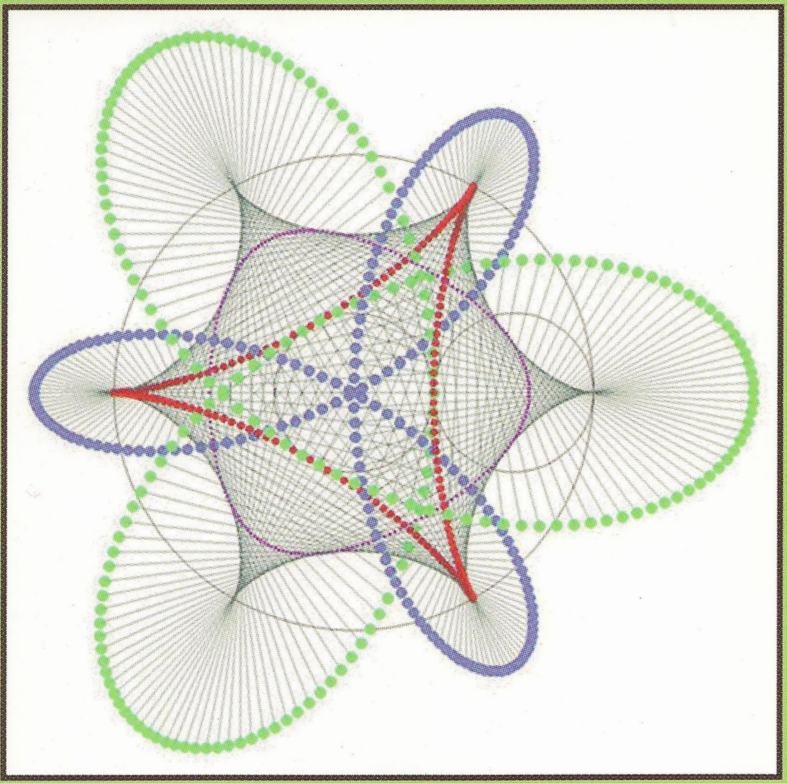
دانشگاه علم و صنعت ایران
تأسیس سال ۱۳۰۸

ریاضی فیزیک ۱



تألیف: هایک قولتوقچیان

بسم الله الرحمن الرحيم

ریاضی فیزیک ۱

تألیف : هایک قولتوقچیان

بسمه تعالی

کسی که هندسه نمی داند وارد نشود.

افلاطون

مقدمه مؤلف :

درس ریاضی فیزیک ۱ در مقطع کارشناسی و بعنوان درس تخصصی و درس پیش نیاز دروس اصلی در دانشکده های فیزیک تدریس می گردد و این خود بیانگر اهمیت بسیار زیاد این درس در آموختن علم فیزیک می باشد .

تجربه مؤلف در تدریس دروس الکترومغناطیس - مکانیک کوانتمی و مکانیک کلاسیک چه در مقطع کارشناسی و چه در مقطع کارشناسی ارشد نشان داده است مشکلاتی که اغلب دانشجویان در آموختن دروس نامبرده با آن مواجه می شوند ناشی از عدم تسلط و فهم درست درس ریاضی فیزیک و بالاخص ریاضی فیزیک ۱ می باشد .

به همین منظور از سال ۱۳۶۶ مؤلف مشغول تدریس ریاضی فیزیک ۱ گردید و بعد از تدریس چند ترم ، کتاب معرفی شده از طرف وزرات علوم ، ریاضی فیزیک جورج آرفکن

Mathematical methods for Physicist by G. Arfken .

بنا به دلایل ارائه شده در برگه های ضمیمه ناکافی تشخیص داده شد . (بعنوان مثال ساده تعداد دانشجویانی که المان سطح بر روی کره ای که مرکز آن واقع بر محور oz و سطح آن مماس بر صفحه xoy باشد به اشتباه $a^2 sin\theta d\theta d\phi$ می دانند و یا اینکه المان سطحی که معادله آن در مختصات منحنی الخط با پارامترهای (u,v) داده شده است از چه رابطه ای به دست می آید ناآگاه هستند کم نمی باشد).

حال تالیفی که پیش روی خود دارید نتیجه فراهم آوردن نتهای کلاسی سالیان دراز تدریس درس ریاضی فیزیک توسط مؤلف می باشد .این تألیف از سه فصل اساسی : الف - آنالیز برداری ، ب - مختصات منحنی الخط متعامد و غیر متعامد ، ج - ماتریسها و

دترمینانها و حدود یکصد و پنجاه مسئله تشکیل شده و تا آنجائیکه ممکن بوده است مطالب گنجانیده شده به منظور کاربری در دروس اصلی فیزیک صورت گرفته است .

تایپ کامپیوتری متن اصلی کتاب توسط خانم تهنیت عبدلی دانشجوی کارشناسی فیزیک و با حوصله و دقت زیادی صورت گرفته است و مسائل آن را نیز خانم کارین گورکیان دانشجوی کارشناس ارشد فیزیک انجام داده اند ، همچنین ویرایش علمی کتاب توسط آقای اکبر محرمی صورت گرفته و خانم تلی فائز دانشجوی کارشناسی فیزیک در ویرایش فنی آن زحمات زیاد متحمل شده اند که بدینوسیله از آنان تشکر می شود .

مؤلف تدریس ریاضی فیزیک را اولین بار برای دانشجویان فیزیک دانشگاه گیلان انجام داده است و بدینوسیله از آنان که با صبر و شکیبائی فرصت تعلم و تعلیم را مهیا ساختند صمیمانه تشکر می نماید.

امید است این تألیف نطیر دیگر تألیفات مؤلف ، امواج ، فیزیک الکتریسیته و مغناطیس ، مکانیک عمومی ، روشهای جدید برای محاسبه بردار سرعت زاویه ای جسم صلب مورد استقبال و استفاده خوانندگان عزیز قرار گیرد و اشتباهات احتمالی را به اطلاع مؤلف برسانند که مزید بر تشکر است .

در خاتمه مؤلف مایل است در کمال خضوع و فروتنی این تألیف را به عالم بزرگوار **تیگران پرواندیان** که نصایح و اندرزهای گرانمایه او همیشه رهگشای مؤلف بوده و انگیزه اصلی در تحریر این تألیف را ایجاد نموده است تقدیم نماید .

هایک قولتوقچیان
مهرماه ۱۳۷۵
دانشگاه علم و صنعت ایران

وجه تمایز این کتاب در مقایسه با کتاب استاندارد معرفی شده توسط وزارت علوم یعنی کتاب : ***Mathematical Methods For Physicists. by G. Arfken***(به زبان فارسی هم ترجمه شده است) به شرح زیر است .

۱ - این کتاب با نوتاسیون تانسوری آغاز شده و در نتیجه اثبات بسیاری از روابط برداری نظیر $a\times(b\times c)$ و غیره را به آسانی نشان داده است .کتاب آرفکن هر چند از نوتاسیون تانسوری در طول کتاب استفاده نموده است اما آن را به عنوان یک نظم در یک بخش معرفی نکرده است .

۲ - این کتاب دستگاه بردار پایه غیر متعامد راست خط که کاربرد فراوانی در درس فیزیک حالت جامد دارد با نوتاسیون تانسوری و با دقت فراوانی مورد بررسی قرار داده است در صورتی که کتاب آرفکن به صورت چند مسئله ساده از آن یاد نموده است، و سپس در بخش مختصات منحنی الخط دستگاه بردار پایه غیر متعامد منحنی الخط در یک یا دو صفحه بحث و هیچ گونه اشاره ای به ارتباط آن با دستگاه بردار پایه راست خط نکرده است .

۳ - این کتاب دقیقا″ از معادله منحنی ، سطح و فضا شروع کرده است (معمولا″ در هیچ یک از کتب ریاضی معادله فضا معرفی نمی شود) و سپس نحوه محاسبه المانهای طول - سطح و حجم را از روی معادلات نامبرده نشان شده است در صورتیکه کتاب آرفکن اشاره‌ای به این موضوعات نکرده است .

۴ - در محاسبه گردش میدان برداری روی منحنی $I_1 = \int A(x).dx$، در حالت کلی ، بررسی بسیار دقیق شده و نشان داده شد که معادله منحنی چگونه در محاسبات نقش دارد .اشکال مختلف انتگرالهای گردش میدان برداری شرح داده شده که متاسفانه بعضی از مدرسین فیزیک از آن بی خبر هستند .

۵ - محاسبه فلوی میدان برداری از یک سطح $I_2 = \int A(x).da$ ، در حالت کلی بررسی شده است و وابستگی I_2 به معادله سطح دقیقا″ نشان داده شده است .

۶ - در این کتاب دلتای دیراک بیشتر و بهتر از آنچه که در آرفکن آمده شرح داده شده است قضایای هلم هولتز نیز به همین گونه است . این قضایا برای میدانهای ابقائی که شرایط مرزی دیگری را هم قبول می کنند شرح داده شده است .

۷ - در این کتاب با استفاده از معادله فضا که در فصل اول معرفی گردیده است مختصات منحنی الخط به گونه‌ای منطقی تر معرفی شده است . فرمول اویلر- لاگرانژ در مختصات منحنی الخط استخراج شده است که کمک بزرگی به فهم این فرمول می نماید چه در کتب مکانیک ازتبدیلات پیچیده N ذره ای این فرمول استخراج می شود که دانشجو در پیچ و خم محاسبات گم می شود .

۸ - در این کتاب معادله منحنی ، سطح و فضا در مختصات منحنی الخط و با پارامترهای مختلف معرفی شده است و المانهای مربوطه به صورت فرمولهای کلی استخراج شده است . مثلاً" المان سطح بر روی کره ای که سطح آن مماس بر صفحه xoy و مرکز آن واقع بر oz است دیگر برابر $a^2 Sin\theta d\theta d\varphi$ نمی شود که اکثر دانشجویان این موضوعات را نمی دانند . کتاب آرفکن هیچ گونه بحثی در این موارد نکرده است .

۹ - محاسبات گرادیان یک اسکالر - دیوژانس و کرل یک میدان برداری به دو روش ابتکاری و استاندارد صورت گرفته است . محاسباتی نظیر $\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q^j}$ که $\hat{a}_i$ برداریکه مختصات منحنی الخط متعامد است یکی از امتیازات این کتاب است . تابع دلتای دیراک در مختصات منحنی الخط غیر متعامد به روش جالبی استخراج شده است .

۱۰ - در این کتاب مختصات منحنی الخط غیر متعامد که ادامه مطالب مختصات منحنی الخط است و اساس ریاضیات نسبیت عام می باشد به طور سیستماتیک شرح داده شده است . ضرایب کریستوفل و قوانین تبدیل این ضرایب و مولفه های کوواریانتی و کنتراواریانتی بردار استخراج شده است . درکتاب آرفکن این مطالب در چند صفحه خلاصه بندی شده است .

۱۱ - در این کتاب فصل عملگرها به مراتب کاملتر از کتاب آرفکن آمده و در این رابطه از نوتاسیون برداری دیراک استفاده شده است . همچنین عملگرهای مختلفی که در فیزیک کاربرد دارند در این کتاب معرفی شده است . در این کتاب روش جدیدی برای حل معادله شرودینگر ارائه شده است که حتی درکتب مکانیک کوانتمی نظیر ***Sakurai*** هنوز نیامده است . مبحث دترمینانها در این کتاب به مراتب کاملتر از کتاب آرفکن است .

فصل اول

آنالیز برداری

موضوع | صفحه

قسمت دوم

مختصات منحنی الخط غیرمتعامد

فصل دوم

قسمت اول

مختصات منحنی الخط متعامد

موضوع صفحه

فصل سوم

عملگرها(ماتریسها) و دترمینانها

موضوع		صفحه

فصل اول

آنالیز برداری

مقدمه:

هرچند که فرمول نیوتون پایه گذار اصلی آنالیز برداری می باشد اما این مبحث ریاضی تا ظهور فرمولهای ماکسول بصورت یک نظم نوین در ریاضیات مطرح نگردید اهمیت آنالیز برداری آنقدر زیاد است که امروزه حتی در دوره های دبیرستانی در مورد آنها صحبت میشود .

۱-۱ معرفی نوتاسیون تانسوری

قبل ازآنکه به تعریف رسمی بردار بپردازیم با درنظر گرفتن تعریف متداول و سنتی بردارها نوتاسیون تانسوری که باعث سهولت در تحریر میگردد را معرفی میکنیم نوتاسیون تانسوری را اولین بار مرحوم انیشتین در مباحث فیزیکی معرفی نمود .

در نوتاسیون تانسوری بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ و مؤلفه های x,y,z بردار مکانی $\vec{x}$ و مؤلفه های a_x, a_y, a_z یک بردار را بصورت زیر نمایش میدهند :

$$\begin{aligned} &\vec{i} \equiv \hat{e}_1 && a_x \equiv a_1 && x = x_1 \\ (1-1) \quad &\vec{j} \equiv \hat{e}_2 && a_y \equiv a_2 && y = x_2 \\ &\vec{k} \equiv \hat{e}_3 && a_z \equiv a_3 && z = x_3 \end{aligned}$$

بنا براین در نوتاسیون تانسوری یک بردار و یا بردار مکانی بصورت زیر نمایش داده میشود :

$$(1-2) \qquad \begin{cases} \vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, \hat{e}_i \\ \vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \, \hat{e}_i \end{cases}$$

رابطه (۲-۱) را با رابطه:

$$(1-3) \qquad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

مقایسه کنید و مشاهده نمایید که معنای سهولت در تحریر یعنی چه ؟

۱-۱-الف حاصلضرب ا سکالر دو بردار در نوتاسیون تانسوری

می دانیم حاصلضرب اسکالر بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بشرح زیر است :

$$\begin{matrix} \vec{i}.\vec{i}=1 & \vec{j}.\vec{i}=0 & \vec{k}.\vec{i}=0 \\ \vec{i}.\vec{j}=0 & \vec{j}.\vec{j}=1 & \vec{k}.\vec{j}=0 \\ \vec{i}.\vec{k}=0 & \vec{j}.\vec{k}=0 & \vec{k}.\vec{k}=1 \end{matrix} \qquad (1-4)$$

درصورتیکه درنوتاسیون تانسوری با یک جمله تمامی روابط(٤-١)رابیان میکنیم:

$$\vec{e}_i . \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (1-5)$$

هر گاه دو اندیس j, i یکسان باشند(٥-١)معرف حاصلضرب اسکالر دو برداریکه یکسان و هر گاه دو اندیس j , i مخالف هم باشند معرف حاصلضرب اسکالر دو بردار یکه متفاوت می باشد که نتیجه اولی برابر یک و نتیجه دومی برابر صفر میباشد .

در ادامه برای سهولت در تحریر علامتی بنام دلتای کرونکر δ_{ij} را تعریف میکنیم:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (1-6)$$

بنابراین رابطه(٥-١) بفرم تانسوری بصورت زیر در میاید :

$$\vec{e}_i . \vec{e}_j = \delta_{ij} \qquad (1-7)$$

بکمک رابطه (٧-١) حاصلضرب اسکالر دو بردار بصورت زیر در میاید:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\sum_i a_i \vec{e}_i \right) . \left(\sum_j a_j \vec{e}_j \right) \qquad (1-8)$$

توجه کنید که در روابط (٨-١)پرانتز ها رابا اندیسهای متفاوت نوشته ایم و این مسأله بسیار مهمی میباشد .برای حاصلضرب دوپرانتز که هریک شامل تعدادی جمله باشند میبایستی هر پرانتز رابا یک اندیس جمع بندی نمایش دهیم بعنوان مثال هر گاه بخواهیم رابطه زیر را محاسبه کنیم:

$$(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3) \qquad (1-9)$$

اگر هر دو پرانتزرابا یک اندیس نمایش دهیم دراینصورت خواهیم داشت :

$$\left(\sum_i a_i \right) \left(\sum_i b_i \right) = \sum_i a_i b_i \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (1-10)$$

که میدانیم رابطه (۹−۱)برابر(۱۰−۱)نمیشود. علت بدست آمدن نتیجه غلط این است که جملات حاصل ضربی که می بایستی دارای اندیسهای مختلف باشند(مثلاً a_2b_3) در رابطه (۱۰−۱) حذف شده اند بنابراین لازم است در این موارد هر پرانتز را با یک اندیس متفاوت بنویسیم. بنابراین نتیجه صحیح (۹−۱) بصورت:

$$(1-11)\quad \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j$$
$$= \sum_j a_1 b_j + \sum_j a_2 b_j + \sum_j a_3 b_j$$
$$= a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3$$

در میاید. توجه نمایید بطور کلی در روابطی نظیر:

$$\bar{a} = \sum_i a_i \hat{e}_i \quad \text{یا} \quad \sum_i a_i$$

که روی اندیس i جمع بندی میشود i را اندیس *dummy* نامند یعنی میتوان اندیس جمع بندی شونده را با هر حرفی نشان داد یعنی:

$$(1-12)\quad \bar{a} = \sum_i a_i \bar{e}_i = \sum_j a_j \bar{e}_j \equiv \sum_l a_l \bar{e}_l$$

همچنین شایان ذکر است هر گاه بخواهیم دو پرانتز که هر یک دارای تعداد جملات یکسان هستند، با یکدیگر **جمع نماییم** (و نه ضرب) دراینصورت لزومی ندارد که برای هرپرانتز(در حالت جمع پرانتزها) اندیس های *dummy* متفاوتی را انتخاب کنیم. بعنوان مثال:

$$(1-13)\quad (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)$$

$$(1-14)\quad \left(\sum a_i\right) + \left(\sum b_i\right) = \sum_i (a_i + b_i)$$

حال با متوجه شدن این مطالب به رابطه (۸−۱)در مورد حاصلضرب اسکالری دو بردار برمیگردیم:

$$(1-15)\quad (\bar{a}.\bar{b}) = \sum_i \sum_j a_i b_j \delta_{ij}$$

اگر روی اندیس j جمعبندی را انجام دهیم j مقادیر بین یک تا سه را اختیارمیکند.

ژبنابراین δ_{ij} در این جمع بندی همیشه مقدار صفر اختیار می کند مگر هنگامی که j دارای مقدار i شود (خود i یکی از مقادیر بین یک تا سه را داراست) بنابراین در جمعبندی روی اندیس j فقط جمله $j=i$ است که غیر صفرمیباشد و درنتیجه حاصلضرب اسکالر دو بردار بصورت:

$$\vec{a}.\vec{b} = \sum_i a_i b_i \tag{1-16}$$

درمیآید رابطه (۱۶-۱) همان رابطه ای است که بارها آن را در دبیرستان هم استخراج کرده ایم :

$$\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

۱-۱- ب معرفی حاصلضرب برداری دو برداردرنوتا سیون تا نسوری

بموجب تعریف حاصلضرب برداری دو بردار میدانیم که:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \\ e_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = 0 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0 \end{array} \tag{1-17}$$

درروابط(۱۷-۱) مشاهده میکنیم که هرگاه دواندیس بردارهای یکه با هم مساوی باشند نتیجه صفر و هر گاه دو اندیس مخالف هم باشند نتیجه غیر صفر است .اما نکته جالب توجه این است که نتیجه حاصلضرب برداری دو بردار یکه با دواندیس متفاوت بردار یکه دیگری است که اندیس آن با اندیسهای بردارهای یکه ضرب شونده متفاوت است یعنی مثلا" $\vec{e}_۲ \times \vec{e}_۳$ نتیجه $\vec{e}_۱$ میدهد و علامت بردار بدست آمده دربعضی موارد (۱+) و دربعضی موارد (۱-)است. اولین بار مرحوم لوی سویتا (Levi-Cevita) علامت تانسوری ε_{ijk} که امروزه کاربردهای فراوانی درفیزیک داردرابشرح زیرتعریف نمود. علامت لوی سویتا (که گاهی اوقات آنرا تانسور یا جمله لوی سویتا نیز مینامند) دارای خواص زیر است:

الف: هر گاه دواندیس از سه اندیس علامت لوی سویتا ε_{ijk} مساوی باشند مقدار آن صفر است.

ب: با جابجایی دو اندیس مجاور هم ،علامت لوی سویتا تغییر علامت میدهد.

ج :هرگاه ترتیب اندیسهای(i,j,k)در ε_{ijk}بصورت (۱۲۳)باشد علامت لوی سویتا مقدار ۱+ اختیار میکند و بموجب ب هرگاه اندیسهای (i,j,k)با تعداد جابجاییهای زوج بصورت (۱۲۳) تبدیل کنیم مقدارآن باز هم برابر ۱+میگردد .اگرتعداد جابجاییهایی که اندیسهای (i,j,k) را بصورت (۱۲۳) در بیاورد، فرد باشد علامت لوی سویتا مقدار ۱- اختیار میکند. بعنوان مثال:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{112}=0 \quad , \quad \varepsilon_{313}=0\\
&\varepsilon_{123}=+1 \quad , \quad \varepsilon_{231}=-\varepsilon_{213}=(-1)^2\varepsilon_{123}=+1 \qquad (1-18)\\
&\varepsilon_{132}=-\varepsilon_{123}=-1
\end{aligned}
$$

سؤال:اگر در ε_{ijk}حتی هنگامیکه دو اندیس با هم مساوی میشدند جواب غیر صفر میبود تعداد جملات ε_{ijk}حاصل از اندیسهای متفاوت چند تا می شد؟

جواب: هرگاه i,j,k مقادیر بین یک تا سه اختیار نمایند بازاء۳،۲، ۱=i سه جمله حاصل میشود و سپس هر یک از جملات بازاء مقادیر مختلفی که j بین یک تا سه اختیارمی کند به سه جمله تبدیل میشوند.یعنی با جمع بندی روی اندیسهای j , i جمعا" نه جمله بدست میاید.با جمعبندی روی اندیس k بین ۱تا ۳ تعدادجملات مختلفی که از تانسور لوی سویتا میتوانیم بسازیم ۲۷ جمله می شود.

سوال: با درنظرگرفتن اینکه اگردواندیس تانسورلوی سویتا با یکدیگر مساوی باشند مقدار آن برابرصفر میگردد تعداد جملا ت غیر صفری که تانسور لوی سویتا خواهد داشت چند تا میشود ؟

جواب:اندیس i سه مقدار ۳،۲،۱ اختیار می کند در نتیجه سه جمله با اندیس اول میسازیم در هر جمله بدست آمده اندپس j نمی تواند سه مقدار ۳،۲،۱ اختیار کند مثلا"اگر در جمله اول ۱=i باشد jفقط مقادیر ۳،۲ اختیار میکند به همین ترتیب در جمله دوم هم j دو مقدار اختیار میکند پس تعداد جملا ت غیر صفر مختلفی که با اندیسهای i, j می توان ساخت جمعا" شش می باشد حال درجملات بدست آمده برای اندیس k در هرجمله فقط یک مقدارباقی میماند که اختیار کند که همچنین با اندیسهای

i, j نباید مساوی باشد بنابراین مجموعا" شش جمله یعنی ۶=!۳=۱×۲×۳ جمله غیر صفر برای تانسور لوی سویتا داریم.

حال اگربه روابط (۱۷-۱) برگردیم نوتاسیون تانسوری این روابط بصورت:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k \qquad (1-19)$$

در میآید. بعنوان مثال بموجب (۱۹-۱):

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \varepsilon_{321}\, \vec{e}_1 = -\varepsilon_{312}\, \vec{e}_1 = +\varepsilon_{132}\, \vec{e}_1 = -\varepsilon_{123}\, \vec{e}_1 = -\vec{e}_1$$

مشاهده میگردد که نوشتن رابطه (۱۹-۱) چقدر صرفه جویی دروقت حاصل میکند.

بنابراین حاصلضرب برداری دو بردار در نوتاسیون تانسوری بصورت زیر در میاید:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\sum_i a_i \vec{e}_i\right) \times \left(\sum_j b_j \vec{e}_j\right) = \sum_i \sum_j a_i\, b_j\, \vec{e}_i \times \vec{e}_j$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk}\; a_i b_j \vec{e}_k \qquad (1-20)$$

هرگاه بخواهیم مؤلفه $(\vec{a}\times\vec{b})$ درراستای محور x_l (l مقادیر ۱، ۲، ۳را اختیارمیکند) رابدست آوریم کافیست رابطه (۲۰-۱)را در $\hat{e}_l$ ضرب اسکالر نماییم:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\,\right).\hat{e}_l = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_l = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\; a_i\;\; b_j \delta_{kl} \qquad (1-21)$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_l = \sum_{ij} \varepsilon_{ijl}\; a_i b_j$$

توجه کنید اگر مؤلفه $(\vec{a}\times\vec{b})$ را در راستای x_k (kمقادیر ۱، ۲، ۳را اختیارمیکند) را به دست آوریم میبایستی اندیس dummy، k در (۲۰-۱) را با سمبل دیگری نشان دهیم تا بتوان $(\vec{a}\times\vec{b})_k$ را بدست آورد. حتما" میدانید چرا؟

قبل از آنکه دیگر کاربردهای نوتاسیون تانسوری راشرح دهیم چند خاصیت علامت لوی سویتا را بدون اثبات (اثبات این خواص دربخش دترمینانها خوا هد آمد) ذکرمیکنیم:

الف : حاصلضرب دو جمله لوی سویتا که هیچ اندیس مشترک بصورت جمع بندی ندارد:

$$(1-22) \qquad \varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \end{vmatrix} \qquad (a)$$

توجه کنید که برای حفظ کردن دترمینان فوق اندیسهای جمله لوی سویتای اولی بصورت افقی در هر سطر و اندیسهای جمله لوی سویتای دومی بصورت قائم در هر ستون نوشته شده است .توجه کنید نتیجه دترمینان ۱+ یا ۱−یا صفر است.چرا؟

ب: حاصلضرب دو جمله لوی سویتا که یک اندیس مشترک برای جمع بندی دارند:

بموجب (۲۲−۱) داریم :

$$\sum_k \varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{mnk} = \sum_k \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ik} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jk} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & 3 \end{vmatrix}$$

البته رابطه ساده شده فوق را که باید آنرا به خاطر بسپاریم بصورت زیر میباشد :

$$(1-23) \qquad \sum_k \varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

در (۲۳−۱) همانگونه که مشاهده می کنیم اندیس dummy ، k در جایگاه یکسان در دو جمله لوی سویتا قرار گرفته است (در رابطه فوق هردو اندیس درجایگاه سوم قرار دارند). اندیسهای i, j بصورت اندیسهای اول دردلتاهای کرونکر نوشته شده و سپس در جمله اول سمت راست اندیسهای (m, n) و درجمله دوم جای m و n عوض شده است.

ج : حاصلضرب دو جمله لوی سویتا که دارای دو اندیس مشترک برای جمع بندی هستند:

بموجب (۲۳−۱) خواهیم داشت:

$$(1-24) \qquad \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{mjk} = \sum_j \left(\delta_{im}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jm}\right) \quad , \quad \sum_j \delta_{jj} = 3$$

$$\sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{mjk} = 3\delta_{im} - \delta_{im} = 2\delta_{im}$$

تذکر: در جمعبندی روی اندیس مشترک دو دلتای کرونکر$\sum\delta_{ij}\,\delta_{jm}$یکی از دلتا ها را با خواص دلتای کرونکر و دیگری را مثلا"ماتریس فرض کنید بنابراین اگر دلتای کرونکر اول را ماتریس فرض کنیم خواهیم داشت :

$$\sum_{j}\delta_{ij}\,\delta_{jm}=\delta_{im}$$

د: حاصلضرب دوجمله لوی سویتاکه دارای سه اندیس مشترک جمع بندی هستند:

بموجب (۲٤-۱) خواهیم داشت :

$$\sum_{i}\sum_{j}\sum_{k}\varepsilon_{ijk}\;\varepsilon_{ijk}=\sum_{i}2\delta_{ii}=6=3! \qquad (1-25)$$

۱-۱-ج کاربردهای نوتاسیون تانسوری

نوتاسیون تانسوری فقط کاربرد درنمایش حاصلضرب اسکالر یا برداری دوبردارندارد بلکه در بسیاری از محاسبات آنالیز برداری مورداستفاده قرار می گیرد بعنوان مثال مسأله ای را که در زیر مطرح می کنیم در فیزیک عمومی مکانیک بصورت چند مسأله مطرح شده بود ما در اینجا با نوتاسیون تانسوری بسهولت پاسخ آنرا بدست می آوریم.

مسأله : ثابت کنید :

$$I=\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}.\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}.\vec{b}\right) \qquad (1-26)$$

بموجب (۲۰-۱) داریم :

$$I=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\,a_i\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_j\vec{e}_k$$

و بموجب (۲۱-۱) داریم :

$$I=\sum_{i\;j\;k}\sum_{m\;n}\varepsilon_{ijk}\;\varepsilon_{mnj}\;a_i b_m c_n\,\vec{e}_k$$

و بموجب (۲۳-۱) داریم :

$$I=\sum_{i\;k\;m\;n}-\left(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km}\right)a_i b_m c_n\vec{e}_k$$

حال روی اندیسهای تکراری m , n جمع بندی میکنیم:

$$I=-\sum_{i\;k}\left[a_i b_i c_k\vec{e}_k-a_i b_k c_i\vec{e}_k\right]$$

حال بموجب (۲-۱)و(۱٦-۱) داریم :

$$I = -(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} + (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

که همان رابطه معروف بک – کب است.

بعنوان مثال دوم : ثابت کنید درحاصلضرب مختلط بردارها با جابجا کردن سیکلی (چرخه ای) بردارها و یا علامتهای حاصلضرب ،مقدار حاصلضرب تغییر نمی کنـد یعنی نشان دهید که :

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (1-27)$$

اگر جمله اول را I بنامیم:

$$I = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$$

که بموجب (۱۶–۱) برابر می شود با:

$$I = \sum_i a_i (\vec{b}\times\vec{c})_i$$

و بموجب(۲۱–۱) برابر می شود با :

$$I = \sum_{ijk} \varepsilon_{jki}\, a_i b_j c_k$$

اندیس i را درعلامت لوی سویتا دو بار جابجا می کنیم در نتیجه خواهیم داشت:

$$I = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j\, c_k$$

که باز هم بموجب (۲۱–۱) داریم:

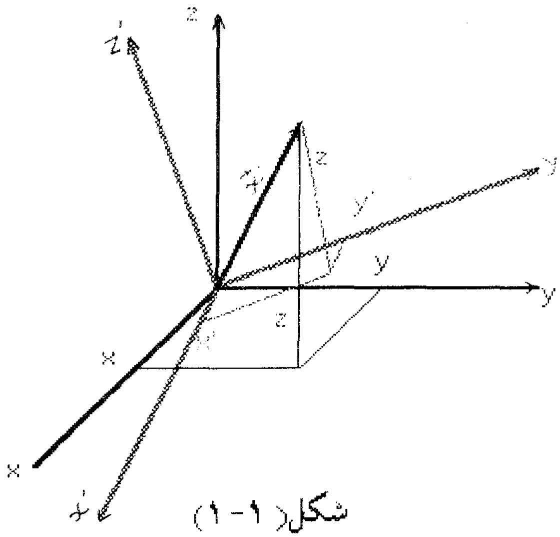
$$I = \sum_k (\vec{a}\times\vec{b})_k c_k$$

$$I = (\vec{a}\times\vec{b}).\,\vec{c} = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$$

۲–۱ تعریف رسمی بردارها :

در فیزیک کمیاتی وجود دارد که با چهارمشخصه امتداد،جهت،طول و نقطه اثرمشخص میشوند اما بردار نیستند. معروفترین مثال در این رابطه ضریب شکست نور در بعضی از اجسام بلورین است که مقدار n در نقاط مختلف و در جهات مختلف مقادیر متفاوت اختیار میکند اما ضریب شکست بردار نمیباشد. حال اگر بردار را از نظرهندسی بوسیله پاره خط جهت دارنشان دهیم نتایج زیررا بدست خواهیم آورد که فقط وفقط ازباپاره خط نشان دادن بردار ناشی شده است.

هر گاه دو دستگاه مختصات قائم(دکارتی) $oxyz$ و $ox'y'z'$ که یکی دراثر دوران دیگر حاصل شده باشد در نظر بگیریم:



شکل(۱-۱)

بردار مکانی $\vec{x}$ در دو دستگاه نامبرده با روابط زیر داده میشود:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} x_j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} x'_j \vec{e}'_j \qquad (1-28)$$

$\{e'_j\}$ و $\{e_j\}$ معرف دو دستگاه بردارهای یکه متعلق به $oxyz$ و $ox'y'z'$ میباشد.

هرگاه بخواهیم مؤلفه x'_i را بر حسب x_j ها بدست آوریم کافیست رابطه (۲۸-۱) را در بردار $\vec{e}'_i$ ضرب اسکالر کنیم:

$$\sum_j x_j \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j = \sum_j x'_j \delta_{ij} \qquad (1-29)$$

با تعریف ضرب اسکالر بین بردارهای یکه دو دستگاه بصورت:

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j = \alpha_{ij} \qquad (1-30)$$

که α_{ij} کسینوس زاویه بین بردارهای یکه $\vec{e}'_i$ با بردار یکه $\vec{e}_j$ است،رابطه (۲۹-۱)برابر:

$$x'_i = \sum_j \alpha_{ij} x_j \qquad (1-31)$$

بموجب(۳۱-۱) مؤلفه بردارمکانی $\vec{x}$ درراستای $\vec{e}'_i$ یعنی x'_i ترکیب خطی از همه مؤلفه های همان بردار مکانی در دستگاه $oxyz$ است بطریق مشابه اگر رابطه(۲۸-۱) را در $\vec{e}_i$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$x_i = \sum_j x'_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j$$

بسیار توجه کنید که:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j \equiv \vec{e}'_j \cdot \vec{e}_i = \alpha_{ji}$$

بنابراین:

$$x_i = \sum_j \alpha_{ji} x'_j \equiv \sum_j \tilde{\alpha}_{ij} x'_j \qquad (1-32)$$

روابط(۳۱-۱) و(۳۲-۱) را بایکدیگرمقایسه کنید وجایگاه اندیس jرا در این روابط مشاهده نمایید.

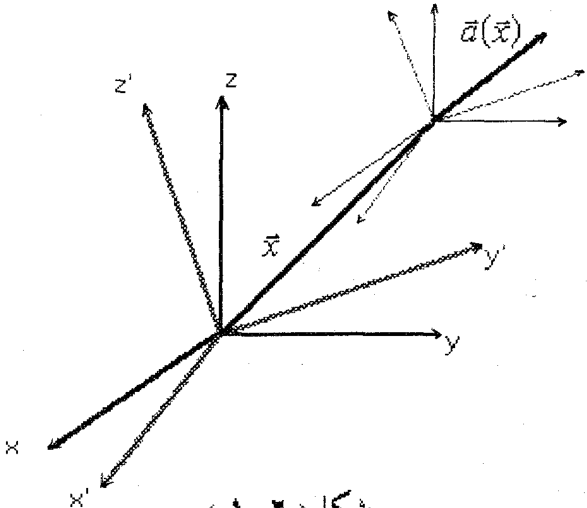
روابط (۳۱-۱) و(۳۲-۱) معرف قوانین تبدیل دورانی بین مؤلفه های یک بردار مکانی در دو دستگاه که یکی ناشی از دوران دستگاه دیگرحاصل شده است میباشد. میتوان نشان دادچنین قوانین تبدیلی بین مؤلفه های یک میدان برداری وجود دارد. بموجب تعریف میدان برداری میدانی است که به هر نقطه آن برداری رانسبت داده ایم و بقولی مجموعه بردارهایی است که امتداد، جهت و طول هر یک از آنها تابعی از نقطه اثر شان میباشد(در مورد میدان برداری در جزوه فیزیک پایه ۲ شرح بیشتری داده شده است.)حال بموجب شکل (۲-۱) اگر دستگاه محورهای همسنگ با $\vec{e}_i$ و$\vec{e}'_i$ ها ازنقطه اثر میدان برداری $\vec{a}(\vec{x})$ رسم کنیم مؤلفه های بردار$\vec{a}$دراین دو دستگاه کمکی همان مؤلفه های $\vec{a}$در دستگاههای $\vec{e}_i$ و$\vec{e}'_i$خواهد بود. توجه میکنیم اگر$a_i(\vec{x})$ مؤلفه های بردار$\vec{a}$درراستای $\vec{e}_i$ درنقطه $\vec{x}$ باشد،$a'_i(\vec{x}')$ مؤلفه همان بردار$\vec{a}$ در راستای $\vec{e}'_i$خواهد بود. اما مجبوریم نقطه اثر بردار$\vec{a}$ در این دستگاه جدید را با $\vec{x}'$ نشان دهیم.

پس قوانین تبدیل بین مؤلفه های یک میدان برداری در دو دستگاه یاد شده از رابطه:

$$a'_i(\vec{x}') = \sum_j \alpha_{ij} a_j(\vec{x}) \qquad (1-33)$$

$$a_i(\vec{x}) = \sum_j \tilde{\alpha}_{ij} a'_j(\vec{x}) \qquad (1-34)$$

پیروی میکند.



شکل(۲-۱)

وجود قوانین تبدیل دورانی (۳۳-۱) باعث می گردد قیدی در تعریف میدان برداری حاصل شود وهر میدان برداری که مؤلفه های آن تابع دلخواه از x,y,z باشند بعنوان میدان برداری خوانده نشوند چون روابط(۳۳-۱) بطور دقیقتر بصورت:

$$(1-35)\begin{cases} a_i'(\vec{x}') = \sum_j \alpha_{ij}\, a_j(\tilde{\alpha}\vec{x}') \\ a_i'(\alpha\,\vec{x}) = \sum_j \alpha_{ij}\, a_j(\vec{x}) \end{cases}$$

می باشد.

اگر $a_j(\vec{x})$ هر تابع دلخواهی ازx,y,zباشد روابط (۳۵-۱) را اقناع نمیکند.

بعنوان مثال بسیار ساده میدان برداری $\vec{a}(\vec{x})$با مؤلفه های:

$$(1-36)\quad a_1(\vec{x}) = x \quad a_2(\vec{x}) = -y \quad a_3(\vec{x}) = 0$$

در نظر می گیریم.

مؤلفه های این بردار در دستگاه $\vec{e}'_i$میبایستی بصورت زیر باشد:

$$a_1'(\vec{x}') = x' \quad a_2'(\vec{x}') = -y' \quad a_3'(\vec{x}')$$

بموجب(۳۳-۱) داریم:

$$\begin{pmatrix} x' \\ -y' \\ a_3'(\bar{x}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1-37)\quad \begin{cases} x' = \alpha_{11}x - \alpha_{12}y \\ -y' = \alpha_{21}x - \alpha_{22}y \\ a_3'(\bar{x}') = \alpha_{31}x - \alpha_{32}y \end{cases}$$

اما رابطه (۳۷-۱) رابطه (۳۱-۱) را اقناع نمی کند. بنابراین بموجب قوانین تبدیلات دورانی کمیت $\vec{a}=(\vec{x}i - \vec{y}j)$ یک میدان برداری خوانده نمیشود.

حال خواننده ممکن است این سؤال را نماید که درقوانین تبدیل یک بردار در دو دستگاه از خواص پاره خط بودن بردار استفاده شده است و نتایج بدست آمده موضوع جدیدی نیست. خاطرنشان میسازیم که درفضای سه بعدی که ازنظرهندسی برای ما قابل تجسم است قوانین تبدیل دورانی نتایج جدیدی نمی باشد اما ما ازاین قوانین تبدیل الهام گرفته و برای فضاهای با بعد بزرگتر که دیگر نمی توان بردار را بصورت پاره خط نمایش داد بلکه مؤلفه های آن قابل نمایش است بردار را بر حسب قوانین تبدیل معرفی می کنیم به عنوان مثال در فضای چهار بعدی مینکوفسکی (*Minkowski*) که در نسبیت استفاده فراوان دارد کمیتهایی رابردارتعریف میکنیم که مؤلفه های آنها در دو دستگاه از قوانین تبدیل زیرین پیروی کنند:

$$x'_\mu = \sum_{\gamma=1}^{4} L_{\mu\gamma}\ x_\gamma$$

$$(1-38)\quad a'_\mu(\bar{x}') = \sum_{\gamma=1}^{4} L_{\mu\gamma}\ a_\gamma\ (\bar{x})$$

که $L_{\mu\gamma}$ دیگر α_{ij} نمیباشد بلکه ماتریسی است معروف به ماتریس لورنتس که در اکثر کتب الکترومغناطیس پیشرفته نمایش صریح آن داده شده است بغیر از فضای چهاربعدی مینکوفسکی فضاهای n بعدی و فضای هیلبرت داریم که بعد فضای هیلبرت بینهایت است.

در فضای سه بعدی قوانین تبدیل فقط منتهی به قوانین تبدیل دورانی نمیشود.مثلا" میتوان دستگاه $ox'y'z'$داشته باشیم که امتداد ox'_iآن درست درخلاف جهت ox_i باشد دراین صورت مؤلفه های بردار مکانی $\vec{x}$ویا هربردار نظیر $\vec{a}(\vec{x})$با ماتریس تبدیل:

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

یعنی:

$$a'_i(\bar{x}') = -a_i(\bar{x}) \qquad (1-39)$$

داده می شود.رابطه(۳۹-۱) مبین قانون تبدیل موسوم به قانون تبدیل انعکاسی بین مؤلفه های یک بردار نامند.جالب توجه آنکه خاطر نشان سازیم ممکن است کمیتی ازنظر قوانین تبدیل دورانی(۳۳-۱)بردارنامیده شود اما ازقاعده تبدیل انعکاس(۳۹-۱) پیروی نکند معروفترین مثال فیزیکی بردار ممانتم زاویه $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$است که $\vec{r}$و $\vec{p}$ هر یک از قانون تبدیل (۳۹-۱) پیروی میکنند اما خود $\vec{L}$ از قانون $\vec{L}'_i = -\vec{L}_i$ پیروی نمیکند اینگونه از بردارها راکه مؤلفه های آنها ازقانون تبدیل (۳۳-۱) پیروی اما از قانون تبدیل (۳۹-۱) پیروی نمیکنند را شبه بردار(*pseudo vector*)نامند.از این پس ما توجه خودرا فقط به کمیتهای برداری که ازقوانین تبدیل دورانی(۳۳-۱) پیروی میکنند متمرکز میکنیم.

۱-۲-الف تعریف میدان اسکالروقوانین تبدیل دورانی میدانهای اسکالردردودستگاه متعامد که یکی از دوران دیگری حاصل شده است:

هر گاه به هر نقطه از فضا کمیت اسکالری نظیر درجه حرارت،دانسیته بار الکتریکی نسبت دهیم در آن فضا تشکیل میدان اسکالر داده ایم بنابراین کمیت اسکالردر حالت عمومی تابعی از مختصات نقطه در فضا است یعنی:

$$f = f(\bar{x}) \qquad (1-40)$$

است.$f(\vec{x})$نمایش میدان اسکالر در دستگاه $oxyz$ است اگرآن را در دستگاه $ox'y'z'$نمایش دهیم بصورت $f'(\vec{x}')$میباشد.$\vec{x}$و$\vec{x}'$معرف مختصات یک نقطه در فضا است.

به موجب تعریف ،$f(\vec{x})$زمانی اسکالر خوانده میشود که:

$$f(\vec{x}) = f'(\vec{x}') \qquad (1-41)$$

باشد. رابطه(۱−٤۱) را قانون تبدیل دورانی میدانهای اسکالر نامند.

۱−۲−ب خواص α_{ij} ها:

بموجب (۱−۳۱)و(۱−۳۲) داریم:

$$x_i' = \sum_l \alpha_{il} x_l \quad , \quad x_k = \sum_m \tilde{\alpha}_{km} x_m'$$

حال اگر از روابط فوق بترتیب نسبت به x_k و x'_j مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = \alpha_{ik} \quad , \quad \frac{\partial x_k}{\partial x_j'} = \tilde{\alpha}_{kj} \qquad (1-42)$$

در نتیجه:

$$\sum_k \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_j'} = \sum_k \alpha_{ik} \tilde{\alpha}_{kj} \qquad (1-43)$$

نتیجه سمت چپ (۱−٤۳) برابر δ_{ij} است بنابراین α_{ij} ها میبایستی از رابطه:

$$\sum_k \alpha_{ik} \tilde{\alpha}_{kj} = \delta_{ij} \qquad (1-44)$$

پیروی کنند.

رابطه(۱−٤٤) را میتوان بصورت دیگر هم اثبات کرد. مثلاً" داریم:

$$\sum_k \alpha_{ik} \tilde{\alpha}_{kj} = \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \left(\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_k\right)\left(\vec{e}_j' \cdot \vec{e}_k\right) \qquad (1-45)$$

حال اگر $\vec{e}'_j$ و $\vec{e}'_i$ را بصورت بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ فرض کنیم از (۱−٤٥)نتیجه میگیریم که:

$$\sum_k \alpha_{ik} \tilde{\alpha}_{kj} = \sum_k a_k b_k = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \equiv \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\right) = \delta_{ij} \qquad (1-46)$$

البته اثبات اول ارجح است بدلیل آنکه عناصر ماتریسهای تبدیل در حالت عمومی به صورت حاصلضرب اسکالر بردارهای پایه نمیباشد (مثلاً" ماتریس تبدیل لورنتس دارای این خاصیت نمی باشد.)وجود رابطه (۱−٤٤) نشان میدهد که اگر سه α_{ij} را بدانیم دیگر α_{ij} ها برحسب آنها معلوم است. برای اثبات توجه میکنیم دررابطه(۱−٤٤) جای اندیسهای i و j را تغییر دهیم هیچگونه تغییری حاصل نمیشود چون:

$$\sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \sum_k \alpha_{jk} \alpha_{ik} = \delta_{ij}$$

یعنی مثلا" سمت چپ رابطه فوق با جایگذاری $i=1$ و $j=3$ سپس با جایگذاری $i=3$ و $j=1$ تفاوتی نمیکند بنابراین تعداد روابط مستقلی که با i و j های مختلف میتوان نوشت شش وبشرح زیر است:

$$\alpha_{11}\alpha_{11}+\alpha_{12}\alpha_{12}+\alpha_{13}\alpha_{13}=1 \qquad j=i=1$$
$$\alpha_{21}\alpha_{21}+\alpha_{22}\alpha_{22}+\alpha_{23}\alpha_{23}=1 \qquad j=i=2$$
$$\alpha_{31}\alpha_{31}+\alpha_{32}\alpha_{32}+\alpha_{33}\alpha_{33}=1 \qquad j=i=3$$
$$(1-47)\quad \alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}+\alpha_{13}\alpha_{23}=0 \qquad i=1, j=2$$
$$\alpha_{11}\alpha_{31}+\alpha_{12}\alpha_{32}+\alpha_{13}\alpha_{33}=0 \qquad i=1, j=3$$
$$\alpha_{21}\alpha_{31}+\alpha_{22}\alpha_{32}+\alpha_{23}\alpha_{33}=0 \qquad i=2, j=3$$

به موجب (۴۷–۱) نه مجهول α_{ij} وشش رابطه داریم بنابراین برای سه مجهول مقدار دلخواه اختیار میکنیم و شش مجهول باقیمانده بر حسب مقادیر آن سه مجهول بدست می آید ،بقولی ما دارای سه درجه آزادی هستیم .

مفهوم هندسی رابطه فوق بدین شرح است :هر گاه مختصات زاویه ای محور oz' را داشته باشیم میتوان محور oz' را رسم کرد. بشکل (۳–۱) توجه نمایید .اما بینهایت دستگاه $ox'y'z'$ میتوان داشت که دارای همان محور oz' باشند ولی هرگاه مثلا" زاویه محور ox' نسبت به محور ox هم داده شود در اینصورت وضعیت جهات محورهای دستگاه $ox'y'z'$ نسبت به دستگاه $oxyz$ کاملا" معلوم میگردد.

توجه میکنیم معلوم بودن θ و φ بمعنای معلوم بودن α_{33} و α_{31} است چون:

$$\alpha_{33}=\vec{e}'_3\cdot\vec{e}_3=\cos\theta$$
$$\alpha_{31}=\vec{e}'_3\cdot\vec{e}_1=\sin\theta\cos\varphi$$

بنابراین مثلا" اگر $\alpha_{11}=\hat{e}'_1.\hat{e}_1$ هم داده شود دیگر α_{ij} ها معلوم میشوند. رابطه (۴۷–۱) بیان تحلیلی استدلال فوق است.

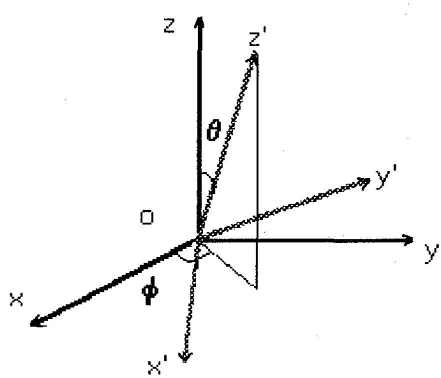
خواص دیگر α_{ij} ها بنا به ضرورت مسئله، در قسمتهای زیرین استخراج میکنیم.

مسأله: ثابت کنید هرگاه $\vec{a}(\vec{x})$ و $\vec{b}(\vec{x})$ از خواص تبدیلات دورانی پیروی کنند حاصلضرب اسکالر دو بردار تشکیل کمیت(میدان) اسکالرمیدهد (یعنی مقدار حاصلضرب اسکالر دو بردار مستقل از انتخاب دستگاه است.)

اثبات: هرگاه مؤلفه های $\vec{a}(\vec{x})$ و $\vec{b}(\vec{x})$ در دستگاه پریم با رابطه $a_i'(\vec{x})$ و $b'_i(\vec{x})$ باشد حاصل ضرب اسکالر آنها برابر با:

$$I = \sum_i a_i'(\vec{x}')b_i'(\vec{x}')$$

حال با استفاده از قوانین تبدیلات دورانی (۳۳-۱) داریم :



شکل(۳- ۱)

$$I = \sum_{i,j,k} \alpha_{ij} a_j(\vec{x}) \alpha_{ik} b_k(\vec{x})$$

$$= \sum_{i,j,k} \tilde{\alpha}_{ki} \alpha_{ij} a_j(\vec{x}) b_k(\vec{x})$$

$$= \sum_{j,k} \delta_{kj} a_j(\vec{x}) b_k(\vec{x}`)$$

$$\sum_i a_i'(\vec{x}')b_i'(\vec{x}') = \sum_k a_k(\vec{x}) b_k(\vec{x}) \qquad (1-48)$$

مسأله: ثابت کنید نتیجه حاصلضرب برداری دو بردار گفته شده درمسأله قبلی از قوانین تبدیل دورانی پیروی میکند (یعنی نتیجه حاصلضرب برداری دوبرداریک بردارمیباشد)

هر گاه حاصلضرب برداری دو بردار رادردستگاه پریم بنویسیم:

$$\vec{c} = \left[\vec{a}(\vec{x}) \times \vec{b}(\vec{x})\right]$$

$$c'_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a'_j(\vec{x}') b'_k(\vec{x}')$$

بموجب(۳٤-۱)داریم:

$$c'_i = \sum_{j,k,l,m} \varepsilon_{ijk} \alpha_{jl} a_l(\vec{x}) \alpha_{km} b_m(\vec{x})$$

بنابراین میبایستی رابطه:

$$I = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \alpha_{jl} \alpha_{km}$$

را ساده کنیم.بموجب (۳۰-۱) داریم:

$$I = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \left(\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_l\right)\left(\vec{e}'_k \cdot \vec{e}_m\right)$$

$$I = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \left(\vec{e}_l\right)'_j \left(\vec{e}_m\right)'_k = \left(\vec{e}_l \times \vec{e}_m\right)'_i \equiv \left(\vec{e}_l \times \vec{e}_m\right) \cdot \vec{e}'_i$$

$$\left(\varepsilon_{lmp} \vec{e}_p\right) \cdot \vec{e}'_i = \sum_p \varepsilon_{lmp} \alpha_{ip}$$

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \alpha_{jl} \alpha_{km} = \sum_p \varepsilon_{lmp} \alpha_{ip} \qquad (1-49)$$

رابطه (٤۹-۱) یکی دیگر ازخواص α_{ij} ها رانشان میدهد کتاب آرفکن رابطه (٤۹-۱) را بصورت غیر تانسوری اثبات میکند مثلا" اگر در (٤۹-۱) l=۳ و m=۱ و i=۳ اختیار کنیم (توجه کنید دررابطه فوق اندیسهای i,m,l غیرتکراری هستند) بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{3jk} \alpha_{j3} \alpha_{k1} = \sum_p \varepsilon_{31p} \alpha_{3p}$$

$$\varepsilon_{312} \alpha_{13} \alpha_{21} + \varepsilon_{321} \alpha_{23} \alpha_{11} = \varepsilon_{312} \alpha_{32}$$

$$\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{11} = \alpha_{32}$$

رابطه فوق همان رابطه(۱−٤۱) کتاب آرفکن است.

با درنظر گرفتن رابطه (۱−٤۹) داریم:

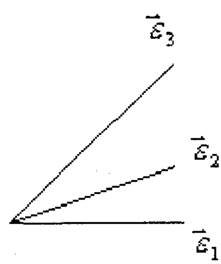
$$c'_i = \sum_{l,m,p} \varepsilon_{lmp}\, a_l\, b_m\, \alpha_{ip}$$

$$c'_i = \sum_p \alpha_{ip}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_p = \sum_p \alpha_{ip} c_p \qquad (1-50)$$

یعنی $\vec{C}$ از قوانین دورانی پیروی میکند.

۳−۱ دستگاه بردار پایه غیر متعامد

در بعضی از مباحث فیزیک نظیر درس حالت جامد ما مجبور به استفاده از بردارهای پایه غیر متعامد هستیم که الزاما" طول آنها نیز واحد نمیباشد. این بردارهای پایه رابا $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ i=۱,۲,۳ نشان میدهیم.



شکل (۱-٤)

(این بردارهای پایه بزبان ساده تر در جزوه مکانیک نیز معرفی شده است.)

حاصلضرب اسکالر بین دو بردار پایه $\vec{\varepsilon}_i$ و $\vec{\varepsilon}_j$ دیگر برابر δ_{ij} نمیشود وما آن رابصورت:

$$\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j = g_{ij} \qquad (1-51)$$

نمایش میدهیم. g_{ij} را تانسور متریک دستگاه بردار پایه غیر متعامد $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ نامند و در واقع ساختار هندسی بردارهای پایه را مشخص میکند. درچنین دستگاهی بردار مکانی $\vec{x}$ و یا هر برداری نظیر $\vec{a}$ بصورت زیر تجزیه میشود:

$$\vec{x} = x^i\, \vec{\varepsilon}_i \qquad (1-52)$$

$$\vec{a} = a^i\, \vec{\varepsilon}_i$$

خاطر نشان میسازیم که اندیس مؤلفه های بردار $\vec{a}$ در دستگاه $\{\ \vec{\varepsilon}_i\ \}$ را در بالا قرار میدهیم که اولا" قرارداد انیشتین که اندیس تکرار شده در بالا و پایین بمعنای جمع آن است و ثانیا" اینکه اگر اندیس i که در پایین قرار گیرد معنای دیگری خواهد داشت را رعایت کرده باشیم. a^i را اصطلاحا" مؤلفه کنتراواریانت بردار $\vec{a}$ در دستگاه $\vec{\varepsilon}_i$ نامند بعلت آنکه دستگاه بردار پایه $\vec{\varepsilon}_i$ متعامد نمی باشد حاصلضرب اسکالر دو بردار دیگر فرم ساده نظیر(۱۶-۱) که در دستگاه متعامد وجود دارد نخواهد داشت بلکه بصورت:

$$(1-53) \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a^i\vec{\varepsilon}_i\right)\cdot\left(b^j\vec{\varepsilon}_j\right) = a^i b^j g_{ij}$$

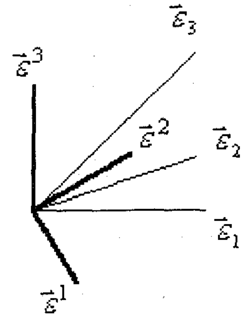
ظاهر میشود (جمع بر روی اندیسهای تکراری بالا و پایین مفروض است) و در نتیجه رابطه (۵۳-۱)شامل نه جمله میشود.

در مقام چاره جویی دستگاه بردارپایه وارونه دستگاه اصلی را بشرح زیرتعریف میکنیم و آنها را با $\vec{\varepsilon}^{\,i}$ (یعنی با اندیسهای بالا)نشان میدهیم .این بردارها عبارتند از:

$$(1-54) \qquad \varepsilon_{ijk}\,\vec{\varepsilon}^{\,k} = \frac{\vec{\varepsilon}_i \times \vec{\varepsilon}_j}{V_{ol}} \qquad , V_{ol} = \vec{\varepsilon}_1\cdot\left(\vec{\varepsilon}_2 \times \vec{\varepsilon}_3\right)$$

یعنی آنکه $\vec{\varepsilon}^{\,1}$و $\vec{\varepsilon}^{\,2}$و $\vec{\varepsilon}^{\,3}$برابر میشوند با:

$$(1-55) \qquad \vec{\varepsilon}^{\,3} = \frac{\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2}{V_{ol}}\ ,\ \vec{\varepsilon}^{\,2} = \frac{\vec{\varepsilon}_3 \times \vec{\varepsilon}_1}{V_{ol}}\ ,\ \vec{\varepsilon}^{\,1} = \frac{\vec{\varepsilon}_2 \times \vec{\varepsilon}_3}{V_{ol}}$$



شکل (۵-۱)

توجه کنید که دستگاه بردار پایه $\vec{\varepsilon}^{\,1}$و $\vec{\varepsilon}^{\,2}$و $\vec{\varepsilon}^{\,3}$متعامد نیستند برای خواننده ای که این مطلب برای او جدید است آموزنده خواهد بود که دستگاه $\vec{\varepsilon}_1$و $\vec{\varepsilon}_2$و $\vec{\varepsilon}_3$ای که $\vec{\varepsilon}_3$با $\vec{\varepsilon}_1$ و $\vec{\varepsilon}_2$

متعامد ولی $\vec{\varepsilon}_1$ و $\vec{\varepsilon}_2$ بر هم عمود نباشد در نظر بگیرد و $\vec{\varepsilon}_1$ و $\vec{\varepsilon}_2$ را درصفحه کاغذ رسم کرده و سپس دستگاه وارون دستگاه فوق را رسم نماید.

تانسور لوی سویتا را با اندیسهای بالا یعنی ε^{ijk} با همان خواص ε_{ijk} معرفی نماییم (انگیزه این معرفی رعایت قاعده جمع دو اندیس تکراری بالا و پایین است)در اینصورت اگر رابطه (٥٤-١) را در ε^{ijl} ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\varepsilon^{ijl}\,\varepsilon_{ijk}\,\vec{\varepsilon}^{\,k} = \frac{\varepsilon^{ijl}\left(\vec{\varepsilon}_i \times \vec{\varepsilon}_j\right)}{V}$$

$$2\delta^{l}_{k}\,\vec{\varepsilon}^{\,k} = \frac{\varepsilon^{ijl}\left(\vec{\varepsilon}_i \times \vec{\varepsilon}_j\right)}{V} \qquad \delta^{l}_{k} \equiv \delta_{kl}$$

$$(1-56) \qquad \vec{\varepsilon}^{\,l} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^{ijl}\left(\vec{\varepsilon}_i \times \vec{\varepsilon}_j\right)}{V}$$

رابطه (٥٦-١) فرم دیگر معرفی دستگاه بردار پایه ε^{l} ست مثلا" اگر l=۳ انتخاب کنیم داریم:

$$\vec{\varepsilon}^{\,3} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^{ij3}\left(\vec{\varepsilon}_i \times \vec{\varepsilon}_j\right)}{V} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^{123}\left(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2\right)}{V} + \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^{213}\left(\vec{\varepsilon}_2 \times \vec{\varepsilon}_1\right)}{V}$$

$$\vec{\varepsilon}^{\,3} = \frac{\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2}{V}$$

میشود .همانگونه که مشاهده میکنید از رابطه (٥٦-١) با محاسبات طولانیتر $\vec{\varepsilon}^{\,i}$ها بدست می آید تا از رابطه (٥٤-١) هر چند که در (٥٤-١) اندیس k جمع بندی میشود.به آسانی میتوان نشان داد که $\vec{\varepsilon}^{\,i}$ بر $\vec{\varepsilon}_j$ عمود است.بزبان دیگرمحورهای دستگاه اصلی بر محورهای دستگاه وارون عمود میباشند یعنی:

$$(1-57) \quad \vec{\varepsilon}^{\,i} \cdot \vec{\varepsilon}_j = \delta^{i}_{j}$$

(δ^{i}_{j} همان دلتای کرونکر فقط با اندیسهای بالا وپایین است)

مثلا":

$$\vec{\varepsilon}^{\,3} \cdot \vec{\varepsilon}_1 = \frac{\left(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2\right) \cdot \vec{\varepsilon}_1}{V} = 0$$

$$\vec{\varepsilon}^{\,3} \cdot \vec{\varepsilon}_3 = \frac{\left(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2\right) \cdot \vec{\varepsilon}_3}{V} = \frac{\vec{\varepsilon}_1 \cdot \left(\vec{\varepsilon}_2 \times \vec{\varepsilon}_3\right)}{V} = \frac{V}{V} = 1$$

اثبات تانسوری رابطه (۵۷-۱) بصورت زیر است:

$$\vec{\varepsilon}^{\,m}\cdot\vec{\varepsilon}_n=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijm}\frac{\left(\vec{\varepsilon}_i\times\vec{\varepsilon}_j\right)\cdot\vec{\varepsilon}_n}{\mathrm{V}}$$

هر گاه اندیس n برابر i و یا j باشد حاصلضرب زیر:

$$\left(\vec{\varepsilon}_i\times\vec{\varepsilon}_j\right)\cdot\vec{\varepsilon}_n$$

برابر صفر میشود پس یگانه مقداری که برای n باقی میماند اینست که برابر اندیس m باشد (که مقدار m هم با i و j مخالف میباشد)

$$\varepsilon^{ijm}\left(\vec{\varepsilon}_i\times\vec{\varepsilon}_j\right)\cdot\vec{\varepsilon}_n=2\mathrm{V}\delta_n^m$$

میگردد. (توجه کنید ضریب 2 بعلت وجود جمعبندی اندیسهای تکراری بالا و پایین i و j حاصل شده است پس داریم:

$$\vec{\varepsilon}^{\,m}\cdot\vec{\varepsilon}_n=\delta_n^m$$

میشود.

حال چون $\vec{\varepsilon}^{\,i}$ ها خود تشکیل یک دستگاه بردار پایه میدهند بنابراین میتوان بردار $\vec{a}$ را در این دستگاه تجزیه کرد و مؤلفه های بدست آمده $\vec{a}$ در این دستگاه با مؤلفه های بدست آمده در دستگاه $\vec{\varepsilon}_i$ برابر نمیباشد واین مؤلفه ها را با اندیس پایین نشان میدهند:

$$(1-58)\quad \vec{a}=\sum_i a_i\vec{\varepsilon}^{\,i}$$

در (۵۸-۱) a_i را مؤلفه کوواریانتی بردار $\vec{a}$ نامند وتوجه کنید که:

$$(1-59)\quad a_i\neq a^i$$

است. از روی روابط (۵۲-۱) و (۵۸-۱) به آسانی درمییابیم (طرفین را بترتیب در $\vec{\varepsilon}^{\,j}$ و $\vec{\varepsilon}_j$ ضرب و از (۵۷-۱) استفاده میکنیم):

$$(1-60)\quad \vec{\varepsilon}^{\,j}\cdot\vec{a}=a^j$$

$$(1-61)\quad \vec{\varepsilon}_j\cdot\vec{a}=a_j$$

حال با در نظر گرفتن خواص دستگاه بردار پایه وارون حاصلضرب اسکالر دو بردار در دستگاه غیر متعامد را بدست میاوریم:

$$(1-62)\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a^i\vec{\varepsilon}_i\right)\cdot\left(b_j\vec{\varepsilon}^{\,j}\right)=a^ib_j\delta^i_j=a^ib_i$$

رابطه(۶۲-۱) نتیجه بسیارجالبی است.لازم به یادآوری است که در درس حالت جـامد رابطه (۶۲-۱) کاربرد فراوانی دارد. توجه نمایید که از (۶۲-۱) نیز میتوان نتیجه:

$$(1-63) \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b^i$$

را بدست آورد.

همچنین حاصلضرب برداری دو بردار در دستگاه غیر متعامد برابر میشود با:

$$(1-64) \quad \left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left(a^i\vec{\varepsilon}_i\right)\times\left(b^j\vec{\varepsilon}_j\right) = \mathrm{V}_{ol}\,\varepsilon_{ijk}\,a^i b^j \vec{\varepsilon}^{\,k}$$

شایان ذکراست که اگر دستگاه وارون را بعنـوان دستگاه اصلی اختیـارکنیم وارون دستگاه وارون ،خود دستگاه اصلی خواهد بود.

برای اثبات ابتدا نشان میدهیم که اگر V_{ol} را بصورت:

$$\mathrm{V}_{ol} = \vec{\varepsilon}_1\cdot\left(\vec{\varepsilon}_2\times\vec{\varepsilon}_3\right)$$

تعریف کنیم V'_{ol} بصورت:

$$(1-65) \quad \mathrm{V}'_{ol} = \vec{\varepsilon}^{\,1}\cdot\left(\vec{\varepsilon}^{\,2}\times\vec{\varepsilon}^{\,3}\right)$$

تعریف میشود.با استفاده از رابطه زیرین که بعنوان مسئله ارائـه شده است:

$$\left[\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right]\left[\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right] = \begin{vmatrix} \vec{A}\cdot\vec{a} & \vec{A}\cdot\vec{b} & \vec{A}\cdot\vec{c} \\ \vec{B}\cdot\vec{a} & \vec{B}\cdot\vec{b} & \vec{B}\cdot\vec{c} \\ \vec{C}\cdot\vec{a} & \vec{C}\cdot\vec{b} & \vec{C}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$$

است نتیجه میگیریم که:

$$\left(\mathrm{V}_{ol}\right)\left(\mathrm{V}'_{ol}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\varepsilon}_1\cdot\vec{\varepsilon}^{\,1} & \vec{\varepsilon}_1\cdot\vec{\varepsilon}^{\,2} & \vec{\varepsilon}_1\cdot\vec{\varepsilon}^{\,3} \\ \vec{\varepsilon}_2\cdot\vec{\varepsilon}^{\,1} & \vec{\varepsilon}_2\cdot\vec{\varepsilon}^{\,2} & \vec{\varepsilon}_2\cdot\vec{\varepsilon}^{\,3} \\ \vec{\varepsilon}_3\cdot\vec{\varepsilon}^{\,1} & \vec{\varepsilon}_3\cdot\vec{\varepsilon}^{\,2} & \vec{\varepsilon}_3\cdot\vec{\varepsilon}^{\,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

و درنتیجه:

$$(1-66) \quad \mathrm{V}'_{ol} = \frac{1}{\mathrm{V}_{ol}}$$

بنابراین با استفاده از(۵۶-۱):

$$\frac{\vec{\varepsilon}^{\,i}\times\vec{\varepsilon}^{\,j}}{\mathrm{V}'_{ol}} = \frac{\vec{\varepsilon}^{\,i}}{\mathrm{V}'_{ol}}\times\frac{\varepsilon^{mnj}\left(\vec{\varepsilon}_m\times\vec{\varepsilon}_n\right)}{2\,\mathrm{V}_{ol}}$$

با استفاده از رابطه (۲۷-۱) بک ـ کب:

$$\frac{\vec{\varepsilon}^{\,i} \times \vec{\varepsilon}^{\,j}}{\mathrm{V}'_{ol}} = \frac{\varepsilon^{mnj}}{2}\left[\vec{\varepsilon}_m\left(\vec{\varepsilon}^{\,i} \cdot \vec{\varepsilon}_n\right) - \vec{\varepsilon}_n\left(\vec{\varepsilon}^{\,i} \cdot \vec{\varepsilon}_m\right)\right]$$

$$= \frac{\varepsilon^{mnj}}{2}\left[\vec{\varepsilon}_m \delta^i_n - \vec{\varepsilon}_n \delta^i_m\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\varepsilon^{mij}\,\vec{\varepsilon}_m - \varepsilon^{inj}\,\vec{\varepsilon}_n\right\}$$

$$(1-67) \qquad \frac{\vec{\varepsilon}^{\,i} \times \vec{\varepsilon}^{\,j}}{\mathrm{V}'_{ol}} = \varepsilon^{mij}\,\vec{\varepsilon}_m \equiv \varepsilon^{ijm}\,\vec{\varepsilon}_m$$

بموجب (٦٧-١) وارون دستگاه وارون خود دستگاه اصلی را حاصل مینماید. با استفاده از(٦٧-١) حاصلضرب برداری دو بردار را بصورت زیر هم میتوان نوشت:

$$(1-68) \quad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(a_i \vec{\varepsilon}^{\,i}\right) \times \left(b_i \vec{\varepsilon}^{\,j}\right) = \mathrm{V}'_{ol}\,\varepsilon^{ijm}\,a_i\,b_j \vec{\varepsilon}_m$$

رابطه (٦٨-١) را با (٦٤-١) مقایسه نمایید در اولی $(\vec{a} \times \vec{b})$ را بر حسب مؤلفه های کوواریانتی نوشته ایم ولی در دومی بر حسب مؤلفه های کنتراواریانتی.

البته روابط (٦٤-١) و (٦٨-١) را بفرم دیگری هم میتوان نوشت یعنی $\vec{a}$را در دستگاه اصلی و$\vec{b}$ را در دستگاه وارونه تجزیه کرد که این محاسبات بعهده خواننده واگذار میشود. تانسورهای متریک g_{ij} وg^{ij}دارای خواص جالبی میباشندآنها میتوانند مؤلفه های کنتراواریانتی هربرداررا به مؤلفه کوواریانتی(یا بالعکس) تبدیل نمایند. بااستفاده از روابط (٥١-١) و(٦٠-١) و(٦١-١) داریم:

$$(1-69) \quad g_{ij}\,a^j = \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j\,a^j = \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{a} = a_i$$

$$(1-70) \quad g^{ij}\,a_j = \vec{\varepsilon}^{\,i} \cdot \vec{\varepsilon}^{\,j}\,a_j = \vec{\varepsilon}^{\,i} \cdot \vec{a} = a^i$$

همچنین داریم:

$$g_{ij}\,\vec{\varepsilon}^{\,j} = \left(\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j\right)\vec{\varepsilon}^{\,j}$$

حال اگر$\vec{\varepsilon}_i$ در رابطه فوق را $\vec{a}$ بنامیم:

$$(1-71) \quad g_{ij}\,\vec{\varepsilon}^{\,j} = \left(\vec{a} \cdot \vec{\varepsilon}\ \right)\vec{\varepsilon}^{\,j} = a_j \vec{\varepsilon}^{\,j} = \vec{a} \equiv \vec{\varepsilon}_i$$

و بهمین ترتیب:

$$(1-72) \quad g^{ij}\,\vec{\varepsilon}_j = \vec{\varepsilon}^{\,i}$$

روابط(۷۱–۱) و (۷۲–۱) مبین این واقعیت هستند که با تانسورهای متریک میتوان از بردارهای پایه اصلی غیر متعامد بردارهای پایه وارون را بدست آورد و یا بالعکس همچنین میتوان نشان داد که:

$$(1-73) \quad g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$$

میباشد برای اثبات کافیست از تعاریف آنها استفاده کنیم یعنی:

$$\left(\vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}^k\right)\left(\vec{\varepsilon}_k \cdot \vec{\varepsilon}_j\right) = g^{ik} g_{kj}$$

هر گاه $\vec{\varepsilon}^i$ و $\vec{\varepsilon}_j$ را بترتیب بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنامیم خواهیم داشت:

$$g^{ik} g_{kj} = \left(\vec{a} \cdot \varepsilon^k\right)\left(\vec{\varepsilon}_k \cdot \vec{b}\right) = \sum a^k b_k = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}_j = \delta^i_j$$

یکی از موارد استعمال روابط (۶۹–۱) تا (۷۲–۱) اینست که حاصلضرب برداری دو بردار را میتوان (با استفاده از رابطه(۶۴–۱)) بصورت:

$$(1-74) \quad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \mathrm{V}_{ol}\, \varepsilon_{ijk}\, g^{im} a_m b^j \vec{\varepsilon}^k$$

$$= \mathrm{V}_{ol}\, \varepsilon_{ijk}\, a^i b^j g^{km} \vec{\varepsilon}_m$$

نوشت . براستی دستگاه وارونه دستگاه اورتونرمال $\vec{e}_i$ چه میباشد؟بموجب تعریف اگر $\vec{e}_i = \vec{\varepsilon}_i$ انتخاب کنیم بموجب (۵۴–۱):

$$\varepsilon_{ijk}\, \vec{\varepsilon}^k = \frac{\left(\vec{e}_i \times \vec{e}_j\right)}{\mathrm{V}_{ol}} = \frac{\varepsilon_{ijk} \vec{e}_k}{1}$$

$$(1-75) \quad \vec{\varepsilon}^k = \vec{e}_k$$

یعنی دستگاه وارون دستگاه اورتونرمال بر خودش منطبق است و در نتیجه مؤلفه های کوواریانتی و کنتراواریانتی هر بردار با همدیگر مساوی است:

$$\vec{a} = a^i \vec{\varepsilon}_i = a_i \vec{\varepsilon}^i = a^i \vec{e}_i = a_i \vec{e}_i$$

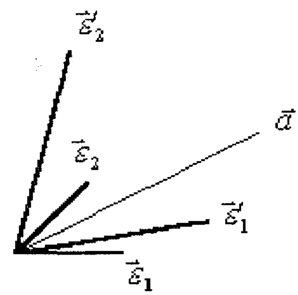
$$(1-75-a) \quad a_i = a^i$$

و بهمین دلیل است که در دستگاه متعامد علاقه ای به رعایت در نوشتن اندیس بالا برای مؤلفه های کنتراواریانتی نداریم (که میبایستی داشته باشیم) ومینویسیم :

$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$$

بعنوان مسئله نشان دهید هرگاه $\vec{\varepsilon}_i$ متعامد اما نرمالیزه نباشد a_i (معمولی)،مساوی نیست با a_i (کوواریانتی).

در پایان بخش (۳-۱)، دستگاه بردار پایه غیر متعامد، بسیار معقولانه است که قوانین تبدیل مؤلفه های یک بردار در دو دستگاه غیرمتعامد (همانگونه که برای دستگاههای متعامد استخراج کردیم) را بدست آوریم. استخراج این روابط هنگامیکه دستگاه مختصات منحنی الخط غیر متعامد را بررسی میکنیم مفید خواهد بود. بموجب شکل (۶-۱) که برای سهولت درترسیم دو بعدی رسم کرده ایم اما اثبات مسئله برای فضای سه بعدی است)دو دستگاه غیر متعامد{ $\vec{\varepsilon}_i$ } و{ $\vec{\varepsilon}'_i$ } که هر یک دارای دستگاه



شکل (۶-۱)

وارونه{ $\vec{\varepsilon}^{\,i}$ } و{ $\vec{\varepsilon}'^{\,i}$ } میباشند در نظر میگیریم :

همانگونه که مشاهده می کنیم دستگاه غیر متعامد{$\vec{\varepsilon}'_i$} ازدوران دستگاه $\vec{\varepsilon}_i$ حاصل نشده است.بموجب (۵۲-۱) داریم:

$$(1-76)\quad \vec{a} = a^j\vec{\varepsilon}_j = a'^j\vec{\varepsilon}'_j$$

برای تعیین a'^i برحسب a^i ها دیگر نمیتوان طرفین را در $\vec{\varepsilon}'_i$ ضرب کرد بلکه میبایستی طرفین را در $\vec{\varepsilon}'^i$ ضرب اسکالر نمود واگر:

$$(1-77)\quad \vec{\varepsilon}'^{\,i}\cdot\vec{\varepsilon}_j = \alpha^i_j$$

بنامیم رابطه (۷۶-۱) بصورت زیر:

$$(1-78)\quad a'^i = \alpha^i_j a^j$$

در میاید .اگر بخواهیم مؤلفه a^i را بر حسب a'^i ها بدست آوریم طرفین(۷۶-۱) را در

$\vec{\varepsilon}^{i}$ ضرب میکنیم و توجه میکنیم که:

$$\vec{\varepsilon}^{\,i} \cdot \vec{\varepsilon}'_{j} = \beta^{i}_{j} \neq \alpha^{i}_{j}$$

است پس (۷۶-۱) بصورت:

$$(1-79) \quad a^{i} = \beta^{i}_{j}\, a'^{j}$$

در میآید اگر روابط مشابه (۷۸-۱) و (۷۹-۱) رابرای دستگاه بردارپایه اورتونرمال در نظر بگیریم این روابط بصورت:

$$a'_{i} = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, a_{j}$$

$$a_{i} = \sum_{i,j} \tilde{\alpha}_{ij}\, a'_{j}$$

$$\sum_{k} \alpha_{ik}\, \tilde{\alpha}_{kj} = \delta_{ij}$$

حال این سؤال پیش میاید که بین α_{j}^{i} و β_{j}^{i} چه رابطه ای برقراراست به آسانی مشاهده می کنیم که:

$$\alpha^{i}_{k}\, \beta^{k}_{j} = \left(\vec{\varepsilon}'^{\,i} \cdot \vec{\varepsilon}_{k}\right)\left(\vec{\varepsilon}^{\,k} \cdot \vec{\varepsilon}'_{j}\right)$$

اگر $\vec{\varepsilon}'^{i}$ و $\vec{\varepsilon}'_{j}$ را بترتیب $\vec{a}$ و $\vec{b}$ فرض کنیم بموجب (۶۰-۱) و (۶۱-۱) رابطه فوق برابر:

$$\alpha^{i}_{k}\, \beta^{k}_{j} = a_{k}\, b^{k} = \vec{a} \cdot \vec{b} = \varepsilon'^{\,i} \cdot \varepsilon'_{j} = \delta^{i}_{j}$$

یعنی داریم:

$$(1-80) \quad \alpha^{i}_{k}\, \beta^{k}_{j} = \delta^{i}_{j}$$

بموجب (۸۰-۱) نتیجه میگیریم که ماتریس β معکوس ماتریس α است. در صورتی که در تبدیلات دورانی بین دستگاه مختصات کارتزین ماتریس β وارونه ماتریس α بود که همچنین از رابطه $\alpha\tilde{\alpha}=1$ پیروی مینماید.

در دستگاه بردار پایه غیر متعامد روابط (۷۸-۱) و (۷۹-۱) قوانین تبدیلات بین مؤلفه های کنترااواریانتی یک بردار در دو دستگاه بوده است میتوان قوانین تبدیلات بین مؤلفه های کوواریانتی یک بردار را در دو دستگاه غیرمتعامد نیز محاسبه کرد و یا حتی قوانین تبدیلات بین مؤلفه های کوواریانتی یک بردار در یک دستگاه را برحسب مؤلفه های

کنتراواریانتی آن بردار در دستگاه دیگر بدست آورد که این محاسبات را به عهده خواننده واگذار و فقط به ذکر نتایج اکتفا می کنیم :

$$(1-81) \quad a'_i = \beta_i^j a_j$$

$$(1-82) \quad a_i = \alpha_i^j a'_j$$

$$(1-83) \quad a'_i = \beta_i^j g_{jm} a^m$$

$$(1-84) \quad a_i = \alpha_i^j g_{jm} a'^m$$

فرق روابط (۸۱–۱) و (۸۲–۱) با راوبط(۷۸–۱)و(۷۹–۱) را دریابید.

۴–۱ بسط سری تایلور توابع چند متغیره و معرفی عملگردیفرانسیلی $\vec{\nabla}$

تابع اسکالر$f(x)$ را درنظر میگیریم. $f(x)$ فقط تابعی از یک متغییر x میباشد بموجب آنچه که آموخته ایم،مقدارتابع در نقطه $(x+a)$ را میتوان از روی بسطی موسوم به بسط سری تایلور بدست آورد.

$$(1-85) \quad f(x+a) = f(x) + a\frac{df(x)}{dx} + \frac{a^2}{2!}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \cdots$$

با کمی دقت میتوان بسط سری تایلور را بصورت جمع وجور زیر نوشت :

$$(1-86) \qquad f(x+a) = e^{a\frac{d}{dx}} f(x)$$

و $\exp(ad/dx)$را بصورت زیر تفسیر نمود.

$$e^{a\frac{d}{dx}} = 1 + a\frac{d}{dx} + \frac{1}{2!}(a\frac{d}{dx})(a\frac{d}{dx}) + \cdots$$

رابطه (۸۶–۱) از نظر تحریر آسانتر از (۸۵–۱) می باشد.بنابراین بسط سری تایلور تابعی که شامل دو متغییر میباشد،بصورت زیر در میاید :

$$(1-87) \quad f(x+a_1, y+a_2) = e^{a_1\frac{\partial}{\partial x}} f(x, y+a_2)$$
$$= e^{a_1\frac{\partial}{\partial x}} e^{a_2\frac{\partial}{\partial y}} f(x,y)$$

نظر به اینکه مشتقات $\partial/\partial y$ ،$\partial/\partial x$ با یکدیگر جابجا میشوند دراینصورت خواهیم داشت:

$$(1-88) \quad e^{a_1\frac{\partial}{\partial x}} e^{a_2\frac{\partial}{\partial y}} = e^{a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y}}$$

اثبات رابطه (۸۸−۱) بصورت زیر میباشد:

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x}} e^{b\frac{\partial}{\partial y}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} b^m \frac{\partial^m}{\partial y^m}$$

بجای m، $q\text{-}n$ (که q مقادیر ...۳،۲،۱،۰ اختیار میکند) قرار میدهیم:

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x}} e^{b\frac{\partial}{\partial y}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \sum_{q=n}^{\infty} \frac{1}{(q-n)!} b^{q-n} \frac{\partial^{q-n}}{\partial y^{q-n}}$$

حد پایینی $q=n$ را به $q=0$ تغییر میدهیم [بعلت وجود $(q\text{-}n)!$] وصورت ومخرج را در $q!$ ضرب میکنیم در نتیجه خواهیم داشت:

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x}} e^{b\frac{\partial}{\partial y}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{q!}{q!(q-n)!} \frac{1}{n!} a^n (\frac{\partial}{\partial x})^n b^{q-n} (\frac{\partial}{\partial y})^{q-n}$$

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x}} e^{b\frac{\partial}{\partial y}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q!}{n!(q-n)!} (a\frac{\partial}{\partial x})^n (b\frac{\partial}{\partial y})^{q-n}$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} (a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y})^q = e^{(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y})}$$

در نتیجه برای تابع سه متغییره بسط سری تایلور تابع $f(\vec{x}+\vec{a})$ بصورت:

$$(1-89) \quad f(x+a_1, y+a_2, z+a_3) = e^{a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}} f(\vec{x})$$

در میاید. فرم تانسوری رابطه (۸۹−۱) بصورت زیر است:

$$(1-90) \quad f(\vec{x}+\vec{a}) = e^{\sum_i a_i \partial_i} f(\vec{x}) \qquad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$$

رابطه (۹۰−۱) کاربردهای فراوانی در درس الکترومغناطیس و همچنین مکانیک کوانتومی دارد. بعنوان تمرین بسط چند جمله اول (۹۰−۱) را مینویسیم:

$$f(\vec{x}+\vec{a}) = f(\vec{x}) + (\sum_i a_i \partial_i) f(\vec{x}) + \frac{1}{2!} (\sum_i a_i \partial_i)(\sum_j a_j \partial_j) f(\vec{x}) + \cdots$$

$$(1-91) \quad f(\vec{x}+\vec{a}) = f(\vec{x}) + a_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}) + \frac{1}{2} a_i a_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\vec{x}) + \cdots$$

هرگاه اختلاف تابع f درنقطه $\vec{x}_0 + d\vec{x}$ و $\vec{x}_0$ را $df(\vec{x}_0)$ بنامیم $df(\vec{x}_0)$ بستگی به $\vec{x}_0$ و $d\vec{x}$ ($d\vec{x}$ برداری نهایت کوچکی میباشد) خواهد داشت. بنابراین اگر در (۹۰−۱) یا

(۱-۹۱) بجای $\vec{a}$، $d\vec{x}$ و بجای $\vec{x}$ ، $\vec{x}_0$ قرار دهیم ،بسط سری تایلور با حفظ جملات بی نهایت کوچک مرتبه اول برابر میشود با:

$$f(\vec{x}_0 + d\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}_0)$$

و یا آنکه:

$$(1-92) \quad df(\vec{x}_0) \equiv f(\vec{x}_0 + d\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \sum_i dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}_0)$$

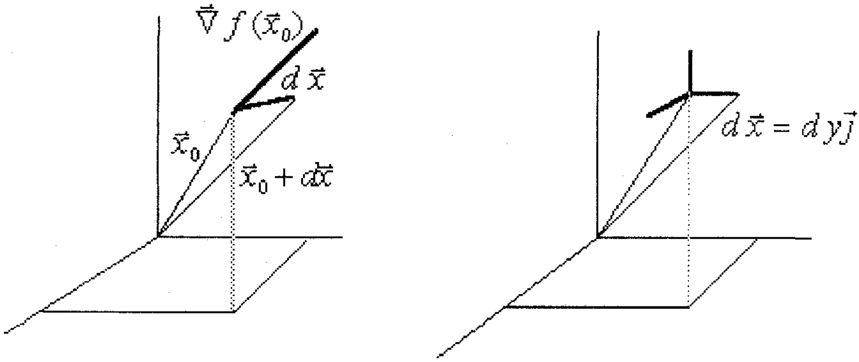
رابطه (۹۲-۱) روش دیگری به غیر از جایگزاری مختصات $\vec{x}_0+d\vec{x}$ و $\vec{x}_0$ د رتابع f وتفریق ازهمدیگر را به ما می آموزد وآن این است که از تابع $f(\vec{x})$ نسبت به x و y و z مشتق گرفته وسپس مشتقات مزبور رادرنقطه $\vec{x}=\vec{x}_0$ حساب کرده وسپس درمؤلفه های متناظر dx، dy، dz بترتیب ضرب میکنیم .

چون رابطه $\Sigma dx_i\, \partial f(\vec{x}_0)/\partial x_i$ مشابه رابطه $\vec{a}.\vec{b}=\Sigma a_i b_i$ میباشد دراینصورت میتوان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بصورت زیر تعریف نمود:

$$(1-93) \quad \vec{a} \equiv d\vec{x} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$\vec{b} \equiv \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial z}\vec{k}$$

رابطه دوم (۹۳-۱) را میدان برداری گرادیان تابع اسکالر f در نقطه $\vec{x}_0$ نامند و آنرا با سمبل $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$ نشان میدهند .آموزنده است از روابط (۹۱-۱)یا(۹۲-۱) تعبیر هندسی نماییم.$df(\vec{x}_0)$ بموجب شکل (۷-۱) بمعنای اختلاف تابع درنقاط $\vec{x}_0+d\vec{x}$ و $\vec{x}_0$ است که بردار $d\vec{x}$ کاملا" اختیاری اما بی نهایت کوچک است.اما $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$ یا بقولی مؤلفه های آن عبارتست ازحداختلاف همین تابع درسه جهت خاص ox، oy، oz تقسیم بر dx، dy، dz هنگامیکه آنها بسمت صفر میل میکنند .



شکل (۷-۱)

مثلا" توجه نمایید که:

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

پس رابطه (۹۲-۱) را بصورت زیر بازنویسی می کنیم :

$$(1-94) \quad df(\vec{x}_0) = d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$$

بموجب (۹۴-۱) متوجه هستیم تابع f در تمامی نقاط بسیار نزدیک به نقطه $\vec{x}_0$ که بردار $d\vec{x}$ آنها با بردار $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$ زاویه حاده می سازد دارای مقدار بزرگتر از مقدار تابع در نقطه $\vec{x}_0$ میباشد چون برای چنین نقاطی [یعنی برای $(\vec{x}_0 + d\vec{x})$]

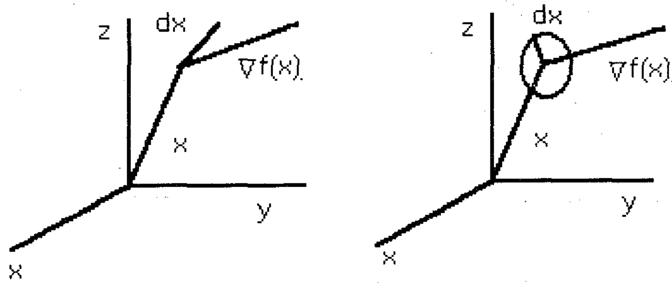
$$df(\vec{x}_0) = d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) > 0$$

$$(1-95) \qquad f(\vec{x}_0 + d\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$$

همچنین تابع f در تمامی نقاط بسیا رنزدیک به نقطه $\vec{x}_0$ که بردار $d\vec{x}$ آنها بر $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$ عمود است دارای مقدار مساوی با تابع در نقطه $\vec{x}_0$ میباشد چون:

$$df(\vec{x}_0) = d\vec{x} \cdot \nabla f(\vec{x}_0) = 0$$

$$f(\vec{x}_0 + d\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$



شکل (۸-۱)

توجه نمایید بموجب شکل (۸-۱) مجموعه $\vec{x}_0+d\vec{x}$ ای که $d\vec{x}$ بر $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$ عمود است، تشکیل یک دیسک به شعاع بسیار کوچک می دهد.

حال این سؤال مطرح می شود که به غیر از نقطه $\vec{x}_0$ و مجموعه نقاط $\vec{x}_0+d\vec{x}$ آیا نقاط دیگری وجود دارند که مقدار تابع در آن نقاط باز هم برابر مقدار تابع در نقطه $\vec{x}_0$ باشد؟

برای تعیین مختصات مجهول این نقاط آنها را در تابع $f(\vec{x})$ قرار میدهیم و انتظار داریم که تابع f در نقاط مزبور هم دارای همان مقدار $f(\vec{x}_0)$ باشد یعنی:

$$(1-96) \quad f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) \equiv c$$

رابطه (۹۶-۱) معرف معادله یک سطح است (درمورد معادله سطح بعدا "مفصلا" صحبت خواهیم نمود) و درنتیجه نقاط واقع بر دیسک بسیار کوچک یک زیر مجموعه از نقاط واقع بر سطح بمعادله (۹۶-۱) میباشد. بنابراین ادعا میکنیم که بردار $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$ در نقطه $\vec{x}_0$ بر سطح $f(\vec{x})=c$ عمود است همچنین ادعا میکنیم که جهت $\vec{\nabla} f$ در جهت $f(\vec{x})$ افزایشی است چون اگر درنقطه $\vec{x}_0+d\vec{x}$ تابع f دارای مقداربزرگتری از تابع f درنقطه $\vec{x}_0$ باشد در اینصورت $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$ با $d\vec{x}$ میبایستی زاویه حاده بسازد. همچنین برای $d\vec{x}$ با طول بی نهایت کوچک ثابت مختصات نقطه ای که تابع درآن نسبت به تابع درنقطه $\vec{x}_0$ بیشترین اختلاف را دارد، نقطه ای است که $d\vec{x}$ آن درجهت $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$ قرار گیرد چون در

این حالت زاویه مابین $d\vec{x}$ و $\vec{\nabla} f$ صفر میباشد یعنی جهت $\vec{\nabla} f$ درست جهت بیشترین تغییرات را نشان میدهد.

تعریف مشتق سوئی:

هر گاه اختلاف تابع در دو نقطه $\vec{x}_0$ و $\vec{x}_0+d\vec{x}$ را برای $d\vec{x}$ خاصی بدست آوریم بطوریکه $d\vec{x}$ بموازات بردار یکه خاصی باشد در اینصورت حد خارج قسمت این اختلاف برطول $d\vec{x}$ را مشتق سوئی تابع f در جهت بردار یکه $\hat{l}$ نامندو آنرا بصورت $\partial f(\vec{x}_0)/\partial l$ نشان میدهند:

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial l}=\frac{f(\vec{x}_0+d\vec{x})-f(\vec{x}_0)}{|d\vec{x}|}$$

$$=\frac{d\vec{x}\cdot\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)}{|d\vec{x}|}$$

چون $\hat{l}=dx\,/\,|dx|$ معرف بردار یکه $\hat{l}$ میباشد در اینصورت:

$$(1-97)\quad \frac{\partial f}{\partial l}=\hat{l}\cdot\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$$

میباشد (سؤال: مشتق سوئی در امتداد بردار یکه $\vec{j}$ چقدر است؟)

مسئله: نشان دهید $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ از قوانین تبدیلات دورانی یک بردار پیروی میکند.

هر گاه مؤلفه $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ در دستگاه $ox'y'z'$ و در امتداد $\hat{e}'_i$ بصورت:

$$\frac{\partial f'(\vec{x}')}{\partial x'_i}$$

باشد چون بموجب تعریف توابع اسکالر $f'(x')=f(x)$ است در نتیجه:

$$\frac{\partial f'(\vec{x}')}{\partial x'_i}=\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x'_i}=\sum_i\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

در نتیجه بکمک رابطه (۱−۴۲):

$$(1-98)\quad \frac{\partial f'(\vec{x}')}{\partial x'_i}=\sum_j\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}\tilde{\alpha}_{ji}\equiv\sum_j\alpha_{ij}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}$$

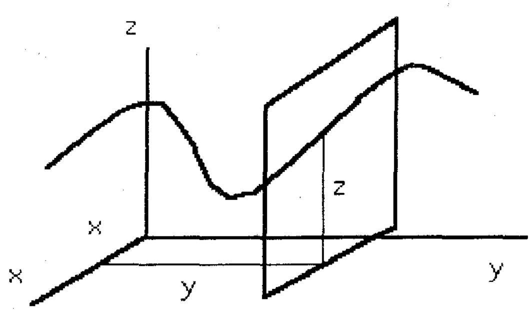
۵-۱ معادله نقطه،معادله منحنی،معادله سطح و معادله فضا

بموجب تعریف معادله (منحنی ،سطح و یا فضا) رابطه ای است که از روی آن مختصات تمامی نقاط واقع بر(منحنی ، سطح و یا فضا)بدست آید بنابراین معادله نقطه رابطه ای نظیر:

$$(1-99)\quad \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \\ z = a_3 \end{cases} \qquad x_i = a_i \qquad \vec{x} = \vec{a}$$

می باشد.توجه کنید نمایش معادله نقطه به سه فرم برداری، تانسوری و مرسوم محاسباتی در (۹۹-۱) انجام داده شده است .

برای تعیین معادله منحنی چنین میکنیم :مطابق شکل (۹-۱)منحنیCمفروض است .



شکل(۹-۱)

هر گاه بخواهیم نقطه ای بر روی منحنی C که مختصه y آن y_0باشد بدست آوریم ابتدا مکان هندسی نقاطی را در فضا بدست میاوریم که مختصات y همگی آنهاy_0باشد این نقاط واقع بر صفحه ای عمود برمحور y_0ها که محورoy را درy_0قطع میکند میباشد حال اگر منحنی Cصفحه مزبور را قطع کند گوییم نقطه ای (یا نقاطی)بر روی منحنی داریم که مختصات y آن y_0است توجه میکنیم مختصات x و z نقطه مزبور در حالت عمومی بستگی به انتخاب مقدارy_0 دارد یعنی داریم:

$$x = x(y_0)$$
$$y = y_0$$
$$z = z(y_0)$$

حال اگر y مقادیر مختلفی اختیار نماید مجموعه نقاطی بدست میاید که همگی واقع بر منحنی هستند پس معادله منحنی با رابطه:

$$
(1-100) \qquad \begin{cases} x = x(y) \\ y = y \\ z = z(y) \end{cases}
$$

که y هر مقداری اختیار میکند داده می شود .

توجه نمایید که ما در دبیرستان معمولا" علاقمند بودیم که مختصه x مقادیر مختلف اختیار نماید و در نتیجه معادله منحنیهای مسطحه ای که در صفحه xoy قرار دارند بصورت:

$$
\begin{aligned} x &= x \\ y &= y(x) \\ z &= 0 \end{aligned}
$$

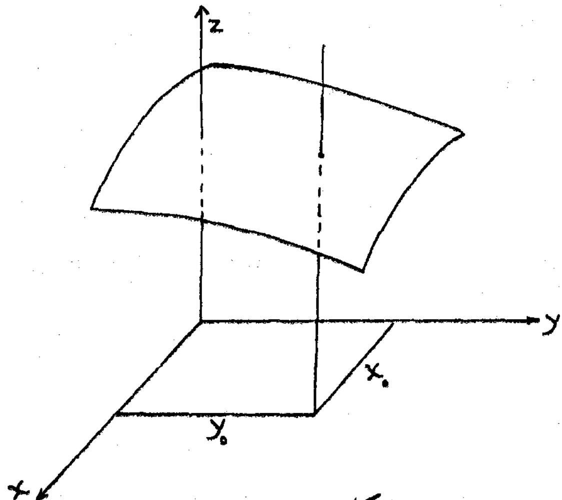
نمایش میدادیم که غالبا" ازنوشتن سطرهای اول وسوم رابطه فوق چشم پوشی میکردیم رابطه عمومی تر معادله منحنی با الهام از رابطه (۱۰۰–۱) بصورت:

$$
(1-101) \quad \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \qquad x_i = x_i(t) \qquad \bar{x} = \bar{x}(t)
$$

میباشد که به سه فرم برداری ،تانسوری ،مرسوم محاسباتی نمایش دادیم در (۱۰۱–۱) t را پارامتر نامند وبازاء هر t ای مختصات یک نقطه واقع بر منحنی بدست میاید .توجه کنید اگر t را از رابطه اول (۱۰۱–۱)بر حسب مختصه x استخراج و در روابط دوم و سوم (۱۰۱–۱)قرار دهیم همان رابطه (۱۰۰–۱) را نتیجه میگیریم.

دررابطه (۱۰۱–۱)پارامتر t میتواند زمان،زاویه،طول منحنی ومتداولتر ازهمه یکی از مختصات نقطه در فضاباشد(مثلا" اگرپارامتر t مختصه y باشد دراینصورت معادله (۱۰۱–۱)به معادله (۱۰۰–۱) تبدیل می شود.)

برای تعیین معادله سطح چنین میکنیم :مطابق شکل (۱۰-۱)سطح S مفروض است:



شکل(۱۰-۱)

هر گاه بخواهیم نقطه ای بر سطح S بدست آوریم که مختصه x و y آن به ترتیب x_0 و y_0 باشد ابتدا مکان هندسی نقاطی را در فضا بدست می آوریم که مختصات x و y آنها بترتیب x_0 و y_0 باشد این مکان هندسی نقاط تشکیل خطی بموازات محور oz میدهد چون این مکان هندسی از رابطه :

$$x = x_0$$
$$y = y_0$$
$$z = z$$

پیروی میکند بامراجعه به شکل (۹-۱)متوجه میشویم که اگربخواهیم مختصات نقطه ای بر روی سطح S تعیین کنیم که دو مختصه x و y آن بترتیب x_0 و y_0 باشد مختصه z مقدار دلخواه اختیار نمیکند بلکه بستگی به انتخاب مقادیر x_0 و y_0 دارد یعنی:

$$x = x_0$$
$$y = y_0$$
$$z = z(x_0, y_0)$$

حال اگر x_0 و y_0 مقادیر مختلف ممکن را اختیار کنند از رابطه فوق مجموعه نقاطی بدست میاید که همگی واقع بر سطح S میباشد در نتیجه معادله سطح با رابطه:

$$(1-102) \quad \begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= z(x,y) \end{aligned}$$

(که y و x هر مقدار ممکن را اختیار میکنند) داده میشود.

در بعضی موارد معادله سطح با رابطه:

$$(1-103) \quad f(x,y,z)=c$$

داده می شود. در (۱۰۳-۱) x و y و z مختصات نقاط واقع بر سطح S است که میخواهیم آنها را تعیین کنیم. میگوییم سه مجهول (x,y,z) داریم و یک معادله، نمیتوان برای (x,y,z) مقدار معینی به دست آوریم بلکه می توان ادعا کرد که (x,y) مقادیر دلخواهی اختیار کنند اما z را از رابطه (۱۰۳-۱) بدست آورد که نتیجه همان رابطه (۱۰۲-۱) میشود. معادله سطح S نه تنها با روابط (۱۰۲-۱) و یا (۱۰۳-۱) داده می شود بلکه باروابط عمومی تر زیر نیز داده میشود:

$$(1-104) \quad \begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{aligned} \qquad x_i = x_i(u,v) \qquad \bar{x} = \bar{x}(u,v)$$

که u و v را پارامترهای معادله سطح نامند. برای استدلال اینکه (۱۰۴-۱) معادله سطح S میباشد کافیست از دو رابطه اول آن u و v را برحسب x و y استخراج کنیم و در رابطه سوم (۱۰۴-۱) قرار دهیم درنتیجه z تابعی از x و y میشود و به همان رابطه (۱۰۲-۱) میرسیم. در (۱۰۴-۱) معادله سطح بصورت برداری، تانسوری و مرسوم محاسباتی نمایش داده شده است. توجه کنید هرگاه درحالت خاص $u=x$ و $v=y$ اختیار کنیم باز هم به رابطه (۱۰۲-۱) میرسیم.

برای تعیین معادله فضا چنین میگوییم: هر گاه مختصه x و y و z همگی مقادیر مختلف اختیار نمایند هر نقطه دلخواه در فضا معلوم میشود پس معادله فضا با رابطه:

$$(1-105) \quad \begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}$$

داده میشود. اما اگر بخواهیم می توان معادله فضا را بصورت عمومی تر نمایش داد و آن بصورت:

$$(1-106) \quad \begin{aligned} x &= x(u,v,w) \\ y &= y(u,v,w) \\ z &= z(u,v,w) \end{aligned} \qquad x_i = x_i(u,v,w) \qquad \vec{x} = \vec{x}(u,v,w)$$

که u,v,w را پارامترهای معادله فضا نامند (هنگام مطالعه مختصات منحنی الخط آنها را بنام دیگری می خوانیم) چون بازاء مقادیر مختلفی که آنها اختیار می کنند. مختصات نقاط مختلف فضا را حاصل می کند. البته تعبیر بهتری نیز وجود دارد. چه از روی (۱۰۶-۱) می توان سه مجهول u , v, w را از روی سه معادله فوق بر حسب x ,y ,z بدست آورد در نتیجه خواهیم داشت:

$$(1-107) \quad \begin{aligned} u &= u(x,y,z) \\ v &= v(x,y,z) \\ w &= w(x,y,z) \end{aligned}$$

حال اگر در(۱۰۷-۱) u و v و w مقادیر u_0 و v_0 و w_0 اختیار کنند سه رابطه (۱۰۷-۱) معرف معادلات سه سطح (بموجب(۱۰۳-۱)) میباشند و میدانیم که فصل مشترک سه سطح در حالت عمومی یک نقطه است یعنی پارامترهای u_0 و v_0 و w_0 یک نقطه را درفضا مشخص میکنند ،توجه نمایید که رابطه (۱۰۶-۱) نسبت به رابطه (۱۰۵-۱) درنمایش دادن معادله فضا ارجح است چون اگر درحالت خاص $u=x$ و $v=y$ و $w=z$ باشد (۱۰۶-۱) به (۱۰۵-۱) تبدیل میشود.

