سریهای فوریه

و مسائل مقدار مرزی

مولفان: جیمز وارد براون

رونل وی. چرچیل

مترجمان: دکتر سید محمد حسینی

دکتر امیر خسروی

ویرایش پنجم

انتشارات دانشگاه تربیت مدرس

۳۲

سریهای فوریه و مسائل مقدار مرزی

مؤلفان : چرچیل - براون

مترجمان : دکتر سید محمد حسینی

دکتر امیر خسروی

فهرست مطالب

پیشگفتار مترجمان

سریهای فوریه و مسائل مقدار مرزی، موضوعاتی است که در مباحث مختلف ریاضی فیزیک و ریاضی مهندسی مطرح می‌شود و سرمنشأ شاخهٔ مهمی از ریاضی به نام آنالیز هارمونیک می‌باشد. گرچه این سریها قبل از فوریه بررسی شده‌اند اما فوریه، آنها را در نظریهٔ ریاضی انتقال گرما به کار برد و به خاطر سهم بزرگی که در شرح و بسط این سریها دارد، آنها را به افتخار او نامگذاری کرده‌اند و امروزه ابزاری قدرتمند در شاخه‌های مختلف علوم است. در این زمینه کتابهای زیادی نوشته شده اما کتاب "سریهای فوریه و مسائل مقدار مرزی" نوشته چرچیل و براون در بین همهٔ کسانی که شیفتهٔ ریاضی هستند یا به جنبهٔ کاربرد ریاضی توجه دارند کتابی شناخته شده است، ویرایش اول این کتاب در ۱۹۴۱ و ویرایشهای بعدی در سالهای ۱۹۶۳ ، ۱۹۷۸ ، ۱۹۸۷ و ۱۹۹۳ منتشر شد. از آنجا که این کتاب از ۱۹۴۱ بعنوان کتابی درسی در دنیا تدریس شده و مرتب ویرایش گردیده است و سرفصل دروس ریاضی پیشرفتهٔ بعضی از رشته‌های **فنی و مهندسی** و **علوم پایه**، مصوب شورایعالی برنامه‌ریزی، با این کتاب اشتراک زیادی دارد ما آن را کتاب مناسبی جهت استفاده، در دوره‌های **کارشناسی** و **کارشناسی ارشد** این رشته‌ها تشخیص دادیم و در صدد ترجمهٔ آن برآمدیم. ترجمهٔ حاضر از ویرایش پنجم صورت گرفته است و نحوهٔ ارائهٔ مطلب به گونه‌ای است که خواننده را از مراجعه به کتابهای دیگر برای درک مطالب کاربردی آن بی‌نیاز می‌سازد. در ترجمهٔ این اثر سعی شده است تا حتی‌الامکان امانت علمی رعایت و از دخل و تصرف پرهیز شود، با وجود این شیوایی ترجمه نیز مد نظر بوده است.

گرچه برای ترجمهٔ لغات و اصطلاحات علمی از واژه نامهٔ انجمن ریاضی ایران

استفاده شده امّابرای رفاه حال خوانندگان در پایان کتاب واژه نامهٔ انگلیسی - فارسی و فارسی - انگلیسی آمده است. با همهٔ تلاشی که برای بی‌عیب و نقص بودن کتاب شده است بی‌شک، کتاب عاری از عیب و نقص نیست. لذا از خوانندگان گرامی تقاضا می‌کنیم ما را در رفع نواقص و بهبود کیفیت کار یاری نمایند.

در پایان لازم است قدردانی و سپاس خویش را نسبت به همهٔ افرادی که نمونه‌های چاپی رامطالعه کرده‌اند، و کارکنان دلسوز مرکز نشر دانشگاه تربیت مدرس جناب آقای صادقلو سرپرست گرامی، جناب آقای موسوی معاون محترم، سرکار خانم فروهی و آقای مالکی به خاطر فراهم آوردن امکان چاپ کتاب و همراهی ایشان و در نهایت از حروفچین محترم و کارکنان زحمتکش چاپخانه اعلام داریم.

دکتر سید محمد حسینی
دانشگاه تربیت مدرس

دکتر امیر خسروی
دانشگاه تربیت معلم

زمستان ۱۳۷۵

پیشگفتار مؤلفان

کتاب حاضر بررسی مقدماتی است از سریهای فوریه و کاربردهای آن در مسائل مقدار مرزی که در معادلات دیفرانسیل جزئی مهندسی و فیزیک مطرح می‌شوند. کتاب برای دانشجویانی برنامه‌ریزی شده که دورهٔ اول معادلات دیفرانسیل معمولی و نیز معادل یک ترم حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته را گذرانده باشند. برای اینکه کتاب برای عدهٔ زیادی از دانشجویان قابل استفاده باشد هر جا به نتیجهٔ مشکل‌تری از حساب دیفرانسیل و انتگرال نیاز داشته‌ایم، در پانوشت به کتابی که اثبات آن را در بر دارد ارجاع داده‌ایم. کاربردهای فیزیکی را که به تفصیل توضیح داده‌ایم، در سطحی نسبتاً مقدماتی حفظ شده است.

اولین هدف کتاب، معرفی مفهوم مجموعه‌های متعامد توابع و نمایش توابع دلخواه بر حسب توابع عضو چنین مجموعه‌هایی است. به نمایشهای توابع با سریهای فوریه، شامل توابع سینوس و کسینوس، توجه خاص مبذول شده است. نمایشهای انتگرالی فوریه و بسطهای سریهای توابع بسل و چند جمله‌ایهای لژاندر نیز بررسی شده است.

دومین هدف ما این است که روش کلاسیک جداسازی متغیرها را، که در حل مسائل مقدار مرزی به وسیلهٔ این نمایشها از آن استفاده می‌شود، به طور واضح و روشن ارائه دهیم. به تحقیق درستی جوابها و یکتایی آنها توجه شده است، زیرا این روش را نمی‌توان بدون اینگونه بررسیها آن طور که باید و شاید ارائه داد. در کتاب متغیرهای مختلط و کاربرد آنها، اثر همین مؤلفان، و کتاب ریاضیات عملیاتی، اثر پرفسور چرچیل، روشهای

دیگری بررسی شده است.

این کتاب تجدید نظر شدهٔ ویرایش ۱۹۸۷ است. دو چاپ اول را که در ۱۹۴۱ و ۱۹۶۳ منتشر شد، پرفسور چرچیل به تنهایی نوشته است. در عین حال که اصلاحات بارز چاپهای قبلی حفظ شده چند تغییر مهم در این چاپ صورت گرفته است که شایان یادآوری است.

اکنون آشنایی با مجموعه‌های متعامدیکهٔ توابع و بررسی سری فوریه را در نظر می‌گیریم، بدین ترتیب پیش از هر چیز معرفی مجموعه‌های متعامدیکه را شروع می‌کنیم و از مثالهای سریهای فوریه برای تفهیم آن کمک می‌گیریم. به مسائل مقدار مرزی که شامل معادلات با مشتقات جزئی ناهمگن‌اند یا شرایط مرزی ناهمگن آنها مانع آن است که مستقیماً از روش جداسازی متغیرها استفاده شود توجه بیشتری شده است. به بیان دقیق‌تر، در مثالها و مسائل از روش تغییر پارامترها استفاده قابل ملاحظه‌ای شده است، که در آن ضرایب موجود در یک بسط برحسب توابع ویژه را از طریق حل معادلات دیفرانسیل معمولی پیدا می‌کنند.

اصلاحات دیگری نیز صورت گرفته است که از این جمله‌اند: معادلهٔ گرما به روشی ساده‌تر و بدون استفاده از حساب برداری به دست آمده، بخش جدیدی منحصراً به مثالهایی در مورد بسط توابع برحسب توابع ویچه اختصاص یافته، و
شکلها و مسایل بیشتری را خواننده باید موشکافانه بررسی کند، به تغییراتی در نظم مطالب پیشین در مورد جداسازی متغیرها صورت گرفته است که بیان آن را از هر نظر بهتر کرده است.

فصلهای توابع بسل و چند جمله‌ایهای لژاندر، فصلهای ۷ و ۸ ، اساساً مستقل از یکدیگرند و می‌توان آنها را به هر ترتیبی برگزید. سه بخش آخر فصل ۲ در مورد خواص بیشتر سریهای فوریه و فصل ۹ در مورد یکتایی جوابها را می‌توان به منظور کوتاه کردن دوره حذف کرد. این کار را می‌توان در مورد برخی از بخشهای فصول دیگر نیز انجام داد.

در تهیهٔ این ویرایش از علاقهٔ پیوسته افراد مختلفی استفاده کرده‌ایم که بسیاری از آنها همکار یا دانشجو هستند، من جمله ژاکلین آر. براون، مایکل ای. لاهانس، رونادپی.

موراش، جویس ای. ماس، فرانک جی. تپ، ریچارد ال. پاترسون، مارک ای. پینسکی، وساندرا ام. رازوک، رالف پی. بوآس، جوان و جورج هاش. براون بعضی از منابع را که در پانوشتها ذکر شده، تهیه کرده‌اند و استنتاج لاپلاسین در مختصات کروی که در کتاب آمده با الهام از یک یادداشت آر. پی. آگنیو در مجلهٔ ماهانهٔ ریاضی آمریکا، جلد ۶۰ (۱۹۵۳) است. در پایان باید تأکید کرد که بدون کمک ویراستاری متهورانهٔ افراد مک گروهیل، بخصوص ریچارد هاش. والیس و ماجی لانزیلو این ویرایش مقدور نبود. آنها برای دستنویسهای ویرایش قبلی و ویرایش حاضر افرادی را برگزیدند همچون: ژوزف ام. اگار از دانشگاه ایالتی کلولند؛ کی. بروس اریکسون از دانشگاه واشنگتن؛ ویلیام دابلیو. فار از مؤسسهٔ پلی‌تکنیک ورستر؛ توماس ال. جکسون از دانشگاه قدیمی دامینیون؛ چارلز آر. مک کلوئر از دانشگاه ایالتی میشیگان؛ رابرت پیزیاک از دانشگاه بیلور؛ و دونالد ای. ریان از دانشگاه ایالتی شمال غربی لوئیزیانا.

جیمز وارد براون

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی فیزیک

در این کتاب با دو مبحث سر و کار داریم:

الف) نمایش هر تابع دلخواه به وسیلهٔ سری نامتناهی توابعی از یک مجموعهٔ مفروض؛

ب) روش حل مسائل مقدار مرزی در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، با تأکید بر معادلاتی که در فیزیک و مهندسی اهمیت دارند.

در حل این گونه مسائل مقدار مرزی، نمایش به وسیلهٔ سریها مطرح می‌شود. نظریهٔ آن نمایشها را می‌توان مستقلاً ارائه داد. یکی از خواص بارز آنها وارد کردن مفاهیم هندسی، آنالیز برداری و جبر و آنالیز ریاضی است. دقت ریاضی آنها نیز رضایت‌بخش است. اما وقتی در رابطه با مسائل مقدار مرزی مطرح می‌شوند، هماهنگ و جالبند.

مجموعهٔ توابع تشکیل دهندهٔ جملات سریهای نمایش به وسیلهٔ مسألهٔ مقدار مرزی مشخص می‌شود. نمایشهای سری فوریه که نوع خاصی از سریهای با جملات سینوس و کسینوس هستند، به دستهٔ وسیع و مهمی از مسائل مقدار مرزی وابسته‌اند. به نظریه و کاربرد سری فوریه توجه خاصی مبذول خواهیم داشت. اما توسیعها و تعمیمهایی از این سریها را در انتگرالها و سریهای فوریهٔ توابع بسل و همچنین در چند جمله‌ایهای لژاندر نیز در نظر خواهیم گرفت.

وقتی یک مسألهٔ مقدار مرزی در دستهٔ مفروضی از توابع، دارای یک و تنها یک جواب

باشد آن مسأله به طور صحیح بنا شده است. اغلب برای طرح صحیح یک مسألهٔ مقدار مرزی از تعبیرهای فیزیکی برای شرایط مرزی آن الهام می‌گیریم. در واقع در برخی از مواقع، تعبیر فیزیکی مسأله برای قضاوت در مورد مناسب بودن شرایط مرزی مفید است. این، دلیل مهمی برای وابسته کردن این نوع مسائل به کاربردهای فیزیکی آنهاست، صرف نظر از اینکه فرصتی مغتنم است تا رابطهٔ بین آنالیز ریاضی و علوم فیزیکی را تشریح کنیم.

نظریهٔ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، شامل نتایجی در وجود و یکتایی جوابهای مسائل با مقدار مرزی است، اما با توجه به گستردگی انواع معادلات دیفرانسیل و حوزه‌هایی که روی آنها تعریف می‌شود و همچنین انواع شرایط مرزی، این قبیل نتایج، محدود و پیچیده‌اند. به جای اینکه در بررسی مسأله‌ای خاص، به نظریهٔ کلی متوسل شویم، روش ما عملاً یافتن یک جواب خواهد بود که اغلب می‌توان نشان داد که آن، تنها جواب ممکن است.

۱. مسائل مقدار مرزی خطی

در نظریه و کاربرد معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معمولی، متغیر تابع که اینجا با u نشان داده می‌شود، معمولاً باید در شرایطی روی مرز حوزه‌ای که معادلهٔ دیفرانسیل در آن تعریف شده است صدق کند. معادلاتی که آن شرایط مرزی را نمایش می‌دهند، ممکن است شامل مقادیری از مشتقات u همچنین خود u در نقاطی روی مرز باشند. بعلاوه شرایطی در مورد پیوستگی u و مشتقات آن در حوزه و روی مرز لازم است.

چنین مجموعه‌ای از شرایط یک مسألهٔ مقدار مرزی برای تابع u تشکیل می‌دهد. این جمله را وقتی معادلهٔ دیفرانسیل با برخی شرایط مرزی همراه باشد، حتی در حالتی که متضمن یکتایی جواب مسأله نیستند، به کار می‌بریم.

مثال ۱. سه معادلهٔ

$$u''(x)-u(x)=-1 \qquad (0<x<1) \tag{1}$$

$$u'(0)=0 \qquad , \qquad u(1)=0$$

یک مسألهٔ مقدار مرزی در معادلات دیفرانسیل معمولی را تشکیل می‌دهند. آن معادلهٔ دیفرانسیل در حوزهٔ $0<x<1$ ، که نقاط مرزی آن $x=0$ و $x=1$ است ، تعریف شده. یک جواب این مسأله که خود آن و مشتقاتش دربازهٔ بستهٔ $0\leq x\leq 1$ پیوسته باشند، عبارت است از:

$$u(x)=1-\frac{\cosh x}{\cosh 1} \tag{2}$$

با جایگذاری مستقیم می‌توان بسادگی درستی جواب (۲) را تحقیق کرد.

غالباً مناسب است که مشتق‌گیری جزئی را با نوشتن متغیرهای مستقل به صورت زیر نویس نمایش داد. مثلا اگر u تابعی از x و y باشد ، می‌توان به جای $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، u_x یا $u_x(x,y)$ ، u_{xx} به جای $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ، u_{xy} به جای $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ و غیره نوشت.

برای آنکه بتوانیم بنویسیم $u_{xy}=u_{yx}$ همیشه فرض می‌کنیم که مشتقات جزئی u در شرایط لازم صدق می‌کنند. همچنین آزادانه نمادهای $u_x(c,y)$, $u_{xx}(c,y)$ را به ترتیب برای نمایش مقادیر توابع $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ روی خط $x=c$ به کار خواهیم برد. برای مقادیر مرزی بقیهٔ مشتقات از نمادهای متناظر استفاده خواهیم کرد.

مثال ۲. مسألهٔ متشکل از معادلهٔ دیفرانسیل با مشتق جزئی:

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0 \qquad (x>0 \ , \ y>0) \tag{3}$$

و دو شرط مرزی:

$$\begin{aligned} &u(0,y)=u_x(0,y) && (y>0) \\ &u(x,0)=\sin x+\cos x && (x\geq 0) \end{aligned} \tag{4}$$

یک مسألهٔ مقدار مرزی در معادلات با مشتقات جزئی است. این معادلهٔ

دیفرانسیل در ربع اول صفحه تعریف شده است. خواننده می‌تواند بسادگی تحقیق کند که تابع:

$$u(x,y)=e^{-y}(\sin x+\cos x) \tag{۵}$$

یک جواب این مسأله است. تابع (۵) و مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم آن در ناحیهٔ $x\geq 0$ ، $y\geq 0$ پیوسته‌اند.

یک معادلهٔ دیفرانسیل بر حسب تابع u ، یا یک شرط مرزی روی u، خطی است هرگاه معادله‌ای از درجهٔ اول برحسب u و مشتقات آن باشد. بنابراین، جملات چنین معادله‌ای توابعی هستند که فقط به متغیرهای مستقل وابسته‌اند، به انضمام توابع ثابت، یا حاصلضرب چنین توابعی در u یا حاصلضرب چنین توابعی در یک مشتق u. توجه کنید که صورت کلی معادلهٔ با مشتقات جزئی خطی مرتبهٔ دوم بر حسب $u(x,y)$ عبارت است از:

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G \tag{۶}$$

که در آن حروف A تا G نمایش توابع ثابت یا توابعی هستند که تنها به متغیرهای مستقل x و y وابسته‌اند.

در مثالهای ۱ و ۲ معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی همه خطی‌اند. معادلهٔ دیفرانسیل

$$zu_{xx}+xy^{۲}u_{yy}-e^{x}u_z=f(y,z) \tag{۷}$$

بر حسب $u(x,y,z)$ خطی است ، اما معادلهٔ $u_{xx}+uu_y=x$ برحسب $u=u(x,y)$ خطی نیست، زیرا جملهٔ uu_y به عنوان عبارتی جبری بر حسب دو متغیر u و u_y از درجهٔ اول نیست [با معادلهٔ (۶) مقایسه کنید].

مسألهٔ مقدار مرزی را خطی نامند، هر گاه معادلهٔ دیفرانسیل و همهٔ شرایط مرزی آن خطی باشند. بنابراین، مسائل مقدار مرزی مثالهای ۱ و ۲ خطی‌اند. روش حلی که در این کتاب ارائه می‌شود، برای مسائل غیر خطی به کار نمی‌رود.

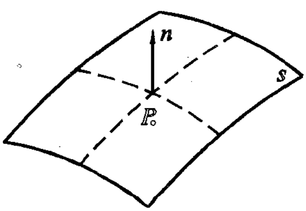
یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی یا شرط مرزی برحسب u همگن است اگر هریک

از جملات آن غیر از خود صفر، بر حسب تابع u و مشتقات آن از مرتبهٔ اول باشد. در بررسی‌ای که ما از مسائل مقدار مرزی خطی به عمل می‌آوریم، مفهوم همگنی، نقش اساسی خواهد داشت. ملاحظه می‌کنید که معادلهٔ (۳) و اولین شرط از شرایط (۴) همگن هستند اما دومین آنها همگن نیست. معادلهٔ (۶) در حوزه‌ای از صفحهٔ xy فقط وقتی همگن است که در سراسر آن حوزه تابع G متحد با صفر باشد $(G\equiv 0)$ و معادلهٔ (۷) ناهمگن است مگر اینکه به ازای هر y و z که در نظر می‌گیریم $f(y,z)\equiv 0$.

۲. هدایت گرما

در داخل یک جسم توپر، انرژی گرمایی از نواحی گرمتر به وسیلهٔ رسانایی به نواحی سردتر منتقل می‌شود. بهتر است این انتقال را جریان گرما بنامیم، همچنان که اگر گرما یک مایع یا گاز باشد، از نواحی با تراکم بیشتر به نواحی با تراکم کمتر آن پخش می‌شود.

فرض کنید P_0 نمایش یک نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) در داخل جسم و S یک صفحه یا سطح خمیدهٔ هموار مارّ بر P_0 باشد. همچنین فرض کنید M برداریکه‌ای باشد که در نقطهٔ P_0 بر S عمود است(شکل ۱). در لحظهٔ t ، شار گرمای $\Phi(x_0, y_0, z_0, t)$ که در P_0 در جهت M از S عبور می‌کند، عبارت است از مقدار گرما در واحد سطح در واحد زمان که از سطح S در P_0 در آن جهت هدایت می‌شود. بنابراین شار بر حسب چنین واحدهایی اندازه‌گیری می‌شود، مانند کالری که بر حسب سانتیمتر مربع در ثانیه محاسبه می‌شود.



شکل ۱

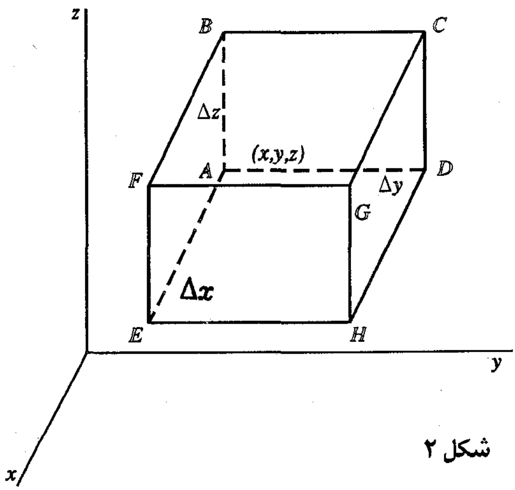
اگر $u(x,y,z,t)$ نمایش دما در نقاط جسم در لحظهٔ t باشد و n مختصی که نمایش فاصله در جهت n است، آنگاه شار $\Phi(x_0, y_0, z_0, t_0)$ مثبت است هر گاه $\frac{du}{dn}$ در P_0.

منفی باشد و منفی است هر گاه $\frac{du}{dn}$ در آنجا مثبت باشد. یک اصل بنیادی در نظریهٔ ریاضی هدایت گرما، موسوم به قانون فوریه، مبین این نکته است که مقدار شار $\Phi(x_\circ, y_\circ, z_\circ, t)$ با مقدار مشتق جهتی $\frac{du}{dn}$ در $P_\circ$ در لحظهٔ t متناسب است. یعنی ضریبی مانند K ، موسوم به هدایت گرمایی ماده هست که در $P_\circ$ و در لحظهٔ t داریم:

$$\Phi = -K\frac{du}{dn} \qquad (k > \circ) \tag{۱}$$

ضریب گرمایی دیگر ماده، گرمای مخصوص σ آن است. یعنی مقدار گرمایی که برای افزایش دمای یک واحد ماده به اندازهٔ یک واحد مقیاس دما لازم است. همیشه فرض می‌کنیم که ضرایب K و σ و همچنین برای δ ، جرم واحد حجم ماده ثابتند؛ مگر آنکه صراحتاً خلاف آن گفته شود. با این مفروضات، اصل دوم در نظریهٔ ریاضی عبارت است از اینکه رسانایی منجر به تابع دمایی مانند u می‌شود که u و مشتق آن u_t و مشتقات مرتبهٔ اول و دوم آن در هر حوزهٔ واقع در داخل جسم که در آن حرارتی تولید یا تلف نشود نسبت به x و y و z پیوسته‌اند.

حال فرض کنید گرما در جسم فقط موازی محور x ها جریان داشته باشد، بنابراین شار Φ و دماهای u فقط وابسته به x و t هستند. پس $\Phi = \Phi(x,t)$, $u = u(x,t)$. فعلاً فرض می‌کنیم در داخل جسم نه گرمایی تولید می‌شود و نه گرمایی تلف و در نتیجه گرما فقط از طریق سطح، داخل یا خارج می‌شود. سپس مکعب مستطیل کوچکی می‌سازیم که در داخل جسم واقع است و یک رأس آن در نقطهٔ (x, y, z) و وجه‌های آن موازی صفحات مختصاتند. همان طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، طول یالها برابرند با Δx , Δy , Δz . ملاحظه کنید که چون متوازی‌السطوح کوچک است، تابع پیوسته u_t در آن ناحیه، تغییرات اندکی دارد و مقدارش در سراسر آن تقریباً برابر $u_t(x,t)$ است. البته وقتی Δx به صفر میل کند، این تقریب بهتر می‌شود.



شکل ۲

جرم عنصر ماده که متوازی‌السطوح را اشغال می‌کند برابر است با $\delta\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$. بنابراین طبق تعریف گرمای مخصوص که در قسمت بالا معرفی شد، می‌دانیم که اندازه مقدار گرمایی که در لحظهٔ t در واحد زمان، به این عنصر وارد می‌شود تقریباً برابر است با:

$$\sigma(\delta\Delta x\Delta y\, \Delta z)u_t(x,t) \tag{۲}$$

راه دیگر اندازه‌گیری این کمیت، ملاحظهٔ این مطلب است که چون جریان گرما موازی محور xهاست، دما فقط رویه‌های $ABCD$ و $EFGH$ از عنصر را که موازی صفحه yz است قطع می‌کند. اگر جهت شار $\Phi(x,t)$ در جهت مثبت محور xها باشد، نتیجه می‌شود که مقدار گرمایی که در واحد زمان از طریق رویهٔ $ABCD$ به داخل عنصر در لحظهٔ t وارد می‌شود برابر است با $\Phi(x,t)\ \Delta y\, \Delta z$. چون گرما در امتداد وجه $EFGH$ از عنصر خارج می‌شود، پس مقدار خالص گرما که در واحد زمان به عنصر وارد می‌شود برابر است با:

$$\Phi(x,t)\Delta y\, \Delta z - \Phi(x+\Delta x,t)\,\Delta y\, \Delta z$$

بنابر قانون فوریه (۱)، این عبارت را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$K[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)]\Delta y\, \Delta z \tag{۳}$$

با مساوی قرار دادن عبارات (۲) و (۳) برای مقدار گرمایی که در واحد زمان به عنصر وارد می‌شود و تقسیم آنها بر $\sigma\delta\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ در می‌یابیم که:

$$u_t(x,t)=\frac{K}{\sigma\delta}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x}=\frac{K}{\sigma\delta}\,u_{xx}(x,t)$$

بنابراین دما در جسم توپر، هنگامی که گرما فقط موازی محور xها جریان داشته باشد در معادلهٔ گرمای یک بعدی صدق می‌کند:

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t) \qquad \left(k=\frac{K}{\sigma\delta}\right) \tag{۴}$$

این ثابت k را ضریب نفوذ حرارتی ماده می‌نامند.

در استنتاج معادلهٔ (۴) فرض کرده بودیم که چشمه (یا چاهک) گرمایی درون جسم توپر وجود نداشته باشد، اما گرما فقط از طریق رسانایی منتقل شود. اگر چشمهٔ یکنواختی در جسم باشد که به نسبت ثابت G در واحد حجم گرما تولید کند(که در آن Q مقدار گرمایی است که در واحد حجم در واحد زمان تولید می‌شود)، بسادگی می‌توان با مختصر تغییری در استنتاج، معادلهٔ گرمای ناهمگن ذیل را به دست آورد:

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t)+q \qquad \left(q=\frac{Q}{\sigma\delta}\right) \tag{۵}$$

با اضافه کردن جملهٔ $Q\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ به عبارت (۳) و عمل کردن به همان روش قبل این نتیجه را به ما می‌دهد. در واقع نسبت Q در واحد حجم که تحت آن گرما تولید می‌شود، می‌تواند هر تابع پیوسته‌ای از x و t باشد، که در این حالت جملهٔ q در معادلهٔ (۵) نیز دارای این خاصیت است.معادلهٔ گرمایی که جریان را در ابعاد ۲ و ۳ بیان می‌کند در بخش ۳ تشریح شده است.

۳. ابعاد بالاتر و شرایط مرزی

چنانچه جهت جریان گرما در جسم توپر، محدود نباشد که صرفاً موازی محور xها باشد، دمای u در جسم عموماً به همهٔ متغیرهای فضا و نیز t وابسته است. با در نظر گرفتن نسبت گرمایی که از هر شش وجه عنصر در شکل ۲ (بخش۲) می‌گذرد، می‌توان (مسألهٔ ۶ بخش ۴ را ببینید) معادلهٔ گرمای سه بعدی ذیل را به دست آورد که $u=u(x,y,z,t)$ در آن صدق می‌کند:

$$u_t=k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) \tag{۱}$$

ثابت k ضریب نفوذ حرارتی ماده است که در معادلهٔ (۴) بخش (۲) ظاهر شد. در صورتی که از لاپلاسین

$$\nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} \tag{۲}$$

استفاده کنیم، معادلهٔ (۱) به شکل فشردهٔ ذیل در می‌آید:

$$u_t=k\nabla^2 u \tag{۳}$$

توجه کنید که وقتی جریان گرما موازی محور zها نباشد $u_{zz}=0$ و $u=u(x,y,t)$ و معادله (۱) به معادلهٔ گرما برای جریان دو بعدی موازی صفحهٔ xy تبدیل می‌شود:

$$u_t=k(u_{xx}+u_{yy}) \tag{۴}$$

البته معادلهٔ گرمای یک بعدی $u_t=ku_{xx}$ در بخش۲ برای دمای $u=u(x,t)$ از این معادله وقتی که بعلاوه، جریانی موازی محور yها موجود نباشد به دست می‌آید. اگر دماها در حالت مانا باشند، که در آن حالت u با زمان تغییر نمی‌کند، معادلهٔ گرما تبدیل به معادلهٔ لاپلاس می‌شود:

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 \tag{۵}$$

معادلهٔ (۵) را اغلب به شکل $\nabla^2 u=0$ می‌نویسند.

در مسألهٔ ۶ بخش ۴ برای به دست آوردن معادلهٔ (۱) امکان تولید گرما در جسم توپر، به نسبت ثابت Q در واحد حجم در نظر گرفته شد و تعمیم:

$$u_t = k\nabla^۲ u + q \tag{۶}$$

از معادلهٔ (۵) بخش ۲ به دست آمد. اگر نسبت (آهنگ) Q تابعی پیوسته از متغیرهای فضا x, y و z باشد و دماها در حالت مانا باشند، آنگاه معادلهٔ (۶) تبدیل به معادلهٔ پوآسون می‌شود:

$$\nabla^۲ u = f(x, y, z) \tag{۷}$$

که در آن $f(x, y, z) = -q(x, y, z)/k$

اگر بخواهیم تابع دمای u را مشخص کنیم، باید معادلاتی که شرایط گرمایی روی سطوح و دماهای اولیه را در سراسر جسم بیان می‌کنند همراه معادلهٔ گرما باشند. شرایط روی سطوح ممکن است غیر از دماهایی باشند که از قبل تعیین شده‌اند. مثلاً فرض کنید شار Φ که در نقاط روی سطح به جسم وارد می‌شوند ثابتی مانند $\Phi_۰$ باشند. یعنی در هر نقطهٔ P روی S مقدار $\Phi_۰$ واحد گرما در واحد سطح در واحد زمان در جهت مخالف برداریکهٔ قائم و به سوی خارج مانند $\boldsymbol{n}$ در P از طریق S جریان یابد. بنابر قانون فوریه(۱) بخش ۲ می‌دانیم که اگر $\dfrac{du}{dn}$ مشتق جهتی u در p در امتداد $\boldsymbol{n}$ باشد، شار وارد به جسم از طریق S در P برابر است با مقدار Kdu/dn در آن نقطه. بنابراین روی سطح S داریم:

$$K\frac{du}{dn} = \Phi_۰ \tag{۸}$$

ملاحظه کنید که S اگر کاملاً عایق‌بندی شده باشد، $\Phi_۰ = ۰$ در نقاط روی S و شرط (۸) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{du}{dn} = ۰ \tag{۹}$$

از طرف دیگر، ممکن است انتقال حرارت رویه‌ای بین یک رویهٔ مرزی و یک محیط با دمای ثابت T موجود باشد. پس شار ورودی Φ ، که می‌تواند منفی باشد، ممکن است روی S

از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر کند و فرض می‌کنیم که در هر نقطهٔ P شار با تفاضل دما در P و دمای T محیط متناسب باشد. با عنایت به این فرض که گاهی قانون سرمایش نیوتن نامیده می‌شود، ثابت مثبتی مانند H موسوم به هدایت رویه‌ای ماده هست که در نقاط روی S داریم $\Phi = H(T-u)$. در این صورت یکی از دو شرط زیر جایگزین شرط (۸) می‌شود:

$$K\frac{du}{dn} = H(T-u) \tag{۱۰}$$

یا

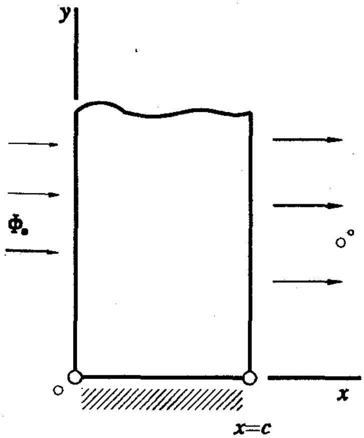
$$\frac{du}{dn} = h(T-u) \qquad \left(h = \frac{H}{K}\right) \tag{۱۱}$$

مثال . قطعهٔ نیمه نامتناهی را در نظر می‌گیریم که ناحیهٔ $\circ \le x \le c$ ، $y \ge \circ$ از فضای سه بعدی را اشغال می‌کند. شکل (۳) مقطع قطعه در صفحهٔ xy را نشان می‌دهد. فرض کنید که در نقاط روی وجه در صفحهٔ $x=\circ$ شار ثابتی مانند $\Phi_\circ$ به داخل قطعه موجود باشد و یک انتقال حرارت رویه‌ای (شاید به طرف داخل) بین وجه واقع در صفحهٔ $x=c$ و محیطی در دمای صفر داشته باشیم؛ همچنین رویه در صفحهٔ $y=\circ$ با عایق مجزا شده باشد. چون روی وجه‌ها در صفحات $x=\circ$ و $x=c$ به ترتیب $\frac{du}{dn} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial x}$ واضح است که تابع دمای $u(x, y, z, t)$ در شرایط مرزی ذیل صدق می‌کند:

$$-Ku_x(\circ, y, z, t) = \Phi_\circ \quad , \quad u_x(c, y, z, t) = -hu(c, y, z, t)$$

رویهٔ عایق‌بندی شده منجر به شرط مرزی ذیل می‌شود

$$u_y(x, \circ, z, t) = \circ$$



شکل ۳

باید تأکید کرد که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کـه در ایـن بـخش بـه دست می‌آید،در قسمتهای دیگر ریاضی کاربردی مهمند. در مسائل سادهٔ نفوذ، مثلاً قـانون فوریه $\Phi=-K\frac{du}{dn}$ برای شار Φ از یک ماده که درون جسم متخلخلی نفوذ می‌کند به کار می‌رود. در این حالت Φ نمایش جرم ماده‌ای است که در واحد سطح در واحد زمان از طریق رویه نفوذ می‌کند، u نمایش غلظت (جرم مادهٔ نفوذ کرده در واحد حـجم جسـم توپر) و K ضریب نفوذ است. چون جرم ماده‌ای که به عنصر حجم در شکل ۲ (بخش۲) در واحد زمان وارد می‌شود برابر است با $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,u_t$ ، می‌توان در استنتاج معادلهٔ گرما به جای حاصلضرب $\sigma\delta$ عدد یک را قرار داد. غلظت u در معادلهٔ نفوذ ذیل صدق می‌کند:

$$u_t=k\nabla^2 u \qquad (۱۲)$$

تابع $u=u(x, y, z)$ را که خود و مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم آن پیوسته‌اند و در معادلهٔ لاپلاس(۵) صدق می‌کنند، یک تابع همساز می‌نامند. در این بخش دیـده‌ایـم کـه دماهای حالت مانا در نقاط درون جسم توپر که در آن هیچ گرمایی تولید نمی‌شود، به وسیلهٔ یک تابع همساز نمایش داده می‌شود. غلظت حالت مانای یک مادهٔ پخش شونده (یا نفوذ کننده) نیز به وسیلهٔ چنین تابعی نشان داده می‌شود.

در میان مثالهای فیزیکی زیاد برای توابع همساز، پتانسیل سرعت برای حرکت غیر دورانی حالت مانای یک سیال تراکم‌ناپذیر در هیدرودینامیک و آیرودینامیک مهم است. یک تابع همساز مهم در نظریهٔ میدان مغناطیسی عبارت است از پتانسیل الکترواستاتیک $V(x, y, z)$ در ناحیه‌ای از فضا که بار الکتریکی ندارد. ممکن است توزیع استاتیک بارهای الکتریکی خارج آن ناحیه عامل پتانسیل باشد. علت همساز بودن V نتیجه‌ای از قانون عکس مجذور فاصله در جاذبه یا دافعه بین بارهاست. همین طور، پتانسیل گرانشی، تابعی همساز در نواحی‌یی از فضاست که به وسیلهٔ ماده اشغال نشده باشد.

در این کتاب، مسائل فیزیکی که شامل لاپلاسین و بخصوص معادلهٔ لاپلاس است، غالباً به آنهایی محدود می‌شود که معادلات دیفرانسیل آنها در این فصل به دست آمده است. استنتاج چنین معادلات دیفرانسیلی در قسمتهای دیگر ریاضی کاربردی را می‌توان در کتابهای هیدرودینامیک، کشسانی، ارتعاشات و صوت، نظریهٔ میدان مغناطیسی، نظریهٔ پتانسیل و شاخه‌های دیگر مکانیک کوآنتوم یافت. فهرست تعدادی از این قبیل کتابها در کتابنامهٔ انتهای این کتاب آمده است.

۴. لاپلاسین در مختصات استوانه‌ای و کروی

یادآور می‌شویم که معادلهٔ گرما، که در بخش ۲ به دست آمد و شکلهای تغییر یافتهٔ آن (بخش۳)، به انضمام معادلهٔ لاپلاس را میتوان بر حسب لاپلاسین

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \tag{۱}$$

نوشت. اغلب به دلیل شکل هندسی مسألهٔ فیزیکی بهتر است از لاپلاسین در مختصاتی غیر از مختصات مستطیلی استفاده کنیم. در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان لاپلاسین را بر حسب متغیرهای دو دستگاه مختصاتی مهم که قبلاً در حسابان با آنها آشنا شده‌اید نوشت.

مختصات استوانه‌ای ρ, ϕ, z نقطهٔ $P(\rho, \phi, z)$ را مشخص می‌کنند که مختصات

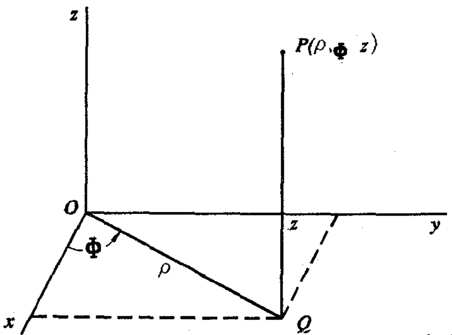
مستطیلی آن عبارتند از[۱] (شکل۴):

$$x=\rho\cos\phi \quad , \quad y=\rho\sin\phi \quad , \quad z=z \qquad (۲$$

بنابراین ρ و ϕ مختصات قطبی نقطهٔ Q در صفحهٔ xy هستند که Q تصویر P در آن صفحه است. روابط (۲) را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\rho=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \quad , \quad \phi=\tan^{-۱}\frac{y}{x} \quad , \quad z=z \qquad (۳$$

که در آن ربع صفحه‌ای که ϕ در آن قرار دارد، تنها از روی نسبت y/x تعیین نمی‌شود بلکه به وسیلهٔ علامت x و y تعیین می‌شود.



شکل ۴

فرض کنید u تابعی از x ، y و z باشد. در این صورت بنابر روابط (۱) تابعی از سه متغیر ρ ، ϕ و z نیز می‌باشد. اگر u پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم پیوسته باشد، با استفاده از قاعدهٔ زنجیری برای مشتقات توابع مرکب، بـه روش زیـر می‌توان لاپلاسین (۱) را بر حسب ρ، ϕ و z نوشت.

با استفاده از روابط (۳) می‌توان نوشت:

---

۱. در حسابان اغلب به جای ρ و ϕ از r و θ استفاده می‌شود، اما نمادی که در اینجا به کار برده‌ایم در فیزیک و مهندسی متداول است. نمادی هم که بعد از این برای مختصات کروی در این بخش به کارمی‌بریم، ممکن است آنچه در حسابان آموخته‌اید متفاوت باشد.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}-\frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{y}{x^{۲}+y^{۲}}=\frac{x}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho}-\frac{y}{\rho^{۲}}\cdot\frac{\delta u}{\delta \phi}$$

پس بنابر روابط (۲)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\phi\frac{\partial u}{\partial \rho}-\frac{\sin\phi}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \phi} \qquad (۴$$

اگر در رابطهٔ (۴) بجای u تابع $\frac{\partial u}{\partial x}$ را قرار دهیم، می‌بینیم که:

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}=\cos\phi\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\sin\phi}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad (۵$$

حال می‌توان بجای مشتق $\frac{\partial u}{\partial x}$ که در سمت راست رابطهٔ (۵) ظاهر شد، عبارت (۴) را جایگزین کرد:

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}=\cos\phi\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\phi\frac{\partial u}{\partial \rho}-\frac{\sin\phi}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)$$

$$-\frac{\sin\phi}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\cos\phi\frac{\partial u}{\partial \rho}-\frac{\sin\phi}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)$$

با استفاده از قواعد مشتق تفاضل و حاصلضرب توابع و رابطهٔ

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial \rho\partial \phi}=\frac{\partial^{۲} u}{\partial \phi\partial \rho}$$

که بنابر پیوستگی مشتقات جزئی برقرار است؛ نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}=\cos^{۲}\phi\frac{\partial^{۲} u}{\partial \rho^{۲}}-\frac{۲\sin\phi\cos\phi}{\rho}\cdot\frac{\partial^{۲} u}{\partial \phi\partial \rho}+\frac{\sin^{۲}\phi}{\rho^{۲}}\cdot\frac{\partial^{۲} u}{\partial \phi^{۲}} \qquad (۶$$

$$+\frac{\sin^{۲}\phi}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{۲\sin\phi\cos\phi}{\rho^{۲}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

به همین روش می‌توان نشان داد که:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{x}{\rho^{۲}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \phi} \qquad (۷$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\phi\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\cos\phi}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \phi} \tag{۸}$$

و همین طور؛

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=\sin^۲\phi\,\frac{\partial^۲ u}{\partial \rho^۲}+\frac{۲\sin\phi\cos\phi}{\rho}\cdot\frac{\partial^۲ u}{\partial\phi\partial\rho}+\frac{\cos^۲\phi}{\rho^۲}\cdot\frac{\partial^۲ u}{\partial\phi^۲} \tag{۹}$$

$$+\frac{\cos^۲\phi}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{۲\sin\phi\cos\phi}{\rho^۲}\cdot\frac{\partial u}{\partial\phi}$$

با جمع کردن طرفین متناظر روابط (۶) و (۹) به اتحاد ذیل می‌رسیم:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=\frac{\partial^۲ u}{\partial \rho^۲}+\frac{۱}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{۱}{\rho^۲}\cdot\frac{\partial^۲ u}{\partial\phi^۲} \tag{۱۰}$$

چون مختصات مستطیلی و استوانه‌ای در مختص z مشترکند، در نتیجه لاپلاسین در مختصات استوانه‌ای عبارت است از:

$$\nabla^۲ u=\frac{\partial^۲ u}{\partial \rho^۲}+\frac{۱}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{۱}{\rho^۲}\cdot\frac{\partial^۲ u}{\partial\phi^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲} \tag{۱۱}$$

می‌توان دو جملهٔ اول را در یک دسته قرار داد و با استفاده از نماد اندیس پایین برای مشتقات جزئی، این عبارت را بدین شکل نوشت:

$$\nabla^۲ u=\frac{۱}{\rho}\cdot(\rho u_\rho)_\rho+\frac{۱}{\rho^۲}\cdot\ u_{\phi\phi}+u_{zz} \tag{۱۲}$$

عبارت (۱۰) لاپلاسین دو بعدی را در مختصات قطبی به ما می‌دهد. توجه کنید که معادلهٔ لاپلاس $\nabla^۲ u=۰$ را در آن دستگاه مختصات برای صفحهٔ xy می‌توان چنین نوشت:

$$\rho^۲ u_{\rho\rho}+\rho u_\rho+u_{\phi\phi}=۰ \tag{۱۳}$$

همچنین توجه کنید که وقتی دماهای u در جسم توپر فقط با ρ تغییر می‌کند و نه با ϕ و z ، چگونه از عبارت (۱۱) نتیجه می‌شود که معادلهٔ گرما $u_t=k\nabla^۲ u$ به شکل ذیل

درمی‌آید؛

$$u_t = k\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho\right) \tag{۱۴}$$

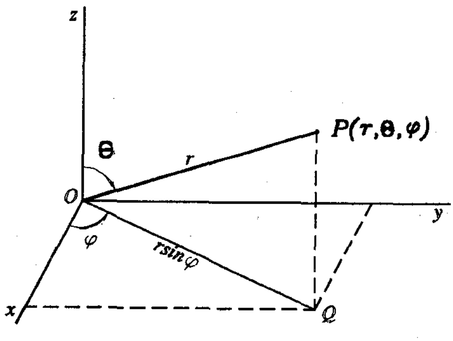
معادلات (۱۳) و (۱۴) در کاربردها استفادهٔ خاصی دارد.

مختصات کروی r،ϕ و θ از یک نقطهٔ $P(r, \phi, \theta)$ (شکل ۵) به x و y و z بدین صورت وابسته‌اند:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad , \quad z = r\cos\theta \tag{۱۵}$$

مختص ϕ در مختصات کروی و استوانه‌ای مشترک و مختصات در آن دو دستگاه با روابط زیر به هم وابسته‌اند:

$$z = r\cos\theta \quad , \quad \rho = r\sin\theta \quad , \quad \phi = \phi \tag{۱۶}$$



شکل ۵

عبارت (۱۱) برای لاپلاسین را می‌توان بسادگی با تغییر مناسب حروف به مختصات کروی تبدیل کرد، بدون اینکه مجدداً از قاعده زنجیری استفاده کنیم. این عمل طی سه مرحلهٔ زیر انجام می‌شود:

اولاً ملاحظه می‌کنید که جز نام متغیرهای مطرح شده، تبدیل (۱۶) همان تبدیل (۲) است. چون تبدیل (۲) معادلهٔ (۱۰) را به ما می‌دهد، می‌دانیم که:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{۱۷}$$

ثانیاً، توجه می‌کنیم که وقتی از تبدیل (۱۶) استفاده می‌کنیم جملهٔ نظیر رابطهٔ(۷) عبارت می‌شود از:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\rho}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{z}{r^{2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

با این رابطه و روابط (۱۶) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^{2}}\cdot\frac{\partial^{2} u}{\partial \phi^{2}}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^{2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{1}{r^{2}\sin^{2}\theta}\cdot\frac{\partial^{2} u}{\partial \phi^{2}} \tag{۱۸}$$

ثالثاً، با دسته‌بندی جملات اول و آخر عبارت (۱۱) و همچنین جملات دوم و سوم آن، می‌بینیم که بنابر روابط (۱۷) و (۱۸)، لاپلاسین u در مختصات کروی عبارت است از:

$$\nabla^{2}u=\frac{\partial^{2} u}{\partial r^{2}}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^{2}\sin^{2}\theta}\cdot\frac{\partial^{2} u}{\partial \phi^{2}}+\frac{1}{r^{2}}\cdot\frac{\partial^{2} u}{\partial \theta^{2}}+\frac{\cot\theta}{r^{2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{۱۹}$$

صورتهای دیگر لاپلاسین عبارتند از:

$$\nabla^{2}u=\frac{1}{r}(ru)_{rr}+\frac{1}{r^{2}\sin^{2}\theta}u_{\phi\phi}+\frac{1}{r^{2}\sin\theta}(\sin\theta\, u_{\theta})_{\theta} \tag{۲۰}$$

$$\nabla^{2}u=\frac{1}{r^{2}}(r^{2}u_{r})_{r}+\frac{1}{r^{2}\sin^{2}\theta}u_{\phi\phi}+\frac{1}{r^{2}\sin\theta}(\sin\theta\, u_{\theta})_{\theta} \tag{۲۱}$$

در بسیاری از کاربردهای بعدی ما معادلهٔ لاپلاس $\nabla^{2}u=0$ در مختصات کروی مطرح می‌شود که u مستقل از ϕ است. بنابر عبارت (۲۰) این معادله را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$r\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}(ru)+\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=0 \tag{۲۲}$$

مسائل

۱. فرض کنید $u(x)$ نمایش دمای حالت مانا در قطعه‌ای محدود به صفحات $x=0$ و $x=c$ باشد که در آن وجه‌ها، بترتیب، در دماهای ثابت $u=0$ و $u=u_{0}$ نگهداشته

شده‌اند. با طرح و حل مسألهٔ مقدار مرزی برای $u(x)$ نشان دهید که:

$$u(x)=\frac{u_\circ}{c}x \qquad , \qquad \Phi_\circ=K\frac{u_\circ}{c}$$

که در آن $\Phi_\circ$ شار گرمای گذرنده از هر صفحهٔ $x=x_\circ$ $(\circ\le x_\circ\le c)$ بطرف چپ می‌باشد.

۲. قطعه‌ای ناحیهٔ $\circ\le x\le c$ را اشغال کرده است. از وجه $x=\circ$ شار گرمایی ثابتی مانند $\Phi_\circ$ به داخل آن قطعه موجود است. وجه $x=c$ در دمای $u=\circ$ نگهداشته می‌شود. برای دماهای حالت مانا $u(x)$ در آن قطعه مسألهٔ مقدار مرزی را نوشته و آن را حل کنید.

جواب
$$u(x)=\frac{\Phi_\circ}{K}(c-x)$$

۳. فرض کنید قطعهٔ $\circ\le x\le c$ در وجه‌های $x=\circ$ و $x=c$ و طبق قانون سرمایش نیوتن، در موقعیت تبادل حرارت رویه‌ای قرار دارد، و رسانائی رویه‌ای H روی هر وجه یکی است. نشان دهید اگر محیط $x<\circ$ دارای دمای صفر و محیط $x>c$ دارای دمای ثابت T باشد، آنگاه مسألهٔ مقدار مرزی برای دماهای حالت مانا در قطعه عبارت است از:

$$u''(x)=\circ \qquad (\circ<x<c)$$
$$Ku'(\circ)=Hu(\circ) \quad , \qquad Ku'(c)=H[T-u(c)]$$

که در آن K هدایت گرمایی ماده در قطعه است. با انتخاب $h=H/K$ عبارت زیر را برای آن دماها به دست آورید:

$$u(x)=\frac{T}{ch+۲}(hx+۱)$$

۴. فرض کنید $u(r)$ نمایش دمای حالت مانا در جسم صلبی محدود به دو کرهٔ متحدالمرکز $r=a$ و $r=b$ $(a<b)$ باشد که سطح داخلی $r=a$ در دمای صفر و سطح خارجی $r=b$ در دمای ثابت $u_۰$ نگهداشته شده است. نشان دهید چرا معادلهٔ لاپلاس برای $u(r)$ به معادلهٔ

$$\frac{d^۲}{dr^۲}(ru)=۰$$

تبدیل می‌شود، سپس عبارت زیر را به دست آورید:

$$u(r)=\frac{bu_۰}{b-a}(۱-\frac{a}{r}) \qquad (a\le r\le b)$$

نمودار $u(r)$ نسبت به r را رسم کنید.

۵. در مسألهٔ ۴ شرطی را که روی سطح خارجی $r=b$ قائل شده‌ایم، با شرط وجود انتقال دمای رویه‌ای به یک محیط با دمای ثابت T، بنابر قانون سرمایش نیوتن، عوض کنید. سپس عبارت

$$u(r)=\frac{hb^۲T}{a+hb(b-a)}.(۱-\frac{a}{r}) \qquad (a\le r\le b)$$

را برای دمای حالت مانا به دست آورید، که در آن h نسبت هدایت رویه‌ای H به هدایت گرمایی K ماده است.

۶. فرض کنید $u=u(x,y,z,t)$ نمایش دما در جسم صلبی باشد که در آن چشمهٔ گرمایی یکنواخت موجود است. معادلهٔ گرمایی

$$u_t=k\nabla^۲u+q$$

را برای آن دماها به دست آورید، که در آن ثابتهای k و q همان ثابتهای معادلهٔ (۵) بخش ۲ هستند.

راهنمایی: در استنتاج معادلهٔ (۵) بخش ۲ کمی تغییر دهید، با در نظر گرفتن نسبت خالص گرمایی که از طریق وجه‌های موازی صفحات xy و xz نیز به عنصر شکل ۲ (بخش ۲) وارد می‌شود. چون وجه‌ها کوچکند، می‌توان شار لازم در نقاط روی وجه مفروض را،

روی آن وجه ثابت در نظر گرفت. بدین ترتیب، به عنوان مثال، نسبت خالص دمایی را که از طریق وجه‌های موازی صفحهٔ xy به عنصر وارد می‌شود باید به شکل زیر در نظر گرفت:

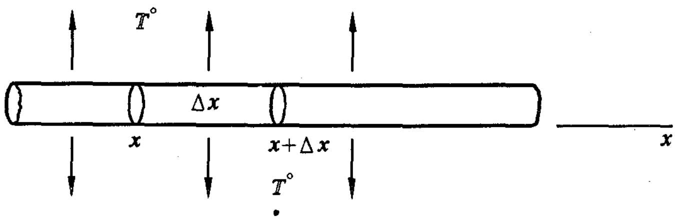
$$K[u_z(x,y,z+\Delta z,t)-u_z(x,y,z,t)]\Delta x\Delta y$$

۷. یک سیم نازک در امتداد محور xها قرار دارد و انتقال گرمای رویه‌ای در امتداد سیم به محیط اطراف که در دمای ثابت T هست صورت می‌گیرد. باتغییرات مناسبی در روش بخش۲ نشان دهید اگر $u=u(x,t)$ نمایش دما درسیم باشد،آنگاه:

$$u_t=ku_{xx}+b(T-u)$$

که در آن b ثابت مثبتی است.

راهنمایی: فرض کنید r شعاع سیم باشد و با استفاده از قانون سرمایش نیوتن نشان دهید مقدار گرمایی که از طریق رویهٔ استوانه‌ای آن در واحد زمان به عنصر شکل ۶ وارد می‌شود، تقریباً برابر است با $H[T-u(x,t)]2\pi r\Delta x$



شکل ۶

۸. فرض کنید ضرایب گرمایی K و σ توابعی از x و y و z باشند. با تغییرات مناسبی در نتیجه‌گیری مسألهٔ ۷ نشان دهید در حوزه‌ای که همهٔ توابع و مشتقات مطرح شده پیوسته باشند، معادلهٔ گرما به شکل ذیل در می‌آید:

$$\sigma\delta u_t=(ku_x)_x+(ku_y)_y+(ku_z)_z$$

۹. نشان دهید با جایگزینی $\tau=kt$ معادلهٔ دو بعدی گرما $u_t=k(u_{xx}+u_{yy})$ را می‌توان به شکل $u_\tau=u_{xx}+u_{yy}$ نوشت که در آن $k=1$

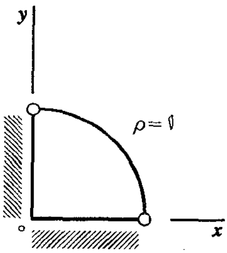
۱۰. عبارات (۸) و (۹) بخش ۴ برای $\frac{\partial u}{\partial y}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ در مختصات استوانه‌ای را به دست آورید.

۱۱. در بخش ۴، نشان دهید چگونه عبارات (۲۰) و (۲۱) برای $\nabla^2 u$ در مختصات کروی از عبارات (۱۹) به دست می‌آید.

۱۲. الف) نشان دهید اگر u تابعی از مختصات قطبی ρ و ϕ باشد که در آن $x=\rho\cos\phi$ و $y=\rho\sin\phi$ آنگاه:

$$\frac{\partial u}{\partial \phi}=-y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}$$

ب) فرض کنید $u(\rho,\phi)$ نمایش دماها، مستقل از مختص z استوانه‌ای، در یک میلهٔ بلند باشد که موازی محور z هاست و سطح مقطع آن در صفحهٔ xy قطاع $0\le\rho\le 1$، $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ از یک قرص است (شکل۷). با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) نشان دهید اگر



شکل ۷

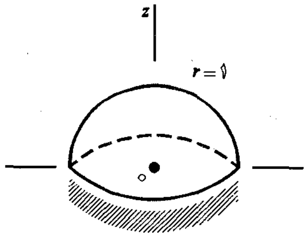
میله روی سطوح مسطحه‌اش که در آن $\phi=0$ و $\phi=\pi/2$ با عایق مجزا شده باشد، آنگاه u باید در شرایط مرزی ذیل صدق کند:

$$u_\phi(\rho,0)=0 \qquad , \qquad u_\rho(\rho,\frac{\pi}{2})=0 \qquad (0<\rho<1)$$

۱۳. فرض کنید دماهای u در نیمکرهٔ توپر $r\le 1$ و $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ از مختص کروی ϕ مستقل باشد، بنابراین $u=u(r,\theta)$، و قاعدهٔ نیمکره عایق بندی شده باشد (شکل۸). با استفاده از تبدیل (۱۶) بخش ۴، که مختصات استوانه‌ای را به مختصات کروی مربوط می‌کند، نشان دهید که:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\rho\frac{\partial u}{\partial z}+z\frac{\partial u}{\partial \rho}$$

بدین ترتیب نشان دهید که u باید در شرط مرزی $u_\theta(r,\frac{\pi}{۲})=۰$ صدق کند.



شکل ۸

۱۴. نشان دهید که ابعاد فیزیکی هدایت گرمایی k (بخش ۲) برابرند با $L^{۲}T^{-۱}$، که در آن L نمایش طول و T نمایش زمان است.

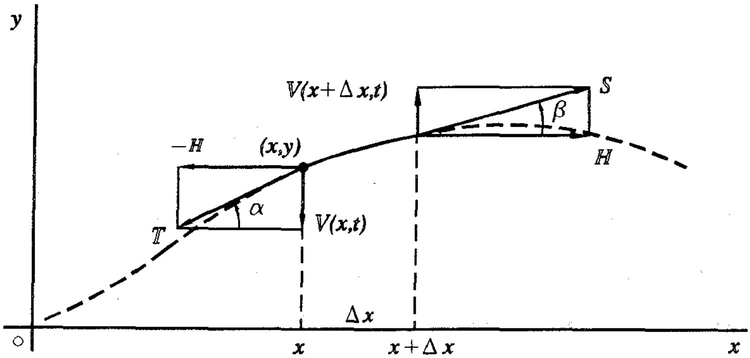
راهنمایی: ابتدا ملاحظه کنید که ابعاد هدایت گرمایی K و گرمای ویژهٔ σ، به ترتیب برابرند با $AL^{-۱}T^{-۱}B^{-۱}$ و $AM^{-۱}B^{-۱}$، که در آن M نمایش جرم، A مقدار گرما و B دماست. سپس به یاد آورید که $k=K/(\sigma\delta)$ که در آن δ چگالی است $(ML^{-۳})$.

۵. تار مرتعش

تار مرتعشی که محکم کشیده شده و حالت تعادلی آن در بازه‌ای از محور x هاست، در صفحهٔ xy ارتعاش می‌کند. هر نقطهٔ تار به مختصات $(x,۰)$ در حالت تعادل، در زمان t دارای تغییر مکان عرضی $y=y(x,t)$ است. فرض می‌کنیم که تغییرات y نسبت به طول تار کوچک باشد، شیبها هم کوچک و شرایط دیگر به گونه‌ای باشد که حرکت هر نقطه موازی محور y باشد. در این صورت هر نقطه روی تار در زمان t دارای مختصات $(x,y)=(x,y(x,t))$ است.

فرض کنید کشش تار به قدر کافی زیاد باشد که تار همانند تارهای کاملاً قابل انعطاف رفتار کند، یعنی در نقطهٔ (x,y) از تار، قسمت سمت چپ آن نقطه، در جهت مماس، به قسمت راست آن نیرویی مانند T وارد کند و از هر مقاومت در مقابل خم شدن تار در آن نقطه باید صرف نظر شود. مقدار مؤلفهٔ x نیروی کششی T را با H نمایش می‌دهیم. شکل ۹ را ببینید که در آن جهت مثبت مؤلفهٔ x با جهت مثبت محور x ها یکی است. آخرین فرض ما در اینجا ثابت بودن H است. یعنی، می‌توان تغییرات H نسبت به

x و t را نادیده گرفت.



شکل ۹

این فرضهای دلچسب، سنگین اما در بسیاری از کاربردها قابل توجیهند. مثلاً برای تارهای آلات موسیقی، در شرایط معمولی کار، بخوبی برقرارند. از نظر ریاضی، این مفروضات منجر به معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی از $y(x,t)$ می‌شود که خطی است.

حال فرض کنید $V(x,t)$ نمایش مؤلفهٔ y نیروی کششی T باشد که در نقطهٔ (x,y) از قسمت سمت چپ تار به قسمت سمت راست آن وارد می‌شود. جهت مثبت V را جهت مثبت محور y ها می‌گیریم. اگر α زاویهٔ میل تار در نقطهٔ (x,y) در زمان t باشد، آنگاه:

$$\frac{-V(x,t)}{H} = \tan\alpha = y_x(x,t) \tag{۱}$$

این مطلب را در شکل ۹ نشان داده‌ایم، که در آن $V(x,t) < ۰$ و $y_x(x,t) > ۰$ اگر $V(x,t) > ۰$ آنگاه $\pi/۲ < \alpha < \pi$ و $y_x(x,t) < ۰$ و با روشی مشابه نتیجه می‌شود که:

$$\frac{V(x,t)}{H} = \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha = -y_x(x,t)$$

بنابراین، روابط (۱) هنوز برقرارند. همچنین توجه کنید که اگر $V(x,t) = ۰$ آنگاه $y_x(x,t) = ۰$، زیرا در آن صورت $\alpha = ۰$. از روابط (۱) نتیجه می‌شود که $V(x,t)$ یعنی

مؤلفه y نیرویی که در زمان t در نقطهٔ (x,y) از سمت چپ تار بر قسمت راست آن وارد می‌شود از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$V(x,t) = -Hy_x(x,t) \qquad (H>0) \tag{۲}$$

که اساس کار یافتن معادلهٔ حرکت تار است. از معادلهٔ (۲) همچنین در طرح برخی شرایط مرزی استفاده می‌شود.

فرض کنید همهٔ نیروهای خارجی از قبیل وزن تار و نیروی مقاومت، غیر از نیروهای موجود در نقاط انتهایی، قابل چشم پوشی باشند. قطعه‌ای از تار را که شامل نقطهٔ انتهایی نیست و تصویر آن روی محور xها به طول Δx است در نظر می‌گیریم. چون مؤلفه‌های x تغییر مکانها قابل اغماضند، جرم قطعه برابر است با $\delta \Delta x$، که در آن δ جرم هر واحد طول تار است. در زمان t، مؤلفهٔ y نیرویی که از تار بر آن قطعه در انتهای چپ (x,y) وارد می‌شود برابر است با $V(x,t)$ که با معادلهٔ(۲) داده می‌شود. نیروی مماسی S نیز که از قسمت راست تار در انتهای دیگر آن قطعه وارد می‌شود، در شکل ۹ نشان داده شده است. مؤلفهٔ y آن $V(x+\Delta x,t)$ به وضوح در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\frac{V(x+\Delta x,t)}{H} = \tan\beta$$

که در آن β زاویهٔ میل تار در انتهای دیگر قطعهٔ تار است . یعنی:

$$V(x+\Delta x,t) = Hy_x(x+\Delta x,t) \qquad (H>0) \tag{۳}$$

توجه کنید که به جز علامت منها، این معادله همان معادلهٔ (۲) است که در آن به جای x مقدار $x+\Delta x$ قرار گرفته است.

حال شتاب نقطهٔ انتهایی (x,y) در امتداد y برابر است با $y_{tt}(x,t)$. در نتیجه بنابر قانون دوم نیوتن برای حرکت (نیرو برابر است با جرم ضرب در شتاب) وقتی که Δx کوچک باشد، از معادلات (۲) و (۳) به طور تقریبی نتیجه می‌شود که:

$$\delta \Delta x\, y_{tt}(x,t) = -Hy_x(x,t) + Hy_x(x+\Delta x,t) \tag{۴}$$

بنابراین در صورت وجود مشتقات جزئی خواهیم داشت:

$$y_{tt}(x, t)=\frac{H}{\delta} \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{y_x(x+\Delta x, t)-y_x(x, t)}{\Delta x}=\frac{H}{\delta} y_{xx}(x, t)$$

پس تابع $y(x,t)$ که نمایش تغییر مکان عرضی در تار کشیده شده تحت شرایط بالاست در معادلهٔ موج یک بعدی ذیل صدق می‌کند:

$$y_{tt}(x,t)=a^{۲} y_{xx}(x,t) \qquad (a^{۲}=\frac{H}{\delta}) \tag{۵}$$

ثابت a دارای ابعاد فیزیکی سرعت است.

می‌توان واحد متغیر زمان را طوری در نظر گرفت که در معادلهٔ موج $a=۱$. به عبارت دقیقتر، اگر تغییر متغیر $\tau=at$ بدهیم: از قاعدهٔ زنجیری نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=a \frac{\partial y}{\partial \tau} \quad , \quad \frac{\partial^{۲} y}{\partial \tau^{۲}}=a \frac{\partial}{\partial \tau}(a \frac{\partial y}{\partial \tau})=a^{۲} \frac{\partial^{۲} y}{\partial \tau^{۲}}$$

در این صورت معادلهٔ (۵) تبدیل به $y_{tt}=y_{xx}$ می‌شود. (در مسألهٔ ۹ بخش ۴ نسبت به معادله گرما چنین ملاحظه‌ای صورت گرفت.)

وقتی نیروهای خارجی موازی محور y ها در امتداد تار عمل می‌کنند، فرض می‌کنیم F نمایش نیرو در هر واحد طول تار و جهت مثبت F همان جهت مثبت محور y باشد. در این صورت در سمت راست معادلهٔ (۴) باید جملهٔ $F\Delta x$ را اضافه کرد و معادلهٔ حرکت عبارت است از:

$$y_{tt}(x,t)=a^{۲} y_{xx}(x,t)+\frac{F}{\delta} \tag{۶}$$

بخصوص، با محور y قائم و جهت مثبت رو به بالا، فرض کنید که نیروی خارجی مرکب از وزن تار باشد. پس $F\Delta x=-\delta\Delta x g$، که در آن ثابت مثبت g شتاب ثقل است و معادلهٔ (۶) تبدیل به معادلهٔ خطی ناهمگن ذیل می‌شود:

$$y_{tt}(x,t)=a^{۲} y_{xx}(x,t)-g \tag{۷}$$

در معادلهٔ (۶)، F ممکن است تابعی از x، t، y یا مشتقات y باشد. مثلاً اگر نیروی خارجی در هر واحد طول یک نیروی میرا و متناسب با سرعت در امتداد y باشد، به جای F مقدار $-By_t$ را قرار می‌دهیم که در آن ثابت مثبت B یک ضریب میرا است. در این صورت معادلهٔ حرکت خطی و همگن است:

$$y_{tt}(x,t)=a^{۲}y_{xx}(x,t)-by_t(x,t) \qquad \left(b=\frac{B}{\delta}\right) \tag{۸}$$

اگر یک انتهای $x=۰$ تار را در همهٔ زمانهای $t\geq ۰$ در مبدأ ثابت نگاه داریم، بدیهی است که شرط مرزی در آنجا عبارت است از:

$$y(۰,t)=۰ \qquad (t\geq ۰) \tag{۹}$$

اما اگر آن انتها بتواند در امتداد محور yها بلغزد و در طول آن محور با تغییر مکان $f(t)$ حرکت کند، آن شرط مرزی عبارت خواهد بود از شرط خطی و ناهمگن

$$y(۰,t)=f(t) \qquad (t\geq ۰) \tag{۱۰}$$

فرض کنید که انتهای چپ به حلقه‌ای وصل باشد که می‌تواند در امتداد محور yها بلغزد. وقتی به آن انتها نیروی $F(t)$ $(t>۰)$ در امتداد y وارد شود $F(t)$ برابر است با حد نیروی، $V(x,t)$ که قبلاً در این بخش بیان شد، وقتی x با مقادیر مثبت به صفر میل کند. پس بنابر معادلهٔ (۲) شرط مرزی در $x=۰$ عبارت است از:

$$-Hy_x(۰,t)=F(t) \qquad (t>۰)$$

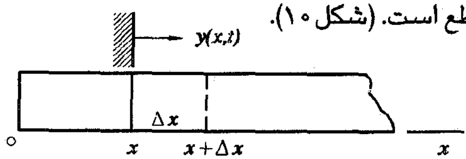
ولی اگر $x=۰$ انتهای راست باشد، با توجه به معادلهٔ (۳) علامت منفی از بین می‌رود.

۶. ارتعاشات میله‌ها و پوسته‌ها

در اینجا دو نوع دیگر از ارتعاشهایی را بیان می‌کنیم که تغییر مکانهای آن در معادلات موج صدق می‌کند. ما همچنان توجهمان را به پدیده‌های نسبتاً ساده محدود می‌کنیم.

الف) ارتعاشهای طولی میله‌ها

فرض کنید مختص x نمایش فاصلهٔ یک انتهای میلهٔ کشسانی به شکل استوانه یا مخروط تا مقاطع دیگر آن باشد، وقتی میله بدون تنش است. تغییر مکانهای انتهاها یا تغییر مکانهای اولیه یا سرعتها در آن میله، همه در امتداد طول میله و در هر مقطعی که مطرح می‌شود یکنواختند؛ این امر باعث می‌شود که مقاطع موازی محور xها حرکت کنند. در زمان t، تغییر مکان طولی مقطع در نقطهٔ x را به $y(x,t)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین مبدأ تغییر مکان y از مقطع آن میله در x ،دستگاه مختصات ثابتی خارج آن میله، در صفحهٔ موقعیت بدون تنش آن مقطع است. (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

در همین حال یک مقطع مجاور که در شکل ۱۰ با $x+\Delta x$ نشان داده شده و در سمت راست مقطع واقع در x قرار دارد، دارای یک تغییر مکان $y(x+\Delta x,t)$ می‌باشد. در این صورت المان میله با طول طبیعی Δx به اندازهٔ $y(x+\Delta x,t)-y(x,t)$ کشیده شده است. فرض می‌کنیم که چنین انبساط یا انقباض المان در قانون هوک صدق کند و اثر گشتاور المان حرکت کننده قابل چشم پوشی باشد. بنابراین نیرویی که از قسمت چپ میله به مقطع واقع در x وارد می‌شود برابر است با:

$$-AE\ \frac{y(x+\Delta x,t)-y(x,t)}{\Delta x}$$

که در آن A مساحت هر سطح مقطع، ثابت مثبت E پیمانهٔ کششی یانگ و کسر نشان داده شده نمایش تغییر نسبی طول المان است. هر گاه Δx به صفر میل کند، نتیجه می‌شود که نیروی طولی $F(x,t)$ که در انتهای چپ وارد می‌شود از معادلهٔ اصلی زیر به دست می‌آید:

$$F(x,\ t)=-AEy_x(x,\ t)\ . \qquad (۱)$$

همین طور نیروی وارد شده در انتهای راست برابر است با:

$$F(x+\Delta x,t)=AEy_x(x+\Delta x,t) \qquad (۲$$

فرض کنید عدد ثابت δ نمایش جرم هر واحد حجم ماده باشد. در این صورت با استفاده از قانون دوم نیوتن دربارهٔ حرکت یک المان از میله به طول Δx می‌توان نوشت:

$$\delta A\Delta x\, y_{tt}(x,t)=-AEy_x(x,t)+AEy_x(x+\Delta x,t) \qquad (۳$$

پس از تقسیم کردن بر $\delta A\ \Delta x$ و میل دادن Δx به سمت صفر در می‌یابیم که:

$$y_{tt}(x,t)=a^{۲}y_{xx}(x,t) \qquad \left(a^{۲}=\frac{E}{\delta}\right) \qquad (۴$$

بنابراین تغییرات طولی $y(x,t)$ در یک میلهٔ کشسان در معادلهٔ موج (۴) صدق می‌کند، هر گاه هیچ نیروی خارجی به جز نیروهای انتهایی بر میله وارد نشود. فرض کرده‌ایم که تغییر مکانها آنقدر کوچک هستند که بتوان از قانون هوک استفاده کرد و مقاطع، پس از تغییر مکان مسطحه باقی می‌مانند. در اینجا می‌توان به جای میلهٔ کشسان یک ستون هوا قرار داد که در این حالت معادلهٔ (۴) کاربردهایی در نظریهٔ صوت دارد.

شرط مرزی $y(\circ,t)=\circ$ مبین این نکته است که انتهای $x=\circ$ میله ثابت نگاه داشته می‌شود. اگر در عوض، انتهای $x=\circ$ وقتی $t>\circ$ آزاد باشد، آنگاه در آن انتها نیرویی وارد نمی‌شود یعنی $F(\circ,t)=\circ$ و بنابر معادلهٔ (۱):

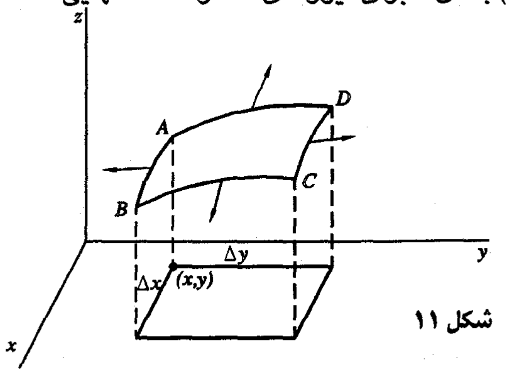
$$y_x(\circ,t)=\circ \qquad (t>\circ) \qquad (۵$$

(ب) ارتعاشات عرضی پوسته‌ها

فرض کنید $z(x,y,t)$ نمایش تغییر مکانهای کوچک نقاط یک پوستهٔ قابل انعطاف در امتداد محور x ها در لحظهٔ t باشد که روی یک قاب افقی محکم کشیده شده است. در حالت تعادل، یک نقطه روی پوسته در صفحهٔ xy دارای مختصات (x,y) است. صفحه‌ای که از آن نقطه می‌گذرد و با صفحهٔ xz موازی است، پوسته را در طول یک منحنی قطع می‌کند که شامل نقاط A و B در شکل ۱۱ است. با ساختارهای مشابه می‌توان المان

$ABCD$ از پوسته متحرک را که در شکل ۱۱ نیز نشان داده شده، تشکیل داد. تصویر این المان روی صفحهٔ xy مستطیل کوچکی با اضلاعی به طول Δx و Δy است.

حال به بررسی نیروهای کششی داخلی که در نقاط منحنی AB به المان وارد می‌شوند می‌پردازیم: این نیروها بر آن المان مماس و بر AB عمودند. در تجزیه و تحلیل چنین نیرویی فرض کنید H نمایش اندازهٔ واحد طول مؤلفهٔ موازی صفحهٔ xy در امتداد AB بوده، H ثابت باشد، بدون توجه به اینکه در مورد چه نقطه یا منحنی روی پوسته صحبت می‌شود. بنابر عبارات (۲) و (۳) بخش ۵ برای نیروهای V در نقاط انتهایی



شکل ۱۱

قطعه‌ای از تار مرتعش، می‌دانیم که نیروی وارد بر منحنی AB در امتداد محور z ها تقریباً برابر است با $-Hz_y(x, y, t)\Delta x$ و نیروی نظیر در امتداد منحنی DC تقریباً برابر است با:

$$Hz_y(x, y+\Delta y, t)\Delta x$$

اگر نیروهای کششی قائمی را که در امتداد منحنی‌های AD و BC وارد می‌شوند در نظر بگیریم، عبارات مشابهی برای آنها به دست می‌آید. در این صورت نتیجه می‌شود که مجموع نیروهای قائمی که در تمامی مرز المان وارد می‌شوند تقریباً برابر است با:

$$-Hz_y(x,y,t)\Delta x + Hz_y(x,y+\Delta y,t)\Delta x - Hz_x(x,y,t)\Delta y + Hz_x(x+\Delta x,y,t)\Delta y$$

اگر قانون دوم نیوتن را در مورد حرکت آن المان در امتداد محور zها به کار بریم و δ نمایش جرم هر واحد سطح پوسته باشد، از عبارت (۶) برای کل نیروی وارد بر آن المان نتیجه می‌شود که $z(x, y, t)$ در معادلهٔ دو بعدی موج صدق می‌کند:

$$z_{tt}=a^{2}(z_{xx}+z_{yy}) \qquad (a^{2}=\frac{H}{\delta}) \tag{۷}$$

جزئیات این مراحل را در قسمت تمرین تشریح می‌کنیم، که در آن نشان داده شده که اگر نیروی عرضی خارجی $F(x, y, t)$ بر هر واحد سطح پوسته عمل کند، معادلهٔ حرکت بدین شکل در می‌آید:

$$z_{tt}=a^{2}(z_{xx}+z_{yy})+\frac{F}{\delta} \tag{۸}$$

معادلهٔ (۸) به عنوان مثال وقتی مطرح می‌شود که محور z قائم و رو به بالا گرفته شده، وزن پوسته در استنتاج معادلهٔ (۷) در نظر گرفته شود. در این صورت $F/\delta=-g$ که در آن g شتاب ثقل است.

از معادلهٔ (۷) می‌بینیم که $z(x,y)$ تغییر مکانهای عرضی ایستایی یک پوسته کشیده شده در معادلهٔ لاپلاس (بخش۳) دو بعدی صدق می‌کند. در اینجا تغییر مکانها، حاصل تغییر مکانهای عمود بر صفحهٔ xy قسمتهایی از قاب است که پوسته را ثابت نگه می‌دارند، هر گاه هیچ نیروی خارجی جز در مرز وارد نشود.

مسائل

۱. یک تار کشیده شده که دو انتهای آن در نقاط ۰ و $2c$ روی محور xها ثابت است، در حال سکون تحت وزن خودش آویخته شده است. محور y قائم و روبه‌بالا جهتدار شده است. نشان دهید چگونه از معادلهٔ موج ناهمگن (۷) بخش ۵ نتیجه می‌شود که تغییر مکانهای ایستای $y(x)$ نقاط روی تار باید در معادلهٔ دیفرانسیل

$$a^{2}y''(x)=g \qquad (a^{2}=\frac{H}{\delta})$$

در بازه $0 < x < 2c$ و در شرایط مرزی صدق کند:

$$y(0) = 0 \qquad y(2c) = 0$$

با حل این مسألهٔ مقدار مرزی، نشان دهید که تار در قوس سهمی

$$(x-c)^2 = \frac{2a^2}{g}\left(y + \frac{gc^2}{2a^2}\right) \qquad (0 \le x \le 2c)$$

آویخته است و عمق رأس قوس با c^2 و δ رابطهٔ مستقیم و با H رابطهٔ عکس دارد.

۲. با استفاده از عبارت (۲) بخش ۵ برای نیروی قائم V و معادلهٔ قوسی که در آن تار مسألهٔ قرار می‌گیرد، نشان دهید نیروی قائمی که از هر تکیه‌گاه بر تار وارد می‌شود با δcg ، نصف وزن تار، برابر است.

۳. فرض کنید $z(\rho)$ نمایش تغییر مکانهای عرضی در پوسته‌ای باشد، که بین دو دایرهٔ $\rho=1$ و $\rho=\rho_0 \, (\rho_0>1)$ در صفحهٔ $z=0$ کشیده شده است، بعد از این که تکیه‌گاه خارجی $\rho=\rho_0$ به فاصلهٔ $z=z_0$ جابجا شده باشد. بیان کنید چرا می‌توان مسألهٔ مقدار مرزی $z(\rho)$ را به صورت

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dz}{d\rho}\right) = 0 \qquad z(1) = 0 \quad , \quad z(\rho_0) = z_0 \qquad (1 < \rho < \rho_0)$$

نوشت و جواب زیر را به دست آورد:

$$z(\rho) = z_0 \frac{\ln \rho}{\ln \rho_0} \qquad (1 \le \rho \le \rho_0)$$

۴. نشان دهید که دمای حالت مانا $u(\rho)$ در استوانهٔ تو خالی $1 \le \rho \le \rho_0$, $-\infty < z < +\infty$ در مسألهٔ مقدار کرانه‌ای نوشته شده در مسألهٔ ۳ صدق می‌کند، هرگاه در سطح داخلی استوانه $u=0$ و در سطح خارجی آن $u=z_0$. بدین ترتیب نشان دهید که مسألهٔ ۳ یک همانندی پوسته‌ای برای این مسألهٔ دماست. از لایه‌های نازک صابون برای نمایش اینگونه شباهت‌ها استفاده شده است.

۵. جزئیات لازم برای استنتاج معادلهٔ (۶) بخش ۵ برای ارتعاشهای ناشی از کشیده شدن یک تار را ارائه دهید.

۶. ابعاد فیزیکی H ، اندازهٔ مؤلفه x نیروی کششی در یک تار، عبارتند از ابعاد فیزیکی جرم ضربدر شتاب $MLT^{-۲}$ ، که در M آن نمایش جرم، L طول و T زمان است. نشان دهید چون $a^۲=H/\delta$ ، ثابت a دارای ابعاد سرعت است: $LT^{-۱}$

۷. یک رشته سیم به طول یک فوت بین مبدأ و نقطهٔ ۱ روی محور x ها کشیده شده است، به وزن ۰/۰۳۲ پوند ($g=۳۲\,ft/sec^۲$, $\delta g=۰/۰۳۲$) و H مساوی ۱۰ پوند است. در لحظهٔ $t=۰$ رشته در امتداد محور xهاست اما دارای سرعت $۱ft/sec$ در امتداد محور y هاست، شاید به خاطر اینکه تکیه‌گاه‌ها در حال حرکت بوده و در آن لحظه ساکن شده‌اند. فرض کنید که هیچ نیروی خارجی در امتداد سیم عمل نکند، بیان کنید چرا تغییر مکانهای $y(x,t)$ باید در این مسألهٔ مقدار مرزی صدق کند:

$$y_{tt}(x,t) = ۱۰^۴ y_{xx}(x,t) \qquad (۰<x<۱\ ,\ t>۰)$$

$$y(۰,t)=y(۱,t)=۰ \qquad y(x,۰)=۰ \qquad y_t(x,۰)=۱$$

۸. انتهای $x=۰$ یک میلهٔ استوانه‌ای الاستیکی ثابت نگه داشته شده است و در انتهای $x=c$ در هر لحظهٔ $t>۰$ یک نیروی تراکمی ثابت به اندازهٔ $F_۰$ واحد بر هر واحد سطح اثر می‌کند. میله ابتدا بدون تنش و در حال سکون است و هیچ نیروی خارجی در امتداد آن وارد نمی‌شود. بیان کنید چرا تابع $y(x,t)$ که نمایش تغییر مکانهای طولی مقاطع است باید در این مسألهٔ مقدار مرزی صدق کند، که در آن $a^۲=E/\delta$:

$$y_{tt}(x,t)=a^۲ y_{xx}(x,t) \qquad (۰<x<c\ ,\ t>۰)$$

$$y(۰,t)=۰ \quad , \quad Ey_x(c,t)=-F_۰ \quad , \quad y(x,۰)=y_t(x,۰)=۰$$

۹. انتهای چپ $x=۰$ یک میلهٔ الاستیکی افقی بطور الاستیک تکیه داده شده طوریکه در آن انتها نیروی طولی وارد بر هر واحد سطح آن میله متناسب با تغییر مکان آن انتهاست، اما با علامت مخالف. بیان کنید چرا شرط انتهایی آن به شکل زیر است:

$$y_x(۰,t)=by(۰,t) \qquad (b>۰)$$

۱۰. با استفاده از عبارت (۶) بخش ۶ معادلهٔ موج ناهمگن (۸) بخش ۶ را برای یک پوسته

به دست آورید، در صورتی که نیروی خارجی عرضی $F(x,y,t)$ بر هر واحد سطح آن عمل کند. [توجه کنید که این نیرو صفر باشد $(F\equiv ۰)$ ، این معادله به معادلهٔ (۷) بخش ۶ تبدیل می‌شود].

۱۱. فرض کنید $z(x,y)$ نمایش تغییر مکانهای عرضی ایستا در یک پوسته باشد که روی آن نیروی عرضی (اریب) خارجی $F(x,y)$ بر واحد سطح عمل می‌کند. نشان دهید چگونه از معادلهٔ موج ناهمگن (۸) بخش ۶ نتیجه می‌شود که $z(x,y)$ در معادلهٔ پوآسون صدق می‌کند:

$$z_{xx}+z_{yy}+f=۰ \qquad (f=\frac{F}{H})$$

[با معادلهٔ(۷) بخش ۳ مقایسه کنید].

۱۲. یک نیروی اریب یکنواخت $F_۰$ در واحد سطح روی پوسته‌ای عمل می‌کند که بین دو دایرهٔ $\rho=۱$ و $\rho=\rho_۰$ $(\rho_۰>۱)$ در صفحهٔ $z=۰$ کشیده شده است. بااستفاده از مسأله ۱۱ نشان دهید که تغییر مکانهای اریب ایستا $z(\rho)$ در معادلهٔ ذیل صدق می‌کند:

$$(\rho z')'+f_۰\rho=۰ \qquad (f_۰=\frac{F_۰}{H})$$

و عبارت زیر را به دست آورید:

$$z(\rho)=\frac{f_۰}{۴}(\rho_۰^۲-۱)\left[\frac{\ln\rho}{\ln\rho_۰}-\frac{\rho^۲-۱}{\rho_۰^۲-۱}\right] \qquad (۱\leq\rho\leq\rho_۰)$$

۷. انواع معادلات و شرایط مرزی

معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خطی مرتبهٔ دوم (بخش ۱)

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G \qquad (۱)$$

بر حسب $u=u(x,y)$ که در آن A, B, ..., G اعداد ثابت یا توابعی از x و y هستند، در هر ناحیهٔ مفروض از صفحه xy برحسب اینکه $B^۲-۴AC$ در سراسر ناحیه مثبت، منفی یا صفر باشد دسته‌بندی می‌شوند. به عبارت صریح، معادلهٔ (۱)

الف) هذلولوی است اگر $B^۲-۴AC>۰$؛

ب) بیضوی است اگر $B^۲-۴AC<۰$؛

ج) سهموی است اگر $B^۲-۴AC=۰$.

برای هر یک از این رده‌ها، معادلهٔ (۱) و جوابهای آن خواص متمایزی دارند. در مسائل ۱۵ و ۱۶ بخش ۹ اشاره‌هایی به این موضوع شده است. اصطلاحی که در اینجا به کار بردیم از این امر (مسأله بخش) ناشی می‌شود که وقتی A, B, ..., F اعدادی ثابت و $G\equiv ۰$ معادلهٔ (۱) همیشه دارای جوابهایی به شکل $u=exp(\lambda x+\mu y)$ است، که در آن اعداد ثابت λ و μ در معادلهٔ جبری زیر صدق می‌کنند:

$$A\lambda^۲+B\lambda\mu+C\mu^۲+D\lambda+E\mu+F=۰ \qquad (۲$$

از هندسهٔ تحلیلی می‌دانیم که چنین معادله‌ای نمایش یک مقطع مخروطی در صفحهٔ $\lambda\mu$ است و انواع مختلف مقاطع مخروطی نیز به وسیلهٔ $B^۲-۴AC$ معین می‌شوند.

مثالها. معادلهٔ لاپلاس

$$u_{xx}+u_{yy}=۰$$

حالت خاص معادلهٔ(۱) است که در آن $A=C=۱$ و $B=۰$. بنابراین در سراسر صفحهٔ xy بیضوی است. معادلهٔ پوآسون (بخش۳)

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$$

در فضای دو بعدی در هر ناحیه از صفحهٔ xy که $f(x,y)$ در آن تعریف شده باشد بیضوی است.

معادلهٔ گرمای یک بعدی

$$-Ku_{xx}+u_t=۰$$

برحسب $u=u(x,t)$ در صفحهٔ xt سهموی است و معادلهٔ موج یک بعدی

$$-a^{2}y_{xx}+y_{tt}=0$$

برحسب $y=y(x,t)$ هذلولوی است.

حالت خاص دیگر معادلهٔ (۱) عبارت است از معادلهٔ تلگراف[1]

$$v_{xx}=KLv_{tt}+(KR+LS)v_{t}+RSv$$

در اینجا $v(x,t)$ نمایش پتانسیل الکترواستاتیک یا جریان در لحظهٔ t در نقطه‌ای به فاصلهٔ x واحد از یک انتهای خط انتقال یا کابلی است به ظرفیت الکترواستاتیک K، خودالقایی L، مقاومت R و نشت هدایت S که همگی در واحد طول است. اگر $KL>0$ این معادله هذلولوی است. اگر K یا L صفر باشد، این معادله سهموی است.

همان طور که ذیلاً اشاره شده است، سه نوع معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم که اخیراً معرفی کردیم، در حالت کلی نیاز به انواع مختلف شرایط مرزی دارند تا جوابی را معین کنند.

فرض کنید u نمایش متغیر وابسته در یک مسألهٔ مقدار مرزی باشد. شرطی که مقادیر خود u را در امتداد قسمتی از مرز، از قبل تعیین می‌کند، به شرط دیریکله مشهور است. مسألهٔ تعیین یک تابع همساز در یک حوزه به طوری که تابع در تمام مرز آن حوزه، مقادیر از قبل تعیین شده‌ای را بگیرد، یک مسألهٔ دیریکله است. در آن حالت مقادیر تابع را می‌توان به عنوان دماهای حالت مانا تعبیر کرد. چنین تعبیر فیزیکی ما را بر آن می‌دارد که انتظار داشته باشیم اگر در مسألهٔ دیریکله توابع مورد نظر در بعضی از شرایط مربوط به منظم بود نشان صدق کنند، باید جواب منحصر به فرد باشد.

یک شرط نویمن مقادیر مشتقات نرمال $\dfrac{du}{dn}$ را پیشاپیش روی قسمتی از مرز تعیین می‌کند. نوع دیگری از شرط مرزی شرط رابین است. این شرط مقادیر $hu+\dfrac{du}{dn}$ را از قبل در نقاط مرزی تعیین می‌کند، که در آن h عددی ثابت یا تابعی از متغیرهای مستقل است.

---

۱. طرح کلی استنتاج این معادله در کتاب چرچیل (۱۹۷۲ صفحات ۲۷۳– ۲۷۲) که در کتابنامه آمده بیان شده‌است.

اگر معادلهٔ دیفرانسیل جزئی بر حسب y نسبت به یکی از متغیرهای مستقل مانند t از درجهٔ دوم باشد و مقادیر y و y_t وقتی $t=\circ$ از قبل تعیین شده باشند، شرط مرزی یک شرط نوع‌کوشی نسبت به t است. در حالت معادلهٔ موج $y_{tt}=a^{۲}y_{xx}$ چنین شرطی از نظر فیزیکی متناظر است با اینکه مقادیر اولیهٔ تغییر مکانهای عرضی y و سرعتهای y_t را در یک تار کشیده شده از قبل تعیین کنیم. مقادیر اولیه y و y_t ظاهراً هر دو برای تعیین تغییر مکانهای $y(x,t)$ لازمند.

با وجود این وقتی معادلهٔ مورد نظر معادلهٔ لاپلاس $u_{xx}+u_{yy}=\circ$ یا معادلهٔ گرمای $ku_{xx}=u_t$ باشد، نمی‌توان بدون محدودیتهای جدی شرایط از نوع کوشی را روی u قرار داد. این مطلب از تعبیر فیزیکی u به عنوان تابع دما ناشی می‌شود. وقتی دماهای u در قطعهٔ $\circ \leq x \leq c$ مثلاً روی وجه $x=\circ$ از قبل تعیین شده باشند، شار Ku_x از آن وجه به سمت چپ معمولاً با مقادیر u در آنجا و شرایط دیگر مسأله تعیین می‌شود. برعکس اگر شار Ku_x در $x=\circ$ از قبل تعیین شده باشد، دماها در آنجا تحت تأثیر قرار می‌گیرند.

۸. روشهای حل

بعضی از مسائل مقدار مرزی در معادلات دیفرانسیل جزئی را می‌توان با روشی نظیر آنچه معمولاً برای حل این نوع مسائل در معادلات دیفرانسیل معمولی به کار می‌رود حل کرد، یعنی روشی که ابتدا جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل را به دست می‌آورند.

مثال ۱. مسألهٔ مقدار مرزی

$$u_{xx}(x,y)=\circ \quad , \quad u(\circ,y)=y^{۲} \quad , \quad u(۱,y)=۱ \qquad (۱)$$

را روی حوزهٔ $\circ<x<۱ \ , \ -\infty<y<\infty$ حل کنید.

با انتگرال گیری متوالی از معادلهٔ $u_{xx}=\circ$ نسبت به x با ثابت گرفتن y به معادلات

$$u=x\phi(y)+\psi(y) \qquad , \qquad u_x=\phi(y) \qquad (۲)$$

می‌رسیم که در آن ϕ و ψ توابع دلخواهی از y هستند. برای شرایط مرزی مسألهٔ(۱) لازم است

$$\psi(y)=y^{۲} \quad , \quad \phi(y)+\psi(y)=۱$$

در نتیجه $\phi(y)=۱-y^{۲}$ و جواب مسأله عبارت است از:

$$u(x,y)=x(۱-y^{۲})+y^{۲} \tag{۳}$$

مثال۲. معادلهٔ موج

$$y_{tt}(x,t)=a^{۲}y_{xx}(x,t) \qquad (-\infty<x<\infty \quad , \quad t>۰) \tag{۴}$$

را تحت شرایط مرزی

$$y(x,۰)=f(x) \quad , \quad y_t(x,۰)=۰ \quad , \quad (-\infty<x<\infty) \tag{۵}$$

برحسب ثابت a و تابع f حل کنید.

