سرگرمی‌های جبر

ی. پرلمان

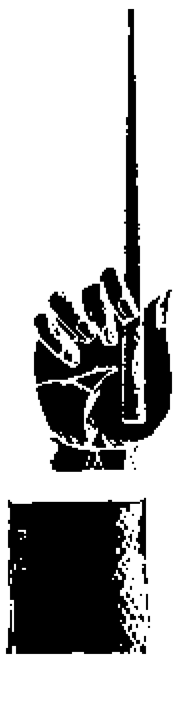
انتشارات «میر» مسکو

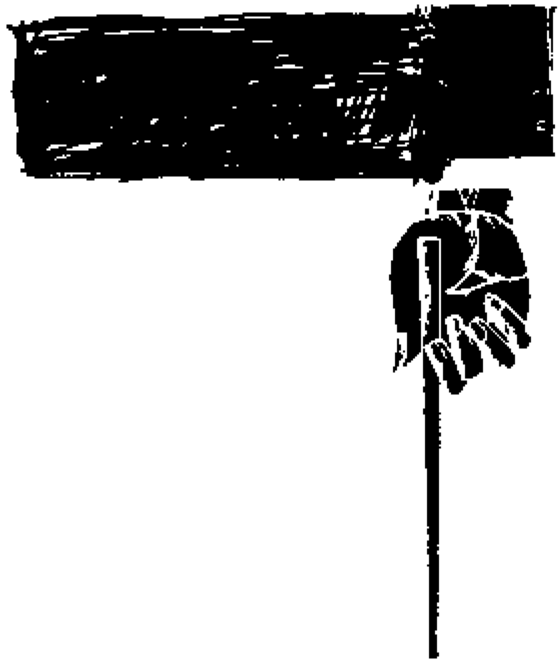
۱۹۸۵

Я. ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА





ی . پرلمان

سرگرمیهای جبر

چاپ دوم

انتشارات «میر» مسکو

۱۹۸۵

چاپ اول — ۱۹۸۲

ترجمه : محمد یاسین

На персидском языке

فصل اول

عمل پنجم ریاضی

۱۱۱۱

عمل پنجم

جبر را گاهی بنام «حساب هفت عمل» می‌نامند بخاطر اینکه در آن به اعمال چهارگانه ریاضی مشهور، سه عمل جدید دیگر علاوه می‌شود: به توان رسانیدن و دو عمل معکوس آن.

بحث جبری ما از «عمل پنجم» به توان رسانیدن شروع میشود.

آیا ضرورت به این عمل نو از زندگی عملی سرچشمه میگیرد؟ بله، البته. ما در بسیاری امور با آن روبرو می‌شویم. موارد زیادی را از قبیل محاسبهٔ مساحت و حجم بخاطر بیاورید که ما اغلب مجبور میشویم اعداد را بتوان دو و سه برسانیم. قوهٔ جاذبه، عمل متقابل الکترواستاتیکی و مغناطیسی، نور، صوت بنسبت معکوس توان دوم فاصله ضعیف میشوند. دورهٔ گردش سیارات بدور خورشید (و اقمار بدور سیارات) با فاصله تا مرکز چرخش همچنین دارای رابطهٔ توانی می‌باشد: نسبت توانهای دوم زمان گردش برابر است با نسبت توانهای سوم فاصله.

نباید فکر نمود که در عمل، ما تنها با توانهای دوم و سوم سر و کار داریم یا اینکه نماهای بزرگتر تنها در تمرینات جبری موجود است. مهندسی که محاسبات مقاومت را انجام میدهد در هر گام با توانهای چهارم و در محاسبات دیگر (مثلا قطر لولهٔ بخار) حتی با توان ششم سروکار دارد. مهندس هیدرولیک نیز هنگام تحقیق نیروئی که آب جاری بر سنگ‌ها وارد آورده و با خود میبرد با رابطهٔ درجهٔ ششم روبرو می‌شود: هرگاه سرعت جریان یک رودخانه چهار

مرتبه نسبت به رودخانهٔ دیگر زیادتر باشد در این صورت رودخانهٔ تند قادر است سنگهائی ٤^٦ یعنی ٤٠٩٦ مرتبه سنگینتر را نسبت به رودخانهٔ کند در بستر خود بغلتاند.

در اثنای تحقیق بستگی درخشندگی جسم گداخته‌ای مثلا فیلامان لامپ الکتریکی به درجهٔ حرارت، ما با توان‌های بلندتر روبرو می‌شویم. درخشندگی کلی در حالت گداختگی سفیدرنگ با توان دوازدهم درجهٔ حرارت، و در حالت گداختگی قرمزرنگ با توان ۳۰ ــ ام درجهٔ حرارت «مطلق» (یعنی آنکه مبدأ حسابش در °۲۷۳ ــ است) افزایش می‌یابد. و این چنین معنی دارد که هرگاه جسمی را از ۲۰۰۰ الی ٤٠٠٠ درجهٔ حرارت (مطلق)، یا دو برابر، حرارت دهیم درخشندگی آن ۲^۱۲ یا ٤٠٠٠ مرتبه زیادتر میشود. از اینکه این بستگی ویژه چه اهمیتی در ساخت لامپهای برقی دارد در جای دیگری صحبت می‌کنیم.

اعداد نجومی

هیچ کس مانند منجم‌ها عمل پنجم ریاضی را این قدر وسیع بکار نمی‌برد. محققین فضای خارجی در هر قدم به اعداد بزرگ که دارای یکی دو رقم با معنی و تعداد زیاد صفرها می‌باشند برخورد می‌کنند. نمایش این اعداد بزرگ که بحق «اعداد نجومی» نام دارد به شکل معمولی مخصوصا در اثنای محاسبات، مناسب نیست. مثلا فاصله تا سحاب آندرومد را اگر به شکل معمولی بنویسیم با این تعداد کیلومتر بیان می‌شود:

۹۵ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰

در انجام محاسبات نجومی اغلب لازم می‌آید فواصل سماوی نه به کیلومتر یا واحدهای بزرگتری بلکه برحسب سانتی‌متر بیان شود. در اینصورت فاصله فوق با عددی که دارای پنج صفر دیگر میباشد بیان می‌شود:

۹۵ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰

جرم ستارگان با اعداد بازهم بزرگتر بیان می‌شود بخصوص اگر بطوریکه در اغلب محاسبات ضرور است آنرا برحسب گرم بیان کنیم. جرم خورشید به گرم مساوی است به

۱۹۸۳ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰

به آسانی میتوانیم تصور کنیم که محاسبه با اعدادی اینچنین بزرگ چقدر مشکل و مقرون به اشتباه است. و اما در اینجا اعداد بزرگتر نجومی مد نظر گرفته نشده است.

عمل پنجم ریاضی، راه ساده‌ای برای حل این مشکل به محاسبه‌گران نشان میدهد. عدد یک که در پهلوی آن صفرها قرار دارند، توانی معین از ده میباشد:

$$۱۰۰ = ۱۰^{۲},\quad ۱۰۰۰ = ۱۰^{۳},\quad ۱۰۰۰۰ = ۱۰^{٤},\ldots$$

اعداد بزرگی که قبلا ذکر شد می‌توانند بشکل زیر ارائه شوند:

عدد اول . . . . . . ۹۵×۱۰^{۲۳}

عدد دوم . . . . . . ۱۹۸۳×۱۰^{۳۰}

این کار نه تنها به خاطر صرفه‌جوئی جا صورت میگیرد بلکه برای آسانی محاسبه نیز می‌باشد. هرگاه ضرور باشد تا این دو عدد در هم ضرب شوند کافی است که حاصل‌ضرب $۹۵ \times ۱۹۸۳ = ۱۸۸۳۸۵$ را دریافت نموده و مابعد آن، ضریب $۱۰^{۲۳+۳۰} = ۱۰^{۵۳}$ را بنویسیم:

$$۹۵ \times ۱۰^{۲۳} \times ۱۹۸۳ \times ۱۰^{۳۰} = ۱۸۸۳۸۵ \times ۱۰^{۵۳}$$

البته این مناسبتر از آنستکه ابتداء عددی با ۲۳ صفر، بعد با ۳۰ صفر، و بالاخره با ۵۳ صفر بنویسیم، نه تنها مناسب‌تر بلکه مطمئن‌تر هم هست زیرا با نوشتن چندین صفر ممکن است یکی دو صفر آن از چشم بازماند و باعث نتیجهٔ غلط شود.

تماسی هوا چقدر وزن دارد؟

برای آنکه مطمئن شویم که محاسبات عملی اعداد بزرگ تا چه اندازه با استفاده از نمایش توانی آسان می‌شود، محاسبه زیر را

انجام میدهیم: جرم کرهٔ زمین چند مرتبه از جرم تمام هوای اطراف آن بیشتر می‌باشد؟

بطوریکه میدانیم هوا در هر سانتی‌متر مربع سطح زمین با قوهٔ تقریباً یک کیلوگرم فشار وارد می‌کند. این، چنین معنی میدهد که وزن ستونی از جو با قاعدهٔ یک سانتی‌متر مربع برابر یک کیلوگرم است. پوشش جوی زمین از چنین ستونهای هوا تشکیل گردیده و تعداد آنها برابر تعداد سانتی‌متر مربع‌های سطح سیاره ما بوده و وزن تماسی جو نیز برابر همین تعداد است. کتاب‌های راهنما نشان میدهند که سطح کرهٔ زمین به اندازهٔ ۵۱۰ سلیون کیلومتر مربع یعنی ۵۱×۱۰^{۷} کیلومتر مربع می‌باشد.

حال محاسبه می‌کنیم یک کیلومتر مربع شامل چند سانتی‌متر مربع می‌باشد. یک کیلومتر خطی که شامل ۱۰۰۰ متر، و هر متر شامل ۱۰۰ سانتی‌متی میباشد معادل $۱۰^{۵}$ سانتی‌متر است و کیلومتر مربع شامل $۱۰^{۱۰} = (۱۰^{۵})^{۲}$ سانتی‌متر مربع می‌باشد. بنا بر این، تماسی سطح کرهٔ زمین شامل

$$۵۱ \times ۱۰^{۷} \times ۱۰^{۱۰} = ۵۱ \times ۱۰^{۱۷}$$

سانتی‌متر مربع می‌باشد. وزن جو زمین به کیلوگرم برابر مقدار فوق می‌باشد. اگر این مقدار را به تن مبدل نمائیم بدست می‌آوریم:

$$۵۱ \times ۱۰^{۱۷} : ۱۰۰۰ = ۵۱ \times ۱۰^{۱۷} : ۱۰^{۳} = ۵۱ \times ۱۰^{۱۷-۳} =$$
$$= ۵۱ \times ۱۰^{۱۴}$$

جرم کرهٔ زمین توسط عدد

$$۶ \times ۱۰^{۲۱} \text{ تن}$$

بیان می‌شود.

برای اینکه تعیین نمائیم که سیارهٔ ما چند مرتبه از پوشش هوائی آن سنگین‌تر است عمل تقسیم را انجام میدهیم:

$$۶ \times ۱۰^{۲۱} : ۵۱ \times ۱۰^{۱۴} \approx ۱۰^{۶}$$

یعنی جرم جو تقریباً یک سلیونیم جرم کرهٔ زمین را تشکیل میدهد.

سوختن بدون شعله و گرما

هرگاه شما از شیمیدانی بپرسید که چرا چوب و زغال تنها در درجهٔ حرارت بالا میسوزد، برایتان می‌گوید که ترکیب کربن با اکسیژن در هر درجهٔ حرارت صورت میگیرد منتها در درجهٔ حرارت‌های پائین، این فرایند بسیار بطی بوده (یعنی در فعل و انفعال تعداد بسیار کم ملکول شرکت دارد) و بنا بر این از نظرمان محو میشود. قانونیکه سرعت فعل و انفعالات شیمیائی‌را مشخص می‌سازد چنین حکم می‌کند: در اثر پائین رفتن درجهٔ حرارت به اندازهٔ ۱۰°، سرعت فعل و انفعال (تعداد ملکول‌های شرکت‌کننده در آن) دو برابر کم میشود.

گفتار بالا را در مورد فعل و انفعال ترکیب شدن چوب با اکسیژن یعنی در مورد فرایند سوختن چوب بکار میبریم. فرض کنیم در حرارت ۶۰۰° در هر ثانیه یک گرم چوب بسوزد. در چه مدت زمانی یک گرم چوب در حرارت ۲۰° خواهد سوخت؟ ما حالا میدانیم که در درجهٔ حرارتیکه $۵۸ \times ۱۰ = ۵۸۰$ درجه پائین‌تر باشد سرعت فعل و انفعال

$$۲^{۵۸} \text{ مرتبه}$$

کم‌تر است یعنی یک گرم چوب در مدت $۲^{۵۸}$ ثانیه می‌سوزد.

این فاصلهٔ زمان برابر چند سال خواهد بود؟ ما میتوانیم این را به صورت تقریبی بدون اینکه عمل ضرب در عدد ۲ را ۵۷ مرتبه انجام دهیم و بدون استفاده از جدول لگاریتم حساب کنیم. نظر باینکه

$$۲^{۱۰} = ۱۰۲۴ \approx ۱۰^۳$$

$$۲^{۵۸} = ۲^{۶۰-۲} = ۲^{۶۰} : ۲^۲ = \frac{۱}{۴} \times ۲^{۶۰} = \frac{۱}{۴} \times (۲^{۱۰})^۶ \approx$$

$$\approx \frac{۱}{۴} \times ۱۰^{۱۸}$$

یعنی تقریباً یک چهارم کوینتیلیون ثانیه. یک سال برابر ۳۰ ملیون یعنی ۳×۱۰^{۷} ثانیه میباشد لذا

$$\left(\frac{۱}{۴} \times ۱۰^{۱۸}\right) : (۳ \times ۱۰^{۷}) = \frac{۱}{۱۲} \times ۱۰^{۱۱} \approx ۱۰^{۱۰}$$

ده ملیارد سال! یک گرم چوب بدون شعله و گرما طی این مدت زمان خواهد سوخت.

بدین ترتیب چوب و زغال در درجهٔ حرارت عادی نیز، بدون آنکه آنهارا آتش بزنند، می‌سوزند. اختراع وسایل تولید آتش، این فرایند بسیار بطی‌را ملیاردها مرتبه سرعت بخشیده است.

تنوع وضع هوا

مسئله

بیائید وضع هوا را برحسب اینکه آسمان ابری است یا نه، مشخص سازیم یعنی تنها بین روزهای صاف و ابرآلود فرق بگذاریم. شما چه فکر می‌کنید، آیا تحت چنین شرایطی تعداد هفته‌ها با تناوب‌های گوناگون وضع هوا زیاد خواهد بود؟

به نظر میرسد که نه، زیرا بعد از گذشت دو ماه، تمامی ترکیب‌های روزهای صاف و ابرآلود هفته بوقوع پیوسته و ناگزیر یکی از ترکیب‌هائی که قبلا صورت گرفته بود تکرار خواهد شد.

کوشش می‌کنیم بطور دقیق محاسبه نمائیم که تحت همین شرایط چند ترکیب مختلف امکان‌پذیر است. این یکی از مسایلی است که بصورت غیرمترقبه ما را به طرف عمل پنجم ریاضی می‌کشاند.

حال ببینیم روزهای صاف و ابری در هفته به چه صورتهای مختلفی ممکن است عوض شوند؟

حل

روز اول هفته می‌تواند یا صاف باشد و یا ابرآلود، بنا بر این عجالتا دو «ترکیب» داریم.

در جریان دو روز، تناوب روزهای صاف و ابرآلود ممکن است بصورت زیر باشد:

صاف و صاف
صاف و ابرآلود
ابرآلود و صاف
ابرآلود و ابرآلود

مجموعا در جریان دو روز تعداد تناوب‌های مختلف $۲^۲$ است. در فاصلهٔ سه روز هر کدام از ترکیبات چهارگانهٔ دو روز اول با دو ترکیب روز سوم ترکیب گردیده که در مجموع تعداد انواع تناوب‌ها چنین خواهد بود:

$$۲^۲ \times ۲ = ۲^۳$$

در جریان چهار روز تعداد تناوب‌ها به

$$۲^۳ \times ۲ = ۲^٤$$

میرسد.

در مدت پنج روز تعداد تناوب‌های ممکنه به $۲^٥$، و در مدت شش روز به $۲^٦$، و بالاخره در هفته به $۱۲۸ = ۲^۷$ میرسد.

از اینجا بر می‌آید که تعداد هفته‌ها با ترتیب مختلف روزهای صاف و ابرآلود ۱۲۸ می‌باشد. بعد از گذشت مدت $۱۲۸ \times ۷ = ۸۹٦$ روز ضروراً باید یکی از ترکیبات قبل تکرار شود. البته این تکرار ممکن است زودتر صورت گیرد اما با گذشت ۸۹٦ روز چنین تکراری حتمی است. و بر عکس ممکن است دو سال آزگار و حتی بیشتر (۲ سال و ۱٦٦ روز) سپری شود که در آن هیچ هفته از نظر وضع هوا با هیچ هفتهٔ دیگری مشابه نباشد.

قفل رمزدار

مسئله

در یکی از موسسات شوروی گاوصندوقی یافت گردید که از سالهای ماقبل انقلاب بجا مانده بود. کلید آن هم پیدا شد ولی برای باز کردن گاوصندوق بایستی رمز قفل کشف میشد. در

گاوصندوق دارای پنج حلقه بوده و بدور هر حلقه حروف الفبا* (۳۶ حرف) حک گردیده بود. برای آنکه در گاوصندوق باز گردد باید حلقه‌ها در وضعی قرار داده میشد تا کلمهٔ معینی بدست آید. چون هیچ کس این کلمه را نمی‌دانست، برای اینکه گاوصندوق را خراب نکنند، تصمیم گرفتند تا کلیهٔ ترکیبات حروف حلقه‌ها آزمایش شوند. برای تشکیل دادن یک ترکیب مدت ۳ ثانیه لازم بود.

آیا میشد توقع داشت که گاوصندوق در ظرف ده روز آینده باز میگردید؟

حل

حساب میکنیم چه تعداد ترکیبات حروف باید آزمایش میشد.

هر یک از ۳۶ حرف حلقهٔ اولی میتواند در برابر هر کدام از ۳۶ حرف حلقهٔ دوی قرار گیرد یعنی تعداد ترکیب‌های ممکنهٔ دوحرفی چنین است:

$$۳۶ \times ۳۶ = ۳۶^{۲}$$

به هر کدام این ترکیبات میتوان هر کدام از ۳۶ حرف حلقهٔ سوم را اضافه کرد. بنا بر این، تعداد ترکیب‌های ممکنهٔ سه حرفی چنین است:

$$۳۶^{۲} \times ۳۶ = ۳۶^{۳}$$

به همین ترتیب تعیین میکنیم که تعداد ترکیب‌های ممکنهٔ چهارحرفی $۳۶^{٤}$، و پنج حرفی $۳۶^{٥}$ یا ۶۰ ٤۶۶ ۱۷۶ است. وقتی که برای تشکیل بیش از ۶۰ ملیون ترکیب لازم میشد، بر اساس سه ثانیه‌ای یک ترکیب، چنین است (به ثانیه):

$$۳ \times ۶۰\ ٤۶۶\ ۱۷۶ = ۱۸۱\ ۳۹۸\ ٥۲۸$$

و این بیش از ۵۰۰۰۰ ساعت یا قریب ۶۳۰۰ روز کار ۸ ساعته و یا بیشتر از ۲۰ سال است.

یعنی شانس اینکه گاوصندوق را در ده روز آینده باز کنند ۱۰ در ۶۳۰۰ و یا یک در ۶۳۰ است. و این، احتمالی بسیار ضعیفی است.

---

* الفبای روسی

دوچرخه‌سوار موهوم‌پرست

مسئله

تا چندی پیش، هر دوچرخه، مانند اتومبیل، شماره داشت و این شماره شامل شش رقم بود.

شخصی دوچرخه‌ای خرید و خواست دوچرخه‌سواری را بیاموزد. معلوم گردید که مالک دوچرخه انسان موهوم‌پرستی است. بعد از آنکه از یک عیب دوچرخه‌ها بنام «هشت شکلی *» اطلاع یافت نتیجه گرفت که شانس همراه او نخواهد بود اگر در شمارهٔ دوچرخه ولو یک رقم هشت باشد. ولی وقتیکه برای گرفتن شماره میرفت خود را با قضاوت زیر تسلی می‌داد. در نوشتن هر عدد ده رقم میتواند شرکت کند: ۰، ۱، ...، ۹. از جملهٔ آنها تنها عدد ۸ شانس بد می‌آورد. بنا بر این تنها یک شانس از ده شانس موجود است که شماره «بد شانسی» بیاورد.

آیا این قضاوت درست بود؟

حل

بطور کلی ۹۹۹ ۹۹۹ شماره از ۰۰۱ ۰۰۰، ۰۰۲ ۰۰۰ و غیره الی ۹۹۹ ۹۹۹ موجود بود. حساب می‌کنیم که چند شماره «خوب» موجود می‌باشد. در جای اول میتواند هر کدام از نه رقم «خوب» قرار گیرد: ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۹. در جای دوم نیز هر کدام از نه رقم میتواند قرار گیرد. بنا بر این $۹ \times ۹ = ۹^{۲}$ ترکیب دورقمی «خوب» موجود می‌باشد. به هر کدام از این ترکیبات (در جای سوم) میتوان هر کدام از نه رقم را اضافه نمود طوریکه $۹^{۲} \times ۹ = ۹^{۳}$ ترکیب سه‌رقمی «خوب» امکان‌پذیر است.

از همین طریق تعیین می‌نمائیم که تعداد ترکیب‌های شش‌رقمی «خوب» مساوی $۹^{٦}$ است. اما باید در نظر داشت که این عدد

---

* منظور از این عیب کجی چرخ است که در نتیجهٔ آن اگر در جهت طولی دوچرخه نگاه کنیم شکل رقم اروپائی هشت (8) را می‌بینیم.

همچنین شامل ترکیب ... ... است که برای شمارهٔ پلاک دوچرخه مناسب نیست. بنا بر این تعداد شماره‌های «خوب» دوچرخه برابر به $9^6 - 1 = 531\,440$ است یعنی کمی بیشتر از ۵۳٪ کلیهٔ شماره‌ها است، و نه ۹۰٪ بطوریکه دوچرخه‌سوار تصور میکرد.

به خواننده پیش‌نهاد می‌کنیم تا خود مطمئن شود که در میان شماره‌های هفت‌رقمی تعداد شماره‌های «بد» نسبت به شماره‌های «خوب» زیادتر است.

نتیجهٔ دوچندان ساختن مکرر

افسانهٔ معروف بخشش برای مخترع بازی شطرنج مثال بارزی است برای افزایش فوق‌العاده سریع مقادیر کوچک در اثر دوچندان ساختن مکرر آنها. در این مثال کلاسیک توقف ننموده و مثال‌های دیگری را که شهرت چندان زیادی ندارند ذکر میکنیم.

مسئله

خیسهٔ درازاندامک *infuzoria paramecia* در هر ۲۷ ساعت (بصورت متوسط) دو نصف می‌شود. هرگاه تمامی خیسه‌های متولد شده زنده بمانند، چه مدتی لازم است تا نسل‌های بعدی یک درازاندامک حجمی برابر حجم خورشید را اشغال نمایند؟

اطلاعات برای محاسبه: نسل ۴۰ — ام درازاندامک که بعد از انقسام نمی‌میرند حجم یک متر مکعب را اشغال میکنند. حجم خورشید را برابر با 10^{27} متر مکعب میگیریم.

حل

مسئله این شکل را بخود میگیرد که چند مرتبه باید یک متر مکعب را دوچندان ساخت تا حجم 10^{27} متر مکعب بدست آید. تبدیلات زیر را انجام میدهیم:

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 = 2^{90}$$

چون $1000 \approx 2^{10}$.

بنا بر این، نسل چهلم باید ۹۰ انقسام دیگر را متحمل شود تا به اندازهٔ حجم خورشید بزرگ شود. مجموع تعداد نسل‌ها با حساب از نسل اول، برابر ۱۳۰ = ۹۰ + ۴۰ است. بآسانی میتوان حساب نمود که اینکار در شبانه‌روز ۱۴۷ — ام صورت میگیرد.

باید گفت که عملا یک میکروبیولوژیست بنام متالنیکف ۸۰۶۱ انقسام درازاندامک را مشاهده نمود. پیشنهاد میشود که خواننده خودش حساب کند هرگاه هیچ یک خیسه از این تعداد تلف نگردد نسل آخری چه حجم بزرگی را اشغال خواهد کرد؟

سوالی را که در این مسئله بررسی شد می‌توان به شکل معکوس بیان نمود:

بیائید تصور کنیم که خورشید ما به دو بخش، و نصف آن نیز به دو بخش تقسیم گردد و الخ. چه تعدادی عمل انقسام باید صورت گیرد تا ذراتی به اندازهٔ خیسه بدست آید؟

گرچه جواب بر خواننده معلوم و برابر ۱۳۰ است بخاطر کوچکی فوق‌العادهٔ خود، مایهٔ شگفتی میباشد.

برای من همین مساله را بشکل زیر پیشنهاد کردند:

ورق کاغذ را به دو نصف تقسیم می‌نمایند، یکی از نصفه‌ها را دوباره دو نصف می‌نمایند و الخ. چند عمل تقسیم باید صورت گیرد تا ذراتی باندازهٔ اتم بدست‌آید؟

فرض می‌کنیم که وزن ورق کاغذ ۱ گرم باشد و برای وزن اتم مقداری برابر $\frac{۱}{۱۰^{۲۴}}$ گرم را قبول می‌کنیم. چون در عبارت آخر $۱۰^{۲۴}$ را میتوان با عبارت تقریباً مساوی آن، $۲^{۸۰}$، تعویض نمود بنا بر این واضح است که بجای ملیونها عمل تقسیم که گاهی در جواب این مساله میگویند تنها ۸۰ عمل تقسیم لازم خواهد بود.

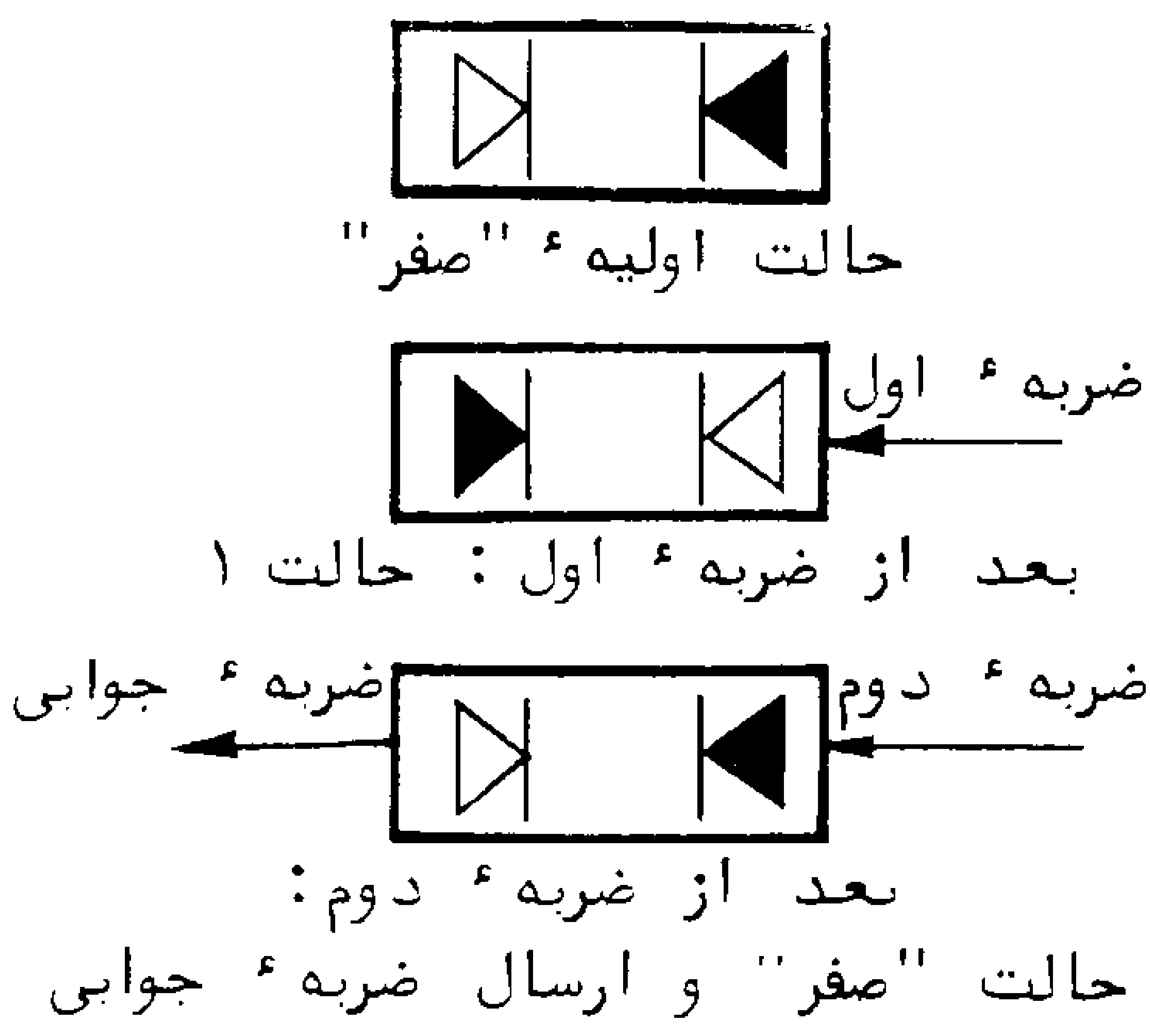
ملیونها مرتبه سریع‌تر

یک دستگاه برقی بنام نوسانگر، دارای دو لامپ الکترونی است (مانند لامپ‌هائی که در دستگاه‌های رادیو مورد استفاده قرار میگیرد). جریان در نوسانگر تنها از راه یک لامپ

می‌تواند بگذرد، یا از طریق «چپ» و یا از طریق «راست».
نوسانگر دارای دو اتصالی است که از طریق آنها می‌توان علامت کوتاه‌مدت برق (ضربهٔ برقی) را از خارج وارد نمود و دو اتصالی دیگر که از طریق آنها ضربهٔ برقی جوابی از نوسانگر خارج میشود. در لحظهٔ داخل شدن ضربه برقی از خارج، نوسانگر مدارش را عوض میکند: لامپی که از طریق آن جریان برق می‌گذشت خاموش گردیده و جریان از طریق لامپ دیگر می‌گذرد. ضربهٔ جوابی در لحظه‌ای توسط نوسانگر ارسال میشود که لامپ راست از مدار جدا میگردد و لامپ چپ بمدار وصل میشود.

ببینیم نوسانگر چگونه کار میکند اگر چند ضربهٔ الکتریک، یکی پس از دیگری، به آن برسد. حالت نوسانگر را از روی حالت لامپ راست آن مشخص میکنیم: هرگاه جریان از لامپ راست عبور نکند میگوئیم که نوسانگر در حالت «صفر» و اگر جریان از لامپ راست جاری باشد این حالت را «حالت ۱» مینامیم.

فرض کنیم ابتداء نوسانگر در حالت «صفر» باشد یعنی جریان از لامپ چپ عبور کند (شکل ۱). پس از ضربهٔ اول جریان از لامپ راست میگذرد یعنی نوسانگر در حالت ۱ قرار میگیرد. ضمناً ضربهٔ



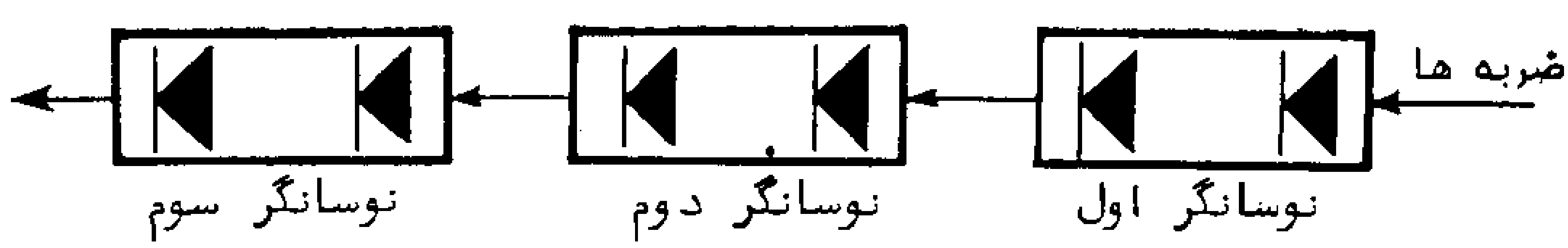
شکل ۱

جوابی از نوسانگر بیرون نمی‌آید چون علامت جوابی در لحظهٔ خاموش شدن لامپ راست (و نه چپ) تولید میشود.

بعد از ضربهٔ دوم جریان از لامپ چپ عبور میکند یعنی نوسانگر دوباره بحالت «صفر» در می‌آید. لکن در این ضمن، نوسانگر علامت (ضربهٔ) جوابی را بیرون میدهد.

در نتیجه (پس از دو ضربه)، نوسانگر مجددا به حالت اولیه باز میگردد. بنا بر این، بعد از ضربهٔ سوم (مانند پس از ضربهٔ اول)، نوسانگر حالت ۱، و پس از ضربهٔ چهارم (مانند پس از ضربهٔ دوم) حالت «صفر» را بخود میگیرد و در عین حال علامت جوابی را بیرون میدهد و الی آخر. پس از هر دو ضربه، حالات نوسانگر تکرار میشود.

حال، در نظر مجسم کنیم که چند نوسانگر در اختیار داریم و ضربه‌ها از خارج به نوسانگر اول وارد شود و ضربه‌های جوابی نوسانگر اول به نوسانگر دوم، و ضربه‌های جوابی نوسانگر دوم به نوسانگر سوم منتقل گردد و الی آخر (در شکل ۲، نوسانگرها



شکل ۲

یکی پس از دیگری از راست بچپ قرار دارد). دقت کنیم این سلسله نوسانگر چگونه کار میکند.

فرض کنیم ابتداء همهٔ نوسانگرها در حالت «صفر» باشد. مثلا در مورد سلسله‌ای از ۵ نوسانگر ترکیبی از پنج صفر را داریم: ..... پس از ضربهٔ اول، نوسانگر اول (در سمت راست) به حالت ۱ در می‌آید و چون در این ضمن ضربهٔ جوابی تولید نمیشود لذا بقیهٔ نوسانگرها در حالت «صفر» میمانند و سلسله بوسیلهٔ ترکیب ۱ . . . . مشخص میشود. پس از ضربهٔ دوم، نوسانگر اول خاموش میشود (یعنی در حالت «صفر» قرار میگیرد) ولی ضمناً ضربهٔ جوابی را بیرون

میدهد که در اثر آن نوسانگر دوم روشن میشود. بقیهٔ نوسانگرها در حالت «صفر» میمانند یعنی ترکیب ۰۰۰۱۰ بدست می‌آید. پس از ضربهٔ سوم، نوسانگر اول روشن میشود و بقیه، تغییر حالت نمی‌دهند. ترکیب ۰۰۰۱۱ بوجود می‌آید. پس از ضربهٔ چهارم، نوسانگر اول خاموش میشود و ضمناً علامت جوابی را بیرون میدهد. در اثر این ضربهٔ جوابی، نوسانگر دوم خاموش شده و خود، ضربهٔ جوابی بیرون میدهد. بالاخره در اثر همین ضربه، نوسانگر سوم روشن میگردد. در نتیجه، ما با ترکیب ۰۰۱۰۰ روبرو میشویم.

بهمین طریق، استدلالات مشابه را میتوان ادامه داد. ببینیم، در اینصورت چه حاصل میشود:

ضربهٔ اول	—	ترکیب	۰۰۰۰۱
« دوم	—	«	۰۰۰۱۰
« سوم	—	«	۰۰۰۱۱
« چهارم	—	«	۰۰۱۰۰
« پنجم	—	«	۰۰۱۰۱
« ششم	—	«	۰۰۱۱۰
« هفتم	—	«	۰۰۱۱۱
« هشتم	—	«	۰۱۰۰۰

. . . .

ما میبینیم که سلسلهٔ نوسانگرها علامات رسیده از خارج را «شمرده» و تعداد این علامات را بطریق ویژه‌ای «ثبت» میکند. بآسانی دیده میشود که «ثبت» تعداد ضربه‌های رسیده نه در دستگاه شمار ده‌دهی (یا اعشاری) که بدان عادت کرده‌ایم بلکه در دستگاه شمار دوگانی (یا ثنایی) صورت میگیرد.

در دستگاه شمار دوگانی هر عدد بکمک صفرها و واحدها نوشته میشود. واحد مرتبهٔ بعدی بجای ده بار (مانند نگارش در دستگاه اعشاری معمولی) تنها دو بار بیشتر از واحد مرتبهٔ قبلی میباشد. واحدی که در نگارش ثنایی در آخرین مقام (در سمت راست) قرار دارد یک واحد معمولی است. واحد مرتبهٔ بعدی (در مقام دوم از سمت راست) بمعنی دو، واحد بعدی بمعنی چهار، و سپس هشت و الی آخر است.

مثلا عدد ۱ + ۲ + ۱۶ = ۱۹ در دستگاه دوگانی بصورت ۱۰۰۱۱ نگاشته میشود.

خلاصه اینکه سلسلهٔ نوسانگرها تعداد نشانه‌های رسیده را «شمرده» و آنرا در دستگاه شمار ثنایی «ثبت» میکند. ناگفته نماند که تغییر حالت نوسانگر یعنی ثبت یک علامت رسیده مدت ناچیزی، تنها ... چند صدملیونیم ثانیه طول میکشد! شمارشگرهای نوسانگر امروزی میتواند ده‌ها ملیون ضربه در ثانیه بشمارد. و این جریان ملیون‌ها بار سریعتر از شمارشی که انسان میتواند بدون هیچ دستگاه کمکی انجام دهد، صورت میگیرد زیرا چشم انسان میتواند بوضوح تنها نشانه‌هایی را تشخیص دهد که فاصلهٔ زمانی میان آنها کمتر از ۰,۱ ثانیه نباشد.

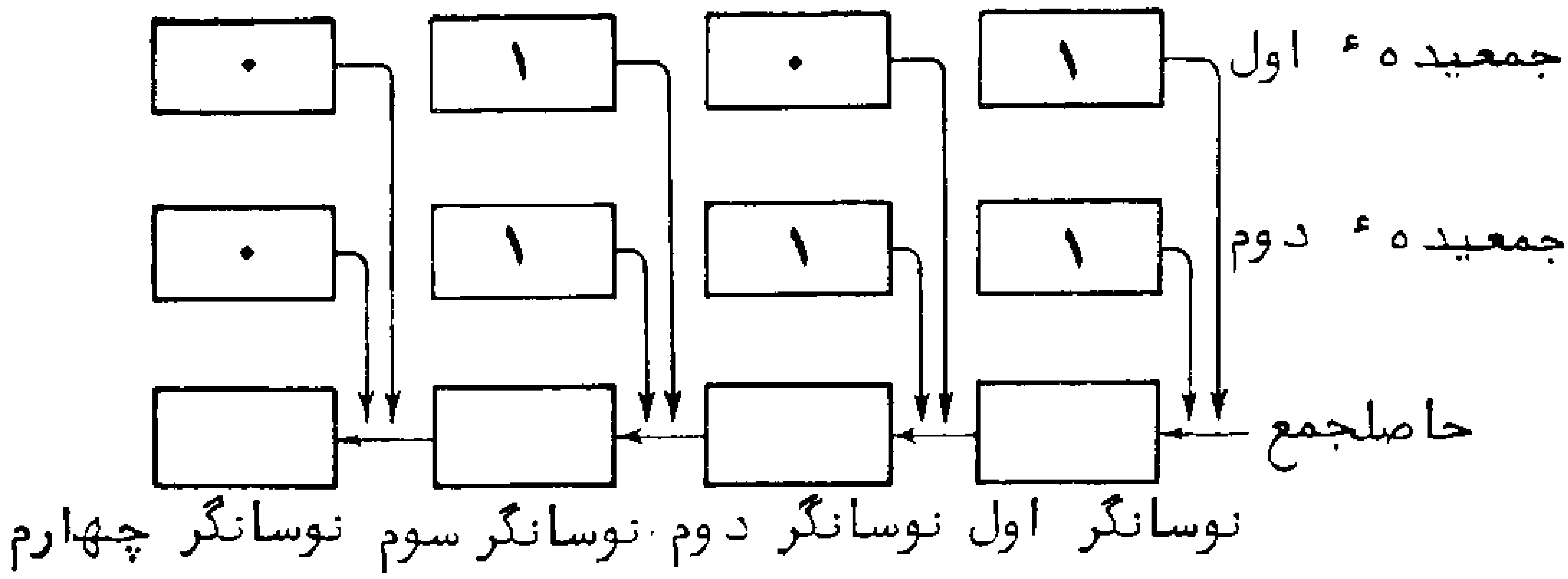
هرگاه سلسله‌ای از بیست نوسانگر تشکیل دهیم یعنی تعداد نشانه‌های رسیده را حد اکثر با بیست رقم بسط عددی ثنایی بنویسیم آنگاه میتوانیم تا ۱ — $۲^{۲۰}$ بشماریم. این عدد بیش از یک ملیون است. و هرگاه سلسله‌ای از ٦٤ نوسانگر تشکیل دهیم آنگاه بکمک آن میتوانیم «عدد شطرنجی» مشهور را بنویسیم.

امکان شمارش ملیون‌ها علامت در ثانیه از نظر کارهای آزمایشگری در رشتهٔ فیزیک هسته‌ای خیلی مهم است. مثلا میتوان تعداد ذرات انواع مختلف را که در اثر تجزیهٔ اتمی صادر میشود شمرد.

۱۰ ۰۰۰ عمل در ثانیه

جالب اینکه دستگاه‌های نوسانگر امکان میدهد عملیات روی اعداد را نیز انجام دهیم. مثلا طریقهٔ جمع دو عدد را در نظر میگیریم.

فرض کنیم سه سلسله نوسانگر طبق شکل ۳ بهم وصل شده باشد. سلسلهٔ فوقانی نوسانگرها برای ثبت جمعیدهٔ اول، سلسلهٔ دوم برای ثبت جمعیدهٔ دوم، و سلسلهٔ پائینی برای حصول مجموع بکار میرود. در لحظهٔ روشن کردن دستگاه، ضربه‌ها از طرف آن نوسانگرهای سلسلهٔ بالایی و میانی به نوسانگرهای سلسلهٔ پائینی میرسد که در حالت ۱ قرار دارند.



شکل ۳

بگذار مثلا بطوریکه در شکل ۳ ذکر شده در دو سلسله ٔ اول، جمعیده‌های ۱۰۱ و ۱۱۱ (در دستگاه شمار دوگانی) نوشته شده باشد. در اینصورت (در لحظه ٔ روشن کردن دستگاه)، دو ضربه، هر یکی از نوسانگر **اول** هر جمعیده به نوسانگر اول (طرف راست) سلسله ٔ تحتانی میرسد. ما اکنون میدانیم که در اثر دریافت دو ضربه، نوسانگر اول در حالت «صفر» مانده و ضربه ٔ جوابی را به نوسانگر دوم میدهد. بعلاوه، علامتی از جمعیدهٔ دوم به نوسانگر دوم میرسد. بدین ترتیب، دو ضربه به نوسانگر دوم میرسد و، در نتیجه، نوسانگر دوم در حالت «صفر» قرار گرفته و ضربه ٔ جوابی را به نوسانگر سوم میفرستد. علاوه بر این، دو ضربه ٔ دیگر نیز (از طرف هر جمعیده) به نوسانگر سوم میرسد. در نتیجه ٔ دریافت سه علامت، نوسانگر سوم به حالت ۱ در آمده و ضربه ٔ جوابی بیرون میدهد. این ضربه ٔ جوابی، نوسانگر چهارم را به حالت ۱ در می‌آورد (هیچ علامت دیگری به نوسانگر چهارم نمیرسد) . بدینترتیب، دستگاهی که در شکل ۳ نمایش یافته عمل جمع دو عدد را (در دستگاه شمار ثنایی) بشکل «ستونی»

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} ۱۰۱ \\ ۱۱۱ \end{array} \\ \hline ۱۱۰۰ \end{array}$$

انجام داده است و متناظرا در دستگاه اعشاری : ۱۲=۷+۵. ضربه های جوابی در سلسله پائینی، متناظر با حالتی است وقتی که انسان ضمن

محاسبه بشکل «ستونی»، یک واحد را «در ذهن نگه داشته» و سپس آنرا به مرتبهٔ بعدی منتقل میکنند.

هرگاه در هر سلسله بجای ٤، مثلا ۲۰ نوسانگر بود در آنصورت میشد اعداد را در حدود یک ملیون جمع کرد و با تعداد بیشتر نوسانگرها میتوان اعداد باز هم بزرگتر را جمع زد.

یادآور میشویم که در واقع، دستگاه جمع‌زنی باید ساختمانی پیچیده‌تر از شکل ۳ را داشته باشد. بویژه، در این دستگاه باید اسباب‌هایی را گنجانید که علامات را «بتاخیر بیاندازد». واقعاً در دستگاه بررسی شده، علامات از دو جمعیده به نوسانگر اول سلسلهٔ پائینی بطور همزمان (در لحظهٔ روشن کردن دستگاه) میرسد. در نتیجه، دو علامت در هم ادغام شده و نوسانگر آنها را مانند یک (و نه دو) علامت درک میکند. برای اجتناب از این امر لازم است که علامات از جمعیده‌ها نه بطور همزمان بلکه با «تاخیر»، یکی پس از دیگری، برسد. چنین «تاخیری» باعث میشود که عمل جمع دو عدد نسبت به ثبت یک علامت در شمارشگر نوسانگر وقت بیشتری طول بکشد.

با تغییر دادن طرح، میتوان دستگاه را وادار ساخت بجای عمل جمع، عمل تفریق را انجام دهد. همچنین میتوان عمل‌ضرب (این عمل به انجام عملیات جمع پی در پی موکول میشود و بنا بر این نسبت به عمل جمع، چند برابر بیشتر وقت میگیرد)، تقسیم و عملیات دیگر را نیز عملی ساخت.

دستگاه‌های مذکور در ماشین‌های حساب معاصر بکار میرود. این ماشین‌ها میتوانند ده‌ها و حتی صدها هزار عمل در ثانیه روی اعداد انجام دهند! و اخیرا حتی ماشین‌هائی ابداع شده که میتوانند ملیون‌ها عمل در ثانیه انجام دهند. ممکن است بنظرتان برسد که چنین سرعت سرسام‌آور عمل لزومی ندارد. مثلا چه فرق میکند که ماشین در چه مدتی عدد ۱۰ رقمی را بتوان دو برساند: در یک ده‌هزارم ثانیه یا مثلا در ربع ثانیه؟ هر دو حل مسئله از نظر ما «یک چشم بهم زدن» است...

اما در نتیجه گیری عجله نکنید. شطرنج‌باز خوب، قبل از اینکه دست به حرکت بزند، ده‌ها و بلکه صدها وضعیت ممکنه را تجزیه و

تحلیل مینماید. مثلا اگر پژوهش یک وضعیت چند ثانیه ایجاب کند در آنصورت برای بررسی صد وضعیت، چند دقیقه یا دهها دقیقه ضروری است. چه بسا که در موقع بازی سخت، بازی‌کن‌ها دچار عجله‌زدگی میشوند یعنی مجبورند حرکت‌ها را زود انجام دهند زیرا تقریبا تمام وقت خود را برای انجام حرکت‌های قبلی بکار برده‌اند. چطور اگر کار تحقیق وضعیتهای بازی شطرنج را به ماشین محول کنیم؟ آخر، با سرعت هزارها محاسبه در ثانیه، ماشین «در یک آن» تمام وضعیت‌ها را پژوهش میکند و دچار عجله‌زدگی نمیشود...

البته که شما مخالفت میکنید و میگوئید که بین محاسبهٔ ولو خیلی پیچیده و بازی شطرنج از زمین تا آسمان فرق است: آخر ماشین نمیتواند بازی کند! آخر، شطرنج‌باز در موقع تحقیق وضعیت‌ها، نمی‌شمارد بلکه فکر میکند! این بحث را ادامه نمیدهیم چون بعدا به این موضوع بر می‌گردیم.

تعداد بازی‌های ممکنهٔ شطرنج

به صورت تقریبی تمامی بازی‌های ممکنهٔ شطرنج را حساب می‌کنیم. حساب دقیق در این مورد امکان ندارد ولی ما خواننده را با ارزیابی تقریبی تعداد بازی‌های ممکنهٔ شطرنج آشنا می‌سازیم. در کتاب ریاضی‌دان بلژیکی م. کرایچیک «بازی‌ها و سرگرمیهای ریاضی» چنین محاسبه‌ای را می‌یابیم:

«بازی‌کن سفید حرکت اول را از ۲۰ حرکت انتخاب می‌کند (۱۶ حرکت ۸ پیاده که هر کدام آنها می‌توانند به فاصلهٔ یک و یا دو خانه حرکت کنند و همچنین هر کدام اسپ‌ها میتوانند دو حرکت انجام دهند). به هر حرکت مهره‌های سفید، بازی‌کن سیاه میتواند با یک حرکت از همان ۲۰ حرکت جواب بدهد. هرگاه هر حرکت مهره‌های سفید را با هر حرکت مهره‌های سیاه در نظر بگیریم در این صورت تعداد $۲۰ \times ۲۰ = ۴۰۰$ بازی مختلف را بعد از حرکت اول هر طرف خواهیم داشت.

بعد از حرکت اول، تعداد حرکات ممکنه زیاد می‌شود. مثلا اگر مهره‌های سفید حرکت $e۲ - e۴$ را انجام دهند حرکت دوم

را میتوانند از ۲۹ حرکت انتخاب کنند. بعدا تعداد حرکات ممکنه باز هم زیادتر میباشد. تنها فرزین اگر در خانهٔ d۵ قرار داشته باشد می‌تواند از ۲۷ حرکت انتخاب کند (با فرض اینکه تمامی خانه‌هائیکه میتواند بدانجا برود خالی باشند). اما بخاطر ساده ساختن محاسبه، اعداد متوسط زیر را بکار می‌بریم:

برای هر یک از ۵ حرکت اول، تعداد حرکات ممکنهٔ هر طرف ۲۰ است.

برای هر یک از حرکات بعدی، تعداد حرکات ممکنهٔ هر طرف ۳۰ میباشد.

علاوه بر این، تعداد متوسط حرکات بازی عادی را برابر ۴۰ میگیریم. در اینصورت برای تعداد بازی‌های ممکنه عبارت زیر را بدست می‌آوریم:

$$(20 \times 20)^{5} \times (30 \times 30)^{35}$$

برای اینکه مقدار این عبارت را بطور تقریبی بیابیم از تبدیلات و ساده‌سازی‌های زیر استفاده مینمائیم:

$$(20 \times 20)^{5} \times (30 \times 30)^{35} = 20^{10} \times 30^{70} = \\ = 2^{10} \times 3^{70} \times 10^{80}$$

عدد 2^{10} را با عدد ۱۰۰۰ یا 10^{3} که نزدیک بآن است عوض می‌کنیم.

عبارت 3^{70} را به شکل زیر درمی‌آوریم:

$$3^{70} = 3^{68} \times 3^{2} \approx 10\,(3^{4})^{17} \approx 10 \times 80^{17} = \\ = 10 \times 8^{17} \times 10^{17} = 2^{51} \times 10^{18} = 2\,(2^{10})^{5} \times 10^{18} \approx \\ \approx 2 \times 10^{15} \times 10^{18} = 2 \times 10^{33}$$

بنا بر این،

$$(20 \times 20)^{5} \times (30 \times 30)^{35} \approx 10^{3} \times 2 \times 10^{33} \times 10^{80} = \\ = 2 \times 10^{116}$$

این عدد بمراتب از آن کثرت سرسام‌آور دانه‌های گندم که بعنوان پاداش برای مخترع بازی شطرنج تقاضا شد ($2^{64} - 1 \approx 18 \times 10^{18}$)

تجاوز میکند. هرگاه کلیهٔ نفوس کرهٔ زمین تمام شبانه‌روز را به بازی شطرنج پرداخته و در هر ثانیه یک حرکت انجام دهند در اینصورت برای اجرای تمامی بازی‌های ممکنهٔ شطرنج، حد اقل، مدت 10^{100} قرن لازم خواهد شد.

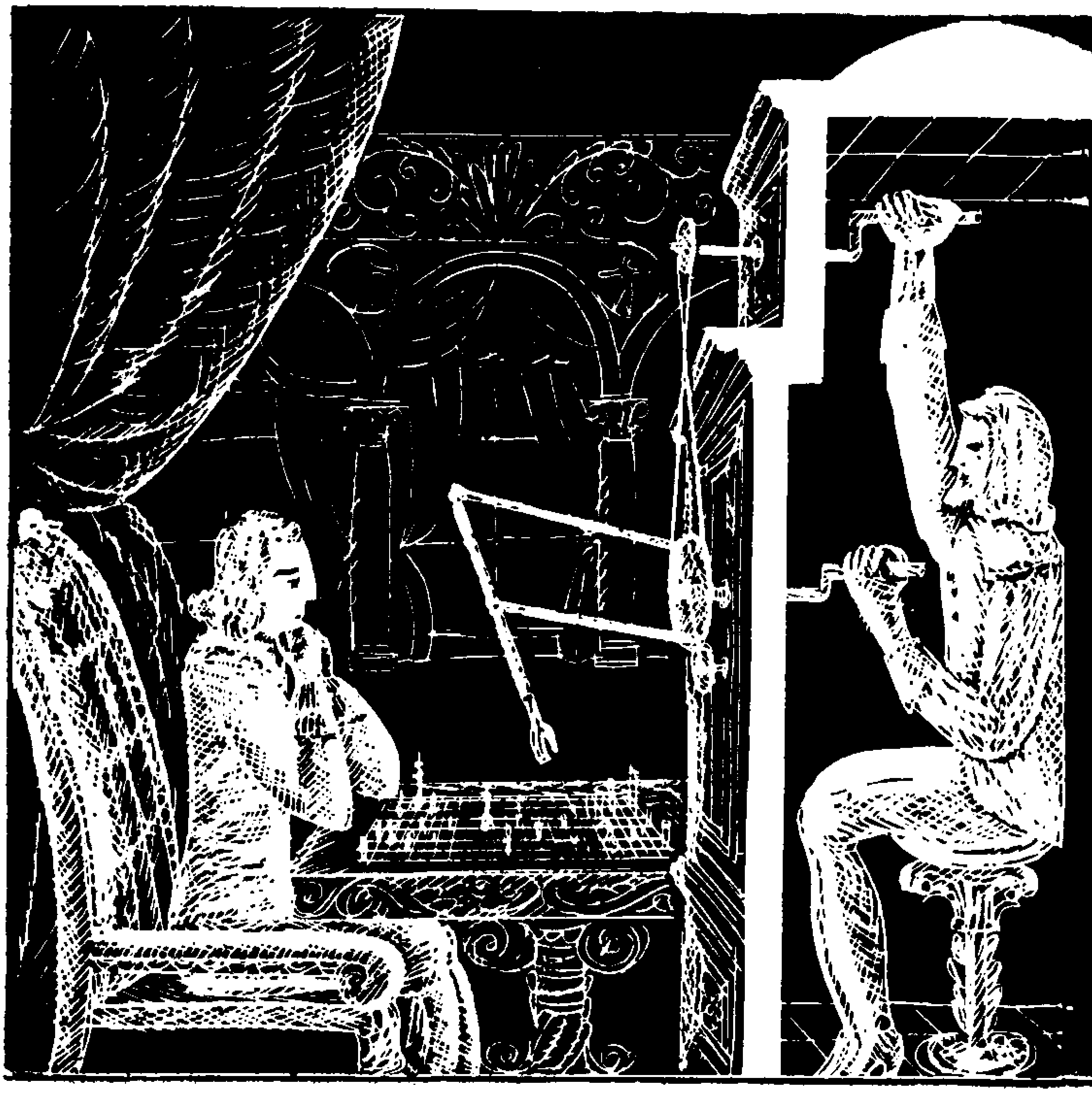
راز شطرنج‌باز خودکار

شاید شما بسیار تعجب کنید وقتیکه بشنوید که زمانی شطرنج‌بازهای خودکار موجود بود. حقیقتاً چطور میشود این موضوع را با تعداد بی‌نهایت ترکیبات مهره‌ها در تختهٔ شطرنج جور در آورد؟

موضوع بسیار به سادگی واضح می‌شود. شطرنج‌باز خودکار هیچگاه موجود نبوده بلکه عقیده به آن در میان بود. شهرت خاصی را دستگاه مکانیسین مجاری بنام ولفگانگ فون کمپلن (۱۸۰٤ — ۱۷۳٤) کسب نمود که دستگاه خود را ابتدا در دربار اطریش و روس نشان داده و بعد در پاریس و لندن در معرض نمایش عامه گذاشت. ناپلئون اول با این دستگاه یک مسابقهٔ شطرنج گذاشته و مطمئن بود که با یک ماشین دست و پنجه نرم میکند. در نیمهٔ قرن گذشته این دستگاه خودکار مشهور، به امریکا وارد گردید و در آنجا در حریق فیلادلفیا موجودیت آن خاتمه یافت.

سایر دستگاه‌های خودکار بازی شطرنج به این اندازه شهرت بدست نیاورده بودند. معهذا عقیده به موجودیت چنین ماشین‌های خودکار، در اوقات بعدی نیز در میان بود.

در حقیقت هیچ ماشین شطرنج بطور خودکار عمل ننموده است. شطرنج‌باز ماهری خود را در قسمت زیر تختهٔ شطرنج پنهان نموده و مهره‌ها را حرکت میداد. آن دستگاه خودکار کاذب که ما هم‌اکنون ذکر نمودیم عبارت بود از صندوق بزرگی که در داخل آن مکانیسم پیچیده‌ای قرار داشت. روی صندوق تختهٔ شطرنج با مهره‌ها نصب شده بود و عروسک بزرگی با دست خود مهره‌ها را حرکت میداد. قبل از شروع بازی به تماشاچیان امکان داده میشد تا مطمئن شوند که در داخل صندوق هیچ چیز غیر از قطعات مکانیسم وجود



شکل ٤

ندارد. ولی در آن بقدر کافی جای خالی یافت میشد تا مرد کوتاه قدی پنهان شود (زمانی این وظیفه را بازی‌کن‌های مشهور یوهان آلگایر و ویلیام لیوئیس اجرا نمودند). احتمالا برای جمعیت مردم، قسمت‌های مختلف صندوق را به ترتیبی نشان می‌دادند که در این وقت شخص پنهان شده بدون صدا به قسمت‌های دیگر آن میرفت. مکانیسم هیچ وظیفه‌ای را در کار دستگاه انجام نداده و فقط برای استتار بازی‌کن زنده بکار میرفت.

از مراتب فوق این استنباط را میتوان کرد: تعداد بازی‌های مختلف شطرنج عملا بی‌نهایت است و ماشین‌هایی که امکان میدهد

صحیح‌ترین حرکت انتخاب شود فقط در تصورات اشخاص زودباور وجود دارد. بنا بر این، نباید از بحران شطرنج بترسیم.

لکن در سالهای اخیر حوادثی رخ داده است که درستی این استنباط را مورد تردید قرار می‌دهد: اکنون ماشین‌هایی وجود دارند که میتوانند شطرنج «بازی» کنند. این ماشین‌ها ماشین‌های پیچیدهٔ حساب است که امکان میدهد هزاران محاسبه در ثانیه انجام گیرد. در فوق، ما باین ماشین‌ها اشاره کردیم. پس، ماشین چگونه میتواند شطرنج «بازی» کند؟

البته که هیچ ماشین حساب کاری جز عمیات روی اعداد نمی‌تواند انجام دهد. اما محاسبات را ماشین طبق طرح ویژهٔ عملیات، طبق برنامهٔ از پیش تهیه شده انجام میدهد. «برنامهٔ» شطرنج توسط ریاضی‌دانان بر اساس تاکتیک معین بازی تنظیم میگردد. ضمنا منظور از تاکتیک، مجمع‌القواعدی است که امکان میدهد برای هر وضعیت، یگانه حرکت («بهترین» از نظر این تاکتیک) انتخاب گردد. اینک یکی از مثال‌های مربوط باین تاکتیک را می آوریم. به هر مهره تعداد معین امتیاز (قیمت معین) داده میشود:

شاه	+۲۰۰	امتیاز	پیاده	+۱ امتیاز
فرزین	+۹	”		
برج	+۵	”	پیاده عقب‌مانده	۰٫۵— امتیاز
فیل	+۳	”	پیاده منزوی	۰٫۵— امتیاز
اسب	+۳	”	پیاده دوبله	۰٫۵— امتیاز

علاوه بر این، برتری وضعی (قابلیت تحرک مهره‌ها، نزدیکی آنها به مرکز و دوری از کنار و غیره) بگونهٔ ویژه‌ای ارزیابی، و بر حسب دهم امتیاز بیان می گردد. از مجموع امتیازات مهره‌های سفید، مجموع امتیازات مهره‌های سیاه را تفریق میکنیم. اختلاف بدست آمده تا اندازه‌ای برتری مادی و وضعی طرف سفید بر طرف سیاه را مشخص میسازد. هرگاه این اختلاف مثبت باشد آنگاه وضع بنفع مهره‌های سفید، و هرگاه منفی باشد آنگاه بنفع مهره‌های سیاه است.

ماشین حساب محاسبه میکند اختلاف مذکور در اثر سه حرکت بعدی چگونه میتواند تغییر کند، از همه‌گونه ترکیب‌های سه حرکتی بهترین را انتخاب، و آنرا روی برگهٔ ویژه‌ای چاپ میکند و «حرکت» انجام شده است *.

برای انجام یک حرکت، ماشین وقت ناچیزی (بر حسب نوع برنامه و سرعت عمل خود) مصرف میکند و بنا بر این، ترسی از خطر «عجله‌زدگی» ندارد.

البته، «تفکر» ماشین در بارهٔ بازی تنها با آوانس سه حرکت، آنرا بعنوان بازیکن ضعیفی معرفی مینماید **. لیکن با تکمیل سریع وسایل حساب در حال حاضر، بزودی ماشین‌ها «یاد میگیرند» خیلی بهتر شطرنج «بازی» کنند.

شرح مفصلتری در بارهٔ تنظیم برنامهٔ شطرنج برای ماشین‌های حساب از حوصلهٔ این کتاب خارج است. بعضی از ساده‌ترین انواع برنامه‌ها را ما در خطوط کلی در فصل بعدی بررسی خواهیم کرد.

توسط سه دوتائی

لابد بر همه معلوم است که به چه ترتیبی باید سه رقم نوشت تا عدد هر چه بزرگتر حاصل شود. باید سه رقم ۹ را گرفته و به شکل زیر ترتیب داد:

$$9^{9^{9}}$$

یعنی «فوق توان» سوم عدد ۹ را نوشت.

---

* دیگر انواع «تاکتیک» شطرنج نیز وجود دارد. مثلا ضمن محاسبات میتوان بجای همهٔ حرکتهای جوابی احتمالی حریف تنها حرکت‌های «قوی» از قبیل کیش شاه، تصرف، حمله، دفاع و غیره را در نظر گرفت. بعلاوه، در مقابل حرکتهای بسیار قوی حریف میتون محاسبات را نه با آوانس سه حرکت بلکه با آوانس حرکتهای زیادتر انجام داد. همچنین میتوان از دیگر مقیاس قیمتهای مهره‌ها استفاده نمود. «اسلوب بازی» ماشین بر حسب انتخاب این یا آن تاکتیک تغییر میکند.

** در بازی بهترین استادان شطرنج ترکیباتی با آوانس ۱۰ حرکت و بیشتر دیده شده است.

این عدد آنقدرها بزرگ است که هیچ مقایسه‌ای، به درک بزرگی آن کمکی نمیکند. تعداد الکترون‌های فضای قابل دید نسبت به این عدد، ناچیز است. در کتاب «سرگرمی‌های حساب» (فصل دهم)، من در این باره صحبت کردم. به این مسئله به خاطر این بازگشت میکنم که می‌خواهم به مانند آن، مسئله دیگری را پیش‌نهاد کنم:

توسط سه دوتائی، بدون استفاده از علایم اعمال ریاضی عدد هر چه بزرگتر را بنویسید.

حل

با بخاطر داشتن قرارگیری سه‌طبقه‌ای نه‌تائی‌ها شاید شما آمادهٔ آن باشید که دوتائی‌ها را هم به همان ترتیب قرار دهید:

$$۲^{۲^{۲}}$$

اما این مرتبه منظور برآورده نمی‌شود. عدد نوشته شده بزرگ نیست، و حتی کمتر از ۲۲۲ است. در حقیقت ما فقط $۲^{٤}$ یا ۱٦ را نوشته‌ایم.

بزرگ‌ترین عدد متشکل از سه دوتائی، نه ۲۲۲ و نه $۲۲^{۲}$ (یا ٤٨٤) بلکه

$$۲^{۲۲} = ٤\ ۱۹٤\ ۳۰٤$$

می‌باشد.

این مثال بسیار آموزنده است و نشان میدهد که هرگاه در ریاضی از روی قیاس عمل شود ممکن است نتایج غلطی ببار آید.

توسط سه سه‌تائی

مسئله

حالا شما شاید با احتیاط بیشتر به حل مسئله زیر بپردازید:

با سه سه‌تائی، بدون استفاده از علایم اعمال ریاضی، بزرگترین عدد ممکن را بنویسید.

حل

در این مورد نیز قرار دادن ارقام در سه طبقه به نتیجهٔ مطلوب منجر نمی‌شود، زیرا

$۳^{۳^۳}$ یعنی $۳^{۲۷}$ کمتر از $۳^{۳۳}$ است.