۶-۱ محاسبه المان طول واقع بر منحنی، المان سطح واقع بر سطح و المان حجم در فضاحول نقطه $\vec{x}$

نظربه اینکه درمباحث فیزیکی غالبا"مجبوربه انتگرال گیریهای مختلفی هستیم که نمونه های آنرابزودی مشاهده خواهیم کرد بنابراین لازم است نحوه محاسبه المانهای طول، سطح و حجم را بدقت بیاموزیم.

الف-۶-۱ محاسبه المان $d\vec{x}$حول نقطه $\vec{x}$ واقع بر منحنی C

هر گاه مطابق شکل (۱۱-۱) منحنی C بمعادله:

$$\vec{x} = \vec{x}(t) \qquad , \qquad x_i = x_i(t)$$

داده شده باشد بازاء t معینی نقطه $\vec{x}$ خاصی واقع بر منحنی بدست میآید. توجه میکنیم که حول نقطه $\vec{x}$ میتوان بی نهایت بردار $d\vec{x}$ انتخاب کرد. کافی است سه مقدار بینهایت کوچک برای dx و dy و dz انتخاب کنیم. اما سه مؤلفه بردار $d\vec{x}$ که انتهای آن هم برروی منحنی قرارگیرد اختیاری نیست ومختصات نقطه انتهایی $d\vec{x}$ بازاء $t=t+\Delta t$ حاصل میشود بنابراین چنین $d\vec{x}$ای از رابطه:

$$(1-108) \qquad d\vec{x} = \vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t) = \sum_i [x_i(t+\Delta t) - x_i(t)]\vec{e}_i$$

$$= \left[\sum_i \frac{dx_i(t)}{dt}\vec{e}_i\right]\Delta t + 0(\Delta t)^2$$

$$= \vec{F}(t)\,\Delta t + 0(\Delta t)^2$$

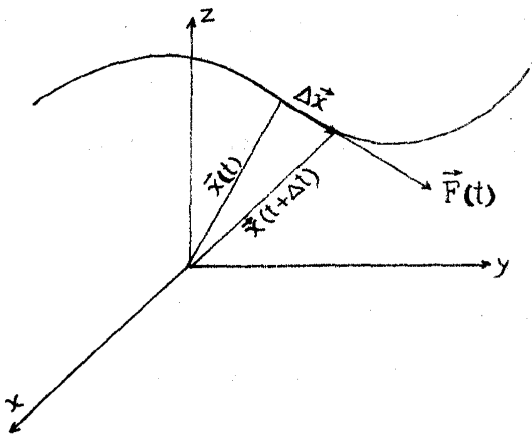
بنابراین بموجب (۱۰۸-۱) چنین $d\vec{x}$ای اولا" بمعادله منحنی C ثانیا"به مقدار t ثالثا" به مقدار Δtبستگی داردبزبان دیگر $d\vec{x}$واقع بربیضی با $d\vec{x}$ واقع بردایره بعلت آنکه معادلات منحنی آنها با یکدیگر فرق دارندیا آنکه dx هایی که بازاء t های مختلف بر روی دایره بدست میایند متفاوت میباشند. (توضیحات بیشتر در این رابطه در جزوه مکانیک داده شده است.)توجه نمایید فرم برداری ،تانسوری ومرسوم محاسباتی $d\vec{x}$ بشکل زیر است:

$$(1-109) \quad d\vec{x} = \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right)dt = \sum_i \frac{dx_i}{dt}\vec{e}_i\,dt = \frac{d\vec{x}}{dt}dt$$

نکته بسیار مهم اینکه جهت بردار $\vec{F}(t)$:

$$(1-110)\quad \vec{F}(t)=\frac{dx(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dy(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

که نقطه اثر آن واقع بر $\vec{x}(t)$ است در جهت t های افزایشی و در امتداد مماس بر منحنی C قرار دارد (اگر پارامتر t زمان باشد $\vec{F}(t)$ را چه مینامیم؟)



شکل(۱۱-۱)

بنابراین جهت بردار $d\vec{x}$ از روی علامت dt تعیین میشود که میتواند مثبت ویا منفی باشد. در بخش انتگرالها در این مورد توضیح داده میشود. توجه میکنیم که المان طول $d\vec{x}$ بموجب (۱۰۹-۱) برابر:

$$(1-111)\quad dl=\sqrt{d\vec{x}\cdot d\vec{x}}=\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\left[\sum_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dt=F(t)\,dt$$

نحوه محاسبه $d\vec{x}$ واقع بر منحنی که ازتقاطع دوسطح بمعادلات $f(\vec{x})=C_1$ و $g(\vec{x})=C_2$ حاصل میشود بعنوان مسئله داده شده است.

بعنوان مثال اگر معادله منحنی هلیکس با رابطه:

$$x=R\cos\varphi$$
$$y=R\sin\varphi$$
$$z=R\alpha\varphi$$

داده شود بردار $d\vec{x}$ والمان طول dl ازروابط زیر بدست میایند:

$$d\vec{x} = +R\left[-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} + \alpha\,\vec{k}\right]d\varphi$$

$$dl = R\left[1+\alpha^2\right]^{\frac{1}{2}}d\varphi$$

ب_٦_١ محاسبه المان سطح $d\vec{a}$ حول نقطه $\vec{x}$ واقع بر سطح S

هر گاه مطابق شکل (۱۲-۱) سطح S با معادله:

$$(1-112)\quad \vec{x} = \vec{x}(u,v) \qquad \& \qquad x_i = x_i(u,v)$$

داده شود بازاء $v=v_0$ و $u=u_0$ یک نقطه نظیر $\vec{x}_0$ برروی سطح خواهیم داشت حال اگر v مقدار ثابت v_0 و u مقادیر مختلف اختیار نماید منحنی بدست می آید که بامعادله:

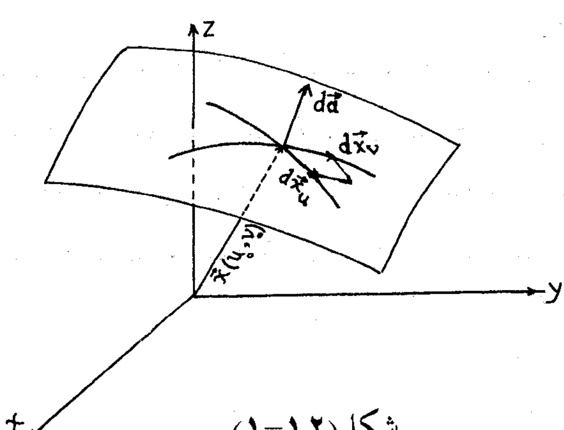
$$(1-113)\quad \vec{x} = \vec{x}(u,v_0)$$

مشخص میگردد. (توجه کنید که $\vec{x}$ فقط تابعی از پارامتر u است) و این منحنی یک زیر مجموعه ای از نقاط واقع بر سطح است پس منحنی مزبور واقع بر سطح Sمیباشد.

حال میتوان بردار $d\vec{x}$ ای حول نقطه $\vec{x}(u_0,v_0)$ بر روی منحنی که با رابطه(۱۱۳-۱) داده شده است انتخاب کرد چنین $d\vec{x}$ ای از رابطه (۱۰۹-۱) بدست میاید.

$$(1-114)\quad d\vec{x}_u = \left.\frac{\partial\vec{x}\,(u,v_0)}{\partial u}\right|_{u_0} du$$

با بکارگیری علامت $\partial/\partial u$ بجای d/du متوجه هستیم که متغییر دیگر را ثابت فرض کردیم. حال اگر u مقدار ثابت u_0 و v مقادیرمختلف اختیار کند منحنی دیگری واقع



شکل(۱۲-۱)

برسطح S خواهیم داشت که معادله آن با رابطه:

$$(1-115) \quad \vec{x} = \vec{x}(u_0, v)$$

داده میشود بنابراین $d\vec{x}$ واقع بر این منحنی با رابطه:

$$(1-116) \quad d\vec{x}_v = \left.\frac{\partial \vec{x}(u_0,v)}{\partial v}\right|_{v_0} dv$$

بنابراین $d\vec{a}$ واقع بر این سطح و حول نقطه $\vec{x}(u_0,v_0)$ با رابطه:

$$(1-117) \quad d\vec{a} = d\vec{x}_u \times d\vec{x}_v = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right)_{u_0,v_0} dudv$$

معلوم می شود. بنابراین $d\vec{a}$ حول یک نقطه عمومی واقع بر سطح که با پارامترهای (u,v) مشخص میگردد برابر است با:

$$(1-118) \quad d\vec{a} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right)_{u,v} dudv \equiv \vec{F}(u,v)\, dudv$$

$$(1-119) \quad |d\vec{a}| \equiv da = F(u,v)\, dudv$$

توجه کنید اگر در (۱۱۸−۱) یا (۱۱۹−۱) به u و v مقادیر مختلفی بدهیم $d\vec{a}$ و da در نقاط مختلف بر روی سطح بدست می آید.

فرم صریح محاسباتی (۱۱۸−۱) بصورت زیر است:

$$(1-120) \quad d\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

شایان ذکر است که بموجب (۱۱۸−۱) $d\vec{a}$ بینهایت کوچک مرتبه دوم میباشد (بعلت وجود du و dv) اما درنقاط مختلف سطح، $d\vec{a}$ ها بعلت وجود ضریب $F(u,v)$ درحالت کلی مساوی هم نیستند. بعنوان یک مثال آموزنده معادله سطح کره بشعاع a که مرکز آن واقع برمبداء مختصات وپارامترهای $u=\theta$ و $v=\varphi$ انتخاب کنیم بصورت:

$$(1-121) \quad \begin{aligned} x &= a\sin\theta\cos\varphi \\ y &= a\sin\theta\sin\varphi \\ z &= a\cos\theta \end{aligned}$$

میباشد یعنی بردار $\vec{x}$ منتهی بر چنین سطحی با رابطه:

$$(1-121-a) \quad \vec{x} = a\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + a\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + a\cos\theta\,\vec{k}$$

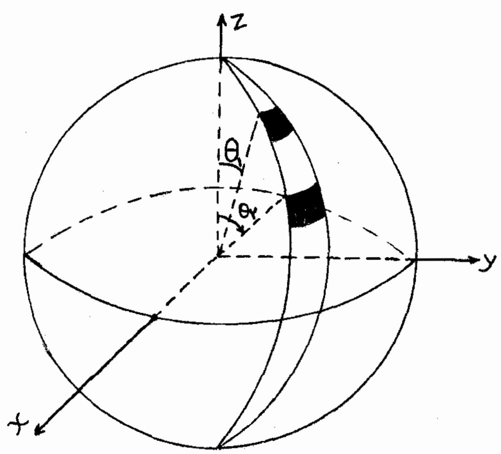
داده میشود. محاسبه $\partial\vec{x}/\partial\theta$ و $\partial\vec{x}/\partial\varphi$ را بعهده خواننده واگذار نموده وفقط قدر مطلق da را مینویسیم (محاسبات کمی طولانی است)

$$(1-122) \quad da = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

توجه کنید که $F(\theta,\varphi)$ درمورد این سطح فقط تابعی از θ شده است بنابراین $d\vec{a}$ هایی که حول (θ,φ) های متفاوت میسازیم متفاوت خواهد بود بشکل (۱۳-۱) توجه کنید:

حال اگر معادله سطح با پارامترهای $u=x$ و $v=y$ داده شود یعنی معادله سطح بصورت:

$$(1-123) \quad \begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= z(x,y) \end{aligned}$$



شکل(۱۳-۱)

باشد در اینصورت $\vec{x}$ منتهی به سطح بصورت:

$$(1-124) \quad \vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x,y)\vec{k}$$

درمیاید دراینصورت $d\vec{a}$ بموجب (۱۱۸-۱) برابر میشود با:

$$d\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} dxdy = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} dxdy$$

$$(1-125) \quad d\vec{a} = \left[-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k} \right] dxdy = \vec{F}(x,y)\, dydx$$

بموجب (۱۲۵−۱) da_z برابر $dxdy$ است. حال اگر پارامترهای سطح را $u=y$ و $v=z$ انتخاب کنیم یعنی معادله همان سطح با رابطه:

$$(1-126) \quad \begin{aligned} x &= x(y,z) \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}$$

داده شود یعنی:

$$\vec{x}(y,z) = x(y,z)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

در اینصورت da واقع بر همان سطح با رابطه:

$$(1-127) \quad d\vec{a} = \left[\vec{i} - \frac{\partial x}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial x}{\partial z}\vec{k} \right] dydz = \vec{F}(y,z)\, dydz$$

بموجب (۱۲۷−۱) da_x برابربا:

$$da_x = dydz$$

و نهایتا" اگر $u=z$ و $v=x$ باشد معادله سطح با رابطه :

$$(1-128) \quad \begin{aligned} x &= x \\ y &= y(x,z) \\ z &= z \end{aligned} \quad , \quad \vec{x}(x,z) = x\vec{i} + y(x,z)\vec{j} + z\vec{k}$$

داده میشود و $d\vec{a}$ واقع بر همان سطح برابر میشود با:

$$(1-129) \quad d\vec{a} = \left[-\frac{\partial y}{\partial x}\vec{i} + \vec{j} - \frac{\partial y}{\partial z}\vec{k} \right] dxdz = \vec{F}(x,z)\, dxdz$$

که بموجب (۱۲۹−۱) da_y برابر $dxdz$ میشود.

حال توجه کنید که تا این لحظه $d\vec{a}$ واقع بر یک سطح هنگامیکه معادله سطح با پارامترهای (u,v) و (x,y) و (y,z) و (z,x) داده شده باشند برابر روابط (۱۱۸–۱) و (۱۲۵–۱) و (۱۲۷–۱) و (۱۲۹–۱) میشود.

البته کلی ترین شکل $d\vec{a}$ همانا رابطه (۱۱۸–۱) است اما به کمک سه رابطه اخیر میتوان $d\vec{a}$ را بشکل دیگری هم نوشت یعنی:

$$(1-130)\quad d\vec{a} = \left[dydz\,\vec{i} + dxdz\,\vec{j} + dxdy\,\vec{k}\right]$$

فرم (۱۳۰–۱) در بعضی موارد کاربردهایی دارد. بالاخص هنگامیکه مختصات منحنی الخط را معرفی نماییم. اگر معادله سطح با رابطه:

$$(1-131)\quad f(x,y,z) = c$$

داده شده باشد از رابطه فوق می توان نتیجه گرفت اگر x و y را بعنوان پارامتر انتخاب کنیم z تابعی از x و y میشود بنابراین بموجب (۱۲۵–۱) $d\vec{a}$ برابر است با:

$$d\vec{a} = \left[-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}\right]dxdy$$

حال $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ را از رابطه (۱۳۱–۱) محاسبه میکنیم:

$$(1-132)\qquad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z(x,y)) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

و بهمین ترتیب:

$$(1-133)\qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

در نتیجه داریم:

$$(1-134)\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}$$

بنابراین $d\vec{a}$ برابر میشود با:

$$(1-135)\qquad d\vec{a}=\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right]dxdy=\frac{\vec{\nabla}f(\vec{x})}{\frac{\partial f}{\partial z}}dxdy$$

رابطه (۱۳۵-۱) مبین این واقعیت است که $\vec{\nabla}f$ برسطح S در نقطه $\vec{x}$ عمود است و در ضمن رابطه دیگری برای محاسبه $d\vec{a}$ برروی سطح که معادله آن با رابطه $f(\vec{x})=C$ داده میشود.

سؤال: اگر در $f(\vec{x})=C$، x، z را بعنوان پارامتر انتخاب کنیم رابطه (۱۳۵-۱) چگونه تغییرمی یابد؟ آموزنده است خواننده از رابطه (۱۳۲-۱) تعبیر هندسی بشرح زیر نماید:

راهنمایی: نشان دهید که $f(x)=C$ بازاء $x=x+dx$ برابر است با:

$$f(x+dx,y,z(x,y)+\frac{\partial z}{\partial x}dx)\equiv f(x+\alpha,y+0,z+\beta)$$

و اگرآنرا از $f(\vec{x})$ بازاء $\vec{x}=\vec{x}$ کم کنیم و نتیجه را بر dx تقسیم کنیم رابطه (۱۳۲-۱) حاصل میشود.

ج-٦-۱ محاسبه المان حجم حول نقطه $\vec{x}$

معادله فضا در عمومی ترین شکل بصورت:

$$\vec{x}=\vec{x}(u,v,w)\quad,\quad x_i=x_i(u,v,w)$$

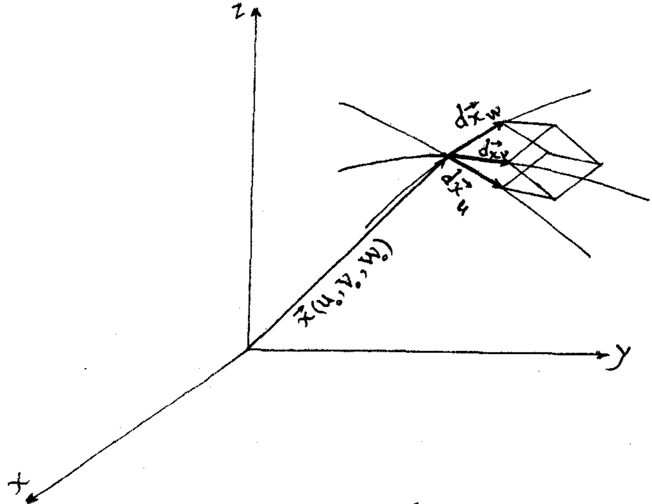
داده می شود هر گاه $u=u_0$ و $v=v_0$ و $w=w_0$ اختیار کنند مختصات نقطه $\vec{x}_0$ بدست میاید. حال اگر w و v مقادیر ثابت w_0 و v_0 و u مقادیر مختلف اختیار نماید رابطه:

$$(1-136)\quad \vec{x}=\vec{x}(u,v_0,w_0)$$

معرف معادله یک منحنی در فضا میباشد $d\vec{x}$ واقع بر این منحنی با رابطه:

$$(1-137)\quad d\vec{x}_u=\left.\frac{\partial\vec{x}(u,v,w)}{\partial u}\right|_{u_0,v_0,w_0}du$$

داده میشود. به شکل (۱٤-۱) توجه نمایید:



شکل(۱۴-۱)

بهمین ترتیب رابطه:

$$\vec{x} = \vec{x}(u_0, v, w_0) \quad , \quad x_i = x_i(u_0, v, w_0)$$

معرف منحنی دیگری در فضا که مار بر نقطه $\vec{x}_0$ است $d\vec{x}$ واقع بر این منحنی وحول نقطه $\vec{x}_0$ برابر است با:

$$(1-138) \quad d\vec{x}_v = \left.\frac{\partial \vec{x}(u,v,w)}{\partial v}\right|_{u_0,v_0,w_0} dv$$

و نهایتا" رابطه:

$$\vec{x} = \vec{x}(u_0, v_0, w) \quad , \quad x_i = x_i(u_0, v_0, w)$$

معرف منحنی سومی میباشد که مار برنقطه $\vec{x}_0$ است $d\vec{x}$ واقع بر منحنی سوم با رابطه:

$$(1-139) \quad d\vec{x}_w = \left.\frac{\partial \vec{x}(u,v,w)}{\partial w}\right|_{u_0,v_0,w_0} dw$$

داده میشود. بنابراین المان حجم حول نقطه $\vec{x}_0$ برابر حاصلضرب مختلط سه بردار فوق میباشد:

$$dv = (d\vec{x}_u \times d\vec{x}_v) \cdot d\vec{x}_w = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial w} dudvdw$$

که فرم محاسباتی آن بصورت:

$$(1-140)\quad dv=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix} dudvdw$$

$$(1-141)\quad dv=J(u,v,w)\, dudvdw$$

در (۱۴۱-۱) ضریب J را که تابعی از u و v و w می باشد دترمینان ژاکوبی نامند. (توجه نمایید که در (۱۴۰-۱) المان حجم را حول یک نقطه عمومی (u,v,w) نوشته ایم.) لازم به یادآوری است که در (۱۴۰-۱) دترمینان را گاهی اوقات با دوخط موازی دو جدار رسم می کنند که مطمئن شویم درحاصلضرب مختلط سه بردارحجم مثبت مورد نظر است به آسانی می توان نشان داد که اگر پارامترهای معادله فضا u و v و w را بترتیب x و y و z اختیار کنیم یعنی :

$$(1-142)\quad \begin{cases} x=x\\ y=y\\ z=z\end{cases}\quad , \quad \vec{x}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

در اینصورت رابطه (۱۴۰-۱) بصورت:

$$(1-143)\quad dv=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} dxdydz = dxdydz$$

در میاید اگر معادله فضا را با رابطه:

$$(1-144)\quad \begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\varphi\\ y&=r\sin\theta\sin\varphi\\ z&=r\cos\theta\end{aligned}\quad ,\vec{x}=r\sin\theta\cos\varphi\vec{i}+r\sin\theta\sin\varphi\vec{j}+r\cos\theta\vec{k}$$

داده میشود. (r,θ,φ) پارامترهای معادله فضا میباشند که درفصل بعدازآنها بامختصات منحنی الخط کروی نام می بریم. در اینصورت:

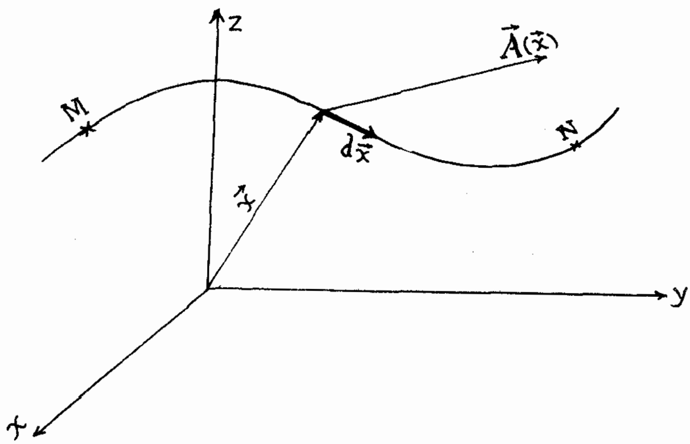
$$dv=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix} drd\theta d\varphi$$

$$(1-145)\qquad dv=r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

خلاصه کلام: برای محاسبه المان طول واقع برمنحنی، المان سطح واقع برسطحی و المان حجم در فضا نیاز به دانستن معادله منحنی، سطح و فضا است.

۷-۱ روش محاسبات انتگرالهای یگانه و صور مختلف آن که در فیزیک استفاده میشود.

الف-۷-۱ محاسبه گردش میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ بر روی منحنی C از نقطه مبدأ تا نقطه مقصد.



شکل(۱۵-۱)

مطابق شکل(۱۵-۱) منحنی C و نقاط مبدأ M و مقصد N و میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ در دست است. از بین بی نهایت بردار میدان برداری آنهایی را که نقطه اثرشان روی منحنی C قرار دارد درنظر میگیریم. هرگاه میدان برداری حول نقطه $\vec{x}$ واقع بر منحنی C را $\vec{A}(\vec{x})$ بنامیم و $d\vec{x}$ ای حول $\vec{x}$ که انتهای دیگر آنهم بر روی منحنی و جهت آن از طرف نقطه مبدأ بطرف نقطه مقصد باشد انتخاب کنیم، حاصلضرب اسکالر:

$$(1-146) \quad dI(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}).d\vec{x}$$

را المان گردش میدان برداری $\vec{A}$ بر روی $d\vec{x}$ نامند. اگر این محاسبه را برای تمامی نقاط واقع بر منحنی C که درفاصله M تا N قرار دارند تکرار ونتایج حاصل را باهم جمع کنیم، نتیجه بدست آمده را گردش میدان برداری $\vec{A}$ بر روی منحنی C از نقطه مبدأ M تا نقطه مقصد N نامند. بنابراین داریم:

$$(1-147) \quad I = \sum_{\vec{x}} dI(\vec{x}) = \sum_{\vec{x}} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

نظر به اینکه $\vec{x}$ بطور پیوسته تغییر می کند فرم دقیقتر آن استفاده از حرف S میباشد پس داریم :

$$(1-148)\, I = \int_{\vec{x}=\vec{x}_M}^{\vec{x}_N} \vec{A}(\vec{x}).d\vec{x}$$

توجه میکنیم که در (۱۴۸-۱) ،محاسبه $d\vec{x}$ از روی معادله منحنی C بدست میآید یعنی بموجب (۱۰۸-۱) داریم:

$$d\vec{x} = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \hat{e}_i \, dt = \vec{F}(t)\, dt$$

در ثانی برای آنکه تضمین نماییم که نقطه اثر $\vec{A}(\vec{x})$ که بر روی منحنی C قرارمیگیرد مختصات نقطه اثر A اختیاری نمی باشد بلکه همان مختصات منحنی C میباشد در محاسبه (۱۴۸-۱) داریم:

$$(1-149) \quad I = \int_{t=t_M}^{t_N} \vec{A}(\vec{x}(t)) \cdot \left(\frac{d\vec{x}_i}{dt} \vec{e}_i \right) dt$$

$$= \int_{t_M}^{t_N} \vec{A}(\vec{x}(t)) \cdot \vec{F}(t)\, dt \equiv \int_{t_M}^{t_N} K(t)\, dt$$

که تبدیل به یک انتگرال معمولی میشود.

نکته بسیار مهم دیگر آنست که چگونه جهت $d\vec{x}$ را از طرف نقطه مبدأ بطرف نقطه مقصد انتخاب کنیم مگر نه آنکه حول نقطه $\vec{x}$ دوجهت مختلف برروی منحنی C میتوان اختیار کرد. برای این منظور متوجه هستیم که $d\vec{x}$ با رابطه:

$$d\vec{x} = \vec{F}(t)\, dt$$

داده میشود که جهت $\vec{F}(t)$ همیشه در جهت t های افزایشی است بنابراین دو جهت مختلف $d\vec{x}$ با dt های مثبت و منفی حاصل میشود. حال این سوأل پیش میاید dt که یک المان بی نهایت کوچک است را چگونه میتوانیم مثبت ویا منفی اختیار کنیم. برای پاسخ بدین سوأل بعنوان مثال دوانتگرال I_1 و I_2 را در نظر میگیریم :

$$(1-150) \qquad I_1 = \int_{t=t_M}^{t_N} f(t)dt$$

$$I_2 = \int_{t=t_N}^{t_M} f(t)dt$$

علت آنکه جواب یکی منفی جواب دیگری مثبت میگردد آنست که dt یکی منفی dt انتگرال دیگر است. مثلا" اگر $t_N > t_M$ باشد در اینصورت با dt های مثبت است که میتوان از t_Mبه t_N رسید بنابراین در I_1 با چنین فرضی (یعنی $t_N > t_M$) dt مثبت و در انتگرال I_2 ,dt منفی است .بقولی علامت dt بوسیله حدود انتگرال معلوم میشود.

پس اگر در مسئله ای $t_N > t_M$ باشد با انتخاب dt مثبت یعنی نوشتن انتگرالی که حد پایینی آن t_M و حد بالایی آن t_N است $d\vec{x}$ درجهت مطلوب قرار میگیرد و اگر $t_N < t_M$ باشد در اینصورت برای داشتن dt منفی باز هم حد پایینی انتگرال t_M و حد بالایی آن را t_N انتخاب کرده و در نتیجه $d\vec{x}$ باز هم درجهت مطلوب قرار میگیرد. پس نتیجه آنکه درتمامی حالات پارامتری که مختصات نقطه مبدأ را مشخص می کند در حد پایینی و پارامتری که مختصات نقطه مقصد را مشخص میکند درحد بالایی انتگرال قرار میدهیم.

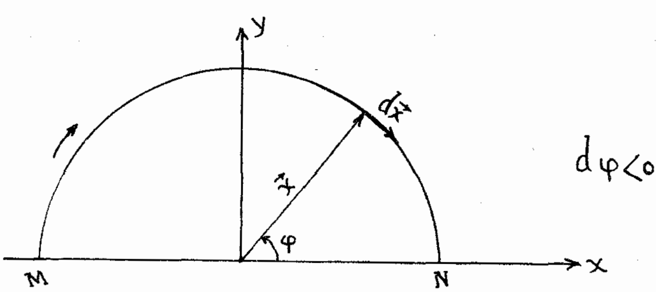
مثال: گردش میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$:

$$(1-151) \qquad \vec{A} = \alpha \; \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{(x^2+y^2)}$$

بر روی منحنی C که با معادله:

$$(1-152) \qquad \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = 0 \end{cases}$$

مشخص شده است از نقطه مبدأ M تا نقطه مقصد N محاسبه کنید؟



$$d\bar{x} = \sum_i \frac{dx_i}{dt}\hat{e}_i\, dt = R(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j})\,d\varphi$$

بنابراین:

$$I = \int \vec{A}(\bar{x})\cdot d\bar{x}$$

$$I = \int_{\varphi=\pi}^{0} \alpha\, \frac{\left[-R\sin\varphi\,\vec{i} + R\cos\varphi\vec{j}\right]}{R^2}\cdot R\left[-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}\right]d\varphi$$

$$(1-153) \qquad I = \alpha\int_{\pi}^{0} d\varphi = -\alpha\,\pi$$

توجه کنید گاهی اوقات بعضی از خوانندگان فکر می کنند که گردش هر میدان برداری $\vec{\mathbf{A}}$ بر روی منحنی بسته بعلت آنکه $\vec{\boldsymbol{x}}_N = \vec{\boldsymbol{x}}_M$ میگردد، میبایستی صفر باشد.

$$(1-154) \quad \oint \vec{A}(\bar{x})\cdot d\bar{x} = \int_{\bar{x}_M}^{\bar{x}_M} \vec{A}(\bar{x})\cdot d\bar{x} = 0 \qquad ?$$

اما این استدلال بسیار غلط است چون با نوتاسیون فوق هرگز گردشی روی نمیدهد. میبایستی توجه کنیم که رابطه (۱۵۴–۱) تبدیل به انتگرال $K(t)\,dt$ میگردد. حال تعریف منحنی بسته بصورت:

$$(1-155) \quad \bar{x}(t) = \bar{x}(t+T)$$

است یعنی بازاء دو t مختلف مختصات یک نقطه حاصل میشود. البته توجه می کنیم منحنی بسته نسبت به هر پارامتری پریودیک نمیباشد یعنی اگر:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(t+T)$$

شود رابطه:

$$\bar{x}(t+2T) = \bar{x}(t+T) = \bar{x}(t)$$

برقرار نمیشود بعنوان مثال از جزوه درس مکانیک معادله منحنی بر حسب پارامتر زمان بصورت:

$$(1-156) \qquad \begin{aligned} x &= R\cos\beta t^2 \\ y &= R\sin\beta t^2 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

داده شده است در نظر میگیریم. بازاء $t=0$ و $t=T=(2\pi/\beta)^{1/2}$ و $t=T'=(4\pi/\beta)^{1/2}$ مختصات $x=R$، $y=0$، $z=0$ حاصل میشود و $T'\neq 2T$ است. حال با این معلومات متوجه میشویم که در (۱۵۴-۱) حدود انتگرال برای مدار بسته بصورت:

$$(1-157)\quad \oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \int_{t=t_M}^{t_N=t_M+T} K(t)\,dt$$

در می آید که الزاما" صفر نمیباشد.

خلاصه کلام: محاسبه گردش یک میدان برداری بر روی منحنیC از نقطه مبدأ تا نقطه مقصد به سه عامل زیربستگی دارد:

الف- میدان برداری برحسب (x,y,z)

ب- معادله پارامتری منحنی

ج- مختصات نقاط مبدأ و مقصد

ب-۷-۱ گردش میدان برداری بر روی منحنی C هرگاه $\vec{A}(\vec{x})=-\vec{\nabla}\varphi(\vec{x})$ باشد

در چنین حالتی:

$$(1-158)\quad I = \int_{\vec{x}_M}^{\vec{x}_N} \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = -\int_{\vec{x}_M}^{\vec{x}_N} \vec{\nabla}\varphi(\vec{x})\cdot d\vec{x}$$

که بموجب رابطه (۹۴-۱) برابر$d\,\varphi(\vec{x})$ میشود که:

$$d\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}+d\vec{x}) - \varphi(\vec{x})$$

است که بمعنای اختلاف تابع $\varphi(\vec{x})$ بر روی دو نقطه از منحنی با مختصات $\vec{x}$ و $\vec{x}+d\vec{x}$ میباشد. جمع این $d\,\varphi(\vec{x})$ ها اختلاف مقدارتابع درنقطه مبدأ ازنقطه مقصدراحاصل میکند:

$$(1-159)\quad I = \int_{\vec{x}_M}^{\vec{x}_N} \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = -\int_{\vec{x}_M}^{\vec{x}_N} \vec{\nabla}\varphi(\vec{x})\cdot d\vec{x} = -\int_{\vec{x}_M}^{\vec{x}_N} d\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}_M) - \varphi(\vec{x}_N)$$

بموجب (۱۵۹−۱) در چنین میدانهای خاص گردش میدان برداری به معادلـه منحـنی C بستگی ندارد اما به میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ (به علت آنکه تابع $\varphi(\vec{x})$ معرف $\vec{A}(\vec{x})$ اسـت) و مختصات نقاط مبدأ و مقصد بستگی دارد. حال ممکن است برای خواننده این توهم پیش آید که عدم وابستگی (۱۵۹−۱) بـه معادلـه منحنی بدین علـت اسـت کـه مـا از معادلـه منحنی استفاده نکرده ایم، در پاسخ منحنی با معادله $\vec{x}=\vec{x}(t)$ در نظر میگیریم (۱۵۸−۱) برابر میشود با :

$$(1-160)\quad I=-\int_{t_M}^{t_N}\left[\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}(t))\right]\cdot\left[\frac{dx(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dy(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dz(t)}{dt}\vec{k}\right]dt$$

که اگر ضرب اسکالر را انجام دهیم داریم:

$$(1-161)\quad I=-\int_{t_M}^{t_N}\left[\frac{\partial\varphi(\vec{x}(t))}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi(\vec{x}(t))}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\varphi(\vec{x}(t))}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right]dt$$

اما در (۱٦۱−۱) داخل کروشه چیزی جز:

$$\frac{d}{dt}\varphi\left((x(t),y(t),z(t)\right)$$

نمیباشد پس (۱٦۱−۱) تبدیل میشود به:

$$(1-162)\ I=-\int_{t_M}^{t_N}\frac{d\varphi(\vec{x}(t))}{dt}dt=\varphi(\vec{x}(t_M))-\varphi(\vec{x}(t_N))\equiv\varphi(\vec{x}_M)-\varphi(\vec{x}_N)$$

میدانهای برداری که با رابطه:

$$(1-163)\quad \vec{A}(\vec{x})=-\vec{\nabla}\varphi(\vec{x})$$

داده مـی شـود ،میدانهـای ابقائـی یاپایسـتار(*Conservative*) یـا میدانهـای مشـتق از پتانسیل نامندو فقط برای چـنین میدانهـایی اسـت کـه گـردش میـدان بـرداری بـر روی منحنی C به معادله منحنی بستگی پیدا نمیکند. توجـه میکنیـم کـه بموجـب (۱۵۹−۱) یـا (۱٦۲−۱) اگر منحنی C منحنی بسته باشد گردش میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ برابر:

$$(1-164)\quad \oint\vec{A}(\vec{x}).d\vec{x}=-\oint\vec{\nabla}\varphi(\vec{x})\cdot d\vec{x}=0$$

میشود. در مورد دیگر خواص میدانهای ابقائی بعد از تعریف curl (تاو) میدان برداری بررسی خواهد شد. اما قبل از هر چیز لازم است بدانیم که در چند مبحث فیزیکی با انتگرال گردش میدان برداری بر روی منحنی C و انتگرالهایی که از نظر ریاضی از خانواده انتگرال فوق است، آشنا میشویم.

ج-۷-۱ انتگرالهایی ازخانواده گردش میدان برداری بر روی منحنیC

انتگرالهای زیر را درنظر میگیریم:

$$
\begin{aligned}
&1-\int \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x}\\
&2-\int \vec{A}(\vec{x})\times d\vec{x}\\
&3-\int \vec{A}(\vec{x})\,dl \qquad (1-165)\\
&4-\int f(\vec{x})\,d\vec{x}\\
&5-\int f(\vec{x})\,dl
\end{aligned}
$$

انتگرال (۱)در مباحث محاسبه کار نیرو و یا محاسبه اختلاف پتانسیل کاربرد دارد. انتگرال (۲) در مباحث محاسبه نیروی میدان اندکسیون مغناطیسی وارد بر یک توزیع جریان خطی و یا محاسبه میدان اندکسیون مغناطیسی ناشی از توزیع جریان خطی کاربرد داردچند فرم آشنایی انتگرال(۲) بصورت زیر است:

$$\vec{F}=I\int d\vec{x}\times\vec{B}(\vec{x}) \qquad (1-166)$$

$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int d\vec{x}'\times\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|^3}$$

توجه کنید که در مثال دوم $\vec{A}(\vec{x}')=(\vec{x}-\vec{x}')/|\vec{x}-\vec{x}'|^3$ است و میدان برداری بر حسب $\vec{x}'$ داده شده و $\vec{x}$ یک نقطه ثابت است. انتگرال (۳) در مباحث محاسبه میدان الکتریکی از یک توزیع بار خطی یا محاسبه ممان دو قطبی الکتریکی یک توزیع بار خطی کاربرد دارد. چند فرم آشنای انتگرال (۳) بصورت زیرمیباشد:

$$\vec{E}(\vec{x})=K\int\lambda(\vec{x}')\,dl'\,\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|^3} \qquad (1-167)$$

$$\vec{P}=\int\lambda(\vec{x}')\,dl'\,\vec{x}'$$

میدانهای برداری $\vec{A}$ در دو مثال فوق عبارتند از:

$$(1-168) \qquad \vec{A}(\vec{x}') = \lambda\,(\vec{x}')\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{x}') = \lambda\,(\vec{x}')\,\vec{x}'$$

انتگرال(٤) درمباحث محاسبه پتانسیل مغناطیسی ناشی ازتوزیع جریان خطی کاربرد دارد که فرم آشنای انتگرال(٤) بصورت زیر است:

$$(1-169) \quad \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\,\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

که $f(\vec{x}')$ در مثال فوق عبارتست از:

$$(1-170) \quad f(\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

و انتگرال (٥)در محاسبه طول منحنی یا مقدار بار موجود بر روی منحنی باردار کاربرد دارد فرم آشنای انتگرال (٥) بصورت:

$$(1-171) \qquad l = \int dl$$

$$q = \int \lambda(\vec{x})\,dl$$

است درتمامی پنج انتگرال نامبرده(١٦٧-١) dl یا $d\vec{x}$ از روی معادله منحنی محاسبه میشودو در آرگومان $\vec{A}(\vec{x})$ یا $f(\vec{x})$ معادله منحنی قرار میگیرد.

سؤال: گشتاور نیروی مغناطیسی واردبر یک توزیع جریان خطی بارابطه زیرداده میشود:

$$\vec{\tau} = \int \vec{x} \times d\vec{F}(\vec{x}) = I \int \vec{x} \times (d\vec{x} \times B(\vec{x}))$$

$$= I \int d\vec{x}\,(\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x})) - I \int (\vec{x}\cdot d\vec{x})\,\vec{B}(\vec{x})$$

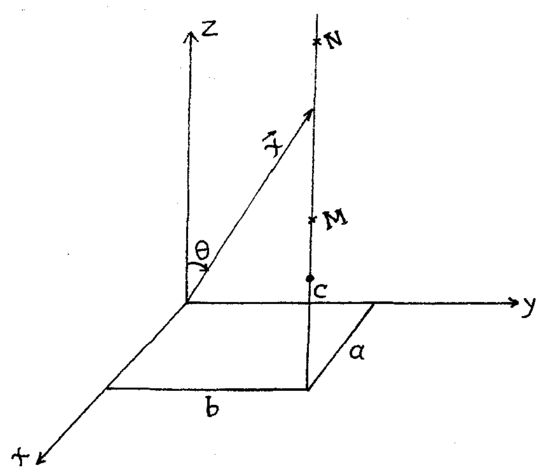
این انتگرال از خانواده کدامین انتگرالها هستند؟متأسفانه بعضی از مدرسین با وجود آنکه میدانند که دانشجودردوران دبیرستان مفهوم کار یک نیرو را آموخته و بارها نیز این قسمت در درس فیزیک پایه یک تکرار شده است ،محاسبه میدان الکتریکی حاصل ازیک سیم مثلا" بشکل هلیکس رامشکل میپندارند ویا آنکه محاسبه نیروی مغناطیسی وارد بریک سیم حامل جریان را بصورت کلی شرح نمیدهند. براستی علت چیست؟

د_۷_۱ نکات متفرقه در مورد dl و $d\vec{x}$.

چون dl یا $d\vec{x}$ در محاسبات انتگرالی ظاهر میشوند که خود از معادله منحنی بدست میاید ،بنابراین اگر معادله منحنی با پارامتر مناسبی داده شود فرم $F(t)$ در dl ساده تر میشود. بعنوان مثال خط مستقیم مار بر نقطه (a,b,c) که بموازات محور oz باشد در مختصات کارتزین هرگاه پارامتر را z و بار دیگر θ انتخاب کنیم بصورتهای زیر درخواهد آمد بشکل (۱۶–۱) توجه نمایید :

$$(1-172)\quad \begin{aligned} x &= a \\ y &= b \\ z &= z \end{aligned}$$

$$(1-173)\quad \begin{aligned} x &= a \\ y &= b \\ z &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{tg\theta} \end{aligned}$$



شکل(۱۶–۱)

dl بموجب (۱۱۱-۱) برای معادلات منحنی بصورت:

$$(1-174) \quad dl = dz$$

$$(1-175) \quad dl = \left[0 + 0 + \left(-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cos^2\theta}\frac{1}{tg^2\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin^2\theta} d\theta$$

در میاید که مشاهده میگردد محاسبه مثلا" طول منحنی از (۱۷٤-۱) بمراتب آسانتر از (۱۷٥-۱)میباشد. حال توجه میکنیم که در محاسبه گردش میدان برداری بر روی منحنی C نشان دادیم که همیشه پارامتری که مختصات نقطه مبدأ را مشخص میکند درحد پایینی وپارامتری که مختصات نقطه مقصد را تعیین میکند درحد بالایی قرارمیگیرد. اما درمورد محاسبه انتگرالهای سوم و پنجم (۱٦٥-۱) حدود انتگرال چگونه مشخص میگردد؟ بقولی ابتدا و انتهای منحنی چگونه مشخص میشود. در پاسخ بدین سوأل توجه میکنیم که d l برابر:

$$dl = F(t)\,dt$$

است که $F(t)$ قدر مطلق بردار $\vec{F}(t)$ میباشد که مسلما" مثبت است. چون dl نیز همیشه مثبت می باشد پس می بایستی dt را مثبت اختیار کنیم و این وقتی حاصل میشود که پارامتری که حد پایینی انتگرال را مشخص میکند از پارامتری که حد بالایی انتگرال را مشخص میکند کوچکتر باشد. بعنوان یک مثال بسیار جالب طول منحنی واقع بر خط مستقیمی که معادله آن با روابط (۱۷۲-۱) و(۱۷۳-۱) داده شده است بصورت زیر است:

$$(1-176) \quad l = \int_{z_M}^{z_N} dz = (z_N - z_M) \qquad z_N \rangle z_M$$

$$(1-177) \quad l = \int_{\theta_N}^{\theta_M} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$= -\sqrt{a^2+b^2}\left[\cot g\theta_M - \cot g\theta_N\right]$$

توجه کنید که چگونه پارامترابتداوانتهای سیم مستقیم در دورابطه(۱۷٦-۱)و(۱۷۷-۱) تغییر کرده است بنابراین ابتدا و انتهای یک منحنی بستگی به پارامتری دارد که بوسیله

آن معادله منحنی نمایش داده شده است. حال نکته ظریف دیگری بعنوان مسئله مطرح میکنیم که خواننده میبایستی علت حاصل شدن پاسخ غلط آنرا پیدا کند.

منحنی کاردیود (قلب گونه) که ازحرکت نقطه P واقع بر دایره ای بشعاع a که برروی دایره دیگری با همان شعاع می غلتد با معادله:

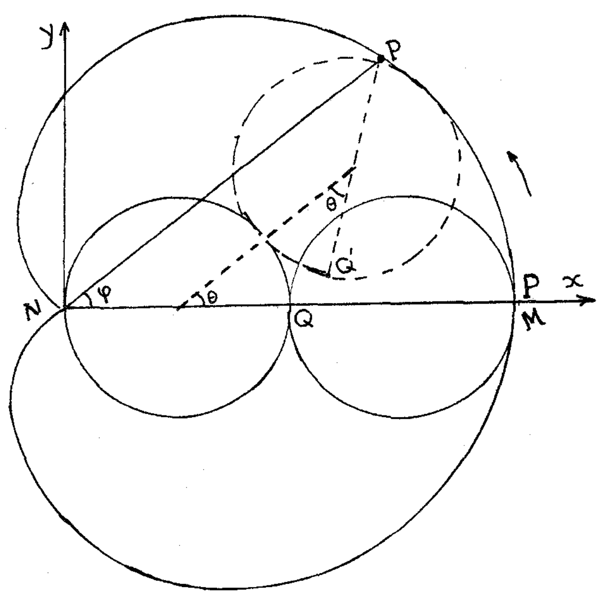
$$x = 2a(1+\cos\varphi)\cos\varphi$$

$$(1-178) \qquad y = 2a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

$$z = 0$$

داده شده است. محاسبات (۱۱۱-۱) نشان میدهد که dl واقع بر ایـن منحـنی بصورت زیر است:

$$(1-179) \quad dl = 4a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$$



شکل(۱۷-۱)

اگر طول نیم قوس بالائی M تا N را حساب کنیم برابر:

$$(1-180)\quad l=\int dl=4a\int_{0}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a$$

میشود واگر نتیجه را درعدد ۲ ضرب کنیم کل طول قوس کاردیود بدست می آید اما اگر انتگرال dl را از 0 تا 2π حساب کنیم نتیجه برابر صفر میشود. علت بدست آمدن دو جواب متفاوت که مسلما" دومی غلط است را شرح دهید؟

بعنوان آخرین نکته از نکات متفرقه قضیه کار انرژی را مورد بررسی قرار میدهیم. در بسیاری از کتب مکانیک گفته می شود که کار نیروی برآیند را حساب کنید خواننده در وهله اول از خود سؤال می کند که $\vec{F}_t$ چگونه تابعی از x,y,z داده شده و در ثانی معادله منحنی حرکت هم داده نشده است. پس چگونه می توان کار نیروی برآیند را محاسبه کرد؟

در پاسخ می گوییم که هرگاه $\vec{F}_t$ (که هر گونه تابعی از مختصات $\vec{x}$ باشد) داده شود معادله منحنی حرکت ذره ازروی فرمول نیوتون وشرایط اولیه که همان دونقطه مبداو مقصد میباشد حاصل می شود بنابراین بزبان دیگر معادله منحنی داده شده است پس برای محاسبه کار نیروی برآیند چنین می کنیم:

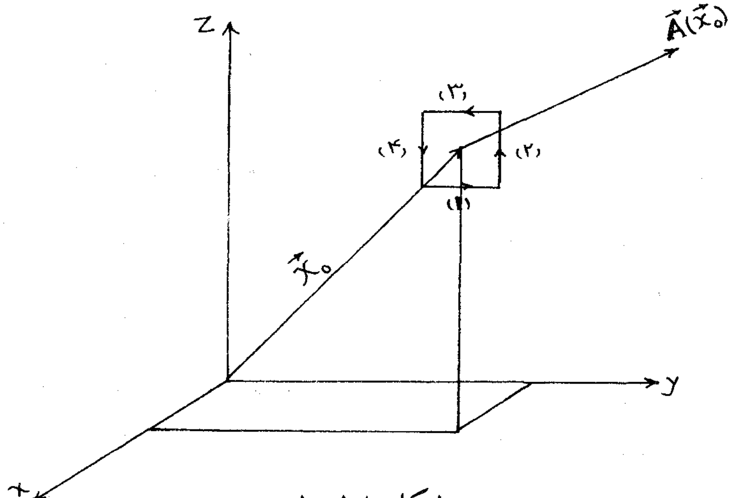
$$(1-181)\quad \int_{\vec{x}_M}^{\vec{x}_N}\vec{F}_t\cdot d\vec{x}=\int_{t_M}^{t_N}m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\cdot\vec{v}(t)\,dt=\frac{1}{2}mv^2(t_N)-\frac{1}{2}mv^2(t_M)$$

سؤال: در (۱۸۱-۱) پارامتر t چه نام دارد. هر گاه بجای $\vec{F}_t$ یکی از نیروهای وارد به ذره داده شود آیا میتوان کار این نیرو را حساب کرد. چرا نه؟

۵-۷-۱ گردش میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ بر روی مربعی بااضلاع بی نهایت کوچک که مرکز آن واقع بر نقطه $\vec{x}_0$ باشد

ابتدا برای سهولت و فهم مسئله صفحه مربع را مطابق شکل (۱۸-۱) موازی صفحه zoy انتخاب میکنیم و با علامت پیکان جهت گردش روی اضلاع مربع را مشخص میکنیم:

چون طول اضلاع بی نهایت کوچک میباشد انتگرال بر روی مسیر بسته مربع تبدیل به چهار جمله زیرین میشود :



شکل(۱۸-۱)

$$(1-182) \qquad \oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \vec{A}(\vec{x}_0 - \frac{dz}{2}\vec{k})\cdot dy\,\vec{j} + \vec{A}(\vec{x}_0 + \frac{dy}{2}\vec{j})\cdot dz\vec{k}$$
$$- \vec{A}(\vec{x}_0 + \frac{dz}{2}\vec{k})\cdot dy\vec{j} + \vec{A}(\vec{x}_0 - \frac{dy}{2}\vec{j})\cdot dz\vec{k}$$

علامتهای منفی درجملات سوم وچهارم از مختلف العلامه بودن $d\vec{x}$ های واقع بر اضلاع سوم با اول و چهارم با دوم ناشی شده است.نکته بسیار مهم اینست که در محاسبه $\vec{A}(\vec{x}).d\vec{x}$ بر روی هر ضلع مربع ،میبایستی نقطه اثر میدان برداری بر روی هر ضلع قرار گیرد وبهمین دلیل آرگومانهای $\vec{A}(\vec{x})$ باروابط (۱۸۲-۱) داده شده است چون مثلا" معنای :

$$(1-183) \quad \vec{A}(\vec{x}_0 - \frac{dz}{2}\vec{k})\cdot dy\vec{j} \equiv A_y(x_0, y_0, z_0 - \frac{dz}{2})dy$$

است اگر تمامی روابط(۱۸۲-۱) رابصورت (۱۸۳-۱)بنویسیم وبسط سری تایلور توابع فوق حول نقطه $\vec{x}_0$ را بنویسیم ،خواهیم داشت :

$$(1-184) \qquad \oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \left[A_y(\vec{x}_0) - \frac{dz}{2}\frac{\partial A_y(\vec{x}_0)}{\partial z} + \dots \right] dy$$

$$+\left[A_z(\bar{x}_0)+\frac{dy}{2}\frac{\partial A_z(\bar{x}_0)}{\partial y}+\ldots\right]dz$$
$$-\left[A_y(\bar{x}_0)+\frac{dz}{2}\frac{\partial A_y(\bar{x}_0)}{\partial z}+\ldots\right]dy$$
$$-\left[A_z(\bar{x}_0)-\frac{dy}{2}\frac{\partial A_z(\bar{x}_0)}{\partial y}+\ldots\right]dz$$

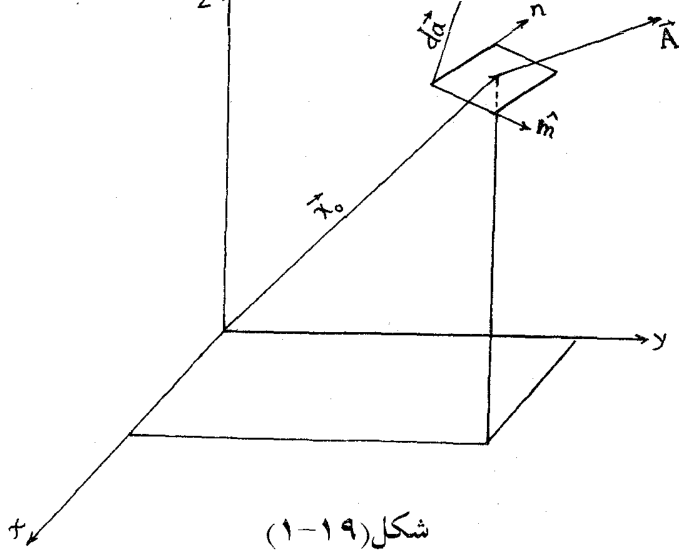
که جمع جملات اول و سوم ،دوم و چهارم بسط فوق برابر میشود با:

$$\oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x}=\left[\frac{\partial A_z(\vec{x}_0)}{\partial y}-\frac{\partial A_y(\vec{x}_0)}{\partial z}\right]dydz+\ldots \qquad (1-185)$$

توجه کنید که جملات نوشته نشده در (۱۸۵-۱) از بینهایت کوچکهای مرتبه سوم و به بالا می باشند رابطه (۱۸۵-۱) روش جدیدی را برای محاسبه گردش $\vec{A}$ بر روی مربع کوچک پیشنهاد می کند و آن اینکه از مؤلفه های A_z و A_y نسبت به متغییر های y و z و درحول نقطه $\vec{x}_0$ مشتق گرفته و پس از کاستن ازیکدیگر در $dydz$ ، مساحت مربع ، ضرب کنیم ، البته نتیجه زمانی دقیق و دقیقتر خواهد بود که مساحت حلقه کوچک و کوچکتر باشد تا تأثیر جملات دیگر که ناشی از بسط سری تایلور هستند از اهمیت کمتری برخوردار شوند .اگر کمی دقت نماییم جمله داخل آکولاد عبارتست از مؤلفه x میدان برداری جدیدی موسوم به کرل (تاو) میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ درنقطه $\vec{x}_0$ یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$ توجه کنید که محاسبه مؤلفه های $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$ مانند محاسبه $\vec{B}(\vec{x})\times\vec{A}(\vec{x})$ است که در دترمینان مربوطه بجای مؤلفه های B ، $\partial/\partial x$ و $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ قرار داده باشیم.

انتخاب صفحه مربع بموزات صفحه zoy باعث می گردد که فقط مؤلفه x ام ، $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$ محاسبه شود. بنابراین با موازی انتخاب کردن صفحه مربع کوچک با هر یک از صفحات دستگاه مختصات میتوان مؤلفه های xوyو z و $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$ را بدست آورد.

ولی ما پیشنهاد بهتری را می نماییم و آن اینکه صفحه مربع کوچک موازی هیچ یک از صفحات دستگاه مختصات نباشد. دراینصورت میتوان گردش میدان برداری در حالت عمومی محاسبه و درنتیجه مؤلفه $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x}_0)$ را دریک امتداد دلخواه بدست آورد.



شکل(۱۹-۱)

مطابق شکل (۱۹-۱)بردارهای یکه $\hat{m}$ و $\hat{n}$ جهت دو ضلع مربع را مشخص میکنند در مثال قبلی آنها بترتیب $\hat{j}$ و $\hat{k}$ بودند ولی حال نیستند. طول اضلاع مربع را dl مینامیم. به موجب تعریف گردش میدان برداری داریم:

$$(1-186)\quad \oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \vec{A}(\vec{x}_0 - \hat{n}\frac{dl}{2})\cdot \hat{m}\,dl + \vec{A}(\vec{x}_0 + \hat{m}\frac{dl}{2})\cdot \hat{n}\,dl - \vec{A}(\vec{x}_0 + \hat{n}\frac{dl}{2})\cdot \hat{m}\,dl - \vec{A}(\vec{x}_0 - \hat{m}\frac{dl}{2})\cdot \hat{n}\,dl$$

حال اگرحاصلضرب اسکالر دوبردار رادرچهارجمله فوق انجام دهیم خواهیم داشت:

$$(1-187)\quad \oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = dl\sum_j \left\{ m_j\left[A_j(\vec{x}_0 - \hat{n}\frac{dl}{2}) - A_j(\vec{x}_0 + \hat{n}\frac{dl}{2})\right] + n_j\left[A_j(\vec{x}_0 + \hat{m}\frac{dl}{2}) - A_j(\vec{x}_0 - \hat{m}\frac{dl}{2})\right]\right\}$$

حال با استفاده از فرمول(۹۱-۱) بسط سری تایلور تابع سه متغییره داریم :

$$f(\vec{x}_0 + a) = f(\vec{x}_0) + \sum_i a_i \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i}$$

پس خواهیم داشت :

$$(1-188)\quad \oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \sum_{i,j} dl\left\{ -m_j(n_i\,dl)\frac{\partial A_j}{\partial x_i} + n_j(m_i\,dl)\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right\} + \cdots$$

$$= \sum_{i,j} (dl)^2 \left\{ (m_i n_j - n_j m_i)\frac{\partial A_j(\vec{x}_0)}{\partial x_i}\right\} + \cdots$$

حال از اتحادی که در زیر استخراج میکنیم استفاده مینماییم .بنابراین داریم:

$$(\vec{m}\times\vec{n})_k = \varepsilon_{kqr}\, m_q\, n_r$$

اگر طرفین را در ε_{ijk} ضرب و سپس جمع روی اندیس k انجام دهیم :

$$\sum_k \varepsilon_{ijk}(\vec{m}\times\vec{n})_k = \sum_k \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{qrk}\, m_q n_r$$

$$= (\delta_{iq}\delta_{jr} - \delta_{ir}\delta_{jq})\, m_q n_r$$

$$(1-189) \qquad \sum_k \varepsilon_{ijk}(\vec{m}\times\vec{n})_k = m_i n_j - m_j n_i$$

توجه کنید اتحاد(۱۸۹-۱)مبین رابطه تانسوری روابطی نظیر:

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 = (\hat{m}\times\hat{n})_3$$

و غیره است .با جایگزاری(۱۸۹-۱) در(۱۸۸-۱) خواهیم داشت:

$$(1-200) \qquad \oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \sum_{i,j,k} (dl)^2\, \varepsilon_{ijk}\,(\hat{m}\times\hat{n})_k \frac{\partial A_j(\vec{x}_0)}{\partial x_i}$$

توجه کنید بموجب شکل (۱۹-۱)داریم:

$$dl^2(\hat{m}\times\hat{n}) \equiv d\vec{a}$$

مساحت(برداری) مربع کوچک است.بنابراین از (۲۰۰-۱) داریم:

$$(1-201) \qquad \oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} A_j(\vec{x}_0)\right) da_k + \ldots.$$

که اگر $\partial/\partial x_i$ را مؤلفه iام بردار $\vec{\nabla}$ فرض کنیم شکل دیگر رابطه (۲۰۱-۱) بصورت:

$$(1-202) \qquad \oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x}_0)\right]\cdot d\vec{a} + \ldots$$

مسئله بسیار مهم که در (۲۰۲-۱) وجود دارد وابستگی جهت $d\vec{x}$ به جهت $d\vec{a}$ (و بالعکس) می باشد که محاسبات گردش میدان برداری مشخص کرده است وآن اینکه اگر انگشت شست دست راست درجهت $d\vec{a}$ باشد جهت خمش دیگر انگشتان دست راست ، جهت $d\vec{x}$ رانشان میدهد .توجه کنید این وابستگی ازروی قرارداد نبوده است بلکه محاسبات ریاضی آن را مشخص می کند .این موضوع از اهمیت بسیار زیادی در مباحثی نظیر قانون آمپر و قانون فارادی برخوردار است.

توجه کنید که در(۱−۲۰۲) زمانی میتوان ازجملات مرتبه بالاترصرفنظر نمود که مساحت صفحه مربع بسمت صفر میل کند. ازرابطه (۱−۲۰۲) نتیجه مهم دیگری هم حاصل می شود و آن اینکه هرگاه $\hat{l}$ بردار یکه در جهت $d\vec{a}$ باشد مؤلفه $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ در امتداد $\hat{l}$ بموجب (۱−۲۰۲)برابر:

$$(1-203)\quad \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})\right]_l = \lim_{da\to 0}\frac{\oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x}}{da}$$

توجه کنید که جملات از مرتبه بینهایت کوچک مرتبه سوم وبالاتربا تقسیم بر da درحد صفر میشوند. در بسیاری از مسائل الکترومغناطیس محاسبه $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$ در یک نقطه دلخواه بطریق مشتق گرفتن از مؤلفه های بردار $\vec{A}$ حاصل میشود. اما در بعضی نقاط خاص ممکن است این مشتق گیری جواب مبهم دهد دراینصورت بمنظوررفع ابهام، ازروابط (۱−۲۰۳) استفاده میکنیم. بعنوان یک مثال فیزیکی میدان برداری:

$$(1-204)\quad \vec{A}(\vec{x}) = \alpha\,\frac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}$$

در نظر میگیریم. $\vec{A}(\vec{x})$ درواقع میدان اندکسیون مغناطیسی حاصل ازسیم مستقیم طویل حامل جریان می باشد که برحسب مختصات کارتزین نوشته شده است (چون هنوزمامختصات منحنی الخط استوانه ای را معرفی نکرده ایم). محاسبات مستقیم نشان میدهد که:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \alpha\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]$$

$$= \vec{k}\left[\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right]$$

$$= \vec{k}\left[\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2}{x^2+y^2}\right]$$

نتیجه فوق برای $\vec{x}\neq 0$ برابر صفر است یعنی:

$$(1-205) \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = 0$$

امابرای نقاط $x,y=0$ و z دلخواه نتیجه فوق مبهم است. برای رفع ابهام مدار دایره ای بسیار کوچک که مرکز آن واقع برمحور oz وصفحه آن موازی باصفحه xoy باشد انتخاب میکنیم. علت آنکه صفحه موازی xoy انتخاب کرده ایم اینستکه فقط مؤلفه $[\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})]_z$ مبهم بوده است. و دلیل اینکه بجای مدار مربعی کوچک مدار دایره ای انتخاب کرده ایم این است که درحد هر دو مدار بسته یک جواب میدهد و چون محاسبه گردش همین بردار بشعاع متناهی R را قبلاً انجام داده ایم [رابطه (۱۵۳-۱)] از نتیجه محاسبه استفاده میکنیم درنتیجه بموجب (۲۰۳-۱) خواهیم داشت :

$$(1-206) \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}\Big|_{x,y=0,z=z} = \alpha \, \frac{2\pi R}{\pi R^2} = \infty$$

در فیزیک بی نهایت شدن $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$ در نقاط خاص را به وسیله توابعی موسوم به توابع دلتای دیراک نشان میدهند.

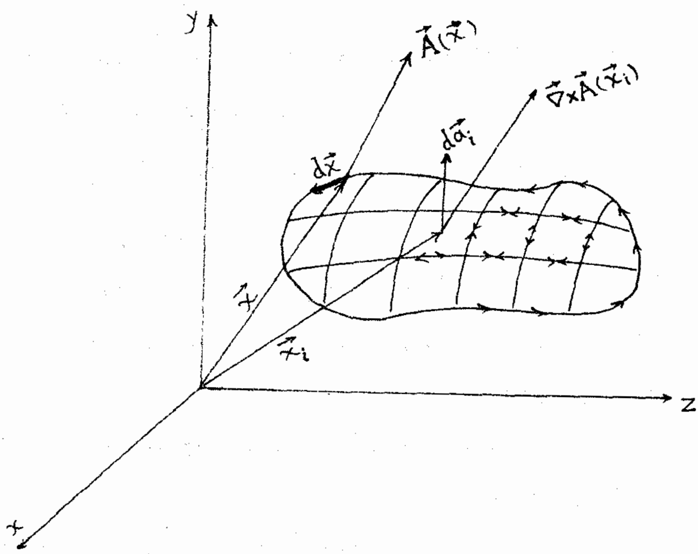
سؤال: ثابت کنید که $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$ بموجب قوانین تبدیل دورانی یک بردارمحسوب میشود؟

راهنمایی: از اثبات اینکه $\vec{B}\times\vec{A}$ از قوانین تبدیل دورانی یک بردارپیروی میکند استفاده کنید. [رابطه(۵۰-۱)]

حال درمقام آن هستیم که گردش میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ را بر روی یک منحنی بسته با ابعاد متناهی (و نه بسیار کوچک) حساب کنیم.

هر گاه از منحنی بسته C سطح دلخواهی را عبور دهیم [بی نهایت سطح از یک منحنی بسته میتوان عبور داد] و سپس سطح مزبور را به بی نهایت مربع بسیار کوچک تقسیم کرده و جهت گردش بر روی هر یک از آنها را طوری انتخاب کنیم که اضلاع مربعهایی که با منحنی بسته ضلع مشترک دارند دارای جهتهای یکسان باجهت گردش منحنی بسته C شوند، در اینصورت برای مربعی که مرکز آن واقع در نقطه $\vec{x}_i$ است رابطه زیرین برقرار است:

$$\oint_{c_i} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}_i) \cdot d\vec{a}_i$$



شکل(۲۰-۱)

و اگر روی اندیس i جمعبندی نماییم خواهیم داشت:

$$(1-207)\quad \sum_i \oint_{C_i} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \sum_i \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}_i) \cdot d\vec{a}_i$$

اما گردش $\vec{A}$ بر روی یک ضلع مربع با گردش آن بر روی ضلع مشترک مربع مجاور نتیجه صفر حاصل می کند (جهت $d\vec{x}$ ها بر روی ضلع مشترک دو مربع در دو جهت مختلف قرار میگیرند.) بنابراین مجموع گردشهای $\vec{A}$ بر روی مربعهای کوچک برابر گردش $\vec{A}(\vec{x})$ روی منحنی C (یعنی مجموع گردشهای $\vec{A}$ بر روی اضلاع مربعهایی که ضلع مشترک با یکدیگر ندارند) میشود. و از طرفی در سمت راست رابطه (۲۰۷-۱) بجای Σ از S استفاده میکنیم و در نتیجه خواهیم داشت :

$$(1-208)\quad \oint_{C} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{a}$$

رابطه (۱−۲۰۸) را رابطه استوکس *Stokes* نامند وروش جدیدی برای محاسبه گردش میدان برداری بر روی هر منحنی بسته را به ما می آموزد و آن اینکه سطحی را از منحنی بسته عبور داده وحاصلضرب اسکالربردار$d\vec{a}$ با میدان برداری جدیدی که آنرا$\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$مینامیم در نقاط مختلف سطح انجام داده و نتیجه را با هم جمع میکنیم. در مورد نحوه محاسبه این انتگرال در بخش دیگر توضیح میدهیم که موسوم به محاسبه فلوی میدان برداری از یک سطح میباشد.

حال اگر میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ مشتق از پتانسیل ،و یا بقولی ابقائی باشد دراینصورت کرل میدان برداری برابر میشود با:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}) = -\varepsilon_{ijk}\,\partial_i(\partial_j\,\varphi)\vec{e}_k \qquad (1-209)$$

در رابطه فوق اندیسهای تکراری i,j را بترتیب IوJ مینامیم پس:

$$(1-210)\quad I = -\varepsilon_{JIk}\,\partial_J\,\partial_I\varphi\,\vec{e}_k$$

و اگر در علامت لوی سویتا جای اندیس I با J را جابجا کنیم داریم:

$$(1-211)\quad I = +\varepsilon_{IJk}\,\partial_J\partial_I\varphi\,\vec{e}_k$$

که از مقایسه (۱−۲۰۹) با (۱−۲۱۰) نتیجه میگیریم که:

$$I = -I \;\Rightarrow\; 2I = 0 \;\Rightarrow\; I = 0$$

یعنی:

$$(1-212)\quad \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$$

روابط(۱−۲۰۹) تا(۱−۲۱۱) اثبات تانسوری اتحاد(۱−۲۱۲) است بنابراین برای چنین میدانهای برداری نتیجه مجدد:

$$(1-213)\quad \oint -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x})\cdot d\vec{x} = -\int \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi(\vec{x})\cdot d\vec{a} = 0$$

حاصل می شود. یکی از کاربردهای رابطه (۱−۲۰۸) اینست که هرگاه میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ داده شود و بخواهیم مطمئن شویم که ابقائی است کافیست که $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$ را حساب کرده اگر در تمامی نقاط در فضا $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$ صفر شد میدان برداری داده شده ابقائی خواهد بود.

سؤال : آیا میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ داده شده در (۱−۲۰٤)ابقائی است یا خیر؟

و-۷-۱ نحوه محاسبه تابع $\varphi(\vec{x})$ هرگاه میدان برداری ابقائی $A(\vec{x})$ داده شده باشد

هرگاه $\varphi(\vec{x})$ تابع معلومی بود با منفی گرادیان گرفتن از آن ،میدان برداری ابقائی حاصل میگردید. حال این سؤال مطرح می شود اگر میدان برداری ابقائی $\vec{A}(\vec{x})$ داده شود $\varphi(\vec{x})$ چگونه بدست میاید؟

در ابتدا کرل میدان برداری را حساب میکنیم. اگر شرط:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = 0$$

برقرارشود در اینصورت مطمئن میشویم که میدان برداری حتما" ابقائی است و در نتیجه میتوان تابع $\varphi(\vec{x})$را بدست آورد.

چون بموجب رابطه (۱۵۹-۱) برای میدانهای ابقائی بدست آوردیم که:

$$(1-214)\quad \varphi(\vec{x}_M) - \varphi(\vec{x}_N) = \int_{\vec{x}_M}^{\vec{x}_N} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

پس اختلاف تابع$\varphi(\vec{x})$برما معلوم است. بنابراین نقطه N راجایی انتخاب میکنند که $\vec{A}(\vec{x}_N)$ صفرشود ونقطه مزبوررانقطه مرجع و$\varphi(\vec{x}_N)$را بنا بقرارداد صفر اختیار میکنند. بموجب این قرارداد ،برای میدانهای الکتریکی ناشی از بارهای متمرکز در ناحیه ای از فضا نقطه مرجع N نقطه ای واقع در بی نهایت و ازطرفی برای میدانهائی نظیر نیروی فنر، $\vec{F}=-kx\hat{i}$ نقطه مرجع درمبدأ وبرای میدانهای یکنواخت چنین نقطه ای یافت نمی شود که در اینصورت میتوان نقطه مرجع را یک نقطه دلخواه انتخاب کرد. محاسبه وتعیین $\varphi(\vec{x})$ در جزوه درس مکانیک و جزوه درس الکتریسیته و مغناطیس بطور کامل آمده است حال میخواهیم برای میدانهای الکتریکی که برحسب مختصات کارتزین داده شده معادله منحنی مار بر نقطه M را آنگونه تعیین کنیم که محاسبات گردش میدان برداری ساده ترین صورت را داشته باشد. هرگاه معادله منحنی با رابطه $\vec{x}=\vec{x}(t)$ داده شود $\varphi(\vec{x}_M)$ برابر:

$$(1-215) \quad \varphi(x_M)=\int_{t_M}^{t_\infty}\left[E_x(\bar{x}(t))\frac{dx}{dt}+E_y(\bar{x}(t))\frac{dy}{dt}+E_z(\bar{x}(t))\frac{dz}{dt}\right]dt$$

میشود حال ازخود سوأل میکنیم $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ چگونه تابعی از t شود که زیر انتگرال ساده ترین صورت ممکن راداشته باشد با کمی تفکرمتوجه میشویم که مثلا" اگر مؤلفه $E_y(\vec{x})$ ساده ترین تابع بین سه مؤلفه $\vec{E}$ راداشته باشد دراینصورت با انتخاب:

$$(1-216) \quad \frac{dx}{dt}=0 \quad , \quad \frac{dz}{dt}=0$$

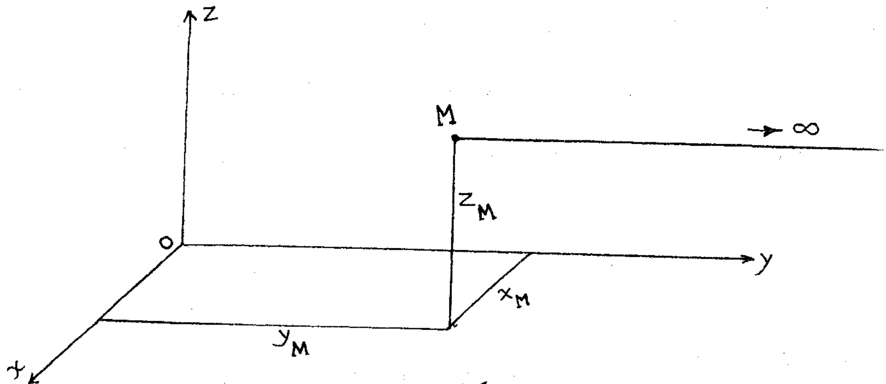
از دو جمله مزاحم در (۱۵ -۱) خلاصی می یابیم. اما معنای روابط (۲۱۶-۱) آن است که:

$$(1-217) \quad \begin{aligned} x(t)&=\alpha \\ y&=y \\ z(t)&=\beta \end{aligned}$$

و چون میبایستی منحنی C از نقطه M شروع شود و به بینهایت برود $\alpha=x_M$ و $\beta=z_M$ میباشد و مناسبترین پارامتر خود مختصه y میشود بنابراین رابطه(۲۱۵-۱) بصورت زیرساده میشود:

$$(1-218) \quad \varphi\ (\bar{x}_M)=\int_{y_M}^{\infty}E_y(x_M,y,z_M)\,dy$$

توجه کنید که درآرگومان $\vec{E}$ معادله منحنی(۲۱۷-۱) داده شده است وجواب انتگرال بر حسب مختصات M حاصل می شود که بعد از محاسبه می توان اندیس M را کنار گذاشت .براستی رابطه (۲۱۷-۱) معرف چه نوع منحنی میباشد؟یک خط راست مار بر نقطه M و موازی محور oy.بشکل (۲۱-۱) توجه کنید .چنین استدلالی را میتوان برای خطوط مستقیمی که از نقطه Mعبور کرده و بموازات دیگر محورها رسم شوند بنا به اقتضای مسئله در نظر گرفت.



شکل(۲۱-۱)

در جزوه فیزیک الکتریسیته در این رابطه مثالهایی آورده شده است که خواننده مبتدی را به مطالعه این مثالها توصیه میکنیم.

بعنوان آخرین مطلب در این بخش متذکر میشویم اگر میدان برداری ابقائی در یک نقطه عمومی داده نشود نمیتوان $\varphi(\vec{x})$را درنقطه عمومی محاسبه نمود. اما حداقل اگر میدان برداری ابقائی برروی منحنی که انتهای آن به نقطه مرجع منتهی میشود معلوم باشد، یعنی دراین حالت میدان برداری بصورت تابعی از t داده میشود، میتوان$\varphi(\vec{x})$ را درهر نقطه روی منحنی حساب کرد(و نه درهرنقطه از فضا)شاید بهترین مثال در این مورد، میدانهای الکتریکی باشند که مثلاً" دومختصه نقطه اثرآنها اعدادثابت یا صفرباشد نظیر$E(0,0,z)$ که $\varphi\ (0,0,z)$ را میتوان حساب کردویا آنکه در $E(0,y,z)$ که میدان الکتریکی درصفحه بمعادله:

$$(1-219)\quad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}$$

مشخص شده است که در اینصورت$\varphi(\vec{x})$ در هر نقطه درون صفحه مزبور قابل محاسبه شدن است اما در یک نقطه عمومی خیر.

تذکر مسئله معکوس نیزخالی از لطف نمیباشد. اگر$\varphi(\vec{x})$ درنقطه عمومی داده شود میتوان $\vec{A}(\vec{x})$ را محاسبه کرد. ولی هرگاه $\varphi(\vec{x})$ درنقطه ای که دو مختصه آن ثابت یا صفر باشند داده شود در اینصورت فقط میتوان مؤلفه میدان برداری در امتداد محور همنام با مختصه سوم رابدست آورد(که این بدان معناست که دومؤلفه دیگر$\vec{A}$ تعیین

نشده است) بعنوان مثال اگر $\varphi\ (a,b,z)$ داده شود فقط می توان $\vec{A}_z(a,b,z)$ را محاسبه کرد (به تعریف $\vec{\nabla}$ توجه کنید) و دو موٌلفه A_x و A_y تعیین نشده اند.

ادعای کلی ترآنکه اگر $\varphi(\vec{x})$ بروی منحنی $\vec{x}=x(t)$ داده شده باشد تابع $\varphi(\vec{x})$ میبایستی بصورت:

$$\varphi(x(t)) = f(t)$$

داده شده باشدوچون:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d\varphi(x(t))}{dt} = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{F}(t) = -\vec{A}\cdot\vec{F}(t)$$

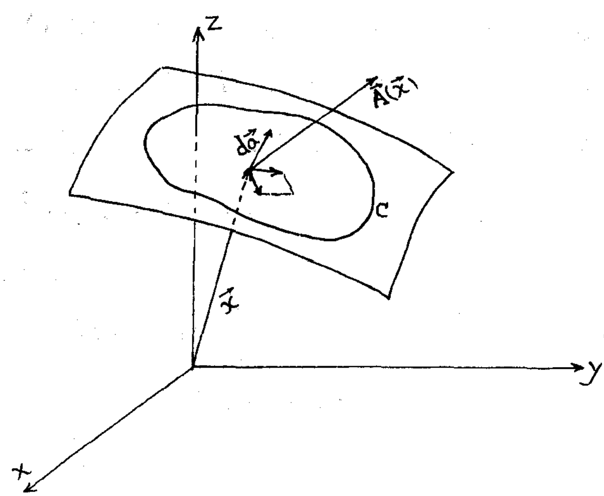
است که $\vec{F}(t)$ وقدرمطلق آن ازروی معادله منحنی بدست میآید، پس مولفه مماسی $\vec{A}$ درامتدادمنحنی ازرابطه زیر معلوم میگردد:

$$\frac{\frac{df(t)}{dt}}{F(t)} = A_t(x(t))$$

۸-۱- روش محاسبه انتگرالهای دوگانه و صور مختلف آن که در فیزیک استفاده میشود

الف-۸-۱- محاسبه فلوی میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ از سطح S محصور توسط منحنی بسته C :

رابطه (۲۰۸-۱) استوکس محاسبه انتگرال جدیدی را بما پیشنهاد میکند که اساساً آنرا فلوی یک میدان برداری از سطح S نامند. مطابق شکل (۲۲-۱) سطحS و میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ در دست است



شکل(۲۲-۱)

حول نقطه $\vec{x}$ واقع بر سطح المان سطح da را انتخاب و بردار $d\vec{a}$ که امتداد آن عمود بر سطح و طول آن برابر مساحت da و نقطه اثر آن واقع بر نقطه $\vec{x}$ است رسم میکنیم توجه میکنیم که جهت $d\vec{a}$ اختیاری است مگر آنکه سطح S یک سطح بسته باشد که در این صورت جهت آنرا بطرف خارج سطح بسته اختیار میکنند. چنین $d\vec{a}$ ئی بموجب رابطه (۱۱۸-۱) از روی معادله سطح بدست میاید. حال اگر از بین بی نهایت میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ بردار $\vec{A}$ ئی انتخاب کنیم که نقطه اثر آن واقع بر نقطه $\vec{x}$ باشد حاصلضرب اسکالر:

$$(1-220) \quad d\Phi_{\vec{A}}(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{a}$$

را فلوی میدان برداری $\vec{A}$ از المان سطح da حول نقطه $\vec{x}$ نامند.

اگر رابطه (۲۲۰-۱) را برای نقاط مختلف واقع بر سطح S که محصور در منحنی بسته Cاست محاسبه نموده و سپس نتایج را جمع جبری نمائیم مقدار حاصل را فلوی میدان برداری $\vec{A}$ از سطح S محصور توسط منحنی بسته C نامند و آنرابصورت:

$$(1-221) \quad \Phi = \sum_{\vec{x}} d\Phi(\vec{x}) = \sum_{\vec{x}} A(\vec{x}) \cdot d\vec{a}$$

نمایش میدهند. چون در(۲۲۱-۱) انتهای بردار $\vec{x}$ واقع برسطح بطورپیوسته تغییر میکنند در اینصورت بجای استفاده از علامت Σ از علامت $\int$ استفاده میکنیم پس داریم:

$$(1-222) \quad \Phi = \int \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{a}$$

رابطه (۲۲۲-۱) رابطه محض فلو رانشان میدهد که حتی از دوره دبیرستان آنرامیشناسیم. حال توجه میکنیم $d\vec{a}$ از رابطه (۱۱۸-۱) بدست میاید و از طرفی اگر بخواهیم نقطه اثر $\vec{A}(\vec{x})$ بر روی سطح S قرار گیرد نقطه $\vec{x}$ میبایستی متعلق به سطح S باشد یعنی چنین $\vec{x}$ئی از معادله سطح بدست میاید بنابراین فرم محاسباتی(۲۲۲-۱) بصورت زیر در میاید:

$$(1-223) \quad \Phi = \int \vec{A}\left[\vec{x}(u,v)\right] \cdot \vec{F}(u,v)\,dudv = \int K(u,v)\,dudv$$

بموجب (۲۲۳-۱) مشاهده میکنیم که فلوی میدان برداری ازیک سطح بستگی دارد به:

الف–میدان برداری $\vec{A}$

ب–معادله سطح (شکل سطح)

ج–معادله منحنی بسته C (که نقش آن در حدود انتگرال ظاهر میشود)

توجه نمائیداگر ازرابطه (۱۳۰-۱)برای $d\vec{a}$ استفاده کنیم رابطه(۲۲۲-۱)بصورت:

$$(1-224) \qquad \Phi = \int A_x(\vec{x})\,dydz + \int A_y(\vec{x})\,dxdz + \int A_z(\vec{x})\,dxdz$$

درمیاید. توجه میکنیم درهر انتگرال پارامترها متفاوت هستند یعنی درهر یک از انتگرالها معادله سطح S با پارامترهای متفاوت نشان داده شده است. مثلا" درانتگرال اول (۲۲۴-۱)معادله سطح با رابطه:

$$(1-225)\quad \begin{aligned} x &= x(y,z) \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}$$

و در انتگرال دوم معادله همین سطح با رابطه:

$$(1-225)\quad \begin{aligned} x &= x \\ y &= y(x,z) \\ z &= z \end{aligned}$$

داده شده است.

مثال:فلوی میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$:

$$(1-226)\quad \vec{A}(\vec{x}) = \alpha\,\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{x^2+y^2}$$

از صفحه بمعادله:

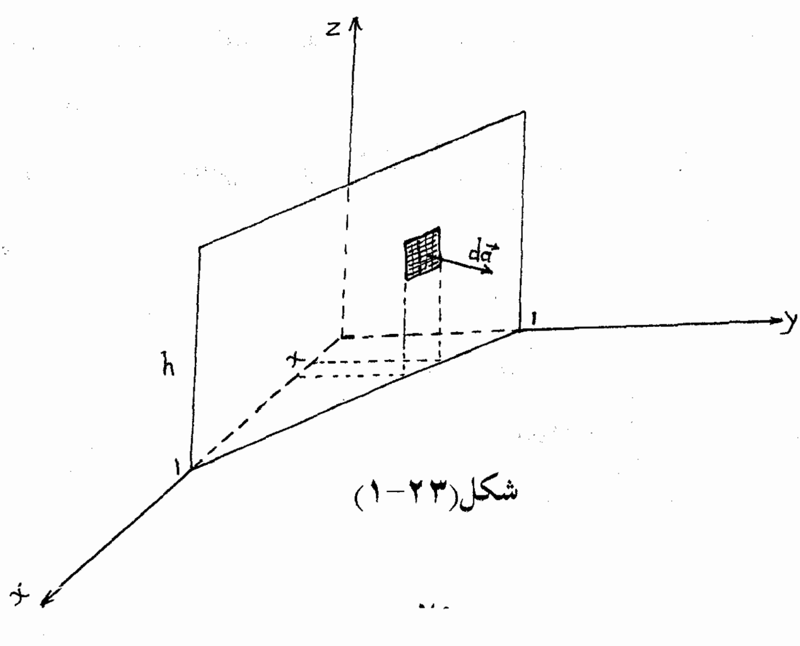
$$(1-227)\quad \begin{cases} x = x \\ y = -x+1 \\ z = z \end{cases} \quad , \qquad \vec{x} = x\vec{i} + (-x+1)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

که مطابق شکل (۲۳-۱)توسط منحنی مستطیل بسته C محصورشده است حساب کنید.

چون در (۲۲۷-۱) پارامترهای معادله صفحه x,z میباشند، $d\vec{a}$ برابر:

$$d\vec{a} = \left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial z}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial x}\right) dxdz = (\vec{i}+\vec{j})\; dxdz$$

میشود.بنابراین بموجب(۲۲۳-۱) داریم:



شکل(۲۳-۱)

$$(1-228)\quad \Phi=\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{h}\alpha\ \frac{x\vec{i}+(-x+1)\vec{j}}{x^2+(-x+1)^2}\cdot(\vec{i}+\vec{j})\ dxdz$$

توجه کنید که چگونه معادله صفحه در آرگومان $\vec{A}$ ظاهر شده است.

$$\Phi=\alpha h\int_0^1\frac{dx}{2x^2-2x+1}=\frac{\alpha h}{2}\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$$(1-229)\quad \Phi=\frac{\alpha h}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{du}{u^2+\frac{1}{4}}=\frac{\alpha h}{2}2arctg2u\Big|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}=\alpha h\frac{\pi}{2}$$

نکته مهمی که درمحاسبه انتگرال(۲۲۸-۱) وجود دارد مشخص کردن حدود پارامترها در انتگرال میباشد. توجه نمائید اگر پارامترهای x,z در محدوده:

$$0<x<1$$
$$0<z<h$$

تغییر نمایند بردار $\vec{x}$ منتهی به صفحه بر روی تمامی نقاط محصور در منحنی مستطیل شکل حرکت میکند. خاطرنشان میسازیم که مشخص کردن محدوده پارامترهایکی ازمسائل اساسی و مشکل در محاسبه فلوی میدان برداری از یک سطح است و بهمین دلیل است که انتخاب پارامترهای مناسب برای مشخص کردن معادله سطح یکی از شگردهای مهم محاسبه فلوی میدان برداری میباشد. در این مورد توضیحات بیشتری داده خواهد شد.

ب-۸-۱- انتگرالهایی که از خانواده فلوی میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ از یک سطح میباشند.

$$(1-230)\quad \begin{aligned}&1-\int\vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{a}\\&2-\int\vec{A}(\vec{x})\times d\vec{a}\\&3-\int\vec{A}(\vec{x})da\\&4-\int f(\vec{x})d\vec{a}\end{aligned}$$

$$5 - \int f(\vec{x})\, da$$

انتگرال (۱) در مباحث قانون گوس که همانا محاسبه فلوی میدان الکتریکی از یک سطح میباشد کاربرد دارد.

انتگرال (۲) درمحاسبه میانگین میدان اند کسیون مغناطیسی دردرون سطح بستهS کاربرد دارد.

انتگرال (۳) در محاسبه میدان الکتریکی از یک توزیع بار سطحی ویا درمحاسبه ممان دو قطبی الکتریکی ازیک توزیع بارسطحی کاربرد دارد. کافیست دقت کنیم که در محاسبه میدان الکتریکی $\vec{A}(\vec{x})$ چیزی جز:

$$(1-231) \quad \vec{A}(\vec{x}') = K\sigma\,(\vec{x}')\,\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|^3}$$

نمیباشد. بنابراین درمحاسبه میدان الکتریکی ازیک توزیع بارسطحی بجای $\vec{x}'$ میبایستی $\vec{x}'(u,v)$ (معادله سطح) قرار داد و da' نیز از معادله سطح بدست می آید. یعنی محاسبه میدان الکتریکی حاصل از یک توزیع بارسطحی همانند محاسبه فلوی میدان برداری از یک سطح است.

سؤال: محاسبه میدان اند کسیون مغناطیسی از یک توزیع جریان سطحی به کدامیک از انتگرالها تعلق دارد. درمورد محاسبه پتانسیل مغناطیسی از یک توزیع جریان سطحی چه میگوئید؟

یکی از کاربردهای بسیار زیبای انتگرال (٤) استخراج قانون ارشمیدس از روی قانون فشار مایعات میباشد که بعداً" آنرا بدست خواهیم آورد.

انتگرال(٥) در محاسبه مساحت یک سطح، $f(\vec{x})=1$، و یا در محاسبه مقدار بار Q بر روی یک سطح، $f(x)=\sigma(\vec{x})$، کاربرد دارد.

باز تکرار میکنیم که نحوه محاسبه این انتگرالها همانند محاسبه فلوی میدان برداری ازیک سطح است و همگی تبدیل به انتگرالهای دوگانه میشوند.

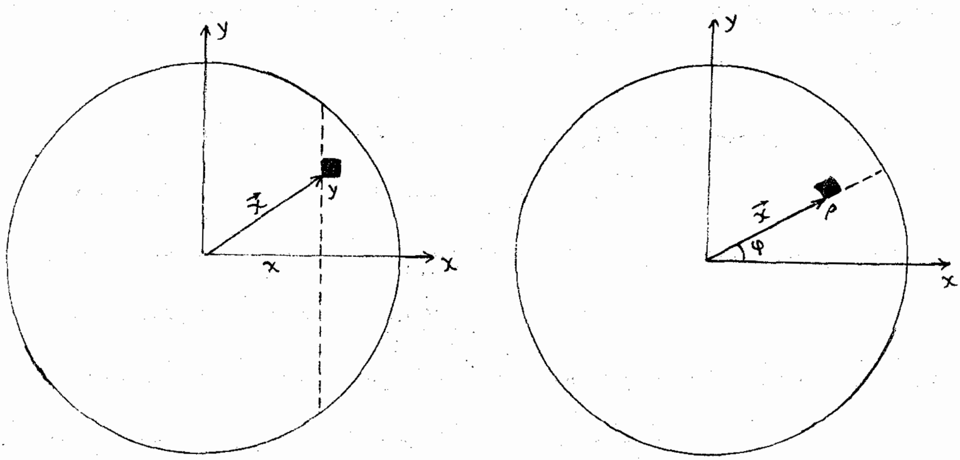
ج-۸-۱- اهمیت انتخاب پارامترهای مناسب برای معادله سطح در انتگرالهای دوگانه

درمحاسبه انتگرالهای خطی خاطرنشان ساختیم با انتخاب پارامترمناسب برای معادله منحنی،زیر انتگرال ساده ترین صورت ممکن راپیدا میکند و در نتیجه محاسبه انتگرال آسان میشود.اما در مورد انتگرالهای دوگانه انتخاب پارامتر مناسب آنگونه باید باشد که نه تنها زیر انتگرال بلکه مشخص کردن محدوده پارامترها نیز باید آسان باشد به عنوان یک مثال ساده وآموزنده در مورد انتخاب پارامترهای مناسب مساحت یک دایره بشعاع a واقع در صفحه xoy که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات باشد را حساب میکنیم. توجه میکنیم معادله صفحه xoy درمختصات کارتزین با پارامترهای (x,y) ویا باپارامترهای (ρ,φ) بصورت زیرمیباشد:

$$\begin{matrix} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = 0 \end{matrix} \qquad (1-232)$$

da بدست آمده برای صفحه مزبور بموجب رابطه (۲۰-۱) بصورت زیرمیباشد:

$$\begin{aligned} da &= dxdy \\ da &= \rho d\rho d\varphi \end{aligned} \qquad (1-233)$$



(الف) (ب)

شکل(۲۴-۱)

هرچند مشاهده میشود که $F(u,v)$ برای da واقع درصفحه xoy هنگامیکه پارامترها (x,y) باشند در مقایسه باحالتیکه پارامترها (ρ,φ) باشند ساده تراست اما حدود پارامترها برای آنکه بردار $\vec{x}$ فقط درون صفحه دایره حرکت کند بصورت زیر:

$$\begin{cases} -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2} \\ -a \le x \le a \end{cases} \tag{1-234}$$

$$\begin{cases} 0 \le \rho \le a \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

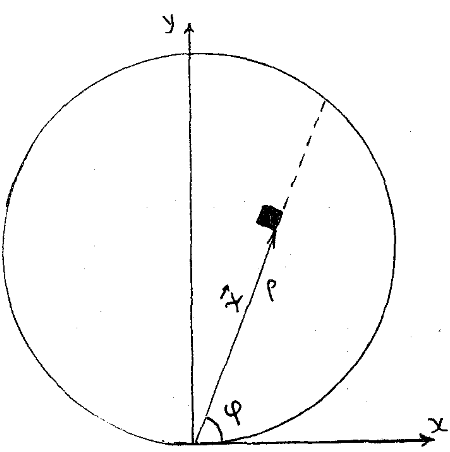
میباشد بنابراین خود قضاوت کنید کدام پارامترها برای محاسبه انتگرال مساحت دایره که در زیر آمده است مناسب تر است :

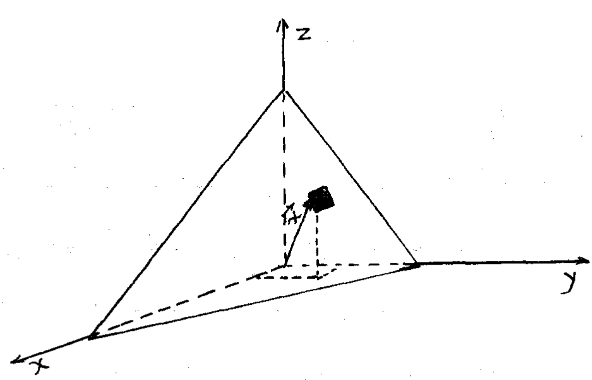
$$A = \int_{x=-a}^{+a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} dx\,dy = \pi a^2 \tag{1-235}$$

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{a} \rho\, d\rho\, d\varphi = \pi a^2$$

سؤال: برای محاسبه مساحت یک مربع واقع در صفحه xoy کدامیک از پارامترهای فوق مناسبتر میباشند؟

سؤال: اگر محور ox دستگاه مختصات مماس بر دایره (و محور oy مار بر مرکز دایره) باشد محدوده تغییرات پارامترهای (ρ,φ) را معلوم سازید .





شکل(۲۵-۱)

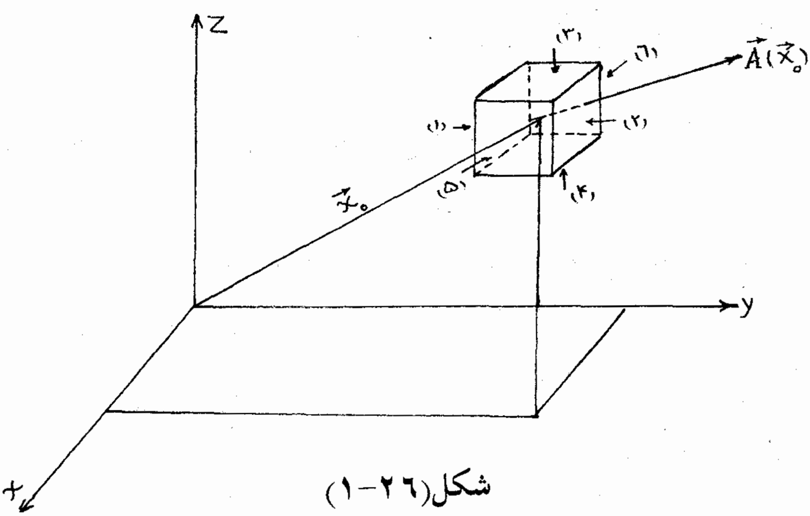
جواب:

$$0 \leq \rho \leq 2a \sin \varphi$$
$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

سؤال: برای صفحه که در شکل (ب-۲۵-۱) رسم شده اگر پارامترها را (x,y) انتخاب کنیم محدوده پارامترها را تعیین کنید بطوریکه بردار $\vec{x}$ منتهی به صفحه در کنج اول $oxyz$ تغیر کند.

د-۸-۱- محاسبه فلوی میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ از یک مکعب بااضلاع بی نهایت کوچک که مرکز آن واقع بر نقطه $\vec{x}$ است.

ابتدا برای سهولت وفهم مسئله وجوه مکعب رامطابق شکل(۲۶-۱) موازی صفحات دستگاه مختصات انتخاب میکنیم و هروجهی را با اندیسی شماره گذاری میکنیم:



شکل(۲۶-۱)

چون ابعاد صفحات مکعب بسیار کوچک میباشند بنابراین از علامت انتگرال صرفنظر میکنیم و ابتدا مجموع فلوی میدان برداری گذرنده ازدو وجه موازی مکعب را حساب میکنیم مثلا" مجموع فلوی گذرنده از وجوه شماره ۱ و ۲ برابر میشود با:

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \vec{A}(x_0, y_0 - \frac{dy}{2}, z_0) \cdot (-dxdz\vec{j}) + \vec{A}(x_0, y_0 + \frac{dy}{2}, z_0)(dxdz\vec{j}) \quad (1-236)$$

در (۲۳۶-۱) توجه می کنیم که نقطه اثر میدان برداری $\vec{A}$ را میبایستی بر روی صفحات ۱و۲ مربع انتخاب کنیم و در نتیجه آرگومان $\vec{A}$ بصورت فوق درآمده و در ثانی برای یک سطح بسته جهت $d\vec{a}$ را بنا به قرارداد عمود بر سطح و به طرف خارج سطح بسته انتخاب می کنند و بهمین دلیل است که علامت منفی در جمله اول سمت راست ظاهر شده است و ثالثا" طول اضلاع مکعب dz،dy،dx انتخاب شده است. حال در (۲۳۶-۱) حاصلضرب اسکالر $\vec{A}$ در بردار یکه $\vec{j}$ را ابتدا انجام میدهیم چون A_y کمیتی اسکالر است در اینصورت می توان از بسط سری تیلور استفاده نمود در نتیجه خواهیم داشت:

$$(1-237) \qquad d\Phi_1 + d\Phi_2 = dxdz\left\{-A_y(\vec{x}_0) + \frac{dy}{2}\frac{\partial A_y(\vec{x}_0)}{\partial y} + \cdots + A_y(\vec{x}_0) + \frac{dy}{2}\frac{\partial A_y(\vec{x}_0)}{\partial y} + \cdots\right\} = dxdydz\ \frac{\partial A_y(\vec{x}_0)}{\partial y} + \cdots$$

جملات نقطه چین از بینهایت کوچک مرتبه چهارو به بالاراتشکیل میدهند. محاسبه فلوی میدان برداری $\vec{A}$ از وجوه ۳ و ٤ و همچنین از وجوه ٥و٦ نتایج زیرین را حاصل میکند:

$$(1-238) \qquad d\Phi_3 + d\Phi_4 = dxdydz\ \frac{\partial A_z(\vec{x}_0)}{\partial z} + \cdots$$

$$d\Phi_5 + d\Phi_6 = dxdydz\ \frac{\partial A_x(\vec{x}_0)}{\partial x} + \ldots.$$

و در نتیجه فلوی گذرنده از کلیه وجوه مکعب بسیار کوچک برابر میشود با:

$$(1-239) \qquad d\Phi = \sum_{i=1}^{6} d\Phi_i \equiv \oint_s \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{a} = dxdydz\left[\frac{\partial A_x(\vec{x}_0)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{x}_0)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{x}_0)}{\partial z}\right] + \cdots$$

رابطه (۲۳۹-۱) روش جدیدی را برای محاسبه فلوی یک میدان برداری از وجوه یک مکعب بسیار کوچک پیشنهاد میکند وآن این است که از مؤلفه های بردار $\vec{A}$ بترتیب نسبت به z,y,x مشتق میگیریم ونتیجه را در نقطه $\vec{x}_0$ ارزیابی کرده و سپس مقدار بدست آمده را در حجم مکعب ضرب مینمائیم. کوچک بودن ابعاد مکعب باعث میگردد که از جملات بی نهایت کوچک مرتبه چهار به بالا صرفنظر شود.