معادلهٔ دیفرانسیل (۴) را می‌توان به صورت ذیل با معرفی متغیرهای مستقل جدید

$$u=x+at \quad , \quad v=x-at \tag{۶}$$

ساده کرد. بنابر قاعدهٔ زنجیری برای مشتق توابع مرکب داریم:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$$

یعنی

$$\frac{\partial y}{\partial t}=a\frac{\partial y}{\partial u}-a\frac{\partial y}{\partial v} \tag{۷}$$

با قرار دادن $\frac{\partial y}{\partial t}$ به جای y در معادلهٔ (۷) عبارت ذیل حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial^{۲} y}{\partial t^{۲}}=a\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)-a\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

و با استفادهٔ مجدد از معادلهٔ (۷) ، این بار به جای $\frac{\partial y}{\partial t}$ در سمت راست رابطهٔ فوق،

مقدارش را قرار داده، ملاحظه می‌کنیم که:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a\frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial y}{\partial u}-a\frac{\partial y}{\partial v}\right)-a\frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial y}{\partial u}-a\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

یا

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right) \tag{۸}$$

البته فرض کرده‌ایم که:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial u}$$

بدین روش می‌توان نشان داد:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \tag{۹}$$

پس با توجه به عبارات (۸) و (۹) معادلهٔ (۴) با تغییر متغیرهای (۶) تبدیل می‌شود به:

$$y_{uv}=0 \tag{۱۰}$$

معادلهٔ (۱۰) را می‌توان با انتگرالگیری متوالی حل کرد و $y_u=\phi'(u)$ و

$$y=\phi(u)+\psi(v)$$

را نتیجه گرفت، که در آن ϕ و ψ توابعی هستند که دو بار مشتق پذیرند. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ موج (۴) عبارت است از:

$$y=\phi(x+at)+\psi(x-at) \tag{۱۱}$$

در این مثال، شرایط مرزی آن قدر ساده‌اند که می‌توان عملاً توابع ϕ و ψ را معین کرد.

ملاحظه می‌کنید که تابع (۱۱) در شرایط (۵) صدق می‌کند هر گاه:

$$\phi(x)+\psi(x)=f(x) \quad , \quad a\phi'(x)-a\psi'(x)=0$$

بنابراین $\phi(x)-\psi(x)=c$ که در آن c عددی ثابت است و در نتیجه:

$$2\phi(x)=f(x)+c \quad , \quad 2\psi(x)=f(x)-c$$

پس:

$$y(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)] \qquad (12)$$

جواب (۱۲) برای مسألهٔ مقدار مرزی مرکب از معادلات(۴) و (۵) به جواب دالامبر مشهور است. تحت این فرض که به ازای هر x مشتقات $f''(x)$ و $f'(x)$موجود باشند، بسادگی می‌توان جواب بودن آن را تحقیق کرد.

روشی که برای حل مسائل مقدار مرزی در این دو مثال شرح دادیم، دارای محدودیتهای جدی است. جوابهای عمومی (۲) و (۱۱) شامل توابعی دلخواه است، که با انتگرالگیری‌های متوالی به دست آمده‌اند، فرایندی که در مورد تعداد نسبتاً محدودی از معادلات دیفرانسیل جزئی به کار می‌رود. اما حتی در حالات استثنایی که می‌توان چنین جوابهای عمومی یافت، اغلب تعیین توابع دلخواه، مستقیماً از روی شرایط مرزی مشکل است.

در میان روشهای متعدد دیگر، روشی که در این کتاب مورد بحث واقع می‌شود از مثال بخش۹ الهام گرفته شده است. روشی که بعضی مواقع آن را روش فوریه می‌نامند، روشی توانا و کلاسیک است. ولی، قبل از اینکه به آن باز گردیم، بعضی از روشهای مهم دیگر را بیان می‌کنیم. آنها که برمبنای تبدیلات لاپلاس، فوریه و دیگر تبدیلات انتگرالی بنا شده، همگی جزو موضوع ریاضیات عملیاتی هستند و بسیار مؤثرند.[1] روش کلاسیک نگاشت همدیس در نظریهٔ توابع یک متغیر مختلط در مورد دستهٔ مهمی از

۱. کتاب چرچیل(۱۹۷۲) را که در کتابنامه آمده است ببینید.

مسائل شامل معادلهٔ لاپلاس دو بعدی به کار می‌رود.[1] هنوز روشهای دیگری برای تقلیل یا حل چنین مسائلی موجود است، من جمله کاربردهای توابع گرین، روشهای عددی و محاسباتی.

اما حتی وقتی یک مسأله را با بیش از یک روش حل می‌کنیم، گاهی روشهای گوناگون شکلهای مختلفی از جوابها را می‌دهند، و هر شکل ممکن است مشخصات مطلوب خودش را داشته باشد. از طرف دیگر بعضی مسائل، نیاز به استفادهٔ متوالی از دو یا چند روش دارد. بقیه، شامل بعضی روشهای نسبتاً ساده‌اند، که حل شده و همه روشهای درستی هستند. به دست آوردن روشهای جدید در تحقیقات ریاضی امروز جای ویژه‌ای دارد.

۹. دربارهٔ برهمنهی جوابهای جدا از هم

هدف از این بخش این است که برای دو موضوع مهم کتاب که در ابتدای فصل بیان شد، انگیزه ایجاد کنیم.یعنی در جستجو برای یافتن جوابی برای مسألهٔ مقدار مرزی مثال ذیل، خواهیم دید که لازم است یک تابع دلخواه را به یک سری از توابع مثلثاتی بسط دهیم (فصل۲) و نیز روش فوریه را برای حل مسائل مقدار مرزی در معادلات دیفرانسیل جزئی رسمیت بخشیم (فصل۳).

مثال. در مسألهٔ دیریکله(بخش۷ را ببینید)

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0 \qquad (0<x<1 \quad , \quad y>0) \qquad (1)$$

$$u(0,y)=0 \quad , \quad u(1,y)=0 \qquad (y>0) \qquad (2)$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad (0<x<1) \qquad (3)$$

دماهای حالت مانای $u(x,y)$ ، به شرطی که در شرایط مرزی نشان داده شده صدق کند، در قطعه‌ای نیمه نامتناهی که ناحیهٔ $0\le x\le 1$, $y\ge 0$ از فضای سه بعدی را اشغال می‌کند، صدق می‌کند (شکل۱۲). در اینجا با شرایط دقیق f کاری

---

۱. کتاب مؤلفین (۱۹۹۰) را نیز که در کتابنامه آمده است ببینید.

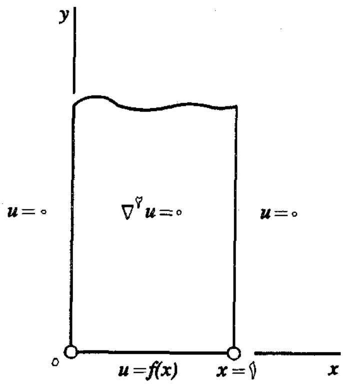
نداریم. فقط فرض می‌کنیم f محدود باشد و ملاحظه می‌کنیم که در این صورت از نظر فیزیکی قابل قبول است اگر به دنبال جوابهایی از معادلهٔ (۱) باشیم که در صورت میل کردن y به بینهایت، به صفر میل کند.

چون معادلهٔ (۱) دارای ضرایب ثابت و از نوعی است که در مسألهٔ ۶ ذیل بررسی شده است به استناد آن مسأله، تابع

$$u(x,y)=e^{\lambda x+\mu y}=e^{\lambda x}e^{\mu y} \tag{۴}$$

یک جواب است، که در آن λ و μ اعداد ثابت دلخواهی(حقیقی یا مختلط) هستند. به قسمی که با رابطهٔ زیر به هم مربوطند:

$$\lambda^{2}+\mu^{2}=0 \tag{۵}$$



شکل ۱۲

چنین جوابی جدا شده است بدین معنی که حاصلضرب دو تابع است که یکی فقط وابسته به x و دیگری فقط وابسته به y است.[1] در پیش‌بینی جوابهای با مقادیر

۱. این اصطلاح ازکتاب پینسکی (۱۹۹۱) عاریه گرفته شده که در کتابنامه آمده است، در حالی که روش به کار گرفته شده در اینجا مشهور است، آن کتاب دارای مجموعهٔ خوبی از مسائلی است که این روش برای آنها به کار می‌رود.

حقیقی معادلهٔ (۱) که در صورت میل کردن y به بینهایت، به صفر میل می‌کنند، به صراحت می‌گوییم که باید عدد حقیقی μ منفی باشد و می‌نویسیم $\mu=-\nu$ که در آن $\nu>0$ در این صورت بنابر رابطهٔ (۵)، $\lambda=\pm\nu i$ که در آن $i=\sqrt{-1}$ پس بنابر فرمول اویلر[1]:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

این دو خانوادهٔ جوابها را خواهیم داشت:

$$U_1(x,y)=e^{-\nu y}e^{i\nu x}=e^{-\nu y}(\cos\nu x+i\sin\nu x)$$

$$U_2(x,y)=e^{-\nu y}e^{-i\nu x}=e^{-\nu y}(\cos\nu x-i\sin\nu x)$$

حال معادلهٔ دیفرانسیل جزئی (۱) خطی و همگن است و مانند حالت معادلات دیفرانسیل معمولی همگن خطی هر ترکیب خطی جوابهای معادلهٔ (۱) نیز یک جواب است (مسألهٔ ۷ را ببینید). با قبول این امر که چنین اصل برهمنهی وقتی برقرار می‌ماند که با توابع با مقادیر مختلط و اعداد ثابت مختلط سروکار داریم، به جوابهای با مقادیر حقیقی ذیل از معادلهٔ (۱) می‌رسیم که در آن ν مقدار مثبت دلخواهی است:

$$U_3(x,y)=\frac{U_1(x,y)+U_2(x,y)}{2}=e^{-\nu y}\cos\nu x$$

$$U_4(x,y)=\frac{U_1(x,y)-U_2(x,y)}{2i}=e^{-\nu y}\sin\nu x$$

البته بسادگی می‌توان تحقیق کرد که $U_3(x,y)$ و $U_4(x,y)$ عملاً در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند.

حال به شرایط مرزی (۲) برمی‌گردیم، می‌بینیم که جوابهای $U_4(x,y)$

---

۱. بحث کامل مطالب اساسی را که از آنالیز مختلط در این بخش به کار برده می‌شود، می‌توانید در کتاب مؤلفان (۱۹۹۰) که در کتابنامه آمده است ببینید.

نمی‌تواند در اولین شرط صدق کند زیرا ۱ = ۰ cos اما جوابهای $U_۴(x,y)$ در هر دو شرط صدق می‌کنند، به شرطی که ۰ = $sin\, \nu$ اما مقادیر(مثبت) ν که دارای این خاصیت هستند عبارتند از

$\nu = n\pi$ $(n=$ ۱و۲و...$)$ درنتیجه توابع

$$u_n(x,y)=e^{-n\pi y}\sin n\pi x \qquad (n=۱,۲,\ ...) \tag{۶}$$

همگی در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کنند. بار دیگر بـه مسألهٔ ۷ بـرمی‌گردیم، می‌بینیم که هر ترکیب خطی

$$u(x,y)=\sum_{n=۱}^{N} b_n e^{-n\pi y}\sin n\pi x \tag{۷}$$

از N تابع اول (۶) در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند. بعلاوه، بدیهی است که این مجموع در شرایط(۲) نیز صدق می‌کند.

همچنین برای شرط (۳) ثابتهای b_n را باید طوری تعیین کرد که:

$$f(x)=\sum_{n=۱}^{N} b_n \sin n\pi x \qquad (۰<x<۱)$$

اگر تابع $f(x)$ خودش ترکیب خطی از توابع سینوسی

$$\sin \pi x \quad , \quad \sin ۲\pi x \quad , \quad ... \quad , \quad \sin N\pi x$$

باشد، مقادیر مورد نیاز $b_۱, b_۲, ... b_N$ واضحند. اگر به عنوان مثال:

$$f(x)=۲\sin \pi x+\sin ۳\pi x \tag{۸}$$

می‌توان $N=۳$ گرفت و$b_۱=۲$ و $b_۲=۰$ و $b_۳=۱$ انتخاب کرد.پس تابع

$$u(x,y)=۲e^{-\pi y}\sin \pi x+e^{-۳\pi y}\sin ۳\pi x$$

در همهٔ شرایط(۱)-(۳) صدق می‌کند هرگاه $f(x)$ تابع خاص (۸) باشد.

اما فرض کنید $f(x)$ تابع دلخواهی باشد. تعمیم ذیل از روش بالا تداعی می‌شود. آیا ممکن است به جای مجموع (۷) یک ترکیب خطی تعمیم یافته یا یک سری نامتناهی

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\pi y} \sin n\pi x \tag{۹}$$

قرار داد. البته باید فرض کرد که این سری همگرا باشد و اصل برهمنهی را که در مسألهٔ۷ تحقیق کردیم، می‌توان طوری تعمیم داد که قابل کاربرد باشد. در این صورت شرط (۳) نیاز به این دارد که اعداد ثابت b_n را طوری پیدا کنیم که:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \qquad (0<x<1) \tag{۱۰}$$

مسألهٔ یافتن چنین ضرایبی، همچنین ضرایبی در سریهایی که شامل کسینوسها هستند، مسأله‌ای است که درست قبل از این مثال بدان اشاره کردیم و در فصل ۲ نیز بررسی خواهد شد. جوابهای جدا شده و یک اصل برهمنهی که به سریهای نامتناهی تعمیم یافته، اساس کار روش فوریه برای حل مسائل مقدار مرزی است که در فصل۳ بیان شده است.

مسائل

۱. هر یک از این مسائل مقدار مرزی را با یافتن جواب عمومی معادلهٔ با مشتقات جزئی مطرح شده حل کنید.

الف)
$$u_{xx}(x,y)=6xy \qquad (0<x<1\ ,\ -\infty<y<\infty)$$
$$u(0,y)=y \quad , \quad u_x(1,y)=0$$

ب)
$$u_{xy}(x,y)=2x \quad (x>0\ ,\ y>0) \quad , \quad u(0,y)=0 \quad , \quad u(x,0)=x^2$$

جوابها: الف)
$$u(x,y)=(x^3-3x+1)y$$

ب)
$$u(x,y)=x^2(1+y)$$

۲. یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خطی مرتبهٔ دوم بر حسب $u=u(x,y)$ که حداقل یکی از

ضرائب آن غیر ثابت و تابعی از متغیرهای x و y باشد،هذلولوی، بیضوی یا سهموی بودن آن (بخش۷) از یک ناحیه به ناحیهٔ دیگر صفحهٔ xy می‌تواند تغییر کند. هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را در نواحی مختلف دسته‌بندی کرده، شکل آن نواحی را رسم کنید.

الف) $$yu_{xx}+u_{yy}=0$$

ب) $$u_{xx}+2x^2u_{xy}+yu_{yy}=0$$

ج) $$xu_{xx}+yu_{yy}-3u_y=2$$

د) $$u_{xx}-2xu_{xy}+(1-y^2)u_{yy}=0$$

جوابها:

الف) روی محورxها سهموی؛ بالای آن بیضوی و زیر آن هذلولوی است؛

ب) روی منحنی $y=x^4$ سهموی، بالای آن بیضوی و زیر آن هذلولوی است؛

د) روی دایرهٔ $x^2+y^2=1$ سهموی، درون آن بیضوی و خارج آن هذلولوی است.

۳. در مثال ۲ بخش ۸ جواب دالامبر

$$y(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]$$

نمایش تغییر مکانهای اریب (عرضی) در یک تار کشیده شده به طول نامتناهی است که از وضعیت $y=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ حالت سکون رها شده است. با استفاده از آن جواب نشان دهید چگونه وضعیت لحظه‌ای تار در لحظهٔ t را می‌توان به طور نموداری با اضافه کردن طولهای، دو منحنی نمایش داد که یکی با انتقال خم $y=\frac{1}{2}f(x)$ به طرف راست به فاصلهٔ at به دست می‌آید و دیگری با انتقال آن به طرف چپ به همان فاصله. وقتی t تغییر کند، خم $y=\frac{1}{2}f(x)$ در هر جهت مانند موجی با سرعت a حرکت می‌کند. برخی از وضعیتهای لحظه‌ای آن را وقتی $f(x)$ جز در بازهٔ کوچکی پیرامون مبدأ صفر است نمایش دهید.

۴. با استفاده از جواب عمومی(۱۱) مثال۲ بخش ۸ مسألهٔ مقدار مرزی ذیل را حل کنید:

$$y_{tt}(x,t)=a^{2}y_{xx}(x,t) \qquad (-\infty<x<\infty \quad , \quad t>0)$$

$$y(x,0)=0 \qquad , \qquad y_t(x,0)=g(x) \qquad (-\infty<x<\infty)$$

راهنمایی: توجه کنید که می‌توان نوشت:

$$\int g(x)\,dx=\int_0^x g(s)\,ds+C$$

جواب:

$$y(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds$$

۵. فرض کنید $Y(x,t)$ نمایش جواب دالامبر (۱۲) در مثال ۲ بخش ۸ برای مسألهٔ مقدارمرزی باشد که در آنجا حل شد و $Z(x,t)$ نمایش جوابی باشد که در مسألهٔ ۴ برای یک مسألهٔ مقدار مرزی وابسته به آن به دست آمد. مستقیماً تحقیق کنید که مجموع

$$y(x,t)=Y(x,t)+Z(x,t)$$

یک جواب مسألهٔ مقدار مرزی ذیل است:

$$y_{tt}(x,t)=a^{2}y_{xx}(x,t) \qquad (-\infty<x<\infty \ , \ t>0)$$

$$y(x,0)=f(x) \quad , \quad y_t(x,0)=g(x) \qquad (-\infty<x<\infty)$$

بدین ترتیب نشان دهید که:

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+at)+f(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds$$

یک جواب از این مسأله است. این مسأله را از نظر فیزیکی تعبیر کنید (مسألهٔ ۳ را ببینید).

۶. فرض کنید ضرایب $A, B, \ldots, F$ در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی همگن

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=0$$

اعداد ثابتی باشند تا اینکه توابعی عمومی‌تر از x و y باشند. با جایگذاری تابع‌نمایی $u=exp(\lambda x+\mu y)$ در آن معادله، که در آن λ و μ اعداد ثابتی هستند، نشان دهید که آن

همیشه یک جواب است، هر گاه λ و μ در معادلهٔ جبری زیر صدق کنند:

$$A\lambda^{۲}+B\lambda\mu+C\mu^{۲}+D\lambda+E\mu+F=۰$$

توجه کنید که وقتی مقادیر λ انتخاب شده باشند، مقادیر مناسب μ از معادلات درجهٔ دوم حاصل برحسب μ به دست می‌آیند. البته این مقادیر μ حتی وقتی که λ حقیقی است لزومی ندارد حقیقی باشند.[۱] وقتی مقادیر را اول انتخاب کنند، توضیحات مشابهی در مورد λ مطرح می‌شود.

(امکان چنین جوابهای نمایی با تجربه از معادلات دیفرانسیل معمولی که دارای ضرایب ثابتند به ذهن می‌رسد).

۷. فرض کنید $(n=۱,۲,...,N)u_n=u_n(x,y)$ همگی جواب معادلهٔ لاپلاس زیر باشند:

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=۰$$

نشان دهید به ازای هر ثابت $(n=۱,۲,...,N)c_n$ ترکیب خطی

$$u=\sum_{n=۱}^{N}c_nu_n$$

نیز یک جواب است. این کار را با جایگذاری این مجموع در سمت چپ معادلهٔ دیفرانسیل و دسته‌بندی مناسب جمله‌ها انجام دهید. [این نتیجه حالت خاصی از اصل برهمنهی جوابهاست که به طور کاملتر در فصل ۳ (بخش ۲۶) بررسی خواهد شد].

۸. نشان دهید اگر هر یک از توابع $(n=۱,۲,...)\ u_n=u_n(x,t)$ در معادلهٔ گرمای

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}$$

صدق کند، آنگاه هر ترکیب خطی

$$u=\sum_{n=۱}^{N}c_nu_n$$

---

۱. وقتی اعداد مختلط مطرح شود قواعد معمولی مشتقگیری از تابع نمایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال نیز برقرار است. پاورقی بخش ۹ را ببینید.

در آن معادلهٔ گرما صدق می‌کند (با مسألهٔ ۷ مقایسه کنید.)

۹. فرض کنید $u_{mn}=u_{mn}(x,y,z)$ $(m=1,2,\ldots;\ n=1,2,\ldots)$ نمایش جوابهای معادلهٔ لاپلاس زیر باشد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

تحقیق کنید هر ترکیب خطی

$$u=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} c_{mn}u_{mn}$$

نیز یک جواب است. (با مسألهٔ۷ مقایسه کنید.)

۱۰. تحقیق کنید که هر یک از توابع

$$u_0(x,y)=y\ ,\ u_n(x,y)=\sinh ny\cos nx \qquad (n=1,2,\ldots.)$$

در معادلهٔ لاپلاس

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0 \qquad (0<x<\pi\ ,\ 0<y<2)$$

و سه شرط مرزی زیر صدق می‌کنند:

$$u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 \qquad , \qquad u(x,0)=0$$

در این صورت به کمک اصل برهمنهی در مسألهٔ ۷ توجه کنید که هر ترکیب خطی

$$u(x,y)=A_0 y+\sum_{n=1}^{N}A_n\sinh ny\cos nx$$

در همان معادلهٔ دیفرانسیل و شرایط مرزی صدق می‌کند. N را مساوی ۲ فرض کرده، مقادیر ضرایب A_0 , A_1 , A_2 را طوری بیابید که شرط مرزی چهارم

$$u(x,2)=4+3\cos x-\cos 2x$$

برقرار باشد. این نتیجه را تعبیر فیزیکی کنید:

جواب: $A_0=2$, $A_1=\dfrac{3}{\sinh 2}$, $A_2=\dfrac{-1}{\sinh 4}$

۱۱. در صورتی که واحد زمان طوری انتخاب شده باشد که ضریب نفوذ k در معادلهٔ گرما برابر واحد باشد (مسألهٔ ۹ بخش ۴ را ببینید)، مسألهٔ مقدار مرزی

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t) \qquad (0<x<1\ ,\ t>0)$$

$$u(0,t)=u_x(1,t)=0 \quad , \quad u(x,0)=f(x)$$

نمایش دما در قطعهٔ $0\leq x\leq 1$ است که وجه $x=0$ در دمای صفر و وجه $x=1$ عایق‌بندی شده و دماهای اولیهٔ آن فقط بستگی به x دارد.

الف) با فرض اینکه تابع f محدود است، با اصلاحاتی در مسألهٔ دیریکله در مثال بخش ۹ جوابهای زیر از معادلهٔ دما و دو شرط اول مرزی را به دست آورید:

$$u_n(x,t)=exp\left[-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}t\right]sin\frac{(2n-1)\pi x}{2} \qquad (n=1,2,\ \ldots)$$

درستی این جوابها را مستقیماً تحقیق کنید. در این صورت به کمک نتیجهٔ مسألهٔ۸ خاطرنشان سازید چگونه نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}B_n exp\left[-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\ t\right]sin\frac{(2n-1)\ \pi x}{2}$$

نیز یک جواب است.

ب) با استفاده از نتیجهٔ نهایی قسمت (الف) جواب

$$u(x,t)=2exp(-\frac{\pi^2}{4}t)sin\frac{\pi x}{2}-exp(-\frac{25\ \pi^2}{4}t)sin\ \frac{5\ \pi x}{2}$$

را برای مسأله مقدار مرزی فوق وقتی

$$f(x)=2sin\frac{\pi x}{2}-sin\frac{5\pi x}{2}$$

به دست آورید.

۱۲. تحقیق کنید هر یک از حاصلضربهای

$$u_{mn}(x, y, z)=exp(-z\sqrt{m^{۲}+n^{۲}})\cos my \sin nx$$

$$(m=۰,۱,۲,...\ ;\ n=۱,۲,...)$$

در معادلهٔ لاپلاس

$$u_{xx}(x, y,z)+u_{yy}(x,y,z)+u_{zz}(x,y,z)=۰ \quad (۰<x<\pi\ ,\ ۰<y<\pi\ ,z>۰)$$

و شرایط مرزی

$$u(۰,y,z)=u(\pi,y,z)=۰ \qquad , \qquad u_y(x,۰,z)=u_y(x,\pi,z)=۰$$

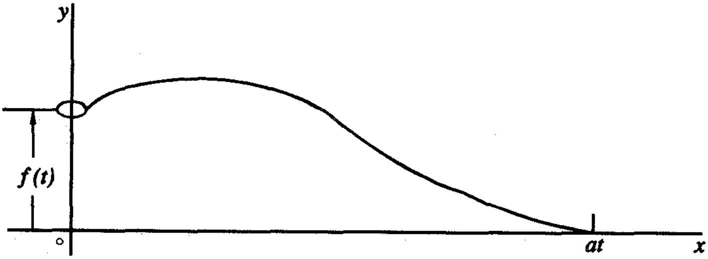
صدق می‌کند. سپس به کمک نتیجهٔ مسألهٔ ۹ تابعی مانند $u=(x,y,z)$ به دست آورید که نه فقط در معادلهٔ لاپلاس و شرایط مرزی مذکور صدق می‌کند، بلکه در شرط

$$u_z(x, y, ۰)=(-۶+۵\cos ۴y)\sin ۳x$$

نیز صادق است. این تابع را از نظر فیزیکی تعبیر کنید.

جواب: $$u(x, y,z)=(۲e^{-۳z}-e^{-۵z}\cos ۴y)\sin ۳x$$

۱۳. فرض کنید $y(x,t)$ نمایش تغییر مکانهای اریب (عرضی) در امتداد تار بلند کشیده کشیده شده‌ای باشد، که یک انتهای آن به حلقه‌ای وصل است که می‌تواند در امتداد محور yها بلغزد. انتهای دیگر آن بقدری روی محور xهای مثبت دور است که می‌توان آن را بینهایت دور از مبدأ گرفت. حلقه در ابتدا در مبدأ هست و سپس در امتداد محور yها حرکت می‌کند (شکل۱۳)به‌طوری که



شکل ۱۳

$y=f(t)$ هرگاه $x=0$ و $t\geq 0$ ، که در آن تابع پیوسته‌ای است که از قبل داده شده و $f(0)=0$. فرض می‌کنیم که تار در ابتدا روی محور x ها در حال سکون است، بنابراین وقتی $x\to\infty$ ، $y(x,t)\to 0$. مسألهٔ مقدار مرزی برای $y(x,t)$ عبارت است از:

$$y_{tt}(x,t)=a^2 y_{xx}(x,t) \qquad (x>0\ ,\ t>0)$$

$$y(x,0)=0 \quad , \quad y_t(x\ ,0)=0 \qquad (x\geq 0)$$

$$y(0,t)=f(t) \qquad (t\geq 0)$$

الف) با اعمال دو شرط اول مرزی در مورد جواب عمومی (بخش ۸)

$$y=\phi(x+at)+\psi(x-at)$$

از معادلهٔ موج نشان دهید ثابتی مانند C هست که:

هر گاه $\phi(x)=C \quad , \quad \psi(x)=-C \quad , \quad x\geq 0$

سپس با استفاده از شرط سوم نشان دهید که:

هر گاه $\psi(-x)=f(\frac{x}{a})-C \quad , \quad x\geq 0$

که در آن C عددی ثابت است.

ب) به کمک نتایج قسمت الف) جواب زیر را به دست آورید:

$$y(x,t)=\begin{cases} 0 & x\geq at \quad \text{هرگاه} \\ f(t-\frac{x}{a}) & x\leq at \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

توجه کنید همان طور که در شکل ۱۳ نشان داده شده، قسمتی از تار که در سمت راست $x=at$ روی محور xها تحت تأثیر حرکت حلقه قبل از زمان t نیست.

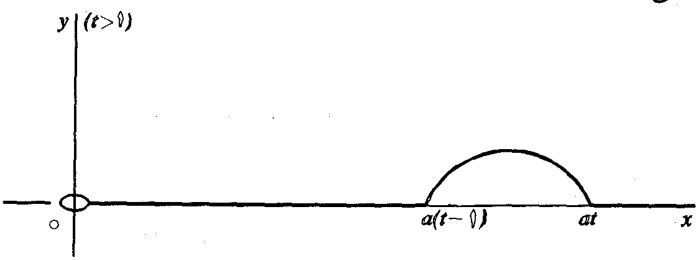
۱۴. با استفاده از جواب به دست آمده در مسألهٔ ۱۳ نشان دهید که اگر حلقه در انتهای چپ تار آن مسأله بنابر تابع زیر حرکت کند:

$$f(t)=\begin{cases} \sin \pi t \quad , & 0\leq t<1 \quad \text{هرگاه} \\ 0 & t\geq 1 \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

در این صورت:

$$y(x,t)=\begin{cases} 0 & x\leq a(t-1) \quad \text{یا} \quad x\geq at \quad \text{هرگاه} \\ \sin \pi (t-\frac{x}{a}) & ،\ a(t-1)\leq x\leq at \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

ملاحظه کنید که حلقه ۱ واحد بالا برده شده، سپس به مبدأ برگردانده شده است که در آنجا بعد از زمان $t=1$ باقی مانده است. عبارت $y(x,t)$ در اینجا نشان می‌دهد که وقتی $t>1$ تار بر محور xها منطبق است به جز در بازهٔ به طول a که در آن قوسی از منحنی سینوس را تشکیل می‌دهد (شکل ۱۴). بعلاوه، وقتی t افزایش یابد، قوس با سرعت a به طرف راست حرکت می‌کند.



شکل ۱۴

۱۵. معادلهٔ با مشتقات جزئی

$$Ay_{xx}+By_{xt}+Cy_{tt}=0 \qquad (A\neq 0 \quad , \quad C\neq 0)$$

را که در آن A و B و C اعداد ثابتی هستند در نظر گرفته، فرض کنید هذلولوی باشد، بنابراین $B^2-4AC>0$ (بخش۷).

الف) با استفاده از تبدیل

$$u=x+\alpha t \quad , \quad v=x+\beta t \qquad (\alpha\neq\beta)$$

معادلهٔ دیفرانسیل جدید زیر را به دست آورید:

$$(A+B\alpha+C\alpha^2)y_{uu}+[2A+B(\alpha+\beta)+2C\alpha\beta]y_{uv}+(A+B\beta+C\beta^2)y_{vv}=0$$

ب) نشان دهید که وقتی α و β به ترتیب دارای مقادیر

$$\alpha_0=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2C} \quad , \quad \beta_0=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2C}$$

باشند، معادلهٔ دیفرانسیل قسمت (الف) به معادلهٔ $y_{uv}=0$ تبدیل می‌شود.

ج) از نتیجهٔ قسمت (ب) استفاده کرده، نشان دهید که جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل اولیه عبارت است از:

$$y=\phi(x+\alpha_0 t)+\psi(x+\beta_0 t)$$

که در آن ϕ و ψ توابعی دلخواهند که دو بار دیفرانسیل پذیرند. سپس نشان دهید چگونه جواب عمومی (۱۱) بخش ۸ معادلهٔ موج

$$-a^2y_{xx}+y_{tt}=0$$

به عنوان حالت خاص به دست می‌آید.

۱۶. نشان دهید که تحت تبدیل

$$u=x \quad , \quad v=\alpha x+\beta t \qquad (\beta\neq 0)$$

معادلهٔ دیفرانسیل داده شده در مسألهٔ ۱۵ تبدیل به معادلهٔ ذیل می‌شود:

$$Ay_{uu}+(۲A\alpha+B\beta)\, y_{uv}+(A\alpha^۲+B\alpha\beta+C\beta^۲)y_{vv}=۰$$

سپس نشان دهید که این معادلهٔ جدید تبدیل می‌شود به:

الف) معادلهٔ لاپلاس $y_{uu}+y_{vv}=۰$ دو بعدی هر گاه معادلهٔ اولیه بیضوی باشد

$$\alpha=\frac{-B}{\sqrt{۴AC-B^۲}} \quad , \quad \beta=\frac{۲A}{\sqrt{۴AC-B^۲}}$$

و $(B^۲-۴AC<۰)$

ب) معادلهٔ لاپلاس $y_{uu}=۰$ یک بعدی هر گاه معادلهٔ اولیه سهموی باشد و

$$\alpha=-\beta \quad , \quad \beta=۲A \quad , \quad (B^۲-۴AC=۰)$$

فصل ۲

سریهای فوریه

در این فصل نظریهٔ اساسی سری فوریه را ارائه می‌کنیم که بسط توابع دلخواه به صورت سریهایی از توابع سینوس و کسینوس است. برای انجام این کار، مفهوم مجموعه‌های متعامد توابع را معرفی می‌کنیم. این امر نه تنها مفاهیم بنیادی انواع مختلف سریهای فوریه‌ای را روشن می‌سازد که در اینجا آنها را بررسی می‌کنیم بلکه بنیانی برای یافتن انواع دیگر بسطهای سری را که در فصلهای بعدی لازم است فراهم می‌آورد.

۱۰. توابع قطعه‌ای پیوسته

اگر u_1 و u_2 توابع و c_1 و c_2 اعداد ثابتی باشند، تابع $c_1u_1+c_2u_2$ ترکیب خطی از u_1 و u_2 است. توجه کنید که u_1+u_2 و c_1u_1 و نیز تابع ثابت ۰ حالتهای خاصند. یک فضای خطی توابع، یا فضای توابع، دسته‌ای از توابع است که همهٔ آنها حوزهٔ تعریف مشترکی دارند و هر ترکیب خطی هر دو تابع آن دسته، عضو آن دسته است، یعنی؛ اگر u_1 و u_2 در این دسته باشند، آنگاه $c_1u_1 + c_2u_2$ نیز در این دسته است. قبل از طرح نظریهٔ سریهای فوریه یا مثلثاتی، لازم است فضاهای تابعی شامل توابعی که باید نمایش داده شوند را مشخص سازیم.

فرض کنید تابع f در همهٔ نقاط بازهٔ باز محدود $a<x<b$ جز محتملاً مجموعه‌ای متناهی از نقاط $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ پیوسته باشد که در آن:

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<b$$

اگر قرار دهیم $x_0=a$ و $x_n=b$ آنگاه f در هر یک از زیر بازه‌های باز

$$x_0<x<x_1 \quad , \ x_1<x<x_2 \quad , \ \ldots \ , x_{n-1}<x<x_n$$

پیوسته است. در نقاط انتهایی لزوماً پیوسته نیست یا حتی تعریف نشده است. اما اگر در هریک از این زیر بازه‌ها وقتی x از داخل به نقاط انتهایی میل کند f دارای حد متناهی باشد، گویند f در بازه $a<x<b$ قطعه‌ای پیوسته است. به عبارت دقیقتر، باید حدود یکطرفه

$$f(x_{k-1}+)=\lim_{\substack{x\to x_{k-1}\\ x>x_{k-1}}} f(x) \quad , \ f(x_k-)=\lim_{\substack{x\to x_k\\ x<x_k}} f(x) \quad (k=1,2,\ \ldots\ ,n) \qquad (1)$$

موجود باشند،

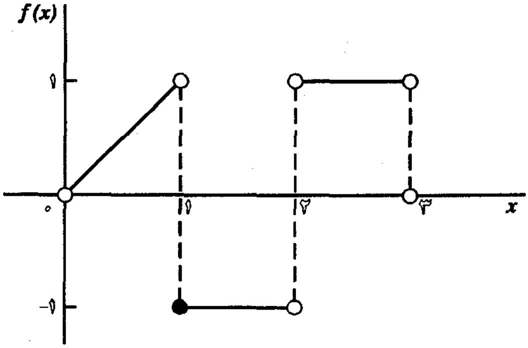
توجه کنید که اگر در نقاط انتهایی یک جزء بازه، حد f را وقتی x از داخل آن جزء بازه به آن انتها میل می‌کند نسبت دهیم، آنگاه f در زیر بازه بسته پیوسته خواهد بود. چون هر تابع که در بازهٔ بسته و محدودی پیوسته باشد محدود است، نتیجه می‌شود که f در تمام بازهٔ $a\le x\le b$ محدود است. یعنی عدد نامنفی مانند M هست که به ازای همهٔ نقاط x $(a\le x\le b)$ که f در آنها تعریف شده است، داریم $|f(x)|\le M$

مثال ۱. تابع f را که دارای مقادیر زیر است در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \quad \text{هرگاه} \\ -1 & 1\le x<2 \quad \text{هرگاه} \\ 1 & 2<x<3 \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

(شکل ۱۵ را ببینید.) گرچه f در نقاط $x=1$ و $x=2$ در بازهٔ $0<x<3$ ناپیوسته است، با وجود این f در این بازه قطعه به قطعه پیوسته است. زیرا در نقاط انتهایی هر سه جزء بازه، حدود یکطرفه از داخل که f در آنها پیوسته است، موجود می‌باشد، مثلاً توجه کنید که حد راست در $x=0$ برابر است با $f(0+)=0$ و حد

چپ در $x=۱$ برابر است با $f(۱-)=۱$



شکل ۱۵

اگر تابعی در بازهٔ بستهٔ $a\leq x\leq b$ پیوسته باشد، آنگاه در بـازهٔ $a<x<b$ قطعه‌ای پیوسته است. ولی مثال زیر نشان مـی‌دهد کـه پـیوستگی در بـازهٔ بـاز $a<x<b$ مستلزم پیوستگی قطعه به قطعه در آن نیست.

مثال۲. تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در بازهٔ $۰<x<۱$ پیوسته است، اما قطعه‌ای پیوسته نیست زیرا $f(۰+)$ موجود نیست.

اگر تابع f در بازهٔ $a<x<b$ قطعه به قطعه پیوسته باشد، همیشه انـتگرال $f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ موجود است. انتگرال آن برابر است با مـجموع انتگرالهای $f(x)$ بر جزء بازه‌های بازی که f در آنها پیوسته است:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_۱} f(x)\,dx + \int_{x_۱}^{x_۲} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-۱}}^{b} f(x)\,dx \qquad (۲)$$

انتگرال اول سمت راست مـوجود است، زیـرا آن را انـتگرال تـابعی پـیوسته در $a\leq x\leq x_۱$ تعریف می‌کنیم که اگر $a<x<x_۱$ مقدار آن $f(x)$ و در نقاط $x=a$ و $x=x_۱$ مقادیر آن، به ترتیب $f(a+)$ و $f(x_۱-)$ باشد. بقیهٔ انتگرالهای سمت راست رابطهٔ(۲) به همین نحو تعریف می‌شوند و لذا موجودند.

مثال۳. اگر f تابع مثال ۱ و شکل۱۵ باشد آنگاه:

$$\int_{۰}^{۳} f(x)\,dx = \int_{۰}^{۱} x\,dx + \int_{۱}^{۲} -۱dx + \int_{۲}^{۳} ۱dx = \frac{۱}{۲} - ۱ + ۱ = \frac{۱}{۲}$$

ملاحظه کنید که مقادیر f در نقاط انتهایی تأثیری در مقدار انتگرال $f(x)$ بر هر یک از جزء بازه‌ها ندارند. در واقع تابع در $x = ۰,۲,۳$ حتی تعریف نشده است.

اگر دو تابع $f_۱$ و $f_۲$ هر یک در بازهٔ $a < x < b$ قطعه‌ای پیوسته باشند، آنگاه تقسیمی از بازه موجود هست به طوری که در هر زیربازهٔ بسته، چنانچه مقدار هر یک از توابع را در هر نقطهٔ انتهایی زیربازه، مقدار حدّی آن تابع از داخل زیربازه تعریف کنیم، هر دو تابع در آن زیربازهٔ بسته پیوسته خواهند بود. بنابراین هر ترکیب خطی مانند $c_۱ f_۱ + c_۲ f_۲$ یا حاصلضرب $f_۱ f_۲$ در هر زیربازه دارای آن پیوستگی هستند و دربازهٔ $a < x < b$ قطعه به قطعه پیوسته‌اند. در نتیجه انتگرالهای توابع $c_۱ f_۱ + c_۲ f_۲$ و $f_۱ f_۲$ و $[f_۱(x)]^۲$ همگی در آن بازه موجودند.

چون هر ترکیب خطی از توابع قطعه به قطعه پیوسته، دارای آن خاصیت است؛ می‌توانیم از اصطلاح اول این بخش استفاده کرده، دستهٔ همهٔ توابع قطعه‌ای پیوسته را که در بازه‌ای مانند $a < x < b$ تعریف شده‌اند یک فضای تابعی بنامیم و به $C_p(a,b)$ نمایش دهیم. شبیه فضای سه بعدی است که در آن ترکیبهای خطی بردارها، بردارهایی خوش تعریف در آن فضایند. در بخش۱۱ با مفهوم حاصلضرب داخلی توابع در $C_p(a,b)$ شباهت را گسترش خواهیم داد.

فضاهای تابعی دیگری در نظریهٔ سریهای فوریه مطرح می‌شوند. در بخش ۱۷ زیر فضای مهم خاصی از $C_p(a,b)$ را معرفی خواهیم کرد. کتابهای پیشرفته‌تر فضای همهٔ توابع انتگرالپذیر بر بازهٔ $a < x < b$ را بررسی می‌کنند که حاصلضربها، به انضمام مجذورهای آنها $[f(x)]^۲$ انتگرالپذیرند. در این صورت از نوع کلّی‌تری از انتگرال موسوم به انتگرال لوبگ استفاده می‌شود.

در بررسی سری فوریه از مقدماتی‌ترین مفاهیم آنالیز ریاضی استفاده می‌کنیم. جز

وقتی که خلاف آن گفته شود، در این کتاب توجه خود را به توابعی که در همهٔ بازه‌های محدود مورد نظر قطعه به قطعه پیوسته‌اند معطوف خواهیم داشت. وقتی می‌گویند تابع در بازه‌ای قطعه به قطعه پیوسته است، باید فهمید که بازه محدود است و مفهوم قطعه به قطعه پیوسته بدون توجه به اینکه بازه باز یا بسته است به کار می‌رود.

۱۱. حاصلضربهای داخلی و مجموعه‌های متعامد

فرض کنید f و g نمایش دو تابع باشند که روی بازهٔ بسته و محدود $a \le x \le b$ پیوسته است. این بازه را به N زیربازهٔ با طولهای مساوی $\Delta x = \dfrac{b-a}{N}$ تقسیم کرده، و فرض کنیم x_k نقطهٔ دلخواهی در زیربازهٔ k ام باشد، از حساب دیفرانسیل و انتگرال به یادمی‌آوریم که وقتی N بزرگ است:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \quad \sum_{k=1}^{N} f(x_k)g(x_k)\,\Delta x$$

نماد   در اینجا نمایش تساوی تقریبی است. یعنی:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \doteq \sum_{k=1}^{N} a_k b_k \qquad (1)$$

که در آن:

$$b_k = g(x_k)\sqrt{\Delta x} \quad , \quad a_k = f(x_k)\sqrt{\Delta x}$$

پس سمت چپ عبارت(۱) تقریباً مساوی است با حاصلضرب داخلی دو بردار در فضای N بعدی وقتی N بزرگ است. وقتی N به سمت بینهایت میل کند، آن تقریب در حد دقیق می‌شود[1]، با الهام گرفتن از این مطلب، یک حاصلضرب داخلی از توابع f و g را به صورت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \qquad (2)$$

---

۱. برای توضیحات بیشتر این مفهوم، کتاب *lanczos* (چاپ *1966* صفحات ۲۱۰ ببعد) را، که در کتابنامه آمده است، ببینید.

البته اگر توابع fو gبر بازهٔ $a<x<b$ قطعه‌ای پیوسته باشند، این حاصلضرب داخلی خوش تعریف است. بازهٔ $a<x<b$ را که توابع و حاصلضربهای داخلی آنها روی آن تعریف شده‌اند بازهٔ اصلی می‌نامند.

بنابراین می‌توان با استفاده از رابطهٔ(۲) یک حاصلضرب داخلی از هر دو تابع f و g در فضای تابعی $C_p(a,b)$ تعریف کرد. این فضای تابع در بخش ۱۰ معرفی شد.

فضای تابعی $C_p(a,b)$ با ضرب داخلی(۲) مشابه فضای سه بعدی معمولی است. در واقع، برای هر تابع f و g و h در $C_p(a,b)$ روابط زیر که نظیر خواص معمولی بردارها در فضای سه بعدی است برقرارند:

۳) $$(f,g)=(g,f)$$

۴) $$(f,g+h)=(f,g)+(f,h)$$

۵) $$(cf,g)=c(f,g)$$

که در آن c عدد ثابت دلخواهی است و

$$(f,f)\geq ۰$$

این شباهت را با تعریف نرم تابع f در $C_p(a,b)$ ادامه می‌دهیم:

۷) $$\| f\| =(f,f)^{\frac{۱}{۲}}$$

از رابطهٔ(۲) واضح است که:

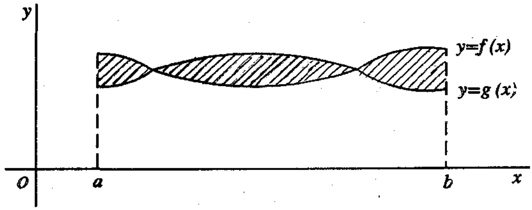
۸) $$\| f\| =\left\{\int_a^b \left[f(x)\right]^{۲} dx\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

نرم تفاضل fو g

۹) $$\| f-g \| =\left\{\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]^{۲} dx\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

اندازه‌ای برای فاصلهٔ بین نمودارهای $y=f(x)$ و $y=g(x)$ است (شکل۱۶). به عبارت

دقیقتر $\| f-g \|^{۲}/(b-a)$ مقدار میانگین مربعهای فواصل قائم $|f(x)-g(x)|$ بین نقاط روی نمودارها بر بازهٔ $a<x<b$ است. مقدار $\| f-g \|^{۲}$ را انحراف میانگین مجذورات توابع f و g از یکدیگر می‌نامند.



شکل ۱۶

دو تابع f و g در $c_p(a,b)$ متعامدند هر گاه:

$$(f,g)=۰$$

یا:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = ۰ \tag{۱۰}$$

همچنین اگر $\| f \| = ۱$ ، تابع f را تراز شده می‌نامند. شباهت را تا آنجا پیش برده‌ایم که معنی اصلی اصطلاحات هندسی را حفظ کنیم. تعامد دو تابع f و g چیزی در مورد عمود بودن به ما ارائه نمی‌دهد، اما در عوض مشخص می‌شود که حاصلضرب fg در بازهٔ اصلی، مقادیر منفی و مثبت را طوری می‌گیرد که رابطهٔ(۱۰) برقرار است.

مجموعه‌ای از توابع $\psi_n(x)$ $(n=۱,۲,...)$ دربازهٔ $a<x<b$ متعامد است، هر گاه به ازای هر m و n متمایز داشته باشیم: $(\psi_m, \psi_n)=۰$ بافرض اینکه هیچ یک از توابع ψ_n دارای نرم صفر نباشد(مسألهٔ۷ را ببینید)، می‌توان هریک از آنها را با تقسیم آن بر $\| \psi_n \|$ تراز کرد. مجموعهٔ جدید $\{\phi_n(x)\}$ که بدین طریق ساخته می‌شود، که در آن:

$$\phi_n(x)=\frac{\psi_n(x)}{\| \psi_n \|} \qquad (n=۱,۲,...) \tag{۱۱}$$

بر بازهٔ اصلی متعامدیکه است یعنی:

$$(\phi_m ; \phi_n) = \delta_{mn} \qquad (m = ۱,۲, \dots \ , \ n = ۱,۲, \dots) \tag{۱۲}$$

که در آن δ_{mn} دلتای کرونکر است. با کامل نوشتن، مشخصهٔ (۱۲) یک مجموعهٔ متعامدیکه تبدیل می‌شود به:

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = \begin{cases} ۰ & m \neq n \quad \text{هرگاه} \\ ۱ & m = n \quad \text{هرگاه} \end{cases} \tag{۱۳}$$

مثال ۱. از اتحاد مثلثاتی

$$۲\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

می‌دانیم که:

$$\sin mx \sin nx = \frac{۱}{۲}\cos(m-n)x - \frac{۱}{۲}\cos(m+n)x$$

که در آن m و n اعداد صحیح مثبت هستند. بنابراین بسادگی می‌توان تحقیق کرد که:

$$\int_۰^\pi \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} ۰ & m \neq n \quad \text{هرگاه} \\ \dfrac{\pi}{۲} & m = n \quad \text{هرگاه} \end{cases} \tag{۱۴}$$

پس بدیهی است که مجموعهٔ توابع سینوسی

$$\psi_n(x) = \sin nx \qquad (n = ۱,۲, \dots)$$

بر بازهٔ $۰ < x < \pi$ متعامد است؛ و نرم هریک از این توابع یعنی $\|\psi_n\|$ برابر $\sqrt{\pi/۲}$ می‌باشد. بنابراین مجموعهٔ متعامدیکه نظیر آن $\{\phi_n(x)\}$ مرکب از توابع زیر است:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\,\sin nx \qquad (n = ۱,۲, \dots)$$

بعضی مواقع بهتر است اندیس‌گذاری یک مجموعهٔ نامتناهی متعامد یا

متعامدیکه را به جای $n=1$ از $n=0$ شروع کنیم. در مثال زیر از $n=0$ شروع شده است. تحقیق این را که این مجموعهٔ مفروضی متعامدیکه است، جزو تمرینات است.

مثال۲. توابع

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad \phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx \qquad (n=1,2,\dots)$$

تشکیل مجموعهٔ $\{\phi_n(x)\}\ (n=0,1,2,\dots)$ می‌دهد که در بازهٔ $0<x<\pi$ متعامدیکه است.

مسائل

۱. الف) با استفاده از اتحاد مثلثاتی

$$2\cos A\cos B=\cos(A-B)+\cos(A+B)$$

نشان دهید اگر m و n اعداد صحیح مثبتی باشند:

$$\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0 & m\neq n \quad \text{هرگاه} \\ \dfrac{\pi}{2} & m=n \quad \text{هرگاه}\end{cases}$$

ب) به کمک فرمول انتگرالگیری حاصل در قسمت(الف) تحقیق کنید که مجموعهٔ $\{\phi_n(x)\}\ (n=0,1,2,\dots)$ در مثال ۲ بخش ۱۱ روی بازهٔ $0<x<\pi$ متعامدیکه است.

راهنمایی: توجه کنید که برای اثبات متعامد بودن در قسمت(ب)، لازم است نشان دهیم که $(\phi_0,\phi_n)=0$ و $(\phi_m,\phi_n)=0\ (m\neq n)$ هرگاه m و n اعداد صحیح مثبتی باشند.

۲. الف) با استفاده از این که توابع(۱۶) مثال ۱ بخش ۱۱ مجموعهٔ متعامدیکه‌ای روی بازهٔ $0<x<\pi$ تشکیل می‌دهند، نشان دهید که توابع

$$\phi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \qquad (n=1,2,\dots)$$

مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند که دربازهٔ $-\pi<x<\pi$ متعامدیکه است.

ب) با استفاده از این که مجموعهٔ موجود در مثال ۲ بخش ۱۱ و مسألهٔ ۱ روی بازهٔ

$0 < x < \pi$ متعامدیکه است، نشان دهید که توابع

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad , \quad \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

مجموعهٔ متعامدیکه‌ای دربازهٔ $-\pi < x < \pi$ تشکیل می‌دهد (راهنمایی مسألهٔ ۱ را ببینید.)

راهنمایی: ملاحظه کنید که اگر f تابع انتگرالپذیر زوجی باشد، تابعی که $f(-x) = f(x)$.

آنگاه:
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

زیرا نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور yها متقارن است.

۳. به کمک نتایج به دست آمده در مسألهٔ ۲، نشان دهید که مجموعهٔ $\{\phi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ مرکب از توابع

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;,\; \phi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \;\;,\;\; \phi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$$
$$(n = 1, 2, \ldots)$$

در بازهٔ $-\pi < x < \pi$ متعامدیکه است. توجه کنید که بنابر مسأله ۲ فقط لازم است نشان دهیم:

$$(\phi_0, \phi_{2n}) = 0, (\phi_{2m-1}, \phi_{2n}) = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots)$$

تا متعامد بودن ثابت شود.

راهنمایی: ملاحظه کنید که اگر f تابع انتگرالپذیر فردی باشد، تابعی که $f(-x) = -f(x)$،

آنگاه:
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

زیرا نمودار $y = f(x)$ نسبت به مبدأ متقارن است.

۴. نشان دهید که توابع $\psi_{1}(x)=1$ و $\psi_{2}(x)=x$ دربازهٔ $-1<x<1$ متعامدند و اعداد ثابت A و B را طوری تعیین کنید که $\psi_{3}(x)=1+Ax+Bx^{2}$ در آن بازه بر ψ_{1} و ψ_{2} عمود باشد.

جواب: $A=0$ ، $B=-3$

۵. فرض کنید دو تابع پیوستهٔ $\psi_{1}(x)$ و $f(x)$ با نرمهای مثبت در بازهٔ $a\leq x\leq b$ مستقل خطی باشند؛ یعنی یکی مضرب ثابتی از دیگری نباشد. با تعیین ترکیب خطی از آنها مانند $f+A\psi_{1}$ که در بازهٔ اصلی $a<x<b$ بر ψ_{1} عمود باشد، یک زوج ψ_{1} و ψ_{2} متعامد به دست آورید که در آن:

$$\psi_{2}(x)=f(x)-\frac{(f,\psi_{1})}{\|\psi_{1}\|^{2}}\psi_{1}(x)$$

این عبارت را وقتی f، ψ_{1} و ψ_{2} نمایش بردارهایی در فضای سه بعدی باشند، تعبیر هندسی کنید.

۶. در مسألهٔ ۵ فرض کنید بازهٔ اصلی $-\pi<x<\pi$ و

$$\psi_{1}(x)=\cos nx \quad , \quad f(x)=\cos nx+\sin nx$$

که در آن n عدد صحیح مثبت ثابتی است. نشان دهید تابع $\psi_{2}(x)$ نظیر در اینجا $\sin nx$ می‌شود.

راهنمایی: با استفاده از اینکه مجموعهٔ موجود در مسألهٔ ۳ روی بازهٔ $-\pi<x<\pi$ متعامد است، می‌توان از محاسبهٔ انتگرال بی‌نیاز شد.

۷. با در نظر گرفتن توابع f در فضای $C_{p}(a,b)$ درستی دو حکم زیر را تحقیق کنید:

الف) اگر جز در تعدادی متناهی نقطه در بازهٔ $a<x<b$ داشته باشیم $f(x)=0$ آنگاه $\|f\|=0$

ب) بعکس اگر $\|f\|=0$ آنگاه جز احتمالاً در تعدادی متناهی، نقطه در بازهٔ $a<x<b$ داریم $f(x)=0$

راهنمایی: در قسمت (ب) از این امر استفاده کنید که اگر تابع f در بازهٔ بسته و محدودی

پیوسته و نامنفی و در نقطه‌ای مثبت باشد، آنگاه انتگرال معین آن مثبت است.

۸. تحقیق کنید که به ازای دو تابع f و g در فضای $C_p(a,b)$ داریم:

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b[f(x)g(y)-g(x)f(y)]^2dx\,dy = \|f\|^2\,\|g\|^2-(f,g)^2$$

بدین ترتیب نامساوی شوارتس را ثابت کنید

$$|(f,g)| \le \|f\|\cdot\|g\|$$

که وقتی نیز f و g نمایش بردارهایی در فضای سه بعدی باشند برقرار است.در آن حالت به نامساوی کوشی مشهور است.

۹. فرض کنید f و g نمایش دو تابع در فضای $C_p(a,b)$ باشد. با استفاده از نامساوی شوارتس (مسألهٔ۸) نشان دهید که اگر یکی از این توابع دارای نرم صفر باشد، آنگاه: $(f,g)=0$.

۱۰. ثابت کنید اگر f و gتوابعی در فضای $C_p(a,b)$ باشند آنگاه:

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$$

اگر در عوض f و g نمایش بردارهایی در فضای سه بعدی باشند، این رابطه نامساوی مثلثی است که طول هر ضلع کوچکتر یا مساوی مجموع طولهای دو ضلع دیگر است.

راهنمایی: اثبات را با نشان دادن

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2(f,g) + \|g\|^2$$

شروع و سپس از نامساوی شوارتس (مسألهٔ۸) استفاده کنید.

۱۲. سری فوریهٔ تعمیم یافته

فرض کنید f تابعی دلخواه در $C_p(a,b)$ باشد، فضای توابع قطعه‌ای پیوسته که روی بازهٔ $a<x<b$ تعریف شده‌اند. اگر یک مجموعهٔ متعامدیکه از توابع مانند $\phi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ در $C_p(a,b)$ مشخص شده باشد، ممکن است بتوانیم f را به صورت ترکیب خطی از این توابع نمایش دهیم که ترکیب خطی به سری نامتناهی تعمیم

یافته که در همهٔ نقاط به جز احتمالاً تعدادی متناهی نقطه در بازهٔ اصلی $a<x<b$ به $f(x)$ همگراست:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x) \qquad (a<x<b) \tag{1}$$

این رابطه نظیر رابطه‌ای است که برای هر بردار در فضای سه بعدی بر حسب سه بردار دو بدو متعامد به طول واحد مانند i ، j و k به دست می‌آید.

برای کشف عبارتی برای ضرایب c_n در نمایش(۱)، در صورت وجود چنین نمایشی، به جای n از نماد جمعبندی m استفاده کرده،می‌نویسیم:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} c_m\phi_m(x) \qquad (a<x<b) \tag{2}$$

همچنین فرض می‌کنیم که بعد از ضرب کردن هر جملهٔ آن در $\phi_n(x)$ خاص، سری حاصل جمله به جمله در بازهٔ $a<x<b$ انتگرالپذیر باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx \tag{3}$$

یا:

$$(f,\phi_n) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m\,(\phi_m\ ,\ \phi_n)$$

اما به ازای همهٔ مقادیر mبه جز وقتی که $m=n$ داریم $(\phi_m, \phi_n)=0$ و در حالتی که $m=n$ داریم $(\phi_m , \phi_n)= \| \phi_n \|^2=1$. بنابراین رابطهٔ(۳) تبدیل می‌شود به $(f, \phi_n)=c_n$ و c_n به وضوح حاصلضرب داخلی f و ϕ_n است.

همان طور که در بالا توضیح دادیم، نمی‌توانیم مطمئن باشیم که نمایش(۱) با ضرایب $c_n=(f, \phi_n)$ برای تابع خاص f و مجموعهٔ متعامدیکهٔ $\{\phi_n\}$ عملاً برقرار باشد. بنابراین می‌نویسیم:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x) \qquad (a<x<b) \tag{4}$$

که در آن نماد مد صرفاً نمایش تناظر است هر گاه:

$$c_n=(f,\phi_n)=\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx \qquad (n=1,2,\dots) \tag{۵}$$

به منظور تقویت تشابه با بردارها، یادآوری می‌کنیم که اگر بردار A در فضای سه بعدی را بخواهیم برحسب مجموعهٔ متعامدیکهٔ $\{i,j,k\}$ به صورت

$$A=a_1 i+a_2 j+a_3 k$$

بنویسیم، مؤلفه‌ها را می‌توان با گرفتن حاصلضرب داخلی A با هریک از بردارهای آن مجموعه به دست آورد. یعنی حاصلضرب داخلی A با i برابر a_1 است و غیره.

سری موجود در تناظر (۴) سری فوریهٔ تعمیم یافته تابع f در بازهٔ $a<x<b$ نسبت به مجموعهٔ متعامدیکهٔ $\{\phi_n\}$ است. ضرایب c_n به ثابتهای فوریه مشهورند.

مثال. فرض کنید f نمایش تابعی در فضای $C_p(0,\pi)$ باشد. از مثال۲ بخش ۱۱ می‌دانیم که مجموعهٔ $\{\phi_n(x)\}$ $(n=0,1,2,\dots)$ مرکب از توابع

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad \phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx \qquad (n=1,2,\dots) \tag{۶}$$

روی بازهٔ $0<x<\pi$ متعامدیکه است و تناظر (۴) با شروع جمعبندی از $n=0$ تبدیل می‌شود به

$$f(x)\sim\frac{c_0}{\sqrt{\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx \qquad (0<x<\pi)$$

که در آن

$$c_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}f(x)\,dx \;,\; c_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad (n=1,2,\dots)$$

با نوشتن

$$a_0=\frac{2}{\sqrt{\pi}}c_0 \quad , \quad a_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}c_n \qquad (n=1,2,\dots)$$

به تناظر سری فوریهٔ کسینوسی می‌رسیم

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \qquad (0<x<\pi) \tag{۷}$$

که در آن:

$$a_n = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots) \qquad (۸$$

سری فوریهٔ کسینوسی را در بخش بعد بیشتر بررسی خواهیم کرد.

سری فوریه‌های تعمیم یافته که با آنها سروکار خواهیم داشت، همیشه شامل مجموعه‌های متعامدیکّه و توابع f در فضایی از نوع $C_p(a,b)$ یا زیر فضاهایی از آن خواهند بود و می‌گوییم نمایش (۱) برای توابع f در فضای مفروض برقرار است، اگر در همهٔ نقاط x از بازهٔ اصلی $a<x<b$ به جز محتملاً تعدادی متناهی نقطه تساوی برقرار باشد. به هر حال، نمایش (۱) حتی در فضاهای تابعی خیلی محدود هم همیشه برقرار نیست. با در نظر گرفتن بردارها در فضای سه بعدی، این محدودیت را پیش‌بینی می‌کردیم. زیرا اگر فقط دو بردار i و j تشکیل مجموعهٔ متعامدیکّه را بدهند، هر بردار $\boldsymbol{A}$ که موازی صفحهٔ xy نباشد، نمایشی به شکل $A=a_۱\boldsymbol{i}+a_۲\boldsymbol{j}$ ندارد. بخصوص بردار غیر صفر k بر هر دو بردار i و j عمود است که در این حالت مؤلفه‌های $a_۱=\boldsymbol{k.i}$ و $a_۲=\boldsymbol{k.j}$ هر دو صفر خواهند بود.

همین طور، یک مجموعهٔ متعامدیکّه مانند $\{\phi_n(x)\}$ ممکن است به قدر کافی وسیع نباشد که بتوان یک سری فوریهٔ تعمیم یافته نوشت. به عبارت دقیقتر، اگر تابع $f(x)$ در تناظر (۴) بر هر تابع در مجموعهٔ متعامدیکهٔ $\{\phi_n(x)\}$ عمود باشد، آنگاه ثابتهای فوریهٔ $c_n=(f,\phi_n)$ همگی صفرند. البته این بدان معناست که مجموع سری تابع صفر است. در نتیجه اگر f دارای نرم مثبت باشد سری در هیچ نقطه‌ای از بازهٔ اصلی جز محتملاً تعدادی متناهی نقطه مساوی $f(x)$ نیست [مسألهٔ ۷ (الف) بخش ۱۱ را ببینید]

یک مجموعهٔ متعامدیکّه در $C_p(a,b)$ ، یا زیر فضایی از آن، بسته است، اگر تابعی در فضا با نرم مثبت موجود نباشد که بر هر یک از توابع $\phi_n(x)$ عمود باشد. پس بنابر پاراگراف قبلی اگر مجموعهٔ متعامدیکهٔ $\{\phi_n(x)\}$ بسته نباشد، آنگاه نمایش (۱) نمی‌تواند به ازای هر تابع f در آن فضا برقرار باشد.

در بخش ۲۰ زیر فضایی از $C_p(۰,\pi)$ را مشخص خواهیم کرد که وقتی f در آن فضاست سری (۷) برقرار باشد. توجه کنید که اگر تابع $\phi_۰(x)$ با بقیهٔ توابع

$\phi_n(x)$ $(n=۱,۲,...)$ در مجموعهٔ (۶) نیامده باشد، مجموعهٔ حاصل در آن فضا بسته نیست زیرا $\phi_\circ(x)$ بر هر یک از توابع آن مجموعهٔ کوچکتر عمود است. بنابراین جملهٔ $a_\circ/۲$، در حالت کلی، برای برقراری نمایشهای سری فوریهٔ کسینوسی در آن زیر فضا لازم است.

۱۳ . سری فوریهٔ کسینوسی

در مثال بخش ۱۲ مفهوم سری فوریهٔ کسینوسی نظیر تابع $f(x)$ در $C_p(\circ, \pi)$ را معرفی کردیم:

$$f(x) \sim \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (\circ < x < \pi) \tag{۱}$$

که در آن:

$$a_n = \frac{۲}{\pi} \int_\circ^\pi f(x) \cos nx \, dx \qquad (n = \circ, ۱, ۲, \dots) \tag{۲}$$

قطعه‌ای پیوسته بودن f در بازهٔ $\circ < x < \pi$ مستلزم وجود انتگرالها در عبارت (۲) برای ضرایب a_n است. همان طور که پیش از این در آخر بخش قبل، اشاره کردیم در بخش ۲۰ شرایط بیشتری روی f خواهیم گذاشت که بنابر آنها سری کسینوسی عملاً به ازای هر $\circ < x < \pi$ به $f(x)$ همگرا باشد. در این حالت تناظر (۱) تبدیل به تساوی می‌شود.

ملاحظه کنید که تناظر (۱) با ضرایب (۲) را می‌توان فشرده‌تر و به شکل

$$f(x) \sim \frac{۱}{\pi} \int_\circ^\pi f(s)\, ds + \frac{۲}{\pi} \sum_{n=۱}^{\infty} \cos nx \int_\circ^\pi f(s) \cos ns \, ds \tag{۳}$$

نوشت که در آن متغیر انتگرالگیری را به s نمایش داده‌ایم تا از متغیر آزاد x متمایز باشد.

اگر f دربازهٔ $\circ \le x \le \pi$ تعریف شده باشد و سری (۱) به ازای هر x در آن بازه به $f(x)$ همگرا باشد، این سری روی تمام محور xها به توسیع متناوب زوج، با دورهٔ تناوب ۲π، از f نیز همگراست. یعنی به تابع $F(x)$ که دارای خواص زیر است همگرا می‌باشد:

$$F(x) = f(x) \qquad \circ \le x \le \pi \qquad \text{هر گاه} \tag{۴}$$

و

۵) به ازای هر x ، $F(x+2\pi)=F(x)$, $F(-x)=F(x)$

دلیل این امر آن است که هر جمله سری (۱) زوج و متناوب و با دورهٔ تناوب 2π است. نمودار توسیع $y=F(x)$ بدین صورت به دست می‌آید که قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور yها پیدا می‌کنیم تا نمودار بر بازهٔ $-\pi\leq x\leq\pi$ به دست آید، سپس آن نمودار را بر بازه‌های $\pi\leq x\leq 3\pi$, $3\pi\leq x\leq 5\pi$ ، و غیره و همچنین بر بازه‌های $-3\pi\leq x\leq -\pi$ ، $-5\pi\leq x\leq -3\pi$ و غیره تکرار می‌کنیم. از این ملاحظات نتیجه می‌شود که اگر تابع مفروض f زوج و متناوب و با دورهٔ تناوب 2π باشد، آنگاه سری کسینوسی نظیر f بر بازهٔ $0<x<\pi$ نمایش $f(x)$ به ازای هر x است هرگاه سری بر بازهٔ $0\leq x\leq\pi$ به آن تابع همگرا باشد. واضح است که اگر تابع f هر دو خاصیت زوج بودن و متناوب با دورهٔ تناوب 2π را نداشته باشد، یک سری کسینوسی نمی‌تواند به ازای هر x نمایش $f(x)$ باشد.

مثال. می‌خواهیم سری فوریهٔ کسینوسی را برای تابع $f(x)=\sin x$ بر بازهٔ $0<x<\pi$ پیدا کنیم. با استفاده از اتحاد مثلثاتی

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

می‌توان نوشت:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x\right]dx$$

$$(n=0,1,2,\ldots)$$

بنابراین چنانچه $n\neq 1$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)x}{1+n}-\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^\pi=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}$$

و چنانچه $n=1$ آن ضریب برابر است با

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x\,dx=0$$

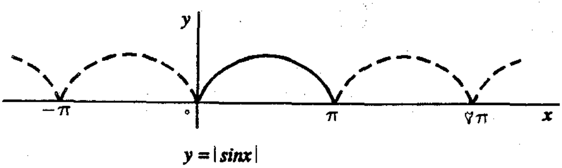
پس تناظر (۱) به صورت ذیل در می‌آید:

$$\sin x \sim \frac{۲}{\pi} + \frac{۲}{\pi} \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱+(-۱)^n}{۱-n^۲} \cos nx \qquad (۰<x<\pi)$$

ملاحظه کنید که وقتی n فرد است $۱+(-۱)^n = ۰$ و این سری را می‌توان با جمعبندی فقط روی جملاتی که n آنها زوج است، به شکل مؤثرتری نوشت. برای این کار بعد از علامت جمعبندی، هر جا n ظاهر شد به جای آن $۲n$ قرار داده، جمعبندی را از $n=۱$ شروع می‌کنیم. حاصل کار به شکل زیر است:

$$\sin x \sim \frac{۲}{\pi} - \frac{۴}{\pi} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos ۲nx}{۴n^۲-۱} \qquad (۰<x<\pi) \qquad (۶$$

تابع $\sin x$ در واقع در شرایط بخش ۲۰ صدق می‌کند و مطمئنیم که به ازای هر x در بازهٔ $۰ \le x \le \pi$ این تناظر یک تساوی است. بنابراین در هر نقطه روی محور xها، این سری به توسیع زوج متناوب، با دورهٔ تناوب ۲π تابع $\sin x (۰ \le x \le \pi)$ همگراست. آن توسیع که در شکل ۱۷ نشان داده شده عبارت است از تابع $y = |\sin x|$



شکل ۱۷

۱۴ . سری فوریهٔ سینوسی

در مثال بخش ۱۱ دیدیم که توابع سینوس

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \sin nx \qquad (n=۱,۲,\dots)$$

تشکیل مجموعهٔ متعامدیکّه‌ای روی بازهٔ $۰<x<\pi$ می‌دهند. سری فوریهٔ تعمیم یافتهٔ

نظیر تابع $f(x)$ در $C_p(\circ, \pi)$ عبارت است از:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \qquad (\circ < x < \pi)$$

که در آن:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\circ}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \dots) \quad ,$$

با نوشتن

$$b_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \; c_n \qquad (n = 1, 2, \dots) \; .$$

تناظر سری فوریهٔ سینوسی را داریم:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (\circ < x < \pi) \quad , \qquad (1$$

که در آن:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{\circ}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \dots) \; . \qquad (2$$

البته می‌توان تناظر را بدین صورت نیز نوشت:

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \int_{\circ}^{\pi} f(s) \sin ns \, ds \; . \qquad (3$$

فرض کنید f در بازهٔ باز $\circ < x < \pi$ تعریف شده و در آنجا سری (۱) به $f(x)$ همگرا باشد. چون سری (۱) وقتی $x = \circ$ و $x = \pi$ به صفر همگراست، چنانچه به f مقادیر $f(\circ) = \circ$ و $f(\pi) = \circ$ را نسبت دهیم، به ازای هر x در بازهٔ بستهٔ $\circ \le x \le \pi$ سری (۱) به $f(x)$ همگرا خواهد بود. در این صورت با توضیحاتی نظیر آنچه در سری کسینوسی در بخش ۱۲ گفتیم، نتیجه می‌شود که سری (۱) به ازای همهٔ مقادیر x به توسیع فرد متناوب، با دورهٔ تناوب 2π f، همگراست. این دفعه توسیع عبارت است از تابع $F(x)$ که با ضابطه‌های زیر تعریف می‌شود:

$$F(x) = f(x) \quad , \qquad \circ \le x \le \pi \qquad \text{هر گاه} \quad (4$$

و

$$F(-x) = -F(x) \quad , \quad F(x + 2\pi) = F(x) \qquad x \; \text{به ازای هر} \quad (5$$

توسیع F فرد و متناوب و با دورهٔ تناوب ۲π است زیرا جملات $b_n sin\ nx$ در سری (۱) دارای این خواصند. نمودار $y=F(x)$ نسبت به مبدأ متقارن است و می‌توان آن را به طریق زیر یافت: ابتدا قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور yها و سپس قرینهٔ نمودار حاصل را نسبت به محور xها پیدا می‌کنیم و بالاخره نمودار حاصل در بازهٔ $-\pi \leq x \leq \pi$ را در طول محور xها هر ۲π واحد تکرار می‌کنیم. بدیهی است که سری فوریهٔ سینوسی بر بازهٔ $۰ < x < \pi$ را می‌توان برای نمایش تابعی که به ازای هر x تعریف شده و فرد و با دورهٔ تناوب ۲π است به کاربرد، مشروط بر اینکه اگر $۰ \leq x \leq \pi$ نمایش برقرار باشد.

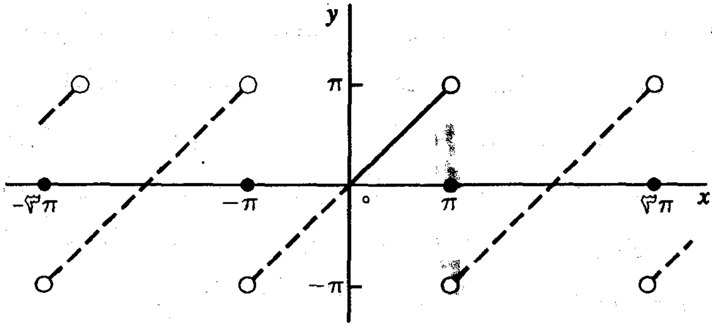
مثال۱. برای یافتن سری سینوسی نظیر تابع $f(x)=x$ در بازهٔ $۰ < x < \pi$ برای ضرایب b_n به عبارت (۲) استناد کرده، و با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء می‌نویسیم:

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{۲}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^{۲}}\right]_{۰}^{\pi} = ۲\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}$$

بنابراین:

$$x \sim ۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx \qquad (۰ < x < \pi) \qquad (۶$$

نشان خواهیم داد که هر گاه $۰ < x < \pi$ این سری عملاً به $f(x)$ همگراست. بنابراین به تابع فرد و متناوب $y=F(x)$ که نمودار آن در شکل ۱۸ رسم شده است همگرا می‌باشد. همگرایی سری به صفر در نقاط $x=۰\ ,\ \pm\pi,\ \pm۳\pi,\ \pm۵\pi, \ldots$ با تئوری ما سازگار است، خواهیم دید که در هریک از این نقاط ناپیوستگی، سری باید به میانگین حدود یکطرفهٔ $F(x)$ همگرا باشد.



شکل ۱۸

در محاسبهٔ انتگرالهایی که ضرایب فوریه را نمایش می‌دهند، بعضی مواقع لازم است بیش از یک بار از انتگرالگیری جزء به جزء استفاده کنیم. حال مثالی ارائه می‌کنیم که می‌توان آن کار را با استفاده از یک فرمول منسوب به کرونکر انجام داد.[۱] قبل از ذکر مثال، مختصری در بارهٔ آن فرمول صحبت می‌کنیم.

فرض کنید $p(x)$ چند جمله‌ای از درجهٔ m و $f(x)$ پیوسته باشد. در این صورت جز برای یک ثابت جمعی دلخواه

$$\int p(x)f(x)\,dx = pF_{۱} - p'F_{۲} + p''F_{۳} - \ \dots\ + (-۱)^m p^{(m)}F_{m+۱} \quad (۷$$

که در آن از p به طور متوالی مشتق می‌گیریم تا صفر شود و $F_{۱}$ نمایش انتگرال نامعینی از f، $F_{۲}$ انتگرال نامعینی از $F_{۱}$ است و غیره و علامتهای متناوب قبل از جملات آمده‌اند. توجه کنید که مشتق‌گیری از p با جملهٔ دوم آغاز می‌گردد، در حالی که انتگرالگیری از f با جملهٔ اول شروع می‌شود. از این فرمول، که درستی آن را می‌توان با مشتقگیری از سمت راست و به دست آوردن $f(x)p(x)$ تحقیق کرد، برای محاسبهٔ انتگرال مثال ۱ نیز می‌توان استفاده کرد، همان انتگرالی که تنها به یک انتگرالگیری جزء به جزء نیاز دارد.

---

۱. کرونکر عملاً در مقالاتی که در (۱۸۸۹ و ۱۸۸۵) *Berlin Sitzunge sbeichte* منتشر کرد مسأله را وسیعتر بررسی کرد.

مثال۲. برای این که برتری فرمول (۷) را وقتی انتگرالگیریهای جزءبه جزء متوالی مطرح است ببینیم، سری فوریهٔ سینوسی تابع $f(x)=x^۳$ در بازهٔ $۰<x<\pi$ را پیدا می‌کنیم. به کمک آن فرمول می‌توان نوشت:

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi x^۳ \sin nx\, dx$$

$$=\frac{۲}{\pi}\left[x^۳\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)-(۳x^۲)\left(\frac{-\sin nx}{n^۲}\right)+(۶x)\left(\frac{\cos nx}{n^۳}\right)-(۶)\left(\frac{\sin nx}{n^۴}\right)\right]_۰^\pi$$

$$=۲(-۱)^{n+۱}\frac{(n\pi)^۲-۶}{n^۳} \qquad (n=۱,۲,\ldots)$$

بنابراین:

$$x^۳\sim ۲\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{(n\pi)^۲-۶}{n^۳}\sin nx \qquad (۰<x<\pi) \qquad (۸$$

همانند مثال۱ در بازهٔ $۰<x<\pi$ این سری به تابع مفروض همگراست. چون $x^۳$ تابعی فرد است که مقدار آن در $x=۰$ صفر می‌شود، این سری بر بازهٔ $-\pi<x<\pi$ نیز نمایش $x^۳$ است.

این فصل را با اشاره به نکته‌ای محاسباتی جهت یافتن ضرایب $b_n (n=۱,۲,\ldots)$ سری فوریهٔ سینوسی ترکیب خطی مانند $c_۱f_۱(x)+c_۲f_۲(x)$ از دو تابع $f_۱(x)$, $f_۲(x)$ که سری سینوسی آنها معلوم است، به پایان می‌بریم. یعنی، چون عبارت

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi [c_۱f_۱(x)+c_۲f_۲(x)]\sin nx\, dx$$

را می‌توان به صورت

$$b_n=c_۱\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi f_۱(x)\sin nx\, dx+c_۲.\frac{۲}{\pi}\int_۰^\pi f_۲(x)\sin nx\, dx$$

نوشت، واضح است که b_n همان ترکیب خطی ضرایب nام سریهای سینوسی توابع $f_۱(x)$ و $f_۲(x)$ است. از چنین نکته‌ای برای یافتن ضرایب سریهای کسینوسی و انواع دیگر سریها که در این فصل و فصول دیگر مطرح می‌شوند،

می‌توان استفاده کرد.

مثال۳. با توجه به سریهای سینوسی توابع x و x^3 که به ترتیب در مثالهای ۱و۲ پیدا کردیم، ضرایب b_n در سری سینوسی نظیر تابع

$$f(x)=x(\pi^2-x^2)=\pi^2 x-x^3 \qquad (0<x<\pi)$$

عبارتند از:

$$b_n=\pi^2 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}-2(-1)^{n+1}\frac{(n\pi)^2-6}{n^3}=12\frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \quad (n=1,2,\dots)$$

بنابراین:

$$x(\pi^2-x^2)\sim 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin nx \qquad (0<x<\pi) \qquad (9$$

مسائل.

برای هر یک از توابع در مسائل ۱ تا ۴ (الف) سری فوریهٔ کسینوسی و(ب) سری فوریهٔ سینوسی را پیدا کنید.

۱. $f(x)=1 \qquad (0<x<\pi)$

جواب:

الف) ۱،

ب)[1] $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

---

۱. در قسمت (ب) ضرائب b_n صفر هستند هرگاه n زوج باشد. بنابراین اندیس n را هر جا در داخل علامت مجموع ظاهر می‌شود می‌توان با $2n-1$ جایگزین کرد. (با مثال بخش ۱۳ مقایسه کنید)

۲. $f(x)=\pi-x \qquad (0<x<\pi)$

جواب:

الف) $$\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

ب) $$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

۳. $$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\frac{\pi}{2} \quad \text{هرگاه} \\ 0 & \frac{\pi}{2}<x<\pi \quad \text{هرگاه}\end{cases}$$

جواب:

الف) $$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos(2n-1)x}{2n-1}$$

ب) $$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}$$

۴. $f(x)=x^2 \qquad (0<x<\pi)$

جواب:

الف) $$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

ب) $$2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}-2\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^3}\right]\sin nx$$

۵. با توجه به سری سینوسی برای x در مثال۱ بخش۱۴ و سری سینوسی که در مسألهٔ۴(ب) برای x^2 پیدا کردیم، نشان دهید که:

$$x(\pi-x)\sim\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2(n-1)^3} \qquad (0<x<\pi)$$

۶. سری فوریه سینوسی نظیر تابع $f(x)=\sin x$ در بازهٔ $\circ < x<\pi$ چیست؟
راهنمایی: برای یافتن ضرایب سری به فرمول انتگرالگیری(۱۰) بخش ۱۱ استناد کنید.
جواب: $\sin x$

۷. سری فوریهٔ کسینوسی برای x در بازهٔ $\circ < x<\pi$ را پیدا کنید. سپس با فرض اینکه تناظر حاصل، عملاً وقتی $\circ \le x\le\pi$ یک تساوی است، خاطر نشان سازید که چگونه نتیجه می‌شود:

$$|x| = \frac{\pi}{۲} - \frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos(۲n-۱)x}{(۲n-۱)^۲} \qquad (-\pi\le x\le\pi)$$

۸. نشان دهید که

$$x^۴ \sim \frac{\pi^۴}{۵} + ۸\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n \frac{(n\pi)^۲-۶}{n^۴}\cos nx \qquad (\circ<x<\pi)$$

با فرض این که تناظر وقتی $\circ \le x\le\pi$ عملاً یک تساوی است، نمودار تابعی را که به ازای هر x با این سری نمایش داده می‌شود رسم کنید.

۹. صحت فرمول کرونکر (۷) بخش ۱۴ را تحقیق کنید.

۱۰. فرض کنید $\{\psi_n(x)\}$ $(n=۱,۲,\ldots)$ نمایش مجموعه‌ای متعامد، اما نه لزوماً متعامدیکه، بر بازهٔ اصلی $a < x<b$ باشد. نشان دهید تناظر بین تابع قطعه‌ای پیوستهٔ $f(x)$ و سری فوریهٔ تعمیم یافته آن نسبت به مجموعهٔ متعامدیکهٔ توابع $\phi_n(x)=\psi_n(x)/\|\psi_n\|$ $(n=۱,۲,\ldots)$ را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$f(x)\sim\sum_{n=۱}^{\infty}\gamma_n\psi_n(x) \quad \text{که در آن} \quad \gamma_n=\frac{(f,\psi_n)}{\|\psi_n\|^۲}$$

۱۱. در فضای توابع پیوسته در بازهٔ $a\le x\le b$ ثابت کنید اگر دو تابع f و g نسبت به مجموعهٔ متعامدیکه و بستهٔ $\{\phi_n(x)\}$ دارای ثابتهای فوریهٔ یکسان باشند، آنگاه f و g باید یکی باشند.بدین ترتیب نشان دهید که f با ثابتهای فوریه‌اش به طور یکتا معین شود.
راهنمایی: نشان دهید که نرم تفاضل $f(x)-g(x)$ صفر است. سپس بیان کنید چگونه نتیجه می‌شود که $f(x)-g(x)\equiv\circ$ (راهنمایی مسألهٔ ۷ بخش ۱۱ را ببینید.)

۱۲. فرض کنید تابعی در $C_p(-\pi,\pi)$ باشد و قرار دهید $f(x)=g(x)+h(x)$ که در آن h, g با ضابطه‌های زیر تعریف شده‌اند:

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{۲} \quad , \quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{۲}$$

بدیهی است که توابع g و h، به ترتیب، در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ زوج و فردند.

الف) بیان کنید چرا باید انتظار داشت که:

$$f(x)=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (-\pi<x<\pi)$$

که در آن a_n $(n=۰,۱,۲,...)$ ضرایب سری فوریهٔ کسینوسی $g(x)$ در بازهٔ $۰<x<\pi$ و b_n $(n=۱,۲,...)$ ضرایب سری فوریهٔ سینوسی $h(x)$ در آن بازه‌اند.

ب) نشان دهید که ضرایب a_n و b_n در قسمت (الف) را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$a_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=۰,۱,۲,\ ...)$$

$$b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=۱,۲,\ ...)$$

(نوع سری را که در اینجا معرفی شد در بخش آتی مورد بحث قرار می‌دهیم.)

راهنمایی: در قسمت (ب) قرار دهید

$$a_n=\frac{۱}{\pi}\left[\int_۰^{\pi}f(x)\cos nx\,dx+\int_۰^{\pi}f(-s)\cos ns\,ds\right]$$

و سپس در انتگرال دوم تغییر متغیر $x=-s$ بدهید. برای ضرایب b_n به طریق مشابه باید عمل کرد.

۱۵ . سریهای فوریه

در مسألهٔ ۳ بخش ۱۱ دیدیم که توابع

$$\phi_{\circ}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ \phi_{2n-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\ ,\ \phi_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \qquad (1)$$

$$(n=1,2,\ldots)$$

تشکیل مجموعهٔ متعامدیکه‌ای روی بازهٔ اصلی $-\pi<x<\pi$ می‌دهند. بنابراین سری فوریهٔ تعمیم یافته نظیر f از $C_p(-\pi,\pi)$ عبارت است از:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} c_n\phi_n(x)=c_{\circ}\phi_{\circ}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{2n-1}\phi_{2n-1}(x)+c_{2n}\phi_{2n}(x)\right]$$

یعنی

$$f(x)\sim\frac{c_{\circ}}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\cos nx+\frac{c_{2n}}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)\quad(-\pi<x<\pi) \qquad (2)$$

که در آن

$$c_{\circ}=(f,\phi_{\circ})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

و

$$c_{2n-1}=(f,\phi_{2n-1})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=1,2,\ldots)$$

$$c_{2n}=(f,\phi_{2n})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,\ldots)$$

پس اگر قرار دهیم:

$$a_{\circ}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,c_{\circ}\ ,\ a_n=\frac{c_{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\ ,\ b_n=\frac{c_{2n}}{\sqrt{\pi}}\quad(n=1,2,\ldots) \qquad (3)$$

آن تناظر تبدیل می‌شود به

$$f(x)\sim\frac{a_{\circ}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad(-\pi<x<\pi) \qquad (4)$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \dots) \qquad (۵$$

و

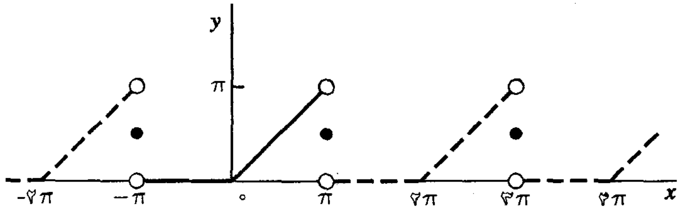
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \qquad (n = ۱, ۲, \dots) \qquad (۶$$

سری (۴) با ضرایب (۵) و (۶) سری فوریهٔ نظیر $f(x)$ در بازهٔ $-\pi < x < \pi$ است. فرض کنید به ازای هر x که $-\pi < x < \pi$ این سری به $f(x)$ همگرا باشد.در این صورت بنابر متناوب بودن جملات آن به تابعی مانند $y=F(x)$ همگراست که روی آن بازه با $y=f(x)$ مساوی است و نمودار آن در این بازه در امتداد محور xها هر ۲π واحد تکرار می‌شود.لذا تابع F توسیع متناوب با دورهٔ تناوب ۲π تابع f است. از طرف دیگر اگر f تابع متناوب مفروضی با دورهٔ تناوب ۲π باشد و روی بازهٔ $-\pi < x \leq \pi$ سری (۴) به $f(x)$ همگرا باشد، آنگاه سری (۴) همه جا نمایش $f(x)$ است.

مثال ۱. می‌خواهیم سری فوریهٔ نظیر تابع $f(x)$ را که در بازهٔ اصلی $-\pi < x < \pi$ به شکل زیر تعریف شده است پیدا کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & -\pi < x \leq ۰ \quad \text{هرگاه} \\ x & ۰ < x < \pi \quad \text{هرگاه} \end{cases} \qquad (۷$$

نمودار $y=f(x)$ در شکل ۱۹ با پاره خطهای برجسته نشان داده شده‌است.



شکل ۱۹

بنابر عبارت (۵)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{\circ}^{\pi} \circ \cos nx\, dx + \int_{\circ}^{\pi} x \cos nx\, dx\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} x \cos nx\, dx$$

$$(n = \circ, 1, 2, \ldots)$$

با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء یا روش کرونکر (بخش۱۴) می‌توان نشان داد که:

$$a_n = \frac{(-1)^{2} - 1}{\pi n^{2}}$$

هر گاه $n = 1, 2, \ldots$. به خاطر اجتناب از تقسیم بر صفر، باید انتگرال را برای $a_{\circ}$ جداگانه حساب کرد:

$$a_{\circ} = \frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2}$$

از روی عبارت (۶) می‌توان گفت که به ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت $n = 1, 2, \ldots$ داریم:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\circ} \circ \sin nx\, dx + \int_{\circ}^{\pi} x \sin nx\, dx\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

بنابراین روی بازه $-\pi < x < \pi$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n} - 1}{\pi n^{2}} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx\right] \qquad (8)$$

نشان خواهیم داد که این سری روی بازهٔ اصلی به $f(x)$ و همین طور به توسیع متناوب $F(x)$ که در شکل ۱۹ نمودار آن نشان داده شده همگراست. همانند مثال۱ بخش۱۴ سری باید در هریک از نقاط ناپیوستگی $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi \ldots$ به میانگین حدود یکطرفهٔ توسیع متناوب آن همگرا باشد. در اینجا همهٔ میانگین‌ها $\frac{\pi}{2}$ می‌باشند.

ممکن است تابع مفروض f در $C_p(-\pi, \pi)$ بر بازهٔ $-\pi < x < \pi$ زوج باشد.

یعنی به ازای همهٔ چنین مقادیر x داشته باشیم $f(-x)=f(x)$. در این صورت:

$$f(-x)\cos(-nx)=f(x)\cos nx \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

$$f(-x)\sin(-nx)=-f(x)\sin nx \qquad (n=1,2,\dots)$$

هر گاه $-\pi<x<\pi$ و می‌بینیم که $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ به ترتیب زوج و فردند. بنابراین عبارات (۵) و (۶) تبدیل می‌شوند به:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

و $b_n=0$ $(n=1,2,\dots)$ (راهنمایی‌های مسائل ۲ و ۳ بخش ۱۱ را ببینید).

بدین ترتیب سری (۴) سری فوریه کسینوسی (بخش ۱۳) $f(x)$ $(0<x<\pi)$ می‌شود.

همین طور اگر f در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ فرد باشد از عبارات (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که $a_n=0$ $(n=0,1,2,\dots)$

و $$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,2,\dots)$$

در این حالت سری (۴) سری فوریه سینوسی $f(x)$ $(0<x<\pi)$ می‌شود.

مثال۲. تابع $f(x)=|\sin x|$ $(-\pi<x<\pi)$ زوج است. بنابراین سری فوریهٔ نظیر $f(x)$ در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ عملاً سری فوریهٔ کسینوسی تابع

$$f(x)=|\sin x|=\sin x \qquad (0<x<\pi)$$

است. این سری را قبلاً در مثال بخش ۱۳ پیدا کرده‌ایم و از بازنویسی تناظر (۶) آن می‌بینیم که:

$$|\sin x|\sim\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(nx)}{4n^2-1} \qquad (-\pi<x<\pi)$$

مثال۳. چون تابع $f(x)=x$ $(-\pi<x<\pi)$ فرد است، سری فوریهٔ f در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ همان سری فوریهٔ سینوسی آن تابع در $0<x<\pi$ است. بنابراین تناظر (۶) در مثال۱ بخش۱۴ همچنین تناظری دربازهٔ بزرگتر $-\pi<x<\pi$ است:

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \qquad (-\pi<x<\pi)$$

همین طور، تناظر(۸) در مثال۲ بخش۱۴ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x^3 \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n\pi)^2-6}{n^3}\sin nx \qquad (-\pi<x<\pi)$$

وقتی تناظر (۴) با عبارات (۵) و (۶) برای اعداد ثابت a_n و b_n ترکیب شود به شکل زیر در می‌آید:

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos nx\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\cos ns\,ds+\sin nx\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\sin ns\,ds\right]$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

می‌توان این تناظر را به شکل زیر نوشت:

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\cos n(s-x)\,ds \tag{۹}$$

توجه کنید که جملهٔ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds$$

که همان جملهٔ $a_0/2$ در سری (۴) است، در اینجا مقدار متوسط $f(x)$ بر بازهٔ $-\pi<x<\pi$ می‌باشد.

شکل (۹) تناظر (۴) نقطهٔ شروع اثبات قضیه‌مان در بخش ۱۹ خواهد بود که

متضمن همگرایی سری فوریه در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ به $f(x)$ است.