ترتیب آخری، جواب مسئله را بدست میدهد.

توسط سه چهارتائی

مسئله

با سه چهارتائی، بدون استفاده از علایم اعمال ریاضی، بزرگترین عدد ممکن را بنویسید.

حل

در این مورد هرگاه از روش حل دو مسئلهٔ قبل پیروی کنید یعنی جواب

$$٤^{٤٤}$$

را بدهید اشتباه می‌نمائید زیرا که این مرتبه قرارگیری سه‌طبقه‌ای است که بزرگترین عدد را بدست میدهد:

$$٤^{٤^٤}$$

حقیقتاً $٤^٤ = ٢٥٦$ و $٤^{٢٥٦}$ بیشتر از $٤^{٤٤}$ می‌باشد.

با سه رقم یکسان

کوشش می‌کنیم در پدیده سردرگم‌کنندهٔ فوق تعمق کنیم و تعیین نمائیم که چرا بعضی ارقام در قرارگیری سه‌طبقه‌ای، اعداد غول‌آسائی را می‌دهند و بعضی دیگر نمی‌دهند. حالت کلی را در نظر میگیریم.

با سه رقم مساوی، بدون استفاده از علایم اعمال ریاضی، عدد هر چه بزرگتر را بنویسید.

رقم مطلوب را به حرف a نشان میدهیم. با قرارگیری

$$۲^{۲۲},\quad ۳^{۳۳},\quad ٤^{٤٤}$$

نگارش

$$a^{۱۱a} \quad \text{یعنی} \quad a^{۱۰a+a}$$

متناظر است.

قرارگیری سه‌طبقه‌ای در حالت کلی بشکل زیر در می‌آید:

$$a^{a^{a}}$$

تعیین می‌کنیم که با کدام مقدار a، قرارگیری آخری، عدد بزرگتر از قرارگیری اولی را نمایش میدهد. چون هر دو عبارت، توانهائی از پایه‌های مساوی و صحیح می‌باشند بنا بر این، مقدار بزرگتر با نمای بزرگتر متناظر است. چه وقت

$$a^{a} > ۱۱a?$$

هر دو طرف نابرابری را به a تقسیم می‌کنیم. بدست می‌آوریم:

$$a^{a-۱} > ۱۱$$

به آسانی دیده می‌شود که a^{a-1} به شرطی بزرگتر از ۱۱ می‌شود که a بزرگتر از ۳ باشد زیرا که

$$٤^{٤-۱} > ۱۱$$

در صورتیکه توانهای

$$۳^{۲} \quad \text{و} \quad ۲^{۱}$$

کم‌تر از ۱۱ است.

آن حالات غیر منتظره‌ای که در زمان حل مسایل قبل عرض اندام کرد حالا روشن گردید: برای دوتائی‌ها و سه‌تائی‌ها از یک ترتیب قرارگیری، و برای چهارتائی‌ها و اعداد بزرگتر از ترتیب قرارگیری دیگری باید استفاده شود.

توسط چهار واحد

مسئله

توسط چهار واحد، بدون استفاده از هیچ علایم اعمال ریاضی، عدد هر چه بزرگتر را بنویسید.

حل

عدد ۱۱۱۱ که طبعاً بفکر آن سیافتیم جوابگوی شرط مسئله نیست زیرا که توان

$$۱۱^{۱۱}$$

چندین مرتبه بزرگتر است. محاسبهٔ این عدد از طریق ده عمل ضرب در ۱۱، حوصلهٔ هرکس را سر می‌آورد اما مقدار آن را بسیار سریعتر به کمک جداول لگاریتم میتوان برآورد کرد.

این عدد بزرگتر از ۲۸۵ ملیارد، و بنا براین ۲۵ ملیون بار و اندی از عدد ۱۱۱۱ بزرگتر است.

توسط چهار دوتائی

مسئله

در توسعهٔ مسئله‌های مورد نظر قدم دیگری برداشته و سوال خود را در بارهٔ چهار دوتائی طرح میکنیم.

با چه ترتیبی چهار دوتائی بزرگترین عدد را نمایش میدهند؟

حل

امکان ۸ ترکیب موجود است:

$$۲۲۲۲,\quad ۲۲۲^{۲},\quad ۲۲^{۲۲},\quad ۲^{۲۲۲}$$
$$۲۲^{۲^{۲}},\quad ۲^{۲۲^{۲}},\quad ۲^{۲^{۲۲}},\quad ۲^{۲^{۲^{۲}}}$$

کدام یک از این اعداد بزرگترین است؟

نخست به بررسی ردیف فوقانی میپردازیم که اعداد آن در دو طبقه ترتیب یافته‌اند.

عدد اولی، ۲۲۲۲، واضحاً کم‌تر از سه عدد دیگر است. برای مقایسهٔ دو عدد بعدی

$$۲۲^{۲۲} \quad و \quad ۲۲۲^{۲}$$

دومی را به این شکل می‌نویسیم:

$$۲۲^{۲۲} = ۲۲^{۲\times۱۱} = (۲۲^{۲})^{۱۱} = ۴۸۴^{۱۱}$$

عدد آخری از $۲۲۲^{۲}$ بزرگتر است زیرا که هم پایه و هم نمای توان $۴۸۴^{۱۱}$ نسبت به توان $۲۲۲^{۲}$ بزرگترند.

حالا $۲۲^{۲۲}$ را با عدد چهارم سطر اول یعنی با $۲^{۲۲۲}$ مقایسه می‌کنیم. عدد $۲۲^{۲۲}$ را با عدد بزرگتر، $۳۲^{۲۲}$، عوض می‌کنیم. نشان می‌دهیم که حتی این عدد بزرگ‌تر هم، از عدد $۲^{۲۲۲}$ کوچک‌تر است.

حقیقتاً،

$$۳۲^{۲۲} = (۲^{۵})^{۲۲} = ۲^{۱۱۰}$$

توانی است که از $۲^{۲۲۲}$ کوچک‌تر است.

بدین ترتیب، بزرگترین عدد سطر بالائی $۲^{۲۲۲}$ است.

حال، مقایسهٔ پنج عدد با هم برای ما میماند: عدد تازه دریافت شده و چهار عدد بعدی:

$$۲۲^{۲^{۲}},\ ۲^{۲۲^{۲}},\ ۲^{۲^{۲۲}},\ ۲^{۲^{۲^{۲}}}$$

عدد آخری، $۲^{۱۶}$، ناچیز بوده و از مسابقه فورا باز میماند. سپس، عدد اول این سری، که برابر با $۲۲^{۴}$ و کم‌تر از $۳۲^{۴}$ یا $۲^{۲۰}$ میباشد، از هر یک از دو عدد بعدی کوچکتر است. بنا بر این، سه عدد که هر یک از آنها توانی از ۲ است باید باهم مقایسه شوند. واضح است که آن توان ۲ بزرگتر است که نمای آن بزرگتر باشد. اما در میان نماهای

$$۲۲۲,\ ۴۸۴,\ ۲^{۲۰+۲} (= ۲^{۱۰\times۲} \times ۲^{۲} \approx ۱۰^{۶} \times ۴)$$

نمای آخری واضحا بزرگتر است.

بنا بر این بزرگترین عددی که با چهار دوتائی قابل نمایش است چنین میباشد:

$$۲^{۲^{۲۲}}$$

بدون توسل به جداول لگاریتم ما می‌توانیم تصور تقریبی از

مقدار این عدد را برای خود بوجود آوریم. برای این کار از برابری تقریبی

$$۲^{۱۰} \approx ۱۰۰۰$$

استفاده مینمائیم.

حقیقتا :

$$۲^{۲۲} = ۲^{۲۰} \times ۲^{۲} \approx ٤ \times ۱۰^{٦},$$
$$۲^{۲^{۲۲}} \approx ۲^{٤۰۰۰۰۰۰} > ۱۰^{۱۲۰۰۰۰۰}$$

بدین ترتیب، در این عدد بیشتر از یک ملیون رقم است.

فصل دوم

زبان جبر

۲۷ = ۲۷

هنر تشکیل دادن معادله

زبان جبر، معادله است. «برای اینکه مسئله مربوط به اعداد و یا نسبت مقادیر را حل نمائیم، تنها ضرور است مسئله را از زبان مادری به زبان جبر بر گردانیم» — این گفتهٔ نیوتن بزرگ است که در کتاب درسی جبر خود بنام «حساب عمومی» بیان نموده است. اینکه چطور عمل ترجمه از زبان مادری به زبان جبر صورت میگیرد نیوتن طی مثال‌هائی نشان داده است. این است یکی از آنها:

بزبان مادری	بزبان جبر
بازرگانی دارای یک مقدار پول بود	x
در سال اول ۱۰۰ لیرهٔ آنرا خرج نمود	$x-۱۰۰$
به پول باقیمانده یک سوم آنرا اضافه نمود	$(x-۱۰۰)+\frac{x-۱۰۰}{۳}=\frac{٤x-٤۰۰}{۳}$
در سال بعدی او بار دیگر ۱۰۰ لیرهٔ آنرا خرج نمود	$\frac{٤x-٤۰۰}{۳}-۱۰۰=\frac{٤x-۷۰۰}{۳}$

به مقدار باقیمانده یک سوم آنرا علاوه نمود	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2800}{9}$
در سال سوم او بار دیگر ۱۰۰ لیرهٔ آنرا خرج نمود	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$
بعد از آنکه او به پول باقیمانده، یک سوم آنرا علاوه کرد	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$
سرمایهٔ او دو برابر سرمایهٔ اولیه گردید	$\frac{64x-14800}{27}=2x$

برای اینکه سرمایه اولیهٔ تاجر را تعیین کنیم کافی است که تنها معادلهٔ آخری را حل نمائیم.

غالبا حل معادله کار مشکلی نیست. تشکیل دادن معادله بر اساس معلومات مسئله مشکلات بیشتر را در بر دارد. شما حالا دیدید که هنر تشکیل دادن معادله در واقع در حکم توانائی برگرداندن مسئله «از زبان مادری به زبان جبر» است. ولی زبان جبر خیلی کم‌حرف است. بنا بر این برگرداندن هر کلمهٔ زبان مادری به زبان جبر به آسانی ممکن نیست. خواننده در مثال‌های بعدی مربوط به تشکیل معادله‌های درجهٔ یکم یقین حاصل می‌نماید که عمل ترجمه برحسب پیچیدگی خود فرق میکند.

حیات دیوفانتوس

مسئله

تاریخ، صفحات کمی از زندگی‌نامهٔ دیوفانتوس ریاضی‌دان ممتاز قدیم را برای ما حفظ نموده است. کلیهٔ اطلاعات در باره وی از

نوشته‌هائی سرچشمه میگیرد که بر آرامگاه او به شکل یک مسئلهٔ ریاضی ترتیب یافته است. این نوشته‌ها را ما اینجا نقل میکنیم.

بزبان مادری	بزبان جبر
رهگذر! اینجا جسد دیوفانتوس دفن شده و اعداد به شکل معجزه‌آسا میتوانند درباره سال عمر او معلومات بدهند	x
بخش ششم زندگی وی طفولیت زیبایش بود	$\frac{x}{6}$
با گذشت بخش دوازدهم حیات، زنخ وی پر از مو گردید	$\frac{x}{12}$
بخش هفتم حیات خود را در ازدواج بی‌فرزند گذراند	$\frac{x}{7}$
بعد از گذشت پنج سال با تولد بچهٔ اول که پسری زیبا بود خوش بخت گردید	5
قضا و قدر برای بچه برابر نصف عمر پدر حیات سعادت‌مند و درخشان اهدا کرد	$\frac{x}{2}$
بعد از چهار سال دیگر حیات پس از مرگ پسر خود در رنج عمیق، پیرمرد خاتمهٔ زندگی روی زمین را پذیرفت	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$
بگو، بعد از چند سال عمر، دیوفانتوس مرگ را پذیرفت؟	

حل

با حل معادله و دریافت $x = ۸۴$، از نکات زیرین زندگی‌نامهٔ دیوفانتوس آگاهی حاصل میکنیم. وی در سن ۲۱ سالگی ازدواج نمود و در سن ۳۸ سالگی پدر گردید، در سن ۸۰ سالگی پسر را از دست داد و در ۸۴ سالگی بدرود حیات گفت.

اسب و قاطر

مسئله

اینک مسئلهٔ نسبتا آسان قدیمی دیگری می‌آید که به آسانی قابل ترجمه از زبان مادری به زبان جبر می‌باشد.

«اسب و قاطر با بارهای سنگین بر پشت خود شانه به شانه راه میرفتند. اسب از بار کمرشکن خود شکایت میکرد. قاطر به وی می گفت «چرا شکایت میکنی؟ — هرگاه یک خورجین ترا من بردارم بار من دو برابر از بار تو سنگین‌تر می‌شود. هرگاه تو یک خورجین از پشت من برداری بار تو برابر بار من خواهد شد».

ریاضی‌دان‌های خردمند، بگوئید که چند خورجین را قاطر و چند خورجین را اسب حمل می‌کردند؟».

حل

هرگاه یک خورجین ترا من بردارم	$x - ۱$
بار من	$y + ۱$
دو برابر از بار تو سنگین‌تر میشود	$y + ۱ = ۲\ (x - ۱)$
اگر تو یک خورجین از پشت من برداری	$y - ۱$
بار تو	$x + ۱$
برابر بار من میشود	$y - ۱ = x + ۱$

ما مسئله را به دستگاه معادله‌های دومجهولی تبدیل نمودیم:

$$\left.\begin{aligned} ۲x - y &= ۳ \\ y - x &= ۲ \end{aligned}\right\} \quad \text{و یا} \quad \left\{\begin{aligned} y + ۱ &= ۲(x - ۱) \\ y - ۱ &= x + ۱ \end{aligned}\right.$$

با حل دستگاه بدست می‌آوریم: $x = ۵$، $y = ۷$. اسب ۵ خورجین، و قاطر ۷ خورجین را حمل می‌نمودند.

چهار برادر

مسئله

چهار برادر جمعاً ٤٥ روبل داشتند. هرگاه به پول اولی ۲ روبل اضافه، و از پول دومی ۲ روبل کم، و پول سومی دو برابر زیاد، و پول چهارمی دو برابر کم شود، در این صورت پول‌های آنها با هم برابر می‌شود. هرکدام آنها دارای چه مقدار پول بودند؟

حل

هر چهار برادر ٤٥ روبل دارند	$x + y + z + t = ٤٥$
هرگاه به پول اولی ۲ روبل اضافه شود	$x + ۲$
و از پول دومی ۲ روبل کم گردد	$y - ۲$
و پول سومی دو برابر شود	$۲z$
و پول چهارمی دو برابر کم گردد	$\frac{t}{۲}$
در اینصورت پول آنها با هم برابر میشود	$x + ۲ = y - ۲ = ۲z = \frac{t}{۲}$

معادلهٔ آخری را به سه معادلهٔ جداگانه تجزیه می‌کنیم:

$$x + ۲ = y - ۲,$$
$$x + ۲ = ۲z,$$
$$x + ۲ = \frac{t}{۲}$$

از اینجا

$$y = x + ۴,$$
$$z = \frac{x + ۲}{۲},$$
$$t = ۲x + ۴$$

این مقادیر را در معادلهٔ اولی گذاشته و بدست می‌آوریم:

$$x + x + ۴ + \frac{x + ۲}{۲} + ۲x + ۴ = ۴۵$$

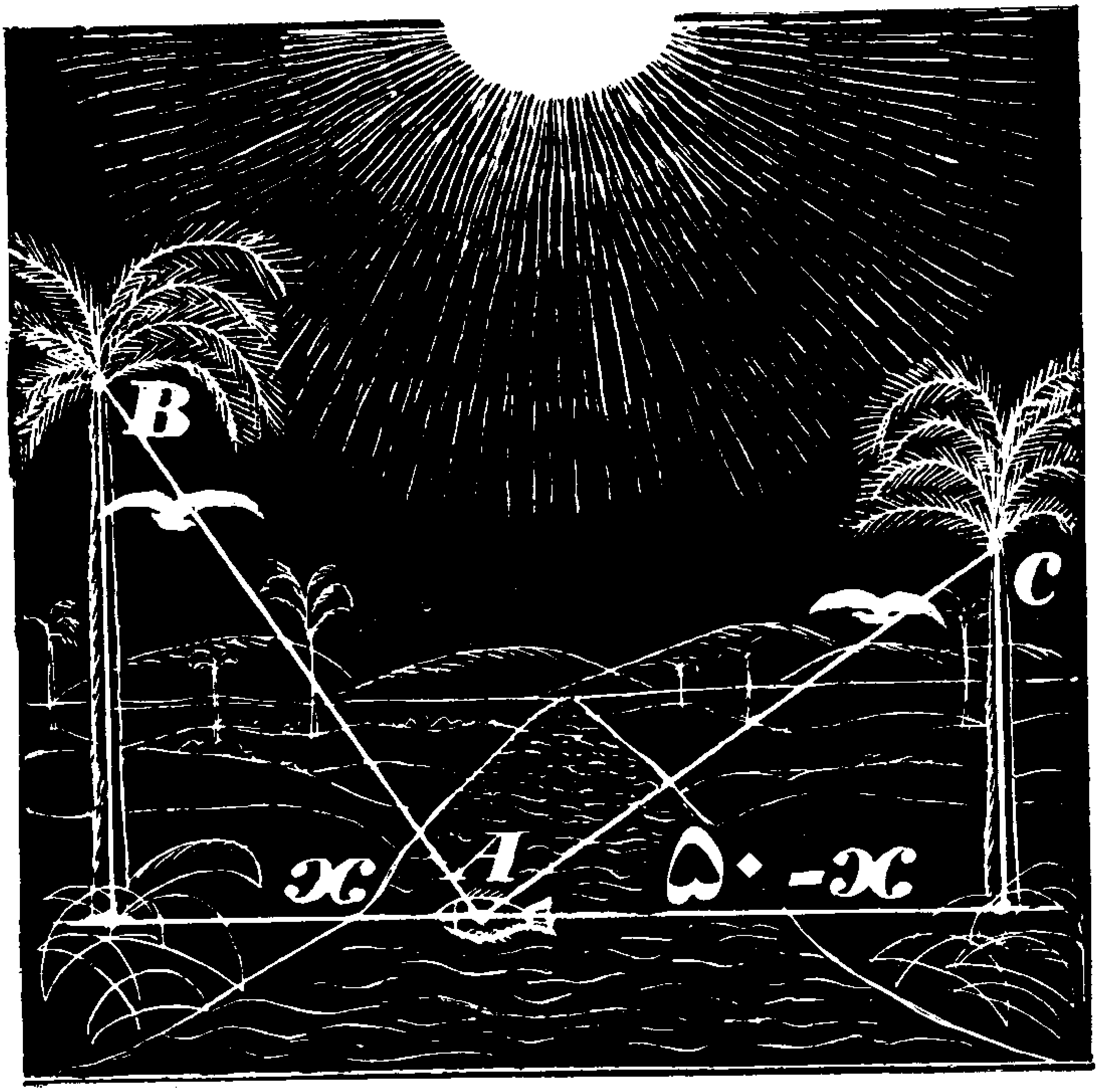
از اینجا $x = ۸$. بعد پیدا می‌کنیم $y = ۱۲$، $z = ۵$، $t = ۲۰$. نتیجه اینکه برادران، بترتیب، دارای ۸ روبل، ۱۲ روبل، ۵ روبل و ۲۰ روبل بودند.

پرنده‌ها در کنار رودخانه

مسئله

یکی از ریاضی‌دانان عرب در قرن یازدهم میلادی مسئله ذیل را طرح نموده است:

در دو کنار رودخانه دو درخت نخل یکی رو بروی دیگری روئیده بودند. ارتفاع یکی از آنها ۳۰ ارش، و ارتفاع دیگری ۲۰ ارش بود. فاصله بین تنهٔ آنها ۵۰ ارش بود. در بالای هر نخل پرنده‌ای نشسته بود. دفعتاً هر دو پرنده ماهی‌ای را دیدند که به روی آب بین دو نخل آمده بود. پرنده‌ها بطرف ماهی پریدند و هم‌زمان به آن رسیدند.



شکل ۵

ماهی در چه فاصله‌ای از تنهٔ نخل بلندتر نمایان گردیده بود؟

حل

با در نظر داشتن شکل ۵ و استفاده از قضیهٔ فیثاغورث، تعیین می‌نمائیم :

$$AB^{۲} = ۳۰^{۲} + x^{۲}, \quad AC^{۲} = ۲۰^{۲} + (۵۰ - x)^{۲}$$

اما $AB = AC$ چونکه هر دو پرنده این فواصل را در زمان مساوی طی کردند. لذا

$$۳۰^{۲} + x^{۲} = ۲۰^{۲} + (۵۰ - x)^{۲}$$

پس از باز نمودن پرانتز و ساده ساختن، معادلهٔ درجهٔ یکم $2000 = 100x$ بدست می‌آید و از اینجا $x = 20$. ماهی بفاصلهٔ ۲۰ ارش از نخلی که ارتفاع آن ۳۰ ارش بود نمایان گردیده بود.

گردش

مسئله

یک دکتر پیر به آشنای خود گفت:

— فردا در ساعات روز نزد من بیائید.

— از شما متشکرم. ساعت سه از خانه بیرون می‌آیم. ممکن است شما هم بخواهید گردش کنید، آنگاه همان ساعت از خانه بیرون بیائید، در نیمه‌راه با هم روبرو می‌شویم.

— شما فراموش میکنید که من پیر هستم، در هر ساعت فقط ۳ کیلومتر راه طی می‌کنم در صورتیکه شما که شخص جوانی هستید اگر به قدم آهسته هم بروید ٤ کیلومتر راه در ساعت طی می‌کنید. بد نخواهد بود اگر برای من کمی تخفیف دهید.

— عادلانه است. چون من نسبت به شما در ساعت ۱ کیلومتر بیشتر راه طی می‌کنم برای اینکه شرایط ما متعادل باشد به شما این کیلومتر را میبخشم، یعنی یک ربع ساعت زودتر از خانه در می‌آیم، کافی است؟

پیرمرد با عجله موافقت نمود و گفت:

— بسیار لطف کردید.

جوان همین طور هم کرد: ساعت ۲ و ٤٥ دقیقه از خانه در آمده و با سرعت ٤ کیلومتر در ساعت براه افتاد. دکتر سر ساعت سه از خانه خارج شده و با سرعت ۳ کیلومتر در ساعت براه افتاد. وقتیکه با هم روبرو شدند پیرمرد به عقب برگشت و باتفاق دوست جوانش به طرف خانهٔ خود حرکت کرد.

مرد جوان فقط زمانیکه بخانهٔ خود بازگشت متوجه شد که به خاطر تخفیف یک ربع ساعت، او بجای دو برابر، چهار برابر فاصلهٔ طی شدهٔ دکتر را پیموده بود.

فاصلهٔ بین خانهٔ دکتر و خانهٔ آشنای جوانش چه اندازه است؟

حل

فاصله بین خانه‌ها را به x (کیلومتر) نمایش میدهیم. مرد جوان تنها فاصلهٔ $۲x$ را، اما دکتر فاصلهٔ چهار مرتبه کم‌تر یعنی $\frac{x}{۲}$ را پیمود. تا زمان ملاقات، دکتر نیم فاصله خویش، یعنی $\frac{x}{٤}$ را پیمود و مرد جوان باقیمانده، یعنی $\frac{۳x}{٤}$ را. دکتر راه خود را در مدت $\frac{x}{۱۲}$ ساعت، و جوان در مدت $\frac{۳x}{۱٦}$ ساعت طی کردند. ضمناً ما میدانیم که جوان به اندازهٔ $\frac{۱}{٤}$ ساعت بیش از دکتر در راه بود.

معادلهٔ زیر را داریم:

$$\frac{۳x}{۱٦}-\frac{x}{۱۲}=\frac{۱}{٤}$$

از اینجا $x=۲,٤$ کیلومتر.

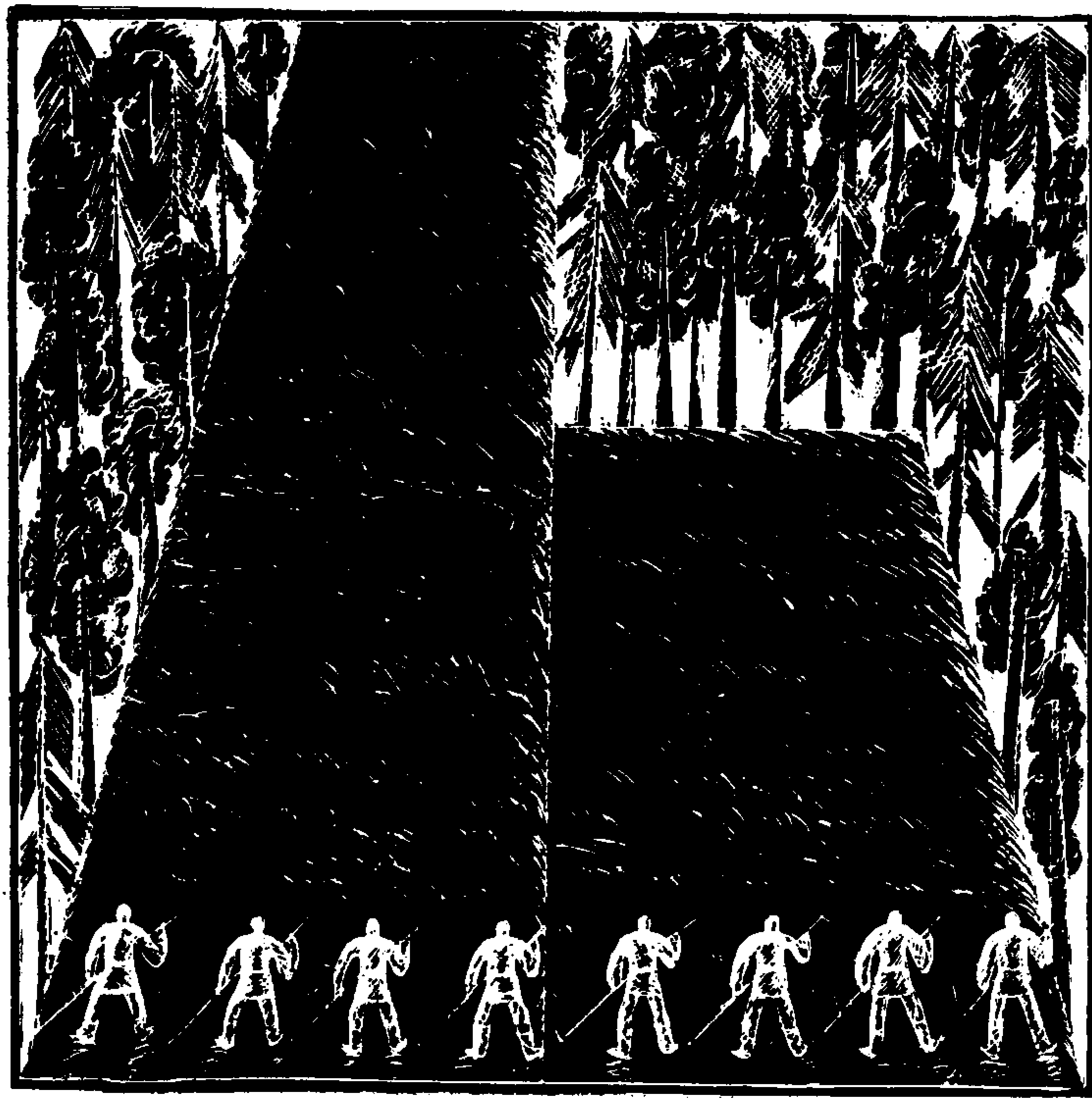
فاصله بین خانهٔ جوان و دکتر ۲,٤ کیلومتر است.

دستهٔ دروگران

فیزیک‌دان مشهور آ. و. تسینگر در خاطرات خود راجع به ل. ن. تولستوی مسئله زیر را که بسیار مورد پسند نویسندهٔ بزرگ قرار گرفته بود می‌آورد:

«دستهٔ دروگرها باید دو سرغزار را که یکی از دیگری دو برابر بزرگ‌تر بود درو میکردند. دستهٔ دروگران نیمی از روز را بدرو سرغزار بزرگ پرداختند. بعد از این، دسته به دو گروه تقسیم شد. نیمهٔ اول در سرغزار بزرگ مانده و تا فرارسیدن شب سرغزار را بکلی درو کردند. نیمهٔ دوم دسته سرغزار کوچک را چنان درو نمودند که با فرارسیدن شب قسمتی از سرغزار باقی‌ماند که فردای آن روز یک دروگر آنرا در یک روز، تمام کرد.

دسته از چند نفر دروگر تشکیل شده بود؟»



شکل ٦

حل

در این مسئله علاوه بر مجهول اصلی یعنی تعداد دروگرها که ما آنرا با x نمایش میدهیم بهتر خواهد بود قطعه مرغزار را که یک دروگر در یک روز درو می‌کند با مجهول کمکی y نمایش دهیم. گرچه تعیین قطعه مرغزار در این مسئله تقاضا نشده اما اینکار تعیین کمیت نامعلوم را آسان می‌سازد.

مساحت مرغزار بزرگ را بر حسب x و y بیان میکنیم. این مرغزار را طی نیمی از روز، x دروگر درو نمودند. آنها $x \times \frac{1}{2} \times y = \frac{xy}{2}$ را درو نمودند.

در نیمهٔ دوم روز این مرغزار را تنها نصف دسته یعنی $\frac{x}{2}$ دروگر درو نمودند. آنها

$$\frac{x}{2} \times \frac{1}{2} \times y = \frac{xy}{4}$$

را درو کردند.

چون با فرا رسیدن شب، تمام مرغزار درو شده بود بنا بر این، مساحت آن برابر است با

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}$$

حالا مساحت مرغزار کوچک را بر حسب x و y بیان میکنیم. این مرغزار را طی نیمی از روز تنها نیمه دسته یعنی تعداد $\frac{x}{2}$ دروگر درو کردند. آنان مساحت برابر به $\frac{x}{2} \times \frac{1}{2} \times y = \frac{xy}{4}$ را درو کردند. قطعهٔ درو ناشده را که همانا برابر y است (یعنی مساحتی که یک دروگر در یک روز درو میکند) اضافه نموده و مساحت مرغزار کوچک را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}$$

تنها چیزی که میماند برگرداندن جملهٔ «مرغزار اولی دو برابر مرغزار دومی است» به زبان جبری میباشد و معادله تشکیل شده است:

$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy + 4y}{4} = 2 \quad \text{و یا} \quad \frac{3xy}{xy + 4y} = 2$$

با حذف y از کسر طرف چپ معادله، مجهول کمکی از بین میرود و معادله بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{3x}{x + 4} = 2 \quad \text{و یا} \quad 3x = 2x + 8$$

که از اینجا $x = 8$.

دسته شامل ۸ دروگر بود.

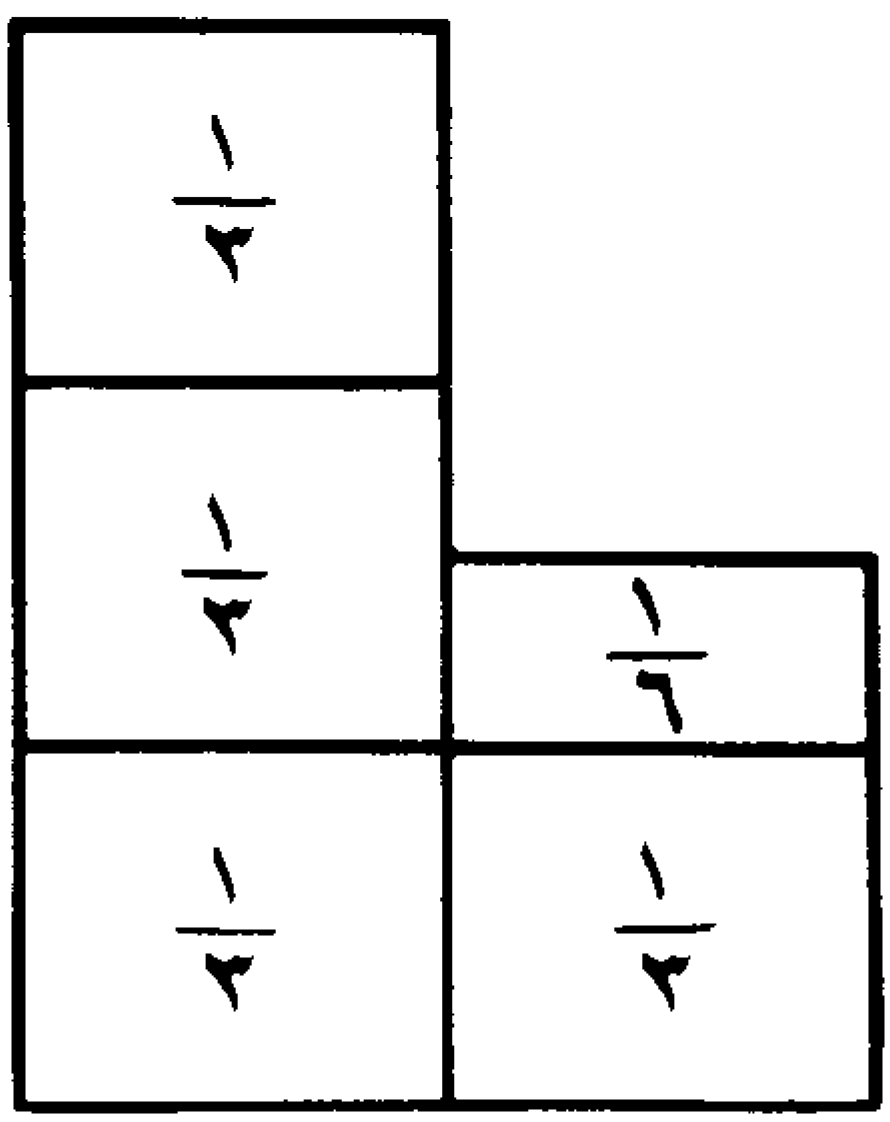
بعد از پیدایش اولین چاپ «سرگرمی‌های جبر»، پروفسور آ. و. تسینگر برای من در مورد این مسئله اطلاعیهٔ مفصل و جالبی را فرستاد. طبق مفکورهٔ وی اثر اصلی این مسئله در آن است که این مسئله «اصلا جبری نبوده بلکه حسابی و تازه هم بسیار ساده می‌باشد و تنها مشکل آن در شکلی است که از قالبهای پیش پا افتاده متفاوت است».

پروفسور آ. و. تسینگر ادامه میدهد: «تاریخچهٔ این مسئله چنین است: در دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه مسکو در دوره‌ایکه پدر و عمویم ای. ای. رایفسکی (دوست نزدیک ل. تولستوی) درس میخواندند در میان دروس دیگر چیزی شبیه به درس معلمی نیز تدریس میشد. در چهارچوب آن، دانشجویان مکلف بودند در مدرسهٔ عمومی شهری وابسته به دانشگاه رفته و با همکاری معلمان ماهر، شیوهٔ تدریس را تمرین نمایند. در میان دوستان تسینگر و رایفسکی دانشجوئی بنام پتروف بود که استعداد و خلق عجیب و غریبش ورد زبانها شده بود. پتروف (که در عنفوان جوانی در اثر مرض سل وفات یافت) ادعا میکرد که شاگردان را در دروس حساب به مسایل قالبی و راه حل‌های پیش پا افتاده عادت میدهند و بدینترتیب آنها را از رشد فکری باز میدارند. برای تایید گفته خود پتروف مسایلی را اختراع می‌نمود که بخاطر غیر معمول بودن، حل آنها برای «آموزگاران ماهر و با تجربه» خیلی مشکل بوده ولی شاگردان با استعدادی که هنوز از اینگونه تعلیمات استعداد خود را از دست نداده بودند به آسانی آنها را حل میکردند. از جملهٔ چنین مسایلی (که پتروف چند فقره از آنها را ترتیب داده بود) یکی هم مسئلهٔ دستهٔ دروگرها است. واضح است که آموزگاران با تجربه این مسئله را به کمک معادله حل میکردند ولی حل سادهٔ آن از طریق علم حساب به مغز آنها نمی‌رسید. ضمنا این مسئله آنقدرها ساده است که برای حل آن توسل به دستگاه جبری ضرور نیست.

اگر مرغزار بزرگ را تماسی دروگران در نصف روز تا قسمتی، و نیمهٔ دستهٔ دروگران در نیمهٔ دوم روز تا آخر درو کنند، واضح است که در نصف روز، نیمهٔ دستهٔ دروگران $\frac{1}{3}$ مرغزار

را درو میکنند. بنا بر این در مرغزار کوچک قسمت دروناشده‌ای برابر به $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ باقی ماند. هرگاه یک دروگر در روز $\frac{1}{6}$ مرغزار را درو کند و چون $\frac{6}{6}+\frac{2}{6}=\frac{8}{6}$ درو شد، بنا بر این، تعداد دروگرها ۸ تن بود.

تولستوی که در تمام عمر، مسایل شعبده‌بازی نسبتاً آسان را دوست داشت این مسئله را در زمان طفولیت از پدر من آموخته بود. زمانی برای من پیش آمد تا در بارهٔ این مسئله با تولستوی که پیر شده بود صحبت کنم. او بخصوص شیفتهٔ آن بود که این مسئله بسیار صاف و روشن میشود اگر جهت حل آن از طرح ابتدائی (شکل ۷) کمک بگیریم».



شکل ۷

ذیلا با چند مسئلهٔ دیگری برخورد میکنیم که با شرط داشتن کمی درایت از طریق علم حساب ساده‌تر حل میشوند تا از طریق جبری.

گاوها در مرغزار

مسئله

نیوتن در کتاب «حساب عمومی» خویش نوشته که «در مطالعهٔ علوم، مسایل از قواعد مفیدترند» و دستورهای نظری را با

یک سری مثال‌ها همراه نموده است. در جملهٔ این تمرینات مسئله گاوهائی را مییابیم که در مرغزار میچرند. این مسئله سرسلسله مسایل ویژه‌ای است مانند مسئلهٔ زیر:

«سبزه‌ها در تمامی مرغزار با سرعت و انبوهی یک نواخت می‌روید. معلوم است که ۷۰ گاو در ۲۴ روز، و ۳۰ گاو در ۶۰ روز این سبزه‌ها را میخورند. چند گاو سبزه‌های مرغزار را در ۹۶ روز خواهند خورد؟»

این مسئله برای یک حکایت فکاهی از قبیل «آموزگار خصوصی» چخوف دستاویز شده بود. دو نفر بزرگسال از خویشاوندان شاگرد مدرسه که این مسئله برای حل باو داده شده بود بدون موفقیت برای حل آن کوشش نموده و ابراز تعجب میکنند:

یکی از آن دو می‌گوید: چیز عجیبی است: هرگاه ۷۰ گاو تمامی سبزهٔ مرغزار را در ۲۴ روز بخورند، پس چند گاو آنرا در ۹۶ روز خواهند خورد؟ طبعا $\frac{۱}{۴}$ نسبت به ۷۰ یعنی $۱۷\frac{۱}{۲}$ گاو... حماقت یکم! و اینهم حماقت دوم: ۳۰ گاو سبزه را در ۶۰ روز می‌خورند، چند گاو آنرا در ۹۶ روز خواهند خورد؟ جواب بدتری بدست می‌آید: $۱۸\frac{۳}{۴}$ گاو. علاوه بر این هرگاه ۷۰ گاو سبزه را در ۲۴ روز بخورند، در این صورت ۳۰ گاو برای اینکار ۵۶ روز و نه ۶۰ روز بطوریکه در مسئله گفته میشود بکار میبرند. دومی میپرسد:

— آیا شما در محاسبهٔ خود، این نکته را مد نظر گرفتید که سبزه بطور مداوم بزرگ می‌شود؟

تذکری است عاقلانه: سبزه مداوماً بزرگ می‌شود و هرگاه این موضوع بحساب نیاید نه تنها مسئله حل نمی‌شود بلکه حتی فرض مسئله متناقض بنظر خواهد رسید.

مسئله چطور حل می‌شود؟

حل

در اینجا یک مجهول کمکی که بزرگ شدن شبانه‌روزی سبزه را نسبت به ذخیرهٔ آن در مرغزار بیان نماید، بکار می‌بریم. اگر بزرگ

شدن شبانه‌روزی سبزه را به y نشان دهیم، رشد آن در مدت ۲٤ روز، $۲٤y$ میشود. اگر ذخیرهٔ عمومی را برابر ۱ بگیریم در اینصورت در مدت ۲٤ روز، گاوها

$$۱ + ۲٤y$$

را می‌خورند و در یک شبانه‌روز تمامی گله (۷۰ گاو) به اندازهٔ

$$\frac{۱ + ۲٤y}{۲٤}$$

و یک گاو باندازهٔ

$$\frac{۱ + ۲٤y}{۲٤ \times ۷۰}$$

میخورد. قیاس بر این اگر ۳۰ گاو تمامی سبزهٔ مرغزار را در ٦۰ شبانه‌روز بخورند در آنصورت یک گاو در یک شبانه‌روز به اندازهٔ

$$\frac{۱ + ٦۰y}{۳۰ \times ٦۰}$$

می‌خورد.

اما مقدار سبزه‌ای که خوراک شبانه‌روزی گاو می‌باشد در هر دو مورد یکی است لذا

$$\frac{۱ + ۲٤y}{۲٤ \times ۷۰} = \frac{۱ + ٦۰y}{۳۰ \times ٦۰}$$

از اینجا

$$y = \frac{۱}{٤۸۰}$$

بعد از دریافت y (مقدار رشد) به آسانی می‌توان تعیین نمود که یک گاو در یک شبانه‌روز کدام قسمت ذخیرهٔ اولیهٔ سبزه را می‌خورد:

$$\frac{۱ + ۲٤y}{۲٤ \times ۷۰} = \frac{۱ + ۲٤ \times \frac{۱}{٤۸۰}}{۲٤ \times ۷۰} = \frac{۱}{۱٦۰۰}$$

و بالاخره جهت حل نهائی مسئله، معادله‌ای تشکیل می‌دهیم:
هرگاه تعداد مطلوب گاوها x باشد در اینصورت

$$\frac{۱ + ۹۶ \times \frac{۱}{۴۸۰}}{۹۶x} = \frac{۱}{۱۶۰۰}$$

و از اینجا $x = ۲۰$.
۲۰ گاو تمامی سبزه را در ۹۶ روز خواهند خورد.

مسئلهٔ نیوتن

حالا مسئلهٔ نیوتن در بارهٔ گاوها را که مسئلهٔ فوق از روی آن ترتیب یافته بود مد نظر میگیریم.

اتفاقا این مسئله توسط خود نیوتن ابداع نگردیده بلکه محصول خلاقیت مردم در ریاضی است.

«سه مرغزاری که بطور یکنواخت از سبزه پوشیده شده و سرعت نمو سبزه‌ها نیز یکی است، دارای مساحات $۳\frac{۱}{۳}$ هکتار، ۱۰ هکتار و ۲۴ هکتار می‌باشند. مرغزار اولی برای تغذیهٔ ۱۲ گاو در مدت ۴ هفته، و مرغزار دومی برای تغذیه ۲۱ گاو در مدت ۹ هفته کافی بوده است. مرغزار سومی در مدت ۱۸ هفته برای تغذیهٔ چند گاو کفایت می‌نماید؟

حل

بوسیلهٔ مجهول کمکی y اندازهٔ رشد هفتگی سبزه در یک هکتار را نسبت به ذخیرهٔ اولیهٔ سبزه نمایش میدهیم. در مرغزار اولی در مدت یک هفته سبزه به اندازهٔ $۳\frac{۱}{۳}y$، و در مدت ۴ هفته باندازهٔ

$۳\frac{۱}{۳}y \times ۴ = \frac{۴۰}{۳}y$ نسبت به همان ذخیره‌ای که بدواً در یک هکتار موجود بود بزرگ می‌شود.

این، معادل آن است که اگر مساحت اولیهٔ مرغزار بزرگ شده و مساوی به

$$\left(۳\frac{۱}{۳}+\frac{۴۰}{۳}y\right)$$

هکتار می‌گردید. به دیگر سخن، گاوها به آن اندازه سبزه خوردند که معادل سبزهٔ مرغزاری به مساحت y $\frac{۴۰}{۳}+$ $۳\frac{۱}{۳}$ هکتار می‌باشد. در مدت یک هفته ۱۲ گاو یک چهارم این مقدار را، و یک گاو در یک هفته $\frac{۱}{۴۸}$ را یعنی ذخیرهٔ موجود در مساحت

$$\left(۳\frac{۱}{۳}+\frac{۴۰y}{۳}\right):۴۸=\frac{۱۰+۴۰y}{۱۴۴}$$

هکتار را خورده‌اند.

بطور مشابه مساحت مرغزاری را که به یک گاو طی یک هفته غذا میدهد، از روی معلومات مربوط به مرغزار دومی پیدا می‌کنیم:

رشد هفتگی در یک هکتار $=y$،
رشد ۹ هفتگی در یک هکتار $=۹y$،
رشد ۹ هفتگی در ۱۰ هکتار $=۹۰y$

مساحت قطعه‌ای که ذخایر سبزهٔ آن برای تغذیهٔ ۲۱ گاو در مدت ۹ هفته کفایت نماید مساوی است به

$$۱۰+۹۰y$$

مساحتی که برای تغذیهٔ ۱ گاو در مدت یک هفته کفایت می‌کند مساوی به

$$\frac{۱۰+۹۰y}{۹\times۲۱}=\frac{۱۰+۹۰y}{۱۸۹}$$

هکتار است. هر دو مساحت تغذیهٔ یک گاو باید یکی باشد:

$$\frac{۱۰+۴۰y}{۱۴۴}=\frac{۱۰+۹۰y}{۱۸۹}$$

با حل این معادله، دریافت می‌کنیم $y=\frac{۱}{۱۲}$.

حالا مساحت مرغزاری را تعیین می‌کنیم که ذخیرهٔ موجود سبزهٔ آن برای تغذیهٔ یک گاو در مدت یک هفته کفایت نماید:

$$\frac{۱۰+۴۰y}{۱۴۴}=\frac{۱۰+۴۰\times\frac{۱}{۱۲}}{۱۴۴}=\frac{۵}{۵۴}$$

هکتار. بالاخره به سوال مسئله جواب میدهیم. تعداد مطلوب گاوها را به x نمایش داده، داریم:

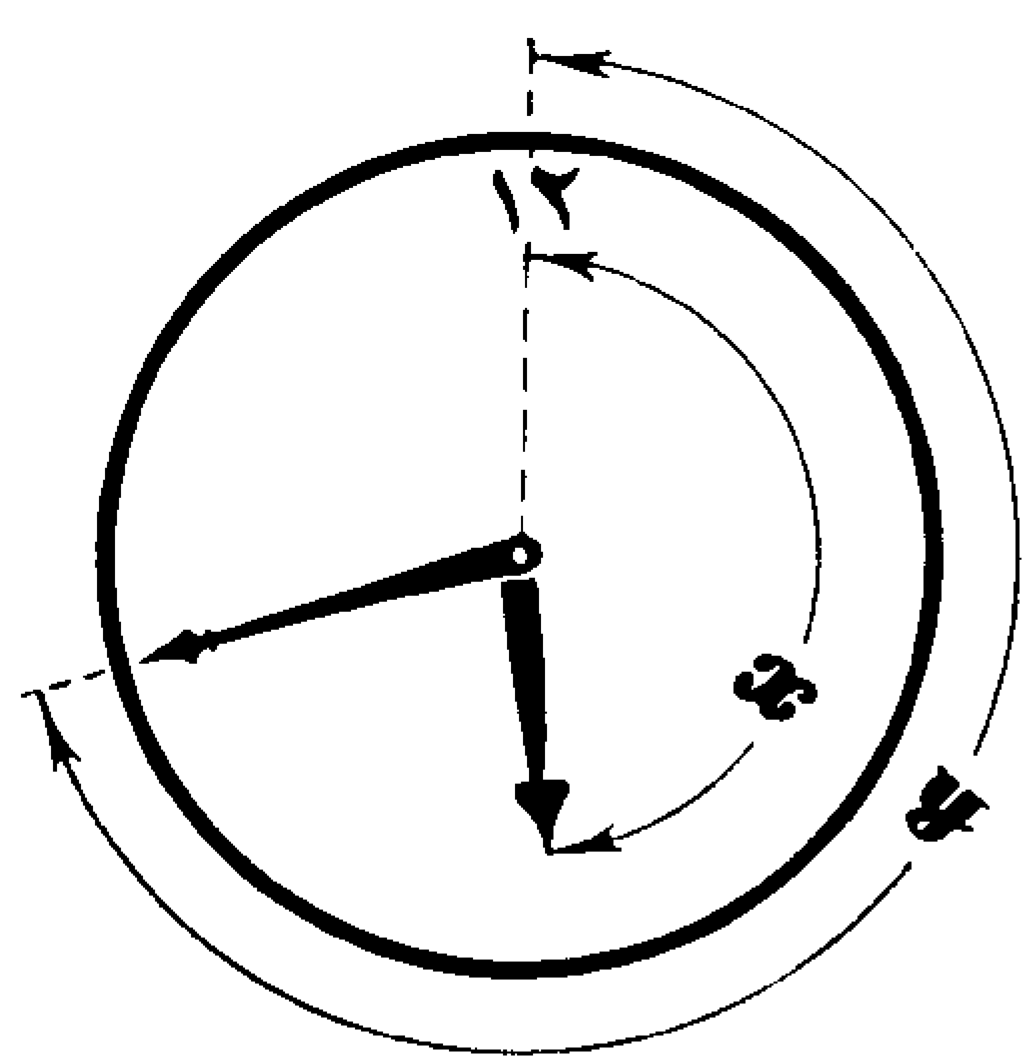
$$\frac{۲۴+۲۴\times ۱۸\times\frac{۱}{۱۲}}{۱۸x}=\frac{۵}{۵۴}$$

از اینجا $x=۳۶$. مرغزار سومی می‌توانند به ۳۶ گاو در مدت ۱۸ هفته غذا بدهد.

جابجا نمودن عقربه‌های ساعت

مسئله

تذکره‌نویس آ. موشکوفسکی دوست و نویسندهٔ شرح حال آ.اینشتین فیزیک‌دان مشهور یک روز برای مشغول ساختن دوست خود که در بستر بیماری افتاده بود، مسئلهٔ زیر را پیشنهاد نمود (شکل ۸):
موشکوفسکی گفت:



شکل ۸

«فرض کنیم که عقربه‌ها موقعیت ساعت ۱۲ را دارند. اگر در این موقعیت عقربه‌های بزرگ و کوچک جاهای خود را باهم عوض می‌نمودند، آنها باز هم وقت صحیح را نشان میدادند. ولی در لحظات دیگر مثلا در ساعت ۶ تعویض متقابل عقربه‌ها شکل مهملی را میداشت که در ساعت سالم غیر ممکن است. وقتیکه عقربهٔ ساعت‌شمار، ساعت ۱۲ را نشان دهد، عقربهٔ دقیقه‌شمار نمیتواند روی رقم ۶ باشد. این سوال پیش می‌آید: چه وقت و چقدر زود بزود عقربه‌های ساعت موقعیت‌هائی را اشغال می‌نمایند که تعویض یک عقربه با دیگری موقعیت نوی را بدهد که در ساعت سالم نیز امکان‌پذیر است؟

اینشتین در جواب گفت:

— بلی، این مسئله‌ای کاملا مناسب، جالب و تازه هم نه چندان آسان برای شخصی است که بخاطر کسالت در بستر مانده باشد. منتها میترسم که این سرگرمی زیاد طول نکشد، من حالا به راه حل آن رسیدم.

او بعد از آنکه در بستر خود نشست، با چند خط طرح شرایط مسئله را رسم نمود. برای حل مسئله او وقت کمتر را نسبت به آنکه من در طرح نمودن آن مصرف کرده بودم بکار برد ...»

مسئله چطور حل می‌شود؟

حل

فاصلهٔ عقربه‌ها را در محیط دایرهٔ صفحهٔ ساعت از نقطه‌ایکه عدد ۱۲ قرار دارد برحسب یک شصتم دایره، اندازه می‌گیریم.

فرض کنیم یکی از موقعیت‌های مطلوب عقربه‌ها وقتی مشاهده گردید که عقربهٔ ساعت‌شمار از رقم ۱۲ به اندازهٔ x قسمت و عقربهٔ دقیقه‌شمار باندازهٔ y قسمت دور شده بود. چون عقربهٔ ساعت‌شمار ۶۰ قسمت را در مدت ۱۲ ساعت، یعنی پنج قسمت در ساعت طی می‌کند لذا x قسمت را در مدت $\frac{x}{5}$ ساعت طی می‌کند. به عبارت دیگر بعد از آنکه ساعت، ساعت ۱۲ را نشان داد، مدت $\frac{x}{5}$ ساعت سپری شده است. عقربهٔ دقیقه‌شمار y قسمت را در

y دقیقه یعنی در $\frac{y}{۶۰}$ ساعت طی کرد. به عبارت دیگر عقربهٔ دقیقه‌شمار

رقم ۱۲ را $\frac{y}{۶۰}$ ساعت قبل طی کرد یا

$$\frac{x}{۵} - \frac{y}{۶۰}$$

ساعت بعد از آنکه هر دو عقربه روی ۱۲ قرار داشتند. این عدد صحیح است (از صفر الی ۱۱) چونکه نشان میدهد که چند ساعت تام بعد از ساعت ۱۲ سپری شده است.

وقتیکه عقربه‌ها جای خود را عوض می‌کنند ما بهمان ترتیب پیدا می‌کنیم که از ساعت ۱۲ الی وقتی که عقربه‌ها نشان میدهند،

$$\frac{y}{۵} - \frac{x}{۶۰}$$

ساعت تام سپری گردیده است. این عدد نیز صحیح است (از صفر الی ۱۱).

دستگاه معادله زیر را داریم:

$$\begin{cases} \frac{x}{۵} - \frac{y}{۶۰} = m, \\ \frac{y}{۵} - \frac{x}{۶۰} = n \end{cases}$$

در اینجا m و n اعداد صحیحی است که می‌توانند در فاصله‌ای از صفر الی ۱۱ تغییر نمایند. از این دستگاه پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{۶۰\,(۱۲m + n)}{۱۴۳},$$

$$y = \frac{۶۰\,(۱۲n + m)}{۱۴۳}$$

اگر به m و n مقادیری از صفر الی ۱۱ داده شود در اینصورت ما تمامی موقعیت‌های مطلوب عقربه‌ها را تعیین می‌نمائیم. از آنجا که هرکدام از ۱۲ مقدار m را می‌توان با هر کدام از ۱۲

مقدار n مقایسه کرد لذا بنظر میرسد که تعداد تمامی جواب‌ها برابر به $۱۲ \times ۱۲ = ۱۴۴$ است. ولی در حقیقت این تعداد مساوی به ۱۴۳ است زیرا که در ازاء $m = ۰$، $n = ۰$ و در ازاء $m = ۱۱$، $n = ۱۱$ عقربه‌ها در موقعیت یکسان قرار میگیرند.

در ازاء $m = ۱۱$، $n = ۱۱$ داریم:

$$x = ۶۰, \quad y = ۶۰$$

یعنی ساعت، مانند حالت $m = ۰$، $n = ۰$، ۱۲ را نشان میدهد.

تمامی موقعیت‌های ممکنه را بررسی‌ننموده و تنها دو مثال در نظر میگیریم.

مثال اول:

$$m = ۱, \quad n = ۱$$

$$x = \frac{۶۰ \times ۱۳}{۱۴۳} = ۵\frac{۵}{۱۱}, \quad y = ۵\frac{۵}{۱۱}$$

یعنی ساعت ۱ و $۵\frac{۵}{۱۱}$ دقیقه را نشان می‌دهد. در این لحظه عقربه‌ها بر هم منطبق می‌شوند. البته جای آنها را می‌توان عوض نمود (عیناً مانند انطباقات دیگر عقربه‌ها).

مثال دوم:

$$m = ۸, \quad n = ۵$$

$$x = \frac{۶۰(۵ + ۱۲ \times ۸)}{۱۴۳} \approx ۴۲,۳۸; \quad y = \frac{۶۰(۸ + ۱۲ \times ۵)}{۱۴۳} \approx$$

$$\approx ۲۸,۵۳$$

که متناظر با ساعت ۸ و ۲۸,۵۳ دقیقه و ساعت ۵ و ۴۲,۳۸ دقیقه است.

ما تعداد جواب‌ها را میدانیم که ۱۴۳ است. برای یافتن تمام نقاط صفحهٔ ساعت که موقعیت‌های مطلوب عقربه‌ها را ارائه می‌نماید باید محیط دایرهٔ صفحهٔ ساعت را تقسیم بر ۱۴۳ قسمت مساوی نمود. در اینصورت ۱۴۳ نقطه را حاصل مینمائیم. در نقاط بینابینی موقعیت‌های مطلوب عقربه‌ها ناممکن است.

تطابق عقربه‌های ساعت

مسئله

در ساعت‌هائی که صحیح کار می‌کند چه تعداد موقعیت‌هائی وجود دارد که عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در آنها تطابق می‌نماید؟

حل

ما می‌توانیم از معادلاتی که برای حل مسایل قبلی تشکیل داده بودیم استفاده کنیم. اگر عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار بر هم منطبق شده باشند جای آنها را می‌توان عوض کرد و از این کار چیزی تغییر نمی‌کند. در اینصورت هر دو عقربه تعداد مساوی قسمت‌ها را از عدد ۱۲ طی کرده‌اند یعنی $x=y$. بدینترتیب از بحث مربوط به مسئلهٔ قبلی معادلهٔ زیر را حاصل می‌نمائیم:

$$\frac{x}{٥}-\frac{x}{٦٠}=m$$

که m عدد صحیحی از صفر الی ۱۱ است. از این معادله می‌یابیم:

$$x=\frac{٦٠m}{١١}$$

از ۱۲ مقدار ممکنهٔ m (از صفر الی ۱۱) ما بجای ۱۲ فقط ۱۱ موقعیت مختلف عقربه‌ها را حاصل می‌کنیم چون بازاء $m=١١$ مقدار $x=٦٠$ را حاصل می‌نمائیم یعنی اینکه هر دو عقربه ۶۰ قسمت را طی نموده و روی رقم ۱۲ قرار دارند. و این نتیجه در ازاء $m=٠$ نیز حاصل می‌گردد.

مهارت دریافتن اعداد

بدون شک هر کدام شما با «شعبده‌بازی» پیدا کردن اعداد برخورده‌اید. شعبده‌باز معمولا پیشنهاد می‌نماید تا اعمالی را به شکل زیر انجام دهید: عددی را در نظر بگیر، ۲ را به آن علاوه کن، عدد حاصل شده را در ۳ ضرب کن، ۵ را از آن تفریق کن، عدد مورد نظر را از آن کم کن و غیره، بطور کلی پنج تا ده عمل.

بعدا شعبده‌باز از شما می‌پرسد که در نتیجه، چه حاصل نمودید و پس از گرفتن جواب، فورا عدد انتخابی شما را برایتان میگوید.

راز «شعبده‌بازی» مسلما بسیار ساده است و اساس آنرا معادلات تشکیل میدهد.

فرض کنیم شعبده‌باز به شما پیشنهاد کند یک سری اعمال را طبق برنامهٔ جدول زیر اجرا نمائید:

عددی را در نظر بگیر	x
۲ را به آن علاوه کن	$x + ۲$
نتیجه را در ۳ ضرب کن	$۳x + ۶$
۵ را کم کن	$۳x + ۱$
عدد مورد نظر را کم کن	$۲x + ۱$
در ۲ ضرب کن	$۴x + ۲$
۱ را کم کن	$۴x + ۱$

بعد شعبده‌باز از شما خواهش می‌کند تا نتیجهٔ نهائی را اطلاع دهید و بعد از گرفتن اطلاع دفعتاً عدد مورد نظرتان را به شما میگوید. او چطور این کار را انجام میدهد؟

برای درک این موضوع کافی است که به ستون چپ جدول، جائیکه دستورهای شعبده‌باز به زبان جبر برگردانده شده است توجه نمائید. از این ستون بر می‌آید که هرگاه شما یک عدد x را در نظر گرفتید در این صورت بعد از انجام همهٔ عملیات، شما باید $x + ۱$؛ را بدست آورید. با دانستن این موضوع، به آسانی میتوان عدد مورد نظر را پیدا نمود.

بطور مثال فرض کنیم، شما به شعبده‌باز اطلاع دادید که عدد ۳۳ بدست آمد. آنگاه شعبده‌باز بزودی در ذهن خود معادلهٔ $۴x + ۱ = ۳۳$ را حل نموده و جواب $x = ۸$ را پیدا می‌کند. به عبارت دیگر از نتیجهٔ نهائی باید عدد ۱ را کم کرد (۳۲ = ۱ − ۳۳) و بعد عدد حاصله را تقسیم به ۴ نمود (۸ = ۴ : ۳۲) و در نتیجه عدد مورد نظر (۸) بدست میآید. اگر هم شما عدد ۲۵ را بدست آوردید در این صورت شعبده‌باز اعمال ۲۴ = ۱ − ۲۵ و ۶ = ۴ : ۲۴ را در ذهن خود انجام داده و در جواب شما می‌گوید که عدد مورد نظرتان ۶ است.

بطوریکه می‌بینید همه‌چیز بسیار ساده است: شعبده‌باز از قبل میداند که نتیجه را چه کار باید کرد تا عدد مورد نظر بدست‌آید.

با دانستن این کار شما می‌توانید دوستان خود را به حیرت آورده و به فکر اندازید اگر به آنها پیشنهاد نمائید که نوع اعمال روی عدد مورد نظر را بدلخواه خود انتخاب نمایند. شما به دوستتان پیشنهاد می‌نمائید تا عددی را در نظر گرفته و بترتیب دلخواه اعمال ذیل را انجام دهد: یک عدد معلوم را علاوه و یا کم کند (مانند: ۲ را علاوه و ۵ را کم کند و غیره) یا در عدد معلومی* ضرب نماید (در ۲، در ۳ و غیره)، عدد مورد نظر را علاوه و یا کم نماید. دوستتان برای سر در گم کردن شما تعداد اعمال را زیاد میکند. مثلا او عدد ۵ را بدون اطلاع شما در نظر گرفته و همزمان با انجام اعمال می‌گوید:

— من عددی را در نظر گرفتم، ضرب در ۲ نمودم، عدد ۳ را به نتیجه علاوه کردم، بعد عدد مورد نظر را اضافه کردم. اینک هم عدد ۱ را علاوه، و نتیجه را ضرب در ۲ کردم، عدد مورد نظر را کم کردم، عدد ۳ را کم کردم، باز هم عدد مورد نظر را کم کردم، عدد ۲ را کم کردم. بالاخره نتیجه را در ۲ ضرب کرده و ۳ را علاوه نمودم.

---

* بهتر است عمل تقسیم را مجاز نکنید برای اینکه شعبده‌بازی پیچیده نگردد.

بعد او حدس میزند که شما را کاملا گمراه کرده است و پیروزمندانه بشما خبر میدهد:

— ۴۹ بدست آمد.

او تعجب میکند از اینکه شما فورا به او اطلاع می‌دهید که عدد مورد نظرش ۵ بوده است.

این را چطور انجام می‌دهید؟ حالا دیگر این موضوع بقدر کافی روشن است. وقتیکه دوست شما از عملیات خویش روی عدد مورد نظر به شما اطلاع می‌دهد شما بطور همزمان در ذهن خود مجهول x را عمل می‌آورید. او به شما می‌گوید: «من عددی را در نظر گرفتم...» و شما با خود می‌گوئید: «یعنی ما داریم x». او می‌گوید: «آن را ضرب در ۲ کردم...» (و او در حقیقت عمل ضرب اعداد را انجام می‌دهد) و شما با خود ادامه می‌دهید: «حالا ۲x شد». او می‌گوید: «... به نتیجه عدد ۳ را علاوه کردم...» و شما بلافاصله تعقیب میکنید: ۲x + ۳ و الخ. وقتیکه او کاملا شما را «سر در گم» ساخته و کلیهٔ عملیات فوق‌الذکر را انجام داد شما هم چیزی را بدست آوردید که در جدول زیر گنجانیده شده است (ستون راست گفته‌های رفیق شما را و ستون چپ تمامی عملیاتی را که شما در ذهن خود انجام داده‌اید در بر دارد).

بالاخره شما با خود فکر کردید که نتیجهٔ نهائی ۸x + ۹ است. حالا او می‌گوید: «در نتیجه، ۴۹ بدست آوردم». و معادلهٔ شما هم آماده است: ۸x + ۹ = ۴۹. حل این معادله کاری ندارد و شما فوراً باو اطلاع می‌دهید که عدد مورد نظرش ۵ بوده است.

این شعبده‌بازی به این خاطر موثر است که شما عملیات انجام شدنی روی عدد مورد نظر را پیشنهاد نمیکنید بلکه آنها را خود رفیقتان «اختراع» میکند.

راستی یک حالت موجود است که شعبده‌بازی با عدم موفقیت روبرو میشود. اگر مثلا بعد از یک سلسله عملیات، شما (در ذهن خود) x + ۱۴ را حاصل نمائید و بعد رفیق شما اظهار نماید: «... حالا عدد مورد نظر را کم کردم و عدد ۱۴ را بدست آوردم» شما هم عملیات او را دنبال می‌کنید: (x + ۱۴) − x = ۱۴، در حقیقت هم ۱۴ حاصل گردید ولی هیچ معادله‌ای موجود نیست و شما قادر به

من عددی در نظر گرفتم	x
آنرا ضرب در ۲ کردم	$۲x$
به نتیجه عدد ۳ را علاوه کردم	$۲x+۳$
بعد عدد مورد نظر را علاوه کردم	$۳x+۳$
حالا من ۱ را علاوه نمودم	$۳x+٤$
ضرب در ۲ کردم	$٦x+۸$
عدد مورد نظر را کم کردم	$٥x+۸$
عدد ۳ را کم کردم	$٥x+٥$
دوباره عدد مورد نظر را کم کردم	$٤x+٥$
عدد ۲ را کم کردم	$٤x+۳$
بالاخره نتیجه را ضرب در ۲ نمودم	$۸x+٦$
و عدد ۳ را علاوه کردم	$۸x+۹$

دریافت عدد مورد نظر نمی‌باشید. در این صورت چه باید کرد؟ چنین اقدام نمائید: بمجرد اینکه نتیجه‌ای بدست آید که شامل مجهول x نباشد حرف رفیتقان را قطع میکنید: «بس است! حالا بدون اینکه از تو چیزی بپرسم می‌توانم بگویم که چقدر بدستت آمد: ١٤». این هم رفیق شما را مات و مبهوت می‌سازد، آخر او که به شما هیچ چیز نگفته بود! گرچه شما عدد مورد نظر را دریافت نکردید شعبده‌بازی حسابی از آب در آمد!

