل ۱۲ . ۱۱

(آ) مستطیلی اساسی دو در دو نمایش $y'z$ است زیرا تنها y' و z در هر چهار مربع ظاهر می شوند. جفت مربع مجاور افقی نمایش xyz' بوده و مربعهای مجاور که در

اضلاع بالایی و پایینی مشترکند نمایش $yz't'$ می باشند. لذا،

$$E_1 = y'z + xyz' + yz't'$$

یک شنف مینیمال برای E_1 می باشد.

(ب) فقط y' در هر هشت مربع مستطیل اساسی دو در چهار ظاهر می شود و جفت مربع مجاور نموده شده نمایش xzt' می باشد. لذا،

$$E_2 = y' + xzt'$$

شنف مینیمال برای E_2 خواهد بود.

(پ) چهار مربع گوشه یک مستطیل اساسی دو در دو تشکیل می دهند که نمایش yt است زیرا فقط y و t در هر چهار مربع ظاهر می‌شوند. مستطیل اساسی چهار در یک نمایش $x'y'$ است، و دو مربع مجاور نمایش $y'zt'$ می باشد. لذا،

$$E_3 = yt + x'y' + y'zt'$$

شنف مینیمال برای E_3 می باشد.

مسائل حل شده

جبرهای بول

۱۲. ۱. دوگان هر یک از معادلات بولی زیر را بنویسید:

(آ) $(a * 1) * (0 + a') = 0$ ؛ (ب) $a + a'b = a + b$.

حل. (آ) برای به دست آوردن معادلهٔ دوگان، + و * را با هم و 0 و 1 را با هم عوض می کنیم. لذا،

$$(a + 0) + (1 * a') = 1$$

(ب) ابتدا معادله را با استفاده از * می نویسیم: $a + (a' * b) = a + b$. در این صورت، دوگان خواهد بود: $a * (a' + b) = a * b$ که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$a(a' + b) = ab$$

۱۲. ۲. به یاد آورید (فصل ۱۰) که مجموعهٔ D_m مرکب از مقسوم علیه های m یک

شبکهٔ کراندار و پخشپذیر است که در آن

$a * b = a \wedge b = \gcd(a, b)$ و $a + b = a \vee b = \operatorname{lcm}(a, b)$.

(آ) نشان دهید که D_m در صورتی یک جبر بول است که m فارغ از مجذور باشد؛ یعنی، m حاصل ضربی از اعداد اول متمایز باشد. (بـ) اتمهای D_m را بیابید.

حل. (آ) کافی است نشان دهیم که D_m تام است. فرض کنیم x در D_m بوده و $x' = m/x$. چون m حاصل ضربی از اعداد اول متمایز است، x و x' دارای مقسوم علیه اول متمایز می باشند. لذا، $x * x' = \gcd(x, x') = 1$ و $x + x' = \operatorname{lcm}(x, x') = m$. به یاد آورید که 1 عنصر صفر (کران پایینی) D_m بوده و m عنصر همانی (کران بالایی) D_m می باشد. لذا، x' متمم x است؛ و در نتیجه، D_m یک جبر بول می باشد. (بـ) اتمهای D_m مقسوم علیه های اول m می باشند.

۱۲ . ۳. جبر بول D_{210} را در نظر بگیرید.

(آ) عناصر آن را ذکر کرده و نمودارش را رسم نمایید.

(بـ) مجموعهٔ A ی اتمها را بیابید.

(پـ) دو زیر جبر با هشت عنصر پیدا نمایید.

(تـ) آیا $X = \{1, 2, 6, 210\}$ یک زیر شبکهٔ D_{210} است؟ یک زیر جبر است؟

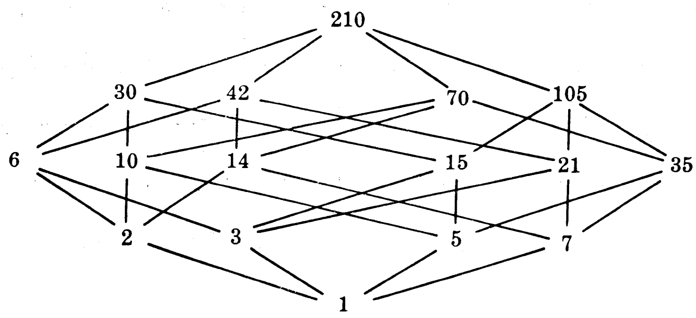
(ثـ) آیا $Y = \{1, 2, 3, 6\}$ یک زیر شبکهٔ D_{210} است؟ یک زیر جبر است؟

(جـ) تعداد زیر جبرهای D_{210} را بیابید.

حل. (آ) مقسوم علیه های 210 عبارتند از 1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 7 ، 10 ، 14 ، 15 ، 21 ، 30 ، 35 ، 42 ، 70 ، 105 ، و 210 . نمودار D_{210} در شکل ۱۲ . ۱۲ دیده می شود.

(بـ) $A = \{2, 3, 5, 7\}$ یعنی مجموعهٔ مقسوم علیه های اول 210 .

(پـ) مجموعه های $B = \{1, 2, 3, 35, 6, 70, 105, 210\}$ و $C = \{1, 5, 6, 7, 30, 35, 42, 210\}$ زیر جبرهای D_{210} اند.



شکل ۱۲.۱۲

(تـ) X یک زیر شبکه است زیرا خطی مرتب می باشد. ولی X یک زیر جبر نیست زیرا 35 متمم 2 در D_{210} است ولی 35 به X تعلق ندارد. (در واقع، هیچ جبر بول بیش ازدو عنصر خطی مرتب نیست.)

(ثـ) Y یک زیر شبکهٔ D_{210} است زیرا تحت + و * بسته می باشد. ولی Y یک زیر جبر D_{210} نیست زیرا تحت متمم در D_{210} بسته نیست؛ مثلاً، $35 = 2'$ به Y تعلق ندارد. (توجه می کنیم که Y خود یک جبر بول است؛ در واقع، $Y = D_6$.)

(جـ) یک زیر جبر از D_{210} باید شامل دو، چهار، هشت، یا شانزده عنصر باشد.

(یک) فقط یک زیر جبر دو عنصری می تواند موجود باشد که از کرانهای بالایی و پایینی تشکیل شده است؛ یعنی، $\{1, 210\}$.

(دو) چون D_{210} شامل شانزده عنصر است، تنها زیر جبر شانزده عنصری خود D_{210} می باشد.