۱۶ . بهترین تقریب در میانگین

فرض کنید $s_N(x)$ $(N=1,2,\ldots)$ نمایش مجموعه‌های جزئی سری فوریه تابع f در $C_p(-\pi,\pi)$ باشد:

$$S_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (-\pi<x<\pi) \tag{1}$$

در اینجا مسألهٔ تقریب تابع f به وسیلهٔ این مجموعهای جزئی را در نظر می‌گیریم. در حالی که نتیجهٔ اصلی این بخش جالب است، خاصیتی از ضرایب a_n و b_n را که در همگرایی سری فوریه در چند بخش بعدی بدان نیاز داریم به ما می‌دهد. یعنی:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0 \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} b_n=0 \tag{2}$$

مثل بیشتر مواقع اگر ابتدا مجموعهٔ متعامدیکه‌ای مانند $\{\phi_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ روی بازهٔ اصلی $a<x<b$ را بررسی کنیم، بحث ما ساده می‌شود. N تابع اول $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$,..., $\phi_N(x)$ آن مجموعه را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم $\Phi_N(x)$ نمایش ترکیب خطی از آنها باشد:

$$\Phi_N(x)=\gamma_1\phi_1(x)+\gamma_2\phi_2(x)+\ldots+\gamma_N\phi_N(x) \tag{3}$$

نرم

$$\| f-\Phi_N \| = \left\{ \int_a^b [f(x)-\Phi_N(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

اندازه‌ای برای انحراف مجموع Φ_N از تابع f در $C_p(a,b)$ است(بخش ۱۱ را ببینید). می‌خواهیم ثابتهای γ_n در عبارت(۳) را طوری تعیین کنیم که $\|f-\Phi_N\|$ یا کمیت

$$E=\| f-\Phi_N \|^2=\int_a^b [f(x)-\Phi_N(x)]^2 dx \tag{5}$$

تا سر حد امکان کوچک شود. عدد نامنفی E نمایش خطای مربع میانگین مجذورات در تقریب

f به وسیلهٔ Φ_N است و ما در صدد یافتن بهترین تقریب در میانگین هستیم.[۱]
با ملاحظهٔ این مطلب شروع می‌کنیم که:

$$(f-\Phi_N)^2=(f-\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\phi_n)^2=f^2-2f\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\phi_n+(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\phi_n)^2$$

اما:

$$(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\phi_n)^2=(\sum_{m=1}^{N}\gamma_m\phi_m)(\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\phi_n)=\sum_{n=1}^{N}(\sum_{m=1}^{N}\gamma_m\phi_m)\gamma_n\phi_n$$
$$=\sum_{n=1}^{N}(\sum_{m=1}^{N}\gamma_m\gamma_n\phi_m\phi_n)$$

و بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$(f-\Phi_N)^2=f^2+\sum_{n=1}^{N}\left[(\sum_{m=1}^{N}\gamma_m\gamma_n\phi_m\phi_n)-2\gamma_n f\phi_n\right]$$

با انتگرالگیری از طرفین تساوی بر بازهٔ $a<x<b$ و استفاده از روابط $(\phi_m,\phi_n)=\delta_{mn}$ و $(f,\phi_n)=c_n$ که در آن δ_{mn} دلتای کرونکر (بخش۱۱) و c_n ثابتهای فوریه هستند (بخش۱۲) به عبارت زیر برای خطای E که در بالا تعریف شد می‌رسیم:

$$E=\|f\|^2+\sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2-2\gamma_n c_n)$$

یعنی

$$E=\|f\|^2+\sum_{n=1}^{N}(\gamma_n-c_n)^2-\sum_{n=1}^{N}c_n^2 \qquad (۶$$

به استناد مجذورهایی که در اولین جمع رابطهٔ (۶) وجود دارد، کمترین مقدار وقتی به دست می‌آید که $\gamma_n=c_n$ $(n=1,2,\ldots,N)$ و آن مقدار عدد زیر است:

$$E=\|f\|^2-\sum_{n=1}^{N}c_n^2 \qquad (۷$$

---

۱. تقریبی که در اینجا پیدا می‌کنیم تقریب کمترین مربعات نیز نامیده می‌شود.

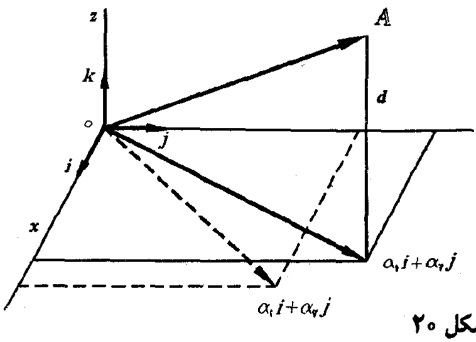
این نتیجه را به عنوان یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید c_n $(n=1,2,...)$ ثابتهای فوریه برای تابع f در $C_p(a,b)$ نسبت به مجموعهٔ متعامدیکهٔ $\{\phi_n(x)\}$ $(n=1,2,...)$ در آن فضا باشد. در این صورت از بین همهٔ ترکیبهای خطی توابع $\phi_1(x)$ ، $\phi_2(x)$ ، ... ، $\phi_N(x)$ ترکیب

$$c_1\phi_1(x)+ ... +c_N\phi_N(x)$$

بهترین تقریب در میانگین برای $f(x)$ دربازهٔ اصلی $a<x<b$ است. در آن حالت خطای مربع میانگین با رابطهٔ (۷) تعریف می‌شود.

این قضیه مشابه و حتی الهام گرفته از نتیجهٔ نظیر در فضای سه بعدی است. یعنی فرض کنید بخواهیم بردار $A=a_1 i + a_2 j + a_3 k$ را با ترکیب خطی از دو بردار مبنا مثلاً i و j تقریب بزنیم. اگر A و هر ترکیب خطی $\alpha_1 i + \alpha_2 j$ را بردارهای شعاعی تعبیر کنیم، از نظر هندسی بدیهی است که کوتاهترین فاصله d بین انتهای آنها زمانی اتفاق می‌افتد که $\alpha_1 i + \alpha_2 j$ بردار تصویر A روی صفحهٔ i و j باشد. البته آن تصویر عبارت است از بردار $a_1 i + a_2 j$ (شکل ۲۰ را ببینید) مؤلفه‌های a_1 و a_2 به ترتیب حاصلضربهای داخلی A با i و j هستند.



شکل ۲۰

فرع. ۱ اگر c_n $(n=1,2,...)$ ثابتهای فوریه برای تابع f در $C_p(a,b)$ نسبت به مجموعهٔ متعامدیکهٔ $\{\phi_n(x)\}$ $(n=1,2,...)$ در آن فضا باشد، آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty} c_n=0 \tag{8}$$

اثبات این فرع بر مبنای نامساوی بسل است

$$\sum_{n=1}^{N} c_n^2 \le \| f\|^2 \qquad (N=1,2, \ldots) \qquad (9$$

که یک نتیجهٔ بدیهی عبارت(۷) برای خطای مربع میانگین E و نامنفی بودن E است. ملاحظه می‌کنید که سمت راست نامساوی بسل مستقل از عدد صحیح مثبت N است و وقتی N در سمت چپ آن افزایش می‌یابد، مجموعهای آن سمت، تشکیل دنباله‌ای می‌دهند که محدود و غیر نزولی است. چون چنین دنباله‌ای باید همگرا باشد و چون این دنبالهٔ خاص دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری است که جملات آن c_n^2 $(n=1,2,\ldots)$ هستندوآن سری باید همگرا باشد. حال حد (۸) از این امر که جملهٔ nام یک سری همگرا همیشه وقتی n به بینهایت میل کند به صفر میل می‌کند به دست می‌آید.

از بخش ۱۵ به یاد می‌آوریم که وقتی از مجموعهٔ متعامد توابع

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad , \quad \phi_{2N-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx \quad , \quad \phi_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$$
$$(n=1,2, \ldots)$$

در $C_p(-\pi, \pi)$ استفاده می‌کنیم، سری فوریهٔ تعمیم یافته

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)=c_0\phi_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[c_{2n-1}\phi_{2n-1}(x)+c_{2n}\phi_{2n}(x)] \quad (-\pi<x<\pi) \qquad (10)$$

نظیر f در $C_p(-\pi, \pi)$ سری فوریهٔ معمولی

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (-\pi<x<\pi) \qquad (11)$$

است که در آن:

$$a_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,c_0 \quad , \quad a_n=\frac{c_{2n-1}}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad b_n=\frac{c_{2n}}{\sqrt{\pi}} \quad (n=1,2, \ldots) \qquad (12)$$

حال بنابر قضیهٔ فوق می‌توان گفت که از بین همهٔ ترکیبهای خطی توابع

$$\phi_0(x) \quad , \quad \phi_1(x) \quad , \quad \ldots\ldots \quad , \quad \phi_{2N}(x)$$

مجموع جزئی

$$\sum_{n=0}^{2N} c_n \phi_n(x) = c_0 \phi_0(x) + \sum_{n=1}^{N} [c_{2n-1}\phi_{2n-1}(x) + c_{2n}\phi_{2n}(x)]$$

از سری (۱۰) بهترین تقریب در میانگین برای f در بازهٔ $-\pi < x < \pi$ است. یعنی مجموع جزئی (۱) بهترین تقریب در بین همهٔ ترکیبهای خطی توابع زیر است:

$$\frac{1}{2} \ , \ \cos nx \ , \ \sin nx \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

از فرع و روابط (۱۲) حد (۲) نتیجه می‌شود. در واقع آن حدود برقرارند هر گاه a_n و b_n به ترتیب ضرایب سریهای فوریهٔ کسینوسی و سینوسی f در $C_p(0, \pi)$ باشند. برای اثبات اینکه وقتی n به بینهایت میل کند ضرایب a_n در سری کسینوسی به صفر میل کند، فقط لازم است توجه کنید که سری کسینوسی همان سری فوریه در بازهٔ $-\pi < x < \pi$ برای توسیع زوج f به روی بازهٔ $-\pi < x < 0$ است (بخش ۱۵ را ببینید). همین طور سری سینوسی را می‌توان سری فوریهٔ توسیع فرد f در بازهٔ $-\pi < x < 0$ گرفت. بنابراین وقتی n به بینهایت میل کند ضرایب b_n در سری سینوسی به صفر میل می‌کند.

مسائل

سری فوریهٔ نظیر هر یک از توابع موجود در مسائل ۱ تا ۶ را روی بازهٔ $-\pi < x < \pi$ پیدا کنید.

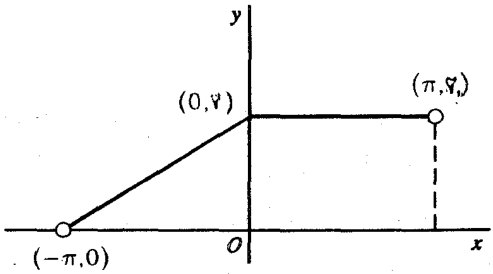
۱.
$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & -\pi < x < 0 \quad \text{هر گاه} \\ \dfrac{\pi}{2} & 0 < x < \pi \quad \text{هر گاه} \end{cases}$$

جواب:[1] $$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

۱. پاورقی مسألهٔ ۱ (ب) بخش ۱۴ را ببینید.

۲. $f(x)$ تابعی است که نمودار $y=f(x)$ از دو پاره خط نشان داده شده در شکل ۲۱ تشکیل شده است.

جواب:
$$\frac{3}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin nx\right]$$



شکل ۲۱

۳. $f(x)=x+\frac{1}{4}x^2 \qquad (-\pi<x<\pi)$

راهنمایی: از سری نظیر x در مثال ۳ بخش ۱۵ و سری نظیر x^2 در مسألهٔ ۴ (الف) بخش ۱۴ استفاده کنید.

جواب:
$$\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{2\sin nx}{n}\right)$$

۴. $f(x)=e^{ax} \qquad -\pi<x<\pi$ که در آن $a\neq 0$

راهنمایی: با استفاده از فرمول اویلر $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ که در آن $i=\sqrt{-1}$ بنویسید:

$$a_n+ib_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{inx}\,dx \qquad (n=1,2,\ldots)$$

سپس بعد از محاسبهٔ این انتگرال، قسمتهای حقیقی و موهومی را مساوی قرار دهید.[1]

جواب: $$\frac{2\sinh a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right]$$

۵. $$f(x)=\sinh ax \qquad (-\pi<x<\pi)$$

راهنمایی: از سری که در مسألهٔ ۴ پیدا شد استفاده کنید.

جواب: $$\frac{2\sinh a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx$$

۶. $f(x)=\cos ax$ $(-\pi<x<\pi)$ که در آن $a\neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

راهنمایی: به کمک فرمول اویلر که در مسألهٔ ۴ بیان شد بنویسید:

$$\cos ax=\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}$$

سپس از سری که در مسألهٔ قبل به دست آمد استفاده کنید.

جواب: $$\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}\cos nx\right]$$

۷. برای تابع f که با ضابطه‌های زیر تعریف شده‌است، سری فوریه را در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ به دست آورید

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{هرگاه } -\pi\le x\le 0\\ \sin x & \text{هرگاه } 0<x\le\pi\end{cases}$$

سپس با فرض اینکه اگر $-\pi\le x\le\pi$ سری به $f(x)$ همگراست، تابعی را که به وسیلهٔ سری به ازای هر x $(-\infty<x<\infty)$ نمایش داده می‌شود به طریق نمودار تشریح کنید.

---

۱. برای بررسی درستی فرمول اویلر و زمینهٔ روشهای متغیر مختلط کتاب مؤلفان (۱۹۹۰) را که در کتابنامه آمده است ببینید.

راهنمایی: برای یافتن سری، تابع را به شکل

$$f(x)=\frac{\sin x+|\sin x|}{۲}\qquad(-\pi\le x\le\pi)$$

بنویسید، سپس از نتایج مسألهٔ ۶ بخش ۱۴ و مثال ۲ بخش ۱۵ استفاده کنید.

جواب: $$\frac{۱}{\pi}+\frac{۱}{۲}\sin x-\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos ۲nx}{۴n^{۲}-۱}$$

۸. فرض کنید a_n و b_n به ترتیب نمایش ضرایب در سریهای فوریهٔ کسینوسی و سینوسی نظیر $f(x)$ در $C_p(۰,\pi)$ باشد.

الف) با استناد به مثال بخش ۱۲، از نامساوی بسل (۹) بخش ۱۶ نامساوی زیر را به دست آورید

$$\frac{a_۰^{۲}}{۲}+\sum_{n=۱}^{N}a_n^{۲}\le\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}[f(x)]^{۲}dx\qquad(N=۱,۲,\ldots)$$

ب) با استناد به بخش ۱۴ نشان دهید چگونه از نامساوی بسل (۹) بخش ۱۶ نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{n=۱}^{N}b_n^{۲}\le\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}[f(x)]^{۲}dx\qquad(N=۱,۲,\ldots)$$

۹. نشان دهید اگر a_n و b_n ضرایب سری فوریه نظیر تابع $f(x)$ در $C_p(-\pi,\pi)$ (بخش ۱۵) باشد، نامساوی

$$\frac{a_۰^{۲}}{۲}+\sum_{n=۱}^{N}(a_n^{۲}+b_n^{۲})\le\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^{۲}dx\qquad(N=۱,۲,\ldots)$$

از نامساوی بسل (۹) بخش ۱۶ برای ثابتهای فوریه نتیجه می‌شود.

۱۷ . مشتقات یکطرفه

برای پیدا کردن شرایط کافی برای f به طوری که هر گاه $-\pi<x<\pi$ سری فوریهٔ آن به $f(x)$ همگرا باشد، نیاز داریم که مفهوم مشتق f در نقطهٔ $x=x_\circ$ را تعمیم دهیم،

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} \tag{۱}$$

فرض کنید حد راست $f(x_\circ+)$ در $x_\circ$ موجود باشد(بخش ۱۰ را ببینید) مشتق راست یا مشتق از راست، f در $x_\circ$ چنین تعریف می‌شود:

$$f_R'(x_\circ)=\lim_{\substack{x\to x_\circ\\ x>x_\circ}}\frac{f(x)-f(x_\circ+)}{x-x_\circ} \tag{۲}$$

به شرطی که این حد موجود باشد. توجه کنید که اگر $f_R'(x_\circ)$ موجود باشد گرچه لزومی به وجود $f(x_\circ)$ نیست اما باید $f(x_\circ+)$ موجود باشد. وقتی مشتق معمولی یا دو طرفه $f'(x_\circ)$ موجود باشد، f در $x_\circ$ پیوسته و بدیهی است که $f_R'(x_\circ)=f'(x_\circ)$

همین طور اگر $f(x_\circ-)$ موجود باشد، مشتق چپ f در $x_\circ$ با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$f_L'(x_\circ)=\lim_{\substack{x\to x_\circ\\ x<x_\circ}}\frac{f(x)-f(x_\circ-)}{x-x_\circ} \tag{۳}$$

در صورتی که این حد موجود باشد و اگر $f'(x_\circ)$ موجود باشد، $f_L'(x_\circ)=f'(x_\circ)$

مثال۱. فرض کنید f نمایش تابع پیوسته‌ای باشد که با ضابطه‌های زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & \text{هر گاه } x\le ۰\\ \sin x & \text{هر گاه } x>۰\end{cases}$$

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال می‌بینیم که:

$$f_R'(۰)=\lim_{\substack{x\to ۰\\ x>۰}}\frac{\sin x}{x}=۱$$

بعلاوه $f_L'(\circ)=\circ$ چون مشتقات یکطرفه مقادیر مختلفی دارند، مشتق معمولی $f'(\circ)$ نمی‌تواند موجود باشد.

مشتق معمولی $f'(x_\circ)$ حتی زمانی که $f(x_\circ)$ تعریف شده باشد و $f_R'(x_\circ)$ و $f_L'(x_\circ)$ دارای مقدار مشترکی باشند، ممکن است موجود نباشد.

مثال۲. اگر f تابع پله‌ای

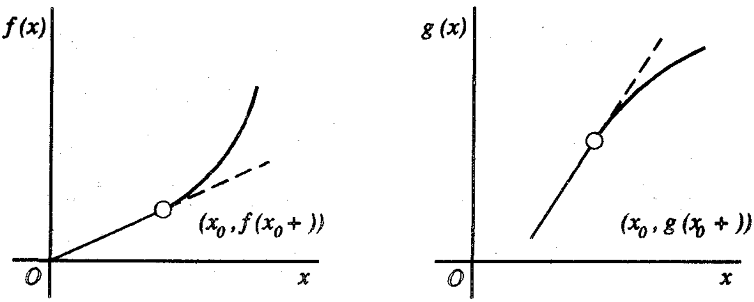
$$f(x)=\begin{cases} \circ & x<\circ \quad \text{هر گاه} \\ 1 & x\geq\circ \quad \text{هر گاه} \end{cases}$$

باشد، آنگاه $f_R'(\circ)=f_L'(\circ)=\circ$. اما $f'(\circ)$ موجود نیست، زیرا f در $x=\circ$ پیوسته نیست.

مثل حالت مشتقات معمولی، تنها پیوستگی f در $x_\circ$ مستلزم وجود هیچ یک از مشتقات یکطرفه در $x_\circ$ نیست.

مثال۳. تابع $f(x)=\sqrt{x}\ (x\geq\circ)$ در نقطهٔ $x=\circ$ گرچه پیوسته است، در آن مشتق راست ندارد.

تعدادی از خواص مشتقات معمولی برای مشتقات یکطرفه برقرار می‌مانند. مثلاً اگر هر یک از توابع f و g در نقطهٔ $x_\circ$ دارای مشتقات راست باشند، آنگاه حاصلضربشان نیز دارای این خاصیت است. اثبات مستقیم را در قسمت مسائل قرار داده‌ایم. اما می‌توان به روش زیر برای آن اثباتی از روی خواص مشتقات معمولی بنا کرد. از $f(x_\circ+)$ و $g(x_\circ+)$ به عنوان مقادیر f و g در $x_\circ$ استفاده می‌کنیم و وقتی $x<x_\circ$، آن توابع را به ترتیب توابع خطی می‌گیریم که با خطوط مماس در نقاط $(x_\circ, f(x_\circ+))$, $(x_\circ, g(x_\circ+))$ و شیبهای $f_R'(x_\circ)$ و $g_R'(x_\circ)$ نمایش داده شده‌اند. (شکل ۲۲) این تغییر یافته‌های f و g در $x_\circ$ دارای مشتقند و مشتق آنها مشتق راست نیز می‌باشد. بنابراین مشتق حاصلضرب آنها در آنجا موجود و مقدار آن مشتق راست $f(x)g(x)$ در $x_\circ$ نیز هست.



شکل ۲۲

همین طور اگر $f_L'(x_\circ)$ و $g_L'(x_\circ)$ موجود باشند، مشتق سمت چپ حاصلضرب $f(x)g(x)$ در $x_\circ$ موجود است.

بالاخره به خاصیتی از مشتقات یکطرفه می‌رسیم که بخصوص در نظریهٔ همگرایی سری فوریه مهم است. این مطلب به زیر فضای $C_p'(a,b)$ از $C_p(a,b)$ مربوط می‌شود که مرکب است از همهٔ توابع قطعه‌ای پیوسته f روی بازهٔ $a<x<b$ که مشتق آنها f' نیز در آن بازه قطعه‌ای پیوسته است. چنین تابعی را قطعه‌ای هموار نامند، زیرا بر زیر بازه‌هایی که f و f' هر دو پیوسته باشند، هر مماس بر نمودار $y=f(x)$ در صورت چرخیدن، به طور پیوسته می‌چرخد.

قضیه.۱اگر تابع f روی بازهٔ $a<x<b$ قطعه‌ای هموار باشد، آنگاه در هر نقطهٔ $x_\circ$ در بازهٔ بستهٔ $a\le x\le b$ مشتقات یکطرفهٔ f، در نقاط انتهایی از داخل، موجودند و با حدود یکطرفهٔ نظیر f' برابرند:

$$f_R'(x_\circ)=f'(x_\circ+) \qquad , \qquad f_L'(x_\circ)=f'(x_\circ-) \tag{۴}$$

برای اثبات این مطلب، در حال حاضر فرض می‌کنیم که f و f' در بازهٔ $a<x<b$ پیوسته و در نقاط انتهایی $x=a$ و $x=b$ حدود یکطرفهٔ f و f' از داخل موجود باشند. اگر $x_\circ$ نقطه‌ای در بازهٔ باز باشد $f'(x_\circ)$ موجود است. بنابراین $f_R'(x_\circ)$ و $f_L'(x_\circ)$ موجود و هر دو مساوی $f'(x_\circ)$ هستند. چون f' در $x_\circ$ پیوسته است، پس معادلات(۴) برقرارند. استدلال زیر نشان می‌دهد که وجود $f_R'(a)$ و مساوی

بودن آن با $f'(a+)$ نیز درست است. اگر فرض کنیم x^* نمایش عددی در بازهٔ $a<x<b$ و $f(a)$ را $f(a+)$ تعریف کنیم، آنگاه f در بازهٔ بستهٔ $a\leq x\leq x^*$ پیوسته است. چون f' در بازهٔ باز $x<a<x^*$ موجود است، می‌توان از قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات استفاده کرد. به عبارت دقیقتر، عددی مانند c هست که $a<c<x^*$ به طوری که:

$$\frac{f(x^*)-f(a+)}{x^*-a}=f'(c) \qquad (۵$$

با میل دادن x^* و بنابراین c به a در رابطهٔ(۵) می‌بینیم که چون $f'(a+)$ موجود است، حد $f'(c)$ موجود و دارای آن حد است. در نتیجه، حد خارج قسمت تفاضلها در سمت چپ رابطهٔ(۵) موجود و مقدار آن مساوی $f_R'(a)$ است. بنابراین $f_R'(a)=f'(a+)$ همین طور $f_L'(b)=f'(b-)$

حال هر تابع قطعه‌ای هموار f با مشتق f' خود روی تعدادی متناهی زیر بازه پیوسته است و در نقاط انتهایی این زیربازه‌ها حدود یکطرفهٔ f و f' از داخل موجودند. اگر نتایج پاراگراف قبلی را برای هر یک از این زیر بازه‌ها به کار بریم، قضیه ثابت می‌شود.

مثال ذیل فرق بین مشتقات یکطرفه و حدود یکطرفهٔ مشتقات را نشان می‌دهد.

مثال۴. تابع f را که مقادیر آن عبارتند از:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲\sin\frac{۱}{x} & x\neq ۰ \quad \text{هر گاه} \\ ۰ & x=۰ \quad \text{هر گاه} \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم؛ چون $۰\leq |x^۲\sin(۱/x)| \leq x^۲$ هر گاه $x\neq ۰$ ، هر دو حد یکطرفهٔ $f(۰+)$ و $f(۰-)$ موجود و دارای مقدار صفرند. بعلاوه چون اگر $x\neq ۰$، $۰\leq |x\sin(۱/x)| \leq |x|$

$$f_R'(۰)=\lim_{\substack{x\to ۰\\ x>۰}} x\sin\frac{۱}{x}=۰ \quad , \quad f_L'(۰)=\lim_{\substack{x\to ۰\\ x<۰}} x\sin\frac{۱}{x}=۰$$

اما از عبارت

$$f'(x) = ۲x \sin \frac{۱}{x} - \cos \frac{۱}{x} \qquad (x \neq o)$$

می‌بینیم که حدود یکطرفهٔ $f'(۰+)$ و $f'(۰-)$ موجود نیستند.

توجه کنید که گر چه مشتقات یکطرفهٔ آن همه جا موجودند، تابع f در هیچ بازهٔ محدودی که شامل مبدأ باشد قطعه‌ای هموار نیست. بنابراین قضیهٔ فوق را نمی‌توان برای این تابع روی چنین بازه‌ای به کار برد.

۱۸ . دو لم

بحث همگرایی سریهای فوریه را، با دولم یا قضیهٔ مقدماتی شروع می‌کنیم. اولی حالت خاصی از لم ریمان‌ـلوبگ است. آن لم در فصل۶ (بخش۵۳) که به صورت کلی آن نیاز است مطرح خواهد شد.

لم ۱. اگر تابع $G(u)$ بر بازهٔ $۰<u<\pi$ قطعه‌ای پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{N\to\infty} \int_۰^\pi G(u) \sin \frac{(۲N+۱)u}{۲} du = ۰ \qquad (۱)$$

که در آن N نمایش اعداد صحیح مثبت است.

برای اثبات آن، اتحاد مثلثاتی

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

را یادآوری کرده و می‌نویسیم:

$$\int_۰^\pi G(u) \sin \frac{(۲N+۱)u}{۲} du = \int_۰^\pi G(u) \sin (\frac{u}{۲} + Nu) du$$

$$= \int_۰^\pi G(u) \sin \frac{u}{۲} \cos Nu\, du + \int_۰^\pi G(u) \cos \frac{u}{۲} \sin Nu\, du$$

حال، به جز ضریب $۲/\pi$، اولین انتگرال سمت راست عبارت است از ضریب a_N در سری فوریه کسینوسی تابع قطعه‌ای پیوسته $G(u)\ \sin(u/۲)$ در بازهٔ $۰<u<\pi$ انتگرال

دوم، به جز ضریب $۲/\pi$ عبارت است از ضریب b_N در سری فوریهٔ سینوسی تابع $G(u)\cos(u/۲)$ در همان بازه. چون بنابر پاراگراف آخر بخش ۱۶ وقتی N به بینهایت میل کند اعداد a_N و b_N به صفر میل می‌کنند، پس لم ثابت شد.

لم دوم ما شامل هستهٔ دیریکله است

$$D_N(u) = \frac{۱}{۲} + \sum_{n=۱}^{N} \cos nu \tag{۲}$$

که در آن N عدد صحیح مثبت دلخواهی است. توجه کنید که $D_N(u)$ پیوسته، زوج و متناوب با دورهٔ تناوب ۲π است. هستهٔ دیریکله در نظریهٔ ما نقش مهمی دارد و دو خاصیت دیگر آن نیز مفید خواهد بود.

$$\int_{۰}^{\pi} D_N(u)\,du = \frac{\pi}{۲} \tag{۳}$$

$$D_N(u) = \frac{\sin\left[(۲N+۱)\frac{u}{۲}\right]}{۲\sin\left(\frac{u}{۲}\right)} \qquad (u \neq ۰\,,\ \pm ۲\pi\,,\ \pm ۴\pi\,,\ \dots) \tag{۴}$$

خاصیت (۳) با انتگرالگیری از طرفین رابطهٔ (۲) به دست می‌آید. عبارت (۴) را می‌توان به کمک یک اتحاد مثلثاتی به دست آورد (مسألهٔ ۱۴ بخش ۲۰)

لم ۲. فرض کنید تابع $g(u)$ در بازهٔ $۰ < u < \pi$ قطعه‌ای پیوسته و مشتق راست $g'_R(۰)$ موجود باشد. در این صورت:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{۰}^{\pi} g(u) D_N(u)\,du = \frac{\pi}{۲} g(۰+) \tag{۵}$$

که در آن $D_N(u)$ با ضابطهٔ (۲) تعریف می‌شود.

برای شروع اثبات می‌نویسیم:

$$\int_{۰}^{\pi} g(u) D_N(u)\,du = I_N + J_N \tag{۶}$$

که در آن:

$$I_N = \int_{۰}^{\pi} [g(u) - g(۰+)] D_N(u)\,du \quad , \quad J_N = \int_{۰}^{\pi} g(۰+) D_N(u)\,du$$

بنابر عبارت (۴) اولین انتگرال را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$I_N = \int_{\circ}^{\pi} \frac{g(u) - g(\circ +)}{۲sin\left(\frac{u}{۲}\right)} sin\frac{(۲N+۱)u}{۲} du \qquad (۷$$

ملاحظه می‌کنید که تابع

$$G(u) \quad \frac{g(u) - g(\circ +)}{۲sin\left(\frac{u}{۲}\right)}$$

خارج قسمت دو تابع قطعه‌ای پیوسته بر بازهٔ $\circ < u < \pi$ است. گر چه مخرج در نقطهٔ $u = \circ$ صفر می‌شود، وجود $g_R'(\circ)$ مستلزم وجود $G(\circ +)$ است:

$$\lim_{\substack{u \to \circ \\ u > \circ}} G(u) = \lim_{\substack{u \to \circ \\ u > \circ}} \frac{g(u) - g(\circ +)}{u - \circ} \lim_{\substack{u \to \circ \\ u > \circ}} \frac{\left(\frac{u}{۲}\right)}{sin\left(\frac{u}{۲}\right)} = g_R'(\circ)$$

بنابراین $G(u)$ خودش در بازهٔ $\circ < u < \pi$ قطعه‌ای پیوسته است. با استفاده از لم ۱ در مورد انتگرال (۷) نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{N \to \infty} I_N = \circ \qquad (۸$$

با خاصیت(۳) هستهٔ دیریکله، می‌دانیم که $J_N = (\pi/2)\ g(\circ +)$ یا

$$\lim_{N \to \infty} J_N = \frac{\pi}{۲} g(\circ +) \qquad (۹$$

حال نتیجهٔ مطلوب (۵) از رابطهٔ (۶) و حدود (۸) و (۹) حاصل می‌شود.

۱۹ . یک قضیهٔ فوریه

قضیه‌ای را که شرایطی در مورد همگرایی سری فوریه به تابع نظیرش در بر دارد، یک قضیهٔ فوریه می‌نامند. حال چنین قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم. گرچه آن را برای توابع متناوب با دورهٔ تناوب ۲π بیان کرده‌ایم، می‌توان آن را برای توابعی هم که فقط در بازهٔ اصلی $-\pi < x < \pi$ تعریف شده‌اند به کار برد، زیرا کافی است توسیعهای متناوب با دورهٔ

تناوب 2π آنها را در نظر بگیریم.

قضیه. فرض کنید f تابعی قطعه‌ای پیوسته بر بازهٔ $-\pi<x<\pi$ و متناوب و با دورهٔ تناوب 2π باشد. در هر نقطهٔ $x(-\infty<x<\infty)$ که در آن هر دو مشتق یکطرفهٔ $f_R'(x)$ و $f_L'(x)$ موجود باشند سری فوریهٔ آن

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

که در آن

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,2,\dots) \tag{3}$$

به میانگین

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} \tag{4}$$

همگراست.

توجه کنید که اگر f در x عملاً پیوسته باشد، خارج قسمت (۴) همان $f(x)$ می‌شود. بنابراین در چنین نقطه‌ای به شرط وجود $f_R'(x)$ و $f_L'(x)$ داریم:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

چون f قطعه‌ای پیوسته است، انتگرالهای عبارات (۲) و (۳) برای ضرایب a_n و b_n همیشه موجودند و اثبات قضیه را با نوشتن سری (۱) به صورت ذیل آغاز می‌کنیم (بخش ۱۵ را ببینید):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\cos(n(s-x))\,ds$$

که ضرایب در آن قرار داده شده‌اند. بنابراین اگر $s_N(x)$ نمایش مجموع جزئی مرکب از $N+1$ جملهٔ اول $(N\geq 1)$ سری باشد،

$$S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\cos n(s-x)\,ds \tag{5}$$

با استفاده از هستهٔ دیریکله(بخش۱۸)

$$D_N(u)=\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{N}\cos nu$$

رابطهٔ (۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$S_N(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)D_N(s-x)\,ds$$

به خاطر متناوب بودن انتگران، بازهٔ انتگرالگیری را با هر بازهٔ به طول ۲π می‌توان عوض کرد بدون اینکه مقدار انتگرال تغییر کند (مسألهٔ۱۳ بخش ۲۰ را ببینید). بنابراین:

$$S_N(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(s)D_N(s-x)\,ds \tag{۶}$$

که در آن نقطهٔ x مرکز بازه‌ای است که انتخاب کرده‌ایم. حال از رابطهٔ (۶) نتیجه می‌شود که:

$$S_N(x)=\frac{۱}{\pi}\left[I_N(x)+J_N(x)\right] \tag{۷}$$

که در آن

$$I_N(x)=\int_{x}^{x+\pi}f(s)D_N(s-x)\,ds \tag{۸}$$

$$J_N(x)=\int_{x-\pi}^{x}f(s)D_N(s-x)\,ds \tag{۹}$$

اگر در انتگرال(۸) به جای متغیر انتگرالگیری s متغیر جدید $u=s-x$ را قرار دهیم، آن انتگرال تبدیل می‌شود به:

$$I_N(x)=\int_{۰}^{\pi}f(x+u)D_N(u)\,du \tag{۱۰}$$

چون f روی بازهٔ اصلی $-\pi < x < \pi$ قطعه‌ای پیوسته و متناوب است، بر هر بازهٔ محدود از محور xها قطعه‌ای پیوسته است. لذا، برای مقدار ثابت x تابع $g(u)=f(x+u)$ در عبارت(۱۰) روی هر بازهٔ محور uها بخصوص بر بازهٔ $\circ<u<\pi$ قطعه‌ای پیوسته است. فرض کنید مشتق راست $f_R'(x)$ موجود باشد. پس از ملاحظه

$$g(\circ+)=\lim_{\substack{u\to\circ\\ u>\circ}} g(u)=\lim_{\substack{u\to\circ\\ u>\circ}} f(x+u)=\lim_{\substack{v\to x\\ v>x}} f(v)=f(x+)$$

می‌توان نشان داد که مشتق راست g در $u=\circ$ موجود است:

$$g_R'(\circ)=\lim_{\substack{u\to\circ\\ u>\circ}}\frac{g(u)-g(\circ+)}{u-\circ}=\lim_{\substack{u\to\circ\\ u>\circ}}\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}$$

$$=\lim_{\substack{v\to x\\ v>x}}\frac{f(v)-f(x+)}{v-x}=f_R'(x)$$

پس بنابر لم ۲ بخش ۱۸:

$$\lim_{N\to\infty} I_N(x)=\frac{\pi}{۲}g(\circ+)=\frac{\pi}{۲}f(x+) \qquad (۱۱$$

از طرف دیگر چنانچه در انتگرال (۹) جایگزینی $u=x-s$ را انجام داده، و از بحث بخش۱۸ به خاطر آوریم که $D_N(u)$ تابعی زوج از u است در خواهیم یافت که:

$$J_N(x)=\int_\circ^\pi f(x-u)D_N(u)\,du \qquad (۱۲$$

این بار فرض می‌کنیم که مشتق $f_L'(x)$ موجود باشد و توجه می‌کنیم که $g(u)=f(x-u)$ در عبارت (۱۲) در بازهٔ $\circ<u<\pi$ قطعه‌ای پیوسته است. بعلاوه:

$$g(\circ+)=\lim_{\substack{u\to\circ\\ u>\circ}} g(u)=\lim_{\substack{u\to\circ\\ u>\circ}} f(x-u)=\lim_{\substack{v\to x\\ v<x}} f(v)=f(x-)$$

و

$$g_R'(\circ)=\lim_{\substack{u\to\circ\\ u>\circ}}\frac{g(u)-g(\circ+)}{u-\circ}=\lim_{\substack{u\to\circ\\ u>\circ}}\frac{f(x-u)-f(x-)}{u}$$

$$=-\lim_{\substack{v\to x\\ v<x}}\frac{f(v)-f(x-)}{v-x}=f_L'(x)$$

پس مجدداً بنابر لم بخش۱۸:

$$\lim_{N\to\infty} J_N(x) = \frac{\pi}{۲} g(۰+) = \frac{\pi}{۲} f(x-) \tag{۱۳}$$

بالاخره از رابطهٔ (۷) و حدود (۱۱) و (۱۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{۲}$$

و بدین ترتیب اثبات قضیه تمام می‌شود.

این قضیه برای توابعی مانند f که در بازهٔ اصلی $-\pi<x<\pi$ قطعه‌ای هموارند مناسب است، توابعی که f و f' هر دو در $-\pi<x<\pi$ قطعه‌ای پیوسته‌اند. زیرا اگر f در $-\pi<x<\pi$ قطعه‌ای هموار باشد، بنابر قضیه بخش۱۷ می‌دانیم که مشتقات یکطرفهٔ آن، در نقاط انتهایی $x=\pm\pi$ از درون، در همهٔ نقاط بازهٔ بستهٔ $-\pi\le x\le\pi$ موجودند. بنابراین اگر F نمایش توسیع متناوب f با دورهٔ تناوب ۲π باشد، مشتقات یکطرفهٔ F در هر نقطهٔ x $(-\infty<x<\infty)$ موجود است. پس بنابر قضیه‌ای که اکنون ثابت شد، سری فوریهٔ f روی $-\pi<x<\pi$ همه جا به میانگین حدود یکطرفهٔ F همگراست. این نتیجهٔ مفید را به شکل زیر بیان می‌کنیم:

فرع. فرض کنید f تابعی قطعه‌ای هموار در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ باشد و F توسیع متناوب آن، با دورهٔ تناوب ۲π باشد. در این صورت به ازای هر x $(-\infty<x<\infty)$ سری فوریهٔ (۱) با ضرایب (۲) و (۳) به میانگین حدود یکطرفهٔ F در x همگراست.

$$\frac{F(x+)+F(x-)}{۲} \tag{۱۴}$$

۲۰. بحث قضیه و فرع آن

باید تأکید کرد که شرایط قضیه بخش۱۹ و فرع آن فقط کافی هستند و هیچ ادعایی در مورد لزوم آنها نیست. در تعدادی از منابع که در کتابنامه آمده، شرایط کلی‌تری مطرح شده است. در واقع توابعی هستند که حتی در نقاطی نامحدود می‌شوند، اما با وجود این

دارای سری فوریه معتبری هستند.[1]

فرع بخش ۱۹ برای بیشتر کاربردها در این کتاب بسنده است، در کاربردهای موجود در این کتاب توابع عموماً قطعه‌ای هموارند. توجه می‌کنیم که اگر f و F نمایش توابع در آن فرع باشند آنگاه به ازای هر $-\pi < x < \pi$ داریم $F(x+)=f(x+)$ و $F(x-)=f(x-)$ در نتیجه چنانچه $-\pi < x < \pi$ بنابر فرع فوق سری فوریهٔ

$$\frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (۱$$

با ضرایب

$$a_n = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n=(۰,۱,۲, \dots) \qquad (۲$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad n=(۱,۲, \dots) \qquad (۳$$

به عدد

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{۲} \qquad (۴$$

همگراست که اگر x یک نقطهٔ پیوستگی f باشد، عبارت (۴) مساوی $f(x)$ می‌شود. ولی در نقاط انتهای $x=\pm\pi$ سری به عدد

$$\frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{۲} \qquad (۵$$

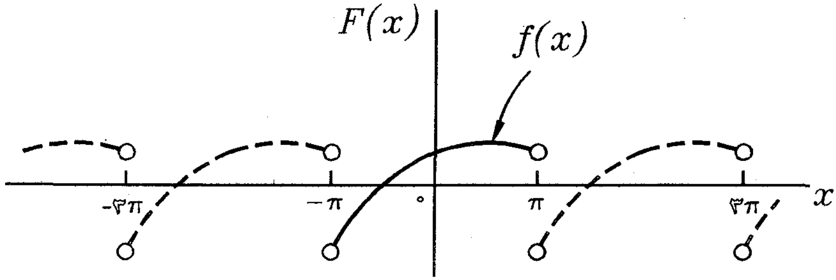
همگراست. برای اثبات آن، ابتدا نقطهٔ $x=-\pi$ را در نظر می‌گیریم. چون همان طور که از شکل ۲۳ مشهود است $F(-\pi+)=f(-\pi+)$ و $F(-\pi-)=f(\pi-)$ وقتی $x=-\pi$، خارج قسمت

$$\frac{F(x+)+F(x-)}{۲}$$

در فرع فوق خارج قسمت (۵) می‌شود. این سری در نقطه $x=\pi$ هم بنا بر خاصیت تناوبی‌اش به خارج قسمت (۵) همگراست. توجه کنید که چگونه نتیجه می‌شود که سری

۱. مثلاً کتاب تالستو (صفحات ۹۴-۹۱) که در کتابنامه آمده است.

در $x=-\pi$ به $f(-\pi+)$ و در $x=\pi$ به $f(\pi-)$ همگراست اگر و فقط اگر $f(-\pi+)=f(\pi-)$



شکل ۲۳

مثال۱. در مثال ۱ بخش ۱۵ برای تابع f که با ضابطه‌های

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & -\pi<x\le ۰ \quad \text{هر گاه} \\ x & ۰<x<\pi \quad \text{هر گاه} \end{cases}$$

تعریف شده است، سری فوریهٔ زیر را به دست آوردیم:

$$\frac{\pi}{۴}+\sum_{n=۱}^{\infty}\left[\frac{(-۱)^{n}-۱}{\pi n^{۲}}\cos nx+\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx\right] \qquad (۶$$

چون

$$f'(x)=\begin{cases} ۰ & -\pi<x<۰ \quad \text{هرگاه} \\ ۱ & ۰<x<\pi \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

بدیهی است که f در بازهٔ اصلی $-\pi<x<\pi$ قطعه‌ای هموار است. بنابر پیوستگی f در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ در هر نقطهٔ x از آن بازهٔ باز سری به $f(x)$ همگراست. چون $f(-\pi+)=۰$ و $f(\pi-)=\pi$ در نقاط انتهایی $x=\pm\pi$ سری به $\pi/۲$ همگراست. در واقع همان طور که در شکل ۱۹(بخش۱۵)، که به ازای هر x مجموع سری با نمودار تشریح شده، نشان داده شده است در هریک از نقاط و $x=\pm\pi$ و $\pm۳\pi$ و $\pm۵\pi,...$ سری به $\pi/۲$ همگراست.

بخصوص چون سری (۶) وقتی $x=\pi$ به $\pi/2$ همگراست، اتحاد ذیل به دست می‌آید:

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}(-1)^n=\frac{\pi}{2}$$

که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

این مثال نحوهٔ استفاده از سری فوریه را برای یافتن مجموع سریهای همگرایی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آن سروکار داریم، نشان می‌دهد. توجه کنید که با قرار دادن $x=0$ نیز در سری (۶) این مجموع خاص را می‌توان به دست آورد.

بنابر فرع بخش ۱۹ هر تابع f در فضای $C_p'(-\pi, \pi)$ از توابع قطعه‌ای هموار در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ دارای نمایش سری فوریهٔ معتبری در آن بازه است. یا سری فوریه‌ای دارد که در همهٔ نقاط جز محتملاً تعدادی متناهی نقطه از آن بازه مساوی $f(x)$ است. همچنین اطمینان حاصل می‌کنیم که هر تابع f در فضای $C_p'(0, \pi)$ دارای نمایش سری فوریهٔ کسینوسی و سینوسی معتبری در بازهٔ $0<x<\pi$ است. زیرا بنابر بخش ۱۵ سری کسینوسی

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \tag{7}$$

که در آن

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{8}$$

همان سری فوریهٔ نظیر توسیع زوج f روی بازهٔ $-\pi<x<\pi$ است و سری سینوسی

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx \tag{9}$$

که در آن

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \qquad (n = ۱, ۲, \ldots) \qquad (۱۰)$$

سری فوریهٔ توسیع فرد f در آن بازه است.

بنابر آنکه تابع نمایش داده شده با سری (۷) تابعی متناوب زوج است، آن سری در نقطهٔ $x=۰$ به $f(۰+)$ و در $x=\pi$ به $f(\pi-)$ همگراست. مجموع سری (۹) البته وقتی $x=۰$ و $x=\pi$ مساوی صفر می‌باشد.

مثال۲. در مثال بخش۱۳ سری کسینوسی فوریهٔ نظیر تابع $f(x)=\sin x$ در بازهٔ $۰<x<\pi$ را پیدا کردیم:

$$\sin x \sim \frac{۲}{\pi} - \frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos ۲nx}{۴n^{۲}-۱} \qquad (۱۱)$$

چون $\sin x$ در $۰<x<\pi$ قطعه‌ای هموار و در بازهٔ بستهٔ $۰\leq x\leq \pi$ پیوسته است تناظر(۱۱) به وضوح یک تساوی است.

در آخرین مثال، نحوهٔ مفید بودن قضیهٔ بخش۱۹ را می‌بینیم جاییکه که فرع آن بخش کارایی ندارد.

مثال۳. تابع فرد $x^{۱/۳}$ در بازهٔ بستهٔ $-\pi\leq x\leq\pi$ پیوسته و لذا در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ قطعه‌ای پیوسته است. اگر f نمایش آن تابع باشد، می‌بینیم که f در $-\pi<x<\pi$ قطعه‌ای هموار نیست، زیرا $f'(۰+)$ و $f'(۰-)$ موجود نیستند. بنابراین از آن فرع نمی‌توان استفاده کرد.

با وجود این اگر f نمایش توسیع متناوب، با دورهٔ تناوب ۲π ، $x^{۱/۳}$ باشد $(-\pi<x<\pi)$ می‌توان از قضیه استفاده کرد. به عبارت دقیقتر، چون مشتقات یکطرفه f در هر نقطه از بازهٔ $-\pi<x<\pi$ جز در $x=۰$ موجودند، در می‌یابیم که سری فوریهٔ $x^{۱/۳}$ در $(-\pi<x<\pi)$ به $x^{۱/۳}$ همگراست هر گاه $-\pi<x<۰$ یا $۰<x<\pi$ این نمایش سری حتی در $x=۰$ معتبر است زیرا $x^{۱/۳}$ فرد و سری عملاً سری سینوسی فوریه در $۰<x<\pi$ است که وقتی $x=۰$ به صفر همگراست. پس می‌توان نتیجه گرفت که نمایش سری فوریه $x^{۱/۳}$

$(-\pi<x<\pi)$ در سراسر بازهٔ $-\pi<x<\pi$ معتبر است.

مسائل

۱. برای هر یک از توابع ذیل دلیل همگرایی سری فوریه آن را برای $-\pi\leq x\leq\pi$ ذکر و مجموع سری را وقتی $x=\pm\pi$ بیان کنید.

الف) تابع

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{۲} & -\pi<x<۰ \quad \text{هرگاه} \\ \frac{\pi}{۲} & ۰<x<\pi \quad \text{هرگاه}\end{cases}$$

که سری آن را در مسألهٔ ۱ بخش ۱۶ پیدا کردیم.

ب) تابع $f(x)=e^{ax}$ $(a\neq ۰)$ که سری آن را در مسألهٔ ۴ بخش ۱۶ پیدا کردیم.

جواب: الف) مجموع $=۰$؛ (ب) مجموع $=\cosh a\pi$

۲. با قرار دادن $x=۰$ و $x=\pi/۲$ در نمایش

$$\sin x=\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos ۲nx}{۴n^{۲}-۱} \qquad (۰\leq x\leq\pi)$$

که در مثال ۲ بخش ۲۰ ثابت شد، مجموعهای زیر را به دست آورید:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۴n^{۲}-۱}=\frac{۱}{۲} \qquad , \qquad \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{۴n^{۲}-۱}=\frac{۱}{۲}-\frac{\pi}{۴}$$

۳. چرا سری فوریهٔ مسألهٔ ۷ بخش ۱۶ برای تابع

$$f(x)=\begin{cases}۰ & -\pi\leq x\leq ۰ \quad \text{هر گاه} \\ \sin x & ۰<x\leq\pi \quad \text{هر گاه}\end{cases}$$

در همهٔ نقاط بازهٔ $-\pi\leq x\leq\pi$ به $f(x)$ همگراست؟

۴. چرا سری سینوسی فوریه در مثال ۱ بخش ۱۴ برای تابع $f(x)=x$ $(۰<x<\pi)$ نمایشی معتبر برای x در بازهٔ $۰<x<\pi$ است؟ بدین ترتیب کاملاً تحقیق کنید که به ازای

هر x $(-\infty < x < \infty)$ سری به تابعی که نمودار آن در شکل ۱۸(بخش ۱۴) نشان داده شده همگراست.

۵. چرا تناظر (مسألهٔ ۷ بخش ۱۴)

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \qquad (-\pi < x < \pi)$$

عملاً یک تساوی در بازهٔ $-\pi \le x \le \pi$ است؟ بدین ترتیب نشان دهید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(با مثال بخش ۲۰ مقایسه کنید.)

۶. الف) با استفاده از تناظر

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad (0 < x < \pi)$$

که در مسألهٔ ۴ (الف) بخش ۱۴ پیدا کردیم، نشان دهید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(ب) با قرار دادن $x=\pi$ در تناظر (مسألهٔ ۸ بخش ۱۴)

$$x^4 \sim \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n\pi)^2-6}{n^4}\cos nx \qquad (0 < x < \pi)$$

و به استناد مجموع حاصل در قسمت (الف) نشان دهید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

۷. به کمک تناظر (مسألهٔ۶ بخش۱۶)

$$\cos ax \sim \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}\cos nx\right] \quad (-\pi<x<\pi)$$

که در آن $a\neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ نشان دهید که:

$$\frac{a\pi}{\sin a\pi}=1+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2} \quad (a\neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

۸. اگر تابع ثابت $\phi_0(x)=1/\sqrt{\pi}$ را از مجموعهٔ متعامدیکهٔ مثال بخش۱۲ برداریم، هنوز یک مجموعهٔ متعامدیکه داریم، مرکب از توابع

$$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx \qquad (n=1,2,\dots)$$

بیان کنید چرا این مجموعه در فضای همهٔ توابع f که در بازهٔ $0<x<\pi$ قطعه‌ای هموارند و در شرط زیر صدق می‌کنند

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx=0$$

بسته است (بخش۱۲).

راهنمایی: به حکمی که حوالی آخر بخش۱۲ به صورت ایتالیک نوشته شده است مراجعه کنید.

۹. بدون اینکه عملاً سری فوریه $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ در $-\pi<x<\pi$ را پیدا کنید، بگویید چگونه قضیهٔ بخش۱۹ همگرایی آن سری را به $f(x)$ وقتی که $-\pi\leq x<0$ یا $0<x\leq\pi$ تضمین می‌کند اما نه موقعی که $x=0$

۱۰. به کمک قاعدهٔ هوپیتال $f(0+)$ و $f'_R(0)$ را برای تابع ذیل به دست آورید:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x} \qquad (x\neq 0)$$

جواب:
$$f'_R(0)=\frac{1}{2} \quad , \quad f(0+)=1$$

۱۱. نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \quad \text{هر گاه} \\ 0 & x = 0 \quad \text{هر گاه} \end{cases}$$

در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است اما نه $f_R'(0)$ موجود است و نه $f_L'(0)$. بدین ترتیب مثال دیگری(مثال ۳ بخش ۱۷ را ببینید) از این امر به دست می‌آید که پیوستگی f در نقطهٔ x_0 شرط کافی برای وجود مشتقات یکطرفهٔ f در x_0 نیست.

۱۲. می‌دانیم که مشتقات راست دو تابع f و g در نقطهٔ x_0 موجودند، ثابت کنید که حاصلضرب آنها $f(x)\,g(x)$ در آن نقطه مشتق راست دارد. این مطلب را با وارد کردن جملهٔ $f(x)g(x_0+)$ و منفی آن در صورت خارج قسمت ذیل نشان دهید:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0+)g(x_0+)}{x - x_0}$$

۱۳. فرض کنید f نمایش تابعی قطعه‌ای پیوسته در بازهٔ $-c<x<c$ و متناوب با دورهٔ تناوب $2c$ باشد. نشان دهید که به ازای هر عدد a:

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \int_{a-c}^{a+c} f(x)\,dx$$

راهنمایی: قرار دهید

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \int_{-c}^{a+c} f(x)\,dx + \int_{a+c}^{c} f(s)\,ds$$

و سپس در انتگرال دوم سمت راست این رابطه با $x=s-2c$ تغییر متغیر بدهید.

۱۴. عبارت

$$D_N(u) = \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{u}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \qquad (u \neq 0\,,\ \pm 2\pi\,,\ \pm 4\pi\,,\ \ldots\,)$$

را برای کرنل دیریکله (بخش ۱۸)

$$D_N(u) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nu$$

بدین طریق استنتاج کنید که در اتحاد مثلثاتی زیر قرار دهید $A=u/۲$ و $B=nu$

$$۲\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

و طرفین رابطهٔ حاصل را از $n=۱$ تا $n=N$ با هم جمع کنید.

راهنمایی: توجه کنید که:

$$\sum_{n=۱}^{N}\sin\left(\frac{۱}{۲}-n\right)u=-\sum_{n=۰}^{N-۱}\sin\left(\frac{۱}{۲}+n\right)u$$

۲۱ . سری فوریه روی بازه‌های دیگر

فرض کنید که تابع f در بازه‌ای مانند $-c<x<c$ قطعه‌ای پیوسته و متناوب با دورهٔ تناوب $۲c$ باشد که در آن c عدد مثبتی است. برای سهولت در بحث زیر، فرض می‌کنیم که $f(x)$ مانند نقاط پیوستگی در هر نقطهٔ ناپیوستگی f مساوی مقدار میانگین حدود یکطرفهٔ $f(x+)$ و $f(x-)$ باشد.

تابع

$$g(s)=f\left(\frac{cs}{\pi}\right)\qquad(-\infty<s<\infty)\tag{۱}$$

یا

$$g(s)=f(x)\quad(-\infty<s<\infty)\qquad x=\frac{cs}{\pi}\tag{۲}$$

که در آن

را تعریف می‌کنیم که متناوب با دورهٔ تناوب ۲π است. معادلهٔ $x=cs/\pi$ یا $s=\pi x/c$ تناظر یک به یکی بین نقاط روی محور xها و نقاط روی محور sها برقرار می‌کند و از روابط(۲) بدیهی است که اگر نقطهٔ مشخص x با نقطهٔ s متناظر باشد آنگاه:

$$g(s+)=f(x+)\qquad,\qquad g(s-)=f(x-)$$

چون $f(x)$ همیشه مقدار میانگین $f(x+)$ و $f(x-)$ است، از این روابط بین حدود یکطرفه نتیجه می‌شود که عدد $g(s)=f(x)$ همیشه مقدار میانگین $g(s+)$ و $g(s-)$ است. بخصوص اگر f در x پیوسته باشد g در s پیوسته است. چون f در بازهٔ $-c<x<c$ قطعه‌ای پیوسته است، g نیز در بازهٔ $-\pi<s<\pi$ قطعه‌ای پیوسته است. مشتق f' نیز قطعه‌ای پیوسته است و با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم که g' هم همین

طور است. لذا g بر بازهٔ $-\pi<s<\pi$ قطعه‌ای هموار است و توسیع متناوب خود با دورهٔ تناوب ۲π روی تمام محور sهاست.

حال یک کاربرد فرع بخش ۱۹ نشان می‌دهد که تابع (۱) همه جا روی محور sها با سری فوریه‌اش نمایش داده می‌شود. یعنی به ازای هر s:

$$f(\frac{cs}{\pi}) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos ns + b_n \sin ns) \tag{۳}$$

که در آن

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{cs}{\pi}) \cos ns \, ds \qquad n=(۰,۱,۲,\ ...) \tag{۴}$$

و

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{cs}{\pi}) \cos ns \, ds \qquad n=(۱,۲,\ ...) \tag{۵}$$

با جایگزینی $x=cs/\pi$ نمایش (۳) به شکل زیر در می‌آید که به ازای هر x معتبر است:

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{c} + b_n \sin \frac{n\pi x}{c}) \tag{۶}$$

عبارات (۴) و (۵) را می‌توان به صورت ذیل نوشت که در آن از متغیر جدید انتگرالگیری $x=cs/\pi$ استفاده شده است:

$$a_n = \frac{۱}{c}\int_{-c}^{c} f(x) \cos \frac{n\pi x}{c} dx \qquad (n=۰,۱,۲,\ ...) \tag{۷}$$

$$b_n = \frac{۱}{c}\int_{-c}^{c} f(x) \sin \frac{n\pi x}{c} dx \qquad (n=۱,۲,\ ...) \tag{۸}$$

این نتیجه را به عنوان قضیه‌ای بیان می‌کنیم که برای کاربردهایمان کافی است. می‌توان مستقیماً از قضیهٔ بخش ۱۹ استفاده کرد و نتیجهٔ کلی‌تری برای توابع متناوب f به دست آورد که صرفاً در بازهٔ اصلی $-c<x<c$ قطعه‌ای پیوسته‌اند اما در نقاط معینی دارای مشتقات یکطرفهٔ $f_R'(x)$ و $f_L'(x)$ می‌باشند.

قضیه. فرض کنید f نمایش تابعی قطعه‌ای پیوسته در بازهٔ $-c<x<c$ و متناوب با دورهٔ تناوب $۲c$ باشد. اگر $f(x)$ در هر نقطهٔ ناپیوستگی f مساوی مقدار میانگین حدود یکطرفهٔ $f(x+)$ و $f(x-)$ تعریف شود، آنگاه نمایش سری فوریهٔ (۶) با ضرایب (۷) و (۸) به ازای هر x $(-\infty<x<\infty)$

معتبر است.

اگر تابع f زوج باشد، آنگاه تابع g که با ضابطهٔ (۱) تعریف شد نیز چنین است؛ و از بخش ۱۵ می‌دانیم که عبارت (۴) برای ضرایب a_n را می‌توان چنین نوشت:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{cs}{\pi}\right)\cos ns\, ds \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

بعلاوه، ضرایب b_n همگی صفرند. بنابراین سری (۶) به سری کسینوسی تبدیل می‌شود:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{c} \tag{9}$$

که در آن:

$$a_n = \frac{2}{c}\int_0^{c} f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{10}$$

همین طور اگر f فرد باشد، یک سری سینوسی خواهیم داشت:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{c} \tag{11}$$

که در آن:

$$b_n = \frac{2}{c}\int_0^{c} f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{12}$$

بسادگی می‌توان قضیه را برای هر تابع قطعه‌ای هموار f که فقط روی بازهٔ $-c<x<c$ تعریف شده باشد پذیرفت. برای این کار توسیع متناوب با دورهٔ تناوب $2c$ تابع f را معرفی کرده و به F نمایش می‌دهیم. نمودار $y=F(x)$ همان نمودار $y=f(x)$ است که هر $2c$ واحد در طول محور xها تکرار شده است. پس از تعریف $F(x)$ در هر نقطهٔ ناپیوستگی F مساوی مقدار میانگین حدود یکطرفهٔ $F(x+)$ و $F(x-)$، می‌توان قضیه را برای این توسیع به کار برد. به همان طریق می‌توان درستی نمایشهای (۹) و (۱۱) را برای توابع قطعه‌ای هموراری که فقط در بازهٔ $0<x<c$ تعریف شده‌اند تحقیق کرد، به ترتیب، توسیع‌های زوج و فرد آن در بازهٔ $-c<x<c$ را در نظر بگیرید. فرع زیر، که این نتایج را خلاصه می‌کند، برای هر تابع f با خواص ذیل به کار می‌رود:

الف) f در بازهٔ مذکور قطعه‌ای هموار است؛

ب) $f(x)$ در هر نقطهٔ نا پیوستگی f در آن بازه مقدار میانگین حدود یکطرفهٔ $f(x+)$ و $f(x-)$ است.

فرع. اگر تابع f در بازهٔ $-c<x<c$ دارای خواص (الف) و (ب) باشد آنگاه نمایش سری فوریهٔ (۶) با ضرایب (۷) و (۸) به ازای هر $(-c<x<c)$ برقرار است. اگر f در بازهٔ $0<x<c$ دارای آن خواص باشد، آنگاه نمایش سری کسینوسی (۹) با ضرایب (۱۰) به ازای هر x $(0<x<c)$ معتبر است و همین امر برای نمایش سری سینوسی فوریه (۱۱) با ضرایب (۱۲) درست است.

مثال. تابع $f(x)=x^2$ بر هر بازهٔ $0<x<c$ قطعه‌ای هموار است و نمایش سری سینوسی

$$x^2=2c^2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}-2\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^3}\right]\sin\frac{n\pi x}{c} \qquad (0<x<c) \quad (13)$$

را می‌توان با محاسبهٔ انتگرالهای عبارت (۱۲) وقتی $f(x)=x^2$ به دست آورد. اما چون از مسألهٔ ۴ (ب) بخش ۱۴ و فرع اینجا می‌دانیم که:

$$x^2=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}-2\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^3}\right]\sin nx \qquad (0<x<\pi) \quad (14)$$

ساده‌تر است که با آن حالت خاص شروع کنیم. به عبارت دقیقتر:

$$0<\frac{\pi x}{c}<\pi \quad \text{هرگاه} \quad 0<x<c$$

و

و لذا می‌توان در هر طرف نمایش (۱۴) به جای x مقدار $\frac{\pi x}{c}$ را قرار داد و معادله‌ای به دست آورد که برای $0<x<c$ برقرار است. سپس با ضرب کردن طرفین معادله در $\frac{c^2}{\pi^2}$ به نمایش (۱۳) می‌رسیم که عملاً در بازهٔ $0\le x<c$ برقرار است.

مسائل

در مسائل ۱ تا ۳ با استفاده از فرمولهای بخش ۱۲ ضرایب سری فوریه مطرح شده را پیدا کنید.

۱. نشان دهید اگر:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -3<x<0 \quad \text{هر گاه} \\ 1 & 0<x<3 \quad \text{هر گاه} \end{cases}$$

و $f(0)=\frac{1}{2}$ آنگاه:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{3} \qquad (-3<x<3)$$

به طور نموداری تابعی را که با این سری به ازای هر x نمایش داده می‌شود $(-\infty<x<\infty)$ تشریح کنید.

۲. فرض کنید f نمایش تابعی باشد که مقادیر آن عبارتند از:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -2<x<1 \quad \text{هرگاه} \\ 1 & 1<x<2 \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

و $f(-2)=f(1)=f(2)=\frac{1}{2}$. نشان دهید که به ازای هر x در بازهٔ بستهٔ $-2\le x\le 2$

$$f(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}+(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2})\sin\frac{n\pi x}{2}\right]$$

۳. نمایش سری سینوسی فوریه ذیل را به دست آورید:

$$\cos\pi x=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2n\pi x \qquad (0<x<1)$$

راهنمایی: برای محاسبهٔ انتگرالهایی که ظاهر می‌شوند، اتحاد مثلثاتی زیر را در نظر داشته باشید:

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

۴. فرض کنید f نمایش تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲ باشد که در آن:

$$f(x)=\begin{cases} \cos\pi x & 0<x<1 \quad \text{اگر} \\ 0 & 1<x<2 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

و $f(0)=\frac{1}{2}$ و $f(1)=-\frac{1}{2}$. به کمک نمایش سری حاصل در مسألهٔ ۳ نشان دهید که:

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos \pi x+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^{2}-1}\sin 2n\pi x \qquad (-\infty<x<\infty)$$

۵. الف) با استفاده از سری سینوسی فوریه که در مثال ۱ بخش ۱۴ برای $f(x)=x$ $(0<x<\pi)$ پیدا کردیم، نشان دهید که:

$$x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x \qquad (-1<x<1)$$

ب) با استناد به سری فوریهٔ کسینوسی که در مسألهٔ ۴ (الف) بخش ۱۴ برای $f(x)=x^{2}$ $(0<x<\pi)$ به دست آمد، بسط زیر را استنتاج کنید:

$$x^{2}=\frac{c^{2}}{3}+\frac{4c^{2}}{\pi^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}}\cos\frac{n\pi x}{c} \qquad (-c\leq x\leq c)$$

۶. نشان دهید چگونه از بسطهای حاصل در مسألهٔ ۵ نتیجه می‌شود که:

$$x+x^{2}=\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2}{n^{2}\pi}\cos n\pi x-\frac{1}{n}\sin n\pi x\right) \qquad (-1<x<1)$$

۷. الف) با استفاده از سری سینوسی فوریه در مثال ۳ بخش ۱۴ برای تابع

$$f(x)=x(\pi^{2}-x^{2}) \qquad (0<x<\pi)$$

درستی نمایش زیر را ثابت کنید:

$$x(1-x^{2})=\frac{12}{\pi^{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3}}\sin n\pi x \qquad (0\leq x\leq 1)$$

ب) با جایگذاری $1-x$ به جای x در هر طرف نمایش حاصل در قسمت(الف) نشان دهید که:

$$x(x-1)(x-2)=\frac{12}{\pi^{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n^{3}} \qquad (0\leq x\leq 1)$$

۸. نشان دهید چگونه از سری فوریهٔ سینوسی که در مسألهٔ ۵ بخش ۱۴ برای تابع

$$f(x)=x(\pi-x) \qquad (0<x<\pi)$$

پیدا کردیم نتیجه می‌شود که:

$$x(2c-x)=\frac{32c^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2c} \quad (0\le x\le 2c)$$

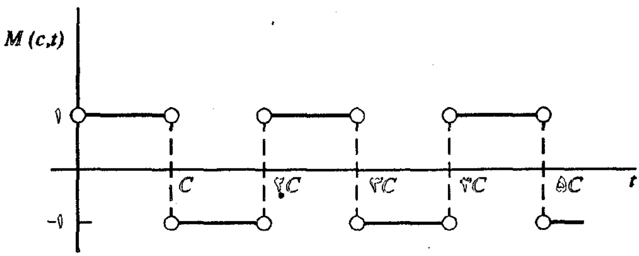
۹. فرض کنید $M(c,t)$ نمایش موج مربعی(شکل ۲۴) باشد که با ضابطه‌های

$$M(c,t)=\begin{cases}1 & 0<t<c \quad \text{هر گاه} \\ -1 & c<t<2c \quad \text{هر گاه}\end{cases}$$

تعریف شده است و $M(c,t+2c)=M(c,t)$ $(t>0)$ نشان دهید که

$$M(c,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi t}{c} \quad (t\ne c,\ 2c,\ 3c,\ \dots)$$

راهنمایی: در اینجا می‌توان از سری سینوسی حاصل در مسألهٔ ۱ (ب) بخش ۱۴ برای تابع $f(x)=1$ $(0<x<\pi)$ استفاده کرد.



شکل ۲۴

۱۰. فرض کنید F نمایش تابع متناوبی با دورهٔ تناوب c باشد، که در آن:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{c}{4}-x & 0\le x\le \frac{c}{2} \quad \text{هر گاه} \\ x-\frac{3c}{4} & \frac{c}{2}<x\le c \quad \text{هر گاه}\end{cases}$$

الف) تابع $F(x)$ را به طور نموداری تشریح کرده، نشان دهید که در واقع توسیع متناوب زوج، با دورهٔ تناوب c ، تابع زیر است:

$$f(x)=\frac{c}{4}-x \qquad \left(0\le x\le \frac{c}{2}\right)$$

ب) با استفاده از نتیجهٔ حاصل در قسمت (الف) و سری کسینوسی فوریه که در مسألهٔ ۲ (الف) بخش ۱۴ برای تابع $f(x)=\pi-x$ $(0<x<\pi)$ به دست آمد نشان دهید که:

$$F(x)=\frac{2c}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(4n-2)\pi x}{c} \qquad (-\infty<x<\infty)$$

۱۱. فرض کنید تابع f در بازهٔ $0<x<c$ قطعه‌ای هموار و F نمایش این توسیع f به بازهٔ $0<x<2c$ باشد:

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x<c \quad \text{هرگاه} \\ f(2c-x) & c<x<2c \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

[نمودار $y=F(x)$ بوضوح نسبت به خط $x=c$ متقارن است.] نشان دهید که ضرایب b_n در سری سینوسی فوریهٔ F در بازهٔ $0<x<2c$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$b_n=\left[1-(-1)^n\right]\frac{1}{c}\int_0^c f(x)\sin\frac{n\pi x}{2c}dx \qquad (n=1,2,\ \ldots)$$

بدین ترتیب نشان دهید که به ازای هر نقطه x $(0<x<c)$ که f در آن پیوسته است:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2c}$$

که در آن:

$$B_n=\frac{2}{c}\int_0^c f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2c}dx \qquad (n=1,2,\ \ldots.)$$

راهنمایی: قرار دهید:

$$b_n=\frac{1}{c}\left[\int_0^c f(x)\sin\frac{n\pi x}{2c}dx+\int_c^{2c} f(2c-s)\sin\frac{n\pi s}{2c}ds\right]$$

و در انتگرال دوم تغییر متغیر $x=2c-s$ را اعمال کنید.

۱۲. با استفاده از نتیجهٔ حاصل در مسألهٔ ۱۱ درستی نمایش ذیل را ثابت کنید:

$$x=\frac{8c}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2c}\qquad(-c\le x\le c)$$

۱۳. نشان دهید که در بخش ۲۱ سری فوریه (۶) با ضرایب (۷) و (۸) را می‌توان به شکل فشردهٔ زیر نوشت:

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}f(s)\,ds+\frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-c}^{c}f(s)\cos\left[\frac{n\pi}{c}(s-x)\right]ds$$

(بخش ۱۵ را که در آن چنین شکلی برای $c=\pi$ به دست آمد ببینید.)

۱۴. (الف) تحقیق کنید که مجموعهٔ توابع

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2c}},\ \phi_{2n-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{c}}\cos\frac{n\pi x}{c},\ \phi_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{c}}\sin\frac{n\pi x}{c}\qquad(n=1,2,\ \ldots)$$

که وقتی $c=\pi$ مجموعهٔ (۱) بخش ۱۵ می‌شود، در بازهٔ $-c<x<c$ متعامدیکه است.

(ب) نشان دهید که سری فوریهٔ تعمیم یافتهٔ نظیر تابع $f(x)$ در $C_p(-c,c)$ نسبت به مجموعهٔ متعامدیکه در قسمت (الف) را می‌توان به عنوان سری فوریهٔ معمولی با ضرایب a_n $(n=0,1,2,\ldots)$ و b_n $(n=1,2,\ldots)$ برای f در بازهٔ $-c<x<c$ نوشت(بخش ۲۱).

(ج) برای ضرایب a_n و b_n در قسمت(ب) نامساوی بسل

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}[f(x)]^2dx\qquad(N=1,2,\ \ldots)$$

را از شکل کلی آن نامساوی برای ثابتهای فوریه معادلهٔ (۹) بخش ۱۶ نتیجه بگیرید. (با مسألهٔ ۹ بخش ۱۶ مقایسه کنید.)

راهنمایی: در قسمت (الف) انتگرالهای مطرح شده را با جایگذاری $s=\pi x/c$ به انتگرالهایی تبدیل کنید که مقادیر آنها معلوم است، زیرا از قبل می‌دانیم که این مجموعه روی $-\pi<x<\pi$ وقتی $c=\pi$ ، متعامدیکه است.

۱۵. پس از نوشتن نمایش سری فوریهٔ (۶) بخش ۲۱ به صورت

$$f(x)=\frac{a_{\circ}}{۲}+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=۱}^{n}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{c}+b_n\sin\frac{n\pi x}{c}\right)$$

و استفاده از صورتهای نمایی توابع سینوس و کسینوس[1]

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{۲} \qquad , \qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{۲i}$$

آن نمایش را به صورت نمایی زیر درآورید:

$$f(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}A_n\exp\left(i\frac{n\pi x}{c}\right)$$

که در آن:

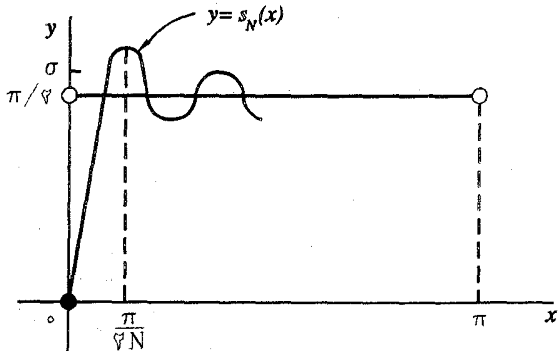
$$A_{\circ}=\frac{a_{\circ}}{۲} \quad , \quad A_n=\frac{a_n-ib_n}{۲} \quad , \quad A_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{۲c} \qquad (n=۱,۲,\ \dots)$$

سپس از عبارات (۷) و (۸) بخش ۲۱ برای ضرایب a_n و b_n استفاده کرده، فرمول زیر را به دست آورید:

$$A_n=\frac{۱}{۲c}\int_{-c}^{c}f(x)\exp\left(-i\frac{n\pi x}{c}\right)dx \qquad (n=\circ\ ,\ \pm۱\ ,\ \pm۲\ ,\ \dots)$$

---

۱. برای زمینهٔ این فرمها و آشنایی با سریها و انتگرالهایی که شامل توابع مختلطند، کتاب مؤلفان (۱۹۹۰) را که در کتابنامه آمده است ببینید.



شکل ۲۵

۲۲ . همگرایی یکنواخت سری فوریه

از این لحظه خواننده می‌تواند بدون هیچ دردسری مستقیماً به فصل ۳ مراجعه کند. این بخش که با همگرایی یکنواخت سریهای فوریه سروکار دارد و دو بخش باقیماندهٔ فصل که به دیدگاههای دیگر نظریهٔ همگرایی این سریها مربوط است، پس از این فقط گهگاهی مورد استفاده واقع خواهد شد. برای مراجعه به نتایجی که در موقع لزوم صراحتاً بیان خواهند شد، خواننده می‌تواند به این بخشها مراجعه کند.

برای سهولت، فقط سریهای فوریه‌ای را بررسی می‌کنیم که برای آنها بازهٔ اصلی عبارت است از $-\pi<x<\pi$ می‌توان این قضایا را به روش بخش ۲۱ در مورد سریهایی که بازهٔ اصلی آنها $-c<x<c$ است به کار برد. مقدمهٔ قضیهٔ همگرایی سریهای فوریه را با یک لم مهم فراهم می‌آوریم.

لم. فرض کنید تابع f روی بازهٔ $-\pi\leq x\leq\pi$ پیوسته باشد و $f(-\pi)=f(\pi)$ و مشتق آن f' در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ قطعه‌ای پیوسته باشد. در این صورت اگر a_n و b_n ضرایب فوریه باشند:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \tag{۱}$$

آنگاه سری زیر همگراست:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad (۲$$

دستهٔ همهٔ توابعی که در شرایط این قضیه صدق می‌کنند، البته زیر فضایی از فضای توابع قطعه‌ای پیوسته در بازهٔ $-\pi < x < \pi$ است.

اثبات لم را با ملاحظه این که ضرایب فوریه

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx \quad , \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx \qquad (۳$$

برای f' بنابر قطعه‌ای پیوسته بودن f' موجودند، شروع می‌کنیم. توجه کنید که:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[f(\pi) - f(-\pi) \right] = 0$$

همچنین بنابر پیوستگی f و $f(-\pi)=f(\pi)$ با انتگرالگیری جزء به جزء می‌بینیم که وقتی $n=1,2,\dots$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \left[f(x) \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \left[f(\pi) - f(-\pi) \right] + nb_n = nb_n$$

و

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \left[f(x) \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = -na_n$$

یعنی:

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n} \quad , \quad b_n = \frac{\alpha_n}{n} \qquad (n=1,2,\dots) \qquad (۴$$

به استناد روابط (۴)، S_N مجموع N جملهٔ اول سری نامتناهی (۲) تبدیل می‌شود به:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \qquad (۵$$

حال می‌توان از نامساوی کوشی

$$\left(\sum_{n=1}^{N} p_n q_n^2\right)^2 \le \left(\sum_{n=1}^{N} p_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} q_n^2\right)$$

که برای هر دو مجموعه از اعداد حقیقی p_n $(n=1,2,\dots,N)$ و q_n $(n=1,2,\dots,N)$ به کار می‌رود (مسألهٔ ۶ بخش ۲۴ را برای استنتاج آن ببینید) استفاده کرد و نوشت:

$$S_N^2 \le \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)\left[\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2+\beta_n^2)\right] \qquad (N=1,2,\ \dots) \tag{6}$$

دنبالهٔ مجموعهای جزئی

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \qquad (N=1,2,\ \dots)$$

در اینجا محدود است زیرا هر مجموع یک مجموع جزئی از سری همگرایی است که جملات آن $1/n^2$ هستند [مسألهٔ ۶ (الف) بخش ۲۰ را ببینید]. دنبالهٔ

$$\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2+\beta_n^2) \qquad (N=1,2,\ \dots)$$

نیز محدود است زیرا α_n $(n=0,1,2,\dots)$ و β_n $(n=1,2,\dots)$ ضرایب فوریهٔ f' در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ هستند و بنابراین باید در نامساوی بسل صدق کنند:

$$\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2+\beta_n^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\,dx \qquad (N=1,2,\ \dots)$$

(مسألهٔ ۹ بخش ۱۶ را ببینید.) حال از نامساوی (۶) نتیجه می‌شود که دنبالهٔ S_N^2 $(N=1,2,\dots)$ محدود و غیرنزولی است. بنابراین همگراست و در نتیجه دنبالهٔ $S_N(N=1,2,\dots)$ همگراست. بنابراین سری (۲) همگراست.

حال به همگرایی یکنواخت سری فوریه باز می‌گردیم. با یادآوری مطالبی در همگرایی یکنواخت سریهای توابع شروع می‌کنیم.[۱]

فرض کنید $S(x)$ نمایش مجموع یک سری نامتناهی از توابع $f_n(x)$ باشد که به ازای هر x در بازه‌ای مانند $a\leq x\leq b$ سری همگرا باشد. در این صورت

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\lim_{N\to\infty} S_N(x) \qquad (a\leq x\leq b) \tag{۷}$$

که در آن $S_N(x)$ مجموع جزئی مرکب از مجموع N جملهٔ اول سری است. سری نسبت به x همگرای یکنواخت است، اگر قدر مطلق باقیماندهٔ $r_N(x)=S(x)-S_N(x)$ را با بزرگ گرفتن N به قدر کافی به ازای همهٔ مقادیر x در آن بازه به دلخواه کوچک کنیم؛ یعنی به ازای هر عدد مثبت ε عدد صحیح مثبتی مانند N_ε، مستقل از x، موجود باشد به گونه‌ای که:

$$\left| s(x)-s_N(x) \right| <\varepsilon \qquad N>N_\varepsilon \qquad (a\leq x\leq b) \quad \text{هرگاه} \tag{۸}$$

یک شرط کافی برای همگرایی یکنواخت با آزمون $M-$ وایرشتراس داده می‌شود. یعنی اگر سری همگرایی مانند

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \tag{۹}$$

از اعداد ثابت مثبت موجود باشد به قسمی که به ازای هر n:

$$\left| f_n(x) \right| \leq M_n \qquad (a\leq x\leq b) \tag{۱۰}$$

در این صورت سری (۷) در بازهٔ مذکور همگرای یکنواخت است.

در اینجا تعدادی از خواص سریهای همگرای یکنواخت را که اغلب مفیدند ذکر می‌کنیم. اگر توابع f_n پیوسته و سری (۷) همگرای یکنواخت باشد، آنگاه مجموع آن سری $S(x)$ تابعی پیوسته است. همچنین برای به دست آوردن انتگرال $S(x)$ از $x=a$ تا

---

۱. مثلاً، کتاب کاپلان (۱۹۹۱ فصل ۶) با کتاب تیلوروومان (۱۹۸۳، فصل ۲۰) را ببینید، هر دو کتاب در کتابنامه آمده است.

$x=b$ می‌توان از سری بر بازهٔ $a\le x\le b$ جمله به جمله انتگرال گرفت. اگر توابع f_n و مشتقات آنها f_n' پیوسته باشند و سری (۷) همگرا و سری که جملات آن $f'(x)$ است، همگرای یکنواخت باشد آنگاه $S'(x)$ را می‌توان با مشتقگیری جمله به جمله از سری (۷) پیدا کرد.

قضیه. اگر شرایط مذکور در لم فوق برقرار باشد، سری فوریه

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{11}$$

با ضرایب (۱) در بازهٔ $-\pi\le x\le\pi$ مطلقاً و به طور یکنواخت به $f(x)$ همگراست.

برای اثبات این قضیه، ابتدا توجه می‌کنیم که شرایط f متضمن پیوستگی توسیع متناوب f به ازای هر x است. بنابراین از فرع بخش ۱۹ نتیجه می‌شود که سری (۱۱) همه جا در بازهٔ $-x\le x\le\pi$ به $f(x)$ همگراست. ملاحظه کنید که چون $|a_n|$ و $|b_n|$ هر دو کوچکتر یا مساوی $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ هستند،

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx| \le |a_n| + |b_n|\le 2\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad (n=1,2,\dots)$$

چون سری (۲) همگراست بنابر آزمون مقایسه و آزمون M وایرشتراس، سری (۱۱) همان طور که ادعا شده بود، بر بازهٔ $-\pi\le x\le\pi$ مطلقاً و به طور یکنواخت همگراست.

به روش مشابه، می‌توان همگرایی مطلق و یکنواخت سریهایی را که فقط شامل جملات کسینوس یا سینوسند ثابت کرد. سری (۱۱) در واقع مجموع آن سریهاست:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx \qquad (-\pi\le x\le\pi) \tag{12}$$

تغییراتی که در گزاره‌های آن لم و قضیه باید داد واضح هستند. مثلاً از قضیه نتیجه می‌شود که اگر تابع f در بازهٔ $0\le x\le\pi$ پیوسته و f' در بازهٔ $0<x<\pi$ قطعه‌ای پیوسته باشد، آنگاه سری کسینوسی فوریهٔ آن مطلقاً و به طور یکنواخت بر $0\le x\le\pi$ به $f(x)$ همگراست. ولی برای سری سینوسی شرایط اضافی $f(\pi)=f(0)=0$ لازم است.

چون هر سری به طور یکنواخت همگرا از توابع پیوسته، همیشه به تابعی پیوسته همگراست، سری فوریهٔ تابعی مانند f بر بازه‌ای که شامل یک نقطهٔ ناپیوستگی f است، نمی‌تواند به طور یکنواخت همگرا باشد. بنابراین پیوستگی f ، که در قضیه فرض شد، برای همگرایی یکنواخت سری در آنجا لازم است.

فرض کنید $x_\circ$ نقطه‌ای باشد که تابع قطعه‌ای هموار f در آن ناپیوسته است. طبیعت انحراف مقادیر مجموعهای جزئی سری فوریهٔ f از مقادیر f در نزدیکی $x_\circ$ را معمولاً پدیده گیبس می‌نامند که ذیلاً تشریح شده است.[۱]

مثال. تابع (فرد) f را که با ضابطه‌های زیر تعریف شده است در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{۲} & -\pi<x<\circ \quad \text{هر گاه} \\ \dfrac{\pi}{۲} & \circ<x<\pi \quad \text{هر گاه} \end{cases}$$

و $f(\circ)=\circ$. بنابر مسألهٔ ۱ بخش ۱۶ و فرع بخش ۲۱ سری فوریه تابع f

$$۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱} \qquad (-\pi<x<\pi)$$

همه جا در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ به $f(x)$ همگراست.

فرض کنید $S_N(x)$ نمایش مجموع N جملهٔ اول این سری باشد: دنبالهٔ $S_N(x)$ $(N=۱,۲,...)$ وقتی $-\pi<x<\pi$ به $f(x)$ همگراست. بخصوص وقتی $\circ<x<\pi$ به $۱/۵۷\circ\circ\circ$ همگراست. اما همان طور که در مسألهٔ ۷ بخش ۲۴ نشان داده شد، عدد ثابتی مانند $\sigma=۱/۸۵\circ\circ\circ$ هست که $S_N(\frac{\pi}{(۲N)})$ به σ همگراست. شکل ۲۵ را ببینید که چگونگی تشکیل برجستگیهای روی نمودارهای مجموعهای جزئی $y=S_N(x)$ ، که با افزایش N به سمت چپ حرکت می‌کنند، و میل کردن نوکهای آنها به نقطهٔ σ روی محور y ها را نشان می‌دهد. رفتار مجموعهای جزئی در بازهٔ $-\pi<x<\circ$ مشابه است.

---

۱. برای تجزیه و تحلیل کامل این پدیده کتاب کارسلو(۱۹۵۲ فصل ۵) را که در کتابنامه آمده است ببینید.

این مثال نشان می‌دهد که وقتی تابعی را در نزدیکی یک نقطهٔ ناپیوستگی آن به وسیلهٔ مجموعهای جزئی سری فوریه‌اش تقریب می‌زنید، باید دقت خاصی مبذول دارید.

۲۳ . مشتقگیری و انتگرالگیری از سری فوریه

بنابر فرع بخش ۲۱ سری فوریه مثال ۳ بخش ۱۵ برای تابع $f(x)=x$ در هر نقطه از بازهٔ $-\pi<x<\pi$ به $f(x)$ همگراست:

$$x=۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx \qquad (-\pi<x<\pi) \qquad (۱)$$

اما در اینجا سری مشتق‌پذیر نیست. سری حاصل از مشتق‌گیری

$$۲\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\cos nx$$

حتی همگرا نیست زیرا جملهٔ n ام آن وقتی n به بینهایت میل کند، به صفر نزدیک نمی‌شود.

تابع متناوبی که به ازای هر x باسری (۱) نمایش داده می‌شود همان طور که در شکل ۱۸ (بخش ۱۴) نشان داده شده است در نقاط $x=\pm\pi$ و $\pm ۳\pi$ و $\pm ۵\pi$ و ... دارای ناپیوستگی است. پیوستگی توسیع متناوب تابعی که نمایش داده شده، شرط مهمی برای مشتق‌پذیری سری فوریه بر بازهٔ اصلی است. شرایط کافی را میتوان به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۱. فرض کنید شرایط مذکور در لم بخش ۲۲ برقرار باشد. یعنی f در بازهٔ $-\pi\le x\le\pi$ پیوسته و $f(\pi)=f(-\pi)$ و f' در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ قطعه‌ای پیوسته باشد، در این صورت سری فوریه نمایش

$$f(x)=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (-\pi\le x\le\pi) \qquad (۲)$$

که در آن:

$$a_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \;,\; b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

در هر نقطه x از بازهٔ $-\pi < x < \pi$ که در آن $f''(x)$ موجود باشد مشتق‌پذیر است:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,(-a_n \sin nx + b_n \cos nx) \tag{۳}$$

اثباتی که برای این قضیه ارائه می‌دهیم مخصوصاً کوتاه است. فرض کنید x $(-\pi < x < \pi)$ نقطه‌ای باشد که f'' در آن موجود است و توجه کنید که بنابراین f' در x پیوسته است. پس با استفاده از قضیه فوریه در بخش ۱۹ برای تابع f' داریم:

$$f'(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \tag{۴}$$

که در آن α_n و β_n ضرایب (۳) بخش ۲۲ هستند. اما چون f و f' در همهٔ شرایط مذکور در بخش ۲۲ صدق می‌کنند از آن بخش می‌دانیم که

$$\alpha_0 = 0 \quad , \quad \alpha_n = nb_n \quad , \quad \beta_n = -na_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{۵}$$

اگر این جایگزینی‌ها را انجام دهیم رابطهٔ (۴) به شکل (۳) در می‌آید و اثبات تمام است.

در نقطهٔ x که $f''(x)$ موجود نباشد اما f' دارای مشتقات یکطرفه باشد، مشتق‌گیری هنوز به این معنی که سری رابطهٔ (۳) به مقدار میانگین $f'(x+)$ و $f'(x-)$ همگراست برقرار است. این مطلب برای توسیع متناوب f نیز درست است.

قضیهٔ ۱ با تغییراتی بدیهی، برای سریهای فوریهٔ دیگر هم به کار می‌رود. مثلاً اگر f در $0 \le x \le \pi$ پیوسته و f' در بازهٔ $0 < x < \pi$ قطعه‌ای پیوسته باشد، آنگاه سری فوریهٔ سینوسی f در هر نقطهٔ x $(0 < x < \pi)$ که $f''(x)$ موجود باشد مشتق‌پذیر است.

انتگرالگیری از سری فوریه تحت شرایط خیلی عمومی‌تر از شرایط مشتق‌گیری امکان‌پذیر است. این موضوع را باید انتظار داشت زیرا با انتگرالگیری از سری موجود در تناظر

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (-\pi < x < \pi) \tag{۶}$$

که در آن:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \tag{۷}$$

در مخرج جملهٔ عمومی عامل n ظاهر می‌شود. در قضیهٔ زیر برای آنکه سری حاصل از انتگرالگیری به انتگرال تابع همگرا باشد، حتی نیازی به همگرایی سری اولیه نیست. با وجود این، سری حاصل از انتگرالگیری چنانچه $a_{\circ} \neq \circ$ یک سری فوریه نیست، زیرا شامل جملهٔ $(a_{\circ}/۲)x$ می‌باشد.

قضیه۲. فرض کنید f تابعی قطعه‌ای پیوسته در بازهٔ $-\pi < x < \pi$ باشد. صرف‌نظر از اینکه سری(۶) همگرا باشد، رابطهٔ ذیل به ازای هر x که $-\pi \leq x \leq \pi$ برقرار است:

$$\int_{-\pi}^{x} f(s)\,ds = \frac{a_{\circ}}{۲}(x+\pi) + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}\left\{a_n \sin nx - b_n[\cos nx + (-۱)^{n+۱}]\right\} \quad (۸$$

سری (۸) با قرار دادن s به جای x در سری (۶) و انتگرالگیری جمله به جمله از $s=-\pi$ تا $s=x$ به دست می‌آید.

اثبات را از اینجا شروع می‌کنیم که چون f قطعه‌ای پیوسته است، تابع

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(s)\,ds - \frac{a_{\circ}}{۲}x \qquad (-\pi \leq x \leq \pi) \quad (۹$$

پیوسته است؛ بعلاوه، جز در نقاطی که f ناپیوسته است:

$$F'(x) = f(x) - \frac{a_{\circ}}{۲} \qquad (-\pi < x < \pi)$$

بنابراین F' در بازهٔ $-\pi < x < \pi$ قطعه‌ای پیوسته است. چون F قطعه‌ای هموار است، پس بنابر فرع بخش ۲۱ داریم:

$$F(x) = \frac{A_{\circ}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (-\pi < x < \pi) \quad (۱۰$$

که در آن:

$$A_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx \ , \ B_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx \quad (۱۱$$

با توجه به عبارت (۹) و اولین عبارت (۷) دیده می‌شود که:

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds - \frac{a_{\circ}}{۲}\pi = a_{\circ}\pi - \frac{a_{\circ}}{۲}\pi = \frac{a_{\circ}}{۲}\pi$$

و $F(-\pi)=(a_\circ/۲)\pi$ ، بنابراین $F(\pi)=F(-\pi)$. در نتیجه نمایش (۱۰) در نقاط انتهایی بازهٔ $-\pi<x<\pi$ (بخش ۲۰ را ببینید) و بنابراین در هر نقطهٔ x از بازه بسته $-\pi\le x\le\pi$ بر قرار است.

حال ضرایب A_n و B_n را برحسب a_n و b_n می‌نویسیم. اگر $n\ge ۱$ با استفاده از پیوستگی F و قطعه‌ای پیوسته بودن F' می‌توان از (۱۱) به طریقهٔ جزء به جزء انتگرال گرفت. بنابراین:

$$A_n=\frac{۱}{n\pi}[F(x)\sin nx]_{-\pi}^{\pi}-\frac{۱}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F'(x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{-۱}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-\frac{a_\circ}{۲}]\sin nx\,dx=\frac{-۱}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$+\frac{a_\circ}{۲n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{-b_n}{n}$$

همین طور $B_n=a_n/n$. برای $A_\circ$ ، از پاراگراف قبلی می‌دانیم که $F(\pi)=(a_\circ/۲)\pi$ و نمایش (۱۰) نیز وقتی $x=\pi$ بر قرار است. بنابراین با نوشتن $x=\pi$ در آن نمایش و حل آن بر حسب $A_\circ$ می‌بینیم که:

$$A_\circ=a_\circ\pi-۲\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n A_n=a_\circ\pi-۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}b_n$$

با این عبارات برای A_n و B_n به انضمام $A_\circ$ نمایش (۱۰) به شکل زیر درمی‌آید:

$$f(x)=\frac{a_\circ}{۲}\pi+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\left\{a_n\sin nx-b_n[\cos nx+(-۱)^{n+۱}]\right\}$$

بالاخره اگر در اینجا به جای $F(x)$ عبارت (۹) را به کار بریم به نتیجه مطلوب (۸) خواهیم رسید.

با توجه به رابطهٔ زیر می‌توان قضیه را برای انتگرال از $x_\circ$ تا x نوشت که در آن $-\pi\le x_\circ\le\pi$ و $-\pi\le x\le\pi$ ،

$$\int_{x_\circ}^{x}f(s)ds=\int_{-\pi}^{x}f(s)\,ds-\int_{-\pi}^{x_\circ}f(s)\,ds$$

۲۴. همگرایی در میانگین

دنبالهٔ $s_N(x)$ $(N=۱,۲, \ldots)$ از توابع قطعه‌ای پیوسته که در بازهٔ $a<x<b$ تعریف شده‌اند به تابع f از $C_p(a,b)$ در میانگین (یا در نرم) همگراست، هر گاه خطای مربع میانگین (بخش۱۶) در تقریب $s_N(x)$ برای $f(x)$ وقتی N به بینهایت میل کند به صفر میل کند:

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b [f(x) - s_N(x)]^۲ dx = ۰ \tag{۱}$$

یعنی:

$$\lim_{N\to\infty} \|f-s_N\| = ۰ \tag{۲}$$

بعضی مواقع شرط (۲) را بدین صورت نیز می‌نویسند:

$$\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\ s_N(x)=f(x) \tag{۳}$$

که در آن $l.i.m.$ علامت اختصاری حد در میانگین است.

حال فرض کنید تابعهای s_N مجموعهای جزئی سری فوریهٔ تعمیم یافته (بخش۱۲) نظیر f در بازهٔ اصلی $a<x<b$ باشند:

$$s_N(x) = \sum_{n=۱}^{N} c_n \phi_n(x) \tag{۴}$$

این ترکیب خطی $\Phi_N(x)$ در بخش ۱۶ می‌باشد. که در آن $\gamma_n=c_n$. اگر شرط (۲) برای هر تابع f در فضای تابعی $C_p(a,b)$ یا احتمالاً در یک زیر فضای شامل مجموعهٔ متعامدیکه $\{\phi_n(x)\}$ برقرار باشد، گوییم $\{\phi_n(x)\}$ در آن فضا یا زیرفضا کامل است. بنابراین اگر $\{\phi_n(x)\}$ مجموعهٔ کاملی باشد، هر تابع f را می‌توان در میانگین با ترکیب خطی از توابع $\phi_n(x)$ به دلخواه نزدیک تقریب زد، یعنی ترکیب خطی (۴) وقتی N به قدر کافی بزرگ باشد.[۱]

---

۱. در نوشته‌های ریاضی به انضمام برخی چاپهای قبلی این کتاب، کلمات کامل و بسته گاهی برای مجموعه‌هایی به کار می‌رود که ما به ترتیب بسته و کامل (بخش ۱۲) نامیده‌ایم.