اینک مثال میآوریم (مانند سابق در ستون راست گفته‌های رفیق شما آورده شده):

من عددی را در نظر گرفتم	x
۲ را به آن علاوه کردم	$x+۲$
و نتیجه را ضرب در ۲ کردم	$۲x+۴$
حالا من ۳ را علاوه کردم	$۲x+۷$
عدد مورد نظر را کم کردم	$x+۷$
۵ را علاوه کردم	$x+۱۲$
بعد عدد مورد نظر را کم کردم...	۱۲

در لحظه‌ایکه شما عدد ۱۲ یعنی عبارتی را که دیگر شامل مجهول x نیست حاصل نمودید شما سخن رفیقتان را قطع نموده و باو اطلاع میدهید که او عدد ۱۲ را بدست آورده است.

با کمی تمرین، شما بآسانی می‌توانید به دوستان خود چنین «شعبده‌بازی‌هائی» را نشان دهید.

حقیقت مهمل‌نما

مسئله

این است مسئله‌ای که ممکن است کاملا بی‌معنی بنظر آید:
۸۴ مساوی به چه خواهد بود اگر $۵۴ = ۸ \times ۸$؟
این سوال عجیب کاملا بی‌معنی نیست و مسئله را میتوان به کمک معادله حل کرد. سعی نمائید تا رمز آن را کشف کنید.

حل

شما لابد پی بردید که اعداد مسئله در دستگاه ده گانی نوشته نشده‌اند و الا سوال «۸۴ مساوی به چیست» بی‌معنی می‌بود. فرض

کنیم مبنای دستگاه شمار مجهول، x باشد، در آنصورت عدد ۸٤ معنی ۸ واحد مرتبهٔ دوم و ٤ واحد مرتبهٔ یکم را دارد یعنی:

$$«۸٤» = ۸x + ٤$$

عدد «٥٤» معنی $٥x + ٤$ را دارا است.

معادلهٔ $۸ \times ۸ = ٥x + ٤$ را داریم یعنی در دستگاه اعشاری $٥x + ٤ = ٦٤$، و از اینجا $x = ۱۲$.

اعداد در دستگاه دوازده‌گانی نوشته شده‌اند و $«۸٤» = ۱۰۰ = ۸ \times ۱۲ + ٤ =$. پس اگر $«٥٤» = ۸ \times ۸$ در این صورت $«۸٤» = ۱۰۰$.

یک مسئلهٔ مشابه دیگر نیز به همین منوال حل می‌شود:

۱۰۰ برابر به چیست وقتیکه $۳۳ = ٦ \times ٥$؟

جواب: ۸۱ (دستگاه شمار ۹ — گانی)

معادله بجای ما فکر میکند

اگر شما نسبت باینکه گاهی اوقات معادله از ما دوراندیشتر است شک داشته باشید مسئلهٔ زیر را حل کنید:

پدر ۳۲ سال، و پسر ٥ سال دارد. بعد از چند سال سن پدر ۱۰ برابر سن پسر می‌شود؟

مدت مطلوب را به x نمایش میدهیم. بعد از گذشت x سال سن پدر $x + ۳۲$، و سن پسر $x + ٥$ می‌شود و چون پدر آنگاه باید ۱۰ بار پیرتر از پسرش باشد بنابر این داریم:

$$۳۲ + x = ۱۰ \, (٥ + x)$$

با حل معادله، بدست می‌آوریم: $x = -۲$.

عبارت «بعد از منهای ۲ سال» بمعنی «دو سال پیش» است. وقتیکه ما معادله را تشکیل میدادیم فکر نکردیم که سن پدر در آینده هیچ‌گاه ۱۰ برابر سن پسر نخواهد شد، امکان چنین تناسبی تنها در گذشته موجود بود. معادله ژرف‌اندیش‌تر از ما از آب در آمده و ما را از غفلت خودمان باخبر کرد.

گاهی در اثنای حل معادلات به جواب‌هائی بر می‌خوریم که میتوانند ریاضی‌دان کم‌تجربه را به بن‌بست بکشانند. چند مثال می‌آوریم.

I. عدد دورقمی‌ای را پیدا کنید که دارای خواص ذیل باشد. رقم دهه‌ها باندازهٔ چهار کوچک‌تر از رقم یکان‌ها می‌باشد. اگر از عددی که باهمین ارقام منتها به ترتیب معکوس نوشته شده باشد عدد مطلوب را تفریق کنیم ۲۷ بدست می‌آید.

رقم دهه‌ها را به x، و رقم یکان‌ها را به y بیان نموده، ما به آسانی دستگاه معادلات این مسئله را تشکیل میدهیم:

$$\begin{cases} x = y - ٤ \\ (١٠y + x) - (١٠x + y) = ٢٧ \end{cases}$$

مقدار x را از معادلهٔ اول در معادلهٔ دوم قرار داده و پیدا می‌کنیم:

$$١٠y + y - ٤ - [١٠(y - ٤) + y] = ٢٧$$

و بعد از تبدیلات:

$$٣٦ = ٢٧$$

مقادیر مجهول ما تعیین نگردید اما ما دانستیم که $٣٦ = ٢٧$...

این چه معنی دارد؟

این تنها بان معنی است که عدد دو رقمی‌ای که شرایط وضع شده را واجد باشد وجود ندارد و معادلات تشکیل شده مغایر یکدیگر میباشند.

در حقیقت، هرگاه هر دو طرف معادلهٔ یکم را ضرب در ۹ کنیم از آن بدست می‌آوریم:

$$٩y - ٩x = ٣٦$$

و از معادلهٔ دوم (بعد از باز نمودن پرانتز و جمع جمله‌های متشابه):

$$٩y - ٩x = ٢٧$$

همان مقدار $9x - 9y$ طبق معادلهٔ یکم برابر به ۳۶، و مطابق معادلهٔ دوم مساوی به ۲۷ است. و این بدون شک غیرممکن است زیرا که ۲۷ ≠ ۳۶. اینگونه سوء تفاهم منتظر شخصی است که در صدد حل دستگاه معادلات زیر بر آید:

$$\begin{cases} x^{۲}y^{۲} = ۸, \\ xy = ٤ \end{cases}$$

بعد از تقسیم معادلهٔ یکم بر دوم، حاصل می‌نمائیم:

$$xy = ۲$$

و با مقایسهٔ معادلهٔ بدست آمده با معادلهٔ دوم، ما می‌بینیم که

$$\begin{cases} xy = ٤, \\ xy = ۲ \end{cases}$$

یعنی ٤ = ۲. اعدادی که در این دستگاه صادق باشند، وجود ندارند (دستگاه معادلاتی که مانند دستگاه تازه بررسی شده جواب ندارند متناقض نامیده میشوند.)

II. اگر مفاد مسئلهٔ قبل را کمی تغییر دهیم با نوع دیگری از حالات غیرمنتظره مواجه میشویم. مثلا میپذیریم که رقم دهه‌ها نه باندازهٔ چهار بلکه باندازهٔ ۳ از رقم یکان‌ها کوچک‌تر باشد و بقیهٔ شرایط را بلاتغییر میگذاریم. این عدد کدام است؟

معادله‌ای تشکیل میدهیم. اگر رقم دهه‌ها را به x نمایش دهیم آنگاه رقم یکان‌ها به صورت $x + ۳$ در می‌آید. با برگرداندن مسئله به زبان جبر، بدست می‌آوریم:

$$۱۰ (x + ۳) + x - [۱۰x + (x + ۳)] = ۲۷$$

از طریق ساده‌سازی به برابری

$$۲۷ = ۲۷$$

دست می‌یابیم.

این برابری یقینا درست است ولی هیچ چیز در بارهٔ مقدار x بما نمی‌گوید. آیا این بآن معنی است که اعداد جوابگوی شروط مسئله وجود ندارند؟

برعکس، این بآن معنی است که معادلهٔ تشکیلی ما اتحاد است یعنی در ازای هر مقدار دلخواه مجهول x، صادق است. در واقع بآسانی میتوان یقین حاصل کرد که خاصیت مذکور در مسئله، مربوط به هر عدد دورقمی می‌باشد که رقم یکان‌ها باندازهٔ ۳ از رقم دهه‌های آن بزرگتر باشد:

$$۱۴+۲۷=۴۱,\quad ۴۷+۲۷=۷۴,$$
$$۲۵+۲۷=۵۲,\quad ۵۸+۲۷=۸۵,$$
$$۳۶+۲۷=۶۳,\quad ۶۹+۲۷=۹۶$$

III. عدد سه رقمی‌ای را پیدا کنید که دارای خواص زیر باشد:

۱) رقم دهه‌ها برابر به ۷ می‌باشد،
۲) رقم صده‌ها به اندازهٔ ۴ کمتر از رقم یکان‌هاست.
۳) هرگاه ارقام این عدد را به ترتیب معکوس قرار دهیم عدد نو به اندازهٔ ۳۹۶ بزرگتر از عدد مطلوب می‌باشد.

رقم یکان‌ها را به x نمایش داده و معادله‌ای تشکیل میدهیم:

$$۱۰۰x+۷۰+x-۴-[۱۰۰(x-۴)+۷۰+x]=۳۹۶$$

این معادله بعد از ساده‌سازی به تساوی زیر منجر می‌شود:

$$۳۹۶=۳۹۶$$

اکنون خوانندگان می‌دانند که چنین نتیجه‌ای را چگونه باید تفسیر نمایند. آن این معنی‌را دارد که هر عدد سه‌رقمی‌ای که در آن رقم یکم به اندازهٔ ۴ کمتر از رقم سوم باشد،* در صورتیکه ارقام را به ترتیب معکوس قرار دهیم، به اندازهٔ ۳۹۶ بزرگ می‌شود.

ما تا به حال مسایلی را بررسی نمودیم که کم و بیش جنبهٔ مصنوعی و کتابی دارند. هدف آنها کسب ورزیدگی در زمینهٔ تشکیل و حل معادلات بود. حالا مجهز به نظریه، به بررسی چند نمونه از مسئله‌های عملی در رشتهٔ تولید، امور خانگی، امور جنگی و ورزش می‌پردازیم.

---

* رقم دهه‌ها اهمیت ندارد.

در آرایشگاه

مسئله

آیا جبر در آرایشگاه بکار می‌آید؟ معلوم می‌شود که چنین اتفاق می‌افتد. من به این وقتی متقاعد شدم که یک روز در آرایشگاه ناگهان سلمانی از من خواهش نمود:

— آیا در حل مسئله‌ای که ما از عهدهٔ آن بر نمی‌آئیم کمک نمیکنید؟

سلمانی دوم اضافه نمود: تا حال چقدر محلول به این علت خراب کردیم.

من پرسیدم: مسئله از چه قرار است؟

— ما دو محلول ۳۰ در صد و ۳ در صد آب اکسیژنه داریم، باید آنها را طوری با هم مخلوط نمود تا محلول ۱۲ در صد حاصل شود. ما از یافتن نسبت درست عاجزیم...

به من کاغذی دادند و نسبت مطلوب پیدا شد.

معلوم شد که آن مسئله بسیار ساده است. چگونه؟

حل

گرچه مسئله را از طریق حساب می‌توان حل نمود اما زبان جبری در این مورد ما را ساده‌تر و زودتر بمقصد میرساند. فرض کنیم که جهت تهیهٔ مخلوط ۱۲ در صد، x گرم محلول ۳ در صد و y گرم محلول ۳۰ در صد لازم شود. در اینصورت در قسمت یکم $۰,۰۳x$ گرم و در قسمت دوم $۰,۳y$ گرم آب اکسیژنهٔ خالص میباشد و جمعاً:

$$۰,۰۳x + ۰,۳y$$

در نتیجه، $(x+y)$ گرم محلولی که در آن مقدار آب اکسیژنهٔ خالص باید $۰,۱۲(x+y)$ باشد بدست می‌آید.

معادلهٔ زیر را داریم:

$$۰,۰۳x + ۰,۳y = ۰,۱۲\,(x+y)$$

از این معادله پیدا میکنیم $x = ۲y$ یعنی محلول ۳ در صد را باید بمقدار ۲ بار بیشتر از محلول ۳۰ در صد گرفت.

تراموای و پیاده

مسئله

وقتیکه در امتداد راه تراموای میرفتم، متوجه شدم که هر ۱۲ دقیقه یک تراموای از عقب من می‌آید و هر ٤ دقیقه خود من از یک تراموای استقبال می نمایم. من و تراموای‌ها بطور یکنواخت حرکت می‌کنیم.

واگن‌های تراموای چند دقیقه یکی پس از دیگری از ترمینال‌های خویش حرکت می‌نمایند؟

حل

هرگاه واگن‌ها هر x دقیقه از ترمینال خود حرکت نمایند این بآن معنی است که در نقطه‌ایکه من با یکی از تراموای‌ها ملاقات کردم تراموای بعدی در مدت x دقیقه می‌رسد. اگر آن از پشت سر برسد پس در مدت باقی‌مانده، $x - ۱۲$ دقیقه، باید فاصله‌ای را بپیماید که من در مدت ۱۲ دقیقه می‌پیمایم. یعنی فاصله‌ای را که من در یک دقیقه می‌پیمایم تراموای در مدت $\frac{۱۲ - x}{۱۲}$ دقیقه می‌پیماید.

و اما اگر تراموای از رو بروی من بیاید در این صورت ٤ دقیقه بعد از تراموای قبلی مرا ملاقات نموده و در بقیهٔ $(x - ٤)$ دقیقه فاصله‌ای را می‌پیماید که من آنرا در این ٤ دقیقه پیمودم. پس آن فاصله را که من در ۱ دقیقه می‌پیمایم تراموای در $\frac{x - ٤}{٤}$ دقیقه طی می‌کند.

معادله‌ای بدست می‌آوریم:

$$\frac{۱۲ - x}{۱۲} = \frac{x - ٤}{٤}$$

از اینجا $x = ٦$. واگن‌ها هر ٦ دقیقه حرکت می‌نمایند.

همچنین میتوان اینگونه راه حل را (که ماهیتاً حسابی میباشد) پیشنهاد نمود. فاصلهٔ ۲ تراموای متوالی را به a نمایش میدهیم.

آنگاه فاصلهٔ من و تراموائی که از روبروی من می‌آید بمقدار $\frac{a}{4}$ در دقیقه کاهش می‌یابد (چون فاصلهٔ a بین تراموای تازه رد شده و تراموای بعدی را هر دوی ما در چهار دقیقه طی میکنیم). و اما اگر تراموای از پشت سر بمن برسد در آنصورت فاصلهٔ بین ما بمقدار $\frac{a}{12}$ در دقیقه کاهش می‌یابد. حال فرض کنیم که من طی یک دقیقه به پیش رفتم و سپس از راه برگشته و بعقب رفتم (یعنی به جای قبلی بر گشتم). آنگاه در اولین دقیقه، فاصله بین من و تراموائی که اول از روبرو می‌آمد بمقدار $\frac{a}{4}$، و در دومین دقیقه (وقتیکه این تراموای از پشت سر بمن میرسید) بمقدار $\frac{a}{12}$ کاهش یافت. روی هم رفته در ۲ دقیقه فاصله بین ما بمقدار $\frac{a}{4}+\frac{a}{12}=\frac{a}{3}$ تقلیل یافت. عین این موضوع صورت میگرفت اگر من تمام این مدت را در جا وا ایستاده بودم زیرا در نتیجهٔ نهائی من بهر حال بجای قبلی برگشتم. بدینترتیب اگر من بی‌حرکت بودم در آنصورت در مدت یک (و نه دو) دقیقه تراموای باندازهٔ $\frac{a}{6}=2:\frac{a}{3}$ بمن نزدیک میشد و تمام فاصلهٔ a را در ۶ دقیقه می‌پیمود. این بآن معنی است که تراموای‌ها با فاصلهٔ زمانی ۶ دقیقه از جانب ناظر وا ایستاده رد میشوند.

کشتی و کلک‌ها

مسئله

یک کشتی در مدت ۵ ساعت (بدون توقف) از شهر A به شهر B واقع پائینتر در مسیر رودخانه رسیده بود. راه بازگشت را (با همان سرعت ویژهٔ خود و بدون توقف) در ۷ ساعت پیمود. کلک‌ها در چند ساعت از A به B میرسند (سرعت کلک‌ها با سرعت جریان رودخانه یکی است)؟

حل

مدت زمانی را که کشتی برای پیمودن فاصلهٔ بین A و B در آب ساکن (یعنی وقتی با سرعت ویژهٔ خود حرکت می‌کند) لازم دارد به x (برحسب ساعت) و مدت زمان حرکت کلک‌ها را به y نمایش میدهیم. در اینصورت کشتی در مدت یک ساعت $\frac{1}{x}$ فاصلهٔ AB را و کلک‌ها (یا آب روان) $\frac{1}{y}$ این فاصله را می‌پیمایند. بنا بر این کشتی در مدت یک ساعت در سوی جریان رودخانه $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ فاصلهٔ AB را و در سوی خلاف جریان $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ را طی میکند. و اما بنا بر فرض مسئله، کشتی در مدت یک ساعت $\frac{1}{5}$ فاصله را در سوی پائین و $\frac{1}{7}$ را در سوی بالا طی می‌کند. دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}, \\[2mm] \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که برای حل این دستگاه نباید مخرج کسرها را بر طرف نمود، بطور ساده باید معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم کرد. در نتیجه، بدست می‌آوریم:

$$\frac{2}{y}=\frac{2}{35}$$

و از اینجا $y=35$. کلک‌ها در ۳۵ ساعت از A تا B میروند.

دو قوطی قهوه

مسئله

دو قوطی حلبی پر از قهوه دارای شکل یکسان بوده و از یک نوع حلبی ساخته شده‌اند. وزن قوطی اول ۲ کیلوگرم و ارتفاع آن

۱۲ سانتی‌متر، وزن قوطی دوم ۱ کیلوگرم و ارتفاع آن ۹,۵ سانتی‌متر می‌باشد. وزن خالص قهوه در قوطی‌ها چقدر است؟

حل

وزن محتوی قوطی بزرگ را به x، و وزن محتوی قوطی کوچک را به y نشان میدهیم. وزن خود قوطی‌ها را، بترتیب، به z و t نمایش میدهیم. معادلات زیر را حاصل میکنیم:

$$\begin{cases} x+z=۲, \\ y+t=۱ \end{cases}$$

چون اوزان محتویات قوطی‌های پر متناسب با حجم‌های محتویات یا مکعب ارتفاع ها * می‌باشند بنابر این

$$x=۲,۰۲y \quad \text{یا} \quad \frac{x}{y}=\frac{۱۲^۳}{۹,۵^۳}\approx ۲,۰۲$$

و اما اوزان قوطی‌های خالی متناسب با سطوح کامل آنها یا مربع ارتفاع های آنهاست. بنا بر این،

$$z=۱,۶۰t \quad \text{یا} \quad \frac{z}{t}=\frac{۱۲^۲}{۹,۵^۲}\approx ۱,۶۰$$

مقادیر x و z را در معادلهٔ اول گذاشته و دستگاه زیر را حاصل میکنیم:

$$\begin{cases} ۲,۰۲y+۱,۶۰t=۲, \\ \quad y+t=۱ \end{cases}$$

بعد از حل آن حاصل می‌شود:

$$y=\frac{۲۰}{۲۱}=۰,۹۵, \quad t=۰,۰۵$$

---

* استفاده از چنین نسبتی تنها در صورتی مجاز است که جدار قوطی‌ها بسیار ضخیم نباشد (زیرا اگر دقیقاً بگوئیم سطوح خارجی و داخلی قوطی‌ها متشابه نیستند و علاوه بر این ارتفاع فضای داخلی قوطی از ارتفاع خود قوطی متفاوت است).

و بنا بر این،

$$x = ۱,۹۲, \quad z = ۰,۰۸$$

وزن قهوه بدون بسته‌بندی در قوطی بزرگتر ۱,۹۲ کیلوگرم و در قوطی کوچک‌تر ۰,۹٤ کیلوگرم می‌باشد.

شب‌نشینی

مسئله

در محفل شب‌نشینی ۲۰ نفر رقص‌کننده بودند. ماری با ۷ نفر، اولگا با ۸ نفر و ورا با ۹ نفر رقصیدند و الی آخر تا نینا که با تمامی مردها رقصید.

تعداد رقاص‌ها (مردها) در این شب‌نشینی چند بود؟

حل

مسئله در صورتیکه مجهول به شکل مناسب انتخاب گردد به سادگی حل می‌شود. ما نه تعداد رقاص‌ها بلکه تعداد رقاصه‌ها را جستجو نموده و آنرا به x نشان میدهیم.

اولی، ماری با $۱ + ٦$ نفر رقاص رقص نمود
دومی، اولگا « $۲ + ٦$ « « « « «
سومی، ورا « $۳ + ٦$ « « « « «
. . . .
x — امی، نینا $x + ٦$ « « « « «

معادلهٔ زیر را داریم:

$$x + (٦ + x) = ۲۰$$

از اینجا

$$x = ۷$$

و بنابر این، تعداد رقاص‌ها:

$$۲۰ - ۷ = ۱۳$$

اکتشاف دریایی

مسئلهٔ ۱.

به مکتشف (کشتی اکتشافی) که با ناوبخش حرکت میکرد، ماموریت دادند تا ناحیه‌ای بطول ۷۰ میل را در سمت حرکت ناوبخش تحقیق نماید.

سرعت ناوبخش ۳۵ میل در ساعت، و سرعت مکتشف ۷۰ میل در ساعت است. لازم است تعیین شود مکتشف بعد از چه مدتی به ناوبخش بازگشت می‌نماید.

حل

مدت مطلوب را به x (بر حسب ساعت) نشان میدهیم. در این مدت زمان ناوبخش فاصلهٔ $۳۵x$ میل، و کشتی اکتشافی فاصلهٔ $۷۰x$ میل را طی کرد. مکتشف ۷۰ میل به پیش رفته و قسمتی از این مسافت را در راه بازگشت پیموده است و ناوبخش بقیهٔ همان مسافت را طی کرده است. آنها با هم مسافت $۷۰x + ۳۵x$ برابر با ۷۰×۲ میل را پیموده‌اند. معادلهٔ زیر را داریم:

$$۷۰x + ۳۵x = ۱۴۰$$

از اینجا

$$x = \frac{۱۴۰}{۱۰۵} = ۱\frac{۱}{۳}$$

ساعت. مکتشف بعد از ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به ناوبخش بر می‌گردد.

مسئلهٔ ۲.

مکتشف ماموریت پیدا کرد در پیشاپیش ناوبخش در جهت حرکت آن به اکتشاف بپردازد. بعد از ۳ ساعت این کشتی باید به ناوبخش برگردد. در چه مدتی پس از ترک گفتن ناوبخش، کشتی اکتشافی باید به عقب برگردد در صورتیکه سرعت آن ۶۰، و سرعت ناوبخش ۴۰ گره* باشد؟

حل

فرض کنیم مکتشف باید بعد از x ساعت برگردد. بنا بر این، مکتشف طی x ساعت از ناوبخش دور گردیده و طی $۳ - x$ ساعت به استقبال آن حرکت نمود. مادامیکه تمام کشتی‌ها در یک سمت حرکت می‌نمودند مکتشف توانست در مدت x ساعت از ناوبخش

* گره واحد سرعت در ناوگان است و مساوی با یک میل دریائی در ساعت می‌باشد.

به فاصلهٔ برابر با اختلاف مسافات طی شدهٔ آنها دور شود یعنی به فاصلهٔ

$$٦٠x - ٤٠x = ٢٠x$$

مکتشف در راه بازگشت به استقبال ناوبخش فاصلهٔ $(x - ٣)$ ٦٠ را، و خود ناوبخش فاصلهٔ $(x - ٣)$ ٤٠ را پیمود. هر دوی آنها با هم فاصلهٔ $١٠x$ را طی کردند. بنا بر این،

$$٦٠(٣ - x) + ٤٠(٣ - x) = ٢٠x$$

که از اینجا

$$x = ٢\frac{١}{٢}$$

مکتشف باید ٢ ساعت و ٣٠ دقیقه پس از ترک گفتن ناوبخش، سمت خود را به جهت معکوس تغییر دهد.

در میدان دوچرخه‌سواری

مسئله

در راه دایره‌ای میدان دوچرخه‌سواری، دو دوچرخه‌سوار با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. وقتیکه در جهات مخالف حرکت می‌نمایند هر ١٠ ثانیه با هم ملاقات می‌کنند اما زمانیکه در یک سمت حرکت می‌کنند هر ١٧٠ ثانیه یکی به دیگری میرسد. سرعت هر دوچرخه‌سوار چند می‌باشد در صورتیکه طول راه دایره‌ای ١٧٠ متر باشد؟

حل

اگر سرعت دوچرخه‌سوار اول x باشد در این صورت او در مدت ١٠ ثانیه $١٠x$ متر را می‌پیماید. دومی که به استقبال اولی در حرکت است فاصلهٔ میان دو ملاقات متوالی یعنی بقیهٔ دایره را که برابر $١٧٠ - ١٠x$ متر است می‌پیماید. اگر سرعت دومی y باشد در این صورت فاصلهٔ مربوطه $١٠y$ متر است. بنا بر این،

$$١٧٠ - ١٠x = ١٠y$$

و اما هرگاه دوچرخه‌سواران یکی در پی دیگری حرکت کنند در این صورت در ۱۷۰ ثانیه، اولی $۱۷۰x$ متر و دوسی $۱۷۰y$ متر سی‌پیمایند. هرگاه اولی نسبت به دوسی سریعتر رود آنگاه بین دو ملاقات ستوالی یک دور بیشتر از دوسی طی میکند یعنی

$$۱۷۰x - ۱۷۰y = ۱۷۰$$

بعد از ساده ساختن این معادلات، بدست می‌آوریم:

$$x + y = ۱۷, \quad x - y = ۱$$

که از اینجا (بر حسب متر در ثانیه):

$$x = ۹, \quad y = ۸$$

مسابقهٔ موتورسیکلت‌سواری

مسئله

در مسابقهٔ موتورسیکلت‌سواری، یکی از سه موتورسیکلت‌هائیکه همزمان حرکت نموده‌اند با سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت کم‌تر از اولی و ۳ کیلومتر در ساعت بیشتر از سوسی میرفت و ۱۲ دقیقه پس از اولی و ۳ دقیقه قبل از سوسی به نقطهٔ نهائی رسید. حرکت بدون توقف صورت گرفت.

مطلوبست:

الف) طول مسیر،

ب) سرعت هر موتورسیکلت،

پ) مدت حرکت هر موتورسیکلت.

حل

گرچه مطلوبست هفت کمیت مجهول تعیین گردد ولی ما در حل مسئله تنها از دو مجهول استفاده میکنیم و دستگاهی از دو معادلهٔ دومجهولی تشکیل میدهیم.

سرعت موتورسیکلت دوسی را به x نشان میدهیم. در اینصورت سرعت موتورسیکلت اولی $x + ۱۵$، و سرعت موتورسیکلت سوسی $x - ۳$ خواهد بود.

طول مسیر را به y نمایش میدهیم. آنگاه مدت حرکت از این قرار خواهد بود:

برای موتورسیکلت اولی . . . . . . $\frac{y}{x+۱۰}$

» » دومی . . . . . $\frac{y}{x}$

» » سومی . . . . . . $\frac{y}{x-۳}$

ما میدانیم که موتورسیکلت دومی به اندازهٔ ۱۲ دقیقه (یعنی $\frac{۱}{۵}$ ساعت) بیشتر از اولی در راه بود. بنا بر این،

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{x+۱۰}=\frac{۱}{۵}$$

موتورسیکلت سومی به اندازهٔ ۳ دقیقه (یعنی $\frac{۱}{۲۰}$ ساعت) بیشتر از دومی در راه بود. بنا بر این،

$$\frac{y}{x-۳}-\frac{y}{x}=\frac{۱}{۲۰}$$

معادلهٔ دوم را ضرب در ٤، و از اولی کم میکنیم:

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{x+۱۰}-٤\left(\frac{y}{x-۳}-\frac{y}{x}\right)=۰$$

همهٔ جملات این معادله را بخش بر y (که از قرار معلوم مخالف صفر است) نموده و سپس مخرج کسرها را از میان بر میداریم. معادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$(x+۱۰)(x-۳)-x(x-۳)-٤x(x+۱۰)+$$
$$+٤(x+۱۰)(x-۳)=۰$$

یا پس از باز نمودن پرانتز و جمع کردن جملات متشابه:

$$۳x-۲۲۵=۰$$

که از اینجا

$$x = ۷۵$$

با دانستن x، از معادلهٔ اول y را بدست می‌آوریم:

$$\frac{y}{۷۵} - \frac{y}{۹۰} = \frac{۱}{۵}$$

که از اینجا $y = ۹۰$.

بدین ترتیب سرعت موتورسیکلت‌ها تعیین گردیده است:

۹۰، ۷۵ و ۷۲ کیلومتر در ساعت.

طول تمام راه = ۹۰ کیلومتر.

با تقسیم طول راه بر سرعت هر موتورسیکلت، مدت حرکت را دریافت می‌کنیم:

برای موتورسیکلت اول . . . . . . ۱ ساعت
برای موتورسیکلت دوم . . . . . . ۱ ساعت و ۱۲ دقیقه
برای موتورسیکلت سوم . . . . . . ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه

بدین ترتیب، تمامی هفت مجهول دریافت گردیده است.

سرعت متوسط حرکت

مسئله

اتومبیل فاصلهٔ بین دو شهر را با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت پیموده و با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت بازگشت. سرعت متوسط حرکت آن چقدر بود؟

حل

سادگی ظاهری مسئله، بسیاری اشخاص را گمراه می‌سازد. بی آنکه به شرط‌های مسئله پی‌ببرند میانگین حسابی یعنی نصف مجموع ۶۰ و ۴۰ را پیدا می‌نمایند:

$$\frac{۶۰ + ۴۰}{۲} = ۵۰$$

این حل «ساده» در صورتی صحت میداشت که طول مدت رفت و برگشت یکی میبود. روشن است که بازگشت (با سرعت کم‌تر) باید وقت بیشتر از رفت را میگرفت. با در نظر گرفتن این مطلب، ما پی‌میبریم که جواب ۵۰ درست نیست.

و حقیقتاً معادله جواب دیگری میدهد. معادله را به آسانی میتوان تشکیل داد در صورتی که l فاصلهٔ بین دو شهر را بعنوان مجهول کمکی وارد کنیم. سرعت متوسط مطلوب را به x نمایش داده و معادله‌را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{۲l}{x}=\frac{l}{۶۰}+\frac{l}{۴۰}$$

چون l مساوی صفر نیست بنا بر این میتوانیم معادله را بر l تقسیم کنیم. حاصل می‌شود:

$$\frac{۲}{x}=\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۴۰}$$

از اینجا

$$x=\frac{۲}{\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۴۰}}=۴۸$$

بدینترتیب جواب درست به جای ۵۰ کیلومتر در ساعت ۴۸ می‌باشد.

اگر ما این مسئله را بکمک حروف حل میکردیم (سرعت رفت اتومبیل a کیلومتر در ساعت و سرعت بازگشت آن b کیلومتر در ساعت) در آنصورت این معادله را حاصل می‌نمودیم:

$$\frac{۲l}{x}=\frac{l}{a}+\frac{l}{b}$$

از اینجا برای x مقدار

$$\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$$

را حاصل می‌کنیم.

این کمیت را برای مقادیر a و b بنام معدل هماهنگ میگویند.

بدینترتیب سرعت متوسط حرکت به شکل معدل حسابی بیان نگردیده بلکه به شکل معدل هماهنگ بیان میگردد. در صورت مثبت بودن a و b، معدل هماهنگ همیشه کمتر از معدل حسابی آنها است:

$$\frac{a+b}{2}$$

آنچه را که ما در مثال عددی نیز دیدیم (۴۸ از ۵۰ کم‌تر است).

ماشین‌های حساب سریع‌العمل

ضمن صحبت در بارهٔ معادلات در چهارچوب «سرگرمی‌های جبر» نباید موضوع حل معادلات بکمک ماشین‌های حساب را مسکوت گذارد. ما قبلا گفتیم که ماشین‌های حساب میتوانند شطرنج (یا دام) «بازی کنند». ماشین‌های ریاضی کارهای دیگری از قبیل ترجمه از زبانی به زبان دیگر، تنظیم آهنگهای موسیقی و غیره را نیز میتوانند انجام دهند. منتها لازم است «برنامهٔ» مناسبی تهیه گردد که ماشین طبق آن کار کند.

البته ما در اینجا به بررسی «برنامهٔ» بازی شطرنج یا ترجمه از یک زبان به زبان دیگری نمیپردازیم چون این «برنامه‌ها» فوق‌العاده پیچیده است. ما به بررسی تنها دو «برنامهٔ» بسیار ساده اکتفاء میکنیم. و اما ابتداء باید سخنی چند در پیرامون ساختمان ماشین حساب بگوئیم.

در فوق (فصل ۱) ما در بارهٔ اسبابهایی گفتگو کردیم که انجام هزارها محاسبه در ثانیه را ممکن میسازد. آن قسمت از ماشین حساب که مستقیما عملیات را انجام میدهد اسباب حساب نامیده میشود. علاوه بر این، ماشین حساب یک دستگاه کنترل (که کار تمام ماشین را تنظیم میکند) و اسبابی بنام حافظه را در بر دارد. حافظه یا اسباب حفظ‌کننده انباریست برای نگهداری اعداد و علامات شرطی که آنرا انباره نیز میگویند. و بالاخره، ماشین به دستگاه‌های ویژه‌ای جهت وارد ساختن داده‌های عددی جدید و بیرون دادن

نتایج آماده مجهز است. این نتایج آماده را ماشین (این دفعه، در دستگاه اعشاری) روی برگه‌های مخصوص چاپ میکند.

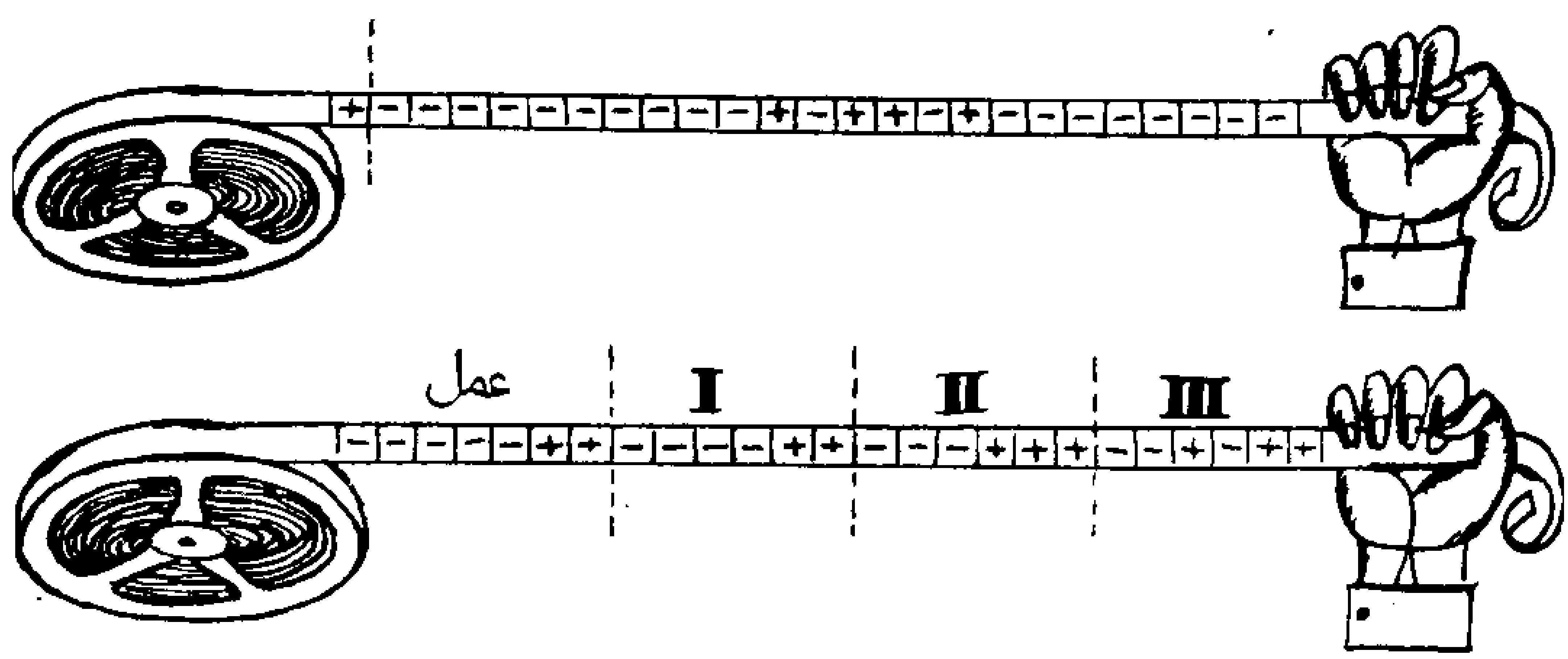
همه بخوبی اطلاع دارند که صوت را می‌توان روی صفحه یا نوار ثبت نمود و سپس آنرا دوباره تولید کرد. لکن ثبت روی صفحه تنها یک بار میتواند انجام شود و برای ثبت مجدد، یک صفحهٔ تازه ضروری است. ثبت صوت در دستگاه ضبط صوت تا اندازه‌ای بگونهٔ دیگر، از طریق مغناطیسی کردن نوار ویژه‌ای صورت میگیرد. صوت ضبط شده را میتوان تعداد مطلوب بار پخش نمود و هرگاه احتیاج به محتویات آن رفع شد میتوان نوار را «پاک کرد» و موضوع دیگری را روی آن ضبط نمود. در همان نوار میتوان چند موضوع، یکی بجای دیگری را ضبط نمود و ضمناً هر دفعه موضوع قبلی از روی نوار «پاک میشود».

عمل دستگاه حافظه بر همین اصل مبتنی می‌باشد. اعداد و علامات شرطی (بکمک علامات الکتریکی، مغناطیسی یا مکانیکی) روی استوانه، نوار یا اسباب مخصوص دیگری ثبت میشود. در لحظهٔ دلخواه، عدد ثبت شده را میتوان «خواند» و هرگاه دیگر احتیاجی بآن نباشد میتوان آنرا پاک کرد و بجای آن عدد دیگری را ثبت نمود. عملیت «حفظ کردن »و «خواندن» عدد یا علامت شرطی بیش از چند ملیونیم ثانیه طول نمیکشد.

«حافظه» میتواند چند هزار حجره، و هر حجره چند ده عنصر، مثلا، عنصر مغناطیسی را در بر داشته باشد. برای ثبت اعداد در دستگاه شمار دوگانی قرار میگذاریم که هر عنصر آهن‌ربایی شده نمایشگر رقم یک، و هر عنصر آهن‌ربایی نشده نمایشگر صفر باشد. بگذار، مثلا، هر حجرهٔ حافظه ۲۵ عنصر (یا چنانکه میگویند، ۲۵ «مرتبهٔ ثنایی») را در بر داشته باشد و ضمناً عنصر اول حجره برای نمایش علامت (+ یا —) عدد، و ۱۴ مرتبهٔ بعدی برای ثبت قسمت صحیح عدد، و ۱۰ مرتبهٔ مابقی برای ثبت قسمت کسری عدد بکار رود. در شکل ۹ طرح دو حجرهٔ حافظه نمایش داده شده است. هر یکی دارای ۲۵ مرتبه میباشد. عناصر آهنربایی شده به علامت +، و عناصر آهنربایی نشده به علامت — نمایش داده شده است. حجرهٔ بالایی را در نظر می گیریم (ویرگول ابتدای قسمت کسری

را نشان میدهد و خطچین مرتبهٔ اول را که برای ثبت علامت بکار میرود از مراتب مابقی جدا می‌سازد). در آن، عدد ۱۰۱۱,۰۱ + (در دستگاه شمار دوگانی) ثبت شده است که در دستگاه معمولی اعشاری معادل عدد ۱۱,۲۵ میباشد.

علاوه بر اعداد، در حجره‌های حافظه دستورات متشکلهٔ برنامه ثبت میگردد. ببینیم دستورات برای ماشین باصطلاح سه‌نشانی چگونه است. در این مورد، حجرهٔ حافظه به ٤ قسمت تقسیم میشود (به خطچین‌ها در حجرهٔ پائینی شکل ۹ توجه کنید). قسمت اول برای



شکل ۹

نمایش عمل بکار میرود و در ضمن، عملیات بصورت عددی ثبت می‌گردد (شماره‌گذاری میشود).

مثلا

جمع — عمل ۱،

تفریق — عمل ۲،

ضرب — عمل ۳ و غیره.

رمز دستورات بدین شرح است: قسمت اول حجره یعنی شمارهٔ عمل، قسمتهای دوم و سوم یعنی شماره‌های حجره‌ها (یا نشانی‌ها) ایکه از آنجا اعداد برای انجام عمل گرفته میشود، قسمت چهارم یعنی شمارهٔ حجره (یا نشانی) ایکه نتیجهٔ حاصله را باید بدانجا فرستاد. مثلا در شکل ۹ (سطر پائین) اعداد ۱۱، ۱۱، ۱۱۱، ۱۰۱۱ در دستگاه دوگانی متناظر با اعداد ۳، ۳، ۷، ۱۱ در دستگاه ده‌گانی

ثبت شده و بمعنی دستور زیر است: عمل ۳ (یعنی ضرب) روی اعدادی که در حجره‌های سوم و هفتم حافظه قرار دارد انجام گردد و نتیجهٔ حاصله در حجرهٔ یازدهم، «حفظ» (یعنی ثبت) شود.

در آینده ما اعداد را نه بکمک علامات شرطی مانند شکل ۹، بلکه مستقیماً در دستگاه شمار اعشاری خواهیم نوشت. مثلا دستوری که در سطر پائین شکل ۹ نمایش داده شده چنین نوشته میشود:

ضرب ۳ ۷ ۱۱

حال، طی دو مثال ساده، برنامه‌ها را بررسی میکنیم.

برنامهٔ ۱

۱) جمع ۴ ۵ ۴
۲) ضرب ۴ ۴ ←
۳) انتقال کنترل ۱
۴) ۰
۵) ۱

ببینیم ماشینی که در پنج حجرهٔ اول آن داده‌های فوق ثبت شده چگونه کار میکند.

دستور اول: اعداد ثبت شده در حجره‌های چهارم و پنجم، جمع و نتیجه دوباره به حجرهٔ چهارم ارسال شود (بجای داده‌هایی که قبلا در آنجا ثبت بود). بدینترتیب ماشین عدد ۱ = ۱ + ۰ را در حجرهٔ چهارم ثبت میکند. پس از اجراء شدن دستور اول، اعداد زیر در حجره‌های چهارم و پنجم قرار می‌گیرد:

۴) ۱،
۵) ۱

دستور دوم: عدد واقع در حجرهٔ چهارم در خودش ضرب گردد (یعنی مجذور شود) و نتیجه یعنی ۱^{۲} روی برگه یادداشت شود (سهم بمعنی صدور نتیجهٔ حاصله است).

دستور سوم: انتقال کنترل به حجرهٔ اول. بعبارت دیگر، دستور انتقال کنترل بمعنی آنست که دوباره باید تمام دستورات را بترتیب

از دستور اول ببعد اجراء نمود. اینک، دوباره دستور اول اجراء می‌شود.

دستور اول: اعداد واقع در حجره‌های چهارم و پنجم، جمع و نتیجه دوباره در حجرهٔ چهارم ثبت گردد. در نتیجه، در حجرهٔ چهارم عدد ۲ = ۱ + ۱ قرار میگیرد:

٤) ۲،
٥) ۱

دستور دوم: عدد واقع در حجرهٔ چهارم، مجذور، و نتیجهٔ حاصله یعنی $۲^۲$ روی برگه یادداشت گردد (سهم بمعنی صدور نتیجهٔ حاصله است).

دستور سوم: انتقال کنترل به حجرهٔ اول (یعنی بازگشت مجدد به دستور اول).

دستور اول: عدد ۳ = ۱ + ۲ به حجرهٔ چهارم ارسال گردد:

٤) ۳،
٥) ۱

دستور دوم: عدد $۳^۲$ روی برگه یادداشت شود.

دستور سوم: انتقال کنترل به حجرهٔ اول و الی آخر.

ما میبینیم که ماشین، مربع اعداد صحیح را یکی پس از دیگری حساب، و آنها را روی برگه یادداشت میکند. توجه کنید، لزومی ندارد که عدد تازه را هر بار با دست تشکیل دهید زیرا ماشین خودش اعداد صحیح را یکی پس از دیگری انتخاب نموده و بتوان دو میرساند. در اثر عمل ماشین در چهارچوب این برنامه، مربع همهٔ اعداد صحیح مثلا از ۱ تا ۱۰۰۰۰ در مدت چند ثانیه (یا حتی چند دهم ثانیه) حساب میشود.

لازم بتذکر است که در واقع برنامهٔ محاسبهٔ مربع اعداد صحیح باید تا اندازه‌ای پیچیده‌تر از برنامهٔ مشروحهٔ فوق باشد. این نکته قبل از هر چیز به دستور دوم مربوط میشود. موضوع اینست که یادداشت نتیجهٔ حاصله روی برگه بمراتب طولانیتر از مدت انجام یک عمل توسط ماشین است. بنا بر این، اول نتایج در حجره‌های خالی «حافظه» حفظ، و سپس («بدون عجله») روی برگه

یادداشت میشود. بدینترتیب اولین نتیجهٔ نهایی باید در حجرهٔ اول خالی «حافظه»، نتیجهٔ دوم در حجرهٔ دوم خالی، نتیجهٔ سوم در حجرهٔ سوم حفظ شود و الی آخر. در برنامهٔ سادهٔ فوق، این نکات منظور نشده بود.

باید افزود که ماشین نمیتواند مدت زیادی به محاسبهٔ مربعات بپردازد زیرا تعداد حجره‌های «حافظه» برای این کار کافی نیست. از جانب دیگر، حدس زدن لحظه‌ای که ماشین تعداد مطلوب مربع ها را حساب کرده باشد و خاموش کردن آن در این لحظه امکان ندارد (چون ماشین هزاران عمل در ثانیه انجام میدهد!). بنا بر این، دستورات ویژه‌ای برای خاموش کردن ماشین در لحظهٔ مطلوب در نظر گرفته میشود. مثلا برنامه را میشود طوری تنظیم کرد که ماشین مربع تمام اعداد صحیح از ۱ الی ۱۰۰۰۰ را حساب کند و سپس بطور خودکار خاموش شود.

انواع پیچیده‌تر دیگری از دستورات وجود دارد که از حوصلهٔ این بررسی ساده خارج است.

در واقع برنامهٔ محاسبهٔ مربع همهٔ اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰۰۰ بصورت زیر است:

برنامهٔ ۱، الف

۱)	جمع	۸	۹	۸
۲)	ضرب	۸	۸	۱۰
۳)	جمع	۲	۶	۲
۴)	انتقال شرطی کنترل	۸	۷	۱
۵)	ایست			
۶)		۰	۰	۱
۷)	۱۰۰۰۰			
۸)	۰			
۹)	۱			
۱۰)	۰			
۱۱)	۰			
۱۲)	۰			

. . . .

دو دستور اول با دستوراتی که در برنامهٔ سادهٔ فوق بود چندان تفاوتی ندارد. پس از اجرای این دو دستور، اعداد زیر در حجره‌های هشتم، نهم و دهم قرار میگیرد:

۸) ۱
۹) ۱
۱۰) $۱^{۲}$

دستور سوم خیلی جالب است: آنچه در حجره‌های دوم و ششم قرار دارد باید با هم جمع، و نتایج دوباره در حجرهٔ دوم ثبت گردد. پس از این، حجرهٔ دوم بصورت زیر در می آید:

۲) ضرب ۸ ۸ ۱۱

چنانکه میبینید پس از اجراء شدن دستور سوم، دستور دوم تغییر می‌کند یا دقیقتر، یکی از نشانی‌های دستور دوم تغییر میکند. در زیر، ما روشن میکنیم دلیل این امر چیست.

دستور چهارم: انتقال شرطی کنترل (بجای دستور سوم در برنامهٔ قبلی). این دستور چنین اجراء می‌شود: هرگاه عدد واقع در حجرهٔ هشتم از عدد واقع در حجرهٔ هفتم کوچکتر باشد آنگاه کنترل به حجرهٔ اول انتقال می‌یابد. در غیر این صورت، دستور بعدی (یعنی پنجم) اجراء میگردد. در حالت مورد نظرمان واقعا ۱۰۰۰۰ > ۱ و کنترل به حجرهٔ اول منتقل میشود. بدینترتیب دوباره نوبت با دستور اول است. پس از اجراء شدن دستور اول، در حجرهٔ هشتم عدد ۲ قرار میگیرد.

دستور دوم که اکنون بصورت

۲) ضرب ۸ ۸ ۱۱

میباشد عبارتست از اینکه عدد $۲^{۲}$ به حجرهٔ یازدهم ارسال میشود. حالا واضح است که قبلا دستور سوم برای چه اجراء شد: برای اینکه عدد تازه یعنی $۲^{۲}$ نه به حجرهٔ دهم که اشغال شده است بلکه به حجرهٔ بعدی برسد. پس از اجراء شدن دستورات اول و دوم، ما اعداد زیر را داریم:

۸) ۲
۹) ۱
۱۰) $۱^۲$
۱۱) $۲^۲$

پس از اجراء شدن دستور سوم، حجرهٔ دوم بصورت زیر در می‌آید:

۲) ضرب ۸ ۸ ۱۲

یعنی ماشین آماده شد تا نتیجهٔ تازه را در حجرهٔ بعدی یعنی دوازدهم ثبت کند. چون در حجرهٔ هشتم هنوز هم عددی کوچکتر از عدد واقع در حجرهٔ نهم قرار دارد لذا دستور چهارم دوباره بمعنی انتقال کنترل به حجرهٔ اول است.

اکنون، پس از اجراء شدن دستورات اول و دوم، بدست می‌آوریم:

۸) ۳
۹) ۱
۱۰) $۱^۲$
۱۱) $۲^۲$
۱۲) $۳^۲$

تا چه مدتی ماشین طبق این برنامه مربع‌ها را محاسبه خواهد کرد؟ تا مدتی که در حجرهٔ هشتم عدد ۱۰ ۰۰۰ پیدا نشده باشد یعنی تا مدتی که مربع اعداد از ۱ تا ۱۰ ۰۰۰ حساب نشده باشد. پس از این، دستور چهارم دیگر کنترل را به حجرهٔ اول انتقال نمیدهد (زیرا در حجرهٔ هشتم بجای عدد کوچکتر از عدد واقع در حجرهٔ هفتم عدد برابر با آن قرار خواهد داشت) یعنی پس از دستور چهارم، ماشین دستور پنجم را اجراء میکند یعنی از کار میافتد (خاموش میشود).

حال به بررسی مثال پیچیده‌تری در زمینهٔ برنامه‌ها میپردازیم که عبارت از حل معادلات است. در ضمن، ما برنامهٔ ساده‌ای را در نظر میگیریم. در صورت تمایل، خواننده خودش میتواند در بارهٔ چگونگی برنامهٔ مشابه منتها بصورت کامل آن بتفکر بپردازد.

دستگاه معادلات زیر مفروض است:

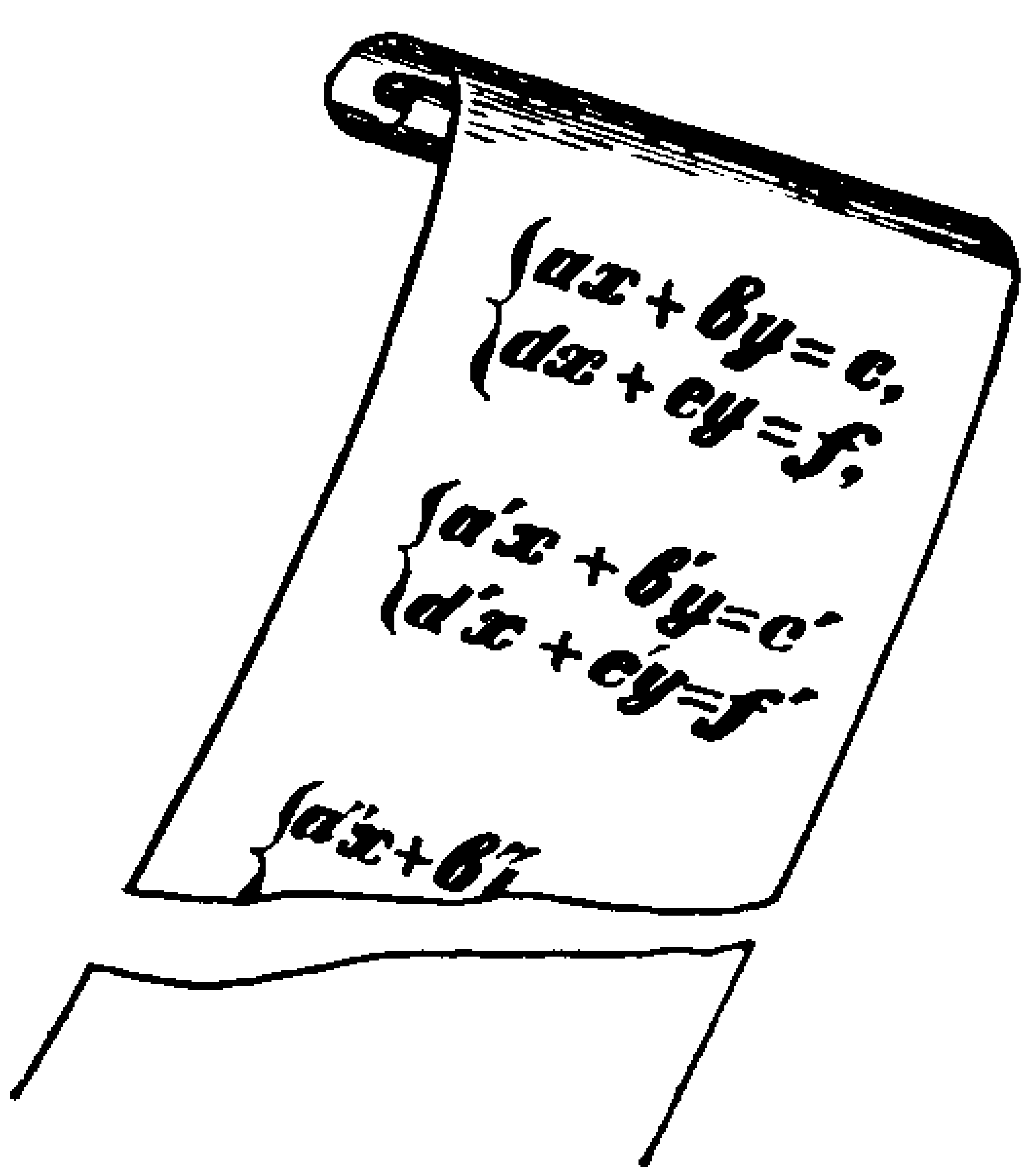
$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f \end{cases}$$

این دستگاه را بسهولت میتوان حل نمود:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}, \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

برای حل این دستگاه (با مقادیر عددی داده شده برای ضرایب a، b، c، d، e، f) شما لابد چند ده ثانیه لازم دارید در صورتیکه ماشین میتواند هزاران دستگاه مشابه در ثانیه حل کند.

برنامهٔ نظیر را بررسی مینمائیم. فرض میکنیم که در آن واحد چند دستگاه مشابه با مقادیر عددی ضرایب a، b، c، d، e، f، a'، b'، ... داده شده باشد:



شکل ۱۰

برنامهٔ نظیر بصورت زیر است:

برنامهٔ ۲

										۲۶)	a
۱)	×	۲۸	۳۰	۲۰	۱۴)	+	۳	۱۹	۳	۲۷)	b
۲)	×	۲۷	۳۱	۲۱	۱۵)	+	۴	۱۹	۴	۲۸)	c

۳) × ۲۶ ۳۰ ۲۲	۱۶) + ۵ ۱۹ ۵	۲۹) d
۴) × ۲۷ ۲۹ ۲۳	۱۷) + ۶ ۱۹ ۶	۳۰) e
۵) × ۲۶ ۳۱ ۲۴	۱۸) انتقال کنترل ۱	۳۱) f
۶) × ۲۸ ۲۹ ۲۵	۱۹) ۶ ۶ ۰	۳۲) a'
۷) — ۲۰ ۲۱ ۲۰	۲۰) ۰	۳۳) b'
۸) — ۲۲ ۲۳ ۲۱	۲۱) ۰	۳۴) c'
۹) — ۲۴ ۲۵ ۲۲	۲۲) ۰	۳۵) d'
۱۰) : ۲۰ ۲۱ ←	۲۳) ۰	۳۶) e'
۱۱) : ۲۲ ۲۱ ←	۲۴) ۰	۳۷) f'
۱۲) + ۱ ۱۹ ۱	۲۵) ۰	۳۸) a''
۱۳) + ۲ ۱۹ ۲		....

دستور اول: اعداد واقع در حجره‌های بیست و هشتم و سی‌ام در یکدیگر ضرب، و نتیجه به حجرهٔ بیستم ارسال گردد. بعبارت دیگر، در حجرهٔ بیستم عدد ce ثبت میشود.

دستورات دوم تا ششم بطور مشابه اجراء میشود. پس از اجراء شدن این دستورات، در حجره‌های بیستم الی بیست و پنجم اعداد زیر واقع میشود:

۲۰) ce
۲۱) bf
۲۲) ae
۲۳) bd
۲۴) af
۲۵) cd

دستور هفتم: از عدد واقع در حجرهٔ بیستم عدد واقع در حجرهٔ بیست و یکم تفریق، و نتیجه (یعنی $ce - bf$) دوباره در حجرهٔ بیستم ثبت گردد.

دستورات هشتم و نهم بطور مشابه اجراء میگردد. در نتیجه، در حجره‌های بیستم، بیست و یکم و بیست و دوم اعداد زیر واقع میشود:

$ce - bf$ (۲۰

$ae - bd$ (۲۱

$af - cd$ (۲۲

دستورات دهم و یازدهم: خارج‌قسمتهای

$$\frac{ce - bf}{ae - bd} \quad \text{و} \quad \frac{af - cd}{ae - bd}$$

تشکیل، و روی برگه یادداشت شود (یعنی بصورت نتایج آماده بیرون داده شود). همینها مقدار مجهولاتی است که از دستگاه معادلات اول بدست می‌آید.

بدینترتیب، دستگاه اول حل گردیده است. پس، دستورات بعدی برای چه لازم است؟ قسمت بعدی برنامه (حجره‌های دوازدهم الی نوزدهم) برای آنست که ماشین را برای حل دستگاه معادلات دوم آماده سازد. ببینیم این امر چگونه صورت میگیرد. دستورات دهم الی هفدهم عبارت از آنست که به محتویات حجره‌های یکم الی ششم محتویات حجرهٔ نوزدهم علاوه گردیده و نتایج دوباره در حجره‌های یکم الی ششم قرار میگیرد. بدینترتیب پس از اجراء شدن دستور هفدهم ٦ حجرهٔ اول بصورت زیر در می‌آید:

۱)	× ۳٤	۳٦	۲۰
۲)	× ۳۳	۳۷	۲۱
۳)	× ۳۲	۳٦	۲۲
٤)	× ۳۳	۳٥	۲۳
٥)	× ۳۲	۳۷	۲٤
٦)	× ۳٤	۳٥	۲٥

دستور هجدهم: انتقال کنترل به حجرهٔ اول.

محتویات جدید ٦ حجرهٔ اول با محتویات قبلی چه فرقی دارد؟ فرقش آنست که در این حجره‌ها شماره‌های دو نشانی اول بر خلاف قبل که از ۲٦ تا ۳۱ بود از ۳۲ تا ۳۷ میباشد. بعبارت دیگر، ماشین دوباره باجرای همان عملیات میپردازد منتها اعداد را بجای حجره‌های بیست و ششم الی سی و یکم، از حجره‌های سی

و دوم الی سی و هفتم که در آنجا ضرایب دستگاه معادلات دوم واقع است بر میدارد. در نتیجه، ماشین دستگاه معادلات دوم را حل مینماید. پس از حل دستگاه دوم، ماشین به حل دستگاه سوم می پردازد و الی آخر.

از مراتب فوق واضح میگردد که مهارت در تنظیم «برنامهٔ» صحیح تا چه اندازه اهمیت دارد. آخر، ماشین «بخودی خود» نمی‌تواند کاری را انجام دهد. ماشین تنها میتواند برنامهٔ تعیین شده را اجراء کند. برنامه‌هایی برای محاسبهٔ ریشه، لگاریتم، سینوس، برای حل معادلات درجه‌های عالی و غیره وجود دارد. ما در فوق گفتیم که برنامه‌هایی برای بازی شطرنج، ترجمه از زبان‌های خارجی و غیره وجود دارد. البته هر اندازه مسئله پیچیده‌تر باشد بهمان اندازه برنامهٔ نظیرش پیچیده‌تر است.

در پایان متذکر میشویم که برنامه‌های باصطلاح برنامه‌ساز وجود دارد که بکمک آنها ماشین خودش میتواند برنامهٔ لازم برای حل مسئله را تنظیم کند. این امر تا اندازهٔ زیادی در کار تنظیم برنامه که اکثر اوقات بسیار وقت میبرد کمک مینماید.

فصل سوم

کمک به حساب

$$((({\bf ۵}^{۲})^{۲})^{۲})^{۲}$$

در بسیاری موارد، حساب با وسایل خویش قادر نیست به صورت قاطع صحت پاره‌ای از گزاره‌هایش را ثابت کند. در چنین مواردی آن مجبور است به روشهای تعمیمی جبر متوسل شود. در شمار اینگونه احکام حسابی که بر اساس جبر استوار است مثلا بسیاری از قواعد مربوط به انجام سریع اعمال، خصوصیات عجیب بعضی اعداد، نشانه‌های قابلیت تقسیم و غیره قرار دارد. در فصل حاضر به بررسی اینگونه مسایل میپردازیم.

ضرب آنی

محاسبان ماهر در بسیاری موارد با توسل به تبدیلات سادهٔ جبری کار محاسباتی خود را آسان می‌سازند. بطور مثال، محاسبهٔ $۹۸۸^۲$ بدین ترتیب انجام میشود:

$$۹۸۸ \times ۹۸۸ = (۹۸۸ + ۱۲) \times (۹۸۸ - ۱۲) + ۱۲^۲ =$$
$$= ۱۰۰۰ \times ۹۷۶ + ۱۴۴ = ۹۷۶\,۱۴۴$$

به آسانی می‌توان درک نمود که محاسب در این مورد از تبدیل جبری زیر استفاده مینماید:

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

این فرمول را میتوان در انجام محاسبات ذهنی با موفقیت بکار برد.

مثلا:

$$۲۷^۲ = (۲۷ + ۳)(۲۷ - ۳) + ۳^۲ = ۷۲۹,$$
$$۶۳^۲ = ۶۶ \times ۶۰ + ۳^۲ = ۳۹۶۹,$$
$$۱۸^۲ = ۲۰ \times ۱۶ + ۲^۲ = ۳۲۴,$$
$$۳۷^۲ = ۴۰ \times ۳۴ + ۳^۲ = ۱۳۶۹,$$
$$۴۸^۲ = ۵۰ \times ۴۶ + ۲^۲ = ۲۳۰۴,$$
$$۵۴^۲ = ۵۸ \times ۵۰ + ۴^۲ = ۲۹۱۶$$

و باز هم، ضرب ۹۸۶ × ۹۹۷ چنین اجرا می‌شود:

$$۹۸۶ \times ۹۹۷ = (۹۸۶ - ۳) \times ۱۰۰۰ + ۳ \times ۱۴ = ۹۸۳۰۴۲$$

این روش بر چه اصلی مبتنی است؟ سازه‌ها را چنین نمایش می‌دهیم:

$$(۱۰۰۰ - ۱۴) \times (۱۰۰۰ - ۳)$$

و مطابق قواعد جبر این دوجمله‌ای‌ها را در هم ضرب میکنیم:

$$۱۰۰۰ \times ۱۰۰۰ - ۱۰۰۰ \times ۱۴ - ۱۰۰۰ \times ۳ + ۱۴ \times ۳$$

تبدیل زیر را انجام میدهیم:

$$۱۰۰۰(۱۰۰۰ - ۱۴) - ۱۰۰۰ \times ۳ + ۱۴ \times ۳ =$$
$$= ۱۰۰۰ \times ۹۸۶ - ۱۰۰۰ \times ۳ + ۱۴ \times ۳ =$$
$$= ۱۰۰۰(۹۸۶ - ۳) + ۱۴ \times ۳$$

سطر آخری روش محاسبهٔ را نمایش میدهد.