ضریب $dxdydz$ در سمت راست (۲۲۹-۱) را دیورژانس (واگرائـــی) یـا مـیزان انحـراف میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ نامند و میتوان بصور زیر نمایش داد:

$$(1-240)\quad \frac{\partial A_x(\vec{x})}{\partial x}+\frac{\partial A_y(\vec{x})}{\partial y}+\frac{\partial A_z(\vec{x})}{\partial z}\equiv\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial A_i(\vec{x})}{\partial x_i}\equiv\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x})$$

توجه می کنیم در نقاط معمولی که مشتق گرفتن از مؤلفه هـای $\vec{A}$ میسـر باشـد دیورژانـس میدان برداری از رابطه (۲٤۰-۱) بدست می آید. اما برای بعضـی نقـاط خـاص کـه در مبحث الکترواستاتیک به وفور با آن برخورد میکنیم با مشتق گیری از مؤلفه هـای $\vec{A}$ میسـر نمیباشد $\vec{\nabla}.\vec{A}$ را ازحد گیری رابطه (۲۳۹-۱) بدست میاورند.

$$(1-241)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x})=\lim_{dv\to 0}\frac{\oint_S \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{a}}{dv}$$

یعنوان یک مثال ساده وآموزنده میدان الکتریکی ناشی ازیک صفحـه بـاردار بـا دانسیتـه بار یکنواخت در نظر می گیریم (در جزوه فیزیک الکتریسـیته ایـن میـدان محاسـبه شـده است)

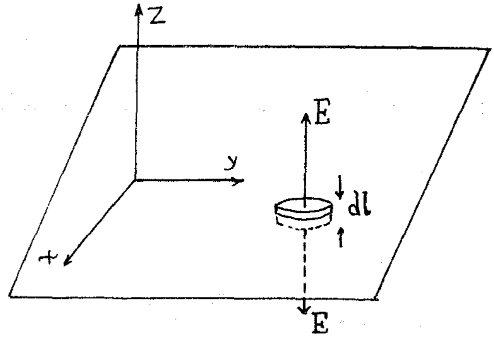
$$(1-242)\quad \vec{E}(\vec{x})=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{k}$$

دیورژانس میدان فوق برای نقاط $z\neq0$ چه z مثبت و یا منفی باشـد برابـر صفـر اسـت. امـا برای نقاط با $z=0$ محاسبه دیورژانس از روی مشتق گیری مؤلفه های مبهم است چه:

$$(1-243)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_z(x,y,0)}{\partial z}=\lim_{\Delta Z\to 0}\frac{E_Z(x,y,\Delta z)-E_Z(x,y,0)}{\Delta z}$$

و اگر Δz را مثبت و بار دیگر منفی اختیار کنیم دو جواب متفـاوت بدسـت میاید. امـا از روی رابطه (۲٤۱-۱) که در آن بجای مکعب کوچک ازیک قرص آسپیرین که مرکـز آن واقع بر نقطه $z=0$ استفاده کنیم برای چنین حجم کوچکی:

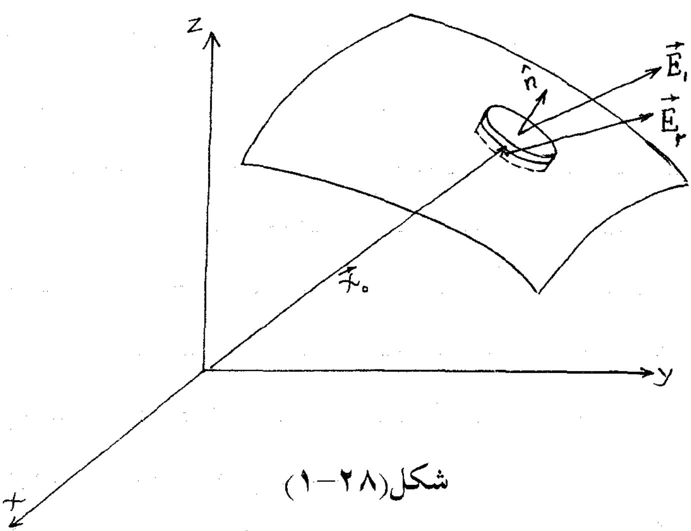
$$dv=dadl$$



شکل(۲۷-۱)

$$(1-244)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x},y,0)=\lim\frac{\oint\vec{E}.d\vec{a}}{dv}=\lim_{dadl\to 0}\frac{\sigma(\vec{x})\,da}{\varepsilon_0 dadl}=\lim_{dl\to 0}\frac{\sigma(x)}{\varepsilon_0 dl}=\infty$$

در استخراج رابطه فوق از قانون گوس استفاده شده است و نشان میدهد که دیورژانس میدان الکتریکی در یک نقطه واقع برصفحه باردار بینهایت است. براحتی می توان نشان داد که دیورژانس میدان الکتریکی برای هر توزیع بارسطحی دلخواهی دریک نقطه واقع بر سطح باردار بینهایت است .



شکل(۲۸-۱)

چه داریم :

$$(1-245)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x}_0)=\lim\frac{\oint\vec{E}.d\vec{a}}{\varepsilon_0 dadl}\to\frac{\sigma(\vec{x}_0)da}{\varepsilon_0 dadl}\to\infty$$

در وهله اول نتایج (۱−۲۴۵) و(۱−۲۴۴) برای خواننده ای که درس الکترو مغناطیس رامیاموزدعجیب بنظر میاید .چنین نتیجه ای درهیچیک از کتب الکترومغناطیس نیامده است .اما اگر کمی دقت نمائیم در کتب الکترومغناطیس رابطه ای بصورت :

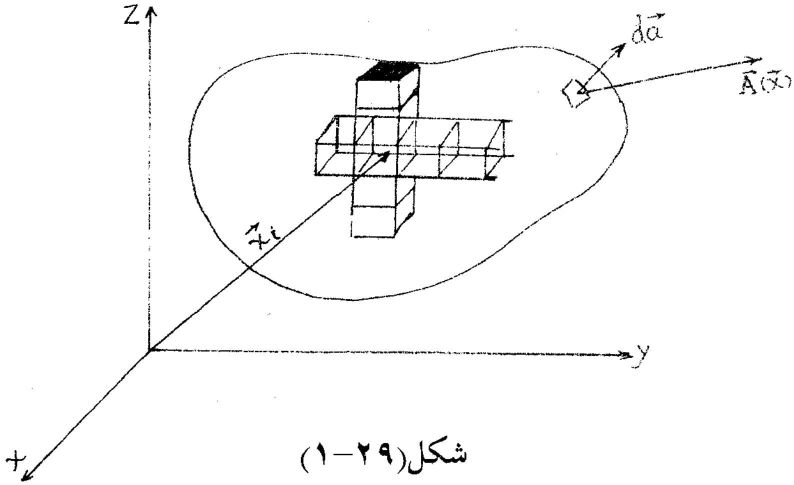
$$(1-246)\quad E_{n_1}-E_{n_2}=\frac{\sigma(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

آمده است(عدم پیوستگی مؤلفه های قائم $\vec{E}$)این مطلب مبین این واقعیت است که در(۱−۲۴۵)ودرحدصورت کسرمخالف صفروحال آنکه مخرج بسمت صفر میل میکند .ما نتیجه (۱−۲۴۵) را یکبار دیگر با معرفی تابع دلتای دیراک استخراج خواهیم کرد. نام دیورژانس که در رابطه (۱−۲۴۱) آمده است نام با مسمائی می باشدچه اگر در مختصات کارتزین میدان برداری انحراف نداشته باشد یعنی میدان برداری یکنواختی باشد، میزان انحراف ،یعنی دیورژانس آن صفراست. البته برای اینکه دیورژانس یک میدان برداری صفر شود لزومی ندارد که میدان برداری حتما" یکنواخت باشد چه یک میدان برداری تابع خاصی از مختصات (x,y,z) نیز میتواند واگرائی صفر داشته باشد که در این مورد در مبحث مختصات منحنی الخط توضیح داده میشود .(توضیح آنکه تمامی میدانهای اندوکسیون مغناطیسی که در درس فیزیک الکتریسیته استخراج شده دارای واگرائی صفر هستند).

توجه می کنیم برای استخراج رابطه (۱−۲۴۱) مکعب بسیارکوچکی حول نقطه $\vec{x}_0$ که وجوه آن موازی صفحات دستگاه مختصات بود انتخاب کردیم اگر وجوه مکعب موازی صفحات دستگاه مختصات نباشد محاسبه دیورژانس را بعهده خواننده واگذار میکنیم و به این راهنمائی بسنده می کنیم که سه محور e'_1 و e'_2 و e'_3 که نقطه اثر آنها واقع بر مرکز مکعب و امتداد آنها عمود بر وجوه مکعب است اختیار و ابعاد مکعب را dl انتخاب کرده و مانند سابق عمل میکنیم.

۵ـ۸ـ۱ـ فلوی میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ از یک سطح بسته دلخواه (انتگرال گوس)

مطابق شکل (۱−۲۹) میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$و سطح بسته S در دست است.



شکل(۲۹-۱)

حجم درون سطح بسته را به تعداد بسیار زیادی مکعب کوچک تقسیم میکنیم و رابطه (۲۳۹-۱) را برای مکعب کوچکی که مرکز آن واقع بر نقطه $\vec{x}_i$ است نوشته وسپس روی اندیس i جمع میکنیم

$$(1-247)\quad \sum_{i=1}^{N} \oint_{S_i} A(\vec{x})\cdot d\vec{a} = \sum_{i} dxdydz\ \vec{\nabla}\cdot A(\vec{x}_i)+\ldots$$

اما فلوی میدان برداری گذرنده از یک وجه مکعب با فلوی گذرنده همین میدان از وجه مشترک مکعب مجاور همدیگر را خنثی میکنند چون جهت $d\vec{a}$ برای یک چنین وجهی از یک مکعب با جهت $d\vec{a}$ وجه مشترک مکعب مجاور مخالف هم هستند درنتیجه مجموع فلوی میدان برداری از تمامی مکعبها همدیگر را خنثی میکنند مگرآن وجوهی ازمکعبها که با یکدیگر وجه مشترک نداشته باشند و این وجوه منطبق بر سطح بسته S میباشند. بزبان دیگر جمع جملات سمت چپ رابطه (۲۴۷-۱) فلوی میدان برداری ازسطح بسته S را میدهد. از طرفی درسمت راست چون $\vec{x}_i$ بطور پیوسته درحجم واقع دردرون سطح بسته حرکت میکند، رابطه (۲۴۷-۱) بصورت:

$$(1-248)\quad \oint_{s} \vec{A}(\vec{x}).d\vec{a} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x})\ d^3x$$

در میاید. رابطه (۲۴۸-۱) روش جدیدی برای محاسبه فلوی میدان برداری از یک سطح بسته ارائه میدهد وآن اینکه کمیت اسکالر $\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{x})$ دریک نقطه دردرون سطح بسته را

حساب کرده و سپس در المان حجم dv ضرب مینمائیم. این محاسبه رابرای نقاط مختلف درون سطح تکرار و نتایج بدست آمده را با همدیگر جمع میکنیم.مشاهده میکنیم رابطه (۱-۲۴۸) انتگرال جدید سه گانه رابه ما معرفی میکند که در مورد نحوه محاسبه آن بعدا" توضیح داده میشود.

رابطه (۱-۲۴۸) را انتگرال گوس (یا دیورژانس و یا استروگرادسکی)نامند .توجه کنید برای استفاده از(۱-۲۴۸) $\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{x})$ می بایستی درکلیه نقاط درون سطح بسته تعریف شده باشد. کمیت $\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{x})$تحت تبدیلات دورانی ،یک کمیت (میدان) اسکالر میباشد برای اثبات ،اگر:

$$I(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x})$$

باشد داریم:

$$I'(\vec{x}') = \vec{\nabla}' \cdot \vec{A}'(\vec{x}')$$

میشود .ثابت میکنیم $I(x)=I'(x')$ است.

$$I'(\vec{x}') = \sum_i \frac{\partial A'_i(\vec{x}')}{\partial x'_i} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x'_i} \alpha_{ij} A_j(\vec{x}) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \frac{\partial A_j(\vec{x})}{\partial x'_i}$$
$$= \sum_{i,j,k} \alpha_{ij} \frac{\partial A_j(\vec{x})}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i}$$

با استفاده از روابط (۱-۴۲) و(۱-۴۴) خواهیم داشت:

$$(1-249) \quad I'(\vec{x}') = \sum_{i,j,k} \alpha_{ij} \tilde{\alpha}_{ki} \frac{\partial A_j}{\partial x_k} = \sum_{j,k} \delta_{jk} \frac{\partial A_j}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial x_k} = I(\vec{x})$$

مثال: دیورژانس میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ که با رابطه:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \alpha \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$$

داده شده است حساب کنید.

$$(1-250) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-y}{x^2 + y^2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] \right\} = 0$$

آیا میدانید این میدان برداری معرف چه میدان فیزیکی است؟

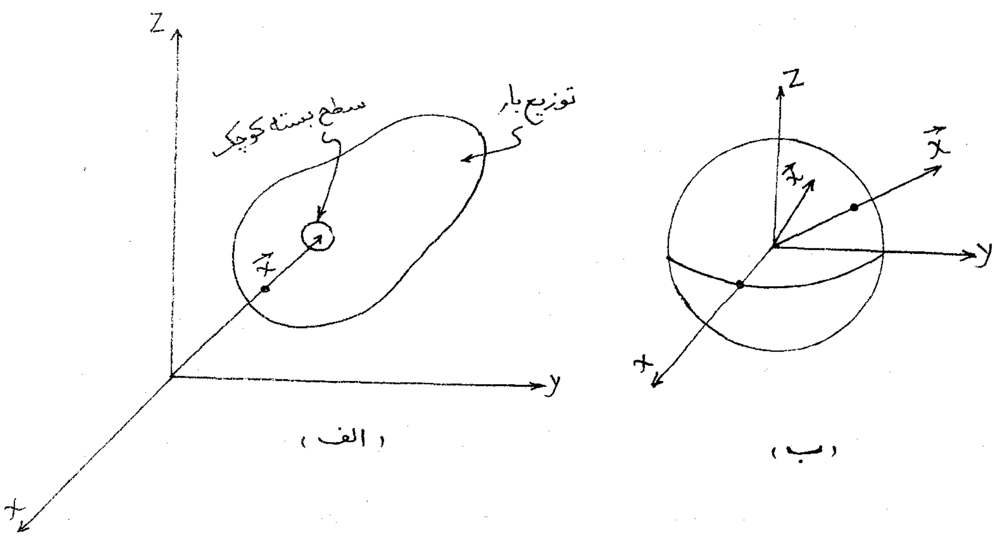
و–۸–۱– کاربردهای دیورژانس میدان برداری در فیزیک

فرم دیفرانسیلی قانون گوس درالکترواستاتیک ورابطه پیوستگی درالکترودینامیک

هر گاه توزیع بار ساکنی داشته باشیم بموجب رابطه(۱–۲۴۱) دیورژانس میدان الکتریکی برابر:

$$(1-251)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x}) = \lim \frac{\oint \vec{E}\cdot d\vec{a}}{dv}$$

و با استفاده از قانون گوس:



شکل(۱–۳۰)

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho(\vec{x})dv}{\varepsilon_0}$$

بنابراین داریم:

$$(1-252)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x}) = \lim \frac{\rho(\vec{x})dv}{\varepsilon_0\, dv} = \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

رابطه(۲۵۲-۱) را فرم دیفرانسیلی قانون گوس نامندونتیجه جالبی از خواص میدانهای الکتریکی را بیان میکند وآن اینکه $\vec{E}(\vec{x})$ ناشی از تمامی توزیع بار میباشد اما دیورژانس آن در نقطه $\vec{x}$ بستگی به دانسیته بارحجمی در همان نقطه را دارد. نتیجه عجیبی نیست؟

بعنوان تمرین میدانیم میدان الکتریکی حاصل از یک کره باردار با دانسیته باریکنواخت با رابطه:

$$(1-253)\quad \vec{E}(\vec{x})=\begin{cases}\dfrac{kQ}{|\vec{x}|^3}\vec{x} & |\vec{x}|>R \qquad (1)\\[2mm] \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{x} & |\vec{x}|<R \qquad (2)\end{cases}$$

داده میشود. دیورژانس رابطه (۱)و(۲) در (۲۵۳-۱) رابدون محاسبه پاسخ دهید. سپس با استفاده از رابطه (۲٤۰-۱) دیورژانس رابطه (۲۵۳-۱) را محاسبه نمائید.

هرگاه یک توزیع بار حجمی متحرک (سیال) داشته باشیم میدان برداری دانسیته جریان الکتریکی $\vec{J}$ با رابطه:

$$(1-254)\quad \vec{J}(\vec{x},t)=\rho(\vec{x},t)\ \vec{v}(\vec{x},t)$$

تعریف میگردد (در مورد این میدان برداری توضیحاتی درجزوه فیزیک الکتریسیته داده شده است) فلوی این میدان برداری از یک المان سطح تعبیر فیزیکی بشرح زیر دارد:

$$(1-255)\quad d\Phi_{\vec{J}}=\vec{J}(\vec{x},t)\cdot d\vec{a}=\rho(\vec{x},t)\vec{v}(\vec{x},t)\cdot d\vec{a}=\rho\ (\vec{x},t)\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\cdot d\vec{a}$$

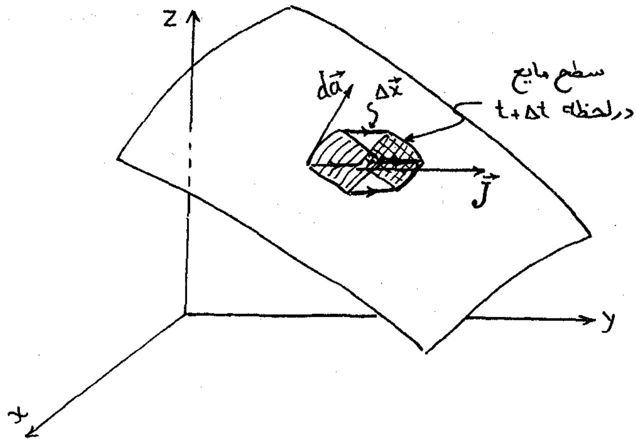
بموجب شکل (۳۱-۱) $\Delta\vec{x}.d\vec{a}$ برابر dv حجم متوازی السطوح که حاصل ازحرکت سیال الکتریکی در مدت زمان Δt ثانیه است میباشد. بنابراین:

$$(1-256)\quad \vec{J}(x,t)\cdot d\vec{a}=\frac{dq(x,t)}{dt}$$

یعنی المان فلوی میدان برداری دانسیته جریان برابر با مقدار باریست که درواحدزمان از سطح da خارج میشود.

حال بموجب رابطه (۲٤۱-۱)،تعریف دیورژانس برابر است با:

$$(1-257)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x},t)=\lim\frac{\oint\vec{J}(\vec{x},t)\cdot d\vec{a}}{\Delta v}$$



شکل(۳۱-۱)

و اگر حول نقطه $\vec{x}$ مکعب کوچکی انتخاب نمائیم صورت سمت راست رابطه برابر با مقدار باریست که در واحدزمان از وجوه آن خارج میشود. اگرازاصل بقاء بار استفاده کنیم:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \rho(x,t)dv$$

$\rho(\vec{x},t)$ دانسیته بار موجود دردرون سطح بسته و در زمان t است. علامت منفی ناشی از بقاء بار است. چون سطح بسته بسیار کوچک است رابطه (۲۵۷-۱) بصورت:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x},t) = \lim \frac{-\dfrac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}dv}{dv} = -\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}$$

$$(1-258) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x},t) + \frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t} = 0$$

رابطه (۲۵۸-۱) را رابطه پیوستگی نامند. ماکسول با استفاده از این رابطه فرمول آمپر را که برای جریانهای یکنواخت صادق است برای جریانهای غیر یکنواخت اصلاح و تعمیم داد و بدینسان نام خود را در الکترودینامیک جاودانه کرد. اگر میدان برداری

آنگونه باشد که دیورژانس آن صفر شود میدان را سولنوئیدی (یا سیم لوله ئی)نامندو اگر کرل (تاو)آن صفر باشد غیر چرخشی (*irrotational*) نامند.

ز‌ـ۸ـ۱ـ صور مختلف انتگرالهای استوکس و گوس

صورتهای مختلف انتگرالهای استوکس و گوس کاربرد فراوانی درالکترومغناطیس دارد بنابراین ذکر آنها از ضروریات است.انتگرالهای :

$$1-\oint_c \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x}=\int \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{a}$$

$$(1-259)\quad 2-\oint f(\vec{x})\,d\vec{x}=-\int \vec{\nabla}f\times d\vec{a}$$

$$3-\oint \vec{A}(\vec{x})\times d\vec{x}=\int\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x})\right]d\vec{a}-\sum_i\int \vec{\nabla}A_i(\vec{x})\,da_i$$

صورتهای مختلف انتگرال استوکس میباشد و انتگرالهای سمت چپ همگی بر روی مدارهای بسته میباشد.روش معمولی اثبات روابط دوم و سوم (۲۵۹-۱) بدینگونه است که در رابطه اول ،$\vec{A}(\vec{x})$ بترتیب بصورت:

$$(1-260)\qquad \vec{\mathscr{A}}(\vec{x})=f(\vec{x})\vec{B}_0$$

$$\vec{\mathscr{A}}(\vec{x})=\vec{A}(\vec{x})\times\vec{B}_0$$

تعریف کرده وسپس بعلت ثابت بودن بردار$\vec{B}_0$آنرا از زیر انتگرال خارج کرده که در نهایت به روابط دوم و سوم (۲۵۹-۱) منجر میشود.(عملیات بعهده خواننده است) ولی ما راه دیگری را پیشنهاد میکنیم که بشرح زیر است:

برای رابطه دوم (۲۵۹-۱):

$$I_1=\oint f(\vec{x})\,d\vec{x}=\sum_i \vec{e}_i\oint f(\vec{x})\,dx_i$$

حال بردار $\vec{A}(\vec{x})$ را بصورت:

$$\vec{A}(\vec{x})=f(\vec{x})\vec{e}_i$$

تعریف میکنیم بطوریکه $\vec{A}(\vec{x}).d\vec{x}$ بصورت زیر انتگرال رابطه فوق در آید.

$$I_1=\sum_i\vec{e}_i\oint\vec{A}\cdot d\vec{x}=\sum_i\vec{e}_i\int\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{a}=\sum_i\vec{e}_i\int\vec{\nabla}\times\left(f(\vec{x})\vec{e}_i\right)\cdot d\vec{a}$$

حال با استفاده از اتحاد:

$$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{A}\right)=\vec{\nabla}f\times\vec{A}+f\,(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

خواهیم داشت:

$$I_1=\sum_i \vec{e}_i\int\left(\vec{\nabla}f\times\vec{e}_i\right)\cdot d\vec{a}=\sum_i \vec{e}_i\int\left(d\vec{a}\times\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{e}_i$$
$$=\sum_i \vec{e}_i\int\left(d\vec{a}\times\vec{\nabla}f\right)_i=\int d\vec{a}\times\vec{\nabla}f\,(\vec{x})$$

برای اثبات رابطه سوم (۹-۲۵۹) داریم:

$$I_2=\oint\vec{A}(\vec{x})\times d\vec{x}=\sum_{i,j,k}\left[\varepsilon_{ijk}\oint A_i\,dx_j\right]\vec{e}_k$$

حال بردار $\vec{B}(\vec{x})$ ئی بصورت:

$$\vec{B}(\vec{x})=A_i\vec{e}_j$$

تعریف میکنیم که $\vec{B}(\vec{x}).d\vec{x}$ بصورت زیر انتگرال فوق در آید.

$$I_2=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_k\oint\vec{B}\cdot d\vec{x}=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_k\int\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{a}$$
$$=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_k\int\vec{\nabla}\times\left(A_i\,\vec{e}_j\right)\cdot d\vec{a}$$

$$I_2=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_k\int\left[\left(\vec{\nabla}A_i\right)\times\vec{e}_j\right]\cdot d\vec{a}$$
$$=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_k\int\left[\left(d\vec{a}\times\vec{\nabla}A_i\right)\right]\cdot\vec{e}_j$$
$$=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_k\int\left(d\vec{a}\times\vec{\nabla}A_i\right)_j$$
$$=\sum_{i,j,k,m,n}\vec{e}_k\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{jmn}\int da_m\,\partial_n\,A_i$$
$$=-\sum_{i,j,k,m,n}\vec{e}_k\left(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km}\right)\int da_m\partial_n\,A_i$$
$$=-\sum_{i,k}\vec{e}_k\int da_i\partial_k A_i+\sum_{i,k}\vec{e}_k\int da_k\partial_i A_i$$
$$=\int d\vec{a}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x})\right)-\sum_i\int da_i\,\vec{\nabla}A_i\,(\vec{x})$$

رابطه سوم (۲۵۹-۱) که آنرا اثبات کردیم برای استخراج میدان اندکسیون مغناطیسی بصورت $\vec{B}=\alpha\,\vec{\nabla}\Omega(\vec{x})$ که $\Omega(x)$ زاویه فضائی مخروطی است که رأس آن واقع بر نقطه $\vec{x}$ و یالهای آن مار بر حلقه حامل جریان میباشد، بکار گرفته میشود.

صور مختلف انتگرالهای گوس بشرح زیر است:

$$\begin{aligned} &1-\oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{a}=\int \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x})\;d^3x\\ &2-\oint f(\vec{x})d\vec{a}=\int \vec{\nabla}f(\vec{x})\;d^3x\\ &3-\oint \vec{A}(\vec{x})\times d\vec{a}=\int \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})\;d^3x \end{aligned}\qquad(1-261)$$

انتگرالهای سمت چپ (۲۶۱-۱) همگی بر روی سطوح بسته می باشد. روش معمولی اثبات روابط دوم و سوم (۲۶۱-۱) بدینگونه است که در رابطه اول $\vec{A}(\vec{x})$ را بترتیب:

$$\vec{\mathscr{A}}(\vec{x})=f(\vec{x})\vec{B}_0$$
$$\vec{\mathscr{A}}(\vec{x})=A(\vec{x})\times\vec{B}_0$$

تعریف کرده و بعلت ثابت بودن بردار $\vec{B}_0$، آن را از زیر انتگرال خارج میکنیم که در نهایت به روابط دوم وسوم (۲۶۱-۱) منجر میگردد. (عملیات بعهده خواننده است). ولی ما راه دیگری پیشنهاد میکنیم که بشرح زیر است:

$$I_3=\oint f(\vec{x})d\vec{a}=\sum_i \vec{e}_i\oint f(\vec{x})\;da_i$$

حال بردار $\vec{A}(\vec{x})$ئی بصورت:

$$\vec{A}(\vec{x})=f(\vec{x})\vec{e}_i$$

تعریف میکنیم که $\vec{A}(\vec{x}).d\vec{a}$ بصورت زیر انتگرال فوق در آید:

$$I_3=\sum_i \vec{e}_i\oint \vec{A}\cdot d\vec{a}=\sum_i \vec{e}_i\oint \vec{\nabla}\cdot\left(f(\vec{x})\vec{e}_i\right)\,dv=\sum_i \vec{e}_i\oint \frac{\partial f}{\partial x_i}dv=\int \vec{\nabla}f(\vec{x})d^3x$$

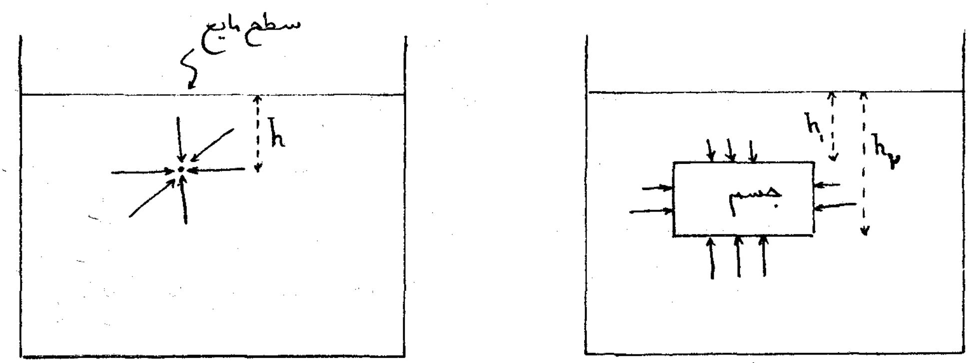
اثبات رابطه سوم (۲۶۱-۱) بروش پیشنهادی ما بعهده خواننده واگذار میشود.

رابطه سوم (۲۶۱-۱) کاربرد در محاسبه میانگین میدان اندکسیون مغناطیسی در درون یک کره دارد. اما رابطه دوم (۲۶۱-۱) کاربرد درمحاسبه نیروی الکتریکی که توسط یک خازن باردار به یک قطعه دی الکتریک وارد میکند دارد اما مؤلف مایل است یکی از مسائل که در دوره دبیرستان با آن درگیر بوده است مطرح نماید و آن اثبات قانون

ارشمیدس ازروی قانون فشارمایعات است وبدین علت انتگرال دوم(۲۶۱-۱)را انتگرال ارشمیدس مینامیم.همه می دانیم که در هر نقطه درون مایعات فشاری بنام فشار مایع وجود دارد که درامتدادعمودوبطرف جسمی که درمایع قرارداده ایم واردمیکندومقدارآن از رابطه زیرپیروی میکند:

$$(1-262) \quad P(\bar{x}) = P_0 + \rho g h$$

که در آن P_0 فشار در سطح آزاد مایع، ρ دانسیته مایع و h فاصله نقطه مورد نظر از سطح آزاد مایع میباشد.



شکل(۳۲-۱)

حال اگر مکعب مستطیلی رابه ارتفاع L ومساحت قاعده A درون مایع طوری قراردهیم که سطح آن موازی سطح آزاد مایع باشد در اینصورت فشار مایع واردبر وجوه قائم همدیگر را خنثی میکنند. اما فشار مایع بر قاعده فوقانی وتحتانی با همدیگر مساوی نیستند در نتیجه نیروی برآیند بسمت بالا خواهیم داشت که آنرا نیروی ارشمیدس نامند و برابر:

$$F = \left(P_0 + \rho g h_2\right) A - \left(P_0 + \rho g h_1\right) A = \rho g L A$$

یعنی مقدارنیروی ارشمیدس برابر با وزن مایع هم حجم با مکعب مستطیل است.حال این سؤال پیش میاید که بجای یک مکعب مستطیل یک قطعه سنگ درون مایع قرار دهیم استدلال فوق برای محاسبه برآیند نیروی وارد به قطعه سنگ به علت شکل غیر متقارن

آن قابل اجرا نمی باشد بلکه میبایستی المانهای نیروی وارد برهر da ازقطعه سنگ راجمع برداری نمود. $d\vec{f}$ المان نیروی وارد بریک جزءازسطح برابر:

$$d\vec{f} = -P(\vec{x})\,d\vec{a} = -\left[P_0 + \rho g\left(l_0 - z\right)\right]d\vec{a}$$

میشود که l_0 ارتفاع سطح آزادمایع و z ارتفاع نقطه موردنظرازجسم از کف ظرف میباشد. علامت منفی بدان علت وارد شده است که جهت نیرو به طرف جسم است یعنی درجهت $(-d\vec{a})$ قرار دارد.

حال برآیند این $d\vec{f}$ ها نیروی برآیندوارد بر قطعه سنگ میباشد یعنی :

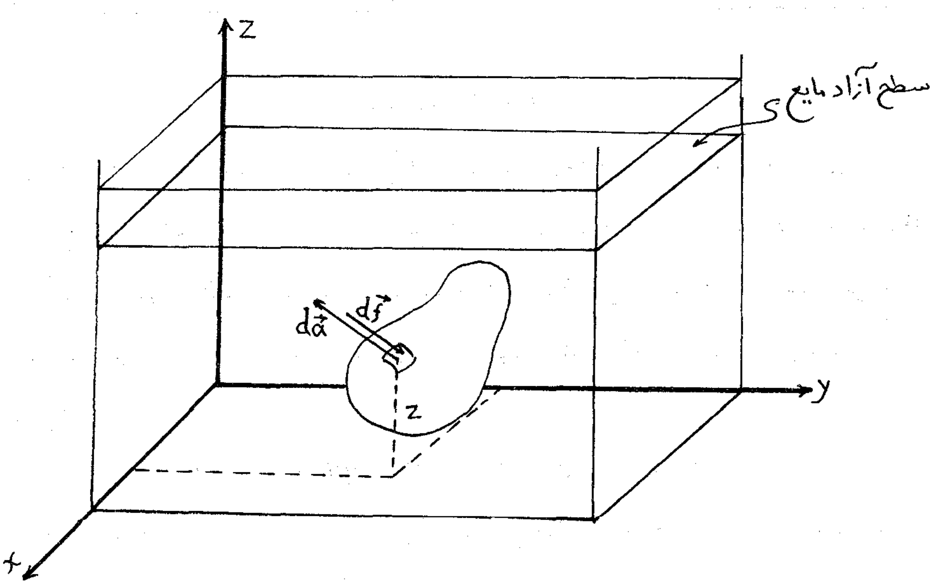
$$\vec{F} = \oint d\vec{f} = -\oint\left[P_0 + \rho g\left(l_0 - z\right)\right]d\vec{a}$$

حال اگر از رابطه دوم (۱−۲٦۱) استفاده کنیم:

$$\vec{F} = -\int \vec{\nabla}\left[P_0 + \rho g(l_0 - z)\right]dv = +\rho g\,\vec{k}\int dv = \rho g V\vec{k} \qquad (1-263)$$

چه نتیجه جالبی! حتی جهت نیرو هم مشخص شده است !

توجه کنید هر گاه قطعه سنگ را در یک مایع با دانسیته غیر یکنواخت هم قرار بدهیم میتوان با استفاده از رابطه دوم (۱−۲٦۱)نیروی ارشمیدس را محاسبه نمود.



شکل(۱−۳۳)

ی ـ۸ـ۱ـ تعریف لاپلاسین میدان اسکالر و میدان برداری

تاکنون دیورژانس یک میدان برداری را مورد مطالعه قرار داده ایم اما اگر میدان برداری ابقائی،یعنی مشتق از پتانسیل ،باشد دراینصورت دیورژانس گرادیان یک میدان اسکالر را که لاپلاسین مینامند ،برابر میشود با:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\vec{\nabla}\Phi\right)_i=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=\sum_i\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}\qquad(1-264)^*$$

که غالبا" آنرا با سمبل ∇^2 نشان میدهند یعنی:

$$\nabla^2\Phi(\vec{x})=\sum_i\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\qquad(1-265)$$

رابطه (۲۶۵-۱) لاپلاسین یک میدان اسکالر است و همانگونه که مشاهده می کنیم از مجموع سه جمله تشکیل شده است. اما از طرفی لاپلاسین میدان برداری هم داریم که از طریق معادلات ماکسول درفیزیک معرفی شده است که اساسا" ازمحاسبه رابطه زیر بدست میاید یعنی:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)&=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\,\partial_i\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_j\vec{e}_k\\&=\sum_{i,j,k,m,n}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnj}\,\partial_i\,\partial_m\,A_n\,\vec{e}_k\\&=-\sum_{i,j,k,m,n}\left(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km}\right)\partial_i\,\partial_m\,A_n\,\vec{e}_k\\&=-\sum_{i,k}\partial_i\partial_i A_k\vec{e}_k+\partial_k\partial_i A_i\vec{e}_k\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}\qquad(1-266)$$

توجه کنید که $\nabla^2\vec{A}$ از مجموع نه جمله تشکیل شده است یعنی :

$$\nabla^2\vec{A}\equiv\vec{i}\,\nabla^2\vec{A}_x+\vec{j}\,\nabla^2\vec{A}_y+\vec{k}\,\nabla^2\vec{A}_z$$

بنابراین اگر در فیزیک معادله برداری موجی بصورت:

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2A(\vec{x},t)}{\partial t^2}\qquad(1-267)$$

داشته باشیم دراین صورت این معادله دیفرانسیلی برداری به سه معادله دیفرانسیل اسکالر تجزیه میشود یعنی:

$$(1-268) \qquad \nabla^2 A_i(\vec{x},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i(\vec{x},t)}{\partial t^2} \qquad i=1,2,3$$

نکته مهم دیگری که لازم به یادآوری است مفهوم قرارگرفتن پرانتزها در بعضی از اتحاد ها است مثلا" در اتحاد:

$$(1-269) \qquad \vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (B\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (A\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

مفهوم $(\vec{B}.\ \vec{\nabla})\vec{A}$ اینستکه ابتدا ضرب اسکالرداخل پرانتز را انجام داده وسپس نتیجه بدست آمده را بر بردار $\vec{A}$ اثر داد یعنی:

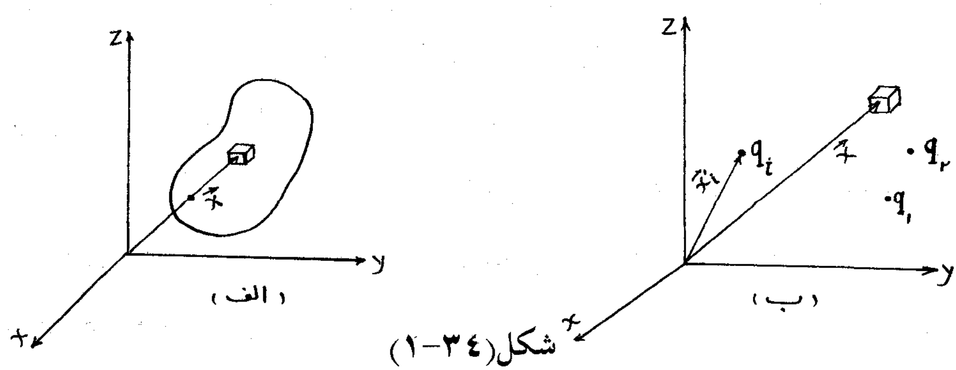
$$\left(B\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} = \sum_{i,j}(B_i\partial_i)A_j e_j = \sum_{i,j}B_i(\partial_i A_j)e_j$$

که جمعا" نه جمله دارا خواهد بود.

تمرین: با ساده کردن جملات طرف راست ،اتحاد (۲۶۹-۱) را ثابت کنید.

۹ــ۱ــ معرفی تابع دلتای دیراک و کاربرد آن در فیزیک

دلتای کرونکر در بخش (۱-۱) معرفی شد. اندیسهای i و j اعداد صحیح نظیر ...,۲,۱,۰ اختیار میکند البته در بعضی موارد خاص در درس حالت جامد با دلتای کرونکر $\delta_{kk'}$ که k، k' مقادیرصحیح اختیار نمیکنندامـا بـازهم مقادیر گسسـته دارند سروکارخواهیم داشت. درحالتی که اندیسها مقادیرپیوسته اختیارکنند مجبوربه معرفی تابع دلتای دیراک میشویم. ما انگیزه معرفی دلتای دیراک رابرمبنای نیازبه تعریف توزیع بارپیوسته ونقطه ای قرارمی دهیم. هر چند که چنین مفروض است که بارالکتریکی کوانتیزه میباشد اما درالکترومغناطیس کلاسیک چنین فرضی پذیرفته نشده است بنابراین اگرمطابق شکل(الف-۳۴-۱) یک توزیع باری:



شکل(۳۴-۱)

در نظر میگیریم ،حول نقطه $\vec{x}$ المان حجم (سطح یا خط) اختیار و مقدار بار موجود در آنرا $dq(x)$ مینامیم .هر گاه حد :

$$(1-270)\quad \lambda(\vec{x})=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta q(\vec{x})}{\Delta l}\quad,\quad \sigma(\vec{x})=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\Delta q(\vec{x})}{\Delta a}$$

$$\rho(\vec{x})=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta q(\vec{x})}{\Delta v}$$

تعریف شده باشد دراینصورت توزیع باررا پیوسته مینامیم یابقولی به هرنقطه از فضا یک کمیت اسکالر دانسیته حجمی (سطحی وخطی) با مقدارمتناهی نسبت داده شده است.اما اگر توزیع بار نقطه ئی داشته باشیم و حول نقطه $\vec{x}$ المان حجم انتخاب کنیم حد :

$$(1-270)\quad \rho(\vec{x})=\frac{\Delta q(\vec{x})}{\Delta v}=\begin{cases}0 & \vec{x}\neq\vec{x}'_i\\ \dfrac{q_i}{\Delta v}=\infty & \vec{x}=\vec{x}'_i\end{cases}$$

دو مقدار صفرویا بینهایت اختیارمیکند مشروط براینکه نقطه $\vec{x}$ منطبق برتوزیع بارنقطه ئی باشد یا خیر. بشکل (ب-٣٤-١) توجه نمائید حال تابع دلتای دیراک رابا الهام از تابع دلتای کرونکر تعریف میکنیم :

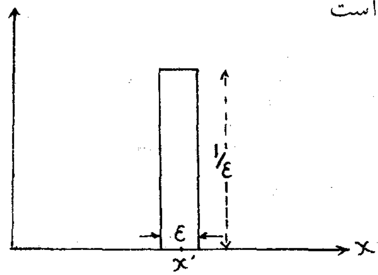
$$(1-271)\quad \delta(x-x')=\frac{\delta_{xx'}}{x-x'}\equiv\frac{\delta_{xx'}}{\Delta x}=\begin{cases}0 & x\neq x'\\ \infty & x=x'\end{cases}$$

توجه میکنیم که اندسیهای x و x' بطور پیوسته تغییر میکنندو علت آنکه دلتای دیراک بر خلاف دلتای کرونکر دو مقدار صفر و بینهایت (مقایسه شودبا صفرویک دلتای کرونکر) اختیار میکند اینست که دلتای دیراک از تقسیم دلتای کرونکر $\delta_{xx'}$ بر Δx حاصل شده انگیزه این کار این است که دلتای دیراک در جمع بندی پیوسته یعنی درانتگرال گیری بکارگرفته میشود درنتیجه هنگامیکه xبهx' میل میکند Δx درمخرج رابطه(١-٢٧١) با dx انتگرال گیری حذف میشود و در نتیجه در انتگرال زیرخواهیم داشت :

$$(1-272)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x')\,dx=1$$

دو رابطه (١-٢٧١) و(١-٢٧٢) دلتای دیراک را بصورت یک تابع $f(x)$ معرفی میکند که شکل هندسی آن بصورت شکل زیر میباشد :

مساحت زیر منحنی واحداست



شکل(۳۵-۱)

البته شکل تابع دلتای دیراک فقط منحصر به شکل (۳۵-۱) نمیباشد بلکه هرتابعی که فقط حول نقطه $x=x'$ دارای مقداری بزرگ و درنقاط دیگر دارای مقدارناچیزباشد ،بطوریکه مساحت زیر منحنی برابریک شود ،معرف تابع دلتای دیراک میباشد . در این مورد در درس مکانیک کوانتومی توضیحات بیشتر داده میشود وتوابع مختلفی با خصوصیات فوق برای دلتای دیراک تعریف میکنند .

لازم به یاد آوریست همانگونه که برای دلتای کرونکر داریم:

$$\sum_{i=1}^{N} f_i\,\delta_{ij} = \begin{cases} f_j & 1 \le j \le N \\ 0 & j \text{ در فاصله } 1 \text{ تا } N \text{ نباشد} \end{cases}$$

برای تابع دلتای دیراک نیز خواهیم داشت:

$$(1-272-a)\quad \int_a^b f(x)\,\delta(x-x')\,dx = \begin{cases} f(x') & a \le x' < b \\ 0 & x' \text{ در فاصله } a \text{ تا } b \text{ نباشد} \end{cases}$$

سؤال: هرگاه در(الف-۲۷۲-۱) فاصله انتگرال گیری از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد جواب انتگرال بچه صورت در میاید؟

حال اگر دو تابع دلتای دیراک متفاوت را درهم ضرب کنیم تابع دلتای دیراک جدیدی حاصل میشود که مرتبه بینهایت و یا صفر آن از مرتبه دو میباشد. و بهمین ترتیب میتوان سه تابع دلتای دیراک با آرگومانهای متفاوت را در هم ضرب کنیم که یک تابع دلتای دیراک جدیدی حاصل میشود بعنوان مثال:

$$(1-273)\qquad \delta(\vec{x}-\vec{x}') \equiv \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$$

حال دانسیته بارنقطه ای ،رابطه (۲۷۰-۱)رابه کمک تابع دلتای دیراک (۲۷۳-۱) نمایش میدهیم که صفر و بینهایت آن از مرتبه سه است یعنی:

$$\rho(\vec{x}) = \alpha\delta(\vec{x} - \vec{x}_i') \tag{1-274}$$

برای تعیین ضریب ثابت α کافی است متوجه شویم که انتگرال گیری روی دانسیته میبایستی مقدار کل بار را مشخص نماید یعنی:

$$q_i = \int \rho(\vec{x})\, d^3x = \alpha \int \delta(\vec{x} - \vec{x}_i')\, d^3x = \alpha$$

بنابراین دانسیته بارنقطه ئی بکمک تابع دلتای دیراک بصورت زیر نمایش داده میشود:

$$\rho(\vec{x}) = q_i\, \delta(\vec{x} - \vec{x}_i')$$

و اگر تعدادی بار نقطه ئی داشته باشیم داریم:

$$\rho(\vec{x}) = \sum_i q_i\delta(\vec{x} - \vec{x}_i') \tag{1-275}$$

میشود. شایان ذکر است نه تنها بار نقطه ئی بلکه هر گونه توزیع بار پیوسته سطحی و خطی را هم میتوان بکمک تابع دلتای دیراک بصورت توزیع بار حجمی و با دانسیته ρ نمایش داد. مثلا" برای مشخص کردن توزیع بار سطحی بصورت دانسیته بار حجمی چنین میکنیم :

اگر پارامترهای معادله سطح باردار را (x,y) انتخاب کرده باشیم:

$$Q = \int \sigma(\vec{x})\, da = \int \sigma\big(x, y, z(x,y)\big)\, F(x,y)\, dxdy \tag{1-276}$$

حال میخواهیم رابطه (۲۷۶-۱) را بصورت:

$$Q = \int \rho(\vec{x})\, dxdydz \tag{1-277}$$

بنویسیم. از خود سؤال میکنیم در زیر انتگرال سمت راست رابطه (۲۷۶-۱) چه تابعی توأم با dz ضرب کنیم که این انتگرال تغییرنکند؟ با کمی تفکر درمییابیم تابع مزبور میبایستی یک دلتای دیراک باشد بنابراین سمت راست(۲۷۶-۱) بصورت:

$$Q = \int \sigma(x,y,z)\, F(x,y)\, \delta\big(z - z(x,y)\big)\, dxdydz$$

مینویسیم از مقایسه این رابطه با (۲۷۷-۱) نتیجه میگیریم که:

$$\rho(\vec{x}) = \sigma(x,y,z)\, F(x,y)\, \delta\big(z - z(x,y)\big) \tag{1-278}$$

یا

$$\rho(\bar{x}) = \sigma(x,y,z(x,y))\,F(x,y)\,\delta(z-z(x,y))$$

یعنی توزیع بار سطحی بکمک یک تابع دلتای دیراک بصورت توزیع بار حجمی نشان داده شده وجالب است که خاطرنشان سازیم بموجب (۲۵۲-۱) دیورژانس میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار سطحی در همه جا صفر و بموجب (۲۵۲-۱) اگر نقطه اثر x بر روی سطح انتخاب کنیم برابر بی نهایت میشود (قبلا" هم این نتیجه رابدست آورده بودیم). هرگاه معادله سطح باردار با پارامترهای u,v مشخص شده باشد دراینصورت داریم:

$$(1-279)\qquad Q = \int \sigma(\bar{x})\,da = \int \sigma\big(\bar{x}(u,v)\big)\,F(u,v)\,dudv$$

و همچنین بموجب(۱۴۱-۱) داریم:

$$(1-280)\qquad Q = \int \rho(\bar{x})\,d^3x = \int \rho\big(\bar{x}(u,v,w)\big)\,J(u,v,w)\,dudvdw$$

حال از خودسؤال میکنیم چه تابعی توأم با dw درزیر انتگرال (۲۷۹-۱) ضرب کنیم که انتگرال تغییر نکند در پاسخ چنین میکنیم:

$$Q = \int \sigma\big(\bar{x}(u,v)\big)\,F(u,v)\,\delta(w-w(u,v))\,dudvdw$$

توجه کنید $w{=}w(u,v)$ آنگونه تابعی از u و v است که اگر در معادله فضا یعنی:

$$\bar{x} = \bar{x}(u,v,w)$$

جایگزاری کنیم معادله سطح یعنی:

$$\bar{x} = \bar{x}(u,v)$$

حاصل شود .ازرابطه $w{=}w(u,v)$ در فصل مختصات منحنی الخط بعنوان معادله سطح باردارتعبیرمیکنیم .بنابراین برای چنین پارامترهایی توزیع بارسطحی با دانسیته بارحجمی :

$$(1-281)\qquad \rho(u,v,w) = \frac{\sigma(u,v,w)}{J(u,v,w)}\,F(u,v)\,\delta(w-w(u,v))$$

نمایش داده میشود .با عملیات مشابه میتوان توزیع بار خطی را با دانسیته بار حجمی نشان داد که بعلت اطاله کلام از تحریر آن خودداری میکنیم.

توجه کنید با نمایش تمامی انواع توزیع بارها بصورت دانسیته بار حجمی آن تقسیم بندی تصنعی محاسبه میدانهای الکتریکی ناشی از بارهای نقطه ای و پیوسته از بین

میرود و این کاریست که جکسون در کتاب الکترودینامیک انجام داده است در این مورد مثالهایی در مختصات منحنی الخط آورده شده است .

توصیه میشود با استفاده از فرمول کولمب برای توزیع بار حجمی میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار نقطه ای را بدست آورید. دیورژانس میدان برداری که دربعضی نقاط بی نهایت و دربقیه نقاط صفر هستند را میتوان بکمک دلتای دیراک نمایش داد.

معروفترین میدان برداری که در این مورد میتوان ذکر نمود میدان کولمبی ناشی از بار نقطه ای است .با استفاده از اتحاد:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{A}\right)=\vec{\nabla}f\cdot\vec{A}+f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

دیورژانس میدان فوق برابر میشود با:

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^{3}}=\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r^{3}}\right)\cdot\vec{x}+\frac{1}{r^{3}}\vec{\nabla}\cdot\vec{x}$$

با در نظر گرفتن اینکه:

$$\vec{\nabla}f(r)=\sum_{i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_i=\sum_{i}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i}\vec{e}_i=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{x_i}{r}\vec{e}_i$$

$$\vec{\nabla}f(r)=\frac{\vec{x}}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{x}}{|x|^{3}}=-\frac{3}{r^{4}}\frac{\vec{x}}{r}\cdot\vec{x}+\frac{3}{r^{3}}=-\frac{3}{r^{3}}+\frac{3}{r^{3}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^{3}}=\begin{cases}0 & r\neq 0\\ \text{مبهم} & r=0\end{cases}\qquad(1-282)$$

بنابراین برای رفع ابهام از دیورژانس میدان برداری فوق،حول نقطه $\vec{x}=0$ کره کوچکی بشعاع ε در نظر گرفته و از رابطه (۱-۲٤۱) استفاده میکنیم .

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{x}}{|x|^{3}}\bigg|_{\vec{x}=0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\oint\frac{\vec{x}}{|x|^{3}}\cdot d\vec{a}}{\frac{4\pi}{3}\varepsilon^{3}}=\frac{\oint\frac{\varepsilon\hat{r}}{\varepsilon^{3}}\cdot d\vec{a}\,\hat{r}}{\frac{4\pi}{3}\varepsilon^{3}}=\frac{1}{\varepsilon^{2}}\frac{4\pi\varepsilon^{2}}{\frac{4\pi}{3}\varepsilon^{3}}\to\frac{1}{\varepsilon^{3}}\to\infty$$

یعنی دیورژانس این میدان برداری در نقطه $\vec{x}=0$ بی نهایت (از مرتبه سوم)میشود پس:

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}=\alpha\delta(\vec{x}-0)$$

میگردد برای تعیین ضریب ثابت α کره ای بشعاع a که مرکز آن در مبدأ مختصات است در نظر میگیریم و از انتگرال گوس استفاده میکنیم:

$$\int\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}d^3x=\oint\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\cdot d\vec{a}\Rightarrow\alpha\int\delta(\vec{x}-0)d^3x=\oint\frac{a}{a^3}\hat{r}\cdot da\hat{r}\Rightarrow\alpha=4\pi$$

بنابراین نتیجه میگیریم که:

$$(1-282-a)\qquad \vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}=4\pi\delta(\vec{x})$$

حال اگر بجای x ، $(x\text{-}x')$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$(1-283)\qquad \vec{\nabla}\cdot\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}=4\pi\delta\ (\vec{x}-\vec{x}')$$

توجه میکنیم که چون:

$$\frac{.-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}=-\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

است پس:

$$(1-284)\qquad \nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

میشود. رابطه (۲۴۸-۱) یکی از مهمترین کاربردهای تابع دلتای دیراک را نشان میدهد که در همه زمینه های الکترومغناطیس و مکانیک کوانتومی کاربرد فراوان دارد. در زیر چند مورد از کاربرد(۲۴۸-۱) را نمایش میدهیم.

بموجب قانون گوس داریم:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x})=\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

و چون $\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$(1-285)\qquad \nabla^2\Phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

رابطه (۲۸۵-۱)را معادله پواسون نامند.

حال اگر در مسئله ای $\rho(\vec{x})$ بر ما معلوم بوده باشد و بخواهیم $\Phi(\vec{x})$ را بدست آوریم علمای ریاضی ادعا میکنند که می بایستی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را حل نمائیم و در بسیاری از کتب الکترومغناطیس فصلهای طولانی بدان اختصاص میدهند.

اما ما پیشنهاد دیگری می کنیم : مگر نه آنکه Φ ناشی از توزیع بار الکتریکی است بنابراین اگر $\rho(\vec{x})$ درتمامی نقاط فضا معلوم باشد حل معادله (۲۸۵-۱) با الهام از معادله کولمب میبایستی بصورت :

$$(1-286) \qquad \Phi(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|} d^3x'$$

باشد که $\rho(\vec{x}')$ در اینجا معرف همه و هر گونه توزیع بار (نقطه ئی ،پیوسته،خطی، سطحی و حجمی) مولد میدان است .برای اطمینان خاطر از جواب بدست آمده از(۲۸۶-۱) ∇^2 میگیریم.با توجه به اینکه $\rho(\vec{x}')$ تابعی از $\vec{x}'$است (و نه تابعی از $\vec{x}$) میتوان ∇^2 را درون انتگرال برد و بکمک(۲۸۴-۱) خواهیم داشت:

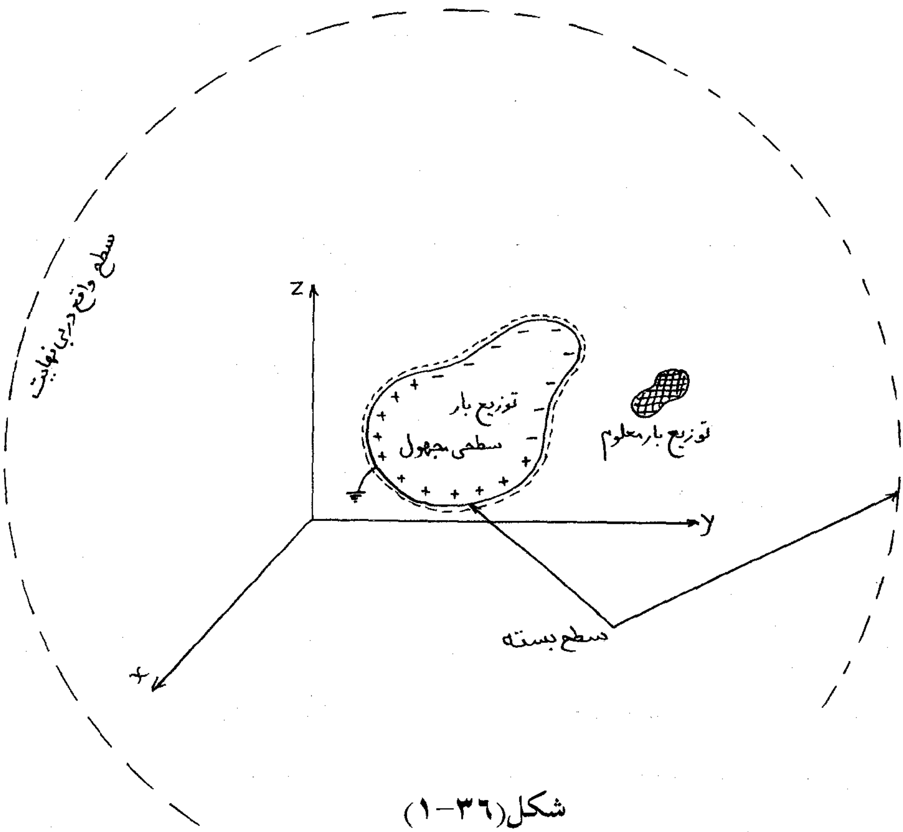
$$\nabla^2\Phi(\bar{x}) = \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\bar{x}')\nabla^2\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} d^3x' = -\tfrac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(\bar{x}')\delta(\bar{x}-\bar{x}') d^3x'$$

$$\nabla^2\Phi(\bar{x}) = -\frac{\rho(\bar{x})}{\varepsilon_0}$$

بنابراین سؤالی که در اینجا مطرح میشود اینست که چرا علمای ریاضی و فیزیک بخش اعظم از درس الکترواستاتیک را به حل معادله پواسون اختصاص داده اند مگر نه آنکه حل معادله پواسون همان رابطه (۲۸۶-۱) است؟در پاسخ میگوییم در بعضی از مسائل الکتروستاتیک همه توزیع بار الکتریکی بر ما معلوم نمیباشد بعنوان مثال یک توزیع بار معلوم درمجاورت یک هادی متصل به زمین قرارمیدهیم پتانسیل الکتریکی ناشی ازتوزیع بار معلوم وتوزیع بارهای القائی روی سطح هادی است که از مقدارونحوه توزیع بارهای القائی بی خبر هستیم.

پس بنابراین هنر اصلی در حل معادله پواسون این است که فقط با دانستن بخشی از $\rho(\vec{x})$ یعنی $\rho(\vec{x})$ درون یک سطح بسته (یعنی از تمامی $\rho(\vec{x})$ ها باخبر نباشیم)و با معلوم بودن پتانسیل بر روی سطح ویا مشتق سوئی آن درامتداد عمودبرسطح ، $\Phi(x)$ را درهرنقطه

درون سطح بسته حساب کنیم و این موضوعی است که در الکتروستاتیک بر روی آن بحث میشود .توجه کنید برای مثال گفته شده در فوق سطح بسته بصورت نقطه چین در شکل (۳٦-۱)نشان داده شده است.



شکل(۳٦-۱)

۱۰_۱_ اتحادهای گرین

هرگاه در انتگرال گوس (دیورژانس)میدان برداری را بصورت:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \Phi(\vec{x})\,\vec{\nabla}\psi(\vec{x}) \qquad (1-287)$$

انتخاب کنیم که $\psi(\vec{x})$و $\Phi(\vec{x})$ دوتابع خوشرفتارومشتق پذیرباشند،دراینصورت خواهیم داشت:

$$\oint \Phi(\vec{x})\,\vec{\nabla}\psi(\vec{x})\cdot d\vec{a} = \int \vec{\nabla}\cdot\left(\Phi\,\vec{\nabla}\psi(\vec{x})\right)d^3x$$

و هر گاه $\hat{n}$ بردار یکه عمود بر سطح بسته و بطرف خارج آن باشد:

$$d\vec{a} = \hat{n}\, da$$

در اینصورت با در نظر گرفتن تعریف مشتق سوئی خواهیم داشت:

$$\oint \Phi(\vec{x}) \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial n} da = \int \left[\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}\psi(\vec{x}) + \Phi(\vec{x}) \nabla^2 \psi(\vec{x}) \right] d^3x \qquad (1-288)$$

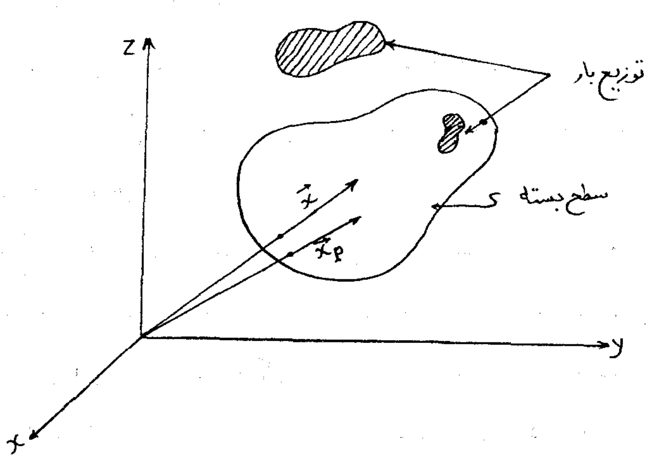
رابطه (۲۸۸-۱) را اتحاد اول گرین نامند. حال اگر در رابطه (۲۸۸-۱) جای توابع $\psi(\vec{x})$ را با $\Phi(\vec{x})$ عوض نمائیم و سپس آنرا از رابطه (۲۸۸-۱) کم کنیم خواهیم داشت:

$$\oint \left[\Phi(\vec{x}) \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial n} - \psi(\vec{x}) \frac{\partial \Phi(\vec{x})}{\partial n} \right] da = \int \left[\Phi(\vec{x}) \nabla^2 \psi(\vec{x}) - \psi(\vec{x}) \nabla^2 \Phi(\vec{x}) \right] d^3x \qquad (1-289)$$

رابطه (۲۸۹-۱) را اتحاد دوم گرین نامند که کاربرد بسیار مهم در استخراج توابع گرین در الکتروستاتیک و برای حل معادله پواسون دارد. بعنوان یک مثال تابع $\Phi(\vec{x})$ را پتانسیل الکتریکی و تابع $\psi(\vec{x})$ را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{\left| \vec{x} - \vec{x}_p \right|}$$

که $\vec{x}_p$ مطابق شکل (۳۷-۱) نقطه ای دلخواه در درون سطح بسته میباشد:



شکل(۳۷-۱)

رابطه (۲۸۹-۱) برابر میشود:

$$-\oint \Phi(\vec{x})\frac{(\vec{x}-\vec{x}_p)}{\left|\vec{x}-\vec{x}_p\right|^3}\cdot d\vec{a}-\oint \frac{\partial \Phi(\vec{x})}{\partial n}\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}_p\right|}da$$
$$=-4\pi\int \Phi(\vec{x})\delta\left(\vec{x}-\vec{x}_p\right)d^3x+\int \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0\left|\vec{x}-\vec{x}_p\right|}d^3x$$

که با ساده کردن آن خواهیم داشت:

$$\Phi(\vec{x}_p)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x})}{\left|\vec{x}-\vec{x}_p\right|}d^3x+\oint \Phi(\vec{x})\frac{\left(\vec{x}-\vec{x}_p\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}_p\right|^3}\cdot d\vec{a}+\oint \frac{\partial \Phi(\vec{x})}{\partial n}\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}_p\right|}d\vec{a} \qquad (1-290)$$

توجه کنید که جمله اول سمت راست پتانسیل الکتریکی حاصل از تمامی توزیع بارها نمیباشد بلکه از آن بخش از توزیع بارهاست که درون سطح بسته قرار گرفته است. بنابراین بسیار معقولانه است که دو انتگرال دیگر را بعنوان پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای خارج سطح بسته تعبیر نمائیم. در بخش مسائل ،سطح بسته ای ،بصورت کره‌ای بشعاع a که مرکز آن در نقطه $\vec{x}_p$ قرار گرفته است انتخاب میکنیم و اگر باری در درون کره وجود نداشته باشد وخواسته شده است که رابطه(۲۹۰-۱) راساده تر نمایید.

۱۱ـ۱ـ قضایای هلم هولتز

قضایای هلم هولتز از قضایای بسیار مهم در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی میباشد که کاربرد اصلی آن در حل معادلات ماکسول را میتوان نام برد.

قضیه اول هلم هولتز :

هرگاه در درون سطح بسته ئی دیورژانس و کرل میدان برداری و همچنین مؤلفه قائم میدان برداری بر روی سطح بسته داده شود میدان برداری در درون سطح بسته یک جواب منحصر بفرد دارد(توجه کنید که دیورژانس وکرل میدان برداری درتمامی نقاط فضا داده شده است)برای اثبات ازبرهان خلف استفاده میکنیم :

کمیات $S(\vec{x})$و$\vec{C}(\vec{x})$و $f(u,v)$ در درون سطح بسته داده شده است یعنی:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{x}) = S(\vec{x})$$
$$(1-291)\qquad \vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{x}) = \vec{C}(\vec{x})$$
$$V_n(\vec{x}) = f(u,v)$$

کلمات $\vec{C}(\vec{x})$ و $S(\vec{x})$ از حرف اول (*Sources*) و (*Circulation*) که بمعنای چشمه و گردش است اقتباس شده است که برای میدانهای الکترومغناطیس نام با مسمائی است. حال اگر دو جواب متفاوت داشته باشیم که روابط (۲۸۸–۱) را اقناع نمایند یعنی مثلاً" جوابها بصورت:

$$\vec{V}_1(\vec{x}) = x^2\vec{i} + zx\vec{j} + y^2\vec{k}$$
$$\vec{V}_2(\vec{x}) = yz\vec{i} + x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$$

باشد در اینصورت اگر میدان برداری $\vec{W}(\vec{x})$ را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\vec{W}(\vec{x}) = \vec{V}_1(\vec{x}) - \vec{V}_2(\vec{x})$$

بموجب (۲۹۱–۱) از روابط:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{W}(\vec{x}) = 0$$
$$(1-292)\qquad \vec{\nabla}\times\vec{W}(\vec{x}) = 0$$
$$W_n(\vec{x})\Big| = 0$$

پیروی میکند. از رابطه دوم (۲۹۲–۱) نتیجه میگیریم که:

$$W(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\psi(\vec{x})$$

و از رابطه اول و سوم نتیجه میگیریم که:

$$(1-293)\quad \nabla^2\psi(\vec{x}) = 0 \qquad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$$

حال در (۲۸۸–۱)، اتحاد اول گرین دو تابع $\psi(\vec{x})$ و $\Phi(\vec{x})$ را $\psi(\vec{x})$ درنظرمیگیریم.

$$(1-294)\oint\psi(\vec{x})\,\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial n}da = \int\vec{\nabla}\psi(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{x})\,d^3x + \int\psi(\vec{x})\,\nabla^2\psi(\vec{x})\,d^3x$$

رابطه سمت چپ و رابطه دوم سمت راست بنابه (۲۹۳–۱) صفر میباشند در نتیجه:

$$\int\left|\vec{\nabla}\,\psi\right|^2 d^3x = 0$$

چون $|\nabla\psi|^2$ همیشه مثبت است. بنابراین زمانی انتگرال فوق صفر میگردد که:

$$\vec{\nabla}\psi(\vec{x}) = 0$$

یعنی:

$$\vec{W}(\vec{x}) = \vec{V}_1(\vec{x}) - \vec{V}_2(\vec{x}) = 0$$

پس خواهیم داشت:

$$(1-295)\qquad \vec{V}_1(\vec{x})=\vec{V}_2(\vec{x})$$

حال که متوجه هستیم میدان برداری که از روابط (۱-۲۹۱) پیروی میکند منحصر بفرد است این سؤال مطرح میشود که جواب مسئله از چه رابطه ای بدست میاید؟ برای این منظوراز رابطه دوم (۱-۲۹۱) کرل گرفته و سپس از اتحاد (۱-۲۶۶) استفاده میکنیم:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{x})\right)=\vec{\nabla}\times\vec{C}(\vec{x})$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{x})\right)-\nabla^2\vec{V}(\vec{x})=\vec{\nabla}\times\vec{C}(\vec{x})$$

$$(1-296)\qquad \vec{\nabla}S(\vec{x})-\nabla^2\vec{V}(\vec{x})=\vec{\nabla}\times\vec{C}(\vec{x})$$

چون $\vec{C}(\vec{x})$ و $S(\vec{x})$ کمیتهای داده شده می باشند کرل و گرادیان آنها میدانهای برداری معلوم $\vec{K}_1(\vec{x})$ و $\vec{K}_2(\vec{x})$ خواهند بود. اگرتفاضل این دو میدان برداری را $\vec{K}(\vec{x})$ بنامیم،رابطه (۱-۲۹۶)تبدیل به سه معادله پواسون میگردد که از حل آن جواب بردار $\vec{V}(x)$ معلوم میشود. یعنی:

$$\nabla^2\vec{V}(\vec{x})=-\vec{K}(\vec{x})$$

$$(1-297)\qquad \nabla^2V_i(\vec{x})=-K_i(\vec{x})\qquad i=1.2.3$$

حال ببینیم قضیه اول هلم هولتز برای میدانهای ابقائی به چه صورتی در میاید:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{x})=S(\vec{x})$$

$$(1-298)\qquad \vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{x})=0$$

$$V_n(\vec{x})\Big|_{\text{مرز}}=f(u,v)$$

که از رابطه دوم (۱-۲۹۸) نتیجه میگیریم که:

$$\vec{V}(\vec{x})=-\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$$

و در نتیجه بموجب رابطه اول و سوم (۱-۲۹۸) خواهیم داشت:

$$\nabla^2\Phi(\vec{x})=-S(\vec{x})$$

$$(1-299)\qquad V_n=\frac{\partial\Phi}{\partial n}=-f(u,v)$$

یعنی برای میدانهای ابقائی مسئله منجر به حل معادله پواسون میشود، که شرط مرزی آن معلوم بودن مؤلفه قائم میدان برداری (یعنی بمعنای معلوم بودن مشتق سوئی تابع پتانسیل در امتداد عمود بر سطح) میباشد. امابرای میدانهای ابقائی نه تنها با معلوم بودن مشتق سوئی تابع پتانسیل بر روی سطح بسته میدان برداری بطور منحصر بفرد معلوم

میشود بلکه معلوم بودن تابع پتانسیل برروی مرز هم جواب منحصر بفردی برای پتانسیل $\Phi(\vec{x})$ و درنتیجه برای میدان برداری به ارمغان میاورد. چه اگر $\Phi_1(\vec{x})$ و $\Phi_2(\vec{x})$ دو جواب متفاوت باشند که هردو معادله پواسون را اقناع میکنند و همچنین شرایط مرزی را، در اینصورت تابع $\psi(\vec{x})$را بصورت:

$$\psi(\vec{x}) = \Phi_1(\vec{x}) - \Phi_2(\vec{x})$$

تعریف میکنیم که از معادله و شرایط مرزی زیرین پیروی میکند:

$$\nabla^2\psi(\vec{x}) = 0$$
$$\psi(\vec{x})\Big|_{\text{مرز}} = 0$$

در نتیجه با استفاده از اتحاد اول گرین خواهیم داشت:

$$\oint \psi(\vec{x})\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial n}da = \int\left|\psi(\vec{x})\right|^2 dv + \int \psi(\vec{x})\,\nabla^2\psi(\vec{x})dv$$

که کما فی السابق نتیجه میگیریم:

$$\vec{\nabla}\psi(\vec{x}) = 0$$
$$\psi(\vec{x}) = \Phi_1(\vec{x}) - \Phi_2(\vec{x}) = c$$

که با اعمال شرط مرزی c برابر صفر در نتیجه:

$$(1-300)\quad \Phi_1(\vec{x}) = \Phi_2(\vec{x}) \rightarrow \vec{V}_1(\vec{x}) = \vec{V}_2(\vec{x})$$

میگردد. خلاصه کلام برای میدانهای ابقائی هرگاه دیورژانس میدان ابقائی درناحیه درون سطح بسته داده شودو همچنین تابع پتانسیل و یا اینکه مشتق سوئی آن بر روی سطح بسته معلوم باشد در اینصورت میدان برداری دارای حل منحصر بفردی است. واضح است که معلوم بودن مشتق سوئی تابع پتانسیل بر روی مرز بمعنای معلوم بودن مؤلفه قائم میدان برداری است اما معلوم بودن تابع پتانسیل بر روی مرز چه معنای هندسی دارد؟ توجه می کنیم هنگامیکه ادعا می شود که پتانسیل بر روی یک سطح بسته معینی داده شده است این کمیت تابعی از u و v میباشد یعنی:

$$\Phi\left(\vec{x}(u,v)\right) = g(u,v)$$

بنابراین:

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u} = \vec{\nabla}\Phi\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial v} = \vec{\nabla}\Phi\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}$$

$\partial\vec{x}/\partial u$ و $\partial\vec{x}/\partial v$ دو بردار مماس بر روی سطح بسته میباشند که اگر معادلـه سـطح داده شده باشد بردارهای معلومی میباشند و آنها را $\vec{\varepsilon}_1(u,v)$ و $\vec{\varepsilon}_2(u,v)$ می نامیم و بـا بـردار $d\vec{a}$ عمود بر سطح تشکیل یک دستگاه بردار پایه غـیر متعـامد ε_1 و ε_2 و n میدهند کـه همگـی تابعی از u و v میباشند.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \vec{\nabla}\Phi\cdot\vec{\varepsilon}_1 = -\vec{V}\cdot\vec{\varepsilon}_1 = V_1$$

$$(1-301) \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = \vec{\nabla}\Phi\cdot\vec{\varepsilon}_2 = -\vec{V}\cdot\vec{\varepsilon}_2 = V_2$$

حـال بموجب رابطـه(۱-۶۱) V_1 و V_2 مؤلفـه کوواریـانتی بـردار $\vec{V}$ خواهند بود توجـه کنید که معلوم بودن $\Phi(\vec{x})$ بر روی مرز یعـنی معلـوم بـودن تـابع g و درنتیجـه معلـوم بـودن مشتقات آن نسبت به u و v، پس داریم:

$$(1-302) \quad \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\vec{\varepsilon}^1 + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\vec{\varepsilon}^2 \equiv V_1\vec{\varepsilon}^1 + V_2\vec{\varepsilon}^2 = \vec{V}_t$$

بنابراین بموجب(۱-۳۰۲) معلوم بودن $\Phi(\vec{x})$بر روی مرز برای میدانهای ابقائـی بمعنـای معلوم بودن مؤلفه مماسی $\vec{V}$ بر روی مرز است.نتیجه جالبی است!

توجه کنید چون $\vec{\varepsilon}_3 = d\vec{a}$ بر $\vec{\varepsilon}_1$ و $\vec{\varepsilon}_2$عمود است $\vec{\varepsilon}^1$و $\vec{\varepsilon}^2$در داخل صفحه مـار بـر $\vec{\varepsilon}_1$و $\vec{\varepsilon}_2$ قـرار میگیرند یعنی آنها نیز مماس بر سطح مرزی میباشند.

قضیه دوم هلم هولتز:

هرگاه دیورژانـس و کـرل یـک میـدان بـرداری درکـل فضـا داده شـده باشـند بطوریکه مقادیر آنها در بی نهایت صفر باشند دراینصورت جواب میدان برداری $\vec{V}$ بصورت زیریـن است:

$$\vec{V}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{x}) - \vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$$

بطوریکه:

$$(1-303) \qquad \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{S(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' \quad , \quad \vec{F}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x$$

توجه کنید در حل داده شده در(۱-۳۰۳) سطح بسته واقع دربی نهایت و $V_n(x)$ بـر روی آن صفر میگردد چون $\Phi(\vec{x})$و $\vec{F}(\vec{x})$ بموجب روابط فوق در مـرز بینهـایت $(\vec{x}\to\infty)$صفـر

است. حال بموجب قضیه اول هلم هولتزجواب $\vec{V}(\vec{x})$ منحصر بفرد است بنابراین اگر با دیورژانس و کرل گرفتن $\vec{V}(\vec{x})$ داده شده در (۳۰۳-۱) جوابهای $S(\vec{x})$ و $\vec{C}(\vec{x})$ حاصل شود در این صورت حل (۳۰۳-۱) جواب درستی است و حل دیگری هم وجود ندارد. بنابراین امتحان میکنیم:

$$(1-304) \qquad \vec{\nabla}.\vec{V}(\vec{x}) = \vec{\nabla}.[\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{x})] - \nabla^2\Phi(x)$$

اما:

$$I_1 = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \partial_i(\vec{\nabla}\times\vec{F})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j F_k = \varepsilon_{jik}\partial_j\partial_i F_k = -\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_i F_k$$

و در نتیجه:

$$I_1 = -I_1 \Rightarrow 2I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = 0$$

حال $-\vec{\nabla}^2\,\Phi(x)$ را حساب میکنیم:

$$-\nabla^2\Phi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int S(\vec{x}')\nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' = +\frac{4\pi}{4\pi}\int S(\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}') = S(\vec{x})$$

پس حل داده شده در (۳۰۳-۱) از رابطه:

$$(1-305) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{x}) = S(\vec{x})$$

پیروی میکند. حال از رابطه (۳۰۳-۱) کرل میگیریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{x}) - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Phi$$

که بموجب روابط (۲۱۲-۱) و (۲۶۶-۱) داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Phi = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{x})\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}(\vec{x})$$
$$-\vec{\nabla}^2\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int\vec{C}(\vec{x}')\nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' = \vec{C}(\vec{x})$$

پس میبایستی ثابت کنیم که $\vec{\nabla}.\vec{F}$ برابر صفر است یعنی:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' = \int\vec{C}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

توجه میکنیم که میدان برداری $\vec{C}$ تابعی از $\vec{x}'$ است و درنتیجه دیورژانس آن (که مشتق گیری نسبت به x و y و z است) صفر میگردد. حال با استفاده از اتحاد:

$$(1-306)\ \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad , \quad \vec{\nabla} = \sum_i \vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i} \ , \ \vec{\nabla}' = \sum_i \vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x'_i}$$

خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int \vec{C}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

حال $\vec{\nabla}'$ را بجلو کشیده (این عمل را بزبان ریاضی انتگرال گیری جز بجزء نامند) و خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int \vec{\nabla}'\cdot\frac{\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' + \frac{1}{4\pi}\int \vec{\nabla}'\cdot\frac{\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

انتگرال اول سمت راست رابطه فوق بموجب انتگرال گوس برابر:

$$\int \vec{\nabla}'\cdot\frac{\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' = \oint\frac{\vec{C}(\vec{x}')\cdot d\vec{a}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 0$$

میشود چون $\vec{C}(x')$ بر روی سطح بسته واقع در بینهایت صفر است اما درمورد $\vec{\nabla}'.\vec{C}(\vec{x}')$ که دررابطه دوم انتگرال فوق ظاهر شده چه میتوان گفت؟هر چند گفتیم که:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(\vec{x}') = 0$$

است.با کمی دقت در رابطه:

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{x}) = \vec{C}(\vec{x})$$
$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{x})\right) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(\vec{x}) = 0$$

پس:

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{C}(\vec{x}') = 0$$

میشود (فرق بین دو رابطه $\vec{\nabla}.\vec{C}(\vec{x}')=0$ و $\vec{\nabla}.\vec{C}(\vec{x})=0$ را در یابید) پس:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$$

و در نتیجه:

$$(1-307)\quad \vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{x}) = \vec{C}(\vec{x})$$

میگردد چون $\vec{V}(\vec{x})$ روابط (۱−۳۰۵) و(۱−۳۰۷) و شرایط مرزی را اقناع مینماید بنابراین حل ارائه شده در (۱−۳۰۳)حل صحیح برای $\vec{V}(\vec{x})$ است.

اگر خواننده ای علاقمند است که بداند که از کجا حل (۱−۳۰۳)پیشنهاد شده است مطالب زیر را مطالعه کند (به اختلاف بین $\vec{\nabla}$ و $\vec{\nabla}'$ بسیار دقت کنید).

بموجب (۱−۲۹۷) داریم:

$$\nabla^2 V_i(\vec{x}) = -K_i(\vec{x})$$

چون در این حالت $\vec{K}_i(\vec{x})$ در **کل فضا** داده شده است بنابراین حل معادله پواسون بصورت:

$$(1-307)\quad V_i(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{K_i(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \qquad i = 1,2,3$$

میباشد. ضرب V_i در $\hat{e}_i$ و جمع روی اندیس i نتیجه:

$$(1-308)\quad \begin{aligned} \vec{V}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{K}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \\ \vec{V}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{\left[\vec{\nabla}'\times\vec{C}(\vec{x}') - \vec{\nabla}' S(\vec{x}')\right]}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \end{aligned}$$

حاصل میکند. حال انتگرال اول سمت راست (۱–۳۰۸) را بصورت:

$$I_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' = \frac{1}{4\pi}\int \vec{\nabla}'\times\frac{\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' - \frac{1}{4\pi}\int \vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\times\vec{C}(\vec{x}') d^3x'$$

مینویسیم که در آن از اتحاد:

$$(1-309)\qquad \vec{\nabla}\times\left(f\vec{A}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{A} + f\,\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

استفاده شده است. حال با استفاده از رابطه سوم (۱–۲۶۱) و همچنین رابطه (۱–۳۰۶) خواهیم داشت:

$$I_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\times d\vec{a}' + \frac{1}{4\pi}\int \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\times\vec{C}(\vec{x}')\, d^3x'$$

چون نقطه اثر $\vec{C}(\vec{x}')$ بر روی سطح بسته در بی نهایت قرار دارد مقدار آن صفراست. پس از انتگرال اول سمت راست خلاصی میابیم اما درانتگرال دوم سمت راست (۱–۳۰۸) دوباره از اتحاد (۱–۳۰۹) استفاده میکنیم:

$$I_1 = \frac{1}{4\pi}\int \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) d^3x' - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}\times\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'$$

که انتگرال دوم رابطه فوق باز هم صفر است (چرا؟). حال اگر $\vec{\nabla}$ را از زیر انتگرال خارج سازیم:

$$(1-310) \qquad I_1 = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \right) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})$$

انتگرال دوم رابطه (۱-۳۰۸) نیز بطریق مشابه بصورت:

$$I_2 = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' S(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{\nabla}' \left(\frac{S(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) d^3x' + \frac{1}{4\pi} \int S(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'$$

مینویسیم که در آن از اتحاد:

$$(1-311) \qquad \vec{\nabla}(fg) = (\vec{\nabla} f) g + f (\vec{\nabla} g)$$

استفاده شده است .حال با استفاده ازرابطه دوم (۱-۲۶۱) وهمچنین (۱-۳۰۶) داریم:

$$I_2 = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{S(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d\vec{a}' - \frac{1}{4\pi} \int S(\vec{x}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'$$

چون نقطه اثر $S(\vec{x}')$ واقع بر سطح در بی نهایت است مقدار آن صفر در نتیجه از انتگرال اول سمت راست خلاصی یافته و اما در انتگرال دوم دوباره از اتحاد (۱-۳۱۱)استفاده میکنیم:

$$I_2 = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{\nabla} \frac{S(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} S(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'$$

که انتگرال دوم رابطه فوق باز هم صفر است(چرا؟)حال اگر $\vec{\nabla}$ را از زیر انتگرال خارج سازیم:

$$(1-312) \qquad I_2 = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int \frac{S(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$$

بنابراین بموجب روابط (۱-۳۱۰) و (۱-۳۱۲) حل $\vec{V}(\vec{x})$رابطه (۱-۳۰۸) بصورت:

$$(1-313) \qquad \vec{V}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) - \vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$$

درمیآید توجه نمائید برای استخراج روابط(۱-۳۱۰)و(۱-۳۱۲) $\vec{\nabla}'$ راباشگردهای خاص به $\vec{\nabla}$ تبدیل نمودیم تابتوان آنرا اززیرانتگرال خارج نمودوبتوان به پاسخ (۱-۳۰۳)

رسید. مشاهده کنید که برای استخراج (۳۱۳-۱) از صور مختلف انتگرالهای گوس و استوکس استفاده کرده ایم.

حال میخواهیم با استفاده از قضیه دوم هلم هولتز مسئله زیرین را حل و اهمیت رعایت شرایط مرزی را گوشزد نمائیم.

هرگاه دیورژانس و کرل میدان برداری $\vec{A}$ (پتانسیل مغناطیسی) با روابط:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \vec{B}_0 \qquad (1-314)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = 0$$

داده شده باشد میخواهیم $\vec{A}(\vec{x})$ را بدست آوریم.

قبل از آنکه از رابطه (۳۰۳-۱) استفاده نمائیم حل زیر را پیشنهاد و برای اطمینان آنرا در (۳۱٤-۱) جایگزاری میکنیم:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \tfrac{1}{2} \vec{B}_0 \times \vec{x} \qquad (1-315)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \tfrac{1}{2} \vec{\nabla} \times \left(\vec{B}_0 \times \vec{x}\right) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i \left(\vec{B}_0 \times \vec{x}\right)_j \vec{e}_k$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{i,j,k,m,n} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{jmn}\, \partial_i \left(B_{0m} x_n\right) \vec{e}_k$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{i,j,k,m,n} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{jmn}\, B_{0m}\, \delta_{in}\, \vec{e}_k$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{i,j,k,m,n} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{jmi}\, B_{0m}\, \vec{e}_k$$

$$= \tfrac{2}{2} \sum_{k,m} \delta_{km}\, B_{0m}\, \vec{e}_k = \vec{B}_0$$

و بهمین ترتیب:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \tfrac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{B}_0 \times \vec{x}\right) = \tfrac{1}{2} \sum_i \partial_i \left(\vec{B}_0 \times \vec{x}\right)_i$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i \left(B_{0j} x_k\right) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} \varepsilon_{iji} B_{0i} = 0$$

بنابراین رابطه (۳۱٥-۱) پاسخ صحیح معادلات (۳۱٤-۱) میباشد.

از طرفی با استفاده از قضیه دوم هلم هولتز، (۳۰۳-۱)، $\vec{A}(\vec{x})$ برابر میشود با:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \tfrac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{B}_0}{\left|\vec{x} - \vec{x}'\right|} d^3x' \qquad (1-316)$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\times \vec{B}_0\, d^3x'$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\vec{B}_0 \times \int \frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \tag{1-317}$$

محاسبه انتگرال در (۳۱۷-۱) نیاز به مهارت دارد ولی ما از یک حقه ریاضی استفاده می کنیم و آن اینکه انتگرال فوق میدان الکتریکی حاصل از یک کره باردار بشعاع بی نهایت با دانسیته بار $4\pi\varepsilon_0$ در یک نقطه درون کره میباشد. بنابراین جواب چنین انتگرالی برابر است با:

$$\int \frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x = \frac{(4\pi\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0}\vec{x} \tag{1-318}$$

بنابراین $\vec{A}(\vec{x})$ برابر میشود با:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{3}\vec{B}_0 \times \vec{x} \tag{1-319}$$

جواب بدست آمده در(۳۱۹-۱)مغایر با جواب بدست آمده در(۳۱۵-۱) است ومطمئن هم هستیم که رابطه (۳۱۵-۱) جواب صحیح میباشد پس چرا جواب اشتباه با استفاده از فرمول هلم هولتز حاصل شده؟ علت امر عدم دقت ما بر این نکته مهم که $\vec{C}(\vec{x})$ می بایستی بر روی مرز واقع دربینهایت صفرباشد تا بتوان از فرمول هلم هولتز استفاده کنیم اما $\vec{B}_0$ دربی نهایت هم صفر نیست. شایان توجه است رابطه(۳۱۴-۱) بعلت آنکه شرایط مرزی هلم هولتز را اقناع نمیکند بغیر ازحل (۳۱۵-۱) حلهای دیگری هم دارد. اگر به کتاب مکانیک کوانتومی گاسیوروویچ به مسئله شماره هفت فصل سیزده مراجعه کنیم جوابهای دیگر $\vec{A}(\vec{x})$ با روابط:

$$\vec{A}(\vec{x}) = -yB_0\vec{i} \quad , \quad \vec{\nabla}\times(-yB_0\vec{i}) = B_0\vec{k}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = xB_0\vec{j} \quad , \quad \vec{\nabla}\times(xB_0\vec{j}) = B_0\vec{k} \tag{1-320}$$

داده شده است. خلاصه کلام اینکه در قضایای هلم هولتز رعایت شرایط مرزی از اهم واجبات است.

۱۲ـ۱ـ روش محاسبه انتگرالهای سه گانه و صور مختلف آن که در فیزیک استفاده میشود.

انتگرال گوس،رابطه (۲۴۸−۱) پیشنهاد محاسبه انتگرالی نظیر:

$$I = \int f(\vec{x})\; d^3x \qquad (1-321)$$

مینماید که در آن $f(\vec{x})$ یک تابع اسکالر میباشد. در انتگرال گوس تابع $f(\vec{x})$ دیورژانس میدان برداری $\vec{A}$ بوده است.

برای محاسبه چنین انتگرالهایی ابتدا معادله فضا را با پارامترهای مناسب (u,v,w) در نظر میگیریم المان حجم حول نقطه $\vec{x}$ با رابطه (۱۴۱−۱) داده شده است.از طرفی بردار $\vec{x}$ منتهی به نقطه دلخواه از فضا با رابطه:

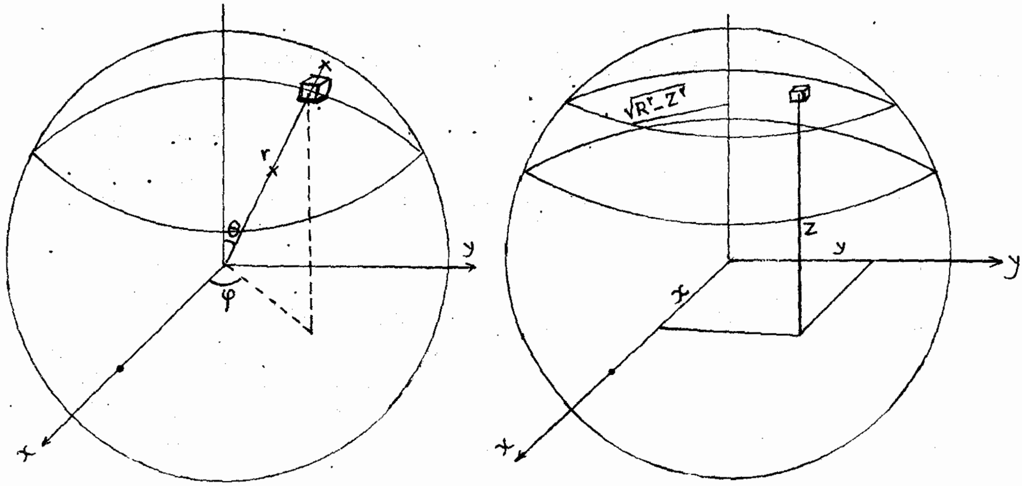
$$\vec{x} = \vec{x}(u,v,w)$$

داده میشود بنابراین رابطه (۳۲۱−۱) برابر میشود با:

$$I = \int f\left[\vec{x}(u,v,w)\right] J(u,v,w)\, dudvdw = \int K(u,v,w)\, dudvdw \qquad (1-322)$$

نکته مهم درمحاسبه انتگرالهای حجمی مشخص کردن حدود انتگرال یعنی محدوده تغییرات پارامترها است. بنابراین اگر معادله فضا را با پارامترهای مناسب معلوم سازیم مشخص کردن حدود انتگرالهای سه گانه آسان میشود.

بعنوان مثال مقداربارموجوددریک قبه کروی که ازتقاطع یک صفحه با ارتفاع h $(h<R)$ با کره بشعاع R حاصل شده است و توزیع بار بطور یکنواخت در آن پخش شده است محاسبه میکنیم:



شکل(۳۸-۱)

اگر معادله فضا را با پارامترهای (x,y,z) مشخص کنیم یعنی:

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \qquad \rightarrow dv = dxdydz \\ z &= z \end{aligned}$$

و در نتیجه مقدار بار:

$$(1-323) \quad Q = \int_{z=h}^{R} \int_{x=-\sqrt{R^2-Z^2}}^{+\sqrt{R^2-Z^2}} \int_{y=-\sqrt{R^2-Z^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-Z^2-x^2}} \rho_0 dxdydz$$

$$= \frac{\pi \rho_0}{3}\left(2R^3 - 3R^2 h + h^3\right)$$

توجه کنید محدوده y و x برای یک z معینی که R z h است دایره ای بشعاع $(R^2 - z^2)^{1/2}$ است .ولی هرگاه معادله فضا با پارامترهای(r,θ,φ) مشخص سازیم بموجب رابطه(۱۴۵-۱) داریم:

$$dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$Q = \int_{\theta=0}^{\theta_0} \int_{r=\frac{h}{\cos\theta}}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_0 r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$$

$$Q=\frac{2\pi\rho_0}{3}\int_0^{\theta_0}\left(R^3-\frac{h^3}{\cos^3\theta}\right)\sin\theta\, d\theta$$

$$Q=\frac{2\pi\rho_0}{3}\left(-R^3\cos\theta-\frac{h^3}{2}\cos^{-2}\theta\right)_0^{\theta_0}$$

$$Q=\frac{2\pi\rho_0}{3}\left[R^3+\frac{h^3}{2}-R^3\cos\theta_0-\frac{h^3R^2}{2R^2\cos^2\theta_0}\right]$$

$$Q=\frac{2\pi\rho_0}{3}\left[R^3+\frac{h^3}{2}-R^2h-\frac{hR^2}{2}\right]$$

$$Q=\frac{2\pi\rho_0}{3}\left[2R^3-3R^2h+h^3\right] \qquad (1-324)$$

توجه نمائید که در انتگرالهای چند گانه هنگام انتگرال گیری روی یک پارامتر پارامتر های دیگر می بایستی ثابت باشندو بهمین دلیل است که برای یک θ ثابت محدوده تغییرات r با رابطه :

$$\frac{h}{\cos\theta}\le r\le R$$

داده میشود . در فصل مختصات منحنی الخط متوجه خواهیم شد که رابطه:

$$\begin{cases} r=\dfrac{h}{\cos\theta} \\ \theta=\theta \\ \varphi=\varphi \end{cases}$$

معادله صفحه به ارتفاع $z=h$ است.

الف -۱۲-۱- انتگرالهایی که از خانواده انتگرالهای سه گانه میباشند.

$$1-\int f(\vec{x})\,d^3x \qquad (1-325)$$

$$2-\int \vec{A}(\vec{x})\,d^3x$$

انتگرال(۱) در مباحثی نظیر محاسبه جرم یک جسم یا مقدار بار موجود درون سطح بسته ،یا محاسبه انتگرال دیورژانس مورد استفاده قرار میگیرد.

انتگرال (۲) در مباحث محاسبه ممان دو قطبی الکتریکی یک توزیع بار (حجمی) یا بردار مرکز جرم و یا میدان الکتریکی حاصل از توزیع بار حجمی کاربرد دارد. کافیست توجه کنیم هر گاه:

$$\vec{A}(\vec{x}') = K\rho(\vec{x}')\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

انتخاب کنیم و $\vec{x}'$ متغییر انتگرال گیری باشد رابطه (۲) میدان الکتریکی را حاصل مینماید

لازم به یادآوری مجدد است که برای محاسبه هر یک از انتگرالهای (۳۲۵-۱) ابتدا معادله فضا را بر حسب پارامتر های مناسب نوشته و بموجب رابطه (۱٤۱-۱) dv از معادله فضا بدست می آید و همچنین آرگومان تابع اسکالر f یا تابع برداری $\vec{A}$ را بر حسب پارامترها میبایستی مشخص نموده و سپس انتگرال را محاسبه نمائیم.

۱۳_۱_ محاسبه معادله خط نیروی یک میدان برداری

بموجب تعریف ، خط نیروی یک میدان برداری خطی است که میدان برداری در هر نقطه واقع بر آن مماس باشد.

حال این سوأل پیش میاید اگر میدان برداری معلوم باشد معادله خط نیرو چگونه بدست میاید؟

هر گاه معادله خط نیرو با رابطه:

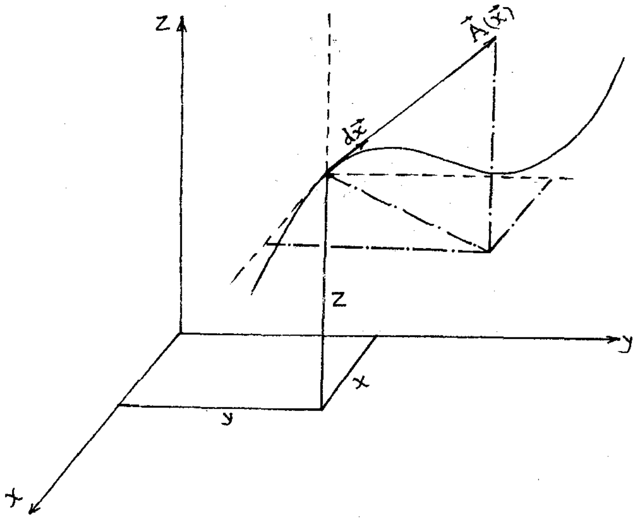
$$(1-326) \qquad \vec{x} = \vec{x}(t)$$

داده شود حول یک نقطه دلخواه واقع بر منحنی ،بردار $d\vec{x}$ که ابتدا و انتهای آن واقع بر منحنی است در نظر میگیریم. $\vec{A}(\vec{x})$ در همان نقطه با $d\vec{x}$ هم امتداد میباشد بنابراین مطابق شکل (۳۹-۱) بموجب قضیه تالس داریم:

$$(1-327) \qquad \frac{A_x(\vec{x}(t))}{dx} = \frac{A_y(\vec{x}(t))}{dy} = \frac{A_z(\vec{x}(t))}{dz}$$

اما میدانیم که مؤلفه های dx و dy و dz بردار dx واقع بر منحنی از رابطه:

$$dx_i = \dot{x}_i\, dt$$



شکل(۳۹-۱)

بدست میاید. بنابراین رابطه (۳۲۷-۱) بصورت:

$$\frac{A_x(\bar{x}(t))}{\dot{x}(t)} = \frac{A_y(\bar{x}(t))}{\dot{y}(t)} = \frac{A_z(\bar{x}(t))}{\dot{z}(t)} \qquad (1-328)$$

در میاید که از روی آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{x}(t)\dfrac{A_y(\bar{x}(t))}{A_x(\bar{x}(t))} \equiv \dot{x}(t)\,K_1(\bar{x}(t)) = \chi_1(y(t),z(t)) \\ \dot{z} = \dot{x}(t)\dfrac{A_z(\bar{x}(t))}{A_x(\bar{x}(t))} \equiv \dot{x}(t)\,K_2(\bar{x}(t)) = \chi_2(y(t),z(t)) \end{cases} \qquad (1-329)$$

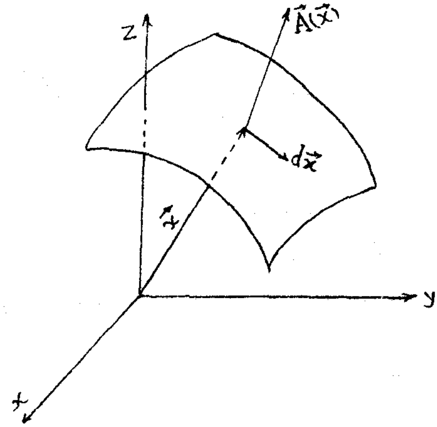
بنابراین اگر x را تابع دلخواهی از t انتخاب کنیم، y(t) و z(t) از حل معادلات دیفرانسیل (۳۲۹-۱) که از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی می باشند بدست میایند. نحوه حل آنها در کتب معادلات دیفرانسیل آمده است

۱۴-۱_ تعیین معادله سطحی که بر یک میدان برداری عمود باشد

بموجب شکل (۴۰-۱) بردار $d\vec{x}$ ئی دلخواه که ابتدا و انتهای آن واقع بر سطح باشد در نظر میگیریم این $d\vec{x}$ بر میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ عمود است

بنابراین داریم:

$$(1-330) \qquad \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x}=0$$



شکل(۱-۴۰)

حال اگر میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ ابقائی باشد یعنی $\vec{A}=-\vec{\nabla}\Phi$ دراینصورت رابطه(۱-۳۳۰) تبدیل به رابطه:

$$(1-331) \qquad -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})\cdot d\vec{x}=0$$

میشود که مبین این واقعیت است که مجموعه نقاط (x,y,z) واقع بر سطح مورد نظر از رابطه:

$$(1-332) \qquad d\Phi(\vec{x})=0 \;\Rightarrow\; \Phi(\vec{x})=c$$

پیروی میکند یعنی بزبان دیگر رابطه $\Phi(\vec{x})=c$ معادله سطح مورد نظر راحاصل مینماید. نحوه بدست آوردن تابع Φ هم در بخش (ه-۷-۱)بیان شده است.

رابطه(۱-۳۳۲)نتیجه جدیدی نمیباشد قبلاً" هم استدلال کرده بودیم که میدان برداری $\vec{A}=-\vec{\nabla}\Phi$ بر سطح تراز $\Phi(\vec{x})=c$ عمود است.

حال این سؤال پیش میاید که اگر میدان بردارابقائی نباشدآیاچنین سطحی وجود دارد یا خیر؟اگر چنین سطحی وجود داشته باشد رابطه (۱-۳۳۰) صادق است اما میدانیم $\vec{A}$ ابقائی نمیباشد. حال اگر تابع اسکالر $\mu(\vec{x})$ یافت شود بطوریکه میدان برداری $\vec{B}(\vec{x})$:

$$(1-333) \qquad \vec{B}(\vec{x})=\mu(\vec{x})\,\vec{A}(\vec{x})$$

ابقائی باشد دراینصورت برای میدان برداری ابقائی $\vec{B}$ سطح عمود بـرآن وجـود دارد و می توان معادله آنرا بدست آورد.و چون میدانهای برداری $\vec{A}(\vec{x})$ و $\vec{B}(\vec{x})$ هـم امتـداد (ونه الزاماً" همجهت و هم طول) میباشند پس سطح مزبور بر $\vec{A}(\vec{x})$ هم عمود خواهد بود.

تابع اسکالر $\mu(\vec{x})$ را فاکتور انتگرال گیری نامند.

اما شرط $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$ قیدی را بر روی نوع تابع برداری $\vec{A}(\vec{x})$ ایجاد میکند و بقـولی بـرای هـر میدان برداری دلخواه $\vec{A}(\vec{x})$ سطح عمود برآن وجود ندارد و این شرط بصورت زیـر بیـان میگردد:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\times\left(\mu\vec{A}\right)=0$$

$$(1-334)\qquad \vec{\nabla}\mu\times\vec{A}+\mu\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$$

اگر طرفین رابطه (۱−۳۳۴) را در $\vec{A}(\vec{x})$ ضرب اسکالر نمائیم خواهیم داشت:

$$(1-335)\qquad \vec{A}(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})=0$$

رابطه (۱−۳۳۵) قید لازم برای $\vec{A}(\vec{x})$ را بیان می کند این رابطه کاربرد بسیار زیـادی در فیزیک منجمله در درس مکانیک برای تعیین قیدهای هولونومیک دارد بعنوان مثـال روابـط (۱−۳۹) ازکتاب *Classical Mechanics by Goldstein* درنظر میگیریم ایـن روابـط بصورت زیرمیباشد وخواسته است نشان داده شود که قیدهای زیرغیر هولونومیک است:

$$(1-336)\qquad \begin{aligned} dx-a\sin\theta d\varphi&=0\\ dy+a\cos\theta\, d\varphi&=0\end{aligned}$$

یعنی روابط فوق را نمیتوان بصورت دیفرانسیل کـامل نوشـت کـه در نتیجـه یـک مختصـه عمومی را بر حسب مختصات دیگر بدست آورد.