بنابر رابطهٔ (۷) بخش۱۶ خطای مربع میانگین در تقریب $s_N(x)$ برای $f(x)$ عبارت است از:

۵)
$$\| f-s_N \|^۲ = \| f \|^۲ - \sum_{n=۱}^{N} c_n^۲$$

بنابراین اگر $\{\phi_n(x)\}$ کامل باشد، همیشه رابطهٔ ذیل برقرار است:

۶)
$$\sum_{n=۱}^{\infty} c_n^۲ = \| f \|^۲$$

معادلهٔ (۶) به معادلهٔ پارسوال مشهور است. این معادله مجموع مربعات مؤلفه‌های f نسبت به مجموعهٔ مرجع تعمیم یافته $\{\phi_n(x)\}$ را با مربع نرم f یکی می‌کند.

بر عکس اگر هر تابع فضا در معادلهٔ پارسوال صدق کند، مجموعهٔ $\{\phi_n(x)\}$ به معنی همگرایی در میانگین کامل است. به خاطر اینکه بنابر رابطهٔ (۵)حد (۲) صرفاً بیان دیگری از معادلهٔ (۶) است. با قرار دادن $c_n=(f, \phi_n)$ در معادلهٔ (۶) قضیهٔ زیر حاصل می‌شود که ضابطهٔ دیگری برای تشخیص مجموعه‌های کامل به ما می‌دهد.

قضیه ۱. شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعهٔ متعامدیکهٔ $\{\phi_n(x)\}$ $(n=۱, ۲, \dots)$ کامل باشد این است که به ازای هر تابع f در فضای مورد نظر معادلهٔ پارسوال برقرار باشد.

۷)
$$\sum_{n=۱}^{\infty} (f, \phi_n)^۲ = \| f \|^۲$$

برای کاربرد قضیهٔ ۱ در سری فوریه روی بازهٔ $-\pi < x < \pi$ ، از بخش۱۵ یادآوری می‌کنیم که توابع

۸)
$$\phi_۰(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \ , \ \phi_{۲n-۱}(x) = \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \cos nx \ , \ \phi_{۲n}(x) = \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \sin nx \ \ (n=۱, ۲, \dots)$$

تشکیل مجموعهٔ متعامدیکه‌ای در بازهٔ اصلی $-\pi < x < \pi$ می‌دهند. ثابتهای فوریه c_n $(n=۱, \dots)$ در سری فوریهٔ تعمیم یافته برای تابع f از $C_p(-\pi, \pi)$ نسبت به این مجموعه را به کار برده، ثابتهای زیر را تعریف می‌کنیم:

۹)
$$a_۰ = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} c_۰ \quad , \quad a_n = \frac{c_{۲n-۱}}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad b_n = \frac{c_{۲n}}{\sqrt{\pi}} \qquad (n=۱, ۲, \dots)$$

بدین ترتیب به تناظر سری فوریه زیر می‌رسیم:

$$f(x) \sim \frac{a_{\circ}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (-\pi < x < \pi) \qquad (۱۰$$

که در آن:

$$a_n = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots) \qquad (۱۱$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (n = ۱, ۲, \ldots) \qquad (۱۲$$

قضیهٔ زیر مبین این نکته است که مجموعهٔ توابع (۸) در زیر فضایی از فضای $C_p'(-\pi, \pi)$ مرکب ازتوابع قطعه‌ای هموار (بخش۱۷) روی بازهٔ $-\pi < x < \pi$ کامل است.

قضیهٔ ۲. مجموعهٔ متعامدیکه (۸) در فضای همهٔ توابع f که در بازهٔ $-\pi \le x \le \pi$ پیوسته و $f(\pi) = f(-\pi)$ و دارای مشتقات قطعه‌ای پیوستهٔ f' در بازهٔ $-\pi < x < \pi$ هستند کامل است.

توجه کنید که بنابر روابط (۹)، معادلهٔ پارسوال (۶) برای مجموعهٔ متعامدیکهٔ مورد بحث را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\frac{a_{\circ}^{۲}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n^۲ + b_n^۲) = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^۲ \, dx \qquad (۱۳$$

بنابراین اگر نشان دهیم که ضرایب (۱۱) و (۱۲) عملاً در معادلهٔ (۱۳) صدق می‌کنند، قضیه۲ ثابت می‌شود.

برقراری معادلهٔ پارسوال (۱۳) نتیجهٔ ساده‌ای از قضیه بخش است، که به استناد آن برای توابع f در فضایی که اینجا در نظر گرفته‌ایم، سری موجود در تناظر (۱۰) بر بازهٔ $-\pi \le x \le \pi$ به طور یکنواخت به $f(x)$ همگراست:

$$f(x) = \frac{a_{\circ}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (-\pi \le x \le \pi) \qquad (۱۴$$

حال می‌توان از یک سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته جمله به جمله انتگرال گرفت (بخش۲۲).

بنابراین هر جملهٔ معادلهٔ (۱۴) را در $f(x)$ ضرب می‌کنیم، هنوز سری، همگرای یکنواخت باقی می‌ماند، و بر بازهٔ اصلی انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^{۲}dx=\frac{a_{\circ}}{۲}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

$$+\sum_{n=۱}^{\infty}[a_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx]$$

بنابر عبارات (۱۱) و (۱۲) می‌توان انتگرالهای سمت راست را بر حسب a_n و b_n نوشته، رابطهٔ زیر را به دست آورد:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^{۲}dx=\pi\left[\frac{a_{\circ}^{۲}}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n^{۲}+b_n^{۲})\right]$$

چون این معادله همان معادلهٔ پارسوال(۱۳)است،اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۲ را می‌توان بسادگی تغییر داد تا برای مجموعه‌های متعامدیکه‌ای که منجر به سریهای فوریهٔ سینوسی و کسینوسی بر بازهٔ $\circ<x<\pi$ می‌شوند قابل استفاده باشد. به عبارت صریحتر مجموعهٔ توابع کسینوسی نرمال شدهٔ مثال۲ بخش۱۱ در فضای مرکب از توابع fای که در $\circ\leq x\leq\pi$ پیوسته و مشتقات f' آنها قطعه‌ای پیوسته‌اند،کامل است. چنانچه از توابع سینوسی نرمال شدهٔ مثال۱ بخش۱۱ برای به دست آوردن سری سینوسی استفاده کنیم، برای کامل بودن مجموعه شرایط $f(\circ)=f(\pi)=\circ$ نیز لازم است.

در قضیه‌ای که اکنون ثابت کردیم، فضای تابعی کاملاً محدودیت داشت. می‌توان نشان داد که معادلهٔ پارسوال (۱۳) برای هر تابع f که مجذور آن بر بازهٔ $-\pi<x<\pi$ انتگرالپذیر است، برقرار می‌باشد.[۱]

۱. به عنوان مثال، کتاب تالستو (۱۹۷۶ صفحات ۵۷-۵۴ و ۱۲۰-۱۱۷) را که در کتابنامه آمده است ببینید.

این آشنائی مختصر با نظریهٔ همگرایی در میانگین را بیش از این بررسی نمی‌کنیم. ولی باید تأکید کرد که حکم (۳) همان حکم زیر نیست:

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x)=f(x) \qquad (a<x<b) \qquad (۱۵$$

حتی اگر تعدادی متناهی از نقاط بازه را استثنا کنیم.[۱] در واقع هیچ یک از احکام (۳) و (۱۵) مستلزم دیگری نیست (مثال ۱۰ و ۱۱ را ببینید).

مسائل

۱. نشان دهید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & -\pi\le x\le ۰ \quad \text{هر گاه} \\ \sin x & ۰<x\le\pi \quad \text{هر گاه} \end{cases}$$

در همهٔ شرایط لم و قضیهٔ بخش ۲۲ صدق می‌کند. سپس به کمک آزمون $M-$ وایرشتراس (بخش ۲۲) مستقیماً نشان دهید که سری فوریه

$$\frac{۱}{\pi}+\frac{۱}{۲}\sin x-\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos ۲nx}{۴n^{۲}-۱} \qquad (-\pi<x<\pi)$$

که در مسألهٔ ۷ بخش ۱۶ برای f پیدا کردیم، همان طور که قضیهٔ بخش ۲۲ بیان می‌کند، در بازهٔ $-\pi\le x\le\pi$ به طور یکنواخت همگراست. همچنین بیان کنید چرا این سری در بازهٔ $-\pi<x<\pi$ جز در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر است و تابعی را که به ازای هر x با سری حاصل از مشتقگیری نمایش داده می‌شود، به طور نموداری تشریح کنید.

۲. از مسألهٔ ۷ بخش ۱۴ می‌دانیم که سری

$$\frac{\pi}{۲}-\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos(۲n-۱)x}{(۲n-۱)^{۲}}$$

---

۱. مثالی از یک دنبالهٔ توابع که در میانگین همگرا به صفر است امّا در هر نقطهٔ بازه واگراست در کتاب فرانکلین (۱۹۶۴ صفحهٔ ۴۰۸) که در کتابنامه ذکر شده، آمده است.

عبارت است از سری فوریهٔ کسینوسی تابع $f(x)=x$ در بازهٔ $\circ<x<\pi$. با مشتقگیری جمله به جمله از این سری، نمایشی برای تابع $f'(x)=1$ روی آن بازه به دست آورید. بیان کنید چرا این اقدام درست است.

۳. قضیهٔ ۱ بخش ۲۳ را به صورتی بیان کنید که برای سری فوریه سینوسی به کار برده شود. بخصوص خاطرنشان کنید که چرا در این حالت شرایط $f(\circ)=f(\pi)=\circ$ اضافه می‌شود.

۴. فرض کنید a_n و b_n نمایش ضرایب فوریه در لم بخش ۲۲ باشد. با استفاده از این که ضرایب موجود در سری فوریهٔ هر تابع عضو $C_p(-\pi,\pi)$ همیشه به صفر میل می‌کنند، وقتی n به بینهایت میل کند (بخش ۱۶) نشان دهید که:

$$\lim_{n\to\infty} na_n=\circ \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} nb_n=\circ$$

۵. از سری فوریه

$$۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\sin ns$$

که در ابتدای بخش ۲۳ بیان شد و از سری فوریهٔ

$$۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)s}{۲n-۱}$$

که در مثال بخش ۲۲ مطرح شد از $s=\circ$ تا $s=x$ $(-\pi\leq x\leq\pi)$ انتگرال بگیرید. در هر حالت تابعی را که با سری جدید نمایش داده می‌شود، به طور نموداری تشریح کنید.

۶. فرض کنید p_n $(n=۱,۲,\ldots,N)$ و q_n $(n=۱,۲,\ldots,N)$ نمایش اعدادی حقیقی باشند، به طوری که لااقل یکی از اعداد p_n مثلاً p_m غیر صفر باشد. با نوشتن معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^۲\sum_{n=۱}^{N}p_n^۲+۲x\sum_{n=۱}^{N}p_nq_n+\sum_{n=۱}^{N}q_n^۲=\circ$$

به شکل

$$\sum_{n=۱}^{N}(p_nx+q_n)^۲=\circ$$

نشان دهید که عدد $x_\circ=-q_m/p_m$ تنها ریشهٔ حقیقی ممکن آن است. نتیجه بگیرید که به

علت اینکه وجود دو ریشهٔ حقیقی متمایز غیر ممکن است، دترمینان این معادلهٔ درجهٔ دوم منفی یا صفر است. بدین ترتیب نامساوی کوشی به دست می‌آید (بخش۲۲):

$$\left(\sum_{n=1}^{N} p_n q_n\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{N} p_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} q_n^2\right)$$

که حتی اگر همه p_nها صفر باشند برقرار است.

۷. مثل مثال بخش۲۲ فرض کنید $S_N(x)$ نمایش مجموع جزئی مرکب از مجموع N جملهٔ اول سری فوریه تابع f آن مثال باشد

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \qquad (-\pi<x<\pi)$$

الف) با قرار دادن $A=x$ و $B=(2n-1)x$ در اتحاد مثلثاتی

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

و جمع کردن طرفین معادلهٔ حاصل از $n=1$ تا $n=N$ فرمول مجموع زیر را به دست آورید:

$$2\sum_{n=1}^{N} \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2Nx}{\sin x} \qquad (x\neq 0\ ,\ \pm\pi\ ,\ \pm 2\pi\ ,\ \dots)$$

با استفاده از این فرمول مشتق $S_N(x)$ در بازهٔ $0<x<\pi$ را به صورت خارج‌قسمت سادهٔ زیر بنویسید:

$$S_N'(x) = \frac{\sin 2Nx}{\sin x} \qquad (0<x<\pi)$$

ب) به کمک عبارت حاصل برای مشتق $S_N'(x)$ در قسمت (الف) نشان دهید که اولین اکسترمم $S_N'(x)$ در بازهٔ $0<x<\pi$ ماکزیمم نسبی است که در $x=\pi/(2N)$ گرفته می‌شود.

ج) با انتگرالگیری از طرفین دستور مجموع قسمت (الف) از $x=0$ تا $x=\pi/(2N)$ نشان دهید که:

$$s_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = I_1 + I_2$$

که در آن:

$$I_۱=\int_۰^{\pi/(۲n)}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\sin ۲Nx\,dx \quad , \quad I_۲=\int_۰^{\pi/(۲N)}\frac{\sin ۲Nx}{x}dx$$

تحقیق کنید که انتگرانهای این دو انتگرال در بازهٔ $۰<x<\pi/(۲N)$ قطعه‌ای پیوسته‌اند و لذا این انتگرالها عملاً موجودند.

د) با استفاده از این که انتگران انتگرال $I_۱$ در قسمت (ج) محدود است (بخش ۱۰ را ببینید) نشان دهید که مقدار $I_۱$ وقتی N به بینهایت میل کند به صفر میل می‌کند. سپس نتیجه بگیرید که:

$$\lim_{N\to\infty} s_N\left(\frac{\pi}{۲N}\right)=\int_۰^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt$$

مقدار این انتگرال آخری عدد σ در مثال بخش ۲۲ است.[۱]

۸. با استفاده از قضیه ۱ بخش ۲۴ نشان دهید که مجموعهٔ متعامدیکه $\{\phi_n(x)\}$ در یک فضای تابعی مفروض بسته است (بخش ۱۲) اگر در آن فضا کامل باشد.

۹. فرض کنید $\{\phi_n(x)\}$ یک مجموعهٔ متعامدیکه در فضای توابع پیوسته روی بازهٔ $a\le x\le b$ باشد و سری فوریهٔ تعمیم یافته تابع f در آن فضا روی آن بازه به طور یکنواخت به مجموع $S(x)$ همگرا باشد.

الف) نشان دهید که ثابتهای فوریهٔ S و f نسبت به $\{\phi_n(x)\}$ یکی هستند.

ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف) و مسألهٔ ۱۱ بخش ۱۴ نشان دهید که اگر $\{\phi_n(x)\}$ بسته باشد (بخش ۱۲) آنگاه در بازهٔ $a\le x\le b$ داریم $S(x)=f(x)$.

راهنمایی: از بخش ۲۲ به یادآورید که مجموع یک سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته تابعی پیوسته است و می‌توان از سری جمله به جمله انتگرال گرفت.

۱۰. دنبالهٔ توابع $S_N(x)$ $(N=۱,۲,...)$ را که در بازهٔ $۰\le x\le ۱$ با ضابطه‌های زیر

---

۱. این انتگرال مقدار خاصی از تابع انتگرال سینوسی $si\ (x)$ است که مثلاً در کتاب آبرامویتس واستگون (۱۹۷۲ صفحهٔ ۲۴۴) که در کتابنامه آمده، جدول بندی شده است. برای یافتن σ می‌توان از روشهای تقریبی برای محاسبهٔ انتگرالهای معین نیز استفاده کرد.

تعریف شده‌اند در نظر بگیرید:

$$S_N(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\leq x\leq \frac{۱}{N} \quad \text{هر گاه} \\ \sqrt{N} & \frac{۱}{N}<x<\frac{۲}{N} \quad \text{هرگاه} \\ ۰ & \frac{۲}{N}\leq x\leq ۱ \quad \text{هر گاه} \end{cases}$$

نشان دهید که این دنباله نقطه به نقطه به تابع $f(x)=۰$ $(۰\leq x\leq ۱)$ همگراست اما در فضای $C_p(۰,۱)$ یا هر زیر فضای $C_p(۰,۱)$ در میانگین به f همگرا نیست.

۱۱. دنبالهٔ توابع $S_N(x)$ $(N=۱,۲,...)$ را که در بازهٔ $۰\leq x\leq ۱$ با ضابطه‌های زیر تعریف شده‌اند در نظر بگیرید:

$$s_N(x)=\begin{cases} ۰ & x=۱\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{۱}{N} \quad \text{هر گاه} \\ ۱ & x\neq ۱\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{۱}{N} \quad \text{هر گاه} \end{cases}$$

نشان دهید که این دنباله در $C_p(۰,۱)$ در میانگین به تابع $f(x)=۱$ همگراست اما به ازای هر عدد صحیح و مثبت p داریم:

$$\lim_{N\to\infty} s_N\left(\frac{۱}{p}\right)=۰$$

راهنمایی: ملاحظه کنید که اگر $N\geq p$ آنگاه $S_N(۱/p)=۰$.

فصل ۳

روش فوریه

برای حل مسائل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل جزئی که در بخش۹ (فصل۱) دیده شد، اکنون به ارائه دقیق روش فوریه می‌پردازیم. اگرچه، از آن مثال به منظور ایجاد انگیزه در روش فوریه استفاده شده، اما آن وقت از این نظر که قادر نبودیم توابع را به سری فوریه بسط دهیم، جداً محدودیت داشتیم. البته فصل۲ به این مشکل سروسامان داده است.

به محض اینکه مبانی روش فوریه ارائه شد، در فصل ۴، از آن برای حل مسائل مقدار مرزی گوناگون استفاده خواهیم کرد که جوابهای آنها مستلزم نمایشهای سری فوریه‌اند. سپس، در فصول بعدی، از آن روش برای حل مسائلی استفاده خواهیم کرد که جواب آنها شامل انواع دیگری از نمایش، اما در ارتباط نزدیک با نمایشهای اخیر، است.

۲۵. عملگرهای خطی

به خاطر می‌آوریم (بخش ۱۰) که هر دو تابع u_1 و u_2 متعلق به یک فضای تابعی، دامنهٔ تعریف یکسان دارند و هر ترکیب خطی از آنها $c_1u_1 + c_2u_2$ نیز متعلق به این فضاست. یک عملگر خطی روی یک فضای تابعی یک عملگر مانند L است که هر تابع u از آن فضا را به یک تابع Lu تبدیل می‌کند و لزومی ندارد Lu متعلق به آن فضا باشد و دارای این

خاصیت است که برای هر دو تابع u_1 و u_2 و هر دو ثابت c_1 و c_2 داریم:

$$L(c_1u_1+c_2u_2)=c_1Lu_1+c_2Lu_2 \tag{1}$$

بخصوص،

$$L(u_1+u_2)=Lu_1+Lu_2 \quad , \quad L(c_1u_1)=c_1Lu_1 \tag{2}$$

تابع Lu ممکن است یک تابع ثابت باشد، توجه داریم که:

$$L(0)=L(0\cdot 0)=0L(0)=0$$

اگر u_3 یک تابع سوم در آن فضا باشد، آنگاه:

$$L(c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3)=L(c_1u_1+c_2u_2)+L(c_3u_3)= c_1Lu_1+c_2Lu_2+c_3Lu_3$$

و به استقراء به دست می‌آوریم که L ترکیبهای خطی از N تابع را به طریق زیر تبدیل می‌کند:

$$L(\sum_{n=1}^{N} c_n u_n)=\sum_{n=1}^{N} c_n Lu_n \tag{3}$$

مثال ۱. فرض کنید u_1 و u_2 توابعی از متغیرهای مستقل x و y باشند. بر طبق خواص مقدماتی مشتق، مشتق هر ترکیب خطی از دو تابع می‌تواند به صورت همان ترکیب خطی از تک تک مشتقها نوشته شود. بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial x}(c_1u_1+c_2u_2)=c_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+c_2\frac{\partial u_2}{\partial x} \tag{4}$$

مشروط بر اینکه $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ و $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ موجود باشند. با توجه به خاصیت (۴)، دستهٔ همهٔ توابع از x و y که مشتقات جزئی مرتبه اول آنها نسبت به x در صفحهٔ xy موجودند، یک فضای تابعی است. عملگر $\frac{\partial}{\partial x}$ روی آن فضا یک عملگر خطی است. آن عملگر به طور طبیعی به عنوان یک عملگر دیفرانسیل خطی دسته‌بندی می‌شود.

مثال ۲. یک فضا از توابع $u(x,y)$ را در نظر بگیرید که روی صفحهٔ xy تعریف شده‌اند. اگر $f(x,y)$ یک تابع مشخصی باشد که روی صفحهٔ xy تعریف شده است، آنگاه عملگر L که هر تابع $u(x,y)$ را در $f(x,y)$ ضرب می‌کند، یعنی

$Lu=fu$ ، یک عملگر خطی است.

اگر عملگرهای خطی، متمایز یا غیر متمایز، L و M طوری هستند که M هر تابع u از یک فضای تابعی را به یک تابع Mu متعلق به حوزهٔ عمل L تبدیل کند، و $u_۱$ و $u_۲$ دو تابع دلخواه در آن فضای تابعی باشند، آنگاه از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود که:

$$LM(c_۱u_۱+c_۲u_۲)=L(c_۱Mu_۱+c_۲Mu_۲)=c_۱LMu_۱+c_۲LMu_۲ \qquad (۵$$

یعنی اینکه، حاصلضرب LM از عملگرهای خطی نیز یک عملگر خطی است.
مجموع دو عملگر خطی توسط معادلهٔ ذیل تعریف می‌شود:

$$(L+M)u=Lu+Mu \qquad (۶$$

اگر u را در اینجا با $c_۱u_۱+c_۲u_۲$ جایگزین کنیم، می‌توانیم ببینیم که مجموع $L+M$ یک عملگر خطی است و بنابراین مجموع هر تعداد متناهی از عملگرهای خطی، خطی است.

مثال۳. فضای توابع $u(x,y)$ را در نظر بگیرید که مشتقات مرتبه اول و دوم آنها نسبت به x در یک دامنهٔ مفروض، در صفحهٔ xy موجودند و فرض کنید L نمایش عملگر $\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}$ روی این فضا باشد. $M=f\frac{\partial}{\partial x}$، حاصلضرب عملگرهای خطی در مثالهای ۱ و۲ روی همین فضا خطی است و بنابراین مجموع:

$$L+M=\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}+f\frac{\partial}{\partial x}$$

خطی است.

۲۶. اصل برهمنهی

هر جمله از یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی تابع u (بخش۱)، از حاصلضرب یک تابع از متغیرهای مستقل با یکی از مشتقات u یا خود u تشکیل می‌شود. بنابراین یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی به صورت زیر است:

$$Lu=۰ \qquad (۱$$

که در آن L یک عملگر دیفرانسیل خطی است. برای مثال،
اگر:

$$L = A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + F \tag{۲}$$

که در آن حروف A تا F نمایش توابعی فقط از x و y هستند، معادلهٔ (۱) یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی با مشتقات جزئی برای تابع $u=u(x,y)$ است.

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0 \tag{۳}$$

شرایط مرزی همگن خطی نیز به صورت (۱) هستند. در این صورت متغیرهائی که به عنوان شناسه‌های تابع u و شناسه‌های ضرائب تابعی عملگر خطی L ظاهر می‌شوند، به گونه‌ای محدود می‌شوند که نمایش نقاط روی مرز یک دامنه باشند.

اکنون فرض می‌کنیم u_n $(n=1,2,...,N)$ نمایش توابعی باشد که در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند، یعنی اینکه، برای هر n، $Lu_n=0$. از خاصیت (۳)، بخش ۲۵، دربارهٔ عملگرهای خطی نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی از آن توابع نیز در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند. اصل برهمنهی جوابها را، که اساس روش فوریه برای حل مسائل مقدار مرزی خطی است، به صورت ذیل بیان می‌کنیم:

قضیه۱. اگر هر کدام از N تابع u_1 و u_2 و ... و u_N در یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی $Lu=0$ صدق کند، آنگاه هر ترکیب خطی

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_Nu_N \tag{۴}$$

که در آن c ها ثابتهای دلخواه هستند، در آن معادلهٔ دیفرانسیل صدق می‌کند. اگر هر کدام از آن N تابع در یک شرط مرزی همگن خطی $Lu=0$ صدق کند، آنگاه هر ترکیب خطی (۴) در آن شرط مرزی صدق می‌کند.

اصل برهمنهی در معادلات دیفرانسیل معمولی مفید است. برای مثال، از دو جواب $y=e^x$ و $y=e^{-x}$ از معادلهٔ همگن خطی $y''-y=0$، می‌توان جواب کلی $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ را نوشت. در این کتاب عمدتاً با کاربرد اصل برهمنهی روی جوابهای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مواجه خواهیم بود.

مثال. معادلهٔ گرمای همگن خطی زیر (بخش۲)

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \qquad (0<x<c \quad , \quad t>0) \tag{۵}$$

و شرایط مرزی همگن خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u_x(0,t) = 0 \qquad u_x(c,t) = 0 \qquad (t>0) \tag{۶}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که اگر

$$L = k\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}$$

و

$$u_n = exp\left(\frac{-n^2\pi^2 k}{c^2}t\right)cos\frac{n\pi x}{c} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

و

$$u_0 = \frac{1}{2}$$

آنگاه $Lu_n = 0$ $(n=0,1,2,\ldots)$. بنابراین از قضیه ۱ نتیجه می‌شود $Lu=0$ برای هر ترکیب خطی

$$u = a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_N u_N$$

یعنی اینکه، تابع

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\, exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{c^2}t\right)cos\frac{n\pi x}{c} \tag{۷}$$

در معادلهٔ گرمای (۵) صدق می‌کند،هر گاه $N\geq 1$.

اگر چه نوشتن $u_0=1$ ، با منظور کردن a_0 بجای $\frac{a_0}{2}$ در عبارت (۷)، خیلی طبیعی به نظر می‌رسد، انتخاب $u_0=\frac{1}{2}$ در اینجا به این دلیل است که بعداً (بخش۲۷) از نظر نمادی مناسب است.

همچنین برای شرایط مرزی (۶) می‌نویسیم $L=\frac{\partial}{\partial x}$ و مشاهده می‌کنیم مقدار Lu_n $(n=0,1,2,\ldots)$ صفر است، هر گاه $x=0$ و $x=c$. بنابراین مجدداً بنا به قضیه ۱، مقدار Lu صفر است هر گاه $x=0$ و $x=c$. این نشان می‌دهد که ترکیب خطی (۷) نیز در شرایط مرزی (۶) صدق می‌کند.

به منظور بیان یک اصل برهمنهی کلی، مشابه قضیه ۱، که در مورد یک مجموعه نامتناهی از توابع $u_۱$ و $u_۲$ و... به کار می‌رود، باید همگرایی و مشتق پذیری سری‌های نامتناهی متشکل از این توابع را بررسی کرد. این مطلب اینجا نشان داده شده است:

فرض کنید که توابع u_n و ثابتهای c_n طوری باشند که سری نامتناهی متشکل از جملات $c_n u_n$ در سرتاسر دامنه‌ای از متغیرهای مستقل همگرا باشد. مجموع آن سری یک تابع به صورت زیر است:

$$u = \sum_{n=۱}^{\infty} c_n u_n \qquad (۸$$

فرض کنید x یکی از متغیرهای مستقل باشد. آن سری نسبت به x دیفرانسیل‌پذیر، یا جمله به جمله دیفرانسیل‌پذیر است، اگر مشتقات $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ موجود باشند و سری توابع $c_n \frac{\partial u_n}{\partial x}$ به $\frac{\partial u}{\partial x}$ همگرا باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=۱}^{\infty} c_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \qquad (۹$$

توجه کنید که اگر قرار است یک سری دیفرانسیل‌پذیر باشد، باید همگرا باشد. شرایط کافی برای دیفرانسیل‌پذیری را در بخش ۲۲ ملاحظه کردید. اگر، بعلاوه، سری (۹) نسبت به x دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه سری (۸) نسبت به x دوبار دیفرانسیل‌پذیر است.

فرض کنید L یک عملگر خطی است که در آن Lu حاصلضرب تابعی از متغیرهای مستقل در u یا در یک مشتق u است، یا Lu مجموعی از یک تعداد متناهی از اینگونه جملات است. اکنون نشان می‌دهیم که اگر سری (۸) برای همهٔ مشتقات موجود در L دیفرانسیل پذیر باشد و اگر هر کدام از توابع u_n در سری (۸) در معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی $Lu_n = ۰$ صدق کند، آنگاه u نیز در این معادله صدق می‌کند، یعنی اینکه $Lu = ۰$.

برای انجام این کار، ابتدا توجه داریم که بر طبق تعریف مجموع یک سری نامتناهی،

$$f\frac{\partial u}{\partial x}=f\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}c_n\frac{\partial u_n}{\partial x}$$

هر گاه سری (۸) نسبت به x دیفرانسیل پذیر باشد. بنابراین:

$$f\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{N\to\infty}f\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{N}c_n u_n \tag{۱۰}$$

در اینجا عملگر $\frac{\partial}{\partial x}$ می‌تواند با مشتقات دیگر جایگزین شود، اگر آن سری بدان نحو دیفرانسیل‌پذیر باشد. سپس با جمع کردن طرفهای متناظر معادلات مشابه معادلهٔ (۱۰)، از جمله آن معادله‌ای که احتمالاً هیچ مشتقی در آن ظاهر نمی‌شود، عبارت زیر را به دست می‌آوریم:

$$Lu=\lim_{N\to\infty}L\left(\sum_{n=1}^{N}c_n u_n\right) \tag{۱۱}$$

مجموع طرف راست معادلهٔ (۱۱) یک ترکیب خطی از توابع u_1 و u_2 و ... و u_N است، و اگر $Lu_n=0$ $(n=1,2,\ldots)$ ،بنابر قضیه۱ برای هر N می‌توان نوشت:

$$L\left(\sum_{n=1}^{N}c_n u_n\right)=0$$

بنابراین از معادلهٔ (۱۱) نتیجهٔ مورد نظر، $Lu=0$ را داریم.

یک شرط مرزی همگن خطی نیز با یک معادلهٔ $Lu=0$ نمایش داده می‌شود. ممکن است بخواهیم تابع Lu در نقاطی روی مرز در یک شرط پیوستگی صدق کند، تا بتوانیم مقادیر آن را در چنین نقاطی، حد مقدار تابع بگیریم، هر گاه نقاط از درون دامنه به آنها میل کنند.

اکنون تعمیم زیر از قضیه ۱ به دست می‌آید:

قضیه۲. فرض کنید که هر تابع از یک مجموعهٔ نامتناهی از توابع u_1 و u_2 و... در یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی با شرط مرزی $Lu=0$ صدق کند. در این صورت سری نامتناهی

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n \tag{12}$$

که در آن c_nها ثابت هستند، نیز در $Lu=0$ صدق می‌کند، مشروط بر اینکه آن سری همگرا بوده، برای همهٔ مشتقات موجود در L دیفرانسیل‌پذیر باشد و چنانچه $Lu=0$ یک شرط مرزی باشد، در هر شرط پیوستگی مورد نیاز در مرز صدق کند.

اکنون، با قضیهٔ۲، آماده هستیم که توضیح روش فوریه را برای حل مسائل مقدار مرزی شروع کنیم.

۲۷. یک مسأله دما

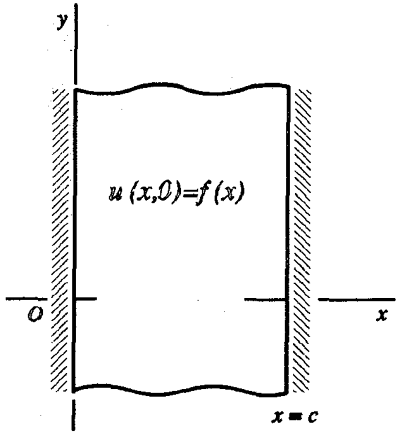
مسأله مقدار مرزی خطی ذیل را در نظر بگیرید:

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \qquad (0<x<c \quad , \quad t>0) \tag{1}$$

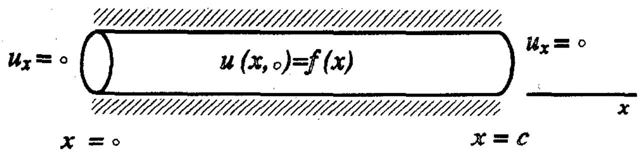
$$u_x(0,t)=0 \qquad u_x(c,t)=0 \qquad (t>0) \tag{2}$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad (0<x<c) \tag{3}$$

این مسأله‌ای است برای توزیع دما $u(x,t)$ در یک قطعهٔ نامتناهی از ماده که با صفحات $x=0$ و $x=c$ محدود شده و وجوه آن عایق‌بندی شده و توزیع دمای اولیه در آن یک تابع داده شده $f(x)$ می‌باشد که متغیر x در آن فاصله از وجه $x=0$ است. (شکل ۲۶ را ببینید).



شکل ۲۶



شکل ۲۷

همچنین مسأله‌ای است در تعیین دماهای داخل یک میله با سطح مقطع یکنواخت، به شکل استوانه مستدیر قائم (شکل۲۷)، که قاعده‌های آن در صفحات $x=۰$ و $x=c$ و سطح جانبی آن، موازی محور x ها، عایق‌بندی شده و دماهای اولیهٔ آن $f(x)$ $(۰<x<c)$ می‌باشند. فرض می‌کنیم که k ضریب نفوذ گرمایی ماده در سرتاسر آن قطعه، یا میله، ثابت باشد و هیچ گرمایی در داخل آن تولید نشود.

در مثال بخش۲۶ دیدیم که همهٔ توابع

$$u_{۰} = \frac{۱}{۲}\ , u_n = exp(-\frac{n^{۲}\pi^{۲}k}{c^{۲}}t)\cos\frac{n\pi x}{c} \qquad (n=۱,۲,...) \qquad (۴$$

در شرایط همگن (۱) و (۲) مسأله دمای داده شده در آنجا صدق می‌کنند. در این بخش،

روشی را توضیح می‌دهیم که در فصول بعدی برای به دست آوردن اینگونه توابع باید از آن استفاده کرد. همچنین شرط غیر همگن (۳) را اعمال کرده، جواب آن مسأله مقدار مرزی را کامل خواهیم کرد. بعضی از مراحلی که باید انجام شوند صوری، یا با دستکاری استادانه‌اند. درستی جواب به دست آمده در بخش ۲۸ نشان داده خواهد شد.

برای تعیین جوابهای غیر بدیهی $(u\not\equiv 0)$ برای شرایط همگن (۱) و (۲) در جستجوی توابع جدا شده به شکل

$$u = X(x)\,T(t) \tag{۵}$$

هستیم که در آن شرایط صدق کنند. توجه کنید که X یک تابع فقط از متغیر x و T یک تابع فقط از متغیر t است. همچنین توجه کنید که X و T باید غیر بدیهی باشند $(X\not\equiv 0\,,\, T\not\equiv 0)$.

اگر $u=XT$ در معادلهٔ (۱) صدق کند، آنگاه:

$$X(x)\,T'(t) = kX''(x)\,T(t)$$

و برای آن مقادیر از x و t که $X(x)T(t)$ مخالف صفر است، می‌توانیم بر $kX(x)T(t)$ تقسیم کرده تا متغیرها را جدا کنیم:

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{۶}$$

چون طرف چپ معادلهٔ فوق فقط تابعی از t هست پس با x تغییر نمی‌کند. در حالی که با تابعی فقط از متغیر x برابر است و بنابراین نمی‌تواند با t تغییر کند. بنابراین هر دو طرف باید در یک مقدار ثابت مثل $-\lambda$ مشترک باشند. یعنی اینکه:

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda \quad , \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{۷}$$

البته انتخاب $-\lambda$ بجای λ برای ثابت جداسازی یک مسألهٔ جزئی نمادگذاری است. تنها به دلیل تناسب آن در بخشهای بعد (فصل۵)، $-\lambda$ نوشته‌ایم.

برای اینکه $u=XT$ در اولین شرط (۲) صدق کند، $X'(0)T(t)$ باید برای هر $t(t>0)$

صفر باشد. از اینکه لازم است $T\not\equiv 0$ باشد، نتیجه می‌شود که $X'(0)=0$. به طور مشابه، $u=XT$ در شرط دوم (۲) صدق می‌کند هرگاه $X'(c)=0$. بنابراین $u=XT$ در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کند هر گاه X و T در دو مسألهٔ همگن زیر صدق کنند:

۸) $$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , \quad X'(0)=0 \quad , \quad X'(c)=0$$

۹) $$T'(t)+\lambda k T(t)=0$$

که در آن پارامتر λ در هر دو مسأله یک مقدار دارد. برای یافتن جوابهای غیر بدیهی این زوج مسأله، ابتدا توجه داریم که مسألهٔ (۹) هیچ شرط مرزی ندارد. لذا برای هر مقدار λ جواب غیر بدیهی دارد. چون مسألهٔ (۸) دو شرط مرزی دارد، فقط برای مقادیر خاصی از λ می‌تواند جوابهای غیربدیهی داشته باشد. مسألهٔ (۸) یک مسألهٔ استورم-لیوویل نامیده می‌شود. نظریه کلی این نوع مسائل در فصل ۵ ارائه می‌شود، که در آنجا ثابت می‌شود برای وجود جوابهای غیر بدیهی، λ باید حقیقی باشد.

اگر $\lambda=0$ ، معادلهٔ دیفرانسیل مسألهٔ (۸) به $X''(x)=0$ تبدیل می‌شود. جواب عمومی آن $X(x)=A\ x\ +B$ است، که در آن A و B ثابت هستند. چون $X'(x)=A$ ، هر دو شرط مرزی $X'(0)=0$ و $X'(c)=0$ زمانی برقرارند که $A=0$ باشد.بنابراین $X(x)=B$ ، و جز برای یک مضرب ثابت، جواب مسألهٔ (۸) برای $\lambda=0$ عبارت است از $X(x)=\frac{1}{2}$. توجه کنید که در اینجا هر مقدار غیر صفر برای B می‌توانست انتخاب شود.

اگر $\lambda>0$ ، می‌توان نوشت $\lambda=\alpha^2$ $(\alpha>0)$. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل (۸) به شکل $X''(x)+\alpha^2X(x)=0$ در می‌آید، جواب عمومی آن عبارت است از:

$$X(x)=C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x$$

با نوشتن
$$X'(x)=-C_1\alpha\sin\alpha x+C_2\alpha\cos\alpha x$$

و به خاطر سپردن این مطلب که α مثبت و بخصوص غیر صفر است، می‌بینیم که شرط $X'(0)=0$ نتیجه می‌دهد $C_2=0$. بعلاوه، از شرط $X'(c)=0$ نتیجه می‌شود که $C_1\ \alpha\sin\alpha c=0$. اکنون اگر $X(x)$ باید یک جواب غیربدیهی مسألهٔ (۸) باشد، باید

$C_1 \neq 0$. بنابراین α باید یک ریشهٔ مثبت معادلهٔ $\sin \alpha c = 0$ باشد. یعنی اینکه؛

$$\alpha = \frac{n\pi}{c} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

پس جز برای مضرب ثابت C_1:

$$X(x) = \cos \frac{n\pi x}{c} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

اگر $\lambda < 0$، می‌نویسیم $\lambda = -\alpha^2$ $(\alpha > 0)$. در این حالت معادلهٔ دیفرانسیل مسألهٔ (۸) جواب عمومی به صورت زیر دارد:

$$X(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

چون:

$$X'(x) = C_1 \alpha e^{\alpha x} - C_2 \alpha e^{-\alpha x}$$

شرط $X'(0) = 0$ نتیجه می‌دهد که $C_2 = C_1$. بنابراین:

$$X(x) = C_1 \left(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}\right)$$

یا:

$$X(x) = 2C_1 \cosh \alpha x$$

اما شرط $X'(c) = 0$ ایجاب می‌کند $C_1 \sinh \alpha c = 0$، و چون $\sinh \alpha c \neq 0$، در نتیجه $C_1 = 0$. بنابراین اگر $\lambda < 0$ باشد مسألهٔ (۸) فقط جواب بدیهی $X(x) \equiv 0$ دارد.

مقادیر $\lambda_0 = 0$ و $\lambda_n = (\frac{n\pi}{c})^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ از پارامتر λ که مسألهٔ (۸) به ازای آنها جوابهای غیر بدیهی دارد، مقادیر ویژه آن مسأله نامیده می‌شوند و جوابهای غیر بدیهی متناظر آنها یعنی $X_0(x) = \frac{1}{2}$ و $X_n(x) = \cos(\frac{n\pi x}{c})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ توابع ویژه متناظر نامیده می‌شوند.

اکنون به معادلهٔ دیفرانسیل (۹) برمی‌گردیم و جواب آن را وقتی λ یک مقدار ویژه است تعیین می‌کنیم. هر گاه $\lambda = \lambda_0 = 0$، جز برای یک مضرب ثابت، $T_0(t) = 1$ جواب است. هرگاه $\lambda = \lambda_n (\frac{n\pi}{c})^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ واضح است که هر جواب معادلهٔ (۹) مضرب ثابتی از $T_n(t) = \exp(\frac{-n^2\pi^2 kt}{c^2})$ است.

بنابراین هر کدام از حاصلضربهای

$$u_{\circ} = X_{\circ}(x)\,T_{\circ}(t) = \frac{۱}{۲} \tag{۱۲}$$

و

$$u_n = X_n(x)\,T_n(t) = exp\,(-\frac{n^{۲}\pi^{۲}k}{c^{۲}}t)\cos\frac{n\pi x}{c} \quad (n=۱,۲,...) \tag{۱۳}$$

در شرایط همگن (۱) و (۲) صدق می‌کنند. اینها همان جوابهای (۴) هستند. شیوه‌ای که به کار برده شد تا آنها را به دست آوردیم، روش جداسازی متغیرها نام دارد.

با فرض اینکه شرایط قضیه ۲ بخش ۲۶ برقرارند، اکنون می‌توانیم از آن قضیه استفاده کرده، ببینیم که ترکیب خطی تعمیم یافتهٔ

$$u(x,t) = \frac{a_{\circ}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n\,exp(-\frac{n^{۲}\pi^{۲}k}{c^{۲}}t)\cos\frac{n\pi x}{c} \tag{۱۴}$$

از توابع (۱۲) و (۱۳) نیز در شرایط همگن (۱) و (۲) صدق می‌کنند. شرط (غیرهمگن) باقیمانده $u(x,\circ)=f(x)$ ، لازم دارد که:

$$f(x) = \frac{a_{\circ}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{c} \qquad (\circ < x < c)$$

یا اینکه، در حقیقت، ثابتهای a_n ضرائب ذیل:

$$a_n = \frac{۲}{c}\int_{\circ}^{c} f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx \qquad (n=\circ,۱,۲,...) \tag{۱۵}$$

در سری کسینوس فوریهٔ f روی بازهٔ $\circ < x < c$ باشند (بخش ۲۱).

جواب صوری ما از مسألهٔ دما (۱)-(۳) اکنون کامل است. آن از سری (۱۴) به همراه عبارت (۱۵) برای ضرائب a_n تشکیل می‌شود. روشی که از آن استفاده شد و متشکل از جداسازی متغیرها، برهمنهی، و سری فوریه است، روش فوریه می‌باشد.

توجه دارید که هر گاه t به بینهایت میل کند، دماهای حالت مانا به دست می‌آیند و با $\frac{a_{\circ}}{۲}$ برابرند. به وضوح این دمای ثابت مقدار میانگین، یا متوسط دماهای اولیهٔ $f(x)$ روی بازهٔ $\circ < x < c$ است.

مثال . فرض کنید ضخامت c از آن قطعه برابر با واحد باشد و دماهای اولیه عبارت باشند از $f(x)=x$ $(۰\leq x\leq ۱)$. در اینجا:

$$a_۰ = ۲\int_۰^۱ x dx = ۱$$

با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء و مشاهدهٔ اینکه برای n صحیح، $\sin n\pi = ۰$, $\cos n\pi = (-۱)^n$ نتیجه می‌گیریم که:

$$a_n = ۲\int_۰^۱ x\cos n\pi x\, dx = ۲\left[\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}+\frac{\cos n\pi x}{n^۲\pi^۲}\right]_۰^۱ = ۲\frac{(-۱)^n-۱}{n^۲\pi^۲}$$

$$(n=۱,۲,...)$$

ما $a_۰$ را جداگانه محاسبه کرده‌ایم تا از تقسیم بر صفر جلوگیری شود.

هر گاه $c=۱$ و از این مقادیر a_n $(n=۰,۱,۲,...)$ استفاده شود عبارت (۱۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n-۱}{n^۲}\exp(-n^۲\pi^۲kt)\cos n\pi x$$

یا [پاورقی مسأله ۱(ب)،بخش ۱۴ را ببینید]

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\exp\left[-(۲n-۱)^۲\pi^۲kt\right]}{(۲n-۱)^۲}\cos(۲n-۱)\pi x \quad (۱۶$$

۲۸. تحقیق درستی جواب

اکنون به تحقیق کامل درستی جواب مسأله مقدار مرزی

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t) \qquad (۰<x<c \;,\; t>۰) \quad (۱$$

$$u_x(۰,t)=۰ \quad , \quad u_x(c,t)=۰ \qquad (t>o) \quad (۲$$

$$u(x,۰)=f(x) \qquad (۰<x<c) \quad (۳$$

می‌پردازیم که در بخش ۲۷، به دست آورده شد. به خاطر می‌آوریم که توابع پیوستهٔ

$$u_{\circ}=\frac{1}{2} \quad , \quad u_n=exp\,(-\frac{n^2\pi^2 k}{c^2}t)\cos\frac{n\pi x}{c} \qquad (n=1,2,...) \tag{۴}$$

طوری به دست آمدند که در شرایط همگن (۱) و (۲) صدق می‌کنند. همانگونه که پیش از این در مثال بخش ۲۶ نشان داده شد، قضیه ۱ آن بخش تضمین می‌کند که هر ترکیب خطی

$$u=\sum_{n=\circ}^{N} a_n u_n$$

از آن توابع نیز در شرایط (۱) و (۲) صدق کند. البته، تعمیم آن ترکیب خطی به یک سری نامتناهی

$$u=\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n u_n \tag{۵}$$

با جواب در بخش ۲۷،

$$u(x,t)=\frac{a_{\circ}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, exp\,(-\frac{n^2\pi^2 k}{c^2}t)\cos\frac{n\pi x}{c} \tag{۶}$$

یکی است، هر گاه برای ضرائب مقادیر a_n ذیل در نظر گرفته شوند:

$$a_n=\frac{2}{c}\int_{\circ}^{c} f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx \qquad (n=\circ,1,2,...) \tag{۷}$$

فرض می‌کنیم که f روی بازهٔ $\circ<x<c$ قطعه‌ای هموار (بخش ۱۷) است. همچنین در هر نقطهٔ ناپیوستگی f در آن بازه، مقدار $f(x)$ را برابر با میانگین حدود یکطرفهٔ $f(x+)$ و $f(x-)$ تعریف می‌کنیم. توجه دارید که چگونه از عبارت (۷) نتیجه می‌شود:

$$|a_n|\le\frac{2}{c}\int_{\circ}^{c} |f(x)|\,dx \qquad (n=\circ,1,2,...)$$

و در نتیجه یک ثابت M مستقل از n وجود دارد که:

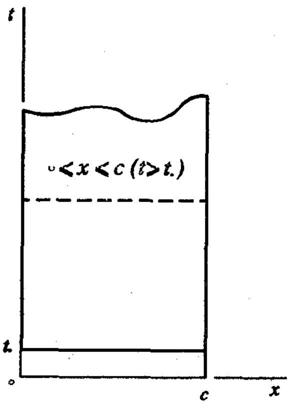
$$|a_n|\le M \qquad (n=\circ,1,2,...) \tag{۸}$$

بررسی درستی جواب را با این مطلب شروع می‌کنیم که نشان می‌دهیم سری (۵) با

ضرائب (۷) در ناحیهٔ $\circ \le x \le c$ و $t > \circ$ از صفحهٔ xt واقعاً همگراست و در شرایط همگن (۱) و (۲) صدق می‌کند. برای تصدیق این مطلب، ابتدا از عبارات (۴) و نامساویهای (۸) متوجه می‌شویم که اگر $t_\circ$ یک عدد مثبت ثابت باشد،

$$|a_n u_n| \le M \exp\left(-\frac{n^{۲}\pi^{۲}k}{c^{۲}}t_\circ\right) \qquad (n = \circ, ۱, ۲, \ldots) \qquad (۹$$

هرگاه $\circ \le x \le c$ و $t \ge t_\circ$ (شکل۲۸).



شکل ۲۸

آزمون نسبت نشان می‌دهد که سری با مقادیر ثابت

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} n^i \exp\left(-\frac{n^{۲}\pi^{۲}k}{c^{۲}}t_\circ\right) \qquad (۱۰$$

همگراست، هرگاه i یک عدد صحیح نامنفی باشد و بخصوص، هرگاه $i = \circ$ بنابراین، از آزمونهای همگرایی مقایسه و مطلق می‌دانیم که سری (۵) همگراست هرگاه $\circ \le x \le c$ و $t \ge t_\circ$.

برای اینکه نشان دهیم سری‌های زیر از مشتقات

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} (a_n u_n)_x \quad , \quad \sum_{n=\circ}^{\infty} (a_n u_n)_{xx} \qquad (۱۱$$

روی بازهٔ $\circ \le x \le c$ برای هر t ثابت $(t \ge t_\circ)$ همگرای یکنواخت هستند، می‌توانیم از سری (۱۰) و آزمون M − ویراشتراس (بخش۲۲) استفاده کنیم.

به طور مشابه، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n u_n)_t \qquad (۱۲)$$

روی بازهٔ نیم - نامتناهی $t \geq t_0$، برای هر x ثابت $(0 \leq x \leq c)$ همگرای یکنواخت است.

یکنواختی همگرایی این سریها تضمین می‌کند که سری (۵) دو بار نسبت به x و یک بار نسبت به t دیفرانسیل‌پذیر است، هر گاه $0 \leq x \leq c \;,\; t \geq t_0$. در نتیجه، اگر بنویسیم $L = k\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial t}$ و از مثال بخش ۲۶ به خاطر آوریم که $Lu_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$، از قضیه ۲ آن بخش معلوم است که $Lu = 0$ هر گاه $0 \leq x \leq c$ و $t \geq t_0$. بنابراین، سری (۵) روی دامنهٔ $0 < x < c$ و $t > 0$ همگراست و در معادلهٔ گرما (۱) صدق می‌کند، زیرا t_0 را بدلخواه می‌توان کوچک گرفت.

با نوشتن $L = \dfrac{\partial}{\partial x}$ و استفادهٔ مجدد از قضیه ۲ در بخش ۲۶، می‌بینیم که سری (۵) در شرایط مرزی (۲) نیز صدق می‌کند. مشاهده می‌کنید که اولین سری (۱۱) برای هر t ثابت $(t \geq t_0)$ ، روی بازهٔ $0 \leq x \leq c$ همگرای یکنواخت است، لذا مشتق $u_x(x,t)$ از سری(۵) برحسب x روی آن بازه پیوسته است. (شکل۲۸ را ببینید). بنابراین حدود یکطرفهٔ

$$u_x(0+,t) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} u_x(x,t) \quad , \quad u_x(c-,t) = \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} u_x(x,t)$$

در نقاط انتهایی بازهٔ $0 \leq x \leq c$ $(t \geq t_0)$ موجودند و مقدار آنها به ترتیب عبارتند از $u_x(0,t)$ و $u_x(c,t)$. چون شرایط (۲) برقرارند و t_0 را می‌توان بدلخواه کوچک گرفت، پس:

$$u_x(0+,t) = 0 \quad , \quad u_x(c-,t) = 0 \quad , \quad (t > 0) \qquad (۱۳)$$

در به دست آوردن جوابهای مسائل مقدار مرزی، به طور ضمنی نیاز خواهیم داشت که آن جوابها در آنگونه شرایط پیوستگی در نقاط مرزی صدق کنند. پس، وقتی شرایط (۲) به عنوان قسمتی از یک مسأله مقدار مرزی داده شده‌اند، بدین معنی است که شرایط (۱۳) نیز حتماً برقرارند. همانگونه که اندکی پیش دیدیم سری (۵) آن خاصیت را دارد.

بدیهی است که جواب ما در شرط غیرهمگن (۳) صدق می‌کند زیرا سری (۶) به سری کسینوسی فوریهٔ

$$\frac{a_{\circ}}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{c} \qquad (\circ<x<c) \tag{۱۴}$$

برای تابع f وقتی $t=\circ$ باشد تبدیل می‌شود و بنابر فرع بخش ۲۱ وقتی $\circ<x<c$ سری(۱۴) به $f(x)$ همگراست.

حال کافی است که نشان دهیم:

$$u(x,\circ+)=f(x) \qquad (\circ<x<c) \tag{۱۵}$$

این یک شرط پیوستگی است که وقتی $t=\circ$ باید برقرار باشد، دقیقاً مانند شرایط (۱۳) که در $x=\circ$ و $x=c$ باید برقرار باشند. با استفاده از قضیهٔ همگرایی آبل[۱] که در فصل ۹ (بخش۷۹) ثابت می‌شود، می‌توان نشان داد که جواب (۶) دارای خاصیت فوق است. طبق آن قضیه، سری‌یی که از ضرب جملات یک سری همگرا از مقادیر ثابت، مثل سری (۱۴) با x ثابت، در جملات متناظر یک دنبالهٔ کراندار از توابع t که هرگز با n افزایش نمی‌یابند، مثل $\exp\left(\frac{-n^۲\pi^۲kt}{c^۲}\right)$ $(n=\circ,۱,۲,\ldots)$ تشکیل می‌شود، نسبت به متغیر t همگرای یکنواخت است. بنابراین، برای هر x ثابت $(\circ<x<c)$ ، و هرگاه $t\geq\circ$ ، سری فوق در عبارت (۶) نسبت به t همگرای یکنواخت است، لذا نمایش یک تابع پیوسته برحسب t $(t\geq\circ)$ است. این نشان می‌دهد که جواب ما یعنی $u(x,t)$ نسبت به t وقتی $t\geq\circ$ ، و بویژه در $t=\circ$ ، پیوسته است. یعنی اینکه، برای هر x ثابت $(\circ<x<c)$ ،

$$\lim_{\substack{t\to\circ\\ t>\circ}} u(x,t)=u(x,\circ)$$

یا $u(x,\circ+)=u(x,\circ)$. حال از اینکه داریم $u(x,\circ)=f(x)$ $(\circ<x<c)$ ، خاصیت(۱۵) نتیجه می‌شود. بدین ترتیب تحقیق اینکه تابع (۶) یک جواب مسألهٔ مقدار مرزی (۱) - (۳) است، کامل شد.

۱. نیلز. هنریک آبل نروژی، ۱۸۰۲ - ۱۸۲۹.

مسائل

۱. نشان دهید که مسألهٔ دما در بخش ۲۷ به

$$u(x,t)=\frac{\pi^{۲}}{۳}+۴\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{n^{۲}}e^{-n^{۲}kt}\cos nx$$

تبدیل می‌شود، هرگاه

$$(-\pi<x<\pi)\qquad f(x)=x^{۲}\quad,\quad c=\pi$$

راهنمایی: به سری کسینوسی فوریهٔ تابع $x^{۲}$ که در مسألهٔ ۴ (الف) بخش ۱۴ به دست آمد مراجعه کنید.

۲. در مسألهٔ ۱۰، بخش ۹ نشان داده شد که توابع

$$u_{\circ}=y\qquad u_n=\sinh ny\cos nx\qquad (n=۱,۲,\ldots)$$

در معادلهٔ لاپلاس

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=\circ\qquad (\circ<x<\pi\quad,\quad \circ<y<۲)$$

و شرایط مرزی همگن

$$u_x(\circ,y)=u_x(\pi,y)=\circ\qquad u(x,\circ)=\circ$$

صدق می‌کنند.

با نوشتن $u=X(x)Y(y)$ و جداسازی متغیرها و استفاده از جوابهای مسألهٔ استورم ـ لیوویل بخش ۲۷، نشان دهید که چگونه می‌توان این توابع را به دست آورد. سپس، به طور صوری ادامه داده، نشان دهید که:

$$u(x,y)=A_{\circ}y+\sum_{n=۱}^{\infty}A_n\sinh ny\cos nx$$

که در آن:

$$A_{\circ}=\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi}f(x)\,dx\ ,\ A_n=\frac{۲}{\pi\sinh ۲n}\int_{\circ}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$(n=۱,۲,\ldots)$

جواب آن مسألهٔ مقدار مرزی است، هرگاه شرط غیرهمگن $u(x,۲)=f(x)$ به آن اضافه

شود. (آخرین نتیجهٔ مسألهٔ ۱۰، بخش ۹ یک حالت خاص از این امر است.)

۳. برای هر کدام از معادلات دیفرانسیل جزئی زیر برحسب $u=u(x,t)$ ، امکان به دست آوردن دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی بر حسب X و T را با نوشتن $u=X(x)T(t)$ و جداسازی متغیرها بررسی کنید. در صورت عملی بودن این کار، آن معادلات دیفرانسیل معمولی را به دست آورید،

(الف) $u_{xx}-xtu_{tt}=0$ ؛ (ب) $(x+t)u_{xx}-u_t=0$

(پ) $xu_{xx}+u_{xt}+tu_{tt}=0$ ؛ (ت) $u_{xx}-u_{tt}-u_t=0$

۴. فرض کنید معادلهٔ (۶)، بخش ۲۷، به صورت زیر نوشته شده بود:

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=k\frac{X''(x)}{X(x)}$$

در اینجا هر طرف را برابر $-\lambda$ قرار داده، نشان دهید چگونه توابع (۱۲) و (۱۳) بخش ۲۷ هنوز منتج می‌شوند. (این نشان می‌دهد که چگونه عموماً ساده‌تر است که ثابت فیزیکی در معادلهٔ گرما را خارج از مسألهٔ استورم - لیوویل نگه داریم، همانگونه که در بخش ۲۷ انجام دادیم.)

۵. نشان دهید که اگر یک عملگر L دارای این دو خاصیت باشد که به ازای همهٔ توابع u_1 و u_2 دریک فضا و هر ثابت c_1 داشته باشیم

$$L(u_1+u_2)=Lu_1+Lu_2 \qquad , \qquad L(c_1u_1)=c_1Lu_1$$

آنگاه L خطی است، یعنی ،نشان دهید که دارای خاصیت (۱) بخش ۲۵ است.

۶. از حالات خاصی از عملگرهای خطی، مثل $L=x$ و $M=\frac{\partial}{\partial x}$ استفاده کرده، نشان دهید که حاصلضربهای LM و ML لزومی ندارد همیشه مساوی باشند.

۷. فرض کنید u و v نمایش توابعی از x و t هستند که در معادلهٔ گرمای یک بعدی صدق می‌کنند:

$$u_t=ku_{xx} \qquad , \qquad v_t=kv_{xx}$$

هر طرف این معادلات را به ترتیب در ثابتهای c_1 و c_2 ضرب کنید و باهم جمع کرده،

نشان دهید که ترکیب خطی c_1u+c_2v نیز در معادلهٔ گرما صدق می‌کند. این یک تغییری در اثبات قضیه ۱ بخش ۲۶ نشان می‌دهد.

۸. نشان دهید که:

الف- هر کدام از توابع $y_1=\frac{1}{x}$ و $y_2=\frac{1}{(1+x)}$ در معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی $y'+y^2=0$ صدق می‌کنند.

ب - مجموع y_1+y_2 در آن معادله صدق نمی‌کند.

ج - برای ثابت c و $c\neq 0$ ، $c\neq 1$ ، نه cy_1 و نه cy_2 در آن معادله صدق نمی‌کند.

۹. فرض کنید u_1 و u_2 در یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرهمگن $Lu=f$ صدق می‌کنند، که در آن f تابعی است فقط از متغیرهای مستقل. ثابت کنید که ترکیب خطی $c_1u_1+c_2u_2$ در آن معادله صدق نمی‌کند هرگاه $c_1+c_2\neq 1$.

۱۰. فرض کنید L نمایش یک عملگر دیفرانسیل خطی باشد و f یک تابع از متغیرهای مستقل است. نشان دهید که جوابهای u از معادلهٔ $Lu=f$ به صورت $u=u_1+u_2$ هستند که در آن u_1 جوابهای معادلهٔ $Lu_1=0$ و u_2 یک جواب خاص معادلهٔ $Lu_2=f$ است. (این یک اصل برهمنهی جوابها برای معادلات دیفرانسیل غیرهمگن است.)

۱۱. با فرض اینکه b_n یک دنبالهٔ کراندار از مقادیر ثابت است، ثابت کنید که سری

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny}\sin nx$$

همگراست و نسبت به x و y دوبار دیفرانسیل‌پذیر است، هرگاه $y_0\leq y$ ، که در آن y_0 یک ثابت مثبت است. سپس نشان دهید که u در نیم صفحه $y>0$ در معادلهٔ لاپلاس $u_{xx}+u_{yy}=0$ صدق می‌کند.

۱۲. ثابت کنید که اگر $n^4|b_n|\leq M$ $(n=1,2,...)$ ، که در آن M یک ثابت مثبت است، آنگاه سری

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos nt$$

برای همهٔ مقادیر x و t همگراست و در معادلهٔ موج $y_{tt}=y_{xx}$ صدق می‌کند.

۲۹. یک مسأله تار مرتعش

برای اینکه روش فوریه را بیشتر روشن کنیم،اکنون یک مسألهٔ مقدار مرزی برای جابجایی‌ها در یک تار مرتعش را در نظر می‌گیریم. این بار شرط غیرهمگن طلب می‌کند که تابع $f(x)$ به یک سری سینوسی فوریه بسط داده شود تا کسینوسی.

اکنون یک عبارت برای جابجایی‌های عرضی $y(x,t)$ در یک تار به دست می‌آوریم که بین دو نقطهٔ $x=\circ$ و $x=c$ روی محور xها کشیده شده و هیچ نیروی خارجی در امتداد آن اثر نمی‌کند و تار از موقعیت ابتدایی و بدون حرکت $y=f(x)$ رها می‌شود. تابع $y(x,t)$ باید در معادلهٔ موج (بخش ۵) صدق کند.

$$y_{tt}(x,t)=a^{۲}y_{xx}(x,t) \qquad (\circ<x<c \quad , \quad t>\circ) \tag{۱}$$

همچنین باید در شرایط مرزی زیر صدق کند:

$$y(\circ,t)=\circ \qquad y(c,t)=\circ \qquad y_t(x,\circ)=\circ \tag{۲}$$

$$y(x,\circ)=f(x) \qquad (\circ\le x\le c) \tag{۳}$$

که در آن تابع جابجایی داده شدهٔ f روی بازهٔ $\circ\le x\le c$ پیوسته است و $f(\circ)=f(c)=\circ$.

یک جواب حاصلضربی

$$y=X(x)\,T(t) \tag{۴}$$

برای شرایط همگن (۱) و (۲) در نظر می‌گیریم و آن را در شرایط فوق جایگذاری می‌کنیم. این امر به دو مسألهٔ همگن زیر منجر می‌شود:

$$X''(x)+\lambda X(x)=\circ \qquad X(\circ)=\circ \qquad X(c)=\circ \tag{۵}$$

$$T''(t)+\lambda a^{۲}T(t)=\circ \qquad T'(\circ)=\circ \tag{۶}$$

مسألهٔ (۵) یک نمونهٔ دیگر از مسألهٔ استورم - لیوویل است. روش حلی که برای حل مثال بخش ۲۷ از آن استفاده شد، می‌تواند اینجا به کار رود. نشان می‌دهد که (مسألهٔ۵، بخش ۳۰)مقادیر $\lambda_n=(\frac{n\pi}{c})^{۲}$ $(n=۱,۲,...)$ وتوابع $X_n(x)=\sin(\frac{n\pi x}{c})$ به ترتیب مقادیر

ویژه و توابع ویژه متناظر هستند. هرگاه ، $\lambda=\lambda_n$ مسألهٔ (۶) به صورت ذیل درمی‌آید:

$$T''(t) - (\frac{n\pi a}{c})^{۲} T(t) = ۰ \qquad T'(۰) = ۰$$

و نتیجه می‌دهد که، جز برای یک مضرب ثابت، جواب عبارت است از:

$$T_n(t) = cos\,(\frac{n\pi at}{c})$$

در نتیجه هر کدام از حاصلضربهای

$$y_n = X_n(x)\,T_n(t) = sin\frac{n\pi x}{c} cos\frac{n\pi at}{c} \qquad (n=۱,۲,...) \qquad (۷$$

در شرایط همگن (۱) و (۲) صدق می‌کند.

برطبق قضیه ۲ بخش ۲۶، ترکیب خطی تعمیم یافتهٔ

$$y(x\,,t) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n sin\frac{n\pi x}{c} cos\frac{n\pi at}{c} \qquad (۸$$

نیز در شرایط همگن (۱)و (۲) صدق می‌کند، به شرطی که ثابتهای b_n بتوانند طوری محدود شوند که سری نامتناهی فوق به طریق مناسب همگرا و دیفرانسیل پذیر باشد. آن سری در شرط غیرهمگن (۳) صدق خواهد کرد اگر b_n ها طوری باشند که:

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n sin\frac{n\pi x}{c} \qquad (۰<x<c) \qquad (۹$$

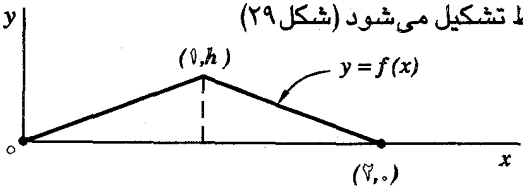
توجه دارید که این سری در نقاط انتهای $x=۰$ و $x=c$ به صفر همگراست.بنابراین اگر نمایش (۹) درست باشد، آن روی بازهٔ بستهٔ $۰ \le x \le c$ نیز درست است.

بدیهی است که ثابتهای b_n در عبارت (۹) ضرائب سری سینوسی فوریهٔ f روی بازهٔ $۰<x<c$ (بخش ۲۱) هستند:

$$b_n = \frac{۲}{c}\int_{۰}^{c} f(x)\,sin\frac{n\pi x}{c}dx \qquad (n=۱,۲,...) \qquad (۱۰$$

بنابراین، سری (۸) با ضرائب (۱۰) ، جواب صوری مسألهٔ مقدار مرزی ما برای جابجایی‌ها در یک تار مرتعش است.

مثال . فرض کنید که طول تار مورد نظر $c=۲$ است و نقطهٔ وسط آن ابتداءً تا ارتفاع h از محور افقی بالا آورده شده است. بنابراین موقعیتی که از آن حالت تار را رها می‌کنیم از دو قطعه خط تشکیل می‌شود (شکل ۲۹)



شکل ۲۹

تابع f، که موقعیت اولیهٔ این تار کشیده شده را نشان می‌دهد به وسیلهٔ معادلات زیر داده می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} hx & ۰\leq x\leq ۱ \quad \text{هرگاه} \\ -h(x-۲) & ۱< x\leq ۲ \quad \text{هرگاه} \end{cases} \qquad (۱۱)$$

و ضرائب b_n در سری سینوسی فوریهٔ آن تابع روی بازهٔ $۰<x<۲$ را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$b_n=\int_۰^۲ f(x)\sin\frac{n\pi x}{۲}dx=h\int_۰^۱ x\sin\frac{n\pi x}{۲}dx-h\int_۱^۲ (x-۲)\sin\frac{n\pi x}{۲}dx$$

پس از انتگرالگیری جزء به جزء و ساده کردن، درمی‌یابیم که:

$$b_n=\frac{۸h}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi}{۲} \qquad (n=۱,۲,...)$$

در این صورت سری (۸) به صورت ذیل تبدیل می‌شود:

$$y(x,t)=\frac{۸h}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}\sin\frac{n\pi}{۲}\sin\frac{n\pi x}{۲}\cos\frac{n\pi at}{۲} \qquad (۱۲)$$

چون وقتی n زوج باشد $\sin(\frac{n\pi}{۲})=۰$ و چون:

$$\sin\frac{(۲n-۱)\pi}{۲}=\sin(n\pi-\frac{\pi}{۲})=-\cos n\pi=(-۱)^{n+۱} \quad (n=۱,۲,...)$$

عبارت (۱۲) برای جابجایی‌های نقاط روی تار مورد بحث نیز می‌تواند بدین صورت نوشته شود:

$$y(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2} \quad (۱۳$$

قبل از اینکه در درستی جواب آن مسأله مقدار مرزی (۱) و (۳) تحقیق کنیم، تعبیر فیزیکی آن را به اختصار توضیح می‌دهیم. از عبارت (۸) می‌بینیم که برای هر x ثابت جابجایی $y(x,t)$ یک تابع تناوبی از t هست با دورهٔ تناوب

$$T_0=\frac{2c}{a} \quad (۱۴$$

این تناوب مستقل از جابجایی اولیهٔ $f(x)$ است. چون $a^2=\frac{H}{\delta}$، که در آن H قدر مطلق مؤلفه x نیروی کششی است و δ جرم هر واحد طول تار است (بخش۵)، دورهٔ تناوب مستقیماً با c و $\sqrt{\delta}$ و به طور معکوس با $\sqrt{H}$ تغییر می‌کند. همچنین از عبارت (۸) واضح است که برای یک طول داده شدهٔ c و جابجایی اولیهٔ $f(x)$، جابجایی y فقط به مقدار x و مقدار حاصلضرب at بستگی دارد. یعنی اینکه، $y=\varphi(x,at)$ که در آن تابع φ صرف‌نظر از ثابت a همان تابع است. فرض کنید a_1 و a_2 نمایش مقادیر مختلفی از آن ثابت باشند و $y_1(x,t)$ و $y_2(x,t)$ جابجایی‌های متناظر آنها باشند. اگر $a_1t_1=a_2t_2$، آنگاه

$$y_1(x,t_1)=y_2(x,t_2) \qquad (0\le x\le c) \quad (۱۵$$

بخصوص فرض کنید که ثابت H فقط مقادیر مختلف H_1 و H_2 دارد. آنگاه مجموعه موقعیتهای لحظه‌ای که تار برای $H=H_1$ و $H=H_2$ به خود می‌گیرد یکسانند، اما زمانهای t_1 و t_2 لازم برای رسیدن به هر کدام از آن موقعیتها در نسبت زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{t_1}{t_2}=\sqrt{\frac{H_2}{H_1}} \quad (۱۶$$

هر مجموع جزئی

$$y_N(x,t)=\sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{n\pi at}{c} \qquad (۱۷$$

از جواب به صورت سری (۸)، در مسألهٔ مقدار مرزی ما، به جز شرط ناهمگن (۳)، صدق می‌کند. به هر حال به جای تأمین شرط (۳)، در شرط

$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{n\pi x}{c} \qquad (۱۸$$

صدق می‌کند. البته مجموع طرف راست معادلهٔ (۱۸) مجموع جزئی متشکل از جمع N جملهٔ اول سری سینوسی فوریهٔ f روی بازهٔ $0<x<c$ است. واضح است که توسیع تناوبی فرد f پیوسته و f' قطعه‌ای پیوسته است و به این دلیل سری فوق روی بازهٔ $0\leq x\leq c$ به $f(x)$ همگرای یکنواخت است. (بخش ۲۲). بنابراین، مجموع $y_N(x,0)$ برای همهٔ مقادیر x در آن بازه، تابع $f(x)$ را به دقت دلخواه تقریب می‌زند، هرگاه N به قدر کافی بزرگ فرض شود.

بنابراین، تابع $y_N(x,t)$ که به همراه کلیهٔ مشتقات جزئیش در هر جا پیوسته است، یک جواب از مسألهٔ تقریب کنندهٔ مسألهٔ اصلی است که با جایگزینی شرط (۱۸) به جای شرط (۳) مسألهٔ اصلی به دست می‌آید.

برای مسائل دیگر نیز می‌توان مسائل نزدیک یا تقریبی متناظر با مسألهٔ اصلی را ساخت. اما یک خصوصیت قابل توجه در این حالت فعلی، این است که مقدار انحراف $y(x,t)$ از جابجائی واقعی $y_N(x,t)$ هرگز از بزرگترین انحراف $f(x)$ از $y_N(x,0)$ بیشتر نیست. برای دیدن این مطلب، فقط لازم داریم اتحاد مثلثاتی زیر را به خاطر آوریم:

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

و بنویسیم:

$$2\sin\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{n\pi at}{c}=\sin\frac{n\pi(x+at)}{c}+\sin\frac{n\pi(x-at)}{c} \qquad (۱۹$$

پس عبارت (۱۷) به صورت ذیل در می‌آید:

$$y_N(x,t)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{n\pi(x+at)}{c}+\sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{n\pi(x-at)}{c}\right]$$

این دو مجموع در این عبارت مجموعهای N جملهٔ اول سری سینوسی توسیع تناوبی فرد F از تابع f با شناسه‌های $x+at$ و $x-at$ هستند. اما بیشترین انحراف اولین مجموع فوق از $F(x+at)$، یا بیشترین انحراف دومین مجموع فوق از $F(x-at)$ با بیشترین انحراف $y_N(x,0)$ از $f(x)$ برابر است.

۳۰. تحقیق درستی جواب

در این بخش، جواب صوری را که در بخش ۲۹ برای مسألهٔ مقدار مرزی زیر به دست آوردیم مورد تحقیق قرار می‌دهیم:

$$y_{tt}(x,t)=a^2 y_{xx}(x,t) \qquad (0<x<c \quad , \quad t>0) \tag{1}$$

$$y(0,t)=0 \qquad y(c,t)=0 \tag{2}$$

$$y(x,0)=f(x) \qquad y_t(x,0)=0 \tag{3}$$

فرض بر این بود که تابع داده شدهٔ f روی بازهٔ $0\le x\le c$ پیوسته است و همچنین $f(0)=f(c)=0$. بعلاوه فرض کنید که f' حداقل قطعه‌ای پیوسته است، که (از بخش ۲۱) می‌دانیم هرگاه $0\le x\le c$ ، $f(x)$ با سری سینوسی فوریه‌اش نمایش داده می‌شود. ضرائب

$$b_n=\frac{2}{c}\int_0^c f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx \qquad (n=1,2,\dots) \tag{4}$$

در آن سری با b_n های موجود در جواب زیر که قبلاً به دست آورده‌ایم یکی هستند:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{n\pi at}{c} \tag{5}$$

بنابراین وقتی $t=0$ باشد عبارت (۵) به $f(x)$ همگراست، یعنی اینکه $y(x,0)=f(x)$،

هرگاه $\circ \le x \le c$.

طبیعت این مسأله یک جواب $y(x,t)$ طلب می‌کند که نسبت به x و t پیوسته باشد، هرگاه $\circ \le x \le c$ و $t \ge \circ$ و طوری باشد که $y_t(x,t)$ نسبت به t در $t = \circ$ پیوسته باشد. بنابراین مقادیر مرزی داده شده در شرایط (۲) و (۳) نیز مقادیر حدی روی مرز دامنهٔ $\circ < x < c$ و $t > \circ$ می‌باشند:

$$y(\circ+,t) = \circ \qquad y(c-,t) = \circ \qquad (t \ge \circ)$$

$$y(x,\circ+) = f(x) \quad , \quad y_t(x,\circ+) = \circ \qquad (\circ \le x \le c)$$

برای تحقیق در اینکه عبارت (۵) نمایش یک جواب است، باید ثابت کنیم که سری فوق، به یک تابع پیوسته $y(x,t)$ همگراست که در معادلهٔ موج (۱) و همهٔ شرایط مرزی صدق می‌کند. امکان دارد که مجموع سری (۵) با ضرائب (۴) حتی در معادلهٔ موج صدق کند، بدون اینکه لزوماً نسبت به متغیرهای x و t دوبار مشتق‌پذیر باشد. در واقع این حالت را در جواب مثال بخش ۲۹ داشتیم که در آن ضرائب b_n عبارت بودند از:

$$b_n = \frac{\text{۸}h}{n^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}} \sin \frac{n\pi}{\text{۲}} \qquad (n = \text{۱},\text{۲},\ldots)$$

وقتی از آن مقادیر b_n در سری (۵) استفاده شود و از سری فوق نسبت به x یا t دوبار مشتق بگیریم، دیده می‌شود که سری حاصل نمی‌تواند همگرا باشد، زیرا جملهٔ nام آن به صفر میل نمی‌کند. به هر حال، امکان این هست که سری (۵) را به یک صورت بسته بنویسیم که سری نامتناهی نداشته باشد. این کار ما را قادر می‌سازد که جوابمان را تحقیق کنیم.

برای انجام این کار، ابتدا به اتحاد (۱۹) در بخش ۲۹ مراجعه کرده، سری (۵) را به صورت ذیل می‌نویسیم:

$$y(x,t) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \left[\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi(x+at)}{c} + \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi(x-at)}{c} \right] \qquad (۶$$

اکنون توسیع تناوبی فرد F از f با خواص

۷) $F(x)=f(x)$ وقتی $۰\leq x\leq c$

و

۸) برای هر x $F(x+۲c)=F(x)$, $F(-x)=-F(x)$

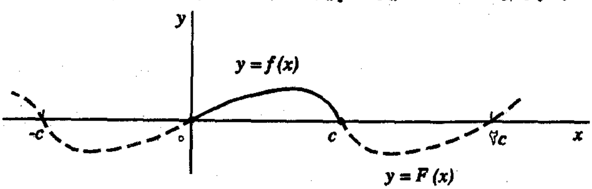
با سری سینوسی تابع f در همهٔ نقاط x نمایش داده می‌شود:

۹) $$F(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{c} \qquad (-\infty<x<\infty)$$

در نتیجه عبارت (۶) را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

۱۰) $$y(x,t)=\frac{۱}{۲}\Big[F(x+at)+F(x-at)\Big]$$

توجه کنید که همگرایی سریهای (۵) و (۶) برای همهٔ مقادیر x و t با همگرایی سری (۹) برای همهٔ مقادیر x تضمین می‌شود. اکنون به بررسی درستی جوابمان به صورت (۱۰) می‌پردازیم. از اینکه بنابه فرض f در $۰\leq x\leq c$ پیوسته است و $f(۰)=f(c)=۰$ می‌بینیم که تابع F، توسیع تناوبی فرد f، برای همهٔ مقادیر x پیوسته است (شکل ۳۰)

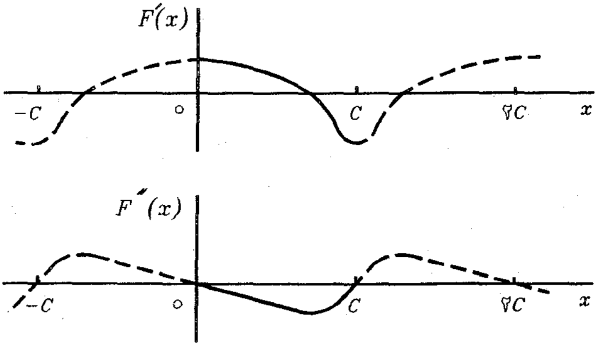


شکل ۳۰

همچنین فرض می‌کنیم که f' و f'' پیوسته‌اند، هرگاه $۰\leq x\leq c$ و $f''(۰)=f''(c)=۰$. آنگاه بسادگی نشان داده می‌شود که مشتقهای F' و F'' نیز برای همهٔ مقادیر x پیوسته‌اند. زیرا، با به خاطر آوردن $F(x)=-F(-x)$ و سپس به کارگیری قاعدهٔ زنجیری، می‌توانیم بنویسیم:

$$F'(x)=-\frac{d}{dx}F(-x)=F'(-x)$$

که در آن $F'(-x)$ مقدار مشتق F در $-x$ است. بنابراین F' یک تابع تناوبی زوج است؛ به طور مشابه، F'' یک تابع تناوبی فرد است. در نتیجه F' و F'' همان طور که در شکل ۳۱ نشان داده شده، پیوسته‌اند.



شکل ۳۱

حال برای اینکه نشان دهیم تابع (۱۰) در معادلهٔ موج صدق می‌کند آن را بدین صورت می‌نویسیم:

$$y = \frac{۱}{۲} F(u) + \frac{۱}{۲} F(v)$$

که در آن $u=x+at$ و $v=x-at$. قاعدهٔ زنجیری برای مشتق توابع مرکب نشان می‌دهد که :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

یا

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{a}{۲} F'(u) - \frac{a}{۲} F'(v)$$

و با فرض اینکه $\frac{\partial y}{\partial t}$ در آخرین عبارت بالا، نقش y را بازی کند، به دست می‌آوریم که:

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{a^۲}{۲} F''(u) + \frac{a^۲}{۲} F''(v) \qquad (۱۱$$

به طور مشابه،

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} = \frac{۱}{۲} F''(u) + \frac{۱}{۲} F''(v) \qquad (۱۲$$

نظر به عبارات (۱۱) و (۱۲)، تابع (۱۰) در معادلهٔ موج (۱) صدق می‌کند. بعلاوه چون F برای همهٔ مقادیر x پیوسته است، تابع (۱۰) برای همهٔ مقادیر x و t ، بخصوص وقتی $\circ \leq x \leq c$ و $t \geq \circ$ ، پیوسته است.

در حالی که، از سری (۵) روشن است که جواب ما $y(x,t)$ در شرایط $y(\circ,t)=y(c,t)=\circ$ و $y(x,\circ)=f(x)$ صدق می‌کند، از عبارت (۱۰) نیز می‌توان استفاده کرده، آن را نشان داد. برای مثال، هر گاه در عبارت(۱۰) $x=c$ قرار دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$F(c-at) = -F(-c+at) = -F(-c+at+\text{۲}c) = -F(c+at)$$

بنابراین:

$$y(c,t) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left[F(c+at) - F(c+at)\right] = \circ$$

برای آخرین شرط مرزی $y_t(x,\circ)=\circ$ ، ملاحظه می‌کنیم که:

$$y_t(x,t) = \frac{a}{\text{۲}}\left[F'(x+at) - F'(x-at)\right]$$

بدین ترتیب، $y_t(x,\circ)=\circ$ و پیوستگی F' پیوستگی $y_t(x,t)$ را تضمین می‌کند. تا اینجا تابع (۱۰) به عنوان یک جواب از مسألهٔ مقدار مرزی (۱) - (۳) کاملاً مورد بررسی و تحقیق قرار گرفت. در فصل ۹ (بخش۸۲) نشان خواهیم داد چرا آن، تنها جواب ممکن است که با مشتقات مرتبه اول و دوم خود در سرتاسر ناحیهٔ $\circ \leq x \leq c$ و $t \geq \circ$ از صفحهٔ xt پیوسته است.

اگر شرایط روی F' و F'' خفیف شوند و صرفاً خواسته شود که آن دو تابع قطعه‌ای پیوسته باشند، در می‌یابیم که در هر لحظهٔ t ممکن است مشتقات جزئی y در یک تعداد متناهی از نقاط x $(\circ \leq x \leq c)$ موجود نباشد. به جز در آن نقاط، تابع ما در معادلهٔ موج و شرط $y_t(x,\circ)=\circ$ صدق می‌کند. شرایط مرزی دیگر مثل گذشته برقرارند، لیکن با دیدی وسیعتر یک جواب از مسأله مقدار مرزیمان داریم.

مسائل

۱. یک تار بین نقاط ثابت ۰ و ۱ روی محور xها کشیده شده و از موقعیت بدون حرکت $y=A\sin \pi x$ رها می‌شود که در آن A یک ثابت است. از عبارت (۱۰) بخش ۳۰، جابجائی‌های بعدی $y(x,t)$ را به دست آورده، درستی جواب را کاملاً بررسی کنید. موقعیت تار را در چند لحظه از زمان بکشید.

جواب:
$$y(x,t)=A\sin \pi x\cos \pi at$$

۲. مسألهٔ شمارهٔ ۱ را هرگاه جابجائی اولیه در آنجا به $y=B\sin ۲\pi x$ تغییر کند، حل کنید. (B یک ثابت است)

جواب :
$$y(x,t)=B\sin ۲\pi x\cos ۲\pi at$$

۳. نشان دهید چرا مجموع دو تابع $y(x,t)$ که در مسائل شماره ۱ و ۲ به دست آمده‌اند، جابجایی‌های تار را برای حالتی نمایش می‌دهد که تار از موقعیت بدون حرکت

$$y=A\sin \pi x+B\sin ۲\pi x$$

رها شده است.

۴. با فرض یک جواب به صورت حاصلضرب $y=X(x)T(x)$، از شرایط همگن (۱) و (۲) مسألهٔ تار در بخش ۲۹، شرایط (۵) و (۶) آن بخش روی X و T را به دست آورید.

۵. مقادیر و توابع ویژهٔ بیان شده در بخش ۲۹، از مسألهٔ استورم - لیوویل زیر را به دست آورید:

$$X''(x)+\lambda X(x)=۰ \qquad X(۰)=۰ \qquad X(c)=۰$$

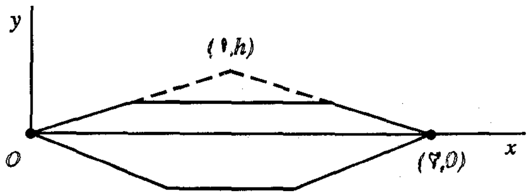
۶. برای تار با جابجایی اولیه و به طول c که در بخشهای ۲۹ و ۳۰ درنظر گرفته‌ایم، نشان دهید که چرا فرکانس ν از ارتعاش، برحسب سیکل در واحد زمان، دارای مقدار ذیل است:

$$\nu=\frac{a}{۲c}=\frac{۱}{۲c}\sqrt{\frac{H}{\delta}}$$

نشان دهید که اگر $H=۲۰۰\ lb$ ، وزن هر پا lb ۰/۰۱ ($g\delta=۰/۰۱$ و $g=۳۲$) و طول ۲ پا باشد، آنگاه $\nu=۲۰۰$ سیکل بر ثانیه است.

۷. در بخشهای ۲۹ و ۳۰، با انتقال نمودار تابع تناوبی $\frac{1}{2}F(x)$ به طرف راست و چپ با سرعت a در لحظهٔ t و سپس جمع کردن عرضهای آن دو منحنی روی فاصلهٔ $0 \leq x \leq c$، می‌توان موقعیت تار را در هر لحظه با کمک شکل نشان داد. نشان دهید که چگونه این مطلب از عبارت ۱۰، بخش ۳۰ نتیجه می‌شود.

۸. بعضی از موقعیتهای تار کشیده شده در مثال بخش ۲۹ را با روشی که در مسألهٔ ۷ ذکر شد رسم کرده، و نشان دهید که آن تار موقعیتهایی به خود می‌گیرد مانند آنچه که در شکل ۳۲ با قطعه خطوط پیوسته نشان داده شده است.



شکل ۳۲

۹. مسألهٔ مقدار مرزی (۱) - (۳)، بخش ۲۹ را برحسب دو متغیر مستقل x و $\tau = at$ نوشته، نشان بدهید که مسألهٔ جدید برای y به عنوان تابعی از x و τ ثابت a ندارد (بخش ۵ را ببینید). بدین ترتیب، بدون اینکه آن را حل کنید، نتیجه بگیرید که جواب آن به صورت $y = \phi(x, \tau) = \phi(x, at)$ است و بنابراین رابطهٔ (۱۵) بخش ۲۹ صحیح است.

۳۱. پیشرفت تاریخی

پیرو اختراع حساب و انتگرال توسط نیوتن (۱۷۲۷-۱۶۴۲) و لایب نیتس (۱۷۱۶-۱۶۴۶) علوم ریاضی یک فعالیت جهشی را تجربه کرده است. در بین موضوعات فیزیک ریاضی که طی آن دوره توجه دانشمندان بزرگی را به خود جلب کرده بود، می‌توان از مسائلی نام برد همچون: مقدار مرزی در ارتعاشات تارها، بارهای کشسان و ستونهای هوا، که همه با نظریه‌های ریاضی ارتعاشات موزیکی مرتبط هستند. اولین دست اندرکاران نظریهٔ تارهای مرتعش عبارتند از ریاضیدان انگلیسی بروک تیلر (۱۷۳۱-۱۶۸۵)، ریاضیدانان سویسی دانیل برنولی (۱۷۸۲-۱۷۰۰) و لئونارد اویلر (۱۷۸۳-۱۷۰۷) و جین

دالامبر در فرانسه (۱۷۸۳-۱۷۱۷). تا سالهای ۱۷۵۰ دالامبر، برنولی و اویلر نظریه تارهای مرتعش را تا مرحله‌ای که معادلهٔ دیفرانسیل جزئی $y_{tt}=a^2y_{xx}$ شناخته شده بود، پیش برده بودند و یک جواب از یک مسألهٔ مقدار مرزی در مورد تارها از جواب عمومی آن معادله به دست آمده بود. همچنین، ایدهٔ مدهای اساسی ارتعاش، آن دانشمندان را به مفهوم برهمنهی جوابها، یعنی به جوابی به صورت(۸) بخش۲۹، که در آن یک سری از توابع مثلثاتی ظاهر می‌شود سوق داد یا به عبارت دیگر نظرشان را به موضوع نمایش توابع دلخواه با سری مثلثاتی معطوف کرد. بعد از آن اویلر عباراتی برای ضرائب موجود در آن سریها پیدا کرد. اما مفهوم کلی یک تابع روشن نشده بود و یک بحث طولانی برسوال نمایش توابع دلخواه با این سریها روی یک بازهٔ کراندار صورت گرفت. به این سوال حدود ۷۰ سال بعد توسط ریاضیدان آلمانی بنام دیریکله طی سالهای (۱۸۵۹-۱۸۰۵) جواب داده شد.

فیزیک - ریاضیدان فرانسوی به نام جین باپتیست جوزف فوریه (۱۸۳۰-۱۷۶۸) مثال‌های آموزندهٔ بسیاری از بسطهای مثلثاتی در ارتباط با مسائل مقدار مرزی در انتقال حرارت ارائه کرد. کتاب او تحت عنوان *theorie analytique de la chaleur* در۱۸۲۲ انتشار یافت که یک کتاب کلاسیک در نظریه هدایت گرماست. کتابی که در واقع نسخهٔ سوم یک مونوگرافی است که او اولین بار به انستیتو فرانسه در روز ۲۱ دسامبر سال ۱۸۰۷[۱] ارائه کرده است. او به طور مؤثر روند اساسی در روش جداسازی متغیرها و برهمنهی را نشان داده است و کارش در جهت ایجاد علاقه در نمایش توابع با سریهای مثلثاتی، بسیار مؤثر بوده است.

اما کارهای فوریه در مسألهٔ نمایش توابع باسری، شرایط درست و معتبر بودن آن نمایشها را شامل نمی‌شده است، او به کاربردها و روشها علاقه داشت. همان طور که در

---

۱. ترجمهٔ اولیهٔ کتاب فوریه به انگلیسی توسط ا.فری‌من، مجدداً در سال ۱۹۵۵ توسط انتشارات *New-York , Dover* به چاپ رسید.

مونوگراف اصلی ۱۸۰۷ او تا ۱۹۷۲ چاپ نشده بود، تا اینکه ویرایش انتقادی آن توسط گراتان - گینس که درکتابنامه آمده به عرصهٔ ظهور رسید.

بالا اشاره شد، دیریکله اولین کسی بود که اینگونه شرایط را معرفی کرد و در ۱۸۲۹ شرایط کلی‌یی به دست آورد که اگر تابعی آن را داشته باشد، کافی است تا بتواند با یک سری از توابع سینوسی و کسینوسی نمایش داده شود.[۱]

نظریه نمایش از زمان دیریکله به بعد دقیقتر شده و مقدار زیادی توسعه یافته و هنوز در حال پیشرفت است.

۱. برای مطالعهٔ تکمیلی در مورد تاریخ اینگونه سریها مقاله‌های لانگر (۱۹۴۷) و لِک (۱۹۱۴) را که در کتابنامه آمده‌اند را ببینید.

فصل ۴

مسائل مقدار مرزی

این فصل به کاربرد سریهای فوریه، جهت حل انواع گوناگون مسائل مقدار مرزی اختصاص دارد که فرمول بندی ریاضی مسائل در فیزیک هستند. روش اساسی قبلاً در فصل ۳ شرح داده شده است. جز برای بخش آخر این فصل (بخش ۴۰)، توجه خود را به مسائلی محدود خواهیم کرد که جواب آنها از جوابهای دو مسألهٔ استورم لیوویلی نتیجه می‌شوند که در بخشهای ۲۷ و ۲۹ فصل ۳ با آنها روبرو شدیم. به عبارت دقیقتر، در آنجا دیدیم که مسألهٔ

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad X'(0)=0 \quad , \quad X'(c)=0 \tag{1}$$

روی بازهٔ $0 \le x \le c$ فقط وقتی جواب غیر بدیهی دارد که λ یکی از مقادیر ویژهٔ

$$\lambda_0=0 \qquad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

باشد و جوابهای متناظر یا توابع ویژه عبارتند از:

$$x_0(x)=\frac{1}{2} \qquad X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{c} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

برای مسألهٔ استورم لیوویل

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , \quad X(0)=0 \quad , \quad X(c)=0 \tag{2}$$

روی همان بازه $0 \le x \le c$ ،

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

و

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{c} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

آنگونه که در فصل ۳ شرح داده شد، جوابهای مسائل (۱) و (۲) به ترتیب به نمایشهای سریهای کسینوسی و سینوسی فوریه منجر می‌شوند. یک مسألهٔ استورم لیوویل سوم که در بخش ۴۰ حل می‌شود، به سری فوریه‌ای منجر می‌شود که هم شامل جملات کسینوسی است و هم جملات سینوسی. مسائل مقدار مرزی که جوابهای آنها شامل جملاتی غیر از $\cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right)$ و $\sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right)$ است، در فصل ۵ که در آن نظریهٔ کلی مسائل استورم لیوویل را توسعه داده، و همچنین در فصول بعد از آن، بررسی می‌شوند.