(سه) یک زیر جبر چهار عنصری به شکل $\{1, x, x', 210\}$ است؛ یعنی، از کرانهای بالایی و پایینی و یک عنصر غیر کران و متممش تشکیل شده است. چهار ده عنصر غیر کران در D_{210} وجود دارد و لذا تعداد جفت $\{x, x'\}$ ها مساوی $14/2 = 7$ می باشد. بنابراین، D_{210} دارای هفت زیر جبر 4 عنصری می باشد.

(چهار) هر زیر جبر هشت عنصری S خود شامل سه اتم s_1, s_2, s_3 است. s_1 و s_2 را می توان هر یک از دو چهار اتم D_{210} گرفت و سپس s_3 باید حاصل ضرب دواتم دیگر باشد؛ مثلاً، می توان قرار داد

$s_1 = 2,\ \ s_2 = 3,\ \ s_3 = 5 \cdot 7 = 35$ [کـــه زیر جبر B در قسمت (پـ) را معین می کنند] یا می توان قرار داد $s_1 = 5,\ \ s_2 = 7,\ \ s_3 = 2 \cdot 3 = 6$ [که زیر جبر C قسمت (پ) معین می شود]. برای انتخاب s_1 و s_2 از چهار اتم D_{210} ، $\binom{4}{2} = 6$ راه وجود دارد؛ و لذا، D_{210} دارای شش زیر جبر 8 عنصری می باشد. بنابراین، D_{210} دارای $15 = 1+1+7+6$ زیر جبر خواهد بود.

۱۲ . ٤. قضیهٔ ۲ ۰۱۲ را ثابت کنید: فرض کنید a, b, c عناصری در جبر بول B باشند. ثابت کنید

(یک) قوانین خودنمایی:

(۵ آ) $a + a = a$ (۵ بـ) $a * a = a$

(دو) قوانین کرانداری:

(٦ آ) $a + 1 = 1$ (٦ بـ) $a * 0 = 0$

(سه) قوانین جذب:

(۷ آ) $a + (a * b) = a$ (۷ بـ) $a * (a + b) = a$

(چهار) قوانین شرکتپذیری:

(۸ آ) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (۸ بـ) $(a * b) * c = a * (b * c)$

حل. (۵ بـ) $a = a * 1 = a * (a + a') = (a * a) + (a * a') = (a * a) + 0 = a * a$

(۵ آ) از (۵ بـ) و دوگانی به دست می آید.

(٦ بـ) $a * 0 = (a * 0) + 0 = (a * 0) + (a * a') = a * (0 + a')$
$= a * (a' + 0) = a * a' = 0$

(٦ آ) از (٦ بـ) و دوگانی به دست می آید.

(۷ بـ) $a * (a + b) = (a + 0) * (a + b) = a + (0 * b) = a + (b * 0) = a + 0 = a$

(۷ آ) از (۷ بـ) و دوگانی به دست می آید.

(۸ بـ) فرض کنیم $L = (a * b) * c$ و $R = a * (b * c)$. کافی است ثابت کنیم $L = R$. ابتدا ثابت می کنیم $a + L = a + R$. با استفاده از قوانین جذب در

دو مرحلهٔ آخر،

$$a + L = a + ((a * b) * c) = (a + (a * b)) * (a + c) = a * (a + c) = a$$

همچنین، با استفاده از قانون جذب در آخرین مرحله،

$$a + R = a + (a * (b * c)) = (a + a) * (a + (b * c)) = a * (a + (b * c)) = a$$

لذا، $a + L = a + R$. حال نشان می دهیم که $a' + L = a' + R$. داریم

$$\begin{aligned} a' + L &= a' + ((a * b) * c) = (a' + (a * b)) * (a' + c) \\ &= ((a' + a) * (a' + b)) * (a' + c) = (1 * (a' + b)) * (a' + c) \\ &= (a' + b) * (a' + c) = a' + (b * c) \end{aligned}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} a' + R &= a' + (a * (b * c)) = (a' + a) * (a' + (b * c)) \\ &= 1 * (a' + (b * c)) = a' + (b * c) \end{aligned}$$

لذا، $a' + L = a' + R$. در نتیجه،

$$\begin{aligned} L &= 0 + L = (a * a') + L = (a + L) * (a' + L) = (a + R) * (a' + R) \\ &= (a * a') + R = 0 + R = R \end{aligned}$$

(۸ آ) از (۸ ب) و دوگانی نتیجه می شود.

۱۲ . ۵. قضیهٔ ۱۲ . ۳ را ثابت کنید: فرض کنید a عنصری در جبر بول B باشد.

(یک) (یکتایی متمم) هرگاه $a + x = 1$ و $a * x = 0$ ، آنگاه $x = a'$.

(دو) (قانون‌برگشت) $(a')' = a$.

(سه) (۹ آ) $0' = 1$ (۹ ب) $1' = 0$

حل. (یک) داریم

$$a' = a' + 0 = a' + (a * x) = (a' + a) * (a' + x) = 1 * (a' + x) = a' + x$$

همچنین،

$$x = x + 0 = x + (a * a') = (x + a) * (x + a') = 1 * (x + a') = x + a'$$

لذا، $x = x + a' = a' + x = a'$.

(دو) بنا بر تعریف متمم، $a + a' = 1$ و $a * a' = 0$. و، بنا بر

تعویضپذیری، $a'+a=1$ و $a'*a=0$. بنا بر یکتایی متمم، a متمم a' است؛ یعنی، $a=(a')'$.

(سه) بنا بر قانون کرانداری (٦ آ)، $0+1=1$ ، و بنا بر اصل موضوع همانی (۳ ب‍)، $0*1=0$. بنا بر یکتایی متمم، 1 متمم 0 است؛ یعنی، $1=0'$. بنا بر دوگانی داریم $0=1'$.

۱۲ . ٦. قضیهٔ ۱۲ . ٤ را ثابت کنید (قوانین دمورگان):

(۱۰ آ) $(a+b)'=a'*b'$ (۱۰ ب‍) $(a*b)'=a'+b'$

حل. (۱۰ آ) کافی است نشان دهیم که

$$(a+b)+(a'*b')=1 \quad \text{و} \quad (a+b)*(a'*b')=0$$

پس، بنا بر یکتایی متمم، $a'*b'=(a+b)'$. داریم

$$\begin{aligned}(a+b)+(a'*b') &= b+a+(a'*b') = b+(a+a')*(a+b')\\ &= b+1*(a+b') = b+a+b' = b+b'+a = 1+a = 1\end{aligned}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}(a+b)*(a'*b') &= ((a+b)*a')*b'\\ &= ((a*a')+(b*a'))*b' = (0+(b*a'))*b'\\ &= (b*a')*b' = (b*b')*a' = 0*a' = 0\end{aligned}$$

لذا، $a'*b'=(a+b)'$.