برای آنکه اشتباهی رخ ندهد مختصه θ را y و مـختصه φ را z می نامیم .بنابراین هر یـک از روابـط (۱−۳۳۶) همانند رابطـه (۱−۳۳۰) درمیاید .مـا استدلال رابـرای رابطــه اول (۱−۳۳۶) انجام میدهیم:

$$(1-337)\qquad (1)dx+0dy-a\sin y\,dz=0 \quad\Leftrightarrow \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x}=0$$

بنابراین داریم:

$$(1-338)\qquad \vec{A}=1\vec{i}+0\vec{j}-a\sin y\,\vec{k}$$

امتحان میکنیم که $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ صفر است یا خیر.

$$(1-339) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 1 & 0 & -a\sin y \end{vmatrix} = -\vec{i}\,a\cos y + 0\,\vec{j} + 0 \neq 0$$

بنابراین $\vec{A}(\vec{x})$ میدان برداری غیرابقائی است .حال $\vec{A}.(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ را حساب میکنیم :

$$(1-340) \qquad \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \left(\vec{i}+0\vec{j}-a\sin y\,\vec{k}\right)\cdot\left(-\vec{i}\,a\cos y\right) = -a\cos y \neq 0$$

بنابراین برای چنین میدان برداری رابطه ای نظیر:

$$\Phi(x,y,z)\equiv\Phi(r,\theta,\varphi)=c$$

یافت نمیشود .بنابراین قید غیر هولونومیک است.

خواننده براحتی می تواند استدلال نماید که برای میدانهای برداری دو مؤلفه ای که تابعی از y و x هستند همیشه رابطه:

$$(1-341) \qquad \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$$

برقرار است پس میتوان برای چنین میدانهایی سطح عمود بر میدان برداری تعیین نمود حتی اگر $\vec{\nabla}\times\vec{A}\neq 0$ باشد .

معروفترین مثالی که در این رابطه وجود دارد در مورد مؤلفه φ شتاب یک ذره در مختصات قطبی که نیروی وارد به ذره مرکزی است میباشد چه برای مؤلفه φ داریم:

$$(1-342) \qquad 2\dot{r}\,\dot{\varphi}+r\,\ddot{\varphi}=0$$

میباشد (این رابطه در جزوه فیزیک مکانیک آمده است)

اگر طرفین رابطه را در dt ضرب کنیم و $r=x$ و $\varphi=y$ فرض کنیم (۱−۳۴۲) بصورت:

$$(1-343) \qquad 2\,ydx+x\,dy=0$$

درمیاید .برای میدان برداری $\vec{A}=2y\vec{i}+x\vec{j}$ سطح عمود برآن همیشه یافت میشود چون: $\vec{A}.(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$ است و در واقع فاکتور انتگرال گیری $\mu=x$ است و با ضرب (۱−۳۳۵) در x خواهیم داشت:

$$2xydx+x^2dy=0$$
$$d(x^2y)=0$$
$$(1-344) \qquad x^2\,y=c$$

نحوه بدست آوردن تابع μ در کتب ریاضی آمده است ما در اینجا به این نکته اکتفا میکنیم که برای میدانهایی که از رابطه:

$$A\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x}))=0$$

پیروی میکند μ را از حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول (۳۳۴-۱) بدست میاید :

$$\frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu} \times \vec{A} = -\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\left(\vec{\nabla} \ln \mu\right) \times \vec{A} = -\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

که حل چنین معادلاتی در کتب معادلات دیفرانسیل آمده است.

فصل دوم

مختصات منحنی الخط

قسمت اول مختصات منحنی الخط متعامد

۱_۲_ مقدمه:

در فصل اول معادله فضا را با رابطه (۱۰۶-۱) و بصورت:

$$x = x(u,v,w) \qquad y = y(u,v,w) \quad , \quad x_i = x_i(u,v,w) \quad , \quad \vec{x} = \vec{x}(u,v,w) \qquad z = z(u,v,w)$$

داده شده که u و v و w را پارامترهای معادله فضا نامیدیم.

چون بازاء هر مقدار که u و v و w اختیار میکنند مختصات کارتزین یک نقطه معلوم میشود بنابراین میتوان به u و v و w نام دیگری اطلاق نمود وآنها رامختصات نقطه ویا به زبان دقیقترمختصات منحنی الخط نقطه نامید. برای آنکه بتوان از نوتاسیون تانسوری در محاسبات بعدی استفاده کنیم مختصات منحنی الخطu و v و w را بترتیب:

$$u = q^1 \quad , \quad v = q^2 \quad , \quad w = q^3$$

می نامیم (انتخاب اندیس i در بالای q برای رعایت قاعده جمع اندیس تکراری بالا و پایین میباشد)بنابراین معادله فضا را با روابط:

$$x = x(q^1,q^2,q^3) \qquad y = y(q^1,q^2,q^3) \quad ,x_i = x_i(q) \equiv x_i(q^j) \quad ,\vec{x} = \vec{x}(q) \equiv \vec{x}(q^j) \qquad z = z(q^1,q^2,q^3) \tag{2-1}$$

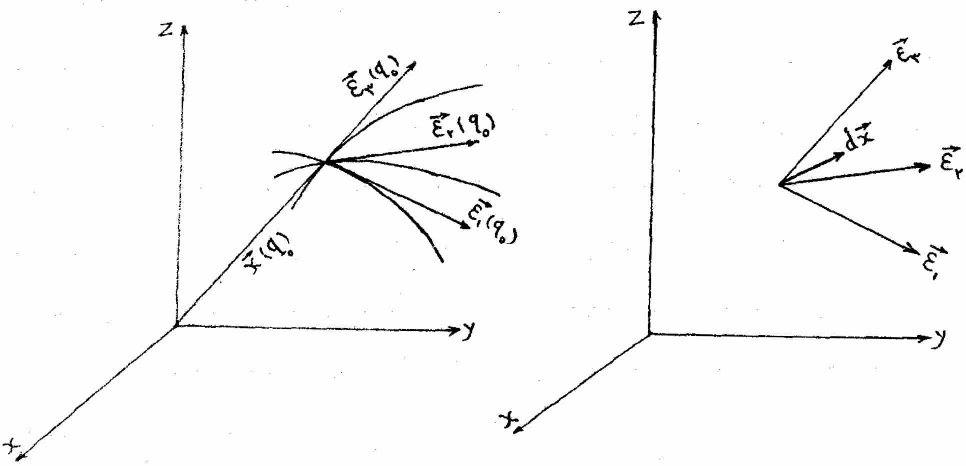
میتوان نمایش داد که نمایش سمت راست برداری ، نمایش میانی تانسوری و نمایش سمت چپ مرسوم محاسباتی است.حال مانند سابق اگر دو مختصه q^2 و q^3مقادیر ثابتی اختیار کنند رابطه:

$$\vec{x} = \vec{x}(q^1,q_0^2,q_0^3) \tag{2-2}$$

معرف معادله یک منحنی می باشد .بردار $d\vec{x}$ واقع بر این منحنی که ابتدای آن واقع بر نقطه (q_0^1,q_0^2,q_0^3) و انتهای آن واقع بر نقطه $(q_0^1+dq^1 \ ,q_0^2,q_0^3)$ باشد با رابطه:

$$(2-3) \qquad d\vec{x}_1 = \vec{x}(q_0^1 + dq^1, q_0^2, q_0^3) - \vec{x}(q_0^1, q_0^2, q_0^3) \equiv \frac{\partial \vec{x}(q_0)}{\partial q^1} dq^1$$

مشخص میشود. بشکل (۱-۲) توجه کنید:



شکل(۱-۲)

توجه نمائید که در فصل اول $d\vec{x}_1$ را مثلا" با $d\vec{x}_u$ نمایش داده بودیم ولی اینجا به علت استفاده از نوتاسیون تانسوری بجای استفاده از اندیس u از اندیس ۱ استفاده میکنیم. توجه میکنیم که در (۳-۲) $d\vec{x}$ هر چند بی نهایت کوچک مرتبه اول میباشد اما $\partial x/\partial q^1$ برداری مماس برمنحنی باطول متناهی میباشد (واگر q^1 پارامتر زمان میبود $\partial \vec{x}/\partial q^1$ همان بردار سرعت $\vec{v}$ میگردید) و آنرا با $\vec{\varepsilon}_1(q)$ نمایش میدهیم یعنی $\vec{\varepsilon}_1$ در حالت کلی تابعی از q^3 و q^2 و q^1 میباشد:

$$(2-4) \qquad d\vec{x}_1 = \frac{\partial \vec{x}(q_0)}{\partial q^1} dq^1 = \vec{\varepsilon}_1(q_0) dq^1 \quad , \frac{\partial \vec{x}(q)}{\partial q^1} \equiv \vec{\varepsilon}_1(q_0)$$

بهمین ترتیب برای منحنی:

$$(2-5) \qquad \vec{x} = \vec{x}(q_0^1, q^2, q_0^3)$$

میتوان بردارهای $d\vec{x}_2$ و $\vec{\varepsilon}_2(q)$ و برای منحنی:

$$(2-6) \qquad \vec{x} = \vec{x}(q_0^1, q_0^2, q^3)$$

بردارهای $d\vec{x}_3$ و $\vec{\varepsilon}_3(q)$ با روابط زیر تعریف نمود:

$$(2-7)\qquad d\vec{x}_2=\frac{\partial\vec{x}(q_0)}{\partial q^2}dq^2=\vec{\varepsilon}_2(q_0)dq^2\quad,\frac{\partial\vec{x}(q)}{\partial q^2}\equiv\vec{\varepsilon}_2(q)$$

$$d\vec{x}_3=\frac{\partial\vec{x}(q_0)}{\partial q^3}dq^3=\vec{\varepsilon}_3(q_0)dq^3\quad,\frac{\partial\vec{x}(q)}{\partial q^3}\equiv\vec{\varepsilon}_3(q)$$

بردارهـای $\vec{\varepsilon}_1(q)$ و $\vec{\varepsilon}_2(q)$ و $\vec{\varepsilon}_3(q)$ درحـالت کلـی بریکدیگـر عمود نبـوده وتـابعی از مختصات نقطه اثرشان میباشند، یعنی درنقاط مختلف امتداد، طول و جهت آنها متفـاوت میباشـند بنـابراین درحـالت عمومـی $\vec{\varepsilon}_1(q)$ و $\vec{\varepsilon}_2(q)$ و $\vec{\varepsilon}_3(q)$ تشـکیل یـک بردارپایـه غیرمتعامد میدهند و مختصات q^i را، مختصات منحنی الخط غـیر متعامد نـامند. درمورد مختصات منحنی الخط غیر متعامد درقست دوم همین فصل مفصـلا" بحـث خواهـد شـد اما قبل ازشروع مطلب دیگری، دونکته خاطر نشان میسازیم اول اینکـه ایـن سـه بـردار $\vec{\varepsilon}_i$ درهر نقطه از فضا نبایستی دریک صفحه قرارگیرند پس شـرط داشتن مختصـات منحـنی الخط صحیح آنستکه:

$$(2-8)\qquad Vol=\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^3}\cdot\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^1}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^2}\right)\neq 0$$

باشد. اما رابطه (۸–۲)، با در نظر گرفتن رابطه (۱٤۰–۱)، مبین ایـن واقعیـت اسـت کـه دترمینان ژاکوبین مختصات منحنی الخط میبایستی مخالف صفر باشد یعنی:

$$(2-9)\qquad J=(q^1,q^2,q^3)\neq 0$$

نکته دوم آنکه هر زوج منحنی نظیر:

$$(2-10)\qquad \vec{x}=\vec{x}(q^1,q_0^2,q_0^3)$$

$$\vec{x}=\vec{x}(q_0^1,q^2,q_0^3)$$

مار بر یک سطح که معادله آن با رابطه:

$$(2-11)\qquad \vec{x}=\vec{x}(q^1,q^2,q_0^3)$$

داده میشوند قرار دارند. چون کافیست در (۱۱–۲) q^1 یا q^2 را ثابت اختیار کنیم که هر یک از معادلات منحنی (۱۰–۲) حاصل میشـود سـطوحی کـه معـادلات آن بـا روابطـی نظیر (۱۱–۲) و یا دو رابطه دیگر:

$$(2-12)\qquad \vec{x}=\vec{x}(q^1,q_0^2,q^3)$$

و یا:

$$\bar{x}=\bar{x}(q_0^1,q^2,q^3) \qquad (2-13)$$

داده میشود سطوح مختصات منحنی الخط نامند.

و نکته سوم آنکه بردار $d\vec{x}$ ئی که مبدأ آن واقع بر نقطه (q_0^1,q_0^2,q_0^3) و انتهای آن واقع بر نقطه $(q_0^1+dq^1\ ,q_0^2+dq^2\ ,q_0^3+dq^3\ )$ قرار دارد با رابطه:

$$d\bar{x}=\bar{x}(q+dq)-\bar{x}(q)=\sum_i \frac{\partial\bar{x}}{\partial q^i}dq^i=\sum_i \bar{\varepsilon}_i(q)\,dq^i \qquad (2-14)$$

یعنی چنین $d\vec{x}$ ئی در سه امتداد $\vec{\varepsilon}_1$ و $\vec{\varepsilon}_2$ و $\vec{\varepsilon}_3$ دارای مؤلفه میباشد. به شکل (۱-۲) توجه نمایید..

۲_۲_ مختصات منحنی الخط متعامد

هر گاه مختصات منحنی الخط q^1 و q^2 و q^3 آنگونه باشد که بردارهای $\vec{\varepsilon}_i$ها برهم عمود شوند در اینصورت مختصات مزبور را منحنی الخط متعامد نامند.

در مختصات منحنی الخط متعامد بجای استفاده از $\vec{\varepsilon}_i$ها بعنوان بردار پایه از $\hat{a}_i$ها به عنوان بردار پایه که موازی $\vec{\varepsilon}_i$ها میباشند اما طول آنها واحد است استفاده میکنند. بنابراین $\hat{a}_i$ برابر هستند با:

$$\hat{a}_i(q)=\frac{\bar{\varepsilon}_i(q)}{\left|\bar{\varepsilon}_i(q)\right|}\equiv\frac{\dfrac{\partial\bar{x}(q)}{\partial q^i}}{\left|\dfrac{\partial\bar{x}(q)}{\partial q^i}\right|}=\frac{\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial q^i}}{h_i(q)} \qquad (2-15)$$

در (۱۵-۲) $h_i(q)$ قدر مطلق بردار $\vec{\varepsilon}_i(q)$ میباشد و در حالت کلی تابعی از q^i ها میباشد و آنرا فاکتور مقیاس (*Scale factor*) نامند. توجه میکنیم که در مختصات منحنی الخط متعامد هر بردار پایه بعلت آنکه بر دو منحنی از سه منحنی که با روابط (۲-۲) و (۵-۲) و (۶-۲) داده شده است عمود است و از طرفی هر زوج منحنی مار بر یک سطح مختصات منحنی الخط میباشد بنابراین بردارهای یکه $\hat{a}_i$ بر سطوح منحنی الخط عمود هستند.

توجه میکنیم در مختصات منحنی الخط متعامد بردار $d\vec{x}$ بموجب (۱۴-۲) با رابطه:

$$(2-16) \qquad d\vec{x} = \sum_i h_i(q)\,\hat{a}_i(q)\,dq^i$$

داده میشود و قدر مطلق $d\vec{x}$ بعلت اورتونرمال بودن $\hat{a}_i$ ها با رابطه:

$$dl^2 = d\vec{x}\cdot d\vec{x} = \left(\sum_i h_i\,\hat{a}_i\,dq^i\right)\cdot\left(\sum_j h_j\,\hat{a}_j\,dq^j\right)$$

$$(2-17) \qquad dl^2 = \sum_i (h_i\,dq^i)^2$$

مشخص میگردد.

مختصات منحنی الخط متعامد را برحسب یکی از سطوح مختصات منحنی الخط نامگذاری میکنند. بعنوان مثال مختصات منحنی الخط (r,θ,φ) که با رابطه:

$$(2-18) \qquad \begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi & 0 \le r \le \infty \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z &= r\cos\theta & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{aligned}$$

$$\vec{x} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}$$

در نظرمیگیریم. در فصل اول (r,θ,φ) را پارامتر نامیدیم ولی در این فصل آنها را مختصات منحنی الخط مینامیم. $\partial\vec{x}/\partial r$ و $\partial\vec{x}/\partial\theta$ و $\partial\vec{x}/\partial\phi$ بترتیب برابرند با:

$$(2-19) \qquad \begin{aligned} \vec{\varepsilon}_r &\equiv \frac{\partial\vec{x}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{\varepsilon}_\theta &\equiv \frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta} = r(\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}) \\ \vec{\varepsilon}_\varphi &\equiv \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi} = r(-\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{j}) \end{aligned}$$

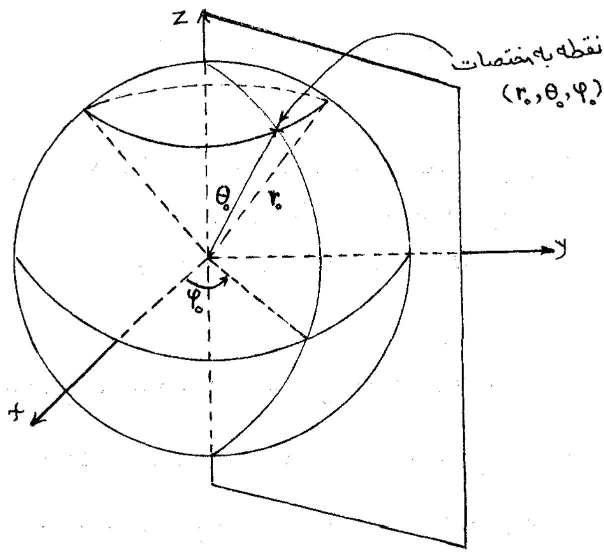
به آسانی از روابط (۱۹-۲) درمیابیم که مختصات نامبرده مختصات منحنی الخط متعامد هستند چون:

$$(2-20) \qquad \vec{\varepsilon}_r\cdot\vec{\varepsilon}_\theta = \vec{\varepsilon}_r\cdot\vec{\varepsilon}_\varphi = \vec{\varepsilon}_\theta\cdot\vec{\varepsilon}_\varphi = 0$$

هستند. فاکتورهای مقیاس برای مختصات مزبور عبارتند از:

$$(2-21) \qquad \begin{aligned} h_r &= \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial r}\right| = \left(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \\ h_\theta &= \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta}\right| = r \\ h_\varphi &= \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi}\right| = r\sin\theta \end{aligned}$$

سطوح مختصات منحنی الخط عبارتند ازیک کره که مرکز آن واقع بر مبدأ مختصات بشعاع r_0 ،یک مخروط متقارن که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات و زاویه بین یال آن با محور oz، θ_0 است و یک نیم صفحه مار بر محور oz که با محور ox زاویه φ_0 میسازد:



شکل(۲-۲)

معادلات برداری این سطوح عبارتند از

$$
\begin{aligned}
&\vec{x} = \vec{x}(r_0, \theta, \varphi) \\
&\vec{x} = \vec{x}(r, \theta_0, \varphi) \qquad (2-22) \\
&\vec{x} = \vec{x}(r, \theta, \varphi_0)
\end{aligned}
$$

بکمک (۱۸-۲) خودرا قانع نمائید که روابط(۲۲-۲) معرف معادلات سه سطح نامبرده است.

چون یکی از سطوح مختصات مزبور کره میباشد مختصات(r, θ, φ)را مختصات منحنی الخط متعامد کروی (یا به اختصار کروی)نامند.

توجه کنید که $\hat{a}_r$ و $\hat{a}_\theta$ و $\hat{a}_\varphi$ بموجب (۱۵-۲) وبکمک روابط (۱۹-۲) و(۲۱-۲) برابر میشوند با:

$$\hat{a}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$
$$(2-23) \qquad \hat{a}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$$
$$\hat{a}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

این بردارها بترتیب برسطوح کره ،مخروط و نیم صفحه عمود میباشند. درجزوه فیزیک الکتریسیته از عمود بودن این بردارها بر سطوح نامبرده استفاده کرده ایم و $\hat{a}_i$ ها را نوشته ایم.(این ساده ترین روش استخراج $\hat{a}_i$ها برحسب بردارهای یکه مختصات کارتزین میباشد.)

بموجب (۱٦–۲) بردار $d\vec{x}$ و dl در مختصات منحنی الخط کروی با روابط:

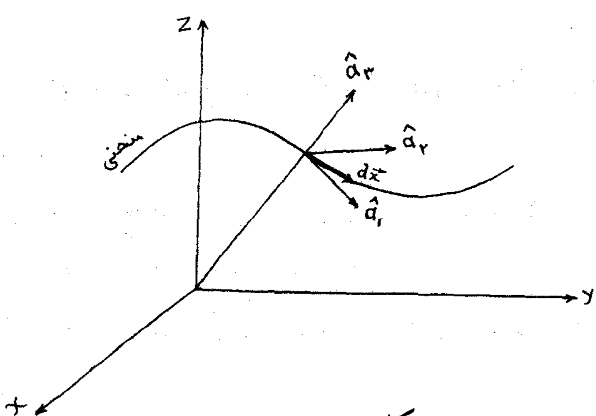
$$(2-24) \qquad d\vec{x} = dr\,\hat{a}_r + r\,d\theta\,\hat{a}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi$$
$$dl^2 = (dr)^2 + r^2 d^2\theta + r^2\sin^2\theta\,d^2\varphi$$

داده میشود.

۳ـ۲ـ معادله منحنی در مختصات منحنی الخط متعامد

هر گاه سه مختصه q^i تابعی ازیک پارامتر نظیر t باشند در این صورت بردار $\vec{x}$ به علت وابستگی به مختصات q^i تابعی از t میشود و بنا به آنچه که در فصل اول آمد هر گاه بردار x تابعی از یک پارامتر باشد معرف معادله منحنی میباشد:

$$(2-25) \qquad \vec{x} = \vec{x}(t) = \vec{x}(q^i(t))$$



شکل (۳–۲)

بنابراین رابطه:

$$(2-26)\qquad \begin{aligned} q^1 &= q^1(t) \\ q^2 &= q^2(t) \\ q^3 &= q^3(t) \end{aligned} \quad , \quad q^i = q^i(t)$$

معادله منحنی در مختصات منحنی الخط میباشد.

بردار $d\vec{x}$ ئی که ابتدا و انتهای آن واقع بر منحنی باشد از رابطه (۱۶−۲) بدست میاید اما dq^i ها هر چند بی نهایت کوچک هستند اما مقادیر دلخواه ندارند چون اگر دلخواه باشند تضمینی وجود ندارد که انتهای $d\vec{x}$ بر روی منحنی قرار گیرد. بنابراین مقادیر dq^i ها از معادله منحنی بدست میایند یعنی:

$$(2-27)\qquad dq^i = q^i(t+dt) - q^i(t) \cong \frac{dq^i}{dt}dt = \dot{q}^i\, dt$$

پس $d\vec{x}$ واقع بر منحنی برابر است با:

$$(2-28)\qquad d\vec{x} = \sum_i h_i(q)\,\dot{q}^i(t)\,\hat{a}_i(q)\,dt$$

توجه کنید که پارامتر t میتواند زمان، زاویه، طول منحنی و یا یکی از مختصات منحنی الخط باشد. در درس مکانیک معادلات منحنی حرکت ذره در مختصات منحنی الخط بر حسب پارامتر زمان داده میشود و در نتیجه بردار سرعت بموجب (۲۸−۲) برابر:

$$(2-29)\qquad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(t) = \sum_i h_i(q)\,\dot{q}^i(t)\,\hat{a}_i(q)$$

میشود. مثلا" در مختصات کروی داریم:

$$(2-30)\qquad \vec{v}(t) = \dot{r}\,\hat{a}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{a}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{a}_\varphi$$

بسیار توجه کنید که بموجب (۲۹−۲) بردار سرعت تابع درجه اولی از $\dot{q}^i$ ها است ولی میتواند تابع پیچیده ای از مختصات منحنی الخط باشد.

حال اگر بخواهیم بردار شتاب را در مختصات منحنی الخط حساب کنیم کافیست از رابطه (۲۹−۲) نسبت به زمان مشتق بگیریم:

$$(2-31)\qquad \vec{\mathcal{A}}(t) = \sum_i \dot{h}_i\,\dot{q}^i\hat{a}_i + \sum_i h_i\ddot{q}^i\hat{a}_i + \sum_i h_i\,\dot{q}^i\dot{\hat{a}}_i$$

بردار شتاب را معمولا" با سمبل $\vec{a}$ نمایش میدهند ولی در اینجا برای آنکه اشتباهی با بردارهای پایه $\hat{a}_i$ رخ ندهد آنرا با سمبل $\vec{\mathcal{A}}$ نمایش میدهیم.

از طرفی چون میبایستی مؤلفه های هر بردار منجمله بردار شتاب را در دستگاه $\{\hat{a}_i\}$ بدانیم بنابراین جمله سوم را میبایستی در دستگاه بردار پایه $\{\hat{a}_i\}$ حساب کنیم و در واقع میبایستی $d\hat{a}_i/dt$ را بر حسب $\hat{a}_i$ ها محاسبه کنیم و در این صورت است که بردار شتاب را میتوان بصورت:

$$\vec{\mathscr{A}} = \sum_i \mathscr{A}_i \hat{a}_i \tag{2-32}$$

نمایش داد. توجه میکنیم:

$$\frac{d\hat{a}_i(q)}{dt} = \sum_j \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q^j} \dot{q}^j \tag{2-33}$$

است. بنابراین هدف اصلی ما معطوف به محاسبه $\partial\hat{a}_i/\partial q^j$ میگردد. برای این منظور توجه میکنیم که:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} = h_i^2 \delta_{ij}$$

و اگر نسبت به q^k مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q^k \partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q^k \partial q^j} = \frac{\partial\left(h_i^2 \delta_{ij}\right)}{\partial q^k}$$

حال اگر در رابطه فوق جای اندیسهای i و j و k را بطور چرخه ای جابجا کنیم دو رابطه بصورت زیر خواهیم داشت:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q^i \partial q^j} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^k} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q^i \partial q^k} = \frac{\partial\left(h_j^2 \delta_{jk}\right)}{\partial q^i}$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q^j \partial q^k} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial\left(h_k^2 \delta_{ki}\right)}{\partial q^j}$$

حال اگر جملات سطر دوم را با جملات سطر سوم جمع و نتیجه را از جملات سطر اول کم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q^j \partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^k} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\left(h_j^2 \delta_{jk}\right)}{\partial q^i} + \frac{\partial\left(h_k^2 \delta_{ki}\right)}{\partial q^j} - \frac{\partial\left(h_i^2 \delta_{ij}\right)}{\partial q^k}\right\} \tag{2-34}$$

حال سمت چپ رابطه (۳۴-۲) را بر حسب $\hat{a}_i$ ها مینویسیم:

$$h_k \hat{a}_k \cdot \frac{\partial}{\partial q^j}\left(h_i \hat{a}_i\right) = h_k \frac{\partial h_i}{\partial q^j}\delta_{ki} + h_k h_i \hat{a}_k \cdot \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q^j}$$
$$= h_k \frac{\partial h_k}{\partial q^j}\delta_{ki} + h_k h_i \hat{a}_k \cdot \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q^j}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q^j}\left(h_k^2 \delta_{ki}\right) + h_k h_i \hat{a}_k \cdot \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q^j}$$

توجه کنیدازوجود δ_{ki} درجمله اول سمت راست استفاده کرده و h_i را h_k نوشته ایم.

بنابراین اگر نتیجه فوق را در (۳۴-۲) جایگزاری کنیم خواهیم داشت:

$$\hat{a}_k \cdot \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q^j} = \frac{1}{2 h_k h_i}\left\{\frac{\partial}{\partial q^i}\left(h_j^2 \delta_{jk}\right) - \frac{\partial}{\partial q^k}\left(h_i^2 \delta_{ij}\right)\right\} \equiv \left(\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q^j}\right)_k$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q^j} = \sum_k \frac{1}{2 h_k h_i}\left\{\frac{\partial}{\partial q^i}\left(h_j^2\right)\delta_{jk} - \frac{\partial}{\partial q^k}\left(h_i^2\right)\delta_{ij}\right\}\hat{a}_k \tag{2-35}$$

که بعلت وجود دلتای کرونکر ،(۳۵-۲) ساده تر شده و بصورت:

$$\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q^j} = \sum_k \left\{\frac{1}{h_i}\frac{\partial h_k}{\partial q^i}\delta_{jk} - \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_i}{\partial q^k}\delta_{ij}\right\}\hat{a}_k \tag{2-36}$$

در میاید که میتوان آنرا بصورت زیر هم نوشت:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q^j} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial q^i}\hat{a}_j && i \neq j \\ &\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q^i} = -\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}} \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_i}{\partial q^k}\hat{a}_k && i = j \end{aligned} \tag{2-37}$$

البته فرم رابطه (۳۶-۲) بدلیل تانسوری بودن آن نسبت به فرمهای (۳۷-۲) ارجح است چون اگر $\partial\hat{a}_i/\partial q^j$ را برداری نظیر $\vec{B}$ فرض کنیم سمت راست (۳۶-۲) عبارت خواهد بود از B_k توجه کنید که مؤلفه B_k در(۳۶-۲) را میبایستی بصورت α_{ij}^kنوشت. دلیل افزودن دو اندیس i و j را حتماً" میدانید؟

$$\frac{\partial \hat{a}_i}{\partial q^j} = \sum_k \alpha_{ij}^k a_k \quad , \quad \alpha_{ij}^k = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_k}{\partial q^i}\delta_{jk} - \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_i}{\partial q^k}\delta_{ij} \tag{2-38}$$

بعنوان یک مثال در مختصات کروی بموجب روابط (۳۷-۲) داریم:

$$\frac{\partial \hat{a}_r}{\partial r}=0 \quad ,\frac{\partial \hat{a}_r}{\partial \theta}=\frac{\partial r\hat{a}_\theta}{\partial r}=\hat{a}_\theta \quad ,\frac{\partial \hat{a}}{\partial \varphi}=\frac{\partial r\sin\theta}{\partial r}\hat{a}_\varphi=\sin\theta\,\hat{a}_\varphi$$

$$(2-39) \qquad \frac{\partial \hat{a}_\theta}{\partial r}=0 \quad ,\frac{\partial \hat{a}_\theta}{\partial \theta}=-\hat{a}_r \quad ,\frac{\partial \hat{a}_\theta}{\partial \varphi}=\cos\theta\,\hat{a}_\varphi$$

$$\frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial r}=0 \quad ,\frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial \theta}=0 \quad ,\frac{\partial \hat{a}_\varphi}{\partial \varphi}=-\left[\sin\theta\,\hat{a}_r+\cos\theta\,\hat{a}_\theta\right]$$

حال پس از استخراج رابطه (۳۶-۲) میتوان بردار شتاب ذره را بر حسب بردارهای پایه دستگاه منحنی الخط متعامد تجزیه نمود. بموجب (۳۱-۲) داریم:

$$\vec{\mathscr{A}}(t)=\sum_{i,j}\frac{\partial h_i}{\partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j\hat{a}_i+\sum_i h_i\ddot{q}^i\hat{a}_i+\sum_{i,j}\dot{q}^i\dot{q}^j\frac{\partial h_j}{\partial q^i}\hat{a}_j$$

$$-\sum_{i,j,k}h_i\dot{q}^i\dot{q}^j\delta_{ij}\frac{1}{h_k}\frac{\partial h_i}{\partial q^k}\hat{a}_k$$

$$\vec{\mathscr{A}}(t)=2\sum_{i,j}\frac{\partial h_i}{\partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j\hat{a}_i-\sum_{i,k}\frac{h_i}{h_k}\dot{q}^i\dot{q}^i\frac{\partial h_i}{\partial q^k}\hat{a}_k+\sum_i h_i\ddot{q}^i\hat{a}_i$$

بنابراین مؤلفه شتاب در راستای $\hat{a}_n$ برابر میشود با:

$$(2-40) \qquad \mathscr{A}_n=h_n\ddot{q}^n+\sum_i 2\frac{\partial h_n}{\partial q^i}\dot{q}^n\dot{q}^i-\sum_i\frac{h_i}{h_n}\dot{q}^i\dot{q}^i\frac{\partial h_i}{\partial q^n}$$

بعنوان مثال در مختصات کروی و بموجب (۴۰-۲) مؤلفه های شتاب با رابطه:

$$(2-41) \qquad \begin{cases}\mathscr{A}_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\\ \mathscr{A}_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\\ \mathscr{A}_\varphi=r\sin\theta\,\ddot{\varphi}+2\sin\theta\,\dot{\varphi}\dot{r}+2r\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\end{cases}$$

حال اگر خواننده از خود سؤال کند چه انگیزه فیزیکی برای استخراج بردار شتاب در مختصات منحنی الخط متعامد وجود دارد پاسخ آن در جزوه مکانیک داده شده وما باز تکرار میکنیم بعلت نوع تابع برداری بردار نیرو ،حل معادله نیوتون در مختصات منحنی الخط آسانتر است مثلاً" به مسئله دوجسم مراجعه کنید که حل آن در مختصات منحنی الخط قطبی صورت میگیرد.

همانگونه که از (۴۰-۲) مشاهده میگردد حفظ کردن بردار شتاب بر حسب مختصات منحنی الخط متعامد کاریست دشوار و بهمین منظور در بخش زیر یکی از شاهکارهای

اویلر و لاگرانژ موسوم به معادلات اویلر- لاگرانژ را معرفی می کنیم که شکل کلی تر آن در درس مکانیک تحلیلی مورد بحث قرار میگیرد.

هدف دیگر از معرفی فرمول اویلر-لاگرانژ، زایل نمودن ترس دانشجو از این فرمول است و اینکه این فرمول را از فرمول نیوتون هم میتوان بدست آورد.

٤-٢- فرمول اویلر لاگرانژ (حالت خاص):

همانگونه که گفته شد حفظ کردن فرمول نیوتون در دستگاه مختصات منحنی الخط کاریست مشکل بهمین منظور فرمول اویلر-لاگرانژ را معرفی میکنیم.

هرگاه مختصات منحنی الخط ذره با رابطه:

$$(2-42) \qquad \vec{x} = \vec{x}(q^1, q^2, q^3)$$

داده شده باشد ،طرفین فرمول را در $\partial\vec{x}/\partial q^i$ ضرب اسکالر میکنیم چنین کاری بمعنای بدست آوردن مؤلفه بردار نیرو در راستای $\hat{a}_i$ میباشد و در نتیجه خواهیم داشت:

$$(2-43) \qquad \frac{\partial\vec{x}}{\partial q^i}\cdot\vec{F} = m\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^i}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

طرف چپ رابطه (٤٣-٢) را Q_i ،مختصه i ام نیروی تعمیم یافته گویند که در مختصات منحنی الخط متعامد میتوان بصورت:

$$(2-44) \qquad Q_i = \frac{\partial\vec{x}}{\partial q^i}\cdot\vec{F} = h_i F_i$$

نوشت.بموجب (٤٤-٢) توجه میکنیم که دیمانسیون Q_i الزاما" نیرو نمیباشد چون در بعضی موارد h_i میتواند دیمانسیون طول هم داشته باشد (نظیر h_θ در مختصات کروی که در اینصورت دیمانسیون نیروی تعمیم یافته گشتاور نیرو میشود).

از طرفی توجه میکنیم که بردار سرعت در مختصات منحنی الخط با رابطه:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \sum_j \frac{\partial\vec{x}}{\partial q^j}\cdot\dot{q}^j = \sum_j h_j\,\dot{q}^j\,\hat{a}_j(q)$$

داده میشود یعنی آنکه بردار سرعت تابع درجه اولی از $\dot{q}^i$ ها اما تابع پیچیده ای از q^i میباشد بنابراین از رابطه فوق داریم:

$$(2-45) \qquad \frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}^i} = \frac{\partial x}{\partial q^j}\delta_i^j = \frac{\partial\vec{x}}{\partial q^j}$$

حال در طرف راست (۳–۴۳) ،مشتق زمانی را به جلو آورده خواهیم داشت :

$$(2-46) \qquad Q_i = \frac{d}{dt}\left(m\frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i}\cdot\vec{v}\right) - m\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i}\cdot\vec{v}$$

حال رابطه(۲–۴۵)را درجمله اول سمت راست رابطه فوق قرارمیدهیم و همچنین مشتق زمانی جمله دوم که فقط تابعی از q^i ها است را مینویسیم:

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(m\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}^i}\cdot\vec{v}\right) - m\left(\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial q^j \partial q^i}\dot{q}^j\right)\cdot\vec{v}$$

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}(\frac{1}{2}mv^2)\right) - m\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \dot{q}}\dot{q}^j\right)\cdot\vec{v}$$

پرانتز جمله دوم رابطه فوق بردار سرعت میباشد .بنابراین هرگاه انرژی جنبشی ذره را با T نشان دهیم خواهیم داشت:

$$(2-47) \qquad Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial}{\partial q^i}(T)$$

رابطه (۲–۴۷) رابطه معروف اویلر لاگرانژ میباشد .توجه کنید هرگاه نیروی برآیندوارد به ذره القائی باشد دراینصورت Q بصورت:

$$(2-48) \qquad Q_i = -\frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i}\cdot\vec{\nabla}U(q) = -\sum_i \frac{\partial x_j}{\partial q^i}\frac{\partial U}{\partial x_j} = -\frac{\partial U}{\partial q^i}$$

در میاید حال اگر لاگرانژین یک ذره را بصورت:

$$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)$$

تعریف کنیم ، چون U تابعی از q^i نمیباشد رابطه (۲–۴۷) بصورت:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial(T-U)}{\partial q^i} = 0$$

$$(2-49) \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

در میاید. قبل از اینکه مثالی درمورد کاربرد معادله اویلر لاگرانژ آورده شود خاطر نشان میسازیم که این فرمول برای تبدیلات کلی تر مختصات سیستم N ذره ای هم صادق است یعنی برای تبدیلاتی نظیر:

$$(2-50) \qquad \vec{x}_\alpha = \vec{x}_\alpha(q^1, q^2, q^3, \ldots, q^n, t)$$

نیز صادق است $\vec{x}_\alpha$ بردار مکانی ذره αام است بنابراین تبدیل (۴۲-۲) حالت خاصی است که بردار مکانی هر ذره برحسب مختصات منحنی الخط همان ذره داده شده است. برای استخراج فرمول اویلرلاگرانژ هنگامیکه تبدیلات مختصات با رابطه (۵۰-۲) داده شده است به کتاب مکانیک کلاسیک گلداشتاین مراجعه نمائید. هدف اصلی ما از ارائه فرمول اویلر- لاگرانژ این بوده است که رابطه ای ساده برای بدست آوردن مؤلفه های فرمول نیوتون در مختصات منحنی الخط استخراج کرده باشیم.

بعنوان مثال بردار سرعت ذره ای در مختصات کروی با رابطه:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{a}_r + r\dot{\theta}\hat{a}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{a}_\varphi$$

که حفظ کردن آن با لنسبه کار آسانتری است بنابراین:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

حال در رابطه (۴۷-۲) i را ۲ انتخاب میکنیم بنابراین:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = m\left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2$$

پس رابطه (۴۷-۲) برای $i=$ ۲ برابر میشود با:

$$m\left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} - r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right) = rF_\theta \qquad (2-51)$$

اگر رابطه (۵۱-۲) را بر r تقسیم کنیم مؤلفه شتاب در راستای θ بدست میاید که همان رابطه (۴۱-۲) ئی است که قبلاً استخراج شده است. محاسبه دو مؤلفه دیگر شتاب بعهده خواننده واگذار می شود. همچنین اگر خواننده علاقمندی باشید از روی فرمول (۴۷-۲) اویلر-لاگرانژ، رابطه (۴۰-۲) مؤلفه شتاب را بدست آورید. رابطه (۵۱-۲) مثال خاصی بود.

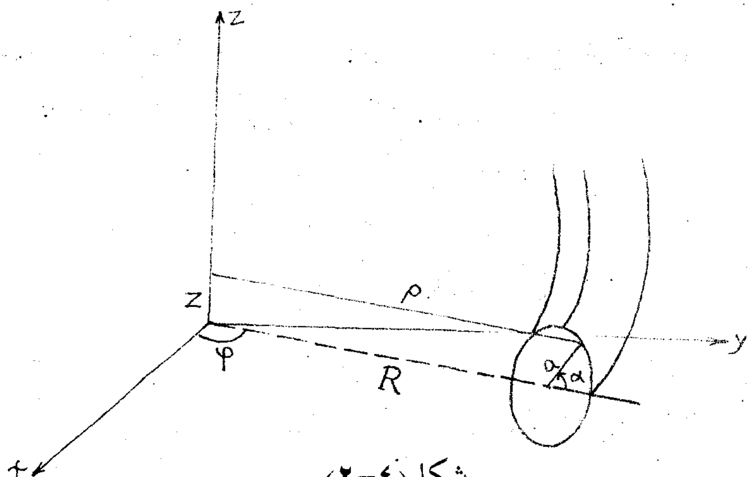
۵-۲_ معادله سطح در مختصات منحنی الخط متعامد و المان سطح واقع بر آن

چون q^i ها مختصات نقطه هستند بنابراین هرگاه رابطه ای نظیر:

$$q^i = q^i(u,v) \qquad \begin{aligned} q^1 &= q^1(u,v) \\ ,q^2 &= q^2(u,v) \\ q^3 &= q^3(u,v) \end{aligned} \qquad (2-52)$$

داشته باشیم بردار مکانی که با(۱−۲) داده شده اند تابعی ازپارامتر های u و v میشوند و در نتیجه(۲−۵۲)معرف معادله سطح در مختصات منحنی الخط میشود و u و v را پارامترهای معادله سطح نامند.

بعنوان مثال معادله سطح یک توروئید (تیوب یک کامیون)درمختصات استوانه ای با رابطه :



شکل(۲−٤)

$$(2-53)\qquad \begin{aligned} \rho &= R + a\cos\alpha \\ \varphi &= \varphi && 0 \le \varphi < 2\pi \\ z &= a\sin\alpha && 0 \le \alpha \le 2\pi \end{aligned}$$

داده میشود که پارامترها α و ϕ میباشند و همانگونه که مشاهده میکنید پارامترهای u و v می توانند زاویه ،زمان ،طول منحنی و یا یکی از مختصه ها(در اینجا مختصهφ) باشند.(توجه کنید معادله سطح توروئید در مختصات کارتزین پیچیده تر است.)

المان سطح $d\vec{a}$ حول نقطه $\vec{x}$ واقع بر سطح بموجب (۱۱۸−۱) با رابطه:

$$(2-54)\qquad d\vec{a} = \left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\right)dudv = \sum_{i,j}\left(\frac{\partial x}{\partial q^i}\times\frac{\partial x}{\partial q^j}\right)\frac{\partial q^i}{\partial u}\frac{\partial q^j}{\partial v}dudv$$

$$= \sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\, h_i h_j\, \hat{a}_k\ \frac{\partial q^i}{\partial u}\frac{\partial q^j}{\partial v}dudv$$

اگر رابطه فوق را بر h_k تقسیم و در h_k ضرب کنیم، ضریب $h_i h_j h_k$ بعلت علامت لوی سویتا مجبوراست همیشه مقدار $h_1 h_2 h_3$ (با ترتیبهای مختلف) اختیار نماید بنابراین $d\vec{a}$ برابر است با:

$$d\vec{a} = h_1 h_2 h_3 \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial q^i}{\partial u}\frac{\partial q^j}{\partial v}\frac{\hat{a}_k}{h} dudv \tag{2-55}$$

که فرم محاسبه ای (۲—۵۵) بصورت:

$$d\vec{a} = h_1 h_2 h_3 \begin{vmatrix} \dfrac{\hat{a}_1}{h_1} & \dfrac{\hat{a}_2}{h_2} & \dfrac{\hat{a}_3}{h_3} \\ \dfrac{\partial q^1}{\partial u} & \dfrac{\partial q^2}{\partial u} & \dfrac{\partial q^3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial q^1}{\partial v} & \dfrac{\partial q^2}{\partial v} & \dfrac{\partial q^3}{\partial v} \end{vmatrix} dudv \tag{2-56}$$

میباشد.

حال اگر پارامترهای u و v خود دومختصه منحنی الخط باشند یعنی معادله سطح را بصورت:

$$\begin{cases} q^1 = q^1 \\ q^2 = q^2 \\ q^3 = q^3(q^1, q^2) \end{cases} \tag{2-57}$$

داده باشند $d\vec{a}$ برای چنین سطحی بموجب (۲—۵۶) برابر میشود با:

$$d\vec{a} = h_1 h_2 h_3 \begin{vmatrix} \dfrac{\hat{a}_1}{h_1} & \dfrac{\hat{a}_2}{h_2} & \dfrac{\hat{a}_3}{h_3} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial q^3}{\partial q^1} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial q^3}{\partial q^2} \end{vmatrix} dq^1 dq^2$$

$$d\vec{a} = h_1 h_2 h_3 \left[-\frac{\hat{a}_1}{h_1}\frac{\partial q^3}{\partial q^1} - \frac{\hat{a}_2}{h_2}\frac{\partial q^3}{\partial q^2} + \frac{\hat{a}_3}{h_3} \right] dq^1 dq^2 \tag{2-58}$$

بموجب (۲—۵۸) مؤلفه $d\vec{a}$ در امتداد $\hat{a}_3$ برابر است با:

$$da_3 = h_1 h_2 dq^1 dq^2 \tag{2-59}$$

و بهمین ترتیب اگر معادله همین سطح را بصورت:

$$(2-60) \qquad \begin{cases} q^1 = q^1(q^2, q^3) \\ q^2 = q^2 \\ q^3 = q^3 \end{cases}$$

نمایش دهیم ،با محاسبات مشابه $d\vec{a}$ برابر میشود با:

$$(2-61) \qquad d\vec{a} = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\hat{a}_1}{h_1} - \frac{\hat{a}_2}{h_2}\frac{\partial q^1}{\partial q^2} - \frac{\hat{a}_3}{h_3}\frac{\partial q^1}{\partial q^3} \right] dq^2 dq^3$$

که تصویر $d\vec{a}$ در امتداد $\hat{a}_1$برابر میشود:

$$(2-62) \qquad da_1 = h_2 h_3\, dq^2 dq^3$$

میگردد و نهایتا" اگر معادله همین سطح بصورت:

$$(2-63) \qquad \begin{cases} q^1 = q^1 \\ q^2 = q^2(q^1, q^3) \\ q^3 = q^3 \end{cases}$$

نمایش دهیم ، $d\vec{a}$ برابر میشود با:

$$(2-64) \qquad d\vec{a} = h_1 h_2 h_3 \left[-\frac{\hat{a}_1}{h_1}\frac{\partial q^2}{\partial q^1} + \frac{\hat{a}_2}{h_2} - \frac{\hat{a}_3}{h_3}\frac{\partial q^2}{\partial q^3} \right] dq^1 dq^3$$

که تصویر $d\vec{a}$ در امتداد $\hat{a}_2$ برابر میشود با:

$$(2-65) \qquad da_2 = h_1 h_3\, dq^1 dq^3$$

حال بغیر از روابط (٥٦-٢)،(٥٨-٢) ،(٦١-٢)،(٦٤-٢) که بردار $d\vec{a}$ واقع بر یک سطح باپارامترهای مختلف نمایش داده شده است بکمک روابط (٥٩-٢)،(٦٢-٢)، (٦٢-٢) $d\vec{a}$ را میتوان بصورت:

$$(2-66) \qquad d\vec{a} = h_2 h_3 dq^2 dq^3 \hat{a}_1 + h_1 h_3 dq^1 dq^3 \hat{a}_2 + h_1 h_2 dq^1 dq^2 \hat{a}_3$$

نوشت .این رابطه رابا رابطه (١٣٠-١) درمختصات کارتزین مقایسه کنید در(١٣٠-١) مثلا" $dxdy$ تصویر da در صفحه xoy (یا موازی آن)میباشد حال این سؤال پیش میاید مثلا" $h_1 h_2 dq^1 dq^2$جه معنایی دارد درمقام پاسخگویی توجه میکنیم که معادلات سه سطح مختصات منحنی الخط با روابط:

$$(2-67) \qquad (a)\begin{cases} q^1 = q^1 \\ q^2 = q^2 \\ q^3 = q_0^3 \end{cases}, (b)\begin{cases} q^1 = q_0^1 \\ q^2 = q^2 \\ q^3 = q^3 \end{cases}, (c)\begin{cases} q^1 = q^1 \\ q^2 = q_0^2 \\ q^3 = q^3 \end{cases}$$

داده می شود معادلات (a) و (b) و (c) را بترتیب با (۵۷-۲) ،(۶۰-۲) ، (۶۳-۲) مقایسه کنید و خود را قانع نمایید که سطوح مختصات منحنی الخط سطوح خاصی هستند و در نتیجه $d\vec{a}$ واقع برهر یک از سطوح نامبرده با استفاده از روابط (۵۸-۲)، (۶۱-۲) و (۶۴-۲) برابر:

$$
(2-68) \qquad
\begin{aligned}
&(a) \quad d\vec{a} = h_1 h_2 \, dq^1 dq^2 \hat{a}_3 \\
&(b) \quad d\vec{a} = h_2 h_3 \, dq^2 dq^3 \hat{a}_1 \\
&(c) \quad d\vec{a} = h_1 h_3 \, dq^1 dq^3 \hat{a}_2
\end{aligned}
$$

میشود. بنابراین تصویر $d\vec{a}$ بر یک سطح کاملا" دلخواه بر روی سطوح مختصات منحنی الخط رابطه (۶۶-۲) را حاصل میکند.

برای آنکه موضوع را از نظر هندسی بهتر درک کنیم مثال زیر را میاوریم. معادله سطح دلخواهی با رابطه:

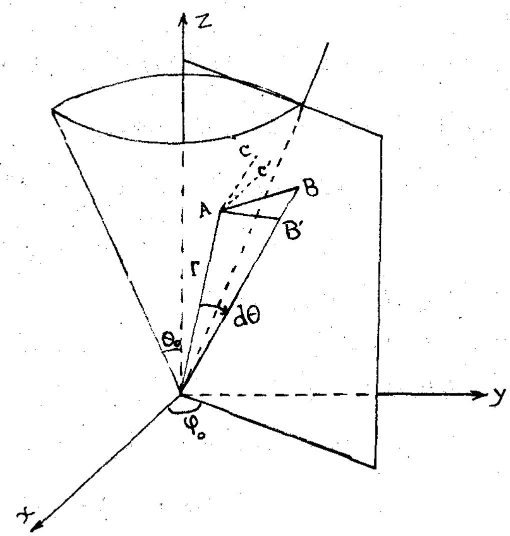
$$
(2-69) \qquad
\begin{aligned}
&r = r(\theta, \varphi) \\
&\theta = \theta \\
&\varphi = \varphi
\end{aligned}
$$

در نظر میگیریم که مختصه های θ و φ پارامتر میباشند در اینصورت معادله سطح با رابطه:

$$\bar{x} = \bar{x}(\theta, \varphi)$$

مشخص میگردد. منحنی AB که بازاء تغییرات θ و یا $\varphi=\varphi_0$ حاصل میشود را میتوان از تقاطع سطح مزبور با سطح مختصات منحنی الخط زیر بدست آورد. بشکل (۵-۲) توجه کنید.

$$
(2-70) \qquad
\begin{aligned}
&r = r \\
&\theta = \theta \\
&\varphi = \varphi_0
\end{aligned}
$$



شکل(۵-۲)

و همچنین منحنی AC که بازاء تغییراتφو $\theta = \theta_0$حاصل میشود را میتوان از تقاطع سطح مزبور با سطح مختصات منحنی الخط زیر بدست آورد بشکل (۵-۲) توجه کنید:

$$\begin{aligned} r &= r \\ \theta &= \theta_0 \\ \varphi &= \varphi \end{aligned} \qquad (2-71)$$

توجه کنید $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ دو بردار $d\vec{x}_\theta$ و $d\vec{x}_\varphi$ هستند که برای محاسبه $d\vec{a}$ واقع بر سطح مورد استفاده قرار میگیرند.

از طرفی AB' و AC' دو بردار $d\vec{x}_\theta$ و $d\vec{x}_\varphi$ هستند که در اولی نه تنها مختصه φبلکه مختصه r نیز ثابت و در دومی نه تنها مختصهθبلکه مختصه r نیز ثابت است. این دو $d\vec{x}$ عمود بر مخروط با زاویه θ_0و صفحه ای که با $\vec{ox}$ زاویهφ_0میسازد، میباشند و طول هر یک $(rd\theta)$ و $(r\sin\theta d\varphi)$ میباشد.

توجه کنید AB' و AC' بترتیب تصاویر $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ نیز هستند بنابراین تصویر $d\vec{a}$ بر روی سطح کره مربعی باضلاع $\vec{AB'}$ و $\vec{AC'}$ میشود ازطرفی بجای آنکه سطح دلخواه با معادله (۶۹-۲) داشته باشیم سطح خاص (کره):

$$\begin{aligned} r &= r_0 \\ \theta &= \theta \\ \varphi &= \varphi \end{aligned} \qquad (2-72)$$

درنظرمیگیریم دراینصورت $\vec{AB'}$ و $\vec{AC''}$ دو بردار $\vec{dx_\theta}$ و $\vec{dx_\varphi}$ئی هستند که برای محاسبه $\vec{da}$ واقع براین سطح مورد استفاده قرارمیگیرداین سطح (کره) یکی ازسطوح مختصات منحنی الخط است با توجه بشکل (۵-۲) متوجه هستیم که $\vec{AB'}$ و $\vec{AC''}$ تصاویر $\vec{AB}$و$\vec{AC}$ بر روی سطح کره معادله آن با رابطه (۷۲-۲) داده شده است می باشد. حاصلضرب برداری $\vec{AB}$ در $\vec{AC}$ مقدار $\vec{da}$ بر سطح دلخواه اما حاصلضرب $\vec{AB'}$ در $\vec{AC''}$ مقدار $\vec{da}$ بر روی سطح کره را میدهد بنابراین تصویر $\vec{da}$ واقع بر سطح دلخواه بر روی سطح کره برابر da واقع برسطح کره میشوداین همان نتیجه ای است که در(۶۶-۲) بروش تحلیلی بدست آوردیم.

حال بعنوان مثال می خواهیم مساحت یک سطح که معادله آن در مختصات کروی با رابطه زیر داده شده است حساب کنیم:

$$(2-73)\qquad \begin{aligned} r &= 2a\cos\theta \\ \theta &= \theta \qquad\qquad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2} \\ \varphi &= \varphi \qquad\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \end{aligned}$$

$\vec{da}$ چه بموجب (۵۶-۲)و یا (۶۱-۲) که فرم ساده تر شده (۵۶-۲) میباشد برابر میشود با:

$$d\bar{a} = r^2 \sin q \left\{ \hat{a}_r + \frac{\hat{a}_q}{r} 2a\sin q \right\} dq\, dj$$

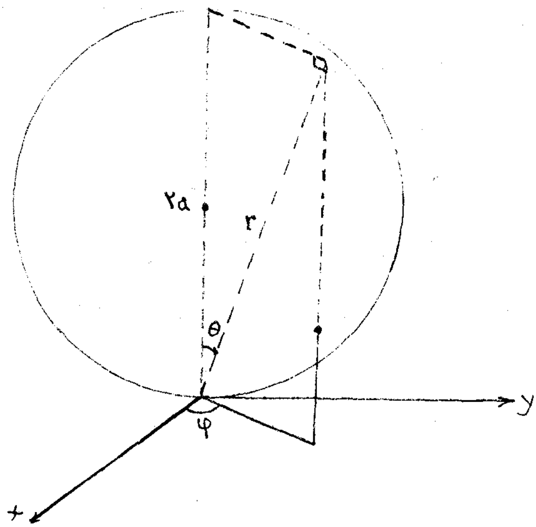
$$(2-74)\qquad d\bar{a} = 4a^2\cos^2\theta\sin\theta\{\hat{a}_r + \hat{a}_\theta tg\,\theta\}d\theta d\varphi$$

$$(2-75)\qquad da = 4a^2\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$(2-76)\qquad A = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 4a^2\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi a^2$$

براستی سطحی که با معادله (۷۳-۲) نمایش داده شده است به چه شکل است ؟

با کمی دقت متوجه میشویم که سطح مزبور کره ای است بشعاع a که محور oz مار بر مرکز آن و صفحه xoy بر آن مماس است بشکل (۶-۲) توجه نمایید :



شکل(۶-۲)

روابـط (۷۴-۲)،(۷۵-۲) روابـط بسیار آموزنـده ای مـی باشـند چـه بسـیاری از دانشجویان چنین میپندارند که $d\vec{a}$ و da واقع بر سطح کره همیشه با روابط:

$$d\bar{a} = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{a}_r \qquad , da = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \qquad (2-77)$$

داده میشود در صورتیکه میبایستی توجه کنیم روابـط (۷۷-۲) بـرای کـره ای اسـت کـه معادله آن با رابطه:

$$\begin{aligned} r &= a \\ \theta &= \theta \\ \varphi &= \varphi \end{aligned} \qquad (2-78)$$

داده شده باشد یعنی معادله سطح تعیین کننده فرم تابع $d\vec{a}$ و da است.

از روی شکل (۶-۲) خود را قانع نمایید که da بر روی کره شکل (۶-۲) هـم در جهـت a_θو هم در جهت a_φمؤلفه دارد.

حال بعنوان تمرین نشان دهید که $d\vec{a}$ واقع بر سطح (صفحه به ارتفاع h) بمعادله:

$$
(2-79) \qquad \begin{cases} r = \dfrac{h}{\cos\theta} \\ \theta = \theta \\ \varphi = \varphi \end{cases}
$$

با رابطه:

$$
(2-80) \qquad d\vec{a} = \frac{h^2}{\cos^3\theta}\sin\theta\left\{\hat{a}_r\cos\theta - \hat{a}_\theta\sin\theta\right\}d\theta d\varphi
$$

داده میشود . داخل آکولاد چه جهتی را مشخص میکند؟(جهت $\hat{k}$ ؟)

همچنین بعنوان تمرین دیگرمساحت سطح یک توروئید که معادله آن بارابطه(۳۵−۲) داده شده است ،حساب کنید .

جواب:

$$
(2-81) \qquad da = a(R + a\cos\alpha)d\alpha\ d\varphi,\ A = 4\pi^2 aR
$$

٦_۲_ معادله فضا در مختصات منحنی الخط و المان حجم حول یک نقطه

هر چند که گفتیم q^iها مختصات یک نقطه درفضا را مشخص میکنند و درنتیجه رابطه:

$$
(2-82) \qquad \begin{aligned} q^1 &= q^1 \\ q^2 &= q^2 \\ q^3 &= q^3 \end{aligned}
$$

معادله فضا میباشد ،اما میتوان معادله فضا را بصورت کلی تر درمختصات منحنی الخط متعامد نوشت و آن بصورت:

$$
(2-83) \qquad q^i = q^i(u, v, w)
$$

میباشد که درآن (u,v,w)پارامترهای معادله فضا درمختصات منحنی الخط می باشند . چون $\vec{x}$ تابعی از q^i ها وq^iها تابعی از پارامترها گردیده است در اینصورت $\vec{x}$ تابعی از w وvوu میگردد که بموجب رابطه (۱٤۰−۲):

$$
(2-84) \qquad dv = \left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial w}dudvdw
$$

$$
= \sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^i}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^j}\right)\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^k}\frac{\partial q^i}{\partial u}\frac{\partial q^j}{\partial v}\frac{\partial q^k}{\partial w}dudvdw
$$

$$= \sum_{i,j,k} h_i\, h_j\, h_k \left(\hat{a}_i \times \hat{a}_j\right)\cdot \hat{a}_k \frac{\partial q^i}{\partial u}\frac{\partial q^j}{\partial v}\frac{\partial q^k}{\partial w} dudvdw$$

$$= \sum_{i,j,k,m} h_i\, h_j\, h_k\, \varepsilon_{ijm}\, \hat{a}_m \cdot \hat{a}_k \frac{\partial q^i}{\partial u}\frac{\partial q^j}{\partial v}\frac{\partial q^k}{\partial w} dudvdw$$

در رابطه فوق بعلت وجود علامت لوی سویتا $(h_i h_j h_k)$ فقط میتواند بصورت $(h_1 h_2 h_3)$ (و با ترتیبهای مختلف)ظاهر شود در اینصورت dv برابر

$$(2-85) \qquad dv = h_1\, h_2\, h_3 \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial q^i}{\partial u}\frac{\partial q^j}{\partial v}\frac{\partial q^k}{\partial w} dudvdw$$

میشود که فرم محاسباتی آن بصورت:

$$(2-86) \qquad dv = h_1 h_2 h_3 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial q^1}{\partial u} & \dfrac{\partial q^2}{\partial u} & \dfrac{\partial q^3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial q^1}{\partial v} & \dfrac{\partial q^2}{\partial v} & \dfrac{\partial q^3}{\partial v} \\ \dfrac{\partial q^1}{\partial w} & \dfrac{\partial q^2}{\partial w} & \dfrac{\partial q^3}{\partial w} \end{vmatrix} dudvdw$$

در میاید .توجه میکنیم که در نوشتن (۸۶–۲) $\partial q^i/\partial u$ را مؤلفه i ام برداری نظیر A و.....و $\partial q^i/\partial w$ مؤلفه k ام برداری نظیر C فرض کردیم وآنچه که در(۸۵–۲) وجود دارد حاصلضرب مختلط سه بردار $\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$ میباشد که بصورت(۸۶–۲)نوشته شده است.هرگاه پارامترهای معادله فضا خود مختصات منحنی الخط باشد یعنی معادله فضا با رابطه:

$$(2-87) \qquad q^i = q^i \qquad i = 1.2.3$$

داده شود dv بموجب (۸۶–۲) برابر:

$$(2-88) \qquad dv = h_1 h_2 h_3\, dq^1 dq^2 dq^3$$

میگردد.

اگر رابطه (۱٤۰–۱) و رابطه (۸۶–۲) را توأم با این واقعیت که:

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial q^1} \times \frac{\partial \bar{x}}{\partial q^2}\right)\cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial q^3} = h_1 h_2 h_3 \left(\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\right)\cdot \bar{a}_3 = h_1 h_2 h_3$$

است در نظر بگیریم اتحاد زیرین حاصل میشود:

$$(2-89)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q^1} & \frac{\partial y}{\partial q^1} & \frac{\partial z}{\partial q^1} \\ \frac{\partial x}{\partial q^2} & \frac{\partial y}{\partial q^2} & \frac{\partial z}{\partial q^2} \\ \frac{\partial x}{\partial q^3} & \frac{\partial y}{\partial q^3} & \frac{\partial z}{\partial q^3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial u} & \frac{\partial q^2}{\partial u} & \frac{\partial q^3}{\partial u} \\ \frac{\partial q^1}{\partial v} & \frac{\partial q^2}{\partial v} & \frac{\partial q^3}{\partial v} \\ \frac{\partial q^1}{\partial w} & \frac{\partial q^2}{\partial w} & \frac{\partial q^3}{\partial w} \end{vmatrix}$$

که کافیست $dudvdw$ را از طرفین (۸۶–۲) حذف کنید. رابطه (۸۹–۲) قوانین تبدیل دترمینان ژاکوبی را بیان میکند.

ممکن است خواننده مایل باشد مثالی از معادله فضا در مختصات منحنی الخط و بر حسب پارامترهای (u,v,w) آورده شود. اگر کمی توجه نمائید در مختصات کروی اگر پارامترها (ρ,φ,z) انتخاب شوند معادله فضا با رابطه:

$$(2-90)\qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2+z^2} \\ \theta &= arctg\frac{\rho}{z} \\ \varphi &= \varphi \end{aligned}$$

داده میشود در اینصورت dv بموجب (۸۶–۲) (و با محاسبات طولانی) برابر

$$(2-91)\qquad dv = \rho d\rho d\varphi dz$$

می گردد. اما توجه کنید درحالت کلی رابطه (۸۳–۲) بمعنای تبدیل از یک دستگاه مختصات منحنی الخط به دستگاه مختصات منحنی الخط دیگر نمیباشد. بعنوان مثال اگر رابطه (۵۳–۲) را بصورت زیر اصلاح کنیم:

$$(2-90)\qquad \begin{aligned} \rho &= R+u\cos\alpha & 0 &< u < a \\ \varphi &= \varphi & 0 &\le \varphi \le 2\pi \\ z &= u\sin\alpha & 0 &\le \alpha \le 2\pi \end{aligned}$$

رابطه فوق معادله فضا را حاصل میکند و برای محاسبه انرژی مغناطیسی در یک سیم پیچ توروئیدی شکل معادله فضا با پارامترهای فوق ایده آل است چه بموجب (۸۶–۲) داریم:

$$(2-91)\qquad dv = \rho \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -u\sin\alpha & 0 & u\cos\alpha \end{vmatrix} dud\varphi d\alpha = (R+u\cos\alpha)udud\varphi d\alpha$$

و اگر میدان اندکسیون مغناطیسی درون توروئید با رابطه:

$$\vec{B} = \frac{\beta}{\rho}\hat{\varphi}$$

داده شده باشد در اینصورت انرژی مغناطیسی برابر:

$$W = \frac{1}{2\mu}\int B^2 dv = \frac{B^2}{2\mu}\int_{u=0}^{a}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{(R+u\cos\alpha)}{(R+u\cos\alpha)^2}u\,du\,d\varphi\,d\alpha$$

میشود که با در نظر گرفتن انتگرال:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

انرژی مغناطیسی متناسب میشود با:

$$(2-92) \qquad W = k\left[R-\sqrt{R^2-a^2}\right]$$

۲_۷_ محاسبه گرادیان یک کمیت اسکالر،دیورژانس یک میدان برداری لاپلاسین میدان اسکالر وکرل (تاو) میدان برداری در مختصات منحنی الخط متعامد

در فصل اول مشاهده کردیم که گرادیان یک کمیت اسکالر از محاسبه اختلاف تابع اسکالر در دو نقطه بسیار نزدیک بهم حاصل شده است یعنی:

$$(2-93) \qquad d\phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})\cdot d\vec{x}$$

حال اگر این دو نقطه را در مختصات منحنی الخط متعامد بصورت:

$$(q^1,q^2,q^3) \quad , \quad (q^1+dq^1,q^2+dq^2,q^3+dq^3)$$

نشان دهیم در اینصورت$d\varphi(\vec{x})$برابر میشود با:

$$(2-94) \quad d\phi(\vec{x}) \equiv d\phi(q) = \phi\left(q^1+dq^1,q^2+dq^2,q^3+dq^3\right)-\phi(q^1,q^2,q^3)$$
$$= \sum_i \frac{\partial\phi}{\partial q^i}dq^i$$

و اگر در سمت راست رابطه (۲–۹۳) $d\vec{x}$ را برحسب مختصات منحنی الخط ،رابطه (۲–۱۶) ،قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\sum_i \frac{\partial\phi}{\partial q^i}dq^i = \sum_i\left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot h_i\hat{a}_i\,dq^i$$

چون dq^j ها اختیاری هستند می توان مثلا" تمامی dq^i ها را به استثنای یک dq^j صفر اختیارنمود و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\phi}{\partial q^j} = h_j\left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\hat{a}_j$$

بنابراین مؤلفه jام گرادیان تابع اسکالر برابر میشود با:

$$(2-95) \qquad \left(\vec{\nabla}\phi\right)_j = \frac{1}{h_j}\frac{\partial\phi}{\partial q^j}$$

پس گرادیان تابع اسکالر در مختصات منحنی الخط متعامد برابر میشود با:

$$(2-96) \qquad \vec{\nabla}\phi(q^1,q^2,q^3) = \sum_i \frac{1}{h_i(q)}\frac{\partial\phi}{\partial q^i}\hat{a}_i$$

بعنوان مثال در مختصات کروی گرادیان میدان اسکالر ϕ برابر میشود با:

$$(2-97) \qquad \vec{\nabla}\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{a}_\varphi$$

بعنوان تمرین هرگاه تابع پتانسیل الکتریکی یک دو قطبی ساده با رابطه:

$$\phi(r,\theta) = \frac{KP\cos\theta}{r^2}$$

داده شود میدان الکتریکی برابر میشود با:

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = -\vec{\nabla}\phi = KP\left\{\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{a}_r + \frac{\sin\theta}{r^2}\hat{a}_\theta\right\}$$

هرگاه تابع اسکالر φ که تابع دلخواهی از q^3 و q^2 و q^1 میباشد به ساده ترین صورت یعنی بصورت:

$$(2-98) \qquad \phi = q^j$$

داده شده باشد در اینصورت بموجب (۹۶-۲) داریم:

$$(2-99) \qquad \vec{\nabla}q^j = \frac{1}{h_j}\hat{a}_j$$

میگردد که میدانیم بر سطح $q^j = q_0^j$ عمود میباشد و بقولی بیان مجدد این واقعیت است که بردار $\hat{a}_j$ بر سطح $q^j = q_0^j$ عمود است. بعنوان مثال:

$$\vec{\nabla}\theta = -\frac{1}{r}\hat{a}_\theta$$

بر سطح مخروط با زاویه $\theta=\theta_0$ عمود است.

حال اتحادهایی زیرین که برای استخراج دیورژانس و کرل میدان برداری به روش ابتکاری مورد استفاده قرار میگیرد را بدست میاوریم میدانیم که:

$$I=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g\right)=0 \qquad (2-100)$$

چه برای اثبات داریم:

$$\begin{aligned}I&=\sum_i\partial_i\left(\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g\right)_i=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\,\partial_i\left[\left(\partial_j f\right)\left(\partial_k g\right)\right]\\&=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\left[\partial_i\partial_j f\partial_k g+\partial_j f\,\partial_i\partial_k g\right]\end{aligned}$$

اما هر یک از جملات فوق صفر هستند چون داریم:

$$\begin{aligned}&I_1=\sum_{i,j}\varepsilon_{ijk}\,\partial_i\,\partial_j f=\sum_{i,j}\varepsilon_{jik}\,\partial_j\,\partial_i f=-\sum_{i,j}\varepsilon_{ijk}\,\partial_i\,\partial_j f\\&I_1=-I_1\Rightarrow 2I_1=0\end{aligned}$$

بنابراین اتحاد (۲-۱۰۰) برقرار است.

حال با استفاده از روابط (۲-۱۰۰)و(۲-۹۹) داریم:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}q^i\times\vec{\nabla}q^j\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{a}_i}{h_i}\times\frac{\hat{a}_j}{h_j}\right)=0 \qquad i\neq j$$

که با در نظر گرفتن حاصلضرب برداری بردارهای پایه،رابطه فوق بصورت:

$$\sum_k\varepsilon_{ijk}\,\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{a}_k}{h_i h_j}\right)=0 \qquad i\neq j$$

در میاید که میتوان آنرا بصورت زیرنوشت:

$$\sum_k\varepsilon_{ijk}\,\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{a}_k h_k}{h_i h_j h_k}\right)=0 \qquad i\neq j$$

بعلت وجود علامت لوی سویتا شکل دیگر رابطه فوق بصورت:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{a}_k h_k}{h_1 h_2 h_3}\right)=0 \qquad k=1,2,3 \qquad (2-101)$$

میباشد .یعنی داریم:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{a}_1 h_1}{h_1 h_2 h_3}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{a}_2 h_2}{h_1 h_2 h_3}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{a}_3 h_3}{h_1 h_2 h_3}\right)=0$$

اتحاد دیگری که میتوان ثابت کرد اینست که میدانیم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f=0$$

بنابراین داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}q^i=0$$

که با استفاده از (۹۹–۲) اتحاد زیر بدست میاید:

$$\vec{\nabla}\times\frac{\hat{a}_i}{h_i}=0 \qquad i=1,2,3 \tag{2-102}$$

حال برای استخراج دیورژانس یک میدان برداری از حیله زیرین استفاده میکنیم:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\sum_i\vec{\nabla}\cdot\left(A_i\hat{a}_i\right)$$

اما بجای تجزیه $\vec{A}$ بصورت فوق با استفاده از اتحاد (۱۰۱–۲) آنرا بصورت:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\sum_i\left[\left(\frac{A_i h_1 h_2 h_3}{h_i}\right)\frac{\hat{a}_i h_i}{h_1 h_2 h_3}\right]$$

تجزیه میکنیم. انگیزه چنین کاری اینست که در اتحاد:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{B}\right)=\vec{\nabla}f\cdot\vec{B}+f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$$

$\vec{B}$ آنگونه باشد که $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ برابر صفر گردد. بنابراین داریم:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\sum_i\vec{\nabla}\left(\frac{A_i h_1 h_2 h_3}{h_i}\right)\cdot\frac{\hat{a}_i h_i}{h_1 h_2 h_3}$$

حال با استفاده از فرمول گرادیان تابع اسکالر در مختصات منحنی الخط متعامد داریم:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\sum_{i,j}\frac{1}{h_j}\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{A_i h_1 h_2 h_3}{h_i}\right)\hat{a}_j\cdot\frac{\hat{a}_i h_i}{h_1 h_2 h_3}$$

که با انجام ضرب اسکالر دو بردار پایه خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_i\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{A_i h_1 h_2 h_3}{h_i}\right) \tag{2-103}$$

اگر $h_1h_2h_3$ را با نام با مسمی V_{ol} نامگذاری و یا با علامت Δ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$(2-104)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{V_{ol}}\sum_i\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{A_iV_{ol}}{h_i}\right)\equiv\frac{1}{\Delta}\sum_i\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{A_i\Delta}{h_i}\right)\ ,V_{ol}\equiv\Delta=h_1h_2h_3$$

بخاطرسپردن دیورژانس بفرم (۲–۱۰۴) کار آسانی است .بعنوان مثال در مختصات کروی دیورژانس میدان برداری برابر:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(A_rr^2\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta r^2\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi r\right)\right\}$$

$$(2-105)\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(A_rr^2\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

میشود .محاسبه لاپلاسین یک کمیت اسکالر از روی رابطه (۲–۱۰۳) و یا (۲–۱۰۴) کار بسیار آسانی است یعنی:

$$\nabla^2\phi=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi=\frac{1}{\Delta}\sum_i\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\left(\vec{\nabla}\phi\right)_i}{h_i}\Delta\right)$$

که بکمک (۲–۹۵) داریم:

$$(2-106)\qquad \nabla^2\phi=\frac{1}{\Delta}\sum_i\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\frac{1}{h_i^2}\frac{\partial\phi}{\partial q^i}\Delta\right]\qquad ,\Delta=h_1h_2h_3$$

بعنوان مثال لاپلاسین تابع اسکالر در مختصات کروی برابر میشود با:

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}r^2\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin\theta}\right)\right\}$$

$$(2-107)\qquad \nabla^2\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

حال برای استخراج کرل میدان برداری چنین میکنیم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\sum_j\vec{\nabla}\times\left(A_j\hat{a}_j\right)$$

اما بجای تجزیه $\vec{A}$ بصورت فوق با استفاده از اتحاد (۲–۱۰۲) آنرا بصورت:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\sum_j\vec{\nabla}\times\left(A_jh_j\frac{\hat{a}_j}{h_j}\right)$$

تجزیه میکنیم ،انگیزه چنین کاری آنست که در اتحاد:

$$\vec{\nabla}\times\left(f\,\vec{B}\right)=\left(\nabla f\right)\times\vec{B}+f\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

$\vec{B}$ آنگونه باشد که $\vec{\nabla}\times\vec{B}$ برابر صفر گردد. بنابراین داریم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\sum_{j}\vec{\nabla}\left(A_j h_j\right)\times\left(\frac{\hat{a}_j}{h_j}\right)$$

که با استفاده از فرمول گرادیان خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\sum_{j,i}\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(A_j h_j\right)\hat{a}_i\times\frac{\hat{a}_j}{h_j}$$

که با جایگزاری ضرب برداری دو بردار یکه خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\sum_{i,j,k}\frac{1}{h_i h_j}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(A_j h_j\right)\hat{a}_k$$

اگر صورت و مخرج رابطه فوق را در h_k ضرب کنیم و مانند سابق از وجود علامت لوی سویتا استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$(2-108)\qquad \vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(A_j h_j\right)\hat{a}_k h_k$$

فرم محاسباتی (۱۰۶-۲) بصورت:

$$(2-109)\qquad \vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}\hat{a}_1h_1 & \hat{a}_2h_2 & \hat{a}_3h_3\\ \dfrac{\partial}{\partial q^1} & \dfrac{\partial}{\partial q^2} & \dfrac{\partial}{\partial q^3}\\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3\end{vmatrix}$$

میباشد بعنوان مثال کرل میدان برداری در مختصات کروی برابر:

$$(2-109-a)\qquad \vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & r\hat{a}_\theta & r\sin\theta\hat{a}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}$$

که فرم ساده شده آن در اکثر هندبوکهای ریاضی نوشته شده است .

توجه میکنیم روابط (۱۰۳-۲) و(۱۰۸-۲) که دیورژانس و کرل میدان برداری را بدست میدهد بروش ابتکاری استخراج شده است. هرگاه بخواهیم این روابط را ازروی اصول اولیه استخراج کنیم چنین میکنیم :

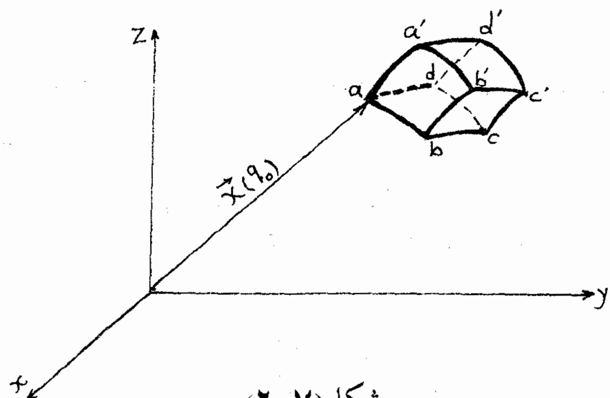
برای بدست آوردن دیورژانس میدان برداری در نقطه (q_0^1,q_0^2,q_0^3) از رابطه اساسی (۲٤۱-۱) استفاده میکنیم:

$$\vec{\nabla}\cdot A(\vec{x}_0)=\lim_{dv\to 0}\frac{\oint A(\vec{x})\cdot d\vec{a}}{dv}$$

المان حجم کوچکی را که در اینجا انتخاب میکنیم همان مکعبی است که سه ضلع تشکیل دهنده کنج آن از روابط:

$$\frac{\partial\vec{x}(q_0)}{\partial q^1}dq^1,\frac{\partial\vec{x}(q_0)}{\partial q^2}dq^2,\frac{\partial\vec{x}(q_0)}{\partial q^3}dq^3 \qquad (2-110)$$

بدست میاید. بشکل (۷-۲) مراجعه کنید:



شکل(۷-۲)

بهتر بود که نقطه (q_0^1,q_0^2,q_0^3) در مرکز این مکعب قرار می گرفت همانگونه که برای محاسبه دیورژانس میدان برداری در مختصات کارتزین صورت گرفت اما بعلت آنکه محاسبه کمی طولانی می گردد انتخاب نقطه $\vec{x}(q_0)$ همانند شکل (۷-۲) ایراد اساسی ندارد.

فلوی گذرنده از شش وجه مکعب را دو بدو محاسبه میکنیم مثلاً" فلوی میدان برداری گذرنده ازوجوه $(abcd)$ و $(a'b'c'd')$ را درنظر میگیریم مساحت وجوه نامبرده مساوی نیستند چون $d\vec{a}$ از رابطه:

$$d\vec{a}=\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^1}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^2}\right)dq^1\,dq^2=h_1(q)h_2(q)\hat{a}_3(q)\,dq^1\,dq^2$$

بدست میاید که برای وجوه نامبرده ،میبایستی بترتیب آنها در نقاط (q_0^1,q_0^2,q_0^3) و $(q_0^1,q_0^2,q_0^3+dq^3)$ ارزشیابی نمود.

با در نظر گرفتن اینکه $d\vec{a}$ میبایستی عمود بر سطح بسته و بطرف خارج آن باشد در اینصورت مجموع فلوی گذرنده از دو سطح مزبور برابر میشود با:

$$(2-111)\quad d\Phi_1+d\Phi_2=\left\{-\vec{A}(q)h_1(q)h_2(q)\hat{a}_3(q)\Big|_{q_0^1,q_0^2,q_0^3}+\right.$$

$$\left.\vec{A}(q)h_1(q)h_2(q)\hat{a}_3(q)\Big|_{q_0^1,q_0^2,q_0^3+dq^3}\right\}dq^1dq^2$$

که اگر ضرب اسکالر دو بردار را انجام دهیم و سپس مقدار تابع اسکالر $A_3h_1h_2$ را در نقطه $q_0^3+dq^3$ حول نقطه q_0^3 بسط دهیم خواهیم داشت:

$$d\Phi_1+d\Phi_2=\{-A_3(q_0)h_1(q_0)h_2(q_0)+A_3(q_0)h_1(q_0)h_2(q_0)+$$

$$dq^3\frac{\partial}{\partial q^3}\left(A_3(q_0)h_1(q_0)h_2(q_0)\right)+\cdots\}dq^1dq^2$$

$$(2-112)\qquad d\Phi_1+d\Phi_2=\frac{\partial}{\partial q^3}\Big(A_3(q_0)h_1(q_0)h_2(q_0)\Big)dq^1dq^2dq^3+\ldots$$

که جملات نقطه چین جملات از بی نهایت کوچک مرتبه چهارم به بالاست رابطه (۱۱۲-۲) را میتوان بصورت:

$$(2-113)\qquad d\Phi_1+d\Phi_2=\frac{\partial}{\partial q^3}\left[\frac{A_3}{h_3}h_1h_2h_3\right]dq^1dq^2dq^3+\ldots$$

نوشت. بروش مشابه محاسبات فلوی میدان برداری $\vec{A}$ از دو زوج وجوه دیگر نتایج:

$$(2-114)\qquad d\Phi_3+d\Phi_4=\frac{\partial}{\partial q^1}\left[\frac{A_1}{h_1}h_1h_2h_3\right]dq^1dq^2dq^3+\ldots$$

$$(2-115)\qquad d\Phi_5+d\Phi_6=\frac{\partial}{\partial q^2}\left[\frac{A_2}{h_2}h_1h_2h_3\right]dq^1dq^2dq^3+\cdots$$

حاصل می کند. اگر این نتایج را دررابطه اساسی (۲٤۱-۱) قرار دهیم نظربااینکه المان حجم با رابطه (۸۸-۲) داده شده است خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\sum_i\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\frac{A_i}{h_i}h_1h_2h_3\right]dq^1dq^2dq^3+\cdots}{h_1h_2h_3dq^1dq^2dq^3}$$

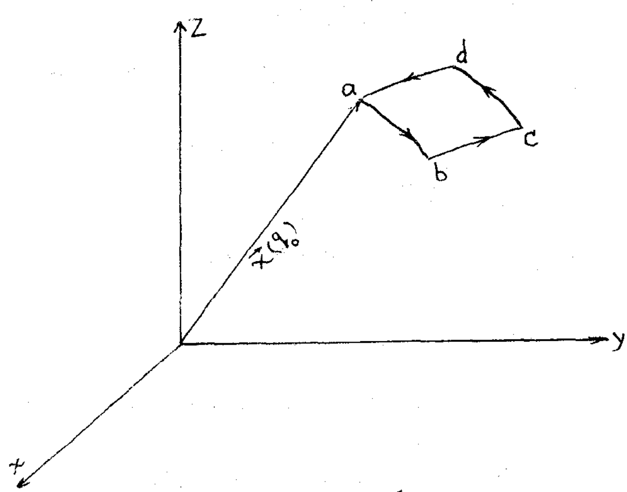
$$(2-116)\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_i\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\frac{A_i}{h_i}h_1h_2h_3\right]$$

که همان نتیجه (۳۰۱-۲) است.

برای محاسبه کرل میدان برداری میتوان از فرمول اساسی(۳۰۲-۱) استفاده نمود. برای این منظور همانگونه که برای محاسبه کرل میدان برداری درمختصات کارتزین صفحه مربع بسیار کوچک را به موازات یکی از صفحات مختصات کارتزین مثلاً نظیر صفحه zoy انتخاب نمودیم در این جا این مربع کوچک رابر روی یکی از سطوح مختصات منحنی الخط متعامد انتخاب میکنیم. بعنوان مثال ما سطح $q^{3}=q_0^{3}$ را درنظر گرفته ومربع کوچک بر روی آن منطبق میکنیم. رئوس این مربع کوچک مطابق شکل (۸-۲) واقعند بر نقاط به مختصات:

$$(2-117)\qquad \begin{aligned} &a:\left(q_0^1,q_0^2,q_0^3\right),b:\left(q_0^1+dq^1,q_0^2,q_0^3\right)\\ &c:\left(q_0^1+dq^1,q_0^2+dq^2,q_0^3\right),d:\left(q_0^1,q_0^2+dq^2,q_0^3\right)\end{aligned}$$

توجه نمائید که مختصه q^3 تمامی این نقاط برابر هستند و برای سهولت در تحریر از نوشتن آن در محاسبات زیر خودداری میکنیم اما در آخر محاسبات این مختصه را دو مرتبه بحساب میاوریم.



شکل(۸-۲)

حال گردش میدان برداری بر روی این مربع کوچک و درجهت مشخص شده را حساب کنیم :

$$(2-118)\quad dI = \vec{A}(q_0)\cdot d\vec{x}_1 + \vec{A}(q_0^1+dq^1, q_0^2)\cdot d\vec{x}_2 + \vec{A}(q_0^1+dq^1, q_0^2+dq^2)\cdot d\vec{x}_3 + \vec{A}\left(q_0^1, q_0^2+dq^2\right)\cdot d\vec{x}_4$$

بردارهای $d\vec{x}_1$, $d\vec{x}_2$, $d\vec{x}_3$, $d\vec{x}_4$ بطریق زیر محاسبه میشوند:

$$(2-119)\quad d\vec{x}_1 = \vec{x}\left(q_0^1+dq^1, q_0^2\right) - \vec{x}\left(q_0^1, q_0^2\right) = \frac{\partial\vec{x}}{\partial q^1}dq^1 = h_1(q)\hat{a}_1(q)\Big|_{\substack{q^1=q_0^1\\ q^2=q_0^2}} dq^1$$

$$d\vec{x}_2 = \vec{x}\left(q_0^1+dq^1, q_0^2+dq^2\right) - \vec{x}\left(q_0^1+dq^1, q_0^2\right) = \frac{\partial\vec{x}}{\partial q^2}dq^2 = h_2(q)\hat{a}_2(q)\Big|_{\substack{q^1=q_0^1+dq^1\\ q^2=q_0^2}} dq^2$$

$$d\vec{x}_3 = \vec{x}\left(q_0^1, q_0^2+dq^2\right) - \vec{x}\left(q_0^1+dq^1, q_0^2+dq^2\right) = -\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^1}dq^1 = -h_1(q)\hat{a}_1(q)\Big|_{\substack{q^1=q_0^1\\ q^2=q_0^2+dq^2}} dq^1$$

$$d\vec{x}_4 = \vec{x}\left(q_0^1, q_0^2\right) - \vec{x}\left(q_0^1, q_0^2+dq^2\right) = -\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^2}dq^2 = -h_2(q)\hat{a}_2(q)\Big|_{\substack{q^1=q_0^1\\ q^2=q_0^2}} dq^2$$

حال توجه میکنیم بردار $d\vec{x}_3$ همان بردار $\hat{a}_1$ (با ضریبی) در نقطه $q^1=q_0^1$ و $q^2=q_0^2+dq^2$ است ولی نقطه اثر بردار $\vec{A}$ نقطه به مختصات $q^1=q_0^1+dq^1$ و $q^2=q_0^2+dq^2$ میباشد و در نتیجه نمیتوان حاصلضرب اسکالر این دو بردار که نقطه اثرشان یکی نیست برابر A_1 نوشت اما با بسط سری تیلور بردار $\vec{A}$ حول نقطه q_0^1 داریم

$$(2-120)\quad \vec{A}(q_0^1+dq^1, q_0^2+dq^2) = \vec{A}(q_0^1, q_0^2+dq^2) + \frac{\partial}{\partial q^1}\vec{A}(q_0^1, q_0^2+dq^2)dq^1$$

بنابراین اگر فقط بخواهیم جملات بی نهایت کوچک مرتبه دوم را نگه داریم میتوان از جمله دوم رابطه فوق صرفنظر نمائیم، استدلال مشابهی هم برای جمله چهارم رابطه (۱۱۸-۲) صادق است. با جایگزاری $d\vec{x}_i$ ها در رابطه (۱۱۸-۲) داریم:

$$(2-121)\quad dI = A_1(q_0)h_1(q_0)dq^1 + A_2(q_0^1+dq^1, q_0^2)h_1(q_0^1+dq^1, q_0^2)dq^2 - A_1(q_0^1, q_0^2+dq^2)h_1(q_0^1, q_0^2+dq^2)dq^1 - A_2(q_0^1, q_0^2)h_2(q_0^1, q_0^2)dq^2$$

حال اگر $A_i h_i$ (توجه کنید نه A_i را) حول نقطه q_0^i بسط دهیم خواهیم داشت:

$$(2-122)\qquad dI=\left\{\frac{\partial}{\partial q^1}\left(A_2(q_0)h_2(q_0)\right)-\frac{\partial}{\partial q^2}\left(A_1(q_0)h_1(q_0)\right)\right\}dq^1dq^2+\cdots$$

اگر نتیجه (۱۲۲-۲) را بر مساحت مربع کوچک تقسیم کنیم:

$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}(q_0)\right]_3=\frac{\left[\frac{\partial}{\partial q^1}\left(A_2h_2\right)-\frac{\partial}{\partial q^2}\left(A_1h_1\right)\right]dq^1dq^2}{h_1h_2dq^1dq^2}$$

$$(2-123)\qquad \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]_3=\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial q^1}\left(A_2h_2\right)-\frac{\partial}{\partial q^2}\left(A_1h_1\right)\right\}$$

که بطریق مشابه دومؤلفه دیگر کرل میدان برداری بدست میاید رابطه (۱۲۳-۲)با مؤلفه سوم رابطه (۱۰۸-۲) همخوانی دارد.

۸ـ۲ـ محاسبه انتگرالهای یگانه،دوگانه و سه گانه در مختصات منحنی‌الخط متعامد

اساساً در این بخش مطلب جدیدی برای گفتن وجود ندارد . کافیست:

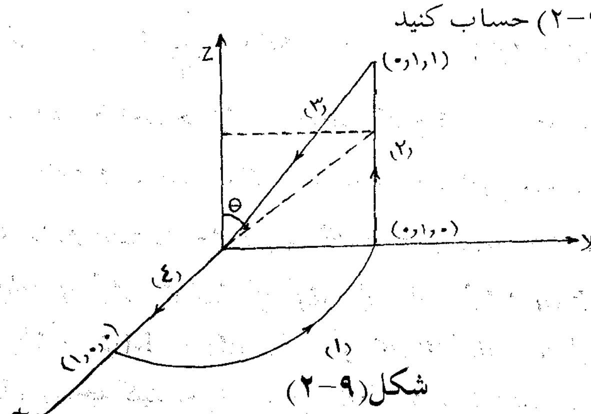
$$dv,(d\vec{a}),(da),(dl),(d\vec{x})$$

از روی معادله منحنی ،سطح و فضا که در مختصات منحنی الخط متعامدو برحسب پارامتر (ها) ی مناسب داده شده است محاسبه وباقی عملیات را همانند مطالب گفته شده در مختصات کارتزین ادامه دهیم .

مثال :گردش میدان برداری

$$(2-124)\qquad \vec{A}=\left(r\cos^2\theta\right)\hat{a}_r-\left(r\cos\theta\sin\theta\right)\hat{a}_\theta+3r\hat{a}_\varphi$$

بر روی منحنی شکل (۹-۲) حساب کنید



شکل(۹-۲)

نظر به اینکه میدان برداری در مختصات کروی داده شده است بنابراین معادله منحنی بسته را در مختصات کروی بدست میاوریم .اما معادله منحنی بسته برای هر قسمت از آن متفاوت و بشرح زیر است

$$(2-125)\qquad 1)\begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{2} \\ \varphi=\varphi \qquad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\end{cases} \qquad 2)\begin{cases} r=\frac{1}{\sin\theta} \\ \theta=\theta \qquad \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ \varphi=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$3)\begin{cases} r=r \qquad 0\le r<\sqrt{2} \\ \theta=\frac{\pi}{4} \\ \varphi=\frac{\pi}{2}\end{cases} \qquad 4)\begin{cases} r=r \qquad 0\le r<1 \\ \theta=\frac{\pi}{2} \\ \varphi=0\end{cases}$$

بموجب (۱۶–۲) $d\vec{x}$ بر روی هریک ازمنحنی های فوق با روابط زیرداده میشود. محاسبات بعهده خواننده است و ما فقط $d\vec{x}$ بر روی منحنی دوم را محاسبه میکنیم .

$$1)\, d\vec{x}=d\varphi\,\hat{a}_\varphi$$

$$2)\, d\vec{x}=\left[\frac{\partial r}{\partial\theta}\hat{a}_r+r\frac{\partial\theta}{\partial\theta}\hat{a}_\theta+r\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{a}_\varphi\right]d\theta=\left[\frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}\hat{a}_r+\frac{1}{\sin\theta}\hat{a}_\theta\right]d\theta$$

$$3)\, d\vec{x}=\hat{a}_r\,dr$$

$$4)\, d\vec{x}=\hat{a}_r\,dr$$

سؤال:آیا $d\vec{x}$ روی منحنی سوم و چهارم برابر هستند یا متفاوت ؟چرا؟

$$(2-126)\qquad I=\oint\vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x}$$

$$I=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\vec{A}(1,\tfrac{\pi}{2},\varphi)\cdot\hat{a}_\varphi d\varphi+\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\vec{A}\big(r(\theta),\theta,\tfrac{\pi}{2}\big)\cdot\left[\frac{-\cos\theta\hat{a}_r+\sin\theta\hat{a}_\theta}{\sin^2\theta}\right]d\theta$$

$$+\int_{r=\sqrt{2}}^{0}\vec{A}\left(r,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cdot\hat{a}_r dr+\int_{r=0}^{1}\vec{A}\left(r,\frac{\pi}{2},0\right)\cdot\hat{a}_r\,dr$$

بسیارتوجه کنید که چگونه معادلات منحنیهای مختلف درآرگومان $\vec{A}$ وهمچنین بردار های یکه $\hat{a}_i$ وارد شده است و همچنین به حدود انتگرال نیزتوجه نمائید با جایگزاری $\vec{A}$ و انجام ضرب اسکالر بردارهای پایه $\hat{a}_i$ با $\vec{A}$داریم:

$$I=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}3\,d\varphi+\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\left\{\left[\frac{1}{\sin\theta}\cos^2\theta\right]\left(\frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)-\left(\frac{1}{\sin\theta}\cos\theta\sin\theta\right)\frac{1}{\sin\theta}\right\}d\theta$$

$$+\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\left\{\left[\frac{1}{\sin\theta}\cos^2\theta\right]\left(\frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)-\left(\frac{1}{\sin\theta}\cos\theta\sin\theta\right)\frac{1}{\sin\theta}\right\}d\theta$$

$$+\int_{\sqrt{2}}^{0}\frac{1}{2}r\,dr+\int_{0}^{1}r\cos^2\frac{\pi}{2}dr$$

$$I=\frac{3\pi}{2}+\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos\theta d\theta}{\sin^3\theta}-\frac{1}{4}+0=\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3\pi}{2}\qquad(2-127)$$

هرگاه بخواهیم گردش این میدان برداری رابرروی منحنی بسته ازروی قانون استوکس بدست آوریم بموجب رابطه (الف-۱۰۹-۲)خواهیم داشت :

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & r\hat{a}_\theta & r\sin\theta\hat{a}_\varphi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ r\cos^2\theta & -r^2\cos\theta\sin\theta & 3r^2\sin\theta\end{vmatrix}\qquad(2-128)$$

$$=3\cot g\theta\,\hat{a}_r-6\hat{a}_\theta$$

حال سطح مار بر این منحنی بسته رادر دوصفحه xoy و yoz درنظرمیگیریم. معادلات این سطوح در مختصات کروی عبارتند از:

$$\begin{cases}r=r\\ \theta=\frac{\pi}{2}\\ \varphi=\varphi\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}r=r\\ \theta=\theta\\ \varphi=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

بنابراین $d\vec{a}$ های واقع بر این سطوح بموجب (۵۶-۲) عبارتند از:

$$d\bar{a}=r^2\sin\theta\begin{vmatrix}\hat{a}_r & \frac{\hat{a}_\theta}{r} & \frac{\hat{a}_\varphi}{r\sin\theta}\\ \frac{\partial r}{\partial r} & \frac{\partial\theta}{\partial r} & \frac{\partial\varphi}{\partial r}\\ \frac{\partial r}{\partial\varphi} & \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} & \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\end{vmatrix}drd\varphi$$

$$= r^2 \sin\theta \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \dfrac{\hat{a}_\theta}{r} & \dfrac{\hat{a}_\varphi}{r\sin\theta} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} drd\varphi = -\hat{a}_\theta \, r \sin\theta \, drd\varphi$$

که با جایگزاری $\theta=\pi/2$ از معادله سطح $d\vec{a}$ بر روی xoy برابر:

$$(2-129) \qquad d\bar{a} = -rdrd\varphi \, \hat{a}_\theta$$

توجه کنید $\hat{a}_\theta$ بازاء $\theta=\pi/2$ تبدیل به بردار $\hat{k}$- میشود وحتما" میدانید چرا؟ با محاسبات مشابه $d\vec{a}$ واقع بر صفحه zoy برابر:

$$(2-130) \qquad d\bar{a} = -rdrd\theta \hat{a}_\varphi$$

میشود .نکته مهم درمحاسبه $d\vec{a}$ برروی صفحه zoy اینست که دردترمینان (۵۶-۲) میبایستی پارامتر θ را در سطر دوم و پارامتر r را در سطر سوم قرار دهیم تا جهت $d\vec{a}$ واقع بر این صفحه با $d\vec{a}$ واقع بر صفحه xoy همخوانی داشته باشد بنابراین بموجب فرمول استوکس داریم:

$$(2-131) \qquad I = \int \left(\bar{\nabla} \times A\right).d\bar{a} = \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}(r, \tfrac{\pi}{2}, \varphi)\right] \cdot \left[-rdrd\varphi \, \hat{a}_\theta\right]$$

$$+ \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\frac{1}{\sin\theta}} \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}(r, \theta, \tfrac{\pi}{2})\right] \cdot \left[-rdrd\theta \, \hat{a}_\varphi\right]$$

توجه کنید معادله سطح درآرگومان $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ وارد شده است با ضرب اسکالربردارهای پایه درکرل میدان برداری داریم:

$$(2-132) \qquad I = \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} (-6)(-rdrd\varphi) + \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\frac{1}{\sin\theta}} 0 \, (-rdrd\theta) = \frac{3\pi}{2}$$

همان جواب قبلی است .توجه کنید با این یک مثال نحوه محاسبه انتگرالهای یگانه و دوگانه نشان داده شده است.

بعنوان آخرین مطلب دراین بخش باردیگر اهمیت قرار گرفتن پرانتزها درجملاتی نظیر:

$$(2-133) \qquad \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}$$

درمختصات منحنی الخط گوشزد میکنیم که ابتدا حاصلضرب داخل پرانتزرا انجام داده و سپس نتیجه را بر بردار بیرون پرانتز اثر میدهیم یعنی:

$$\sum_{i,j}\frac{1}{h_j}A_j\frac{\partial}{\partial q^j}\left(B_i\hat{a}_i\right)=\sum_{i,j}\left\{\frac{1}{h_j}A_j\frac{\partial B_i}{\partial q^j}\hat{a}_i+\frac{1}{h_j}A_jB_i\alpha_{ij}^k\hat{a}_k\right\}$$

که α_{ij}^k با رابطه (۲-۳۸) داده شده است.

بعنوان مثال هرگاه میدان برداری $\vec{B}$ در مختصات استوانه ای با رابطه:

$$\vec{B}(\vec{x})=f(\rho)\hat{a}_\varphi$$

داده شده باشد رابطه:

$$\left(B\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}=\left[\frac{1}{h_3}f(\rho)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\left[f(\rho)\hat{a}_\varphi\right]=f^2(\rho)\frac{\partial\hat{a}_\varphi}{\partial\varphi}=-f^2(\rho)\hat{a}_\rho$$

میشود.

۹ـ۲ـ حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بروش جداسازی متغییرها

در فیزیک با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که با اسامی معادلات دیفرانسیل بیضوی،هذلولی و سهموی طبقه بندی شده است برخورد میکنیم این معادلات بترتیب بصور زیر میباشند:

$$\nabla^2\phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

$$(2-134) \qquad \nabla^2\phi(\vec{x},t)-\frac{\partial^2\phi(\vec{x},t)}{\partial t^2}=0\Rightarrow\nabla^2\phi(\vec{x},t)=\frac{\partial\phi(\vec{x},t)}{\partial t}$$

معادلات زمانی دارای حلهای منحصر بفرد میباشند که مقدار تابع و یا مشتق سوئی آن درامتدادعمود برسطح مرزی (سطح بسته و یا باز)داده شوند.هرگاه این سطوح دارای شکل هندسی خاص نظیر یک مکعب مستطیل ،کره و یا بیضوی ...باشند در اینصورت برای آنکه بتوان شرایط مرزی را آسانتر اعمال نمود لاپلاسین این معادلات دیفرانسیل را در دستگاه مختصات منحنی الخط مینویسیم که یکی ازسطوح آن دارای همان شکل هندسی سطح مرزی باشد وسپس با روش جداسازی متغییرها،معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می نماییم.

در دروس کارشناسی ارشد میاموزیم که برای حل معادلات نامبرده نیاز به حل معادله دیفرانسیل موسوم به معادله هلم هولتز یعنی:

$$(2-135) \qquad \left(\nabla^2 + k^2\right)\psi(\vec{x}) = 0$$

داریم. در ذیل ما حالتی را بررسی میکنیم که در آن k برابر صفر باشد یعنی ما نحوه حل معادله لاپلاس را بررسی میکنیم .

الف: اگر سطح بسته مکعب مستطیل باشد چون معادلات سطوح مکعب مستطیل در مختصات کارتزین ساده ترین شکل را دارد مثلا" معادله صفحه موازی yoz با رابطه:

$$(2-136) \qquad \begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}$$

داده می شود بنابراین هرگاه $\psi(x)$ بر حسب مختصات کارتزین داده شود مقدار آن بر روی صفحه مزبور به آسانی برابر:

$$\psi(x_0, y, z) = v(y, z)$$

میگردد . بنا براین موازی سطح بسته مکعب مستطیل شکل لاپلاسین رابرحسب مختصات کارتزین مینویسیم:

$$(2-137) \qquad \nabla^2\psi(x,y,z) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$$

حال روش جداسازی متغیرها را که به شرح زیر است اعمال می کنیم.