برای بررسی اینکه جواب حاصل برای یک مسألهٔ مقدار مرزی مفروض، بدرستی در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی و همهٔ شرائط مرزی و شرایط پیوستگی لازم صدق می‌کند، در فصل ۳ راههای اثبات را نشان دادیم. پس از انجام دادن این کار بدرستی ثابت کرده‌ایم که تابع ما یک جواب مسألهٔ مقدار مرزی است. البته حتی برای خیلی از مسائل ساده‌تر، بررسی درستی جوابها ممکن است طولانی یا مشکل باشد. از این نظر که همیشه به طور صریح شرائط لازم برای توابعی که سری فوریهٔ آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد ذکر نخواهد شد، در این فصل مسائل مقدار مرزی، فقط به طور صوری حل می‌شوند. سؤالات یکتایی را نادیده می‌گیریم، ولی ماهیت یک مسألهٔ مقدار مرزی که بخوبی طرح شده باشد طوری است که مسأله فقط باید یک جواب داشته باشد. در فصل ۹ قدری به یکتائی جوابها توجه خواهیم کرد.

۳۲. یک قطعه با شرایط مرزی گوناگون

در اینجا مسألهٔ تعیین دماهای داخل همان قطعه (یا میله) مورد بحث در بخش ۲۷ را درنظر می‌گیریم که شرائط گرمائی سادهٔ دیگری روی سطوح مرزی آن حاکم هستند. درهرحال برای سهولت ضخامت آن قطعه را π واحد می‌گیریم، بنابراین $c=\pi$. آنگاه

مقادیر ویژهٔ $\lambda_n=(\frac{n\pi}{c})^۲$ $(n=۱,۲,...)$ بسادگی $\lambda_n=n^۲$ می‌شوند. همانگونه که در مسألهٔ ۴ این بخش نشان داده شد ، فرمولهای دما برای یک قطعه با ضخامت دلخواه c بسادگی از فرمولهای دما از قطعه با ضخامت $c=\pi$ نتیجه می‌شوند. در هر کدام از سه مثال زیر، تابع دما $u=u(x,t)$ در معادله یک بعدی گرما

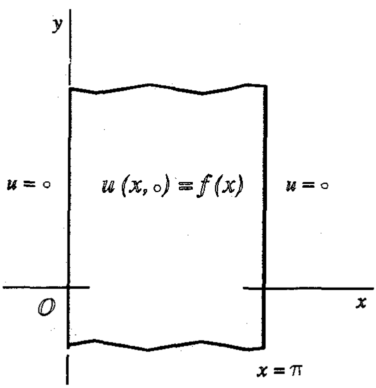
$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t) \qquad (\circ<x<\pi \;,\; t>\circ) \tag{۱}$$

باید صدق کند.

مثال ۱ . اگر دما روی دو وجه آن قطعه صفر و دماهای اولیه $f(x)$ باشند، (شکل۳۳) ، آنگاه:

$$u(\circ,t)=\circ \quad , \quad u(\pi,t)=\circ \quad , \quad u(x,\circ)=f(x) \tag{۲}$$

شرایط (۱) و (۲) مسألهٔ مقدار مرزی تشکیل می‌دهند؛ و به روش جدا سازی متغیرها،



شکل ۳۳

درمی‌یابیم که تابع $u=X(x)T(t)$ در شرائط همگن صدق می‌کند اگر:

$$X''(x)+\lambda X(x)=\circ \quad , \quad X(\circ)=\circ \quad , \quad X(\pi)=\circ \tag{۳}$$

و

$$T'(t)+\lambda kT(t)=\circ \tag{۴}$$

برطبق بخش ۲۹ مسألهٔ استورم لیوویل (۳) دارای مقادیر ویژه $\lambda_n=n^۲$ و توابع

ویژه

$X_n(x)=sin\, nx$ $(n=۱,۲,...)$ است. توابع برحسب t متناظر که از (۴) به دست می‌آیند، جز برای عاملهای ثابت ، عبارتند از $T_n(t)=exp\,(-n^۲kt)$. آنگاه به طور صوری تابع

$$u(x\,,t)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n\, e^{-n^۲ kt}\, sin\, nx \qquad (۵$$

در همه شرایط آن مسألهٔ مقدار مرزی، از جمله شرط همگن $u(x\,,۰)=f(x)$ صدق می‌کند، اگر:

$$f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n\, sin\, nx \qquad (۰<x<\pi) \qquad (۶$$

فرض کنیم که f روی بازهٔ $۰<x<\pi$ قطعه‌ای هموار باشد. آنگاه $f(x)$ با سری سینوسی فوریه‌اش یعنی (۶) نمایش داده می‌شود که در آن

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} f(x)\, sin\, nx\, dx \qquad (n=۱,۲,\ ...) \qquad (۷$$

تابع (۵) با ضرائب (۷) جواب صوری مسألهٔ مقدار مرزی (۱)- (۲) می‌باشد. این مطلب می‌تواند به صورت فشرده‌تر ذیل بیان شود:

$$u(x\,,t\,)=\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty} e^{-n^۲ kt}\, sin\, nx\int_۰^{\pi} f(x)\, sin\, ns\, ds$$

که در آن از متغیر انتگرالگیری s برای جلوگیری از اشتباه با متغیر آزاد x استفاده شده است .

مثال ۲. اگر در سرتاسر قطعه دما ابتدا صفر باشد و برای $t>۰$ دمای وجه $x=۰$ برابر با صفر و دمای وجه $x=\pi$ برابر با دمای ثابت $u_۰$ باشد، آنگاه:

$$u(۰\,,t)=۰ \quad , \quad u(\pi\,,t)=u_۰ \quad , \quad u(x\,,۰)=۰ \qquad (۸$$

به دلیل اینکه یکی از شرایط مرزی دو نقطه‌ای مسألهٔ مقدار مرزی متشکل از معادلات (۱) و (۸) غیر همگن است ، فرم این مسأله برای روش جدا سازی

متغیرها مناسب نیست. اما اگر بنویسیم:

$$u(x,t)=U(x,t)+\Phi(x) \tag{۹}$$

آن معادلات به صورت زیر درمی‌آیند:

$$U_t(x,t)=k\left[U_{xx}(x,t)+\Phi''(x)\right]$$

و

$$U(\circ,t)+\Phi(\circ)=\circ \quad , \quad U(\pi,t)+\Phi(\pi)=u_\circ \quad , \quad U(x,\circ)+\Phi(x)=\circ$$

اکنون فرض کنیم که:

$$\Phi''=\circ \quad , \quad \Phi(\circ)=\circ \quad , \quad \Phi(\pi)=u_\circ \tag{۱۰}$$

آنگاه U در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$U_t=kU_{xx}\ ,\ U(\circ,t)=U(\pi,t)=\circ\ ,\ U(x,\circ)=-\Phi(x) \tag{۱۱}$$

بنابه شرط (۱۰) $\Phi(x)=(\frac{u_\circ}{\pi})x$. بنابراین مسألهٔ (۱۱) با $f(x)=(\frac{-u_\circ}{\pi})x$ یک حالت خاص از مسألهٔ مثال ۱ است.

وقتی که $f(x)$ این تابع خاص باشد، می‌توان ضرائب b_n در (۵) را با محاسبهٔ انتگرالهای (۷) به دست آورد. اما چون از مثال ۱، بخش ۱۴، می‌دانیم که:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \qquad (\circ<x<\pi) \tag{۱۲}$$

و چون اعداد b_n ضرائب سری سینوسی فوریهٔ x $(\frac{-u_\circ}{\pi})=f(x)$ روی بازهٔ $\circ<x<\pi$ هستند، بی‌درنگ نتیجه می‌شود:

$$b_n=-\frac{u_\circ}{\pi}\ 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{u_\circ}{\pi}\ 2\frac{(-1)^n}{n} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

نتیجهً،

$$u(x,t)=\frac{u_\circ}{\pi}\left[x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2kt}\sin nx\right] \tag{۱۳}$$

در جواب (۱۳) وقتی t به بینهایت میل می‌کند، می‌بینیم که تابع $\Phi(x)=(\frac{u_\circ}{\pi})x$ ، دماهای حالت مانا در آن قطعه را نمایش می‌دهد. در حقیقت، شرایط (۱۰) از مسألهٔ لاپلاس یک بعدی و شرایط دمای صفر در $x=\circ$ و دمای $u_\circ$ در $x=\pi$ تشکیل می‌شوند. عبارت (۹) به صورت

$$U(x,t)=u(x,t)-\Phi(x)$$

نشان می‌دهد که $U(x,t)$ صرفاً جواب مطلوب منهای دماهای حالت ماناست. بالاخره توجه کنید که می‌توان جملهٔ x در جواب (۱۳) را با نمایش (۱۲) آن جایگزین کرده، آن جواب را به صورت زیر نوشت:

$$u(x,t)=\frac{۲u_\circ}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}(۱-e^{-n^۲kt})\sin nx \tag{۱۴}$$

وقتی t کوچک است این فرم دیگر، برای تقریب $u(x,t)$ با یک تعداد جمله از آن سری می‌تواند بسیار مفید باشد. برای اینکه در این صورت عاملهای $۱-exp(-n^۲kt)$ در مقایسه با عاملهای $exp(-n^۲kt)$ در عبارت (۱۳) کوچک هستند.بنابراین جملاتی که از آنها صرف نظر می‌شود کوچکترند. البته وقتی t بزرگ است، جملات سری (۱۳) کوچکترند.

مثال ۳. فرض کنید دمای وجه $x=\circ$ صفر و وجه $x=\pi$ عایق بندی شده آنگاه:

$$u(\circ,t)=\circ \quad , \quad u_x(\pi,t)=\circ \quad , \quad (t>\circ)$$

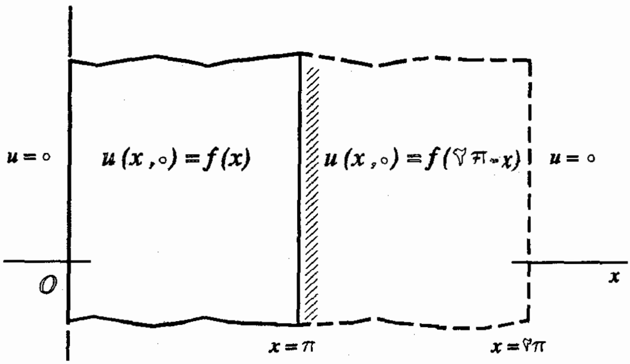
همچنین فرض کنید دماهای اولیه

$$u(x,\circ)=f(x) \qquad (\circ<x<\pi) \tag{۱۶}$$

باشد که در آن f قطعه‌ای هموار است. با نوشتن $u=X(x)T(t)$ و جداسازی متغیرها به دست می‌آوریم:

$$X''(x)+\lambda X(x)=\circ \quad , \quad X(\circ)=\circ \quad , \quad X'(\pi)=\circ$$

اگر چه به این مسأله برحسب X می‌توان با روشهای توسعه داده شده در فصل ۵ رسیدگی کرد، برای انجام این امر در این زمان آمادگی کامل نداریم. درهرحال این مسأله دما با در نظر گرفتن یک مسأله مربوط به آن دریک قطعهٔ بزرگتر $\circ \leq x \leq ۲\pi$ می‌تواند حل شود (شکل ۳۴).



شکل ۳۴

فرض کنید دو وجه $x=\circ$ و $x=۲\pi$ از آن قطعهٔ بزرگتر در دمای صفر نگهداشته شوند و دماهای اولیه

$$u(x,\circ)=F(x) \qquad (\circ<x<۲\pi) \tag{۱۷}$$

باشند که در آن:

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \circ<x<\pi \quad \text{اگر} \\ f(۲\pi-x) & \pi<x<۲\pi \quad \text{اگر} \end{cases} \tag{۱۸}$$

تابع F یک توسیع قطعه‌ای هموار از تابع f روی بازهٔ $\circ<x<۲\pi$ و نمودار $y=F(x)$ نسبت به خط $x=\pi$ متقارن است. این رویه از این واقعیت به ذهن می‌رسد که با شرط اولیهٔ (۱۷) هیچ گرمایی از قسمت میانی $x=\pi$ قطعهٔ بزرگتر جریان نخواهد داشت.بنابراین وقتی متغیر x به بازهٔ $\circ<x<\pi$ محدود شود، تابع دما برای قطعهٔ بزرگتر، جواب مطلوب برای قطعه اولی خواهد بود. طبق

مسألهٔ ۴ (ب) که جواب مسألهٔ مقدار مرزی مثال ۱ را برای یک قطعه با ضخامت دلخواه می‌دهد، تابع دما برای قطعه بزرگتر به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n^2 k}{4}t\right)\sin\frac{nx}{2} \tag{19}$$

که در آن b_n ضرائب سری سینوسی فوریه تابع F روی بازهٔ $0<x<2\pi$ می‌باشند:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin\frac{nx}{2}\,dx \qquad (n=1,2,\dots)$$

با رجوع به مسألهٔ ۱۱ بخش ۲۱ این عبارت را برحسب تابع اصلی $f(x)$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$b_n=\left[1-(-1)^n\right]\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\frac{nx}{2}\,dx \qquad (n=1,2,\dots)$$

یعنی $b_{2n}=0$ ،

$$b_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\frac{(2n-1)x}{2}\,dx \qquad (n=1,2,\dots) \tag{20}$$

آنگاه جواب (۱۹) با ضرائب (۲۰) بدین صورت درمی‌آید:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\exp\left[-\frac{(2n-1)^2 k}{4}t\right]\sin\frac{(2n-1)x}{2} \tag{21}$$

مسائل[1]

۱. فرض کنید توزیع دمای اولیه روی قطعهٔ مثال ۱ بخش ۳۲ یکنواخت و $f(x)=u_0$ باشد. برای $t>0$ ، $u(x,t)$ و شار $-Ku_x(x_0,t)$ از میان یک صفحهٔ $x=x_0$ $(0\le x_0\le\pi)$ را

---

۱. درکلیه مسائل مقدار مرزی اینجا و مجموعه مسائل بعدی، فقط جوابهای صوری مطلوب است ، مگر اینکه به طور مشخص درمورد جواب ، بررسی وتحقیق خواسته شود.بررسی جزئی اغلب آسان و مفید است.

بدست آورید. نشان دهید که هیچ گرمایی از میان صفحه مرکزی $x=\frac{\pi}{۲}$ جریان ندارد.

۲. فرض کنید در مثال ۱ بخش ۳۲، $f(x)=\sin x$. $u(x,t)$ را بدست آورده، درستی آن را را کاملاً بررسی کنید.

راهنمایی: از فرمول انتگرالگیری (۱۰) بخش ۱۱ استفاده کنید.

جواب :
$$u(x,t)=e^{-kt}\sin x$$

۳. فرض کنید $v(x,t)$ و $w(x,t)$ جوابهای به دست آمده در مثالهای ۱و۲ بخش ۳۲ باشند. با فرض معتبر بودن جوابها نشان دهید که مجموع $u=v+w$ یک فرمول دما برای یک قطعه $۰\leq x\leq\pi$ ارائه می‌کند که وجه $x=۰$ آن در دمای ۰ و وجه $x=\pi$ آن در دمای $u_۰$ و توزیع دمای اولیه آن $f(x)$ می‌باشد.

۴. یک قطعه $۰\leq x\leq c$ باتوزیع دمای اولیه $f(x)$ درنظر بگیرید که وجه‌های $x=۰$ و $x=c$ آن در دمای صفر حفظ می‌شوند. به روش زیر عبارتی برای دماهای $u=u(x,t)$ در سرتاسر آن قطعه به دست آورید هرگاه $t>۰$.

(الف) مسألهٔ مقدار مرزی دماها را نوشته، سپس باتعویض متغیر $s=\frac{\pi x}{c}$ نشان دهید که $u_t=\frac{k\pi^۲}{c^۲}u_{ss}$ و وقتی $s=۰$ و $s=\pi$ داریم $u=۰$ و وقتی $t=۰$, $u=f(\frac{cs}{\pi})$.

(ب) با رجوع به جواب (۵) با ضرائب (۷) از مسألهٔ مثال ۱ بخش ۳۲ عبارتی برای u برحسب s و t بنویسید. سپس با کمک رابطهٔ $s=\frac{\pi x}{c}$ که در قسمت الف از آن استفاده شد، نشان دهید:

$$u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n^۲\pi^۲k}{c^۲}t\right)\sin\frac{n\pi x}{c}$$

که در آن:

$$b_n=\frac{۲}{c}\int_۰^c f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx \qquad (n=۱,۲,\ldots)$$

۵. (الف) نشان دهید که اگر A یک ثابت و

$$f(x)=\begin{cases} A & ۰<x<\frac{c}{۲} \quad \text{اگر} \\ ۰ & \frac{c}{۲}<x<c \quad \text{اگر} \end{cases}$$

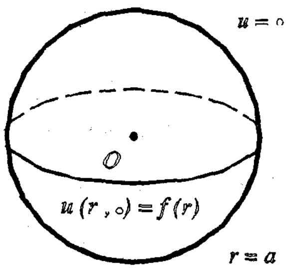
فرمول دما در مسأله ۴ (ب) به صورت ذیل درمی‌آید:

$$u(x,t)=\frac{۴A}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{sin^{۲}(\frac{n\pi}{۴})}{n}exp(-\frac{n^{۲}\pi^{۲}k}{c^{۲}}t)sin\frac{n\pi x}{c}$$

(ب) دو قطعه آهن ($k=۰/۱۵$ واحد cgs) هرکدام با ضخامت ۲۰ سانتی‌متر، طوری هستند که دما در سرتاسر یکی از آنها $۱۰۰°c$ و دما در سرتاسر دیگری $۰°c$ می‌باشد. آنها را روبروی هم در تماس کامل قرار داده، وجوه بیرونی آنها را در $۰°c$ نگاه می‌داریم. بااستفاده از نتیجه قسمت (الف) این مسأله، نشان دهید که دمای تقریبی در وجه مشترک پس از ۱۰ دقیقه تماس $۳۶°c$ می‌باشد. سپس نشان دهید که اگر آن قطعه‌ها از سیمان ساخته شده باشند (واحد cgs $k=۰/۰۰۵$) حدوداً ۵ ساعت طول می‌کشد تا وجه مشترک به دمای $۳۶°c$ برسد. [توجه کنید که $u(x,t)$ بستگی به حاصلضرب kt دارد].

۶. فرض کنید $u(r,t)$ نمایش دماهای داخل یک کرهٔ توپر $r\leq a$ است که در آن r مختص کروی (بخش۴) می‌باشد و دمای اولیهٔ آن کره $f(r)$ و سطح $r=a$ در دمای صفر حفظ می‌شود (شکل۳۵). تابع $u(r,t)$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{r}\frac{\partial^{۲}}{\partial r^{۲}}(ru)\quad,\quad u(a,t)=۰\quad,\quad u(r,۰)=f(r)$$



شکل ۳۵

تابع جدید $v(r,t)=ru(r,t)$ را معرفی کرده، توجه داشته باشید که به دلیل پیوستگی u در مرکز $r=\circ$ ، $v(\circ,t)=\circ$. یک مسأله مقدار مرزی جدید برحسب v ساخته، با کمک جواب مسألهٔ ۴ (ب) عبارت زیر را به دست آورید:

$$u(r,t)=\frac{۲}{ar}\sum_{n=۱}^{\infty} exp(-\frac{n^{۲}\pi^{۲}k}{a^{۲}}t)\sin\frac{n\pi r}{a}\int_{\circ}^{a} sf(s)\sin\frac{n\pi s}{a}ds$$

۷. سطح یک جسم کروی (صلب) توپر به قطر ۴۰ سانتی‌متر و دمای سرتاسری اولیهٔ $۱\circ\circ^\circ c$ را در $\circ^\circ c$ نگاه می‌داریم تا جسم سرد شود. از فرمول دما در مسألهٔ ۶ و اینکه وقتی θ به صفر میل می‌کند $\frac{(\sin\theta)}{\theta}$ به یک میل می‌کند؛ استفاده کرده، به طور صوری نشان دهید که:

$$u(\circ+,t)=۲\circ\circ\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱} exp(-\frac{n^{۲}\pi^{۲}k}{۴\circ\circ}t)$$

سپس دمای تقریبی را در مرکز کره ۱۰ دقیقه پس از شروع سرد کردن برای دو حالت زیر به دست آورید:

(الف) جنس کره آهن باشد که در این صورت $k=\circ/۱۵$ واحد cgs است.

(ب) جنس کره سیمان باشد که در این صورت $k=\circ/\circ\circ۵$ واحد cgs است.

جوابها: (الف) $۲۲^\circ c$ ، (ب) $۱\circ\circ^\circ c$.

۸. دمای اولیه در سرتاسر یک قطعه $\circ\leq x\leq\pi$ صفر است و وجه $x=\circ$ آن در همان دما حفظ می‌شود. گرما با یک نرخ ثابت $A(A>\circ)$ در هر واحد سطح از وجه $x=\pi$ به قطعه وارد می‌شود، بنابراین $ku_x(\pi,t)=A$ (بخش ۳ را ببینید). از جواب مسأله مثال ۳ بخش ۳۲ استفاده کرده، عبارت ذیل را برای توزیع دما در این قطعه بدست آورید:

$$u(x,t)=\frac{A}{K}\left\{x+\frac{۸}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{(۲n-۱)^{۲}}\ exp\left[-\frac{(۲n-۱)^{۲}k}{۴}t\right]\sin\frac{(۲n-۱)x}{۲}\right\}$$

۹. فرض کنید $v(x,t)$ دماهای داخل یک سیم باریک را که روی محور x قرار دارد نمایش دهد.از تغییرات دما روی سطح مقاطع سیم چشم پوشی می‌شود. فرض می‌کنیم که در

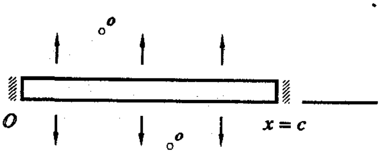
سطح جانبی آن سیم ، قانون خطی انتقال حرارت رویه‌ای بین سیم و محیط اطرافش اعمال می‌شود (مسألۀ ۷ بخش ۴ را ببینید). فرض کنید که دمای محیط صفر باشد؛ آنگاه:

$$v_t(x,t)=kv_{xx}(x,t)-bv(x,t)$$

که در آن b یک ثابت مثبت است. دو انتهای $x=\circ$, $x=c$ از آن سیم عایق بندی شده (شکل ۳۶) و $f(x)$ توزیع دمای اولیه است. آن مسألۀ مقدار مرزی را با روش جدا سازی متغیرها حل کرده، v را به دست آورید. آنگاه نشان دهید که:

$$v(x,t)=u(x,t)e^{-bt}$$

که در آن u تابع دما به دست آمده در بخش ۲۷ می‌باشد.



شکل ۳۶

۱۰. با جایگزینی $v(x,t)=u(x,t)exp(-bt)$ مسألۀ مقدار مرزی سؤال ۹ را به مسألۀ مقدار مرزی بخش ۲۷ تبدیل کنید.

۱۱. با فرض اینکه دو انتهای سیم در مسألۀ ۹ عایق بندی نشده، اما در عوض دما را در دو انتها صفر نگه داریم، تابع دما را برای این حالت به دست آورید.

۱۲. مسألۀ مقدار مرزی زیر راحل کنید:

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)-bu(x,t) \qquad (\circ<x<\pi\ ,\ t>\circ)$$

و شرایط مرزی

$$u(\circ,t)=\circ \quad , \quad u(\pi,t)=1 \quad , \quad u(x,\circ)=\circ$$

که در آن b یک ثابت مثبت است.

همچنین تعبیری فیزیکی از این مسأله ارائه کنید (مسألۀ ۹ را ببینید)

راهنمائی: سری فوریهٔ تابع $sinh\,\alpha x$ در مسألهٔ ۵ بخش ۱۶ در اینجا مفید است.

جواب :
$$u(x,t)=\frac{\sinh x\sqrt{b}}{\sinh \pi\sqrt{b}}+\frac{2}{\pi}e^{-bt}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+b}e^{-n^2t}\sin nx$$

۳۳. قطعه باگرمای تولید شدهٔ داخلی

در اینجا همان قطعهٔ نامتناهی $0 \le x \le \pi$ بخش ۳۲ را در نظر گرفته، اما فرض می‌کنیم یک سرچشمه وجود دارد که با یک نرخ در هر واحد حجم که بستگی به زمان دارد گرما تولید می‌کند. دماهای اولیهٔ آن قطعه $f(x)$ و هر دو وجه آن در دمای صفر نگه داشته می‌شوند.

طبق بخش ۲، دماهای $u(x,t)$ در داخل این قطعه باید در معادلهٔ

۱)
$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t)+q(t) \qquad (0<x<\pi\ ,\ t>0)$$

که یک فرم اصلاح شدهٔ معادلهٔ گرمای یک بعدی است صدق کند. $q(t)$ یک تابع پیوسته از متغیر t می‌باشد. با شرایط

۲)
$$u(0,t)=0 \quad , \quad u(\pi,t)=0 \quad , \quad u(x,0)=f(x)$$

بیان این مسألهٔ مقدار مرزی کامل می‌شود.

چون معادلهٔ (۱) غیرهمگن است، روش جداسازی متغیرها نمی‌تواند مستقیماً به کار برده شود. به جای آن در اینجا از یک روش معروف به روش تغییر پارامترها استفاده می‌کنیم. آن را روش بسطهای توابع ویژه نیز گویند و اغلب زمانی مفید است که معادلهٔ دیفرانسیل غیرهمگن باشد، بویژه اینکه جمله‌ای که آن را ناهمگن می‌سازد وابسته به زمان باشد. به عبارت دقیقتر، به دنبال یک جواب از آن مسأله مقدار مرزی به صورت :

۳)
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\sin nx$$

یک سری سینوسی فوریه هستیم که ضرائب $B_n(t)$ در آن توابعی مشتق‌پذیر از متغیر t باشند. فرم (۳) با توجه به مثال ۱ بخش ۳۲ به ذهن می‌رسد، زیرا آن مسأله برای

$q(t)\equiv \circ$ در معادلهٔ (۱) با همین مسأله یکی است. پیش‌بینی می‌کنیم که تابع $q(t)$ در معادلهٔ (۱) موجب خواهد شد تا ضرائب b_n در جواب (۵) بخش ۳۲، از قسمت همگن مسألهٔ قبلی وابسته به t باشد. به جای نوشتن $b_n(t)\ exp(-n^{۲}kt)$, $b_n(t)$ و تابع نمائی را ترکیب کرده، آن حاصلضرب را با $B_n(t)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین کارمان را در واقع با یک ترکیب خطی تعمیم یافته با ضرائب وابسته به t از توابع ویژهٔ $sin\,nx\ (n=۱,۲,...)$ از مسألهٔ استورم لیوویل مثال ۱ بخش ۳۲ شروع می‌کنیم. خواننده توجه خواهد داشت که روش به دست آوردن یک جواب به فرم (۳) ذاتاً با روش تغییر پارامترها مشابه است که در حل معادلات دیفرانسیل معمولی خطی غیر همگن از آن استفاده می‌شود.

فرض می‌کنیم که از سری (۳) بتوان جمله به جمله مشتق گرفت. سپس با جایگزینی آن در معادلهٔ(۱) و یادآوری [مسألهٔ ۱ (ب) بخش ۱۴] اینکه:

$$۱=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲\left[۱-(-۱)^{n}\right]}{n\pi}sin\,nx \qquad (\circ<x<\pi)$$

می‌توانیم بنویسیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}B_n'(t)sin\,nx=$$

$$k\sum_{n=۱}^{\infty}\left[-n^{۲}B_n(t)\right]sin\,nx+q(t)\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲\left[۱-(-۱)^{n}\right]}{n\pi}sin\,nx$$

یا:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left[B_n'(t)+n^{۲}kB_n(t)\right]sin\,nx=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲\left[۱-(-۱)^{n}\right]}{n\pi}q(t)\,sin\,nx$$

با متحد کردن ضرائب سری‌های سینوسی در دو طرف این معادلهٔ آخری، می‌بینیم که:

$$B_n'(t)+n^{۲}kB_n(t)=\frac{۲\left[۱-(-۱)^{n}\right]}{n\pi}q(t) \qquad (n=۱,۲,\ ...) \tag{۴}$$

بعلاوه، برطبق سومین شرط از شرایط (۲)

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n(0) \sin nx = f(x) \qquad (0 < x < \pi)$$

و این بدان معنی است که:

$$B_n(0) = b_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{۵}$$

که در آن b_n ضرائب

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{۶}$$

سری سینوسی فوریهٔ $f(x)$ روی بازهٔ $0 < x < \pi$ هستند. برای هر مقدار n معادلات (۴) و (۵) یک مسألهٔ مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی تشکیل می‌دهند. برای حل معادلهٔ دیفرانسیل خطی (۴) ملاحظه می‌کنیم که:

$$\exp \int n^2 k \, dt = \exp n^2 k t$$

یک عامل انتگرالگیری[1] است. با ضرب (۴) در این عامل انتگرالگیری داریم:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{n^2 kt} B_n(t)\right] = \frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi} e^{n^2 kt} q(t)$$

که در آن طرف چپ یک مشتق کامل است. اگر در اینجا متغیر t را با τ عوض کنیم، با گرفتن انتگرال از دو طرف آن از $\tau = 0$ تا $\tau = t$ نتیجه می‌شود که:

$$\left[e^{n^2 k\tau} B_n(\tau)\right]_0^t = \frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi} \int_0^t e^{n^2 k\tau} q(\tau) d\tau$$

---

۱. خواننده بخاطر خواهد آورد که هرمعادلهٔ مرتبه اول خطی $y' + p(t)y = g(t)$ یک عامل انتگرالگیری به صورت $\exp \int p(t) dt$ دارد. برای مثال کتاب رین ویلی و بدی‌انت (۱۹۸۹ فصل ۲) را که در کتابنامه آمده

آنگاه نظر به شرط (۵)،

$$B_n(t) = b_n e^{-n^2 kt} + \frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi} \int_0^t e^{-n^2 k(t-\tau)} q(\tau)\, d\tau \tag{۷}$$

سرانجام با جایگزینی این عبارت برای $B_n(t)$ در سری (۳) به جواب صوری مقدار مرزیمان می‌رسیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 kt} \sin nx \tag{۸}$$

$$+\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \int_0^t e^{-(2n-1)^2 k(t-\tau)} q(\tau)\, d\tau$$

ملاحظه می‌کنید که اولین سری از این سریها جواب مسألهٔ مقدار مرزی مثال ۱ بخش ۳۲ را برای $q(t)$ نمایش می‌دهد.

برای اینکه نشان دهیم حالات خاص و جالب از جواب (۸) چگونه بسادگی به دست می‌آیند، فرض می‌کنیم که در شرط سوم از شرایط (۲) $f(x) \equiv 0$ و $q(t)$ یک تابع ثابت $q(t) = q_0$ باشد.

چون $b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$

و

$$\int_0^t e^{-(2n-1)^2 k(t-\tau)} q_0\, d\tau = \frac{q_0}{k} \cdot \frac{1 - \exp\left[-(2n-1)^2 kt\right]}{(2n-1)^2}$$

جواب (۸) به فرم زیر تبدیل می‌شود:[۱]

$$u(x,t)=\frac{۴q_۰}{\pi k}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-exp\left[-(۲n-۱)^۲kt\right]}{(۲n-۱)^۳}\sin(۲n-۱)x \qquad (۹$$

نظر به نمایش سری سینوسی فوریه (مسألهٔ ۵ بخش ۱۴)

$$x(\pi-x)=\frac{۸}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)x}{(۲n-۱)^۳} \qquad (۰<x<\pi)$$

جواب (۹) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$u(x,t)=\frac{q_۰}{۲k}x(\pi-x)-\frac{۴q_۰}{\pi k}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{exp\left[-(۲n-۱)^۲kt\right]}{(۲n-۱)^۳}\sin(۲n-۱)x \quad (۱۰$$

(تبصره‌های آخر مثال ۲ بخش ۳۲ را ببینید)

مسائل

۱. مسألهٔ مقدار مرزی

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+xp(t) \qquad (۰<x<۱,\ t>۰)$$

$$u(۰,t)=۰ \quad , \quad u(۱,t)=۰ \quad , \quad u(x,۰)=۰$$

دما را در یک قطعه‌ای که از داخل گرما داده شده ، توصیف می‌کند. در اینجا واحدهای t طوری انتخاب شده‌اند که می‌توان رسانایی گرمایی k از جنس قطعه را واحد گرفت. (با

۱. برای مثال این نتیجه در نظریه چسباندن چوب با کمک گرمای رادیو - فرکانس پیش می‌آید. مقاله زیررا ببینید. *G.H.Brown. proc.Inst.Radio Engrs.vol 31.no.10.pp. 537-548, 1943* که در آن روش‌های عملی به کار رفته‌اند.

مسأله ۱۰ بخش ۴ مقایسه کنید). با یادآوری [مسألهٔ ۵ (الف) بخش ۲۱] بسط

$$x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x \qquad (0<x<1)$$

و به کارگیری روش تغییر پارامترها این مسأله راحل کنید.

جواب: $$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x\int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-\tau)}p(\tau)\,d\tau$$

۲. نشان دهید که وقتی تابع $p(t)$ در مسألهٔ ۱ تابع ثابت $p(t)=a$ باشد، جواب به دست آمده در آنجا به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$u(x,t)=\frac{2a}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1-\exp(-n^2\pi^2 t)}{n^3}\sin n\pi x$$

۳. فرض کنید $u(x,t)$ نمایش دماها دریک قطعه $0\le x\le 1$ باشد که دمای اولیه در سرتاسر آن صفر و وجوه آن در دماهای

$$u(0,t)=0 \qquad , \qquad u(1,t)=F(t)$$

هستند. $F(t)$ و $F'(t)$ برای $t\ge 0$ پیوسته‌اند و $F(0)=0$. واحد زمان طوری انتخاب شده که معادلهٔ یک بعدی گرما به صورت $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ است بنویسید:

$$u(x,t)=U(x,t)+xF(t)$$

و مشاهده کنید چگونه از شرایط بیان شده روی وجوه آن قطعه نتیجه می‌شود که:

$$U(0,t)=0 \qquad , \qquad U(1,t)=0$$

بقیه شرایط روی $u(x,t)$ را به شرایط روی $U(x,t)$ تبدیل کنید، سپس به جواب به دست آمده در مسئله ۱ رجوع کرده، نشان دهید که:

$$u(x,t)=xF(t)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}\sin n\pi x\int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-\tau)}F'(\tau)\,d\tau$$

۴. نشان دهید که عبارت مربوط به $u(x,t)$ به دست آمده در مسألهٔ ۳ تبدیل می‌شود به:

$$u(x,t)=A\left[xt+\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1-exp(-n^2\pi^2t)}{n^3}\sin n\pi x\right]$$

وقتی که $F(t)=At$ که در آن A یک ثابت است.

۵. بنویسید:

$$u(x,t)=\frac{A_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\cos\frac{n\pi x}{c}$$

واز [مسألهٔ ۵(ب) بخش ۲۱] به یاد آورید که:

$$x^2=\frac{c^2}{3}+\frac{4c^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{c}\qquad(0<x<c)$$

سپس این مسألهٔ دما را

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t)+ax^2\qquad(0<x<c\ ,\ t>0)$$

$$u_x(0,t)=0\quad,\quad u_x(c,t)=0\quad,\quad u(x,0)=0$$

برای یک قطعه $0\le x\le c$ که وجوه آن عایق‌بندی شده، حل کنید. در اینجا a یک ثابت است. بنابراین نشان دهید که:

$$u(x,t)=ac^2\left\{\frac{t}{3}+\frac{4c^2}{\pi^4k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\left[1-exp(-\frac{n^2\pi^2k}{c^2}t)\right]\cos\frac{n\pi x}{c}\right\}$$

۶. میله‌ای را درنظر بگیرید که سطح جانبی آن عایق‌بندی شده و دمای اولیهٔ آن صفر و دو انتهای $x=0$ و $x=c$ آن در همان دما حفظ می‌شوند. توزیع دماها در آن میله که در اثر گرمای داخلی تولید شده است در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t)+q(x,t)\qquad(0<x<c\ ,\ t>0)$$

با روش تغییر پارامترها، فرمول دما را به صورت ذیل به دست آورید:

$$u(x,t)=\frac{۲}{c}\sum_{n=۱}^{\infty} I_n(t)\sin\frac{n\pi x}{c}$$

که در آن $I_n(t)$ نمایش انتگرالهای مکرر زیر است:

$$I_n(t)=\int_{۰}^{t} \exp\left[-\frac{n^{۲}\pi^{۲}k}{c^{۲}}(t-\tau)\right]\int_{۰}^{c} q(x,\tau)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx\,d\tau$$

$$(n=۱,۲,\dots)$$

راهنمائی: بنویسید:

$$q(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{c}$$ که در آن $$b_n(t)=\frac{۲}{c}\int_{۰}^{c} q(x,t)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

۷. با روش تغییر پارامترها این مسألهٔ دما را حل کنید:

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)-b(t)u(x,t)+q_{۰} \qquad (۰<x<\pi\ ,\ t>۰)$$

$$u(۰,t)=۰\quad,\quad u(\pi,t)=۰\quad,\quad u(x,۰)=۰$$

که در آن $q_{۰}$ یک ثابت است[۱] (مسألهٔ ۷ بخش ۴ را ببینید)

جواب: $$u(x,t)=\frac{۴q_{۰}}{\pi a(t)}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱}\int_{۰}^{t} e^{-(۲n-۱)^{۲}(t-\tau)}a(\tau)d\tau$$

که در آن $$a(t)=\exp\int_{۰}^{t} b(\sigma)d\sigma$$

۸. هرگاه جمله‌ای که معادلهٔ گرما را غیرهمگن می‌سازد، یک ثابت یا یک تـابع فـقط از متغیر x باشد، جایگزینی

$$u(x,t)=U(x,t)+\Phi(x)$$

---

۱. برای یافتن یک عامل انتگرالگیری برای معادلهٔ دیفرانسیل معمولی که خواهید داشت ، توجه به اینکه $\int_{۰}^{t} b(\sigma)\,d\sigma$ یک تابع اولیهٔ $b(t)$ می‌باشد، مفید است.

که در مثال ۲، بخش ۳۲ به کار رفت، برای روش تغییر پارامترها، اغلب جایگزین مناسبی است. بااستفاده از آن جایگزینی و جواب مسألهٔ مثال ۱ بخش ۳۲، جواب زیر را برای مسألهٔ مقدار مرزی (۱)-(۲) در بخش ۳۳ به دست آورید، هرگاه $q(t)=q_\circ$

$$u(x,t)=\frac{q_\circ}{\text{۲}k}x(\pi-x)+\sum_{n=\text{۱}}^{\infty}b_n e^{-n^{\text{۲}}kt}\sin nx$$

که در آن

$$b_n=\frac{\text{۲}}{\pi}\int_\circ^\pi\left[f(x)-\frac{q_\circ}{\text{۲}k}x(\pi-x)\right]\sin nx\,dx \qquad (n=\text{۱},\text{۲},\ldots)$$

۹. نشان دهید جواب بدست آمده در مسألهٔ ۸ را می‌توان به صورت (۹)، بخش ۳۳ نوشت، هرگاه $f(x)\equiv\circ$

۱۰. دمای اولیهٔ یک کرهٔ توپر $r\leq\text{۱}$ صفر است و سطح آن در همان دما حفظ می‌شود. گرما در سرتاسر داخل کره با یک نرخ یکنواخت و ثابت در هر واحد حجم تولید می‌شود، بنابراین تابع دما $u=u(r,t)$ در معادلهٔ غیر همگن گرما

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{r}\frac{\partial^{\text{۲}}}{\partial r^{\text{۲}}}(ru)+q_\circ \qquad (\circ<r<\text{۱}\ ,\ t>\circ)$$

صدق می‌کند که در آن $q_\circ$ یک ثابت مثبت است. $u(r,t)=U(r,t)+\Phi(r)$ را در مسألهٔ دما برای این کره جایگزین کنید. در اینجا U و Φ باید در $r=\circ$ پیوسته باشند.[توجه کنید که شرط پیوستگی، نتیجه می‌دهد که وقتی r به صفر میل می‌کند $r\Phi(r)$ به صفر میل می‌کند.] سپس برای نوشتن جواب این مسألهٔ جدید مقدار مرزی برای $U(r,t)$، به جواب به دست آمده در مسألهٔ ۶، بخش ۳۲ رجوع کرده ،بدین ترتیب نشان دهید که :

$$u(r,t)=\frac{q_\circ}{kr}\left[\frac{\text{۱}}{\text{۶}}r(\text{۱}-r^{\text{۲}})+\frac{\text{۲}}{\pi^{\text{۳}}}\sum_{n=\text{۱}}^{\infty}\frac{(-\text{۱})^n}{n^{\text{۳}}}e^{-n^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}kt}\sin n\pi r\right]$$

راهنمائی: توجه به این مطلب مفید است که نظر به فرمول ضرائب سری سینوسی فوریه، مقادیر انتگرالهای مشخصی که ظاهر می‌شوند، جز برای یک عامل ثابت، ضرائب سری زیرند [مسألهٔ ۷ (الف) بخش ۲۱]

$$x(۱-x^۲)=\frac{۱۲}{\pi^۳}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۳}\sin n\pi x \qquad (۰<x<۱)$$

۳۴. مسائل دیریکله

همانگونه که پیش از این در بخش ۷ اشاره شد، به یک مسألهٔ مقدار مرزی برحسب u مرکب از معادلهٔ لاپلاس $\nabla^۲u=۰$، که همساز بودن u در یک دامنه داده شده را بیان می‌کند و مقادیر تعیین شدهٔ u روی مرز آن دامنه مسألهٔ دیریکله گویند. اکنون استفاده از روش فوریه را جهت حل اینگونه مسائل، برای دامنه‌های مشخص در صفحه نشان می‌دهیم.

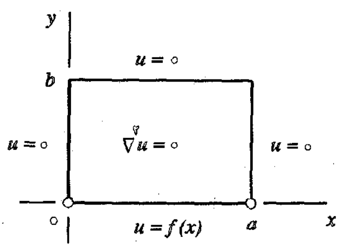
مثال ۱. فرض کنید u در داخل یک ناحیه مستطیلی $۰\le x\le a$ و $۰\le y\le b$ همساز باشد، بنابراین:

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=۰ \qquad (۰<x<a\ ,۰<y<b) \qquad (۱$$

مقادیر زیر روی مرز تعیین شده‌اند (شکل ۳۷):

$$u(۰,y)=۰ \qquad u(a,y)=۰ \qquad (۰<y<b) \qquad (۲$$

$$u(x,۰)=f(x) \qquad u(x,b)=۰ \qquad (۰<x<a) \qquad (۳$$



شکل ۳۷

جداسازی متغیرها با $u=X(x)Y(y)$ مسألهٔ استورم لیوویل زیر را نتیجه

می‌دهد:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , \quad X(0)=0 \quad , \quad X(a)=0 \tag{۴}$$

که مقادیر ویژه و توابع ویژه آن عبارتند از (بخش ۲۹):

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad , \quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

روش فوق به همراه خود شرایط زیر را نیز نتیجه می‌دهد:

$$Y''(y)-\lambda Y(y)=0 \qquad , \qquad Y(b)=0 \tag{۵}$$

برای λ برابر با یک مقدار ویژهٔ خاص λ_n از مسألهٔ استورم لیوویل (۴) تابع $y_n(y)$ که در شرایط (۵) صدق کند تابع زیر است.

$$Y_n(y)=C_1\left[\exp\frac{n\pi y}{a}-\exp\frac{n\pi(2b-y)}{a}\right]$$

که در آن C_1 یک ثابت غیر صفر دلخواه است. به جای اینکه، مثل گذشته در این حالت، $C_1=1$ قرار دهیم، می‌نویسیم:

$$C_1=-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{n\pi b}{a}\right)$$

آنگاه $y_n(y)$ به صورت متراکم زیر درمی‌آید:

$$Y_n(y)=\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}$$

بنابراین تابع

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{۶}$$

به طور صوری در همهٔ شرایط (۱) تا (۳) صدق می‌کند، مشروط بر اینکه:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi b}{a}\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad (0<x<a) \tag{۷}$$

فرض می‌کنیم که f قطعه‌ای هموار است. پس اگر $B_n \sinh(\frac{n\pi b}{a})=b_n$ آنگاه سری (۷) نمایش سری سینوسی فوریهٔ $f(x)$ روی بازهٔ $\circ < x < a$ می‌باشد که در آن:

$$b_n = \frac{۲}{a}\int_{\circ}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

بنابراین تابع تعریف شده در (۶) با ضرائب

$$B_n = \frac{۲}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})}\int_{\circ}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \qquad (n=۱,۲,\ldots) \qquad (۸$$

جواب صوری این مسأله است.

اگر در مسألهٔ بالا و همچنین جواب آن y با متغیر جدید $b-y$ جابجا و $f(x)$ با $g(x)$ تعویض شود، شرط غیرهمگنی که u در آن صدق می‌کند به $u(x,b)=g(x)$ تبدیل می‌شود. پس یک جابجائی y, x شرایط همگن را روی لبهٔ $x=\circ$ یا $x=a$ قرار می‌دهد. بدین ترتیب برهمنهی (ترکیب خطی) این چهار جواب، یک تابع همساز است که مقادیرش به صورت توابعی از موقعیت در امتداد تمام مرز آن دامنه مستطیلی جز در گوشه‌ها تعیین می‌شوند.

از معادلات (۱) تا (۳) ملاحظه می‌کنیم که $u(x,y)$ دماهای حالت مانا در یک صفحهٔ مستطیلی را نمایش می‌دهد که وجوه آن صفحه عایق‌بندی شده و روی لبهٔ $y=\circ$، $u=f(x)$، و روی سه لبهٔ دیگر صفحه $u=\circ$ است. تابع u همچنین پتانسیل الکترواستاتیک فضای بین صفحات $x=\circ$ و $x=a$ و $y=\circ$ و $y=b$ را نمایش می‌دهد، هرگاه آن فضا بدون بار الکتریکی بوده و پتانسیل روی صفحات مرزی آن فضا برابر آنچه که در شرایط (۲) و (۳) داده شد، حفظ شود.

مثال۲. فرض کنید که $u(\rho,\phi)$ نمایش یک تابع برحسب مختصات استوانه‌ای یا قطبی ρ و ϕ باشد که در دامنهٔ $۱<\rho<b$ و $\circ<\phi<\pi$ از صفحهٔ $z=\circ$ (شکل ۳۸) همساز است. بدین گونه (بخش۴) :

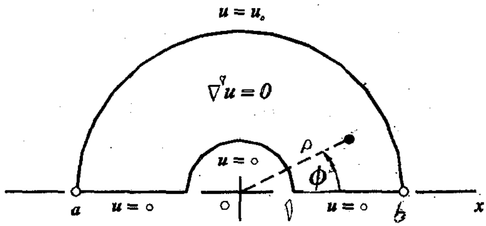
$$\rho^۲ u_{\rho\rho}(\rho,\phi) + \rho u_{\rho}(\rho,\phi) + u_{\phi\phi}(\rho,\phi) = \circ \qquad (۱<\rho<b\,,\ \circ<\phi<\pi) \ (۹$$

بعلاوه فرض کنید که:

$$u(\rho,\circ)=\circ \qquad u(\rho,\pi)=\circ \qquad (\text{۱}<\rho<b) \qquad (\text{۱۰}$$

$$u(\text{۱},\phi)=\circ \qquad u(b,\phi)=u_\circ \qquad (\circ<\phi<\pi) \qquad (\text{۱۱}$$

که در آن $u_\circ$ یک مقدار ثابت است.



شکل ۳۸

با جایگذاری $u=R(\rho)\,\Phi(\phi)$ در شرایط همگن فوق و جداسازی متغیرها داریم:

$$\rho^{\text{۲}}R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=\circ \quad , \quad R(\text{۱})=\circ \qquad (\text{۱۲}$$

و

$$\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=\circ \quad , \quad \Phi(\circ)=\circ \quad , \quad \Phi(\pi)=\circ \qquad (\text{۱۳}$$

این مسأله، صرف‌نظر از نماد، مسألهٔ استورم‌لیوویل بخش ۲۹ است برای تابع Φ و $c=\pi$ که مقادیر ویژه و توابع ویژه آن عبارتند از:

$$\lambda_n=n^{\text{۲}} \quad , \quad \Phi_n(\phi)=\sin n\phi \qquad (n=\text{۱},\text{۲},\ldots)$$

با حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$\rho^{\text{۲}}R''(\rho)+\rho R'(\rho)-n^{\text{۲}}R(\rho)=\circ \qquad (\text{۱}<\rho<b)$$

که در آن $R(1)=0$، توابع متناظر $R_n(\rho)$ به دست می‌آیند. این یک مسألهٔ کوشی-اویلر است (مسألهٔ ۳، بخش ۳۵ را ببینید)، و جایگزینی $\rho=\exp s$ آن را به معادلهٔ دیفرانسیل زیر تبدیل می‌کند:

$$\frac{d^2R}{ds^2}-n^2R=0$$

از این رو:

$$R=C_1e^{ns}+C_2e^{-ns}=C_1\rho^n+C_2\rho^{-n}$$

از $R(1)=0$ نتیجه می‌شود که، صرف‌نظر از عاملهای ثابت، توابع مطلوب برحسب ρ عبارتند از:

$$R_n(\rho)=\rho^n-\rho^{-n} \qquad (n=1,2,\dots)$$

پس، به طور صوری،

و $$u(\rho,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\ (\rho^n-\rho^{-n})\ \sin n\phi$$

که در آن، طبق دومین شرط از شرایط (۱۱)، ثابتهای B_n در شرط ذیل صدق می‌کنند:

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(b^n-b^{-n})\sin n\phi \qquad (0<\phi<\pi)$$

چون این یک نمایش سری سینوسی فوریه برای تابع ثابت u_0 روی بازهٔ $0<\phi<\pi$ است، پس:

$$B_n(b^n-b^{-n})=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u_0\sin n\phi\,d\phi=\frac{2u_0}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n} \quad (n=1,2,\dots)$$

بنابراین جواب کامل مسأله دیریکله ما عبارت است از:

$$u(\rho,\phi)=\frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n-\rho^{-n}}{b^n-b^{-n}}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}\sin n\phi$$

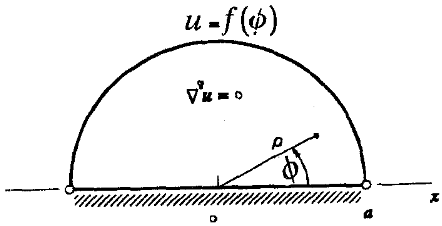
یا

$$u(\rho,\phi)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^{2n-1}-\rho^{-(2n-1)}}{b^{2n-1}-b^{-(2n-1)}}\cdot\frac{\sin(2n-1)\phi}{2n-1} \tag{14}$$

۳۵. انواع دیگر شرایط مرزی

مسائل مقدار مرزی متشکل از معادلهٔ لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ و شرایط مرزی که لزوماً همه از نوع دیریکله نیستند، نیز در کاربرد اهمیت دارند. در مثال زیر، روی قسمتی از مرز دامنه‌ای که u در آن همساز است، مقادیر یکی از مشتقات u به جای خود u داده شده است.

مثال. با استفاده از مختصات استوانه‌ای، فرمولی برای دمای مانای $u=u(\rho,\phi)$ در یک میلهٔ بلند به دست می‌آوریم که سطح مقطع آن نیمدایره‌ای یکنواخت و ناحیهٔ $0 \leq \rho \leq a$، $0 \leq \phi \leq \pi$ را اشغال کرده و رویهٔ مسطح آن عایق بندی شده و رویهٔ نیمدایره‌ای آن در دمای $f(\phi)$ نگهداشته می‌شود (شکل ۳۹).



شکل ۳۹

مانند مثال ۲ بخش ۳۴، $u(\rho,\phi)$ در معادلهٔ لاپلاس

$$\rho^2 u_{\rho\rho}(\rho,\phi) + \rho u_\rho(\rho,\phi) + u_{\phi\phi}(\rho,\phi) = 0 \qquad (1)$$

اما اینجا در دامنهٔ $0<\rho<a$ و $0<\phi<\pi$، صدق می‌کند. آن همچنین در شرایط همگن [مسأله ۱۲(ب)، بخش ۴ را ببینید]

$$u_\phi(\rho,0) = 0 \quad , \quad u_\phi(\rho,\pi) = 0 \qquad (0<\rho<a) \qquad (2)$$

و شرط غیر همگن

$$u(a,\phi) = f(\phi) \qquad , \qquad (0<\phi<\pi) \qquad (3)$$

صدق می‌کند.

بدیهی است که تابع f باید قطعه‌ای هموار و در نتیجه کراندار باشد. بعلاوه

فرض می‌کنیم $|u(\rho,\phi)| \leq M$، که در آن M یک ثابت مثبت است. نیاز به چنین شرط کرانداری به طور فیزیکی واضح است و در مسائل قبلی فقط به طور ضمنی فرض می‌شده است. شرط مذکور در اینجا به صورت یک شرط در مبدأ به کار می‌آید که می‌توان آن را به عنوان حالت حدی از یک نیم دایره کوچکتر که شعاعش به صفر میل می‌کند تلقی کرد. (باشکل ۳۸ مقایسه کنید).

جایگذاری $u=R(\rho)\Phi(\phi)$ در شرایط همگن (۱) و(۲) شرط

$$\rho^{2}R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0 \quad , \quad (0<\rho<a) \tag{۴}$$

را روی $R(\rho)$ و مسألهٔ استورم-لیوویل

$$\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0 \qquad \Phi'(0)=0 \quad , \quad \Phi'(\pi)=0 \tag{۵}$$

را نتیجه می‌دهد که برطبق بخش ۲۷، مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ آن به ترتیب عبارتند از:

$$\lambda_{0}=0 \quad , \quad \lambda_{n}=n^{2} \qquad (n=1,2,\dots)$$

و

$$\Phi_{0}(\phi)=\frac{1}{2} \quad , \quad \Phi_{n}(\phi)=\cos n\phi \qquad (n=1,2,\dots)$$

تابع $R_{0}(\rho)$ متناظر به $\Phi_{0}(\phi)$ در معادلهٔ کوشی-اویلر

$$\rho^{2}R''(\rho)+\rho R'(\rho)-0R(\rho)=0$$

صدق می‌کند و جواب عمومی آن $R=A\ln\rho+B$ بسادگی به دست می‌آید، که در آن A و B ثابت هستند. اما چون انتظار داریم حاصلضرب $R(\rho)\Phi(\phi)$ در دامنه $0<\rho<a$ و $0<\phi<\pi$ کراندار باشد، ثابت A باید صفر باشد زیرا $\ln\rho$ به $-\infty$ میل می‌کند، هرگاه ρ از بین مقادیر مثبت به صفر میل کند. لذا، صرف‌نظر از یک عامل ثابت، $R_{0}(\rho)=1$. به طور مشابه، برای هر عدد صحیح و مثبت و ثابت n و $\lambda=n^{2}$، شرط کرانداری ما ایجاب می‌کند که: در جواب عمومی معادلهٔ (۴) یعنی $R=C_{1}\rho^{n}+C_{2}\rho^{-n}$، ثابت C_{2} صفر باشد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$R_n(\rho)=\rho^n$ $(n=۱,۲,...)$ ، و تابع

$$u(\rho,\phi)=\frac{A_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty} A_n\rho^n \cos n\phi \qquad (۶$$

به طور صوری در شرایط همگن (۱) و (۲) صدق می‌کند که در آن ثابتهای A_n $(n=۱,۲,...)$ باید تعیین شوند.

از شرط غیرهمگن (۳) داریم:

$$f(\phi)=\frac{A_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty} A_n a^n \cos n\phi \qquad (۰<\phi<\pi)$$

درنتیجه، $A_۰=a_۰$, $A_n a^n=a_n$ $(n=۰,۱,۲, ...)$

که در آن:

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} f(\phi)\cos n\phi\, d\phi \qquad (n=۰,۱,۲, ...) \qquad (۷$$

پس جواب کامل مسأله مقدار مرزی ما عبارت است از:

$$u(\rho,\phi)=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty} a_n\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n\phi \qquad (۸$$

که ضرائب آن در (۷) آمده‌اند. البته این جواب را می‌توان به صورت دیگر نوشت:

$$u(\rho,\phi)=\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi} f(\psi)\,d\psi+\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n\phi\int_۰^{\pi} f(\psi)\cos n\psi\, d\psi$$

که در آن متغیر انتگرالگیری ψ باید از متغیر آزاد ϕ تمیز داده شود.

مسائل

۱. فرض کنید وجوه و لبه‌های $x=۰$ و $x=\pi$ $(۰<y<\pi)$ از یک ورق مربع عایق‌بندی شده‌اند. لبه‌های $y=۰$ و $y=\pi$ $(۰<x<\pi)$ آن به ترتیب در دماهای صفر و $f(x)$ نگهداشته می‌شوند. فرض کنیم $u(x,y)$ نمایش دماهای مانا باشد. عبارت زیر را به دست آورید:

$$u(x,y)=\frac{a_۰}{۲\pi}y+\sum_{n=۱}^{\infty} a_n\frac{\sinh ny}{\sinh n\pi}\cos nx$$

که در آن:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

در صورتی که $f(x)=u_0$، که در آن u_0 عدد ثابتی است، $u(x,y)$ را پیدا کنید.

۲. یک لبهٔ ورقه‌ای مربع شکل که وجوه آن عایق‌بندی شده در دمای یکنواخت u_0، و سه لبهٔ دیگر آن در دمای صفر نگهداشته می‌شوند. بدون اینکه در اینجا یک مسألهٔ مقدار مرزی حل کنید، با برهمنهی جوابهای مسائل مشابه جهت به دست آوردن حالت خاص که در آن هر چهار لبهٔ آن ورقه در دمای u_0 هستند، نشان دهید که چرا در مرکز آن ورقه دمای مانا برابر $\frac{u_0}{4}$ است.

۳. معادلهٔ دیفرانسیل

$$Ax^2y'' + Bxy' + Cy = 0$$

که در آن A و B و C ثابت هستند، معادلهٔ کوشی ـ اویلر نامیده می‌شود. نشان دهید که با جایگزینی $x=\exp s$، آن معادله به معادلهٔ دیفرانسیل با ضرائب ثابت زیر تبدیل می‌شود:

$$A\frac{d^2y}{ds^2} + (B-A)\frac{dy}{ds} + Cy = 0$$

۴. فرض کنید ρ و ϕ و z مختصهای استوانه‌ای باشند. تابع همساز $u(\rho,\phi)$ را در دامنهٔ $1<\rho<b$، $0<\phi<\pi/2$ از صفحهٔ $z=0$ به دست آورید، هرگاه روی کمانهای $\rho=1$ و $\rho=b$ $(0<\phi<\pi/2)$ به ترتیب $u=0$ و $u=f(\phi)$ است و

$$(1<\rho<b) \qquad u_\phi(\rho,0) = u_\phi(\rho,\frac{\pi}{2}) = 0$$

تعبیر فیزیکی این مسأله را بنویسید.

جواب:
$$u(\rho,\phi) = \frac{a_0}{2}\cdot\frac{\ln\rho}{\ln b} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\rho^{2n}-\rho^{-2n}}{b^{2n}-b^{-2n}}\cos 2n\phi$$

که در آن:

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\phi)\cos 2n\phi\,d\phi \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

۵. فرض کنید وجوه یک ورق به شکل گوه $\circ \le \rho \le a$, $\circ \le \phi \le \alpha$ عایق‌بندی شده است. دماهای مانا $u(\rho,\phi)$ در آن ورق را به دست آورید، هرگاه روی دو پرتو $\phi = \circ$ و $\phi=\alpha$ $(\circ<\rho<a)$, $u=\circ$ و روی کمان $\rho=a$ $(\circ<\phi<\alpha)$, $u=f(\phi)$. فرض کنید که f قطعه‌ای هموار و u کراندار است.

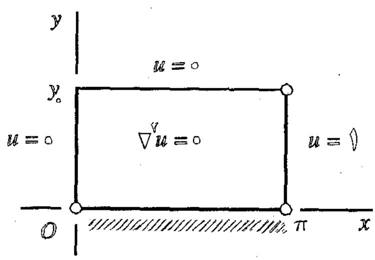
جواب:
$$u(\rho,\phi)=\frac{۲}{\alpha}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi\phi}{\alpha}\int_{\circ}^{\alpha}f(\psi)\sin\frac{n\pi\psi}{\alpha}\,d\psi$$

۶. وجوه و لبهٔ $y=\circ$ $(\circ<x<\pi)$ از یک ورق مستطیلی $\circ\le x\le\pi$ و $\circ\le y\le y_\circ$ عایق‌بندی شده‌اند. سه لبهٔ دیگر آن در دماهایی که در شکل ۴۰ نشان داده شده نگهداشته می‌شوند. مسألهٔ مقدار مرزی برای دماهای مانا $u(x,y)$ در این ورق را در نظر گرفته، با جایگذاری
$u(x,y)=U(x,y)+\Phi(x)$ در آن و استفاده از روشی که در مثال ۲، بخش ۳۴، شرح داده شد، فرمول دما را به صورت زیر نتیجه بگیرید:

$$u(x,y)=\frac{۱}{\pi}\left[x+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n}\cdot\frac{\cosh ny}{\cosh ny_\circ}\sin nx\right]$$

راهنمائی: برای به دست آوردن $U(x,y)$ نمایش سری زیر (مثال ۱، بخش ۱۴) مفید است:

$$x=۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx \qquad (\circ<x<\pi)$$



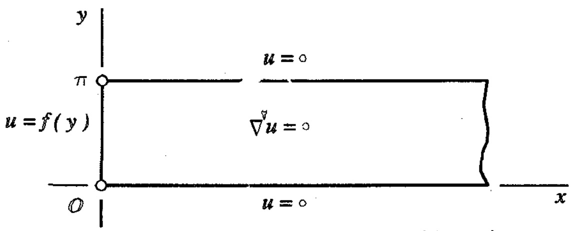
شکل ۴۰

۷. فرض کنید $u(x,y)$ نمایش دماهای مانای کراندار در ورق نیم- نامتناهی $x\geq ۰$، $۰\leq y\leq\pi$ باشد که وجوه آن عایق‌بندی شده و لبه‌های آن در دماهایی که در شکل ۴۱ نشان داده شده، نگهداشته می‌شوند. (شرط کراندار بودن بعنوان شرطی در انتهای راست ورق به کار می‌رود زیرا ورق انتهای راست ندارد). با فرض اینکه تابع f قطعه‌ای هموار باشد، فرمول دما را به صورت زیر نتیجه بگیرید:

$$u(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n e^{-nx}\sin ny$$

که در آن:

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} f(y)\sin ny\,dy \qquad (n=۱,۲,\ldots)$$



شکل ۴۱

۸. فرض کنید که در ورق مذکور در مسألهٔ ۷ یک منبع گرمائی وابسته به متغیر y وجود دارد و تمام مرز آن در دمای صفر نگهداشته شود. مطابق بخش۳، دماهای مانا $u(x,y)$ در آن ورق اکنون در معادلهٔ پواسن

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)+q(y)=۰ \qquad (x>۰\ ,\ ۰<y<\pi)$$

صدق می‌کند.

(الف) یک جواب (کراندار) به صورت

$$u(x,y)=\sum_{n=۱}^{\infty} B_n(x)\sin ny$$

از این مسألهٔ دما را فرض گرفته، با استفاده از روش تغییر پارامترها (بخش ۳۳)، به طور صوری نشان دهید که:

$$B_n(x)=\frac{q_n}{n^{۲}}(۱-e^{-nx}) \qquad (n=۱,۲,\ldots)$$

که در آن q_n ضرائب سری سینوسی فوریهٔ تابع $q(y)$ روی بازهٔ $۰<y<\pi$ هستند.

(ب) نشان دهید که جواب قسمت (الف) به صورت

$$u(x,y)=\frac{۴q_۰}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-exp\left[-(۲n-۱)x\right]}{(۲n-۱)^{۳}}\sin(۲n-۱)y$$

در می‌آید هرگاه $q(y)$ تابع ثابت $q(y)=q_۰$ باشد.

راهنمائی: در قسمت (الف) به خاطر آورید که جواب عمومی یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دوم خطی $y''+p(x)y=g(x)$ به صورت $y=y_c+y_p$ است که در آن y_p یک جواب خاص و y_c جواب عمومی معادلهٔ مکمل زیر است:

$$y''+p(x)y=۰^{*}$$

۹. برای دماهای مانا کراندار $u(x,y)$ در یک قطعهٔ نیم نامتناهی $۰\le x\le c$, $y\ge ۰$ که وجوه آن در صفحات $x=۰$ و $x=c$ عایق‌بندی شده و $u(x,۰)=f(x)$، یک عبارت ریاضی به دست آورید. فرض کنید که f روی بازهٔ $۰<x<c$ قطعه‌ای هموار باشد.

۳۶. تار با سرعت اولیهٔ داده شده

هر گاه ابتداء، تار مورد بحث در بخش ۲۹ در موقعیت تعادل $y=۰$ توزیع سرعت $g(x)$ موازی محور y دارد، مسألهٔ مقدار مرزی برای جابجائی‌های $y(x,t)$ عبارت است از:

$$y_{tt}(x,t)=a^{۲}y_{xx}(x,t) \qquad (۰<x<c\ ,\ t>۰) \tag{۱}$$

$$y(۰,t)=۰ \qquad , \qquad y(c,t)=۰ \tag{۲}$$

---

* به عنوان مثال بخش ۳۰۶ بویس و دیپریما (۱۹۹۲) را که در کتابنامه آمده ببینید.

$$y(x,0)=0 \qquad , \qquad y_t(x,0)=g(x) \tag{۳}$$

اگر صفحهٔ xy، که تار روی محور x آن قرار دارد، موازی محور y حرکت کرده، در لحظه $t=0$ ساکن شود، تابع $g(x)$ یک مقدار ثابت است. در یک پیانو ضربه چکش ممکن است یک سرعت اولیهٔ تقریبی و یکنواخت روی یک فاصلهٔ کوتاهی از یک سیم پیانو ایجاد کند، که در آن حالت $g(x)$را می‌توان به صورت یک تابع پله‌ای در نظر گرفت.
مثل بخش ۲۹، به دنبال توابعی به صورت $y=X(x)T(t)$ هستیم که در کلیهٔ شرایط همگن آن مسألهٔ مقدار مرزی صدق کند. مسألهٔ استورم- لیوویلی که به دست می‌آید همان مسأله بخش ۲۹ است:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , \quad X(0)=0 \quad , \quad X(c)=0$$

به خاطر می‌آوریم که $\lambda_n=(\frac{n\pi}{c})^2$ $(n=1,2,\ldots)$ مقادیر ویژه و $X_n(x)=sin(\frac{n\pi x}{c})$ توابع ویژه متناظر هستند. چون شرایط روی $T(t)$ عبارتند از:

$$T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0 \qquad , \qquad T(0)=0$$

توابع متناظر برحسب t عبارتند از: $T_n(t)=sin(\frac{n\pi at}{c})$.
پس تابع

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n sin\frac{n\pi x}{c} sin\frac{n\pi at}{c}$$

به طور صوری در همهٔ شرایط همگن آن مسألهٔ مقدار مرزی صدق می‌کند، که در آن ثابتهای B_n از دومین شرط از شرایط (۳) تعیین می‌شوند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{c} sin\frac{n\pi x}{c}=g(x) \qquad (0<x<c) \tag{۴}$$

با فرض اینکه g قطعه‌ای هموار باشد، سری در معادلهٔ (۴) نمایش سری سینوسی فوریهٔ $g(x)$ روی بازهٔ $0<x<c$ است، اگر $B_n(\frac{n\pi a}{c})=b_n$، که در آن:

$$b_n=\frac{2}{c}\int_0^c g(x) sin\frac{n\pi x}{c}\,dx \tag{۵}$$

بنابراین $B_n=(\frac{c}{n\pi a})b_n$ ، و

۶) $$y(x,t)=\frac{c}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\sin\frac{n\pi x}{c}\sin\frac{n\pi at}{c}$$

جمع این سری را در اینجا می‌توانیم به دست آوریم. ابتدا می‌نویسیم:

$$y_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{n\pi at}{c}=\frac{1}{2}\left[G(x+at)+G(x-at)\right]$$

که در آن G توسیع تناوبی فرد با دورهٔ تناوب $2c$ از تابع داده شدهٔ g است (با بخش ۳۰ مقایسه کنید.) سپس چون $y(x,0)=0$*،

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[\int_0^t G(x+a\tau)d\tau+\int_0^t G(x-a\tau)d\tau\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int_x^{x+at}G(s)ds-\int_x^{x-at}G(s)\,ds\right]$$

و برحسب تابع تناوبی

۷) $$I(x)=\int_0^x G(s)ds \qquad (-\infty<x<\infty)$$

۸) $$y(x,t)=\frac{1}{2a}\left[I(x+at)-I(x-at)\right]$$

اگر نقاط روی تار جابجائی‌های اولیهٔ غیر صفر و سرعتهای اولیهٔ غیر صفر داشته باشند، بنابراین:

۹) $$y(x,0)=f(x) \qquad , \qquad y_t(x,0)=g(x)$$

* پاورقی مربوط به مسألهٔ ۷ بخش ۳۳ را نیز در رابطه با تابع اولیه ببینید.

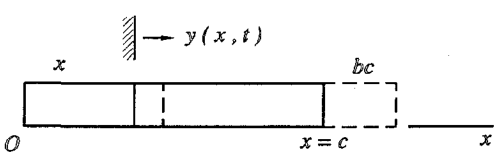
جابجائی‌های $y(x,t)$ را می‌توان به صورت یک برهمنهی از جواب (۱۰)، بخش ۳۰، و جواب (۸) بالا نوشت:

$$y(x\ ,t)=\frac{۱}{۲}\left[F(x+at)+F(x-at)\right]+\frac{۱}{۲a}\left[I(x+at)-I(x-at)\right] \quad (۱۰$$

توجه دارید که هر دو جملهٔ بالا در شرایط همگن (۱) و (۲) صدق می‌کنند، در حالی که مجموع آنها در شرایط غیرهمگن (۹) بوضوح صدق می‌کند. (با مسأله ۵ بخش ۹ مقایسه کنید). در حالت کلی، جواب مسألهٔ خطی با بیش از یک شرط غیرهمگن را می‌توان به صورت مجموعی از جوابهای مسائلی نوشت که هر کدام فقط یک شرط غیرهمگن دارند. تحلیل مسألهٔ اصلی به این طریق، گرچه گاهی ضروری نیست، فرآیند حل آن را اغلب ساده می‌کند.

۳۷. یک میلهٔ کشسان

یک میلهٔ استوانه‌ای به طول طبیعی c ابتدا به مقدار bc کشیده شده و در حال سکون است (شکل ۴۲). پس جابجائی‌های طولی اولیهٔ مقاطع آن با فاصله از انتهای ثابت $x=۰$ متناسب است. در لحظهٔ $t=۰$، هر دو انتهای میله را رها کرده، آزاد می‌گذاریم. جابجائی‌های طولی $y(x,t)$ در مسألهٔ مقدار مرزی زیر صدق می‌کنند، که در آن $a^۲=E/\delta$ (بخش ۶):



شکل ۴۲

$$y_{tt}(x,t)=a^۲y_{xx}(x,t) \qquad (۰<x<c\ ,\ t>۰) \quad (۱$$

$$y_x(۰,t)=۰ \qquad y_x(c,t)=۰ \quad (۲$$

$$y(x,۰)=bx \qquad y_t(x,۰)=۰ \quad (۳$$

شرایط مرزی دو نقطه‌ای همگن (۲) نشان می‌دهند که نیروی وارد بر هر واحد سطح مقاطع انتهایی صفر است.

تابع $y(x,t)$ را می‌توان به عنوان نمایش جابجائی‌های عمودی یک تار کشیده تعبیر کرد که از حالت سکون در موقعیت $y(x,\circ)=bx$ رها شده، هرگاه دو انتهای آن کاملاً دور میله‌های همواری که در امتداد خطوط $x=\circ$ و $x=c$ قرار گرفته گره خورده باشند. در آن حالت، $a^{۲}=\frac{H}{\delta}$، و شرایط مرزی (۲) نشان می‌دهند که هیچ نیرویی در دو انتهای تار در جهت y عمل نمی‌کند (بخش ۵ را ببینید).

هرگاه $X(x)$ تابع ویژهٔ مسألهٔ

$$X''(x)+\lambda X(x)=\circ \quad , \quad X'(\circ)=\circ \quad , \quad X'(c)=\circ \tag{۴}$$

باشد و برای همین مقدار ویژهٔ λ،

$$T''(t)+\lambda a^{۲}T(t)=\circ \quad , \quad T'(\circ)=\circ \tag{۵}$$

آنگاه توابع $y=X(x)T(t)$ در کلیهٔ شرایط همگن بالا صدق می‌کنند.

مقادیر ویژه عبارتند از (بخش ۲۷) $\lambda_\circ=\circ$ و $\lambda_n=(\frac{n\pi}{c})^{۲}$ $(n=۱,۲,...)$ با توابع ویژه متناظر $X_\circ(x)=\frac{۱}{۲}$ و $X_n(x)=cos(\frac{n\pi x}{c})$. توابع متناظر آنها برحسب t عبارتند از $T_\circ(t)=۱$ و $T_n(t)=cos(\frac{n\pi at}{c})$. پس ترکیب خطی تعمیم یافته

$$y(x,t)=\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{n\pi at}{c} \tag{۶}$$

در شرایط (۱) تا (۳) صدق می‌کند، مشروط بر اینکه:

$$bx=\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{c} \qquad (\circ<x<c) \tag{۷}$$

تابع bx طوری است که روی بازهٔ $\circ\le x\le c$ با سری کسینوسی (۷) نمایش داده می‌شود، که در آن

$$a_n=\frac{۲b}{c}\int_\circ^c x\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx \qquad (n=\circ,۱,۲,\ ...)$$

در نتیجه،

$$a_0=bc \quad , \quad a_n=-\frac{2bc}{\pi^2}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n^2} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{8}$$

و به جواب زیر می‌رسیم:

$$y(x,t)=\frac{bc}{2}-\frac{4bc}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{c}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{c} \tag{9}$$

با روشی که قبلاً در بخشهای ۳۰ و ۳۶ از آن استفاده شد، این جواب به فرم سری را می‌توان به فرم بسته برحسب $p(x)$ نوشت که در آن $p(x)$ توسیع تناوبی زوج، با دوره تناوب $2c$، از تابع bx $(0\leq x\leq c)$ است. به عبارت دقیقتر، از اتحاد مثلثاتی

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

می‌دانیم که:

$$2\cos\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{n\pi at}{c}=\cos\frac{n\pi(x+at)}{c}+\cos\frac{n\pi(x-at)}{c}$$

بنابراین عبارت (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi(x+at)}{c}+\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi(x-at)}{c}\right] \tag{10}$$

اما سری (۷) تابع $P(x)$ را برای همهٔ مقادیر x نمایش می‌دهد هرگاه برای ضرائب a_n $(n=0,1,2,\ldots)$ از مقادیر (۸) استفاده شود. بنابراین با آن مقادیر a_n عبارت (۱۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[P(x+at)+P(x-at)\right] \tag{11}$$

این فرم مطلوب جواب به صورت بسته است.

۳۸. تشـــدیـد

یک تار کشیده شده به طول واحد که دو انتهای آن ثابت است، ابتدا، در حالت تـعادل و ساکن است. یک نیروی عرضی تناوبی ساده روی همهٔ اجزای آن تار به طور یک شکل وارد می‌شود، بنابراین جابجایی‌های عرضی $y(x,t)$ در این فرم تغییر یافته (بخش ۵ را ببینید) از معادلهٔ موج صدق می‌کند:

$$y_{tt}(x,t)=y_{xx}(x,t)+A\sin\omega t \qquad (0<x<1\ ,\ t>0) \tag{1}$$

که در آن A ثابت است. معادلهٔ (۱) به همراه شرایط مرزی

$$y(0,t)=0 \qquad , \qquad y(1,t)=0 \tag{2}$$

$$y(x,0)=0 \qquad , \qquad y_t(x,0)=0 \tag{3}$$

یک مسألهٔ مقدار مرزی تشکیل می‌دهد که روش تغییر پارامترها را (بخش ۳۳) می‌توان در مورد آن به کار گرفت.

توجه داریم که اگر ثابت A واقعاً صفر باشد، مسألهٔ استورم–لیوویلی کـه ظـاهر می‌شود، دارای توابع ویژه $\sin n\pi x$ $(n=1,2,...)$ خواهد بود. بنابراین برای مسألهٔ مقدار مرزیمان به دنبال جوابی به صورت زیر هستیم:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\sin n\pi x \tag{4}$$

که در آن ضرائب $B_n(t)$ باید تعیین شوند. بـا جـایگذاری سـری (۴) در مـعادلهٔ (۱) و استفاده از نمایش سری سینوسی فوریه

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}\sin n\pi x \qquad (0<x<1)$$

می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n''(t)\sin n\pi x=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-(n\pi)^2B_n(t)\right]\sin n\pi x$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}\sin\omega t\sin n\pi x$$

بدین ترتیب:

$$B_n''(t)+(n\pi)^2 B_n(t)=\frac{2A\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}\sin\omega t \quad (n=1,2,\ldots) \tag{5}$$

و از شرایط (۳) شرایط اولیهٔ

$$B_n(0)=0 \quad , \quad B_n'(0)=0 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{6}$$

روی $B_n(t)$ نتیجه می‌شوند.

به آسانی دیده می‌شود که $B_n(t)\equiv 0$ هرگاه n زوج است، یعنی اینکه، $B_{2n}(t)=0$ $(n=1,2,\ldots)$ برای n فرد $B_n(t)$ مانده که به دست بیاید. اگر بنویسیم:

$$\omega_n=(2n-1)\pi \qquad (n=1,2,\ldots)$$

مسألهٔ

$$B_{2n-1}''(t)+\omega_n^2 B_{2n-1}(t)=\frac{4A}{\omega_n}\sin\omega t \tag{7}$$

$$B_{2n-1}(0)=0 \quad , \quad B_{2n-1}'(0)=0 \tag{8}$$

مسألهٔ مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی برای $B_{2n-1}(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ است.

اکنون می‌توانیم به مسألهٔ ۱۴ ذیل اشاره کنیم که در آن برای حل مسألهٔ مقدار اولیه متشکل از معادلهٔ مرتبه دوم

$$y''(t)+a^2 y(t)=b\sin\omega t \tag{9}$$

که در آن a و b ثابت و شرایط

$$y(0)=0 \qquad y'(0)=0 \tag{10}$$

از روشهایی استفاده می‌شود که در یک درس مقدماتی معادلات دیفرانسیل معمولی آموخته می‌شوند. به عبارت دقیقتر، اگر $\omega\neq a$ ،

$$y(t)=\frac{b}{\omega^2-a^2}\left(\frac{\omega}{a}\sin at-\sin\omega t\right) \tag{11}$$

لذا می‌بینیم که اگر برای هـر مـقدار n $(n=۱,۲,...)$ ، $\omega\neq\omega_n$ ، جـواب مسـألهٔ (۷)-(۸) عبارت است از :

$$B_{۲n-۱}(t)=\frac{۴A}{\omega_n\left(\omega^۲-\omega_n^۲\right)}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t-\sin\omega t\right)$$

و از معادلهٔ (۴) نتیجه می‌شود که:

$$y(x,t)=۴A\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin\omega_n x}{\omega_n\left(\omega^۲-\omega_n^۲\right)}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t-\sin\omega t\right)$$

همچنین در مسألهٔ ۱۴ نشان داده می‌شود که اگر $\omega=a$، جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۹) با شرایط ۱۰، به صورت زیر است:

$$y(t)=\frac{b}{۲a}\left(\frac{۱}{a}\sin at-t\cos at\right) \tag{۱۳}$$

بنابراین:

$$B_{۲N-۱}(t)=\frac{۲A}{\omega_N^۲}\left(\frac{۱}{\omega_N}\sin\omega_N t-t\cos\omega_N t\right) \tag{۱۴}$$

هرگاه یک مقدار N از n $(n=۱,۲,...)$ وجود دارد به گونه‌ای که $\omega=\omega_N$. چون در اینجا عامل t در تابع کسینوس ضرب می‌شود، بدین معنی است که سری (۴) یک مؤلفهٔ ناپایدار دارد. چنین نوسان ناپایدار از قسمتهای تار را تشدید گویند. نیروی خارجی تناوبی با تار بوضوح در حال تشدید است، هرگاه فرکانس ω از آن نیرو، با هر کدام از فرکانسهای تشدیددار $\omega_n=(۲n-۱)\pi$ $(n=۱,۲,...)$ منطبق شود. به طور کلی آن فـرکانسها بـه خواص فیزیکی تار و طریقهٔ تکیه دادن تار بستگی دارند.

مسائل

۱. نشان دهید که برای هر مقدار x ثابت، جابجائی‌های g که توسط معادلهٔ (۱۰) بخش ۳۶ داده می‌شوند، برحسب t توابعی تناوبی با دوره تناوب $\frac{۲c}{a}$ هستند.

۲. نشان دهید که حرکت هر سطح مقطع میلهٔ کشسان که در بخش ۳۷ بـررسی شـد، برحسب t تناوبی با دوره تناوب $\frac{۲c}{a}$ است.

۳. یک تار بین نقاط ۰ و π روی محور x کشیده شده، ابتداءً مستقیم است بـا سـرعت

$y_t(x,0)=b\sin x$، که در آن b ثابت است. مسألهٔ مقدار مرزی را برحسب $y(x,t)$ بنویسید، آن را حل کرده، درستی جواب را تحقیق کنید.

جواب:
$$y(x,t)=\frac{b}{a}\sin x\sin at$$

۴. توابع تناوبی $G(x)$ و $I(x)$ در بخش ۳۶ را، هرگاه همهٔ نقاط تار در آنجا سرعت اولیه یکسان و برابر با $g(x)=v_0$ دارند با شکل نمایش دهید. سپس، از فرمول (۸) بخش ۳۶، استفاده کرده، بعضی از موقعیت‌های لحظه‌ای تار را به وسیلهٔ خط چین، مشابه شکل ۳۲ (مسألهٔ ۸ بخش ۳۰)، نشان دهید.

۵. در بخش ۳۶، از این واقعیت استفاده کردیم که:

$$G(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi s}{c}\qquad(-\infty<s<\infty)$$

از آن سری (بخش ۲۳) انتگرال گرفته، نشان دهید:

$$I(x)=\frac{c}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\left(1-\cos\frac{n\pi x}{c}\right)\qquad(-\infty<x<\infty)$$

و اینکه تابع (۸) در بخش ۳۶ توسط سری (۶) در آنجا نمایش داده می‌شود.

۶. از عبارت (۱۱) بخش ۳۷، نشان دهید که $y(0,t)=P(at)$ و نتیجه بگیرید که انتهای $x=0$ آن میله طی نیمه اول زمان تناوب $0<t<\frac{c}{a}$ با سرعت ثابت ab و طی نیمه دوم با سرعت $-ab$ حرکت می‌کند.

۷. یک تار که بین دو نقطهٔ ۰ و π روی محور x کشیده شد، ابتداءً ساکن و از موقعیت $y=f(x)$ رها می‌گردد. مقاومت هوا، که در هر نقطهٔ تار با سرعت متناسب است، با حرکت تار مقابله می‌کند (بخش ۵). فرض کنید که واحد زمان طوری در نظر گرفته شده که معادلهٔ حرکت به صورت زیر باشد:

$$y_{tt}(x,t)=y_{xx}(x,t)-2\beta y_t(x,t)\qquad(0<x<\pi\ ,\ t>0)$$

که در آن β یک ثابت مثبت است.

با فرض $0<\beta<1$ ، فرمول زیر را برای جابجایی‌های افقی تار به دست آورید:

$$y(x,t)=e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\cos\alpha_n t+\frac{\beta}{\alpha_n}\sin\alpha_n t\right)\sin nx$$

که در آن:

$$\alpha_n=\sqrt{n^2-\beta^2}\quad,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\qquad (n=1,2,\ldots)$$

۸. فرض کنید تار مورد بحث در مسألهٔ ۷ ابتداءً مستقیم و دارای یک سرعت یکنواخت در جهت محور y بوده، هنگامی که قاب در حالت حرکت و نگهدارندهٔ نقاط انتهایی تار در لحظهٔ $t=0$ ساکن شود. بدین ترتیب، جابجایی‌های عرضی $y(x,t)$ در همان معادلهٔ دیفرانسیل و شرایط مرزی

$$y(0,t)=y(\pi,t)=0\quad,\quad y(x,0)=0\quad,\quad y_t(x,0)=v_0$$

صدق می‌کنند، که در آن $0<\beta<1$.

عبارت زیر را برای آن جابجایی‌ها به دست آورید:

$$y(x,t)=\frac{4v_0}{\pi}e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)\alpha_n}\sin\alpha_n t$$

که در آن

$$\alpha_n=\sqrt{(2n-1)^2-\beta^2}$$

۹. دو انتهای یک تار کشیده شده در مبدأ و نقطهٔ $x=\pi$ روی محور افقی x ثابت هستند. تار ابتدا در امتداد محور x ساکن است، سپس براثر وزن خودش می‌افتد. بنابراین جابجائی‌های عمودی $y(x,t)$ در معادلهٔ دیفرانسیل (بخش ۵)

$$y_{tt}(x,t)=a^2y_{xx}(x,t)-g\qquad (0<x<\pi\ ,\ t>0)$$

صدق می‌کنند، که در آن g شتاب ثقل است.

(الف) از روش تغییر پارامترها استفاده کرده، عبارت زیر را برای این جابجائی‌ها به دست آورید:

$$y(x,t)=\frac{۴g}{\pi a^۲}\left[\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{sin\,(۲n-۱)x}{(۲n-۱)^۳}cos\,(۲n-۱)at-\frac{\pi}{۸}x\,(\pi-x)\right]$$

(ب) با کمک اتحاد مثلثاتی

$$۲\,sin\,A\,cos\,B=sin(A+B)+sin(A-B)$$

نشان دهید که عبارت به دست آمده در قسمت (الف) را می‌توان به فرم بستهٔ زیر نوشت:

$$y(x,t)=\frac{g}{۲a^۲}\left[\frac{P(x+at)+P(x-at)}{۲}-x(\pi-x)\right]$$

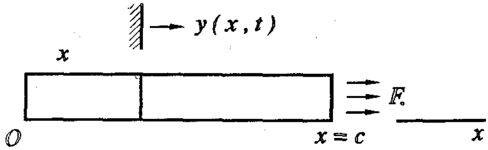
که در آن $P(x)$ توسیع تناوبی فرد، با دوره تناوب ۲π، از تابع $x(\pi-x)$ $(۰\leq x\leq\pi)$ است.

راهنمایی: در هر دو قسمت (الف) و (ب) نمایش سری سینوسی فوریهٔ زیر (مسألهٔ ۵ و بخش ۱۴) مورد نیاز است:

$$x\,(\pi-x)=\frac{۸}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{sin\,(۲n-۱)x}{(۲n-۱)^۳}\qquad(۰\leq x\leq\pi)$$

همچنین، برای قسمت (الف)، راهنمائی مسألهٔ ۸، بخش ۳۵ را ببینید.

۱۰. انتهای $x=۰$ یک میلهٔ کشسان آزاد است و در انتهای $x=c$، یک نیروی طولی ثابت $F_۰$ بر هر واحد سطح وارد می‌شود (شکل ۴۳). آن میله ابتداءً بدون تنش و ساکن است. برای جابجائی‌های طولی $y(x,t)$، مسألهٔ مقدار مرزی تشکیل دهید، شرایط در نقاط انتهایی میله $y_x(۰,t)=۰$ و $y_x(c,t)=\frac{F_۰}{E}$ هستند (بخش ۶). پس از توجه به اینکه در اینجا روش تغییر متغیرها مستقیماً قابل استفاده نیست، مراحل زیر را برای به دست آوردن $y(x,t)$ به کار بگیرید.



شکل ۴۳

(الف) بنویسید $y(x,t)=Y(x,t)+Ax^۲$، بنابراین تفاوت $y_x(x,t)$ و $Y_x(x,t)$ یک تابع خطی برحسب xاست (با مسأله ۳، بخش ۳۳ مقایسه کنید)، A را طوری تعیین کنید که مسألهٔ فوق به مسألهٔ جدید مقدار مرزی زیر تبدیل شود:

$$Y_{tt}(x,t)=a^۲Y_{xx}(x,t)+\frac{F_\circ a^۲}{cE} \qquad (\circ<x<c\ ,\ t>\circ)$$

$$Y_x(\circ,t)=\circ \qquad Y_x(c,t)=\circ$$

$$Y(x,\circ)=-\frac{F_\circ}{۲cE}x^۲ \quad , \quad Y_t(x,\circ)=\circ$$

(ب) نشان دهید که چرا انتظار جوابی به صورت زیر برای مسألهٔ مقدار مرزی قسمت (الف) منطقی است.

$$Y(x,t)=\frac{A_\circ(t)}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}A_n(t)\cos\frac{n\pi x}{c}$$

سپس با استفاده از روش تغییر پارامترها $Y(x,t)$ را پیدا کرده ، از آنجا جواب مسألهٔ اصلی را به صورت زیر به دست آورید:

$$y(x,t)=\frac{F_\circ}{۶cE}\left[۳(x^۲+a^۲t^۲)-c^۲-\frac{۱۲c^۲}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^۲}\cos\frac{n\pi at}{c}\cos\frac{n\pi x}{c}\right]$$

(ج) با استفاده از اتحاد مثلثاتی

$$۲\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

و نمایش سری [مسألهٔ ۵ (ب)، بخش ۲۱]

$$x^{۲}=\frac{c^{۲}}{۳}+\frac{۴c^{۲}}{\pi^{۲}}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{n^{۲}}\cos\frac{n\pi x}{c} \qquad (-c\le x\le c)$$

عبارت ریاضی $y(x,t)$ در قسمت (ب) را بدین شکل بنویسید:

$$y(x,t)=\frac{F_{\circ}}{۲cE}\left[x^{۲}+a^{۲}t^{۲}-\frac{P(x+at)+P(x-at)}{۲}\right]$$

که در آن $P(x)$ توسیع تناوبی، با دوره تناوب $۲c$، از تابع $x^{۲}$ $(-c\le x\le c)$ است.

۱۱. نشان دهید که چگونه از عبارت ریاضی $y(x,t)$ در مسألهٔ ۱۰ (ج) نتیجه می‌شود که انتهای $x=\circ$ آن میله تا زمان $t=\frac{c}{a}$ بدون حرکت باقی مانده، پس از آن با سرعت $v_{\circ}=\frac{۲aF_{\circ}}{E}$ حرکت می‌کند، هرگاه $\frac{c}{a}<t<\frac{۳c}{a}$ و سرعت $۲v_{\circ}$ هرگاه $\frac{۳c}{a}<t<\frac{۵c}{a}$ و غیره.

۱۲. مسألهٔ مقدار مرزی

$$y_{tt}(x,t)=a^{۲}y_{xx}(x,t)+Ax\sin\omega t \qquad (\circ<x<c\ ,\ t>\circ)$$

$$y(\circ,t)=y(c,t)=\circ \qquad , \qquad y(x,\circ)=y_{t}(x,\circ)=\circ$$

جابجائی‌های افقی در یک تار مرتعش (با بخش ۳۸ مقایسه کنید) را توصیف می‌کند. نشان دهید که هرگاه ω با یکی از مقادیر $\omega_{n}=\frac{n\pi a}{c}$ $(n=۱,۲,...)$ برابر باشد تشدید ایجاد می‌شود.

۱۳. فرض کنید a و b و ω مقادیر ثابت غیر صفر باشند. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$y''(t)+a^{۲}y(t)=b\sin\omega t$$

به صورت $y=y_{c}+y_{p}$ است که در آن y_{c} جواب عمومی معادلهٔ مکمل $y''(t)+a^{۲}y(t)=\circ$ و y_{p} یک جواب خاص از معادلهٔ غیرهمگن اصلی است.[۱]

---

۱. برای روش حلی که دراینجا استفاده می‌شود و معروف به روش ضرائب نامعین است، به عنوان مثال به

(ادامهٔ پاورقی در صفحهٔ بعد)

(الف) فرض کنید که $\omega \neq a$. پس از جایگذاری $y_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ در معادلهٔ دیفرانسیل داده شده، مقادیر ثابت A و B را طوری تعیین کنید که y_p یک جواب از معادله باشد. بدین ترتیب جواب عمومی زیر را برای آن معادله به دست آورید:

$$y(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at + \frac{b}{a^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

(ب) فرض کنید که $\omega = a$، و ثابتهای A و B را طوری به دست آورید که $y_p = At\cos\omega t + Bt\sin\omega t$ یک جواب خاص از آن معادلهٔ دیفرانسیل باشد. بدین ترتیب جواب عمومی را به شکل زیر به دست آورید:

$$y(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at - \frac{b}{2a} t \cos at$$

۱۴. با استفاده از جوابهای عمومی به دست آمده در مسألهٔ ۱۳، نشان دهید که جوابهای مسأله مقدار اولیهٔ

$$y''(t) + a^2 y(t) = b\sin\omega t \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

عبارتند از:

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{b}{\omega^2 - a^2}\left(\dfrac{\omega}{a}\sin at - \sin\omega t\right) & \omega \neq a \quad \text{هرگاه} \\ \dfrac{b}{2a}\left(\dfrac{1}{a}\sin at - t\cos at\right) & \omega = a \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

۳۹. سریهای فوریهٔ دو متغیره

یک قاب مربع صلب در صفحهٔ xy را در نظر بگیرید که یک پوستهٔ نازک محکم روی آن کشیده شده و فرض کنید $z(x,y,t)$ نمایش جابجایی افقی پوسته در هر نقطه (x,y) در زمان t باشد. به منظور ساده کردن نماد، مبدأ و نقطه (π,π) را به عنوان نقاط انتهائی

کتاب بویس و دیپریما(۱۹۹۲) یا کتاب رینویلی و بدینت (۱۹۸۹) نگاه کنید. هر دو کتاب در کتابنامه آمده‌است.