(۱۰ ب‍) اصل دوگانی (قضیهٔ ۱۲ . ۱).

۱۲ . ۷. قضیهٔ ۱۲ . ۵ را ثابت کنید: احکام زیر در یک جبر بول هم ارزند:

(۱) $a+b=b$ ؛ (۲) $a*b=a$ ؛ (۳) $a'+b=1$ ؛ (٤) $a*b'=0$.

حل. بنا بر قضیهٔ ۱۰ . ٤، احکام (۱) و (۲) هم ارزند. نشان می دهیم که احکام (۱) و (۳) هم ارزند. فرض کنیم

(۱) برقرار باشد . در این صورت،

$$a' + b = a' + (a+b) = (a'+a) + b = 1 + b = 1$$

حال فرض کنیم (۳) برقرار باشد . در این صورت،

$$a + b = 1 * (a+b) = (a'+b) * (a+b) = (a' * a) + b = 0 + b = b$$

لذا، (۱) و (۳) هم ارز می باشند .

حال نشان می دهیم که (۳) و (٤) هم ارزند . فرض کنیم (۳) برقرار باشد . بنا بر قانون دمورگان وبرگشت،

$$0 = 1' = (a'+b)' = a'' * b' = a * b'$$

به عکس، اگر (٤) برقرار باشد ،

$$1 = 0' = (a * b')' = a' + b'' = a' + b$$

لذا، (۳) و (٤) هم ارز می باشند . بنابراین، هر چهار حکم هم ارز می باشند .

۱۲ . ۸ . قضیهٔ ۱۲ . ٦ را ثابت کنید : نگاشت $f : B \to P(A)$ یکریختی است که در آن B یک جبر بول و $P(A)$ مجموعهٔ توان مجموعهٔ اتمهای A بوده و

$$f(x) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

که در آن $x = a_1 + \cdots + a_n$ نمایش منحصر به فرد x به صورت مجموعی از اتمها می باشد .

حل. به یاد آورید (فصل ۱۰) که اگر a ها اتم باشند ، $a_i^2 = a_i$ ولی به ازای $a_i \neq a_j$ ، $a_i a_j = 0$. فرض کنیم x, y در B بوده و

$$x = a_1 + \cdots + a_r + b_1 + \cdots + b_s$$
$$y = b_1 + \cdots + b_s + c_1 + \cdots + c_t$$

که در آنها

$$A = \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t, d_1, \ldots, d_k\}$$

مجموعهٔ اتمهای B باشد . در این صورت،

$$x + y = a_1 + \cdots + a_r + b_1 + \cdots + b_s + c_1 + \cdots + c_t$$
$$xy = b_1 + \cdots + b_s$$

لذا،

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t\} \\ &= \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s\} \cup \{b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t\} \\ &= f(x) \cup f(y) \\ f(xy) &= \{b_1, \ldots, b_s\} \\ &= \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s\} \cap \{b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t\} \\ &= f(x) \cap f(y) \end{aligned}$$

فرض کنیم $y = c_1 + \cdots + c_t + d_1 + \cdots + d_k$ پس $x+y=1$ و $xy=0$ ؛ و در نتیجه، $y = x'$. لذا،

$$f(x') = \{c_1, \ldots, c_t, d_1, \ldots, d_k\} = \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s\}^c = (f(x))^c$$

چون این نمایش منحصر به فرد است، f یک به یک و برو می باشد. لذا، f یک یکریختی جبر بولها می باشد.

عبارت بولی، شنفها، مدارهای کلید دار

۱۲ . ۹. عبارات بولی $E(x,y,z)$ زیر را به شنف و شنف کامل بیان دارید:

(آ) $E_1 = x(y'z)'$ ؛ (ب) $E_2 = z(x'+y)+y'$ ؛

(پ) $E_3 = (x'+y)'+x'y$.

حل. (آ) $E_1 = x(y'z)' = x(y+z') = xy+xz'$. همچنین،

$$\begin{aligned} E_1 &= xy + xz' = xy(z+z') + x(y+y')z' = xyz + xyz' + xyz' + xy'z' \\ &= xyz + xyz' + xy'z' \end{aligned}$$

به شنف کامل است.

(ب) $E_2 = z(x'+y)+y' = x'z+yz+y'$. همچنین،

$$\begin{aligned} E_2 &= x'z + yz + y' = x'z(y+y') + yz(x+x') + y'(x+x')(z+z') \\ &= x'yz + x'y'z + xyz + x'yz + xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' \\ &= xyz + xy'z + xy'z' + x'yz + x'y'z + x'y'z' \end{aligned}$$

(پ) $E_3 = (x'+y)'+x'y = xy'+x'y$ این در صورتی به شنف کامل است که E_3 یک عبارت بولی از x و y در نظر گرفته شود. ولی به ما صریحاً گفته شده که عبارات ما از سه متغیر x, y, z می باشند. لذا،

$$E_3 = xy' + x'y = xy'(z+z') + x'y(z+z') = xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz'$$

به شنف کامل می باشد.

۱۲. ۱۰. به فرض آنکه $E = xy' + xyz' + x'yz'$ ، ثابت کنید
(آ) $xz' + E = E$ ؛ (بـ) $x + E \neq E$ ؛ (پـ) $z' + E \neq E$ (لذا، xz' یک الزام اول E می باشد.)

حل. ابتدا شنف کامل E را می یابیم:

$$E = xy'(z+z') + xyz' + x'yz' = xy'z + xy'z' + xyz' + x'yz'$$

(آ) شنف کامل xz' را می یابیم:

$$xz' = xz'(y+y') = xyz' + xy'z'$$

چون جمعوندهای xz' مشمول E اند، داریم $xz' + E = E$.

(بـ) شنف کامل x را می یابیم:

$$x = x(y+y')(z+z') = xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$$

جمعوند xyz از x یک جمعوند E نیست؛ لذا، $x + E \neq E$.