تابع $\psi(\vec{x})$ را بصورت حاصلضرب سه تابع که هر یک فقط تابعی از یک مختصه هستند مینویسیم:

$$(2-138) \qquad \psi(\vec{x}) = R(x)P(y)Q(z)$$

رابطه(۱۳۸-۲) را در(۱۳۷-۲) قرارداده و نتیجه بدست آمده را بر $R(x)P(y)Q(z)$ تقسیم میکنیم:

$$PQ\frac{d^2R}{dx^2} + RQ\frac{d^2P}{dy^2} + RP\frac{d^2Q}{dz^2} = 0$$

$$(2-139) \qquad \frac{1}{R}\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{P}\frac{d^2P}{dy^2} + \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{dz^2} = 0$$

در(۱۳۹-۲) هر یک از جملات فقط تابعی از یک مختصه هستند ومیتوان آنرا بصورت:

$$(2-140) \qquad f(x) + g(y) + h(z) = 0$$

نوشت چون تساوی رابطه(۲-۱۴۰) میبایستی برای هر x و y و z برقرار باشد راهی وجود ندارد مگر آنکه هر یک از توابع برابر مقدار ثابتی باشد یعنی:

$$(2-141) \qquad \frac{1}{R}\frac{d^2R}{dx^2}=C_1 \quad ,\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dy^2}=C_2 \quad ,\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{dz^2}=C_3$$

بطوریکه: $C_1+C_2+C_3=0$

چون $\sum_i C_i=0$ است بالاجبار علامت دوتا از C_iها با علامت C_i سومی مخالف میباشد مثلا اگر C_1 و C_2 منفی باشند در اینصورت C_3 بایستی مثبت باشد، کدامین C_iها میبایستی مثبت و کدامین C_i ها منفی اختیار شود منوط به شرایط مرزی است مثلا اگر $\psi(x)$ بر روی مرزهائی که معادله سطوح آنها با رابطه:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=y \\ z=z \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x=a \\ y=y \\ z=z \end{cases}$$

داده شده صفر باشد، لازمه آن این است که $R(x)$ بازاء $x=0$ و $x=a$ صفر شود پس C_1 را میبایستی مقداری منفی اختیار نمایید تا حل $R(x)$ بصورت مثلثاتی درآید و معمولا" برای آن که تضمین شود که C_1 عددیست منفی آنرا بصورت:

$$C_1=-k^2$$

مینویسید که k عددیست حقیقی. جزئیات حل معادله لاپلاس در مختصات کارتزین در کتب الکترومغناطیس شرح داده میشود که بدلیل اطاله کلام از ذکر آن در اینجا خودداری میکنیم. توجه میکنیم که بجای داشتن معادله پواسون، معادله بی نظیر:

$$\left[\nabla^2+v(x,y,z)\right]\psi(\vec{x})=k^2\psi(\vec{x})$$

داشته باشیم که درآن $v(\vec{x})$ بصورت حاصلجمع سه تابع معلوم:

$$v(\vec{x})=f(x)+g(y)+h(z)$$

باشد در اینصورت با کمی عملیات جبری مشابه آنهایی که منجر بـه (۲-۱۴۱) گردید به روابط:

$$(2-142) \qquad \frac{1}{R(x)}\frac{d^2R(x)}{dx^2}+f(x)=C_1 \quad ,\frac{1}{P(y)}\frac{d^2P(y)}{dy^2}+g(y)=C_2$$

$$\frac{1}{Q(z)}\frac{d^2Q(z)}{dz^2}+h(z)=C_3 \quad , \quad C_1+C_2+C_3=k^2$$ بطوریکه:

خواهیم رسید که هر یک معادلات دیفرانسیل معمولی هستند و میتوان آنها را حل کرد اما اگر $v(\vec{x})$ بصورت فوق قابل تجزیه نباشد روش جداسازی متغییر ها کارسازنخواهد بود. در هر صورت با حل معادلات دیفرانسیل معمولی مربوط به $R(x)$، $P(y)$، $Q(z)$ و $\psi(\vec{x})$ یعنی حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بدست میاید که برابر:

$$\psi_{C_1C_2C_3}(\vec{x}) = R_{C_1}(x)P_{C_2}(y)Q_{C_3}(z) \qquad (2-143)$$

یعنی جواب بدست آمده بستگی به مقادیر ثابتی دارد که اختیار کرده ایم.

رابطه (۲−۱٤۳) کلی ترین حل برای $\psi(\vec{x})$ نمیباشد چه اگر C_iها بتوانند چندین مقدار مختلف مورد قبول اختیار کنند در اینصورت حل $\psi(\vec{x})$ بصورت:

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{C_1}\sum_{C_2}\sum_{C_3} a_{C_1C_2C_3} R_{C_1}(x)P_{C_2}(y)Q_{C_3}(z) \qquad (2-144)$$

در میاید با اعمال شرایط مرزی ضرایب $a_{C_1C_2C_3}$ بدست خواهد آمد.

اگر با کمی دقت به (۲−۱٤٤) نگاه کنیم متوجه میشویم که این رابطه مشابه رابطه:

$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$$

است که از نظر مقایسه $\vec{e}_i$ معادل $R_{C_1}(x)P_{C_2}(y)Q_{C_3}(z)$ و a_i ضریب بسط معادل $a_{C_1C_2C_3}$ است. بقولی تابع $\psi(\vec{x})$را میتوان برداری در یک فضای بی نهایت بعدی تصور نمود که بردارهای پایه آن$R_{C_1}(x)P_{C_2}(y)Q_{C_3}(z)$(بازاء C_i های مختلف)و $a_{C_1C_2C_3}$ مؤلفه های $\psi(x)$ در این فضا هستند. حال اگر بخواهیم معادله پواسون رادر مختصات کروی بروش جداسازی متغییر ها حل کنیم چنین خواهیم کرد:

$$\nabla^2\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (2-145)$$

تابع $\psi(r,\theta,\varphi)$ را بصورت:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)P(\theta)Q(\varphi) \qquad (2-146)$$

مینویسیم (روش جداسازی متغییرها)و در(۲−۱٤٥) قرار میدهیم مشاهده میشود هرگاه نتیجه حاصل را بر RPQ تقسیم کنیم، بر خلاف آنچه که در مختصات کارتزین حاصل شد سه جمله که هر یک فقط تابعی از یک متغییر باشند حاصل نمیگردد. با کمی تعمق

متوجه میشویم که اگر نتیجه بدست آمده را در $r^2\sin^2\theta$ (ضریب سومین جمله در $\vec{\nabla}^2$)
ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$(2-147)\quad r^2\sin^2\theta\left\{\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{P}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right\}+\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}=0$$

رابطه (۱۴۷-۲) بصورت:

$$f(r,\theta)+g(\varphi)=0$$

بنابراین برای اینکه این رابطه بازاء هر r و θ و φ دلخواهی برقرار باشد شرط لازم آن است
که:

$$g(\varphi)=C_1$$
$$f(r,\theta)=-C_1$$

گردند یعنی:

$$(2-148)\qquad \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}=C_1$$

حال اگر C_1 مثبت (منفی) باشد جواب Q نمائی (مثلثاتی)میگردد.اما نکته دیگری
وجود داردوآن اینکه Q تابعی از φ است و چون مختصه φ از شرط:

$$\psi(r,\theta,\varphi+2\pi)=\psi(r,\theta,\varphi)\Rightarrow Q(\varphi+2\pi)=Q(\varphi)$$

پیروی میکند در اینصورت C_1 نه تنها منفی بلکه میبایستی عدد صحیح هم باشد یعنی:

$$C_1=-m^2$$

در نتیجه:

$$(2-149)\qquad Q(\varphi)=e^{im\varphi}\qquad ,m=0\pm1\pm2\pm\cdots$$

حال از معادله (۱۴۷-۲) و مقداری که C_1 اختیار میکند داریم:

$$(2-150)\quad r^2\sin^2\theta\left\{\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{Pr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right\}-m^2=0$$

برای آنکه (۱۵۰-۲) را بصورت:

$$f(r)+g(\theta)=0$$

درآوریم می بایستی آنرا ابتدا بر $r^2\sin^2\theta$ تقسیم و سپس در r^2 ضرب کنیم. درنتیجه
خواهیم داشت:

$$(2-151)\qquad \frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=0$$

پس داریم:

$$\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=C_2$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=-C_2 \tag{2-152}$$

از رابطه اول (۲–۱۵۲) به معادله دیفرانسیلی معمولی لژاندر وابسته میرسیم:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left(-C_2-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P(\theta)=0 \tag{2-153}$$

البته شکل آشناتر معادله لژاندر وابسته با تغییر متغییر دادن معادلـه فـوق از θ بـه z حـاصل میشود که θ برحسب z بصورت $z=\cos\theta$ تعریف شده است. در نتیجه:

$$\frac{P(z(\theta))}{d\theta}=\frac{dP}{dz}\frac{dz}{d\theta}\Rightarrow-\frac{1}{\sin\theta}\frac{P(z(\theta))}{d\theta}=\frac{dP}{dz}\Rightarrow-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}=\frac{d}{dz} \tag{2-154}$$

با جایگزاری (۲–۱۵٤) در(۲–۱۵۳)خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dz}\left[\left(1-z^2\right)\frac{dP(z)}{dz}\right]+\left[-C_2-\frac{m^2}{\left(1-z^2\right)}\right]P(z)=0 \tag{2-155}$$

در کتب معادلات دیفرانسیل نشان میدهند برای آنکه $P(z)$ برای تمامی مقـادیرمـختلف و ممکن که z اختیار میکند جواب همگرا داشته باشد C_2 نمیتواند مقدار دلخواهی اختیـار نماید بلکه C_2 میبایستی مقادیر زیر رادارا باشد:

$$-C_2=l(l+1) \qquad ,l=0,1,2 \tag{2-156}$$

و همچنین m میبایستی مقید به رابطه:

$$-l\le m\le l \tag{2-157}$$

باشد. میبایستی دقت کنیم که حل معادله (۲–۱۵۵) را میبایستی بصورت:

$$P(z)=P_l^m(\cos\theta)$$

نشان داد چون $P(z)$ بستگی دارد که در معادله دیفرانسیل l و m چه مقادیری اختیار می کند. درمورد اینکه $P_l^m(z)$ چگونه تابعی از z میباشد خوانـنده میبایستی بـه کتبی کـه در آنها توابع خاصی شـرح داده میشـودمراجعه نماید. شـایان ذکراسـت کـه ازجـواب دوم معادله لژاندروابسته دراکثر مواردبنا به دلایل فیزیکی(تکینگی درقطبها)صرفنظـر میکننـد و آنرا با Q_l^m نشان میدهند.

رابطه دوم (۲–۱۵۲) با در نظر گرفتن مقدار C_2 بصورت:

$$(2-158) \qquad \frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=l(l+1)$$

در میاید حل آن در کتب معادلات دیفرانسیل بصورت:

$$(2-159) \qquad R(r)=r^l \qquad , R(r)=r^{-(l+1)}$$

می باشد که در بعضی از مسائل فقط یکی از حلها بنا به دلایل فیزیکی مورد قبول واقع میشود. البته دربعضی مواردهردوجواب نیز قابل قبول است بنابراین حل ψبرابر:

$$(2-160) \qquad \psi(r,\theta,\varphi)=ar^l P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}+br^{-(l+1)}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

میشود. خواننده با مشاهده رابطه (۲–۱۶۰)ازخودسوأل میکند lوmچه مقداری اختیارمینمایند. باکمی تامل متوجه هستیم که تمامی l و m هایی که روابط (۲–۱۵۶) و(۲–۱۵۷) را اقناع می کنند، می توانند مقادیرمورد قبول محسوب گردند. بنابراین کلی ترین حل معادله لاپلاس در مختصات کروی بصورت:

$$(2-161) \qquad \psi(\vec{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[a_{lm}r^l+b_{lm}r^{-(l+1)}\right]P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

میباشد. ضرایب a_{lm}وb_{lm}از روی اعمال شرایط مرزی و شرایط فیزیکی مسئله تعیین میگردد. امروزه بجای استفاده از توابع لژاندروابسته وتابع $e^{im\varphi}$ ازتوابع اورتونرمال هارمونیک های کروی استفاده میکنند که بصورت زیر تعریف شده است:

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=(-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

در این مورد دردروس مکانیک کوانتومی و ...توضیحات بیشتری داده میشود بنابراین شکل دیگر (۲–۱۶۱) بصورت:

$$\psi(\vec{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[a_{lm}r^l+b_{lm}r^{-(l+1)}\right]Y_l^m(\theta,\varphi)$$

بازنویسی می شود. البته ضرایب آمده دراین بسط با ضرایب آمده در (۲–۱۶۱)یکی نیستند. ما بطور سمبولیک آنها را با علامتهای یکسان نشان داده ایم. خاطرنشان میسازیم حل معادله لاپلاس بروش جداسازی متغیرها و دردستگاههای منحنی الخط

مختلف در کتاب *Static & Dynamic Electricity 3rd ed.* تألیف *W.R.Smythe* بصورت گسترده ای صورت گرفته که خواننده علاقمند را بدان کتاب ارجاع میدهیم.

۱۰_۲_ تابع دلتای دیراک در مختصات منحنی الخط متعامد

تابع دلتای دیراک رابه دو روش مختلف برحسب مختصات منحنی الخط متعامد استخراج میکنیم(برای سهولت در تحریر نقطه $\vec{x}'$ را با $\vec{x}_0$ نشان میدهیم).

روش اول: نظر به اینکه میدانیم $\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$ هنگامیکه $\vec{x}$ برابر $\vec{x}_0$ باشد برابر بینهایت و در غیر اینصورت صفر و در ضمن انتگرال حجمی در کل فضا برابر واحد میبایستی شود پس با استفاده از این خواص داریم:

$$\int \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)d^3x = 1 \tag{2-162}$$

حال اگر مختصات منحنی الخط متعامد بصورت:

$$\vec{x} = \vec{x}(q) \quad , \quad \vec{x}_0 = \vec{x}(q_0) \tag{2-163}$$

تعریف شده است. المان حجم در مختصات منحنی الخط متعامد با رابطه (۸۸–۲) داده شده است بنابراین(۱۶۲–۲) برابر:

$$\int \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)d^3x = \int \delta\left[\vec{x}(q)-\vec{x}(q_0)\right]h_1h_2h_3dq^1dq^2dq^3$$

می باشد. حال زمانی انتگرال سمت چپ رابطه فوق برابر واحد می شود که تابع دلتای دیراک بصورت:

$$\delta\left(\vec{x}(q)-x(q_0)\right) = \frac{\delta\left(q^1-q_0^1\right)\delta\left(q^2-q_0^2\right)\delta\left(q^3-q_0^3\right)}{h_1(q)h_2(q)h_3(q)}$$

باشد بنابراین دلتای دیراک در مختصات منحنی الخط با رابطه:

$$\delta\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right) = \frac{\delta\left(q^1-q_0^1\right)\delta\left(q^2-q_0^2\right)\delta\left(q^3-q_0^3\right)}{h_1(q)h_2(q)h_3(q)} \tag{2-164}$$

داده میشود که تمامی خواص دلتای دیراک در آن نهفته است.

روش دوم :استخراج دلتای دیراک به روش دوم برای ما آموزنده تر است چون دلتای دیراک را بصورت تابعی از مختصات کارتزین معرفی میکنیم و درنتیجه میتوان از قوانین

تبدیل مختصات کارتزین به مختصات منحنی الخط استفاده نمود و فرم تابع دلتای دیراک بر حسب مختصات منحنی الخط متعامد بدست آورده میشود.
یکی از صور انتگرالی تابع دلتای دیراک (که از روی قضایای مربوط به سری و انتگرال فوریه و یا اینکه در بخش عملگرها در مکانیک کوانتومی استخراج میگردد)

$$(2-165) \qquad \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(\vec{x}-\vec{x}_0)}dk$$

میباشد .صورت مورد نظر ما از تابع دلتای دیراک بشرح زیر استخراج میگردد:

$$(2-166) \qquad \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\Delta^2}{2}k^2} e^{ik(\vec{x}-\vec{x}_0)}dk$$

توجه میکنیم بعلت به سمت صفر میل کردنΔ،روابط (۱۶۵-۲) و(۱۶۶-۲) مساوی هم هستند.حال سعی میکنیم (۱۶۶-۲) را بصورت انتگرال گوسی در آوریم:

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\Delta^2}{2}\left[k^2-2ik\frac{(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\Delta^2}\pm\frac{(\vec{x}-\vec{x}_0)^2}{\Delta^4}\right]}dk$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{2\pi}e^{\frac{-(\vec{x}-\vec{x}_0)^2}{2\Delta^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\Delta}{2}\left(k-\frac{i(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\Delta^2}\right)^2}dk$$

$$(2-167) \qquad \delta(\vec{x}-\vec{x}_0)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\Delta}e^{\frac{-(\vec{x}-\vec{x}_0)^2}{2\Delta^2}}$$

شکل هندسی تابع فوق بازاء چند مقدار ازΔرا رسم میکنیم .مسلما" آن شکل هندسی که در آنΔ کوچکترین مقدار را دارد،بشکل تابع دلتای دیراک نزدیکتر است.
جالب است خاطر نشان سازیم که مساحت زیر منحنی تابع فوق بازاء هر مقدارΔ برابر واحد است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\Delta}e^{\frac{-(\vec{x}-\vec{x}_0)^2}{2\Delta^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}}\cdot\sqrt{\pi(2\Delta^2)}=1$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۱۶۷-۲) تابع دلتای دیراک سه بعدی تعریف میگردد:

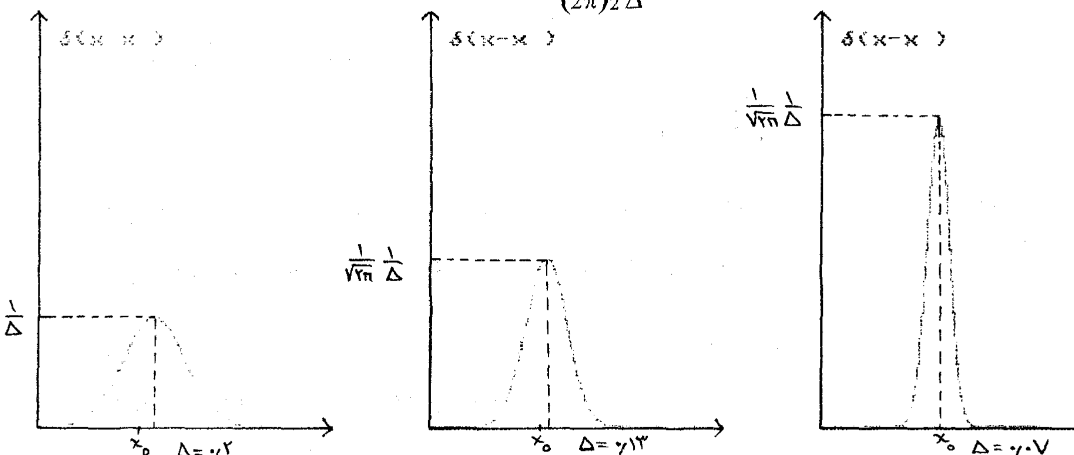
$$(2-168)\quad \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\equiv\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\Delta^3}e^{\frac{-(\vec{x}-\vec{x}_0)^2}{2\Delta^2}}$$

حال اگر مختصات منحنی الخط را با رابطه:

$$\vec{x}=\vec{x}(q)$$

نشان دهیم تابع دلتای دیراک بر حسب این مختصات بصورت:

$$(2-169)\qquad \delta(\vec{x}(q)-\vec{x}(q_0))=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\Delta^3}e^{\frac{-(\vec{x}(q)-\vec{x}(q_0))^2}{2\Delta^2}}$$



شکل(۱۰-۲)

در میاید. اما همانگونه که از شکل (۱۰-۲) هم مشهود میباشد. تابع دلتای دیراک برای یک Δ معین اما کوچک هنگامیکه q^iها مقادیر نزدیک به q_0^i ها داشته باشند جواب غیر صفر دارد بنابراین به ازاء q^i هایی که اختلاف زیادی نسبت به q_0^iها دارند تابع دلتای دیراک صفر می شود بنابراین اگر $\vec{x}(q)$ را حول نقطه q_0^i بسط دهیم فقط جمله با توان اول بسط اهمیت دارد:

$$\vec{x}(q)=\vec{x}(q_0)+\sum_i\left(q^i-q_0^i\right)\frac{\partial\vec{x}(q_0)}{\partial q^i}+\cdots$$

با استفاده از تعریف بردارهای یکه منحنی الخط داریم:

$$\vec{x}(q)-\vec{x}(q_0)=\sum_i\left(q^i-q_0^i\right)\cdot h_i\hat{a}_i+\cdots$$

بنابراین طول بردار فوق برابر است با:

$$\left[\vec{x}(q)-\vec{x}(q_0)\right]^2=\sum_i\left(q^i-q_0^i\right)^2h_i^2+\cdots$$

$$\delta\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\Delta^3}e^{\frac{-\sum_i\left(q^i-q_0^i\right)^2h_i^2}{2\Delta^2}} \quad (2-170)$$

$$=\lim\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\Delta}e^{\frac{-\sum_i\left(q^i-q_0^i\right)^2h_i^2}{2\Delta^2}}\right)$$

که معنای Π در عبارت فوق:

$$\prod_{i=1}^{3}a_i=a_1a_2a_3$$

می باشد. اما فرم تابع (۱۷۰–۲) با مقایسه با رابطه (۱۶۷–۲) تداعی کننده تابع دلتای دیراک میباشد که جمله مزاحم، h_i میباشد بنابراین Δ'_i بصورت:

$$\Delta'_i=\frac{\Delta}{h_i}$$

تعریف کرده و در (۱۷۰–۲) قرار میدهیم.

$$\delta\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right)=\underset{\Delta'\to 0}{Lim}\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{h_i\sqrt{2\pi}\Delta'_i}e^{\frac{\left(q^i-q_0^i\right)^2}{\Delta'_i}}\right)$$

و در نتیجه تابع دلتای دیراک در مختصات منحنی الخط متعامد بصورت:

$$\delta\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right)=\prod_i\frac{1}{h_i}\delta\left(q^i-q_0^i\right) \quad (2-171)$$

در میاید. بعنوان حسن ختام در مورد توابع دلتای دیراک دانسیته حجمی یک توزیع بار خطی را در مختصات منحنی الخط متعامد محاسبه میکنیم.

مثلاً" هرگاه منحنی باردار در مختصات منحنی الخط با رابطه:

$$\begin{aligned}q^1&=q^1\\q^2&=q^2\left(q^1\right)\\q^3&=q^3\left(q^1\right)\end{aligned} \quad (2-172)$$

داده شده باشد یعنی پارامتر معادله منحنی مختصه q^1 باشد ،در اینصورت:

$$Q=\int \lambda(\vec{x})dl=\int \lambda(q^1)F(q^1)dq^1 \qquad (2-173)$$

که $F(q^1)$ از رابطه (۸۸-۲) بدست میاید یعنی:

$$dl=\left[h_1^2+h_2^2\left(\frac{dq^2}{dq^1}\right)^2+h_3^2\left(\frac{dq^3}{dq^1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dq^1=F(q^1)dq^1 \qquad (2-174)$$

حال میخواهیم رابطه (۱۷۳-۲) را بصوت انتگرال حجمی بنویسیم:

$$Q=\int \rho(q^1q^2q^3)J(q^1q^2q^3)dq^1dq^2dq^3 \qquad (2-175)$$

وازخودسؤال میکنیم سمت راست رابطه(۱۷۳-۲)درچه توابعی توأم با dq^2dq^3ضرب کنیم که نتیجه آن تغییر نکند .جواب آن عبارتست از:

$$Q=\int \lambda(q')F(q')\delta\left(q^2-q^2(q^1)\right)\delta\left(q^3-q^3(q^1)\right)dq^1dq^2dq^3 \qquad (2-176)$$

از مقایسه دو رابطه فوق نتیجه میگیریم که:

$$\rho(q^1,q^2,q^3)=\frac{\lambda(q')F(q')\delta\left(q^2-q^2(q^1)\right)\delta\left(q^3-q^3(q^1)\right)}{J(q^1,q^2,q^3)} \qquad (2-175)$$

مثال:حلقه دایره ای بشعاع a که مرکز آن واقع بر محور oz و بموازات صفحه xoy است دارای دانسیته بارخطی یکنواخت λ_0 است دانسیته بارحجمی حلقه رادرمختصات کروی محاسبه کنید.

معادله منحنی در مختصات کروی برابر است با:

$$\begin{aligned} r&=a \\ \theta&=\theta_0 \qquad ,tg\theta_0=\frac{a}{z_0} \\ \varphi&=\varphi \end{aligned}$$

بموجب (۱۷۳-۲)

$$Q=\int \lambda_0 a d\varphi$$

که در این مسئله $F(q^3)=a$ شده است

$$\int \rho(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr=\int \lambda_0 a d\varphi \delta(r-a)\delta(\theta-\theta_0)dr d\theta d\varphi$$

$$\rho(r,\theta,\varphi)=\frac{\lambda_0\delta(r-a)\delta(\theta-\theta_0)}{r^2\sin\theta_0} \qquad (2-176)$$

بعلت وجود دو تابع $\delta(r\text{-}a)$ و $\delta(\theta-\theta_0)$ رابطه فوق را میتوان بصورت ساده تر:

$$\rho(r,\theta,\varphi)=\frac{\lambda_0\delta(r-a)\delta(\theta-\theta_0)}{a\sin\theta_0}$$

نوشت.

گاهی اوقات بجای استفاده از $\delta(\theta-\theta_0)$ از $\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)$ استفاده میکنند که مفهوم آن اینست که بجای استفاده از مختصات کروی از مختصات جدیدی که بصورت زیر تعریف شده:

$$q^1=r \qquad ,q^2=\cos\theta\equiv\zeta \qquad ,q^3=\varphi$$

استفاده میکنند که بر حسب مختصات کارتزین بصورت:

$$x=r\left(1-\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi$$
$$y=r\left(1-\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi$$
$$z=r\zeta$$

میباشد محاسبه ساده نشان میدهد که:

$$h_r=1$$
$$h_\zeta=\frac{r}{\left(1-\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$h_\varphi=r\left(1-\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین داریم:

$$h_r h_\varphi h_\xi=r^2$$

میگردد و در نتیجه ρ در چنین دستگاه مختصاتی برابر:

$$\rho(r,\xi,\varphi)=\frac{\lambda_0\delta(r-a)\delta(\zeta-\zeta_0)}{a}$$

میگردد.

قسمت دوم

مختصات منحنی الخط غیر متعامد

تذکر: در مطالب زیرین جمع بر روی دو اندیس تکراری بالائی و پایینی مفروض است.

۱۱ـ۲ـ مقدمه:

مختصات منحنی الخط غیر متعامد و تعمیم آن به فضاهای با بعد بزرگتر از سه در نسبیت عمومی کاربرد فراوان دارد. همان گونه که در زیر مشاهده خواهیم کرد بعلت آنکه مطالب آورده شده برای بارسوم(بعد ازمختصات کارتزین ومختصات منحنی الخط متعامد) تکرار میشود موضوع کاملا" آسان و قابل فهم میباشد .

همانگونه که قسمت اول فصل دوم گفته شد رابطه:

$$\begin{aligned} x &= x(q^1,q^2,q^3) \\ y &= y(q^1,q^2,q^3) \quad , x_i = x_i(q) \quad , \vec{x} = \vec{x}(q) \\ z &= z(q^1,q^2,q^3) \end{aligned}$$

معرف معادله فضا است و q^i ها را مختصات منحنی الخط نامند. مماسها بر سه منحنی که معادلات هر یک از آنها با روابط:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{x}(q^1,q_0^2,q_0^3) \\ \vec{x} &= \vec{x}(q_0^1,q^2,q_0^3) \\ \vec{x} &= \vec{x}(q_0^1,q_0^2,q^3) \end{aligned} \qquad (2-177)$$

داده شده است بردارهای:

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_1(q_0^i) &= \frac{\partial \vec{x}(q_0^i)}{\partial q^1} \\ \vec{\varepsilon}_2(q_0^i) &= \frac{\partial \vec{x}(q_0^i)}{\partial q^2} \\ \vec{\varepsilon}_3(q_0^i) &= \frac{\partial \vec{x}(q_0^i)}{\partial q^3} \end{aligned} \qquad (2-178)$$

را حاصل مینماید که تشکیل دستگاه بردارپایه در نقطه (q_0^1,q_0^2,q_0^3) را میدهند.

هرگاه $\vec{\varepsilon}_i$ها بر هم عمود باشند بعداز نرمالیزه کردن ،آنها رابعنوان بردارپایه استفاده میکنند یعنی بردارهای پایه در مختصات منحنی الخط متعامد با رابطه:

$$\hat{a}_i(q) = \frac{\vec{\varepsilon}_i(q)}{|\vec{\varepsilon}_i(q)|} \equiv \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i}}{\left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i}\right|}$$

داده می شوند .اما در حالتی که $\vec{\varepsilon}_i$ها متعامد نباشند چون نرمالیزه کردن آنها مزیت خاصی را حاصل نمی کند ازخود آنها بعنوان بردار پایه استفاده می شود.شایان ذکر است دربعضی موارد حتی برای مختصات منحنی الخط متعامد ازبردارهای غیرنرمالیزه $\vec{\varepsilon}_i$بجای $\hat{a}_i$ استفاده میکنند.

حاصلضرب اسکالر دو بردار پایه غیر متعامد نتیجه:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} \equiv \vec{\varepsilon}_i(q)\vec{\varepsilon}_j(q) = g_{ij}(q) \qquad (2-179)$$

راحاصل می کند که g_{ij} را متریک فضای منحنی الخط نامند.توجه کنید در فصل اول، دستگاه بردار پایه های غیر متعامدی آموختیم که جهت $\vec{\varepsilon}_i$ ها در تمامی نقاط مختلف فضا همیشه ثابت بود بنابراین نام با مسمی آن میبایستی دستگاه مختصات راست خط غیر متعامد باشد درمقایسه با نام دستگاه مختصات منحنی الخط غیر متعامد که جهات$\vec{\varepsilon}_i$ها در نقاط مختلف فضا تغییر میکند.

علت آنکه امتدا بردارهای $\vec{\varepsilon}_i$در دستگاه مختصات راست خط غیرمتعامد تغییر نمیکند آنست که مختصات کارتزین توابع خاصی از مختصات منحنی الخط میباشد.

مثلا" اگر:

$$\vec{x} = \vec{x}(r, \theta, \varphi)$$

باشد ،[r , θ , φ مختصات کروی هستند] $\vec{\varepsilon}_i$ها تابعی از مختصات نقطه اثرشان میگردد و در نتیجه جهت آنها در نقاط مختلف تغییر میکند اما اگر $\vec{x}$ با رابطه:

$$\vec{x} = q^i \vec{\varepsilon}_{0i} \qquad (2-180)$$

داده شود یعنی $\vec{x}$ تابع درجه اولی ازمختصات نقطه باشد (توجه کنید مثلا" درمختصات کروی $\vec{x}$ تابعی از $sin\theta$ و $sin\theta$ تابعی از تمامی توانهای θ است) در اینصورت:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i} = \vec{\varepsilon}_i = \vec{\varepsilon}_{0i}$$

و در نتیجه جهت $\vec{\varepsilon}_i$ تغییر نمیکند. خلاصه کلام آنکه دستگاه بردارپایه غیرمتعامد که درفصل اول آموختیم حالت خاصی رااز قانون تبدیلات مختصات(رابطه (۱۸۰-۲)) پیروی مینماید.

همانگونه هم که قبلا" گفته شد هر زوج منحنی که معادلات آنها با روابط (۱۷۷-۲) داده شده است بر یک سطح موسوم به سطح مختصات منحنی الخط قرار گرفته است مثلا"منحنیهایی که با معادله:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}(q^1, q_0^2, q_0^3) \\ \bar{x} &= \bar{x}(q_0^1, q^2, q_0^3) \end{aligned} \qquad (2-181)$$

داده شده اند بر سطح به معادله:

$$\bar{x} = \bar{x}(q^1, q^2, q_0^3) \qquad (2-182)$$

واقعند که غالبا" آنراسطح $q^3=q_0^3$(که پارامترهای آن دو مختصه دیگر میباشند) نامند چون$\vec{\varepsilon}_i$ها غیر متعامد هستند بنابراین نیاز به دستگاه بردار پایه وارونه آشکار است. به راستی این بردارهای پایه دستگاه وارونه راچگونه تعیین کنیم؟ با کمی تفکر مثلا" میدانیم که $\vec{\varepsilon}_1$ و$\vec{\varepsilon}_2$به ترتیب بر منحنی های (۱۸۱-۲) مماس و درنتیجه آنها بر سطحی که با رابطه (۱۸۲-۲) داده شده مماس هستند. چون$\vec{\varepsilon}^3$ میبایستی بر این دو بردار عمود باشد ،پس$\vec{\varepsilon}^3$درجهت عمود برسطح $q^3=q_0^3$ قرار میگیرد بنابراین بردار$\vec{\nabla} q^3$ میبایستی $\vec{\varepsilon}^3$باشد بقولی $\vec{\nabla} q^j$ $(j=1,2,3)$ تشکیل دستگاه وارونه را میدهد برای اطمینان خاطر رابطه زیر را حساب میکنیم:

$$\bar{\varepsilon}^i \cdot \bar{\varepsilon}_j = \bar{\nabla} q^i \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta^i_j \qquad (2-183)$$

توجه کنید محاسبه فوق در مختصات کارتزین صورت گرفته است بنابراین:

$$\bar{\varepsilon}^i = \bar{\nabla} q^i \qquad (2-184)$$

میباشد. و متریک فضای دستگاه وارونه با رابطه:

$$\bar{\varepsilon}^i \cdot \bar{\varepsilon}^j = g^{ij}(q) \qquad (2-185)$$

تعریف میشود. لازم به یادآوری (مجدد) است که یک میدان برداری نظیر میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})$ در این دستگاه بردارهای پایه دارای مؤلفه های کنترااوریانتی و کوواریانتی میباشد:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= A^i(q)\vec{\varepsilon}_i(q) \\ \vec{A}(\vec{x}) &= A_i(q)\vec{\varepsilon}^i(q) \end{aligned} \tag{2-186}$$

همچنین متریکها دارای همان خواصی هستند که قبلاً ذکر کرده ایم مثلاً:

$$\begin{aligned} & g^{ij}A_j = \vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}^j A_j = \vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{A} = \vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}_j A^j = A^i \\ & g_{ij}A^j = A_i \\ & g_{ij} = g_{ji} \quad , \quad g^{ij} = g^{ji} = \vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}^j = \vec{\varepsilon}^j \cdot \vec{\varepsilon}^i \\ & g_{ij}\vec{\varepsilon}^j = (\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j)\vec{\varepsilon}^j = \vec{\varepsilon}_i \\ & g^{ij}\vec{\varepsilon}_j = \vec{\varepsilon}^i \\ & g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j \end{aligned} \tag{2-187}$$

بردار $d\vec{x}$ ئی که ابتدا و انتهای آن واقع بر دو نقطه به مختصات:

$$(q^1, q^2, q^3) \quad , \quad (q^1 + dq^1, q^2 + dq^2, q^3 + dq^3)$$

باشد با رابطه:

$$d\vec{x} \equiv \vec{x}(q + dq) - \vec{x}(q) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i} dq^i = \vec{\varepsilon}_i dq^i \tag{2-188}$$

بموجب (۱۸۸–۲) نتیجه میگیریم که مؤلفه کنترااوریانتی $d\vec{x}$، dq^i میباشد.

تمرین: نتیجه فوق را از تعریف:

$$A^i = \varepsilon^i \cdot \vec{A}$$

هم بدست آورید.

طول بردار $d\vec{x}$ از رابطه:

$$dl^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \vec{\varepsilon}_i dq^i \cdot \vec{\varepsilon}_j dq^j = g_{ij} dq^i dq^j \tag{2-189}$$

بدست میاید. ضریب dq^i را در (۱۸۹–۲) چه مینامید؟

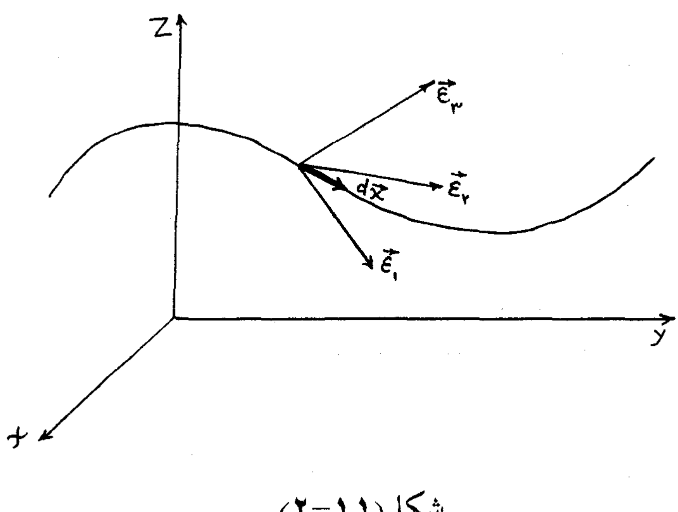
۱۲-۲- معادله منحنی در مختصات منحنی الخط غیر متعامد و المان طول واقع بر آن

هرگاه q^i ها تابعی از یک پارامتر نظیر t باشند بردار مکانی $\vec{x}$ تابعی از همان پارامتر میگردد و در نتیجه رابطه:

$$\begin{aligned} q^1 &= q^1(t) \\ q^2 &= q^2(t) \\ q^3 &= q^3(t) \end{aligned} \quad , \quad q^i = q^i(t) \qquad i = 1,2,3 \tag{2-190}$$

معرف معادله منحنی میباشد.

اگر q^i مختصات یک نقطه مادی و پارامتر t زمان باشد رابطه (۱۹۰-۲) معرف معادله منحنی حرکت ذره است.



شکل(۱۱-۲)

$d\vec{x}$ واقع بر این منحنی هر چند که از رابطه(۱۸۸-۲) بدست میاید اما dq^i اختیاری نیستند بلکه از معادله منحنی ،(۱۹۰-۲) بدست میایند یعنی:

$$dq^i = q^i(t+\Delta t) - q^i(t) = \dot{q}^i(t)dt$$

و در نتیجه:

$$(2-191)\qquad d\vec{x}=\vec{\varepsilon}_i\big(q(t)\big)\dot{q}^i(t)dt$$

میشود و در نتیجه بردار سرعت از رابطه:

$$(2-192)\qquad \vec{v}(t)=\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{\varepsilon}_i(q)\dot{q}^i(t)$$

بدست میاید .این رابطه رابا رابطه (۲۹-۲) مقایسه کنید کدامیک فرم ساده تری دارند؟ برای تعیین بردار شتاب ذره نیاز به محاسبه $\partial\varepsilon_i/\partial q^j$ داریم همان گونه که درمختصات منحنی الخط متعامد نیازبه محاسبه $\partial\hat{a}_i/\partial q^j$ داشتیم .نحوه محاسبه این بردار مشابه روابط بعد از (۲۳-۲) است با این تفاوت که داریم:

$$(2-193)\qquad \frac{\partial\vec{x}}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^j}=\vec{\varepsilon}_i\cdot\vec{\varepsilon}_j=g_{ij}$$

درمقایسه با $h_i^2\delta_{ij}$ که برای مختصات متعامد داشتیم.حال اگر از رابطه فوق نسبت به q^k مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\vec{x}}{\partial q^k\partial q^i}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^j}+\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^i}\frac{\partial^2\vec{x}}{\partial q^k\partial q^j}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}$$

حال اگر در رابطه فوق جای اندیسهای k,j,i را بطور چرخه ای جابجا کنیم دورابطه بصورت زیر خوهیم داشت:

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\vec{x}}{\partial q^i\partial q^j}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^k}+\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^j}\frac{\partial^2\vec{x}}{\partial q^i\partial q^k}=\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}$$

$$(3)\qquad \frac{\partial^2\vec{x}}{\partial q^j\partial q^k}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^i}+\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^k}\frac{\partial^2\vec{x}}{\partial q^j\partial q^i}=\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}$$

حال اگر جملات سطر دوم را با جملات سطر سوم جمع ونتیجه را از جملات سطراول کم کنیم خواهیم داشت:

$$(2-194)\qquad \frac{\partial^2\vec{x}}{\partial q^i\partial q^j}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^k}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right\}$$

سمت چپ(۱۴۹-۲) برابر است با:

$$(2-195)\qquad \vec{\varepsilon}_k\cdot\frac{\partial\vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j}=\left(\frac{\partial\vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j}\right)_k$$

یعنی برابر با مؤلفه کوواریانتی بردار $\partial\vec{\varepsilon}/\partial q^j$:

بنابراین داریم:

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right\}\vec{\varepsilon}^k \qquad (2-196)$$

مؤلفه کوواریتتی بردار $\partial\vec{\varepsilon}/\partial q^j$ را بطور سمبولیک بصورت:

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right\} \qquad (2-197)$$

نشان میدهد.

مؤلفه کنتراواریانتی $\partial\vec{\varepsilon}_i/\partial q^j$ کاربرد بیشتری دارد. برای تعیین آن کافیست (2-195) را در (۲–۱۴۹) قرار داده و سپس طرفین را در g^{lk} ضرب نمائیم چون:

$$g^{lk}\vec{\varepsilon}_k = \vec{\varepsilon}^l$$

$$\vec{\varepsilon}^l \cdot \frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = \left(\frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j}\right)^l$$

است در نتیجه داریم:

$$\left(\frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j}\right)^l \vec{\varepsilon}_l = \frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = \frac{1}{2} g^{lk}\left\{\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right\}\hat{\varepsilon}_l$$

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = \Gamma^l_{ij}\vec{\varepsilon}_l \qquad (2-198)$$

Γ^l_{ij} را مؤلفه کنتراواریانتی بردار $\partial\vec{\varepsilon}_i/\partial q^j$ نامند و موسوم به ضریب کریستوفل (*christophel coefficient*) میباشد. اگر ضریب کریستوفل را با اندیسهای i,j,k که به گوش موزونتر میباشد، بنویسیم خواهیم داشت(اندیس تکراری k را l و اندیس معین l را k مینامیم):

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right\} \qquad (2-199)$$

توجه میکنیم مؤلفه کوواریانتی ،(۲–۱۹۷)،و مؤلفه کنتراواریانتی ،(۲–۱۹۹) بردار با متریک g^{lk}یکدیگر مرتبط هستند.

بموجب رابطه (۲–۱۹۹) داریم:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \qquad (2-200)$$

البته اثبات آسانتری هم داریم وآن اینکه:

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 x}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial \vec{\varepsilon}_j}{\partial q^i}$$

بنابراین داریم:

$$\Gamma_{ij}^{k}\vec{\varepsilon}_k = \Gamma_{ji}^{k}\vec{\varepsilon}_k$$

و در نتیجه به رابطه (۲۰۰-۲) میرسیم.

ضرایب کریستوفل برای دستگاه بردار پایه متعامد ولی غیر نرمالیزه دارای تقارنهای دیگر است که به دلیل اطاله کلام بعنوان مسئله عنوان خواهد شد.

پیش از اینکه کاربرد ضریب کریستوفل را نشان دهیم بهتر است کمیت :

$$(2-201) \qquad \frac{\partial \vec{\varepsilon}^i}{\partial q^j} = \gamma^{i}_{jk}\vec{\varepsilon}^k$$

که مشتق بردارپایه دستگاه وارون نسبت به مختصه q^j است بدست آوریم. γ^i_{jk} مؤلفه کوواریانتی این بردار است. میدانیم:

$$\begin{aligned}
&\vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}_k = \delta^i_k \\
&\frac{\partial \vec{\varepsilon}^i}{\partial q^j} \cdot \vec{\varepsilon}_k + \vec{\varepsilon}_i \cdot \frac{\partial \vec{\varepsilon}_k}{\partial q^j} = 0 \\
&\gamma^{i}_{jm}\vec{\varepsilon}^m \cdot \vec{\varepsilon}_k + \vec{\varepsilon}^i \cdot \Gamma^m_{kj}\vec{\varepsilon}_m = 0
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$(2-202) \qquad \gamma^{i}_{jk} = -\Gamma^i_{kj} = -\Gamma^i_{jk}$$

حال بعد از استخراج رابطه (۲۰۲-۲) بردار شتاب ذره را در مختصات منحنی الخط غیر متعامد استخراج میکنیم:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathscr{A}}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \dot{\vec{\varepsilon}}_i(q)\dot{q}^i(t) + \vec{\varepsilon}_i\ddot{q}^i \\
&= \frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i + \vec{\varepsilon}_i\ddot{q}^i \\
&= \vec{\varepsilon}_i\ddot{q}^i + \Gamma^k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\vec{\varepsilon}_k
\end{aligned}$$

$$(2-203) \qquad \vec{\mathscr{A}}(t) = \left(\ddot{q}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\right)\vec{\varepsilon}_k$$

مؤلفه کنتراواریانتی فرمول نیوتون:

$$(2-204) \qquad F^k = m\left(\ddot{q}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\right)$$

می شود. براستی مؤلفه کوواریانتی فرمول نیوتون چه می باشد یک جواب آن این است (۲۰۴–۲) را در g_{lk} ضرب میکنیم اما پاسخ بهتر این سؤال فرمول اویلر لاگرانژ میباشد، توجه کنید در رابطه (۴۴–۲) Q_jمؤلفه کوواریانتی نیرو میباشد.

تعیین شعاع انحناء یک منحنی هنگامیکه معادله منحنی آن معلوم است به عنوان مسئله مطرح خواهد شد.

۲_۱۳_ معادله سطح در مختصات منحنی الخط غیر متعامد و المان سطح واقع بر آن

هر گاه مختصات q^i تابعی از دو پارامتر u و v باشد رابطه:

$$(2-205)\qquad q^i = q^i(u,v) \qquad ,\begin{matrix} q^1 = q^1(u,v) \\ q^2 = q^2(u,v) \\ q^3 = q^3(u,v) \end{matrix}$$

معرف معادله سطح میباشد المان سطح حول نقطه $\vec{x}$ واقع بر سطح از رابطه (۱۱۸–۲) به دست میاید:

$$(2-206)\qquad d\bar{a} = \frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}dudv$$
$$= \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial q^i}\times\frac{\partial\bar{x}}{\partial q^j}\right)\frac{\partial q^i}{\partial u}\times\frac{\partial q^j}{\partial v}dudv$$
$$= \left(\bar{\varepsilon}_i\times\bar{\varepsilon}_j\right)\frac{\partial q^i}{\partial u}\times\frac{\partial q^j}{\partial v}dudv$$
$$= V_{ol}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial q^i}{\partial u}\times\frac{\partial q^j}{\partial v}dudv\bar{\varepsilon}^k$$

فرم محاسباتی(۲۰۶–۲) برابر:

$$(2-207)\qquad d\bar{a} = V_{ol}\begin{vmatrix} \vec{\varepsilon}^1 & \vec{\varepsilon}^2 & \vec{\varepsilon}^3 \\ \dfrac{\partial q^1}{\partial u} & \dfrac{\partial q^2}{\partial u} & \dfrac{\partial q^3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial q^1}{\partial v} & \dfrac{\partial q^2}{\partial v} & \dfrac{\partial q^3}{\partial v} \end{vmatrix}dudv$$

روابط(۲۰۶–۲) و(۲۰۷–۲) رابا روابط(۵۵–۲) و(۵۶–۲) مقایسه کنید کدامیک ساده تر است؟

۱۴ـ۲ـ معادله فضادرمختصات منحنی الخط غیرمتعامد والمان حجم حول یک نقطه

همانگونه که بارها نشان داده ایم معادله فضا د رکلی ترین شکل با رابطه:

$$(2-208) \qquad q^i = q^i(u,v,w) \qquad \begin{matrix} q^1 = q^1(u,v,w) \\ ,q^2 = q^2(u,v,w) \\ q^3 = q^3(u,v,w) \end{matrix}$$

داده میشود که درآنw,v,uراپارامترهای معادله فضا نامند که میتوانند درحالت خاص خود مختصات (q^1,q^2,q^3) باشند.

المان حجم برابر میشود با:

$$(2-209) \qquad dv = \left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial w}dudvdw$$

$$= \left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^i} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial q^j}\right)\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^l}\frac{\partial q^i}{\partial u}\frac{\partial q^j}{\partial v}\frac{\partial q^l}{\partial w}dudvdw$$

$$= \left(\vec{\varepsilon}_i \times \vec{\varepsilon}_j\right)\cdot\hat{\varepsilon}_l\frac{\partial q^i}{\partial u}\frac{\partial q^j}{\partial v}\frac{\partial q^l}{\partial w}dudvdw$$

$$= V_{ol}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial q^i}{\partial u}\frac{\partial q^j}{\partial v}\frac{\partial q^k}{\partial w}dudvdw$$

فرم محاسباتی رابطه فوق بصورت:

$$(2-210) \qquad dv = V_{ol}\begin{vmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial u} & \frac{\partial q^2}{\partial u} & \frac{\partial q^3}{\partial u} \\ \frac{\partial q^1}{\partial v} & \frac{\partial q^2}{\partial v} & \frac{\partial q^3}{\partial v} \\ \frac{\partial q^1}{\partial w} & \frac{\partial q^2}{\partial w} & \frac{\partial q^3}{\partial w} \end{vmatrix}dudvdw$$

میباشد. لازم به یادآوری است که $V_{ol}=(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2).\vec{\varepsilon}_3$ میباشد. اگر پارامترهای معادله فضا خود مختصات منحنی الخط باشند از (۲۱۰-۲) نتیجه میگیریم که:

$$(2-210-a) \qquad dv = V_{ol}dq^1dq^2dq^3$$

۱۵ـ۲ـ محاسبه گرادیان یک کمیت اسکالر،دیورژانس یک میدان برداری لاپلاسین میدان اسکالر وکرل (تاو) میدان برداری در مختصات منحنی الخط غیر متعامد

برای محاسبه گرادیان تابع اسکالر همانند بخش (۷−۲) از تعریف $d\phi$ استفاده میکنیم

$$d\phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{x}$$

اگر $d\vec{x}$ را از رابطه(۱۸۸−۲) جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\phi}{\partial q^i} dq^i = \left(\vec{\nabla}\phi\right) \cdot \vec{\varepsilon}_i dq^i \qquad (2-211)$$

بسیار توجه کنید که حاصلضرب اسکالر در طرف راست رابطه(۲۱۱−۲)مولفه کوواریانتی بردار $\vec{\nabla}\phi$ را حاصل میکند بنابراین داریم:

$$\left(\vec{\nabla}\phi\right)_i = \frac{\partial\phi}{\partial q^i}$$

پس داریم:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial q^i} \vec{\varepsilon}^i \qquad (2-212)$$

بنابراین $\partial\phi_i / \partial q^i$ مؤلفه کوواریانتی گرادیان ϕ است.از رابطه (۲۱۲−۲) می توان نتیجه گرفت که:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial q^i} g^{ji} \vec{\varepsilon}_j \qquad (2-213)$$

که در اینصورت ضریب $\vec{\varepsilon}_j$ در رابطه فوق مولفه کنتراواریانتی گرادیان ϕ میگردد.

همچنین از رابطه (۲۱۲−۲) نتیجه میگیریم که:

$$\vec{\nabla} q^j = \vec{\varepsilon}^j \qquad (2-214)$$

آیا رابطه(۲۱٤−۲) نتیجه جدیدی است ؟چرا نه؟

برای استخراج دیورژانس و کرل میدان برداری به روش ابتکاری ، اتحادهای مشابه روابط (۱۰۱−۲)و(۱۰۲−۲)را استخراج میکنیم:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} q^i \times \vec{\nabla} q^j\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\varepsilon}^i \times \vec{\varepsilon}^j\right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon^{ijk} V_{ol}' \vec{\varepsilon}_k\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon^{ijk} \frac{\vec{\varepsilon}_k}{V_{ol}}\right) = 0 \qquad i \neq j \qquad (2-215)$$

$$V'_{ol} = \left(\vec{\varepsilon}^1 \times \vec{\varepsilon}^2\right) \cdot \vec{\varepsilon}^3 \qquad V_{ol} = \frac{1}{V'_{ol}} = \left(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2\right) \cdot \vec{\varepsilon}_3$$

رابطه (۲-۲۱۵)را میتوان بصورت:

$$(2-216) \qquad \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\varepsilon}_1}{V_{ol}}\right) = 0 \quad , \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\varepsilon}_2}{V_{ol}}\right) = 0 \quad , \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\varepsilon}_3}{V_{ol}}\right) = 0$$

نوشت.اتحاد دیگر رابطه:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} q^i\right) = 0$$

یعنی:

$$\vec{\nabla} \times \varepsilon^i = 0 \qquad i = 1,2,3$$

است.با دانستن این اتحادها محاسبه دیورژانس میدان برداری بصورت زیربدست میاید:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \left(V_{ol} A^i \frac{\vec{\varepsilon}_i}{V_{ol}}\right)$$

$$= \vec{\nabla}\left(V_{ol} A^i\right) \cdot \frac{\vec{\varepsilon}_i}{V_{ol}} + 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial q^j}\left(V_{ol} A^i\right) \vec{\varepsilon}^j \cdot \frac{\vec{\varepsilon}_i}{V_{ol}}$$

$$(2-217) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{V_{ol}} \frac{\partial}{\partial q^i}\left(V_{ol} A^i\right)$$

رابطه (۲-۲۱۷) را با (۲-۱۰۳) مقایسه کنید کدام رابطه ساده تر است توجه کنید از رابطه (۲-۲۱۷) میتوان دیورژانس میدان برداری در مختصات منحنی الخط متعامد با بردارهای پایه نرمالیزه استخراج کرد کافیست دقت کنیم :

$$A^i = \frac{A_i}{h_i}$$

که A_i مولفه $\vec{A}$ در دستگاه اورتونرمال میباشد (و نه مولفه کوواریانتی $\vec{A}$).

لاپلاسین یک تابع اسکالر درمختصات منحنی الخط غیر متعامد به آسانی قابل محاسبه است:

$$\nabla^2 \phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \frac{1}{V_{ol}} \frac{\partial}{\partial q^i}\left(V_{ol} (\nabla \phi)^i\right)$$

باجایگزاری مؤلفه کنتراواریانتی گرادیان ϕ که در(۲۱۳-۲)داده شده است لاپلاسین یک کمیت اسکالر برابر:

$$(2-218)\qquad \nabla^2\phi = \frac{1}{V_{ol}}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(V_{ol}g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial q^j}\right)$$

میشود. رابطه (۲۱۸-۲) را با رابطه(۱۰۶-۲) مقایسه کنید کدامیک دارای فرم ساده تر میباشند؟

برای استخراج کرل یک میدان برداری چنین میکنیم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\left(A_j\vec{\varepsilon}^j\right) = \left(\vec{\nabla}A_j\right)\times\vec{\varepsilon}^j + 0$$

$$= \frac{\partial A_j}{\partial q^i}\vec{\varepsilon}^i\times\vec{\varepsilon}^j$$

$$= V'_{ol}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial A_j}{\partial q^i}\vec{\varepsilon}_k$$

$$(2-219)\qquad \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{V_{ol}}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial q^i}A_j\vec{\varepsilon}_k \equiv \left(\nabla\times A\right)^k\vec{\varepsilon}_k$$

فرم محاسباتی (۲۱۹-۲)بصورت:

$$(2-220)\qquad \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{V_{ol}}\begin{vmatrix} \vec{\varepsilon}_1 & \vec{\varepsilon}_2 & \vec{\varepsilon}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q^1} & \dfrac{\partial}{\partial q^2} & \dfrac{\partial}{\partial q^3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

میباشد. روابط(۲۱۹-۲) و(۲۲۰-۲) رابا (۱۰۸-۲) و(۱۰۹-۲)مقایسه کنید کدامیک فرم ساده تری دار؟ بسیارتوجه کنید که A_i در (۲۲۰-۲) مؤلفه کوواریانتی بردار $\vec{A}$ در صورتیکه A_i در(۱۰۹-۲) مؤلفه معمولی بردار $\vec{A}$ در دستگاه $\hat{a}_i$ است. هرگاه بخواهیم دیورژانس میدان برداری از روی اصول اولیه یعنی از رابطه:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x}_\circ) = \lim_{dv\to 0}\frac{\oint\vec{A}(\vec{x}).d\vec{a}}{dv}$$

حساب کنیم باز هم مکعبی مطابق شکل (۸-۲) میسازیم [به شکل (۷-۲) صفحه ۱۶۵ مراجعه کنید]مساحت سطوح $(abcd)$,$(a'b'c'd')$ازرابطه وباراء مختصات نقطه a و a' بدست میاید:

$$d\vec{a} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial q^1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^2}\right) dq^1 dq^2 = V_{ol}(q) \vec{\varepsilon}^3(q) dq^1 dq^2$$

بنابراین مجموع فلوی میدان برداری گذرنده از دو سطح نامبرده برابر:

$$d\phi_1 + d\phi_2 = \left\{ -\vec{A}(q) \cdot \vec{\varepsilon}^3(q) V_{ol}(q) \Big|_{q_o^1, q_0^2, q_0^3} + \vec{A}(q) \cdot \vec{\varepsilon}^3 V_{ol}(q) \Big|_{q_o^1, q_0^2, q_0^3 + dq^3} \right\} dq^1 dq^2$$

که با انجام ضرب اسکالر بردارها نتیجه:

$$d\phi_1 + d\phi_2 = \frac{\partial}{\partial q^3}\left[A^3(q_0) V_{ol}(q_0)\right] dq^1 dq^2 dq^3 \tag{2-221}$$

حاصل میشود. محاسبات فلوی میدان برداری از دو زوج سطوح دیگر مکعب نتایج:

$$d\phi_3 + d\phi_4 = \frac{\partial}{\partial q^1}\left[A^1(q_0) V_{ol}(q_0)\right] dq^1 dq^2 dq^3 \tag{2-222}$$

$$d\phi_5 + d\phi_6 = \frac{\partial}{\partial q^2}\left[A^2(q_0) V_{ol}(q_0)\right] dq^1 dq^2 dq^3 \tag{2-223}$$

حاصل مینماید. اگر مجموع این نتایج را در رابطه اساسی قرار دهیم و بر المان حجم که با رابطه (الف-۲۱۰-۲) داده شده تقسیم کنیم نتیجه:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\frac{\partial}{\partial q^i}\left[A^i V_{ol}\right] dq^1 dq^2 dq^3 + \cdots}{V_{ol} dq^1 dq^2 dq^3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{V_{ol}} \frac{\partial}{\partial q^i}\left(A^i V_{ol}\right) \tag{2-224}$$

حاصل میشود که با نتیجه (۲۱۷-۲)همخوانی دارد.

دیورژانس میدان برداری در مختصات منحنی الخط غیر متعامد بر حسب ضرایب کریستوفل قابل استخراج است. کافیست در(۲۲۴-۲) مشتق V_{ol} را حساب کنیم یعنی:

$$\frac{\partial}{\partial q^i}(V_{ol}) = \frac{\partial}{\partial q^i}\left[(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2) \cdot \vec{\varepsilon}_3\right]$$

را حساب کنیم داریم:

$$\frac{\partial}{\partial q^i}(V_{ol}) = \left[\left(\frac{\partial \vec{\varepsilon}_1}{\partial q^i} \times \vec{\varepsilon}_2\right) \cdot \vec{\varepsilon}_3\right] + \left[\left(\vec{\varepsilon}_1 \times \frac{\partial \vec{\varepsilon}_2}{\partial q^i}\right) \cdot \vec{\varepsilon}_3\right] + \left[(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2) \cdot \frac{\partial \vec{\varepsilon}_3}{\partial q^i}\right]$$

با جایگزاری رابطه(۱۹۸-۲)داریم:

$$\frac{\partial}{\partial q^i}(V_{ol}) = \Gamma_{1i}^k\left[(\vec{\varepsilon}_k \times \vec{\varepsilon}_2) \cdot \vec{\varepsilon}_3\right] + \Gamma_{2i}^k\left[(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_k) \cdot \vec{\varepsilon}_3\right] + \Gamma_{3i}^k\left[(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2) \cdot \vec{\varepsilon}_k\right]$$

اندیس k در جملات اول ،دوم و سوم به ترتیب فقط می توانند مقادیر ۱,۲,۳ را اختیار نماید. بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial q^i}\left(V_{ol}\right)=\left[\Gamma_{1i}^1+\Gamma_{2i}^2+\Gamma_{3i}^3\right]V_{ol}=\Gamma_{ji}^j V_{ol} \tag{2-225}$$

بنابراین رابطه (۲۲۴-۲) بصورت:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\left[\frac{\partial A^i}{\partial q^i}+A^i\Gamma_{ji}^j\right] \tag{2-226}$$

در میاید که صورت دیگر دیورژانس میدان برداری در مختصات منحنی الخط میباشد برای محاسبه کرل میدان برداری از روی اصول اولیه مطابق شکل (۸-۲) مدار مربعی کوچکی واقع بر یکی از سطوح مختصات منحنی الخط غیر متعامد انتخاب میکنیم. به موجب (۲۱۹-۲) $d\vec{x}_i$ ها را با رابطه:

$$\begin{aligned} d\vec{x}_1&=\vec{\varepsilon}_1\left(q_0^1,q_0^2\right)dq^1\\ d\vec{x}_2&=\vec{\varepsilon}_2\left(q_0^1+dq^1,q_0^2\right)dq^2\\ d\vec{x}_3&=-\vec{\varepsilon}_1\left(q_0^1,q_0^2+dq^2\right)dq^1\\ d\vec{x}_4&=-\vec{\varepsilon}_2\left(q_0^1,q_0^2\right)dq^2 \end{aligned} \tag{2-227}$$

توجه کنید مختصه q^3 در تمامی روابط فوق برابر q_0^3 است که برای سهولت در تحریر نوشته نشده است. حاصلضرب اسکالر $d\vec{x}_i$ها با $A(\vec{x})$ ها با در نظر گرفتن مسئله نقطه اثر میدان برداری $\vec{A}$ نتیجه مشابه (۱۲۱-۲) را حاصل میکند با این تفاوت که ضرب اسکالر $\vec{\varepsilon}_i$با $\vec{A}$ مؤلفه کوواریانتی بردار $\vec{A}$ را حاصل میکند که با مولفه معمولی $\vec{A}$ که از ضرب اسکالر $\hat{a}_i$ در $\vec{A}$ حاصل می شود می بایستی تفاوت قائل شد هرچند هردو کمیت نامبرده با یک نوتاسیون نمایش داده میشوند:

$$\begin{aligned} dI=&A_1\left(q_0\right)dq^1+A_2\left(q_0^1+dq^1,q_0^2\right)dq^2\\ &-A_1\left(q_0^1,q_0^2+dq^2\right)dq^1-A_2\left(q_0^1,q_0^2\right)dq^2 \end{aligned} \tag{2-228}$$

بسط سری تایلور نتیجه:

$$dI=\left\{\frac{\partial}{\partial q^1}A_2\left(q_0\right)-\frac{\partial}{\partial q^2}A_1\left(q_0\right)\right\}dq^1dq^2+\cdots \tag{2-228}$$

میدهد. $d\vec{a}$ این مربع کوچک با رابطه:

$$d\vec{a}=\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^1}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial q^2}\right)dq^1dq^2=\left(\vec{\varepsilon}_1\times\vec{\varepsilon}_2\right)dq^1dq^2$$

$$d\vec{a}=V_{ol}\vec{\varepsilon}^3dq^1dq^2 \qquad (2-230)$$

داده میشود. چون:

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{a}=\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)^3V_{ol}dq^1dq^2$$

را حاصل میکند. بنابراین مؤلفه سوم کنتراواریانتی کرل میدان برداری برابرمیشود با:

$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}(q_0)\right]^3=\frac{\left[\frac{\partial}{\partial q^1}A_2(q_0)-\frac{\partial}{\partial q^2}A_1(q_0)\right]dq^1dq^2+\cdots}{V_{ol}dq^1dq^2}$$

$$=\frac{1}{V_{ol}}\left\{\frac{\partial}{\partial q^1}A_2-\frac{\partial}{\partial q^2}A_1\right\}$$

$$\equiv\frac{1}{V_{ol}}\varepsilon^{ij3}\frac{\partial A_j}{\partial q^i} \qquad (2-231)$$

که با مولفه سوم رابطه (۲-۲۱۹) همخوانی دارد.

۲ـ۱۶ـ مشتق کوواریانتی از مولفه کنتراواریانتی و از مولفه کوواریانتی یک میدان برداری

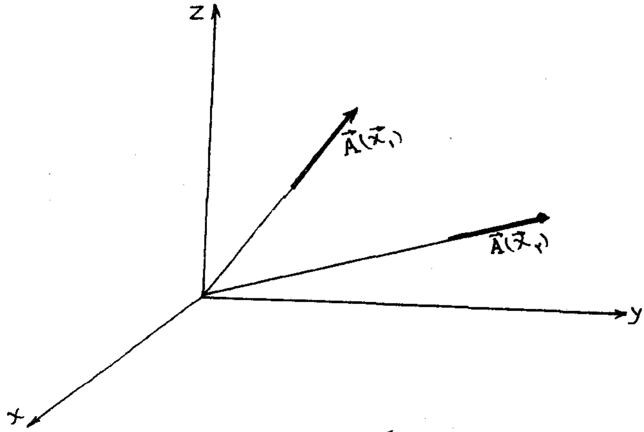
اگر به تعریف میدان برداری یکنواخت در کتاب ،فیزیک الکتریسیته و مغناطیس مراجعه کنید گفته شده است هرگاه مؤلفه های یک میدان برداری در دستگاه مختصات کارتزین تابعی از مختصات نقطه اثرش نباشد میدان برداری را یکنواخت نامند نظیر:

$$(2-232) \qquad A(\vec{x})=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$$

کهαوβ و γ سه مقدار ثابت میباشند حال این سوال مطرح میگردد آیا تعریف فوق در دستگاه مختصات منحنی الخط هم صادق است یعنی مثلاً":

$$(2-233) \qquad A(\vec{x})=\alpha\,\hat{a}_r$$

کهαمقدارثابتی است معرف میدان برداری یکنواخت است یا خیر؟شکل (۲-۱۲) صریحا" پاسخ منفی را تائید مینماید.



شکل(۲–۱۲)

پاسخ تحلیلی بدین سؤال آنست که $\hat{a}_i$ تابعی از مختصات نقطه اثر خویش است بنابراین رابطه (۲–۲۳۳) معرف یک میدان برداری غیر یکنواخت است بنابراین این سؤال مطرح می گردد که میدان برداری یکنواخت در مختصات منحنی الخط غیر متعامد چگونه تعریف میشود برای این منظور کمیت $\partial\vec{A}/\partial q^i$ را حساب میکنیم :

$$(2-234)\qquad \frac{\partial\vec{A}}{\partial q^i}=\frac{\partial\left(A^j\vec{\varepsilon}_j\right)}{\partial q^i}=\frac{\partial A^j}{\partial q^i}\vec{\varepsilon}_j+A^j\frac{\partial\vec{\varepsilon}_j}{\partial q^i}$$

$$=\frac{\partial A^k}{\partial q^i}\vec{\varepsilon}_k+A^j\Gamma^k_{ji}\vec{\varepsilon}_k\qquad ,\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$$

$$(2-235)\qquad \frac{\partial\vec{A}}{\partial q^i}=\left[\frac{\partial A^k}{\partial q^i}+\Gamma^k_{ij}A^j\right]\vec{\varepsilon}_k$$

ضریب $\vec{\varepsilon}_k$ در رابطه فوق مؤلفه کنترااوریانتی بردار $\partial\vec{A}/\partial q^i$ میباشد (چون $\partial\vec{A}/\partial q^i$ خود بردار جدیدیست) وآنرا مشتق کوواریانتی ازمولفه کنترااوریانتی بردار $\vec{A}$ نامندوبا سمبل:

$$(2-236)\qquad \frac{\partial A^k}{\partial q^i}+\Gamma^k_{ij}A^j\equiv A^k_{,i}$$

نشان میدهند یعنی:

$$(2-237)\qquad \frac{\partial\vec{A}}{\partial q^i}=A^k_{,i}\vec{\varepsilon}_k$$

هرگاه در(۲–۲۳٤) $\vec{A}$ را بر حسب مؤلفه کوواریانتی بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial q^i} = \frac{\partial\left(A_j \vec{\varepsilon}^j\right)}{\partial q^i} = \frac{\partial A_j}{\partial q^i}\vec{\varepsilon}^j + A_j \frac{\partial \vec{\varepsilon}^j}{\partial q^i}$$

چون ثابت کردیم [رابطه (۲-۲۰۲)]:

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}^j}{\partial q^i} = -\Gamma^j_{ik}\vec{\varepsilon}_k$$

میباشد بنابراین:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial q^i} = \frac{\partial A_k}{\partial q^i}\vec{\varepsilon}^k - \Gamma^j_{ik} A_j \vec{\varepsilon}^k$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial q^i} = \left[\frac{\partial A_k}{\partial q^i} - \Gamma^j_{ik} A_j\right]\vec{\varepsilon}^k \qquad (2-238)$$

ضریب $\vec{\varepsilon}^k$ در رابطه فوق مؤلفه کوواریانتی بردار $\partial\vec{A}/\partial q^i$ میباشد وآنرا مشتق کوواریانتی از مؤلفه کوواریانتی بردار $\vec{A}$ نامند و با سمبل:

$$\frac{\partial A_k}{\partial q^i} - \Gamma^j_{ik} A_j = A_{k,j} \qquad (2-239)$$

نشان میدهند یعنی:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial q^i} = A_{k,j}\vec{\varepsilon}^k \qquad (2-240)$$

حال اگر برداری یکنواخت باشد در نقاط مختلف فضا همسنگ هم دیگر می باشند و در نتیجه شرط یکنواخت بودن میدان برداری آنست که:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial q^i} = 0$$

باشد و بقولی:

$$A^k_{;i} = \frac{\partial A^k}{\partial q^i} + \Gamma^k_{ij} A^j = 0 \qquad (2-241)$$

رابطه (۲-۲۴۱) شرط یکنواخت بودن میدان برداری را نشان می دهد. بنابراین برای رابطه(۲-۲۳۳)چون فقط جمله اول سمت راست رابطه(۲-۲۴۰) صفرمیباشداین میدان برداری یکنواخت نمیباشد.

توجه کنید بعلت آنکه $A_{k,j}$ و $A^k_{,j}$ مؤلفه های کوواریانتی و کنتراواریانتی بردار $\partial\vec{A}/\partial q^i$ است بوسیله تانسور متریک بهم مرتبط میشوند یعنی

$$(2-242) \qquad g^{lk} A_{k.j} = A^{l}_{.j}$$

رابطه (۲-۲۴۲) را می توان به دو روش یکی ازمساوی قراردادن روابط (۲۴۰-۲) با (۲۳۷-۲) و دیگری با محاسبات مستقیم طرف چپ رابطه (۲-۲۴۲) اثبات نمود که اثبات این روابط بعنوان تمرین بعهده خواننده واگذار میشود.

اگر کمی توجه کنیم دیورژانس یک میدان برداری درمختصات منحنی الخط غیرمتعامد، رابطه(۲۳۶-۲)،چیزی جز مشتق کوواریانتی از مولفه کنتراواریانتی بردار $\vec{A}$ نمیباشد یعنی:

$$(2-243) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A^i}{\partial q^i} + \Gamma^{j}_{ji} A^i \equiv A^{i}_{,i}$$

لازم به یادآوری است که مشتق کوواریانتی ازمولفه های کنتراواریانتی (یاکوواریانتی) برداری با مشتق معمولی متفاوت است چه بنا به به تعریف مشتق کوواریانتی داریم:

$$A^{k}_{,i} = \frac{\partial A^k}{\partial q^i} + \Gamma^{k}_{ij} A^j$$

در صورتیکه مشتق معمولی از مولفه های کنترا واریانتی(یا کوواریانتی)بصورت زیر:

$$\frac{\partial A^k}{\partial q^i}$$

تعریف می شود. درآخر این بخش دو رابطه زیر را استخراج میکنیم که برای حفظ کردن دیورژانس و کرل میدان برداری بسیار مفید است:

$$(2-244) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\varepsilon}^i \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial q^i}$$

$$(2-245) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\varepsilon}^i \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial q^i}$$

برای اثبات (۲۴۴-۲) داریم:

$$(2-244) \qquad \vec{\varepsilon}^i \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial q^i} = \vec{\varepsilon}^i \cdot \left[\frac{\partial A^k}{\partial q^i} + \Gamma^{k}_{ij} A^j \right] \vec{\varepsilon}_k$$
$$= \left[\frac{\partial A^k}{\partial q^i} + \Gamma^{k}_{ij} A^j \right] \delta^{i}_{k}$$
$$= \frac{\partial A^i}{\partial q^i} + \Gamma^{i}_{ij} A^j$$

اما رابطه فوق همان رابطه (۲۳۶-۲) یا (۲۴۳-۲) است.

برای اثبات (۲۴۵-۲) داریم:

$$(2-244)\qquad \vec{\varepsilon}^i \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial q^i} = \vec{\varepsilon}^i \times \left[\frac{\partial A_k}{\partial q^i} - \Gamma^j_{ik} A_j\right]\vec{\varepsilon}^k$$

$$= V'_{ol}\varepsilon^{ikm}\vec{\varepsilon}_m\left[\frac{\partial A_k}{\partial q^i} - \Gamma^j_{ik} A_j\right]$$

چون:

$$I = \varepsilon^{ikm}\Gamma^j_{ik} = \varepsilon^{kim}\Gamma^j_{ki} = \varepsilon^{kim}\Gamma^j_{ik} = -\varepsilon^{ikm}\Gamma^j_{ik}$$

است(توجه کنید درسطر اول رابطه فوق جای اندیسهای تکراری i , k را عوض کرده ایم ودرسطر دوم از تقارن ضریب کریستوفل وسپس از ضد متقارن بودن علامت لوی سویتا استفاده کرده ایم) در نتیجه:

$$I = -I \Rightarrow 2I = 0$$

بنابراین داریم:

$$\vec{\varepsilon}^i \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial q^i} = \frac{1}{V_{ol}}\varepsilon^{ikm}\frac{\partial A_k}{\partial q^i}\vec{\varepsilon}_m$$

که همان رابطه (۲۱۹-۲) میباشد.

۱۷_۲_ قوانین تبدیلات مولفه های یک بردار در دو دستگاه مختصات منحنی الخط.

درفصل اول هنگامیکه دودستگاه مختصات کارتزین که یکی ناشی ازدوران دیگرحاصل شده است در نظر گرفتیم مختصات یک نقطه در این دودستگاه با رابطه خطی:

$$x_i = \sum \tilde{\alpha}_{ij} x'_j$$

بهم مرتبط بودندو از روی آن نشان دادیم که مؤلفه های میدان برداری دردو دستگاه مزبور باز هم با همان رابطه یعنی بصورت:

$$A_i = \sum \tilde{\alpha}_{ij} A'_j$$

بیکدیگر مرتبط هستند.

حال در اوائل فصل دوم و به موجب رابطه (۱−۲) دیدیم مختصات **یک نقطه** در دو دستگاه کارتزین و منحنی الخط با رابطه غیر خطی:

$$\vec{x} = \vec{x}(q) \quad , x_i = x_i\left(q^1, q^2, q^3\right) \tag{2-246}$$

بهم مرتبط هستند. حال میخواهیم رابطه بین مؤلفه های یک بردار در دو دستگاه مزبور را تعیین کنیم.

عقل حکم میکند که بجای بررسی مسئله فوق ،مسئله عمومی تر،یعنی تعیین رابطه بین مؤلفه های میدان برداری دردو دستگاه منحنی الخط را مورد بررسی قرار دهیم.مگر نه آنکه در حالت خاص میتوان یکی از دستگاههای مختصات منحنی الخط را دستگاه کارتزین انتخاب کرد و در نتیجه به رابطه (۲۴۶−۲) رسید. پس در این حالت عمومی تر داریم:

$$q^i = q^i\left(q'^{i}\right) \tag{2-247}$$

حال می خواهیم رابطه مؤلفه های میدان برداری $\vec{a}$ در این دو دستگاه منحنی الخط را بدست آوریم هریک از دو دستگاه منحنی الخط میتوانند متعامد ویا غیرمتعامد باشند. چون قوانین تبدیل بین دو دستگاه مختصات منحنی الخط غیر متعامد کلی تر است آنرا شرح میدهیم.

بعنوان یک مثال ساده از رابطه (۲۴۷−۲) رابطه بین مختصات کروی و استوانه ای را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta &= arctg\frac{\rho}{z} \\ \varphi &= \varphi \end{aligned} \tag{2-248}$$

حال توجه میکنیم دو دستگاه اصلی $\vec{\varepsilon}_i$و$\vec{\varepsilon}'_i$و دستگاههای وارونه آنها یعنی $\vec{\varepsilon}^i$و$\vec{\varepsilon}'^i$در دست است.میدان برداری $\vec{a}$ در این دو دستگاه بصورت:

$$\vec{a}(\vec{x}) = a'^j(q')\vec{\varepsilon}'_j(q') = a^j(q)\vec{\varepsilon}_j(q) \tag{2-249}$$

و یا آنکه بصورت:

$$\vec{a}(\vec{x}) = a'_j(q')\vec{\varepsilon}'^j(q') = a_j(q)\vec{\varepsilon}^j(q) \tag{2-250}$$

تجزیه میشود. برای تعیین a'^i طرفین رابطه (۲۴۹−۲) را در $\vec{\varepsilon}'^i$ضرب اسکالر میکنیم:

$$a'^j \delta_j = a^j \vec{\varepsilon}'^i \cdot \vec{\varepsilon}_j$$
$$a'^i = a^j \vec{\nabla} q'^i \cdot \vec{\varepsilon}_j$$

و اگر گرادیان را در دستگاه مختصات منحنی الخط q^i بنویسیم خواهیم داشت:

$$a'^i = a^j \frac{\partial q'^i}{\partial q^l} \vec{\varepsilon}^l \cdot \vec{\varepsilon}_j$$

که پس از انجام حاصلضرب اسکالر بین بردارهای پایه به نتیجه:

$$(2-251) \qquad a'^i(q') = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} a^j(q)$$

میرسیم. رابطه (۲۵۱-۲) قانون تبدیل مؤلفه های کوواریانتی یک بردار در دو دستگاه منحنی الخط را نشان میدهد. حال اگرشما دانشجوی خبره ئی باشیدازرابطه(۲۵۱-۲) و بدون انجام هیچگونه عملیاتی به نتیجه:

$$(2-252) \qquad a^i(q) = \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} a'^j(q')$$

میرسید علت را شرح دهید.

برای تعیین رابطه بین مولفه های کوواریانتی یک بردار در دو دستگاه نامبرده طرفین رابطه (۲۵۰-۲) را در $\vec{\varepsilon}'_i$ضرب اسکالر میکنیم و درنتیجه داریم:

$$a'_i = a_j \vec{\varepsilon}'_i \cdot \vec{\varepsilon}^j = a_j \vec{\varepsilon}'_i \cdot \vec{\nabla} q^j$$

و اگر دررابطه فوق گرادیان رادرمختصات منحنی الخط q'^iبنویسیم خواهیم داشت:

$$a'_i = a_j \vec{\varepsilon}'_i \cdot \left(\frac{\partial q^j}{\partial q'^l} \cdot \vec{\varepsilon}'^l \right)$$

که پس از انجام حاصلضرب اسکالر بردارهای پایه به نتیجه:

$$(2-253) \qquad a'_i(q') = \frac{\partial q^j}{\partial q'^i} a_j(q)$$

می رسیم. رابطه (۲۵۳-۲) قوانین تبدیل بین مؤلفه های کوواریانتی یک بردار در دو دستگاه منحنی الخط را نشان میدهد. خواننده میبایستی به دقت به تفاوتهای موجود بین این دو قانون تبدیل توجه نماید.

اگربه کتب نسبیت عام مراجعه کنیداکثرآنهابدون شرح هیچگونه انگیزه ئی ازروابط (۲۵۱-۲)و(۲۵۳-۲) بعنوان تعریف مؤلفه کنتراواریانتی و یا کوواریانتی یک بردار در

فضاهای با بعد بزرگتر از سه یاد میکنند که برای مؤلف مدتهای مدیدی انگیزه چنین تعریفی معما بوده است که حال برای شما نیز آشکار شده است.

لازم به توضیح نمیباشد که هرگاه q^i و q'^i ،مختصات کارتزین یک نقطه باشند روابط (۲۵۱-۲)و(۲۵۳-۲) به روابط ساده ئی که درفصل اول استخراج کرده ایم تبدیل میشوند.

در خاتمه فصل دوم قوانین تبدیل ضرایب کریستوفل بین دو دستگاه مختصات منحنی الخط را بدست میاوریم.برای این منظور توجه میکنیم که قوانین تبدیل بین بردارهای پایه این دو دستگاه از روابط زیرین پیروی میکند:

$$(2-254)\qquad \vec{\varepsilon}'^i = \vec{\nabla} q'^i = \frac{\partial q'^i}{\partial q^l}\vec{\varepsilon}^l$$

$$(2-255)\qquad \vec{\varepsilon}'_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q'^i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^l}\cdot\frac{\partial q^l}{\partial q'^i} = \frac{\partial q^l}{\partial q'^i}\vec{\varepsilon}_l$$

توجه کنید که در(۲۵۴-۲) کافیست گرادیان را درمختصات منحنی الخطq^iبنویسیم و در (۲۵۵-۲) از قانون زنجیره ای مشتق برای بردار $\vec{x}$ که تابعی ازq^i وq^iتابعی ازq'^jمیباشد استفاده کنیم.

بنابراین اگر ضرایب کریستوفل دردستگاه مختصات منحنی الخط q'^i بصورت:

$$(2-256)\qquad \Gamma'^k_{ij} = \frac{\partial \vec{\varepsilon}'_i}{\partial q'^j}\cdot\vec{\varepsilon}'^k$$

باشد با جایگزاری بردارهای مزبور برحسب مختصاتq^i داریم:

$$\Gamma'^k_{ij} = \frac{\partial}{\partial q'^j}\left[\frac{\partial q^l}{\partial q'^i}\vec{\varepsilon}_l\right]\cdot\frac{\partial q'^k}{\partial q^m}\vec{\varepsilon}^m = \left[\frac{\partial^2 q^l}{\partial q'^j \partial q'^i}\vec{\varepsilon}_l + \frac{\partial q^l}{\partial q'^i}\frac{\partial \vec{\varepsilon}_l}{\partial q'^j}\right]\cdot\frac{\partial q'^k}{\partial q^m}\vec{\varepsilon}^m$$

$$\Gamma'^k_{ij} = \frac{\partial^2 q^l}{\partial q'^j \partial q'^i}\frac{\partial q'^k}{\partial q^m}\delta^m_l + \frac{\partial q^l}{\partial q'^i}\frac{\partial q'^k}{\partial q^m}\frac{\partial q^n}{\partial q'^j}\frac{\partial \vec{\varepsilon}_l}{\partial q^n}\cdot\vec{\varepsilon}^m$$

$$\Gamma'^k_{ij} = \frac{\partial^2 q^l}{\partial q'^i \partial q'^j}\frac{\partial q'^k}{\partial q^l} + \frac{\partial q^l}{\partial q'^i}\frac{\partial q^n}{\partial q'^j}\frac{\partial q'^k}{\partial q^m}\Gamma^p_{ln}\vec{\varepsilon}_p\cdot\vec{\varepsilon}^m$$

و در نتیجه با انجام حاصلضرب اسکالر دو بردار در یکدیگر و با تغییر اندیس تکراری l در جمله اول سمت راست به m خواهیم داشت:

$$(2-257) \qquad \Gamma'^{k}_{ij} = \frac{\partial q'^k}{\partial q^m}\left\{\frac{\partial^2 q^m}{\partial q'^i \partial q'^j} + \frac{\partial q^l}{\partial q'^i}\frac{\partial q^n}{\partial q'^j}\Gamma^m_{ln}\right\}$$

رابطه (۲۵۷–۲) قانون تبدیل ضرایب کریستوفل بین دو دستگاه منحنی الخط رامشخص میکند. درباره این رابطه بعدازآموختن عملگرها و قوانین تبدیل آنها صحبت مختصری خواهد شد.

هرگاه در (۲۵۷–۲)q^iرا مختصات کارتزین x_i وq'^i مختصات منحنی الخط دلخواهی در نظر بگیریم چون ضرایب کریستوفل بموجب (۱۹۹–۲)برای مختصات کارتزین صفرمیشود، در نتیجه خواهیم داشت:

$$(2-258) \qquad \Gamma'^{k}_{ij} = \frac{\partial q'^k}{\partial x_m}\left\{\frac{\partial^2 x_m}{\partial q'^i \partial q'^j}\right\}$$

بعنوان مثال اگرq'^iها مختصات کروی و q^i هامختصات کارتزین باشند:

$$\begin{aligned} &x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad && r = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &y = r\sin\theta\sin\varphi && \theta = arctg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ &z = r\cos\theta && \varphi = arctg\frac{y}{x} \end{aligned}$$

دراینصورت میتوان ازرابطه(۲۵۸–۲) ضرایب کریستوفل درمختصات کروی رامحاسبه کرد. البته محاسبه ضرایب کریستوفل از رابطه (۲۵۸–۲) تا حدودی طولانی است اما اگر از رابطه (۱۹۹–۲) استفاده کنیم با در نظر گرفتن اینکه:

$$(2-259) \qquad g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j = h_i h_j \hat{a}_i \cdot \hat{a}_j \equiv h_i^2 \delta_{ij}$$

$$g^{ij} = \vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}^j = \frac{1}{h_i}\frac{1}{h_j}\hat{a}_i \cdot \hat{a}_j \equiv \frac{1}{h_i^2}\delta_{ij}$$

میباشد ضرایب کریستوفل برابر میشود با:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\frac{1}{h_k^2}\delta^{kl}\left\{\frac{\partial h_j^2}{\partial q^i}\delta_{jl} + \frac{\partial h_i^2}{\partial q^j}\delta_{il} - \frac{\partial h_i^2}{\partial q^l}\delta_{ij}\right\}$$

که پس از ساده کردن برابر میشود با:

$$(2-260) \qquad \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2h_k^2}\left\{\frac{\partial h_i^2}{\partial q^j}\delta_{ik} + \frac{\partial h_j^2}{\partial q^i}\delta_{jk} - \frac{\partial h_i^2}{\partial q^k}\delta_{ij}\right\}$$

بنابراین به موجب رابطه(۲۶۰-۲) ضرایب کریستوفل برای مختصات منحنی الخط متعامد دارای خواص زیر میباشد:

$$
\begin{aligned}
&1)\, i \neq j \neq k \quad \Rightarrow \Gamma_{ij}^{k} = 0\\
&2)\, i = j \neq k \quad \Rightarrow \Gamma_{ij}^{k} = -\frac{1}{2}\frac{1}{h_k^2}\frac{\partial h_i^2}{\partial q^k}\\
&3)\, i \neq j, i = k \Rightarrow \Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\frac{1}{h_k^2}\frac{\partial h_k^2}{\partial q^j}\\
&4)\, i = j = k \quad \Rightarrow \Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\frac{1}{h_k^2}\frac{\partial h_k^2}{\partial q^k}
\end{aligned}
\qquad (2-261)
$$

بعنوان نمونه از چهار حالت فوق چهار ضریب مختلف کریستوفل در مختصات کروی با بردارهای پایه غیر نرمالیزه حساب میکنیم:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{23}^{1} \equiv \Gamma_{\theta\varphi}^{r} = 0\\
&\Gamma_{33}^{2} \equiv \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\frac{1}{2h_\theta^2}\frac{\partial^2 h_\varphi^2}{\partial\theta} = -\frac{1}{2r^2}\frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial\theta} = -\sin\theta\cos\theta\\
&\Gamma_{12}^{1} \equiv \Gamma_{r\theta}^{r} = \frac{1}{2h_r^2}\frac{\partial h_r^2}{\partial\theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial 1}{\partial\theta} = 0\\
&\Gamma_{33}^{3} = \Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{2h_\varphi^2}\frac{\partial h_\varphi^2}{\partial\varphi} = \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\frac{\partial r^2\sin^2\theta}{\partial\varphi} = 0
\end{aligned}
$$

عملگرها(ماتریسها) و دترمینانها

۰_۳_ مقدمه

تعریف عملگر:

اصول ریاضی درس مکانیک کوانتومی بر اساس جبر خطی و یا به قولی بر مکانیک ماتریسی استوار است .بنابراین آموختن فصل سوم از مهمترین وظایف یک دانشجو است از نظر سیر تحول تاریخی ،ماتریسها اولین بار در درس مکانیک کلاسیک در رابطه با توجیه حرکت جسم صلب و همچنین در بررسی نوسانات کوچک ظاهر شده است.برای آنکه بدون وارد شدن به مباحث تاریخی مکانیک کلاسیک ،عملگرها را از نقطه نظر ریاضی بررسی کنیم از قانون (موضعی) اهم شروع میکنیم .میدانیم بموجب قانون اهم بردار دانسیته جریان الکتریکی ناشی از اعمال میدان الکتریکی در یک محیط هادی با رابطه:

$$(3-1) \qquad \vec{J}(\vec{x}) = \sigma\vec{E}(\vec{x})$$

داده میشود که درآن σ را ضریب هدایت الکتریکی نامند .بموجب رابطه (۱-۳) چون مقدار σ مثبت میباشد ،امتداد ،جهت ونقطه اثر بردار $\vec{J}$ و میدان الکتریکی اعمال شده یکسان و فقط طول آنها از یکدیگر متفاوت میباشد .

حال این سؤال پیش میاید که هر چند $\vec{J}$ ناشی از میدان الکتریکی در نقطه ای مفروض است اما اگر امتداد و جهت $\vec{J}$ با $\vec{E}$ یکسان نباشد در اینصورت چنین $\vec{J}$ ئی را با چه رابطه ای میبایستی نشان داد؟ درپاسخ میگوییم بجای آنکه عدد اسکالر σ را در بردار $\vec{E}$ ضرب کنیم میبایستی برآن یک ابزارریاضی بنام عملگراثردهیم که هم آنرا دوران داده و هم طول آنرا تغییر بدهد .اصطلاحاتی نظیر دوران دادن و تغییر دادن طول بردار فقط در فضای سه بعدی مفهوم هندسی دارد بنابراین از اصطلاح بهتر،تبدیل نمودن یک بردار به یک بردار دیگر استفاده میکنیم .د راینصورت :

یک عملگر را بعنوان ابزار ریاضی ، که اگر آنرا بر برداری اثر دهیم آنرا تبدیل به بردار دیگر مینماید تعریف میکنیم .

چون میخواهیم مطالب گفته شده را برای فضاهای با بعد بزرگتر از سه تعمیم بدهیم ، قبل از آنکه نمایش صریح یک عملگر را شرح دهیم به تعریف فضای برداری میپردازیم.

انگیزه معرفی مبحث **دترمینانها** در این فصل بدلیل کاربرد آنها دراستخراج وتوجیه خواص عملگرها صورت میپذیرد که درجای مناسب و درهمین فصل شرح داده میشود .

۱ـ۳ـ فضای برداری:

فضای برداری V مجموعه ای از بردارهای

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\ldots, \vec{v}_n, \ldots\}$$

میباشد که می توان آنها را با یکدیگر جمع و یا در اعداد اسکالر $\alpha,\beta,\ldots$ ضرب نمود بطوریکه نتایج حاصل جزئی از عناصر مجموعه باشند .همچنین جمع بردارها با یکدیگر و ضرب آنها در اسکالرها از قواعد زیرین پیروی میکند :

الف: خاصیت جابجایی (*commutativity*) :

$$\vec{v}_i + \vec{v}_j = \vec{v}_j + \vec{v}_i$$

ب: خاصیت انجمنی(*associativity*):

$$\vec{v}_i + (\vec{v}_j + \vec{v}_k) = (\vec{v}_i + \vec{v}_j) + \vec{v}_k$$

ج:وجود بردار(خنثی) صفر در فضای برداری بطوریکه:

$$\vec{v}_i + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v}_i = \vec{v}_i$$

د:وجود بردار معکوس ($-v_i$) در فضای برداری بطوریکه:

$$\vec{v}_i + (-\vec{v}_i) = 0$$

ه:

$$\alpha(\vec{v}_i + \vec{v}_j) = \alpha\,\vec{v}_i + \alpha\,\vec{v}_j$$

ز:

$$(\alpha + \beta)\vec{v}_i = \alpha\,\vec{v}_i + \beta\,\vec{v}_i$$

ح:

$$\alpha(\beta\,\vec{v}_i) = (\alpha\,\beta)\vec{v}_i$$

محدوده مقادیر ممکنه ای که اعداد اسکالر $(\alpha,\beta,....)$ اختیار میکنند تشکیل میدان F میدهد. اگر این میدان شامل کلیه اعداد حقیقی باشد فضای برداری را حقیقی و درغیر اینصورت فضای برداری را مختلط نامند.

به عنوان مثال، تمامی بردارها (با طولهای متفاوت) واقع بر امتداد ox تشکیل میدان برداری میدهد.

مجموعه بردارهای $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,....\vec{v}_n\}$ (تعداد بردارها محدود است) رابطور خطی مستقل از یکدیگر نامند هرگاه رابطه ای نظیر:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i = 0 \qquad (3-2)$$

یافت نشود مگر آنکه تمامی ضرایب α_i صفر باشد. مثلا" اگر دو بردار واقع بر محور ox در نظر بگیریم چون رابطه ای نظیر:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = 0$$

یافت میشود که در آن $\alpha_1\neq0$ و $\alpha_2\neq0$ است در اینصورت $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ بطور خطی مستقل از هم نیستند.

فضای برداری را n بعدی نامند هرگاه حداکثر در آن n بردار که بطورخطی مستقل از یکدیگر هستند یافت شوند. معمولا" چنین فضای برداری را با سمبل:

$$V^n(R) \qquad , \qquad V^n(C)$$

که اولی معرف فضای برداری n بعدی حقیقی (*Real*) و دو می معترف فضای برداری n بعدی مختلط (*Complex*) میباشد. توجه کنید که در فضای سه بعدی بی نهایت بردار داریم که تشکیل فضای برداری $IV^3(R)$ رامیدهد اما حداکثرسه بردار ازاین مجموعه بی نهایت بردار وجود دارد که بطور خطی ا زیکدیگر مستقل هستندو بدین علت آنرا فضای برداری سه بعدی IV^3 نامند. اگر فضای برداری IV^n با n بردار $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ که بطور خطی ا زیکدیگر مستقل هستند داده شده باشند در اینصورت هر برداری را میتوان بصورت ترکیب خطی از آنها نوشت چه میبایستی رابطه ای بصورت:

$$\alpha\vec{v} + \sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\vec{v}_i = 0 \qquad (3-3)$$

داشته باشیم که درآن حداقل بعضی از ضرایب صفر نیستند چه اگر تمامی ضرایب صفر باشند در اینصورت بعد فضا $(n+1)$ میگردد که خلاف فرض است. علاوه براین α نیز مخالف صفر است چه در صورت صفر بودن نتیجه:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \vec{v}_i = 0 \qquad (3-4)$$

را خواهیم داشت که درآن بعضی از α_i ها صفر نیستند که بمعنای آن است که بعدفضای برداری کمتر از n است که باز هم خلاف فرض است بنابراین:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i \qquad \alpha_i = -\frac{\alpha'_i}{\alpha} \qquad (3-5)$$

همچنین میتوان نشان داد که ضرایب بسط α_i منحصر بفردهستند چه اگر ضرایب بسط دیگری داشته باشیم نظیر:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v}_i \qquad (3-6)$$

در اینصورت نتیجه میگیریم که:

$$\sum_i (\alpha_i - \beta_i)\vec{v}_i = 0$$

چون $\vec{v}_i$ ها بطور خطی مستقل از یکدیگر هستند:

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \qquad (3-7)$$

بنابراین هر مجموعه ای از بردارهای $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ متعلق به IV^n که به طورخطی از یکدیگر مستقل هستند درنظر بگیریم میتوان هر برداری نظیر v را که متعلق به همان فضای برداری IV^n است بر حسب آنها تجزیه نمود این مجموعه بردارها را بردارهای پایه و ضرایب بسط را مؤلفه نامندو گویند فضای برداری IV^n بر حسب این بردارهای پایه نمایش داده شده است.

۲ـ۳ـ معرفی نوتاسیون دیراک برای بردارها

برای سهولت در تحریر و بیان دقیقتر روابط برداری نوتاسیون برداری دیراک را معرفی میکنیم وآن چیزی جز تعبیر سمبل $\rightarrow$ به صورت $|\square\rangle$ نمیباشد. یعنی بردار $\vec{a}$ را بصورت

$|a\rangle$ نمایش میدهدو غالبا" آنرا کت (Ket) نامند. برای هر کتی (برداری) نظیر $\alpha|a\rangle$ (α کمیتی اسکالر است) کمیتی بنام برا (Bra) بصورت $\alpha^*\langle a|$ نسبت میدهیم وازروی آن حاصلضرب اسکالر (یا به زبان دقیقتر حاصلضرب داخلی) دو بردار را به صورت $\langle a|b\rangle$ تعریف میکنیم که شرایط زیر را اقناع میکند :

$$1)\qquad \langle a|a\rangle \geq 0$$

$$2)\qquad \langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$$

$$3)\qquad \langle a|\beta b+\gamma c\rangle = \beta\langle a|b\rangle + \gamma\langle a|c\rangle$$

و با استفاده از رابطه (۲) نتیجه میگیریم که:

$$4)\qquad \langle \beta b+\gamma c|a\rangle = \beta^*\langle b|a\rangle + \gamma^*\langle c|d\rangle$$

طول یک بردار(بزبان دقیقتر، درفضای n بعدی نرم $Norm$ یک بردار) بموجب تعریف با رابطه:

$$|a| = |\langle a|a\rangle|^{\frac{1}{2}}$$

داده میشود. هرگاه :

$$\langle a|b\rangle = 0$$

شود در اینصورت بردار $\vec{a}$ را عمود بر بردار $\vec{b}$ نامند هر چند درمثالهای آورده شده غالبا" از فضای سه بعدی استفاده شده است اما به آسانی می توان آنها را به فضای با بعد n تعمیم داد بنابراین اگر $\{\vec{e}_i\}$ معرف یک دستگاه بردار پایه اورتونرمال(متعامد با طول واحد)باشد یعنی:

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$$

در اینصورت چون a و b را میتوان بصورت:

$$|a\rangle = \sum_i a_i|e_i\rangle \Rightarrow a_j = \langle e_j|a\rangle$$

$$|b\rangle = \sum_j b_j|e_j\rangle$$

تجزیه نمود ،حاصلضرب اسکالر دو بردار بموجب شرط(۳) بصورت:

$$\begin{aligned}\langle a|b\rangle &= \langle a|b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\rangle \\ &= b_1\langle a|e_1\rangle + b_2\langle a|e_2\rangle + b_3\langle a|e_3\rangle \\ &= b_1\langle e_1|a\rangle^* + b_2\langle e_2|a\rangle^* + b_3\langle e_3|a\rangle^*\end{aligned}$$

$$(3-9) \qquad \langle a|b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i$$

میاید .با توجه به رابطه(۹-۳) میبایست $\langle a|$ و $|a\rangle$ را بترتیب بصورت ماتریسهای ستونی و سطری درنظر گرفت:

$$(3-10) \qquad |a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \langle a| = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* \end{pmatrix}$$

که در نتیجه خواهیم داشت:

$$(3-11) \qquad \langle a|b\rangle = \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \sum_i a_i^* \, b_i$$

۳_۳_ عملگر خطی

همانگونه که قبلا" هم گفته شد بموجب تعریف یک عملگر ابزار ریاضی است که اگر بر برداری اثر دهیم آنرا تبدیل به بردار دیگری (متعلق به همان فضای برداری) نماید و آنرا بصورت زیر نمایش میدهند :

$$(3-12) \qquad A|a\rangle = |b\rangle$$

عملگرها همچنین میتوانند برهر برائی(Bra) اثر کرده وآنرا تبدیل به برائی دیگر نمایند :

$$\langle a|A = \langle b|$$

عملگر خطی از قوانین زیر پیروی میکند :

$$A\alpha|a\rangle = \alpha A|a\rangle$$
$$A\{\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle\} = \alpha A|a\rangle + \beta B|b\rangle$$
$$\langle a|\alpha A = \langle a|A\alpha$$
$$(\langle a|\alpha + \langle b|\beta)A = \alpha\langle a|A + \beta\langle b|A$$

الف_۳_۳_ نمایش یک عملگر

یک بردار را می توان به دو صورت محض *abstract representation* ویا به صورت مختصاتی *coordinate representation* نمایش داد شکل محض بردار $\vec{a}$ بصورت زیر است:

$$|a\rangle$$

اما نمایش مختصاتی بردار $\vec{a}$ بصورت:

$$a_i = \langle e_i | a \rangle \qquad (3-13)$$

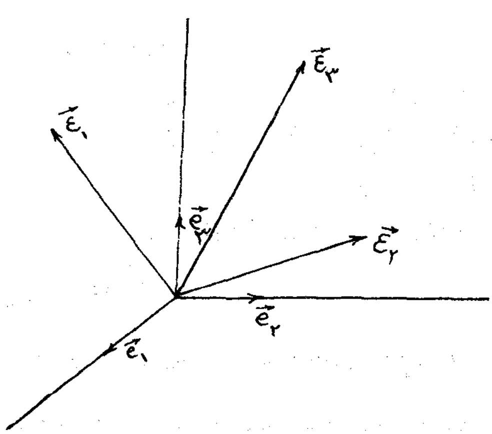
است. یعنی بردار $\vec{a}$ بوسیله مؤلفه های آن در یک دستگاه مختصات (اورتونرمال) بر ما شناسانده شده است. معمولاً نمایش مختصاتی یک بردار برای انجام محاسبات ریاضی کارسازتر است تا نمایش محض آن اما درهر حال هر دو نمایش یک مفهوم را در ذهن میبایستی ایجاد نماید.