قاب در نظر می‌گیریم. حال اگر آن پوسته با جابجائی اولیهٔ مفروض $f(x,y)$ از حالت سکون آزاد شود که $f(x,y)$ پیوسته و روی مرز مربع صفر است آنگاه (بخش ۶) در حوزهٔ سه بعدی $0<x<\pi$ ، $0<y<\pi$ ، $t>0$ داریم:

$$z_{tt}=a^2(z_{xx}+z_{yy}) \qquad (1$$

$$z(0,y,t)=z(\pi,y,t)=z(x,0,t)=z(x,\pi,t)=0 \qquad (2$$

$$z(x,y,0)=f(x,y) \quad , \quad z_t(x,y,0)=0 \qquad (3$$

که در آن $0\le x\le\pi$ و $0\le y\le\pi$. ما فرض می‌کنیم که مشتقات جزئی $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ نیز پیوسته‌اند.

توابع از نوع $z=X(x)Y(y)T(t)$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند، هرگاه:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda \qquad (4$$

در دومین معادله از (۴) مجدداً متغیرها را جدا می‌کنیم و داریم:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda-\frac{X''(x)}{X(x)}=-\mu$$

که در اینجا μ یک ثابت جداسازی دیگر است. بنابراین دو مسألهٔ استورم–لیوویل

$$X''(x)+(\lambda-\mu)X(x)=0 \quad , \quad X(0)=0 \quad , \quad X(\pi)=0$$

و

$$Y''(y)+\mu Y(y)=0 \quad , \quad Y(0)=0 \quad , \quad Y(\pi)=0$$

و شرایط زیر در مورد T را داریم:

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0 \quad , \quad T'(0)=0$$

ابتدا به مسألهٔ استورم- لیوویل مربوط به Y رو می‌آوریم، زیرا فقط یک ثابت جداسازی

دارد. مطابق بخش ۲۹، برای مقادیر $\mu=m^{2}$ $(m=1,2,...)$، توابع ویژه $Y_m(y)=\sin my$ حاصل می‌شوند، و هرگاه $\lambda-\mu=n^{2}$ $(n=1,2,...)$، توابع ویژه $X_n(x)=\sin nx$ برای مسألهٔ مربوط به X به دست می‌آیند. بدین ترتیب شرایط روی T به صورت زیر درمی‌آیند:

$$T''(t)+a^{2}(m^{2}+n^{2})T(t)=0 \qquad , \qquad T'(0)=0$$

که در آن $m=1,2,...$ و $n=1,2,...$. برای هر مقدار صحیح مثبت و ثابت m و n جواب این مسأله برحسب T، صرف‌نظر از یک مضرب ثابت، برابر است با:

$$T_{mn}(t)=\cos\left(at\sqrt{m^{2}+n^{2}}\right)$$

بنابراین، جواب صوری مسألهٔ مرزیمان عبارت است از:

$$z(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}B_{mn}\sin nx\sin my\cos\left(at\sqrt{m^{2}+n^{2}}\right) \tag{5}$$

که در آن ضرائب B_{mn} طوری باید تعیین شوند که در

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}B_{mn}\sin nx\sin my \tag{6}$$

صدق کنند، هرگاه $0\le x\le\pi$ و $0\le y\le\pi$. با دسته‌بندی جملات این سری سینوسی دوگانه بطوری که به ازای هر n ضریب کلی $\sin nx$ را نمایش دهد، به طور صوری می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}B_{mn}\sin my\right)\sin nx \tag{7}$$

برای هر y ثابت $(0\le y\le\pi)$، معادلهٔ (۷) نمایشی است از سری سینوسی فوریهٔ تابع $f(x,y)$ برحسب متغیر x $(0\le x\le\pi)$ مشروط بر اینکه:

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin my=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x,y)\sin nx\,dx \qquad (n=1,2,\ ...) \tag{8}$$

طرف دوم این معادله، دنباله‌ای است از توابع $F_n(y)$ $(n=۱,۲,...)$ ، که هر کدام از آنها با سری سینوسی فوریهٔ نظیرش در (۸) روی بازهٔ $۰\leq y\leq \pi$ نمایش داده می‌شود هرگاه:

$$B_{mn}=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}F_n(y)\sin my\,dy \qquad (m=۱,۲,\ ...)$$

بنابراین ضرائب B_{mn} دارای مقادیر زیرند:

$$B_{mn}=\frac{۴}{\pi^{۲}}\int_{۰}^{\pi}\sin my\int_{۰}^{\pi}f(x\,,y)\sin nx\,dx\,dy \tag{۹}$$

اکنون معادلهٔ (۵) با ضرائب تعریف شده توسط معادلهٔ (۹) یک جواب صوری از مسألهٔ ما در مورد پوستهٔ نازک است.

چون با تغییر مقادیر صحیح m و n ، تغییرات $\sqrt{m^{۲}+n^{۲}}$ مضربهای صحیحی از یک عدد ثابت نیستند، توابع کسینوس در معادلهٔ (۵) برحسب متغیر t هیچ دورهٔ تناوب مشترک ندارند، بنابراین جابجایی z معمولاً برحسب t یک تابع تناوبی نیست. درنتیجه، پوستهٔ مرتعش، برخلاف تار مرتعش، معمولاً یک نت موسیقی ایجاد نمی‌کند. در هر حال، با دادن جابجائی اولیهٔ مناسب، می‌توان چنین پدیده‌ای را ایجاد کرد. برای مثال،اگر:

$$z(x\,,y\,,۰)=A\sin x\sin y$$

که در آن A ثابت است، جابجایی‌های (۵) با تنها جملهٔ زیر داده می‌شوند:

$$z(x\,,y\,,t)=A\sin x\sin y\cos(a\sqrt{۲}\,t)$$

در این صورت z برحسب t تناوبی است با دورهٔ تناوب $\dfrac{\pi\sqrt{۲}}{a}$.

۴۰. شرایط مرزی تناوبی

در این فصل جواب مسائل مقدار مرزی تنها به جوابهای دو مسألهٔ استورم- لیوویل بستگی داشته‌اند، که به نمایشهای سری سینوسی و کسینوسی فوریهٔ توابعی معین منجر می‌شوند. اگرچه فصل ۵ به نظریه و کاربرد خیلی از مسائل دیگر استورم- لیوویل، همچنین، تعریف دقیق چنین مسأله‌ای ، اختصاص یافته، ما این فصل

را با در نظر گرفتن یک مسألهٔ سوم خاتمه می‌دهیم که در بین مسائل مقدار مرزی روی نواحی با مرزهای مستدیر پیش می‌آید:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , \quad X(-\pi)=X(\pi) \quad , \quad X'(-\pi)=X'(\pi) \qquad (1)$$

به این دلیل آن مسأله را اینجا ذکر می‌کنیم که جوابهای آن نیز به نمایشهای سری فوریه منجر می‌شوند و در واقع نیازی به نظریه عمومی مسائل استورم- لیوویل نیست، البته در اینجا سریهای فوق شامل کسینوس‌ها و سینوس‌ها، هردو، روی بازه $-\pi<x<\pi$ هستند. فقط این واقعیت را باید بپذیریم که هر مقدار ویژه، یا مقدار λ که مسألهٔ (۱) نظیر به آن جوابی غیربدیهی دارد، یک عدد حقیقی است. درستی این مطلب در فصل ۵ (بخش ۴۳)، بررسی می‌شود. هماهنگ با فصل ۵، به اینگونه مقادیر λ مقادیر ویژه و به جوابهای غیربدیهی معادلهٔ دیفرانسیل نظیر توابع ویژه نسبت خواهیم داد.

برای حل مسألهٔ (۱) ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $\lambda=0$. بنابراین $X(x)=Ax+B$، که در آن A و B ثابتند، و شرایط مرزی برای $A=0$ صادقند. چون همهٔ شرایط مسألهٔ (۱) همگن هستند، بنابراین، صرف نظر از یک مضرب ثابت، داریم $X(x)=\frac{1}{2}$. وقتی $\lambda>0$، می‌نویسیم $\lambda=\alpha^2$ $(\alpha>0)$ و توجه داریم که جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل در مسألهٔ (۱) عبارت است از:

$$X(x)=C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

برای اینکه شرایط مرزی صادق باشند، بسادگی می‌توان نشان داد که :

$$C_2 \cos \alpha\pi = 0 \qquad , \qquad C_1 \sin \alpha\pi = 0$$

برای اینکه $X(x)$ غیربدیهی باشد C_1 و C_2 نمی‌توانند هر دو صفر باشند، لذا نتیجه می‌شود که α در واقع باید یک عدد صحیح مثبت n باشد. بنابراین $\lambda=n^2$ $(n=1,2,\ldots)$، و جواب عمومی متناظر از مسألهٔ (۱) یک ترکیب خطی دلخواه از دو تابع ویژهٔ مستقل خطی، $\cos nx$ و $\sin nx$ است.

این به عهده خواننده گذاشته شده (مسألهٔ ۴) که نشان دهد هیچ مقدار ویژه منفی وجود ندارد.

اکنون استفاده از این مسألهٔ استورم- لیوویل، شامل شرایط مرزی تناوبی، را نشان می‌دهیم.

مثال. فرض کنید $u(\rho,\phi)$ نمایش دماهای مانا در یک قرص نازک $\rho \leq ۱$ باشد که وجوه آن عایق‌بندی شده و لبه $\rho=۱$ آن در دماهای $f(\phi)$ نگهداشته می‌شود. البته، متغیرهای ρ و ϕ مختصهای قطبی هستند، و u در معادلهٔ لاپلاس $\nabla^2 u = ۰$ صدق می‌کند. یعنی اینکه:

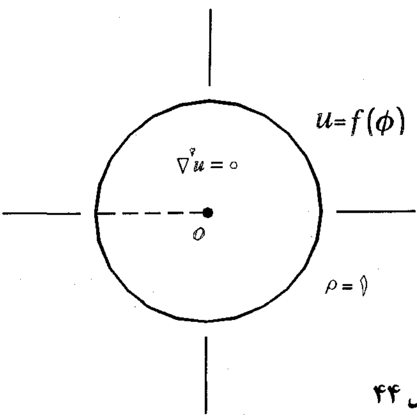
(۲)

$$\rho^2 u_{\rho\rho}(\rho,\phi) + \rho u_\rho(\rho,\phi) + u_{\phi\phi}(\rho,\phi) = 0 \quad (0<\rho<1\,,\ -\pi<\phi<\pi)$$

که در آن:

$$u(1,\phi)=f(\phi) \qquad (-\pi<\phi<\pi) \qquad (۳)$$

همچنین، u و مشتقات جزئی مراتب اول و دوم آن در داخل آن قرص پیوسته و کراندارند. بویژه، u و مشتقات جزئی مرتبه اول آن روی پرتو $\phi=\pi$ پیوسته هستند (**شکل ۴۴**).



شکل ۴۴

اگر توابع از نوع $u=R(\rho)\,\Phi(\phi)$ در شرط (۲) و شرایط لازم پیوستگی صدق کنند، آنگاه:

$$\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0 \qquad (0<\rho<1) \qquad (۴)$$

و

$$\Phi''(\phi)+\lambda\Phi(\phi)=0 \quad , \quad \Phi(-\pi)=\Phi(\pi) \quad , \quad \Phi'(-\pi)=\Phi'(\pi) \tag{۵}$$

که در آن λ یک ثابت جداسازی است. اکنون تشخیص می‌دهیم که شرایط (۵) یک مسألهٔ استورم-لیوویل برحسب Φ تشکیل می‌دهند که $\lambda_0=0$ و $\lambda_n=n^2$ $(n=1,2,...)$ مقادیر ویژه آن هستند. توابع ویژه متناظر $\frac{1}{2}$ و ترکیبهای خطی از $\cos n\phi$ و $\sin n\phi$ هستند. معادلهٔ (۴) یک معادلهٔ کوشی-اویلر است و از بخش ۳۵ می‌دانیم که جوابهای کراندار آن معادله عبارتند از:
$R_0(\rho)=1$ هرگاه $\lambda=0$ و $R_n(\rho)=\rho^n$ هرگاه $\lambda=n^2$ $(n=1,2,...)$. بنابراین ترکیب خطی تعمیم یافتهٔ توابع پیوستهٔ $R\Phi$ بدین صورت نوشته می‌شود:

$$u(\rho,\phi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(a_n\cos n\phi+b_n\sin n\phi) \tag{۶}$$

این جواب در شرط (۳) صدق می‌کند، اگر a_n و b_n و از جمله خود a_0، ضرائب سری فوریهٔ f روی بازهٔ $-\pi<x<\pi$ باشند:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)\cos n\phi\,d\phi \quad , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\phi)\sin n\phi\,d\phi \tag{۷}$$

ما فرض می‌کنیم که f قطعه‌ای هموار باشد.

مسائل

۱. هر چهار وجه یک منشور مستطیلی با طول نامتناهی که از صفحات $x=0$ و $x=a$ و $y=0$ و $y=b$ تشکیل شده، در دمای صفر نگهداشته می‌شوند. فرض کنید $f(x,y)$ توزیع دمای اولیه باشد و عبارت ریاضی زیر را برای دماهای $u(x,y,t)$ در این منشور به دست آورید:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}B_{mn}\exp\left[-\pi^2kt\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

که در آن:

$$B_{mn}=\frac{۴}{ab}\int_{۰}^{b} sin\frac{m\pi y}{b}\int_{۰}^{a} f(x,y) sin\frac{n\pi x}{a} dx\, dy$$

۲. در مسألهٔ ۱ تابع $f(x,y)$ را مساوی $g(x)h(y)$ قرار داده، نشان دهید که سری دوگانه‌ای که در آنجا برای u به دست آمده به حاصلضرب دو سری $v(x,t)$ و $w(x,t)$ تبدیل می‌شود،

$$u(x,y,t)=v(x,t)\, w(y,t)$$

که در آن v و w به ترتیب نمایش دما در قطعه‌های $۰\leq x\leq a$ و $۰\leq y\leq b$ هستند، هرگاه دما روی وجوه آن دو قطعه صفر و دماهای اولیهٔ آنها به ترتیب $g(x)$ و $h(y)$ باشد.

۳. فرض کنید توابع $v(x,t)$ و $w(y,t)$ در معادلهٔ گرما برای جریان یک بعدی صدق می‌کنند:

$$v_t=vk_{xx} \qquad , \qquad w_t=kw_{yy}$$

با مشتق گیری نشان دهید که حاصلضرب آنها $u=vw$ در معادلهٔ دو بعدی گرما صدق می‌کند:

$$u_t=k(u_{xx}+u_{yy})$$

از این نتیجه استفاده کرده، به عبارت ریاضی مسألهٔ ۲ برای $u(x,y,t)$ برسید.

۴. با نوشتن $\lambda=-\alpha^۲$ $(\alpha>۰)$ نشان دهید که مسألهٔ استورم-لیوویل

$$X''(x)+\lambda X(x)=۰ \quad ; \quad X(-\pi)=X(\pi) \quad , \quad X'(-\pi)=X'(\pi)$$

در بخش ۴۰، هیچ مقدار ویژه منفی ندارد.

۵. از مختصهای استوانه‌ای ρ و ϕ و z استفاده کرده، فرض کنید $u(\rho,\phi)$ نمایش دماهای مانا در یک استوانه توخالی طویل $a\leq\rho\leq b$، $-\infty<z<\infty$ باشد، هرگاه روی سطح داخلی $\rho=a$ دما $f(\phi)$ و روی سطح خارجی $\rho=b$ دما صفر است.

(الف) فرمول دما را به صورت ذیل به دست آورید:

$$u(\rho,\phi)=\frac{ln(\frac{b}{\rho})}{ln(\frac{b}{a})}.\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(\frac{b}{\rho})^n-(\frac{\rho}{b})^n}{(\frac{b}{a})^۲-(\frac{a}{b})^n}\quad(a_n\cos n\phi+b_n\sin n\phi)$$

که در آن ضرائب a_n وb_n و از جمله خود $a_\circ$ توسط معادلات (۷)، بخش ۴۰، داده می‌شوند.

(ب) از نتیجه قسمت (الف) استفاده کرده، نشان دهید که اگر $f(\phi)=A+B\sin\phi$، که در آن A وB ثابتند، آنگاه:

$$u(\rho,\phi)=A\frac{ln(\frac{b}{\rho})}{ln(\frac{b}{a})}+\frac{Bab}{b^۲-a^۲}\,(\frac{b}{\rho}-\frac{\rho}{b})\sin\phi$$

۶. مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید:

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t)\qquad(-\pi<x<\pi\ ,\ t>\circ)$$

$$u(-\pi,t)=u(\pi,t)\quad,\quad u_x(-\pi,t)=u_x(\pi,t)\quad,\quad u(x,\circ)=f(x)$$

برای مثال، جواب $u(x,t)$ دماها در یک سیم عایق‌بندی شده به طول ۲π را نمایش می‌دهد که به شکل یک دایره واحد خم شده و یک توزیع دمای مفروض در امتداد آن دارد. برای سهولت، تصور کنید که سیم در یک نقطه‌ای قطع شده و روی محور x بین $x=-\pi$ و $x=\pi$ قرار گرفته است. پس متغیر x فاصله در امتداد سیم را، با شروع از نقطه $x=-\pi$، مشخص می‌کند، و نقاط $x=-\pi$ و $x=\pi$ نمایش یک نقطه روی دایره‌اند. دو شرط مرزی اول در آن مسأله تعیین می‌کنند که دماها و شار برای هر کدام از آن دو مقدار x باید یکسان باشند. این مسأله برای خود فوریه بسیار جالب بود و آن سیم اکنون به حلقهٔ فوریه معروف است.

جواب: $$u(x,t)=\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)e^{-n^۲kt}\ ,$$

که در آن:

$$a_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad , \quad b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

۷. (الف) در اتحاد مثلثاتی

$$۲\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

مقادیر $A=n\theta$ و $B=\theta$ را قرار داده ، و سپس معادلهٔ حاصل را در a^n $(-۱<a<۱)$ ضرب کنید. حال با جمع کردن دو طرف معادلهٔ حاصل از $n=۱$ تا $n=\infty$، فرمول مجموعیابی زیر را به دست آورید:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a^n \cos n\theta=\frac{a\cos\theta-a^۲}{۱-۲a\cos\theta+a^۲} \qquad (-۱<a<۱)$$

[با مقایسهٔ این سری و سری هندسی با جملات a^n $(n=۱,۲,\ldots)$ بسادگی دیده می‌شود که سری مذکور همگرای مطلق است].

(ب) فرمول (۶) با ضرائب (۷) در بخش ۴۰ برای دماهای مانا در یک قرص را بدین شکل بنویسید:

$$u(\rho,\phi)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\left[۱+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\rho^n\cos n(\phi-\psi)\right]d\psi$$

سپس با کمک فرمول مجموعیابی در قسمت (الف) فرمول انتگرال پواسن را برای آن دماها به دست آورید:

$$u(\rho,\phi)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\frac{۱-\rho^۲}{۱-۲\rho\cos(\phi-\psi)+\rho^۲}d\psi \qquad (\rho<۱)$$

فصل ۵

مسائل استورم- لیوویل و کاربردها

اکنون مقدمات نظریه مسائل استورم لیوویل و حل آنها را به طور دقیق ارائه می‌کنیم. به محض انجام این کار، روش فوریه را جهت حل مسائل فیزیکی که در فصلهای قبل با توابع ویژهٔ آنها برخورد نداشته‌ایم نشان خواهیم داد.

۴۱. مسائل استورم- لیوویل منظم

در فصل ۴ جوابهای مسائل مقدار مرزی گوناگونی را با روش فوریه به دست آوردیم. این روش، جز در بخش ۴۰، همواره به یک نمایش سری فوریهٔ کسینوسی یا سینوسی از یک تابع مفروض نیاز داشته است. توابع کسینوسی و سینوسی بکار رفته در آن سری‌ها توابع ویژهٔ یکی از دو مسألهٔ استورم لیوویل زیر روی بازهٔ $\circ \leq x \leq c$ هستند:

$$X''(x)+\lambda X(x)=\circ \quad , \quad X'(\circ)=\circ \quad , \quad X'(c)=\circ \tag{۱}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=\circ \quad , \quad X(\circ)=\circ \quad , \quad X(c)=\circ \tag{۲}$$

وقتی این روش برای مسائل مقدار مرزی در معادلات دیفرانسیل جزئی به کار می‌رود، روش فوریه نیز شامل یک مسألهٔ استورم لیوویل است که از یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی همگن از نوع

$$X''(x)+R(x)X'(x)+\Big[Q(x)+\lambda p(x)\Big]X(x)=\circ \tag{۳}$$

روی بازهٔ متناهی $a<x<b$ و یک زوج شرایط مرزی همگن در نقاط انتهایی آن بازه تشکیل می‌شود. توابع P و Q و R و آن شرایط مرزی به وسیلهٔ مسألهٔ مقدار مرزی اصلی که شامل یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی است، تعیین می‌شود. مقادیر λ که فقط در معادلهٔ (۳) ظاهر می‌شوند و جوابهای متناظر غیربدیهی $X(x)$، باید مشخص شوند. اکنون یک تعریف دقیق از این نوع مسألهٔ استورم لیوویل، که مسائل (۱) و (۲) حالات خاص آن هستند، ارائه می‌کنیم.

دقت کنید که تابع

$$r(x)=exp \int R(x)\,dx$$

یک عامل انتگرالگیری برای مجموع دو جملهٔ اول معادلهٔ (۳) می‌باشد یعنی:

$$r(x)\,\left[X''(x)+R(x)X'(x)\right] = \left[r(x)X'(x)\right]'$$

در نتیجه وقتی هر کدام از جملاتش در $r(x)$ ضرب شوند، معادلهٔ (۳) به فرم زیر درمی‌آید:

$$\left[r(x)X'(x)\right]' + \left[q(x)+\lambda P(x)\right] X(x)=\text{۰} \quad (a<x<b) \qquad \text{(۴}$$

که در آن توابع p و q و r مستقل از λ هستند. در اینجا فرض می‌کنیم که p و q و r و r' توابعی حقیقی از متغیر x هستند که روی بازهٔ بسته و کراندار $a\leq x\leq b$ پیوسته و وقتی $a\leq x\leq b$، $p(x)>\text{۰}$ و $r(x)>\text{۰}$. همچنین $X(x)$ باید در شرایط مرزی جدا شده همگن زیر صدق کند.

$$a_{\text{۱}}X(a)+a_{\text{۲}}X'(a)=\text{۰} \qquad , \qquad b_{\text{۱}}X(b)+b_{\text{۲}}X'(b)=\text{۰} \qquad \text{(۵}$$

همهٔ ثابتهای $a_{\text{۱}}$ و $a_{\text{۲}}$ و $b_{\text{۱}}$ و $b_{\text{۲}}$ اعدادی حقیقی و مستقل از λ هستند. بعلاوه $a_{\text{۱}}$ و $a_{\text{۲}}$ هر دو همزمان صفر نیستند و همین مطلب در مورد $b_{\text{۱}}$ و $b_{\text{۲}}$ نیز صادق است. معادلهٔ دیفرانسیل (۴) و شرایط مرزی (۵) یک مسألهٔ استورم-لیوویل منظم تشکیل می‌دهند.[۱] مسائل

۱. مقالات جی‌سی-اف استورم و جی لیوویل که اولین تعمیم وسیع نظریهٔ این مسأله را ارائه کردند در جلدهای ۱-۳ *Journal de mathematique* (۱۸۳۶-۱۸۳۸) ظاهر شدند.

استورم-لیوویل نامنظم در بخش ۴۲ خواهد آمد.

مثال‌ها. مسائل (۱) و (۲) هر دو از مسائل استورم-لیوویل منظم هستند دو مثال دیگر که بعداً در این فصل حل خواهند شد عبارتند از:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad (0<x<c)$$

$$X'(0)=0 \quad , \quad hX(c)+X'(c)=0$$

که در آن h یک ثابت مثبت است و:

$$\left[x^2 X'(x)\right]'+\lambda X(x)=0 \qquad (1<x<b)$$

$$X(1)=0 \qquad X(b)=0$$

همانگونه که در مسائل (۱) و (۲) داشتیم، مقدار λای که مسأله (۴)-(۵) برای آن یک جواب غیربدیهی دارد، مقدار ویژه نامیده می‌شود، و جواب غیربدیهی متناظر را تابع ویژه نامند. توجه دارید که اگر $X(x)$ یک تابع ویژه باشد $CX(x)$ نیز که در آن C یک ثابت مخالف صفر است، یک تابع ویژه است. متوجه هستیم که برای اینکه $X(x)$ یک تابع ویژه باشد، لازم است $X(x)$ و $X'(x)$ روی بازهٔ بستهٔ $a\le x\le b$ پیوسته باشند. معمولاً چنین شرایط پیوستگی برای جوابهای مسائل مقدار مرزی در معادلات دیفرانسیل معمولی مورد نیازند. مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ مسألهٔ (۴)-(۵) طیف آن مسأله نامیده می‌شود.می‌توان نشان داد که طیف یک مسألهٔ استورم-لیوویل منظم از یک تعداد نامتناهی مقادیر ویژهٔ λ_1 و λ_2 و... تشکیل می‌شود. این مطلب را بدون اثبات بیان می‌کنیم، زیرا اثبات آن بسیار کار می‌برد.[1] در حالات خاص آن مقادیر ویژه عیناً به دست می‌آید و لذا در وجود آنها

---

۱. برای تحقیق این گزاره‌ها در این بخش که ما آنها را ثابت نمی‌کنیم، کتاب چرچیل (فصل ۹، ۱۹۷۲) را ببینید که اثباتها را برای حالتی که در شرایط (۵)، $a_2=b_2=0$ باشد، ارائه می‌کند. همچنین کتاب بیرکوف ـ روتا (فصل ۱۰ و ۱۱ و ۱۹۷۸) را ببینید. بررسی وسیع نظریه استورم-لیوویل در کتابهای اینس (۱۹۵۶) و تیشمارش (۱۹۶۲) نیز آمده است. این مراجع در کتابنامه ذکر شده‌اند.

هیچ شکلی نخواهد بود. در هر حال وقتی در جستجوی مقادیر ویژه هستیم، دانستن اینکه همهٔ آنها حقیقی هستند، مفید است، لذا به دنبال پیدا کردن هیچ مقدار ویژهٔ دیگری در صفحهٔ مختلط نیستیم. در بخش ۴۳ اثبات می‌شود که آن مقادیر ویژه باید حقیقی باشند و توافق می‌کنیم که آنها به صورت صعودی مرتب شده‌اند طوری که $\lambda_n<\lambda_{n+۱}$ $(n=۱,۲,...)$. می‌توان نشان داد که وقتی $n\to\infty$ ، $\lambda_n\to\infty$.

اگر عملگر دیفرانسیل $\mathscr{L}$ را توسط معادلهٔ

$$\mathscr{L}\left[X(x)\right]=\left[r(x)X'(x)\right]'+q(x)X(x) \tag{۶}$$

تعریف کنیم، معادلهٔ استورم-لیوویل (۴) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\mathscr{L}\left[X(x)\right]+\lambda P(x)X(x)=۰ \tag{۷}$$

این عملگر یک حالت خاص از عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه دوم کلی L به شکل زیر است:

$$L\left[X(x)\right]=A(x)X''(x)+B(x)X'(x)+C(x)X(x) \tag{۸}$$

در بحث اینگونه عملگرها، به طور ضمنی اتفاق نظر داریم که آنها باید روی فضاهای تابعی (بخش ۱۰) تعریف شوند که توابع X متعلق به آن بطور مناسبی دیفرانسیل‌پذیر باشند.

الحاق L عملگر L^* می‌باشد به طوری که:

$$L^*\left[X(x)\right]=\left[A(x)X(x)\right]''-\left[B(x)X(x)\right]'+C(x)X(x) \tag{۹}$$

و L خودالحاق نامیده می‌شود وقتی که $L^*=L$. می‌توان نشان داد (مسألهٔ ۲ بخش ۴۳) که یک شرط لازم و کافی برای خود الحاق بودن L این است که

$B(x)=A'(x)$، که در این حالت معادلهٔ (۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$L\left[X(x)\right] = \left[A(x)X'(x)\right]' + C(x)X(x)$$

بدون در نظر گرفتن نماد، این در واقع همان معادلهٔ (۶) است، و بنابراین $\mathcal{L}$ را به منظور نمایش عملگر دیفرانسیل خطی کلی خود الحاق مرتبه دوم به کار می‌بریم. معادلهٔ استورم- لیوویل (۴) همان معادلهٔ (۷) می‌باشد که شامل عملگر خود الحاق $\mathcal{L}$ است، لذا آن معادله فرم خود الحاق دارد. بویژه این فرم به علت خواص عملگر L بسیار مفید است. بعضی از این خواص به طور صریح در مسائل مورد توجه قرار می‌گیرند.

۴۲. تعدیل‌ها

گر چه در این فصل اساساً به نظریه و کاربرد مسائل استورم-لیوویل منظم که در بخش ۴۱ توصیف شدند می‌پردازیم، همچنین به تعدیلهای مهم و مشخص در حین کار نیز توجه داریم. آنها را در اینجا ذکر می‌کنیم؛ چون بعضی از مطالب نظری آنها به طور مناسب در بحث مسائل استورم‌لیوویل بخش ۴۳ مطرح شده است.

یک مسألهٔ استورم-لیوویل

$$\left[r(x)X'(x)\right]' + \left[q(x)+\lambda p(x)\right]X(x)=0 \quad (a<x<b) \tag{۱}$$

$$a_1 X(a)+a_2 X'(a)=0 \quad , \quad b_1 X(b)+b_2 X'(b)=0 \tag{۲}$$

تکین است، وقتی حداقل یکی از شرایط منظم بودن بیان شده، در بخش ۴۱ صادق نباشد. برای مثال تابع q ممکن است در یک نقطهٔ انتهایی بازه $a\le x\le b$ ناپیوستگی نامتناهی داشته باشد. همچنین اگر $p(x)$ یا $r(x)$ در یک نقطهٔ انتهائی صفر شود، آن مسأله تکین است. اگر $r(x)$ در یکی از نقاط انتهائی صفر باشد، آن شرط مرزی روی آن نقطه انتهایی باید از سؤال حذف شود. توجه دارید که حذف آن شرط مرزی مثلاً در $x=a$ با قرار دادن صفر برای ضرائب a_1 و a_2 در آن شرط یکسان است، شبیه این مطلب وقتی که شرط در $x=b$ باید حذف شود صادق است.

مثال ۱. یک مسألهٔ استورم- لیوویل تکین که در فصل ۷ مورد مطالعه قرار می‌گیرد، از معادلهٔ دیفرانسیل که در آن $n=۰,۱,۲,...$

$$\left[xX'(x)\right]' + \left(-\frac{n^۲}{x}+\lambda x\right) X(x)=۰ \qquad (۰<x<c)$$

و تنها شرط مرزی $X(c)=۰$ تشکیل می‌شود. مشاهده می‌کنید که هر دو تابع $p(x)=x$ و $r(x)=x$ در $x=۰$ صفرند و تابع $q(x)=\frac{-n^۲}{x}$ برای n مثبت در $x=۰$ ناپیوستگی نامتناهی دارد.

مثال ۲. معادلهٔ دیفرانسیل

$$\left[(۱-x^۲)X'(x)\right]' + \lambda X(x)=۰ \qquad (-۱<x<۱)$$

بدون شرط مرزی، یک مسألهٔ استورم- لیوویل تکین است. در اینجا تابع $r(x)=۱-x^۲$ در هر دو نقطه انتهائی $x=\pm ۱$ بازهٔ $-۱\le x\le ۱$ صفر می‌شود. این مسأله یکی از مسائل اصلی است که در فصل ۸ حل و از آن استفاده می‌شود.

گرچه طیف مثالهای ۱ و۲ گسسته است و مقادیر ویژهٔ آنها را می‌توان با اعداد صحیح مثبت یا نامنفی اندیس‌گذاری کرد (در واقع نامتناهی است) اما در مسائل تکین همیشه لزوماً این حالت پیش نمی‌آید. در واقع اینگونه مسائل ممکن است که ابداً هیچ مقدار ویژه نداشته باشند، بعلاوه انواع دیگر مسائل تکین که روی بازه‌های نامتناهی یا نیم-متناهی تعریف شده که در فصل ۶ خواهند آمد دارای طیفی پیوسته شامل همهٔ مقادیر نامنفی λ هستند. همانگونه که در بخش ۴۱ نشان دادیم، در واقع ماهیت طیف هر مسألهٔ خاص با شناخت مقادیر ویژهٔ آن تعیین خواهد شد.

بالاخره، علاوه بر مسائل تکین با $r(a)=r(b)$ و شرط مرزی تناوبی

$$X(a)=X(b) \qquad X'(a)=X'(b) \tag{۳}$$

به جای شرط (۲)، تعدیل دیگری از مسألهٔ (۱)-(۲) حاصل می‌شود.

مثال۳. مسألهٔ

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , \quad X(-\pi)=X(\pi) \quad , \quad X'(-\pi)=X'(\pi)$$

که قبلاً در بخش ۴۰ حل شد، شرایط مرزی تناوبی دارد.

۴۳ . تعامد توابع ویژه

همانگونه که در بخش ۴۱ اشاره شد، یک مسألهٔ استورم- لیوویل

$$\left[r(x)\, X'(x)\right]' + \left[q(x)+\lambda P(x)\right] X(x)=0 \qquad (a<x<b) \qquad (1)$$

$$a_1 X(a)+a_2 X'(a)=0 \quad , \quad b_1 X(b)+b_2 X'(b)=0 \qquad (2)$$

همواره یک تعداد نامتناهی مقدار ویژهٔ λ_1،λ_2و... دارد. در این بخش تعامد توابع ویژه متناظر به مقادیر ویژهٔ متمایز ثابت می‌شود. در هر صورت مفهوم متعامد بودن که در اینجا از آن استفاده خواهد شد، یک تعمیم مختصری است از مفهومی که در بخش ۱۱ ارائه شد. به عبارت دقیق‌تر، یک مجموعهٔ $\{\psi_n(x)\}$ $(n=1,2,...)$ روی بازهٔ $a<x<b$ نسبت به تابع وزن $p(x)$ که در آن بازه قطعه‌ای پیوسته و مثبت است، متعامد است اگر:

$$\int_a^b P(x)\,\psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx=0 \qquad m\neq n \qquad \text{برای}$$

این انتگرال ضرب داخلی (ψ_m ,ψ_n) نسبت به آن تابع وزن را نمایش می‌دهد. این مجموعه با تقسیم هر کدام از $\psi_n(x)$ها بر $\|\psi_n\|$ نرمال می‌شود که در آن:

$$\|\psi_n\|^2=(\psi_n,\psi_n)=\int_a^b P(x)\left[\psi_n(x)\right]^2 dx$$

و در اینجا فرض بر این است که $\|\psi_n\|\neq 0$. البته با استفاده از حاصلضرب‌های $\sqrt{p(x)}\,\psi_n(x)$ به عنوان توابع آن مجموعه، این نوع تعامد می‌تواند به نوع معرفی شده در بخش ۱۱ تبدیل شود. در ریاضی کاربردی مجموعه‌های متعامد نسبت به توابع وزنی که قطعه‌ای پیوسته نیستند یا بازه اصلی مورد نظر بیکران است نیز پیش می‌آید.

بنابر قضیه زیر، توابع ویژهٔ مربوط به مقادیر ویژهٔ متمایز روی بازهٔ $a<x<b$ نسبت به تابع وزن $p(x)$ متعامدند، که در آن $p(x)$ همان تابع $p(x)$ در معادلهٔ (۱) است. اگر این توابع ویژه را با $X_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ نمایش دهیم، توابع ویژه، نرمال شده عبارتند از:

$$\phi_n(x)=\frac{X_n(x)}{\|X_n\|} \qquad \text{که در آن} \qquad \|X_n\|^2=\int_a^b P(x)\,\left[X_n(x)\right]^2 dx$$

و

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x) \qquad (a<x<b)$$

یک سری فوریهٔ تعمیم یافتهٔ نظیر به یک تابع داده شدهٔ $f(x)$ متعلق به $C_p(a,b)$ می‌باشد (مقایسه کنید با بخش ۱۲) که در آن:

$$c_n=(f,\phi_n)=\int_a^b P(x)f(x)\phi_n(x)\,dx \quad (n=1,2,\ldots)$$

مثالهائی از این سریها را در بخش ۴۶ خواهیم دید.

در ارائه این قضیه در مورد شرایط منظم بودن روی ضرائب معادلهٔ دیفرانسیل (۱) اصرار نمی‌ورزیم، بنابراین نتیجه قضیه را می‌توان در مورد توابع ویژهٔ نیز که برای تعدیلهای مسألهٔ استورم-لیوویل منظم، ذکر شده در بخش ۴۲، به دست می‌آیند به کار برد. ما همهٔ شرایط یک مسألهٔ منظم را که در بخش ۴۱ بیان شده حفظ می‌کنیم، جز اینکه اکنون ممکن است q در یک نقطه انتهائی بازه $a\le x\le b$ ناپیوسته باشد و $p(x)$ و $r(x)$ در یک نقطه انتهائی صفر باشد. یعنی p و r و r' روی بازهٔ بسته $a\le x\le b$ پیوسته‌اند، q روی بازهٔ باز $a<x<b$ پیوسته است و روی $a<x<b$ ، $p(x)>0$ و $r(x)>0$.

قضیه ۱ اگر λ_m و λ_n مقادیر ویژهٔ متمایز مسألهٔ استورم-لیوویل (۱)-(۲) باشند، آنگاه توابع ویژهٔ نظیر $X_m(x)$ و $X_n(x)$ نسبت به تابع وزن $p(x)$ روی بازهٔ $a<x<b$ متعامدند. این تعامد همچنین در هر کدام از حالات زیر برقرار است:

(الف) وقتی $r(a)=0$ و اولین شرط از شرطهای مرزی (۲) از مسأله حذف شود،

(ب) وقتی $r(b)=0$ و دومین شرط از شرایط (۲) حذف شود،

(ج) وقتی $r(a)=r(b)$ و شرایط (۲) با شرایط زیر جایگزین شوند.

$$X(a)=X(b) \qquad X'(a)=X'(b)$$

باید دقت شود که هر دو حالت (الف) و (ب) امکان دارد در مورد یک مسألهٔ استورم-لیوویل داده شده به کار روند (مثال ۲ بخش ۴۲ را ببینید).

برای اثبات قضیه، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که چون هر تابع ویژه برای λ نظیر در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند،

$$(rX_m')' + qX_m = -\lambda_m PX_m \quad , \quad (rX_n')' + qX_n = -\lambda_n PX_n$$

سپس هر دو طرف این دو معادله را به ترتیب در X_n و X_m ضرب کرده، حاصل را از همدیگر کم می‌کنیم:

(۳

$$(\lambda_m - \lambda_n)PX_mX_n = X_m(rX_n')' - X_n(rX_m')' = \frac{d}{dx}\left[r(X_mX_n' - X_m'X_n)\right]$$

در حالی که در اینجا تبدیل نهائی به یک مشتق کامل امری مقدماتی است، آن به دلیل ماهیت خاص عملگر خود الحاق L که در معادلهٔ (۶) بخش ۴۱ تعریف شد، امکان‌پذیر شده است. جزئیات راجع به این نکته به مسائل واگذار می‌شود.

تابع q در اینجا حذف شده، و با توجه به شرایط پیوستگی روی بقیهٔ توابع می‌توانیم بنویسیم:

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b PX_mX_n\,dx = \Big[r(x)\,\Delta x\Big]_a^b \tag{۴}$$

که در آن $\Delta(x)$ دترمینان زیر است:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} X_m(x) & X_m'(x) \\ X_n(x) & X_n'(x) \end{vmatrix} \tag{۵}$$

یعنی:

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b PX_mX_n\,dx = r(b)\,\Delta(b) - r(a)\,\Delta(a) \tag{۶}$$

بنابه اولین شرط از شرایط مرزی (۲) داریم:

$$a_1 X_m(a) + a_2 X_m'(a) = 0$$

$$a_1 X_n(a) + a_2 X_n'(a) = 0$$

و برای اینکه a_1 و a_2 مخالف صفر جوابهای این جفت معادلهٔ همگن از مجهولات a_1 و a_2 باشند، نیاز است که دترمینان آن یعنی $\Delta(a)$ صفر باشد. به طور مشابه از دومین شرط از شرایط مرزی (۲) و برای داشتن b_1 و b_2 مخالف صفر لازم است که $\Delta(b) = 0$. بنابراین بر طبق معادلهٔ (۶)،

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b P X_m X_n \, dx = 0 \tag{۷}$$

و چون $\lambda_m \neq \lambda_n$، خاصیت تعامد مورد نظر نتیجه می‌شود:

$$\int_a^b P(x) X_m(x) X_n(x) \, dx = 0 \tag{۸}$$

اگر $r(a) = 0$، خاصیت (۸) از معادلهٔ (۶) نتیجه می‌شود، حتی وقتی که $\Delta(a) \neq 0$، یعنی وقتی که $a_1 = a_2 = 0$ که در واقع اولین شرط از شرایط (۲) محو می‌شود. به طور مشابه اگر $r(b) = 0$، دومین شرط از شرایط (۲) محو می‌شود، یعنی در واقع به کار نمی‌آید.

وقتی که $r(a) = r(b)$ و از شرایط مرزی تناوبی

$$X(a) = X(b) \qquad X'(a) = X'(b)$$

به جای شرایط (۲) استفاده شود:

$$r(b)\, \Delta(b) = r(a)\, \Delta(a)$$

و مجدداً خاصیت (۸) نتیجه می‌شود. این اثبات قضیه را کامل می‌کند.

مثال ۱. توابع ویژهٔ مسألهٔ استورم–لیوویل

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (0 < x < \pi)$$

$$x(0) = 0 \qquad X(\pi) = 0$$

$X_n(x)=\sin nx$ $(n=1,2,...)$ هستند و نظیر به مقادیر ویژهٔ متمایز $\lambda_n=n^2$ هستند (بخش ۲۹). بنابه قضیه توابع $X_n(x)$ روی بازهٔ $0<x<\pi$ نسبت به تابع وزن $p(x)=1$ متعامدند:

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx\, dx=0 \quad (m\neq n) \tag{۹}$$

یادآور می‌شویم که این تعامد، پیش از این در مثال بخش ۱۱ جایی که انتگرال (۹) مستقیماً محاسبه شد، ثابت شده بود.

مثال ۲. بنا به قضیه، توابع ویژهٔ نظیر به مقادیر ویژهٔ متمایز از مسألهٔ استورم-لیوویل منظم

$$\left[xX'(x)\right]'+\frac{\lambda}{x}X(x)=0 \qquad (1<x<b)$$

$$X(1)=0 \qquad X(b)=0$$

نسبت به تابع وزن $p(x)=\frac{1}{x}$ روی بازهٔ $1<x<b$ متعامدند. در مسألهٔ ۱ توابع ویژه عملاً به دست می‌آیند و مستقیماً تعامد تحقیق می‌شود. فرع زیر یک نتیجه آنی از آن قضیه است.

فرع ۱ اگر λ یک مقدار ویژه مسألهٔ استورم- لیوویل (۱)-(۲) باشد باید یک عددی حقیقی باشد، همین مطلب برای حالات (الف)، (ب) و (ج) بحث شده در آن قضیه صادق است.

با نوشتن مقدار ویژه به صورت $\lambda=\alpha+i\beta$ که در آن α و β حقیقی‌اند، اثبات را شروع می‌کنیم. فرض کنید X نمایش یک تابع ویژه متناظر به λ باشد که غیربدیهی و در صورت لزوم مختلط - مقدار است. پس شرایط (۱) و (۲) صادق هستند و $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ و $\overline{X}=u-iv$ و $X'=u'+iv'$ را برای $X=u+iv$ در نظر می‌گیریم. توجه دارید که مزدوج مختلط یک مجموع یا حاصلضرب دو عدد مختلط برابر است با مجموع یا حاصلضرب مزدوج آنها. پس دو طرف معادلات (۱) و (۲) را مزدوج می‌کنیم و با توجه به اینکه p و q و r توابع حقیقی هستند و ضرائب در شرایط (۲) نیز حقیقی‌اند،

$$(r\overline{X}')'+(q+\overline{\lambda}p)\overline{X}=0$$

$$a_1 \overline{X}(a) + a_2 \overline{X}'(a) = 0 \qquad , \qquad b_1 \overline{X}(b) + b_2 \overline{X}'(b) = 0$$

پس تابع غیربدیهی $\overline{X}$ یک تابع ویژه متناظر به $\overline{\lambda}$ می‌باشد.

اگر $\beta \neq 0$ ، $\overline{\lambda} \neq \lambda$، و قضیه بیان می‌کند که X و $\overline{X}$ روی بازهٔ $a < x < b$ نسبت به تابع وزن $p(x)$ حتی در حالات (الف)، (ب) و (ج) متعامدند:

$$\int_a^b P(x) X(x) \overline{X}(x)\, dx = 0 \tag{10}$$

اما توجه داریم که روی $a < x < b$ ، $p(x) > 0$ و بعلاوه وقتی $a \leq x \leq b$

$$X\overline{X} = u^2 + v^2 = |X|^2 \geq 0$$

و $|X|^2$ همه جا صفر نیست، زیرا یک تابع ویژه است بنابراین انتگرال (۱۰) مقدار مثبت دارد و بنابراین با فرض $\beta \neq 0$ به تناقض می‌رسیم. پس نتیجه می‌گیریم که $\beta = 0$ یعنی λ حقیقی است.

مسائل

۱. (الف) معادلهٔ دیفرانسیل این مسألهٔ استورم- لیوویل منظم

$$\left[xX'(x)\right]' + \frac{\lambda}{x} X(x) = 0 \qquad (1 < x < b)$$

$$X(1) = 0 \qquad X(b) = 0$$

را به صورت کوشی- اویلر (مسألهٔ ۳ بخش ۳۵ را ببینید) بنویسید و سپس با استفاده از جایگزینی $x = exp\, s$ آن را به مسألهٔ زیر مرکب از معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^2X}{ds^2} + \lambda X = 0 \qquad (0 < s < ln\, b)$$

و شرایط مرزی $X = 0$ وقتی $s = 0$, $s = ln\, b$ تبدیل کنید.

سپس بسادگی با رجوع به جوابهای مسألهٔ استورم- لیوویل بخش ۲۹ نشان دهید که مقادیر و توابع ویژه مسألهٔ اصلی در اینجا عبارتند از :

$$\lambda_n = \alpha_n^{۲} \qquad X_n(x) = \sin(\alpha_n \ln x) \qquad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

که در آن
$$\alpha_n = \frac{n\pi}{\ln b}$$

(ب) با جایگذاری $s = (\frac{\pi}{\ln b})\ln x$ در انتگرالی که در اینجا ظاهر می‌شود و سپس با رجوع به فرمول انتگرالگیری (۹) در مثال ۱ بخش ۴۳، مستقیماً ثابت کنید که توابع ویژه $X_n(x)$ که در قسمت (الف) به دست آمدند، همانگونه که توسط قضیه بخش ۴۳ تضمین شده، روی بازهٔ $۱ < x < b$ با تابع وزن $p(x) = \frac{۱}{x}$ متعامدند.

۲. فرض کنید L عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه دوم کلی باشد که توسط

$$L[X] = AX'' + BX' + CX$$

تعریف شده که در آن A و B و C توابعی از x هستند. در بخش ۴۱ الحاق L به عنوان عملگر L^* تعریف شده بود طوری که:

$$L^*[X] = (AX)'' - (BX)' + CX$$

نشان دهید شرط لازم و کافی برای خودالحاق بودن L یعنی $(L^* = L)$ این است که $B = A'$.

راهنمائی: توجه کنید که اگر $L^*[X] = L[X]$، بویژه داریم $L^*[۱] = L[۱]$ و $L^*[x] = L[x]$. شرط $B = A'$ از این دو معادلهٔ آخر به دست می‌آید.

۳. (الف) اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$X(rY')' - Y(rX')' = \frac{d}{dx}\left[r(XY' - X'Y)\right]$$

که در آن r و X و Y توابعی از x هستند.

(ب) اگر $\mathscr{L}$ عملگر دیفرانسیل خودالحاق تعریف شده توسط معادلهٔ

$$\mathscr{L}\,[X] = (rX')' + qX$$

باشد (بخش ۴۱)، نشان دهید که اتحاد قسمت (الف) را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$X\mathscr{L}[Y] - Y\mathscr{L}[X] = \frac{d}{dx}[r(XY' - X'Y)]$$

که این اتحاد لاگرانژ برای عملگر $\mathscr{L}$ نامیده می‌شود.

۴. (الف) فرض کنید که عملگر خودالحاق $\mathscr{L}$ در مسألهٔ ۳(ب) روی یک فضائی از توابع که در شرایط زیر صدق می‌کنند تعریف شده باشد:

$$a_۱ X(a) + a_۲ X'(a) = ۰ \quad , \quad b_۱ X(b) + b_۲ X'(b) = ۰$$

که در اینجا $a_۱$ و $a_۲$ هر دو صفر نیستند و همین مطلب در مورد $b_۱$ و $b_۲$ نیز صادق است.

با استفاده از اتحاد لاگرانژ (که در مسألهٔ قبل به دست آمد) نشان دهید:

$$(X, \mathscr{L}[Y]) = (\mathscr{L}[X], Y)$$

که اینها حاصلضرب‌های داخلی روی بازهٔ $a < x < b$ با تابع وزن واحد هستند.

(ب) فرض کنید λ_n و λ_m مقادیر ویژهٔ متمایز یک مسألهٔ استورم-لیوویل منظم باشند که معادلهٔ دیفرانسیل آن به صورت زیر است (بخش ۴۱)

$$\mathscr{L}[X] + \lambda pX = ۰$$

با استفاده از نتیجه قسمت (الف) ثابت کنید که اگر X_m و X_n توابع ویژهٔ متناظر به λ_m و λ_n باشند، آنگاه

$$(pX_m \quad , \quad X_n) = ۰$$

بنابراین همانگونه که قبلاً در بخش ۴۳ نشان داده شده، نشان دهید که X_m و X_n روی بازهٔ $a < x < b$ با تابع وزن p متعامدند.

۵. نشان دهید که اگر L عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه دوم کلی باشد که:

$$L[X]=AX''+BX'+CX$$

و اگر L^* الحاق آن باشد که توسط معادلهٔ

$$L^*[X]=(AX)''-(BX)'+CX$$

تعریف شده (بخش ۴۱)، آنگاه L الحاق L^* است. یعنی اینکه نشان دهید $L^{**}=L$.

۶. اگر D عملگر $\frac{d^4}{dx^4}$ باشد نشان دهید که:

$$XD[Y]-YD[X]=\frac{d}{dx}(XY'''-YX'''-X'Y''+Y'X'')$$

بدین ترتیب اگر X_1 و X_2 توابع ویژه مسألهٔ مقدار ویژهٔ مرتبه چهار

$$D[X]+\lambda X=0 \qquad X(0)=X''(0)=0 \qquad X(c)=X''(c)=0$$

متناظر به مقادیر ویژهٔ متمایز λ_1 و λ_2 باشند، نشان دهید که X_1 روی بازهٔ $0<x<c$ با تابع وزن واحد بر X_2 عمود است.

۴۴. یکتائی توابع ویژه

نظریه توابع دیفرانسیل معمولی در مورد وجود و یکتایی جوابهای انواع مشخصی از مسائل مقدار اولیه اطمینان بخش است، مسائلی که در آنها کلیهٔ دادهها در یک نقطه از دامنه داده میشوند. در اینجا یک نتیجه اساسی از نظریه معادلات خطی مرتبه دوم معمولی را به عنوان یک لم بدون اثبات بیان میکنیم که در بحث یکتائی توابع ویژه از آن استفاده خواهیم کرد.[1]

لم. فرض کنید A، B و C توابعی پیوسته از x روی یک بازهٔ $a\le x\le b$ باشند. فرض کنید x_0 یک نقطه در بازه فوق و y_0 و y'_0 دو مقدار ثابت از پیش تعیین شده باشند. آنگاه فقط یک تابع y

۱. برای اثبات، به عنوان مثال میتوانید کتاب کدینگتون (۱۹۸۹فصل ۶) را که در کتابنامه آمده است ببینید.

وجود دارد که خود و مشتق آن y' روی $a \leq x \leq b$ پیوسته‌اند و در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''(x)+A(x)y'(x)+B(x)y(x)=C(x) \quad (a<x<b)$$

و دو شرط اولیهٔ

$$y(x_\circ)=y_\circ \quad , \quad y'(x_\circ)=y'_\circ$$

صدق می‌کند.

توجه کنید چون $y''=c-Ay'-By$ ، y'' روی $a<x<b$ پیوسته است، همچنین، چون هر مقداری برای $y_\circ$ و $y'_\circ$ می‌توان در نظر گرفت، جواب عمومی آن معادلهٔ دیفرانسیل دو ثابت دلخواه دارد. فرض کنید X و Y دو تابع ویژه متناظر به مقدار ویژه یکسان λ از مسألهٔ استورم–لیوویل منظم زیر باشند:

$$(rX')'+(q+\lambda p)X=\circ \qquad (a<x<b) \tag{۱}$$

$$a_۱X(a)+a_۲X'(a)=\circ \qquad , \qquad b_۱X(b)+b_۲X'(b)=\circ \tag{۲}$$

همانگونه که در بخش ۴۱ بیان شد، توابع p و q و r و r' روی بازهٔ $a \leq x \leq b$ پیوسته‌اند و همچنین روی $a \leq x \leq b$ ، $p(x)>\circ$ و $r(x)>\circ$. بنا به لم بالا قادریم ثابت کنیم که X و Y حداکثر تا یک عامل ثابت با هم فرق می‌کنند، یعنی:

$$Y(x)=CX(x) \tag{۳}$$

که در آن C یک ثابت غیرصفر است. اثبات را با ملاحظهٔ این مطلب شروع می‌کنیم که بنا به اصل برهمنهی، ترکیب خطی

$$Z(x)=Y'(a)X(x)-X'(a)Y(x) \tag{۴}$$

در معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی

$$(rZ')'+(q+\lambda p)Z=\circ \qquad (a<x<b) \tag{۵}$$

صدق می‌کند، و بعلاوه $Z'(a)=\circ$. چون X و Y در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$a_۱X(a)+a_۲X'(a)=\circ$$

$$a_1Y(a)+a_2Y'(a)=0$$

که در آن a_1 و a_2 همزمان صفر نیستند و چون $Z(a)$ دترمینان آن جفت معادلهٔ همگن خطی برحسب a_1 و a_2 می‌باشد، پس $Z(a)=0$. لذا برطبق آن لم وقتی $a\leq x\leq b$ ، $Z(x)=0$. یعنی

$$Y'(a)X(x)-X'(a)Y(x)=0 \qquad (a\leq x\leq b) \tag{۶}$$

چون توابع ویژه نمی‌توانند متحد با صفر باشند، از رابطهٔ (۶) واضح است که اگر هر کدام از دو مقدار $X'(a)$ یا $Y'(a)$ صفر باشد، دیگری نیز صفر است. اکنون مشروط بر اینکه $X'(a)$ و $Y'(a)$ صفر نباشند، رابطهٔ (۳) از معادلهٔ (۶) نتیجه می‌شود. از طرف دیگر فرض کنید که $X'(a)=Y'(a)=0$. پس $X(a)$ و $Y(a)$ صفر نیستند، چون در غیر این صورت بر طبق لم بالا دو تابع X و Y برای تمام آن بازه صفر هستند و این در صورتی است که می‌دانیم تابع صفر نمی‌تواند تابع ویژه باشد. اکنون با استفاده از شیوه‌ای که برای $Z(x)$ به کار رفت، می‌توان نشان داد که ترکیب خطی

$$W(x)=Y(a)X(x)-X(a)Y(x) \tag{۷}$$

برای $a\leq x\leq b$ صفر است و بنابراین رابطه (۳) هنوز برقرار است. از رابطهٔ (۳) بی‌درنگ نتیجه می‌شود که، جز احتمالاً برای یک عامل ثابت غیر صفر، هر تابع ویژه X از مسأله (۱)- (۲) یک تابع حقیقی است. برای نشان دادن این مطلب ، ابتدا از فرع ۱ بخش ۴۳ به خاطر می‌آوریم که مقدار ویژهٔ λای که در تناظر با X است، باید حقیقی باشد. بنابراین با جایگزینی $X=U+iV$، که در اینجا U و V توابع حقیقی‌اند، در مسألهٔ (۱)- (۲) و پس از جدا کردن قسمتهای حقیقی و موهومی می‌بینیم که خود توابع U و V توابع ویژه مربوط به λ هستند. از این رو ثابت غیرصفر β وجود دارد که $V=\beta U$.

در اینجا چون U و V توابعی حقیقی هستند، βحقیقی است و نتیجه می‌گیریم که :

$$X=U+i\beta U=(1+i\beta)U$$

یعنی X را می‌توان به صورت یک مضرب ثابت غیرصفر از یک تابع حقیقی بیان کرد. حتماً توجه دارید که چگونه می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$U=\left(\frac{1}{1+i\beta}\right)X$$

نتایج فوق را بدین شکل جمعبندی می‌کنیم:

قضیه ۱ اگر X و Y دو تابع ویژه متناظر به یک مقدار ویژه از یک مسألهٔ استورم- لیوویل منظم باشند، آنگاه $Y=CX$، که در آن C یک ثابت غیرصفر است. همچنین، با ضرب هر تابع ویژه در یک ثابت غیرصفر مناسب، می‌توان آن را به یک تابع حقیقی تبدیل کرد.

برطبق این قضیه، یک مسألهٔ استورم- لیوویل منظم نمی‌تواند دو تابع ویژهٔ مستقل خطی متناظر به یک مقدار ویژه داشته باشد. با وجود این، برای تعدیلهایی مشخص از مسائل استورم- لیوویل منظم، امکان این هست که با یک مقدار ویژه بیش از یک تابع ویژهٔ مستقل متناظر باشد. (بخش ۴۰ را ببینید) برای اثبات فرع زیر از این واقعیت که همواره متناظر با هر مقدار ویژه مسألهٔ (۱)-(۲) تابع ویژهٔ حقیقی موجود است استفاده می‌شود. این فرع یک کمک اضافی برای تعیین مقادیر ویژه است، چون بسته به شرایط مسأله، آن فرع اغلب کاربرد دارد و امکان وجود مقادیر ویژهٔ منفی را رد می‌کند. قبلاً از فرع بخش ۴۳ می‌دانیم که هر مقدار ویژه مسألهٔ (۱)-(۲) باید حقیقی باشد.

فرع ۱ اگر λ یک مقدار ویژهٔ مسألهٔ استورم- لیوویل منظم (۱)-(۲) باشد و شرایط $q(x)\leq 0$ $(a\leq x\leq b)$ و $a_1a_2\leq 0$ و $b_1b_2\geq 0$ صادق باشند، آنگاه $\lambda\geq 0$.

برای اثبات این فرع، فرض می‌کنیم X نمایش یک تابع ویژهٔ حقیقی متناظر به مقدار ویژهٔ λ باشد. بدین ترتیب معادلهٔ (۱) صادق است و هر جملهٔ آن معادله را در X ضرب می‌کنیم و از هر کدام از جملات حاصل از $x=a$ تا $x=b$ انتگرال می‌گیریم.

$$\int_a^b X(rX')'\,dx+\int_a^b qX^2\,dx+\lambda\int_a^b pX^2\,dx=0 \tag{8}$$

پس از به کارگیری روش جزء به جزء روی اولین انتگرال از آن انتگرالها، معادلهٔ (۸) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\lambda \int_a^b pX^{2}dx + \int_a^b (-qX^{2})dx + \int_a^b r(X')^{2}dx \qquad (9$$

$$+ r(a)X(a)X'(a) - r(b)X(b)X'(b)$$

اکنون فرض می‌کنیم که شرایط بیان شده در فرع بالا برقرارند. چون وقتی $a \le x \le b$، $-q(x) \ge 0$ و $r(x) > 0$، مقادیر دو انتگرال طرف راست معادلهٔ (۹) به وضوح نامنفی‌اند. همچنین برای جملهٔ سوم طرف راست معادلهٔ (۹) توجه داریم که اگر در اولین شرط از شرایط (۲) $a_1 = 0$ یا $a_2 = 0$ قرار گیرند، آنگاه به ترتیب $X'(a) = 0$ یا $X(a) = 0$. در هر کدام از این حالات جملهٔ سوم صفر می‌شود. از طرف دیگر، اگر a_1 و a_2 مخالف صفر باشند آنگاه:

$$r(a)X(a)X'(a) = \frac{r(a)[a_1 X(a)]^{2}}{-a_1 a_2} \ge 0$$

به طور مشابه، $-r(b)X(b)X'(b) \ge 0$ ، در نتیجه همهٔ جملات طرف راست معادلهٔ (۹) نامنفی‌اند. پس:

$$\lambda \int_a^b P(x)[X(x)]^{2}dx \ge 0$$

اما مقدار انتگرال در اینجا مثبت است و بنابراین $\lambda \ge 0$

۴۵. روشهای حل

اکنون با دو مثال زیر روش به دست آوردن مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسائلی را که به دنبال این بخش می‌آیند، نشان می‌دهیم. از پیش در بخشهای ۲۷ و ۴۰ با روش اساسی در تماس بوده‌ایم. در آن بخشها از این روش برای حل مسائل استورم- لیوویل ساده‌تر استفاده کرده‌ایم. در این روش ابتدا جواب عمومی یک معادلهٔ دیفرانسیل به دست می‌آید، سپس شرائط مرزی برای تعیین مقادیر ویژه اعمال می‌شوند.

مثال ۱. مسألهٔ- استورم لیوویل منظم زیر را که در آن h یک ثابت مثبت است حل می‌کنیم:

$$X''+\lambda X=\circ \qquad (\circ<x<c) \tag{۱}$$

$$X'(\circ)=\circ \qquad hX(c)+X'(c)=\circ \tag{۲}$$

بنابر فرع بخش ۴۴، می‌دانیم که این مسأله هیچ مقدار ویژه منفی ندارد. برای $\lambda=\circ$ جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از $X(x)=Ax+B$ که در آن A و B ثابت هستند و از شرایط مرزی (۲) نتیجه می‌شود $A=\circ$ و $B=\circ$. اما با توجه به اینکه توابع ویژه نمی‌توانند در هر نقطه از بازه صفر باشند، نتیجه می‌گیریم که $\lambda=\circ$ مقدار ویژه نیست. پس تنها حالت ممکن $\lambda>\circ$ است.

برای $\lambda>\circ$ می‌نویسیم $\lambda=\alpha^۲$ $(\alpha>\circ)$. در این حالت جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از:

$$X(x)=C_۱\cos\alpha x+C_۲\sin\alpha x$$

پس از اعمال اولین شرط از شرایط مرزی (۲) روی آن داریم:

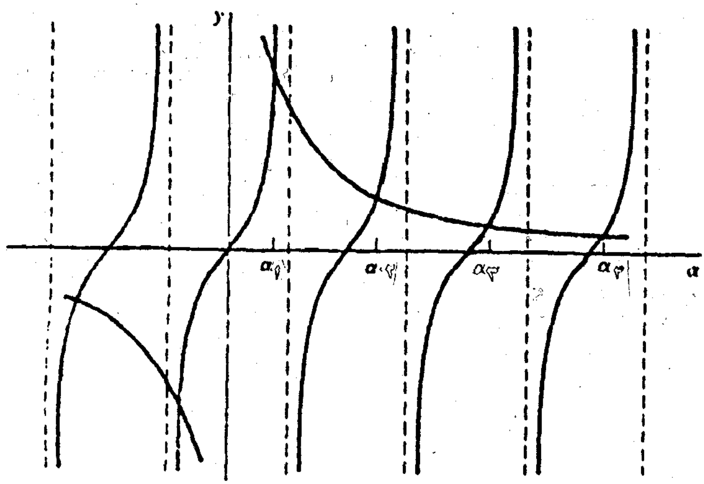
$$X(x)=C_۱\cos\alpha x \tag{۳}$$

در این صورت برای شرط مرزی دوم لازم است

$$C_۱(h\cos\alpha c-\alpha\sin\alpha c)=\circ \tag{۴}$$

با توجه به اینکه تابع (۳) باید غیربدیهی باشد، ثابت $C_۱$ نباید صفر باشد. بنابراین عامل داخل پرانتز در معادلهٔ (۴) باید صفر باشد. یعنی اگر قرار است یک مقدار ویژه $\lambda=\alpha^۲$ $(\alpha>\circ)$ داشته باشیم، عدد α باید یک ریشه مثبت معادلهٔ زیر باشد:

$$\tan\alpha c=\frac{h}{\alpha} \tag{۵}$$



شکل ۴۵

در شکل ۴۵ نمودارهای $y=tan\, \alpha c$ و $y=\dfrac{h}{\alpha}$ رسم شده‌اند و مشاهده می‌کنید که آن نمودارها در یک تعداد نامتناهی از مقادیر مثبت α همدیگر را قطع می‌کنند و در واقع نشان می‌دهد معادلهٔ (۵) یک تعداد نامتناهی ریشه مثبت $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ و... دارد که:

$$\alpha_n < \alpha_{n+۱} \qquad (n=۱,۲,\ ...)$$

بنابراین مقادیر ویژه عبارتند از $\lambda_n=\alpha_n^۲$ $(n=۱,۲,...)$. آنها را به صورت سادهٔ زیر می‌نویسیم:

۶) $\lambda_n=\alpha_n^۲$ که در آن $tan\, \alpha_n c=\dfrac{h}{\alpha_n}$ $(\alpha_n > ۰)$.

توجه کنید که خط تیره‌های عمودی در شکل ۴۵ به فاصلهٔ $\dfrac{\pi}{c}$ واحد از یکدیگر قرار دارند. همچنین وقتی n به بینهایت میل کند، اعداد α_n به ریشه‌های مثبت معادلهٔ $tan\, \alpha c=۰$ میل می‌کنند. به عبارت دقیقتر، از شکل ۴۵ می‌بینیم که وقتی n بزرگ باشد α_n تقریباً با $\dfrac{(n-۱)\pi}{c}$ برابر است. چند مورد از اولین ریشه‌های

مثبت معادلهٔ $tan\, x=\frac{a}{x}$ یعنی $x_۱ , x_۲ , ...$ برای مقادیر مختلفی از ثابت $a=hc$ جدولبندی شده و از معادلهٔ (۵) نتیجه می‌شود که $\alpha_۱=\frac{x_۱}{c} , \alpha_۲=\frac{x_۲}{c} , ...$[۱] نظر به نکات یاد شده در بالا، وقتی که n بزرگ باشد، مقادیر ویژه $\lambda_n=\alpha_n^۲$ تقریباً با $[\frac{(n-۱)\pi}{c}]^۲$ برابرند. این مطلب با آنچه که پیش از این در بخش ۴۱ گفته شد، سازگار است که داشتیم اگر λ_n $(n=۱,۲,...)$ مقادیر ویژهٔ یک مسألهٔ استورم-لیوویل منظم باشد که به طور صعودی مرتب شده باشند، آنگاه همواره داریم $\lambda_n\to\infty$ وقتی $n\to\infty$.

اکنون با توجه به عبارت (۳)، جز برای عاملهای ثابت، توابع ویژه متناظر عبارتند از $X_n(x)=cos\, \alpha_n x$ $(n=۱,۲,...)$. این توابع ویژه را به فرمی که پس از این در کاربرد بدان نیاز خواهیم داشت، یعنی فرم نرمال شده در می‌آوریم. برای انجام این کار توجه داریم که توابع $X_n(x)$ برطبق قضیهٔ بخش ۴۳ با تابع وزن واحد روی بازهٔ $۰<x<c$ متعامدند. بنابراین:

$$\| X_n \|^۲ = \int_۰^c cos^۲ \alpha_n x dx = \frac{۱}{۲}\int_۰^c (۱ + cos\, ۲\alpha_n x)\, dx = \frac{۱}{۲}(c + \frac{sin\, ۲\alpha_n c}{۲\alpha_n})$$

و با توجه به روابط $sin\, ۲\alpha_n c=۲ sin\, \alpha_n c\, cos\, \alpha_n c$ و $\alpha_n=\frac{h}{tan\, \alpha_n c}$ می‌توانیم $\| X_n \|^۲$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\| X_n \|^۲ = \frac{hc + sin^۲ \alpha_n c}{۲h}$$

---

۱. برای مثال، ریشه‌های این و معادلهٔ مربوط $tan\, x=ax$ ، که در بعضی از مسائل این بخش ظاهر می‌شوند در کتاب راهنما ویراستهٔ آبراموویچ واستگان (صفحهٔ ۲۲۴- ۲۲۵- ۱۹۷۲) که در کتابنامه آمده، جدولبندی شده است.

که به وضوح دیده می‌شود آن مقدار، مثبت است زیرا h و c مثبتند. حال با تقسیم $X_n(x)$ بر $\| X_n \|$ توابع ویژه نرمال شده را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2h}{hc+\sin^2\alpha_n c}}\cos\alpha_n x \qquad (n=1,2,\dots) \tag{8}$$

بعضی مواقع جوابهای یک مسألهٔ استورم- لیوویل داده شده را می‌توان با تبدیل آن به مسأله‌ای که جوابهایش معلومند، بسیار ساده به دست آورد. این مطلب پیش از این در مسألهٔ ۱ (الف) بخش ۴۳ نشان داده شده است و مثال بعدی آن روش را کاملتر بیان می‌کند.

مثال ۲. مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید که در آن h یک ثابت مثبت است:

$$(xX')'+\frac{\lambda}{x}X=0 \qquad (1<x<b) \tag{9}$$

$$X'(1)=0 \quad , \quad hX(b)+X'(b)=0 \tag{10}$$

چون معادلهٔ (۹) را می‌توان به فرم کوشی- اویلر (مسألهٔ ۳ بخش ۳۵ را ببینید) نوشت:

$$x^2X''+xX'+\lambda X=0$$

پس جایگزینی $x=\exp s$ در آن معادله فرم زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{d^2X}{ds^2}+\lambda X=0 \qquad (0<s<\ln b) \tag{11}$$

همچنین، چون،

$$\frac{dX}{dx}=\frac{dX}{ds}e^{-s}$$

شرایط مرزی (۱۰) بدین شکل در می‌آیند:

$$\frac{dX}{ds}=0 \quad \text{وقتی} \quad s=0 \quad \text{و} \quad (hb)X+\frac{dX}{ds}=0 \quad \text{وقتی} \quad s=\ln b. \tag{12}$$

بدین ترتیب با رجوع به مثال ۱ بی‌درنگ می‌بینیم که مقادیر ویژهٔ مسألهٔ (۱۱)-(۱۲) و در واقع مقادیر ویژه مسألهٔ(۹)-(۱۱) اعداد زیر هستند:

(۱۳ $\lambda_n=\alpha_n^{۲}$ که در آن $tan\,(\alpha_n ln\, b)=\dfrac{hb}{\alpha_n}$, $.(\alpha_n>۰)$

واضح است که توابع ویژه متناظر آنها عبارتند از:

$$X_n=cos\,\alpha_n s=cos\,(\alpha_n\, ln\, x) \qquad (n=۱,۲,\, ...)$$

با توجه به معادلات (۹) و (۱۱) می‌دانیم که تابع وزن مربوط به توابع ویژه $X_n=cos(\alpha_n ln\,x)$ تابع $\frac{۱}{x}$ و تابع وزن مربوط به توابع ویژه $X_n=cos\,\alpha_n s$ تابع ۱ می‌باشد. مقدار نرم $\|X_n\|$ صرف نظر از اینکه X_n تابعی از x یا s در نظر گرفته شود تغییر نمی‌کند، برای اینکه جایگزینی $x=exp\,s$ $(s=ln\,x)$ نشان می‌دهد:

$$\int_{۱}^{b}\frac{۱}{x}\,cos^{۲}(\alpha_n\, ln\,x)\,dx=\int_{۰}^{ln\,b}cos^{۲}\alpha_n\, s ds$$

بنابراین، نظر به عبارت (۷)، توابع ویژه نرمال شدهٔ مسألهٔ (۹)-(۱۰) عبارتند از:

(۱۴ $$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{۲hb}{hb\,ln\,b+sin^{۲}(\alpha_n\,ln\,b)}}\,cos\,(\alpha_n\,ln\,x) \quad (n=۱,۲,\, ...)$$

مسائل

در هر کدام از مسائل ۱ تا ۵ ، مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ نرمال شده را (بدون رجوع به مسأله‌ای دیگر) مستقیماً به دست آورید.

.۱ $X''+\lambda X=۰$, $X(۰)=۰$, $X'(۱)=۰$

جواب: $\lambda_n=\alpha_n^{۲}$, $\phi_n(x)=\sqrt{۲}\,sin\,\alpha_n x$

که در آن $\alpha_n=\dfrac{(۲n-۱)\pi}{۲}$, $(n=۱,۲,\, ...)$

۲. $X''+\lambda X=0 \qquad X(0)=0 \qquad hX(1)+X'(1)=0$

که در آن $(h>0)$

جواب : $\lambda_n=\alpha_n^2 \qquad \phi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2h}{h+\cos^2 a_n}}\sin\alpha_n x$

که در آن $(n=1,2,\ldots)$, $\tan\alpha_n=\dfrac{-\alpha_n}{h}$, $(\alpha_n>0)$

۳. $X''+\lambda X=0$, $X'(0)=0$, $X(c)=0$

جواب $\lambda_n=\alpha_n^2$, $\phi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{c}}\cos\alpha_n x \quad (n=1,2,\ldots)$

که در آن $\alpha_n=\dfrac{(2n-1)\pi}{2c}$

۴. $X''+\lambda X=0$, $X(0)=0$, $X(1)-X'(1)=0$

راهنمائی: برای نوشتن $\|X_n\|^2$ به فرمی که منجر به عبارت زیر برای $\phi_n(x)$ گردد، استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 A=\dfrac{1}{1+\tan^2 A}$ مفید است.

جواب: $\lambda_0=0$, $\lambda_n=\alpha_n^2$, $\phi_0(x)=\sqrt{3x}$

$$\phi_n(x)=\frac{\sqrt{2(\alpha_n^2+1)}}{\alpha_n}\sin\alpha_n x$$

$(n=1,2,\ldots)$ که در آن $\tan\alpha_n=\alpha_n \quad (\alpha_n>0)$

۵. $X''+\lambda X=0$, $hX(0)-X'(0)=0$, $X(1)=0 \quad (h>0)$

جواب : $\lambda_n=\alpha_n^2$ $\quad \phi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2h}{h+\cos^2\alpha_n}}\sin\alpha_n(1-x)$

$(n=1,2,\ldots)$ که در آن $\tan\alpha_n=-\dfrac{\alpha_n}{h}\quad,\quad(\alpha_n>0)$

۶. در مسألهٔ ۱ (الف) بخش ۴۳، مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسألهٔ استورم-لیوویل

$$(xX')'+\frac{\lambda}{x}X=0\quad,\quad X(1)=0\quad,\quad X(b)=0$$

به دست آمدند که عبارتند از:

$$\lambda_n=\alpha_n^2\quad,\quad X_n(x)=\sin(\alpha_n\ln x)\quad(n=1,2,\ldots)$$

که در آن $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{\ln b}$. نشان دهید که توابع ویژه نرمال شده عبارتند از:

$$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\ln b}}\sin(\alpha_n\ln x)\qquad(n=1,2,\ldots)$$

راهنمائی: انتگرالی را که در اینجا ظاهر می‌شود، می‌توان با جایگزینی $s=(\dfrac{\pi}{\ln b})\ln x$ و رجوع به فرمول انتگرالگیری (۱۰) در مثال ۱ بخش ۱۱ محاسبه کرد.

۷. با جایگزینی $s=\dfrac{x}{c}$ و رجوع به جوابهای مسألهٔ ۱، مقادیر ویژه و توابع ویژه نرمال شدهٔ مسألهٔ استورم-لیوویل ذیل را به دست آورید:

$$X''+\lambda X=0\quad,\quad X(0)=0\quad,\quad X'(c)=0$$

جواب : $\lambda_n=\alpha_n^2\quad,\quad\phi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{c}}\sin\alpha_n x$

که در آن $(n=1,2,\ldots)\quad,\quad\alpha_n=\dfrac{(2n-1)}{2c}\pi$

۸. (الف) نشان دهید جوابهای به دست آمده در مسألهٔ ۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda_n=\alpha_n^{۲} \quad , \quad \phi_n(x)=\sqrt{\frac{۲(\alpha_n^{۲}+h^{۲})}{\alpha_n^{۲}+h^{۲}+h}}\, sin\,\alpha_n x \quad (n=۱,۲, \dots)$$

که در آن $\quad \alpha_n\, cos\, \alpha_n=-h\, sin\, \alpha_n \quad (\alpha_n>۰)$

(ب) با رجوع به جوابهای مسألهٔ ۱، نشان دهید که چرا جوابهای قسمت (الف) در اینجا، در واقع نه فقط برای $h>۰$ بلکه برای $h\geq ۰$، جوابهای معتبر مسألهٔ ۲ هستند.

راهنمائی: در قسمت (الف) از اتحاد مثلثاتی زیر استفاده کنید:

$$cos^{۲}A=\frac{۱}{۱+tan^{۲}A}$$

۹. بااستفاده از جوابهای مسألهٔ ۳ مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ نرمال شدهٔ مسألهٔ استورم- لیوویل زیر را به دست آورید:

$$(xX')'+\frac{\lambda}{x}X=۰ \quad , \quad X'(۱)=۰ \quad , \quad X(b)=۰$$

جواب: $\quad \phi_n(x)=\sqrt{\frac{۲}{ln\, b}}\, cos\,(\alpha_n\, ln\, x) \quad , \quad \lambda_n=\alpha_n^{۲}$

$(n=۱,۲, \dots)$ که در آن $\quad \alpha_n=\frac{(۲n-۱)\pi}{۲\, ln\, b}$

۱۰. با جایگزینی مناسب و رجوع به جوابهای معلوم همان مسأله روی یک بازهٔ متفاوت در بخش مزبور، توابع ویژه مسأله استورم- لیوویل داده شده را به دست آورید:

(الف) $\quad X''+\lambda X=۰ \quad , \quad X'(-\pi)=۰ \quad , \quad X'(\pi)=۰$ (بخش ۲۷)

(ب) $\quad X''+\lambda X=۰ \quad , \quad X(-c)=X(c) \quad , \quad X'(-c)=X'(c)$ (بخش ۴۰)

جوابها:

(الف) $\frac{1}{2}\ ,\ \cos\frac{n(x+\pi)}{2}\ ,\ (n=1,2,\dots)$

(ب) $\frac{1}{2}\ ,\ \cos\frac{n\pi x}{c}\ ,\ \sin\frac{n\pi x}{c}\ ,\ (n=1,2,\dots)$

۱۱. (الف) با جایگزینی

$$X=\frac{Y}{\sqrt{x}} \quad , \quad \lambda=\frac{1}{4}+\mu$$

در مسألهٔ استورم–لیوویل منظم

$$(x^2X')'+\lambda X=0 \quad , \quad X(1)=0 \quad , \quad X(b)=0$$

آن را به مسألهٔ زیر تبدیل کنید، در اینجا $b>1$،

$$(xY')'+\frac{\mu}{x}Y=0 \quad , \quad Y(1)=0 \quad , \quad Y(b)=0$$

(ب) با رجوع به مسألهٔ ۶ مقادیر ویژه و توابع ویژه نرمال شدهٔ مسألهٔ جدید را به دست آورید. سپس با استفاده از جایگزینی استفاده شده، نشان دهید که مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ نرمال شدهٔ مسألهٔ اصلی در قسمت (الف) عبارتند از:

$$\lambda_n=\frac{1}{4}+\alpha_n^2 \quad , \quad \phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{x\ln b}}\sin(\alpha_n\ln x) \quad (n=1,2,\dots)$$

که در آن $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{\ln b}$

۱۲. توابع ویژه هر کدام از مسائل استورم–لیوویل زیر را بیابید:

(الف) $X''+\lambda X=0\ ,\ X(0)=0\ ,\ hX(1)+X'(1)=0 \quad (h<-1)$

(ب) $(x^3X')'+\lambda xX=0\ ,\ X(1)=0\ ,\ X(e)=0$

جوابها:

(الف) $X_0(x)=\sinh\alpha_0 x$ که در آن $\tanh\alpha_0=\dfrac{-\alpha_0}{h} \quad (\alpha_0>0)$

و $$X_n(x)=\sin\alpha_n x \qquad (n=1,2,\ldots)$$ که درآن

$$\tan\alpha_n=\frac{-\alpha_n}{h} \quad (\alpha_n>0)$$

(ب) $$X_n(x)=\frac{1}{x}\sin(n\pi \ln x)$$ که در آن $(n=1,2,\ldots)$

۱۳. به طور مشروح نشان دهید که تابع $w(x)$ که به وسیلهٔ معادلهٔ (۷) بخش ۴۴ تعریف شده به ازای هر x، $a\le x\le b$ صفر است.

۴۶. مثالهایی از بسطهای تابع ویژه

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه نمایشهای سری فوریهٔ تعمیم یافته

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x) \qquad (a<x<b) \tag{1}$$

به دست می‌آیند که در آن توابع $\phi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ توابع ویژه نرمال شدهٔ مسائل استورم–لیوویل مشخصی هستند. البته برای توابع ویژه‌ای که به سریهای سینوسی و کسینوسی فوریه روی بازهٔ $0<x<\pi$ و همچنین روی بازهٔ $-\pi<x<\pi$ منجر می‌شوند، این روش را پیش از این نشان داده‌ایم (بخشهای ۱۲و ۱۴و ۱۵ را ببینید). در این کتاب همگرایی سری (۱) را برای توابع ویژه، به شکل کلی مورد بحث قرار نمی‌دهیم، جز برای چند حالت که با تبدیل بسط مربوط به آنها به نمایش سری فوریهٔ معلومی، رسیدگی به این امر آسان است. برای زمانی که از توابع ویژهٔ مشخصی استفاده می‌کنیم، وجود نتایجی مشابه قضیه فوریه و لم مربوط به آن در بخش ۱۹ را صرفاً به عنوان یک واقعیت می‌پذیریم. چنین نتایجی اغلب با کمک نظریه مانده‌ها در بحث توابع با یک متغیر مختلط به دست می‌آید.[1] با توجه به اینکه جوابهای صریح معادلهٔ دیفرانسیل استورم–لیوویل با ضرائب دلخواه را نمی‌توان نوشت، اثبات این نتایج پیچیده است.

۱. دربارهٔ نظریه بسطهای تابع ویژه در دو جلد از کتابهای تیشمارش (۱۹۶۲ و ۱۹۵۸) که در کتابنامه آمده، به طور وسیع بحث می‌شود.

مثال ۱. برطبق مسألهٔ ۶ بخش ۴۵، مسألهٔ استورم-لیوویل

$$(xX')' + \frac{\lambda}{x}X = 0 \quad , \quad X(1) = 0 \quad , \quad X(b) = 0$$

دارای مقادیر ویژه و توابع ویژه نرمال شده به صورت زیر است:

$$\lambda_n = \alpha_n^2 \quad , \quad \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ln b}}\sin(\alpha_n \ln x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

که در آن $\alpha_n = \dfrac{n\pi}{\ln b}$. با توجه به تعامد مجموعه توابع $\{\phi_n(x)\}$ $(n=1,2,\dots)$ نسبت به تابع وزن $p(x) = \frac{1}{x}$، از بسط

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \qquad (1 < x < b) \tag{2}$$

نتیجه می‌شود که:

$$c_n = (f, \phi_n) = \sqrt{\frac{2}{\ln b}} \int_1^b \frac{1}{x}\sin(\alpha_n \ln x)\,dx$$

با جایگزینی $s = \ln x$ در اینجا و استفاده از

$$\cos(\alpha_n \ln b) = \cos n\pi = (-1)^n$$

بسادگی می‌بینیم که:

$$\int_1^b \frac{1}{x}\sin(\alpha_n \ln x)\,dx = \int_0^{\ln b} \sin \alpha_n s\, ds = \frac{1-(-1)^n}{\alpha_n}$$

بنابراین:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{\ln b}} \cdot \frac{1-(-1)^n}{\alpha_n} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

و در نتیجه بسط (۲) به صورت ذیل در می‌آید:

$$1 = \frac{4}{\ln b}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_{2n-1}\ln x)}{\alpha_{2n-1}} \qquad (1 < x < b) \tag{3}$$

اگر از جایگزینی $s=\alpha_{2n-1}\ln x\ (2n-1)$ استفاده کنیم، آنگاه با توجه به

$$\alpha_{2n-1}=\frac{(2n-1)\pi}{\ln b}$$

درستی نمایش مزبور واضح است. زیرا نتیجهٔ آن یعنی:

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)s}{2n-1}\qquad(0<s<\pi)$$

نمایش سری سینوسی فوریهٔ معلومی (مسألهٔ(ب) بخش ۱۴) روی بازه نشان داده شده است.

مثال ۲. مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ نرمال شدهٔ مسألهٔ استورم- لیوویل

$$X''+\lambda X=0\quad,\quad X(0)=0\quad,\quad X'(c)=0$$

عبارتند از (مسألهٔ ۷ بخش ۴۵):

$$\lambda_n=\alpha_n^2\quad,\quad \phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{c}}\sin(\alpha_n x)\quad(n=1,2,\ldots)$$

که در آن

$$\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{2c}$$

در اینجا تابع وزن $p(x)=1$ می‌باشد و نوشتن ضرائب بسط

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x)\qquad(0<x<c)$$

به صورت

$$c_n=(f,\phi_n)=\sqrt{\frac{2}{c}}\int_0^c x\sin\alpha_n x\,dx=\sqrt{\frac{2}{c}}\left[-\frac{x\cos\alpha_n x}{\alpha_n}+\frac{\sin\alpha_n x}{\alpha_n^2}\right]_0^c$$

امکان پذیر است. چون $\cos\alpha_n c=0$ و $\sin\alpha_n c=(-1)^{n+1}$، عبارت مزبور برای c_n بدین شکل در می‌آید:

$$c_n=\sqrt{\frac{2}{c}}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^2}\qquad(n=1,2,\ldots)$$

بدین ترتیب:

$$x=\frac{2}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^2}\sin\alpha_n x \qquad (0<x<c) \tag{۴}$$

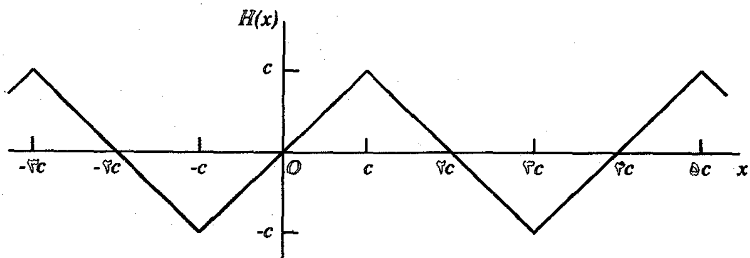
پس از جایگذاری α_n در (۴) داریم:

$$x=\frac{8c}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2c} \qquad (0<x<c)$$

از مسألهٔ ۱۲ بخش ۲۱ ملاحظه می‌کنیم که این نمایش در واقع روی بازهٔ بستهٔ $-c\le x\le c$ معتبر است. بعلاوه، چون $\sin\alpha_n(x+2c)=-\sin\alpha_n x$ ،$(n=1,2,\ldots)$ سری (۴) برای هر مقدار x همگراست، و اگر $H(x)$ نمایش مجموع آن سری برای مقدار x باشد آنگاه واضح است که $H(x)$ نمایش تابع موج مثلثی است که با معادلات زیر تعریف می‌شود (شکل ۴۶ را ببینید):

$$H(x)=x \qquad (-c\le x\le c)$$

$$H(x+2c)=-H(x) \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{۵}$$



شکل ۴۶

بنابراین $H(x)$ تابع پاد متناوب با تناوب $2c$ می‌باشد. آن تابع همچنین تناوبی با دورهٔ تناوب $4c$ هست، زیرا

$$H(x+4c)=H(x+2c+2c)=-H(x+2c)=H(x)$$

همچنین توجه کنید که:

$$H(2c-x)=-H(x-2c)=-H(x+2c)=H(x)$$

این بخش را با یک مثال به پایان می‌بریم که در آن سری به دست آمده سری سینوسی است و قابل تبدیل به یک سری سینوسی فوریه معمولی نیست. بنابراین مجبوریم این نمایش را بدون اثبات درستی بپذیریم.

مثال ۳. در اینجا مقادیر ویژه و توابع ویژه نرمال شدهٔ مسألهٔ استورم- لیوویل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$X''+\lambda X=0 \quad , \quad X(0)=0 \quad , \quad X(1)-X'(1)=0$$

برطبق مسألهٔ ۴ بخش ۴۵ مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ نرمال شدهٔ آن عبارتند از:

$$\lambda_0=0 \quad , \quad \lambda_n=\alpha_n^2 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

و

$$\phi_0(x)=\sqrt{3}x \quad , \quad \phi_n(x)=\frac{\sqrt{2(\alpha_n^2+1)}}{\alpha_n}\sin\alpha_n x \quad (n=1,2,\ldots)$$

که در آن $\tan\alpha_n=\alpha_n$ $(\alpha_n>0)$ و تابع وزن تابع ۱ می‌باشد. برای یک تابع $f(x)$ قطعه‌ای هموار ضرائب بسط

$$f(x)=c_0\phi_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x) \qquad (0<x<1)$$

به شکل ذیل هستند:

$$c_0=(f,\phi_0)=\sqrt{3}\int_0^1 xf(x)\,dx$$

و

$$c_n=(f,\phi_n)=\frac{\sqrt{2(\alpha_n^2+1)}}{\alpha_n}\int_0^1 f(x)\sin\alpha_n x\,dx \quad (n=1,2,\ldots)$$

در نتیجه،

$$f(x)=B_0x+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\alpha_n x$$

که در آن :

$$B_0=3\int_0^1 xf(x)\,dx\ ,\ B_n=\frac{2(\alpha_n^2+1)}{\alpha_n^2}\int_0^1 f(x)\sin\alpha_n x\,dx \quad (n=1,2,\ldots)$$

مسائل

۱. از توابع ویژه نرمال شده در مسألهٔ ۳ بخش ۴۵ استفاده کرده، نمایش زیر را به دست آورید:

$$1=\frac{2}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n}\cos\alpha_n x \qquad (0<x<c)$$

که در آن

$$\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{2c}$$

۲. با استفاده از توابع ویژه نرمال شده در مسألهٔ ۷ بخش ۴۵ بسط زیر را به دست آورید:

$$1=\frac{2}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n x}{\alpha_n} \qquad (0<x<c)$$

که در آن

$$\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{2c}$$

۳. با استفاده از توابع ویژه نرمال شده در مسألهٔ ۲ بخش ۴۵ بسط زیر را به دست آورید:

$$1=2h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha_n}{\alpha_n(h+\cos^2\alpha_n)}\sin\alpha_n x \qquad (0<x<1)$$

که در آن

$$(\alpha_n>0) \qquad \tan\alpha_n=\frac{-\alpha_n}{h}$$

۴. با استفاده از توابع ویژه نرمال شدهٔ مسألهٔ ۳، بخش ۴۵ و برای $c=\pi$، نشان دهید که:

$$\pi^2-x^2=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^3}\cos\alpha_n x \qquad (0<x<\pi)$$

که در آن

$$\alpha_n=\frac{(2n-1)}{2}$$

۵. (الف) با استفاده از توابع ویژه نرمال شده در مسألهٔ ۷ بخش ۴۵ بسط زیر را به دست

آورید:

$$x(2c-x)=\frac{4}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n^3} \qquad (0<x<c)$$

که در آن:
$$\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{2c}$$

(ب) نشان دهید که چگونه نتیجهٔ مسألهٔ ۸ بخش ۲۱ نتیجه می‌دهد که سری به دست آمده در قسمت (الف) برای همهٔ مقادیر x همگراست و مجموع آن سری در هر x تـابع پـاد متناوب $Q(x)$ با تناوب $2c$ است (مثال ۲ بخش ۴۶ را ببینید). این تابع توسط معادلات زیر ارائه می‌شود:

$$Q(x)=x(2c-x) \quad (0\le x\le 2c) \quad , \quad Q(x+2c)=-Q(x) \quad (-\infty<x<\infty)$$

۶. با استفاده از توابع ویژه نرمال شده در مسألهٔ ۲ بخش ۴۵ نمایش زیر را بـه دست آورید:

$$x\left(\frac{2+h}{1+h}-x\right)=4h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos \alpha_n}{a_n^3(h+\cos^2\alpha_n)}\sin \alpha_n x \qquad (0<x<1)$$

که در آن
$$\tan \alpha_n=\frac{-\alpha_n}{h} \qquad (\alpha_n>0)$$

راهنمائی: هنگام ساده کردن، توجه به رابطه زیر مفید است:

$$-h\sin \alpha_n=\alpha_n\cos \alpha_n$$

۷. با استفاده از توابع ویژه نرمال شده در مسألهٔ ۱ بخش ۴۵ نشان دهید که:

$$\sin \omega x=2\omega\cos\omega\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\omega^2-\omega_n^2}\sin \omega_n x \qquad (0<x<1)$$

که در آن $\omega_n=\frac{(2n-1)\pi}{2}$ و برای هر n، $\omega\neq\omega_n$.

راهنمائی: در محاسبهٔ انتگرالهایی که خواهید داشت، اتحاد مثلثاتی زیر مفید است:

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

۸. برای تابع $f(x)=x$ و روی بازهٔ $1<x<b$ ثابتهای فوریه c_n را نسبت به توابع ویژه نرمال شده در مسألهٔ ۶ بخش ۴۵، به دست آورده و سپس آن ثابتها را به فرم زیر تبدیل کنید:

$$c_n=\sqrt{2\ln b}\ \frac{n\pi\left[1+(-1)^{n+1}b\right]}{(\ln b)^2+(n\pi)^2} \qquad (n=1,2,\dots)$$

راهنمائی: فرمول انتگرالگیری زیر در اینجا مفید است:

$$\int e^x \sin ax\,dx=\frac{e^x(\sin ax-a\cos ax)}{1+a^2}$$

۹. فرض کنید تابع $f(x)$ روی بازه $1<x<b$ تعریف شده و روی آن بازه قطعه‌ای هموار باشد.