(پـ) شنف کامل z' را می یابیم:

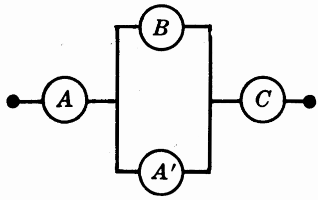
$$z' = z'(x+x')(y+y') = xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z'$$

جمعوند $x'y'z'$ از z' یک جمعوند E نیست؛ پس $z' + E \neq E$.

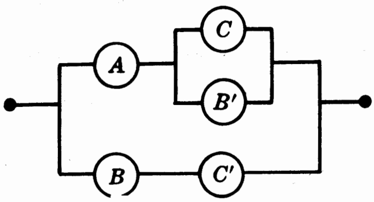
۱۲. ۱۱. عبارت بولی هر یک از مدارهای شکل ۱۲. ۱۳ را معین کنید.

حل. (آ) $A \wedge (B \vee A') \wedge C$ ؛ (بـ) $[A \wedge (C \vee B')] \vee (B \wedge C')$ ؛
(پـ) $\{[(A \vee B) \wedge C] \vee A'\} \wedge B$.

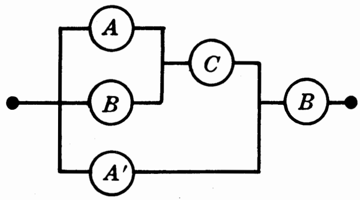
۱۲. ۱۲. برای هر یک از عبارات بولی زیر یک مدار بسازید:
(آ) $(A \wedge B) \vee [A' \wedge (B' \vee A \vee B)]$ ؛ (بـ) $(A \vee B) \wedge C \wedge (A' \vee B' \vee C')$.



مدار (آ)



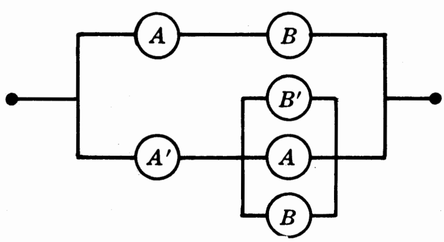
مدار (ب)



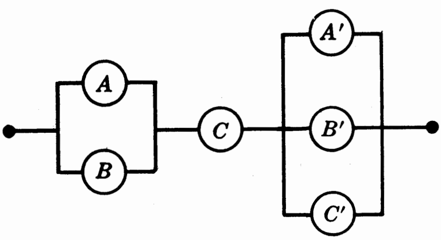
مدار (پ)

شکل ۱۲ . ۱۳

حل. نمودارهای شکل ۱۲ . ١٤ مدارهای لازم را نشان می دهند .



مدار (آ)



مدار (ب)

شکل ۱۲ . ۱۴

(آ) توجه کنید که مدار سری $A \wedge B$ با $A' \wedge (B' \vee A \vee B)$ موازی است که در سری با ترکیب موازی $B' \vee A \vee B$ مساوی A' می باشد .

(ب) توجه کنید که مدار موازی $A \vee B$ با C سری است و با مدار موازی $A' \vee B' \vee C'$ به سری می باشد .

۱۲ . ۱۳ . مدار شکل ۱۲ . ۱۵ (آ) را در نظر بگیرید . (آ) یک مدار هم ارز ساده تر

بسازید. (بـ) با یافتن جداول « راستی» تحقیق کنید که مدارها هم ارز می باشند.

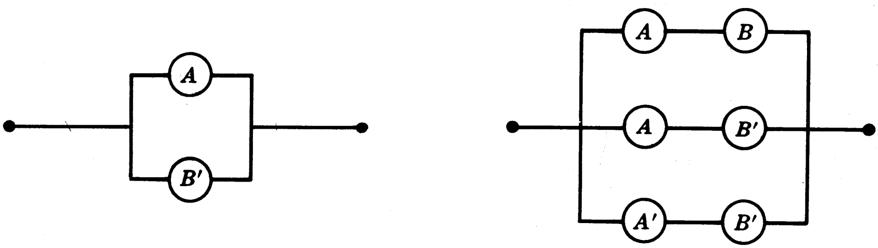
حل. (آ) ابتدا عبارت بولی معرف مدار را می نویسیم:

$$E = (A \wedge B) \vee (A \wedge B') \vee (A' \wedge B')$$

E را با استفاده از نقشه های کارنف یا قوانین جبر بول ساده می کنیم؛ مثلاً،

$$\begin{aligned} E &= [A \wedge (B \vee B')] \vee (A' \wedge B') \\ &= (A \wedge 1) \vee (A' \wedge B') = A \vee (A' \wedge B') \\ &= (A \vee A') \wedge (A \vee B') = 1 \wedge (A \vee B') \\ &= A \vee B' \end{aligned}$$

لذا، شکل ۱۲ . ۱۵ (بـ) یک مدار هم ارز می باشد.



(بـ) (آ)

شکل ۱۲ . ۱۵

(بـ) جداول راستی هم ارز لازم به قرار زیرند:

B	(A	$\wedge$	B)	$\vee$	(A	$\wedge$	B')	$\vee$	(A'	$\wedge$	B')
1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
[illegible]	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
[illegible]	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
[illegible]	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

A	B	B'	$A \vee B'$
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

۱۲ . ۱۴ . قضیهٔ ۱۲ . ۸ را ثابت کنید: هر عبارت بولی ناصفر $E(x_1, \ldots, x_n)$ را می توان به شکل نرمال فاصل کامل در آورد و یک چنین نمایش منحصر به فرد است.

حل. وجود چنین نمایش از الگوریتم آمده در صفحات ۴۱۷ - ۴۱۶ نتیجه می شود. کافی است یکتایی آن را نشان دهیم. ابتدا توجه می کنیم که اگر P و Q دو حاصل ضرب اساسی متمایز از x باشند، $PQ = 0$ زیرا یکی از متغیرها باید در یکی از عاملها متمم و در عامل دیگر غیرمتمم باشد. حال فرض کنیم

$$E = P_1 + P_2 + \cdots + P_r = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_s$$

نمایشهای متمایزی از E به شنف کامل باشد. در این صورت، یکی از P ها باید با Q ها و یا یکی از Q ها باید با P ها متمایز باشد. مثلاً، Q_1 با P ها متمایز باشد. در این صورت، به ازای هر i ، $Q_1P_i = 0$. بنا بر قانون جذب، $Q_1E = Q_1$. لذا،

$$Q_1 = Q_1E = Q_1(P_1 + \cdots + P_r) = Q_1P_1 + \cdots + Q_1P_r = 0 + \cdots + 0 = 0$$

که حاصل ضرب اساسی بودن Q_1 را نقض می کند. لذا، نمایش منحصر به فرد می باشد.