حال ببینیم معنای شناختن یک عملگر چیست. هرگاه عملگری بر ما شناخته شده باشد در این صورت اگر آنرا بر بردار معلومی اثر دهیم بردار تبدیل یافته بر ما معلوم خواهد شد.

قضیه: هرگاه از تأثیر عملگر A بر تمامی بردارهای پایه مطلع باشیم آن عملگر بر ما شناخته شده است. برای اثبات قضیه A را بر بردارهای پایه $\{\vec{e}_i\}$ اثر میدهیم.

$$A|e_j\rangle = |\varepsilon_j\rangle \qquad j = 1,2,3 \qquad (3-14)$$

ε_j ها بردارهای حاصل از این تبدیل میباشند و همانگونه که از شکل (۱-۳) مشاهده میگردد این بردارها الزاماً اورتونرمال نمیباشند



شکل (۱-۳)

از طرفی شناختن بردارهای $\vec{\varepsilon}_j$ بمعنای معلوم نمودن مؤلفه های آن در دستگاه $\vec{e}_i$ است یعنی اگر کمیتهای

$$(3-15) \qquad \langle e_i | \varepsilon_j \rangle \qquad i=1,2,3$$

بر ما معلوم هستند .بکمک روابط (۱٤–۳) و(۱٥–۳) در میابیم که کمیتهای معلوم در واقع:

$$(3-16) \qquad \langle e_i | A | e_j \rangle = \langle e_i | \varepsilon_j \rangle$$

میباشند. $\langle e_i | A | e_j \rangle$ را که بطور مختصر با A_{ij} نمایش میدهند، مؤلفه یا عناصر عملگر A در دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ نامند .بنابراین معلوم بودن $\vec{e}_i$ و $\vec{\varepsilon}_j$ به معنای معلوم بودن A_{ij} ها است که در غایت بمعنای معلوم بودن عملگر A است چه حال اگر عملگر A را بربردار معلومی نظیر $\vec{a}$ نیز اثر دهیم خواهیم داشت:

$$(3-17) \qquad A|a\rangle = |b\rangle$$

برای شناختن بردار $\vec{b}$ طرفین (۱۷–۳) را در e_i ضرب و همچنین $\vec{a}$ را در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ بسط میدهیم پس خواهیم داشت:

$$(3-18) \qquad \sum_j \langle e_i | A | e_j \rangle a_j = \langle e_i | b \rangle$$

$$\sum_j A_{ij}\, a_j = b_i$$

در(۱۸–۳) a_j ها معلوم است و اگر A_{ij} ها را داده باشند دراینصورت b_i بر ما معلوم خواهد بود و این اثبات قضیه است معمولا" مؤلفه های بردارهای $\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3$,.... را در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ بصورت ستونهایی کنار هم مینویسند یعنی:

$$(3-19) \qquad \begin{pmatrix} \langle e_1|\varepsilon_1\rangle & \langle e_1|\varepsilon_2\rangle & \langle e_1|\varepsilon_3\rangle \\ \langle e_2|\varepsilon_1\rangle & \langle e_2|\varepsilon_2\rangle & \langle e_2|\varepsilon_3\rangle \\ \langle e_3|\varepsilon_1\rangle & \langle e_3|\varepsilon_2\rangle & \langle e_3|\varepsilon_3\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

جدول (۱۸–۳) را نمایش عملگر A در دستگاه بردارپایه $\{\vec{e}_i\}$ نامندوبرای سالیان دراز مفهوم عناصر درون جدول فوق به عنوان یک معما برای مؤلف باقیمانده بود که اکنون برای خواننده مفهوم آن میبایستی واضح شده باشد .توجه می کنیم که رابطه (۱۹–۳) را

میتوان نمایش عملگر A در بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ دانست و در اینصورت تأثیر عملگر A بر یک بردار دلخواه نظیر $\vec{a}$ درنمایش محض و نمایش مختصاتی و نمایش محاسباتی بصورتهای زیر در میایند:

$$(3-20) \qquad A|a\rangle = |b\rangle$$

$$(3-21) \qquad \sum_j A_{ij}\, a_j = b$$

$$(3-22) \qquad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

که نحوه استفاده از رابطه (۲۲-۳) ، بموجب (۲۱-۳) ضرب عناصر هر عملگر درعناصر متناظر ستون میباشد که غالبا" در دبیرستان نحوه محاسبه آنرا آموخته ایم.

توجه نمایید همانگونه که میتوان مؤلفه های یک بردار را در دستگاه متعامد دیگری نظیر $\{\vec{e}'_i\}$ بصورت a'_i نمایش داد که:

$$(3-23) \qquad a'_i = \langle e'_i|a\rangle \qquad\qquad a'_i \neq a_i$$

یک عملگر را هم میتوان در دستگاه بردار پایه متعامد دیگری نظیر $\{\vec{e}'_i\}$ بصورت A'_{ij} نمایش داد که:

$$(3-24) \qquad A'_{ij} = \langle e'_i|A|e_j\rangle \qquad\qquad A'_{ij} \neq A_{ij}$$

است. حال همانگونه که خواص ریاضی بردار $\vec{a}$ نظیر طول ،امتداد وجهت آن در نمایش های مختلف تغییر نمی کند بهمین ترتیب خواص ریاضی عملگر A نظیر تبدیل نمودن بردار $\vec{a}$ به بردار $\vec{b}$ در نمایشهای مختلف تغییر نمیکند. بنابراین از آرزوهای بزرگ ماست که دستگاه بردار پایه ای بیابیم که شکل عملگر A د رآن بردار پایه ساده ترین صورت ممکن موسوم به شکل قطری در آید بعنوان مثال نمایش عملگر A در دو بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ و $\{\vec{e}'_i\}$ بصورت زیر است:

$$(3-25) \qquad \langle e_i|A|e_j\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 11 \end{pmatrix} \langle e'_i|A|e'_j\rangle = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

٤_٣_ معرفی چند عملگر ساده که در فیزیک کاربرد فراوان دارد

$$A = |a\rangle\langle b| \qquad (3-26)$$

رابطه (۲٦-۳) معرف یک عملگر است چه اگر آنرا بر هر برداری نظیر $\langle c|$ یا $\langle d|$ ویا... اثر دهیم بردار حاصل (یعنی بردار تبدیل یافته)همیشه در امتداد بردار a قرار میگیرد:

$$A|c\rangle = |a\rangle\langle b|c\rangle = \alpha|a\rangle \qquad , \quad \alpha = \langle b|c\rangle$$

(α یک اسکالر ست)

بنابراین میتوان به عملگر A تعریف شده در رابطه (۲٦-۳) نام با مسمی اپراتور تصویر گر (*Projection Operator*) اطلاق نمود. چون بردار تبدیل یافته همیشه در امتداد $\langle a|$ قرار میگیرد.

هر گاه عملگر A بصورت:

$$A = |e_i\rangle\langle e_i| \qquad (3-27)$$

(بدون جمع روی اندیس i)تعریف کنیم این عملگررا هم عملگر تصویر گر در امتداد $\vec{e}_i$ مینامیم که مقدار α در این حالت برابر c_i ،مؤلفه بردار $\vec{c}$ در امتداد $\vec{e}_i$ میشود.

لازم به توضیح نمیباشد که اگر عملگرهای تعریف شده بر براهای (bra) $|c\rangle$ و $|d\rangle$ و... اثر نماید برای $|b\rangle$ حاصل میشود. هر گاه در (۲۷-۳) بر روی اندیس i جمعبندی نماییم عملگر جدید دیگری حاصل میشود:

$$\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{3} |e_i\rangle\langle e_i| \qquad (3-28)$$

حال این عملگر بر هر برداری اثر نماید همان بردار را حاصل میکند یعنی:

$$\mathbb{1}|a\rangle = \sum_{i=1}^{3} |e_i\rangle\langle e_i|a\rangle = \sum_i a_i|e_i\rangle = |a\rangle \qquad (3-29)$$

عملگر تعریف شده با رابطه (۲۸-۳) را عملگر واحد نامند و با علامت $\mathbb{1}$ نشان میدهند. این عملگر از خاصیت اورتونرمالیزاسیون بردارهای پایه $\{\vec{e}_i\}$ حاصل شده است. روش دیگر استخراج عملگر واحد تعریف شده در (۲۸-۳) بشرح زیر است:

$$|a\rangle = \sum_j a_j|e_j\rangle$$

$$\langle e_i | a \rangle = \sum_{j=1}^{3} a_j \delta_{ij} = a_i$$

با جایگزاری a_i در رابطه اول خواهیم داشت:

$$|a\rangle = \sum_{j=1}^{3} \left(\langle e_j | a \rangle\right) |e_j\rangle$$

$$|a\rangle = \sum_{j=1}^{3} |e_j\rangle \langle e_j | a \rangle$$

بنابراین داریم:

$$1 = \sum_{j=1}^{3} |e_j\rangle \langle e_j|$$

توجه کنید که عملگر واحد که با رابطه (۲۸-۳) داده شده برای فضای n بعدی هم صادق است .هرگاه فضای برداری مورد نظر سه بعدی و دستگاه بردارپایه غیرمتعامد باشد دراینصورت بموجب رابطه (۵۷-۱) دستگاه اصلی بر دستگاه وارونه عمود است یعنی:

$$\langle \varepsilon^i | \varepsilon_j \rangle = \delta^i_j$$

بنابراین داریم:

$$|a\rangle = a^i |\varepsilon_i\rangle$$
$$\langle \varepsilon^j | a \rangle = a^i \delta^j_i = a^j$$

با جایگزاری a^j در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$|a\rangle = \left(\langle \varepsilon^i | a \rangle\right) |\varepsilon_i\rangle$$
$$|a\rangle = |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon^i | a \rangle$$

بنابراین عملگر واحدی که بوسیله بردارهای پایه غیر متعامد ایجاد میشود با رابطه:

$$(3-30) \qquad |\varepsilon_i\rangle \langle \varepsilon^i| = \mathbb{I}$$

داده میشود(جمع روی اندیس i مفروض است) بطریق مشابه نیزمیتوان ثابت کرد که:

$$(3-31) \qquad |\varepsilon^i\rangle \langle \varepsilon_i| = \mathbb{I}$$

حال عملگر معروفی بنام عملگر مولد چرخش خرد را در فضای سه بعدی معرفی میکنیم:

می دانیم حاصلضرب برداری دو بردار در فضای سه بعدی بردار جدیدی را حاصل مینماید که امتداد آن بر صفحه مار بر دو بردار عمود است عملگری که از تاثیر آن بر یکی از دو بردار یاد شده ، بردار حاصلضرب برداری را حاصل نماید از رابطه زیر بدست میاید :

$$(3-32) \qquad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$

$$b_j = \langle e_j | b \rangle \qquad , \qquad \vec{e}_k \equiv | e_k \rangle$$

بنابراین رابطه (۳۲-۳) بصورت:

$$|c\rangle = \sum_{i,j,k} a_i \varepsilon_{ijk} |e_k\rangle\langle e_j|b\rangle$$

در میاید حال اگر جای دو اندیس تکراری j و k را تعویض نماییم و سپس ا زخاصیت ضد تقارنی ε_{ijk} استفاده کنیم نتیجه:

$$(3-33) \qquad |c\rangle = -\sum_{i,j,k} a_i \varepsilon_{ijk} |e_j\rangle\langle e_k|b\rangle$$

حاصل میشود .از روی رابطه (۳۳-۳) سه عملگر S^i_{op} بصورت زیر تعریف میکنیم :

$$(3-34) \qquad S^i_{op} = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} |e_j\rangle\langle e_k| \qquad i = 1,2,3$$

این عملگرها بظاهر شبیه عملگر تصویرگر می باشند اما درواقع اینگونه نیست چون جمع بندی روی اندیسهای k و j داریم.

نمایش عملگر S^i_{op} در بردار پایه $\{e_i\}$ بصورت:

$$\langle e_m | S^i_{op} | e_n \rangle = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \langle e_m | e_j \rangle \langle e_k | e_n \rangle$$

$$(3-35) \qquad S^i_{mn} = \varepsilon_{imn}$$

بنابراین نمایش صریح این سه عملگر در بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ بصورت زیر است:

$$s^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad , \qquad s^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3-36) \qquad s^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

حال با تعریف سه عملگر S_{op}^{i} ، حاصلضرب برداری دو بردار بصورت:

$$|c\rangle = \sum_i -a_i s_{op}^{i}|b\rangle \equiv -\vec{a}\cdot\vec{s}_{op}|b\rangle \equiv A|b\rangle \qquad (3-37)$$

در میاید. یعنی عملگری نظیر A بر بردار $\vec{b}$ اثر کرده بردار $\vec{c}$ را حاصل مینماید توجه کنید که عملگر A به بردار $\vec{a}$ هم بستگی دارد.

بعنوان مثال دیگر ،عملگری موسوم به تانسور اینرسی معرفی میکنیم که در دینامیک جسم صلب کاربرد فراوانی دارد. با در نظر گرفتن تعریف ممانتم زاویه ای سیستم ذرات و سرعت هر نقطه از جسم صلب در حرکت دورانی محض که یک نقطه آن در مبدأ مختصات دستگاهی ساکن است داریم :

$$\vec{L} = \sum_a m_a \vec{r}_a(t)\times\vec{v}_a(t)$$

$$\vec{L} = \sum_a m_a \vec{r}_a(t)\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_a)$$

$$\vec{L} = \sum_a m_a\left[\vec{\omega} r_a^2 - \vec{r}_a(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_a)\right] \qquad (3-38)$$

در (۳۸-۳) اندیس a معرف ذرات مختلف است و برای اجتناب از هر گونه شبهه ای آن را با حرف a نشان داده ایم از حروف k,j,i برای نشان دادن مؤلفه های بردار استفاده میکنیم. حال از خود سؤال میکنیم چه عملگری بر بردار $\vec{\omega}$ اثر دهیم تا بردار $\vec{L}$ حاصل شود برای این منظور از رابطه(۳۸-۳) بردار $\vec{\omega}$ را بیرون میکشیم:

$$|L\rangle = \sum_a m_a\left[1\, r_a^2 - |r_a\rangle\langle r_a|\right]|\omega\rangle \qquad (3-39)$$

توجه میکنیم که در استخراج (۳۹-۳) از روابط:

$$(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_a) = (\vec{r}_a\cdot\vec{\omega}) = \langle r_a|\omega\rangle \qquad (3-40)$$

استفاده کرده ایم. کمیت:

$$I = \sum_a m_a\left[r_a^2 1 - |r_a\rangle\langle r_a|\right]$$

یک عملگر موسوم به تانسور اینرسی است که بصورت محض نمایش داده شده نمایش مختصاتی آن در بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ بصورت:

$$I_{ij} = \langle e_i|I|e_j\rangle = \langle e_i|\left\{\sum_a m_a\left[r_a^2 1 - |r_a\rangle\langle r_a|\right]\right\}|e_j\rangle \qquad (3-41)$$

$$= \sum_a m_a \left[r_a^2 \delta_{ij} - x_{ia} x_{ja} \right]$$

در میاید که x_{ja} مؤلفه jام بردار مکانی ذره a است.(مثلا" x_{2a} بمعنای y_a است)تانسور اینرسی بستگی به موقعیت سیستم ذرات جسم صلب نسبت به هم و نسبت به دستگاه مختصاتی که انتخاب کرده ایم دارد.هرگاه جسم صلب پیوسته باشد :

$$\vec{r}_a \to \vec{r} \qquad m_a \to dm = \rho dv \qquad \Sigma \to \int$$

تبدیل میشوند.بنابراین برای جسم صلب پیوسته خواهیم داشت:

$$(3-42) \qquad I_{ij} = \int dm \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right)$$

بموجب (۴۱–۳) یا(۴۲–۳) عناصر قطری تانسو راینرسی چیزی جز ممان اینرسی جسم صلب حول محور های oz, oy, ox نمیباشند که مثلا":

$$(3-43) \qquad I_{33} = \sum_a m_a \left[r_a^2 - z_a z_a \right] = \sum_a m_a \rho_a^2$$

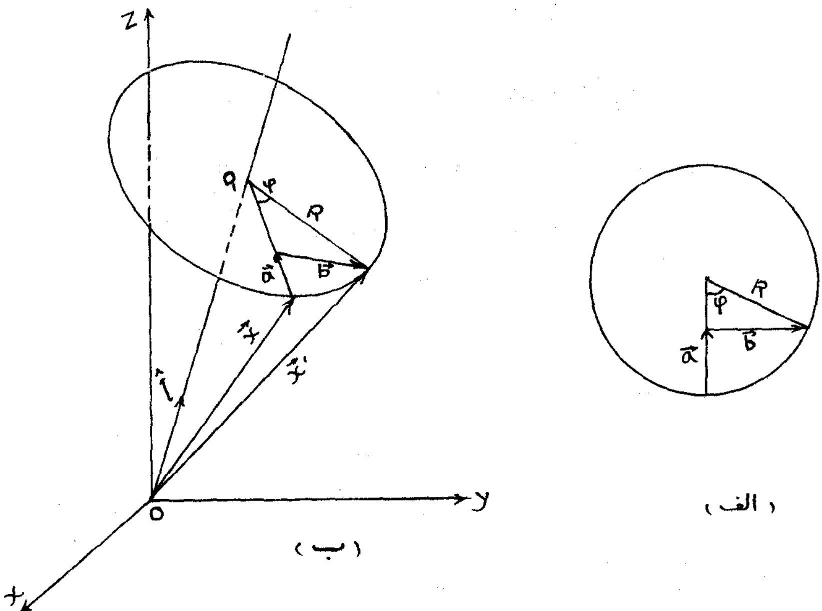
پس عناصر قطری تانسور اینرسی همیشه مثبت است.

سؤال:آیا نمایش تانسور اینرسی در دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ یعنی I_{ij} تابعی از زمان است ؟ در چه دستگاهی نمایش تانسور اینرسی تابعی از زمان نمیباشد؟

بعنوان آخرین مثال درمورد عملگرهایی که درفیزیک کاربرد دارند عملگر دوران رابدست میاوریم .دوران هر نقطه حول یک محور مار بر مبدأ مختصات که با بردار یکه $\hat{l}$ مشخص میشود و به اندازه زاویه ϕ است، بصورت زیر تعریف میشود:

ابتدا از نقطه مورد نظر صفحه ای عمود بر محور (که موسوم به محور دوران است) رسم میکنیم .فاصله فصل مشترک صفحه با محورا زنقطه دلخواه را شعاع دوران R مینامیم. حال اگر درصفحه مزبور دورانی به اندازه زاویه ϕ در جهت خمش انگشتان دست راست طوری انجام دهیم که انگشت شست همین دست در جهت بردار یکه $\hat{l}$ قرار گیرد گویند نقطه مزبور دورانی باندازهϕ حول محوردوران انجام میدهد بنابراین بردار مکانی $\vec{x}$ تبدیل به بردار مکانی $\vec{x}'$ میشود.

بردار یکه $\hat{l}$ واقع برمحوردوران و زاویه ϕ را مشخصه های دوران و یا پارامترهای دوران نامند.



شکل(۲-۳)

همانگونه که از نظر هندسی با معلوم بودن مشخصه های دوران توانستیم موقعیت نقطه دوران یافته را معلوم نماییم از نظر تحلیلی (جبری) هم میبایستی توان انجام چنین کاری را داشته باشیم چه بموجب شکل (۲-۳) داریم:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a} + \vec{b} \qquad (3-44)$$

a و b در شکل (الف-۲-۳) و شکل(ب-۲-۳) مشخص شده اند که میبایستی آنها را بر حسب مشخصه های دوران معلوم نماییم.

بموجب شکل (۲-۳) قدر مطلق $\vec{a}$ برابر:

$$|\vec{a}| = R(1-\cos\phi) \qquad (3-45)$$

از طرفی $\vec{a}$ در صفحه مار بر $\vec{x}$ و $\hat{l}$ قرار دارد و جهت آن در جهت بردار یکه $(\vec{oo}_1-\vec{x})/R$ است

$$|o\vec{o}_1| = \hat{l}\cdot\vec{r} \rightarrow o\vec{o}_1 = \left(\hat{l}\cdot\vec{r}\right)\hat{l} \qquad (3-46)$$

پس $\vec{a}$ برابر میشود با:

$$\vec{a} = (1-\cos\phi)\left[\left(\hat{l}\cdot\vec{x}\right)\hat{l} - \vec{x}\right] \qquad (3-47)$$

اما درمورد بردار $\vec{b}$ که درامتداد عمود برصفحه ماربر $\vec{x}$ و $\hat{l}$ است بموجب شکل (۲-۳):

$$(3-48) \qquad \left|\vec{b}\right| = R\sin\phi$$

و جهت آن د رجهت بردار یکه $(\vec{l}\times\vec{x})/R$قرار میگیرد .بنابراین $\vec{b}$ با رابطه:

$$(3-49) \qquad \vec{b} = \sin\phi\left(\hat{l}\times\vec{x}\right)$$

داده مـی شـود.جایگزینی (۴۹–۳) و (۴۷–۳) در (٤٤–۳) بـردار دوران یافتـــه $\vec{x}'$ برحسب مشخصه های دوران ϕ و $\hat{l}$ وبردار $\vec{x}$ معلوم میشود:

$$(3-50) \qquad \vec{x}' = \vec{x} + (1-\cos\phi)\left[\left(\hat{l}\cdot\vec{x}\right)\hat{l} - \vec{x}\right] + \sin\phi\left(\hat{l}\times\vec{x}\right)$$

حال عملگر دوران را از روی رابطه (۵۰–۳) استخراج میکنیم برای این منظور کافیست بردار $\vec{x}$ را از رابطه فوق فاکتور بگیریم:

$$(3-51) \qquad \vec{x}' = \left\{\mathbb{I} + (1-\cos\phi)\left[|l\rangle\langle l| - \mathbb{I}\right] - \sin\phi(\hat{l}\cdot\vec{S}_{op})\right\}\vec{x}$$

توجه میکنیم برای استخراج (۵۱–۳) از رابطه (۳۷–۳) وهمچنین از روابط زیر استفاده کرده ایم:

$$\left(\hat{l}\cdot\vec{x}\right)\hat{l} \equiv \left(\langle l|x\rangle\right)|l\rangle = |l\rangle\langle l|x\rangle$$

بنابراین نمایش محض عملگر دوران با رابطه:

$$(3-52) \qquad A\left(\hat{l},\phi\right) = \left\{1 + (1-\cos\phi)\left[|l\rangle\langle l| - 1\right] - \sin\phi\,\hat{l}\cdot\vec{S}_{op}\right\}$$

داده میشود .نمایش عملگر فوق در بردار پایه $\{\vec{e_i}\}$ بصورت:

$$(3-53) \qquad \langle e_i|A|e_j\rangle \equiv A_{ij} = \delta_{ij} + (1-\cos\phi)\left(l_i l_j - \delta_{ij}\right) - \varepsilon_{ijk} l_k \sin\phi$$

در میاید شکل ماتریسی و صریح عملگر فوق بصورت زیر است :

$$A = \begin{bmatrix} 1-(l_2^{\,2}+l_3^{\,2})(1-\cos\phi) & (1-\cos\phi)l_1 l_2 - l_3\sin\phi & (1-\cos\phi)l_1 l_3 - l_2\sin\phi \\ (1-\cos\phi)l_1 l_2 - l_3\sin\phi & 1-(l_1^{\,2}+l_3^{\,2})(1-\cos\phi) & (1-\cos\phi)l_2 l_3 - l_1\sin\phi \\ (1-\cos\phi)l_1 l_3 - l_2\sin\phi & (1-\cos\phi)l_2 l_3 - l_1\sin\phi & 1-(l_1^{\,2}+l_2^{\,2})(1-\cos\phi) \end{bmatrix}$$

توجه کنید $l_۱^{۲} + l_۲^{۲} + l_۳^{۲} = ۱$ است.

عملگر دوران در حالتهایی که محور دوران $\hat{l}$ در امتداد محورهـای دسـتگاه مختصـات قرار گیرد دارای فرمهای بسیار ساده میشود که بارهـا آنهـا را مشـاهده کـرده ایـم .بـه عنوان مثا ل اگر:

$$\hat{l} = \hat{k} \qquad \Rightarrow \qquad l_i = \delta_{i3}$$

باشد عناصر عملگر دوران برابر میشود با:

$$
\begin{aligned}
&A_{11} = 1+(1-\cos\phi)(0-1)-0 = \cos\phi \\
&A_{12} = 0+(1-\cos\phi)(0-0)-\varepsilon_{123} l_3 \sin\phi = -\sin\phi \\
(3-55) \qquad &A_{13} = 0+(1-\cos\phi)(0-0)-\varepsilon_{13k}\delta_{k3}\sin\phi = 0 \\
&A_{21} = \dots \\
&A_{22} = \dots
\end{aligned}
$$

بنابراین عملگر دوران حول محور oz و به اندازه زاویه ϕ بصورت:

$$
(3-56) \qquad A(\vec{k},\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

د رمیاید.

هنگامیکه محور دوران منطبق بر oy و یا منطبق بر محور ox شود A بصورتهای زیر در میاید:

$$
(3-57) \qquad A(\vec{j},\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}
$$

$$
A(\vec{i},\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}
$$

با مشاهده روابط (۵۶-۳) و(۵۷-۳) به اهمیت استخراج رابطه (۵۳-۳) که محور دوران $\hat{l}$ منطبق بر هیچیک از محورهای مختصات نمیباشد پی میبریم.

حال به این موضوع مهم هم توجه می کنیم:

اگر $\hat{l}$ منطبق بر هیچ یک ازمحورهای مختصات نباشد شکل عملگر A به صورت (۵٤-۳) درمیاید. حال اگر بجای دستگاه $oxyz$ دستگاه $ox'y'z'$ راانتخاب کنیم بطوریکه $\vec{e}_i \neq \vec{e}'_i$ باشد نمایش عملگردوران در دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}'_i\}$ بکمک (۵۲-۳) بصورت:

$$
(3-58) \qquad \langle e'_i | A | e'_j \rangle = \delta_{ij} + (1-\cos\phi)\left[l'_i\, l'_j - \delta_{ij} \right] - \sin\phi\, \varepsilon_{ijk} l'_k
$$

در میاید که:

$$
l'_i = \langle e'_i | l \rangle
$$

میباشد. حال اگر محور oz' را منطبق بر l انتخاب کنیم:

$$
l'_i = \delta_{i3}
$$

میشود و درنتیجه عملگر A که دربردارپایه $\{\vec{e}_i\}$ هیبت بسیار بزرگی دارد بازهم بصورت:

$$(3-59) \qquad A'_{ij} \equiv \langle e'_i | A | e'_j \rangle = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

درمیاید. دربخشهای دیگر این فصل نشان میدهیم عملگر A که در بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ هیبت بسیار بزرگی دارد در یک دستگاه بردار پایه خاص که ما در اینجا $\{\vec{e''}_i\}$ مینامیم ساده ترین شکل ممکن یعنی شکل قطری را بخود میگیرد و بصورت:

$$(3-60) \qquad A''_{ij} \equiv \langle e''_i | A | e''_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

د رمیاید.

دوران خرد:

بموجب (۲‌ ۵-۳) مشاهده میکنیم هرگاه زاویه دوران ϕ بسیار کوچک باشد وآنرا با $\Delta\phi$ نشان دهیم عملگر دوران خرد حاصل میشود. اگر فقط جملات بی نهایت کوچکهای مرتبه اول را در نظر بگیریم:

$$\cos\Delta\phi \cong 1 - \frac{(\Delta\phi)^2}{2} + ... \cong 1$$
$$\sin\Delta\phi \cong \Delta\phi$$

عملگر چرخش خرد بصورت:

$$(3-61) \qquad A(\hat{l}, \Delta\phi) \cong \left[1 - \Delta\phi \vec{l} \cdot \vec{S}_{op}\right] \equiv \left[1 - \Delta\vec{\phi} \cdot \vec{S}_{op}\right], \Delta\vec{\phi} = \Delta\phi\hat{l}$$

از روی رابطه (۶۱-۳) در میابیم که انتخاب نام عملگرهای مولد چرخش خرد برای S^i ها نام با مسمی بوده است.

چون یک چرخش متناهی حول $\hat{l}$ وباندازه ϕ معادل N چرخش حول $\hat{l}$ وباندازه $\phi/_N$ میباشد. بنابراین اگر Nرا بسیار بزرگ اختیار کنیم $A(\hat{l},\phi)$ برابر:

$$(3-62) \qquad A(\hat{l}, \Delta\phi) = \left[1 - \frac{\vec{\phi}}{N} \cdot \vec{S}_{op}\right]^N = e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{S}_{op}} \equiv e^{-\phi\,\hat{l}\cdot\vec{S}_{op}}$$

میشود .تساوی سوم (۶۲−۳) از روی تعریف تابع نمایی استخراج شده است .شایان ذکر است اگر تابع $f(x)$ بر حسب سری تایلور بصورت:

$$f(x) = \sum a_n x^n$$

تعریف نماییم تابع ماتریسی $f(A)$ معنایی بصورت:

$$f(A) = \sum a_n A^n \qquad (3-63)$$

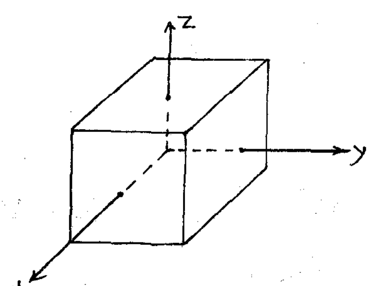
خواهد داشت .پس تساوی سوم رابطه (۶۲−۳) معنای:

$$e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{S}_{OP}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\phi\cdot S)^n}{n!} \qquad (3-64)$$

دارد .معادل بودن روابط (۶۴−۳) و (۵۲−۳) بعنوان تمرین بعهده خواننده واگذار میشود و بدین بسنده میکنیم که خواننده ابتدا میبایستی روابط زیر را ثابت نماید که :

$$\begin{aligned} &\left(-\hat{l}\cdot\vec{S}_{op}\right)\left(-\hat{l}\cdot\vec{S}_{op}\right) = |l\rangle\langle l| - \mathbb{I} \\ &\left(-\hat{l}\cdot\vec{S}_{op}\right)\left(-\hat{l}\cdot\vec{S}_{op}\right)\left(-\hat{l}\cdot\vec{S}_{op}\right) = -\left(-\hat{l}\cdot\vec{S}_{op}\right) \qquad (3-65) \\ &\left(-\hat{l}\cdot\vec{S}_{op}\right)^4 = -\left(-\hat{l}\cdot\vec{S}_{op}\right)^2 \end{aligned}$$

قبل ازآنکه بخش(۴−۳) رابه پایان برسانیم بعنوان مثال مؤلفه های تانسوراینرسی مکعب همگن شکل زیر را نسبت به دستگاه بردار پایه نشان داده شده $\{\vec{e}_i\}$ محاسبه میکنیم:



شکل(۳−۳)

بموجب (۴۲-۳) داریم:

$$I_{11} = \int dm(r^2 - x^2)$$

$$I_{11} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \rho_0 (y^2 + z^2) dxdydz$$

$$I_{11} = \rho_0 a \int_{z=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} (y^2 + z^2) dydz$$

$$= \rho_0 a \int_{z=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left(\frac{2}{3}\frac{a^3}{8} + z^2 a \right) dz$$

$$I_{11} = \rho_0 a \left\{ \frac{2}{3}\frac{a^3}{8} a + \frac{2}{3}\frac{a^3}{8} a \right\} = \rho_0 \frac{a^5}{6} = \frac{ma^2}{6}$$

$$I_{12} = \int_{-a}^{+a} \rho_0 (0 - xy) dxdydz$$

زیر انتگرال فوق ،xy،نسبت به x (و یا y) تابع فردی است بنابراین نتیجه آن صفر است.

با محاسبات مشابه مؤلفه تانسور اینرسی بصورت:

$$(3-66) \qquad I = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{6} \end{pmatrix}$$

در میاید بسیار توجه کنید هرگاه دستگاه بردارهای پایه را طوری انتخاب کنیم که سه محور ox و oy و oz منطبق بر سه ضلع مکعب گردد به علت تغییر حدود انتگرال تانسور اینرسی در این دستگاه بصورت

$$(3-67) \qquad I = \begin{pmatrix} \frac{2ma^2}{3} & \frac{ma^2}{4} & \frac{ma^2}{4} \\ \frac{ma^2}{4} & \frac{2ma^2}{3} & \frac{ma^2}{4} \\ \frac{ma^2}{4} & \frac{ma^2}{4} & \frac{2ma^2}{3} \end{pmatrix}$$

در میاید .(محاسبات بعهده خواننده واگذار میشود).همانگونه که مشاهده میگردد یک عملگر در دستگاههای بردارهای پایه مختلف دارای نمایشهای مختلفی است. محاسبه تانسور اینرسی در دستگاهی که مبدأ دستگاه در مرکز مکعب اما یک محور آن

از رأس مکعب عبور نماید بسیار مشکلتر میباشد که این نمایش تانسور اینرسی را بعد از مطالعه قوانین تبدیل عملگرها مشخص میکنیم.

۵ـ۳ـ جمع و حاصلضرب دو عملگر

حاصلجمع دو عملگر،عملگر جدیدی را حاصل میکند که مؤلفه های آن برابر:

$$C = A + B$$

$$\langle e_i|C|e_j\rangle = \langle e_i|(A+B)|e_j\rangle$$

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \tag{3-68}$$

بموجب (۶۸−۳) هر عنصر عملگر حاصلجمع برابر حاصلجمع عناصر مناظر دو عملگر میباشد.

ضریب دو عملگر ،عملگر جدیدی را حاصل مینماید که مؤلفه های آن برابر:

$$C = AB$$

$$\langle e_i|C|e_j\rangle = \langle e_i|AB|e_j\rangle$$

که با وارون کردن عملگر واحد بین A و B داریم:

$$C_{ij} = \sum_k \langle e_i|A|e_k\rangle\langle e_k|B|e_j\rangle$$

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \tag{3-69}$$

از رابطه (۶۹−۳) بارها بدون انکه دلیل حاصلضرب دو عملگر را بدانیم در دبیرستان استفاده کرده ایم:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \boxed{A_{21} \quad A_{22} \quad A_{23}} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

مثلا" اگر تمامی عناصر سطر دوم را درعناصرستون سوم ضرب کنیم C_{23} حاصل میشود:

$$C_{23} = A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33}$$

توجه میکنیم که در حالت کلی:

$$AB \neq BA$$

است این واقعیت از روی رابطه (۶۹−۳) مشهود است چه:

$$C = AB \quad \rightarrow \quad C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

$$D = BA \quad \rightarrow \quad D_{ij} = \sum_k B_{ik} A_{kj} = \sum_k A_{kj} B_{ik}$$

$$(3-70) \qquad C_{ij} \neq D_{ij}$$

کمیت:

$$(3-71) \qquad AB - BA \equiv [A, B]$$

را کمیوتاتور دوعملگر A و B نامند و کاربردهای فراوانی در مکانیک کوانتومی دارد همچنین کمیت:

$$(3-72) \qquad AB + BA \equiv [A, B]_+$$

را آنتی کمیوتاتور دوعملگر A و B نامند. دربعضی موارد هنگامیکه کمیوتاتور دوعملگر صفر میشود خواص ریاضی جالبی استخراج میگردد که در مکانیک کوانتومی در مورد آن شرح داده میشود.

۶ـ۳ـ عملگرهایی که از روی یک عملگر میتوان ساخت

هرگاه عملگر A داده شوداز روی آن چندعملگرمختلف میتوانساخت که معروفترین آنها عبارتند از:

۱- عملگر وارونه *(Transpose)* عملگر A

عملگر جدیدی است که آنرا با سمبل $\tilde{A}$ نشان میدهند مؤلفه های این عملگربرابر است با:

$$(3-73) \qquad (\tilde{A})_{ij} = A_{ji}$$

بعنوان مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

۲- عملگر مزدوج وارونه عملگر A *(Transpose Conjugate):*

عملگر جدیدی است که آنرا با A^+ نشان میدهند و مؤلفه های آن از رابطه

$$(3-74) \qquad (A^+)_{ij} = A^*_{ji}$$

بدست میاید. بعنوان مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 3+2i & 4 \\ 5i & 7 & 2-i \\ 5-2i & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^+ = \begin{pmatrix} 1+i & -5i & 5+2i \\ 3-2i & 7 & 3 \\ 4 & 2+i & 5 \end{pmatrix}$$

توجه کنید در فضای حقیقی روابط (۳−۷۳) و (۳−۷۴) عینیت میبابند.

3- عملگر معکوس عملگر A (Inverse):

عملگر جدیدی است که آنرا با A^{-1} نشان میدهند و مؤلفه های آن را بعد از آموختن دترمینانها استخراج میکنیم و در حال حاضر به این اکتفا میکنیم که عملگرمعکوس از رابطه:

$$A^{-1}A = 1 \qquad (3-75)$$

پیروی میکند.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -13 & 2 & -5 \\ 17 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

۷ـ۳ـ معرفی عملگرهای خاص

۱- عملگر هرمیتی(Hermition):

هرگاه عملگر A آنگونه باشد که از رابطه:

$$A^{+} = A \qquad (3-76)$$

پیروی کند عملگر A را هرمیتی نامند. در فضای حقیقی رابطه (۷۶-۳) بصورت:

$$\tilde{A} = A \qquad (3-77)$$

در میاید که اینگونه عملگر هرمیتی را عملگر متقارن مینامند بعنوان مثال عملگر A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 2-3i \\ 1-i & 3 & 4+i \\ 2+3i & 4-i & 5 \end{pmatrix}$$

یک عملگر هرمیتی است چه بموجب (۷۴-۳) و(۷۶-۳) داریم:

$$A_{ij}^{+} = A_{ij}$$

$$A_{ji}^{*} = A_{ij} \qquad (3-78)$$

همانگونه که مشاهده میکنیم عملگر فوق از رابطه (۷۸-۳) پیروی میکند.

توجه کنید هرگاه در (۷۸-۳) $i = j$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$A_{ii}^{*} = A_{ii} \qquad (3-79)$$

یعنی عناصر قطری عملگر هرمیتی میبایستی حقیقی باشند.

تعداد عناصر مستقل یک عملگر درحالت کلی در فضای مختلط n بعدی $2n^2$ است چون تعداد مؤلفه ها n^2 و هر مؤلفه عملگر درحالت عمومی از یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی تشکیل شده است. اما برای عملگر هرمیتی د رفضای مختلط مشاهده میشود که اولا" عناصر قطری حقیقی و در ثانی عناصر غیر قطری A_{ij} با A_{ji} هر چند که مساوی نیستند اما از اعداد یکسان درست شده اند بنابراین $2(n^2-n)$ تعداد عناصر غیر قطری را حاصل مینماید واگر بر دو تقسیم کنیم تعداد عناصر واقع در یک طرف قطر را معلوم میسازد و این تعداد عناصر مستقل غیر قطری است. بنابراین تعداد کل عناصر مستقل یک عملگر هرمیتی برابر میشود با:

$$(3-80) \qquad \frac{2\left(n^2-n\right)}{2}+n=n^2$$

اگر فضای برداری حقیقی باشد تعداد عناصر مستقل یک عملگر هرمیتی(متقارن)برابر میشود با:

$$(3-81) \qquad \frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n^2+n}{2}$$

اثبات (۸۱–۳) بعهده خواننده واگذار میشود (آیا n^2+n عدد زوجی هست یا نه).

از روی رابطه (٤۱–۳) نتیجه می گیریم که تانسور اینرسی یک عملگر هرمیتی (متقارن) است.

۲-عملگر ضد هرمیتی *(Anti Hermition)*:

هرگاه عملگر A آنگونه باشد که از رابطه:

$$(3-82) \qquad A^{+}=-A$$

پیروی کند عملگر A را ضد هرمیتی نامند. در فضای حقیقی رابطه (۸۲–۳) بصورت:

$$(3-83) \qquad \tilde{A}=-A$$

درمیاید که اینگونه عملگر هرمیتی را عملگر ضد متقارن یا پادمتقارن نامند(پاد بمعنای ضد است نظیر زهر–پادزهر ،سخن–پادسخن=پاسخ ،آلایش –پادآلایش=پالایش) توجه میکنیم بموجب (۸۲–۳) داریم:

$$\left(A^{+}\right)_{ij}=-A_{ij}$$

$$(3-84) \qquad A^*_{ji} = -A_{ij}$$

هرگاه در (۸۴–۳)، $i=j$ قرار دهیم:

$$(3-85) \qquad A^*_{ii} = -A_{ii}$$

میگردد یعنی عناصر قطری یک عملگر ضد هرمیتی موهومی خالص و در فضای حقیقی:

$$(3-86) \qquad A_{ii} = -A_{ii} \quad \Rightarrow \quad 2A_{ii} = 0$$

صفر میباشند. تعداد عناصر مستقل یک عملگر ضد هرمیتی بموجب (۸۰–۳) باز هم برابر n^2 میگردد و اگر عملگر ضد متقارن باشد، در اینصورت با استفاده از نتیجه (۸۰–۳) برابر:

$$(3-87) \qquad \frac{n^2-n}{2}$$

میگردد. (عناصر قطری نداریم)

معروفترین عملگر ضد متقارن عملگر S^i است که با روابط (۳۶–۳) داده شده اند:

$$(3-89) \qquad S^i_{mn} = -S^i_{nm} = \varepsilon_{imn}$$

۳- عملگر یونیتاری (*Unitary*):

هرگاه عملگر A آنگونه باشد که از رابطه:

$$(3-90) \qquad A^+A = AA^+ = 1 \quad \Rightarrow \quad A^+ = A^{-1}$$

پیروی نماید عملگر A را یونیتاری نامند. در فضای حقیقی رابطه (۹۰–۳) بصورت:

$$(3-91) \qquad \tilde{A}A = A\tilde{A} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = A^{-1}$$

درمیاید که اینگونه عملگر یونیتاری را متعامد نامند.

کلمه تعامد برای عملگری که با رابطه (۹۱–۳) تعریف شده نام با مسمی میباشد چه بموجب (۹۱–۳) داریم:

$$\sum_k \tilde{A}_{ik} A_{kj} = \delta_{ij}$$

$$(3-92) \qquad \sum_k A_{ki} A_{kj} = \delta_{ij}$$

A_{ki} با i ثابت و k متغییر معرف عناصر ستون i ام است و برای A_{kj} نیز تعبیر مشابه داریم اگر این ستونها معرف مؤلفه های دو بردار باشند (۹۲–۳) مبین عمود بودن این بردارها بر هم میباشد. یعنی عملگر A از ستونهایی تشکیل شده که بر هم عمود هستند و بدین علت

عملگر A را متعامد نامند اگر از رابطه دوم (۹۱–۳) یعنی $A\tilde{A}=1$ استفاده کنیم بطریق مشابه نتیجه میگیریم که سطرهای عملگر متعامد برهم عمود هستند .

بعنوان مثال عملگر دوران یک عملگر یونیتاری (متعامد)است البته اثبات آن ازروی رابطه (۵۲–۳) و یا(۵۳–۳) طولانی میباشداما اگرازرابطه(۶۲–۳) استفاده کنیم :

$$(3-93) \qquad A=e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{S}_{op}} \quad\Rightarrow\quad A^{+}=e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{S}_{op}^{+}}=e^{+\vec{\phi}\cdot\vec{S}_{op}}$$

$$(3-94) \qquad AA^{+}=e^{-\vec{\phi}\cdot\vec{S}+\vec{\phi}\cdot\vec{S}}=e^{0}=1$$

اگر خواننده در فکر آنست که چرااگر دو عملگررا که بطور نمائی داده شده اند در هم ضرب کنیم ،عملگر نمائی دیگری حاصل میشود که عملگر های نما با یکدیگر جمع میشوند ،اثبات آنرا به بعد موکول میکنیم و در اینجا خاطر نشان میسازیم که در حالت کلی داریم:

$$(3-95) \qquad e^{A}e^{B}\neq e^{A+B}$$

بنابراین برای رسیدن به جواب (۹۴–۳) روش دیگری را اتخاذ میکنیم :

$$(3-96) \qquad A^{+}=e^{+\vec{\phi}\cdot\vec{S}_{op}}=e^{-(-\vec{\phi}\cdot\vec{S})}$$

یعنی A^{+} عملگر دورانی است حول $\hat{l}$ و باندازه زاویه ($-\phi$) بنابراین در اینصورت اگر A هر برداری را حول l و باندازه ϕ دوران داده باشد و آنرا تبدیل به $\vec{x}'$ نماید ، A^{+} ، $\vec{x}'$ را تبدیل به $\vec{x}$ مینماید یعنی:

$$A\vec{x}=\vec{x}'$$
$$A^{+}A\vec{x}=A^{+}\vec{x}'=\vec{x}$$

بنابراین :

$$(3-97) \qquad A^{+}A=1$$

به غیر از عملگرهای هرمیتی ، ضد هرمیتی و یونیتاری که به طور گسترده درمکانیک کلاسیک و کوانتومی کاربرد دارد عملگرهای خاص دیگری هم وجود دارند که ذکر آنها در اولویت بعدی قرار دارد برخی از این عملگرها عبارتند از:

4- عملگر پریودیک *(Periodic Op.)*:

هرگاه عملگر A آنگونه باشد که از رابطه:

$$(3-98) \qquad A^{k+1}=A$$

پیروی کند (k کوچکترین عدد مثبت و صحیح است) آنرا عملگر پریودیک نامند و k را پریود عملگر نامند. هرگاه k=۱ باشد یعنی :

$$A^2 = A \qquad (3-99)$$

عملگر A را *Idemponent* (هم قوه)نامند.

۵- عملگر *(nilpotent)*:

هر گاه عملگر A آنگونه باشد که از رابطه:

$$A^P = 0 \qquad (3-100)$$

پیروی کند (p کوچکترین عدد صحیح مثبت است) عملگررا *nilpotent* نامند و p را اندیس چنین عملگری نامند.

۶-عملگر *(Involutor)*:

هرگاه A آنگونه باشد که از رابطه:

$$A^2 = 1 \qquad (3-101)$$

پیروی کند A را عملگر *Involutor* نامند. به موجب رابطه (۱۰۱-۳) معکوس عملگر *Involutor* خودش میباشد.

بعنوان مثال ماتریسهای پائولی ماتریسهای *Involutor* هستند

$$\sigma_x^2 = 1 \qquad \sigma_y^2 = 1 \qquad \sigma_z^2 = 1 \qquad (3-102)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

حتی عملگری که بصورت:

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \sum_i n_i \sigma_i \qquad (3-103)$$

که $\hat{n}$ بردار یکه میباشد یک عملگر *Involutor* میباشد یعنی:

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = 1 \qquad (3-104)$$

یک روش اثبات رابطه (۱۰۴-۳) محاسبه صریح عملگر $(n.\sigma)$ وسپس ضرب آن در خودش است اما اثبات بهتر استفاده ازروابط کمیوتاتوری و آنتی کمیوتاتوری ماتریس های پائولی است:

$$\left[\sigma_i , \sigma_j\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k$$

$$\left[\sigma_i , \sigma_j\right]_+ = 2\delta_{ij}\,1 \qquad (3-105)$$

که از روی آنها میتوان به نتیجه (۳−۱۰٤) رسید .

۸_۳_ قضایایی در مورد عملگرها

۱- عملگر معکوس عملگر A منحصر بفرد است.

اثبات:هرگاه دو عملگر B و C یافت شوند بطوریکه از روابط زیر پیروی کنند :

$$AB = 1 \quad , \quad CA = 1$$

در اینصورت با ضرب B در طرفین رابطه دوم و استفاده از رابطه اول داریم:

$$CAB = B \to C(AB) = B \Rightarrow C = B \equiv A^{-1}$$

-2 $\qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

اثبات بعهده خواننده است.

-3 $\qquad (AB)^{+} = B^{+}A^{+}$

اثبات:

$$AB = C$$
$$\sum_k A_{ik}B_{kj} = C_{ij}$$

از رابطه فوق مزدوج میگیریم:

$$\sum_k A^*{}_{ik}B^*{}_{kj} = C^*{}_{ij}$$

با در نظر گرفتن رابطه (۳−۷٤) داریم:

$$\sum_k \left(A^+\right)_{ki}\left(B^+\right)_{jk} = C^+_{ji}$$

و بموجب قاعده حاصلضرب عملگرها :

$$\sum_k B^+_{jk}A^+_{ki} = C^+_{ji}$$

$$B^+A^+ = C^+ \qquad (3-105)$$

4- اگر $A=|a\rangle\langle b|$ باشد در اینصورت:

$$A^+ = |b\rangle\langle a|$$

است.

اثبات:

$$A = |a\rangle\langle b| \Rightarrow A_{ij} = \langle e_i|a\rangle\langle b|e_j\rangle = a_i b_j^*$$
$$A_{ij}^* = a_i^* b_j$$
$$\left(A^+\right)_{ji} = \langle e_i|a\rangle\langle e_j|b\rangle$$
$$\langle e_j|A^+|e_i\rangle = \langle e_j|b\rangle\langle a|e_i\rangle$$

با ضرب طرفین در $\langle e_j|$ ، $|e_i\rangle$ و جمع روی اندیسهای i,j خواهیم داشت:

$$(3-106) \qquad A^+ = |b\rangle\langle a|$$

۵- هرگاه عملگر A بردار $\vec{a}$ را به بردار $\vec{b}$ تبدیل نماید در اینصورت عملگر A^+ برای $|a\rangle$ را تبدیل به برای $\langle b|$ مینماید.

(این قضیه از نظر کاربردی بسیار مهم میباشد)

اثبات:

$$A|a\rangle = |b\rangle$$

با ضرب $|e_i\rangle$ در طرفین و قرار دادن $|e_j\rangle\langle e_j|\Sigma$ مابین A و a خواهیم داشت:

$$A_{ij}a_j = b_i$$

با مزدوج گرفتن از رابطه فوق خواهیم داشت:

$$A^*_{ij}a^*_j = b_i^*$$

و با در نظر گرفتن:

$$a_i = \langle e_i|a\rangle \quad , \quad a_i^* = \langle e_i|a\rangle^* = \langle a|e_i\rangle$$
$$\left(A^+\right)_{ji}\langle a|e_j\rangle = \langle b|e_i\rangle$$
$$\langle a|e_j\rangle\langle e_j|A^+|e_i\rangle = \langle b|e_i\rangle$$
$$\langle a|A^+|e_i\rangle = \langle b|e_i\rangle$$

با ضرب رابطه فوق در $|e_i\rangle$ و جمع روی اندیس i به نتیجه:

$$(3-107) \qquad \langle a|A^+ = \langle b|$$

میرسیم.

۶- رد یک عملگر *trace*

بموجب تعریف رد یک عملگر جمع عناصر قطری آن میباشد:

$$trA = \sum_i A_{ii} \qquad (3-108)$$

۷- ضرب یک عملگر در یک اسکالر

عدد اسکالر را میبایستی در تمامی مؤلفه های یک عملگر ضرب نمود چه:

$$A|a\rangle = |b\rangle$$
$$\alpha A|a\rangle = \alpha|b\rangle$$
$$\alpha A_{ij} a_j = \alpha b_i$$
$$B_{ij} a_j = \alpha b_i \Rightarrow B_{ij} = \alpha A_{ij} \qquad (3-109)$$

۸- مشتق از یک عملگر

هرگاه مؤلفه های عملگر A تابعی از پارامتر t باشند مشتق از عملگر A، عملگر جدیدی را حاصل مینماید که مؤلفه های آن مشتق مؤلفه های عملگر A است.

اثبات:

$$\frac{d}{dt}A(t) = B(t)$$

با ضرب رابطه فوق در $\langle e_j|$ و $|e_i\rangle$ داریم:

$$\langle e_i|\frac{d}{dt}A(t)|e_j\rangle = \langle e_i|B|e_j\rangle$$
$$\frac{d}{dt}\{\langle e_i|A(t)|e_j\rangle\} = B_{ij}$$

توجه نمایید که بردارهای پایه تابعی از پارامتر t نمیباشند

$$\frac{d}{dt}A_{ij}(t) = B_{ij} \qquad (3-110)$$

۳_۹ تبدیلات *active* (فعال) وتبدیل *passive*(غیر فعال)

گفته شد هرگاه هر عملگری بر برداری اثر نمایدآنرا تبدیل به بردار جدیدی مینماید. این تبدیل را **تبدیل فعال** نامند و آنرا بصورت:

$$M|a\rangle = |b\rangle \qquad (3-111)$$

نمایش میدهند. از طرفی توجه میکنیم هر عملگری بموجب (۱۱۱-۳) نه تنها بر هر بردار دلخواهی، بلکه بر بردارهای پایه هم می تواند اثر نماید وآنها را تبدیل به بردارهای پایه

جدیدی نماید، چون بردارهای پایه بخشی از فضای برداری میباشند بنابراین اگرعملگری نظیر A بر $\langle e_i|$ اثرکرده $\langle e'_i|$ را حاصل نماید داریم:

$$A\left|e_j\right\rangle = \left|e'_j\right\rangle \quad (3-112)$$

توجه میکنیم چنانچه دستگاه تبدیل یافته $\{\vec{e}'_i\}$ اورتونرمال باشد در اینصورت عملگر A میبایستی یونیتاری باشد. برای اثبات، بکمک (۳−۱۰۷) داریم:

$$\langle e_i|A^+ = \langle e'_i|$$

در نتیجه با استفاده از (۳−۱۱۲) خواهیم داشت:

$$\langle e_i|A^+A|e_j\rangle = \langle e'_i|e'_j\rangle$$

بنابراین اگر $\vec{e}'_i$ ها اورتونرمال باشند، خواهیم داشت:

$$\langle e_i|A^+A|e_j\rangle = \langle e'_i|e'_j\rangle = \delta_{ij}$$

$$\left(A^+A\right)_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow A^+A = 1 \quad (3-113)$$

حال این سؤال بسیار پیش میاید، اگر دو دستگاه اورتونرمال $\{\vec{e}_i\}$ و $\{\vec{e}'_i\}$ که دومی از تأثیر عملگر یونیتاری A بر دستگاه اول حاصل شده است داشته باشیم رابطه بین مؤلفه های یک بردار در این دو دستگاه چگونه بهم مرتبط است. از رابطه (۳−۱۰۷) داریم:

$$\langle e_i|A^+ = \langle e'_i|$$

طرفین رابطه فوق را بر بردار $|a\rangle$ اثر میدهیم و عملگر واحد بین A^+ و $|a\rangle$ قرار میدهیم:

$$\langle e_i|A^+|a\rangle = \langle e'_i|a\rangle$$

$$\langle e_i|A^+|e_j\rangle\langle e_j|a\rangle = \langle e'_i|a\rangle$$

$$A^+_{ij}a_j = a'_i \quad (3-114)$$

در (۳−۱۱٤) a'_i مؤلفه بردار $\vec{a}$ در راستای i ام در دستگاه $\{\vec{e}'_i\}$ و a_j مؤلفه بردار $\vec{a}$ در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ میباشد. (۳−۱۱٤) رابطه بین مؤلفه های یک بردار در دو دستگاه را بهم مربوط میسازد بعنوان مثال درفضای سه بعدی اگرعملگر $A(\hat{k},\phi)$ [رابطه (۳−٥٦)] دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}'_i\}$ را حاصل نماید در اینصورت عملگری که مؤلفه های هر بردار دلخواهی را در این دو دستگاه بهم مربوط میسازد عملگر $A^+(k,\phi)$ خواهد بود:

$$A^{+}\left(\hat{k},\phi\right)=\begin{pmatrix}\cos\phi & +\sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (3-115)$$

فرق بین (۳–۵۶) با (۳–۱۱۵) را در یابید.

رابطه(۳–۱۱۴) که مؤلفه های یک بردار در یک دستگاه را تبدیل به مؤلفه های همان بردار در دستگاه دیگر مینماید **تبدیل غیرفعال** نامند. تبدیل غیر فعال درفیزیک کاربرد های بسیار زیادی دارد. بعنوان مثال در بخش (۳–۱) هنگامیکه می خواستیم بردار را تعریف کنیم از تبدیل غیر فعال استفاده شد چه بموجب (۳–۱۰۷) داریم:

$$\langle e_i|A^{+}=\langle e_i'|$$

$$\langle e_i|A^{+}|e_j\rangle=\langle e'_i|e_j\rangle\equiv\left(\langle e_j|e'_i\rangle\right)^{*}$$

$$A_{ij}^{+}=\alpha_{ij} \qquad (3-116)$$

برای استخراج رابطه آخر از رابطه (۱–۳۰) استفاده شده است. نمایش محض تبدیل غیر فعال را بصورت:

$$A^{+}|a\rangle=\left(|a\rangle\right)' \qquad (3-117)$$

نمایش میدهند که تعبیر آن میبایستی کمی با هوشیاری توأم باشد.

براستی اگر مولفه های یک عملگر دلخواه نظیر M در دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ داده شده باشد نمایش آن در دستگاه $\{\vec{e}'_i\}$ چگونه خواهد بود؟

در پاسخ بدین سؤال مشاهده میکنیم :

$$\langle e'_i|M|e'_j\rangle=\langle e_i|A^{+}M\,A|e_j\rangle$$
$$=\sum_{k,l}\langle e_i|A^{+}|e_k\rangle\langle e_k|M|e_l\rangle\langle e_l|A|e_j\rangle$$

$$M'_{ij}=A_{ik}^{+}M_{kl}A_{lj} \qquad (3-118)$$

$$(M)'=A^{+}MA \qquad (3-119)$$

رابطه (۳–۱۱۸) مؤلفه های عملگر M در دو دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ و $\{\vec{e}'_i\}$ را بهم مرتبط میسازد.

رابطه (۳–۱۱۹) فرم محض رابطه (۳–۱۱۸) است.

روابط (۳–۱۱۸) و(۳–۱۱۹) که مؤلفه های یک عملگر در دو دستگاه را بهم مرتبط می سازد تبدیل یونیتاری غیر فعال برای عملگرها نامند.

توجه کنید که نمایش عملگر M در دو دستگاه بردارپایه $\{\vec{e}_i\}$ و $\{\vec{e'}_i\}$ متفاوت است. مثلا" ممکن است نمایش M در دستگاه $\{\vec{e'}_i\}$ فرم بسیار ساده تری نسبت به نمایش همین عملگر در دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ داشته باشد.

استثنا فقط درمورد عملگر A صادق است که خود بوجود آورنده دستگاه $\{\vec{e'}_i\}$ است زیرا داریم:

$$\langle e'_i|A|e'_j\rangle = \langle e_i|A^+AA|e_j\rangle = \langle e_i|A|e_j\rangle$$

یعنی:

$$A'_{ij} = A_{ij} \tag{3-120}$$

یکی از کاربردهای رابطه (۱۲۰–۳) در اینست که هرگاه نمایش عملگر M در دستگاه $\{\vec{e'}_i\}$ را داشته باشیم با ضرب رابطه (۱۱۹–۳) در A^+ و A به ترتیب از طرف راست وچپ:

$$A(M)'A^+ = M \tag{3-121}$$

نمایش عملگر M در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ بدست میاید.

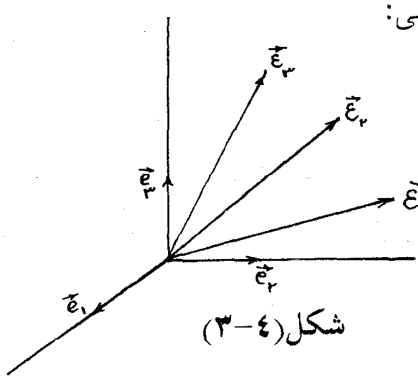
شایان ذکر است در بعضی موارد کمیت:

$$A^+MA \tag{3-122}$$

بصورت تبدیل فعال تعبیر میکند و آن ضرب سه عملگر A و M و A^+ عملگر جدیدی را در همان دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ حاصل مینماید.

۱۰_۳_ تبدیل غیر فعال هرگاه عملگر تبدیل کننده یونیتاری نباشد

هرگاه عملگری نظیر B دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ را تبدیل به دستگاه $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ نماید به طوریکه $\vec{\varepsilon}_i$ ها متعامد نباشند یعنی:



شکل(۴–۳)

$$(3-123) \qquad B|e_j\rangle = |\varepsilon_j\rangle$$

در اینصورت خواهیم داشت:

$$\langle e_i|B^{+} = \langle \varepsilon_i|$$

که از روی آن نتیجه میگیریم:

$$(3-124) \qquad \langle e_i|B^{+}B|e_j\rangle = \langle \varepsilon_i|\varepsilon_j\rangle = g_{ij} \neq \delta_{ij}$$

یعنی عملگر B یونیتاری نمیباشد .از طرفی تأثیر عملگر B^{-1} بر **برای** $|e_i\rangle$ **برای** دستگاه وارونه یعنی $|\varepsilon^i\rangle$ را حاصل میکند :

$$(3-125) \qquad \langle e_i|B^{-1} = \langle \varepsilon^i|$$

چه در اینصورت است که خواهیم داشت:

$$\langle e_i|B^{-1}B|e_j\rangle = \langle \varepsilon^i|\varepsilon_j\rangle$$
$$\delta_{ij} \equiv \delta^i_j = \langle \varepsilon^i|\varepsilon_j\rangle$$

بنابراین اگر عملگر بر دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ و آنها را تبدیل به دستگاه $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ نماید در اینصورت عملگر B^{-1}مؤلفه های یک بردار را دردو دستگاه نامبرده به هم مرتبط میسازد:

$$\langle e_i|B^{-1} = \langle \varepsilon^i|$$
$$\langle e_i|B^{-1}|a\rangle = \langle \varepsilon^i|a\rangle$$
$$(3-126) \qquad \sum_j B^{-1}_{ij} a_j = a^i$$

رابطه (۱۲۶-۳) تبدیل غیر فعال مؤلفه های یک بردار در دو دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ و $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ نامند .

بسیار دقت کنید که a^i مؤلفه کنتراواریانت بردار $\vec{a}$ است.

همچنین مؤلفه های یک عملگر دلخواه نظیر M در دو دستگاه نامبرده با رابطه زیر بهم مربوط میشوند:

$$\langle \varepsilon^i|M|\varepsilon_j\rangle \equiv M^i_j = \langle e_i|B^{-1}MB|e_j\rangle$$
$$(3-127) \qquad M^i_j = B^{-1}_{il} M_{lk} B_{kj}$$
$$(3-128) \qquad (M)' = B^{-1}MB$$

توجه نمایید تبدیل غیر فعال مؤلفه های M از دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ به دستگاه غیر متعامد $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ در مقایسه با تبدیل داده شده با رابطه (۳-۱۱۹) کلی تر میباشد و هنگامیکه B یونیتاری باشد

(۳-۱۲۸) و (۳-۱۱۹) عینیت میبابد. چون $B^{-1}=B^{+}$ است تبدیل (۳-۱۲۸) که کلیترین نوع تبدیل غیر فعال میباشد آنرا تبدیل غیر فعال متشابه (یا بطور مختصر تبدیل متشابه *similarity transformation*) نامند. توجه میکنیم در حالتی که دستگاه بردار پایه غیر متعامد داشته باشیم چهار نمایش مختلف بصور زیر برای عملگر M خواهیم داشت:

$$\langle\varepsilon_i|M|\varepsilon_j\rangle, \langle\varepsilon^i|M|\varepsilon^j\rangle, \langle\varepsilon^i|M|\varepsilon_j\rangle, \langle\varepsilon_i|M|\varepsilon^j\rangle \tag{3-129}$$

که بطور مختصر بصور زیر بترتیب نمایش میدهند:

$$M_{ij}, M^{ij}, M^i_j, M_i^j \tag{3-130}$$

نمایش سوم از سمت چپ یعنی M^i_j بیش از دیگر نمایشها کاربرد دارد مثلاً اگر عملگر M بطور فعال بر $|a\rangle$ اثر کرده و آنرا تبدیل به بردار $|b\rangle$ نماید نمایش محض این تبدیل فعال بصورت:

$$M|a\rangle = |b\rangle \tag{3-131}$$

میباشد نمایش این تبدیل فعال در دستگاه اورتونرمال $\{\vec{e}_i\}$ بصورت:

$$\sum_j M_{ij}a_j = b_i \tag{3-132}$$

اما نمایش آن در دستگاه بردار پایه غیر متعامد $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ رابطه (۳-۱۳۱) بصورت:

$$\sum_j \langle\varepsilon^i|M|\varepsilon_j\rangle\langle\varepsilon^j|a\rangle = \langle\varepsilon^i|b\rangle$$

$$\sum_j \langle\varepsilon^i|M|\varepsilon_j\rangle a^j = b^i$$

$$M^i_j a^j = b^i \tag{3-133}$$

در میاید توجه نمایید که (۳-۱۳۳) را میتوان بصورت زیر هم نوشت

$$\langle e_i|B^{-1}MB|e_j\rangle a^j = b^i$$

$$\langle e_i|B^{-1}MB|e_j\rangle\langle e_j|B^{-1}|a\rangle = \langle e_i|B^{-1}|b\rangle$$

$$\left(B^{-1}MB\right)\left(B^{-1}|a\rangle\right) = \left(B^{-1}|b\rangle\right) \tag{3-135}$$

رابطه (۱۳۵-۳) مبین تبدیل فعال بردار $\langle a|$ به بردار $\langle b|$ اما نمایش داده شده در دستگاه غیر متعامد $\{\vec{\varepsilon}^{i}\}$ است.

۱۱_۳_ بردارهای ویژه و مقادیر ویژه یک عملگر

برای هر عملگر n بعدی نظیر M غالبا" n امتداد (و گاهی اوقات بیشتر) یافت میشود که اگر برداری در آن امتدادهای خاص قرار گیرد بردار تبدیل یافته در همان امتداد قرار میگیرد یعنی:

$$M|a\rangle = \lambda|a\rangle \tag{3-136}$$

یعنی تأثیر عملگر M بر این بردار(های) خاص همان بردار(ها) را (که در یک اسکالر ضرب شده) حاصل مینماید. $\langle a|$ رابردار ویژه و λ را مقدار ویژه نامند. چون در بسیاری از موارد بازاء هر مقدار ویژه λ یک بردار ویژه داریم معمولا" بردار ویژه را با سمبل مقدار ویژه نشان میدهند:

$$|a\rangle \equiv |\lambda\rangle \equiv |\lambda_i\rangle$$
$$M|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \qquad M|\lambda_i\rangle = \lambda_i|\lambda_i\rangle \tag{3-137}$$

همچنین یکی از موارد دیگر که به وفور در فیزیک روی میدهد آنست که بازاء یک مقدار ویژه چند بردار ویژه با امتدادهای مختلف وجود داشته باشد یعنی:

$$M|a\rangle = \lambda\,|a\rangle$$
$$M|b\rangle = \lambda\,|b\rangle \tag{3-138}$$

در چنین حالتی دیگر نمیتوان بردار ویژه را بصورت:

$$|a\rangle = |\lambda\rangle$$

نمایش داد چون سمبل λ نمیتواند دو بردار مختلف $\langle a|$ و $\langle b|$ را از یکدیگر تمییز دهد و میدانیم که $|a\rangle \neq |b\rangle$ است.

در چنین حالتی بردارهای ویژه $\langle a|$ و $\langle b|$ با یک اندیس اضافی i بصورت:

$$|a\rangle = |\lambda,1\rangle \quad , \quad |b\rangle = |\lambda,2\rangle \tag{3-139}$$

نمایش میدهند وهرگاه در فضای n بعدی g بردارویژه که بطورخطی مستقل ولی همگی دارای یک ویژه مقدار باشند بصورت:

$$|\lambda,i\rangle \qquad i = 1,2,3,\ldots,g \tag{3-140}$$

نمایش میدهند. ممکن است در عملگری دو دسته یا بیشتر بردارهای ویژه با مقادیر ویژه مربوط λ_1 و λ_2 وجودداشته باشند در اینصورت آنها را بصورت:

$$\begin{aligned} &|\lambda_1,i\rangle \qquad i=1,2,3,\ldots,g_1 \\ &|\lambda_2,i\rangle \qquad i=1,2,3,\ldots,g_2 \end{aligned} \qquad (3-141)$$

نمایش میدهند g_1 و g_2 تعداد بردارهای ویژه با مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 میباشد هرگاه تعداد بردارهای ویژه یک عملگر که بطور خطی مستقل ولی همگی مربوط به یک مقدار ویژه λ هستند، g باشند، گویند عملگر دارای دژنرسی مرتبه g است. (کلمه *degenerate* از ترکیب دو کلمه *de* و *generate* که کلمه دوم به معنی تولید کردن و *de* بمعنای نفی میباشد بنابراین *degenerate* بمعنای عدم تولید و دراینجا بمعنای اینستکه عملگر M مقادیر ویژه جدیدی تولید نمیکند.)

اما در مکانیک کلاسیک لغت *degenerate orbit* به معنی آنست که ذره بعد از مدت زمانی مدار جدیدی تولید نمیکند یعنی مدار ذره بسته میشود (رجوع کنید به کتاب *Goldstein* صفحه ۱۰۵) از نظر علم الاجتماع ،جوامع *degenerate* بدلیل واضح بمعنای جوامع فاسد و تباه شده میباشد و از روی آن است که *degeneracy* در بحث ماتریسها بصورت تبهگن ترجمه شده است.)

حال که با مفهوم بردارهای ویژه و مقادیر ویژه یک عملگر آشنا شده ایم میخواهیم روش تعیین آنها را بیاموزیم برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned} &M|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle \\ &(M-1\lambda)|\lambda\rangle=0 \end{aligned} \qquad (3-142)$$

هرگاه عملگر(M-۱λ)را عملگر B بنامیم بموجب (۱۴۲−۳) داریم:

$$B|\lambda\rangle=0 \qquad (3-143)$$

همه ما از دوره دبیرستان میدانیم که برای n معادله n مجهولی خطی همگن شرط لازم داشتن جواب غیر صفر برای مجهولات، آن است که دترمینان ضرایب میبایستی صفر باشد یعنی:

$$\det B\equiv\det(M-1\lambda)=0 \qquad (3-144)$$

ممکن است $det\ M\neq 0$ باشد اما با انتخاب λ های مناسب میتوان $det\ \ B$ را صفر نمود دلیل برقراری چنین شرطی برای داشتن بردار $\langle\lambda|$ غیر صفر انگیزه ای است برای آغاز مبحث دترمینان ها که بعد از شرح قضایای مربوط به بردارهای ویژه ،مقادیر ویژه و اهمیت آنها بدان میپردازیم .بنابراین شرح کامل رابطه (۱۴۴-۳) در مبحث دترمینانها خواهد آمد.

۱۲-۳- قضایای مربوط به بردارهای ویژه و مقادیر ویژه

الف-۱۲-۳- عملگر هرمیتی دارای مقادیر ویژه حقیقی وبردارهای ویژه عمود برهم میباشند. عملگر هرمیتی را با H نشان میدهیم و میدانیم:

$$H = H^{+}$$

$$H|\lambda_i\rangle = \lambda_i|\lambda_i\rangle$$

$$\langle\lambda_j|H^{+} = \lambda_j^{*}\langle\lambda_j| \qquad (3-145)$$

هرگاه روابط اول و دوم (۱۴۵-۳) بترتیب در $|\lambda_j\rangle$ و $\langle\lambda_i|$ ضرب و سپس از هم دیگر کم نماییم خواهیم داشت:

$$(\lambda_i - \lambda_j^{*})(\langle\lambda_j|\lambda_i\rangle) = 0 \qquad (3-146)$$

اگر در (۱۴۶-۳) $\langle\lambda_i| = \langle\lambda_j|$ انتخاب نماییم خواهیم داشت:

$$(\lambda_i - \lambda_i^{*})(\langle\lambda_i|\lambda_i\rangle) = 0 \qquad (3-147)$$

چون $\langle\lambda_i|\lambda_i\rangle$ برابر مجذور طول بردار و همیشه مثبت ومخالف صفر است،بنابراین از رابطه فوق نتیجه میگیریم که:

$$\lambda_i = \lambda_i^{*} \qquad (3-148)$$

یعنی مقادیر ویژه عملگر هرمیتی حقیقی هستند.

حال اگر در (۱۴۶-۳) $\langle\lambda_i| \neq \langle\lambda_j|$ انتخاب کنیم به طوریکه $\lambda_i\neq \lambda_j$ باشد دراین صورت خواهیم داشت:

$$(\lambda_i - \lambda_j)(\langle\lambda_j|\lambda_i\rangle) = 0 \qquad (3-149)$$

چون $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ است بنابراین الزاما":

$$\langle\lambda_j|\lambda_i\rangle = 0 \qquad (3-150)$$

میباشد. یعنی بردارهای ویژه یک عملگر هرمیتی با مقادیرویژه متفاوت برهم عمود هستند. استدلال فوق برای حالت دژنرسی دیگرصادق نمیباشد هرچند $\langle\lambda_i| \neq \langle\lambda_j|$ میباشد اما چون $\lambda_i=\lambda_j=\lambda_0$ است بنابراین در (۱۴۹-۳) بعلت آنکه $\lambda_i - \lambda_j$ برابر صفر میباشد دیگر لزومی بر عمود بودن بردارهای $\langle\lambda_i|$ بر $|\lambda_j\rangle$ نمیباشد و بظاهر نتیجه میگیریم که تمامی بردارهای ویژه مربوط به یک مقدار ویژه بر هم عمود نیستند.

معذلک در حالت دژنرسی مسئله داشتن بردارهای ویژه متعامد بسیار آسانتر میشود. ابتدا توجه میکنیم که بردارهای ویژه مربوط به یک مقدار ویژه λ_0وبا مرتبه دژنرسی g را میبایستی بصورت:

$$|\lambda_0,1\rangle, |\lambda_0,2\rangle, |\lambda_0,3\rangle, \ldots\ldots |\lambda_0,g\rangle$$

نمایش داد. حال هر ترکیب خطی ازآنهانیزبرداروبژه عملگر هرمیتی محسوب میگردد. مثلا" بردارα که بصورت زیر تعریف شده یک بردار ویژه دیگرعملگر H با همان مقدار ویژه λ_0 است ،چه داریم:

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{g} c_i |\lambda_0, i\rangle$$

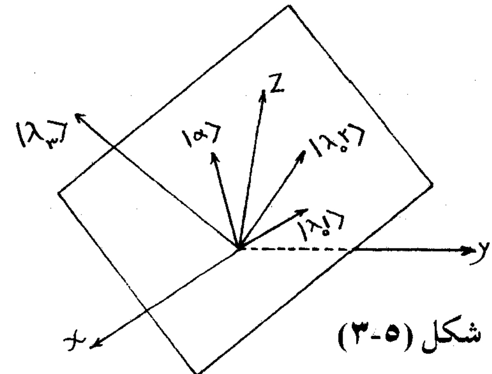
$$H|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{g} c_i H|\lambda_0, i\rangle = \lambda_0 \sum_{i=1}^{g} c_i |\lambda_0, i\rangle$$

$$H|\alpha\rangle = \lambda_0|\alpha\rangle \qquad (3-150)$$

بنابراین تعداد بردارهای ویژه عملگر H مربوط به مقدار ویژه دژنره λ_0 ، gنمی باشد بلکه بینهایت میباشد در نتیجه در این زیر فضای دژنرسی با بعد g میتوان g بردار عمود بر هم انتخاب کرد که بردار ویژه H هم میباشند. نحوه تعیین این g بردار ویژه متعامد را در زیر که موسوم به روش اورتونرمالیزاسیون گرام شمیدت میباشد شرح میدهیم اما قبل از انجام این کار بسیار آموزنده است که مثالی از دژنرسی یک عملگر هرمیتی که در فضای سه بعدی وچگونگی انتخاب بردارهای ویژه متعامدبصورت هندسی بیان شود. هرگاه مقادیر ویژه عملگر هرمیتی سه بعدی $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ باشد بموجب رابطه (۱۵۰-۳) نتیجه میگیریم:

$$\langle\lambda_3|\lambda_0,1\rangle=0$$
$$\langle\lambda_3|\lambda_0,2\rangle=0 \qquad (3-151)$$
$$\langle\lambda_0,2|\lambda_0,1\rangle\neq 0$$

بنابراین $|\lambda_0,1\rangle$ و $|\lambda_0,2\rangle$ درصفحه ای که عمود بر $|\lambda_3\rangle$ است قرار دارند. اما این دوبردار الزاما" بر هم عمود نیستند به شکل (۵-۳) مراجعه نمایید:



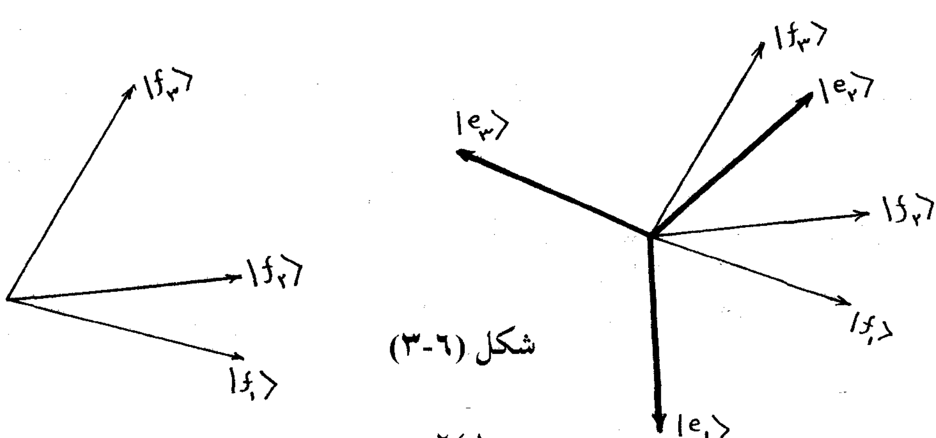
شکل (۵-۳)

حال هر برداری که ترکیب خطی از $|\lambda_0,1\rangle$ و $|\lambda_0,2\rangle$ باشد بردارویژه عملگر H میباشد اما این ترکیب خطی را آن چنان انتخاب می کنیم که بر $|\lambda_0,1\rangle$ عمود باشد بنابراین بردارهای ویژه عملگر هرمیتی H که همگی بر هم عمود هستند را بصورت زیر انتخاب میکنیم:

$$|\lambda_3\rangle,|\lambda_0,1\rangle,|\alpha\rangle \qquad (3-152)$$

ب-۱۲-۳- روش اورتونرمالیزاسیون بردارهای پایه بروش گرام شمیدت

یک فضای برداری g بعدی درنظر می گیریم. درشکل (۵-۳) یک فضای برداری سه بعدی رسم کرده ایم:



شکل (۶-۳)

انتخاب بردارهای پایه متعامد بروش دلخواه یعنی نه بـه روش گرام شمیدت در شکل (۵–۳) نشان داده شده است. اما بردار پایه اورتونرمالی که بروش گرام شمیدت حاصل میشود وآنرا با $|\varphi_i\rangle$ نشان میدهیم بطریق زیر انتخاب میشود بردار $|\varphi_1\rangle$ را بر روی $|f_1\rangle$ انتخاب میکنیم:

$$(3-153) \qquad |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_1}}|f_1\rangle$$

در (۳–۱۵۳) N_1 ضریب نرمالیزاسیون میباشد که مقدارآن برابر میشود با:

$$(3-154) \qquad \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad N_1 = \langle f_1|f_1\rangle$$

بردار اورتونرمال $|\varphi_2\rangle$ را در زیر فضایی که از $|\varphi_1\rangle$ و $|f_2\rangle$ تشکیل شده انتخاب میکنیم یعنی:

$$(3-155) \qquad |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_2}}\left[|f_2\rangle + a_{12}|\varphi_1\rangle\right]$$

ضرایب N_1 و a_{12} را از روی عمود بودن $|\varphi_2\rangle$ بر $|\varphi_1\rangle$ و نرمالیزه بودن $|\varphi_2\rangle$ حساب میکنیم یعنی:

$$(3-156) \qquad \begin{aligned} &\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\varphi_1|f_2\rangle + a_{12} = 0 \\ &a_{12} = -\langle\varphi_1|f_2\rangle \\ &\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = 1 = \frac{1}{N_2}\left[\langle f_2| + a_{12}^*\langle\varphi_1|\right]\left[|f_2\rangle + a_{12}|\varphi_1\rangle\right] \\ &N_2 = \langle f_2|f_2\rangle + a_{12}\langle f_2|\varphi_1\rangle + a_{12}^*\langle\varphi_1|f_2\rangle + |a_{12}|^2 \end{aligned}$$

که با استفاده از رابطه (۳–۱۵٦) بصورت:

$$(3-157) \qquad N_2 = \langle f_2|f_2\rangle - |\langle\varphi_1|f_2\rangle|^2$$

در میاید.

بردار اورتونرمال $|\varphi_3\rangle$ در زیر فضای $|\varphi_1\rangle$ و $|\varphi_2\rangle$ و $|f_3\rangle$ انتخاب میکنیم (یعنی $|\varphi_3\rangle$ ترکیب خطی از سه بردار فوق میباشد.)

$$(3-158) \qquad |\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_3}}\left[|f_3\rangle + \sum_{j=1}^{2} a_{j3}|\varphi_j\rangle\right]$$

بطوریکه $|\varphi_3\rangle$ بر $|\varphi_1\rangle$ و $|\varphi_2\rangle$ عمود و طول آن نیز واحد باشد.

در اینصورت سه مجهول a_{13} و a_{23} و N_3 برابر میشوند با:

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi_1 | \varphi_3 \rangle = 0 \ \rightarrow\ a_{31} = -\langle \varphi_1 | f_3 \rangle \\
(3-159) \qquad &\langle \varphi_2 | \varphi_3 \rangle = 0 \ \rightarrow\ a_{23} = -\langle \varphi_2 | f_3 \rangle \\
&\langle \varphi_3 | \varphi_3 \rangle = 1 \ \rightarrow\ N_3 = \langle f_3 | f_3 \rangle - \sum_{j=1}^{2} \left| \langle \varphi_j | f_k \rangle \right|^2
\end{aligned}$$

بنابراین در فضای g بعدی بردار $|\varphi_k\rangle$ که ترکیب خطی از $|\varphi_1\rangle$ و $|\varphi_2\rangle$ ... $|\varphi_{k-1}\rangle$ و $|f_k\rangle$ میباشد برابر:

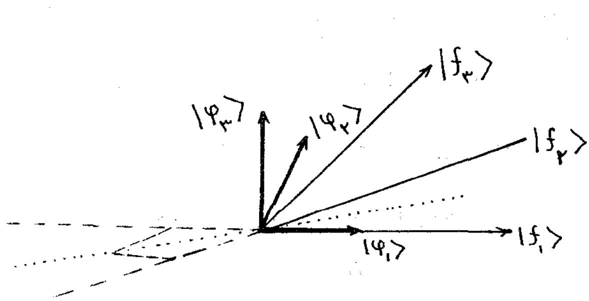
$$(3-160) \qquad |\varphi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_k}} \left[|f_k\rangle + \sum_{j=1}^{k-1} a_{jk} |\varphi_j\rangle \right]$$

k ضریب مجهول از a_{1k} a_{2k} ... $a_{k-1,k}$ ، N_k از رابطه عمود بودن $|\varphi_k\rangle$ بر $|\varphi_i\rangle$ ها ($i = 1,2,3...k-1$) ونرمالیزه بودن طول $|\varphi_k\rangle$ بدست میاید.

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi_l | \varphi_k \rangle = 0 \qquad l = 1,2,3,\ldots,k-1 \\
(3-161) \qquad &\langle \varphi_k | \varphi_k \rangle = 1 \ \rightarrow\ a_{lk} = \langle \varphi_l | f_k \rangle
\end{aligned}$$

$$(3-162) \qquad N_k = \langle f_k | f_k \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \left| \langle \varphi_j | f_k \rangle \right|^2$$

خواننده میبایستی متوجه شده باشد که چرا ضرایب بسط a_{jk} با دو اندیس نشان داده شده است. اندیس دوم معرف بردار و اندیس اول اندیس جمعبندی است. بعنوان مثال در فضای سه بعدی ساختن بردارهای پایه اورتونرمال به روش گرام شمیدت بصورت شکل هندسی (۷–۳) میشود. روش جالبی نیست؟ فرق شکل (ب–۶–۳) با شکل (۷–۳) را در یابید.



شکل (۷-۳)

ج-۱۲-۳- عملگر یونیتاری A که دارای مقادیر ویژه با قدر مطلق واحد و بردارهای ویژه متعامد میباشد

عملگر یونیتاری را با A نشان میدهیم:

$$
\begin{aligned}
&A^+ A = 1 \\
&A|\lambda_i\rangle = \lambda_i|\lambda_i\rangle \\
&\langle\lambda_j|A^+ = \lambda_j^*\langle\lambda_j|
\end{aligned}
$$

دو رابطه را در هم ضرب میکنیم:

$$\langle\lambda_j|A^+ A|\lambda_i\rangle = \lambda_i\lambda_j^*\langle\lambda_i|\lambda_j\rangle$$

$$(1-\lambda_i\lambda_j^*)\langle\lambda_i|\lambda_j\rangle = 0 \qquad (3-163)$$

هرگاه $\langle\lambda_i| = \langle\lambda_j|$ را انتخاب کنیم:

$$|\lambda_i|^2 = 1 \qquad \lambda = e^{i\theta} \qquad (3-164)$$

و هرگاه $\lambda_i \neq \lambda_j$ را انتخاب کنیم:

$$\langle\lambda_i|\lambda_j\rangle = 0 \qquad (3-165)$$

بنابراین قضیه اثبات میشود.

د-۱۲-۳- نمایش عملگرهرمیتی و یونیتاری دربردار پایه ای که بوسیله بردارهای ویژه متعامد آنها تشکیل شده به ساده ترین شکل یعنی بصورت قطری در میاید.

هرگاه $\langle\lambda_j|$ ها بردارهای ویژه عملگر هرمیتی H باشد در اینصورت داریم:

$$H|\lambda_j\rangle = \lambda_j|\lambda_j\rangle$$

$$\langle\lambda_i|H|\lambda_j\rangle = \lambda_j\langle\lambda_i|\lambda_j\rangle = \lambda_j\delta_{ij} \qquad (3-166)$$

رابطه (۱۶۶-۳) صحت قضیه فوریه را ثابت میکند. توجه نمایید که نمایش عملگرهرمیتی H در بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ یعنی $e_i|H|e_j\rangle$ دارای یک شکل پیچیده غیر قطری است اما نمایش آن در بردار پایه λ_i بموجب (۱۶۶-۳) بصورت:

$$\langle\lambda_i|H|\lambda_j\rangle = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad (3-167)$$

در میاید. نتیجه بدست آمده در (۱۶۶-۳) برای عملگر یونیتاری نیز صادق است. همان گونه که گفته شد عملگر دوران که با رابطه (۵۲-۳) داده شده یک عملگر یونیتاری می باشد و رابطه (۶۰-۳) نمایش همین عملگر در بردارهای پایه ای است که بوسیله بردارهای ویژه آن تشکیل شده میباشد. توجه کنید λ_1 و λ_2 و λ_3 آن از رابطه (۱۶۴-۳) پیروی میکند (علت آن که θ همان زاویه φ دوران است به عنوان مسئله مطرح شده است) خواننده همچنین میتواند نشان دهد که $\langle l|$ یکی از بردارهای ویژه عملگر دوران داده شده با (۵۲-۳) با مقدار ویژه ۱+ است. کافیست نشان دهید:

$$(3-169) \qquad A|l\rangle = 1|l\rangle$$

محاسبه را حتما" انجام دهید.

توجه میکنیم هرگاه نمایش عملگر هرمیتی H [و یا عملگر یونیتاری U] در دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ داده شده باشند و همچنین مؤلفه های بردارهای ویژه آنها در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ معلوم باشد مؤلفه های عملگر یونیتاری که $\langle e_i|$ را تبدیل به $\langle \lambda_i|$ مینماید با رابطه (۱۱۲-۳) داده میشود یعنی:

$$A|e_j\rangle = |\lambda_j\rangle$$

$$(3-169) \qquad A_{ij} = \langle e_i|A|e_j\rangle = \langle e_i|\lambda_j\rangle$$

بنابراین تبدیل یونیتاری که عملگر هرمیتی H [یا عملگر یونیتاری U] را در دستگاه $\{\vec{\lambda}_i\}$ نمایش میدهد با رابطه (۱۱۹-۳) داده میشود:

$$(3-170) \qquad (H)' = A^{+}HA$$

و نمایش $(H)'$ همان نمایش (۱۶۷-۳) میباشد. عناصر عملگر تبدیل A با (۱۶۹-۳) داده شده است. حال اگر عملگر دلخواهی نظیر M داشته باشیم الزاما" بردارهای ویژه آن بر هم عمود نمی باشند معذالک نمایش آن در بردارهای پایه ای که از بردارهای ویژه آن تشکیل شده باز هم بصورت قطری میباشند:

$$M|\varepsilon_j\rangle = \lambda_j|\varepsilon_j\rangle$$

$$(3-171) \qquad \langle \varepsilon^i|M|\varepsilon_j\rangle = \lambda_j\langle \varepsilon^i|\varepsilon_j\rangle = \lambda_j\delta^i_j$$

چنانچه نمایش M و مؤلفه های بردارهای ویژه آن در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ داده باشند در این حالت مؤلفه عملگر غیر یونیتاری B که $\langle e_i|$ را تبدیل به $\langle \varepsilon_i|$ مینماید با رابطه (۱۲۳–۳) داده میشود یعنی:

$$B\left|e_j\right\rangle = \left|\varepsilon_j\right\rangle$$

$$B_{ij} \equiv \left\langle e_i\right|B\left|e_j\right\rangle = \left\langle e_i \middle| \varepsilon_j\right\rangle \qquad (3-172)$$

و مؤلفه های عملگر B^{-1} نیز از رابطه (۱۲۵–۳) بدست میایند.

$$\left\langle e_i\right|B^{-1} = \left\langle \varepsilon^i\right|$$

$$\left\langle e_i\right|B^{-1}\left|e_j\right\rangle = \left\langle \varepsilon^i \middle| e_j\right\rangle = \left(\left\langle e_j \middle| \varepsilon^i\right\rangle\right)^* \qquad (3-173)$$

بنابراین تبدیل متشابهی که نمایش عملگر دلخواه M را در دستگاه $\{\varepsilon_i\}$ (که بردارهای ویژه M هستند) حاصل مینماید با رابطه (۱۲۸–۳) داده میشود:

$$(M)' = B^{-1}MB \qquad (3-174)$$

و نمایش $(M)'$ همان نمایش قطری عملگر M میباشد و عناصر عملگر تبدیل B و B^{-1} هم با (۱۷۲–۳) و (۱۷۳–۳) داده شده است.

در اینجا نکته جالبی برای دانشجویان عاقل ذکر میشود وآن اینکه برای نمایش عملگر M در بردار پایه غیر متعامد هم به $\vec{\varepsilon}_i$ ها و هم به $\vec{\varepsilon}^i$ ها نیاز داریم. در فضای سه بعدی نحوه تعیین $\vec{\varepsilon}^i$ ها ازروی $\vec{\varepsilon}_i$ ها شرح داده شده است حال این سؤال مطرح میگردد که درفضای n بعدی دستگاه بردار پایه وارونه چگونه تعریف میشود. اگر کمی با دقت به روابط (۱۷۲–۳) و (۱۷۳–۳) نظر بیافکنیم نمایش این عملگرها در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ بصورت های زیر است:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} (\vec{\varepsilon}_1)_1 & (\vec{\varepsilon}_2)_1 & . & . & . & (\vec{\varepsilon}_n)_1 & . & . \\ (\vec{\varepsilon}_1)_2 & (\vec{\varepsilon}_2)_2 & . & . & . & (\vec{\varepsilon}_n)_2 & . & . \\ (\vec{\varepsilon}_1)_3 & (\vec{\varepsilon}_2)_3 & . & . & . & (\vec{\varepsilon}_n)_3 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \qquad (3-175)$$

$$(3-176)\qquad \left(B^{-1}\right)_{ij}=\begin{pmatrix} \left(\vec{\varepsilon}^{1}\right)_1 & \left(\vec{\varepsilon}^{1}\right)_2 & . & . & . & \left(\vec{\varepsilon}^{1}\right)_n & . & . \\ \left(\vec{\varepsilon}^{2}\right)_1 & \left(\vec{\varepsilon}^{2}\right)_2 & . & . & . & \left(\vec{\varepsilon}^{2}\right)_n & . & . \\ \left(\vec{\varepsilon}^{3}\right)_1 & \left(\vec{\varepsilon}^{3}\right)_2 & . & . & . & \left(\vec{\varepsilon}^{3}\right)_n & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}^{*}$$

بنابراین اگر $\vec{\varepsilon}_i$ ها دریک دستگاه بردار پایه متعامد معلوم باشد دراینصورت با محاسبه کردن B^{-1} بردارهای $\vec{\varepsilon}^i$ هاکه مؤلفه های آن درسطرهای B^{-1} ظاهرمیشود بدست میاید بنظرمیرسد که در فضای هیلبرت که درموردآن دراینجا بحث نکرده ایم ،برای دستگاه بردار پایه غیر متعامد رابطه(۱۷٦–۳) به نحوی برای محاسبه دستگاه بردارهای پایه وارونه کارساز باشد.معروفترین مثالی که برای دستگاه بردار پایه غیرمتعامد در فضای هیلبرت میتوان آورد،دستگاه غیر متعامد $(n=0,1,2,...)$ $f_n(x)=x^n$ است .شاید بتوان از رابطه (۱۷٦–۳) دستگاه بردارهای پایه وارونه را محاسبه کرد. دستگاه متعامد که میتوان اختیار کرد $P_n(x)$ توابع لژاندر و یا $\langle x|$ است.

۵_۱۲_۳_ حل معادله شرودینگر

معادله شرودینگر با رابطه:

$$(3-177)\qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = H\left|\psi(t)\right\rangle$$

داده می شود که درآن i عدد موهومی، $\hbar$ مقداریست ثابت موسوم به ثابت پلانک و H عملگری هرمیتی میباشد.هدف ما تعیین نوع وابستگی $\langle\psi(t)|$ به زمان میباشد.هرچند معادله شرودینگر در فضای بی نهایت بعدی هیلبرت داده شده است ولی ما آنرا در فضای n بعدی حل میکنیم و این چیزی از کلیت حل مسئله نمیکاهد .

اگرعملگر H ای دربرداریایه $\{\vec{e}_i\}$ نمایش داده شده باشد در این صورت اگرمعادله شرودینگر را در همین بردار پایه نمایش دهیم بعلت آنکه عملگر H در این بردار پایه غیر قطری است ،(۱۷۷–۳) به n معادله n مجهولی بهم قفل زیر منجر میشود که حل آن بسیار

مشکل میباشد چه کافیست دقت کنیم اگر (۱۷۷-۳) را در $\langle e_i|$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$i\hbar\langle e_i|\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle=\sum_j\langle e_i|H|e_j\rangle\langle e_j|\psi\rangle$$

$$(3-178)\qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_i(t)=\sum_j H_{ij}\psi_j(t)$$

یعنی مشتق مؤلفه i ام بردار ترکیب خطی از تمامی مؤلفه ها میباشد.

حال اگر بردارهای ویژه اورتونرمال عملگر H را $|u_j\rangle$ بنامیم:

$$(3-179)\qquad H|u_j\rangle=E_j|u_j\rangle\qquad j=1,2,\ldots,n$$

نمایش معادله شرودینگر در این بردار پایه بصورت زیر در میاید:

$$(3-180)\qquad i\hbar\langle u_i|\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle=\sum_j\langle u_i|H|u_j\rangle\langle u_j|\psi(t)\rangle$$

چون تصویر $\langle\psi(t)|$ در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ ، $\psi_i(t)$ نامیده ایم در اینصورت تصویر $\langle\psi(t)|$ در دستگاه $\{\vec{u}_i\}$ را بالاجبار $\psi'_i(t)$ مینامیم یعنی:

$$(3-181)\qquad \langle u_i|\psi(t)\rangle=\psi'_i(t)\quad,\quad\langle e_i|\psi(t)\rangle=\psi_i(t)$$

در نتیجه (۱۸۰-۳) بصورت:

$$i\hbar\frac{\partial\psi'_i(t)}{\partial t}=\sum_j E_i\delta_{ij}\psi'_j(t)$$

$$(3-182)\qquad i\hbar\frac{\partial\psi'_i}{\partial t}=E_i\psi'_i(t)\qquad i=1,2,3,\ldots$$

درمیآید. ازمقایسه رابطه (۱۷۸-۳) با (۱۸۲-۳) درمی یابیم که دردومی قفل معادلات شکسته شده است و مشتق مؤلفه i ام بردار $|\psi(t)\rangle$ در دستگاه $\{\vec{u}_j\}$ فقط به همان مؤلفه i ام بردار بستگی دارد بنابراین حل (۱۸۲-۳):

$$(3-183)\qquad \psi'_i(t)=e^{\frac{-i}{\hbar}E_it}\alpha$$

میشود. ضریب ثابت α از روی شرایط اولیه مسئله تعیین میگردد. هرگاه $\psi'_i(0)$ داده شده باشد (۱۸۳-۳) بصورت:

$$(3-184)\qquad \psi'_i(t)=e^{\frac{-i}{\hbar}E_it}\psi'_i(0)$$

در میاید. رابطه (۱۸۴-۳) راحل معادله شرودینگر در دستگاه بردار پایه $\{\vec{u}_j\}$ نامند. حال ما علاقمند به تعیین نمایش محض حل (۱۸۴-۳) هستیم چه با داشتن نمایش محض آنرا میتوان در هر دستگاه بردار پایه ای نمایش داد. برای این منظور رابطه (۱۸۴-۳) را بصورت:

$$(3-185) \qquad \langle u_i | \psi(t) \rangle = e^{\frac{-i}{\hbar}E_i t} \langle u_i | \psi(0) \rangle$$

مینویسیم. از طرفی میدانیم:

$$\langle u_i | H = \langle u_i | E_i$$
$$\langle u_i | f(H) = \langle u_i | f(E_i)$$

است. در نتیجه:

$$\langle u_i | e^{\frac{-i}{\hbar}Ht} = \langle u_i | e^{\frac{-i}{\hbar}E_i t}$$

است. با جایگزاری نتیجه فوق در (۱۸۵-۳) خواهیم داشت:

$$\langle u_i | \psi(t) \rangle = \langle u_i | e^{\frac{-i}{\hbar}Ht} | \psi(0) \rangle$$

که اگرطرفین رابطه فوق رادر$\langle u_i |$ ضرب و سپس روی اندیس i جمعبندی نماییم خواهیم داشت:

$$(3-186) \qquad | \psi(t) \rangle = e^{\frac{-i}{\hbar}Ht} | \psi(0) \rangle$$

رابطه (۱۸۶-۳) نمایش محض حل معادله شرودینگر میگردد.

عملگر e^{-iHt} که بردار $\langle \psi(0) |$ را تبدیل به بردار $\langle \psi(t) |$ مینماید *propogator* یا عملگرتحول زمانی *time evolution operator* نامند.

ممکن است دروهله اول خواننده ازساده بودن حل معادله شرودینگربصورت(۱۸۶-۳) (اگر بمقدارجزئی ازمعادله شرودینگربا خبر باشد) تعجب نماید. درپاسخ میگوییم ما به داشتن حل معادله شرودینگردردستگاه $\{\vec{e}_i\}$ علاقمند هستیم بنابراین اگر (۱۸۶-۳) را در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\langle e_i | \psi(t) \rangle = \sum_{j,k} \langle e_i | e^{\frac{-i}{\hbar}Ht} | u_j \rangle \langle u_j | e_k \rangle \langle e_k | \psi(0) \rangle$$

هرگاه تصویر $\langle u_j |$ در دستگاه $\vec{e}_i$ را u_{ji} بنامیم دراینصورت خواهیم داشت:

$$(3-187) \qquad \psi_i(t)=\sum_{j,k} e^{\frac{-i}{\hbar}E_j t} u_{ji} u^*_{jk} \psi_k(0)$$

بنابراین در (۱۸۷-۳) $\psi_i(t)$ زمانی معلوم میشود که مقادیر E_j و u_{jl} ،یعنی مقادیر ویژه و مؤلفه های بردارهای ویژه عملگر هرمیتی H در دستگاه $\{\vec{e}_l\}$ معلوم شده باشد.یعنی نهایتا" مجبور به حل معادله:

$$(3-188) \qquad H|u_i\rangle=E_i|u_i\rangle$$

در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ میگردیم که بار دیگربه اهمیت تعیین مقادیرویژه و بردارهای ویژه یک عملگر پی میبریم.در درس مکانیک کوانتومی قسمت اعظم وقت ما صرف حل معادله (۱۸۸-۳) برای H های مختلف میگردد.رابطه (۱۸۸-۳) را غالبا" در کتابهای مکانیک کوانتومی به غلط معادله مستقل از زمان شرودینگر نامند.حال آن که آن را میبایستی به درستی معادله تعیین بردارهای ویژه ومقادیرویژه عملگر Hنامید،چون معادله شرودینگر یک معادله دینامیکی است و معادله مستقل از زمان شرودینگر بی معنا میگردد.خاطر نشان میسازیم حتی اگر عملگر هرمیتی H بصورت زیر:

$$(3-189) \qquad H(t)=\alpha(t)K$$

تابعی از زمان باشد که در آن $\alpha(t)$ یک تابع اسکالر و K عملگر هرمیتی مستقل از زمان است، با عملیات مشابه میتوان نشان داد که حل (۱۸۶-۳) بصورت:

$$(3-190) \qquad |\psi(t)\rangle=e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^t H(t')dt'}|\psi(0)\rangle=e^{\frac{-i}{\hbar}K\int_0^t \alpha(t')dt'}|\psi(0)\rangle$$

اصلاح میگردد.انجام عملیات بعهده خواننده واگذار میشود.رابطه(۱۹۰-۳)در مباحث دوران اسپین یک ذره در میدان اندکسیون مغناطیسی وابسته بزمان اما با امتداد ثابت کاربرد دارد.