طریقهٔ ضرب دو عدد سه‌رقمی‌ایکه رقم دهگان آنها یکسان بوده و مجموع ارقام واحدهایشان برابر ۱۰ باشد جالب است. مثلا ضرب

$$۷۸۳ \times ۷۸۷$$

چنین اجرا می‌شود:

$$۷۸ \times ۷۹ = ۶۱۶۲, \quad ۳ \times ۷ = ۲۱$$

نتیجه:

$$۶۱۶۲۲۱$$

طریقهٔ توجیه این روش از تبدیلات زیر روشن است:

$$(۷۸۰ + ۳)(۷۸۰ + ۷) = ۷۸۰ \times ۷۸۰ + ۷۸۰ \times ۳ +$$
$$+ ۷۸۰ \times ۷ + ۳ \times ۷ = ۷۸۰ \times ۷۸۰ + ۷۸۰ \times ۱۰ +$$
$$+ ۳ \times ۷ = ۷۸۰ (۷۸۰ + ۱۰) + ۳ \times ۷ =$$
$$= ۷۸۰ \times ۷۹۰ + ۲۱ = ۶۱۶\,۲۰۰ + ۲۱$$

یک روش دیگر برای انجام چنین عملیات ضرب باز هم ساده‌تر است:

$$۷۸۳ \times ۷۸۷ = (۷۸۵ - ۲)(۷۸۵ + ۲) = ۷۸۵^۲ - ۴ =$$
$$= ۶۱۶\,۲۲۵ - ۴ = ۶۱۶\,۲۲۱$$

در این مثال برای ما لازم شد عدد ۷۸۵ را مجذور سازیم.
برای مجذورسازی سریع اعدادی که به ۵ ختم می‌شوند طریقهٔ زیر بسیار مناسب است:

$۳۵^۲$ ، $۳ \times ۴ = ۱۲$ ، جواب ۱۲۲۵
$۶۵^۲$ ، $۶ \times ۷ = ۴۲$ ، جواب ۴۲۲۵
$۷۵^۲$ ، $۷ \times ۸ = ۵۶$ ، جواب ۵۶۲۵

این قاعده عبارت از آن است که رقم دهه‌ها را در عددی که یک واحد بزرگتر از خود آن است ضرب نموده و پهلوی حاصل‌ضرب، عدد ۲۵ را مینویسند.
اساس این روش به شکل زیر است. اگر عدد دهه‌ها a باشد در اینصورت کل عدد را می‌توان چنین نمایش داد:

$$۱۰a + ۵$$

مربع این عدد مانند مربع دوجمله‌ای مساوی است به

$$۱۰۰a^۲ + ۱۰۰a + ۲۵ = ۱۰۰a(a + ۱) + ۲۵$$

عبارت $a(a+۱)$ عبارت است از حاصلضرب رقم دهه‌ها در نزدیکترین عدد بزرگتر. ضرب یک عدد در ۱۰۰ و جمع آن با ۲۵ در حکم نوشتن عدد ۲۵ در پهلوی آن است.

از همان روش، طریقهٔ سادهٔ مجذورسازی اعداد متشکل از عدد صحیح و $\frac{۱}{۲}$ ناشی می‌شود.

مثلا:

$$\left(۳\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = ۳{,}۵^{۲} = ۱۲{,}۲۵ = ۱۲\frac{۱}{۴},$$
$$\left(۷\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = ۵۶\frac{۱}{۴}, \quad \left(۸\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = ۷۲\frac{۱}{۴}, \ldots$$

ارقام ۱، ۵ و ۶

لابد همه متوجه شده‌اید که از ضرب یک سری اعدادی که به یک و یا ۵ ختم میشوند اعدادی بدست می‌آیند که به همان ارقام ختم می‌شوند. و اما کمتر کسی خبر دارد که این گفته در مورد عدد ۶ نیز صادق است. ضمناً باین سبب است که هر توان عددیکه به ۶ ختم میگردد نیز به ۶ ختم می‌شود.

بطور مثال،

$$۴۶^{۲} = ۲۱۱۶, \quad ۴۶^{۳} = ۹۷\,۳۳۶$$

این خصوصیت عجیب ارقام ۱، ۵ و ۶ را می‌توان از طریق جبری توجیه ساخت. این خصوصیت را در مورد ۶ بررسی می‌کنیم.

اعدادی که به ۶ ختم می‌گردند چنین نمایش داده می‌شوند:

$$۱۰a + ۶, \quad ۱۰b + ۶, \ldots$$

که در آن a و b اعداد صحیح‌اند.

حاصلضرب چنین دو عدد مساوی است به

$$۱۰۰ab + ۶۰b + ۶۰a + ۳۶ = ۱۰\,(۱۰ab + ۶b + ۶a) +$$
$$+ ۳۰ + ۶ = ۱۰\,(۱۰ab + ۶b + ۶a + ۳) + ۶$$

بطوریکه می‌بینیم حاصلضرب از تعدادی ده‌ها و از رقم ۶ تشکیل می‌شود که البته عدد ۶ باید در آخر قرار گیرد.

همین روش اثبات را می‌توان در مورد ۱ و ۵ نیز تطبیق نمود.

مراتب فوق به ما اجازه میدهد مدعی شویم که مثلا

$۳۸۶^{۲۵۶۷}$ به ۶ ختم می‌شود
$۸۱۵^{۷۲۳}$ به ۵ » »
$۴۹۱^{۱۷۳۲}$ به ۱ » » و غیره

اعداد ۲۵ و ۷۶

اعداد دو رقمی‌ای نیز موجود است که عین خاصیت اعداد ۱، ۵ و ۶ را دارا می‌باشد. این اعداد عبارتند از ۲۵ و ۷۶ که شاید عدد آخری برای عدهٔ زیادی غیرمنتظره خواهد بود. حاصلضرب هر دو عددی که به ۷۶ ختم میگردد خود، عددی است که به ۷۶ ختم میشود.

این را ثابت می‌نمائیم. عبارت عمومی اینگونه اعداد اینطور است:

$$۱۰۰a + ۷۶,\quad ۱۰۰b + ۷۶, \dots$$

با ضرب دو تا از اینگونه اعداد، حاصل می‌کنیم:

$$۱۰۰۰۰ab + ۷۶۰۰b + ۷۶۰۰a + ۵۷۷۶ = ۱۰۰۰۰ab +$$
$$+ ۷۶۰۰b + ۷۶۰۰a + ۵۷۰۰ + ۷۶ =$$
$$= ۱۰۰\,(۱۰۰ab + ۷۶b + ۷۶a + ۵۷) + ۷۶$$

این حکم که حاصلضرب به عدد ۷۶ ختم می‌شود ثابت شده است.

از اینجا بر می‌آید که هر توان عددیکه به ۷۶ ختم میشود عدد مشابهی می‌باشد:

$$۳۷۶^{۲} = ۱۴۱۳۷۶,\quad ۵۷۶^{۳} = ۱۹۱۱۰۲۹۷۶, \dots$$

اعداد بی‌نهایت

دستهٔ ارقامی طویل‌تر نیز موجودند که اگر در آخر اعداد قرار داشته باشند در حاصلضرب آنها نیز بجای خود می‌مانند. چنانکه نشان خواهیم داد تعداد چنین دسته ارقامی بی‌نهایت زیاد است.

ما دستهٔ اعداد دورقمی واجد چنین خاصیتی را میشناسیم: آنها ۲۵ و ۷۶ می‌باشند. برای اینکه دسته‌های سه‌رقمی را بیابیم لازم است در ما قبل عدد ۲۵ و یا ۷۶ چنین رقمی را بنویسیم تا دستهٔ سه‌رقمی حاصل شده نیز خاصیت مطلوب را داشته باشد.

پس کدام رقم را باید جلو عدد ۷۶ نوشت؟ آن را به k نمایش میدهیم. در این صورت عدد سه‌رقمی مطلوب چنین نمایش داده می‌شود:

$$۱۰۰k + ۷۶$$

عبارت عمومی اعدادی که به این دسته ارقام ختم می‌شوند چنین است:

$$۱۰۰۰a + ۱۰۰k + ۷۶, \quad ۱۰۰۰b + ۱۰۰k + ۷۶, \ldots$$

از ضرب این دو عدد در هم، بدست می‌آوریم:

$$۱۰۰۰۰۰۰ab + ۱۰۰۰۰۰ak + ۱۰۰۰۰۰bk + ۷۶۰۰۰a + \\ + ۷۶۰۰۰b + ۱۰۰۰۰k^۲ + ۱۵۲۰۰k + ۵۷۷۶$$

تمامی جمعیده‌ها، به استثنای دو جمعیدهٔ آخری، در آخر خود کم‌تر از سه صفر ندارند. لذا حاصلضرب به $۱۰۰k + ۷۶$ خاتمه می‌یابد در صورتیکه اختلاف

$$۱۵۲۰۰k + ۵۷۷۶ - (۱۰۰k + ۷۶) = ۱۵۱۰۰k + ۵۷۰۰ = \\ = ۱۵۰۰۰k + ۵۰۰۰ + ۱۰۰(k + ۷)$$

بر ۱۰۰۰ قابل تقسیم باشد. واضح است که این امر تنها در ازای $k = ۳$ مورد پیدا میکند.

بدین ترتیب دستهٔ ارقام مطلوب شکل ۳۷۶ را دارد. بنا بر این، هر توان عدد ۳۷۶ نیز به ۳۷۶ ختم می‌شود. مثلا:

$$۳۷۶^۲ = ۱۴۱۳۷۶$$

حال، اگر ما بخواهیم دستهٔ چهاررقمی واجد همان خاصیت را بیابیم باید قبل از عدد ۳۷۶ یک رقم دیگر بنویسیم. اگر این رقم را به l نمایش دهیم در اینصورت به مسئله‌ای میرسیم که به ازای کدام l حاصل‌ضرب

6*

$$(10000a+1000l+376)(10000b+1000l+376)$$

به $1000\,l+376$ ختم می‌شود؟ هرگاه این پرانتز را باز نموده و تمامی جمعیده‌هائی را که به ٤ یا بیشتر صفر ختم میشوند بیاندازیم، در این صورت جملات زیر باقی می‌ماند:

$$752000l+141376$$

حاصلضرب به $1000\,l+376$ ختم می‌شود در صورتیکه تفاوت

$$752000l+141376-(1000l+376)=$$
$$=751000l+141000=(750000l+140000)+$$
$$+1000(l+1)$$

بر ۱۰ ۰۰۰ قابل تقسیم باشد. و این امر، چنانکه روشن است، تنها در صورتی ممکن است که $l=9$ باشد.

دستهٔ چهاررقمی مطلوب ۹۳۷۶ است.

دستهٔ چهاررقمی بدست آمده را باز هم با یک رقم دیگر می‌توان تکمیل نمود. برای اینکار باید مانند پیش عمل کرد. ما ۰۹ ۳۷۶ را حاصل میکنیم. با برداشتن یک گام دیگر، دستهٔ ارقام ۱۰۹ ۳۷۶ و بعد ۷ ۱۰۹ ۳۷۶ و غیره را می‌یابیم.

نوشتن ارقام در طرف چپ را بگونهٔ فوق میتوان بینهایت بار انجام داد. در نتیجه، «عددی» با تعداد بی‌نهایت ارقام حاصل می‌شود:

$$\dots 7\ 109\ 376$$

اینگونه «اعداد» را میتوان مطابق قواعد معمول جمع و ضرب نمود زیرا که آنها از سمت راست به چپ نوشته میشوند و عمل جمع و ضرب («ستونی») نیز از راست به چپ انجام میشود بنحویکه در مجموع و حاصل‌ضرب چنین دو عدد می‌توان ارقام را یکی پس از دیگری تا تعداد دلخواه محاسبه نمود.

جالب است که «عدد» بی‌نهایت فوق‌الذکر برخلاف اینکه ممکن است بس محال بنظر آید در معادلهٔ

$$x^2=x$$

صدق می‌کند.

در حقیقت، مربع این «عدد» (یعنی حاصلضرب آن در خود) به ۷۶ ختم می‌شود چون هر یک از سازه‌ها در آخر خود عدد ۷۶ را دارند. به همین دلیل نیز مربع «عدد» نوشته شده به ۳۷۶، به ۹۳۷۶ و الی آخر ختم می‌شود. بعبارت دیگر، در اثر محاسبهٔ پی در پی ارقام «عدد» $x^۲$ که در آن $x = ...۷\ ۱۰۹\ ۳۷۶$، ما عین ارقامی را حاصل می‌کنیم که در عدد x واردند، لذا $x^۲ = x$.

ما دستهٔ ارقامی را که به ۷۶ * ختم می‌شوند بررسی نمودیم. هرگاه در مورد دستهٔ ارقامی که به ۵ ختم می‌شوند بطریق مشابه استدلال کنیم آنگاه چنین دستهٔ ارقامی را حاصل می‌نمائیم:

۵, ۲۵, ۶۲۵, ۰۶۲۵, ۹۰۶۲۵, ۸۹۰۶۲۵, ۲۸۹۰۶۲۵ ,...

در نتیجه ما یک عدد بی‌نهایت دیگر را میتوانیم بنویسیم:

...۲۸۹۰۶۲۵

که آن نیز در معادلهٔ $x^۲ = x$ صدق میکند. میتوان نشان داد که این «عدد» بی‌نهایت «برابر است» با

$$\left(\left(\left(۵^۲\right)^۲\right)^۲\right)^{۲^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$$

نتیجهٔ جالب بدست آمده بزبان «اعداد» بی‌نهایت چنین فرمولبندی می‌شود: معادلهٔ $x^۲ = x$ علاوه بر جوابهای معمولی $x = ۰$ و $x = ۱$

---

* یادآور میشویم که دستهٔ دورقمی ۷۶ ممکن است بکمک استدلالات شبیه مراتب فوق حاصل شود: کافی است این مسئله حل گردد که کدام رقم را قبل از رقم ۶ باید نوشت تا دستهٔ دورقمی بدست آمده دارای خاصیت فوق‌الذکر باشد. بنا بر این، «عدد» ۳۷۶ ۱۰۹ ۷ ... را با نوشتن ارقام، یکی پی دیگری، در پیشاپیش ۶ میتوان حاصل کرد.

دو جواب «بی نهایت» دارد:

$$x = \dots ۷۱۰۹۳۷۶, \quad x = \dots ۲۸۹۰۶۲۵$$

جواب دیگری (در دستگاه شمار اعشاری) موجود نیست *

پول تلافی

مسئلهٔ قدیمی مردم

روزی در ازمنهٔ گذشته حادثه‌ای بشرح زیر رخ داد. دو تاجر گله‌ای گاو فروختند. در این معامله، آنان بابت هر سر گاو مقدار روبلی را گرفتند که با تعداد گاو برابر بود. با پول بدست آمده رمه‌ای گوسفند از قرار ۱۰ روبل بابت هر سر گوسفند، و یک بره خریدند. در نتیجهٔ تقسیم بدو قسمت برابر، یکی یک گوسفند اضافی، و دیگری بره را با مقداری پول تلافی گرفت. مقدار پول تلافی چقدر بود (فرض میشود که مبلغ تلافی با عدد صحیح روبل بیان می‌شود).

حل

مسئله را «بزبان جبر» نمیتوان بیان نمود چون تشکیل معادلهٔ آن غیر ممکن است. بناچار این مسئله را از طریق خاصی، باصطلاح، از راه تفکر آزادانهٔ ریاضی حل مینمائیم. اما جبر در اینجا هم به حساب کمک اساسی مینماید.

قیمت تمام گله به روبل یک مربع دقیق است. زیرا رمه با پول ناشی از فروش n گاو از قرار n روبل بابت هر سر گاو خریده شد. یکی از تاجران صاحب یک گوسفند اضافی شد، بنا بر این، تعداد گوسفندان فرد است؛ پس، تعداد دهه‌ها نیز در $n^۲$ فرد می‌باشد. رقم یکان چند است؟

میتوان ثابت نمود که اگر در مربع دقیق تعداد دهه‌ها فرد باشد در آنصورت رقم یکان در آن تنها میتواند ۶ باشد.

---

* «اعداد» بی‌نهایت را میتوان نه تنها در دستگاه شمار اعشاری بلکه در دستگاه‌های دیگر نیز بررسی کرد. اعدادی که در دستگاه بر مبنای p مورد بررسی قرار میگیرد بنام اعداد p ـ گونه معروف است.

در واقع، مربع هر عدد متشکل از a دهه و b واحد یعنی $(۱۰a+b)^۲$ مساویست با

$$۱۰۰a^۲+۲۰ab+b^۲=(۱۰a^۲۰۲ab)\times ۱۰+b^۲$$

در این عدد تعداد دهه‌ها عبارت از $۱۰a^۲+۲ab$ است و باز هم تعدادی دهه‌ها در $b^۲$ وارد میباشد. اما چون $۱۰a^۲+۲ab$ بر ۲ قابل تقسیم است این عدد زوج میباشد. بنا بر این، تعداد دهه‌های وارد در $(۱۰a+b)^۲$ در صورتی فرد میباشد که اگر در عدد $b^۲$ تعداد دهه‌ها فرد باشد. بیاد بیاوریم که $b^۲$ چیست. مربع رقم یکان است یعنی یکی از ده عدد زیر:

۰, ۱, ٤, ۹, ۱٦, ۲٥, ۳٦, ٤۹, ٦٤, ۸۱

در میان آنها تنها ۱٦ و ۳٦ که هر دو به ٦ ختم میشود دارای تعداد فرد دهه‌ها میباشد. بنا بر این، مربع دقیق

$$۱۰۰a^۲+۲۰ab+b^۲$$

تنها در صورتی دارای تعداد فرد دهه‌ها میباشد که به ٦ ختم شود.

حال بآسانی میتوانیم جواب مسئله را پیدا کنیم. واضح است که قیمت بره ٦ روبل بوده است. شریکی که صاحب بره گردید نسبت به شریک دیگر ٤ روبل کمتر گرفت. برای اینکه سهم‌ها مساوی گردد صاحب بره باید ۲ روبل از شریک خود بگیرد.

مبلغ پول تلافی برابر ۲ روبل است.

قابلیت تقسیم بر ۱۱

جبر پیدا کردن نشانه‌هایی را آسان میسازد که از روی آنها بدون بکار بردن عمل تقسیم میتوان یقین نمود که آیا عدد داده شده بر این یا آن مقسوم‌علیه تقسیم میشود یا خیر. نشانه‌های قابلیت تقسیم بر ۲، ۳، ٤، ٥، ٦، ۸، ۹، ۱۰ بر همه معلوم است. نشانهٔ قابلیت تقسیم بر ۱۱ را که بسیار ساده و عملی است پیدا میکنیم.

فرض کنیم در عدد چندرقمی N رقم یکان a، رقم دهه‌ها b، رقم صده‌ها c، رقم هزاره‌ها d، و الی آخرُ باشد یعنی

$$N = a + ۱۰b + ۱۰۰c + ۱۰۰۰d + ... =$$
$$= a + ۱۰\,(b + ۱۰c + ۱۰۰d + ...)$$

که در آن، نقاط بمعنی مجموع مرتبه‌های بعدی است. عدد $۱۱(b+۱۰c+۱۰۰d+...)$ را که مضرب ۱۱ است از N تفریق می‌کنیم. بطوریکه بآسانی دیده میشود در اینصورت تفاوت حاصل شده برابر است با

$$a - b - ۱۰\,(c + ۱۰d + ...)$$

و باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۱۱ با باقیماندهٔ تقسیم عدد N بر ۱۱ یکی می‌باشد. در اثر علاوه نمودن عدد $۱۱\,(c+۱۰\,d+...)$ که مضرب ۱۱ است به این حاصل‌تفریق، ما عدد

$$a - b + c + ۱۰\,(d + ...)$$

را حاصل میکنیم که باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۱۱ با باقیماندهٔ تقسیم عدد N بر ۱۱ یکی میباشد. عدد $۱۱\,(d + ...)$ را که مضرب ۱۱ است از آن تفریق میکنیم. در نتیجه، عدد

$$a - b + c - d + ... = (a + c + ...) - (b + d + ...)$$

را حاصل مینمائیم که باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۱۱ با باقیماندهٔ تقسیم عدد اولیهٔ N یکی میباشد.

از اینجا نشانهٔ تقسیم بر ۱۱ بشرح زیر نتیجه میشود: باید از مجموعهٔ تمامی ارقامی که در جاهای فرد قرار دارد مجموعهٔ تمامی ارقامی را که جاهای زوج را اشغال کرده است تفریق نمود. هرگاه حاصل‌تفریق صفر و یا عدد (مثبت یا منفی) قابل تقسیم بر ۱۱ باشد آنگاه عدد مورد آزمایش نیز مضرب ۱۱ میباشد. در غیر این صورت عدد ما بدون باقیمانده قابل تقسیم بر ۱۱ نمی باشد.

بطور مثال، عدد ۰۶٤ ۸۷ ٦۳٥ را آزمایش میکنیم:

$$۸ + ٦ + ٥ + ٦ = ۲٥,$$
$$۷ + ۳ + ۰ + ٤ = ۱٤,$$
$$۲٥ - ۱٤ = ۱۱$$

پس، عدد داده شده بر ۱۱ قابل تقسیم است.

همچنین نشانهٔ دیگر قابلیت تقسیم بر ۱۱ موجود است که برای اعداد غیر طویل مناسب میباشد و آن اینکه عدد مورد آزمایش را از سمت راست به چپ دو به دو رقم به کران‌ها جدا نموده و کرانهای جدا شده را با هم جمع میکنیم. هرگاه مجموعهٔ حاصل شده بدون باقیمانده بر ۱۱ تقسیم شود در آنصورت عدد مورد آزمایش نیز مضرب ۱۱ میباشد و در غیر این صورت مضرب ۱۱ نمی‌باشد. بطور مثال فرض کنیم عدد ۵۲۸ مورد آزمایش قرار گیرد. عدد را به کران‌ها (۵ | ۲۸) جدا نموده و هر دو را با هم جمع میکنیم:

$$۵ + ۲۸ = ۳۳$$

چون ۳۳ بدون باقیمانده بر ۱۱ تقسیم میشود بنا بر این، عدد ۵۲۸ نیز مضرب ۱۱ است:

$$۵۲۸ : ۱۱ = ۴۸$$

این نشانهٔ قابلیت تقسیم را ثابت مینمائیم. عدد چندرقمی N را به کران‌ها جدا میکنیم. در اینصورت اعداد دورقمی (و یا یک‌رقمی *) را که از راست به چپ با a، b، c و غیره نمایش میدهیم حاصل میکنیم بنحویکه بتوانیم عدد N را بدین شکل بنویسیم:

$$N = a + ۱۰۰b + ۱۰۰۰۰c + \ldots = a + ۱۰۰\,(b + ۱۰۰c + \ldots)$$

عدد $۹۹\,(b + ۱۰۰\,c + \ldots)$ را که مضرب ۱۱ است از N تفریق میکنیم. عدد حاصل شدهٔ

$$a + (b + ۱۰۰c + \ldots) = a + b + ۱۰۰\,(c + \ldots)$$

در اثر تقسیم بر ۱۱ دارای همان باقیمانده است که عدد N دارا میباشد. از این عدد، عدد $۹۹(c + \ldots)$ را که مضرب ۱۱ است تفریق مینمائیم و الی آخر. در نتیجه، ما در می‌یابیم که عدد N در اثر تقسیم بر ۱۱ دارای همان باقیمانده است که عدد

$$a + b + c + \ldots$$

دارا میباشد.

---

* اگر تعداد ارقام در عدد N فرد باشد در آنصورت کران آخر (یا چپ‌ترین کران) یک‌رقمی خواهد بود. علاوه بر این، کرانی بشکل ۰۳ را نیز باید مانند عدد یک‌رقمی ۳ در نظر گرفت.

شمارهٔ پلاک اتومبیل

مسئله

در اثنای گردش در شهر، سه دانشجوی ریاضی متوجه شدند که یک رانندهٔ اتومبیل بطور ناهنجار قواعد عبور و مرور را نقض نمود. شمارهٔ (چهاررقمی) پلاک اتومبیل را هیچ کدام از دانشجویان به خاطر نسپردند ولی چون ریاضی‌دان بودند هرکدامشان بعضی خصوصیات این عدد چهاررقمی را به خاطر سپردند. یکی از دانشجویان بیاد آورد که دو رقم اولی عین یکدیگر بود، دیگری بیاد آورد که دو رقم آخری هم یکسان بود. و سومی مدعی بود که تمام این عدد چهاررقمی مربع دقیقی است. آیا بر اساس این معلومات میتوان شمارهٔ پلاک اتومبیل را شناسایی نمود؟

حل

رقم اولی (و دومی) عدد مطلوب را به a، و رقم سومی (و چهارمی) را به b نمایش میدهیم. در اینصورت تمام عدد مساویست با

$$۱۰۰۰a + ۱۰۰a + ۱۰b + b = ۱۱۰۰a + ۱۱b =$$
$$= ۱۱\,(۱۰۰a + b)$$

این عدد بر ۱۱ قابل تقسیم است و از آنجا که یک مربع دقیق میباشد بر $۱۱^۲$ نیز قابل تقسیم است. به عبارت دیگر، عدد $۱۰۰\,a + b$ قابل تقسیم بر ۱۱ است. با کاربرد یکی از دو نشانهٔ تقسیم بر ۱۱ در می یابیم که عدد $a + b$ نیز قابل تقسیم بر ۱۱ میباشد. و این خود میرساند که

$$a + b = ۱۱$$

زیرا هر کدام از ارقام a و b کوچکتر از ده میباشد.

رقم آخری b در عددی که مربع دقیقی است میتواند تنها مقادیر زیر را بخود بگیرد:

$$۰,\ ۱,\ ٤,\ ۵,\ ٦,\ ۹\ .$$

بنا بر این برای رقم a که مساوی به $۱۱ - b$ است مقادیر ممکنهٔ زیر را می‌یابیم:

$$۱۱,\ ۱۰,\ ۷,\ ٦,\ ۵,\ ۲$$

دو مقدار اولی بدرد نمی‌خورد و امکانات زیر باقی‌می‌ماند:

$$b=٤,\quad a=٧;$$
$$b=٥,\quad a=٦;$$
$$b=٦,\quad a=٥;$$
$$b=٩,\quad a=٢$$

ما می‌بینیم که شمارهٔ پلاک اتومبیل را باید در میان چهار عدد زیر جستجو نمود:

٧٧٤٤، ٦٦٥٥، ٥٥٦٦، ٢٢٩٩

لکن سه عدد آخری از این اعداد سربع دقیقی نمی‌باشد زیرا عدد ٦٦٥٥ بر ٥ قابل تقسیم است ولی بر ٢٥ تقسیم نمی‌شود. عدد ٥٥٦٦ قابل تقسیم بر ٢ است ولی بر ٤ قابل تقسیم نیست. عدد $١٩ \times ١٢١ = ٢٢٩٩$ هم مربع نیست. تنها یک عدد $٨٨^٢ = ٧٧٤٤$ باقی می‌ماند که جواب مسئله می‌باشد.

قابلیت تقسیم بر ١٩

نشانهٔ قابلیت تقسیم بر ١٩ را بشرح زیر ثابت کنید:
عدد بدون باقیمانده تنها وقتی بر ١٩ تقسیم می‌شود که تعداد دهه‌های آن بعد از جمع زدن با دو چندان تعداد یکان، مضرب ١٩ باشد.

حل

هر عدد N را میتوان به شکل زیر ارائه نمود:

$$N = ١٠x + y$$

که x تعداد دهه‌ها است (نه رقم در مرتبهٔ دهه‌ها بلکه تعداد کل دهه‌های تام در تمامی عدد) و y رقم یکان. ما باید نشان دهیم که N تنها و تنها زمانی مضرب ١٩ است که

$$N' = x + ٢y$$

مضرب ۱۹ باشد. برای اینکار N' را در ۱۰ ضرب نموده و از این حاصلضرب N را تفریق می‌کنیم. حاصل می‌شود:

$$10N' - N = 10(x + 2y) - (10x + y) = 19y$$

از اینجا دیده می‌شود که اگر N' مضرب ۱۹ باشد در اینصورت

$$N = 10N' - 19y$$

نیز بدون باقیمانده قابل تقسیم بر ۱۹ می‌باشد. و بر عکس، اگر N بدون باقیمانده بر ۱۹ تقسیم شود در اینصورت

$$10N' = N + 19y$$

مضرب ۱۹ می‌باشد و آنگاه واضحاً N' نیز بدون باقیمانده قابل تقسیم بر ۱۹ است.

بطور مثال فرض کنیم تقاضا شده است تا تعیین نمائیم که آیا عدد ٨٨١ ٠٤٥ ٤٧ بر ۱۹ قابل تقسیم است یا نه؟

نشانهٔ قابلیت تقسیم را پی در پی بکار میبریم:

$$\begin{array}{r|l}
4\,704\,588 & 1 \\
+2 & \\
\hline
47\,045 & 90 \\
+18 & \\
\hline
4\,706 & 3 \\
+6 & \\
\hline
471 & 2 \\
+4 & \\
\hline
47 & 5 \\
+10 & \\
\hline
5 & 7 \\
+14 & \\
\hline
19 &
\end{array}$$

چون ۱۹ بر ۱۹ بدون باقیمانده تقسیم می‌شود لذا اعداد ٥٧، ٤٧٥، ٤٧١٢، ٠٦٣ ٤٧، ٤٥٩ ٤٧٠، ٥٩٠ ٧٠٤ ٤ و ٨٨١ ٠٤٥ ٤٧ نیز مضرب ۱۹ می‌باشد.

بدینترتیب، عدد داده شده بر ۱۹ قابل‌تقسیم است.

قضیهٔ صوفیا ژرمن

این مسئله را ریاضی‌دان مشهور فرانسه صوفیا ژرمن پیشنهاد نموده است:

ثابت نمائید که هر عددی به شکل $a^{۴}+۴$ مرکب است (در صورتیکه a مخالف ۱ باشد).

حل

ثبوت مسئله از تبدیلات زیر نتیجه می‌گردد:

$$a^{۴}+۴=a^{۴}+۴a^{۲}+۴-۴a^{۲}=(a^{۲}+۲)^{۲}-۴a^{۲}=$$
$$=(a^{۲}+۲)^{۲}-(۲a)^{۲}=(a^{۲}+۲-۲a)(a^{۲}+۲+۲a)$$

عدد $a^{۴}+۴$ را، بطوریکه ما یقین حاصل میکنیم، می‌توان به شکل حاصل‌ضرب دو سازهٔ مخالف خودش و ۱ * نمایش داد یا بعبارت دیگر، این عدد مرکب است.

اعداد مرکب

تعداد به اصطلاح اعداد اول یعنی اعداد صحیح بزرگتر از یک که بدون باقیمانده بر هیچ عدد صحیح غیر از خود و واحد تقسیم نمیشود بی‌نهایت زیاد است.

با شروع از اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ... سری آنها تا بینهایت ادامه دارد. این اعداد در میان اعداد مرکب برای خود جا باز نموده و سری اعداد طبیعی را به رشته‌های کم و بیش دراز اعداد مرکب تقسیم مینماید. طول این رشته‌ها تا چه اندازه است؟ آیا مثلا رشته‌ای پیدا میشود که در آن هزار عدد مرکب پشت سر هم قرار داشته باشد و ضمناً هیچ عدد اول در آن میان نباشد؟

گرچه این ادعا ممکن است دور از حقیقت بنماید اما میتوان ثابت کرد که رشتهٔ اعداد مرکب در بین اعداد اول میتواند هر طول دلخواه را داشته باشد. مرزی برای طول این رشته‌ها موجود نیست، آنها می‌توانند متشکل از هزار، ملیون، تریلیون و ... عدد مرکب باشند.

---

* حکم آخری بخاطر اینست که

$$a^{۲}+۲-۲a=(a^{۲}-۲a+۱)+۱=(a-۱)^{۲}+۱\neq ۱$$

در صورتیکه $a\neq ۱$ باشد.

برای آسانی از نماد قراردادی $n!$ که معنی حاصلضرب تمامی اعداد از ۱ تا پس از n را میدهد استفاده می‌کنیم. مثلا $۵! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ٤ \times ۵$. حال ثابت می‌کنیم که سری

$$[(n+۱)!+۲],\ [(n+۱)!+۳],\ [(n+۱)!+٤], \dots$$

تا پس از $[(n+۱)!+n+۱]$ متشکل از n عدد مرکب پی در پی می‌باشد.

این اعداد یکی مستقیماً پی دیگری در سری طبیعی قرار دارد زیرا که هر عدد ما بعد به اندازهٔ ۱ بزرگتر از ما قبل است. لازم است ثابت شود که همهٔ آنها مرکب می‌باشد.

نخستین عدد

$$(n+۱)!+۲ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ٤ \times ۵ \times ٦ \times ۷ \times \dots \times \\ \times (n+۱)+۲$$

زوج است زیرا که هر دو جمعیدهٔ آن شامل مضروب‌علیه ۲ می‌باشد. و هر عدد زوج بزرگتر از ۲، مرکب است.

دومین عدد

$$(n+۱)!+۳ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ٤ \times ۵ \times \dots \times (n+۱)+۳$$

متشکل از دو جمعیده‌ای است که هر کدام از آنها مضربی از ۳ است لذا این عدد نیز مرکب است.

سومین عدد

$$(n+۱)!+٤ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ٤ \times ۵ \times \dots \times (n+۱)+٤$$

چون متشکل از جمعیده‌های قابل تقسیم بر ٤ می‌باشد بدون باقیمانده بر ٤ تقسیم می‌شود.

به شیوهٔ مشابه تعیین می‌نمائیم که عدد بعدی

$$(n+۱)!+۵$$

مضربی از ۵ است و الی آخر. به عبارت دیگر، هر عدد سری ما شامل مضروب‌علیه متفاوت از یک و خودش است و بنا بر این مرکب میباشد.

هرگاه شما بخواهید مثلا پنج عدد مرکب متوالی بنویسید کافی است تا در سری فوق بجای n، عدد ٥ را قرار دهید. شما سری زیر را حاصل میکنید:

$$٧٢٢,\quad ٧٢٣,\quad ٧٢٤,\quad ٧٢٥,\quad ٧٢٦$$

ولی این یگانه سری نیست که از ٥ عدد مرکب متوالی متشکل باشد. سری‌های دیگری نیز وجود دارد، مثلا:

$$٦٢,\quad ٦٣,\quad ٦٤,\quad ٦٥,\quad ٦٦$$

و یا اعداد باز هم کوچکتر:

$$٢٤,\quad ٢٥,\quad ٢٦,\quad ٢٧,\quad ٢٨$$

حال سعی می‌کنیم مسئلهٔ زیر را حل کنیم:

ده عدد مرکب متوالی بنویسید.

حل

بر اساس مراتب فوق تعیین می‌کنیم که بعنوان نخستین عدد از ده عدد مطلوب میتوان

$$١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times \ldots \times ١٠ \times ١١ + ٢ = ٣٩\ ٨١٦\ ٨٠٢$$

را انتخاب کرد. بنا بر این، سری اعداد مطلوب میتواند چنین باشد:

$$٣٩\ ٨١٦\ ٨٠٢,\quad ٣٩\ ٨١٦\ ٨٠٣,\quad ٣٩\ ٨١٦\ ٨٠٤,\ldots$$

اما سری‌هائی از ده عدد مرکب متوالی بسیار کوچک‌تر نیز موجود است. مثلا میتوان حتی به سری متشکل نه از ده بلکه از سیزده عدد مرکب متوالی در صدهٔ دوم اشاره نمود:

$$١١٤,\quad ١١٥,\quad ١١٦,\quad ١١٧,\ldots,\quad ١٢٦$$

تعداد اعداد اول

موجودیت سری‌های بی‌حد طویل اعداد مرکب متوالی این تردید را بوجود می‌آورد که آیا حقیقتاً سری اعداد اول سرانجامی ندارد. بنا بر این بجاست که در اینجا ثابت کنیم که سری اعداد اول بی‌نهایت است.

این اثبات مربوط به اقلیدس ریاضی‌دان یونان قدیم بوده و در اثر مشهور وی تحت عنوان «مبادی» آمده است. این اثبات در

ردیف اثبات‌ها از طریق «فرض معکوس» قرار دارد. فرض کنیم که سری اعداد اول انتها داشته و عدد اول آخری این سری را به حرف N نشان میدهیم. حاصلضرب زیر را تشکیل داده:

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ۷ \times \ldots \times N = N!$$

و به آن ۱ علاوه میکنیم. حاصل میگردد:

$$N! + ۱$$

این عدد چون صحیح است باید شامل لااقل یک مضروب‌علیه اول باشد یعنی اقلا باید قابل تقسیم بر یک عدد اول باشد. اما بنا بر فرضیه، تمامی اعداد اول بزرگتر از N نیست اما عدد $N!+۱$ بدون باقیمانده بر هیچ عدد کمتر از و یا مساوی با N تقسیم نمی‌گردد و هر مرتبه ۱ باقی می‌ماند.

بنا بر این نباید قبول کرد که سری اعداد اول متناهی باشد زیرا چنین فرضی به تناقض می‌کشد. بدین ترتیب به هر سری اعداد مرکب متوالی در سری اعداد طبیعی که بر بخوریم میتوانیم یقین داشته باشیم که ما بعد آن تعداد بیپایان اعداد اول موجود میباشد.

بزرگترین عدد اول معلوم

یک موضوع است که از موجودیت تعداد زیاد اعداد اول هر چه بزرگتر یقین داشته باشیم، دیگر آنکه بدانیم که کدام اعداد اولند. هر اندازه که عدد طبیعی بزرگتر باشد به همان اندازه محاسبهٔ بیشتر لازم است تا بدانیم که آیا این عدد اول است یا خیر. در زیر، عددی را می‌آوریم که در حال حاضر بعنوان بزرگترین عدد اول معروف است:

$$۲^{۲۲۸۱} - ۱$$

این عدد تقریباً دارای هفتصد رقم اعشاری است. در نتیجهٔ محاسباتی که با ماشین‌های محاسبه معاصر انجام یافته، تعیین گردیده است که این عدد اول می‌باشد (به فصل‌های ۱ و ۲ مراجعه شود).

محاسبهٔ مهم

در محاسبات عملی برآوردهای حسابی محض دیده می‌شود که انجام آنها بدون شیوه‌های مشکل‌گشای جبری فوق‌العاده سخت

می‌باشد. بطور مثال فرض کنیم که دریافت نتیجهٔ چنین عملیاتی تقاضا شده است:

$$\frac{۲}{۱+\dfrac{۱}{۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}}$$

(این محاسبه برای آن ضرور است که معلوم گردد آیا وسایلی که با سرعت‌های حرکت اجسام، ناچیز نسبت به سرعت انتشار امواج الکترومقناطیسی، سر و کار دارد واقعاً میتواند از قانون سابق جمع سرعت‌ها، بدون در نظر گرفتن آن تغییراتی را که نظریهٔ نسبیت در مکانیک آورده، استفاده نماید. طبق مکانیک قدیمی یا کلاسیک، جسمی که در دو حرکت در یک جهت با سرعت‌های $v_۱$ و $v_۲$ کیلومتر در ثانیه شرکت دارد دارای سرعت $(v_۱+v_۲)$ کیلومتر در ثانیه می‌باشد. اما نظریهٔ جدید عبارت زیر را برای سرعت جسم میدهد:

$$\frac{v_۱+v_۲}{۱+\dfrac{v_۱ v_۲}{c^۲}} \text{ کیلومتر در ثانیه}$$

که c سرعت انتشار نور در خلا و تقریباً مساوی به ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در ثانیه می‌باشد. مثلا سرعت جسمیکه در دو حرکت در یک جهت، هر یک با سرعت ۱ کیلومتر در ثانیه، شرکت دارد مطابق با مکانیک کلاسیک، مساوی به ۲ کیلومتر در ثانیه، و مطابق با مکانیک جدید برابر با

$$\frac{۲}{۱+\dfrac{۱}{۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}} \text{ کیلومتر در ثانیه}$$

است. این نتایج چقدر از هم متفاوت است؟ آیا آلات اندازه‌گیری دقیق، چنین تفاوتی را میتواند ثبت کند؟ برای توضیح این مسئلهٔ مهم لازم است محاسبهٔ مذکور در فوق انجام شود.)

این محاسبه را از دو طریق اجراء میکنیم. ابتداء از طریق معمولی حساب، و سپس نشان میدهیم که نتیجه چطور از طریق جبر

حاصل می‌شود. کافی است تا یک بار به ارقام طویل ذکر شدهٔ زیر نظر بیاندازیم تا از برتری مطلق طریقهٔ جبری یقین حاصل کنیم.

قبل از همه، کسر «چندطبقه» خود را تبدیل می‌نمائیم:

$$\frac{۲}{۱+\dfrac{۱}{۹۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰}}=\frac{۱۸۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰}{۹۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۱}$$

حال عمل تقسیم صورت بر مخرج را اجراء میکنیم:

```
۱۸۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰   | ۹۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۱
 ۹۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۱   |-------------------------
---------------   | ۱,۹۹۹ ۹۹۹ ۹۹۹ ۹۷۷ ...
 ۸۹۹ ۹۹۹ ۹۹۹ ۹۹۰
 ۸۱۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۹
 ---------------
  ۸۹۹ ۹۹۹ ۹۹۹ ۸۱۰
  ۸۱۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۹
  ---------------
   ۸۹۹ ۹۹۹ ۹۹۸ ۰۱۰
   ۸۱۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۹
   ---------------
    ۸۹۹ ۹۹۹ ۹۸۰ ۰۱۰
    ۸۱۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۹
    ---------------
     ۸۹۹ ۹۹۹ ۸۰۰ ۰۱۰
     ۸۱۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۹
     ---------------
      ۸۹۹ ۹۹۸ ۰۰۰ ۰۱۰
      ۸۱۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۹
      ---------------
       ۸۹۹ ۹۸۰ ۰۰۰ ۰۱۰
       ۸۱۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۹
       ---------------
        ۸۹۹ ۸۰۰ ۰۰۰ ۰۱۰
        ۸۱۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۹
        ---------------
         ۸۹۸ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۱۰
         ۸۱۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۹
         ---------------
          ۸۸۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۱۰
          ۸۱۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۹
          ---------------
           ۷۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۱۰
           ۶۳۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۷
           ---------------
            ۷۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۳
```

بطوریکه می‌بینید این محاسبه خسته‌کننده و موشکافانه است و خیلی زود به گمراهی و خطا میکشد. ضمناً دانستن این نکته از نظر حل مسئله مهم است که دقیقا در کجا سری ۹ها ختم، و سری ارقام دیگر شروع می‌شود.

حال مقایسه نمائید که جبر چقدر راه حل مسئله را کوتاه میکند. جبر از تساوی تقریبی زیر استفاده می‌نماید: اگر a کسر کاملا کوچکی باشد در اینصورت

$$\frac{۱}{۱+a} \approx ۱-a$$

که در آن علامت $\approx$ معنی «تقریباً مساوی» را دارد.

صحت این ادعا را خیلی بسادگی میتوان تحقیق نمود. برای این منظور مقسوم ۱ را با حاصلضرب مقسوم‌علیه در خارج‌قسمت مقایسه می‌نمائیم:

$$۱=(۱+a)(۱-a)$$

یعنی

$$۱=۱-a^{۲}$$

چون a کسری بسیار کوچک است (مثلا ۰٫۰۰۱) لذا $a^{۲}$ باز هم کوچکتر است ۰٫۰۰۰۰۰۱) و میتوان از آن صرف نظر نمود.

مراتب فوق را در محاسبهٔ خود بکار می‌بریم*:

$$\frac{۲}{۱+\frac{۱}{۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}}=\frac{۲}{۱+\frac{۱}{۹\times ۱۰^{۱۰}}}\approx$$

$$\approx ۲\,(۱-۰٫۱۱۱\ldots\times ۱۰^{-۱۰})=$$

$$=۲-۰٫۰۰۰\,۰۰۰\,۰۰۰\,۰۲۲۲\ldots=۱٫۹۹۹\,۹۹۹\,۹۹۹\,۹۷۷۷\ldots$$

ما به همان نتیجهٔ قبلی رسیدیم ولی این بار از راه کوتاه‌تر.

---

* در اینجا ما از تساوی تقریبی زیر استفاده میکنیم:

$$\frac{A}{۱+a}\approx A\,(۱-a)$$

۷*

(برای خواننده لابد جالب است بداند که اهمیت نتیجهٔ بدست آمده در مسئله مطروحهٔ مربوط به علم مکانیک به چه اندازه است. این نتیجه نشان میدهد که بعلت کم بودن سرعت‌های مورد نظر نسبت به سرعت نور، انحرافی از قانون کلاسیک جمع سرعت‌ها عملا آشکار نگردیده و حتی در سرعت‌هائی بزیادی ۱ کیلومتر در ثانیه در رقم یازدهم عدد مطلوب اثر میگذارد در صورتیکه در تکنیک معمولی ما به ٤ الی ٦ رقم بسنده میکنیم. بنا بر این ما بالحق میتوانیم ادعا کنیم که مکانیک جدید یا مکانیک اینشتین عملا تغییری در محاسبات فنی مربوط به اجسام بطی (در مقایسه با انتشار نور) وارد نمی‌کند. و اما در یک رشته از زندگی معاصر به این استنباط بدون چون و چرا باید با احتیاط برخورد کرد. منظور، کیهان‌نوردی است. ما که امروز به سرعت‌های ۱۰ کیلومتر در ثانیه (در حرکت اقمار مصنوعی و موشک‌ها) نائل شده‌ایم. در این مورد تفاوت مکانیک کلاسیک با مکانیک اینشتین در رقم نهم ظاهر میگردد. و بزودی به سرعت‌های باز هم بیشتر دست خواهیم یافت.

وقتیکه بدون جبر آسانتر است

در کنار مواردیکه جبر خدمت سهمی به حساب می‌نماید مواردی نیز دیده میشود که توسل به جبر باعث بغرنج شدن قضیه میگردد. دانش حقیقی ریاضی در بکار بردن وسایل ریاضی بشیوه‌ای است که ما را از کوتاه‌ترین و مطمئن‌ترین راه، اعم از اینکه مربوط به حساب، جبر، هندسه و غیره باشد به هدف برساند. بنا براین بی‌فایده نیست حالتی را در نظر بگیریم که بکار بردن جبر فقط باعث گمراهی حل کننده می‌شود. مسئلهٔ زیر، یک مثال آموزنده است.

کوچکترین عدد را از میان تمام اعدادی پیدا کنید که در اثر تقسیم آنها

بر	۲	عدد	۱	باقی	بماند
”	۳	”	۲	”	”
”	٤	”	۳	”	”

”	”	٤	”	٥	”
”	”	٥	”	٦	”
”	”	٦	”	٧	”
”	”	٧	”	٨	”
”	”	٨	”	٩	”

حل

این مسئله را به من اینطور پیشنهاد کردند: «چطور شما این مسئله را حل میکنید؟ در اینجا تعداد معادلات بسیار زیاد است، حتما سر در گم میشوید».

حل این معما ساده است، برای حل مسئله احتیاجی به معادله یا جبر نیست زیرا از طریق استدلال سادهٔ حسابی حل می‌شود.

به عدد مطلوب، ۱ علاوه می‌کنیم. در اینصورت در اثر تقسیم بر ۲ چه باقی می‌ماند؟ باقیمانده ۲ = ۱ + ۱ است. بعبارت دیگر، عدد بدون باقیمانده بر ۲ تقسیم می‌شود.

همین طور هم بدون باقیمانده بر ۳، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨ و ٩ تقسیم میگردد. کوچکترین این اعداد ۲۰٥۲۰ = ٥ × ٧ × ٨ × ٩، و عدد مطلوب ۲٥۱۹ است و این امر را به آسانی میتوان تحقیق نمود.

فصل چهارم

معادلات دیوفانتوس

$$x^n+y^n=z^n$$

خرید بلوز پشمی

مسئله

شما از مغازه‌ای یک بلوز پشمی خریدید و باید ۱۹ روبل بپردازید. شما فقط اسکناس سه‌روبلی، و صندوقدار مغازه تنها پنج‌روبلی دارد. آیا شما با داشتن چنین پولهائی میتوانید با صندوقدار تسویهٔ حساب نمائید و چطور؟

مطلوب مسئله در آن خلاصه میشود که شما چند اسکناس سه‌روبلی باید به صندوقدار بدهید و اضافه را بصورت اسکناسهای پنج‌روبلی پس بگیرید تا مبلغ ۱۹ روبل پرداخت شود. مسئله دارای دو مجهول، (x) تعداد سه‌روبلی و (y) تعداد پنج‌روبلی، می‌باشد. اما میتوان تنها یک معادله تشکیل داد:

$$۳x - ۵y = ۱۹$$

گرچه یک معادلهٔ دومجهولی دارای تعداد بیشمار جواب می‌باشد به هیچ وجه هنوز واضح نیست که در میان آنها اقلا یک جواب با x و y صحیح مثبت یافت شود (یاد آوری می‌کنیم که این حروف تعداد اسکناس‌ها را نمایش میدهد). بهمین علت است که جبر یک طریقهٔ حل چنین معادلات «نامعین» را پیدا کرده است. این معادلات باهتمام اولین نمایندهٔ اروپائی این علم، ریاضی‌دان برجستهٔ قدیم دیوفانتوس به جبر وارد شده و بهمین جهت اغلب بنام «معادلات دیوفانتوس» موسوم است.

حل

بر پایهٔ مثال ذکر شده نشان میدهیم که چنین معادلاتی چطور حل میشود.

باید مقادیر x و y را در معادلهٔ

$$۳x - ۵y = ۱۹$$

پیدا کرد، ضمناً باید در نظر داشت که x و y اعدادی صحیح و مثبت می‌باشند.

آن مجهولی را که ضریب آن کوچکتر است یعنی جملهٔ $۳x$ را جدا می‌نمائیم و حاصل می‌کنیم:

$$۳x = ۱۹ + ۵y$$

از اینجا

$$x = \frac{۱۹ + ۵y}{۳} = ۶ + y + \frac{۱ + ۲y}{۳}$$

چون x، ۶ و y اعداد صحیحی است لذا تساوی تنها بشرطی صادق خواهد بود که اگر $\frac{۱ + ۲y}{۳}$ نیز عدد صحیحی باشد. این مقدار را به حرف t نمایش میدهیم. در اینصورت

$$x = ۶ + y + t$$

که در آن

$$t = \frac{۱ + ۲y}{۳}$$

و بنا بر این،

$$۳t = ۱ + ۲y, \quad ۲y = ۳t - ۱$$

از معادلهٔ آخری y را تعیین میکنیم:

$$y = \frac{۳t - ۱}{۲} = t + \frac{t - ۱}{۲}$$

چون y و t اعداد صحیحی است بنا بر این، $\frac{t - ۱}{۲}$ نیز باید یک عدد صحیح $t_۱$ باشد. بنا بر این،

$$y = t + t_۱$$

ضمنا

$$t_۱ = \frac{t - ۱}{۲}$$

و از اینجا

$$۲t_۱ = t - ۱, \quad t = ۲t_۱ + ۱$$

مقدار $t = ۲t_۱ + ۱$ را در تساوی‌های قبلی جایگزین میکنیم:

$$y = t + t_۱ = (۲t_۱ + ۱) + t_۱ = ۳t_۱ + ۱,$$
$$y = ٦ + y + t = ٦ + (۳t_۱ + ۱) + (۲t_۱ + ۱) = ۸ + ۵t_۱$$

بدینترتیب، ما برای x و y عبارات زیر را بدست می‌آوریم *:

$$x = ۸ + ۵t_۱,$$
$$y = ۱ + ۳t_۱$$

ما میدانیم که اعداد x و y نه تنها صحیح بلکه مثبت هم می‌باشد یعنی بزرگتر از صفر. بنا بر این،

$$۸ + ۵t_۱ > ۰,$$
$$۱ + ۳t_۱ > ۰$$

از این نابرابری‌ها دریافت میکنیم:

$$۵t_۱ > -۸, \quad t_۱ > -\frac{۸}{۵},$$

$$۳t_۱ > -۱, \quad t_۱ > -\frac{۱}{۳}$$

کمیت $t_۱$ در این حدود است. $t_۱$ از $-\frac{۱}{۳}$ بزرگتر است (و لذا از $-\frac{۸}{۵}$ باز هم بزرگتر است). ولی چون $t_۱$ عدد صحیحی

---

* بمعنی اکید، ما فقط آن نکته را ثابت کرده‌ایم که هر جواب صحیح معادلهٔ $۳x - ۵y = ۱۹$ بصورت $x = ۸ + ۵t_۱$، $y = ۱ + ۳t_۱$ میباشد که $t_۱$ یک عدد صحیح است. عکس موضوع را (یعنی اینکه در ازاء هر $t_۱$ صحیح، ما یک جواب صحیح برای معادلهٔ داده شده بدست می‌آوریم) ثابت نکردیم لکن بآسانی میتوان صحت آن را تحقیق نمود اگر بترتیب معکوس استدلال کنیم یا اگر مقادیر بدست آمدهٔ x و y را در معادلهٔ اولیه قرار بدهیم.

است استنباط می‌نمائیم که t_1 میتواند تنها مقادیر زیر را بخود بگیرد:

$$t_1 = ۰،\ ۱،\ ۲،\ ۳،\ ۴، \dots$$

مقادیر متناظر x و y چنین است:

$$x = ۸ + ۵t_1 = ۸،\ ۱۳،\ ۱۸،\ ۲۳، \dots،$$
$$y = ۱ + ۳t_1 = ۱،\ ۴،\ ۷،\ ۱۰، \dots$$

حالا ما پیدا کرده‌ایم که تادیه چطور ممکن است صورت بگیرد:

یا شما ۸ اسکناس سه‌روبلی پرداخت میکنید و پول اضافه را بصورت یک اسکناس پنج‌روبلی پس می‌گیرید:

$$۸ \times ۳ - ۵ = ۱۹$$

و یا اینکه ۱۳ اسکناس سه‌روبلی تادیه نموده و پول اضافه را بصورت ۴ اسکناس پنج‌روبلی پس میگیرید:

$$۱۳ \times ۳ - ۴ \times ۵ = ۱۹$$

و الی آخر.

از دیدگاه تئوری، مسئله دارای تعداد جواب‌های بیشمار می‌باشد اما در عمل تعداد جواب‌های آن محدود است زیرا چه خریدار و چه صندوقدار تعداد بی‌شمار اسکناس ندارند. اگر مثلا هر کدام ۱۰ اسکناس داشته باشند در آنصورت تادیهٔ پول تنها به یک اسلوب میتواند صورت بگیرد و آن اینکه ۸ اسکناس ۳ روبلی بدهید و ۵ روبل اضافه پس بگیرید. بطوریکه می‌بینیم معادلات نامعین در عمل می‌توانند جواب را بصورت زوج‌های معین بدهند.

با بازگشت به مسئله خویش، به خواننده بعنوان تمرین پیشنهاد می‌کنیم تا خودش یک شکل دیگر مسئله را حل نماید و آن اینکه حالتی را در نظر بگیرد که خریدار فقط پنج‌روبلی، و صندوقدار فقط سه‌روبلی داشته باشند. در نتیجه یک سلسله جواب‌ها حاصل میگردد:

$$x = ۵،\ ۸،\ ۱۱، \dots،$$
$$y = ۲،\ ۷،\ ۱۲، \dots$$

حقیقتا

$$\text{۵} \times \text{۵} - \text{۲} \times \text{۳} = \text{۱۹},$$
$$\text{۸} \times \text{۵} - \text{۷} \times \text{۳} = \text{۱۹},$$
$$\text{۱۱} \times \text{۵} - \text{۱۲} \times \text{۳} = \text{۱۹},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ما همچنین می‌توانستیم این نتایج را بر اساس جواب بدست آمده برای مسئلهٔ اصلی با کاربرد یک طریقهٔ سادهٔ جبری حاصل کنیم. از آنجا که دادن اسکناسهای پنج‌روبلی و گرفتن اسکناس‌های سه‌روبلی را میتوان با «گرفتن اسکناسهای پنج‌روبلی منفی» و «دادن اسکناسهای سه‌روبلی منفی» برابر دانست شکل جدید مسئله بکمک همان معادله‌ای که برای مسئلهٔ اصلی تشکیل شد حل میگردد:

$$\text{۳}x - \text{۵}y = \text{۱۹}$$

منتها بشرطی که x و y اعداد منفی باشد. بنا بر این، از تساوی‌های

$$x = \text{۸} + \text{۵}t_1, \quad y = \text{۱} + \text{۳}t_1$$

ما با علم به $x < \text{۰}$ و $y < \text{۰}$، بدست میآوریم:

$$\text{۸} + \text{۵}t_1 < \text{۰}, \quad \text{۱} + \text{۳}t_1 < \text{۰}$$

و بنا بر این،

$$t_1 < -\frac{\text{۸}}{\text{۵}}$$

با قرار دادن $t_1 = -\text{۲}, -\text{۳}, -\text{۴} \ldots$، از فرمول‌های قبلی مقادیر زیر را برای x و y حاصل میکنیم:

$$t_1 = -\text{۲}, \ -\text{۳}, \ -\text{۴},$$
$$x = -\text{۲}, \ -\text{۷}, \ -\text{۱۲},$$
$$y = -\text{۵}, \ -\text{۸}, \ -\text{۱۱}$$

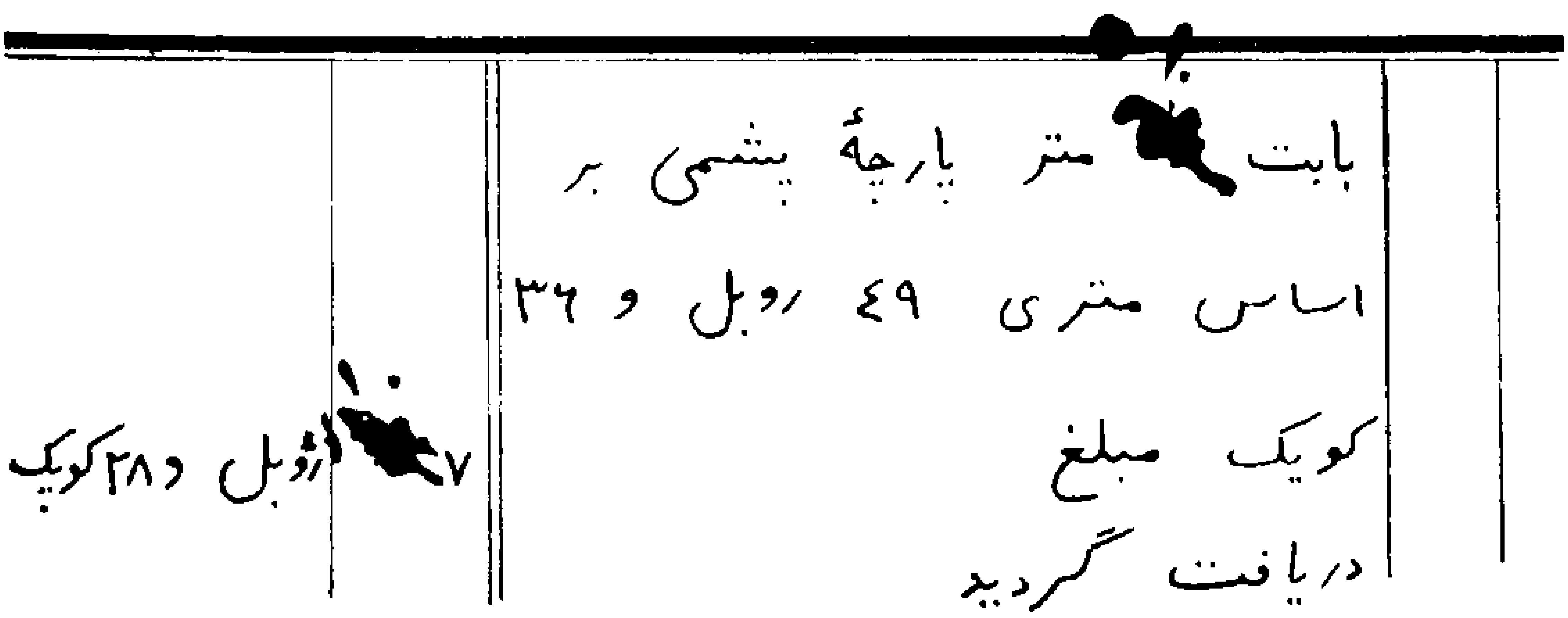
نخستین جفت جواب $x = -\text{۲}$، $y = -\text{۵}$ بمعنی آنست که خریدار «منهای دو اسکناس سه‌روبلی پرداخت می‌کند» و «منهای ۵ اسکناس پنج‌روبلی حاصل می‌نماید» یعنی، اگر بزبان معمولی سخن بگوئیم، ۵ اسکناس پنج‌روبلی میدهد و پول اضافه را بصورت

۲ اسکناس سه‌روبلی پس میگیرد. بقیهٔ جواب‌ها را نیز بهمین گونه تعبیر مینمائیم.

بازرسی امور یک فروشگاه

مسئله

هنگام بازرسی دفترهای ثبت خرج و دخل در یک فروشگاه معلوم شد که روی یکی از نوشته‌ها لکهٔ مرکب افتاده و بصورت زیر در آمده است:



شکل ۱۱

نمیشد فهمید چند متر فروخته شده است. تنها نکتهٔ مسلم این بود که عدد مربوطه کسری نیست. از مبلغ عاید شده تنها سه رقم آخر قابل تشخیص بود. همچنین واضح بود که جلو آن ارقام، سه رقم دیگری نیز قرار داشت.

آیا هیئت بازرسی میتواند از روی این اثرات، نوشته را بازسازی کند؟

حل

تعداد مترها را به x نمایش میدهیم. مبلغ عاید شده بر حسب کوپک بصورت زیر بیان میشود:

$$۴۹۳۶x$$

عدد سه‌رقمی پول را که سیاهی برداشته است به y نمایش میدهیم. واضح است که آن بیانگر تعداد هزارها کوپک است و تمام مبلغ بر حسب کوپک بدین صورت بیان می‌شود:

$$۱۰۰۰y + ۷۲۸$$

معادلهٔ زیر را تشکیل میدهیم:

$$۴۹۳۶x = ۱۰۰۰y + ۷۲۸$$

و، پس از تحویل به ۸، بدست می‌آوریم:

$$۶۱۷x - ۱۲۵y = ۹۱$$

در این معادله، x و y اعدادی صحیح میباشد و ضمناً y نابیشتر از ۹۹۹ است زیرا تعداد ارقام آن نمیتواند بیش از ۳ باشد. معادله را با طریقه‌ای که قبلا ذکر شد حل مینمائیم:

$$۱۲۵y = ۶۱۷x - ۹۱,$$

$$y = ۵x - ۱ + \frac{۳۴ - ۸x}{۱۲۵} =$$

$$= ۵x - ۱ + \frac{۲(۱۷ - ۴x)}{۱۲۵} = ۵x - ۱ + ۲t$$

(در اینجا ما $\frac{۸}{۱۲۵} - ۵ = \frac{۶۱۷}{۱۲۵}$ قرار دادیم برای اینکه باقیمانده هر چه کمتر باشد. کسر

$$\frac{۲(۱۷ - ۴x)}{۱۲۵}$$

عدديست صحیح و از آنجا که ۲ قابل تقسیم بر ۱۲۵ نیست

$\frac{۱۷ - ۴x}{۱۲۵}$ باید عدد صحیحی باشد که ما آنرا به t نمایش داده‌ایم).

سپس از معادلهٔ

$$\frac{۱۷ - ۴x}{۱۲۵} = t$$

بدست می‌آوریم :

$$۱۷ - ٤x = ۱۲۰t,$$

$$x = ٤ - ۳۱t + \frac{۱ - t}{٤} = ٤ - ۳۱t + t_۱$$

که در آن

$$t_۱ = \frac{۱ - t}{٤}$$

و بنا بر این،

$$٤t_۱ = ۱ - t,$$
$$t = ۱ - ٤t_۱,$$
$$x = ۱۲۵t_۱ - ۲۷,$$
$$y = ٦۱۷t_۱ - ۱۳٤ ^*$$

ما میدانیم که

$$۱۰۰ \leqslant y < ۱۰۰۰$$

لذا

$$۱۰۰ \leqslant ٦۱۷t_۱ - ۱۳٤ < ۱۰۰۰$$

و از اینجا

$$t_۱ < \frac{۱۱۳٤}{٦۱۷} \quad و \quad t_۱ \geqslant \frac{۲۳٤}{٦۱۷}$$

واضح است که برای $t_۱$ تنها یک مقدار صحیح وجود دارد :

$$t_۱ = ۱$$

و آنگاه

$$x = ۹۸, \quad y = ٤۸۳$$

---

* باین نکته توجه فرمائید که ضرایب جلو $t_۱$ با ضرایب جلو x و y در معادلهٔ اولیهٔ $٦۱۷x - ۱۲۵y = ۹۱$ با هم برابر است، در ضمن، یکی از ضرایب جلو $t_۱$ علامت معکوس دارد و این امر تصادفی نیست زیرا میتوان ثابت کرد که همواره باید چنین باشد هرگاه ضرایب جلو x و y اعدادی اول نسبت بهم باشند.

یعنی ۹۸ متر بمبلغ ۴۸۳۷ روبل و ۲۸ کوپک فروخته شد.
بدینترتیب نوشته بازسازی شده است.

خرید تمبر

مسئله

لازم است با یک روبل، ۴۰ عدد تمبر یک‌کوپکی، چهار-کوپکی و دوازده‌کوپکی بخرید. تعداد تمبر از هر نوع چند خواهد بود؟

حل

در این مورد دو معادلهٔ سه‌مجهولی داریم:

$$x + ۴y + ۱۲z = ۱۰۰,$$
$$x + y + z = ۴۰$$

که x تعداد تمبرهای یک‌کوپکی، y تعداد تمبرهای چهارکوپکی، z تعداد تمبرهای دوازده‌کوپکی است.