۱۲ . ۱۵ . با استفاده از روش توافق، الزامهای اول و یک شنف مینیمال برای E را در صورتی بیابید که

(آ) $E = xy' + xyz' + x'yz'$ ؛ (ب) $E = xy + y't + x'yz' + xy'zt'$.

حل. (آ)

$$\begin{aligned} E &= xy' + xyz' + x'yz' + xz' && (\text{توافق } xy' \text{ و } xyz') \\ &= xy' + x'yz' + xz' && (xyz' \text{ شامل } xz' \text{ است}) \\ &= xy' + x'yz' + xz' + yz' && (\text{توافق } x'yz' \text{ و } xz') \\ &= xy' + xz' + yz' && (x'yz' \text{ شامل } yz' \text{ است}) \end{aligned}$$

چون هیچ مرحله ای در روش توافق E را تغییر نمی دهد، xy' ، xz' ، و yz' الزامهای اول E می باشند. با نوشتن این الزامهای اول به شنف کامل داریم

$$\begin{aligned} xy' &= xy'(z + z') = xy'z + xy'z' \\ xz' &= xz'(y + y') = xyz' + xy'z' \\ yz' &= yz'(x + x') = xyz' + x'yz' \end{aligned}$$

تنها جمعوند های xyz' و $xy'z'$ از xz' در بین سایر جمعوند ها ظاهر می شوند و

لذا xz' را می توان حذف کرد؛ یعنی، xz' زاید می باشد. لذا، $E = xy' + yz'$ یک شنف مینیمال برای E می باشد.

(ب)

$$E = xy + y't + x'yz' + xy'zt' + xzt'$$ (توافق xy و $xy'zt'$)

$$= xy + y't + x'yz' + xzt'$$ ($xy'zt'$ شامل xzt' است)

$$= xy + y't + x'yz' + xzt' + yz'$$ (توافق xy و $x'yz'$)

$$= xy + y't + xzt' + yz'$$ ($x'yz'$ شامل yz' است)

$$= xy + y't + xzt' + yz' + xt$$ (توافق xy و $y't$)

$$= xy + y't + xzt' + yz' + xt + xz$$ (توافق xzt' و xt)

$$= xy + y't + yz' + xt + xz$$ (xzt' شامل xz است)

$$= xy + y't + yz' + xt + xz + z't$$ (توافق $y't$ و yz')

چون هیچ مرحله ای از روش توافق E را دیگر تغییر نمی دهد، الزامهای اول E عبارتند از xy ، $y't$ ، yz' ، xt ، xz ، و $z't$. این الزامهای اول را به شنف کامل نوشته و آنهایی که جمعوند هایشان در میان سایرین آمده اند را یکی یکی حذف کرده به دست می آوریم $E = y't + xz + yz'$ که یک شنف مینیمال برای E می باشد.

نقشه های کارنف

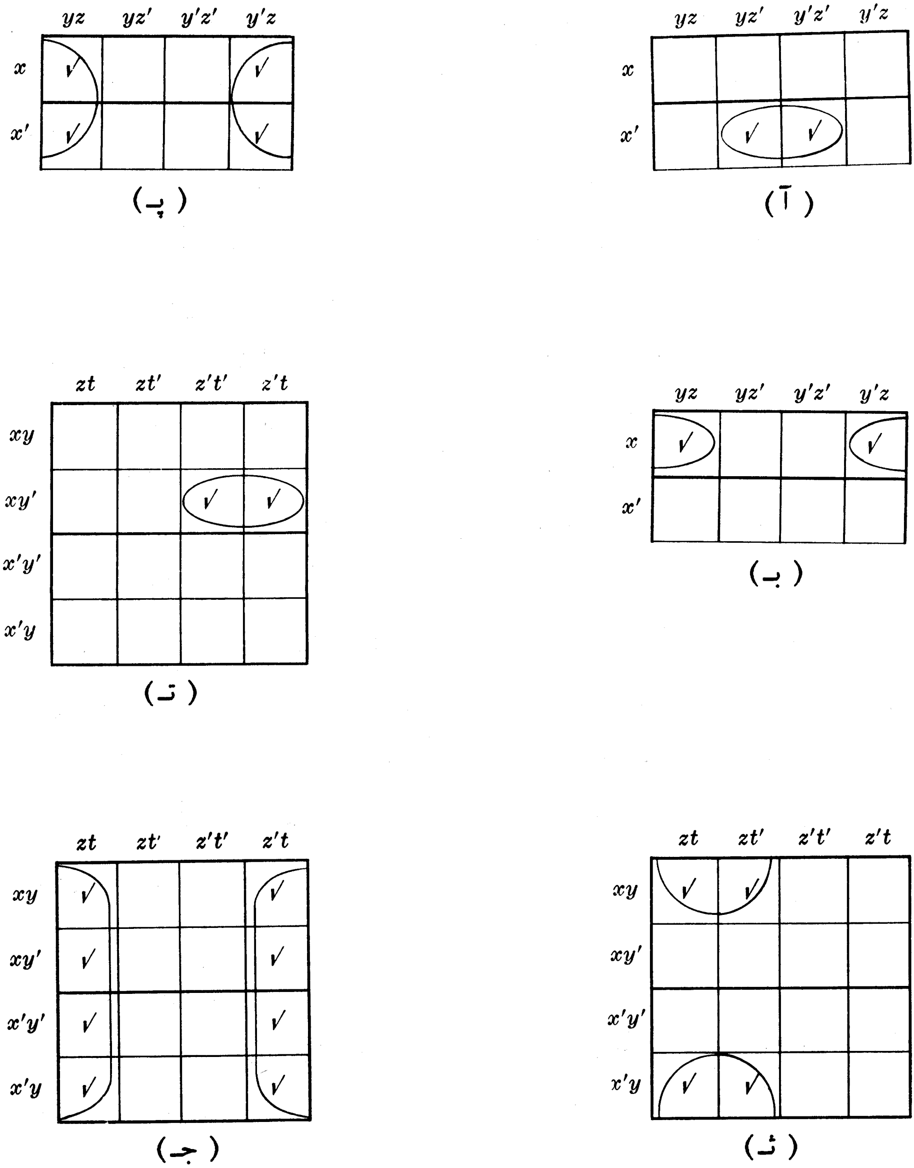
۱۲. ۱۶. حاصل ضربهای اساسی P نموده شده با هر یک از مستطیلهای اساسی در نقشه های کارنف شکل ۱۲. ۱۶ را بیابید.