هرگاه عملگر هرمیتی تابع دلخواهی از t باشد حل معادله شرودینگر بسیار مشکل میگردد که در اینحالت *propogator* بصورت سری دای سون*Dyson*داده میشود که در کتب مکانیک کوانتومی پیشرفته در مورد آن بحث میگردد. اما در فضای سه بعدی رابطه ای که شبیه به معادله شرودینگر باشد رابطه سینماتیکی جسم صلب:

$$(3-191)\qquad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \omega(t)\times\vec{r} = -\vec{\omega}(t)\cdot\vec{S}_{op}|r\rangle = -\Omega(t)|r\rangle$$

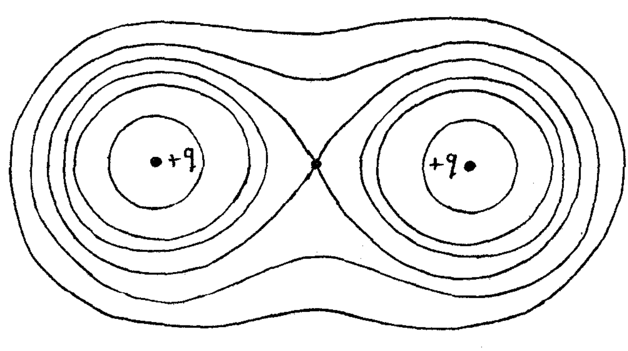
میباشد که درآن S_{op} همان عملگر مولد چرخش خردمیباشد که قبلا" معرفی شده است.$\Omega(t)$ برخلاف عملگر H ضدهرمیتی و وابستگی پیچیده ای بزمان دارد.حل معادله:

$$(3-192)\qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = -\Omega(t)\vec{r}(t)$$

از مسائل اساسی سینماتیک جسم صلب است که درجزوه روش های جدید برای محاسبه بردار سرعت زاویه ای بر حسب پارامترهای دوران واویلر به تفصیل در مورد آن آمده است و *propogator* برای جسم صلب تعیین گردیده است.

و_۱۲_۳_ اگردرنقطه ای که توزیع با روجود ندارد میدان الکتریکی صفر باشد سطح اکی پتانسیل مار بر نقطه مزبور خود را در آن نقطه قطع میکند.

بعنوان یک مثال ساده اگردوبارنقطه ای $(+q,+q)$ درفاصله معینی ازیکدیگر قرار گرفته باشندمیدان الکتریکی درنقطه میانی خط واصل بین دوبار صفر است.شکل سطح اکی پتانسیل مار بر آن نقطه بصورت زیر داده میشود.البته ما مسئله را برای یک توزیع با ر دلخواهی که در یک نقطه خارج از آن میدان الکتریکی صفر است بررسی میکنیم :



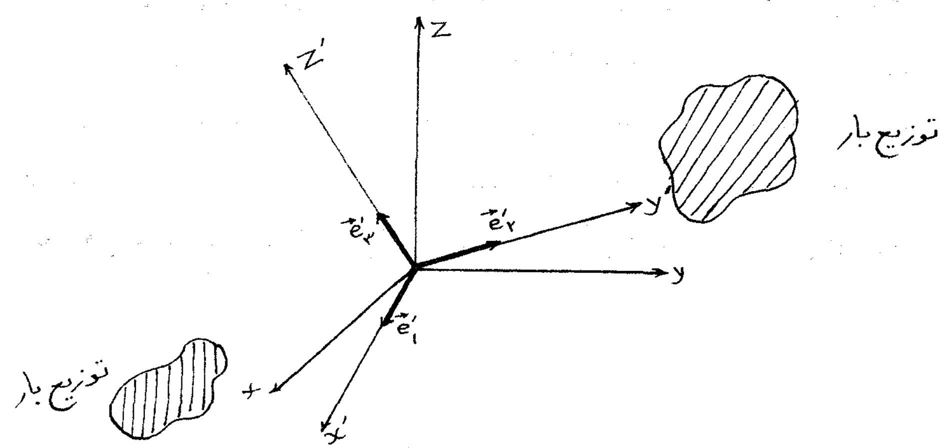
شکل(۸_۳)

اگر به تعریف $d\phi$ که با رابطه (۹۲−۱) داده شده است مراجعه نماییم:

$$d\phi(\vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}+d\vec{x})-\phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})\cdot d\vec{x}$$

ازروی زاویه ای که بردار $d\vec{x}$ حول نقطه $\vec{x}$ با بردار $\vec{\nabla}\phi(x)$ میسازد درمیابیم که $\phi(\vec{x}+d\vec{x})$ از $\phi(\vec{x})$ بزرگتریا کوچکترمیباشد حال این نگرانی پیش میاید اگر درنقطه ای نظیر $\vec{x}_0$، $\vec{\nabla}\phi$ برابر صفر باشد چگونه میتوان متوجه شد که تابع ϕ در نقاط مجاور نقطه $\vec{x}_0$ از $\phi(\vec{x}_0)$ بزرگتر یا کوچکتر میباشد. با کمی تفکر در میابیم که هرگاه در نقطه ای $\vec{\nabla}\phi$ صفر باشد بموجب (۹۱−۱)، $d\phi(x)$ با درنظر گرفتن جملات بی نهایت کوچک مرتبه دوم از بسط تایلور تعیین میگردد یعنی:

$$(3-193) \qquad d\phi(\vec{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} dx_i dx_j \frac{\partial^2\phi(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}$$



شکل(۹−۳)

و از روی این رابطه است که اختلاف تابع ϕ از نقاط مجاور قابل محاسبه میگردد. حال اگر مبدأ مختصات بر روی نقطه $\vec{x}_0$ قرار گرفته باشد رابطه (۱۹۳−۳) بصورت:

$$(3-194) \qquad d\phi(0) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} dx_i dx_j \frac{\partial^2\phi(0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

در میاید بنابراین میتوان اختلاف تابع ϕ در نقطه $\vec{0}+d\vec{x}$ رااز نقطه $\vec{0}$ بدست آورد حال این سؤال پیش میاید مکان هندسی نقاط بسیار نزدیک به مبدأ که مقدار تابع ϕ درآن نقاط با

مقدار تابع در نقطه $\vec{0}$ برابر باشند تشکیل چه سطح اکی پتانسیلی میدهد برای تعیین معادله این سطح اکی پتانسیل از (۱۹۴−۳) استفاده میکنیم :

$$(3-195) \qquad d\phi(0) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} dx_i dx_j \frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

توجه میکنیم کمیات ثابت $\partial^2 \phi(0)/\partial x_i \partial x_j$ را میتوان با V_{ij} و برای سهولت در تحریر dx_i را با x_i مشروط به اینکه قدر مطلق x_i بسیار کوچک است نشان داد بنابراین (۱۹۵−۳) را به صورت:

$$(3-196) \qquad \sum_{i,j} x_j V_{ij} x_i = 0 \qquad |x_i| << 1$$

بازنویسی میکنیم. رابطه(۱۹۶−۳) معرف معادله یک سطح درجه دو است که شکل بازتر این معادله بصورت:

$$(3-197) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$$

است.(خواننده ضرایب ثابت $a,b,c,...$ را بر حسب V_{ij} بدست آورد) برای ما مشکل است که در این دستگاه شکل سطح را حدس بزنیم .بخاطر بیاوریم که در دبیرستان دیده ایم که معادله منحنی بیضی در دستگاهی که محور های آن مار بر قطر اطول و اقصر بیضی باشد شکل ساده و دریک دستگاه دوران یافته دلخواه دارای شکل پیچیده میباشد .حال توجه میکنیم که V_{ij} مؤلفه های یک عملگر هرمیتی است یعنی:

$$(3-198) \qquad V_{ij} = \frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial x_j \partial x_i} = V_{ji}$$

و نمایش محض رابطه (۱۹۶−۳) با در نظر گرفتن اینکه در فضای حقیقی هستیم بصورت:

$$(3-199) \qquad \sum_{i,j} x_i V_{ij} x_j = \langle r|e_i\rangle\langle e_i|V|e_j\rangle\langle e_j|r\rangle$$
$$= \langle r|V|r\rangle = 0$$

در میاید .از طرفی چون V عملگر هرمیتی می باشد نمایش عملگر V در دستگاه بردار پایه ای که از بردارهای ویژه آن تشکیل شده دارای شکل قطری است بنابراین اگر این بردار را با $\{\vec{e}'_i\}$ نشان دهیم رابطه (۱۹۹−۳) برابر میشود با:

$$\langle r|V|r\rangle = \sum_{i,j}\langle r|e'_i\rangle\langle e'_i|V|e'_j\rangle\langle e'_j|r\rangle$$

$$\sum_{i,j} x'_i V'_i \delta_{ij} x'_j = \sum_i x_i'^2 V'_i = 0 \quad (3-200)$$

یعنی معادله همین سطح در دستگاه بردار پایه $\{e'_i\}$ بصورت ساده:

$$V'_1 x'^2 + V'_2 y'^2 + V'_3 z'^2 = 0 \quad (3-201)$$

در میاید. اگر اطلاعاتی در مورد ضرایب V_1 و V_2 و V_3 داشته باشیم میتوان شکل سطح را معلوم نمود. حال توجه کنید عملگر V در دستگاه بردار پایه $\{e_i\}$ و $\{e'_i\}$ بصورتهای:

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi(0)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi(0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2\phi(0)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2\phi(0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi(0)}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2\phi(0)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2\phi(0)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2\phi(0)}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2\phi(0)}{\partial x_3 \partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$V'_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi'(0)}{\partial x'_1 \partial x'_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2\phi'(0)}{\partial x'_2 \partial x'_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2\phi'(0)}{\partial x'_3 \partial x'_3} \end{pmatrix} \quad (3-202)$$

میباشد. مشاهده میشود که $(tr\, V'_{ij})$ برابر میشود با:

$$trV'_{ij} \equiv \sum_i V_i = \sum \frac{\partial^2\phi'(0)}{\partial x'_i \partial x'_i} \equiv \nabla'^2\phi'(0) = \nabla^2\phi(0) = 0 \quad (3-203)$$

توجه می کنیم که آخرین نتیجه (۳-۲۰۳) از اینکه دیورژانس یک میدان برداری کمیتی است اسکالر و به انتخاب دستگاه بستگی ندارد بدست آمده است. اما این نتیجه را هم میتوانستیم از اینکه رد یک عملگر در تبدیلات متشابه تغییر نمیکند بدست آورد که به صورت مسئله مطرح خواهد شد. صفر شدن لاپلاسین تابع ϕ در نقطه مزبور بعلت عدم وجود بار در آن نقطه است.

بهرحال به نتیجه بسیار مهمی دست یافته ایم، اینکه:

$$V'_1 + V'_2 + V'_3 = 0$$

است یعنی یکی از V'_i میبایستی علامت مخالف با دیگر V'_i ها داشته باشد مثلا" اگر V'_3منفی باشد V'_2و V'_1 میبایستی مثبت باشند در نتیجه رابطه (۲۰۰-۳) برابر میشود با:

$$z = \sqrt{\frac{V'_1 x'^2 + V'_2 y'^2}{-V'_3}} \qquad (3-204)$$

و این معادله سطح یک مخروط (نه الزاما" دوار) میباشد یعنی معادله سطح اکی پتانسیل در مجاورت نقطه ای که در آن $\vec{\nabla}\phi=0$ است خود را قطع میکند.

اگر V'_1وV'_2 با هم مساوی باشند (۲۰۴-۳) معرف معادله چه سطحی است؟ از این مثال آموزنده نکات بسیار زیادی آموخته ایم که عبارتند از:

۱- اگر در نقطه $\vec{x}_0$، $\vec{\nabla}\phi(\vec{x}_0)$صفر باشد $d\phi(\vec{x})$ چگونه محاسبه میشود.

۲- ردیک عملگر درتبدیلات یونیتاری ناورداست(البته دراینجا اثبات عمومی نشده است.)

۳- معادله یک سطح درجه دو که ضرایب V_{ij}آن متقارن باشد در دستگاه بردار پایه که از بردارهای ویژه عملگر V تشکیل شده دارای ساده ترین شکل میگردد و در نهایت تعیین بردار ویژه ومقادیر ویژه یک عملگر یکی از مسائل اساسی درس ریاضی فیزیک I است بنابراین با آموختن دترمینانها و بحث در مورد خواص آنها که در بخش بعدی خواهد آمد نحوه تعیین بردارهای ویژه یک عملگر را میاموزیم.

این مسئله از کتاب:

Mathematical theory of Electiricity & Magnetism

تألیف *Sir James Jeans* که درسال ۱۹۰۵ میلادی تألیف شده است اقتباس شده است. حال خواننده به این سؤال هم خود جواب دهد درصورتیکه در نقطه ای $\vec{\nabla}\phi(x)$ صفر اما توزیع باری در آن نقطه وجود داشته باشد آیا استدلال فوق باز هم صحیح است؟ در فیزیک عمومی چه توزیع باری میشناسید که شرایط فوق در مورد آن صادق است.

۱۳_۳_ دترمینانها

هرگاه در فضای n بعدی n بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و .... داشته باشیم در این صورت مقدار بدست آمده از رابطه زیرین را:

$$(3-205) \qquad \Delta = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \varepsilon_{ijkl...} a_i b_j c_k d_l ....$$

دترمینان نامند و با علامت Δ نشان میدهند[علامت جمعبندی Σ را من بعد برای سهولت در تحریر بکار نخواهیم گرفت]در(۲۰۵-۳) علامت $\varepsilon_{ijkl...}$ که دارای n اندیس $i,j,...$ میباشد تعمیم همان علامت لوی سویتا میباشد یعنی مقدار آن اگر اندیسهای $(i,j,....)$ به ترتیب (...,۱,۲,۳,٤) باشند ویا با تعداد جابجایی زوج به شکل (...,۱,۲,۳,٤) درآیند برابر یک واگر اندیسها با تعداد جابجاییهای فرد به شکل ...,۱,۲,۳,٤ درآیند برابر (۱-) واگردو اندیس دلخواه مساوی هم باشند برابر صفر است .ابتداتوجه میکنیم که هر جمله دترمینان ازحاصلضرب n عنصر که ازمؤلفه های متفاوت بردارهای مختلف تشکیل شده ودر ثانی تعداد این جملات $n!$ است .چون اندیس i با اختیار نمودن مقادیر از ۱ تا n، n جمله حاصل میکند .سپس درهریک ازجملات حاصل شده اندیس j فقط $(n\text{-}1)$ مقدار از مقادیر ۱ تا n اختیار میکند(تا ضریب لوی سویتا بعلت مساوی شدن دو اندیس صفر نگردد) و در نتیجه از جمع بندی دو اندیس i و j، $n(n\text{-}1)$ جمله حاصل میشود.اندیس k در هر یک از جملات بدست آمده فقط $(n\text{-}2)$ مقدارازا تا n رامیتواند اختیارنماید درنتیجه دراثرجمعبندی سه اندیس i و j و k تعداد $n(n\text{-}1)(n\text{-}2)$ جمله حاصل میشود.اگر اندیس چهارم l و...و...را جمعبدی نماییم تعداد جملات حاصل از روی جمعبندی کلیه اندیسها برابر:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)....3\times 2\times 1 = n!$$

میگردد.

بعنوان مثال در فضای سه بعدی رابطه (۲۰۵-۳) با جمعبندی اندیس i بصورت:

$$\Delta = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \varepsilon_{1jk} a_1 b_j c_k + \varepsilon_{2jk} a_2 b_j c_k + \varepsilon_{3jk} a_3 b_j c_k$$

در میاید و با جمعبندی روی اندیس j بصورت:

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{12k}a_1b_2c_k + \varepsilon_{13k}a_1b_3c_k + \\ \varepsilon_{21k}a_2b_1c_k + \varepsilon_{23k}a_2b_3c_k + \\ \varepsilon_{31k}a_3b_1c_k + \varepsilon_{32k}a_3b_2c_k \end{Bmatrix}$$

در میاید که نهایتا" در رابطه بدست آمده k فقط یک مقدار اختیار میکند:

$$\Delta = \varepsilon_{123}a_1b_2c_3 + \varepsilon_{132}a_1b_3c_2 + \varepsilon_{213}a_2b_1c_3 + \varepsilon_{231}a_2b_3c_1 + \varepsilon_{312}a_3b_1c_2 + \varepsilon_{321}a_3b_2c_1$$

فرم ساده شده Δ بصورت:

$$\Delta = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

در میاید. غالبا" یک دترمینان را بصورت جدول $n \times n$ با دو خط موازی در کنار آن که عناصر هر سطر آن از مؤلفه های یک بردار تشکیل شده است نمایش میدهند:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & . & . & . & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & . & . & . & c_n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} \qquad (3-206)$$

بنابراین مشاهده میکنیم بموجب تعریف (۲۰۵-۳) یک دترمینان تشکیل شده است از $n!$ جمله، و هر جمله شامل حاصلضرب n مؤلفه های متفاوت بردارهای مختلف یعنی در هر جمله هر بردار یکبار آمده است و اگر در جمله مورد نظرمؤلفه pام برداری آمده باشد، در اینصورت مؤلفه های دیگر بردارهای آمده در همان جمله p نمیباشد. تعبیر نتیجه فوق از روی جدول (۲۰۶-۳) بدین صورت است که یک دترمینان تشکیل شده است از مجموعه ای جملات(تعداد این جملات $n!$ است) در هر جمله عناصر هر سطر و هر ستون یکبار آمده است.(هرسطر بمعنای یک بردار مخصوص و هرستون به معنای مؤلفه مخصوص آن بردار) علامت هرجمله بوسیله تعداد جابجاییهای فرد یا زوج اندیس هایی که مؤلفه های بردارها را نشان میدهند مشخص میشود مثلا" در:

$$a_3b_1c_2d_4$$

با دو بار جابجا کردن اندیس ۳ ،اندیسها بصورت (۱۲۳٤) در میاید بنابراین علامت جمله مزبور ۱+ است .توجه کنید بموجب (۲۰۵-۳) نظم اندیسها در جمله $a_2b_1c_3d_4$ همانند نظم اندیسها در علامت لوی سویتا میباشد یعنی علامت لوی سویتا برای جمله مزبوربصورت ε_{3124} است که با دوبارجابجا کردن متوالی اندیس (۳) بصورت ε_{1234} در میاید و بهمین دلیل است که مثبت یا منفی بودن علامت هر جمله را از روی علامت لوی سویتا در میابیم تا آنکه از روی نظم اندیسهای تشکیل دهنده مؤلفه بردارها. دربسیاری از کتب قدیم از روی نظم اندیسهای تشکیل دهنده بردارها علامت هر جمله تعیین شده است که امروزه دیگر منسوخ است.

دقت نمایید که بموجب(۲۰۵-۳) هر دترمینان تابع درجه اولی ازمؤلفه های بردارهای تشکیل دهنده آن میباشد. ما از این حقیقت بعدا" استفاده کرده وکوفاکتور یک دترمینان را محاسبه خواهیم کرد.

اگر کمی با دقت به جدول (۲۰٦-۳) نظر افکنیم نمایش دترمینان بصورت جدول مزبور در حالتی که تعداد بردارها بیش از ۲٦ ،(تعداد حروف لاتین)باشد به اشکال برخورد میکند زیرا نمی دانیم برداربیست و هفتم رابا چه سمبلی نشان دهیم .درمقام چاره جویی بردارهای $\vec{a}$ و$\vec{b}$و ...را بصورت

$$\vec{a} = \vec{a}_1 \quad , \quad \vec{b} = \vec{a}_2 \quad , \quad \vec{c} = \vec{a}_3 \quad , \quad \vec{d} = \vec{a}_4 \ldots\ldots$$

نشان میدهیم توجه کنیداین اندیسهامعرف مؤلفه بردارنمیباشد .بنابراین جدول (۲۰٦-۳) بصورت:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\vec{a}_1)_1 & (\vec{a}_1)_2 & (\vec{a}_1)_3 & . & . & . & (\vec{a}_1)_n \\ (\vec{a}_2)_1 & (\vec{a}_2)_2 & (\vec{a}_2)_3 & . & . & . & (\vec{a}_2)_n \\ (\vec{a}_3)_1 & (\vec{a}_3)_2 & (\vec{a}_3)_3 & . & . & . & (\vec{a}_3)_n \\ . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & & . & . & . \end{vmatrix}$$

در میاید .فرم ساده تر شده آن بصورت زیر است:

$$
(3-207) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & . \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}
$$

گاهی اوقات جدول (۲۰۷–۳) را دترمینان ماتریس A هم نامند توجه کنید در دترمینان دوخط موازی دردوطرف جدول قرار میدهند درصورتیکه برای عملگرها کروشه در طرفین جدول قرار میدهند. رابطه(۲۰۵–۳) برای دترمینانی که بصورت جدول (۲۰۷–۳) نمایش داده شده بصورت:

$$
(3-208) \qquad \Delta = \varepsilon_{ijkl\ldots} a_{1i} a_{2j} a_{3k} a_{4l} \ldots\ldots
$$

میشود.

خواننده باهوش ممکن است نسبت به نوتاسیون مندرج در(۲۰۸–۳) نیزبعلت آنکه تعداد اندیسهای مختلف i و j و k و.... هم بیست و شش میباشد ایراد بگیرد. در واقع بهترین نوتاسیون برای نمایش یک دترمینان بصورت:

$$
(3-209) \qquad \Delta = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 \ldots} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4} \ldots\ldots
$$

میباشد که $i_۱$ و $i_۲$ و...i_n هر یک مقادیر ۱ تا n اختیار میکنند.

البته ما در این جزوه بعلت سخت بودن تایپ چنین اندیسهایی تا آنجا که ممکن باشد از فرم (۲۰۸–۳) برای قضایای دترمینانها استفاده میکنیم.

حال اگر در جدول (۲۰۷–۳) جای سطرها و ستونها را جابجا نماییم دترمینان جدیدی حاصل میشود که بصورت زیر است:

$$
(3-210) \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & . & . \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & . & . \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & . & . \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & . & . \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}
$$

که ما آنرا معادل دترمینان B فرض می کنیم. علت معرفی دترمینان B آنست که مقدار آن به موجب (۲۰۸–۳) برای ما معلوم است در نتیجه:

$$
\Delta' = \varepsilon_{ijkl\ldots} b_{1i} b_{2j} b_{3k} b_{4l} \ldots\ldots
$$

و چون:

$$b_{ij} = a_{ji}$$

است بنابراین مقدار Δ' برابر میشود با:

$$\Delta' = \varepsilon_{ijkl....} a_{i1} a_{j2} a_{k3} a_{l4} \ldots \qquad (3-211)$$

بسط صریح (۲۱۱–۳) نشان میدهد که مقدار Δ' برابر Δ است یعنی:

$$\begin{aligned} \Delta' = \Delta &= \varepsilon_{ijkl....} a_{1i} a_{2j} a_{3k} a_{4l} \ldots \\ &= \varepsilon_{ijkl....} a_{i1} a_{j2} a_{k3} a_{l4} \ldots \end{aligned} \qquad (3-212)$$

و بقولی دترمینان یک ماتریس با دترمینان ترانسپز (وارونه) آن برابر است. توجه میکنیم رابطه اول و دوم (۲۱۲–۳) را گاهی اوقات به ترتیب بسط سطری و بسط ستونی یک دترمینان مینامند. مثلاً از رابطه اول (۲۱۲–۳) و برای $n=3$ بسط دترمینان بر حسب عناصر سطر اول آن با جمعبندی روی اندیس i حاصل میشود. یعنی:

$$\begin{aligned} \Delta &= \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \\ &= a_{11}[\varepsilon_{1jk} a_{2j} a_{3k}] + a_{12}[\varepsilon_{2jk} a_{2j} a_{3k}] \\ &\quad + a_{13}[\varepsilon_{3jk} a_{2j} a_{3k}] \end{aligned}$$

a_{11}، a_{12}، a_{13} عناصر سطر اول هستند و چنانچه بخواهیم دترمینان را بر حسب ستون دوم آن بسط دهیم بموجب رابطه دوم (۲۱۲–۳) روی اندیس j جمعبندی میکنیم:

$$\begin{aligned} \Delta &= \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} \\ \Delta &= a_{12}[\varepsilon_{i1k} a_{i1} a_{k3}] + a_{22}[\varepsilon_{i2k} a_{i1} a_{k3}] \\ &\quad + a_{32}[\varepsilon_{i3k} a_{i1} a_{k3}] \end{aligned}$$

a_{12}، a_{22}، a_{32} عناصر ستون دوم هستند.

۳_۱۴_ قضایای مربوط به دترمینانها

۱_۱۴_۳_ هرگاه دترمینانی را در یک عدد ضرب کنیم کافیست آنرا در یک سطر (و یا یک ستون) دلخواه آن ضرب کنیم

استدلالهای آورده شده در زیر بدون آنکه از کلیت مسئله بکاهد در فضای سه بعدی انجام شده است و همچنین در مورد سطرها صورت گرفته است اثبات برای ستونها بعنوان مسئله مطرح میشود که کافیست خواننده از بسط دوم (۲۱۲–۳) استفاده نماید

$$\Delta = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

$$\alpha\Delta = \varepsilon_{ijk} a_{1i} (\alpha a_{2j}) a_{3k}$$
$$= \varepsilon_{ijk} b_{1i} b_{2j} b_{3k}$$

که $b_{3k}=a_{3k}$، $b_{2j}=\alpha a_{2j}$ ، $b_{1i}=a_{1i}$ است اما رابطه اخیر بمعنای:

$$\alpha\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{3-213}$$

در نتیجه قضیه اثبات شد. توجه کنید اگر عملگر را در یک عدد ضرب کنیم میبایستی عدد مزبور را در تمامی عناصر عملگر ضرب کنیم فرق بین دو نتیجه را دقیقاً" دریابید بنابراین:

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$$

۲_۱٤_۳_ هرگاه دوسطر(ستون)یک دترمینان با یکدیگرمتشابه باشند مقداردترمینان برابر صفر است:

مثلاً" اگر $a_{1i}=\alpha a_{3i}$ باشد:

$$\Delta = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$
$$= \alpha\varepsilon_{ijk} a_{3i} a_{2j} a_{3k}$$

حال جای دو اندیس تکراری i,k را در رابطه فوق جابجا میکنیم:

$$\Delta = \alpha\varepsilon_{kji} a_{3k} a_{2j} a_{3k}$$

حال مشاهده میکنیم که ε_{kji} با تعداد جابجاییهای فرد اندیسها بصورت ε_{ijk} در میاید بقولی:

$$\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jki} = +\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk}$$

در نتیجه رابطه فوق برابر Δ- است بنابراین:

$$\Delta = -\Delta \Rightarrow 2\Delta = 0 \tag{3-214}$$

سؤال: اگر $a_{1i} = \alpha\, a_{mi}$ باشد علامت لوی سویتا با معاوضه جایگاه اندیسهای m ام با اول چگونه تغییر می کند. راهنمایی توجه می کنیم که بهتر است علامت لوی سویتا با نوتاسیون دقیقتر:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_m}$$

نشان دهیم اندیس i_m با (m-۱) جابجایی در جایگـاه اندیـس $i_۱$ قـرار مـی گـیرد و حـال اندیس $i_۱$ که در جایگاه دوم قرار گرفته با $(m$-۲$)$ جابجایی در جایگاه سـابق اندیـس i_m قرار میگیرد.

۳ـ۱۴ـ۳ـ هرگاه در دترمینانی عناصر یک سطر(یا ستون)دلخواه بصورت جمع دو عدد باشد دترمینان مزبور برابر جمع دو دترمینان میگردد

مثلا" اگر $a_{۲j}=\alpha_{۲j}+\beta_{۲j}$ باشد:

$$\begin{aligned}\Delta &= \varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}\\ &= \varepsilon_{ijk}a_{1i}(\alpha_{2j}+\beta_{2j})a_{3k}\\ &= \varepsilon_{ijk}a_{1i}\alpha_{2j}a_{3k}+\varepsilon_{ijk}a_{1i}\beta_{2j}a_{3k}\end{aligned}\tag{2-215}$$

نمایش صریح رابطه فوق بصورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} & \alpha_{23}+\beta_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

غالبا" با استفاده از قضیه (۳-۱۴-۳) مضربی از یک سطر (یا ستون) را بـا سـطر (سـتون) دیگر دترمینان جمع می کنند. مسلما" بموجب قضیـه (۲-۱۴-۳) مقـدار دترمینـان تغییر نمیکند اما از طرفی با انجام این عمل میتوان دترمینان جدیدی ساخت که مقدار آن برابـر دترمینان سابق است اما در عوض عناصر آن از اعداد ساده تری تشکیل شده اسـت. در مکـانیک کوانتومـی مقـادیر ویژه (ترازهـای انـرژی) هـامیلتونی کـه پتانسیل آن پتانسـیل پریودیک کرونیـک پـنی باشـدازحل دترمینـانی حـاصل میشـود که دارای عنـاصرپیچیده میباشد. بنابراین با استفاده از روش فوق ابتدا صورت دترمینـان را سـاده تـر میکنیـم و در نتیجه محاسبه آن آسانتر میگردد. این دترمینان بعنوان مسئله مطرح شده است.

بعنوان یک مثال ساده دردترمینان زیر اگر عناصر ستون دوم را با سـتون سـوم جمـع کنیـم بدون انجام دادن محاسبات مقدار آن معلوم میگردد:

$$\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & c+a\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a+b+c\\ 1 & b & a+b+c\\ 1 & c & a+b+c\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & c & 1\end{vmatrix}=0$$

توجه کنید برای تعیین مقدار دترمینان از قضایایی که هم درقبل گفته شده است استفاده کرده ایم اگر از قضایا استفاده نمیکردیم محاسبه این دترمینان ازروی بسط آن صورت میگرفت کدام بهتر است ؟

شایان ذکر است که تعیین مقدار دترمینانی موسوم به واندرموند(*vandermonde*) که برای اثبات مستقل بودن بردارهای ویژه یک عملگر غیر دژنره کاربرد دارد وبعنوان مسئله مطرح میگردد از روی قضیه (۳−۱٤−۳) هم میسر است.

٤_١٤_٣_ هرگاه در یک دترمینان دو سطر(ستون)مجاور هم را جابجا کنیم دترمینان جدیدی حاصل میشود که علامت آن مخالف علامت دترمینان قبلی است

بعنوان مثال اگر سطردوم وسوم دترمینانی راجابجا کنیم دترمینان جدیدی حاصل میگردد که عناصر آنرا با b_{ij} نشان میدهیم :

$$b_{1i} = a_{1i} \qquad b_{2i} = a_{3i} \qquad b_{3i} = a_{2i}$$

$$\Delta' = \varepsilon_{ijk} b_{1i} b_{2j} b_{3k}$$
$$= \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{3j} a_{2k}$$

اگر اندیسهای تکراری k,j را بترتیب با j,k نشان دهیم رابطه فوق برابر میشود با :

$$\Delta' = \varepsilon_{ikj} a_{1i} a_{3k} a_{2j}$$

حال اگر در علامت لوی سویتا جای اندیس k,j را تغییر دهیم :

$$\Delta' = -\varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{3k} a_{2j} = -\Delta \qquad (3-216)$$

تعمیم قضیه فوق بصورت زیر است:

هرگاه در دترمینانی دو سطر (ستون)pام و m ام را با یکدیگر جابجا کنیم دترمینان جدیدی حاصل میشود که علامت آن مخالف علامت دترمینان اصلی میباشد.

برای استدلال p را بزرگتر از m فرض میکنیم .بنابراین اگر سطر pام را متوالیا" با سطر های مجاورجابجا کنیم بطوریکه به سطر m ام برسیم دترمینان جدیدی حاصل میشود که سطر pام در جایگاه سطر m ام قرار گرفته است ومقدار آن برابر:

$$\Delta'' = (-1)^{p-m} \Delta \qquad (3-217)$$

میگرد د. چون با هر جابجایی علامت دترمینان تغییر میکند. اما Δ'' دترمینان مورد نظر ما که میبایستی از جابجایی سطر pام با mام حاصل شود نیست چه سطر mام اکنون درجایگاه سطر $(m+1)$ قرار گرفته است. بنابراین میبایستی عناصر a_{mi} که در سطر $m+1$ قرار گرفته اند با تعداد جابجاییها که برابر $[p-(m+1)]$ است به سطر pام منتقل نماییم حال دترمینان مورد نظر Δ' حاصل میشود:

$$\Delta' = (-1)^{p-m-1}\Delta'' = (-1)^{p-m-1}(-1)^{p-m}\Delta = -\Delta \qquad (3-218)$$

خواننده علاقمند میتواند با رسم خطوط افقی (قائم) و شماره گذاری آنها و سپس با جابجا کردن آنها به نتیجه (۳-۲۱۸)برسد.

استدلال تانسوری(۳-۲۱۸) (برای دانشجویان خوب)بدین صورت است:

هرگاه دترمینان Δ بصورت:

$$\Delta = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \ldots\ldots i_m \ldots\ldots i_p \ldots} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \ldots\ldots a_{mi_m} \ldots a_{pi_p} \ldots$$

نشان دهیم دترمینان گفته شده Δ' بصورت:

$$\Delta' = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \ldots\ldots i_m \ldots\ldots i_p \ldots} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \ldots\ldots a_{pi_m} \ldots a_{mi_p} \ldots$$

در میاید.

حال جایگاه اندیسهای i_p با i_m را در Δ' با یکدیگرمعاوضه می کنیم. اندیس i_p با $(p-m)$ جابجایی در جایگاه اندیس i_m قرار میگیرد و البته اندیس i_m در مجاور آن اما در جایگاه $(m+1)$ قرار میگیرد بنابراین با تعداد جابجایی $[p-(m+1)]$ اندیس i_m در جایگاه pام قرار خواهد گرفت یعنی:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \ldots\ldots i_p \ldots\ldots i_m \ldots} = (-1)^{p-m}(-1)^{p-m+1}\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \ldots\ldots i_m \ldots\ldots i_p \ldots}$$

پس دترمینان Δ' را بصورت زیر مینویسیم:

$$\Delta' = (-1)\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 \ldots\ldots i_p \ldots\ldots i_m \ldots} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} \ldots\ldots a_{pi_m} \ldots a_{mi_p}$$

حال اگر در رابطه فوق جایگاه a_{mip} و a_{pim} را تغییر دهیم هیچگونه تغییری حاصل نمی شود (چون در ضرب اعداد ترتیب ضرب نقشی ندارد) در نتیجه بموجب بسط دترمینان Δ خواهیم داشت:

$$\Delta' = -\Delta$$

۵-۱۴-۳- هرگاه در دترمینانی سطر (ستون) m ام را جایگزین سطر (ستون) اول و سطر (ستون) n ام را جایگزین سطر (ستون) دوم و سطر (ستون) p ام را جایگزین سطر (ستون) سوم و... نماییم دترمینان جدیدی حاصل میشود که مقدار آن برابر است با:

$$\Delta' = \varepsilon_{mnp\ldots}\Delta \qquad (3-219)$$

نمایش صریح دترمینانهای Δ و Δ' در فضای سه بعدی بصورت زیر است:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} \end{vmatrix}$$

که بسط آنها عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Delta &= \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \\ \Delta' &= \varepsilon_{ijk} a_{mi} a_{nj} a_{pk} \end{aligned} \qquad (3-220)$$

هم از روی رابطه دوم (۲۲۰-۳) و هم از نمایش صریح دترمینان Δ' در میابیم هرگاه دو اندیس از سه اندیس (m,n,p) با یکدیگر برابر باشند، دو سطر با یکدیگر مساوی خواهند بود و در نتیجه بموجب قضیه (۲-۱۴-۳) Δ' برابر صفر میگردد. بنابراین اگر بخواهیم Δ' مخالف صفر باشد تمامی اندیسهای m,n,p میبایستی با یکدیگر متفاوت باشند ازطرفی اگر اندیسهای (m,n,p) بترتیب (۱,۲,۳) باشند بموجب رابطه اول (۲۲۰-۳) $\Delta'=\Delta$ میگردد و اگر اندیسهای (m,n,p) آنگونه باشند که با تعداد جابجایی زوج به صورت (۱,۲,۳) درآیند که بزبان دیگر جایگزین کردن سطر اول دترمینان Δ' در سطر mام و.... می باشد در اینصورت باز هم $\Delta'=\Delta$ میگردد. ولی اگر تعداد جابجاییها فرد باشند نتیجه میگیریم که $\Delta'=-\Delta$ است. بنابراین سه نتیجه صفر شدن ،مساوی شدن Δ' با علامتهای مخالف با Δ را با سمبل لوی سویتا:

$$\Delta' = \varepsilon_{mnp}\Delta \qquad (3-221)$$

نشان میدهیم. صورت دیگر رابطه (۲۲۱-۳):

$$(3-222)\qquad \begin{cases}\varepsilon_{ijk}a_{mi}a_{nj}a_{pk}=\varepsilon_{mnp}\Delta\\ \varepsilon_{ijk}a_{im}a_{jn}a_{kp}=\varepsilon_{mnp}\Delta\end{cases}$$

می باشد. توجه نمایید که رابطه دوم (۲۲۲−۳) از جابجا کردن ستونهای دترمینان Δ حاصل شده است که بعلت تشابه استدلال با مورد جابجا کردن سطرها، اثبات آنرا نیاورده ایم. با استفاده از روابط (۲۲۲−۳) مسئله مهمی را در زیر حل میکنیم که در فصل اول از آن بارها استفاده کرده ایم.

۶_۱۴_۳_ حاصلضرب دو علامت لوی سویتا را میتوان بصورت یک دترمینان خاص نشان داد

ابتدا دترمینان Δ را که عناصرآن δ_{ij} هستند در نظر میگیریم. مسلما" مقدار آن برابر واحد است:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

حال اگر در این دترمینان عناصر سطر m ام را جایگزین سطر اول و عناصر سطر n ام را جایگزین سطر دوم و عناصر سطر p ام را جایگزین سطر سوم نماییم دترمینان Δ' حاصل میشود که نمایش آن بصورت زیر است:

$$\Delta'=\begin{vmatrix}\delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3}\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3}\\ \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3}\end{vmatrix}$$

مقدار آن بموجب رابطه اول (۲۲۲−۳) برابر:

$$\Delta'=\varepsilon_{mnp}\qquad \Delta=\varepsilon_{mnp}$$

میشود. حال اگر در دترمینان Δ' عناصر ستون i ام راجایگزین عناصر ستون اول و عناصر ستون j ام راجایگزین ستون دوم وعناصرستون k را جایگزین ستون سوم نماییم دترمینان جدید Δ'' حاصل میشود که بصورت زیر است:

$$\Delta''=\begin{vmatrix}\delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk}\\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nk}\\ \delta_{pi} & \delta_{pj} & \delta_{pk}\end{vmatrix}$$

و مقدار آن بموجب رابطه دوم (۲۲۲-۳) برابر:

$$\Delta'' = \varepsilon_{ijk}\Delta' = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}$$

بنابراین به نتیجه بسیار مهمی که حاصلضرب دو علامت لوی سویتا را میتوان بصورت دترمینان خاصی نشان داد رسیدیم این نتیجه را بدون اثبات در (۲۲-۱) آورده بودیم:

$$(3-223) \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} \\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nk} \\ \delta_{pi} & \delta_{pj} & \delta_{pk} \end{vmatrix}$$

حال اگر در (۲۲۳-۳) اندیس های k و p برابر اختیار کنیم و بر روی آنها جمعبندی نماییم خواهیم داشت:

$$(3-224) \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \sum_k \begin{vmatrix} \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} \\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nk} \\ \delta_{ki} & \delta_{kj} & 3 \end{vmatrix} = \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right)$$

حاصل شدن عنصر ۳ در سطر وستون سوم را از روی قضیه (۳-۱٤-۳) توجیه نمایید.

استخراج نتایج:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mjk} = 2\delta_{im}$$

$$(3-225) \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 2\times 3 = 6 = 3!$$

از روی رابطه (۲۲٤-۳) بسیار آسان است. توجه کنید جمعبندی بر روی اندیس های تکراری مفروض است. بکمک (۲۲۲-۳) و (۲۲۵-۳) میتوان بسط یک دترمینان دلخواه نظیر Δ را بصورت دیگری نشان داد کافیست هریک از روابط (۲۲۲-۳) را در ε_{mnp} ضرب و روی اندیسهای m و n و p هم جمعبندی نمود:

$$(3-226) \qquad \frac{1}{6}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{ijk}a_{mi}a_{nj}a_{pk} = \Delta$$

خواننده حتما" میبایستی بخود بقبولاند که از هر دو رابطه (۲۲۲-۳) به نتیجه (۲۲٦-۳) میرسیم رابطه (۲۲٦-۳) را برای محاسبه کوفاکتور دترمینان بکار میگیریم.

سؤال: رابطه (۲۲٦-۳) در فضای n بعدی به چه صورت در میاید؟

۷_۱٤_۳_ دترمینان حاصلضرب دو عملگر برابر حاصلضرب دترمینانهای دو عملگر است

اگر داشته باشیم:

$$AB = C$$

ابتدا $det\ A$ را بر حسب سطر بسط میدهیم:

$$\det A = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$
$$\det A \det B = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \det B$$
$$= a_{1i} a_{2j} a_{3k} \varepsilon_{ijk} \det B$$

حال بموجب رابطه اول (۲۲۲-۳) خواهیم داشت:

$$(\det A)(\det B) = a_{1i} a_{2j} a_{3k} \varepsilon_{rst} b_{ir} b_{js} b_{kt}$$

چون بموجب تعریف حاصلضرب دو عملگر داریم:

$$\sum_i a_{\alpha i} b_{im} = c_{\alpha m}$$
$$(\det A)(\det B) = \varepsilon_{mnp} c_{1m} c_{2n} c_{3p}$$

و در نهایت:

$$(\det A)(\det B) = (\det C) \tag{3-227}$$

از رابطه (۲۲۷-۳) نتیجه مهم دیگری بدست میاوریم و آن اینست که **در تبدیل متشابه، دترمینان یک عملگر مقداریست ناوردا.**

$$M' = B^{-1} M B$$
$$\det M' = \det B^{-1} \det M \det B = \det(B^{-1} B) \det M$$
$$\det M' = \det M \tag{3-228}$$

بنابراین اگر با تبدیل متشابه خاصی عملگر M را به شکل قطری در آوریم یعنی:

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

در اینصورت:

$$\det M = \det M' = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i \tag{3-229}$$

یعنی **مقدار دترمینان یک عملگر برابر با حاصلضرب مقادیر ویژه آن در یکدیگر میباشد.**

توجه نمایید از روی رابطه(۲۲۹-۳) میتوان نتیجه گرفت که دترمینان یک عملگر هرمیتی عدد یست حقیقی (چرا؟) .

براحتی میتوان نشان داد که دترمینان عملگر ترانسپز مزدوج یک عملگر برابر مزدوج دترمینان عملگر است:

$$\det A^{+} = \varepsilon_{ijk} a_{1i}^{+} a_{2j}^{+} a_{3k}^{+}$$
$$= \left\{ \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} \right\}^{*}$$
$$\det A^{+} = (\det A)^{*} \qquad (3-230)$$

نتیجه بسیار مهمی که از رابطه (۲۳۰-۳) میگیریم آنست که قدر مطلق دترمینان یونیتاری واحد است چه:

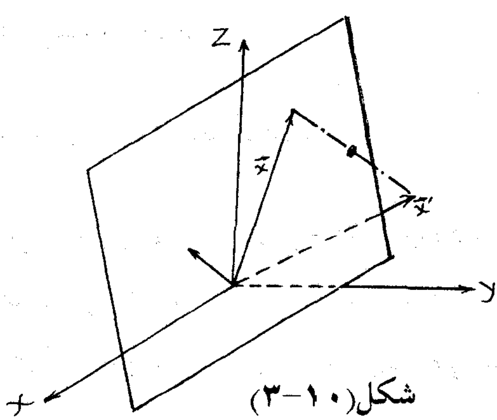
$$UU^{+} = 1$$
$$\det U \det U^{+} = 1$$
$$\left|\det U\right|^{2} = 1$$
$$\det U = e^{i\phi} \qquad (3-231)$$

بنابراین در فضای حقیقی دترمینان عملگر متعامد ۱± میشود:

$$\det A = \pm 1 \qquad (3-232)$$

در بسیاری از کتب فیزیک عملگر متعامدی که دارای دترمینان 1+ است عملگر متعامد منتظم (*proper*) نامندو در غیر اینصورت نا منتظم نامند.

یکی از عملگرهای معروف غیر منتظم عملگری است که اگر بر هر برداری اثر نماید انعکاس آینه ای آن نسبت به صفحه مار بر مبدأ مختصات که عمود بر آن با بردار یکه $\hat{l}$ مشخص میشود ایجاد کند. چنین عملگری با رابطه:



شکل(۱۰-۳)

$$\vec{x}' = \vec{x} - 2\left(\hat{l}\cdot\vec{x}\right)\hat{l}$$
$$x'_i = \left(\delta_{ij} - 2l_i l_j\right)x_j = A_{ij}x_j$$

داده میشود. دترمینان عملگر انعکاس برابر:

$$(3-233) \qquad \det A = -1$$

آیا می توانید نتیجه (۲۳۳-۳) به روش ساده و ابتکاری محاسبه کنید؟ ازنتیجه (۲۲۸-۳) استفاده کنید. نمایش محض عملگر A به چه صورت است؟

۱۵-۳- کوفاکتور عناصر یک دترمینان

هرگاه بسط سطری وستونی یک دترمینان را درنظربگیریم ضریب هرعنصر a_{ij} را کوفاکتور آن نامند، بعنوان مثال در فضای سه بعدی:

$$\Delta = \varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}$$
$$\Delta = \sum_i a_{1i}c_{1i} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

c_{11} c_{12} c_{13} را بترتیب کوفاکتور عناصر a_{11} و a_{12} و a_{13} نامند. توجه میکنیم:

$$c_{11} = \varepsilon_{1jk}a_{2j}a_{3k}$$
$$c_{12} = \varepsilon_{2jk}a_{2j}a_{3k}$$
$$c_{13} = \varepsilon_{3jk}a_{2j}a_{3k}$$

بنابراین نتیجه میگیریم:

$$(3-234) \qquad c_{1q} = \varepsilon_{qjk}a_{2j}a_{3k}$$

اگر بخواهیم c_{2q} را بدست آوریم کافیست در بسط سطری دترمینان a_{2j} را بیرون بکشیم:

$$\Delta = a_{2j}c_{2j} = a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23}$$

که از رابطه فوق نتیجه میگیریم:

$$(3-235) \qquad c_{2q} = \varepsilon_{iqk}a_{1i}a_{3k}$$

با استدلال مشابه نیز میتوان نتیجه گرفت:

$$(3-236) \qquad c_{3q} = \varepsilon_{ijq}a_{1i}a_{2j}$$

بنابراین ازروی رابطه (۲۳۴-۳),(۲۳۵-۳),(۲۳۶-۳) میتوان کوفاکتورهرعنصردترمینان را بدست آورد. اما آرزوی ما اینست که کوفاکتوری را که هردواندیسهای آن تانسوری باشند بدست آوریم. یعنی سه رابطه مذکور رابا یک رابطه

نشان دهیم. برای این منظور بخاطر میاوریم که در تعریف دترمینان نتیجه گیری کردیم که در هر $n!$ جمله حاصل از بسط دترمینان هر عنصر یکبار ظاهر میشود. بنابراین اگر دترمینان را بصورت (۲۲۶-۳):

$$\Delta = \frac{1}{6}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{ijk}a_{li}a_{mj}a_{nk}$$

نمایش بدهیم، c_{pq} ،بعلت ظاهر شدن a_{pq} بصورت خطی دربسط دترمینان برابرمیشود با:

$$c_{pq} = \frac{\partial\Delta}{\partial a_{pq}} \qquad (3-237)$$

با در نظر گرفتن:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial a_{pq}} = \delta_{ip}\delta_{jq}$$

$$c_{pq} = \frac{1}{6}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{ijk}\{\delta_{lp}\delta_{iq}a_{mj}a_{nk} + a_{li}\delta_{mp}\delta_{jq}a_{nk} + a_{li}a_{mj}\delta_{np}\delta_{kq}\}$$

$$c_{pq} = \frac{1}{6}\{\varepsilon_{pmn}\varepsilon_{qjk}a_{mj}a_{nk} + \varepsilon_{lpn}\varepsilon_{iqk}a_{li}a_{nk} + \varepsilon_{lmp}\varepsilon_{ijq}a_{li}a_{mj}\}$$

سه جمله داخل آکولاد همه با هم مساوی هستند. برای اثبات:

در جمله دوم اندیسهای q,p را در علامتهای لوی سویتا به جایگاه اول تغییر مکان میدهیم. اندیس تکراری l را با m اندیس تکراری i را با j نشان میدهیم نتیجه حاصل برابر جمله اول میگردد. درجمله سوم اندیسهای q , p رادرعلامتهای لوی سویتابه جایگاه اول تغییرمکان میدهیم سپس اندیس تکراری l را به جایگاه سوم منتقل می کنیم. اندیس تکراری j را به جایگاه دوم منتقل میکنیم. حال اگر اندیس تکراری l را با n و اندیس تکراری i را با k نشان دهیم این جمله هم با جمله اول برابرمیشود (این عملیات را بر روی کاغذ بیاورید.) نتیجه گیری نهایی اینکه:

$$c_{pq} = \frac{1}{2}\varepsilon_{pmn}\varepsilon_{qjk}a_{mj}a_{nk} \qquad (3-238)$$

با کمی دقت به جایگاههای اندیسهای غیر تکراری p,q واندیسهای تکراری (m,n) و (j,k) براحتی میتوان مقدار c_{pq} را حفظ نمود.

بعنوان تمرین از رابطه (۳-۲۳۸) c_{1q} را بدست میاوریم:

$$c_{1q} = \frac{1}{2}\varepsilon_{1mn}\varepsilon_{qjk}a_{mj}a_{nk}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_{123}\varepsilon_{qjk}a_{2j}a_{3k} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{qjk}a_{3j}a_{2k}\right\}$$

اگر درجمله دوم جای اندیسهای تکراری j,k را معاوضه وعلامت های منفی که در علامتهای لوی سویتا ظاهر میشود در نظر بگیریم به نتیجه (۳-۲۳٤) میرسیم.

نتیجه (۳-۲۳۸) را هم میتوان به روش دیگر محاسبه کرد. از روی تعریف دترمینان:

$$\Delta = \varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}$$

و بسط آن بر حسب سطر اول و یا دوم و...

$$\Delta = \sum_i a_{1i}c_{1i} = \sum_j a_{2j}c_{2j} \equiv \sum_i a_{2i}c_{2i}$$

که نتیجه میگیریم:

$$\Delta = \sum_i a_{mi}c_{mi} \tag{3-239}$$

که جمع بندی فقط روی اندیس i صورت میگیردو نه روی اندیس m و اگر جمعبندی روی اندیس m هم انجام دهیم نتیجه:

$$\sum_m\sum_i a_{mi}c_{mi} = 3\Delta \tag{3-240}$$

حاصل میشود. حال اگر بسط دترمینان بصورت (۳-۲۲٦)د رنظر بگیریم:

$$\Delta = \frac{1}{6}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{ijk}a_{mi}a_{nj}a_{pk}$$

وجمع روی اندیسهای i,m را صریحا" با Σ نشان دهیم (البته همه اندیسهای تکراری جمع میشوند):

$$\Delta = \sum_{m,i} a_{mi}\left\{\frac{1}{6}\varepsilon_{mnp}\varepsilon_{ijk}a_{nj}a_{pk}\right\} \tag{3-241}$$

با ضرب (۳-۲٤۱) د رعدد سه و مقایسه آن با رابطه (۳-۲٤۰) نتیجه میگیریم که:

$$c_{mi} = \frac{1}{2}\varepsilon_{mnp}\,\varepsilon_{ijk}a_{nj}a_{pk}$$

که رابطه عین رابطه (۳-۲۳۸) است.

سؤال: کوفاکتور یک عنصر دترمینان در فضای n بعدی را بنویسید.

روش عملی محاسبه کوفاکتور یک دترمینان

نظر به اینکه می دانیم کوفاکتور عنصر a_{11} عبارتست از دترمینانی که از حذف عناصر سطر و ستون اول حاصل میشود بنابراین کوفاکتور ضریب a_{pq} را بصورت زیر حساب میکنیم :

دترمینان Δ را درنظرمیگیریم . دترمینان Δ' در نظر میگیریم که ازجایگزین کردن سطر p ام درسطر اول وسپس ازجایگزین کردن ستون q ام درستون اول بدست آمده باشد . مسلما" بنا به قضایای گفته شده در رابطه با جابجا کردن سطرها و ستونها :

$$\Delta' = (-1)^{p-1}(-1)^{q-1}\Delta = (-1)^{p+q}\Delta$$

و یا اینکه:

$$(3-242) \qquad \Delta = (-1)^{p+q}\Delta'$$

یعنی دترمینانهای Δ و Δ' فقط در یک علامت $(-1)^{p+q}$ با یکدیگر متفاوت هستند شکل صریح دترمینان Δ' که ازدو جایگزین کردن متوالی سطرها و ستون ها حاصل شده به صورت زیر است:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdot & \cdot & a_{pq} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1q} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2q} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

(دترمینان Δ_1 از جایگزین کردن سطر p ام در سطر اول حاصل شده است):

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{p1} & a_{p2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q} & a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{3q} & a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

و اگر عناصر دترمینان Δ' را با b_{ij} نشان دهیم:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdot & \cdot \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

در اینصورت عنصر مربوط به کوفاکتور c'_{11} از دترمینان 'Δ عبارتست از $b_{11}=a_{pq}$ و از طرفی چون دترمینان 'Δ با رابطه (۲٤۲-۳) با دترمینان Δ مرتبط است و کوفاکتور a_{pq} در دترمینان Δ منحصر بفرد است بنابراین c_{pq} برابر دترمینانی می گردد که از حذف سطر p ام و ستون q ام حاصل شده که نتیجه را در $(-1)^{p+q}$ ضرب کرده باشیم. دترمینانی که از حذف سطر p ام و ستون q ام یک دترمینان حاصل شده باشد دترمینان ماینور *Minor* نامندو با M_{pq} نشان میدهند:

$$c_{pq}=(-1)^{p+q}M_{pq} \qquad (3-243)$$

بعنوان مثال دترمینان Δ و برخی از دترمینانهای ماینور آن عبارتند از:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&2\\3&4&5\\6&7&8\end{vmatrix}$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=32-35=-3 \qquad c_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-3$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}3&5\\6&8\end{vmatrix}=24-30=-6 \qquad c_{12}=(-1)^{2+1}M_{12}=+6$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}3&4\\6&7\end{vmatrix}=21-24=-3 \qquad c_{13}=(-1)^{3+1}M_{13}=-3$$

$$\Delta=\sum_i a_{mi}c_{mi}=2\times(-3)+1\times(6)+2(-3)=-6$$

در محاسبات فوق اندیس m را عدد ۱ اختیار کرده ایم.

حال مسئله ای را حل می کنیم که تعمیم رابطه (۲۳۹-۳) می باشد و نتیجه این مسئله همانگونه که خواهیم دید انگیزه اصلی معرفی وبررسی دترمینانها میگردد وآن محاسبه:

$$\sum_q a_{rq}c_{pq}$$

است(توجه کنید اگر دو اندیس p,r مساوی بودند وجمع روی آنها صورت نمیگرفت نتیجه برابر دترمینان Δ می گشت):

$$\sum_q a_{rq}c_{pq}=\frac{1}{2}a_{rq}\varepsilon_{pmn}\varepsilon_{qjk}a_{mj}a_{nk}$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{pmn}\varepsilon_{qjk}a_{rq}a_{mj}a_{nk}$$

جمع روی تمامی اندیسهای تکراری مفروض است بموجب رابطه اول (۲۲۲-۳) خواهیم داشت:

$$\sum_q a_{rq}c_{pq}=\frac{1}{2}\varepsilon_{pmn}\varepsilon_{rmn}\Delta$$

که با استفاده از (۲۲۵-۳) خواهیم داشت:

$$\sum_q a_{rq}c_{pq}=\delta_{pr}\Delta \tag{3-244}$$

رابطه (۲۲۴-۳) را بصورت:

$$\sum_q a_{rq}\frac{\tilde{c}_{qp}}{\Delta}=\delta_{pr} \tag{3-245}$$

بازنویسی میکنیم .نظر باینکه:

$$\sum_q a_{rq}\left(a^{-1}\right)_{qp}=\delta_{pr}$$

است نتیجه بسیار مهمی که بدست میاوریم آنست که:

$$\left(a^{-1}\right)_{qp}=\frac{\tilde{c}_{qp}}{\Delta}=\frac{c_{pq}}{\Delta} \tag{3-246}$$

رابطه (۲٤٦-۳) نحوه محاسبه معکوس یک عملگر را مشخص میسازد مثلا" برای عملگر A ای که بعد از رابطه (۷۵-۳) آمده عملگر معکوس بدینگونه محاسبه میگردد:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\5&1&-1\\2&-3&-3\end{pmatrix}$$

$$c_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&-1\\-3&-3\end{vmatrix}=-6 \qquad c_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}5&-1\\2&-3\end{vmatrix}=+13$$

$$c_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}5&1\\2&-3\end{vmatrix}=-17 \qquad c_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&1\\-3&-3\end{vmatrix}=0$$

$$c_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}0&1\\2&-3\end{vmatrix}=-2 \qquad c_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}0&1\\2&-3\end{vmatrix}=+2$$

$$c_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2 \qquad c_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}0&1\\5&-1\end{vmatrix}=+5$$

$$c_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}0&1\\5&1\end{vmatrix}=-5 \quad , \quad \det A = 1(13)+1(-17)=-4$$

$$C=\begin{pmatrix}-6&13&-17\\0&-2&2\\-2&5&-5\end{pmatrix}\Rightarrow \tilde{C}=\begin{pmatrix}-6&0&-2\\13&-2&5\\-17&2&5\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}+6&0&+2\\-13&+2&-5\\+17&-2&-5\end{pmatrix}$$

شایان ذکر است که روش عملی دیگری برای محاسبه عملگر معکوس وجود دارد که آنرا بعدا" شرح میدهیم.

رابطه (۲٤٦-۳) درحل n معادله n مجهولی خطی ناهمگن ویا همگن کاربرد فراوان دارد زیرا توجه میکنیم که روابط:

$$(3-247) \qquad \begin{aligned}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=d_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=d_3\end{aligned}$$

معرف سه معادله سه مجهولی خطی است که بزبان ماتریسی این گونه بیان می شود. (مؤلفه های) بردار مجهول $\vec{x}$ چه باشد که اگر بدان عملگر معلوم A اثر نماید بردار معلوم $\vec{d}$ حاصل شود. یعنی:

$$(3-248) \qquad A\vec{x}=\vec{d}$$

حل معادله (۲٤۸-۳) بسیار آسان است کافیست طرفین را از چپ در A^{-1} ضرب کنیم:

$$(3-249) \qquad \vec{x}=A^{-1}\vec{d}=\frac{\tilde{c}}{\Delta}\vec{d}$$

برای استخراج (۲٤۹-۳) از (۲٤٦-۳) استفاده کرده ایم.

از (۲٤۹-۳) نتیجه میگیریم برای آن که از n معادله n مجهولی نا همگن (توجه کنید ناهمگن) $\vec{x}$ را بیابیم میبایستی دترمینان ضرایب یعنی Δ **مخالف صفر** باشد. از طرفی چون مؤلفه m ام بردار $\vec{x}$ با رابطه:

$$(3-250) \qquad x_m=\sum_i\frac{\tilde{c}_{mi}d_i}{\Delta}=\sum_i\frac{c_{im}d_i}{\Delta}=\frac{\sum d_i c_{im}}{\Delta}$$

داده میشود از روی مقایسه بسط ستونی دترمینان:

$$\Delta = \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} = \sum_i a_{i1} c_{i1} = \sum_i a_{im} c_{im}$$

نتیجه میگیریم که صورت رابطه (۰ ۲۵–۳) همان دترمینان Δ است که جای عناصر ستون m ام را با d_1 d_2 d_3 جایگزین کرده باشیم مثلا" مؤلفه y برابر میشود با:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad (3-251)$$

حال اگر درمسئله ای دترمینان ضرایب یعنی Δ صفر باشد n معادله n مجهولی ناهمگن حلی را نخواهد داشت مگرآنکه صورت (۲۵۱–۳) نیز صفر شود. صورت همان دترمینان Δ است که جای ستونهای اول، دوم، سوم آن (برای هرمجهول x وy یا z) مقادیر d_3 d_2 d_1 جایگزین کرده باشیم.

درحالتی که دترمینان ضرایب صفر است میبایستی حداقل یک سطر(ستون)با سطر(ستون) دیگرمتناسب باشد مثلا" اگرسطر اول با سطر سوم متناسب باشد دراینصورت ضریب d_1 نیزمی بایستی با d_3 همان ضریب تناسب راداشته باشد(تا با دو معادله متناقض برخورد نکنیم) و دترمینان صورت در(۲۵۱–۳) نیز صفر میشود. پس درواقع دومعادله وسه مجهول خواهیم داشت که در اینصورت مجهول x را پارامتر اختیار کرده ومجهولات y وz برحسب x بدست میآید وچون بازاء هر x ئی یک دسته جواب بدست میاید، دراینصورت برای n معادله n مجهولی ناهمگن اگر دترمینان ضرایب صفر باشد جواب منحصر بفردی نخواهیم داشت. صفر بودن یک دترمینان در مبحث رتبه (*rank*) یک عملگر مورد بحث قرار میگیرد که بنا به دلایلی از توضیح آن صرفنظرمیشود.

حال اگر در(۲٤۸–۳) بردار $\vec{d}$ صفر باشد یعنی n معادله n مجهولی همگن داشته باشیم بموجب (۲٤۹–۳) صورت کسر همیشه صفراست پس برای آنکه جواب غیر صفر برای

y,x,z داشته باشیم میبایستی Δ ، دترمینان ضرایب برابر **صفر باشد**.استخراج این نتیجه انگیزه اصلی بررسی و مطالعه مبحث دترمینانها گردید به رابطه (۱٤٤-۳) مراجعه نمایید.

حال برای n معادله n مجهولی همگن به نکات زیر توجه میکنیم:

الف: اگر $\vec{x}$ جواب مسئله باشد $a\vec{x}$ نیز جواب مسئله خواهد بود که a ضریب ثابتی است.

ب: چون دترمینان ضرایب صفر است حداقل یک سطر با سطر دیگری متناسب است و در نتیجه تعداد معادلات مستقل $(n\text{-}1)$ است بنابراین مجهول x را پارامتر اختیار کرده و در نتیجه y و z از روابط:

$$\begin{cases} x = x \\ y = \alpha x + \beta \\ z = \alpha' x + \beta' \end{cases}$$

بدست میایند. چون $(x=y=z=0)$ نیز جواب مسئله میباشند بنابراین $\beta=\beta'=0$ میگردند یعنی در اینحالت (در فضای سه بعدی) یک دسته جواب معین نظیر (x_0, y_0, z_0) نداریم بلکه تعداد دسته جوابها بی نهایت است و این مجموعه بی نهایت جوابها تشکیل یک خط مستقیم مار بر مبدأ مختصات را میدهد.

۱٦_۳_ حل n معادله n مجهولی ناهمگن بروش گوس و بروش گوس-جردن (مطالعه آن اختیاری است)

انگیزه معرفی این بخش آنست که به خواننده روش مرسوم محاسباتی عملگر معکوس یک عملگر را نشان بدهیم. درروش گوس از معادله اول یک مجهول را برحسب مجهولات دیگر محاسبه و درمعادلات بعدی جایگزین می کنیم. سپس از معادله دوم بدست آمده که دارای $(n\text{-}1)$ مجهول میباشد مجهول دوم را بر حسب دیگر مجهولات محاسبه کرده و در معادلات بعدی (یعنی از معادلات سوم و به بعد) جایگزین میکنیم. اگر این عمل را ادامه دهیم نهایتا" در معادله nام فقط یک مجهول باقی می ماند که جواب آن به آسانی به دست میاید سپس آنرا در معادله $(n\text{-}1)$ ام قرار میدهیم و مجهول $(n\text{-}1)$ ام بدست میاید....

شایان ذکر که در تعیین n مجهول به روش گوس به دترمینان ضرایبی میرسیم موسوم به دترمینان مثلث بالا که عناصر پایین قطر آن صفر هستند با مثال زیر روش گوس را بهتر خواهیم فهمید. مجهولات (x,y,z) را بیابید:

$$
(3-252) \qquad \begin{cases} 3x+2y+z=11 \\ 2x+3y+z=13 \\ x+y+4z=12 \end{cases}
$$

ابتدا سطرهای اول و دوم وسوم را به ترتیب بر سه ،دو و یک که ضرایب x ها هستند تقسیم میکنیم:

$$
(1) \qquad \begin{cases} x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{z}{3}=\dfrac{11}{3} \\ x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{z}{2}=\dfrac{13}{2} \\ x+y+4z=12 \end{cases}
$$

سپس از عناصرسطر دوم و سوم عناصر سطر اول را کم میکنیم .(با این عمل مجهول x در معادلات دوم و سوم حذف میشود):

$$
(2) \qquad \begin{cases} x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{z}{3}=\dfrac{11}{3} \\ 0+\dfrac{5}{6}y+\dfrac{z}{6}=\dfrac{17}{6} \\ 0+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{11}{3}z=\dfrac{25}{3} \end{cases}
$$

حال عناصر سطر دوم و سطر سوم را به ترتیب در ٦/٥و ٣ ضرب می کنیم (با این عمل ضرایب y درمعادلات دوم و سوم برابر واحد میگردد):

$$
(3) \qquad \begin{cases} x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{z}{3}=\dfrac{11}{3} \\ 0+y+\dfrac{z}{5}=\dfrac{17}{5} \\ 0+y+11z=25 \end{cases}
$$

و سپس از سطر سوم عناصر سطر دوم را کم میکنیم در نتیجه خواهیم داشت:

$$
(4) \qquad \begin{cases} x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{z}{3}=\dfrac{11}{3} \\ 0+y+\dfrac{z}{5}=\dfrac{17}{5} \\ 0+0+\dfrac{54}{5}z=\dfrac{108}{5} \end{cases}
$$

بنابراین از معادله سوم $z=2$ و از معادله دوم $y=3$ و نهایتا" از معادله اول $x=1$ میشود.

روش گوس- جردن

در روش گوس-جردن ابتدا از معادله اول یک مجهول را بر حسب مجهولات دیگر محاسبه و در معادلات بعدی جایگزین می کنیم سپس از معادله دوم بدست آمده که دارای (n-۱) مجهول است ،مجهول دوم را بر حسب دیگر مجهولات محاسبه کرده اما در اینحالت آنرا نه تنها در معادلات بعدی بلکه در تمامی معادلات منجمله در معادله اول جایگزین می کنیم و اگر این عمل را برای سطرهای بعدی تکرار نماییم n سطر به دست میاید که در همه آنها فقط یک مجهول باقی می ماند که در واقع جواب مسئله بدست میاید .بعنوان مثال باز هم به معادلات (۲۵۲-۳) برمیگردیم و این بار آنها را بروش گوس-جردن حل میکنیم .بموجب رابطه (۳) داریم:

$$
(a) \qquad \begin{cases} x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{z}{3}=\dfrac{11}{3} \\ 0+y+\dfrac{z}{5}=\dfrac{17}{5} \\ 0+y+11z=25 \end{cases}
$$

y را از معادله دوم استخراج و در معادلات **اول** و **سوم** قرار میدهیم:

$$
(b) \qquad \begin{cases} x+0+\dfrac{z}{5}=\dfrac{7}{5} \\ 0+y+\dfrac{z}{5}=\dfrac{17}{15} \\ 0+0+\dfrac{54}{5}z=\dfrac{108}{5} \end{cases}
$$

حال z را از معادله سوم استخراج و در معادلات دیگر قرار میدهیم:

$$(c)\qquad \begin{cases} x+0+\dfrac{2}{5}=\dfrac{7}{5} \\ 0+y+\dfrac{2}{5}=\dfrac{17}{15} \\ 0+0+z=2 \end{cases}$$

$$(d)\qquad \begin{cases} x+0+0 = 1 \\ 0+y+0 = 3 \\ 0+0+z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{matrix}$$

حال که روش حل n معادله n مجهولی را بروش گوس–جردن آموخته ایم روش عملی محاسبه عملگر معکوس A را شرح میدهیم .

مسئله: هرگاه از تأثیر عملگر A بر بردار $\vec{x}^k$ نتیجه $\hat{e}_k$ حاصل شود ($\hat{e}_k$ بردار یکه در راستای k ام میباشد) دراینصورت عملگر A^{-1} از قراردادن مؤلفه های بردارهای $\vec{x}^1, \vec{x}^3$، $\vec{x}^2$ بصورت ستون حاصل میشود:

$$(3-253)\qquad A\vec{x}^k = \vec{e}_k \qquad k=1,2,3$$

اگر رابطه (۳–۲۵۳) در دستگاه بردار پایه $\{\hat{e}_i\}$ نمایش دهیم (یعنی طرفین را در $\langle e_i|$ ضرب و مابین A و x^k $\quad \Sigma|e_j\rangle\langle e_j|$ قرار دهیم خواهیم داشت):

$$(3-254)\qquad A_{ij}x_j^k = \delta_{ij}$$

(x_j^k مؤلفه j ام بردار $\vec{x}^k$ در دستگاه $\{\hat{e}_i\}$ است)

از طرفی بموجب تعریف داریم:

$$AA^{-1}=1$$
$$A_{ij}A_{jk}^{-1}=\delta_{ik}$$

است پس:

$$(3-255)\qquad A_{jk}^{-1}=x_j^k$$

نمایش صریح A^{-1}

$$(3-256)\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} (\vec{x}^1)_1 & (\vec{x}^2)_1 & (\vec{x}^3)_1 \\ (\vec{x}^1)_2 & (\vec{x}^2)_2 & (\vec{x}^3)_2 \\ (\vec{x}^1)_3 & (\vec{x}^2)_3 & (\vec{x}^3)_3 \end{pmatrix}$$

برای تعیین بردار $\vec{x}^1$ از رابطه (۳–۲۵۳) که بصورت زیر در میاید استفاده میکنیم:

$$(3-257)\qquad \begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0 \end{cases}$$

یعنی بردار $\vec{d}$ فقط مؤلفه در راستای **x** دارد.

برای تعیین $\vec{x}^{۲}$ همان رابطه (۳−۲۵۷) راخواهیم داشت امابردار $\vec{d}$ فقط مؤلفه درراستای y دارد و برای تعیین $\vec{x}^{۳}$ همان رابطه(۳−۲۵۷) را خواهیم داشت که فقط طرف راست معادله سوم آن برابر یک است .

بنابراین میبایستی هر بار بروش گوس−جردن بردارهای مجهول $\vec{x}^{۱}$, $\vec{x}^{۲}$, $\vec{x}^{۳}$را بدست میاوریم .

ابتدا مثال زیرین را میاوریم :عملگر A را همان عملگر رابطه (۳−۲۵۲) در نظر میگیریم و (x,y,z) مؤلفه های بردار $\vec{x}^{۱}$ و $\vec{d}$ همان $\vec{e}_{۱}$ است یعنی $d_{۱}=۱, d_{۲}=d_{۳}=0$

$$(3-258)\qquad \begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 2x+3y+z=0 \\ x+y+4z=0 \end{cases}$$

به روش گوس−جردن داریم:

$$\begin{cases} x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{z}{3}=\dfrac{1}{3} \\ x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{z}{2}=0 \\ 0+y+4z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{z}{3}=\dfrac{1}{3} \\ 0+\dfrac{5}{6}y+\dfrac{z}{6}=-\dfrac{1}{3} \\ 0+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{11}{3}z=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{z}{3}=\dfrac{1}{3} \\ 0+y+\dfrac{z}{5}=-\dfrac{2}{5} \\ 0+y+11z=-1 \end{cases}$$

y را از رابطه دوم استخراج و در دیگر معادلات قرار میدهیم:

$$\begin{cases} x+0y+\dfrac{z}{5}=\dfrac{9}{15} \\ 0+y+\dfrac{z}{5}=-\dfrac{2}{5} \\ 0+0+\dfrac{54}{5}z=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

z از رابطه آخر بدست میاید آنرا در معادلات دوم و اول جایگزین میکنیم:

$$\begin{cases} x+0y-\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{18}=\dfrac{9}{15} \\ 0+y-\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{18}=-\dfrac{2}{5} \\ 0+0+z=-\dfrac{1}{18} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+0y+0z=\dfrac{55}{5\times 18}=+0.61 \\ 0x+y+0z=-\dfrac{7}{18}=-0.39 \\ 0x+0y+z=-\dfrac{1}{18}=-0.056 \end{cases}$$

توجه نمایید رابطه فوق بصورت عملگر جدیدی در آمده است که تمامی عناصرغیر قطری صفر و عناصر قطری آن یک می باشد یعنی رابطه فوق عملگر جدید واحد شده است .بنابراین مؤلفه های بردار $\vec{x}^1$ عبارتند از:

$$\vec{x}^1=\begin{pmatrix} \dfrac{11}{18} \\ -\dfrac{7}{18} \\ -\dfrac{1}{18} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.61 \\ -0.39 \\ -0.06 \end{pmatrix}$$

حال اگر همین عملیات را برای $\vec{d}=\hat{e}_2$ انجام دهیم بردار $\vec{x}^2$ بدست میاید :

$$\begin{cases}3x+2y+z=0\\2x+3y+z=1\\x+y+4z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+\frac{2}{3}y+\frac{z}{3}=0\\x+\frac{5}{6}y+\frac{z}{6}=\frac{1}{2}\\0+y+4z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+\frac{2}{3}y+\frac{z}{3}=0\\0+\frac{5}{6}y+\frac{z}{6}=\frac{1}{2}\\0+\frac{1}{3}y+\frac{11}{3}z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+\frac{2}{3}y+\frac{z}{3}=0\\0+y+\frac{z}{5}=\frac{6}{10}\\0+y+11z=0\end{cases}$$

y را از معادله دوم استخراج و در دیگر معادلات قرار میدهیم:

$$\begin{cases}x+0y+\frac{z}{5}=-\frac{4}{10}\\0+y+\frac{z}{5}=\frac{6}{10}\\0+y+\frac{54}{5}z=-\frac{6}{10}\end{cases}\Rightarrow z=-\frac{1}{18}$$

z ا زرابطه آخر بدست آمده است و در روابط دیگر قرار میدهیم:

$$x+0y-\frac{1}{5}\times\frac{1}{18}=-\frac{4}{10}\qquad x=-\frac{7}{8}$$

$$0+y-\frac{1}{5\times18}=\frac{6}{10}\qquad y=\frac{11}{8}$$

$$0+0+z=-\frac{1}{18}\qquad z=-\frac{1}{8}$$

$$\vec{x}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{18} \\ \frac{11}{18} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.39 \\ +0.61 \\ \ldots06 \end{pmatrix}$$

و با محاسبات مشابه بردار $\vec{x}^3$دارای مؤلفه:

$$\vec{x}^3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.06 \\ -0.06 \\ +0.28 \end{pmatrix}$$

بنابراین عملگر A^{-1} بموجب رابطه (۲۵۶–۳) برابر میشود با:

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 11 & -7 & -1 \\ -7 & 11 & -1 \\ \ldots & -1 & +5 \end{pmatrix} \qquad (3-259)$$

اگر کمی دقت در حل این سه دسته سه معادله سه مجهول که برای هر دسته بردار $\vec{d}$ کمیات م... ی اختیار مینماید شکل ضرایب مجهولات در فرم نه... گوس–جردن یکسان است بنابراین پیشنهاد می گردد که این سه دسته معادلات همز... حل شو دیعنی مؤلفه های بردار $\vec{d}$ را درسمت راست درستونهای جداگانه و کنارهم بنویسید بصورت:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z \\ a_{..}\ldots+a_{..}y+a_{23}z \\ a_{..}\ldots a_{..}y+a_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نوشته و مجهولات را بروش گوس–جردن هم زما... حا... این کاری است که در دبیرستان انجام میدادید هرچند از علت آن بی خبر بر

۱۷_۳_ نحوه محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک عملگر(مثال)

مثالی را که انتخاب می کنیم همان عملگر رابطه (۲۵۲–۳) است که بر حسب اتفاق هرمیتی (متقارن) هم میباشد:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

دترمینان مشخصه آن برابر است با:

$$\det(A - \mathbb{I}\lambda) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

برای محاسبه مقادیر λ از دترمینان فوق آسانتر است که دو برابرستون سوم را از ستون دوم کم کنیم:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -7+2\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

سپس در دترمینان جدید سطر دوم را از سطر اول کم میکنیم:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -7+2\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

و در نهایت ستون اول را به ستون دوم اضافه میکنیم:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -6+2\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$(1-\lambda)\left[(3-\lambda)(4-\lambda)+(6-2\lambda)\right] = 0$$
$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 + 6 - 2\lambda = 0$$
$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$$

$$(3-259) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 6 \end{cases}$$

بدین ترتیب مقادیر ویژه عملگر A بدست میاید.

حال بازاء هر λ یک بردار ویژه بدست می آوریم. اگر مؤلفه های بردار ویژه مربوط به $\lambda_1 = ۱$ را x,y,z بنامیم خواهیم داشت:

$$(A - 1\lambda)\vec{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-260) \qquad \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x+2y+z=0 \\ 1x+1y+3z=0 \end{cases}$$

توجه می کنیم به علت آنکه دترمینان ضرایب در (۲۶۰-۳)برابر صفر است یک سطر(یا ستون) میبایستی با سطر (یا ستون) دیگر متناسب باشد که چنین امری را در سطرهای اول و دوم مشاهده میکنیم.

بنابراین مختصه x را بعنوان پارامتر انتخاب کرده و y,z را بر حسب آن بدست میاوریم محاسبات بعهده خواننده واگذار می شود(به هر روش منجمله روش گوس ویا گوس-جردن استفاده کنید)

$$(3-261) \qquad \begin{cases} x=x \\ y=-x \Rightarrow \left|\lambda_1=1\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z=0 \end{cases}$$

دو بردار ویژه دیگر مربوط به مقادیر ویژه $\lambda_2=3$ و $\lambda_3=6$ از روابط:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

بدست می آیند که محاسبات ساده نشان میدهد که:

$$(3-262) \qquad \begin{cases} x=x \\ y=x \quad \Rightarrow \quad \left|\lambda_2=3\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ z=-2x \end{cases}$$

$$(3-263) \qquad \begin{cases} x=x \\ y=x \quad \Rightarrow \quad \left|\lambda_3=6\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ z=x \end{cases}$$

از روابط (۲۶۱-۳) الی (۲۶۳-۳) مشاهده میکنیم که بردارهای ویژه این عملگر هرمیتی بر هم عمود هستند. اگر کمی دقت کرده باشیم مشاهده کردیم که در فضای سه بعدی به علت آنکه دترمینان ضرایب صفر است بجای داشتن سه معادله مستقل دومعادله

مستقل بدست آمد و در نتیجه مجبور شدیم مختصه مجهول x را بعنوان پارامتر انتخاب کنیم و جوابهای z,y را بر حسب x بدست آوریم :

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= \alpha x \\ z &= \beta x \end{aligned} \qquad (3-264)$$

در واقع رابطه (۲٦٤-۳) معرف معادله خط مستقیم مار بر مبدأ مختصات است. به زبان دیگر امتداد ویژه داریم و نه بردار ویژه و هر برداری که بر روی امتداد فوق قرار گیرد بردارویژه میباشد و جوابهای بدست آمده در (۲٦۱-۳) الی (۲٦۳-۳) بردارهای **نرمالیزه** واقع بر روی خطوط نامبرده است.

اگر عملگر A دارای دژنرسی باشد در وهله اول چنین به نظر می آید که مثلا" بازاء $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$ دو دسته معادلات همگن یکسان بدست میاید واین توهم پیش میاید که بازاء مقادیر ویژه دژنره یک بردار ویژه بیشترنداریم ،در صورتیکه قبلا" گفته شده بود که در هنگام داشتن دژنرسی (مرتبه دو)تعداد بردارهای ویژه بیش از دو میباشد. ثابت میشود در هنگام دژنرسی حتی تعداد معادلات مستقل که برای تعیین (x,y,z) استفاده می شود کمتر از دومیباشد. یعنی درفضای سه بعدی ودرهنگام داشتن دژنرسی تعداد معادلات مستقل که بازاء $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$ حاصل می شود یک است پس مختصه های y,x بالاجبار به عنوان پارامتر انتخاب میشوند و مختصه مجهول z با رابطه:

$$(3-264) \qquad \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \alpha x + \beta y \end{cases}$$

داده میشود. رابطه (۲٦٤-۳) معادله صفحه مار بر مبدأ مختصات میباشد و هر خط مار بر مبدأ مختصات و واقع در این صفحه بردار ویژه عملگر دژنره محسوب میگردد. در این رابطه مسئله ای در بخش دترمینانها ارائه شده است.

توجه نمایید نمایش A در دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ و در دستگاه بردار پایه ای که از بردارهای ویژه اورتونرمال آن تشکیل شده بصورتهای زیرین است:

$$(3-265) \qquad A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix} \qquad (A)'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

توجه نمایید که نمایش عملگر یونیتاری U که از تأثیر آن بر $|e_i>$ ، $|\lambda_i>$ را حاصل نماید چه در دستگاه بردار پایه $\{\vec{e}_i\}$ و چه در دستگاه بردار پایه $\{\lambda_i\}$ به صورت زیر است (توجه نمایید $\{\vec{e}_i\}$ آن دستگاه بردار پایه ای است که در ابتدا A درآن نمایش داده شده است):

$$U\left|e_j\right\rangle=\left|\lambda_j\right\rangle$$

$$(3-266) \qquad \left\langle e_i\left|U\right|e_j\right\rangle\equiv U_{ij}=\left\langle e_i\left|\lambda_j\right.\right\rangle=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

توجه نمایید.

$$(3-267) \qquad \begin{cases} trA=tr(A)'=trU^{+}AU=10\\ \det A=\det(A)'=\det U^{+}AU=18\\ \det U=1\end{cases}$$

هرگاه بخواهیم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک عملگر در فضای n بعدی را حساب کنیم بعلت آنکه λ در هر یک از عناصر قطری دترمینان مشخصه ظاهر شده است و میدانیم در بسط هر دترمینان یک جمله وجود دارد که از حاصل ضرب عناصر قطری آن تشکیل شده است. بنابراین در تعیین مقادیر ویژه یک عملگر در فضای n بعدی مجبور به حل یک معادله درجه n از λ هستیم:

$$(3-268) \qquad a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+a_n=0$$

که غالبا" کار مشکلی است و بهمین دلیل بود که حتی برای فضای سه بعدی با استفاده از خواص دترمینانها دترمینان مشخصه را بصورتی درآوردیم که عناصر سطر اول (به استثنای عنصر (۱,۱)) را صفر نمودیم تا درنتیجه با حل معادله درجه دوم سه مقدار ویژه را بدست آوریم.

۱۸ـ۳ـ حل بعضی از مسائل عملگرها که کاربرد فراوان در مکانیک کوانتومی دارد

الف: اتحاد *Baker Hausdorff*

$$T_{op}(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \lambda[A,B] + \frac{\lambda^2}{2!}[A,[A,B]] + \dots \qquad (3-269)$$

اثبات اتحاد فوق در بسیاری از کتب مکانیک کوانتومی موجود است و بعنوان مسئله مطرح شده است

ب:

$$\det e^{B} = e^{trB} \qquad (3-270)$$

اثبات این مسئله نیز بعهده خواننده واگذار میشود. کاربرد آن در اثبات اینکه عملگر دوران یک عملگر یونیتاری منتظم است مشاهده میشود.

ج: اگر روابط کمیوتاتوری زیرین صادق باشد:

$$[A,B] = C \quad , \quad [A,C] = [B,C] = 0 \qquad (3-271)$$

در اینصورت:

$$e^{A} e^{B} = e^{A+B+\frac{C}{2}} = e^{B} e^{A} e^{C} \qquad (3-272)$$

برای اثبات عملگر $T(S)$ بصورت زیر نعریف میکنیم

$$T(S) = e^{SA} e^{SB}$$

$$\frac{dT}{dS} = A e^{SA} e^{SB} + e^{SA} B e^{SB}$$

$$\frac{dT}{dS} = \left[A + e^{SA} B e^{-SA} \right] e^{SA} e^{SB}$$

و بموجب اتحاد *Baker-hausdorff*

$$\frac{dT}{dS} = (A + B + SC) T$$

$$T(S) = \left[e^{S(A+B)+\frac{S^2}{2}C} \right]$$

$$T(1) \equiv e^{A} e^{B} = e^{A+B+\frac{C}{2}}$$

حال اگر [A,B]=C=0 باشد

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

می شود. از روی این رابطه به آسانی می توان نشان داد که عملگر دوران یک عملگر یونیتاری (متعامد) است از روی رابطه فوق نتیجه دیگری نیز میگیریم که اگر $A+B$ را M بنامیم:

$$[M,C]=0$$

$$e^A e^B = e^{M+\frac{C}{2}} = e^M e^{\frac{C}{2}} = e^{A+B} e^{\frac{C}{2}}$$

$$e^A e^B = e^{B+A-\frac{C}{2}+\frac{C}{2}} e^{\frac{C}{2}} = e^{B+A-\frac{C}{2}} e^C$$

بنابراین به نتیجه نهایی:

$$e^A e^B = e^B e^A e^C$$

میرسیم توجه کنید که:

$$[B,A]=-C$$

است.

د:هرگاه عملگر A دژنرسی نداشته باشد بردارهای ویژه آن بطور خطی از یکدیگر مستقل هستند

هرگاه $\vec{x}^1$ $\vec{x}^2$ .... $\vec{x}^n$، n بردار ویژه وابسته به هر مقدار ویژه باشند شرط استقلال آنها بموجب آنچه که گفته شده آن است که رابطه نظیر:

$$\sum_i k_i \vec{x}^i = 0 \qquad (3-273)$$

یافت نشود مگر آنکه تمامی k_i ها صفر باشند.

برای اثبات رابطه (۳-۲۷۳) به ترتیب عملگرهای A,A^2......A^{n-1} اثر میدهیم چون:

$$A^m \vec{x}^i = (\lambda_i)^m \vec{x}^i$$

است بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} k_1\vec{x}^1 + k_2\vec{x}^2 + \ldots\ldots\ldots + k_n\vec{x}^n = 0 \\ \lambda_1 k_1\vec{x}^1 + \lambda_2 k_2\vec{x}^2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n k_n\vec{x}^n = 0 \\ \\ \\ (\lambda_1)^{n-1} k_1\vec{x}^1 + (\lambda_2)^{n-1} k_2\vec{x}^2 + \ldots + (\lambda_n)^{n-1} k_n\vec{x}^n = 0 \end{cases} \qquad (3-274)$$

هرگاه بخواهیم استدلال دقیقتر نماییم مؤلفه jام رابطه (۲۷۴-۳) را بدست میاوریم. (ولی با استدلال ضعیفتر میتوان چنین کاری نکرد).

حال n معادله همگن و n مجهول $k_1 x^1{}_j$, $k_2 x^2{}_j$ .... $k_n x^n{}_j$ داریم شرط داشتن جواب غیر صفر آن است که دترمینان ضرایب برابر صفر شود اما دترمینان ضرایب همان دترمینان واندرموند می شود که در بخش مسائل خواسته شده است که اثبات نمایید همیشه مخالف صفر است یعنی:

$$(3-275)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

بنابراین میبایستی داشته باشیم:

$$k_1\vec{x}^1 = 0 \qquad k_2\vec{x}^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots k_n\vec{x}^n = 0$$

و چون بردارهای ویژه صفر نیستند پس خواهیم داشت:

$$(3-276)\qquad k_1 = k_2 = \ldots\ldots = k_n = 0$$

در نتیجه بردارهای ویژه یک عملگر غیر دژنره بطور خطی مستقل از هم هستند بنابراین میتوان از آنها بعنوان بردار پایه در فضای n بعدی استفاده کنیم.

۵: قضیه عدم یقین هایزنبرگ (این قضیه ماتریسی را در کتب مکانیک کوانتومی شرح میدهند)

۳-۱۹ـ قوانین تبدیل عملگرها از یک دستگاه بردار پایه غیر متعامد منحنی الخط به دستگاه بردار پایه منحنی الخط دیگر.

بعنوان حسن ختام مبحث عملگرها ،موضوعی را مطرح میکنیم که در کتب نسبیت عام بدون شرح انگیزه ای تانسورها را با آن تعریف میکنند.

اگر به قانون اهم نظر بیافکنیم:

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sigma(\vec{x})\vec{E}(\vec{x})$$

$\sigma(\vec{x})$ در حالت عمومی یک عملگر تابعی از $\vec{x}$ می توانند باشد. دستگاه بردار پایه غیر متعامد و وارونه آن، در مختصات منحنی الخط با روابط:

$$\vec{\varepsilon}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i} \qquad \vec{\varepsilon}^i = \vec{\nabla} q^i$$

داده میشود.

در بخش ۱۷-۲ قوانین تبدیل مؤلفه های کوواریانتی و کنتراواریانتی یک بردار در دو دستگاه مختصات منحنی الخط داده شده است حال در این بخش قوانین تبدیلات مؤلفه های عملگری را در دو دستگاه مختصات منحنی الخط بدست میاوریم.

هر گاه $\vec{\varepsilon}'_i, \vec{\varepsilon}'^i$ بردارهای پایه دستگاه مختصات منحنی الخط دوم باشد در اینصورت نمایش عملگر T بصورت:

$$\left\langle \varepsilon'^i \middle| T(\vec{x}) \middle| \varepsilon'_j \right\rangle = \left\langle \varepsilon'^i \middle| \varepsilon_k \right\rangle \left\langle \varepsilon^k \middle| T(x) \middle| \varepsilon_l \right\rangle \left\langle \varepsilon^l \middle| \varepsilon'_j \right\rangle \tag{3-277}$$

میباشد نظر به اینکه:

$$\left\langle \varepsilon'^i \middle| \vec{\varepsilon}_k \right\rangle \equiv \vec{\varepsilon}'^i \cdot \vec{\varepsilon}_k = \vec{\nabla} q'^i \cdot \vec{\varepsilon}_k = \frac{\partial q'^i}{\partial q^l} \vec{\varepsilon}^l \cdot \vec{\varepsilon}_k$$

$$= \frac{\partial q'^i}{\partial q^k}$$

$$\left\langle \varepsilon^l \middle| \varepsilon'_j \right\rangle \equiv \vec{\varepsilon}^l \cdot \vec{\varepsilon}'_j = \nabla q^l \cdot \vec{\varepsilon}'_j = \frac{\partial q^l}{\partial q'^m} \vec{\varepsilon}'^m \cdot \vec{\varepsilon}_j$$

$$\equiv \frac{\partial q^l}{\partial q'^j}$$

در نتیجه قانون تبدیل رابطه (۲۷۷-۳) بصورت:

$$\left\langle \varepsilon'^i \middle| T \middle| \varepsilon'_j \right\rangle \equiv T'^i_j(\vec{x}) = \frac{\partial q'^i}{\partial q^k} T^k_l(\vec{x}) \frac{\partial q^l}{\partial q'^j} \tag{3-278}$$

در میاید .قانون تبدیل همان عملگر T که بصورت زیر نمایش داده باشیم:

$$\left\langle \varepsilon'_i \middle| T \middle| \varepsilon'_j \right\rangle = \left\langle \varepsilon'_i \middle| \varepsilon^k \right\rangle \left\langle \varepsilon_k \middle| T \middle| \varepsilon_l \right\rangle \left\langle \varepsilon^l \middle| \varepsilon'_j \right\rangle \tag{3-279}$$

یعنی دو اندیس آن در پایین (کوواریانتی)باشد:

$$\vec{\varepsilon}'_i \cdot \vec{\varepsilon}^k = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q'^i} \cdot \nabla q^k = \sum_m \frac{\partial x_m}{\partial q'^i} \cdot \frac{\partial q^k}{\partial x_m} = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i}$$

$$\vec{\varepsilon}^{l}\cdot\vec{\varepsilon}'_{j}=\frac{\partial q^{l}}{\partial q'^{j}}$$

$$T'_{ij}(\vec{x})=\frac{\partial q^{k}}{\partial q'^{i}}T_{kl}(\vec{x})\frac{\partial q^{l}}{\partial q'^{j}} \tag{3-280}$$

در می آید. قانون تبدیل دیگر برای عملگر T که مؤلفه های آن بصورت T^{ij} داده شده است وجود دارد که استخراج آنرا بعهده خواننده واگذار میکنیم و فقط به ذکر نتیجه اکتفا میکنیم :

$$T'^{ij}(\vec{x})=\frac{\partial q'^{i}}{\partial q^{k}}T^{kl}(\vec{x})\frac{\partial q'^{j}}{\partial q^{l}} \tag{3-281}$$

توجه نمایید در روابط تبدیل چنانچه درطرف چپ اندیسهای (i,j) در بالا قرار گرفته باشند در طرف راست هم اندیسهای T در بالا قرار میگیرند و مشتق مختصه q' نسبت به q خواهیم داشت.....

قوانین تبدیل (۲۷۸-۳) الی (۲۸۱-۳) بمراتب کلی تر ازقوانین تبدیل مؤلفه های یک عملگردر دو دستگاه مختصات کارتزین یعنی روابط (۱۱۸-۳) و(۱۲۷-۳) میباشد کافیست دقت کنیم که قوانین تبدیل در دو دستگاه مختصات کارتزین که یکی دوران یافته از دیگری باشد :

$$x'_{i}=\sum\alpha_{ij}x_{j}\quad,\quad x_{i}=\sum\tilde{\alpha}_{ij}x'_{j},x^{i}\equiv x_{i},x'^{i}\equiv x'_{i} \tag{3-282}$$

بنابراین مثلا" رابطه (۲۸۰-۳) بصورت:

$$T'_{ij}=\frac{\partial x_{k}}{\partial x'_{i}}T_{kl}\frac{\partial x_{l}}{\partial x'_{j}}$$

$$T'_{ij}=\tilde{\alpha}_{ki}T_{kl}\tilde{\alpha}_{lj}$$

$$\tilde{\alpha}_{lj}\equiv A_{lj}$$

$$T'_{ij}=A^{+}_{ik}T_{kl}A_{lj} \tag{3-283}$$

در میاید. هرگاه دو دستگاه مختصات غیر متعامد باشد (یعنی دو دستگاه غیر متعامد راست خط داشته باشیم):

$$\vec{x}=q^{i}\vec{\varepsilon}_{i}=q_{i}\vec{\varepsilon}^{i}=q'^{i}\,\vec{\varepsilon}'_{i}=q'_{i}\vec{\varepsilon}'^{i}$$

که ε_{j} ها تابعی از مختصات نقطه اثرشان نیستند دراینصورت:

$$q^{i}=q'^{j}\vec{\varepsilon}^{i}\cdot\vec{\varepsilon}'_{j}=q'^{j}\beta^{j}_{i}$$

که رابطه آخر را از روابط(۷۸–۱) الی (۷۹–۱) استخراج کرده ایم .

بنابراین:

$$\frac{\partial q^k}{\partial q'^i} = \beta_i^k \qquad (3-284)$$

میگردد که با کمک رابطه (۸۰–۱) به نتیجه(۱۲۷–۳) میرسیم عملیات به عهده خواننده واگذار میشود.

حال در کتب نسبیت عام تانسورها را بر حسب قوانین تبدیلشان تعریف میکنند تانسور مرتبه اول کمیاتی هستند که قوانین تبدیلشان با روابط(۲۵۱–۳) و(۲۵۳–۳) داده شوندو تانسورهای مرتبه دوم کمیاتی هستند که قوانین تبدیلشان باروابط(۲۷۸–۳) الی (۲۸۱–۳) داده می شوند وبا الهام از این روابط است که تانسوربا مرتبه های بالاتر از دو نظیر تانسور مرتبه سوم با قوانین تبدیل:

$$T_{ij}^k = \frac{\partial q'^k}{\partial q^l} T_{mn}^l \frac{\partial q^m}{\partial q'^i} \frac{\partial q^n}{\partial q'^j} \qquad (3-285)$$

تعریف میشوند .حال بگویید ضرایب کریستوفل تانسور مرتبه سوم است یا نه (چرا نه؟) به رابطه (۲۵۷–۳) مراجعه نمایید.

آیا علامت لوی سویتا تانسور مرتبه سوم است یا خیر؟ با کمی دقت در میابیم که:

$$\varepsilon'_{ijk} = \frac{\partial q^l}{\partial q'^i} \varepsilon_{lmn} \frac{\partial q^m}{\partial q'^j} \frac{\partial q^n}{\partial q'^k}$$

(به نحوه قرار گرفتن اندیسها و نحوه قرار گرفتن q ها و q' ها در صورت و مخرج توجه نمایید)

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ijk} &= \varepsilon_{lmn} \alpha_{li} \alpha_{mj} \alpha_{nk} \\ &= \varepsilon_{ijk} \Delta \end{aligned}$$

بنابراین اگر α_{li} با روابط(۲۸۲–۳) داده شود $\Delta=1$ در نتیجه:

$$\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$$

یک تانسور مرتبه سوم (و ایزوتروپیک یعنی شکل تانسور تغییر نمیکند) میباشد .

مسایل ریاضی فیزیک ۱

حل مسایل از اهم واجبات برای درک و فهم این درس است

فصل اول

- آنالیز برداری

۱–اتحادهای زیرین را ثابت کنید.

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{B}\left[\vec{A}.\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\right]-\vec{A}\left[\vec{B}.\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\right]$$

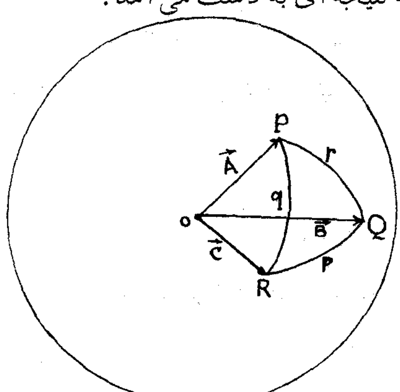
$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{C})=(\vec{B}.\vec{C})\,A^2-(\vec{A}.\vec{C})(\vec{A}.\vec{B})$$

۲–مثلث کروی PQR مثلثی است که از تقاطع سه صفحه مار بر مرکز کره با سطح کره حاصل میشود (مطابق شکل). هرگاه شعاع کره واحد باشد؛ضلع PR معرف زاویه POR میباشد و آن را با q نمایش می دهیم و زاویه مقابل PR را با Q نمایش میدهیم که درواقع زاویه صفحات OPQ و ORQ است.

الف) در اتحاد اول مسئله یک { $A \Rightarrow C$, $D \Rightarrow C$ } قرار دهید و با استفاده از نتایج به دست آمده ثابت کنید که:

$$\frac{\sin P}{\sin p}=\frac{\sin Q}{\sin q}=\frac{\sin R}{\sin r}$$

اگر مثلث مسطحه بود چه نتیجه ای به دست می آمد.



۳–از اتحاد دوم مسئله یک استفاده کرده و نشان دهید:

$$\cos p=\cos q\cos r+\sin q\sin r\cos P$$

۴–هرگاه زاویه بین بردار یکه $\vec{e}'_1$ با بردارهای یکـه $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_3$ برابـر α و β و γ باشد ،نشان دهید که:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

۵–هرگاه بردارهای مکانی $\vec{x}$, $\vec{x}'$ با محور oz به ترتیب زوایای θ, θ' و تصاویر آنها در صفحهٔ xoy با محور ox به ترتیب زوایای φ , φ' بسازند نشان دهید که رابطهٔ بین γ زاویهٔ بین x, x' به صورت زیر است:

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$$

حال اگر انرژی پتانسیل بین ممانهای دوقطبی مغناطیسی با رابطهٔ:

$$V = -\frac{\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2}{r^3} + \frac{3(\vec{\mu}_1 . \vec{r})(\vec{\mu}_2 . \vec{r})}{r^5}$$

داده شود ،نشان دهید که رابطهٔ فوق معادل:

$$V = \frac{\mu_1 \mu_2}{r^3}\left(2\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi\right)$$

می باشد. φ زاویهٔ آزیموتی $\vec{\mu}_2$ نسبت به صفحهٔ $(\vec{\mu}_1\text{-}\vec{r})$ است.

۶–اتحاد زیر را که در آن $\hat{n}$ بردار یکه و $\vec{a}$ بردار دلخواه میباشد را حساب کنید.

$$\vec{a} = (\hat{n} . \vec{a})\hat{n} + (\hat{n} \times \vec{a}) \times \hat{n}$$

۷–با استفاده از ضرائب *Levi Cevita* ثابت کنید:

$$\left[\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})\right]\left[\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})\right] = \begin{vmatrix} \vec{A}.\vec{a} & \vec{A}.\vec{b} & \vec{A}.\vec{c} \\ \vec{B}.\vec{a} & \vec{B}.\vec{b} & \vec{B}.\vec{c} \\ \vec{C}.\vec{a} & \vec{C}.\vec{b} & \vec{C}.\vec{c} \end{vmatrix}$$

در نتیجه هرگاه طول سه بردار و زاویه بین آنها داده شده باشد، از رابطهٔ فوق کمیت زیر را میتوان محاسبه کرد.

$$\left[\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})\right]^2$$

۸–معادلهٔ بردار شتاب با رابطهٔ:

$$\vec{a}(t) = \frac{v^2(t)}{R}\hat{n} + \frac{dv}{dt}\hat{t}$$

داده میشود که درآن v سرعت ذره و R شعاع انحنای منحنی حرکت ذره درلحظهٔ t میباشد. (هرگاه پارامتر t را زمان درنظر نگیریم میبایستی بجای نوشتن $\vec{a}$، $d^2\vec{r}/dt^2$ و غیره بنویسیم.) از رابطهٔ فوق مقدار R را در نقطهٔ دلخواهی بدست آورید.

هرگاه معادلهٔ منحنی برحسب $x=x$، $y=y(x)$، $z=0$ داده شود، R را بدست آورید.

– تعیین معادله منحنی و dl واقع بر آن

۹– دو خط مستقیم (A) و (B) که یکی از نقطهٔ $\vec{\alpha}$ گذشته و به موازات بردار یکهٔ $\hat{l}$ و دیگری از نقطهٔ $\vec{\beta}$ گذشته و به موازات بردار یکهٔ $\hat{n}$ است، در دست است:

الف –معادلهٔ دو خط را بر حسب پارامتر طول منحنی بنویسید.

ب– مختصات نقطه ای را بر روی خط A بیابید که از آن بتوان عمود مشترک بر دو خط را رسم نمود.