با تفریق معادلهٔ دوم از معادلهٔ یکم، یک معادلهٔ دومجهولی حاصل می‌کنیم:

$$۳y + ۱۱z = ۶۰$$

y را پیدا می‌نمائیم:

$$y = ۲۰ - ۱۱\frac{z}{۳}$$

آشکار است که $\frac{z}{۳}$ عدد صحیحی است. آن را به t نمایش میدهیم. داریم:

$$y = ۲۰ - ۱۱t,$$
$$z = ۳t$$

عبارات y و z را در دومین از معادلات اولیه قرار میدهیم:

$$x + ۲۰ - ۱۱t + ۳t = ۴۰$$

حاصل می‌نمائیم:

$$x = ۲۰ + ۸t$$

چون $x \geqslant ۰$، $y \geqslant ۰$ و $z \geqslant ۰$ لذا به آسانی میتوان حدود t را تعیین

نمود :

$$۰ \leqslant t \leqslant ۱\frac{۹}{۱۱}$$

از اینجا نتیجه میگیریم که برای t تنها دو مقدار صحیح امکان دارد :

$$t = ۰ \quad و \quad t = ۱$$

مقادیر متناظر x، y و z چنین است :

$t =$	۰	۱
$x =$	۲۰	۲۸
$y =$	۲۰	۹
$z =$	۰	۳

امتحان

$$۲۰ \times ۱ + ۲۰ \times ٤ + ۰ \times ۱۲ = ۱۰۰,$$
$$۲۸ \times ۱ + ۹ \times ٤ + ۳ \times ۱۲ = ۱۰۰$$

بدین ترتیب، خرید تمبرها تنها از دو طریق ممکن است (و هرگاه خواسته شود تا اقلا یک تمبر از هر نوع خریده شود آنگاه تنها یک طریقه امکان‌پذیر است).

مسئله بعدی از همین گونه است.

خرید میوه

مسئله

با ۵ روبل، ۱۰۰ دانه میوهٔ مختلف خریداری گردید. قیمت میوه‌ها چنین است :

هندوانه، عددی ۵۰ کوپک
سیب ، » ۱۰ »
آلو ، » ۱ »

چند عدد از هر نوع میوه خریده شد؟

حل

تعداد هندوانه‌ها را به x، سیب‌ها را به y، و آلوها را به z نمایش، و دو معادله تشکیل میدهیم :

$$\begin{cases} ۵۰x + ۱۰y + ۱z = ۵۰۰, \\ x + y + z = ۱۰۰ \end{cases}$$

معادلهٔ دوم را از معادلهٔ یکم تفریق نموده و یک معادلهٔ دومجهولی حاصل میکنیم:

$$٤٩x+٩y=٤٠٠$$

جریان بعدی حل چنین است:

$$y=\frac{٤٠٠-٤٩x}{٩}=٤٤-٥x+\frac{٤(١-x)}{٩}=٤٤-٥x+٤t,$$

$$t=\frac{١-x}{٩},\quad x=١-٩t,$$

$$y=٤٤-٥(١-٩t)+٤t=٣٩+٤٩t$$

از نابرابری‌های

$$١-٩t\geqslant ٠,\quad ٣٩+٤٩t\geqslant ٠$$

تعیین می‌نمائیم که

$$\frac{١}{٩}\geqslant t\geqslant -\frac{٣٩}{٤٩}$$

و بنا بر این، $t=٠$. از اینرو

$$x=١,\quad y=٣٩$$

با قرار دادن این مقادیر x و y در معادلهٔ دوم، حاصل می‌کنیم: $z=٦٠$.

بدینترتیب ۱ عدد هندوانه، ۳۹ عدد سیب و ۶۰ دانه آلو خریداری شد.

ترکیبات دیگری نمیتواند وجود داشته باشد.

حدس زدن روز تولد

مسئله

مهارت در حل معادلات نامعین امکان میدهد تا شعبدهٔ ریاضی زیر را انجام دهیم.

شما به رفیقتان پیشنهاد می‌نمائید تا تاریخ روز تولد خویش را در ۱۲، و شمارهٔ ماه را در ۳۱ ضرب نماید. او به شما مجموعهٔ

هر دو حاصل‌ضرب را اطلاع داده و شما از روی آن، روز تولد او را حساب می‌نمائید.

هرگاه بطور مثال، رفیق شما به تاریخ ۹ فوریه متولد شده باشد آنگاه او محاسبات زیر را انجام می‌دهد:

$$۹ \times ۱۲ = ۱۰۸, \quad ۲ \times ۳۱ = ۶۲,$$
$$۱۰۸ + ۶۲ = ۱۷۰$$

این عدد آخری ۱۷۰ را او به شما اطلاع میدهد و شما عدد تاریخ مورد نظر را تعیین می‌نمائید. چطور؟

حل

مسئله در حل معادلهٔ نامعین

$$۱۲x + ۳۱y = ۱۷۰$$

بر حسب اعداد مثبت صحیح خلاصه میگردد، در ضمن عدد روز ماه (x) نابیشتر از ۳۱، و شمارهٔ ماه نابیشتر از ۱۲ است.

$$x = \frac{۱۷۰ - ۳۱y}{۱۲} = ۱۴ - ۳y + \frac{۲ + ۵y}{۱۲} = ۱۴ - ۳y + t,$$
$$۲ + ۵y = ۱۲t,$$
$$y = \frac{-۲ + ۱۲t}{۵} = ۲t - ۲ \times \frac{۱ - t}{۵} = ۲t - ۲t_1,$$
$$۱ - t = ۵t_1, \quad t = ۱ - ۵t_1,$$
$$y = ۲(۱ - ۵t_1) - ۲t_1 = ۲ - ۱۲t_1,$$
$$x = ۱۴ - ۳(۲ - ۱۲t_1) + ۱ - ۵t_1 = ۹ + ۳۱t_1$$

با علم به $۰ < x \geqslant ۳۱$ و $۰ < y \geqslant ۱۲$، حدود t_1 را پیدا می‌نمائیم:

$$-\frac{۹}{۳۱} < t_1 < \frac{۱}{۶}$$

بنا بر این،

$$t_1 = ۰, \quad x = ۹, \quad y = ۲$$

تاریخ تولد، روز نهم ماه دوم یعنی ۹ فوریه است.

میتوان طریقهٔ دیگری را نیز که ما را از معادلات بینیاز میسازد پیشنهاد نمود. عدد $a = ۱۲x + ۳۱y$ به ما داده شده است. چون $۱۲x + ۲۴y$ قابل تقسیم بر ۱۲ است لذا باقیمانده‌های تقسیم عددهای $۷y$ و a بر ۱۲ یکسان می‌باشد. با ضرب در ۷، پیدا می‌نمائیم که $۴۹y$ و $۷a$ در اثر تقسیم بر ۱۲ باقیمانده‌های یکسان دارد. ولی $۴۹y = ۴۸y + y$، که در آن $۴۸y$ بر ۱۲ قابل‌تقسیم است. بنا بر این، y و $۷a$ در اثر تقسیم بر ۱۲ دارای باقیمانده‌های یکسان می‌باشد. به عبارت دیگر اگر a بر ۱۲ تقسیم نشود در آنصورت y مساوی به باقیماندهٔ تقسیم $۷a$ بر ۱۲ است. اگر a بر ۱۲ قابل تقسیم باشد در آنصورت $y = ۱۲$. این عدد، y (شمارهٔ ماه) را کاملا مشخص میسازد و با دانستن y ، دانستن x بسیار آسان است.

یک توصیهٔ کوچک: قبل از اینکه به تعیین باقیماندهٔ تقسیم $۷a$ بر ۱۲ مبادرت ورزید، خود عدد a را با باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۱۲ عوض نمائید و حساب ساده می‌شود. بطور مثال، اگر $a = ۱۷۰$، در این صورت شما باید در ذهن خود محاسبهٔ زیر را انجام دهید:

$$۱۷۰ = ۱۲ \times ۱۴ + ۲ \quad \text{(یعنی باقیمانده برابر ۲ است)،}$$

$$۲ \times ۷ = ۱۴؛ \quad ۱۴ = ۱۲ \times ۱ + ۲ \quad (y = ۲ \text{ یعنی})،$$

$$x = \frac{۱۷۰ - ۳۱y}{۱۲} = \frac{۱۷۰ - ۳۱ \times ۲}{۱۲} = \frac{۱۰۸}{۱۲} = ۹$$

(یعنی $x = ۹$). حالا شما میتوانید به رفیقتان تاریخ تولدش را اطلاع دهید: ۹ فوریه.

ثابت می‌کنیم که شعبده همیشه بدون نقص عملی میشود یعنی اینکه معادله همیشه تنها یک جواب صحیح مثبت دارد. عددی را که رفیقتان به شما اطلاع داد به a نمایش میدهیم. در این صورت دریافت تاریخ تولد او به حل معادله ذیل‌موکول میگردد:

$$۱۲x + ۳۱y = a$$

استدلال را از «گزارهٔ معکوس» شروع میکنیم. فرض کنیم که این معادله دارای دو جواب مختلف بصورت اعداد صحیح مثبت یعنی جواب‌های x_1, y_1 و x_2, y_2 را داشته باشد. ضمناً x_1 و x_2 بزرگتر از ۳۱، و y_1 و y^2 بزرگتر از ۱۲ نمی‌باشد. داریم:

$$۱۲x_1 + ۳۱y_1 = a,$$
$$۱۲x_2 + ۳۱y_2 = a$$

از تساوی اول تساوی دوم را تفریق نموده و حاصل می‌کنیم:

$$۱۲(x_1 - x_2) + ۳۱(y_1 - y_2) = ۰$$

از این تساوی بر می‌آید که عدد $۱۲(x_1 - x_2)$ قابل‌تقسیم بر ۳۱ است. چون x_1 و x_2 اعداد مثبت نابیشتر از ۳۱ می‌باشند لذا مقدار تفاوت آنها کمتر از ۳۱ است. بنا بر این، عدد $۱۲(x_1 - x_2)$ تنها در صورتی بر ۳۱ قابل‌تقسیم است که اگر $x_1 = x_2$ یعنی زمانیکه جواب اولی با جواب دومی یکی باشد. بدین ترتیب پیشنهاد موجودیت دو جواب مختلف موجب تناقض میگردد.

فروش مرغ ها

مسئلهٔ قدیمی

سه خواهر مرغ های خود را برای فروش به بازار آوردند، اولی ده مرغ، دومی ۱۶ مرغ و سومی ۲۶ مرغ. تا نیم‌روز آنها قسمتی از مرغ های خود را به یک قیمت بفروش رسانیدند. بعد از نیم‌روز از ترس آنکه تمامی مرغ ها فروخته نخواهد شد آنها قیمت مرغ ها را پائین آورده و مرغ های باقیمانده را باز هم به یک قیمت فروختند. هر سه خواهر با دخل مساوی به خانه بازگشتند: هر کدام از فروش مرغ ها مبلغ ۳۵ روبل دریافت نموده بود.

آنها به چه قیمتی مرغ ها را قبل و بعد از نیم‌روز بفروش رساندند؟

8*

حل

تعداد مرغ هائی را که هر خواهر تا نیم‌روز بفروش رسائیدند به x، y و z نمایش میدهیم. در نیمهٔ دوم روز آنها $x - ۱۰$، $y - ۱۶$ و $z - ۲۶$ مرغ فروختند. قیمت مرغ ها را قبل از ظهر به m، و بعد از ظهر به n نمایش میدهیم. برای وضوح بیشتر، این نمادها را مقایسه میکنیم:

	تعداد مرغ های فروخته شده			قیمت
قبل از ظهر	x	y	z	m
بعد از ظهر	$۱۰ - x$	$۱۶ - y$	$۲۶ - z$	n

خواهر اول دریافت نمود:

$mx + n(۱۰ - x)$ و بنا بر این $mx + n(۱۰ - x) = ۳۵$

خواهر دوم:

$my + n(۱۶ - y)$ و بنا بر این $my + n(۱۶ - y) = ۳۵$

خواهر سوم:

$mz + n(۲۶ - z)$ بنا بر این $mz + n(۲۶ - z) = ۳۵$

شکل این سه معادله را تغییر میدهیم:

$$\begin{cases} (m - n)x + ۱۰n = ۳۵, \\ (m - n)y + ۱۶n = ۳۵, \\ (m - n)z + ۲۶n = ۳۵ \end{cases}$$

معادلهٔ اول و دوم را یکی بعد از دیگری از معادلهٔ سوم تفریق نموده و، بترتیب، حاصل می‌کنیم:

$$\begin{cases} (m - n)(z - x) + ۱۶n = ۰, \\ (m - n)(z - y) + ۱۰n = ۰ \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} (m - n)(x - z) = ۱۶n, \\ (m - n)(y - z) = ۱۰n \end{cases}$$

در دستگاه اخیر، معادلهٔ اول را بر معادلهٔ دوم تقسیم می‌نمائیم:

$$\frac{x-z}{۸}=\frac{y-z}{۵} \quad \text{یا} \quad \frac{x-z}{y-z}=\frac{۸}{۵}$$

چون x، y، z اعداد صحیح‌اند بنا بر این، تفاوت‌های $x-z$، $y-z$ نیز اعدادی صحیح‌اند. لذا برای موجودیت تساوی

$$\frac{x-z}{۸}=\frac{y-z}{۵}$$

ضرور است تا $x-z$ بر ۸، و $y-z$ بر ۵ قابل تقسیم باشد. بنا بر این،

$$\frac{x-z}{۸}=t=\frac{y-z}{۵}$$

و از اینجا

$$x=z+۸t,$$
$$y=z+۵t$$

یادآور می‌شویم که عدد t نه تنها صحیح، بلکه مثبت نیز می‌باشد زیرا $x>z$ (در غیر این صورت خواهر اول نمیتوانست پولی بمقدار خواهر سوم دریافت کند).

از آنجا که $x<۱۰$ لذا

$$z+۸t<۱۰$$

در ازاء z و t صحیح مثبت، نابرابری آخری تنها در یک صورت صادق است و آن وقتیکه $z=۱$ و $t=۱$. بعد از گذاشتن این مقادیر در معادلات

$$y=z+۵t \quad \text{و} \quad x=z+۸t$$

دریافت می‌کنیم: $x=۹$، $y=۶$.

حال با مراجعه به معادلات

$$mx+n(۱۰-x)=۳۵,$$
$$my+n(۱۶-y)=۳۵,$$
$$mz+n(۲۶-z)=۳۵$$

و با گذاشتن مقادیر حاصل شدهٔ x، y و z در آنها، قیمت فروش مرغ ها را بر حسب روبل حاصل میکنیم:

$$m = ۳\frac{۳}{٤}, \quad n = ۱\frac{۱}{٤}$$

بدین ترتیب مرغ ها را در نیمهٔ اول روز به قیمت ۳ روبل و ۷۵ کوپک، و در نیمهٔ دوم روز به قیمت ۱ روبل و ۲۵ کوپک بفروش رساندند.

دو عدد و چهار عمل

مسئله

مسئلهٔ قبلی را که به سه معادله پنج‌مجهولی منتهی گردید ما نه از روی الگوی عمومی بلکه از طریق استدلال ریاضی آزاد حل نمودیم. به همین طریق مسایل زیر را نیز که منجر به معادلات نامعین درجهٔ دوم میگردند حل می‌نمائیم.

اینک مسئلهٔ اول.

روی دو عدد صحیح مثبت چهار عمل زیر انجام گردید:

۱) جمع،

۲) تفریق کوچک‌تر از بزرگ‌تر،

۳) ضرب،

٤) تقسیم بزرگ‌تر بر کوچک‌تر.

نتایج حاصل شده را جمع نمودند و عدد ۲٤۳ بدست آمد.
این اعداد را پیدا نمائید.

حل

اگر عدد بزرگ‌تر x، و عدد کوچک‌تر y باشد در آنصورت

$$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y} = ۲٤۳$$

اگر این معادله را در y ضرب، و بعد از باز نمودن پرانتز، جمله های همگون را جمع کنیم در آنصورت حاصل می‌نمائیم:

$$x\,(۲y+y^{۲}+۱) = ۲٤۳y$$

اما $(y+1)^2=1+y^2+2y$. بنا بر این،

$$x=\frac{243y}{(y+1)^2}$$

برای اینکه x عدد صحیحی باشد مخرج $(y+1)^2$ باید یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۴۳ باشد (زیرا y نمیتواند با $y+1$ ضریب مشترک داشته باشد). با علم به اینکه $243=3^5$، استنباط می‌کنیم که ۲۴۳ تنها بر اعداد زیر که مربع دقیق می‌باشند تقسیم میشود: ۱، 3^2، 9^2. بنا بر این، $(y+1)^2$ باید مساوی به ۱، 3^2 و یا 9^2 باشد و از اینجا (نظر به اینکه y باید مثبت باشد) در می‌یابیم که y مساوی به ۸ و یا ۲ است.

در اینصورت x مساوی است با

$$\frac{243\times 8}{81} \quad \text{یا} \quad \frac{243\times 2}{9}$$

بدینترتیب، اعداد مطلوب ۲۴ و ۸ و یا ۵۴ و ۲ است.

کدام راست‌گوشه؟

مسئله

اضلاع یک راست‌گوشه با اعداد صحیح بیان میگردد. طول آنها چقدر باید باشد تا محیط راست‌گوشه از نظر عددی مساوی به مساحت آن باشد؟

حل

اضلاع راست‌گوشه را به x و y نمایش داده و معادله‌ای تشکیل میدهیم:

$$2x+2y=xy$$

از اینجا

$$x=\frac{2y}{y-2}$$

چون x و y باید مثبت باشد لذا عدد $y-2$ نیز باید مثبت باشد یعنی y باید بزرگتر از ۲ باشد.

حال توجه میکنیم که

$$x = \frac{۲y}{y-۲} = \frac{۲(y-۲)+۴}{y-۲} = ۲ + \frac{۴}{y-۲}$$

چون x باید عدد صحیحی باشد لذا عبارت $\frac{۴}{y-۲}$ نیز باید عدد صحیحی باشد. اما اگر $y > ۲$، این امر تنها وقتی امکان‌پذیر است که y مساوی به ۳، ۴ یا ۶ باشد. مقادیر متناظر x عبارت است از ۶، ۴ و ۳.

بدین ترتیب شکل مطلوب یا مربع مستطیل با اضلاع ۳ و ۶، و یا مربع با ضلع ۴ است.

دو عدد دورقمی

مسئله

اعداد ۴۶ و ۹۶ خصوصیت جالبی دارند: کمیت حاصل‌ضرب آنها در اثر جابجایی ارقام تغییر نمی‌کند.

حقیقتا

$$۴۶ \times ۹۶ = ۴۴۱۶ = ۶۴ \times ۶۹$$

مطلوبست تعیین گردد که آیا جفت‌های اعداد دورقمی دیگری با همان خصوصیت موجود است یا خیر. چطور میشود تمام آنها را پیدا نمود؟

حل

ارقام اعداد مطلوب را به x و y، z و t نمایش داده و معادله‌ای تشکیل می‌دهیم:

$$(۱۰x + y)(۱۰z + t) = (۱۰y + x)(۱۰t + z)$$

پرانتز را باز نموده و بعد از ساده ساختن حاصل می‌کنیم:

$$xz = yt$$

که x، y، z، t اعداد صحیحی کوچک‌تر از ۱۰ می‌باشند. جهت جستجوی جواب، از ۹ رقم، تمام جفت‌هائی را که حاصل‌ضرب مساوی دارند تشکیل میدهیم:

۱ × ۴ = ۲ × ۲ ‏ ‏ ۲ × ۸ = ۴ × ۴
۱ × ۶ = ۲ × ۳ ‏ ‏ ۲ × ۹ = ۳ × ۶
۱ × ۸ = ۲ × ۴ ‏ ‏ ۳ × ۸ = ۴ × ۶
۱ × ۹ = ۳ × ۳ ‏ ‏ ۴ × ۹ = ۶ × ۶
۲ × ۶ = ۳ × ۴

تعداد تمام برابری‌ها ۹ است. از هر کدام میتوان یک یا دو دسته اعداد مطلوب را تشکیل داد. بطور مثال، از برابری ۱ × ۴ = ۲ × ۲ یک جواب را تشکیل میدهیم.

۱۲ × ۴۲ = ۲۱ × ۲۴

از تساوی ۱ × ۶ = ۲ × ۳ دو جواب حاصل می‌شود:

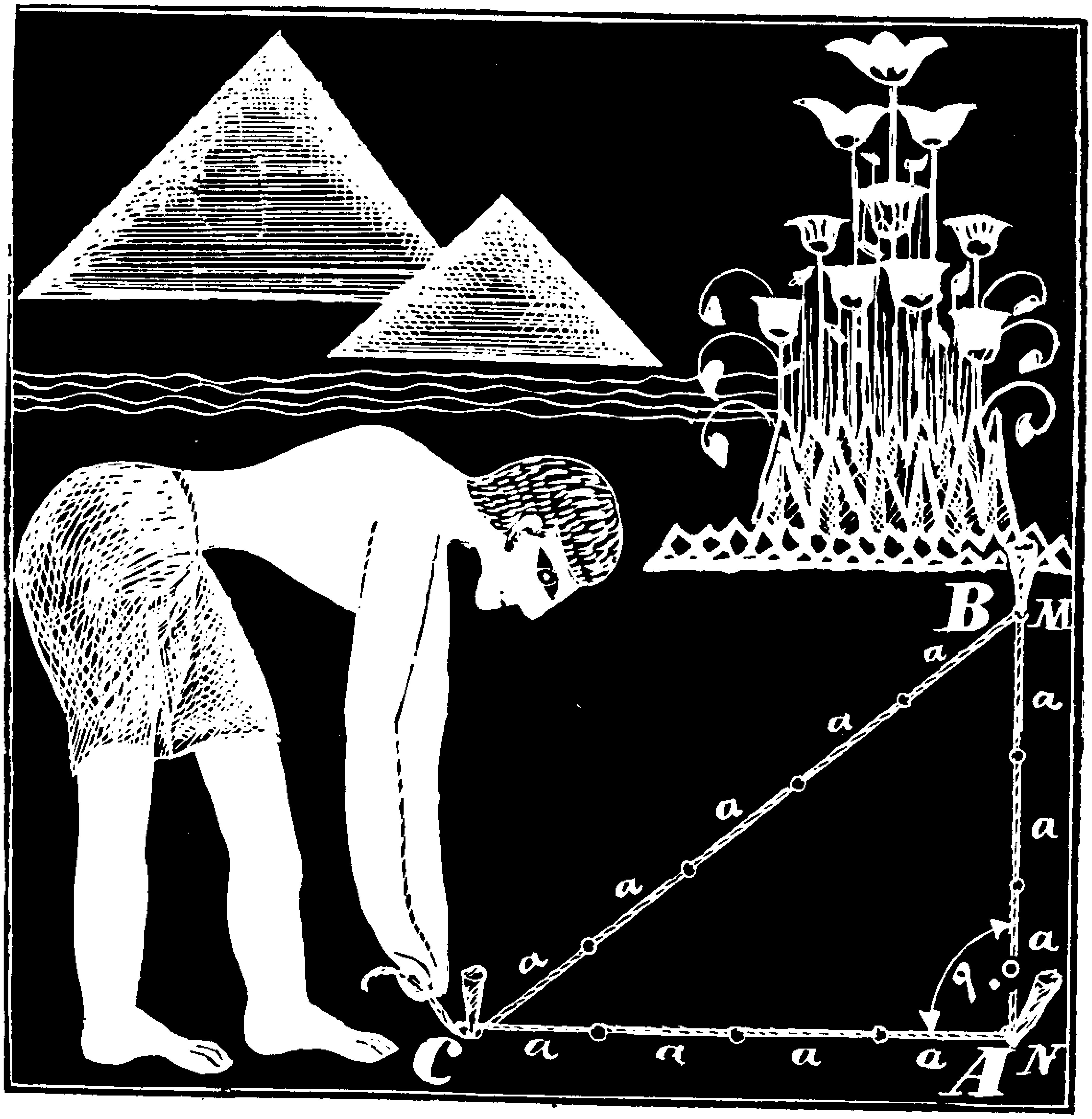
۱۲ × ۶۳ = ۲۱ × ۳۲، ‏ ‏ ۱۳ × ۶۲ = ۳۱ × ۲۶

بدین ترتیب، ۱۴ جواب زیر را پیدا می‌کنیم:

۱۲ × ۴۲ = ۲۱ × ۲۴ ‏ ‏ ۲۳ × ۹۶ = ۳۲ × ۶۹
۱۲ × ۶۳ = ۲۱ × ۳۶ ‏ ‏ ۲۴ × ۶۳ = ۴۲ × ۳۶
۱۲ × ۸۴ = ۲۱ × ۴۸ ‏ ‏ ۲۴ × ۸۴ = ۴۲ × ۴۸
۱۳ × ۶۲ = ۳۱ × ۲۶ ‏ ‏ ۲۶ × ۹۳ = ۶۲ × ۳۹
۱۳ × ۹۳ = ۳۱ × ۳۹ ‏ ‏ ۳۴ × ۸۶ = ۴۳ × ۶۸
۱۴ × ۸۲ = ۴۱ × ۲۸ ‏ ‏ ۳۶ × ۸۴ = ۶۳ × ۴۸
۲۳ × ۶۴ = ۳۲ × ۴۶ ‏ ‏ ۴۶ × ۹۶ = ۶۴ × ۶۹

اعداد فیثاغورث

اسلوب بسیار دقیق و مناسبی را که مساحان جهت ترسیم خطوط متعامد در محل بکار می‌برند بصورت زیر است. مطلوبست از نقطهٔ A خط عمود به خط مستقیم MN رسم شود (شکل ۱۲). از نقطهٔ A در جهت AM سه بار یک فاصلهٔ a را جدا نموده بعد ریسمان را در سه جا بفاصله‌های a ۴ و a ۵ گره می زنیم. بعد از قرار دادن گره‌های کناری در نقاط A و B، ریسمان را از گره وسطی می‌کشیم. ریسمان به شکل مثلثی با زاویهٔ قایمهٔ A در می‌آید.



شکل ۱۲

این طریقهٔ کهن که هزاران سال قبل توسط معماران مصری در ساختمان هرم بکار میرفته است مبتنی بر آن است که هر مثلثی که نسبت اضلاع آن به یکدیگر ۵ : ٤ : ۳ باشد مطابق با قضیهٔ مشهور فیثاغورث، قایم الزاویه است چون

$$۳^۲ + ٤^۲ = ۵^۲$$

از قرار معلوم، علاوه بر اعداد ۳، ٤، ۵، اعداد صحیح مثبت بی‌شمار a، b، c موجود است که در رابطهٔ زیر صدق میکند:

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$

این اعداد بنام اعداد فیثاغورث موسوم است. مطابق با قضیهٔ فیثاغورث چنین اعدادی میتواند بعنوان اضلاع یک مثلث قایم‌الزاویه بکار رود. بنا بر این، a و b را بنام اضلاع متعامد، و c را بنام وتر میگویند.

واضح است که اگر a، b، c سه عدد فیثاغورث باشد در آن صورت pa، pb، pc نیز که p ضریب صحیحی میباشد اعداد فیثاغورث است. و بر عکس، اگر اعداد فیثاغورث دارای ضریب مشترک باشد در آنصورت میتوان تمام آنها را به این ضریب مشترک تحویل داد و مجدداً سه عدد فیثاغورث حاصل میگردد. بنا بر این، ابتداء تنها سه‌تایی‌های متقابلا اول اعداد فیثاغورث را بررسی می‌کنیم (و بقیه در اثر ضرب آنها در سازهٔ صحیح p حاصل می‌شود).

نشان میدهیم که در هر کدام از این سه‌تایی‌های a، b، c یکی از اضلاع متعامد باید زوج، و دیگری فرد باشد. از طریق «فرض عکس» استدلال می‌نمائیم: اگر هر دو ضلع متعامد زوج باشد در آنصورت عدد $a^{۲}+b^{۲}$ نیز زوج، و بنا بر این وتر نیز زوج است. و لیکن این امر متناقض با آن است که اعداد a، b، c ضریب مشترک ندارند زیرا سه عدد زوج دارای ضریب مشترک ۲ می‌باشند. بدین ترتیب، اقلا یکی از اضلاع متعامد a، b فرد است.

یک امکان دیگر نیز باقی می‌ماند و آن اینکه هر دو ضلع متعامد فرد، و وتر زوج باشد. به آسانی ثابت می‌شود که این امر امکان‌پذیر نیست، واقعاً اگر اضلاع متعامد بصورت زیر باشد:

$$۲x+۱ \quad \text{و} \quad ۲y+۱$$

در آنصورت مجموع مربعات آنها مساوی است با

$$۴x^{۲}+۴x+۱+۴y^{۲}+۴y+۱=$$
$$=۴(x^{۲}+x+y^{۲}+y)+۲$$

یعنی عبارت از عددی است که در اثر تقسیم آن بر ۴، ۲ باقی می‌ماند. ضمناً مربع هر عدد زوج باید بدون باقیمانده بر ۴ تقسیم

شود. و این میرساند که مجموع مربع‌های دو عدد فرد نمی‌تواند مربع عدد زوج باشد. بعبارت دیگر سه عدد ما اعداد فیثاغورث نمی‌باشد.

بدین ترتیب، یکی از اضلاع متعامد a و b زوج، و دیگری فرد است. بنا بر این، عدد a^2+b^2 فرد، و لذا وتر c نیز فرد است.

برای مثال فرض کنیم که ضلع a فرد، و ضلع b زوج باشد.

از برابری

$$a^2+b^2=c^2$$

ما بآسانی دریافت میکنیم:

$$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$$

سازه‌های $c+b$ و $c-b$ که در سمت راست قرار دارند متقابلا اولند. حقیقتاً اگر این اعداد ضریب مشترک اول خلاف یک داشتند در آنصورت هم مجموع

$$(c+b)+(c-b)=2c$$

و هم تفاوت

$$(c+b)-(c-b)=2b$$

و هم حاصل‌ضرب

$$(c+b)(c-b)=a^2$$

بر این ضریب تقسیم میگردید یعنی اعداد $2c$، $2b$ و a دارای ضریب مشترک می‌بود. چون a فرد است لذا این ضریب خلاف ۲ است و بنا بر این اعداد a، b، c همان ضریب مشترک را دارند و لیکن این امر امکان‌پذیر نیست. تناقض حاصل شده نشان میدهد که اعداد $c+b$ و $c-b$ متقابلا اولند.

ولی اگر حاصل‌ضرب اعداد متقابلا اول، مربع دقیقی باشد در آنصورت هر کدام از آنها مربع می‌باشد یعنی

$$\begin{cases} c+b=m^2, \\ c-b=n^2 \end{cases}$$

بعد از حل این دستگاه، پیدا می‌کنیم:

$$c=\frac{m^2+n^2}{2}, \quad b=\frac{m^2-n^2}{2}$$

$$a^2=(c+b)(c-b)=m^2n^2, \ a=mn$$

بدین ترتیب، اعداد فیثاغورث که مورد بررسی قرار گرفتند شکل زیر را دارند:

$$a=mn,\ b=\frac{m^٢-n^٢}{٢},\ c=\frac{m^٢+n^٢}{٢}$$

که m و n یک اعداد فرد متقابلا اولند. خواننده بآسانی می‌تواند از صحت عکس مطلب نیز یقین حاصل نماید: هرگاه m و n فرد باشد فرمول‌های مذکور سه عدد فیثاغورث a، b، c را میدهد.

اینک چند سه‌تایی عددی فیثاغورث را که در ازاء m و n مختلف دریافت شده است میآوریم:

$m=٣,$	$n=١$	در ازاء	$٣^٢+٤^٢=٥^٢$
$m=٥,$	$n=١$	” ”	$٥^٢+١٢^٢=١٣^٢$
$m=٧,$	$n=١$	” ”	$٧^٢+٢٤^٢=٢٥^٢$
$m=٩,$	$n=١$	” ”	$٩^٢+٤٠^٢=٤١^٢$
$m=١١,$	$n=١$	” ”	$١١^٢+٦٠^٢=٦١^٢$
$m=١٣,$	$n=١$	” ”	$١٣^٢+٨٤^٢=٨٥^٢$
$m=٥,$	$n=٣$	” ”	$١٥^٢+٨^٢=١٧^٢$
$m=٧,$	$n=٣$	” ”	$٢١^٢+٢٠^٢=٢٩^٢$
$m=١١,$	$n=٣$	” ”	$٣٣^٢+٥٦^٢=٦٥^٢$
$m=١٣,$	$n=٣$	” ”	$٣٩^٢+٨٠^٢=٨٩^٢$
$m=٧,$	$n=٥$	” ”	$٣٥^٢+١٢^٢=٣٧^٢$
$m=٩,$	$n=٥$	” ”	$٤٥^٢+٢٨^٢=٥٣^٢$
$m=١١,$	$n=٥$	” ”	$٥٥^٢+٤٨^٢=٧٣^٢$
$m=١٣,$	$n=٥$	” ”	$٦٥^٢+٧٢^٢=٩٧^٢$
$m=٩,$	$n=٧$	” ”	$٦٣^٢+١٦^٢=٦٥^٢$
$m=١١,$	$n=٧$	” ”	$٧٧^٢+٣٦^٢=٨٥^٢$

(بقیهٔ سه‌تایی‌های عددی فیثاغورث یا دارای ضریب مشترک و یا شامل اعدادی بزرگتر از ١٠٠ است.)

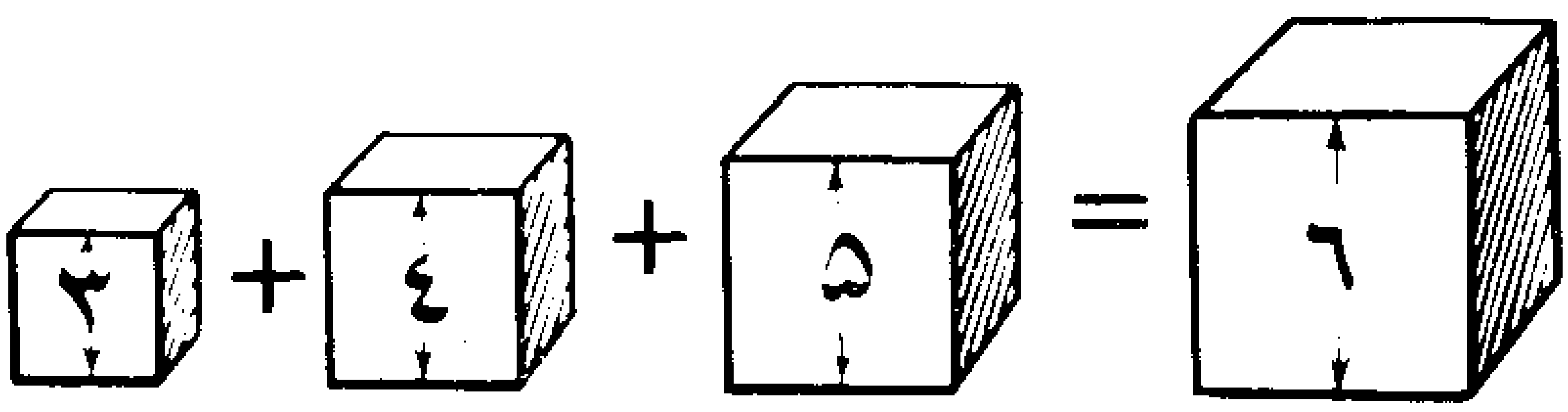
عموماً اعداد فیثاغورث دارای یک تعداد خصوصیات عجیبی است که ما آنها را در زیر بدون اثبات میآوریم:

۱) یکی از اضلاع متعامد باید مضربی از سه باشد.
۲) یکی از اضلاع متعامد باید مضربی از چهار باشد.
۳) یکی از اعداد فیثاغورث باید مضربی از پنج باشد.

خواننده با مرور مثال‌های فوق مربوط به دسته‌های اعداد فیثاغورث می‌تواند از وجود این خواص یقین حاصل نماید.

معادلهٔ نامعین درجهٔ سوم

مجموعهٔ مکعب‌های سه عدد صحیح می‌تواند مکعب عدد چهارم باشد. بطور مثال، $۶^۳ = ۵^۳ + ۴^۳ + ۳^۳$.
ضمنا این چنین معنی دارد که مکعبی که ضلع آن ۶ سانتی‌متر باشد هم‌حجم سه مکعبی است که اضلاع آنها مساوی ۳ سانتی‌متر، ۴ سانتی‌متر و ۵ سانتی‌متر می‌باشد (شکل ۱۳). بنا به روایاتی، این رابطه بسیار مورد توجه افلاطون بوده است.



شکل ۱۳

کوشش می‌کنیم تا رابطه‌های دیگری از این نوع پیدا کنیم یعنی چنین مسئله‌ای را در برابر خود قرار میدهیم: مطلوبست جوابهای معادله $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$. و لکن مناسب‌تر است تا مجهول u را به $-t$ نمایش دهیم. در اینصورت معادله شکل ساده‌تری را بخود میگیرد:

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$$

اسلوبی را بررسی می‌نمائیم که امکان میدهد تعداد بی‌شمار جواب این معادله را بصورت اعداد صحیح (مثبت و منفی) پیدا کنیم. فرض کنیم a، b، c و d و α، β، γ، δ دو چهارتایی

عددی صادق در معادله باشد. اعداد چهارتایی دوم را ضرب در یک عدد k نموده و به اعداد چهارتایی اول علاوه می‌کنیم. کوشش می‌کنیم عدد k را بنحوی انتخاب کنیم که اعداد بدست آمدهٔ

$$a+k\alpha, \quad b+k\beta, \quad c+k\gamma, \quad d+k\delta$$

نیز در معادلهٔ ما صدق نماید. به دیگر سخن، k را طوری انتخاب می‌کنیم تا نابرابری زیر برقرار باشد:

$$(a+k\alpha)^۳+(b+k\beta)^۳+(c+k\gamma)^۳+(d+k\delta)^۳=۰$$

بعد از باز نمودن پرانتز و با بخاطر آوردن اینکه چهارتایی‌های a، b، c، d و α، β، γ، δ در معادلهٔ ما صدق میکند یعنی برابری‌های زیر برقرار است:

$$a^۳+b^۳+c^۳+d^۳=۰, \quad \alpha^۳+\beta^۳+\gamma^۳+\delta^۳=۰$$

ما حاصل می‌نمائیم:

$$۳a^۲k\alpha+۳ak^۲\alpha^۲+۳b^۲k\beta+۳bk^۲\beta^۲+۳c^۲k\gamma+۳ck^۲\gamma^۲+$$
$$+۳d^۲k\delta+۳dk^۲\delta^۲=۰$$

یا

$$۳k\left[(a^۲\alpha+b^۲\beta+c^۲\gamma+d^۲\delta)+k(a\alpha^۲+b\beta^۲+c\gamma^۲+d\delta^۲)\right]=۰$$

حاصل‌ضرب تنها در صورتی می‌تواند به صفر مبدل شود که اقلا یکی از سازه‌های آن به صفر تبدیل شود. هرگاه هر سازه را مساوی به صفر قرار دهیم دو مقدار برای k حاصل می‌کنیم. مقدار اول $k=۰$ مورد توجه ما نمیباشد زیرا میرساند که اگر به اعداد a، b، c، d هیچ چیز علاوه نشود در آنصورت اعداد حاصل شده در معادلهٔ ما صدق می‌نماید. بنا بر این ما تنها مقدار دوم k را در نظر میگیریم:

$$k=-\frac{a^۲\alpha+b^۲\beta+c^۲\gamma+d^۲\delta}{a\alpha^۲+b\beta^۲+c\gamma^۲+d\delta^۲}$$

بدین ترتیب با علم به دو چهارتایی عددی صادق در معادلهٔ اولیه می‌توان چهارتایی جدیدی پیدا کرد؛ برای اینکار باید

اعداد چهارتایی دوم را در k که دارای مقدار فوق‌الذکر میباشد ضرب نموده و به اعداد چهارتایی اول علاوه نمود.

برای اینکه این اسلوب را بکار ببریم باید دو چهارتایی عددی صادق در معادلهٔ اولیه را بدانیم. یکی از چنین چهارتایی‌ها را ما از پیش می‌شناسیم (۳، ٤، ٥، ٦−). یک چهارتایی دیگر را از کجا می‌توان گرفت؟ راه حل این مشکل بسیار ساده است: بعنوان چهارتایی دوم، میتوان اعداد r، $-r$، s، $-s$ را که واضحا در معادلهٔ اولیه صدق می‌نماید انتخاب کرد. به عبارت دیگر، قرار میدهیم:

$$a=۳,\quad b=٤,\quad c=٥,\quad d=-٦,$$
$$\alpha=r,\quad \beta=-r,\quad \gamma=s,\quad \delta=-s$$

در اینصورت، بطوریکه بآسانی دیده می‌شود، برای k مقدار زیر را حاصل می‌نمائیم:

$$k=\frac{-۷r-۱۱s}{۷r^۲-s^۲}=\frac{۷r+۱۱s}{۷r^۲-s^۲}$$

و اعداد $a+k\alpha$، $b+k\beta$، $c+k\gamma$، $d+k\delta$ بترتیب، مساوی به مقادیر زیر است:

$$\frac{۲۸r^۲+۱۱rs-۳s^۲}{۷r^۲-s^۲},\quad \frac{۲۱r^۲-۱۱rs-٤s^۲}{۷r^۲-s^۲},$$
$$\frac{۳٥r^۲+۷rs+٦s^۲}{۷r^۲-s^۲},\quad \frac{-٤۲r^۲-۷rs-٥s^۲}{۷r^۲-s^۲}$$

بنا به مراتب فوق، این چهار عبارت در معادلهٔ اولیه صدق می‌نماید:

$$x^۳+y^۳+z^۳+t^۳=۰$$

چون تمام این عبارت‌ها دارای همان مخرج می‌باشد لذا می‌توان آنرا از میان برداشت (یعنی صورت‌های این کسرها نیز در معادلهٔ

مورد نظر صدق می‌کند). بدین ترتیب، در معادلهٔ مذکور، اعداد زیر (در ازاء r و s دلخواه) صدق می‌نماید:

$$x = ۲۸r^{۲} + ۱۱rs - ۳s^{۲},$$
$$y = ۲۱r^{۲} - ۱۱rs - ۴s^{۲},$$
$$z = ۳۵r^{۲} + ۷rs + ۶s^{۲},$$
$$t = -۴۲r^{۲} - ۷rs - ۵s^{۲}$$

با به توان سه رساندن و جمع کردن این عبارات میتوان مستقیماً از این موضوع یقین حاصل نمود. با دادن مقادیر صحیح مختلف به r و s ما می‌توانیم یک سری از جواب‌های صحیح معادله را حاصل نمائیم. اگر اعداد حاصل شده دارای ضریب مشترک باشد در آنصورت می‌توان این اعداد را بر آن تقسیم نمود. بطور مثال در ازاء $r = ۱$، $s = ۱$ برای x، y، z، t مقادیر ۳۶، ۶، ۴۸، ۵۴ —، و بعد از تحویل به ۶، مقادیر ۶، ۱، ۸، ۹ — را حاصل می‌کنیم. بدین ترتیب،

$$۶^{۳} + ۱^{۳} + ۸^{۳} = ۹^{۳}$$

اینک یک سری دیگر از برابری‌های همان نوع را (که در اثر تحویل به ضریب مشترک حاصل میشود) می‌آوریم:

$r = ۱,\ s = ۲$	در ازاء	$۳۸^{۳} + ۷۳^{۳} = ۱۷^{۳} + ۷۶^{۳}$
$r = ۱,\ s = ۳$	» »	$۱۷^{۳} + ۵۵^{۳} = ۲۴^{۳} + ۵۴^{۳}$
$r = ۱,\ s = ۵$	» »	$۴^{۳} + ۱۱۰^{۳} = ۶۷^{۳} + ۱۰۱^{۳}$
$r = ۱,\ s = ۴$	» »	$۸^{۳} + ۵۳^{۳} = ۲۹^{۳} + ۵۰^{۳}$
$r = ۱,\ s = -۱$	» »	$۷^{۳} + ۱۴^{۳} + ۱۷^{۳} = ۲۰^{۳}$
$r = ۱,\ s = -۲$	» »	$۲^{۳} + ۱۶^{۳} = ۹^{۳} + ۱۵^{۳}$
$r = ۲,\ s = -۱$	» »	$۲۹^{۳} + ۳۴^{۳} + ۴۴^{۳} = ۵۳^{۳}$

. . . .

یادآور میشویم که اگر در چهارتایی اولیهٔ ۳، ۴، ۵، ۶ — و یا در یکی از چهارتایی‌های تازه بدست آمده جاهای اعداد را عوض، و همان اسلوب را بکار ببریم در آنصورت یک سری جدید جواب حاصل می‌کنیم. بطور مثال، با در نظر گرفتن

چهارتایی ۳، ۵، ٤، ٦− (یعنی با قرار دادن $a=۳$، $b=۵$، $c=٤$، $d=-٦$) ما مقادیر زیر را برای x، y، z، t حاصل می‌کنیم:

$$x = ۲۰r^۲ + ۱۰rs - ۳s^۲,$$
$$y = ۱۲r^۲ - ۱۰rs - ۵s^۲,$$
$$z = ۱٦r^۲ + ۸rs + ٦s^۲,$$
$$t = - ۲٤r^۲ - ۸rs - ٤s^۲$$

از اینجا برای مقادیر مختلف r و s یک سری جدید رابطه حاصل می‌نمائیم:

$r=۱,\ s=۱$ در ازاء $۹^۳ + ۱۰^۳ = ۱^۳ + ۱۲^۳,$

$r=۱,\ s=۳$ » » $۲۳^۳ + ۹٤^۳ = ٦۳^۳ + ۸٤^۳,$

$r=۱,\ s=۵$ » » $۵^۳ + ۱٦۳^۳ + ۱٦٤^۳ = ۲۰٦^۳,$

$r=۱,\ s=٦$ » » $۷^۳ + ۵٤^۳ + ۵۷^۳ = ۷۰^۳,$

$r=۲,\ s=۱$ » » $۲۳^۳ + ۹۷^۳ + ۸٦^۳ = ۱۱٦^۳,$

$r=۱,\ s=-۳$ » » $۳^۳ + ۳٦^۳ + ۳۷^۳ = ٤٦^۳$

و غیره.

از این راه میتوان تعداد بی‌شمار جواب‌های معادلهٔ مورد نظر را حاصل نمود.

صد هزار برای اثبات قضیه

یک مسئله در زمینهٔ معادلات نامعین شهرت زیادی حاصل نموده است زیرا برای حل صحیح آن، یک اندوختهٔ تمام باندازهٔ ۱۰۰۰۰۰ مارک آلمانی وصیت شده بود!

مطلوب مسئله آن است که حکمی بنام قضیه یا «گزارهٔ بزرگ» فرما اثبات شود:

مجموعهٔ توان‌های مساوی دو عدد صحیح، نمیتواند با همان توان یک عدد صحیح ثالث برابر باشد. تنها توان دوم که این امکان را در بر دارد مستثنی است.

به عبارت دیگر باید ثابت نمود که معادلهٔ

$$x^n + y^n = z^n$$

در ازاء $n > ۲$ برحسب اعداد صحیح قابل حل نیست.

مراتب فوق را توضیح میکنیم. ما دیدیم که معادله‌های

$$x^۲ + y^۲ = z^۲,$$
$$x^۳ + y^۳ + z^۳ = t^۳$$

دارای تعداد بی‌شمار جواب بصورت اعداد صحیح است. اما اگر بکوشید تا سه عدد مثبت صحیحی را پیدا نمائید که در ازاء آنها برابری $x^۳ + y^۳ = z^۳$ بر قرار باشد مساعی شما بیفایده خواهد بود.

و همینطور اگر برای توان‌های چهارم، پنجم، ششم و غیره مثال جستجو کنید باز هم با ناکامی رو برو میشوید. و «گزارهٔ بزرگ فرما» همین را حکم می‌نماید.

از مدعیان جایزه چه چیز توقع می‌شود؟ آنها باید این حکم را برای تمام توان‌هائی که جوابگوی آن است به ثبوت رسانند. موضوع از این قرار است که قضیهٔ فرما هنوز ثابت نگردیده و، بحساب، معلق است. سه صده از روزی که این قضیه مطرح شد گذشته است ولی ریاضی‌دانها تا بحال موفق نشده‌اند آن را ثابت کنند.

برجسته‌ترین ریاضی‌دانها روی این مسئله کار کردند ولی بزرگترین موفقیت آنان تنها محدود به این یا آن نمای توان یا دستهٔ نماهای توان میشد. در صورتیکه اثبات عمومی برای هر نمای صحیح لازم است.

این نکته جالب توجه است که از قرار معلوم زمانی اثبات غیر قابل دسترسی قضیهٔ فرما کشف گردید و بعداً مفقود شد. مخترع قضیه ریاضی‌دان نابغهٔ قرن هفدهم پیر فرما* ادعا می‌نمود

* فرما (۱۶۰۳ — ۱۶۶۵) ریاضی‌دان حرفه‌ای نبوده بلکه حقوقدان و مشاور پارلمان بود. وی تنها در میان کارهای خود به تحقیقات ریاضی میپرداخت. این امر مانع از آن نگردید که یک سلسله کشفیات مهمی بکند که مطابق با رسم آن زمان آنها را منتشر ننموده بلکه طی نامه‌هایی به رفقای دانشمند خویش — پاسکال، دکارت، هویگنس، روبروال و غیره — اطلاع میداد.

9*

که اثبات این قضیه برای او معلوم است. او «گزارهٔ بزرگ» خود را (مانند یک سلسله قضایای دیگر در زمینهٔ نظریهٔ اعداد) به شکل یادداشتی در حاشیهٔ رسالهٔ دیوفانتوس با چنین پس‌نوشتی نوشته است:

«من اثبات واقعا عجیبی برای این گزاره پیدا کردم ولی در اینجا جا کم است تا آنرا بیاورم».

نه در اسناد و نه در مکاتبات ریاضی‌دان بزرگ و عموماً در هیچ جای دیگر، آثار این اثبات کشف نگردیده است. پیراون فرما مجبور شدند تا راه مستقلی را در پیش بگیرند.

این است نتایج این مساعی: اولر (۱۷۹۷) قضیهٔ فرما را برای توانهای سوم و چهارم، لژاندر (۱۸۲۳) برای توان پنجم، لامه و لبگ (۱۸۴۰) برای توان هفتم* ثابت نمودند. در سال ۱۸۴۹ کومر قضیه را برای دستهٔ وسیعی از توانها و از جمله برای تمامی نماهای توان کوچکتر از صد اثبات کرد. این کارهای اخیرالذکر از آن حدود ریاضی که برای فرما معلوم بود خیلی فراتر رفته و این نکته باعث شگفتی است که او چگونه توانسته باشد اثبات عمومی را برای «گزارهٔ بزرگ» خویش پیدا نماید. ضمناً بعید نیست که او اشتباه کرده باشد.

به علاقمندان تاریخ و حالت معاصر مسئله فرما، جزوه‌ای بنام «قضیهٔ بزرگ فرما» تالیف ا. ی. خینچین را توصیه میکنیم.**

---

* در مورد نماهای مرکب توان (باستثنای ٤) اثبات ویژه‌ای لازم نیست زیرا این موارد به موارد نماهای اول تحویل میشود.

** این جزوه بزبان روسی موجود است (هیئت تحریریه).

فصل پنجم

عمل ششم ریاضی

$$\sqrt{۲} > \sqrt[۵]{۵}$$

عمل ششم

جمع و ضرب، هر کدام دارای یک عمل معکوس است که بنام تفریق و تقسیم معروف است. عمل پنجم ریاضی یعنی به توان رسانیدن، دارای دو عمل معکوس است: جستجوی پایهٔ توان و جستجوی نمای توان. جستجوی پایه، عمل ششم ریاضی است و استخراج ریشه نام دارد. جستجوی نمای توان یعنی عمل هفتم ریاضی بنام لگاریتم‌گیری معروف است. علت آنکه به توان رسانیدن دارای دو عمل معکوس است در صورتیکه جمع و ضرب، هر یکی تنها یک عمل معکوس دارند به آسانی قابل درک است زیرا هر دو جمعیده (اول و دوم) متساوی‌الحقوقند و می‌توانند جا عوض کنند. این امر در مورد ضرب نیز درست است. ولی اعدادیکه در به توان رسانیدن شرکت دارند یعنی پایه و نمای توان متساوی‌الحقوق نیستند و بطور عمومی نمیتوانند جا عوض کنند (مثلا $3^5 \neq 5^3$). بنا بر این، جستجوی هر یک از اعدادیکه در جمع و ضرب شرکت دارند با شیوه‌های یکسان انجام می‌گیرد در صورتیکه پایه و نمای توان به شیوه‌های مختلف جستجو میشود.

عمل ششم یعنی استخراج ریشه با علامت $\sqrt{\ }$ نمایش داده می‌شود. ولی همه می‌دانند که این علامت شکل تغییر یافتهٔ حرف لاتینی r است که حرف اول کلمهٔ لاتینی «ریشه» میباشد. زمانی (قرن شانزدهم) ریشه را نه با حرف کوچک بلکه با حرف بزرگ R نمایش می‌دادند و در پهلوی آن حرف اول کلمات

لاتینی «جذر» (q) یا «کعب» (c) را مینوشتند تا مشخص شود کدام ریشه باید استخراج گردد. بطور مثال

$$R.q.\,۴۳۵۲$$

را بجای نماد معاصر

$$\sqrt{۴۳۵۲}$$

می‌نوشتند.

اگر علاوه کنیم که در آن عصر علامات کنونی جمع و تفریق هنوز مورد استفادهٔ عمومی قرار نگرفته و بجای آنها حروف $p.$ و $m.$ را می‌نوشتند و اینکه بجای پرانتز کنونی علامات ⌊ ⌋ را بکار میبردند در آنصورت واضح می‌شود که عبارات جبری آن زمان تا چه اندازه عجیب و غریب بنظر ما می‌آمد.

اینک مثالی از کتاب ریاضی‌دان قدیم بمبلی (۱۵۷۲) می‌آوریم:

$$R.c.\ \lfloor R.q.\,۴۳۵۲\ p.\,۱۶ \rfloor\ m.\,R.c.\ \lfloor R.q.\,۴۳۵۲\ m.\,۱۶ \rfloor$$

ما همین عبارت را با علایم دیگر اینطور می‌نویسیم:

$$\sqrt[۳]{\sqrt{۴۳۵۲}+۱۶}-\sqrt[۳]{\sqrt{۴۳۵۲}-۱۶}$$

علاوه بر نماد $\sqrt[n]{a}$ امروزه برای این عمل نماد دیگری نیز بشکل $a^{\frac{1}{n}}$ بکار میرود که از نظر تعمیم بسیار مناسب است زیرا آشکارا نشان میدهد که هر ریشه چیزی جز توان با نمای کسری نیست. این نماد در قرن شانزدهم توسط ستوین ریاضی‌دان برجستهٔ هلندی پیشنهاد گردیده است.

کدام یک بزرگتر است؟

مسئلهٔ ۱

کدام یک بزرگتر است، $\sqrt[۵]{۵}$ یا $\sqrt{۲}$ ؟

این مسئله و مسایل بعدی را بدون محاسبهٔ مقدار ریشه باید حل نمود.

حل

با به توان ۱۰ رسانیدن هر دو عبارت، حاصل میکنیم:

$$\left(\sqrt[۵]{۵}\right)^{۱۰} = ۵^{۲} = ۲۵,\quad \left(\sqrt{۲}\right)^{۱۰} = ۲^{۵} = ۳۲$$

و از آنجا که $۲۵ < ۳۲$ لذا

$$\sqrt{۲} > \sqrt[۵]{۵}$$

مسئلهٔ ۲

کدام یک بزرگتر است، $\sqrt[٤]{٤}$ یا $\sqrt[۷]{۷}$ ؟

حل

هر دو عبارت را به توان ۲۸ میرسانیم و حاصل می‌نمائیم:

$$\left(\sqrt[٤]{٤}\right)^{۲۸} = ٤^{۷} = ۲^{۱٤} = ۲^{۷} \times ۲^{۷} = ۱۲۸^{۲},$$

$$\left(\sqrt[۷]{۷}\right)^{۲۸} = ۷^{٤} = ۷^{۲} \times ۷^{۲} = ٤۹^{۲}$$

از آنجا که $٤۹ < ۱۲۸$ لذا

$$\sqrt[٤]{٤} > \sqrt[۷]{۷}$$

مسئلهٔ ۳

کدام یک بزرگتر است، $\sqrt{۷}+\sqrt{۱۰}$ یا $\sqrt{۳}+\sqrt{۱۹}$ ؟

حل

هر دو عبارت را به توان دو میرسانیم و حاصل می‌کنیم:

$$\left(\sqrt{۷}+\sqrt{۱۰}\right)^{۲} = ۱۷ + ۲\sqrt{۷۰},$$

$$\left(\sqrt{۳}+\sqrt{۱۹}\right)^{۲} = ۲۲ + ۲\sqrt{۵۷}$$

از هر دو عبارت ۱۷ را کم نموده و حاصل می‌کنیم:

$$۵ + ۲\sqrt{۵۷} \quad \text{و} \quad ۲\sqrt{۷۰}$$

این عبارات را به توان دو میرسانیم. داریم:

$$۲۵۳ + ۲۰\sqrt{۵۷} \quad \text{و} \quad ۲۸۰$$

۲۵۳ را از هر دو تفریق نموده و مقایسه می‌کنیم:

$$۲۰\sqrt{۵۷} \quad \text{و} \quad ۲۷$$

چون $\sqrt{۵۷}$ بزرگتر از ۲ است لذا $۴۰ > ۲۰\sqrt{۵۷}$، پس

$$\sqrt{۳}+\sqrt{۱۹}>\sqrt{۷}+\sqrt{۱۰}$$

حل با یک نگاه

مسئله

با دقت هر چه تمام‌تر به معادلهٔ زیر نگاه کنید و بگوئید x مساوی به چیست:

$$x^{x^{۳}}=۳$$

حل

هر کسی که بخوبی نمادهای جبر را فرا گرفته است در می‌یابد که

$$x=\sqrt[۳]{۳}$$

واقعا، در این صورت

$$x^{۳}=\left(\sqrt[۳]{۳}\right)^{۳}=۳$$

و بنا بر این،

$$x^{x^{۳}}=x^{۳}=۳$$

فهو المطلوب.

کسانیکه این «حل با یک نگاه» از حدود توانایی آنان خارج است میتوانند جستجوی مجهول را از طریق زیر آسان نمایند:

فرض کنیم

$$x^{۳}=y$$

در این صورت

$$x=\sqrt[۳]{y}$$

و معادله شکل زیر را بخود میگیرد:

$$\left(\sqrt[۳]{y}\right)^{y}=۳$$

و یا در اثر بتوان سه رسانیدن:

$$y^y = ۳^۳$$

واضح است که $y=۳$ و بنا بر این،

$$x = \sqrt[۳]{y} = \sqrt[۳]{۳}$$

کمدی‌های جبری

مسئلهٔ ۱

عمل ششم ریاضی امکان میدهد کمدی‌ها و مسخره‌بازی‌های جبری واقعی در موضوعاتی مانند $۵ = ۲ \times ۲$، $۳ = ۲$ و غیره را اجرا کنیم. جنبهٔ بامزهٔ چنین نمایشات ریاضی عبارت از آن است که خطا، در عین سادگی، روپوشی شده و به چشم نمی‌خورد. دو نمایش از این برنامهٔ کمدی‌های جبری را اجراء میکنیم.

نمایش اول:

$$۲ = ۳$$

ابتداء در صحنه تساوی مسلم زیر پدیدار می‌گردد:

$$۴ - ۱۰ = ۹ - ۱۵$$

در «صحنهٔ» بعدی به هر دو قسمت تساوی، مقادیر مساوی $۶\frac{۱}{۴}$ علاوه می‌شود:

$$۴ - ۱۰ + ۶\frac{۱}{۴} = ۹ - ۱۵ + ۶\frac{۱}{۴}$$

جریان بعدی کمدی عبارت از تبدیلات زیر است:

$$۲^۲ - ۲ \times ۲ \times \frac{۵}{۲} + \left(\frac{۵}{۲}\right)^۲ = ۳^۲ - ۲ \times ۳ \times \frac{۵}{۲} + \left(\frac{۵}{۲}\right)^۲,$$

$$\left(۲ - \frac{۵}{۲}\right)^۲ = \left(۳ - \frac{۵}{۲}\right)^۲$$

از هر دو طرف برابری جذر میگیریم و حاصل می‌نمائیم:

$$۲ - \frac{۵}{۲} = ۳ - \frac{۵}{۲}$$

با علاوه نمودن $\frac{۵}{۲}$ به هر دو طرف، به تساوی بی‌معنی زیر می‌رسیم:

$$۲ = ۳$$

پس غلط در کجا است؟

حل

خطا در استنباط زیر رخ داد: از اینکه

$$\left(۲ - \frac{۵}{۲}\right)^{۲} = \left(۳ - \frac{۵}{۲}\right)^{۲}$$

نتیجه‌گیری شد که

$$۲ - \frac{۵}{۲} = ۳ - \frac{۵}{۲}$$

لکن از اینکه مربع‌ها با هم مساوی‌اند نباید استنباط نمود که توانهای اول نیز با هم مساوی‌اند. اگر چه $۵^{۲} = (-۵)^{۲}$ اما -۵ مساوی به ۵ نیست. مربع‌ها در صورتی هم می‌توانند متساوی باشد که توانهای اول دارای علامات مختلف می‌باشد. ما در این مثال با همین حالت روبرو هستیم:

$$\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$$

ولی $-\frac{۱}{۲}$ مساوی به $\frac{۱}{۲}$ نیست.

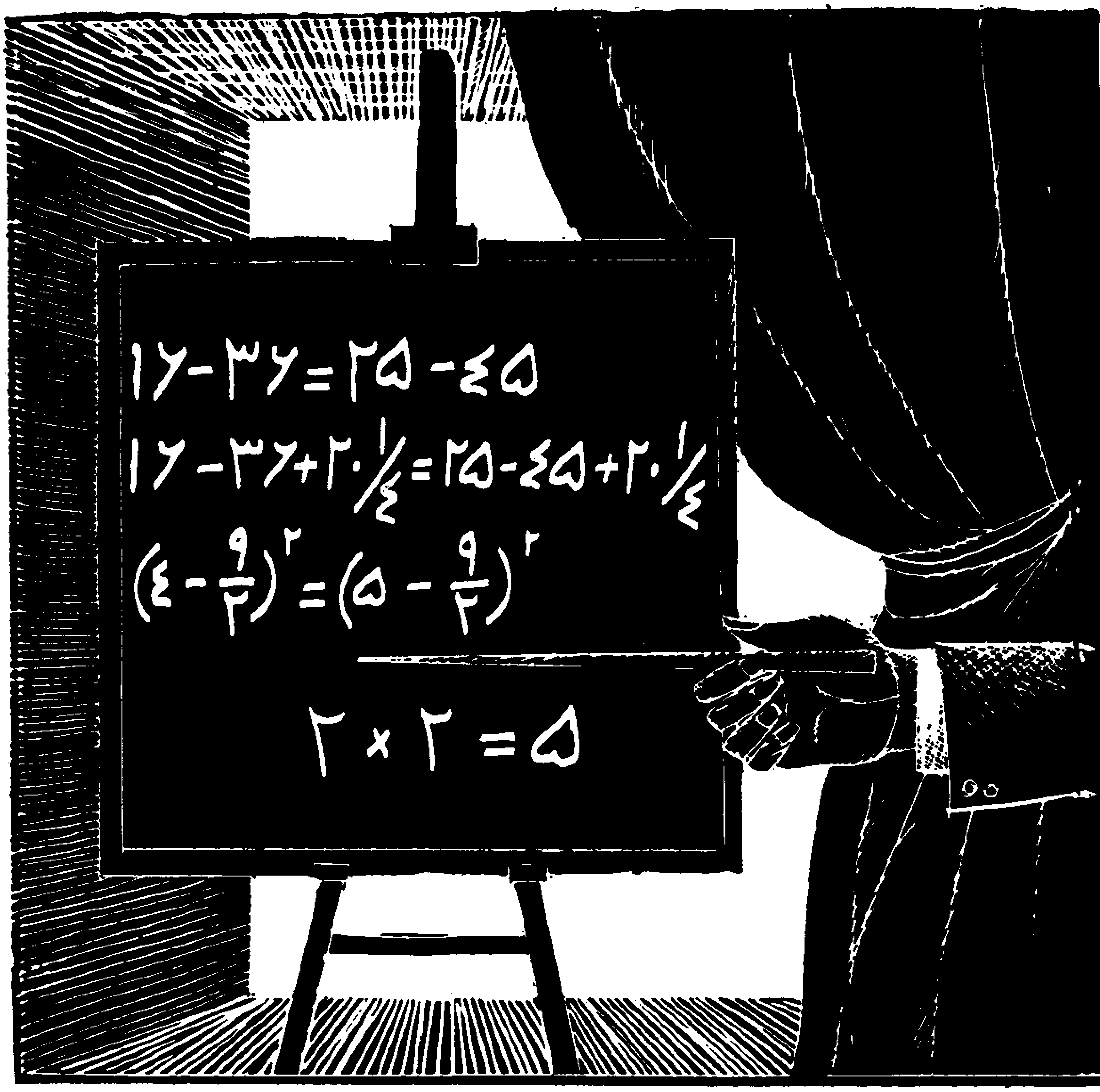
مسئلهٔ ۲

یک شوخی جبری دیگر (شکل ۱۴):

$$۲ \times ۲ = ۵$$

از روی نمونهٔ قبل اجراء میشود و بر همان تردستی مبتنی است. در صحنه برابری مسلم زیر نمایان میشود:

$$۱۶ - ۳۶ = ۲۵ - ۴۵$$



شکل ۱۴

اعداد متساوی علاوه می‌شود:

$$16 - 36 + 20\frac{1}{4} = 25 - 45 + 20\frac{1}{4}$$

و تبدیلات زیر اجراء می گردد:

$$4^2 - 2 \times 4 \times \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

بعد بکمک همان استنباط غیر قانونی به هدف می رسیم:

$$٤ - \frac{٩}{٢} = ٥ - \frac{٩}{٢},$$

$$٤ = ٥,$$

$$٢ \times ٢ = ٥$$

این حالات مسخره‌آمیز باید ریاضی‌دان کم تجربه را از عملیات غیرمحتاطانه روی معادلاتی که دارای مجهول تحت علامت ریشه می‌باشد بر حذر دارد.