حل. در هر حالت حروفی را می یابیم که در تمام مربعهای مستطیل اساسی ظاهر می شوند. پس از این کار، P حاصل ضرب این حروف می باشد.

(آ) x' و z' در هر دو مربع ظاهر می شوند: پس $P = x'z'$.

(ب) x و z در هر دو مربع ظاهر می شوند؛ پس $P = xz$.

(پ) فقط z در هر چهار مربع ظاهر می شود؛ پس $P = z$.



شکل ۱۲ . ۱۶

(تـ) x ، y' ، و z' در هر دو مربع ظاهر می شوند ؛ پس $P = xy'z'$.

(ثـ) فقط y و z در هر چهار مربع ظاهر می شوند ؛ پس $P = yz$.

(جـ) فقط t در هر هشت مربع ظاهر می شود ؛ پس $P = t$.

۱۲ . ۱۷ . برای هر عبارت E نقشه های کارنف شکل ۱۲ . ۱۷ شنف مینیمال را بیابید .

	zt	zt'	$z't'$	$z't$
xy		✓		
xy'		✓	✓	✓
$x'y'$	✓	✓	✓	
$x'y$			✓	

(آ)

	zt	zt'	$z't'$	$z't$
xy		✓		
xy'		✓	✓	
$x'y'$		✓		
$x'y$	✓	✓		✓

(بـ)

	zt	zt'	$z't'$	$z't$
xy	✓			✓
xy'		✓	✓	
$x'y'$			✓	
$x'y$	✓	✓	✓	✓

(پـ)

شکل ۱۲٫۱۷

حل. (آ) پنج الزام اول وجود دارد که با چهار خفت و دایرهٔ نقطه چین شکل ۱۲ . ۱۸ (آ) نموده شده اند . ولی برای پوشش تمام مربعها دایرهٔ نقطه چین لازم نیست ولی چهار خفت لازم است. لذا، چهار خفت شنف مینیمال برای E را به دست می دهند ؛ یعنی،

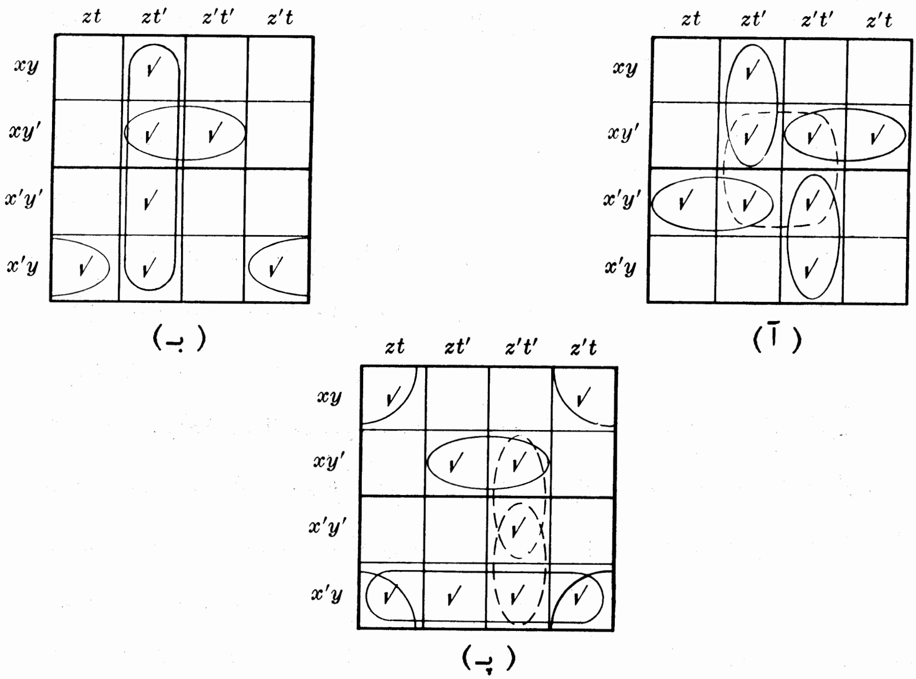
$$E = xzt' + xy'z' + x'y'z + x'z't'$$

(بـ) یک پوشش مینیمال از E با سه خفت شکل ۱۲ . ۱۸ (بـ) داده می شود . لذا، $E = zt' + xy't' + x'yt$ یک شنف مینیمال برای E می باشد .

(پـ) همانطور که شکل ۱۲ . ۱۸ (پـ) نشان می دهد، برای پوشش مربع $x'y'z't'$ دو راه وجود دارد . لذا،

$$E = x'y + yt + xy't' + y'z't' = x'y + yt + xy't' + x'z't'$$

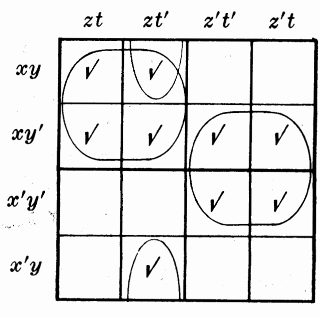
دو شنف مینیمال برای E می باشند.



شکل ۱۲ . ۱۸

۱۲ . ۱۸ . برای $E = xy' + xyz + x'y'z' + x'yzt'$ یک شنف مینیمال بیابید.

حل. برای نمایش E با نقشهٔ کارنف لازم نیست آن را به شنف کامل تغییر دهیم. فقط چهار مربع شامل xy' ، دو مربع شامل xyz ، دو مربع شامل $x'y'z'$ ، و مربع $x'yzt'$ را مثل شکل ۱۲ . ۱۹ امتحان می کنیم. یک پوشش مینیمال عبارت است



شکل ۱۲ . ۱۹

از سه مستطیل اساسی نموده شده.

لذا، $E = xz + y'z' + yzt'$ شنف مینیمال برای E می باشد.

مسائل تکمیلی

جبرهای بول

۱۲ . ۱۹. دوگان هر یک از معادلات بولی زیر را بنویسید:

(آ) $a(a' + b) = ab$ ؛ (بـ) $(a+1)(a+0) = a$ ؛

(پـ) $(a+b)(b+c) = ac + b$.