(الف) با استفاده از توابع ویژه نرمال شده در مسألهٔ ۶ بخش ۴۵، به طور صوری نشان دهید که اگر $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{\ln b}$، آنگاه:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\alpha_n \ln x) \qquad (1<x<b)$$

که در آن:

$$B_n=\frac{2}{\ln b}\int_1^b \frac{1}{x}f(x)\sin(\alpha_n \ln x)\,dx \qquad (n=1,2,\dots)$$

(ب) با جایگزینی $x=\exp s$ در سری و انتگرال قسمت (الف) و سپس رجوع به لم بخش ۲۱ ثابت کنید که نمایش سری قسمت (الف) برای همهٔ نقاطی از بازهٔ $1<x<b$ که f در آن نقاط پیوسته است، معتبر می‌باشد. (با مثال ۱ بخش ۴۶ مقایسه کنید).

۱۰. فرض کنید که تابع f روی بازهٔ $0<x<c$ تعریف شده و در آنجا قطعه‌ای هموار باشد.

(الف) با استفاده از توابع ویژه نرمال شدهٔ (مسألهٔ ۷ بخش ۴۵)

$$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{۲}{c}}\sin\alpha_n x \qquad (n=۱,۲,\ldots).$$

که در آن
$$\alpha_n=\frac{(۲n-۱)\pi}{۲c}$$

به طور صوری نشان دهید که:

$$f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} B_n\sin\alpha_n x \qquad (۰<x<c)$$

و
$$B_n=\frac{۲}{c}\int_۰^c f(x)\sin\alpha_n x\,dx \qquad (n=۱,۲,\ldots)$$

(ب) توجه کنید که برطبق مسألهٔ ۱۱ بخش ۲۱ سری به دست آمده در قسمت (الف) در واقع یک سری سینوسی فوریه برای توسیعی از تابع f روی بازهٔ $۰<x<۲c$ می‌باشد. سپس با کمک فرع بخش ۲۱ بیان کنید که چرا نمایش فوق در قسمت (الف) برای هر نقطه x $(۰<x<c)$ که در آن f پیوسته است، معتبر می‌باشد.

۱۱. (الف) با استفاده از توابع ویژه نرمال شدهٔ مسألهٔ ۱، بخش ۴۵

$$\phi_n(x)=\sqrt{۲}\sin\alpha_n x \qquad (n=۱,۲,\ldots)$$

که در آن $\alpha_n=\frac{(۲n-۱)\pi}{۲}$، به طور صوری نشان دهید که:

$$x(۱-\frac{۱}{۳}x^۲)=۴\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{\alpha_n^۴}\sin\alpha_n x \qquad (۰<x<۱)$$

(ب) توجه کنید که برطبق مسألهٔ ۱۰ (الف) بالا و مسألهٔ ۱۱ بخش ۲۱ سری بالا در قسمت (الف) یک سری فوریهٔ سینوسی روی بازهٔ $۰<x<۲$ است. سپس با کمک فرع بخش ۲۱، نشان دهید که این سری برای همهٔ مقادیر x همگراست و مجموع آن تابع پاد متناوب $Q(x)$ با دورهٔ تناوب ۲ است یعنی $Q(x)$ به وسیلهٔ معادلات زیر ارائه می‌شود:

$$Q(x)=x(۱-\frac{۱}{۳}x^۲)\ (-۱\le x\le ۱)\ ,\ Q(x+۲)=-Q(x)\ (-\infty<x<\infty)$$

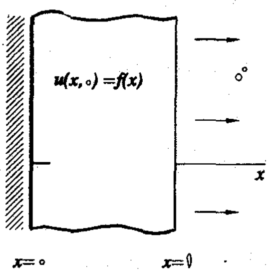
۴۷. انتقال حرارت رویه‌ای

دو مثال زیر روش فوریه را برای حل مسائل دما در مختصات مستطیلی نشان می‌دهند که در اینجا مسائل استورم-لیوویلی که به کار می‌روند، با مواردی که در فصل ۴ از آنها استفاده شد متفاوتند. در اینجا و ادامهٔ این فصل ما فقط به دنبال جوابهای صوری مسائل مقدار مرزی هستیم.

مثال ۱. فرض کنید $u(x,t)$ نمایش دماها در قطعهٔ $\circ \leq x \leq 1$ باشد که دمای اولیهٔ آن $f(x)$ و وجه $x=\circ$ آن عایق‌بندی شده و در وجه $x=1$ انتقال حرارت رویه‌ای به داخل یک محیط با دمای صفر صورت می‌گیرد. (شکل ۴۷). طبق قانون سرمایش نیوتن (بخش ۳) شرط روی u در وجه $x=1$ عبارت است از $u_x(1,t)=-hu(1,t)$ که در آن h یک ثابت مثبت است. پس مسألهٔ مقدار مرزی که باید حل شود عبارت است از:

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t) \qquad (\circ<x<1\ ,\ t>\circ) \tag{1}$$

$$u_x(\circ,t)=\circ \quad , \quad u_x(1,t)=-hu(1,t) \quad u(x,\circ)=f(x) \tag{2}$$



شکل ۴۷

با نوشتن $u=X(x)T(t)$ و جداسازی متغیرها، به مسألهٔ استورم-لیوویل زیر و شرط $T'(t)+\lambda kT(t)=\circ$ می‌رسیم:

$$X''(x)+\lambda X(x)=\circ \quad , \quad X'(\circ)=\circ \quad , \quad hX(1)+X'(1)=\circ \tag{3}$$

برطبق مثال ۱ بخش ۴۵، مقادیر ویژه و توابع ویژه نرمال شدهٔ مسألهٔ (۳) عبارتند از $\lambda_n = \alpha_n^2$ و

$$X_n = \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2h}{h+\sin^2\alpha_n}}\cos\alpha_n x \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{۴}$$

که در آن $\tan\alpha_n = \frac{h}{\alpha_n}$ $(\alpha_n > 0)$. بدیهی است که توابع متناظر آنها برحسب t مضربهای ثابتی از توابع زیر هستند:

$$T_n(t) = \exp(-\alpha_n^2 kt) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

بنابراین جواب صوری مسألهٔ دمای ما

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\alpha_n^2 kt)\phi_n(x) \tag{۵}$$

می‌باشد که در آن برای برقراری شرط $u(x,0)=f(x)$ $(0<x<1)$،

$$C_n = (f,\phi_n) = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)\,dx = \sqrt{\frac{2h}{h+\sin^2\alpha_n}}\int_0^1 f(x)\cos\alpha_n x\,dx \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{۶}$$

مشاهده می‌کنید که با جایگذاری عبارت (۴) به جای $\phi_n(x)$ در سری (۵) داریم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2h}{h+\sin^2\alpha_n}}c_n\right)\exp(-\alpha_n^2 kt)\cos\alpha_n x$$

پس این جواب را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\alpha_n^2 kt)\cos\alpha_n x \tag{۷}$$

که در آن:

$$A_n = \frac{2h}{h+\sin^2\alpha_n}\int_0^1 f(x)\cos\alpha_n x\,dx \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{۸}$$

بسادگی می‌توان نشان داد که جواب (۷) با ضرائب (۸) در مسألهٔ مقدار مرزی زیر

نیز صدق می‌کند:

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t) \qquad (-1<x<1\ ,\ t>0) \qquad (9$$

$$u_x(-1,t)=hu(-1,t)\quad,\quad u_x(1,t)=-hu(1,t)\quad (t>0) \qquad (10$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad (-1<x<1) \qquad (11$$

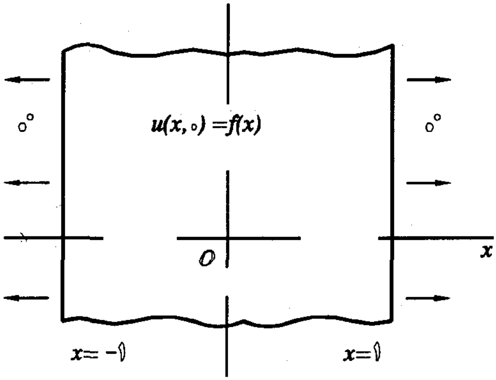
هرگاه f یک تابع زوج یا هرگاه $f(-x)=f(x)$ $(-1<x<1)$ باشد. زیرا از قبل می‌دانیم که u در معادلهٔ گرما و دومین شرط مرزی (۱۰) صدق می‌کند. چون تابع کسینوس زوج است، از عبارت (۷) واضح است که u برحسب x زوج است، و مشتق جزئی آن u_x برحسب x فرد است. بنابراین، اولین شرط مرزی (۱۰) نیز صادق است:

$$u_x(-1,t)=-u_x(1,t)=hu(1,t)=hu(-1,t)$$

بالاخره، از قبل می‌دانیم که $u(x,0)=f(x)$ هرگاه $0<x<1$ ، بعلاوه برای $-1<x<0$ ، از زوج بودن u و f برحسب x می‌توانیم بنویسیم:

$$u(x,0)=u(-x,0)=f(-x)=f(x)\ ،$$

البته مسألهٔ مقدار مرزی (۹)-(۱۱) بیانگر یک مسألهٔ دما در یک قطعه $-1\le x\le 1$ با دماهای اولیهٔ (۱۱) می‌باشد که در دو وجه آن انتقال حرارت رویه‌ای به داخل محیطی با دمای صفر صورت می‌گیرد(شکل ۴۸). وقتی که f لزوماً زوج نیست، جواب آن مسأله در بخش مسائل این فصل به دست می‌آید.



شکل ۴۸

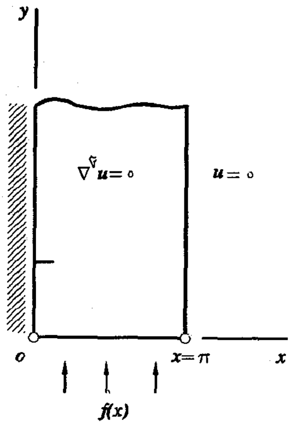
مثال ۲. فرض کنید $u(x,y)$ نمایش دماهای مانای کراندار در یک قطعه نیم‌نامتناهی محدود به صفحات $x=0$ و $x=\pi$ و $y=0$ باشد (شکل ۴۹) که شرایط روی وجوه آن به شرح زیر است. وجه در صفحهٔ $x=0$ عایق‌بندی شده و وجه در صفحهٔ $x=\pi$ در دمای صفر نگهداشته شده و تابع $f(x)$ نمایش شار ورودی از طریق وجه در صفحهٔ $y=0$ است. (بخش ۳ را ببینید). مسألهٔ مقدار مرزی برای این قطعه به صورت زیر است:

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0 \qquad (0<x<\pi \;,\; y>0) \tag{۱۲}$$

$$u_x(0,y)=0 \qquad , \qquad u(\pi,y)=0 \qquad (y>0) \tag{۱۳}$$

$$-Ku_y(x,0)=f(x) \qquad (0<x<\pi) \tag{۱۴}$$

که در آن K یک ثابت مثبت است.



شکل ۴۹

با فرض جواب به صورت حاصلضرب $u=X(x)Y(y)$ و با جداسازی متغیرها، از شرایط (۱۲) و (۱۳) نتایج زیر به دست می‌آیند:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , \quad X'(0)=0 \quad , \quad X(\pi)=0 \qquad (15$$

و اینکه $Y(y)$ باید یک جواب کراندار از معادلهٔ دیفرانسیل زیر باشد:

$$Y''(y)-\lambda Y(y)=0 \qquad (16$$

برطبق مسألهٔ ۳ بخش ۴۵،

$$\lambda_n=\alpha_n^2 \quad , \quad X_n=\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\alpha_n x \quad (n=1,2,\dots)$$

مقادیر ویژه و توابع ویژه نرمال شدهٔ مسألهٔ استورم-لیوویل (۱۵) هستند، که در آن $\alpha_n=\frac{2n-1}{2}$. جوابهای کراندار متناظر معادلهٔ (۱۶) مضربهای ثابتی از توابع زیرند:

$$Y_n(y)=\exp(-\alpha_n y) \qquad (n=1,2,\dots)$$

در نتیجه:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\alpha_n y)\phi_n(x) \qquad (17$$

اعمال شرط غیر همگن (۱۴) روی این عبارت نتیجه می‌دهد که باید ثابتهای c_n به صورتی باشند که:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (Kc_n \alpha_n)\phi_n(x) \qquad (0 < x < \pi)$$

یعنی،

$$Kc_n \alpha_n = (f, \phi_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \cos \alpha_n x \, dx \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (18)$$

بالاخره از عبارات (۱۷) و (۱۸) نتیجه می‌شود که:

$$u(x,y) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\exp(-\alpha_n y)}{\alpha_n} \cos \alpha_n x \qquad (19)$$

که در آن:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos \alpha_n x \, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (20)$$

البته چون $\alpha_n = \frac{2n-1}{2}$ ، معادلات (۱۹) و (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u(x,y) = \frac{2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\exp\left[-(2n-1)y/2\right]}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)x}{2}$$

که در آن:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos \frac{(2n-1)x}{2} dx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

۴۸. مختصات قطبی

در اینجا یک مسألهٔ دیریکله را (بخش ۷) برای یک تابع $u(\rho,\phi)$ برحسب مختصات قطبی در نظر می‌گیریم که در معادلهٔ لاپلاس

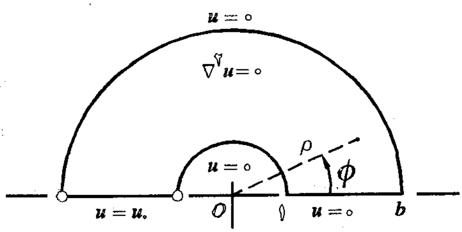
$$\rho^2 u_{\rho\rho}(\rho,\phi) + \rho u_{\rho}(\rho,\phi) + u_{\phi\phi}(\rho,\phi) = 0 \quad (1 < \rho < b \quad 0 < \phi < \pi) \qquad (1)$$

و شرایط مرزی (شکل ۵۰)

$$u(\rho, 0) = 0 \qquad u(\rho, \pi) = u_0 \qquad (1 < \rho < b) \qquad (2)$$

$$u(1,\phi)=0 \qquad u(b,\phi)=0 \qquad (0<\phi<\pi) \tag{۳}$$

صدق می‌کند، که در آن u_0 یک مقدار ثابت است.



شکل ۵۰

از جایگذاری حاصلضرب $u=R(\rho)\Phi(\phi)$ در شرایط همگن این مسأله شرایط زیر روی R و Φ به دست می‌آیند:

$$\left[\rho R'(\rho)\right]' + \frac{\lambda}{\rho} R(\rho)=0 \quad , \quad R(1)=0 \quad , \quad R(b)=0 \tag{۴}$$

$$\Phi''(\phi)-\lambda\Phi(\phi)=0 \qquad , \qquad \Phi(0)=0 \tag{۵}$$

شرایط (۴) روی R یک مسألهٔ استورم- لیوویل تشکیل می‌دهند که $\lambda_n=\alpha_n^2$ $(n=1,2,\dots)$، که در آن $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{\ln b}$ مقادیر ویژه آن هستند و توابع ویژهٔ نرمال شدهٔ آن عبارتند از:

$$R_n=\phi_n(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\ln b}}\sin\,(\alpha_n \ln\rho) \qquad (n=1,2,\dots)$$

(مسألهٔ ۶ بخش ۴۵ را ببینید) توجه کنید که تابع وزن برای این توابع ویژه $\frac{1}{\rho}$ می‌باشد. توابع متناظر ϕ که از شرایط (۵) به دست می‌آیند، جز برای فاکتورهای ثابت، عبارتند از:

$$\Phi_n(\phi)=\sinh\alpha_n\phi \qquad (n=1,2,\dots)$$

بنابراین:

$$u(\rho,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\alpha_n\phi\ \phi_n(\rho)$$

برای شرط غیرهمگن $u(\rho,\pi)=u_۰$، در عبارت (۶) $\phi=\pi$ قرار داده، می‌نویسیم:

$$u_۰=\sum_{n=۱}^{\infty}(c_n \sinh \alpha_n \pi)\phi_n(\rho) \qquad (۱<\rho<b)$$

پس واضح است که،

$$c_n \sinh \alpha_n \pi=(u_۰,\phi_n)=u_۰\sqrt{\frac{۲}{\ln b}}\int_۱^b \frac{۱}{\rho}\sin(\alpha_n \ln\rho)\,d\rho$$

این انتگرال با جایگزینی $\rho=\exp s$ بسادگی حل می‌شود و می‌توان نتیجه آن را با به خاطر آوردن $\alpha_n=\frac{n\pi}{\ln b}$، به صورت زیر ساده کرد:

$$c_n \sinh \alpha_n \pi=\frac{u_۰\sqrt{۲\ln b}}{\pi}\cdot\frac{۱-(-۱)^n}{n} \tag{۷}$$

بنابراین، نظر به عبارات (۶) و (۷)،

$$u(\rho,\phi)=\frac{۲u_۰}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱-(-۱)^n}{n}\cdot\frac{\sinh \alpha_n\phi}{\sinh \alpha_n\pi}\sin(\alpha_n \ln b)$$

یعنی اینکه،

$$u(\rho,\phi)=\frac{۴u_۰}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sinh \alpha_{۲n-۱}\phi}{\sinh \alpha_{۲n-۱}\pi}\cdot\frac{\sin(\alpha_{۲n-۱}\ln\rho)}{۲n-۱} \tag{۸}$$

جالب است که این جواب را با جواب مثال ۲، بخش ۳۴ از یک مسألهٔ دیریکله که روی همین ناحیه ولی شرط غیرهمگن $u=u_۰$ به جای اعمال روی $\phi=\pi$ روی $\rho=b$ اعمال می‌شود، مقایسه کنیم.

مسائل[1]

۱. نشان دهید هرگاه در مسألهٔ مقدار مرزی مثال ۱، بخش ۴۷، $f(x)=1$ $(0<x<1)$ باشد جواب (۷)-(۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$u(x,t)=2h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n(h+\sin^2\alpha_n)}\exp(-\alpha_n^2kt)\cos\alpha_n x$$

که در آن $\tan\alpha_n=\dfrac{h}{\alpha_n}$ $\quad(\alpha_n>0)$

۲. نشان دهید که اگر شرط $u(\rho,\pi)=u_0$ $(1<\rho<b)$ در بخش ۴۸، با شرط $u(\rho,\pi)=\rho$ $(1<\rho<b)$ جایگزین شود. آنگاه:

$$u(\rho,\phi)=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left[1+(-1)^{n+1}b\right]}{(\ln b)^2+(n\pi)^2}\cdot\frac{\sinh\alpha_n\phi}{\sinh\alpha_n\pi}\sin(\alpha_n\ln\rho)$$

که در آن $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{\ln b}$

راهنمایی: در اینجا می‌توان از ثابتهای فوریه که در مسألهٔ۸، بخش ۴۶ به دست آمده استفاده کرد.

۳. به منظور حل مسألهٔ مقدار مرزی

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t)\qquad(0<x<\pi\ ,\ t>0)$$

$$u(0,t)=0\qquad u_x(\pi,t)=0\qquad u(x,0)=f(x)$$

از توابع ویژهٔ نرمال شدهٔ مسألهٔ استورم-لیوویل زیر استفاده کنید:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\quad,\quad X(0)=0\quad,\quad X'(\pi)=0$$

---

۱. مقادیر ویژه و توابع ویژه (نرمال شدهٔ) هر مسألهٔ استورم-لیوویلی که پیش می‌آیند، قبلاً در بخش ۴۵ یا یکی از مسائل آن بخش به دست آمده‌اند.

نشان دهید که جواب را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \exp\left[-\frac{(2n-1)^2 k}{4} t\right] \sin\frac{(2n-1)x}{2}$$

که در آن

$$b_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\frac{(2n-1)x}{2}dx \qquad (n=1,2,\ldots)$$

(جواب به این صورت به طریق دیگر در مثال ۳ بخش ۳۲ به دست آمده بود.)

۴. مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید:

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0 \qquad (0<x<a\ ,\ 0<y<b)$$

$$u_x(0,y)=0 \qquad u_x(a,y)=-hu(a,y) \qquad (0<y<b)$$

$$u(x,0)=0 \qquad u(x,b)=f(x) \qquad (0<x<a)$$

که در اینجا h یک ثابت مثبت است. تعبیر فیزیکی $u(x,y)$ را بنویسید.

جواب :

$$u(x,y)=2h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_n x}{ha+\sin^2\alpha_n a}\cdot\frac{\sinh\alpha_n y}{\sinh\alpha_n b}\int_0^a f(s)\cos\alpha_n s\,ds$$

که در آن $\quad \tan\alpha_n a=\dfrac{h}{\alpha_n} \qquad (\alpha_n>0)$

۵. یک تابع همساز کراندار $u(x,y)$ در نوار نیم- نامتناهی $x>0$ و $0<y<1$ در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$u(x,0)=0 \qquad u_y(x,1)=-hu(x,1) \qquad u(0,y)=u_0$$

که در آن $h\,(h>0)$ و u_0 ثابت هستند. عبارت زیر را به دست آورید که در آن

$$(\alpha_n>0)\tan\alpha_n=\frac{-\alpha_n}{h}$$

$$u(x,y)=2hu_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha_n}{\alpha_n(h+\cos^2\alpha_n)}\exp(-\alpha_n x)\sin\alpha_n y$$

$u(x,y)$ را به طور فیزیکی تعبیر کنید.

۶. تابع همساز کراندار $u(x,y)$ در نوار نیم- نامتناهی $0<x<1$ و $y>0$ را که در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند به دست آورید،

$$u_x(0,y)=0 \qquad u_x(1,y)=-hu(1,y) \qquad u(x,0)=f(x)$$

که در آن h یک ثابت مثبت است. به طور فیزیکی $u(x,y)$ را تعبیر کنید.

جواب :
$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\alpha_n y)\cos \alpha_n x$$

که در آن
$$(\alpha_n>0) \qquad \tan \alpha_n=\frac{h}{\alpha_n}$$

$$A_n=\frac{2h}{h+\sin^2 \alpha_n}\int_0^1 f(x)\cos \alpha_n x dx \qquad (n=1,2,\ldots)$$

۷. جواب کراندار این مسأله مقدار مرزی را به دست آورید:

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)-bu(x,y)=0 \qquad (0<x<1 \ ,\ y>0)$$
$$u(0,y)=0 \qquad u_x(1,y)=-hu(1,y) \qquad u(x,0)=f(x)$$

در اینجا h و b ثابتهای مثبت هستند.

جواب :
$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sin \alpha_n x}{\exp(y\sqrt{b+\alpha_n^2})}$$

که در آن
$$(\alpha_n>0) \qquad \tan \alpha_n=\frac{-\alpha_n}{h}$$

و
$$B_n=\frac{2h}{h+\cos^2 \alpha_n}\int_0^1 f(x)\sin \alpha_n x\, dx \qquad (n=1,2,\ldots)$$

۸. فرض کنید ρ و ϕ و z نمایش مختصات استوانه‌ای باشند و مسألهٔ مقدار مرزی زیر را در ناحیهٔ $1\le\rho\le b$ ، $0\le\phi\le\pi$ از صفحهٔ $z=0$ حل کنید:

$$\rho^2 u_{\rho\rho}(\rho,\phi)+\rho u_\rho(\rho,\phi)+u_{\phi\phi}(\rho,\phi)=0 \quad (1<\rho<b \ ,\ 0<\phi<\pi)$$

$$u_\rho(1,\phi)=0 \qquad u_\rho(b,\phi)=-hu(b,\phi) \qquad (0<\phi<\pi)$$

$$u_\phi(\rho,0)=0 \qquad u(\rho,\pi)=u_0 \qquad (1<\rho<b)$$

که در آن $h(h>0)$ و u_0 ثابت هستند. تابع $u(\rho,\phi)$ را به طور فیزیکی تعبیر کنید.

جواب:
$$u(\rho,\phi)=2hbu_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh\alpha_n\phi}{\cosh\alpha_n\pi}\cdot\frac{\sin(\alpha_n\ln b)\cos(\alpha_n\ln\rho)}{\alpha_n\left[hb\ln b+\sin^2(\alpha_n\ln b)\right]}$$

که در آن
$$\tan(\alpha_n\ln b)=\frac{hb}{\alpha_n} \qquad (\alpha_n>0)$$

۹. یک تعبیر فیزیکی کامل از مسألهٔ دمای زیر که مشتمل بر یک جملهٔ نفوذ وابسته به زمان است، ارائه کرده، جواب آن را به دست آورید:

$$(t+1)u_t(x,t)=u_{xx}(x,t) \qquad (0<x<1\ ,\ t>0)$$

$$u(0,t)=0 \qquad u_x(1,t)=0 \qquad u(x,0)=1$$

جواب :
$$u(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}(t+1)^{-\alpha_n^2}\frac{\sin\alpha_n x}{\alpha_n}$$
که در آن
$$\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

۱۰. (الف) یک تعبیر فیزیکی از مسألهٔ مقدار مرزی زیر ارائه کنید،

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t) \qquad (0<x<1\ ,\ t>0)$$

$$u(0,t)=0 \qquad u_x(1,t)=-hu(1,t) \qquad u(x,0)=f(x)$$

که در آن h یک ثابت مثبت است، سپس جواب زیر را به دست آورید:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\exp(-\alpha_n^2kt)\sin\alpha_n x$$

که در آن
$$\tan\alpha_n=\frac{-\alpha_n}{h} \qquad (\alpha_n>0)$$

و
$$B_n=\frac{2h}{h+\cos^2\alpha_n}\int_0^1 f(x)\sin\alpha_n x\,dx \qquad (n=1,2,\dots)$$

(ب) با استفاده از بحثی مشابه آنچه در آخر مثال ۱ بخش ۴۷ داشتیم، نشان دهید که جواب به دست آمده در قسمت (الف) به طور صوری در مسألهٔ مقدار مرزی (۹)-(۱۱) آن مثال صدق می‌کند، هرگاه f فرد باشد، یا هرگاه $f(-x)=-f(x)$ $(-۱<x<۱)$.

۱۱. با استفاده از روش زیر این مسألهٔ دما را حل کنید، هر گاه لزومی نداشته باشد که f مانند مثال ۱ بخش ۴۷ و مسألهٔ ۱۰ (ب) زوج یا فرد باشد.(شکل ۴۸ بخش ۴۷ را ببینید)

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t) \qquad (-۱<x<۱\ ,\ t>۰)$$

$$u_x(-۱,t)=hu(-۱,t) \quad , \quad u_x(۱,t)=-hu(۱,t) \qquad (t>۰)$$

$$u(x,۰)=f(x) \qquad (-۱<x<۱)$$

(الف) نشان دهید اگر $v(x,t)$ و $w(x,t)$ جوابهای آن مسأله باشند، هرگاه $f(x)$ به ترتیب با توابع

$$G(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{۲}$$

و

$$H(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{۲}$$

جایگزین شوند، آنگاه مجموع آنها یعنی $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ در مسألهٔ مقدار مرزی بالا صدق می‌کند.

(ب) با ملاحظه اینکه توابع G و H در قسمت (الف) به ترتیب توابعی زوج و فرد هستند، این نتیجه را به همراه نتایج مثال ۱ بخش ۴۷ و مسألهٔ ۱۰ به کار گرفته، نشان دهید:

$$u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty} A_n \exp(-\alpha_n^۲ kt)\cos\alpha_n x+\sum_{n=۱}^{\infty} B_n \exp(-\beta_n^۲ kt)\sin\beta_n x$$

که در آن

$$(\beta_n>۰)\ \tan\beta_n=\frac{-\beta_n}{h} \quad , \quad (\alpha_n>۰)\ \tan\alpha_n=\frac{h}{\alpha_n}$$

و

$$A_n=\frac{h}{h+\sin^۲\alpha_n}\int_{-۱}^{۱} f(x)\cos\alpha_n x\,dx$$

و

$$B_n=\frac{h}{h+\cos^۲\beta_n}\int_{-۱}^{۱} f(x)\sin\beta_n x\,dx$$

راهنمائی : برای به دست آوردن عبارات مربوط به A_n و B_n در قسمت (ب) می‌توان از یک روندی شبیه آنچه که در راهنمائی مربوط به مسألهٔ ۱۲ بخش ۱۴ آمده استفاده کرد.

۴۹ . تعدیلهائی از روش

در این بخش دو تعدیل از روش فوریه را نشان خواهیم داد که به کارگیری توابع ویژه نرمال شده را در بر دارند. در فصل ۴ وقتی که فقط سریهای سینوسی و کسینوسی فوریهٔ معمولی مطرح بودند از این دو تعدیل استفاده شده است.

مثال ۱. اگر گرما با یک آهنگ یکنواخت A $(A>\circ)$ در هر واحد سطح (بخش ۳) از وجه $x=\text{۱}$ یک قطعهٔ $\circ \le x \le \text{۱}$ وارد شود و وجه $x=\circ$ آن در همان دمای اولیهٔ صفر قطعه نگهداشته شود، آنگاه $u(x,t)$ تابع دما در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t) \qquad (\circ<x<\text{۱}\ ,\ t>\circ) \tag{۱}$$

$$u(\circ,t)=\circ \qquad Ku_x(\text{۱},t)=A \qquad (t>\circ) \tag{۲}$$

$$u(x,\circ)=\circ \qquad (\circ<x<\text{۱}) \tag{۳}$$

چون شرط دوم در (۲) غیرهمگن است، شرایط مرزی دو نقطه‌ای نداریم که در اثر آن یک مسأله استورم- لیوویل داشته باشیم. اما، با نوشتن

$$u(x,t)=U(x,t)+\Phi(x) \tag{۴}$$

(با مثال ۲ بخش ۳۲ مقایسه کنید) ، شرایط (۱)-(۳) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$U_t(x,t)=k\left[U_{xx}(x,t)+\Phi''(x)\right]$$

و
$$U(\circ,t)+\Phi(\circ)=\circ \qquad K\left[U_x(\text{۱},t)+\Phi'(\text{۱})\right]=A$$

و
$$U(x,\circ)+\Phi(x)=\circ$$

بنابراین اگر لازم باشد که

۵) $$\Phi''=0 \quad , \quad \Phi(0)=0 \quad , \quad K\Phi'(1)=A$$

برای $U(x,t)$ مسألهٔ مقدار مرزی با شرایط مرزی دو نقطه‌ای خواهیم داشت که به مسألهٔ استورم-لیوویل منجر می‌شود:

۶) $$U_t=kU_{xx} \ , \ U(0,t)=0 \ , \ U_x(1,t)=0 \ , \ U(x,0)=-\Phi(x)$$

از شرایط (۵) بسادگی نتیجه می‌شود که:

۷) $$\Phi(x)=\frac{A}{K}x$$

همچنین، با گرفتن یک جواب به صورت حاصلضرب $U=X(x)T(t)$ برای شرایط همگن مسألهٔ (۶) داریم:

۸) $$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , \quad X(0)=0 \quad , \quad X'(1)=0$$

و $T'(t)+\lambda kT(t)=0$. برطبق مسألهٔ ۱، بخش ۴۵، مقادیر ویژه و توابع ویژه نرمال شدهٔ مسألهٔ استورم-لیوویل (۸) عبارتند از

$$\lambda_n=\alpha_n^2 \quad , \quad X_n=\phi_n(x)=\sqrt{2}\sin\alpha_n x \qquad (n=1,2,\ldots)$$

که در آن $\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{2}$، و توابع متناظر آنها برحسب t عبارتند از:

$$(n=1,2,\ldots) \qquad T_n(t)=\exp(-\alpha_n^2 kt)$$

بنابراین:

۹) $$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\exp(-\alpha_n^2 kt)\phi_n(x)$$

که در آن، نظر به شرایط (۶)،

$$-\frac{A}{K}x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x) \qquad (0<x<1)$$

اکنون ثابتهای فوریه برای x $(0<x<1)$ نسبت به توابع ویژهٔ نرمال شده در

اینجا از قبل برای ما معلومند (مثال ۲ بخش ۴۶ را برای $c=۱$ ببینید)، و آن نتیجه قبلی به ما می‌گوید که:

$$c_n = \sqrt{۲}\ \frac{A}{k} \cdot \frac{(-۱)^{۲}}{\alpha_n^{۲}}$$

پس از جایگزینی این مقادیر c_n در عبارت (۹) و ساده‌کردن آن و ترکیب نتیجه با عبارت (۷)، آنگونه که معادلهٔ (۴) نشان داده شده، تابع دمای مطلوب بـه دست می‌آید:

$$u(x,t)=\frac{A}{K}\left[x+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{\alpha_n^{۲}}\ exp\left(-\alpha_n^{۲}kt\right)\sin\alpha_n x\right] \qquad (۱۰$$

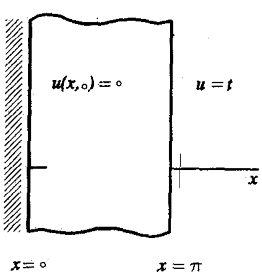
که در آن

$$\alpha_n=\frac{(۲n-۱)\pi}{۲}$$

مثال ۲. فرض کنید $u(x,t)$ نمایش دما در یک قطعهٔ $۰\leq x\leq\pi$ (شکل ۵۱) باشد که دمای اولیه آن صفر و وجه $x=۰$ آن عایق‌بندی شده، در حالی که وجه $x=\pi$ آن دارای دماهای $u(\pi,t)=t$ $(t\geq ۰)$ می‌باشد. اگر واحد زمان طوری در نظر گرفته شود که ضریب نفوذ حرارتی k در معادلهٔ گرما برابر واحد باشد، مسألهٔ مقدار مرزی مربوط به تابع $u(x,t)$ بدین شکل است:

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t) \qquad (۰<x<\pi\ ,\ t>۰) \qquad (۱۱$$

$$u_x(۰,t)=۰ \quad , \quad u(\pi,t)=t \quad , \quad u(x,۰)=۰ \qquad (۱۲$$



شکل ۵۱

مشاهده می‌کنید که اگر $u(x,t)$ در دو شرط اول از شرایط (۱۲) صدق کند، آنگاه تابع مربوط به آن یعنی $U(x,t)=u(x,t)-t$ در شرایط زیر که هر دو همگن هستند صدق می‌کند،

$$U_x(\circ,t)=\circ \qquad , \qquad U(\pi,t)=\circ \tag{۱۳}$$

در واقع، با نوشتن

$$u(x,t)=U(x,t)+t$$

مسألهٔ مقدار مرزی مربوط به آن متشکل از معادلهٔ دیفرانسیل

$$U_t(x,t)=U_{xx}(x,t)-۱ \tag{۱۴}$$

و شرایط (۱۳)، به همراه شرط

$$U(x,\circ)=\circ \tag{۱۵}$$

به دست می‌آید. ناهمگنی موجود در دومین شرط از (۱۲) اکنون به خود معادلهٔ دیفرانسیل در مسألهٔ مقدار مرزی جدید، متشکل از معادلات (۱۳)-(۱۵)، انتقال یافته و این مطلب به کارگیری روش تغییر پارامتر را که ابتدا در بخش ۳۳ به کار رفت، تلقین می‌کند.

با توجه به این نکته شروع می‌کنیم که از به کارگیری روش جداسازی متغیرها بر روی معادلهٔ دیفرانسیل همگن $U_t(x,t)=U_{xx}(x,t)$، که همان معادلهٔ (۱۴) بدون جملهٔ ۱- است، و شرایط (۱۳) مسألهٔ استورم- لیوویل زیر به دست می‌آید:

$$X''(x)+\lambda X(x)=\circ \quad , \quad X'(\circ)=\circ \quad , \quad X(\pi)=\circ$$

بعلاوه، از مسألهٔ ۳، بخش ۴۵، می‌دانیم که توابع ویژه این مسأله عبارتند از توابع کسینوس $\cos\alpha_n x$ $(n=۱,۲,...)$، که در آن $\alpha_n=\frac{(۲n-۱)}{۲}$. بنابراین برای این مسألهٔ مقدار مرزی (۱۵)-(۱۳) به دنبال جوابی به صورت زیر هستیم:

$$U(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty} A_n(t)\cos\alpha_n x \tag{۱۶}$$

با جایگزینی سری (۱۶) در معادلهٔ (۱۴) و مراجعه به مسألهٔ ۱، بخش ۴۶، برای بسط

$$۱=\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{\alpha_n}\cos\alpha_n x \qquad (۰<x<\pi)$$

نتیجه می‌گیریم که:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left[A_n'(t)+\alpha_n^۲ A_n(t)\right]\cos\alpha_n x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^n}{\pi\alpha_n}\cos\alpha_n x$$

سپس معادلهٔ دیفرانسیل زیر پس از یکی کردن ضرائب بسطهای تابع ویژه در دو طرف این معادله به دست می‌آید:

$$A_n'(t)+\alpha_n^۲ A_n(t)=\frac{۲(-۱)^n}{\pi\alpha_n} \qquad (n=۱,۲,\ldots) \qquad (۱۷)$$

همچنین بنابه شرط (۱۵) داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}A_n(۰)\cos\alpha_n x=۰$$

یا

$$A_n(۰)=۰ \qquad (n=۱,۲,\ldots)$$

حال

$$\exp\int a_n^۲\,dt=\exp\alpha_n^۲ t$$

یک عامل انتگرالگیری برای معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه اول (۱۷) است. بنابراین با ضرب این عامل انتگرالگیری در آن معادلهٔ دیفرانسیل داریم:

$$\frac{d}{dt}\left[(\exp\alpha_n^۲ t)A_n(t)\right]=\frac{۲(-۱)^n}{\pi\alpha_n}\exp\alpha_n^۲ t$$

با جایگذاری متغیر τ به جای t و انتگرالگیری نتیجه از $\tau=۰$ تا $\tau=t$ و به خاطر سپردن لزوم شرط $A_n(۰)=۰$، داریم:

$$(\exp\alpha_n^۲ t)A_n(t)=\frac{۲(-۱)^n}{\pi\alpha_n^۳}(\exp\alpha_n^۲ t-۱)$$

یا

$$A_n(t)=\frac{۲(-۱)^n}{\pi\alpha_n^۳}\left[۱-\exp(-\alpha_n^۲ t)\right] \qquad (n=۱,۲,\ldots)$$

با جایگزینی این عبارت برای $A_n(t)$ در معادلهٔ (۱۶) و به خاطر آوردن اینکه $u(x,t)=U(x,t)+t$، سرانجام جواب آن مسألهٔ مقدار مرزی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$u(x,t)=t+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha_n^3}\left[1-exp\left(-\alpha_n^2 t\right)\right]cos\,\alpha_n x \qquad (18)$$

که در آن
$$\alpha_n=\frac{(2n-1)}{2}$$

توجه کنید که نظر به نمایش به دست آمده در مسألهٔ ۴، بخش ۴۶، این جواب را می‌توان بدین شکل نوشت:

$$u(x,t)=t-\frac{\pi^2-x^2}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha_n^3}exp\left(-\alpha_n^2 t\right)cos\,\alpha_n x \qquad (19)$$

مسائل[1]

۱. با کمک نمایش (۴) در مثال ۲، بخش ۴۶، نشان دهید که تابع دما (۱۰) در مثال ۱، بخش ۴۹ را می‌توان اینگونه نوشت:

$$u(x,t)=\frac{2A}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^2}\left[1-exp\left(-\alpha_n^2 kt\right)\right]sin\,\alpha_n x$$

که در آن
$$\alpha_n=\frac{(2n-1)}{2}$$

۲. در سطح $x=0$ از یک قطعهٔ $0\le x\le 1$، طبق قانون خطی انتقال حرارت سطحی به داخل محیطی با دمای صفر، انتقال حرارت صورت می‌گیرد، بنابراین (بخش ۳)

$$u_x(0,t)=hu(0,t) \quad (h>0)$$

---

۱. در اینجا نیز پاورقی مربوط به مجموعه مسائل بخش ۴۸ مصداق دارد.

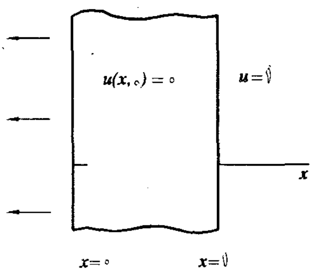
شرایط مرزی دیگر در شکل ۵۲ نشان داده شده‌اند و واحد زمان طوری انتخاب شده که در معادلهٔ گرما $k=1$ می‌باشد. با روندی مثل مثال ۱ بخش ۴۹ فرمول دما را به صورت زیر به دست آورید:

$$u(x,t) = \frac{hx+1}{h+1} - 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n (1-x)}{\alpha_n \ (h+\cos^2 \alpha_n)} \exp(-\alpha_n^2 t)$$

که در آن:
$$\tan \alpha_n = \frac{-\alpha_n}{h} \qquad (\alpha_n > 0)$$

راهنمائی: در ساده کردن عبارتی که برای ثابتهای فوریه به دست می‌آید توجه به تساوی ذیل مفید است:

$$-\frac{h \sin \alpha_n}{\alpha_n^2} = \frac{\cos \alpha_n}{\alpha_n}$$



شکل ۵۲

۳. با روش تغییر پارامترها، مسألهٔ مقدار مرزی زیر را برای دماهای داخل یک قطعه‌ای که از داخل گرما داده شده حل کنید:

$$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t) + q(t) \qquad (0 < x < 1 \ , \ t > 0)$$

$$u_x(0,t) = 0 \quad , \quad u(1,t) = 0 \quad , \quad u(x,0) = 0$$

راهنمائی: نمایشی که با $c=۱$ در مسألهٔ ۱، بخش ۴۶ به دست آمد، در اینجا مورد نیاز است:

جواب : $$u(x,t)=۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{\alpha_n}\cos\alpha_n x\int_{۰}^{t}exp\left[-\alpha_n^۲ k(t-\tau)\right]q(\tau)d\tau$$

که در آن $$\alpha_n=\frac{(۲n-۱)\pi}{۲}$$

۴. مسألهٔ دمای زیر را حل کنید:

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)\qquad(۰<x<۱\ ,\ t>۰)$$

$$u_x(۰,t)=۰\quad,\quad u(۱,t)=F(t)\quad,\quad u(x,۰)=۰$$

که در آن F پیوسته است و $F(۰)=۰$. (با مثال ۲ بخش ۴۹ مقایسه کنید.) جواب را بدین صورت بیان کنید:

$$u(x,t)=F(t)+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{\alpha_n}\cos\alpha_n x\int_{۰}^{t}exp\left[-\alpha_n^۲(t-\tau)\right]F'(\tau)dt$$

که در آن $$\alpha_n=\frac{(۲n-۱)\pi}{۲}$$

۵. روش مثال ۱ بخش ۴۹ را برای حل مسألهٔ مقدار مرزی زیر به کار بگیرید:

$$(t+۱)u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)\qquad(۰<x<۱\ ,\ t>۰)$$

$$u_x(۰,t)=-۱\quad,\quad u(۱,t)=۰\quad,\quad u(x,۰)=۰$$

این مسأله را به طور فیزیکی تعبیر کنید (با مسأله ۹ بخش ۴۸ مقایسه کنید.)

جواب : $$u(x,t)=۱-x-۲\sum_{n=۱}^{\infty}(t+۱)^{-\alpha_n^۲}\frac{\cos\alpha_n x}{\alpha_n^۲}$$

که در آن $$\alpha_n=\frac{(۲n-۱)\pi}{۲}$$

۶. با به کارگیری روش تغییر پارامترها، جواب کراندار مسألهٔ زیر را به دست آورید:

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)+q_\circ=\circ \qquad (\circ<x<\backslash\ ,\ y>\circ)$$

$$u(\circ,y)=\circ \quad , \quad u_x(\backslash,y)=-hu(\backslash,y) \quad (h>\circ) \quad , \quad u(x,\circ)=\circ$$

که در آن $q_\circ$ و h ثابت هستند. این مسأله را به طور فیزیکی تعبیر کنید.

راهنمایی: نمایشی هم که در مسألهٔ ۳ بخش ۴۶ به دست آمد در اینجا مورد نیاز است. همچنین، برای توضیحات کلی در مورد حل معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگنی که پیدا می‌شود می‌آید، راهنمائی مربوط به مسألهٔ ۸ بخش ۳۵ را ببینید.

جواب:

$$u(x,y)=2q_\circ h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha_n}{\alpha_n^3(h+\cos^2\alpha_n)}\left[1-\exp(-\alpha_n y)\right]\sin\alpha_n x$$

که در آن $\qquad \tan\alpha_n=\dfrac{-\alpha_n}{h} \qquad (\alpha_n>\circ)$

۷. با کمک نمایش به دست آمده در مسألهٔ ۶، بخش ۴۶، جواب مسألهٔ ۶ بالا را به صورت ذیل بنویسید:

$$u(x,t)=\frac{q_\circ}{2}\left[x\left(\frac{2+h}{1+h}-x\right)-4h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha_n}{\alpha_n^3(h+\cos^2\alpha_n)}\exp(-\alpha_n y)\sin\alpha_n x\right]$$

که در آن $\tan\alpha_n=\dfrac{-\alpha_n}{h}$ $(\alpha_n>\circ)$. سپس مشاهده کنید که چگونه نتیجه می‌دهد:

$$\lim_{y\to\infty}u(x,y)=\frac{q_\circ}{2}x\left(\frac{2+h}{1+h}-x\right)$$

۸. مرز $r=1$ از یک کرهٔ توپر عایق‌بندی شده و دمای اولیهٔ آن جسم $f(r)$ می‌باشد. اگر $u(r,t)$ نمایش دماهای بعدی باشد، آنگاه:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) \quad , \quad u_r(1,t)=\circ \quad , \quad u(r,\circ)=f(r)$$

با نوشتن $v(r,t)=ru(r,t)$ و توجه به اینکه u پیوسته است هرگاه $r=\circ$، (مقایسه کنید

با مسألهٔ ۶ بخش ۳۲) یک مسألهٔ مقدار مرزی برحسب v با شرایط مرزی زیر تشکیل دهید:

$$v(\circ,t)=\circ \quad , \quad v(۱,t)=v_r(۱,t) \qquad v(r,\circ)=rf(r)$$

سپس فرمول دما را بدین شکل به دست آورید:

$$u(r,t)=B_\circ+\sum_{n=۱}^{\infty} B_n \exp(-\alpha_n^۲ kt)\frac{\sin\alpha_n r}{\alpha_n r}$$

که در آن
$$\tan\alpha_n=\alpha_n \qquad (\alpha_n>\circ)$$

و
$$B_\circ=۳\int_\circ^۱ r^۲ f(r)\,dr \quad , \quad B_n=۲\left(\alpha_n+\frac{۱}{\alpha_n}\right)\int_\circ^۱ rf(r)\sin\alpha_n r\,dr$$

$(n=۱,۲,\ldots)$

(یک بسط تابع ویژه شبیه آنچه که در اینجا مورد نظر است، در مثال ۳ بخش ۴۶ به دست آمد.)

۵۰. میلهٔ کشسان که به طور عمودی آویزان است

یک میلهٔ کشسان، یا فنر سخت پیچیده، به طول c، بدون اینکه کشیده شده باشد، در امتداد طولش با گیره محکم گرفته شد، تا از جابجائی طولی آن جلوگیری شود، سپس از انتهای $x=\circ$ آن آویزان می‌شود(شکل ۵۳). در لحظه $t=\circ$، گیره آزاد شده، میله در اثر وزنش به طور طولی ارتعاش می‌کند. اگر $y(x,t)$ نمایش جابجایی‌های طولی میله پس از آزاد شدن باشد، آنگاه $y(x,t)$در فرم تعدیل یافتهٔ معادلهٔ موج صدق می‌کند.

$$y_{tt}(x,t)=a^۲y_{xx}(x,t)+g \qquad (\circ<x<c\ ,\ t>\circ) \tag{۱}$$

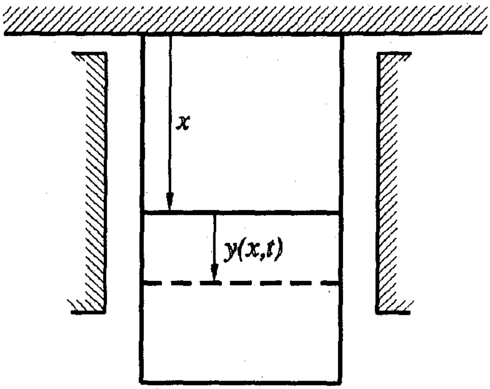
که در آن g شتاب ثقل است. شرایط بیان شده در دو انتهای میله به ما می‌گوید که:

$$y(\circ,t)=\circ \qquad y_x(c,t)=\circ \tag{۲}$$

و شرایط اولیه عبارتند از:

$$y(x,\circ)=\circ \quad , \quad y_t(x,\circ)=\circ \tag{۳}$$

ناهمگن بودن معادلهٔ (۱) استفاده از روش تغییر پارامترها را به ما توصیه می‌کند. به طور دقیقتر، برای مسألهٔ مقدار مرزیمان به دنبال یک جواب به شکل زیر هستیم:



شکل ۵۳

$$y(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty} B_n(t)\sin \alpha_n x \qquad (۴$$

که در آن
$$\alpha_n=\frac{(۲n-۱)\pi}{۲c}$$

دلیلی که در اینجا توابع سینوسی $\sin \alpha_n x \quad (n=۱,۲,...)$ را انتخاب کرده‌ایم، این است که آنها توابع ویژهٔ (مسألهٔ ۷ بخش ۴۵) مسألهٔ استورم- لیوویل

$$X''(x)+\lambda X(x)=۰ \quad , \quad X(۰)=۰ \quad , \quad X'(c)=۰$$

هستند که از به کارگیری روش جداسازی متغیرها روی معادلهٔ همگن موج $y_{xx}(x,t)=a^{۲}y_{tt}(x,t)$ و شرایط (۲) به دست می‌آید.با جایگزینی سری (۴) در معادلهٔ (۱) و با یادآوری نمایش (مسألهٔ ۲ بخش ۴۶)

$$۱=\frac{۲}{c}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n x}{\alpha_n} \qquad (۰<x<c)$$

به دست می‌آوریم که:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left[B_n''(t)+(\alpha_n a)^{۲}B_n(t)\right]\sin\alpha_n x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲g}{c\alpha_n}\sin\alpha_n x$$

یعنی:

$$B_n''(t)+(\alpha_n a)^{۲}B_n(t)=\frac{۲g}{c\alpha_n} \qquad (n=۱,۲,\ldots) \tag{۵}$$

بعلاوه از شرایط (۳) نتیجه می‌شود که:

$$B_n(۰)=۰ \qquad B_n'(۰)=۰ \qquad (n=۱,۲,\ldots) \tag{۶}$$

اکنون جواب عمومی معادلهٔ مکمل

$$B_n''(t)+(\alpha_n a)^{۲}B_n(t)=۰$$

عبارت است از:

$$B_n(t)=C_{۱}\cos\alpha_n at+C_{۲}\sin\alpha_n at$$

که در آن $C_{۱}$ و $C_{۲}$ ثابتهای دلخواه هستند و ساده است که ببینیم:

$$B_n(t)=\frac{۲g}{a^{۲}c\alpha_n^{۳}}$$

یک جواب خاص معادلهٔ (۵) است.

بنابراین جواب عمومی معادلهٔ (۵) عبارت است از:

$$B_n(t)=C_{۱}\cos\alpha_n at+C_{۲}\sin\alpha_n at+\frac{۲g}{a^{۲}c\alpha_n^{۳}} \tag{۷}$$

با تحمیل شرایط (۶) بر عبارت (۷) ثابتهای C_1 و C_2 بسادگی تعیین می‌شوند. در نتیجه داریم:

$$B_n(t)=\frac{2g}{a^2c\alpha_n^3}(1-\cos\alpha_n at)$$

و نظر به معادلهٔ (۴)، داریم:

$$y(x,t)=\frac{2g}{a^2c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n x}{\alpha_n^3}(1-\cos\alpha_n at) \tag{8}$$

این جواب را در واقع به طریق زیر می‌توانیم به صورت بسته بنویسیم:

ابتدا از مسألهٔ ۵، بخش ۴۶ به خاطر می‌آوریم که:

$$\frac{4}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n x}{\alpha_n^3}=Q(x)\qquad(-\infty<x<\infty) \tag{9}$$

که در آن $Q(x)$ تابع پاد تاوبی است با دورهٔ تناوب $2c$ که با معادلات زیر توصیف می‌شود:

$$Q(x)=x(2c-x)\qquad(0\le x\le 2c)$$

$$Q(x+2c)=-Q(x)\qquad(-\infty<x<\infty) \tag{10}$$

لذا عبارت (۸) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$y(x,t)=\frac{g}{2a^2}\left[x(2c-x)-\frac{4}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n x\cos\alpha_n at}{\alpha_n^3}\right] \tag{11}$$

از آنجا که برای سری که در اینجا باقی می‌ماند، با توجه به اتحاد مثلثاتی

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

می‌توانیم بنویسیم:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n x\cos\alpha_n at}{\alpha_n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n(x+at)}{\alpha_n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n(x-at)}{\alpha_n^3}$$

یا

$$\frac{4}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n x\cos\alpha_n at}{\alpha_n^3}=\frac{Q(x+at)+Q(x-at)}{2}$$

پس بالاخره:

$$y(x,t)=\frac{g}{۲a^{۲}}\left[x(۲c-x)-\frac{Q(x+at)+Q(x-at)}{۲}\right] \quad (۱۲$$

مسائل[۱]

۱. انتهای $x=۰$ یک میلهٔ کشسان افقی ثابت است و از ابتدا طوری کشیده شده که جابجایی طولی آن در $(۰\le x\le c)\, y(x,۰)=bx$ صدق می‌کند. آن میله را در لحظهٔ $t=۰$ از آن موقعیت خارج ساخته، انتهای $x=c$ آن را آزاد می‌گذاریم، بنابراین $y_x(c,t)=۰$. عبارت زیر را برای جابجایی‌ها به دست آورید:

$$y(x,t)=\frac{b}{۲}\left[H(x+at)+H(x-at)\right]$$

که در آن $H(x)$ تابع موج مثلثی (۵) در مثال ۲، بخش ۴۶ است. (جز در مورد شرط روی $x=۰$، این مسأله مقدار مرزی در اینجا با مسأله‌ای که در بخش ۳۷ حل شد یکی است.)

۲. فرض کنید انتهای $x=۰$ یک میلهٔ کشسان افقی به طول c ثابت باشد و در انتهای $x=c$ این میله یک نیروی ثابت $F_۰$ در هر واحد سطح موازی با آن وارد می‌شود. همچنین فرض کنید همهٔ قسمتهای این میله ابتداً بدون تنش بوده و در حالت سکون است. بنابراین جابجایی‌ها یعنی $y(x,t)$ در مسأله مقدار مرزی زیر صدق می‌کند:

$$y_{tt}(x,t)=a^{۲}y_{xx}(x,t) \qquad (۰<x<c\ ,\ t>۰)$$

$$y(۰,t)=۰ \qquad , \qquad Ey_x(c,t)=F_۰$$

$$y(x,۰)=۰ \qquad , \qquad y_t(x,۰)=۰$$

که در آن $a^{۲}=\frac{E}{\delta}$، E مدول کشسانی یانگ، و δ جرم هر واحد حجم ماده است. (بخش ۶ را ببینید).

(الف) بنویسید $y(x,t)=Y(x,t)+\Phi(x)$ (با مثال ۱ بخش ۴۹ مقایسه کنید) و $\Phi(x)$ را طوری تعیین کنید که $Y(x,t)$ در یک مسألهٔ مقدار مرزی صدق کند که جوابش صرفاً با

---

۱. پاورقی مجموعهٔ مسائل بخش ۴۸ در اینجا هم به کار می‌رود.

رجوع به جواب مسألهٔ ۱ به دست می‌آید. بدین ترتیب نشان دهید که:

$$y(x,t)=\frac{F_\circ}{E}\left[x-\frac{H(x+at)+H(x-at)}{۲}\right]$$

که در آن $H(x)$ همان تابع موج مثلثی مسألهٔ ۱ است.

(ب) از عبارت به دست آمده برای $y(x,t)$ در قسمت (الف) استفاده کرده، نشان دهید که آن جابجایی‌ها برحسب t تناوبی هستند، با دوره تناوب

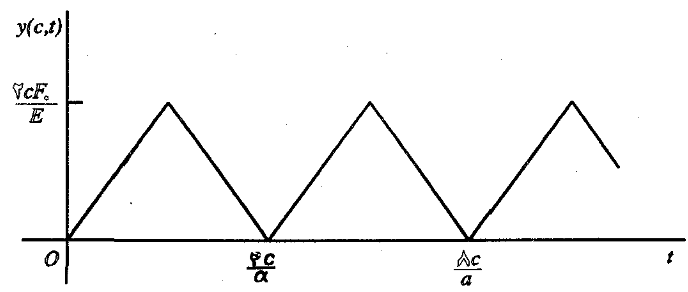
$$T_\circ=\frac{۴c}{a}=۴c\sqrt{\frac{\delta}{E}}$$

یعنی نشان دهید که: $$y(x,t+T_\circ)=y(x,t)$$

۳. نشان دهید که جابجایی‌های میلهٔ مسألهٔ ۲ در انتهای $x=c$ عبارتند از:

$$y(c,t)=\frac{F_\circ}{E}\left[c+H(at-c)\right]$$

و نمودار این تابع به صورتی است که در شکل ۵۴ نشان داده شده است.

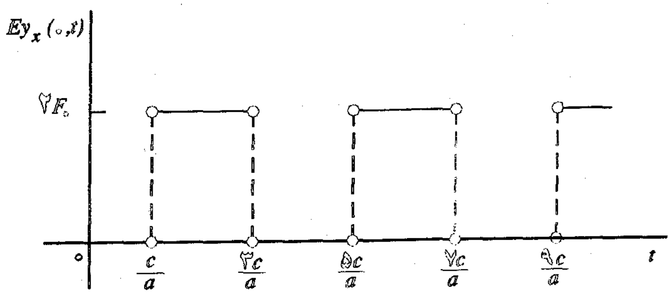


شکل ۵۴

۴. نشان دهید نیرویی که میلهٔ مسألهٔ ۲ در هر واحد سطح روی سطح اتکای انتهای $x=\circ$ وارد می‌کند عبارت است از (بخش ۶ را ببینید):

$$Ey_x(\circ,t)=F_\circ\left[1-H'(at)\right]$$

و نمودار این تابع به صورتی است که در شکل ۵۵ نشان داده شده است. (توجه دارید که این نیرو دو برابر نیرویی می‌شود که طی فواصل زمانی منظم وارد شده است.)



شکل ۵۵

۵. فرض کنید ثابت $F_\circ$ در مسألهٔ ۲ با یک تابع ضربه‌ای متناهی به مدت $\frac{4c}{\alpha}$ جابجا شود:

$$F(t)=\begin{cases} F_\circ & \circ<t<\frac{4c}{\alpha} \quad \text{هرگاه} \\ \circ & t>\frac{4c}{\alpha} \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

(الف) شرح دهید که چرا طی بازه زمانی $\circ<t<\frac{4c}{\alpha}$ جابجایی‌های $y(x,t)$ در اینجا با مسألهٔ ۲ یکسان است. نشان دهید:

$$y(x,\frac{4c}{a})=\circ \quad , \quad y_t(x,\frac{4c}{a})=\circ$$

هرگاه $y(x,t)$ جواب مسألهٔ ۲ باشد، سپس شرح دهید که چرا اینجا پس از زمان $t=\frac{4c}{a}$ هیچ حرکتی در میله نیست.

(ب) از نتایج قسمت (الف) و مسألهٔ ۳ استفاده کرده، نشان دهید که انتهای $x=c$ آن میله

طی بازهٔ زمانی $\circ<t<\frac{2c}{a}$ با سرعت ثابت $v_\circ=\frac{aF_\circ}{E}$ حرکت می‌کند و سپس طی بازهٔ $\frac{2c}{a}<t<\frac{4c}{a}$ با سرعت $-v_\circ$ و پس از زمان $t=\frac{4c}{a}$ بدون حرکت باقی می‌ماند.

۶. انتهای $x=1$ یک تار کشیده شده به طور کشسان تکیه داده شده (شکل ۵۶) طوری که جابجایی‌های عرضی $y(x,t)$ در شرط $y_x(1,t)=-hy(1,t)$ صدق می‌کنند، که در آن h یک ثابت مثبت است. همچنین:

$$y(\circ,t)=\circ \qquad , \qquad y(x,\circ)=bx \qquad , \qquad y_t(x,\circ)=\circ$$

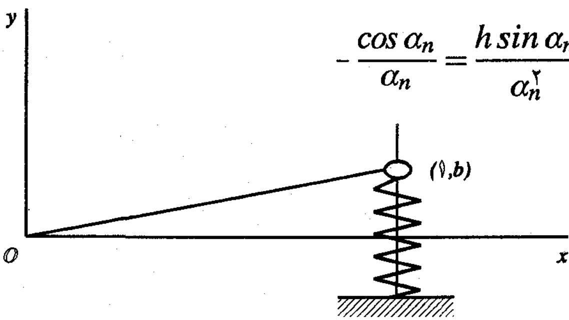
که در آن b یک ثابت مثبت و معادلهٔ موج $y_{tt}=y_{xx}$ صادق است. عبارت زیر را برای این جابجایی‌ها به دست آورید:

$$y(x,t)=2bh\,(h+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n\sin\alpha_n x}{\alpha_n^2\,(h+\cos^2\alpha_n)}\cos\alpha_n t$$

که در آن
$$\tan\alpha_n=\frac{-\alpha_n}{h} \qquad (\alpha_n>\circ)$$

راهنمایی: برای ساده کردن جواب به این فرم توجه کنید که:

$$-\frac{\cos\alpha_n}{\alpha_n}=\frac{h\sin\alpha_n}{\alpha_n^2}$$

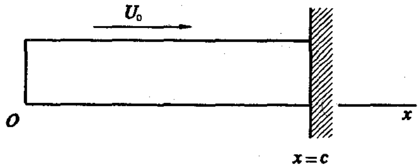


شکل ۵۶

۷. یک میلهٔ کشسان بدون تنش با طول c که مساحت سطوح مقطع آن A و مدول کشسانی آن E است، به طور طولی با سرعت $v_\circ$ حرکت می‌کند، زمانی که در لحظهٔ $t=\circ$ انتهای طرف راست آن $x=c$ به یک تکیه‌گاه صلب برخورد کرده و می‌چسبد. (شکل ۵۷). بنابراین جابجایی‌های $y(x,t)$ در معادلهٔ موج $y_{tt}=a^2y_{xx}$ و شرایط انتهایی

$y_x(\circ,t)=y(c,t)=\circ$ و همچنین شرایط اولیهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$y(x,\circ)=\circ \qquad y_t(x,\circ)=v_\circ$$



شکل ۵۷

(الف) عبارت زیر را برای این جابجائی‌ها به دست آورید:

$$y(x,t)=\frac{\text{۲}v_\circ}{ac}\sum_{n=\text{۱}}^{\infty}\frac{(-\text{۱})^{n+\text{۱}}}{\alpha_n^{\text{۲}}}\cos\alpha_n x\sin\alpha_n at$$

که در آن $\qquad \alpha_n=\frac{(\text{۲}n-\text{۱})\pi}{\text{۲}c} \qquad (n=\text{۱},\text{۲},\dots)$

(ب) از عبارت به دست آمده برای $y(x,t)$ در قسمت (الف) استفاده کرده، نشان دهید که

$$y\left(x,\frac{\text{۲}c}{a}\right)=\circ \qquad y_t\left(x,\frac{\text{۲}c}{a}\right)=-v_\circ \qquad (\circ<x<c)$$

بر طبق این دو معادله، اگر انتهای $x=c$ این میله در زمان $t=\frac{\text{۲}c}{a}$ به طور ناگهانی آزاد شود، آن میله پس از آن زمان به عنوان یک جسم بدون تنش صلب، با سرعت $-v_\circ$ حرکت خواهد کرد.

(ج) نشان دهید چگونه از عبارت بخش (الف) نتیجه می‌شود که مادامی که انتهای آن میله به تکیه‌گاه چسبیده است، نیروی وارد بر تکیه‌گاه را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$-AEy_x(c,t)=\frac{AEv_\circ}{a}M\left(\frac{\text{۲}c}{a},t\right)$$

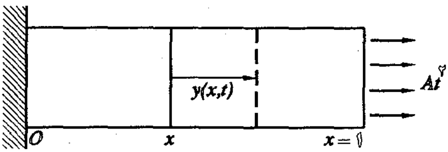
که در آن $M(c,t)$ $(t>\circ)$ موج مربعی است که توسط سری زیر نمایش داده می‌شود (مسألهٔ ۹ بخش ۲۱ را ببینید)

$$M(c,t)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲n-۱}\sin\frac{(۲n-۱)\pi t}{c}\qquad (t\neq c,۲c,۳c,...)$$

۸. فرض کنید $y(x,t)$ نمایش جابجایی‌های طولی در یک میلهٔ کشسان به طول واحد باشد که انتهای $x=۰$ آن ثابت و در انتهای $x=۱$ آن نیرویی متناسب با $t^۲$ به طور طولی وارد می‌شود (شکل ۵۸)، بنابراین:

$$y(۰,t)=۰\qquad,\qquad y_x(۱,t)=At^۲\qquad (A\neq ۰)$$

آن میله در ابتدا بدون تنش و در حال سکون است و واحد زمان طوری است که در آن معادلهٔ موج، $a=۱$



شکل ۵۸

(الف) مسألهٔ مقدار مرزی کامل را برای $y(x,t)$ بنویسید، مشاهده می‌کنید که اگر $Y(x,t)=y(x,t)-At^۲x$، آنگاه

$$Y(۰,t)=۰\qquad,\qquad Y_x(۱,t)=۰$$

مسألهٔ مقدار مرزی کامل را برای $Y(x,t)$ بنویسید، معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به آن مسأله عبارت است از:

$$Y_{tt}(x,t)=Y_{xx}(x,t)-۲Ax\qquad (۰<x<۱\ ,\ t>۰)$$

سپس با کمک نمایش (۴) در مثال ۲ بخش ۴۶، از روش تغییر پارامترها برای حل این مسألهٔ مقدار مرزی برای $Y(x,t)$ استفاده کرده، بدین ترتیب این جواب از مسألهٔ اصلی را به دست آورید:

$$y(x,t)=A\left[xt^{2}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^{4}}(1-\cos\alpha_n t)\sin\alpha_n x\right]$$

که در آن
$$\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

(ب) از نتیجه مسألهٔ (ب) ۱۱ بخش ۴۶ استفاده کرده، جواب قسمت (الف) را در اینجا به شکل ذیل بنویسید:

$$y(x,t)=A\left[x(t^{2}-1)+\frac{1}{3}x^{3}+\frac{Q(x+t)+Q(x-t)}{2}\right]$$

که در آن $Q(x)$ تابع پاد تناوبی با دورهٔ تناوب ۲ بوده، توسط معادلات زیر توصیف می‌شود:

$$Q(x)=x\left(1-\frac{1}{3}x^{2}\right)\qquad(-1\le x\le 1)$$

$$Q(x+2)=-Q(x)\qquad(-\infty<x<\infty)$$

۹. همان مسألهٔ مقدار مرزی مسألهٔ ۸ را در نظر بگیرید، با این تفاوت که شرط در نقطه انتهایی $x=1$ میله با شرط زیر تعویض شود.

$$y_x(1,t)=\sin\omega t$$

(الف) با روندی مانند مسألهٔ ۸ نشان دهید که اگر:

$$\omega_n=\frac{(2n-1)\pi}{2}\qquad(n=1,2,\ldots)$$

و برای هر $\omega\neq\omega_n$، آنگاه:

$$y(x,t)=x\sin\omega t+2\omega\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\omega_n(\omega^{2}-\omega_n^{2})}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega t-\sin\omega_n t\right)\sin\omega_n x$$

(ب) با اصلاح قسمت (الف) نشان دهید که تشدید رخ می‌دهد، (بخش ۳۸) هرگاه $\omega=\omega_N$ برای هر مقدار N .

راهنمائی: در هر قسمت از این مسأله ، رجوع به جواب عمومی یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مشخص در مسألهٔ ۱۳ ، بخش ۳۸ مفید است.

۱۰. با رجوع به بسط (۴) در مثال ۲ ، بخش ۴۶ ، و بسط به دست آمده در مسألهٔ ۷ ، بخش ۴۶ ، جواب در مسألهٔ ۹ (الف) اینجا را بدین صورت بنویسید:

$$y(x,t)=\frac{\sin \omega x \sin \omega t}{\omega \cos \omega}+۲\omega \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{\omega_n (\omega^۲-\omega_n^۲)} \sin \omega_n x \sin \omega_n t$$

که در آن
$$\omega_n=\frac{(۲n-۱)\pi}{۲}$$

فصل ٦

انتگرالهای فوریه و کاربردهای آن

در فصل ۲ (بخش ۲۱) دیدیم که هر تابع متناوب با دورهٔ تناوب $2c$ دارای یک نمایش سری فوریه است که به ازای هر x معتبر است، هر گاه که در بازهٔ اصلی $-c<x<c$ در شرایطی صدق کند. در این فصل به بررسی نظریهٔ نمایشهای مثلثاتی توابعی می‌پردازیم که به ازای هر x تعریف شده‌اند و متناوب نیستند. چنین نمایشهایی که شبیه نمایشهای سری فوریه‌اند، بیشتر شامل انتگرالهای ناسره‌اند تا سریهای نامتناهی.

۵۱. فرمول انتگرال فوریه

از مسألهٔ ۱۳ بخش ۲۱ می‌دانیم که سری فوریهٔ نظیر تابع $f(x)$ در بازهٔ $-c<x<c$ را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(s)\,ds + \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-c}^{c} f(s)\cos\left[\frac{n\pi}{c}(s-x)\right]ds \qquad (1)$$

و از نتیجهٔ بخش ۲۱ شرایطی را که تحت آنها این سری همه جا در بازهٔ $-c<x<c$ به $f(x)$ همگرا باشد می‌دانیم. یعنی کافی است f در آن بازه، قطعه‌ای هموار باشد و مقدار f در هر یک از نقاط ناپیوستگی‌اش مقدار میانگین حدود یکطرفهٔ $f(x+)$ و $f(x-)$ باشد.

حال فرض کنید f در هر بازهٔ محدود مانند $-c<x<c$ در چنین شرایطی صدق کند. در این صورت c را می‌توان هر مقدار مثبت بدلخواه بزرگ اما متناهی گرفت و سری (۱) بر قطعه خط بزرگ $-c<x<c$ از محور xها $f(x)$ را نمایش می‌دهد. اما از این نمایش

سری برای بقیه محور xها نمی‌توان استفاده کرد، مگر آنکه f متناوب و با دورهٔ تناوب $2c$ باشد، زیرا مجموع سری دارای این تناوب است. برای یافتن نمایشی که در صورت متناوب نبودن f به ازای هر x برقرار باشد، طبیعی است که در سری(۱) سعی کنیم با میل دادن c به بینهایت اصلاحی انجام دهیم. اگر انتگرال ناسرهٔ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds$$

موجود باشد، جمله اول سری صفر خواهد شد. اگر قرار دهیم $\Delta\alpha=\pi/c$ جملات باقیمانده به شکل

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha\int_{-c}^{c} f(s)\cos\left[n\Delta\alpha(s-x)\right]ds \tag{۲}$$

در می‌آید که همان

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F_c(n\Delta\alpha,x)\Delta\alpha \qquad \left(\Delta\alpha=\frac{\pi}{c}\right) \tag{۳}$$

است که در آن:

$$F_c(\alpha,x)=\int_{-c}^{c} f(s)\cos\alpha(s-x)\,ds \tag{۴}$$

فرض کنید مقدار x ثابت باشد و c بزرگ، بنابراین $\Delta\alpha$ عدد مثبت کوچکی است. نقاط $n\Delta\alpha$ $(n=1,2,\ldots)$ در طول محور xهای مثبت به فاصله مساوی قرار داده شده‌اند و چون سری عبارت (۳) شبیه مجموع‌هایی است که در تعریف انتگرال معین به کار می‌رود، می‌توان انتظار داشت که وقتی $\Delta\alpha$ به صفر میل کند، مجموع سری به

$$\int_{0}^{\infty} F_c(\alpha,x)\,d\alpha \tag{۵}$$

یا احتمالاً به

$$\int_{0}^{\infty} F_{\infty}(\alpha,x)\,d\alpha \tag{۶}$$

میل کند. ولی همان طور که انتگرال (۶) نشان می‌دهد تابع $F_c(\alpha,x)$ با $\Delta\alpha$ تغییر می‌کند زیرا $c=\dfrac{\pi}{\Delta\alpha}$. همین طور حد سری عبارت (۳) وقتی $\Delta\alpha$ به صفر میل کند، حتی اگر بتوان

c را ثابت گرفت، تعریف انتگرال ناسرهٔ (۵) نیست.

از عملیات مزبور چنین برمی‌آید که تحت شرایط مناسب روی f ، تابع ممکن است دارای نمایش زیر باشد:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\cos\alpha(s-x)\,ds\,d\alpha \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{۷}$$

این فرمول انتگرال کوشی برای تابع f است که در بخش ۵۴ ثابت خواهد شد.

این فرمول را می‌توان برحسب توابع سینوس و کسینوس مجزّا چنین نوشت:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x]\,d\alpha \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{۸}$$

که در آن:

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\alpha x\,dx\ ,\ B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\alpha x\,dx \tag{۹}$$

عبارات (۸) و (۹) شکلی شبیه نمایش سریهای فوریه در $-\pi<x<\pi$ و فرمولهای ضرایب a_n و b_n دارد که در بخش ۱۵ به دست آمد.

۵۲. یک فرمول انتگرالگیری

درست همان طور که در بخش ۱۹ مقدمات قضیه فوریه را با نظریه‌ای مقدماتی فراهم کردیم، در اینجا و در بخش ۵۳ زمینه‌ای فراهم می‌آوریم که برای اثبات قضیهٔ انتگرال فوریه اساسی است و شرایط کافی به ما می‌دهد که تحت آنها نمایش (۷) بخش ۵۱ برقرار است.

این بخش به محاسبهٔ انتگرالهای ناسره اختصاص یافته که در ریاضیات کاربردی اهمیت زیادی دارد. در اینجا نشان می‌دهیم که[1]:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\ x}{x}dx=\frac{\pi}{2} \tag{۱}$$

---

۱. برای روش دیگری که تقریباً استانده است، مثلاً کتاب بوک (۱۹۷۸ صفحات ۲۹۵- ۲۹۳) را ببینید. یک روش محاسبه با استفاده از متغیرهای مختلط در کتاب مؤلفین (۱۹۹۰ صفحات ۱۹۸ - ۱۹۷) نشان داده شده و هر دو کتاب در کتابنامه آمده است.

روش محاسبهٔ ما طوری است که ابتدا باید نشان دهیم انتگرال عملاً همگراست. توجه می‌کنیم که تابع زیر انتگرال $(\sin x)/x$ در هر بازهٔ محدود قطعه‌ای پیوسته است و چون به ازای هر عدد مثبت c:

$$\int_{0}^{c} \frac{\sin\ x}{x}dx = \int_{0}^{1} \frac{\sin\ x}{x}dx + \int_{1}^{c} \frac{\sin\ x}{x}dx \tag{2}$$

کافی است نشان دهیم که انتگرال زیر همگراست:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{c\to\infty} \int_{1}^{c} \frac{\sin x}{x}dx \tag{3}$$

برای انجام این کار با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء می‌نویسیم:

$$\int_{1}^{c} \frac{\sin x}{x}dx = \cos 1 - \frac{\cos c}{c} - \int_{1}^{c} \frac{\cos x}{x^2}dx \tag{4}$$

چون $|(\cos c)/c| \leq 1/c$ وقتی c به بینهایت میل کند جملهٔ دوم سمت راست به صفر میل می‌کند. همین طور، چون $|(\cos x)/x^2| \leq 1/x^2$ انتگرال

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx \tag{5}$$

(مطلقاً) همگراست. بنابراین حد سمت چپ رابطهٔ (۴) وقتی c به بینهایت میل کند موجود است یعنی انتگرال (۳) همگراست.

حال که ثابت کرده‌ایم انتگرال (۱) به عددی مانند L همگراست یا:

$$\lim_{c\to\infty} \int_{0}^{c}\frac{\sin\ x}{x}dx = L$$

توجه می‌کنیم که بخصوص اگر N با مقادیر صحیح مثبت به بینهایت میل کند

$$\lim_{N\to\infty} \int_{0}^{(2N+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx = L \tag{6}$$

یعنی:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\circ}^{\pi}\frac{\sin\left[(۲N+۱)u/۲\right]}{u}du=L \qquad (۷$$

که در آن برای متغیر انتگرالگیری جایگزینی $x=(۲N+۱)u/۲$ انجام گرفته است. ملاحظه می‌کنید که رابطهٔ (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\circ}^{\pi}g(u)D_N(u)\,du=L \qquad (۸$$

که در آن:

$$g(u)=\frac{\sin(u/۲)}{(u/۲)} \qquad (۹$$

و $D_N(u)$ هستهٔ دیریکله است(بخش ۱۸).

$$D_N(u)=\frac{\sin\left[(۲N+۱)u/۲\right]}{۲\sin(u/۲)} \qquad (۱۰$$

بعلاوه تابع $g(u)$در شرایط لم ۲ بخش ۱۸ صدق می‌کند (مسألهٔ ۱ بخش ۵۴ را ببینید) و $g(\circ+)=۱$. بنابراین طبق آن لم حد (۸) دارای مقدار $\pi/۲$ است و بنابر یکتایی حدود، $L=\pi/۲$. حال فرمول انتگرالگیری (۱) ثابت شد.

۵۳. دولم

دولم این بخش نظیر لمهای بخش ۱۸ هستند که به قضیهٔ همگرایی برای سریهای فوریه منجر شد. بیان و اثبات قضیهٔ نظیر برای انتگرالهای فوریه در بخش ۵۴ خواهد آمد.

لم ۱. اگر تابع $G(u)$ در بازهٔ $\circ<x<c$ قطعه‌ای پیوسته باشد، آنگاه:

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\circ}^{c}G(u)\sin ru\,du=\circ \qquad (۱$$

این صورت کلی لم‌ریمان- لوبگ در مورد تابع سینوس است. لم ۱ بخش ۱۸ حالت خاص آن است، که در آن $c=\pi$ و r به جای این که مثل اینجا به طور پیوسته به بینهایت میل کند،

از میان نصف اعداد صحیح $r=(۲N+۱)/۲$ $(N=۱,۲,...)$ به بینهایت میل می‌کند. همچنین اگر در این لم به جای $Sin\ ru$ مقدار $cos\ ru$ را قرار دهیم، باز هم نتیجه برقرار است و اثبات آن نظیر اثبات زیر در مورد $sin\ ru$ است.

برای تحقیق حد(۱) کافی است نشان دهیم که اگر $G(u)$ در هر نقطه از بازه‌ای مانند $a\le u\le b$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^b G(u)\sin ru\,du = ۰ \qquad (۲$$

زیرا بنابر بحث انتگرالهای توابع قطعه‌ای پیوسته در بخش ۱۰، انتگرال موجود در حد (۱) را می‌توان به صورت مجموع تعدادی متناهی انتگرال از نوع مطرح شده در حد (۲) نوشت.

پس با فرض اینکه $G(u)$ در بازهٔ بسته و محدود $a\le u\le b$ پیوسته است، توجه داریم که باید در آن بازه پیوستهٔ یکنواخت نیز باشد. یعنی به ازای هر عدد مثبت ε عدد مثبتی مانند δ باید باشد که هرگاه u و v در آن بازه باشند و در نامساوی $|u-v|<\delta$ صدق کنند داشته باشیم[۱]:

$$|G(u)-G(v)|<\varepsilon$$

با قرار دادن

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_۰}{۲(b-a)}$$

که در آن $\varepsilon_۰$ عدد مثبت دلخواهی است، مطمئنیم که عدد مثبتی مانند δ هست که اگر $|u-v|<\delta$ آنگاه:

$$\left|G(u)-G(v)\right| < \frac{\varepsilon_۰}{۲(b-a)} \qquad (۳$$

برای به دست آوردن حد (۲) بازهٔ $a\le u\le b$ را به N زیربازهٔ متساوی‌الفاصله $(b-a)/N$ به وسیلهٔ نقاط $u_N=b$ و ... و $u_۲$ و $u_۱$ و $a=u_۰$ تقسیم کنید که در آن

۱. به عنوان مثال، کتاب تیلورومان (۱۹۸۳ صفحات ۵۳۱-۵۲۹) را که در کتابنامه آمده است ببینید.

$u_\circ < u_1 < u_2 < \ldots < u_N$ و فرض کنید N به قدر کافی بزرگ باشد تا طول هر زیر بازه از عدد δ در شرط (۳) کوچکتر باشد. در این صورت بنویسید:

$$\int_a^b G(u)\sin ru\,du = \sum_{n=1}^{N} \int_{u_{n-1}}^{u_n} G(u)\sin ru\,du =$$

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{u_{n-1}}^{u_n} [G(u) - G(u_n)]\sin ru\,du + \sum_{n=1}^{N} G(u_n) \int_{u_{n-1}}^{u_n} \sin ru\,du$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\left| \int_a^b G(u)\sin ru\,du \right| \leq \sum_{n=1}^{N} \int_{u_{n-1}}^{u_n} \left|G(u) - G(u_n)\right| \left|\sin ru\right| du + \tag{۴}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \left|G(u_n)\right| \left| \int_{u_{n-1}}^{u_n} \sin ru\,du \right|$$

بنابر شرط (۳) و اینکه $|\sin ru| \leq 1$ بسادگی می‌توان دید که:

$$\int_{u_{n-1}}^{u_n} \left|G(u) - G(u_n)\right| \left|\sin ru\right| du < \frac{\varepsilon_\circ}{2(b-a)} \cdot \frac{b-a}{N} = \frac{\varepsilon_\circ}{2N} \quad (n = 1, 2, \ldots N)$$

همین طور، چون $G(u)$ در بازهٔ بستهٔ $a \leq u \leq b$ پیوسته است، در این بازه محدود است، یعنی عدد مثبتی مانند M هست که به ازای هر u در این بازه $|G(u)| \leq M$. بعلاوه:

$$\left| \int_{u_{n-1}}^{u_n} \sin ru\,du \right| \leq \frac{|\cos ru_n| + |\cos ru_{n-1}|}{r} \leq \frac{2}{r} \quad (n = 1, 2, \ldots N)$$

که در آن مثبت بودن r بدیهی است. با این ملاحظات درمی‌یابیم که از نامساوی (۴) رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\left| \int_a^b G(u)\sin ru\,du \right| < \frac{\varepsilon_\circ}{2} + \frac{2MN}{r}$$

حال می‌نویسیم $R = 4MN/\varepsilon_\circ$ و ملاحظه می‌کنیم که اگر $r > R$ آنگاه $2MN/r < \varepsilon_\circ/2$.

در نتیجه

هرگاه ، $r>R$,
$$\left|\int_a^b G(u)\sin ru\,du\right|<\frac{\varepsilon_\circ}{۲}+\frac{\varepsilon_\circ}{۲}=\varepsilon_\circ$$

و حد (۲) ثابت شد.

لم دوم نتیجهٔ مستقیم اولی است.

لم ۲. فرض کنید تابع $g(u)$ در هر بازهٔ محدود از محور u مثبت قطعه‌ای پیوسته و مشتق راست $g'_R(\circ)$ موجود باشد. اگر انتگرال ناسرهٔ

۵)
$$\int_\circ^\infty \left|g(u)\right| du$$

همگرا باشد آنگاه:

۶)
$$\lim_{r\to\infty}\int_\circ^\infty g(u)\,\frac{\sin ru}{u}du=\frac{\pi}{۲}g(\circ+)$$

ملاحظه می‌کنید که انتگران رابطهٔ (۶) مثل $g(u)$ در آن بازه‌ها قطعه‌ای پیوسته است و چنانچه $u\geq ۱$،

$$\left|g(u)\frac{\sin ru}{u}\right|\leq\left|g(u)\right|$$

بنابراین همگرایی انتگرال (۵) مستلزم وجود انتگرال رابطهٔ (۶) است.

اثبات لم را با نشان دادن برقراری آن وقتی به جای برد انتگرالگیری بازهٔ محدود دلخواهی مانند $\circ<x<c$ قرار دهیم شروع می‌کنیم. یعنی ابتدا نشان می‌دهیم که اگر تابع $g(u)$ در بازهٔ محدود $\circ<x<c$ قطعه‌ای پیوسته و $g'_R(\circ)$ موجود باشد، آنگاه:

۷)
$$\lim_{r\to\infty}\int_\circ^c g(u)\frac{\sin ru}{u}du=\frac{\pi}{۲}g(\circ+)$$

برای اثبات آن قرار می‌دهیم:

$$\int_\circ^c g(u)\frac{\sin ru}{u}du=I(r)+J(r)$$

که در آن:

$$I(r)=\int_\circ^c\frac{g(u)-g(\circ+)}{u}\sin ru\,du\ \ ,\ \ J(r)=\int_\circ^c g(\circ+)\frac{\sin ru}{u}du$$

چون تابع $G(u)=[g(u)-g(0+)]/u$ در بازهٔ $0<x<c$ قطعه‌ای پیوسته است که در آن $G(0+)=g'_R(0)$، تنها به استناد لم ۱ می‌توان ملاحظه کرد که:

$$\lim_{r\to\infty} I(r)=0 \tag{8}$$

از طرف دیگر اگر در نمایش انتگرالی $J(r)$ قرار دهیم $x=ru$ بنابر دستور انتگرالگیری بخش ۵۲ می‌بینیم که:

$$\lim_{r\to\infty} J(r)=g(0+)\lim_{r\to\infty}\int_0^{cr}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}g(0+) \tag{9}$$

حال حد (۷) نتیجهٔ بدیهی حدود (۸) و (۹) است.

برای آنکه عملاً حد (۶) را به دست آوریم، توجه می‌کنیم که:

$$\left|\int_c^{\infty} g(u)\frac{\sin ru}{u}du\right|\le\int_c^{\infty}\left|g(u)\right|du$$

که در آن فرض کرده‌ایم $c\ge 1$. در این صورت می‌توان نوشت:

$$\left|\int_0^{\infty} g(u)\frac{\sin ru}{u}du-\frac{\pi}{2}g(0+)\right|\le\left|\int_0^{c} g(u)\frac{\sin ru}{u}du-\frac{\pi}{2}g(0+)\right| \tag{10}$$

$$+\int_c^{\infty}\left|g(u)\right|du$$

c را به قدر کافی بزرگ می‌گیریم، تا مقدار انتگرال آخری سمت راست که باقیماندهٔ انتگرال (۵) است از $\varepsilon/2$ کوچکتر باشد، که در آن ε عدد مثبت دلخواهی مستقل از مقدار r است. به استناد حد (۷) عدد مثبتی مانند R هست به طوری که هرگاه $r>R$ اولین قدر مطلق در سمت راست نامساوی (۱۰) نیز از $\varepsilon/2$ کوچکتر باشد. پس نتیجه می‌شود که هرگاه $r>R$ داریم:

$$\left|\int_0^{\infty} g(u)\frac{\sin ru}{u}du-\frac{\pi}{2}g(0+)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

و این همان حکم (۶) است.

۵۴ . یک قضیهٔ انتگرال فوریه

قضیهٔ زیر شرایطی به ما می‌دهد که تحت آنها نمایش انتگرال فوریه (۷) بخش ۵۱ برقرار است.[۱]

قضیه. فرض کنید f نمایش تابعی باشد که بر هر بازهٔ محدود محور x ها قطعه‌ای پیوسته و بر آن محور مطلقاً انتگرالپذیر است، یعنی انتگرال ناسرهٔ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right| dx$$

همگراست، در این صورت انتگرال فوریه

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos \alpha(s-x)\, ds\, d\alpha \qquad (1)$$

در هر نقطهٔ $x(-\infty < x < \infty)$ که هر دو مشتق یکطرفهٔ $f_R'(x)$ و $f_L'(x)$ موجود باشند به میانگین حدود یکطرفهٔ f در آن نقطه

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} \qquad (2)$$

همگراست.

اثبات را با بیان این نکته شروع می‌کنیم که انتگرال (۱) نمایش حد انتگرال زیر است وقتی r به بینهایت میل کند.

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{r} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos \alpha (s-x)\, ds\, d\alpha = \frac{1}{\pi} \left[I(r,x) + J(r,x) \right] \qquad (3)$$

که در آن:

$$I(r,x) = \int_{0}^{r} \int_{x}^{\infty} f(s) \cos \alpha (s-x)\, ds\, d\alpha$$

و

$$J(r,x) = \int_{0}^{r} \int_{-\infty}^{x} f(s) \cos \alpha (s-x)\, ds\, d\alpha$$

حال نشان می‌دهیم که انتگرالهای $I(r, x)$ و $J(r, x)$ موجودند و با فرض وجود $f_R'(x)$ و $f_L'(x)$ رفتار این انتگرالها را وقتی r به بینهایت میل کند بررسی می‌کنیم. ابتدا به

---

۱. برای شرایط دیگر، کتابهای کارسلو (۱۹۵۲ ص ۳ به بعد) و تیچمارش (۱۹۸۶ ص ۱۳ به بعد) را که هر دو در کتابنامه آمده است، ببینید.

$I(r, x)$ باز می‌گردیم، متغیر جدید انتگرالگیری $u=s-x$ را معرفی کرده، آن انتگرال را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$I(r,\ x)=\int_{\circ}^{r}\int_{\circ}^{\infty} f(x+u)\cos\alpha u\,du\,d\alpha \tag{۴}$$

چون :

$$\left|f(x+u)\cos\alpha u\right|\leq\left|f(x+u)\right|$$

و به دلیل اینکه:

$$\int_{\circ}^{\infty}\left|f(x+u)\right|du=\int_{x}^{\infty}\left|f(s)\right|ds\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(s)\right|ds$$

می‌توان از آزمون $M-$ وایراشتراس، برای انتگرالهای ناسره استفاده کرد و نشان داد که انتگرال

$$\int_{\circ}^{\infty} f(x+u)\cos\alpha u\,du$$

نسبت به متغیر α همگرای یکنواخت است. در نتیجه نه تنها انتگرال مکرر (۴) موجود است، بلکه می‌توان ترتیب انتگرالگیری را عوض کرد:[۱]

$$I(r,x)=\int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{r} f(x+u)\cos\alpha u\,d\alpha\,du=\int_{\circ}^{\infty} f(x+u)\,\frac{\sin ru}{u}du$$

حال تابع $g(u)=f(x+u)$ در همهٔ شرایط لم ۲ بخش ۵۳ صدق می‌کند (با بخش ۱۹ مقایسه کنید). بنابراین اگر آن لم را برای انتگرال آخری به کار بریم، درمی‌یابیم که:

$$\lim_{r\to\infty} I(r,x)=\frac{\pi}{۲}\,f(x+) \tag{۵}$$

---

۱. قضایای انتگرالهای ناسره که در اینجا به کار رفت در کتاب باک (۱۹۷۸ بخش ۶ فصل چهارم) که در کتابنامه آمده و بیشتر کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال بررسی شده است. قضایا معمولاً برای انتگرالهای با انتگران پیوسته گفته شده اما موقعی نیز که انتگرانها قطعه‌ای پیوسته باشند برقرار است.

حد $J(r, x)$ وقتی r به بینهایت میل کند، به طریق مشابه بررسی می‌شود. در اینجا تغییر متغیر $u=x-s$ را داده، می‌نویسیم:

$$J(r,x) = \int_{\circ}^{r} \int_{\circ}^{\infty} f(x-u) \cos \alpha u \, du \, d\alpha = \int_{\circ}^{\infty} f(x-u) \frac{\sin ru}{u} du$$

وقتی $g(u)=f(x-u)$، حد

$$\lim_{r \to \infty} J(r,x) = \frac{\pi}{۲} f(x-) \qquad (۶$$

نیز از لم ۲ بخش ۵۳ به دست می‌آید.

بالاخره به استناد حدود (۵) و (۶) می‌بینیم که حد سمت چپ رابطهٔ (۳) وقتی r به بینهایت میل کند دارای مقدار (۲) است که بنابراین، مقدار انتگرال (۱) در هر نقطه‌ای است که مشتقات یکطرفهٔ f در آن موجودند.

توجه کنید که اگر f در شرایط قضیه صدق کند، چون انتگرالهای عبارتهای (۸) و (۹) بخش ۵۱ برای ضرائب $A(\alpha)$ و $B(\alpha)$ موجودند، صورت (۸) بخش ۵۱ برای انتگرال فوریه نیز برقرار است.

مسائل

۱. نشان دهید که تابع

$$g(u) = \frac{\sin (u/۲)}{(u/۲)}$$

که در رابطهٔ (۸) بخش ۵۲ از آن استفاده شد، در شرایط لم ۲ بخش ۱۸ صدق می‌کند. به عبارت دقیقتر نشان دهید که g در بازهٔ $\circ < x < \pi$ قطعه‌ای پیوسته و $g_R'(\circ)$ موجود است.

راهنمایی : برای بدست آوردن $g_R'(\circ)$ نشان دهید که

$$g_R'(\circ) = \lim_{\substack{u \to \circ \\ u > \circ}} \frac{۲\sin (u/۲) - u}{u^۲}$$

سپس دو بار از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنید.

۲. تحقیق کنید که تابع f که با ضابطه‌های زیر تعریف می‌شود در همهٔ شرایط قضیه بخش ۵۴ صدق می‌کند:

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & \text{هرگاه } |x|<۱ \\ ۰ & \text{هرگاه } |x|>۱ \end{cases}$$

و $f(\pm ۱)=\frac{۱}{۲}$. بدین ترتیب نشان دهید که به ازای هر x $(-\infty<x<\infty)$،

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\sin\alpha(۱+x)+\sin\alpha(۱-x)}{\alpha}\,d\alpha=\frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\sin\alpha\cos\alpha x}{\alpha}\,d\alpha$$

۳. نشان دهید که تابع تعریف شده با ضابطه‌های زیر:

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & \text{هرگاه } x<۰ \\ e^{-x} & \text{هرگاه } x>۰ \end{cases}$$

و $f(۰)=\frac{۱}{۲}$ در شرایط قضیه بخش ۵۴ صدق می‌کند و بنابراین :

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\cos\alpha x+\alpha\sin\alpha x}{۱+\alpha^۲}d\alpha \qquad (-\infty<x<\infty)$$

این نمایش را در نقطهٔ $x=۰$ مستقیماً تحقیق کنید.