فصل ششم

معادلات درجهٔ دوم

۱۷,۱۸,۱۹

دست‌فشاری ها

مسئله

شرکت‌کنندگان جلسه دست یک دیگر را فشردند و یکی از آنها حساب نمود که تعداد دست‌فشاری‌ها ۶۶ بود. چند نفر در جلسه حاضر بودند؟

حل

حل مسئله از طریق جبری بسیار ساده است. هر کدام از تعداد x شرکت‌کننده $x-۱$ دست را فشرد. یعنی تعداد تمامی دست‌فشاری‌ها باید $x(x-۱)$ باشد. ولی باید در نظر داشت که وقتیکه ایوانوف دست پتروف را فشار میدهد پتروف نیز دست ایوانوف را میفشارد و این دو فشردن دست را باید بعنوان یک عمل تلقی کرد. بنا بر این، تعداد دست‌فشاری‌ها ۲ مرتبه کمتر از $x(x-۱)$ است. معادله زیر را داریم:

$$\frac{x(x-۱)}{۲}=۶۶$$

یا بعد از تبدیلات،

$$x^{۲}-x-۱۳۲=۰$$

از اینجا

$$x=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۵۲۸}}{۲},$$

$$x_{۱}=۱۲,\quad x_{۲}=-۱۱$$

چون در حالت مورد نظر جواب منفی (۱۱ − نفر) بی‌معنی است لذا آنرا از نظر انداخته و تنها جذر اول را حفظ می‌کنیم: در جلسه ۱۲ نفر شرکت نموده اند.

تودهٔ زنبور عسل

مسئله

در هندوستان باستان نوع مخصوصی از ورزش رواج داشت که عبارت بود از مسابقات همگانی در حل مسایل هوش‌آزمایی. هدف کتب درسی ریاضی هندی تا قسمتی عبارت بود از راهنمائی در مورد چنین قهرمانی‌هایی در زمینهٔ ورزش هوش‌آزمایی. مولف یکی از این کتب نوشته است که «مطابق با اصول تشریح شدهٔ اینجا، خردمند قادر است هزار مسئلهٔ دیگر را تدوین نماید. مانند خورشید که با درخشش خویش ستاره‌ها را تحت‌الشعاع قرار میدهد شخص دانشمند نیز شهرت دیگران را در مجالس عامه با پیشنهاد و حل نمودن مسایل جبری تحت‌الشعاع قرار خواهد داد.» این گفته در اصل کتاب خیلی شاعرانه‌تر بیان شده چونکه بشکل منظوم تدوین گردیده است. مسایل نیز به شکل شعر بیان می‌گردیده است. یکی از آنها را به شکل نثر نقل میکنیم.

زنبورهای عسل به تعدادی مساوی با جذر مربع نصف تمامی توده روی بوتهٔ یاسمن نشستند و $\frac{۸}{۹}$ تعداد تودهٔ آنها در عقب ماندند. و تنها یک زنبور عسل از آن توده وز وز دوست خود را که از روی بی‌احتیاطی به دام گل خوشبوی ثعله افتاده است شنیده و بدور آن بپرواز در می‌آید. تعداد زنبور عسل در توده چند بود؟

حل

اگر تعداد مطلوب را به x نمایش دهیم در آن صورت معادله این شکل را دارد:

$$\sqrt{\frac{x}{۲}}+\frac{۸}{۹}x+۲=x$$

با بکار بردن مجهول کمکی، شکل معادله را ساده می‌سازیم:

$$y=\sqrt{\frac{x}{۲}}$$

در اینصورت $x=۲\,y^{۲}$، و چنین معادله‌ای حاصل می‌شود:

$$y+\frac{۱۶y^{۲}}{۹}+۲=۲y^{۲} \quad \text{یا} \quad ۲y^{۲}-۹y-۱۸=۰$$

بعد از حل نمودن آن برای y دو مقدار حاصل می‌کنیم:

$$y_{۱}=۶,\quad y_{۲}=-\frac{۳}{۲}$$

مقادیر متناظر x:

$$x_{۱}=۷۲,\quad x_{۲}=۴,۵$$

چون تعداد زنبورهای عسل باید صحیح و مثبت باشد لذا تنها جواب اول در مسئله صدق می‌نماید: در توده ۷۲ زنبور عسل بودند. آزمایش می‌نمائیم:

$$\sqrt{\frac{۷۲}{۲}}+\frac{۸}{۹}\times۷۲+۲=۶+۶۴+۲=۷۲$$

دستهٔ میمون‌ها

مسئله

اینک یک مسئله هندی دیگر بنقل از کتاب کوچک ولی خیلی عالی «چه کسی جبر را اختراع کرده است؟» تالیف و. ای. لبدف می‌آورم:

میمونها بدو دسته
با هم بازی می‌کردند
مربع یک هشتمشان با شادی
در بیشه جست و خیز می‌کردند
دوازده میمون هم با خوشحالی
آرامی هوا را بر هم میزدند
بگو بمن چند میمون در آن بیشه بودند

حل

اگر تعداد کل میمونها در دسته x فرض شود در اینصورت

$$\left(\frac{x}{۸}\right)^{۲}+۱۲=x$$

از اینجا

$$x_1=٤٨,\quad x_2=١٦$$

مسئله دارای دو جواب مثبت می‌باشد: در دسته می‌تواند ٤٨ و یا ١٦ میمون باشد. هر دو جواب، معادله را کاملا بر می‌آورد.

دوراندیشی معادلات

در حالات بررسی شده، ما با دو جواب حاصل شده به اشکال مختلف بر حسب شرایط مسئله عمل نمودیم. در حالت اول، جواب منفی را دور انداختیم زیرا جوابگوی شرایط مسئله نبود، در حالت دوم از جواب کسری و منفی امتناع ورزیدیم، در مسئله سومی، بر عکس، از هر دو جواب استفاده نمودیم. موجودیت جواب دوم گاهی نه تنها برای حل‌کننده بلکه حتی برای ترتیب‌دهندهٔ مسئله نیز شکل غیرمترقبه‌ای بخود میگیرد. موردی را مثال می‌زنیم که معادله از ترتیب‌دهندهٔ خود دوراندیش‌تر از کار در می‌آید.

توپی با سرعت ٢٥ متر در ثانیه به طرف بالا پرتاب میگردد. بعد از چند ثانیه توپ به ارتفاع ٢٠ متر بالای زمین قرار میگیرد؟

حل

برای اجسامیکه در غیاب مقاومت هوا بطرف بالا پرتاب می‌شوند مکانیک رابطهٔ زیر را مابین ارتفاع (h) جسم بالای زمین، سرعت ابتدائی (v)، شتاب ثقل (g) و زمان (t) بر قرار می‌نماید:

$$h=vt-\frac{gt^{۲}}{۲}$$

شکل ۱۵

در حالت مورد نظر می‌توانیم از مقاومت هوا صرف نظر کنیم زیرا در سرعت‌های کم چندان زیاد نیست. برای سادگی محاسبه g را بجای ۹,۸ متر برابر ۱۰ متر بحساب می‌آوریم (خطا فقط ۲٪ می‌باشد). با گذاشتن مقادیر h، v و g در فرمول مذکور، معادلهٔ زیر را حاصل می‌نمائیم:

$$۲۰ = ۲۵t - \frac{۱۰t^۲}{۲}$$

و بعد از ساده ساختن:

$$t^۲ - ۵t + ۴ = ۰$$

بعد از حل معادله، داریم:

$$t_1 = ۱ \quad و \quad t_2 = ٤$$

توپ ۲ مرتبه در ارتفاع ۲۰ متری، یکی بعد از ۱ ثانیه و دیگری بعد از ٤ ثانیه واقع می‌شود.

این امر شاید غیر ممکن بنظر برسد و ما بدون تامل آماده هستیم جواب دوم را دور بیاندازیم. اما چنین کاری خطا می‌بود! جواب دوم کاملا معنی و مفهوم دارد. توپ حقیقتاً باید ۲ مرتبه در ارتفاع ۲۰ متری قرار گیرد: یک مرتبه در هنگام صعود و مرتبهٔ دیگر در هنگام سقوط. به آسانی حساب می‌شود که توپ با سرعت ابتدائی ۲۵ متر در ثانیه باید در مدت ۲٫۵ ثانیه بطرف بالا پرواز نموده و به ارتفاع ۳۱٫۲۵ متر برسد. بعد از ۱ ثانیه، توپ به ارتفاع ۲۰ متر رسیده و به مدت ۱٫۵ ثانیهٔ دیگر براه خود بطرف بالا ادامه میدهد، سپس طی همین مدت دوباره به سطح ۲۰ متری نازل شده و بعد از ۱ ثانیه به زمین میرسد.

مسئلهٔ اولر

استندال در زندگی‌نامهٔ خود در بارهٔ سالهای دانش‌آموزی خویش چنین حکایت می‌کند:

«من پیش او (آموزگار ریاضی) کتاب اولر و مسئله او را در بارهٔ تعداد تخم مرغ هائی که زن دهاتی به بازار برد پیدا کردم ... این پیش‌آمد برای من یک کشف واقعی بود. من درک نمودم که استفاده از ابزاری بنام جبر چه اهمیتی دارد. ولی، بر شیطان لعنت، هیچ کس در این باره بمن چیزی نگفته بود...».

اینک این مسئله را که بر ذهن استندال جوان اثری اینقدر بزرگ بجا گذاشت از کتاب «مقدمه بر جبر» تالیف اولر نقل می‌کنیم.

دو زن دهاتی با هم ۱۰۰ عدد تخم مرغ به بازار بردند. یک زن نسبت به دیگری تعداد بیشتر تخم مرغ داشت. آنها

مبالغ مساوی حاصل نمودند. اولی به دومی گفت که «اگر تخم‌مرغ های تو مال من بود من ۱۰ کرویتزر* در می‌آوردم». دومی جواب داد که «اگر تخم مرغ های تو مال من بود در برابر آنها $\frac{۲}{۳}$ ۶ کرویتزر حاصل می‌کردم». هر کدام چند عدد تخم مرغ داشتند؟

حل

فرض کنیم تعداد تخم مرغ های زن دهاتی اولی x باشد در اینصورت تعداد تخم مرغ های زن دومی $۱۰۰ - x$ می‌باشد. اگر اولی $۱۰۰ - x$ تخم مرغ می‌داشت او، بطوریکه میدانیم، ۱۰ کرویتزر حاصل می‌نمود. این میرساند که زن دهاتی اولی تخم مرغ ها را به قیمت

$$\frac{۱۰}{۱۰۰ - x}$$

دانه‌ای فروخت.

به همان ترتیب پیدا می‌کنیم که زن دهاتی دومی تخم مرغ ها را به قیمت

$$۶\frac{۲}{۳} : x = \frac{۲۰}{۳x}$$

دانه‌ای فروخت.

حال پول عاید شدهٔ هر کدام از زن‌های دهاتی تعیین می گردد:

اولی: $$x \times \frac{۱۰}{۱۰۰ - x} = \frac{۱۰x}{۱۰۰ - x}$$

دومی: $$(۱۰۰ - x) \times \frac{۲۰}{۳x} = \frac{۲۰(۱۰۰ - x)}{۳x}$$

چون مبالغ عاید شدهٔ هر دویشان مساوی با هم است لذا

$$\frac{۱۰x}{۱۰۰ - x} = \frac{۲۰(۱۰۰ - x)}{۳x}$$

---

* کرویتزر (Kreuzer) سکهٔ آلمان قدیم (مترجم).

بعد از تبدیلات، داریم:

$$x^{۲}+۱۶۰x-۸۰۰۰=۰$$

و از اینجا

$$x_{۱}=۴۰,\quad x_{۲}=-۲۰۰$$

جواب منفی در این مورد معنی ندارد و مسئله تنها دارای یک جواب است. زن دهاتی اولی ۴۰ عدد تخم مرغ، و دومی ۶۰ عدد تخم مرغ به بازار برده بودند.

مسئله را می‌توان به یک شیوهٔ کوتاهتر دیگر حل کرد. این شیوه بسیار جالب‌تر ولی جستجوی آن خیلی مشکل‌تر است.

فرض کنیم که تعداد تخم مرغ‌های زن دهاتی دومی k مرتبه بیشتر از مال زن دهاتی اولی بود. آنها مبالغ مساوی حاصل کردند و این چنین معنی می‌دهد که زن دهاتی اولی تخم مرغ‌های خود را k مرتبه گرانتر نسبت به زن دهاتی دومی فروخت. اگر قبل از تجارت، آنها تخم مرغ‌های خود را معاوضه می‌کردند در آنصورت زن دهاتی اولی k مرتبه زیادتر از زن دهاتی دومی تخم مرغ میداشت و آنها را k مرتبه گرانتر می‌فروخت. این میرساند که او نسبت به زن دومی $k^{۲}$ مرتبه بیشتر پول در می‌آورد. بنا بر این، داریم:

$$k^{۲}=۱۵:۶\frac{۲}{۳}=\frac{۴۵}{۲۰}=\frac{۹}{۴}$$

از اینجا

$$k=\frac{۳}{۲}$$

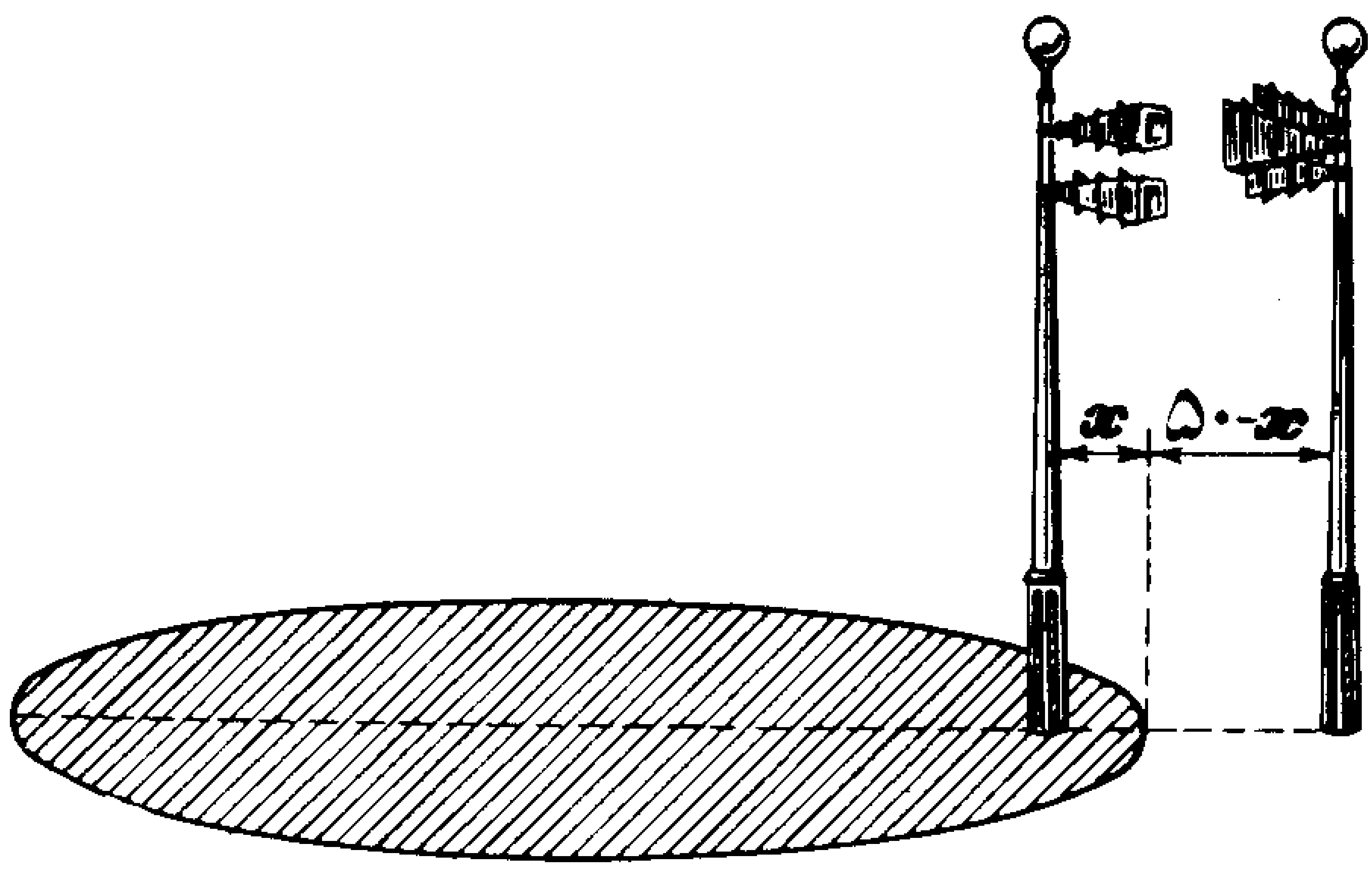
حال، تنها چیزی که میماند تقسیم ۱۰۰ دانه تخم مرغ به نسبت $\frac{۳}{۲}$ است. به آسانی پیدا می‌کنیم که زن دهاتی اولی ۴۰ دانه، و دومی ۶۰ دانه تخم مرغ داشت.

مسئله

در میدانی ۱۳ بلندگو به دو دستهٔ متشکل از ٤ و ۹ دستگاه نصب شده است. فاصلهٔ بین دسته‌ها ۵۰ متر است. در کجا باید ایستاد تا صدا از هر دو دسته با یک شدت برسد؟

حل

هرگاه فاصلهٔ نقطهٔ مطلوب تا دستهٔ کوچک‌تر را به x نمایش دهیم آنگاه فاصلهٔ آن تا دسته بزرگ‌تر با $۵۰ - x$ بیان



شکل ۱٦

می‌شود (شکل ۱٦). میدانیم که شدت صوت بر حسب مربع فاصله ضعیف می‌شود، لذا معادلهٔ زیر را داریم:

$$\frac{٤}{۹} = \frac{x^{۲}}{(۵۰ - x)^{۲}}$$

که پس از ساده‌سازی بصورت زیر در می‌آید:

$$x^{۲} + ۸۰x - ۲۰۰۰ = ۰$$

بعد از حل آن، دو جواب حاصل می‌شود:

$$x_{۱} = ۲۰,$$
$$x_{۲} = -۱۰۰$$

جواب مثبت مستقیماً پاسخ سوال مسئله را میدهد: نقطهٔ قابلیت سمع برابر بفاصلهٔ ۲۰ متر از دستهٔ ٤ بلندگو و نتیجتاً بفاصلهٔ ۳۰ متر از دستهٔ ۹ بلندگو قرار دارد.

اما جواب منفی معادله چه معنی دارد؟ و آیا اصلا مفهومی دارد؟

بله، بدون قید و شرط. علامت منفی معنی میدهد که دومین نقطهٔ قابلیت سمع برابر در جهت معکوس نسبت به سمتی قرار دارد که در حین تشکیل معادله بعنوان سمت مثبت اختیار شد.

از محل نصب ٤ بلندگو ۱۰۰ متر در جهت مطلوب جدا نموده و نقطه‌ای را پیدا می‌نمائیم که صوت با شدت برابر از هر دو دسته بلندگو به آن میرسد. این نقطه بفاصلهٔ = ۱۵۰ ۵۰+ ۱۰۰ متر از دستهٔ ۹ بلندگو واقع است.

بدین ترتیب ما دو نقطه‌ای را پیدا نمودیم که بر روی یک خط راست واصل منابع صوت قرار دارد و صوت با یک شدت به آنجا میرسد. هیچ نقاط مشابه دیگر روی این خط موجود نیست ولی در خارج از آن موجود هست. می‌توان ثابت کرد که مجموعهٔ نقاطی که شرط مسئله را برمی‌آورد دایره‌ای است که از هر دو نقطهٔ حاصله مانند دو انتهای قطر رسم شده باشد. بطوریکه می‌بینیم این دایره حوزهٔ نسبتاً وسیعی را در بر دارد که در داخل آن صوت دستهٔ ٤ بلندگو رساتر از صوت دستهٔ ۹ بلندگو است و در خارج آن عکس پدیده رخ میدهد (این حوزه در نقشه هاشور شده است).

محاسبات جبری پرواز به ماه

بهمان شیوه‌ای که نقاط قابلیت سمع برابر دو دسته بلندگو را پیدا کردیم می‌توان نقاط کشش برابر موشک کیهانی توسط دو جسم سماوی زمین و ماه را پیدا کرد. این نقاط را جستجو میکنیم.

طبق قانون نیوتن، قوهٔ جاذبهٔ متقابل دو جسم با حاصلضرب جرمهای در حال کشش متقابل نسبت مستقیم، و با مربع فاصلهٔ ما بین آنها نسبت معکوس دارد. اگر جرم زمین M، و فاصلهٔ

موشک از آن x باشد در آن صورت قوهٔ جاذبهٔ زمین که در هر گرم جرم موشک موثر است بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{Mk}{x^{2}}$$

که در اینجا k قوهٔ کشش متقابل یک گرم توسط یک گرم دیگر در فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر می‌باشد.

قوه‌ایکه ماه در همان نقطه، هر گرم موشک را بخود می‌کشاند مساوی است به

$$\frac{mk}{(l-x)^{2}}$$

که m جرم ماه، و l فاصلهٔ آن تا زمین است (فرض می‌شود که موشک بین ماه و زمین در خط راست واصل دو مرکز قرار دارد). شرط مسئله ایجاب می‌نماید که

$$\frac{Mk}{x^{2}}=\frac{mk}{(l-x)^{2}}$$

و یا

$$\frac{M}{m}=\frac{x^{2}}{l^{2}-2lx+x^{2}}$$

نسبت $\frac{M}{m}$، بطوریکه از علم نجوم معلوم است، تقریباً مساوی با ۸۱٫۵ است. پس از جایگزینی این مقدار، داریم:

$$\frac{x^{2}}{l^{2}-2lx+x^{2}}=81{,}5$$

و از اینجا

$$80{,}5x^{2}-163{,}0lx+81{,}5l^{2}=0$$

در اثر حل معادله نسبت به x، حاصل می‌کنیم:

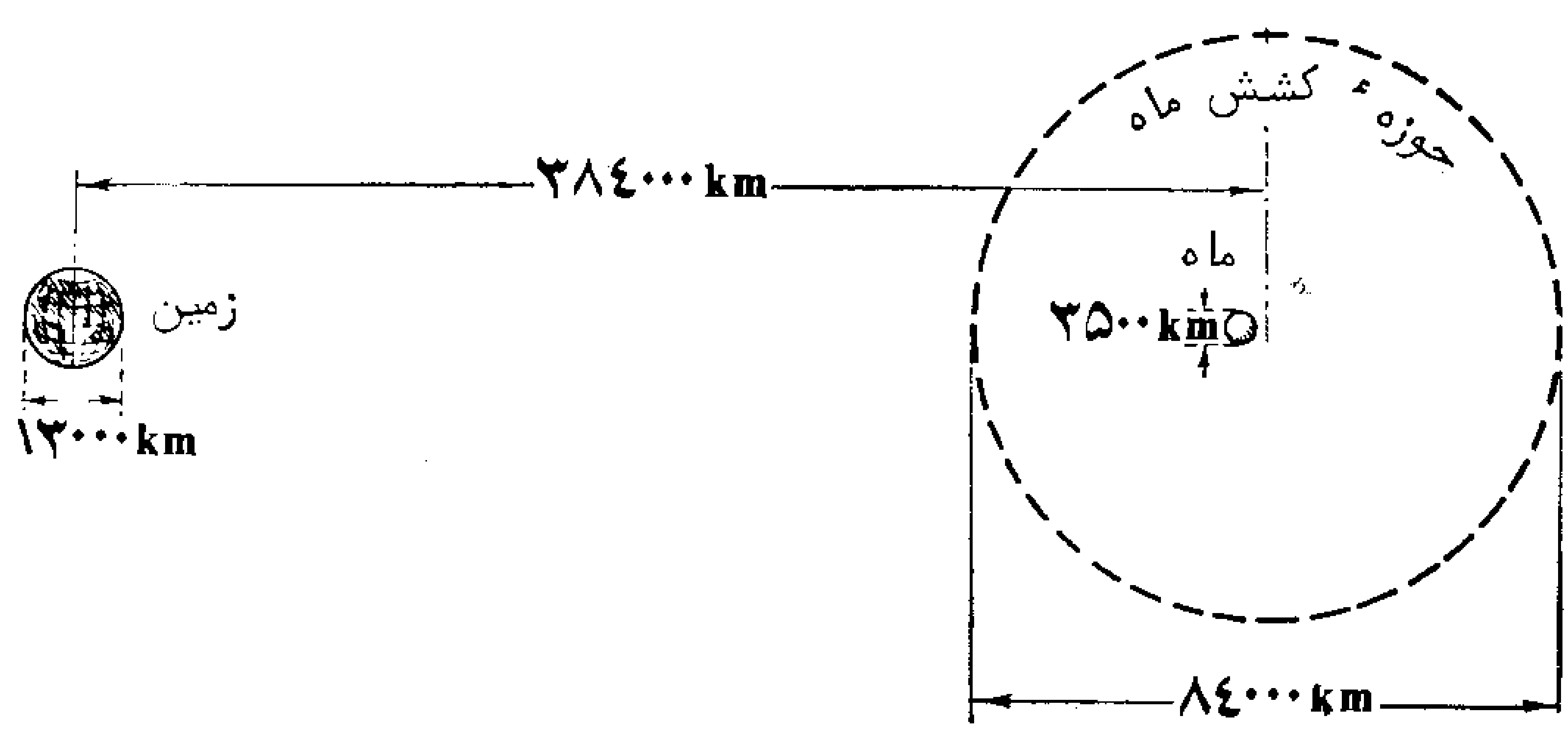
$$x_{1}=0{,}9l,\quad x_{2}=1{,}12l$$

مانند مسئلهٔ بلندگوها، ما به این نتیجه می‌رسیم که در خط زمین ــ ماه دو نقطهٔ مطلوب موجود است که در آنجا موشک تحت قوهٔ برابر هر دو جرم سماوی واقع می‌گردد، یکی در فاصلهٔ ۰,۹ فاصلهٔ بین آنها نسبت به مرکز زمین و دیگری در فاصلهٔ ۱,۱۲ فاصلهٔ دو مرکز. چون فاصلهٔ l بین دو مرکز زمین و ماه تقریبا ۰۰۰ ۳۸۴ کیلومتر است لذا یکی از نقاط مطلوب ۰۰۰ ۳۴۶ کیلومتر، و دومی ۰۰۰ ۴۳۰ کیلومتر از مرکز زمین فاصله دارد.

و اما ما میدانیم (به مسئله قبلی مراجعه شود) که تمام نقاط دایرهٔ گذرنده از دو نقطهٔ حاصل شده که بمشابهٔ دو سر قطر تلقی می‌گردد همان ویژگی را دارد. اگر این دایره را در حول خط واصل دو مرکز زمین و ماه چرخ دهیم در آنصورت یک سطح کروی حاصل می‌شود که تمام نقاط آن شرایط مسئله را برمی‌آورد.

قطر این کره که بنام حوزهٔ جاذبهٔ ماه موسوم است (شکل ۱۷) مساوی است به

$$۱,۱۲l - ۰,۹l = ۰,۲۲l \approx ۸۴\ ۰۰۰\ \text{km}$$



شکل ۱۷

نظریهٔ غلطی رواج یافته است که گویا جهت اصابت موشک به ماه کافی است موشک به حوزهٔ جاذبهٔ ماه وارد شود. اول به نظر میرسد که هرگاه موشک در داخل حوزهٔ جاذبه واقع شود

(حتی اگر سرعت آن کم باشد) آنگاه ناگزیر باید به سطح ماه سقوط نماید زیرا قوهٔ جاذبهٔ ماه در این حوزه بر قوهٔ جاذبهٔ زمین «غالب میباشد». اگر چنین میبود مسئلهٔ پرواز به ماه بسیار ساده می شد زیرا در اینصورت بایستی نه خود ماه را که تحت زاویهٔ $1/2°$ در آسمان دیده میشود بلکه کره‌ای را بقطر ۸٤۰۰۰ کیلومتر و اندازهٔ زاویه‌ای $12°$ هدف قرار میدادیم.

ولی بآسانی می‌توان غلط بودن چنین قضاوت‌هائی را نشان داد.

فرض کنیم موشکی که از زمین پرتاب می‌شود و بطور مداوم سرعت خود را در اثر جاذبهٔ زمین از دست میدهد به حوزهٔ جاذبهٔ ماه با سرعت صفر وارد شود. آیا موشک به سطح ماه سقوط می‌کند؟ به هیچ وجه!

اولا در داخل حوزهٔ جاذبهٔ ماه قوهٔ جاذبهٔ زمین همچنان عمل میکند. بنا بر این، در خارج از خط زمین — ماه قوه جاذبهٔ ماه بر قوهٔ جاذبهٔ زمین نه اینکه بطور ساده «غلبه میکند» بلکه طبق قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع قوا با آن جمع شده و منتجه‌ای را بوجود می‌آورد که به هیچ وجه مستقیماً به طرف ماه متوجه نیست (تنها روی خط زمین — ماه، این قوهٔ منتجه مستقیماً متوجه به مرکز ماه است).

دوماً (و این مهمترین نکته است) خود ماه هدف ساکنی نیست و اگر ما بخواهیم چگونگی حرکت موشک نسبت به ماه را بدانیم یعنی آیا موشک به آن می‌افتد یا خیر در اینصورت باید سرعت موشک نسبت به ماه را بحساب آوریم. و این سرعت ابداً برابر صفر نیست چونکه خود ماه با سرعت ۱ کیلومتر در ثانیه بدور زمین می‌چرخد. بنا بر این، سرعت حرکت موشک نسبت به ماه زیادتر از آن است که ماه بتواند موشک را به خود جذب کند یا لااقل آنرا بعنوان قمر مصنوعی در حوزهٔ جاذبهٔ خود نگه دارد.

در عمل، جاذبهٔ ماه بگونهٔ محسوس حتی قبل از اینکه موشک به حوزهٔ جاذبهٔ ماه نزدیک شود بر حرکت موشک اثر میگذارد. در پرتاب‌شناسی سماوی معمول شده که جاذبهٔ ماه را از لحظه‌ای بحساب آورند که موشک در، باصطلاح، حوزهٔ

اثر ماه که شعاع آن ۶۶۰۰۰ کیلومتر است وارد گردد. در این صورت میتوان حرکت موشک را نسبت به ماه بررسی کرد و ضمناً از جاذبهٔ زمین کاملا چشم‌پوشی نمود ولی باید با کمال دقت سرعت ورود موشک بحوزهٔ اثر ماه را (نسبت به ماه) بحساب آورد. بنا بر این طبعاً باید موشک را روی مداری به ماه فرستاد که سرعت ورود آن (نسبت به ماه) به حوزهٔ اثر ماه مستقیماً متوجه ماه باشد. برای این منظور حوزهٔ اثر ماه باید خودش از طرف جانبی به مسیر موشک نزدیک شود. بطوریکه می‌بینیم اصابت به ماه بمراتب مشکلتر از اصابت به کره‌ای بقطر ۸۴۰۰۰ کیلومتر می‌باشد.

«مسئلهٔ مشکل»

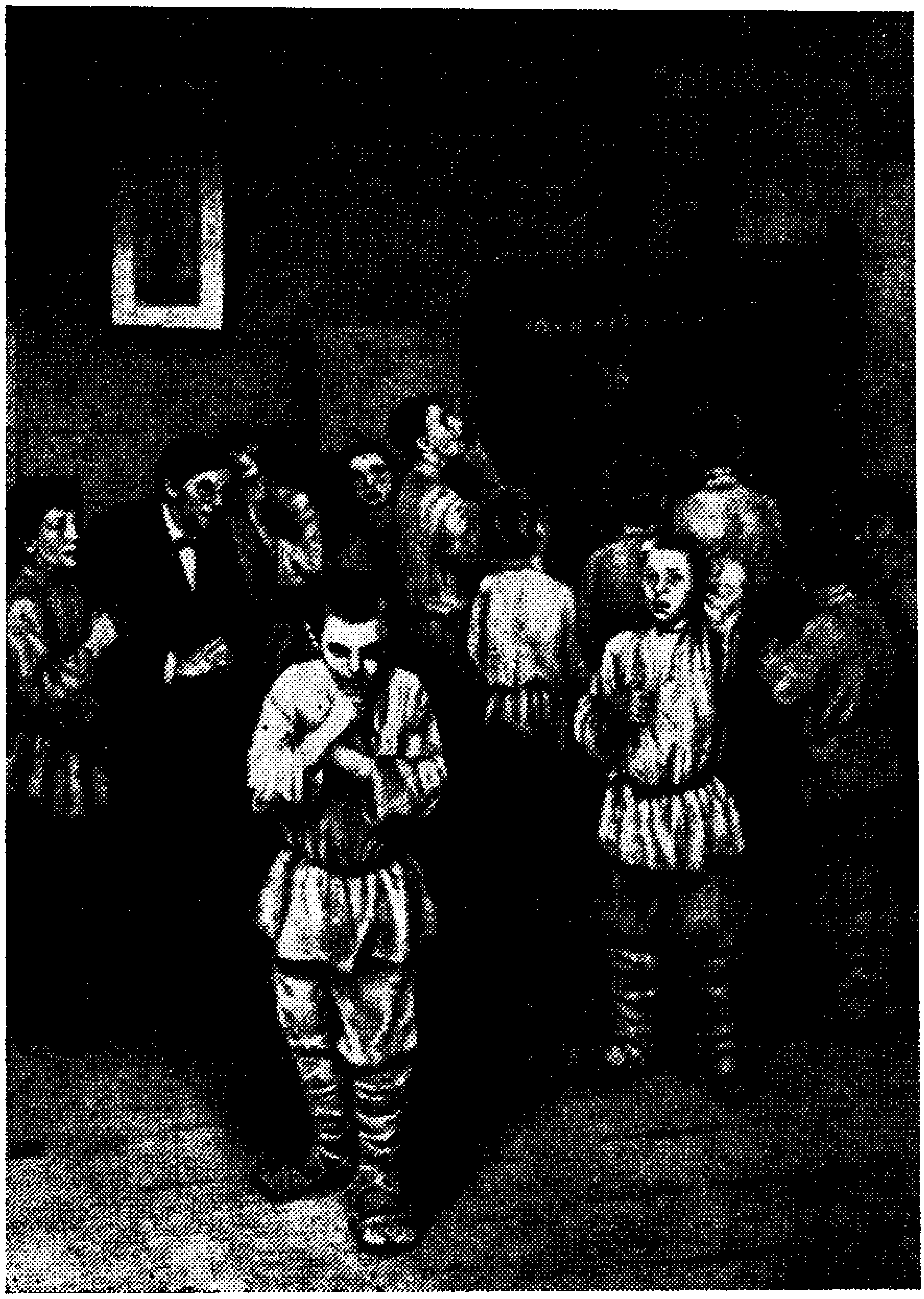
عدهٔ زیادی از تابلوی بوگدانف - بلسکوی بنام «مسئلهٔ مشکل» اطلاع دارند ولی عدهٔ کم از کسانیکه این تابلو را دیده‌اند به ماهیت آن «مسئله مشکل» که در تابلو ترسیم یافته پی‌برده‌اند (شکل ۱۸). مطلوب مسئله این است که از طریق محاسبهٔ شفاهی سریعاً نتیجه بدست آید:

$$\frac{۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲+۱۳^۲+۱۴^۲}{۳۶۵}$$

در واقع، مسئله آسان نیست ولی شاگردان آموزگاری که با شباهت زیاد به اصل در تابلو نقاشی شده است بخوبی از عهدهٔ این کار بر می آمدند. این آموزگار س. آ. راچینسکی استاد علوم طبیعی بود که کار معلمی در دبستان روستایی را بر تصدی کرسی دانشگاهی ترجیح داده بود. این آموزگار با استعداد در دبستان خود به حساب شفاهی خیلی اهمیت میداد و ماهرانه از خواص اعداد استفاده مینمود. اعداد ۱۰ ، ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ چنین ویژگی جالبی را دارد:

$$۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲=۱۳^۲+۱۴^۲$$

چون ۳۶۵=۱۴۴+۱۲۱+۱۰۰، بنا بر این، بآسانی می‌توان در ذهن حساب نمود که عبارت تصویر شده در تابلو مساوی به ۲ است.



شکل ۱۸

جبر بما امکان میدهد تا مسئله در بارهٔ این ویژگی جالب سری اعداد را بشکل عمومی‌تری طرح نمائیم و آن اینکه آیا این یگانه سلسلهٔ پنج عدد متوالی است که مجموع مربع سه عدد اول آن مساوی به مجموع مربع دو عدد آخر آن است؟

حل

اولی از اعداد مطلوب را به x نمایش داده و معادلهٔ زیر را داریم :

$$x^۲ + (x + ۱)^۲ + (x + ۲)^۲ = (x + ۳)^۲ + (x + ٤)^۲$$

اما مناسب‌تر است اگر بجای آن، دومی از اعداد مطلوب را به x نمایش دهیم. در این صورت معادله شکل ساده‌تری را بخود می گیرد:

$$(x-۱)^۲+x^۲+(x+۱)^۲=(x+۱)^۲+(x+۳)^۲$$

پس از باز نمودن پرانتز و ساده‌سازی، بدست می‌آوریم:

$$x^۲-۱۰x-۱۱=۰$$

و از اینجا

$$x=۵\pm\sqrt{۲۵+۱۱},\quad x_۱=۱۱,\quad x_۲=-۱$$

بنا بر این، دو رشته اعداد واجد ویژگی مطلوب وجود دارد، یکی بنام سری راچینسکی:

$$۱۰,\ ۱۱,\ ۱۲,\ ۱۳,\ ۱۴$$

و دیگری:

$$-۲,\ -۱,\ ۰,\ ۱,\ ۲$$

حقیقتاً

$$(-۲)^۲+(-۱)^۲+۰^۲=۱^۲+۲^۲$$

کدام اعداد؟

مسئله

سه عدد متوالی واجد این ویژگی‌را پیدا کنید که مربع عدد وسطی یک واحد بیشتر از حاصل‌ضرب دو عدد دیگر باشد.

حل

اگر اولی از عددهای مطلوب x باشد در آنصورت معادله این شکل را دارد:

$$(x+۱)^۲=x(x+۲)+۱$$

بعد از باز نمودن پرانتز تساوی زیر را بدست میاوریم:

$$x^۲+۲x+۱=x^۲+۲x+۱$$

که از آن نمیتوان کمیت x را تعیین نمود. این نشان میدهد تساوی را که تشکیل دادیم اتحاد است و بر خلاف معادلات

که تنها در ازاء بعضی مقادیر حروف وارده بر قرار است در ازاء مقادیر دلخواه حروف صادق میباشد. بنا بر این، هر سه عدد متوالی، دارای ویژگی مطلوب می‌باشد. حقیقتاً، الله‌بختی اعدادی را انتخاب نمائیم:

$$۱۷,\ ۱۸,\ ۱۹$$

ما یقین حاصل می‌کنیم که

$$۱۸^۲ - ۱۷ \times ۱۹ = ۳۲۴ - ۳۲۳ = ۱$$

اگر عدد دوم را به x نمایش دهیم ضرورت چنین رابطه‌ای آشکارتر می‌گردد. در اینصورت برابری زیر را حاصل میکنیم:

$$x^۲ - ۱ = (x + ۱)(x - ۱)$$

که آشکارا اتحاد است.

فصل هفتم

بیشترین و کمترین مقادیر

≈٦٥°

مسایل مندرجه در این فصل متعلق به گونهٔ بسیار جالب مسایل مربوط به یافتن بیشترین یا کمترین مقدار یک کمیت است. این مسایل به کمک اسلوب‌های مختلفی که یکی از آنها را در زیر ذکر میکنیم قابل حل می‌باشد.

ریاضی‌دان روسی پ. ل. چبیشف در اثر خود تحت عنوان «ترسیم نقشه‌های جغرافیائی» نوشته است که آن روشهای علمی بویژه اهمیت دارد که امکان میدهد مسئلهٔ عمومی وارد در تمام فعالیتهای بشر حل گردد و آن اینکه وسایل موجود را چگونه باید بکار برد تا بزرگترین سود ممکن بدست آید.

دو قطار

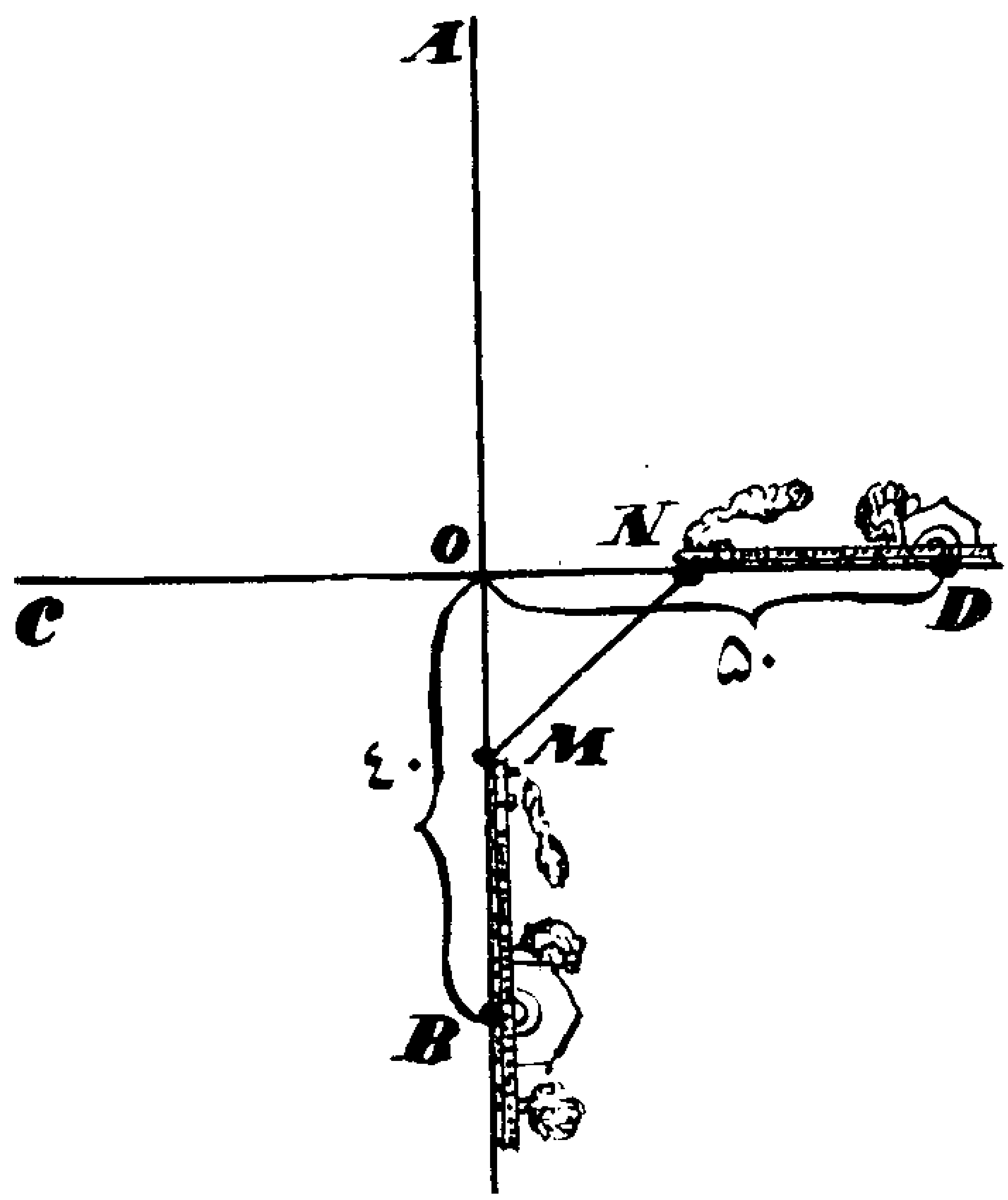
مسئله

دو خط راه‌آهن تحت زاویهٔ قایمه تقاطع می‌کنند. در آن واحد، دو قطار به سرعت بسوی محل تقاطع در حرکت است: یکی از ایستگاه در ٤٠ کیلومتری تقاطع، و دیگری از ایستگاه در ٥٠ کیلومتری همان محل تقاطع. سرعت قطار اولی ٨٠٠ متر در دقیقه، و سرعت قطار دومی ٦٠٠ متر در دقیقه است.

چند دقیقه پس از لحظهٔ حرکت، لکوموتیوها کمترین فاصلهٔ متقابل را داشتند؟ این فاصله چقدر بود؟

حل

طرح حرکت قطارهای این مسئله را رسم می‌کنیم. فرض میکنیم خط‌های راست AB و CD خطوط متقاطع راه آهن باشد (شکل ۱۹). ایستگاه B در فاصلهٔ ۴۰ کیلومتری، و ایستگاه D



شکل ۱۹

در فاصلهٔ ۵۰ کیلومتری از نقطه تقاطع O واقع است. فرض کنیم که بعد از x دقیقه لکوموتیوها در کوتاه‌ترین فاصلهٔ متقابل قرار گیرند: $MN=m$. قطاری که از B حرکت نموده تا این لحظه توانست راه $BM=۰{,}۸x$ را بپیماید زیرا در یک دقیقه $۸۰۰\,m=۰{,}۸\,km$ را طی می‌کند. بنا بر این، $OM=۴۰-۰{,}۸x$. از همین طریق پیدا می‌کنیم که $ON=۵۰-۰{,}۶x$. طبق قضیهٔ فیثاغورث

$$MN=m=\sqrt{\overline{OM}^۲+\overline{ON}^۲}=$$
$$=\sqrt{(۴۰-۰{,}۸x)^۲+(۵۰-۰{,}۶x)^۲}$$

طرفین معادلهٔ

$$m=\sqrt{(٤٠-٠,٨x)^٢+(٥٠-٠,٦x)^٢}$$

را به توان دو میرسانیم و پس از ساده‌سازی، حاصل می‌کنیم:

$$x^٢-١٢٤x+٤١٠٠-m^٢=٠$$

بعد از حل این معادله نسبت به x، داریم:

$$x=٦٢\pm\sqrt{m^٢-٢٥٦}$$

چون x تعداد دقیقه‌های سپری شده می‌باشد و نمیتواند عدد موهومی باشد لذا $m^٢-٢٥٦$ باید کمیت مثبت و یا لااقل صفر باشد. نکتهٔ اخیرالذکر مربوط به کمترین مقدار ممکن m است و در این صورت

$$m^٢=٢٥٦,\quad m=١٦$$

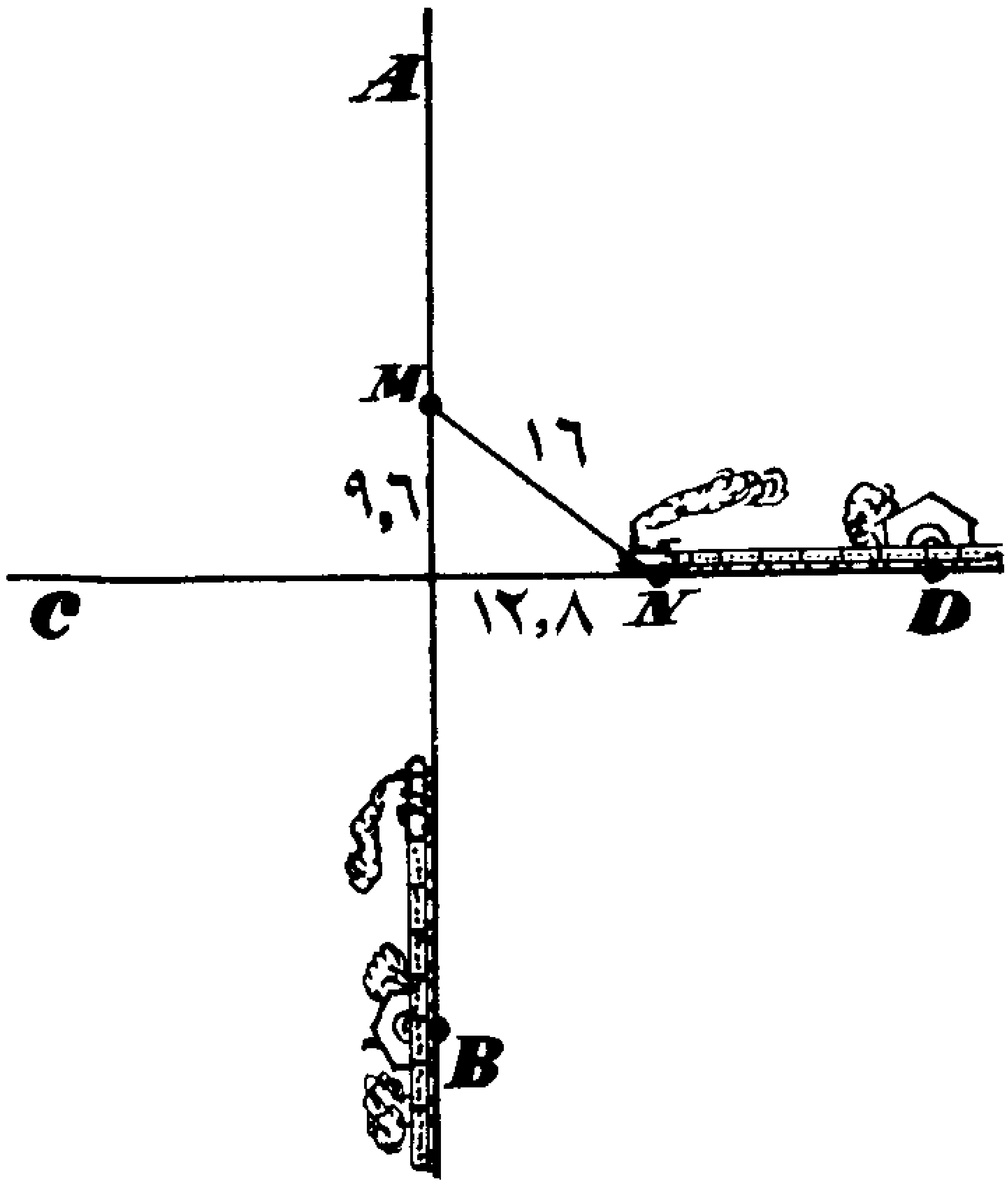
واضحا m نمیتواند کمتر از ١٦ باشد، در غیر این صورت x موهومی میشود. و اگر $m^٢-٢٥٦=٠$، در اینصورت $x=٦٢$.
بدین ترتیب لکوموتیوها بعد از ٦٢ دقیقه در نزدیک‌ترین فاصله ١٦ کیلومتر از یکدیگر قرار میگیرند.
تعیین می‌کنیم که در این لحظه قطارها کجا واقع بودند. طول OM را محاسبه می‌کنیم که مساوی است با

$$٤٠-٦٢\times٠,٨=-٩,٦$$

علامت منفی نشان میدهد که لکوموتیو به فاصلهٔ ٩,٦ کیلومتر فراتر از تقاطع می‌رود. و اما فاصلهٔ ON مساوی است به

$$٥٠-٦٢\times٠,٦=١٢,٨$$

یعنی قطار دوم بفاصلهٔ ١٢,٨ کیلومتر نرسیده به تقاطع قرار دارد. محل لکوموتیوها در شکل ٢٠ نمایش یافته است. چنانکه می‌بینیم این منظره از آنچه قبل از حل مسئله تصور میکردیم بیشباهت است. معادله بقدر کافی کشدار از کار درآمده و علیرغم طرح غلط، جواب درست را داده است. بآسانی می‌توان به



شکل ۲۰

علت این کشداری پی‌برد: علت آن عبارت است از قواعد جبری علامات.

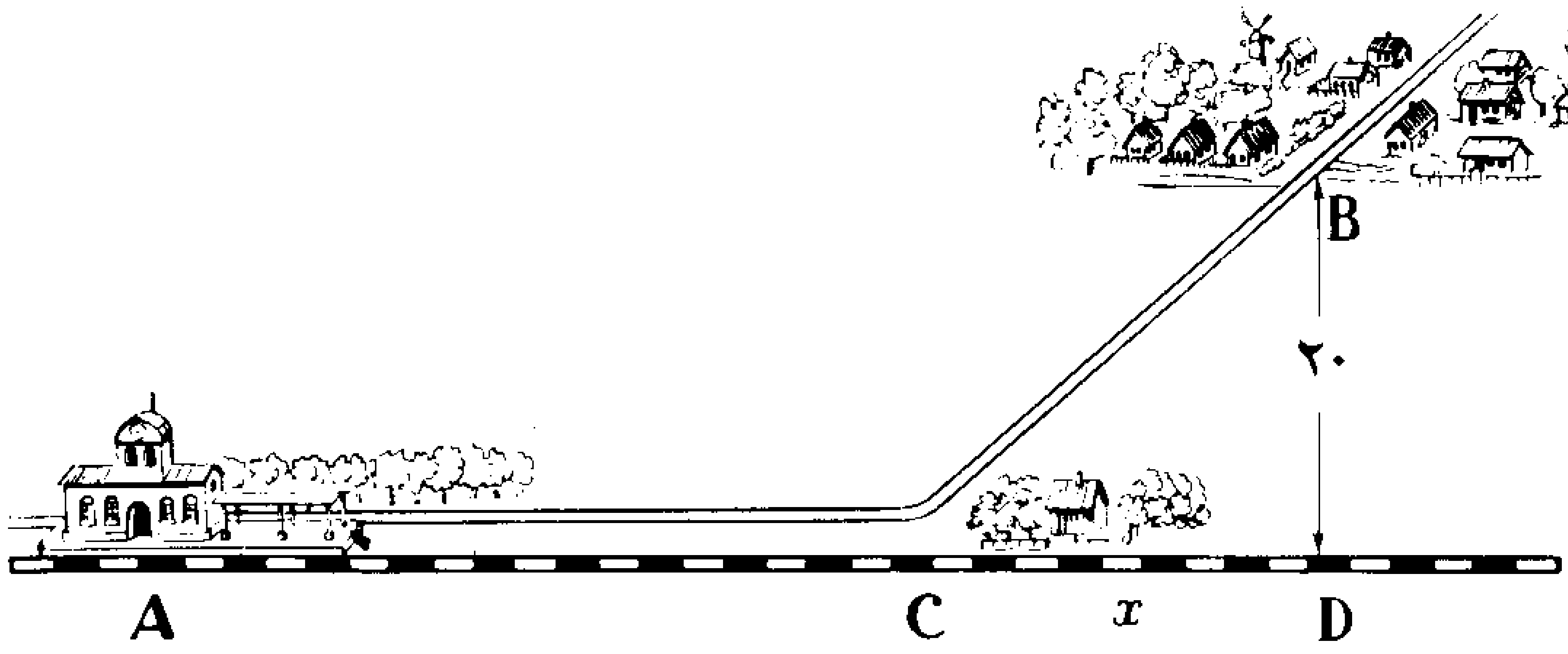
ایستگاه فرعی راه‌آهن در کجا باید قرار گیرد

مسئله

از یک طرف قطعهٔ مستقیم راه آهن، در فاصلهٔ ۲۰ کیلومتری آن، قریهٔ B واقع است (شکل ۲۱). در کجا باید ایستگاه فرعی C را قرار داد تا راه از A تا B از طریق راه آهن AC و جادهٔ CB هرچه کمتر وقت بگیرد؟ سرعت حرکت در راه‌آهن ۰,۸، و در جاده ۰,۲ کیلومتر در دقیقه است.

حل

فاصلهٔ AD (از A تا قاعده عمود BD بر AD) را به a، و CD را به x نمایش میدهیم. در اینصورت $AC = AD - CD = a - x$ و



شکل ۲۱

$CB=\sqrt{CD^۲+BD^۲}=\sqrt{x^۲+۲۰^۲}$. فاصلهٔ زمانی که در جریان آن قطار راه AC را طی می‌کند مساوی است به

$$\frac{AC}{۰,۸}=\frac{a-x}{۰,۸}$$

زمان پیمودن راه CB در جاده مساوی است به

$$\frac{CB}{۰,۲}=\frac{\sqrt{x^۲+۲۰^۲}}{۰,۲}$$

طول کلی مدت عبور از A به B مساوی است به

$$\frac{a-x}{۰,۸}+\frac{\sqrt{x^۲+۲۰^۲}}{۰,۲}$$

این مجموعه را که به m نمایش میدهیم باید کمترین باشد. معادلهٔ

$$\frac{a-x}{۰,۸}+\frac{\sqrt{x^۲+۲۰^۲}}{۰,۲}=m$$

را به شکل

$$-\frac{x}{۰,۸}+\frac{\sqrt{x^۲+۲۰^۲}}{۰,۲}=m-\frac{a}{۰,۸}$$

در می‌آوریم. بعد از ضرب در ۰,۸ داریم:

$$-x+4\sqrt{x^2+20^2}=0{,}8m-a$$

$0{,}8\,m-a$ را به k نمایش داده و جذر را از معادله حذف نموده معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را حاصل می‌کنیم:

$$15x^2-2kx+6400-k^2=0$$

و از اینجا

$$x=\frac{k\pm\sqrt{16k^2-96000}}{15}$$

چون $k=0{,}8\,m-a$ لذا با کمترین مقدار m، k نیز کمترین مقدار را دارد و بر عکس*. ولی برای اینکه x حقیقی باشد $16k^2$ باید ناکمتر از ۹۶۰۰۰ باشد. پس، کمترین مقدار $16k^2$ برابر ۹۶۰۰۰ است. بنا بر این، m در صورتی کمترین می‌شود که

$$16k^2=96000$$

از اینجا

$$k=\sqrt{6000}$$

و بنا بر این،

$$x=\frac{k\pm 0}{15}=\frac{\sqrt{6000}}{15}\approx 5{,}16$$

طول $a=AD$ هر چه باشد ایستگاه فرعی را باید تقریباً در ۵ کیلومتری نقطهٔ D قرار داد.

ولی بدیهی است که جواب ما تنها در حالاتی مفهوم دارد که $x<a$ زیرا در حین تشکیل معادله، ما عبارت $a-x$ را عدد مثبت فرض کردیم.

---

* باید در نظر داشت که $k>0$ چونکه

$$0{,}8m=a-x+4\sqrt{x^2+20^2}>a-x+x=a$$

11*

اگر $x = a \approx ۰,۱۶$، در اینصورت نیازی به ایستگاه فرعی نیست و باید جاده را یکراست به ایستگاه اصلی کشید. در حالاتی نیز که فاصلهٔ a کوتاه‌تر از ۰,۱۶ کیلومتر باشد باید بهمان طریق نتیجه‌گیری کرد.

این مرتبه ما از معادله دوراندیش‌تر می‌باشیم. اگر ما کورکورانه به معادله اعتماد می‌نمودیم مجبور میشدیم ایستگاه فرعی را در آنسوی ایستگاه اصلی بسازیم و این خود کار احمقانه‌ای می‌بود زیرا در این صورت $x > a$ و بنا بر این، مدت حرکت

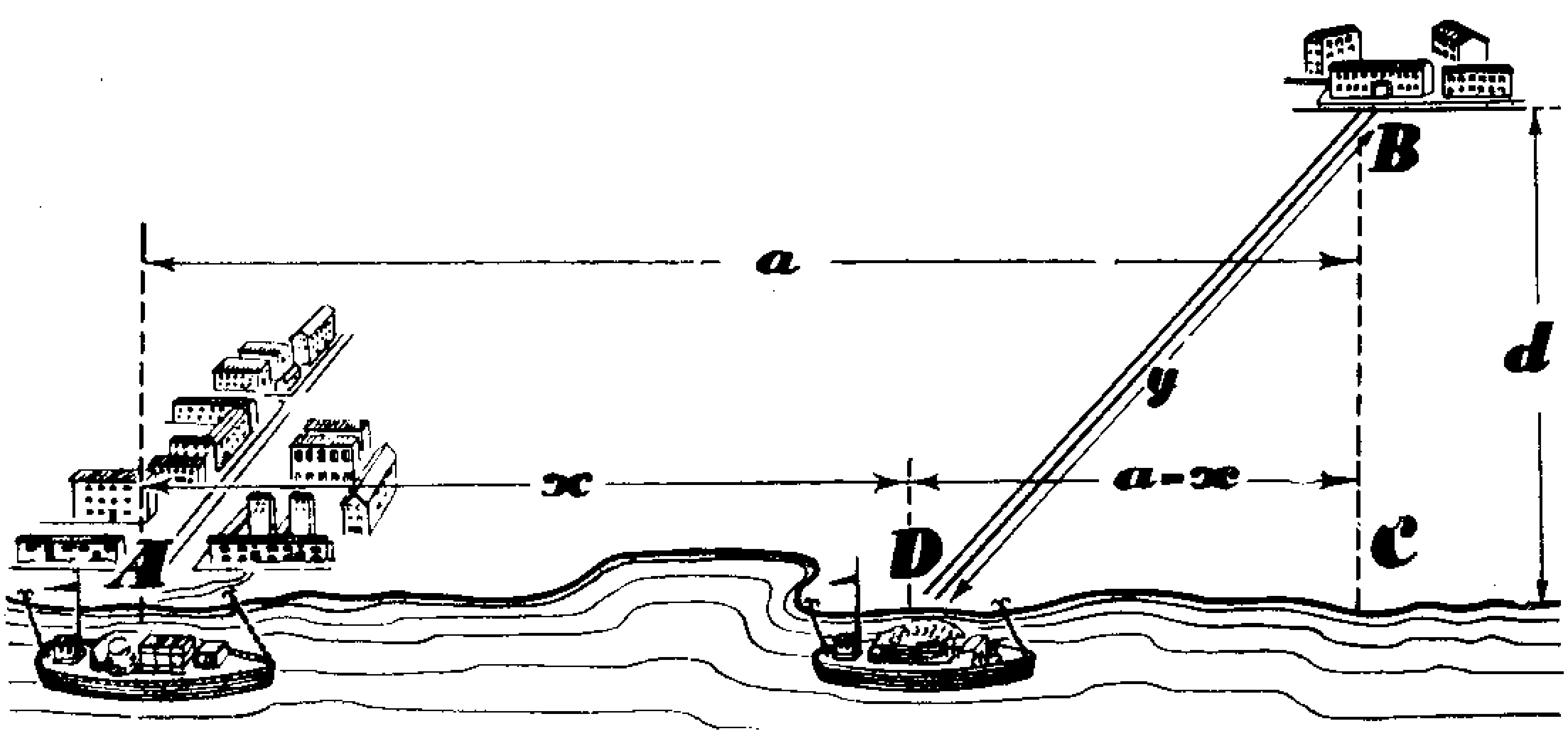
$$\frac{a - x}{۰,۸}$$

در راه‌اهن باید منفی میبود. این مثال آموزنده نشان میدهد که هنگام کاربرد ابزار ریاضی باید با دقت تام به نتایج حاصله برخورد کرد و بخاطر داشت که ممکن است معنی واقعی را از دست بدهد هرگاه شرایط کاربرد ابزار ریاضی ما برآورده نشود.

جاده را چطور باید کشید

مسئله

بارها باید از شهر A واقع در کنار رودخانه به نقطهٔ B واقع در a کیلومتری پائین‌تر در مسیر رودخانه و d کیلومتری ساحل حمل شود (شکل ۲۲). چطور باید جاده را از B به کنار



شکل ۲۲

رودخانه کشید تا حمل بارها از A تا B هر چه ارزانتر تمام شود در صورتیکه کرایه بر حسب تن کیلومتر از طریق رودخانه دو بار کمتر از جاده باشد؟

حل

فاصلهٔ AD را به x، و طول DB جاده را به y نمایش میدهیم. بنا به فرض، طول AC مساوی a، و طول CB برابر d است.

چون حمل و نقل از طریق جاده دو مرتبه گران‌تر از رودخانه است لذا مجموعهٔ

$$x+۲y$$

بنا به شرط مسئله باید کمترین باشد. این کمترین مقدار را به m نمایش میدهیم. معادلهٔ زیر را داریم:

$$x+۲y=m$$

اما چون $x=a-DC$ و $DC=\sqrt{y^۲-d^۲}$، معادلهٔ ما شکل زیر را بخود می‌گیرد:

$$a-\sqrt{y^۲-d^۲}+۲y=m$$

و بعد از حذف جذر:

$$۳y^۲-٤(m-a)y+(m-a)^۲+d^۲=٠$$

آن را حل می‌کنیم:

$$y=\frac{۲}{۳}(m-a)\pm\frac{\sqrt{(m-a)^۲-۳d^۲}}{۳}$$

برای اینکه y حقیقی باشد $(m-a)^۲$ باید ناکمتر از $۳d^۲$ باشد. کمترین مقدار $(m-a)^۲$ مساوی به $۳d^۲$ بوده و در اینصورت

$$m-a=d\sqrt{۳},\ y=\frac{۲(m-a)+٠}{۳}=\frac{۲d\sqrt{۳}}{۳},$$

یعنی $\sin\angle BDC=d:y$

$$\sin\angle BDC=\frac{d}{y}=d:\frac{۲d\sqrt{۳}}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

اما زاویه‌ای که سینوس آن مساوی به $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد مساوی به $60°$ است. پس، فاصلهٔ AC هر چه باشد جاده را باید تحت زاویهٔ $60°$ نسبت به رودخانه کشید.

در اینجا بار دیگر با همان ویژگی که در مسئلهٔ قبل به آن بر خوردیم روبرو می‌شویم. جواب تنها تحت شرط معین مفهوم دارد. اگر نقطه طوری واقع باشد که جادهٔ کشیده شده تحت زاویهٔ $60°$ نسبت به رودخانه از آنسوی شهر A بگذرد در این صورت جواب قابل تطبیق نیست و باید بدون استفاده از رودخانه برای حمل بار، B را مستقیماً با جاده به شهر A وصل نمود.