۱۲ . ۲۰. شبکهٔ D_m از مقسوم علیه های m (که $m > 1$) را در نظر بگیرید. (آ) نشان دهید که اگر m فارغ از مجذور نباشد، یعنی m حاصل ضرب اعداد اول متمایز نباشد، D_m یک جبر بول نیست. (قس. مسئلهٔ ۱۲ . ۲ .) (بـ) ازمجموعه‌های $D_{20}, D_{55}, D_{99}, D_{130}$ کدامها جبر بول اند؟

۱۲ . ۲۱. فرض کنید B یک جبر بول شانزده عنصری و S یک زیر جبر هشت عنصری B باشد. نشان دهید که دواتم S باید اتمهای B باشند.

۱۲ . ۲۲. جبر بول D_{110} را در نظر بگیرید. (آ) عناصر آن را ذکر کرده و نمودارش را بکشید. (بـ) تمام زیر جبرهای آن را بیابید. (پـ) تعداد همهٔ زیر شبکه های چهار عنصری را بیابید. (تـ) مجموعهٔ A از اتمهای D_{110} را بیابید. (ثـ) نگاشت یکریخت $f : D_{110} \to P(A)$ به صورت تعریف شده در قضیهٔ ۱۲ . ٦ را بنویسید.

۱۲ . ۲۳. اصل موضوع یا قضیه ای که در هر مرحله از برهان قضایای زیر به کار می رود را ذکر نمایید:

(آ) قضیهٔ ۱۲ . ۲ (مسئلهٔ ۱۲ . ٤)؛

(بـ) قضیهٔ ۱۲ . ۳ (مسئلهٔ ۱۲ . ۵)؛

(پـ) قضیهٔ ۱۲ . ٤ (مسئلهٔ ۱۲ . ٦)؛

(تـ) قضیهٔ ۱۲ . ۵ (مسئلهٔ ۱۲ . ۷).

۱۲ . ٢٤. (۵ آ)، (٦ آ)، (۷ آ)،(۸آ) و (۱۰بـ) را مستقیماً، یعنی بدون استفاده از اصل دوگانی، ثابت کنید.

۱۲ . ۲۵. ثابت کنید به ازای هر عنصر x در یک جبر بول، $0 \leq x \leq 1$.

۱۲ . ۲۶. عنصر M در جبر بول B را یک جملهٔ ماکزیمم نامند اگر همانی 1 تنها تالی آن باشد. (آ) نشان دهید که متممهای اتمها جملهٔ ماکزیمم می باشند. (بـ) نشان دهید هرعنصر x در B را می توان به طور منحصر به فرد به صورت حاصل ضربی از جملات ماکزیمم نوشت.

۱۲ . ۲۷. فرض کنید $B = (B, +, *, ', 0, 1)$ یک جبر بول باشد. عمل $\triangle$ بر B (به نام تفاضل متقارن) را با

$$x \triangle y \;=\; (x * y') + (x' * y)$$

تعریف کنید. ثابت کنید $R = (B, \triangle, *)$ یک حلقهٔ بول تعویضپذیر است. (ر. ک. مسائل ۱. ۵۰ و ۹. ٦٤).

۱۲ . ۲۸. فرض کنید $R = (R, \oplus, \cdot)$ یک حلقهٔ بول با همانی $0 \neq 1$ باشد. تعریف کنید

$$x' \;=\; 1 \oplus x, \quad x + y \;=\; x \oplus y \oplus x \cdot y, \quad x * y \;=\; x \cdot y$$

ثابت کنید $B = (R, +, *, ', 0, 1)$ یک جبر بول است.

عبارات بولی، مدارهای کلیددار

۱۲ . ۲۹. عبارات بولی $E(x, y, z)$ زیر را به شنف و شنف کامل بیان دارید.

(آ) $E_1 \;=\; x(xy' + x'y + y'z)$ (بـ) $E_2 \;=\; (x + y'z)(y + z')$

(پـ) $E_3 \;=\; (x' + y)' + y'z$ (تـ) $E_4 \;=\; (x'y)'(x' + xyz')$

(ثـ) $E_5 \;=\; (x + y)'(xy')'$ (جـ) $E_6 \;=\; y(x + yz)'$

۱۲ . ۳۰. الزامهای اول

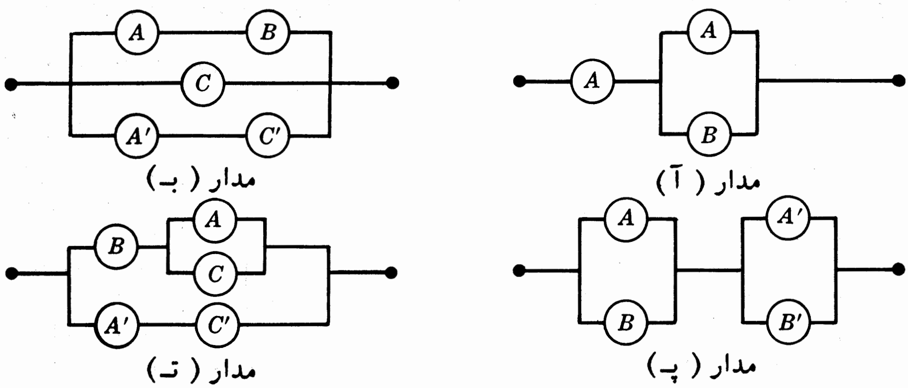
(آ) $E_1 \;=\; xy'z' + x'y + x'y'z' + x'yz$

(بـ) $E_2 \;=\; xy' + x'z't + xyzt' + x'y'zt'$

(پـ) $E_3 \;=\; xyzt + xyz't' + xz't' + x'y'z' + x'yz't$

را با استفاده از روش توافق به دست آورید.

۱۲ . ۳۱. عبارت بولی هر یک از مدارهای شکل ۱۲. ۲۰ را معین نمایید.



شکل ۱۲. ۲۰

۱۲. ۳۲. برای هر یک از عبارات بولی زیر یک مدار کلید دار بسازید:

(آ) $A \vee (B \wedge C)$　　(ب) $A \wedge (B \vee C)$

(پ) $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$　　(ت) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$

(ث) $(A \vee B) \wedge [A' \vee (C \wedge B')]$　　(ج) $[(A \wedge B) \vee C] \wedge [D \vee (A' \wedge B)]$

شنفهای مینیمال، نقشه های کارنف

۱۲. ۳۳. برای هر عبارت بولی E داده شده با نقشه های کارنف شکل ۱۲. ۲۱ جمیع شنفهای مینیمال ممکن را بیابید.