۱۰–بر منحنی بمعادله:

$$\begin{cases} x = x \\ y = \cosh x \\ z = 0 \end{cases}$$

مطابق شکل نخی را به طور کشیده چسبانیده ایم. حال از نقطهٔ A نخ را به طور کشیده باز می کنیم، معادلهٔ منحنی حاصل از حرکت نقطهٔ A را تعیین کنید.

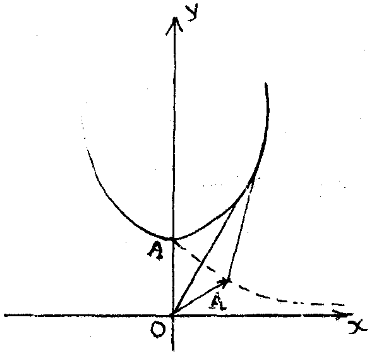
$$\vec{x}_A = \vec{x} - l\,\hat{n}$$

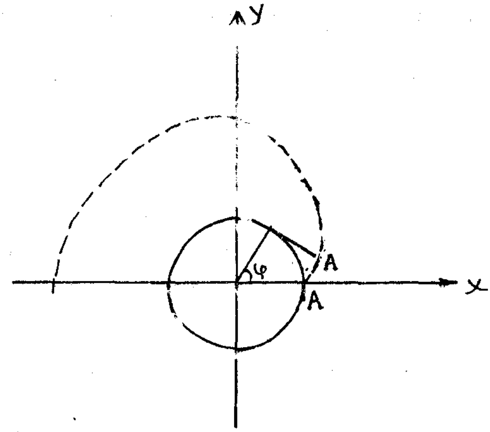
$\vec{x}$ مختصات نقطهٔ تماس.

l طول منحنی نخ از نقطهٔ تماس تا نقطهٔ A.

$\hat{n}$ بردار یکه در جهت از A به نقطهٔ تماس.

۱۱– طفل بازیگوشی به یک سر نخی که بدور قرقره ثابتی پیچیده شده است، مدادی متصل و از نقطهٔ A آنرا به طور کشیده باز می کند. معادلهٔ منحنی که نوک مداد در صفحهٔ xoy رسم میکند، تعیین کنید.

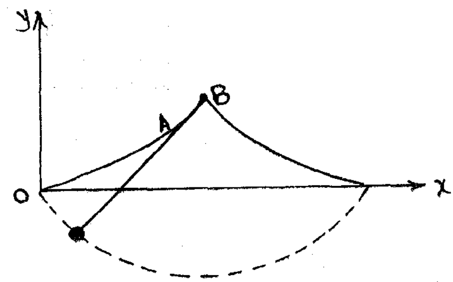




۱۲–معادلهٔ منحنی حاصل از حرکت نقطهٔ انتهایی نخ کشیده ای که حول یک منحنی پیچیده شده است را بنویسید. پارامتر این منحنی جدید را مشخص کنید. اگر l پارامتر معادلهٔ منحنی باشد، ثابت کنید مماس بر این منحنی بر مماس منحنی اصلی عمود است.

۱۳–قطعه چوبی را بصورت منحنی سیکلوئید به معادلهٔ:

$$\begin{cases} x = R(\varphi + \sin\varphi) \\ y = R(1 - \cos\varphi) \\ z = 0 \end{cases}$$



تراش داده و از نقطهٔ B به آن آونگی را متصل نموده ایم بطوری که هنگامی که وزنه را در نقطهٔ O قرار دهیم، نخ بطور کشیده بر سیکلوئید تکیه دارد.

الف–طول قوس OA بر روی سیکلوئید را محاسبه کنید.

ب– بردار یکهٔ مماس در نقطهٔ A را معلوم کنید.

ج–اگر آونگ را رها کنیم معادلهٔ منحنیی که وزنه آونگ طی می کند را تعیین کنید.

۱۴–منحنی از تقاطع دو سطح به معادلات $f(\vec{x})=C_1$ و $g(\vec{x})=C_2$ حاصل شده است، بردار $d\vec{x}$ واقع بر این منحنی را محاسبه کنید.

– تعیین معادله سطح و $d\vec{a}$ واقع بر آن

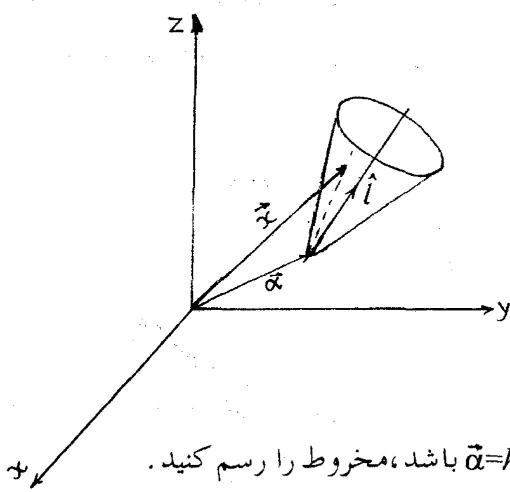
۱۵–هرگاه $\vec{a}$ بردار ثابتی باشد، نشان دهید که دو رابطه:

$$\vec{x}.(\vec{x}-\vec{a})=0 \quad , \quad \vec{a}.(\vec{x}-\vec{a})=0$$

معرف معادلات صفحه و کره هستند.

۱۶–معادلهٔ صفحه ای را که از نقاط α,β,γ می گذرد، حساب کنید و $d\vec{a}$ واقع بر این سطح را هنگامی که x, y پارامتر باشند، حساب کنید.

۱۷– الف– معادلهٔ سطح مخروطی که امتداد محور تقارن آن در جهت بردار یکه $\hat{l}$ و زاویهٔ یال آن با محور تقارن، θ و رأس آن از نقطهٔ α می گذرد، بنویسید.



ب– هنگامیکه $\hat{l}=-\hat{k}$ و $\vec{\alpha}=h\hat{k}$ باشد، مخروط را رسم کنید.

ج–$d\vec{a}$ واقع بر سطح مخروط حاصل از قسمت (ب) را بدست آورید و مساحت سطح جانبی آن بخش از مخروط که بالای صفحهٔ xoy قرار داردرا حساب کنید.

د–از روی رابطه $\oint d\vec{a}=0$ جواب بدست آمده در بخش(ج) را آزمایش کنید.

۱۸–معادلهٔ فضا با پارامترهای زیر داده می شود.

$$x = c\cosh u \sin v \cos\varphi$$

$$y = c\cosh u \sin v \sin\varphi$$

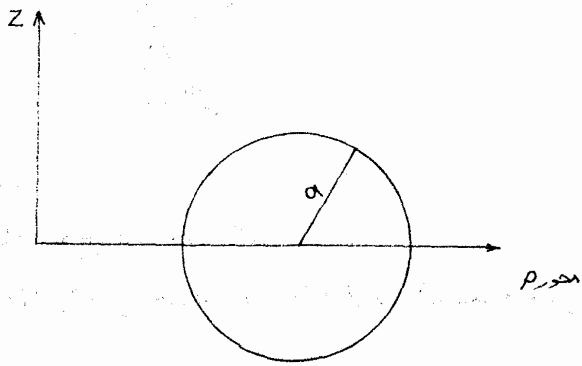
$$z = c\sinh u \cos v$$

الف–هرگاه دررابطهٔ فوق $u=u_0$ اختیار کنیم ،مختصات فوق معرف چه سطحی است ؟

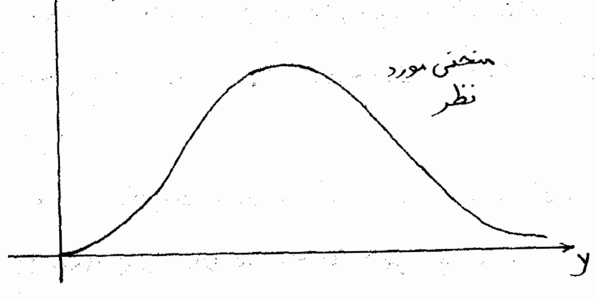
ب–$d\vec{a}$ واقع بر این سطح را حساب کنید.

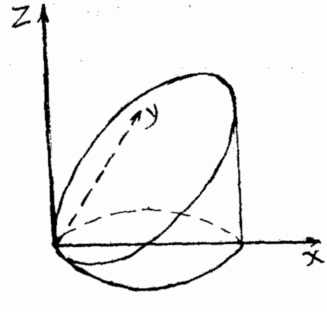
ج–المان حجم بر حسب پارامترهای فوق را حساب کنید.

۱۹–هرگاه تیوپ لاستیک کامیونی را پر باد کنیم،فصل مشترک آن با صفحهٔ مار بر محور z دایره ای به شعاع a می شود. معادلهٔ سطح تیوپ را در مختصات کارتزین به دست آورده و از روی آن مساحت تیوپ را محاسبه کنید. نام علمی سطح تیوپ *toroid* می باشد.



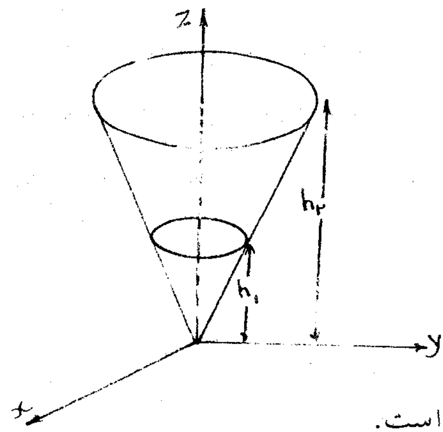
۲۰–حلبی سازی مایل است بر روی صفحه حلبی تختی آنچنان منحنیی رسم نماید که اگر با قیچی برش دهد و سپس حلبی را به صورت استوانه ای به شعاع R خم نماید، سطح مقطع برش به صورت فصل مشترک استوانهٔ قائم با صفحه ای که با قائم زاویه ٤٥ درجه میسازد، درآید .چنین برشهایی برای ایجاد زانو مناسب است. معادلهٔ چنین منحنی مسطحی را معین کنید.





۲–مخروط ناقصی (مطابق شکل)با معادلهٔ:

$$x' = r' \sin\theta_0 \cos\varphi'$$
$$y' = r' \sin\theta_0 \sin\varphi'$$
$$z' = r' \cos\theta_0$$



در دست است.

الف–پارامترهای سطح را مشخص کنید.

ب–هرگاه φ' مقدار ثابتی اختیار کند رابطهٔفوق معرف یک منحنی است آنرامشخص کنید.

ج–هرگاه r' مقدار ثابتی اختیار نماید،منحنی حاصل را مشخص نمائید.

د–از روی شکل هندسی $d\vec{x}'_{r'}$ و $d\vec{x}'_{\varphi'}$ رامشخص کنید و $d\vec{a}'$ رابدست آورید.(البته میتوانستیم از رابطهٔ:

$$\left(\frac{\partial\vec{x}'}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}'}{\partial v}\right)dudv$$

$d\vec{a}'$ را بدست آوریم که مسئله نخواسته است.)

ه–محدوده تغییرات پارامترهابرحسب $h_۱$ و $h_۲$ تعین کنیدوهرگاه توزیع باریکنواخت سطحی با دانسیتهٔ $\sigma(x)=\sigma_0$ سطح مخروط فوق را پوشانیده باشد ،کل بار Q چقدر میشود؟

ز–میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات حساب کنید.

– دستگاه بردار پایه غیر متعامد (فصل اول)

۲۲–ثابت کنید :

$$g_{ij}a^j = a_i \qquad , \qquad g^{ij}a_j = a^i$$

۲۳–کمیتهای زیر را در دستگاه غیر متعامد $\{\varepsilon_i\}$ حساب کنید.

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) \qquad , \qquad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$$

۲۴–دو دستگاه بردار پایهٔ $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ و $\{\vec{\varepsilon}'_i\}$ در دست است هرگاه $\vec{\varepsilon}'^i.\vec{\varepsilon}_j=\alpha^i_j$ و $\vec{\varepsilon}^i.\vec{\varepsilon}'_j=\beta^i_j$ باشد. نشان دهید:

الف– $\alpha_k^i\ \beta_j^k=\delta_j^i$.

ب– هرگاه a_i و a'_i مؤلفه های کوواریانتی بردار $\vec{a}$ در دو دستگاه فوق باشند، a'_i را بر حسب a_i بدست آورید.

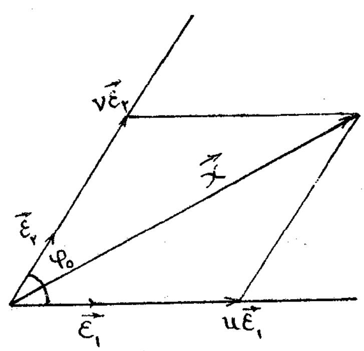
۲۵–دستگاه بردار پایه دو بعدی $\vec{\varepsilon}_2$ و $\vec{\varepsilon}_1$ را در نظر بگیرید. (مطابق شکل)

الف–نشان دهید که: $\vec{x}=u\vec{\varepsilon}_1+v\vec{\varepsilon}_2$

ب–المان سطح $d\vec{a}$ راچه از روی شکل وچه ازروی فرمول کلی واقع برصفحهٔ ($\vec{\varepsilon}_2$ و $\vec{\varepsilon}_1$) محاسبه نمایید $|\vec{\varepsilon}_1|=|\vec{\varepsilon}_2|=1$ حال انتگرال زیر را محاسبه کنید.

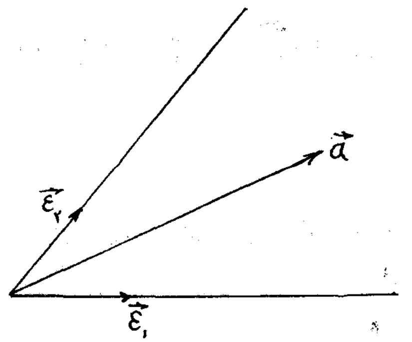
$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(u^2+v^2+2uv\cos\varphi_0\right)}\,du\,dv$$

جواب: $(\varphi_0 / 2\sin\varphi_0)$



۲۶–در یک فضای دو بعدی که بوسیلهٔ بردار پایه غیر متعامد اما به طول واحد $\vec{\varepsilon}_i$ نمایش داده شده است. بردار $\vec{a}$ مطابق شکل زیر دراین صفحه قرار دارد از روی تعریف

مؤلفه های کوواریانت و کنتراواریانت یک بردار، آنها را بر روی شکل زیر (و نه در دستگاه وارون) نشان دهید.



۲۷–حاصلضرب مخلط $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$ را در دستگاه بردار پایهٔ غیر متعامد $\{\vec{\varepsilon}^i\}$ و بر حسب مؤلفه های کوواریانتی آنها بنویسید. نتیجهٔ بدست آمده را بصورت دترمینانی نمایش دهید. حال ثابت کنید که اگر g_{ij} متریک این فضا باشد:

$$\det g = [vol]^2 = \left[(\vec{\varepsilon}_1\times\vec{\varepsilon}_2).\vec{\varepsilon}_3\right]^2$$

۲۸–معادلهٔ صفحهٔ مار بر نقطهٔ $\vec{a}$ و عمود بر امتداد بردار یکه $\hat{l}$ با رابطهٔ $\hat{l}.(\vec{x}-\vec{a})=0$ داده میشود. حال معادلهٔ صفحه را در دستگاه غیر متعامد $\vec{\varepsilon}_i$ و ماربرنقاط $\vec{a}=n_۱\vec{\varepsilon}_۱$ ، $\vec{b}=n_۲\vec{\varepsilon}_۲$، $\vec{c}=n_۳\vec{\varepsilon}_۳$ بدست آورید و نشان دهیدامتدادبردار $\hat{l}$ در دستگاه وارونه با l,k,h داده میشود که نسبت بین آنها:

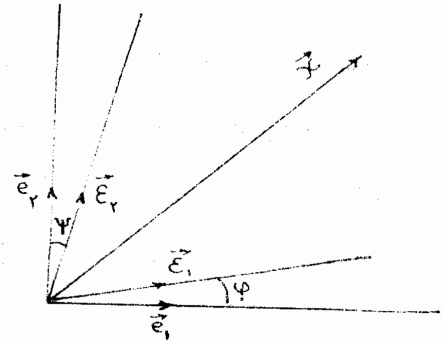
$$h:k:l = \frac{1}{n_1}:\frac{1}{n_2}:\frac{1}{n_3}$$

میباشد. این مسئله در درس حالت جامد کاربرد فراوان دارد.

۲۹–هرگاه $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ و $\{\vec{e}_i\}$ دو دستگاه بردارپایه غیر متعامدو متعامد اما هردونرمالیزه باشند و محور سومشان بر هم منطبق باشد:

$$\vec{x} = x^j\vec{e}_j = q^j\vec{\varepsilon}_j \qquad , \qquad x^j = x_j$$

ضرائب $\beta_j{}^i$ را در $q^i = \beta_j{}^i x^j$ بر حسب زوایای ψ و φ حساب کنید.

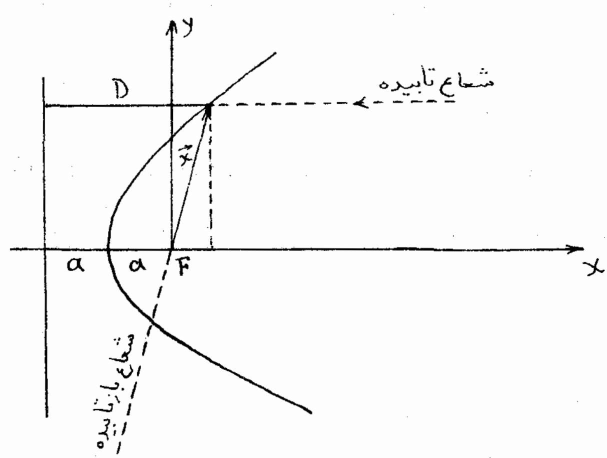


-گرادیان یک کمیت اسکالر

۳۰-در دبیرستان آموخته ایم که در آینه های مقعر کروی ،نور موازی با محور اصلی در نقطه ای بنام کانون جمع می شوند. اما اضافه می شود که آینه های مقعر سهموی مناسبتر هستند و به همین دلیل آنتنهای بشقابی به شکل سهموی درست می کنند. طبق تعریف سهمی مکان هندسی نقاطی است که مطابق شکل $|\vec{x}|=D$ است.

الف- معادلهٔ سهمی را در مختصات کارتزین و در دستگاه شکل زیر به دست آورید.

ب- ثابت کنید شعاع موازی با محور ox از کانون سهمی عبور می کند.



۳۱-ثابت کنید هرگاه $U(\vec{x},\vec{x}')=U(|\vec{x}-\vec{x}'|)$ باشد

$$\vec{\nabla} U = -\vec{\nabla}' U$$

از رابطهٔ فوق نتیجه بگیرید که انرژی پتانسیل وابسته به نیروی داخلی فقط میبایستی تابعی از فواصل نسبی ذرات باشد تا شرط $f_{ji} = -f_{ij}$ برقرار شود.

$$\vec{f}_{ji} = -\vec{\nabla}_i U_{ij}\left(\left|\vec{x}_i - \vec{x}_j\right|\right) \quad , \quad \vec{f}_{ij} = -\vec{\nabla}_j U_{ij}\left(\left|\vec{x}_i - \vec{x}_j\right|\right)$$

۳۲–برای تابع اسکالر $f(\vec{x})$ نشان دادیم که:

$$df(\vec{x}) = d\vec{x} \,.\, \vec{\nabla} f(\vec{x})$$

حال اگر $\vec{F}(\vec{x})$ یک میدان برداری باشد، نشان دهید که:

$$d\vec{F}(\vec{x}) = (d\vec{x} \,.\, \vec{\nabla})\vec{F}(\vec{x})$$

معنای پرانتز آن است که ابتدا عملیات جبری درون پرانتز انجام شود و سپس نتیجه را بر $\vec{F}(\vec{x})$ اثر داد.

۳۳–هرگاه میدان برداری تابعی از $\vec{x}$ و t باشد و $\vec{x}$ را بر روی منحنیی به معادلهٔ $\vec{x}=\vec{x}(t)$ انتخاب کنیم، مقدار زیر را بر روی منحنی مذبور از نظر هندسی تعبیر کنیدو سپس آن را محاسبه کنید.

$$\frac{d\vec{F}(\vec{x},t)}{dt}$$

۳۴–نشان داده می شود که شرط تعادل در یک جرم منفرد (غیر چرخان) نظیر یک ستاره با رابطهٔ:

$$\vec{\nabla} P(\vec{x}) + \rho(\vec{x})\vec{\nabla} F(\vec{x}) = 0$$

داده می شود که $P(\vec{x})$ فشار کل، $\rho(\vec{x})$ دانسیته و $\Phi(\vec{x})$ پتانسیل ثقل در نقطهٔ $\vec{x}$ است. ثابت کنید در یک نقطهٔ دلخواه عمودهای بر سطوح با فشار ثابت و پتانسیل ثقل ثابت موازی هستند.

۳۵–سطح S با معادلهٔ:

$$f(\vec{x}) \equiv |\vec{x}| + \left|\vec{x} - \vec{l}\right| = 2a$$

داده شده است. این معادلهٔ معرف چه سطحی می باشد؟ ($\vec{l}$ برداریست ثابت و نقطهٔ اترآن واقع بر مبدأ).

الف– $grad\, f(\vec{x})$ را در یک نقطه واقع بر سطح حساب کنید.

ب–ثابت کنید زوایایی که بردارهای $\vec{x}$ و $(\vec{x}-\vec{l})$ با $grad\, f$ میسازند مساوی هستند.

ج–شکل سطح را رسم کنید.

۳۶–بردار پتانسیل مغناطیسی حاصل از یک جریان خطی با رابطهٔ:

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{d\vec{x}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

داده شده است(بپذیرید). نشان دهید که $A(\vec{x})$ برابر است با:

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{\nabla}\int\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\times d\vec{a}'$$

هرگاه $|x|>>|x'|$ و $\vec{\mu}=I\int d\vec{a}$ بنامیم A برابر می شود با:

$$\vec{A}(\vec{x})\approx\frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{\mu}\times\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

۳۷–ثابت کنید:

$$\left(\vec{\mu}.\vec{\nabla}\right)\left(\vec{\mu}'.\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}|}\right)=\frac{-\vec{\mu}.\vec{\mu}'}{|\vec{x}|^3}+\frac{3(\vec{\mu}.\vec{x})(\vec{\mu}'.\vec{x})}{|\vec{x}|^5}$$

–دیورژانس و کرل یک کمیت برداری

۳۸– هرگاه $\vec{v}=w\times\vec{x}$ باشد آیا $\vec{v}$ معرف یک میدان برداری است؟

$$\vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{x},t)\qquad,\qquad\vec{\nabla}.\vec{v}(\vec{x},t)$$

را محاسبه نمائید (w تابعی از t است). v معرف چه کمیت فیزیکی است؟

۳۹–نشان دهید هرگاه $curl\,\vec{F}(\vec{x})\neq0$ باشد اما تابع اسکالری مانند $G(\vec{x})$ یافت شود که $curl[G(x)\vec{F}(x)]=0$ باشد، در این صورت $\vec{F}.(curl\,\vec{F})=0$ است.

۴۰–میدان برداری $\vec{F}(\vec{x})$ با رابطهٔ زیر داده شده است:

$$\vec{F}(\vec{x})=F_x(x,y)\vec{i}+F_y(x,y)\vec{j}$$

$F_i(x,y)$ توابع دلخواهی می باشند.

الف– میدان برداری F را در نقاط C,B,A که مختصات آنها به ترتیب $(x_1,y_1,0)$، $(x_2,y_2,0)$ و (x_1,y_1,z) است رسم کنید. x_1 و y_1 و x_2 و y_2 و z را همگی مثبت اختیار کنید.

ب– ثابت کنید برای چنین میدان برداری سطحی یافت می شود که بر آن عمود باشد هر چند که F ابقائی نیست.

ج–رابطه ای را بنویسید که از روی آن بتوان معادلهٔ این سطح را بدست آورد.

۴۱– اثبات شد برای آن که سطحی مار از نقطهٔ x_0 که بر خطوط نیروی میدان برداری $\vec{F}(\vec{x})$ عمود باشد (یعنی چنین سطحی باعث شود) این است که:

$$\vec{F}(\vec{x}).\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{x})=0$$

الف–از روی شکل خصوصیات سطحی را که بر خطوط نیروی F عمود می باشد را مشخص کنید.

ب–از شرط عمومی داده شده برای داشتن چنین سطحی ثابت کنید که چنین سطحی یافت می شود.

ج–خصوصیات کلی چنین سطحی را بدست آورید. (از روی رابطهٔ ریاضی مربوطه)

۴۲–نشان دهید میدان برداری $\vec{u}(x)\times\vec{v}(x)$ سولنوئیدی است یعنی $div(u\times v)=0$ است هرگاه میدانهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غیر روتاسیونل باشند یعنی $curl\vec{v}=curl\vec{u}=0$.

۴۳–نشان دهید هرگاه A غیر روتاسیونل باشد، آنگاه $(A\times x)$ سولنوئیدی است.

۴۴–نشان دهید هرگاه L_i با رابطهٔ:

$$L_i=-i\varepsilon_{ijk}x_j\partial_k$$

نمایش داده شود:

$$\left[L_i,L_j\right]\Phi(\vec{x})\equiv L_iL_j\Phi(\vec{x})-L_jL_i\Phi(\vec{x})=i\varepsilon_{ijk}L_k\Phi(\vec{x})$$

رابطهٔ L_i را به صورت برداری نمایش دهید. از رابطهٔ به دست آمده نتیجه بگیرید که $[L_i,L_j]=i\varepsilon_{ijk}L_k$ است و به طور سمبولیک آن را به صورت $L\times L=iL$ می نویسند. (چرا؟).

۴۵–اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A}-\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B}-\vec{B}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)+\vec{A}\left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right)$$

۴۶–ثابت کنید:

$$\left(\vec{x}\times\vec{\nabla}\right).\left(\vec{x}\times\vec{\nabla}\right)\psi(\vec{x})=r^2\nabla^2\psi-r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-2r\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

۴۷–در نظریهٔ پائولی با جمله ای نظیر:

$$\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)\times\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)\psi(\vec{x})$$

برخورد می کنیم که $\psi(x)$ تابع اسکالر و

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad , \qquad \vec{P} = -i\vec{\nabla}$$

می باشند. نشان دهید رابطهٔ فوق برابر $ieB\psi$ است.

۴۸-میدان برداری پتانسیل مغناطیسی حاصل ازیک توزیع جریان متمرکز در ناحیه ای از فضا که ممان مغناطیسی آن با بردار **m** مشخص می شود با رابطهٔ:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\vec{m} \times \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right)$$

داده می شود. و اگر میدان اندکسیون مغناطیسی ازرابطهٔ **$B=curl\ A$** تعیین شود ثابت کنید:

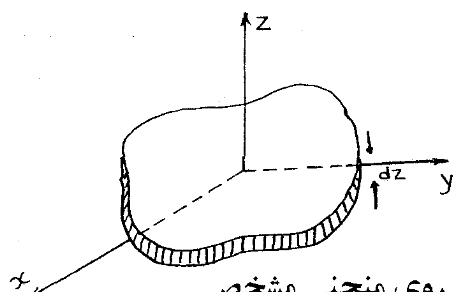
$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\vec{x}(\vec{x}.\vec{m}) - \vec{m}|\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^5}$$

۴۹-نشان دهید که رابطهٔ پیوستگی را میتوان به صورت:

$$\frac{d}{dt}\ln \rho(\vec{x},t) + \vec{\nabla}.v(\vec{x},t) = 0$$

نمایش داد.

۵۰-فرمول دیورژانس را برای سطح بسته شکل زیر که $dz \longrightarrow 0$ ،بدست آورید.



-گردش میدان برداری بر روی منحنی مشخص

۵۱-گردش میدان برداری:

$$\vec{A} = \alpha\frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$$

بر روی منحنی C به معادلهٔ:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \qquad\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = R\varphi \end{cases}$$

را حساب کنید.

۵۲– اگر $A(\mathbf{x})=xy\,\boldsymbol{i}+yz\,\boldsymbol{j}+xz\,\boldsymbol{k}$ باشد $curlA(x)$ را محاسبه کنید و سپس گردش $A(x)$ را بر روی فصل مشترک دو سطح به معادلات:

$$x+y+z+1=0 \quad , \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=z \end{cases}$$

حساب کنید. فصل مشترک چه منحنیی می باشد؟

–محاسبهٔ فلوی میدان برداری از یک سطح دلخواه

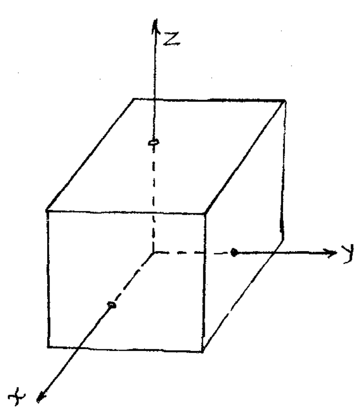
۵۳–میدان برداری زیر داده شده است، این میدان معرف چه میدان فیزیکی است؟

$$\vec{A}=\frac{2k\lambda_0}{\left(x^2+y^2\right)}\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)$$

حال فلوی این میدان برداری را از سطحی به معادلهٔ:

$$\begin{aligned} &x=x && -\tfrac{a}{2}\le x\le \tfrac{a}{2} \\ &y=h && \\ &z=z && 0\le z\le b \end{aligned}$$

حساب کنید. با استفاده از آن فلوی میدان فوق را از مکعبی به ابعاد a که وجوه آن عمود بر محورهای مختصات هستند طوری که محورها از مرکز صفحات مربع عبور نموده باشد، مطابق شکل، محاسبه کنید. اگر تناقضی در جواب بدست آمده توجیه کنید.



۵۴–الف–معادلهٔ صفحه ای که محورهای oz, oy, ox را به ترتیب در نقـاط $a \quad b, c$ قطـع میکند را تعیین کنید.

ب– $d\vec{a}$ واقع بر این سطح را بر حسب پارامترهای (z,x) و محدوده تغییرات پارامترها را مشخص کنید.

ج– da_x , da_y , da_z را مشخص کنید. استدلال برای یک da_i کافی است.

د–فلوی میدان برداری $\vec{A}=y\,\hat{k}$ را از صفحهٔ فوق محصور در یک کنج را به دو روش:

۱–استفاده از $d\vec{a}$ بر حسب پارامترهای x , z.

۲– از رابطهٔ $d\vec{a}=da_x\,\hat{i}+da_y\,\hat{j}+da_z\,\hat{k}$.

۵۵–میدان برداری زیر داده شده است:

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{\left(x^2+y^2\right)}$$

آن را در نقطهٔ (۲,۳,۰) و در نقطهٔ (۲,۳,۵) مشخـص کنیـد. (بطـور کلـی ثـابت کنیـد $\vec{A}(\vec{x}).\vec{x}=0$ است.) سطحی به معادلهٔ $z=z \quad , \quad y=ax \quad , \quad x=x$ داده شـده اسـت، سـطح را رسم کنید. فلوی میـدان بـرداری $\vec{A}$ را از سـطح مذبـور حسـاب کنید. محـدودهٔ تغییـرات پارامترها:

$$0\le x\le L \qquad , \qquad 0\le z\le h$$

راهنمایی: $d\vec{a}$ را از روی رابطهٔ زیر حساب کنید.

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}dudv$$

۵۶–معادلهٔ سطح نیم کره هرگاه پارامتر x و y انتخاب کنیم بصورت

$$x=x$$
$$y=y$$
$$z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

میباشد $d\vec{a}$ را حساب کنید. فلوی میدان

$$\vec{E}=k\,Q\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

را از نیم کرهٔ مزبور محاسبه کنید..

توجه نمایید این مسئله هنگامیکه پارامترها (θ,φ) انتخاب شده باشند در فیزیک پایه ۲ حل شده است.

۵۷–معادلهٔ سطحی با رابطهٔ زیر داده شده است:

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= \sqrt{x^2+y^2-1} \end{aligned}$$

الف–فصل مشترک سطح مذبور را با سه صفحهٔ دستگاه مختصات کارتزین معلوم نمایید و از روی آن سطح مزبور را نامگذاری نمایید .

ب– هرگاه سطح مزبور را با صفحات $z=0$ و $z=3^{1/2}$ قطع نماییم،محدودهٔ تغییرات پارامترهای x و y را تعیین کنید بطوریکه بردار $\boldsymbol{x}$ واقع بر سطح مزبور در بین دو صفحه قرار گیرد.

ج– $d\vec{a}$ واقع بر این سطح را بر حسب پارامترهای (x,y) حساب کنید .

د– میدان برداری $\vec{A}$ با رابطهٔ زیر داده شده است:

$$\vec{A}(\vec{x}) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

فلوی آن را از سطح مزبور محصور بین دو صفحهٔ یاد شده حساب کنید .

۵۸–میدان برداری $\vec{A}$ با رابطهٔ:

$$\vec{A}(\vec{x}) = 2yz\vec{i} - (x+3y-2)\vec{j} + \left(x^2+z\right)\vec{k}$$

و سطح استوانه ای با معادلهٔ:

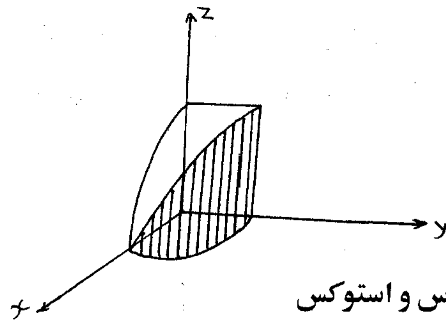
$$x^2+z^2=a^2$$

داده شده است .

الف– $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ را حساب کنید .

ب– $d\vec{a}$ واقع بر سطح استوانه را بنویسید پارامترهای سطح چه هستند .

ج–فلوی $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ از سطح استوانه مزبور و برای ناحیه ای از سطح که در درون استوانه دیگر به معادلهٔ $x^2+y^2=a^2$ قرار دارد و همچنین در کنج اول دستگاه قرار گرفته است،حساب کنید .



– استفاده از انتگرالهای گوس و استوکس

۵۹–چگونه از علامت قدر مطلق در انتگرال زیرین خلاصی یابیم، نیازی به محاسبهٔ انتگرال نمی باشد.

$$I = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} |x-y| dx\, dy$$

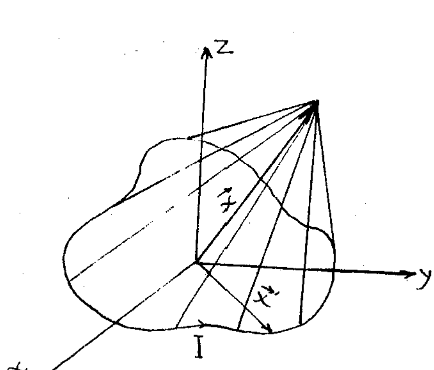
۶۰–هرگاه شدت جریان I از یک مدار بسته عبور نماید، میدان اندکسیون مغناطیسی با رابطهٔ:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint d\vec{x}' \times \frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

داده می شود، با استفاده از اتحادهای استوکس نشان دهید:

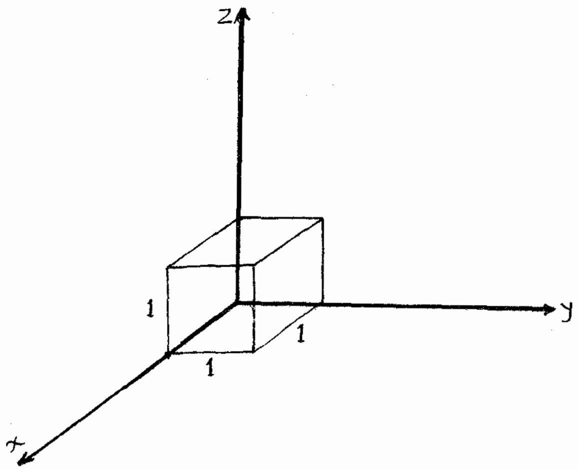
$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{\nabla}\Omega(\vec{x})$$

$\Omega(\vec{x})$ زاویهٔ فضائی است که نقطهٔ اثر میدان با حلقهٔ حامل جریان میسازد. معنی Ω تابعی از $\vec{x}$ چیست؟



۶۱–انتگرال زیر را بر روی سطوح مکعب به اضلاع بطول واحد که مطابق شکل داده شده است محاسبه کرده،سپس آن رابا استفاده از فرمول گوس محاسبهٔ مجدد نمایید.

$$\frac{1}{3}\oint \vec{x}.d\vec{a}$$



۶۲–مقدارانتگرال زیر را بروی سطح بسته دلخواهی حساب کنید.

$$\oint d\vec{a}$$

۶۳–نشان دهید تعریف دیگر $curl\, A$ درنقطهٔ x با رابطهٔ:

$$\lim_{\lim dv\to 0} \frac{\oint d\vec{a}\times\vec{A}(\vec{x})}{dv}$$

وتعریف دیگر $\nabla^2\Phi$ در نقطهٔ $\vec{x}$ با رابطهٔ:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\oint \vec{\nabla}\Phi(\vec{x}).d\vec{a}}{{}_{dv\to 0}dv}$$

۶۴–نشان دهید هرگاه $B(x)=\mathrm{curl}\, A$ باشد آنگاه:

$$\oint \vec{B}(\vec{x}).d\vec{a} = 0$$

۶۵–نشان دهید برای جریان یکنواخت (یعنی $[\mathrm{div}J(x)=0]$) و متمرکز در ناحیه ای از فضا (یعنی $J(x)$ بر روی سطح بسته ای دارای مقدار صفر باشد)،رابطهٔ زیر صادق است.

$$\int \vec{J}(\vec{x})d^3x = 0$$

راهنمائی: $A(x)=x_i J(x)$ در نظر بگیرید و از قانون گوس استفاده نمائید.

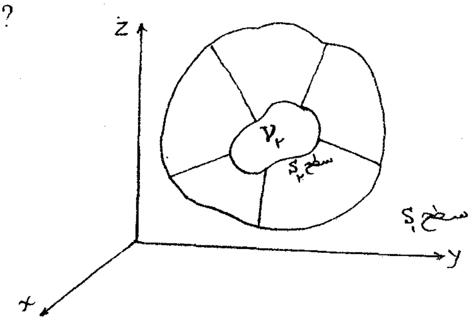
۶۶–برای میدان برداری $\vec{A}(\vec{x})=-y\hat{i}+x\hat{j}$ گردش آن را بر روی منحنی مسطحه بسته واقع بر صفحهٔ xoy محاسبه نمائید و نتیجه بگیرید که:

$$\oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x} \equiv \oint xdy - ydx = \int \left(x\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}\right)dt = 2A$$

A مساحت محصور توسط منحنی بستهٔ C است. ازروی این رابطه است که مساحت یک سطح مسطح محصور توسط منحنی C که معادله پارامتری آن داده شده است را میتوان حساب کرد. مساحت یک بیضی را بعنوان مثال حساب کنید.

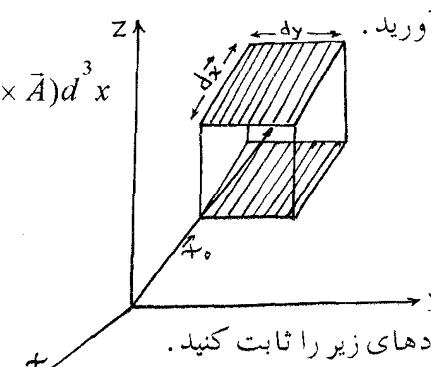
۶۷–هرگاه دو سطح بسته یکی درون دیگری داشته باشیم رابطهٔ $divA$ درحجم (V_1-V_2) چقدر می شود. یعنی:

$$\int \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x})d^3x = ?$$



۶۸–کمیت $\vec{A}(\vec{x})\times d\vec{a}$ را از دو سطح موازی هاشور زده یک مکعب بسیار کوچک به ابعاد dx , dy, dz که مرکز آن واقع بر نقطهٔ $\vec{x}_0$ است حساب کنید. و از روی آن اتحاد زیر را بدست آورید.

$$\oint \vec{A}(\vec{x})\times d\vec{a} = -\int (\vec{\nabla}\times\vec{A})d^3x$$



۶۹–اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$a)\oint \vec{\nabla}\times\vec{A}.d\vec{a} = 0$$

$$b)\oint u(\vec{x})\vec{\nabla}v(\vec{x}).d\vec{x}=\int -v(\vec{x})\vec{\nabla}u(\vec{x}).d\vec{x}$$

$$c)\int u(\vec{x})\vec{\nabla}v(\vec{x}).d\vec{x}=\int (\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v).d\vec{a}$$

$$d)\,g(\vec{x})=g(r)\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{\nabla}g(r)=\frac{2}{r}\frac{dg}{dr}+\frac{d^2g}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d^2(rg)}{dr^2}$$

توجه:از مختصات کروی استفاده نکنید .فرم آخر تساوی برای استخراج امواج کروی مورد استفاده قرار می گیرد.

۷۰–با استفاده از صور مختلف انتگرالهای استوکس و گوس انتگرال:

$$I=\oint\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d\vec{a}'$$

را بر روی سطح کره ای به شعاع R محاسبه کنید. $\vec{x}$ یک نقطهٔ دلخواه و خارج کره و مرکز کره منطبق بر مبدأ مختصات است.

۷۱–میدان اندکسیون مغناطیسی با رابطهٔ:

$$B(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int J(\vec{x}')\times\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

داده شود ، میانگین میدان اندکسیون مغناطیسی را در درون کره ای به شعاع a که تمامی توزیع جریان در درون آن قرار دارد حساب کنید و نشان دهید که:

$$\langle\vec{B}\rangle=\frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3}\int B(\vec{x})d^3x=\frac{\mu_0}{2\pi a^3}\vec{\mu}$$

$$\vec{\mu}=\frac{1}{2}\int\vec{x}'\times J(\vec{x}')d^3x'$$

اگر توزیع جریان کاملاً در خارج کره قرار گیرد $<\vec{B}>$ چقدر میشود.

۷۲–هرگاه تابع $f(\vec{x})$ در کل فضا داده شده باشد و همچنین از رابطهٔ $\nabla^2 f(\vec{x})=0$ پیروی کند، نشان دهید حل معادله دیفرانسیل:

$$\nabla^2\Phi(\vec{x})=k|\nabla f(\vec{x})|^2\quad\Rightarrow\quad\Phi(\vec{x})=\frac{1}{2}kf^2(\vec{x})$$

است .

راهنمایی حل معادلهٔ پواسون هنگامیکه ρ در کل فضا معلوم بوده باشد بصورت زیر است.

$$\nabla^2\Phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

۷۳- گشتاور نیروی مغناطیسی وارد بر یک حلقهٔ حامل جریان توسط میدان اندکسیون مغناطیسی یکنواخت هنگامیکه شکل حلقه کاملا دلخواه است را حساب کنید.

راهنمایی

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i \rightarrow \oint \vec{x} \times d\vec{F} \qquad , \qquad d\vec{F} = I d\vec{x} \times \vec{B}_0$$

و بدست آورید که:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0$$

- اتحادهای گرین

۷۴-تعمیم قضیهٔ گرین: ثابت کنید هرگاه بجای ∇^2 از $\mathscr{L}$ که $\mathscr{L}$ با رابطهٔ:

$$\mathscr{L} = \vec{\nabla}.\left[p(\vec{x})\vec{\nabla}\right] + q(\vec{x})$$

داده شده است استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\int (v\mathscr{L}u - u\mathscr{L}v) d^3x = \oint p(\vec{x})\left(v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v\right).d\vec{a}$$

اگر $q(x)=0$ و $p(x)=1$ باشد نتیجه چه خواهد شد؟

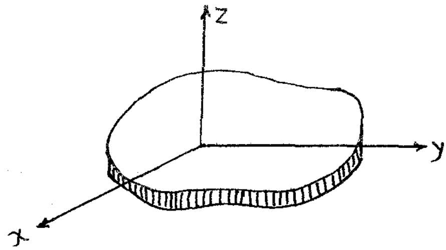
۷۵-قضیهٔ گرین دو بعدی: استوانه ای با مقطع دلخواه و با ارتفاع Δz در نظر بگیرید. قضیهٔ دوم گرین را برای این سطح بسته هنگامی که $\Delta z \longrightarrow 0$ بدست آورید و نشان دهید:

$$\int \left[u\nabla_t^2 v - v\nabla_t^2 u\right] da = -\oint \left[v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right] dl$$

جائیکه:

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

و dl المان طول بر روی فصل مشترک استوانه با صفحهٔ xoy می باشد.



۷۶–با استفاده از اتحاد گرین و جایگزاری $v(\vec{x})=V(\vec{x})$ و $u(\vec{x})=1/|\vec{x}-\vec{x}_p|$ نشان دهید مقدار پتانسیل الکتریکی در یک نقطه نظیر $\vec{x}_p$ برابر است با میانگین پتانسیل کره ای که مرکز آن واقع بر $\vec{x}_p$ است، می باشد مشروط بر این که باری درون سطح بسته نباشد. هرگاه تمامی توزیع بار در درون کره وجود داشته باشد چه نتیجه ای میگیرید؟

– قوانین تبدیل دو دستگاه متعامد

۷۷–دستگاه $ox'y'z'$ از دوران $oxyz$ حول محور ox و باندازهٔ زاویهٔ α حاصل شده است.

الف–ماتریس تبدیل $a_{ij}=e'_i.e_j$ را بنویسید

ب–بردار $\vec{x}$ در دستگاه $ox'y'z'$ دارای مؤلفه های $(x',y',0)$ است، مؤلفه های بردار $\vec{x}$ را در دستگاه $oxyz$ تعیین کنید.

ج–رابطهٔ زیر معرف معادلهٔ چه چیز می باشد؟

$$\begin{cases} x' = x' \\ y' = y' \\ z' = 0 \end{cases}$$

مختصات (x,y,z) بدست آمده از تبدیل فوق معرف معادلهٔ چه چیز می باشد؟

د–رابطهٔ زیر معرف معادلهٔ چه چیز می باشد؟

$$\begin{cases} x' = R\cos\varphi' \\ y' = R\sin\varphi' \\ z' = 0 \end{cases}$$

از روی آن نشان دهید، تصویر یک دایره که عمود بر صفحهٔ آن با محور oz زاویه α می سازد، در صفحهٔ xoy معادلهٔ یک بیضی می باشد. معادلهٔ بیضی را بنویسید. (صفحهٔ دایره مار بر محور ox هم می باشد.)

ه- المان سطح $d\vec{a}$ واقع بر صفحه ای مار بر محور ox را که عمود بر آن با محور oz زاویهٔ a می سازد بر حسب پارامترهای x و y حساب کنید.

وبار نقطه ای q در نقطه ای به مختصات $\vec{x}= -d\hat{k}$ قرار دارد. انتگرال فلوی میدان الکتریکی گذرنده از یک دیسک دایره ای به شعاع R که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات و صفحه مار بر ox و عمود بر آن با oz زاویهٔ α می سازد بنویسید.

نیازی به محاسبه انتگرال نیست بلکه $d\vec{a}$, $\vec{x}_1$, $\vec{x}$ و حدود انتگرال را صحیح بنویسید.

فصل دوم

– مختصات منحنی الخط متعامد

۷۸–مختصات منحنی الخطی با رابطهٔ زیر داده شده است که آنرا Oblate Spheriodal Coordinate نامند :

$$x = c\cosh q^1 \sin q^2 \cos q^3$$

$$y = c\cosh q^1 \sin q^2 \sin q^3$$

$$z = c\sinh q^1 \cos q^2$$

$$q^1 > 0 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \le q^2 \le \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 < q^3 < 2\pi$$

الف–h_1,h_2,h_3 را محاسبه کنید .

ب–$\nabla^2\Phi(x)$ را در این دستگاه بنویسید .

ج–بردار سرعت یک ذره را در این دستگاه تعیین کنید .

توضیح: برای سهولت در محاسبات $q^1=u$، $q^2=v$ و $q^3=\varphi$ بنامید .آیا قبلا" در مورد این مختصات در مبحث معادله فضا صحبت شده بود؟

سطوح الف: $q^1=c_1$ ب: $q^2=c_2$ ج: $q^3=c_3$ را رسم کنید .

۷۹–نشان دهید که بردار یکه $\vec{e}_i$ دستگاه مختصات کارتزین برحسب بردارهای یکه مختصات منحنی الخط متعامد $\vec{a}_i$ با رابطه زیر :

$$\vec{e}_i = \sum_j \frac{1}{h_j}\frac{\partial x_i}{\partial q^j}\vec{a}_j$$

داده میشود .ازنتیجه فوق استفاده کرده ، $\vec{e}_i$ را برحسب مختصات کروی واستوانه–ای بدست آورید .آیا از روابط (۲۵۴–۲) و(۲۵۵–۲) هم میتوانستیم به نتیجه فوق برسیم؟ کدامیک از دو رابطه اخیر مفید تراست.راهنمایی :

$$\vec{e}_i = \left(\vec{e}_i \cdot \vec{a}_j\right)\vec{a}_j \qquad ,\vec{a}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial x_k}{\partial q^i}\ \vec{e}_k$$

۸۰–نشان دهید که در مختصات منحنی الخط متعامد اگر بردار مکانی $\vec{x}$ بصورت $\vec{x}=\sum\alpha_i \boldsymbol{a}_i$ نمایش دهیم $\alpha_i(q_j)$ از رابطهٔ زیر به دست می آید :

$$\alpha_i(q)=\frac{1}{2h_i}\sum\frac{\partial|\vec{x}|^2}{\partial q^i}$$

α_i را برای مختصات کروی و استوانه ای محاسبه کنید.

. محاسبهٔ المان طول در مختصات منحنی الخط متعامد

۸۱–در درس مکانیک آموخته اید که انتگرال:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt$$

زمانی اکسترمم میشود که $q^\alpha(t)$ از معادلهٔ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}=0$$

پیروی کند. حال المان طول، در مختصات منحنی الخط متعامد را بنویسید. سپس معادلهٔ منحنی دلخواهی واقع بر سطح کره ای به شعاع $r=a$ را بنویسید. پارامتر را φ انتخاب کنید. حال معادلهٔ دیفرانسیلی را بیابید که از روی آن معادلهٔ منحنیی بدست آید که طول آن برسطح کره کمترین مقدارباشد، و از دونقطهٔ معین (a,φ_1)و(a,φ_2) بگذرد.

. محاسبهٔ المان سطح در مختصات منحنی الخط متعامد

۸۲–الف– هرگاه سطحی با رابطهٔ $q^i=q^i(u,v)$ در مختصات منحنی الخط متعامد داده شده باشد، المان سطح $d\vec{a}$ را تعیین نمائید.

ب– هرگاه معادلهٔ سطحی با رابطهٔ:

$$\begin{cases} r=\dfrac{h}{\cos\theta} & \\ \theta=\theta & 0\le\theta\le\theta_0 \\ \varphi=\varphi & 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$$

داده شده باشد، پارامترهای سطح مذبور کدامند؟ و این معادله معرف چه سطحی است؟ مساحت این سطح را تعیین کنید.

۸۳–معادلهٔ سطح بسته ای در مختصات کروی با رابطهٔ زیر داده میشود:

$$\begin{cases} r = 2a\cos\theta \\ \theta = \theta & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ \varphi = \varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

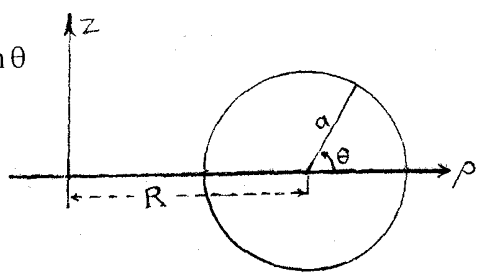
مساحت سطح جانبی و حجم درون سطح بسته را حساب کنید.

۸۴–معادلهٔ سطح کره ای به شعاع R مطابق شکل که صفحه xoy در نقطه 0 بر آن مماس است، در مختصات کروی و بر حسب پارامترهای θ , φ بنویسید و سپس $d\vec{a}$ را از رابطهٔ $d\vec{a}=|d\vec{x}_u \times d\vec{x}_v|$ محاسبه و از روی آن نشان دهید که مساحت یک کره برابر $4\pi R^2$ است. حال اگر بار q را در نقطهٔ o یعنی روی سطح کره قرار دهیم فلوی میدان الکتریکی گذرنده از سطح کره را محاسبه کنید.

۸۵–المان سطح را در مختصات منحنی الخط q^i هنگامیکه $q^i=q^i(u,v)$ است، بدست آورید (در متن درس انجام شده است) حال مساحت توروئید به معادلهٔ:

$$\rho = R + a\cos\theta$$
$$\varphi = \varphi$$
$$z = a\sin\theta$$

را بدست آورید.



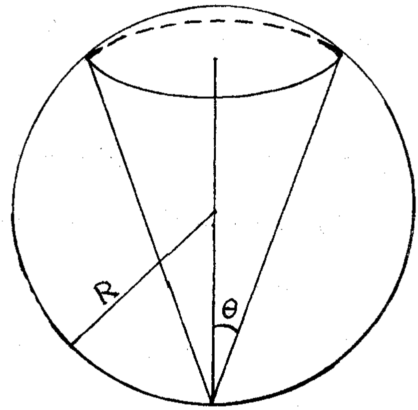
۸۶–الف–$da, d\vec{a}$ واقع بر سطحی که در مختصات منحنی الخط متعامد بصورت $q^i=q^i(u,v)$ داده شده است را بدست آورید.

ب– رابطهٔ بدست آمده هنگامیکه $u=q^1$ و $v=q^3$ است ساده نمائید.

ج– da واقع بر سطح $r=r_0$ و $\theta=\theta_0$ و $\varphi=\varphi$ را محاسبه کنید. (h_i های مختصات کروی را دانسته فرض کنید.)

د–اگر میدان حاصل از یک کره باردار با توزیع بار حجمی یکنواخت با رابطهٔ:

$$\vec{E} = \frac{\rho_\circ}{3\varepsilon_\circ}\vec{x} \qquad r < R$$



داده شده باشد .انتگرال $\int \vec{E}.d\vec{a}$ ازسطح جانبی مخروط شکل فوق را حساب کنید .

٥–حجم مخروط با زاویهٔ θ_0 و ارتفاع h را در مختصات کروی حساب کنید .

٨٧– الف– معادلهٔ سطح جانبی استوانه ای با مقطع دایره ای و به شعاع R که محور آن منطبق بر oz است در مختصات کروی (نه استوانه ای) بر حسب پارامترهای (θ,φ) بنویسید .

ب– $d\vec{a}$ و da بر روی سطح مزبور بر حسب پارامترهای فوق و در مختصات کروی بنویسید .فلوی میدان الکتریکی ناشی از بار q واقع در مرکز استوانه ای بطول ۲L و به شعاع R را که از سطح جانبی استوانه می گذرد ، حساب کنید .

٨٨–الف–المان سطح روی سطحی که معادلهٔ آن با رابطهٔ $q^i=q^i(u,v)$ داده شده را بدست آورید .

ب–هرگاه $q^۳,q^۲$ بعنوان پارامتر انتخاب شوند ، da را ساده تر کنید .

ج–سطحی به معادلهٔ:

$$\begin{cases} r = 2a\cos\theta \\ \theta = \theta & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ \varphi = \varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

داده شده است.مساحت سطح و حجم درون سطح را محاسبه کنید .

فلوی میدان برداری:

$$\vec{A} = r^2 \sin\theta\hat{r} + 4r^2\cos\theta\hat{\theta} + r^2\tan\theta\hat{\varphi}$$

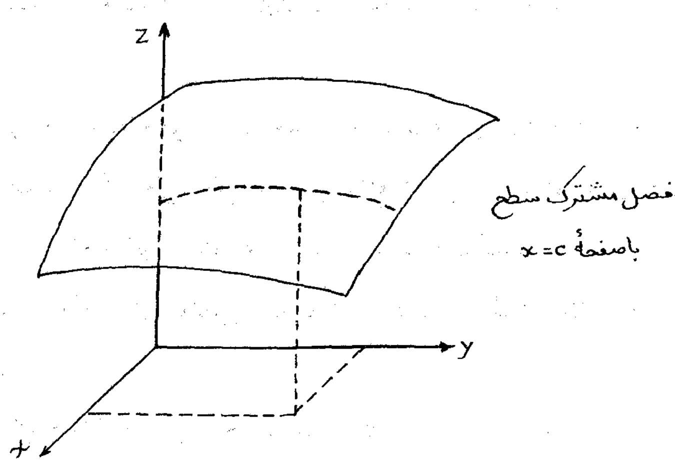
را از سطح مذبور حساب کنید.

۸۹- در متن درس ثابت کردیم هرگاه در معادله سطح پارامترهای $v=q_1,u=q_2$ مختصات باشند، تصویر da در امتداد بردار "سوم" برابر میشود با مثلا "$da_3=h_1h_2dq^1dq^2$" برای بررسی موضوع فوق از نظر هندسی ابتدا مسئله را در مختصات کارتزین و با پارامترهای کارتزین شروع می کنیم. در شکل زیر:

$$\left.\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}\right|_{y,z} dx \quad , \quad \left.\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}\right|_{x,z} dy$$

را رسم کنید. اندیسهای پائین یعنی آن مختصات ثابت هستند. اما اگر سطح با معادلهٔ $x=x$، $y=y$ و $z=z(x,y)$ داشته باشیم، مقادیر:

$$\left.\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}\right|_{y} dx \quad , \quad \left.\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}\right|_{x} dy$$



را رسم کنید و بگویید چهار بردار فوق واقع بر چه "سطوحی" می باشند. حال این موضوع را در مختصات کروی تکرار میکنیم، مقادیر:

$$\left.\frac{\partial\bar{x}}{\partial\varphi}\right|_{r,\theta} d\varphi \quad , \quad \left.\frac{\partial\bar{x}}{\partial\theta}\right|_{r,\varphi} d\theta$$

را رسم کنید و بگویید در چه سطحی قرار دارند. حال اگر سطحی به معادلهٔ $r=r(\theta,\varphi)$، $\theta=\theta$ و $\varphi=\varphi$ داشته باشیم بردارهای زیر را رسم نمایید.

$$\left.\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right|_{\theta} d\varphi \quad , \quad \left.\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}\right|_{\varphi} d\theta$$

حال برای دو حالت فوق تصویر daرا بر روی بردار یکهٔ "سوم" مشخص کنید.

. محاسبهٔ المان حجم در مختصات منحنی الخط متعامد

۹۰–المان حجم در مختصات منحنی الخط q^i هنگامی که معادلهٔ فضا با رابطهٔ $q^i=q^i(u,v,w)$ است،بدست آورید . حال معادلهٔ فضا با رابطهٔ زیر داده شده است:

$$\rho = R + u\cos\theta$$
$$\varphi = \varphi$$
$$z = u\sin\theta$$

(بر روی شکل نقطهٔxاز فضا را نشان دهید) پارامترها u,φ,θ هستند. هرگاه:

$$\vec{B} = \frac{\alpha}{\rho}\hat{\varphi}$$

داده شده باشد، انتگرال انرژی مغناطیسی:

$$W_B = \frac{1}{2\mu}\int B^2 dV$$

در درون حجم یک توروئید حساب کنید. راهنمائی:

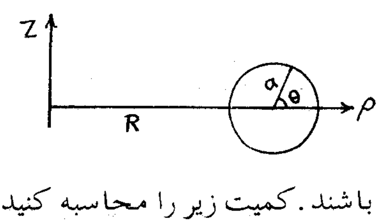
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

۹۱–حجم یک تورویید که فصل مشترک آن با صفحهٔ $zo\rho$ به صورت زیر داده شده است، محاسبه نمایید.

راهنمایی: $dv=\rho d\rho d\varphi dz$ در مختصات منحنی الخط.

همچنین از رابطهٔ:

$$\begin{cases} \rho = R + a\cos\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = a\sin\theta \end{cases}$$



پارامترها φ,θ می باشند. کمیت زیر را محاسبه کنید:

$$d\vec{a} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right) d\theta d\varphi$$

-گرادیان ، دیورژانس، کرل و لاپلاسین در مختصات منحنی الخط متعامد

۹۲-ثابت کنید :

$$\vec{\nabla}.\vec{a}_i = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_1}\right)$$

میدانیم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{a}_i = ? \qquad , \qquad \vec{\nabla}\times\frac{\vec{a}_i}{h_i} = 0$$

۹۳-با استفاده از رابطه (۲۹-۲)و(۴۰-۲) ، بردار سرعت و شتاب یک ذره مادی را در مختصات استوانه ای حساب کنید.

۹٤-نشان دهید که $\vec{L}$ در مختصات منحنی الخط کروی با رابطهٔ:

$$\vec{L} = -i\left(\vec{x}\times\vec{\nabla}\right) = i\left(\hat{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \hat{\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

۹۵-مختصات منحنی الخطی با رابطهٔ زیر داده شده است (مختصات بیضوی استوانه ای):

$$\begin{cases} x = a\cosh u\cos v \\ y = a\sinh u\sin v \\ z = z \end{cases}$$

نشان دهید که مختصات مذبور متعامد هستند. سطوح $u=u_0$ و $v=v_0$ و $z=z_0$ را مشخص کنید. h_u, h_v, h_z را حساب کنید. معادله $\nabla^2\phi=0$ را حل نمائید. (بروش جداسازی متغیرها)

۹٦-نشان دهید معادلهٔ هلمهولتز در مختصات بیضوی استوانه ای با جداسازی متغیرها به سه معادلهٔ دیفرانسیل معمولی:

الف-یک معادلهٔ دیفرانسیل نوسانگر هارمونیک برای مختصهٔ z

ب-معادلهٔ ماتیو *Mathieu*:

$$\frac{d^2g}{dv^2} + (b - 2q\cos 2v)g = 0$$

ج–معادلهٔ ماتیو اصلاح شده:

$$\frac{d^2 f}{du^2}-(b-2q\cosh 2u)f=0$$

تبدیل میشود.

۹۷–مختصات منحنی الخط *Parabloidal Coordinates* با رابطه زیر:

$$\begin{cases} x=uv\cos\varphi & u\geq 0 \\ y=uv\sin\varphi & v\geq 0 \\ z=\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right) & 0\leq\varphi\leq 2\pi \end{cases}$$

داده میشود. h_u, h_v, h_φ را محاسبه نمائید و سپس $\nabla^2\phi(x)$ را در این مختصات محاسبه نمایید.

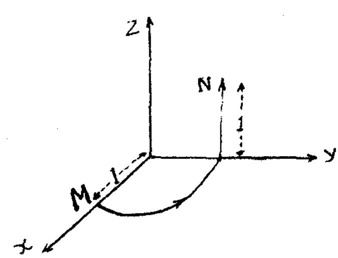
. محاسبهٔ گردش میدان برداری در مختصات منحنی الخط متعامد

۹۸–گردش میدان برداری A:

$$\vec{A}(\vec{x})=\left(r\cos^2\theta\right)\hat{r}-r(\cos\theta-\sin\theta)\hat{\theta}+3r\hat{\varphi}$$

روی منحنی های (a) ، (b) از نقطهٔ مبدأ M تا نقطهٔ مقصد N حساب کنید.

$$(a)\begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{2} \\ \varphi=\varphi \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} r=\frac{1}{\sin\theta} \\ \theta=\theta \\ \varphi=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



. مختصات منحنی الخط غیر متعامد

۹۹–هرگاه دستگاه بردار پایهٔ $\vec{\varepsilon}_i$ متعامد (اما غیر نرمالیزه) باشد، نشان دهید که:

الف–g_{ij} قطری است.

ب- $g^{ii}=\frac{1}{g_{ii}}$

ج- $\left|\varepsilon^i\right|=\frac{1}{\left|\varepsilon^i\right|}$

۱۰۰–هرچند در درس مشتق کوواریانتی مولفه های کنتراواریانت و کوواریانت یک بردار جدا محاسبه شد، بروش دیگر نشان دهید که:

$$V_{i,j} = g_{ik}V^{k}_{.j}$$

۱۰۱–هرگاه مؤلفهٔ کوواریانتی یک بردار، برابر مؤلفهٔ کوواریانتی گرادیان یک کمیت اسکالر باشد یعنی:

$$A_i = \frac{\partial\psi}{\partial q^i}$$

باشد نشان دهید که: $A_{i,j} - A_{j,i} = 0$

۱۰۲–هرگاه $g_{\mu r}$ متریک فضا در مختصات منحنی الخط غیر متعامد q^i و $g'_{\alpha\beta}$ متریک همان فضا در مختصات منحنی الخط q'^i باشد، رابطهٔ بین $g'_{\alpha\beta}$ و $g_{\mu r}$ را بدست آورید.

۱۰۳–هرگاه مؤلفهٔ بردار $\vec{A}$ در دو دستگاه منحنی الخط غیر متعامد $\{\vec{q}_i\},\{\vec{q}'_i\}$ در امتداد بردارهای:

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial q'_i} \quad , \quad \frac{\partial\bar{x}}{\partial q_i}$$

باشد. A'_i را بر حسب A_i حساب کنید.

. ضرایب کریستوفل Γ^k_{ij}

۱۰۴–از روی تعریف Γ^k_{ij} که در کلاس بدست آمده است نشان دهید:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k}$$

۱۰۵–ابتدا متریک $g_{ij}=\varepsilon_i.\varepsilon_j$ دستگاه مختصات کروی (متعامد غیر نرمالیزه) سپس ضرائب Γ^k_{ij}را محاسبه کنید.

۱۰۶–بردار سرعت و بردار شتاب را در دستگاه مختصات منحنی الخط غیر متعامد محاسبه کنید و نشان دهید که فرمول نیوتون $\vec{F}= m\vec{a}$ در دستگاه مختصات منحنی الخط غیر متعامد بصورت:

$$F^k = m\left(\ddot{q}^k + \dot{q}^i \dot{q}^j \Gamma^k_{ij}\right)$$

است. در دستگاه $\vec{\varepsilon}_i$ رابطهٔ فوق چگونه خواهد بود؟

۱۰۷–شعاع انحنای یک منحنی را در دستگاه مختصات منحنی الخط غیر متعامد بدست آورید.

۱۰۸–سمبل کریستوفل:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kn}\left(\frac{\partial g_{in}}{\partial q^{j}} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial q^{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^{n}}\right)$$

برای مختصات منحنی الخط اورتونرمال بر حسب h_i ها بنویسید و سه کمیت $\Gamma^{k}{}_{\rho\varphi}$ و $\Gamma^{\rho}{}_{\varphi\varphi}$ و $\Gamma^{\rho}{}_{\rho\rho}$ در مختصات استوانه ای حساب کنید.

۱۰۹–نشان دهید هرگاه $\vec{\varepsilon}_i$ و $\vec{\varepsilon}'_i$ دو دستگاه بردارپایهٔ غیرمتعامد مربوط به مختصات q^i و q'^i باشند، قوانین تبدیل بردارهای ε'_k و ε'^k با روابط زیر داده می شود:

$$\vec{\varepsilon}'_k \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial q'^k} = \vec{\varepsilon}_1 . \frac{\partial q^1}{\partial q'^k}$$

$$\vec{\varepsilon}'^k \equiv \vec{\nabla} q'^k = \vec{\varepsilon}^m . \frac{\partial q'^k}{\partial q^m}$$

حال با در نظر گرفتن تعریف علائم کریستوفل:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \vec{\varepsilon}^k . \frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial q^j}$$

قوانین تبدیل ضرایب کریستوفل را تعیین کنید و نشان دهید که بصورت زیر است:

$$\Gamma'^{k}_{ij} = \frac{\partial q'^k}{\partial q^1}\left[\frac{\partial^2 q^1}{\partial q'^i \partial q'^j} + \frac{\partial q^m}{\partial q'^i}\frac{\partial q^n}{\partial q'^j}\Gamma^1_{mn}\right]$$

راهنمایی: $\Gamma'^{k}_{ij} = \vec{\varepsilon}'^k . \frac{\partial \vec{\varepsilon}'_i}{\partial q'^j}$

به جای $\vec{\varepsilon}'^k$ و $\vec{\varepsilon}'_i$ جایگزاری مناسب انجام دهید.

ب–نشان دهید هرگاه $q^i = x^i$ (یعنی مختصات کارتزین باشند) ضرائب کریستوفل در دستگاه منحنی الخطی بر حسب:

$$\Gamma'^{k}_{ij} = \frac{\partial q'^k}{\partial x^1}\frac{\partial^2 x^1}{\partial q'^i \partial q'^j}$$

۱۱۰–قوانین تبدیل مؤلفه های کوواریانتی یک بردار و ضرائب کریستوفل در کتاب حساب شده است وباروابط (۲۵۳–۲) و (۲۵۷–۲) بیان میشود:

$$A'_i = \frac{\partial q^j}{\partial q'^i} A_j(q)$$

$$\Gamma'_{ij}{}^{k} = \frac{\partial q'^k}{\partial q^m}\left\{\frac{\partial^2 q^m}{\partial q'^i \partial q'^j} + \frac{\partial q^l}{\partial q'^i}\frac{\partial q^n}{\partial q'^j}\Gamma_{ln}{}^{m}\right\}$$

حال قانون تبدیل مشتق کوواریانتی از مؤلفه های کوواریانتی برداری در دو دستگاه منحنی الخط غیر متعامد را بدست آورید و نشان دهید این قانون همانند قانون تبدیل تانسورهای مرتبهٔ دوم است.یعنی ثابت کنید:

$$A_{i,r} = \frac{\partial A'_i}{\partial q'^r} - \Gamma'^{j}_{ir} A'_j$$

$$A'_{i,r} = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} A_{k,l} \frac{\partial q^l}{\partial q'^r}$$

برقرار است

– محاسبهٔ دیورژانس و کرل در دستگاه مختصات منحنی الخط غیر متعامد

۱۱۱–نشان دهید که:

الف- $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\varepsilon}^i \cdot \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial q^i}$

ب- $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\varepsilon}^i \times \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial q^i}$

۱۱۲– ثابت کنید که در مختصات منحنی الخط **متعامد h_i نه تنها** از رابطهٔ:

$$h_i = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial q^i}\right| = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

بلکه از رابطه:

$$h_i = \left[\left(\frac{\partial q^i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q^i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q^i}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

نیز بدست میآید. ازرابطه اول h_i برحسب مختصات منحنی الخط وازرابطه دوم h_i برحسب مختصات کارتزین بدست میآید بعنوان تمرین h_i های مختصات کروی راازرابطه دوم حساب کنید.

فصل سوم

- عملگرها

۱۱۳–عملگر A بر بردار پایهٔ متعامد $\vec{e}_i$، $i=۱,۲,۳$، اثر کرده و در نتیجه بردارهای $|e'_i>$ $i=۱,۲,۳$، بشرح زیر حاصل شده است. مطلوب است:

الف– تعیین عملگر A در بردار پایهٔ $|e_i>$.

ب– چنانچه A بر بردار $|a>$ با مؤلفه های (۱,۲,۳) اثر نماید چه برداری بدست میآید؟

$$A|e_1\rangle = |e'_1\rangle = 3|e_1\rangle + 2|e_2\rangle + 4|e_3\rangle$$
$$A|e_2\rangle = |e'_2\rangle = |e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_3\rangle$$
$$A|e_3\rangle = |e'_3\rangle = 2|e_1\rangle + 3|e_3\rangle$$

۱۱۴–عملگر زیر در دست است، آن را در دستگاه بردار پایهٔ $|e_i>$ نمایش دهید.

$$S_{op}{}^2 = \varepsilon_{2jk}|e_j\rangle\langle e_k|$$

(جمع بندی روی j,k مفروض است).

۱۱۵–عملگر چرخش A که مؤلفه های آن در دستگاه $\{\vec{e}_i\}$ با رابطهٔ:

$$A_{ij} = \delta_{ij} + (1-\cos\varphi)\left[l_i l_j - \delta_{ij}\right] - \varepsilon_{ijk} l_k \sin\varphi$$

داده شده مفروض است. نشان دهید که نمایش محض این عملگر به صورت:

$$A = 1 + (1-\cos\varphi)\left[|l\rangle\langle l| - 1\right] - \vec{l}\,.\vec{S}_{op}\sin\varphi$$

۱۱۶–عملگر چرخش A در کلاس به صورت:

$$A = e^{-\varphi\vec{l}\,.\vec{S}_{op}}$$

استخراج گردید. نشان دهید که با بسط تابع نمائی و محاسبات دو جمله:

$$\varphi^2\left(-\vec{l}\,.\vec{S}\right)\left(-\vec{1}.\vec{S}\right) \qquad , \qquad \varphi^3\left(-\vec{l}\,.\vec{S}\right)\left(-\vec{l}\,.\vec{S}\right)\left(-\vec{l}\,.\vec{S}\right)$$

به نتیجهٔ زیرخواهید رسید.

$$A = 1 + (1-\cos\varphi)\left[|l\rangle\langle l| - 1\right] - \vec{l}\,.\vec{S}_{op}\sin\varphi$$

۱۱۷–*Commutator* دو عملگر A و B به صورت $[A,B]=AB-BA$ را نمایش میدهند و معمولاً $[A,B] \neq 0$ می باشد. حال نشان دهید که:

$$\left[S^i, S^j\right] = -\varepsilon_{ijk}S^k \qquad , \qquad S^i = \varepsilon_{imn}|e_m\rangle\langle e_n|$$

۱۱۸–تأثیر عملگر چرخش A را بر روی بردار$|l\rangle$ محاسبه کنید و نتیجهٔ حاصل را تعبیر فیزیکی نمائید.

$$A|l\rangle = ?$$

۱۱۹–ثابت کنید:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

و در نتیجه:

$$(ABC\ldots F)^{-1} = F^{-1}\ldots C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

۱۲۰–هرگاه $A = e^{B}$ باشد نشان دهید:

$$CAC^{-1} = e^{CBC^{-1}}$$

۱۲۱–نشان دهید هرگاه:

$$a)\quad [A,B] = -A \quad \Rightarrow AB^{n} = (B-1)^{n}A$$

$$b)\quad [A,B] = 0 \quad \Rightarrow AB^{n} = B^{n}A$$

$$c)\quad [A,B] = C\ ,\ [A,C] = [B,C] = 0 \quad \Rightarrow \left[A, B^{n}\right] = nB^{n-1}C$$

$$d)\left[A, e^{B}\right] = e^{B}[A,B]$$

۱۲۲–از روی قوانین کموتاسیون وآنتی کموتاسیون ماتریسهای پائولی یعنی:

$$[\sigma_i, \sigma_j]_- = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ = 21\delta_{ij}$$

نشان دهید که:

$$(\vec{a}.\vec{\sigma})(\vec{b}.\vec{\sigma}) = (\vec{a}.\vec{b})1 + i(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{\sigma}$$

و نتیجه بگیرید:

$$(\hat{n}.\vec{\sigma})^2 = 1$$

است و نهایتاً نشان دهید:

$$e^{-\frac{i}{2}\varphi\hat{n}.\vec{\sigma}} = 1\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\hat{n}.\vec{\sigma}$$

۱۲۳–$tr\,A$ که A_{ij} با رابطهٔ:

$$A_{ij} = \delta_{ij} + (1-\cos\varphi)(l_i l_j - \delta_{ij}) - \varepsilon_{ijk} l_k \sin\varphi$$

داده شده است را حساب کنید.

۱۲۴–ثابت کنید مقادیر ویژه عملگر یونیتاری، دارای قدرمطلق واحد هستند. پس در حالت کلی می بایستی بصورت زیر باشند:

$$\lambda_i = e^{i\Psi_i}$$

۱۲۵–ثابت کنید $tr\, AB = tr\, BA$ است و در نتیجه اگر $B=CA^{-1}$ باشد

$$tr\, ACA^{-1} = trC$$

می شود. (یعنی $tr\, C$ در تبدیل متشابه تغییر نمی کند.)

۱۲۶–با استفاده از این که $det(AB)=detA\ detB$ ثابت کنید که det یک عملگر در تبدیل متشابه تغییر نمی کند یعنی:

$$\det(AMA^{-1}) = \det M$$

و در نتیجه رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \prod_i \lambda_i$$

۱۲۷–میدانیم $|l\rangle$ بردار ویژه عملگر چرخش A با مقدار ویژهٔ ۱+ است.

الف– ثابت کنید اگر فرض کنیم $detA=1$ است و λ_2 و λ_3 دو مقدار ویژه دیگر A باشند $\lambda_3\lambda_2=1$ و درنتیجه:

$$\lambda_3 = e^{i\alpha}$$

λ_2 بالاجبار $e^{-i\alpha}$ می باشد (α مقداریست مجهول).

ب–نشان دهید که $tr\, A=1+2\cos\varphi$ است.

ج–در نتیجه $\lambda_2=e^{-i\varphi}$ و $\lambda_3=e^{i\varphi}$ یعنی زاویهٔ دوران φ معرف مقدار ویژه عملگر A است.

۱۲۸–معرفی پارامترهای اویلر

عملگر چرخش حول l و به اندازهٔ φ با رابطهٔ:

$$A(\hat{l},\varphi) = e^{\varphi\hat{l}\cdot\vec{S}_{op}}$$

داده شده است. دو دستگاه منطبق برهم و بردار $\boldsymbol{x}$ نسبت به یکی از دستگاهها ساکن است (یا بقولی متصل به آن است) در نظر می گیریم.

الف- دوران (اکتیو) $\vec{x}$ حول $\hat{l}=\hat{k}$ و به اندازهٔ φ آن را تبدیل به بردار $\vec{x}_1$ می نماید. رابطهٔ $\vec{x}$ با $\vec{x}_1$ را بنویسید.

$$\overline{X}_1 = e^{-\phi S_z}\,\overline{X}$$

ب- حال $\vec{x}_1$ را حول بردار $\hat{i}_1$ (چون $\vec{x}$ به یک دستگاه متصل است در اثر این دوران آن دستگاه نیز دوران نموده و تبدیل به دستگاه $ox_1y_1z_1$ می گردد و $\hat{i}_1$ بردار یکه در راستای ox_1 است) به اندازهٔ θ دوران داده و آن را تبدیل به $\vec{x}_2$ مینماید. رابطهٔ $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ را بنویسید.

ج- حال $\vec{x}_2$ را حول $\hat{k}_2$ ($\hat{k}_2$ امتداد محور z دستگاهی است که از دوران دوم حاصل شده است.) به اندازهٔ ψ می چرخانیم که بردار $\vec{x}'$ حاصل می شود. رابطهٔ $\vec{x}'$ با $\vec{x}_2$ را مشخص کنید.

د- رابطهٔ بین بردار $\vec{x}$ و بردار $\vec{x}'$ را تعیین کنید.

ه- حال تبدیلات را به صورت پسیو ($passive$) تعبیر می کنیم.

رابطهٔ بین مؤلفه های یک بردار دلخواه در دو دستگاه $oxyz$ و $ox_1y_1z_1$ را بنویسید.

رابطهٔ بین مؤلفه های یک بردار دلخواه در دو دستگاه $ox_1y_1z_1$ و $ox_2y_2z_2$ را بنویسید.

رابطهٔ بین مؤلفه های یک بردار دلخواه در دو دستگاه $ox_2y_2z_2$ و $ox'y'z'$ را بنویسید.

اگر در تبدیل $passive$ مؤلفه های یک بردار دلخواه نظیر x را در دستگاه $ox'y'z'$ را x' و y' و z' بنامیم، در تبدیل اکتیو آنها را چه بنامیم؟

و ثابت کنید (از روی مطالب فوق) که:

$$e^{-\psi\,\vec{k}_2\cdot\vec{S}_{op}}\;e^{-\theta\vec{i}_1\cdot\vec{S}_{op}}\;e^{-\varphi\,\vec{k}\cdot\vec{S}_{op}} = e^{-\varphi\,S^3_{op}}\;e^{\theta S^3_{op}}\;e^{-\psi S^3_{op}}$$

این مسئله کاربرد فراوان در مکانیک کوانتمی، دینامیک جسم صلب و ... دارد. به تغییر جایگاه پارامترها توجه دقیق نمایید.

۱۲۹- تانسور اینرسی (یک عملگر) در بردار پایهٔ $\{\vec{e}_i\}$ به صورت:

$$I_{ij} = \sum_{a=1}^{N} m_a\left(\delta_{ij} r_a^2 - x_{ia}x_{ja}\right)$$

داده شده است. اندیس a معرف ذرات مختلف است و $x_{ia} = \langle e_i|r_a\rangle$ مؤلفهٔ بردار مکانی ذرهٔ aام، $\vec{r}_a$ در امتداد $\vec{e}_i$ است.

الف- نمایش محض I را بنویسید. (این کار را برای عملگر چرخش انجام دادیم)

ب- هرگاه $\{\vec{e}'_i\}$ بردار پایه ای باشد که از تأثیر عملگر یونیتاری A بر $\{\vec{e}_i\}$ حاصل شده باشد، نمایش I در بردار پایه $\vec{e}'_i$ چگونه است؟

ج-هرگاه n بردار یکه باشد، بموجب تعریف مکانیک عمومی ممان اینرسی داریم:

$$\mathrm{I} = \sum_a m_a \rho_a^2$$

که ρ_a فاصلهٔ عمود ذره از محور n است. نشان دهید کمیت $\langle n|I|n\rangle$ برابر I می باشد.

د- مقادیر ویژه I چرا می بایستی حقیقی باشند؟(اثبات نکنید بگوئید چرا) و چرا مثبت؟

۱۳۰- هرگاه M عملگر دلخواهی باشد که برای آن M^{-1} وجود داشته باشد، ثابت کنید هرگاه سه بردار $\vec{x}_k$ (مؤلفه های آنها چه می باشند؟) از رابطهٔ:

$$M\vec{x}_k = \hat{e}_k$$

پیروی نماید ($\hat{e}_k$ بردار یکهٔ دستگاه متعامد)، در این صورت ماتریسی که ستونهای آن بوسیلهٔ بردارهای x_1 و x_2 و x_3 حاصل شده باشد M^{-1} خواهد بود.

۱۳۱-صفحه ای مار بر مبدأ مختصات که جهت عمود بر آن با بردار یکه $\hat{l}$ مشخص می شود در نظر بگیرید. انعکاس بردار $\vec{x}$ خارج از صفحه را $\vec{x}'$ بنامید. $\vec{x}'$ را برحسب $\vec{x}$ و مشخصه های صفحهٔ انعکاس بدست آورید. عملگر مربوط به انعکاس را بدست آورید.

۱۳۲-اتحادهای زیر را ثابت کنید:

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} - \ldots\ldots$$

راهنمایی:

$$(A+B)^{-1} = A^{-1}(A+B-B)(A+B)^{-1}$$

۱۳۳-نشان دهید عملگر یونیتاری را میتوان بصورت $U = e^{iH}$ نمایش داد که H هرمیتی می باشد. تعداد پارامترهای مستقل یک عملگر هرمیتی در متن درسی در فضای n بعدی محاسبه شده است. حال تعداد پارامترهای مستقل عملگر یونیتاری در فضای n

بعدی را که $detU=+1$ است حساب کنید. این عملگر را بصورت $SU(n)$نشـان میدهند.

(*Special Unitary Operator*)

۱۳۴—مقادیر ویژه و بردارهای ویژه عملگر:

$$A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

را حساب کنید.

۱۳۵—هرگاه عملگر M در دو دستگاه بردار پایهٔ $\{\vec{e}_i\}$ و $\{\vec{e}'_i\}$ نمایش آنها بصورت M و M' میباشد، نشان دهید از معادلات مشخصهٔ:

$$\det(M-1\lambda)=0$$
$$\det(M'-1\lambda')=0$$

مقادیر ویژه بدست آمده یکسان است. بقولی مقادیر ویژه بدست آمده بستگی به نمایش عملگر ندارد.

– دترمینانها

۱۳۶—الف—حاصلضرب برداری دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$بر حسب مؤلفه های کوواریانتی آنها حساب کنید.

ب—حال از روی تعریف $V_{ol}\,\vec{\varepsilon}^3=\vec{\varepsilon}_1\times\vec{\varepsilon}_2$ و $\vec{\varepsilon}^3$را در دستگاه $\{\vec{\varepsilon}_k\}$ تجزیه نمایید.

ج—حال این مسئله را به روش دیگری حل نمائید: تجزیه $\vec{\varepsilon}^3$در دستگاه $\{\vec{\varepsilon}_k\}$ برابر $\vec{\varepsilon}^3=g^{3k}\vec{\varepsilon}_k$ یعنی مؤلفهٔ کنتراواریانتی ε^3 ، g^{3k} است از طرفی g^{ij} ماتریس معکوس g_{ij} است از روی رابطه ای که ماتریس معکوس مشخص می شود g^{3k} را حساب کنید و به نتیجهٔ قسمت ب برسید.

۱۳۷—نشان دهید مقادیر ویژه و بردارهای ویژه عملگر A که با رابطهٔ زیر داده شده عبارتند از:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1=\lambda_2=3 \quad , \quad \lambda_3=14$$

$$|3\rangle = \alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \qquad |14\rangle = \begin{pmatrix}1/3\\1/2\\1\end{pmatrix}$$

۱۳۸–دترمینان واندرموند(***Vandermonde***) .هرگاه دترمینانی بصورت:

$$\Delta = \Delta(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

داده شود،(که حتی می تواند $n \times n$ باشد) دترمینان واندرموند نامند.

الف–ثابت کنید که Δ چند جمله ای همگن از مرتبهٔ ۳ است.یعنی:

$$\Delta(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^3 \Delta(a,b,c)$$

ب–هرگاه بجای a,b ، c قرار دهیم:

$$\Delta(a,c,c) = \Delta(a,a,c) = 0$$

است .پس این دترمینان بر $(a-c),(b-c),(a-b)$ قابل تقسیم است . بنابراین : $\Delta(a,b,c)=\alpha(a-c)(b-c)(a-b)$ مقدارش را از روی این که یک جملهٔ دترمینان شامل حاصلضرب عناصر قطری آن است، یعنی(bc^2) است، بدست آورید .(بدین طریقΔ محاسبه می شود). این دترمینان در اثبات بطور خطی مستقل بودن بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه غیر دژنره عملگرها استفاده می شود.

۱۳۹–ثابت کنید هرگاه عناصر یک ستون دترمینانی با عناصر ستون دیگر بطور مترادف متشابه باشند دترمینان برابر صفر میشود. همچنین هرگاه عناصر یک سطر به عناصر سطر دیگر دترمینان اضافه کنیم ،مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

۱٤۰–ثابت کنید هرگاه عناصر یک سطر(ستون)به عناصر سطر(ستون) دیگر دترمینان اضافه یا کم کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی کند. حال با علم به این موضوع ثابت کنید از دترمینان :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ i\alpha & -i\alpha & \beta & -\beta \\ e^{i(ka-\alpha c)} & e^{i(ka+\alpha c)} & -e^{-\beta b} & -e^{\beta b} \\ i\alpha e^{i(ka-\alpha c)} & -i\alpha e^{i(ka+\alpha c)} & \beta e^{-\beta b} & -\beta e^{\beta b} \end{vmatrix} = 0$$

نتیجهٔ:

$$\cos ka = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\sin\alpha c\sinh\beta b + \cos\alpha c\cosh\beta b$$

حاصل می شود.

راهنمایی :عناصر ستون اول را با ستون دوم و عناصر ستون سوم را با ستون چهارم جمع می کنیم. در دترمینان جدید بدست آمده ،نصف عناصر ستون دوم را از ستون اول کم کرده نصف عناصر ستون چهارم را از ستون سوم کم می کنیم.نتایج بدست آمده را به صورت توابع هیپربولیک و مثلثاتی می نویسیم. این مسئله کاربرد در محاسبهٔ نوارهای انرژی در کریستالهای یک بعدی دارد.

۱۴۱–ثابت کنید :

$$\left(B^{-1}\right)^{+} = \left(B^{+}\right)^{-1}$$

راهنمایی:عنصر (i,j) طرف چپ را نوشته سپس از تعریف عمومی A^{-1} استفاده کنید اثبات برای فضای سه بعدی انجام دهید.(روش آسانتری نیز وجود دارد).

۱۴۲–ثابت کنید در فضای n بعدی :

الف- $\det kA = k^n \det A$

ب- $\det A^2 = |\det A|^2$

۱۴۳–ثابت کنید که:

$$\det e^{B} = e^{tr\, B}$$

است و از روی آن نتیجه بگیرید که دترمینان عملگر چرخش یعنی det A=+1 است.

۱۴۴–عملگر T تابعی از پارامتر λ است (با یک خط استدلال)نشان دهید بسط زیر صحیح است.اتحاد *Baker - Haussdorf*:

$$T_{op}(\lambda) = T_{op}(0) + \lambda\frac{dT_{op}(0)}{d\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}\frac{d^2T_{op}(0)}{d\lambda^2} + \cdots$$

از روی آن نشان دهید :

$$T_{op}(\lambda) = e^{\lambda A}Be^{-\lambda A} = B + \lambda[A,B] + \frac{\lambda^2}{2!}\times[A,[A,B]] + \cdots$$

۱۴۵–ثابت کنید که کوفاکتور، C'_{pq}، یک دترمینان برابر است با:

$$C_{pq} = (-1)^{p+q-2} M_{pq}$$

که M_{pq} را مینور دترمینان نامند و آن دترمینانی است که از حذف سطر pام و ستون qام حاصل شده است.

۱۴۶–از روی خواص دترمینانها رابطهٔ زیر را بروش جدید حساب کنید.

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \alpha_{jl} \alpha_{km} = \sum \varepsilon_{lmp} \alpha_{ip}$$

۱۴۷–برای یک عملگر غیر هرمیتی که بردارهای ویژه آن متعامد می باشند، ثابت کنید اگر نمایش آن را در بردار پایه ای که از بردارهای ویژه آن تشکیل شده است بخواهیم از تبدیل متشابه $M'=A^{-1}MA$ بدست آوریم (که M نمایش عملگر در بردار پایه متعامد $|e_i\rangle$ و M' نمایش همان عملگر در بردارهای ویژه $|\varepsilon_i\rangle$ است). A عملگری است که ستونهای آن از ε^i ها حاصل شده که:

$$A^{-1}_{ij} = \langle \varepsilon^i | e_j \rangle \qquad , \qquad A_{ij} = \langle e_i | \varepsilon_j \rangle$$

میباشد. A_{ij}^{-1} را از روی تعریف کوفاکتور بدست آورید.

۱۴۸–در مختصات منحنی الخط غیر متعامد $divA(x)$ را محاسبه کنید (از مطالب درسی گفته شده) و نشان دهید که:

الف –
$$\bar{\nabla}.\vec{A}(\vec{x}) = A^i_{,i} \equiv G^i_{ik} A^k$$

ب– با فرض معلوم بودن $\Gamma_{ij}{}^n$ بر حسب متریک منحنی الخط، نشان دهید که (از مطالب گفته شده در جزوه):

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial q^k}$$

ج–هرگاه $\Delta = det\, g_{ij}$ و با در نظر گرفتن:

$$\sum_p a_{pq} C_{pr} = \Delta\, \delta_{pr}$$

نشان دهید که:

$$\Gamma^{i}_{ik} = \frac{1}{2}\Delta^{-1}\frac{\partial\Delta}{\partial q^{k}}$$

$$\nabla.\vec{A} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial q_{i}}\left(A^{i}\Delta\right)$$

در نتیجه:

با استفاده از قسمت د، $divA$ درمختصات منحنی الخط متعامد چگونه می شود؟

۱۴۹–به موجب رابطهٔ (۸٦–۲) جزوه ، المان حجم درمختصات منحنی الخط متعامد هنگامی که مختصات q^{i} و پارامترهای معادلهٔ فضا u,v,w باشد با رابطهٔ:

$$dV = h_1 h_2 h_3 \sum \varepsilon_{ijk}\frac{\partial q^{i}}{\partial u}\frac{\partial q^{j}}{\partial v}\frac{\partial q^{k}}{\partial w}dudvdw$$

داده می شود.حال اگر مختصات منحنی الخط دیگر q'^{i} تابعی از همان پارامترها باشد و همچنین چون $q^{i} = q^{i}(q'^{i})$ می باشد بنابراین

$$q^{i} = q^{i}\left(q'^{j}(u,v,w)\right)$$

میگردد.با جایگزینی:

$$\frac{\partial q^{i}}{\partial u} \quad , \ \ldots$$

نشان دهید:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial u} & \frac{\partial q^2}{\partial u} & \frac{\partial q^3}{\partial u} \\ \frac{\partial q^1}{\partial v} & \frac{\partial q^2}{\partial v} & \frac{\partial q^3}{\partial v} \\ \frac{\partial q^1}{\partial w} & \frac{\partial q^2}{\partial w} & \frac{\partial q^3}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial q'^1} & \frac{\partial q^2}{\partial q'^1} & \frac{\partial q^3}{\partial q'^1} \\ \frac{\partial q^1}{\partial q'^2} & \frac{\partial q^2}{\partial q'^2} & \frac{\partial q^3}{\partial q'^2} \\ \frac{\partial q^1}{\partial q'^3} & \frac{\partial q^2}{\partial q'^3} & \frac{\partial q^3}{\partial q'^3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial q'^1}{\partial u} & \frac{\partial q'^2}{\partial u} & \frac{\partial q'^3}{\partial u} \\ \frac{\partial q'^1}{\partial v} & \frac{\partial q'^2}{\partial v} & \frac{\partial q'^3}{\partial v} \\ \frac{\partial q'^1}{\partial w} & \frac{\partial q'^2}{\partial w} & \frac{\partial q'^3}{\partial w} \end{vmatrix}$$

این قانون تبدیل دترمینان ژاکوبین می باشد.

مراجع

کتابهای ریاضی بیشترین حجم از کتابخانهٔ شخصی مؤلف را اشغال نموده و مشتمل بر بیش از یکصدونود جلد کتاب می باشند. کتب نامبرده در زیر در زمینهٔ ریاضی فیزیک بیش از دیگر کتابها مورد استفاضهٔ مؤلف واقع گشته و بدین جهت آنها را به خوانندگان گرامی معرفی می نماید.

1-Vector Analysis by M.R.Spiegel
Shaum's outline series (1981)

اشپیگل صاحب تألیفات عدیده ای است که هر یک از دیگری بهتر میباشد. کتاب آنالیز برداری آن در زمرهٔ بهترین تألیفات اوست و به عنوان اولین کتاب مرجع معرفی می گردد.

ابتیاع هند بوک ریاضی (Mathematical Handbook) او قویا" توصیه میگردد.

2-A Brief on Tensor Analysis by J.G.Simmonds
Springer Verlag (1989)

کتابی است در حجم کم و پرمحتوا بالاخص در مبحث مختصات منحنی الخط غیر متعامد بسیار مفید می باشد.

3-Mathematical Methods for Physicists by G.Arfken
3-rd edition Academic press (1985)

کتاب شناخته شده ای در ایران است و از طرف وزارت علوم به عنوان کتاب درسی معرفی شده است. فصل توابع خاص آن بهتر از دیگر مطالب به رشتهٔ تحریر در آمده است.

4-Differential Equations and the Calculus of Variation
by L.Elsgolts Mir (1977)

هر چند این کتاب شامل مطالب ریاضی فیزیک ۱ نمی باشد ، ولی به علت آن که یکی از کتابهای بسیارخوب بالاخص درمبحث حساب وردشی Calculus of variations می باشد ، در اینجا معرفی می گردد.

5-Cartesian Tensors by H.Jeffreys Cambridge (1969)

مؤلف بوسیلهٔ این کتاب اولین بار با مباحث تانسورها آشنا شده است . هرچند دارای حجم بسیار کم می باشد اما کتابیست خواندنی.

6-Vectors Tensors and the Basic equations of Fluid Mechanics
by R.Aris Prentice Hall (1962)

کتاب بسیار خوبی است که اخیرا" هم انتشارات Dover آن را تجدید چاپ نموده است. البته ریاضیات تانسوری معرفی شده در این کتاب در جهت توجیه مکانیک سیالات بکار گرفته شده است .مؤلف ضرائب کریستوفل را اولین بار از کتاب مزبور آموخته است.

7-Mathematics of Classical and Quantum Physics vol1 & vol2
by Byron & Frller
Addison Wesley (1969)

از کتابهای خوب و استاندارد ریاضی فیزیک است و در بعضی از دانشکده های فیزیک به عنوان کتاب درسی استفاده می شود.

8-Vector Calculus 2nd edition by J.Marsden & A.J.Tromba

مؤلف اول این کتاب از افراد بسیار سرشناس در مکانیک و هندسه دیفرانسیل می باشد . این کتاب در سطح بالایی می باشد و به زبان فارسی ترجمه شده است به مترجمان آن برای انتخاب این کتاب برای ترجمه میبایستی تبریک گفت.

9-Differential and Integral Calculus by N.Piskunov Mir (1967)

اولین کتاب ریاضی و اولین کتاب به زبان انگلیسی که حدود سی سال قبل مؤلف به قیمت چهارده تومان ابتیاع کرده است .به علت مطالعهٔ مکرر آن هنوز هم عنوان اولین کتاب مرجع ریاضی را برای مؤلف حفظ نموده است.

10-Advanced Calculus for Applications by F.B.Hilderbrand
Prentice Hall (1962)

اولین کتاب ریاضی فیزیک است که مؤلف در مقام تلمذ از آن استفاده کرده است. سر فصلهای آن با سرفصلهای کتاب مرجع (۳) همخوانی ندارد ومؤلف آن از اساتید دانشگاه .M.I.T بوده است.

11-Mathematical Methods of Physics 2-nd edition
by J.Mathews & R.L.Walker The Bnjamin/Cummings (1969)

از کتابهای ریاضی فیزیک خوب که به زبان فارسی ترجمه شده است .مؤلفین این کتاب از مدرسین دانشگاه Caltech بوده اند و سرفصلهای آن مشابه سرفصلهای کتاب (۱۰) می باشد.

12-Fundamentals of Mathematical Physics by Edgar A.Kraut
Krieger (1979)

یک کتاب ریاضی فیزیک که به زبان فارسی هم ترجمه شده است.مشابه کتاب (۱۱)

13-Mathematical Physics by E.Butkov
Addison Wesley (1968)

کتاب ریاضی فیزیک خوبی است.

14-Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig
fifth edition John Wiley & Sons (1983)

از کتابهای ریاضی مهندسی خوب که در ایران افست شده است.

15-Vector Analysis by M.L.Krasnov ,A.I.Kiselev ,G.I.Makarenko

Mir (1977)

از کتابهای خوب و ارزان قیمت آنالیز برداری که در زمان حکومت کشور شوروی منتشر گردیده است.

16-Vector Analysis 2nd edition by B.Spain

D.Van Nostrand Company (1967)

کتاب آنالیز برداری در حجم کوچک که بسیاری از مطالب آنالیز برداری را شرح داده است.

17-Advanced Calculus 2nd edition by Wilfred Kaplan

Addison Wesley

یکی از کتابهای بسیار خوب ریاضی که نسخهٔ قدیمی از آن در سالهای اخیر به کتابخانهٔ مؤلف افزوده شده است. مؤلف آرزو داشت که زودتر با این کتاب آشنا میشد.

18- آنالیز برداری تألیف دکتر حسن ربانی (دانشگاه امیر کبیر)

یکی از کتابهای بسیار خوب که به زبان فارسی نوشته شده است.

19-Elements of Green's Functions and Propagation ,Potentials ,

Diffusion and Waves by G.Barton

Oxford Sience publication (1991)

از کتابهای بسیا رخوب در سطح کار شناسی ارشد که به عنوان کتاب مرجع برای آموختن توابع گرین در الکترودینامیک جکسون بسیار مفید است.

20-Principles of Quantum Mechanics by R. Shankar

Plenum Press (1980)

این کتاب اثر بسیار برجسته در زمینه مکانیک کوانتمی است که به دفعات مکرر در امریکا تجدید چاپ شده است. هر چند این کتاب توسط مؤلف در دانشگاه صنعتی شریف و علم و صنعت ایران بارها تدریس شده است اما متأسفانه هنوز هم در دانشگاههای ایران کاملاً شناخته شده نیست. مطالعهٔ این کتاب را به کلیهٔ کسانی که می خواهند مکانیک کوانتمی را به صورت اصولی بفهمند قویاً توصیه می گردد. جبر خطی آن در مقایسه با کتاب مکانیک کوانتمی ساکورای بهتر است.

21-Theory And Problems of Matrices by F.Ayres Jr.
Schaum's Outline Series (1962)

همانند دیگر کتابهای سری Schaum دارای مثالهای حل شده متعددی در زمینه ماتریسها و دترمینانها می باشد. این کتاب در رده اولین کتابهایی بوده است که مؤلف برای آشنا شدن با مبحث ماتریسها از آن استفاده کرده است.

22-Methods of Theorical Physics vol 1 & 2

by P.M.Morse & H.Feshbach Mc Graw-Hill (1953)

این کتاب در دو جلد و قریب ۱۹۰۰ صفحه از معروفترین کتابهای ریاضی فیزیک است و تقریباً تمامی زمینه های ریاضی فیزیک ۱، ۲ و ۳ را پوشانده است. مؤلف اعتراف دارد که از این کتاب استفاده زیادی نبرده است اما به حکم وظیفه آن را معرفی می نماید.

23-The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism
by Sir James Jeans Cambridge (1966)

این کتاب که نخستین بار در سال ۱۹۰۸ بچاپ رسیده است نشان از سیادت فیزیک بریتانیا در زمینهٔ الکتریسیته در اوائل قرن بیستم دارد. مطالب ریاضی کتاب بسیار جالب و خواندنی است اما نوتاسیون آن قدیمی است.

24-Tensor Calculus by D.C.Kay
Schaum's Outline series (1988)

در رده مرجع شماره ۲۱ توصیف گردد.

25-Introduction to General Relativity
by R.J.Adler , M.J.Bazin & M.Schiffer
2-nd edition McGraw-Hill (1975)

مؤلف از روی این کتاب با مبحث نسبیت عام آشنا شده است. تعریف مؤلفه های کوواریانتی و کنتراواریانتی یک بردار که بدون شرح انگیزه در این کتاب آمده است باعث تفحص مؤلف در زمینه مختصات منحنی الخط غیر متعامد گردید و نتایج این مفاهیم در این کتاب آمده است.

26-An Introduction to Differential Equations and Linear Algebra
by S.W.Goode Prentice Hall (1991)

مطالعهٔ بخش مربوط به جبر خطی و دترمینان این کتاب برای مؤلف مفید بوده است.