حاصل‌ضرب در چه مواردی بیشترین است؟

جهت حل مسایل زیاد مربوط به یافتن «ماکزیمم و مینیمم» یعنی بیشترین و کمترین مقادیر کمیت متغیر میتوان موفقانه از یک قضیهٔ جبری استفاده نمود که اینک با آن آشنا میشویم. مسئلهٔ زیر را بررسی می‌کنیم:

عدد مفروض را چگونه باید به دو قسمت تقسیم نمود تا حاصل‌ضرب قسمتها بیشترین باشد؟

حل

عدد a مفروض است. در اینصورت قسمتهای عدد a را می‌توان بصورت زیر نمایش داد:

$$\frac{a}{2}-x \quad و \quad \frac{a}{2}+x$$

عدد x نشان می‌دهد که این قسمت‌ها چقدر از نصف عدد a فرق دارد. حاصل‌ضرب هر دو قسمت مساوی است به

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{a^2}{4}-x^2$$

واضح است که حاصل‌ضرب این قسمت‌ها با کاهش x یعنی در اثر کم شدن تفاوت بین این قسمت‌ها بزرگ می‌شود. حاصل‌ضرب در صورتی بزرگترین است که $x = ۰$ یعنی وقتیکه هر دو قسمت مساوی به $\frac{a}{۲}$ باشد.

بدینترتیب، عدد را باید دو قسمت نمود. آنگاه حاصل‌ضرب دو عددیکه مجموعشان تغییر نمی نماید وقتی بیشترین می‌باشد که این اعداد با هم مساوی باشند.

همین مسئله را در مورد سه عدد بررسی می‌نمائیم.

عدد مفروض را چگونه باید به سه قسمت تقسیم نمود تا حاصل‌ضرب قسمتها بیشترین باشد؟

حل

در حل این مسئله به مسئلهٔ قبل تکیه می‌کنیم.

گیریم عدد a به سه قسمت تقسیم شده باشد. اول فرض میکنیم که هیچ کدام از قسمتها مساوی $\frac{a}{۳}$ نباشد. آنگاه در بین آنها قسمتی بزرگتر از $\frac{a}{۳}$ یافت می‌شود (هر سه نمی‌تواند کمتر از $\frac{a}{۳}$ باشد). آنرا به x نمایش میدهیم:

$$\frac{a}{۳}+x$$

بهمین ترتیب در بین آنها قسمتی کمتر از $\frac{a}{۳}$ نیز یافت می‌شود. آنرا به

$$\frac{a}{۳}-y$$

نمایش میدهیم. اعداد x و y مثبت اند. واضحاً قسمت سوم مساوی است به

$$\frac{a}{۳}+y-x$$

اعداد $\frac{a}{3}$ و $\frac{a}{3}+x-y$ دارای همان مجموع‌اند که دو قسمت اولی عدد a دارا میباشند و اختلاف بین آنها یعنی $x-y$ کمتر از اختلا ف میان دو قسمت اولی است که برابر با $x+y$ بود. بطوریکه از حل مسئلهٔ قبل میدانیم از اینجا نتیجه میشود که حاصل‌ضرب

$$\frac{a}{3}\left(\frac{a}{3}+x-y\right)$$

بیشتر از حاصل‌ضرب دو قسمت اول عدد a است.

بدینترتیب، اگر دو قسمت اول عدد a را با اعداد

$$\frac{a}{3}, \quad \frac{a}{3}+x-y$$

عوض کنیم و قسمت سوم را به حال خود بگذاریم در آنصورت حاصل‌ضرب افزایش می‌یابد.

فرض کنیم که حالا یکی از قسمت‌ها مساوی به $\frac{a}{3}$ باشد .

پس، دو قسمت دیگر دارای این شکل می‌باشد:

$$\frac{a}{3}+z, \quad \frac{a}{3}-z$$

اگر ما این دو قسمت آخر را برابر به $\frac{a}{3}$ سازیم (از این عمل مجموعهٔ آنها تغییری نمی‌کند) در آنصورت حاصل‌ضرب دوباره افزایش یافته و مساوی می‌شود به

$$\frac{a}{3}\times\frac{a}{3}\times\frac{a}{3}=\frac{a^3}{27}$$

بدین ترتیب اگر عدد a را به سه قسمت نابرابر تقسیم نمائیم در این صورت حاصل‌ضرب این قسمت‌ها کمتر از $\frac{a^3}{27}$ می‌باشد یعنی کمتر از حاصل‌ضرب سه سازهٔ مساوی است که مجموعهٔ آنها همان عدد a میباشد.

از طریق مشابه، این قضیه را برای حالت چهار، پنج سازه و الی آخر می‌توان به ثبوت رسانید.

حال، حالت کلی‌تری را در نظر میگیریم.

تعیین نمائید در ازاء چه مقادیری از x و y، عبارت $x^p y^q$ بزرگترین است. در صورتیکه $x+y=a$.

حل

باید تعیین نمود به ازاء کدام مقدار x عبارت

$$x^p (a-x)^q$$

به بزرگترین کمیت می‌رسد.

این عبارت را در عدد $\frac{1}{p^p q^q}$ ضرب می‌کنیم. عبارت تازه‌ای حاصل می‌شود:

$$\frac{x^p}{p^p} \frac{(a-x)^q}{q^q}$$

که واضحاً همزمان با عبارت اولیه به بزرگترین کمیت می‌رسد.

عبارت تازه حاصل شده را به شکل زیر در می‌آوریم:

$$\underbrace{\frac{x}{p} \times \frac{x}{p} \times \frac{x}{p} \times \frac{x}{p} \times \dots}_{p \text{ مرتبه}} \times \underbrace{\frac{a-x}{q} \times \frac{a-x}{q} \times \frac{a-x}{q}}_{q \text{ مرتبه}} \times \dots$$

مجموعهٔ تمام سازه‌های این عبارت مساوی است به

$$\underbrace{\frac{x}{p} + \frac{x}{p} + \frac{x}{p} + \dots}_{p \text{ مرتبه}} + \underbrace{\frac{a-x}{q} + \frac{a-x}{q} + \frac{a-x}{q} + \dots}_{q \text{ مرتبه}} =$$

$$= \frac{px}{p} + \frac{q(a-x)}{q} = x + a - x = a$$

یعنی به یک مقدار ثابت.

بر اساس مراتب ثابت شدهٔ قبل (صفحهٔ ۱۷۸—۱۸۰) استنباط می‌نمائیم که حاصل‌ضرب

$$\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\ldots\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\ldots$$

در صورتی به بیشترین مقدار خود میرسد که همهٔ سازه‌های آن با هم برابر باشند یعنی وقتیکه

$$\frac{x}{p}=\frac{a-x}{q}$$

با علم به اینکه $a-x=y$، و با جابجا کردن جمله های تناسب، حاصل می‌کنیم:

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{q}$$

بدین ترتیب، حاصل‌ضرب $x^p y^q$ با ثابت بودن مجموع $x+y$ وقتی به بیشترین مقدار خود میرسد که

$$x:y=p:q$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت ساخت که حاصل‌ضرب‌های

$x^p y^q z^r$، $x^p y^q z^r t^u$ و غیره

با ثابت بودن مجموعه‌های $x+y+z$، $x+y+z+t$ و غیره در صورتی به بیشترین مقادیر خود میرسد که

$x:y:z=p:q:r$، $x:y:z:t=p:q:r:u$ و غیره

مجموعه در کدام موارد کمترین است؟

خواننده‌ایکه آرزوی آزمایش قدرت خود را در زمینهٔ اثبات قضایای مفید جبری داشته باشد خود می‌تواند احکام زیر را ثابت نماید:

۱. مجموعهٔ دو عددیکه حاصل‌ضربشان ثابت است وقتی کوچکترین می‌باشد که این اعداد با هم مساوی باشند.

مثلا برای حاصل‌ضرب ۳۶ داریم: ۱۳ = ۹ + ۴، ۱۵ = ۱۲ + ۳، ۲۰ = ۱۸ + ۲، ۳۷ = ۳۶ + ۱ و سر انجام ۱۲ = ۶ + ۶.

۲. مجموعهٔ چند عددیکه حاصل‌ضربشان ثابت است در صورتی کوچکترین می‌باشد که این اعداد با هم مساوی باشند.

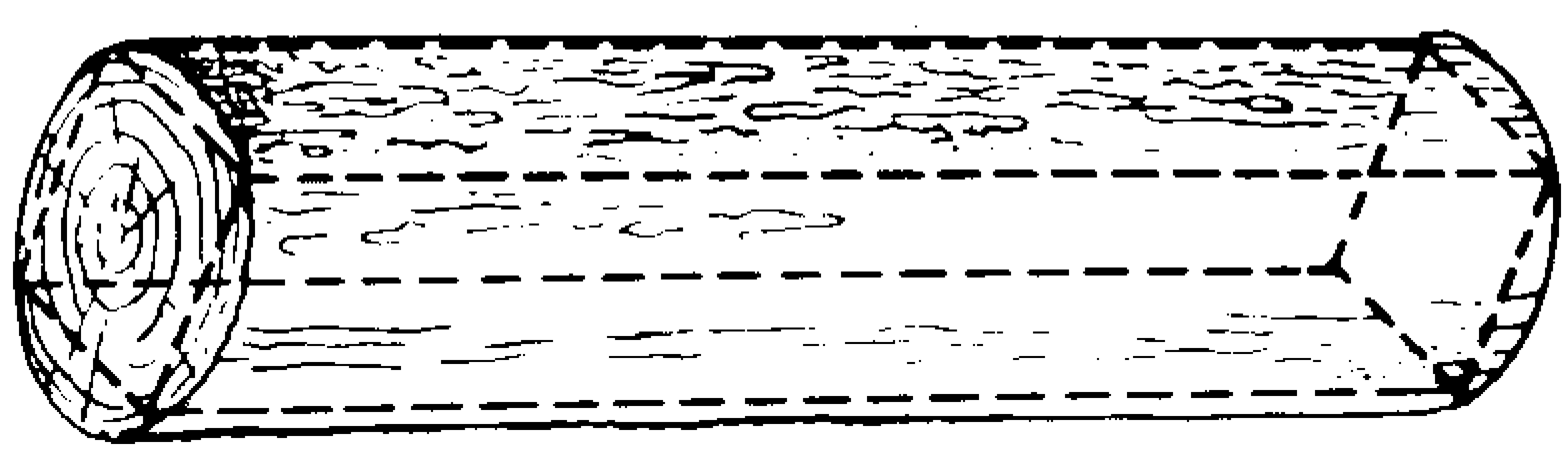
مثلا برای حاصل‌ضرب ۲۱۶ داریم: ۲۱ = ۶ + ۱۲ + ۳، ۲۶ = ۶ + ۱۸ + ۲، ۱۹ = ۴ + ۶ + ۹، حال آنکه ۱۸ = ۶ + ۶ + ۶.

طی چند مثال نشان میدهیم که این قضایا چگونه در عمل بکار برده می‌شود.

بزرگترین حجم تیر راست‌گوشه

مسئله

از تنهٔ استوانه‌ای درخت، تیر راست‌گوشهٔ دارای بزرگترین حجم را بسازید. مقطع آن چه شکلی را باید داشته باشد (شکل ۲۳)؟



شکل ۲۳

حل

اگر اضلاع مقطع راست‌گوشه، x و y باشد در آن صورت مطابق با قضیهٔ فیثاغورث،

$$x^2 + y^2 = d^2$$

که d قطر تنهٔ درخت است. حجم تیر وقتی بزرگترین می‌باشد که مساحت مقطع آن، بزرگترین باشد یعنی وقتیکه مقدار xy بزرگترین باشد. اما اگر xy بزرگترین باشد پس حاصل‌ضرب x^2y^2 نیز بزرگترین است. چون مجموعهٔ $x^2 + y^2$ ثابت است لذا بنا بر مراتب ثابت شدهٔ فوق، حاصل‌ضرب x^2y^2 وقتی بزرگترین می‌باشد که

$$x^2 = y^2 \quad \text{و یا} \quad x = y$$

بدین ترتیب، مقطع تیر راست‌گوشه باید مربع باشد.

دو قطعه زمین

مسایل

۱. قطعه زمین راست‌گوشه کدام شکل را باید دارا باشد تا طول حصار آن کوچکترین باشد؟

۲. قطعه زمین راست‌گوشه کدام شکل را باید دارا باشد تا با یک طول مفروض حصار، مساحت آن بزرگترین باشد؟

حل‌ها

۱. شکل قطعه زمین راست‌گوشه توسط نسبت اضلاع x و y آن تعیین می‌شود. مساحت قطعه زمین با اضلاع x و y مساوی xy، و طول حصار آن $۲x+۲y$ است. طول حصار در صورتی کوچکترین است که $x+y$ حایز کوچکترین کمیت باشد.

با ثابت بودن حاصل‌ضرب xy، مجموعهٔ $x+y$ در صورتی کوچکترین می‌باشد که $x=y$. بنا بر این، راست‌گوشهٔ مطلوب مربع است.

۲. اگر x و y اضلاع یک راست‌گوشه باشند در آنصورت طول حصار $۲x+۲y$، و مساحت آن xy است. این حاصل‌ضرب همزمان با حاصل‌ضرب $٤xy$ یعنی $۲x \times ۲y$ بزرگترین می‌باشد. حاصل‌ضرب اخیرالذکر با ثابت بودن مجموعهٔ سازه‌های آن $(۲x+۲y)$ بشرط $۲x=۲y$ بزرگترین می‌باشد یعنی وقتیکه قطعه زمین بشکل مربع باشد.

بدینترتیب، به معلوماتی که ما راجع به خواص هندسی مربع داریم می‌توانیم یک خاصیت دیگر را نیز اضافه کنیم. در بین تمامی راست‌گوشه‌ها با مساحت داده شده، مربع کمترین محیط را دارد و از تمامی راست‌گوشه‌ها با محیط داده شده بزرگترین مساحت را داراست.

بادبادک کاغذی

مسئله

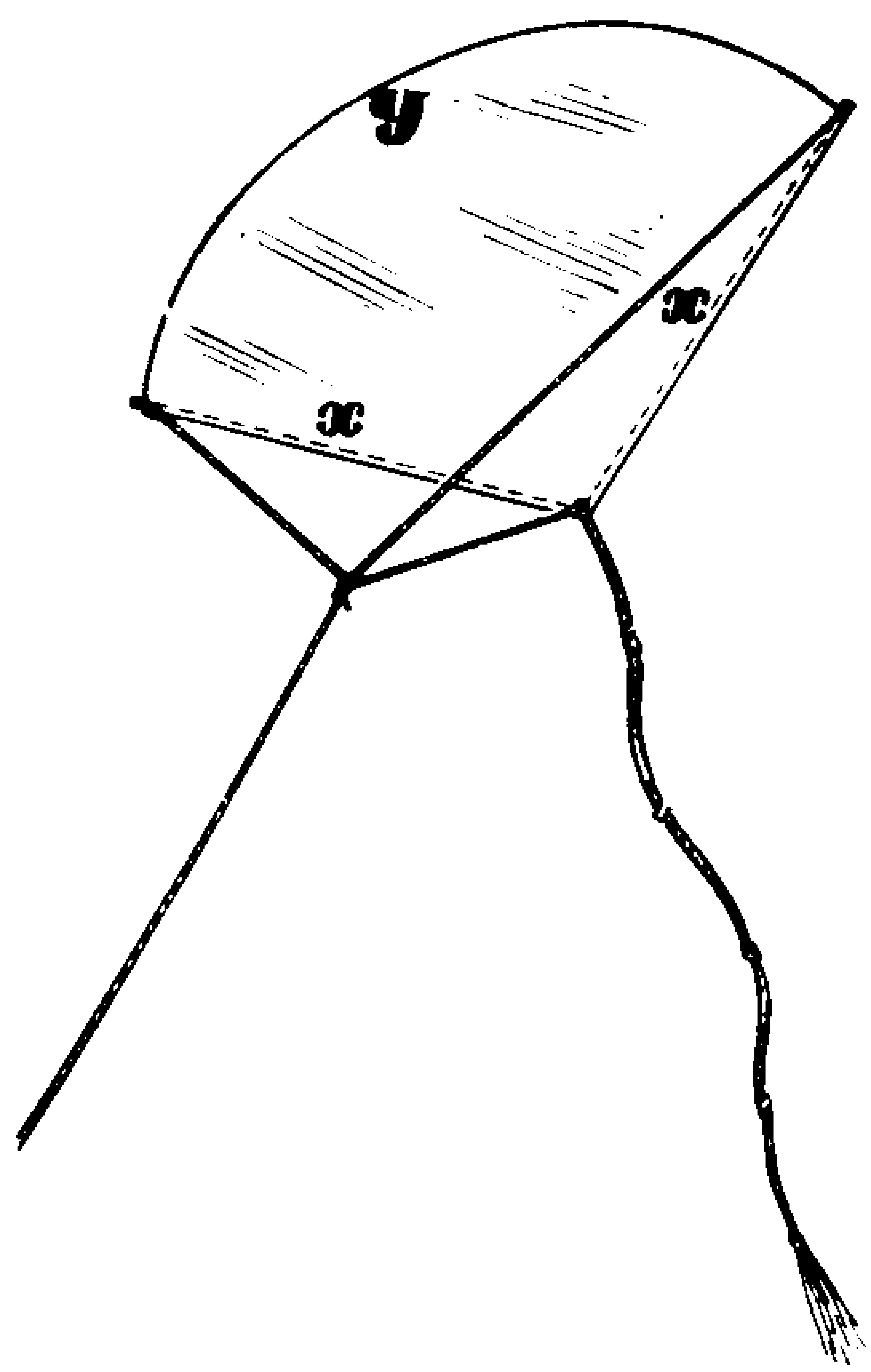
به بادبادکی که شکل قطاع دایره را دارد میخواهیم چنان شکلی را بدهیم تا در محیط داده شده بزرگترین مساحت جا بگیرد. قطاع دایره کدام شکل را باید دارا باشد؟

حل

با بیان صریحتر، ما باید تعیین نمائیم در ازاء کدام نسبت طول قوس قطاع به شعاع آن، مساحت آن در محیط داده شده، بزرگترین میباشد.

اگر شعاع قطاع x، و قوس آن y باشد در اینصورت محیط l و مساحت S آن چنین بیان می‌شود (شکل ۲۴):

$$l = ۲x + y,$$
$$S = \frac{xy}{۲} = \frac{x(l - ۲x)}{۲}$$



شکل ۲۴

مقدار S و حاصلضرب $۲x(l - ۲x)$ یا مضرب چهارگانهٔ مساحت بازاء همان مقدار x به ماگزیمم میرسند. چون مجموعهٔ ضریب‌های $۲x + (l - ۲x) = l$ مقداری ثابت است بنا بر این، حاصلضربشان در صورتی بزرگترین می‌باشد که $۲x = l - ۲x$، از اینجا

$$x=\frac{l}{٤},$$

$$y=l-٢\times\frac{l}{٤}=\frac{l}{٢}$$

بدین ترتیب، قطاع دایره با محیط داده شده در صورتی بزرگترین مساحت را در بر دارد که شعاع آن برابر نصف قوس باشد (یعنی اگر طول قوس آن مساوی به مجموعهٔ شعاع‌ها باشد و یا طول قسمت منحنی محیط آن مساوی به طول خط منکسر باشد). زاویهٔ قطاع دایره مساوی به $١١٥^\circ \approx$ یا دو رادیان است. چگونگی خواص پرواز چنین بادبادک پهنی، خود، موضوعی است که به مسئله ما ارتباط ندارد.

ساختمان خانه

مسئله

در جای خانهٔ ویران شده که یک دیوار آن بجای مانده است می‌خواهند خانهٔ نوی بسازند. طول دیوار موجود ١٢ متر است. مساحت خانهٔ نو باید مساوی به ١١٢ متر مربع باشد. شرایط اقتصادی کار چنین است:

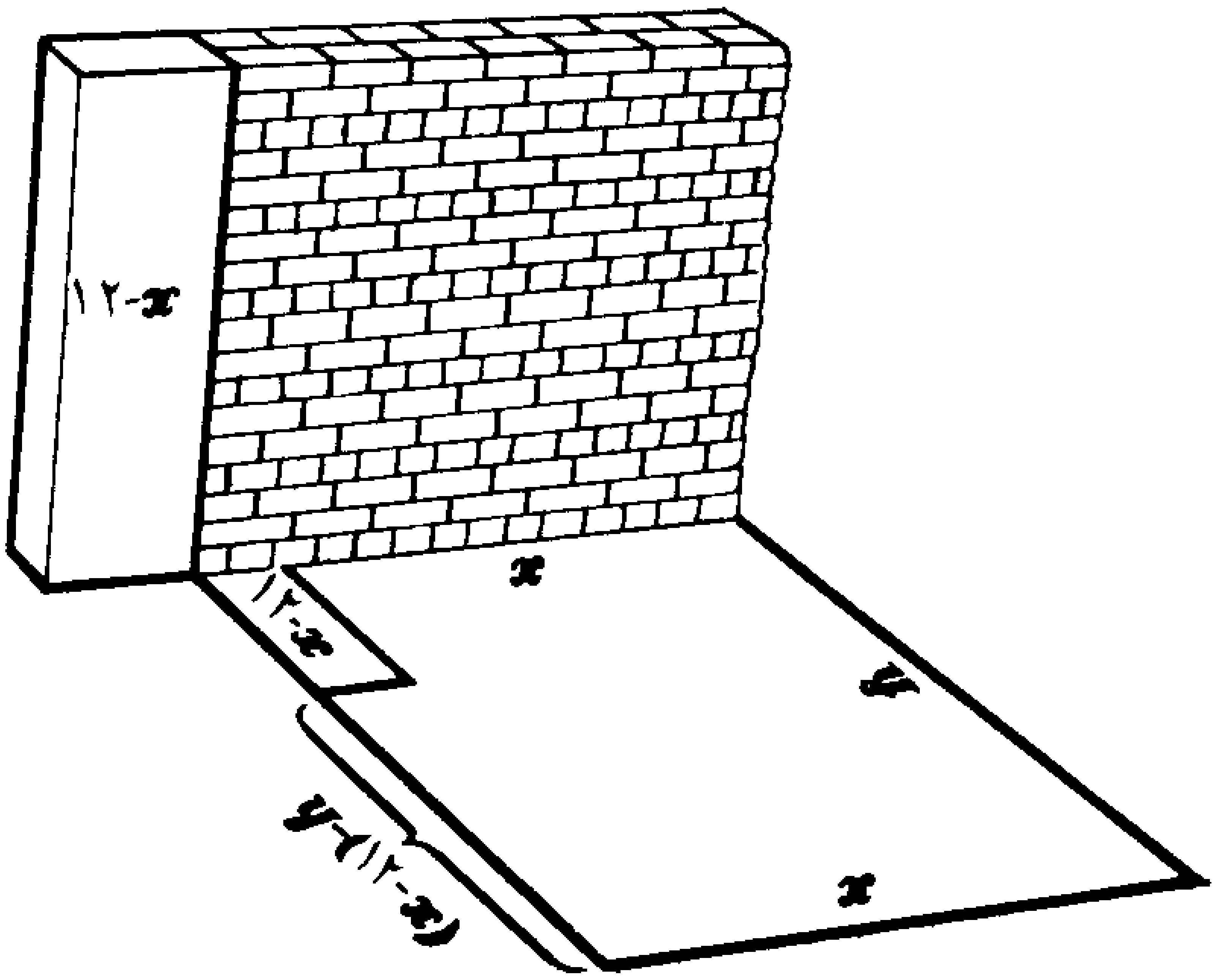
١. ترمیم یک متر طول دیوار ٢٥٪ هزینهٔ آجرچینی یک دیوار نو را تشکیل میدهد.

٢. از میان برداشتن یک متر طول دیوار کهنه و آجرچینی دیوار نو از مصالح بدست آمده ٥٠٪ قیمت ساختمان یک متر دیوار از مصالح نو را تشکیل میدهد.

تحت این شرایط چطور می‌توان با حد اکثر منفعت از دیوار موجود استفاده کرد؟

حل

فرض کنیم که از دیوار قبلی x متر سالم مانده و بقیهٔ $x-١٢$ متر آن از میان بر داشته شود تا از مصالح بدست آمده قسمتی از دیوار خانهٔ نو بنا شود (شکل ٢٥). هرگاه قیمت



شکل ۲۵

آجرچینی یک متر طول دیوار از مصالح نو a باشد آنگاه ترمیم x متر دیوار کهنه $\frac{ax}{۴}$ ، و ساختمان قطعه‌ای بطول $۱۲ - x$ بمبلغ $\frac{a(۱۲ - x)}{۲}$ ، و بقیهٔ این دیوار بمبلغ $a\,[y - (۱۲ - x)]$ یا $a(y + x - ۱۲)$، دیوار سوم ax، و چهارم ay تمام میشود.
تمامی کار به مبلغ زیر تمام می‌شود:

$$\frac{ax}{۴} + \frac{a\,(۱۲ - x)}{۲} + a\,(y + x - ۱۲) + ax + ay =$$

$$= \frac{a\,(۷x + ۸y)}{۴} - ۶a$$

عبارت آخری همزمان با مجموعهٔ

$$۷x + ۸y$$

به کوچکترین مقدار خود میرسد.

ما میدانیم که مساحت خانه xy مساوی ۱۱۲ است. بنا بر این

$$۷x \times ۸y = ۵۶ \times ۱۱۲$$

با ثابت بودن حصلضرب ، مجموع $7x+8y$ در صورتی دارای کوچکترین مقدار می‌باشد که

$$7x=8y$$

از اینجا

$$y=\frac{7}{8}x$$

این عبارت y را در معادلهٔ

$$xy=112$$

گذاشته، داریم:

$$\frac{7}{8}x^2=112,\quad x=\sqrt{128}\approx 11{,}3$$

و چون طول دیوار کهنه ۱۲ متر است لذا لازم است تنها ۰٫۷ متر آن از هم چیده شود.

قطعه زمین ییلاقی

مسئله

برای ساختن خانهٔ ییلاقی لازم بود قطعه زمین ییلاقی محصور شود. مصالح تنها برای l متر طول حصار در دسترس بود. علاوه بر این، میشد از یک دیوار موجود در یک طرف قطعه زمین استفاده کرد. تحت این شرایط چطور می‌توان قطعه زمین راست گوشه‌ای را با بزرگترین مساحت حصار نمود؟

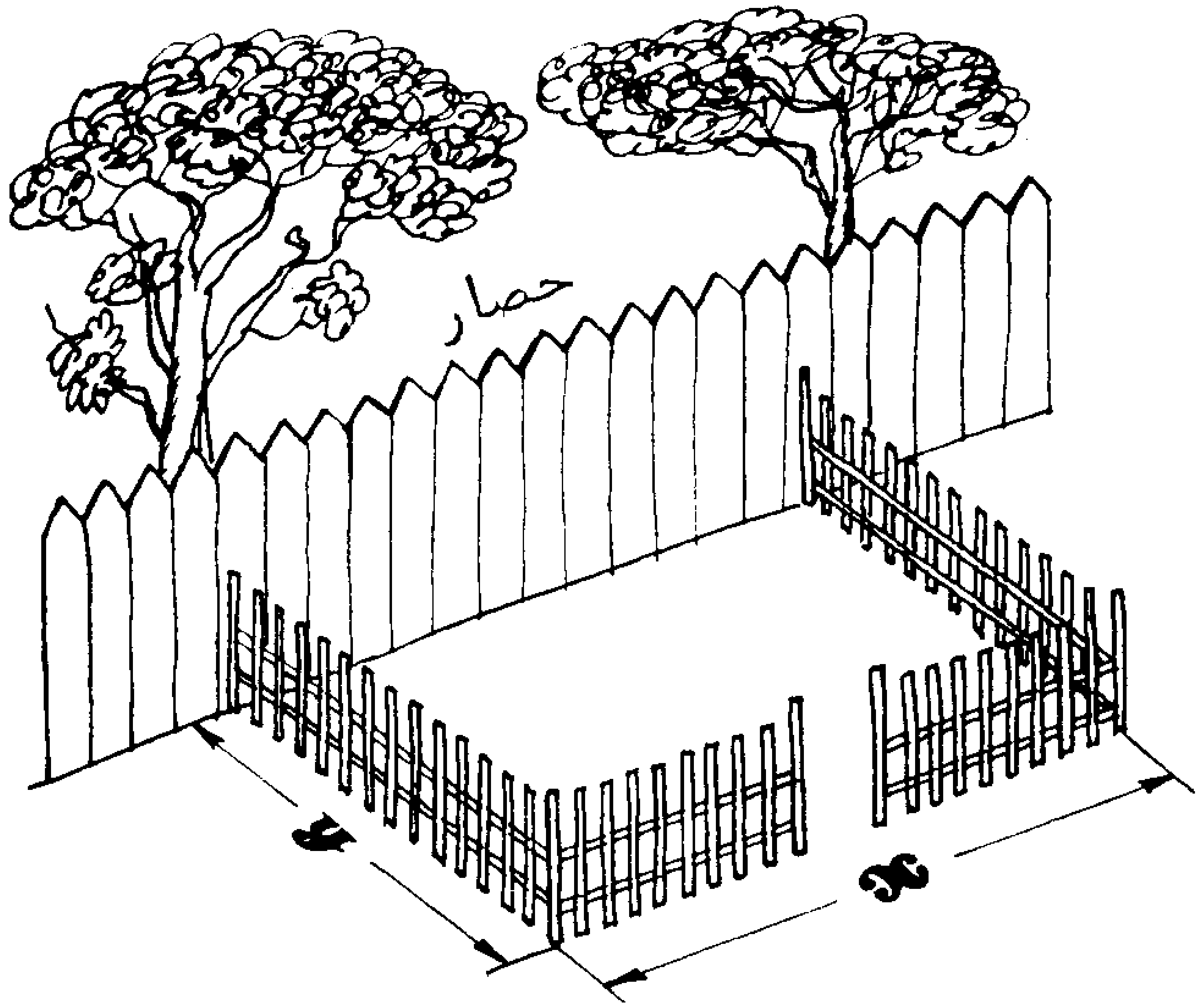
حل

فرض کنیم طول قطعه زمین (در طول حصار موجود) برابر x، و عرض آن (یعنی اندازهٔ قطعه زمین در جهت عمود بر حصار موجود) برابر y باشد (شکل ۲۶). در اینصورت برای حصار نمودن این قطعه زمین $x+2y$ متر حصار تازه ضروری است بطوریکه

$$x+2y=l$$

مساحت قطعه زمین مساوی است با

$$S=xy=y\,(l-2y)$$



شکل ۲۶

و همزمان با کمیت زیر (یعنی دو برابر مساحت) که عبارتست از حاصلضرب دو سازه دارای مجموع ثابت l :

$$۲y\,(l-۲y)$$

به بزرگترین مقدار خود میرسد. بنا بر این، برای حصول بزرگترین مساحت باید

$$۲y=l-۲y$$

باشد و از اینجا

$$y=\frac{l}{۴},\quad x=l-۲y=\frac{l}{۲}$$

به عبارت دیگر $x=۲y$، یعنی طول قطعه زمین باید دو برابر عرض آن باشد.

ناودان دارای بزرگترین مقطع

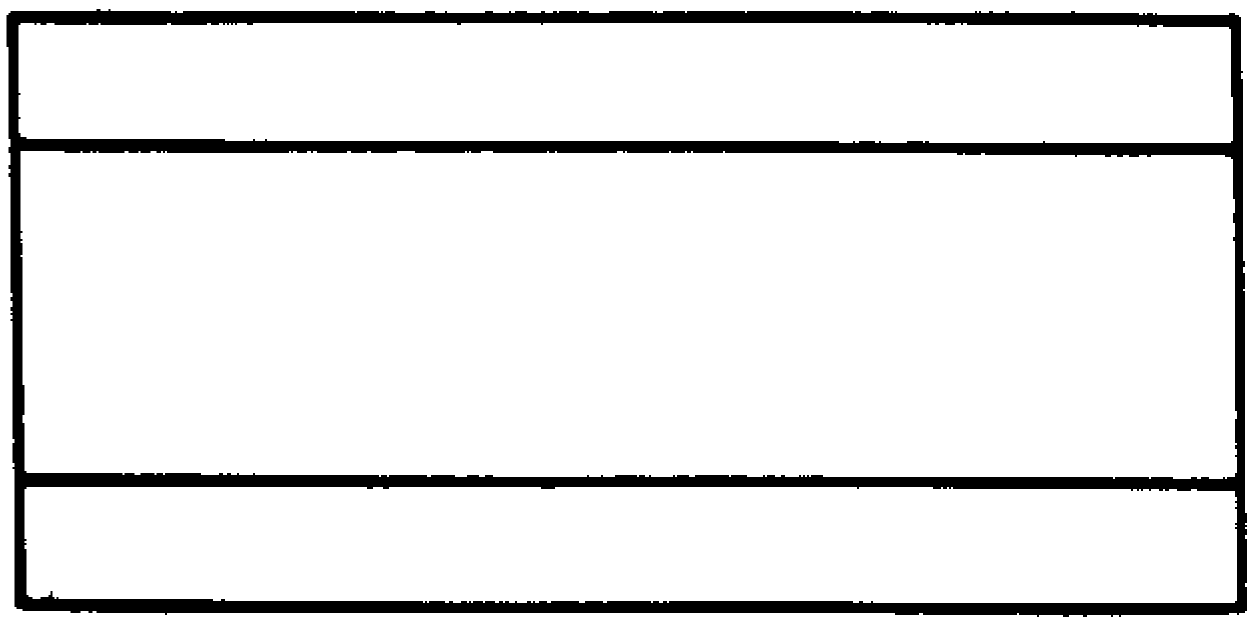
مسئله

ورق فلزی راست‌گوشه (شکل ۲۷) را بشکل ناودانی با مقطع ذوزنقهٔ متساوی الساقین خم کنید. این کار را بطوریکه در

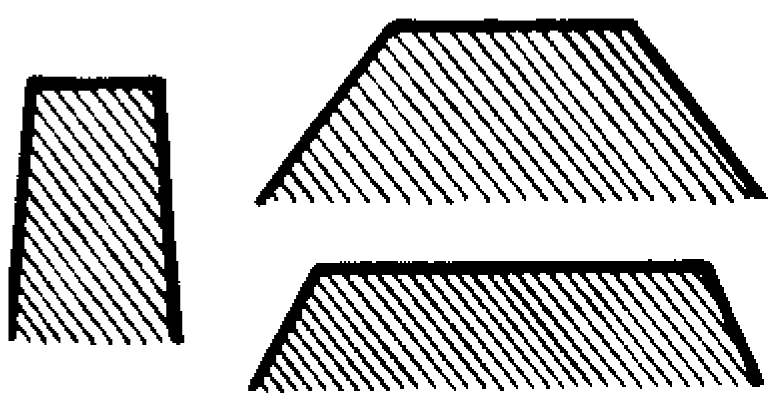
شکل ۲۸ نمایش یافته می‌توان به طرق مختلف انجام داد. قسمتهای جانبی باید چه عرضی داشته باشد و تحت چه زاویه‌ای خم شود تا مقطع ناودان بزرگترین مساحت را داشته باشد (شکل ۲۹)؟

حل

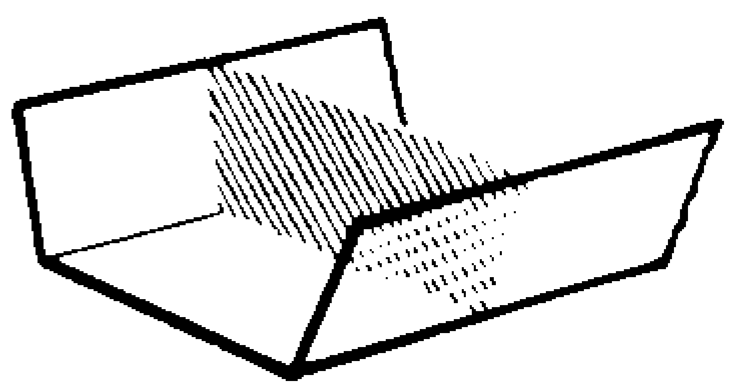
فرض کنیم عرض ورق l باشد. عرض قسمتهای جانبی خم شونده را به x، و عرض ته ناودان را به y نمایش می‌دهیم. یک



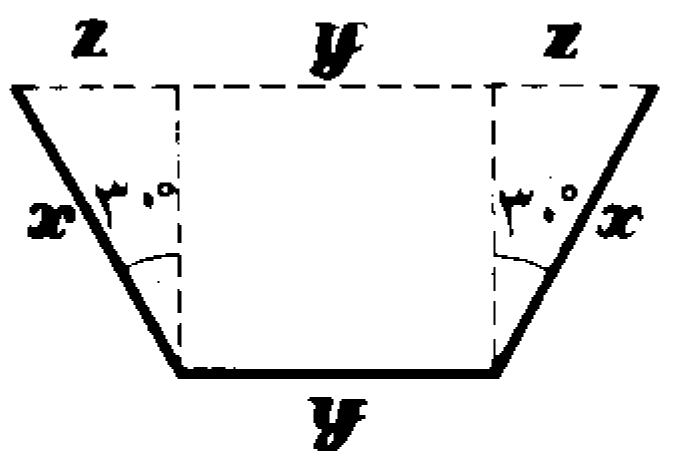
شکل ۲۷



شکل ۲۸



شکل ۲۹



شکل ۳۰

مجهول دیگر z را نیز که معنی آن از شکل ۳۰ واضح میگردد در نظر میگیریم.

مساحت ذوزنقهٔ مقطع ناودان:

$$S = \frac{(z+y+z)+y}{۲}\sqrt{x^۲ - z^۲} = \sqrt{(y+z)^۲ (x^۲ - z^۲)}$$

مسئله در تعیین مقادیری از x، y، z خلاصه میگردد که S را به بزرگترین مقدارش برسانند. ضمناً مجموع $۲x+y$ (یعنی عرض ورق) برابر مقدار ثابت l می‌باشد. تبدیلات را انجام میدهیم:

$$S^۲ = (y+z)^۲ (x+z)(x-z)$$

کمیت S^2 در ازاء همان مقادیر x، y، z که $3S^2$ را به بیشترین مقدارش میرسانند بزرگترین می‌شود. کمیت آخری را می‌توان به شکل حاصلضرب زیر نمایش داد:

$$(y+z)(y+z)(x+z)(3x-3z)$$

مجموعهٔ این چهار ضریب:

$$y+z+y+z+x+z+3x-3z=2y+4x=2l$$

ثابت است. بنا بر این، حاصلضرب هر چهار ضریبمان در صورتی بیشترین می‌باشد که آنها با هم مساوی باشند یعنی

$$y+z=x+z, \quad x+z=3x-3z$$

از معادلهٔ اول داریم:

$$y=x$$

و چون $y+2x=l$ پس $x=y=\frac{l}{3}$.

از معادلهٔ دوم حاصل می‌کنیم:

$$z=\frac{x}{2}=\frac{l}{6}$$

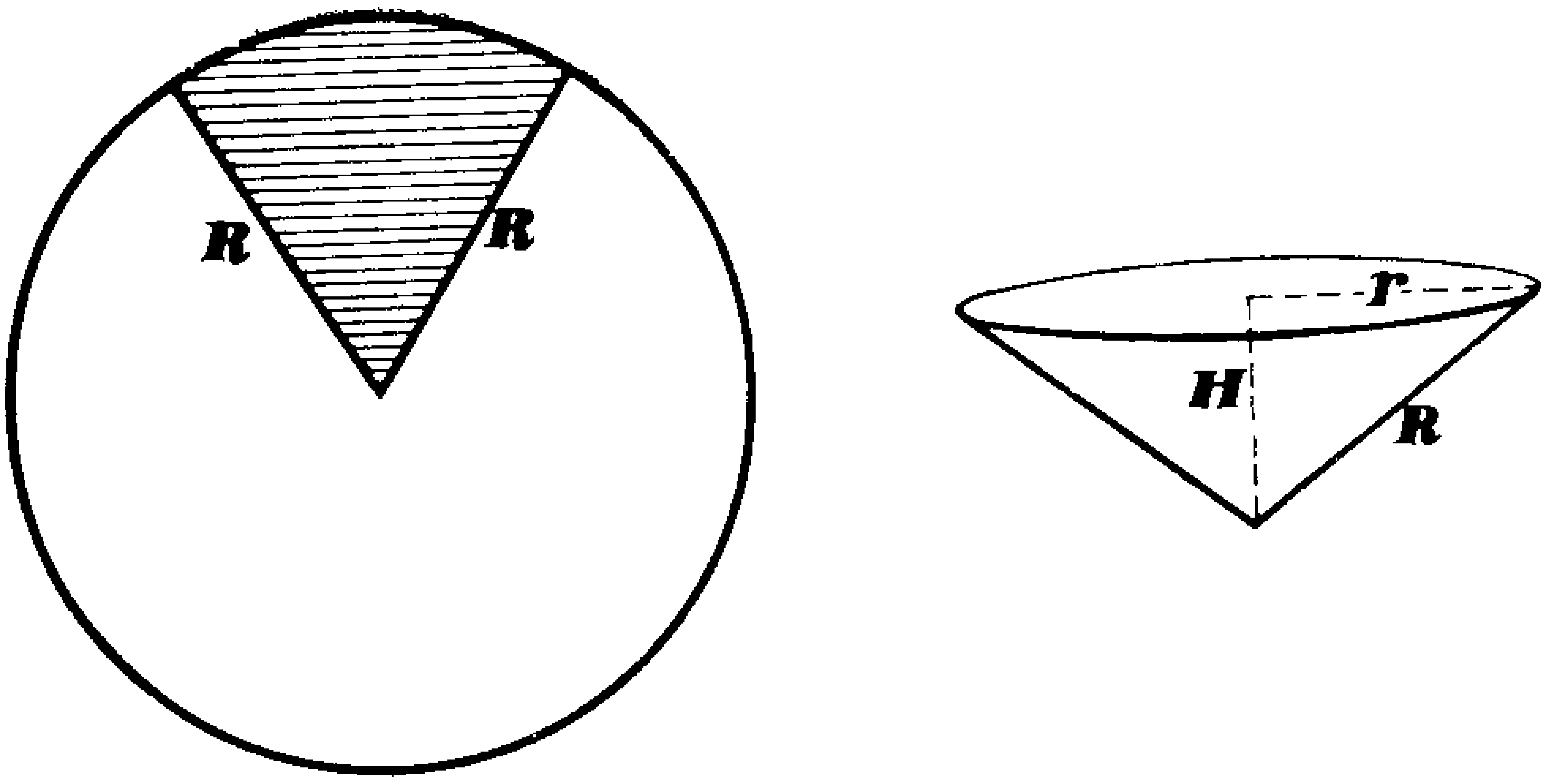
حال، چون ضلع عمود z برابر نصف وتر x است (شکل ۳۰) لذا زاویهٔ مقابل این ضلع عمود برابر $30°$، و زاویهٔ میل ساقهای ناودان نسبت به ته آن $120°=30°+90°$ است.

بدین ترتیب، ناودان در صورتی دارای بزرگترین مقطع می‌باشد که سطوح آن به شکل سه ضلع مجاور شش‌ضلعی منتظم خم شود.

قیف دارای بزرگترین گنجایش

مسئله

از دایرهٔ حلبی باید قسمت مخروطی قیف را ساخت. برای اینکار از دایره، قطاعی را بریده و بقیه را به شکل مخروط می‌پیچند (شکل ۳۱). قوس قطاع بریده شده چند درجه باید داشته باشد تا مخروط حاصل شده دارای بزرگترین گنجایش باشد؟



شکل ۳۱

حل

طول قوس آن قسمت دایره را که بشکل مخروط خم می‌شود به x (بر حسب آحاد خطی) بیان می‌کنیم. بنا بر این، شعاع R دایرهٔ حلبی، خط مولد مخروط است و محیط دایرهٔ قاعده، مساوی به x می‌باشد. شعاع r قاعدهٔ مخروط را از برابری زیر تعیین می‌نمائیم:

$$2\pi r = x \quad \text{و از اینجا} \quad r = \frac{x}{2\pi}$$

ارتفاع مخروط (طبق قضیهٔ فیثاغورث):

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

(شکل ۳۱). حجم این مخروط مقدار زیر را دارد:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

این عبارت همزمان با عبارت

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$

و مربع آن

$$\left(\frac{x}{۲\pi}\right)^{٤}\left[R^{۲}-\left(\frac{x}{۲\pi}\right)^{۲}\right]$$

به بزرگترین مقدار میرسد.

از آنجا که

$$\left(\frac{x}{۲\pi}\right)^{۲}+R^{۲}-\left(\frac{x}{۲\pi}\right)^{۲}=R^{۲}$$

مقداری ثابت است پس (بر اساس مراتب ثابت شده در صفحات ۱۸۰—۱۸۱) حاصلضرب آخری در ازاء همان مقدار x دارای ماگزیمم است که در ازاء آن

$$\left(\frac{x}{۲\pi}\right)^{۲}:\left[R^{۲}-\left(\frac{x}{۲\pi}\right)^{۲}\right]=۲:۱$$

از اینجا

$$\left(\frac{x}{۲\pi}\right)^{۲}=۲R^{۲}-۲\left(\frac{x}{۲\pi}\right)^{۲},$$

$$۳\left(\frac{x}{۲\pi}\right)^{۲}=۲R^{۲},\quad x=\frac{۲\pi}{۳}R\sqrt{٦}\approx ٥,۱٥R$$

قوس بر حسب درجه، $x\approx ۲۹٥^{\circ}$ یعنی قوس قطاع بریده شده باید مشتمل بر $\approx ٦٥^{\circ}$ باشد.

درخشان‌ترین روشنائی

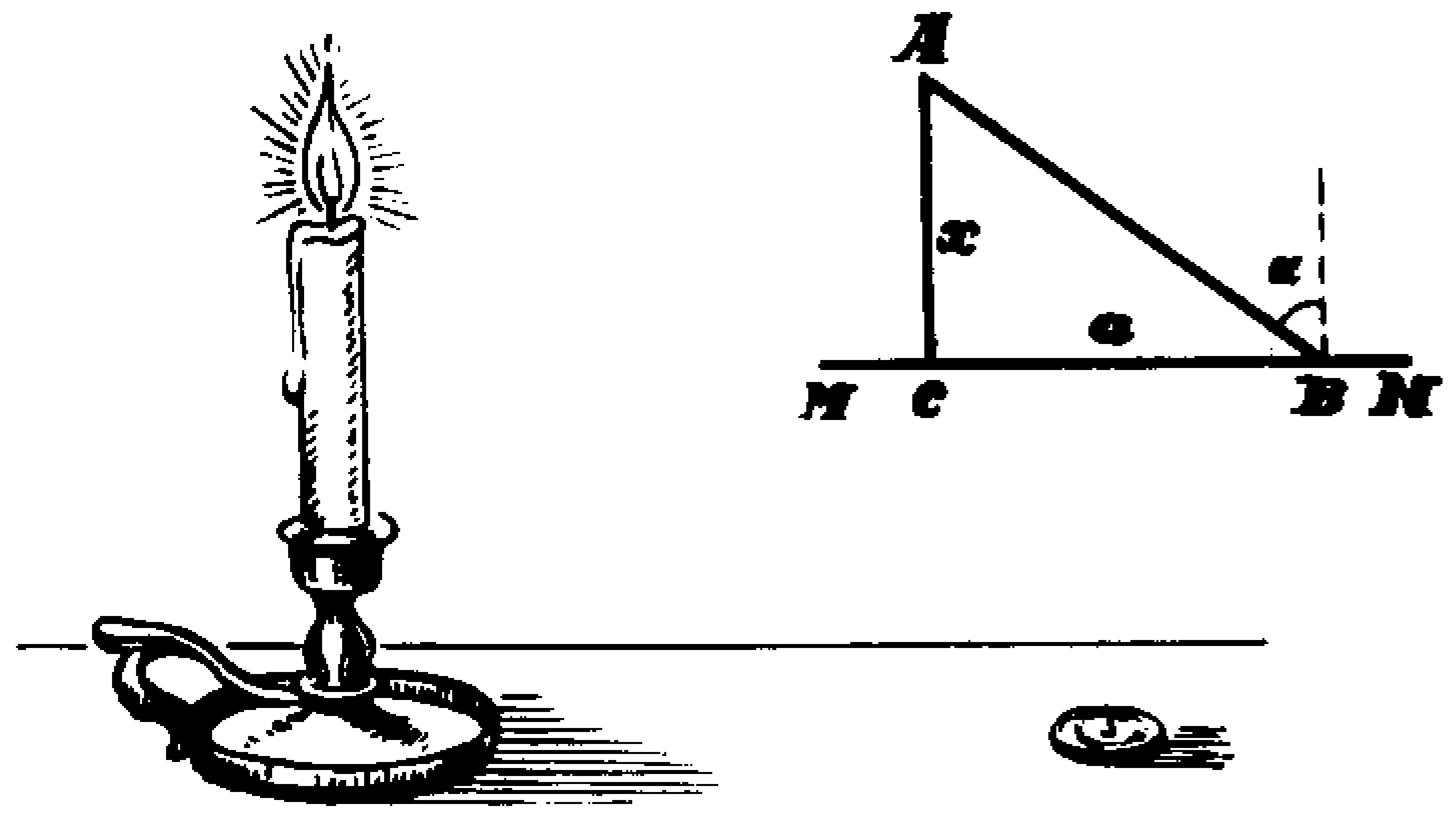
مسئله

شعلهٔ شمع در کدام ارتفاع بالای میز قرار گیرد تا سکه روی میز حد اکثر روشنایی را بگیرد؟

حل

ممکن است بنظر برسد که جهت حصول بهترین روشنائی باید شمع را حتی‌الامکان پائین‌تر قرار داد. این درست نیست زیرا در وضع پائین شعله، شیب اشعه بسیار کم می‌باشد. برای اینکه

اشعه با شیب زیاد تابش کند باید شمع را بلند کرد یعنی باید منبع نور را دورتر قرار داد. واضح است که از نظر شدت روشنایی، یک ارتفاع متوسط شعله بالای میز حد اکثر انتفاع را دارد. این ارتفاع را به x نمایش میدهیم (شکل ۳۲). فاصلهٔ BC سکهٔ



شکل ۳۲

B از پای C عمودی که از شعلهٔ A می‌گذرد را به a نمایش میدهیم. اگر درخشانی شعله i باشد در اینصورت شدت روشنایی سکه مطابق با قوانین نور چنین بیان می‌شود:

$$\frac{i}{\overline{AB}^{۲}}\cos\alpha = \frac{i\cos\alpha}{(\sqrt{a^{۲}+x^{۲}})^{۲}} = \frac{i\cos\alpha}{a^{۲}+x^{۲}}$$

که α زاویهٔ تابش دستهٔ اشعهٔ AB است. چون

$$\cos\alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}}$$

لذا شدت روشنایی مساوی است با

$$\frac{i}{a^{۲}+x^{۲}} \times \frac{x}{\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}} = \frac{ix}{(a^{۲}+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

این عبارت در ازاء همان مقدار x که مربع آن را به ماگزیمم میرساند به حد اکثر میرسد یعنی

$$\frac{i^{۲}x^{۲}}{(a^{۲}+x^{۲})^{۳}}$$

ضریب $i^۲$ را بعنوان مقدار ثابت از نظر انداخته و قسمت باقیماندهٔ عبارت مورد بررسی را چنین تبدیل میکنیم:

$$\frac{x^۲}{(a^۲+x^۲)^۳}=\frac{۱}{(x^۲+a^۲)^۲}\left(۱-\frac{a^۲}{x^۲+a^۲}\right)=$$

$$=\left(\frac{۱}{x^۲+a^۲}\right)^۲\left(۱-\frac{a^۲}{x^۲+a^۲}\right)$$

عبارت تبدیل یافته همزمان با عبارت

$$\left(\frac{a^۲}{x^۲+a^۲}\right)^۲\left(۱-\frac{a^۲}{x^۲+a^۲}\right)$$

به ماکزیمم میرسد چونکه ضریب ثابت $a^٤$ در آن مقدار x که حاصلضرب را به حد اکثر میرساند تاثیر ندارد. با توجه به اینکه مجموع توانهای یکم این سازه‌ها،

$$\frac{a^۲}{x^۲+a^۲}+\left(۱-\frac{a^۲}{x^۲+a^۲}\right)=۱$$

مقداری ثابت است استنباط می‌کنیم که حاصلضرب مورد نظر وقتی بزرگترین می‌شود که

$$\frac{a^۲}{x^۲+a^۲}:\left(۱-\frac{a^۲}{x^۲+a^۲}\right)=۲:۱$$

(به صفحات ۱۸۰—۱۸۱ مراجعه شود).

معادلهٔ زیر را داریم:

$$a^۲=۲x^۲+۲a^۲-۲a^۲$$

بعد از حل این معادله، حاصل می‌نمائیم:

$$x=\frac{a}{\sqrt{۲}}\approx ۰{,}۷۱a$$

سکه در صورتی تا حد اکثر روشن می‌شود که اگر منبع نور در ارتفاع ۰,۷۱ فاصلهٔ تصویر منبع تا سکه قرار گیرد. دانستن این نسبت به تعبیهٔ روشنایی بهتر محل کار کمک می‌نماید.

فصل هشتم

تصاعدها

$$1\frac{2}{3};\ 10\frac{5}{6};\ 20;\ 29\frac{1}{6};\ 38\frac{1}{3}$$

باستانی‌ترین تصاعد

مسئله

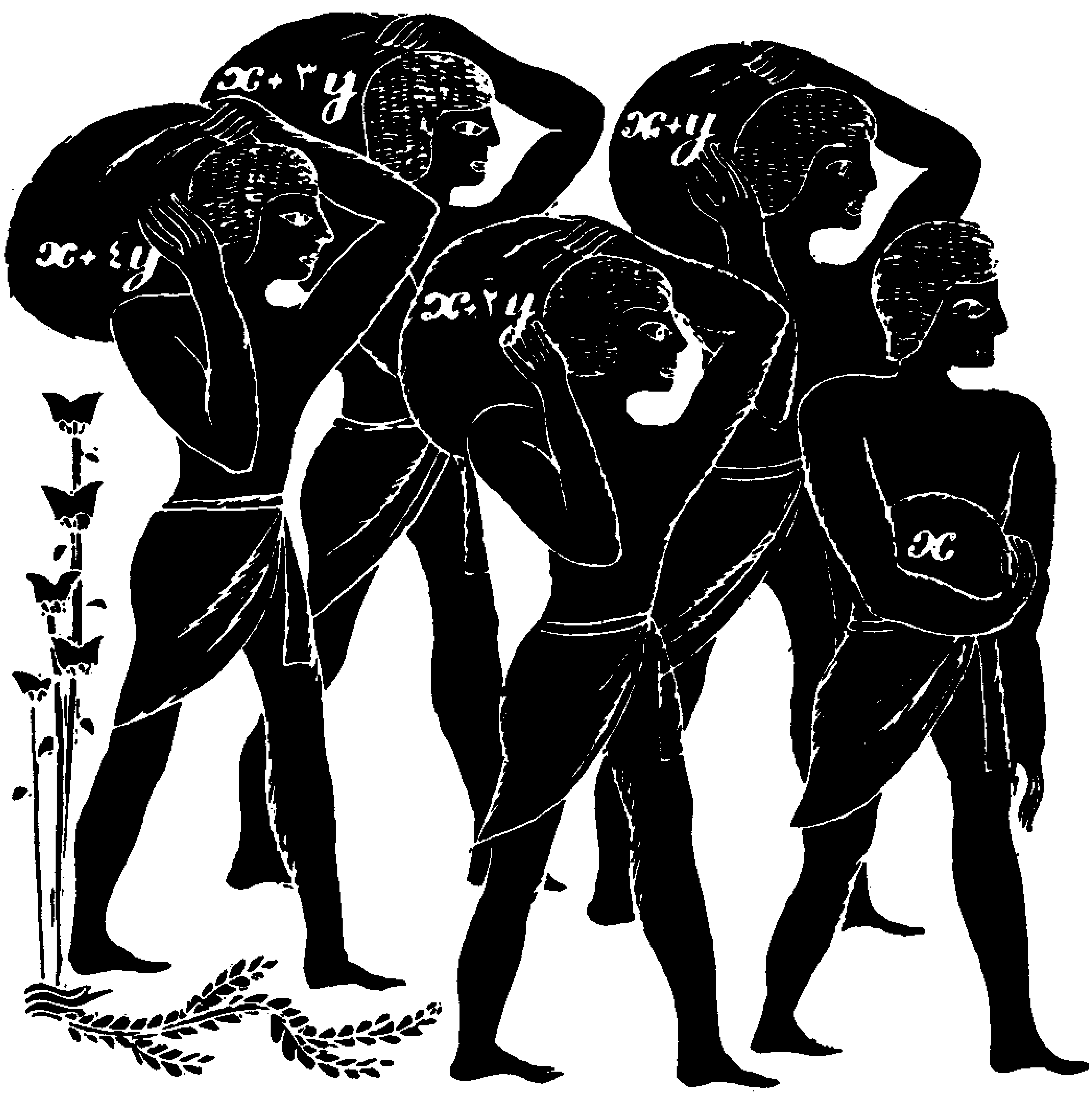
قدیمی‌ترین مسئلهٔ مربوط به تصاعدها مسئله‌ای در بارهٔ پاداش مخترع شطرنج بشمار میرود که دو هزار سال سابقه دارد. و اما مسئلهٔ تقسیم غله که در پاپیروس* مصری مشهور ریند نوشته شده خیلی قدیمی‌تر است. این پاپیروس که توسط ریند در اواخر قرن گذشته کشف گردیده در حدود ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده و رونوشتی است از یک رسالهٔ ریاضی دیگر که احتمالا مربوط به سه هزار سال قبل از میلاد باشد. در میان مسایل حسابی، جبری و هندسی این سند مسئلهٔ زیر نیز آمده است (آنرا بنقل از زبان خود می‌آوریم):

صد پیمانه غله را بین پنج نفر طوری باید تقسیم کرد که دومی به همان نسبت زیادتر از اولی بگیرد که سومی زیادتر از دومی، و پنجمی زیادتر از چهارمی حاصل می‌نمایند. و یک نکتهٔ دیگر آنکه دو نفر اولی باید هفت مرتبه کمتر از سه نفر دیگر حاصل کنند.

به هر کدام چقدر باید داد؟

---

* پاپیروس به طومارهای مصر قدیم گفته میشود که با خط هیروگلیف نوشته میشده است.



شکل ۳۳

حل

واضح است مقدار غله‌ای که شریکان تقسیم حاصل نمودند تصاعد حسابی افزایشی را تشکیل میدهد. فرض کنیم جملهٔ اول آن x، و قدر تفاوت آن y باشد، در این صورت،

سهم نفر اولی x

" " دومی . . . . . $x+y$

" " سومی . . . . . $x+2y$

" " چهارمی . . . . . $x+3y$

" " پنجمی . . . . . $x+4y$

بر اساس شرایط مسئله، دو معادلهٔ زیر را تشکیل میدهیم:

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100, \\ 7\left[x+(x+y)\right]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y) \end{cases}$$

معادله اولی بعد از ساده ساختن، چنین شکلی را بخود میگیرد:

$$x+ ۲y = ۲۰$$

و دومی:

$$۱۱x = ۲y$$

بعد از حل این دستگاه، حاصل می‌کنیم:

$$x = ۱\frac{۲}{۳},\ y = ۹\frac{۱}{۶}$$

یعنی غله باید به قسمت‌های زیر تقسیم شود:

$$۱\frac{۲}{۳},\ ۱۰\frac{۵}{۶},\ ۲۰,\ ۲۹\frac{۱}{۶},\ ۳۸\frac{۱}{۳}$$

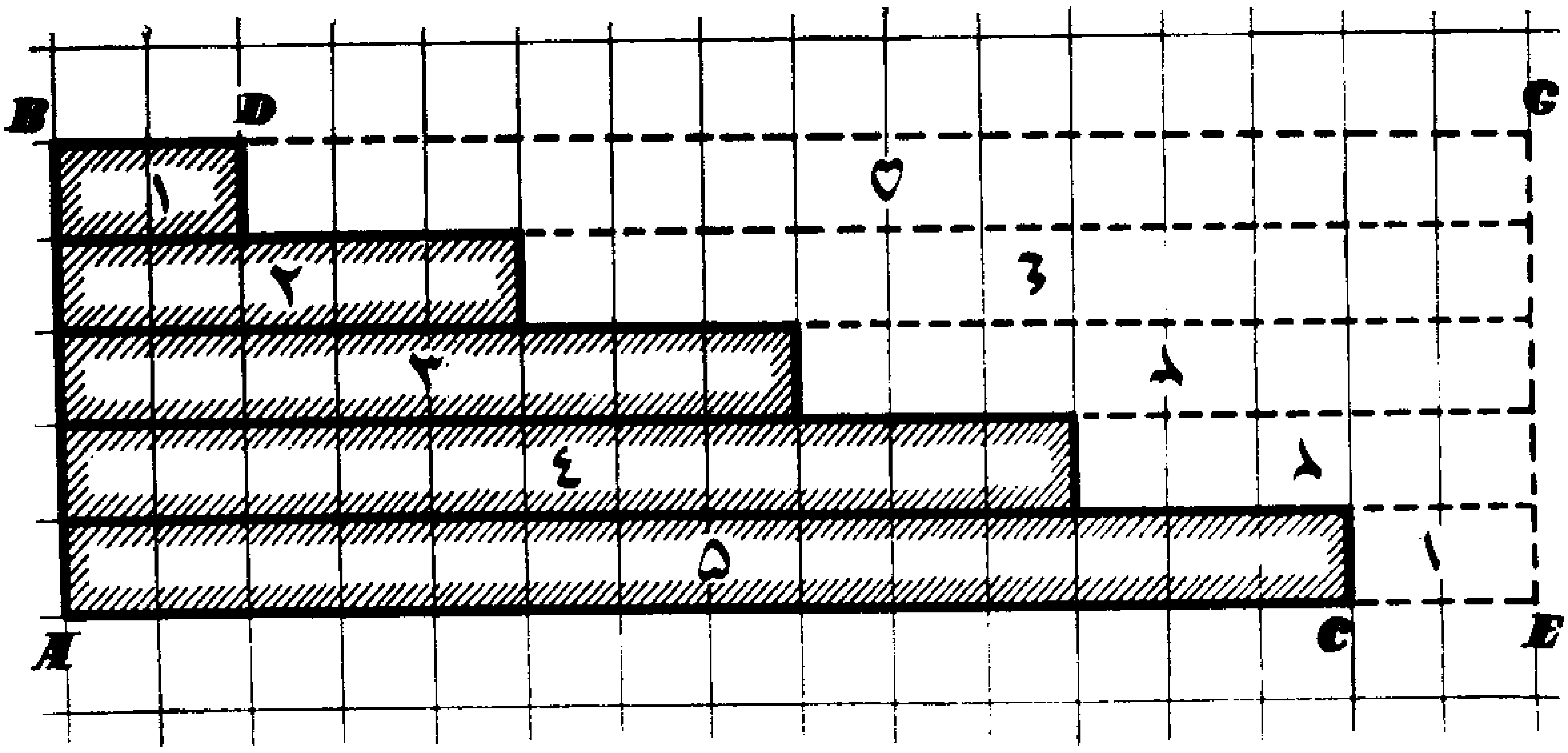
جبر روی کاغذ شطرنجی

با وجودیکه از عمر این مسئلهٔ تصاعد پنجاه قرن می‌گذرد در مطالب درسی مدارس در زمان نسبتاً جدید عرض اندام نموده است. در کتاب درسی ماگنیتسکی که دویست سال قبل بچاپ رسیده و طی نیم‌قرن نقش راهنمای اساسی تعلیمات دبستانی را ایفاء کرده بود گرچه موضوع تصاعد درج گردیده ولی فرمول‌های عمومی که مقادیر وارده را بهم مربوط سازد در آن وجود نداشت. و خود تدوین‌کنندهٔ کتاب درسی نیز به آسانی از عهدهٔ این مسایل بر نمی آمده است. و لکن فرمول مجموعهٔ جمله های تصاعد حسابی را به آسانی می‌توان به یک شیوهٔ ساده و عینی به کمک کاغذ شطرنجی استخراج کرد. روی چنین کاغذی، هر تصاعد حسابی بصورت یک شکل پلکانی نمایش داده میشود. بطور مثال، شکل $ABDC$ در شکل ۳٤، تصاعد

$$۲,\ ۵,\ ۸,\ ۱۱,\ ۱٤$$

را نمایش میدهد.