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	√		√	√
x'	√	√		

(آ)

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	√		√	√
x'	√	√		√

(ب)

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	√			√
x'	√	√	√	√

(پ)

شکل ۱۲. ۲۱

۱۲. ۳٤. برای هر عبارت بولی E داده شده با نقشه های کارنف شکل ۱۲. ۲۲ جمیع شنفهای مینیمال ممکن را بیابید.

	zt	zt'	$z't'$	$z't$
xy		✓		✓
xy'	✓	✓		✓
$x'y'$		✓		
$x'y$	✓	✓	✓	✓

(آ)

	zt	zt'	$z't'$	$z't$
xy	✓	✓	✓	
xy'		✓	✓	✓
$x'y'$		✓		
$x'y$	✓	✓	✓	

(ب)

	zt	zt'	$z't'$	$z't$
xy	✓			✓
xy'		✓	✓	
$x'y'$		✓		
$x'y$	✓	✓	✓	✓

(پ)

شکل ۱۲. ۲۲

۱۲. ۳۵. برای هر یک از عبارات بولی زیر یک شنف مینیمال بیابید:

(آ) $E_1 = xy + x'y + x'y'$ (ب) $E_2 = x + x'yz + xy'z'$

(پ) $E_3 = y'z + y'z't' + z't$ (ت) $E_4 = y'zt + xzt' + xy'z'$

مسائل برنامه‌نویسی کامپیوتر

فرض کنید عبارت بولی $E(X, Y, Z)$ به شکل نرمال فاصل روی یک کارت داده ها پانچ شده باشد و $A = X'$ ، $B = Y'$ ، و $C = Z'$. (توجه کنید که + صرفاً یک کاراکتر حرفی ـ عددی دیگر است.)

۱۲. ۳٦. برنامه ای بنویسید که E را به شنف کامل چاپ کند.

۱۲ . ۳۷. برنامه ای بنویسید که الزامهای اول E را چاپ کند.

۱۲ . ۳۸. برنامه ای بنویسید که E را به شنف مینیمال چاپ کند.

برنامه های فوق را با داده های زیر امتحان نمایید:

(یک) $X+AYZ+XBC$ ؛ (دو) $BZ+ABC+XC$ ؛

(سه) $XBC+AY+ABC+AYZ$.

جواب مسائل تکمیلی

۱۲ . ۱۹. (آ) $a+a'b=a+b$ ؛ (بـ) $a\cdot 0+a\cdot 1=a$ ؛

(پـ) $ab+bc=(a+c)b$.

۱۲ . ۲۰. (پـ) D_{55} و D_{130} .

۱۲ . ۲۱. راهنمایی. فرض کنید B یک جبر شانزده عنصری از مجموعه ها باشد؛ یعنی، $B=P(A)$ که در آن A دارای چهار عنصر می باشد. نشان دهید که اتمهای هر زیر جبر B باید مجموعه هایی از هم جدا باشند.

۱۲ . ۲۲. (آ) هشت عنصر وجود دارند که عبارتند از $1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110$.

(بـ) پنج زیر جبر وجود دارند که عبارتند از

$\{1,110\}$ ، $\{1,2,55,110\}$ ، $\{1,5,22,110\}$ ، $\{1,10,11,110\}$ ، و D_{110} .

(پـ) پانزده زیر شبکهٔ چهار عنصری موجودند که سه زیر جبر فوق را در بر دارند.

(تـ) $A=\{2,5,11\}$

(ثـ)

$$\begin{array}{lcccccccc} D_{110}: & 1 & 2 & 5 & 11 & 10 & 22 & 55 & 110 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P(A): & \emptyset, & \{2\}, & \{5\}, & \{11\}, & \{2,5\}, & \{2,11\}, & \{5,11\}, & D_{110} \end{array}$$

۱۲ . ۲۹. (آ) $E_1 = xy'+xy'z = xy'z'+xy'z$

(بـ) $E_2 = xy+xz' = xyz+xyz'+xy'z'$

(پـ) $E_3 = xy'+y'z = xy'z+xy'z'+x'y'z$

(تـ) $E_4 = xyz'+x'y' = xyz'+x'y'z+x'y'z'$

(ثـ) $E_5 = x'y' = x'y'z+x'y'z'$

(جـ) $E_6 = x'yz'$

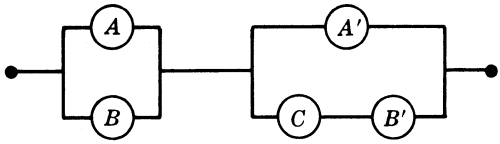
۱۲ . ۳۰. (آ) $x'y, x'z, y'z'$

(ب) $xy',\ xzt',\ y'zt',\ x'z't,\ y'z't$

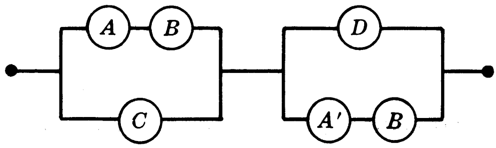
(پ) $xyzt,\ xz't',\ y'z't',\ x'y'z',\ x'z't$

۱۲. ۳۱. (ب) $(A \wedge B) \vee C \vee (A' \wedge C')$ (ت) $[B \wedge (A \vee C)] \vee (A' \wedge C')$

۱۲. ۳۲. ر. ک. شکل ۱۲. ۲۳.



مدار (ث)



مدار (ج)

شکل ۱۲. ۲۳

۱۲. ۳۳. (آ) $E = xy' + x'y + yz = xy' + x'y + xz'$

(ب) $E = xy' + x'y + z$

(پ) $E = x' + z$

۱۲. ۳۴. (آ) $E = x'y + zt' + xz't + xy'z = x'y + zt' + xz't + xy't$

(ب) $E = yz + yt' + zt' + xy'z'$

(پ) $E = x'y + yt + xy't' + x'zt = x'y + yt + xy't' + y'zt$

۱۲. ۳۵. (آ) $E_1 = x' + y$ (ب) $E_2 = xz' + yz$

(پ) $E_3 = y' + z't$ (ت) $E_4 = xy' + zt' + y'zt$

کتاب صبور

تهران-میدان انقلاب-خیابان اردیبهشت (منیری جاوید) کوچه مبین-پلاک ۲۳۱

تلفن:۶۶۴۰۸۹۵۸-۶۶۹۶۸۰۳۸ فکس:۶۶۴۰۵۰۵۲

ISBN:978-600-90717-8-4

9786009071784

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۹۰۷۱۷-۸-٤

ISBN: 978-600-90717-8-4