برای تعیین مجموعهٔ جملات آن، نقشه را تا حصول مستطیل $ABGE$ تکمیل میکنیم. در نتیجه، دو شکل مساوی $ABDC$ و $DGEC$ حاصل می‌شود. مساحت هر کدام از آنها، مجموعهٔ



شکل ۳٤

جملات تصاعد را نمایش می‌دهد. یعنی دو برابر مجموعهٔ تصاعد، مساوی به مساحت مستطیل $ABGE$ است یعنی

$$(AC + CE) \times AB$$

اما $AC + CE$ مجموعهٔ جملهٔ اول و پنجم تصاعد را، و AB تعداد جملات آنرا نمایش می‌دهد. بنا بر این، دو برابر مجموعه:

$$۲S = \text{(مجموع جملات کناری)} \times \text{(تعداد جملات)}$$

و یا

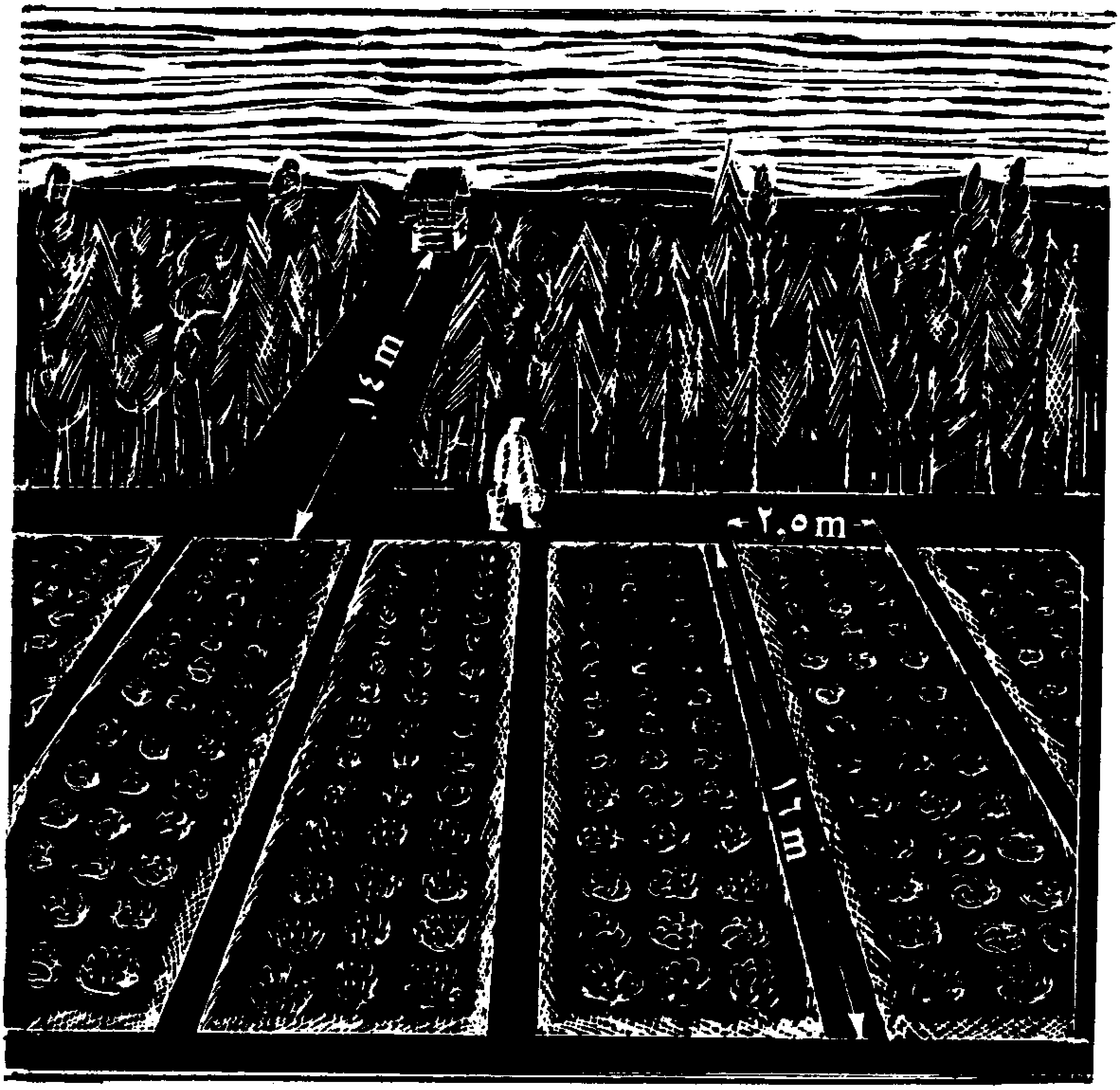
$$S = \frac{\text{(جملهٔ اول + جملهٔ آخر)} \times \text{(تعداد جملات)}}{۲}$$

آبپاشی باغچه

مسئله

باغچه‌ای از ۳۰ کرت، هر یکی بطول ۱٦ متر و عرض ۲,۵ متر، تشکیل شده است. برای آب دادن باغچه، باغبان آب را با سطل از چاه واقع در ۱٤ متری کنار باغچه (شکل ۳۵) میگیرد و از طول کرت‌ها می‌گذرد، ضمناً یک محمولهٔ آب برای آبپاشی تنها یک کرت کافی می‌باشد.

باغبان باید چقدر راه بپیماید تا تمام کرت‌ها را آبپاشی کند؟ راه از چاه شروع، و به چاه ختم می‌شود.



شکل ۳۵

حل

برای آب دادن کرت اول باغبان باید راه

$$۱۴ + ۱۶ + ۲,۵ + ۱۶ + ۲,۵ + ۱۴ = ۶۵ \text{ m}$$

را بپیماید. برای آب دادن کرت دوم، باغبان راه

$$۱۴ + ۲,۵ + ۱۶ + ۲,۵ + ۱۶ + ۲,۵ + ۲,۵ + ۱۴ =$$
$$= ۶۵ + ۵ = ۷۰ \text{ m}$$

را می‌پیماید. هر کرت بعدی، ایجاب می‌نماید راهی ۵ متر طولانی‌تر از دفعهٔ قبل پیموده شود. تصاعد زیر را داریم:

$$۶۵;\ ۷۰;\ ۷۵;\ \ldots;\ ۶۵ + ۵ \times ۲۹$$

مجموعهٔ جملات آن مساوی است به

$$\frac{(٦٥ + ٦٥ + ٢٩ \times ٥)\,٣٠}{٢} = ٤١٢٥\ \mathrm{m}$$

باغبان برای آبپاشی تمامی باغچه، راهی برابر به ٤,١٢٥ کیلومتر را می‌پیماید.

تغذیهٔ مرغ ها

مسئله

برای ٣١ مرغ یک مقدار غذا از قرار هفته‌ای یک دکالیتر برای هر مرغ ذخیره شده بود. اول فرض شده بود که تعداد مرغ ها تغییر نکند. ولی چون در حقیقت امر تعداد مرغ ها از قرار یک مرغ در هفته کاهش می‌یافت لذا غذای ذخیره شده برای مدتی دو برابر طولانی‌تر کفایت نمود. مقدار ذخیرهٔ غذا چقدر بوده و در آغاز امر برای چه مدتی در نظر گرفته شده بود؟

حل

فرض کنیم x دکالیتر غذا برای مدت y هفته ذخیره شده بود. چون غذا برای ٣١ مرغ از قرار یک دکالیتر برای هر مرغ در هفته در نظر گرفته شده لذا

$$x = ٣١\,y$$

در هفتهٔ اول ٣١ دکالیتر، در هفتهٔ دوم ٣٠ دکالیتر و در هفتهٔ سوم ٢٩ دکالیتر به مصرف رسید و الی آخر تا آخرین هفتهٔ مدت مضاعف وقتیکه

$$(٣١ - ٢\,y + ١)^{*}$$ دکا لیتر

به مصرف رسید.

* توضیح آنکه مصرف غذا طی

هفتهٔ اول	٣١	دکالیتر
» دوم	$٣١ - ١$	»
» سوم	$٣١ - ٢$	»
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
» $٢y$ ـم	$٣١ - (٢y - ١) = ٣١ - ٢y + ١$	»

است.

بنا بر این، تمام ذخیره عبارت بود از

$$x = ۳۱\,y = ۳۱ + ۳۰ + ۲۹ + \dots + (۳۱ - ۲\,y + ۱)$$

مجموعهٔ $۲y$ جملات تصاعد که جملهٔ اول آن ۳۱، و آخری $۳۱ - ۲y + ۱$ است، مساوی است به

$$۳۱\,y = \frac{(۳۱ + ۳۱ - ۲\,y + ۱)\,۲y}{۲} = (۶۳ - ۲\,y)\,y$$

چون y نمیتواند صفر باشد لذا ما حق داریم تا هر دو طرف تساوی را به این ضریب تحویل دهیم. حاصل می‌کنیم:

$$۳۱ = ۶۳ - ۲\,y, \quad y = ۱۶$$

از اینجا

$$x = ۳۱\,y = ۴۹۶$$

۴۹۶ دکالیتر غذا برای ۱۶ هفته ذخیره شده بود.

دستهٔ زمین کن ها

مسئله

شاگردان دورهٔ پایان دبیرستان متعهد شدند در محوطهٔ مدرسه خندقی حفر نمایند و برای این منظور دستهٔ زمین‌کنی را **تشکیل** دادند هرگاه تمام نفرات دستهٔ زمین‌کن ها کار میکردند خندق در مدت ۲۴ ساعت حفر میگردید. ولی در واقعیت اسر اول تنها یک عضو دسته شروع بکار نمود. بعد از مدتی دومی دست بکار شد، بعد، با فاصلهٔ برابر به همان مدت، سومی، و باز هم پس از همان فاصله، چهارمی و الی آخر شروع بکار نمودند. در اثر محاسبه معلوم گردید که دانش‌آموز اولی ۱۱ مرتبه بیشتر از آخری کار کرده بود.

آخری چه مدتی کار کرد؟

حل

فرض کنیم که عضو آخری دسته x ساعت کار کرده باشد، در این صورت اولی $۱۱x$ ساعت کار کرده است. همچنین

اگر عدهٔ دانش‌آموزان حفرکنندهٔ خندق y باشد در آنصورت تعداد کل ساعات کار همچون مجموعهٔ y جملهٔ تصاعد کاهشی که جملهٔ اولی آن $11x$، و آخری x است تعیین می‌گردد یعنی

$$\frac{(11x+x)\,y}{2}=6\,xy$$

از طرف دیگر، معلوم است که دستهٔ y نفری اگر تمام نفرات آن کار میکردند، خندق را در مدت ۲۴ ساعت حفر می‌کرد یعنی برای انجام کار، $24y$ ساعت کار ضرور است.

بنا بر این،

$$6\,xy=24\,y$$

چون y نمیتواند صفر باشد لذا می‌توانیم معادله را به این ضریب تحویل دهیم و پس از انجام این عمل حاصل می‌نمائیم:

$$6\,x=24$$

و

$$x=4$$

بدین گونه آن عضو دسته که آخر از همه شروع بکار نمود ۴ ساعت کار کرد.

ما به سوال مسئله جواب دادیم. ولی اگر ما از روی کنجکاوی میخواستیم بدانیم که چند نفر در دسته بودند در اینصورت با وصف اینکه این عدد (بصورت حرف y) در معادله وارد بود قادر نبودیم این را بدانیم. برای حل این مطلب، در مسئله داده‌های کافی وجود ندارد.

سیب ها

مسئله

باغبانی نصف تعداد کل سیب‌های خود را با نصف یک سیب به مشتری اول، نصف تعداد سیب‌های باقیمانده را با نصف یک سیب به مشتری دوم، نصف تعداد سیب‌های باقیمانده را با نصف یک سیب به مشتری سوم و الی آخر فروخت. به مشتری هفتم، وی نصف تعداد سیب‌های باقیمانده را با نصف یک سیب بفروش

رسانید. بعد از این او دیگر سیب نداشت. باغبان چند سیب داشت؟

حل

اگر تعداد اولیهٔ سیب‌ها x باشد در اینصورت مشتری اولی

$$\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{x+۱}{۲}$$

عدد، دومی

$$\frac{۱}{۲}\left(x-\frac{x+۱}{۲}\right)+\frac{۱}{۲}=\frac{x+۱}{۲^{۲}}$$

عدد، سومی

$$\frac{۱}{۲}\left(x-\frac{x+۱}{۲}-\frac{x+۱}{٤}\right)+\frac{۱}{۲}=\frac{x+۱}{۲^{۳}}$$

عدد، و هفتمی

$$\frac{x+۱}{۲^{۷}}$$

عدد سیب خریدند. معادلهٔ زیر را داریم:

$$\frac{x+۱}{۲}+\frac{x+۱}{۲^{۲}}+\frac{x+۱}{۲^{۳}}+\ldots+\frac{x+۱}{۲^{۷}}=x$$

یا

$$(x+۱)\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۲^{۳}}+\ldots+\frac{۱}{۲^{۷}}\right)=x$$

پس از محاسبهٔ مجموعهٔ جملات تصاعد هندسی داخل پرانتز، حاصل می‌نمائیم:

$$\frac{x}{x+۱}=۱-\frac{۱}{۲^{۷}}$$

و

$$x=۲^{۷}-۱=۱۲۷$$

تعداد کل سیب‌ها ۱۲۷ عدد بوده است.

خرید اسپ

مسئله

در کتاب حساب قدیمی ماگنیتسکی، مسئلهٔ مسخرهٔ زیر را پیدا می‌کنیم که آنرا از قول خود بدون حفظ زبان اصل در اینجا می‌آورم:

شخصی اسپی را ۱۵۶ روبل فروخت، ولی مشتری بعد از گرفتن اسپ تغییر عقیده داد و آنرا به فروشنده مسترد داشته گفت:

— روی چه حسابی اسپ را باین قیمت بخرم، آخر، باین پول نمی ارزد.

آنگاه فروشنده شرایط دیگری را پیشنهاد نمود:

— اگر به نظر تو قیمت اسپ زیاد است می‌توانی میخ های نعل آنرا بخری و در اینصورت اسپ را به تو برایگان میدهم.

هر نعل دارای ۶ میخ است. برای میخ اول بمن $\frac{۱}{۴}$ کوپک، برای میخ دوم $\frac{۱}{۲}$ کوپک، برای میخ سوم ۱ کوپک و الی آخر بده.

مشتری که فریفتهٔ این قیمت ناچیز شده و تازه هم میخواست اسپ را برایگان بگیرد بحساب اینکه میخها بیش از ۱۰ روبل خرج بر نمی ندارد شرایط فروشنده را قبول کرد.

خریدار چقدر اشتباه کرد؟

حل

برای ۲۴ میخ نعل، لازم شد

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}+۱+۲+۲^{۲}+۲^{۳}+\ldots+۲^{۲۴-۳}$$

کوپک پرداخت گردد. این مجموعه مساوی است به

$$\frac{۲^{۲۱}\times ۲-\frac{۱}{۴}}{۲-۱}=۲^{۲۲}-\frac{۱}{۴}=۴۱۹۴۳۰۳\frac{۳}{۴}$$

کوپک یعنی تقریباً ۴۲ هزار روبل. با این شرایط، هدیه کردن اسپ هم چیزی نیست.

پاداش یک سپاهی

مسئله

از یک کتاب درسی ریاضی روسی قدیمی دیگر (چاپ سال ۱۷۹۵) مسئلهٔ زیر را اقتباس میکنیم:

«یک سپاهی پاداشی از قرار ۱ کوپک برای زخم اول، ۲ کوپک برای زخم دوم، ۴ کوپک برای زخم سوم و الی آخر گرفت. محاسبه نشان داد که سپاهی جمعاً ۶۵۵ روبل و ۳۵ کوپک پاداش گرفت. تعداد زخم‌های او چند بود؟».

حل

معادله‌ای تشکیل میدهیم:

$$۶۵۵۳۵ = ۱ + ۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + \dots + ۲^{x-۱}$$

یا

$$۶۵۵۳۵ = \frac{۲^{x-۱} \times ۲ - ۱}{۲ - ۱} = ۲^{x} - ۱$$

از اینجا به آسانی از طریق آزمایش و خطا این نتیجه را حاصل می‌کنیم:

$$۶۵۵۳۶ = ۲^{x}, \quad x = ۱۶$$

با این اصول پرداخت پاداش، سپاهی باید ۱۶ زخم برداشته و با این زخم‌ها زنده بماند تا به دریافت پاداش ۶۵۵ روبل و ۳۵ کوپک سزاوار گردد.

فصل نهم

عمل هفتم ریاضی

«e»

عمل هفتم

ما قبلا متذکر شدیم که عمل پنجم یعنی به توان رسانیدن دارای دو عمل معکوس می‌باشد. اگر

$$a^b = c$$

در آنصورت پیدا نمودن a یعنی استخراج ریشه یکی از دو عمل معکوس میباشد، و پیدا نمودن b یعنی لگاریتم‌گیری عمل معکوس دیگر است. گمان میکنیم که خوانندهٔ این کتاب با تعلیمات لگاریتم در حدود دورهٔ دبیرستان آشنا باشد. لابد وی بدون اشکال در می‌یابد که عبارت زیر،

$$a^{\lg_a b}$$

مساوی به چه می‌باشد.

به آسانی میتوان درک کرد که اگر پایهٔ لگاریتم، a، را به توان لگاریتم عدد b برسانیم در آنصورت باید همان عدد b حاصل شود.

لگاریتم برای چه منظوری اختراع شده است؟ طبعاً برای تسریع و ساده ساختن محاسبات. نپر مخترع اولین جدول‌های لگاریتم در بارهٔ انگیزهٔ خود چنین می‌گوید:

«تا جائیکه می‌توانستم کوشیدم تا از مشکلات و خستگی مربوط به محاسبات که کسالت و دلتنگی ناشی از آن، عدهٔ زیادی را از مطالعهٔ ریاضی میترساند رهایی یابیم».

حقیقتاً لگاریتم علاوه بر اینکه امکان میدهد عملیاتی را اجراء نمائیم که بدون کمک لگاریتم به اشکال زیاد بر میخورد (مثلا استخراج ریشهٔ درجهٔ دلخواه) محاسبات را فوق العاده آسان و سریع میسازد.

این گفتهٔ لاپلاس بی‌اساس نیست که «اختراع لگاریتم کار محاسبهٔ چندماهه را تا چندروزه کوتاه ساخته گویا که عمر منجمین را دوچندان میسازد». این ریاضی‌دان بزرگ در بارهٔ منجمان صحبت مینماید زیرا آنها با محاسبات بخصوص پیچیده و خسته‌کننده روبرو میشوند. اما بالحق گفتهٔ او عموماً به تمام کسانیکه با برآورد اعداد روبرو میباشند مربوط میشود.

ما که به استفاده از لگاریتم و آسانی برآوردها که از آن ناشی میشود عادت کرده‌ایم بسختی میتوانیم آن وجد و شگفتی را که پیدایش لگاریتم باعث شد در نظر مجسم کنیم.

بریگس یکی از معاصران نپر که بعداً به اختراع لگاریتم اعشاری شهرت یافت پس از دریافت رسالهٔ نپر نوشته بود: «نپر با لگاریتم‌های نو و عجیب خود مرا مجبور ساخت بشدت با کله و دست کار کنم. امیدوارم که در فصل تابستان او را ببینم زیرا هیچگاه کتابی نخوانده‌ام که بیشتر مورد پسند من قرار گرفته و مرا متحیر ساخته باشد». بریگس تصمیم خود را عملی ساخته و به اسکاتلند رفت تا مخترع لگاریتم را ملاقات نماید. در اثنای ملاقات بریگس گفت:

«من این سفر دور و دراز را تنها به یک منظور متحمل شدم و آن اینکه شما را ببینم و آگاه شوم که بکمک کدام ابزار تیزهوشی و هنر، شما به فکر لگاریتم، این مددکار عالی منجمان دست یافتید. با وجود این، من حالا بیشتر از آن جهت تعجب میکنم که چرا هیچ کس قبلا آنرا پیدا نکرد زیرا اکنون که از آن اطلاع حاصل کردم فوق‌العاده ساده بنظر میرسد».

رقیب های لگاریتم

قبل از اختراع لگاریتم، ضرورت به تسریع محاسبات، جداول نوع دیگری را بمیان آورد که بکمک آنها عمل ضرب نه با عمل

جمع بلکه با عمل تفریق تعویض میگردید. این جداول بر اتحاد

$$ab = \frac{(a+b)^۲}{۴} - \frac{(a-b)^۲}{۴}$$

مبتنی است که در صورت باز کردن پرانتز بآسانی میتوان از درستی آن یقین حاصل نمود.

هرگاه ربع مربعات را حاضر و آماده داشته باشیم میتوانیم بدون انجام عمل ضرب، حاصلضرب دو عدد را پیدا کنیم. برای این منظور ربع مربع حاصل‌تفریق آنها را از ربع مربع حاصل‌جمع آنها تفریق می‌کنیم. همان جداول، مجذور کردن و استخراج جذر را آسان میکند و باتفاق جدول اعداد معکوس عمل تقسیم را نیز آسان میگرداند. برتری آنها نسبت به جداول لگاریتمی در آنست که نتایج دقیق و نه تقریبی را بدست میدهد. در عوض، این جداول در بعضی موارد خیلی مهمتر دیگر از لگاریتم دست کم دارد. در صورتیکه جداول ربع مربع‌ها تنها حاصلضرب دو عدد را میدهد لگاریتم‌ها دریافت حاصلضرب تعداد دلخواه ضرایب و بعلاوه، رسانیدن به هر توان و استخراج ریشهٔ هر درجه (صحیح یا کسری) را ممکن میسازد. بطور مثال، محاسبهٔ در صدهای مرکب بکمک جداول ربع مربع‌ها غیرممکن است.

معهذا جداول ربع مربع‌ها بعد از پیدایش هرگونه لگاریتم نیز بچاپ میرسد. در سال ۱۸۵۶ در فرانسه جدولی با عنوان زیر انتشار یافت:

«جدول مربعات اعداد از ۱ الی ۱۰۰۰ ملیون که بکمک آن با اسلوب ساده‌تر از روش لگاریتم، حاصلضرب دقیق اعداد دریافت میشود. تالیف آلکساندر کوسار».

همین اندیشه به عدهٔ زیادی بی‌خبر از آنکه مدتهاست که جامهٔ عمل پوشیده است دست میدهد. یکی دو بار مخترعین جداول مشابه به من با این موضوع مراجعه کردند. و پس از آنکه از قدامت سیصدسالهٔ اختراعشان آگاهی یافتند بسیار تعجب نمودند.

یک رقیب دیگر نسبتاً جوان لگاریتم، جداول محاسباتی است که در بسیاری کتب مرجع فنی درج میگردد.

این، جداول جامعی است که مشتمل بر ستون‌های زیر میباشد: سربع اعداد، مکعب، جذر، کعب، اعداد معکوس، طول محیط دایره و مساحت دایره برای اعداد از ۲ تا ۱۰۰۰. این جداول برای بسیاری محاسبات فنی خیلی مناسب بوده ولی همیشه کافی نمیباشد. جداول لگاریتمی حدود وسیعتر کاربرد را دارد.

تکامل جداول لگاریتمی

مدت کمی پیش در مدارس ما جداول لگاریتمی ۵ رقمی مورد استعمال بود. حالا از جداول ٤ رقمی استفاده میشود چونکه برای محاسبات فنی کاملا کافی است. ولی در اکثر موارد برای رفع نیازمندیهای عملی میتوان با موفقیت حتی از مانتیس‌های سه‌رقمی استفاده نمود زیرا در اندازه‌گیری‌های معمولی کمتر اتفاق می افتد که بیشتر از سه رقم لازم شود.

اندیشهٔ کافی بودن مانتیس‌های کوتاهتر چندی پیش بمیان آمد. من زمانی را بیاد دارم که در مدارس ما از جلدهای سنگین لگاریتم ۷ رقمی استفاده میشد که فقط بعد از مقاومت شدید جای خود را به لگاریتم ۵ رقمی داد. اما لگاریتم ۷ رقمی نیز در زمان پیدایش خود (در سال ۱۷۹٤) یک تازگی غیر مجاز بنظر میرسید. نخستین لگاریتم‌های اعشاری که باهتمام ریاضی‌دان اهل لندن هنری بریگس تدوین شد (در سال ۱٦۲٤) ١٤ رقمی بود. چند سال بعد جداول ۱۰ رقمی آندریان ولاک ریاضی‌دان هلندی جای آنها را گرفت.

بطوریکه میبینیم سیر تکاملی جداول لگاریتم مورد استفادهٔ همگانی از مانتیس‌های چندین‌رقمی بسوی مانتیس‌های کوتاهتر بوده و هنوز هم پایان نیافته چونکه عدهٔ بسیاری هنوز به این نکتهٔ ساده پی نبرده‌اند که دقت محاسبه نمیتواند از دقت اندازه‌گیری تجاوز کند.

کوتاهی مانتیس دو نتیجهٔ عملی مهم را بدنبال دارد: اولا، کاهش قابل ملاحظهٔ حجم جدول و دوماً، سادگی استفاده از جداول که از آن ناشی میشود و در نتیجه، تسریع محاسبات

بکمک آنها. لگاریتم‌های ۷ رقمی اعداد در حدود ۲۰۰ صفحهٔ قطع بزرگ، لگاریتم‌های ۵ رقمی ۳۰ صفحهٔ قطع دو مرتبه کوچکتر، ٤ رقمی حجم ده مرتبه کوچکتر را اشغال نموده و در دو صفحهٔ قطع بزرگ جا میگیرد در صورتیکه لگاریتم‌های ۳ رقمی میتواند در یک صفحه جا گیرد. و اما در مورد سرعت محاسبه باید گفت که مثلا انجام محاسبه بکمک جداول ۵ رقمی از محاسبه بکمک جداول ۷ رقمی سه برابر کمتر وقت میگیرد.

عجایب لگاریتمی

در صورتیکه نیازمندیهای محاسبات در زندگی روزمره و در امور فنی کاملا بکمک جداول ۳ و ٤ رقمی تامین میشود از طرف دیگر در خدمت پژوهشگران نظری جداولی با تعداد خیلی زیادتر ارقام، حتی نسبت به لگاریتم ١٤ رقمی بریگس، قرار دارد. بطور کلی، لگاریتم در اکثر موارد عدد گنگ میباشد و با هیچ تعداد ارقام نمی‌تواند دقیقاً بیان شود. لگاریتم اکثر اعداد اعم از تعداد ارقام خود تنها بصورت تقریبی بیان میگردد و هر اندازه که تعداد ارقام مانتیس زیادتر باشد بهمان اندازه دقیقتر است. بعضی اوقات در کارهای علمی دقت لگاریتم ١٤ رقمی* کافی نیست ولی در میان ۵۰۰ نمونهٔ مختلف جداول لگاریتمی که از زمان پیدایش لگاریتم منتشر شده پژوهشگر همواره جدول مورد نیازش را پیدا مینماید. بطور مثال، از لگاریتم ۲۰ رقمی اعداد از ۲ الی ۱۲۰۰ نام میبریم که در سال ۱۷۹۵ توسط کاله در فرانسه انتشار یافت. برای دستهٔ بسیار محدودتر اعداد، جداول لگاریتم با تعداد هنگفت ارقام اعشار موجود است. بطوریکه من یقین حاصل کرده‌ام بسیاری از ریاضی‌دانان در مورد موجودیت اینگونه عجایب لگاریتمی حتی خبر ندارند.

---

* اتفاقاً لگاریتم ١٤ رقمی بریگس تنها برای اعداد از ۱ الی ۲۰۰۰۰ و از ۹۰۰۰۰ الی ۱۰۱۰۰۰ موجود است.

اینک این لگاریتم‌های غول‌آسا را که اعشاری نبوده بلکه طبیعی می‌باشد ذکر میکنیم* :

جداول ۴۸ رقمی ولفرام برای اعداد تا ۱۰۰۰۰ ؛

جداول ۶۱ رقمی شارپ ؛

جداول ۱۰۲ رقمی پارکهرست و سرانجام، لگاریتم بسیار عجیب :

لگاریتم ۲۶۰ رقمی آداسس.

اما در حالت اخیر ما بجای جدول، با لگاریتم باصطلاح طبیعی پنج عدد ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۰ با ضریب ۲۶۰ رقمی تبدیل به دستگاه لگاریتم اعشاری سروکار داریم. بآسانی میتوان درک کرد که با دانستن لگاریتم این پنج عدد میتوان از طریق جمع یا ضرب ساده، لگاریتم تعداد زیاد اعداد مرکب را حاصل نمود. بطور مثال، لگاریتم ۱۲ مساوی به مجموعهٔ لگاریتم‌های ۲، ۲ و ۳ است و الی آخر.

خطکش محاسبه یا «لگاریتم چوبی» را نیز کاملا بالحق میشد در شمار عجایب لگاریتمی قرار داد اگر این ابزار پرمایه بخاطر سهولت استفاده، برای تکنیسین‌ها ابزار معمولی محاسبه نگردیده بود همانطور که چتکهٔ ۱۰ دانه‌ای برای کارمندان دفتری شده است. عادت، احساس تعجب را در برابر ابزاری که بر اصل لگاریتم کار میکند و حتی از استفاده‌کنندگان خود ایجاب نمینماید ماهیت لگاریتم را بدانند خنثی میکند.

لگاریتم در صحنه

بدون شک، شگفت‌ترین شعبده‌ای که در برابر تماشاگران توسط محاسبان حرفه‌ای اجراء میشود چنین است. شما از قبل از آگهی نمایش اطلاع دارید که محاسب ماهری ریشه‌های درجه-

---

* لگاریتم طبیعی آنست که نه بر مبنای ۱۰ بلکه بر مبنای ۲,۷۱۸... محاسبه شده است. در بارهٔ این عدد بعداً صحبت خواهیم نمود.

های عالی را از اعداد چندین‌رقمی در ذهن خود استخراج مینماید و در خانه‌تان با حوصلهٔ تمام توان ۳۱ — ام یک عدد را محاسبه نموده و مصمم هستید تا محاسب را با عدد غول‌آسای ۳۵ رقمی از پا در آورید. در لحظهٔ مناسب، شما با سخنان زیر به محاسب مراجعه مینمائید:

— سعی کنید ریشهٔ ۳۱ — ام را از عدد ۳۵ رقمی زیر استخراج نمائید! من دیکته میکنم شما هم یادداشت نمائید.

محاسب ماهر گچ را در دست گرفته و پیش از آنکه شما دهانتان را برای گفتن رقم اول باز کنید او دیگر جواب را نوشته است: ۱۳.

او بدون دانستن عدد، ریشه را، تازه هم ریشهٔ ۳۱ — ام را و آنهم در ذهن خود با سرعت صاعقه استخراج نموده است!..

شما متحیر و دستپاچه میشوید ولی در اینجا هیچ چیز ما فوق‌الطبیعه نیست. راز این شعبده عبارت از آنست که بطور ساده تنها یک عدد ۱۳ وجود دارد که در توان ۳۱ نتیجهٔ ۳۵ رقمی را میدهد. اعداد کوچکتر از ۱۳ کمتر از ۳۵ رقم، و اعداد بزرگتر از ۱۳ بیشتر از ۳۵ رقم میدهد.

و اما محاسب از کجا این را میدانست؟ عدد ۱۳ را چطور پیدا کرد؟ به او لگاریتم‌ها کمک کرد، لگاریتم‌های دورقمی که آنها را برای ۱۵ — ۲۰ عدد از حفظ میداند. حفظ کردن آنها بر خلاف آنچه ممکن است بنظرتان برسد کار چندان مشکلی نیست بویژه اگر از این خصوصیت استفاده کنیم که لگاریتم عدد مرکب برابر است با حاصل‌جمع لگاریتم ضریبهای اول آن. با دانستن لگاریتم ۲، ۳، و ۷* بطور مطمئن، شما لگاریتم اعداد دههٔ اول را نیز میدانید. برای دانستن لگاریتم‌های دههٔ دوم ضروری است لگاریتم چهار عدد دیگر را نیز بیاد داشته باشید.

بهر صورت، محاسب صحنه در ذهن خود جدول لگاریتم‌های دورقمی ذیل را میبیند.

---

* خاطرنشان می‌سازیم که $\lg ۵ = \lg \frac{۱۰}{۲} = ۱ - \lg ۲$

لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد
۱,۰٤	۱۱	۰,۳۰	۲
۱,۰۸	۱۲	۰,٤۸	۳
۱,۱۱	۱۳	۰,٦۰	٤
۱,۱٥	۱٤	۰,۷۰	٥
۱,۱۸	۱٥	۰,۷۸	٦
۱,۲۰	۱٦	۰,۸٥	۷
۱,۲۳	۱۷	۰,۹۰	۸
۱,۲٦	۱۸	۰,۹٥	۹
۱,۲۸	۱۹		

شعبدهٔ ریاضی که شما را متعجب ساخت بصورت زیر بوده است:

$$\lg \sqrt[۳۱]{(\text{۳٥ رقم})} = \frac{۳٤,۰۰۰}{۳۱}$$

لگاریتم مطلوب بین

$$\frac{۳٤}{۳۱} \text{ و } \frac{۳٤,۹۹}{۳۱} \text{ و یا بین ۱,۰۹ و ۱,۱۳}$$

میتواند قرار داشته باشد.

در این فاصله لگاریتم تنها یک عدد صحیح، لگاریتم ۱۳ وجود دارد و برابر ۱,۱۱ است. نتیجه‌ای که شما را گیج نمود بهمین طریق حاصل شده بود. البته برای اینکه این عمل را سریعاً در ذهن انجام دهیم باید از قدرت حاضرجوابی و مهارت حرفه‌ای برخوردار باشیم اما بطوریکه میبینید حقیقت امر بسیار ساده است. حالا خودتان نیز می‌توانید چنین شعبده‌هایی را انجام دهید. اگر نتوانستید در ذهن این کار را بکنید در اینصورت میتوانید روی کاغذ آنرا اجراء نمائید.

فرض کنیم به شما پیشنهاد شده که ریشهٔ ٦٤ — ام را از عدد ٢٠ رقمی استخراج کنید.

بی‌خبر از چگونگی این عدد، شما میتوانید نتیجهٔ استخراج را اعلام کنید: ریشه برابر ٢ است.

واقعاً $\lg\sqrt[٦٤]{(\text{٢٠ رقم})}=\frac{١٩,٠٠٠}{٦٤}$. پس این لگاریتم باید بین $\frac{١٩}{٦٤}$ و $\frac{١٩,٩٩}{٦٤}$ قرار گیرد، یعنی بین ٠,٢٩ و ٠,٣٢. برای یک عدد صحیح تنها یک چنین لگاریتمی موجود و برابر ٠,٣٠... است یعنی لگاریتم عدد ٢.

شما حتی میتوانید باز هم بیشتر گویندهٔ مسئله را متحیر سازید اگر باو بگوئید کدام عدد را میخواست برای شما بازگو کند و آن، عدد «شطرنجی» مشهور است:

$$٢^{٦٤}=١٨\ ٤٤٦\ ٧٤٤\ ٠٧٣\ ٧٠٩\ ٥٥١\ ٦١٦$$

لگاریتم در یک گاوداری

مسئله

مقدار غذای باصطلاح «نگه‌دارنده»* (یعنی آن کمترین مقدار که تنها مصارف مربوط به تولید گرما، فعالیت اعضای داخلی، بازسازی یاخته‌های از میان رفته و غیره را جبران میکند) متناسب با سطح خارجی جسم حیوان است. با دانستن آن، مقدار کالری‌های غذای نگه‌دارندهٔ گاوی بوزن ٤٢٠ کیلوگرم را تعیین نمائید در صورتیکه با همان شرایط، گاوی بوزن ٦٣٠ کیلوگرم به ١٣٥٠٠ کالری ضرورت داشته باشد.

---

* بتفاوت از غذای «محصول‌دهی» یعنی آن قسمت از غذا که برای تولید محصول حیوانی به مصرف میرسد، محصولی که بخاطر آن حیوان نگهداری میشود.

14*

حل

برای حل این مسئلهٔ عملی از رشتهٔ دامداری علاوه بر جبر به کمک هندسه نیز ضرورت داریم. مطابق با شرایط مسئله، مقدار کالری x متناسب با سطح (s) گاو است یعنی

$$\frac{x}{۱۳۵۰۰} = \frac{s}{s_1}$$

که s_1 سطح جسم گاو بوزن ۶۳۰ کیلوگرم میباشد. ما از هندسه میدانیم که سطح (s) اجسام متشابه مانند مربعات ابعاد خطی آنها (l)، و حجمشان (و در نتیجه، وزنشان نیز) مانند مکعب‌های ابعاد خطی با هم نسبت دارد. بنا بر این،

$$\frac{s}{s_1} = \frac{l^۲}{l_1^۲} \text{ ، } \frac{۴۲۰}{۶۳۰} = \frac{l^۳}{l_1^۳} \text{ و لذا } \frac{l}{l_1} = \frac{\sqrt[۳]{۴۲۰}}{\sqrt[۳]{۶۳۰}}$$

از اینجا

$$\frac{x}{۱۳۵۰۰} = \frac{\sqrt[۳]{۴۲۰^۲}}{\sqrt[۳]{۶۳۰^۲}} = \sqrt[۳]{\left(\frac{۴۲۰}{۶۳۰}\right)^۲} = \sqrt[۳]{\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲} ,$$

$$x = ۱۳۵۰۰ \sqrt[۳]{\frac{۴}{۹}}$$

بکمک جداول لگاریتمی دریافت می‌کنیم:

$$x = ۱۰\,۳۰۰$$

گاو به ۱۰ ۳۰۰ کالری ضرورت دارد.

لگاریتم در موسیقی

موسیقی‌دانان کمتر به ریاضی علاقه دارند و با احترامی که نسبت به این علم احساس میکنند آنان اغلب ترجیح میدهند از آن دوری جویند. و اما موسیقی‌دانان، حتی آنهائیکه بتفاوت

از قهرمان پوشکین بنام سالیه‌ری «هماهنگی را با جبر» آزمایش نمیکنند خیلی بیشتر از آنچه خودشان متوجه باشند با ریاضی سروکار پیدا میکنند، تازه هم با هیولاهایی مانند لگاریتم.

به این مناسبت بخود اجازه میدهم قسمتی از مقاله‌ٔ فیزیک‌دان ما شادروان استاد آ. ایخنوالد را نقل کنم.

«رفیق همکلاسی من دوست داشت پیانو بنوازد و از ریاضی خوشش نمی‌آمد. او حتی با لحن تحقیرآمیز میگفت که بین موسیقی و ریاضی هیچ وجه مشترکی وجود ندارد. «راستی که فیثاغورث رابطه‌ای را بین نوسانات صوتی پیدا نموده بود ولی همانا گامای فیثاغورث در موسیقی ما غیر قابل تطبیق از کار در آمده است».

در نظرتان مجسم کنید رفیق من چقدر متاثر شد وقتیکه من به او ثابت کردم که هنگامیکه او پیانو مینوازد در حقیقت لگاریتم می نوازد... در حقیقت هم، باصطلاح «پله های» گامای رنگی در فواصل برابر نسبت به تعداد نوسانات یا طول موج قرار ندارد بلکه از لگاریتم این مقادیر عبارت میباشد. منتها پایه‌ٔ این لگاریتم‌ها نه ۱۰ بلکه ۲ است.

فرض کنیم که نت do از پائین‌ترین اکتاو که آنرا اکتاو صفر می نامیم متناظر با n نوسان در ثانیه باشد. در اینصورت do — ی اکتاو یکم $۲n$ نوسان در ثانیه، do — ی اکتاو m — ام $n \times ۲^m$ نوسان در ثانیه انجام میدهد و الی آخر. تمامی نت‌های گامای رنگی پیانو را به شماره‌های p نمایش میدهیم و ضمناً آهنگ‌های اصلی do در هر اکتاو را برابر صفر فرض میکنیم. در اینصورت مثلا آهنگ sol هفتمین، la نهمین میباشد و الی آخر. آهنگ دوازدهم دوباره do منتها یک اکتاو بالاتر میباشد.

چون در گامای رنگی، تعداد نوسانات هر آهنگ بعدی $\sqrt[۱۲]{۲}$ برابر تعداد نوسانات آهنگ قبلی می‌باشد پس تعداد نوسانات هر آهنگ را میتوان بصورت فرمول زیر بیان نمود:

$$N_{pm} = n \times ۲^m \left(\sqrt[۱۲]{۲}\right)^p$$

14—555

با لگاریتم‌گیری از این فرمول، حاصل میکنیم:

$$\lg N_{pm} = \lg n + m \lg ۲ + p \frac{\lg ۲}{۱۲}$$

یا

$$\lg N_{pm} = \lg n + \left(m + \frac{p}{۱۲}\right) \lg ۲$$

و با برابر یک ($n = ۱$) پذیرفتن تعداد نوسانات پائینترین *do* و تحویل همهٔ لگاریتم‌ها به پایهٔ ۲ (و یا بطور ساده، با قرار دادن $\lg ۲ = ۱$) داریم:

$$\lg N_{pm} = m + \frac{p}{۱۲}$$

از اینجا میبینیم که شماره‌های پرده‌های پیانو عبارتست از لگاریتم تعداد نوسانات اصوات نظیر*. ما حتی میتوانیم بگوئیم که شمارهٔ اکتاو، سرشت (یا مفسر) لگاریتم، و شمارهٔ صوت در این اکتاو** مانتیس این لگاریتم است».

توضیح آنکه مثلا در آهنگ *sol* اکتاو سوم یعنی در عدد $۳ + \frac{۷}{۱۲} (\approx ۳,۵۸۳)$ عدد ۳ لگاریتم تعداد نوسانات این آهنگ، و $\frac{۷}{۱۲}$ $(\approx ۰,۵۸۳)$ مانتیس همان لگاریتم بپایهٔ ۲ میباشد. بنا بر این، تعداد نوسانات $۲^{۳,۵۸۳}$ یعنی ۱۱,۹۸ مرتبه زیادتر از تعداد نوسانات آهنگ *do* ــ ی اکتاو یکم است.

ستاره‌ها، سروصدا و لگاریتم

این عنوان که چیزهای بس متفاوت را در بر میگیرد دور از مسخره‌بازی است. در واقع موضوع ستارگان و سر و صدا در ارتباط نزدیک با لگاریتم بررسی میگردد.

---

* ضرب در ۱۲.

** تقسیم بر ۱۲.

موضوع های سروصدا و ستارگان از آن رو در اینجا با هم آمده که هم حجم سر و صدا و هم درخشندگی ستاره‌ها به یک طریق، بکمک مقیاس لگاریتمی ارزیابی میشود.

منجمان ستارگان را بر حسب درجهٔ درخشندگی سرئی‌شان به ستاره‌های بزرگی یکم، دوم، سوم و غیره تقسیم‌بندی مینمایند. بزرگی‌های متوالی ستارگان توسط چشم بصورت جملات تصاعد حسابی درک میگردد. ولی درخشندگی فیزیکی آنها بر حسب ضابطهٔ دیگری تغییر میکند و آن اینکه درخشندگی‌های عینی آنها تصاعد هندسی با قدر نسبت ۲٫۵ را تشکیل میدهد. بآسانی میتوان فهمید که «بزرگی» ستاره چیزی جز لگاریتم درخشندگی فیزیکی آن نمیباشد. بطور مثال، ستارهٔ بزرگی سوم نسبت به ستارهٔ بزرگی یکم $2{,}5^{3-1}$ یعنی ۶٫۲۵ مرتبه درخشانتر است. خلاصه اینکه ضمن ارزیابی درخشندگی سرئی ستارگان، منجم جدول لگاریتمی را بپایهٔ ۲٫۵ بکار میبرد. در اینجا روی این روابط جالب، بیشتر مکث نمینمایم زیرا در یکی دیگر از کتابهای من بنام «سرگرمی‌های نجومی» جای کافی باین موضوع اختصاص یافته است.

حجم سر و صدا نیز بصورت مشابه ارزیابی میشود. سوء تاثیر سر و صدای صنعتی در صحت کارگران و بازده کار آنها باعث شد روشهای ارزیابی عددی دقیق حجم سروصدا ابداع گردد. واحد حجم صوت «بل»، و در عمل یک دهم آن، «دسی‌بل» است. حجم‌های **متوالی** ۱ بل، ۲ بل و غیره (در عمل ۱۰ دسی‌بل، ۲۰ دسی‌بل و غیره) برای حس شنوایی ما تصاعد حسابی را تشکیل میدهد در صورتیکه شدت فیزیکی (و دقیقتر، انرژی) سر و صدا تصاعد هندسی با قدر نسبت ۱۰ را تشکیل میدهد. اگر اختلاف حجم‌های سر و صدا باندازهٔ ۱ بل باشد در آنصورت نسبت شدت فیزیکی سروصداها ۱۰ است. پس حجم سروصدا بر حسب بل برابر است با لگاریتم اعشاری شدت فیزیکی آن.

مسئله واضح‌تر میشود اگر چند مثال در نظر بگیریم.

خش خش آهستهٔ برگ‌ها برابر ۱ بل، صحبت با صدای

بلند برابر ۶,۵ بل، نعرهٔ شیر ۸,۷ بل ارزیابی شده است. از اینجا بر می‌آید که شدت صدای صحبت

$$۱۰^{۶,۵ - ۱} = ۱۰^{۵,۵} = ۳۱۶۰۰۰$$

برابر شدت صدای خش خش برگها، و نعرهٔ شیر

$$۱۰^{۸,۷ - ۶,۵} = ۱۰^{۲,۲} = ۱۸۵$$

مرتبه شدیدتر از صدای صحبت است.

سر و صدایی که حجم آن بیشتر از ۸ بل باشد مضر به جسم انسان شناخته میشود. در اکثر کارخانه‌ها سروصدا از حد مذکور شدیدتر است، سروصداهایی بشدت ۱۰ بل و بیشتر در آنجا شنیده میشود؛ ضربه‌های چکش بر صفحهٔ فولادی، سروصدایی بشدت ۱۱ بل را تولید میکند. این سروصداها ۱۰۰ و ۱۰۰۰ مرتبه شدیدتر از حد مجاز، و ۱۰ الی ۱۰۰ بار شدیدتر از پرسروصداترین محل آبشار نیاگارا است (۹ بل).

آیا تصادفی است که هم در ارزیابی درخشندگی مرئی ستاره‌ها و هم در اندازه‌گیری حجم سر و صدا ما با رابطهٔ لگاریتمی بین مقدار احساس و عامل تولیدکنندهٔ آن سر و کار داریم؟ نه خیر، هر دو پدیده نتیجهٔ قانون عمومی (باصطلاح «قانون روان‌ـفیزیکی فشنر») است که حکم میکند که مقدار احساس متناسب با لگاریتم مقدار تحریک میباشد.

بطوریکه میبینیم لگاریتم در رشتهٔ روانشناسی نیز راه یافته است.

لگاریتم در روشنایی برق

مسئله

دلیل آنکه لامپ‌های برقی پر از گاز نور درخشنده‌تری نسبت به لامپ‌های خلأ دارای فیلامان از همان فلز میدهد مربوط به درجهٔ حرارت‌های مختلف فیلامان است.

مطابق با قانون فیزیک، مقدار کل نوری که در حالت گداختگی صادر میشود متناسب با توان دوازدهم درجهٔ حرارت مطلق افزایش می‌یابد. با در نظر داشتن این نکته، چنین محاسبه‌ای

را انجام می‌دهیم: تعیین میکنیم که لامپ پر از گاز که درجهٔ حرارت فیلامان آن ۲۵۰۰° طبق مقیاس مطلق (با مبدأ در -۲۷۳° سانتیگراد) می‌باشد چقدر زیادتر از لامپ خلأ با درجهٔ حرارت ۲۲۰۰°، نور خارج مینماید.

حل

نسبت مطلوب را به x نمایش میدهیم و معادلهٔ زیر را داریم:

$$x = \left(\frac{۲۵۰۰}{۲۲۰۰}\right)^{۱۲} = \left(\frac{۲۵}{۲۲}\right)^{۱۲}$$

و از اینجا

$$\lg x = ۱۲\,(\lg ۲۵ - \lg ۲۲),\quad x = ۴{,}۶$$

لامپی که از گاز پر شده ۴٫۶ مرتبه نسبت به لامپ خلأ زیادتر نور از خود خارج میسازد. یعنی اگر لامپ خلأ باندازهٔ ۵۰ شمع نور بدهد در اینصورت لامپ پر از گاز در همان شرایط ۲۳۰ شمع نور می‌دهد.

یک محاسبهٔ دیگر را نیز انجام میدهیم: برای اینکه درخشندگی لامپ دوچندان گردد درجهٔ حرارت مطلق را چقدر (بر حسب درصد) باید زیاد ساخت؟

حل

معادلهٔ زیر را تشکیل میدهیم:

$$\left(۱ + \frac{x}{۱۰۰}\right)^{۱۲} = ۲$$

از اینجا

$$x = ۶\% \quad \text{و} \quad \lg\left(۱ + \frac{x}{۱۰۰}\right) = \frac{\lg ۲}{۱۲}$$

و بالاخره محاسبهٔ سوم: اگر درجهٔ حرارت (مطلق) فیلامان ۱٪ زیاد شود درخشندگی لامپ (بر حسب در صد) چقدر افزایش می یابد؟

حل

بکمک لگاریتم، محاسبهٔ زیر را انجام میدهیم:

$$x = ۱,۰۱^{۱۲}$$

و حاصل مینمائیم:

$$x = ۱,۱۳$$

درخشندگی ٪۱۳ زیاد میشود.

با انجام محاسبه در مورد افزایش درجهٔ حرارت باندازهٔ ٪۲ پیدا میکنیم که درخشندگی ٪۲۷ افزایش مییابد و در ازاء افزایش درجهٔ حرارت باندازهٔ ٪۳، درخشندگی ٪۴۳ زیاد میشود.

از اینجا واضح میگردد که چرا در صنعت لامپسازی در مورد افزایش درجهٔ حرارت فیلامان درجهٔ حرارت اضافی چقدر مطلوب است.

وصیت‌نامه برای صدها سال

چه کسی در بارهٔ آن تعداد افسانوی دانه‌های گندم که مخترع بازی شطرنج بعنوان پاداش تقاضاء نمود نشنیده باشد؟

این تعداد در اثر دوچندان ساختن پی در پی واحد تعیین گردید: مخترع در مقابل خانهٔ یکم تختهٔ شطرنج ۱ دانه گندم، در مقابل خانهٔ دوم ۲ دانه گندم طلبید و الی آخر یعنی دوچندان ساختن را تا خانهٔ ۶۴ — ام ادامه داد.

و اما اعداد نه تنها در اثر دو چندان ساختن پی در پی بلکه با میزان افزایش خیلی معتدل‌تر نیز با سرعت غیر مترقبه زیاد میشود. سرمایه با نرخ افزایش ٪۵، در هر سال ۱,۰۵ مرتبه زیاد میشود. افزایشی بظاهر کوچک است. ولی با گذشت زمان کافی، سرمایه به مبلغ هنگفتی مبدل میگردد. ازدیاد تعجب‌آور سرمایه‌هایی که برای مدت زیادی وصیت میشود همین علت را دارد. عجیب بنظر میرسد وقتیکه واصی با وصیت کردن یک مبلغ نه چندان بزرگ در مورد پرداخت سرمایه‌های هنگفت در آینده دستور میدهد. وصیت‌نامهٔ بنجامین فرانکلین شخصیت مملکتی مشهور امریکا در این زمینه شهرت درد. این سند در «مجموعهٔ

آثار مختلف بنجامین فرانکلین» منتشر شده است. اینک چکیده‌ای از آنرا می آوریم:

«هزار لیرهٔ استرلینگ را به اهالی بستون وصیت میکنم. اگر آنها این هزار لیره را بپذیرند در اینصورت باید آنرا به شهروندان برگزیده امانت بدهند و آنها پول را از قرار ٪ ٥ در سال به صنعتگران جوان قرض بدهند*. این مبلغ بعد از ۱۰۰ سال به ۱۳۱۰۰۰ لیرهٔ استرلینگ مبدل میگردد. من میخواهم که آنوقت ۱۰۰۰۰۰ لیره جهت ساختمان ابنیهٔ عمومی مصرف شود و ۳۱۰۰۰ لیرهٔ ما بقی برای ۱۰۰ سال بامانت داده شود. بعد از گذشت صد سال دیگر این مبلغ بالغ بر ٤۰٦۰۰۰۰ لیرهٔ استرلینگ میگردد که ۱۰٦۰۰۰۰ لیرهٔ آنرا در اختیار اهالی بستون گذاشته و ۳۰۰۰۰۰۰ را به هیئت رهبری جامعهٔ ماساچوستس اختصاص میدهم. بیش از این جرأت ندارم پیشبینی‌هایم را گسترش دهم».

با گذاشتن تنها ۱۰۰۰ لیره، فرانکلین ملیون‌ها را توزیع مینماید. اما در اینجا هیچ سوء تفاهمی وجود ندارد. محاسبهٔ ریاضی تأیید میکند که قضاوت واصی کاملا عملی بوده است. در صورتیکه ۱۰۰۰ لیره هر سال ۱,۰٥ مرتبه افزایش یابد بعد از ۱۰۰ سال باید به

$$x = ۱۰۰۰ \times ۱,۰٥^{۱۰۰}$$

لیره مبدل شود.

این عبارت را میتوان بکمک لگاریتم حساب نمود:

$$\lg x = \lg ۱۰۰۰ + ۱۰۰ \lg ۱,۰٥ = ٥,۱۱۸۹۳$$

از اینجا مطابق با مفاد وصیت‌نامه

$$x = ۱۳۱۰۰۰$$

سپس، ۳۱۰۰۰ لیره در جریان صد سال دیگر به

$$y = ۳۱۰۰۰ \times ۱,۰٥^{۱۰۰}$$

* در امریکای آن زمان هنوز موسسات وامدهی وجود نداشت.

مبدل میگردد. از اینجا در اثر محاسبه بکمک لگاریتم، حاصل میکنیم:

$$y = ٤٠٧٦٥٠٠$$

این مبلغ از مبلغی که در وصیت‌نامه ذکر شده است چندان تفاوتی ندارد.

مسئلهٔ زیر که از اثری بنام «اربابان گولولف» تالیف سالتیکف اقتباس گردیده برای حل به خواننده پیشنهاد میشود:

«پورفیری ولادیمیرویچ در اطاق دفترش نشسته و اوراق کاغذ را پر از اعداد مینماید. این دفعه مسئلهٔ زیر وی را بخود مشغول داشته است: او اکنون چقدر پول میداشت اگر مادر عزیزش آن صد روبلی را که پدربزرگش بمناسبت تولد وی هدیه کرده بود تصاحب نکرده بلکه در بنگاه رهنی بنام پورفیری کوچولو بامانت گذاشته بود؟ متاسفانه مبلغ کوچکی در می آید، تنها هشتصد روبل».

با فرض اینکه در لحظهٔ محاسبه پورفیری ۵۰ ساله بوده و محاسبه را بطور صحیح کرده باشد (گرچه این فرض دور از واقعیت است زیرا گولولف باحتمال قوی لگاریتم نمیدانست و از عهدهٔ حساب در صد مرکب بر نمی آمد) تعیین کنید بنگاه رهنی در آن زمان چند در صد میپرداخت.

ازدیاد مداوم سرمایه

در صندوق‌های پس‌انداز درصد بهره هر سال به سرمایهٔ اصلی اضافه میشود. اگر این اضافه‌ها با فواصل کوتاهتر انجام یابد در آنصورت سرمایه با سرعت بیشتر افزایش می یابد زیرا مبلغ بیشتری در تشکیل بهره شرکت میکند. یک مثال کاملا نظری و ساده را در نظر میگیریم. فرض کنیم در صندوق پس‌انداز ۱۰۰ روبل با ۱۰۰ در صد بهرهٔ سالانه پس‌انداز گردیده باشد. اگر بهره تنها در پایان سال به سرمایهٔ اصلی اضافه شود در اینصورت طی این مدت ۱۰۰ روبل به ۲۰۰ روبل مبدل میشود.

حال ببینیم که اگر بهره نیم‌سال به نیم‌سال به سرمایهٔ اصلی اضافه گردد ۱۰۰ روبل به چه مبلغی تبدیل میشود. پس از نیم‌سال ۱۰۰ روبل بالغ بر

$$۱۰۰ \times ۱,۵ = ۱۵۰$$

روبل، و بعد از نیم‌سال دیگر بالغ بر

$$۱۵۰ \times ۱,۵ = ۲۲۵$$

روبل میگردد.

هرگاه بهره هر $\frac{۱}{۳}$ سال اضافه گردد آنگاه پس از یک سال ۱۰۰ روبل به

$$۱۰۰ \times \left(۱\frac{۱}{۳}\right)^{۳} \approx ۲۳۷,۰۳$$

روبل تبدیل میشود.

اگر بهره با فواصل کوتاهتر و باز هم کوتاهتر ۰,۱ سال، ۰,۰۱ سال، ۰,۰۰۱ سال و الی آخر اضافه شود در اینصورت از ۱۰۰ روبل بعد از یک سال مقادیر زیر حاصل میگردد (بر حسب روبل):

$$\begin{aligned} ۱۰۰ \times ۱,۱^{۱۰} &\approx ۲۵۹,۳۷ \\ ۱۰۰ \times ۱,۰۱^{۱۰۰} &\approx ۲۷۰,۴۸ \\ ۱۰۰ \times ۱,۰۰۱^{۱۰۰۰} &\approx ۲۷۱,۶۹ \end{aligned}$$

با روشهای ریاضی عالی ثابت می‌شود که اگر بهره با فواصل بینهایت کوتاه اضافه شود سرمایه بی‌حد افزایش نمی یابد بلکه به یک حدی که تقریباً برابر

$$۲۷۱,۸۳$$

روبل است* نزدیک میشود. سرمایه‌ای که با نرخ بهرهٔ سالانهٔ ۱۰۰٪ باسانت گذاشته شده نمی‌تواند بیش از ۲,۷۱۸۳ برابر

* از اعداد کسری کوچک صرف نظر شده است.

گردد حتی اگر در صد ازدیاد هر ثانیه به سرمایهٔ اصلی اضافه گردد.

عدد «e»

عدد حاصل شدهٔ ...۲,۷۱۸ که در ریاضیات عالی نقش بزرگی ایفاء می‌کند که از نقش عدد مشهور π دست کمی ندارد دارای نماد ویژهٔ e است. این عدد گنگ است و نمیتواند با تعداد متناهی ارقام دقیقاً بیان شود* ولی تا هر درجهٔ دقت تنها بصورت تقریبی بکمک سری زیر محاسبه میشود:

$$۱+\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۱\times۲\times۳}+\frac{۱}{۱\times۲\times۳\times٤}+$$
$$+\frac{۱}{۱\times۲\times۳\times٤\times٥}+\dots$$

از مثال بالا در مورد زیاد شدن سرمایه بر حسب درصدهای مرکب بآسانی دیده میشود که عدد e حد عبارت

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}$$

در ازاء افزایش بینهایت n است.

بنا به علل زیادی که از حوصلهٔ این اثر خارج است انتخاب عدد e بمثابهٔ پایهٔ دستگاه لگاریتم‌ها بسیار مناسب است. اینگونه جداول (بنام «لگاریتم طبیعی») موجود است و در علم و فن موارد استعمال زیادی دارد. لگاریتم‌های ٤۸، ٦۱، ۱۰۲، ۲٦۰ رقمی که قبلا ذکر شد بعنوان پایهٔ خود، عدد e را دارد.

عدد e اغلب در جائیکه انتظارش نمیرود ظاهر میشود. بطور مثال چنین مسئله‌ای را در برابر خود قرار میدهیم:

عدد مفروض a را به چه قسمت‌هایی باید تقسیم نمود تا حاصلضرب تمام قسمتها بزرگترین باشد؟

---

* بعلاوه، این عدد، مانند عدد π، متعالی است یعنی نمی‌تواند در اثر حل هیچ معادلهٔ جبری با ضرایب صحیح بدست آید.

اکنون ما میدانیم که اعداد در ازاء مجموع ثابت وقتی بزرگ‌ترین حاصلضرب را میدهند که با هم مساوی باشند. واضح است که عدد a را باید به قسمتهای مساوی تقسیم کرد. اما به چند قسمت مساوی؟ به دو، سه، ده قسمت؟ با روش ریاضیات عالی میتوان تعیین نمود که بزرگترین حاصلضرب در صورتی حاصل میشود که اگر هر قسمت در حدود امکان نزدیک عدد e باشد.

بطور مثال، ۱۰ را باید به آن تعداد قسمتهای برابر تقسیم نمود که قسمتها در حدود امکان نزدیک به ...۲٫۷۱۸ باشد. برای این کار باید خارج‌قسمت زیر را دریافت نمود:

$$\frac{۱۰}{۲٫۷۱۸...} = ۳٫۶۷۸...$$

چون تقسیم به ...۳٫۶۷۸ قسمت برابر ممکن نیست بنا بر این، نزدیکترین عدد صحیح ٤ را بعنوان مقسوم‌علیه انتخاب میکنیم. پس ما در صورتی بزرگترین حاصلضرب قسمتهای متشکله ۱۰ را بدست می‌آوریم که این قسمتها مساوی به $\frac{۱۰}{٤}$ یعنی ۲٫۵ باشد.

پس،

$$(۲٫۵)^{٤} = ۳۹٫۰۶۲۵$$

بزرگترین عددی است که در نتیجهٔ ضرب زدن قسمتهای متساوی عدد ۱۰ در یکدیگر میتواند حاصل شود. حقیقتاً اگر ۱۰ را به ۳ و یا ۵ قسمت برابر تقسیم نمائیم حاصلضربهای کوچکتر بدست می‌آید:

$$\left(\frac{۱۰}{۳}\right)^{۳} = ۳۷,$$

$$\left(\frac{۱۰}{۵}\right)^{۵} = ۳۲$$

برای اینکه بزرگترین حاصلضرب قسمتهای عدد ۲۰ بدست آید باید آنرا به ۷ قسمت مساوی تقسیم نمود زیرا که

$$۲۰ : ۲,۷۱۸... = ۷,۳۶ \approx ۷$$

عدد ۵۰ را باید به ۱۸ قسمت، و عدد ۱۰۰ را به ۳۷ قسمت تقسیم نمود زیرا که

$$۵۰ : ۲,۷۱۸... = ۱۸,۴,$$
$$۱۰۰ : ۲,۷۱۸... = ۳۶,۸$$

عدد e نقش بزرگی را در ریاضی، فیزیک، نجوم و علوم دیگر ایفاء میکند. این است بعضی مسایلی که در بررسی ریاضی آنها ناگزیر به این عدد توسل میکنیم (این فهرست را میتوان بی‌حد ادامه داد):

فرمول بارومتری (کم شدن فشار هوا با افزایش ارتفاع)،
فرمول اولر،
قانون سرد شدن اجسام،
تجزیهٔ رادیوآکتیو و عمر زمین،
نوسانات آونگ در هوا،
فرمول تسیولکفسکی برای سرعت موشک،
پدیده‌های نوسانی در نوسانگر رادیویی،
ازدیاد سلول‌ها (یاخته‌ها).

کمدی لگاریتمی

مسئله

علاوه بر کمدی‌های ریاضی که در فصل پنجم از نظر خواننده گذشت یک کمدی دیگر از همان گونه را می آوریم و آن عبارت از «اثبات» نابرابری ۳ > ۲ است. این دفعه، اثبات با عمل لگاریتم‌گیری مربوط است. کمدی از نامساوی

$$\frac{۱}{۴} > \frac{۱}{۸}$$

که بدون شک صحیح است شروع میشود. بعد تبدیل زیر که باعث هیچگونه شک و تردیدی نیست انجام میشود:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} > \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}$$

این هم سوء ظنی ببار نمی‌آورد. با عدد بزرگتر، لگاریتم بزرگتر متناظر است یعنی

$$۲\lg_{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}\right) > ۳\lg_{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

بعد از تحویل به $\lg_{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)$، حاصل میکنیم: $۳ > ۲$. غلط این اثبات در چیست؟

حل

غلط در آنست که در موقع تحویل به $\lg_{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)$ علامت نابرابری را به علامت معکوس تغییر ندادیم (علامت $<$ به علامت $>$) در صورتیکه باید این کار اجراء میشد چون $\lg_{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)$ یک عدد منفی است. اگر عمل لگاریتم گیری را بجای پایهٔ ۱۰ بر اساس پایهٔ کوچکتر از $\frac{۱}{۲}$ اجراء میکردیم در آنصورت عدد $\lg_{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)$ مثبتی میبود لکن آنوقت ما حق نمیداشتیم ادعا کنیم که با عدد بزرگتر، لگاریتم بزرگتر متناظر است.

نمایش هرگونه عدد با سه دوتایی

مسئله

کتاب را با معمای جبری خوشمزه‌ای که سرگرمی شرکت‌کنندگان یک کنگرهٔ فیزیک‌دانان در شهر ادسا شده بود پایان میدهیم. چنین مسئله‌ای پیشنهاد میشود: هرگونه عدد صحیح

و مثبت مفروض را بکمک سه دوتایی و نمادهای ریاضی نمایش دهید.

حل

ابتداء، طریقهٔ حل مسئله را روی مثال ویژه‌ای نشان می‌دهیم. فرض کنیم عدد داده شده ۳ باشد. در اینصورت مسئله چنین حل میشود:

$$۳ = -\lg_۲ \lg_۲ \sqrt{\sqrt{\sqrt{۲}}}$$

بآسانی از صحت این تساوی مطمئن میشویم. در واقع،

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{۲}}} = \left[\left(۲^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right]^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{\frac{۱}{۲^۳}} = ۲^{۲^{-۳}}$$

$$\lg_۲ ۲^{۲^{-۳}} = ۲^{-۳}, \quad -\lg_۲ ۲^{-۳} = ۳$$

اگر عدد ۵ داده میشد ما مسئله را بهمان اسلوب حل میکردیم:

$$۵ = -\lg_۲ \lg_۲ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{۲}}}}}$$

بطوریکه میبینید ما در اینجا از این نکته استفاده میکنیم که در ریشه‌های دوم، نمای ریشه نوشته نمیشود.

حل عمومی مسئله چنین است: اگر عدد N داده شده باشد در اینصورت

$$N = -\lg_۲ \lg_۲ \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{۲}}}}}_{N \text{ مرتبه}}$$

ضمناً تعداد علامتهای ریشه مساوی به تعداد واحدها در این عدد است.

فهرست مندرجات

خوانندگان گرامی

موسسهٔ انتشارات «میر» کتابهای علمی و فنی و درسی را به بسیاری از زبانهای جهان، از جمله بزبان فارسی، ترجمه و منتشر میکند. از شما خواهشمند است نظریات خود را در بارهٔ ترجمه، چاپ و آرایش این کتاب و نیز هرگونه پیشنهاد و ملاحظات انتقادی را به نشانی زیر بفرستید:

انتشارات «میر»، پروی ریژسکی، ۲،
مسکو، اتحاد شوروی، ۱۲۹۸۲۰

قابل توجه خوانندگان گرامی

کتابهای زیر از همین مولف بزبان فارسی توسط موسسهٔ انتشارات «میر» منتشر شده است:

— فیزیک برای سرگرمی، چاپ اول و دوم،

— ریاضیات زنده، چاپ اول.

کتابهای مذکور در دو سال آینده تجدید چاپ میشود.