۴. نشان دهید که چگونه از ماحصل مسألهٔ ۳ نتیجه می‌شود که:

$$\exp(-|x|)=\frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\cos\alpha x}{۱+\alpha^۲}d\alpha \qquad (-\infty<x<\infty)$$

۵. با استفاده از قضیهٔ بخش ۴ نشان دهید که اگر:

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & \text{هرگاه } x<۰ \text{ یا } x>\pi \\ \sin x & \text{هرگاه } ۰\le x\le\pi \end{cases}$$

آنگاه:

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty \frac{\cos\alpha x+\cos\alpha(\pi-x)}{۱-\alpha^۲}d\alpha \qquad (-\infty<x<\infty)$$

بخصوص با قرار دادن $x=\pi/۲$ نشان دهید که:

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{\cos\ (\alpha\pi/۲)}{۱-\alpha^{۲}}\ d\alpha=\frac{\pi}{۲}\quad .$$

۶. نشان دهید چرا دستور انتگرال فوریه برای نمایش تابع $f(x)=۱$ $(-\infty<x<\infty)$ برقرار نیست. همین طور بگویید تابع f در کدام شرط قضیه بخش ۵۴ صدق نمی‌کند.

۷. جزئیات اثبات وجود انتگرال $J(r,x)$ در بخش ۵۴ و برقراری حد (۶) آن بخش را ارائه کنید.

۸. فرض کنید f تابع غیر صفری باشد که متناوب و با دورهٔ تناوب $۲c$ است. بیان کنید چرا انتگرالهای زیر موجود نیستند:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx\quad ,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx$$

۹. لم ۱ بخش ۵۳ را وقتی در انتگرال (۱) آنجا به جای $\sin ru$ مقدار $\cos ru$ قرار گیرد ثابت کنید.

۱۰. فرض کنید تابع $f(x)$ دارای نمایش انتگرال فوریه (۸) بخش ۵۱ باشد که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$f(x)=\lim_{c\to\infty}\int_{\circ}^{c}[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x]d\alpha$$

با استفاده از صورتهای نمایی (با مسألهٔ ۱۵ بخش ۲۱ مقایسه کنید)

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{۲}\qquad ,\qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{۲i}$$

توابع کسینوس و سینوس به طور صوری نشان دهید که:

$$f(x)=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}a(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha$$

که در آن:

$$a(\alpha)=\frac{A(\alpha)-iB(\alpha)}{۲}\quad ,\quad a(-\alpha)=\frac{A(\alpha)+iB(\alpha)}{۲}\qquad (\alpha>\circ)$$

سپس با استفاده از عبارات (۹) بخش ۵۱ برای $A(\alpha)$ و $B(\alpha)$ فرمول زیر را به دست آورید[1]:

$$a(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\alpha x}\,dx \qquad (-\infty<\alpha<\infty)$$

۵۵. انتگرالهای کسینوس و سینوس

فرض کنید f نمایش تابعی باشد که در شرایط قضیهٔ بخش ۵۴ صدق کند. همان طور که در آخر اثبات آن قضیه اشاره شد، نمایش انتگرال فوریهٔ $f(x)$ برقرار می‌ماند در صورتی که بنویسیم:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x]d\alpha \tag{1}$$

که در آن:

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\alpha x\,dx \quad , \quad B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\alpha x\,dx \tag{2}$$

همین طور، بنابر قضیهٔ بخش ۱۷ نمایش (۱) برای هر تابع f که روی تمام محور x ها مطلقاً انتگرالپذیر و در هر بازهٔ محدود آن قطعه‌ای هموار باشد برقرار است.

ملاحظه می‌کنید که اگر تابع f زوج باشد، آنگاه $f(x)\sin\alpha x$ برحسب متغیر x فرد است، بنابراین نمودار $y=f(x)\sin\alpha x$ نسبت به مبدأ متقارن است. در نتیجه $B(\alpha)=0$ و نمایش (۱) به نمایش زیر تبدیل می‌شود:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}A(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha \tag{3}$$

تابع $f(x)\cos\alpha x$ نسبت به x زوج است و لذا نمودار $y=f(x)\cos\alpha x$ نسبت به محور x ها متقارن است. بنابراین:

$$A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos\alpha x\,d\alpha \tag{4}$$

---

۱. تابع $a(\alpha)$ به تبدیل فوریهٔ نمایی $f(x)$ مشهور است و در مهندسی برق از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای بحث و بررسی این تبدیل فوریه و انواع دیگر آن، کتاب چرچیل (۱۹۷۲) را که در کتابنامه آمده است ببینید.

دستور انتگرال فوریهٔ کسینوسی (۳) را البته می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x\int_0^\infty f(s)\cos\alpha s\,ds\,d\alpha \tag{5}$$

اگر از طرف دیگر f تابعی فرد باشد، آنگاه $A(\alpha)=0$ و نمایش (۱) تبدیل می‌شود به:

$$f(x)=\int_0^\infty B(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha \tag{6}$$

که در آن:

$$B(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\,dx \tag{7}$$

انتگرال (۶) به دستور انتگرال فوریهٔ سینوسی مشهور است. و صورت فشردهٔ آن عبارت است از:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x\int_0^\infty f(s)\sin\alpha s\,ds\,d\alpha \tag{8}$$

حال فرض کنید که f فقط برای x های مثبت تعریف شده و دارای خواص زیر باشد:

الف) f بر محور x های مثبت مطلقاً انتگرالپذیر و بر هر بازهٔ محدود آن قطعه‌ای هموار است؛

ب) $f(x)$ در هر نقطهٔ ناپیوستگی f مقدار میانگین حدود یکطرفهٔ $f(x+)$ و $f(x-)$ است.

چنانچه f را توسیع زوج دهیم، مقدار آن توسیع به ازای x های نا صفر به وسیلهٔ انتگرال (۳) نمایش داده می‌شود و برای $x=0$ مساوی $f(0+)$ است. همین طور مقدار توسیع فرد f برای x های نا صفر به وسیلهٔ انتگرال (۶) نمایش داده می‌شود و برای $x=0$ مساوی صفر است. بدین ترتیب از قضیهٔ بخش ۵۴ قضیه‌ای به دست می‌آید که خصوصاً در کاربردها مفید است.

قضیه. فرض کنید f نمایش تابعی باشد که روی محور x های مثبت تعریف شده و در شرایط (الف) و (ب) صدق کند. در این صورت نمایش انتگرال فوریهٔ کسینوسی (۳) که در آن ضریب $A(\alpha)$ با ضابطه (۴) تعریف شده، به ازای هر $x(x>0)$ برقرار است و همین امر در مورد نمایش انتگرال فوریهٔ سینوسی (۶) درست است که در آن ضریب $B(\alpha)$ با ضابطهٔ (۷) داده شده است.

نمایش (۳) در کاربردها به خاطر جوابهای مسألهٔ مقدار ویژهٔ زیر لازم است:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , \quad X'(0)=0 \quad , \quad |X(x)|<M \qquad (x>0) \tag{۹}$$

که در آن M عدد ثابت مثبتی است. این مسألهٔ تکین است (بخش ۴۲) زیرا بازهٔ اصلی آن $x>0$ نامحدود است. اگر $\lambda=0$، $X(x)$ مضرب ثابتی از واحد می‌باشد. اگر λ عدد حقیقی باشد که $\lambda>0$ و بنویسیم $\lambda=\alpha^2$ $(\alpha>0)$ بسادگی درمی‌یابیم که، جز عوامل ثابت، توابع ویژه عبارتند از: $X(x)=\cos\alpha x$ که در آن α همهٔ مقادیر مثبت را می‌گیرد. مقادیر ویژهٔ $\lambda=\alpha^2$ به جای گسسته بودن، پیوسته‌اند. اگر $\lambda<0$ یا $\lambda=-\alpha^2$ $(\alpha>0)$ جواب این معادلهٔ دیفرانسیل و شرط مرزی داده شده در $x=0$ عبارت است از:
$X(x)=2C_1\cosh\alpha x$. ولی این تابع روی نیمخط $x>0$ نامحدود است مگر آنکه $C_1=0$. بنابراین از حالت $\lambda<0$ هیچ تابع ویژه‌ای به دست نمی‌آید. لازم نیست حالتهایی را که در آنها λ حقیقی نیست، در نظر بگیریم، زیرا جوابهایی که از آنها برای معادلهٔ دیفرانسیل به دست می‌آید نامحدود است (مسألهٔ ۷ را ببینید). گرچه توابع ویژهٔ $X(x)=\cos\alpha x$ $(\alpha\geq 0)$ دارای هیچ خاصیت تعامدی نیستند، دستور انتگرال فوریهٔ کسینوسی (۳) نمایش توابعی مانند $f(x)$ در بازهٔ $x>0$ است که ترکیب خطی تعمیم یافتهٔ این توابع ویژه‌اند.

همین طور $\lambda=\alpha^2$ و $X(x)=\sin\alpha x$ $(\alpha>0)$ مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسألهٔ تکین

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad , \quad X(0)=0 \quad , \quad |X(x)|<M \qquad (x>0) \tag{۱۵}$$

می‌باشند و دستور (۶) نمایش توابع $f(x)$ برحسب $\sin\alpha x$ است.

مسائل

۱. با استفاده از دستور انتگرال فوریهٔ سینوسی و قضیهٔ بخش ۵۵ در مورد تابع f که با ضابطه‌های زیر تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<b \quad \text{هرگاه} \\ 0 & x>b \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

و $f(b)=\frac{۱}{۲}$ نمایش زیر را به دست آورید:

$$f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱-\cos b\alpha}{\alpha}\sin \alpha x\, d\alpha \qquad (x>۰)$$

۲. تحقیق کنید که تابع $exp(-bx)$ که در آن b عدد ثابت مثبتی است، در شرایط قضیهٔ بخش ۵۵ صدق می‌کند و نشان دهید که $B(\alpha)$ در نمایش انتگرال فوریهٔ سینوسی آن تابع عبارت است از:

$$B(\alpha)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}e^{-bx}\sin \alpha x\, dx=\frac{۲}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^{۲}+b^{۲}}$$

بدین ترتیب ثابت کنید که:

$$e^{-bx}=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{\alpha \sin \alpha x}{a^{۲}+b^{۲}}d\alpha \qquad (b>۰\ ,\ x>۰)$$

۳. صحت نمایش انتگرال فوریهٔ سینوسی زیر را تحقیق کنید

$$\frac{x}{x^{۲}+b^{۲}}=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\sin \alpha x\int_{۰}^{\infty}\frac{s\sin \alpha s}{s^{۲}+b^{۲}}ds\, d\alpha \qquad (b>۰,\ x\geq۰)$$

ابتدا با ملاحظه این که بنابر آخرین نتیجهٔ مسألهٔ ۲ مقدار انتگرال داخلی برابر است با $(\pi/۲)\, exp(-b\alpha)$ و سپس با استناد به نمایشی که در مسألهٔ ۲ برای $B(\alpha)$ به دست آمد، این بررسی را کامل کنید. نشان دهید که مع‌الوصف تابع $x/(x^{۲}+b^{۲})$ بر محور x های مثبت مطلقاً انتگرالپذیر نیست.

۴. همان طور که قبلاً در مسألهٔ ۲ تحقیق شد تابع $exp(-bx)$، که در آن b عدد ثابت مثبتی است، در شرایط قضیه بخش ۵۵ صدق می‌کند. نشان دهید که ضریب $A(\alpha)$ در نمایش انتگرال فوریهٔ کسینوسی آن تابع عبارت است از:

$$A(\alpha)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}e^{-bx}\cos \alpha x\, dx=\frac{۲}{\pi}\cdot\frac{b}{a^{۲}+b^{۲}}$$

بدین ترتیب ثابت کنید که:

$$e^{-bx}=\frac{۲b}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{\cos \alpha x}{\alpha^{۲}+b^{۲}}d\alpha \qquad (b>۰\ ,\ x\geq۰)\ .$$

۵. با در نظر گرفتن عدد ثابت و مثبت b در آخرین معادلهٔ حاصل در مسألهٔ ۴ به عنوان یک متغیر و مشتق‌گیری از طرفین آن نسبت به b به طور صوری نشان دهید که:

$$(1+x)e^{-x}=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{(\alpha^2+1)^2}d\alpha \qquad (x\geq 0)\ .$$

۶. تحقیق کنید که تابع $e^{-x}\cos x$ در شرایط قضیه بخش ۵۵ صدق می‌کند و نشان دهید که ضریب $A(\alpha)$ در نمایش انتگرال فوریهٔ کسینوسی آن تابع را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos(\alpha+1)x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos(\alpha-1)x\,dx\ .$$

سپس با استفاده از این عبارت برای ضرایب نظیر در مسألهٔ ۴ ثابت کنید که

$$e^{-x}\cos x=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha^2+2}{\alpha^4+4}\cos\alpha x\,d\alpha \qquad (x\geq 0)$$

۷. فرض کنید λ نمایش عدد مختلطی باشد که حقیقی نیست. بنابراین ریشه‌های دوم $-\lambda$ به شکل $\pm(\alpha+i\beta)$ می‌باشند که در آن α و β حقیقی هستند و $\alpha\neq 0$. با استفاده از اتحادهای [1]

$$|\cosh(x+iy)|^2=\sinh^2x+\cos^2y\ ,\quad |\sinh(x+iy)|^2=\sinh^2x+\sin^2y$$

که در آن x و y حقیقی‌اند، نشان دهید که چنین λای نمی‌تواند مقدار ویژهٔ

الف) مسألهٔ مقدار ویژهٔ تکین (۹) بخش ۵۵؛

ب) مسألهٔ مقدار ویژهٔ تکین (۱۰) بخش ۵۵ باشد.

۸. نشان دهید که مقادیر ویژهٔ مسألهٔ مقدار ویژهٔ تکین

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad |X(x)|<M \qquad (-\infty<x<\infty)$$

---

۱. برای نتایجی از نظریهٔ توابع مختلط که در اینجا به کار رفت، کتاب مؤلفین (۱۹۹۰ بخشهای ۷و۲۵) را که در کتابنامه آمده است ببینید.

که در آن M عدد ثابت مثبتی است، عبارتند از $\lambda = \alpha^{2}$ $(\alpha \geq 0)$ و توابع ویژهٔ متناظر وقتی $\alpha = 0$ هر مقدار ثابت و وقتی $\alpha > 0$ ترکیبهای خطی دلخواه $\cos \alpha x$ و $\sin \alpha x$ هستند. (با استفاده از روش مسألهٔ ۷ نشان دهید که مقادیر ویژه باید حقیقی باشند.)

۹. فرض کنید $A(\alpha)$ و $B(\alpha)$ نمایش ضرایب (۹) بخش ۵۱ در نمایش انتگرال فوریهٔ آن بخش برای تابعی مانند $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ باشد که در شرایط قضیه بخش ۵۴ صدق می‌کند.

الف) با در نظر گرفتن توابع فرد و زوج از α خاطرنشان کنید که چرا

$$\int_{-\infty}^{\infty} [A(\alpha)\cos \alpha x + B(\alpha)\sin \alpha x\,]d\alpha = 2f(x)$$

و

$$\int_{-\infty}^{\infty} [B(\alpha)\cos \alpha x + A(\alpha)\sin \alpha x\,]d\alpha = 0$$

ب) با جمع کردن طرفین نظیر در معادلات قسمت (الف) شکل متقارن زیر را برای دستور انتگرال فوریه به دست آورید:[1]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\,(\cos \alpha x + \sin \alpha x\,)\,d\alpha \qquad (-\infty < x < \infty)$$

که در آن:

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos \alpha x + \sin \alpha x\,)\,dx$$

۵۶. بحث بیشتری در مورد برهمنهی جوابها

در بخش ۲۶ نشان دادیم که ترکیبهای خطی جوابهای معادلات دیفرانسیل همگن خطی و شرایط مرزی نیز جوابند. در همان بخش آن نتیجه را تعمیم دادیم که سریهای نامتناهی جوابها را هم در برگرفت، بدین ترتیب مبنای روشی را فراهم آوردیم که برای حل مسائل مقدار کرانه‌ای در فصلهای ۴ و ۵ از آن استفاده شد. توسیع مفید دیگری با مثال زیر

۱. این شکل در برخی از انواع مسائل انتقال مفید است مراجعه کنید به

R.V. Hartley, proc. Inst. Radio Engrs, vol. 30, no3, pp.144–150, 1942.

تشریح شده است، که در آن برهمنهی به جای جمعبندی نسبت به اندیسی مانند n انتگرالگیری نسبت به پارامتری مانند α است. بدین ترتیب قادر به حل مسائل مرزی خواهیم بود که در آنها به انتگرالهای فوریه بیش از سری فوریه نیاز است.

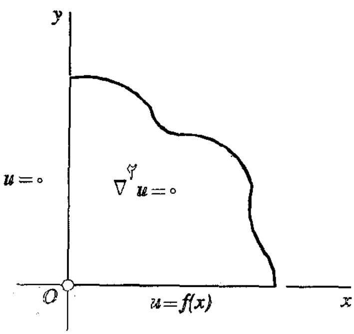
مثال. مجموعهٔ توابع $exp(-\alpha y)\ sin\ \alpha x$ را در نظر بگیرید که در آن هر تابع با مقداری از پارامتر α $(\alpha > 0)$ متناظر و α مستقل از x و y است. هر تابع در معادلهٔ لاپلاس:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \qquad (x>0\ ,\ y>0) \qquad (1$$

و شرط مرزی

$$u(0,y) = 0 \qquad (y>0) \qquad (2$$

صدق می‌کند. این توابع در حوزهٔ $x>0$ و $y>0$ (شکل ۵۹) محدودند و از شرایط (۱) و (۲) با روش جداسازی متغیرها، وقتی شرط محدود بودن اضافه شود به دست می‌آیند (مسألهٔ ۱ بخش ۵۸).



شکل ۵۹

حال نشان می‌دهیم که به ازای هر تابع $B(\alpha)$ که در نیمخط $\alpha>0$ پیوسته و محدود و بر آن مطلقاً انتگرالپذیر باشد، ترکیب این توابع از نوع

$$u(x,y) = \int_0^\infty B(\alpha) e^{-\alpha y} \sin \alpha x\, d\alpha \qquad (x>0\ ,\ y>0) \qquad (3$$

نیز نمایش جوابی از شرایط همگن (۱) و (۲) است که در حوزهٔ $x>0$ و $y>0$ محدود است.

برای انجام این کار از آزمونهای انتگرال ناسره که مشابه آزمونهای سریهای نامتناهی‌اند استفاده می‌کنیم.[1] انتگرال رابطهٔ (۳) مطلقاً همگراست و نسبت به x و y همگرای یکنواخت است زیرا:

$$\left|B(\alpha)e^{-\alpha y}\sin\alpha x\right| \le |B(\alpha)| \qquad (x\ge ۰\ ,\ y\ge ۰) \tag{۴}$$

و $B(\alpha)$ مستقل از x و y و نسبت به α از صفر تا بینهایت انتگرالپذیر است. به علاوه چون

$$\left|u(x,y)\right| \le \int_۰^\infty \left|B(\alpha)e^{-\alpha y}\sin\alpha x\right|d\alpha \le \int_۰^\infty \left|B(\alpha)\right|d\alpha \tag{۵}$$

u کراندار است. همچنین u تابعی پیوسته از x و y ($x\ge ۰$ و $y\ge ۰$) است زیرا انتگرال رابطهٔ (۳) همگرای یکنواخت و انتگران تابعی پیوسته است . واضح است که هرگاه $x=۰$ داریم $u=۰$

در صورتی که $y>۰$،

(۶

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_۰^\infty B(\alpha)e^{-\alpha y}\sin\alpha x\,d\alpha = \int_۰^\infty \frac{\partial}{\partial x}[B(\alpha)e^{-\alpha y}\sin\alpha x\,]d\alpha$$

زیرا اگر $|B(\alpha)|\le B_۰$ و $y\ge y_۰$، که در آن $y_۰$ عدد مثبت کوچکی است، آنگاه قدر مطلق انتگران انتگرال آخر سمت راست از $B_۰\alpha\exp(-\alpha y_۰)$ بیشتر نمی‌شود که از x و y مستقل و از $\alpha=۰$ تا $\alpha=\infty$ انتگرالپذیر است. پس آن انتگرال همگرای یکنواخت است. در نتیجه انتگرال (۳) نسبت به x مشتقپذیر است و همین طور برای مشتقات دیگری که در عملگر لاپلاس $\nabla^۲=\partial^۲/\partial x^۲+\partial^۲/\partial y^۲$ مطرحند. بنابراین:

$$\nabla^۲ u = \int_۰^\infty B(\alpha)\nabla^۲[e^{-\alpha y}\sin\alpha x\,]d\alpha = ۰ \qquad (x>۰\ ,\ y>۰) \tag{۷}$$

---

۱. کتاب کاپلان (۱۹۹۱ صفحات ۴۷۱ به بعد) یا تیلور و مان (۱۹۸۳ صفحات ۶۸۲ به بعد) را که در کتابنامه آمده است ببینید.

حال فرض کنید که تابع (۳) ملزم به صدق کردن در شرط کرانه‌ای ناهمگن

$$u(x\,,\circ)=f(x) \qquad (x>\circ) \tag{۸}$$

باشد، که در آن f تابع مفروضی است که در شرایط قضیه بخش ۵۵ صدق می‌کند. ما باید تابع $B(\alpha)$ در رابطهٔ (۳) را طوری تعیین کنیم که :

$$f(x)=\int_{\circ}^{\infty} B(\alpha)\sin\alpha x\, d\alpha \qquad (x>\circ) \tag{۹}$$

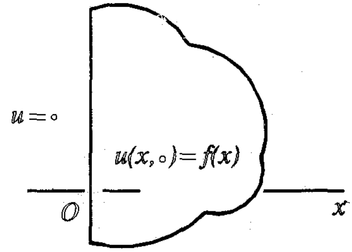
این کار به آسانی انجام می‌شود زیرا نمایش (۹) دستور انتگرال فوریهٔ سینوسی (۶) بخش ۵۵ است، هرگاه :

$$B(\alpha)=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx \qquad (\alpha>\circ) \tag{۱۰}$$

در اینجا نشان داده‌ایم که تابع (۳) با $B(\alpha)$ داده شده با رابطهٔ (۱۰) یک جواب مسألهٔ مقدار مرزی مرکب از معادلات (۱) و (۲) و (۸) همراه با شرط محدود بودن u است.

۵۷. دما در جسم صلب (توپر) نیمه نامتناهی

وجه $x=\circ$ از یک جسم صلب نیمه نامتناهی $x\geq\circ$ در دمای صفر نگهداری می‌شود (شکل ۶۰). می‌خواهیم دماهای $u(x,t)$ در جسم را پیدا کنیم، وقتی که توزیع دمای اولیه $f(x)$ است، فعلاً فرض می‌کنیم که f روی هر بازهٔ محدود محور x های مثبت قطعه‌ای هموار و از $x=\circ$ تا $x=\infty$ تابع f کراندار و مطلقاً انتگرالپذیر باشد.



شکل ۶۰

اگر جسم را حالت حدی قطعهٔ $\circ\leq x\leq c$ وقتی c افزایش می‌یابد در نظر بگیریم، به نظر

می‌رسد که شرطی متناظر با یک شرط گرمایی روی وجه $x=c$ لازم است. در غیر این صورت وقتی c افزایش می‌یابد، دمای روی آن وجه، ممکن است به هر نحوی افـزایش یابد. لازم است تابع u محدود باشد، این شرط مستلزم آن است که روی وجه $x=0$ در لحظه $t=0$ هیچ منبع لحظه‌ای حرارت وجود نداشته باشد. در این صورت:

$$u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t) \qquad (x>0\ ,\ t>0) \tag{۱}$$

$$u(0,t)=0 \qquad (t>0) \tag{۲}$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad (x>0) \tag{۳}$$

و $|u(x,t)|<M$ که در آن M عدد ثابت مثبتی است.

ترکیبهای خطی توابع $u=X(x)T(t)$ معمولاً کراندار نخواهند بود مگر آنکه X و T خودشان کراندار باشند. پس با جدا کردن متغیرها، شرایط زیر را خواهیم داشت:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\ ,\ X(0)=0 \quad ,\ |X(x)|<M_1 \qquad (x>0) \tag{۴}$$

$$T'(t)+\lambda kT(t)=0\ , \quad |T(t)|<M_2 \qquad (t>0) \tag{۵}$$

که در آن M_1 و M_2 اعداد ثابت مثبتی هستند. همان طور که در آخر بخش ۵۵ خاطر نشان کردیم مسألهٔ مقدار ویژه تکین (۴) دارای مقادیر ویژهٔ پیوستهٔ $\lambda=\alpha^2$ است که در آن λ نمایش همهٔ اعداد حقیقی مثبت است؛ $X(x)=sin\ \alpha x$ توابع ویژه‌اند. در این حالت توابع نظیر $T(t)=exp(-\alpha^2kt)$ محدودند. ترکیب خطی تعمیم یافتهٔ توابع $X(x)T(t)$ به ازای هر عدد مثبت α،

$$u(x,t)=\int_0^\infty B(\alpha)\,exp\,(-\alpha^2kt)\,sin\,\alpha x\,d\alpha \tag{۶}$$

در همهٔ شرایط مسأله مرزی صدق می‌کند، هرگاه تابع $B(\alpha)$ را بتوان طوری تعیین کرد که:

$$f(x)=\int_0^\infty B(\alpha)\,sin\,\alpha x\,d\alpha \qquad (x>0) \tag{۷}$$

مانند بخش ۵۶ توجه داریم که نمایش (۷) دستور انتگرال فوریهٔ سینوسی (۶) بخش ۵۵

برای $f(x)$ است هرگاه:

$$B(\alpha)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} f(x)\sin \alpha x\, dx \qquad (\alpha>۰) \qquad (۸$$

جواب صوری (۶) با $B(\alpha)$ ای را که با ضابطهٔ (۸) تعریف شده است، می‌توان به شکل زیر هم نوشت:

$$\left[u(x,t)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty} exp(-\alpha^{۲}kt)\sin \alpha x\int_{۰}^{\infty} f(s)\sin \alpha s\, ds\right] d\alpha \qquad (۹$$

اگر به طور صوری ترتیب انتگرالگیری را عوض کرده، به جای $۲\sin \alpha s \sin \alpha x$ مقدار $\cos \alpha(s-x)-\cos \alpha(s+x)$ را قرار دهیم و از فرمول انتگرالگیری (مسألهٔ ۱۹ بخش ۵۸)

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-\alpha^{۲}a}\cos \alpha b\, d\alpha=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, exp(-\frac{b^{۲}}{۴a}) \qquad (a>۰) \qquad (۱۰$$

استفاده کنیم، این نتیجه ساده می‌شود. در این صورت رابطهٔ (۹) به شکل زیر در می‌آید:

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲\sqrt{\pi kt}}\int_{۰}^{\infty} f(s)\left\{exp\left[-\frac{(s-x)^{۲}}{۴kt}\right]-exp\left[-\frac{(s+x)^{۲}}{۴kt}\right]\right\} ds \qquad (۱۱$$

هرگاه $t>۰$.

صورت دیگری از رابطهٔ (۱۱) که با معرفی متغیرهای جدید انتگرالگیری به دست می‌آید عبارت از:

$$u(x,t)=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/(۲\sqrt{kt})}^{\infty} f(x+۲\sigma\sqrt{kt})e^{-\sigma^{۲}}d\sigma \qquad (۱۲$$

$$-\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\int_{x/(۲\sqrt{kt})}^{\infty} f(-x+۲\sigma\sqrt{kt})e^{-\sigma^{۲}}d\sigma$$

استفاده از دستور انتگرال فوریهٔ سینوسی در پیدا کردن جواب (۹) ما را بر آن می‌دارد که از قضیه بخش ۵۵ برای تحقیق درستی آن جواب استفاده کنیم. ولی از صورتهای (۱۱) و (۱۲) برمی‌آید که در تحقیق جواب بودن $u(x,t)$ از شرط انتگرالپذیری $|f(x)|$ از صفر تا بینهایت صرف‌نظر کنیم.

به عبارت دقیقتر، هرگاه s را ثابت بگیریم و $t>0$ توابع

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left[-\frac{(s\pm x)^2}{4kt}\right]$$

در معادلهٔ گرمای (۱) صدق می‌کنند. در این صورت با استفاده از فرض پیوستگی و محدود بون $f(x)$ در نقاط $x\geq 0$، می‌توان نشان داد که تابع (۱۱) محدود است و در معادلهٔ گرما صدق می‌کند هرگاه $x_0<x<x_1$ و $t_0<t<t_1$ که در آن x_0، x_1، t_0، t_1 اعداد مثبت دلخواهی هستند. شرایط (۲) و (۳) را می‌توان با استفاده از عبارت (۱۲) تحقیق کرد. با اضافه کردن توابع پله‌ای به f (مسألهٔ ۴ بخش ۵۸ را ببینید) می‌توان فرض کرد که f دارای تعدادی متناهی جهش در نیمخط $x>0$ باشد. ولی جز برای حالات خاص، جزئیات تحقیق جوابهای صوری مسأله خسته کننده است.

در صورتی که $f(x)=1$ از رابطهٔ (۱۲) نتیجه می‌شود که:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-x/(2\sqrt{kt})}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma-\int_{x/(2\sqrt{kt})}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma\right] \qquad (13$$

برحسب تابع خطا

$$erf(x) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \int_۰^x e^{-\sigma^۲} d\sigma \qquad (۱۴$$

که در آن $erf(x)$ به یک میل می‌کند وقتی x به بینهایت میل کند (مسألهٔ ۱۸ بخش ۵۸ را ببینید)، عبارت (۱۳) را می‌توان چنین نوشت:

$$u(x,t) = erf\left(\frac{x}{۲\sqrt{kt}}\right) \qquad (۱۵$$

تحقیق کامل این نتیجه مشکل نیست.

۵۸. دما در محیط نامحدود

به عنوان کاربرد دستور کلی انتگرال فوریه، عباراتی را برای دمای $u(x,t)$ در محیطی به دست می‌آوریم که همهٔ فضا را اشغال کرده و توزیع دمای اولیهٔ آن $f(x)$ می‌باشد. فرض می‌کنیم که $f(x)$ کراندار و فعلاً در شرایطی صدق کند که تحت آن با دستور انتگرال فوریه نمایش داده شود. مسألهٔ مقدار مرزی مرکب است از یک شرط کرانداری $|u(x,t)| < M$ و شرایط

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \qquad (-\infty < x < \infty \quad , \quad t > ۰) \qquad (۱$$

$$u(x,۰) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \qquad (۲$$

جداسازی متغیرها منجر به مسألهٔ مقدار ویژهٔ تکین

$$X''(x) + \lambda X(x) = ۰ \quad , \quad |X(x)| < M_۱ \qquad (-\infty < x < \infty)$$

می‌شود که مقادیر ویژهٔ آن عبارتند از $\lambda=\alpha^۲$ که در آن $\alpha\geq ۰$ و به در مقدار ناصفر α دو تابع ویژهٔ مستقل خطی $\cos\alpha x$ و $\sin\alpha x$ متناظر می‌شود (مسألهٔ ۸ بخش ۵۵).

تعمیم ترکیب خطی توابع $X(x)T(t)$ عبارت است از:

$$u(x,t)=\int_۰^\infty exp(-\alpha^۲kt)[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x]d\alpha \qquad (۳$$

ضرایب $A(\alpha)$ و $B(\alpha)$ باید طوری تعیین شوند که وقتی $t=۰$ این انتگرال، $f(x)\ (-\infty<x<\infty)$ را نمایش دهد. بنابر روابط (۸) و (۹) بخش ۵۱ و قضیه انتگرال فوریه (بخش ۵۴) این نمایش برقرار است هرگاه:

$$A(\alpha)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx\ ,\ B(\alpha)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin\alpha x\,dx$$

درنتیجه:

$$u(x,t)=\frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty e^{-\alpha^۲kt}\int_{-\infty}^\infty f(s)\cos\alpha(s-x)\,ds\,d\alpha \qquad (۴$$

اگر در اینجا به طور صوری ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم، از دستور انتگرالگیری (۱۰) بخش ۵۷ می‌توان استفاده کرده، رابطه (۴) را به شکل زیر نوشت:

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^\infty f(s)exp\left[-\frac{(s-x)^۲}{۴kt}\right]ds \qquad (t>۰) \qquad (۵$$

یک صورت دیگر آن عبارت است از:

$$u(x,t)=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+۲\sigma\sqrt{kt})e^{-\sigma^{۲}}d\sigma \qquad (۶$$

می‌توان درستی صورتهای (۵) و (۶) را تنها با فرض قطعه‌ای پیوسته بودن f در بازهٔ محدودی مانند $|x|<c$ و پیوسته و محدود بودن بر بقیهٔ محور x ها، یعنی وقتی $|x|\geq c$، تحقیق کرد. اگر f تابع فرد باشد، $u(x,t)$ تابعی می‌شود که در بخش ۵۷ برای مقادیر مثبت x پیدا شد.

مسائل

۱. جزئیات اثبات این موضوع را که چگونه توابع $exp(-\alpha y)\ sin\ \alpha x$ $(\alpha>۰)$ با جداسازی متغیرها از شرایط (۱) و (۲) بخش ۵۶ و شرط محدود بودن $u(x,y)$ در $x>۰$ و $y>۰$ پیدا می‌شوند ارائه دهید.

۲. (الف) عبارت (۱۰) بخش ۵۶ را به جای تابع $B(\alpha)$ در رابطهٔ (۳) آن بخش قرار دهید. سپس با تعویض صوری ترتیب انتگرالگیری نشان دهید که جواب مسألهٔ مقدار مرزی مطرح شده در بخش ۵۶ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{۰}^{\infty}f(s)\left[\frac{۱}{(s-x)^{۲}+y^{۲}}-\frac{۱}{(s+x)^{۲}+y^{۲}}\right]ds$$

(ب) نشان دهید که اگر $f(x)=۱$ می‌توان جواب حاصل در قسمت (الف) را برحسب تابع معکوس تانژانت چنین نوشت:

$$u(x,y)=\frac{۲}{\pi}tan^{-۱}\frac{x}{y}$$

۳. تحقیق کنید که تابع $u=erf[x/(۲\sqrt{kt})]$ در بخش ۵۷ در معادلهٔ حرارت $u_t=ku_{xx}$ هرگاه $x>۰$، $t>۰$ و شرایط زیر صدق می‌کند:

$$u(۰+,t)=۰ \qquad (t>۰)$$

$$u(x,۰+)=۱ \qquad (x>۰)$$

$$|u(x,t)|<۱ \qquad (x>۰,\ t>۰)$$

۴. نشان دهید اگر

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰<x<c \quad \text{هرگاه} \\ ۱ & x>c \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

عبارت (۱۲) بخش ۵۷ به عبارت زیر تبدیل می‌شود:

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲}erf(\frac{c+x}{۲\sqrt{kt}})-\frac{۱}{۲}erf(\frac{c-x}{۲\sqrt{kt}})$$

تحقیق کنید که این جواب مسألهٔ مقدار مرزی بخش ۵۷ است در صورتی که f این تابع باشد.

۵. وجه $x=۰$ از جسم نیمه نامتناهی صلب $x\geq ۰$ در دمای ثابت $u_۰$ نگهداری می‌شود، پس از اینکه دمای سرتاسر درون آن جسم برای $x>۰$ ابتداءً صفر است. عبارتی برای دماهای $u(x,t)$ در جسم به دست آورید.

جواب: $$u(x,t)=u_۰\left[۱-erf(\frac{x}{۲\sqrt{kt}})\right]$$

۶. (الف) وجه $x=\circ$ از جسم نیمه نامتناهی صلب $x\geq \circ$ عایق‌بندی شده و توزیع دمای اولیه آن $f(x)$ است. فرمول دمای زیر را به دست آورید:

$$u(x,t)=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/(۲\sqrt{kt})}^{\infty} f(x+۲\sigma\sqrt{kt})\,exp(-\sigma^۲)\,d\sigma$$

$$+\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\int_{x/(۲\sqrt{kt})}^{\infty} f(-x+۲\sigma\sqrt{kt})\,exp(-\sigma^۲)\,d\sigma$$

(ب) نشان دهید اگر تابع f در قسمت (الف) با ضابطه‌های زیر تعریف شود:

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & \circ<x<c \quad \text{هرگاه} \\ \circ & x>c \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

آنگاه:

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲}erf(\frac{c+x}{۲\sqrt{kt}})+\frac{۱}{۲}erf(\frac{c-x}{۲\sqrt{kt}})$$

۷. فرض کنید توزیع دمای اولیهٔ $f(x)$ در محیط نامحدود بخش ۵۷ با ضابطه‌های زیر تعریف شده باشد:

$$f(x)=\begin{cases} \circ & x<\circ \quad \text{هرگاه} \\ ۱ & x>\circ \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

نشان دهید که:

$$u(x,t)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}erf(\frac{x}{۲\sqrt{kt}})$$

تحقیق کنید که این جواب مسألهٔ مقدار مرزی بخش ۵۸ است در صورتی که f این تابع باشد.

۸. برای معادلهٔ موج $y_{tt}=a^۲y_{xx}$ $(-\infty<x<\infty\ ,\ t>\circ)$ با شرایط مرزی $y(x,\circ)=f(x)$ ، $y_t(x,\circ)=\circ$ هرگاه $-\infty<x<\infty$ جواب زیر را به دست آورید:

$$y(x,t)=\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\cos\alpha at\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\cos\alpha(s-x)\,ds\,d\alpha$$

همچنین این جواب را به شکل حاصل در مثال ۲ بخش ۸ در آورید.

$$y(x,t)=\frac{۱}{۲}\left[f(x+at)+f(x-at)\right]$$

۹. یک تار نیمه نامتناهی که یک انتهای آن در مبدأ ثابت است، در امتداد نیمهٔ مثبت محور x ها کشیده شده و از وضعیت $y=f(x)$ $(x\geq\circ)$ در حالت سکون رها شده است، برای جابجاییهای عرضی عبارت زیر را به دست آورید:

$$y(x,t)=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\cos\alpha\ at\sin\alpha x\int_{\circ}^{\infty}f(s)\sin\alpha s\,ds\,d\alpha$$

فرض کنید $F(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ نمایش توسیع فرد $f(x)$ باشد و نشان دهید چگونه این نتیجه به شکل زیر در می‌آید:

$$y(x,t)=\frac{۱}{۲}\left[F(x+at)+F(x-at)\right]$$

[با جواب (۱۰) بخش ۳۰ مسألهٔ تار که در آن بخش بررسی شد، مقایسه کنید.]

۱۰. تابعی مانند $u(x,y)$ بیابید که در نوار نیمه نامتناهی $x>0$ ، $0<y<1$ همساز و محدود باشد و در شرایط مرزی زیر صدق کند:

$$u_x(0,y)=0 \quad , \quad u_y(x,0)=0 \quad , \quad u(x,1)=e^{-x}$$

جواب :
$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\cosh\alpha y}{(1+\alpha^2)\cosh\alpha}d\alpha$$

۱۱. در مسألهٔ ۱۰ تابع $u(x,y)$ را، در صورتی که به جای شرایط مرزی آن شرایط زیر فرض شده باشد، پیدا کنید:

$$u_x(0,y)=0 \quad , \quad u_y(x,1)=-u(x,1) \quad , \quad u(x,0)=f(x)$$

که در آن

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1 \quad \text{هرگاه} \\ 0 & x>1 \quad \text{هرگاه}\end{cases}$$

این مسأله را تعبیر فیزیکی کنید.

جواب:
$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\cosh\alpha(1-y)+\sinh\alpha(1-y)}{\alpha^2\cosh\alpha+\alpha\sinh\alpha}\sin\alpha\cos\alpha x\,d\alpha$$

۱۲. تابعی مانند $u(x,y)$ بیابید که در نوار نیمه نامتناهی $0<x<1$ و $y>0$ همساز و محدود بوده، در شرایط زیر صدق کند:

$$u_y(x,0)=0 \quad , \quad u(0,y)=0 \quad , \quad u_x(1,y)=f(y)$$

جواب : $$u(x,y)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sinh \alpha x\cos \alpha y}{\alpha\cosh\alpha}\int_{۰}^{\infty}f(s)\cos \alpha s\,ds\,d\alpha$$

۱۳. تابعی مانند $u(x,y)$ بیابید که در نوار $-\infty<x<\infty$ و $۰<y<b$ همساز و محدود باشد به طوری که $u(x,۰)=۰$ و $u(x,b)=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ که در آن f محدود است و با انتگرال فوریه‌اش نمایش داده می‌شود.

جواب: $$u(x,y)=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sinh \alpha y}{\sinh \alpha b}\int_{۰}^{\infty}f(s)\cos \alpha\,(s-x)\,ds\,d\alpha$$

۱۴. فرض کنید جسم صلب نیمه نامتناهی $x\geq ۰$ که ابتداءً در دمای یکنواختی است، با نگهداری کرانه‌اش در دمای ثابت یکنواختی سرد یا گرم شده است (بخش ۵۷). نشان دهید که زمان لازم برای رسیدن دو نقطهٔ داخلی به یک دما با مربع فاصله‌های آن دو نقطه از صفحهٔ کرانه متناسب است.

۱۵. مسألهٔ مقدار مرزی برای دمای مانای $u(x,y)$ در یک قاب نازک به شکل نوار نیمه نامتناهی را حل کنید هر گاه از طریق وجه‌های قاب به محیط اطراف قاب که در دمای صفر است انتقال حرارت صورت می‌گیرد.

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)-bu(x,y)=۰\qquad (x>۰\ ,\ ۰<y<۱)\cdot$$

$$u_x(۰,y)=۰\qquad (۰<y<۱)$$

$$u(x,۰)=۰\quad ,\quad u(x,۱)=f(x)\qquad (x>۰)$$

که در آن b ثابت مثبتی است و

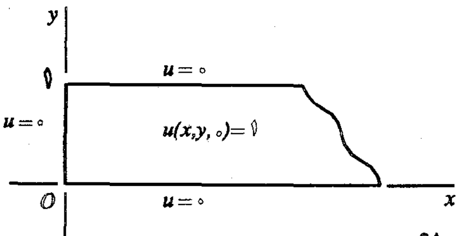
$$f(x)=\begin{cases}۱ & ۰<x<c \quad \text{هرگاه}\\ ۰ & x>c \quad \text{هرگاه}\end{cases}$$

جواب :
$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha c \cos \alpha x \sinh (y\sqrt{\alpha^2+b})}{\alpha \sinh \sqrt{\alpha^2+b}}\, d\alpha$$

۱۶. تحقیق کنید که برای هر عدد ثابت C، تابع

$$v(x,t)=Cxt^{-3/2} \exp\left(\frac{-x^2}{4kt}\right)$$

در معادلهٔ حرارت $v_t=kv_{xx}$ هرگاه $x>0$ و $t>0$ صدق می‌کند. همچنین تحقیق کنید که هرگاه $t>0$، $v(0+,t)$ و هرگاه $x>0$، $v(x,0t)=0$. بنابراین با اضافه کردن v به تابع u ای که در بخش ۵۷ پیدا شد، می‌توان جوابهای دیگر مسأله را در حالتی که تابع دما قید محدود بودن ندارد به دست آورد. اما توجه کنید که وقتی t و x به صفر میل کنند v نامحدود است، با انتخاب $t=x^2$ و میل دادن x به صفر این مطلب دیده می‌شود.



شکل ۶۱

۱۷. فرض کنید $u=u(x,y,t)$ نمایش جواب کراندار مسألهٔ دمای دو بعدی باشد که در شکل ۶۱ نشان داده شده است و

$$u_t=k(u_{xx}+u_{yy}) \qquad (x>0,\ 0<y<1,\ t>0)$$

و فرض کنید $v=v(x,t)$ و $w=w(y,t)$ نمایش جوابهای محدود مسائل دمای یک بعدی زیر باشند:

$$v_t = kv_{xx} \quad , \quad v(\circ,t) = \circ \quad , \quad v(x,\circ) = ١ \qquad (x > \circ\, , t > \circ)$$

$$w_t = kw_{yy} \quad , \; w(\circ,t) = w(١, t) = \circ \;\; , \;\; w(y\, , \circ) = ١ \qquad (\circ < y < ١ \;, \; t > \circ)$$

(الف) به کمک مسألهٔ ۳ بخش ۴۰ نشان دهید که $u = vw$.

(ب) با استناد به جواب (۱۵) بخش ۵۷ مسألهٔ دمای آن بخش و تابع دمای حاصل در مسألهٔ ۴ (ب) بخش ۳۲، عبارات صریحی برای v و w بنویسید. سپس با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که:

$$u(x\,,y,t) = \frac{۴}{\pi} erf\left(\frac{x}{۲\sqrt{kt}}\right) \sum_{n=١}^{\infty} \frac{sin(۲n-١)\pi y}{۲n-١} exp\left[-(۲n-١)^۲ \pi^۲ kt\right]$$

۱۸. فرض کنید I نمایش انتگرال $exp(-x^۲)$ از صفر تا بینهایت باشد و قرار دهید:

$$I^۲ = \int_\circ^\infty e^{-x^۲} dx \int_\circ^\infty e^{-y^۲} dy = \int_\circ^\infty \int_\circ^\infty e^{-(x^۲+y^۲)} dx\, dy$$

مقدار این انتگرال مکرر را با استفاده از مختصات قطبی محاسبه کرده، نشان دهید که $I = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$. بدین ترتیب تحقیق کنید که وقتی x به بینهایت میل کند $erf(x)$ که با ضابطهٔ (۱۴) بخش ۵۷ تعریف شد، به عدد یک میل می‌کند.

۱۹. فرمول انتگرالگیری (۱۰) بخش ۵۷ را بدین طریق به دست آورید که ابتدا با نوشتن

$$y(x) = \int_\circ^\infty e^{-\alpha^۲ a} cos\, \alpha x\, d\alpha \qquad\qquad (a > \circ)$$

و مشـــتقگیری از آن انـــتگرال $y'(x)$ را بـــیابید. سـپس در انـتگرال جـدید بـا استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء نشان دهـید کـه $۲ay'(x)=-xy(x)$ ، بـیان کـنید چرا:

$$y(\circ)=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(مسأله ۱۸ را ببینید)، و $y(x)$را به دست آورید. نتیجهٔ مطلوب عبارت است از مـقدار y وقتی $x=b$.[۱]

۱. استنتاج دیگری در کتاب مؤلفان (۱۹۹۰، ص ۱۹۹)، که در کتابنامه آمده، بیان شده است.

فصل ۷

توابع بسل و کاربردها

در مسائل مقدار مرزی که شامل لاپلاسین $\nabla^2 u$ در مختصات استوانه‌ای یا قطبی است، روش جداسازی متغیرها اغلب معادلهٔ دیفرانسیلی به صورت زیر تولید می‌کند:

$$\rho^2 \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \rho \frac{dy}{d\rho} + (\lambda\rho^2 - \nu^2) y = 0 \tag{1}$$

که در آن y یک تابع از مختص ρ است. در چنین مسأله‌ای، $-\lambda$ ثابت جداسازی است، مقادیر λ مقادیر ویژهٔ مسألهٔ ستورم-لیوویلی است که شامل معادلهٔ (۱) است. پارامتر ν یک عدد نامنفی است که توسط جنبه‌های دیگر آن مسألهٔ مقدار مرزی تعیین می‌شود. معمولاً ν صفر یا یک عدد صحیح مثبت است.

در کاربرد $\lambda \geq 0$ در می‌آید، و وقتی $\lambda > 0$، با استفاده از جایگذاری $x = \sqrt{\lambda}\,\rho$ می‌توانیم معادلهٔ (۱) را به فرمی تبدیل کنیم که λ ندارد:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)\, y(x) = 0 \tag{2}$$

این معادلهٔ دیفرانسیل معروف است به معادلهٔ بسل جوابهای آن توابع بسل یا گاهی توابع استوانه‌ای نامیده می‌شوند.

معادلهٔ (۲) یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم است که خطی و همگن است، و

با مقایسهٔ آن با شکل استاندارد این گونه معادلات

$$y''(x)+A(x)y'(x)+B(x)y(x)=0$$

می‌بینیم که $A(x)=\frac{1}{x}$ و $B(x)=1-(\frac{\nu}{x})^2$. این ضرائب همه جا به جز در مبدأ، که یک نقطهٔ تکین معادلهٔ بسل است، پیوسته‌اند. در مورد این معادله از لم بخش ۴۴، دربارهٔ وجود و یگانگی جوابها، روی بازهٔ کراندار و بسته‌ای که شامل مبدأ نباشد، می‌توان استفاده کرد. اما برای مسائل مقدار مرزی در نواحی $\rho\leq c$ که توسط استوانه‌ها یا دایره‌ها محدود شده‌اند، مبدأ $x=0$ با محور یا مرکز $\rho=0$ متناظر می‌شود که این نقطه داخل آن ناحیه است. بنابراین، صفر یک نقطهٔ انتهایی بازهٔ متغیر x است.

ابتدا توجه خود را به حالات $\nu=n$ محدود می‌کنیم که در آن $n=0,1,2,\ldots$. برای چنین حالتی یک جواب از معادلهٔ بسل را پیدا می‌کنیم که با یک سری توانی نمایش داده می‌شود و آن سری همراه با همهٔ مشتقاتش برای هر مقدار x از جمله $x=0$ همگراست. آن جواب با $J_n(x)$ نمایش داده می‌شود و بنابراین همهٔ مشتقات آن توابعی هستند که در هر کجا پیوسته‌اند. در اشاره به سری توانی، همواره منظور ما یک سری مک‌لوران یا یک سری تیلر حول مبدأ است.

۵۹. توابع بسل J_n

فرض می‌کنیم n نمایش یک عدد صحیح نامنفی باشد و در جستجوی یک جواب از معادلهٔ بسل

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-n^2)y(x)=0\quad(n=0,1,2,\ldots)\tag{۱}$$

هستیم که به صورت حاصلضرب x^c در یک سری توانی باشد، که در آن اولین جمله آن سری ناصفر و c یک مقدار ثابت است. یعنی اینکه، c و ضرائب a_j را طوری تعیین می‌کنیم که تابع

$$y=x^c\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j=\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^{c+j}\qquad(a_0\neq 0)\tag{۲}$$

در معادلهٔ (۱) صدق کند.[۱]

فعلاً فرض کنید که آن سری دیفرانسیل‌پذیر است. با جایگذاری تابع (۲) و مشتقات آن در معادلهٔ (۱)، معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[(c+j)(c+j-1)+(c+j)-n^{2}\right]a_j x^{c+j}+\sum_{j=0}^{\infty}a_j x^{c+j+2}=0$$

اما $(c+j)(c+j-1)+(c+j)=(c+j)^{2}$ و مجموع دوم را در اینجا می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{j=2}^{\infty}a_{j-2}x^{c+j}$$

بنابراین :

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[(c+j)^{2}-n^{2}\right]a_j x^{c+j}+\sum_{j=2}^{\infty}a_{j-2}x^{c+j}=0$$

با ضرب این معادله در x^{-c} و جدا نوشتن جملات j ام سری اول برای ۱ و $j=0$ معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$(c-n)(c+n)a_0+(c+1-n)(c+1+n)a_1 x \tag{3}$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty}\left[(c+j-n)(c+j+n)a_j+a_{j-2}\right]x^{j}=0$$

معادلهٔ (۳) یک اتحاد برحسب x است هرگاه ضریب هر توان از x صفر شود. بنابراین اگر قرار است جملهٔ ثابت صفر باشد، آنگاه $c=n$ یا $c=-n$ و در هر دو حالت $a_1=0$ بعلاوه:

$$(c+j-n)(c+j+n)a_j+a_{j-2}=0 \qquad (j=2,3,\dots)$$

---

۱. روش سری که در اینجا برای حل معادلهٔ (۱) از آن استفاده شد، اغلب به عنوان روش فروبینیوس به آن اشاره می‌شود و در کتب مقدماتی دربارهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی مورد بحث قرار می‌گیرد، در کتبی مانند بویس و دیپریما (۱۹۹۲) یا رین‌ویلی و بدینت (۱۹۸۹) که هر دو در کتابنامه آمده‌اند.

c را مساوی n انتخاب می‌کنیم. در این صورت رابطهٔ بازگشتی زیر به دست می‌آید:

$$a_j = \frac{-1}{j(2n+j)}\, a_{j-2} \qquad (j=2,3,\ldots) \tag{4}$$

که هر ضریب a_j $(j=2,3,\ldots)$ را برحسب دومین ضریب قبل از خودش در آن سری نمایش می‌دهد. توجه کنید که وقتی n مثبت باشد، انتخاب $c=-n$ نمی‌تواند رابطهٔ بازگشتی خوش تعریفی مثل (۴) نتیجه دهد که در آن مخرج طرف راست هیچگاه صفر نمی‌شود.

چون $a_1=0$، رابطهٔ (۴) ایجاب می‌کند $a_3=0$ باشد و سپس همین رابطه ایجاب می‌کند که $a_5=0$ و غیره. یعنی این که

$$a_{2k+1}=0 \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{5}$$

برای به دست آوردن بقیه ضرائب فرض می‌کنیم k نمایش یک عدد صحیح مثبت باشد و k معادلهٔ زیر را با استفاده از رابطه (۴) می‌نویسیم:

$$a_2 = \frac{-1}{1(n+1)2^2}\, a_0$$

$$a_4 = \frac{-1}{2(n+2)2^2}\, a_2$$

$$\vdots$$

$$a_{2k} = \frac{-1}{k(n+k)2^2}\, a_{2k-2}$$

از مساوی قرار دادن حاصلضرب طرفهای چپ و حاصلضرب طرفهای راست این معادلات و حذف عوامل مشترک a_2 و a_4 و ... و a_{2k-2} از دو طرف معادلهٔ حاصل به عبارت زیر می‌رسیم:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+k)2^{2k}}\, a_0 \quad , \quad (k=1,2,\ldots) \tag{6}$$

اکنون نظر به اتحاد (۵) و چون $c=n$، سری (۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$y=a_{۰}x^{n}+\sum_{k=۱}^{\infty}a_{۲k}\,x^{n+۲k} \tag{۷}$$

که در آن ضرائب $a_{۲k}$ $(k=۱,۲,...)$ همانهایی هستند که در عبارت (۶) صدق می‌کنند. بر طبق آزمون نسبت، این سری برای همهٔ مقادیر x همگرای مطلق است:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{۲(k+۱)}\;x^{n+۲(k+۱)}}{a_{۲k}\;x^{n+۲k}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{۱}{(k+۱)(n+k+۱)}\left(\frac{|x|}{۲}\right)^{۲}=۰$$

بنابراین، یک تابع پیوسته نمایش می‌دهد و نسبت به x دیفرانسیل‌پذیر از هر مرتبه است. سری (۷) در واقع یک جواب از معادلهٔ (۱) است زیرا آن سری دیفرانسیل‌پذیر است و ضرائب آن در رابطهٔ بازگشتی صدق می‌کنند که ایجاب می‌کند تا مجموع آن سری در معادلهٔ بسل (۱) صدق کند.

ضریب $a_{۰}$ در سری (۷) می‌تواند هر مقدار غیرصفر باشد. اگر عبارت (۶) را داخل آن سری جایگذاری کرده، بنویسیم:

$$y=a_{۰}\,x^{n}\left[۱+\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k}}{k!\,(n+۱)(n+۲)\,.\;.\;.(n+k)}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲k}\right]$$

ملاحظه می‌کنیم که با انتخاب

$$a_{۰}=\frac{۱}{n!\,۲^{n}}$$

جواب معادلهٔ بسل به $y=J_{۰}(x)$ ساده می‌شود، که در آن:

$$J_{n}(x)=\frac{۱}{n!}\left(\frac{x}{۲}\right)^{n}+\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k}}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{۲}\right)^{n+۲k} \tag{۸}$$

این تابع $J_n(x)$ به تابع بسل نوع اول مرتبه n $(n=0, 1, 2...)$ معروف است. با قراردادن $0!=1$ ، آن را می‌توان به صورت فشرده‌تر زیر نوشت:

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \tag{۹}$$

از عبارت (۹) متوجه می‌شویم که:

$$J_n(-x)=(-1)^n J_n(x) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{۱۰}$$

یعنی اینکه، J_n یک تابع زوج است هرگاه $n=0, 2, 4, \ldots$ و فرد است هرگاه $n=1, 3, 5, \ldots$. همچنین از عبارت (۸) واضح است که $J_n(0)=0$ هرگاه $n=1, 2, \ldots$ ولی $J_0(0)=1$.

در کاربردها، حالت $n=0$ ، مورد توجه خاص ما قرار دارد. بنابراین، معادلهٔ بسل (۱) بدین شکل در می‌آید:

$$xy''(x)+y'(x)+xy(x)=0 \tag{۱۱}$$

و عبارت (۹) به عبارت زیر تبدیل می‌شود:

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{۱۲}$$

چون برای $k\geq 1$ داریم:

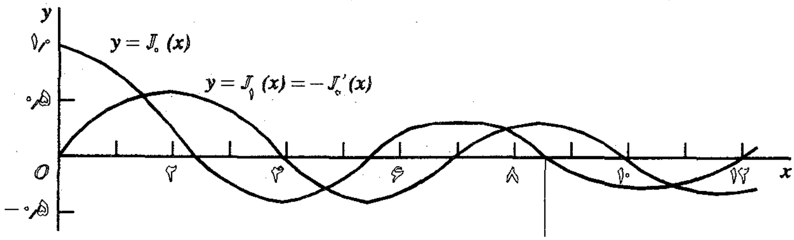
$$(k!)^2\, 2^{2k}=\Big[(1)(2)(3)\ldots(k)\,2^k\Big]^2=2^2 4^2 6^2\ldots(2k)^2$$

پس فرم دیگر J_0 چنین است:

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2 4^2}-\frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}+\ldots \tag{۱۳}$$

عبارات (۱۲) و (۱۳) شباهتهایی با سری توانی $\cos x$ دارند. همچنین بین سری توانی تابع فرد $J_1(x)$ و سری توانی $\sin x$ شباهتی وجود دارد. همانگونه که خواهیم دید، از جمله شباهتهای بین خواص آن دو تابع، فرمول مشتق $J_0'(x)=-J_1(x)$ است، که متناظر با فرمول مشتق تابع $\cos x$ است. نمودارهای $y=J_0(x)$ و $y=J_1(x)$ در شکل ۶۲

نشان داده شده‌اند. خصوصیات بیشتر در مورد این نمودارها و خصوصاً طبیعت صفرهای $J_{\circ}(x)$ و $J_{1}(x)$ بعداً در این فصل، بررسی خواهد شد.



شکل ۶۲

۶۰. جوابهای عمومی معادلهٔ بسل

با روشهای گوناگون و نسبتاً مقدماتی می‌توان یک تابع مستقل خطی از J_n به دست آورد که در معادلهٔ بسل زیر صدق کند:

$$x^{2}y''(x)+xy'(x)+(x^{2}-n^{2})y(x)=0 \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{1}$$

نقطهٔ تکین $x=0$ معادلهٔ (۱) از یک نوع خاص است و به عنوان یک نقطه تکین منظم شناخته می‌شود. برای حل معادلهٔ بسل از روش سری توانی استفاده می‌شود که طوری تعمیم داده شده تا جوابهای عمومی را در نزدیکی نقاط تکین منظم ارائه کند. در اینجا جزئیات بیشتری را مطرح نمی‌کنیم بلکه فقط نتایج را بیان می‌کنیم.

وقتی $n=0$، جواب عمومی عبارت است از:

$$y=AJ_{\circ}(x)+B\left[J_{\circ}(x)\ln x+\frac{x^{2}}{2^{2}}-\frac{x^{4}}{2^{2}4^{2}}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{x^{6}}{2^{2}4^{2}6^{2}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\ldots\right]$$

که در آن A و B ثابتهای دلخواه هستند و $x>0$. مشاهده می‌کنید، مادامی که $B\neq 0$، هر انتخابی از A و B جوابی فراهم می‌کند که بیکران است، هرگاه x از مقادیر مثبت به صفر میل کند. بنابراین چنین جوابی را نمی‌توان به صورت یک مضرب ثابتی از تابعی مثل $J_{\circ}(x)$ نوشت که به واحد میل می‌کند، هرگاه x به صفر میل کند. بنابراین $J_{\circ}(x)$ و

جواب (۲) مستقل خطی هستند هرگاه $B\neq ۰$. ثابت اویلر به صورت حد دنبالهٔ

$$S_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n} - \ln n \qquad (n = ۱, ۲, \ldots) \tag{۳}$$

تعریف می‌شود و بسیار معمول است که از ثابت اویلر $\gamma = ۰/۵۷۷۲...$ استفاده کرده، بنویسیم:

$$A = \frac{۲}{\pi}(\gamma - \ln ۲) \qquad , \qquad B = \frac{۲}{\pi}$$

هرگاه آن دو مقدار به A و B نسبت داده شوند، دومین جوابی که به دست می‌آید، تابع بسل نوع دوم از مرتبهٔ صفر منسوب به وبر است:[۱]

(۴

$$Y_۰(x) = \frac{۲}{\pi}\left[\left(\ln\frac{x}{۲} + \gamma\right)J_۰(x)\frac{x^۲}{۲^۲} - \frac{x^۴}{۲^۲۴^۲}\left(۱ + \frac{۱}{۲}\right) + \frac{x^۶}{۲^۲۴^۲۶^۲}\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}\right) - \ldots\right]$$

به طور کلی‌تر، برای هر مقدار $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ معادلهٔ (۱) یک جواب $Y_n(x)$ دارد که برای $x > ۰$ معتبر است و وقتی x به صفر میل کند، بیکران است. چون $J_n(x)$ در $x = ۰$ پیوسته است، پس $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ مستقل خطی‌اند و برای $x > ۰$، جواب عمومی معادلهٔ (۱) را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$y = C_۱ J_n(x) + C_۲ Y_n(x) \qquad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots) \tag{۵}$$

که در آن $C_۱$ و $C_۲$ ثابتهای دلخواه هستند. کار نظری جواب دوم $Y_n(x)$ به طور قابل ملاحظه‌ای از کار نظری $J_n(x)$ بیشتر است و به کارگیری آنها را به مسائلی محدود خواهیم کرد که در آنها فقط لازم است بدانیم $Y_n(x)$ در $x = ۰$ ناپیوسته است.

---

۱. توابع بسل دیگر وجود دارند و نمادهای استفاده شده در نوشته‌های این موضوع به طور وسیع متغیر است. در هر حال مقالهٔ واتسن (۱۹۵۲) که در کتابنامه آمده، معمولاً به عنوان یک مرجع استاندارد تلقی می‌گردد.

به منظور نوشتن جواب عمومی معادلهٔ بسل

$$x^{2}y''(x)+xy'(x)+(x^{2}-\nu^{2})y(x)=0 \qquad (\nu>0\ ;\ \nu\neq 1,2,\dots) \tag{۶}$$

که در آن ν هر عدد مثبت به غیر از ۱ و ۲ و ... است، در اینجا به بعضی از خواص مقدماتی تابع گاما اشاره می‌کنیم که به وسیلهٔ معادلهٔ زیر تعریف می‌شود، هرگاه $\nu>0$ [1]

$$\Gamma(\nu)=\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{\nu-1}dt \qquad (\nu>0) \tag{۷}$$

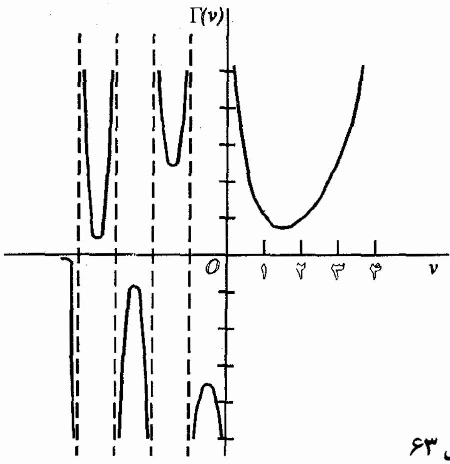
یکبار انتگرال‌گیری جزء به جزء نشان می‌دهد:

$$\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu) \tag{۸}$$

هرگاه $\nu>0$. برای ν های منفی نیز این خاصیت به تابع داده می‌شود، بنابراین $\Gamma(\nu)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu}$ هرگاه $-1<\nu<0$ و $-2<\nu<-1$ و غیره. بنابراین معادلات (۷) و (۸) با همدیگر، تابع $\Gamma(\nu)$ را برای همهٔ مقادیر ν به جز $\nu=0,-1,-2,\dots$ تعریف می‌کنند (شکل ۶۳). از معادلهٔ (۷) نتیجه می‌شود $\Gamma(1)=1$ ؛ همچنین می‌توان نشان داد که برای $\nu>0$ تابع $\Gamma(\nu)$ پیوسته و مثبت است. لذا از اتحاد $\Gamma(\nu)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu}$ نتیجه می‌شود که $\Gamma(0+)=\infty$ و علاوه بر این، $|\Gamma(\nu)|$ نامتناهی می‌شود هرگاه $\nu\to-n$ $(n=0,1,2,\dots)$. این بدین معنی است که $\frac{1}{\Gamma(\nu)}$ به صفر میل می‌کند، وقتی که ν به $-n$ میل می‌کند $(n=0,1,2,\dots)$ ؛ و به اختصار می‌نویسیم $\frac{1}{\Gamma(-n)}=0$ هرگاه $n=0,1,2,\dots$. توجه کنید که در نتیجه تابع عکس $\frac{1}{\Gamma(\nu)}$ برای همهٔ مقادیر ν پیوسته است.

---

۱. بررسیهای دقیقتر در مورد تابع گاما در کتابهای لبدو (فصل ۱، ۱۹۷۲) و رین ویلی (فصل ۲، ۱۹۷۱) که در کتابنامه آمده، ارائه شده است.



شکل ۶۳

وقتی $\nu=۱,۲,۳,...$ باشد، تابع $\Gamma(\nu)$ به یک فاکتوریل تبدیل می‌شود:

$$\Gamma(n+۱)=n! \qquad (n=۰,۱,۲,\ldots) \tag{۹}$$

اثبات خاصیت (۹) و این خاصیت که:

$$\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)=\sqrt{\pi} \tag{۱۰}$$

در مسائل بخش خواسته شده است.

تابع بسل نوع اول مرتبه $\nu(\nu\geq ۰)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_\nu(x)=\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^k}{k!\Gamma(\nu+k+۱)}\left(\frac{x}{۲}\right)^{\nu+۲k} \tag{۱۱}$$

توجه داریم که این همان عبارت (۹)، بخش ۵۹، برای $J_n(x)$ است، هرگاه $\nu=n=۰,۱,۲,...$. تابع بسل $J_{-\nu}(x)$ $(\nu>۰)$ نیز خوش تعریف است، هرگاه $-\nu$ را به جای ν در معادلهٔ (۱۱) قرار دهیم. به هر حال، اگر $\nu=n=۱,۲,...$، مجموع سری حاصل از $k=n$ شروع می‌شود زیرا $\frac{۱}{\Gamma(-n+k+۱)}$ برای $۰\leq k\leq n-۱$ صفر است. با جایگذاری مستقیم و بدون هیچ مشکلی می‌توان نشان داد که J_ν و $J_{-\nu}$ جوابهای معادلهٔ (۶) هستند. با یک تعدیلی از روش به کار گرفته شده در بخش ۵۹ و استفاده از خاصیت

(۸) تابع گاما می‌توان به آن جوابها دست یافت.

هرگاه $\nu>0$ و $\nu\neq 1, 2, \ldots$، تابع بسل $J_{-\nu}(x)$ حاصلضرب $\frac{1}{x^{\nu}}$ و یک سری توانی برحسب x است که جملهٔ ابتدایی آن $(k=0)$ مخالف صفر است، بنابراین وقتی $x\to 0$ میل می‌کند، $J_{-\nu}(x)$ بیکران است. چون وقتی $x\to 0$ میل می‌کند $J_{\nu}(x)$ به صفر میل می‌کند. واضح است که J_{ν} و $J_{-\nu}$ توابع مستقل خطی هستند. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ بسل (۶) عبارت است از:

$$y=C_1 J_{\nu}(x)+C_2 J_{-\nu}(x) \qquad (\nu>0 \quad ; \quad \nu\neq 1, 2, \ldots) \tag{۱۲}$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواه هستند. [این را با جواب (۵) معادلهٔ (۱) مقایسه کنید.] می‌توان نشان داد که J_n و J_{-n} وابستهٔ خطی‌اند زیرا:

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{۱۳}$$

(مسألهٔ ۱، بخش ۶۱ را ببینید). بنابراین اگر $\nu=n=0, 1, 2, \ldots$، جواب (۱۲) نمی‌تواند جواب عمومی معادلهٔ (۶) باشد.

۶۱. روابط بازگشتی

با معادلهٔ زیر شروع می‌کنیم:

$$x^{-n} J_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

و می‌نویسیم:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(-1)^k}{k(k-1)!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}$$

اگر در اینجا k را با $k+۱$ جایگزین کنیم طوری که مجدداً k از صفر تا بینهایت تغییر کند نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right] = x^{-n}\left(\frac{x}{۲}\right)^n \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^{k+۱}}{k!\,(n+k+۱)!}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲k+۱}$$

$$= -x^{-n}\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{k!(n+۱+k)!}\left(\frac{x}{۲}\right)^{n+۱+۲k}$$

یا

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right] = -x^{-n}J_{n+۱}(x) \qquad (n=۰,۱,۲,\ldots) \tag{۱}$$

در انتهای بخش ۵۹ به حالت خاص زیر اشاره شده بود:

$$J_۰'(x) = -J_۱(x) \tag{۲}$$

به طور مشابه، از نمایش سری توانی $x^nJ_n(x)$ می‌توان نشان داد که:

$$\frac{d}{dx}\left[x^nJ_n(x)\right] = x^nJ_{n-۱}(x) \qquad (n=۱,۲,\ldots) \tag{۳}$$

روابط (۱) و (۳)، که روابط بازگشتی نامیده می‌شوند، می‌توانند به صورت زیر نوشته شوند:

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+۱}(x)$$

$$xJ_n'(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-۱}(x)$$

با حذف $J_n'(x)$ از این معادلات، نتیجه می‌گیریم که:

$$xJ_{n+۱}(x) = ۲nJ_n(x) - xJ_{n-۱}(x) \qquad (n=۱,۲,\ldots) \tag{۴}$$

این رابطهٔ بازگشتی تابع $J_{n+۱}$ را برحسب توابع بسل از مراتب پایین‌تر J_n و $J_{n-۱}$ بیان می‌کند.

از معادلهٔ (۳) فرمول انتگرالگیری زیر را داریم:

$$\int_{0}^{x} s^{n} J_{n-1}(s)\,ds = x^{n} J_{n}(x) \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{۵}$$

یک حالت خاص مهم عبارت است از:

$$\int_{0}^{x} s J_{0}(s)\,ds = x J_{1}(x) \tag{۶}$$

هرگاه به جای n در روابط (۱) و (۳) و (۴) پارامتر بدون محدودیت ν قرار گیرد، آن روابط هنوز برقرارند. برای به دست آوردن آنها صرفاً $\Gamma(\nu+k+1)$ یا $(\nu+k)\Gamma(\nu+k)$ را به جای $(n+k)!$ می‌نویسیم.

مسائل

۱. با استفاده از سری (۱۱) بخش ۶۰، و به خاطر آوردن این مطلب که جملات مشخصی باید حذف شوند، نشان دهید که:

$$J_{-n}(x) = (-1)^{n} J_{n}(x) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

و در نتیجه توابع J_n و J_{-n} وابستهٔ خطی‌اند.

۲. رابطهٔ بازگشتی (۳) بخش ۶۱ را به دست آورید.

۳. فرمول مشتق‌گیری زیر را ثابت کنید:

$$x^{2} J_{n}''(x) = (n^{2}-n-x^{2})\,J_{n}(x) + x J_{n+1}(x) \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

۴. (الف) فرمول کاهش توان

$$\int_{0}^{x} s^{n} J_{0}(s)\,ds = x^{n} J_{1}(x) + (n-1)\,x^{n-1} J_{0}(x) - (n-1)^{2}\int_{0}^{x} s^{n-2} J_{0}(s)\,ds$$
$$(n=2,3,\ldots)$$

را بدین روش به دست آورید که دوبار انتگرالگیری جزء به جزء را به کار برید و در اولین و دومین انتگرال حاصل به ترتیب از روابط زیر (بخش ۶۱) استفاده کنید:

$$\frac{d}{ds}\left[s J_{1}(s)\right] = s J_{0}(s) \quad , \quad \frac{d}{ds} J_{0}(s) = -J_{1}(s)$$

(ب) وقتی n فرد باشد، با به کارگیری پی‌درپی اتحاد به دست آمده در قسمت (الف) می‌توان مقدار انتگرال طرف چپ آن اتحاد را به دست آورد.[۱] جهت تشریح این مطلب نشان دهید که:

$$\int_{\circ}^{x} s^{۵} J_{\circ}(s)\, ds = x\,(x^{۲}-۸)\left[۴x J_{\circ}(x) + (x^{۲}-۸)\, J_{۱}(x)\right]$$

۵. فرض کنید y یک جواب معادلهٔ بسل مرتبه صفر و L نمایش عملگر دیفرانسیل خودالحاق (بخش ۴۱) باشد که توسط معادلهٔ زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{L}\left[X(x)\right] = \left[xX'(x)\right]' + xX(x)$$

(الف) برای این عملگر، در اتحاد لاگرانژ [مسألهٔ ۳ (ب) و بخش ۴۳]

$$X\mathcal{L}[Y] - Y\mathcal{L}[X] = \frac{d}{dx}\left[x\,(XY' - X'Y)\right]$$

$X=J_{\circ}$ و $Y=y$ قرار داده، نشان دهید یک ثابت B وجود دارد که:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y(x)}{J_{\circ}(x)}\right] = \frac{B}{x\,[J_{\circ}(x)]^{۲}}$$

---

۱. همچنین توجه کنید که وقتی n زوج باشد، می‌توان از فرمول کاهش توان استفاده و مسألهٔ محاسبهٔ $\int_{\circ}^{x} s^{n} J_{\circ}(s)ds$ را به محاسبهٔ $\int_{\circ}^{x} J_{\circ}(s)ds$ تبدیل کرد که مقادیر این انتگرال برای مقادیر مختلف x به صورت جدول در دسترس است، مثلاً در کتاب تألیف آبرامویچ واستگان (صفحات ۴۹۳-۴۹۲، ۱۹۷۲) یافت می‌شود. مراجع بیشتر در صفحات ۴۹۱-۴۹۰ آن کتاب ذکر شده و مشخصات این کتاب در کتابنامه آمده است.

(ب) فرض کنید که تابع $\frac{1}{[J_0(x)]^2}$ یک سری مک لورن به صورت زیر دارد:[1]

$$\frac{1}{\left[J_0(x)\right]^2}=1+\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{2k}$$

همچنین فرض کنید می‌توان از بسط حاصل از ضرب دو طرف این معادله در $\frac{1}{x}$ جمله به جمله انتگرال گرفت. با استفاده از نتیجه قسمت (الف) به طور صوری نشان دهید که y را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y=AJ_0(x)+B\left[J_0(x)\ln x+\sum_{k=1}^{\infty} d_k x^{2k}\right]$$

که در آن A و B و d_k $(k=1,2,\ldots)$ ثابت هستند. [با معادلهٔ (۲)، بخش ۶۰ مقایسه کنید].

۶. فرض کنید s_n $(n=1,2,\ldots)$ دنبالهٔ تعریف شده در معادلهٔ (۳) بخش ۶۰ باشد. نشان دهید که برای هر n، $s_n>0$ و $s_n-s_{n+1}>0$. بنابراین نشان دهید که این دنباله کراندار و نزولی است و در نتیجه به یک عدد γ همگراست. همچنین، نشان دهید چگونه نتیجه می‌شود که $0\leq\gamma<1$.

راهنمایی : از نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ مشاهده می‌کنید که:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}>\int_1^n\frac{dx}{x}=\ln n \qquad (n\geq 2)$$

و

$$\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1)-\ln n \qquad (n\geq 1)$$

۷. (الف) همانگونه که در بخش ۶۰ بیان شده، خاصیت $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu)$ از تابع گاما را به دست آورید.

---

۱. این فرض درست بسادگی با روشهایی از نظریه توابع از یک متغیر مختلط ثابت می‌شود. کتاب مؤلف (فصل ۵، ۱۹۹۰) را که در کتابنامه آمده ببینید.

(ب) نشان دهید $\Gamma(1)=1$ و با استفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید که $\Gamma(n+1)=n!$ هرگاه $n=0,1,2,\ldots$.

۸. ثابت کنید که تابع J_ν $(\nu\geq 0)$ ، تعریف شده توسط معادلهٔ (۱۱)، بخش ۶۰ در معادلهٔ بسل (۶) همان بخش صدق می‌کند. نشان دهید چگونه نتیجه می‌دهد که $J_{-\nu}$ نیز یک جواب است.

۹. فرمول مشتق زیر را به دست آورید:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right]=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

که در آن $\nu\geq 0$ ، و نشان دهید که چرا آن فرمول برای $-\nu$ $(\nu>0)$ نیز صحیح است. [با رابطه (۱) بخش ۶۱ مقایسه کنید] .

۱۰. به نتیجهٔ به دست آمده در مسألهٔ ۱۸ ، بخش ۵۸، رجوع کرده ، نشان دهید که:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

۱۱. به کمک استقراء ریاضی ثابت کنید که

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k)!}{k!\,2^{2k}}\sqrt{\pi}\qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

۱۲. با استفاده از نمایش سری (۱۱)، بخش ۶۰، برای $J_\nu(x)$ و استفاده از اتحاد فوق در مسألهٔ ۱۱ نشان دهید که :

(الف) $J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ ب) $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$

۱۳. با استفاده از نتایج مسائل ۹ و ۱۲ نشان دهید که :

$$J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)$$

۱۴. نشان دهید که اگر y یک تابع دیفرانسیل‌پذیر از x و اگر $s=\alpha x$، که در آن α یک ثابت ناصفر است، آنگاه:

$$\frac{dy}{dx}=\alpha\frac{dy}{ds} \quad و \quad \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\alpha^{۲}\frac{d^{۲}y}{ds^{۲}}$$

بنابراین نشان دهید که جایگزینی $s=\alpha x$ معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^{۲}\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+x\frac{dy}{dx}+(\alpha^{۲}x^{۲}-n^{۲})y=۰ \qquad (n=۰,۱,۲,\ldots)$$

را به معادلهٔ بسل زیر تبدیل می‌کند که بدون α است:

$$s^{۲}\frac{d^{۲}y}{ds^{۲}}+s\frac{dy}{ds}+(s^{۲}-n^{۲})y=۰ \qquad (n=۰,۱,۲,\ldots)$$

نتیجه بگیرید که جواب عمومی اولین معادلهٔ دیفرانسیل در اینجا عبارت است از:

$$y=C_{۱}J_n(\alpha x)+C_{۲}Y_n(\alpha x)$$

۱۵. با استفاده از نمایش سری (۹) برای $J_n(x)$ در بخش ۵۹، نشان دهید که:

$$i^{-n}J_n(ix)=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{۱}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{۲}\right)^{n+۲k} \qquad (n=۰,۱,۲,\ldots)$$

تابع $I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)$ تابع بسل تعدیل یافتهٔ نوع اول مرتبه n است. نشان دهید که این سری برای همهٔ مقادیر x همگراست و $I_n(x)>۰$ هرگاه $x>۰$، و اینکه $I_n(-x)=(-۱)^n I_n(x)$. همچنین، با رجوع به نتیجهٔ مسألهٔ۱۴، نشان دهید که چرا $I_n(x)$ یک جواب از معادلهٔ بسل تعدیل یافتهٔ زیر است:

$$x^{۲}y''(x)+xy'(x)-(x^{۲}+n^{۲})y(x)=۰$$

۶۲. فرم انتگرالی بسل $J_n(x)$

اکنون یک نمایش انتگرالی مفید برای $J_n(x)$ به دست می‌آوریم. ابتدا توجه داریم که سریهای مربوط به بسطهای زیر برای هر مقدار x وقتی که $t \neq 0$، همگرای مطلق هستند:

$$exp\left(\frac{xt}{2}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!2^j} t^j \quad , \quad exp\left(\frac{-x}{2t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!2^k} t^{-k} \qquad (1)$$

بدین ترتیب با ضرب همهٔ جملات آن دو سری در یکدیگر و جمع جملات حاصل با هر ترتیب ، سری‌ای به دست می‌آید که حاصلضرب آن دو تابع نمایی را نمایش می‌دهد.[1] واضح است که متغیر t در هر کدام از این جملات حاصل به صورت یک فاکتور t^n $(n=0,1,2,...)$ یا t^{-n} $(n=1,2,...)$ ظاهر می‌شود، و می‌توان همهٔ جملاتی را که شامل توان بخصوصی از t هستند، به صورت یک مجموع نوشت.

در حالت t^n $(n=0,1,2...)$ ، مجموع فوق با ضرب kامین جملهٔ سری دوم در جملهٔ $j=n+k$ام سری اول و سپس جمع آن جملات از $k=0$ تا $k=\infty$ به دست می‌آید. نتیجه بدین شکل است:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} t^n = J_n(x) t^n$$

به طور مشابه، مجموع جملاتی که شامل t^{-n} $(n=1,2,...)$ هستند، با ضرب jامین جملهٔ سری اول در جملهٔ $k=n+j$ام سری دوم و جمع آن جملات از $j=0$ تا $j=\infty$ به دست می‌آید. آن مجموع را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(-1)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} t^{-n} = (-1)^n J_n(x) t^{-n}$$

۱. برای توجیهی از این روند، کتاب تیلرومان (صفحهٔ ۶۰۲-۶۰۱ ، ۱۹۸۳) را که در کتابنامه آمده ببینید.

بنابراین نمایش سری حاصلضرب آن دو تابع نمایی (۱) به صورت زیر است:

$$exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[J_n(x)t^n+(-1)^n J_n(x)t^{-n}\right] \qquad (2$$

در معادلهٔ (۲) می‌نویسیم $t=e^{i\phi}$. نظر به فرمول اویلر

$$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$$

می‌دانیم که:

$$e^{i\phi}-e^{-i\phi}=2i\sin\phi$$

و $\quad e^{-in\phi}=\cos n\phi-i\sin n\phi \quad , \quad e^{in\phi}=\cos n\phi+i\sin n\phi$

بنابراین از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود که:

$$exp(ix\sin\phi)=J_0(x) \qquad (3$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+(-1)^n\right]J_n(x)\cos n\phi+i\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n\right]J_n(x)\sin n\phi$$

اکنون، مجدداً بنابه فرمول اویلر داریم:

$$exp(ix\sin\phi)=\cos(x\sin\phi)+i\sin(x\sin\phi)$$

و اگر قسمتهای حقیقی در دو طرف معادلهٔ (۳) را مساوی قرار دهیم، نتیجه می‌شود که:

$$\cos(x\sin\phi)=J_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+(-1)^n\right]J_n(x)\cos n\phi$$

با ثابت نگهداشتن x و تلقی این معادله به عنوان یک نمایش سری کسینوسی فوریه از تابع $\cos(x\sin\phi)$ روی بازهٔ $0<\phi<\pi$ ، برای نوشتن نتیجه زیر، فقط نیاز است که فرمول ضرائب اینگونه سریها را به خاطر آوریم:

$$\left[1+(-1)^n\right]J_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\phi)\cos n\phi\,d\phi \qquad (n=0,1,2,\dots) \quad (4$$

از طرف دیگر، اگر قسمتهای موهومی در دو طرف معادلهٔ (۳) را مساوی قرار دهیم،

نمایش سری سینوسی فوریهٔ

$$\sin(x\sin\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n\right]J_n(x)\sin n\phi$$

برای $\sin(x\sin\phi)$ روی همان بازه به دست می‌آید. در نتیجه:

۵) $$\left[1-(-1)^n\right]J_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\phi)\sin n\phi\,d\phi\quad(n=1,2,\dots)$$

بنابراین، برطبق عبارات (۴) و (۵)

۶) $$J_{2n}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\phi)\cos 2n\phi\,d\phi\quad(n=0,1,2,\dots)$$

و

۷) $$J_{2n-1}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\phi)\sin(2n-1)\phi\,d\phi\quad(n=1,2,\dots)$$

با جمع جملات متناظر در دو طرف معادلات (۴) و (۵) و نوشتن

$$2J_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos n\phi\cos(x\sin\phi)+\sin n\phi\sin(x\sin\phi)]d\phi$$

یک عبارت تنها برای $J_n(x)$ به دست می‌آید.

یعنی اینکه:

۸) $$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\phi-x\sin\phi)\,d\phi\qquad(n=0,1,2,\dots)$$

این نتیجه به عنوان فرم انتگرالی بسل $J_n(x)$ معروف است و عبارات (۶) و (۷) حالات خاصی از آن هستند.

۶۳. نتایج نمایشهای انتگرالی

از نمایش انتگرالی

۱) $$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\phi-x\sin\phi)\,d\phi\qquad(n=0,1,2,\dots)$$

که اکنون به دست آمده، نتیجه می‌شود که:

$$J_n'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(n\phi-x\sin\phi)\sin\phi\,d\phi$$

با ادامهٔ دیفرانسیل‌گیری نمایشهای انتگرالی برای $J_n''(x)$ و غیره، حاصل می‌شود. در هر حالت ، قدر مطلق انتگرانی که پیش می‌آید از واحد بیشتر نیست. بنابراین خواص کرانداری زیر، نتایج فرم انتگرال بسل (۱) هستند:

$$|J_n(x)| \leq ۱ \qquad , \qquad \left| \frac{d^k}{dx^k} J_n(x) \right| \leq ۱ \qquad (k=۱,۲, \ldots) \tag{۲}$$

برای مثال، اولین نامساوی در اینجا با نوشتن

$$|J_n(x)| \leq \frac{۱}{\pi} \int_۰^\pi |cos\,(n\phi - x\, sin\, \phi)|\, d\phi \leq \frac{۱}{\pi} \int_۰^\pi d\phi = ۱$$

به دست می‌آید.

گاهی مفید است که نمایشهای انتگرالی

$$J_{۲n}(x) = \frac{۱}{\pi} \int_۰^\pi cos(x\, sin\, \phi)\, cos\, ۲n\phi\, d\phi \qquad (n=۰,۱,۲, \ldots)$$

و

$$J_{۲n-۱}(x) = \frac{۱}{\pi} \int_۰^\pi sin(x\, sin\, \phi)\, sin(۲n-۱)\phi\, d\phi \qquad (n=۱,۲, \ldots)$$

که در بخش ۶۲ به دست آمده‌اند، به صورت زیر نوشته شوند،

$$J_{۲n}(x) = \frac{۲}{\pi} \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} cos(x\, sin\, \phi)\, cos\, ۲n\phi\, d\phi \qquad (n=۰,۱,۲, \ldots) \tag{۳}$$

و

$$J_{۲n-۱}(x) = \frac{۲}{\pi} \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} sin(x\, sin\, \phi)\, sin(۲n-۱)\phi\, d\phi \qquad (n=۱,۲, \ldots) \tag{۴}$$

عبارات (۳) و (۴) از این واقعیت نتیجه می‌شوند که هرگاه x ثابت باشد ، نمودار انتگرانهای:

$$y = g(\phi) = cos(x\, sin\, \phi)\, cos\, ۲n\phi$$

$$y = h(\phi) = sin\,(x\, sin\, \phi)\, sin(۲n-۱)\phi$$

نسبت به خط $\phi=\frac{\pi}{2}$ متقارن هستند:

$$g(\pi-\phi)=g(\phi) \qquad , \qquad h(\pi-\phi)=h(\phi)$$

به حالت خاص

$$J_{\circ}(x)=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\phi)\,d\phi \tag{۵}$$

از (۳) توجه داریم که با جایگذاری $\theta=(\frac{\pi}{2})-\phi$ می‌تواند بدین شکل نیز نوشته شود:

$$J_{\circ}(x)=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\theta)\,d\theta \tag{۶}$$

می‌توان با استفاده از نمایشهای (۳) و (۴) ثابت کرد که برای هر n ثابت $(n=\circ,1,2\ldots)$،

$$\lim_{x\to\infty} J_n(x)=\circ \tag{۷}$$

برای ارائه جزئیات وقتی $n=\circ$، $u=\sin\phi$ را در معادلهٔ (۵) جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$\frac{\pi}{2}J_{\circ}(x)=\int_{\circ}^{c}\frac{\cos xu}{\sqrt{1-u^2}}\,du+\int_{c}^{1}\frac{\cos xu}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

که در آن $\circ<c<1$. انتگرال دوم در اینجا ناسره است اما نسبت به x همگرای یکنواخت است. متناظر به هر عدد مثبت ε، با انتخاب c به طوری که $1-c$ مثبت و به قدر کافی کوچک باشد، می‌توان قدر مطلق آن انتگرال را به طور یکنواخت برای همهٔ مقادیر x کمتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ کرد. پس با آن مقدار c لم ریمان-لبگ، شامل یک تابع کسینوس (بخش ۵۳) روی اولین انتگرال بالا اعمال می‌شود. یعنی، یک عدد x_ε وجود دارد به طوری که قدر مطلق اولین انتگرال بالا کمتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ است هرگاه $x>x_\varepsilon$.

بنابراین $\frac{\pi}{2}\left|J_{\circ}(x)\right|<\varepsilon$ هرگاه $x>x_\varepsilon$

و این خاصیت (۷) را برای $n=۰$ ثابت می‌کند. اثبات برای زمانی که n یک عدد صحیح مثبت باشد به قسمت مسائل واگذار شده است. جالب است که حد (۷) را با حد

$$\lim_{n\to\infty} J_n(x)=۰ \qquad (۸)$$

که برای هر مقدار ثابت x $(-\infty<x<\infty)$ درست است مقایسه کنیم. این حد از این واقعیت نتیجه می‌شود که ضرائب

$$b_{۲n-۱}=۲J_{۲n-۱}(x) \quad \text{و} \quad a_{۲n}=۲J_{۲n}(x)$$

در سریهای کسینوسی و سینوسی فوریهٔ توابع مشخصی از ϕ در بخش ۶۲، برطبق بخش ۱۶، باید به صفر میل کنند، هرگاه n به بینهایت میل کند. حد (۸) را می‌توان همچنین با به کارگیری لم ریمان- لبگ روی نمایشهای انتگرالی $J_{۲n}(x)$ و $J_{۲n-۱}(x)$ به دست آورد.

مسائل

۱. با استفاده از نمایشهای انتگرالی $J_n(x)$ ثابت کنید که:

(الف) $J_۰(۰)=۱$ (ب) $J_n(۰)=۰$ $(n=۱,۲,\ldots)$

(ج) $J_۰'(x)=-J_۱(x)$

۲. با نوشتن سری کسینوسی فوریه برای $\cos(x\sin\phi)$ در بخش ۶۲، نمایش (۳) بخش ۶۳ را برای $J_{۲n}(x)$ به صورت زیر به دست آورید:

$$\cos(x\sin\phi)=J_۰(x)+۲\sum_{n=۱}^{\infty}J_{۲n}(x)\cos ۲n\phi$$

سپس آن را به عنوان یک سری کسینوسی فوریه روی بازهٔ $۰<\phi<\frac{\pi}{۲}$ تعبیر کنید.

۳. از عبارت (۳)، بخش ۶۳، نتیجه بگیرید که:

$$J_{۲n}(x)=(-۱)^n\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos(x\cos\theta)\cos ۲n\theta\, d\theta \qquad (n=۰,۱,۲,\ldots)$$

۴. از عبارت (۴)، بخش ۶۳، نتیجه بگیرید که:

$$J_{2n-1}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\theta)\cos(2n-1)\theta\, d\theta \qquad (n=1,2,\ldots)$$

۵. اثبات خاصیت (۷)، بخش ۶۳ را کامل کنید که بیان می‌کند برای هر n ثابت $(n=0,1,2,\ldots)$،

$$\lim_{x\to\infty} J_n(x) = 0$$

۶. با انتگرالگیری جزء به جزء روی نمایشهای (۳) و (۴) در بخش ۶۳، و استفاده از لم ریمان-لبگ (بخش ۵۳)، نشان دهید که برای هر x ثابت:

$$\lim_{n\to\infty} nJ_n(x) = 0$$

۷. مستقیماً از روی نمایش

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\phi)\,d\phi$$

(بخش ۶۳) ثابت کنید که $J_0(x)$ در معادلهٔ بسل زیر صدق می‌کند:

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

۸. برطبق بخش ۲۴، اگر یک تابع f و مشتق آن f' روی بازهٔ $-\pi \leq x \leq \pi$ پیوسته باشند و اگر $f(-\pi)=f(\pi)$، آنگاه معادلهٔ پارسوال به صورت زیر برقرار است:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

که در آن اعداد a_n $(n=0,1,2,\ldots)$ و b_n $(n=1,2,\ldots)$ ضرائب فوریه به شرح زیرند:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad , \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

(الف) با به کارگیری آن نتیجه روی $f(\phi)=cos\ (x\ sin\ \phi)$، یک تابع زوج از ϕ، و رجوع به سری (کسینوسی) فوریه برای $f(\phi)$در بخش ۶۲، نشان دهید که:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} cos^2(x\,sin\,\phi)\,d\phi = [J_0(x)]^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}[J_{2n}(x)]^2 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

(ب) به طور مشابه با نوشتن $f(\phi)=sin(x\ sin\ \phi)$ و رجوع به بسط سری (سینوسی) فوریه در بخش ۶۲، نشان دهید که:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sin^2(x\,sin\,\phi)\,d\phi = 2\sum_{n=1}^{\infty}[J_{2n-1}(x)]^2 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

(ج) با ترکیب نتایج قسمتهای (الف) و (ب) نشان دهید که:

$$\left[J_0(x)\right]^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[J_n(x)\right]^2 = 1 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

و نشان دهید چگونه از این اتحاد نتیجهٔ زیر برای همهٔ مقادیر x به دست می‌آید:

$$(n=1,2,\ldots) \qquad |J_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad , \qquad |J_0(x)| \le 1$$

۹. با نوشتن $t=i$ در نمایش سری (۲)، بخش ۶۲، عبارات زیر را که برای همهٔ مقادیر x صحیحند به دست آورید:

$$cos\,x = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x)$$

و

$$sin\,x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} J_{2n-1}(x)$$

۱۰. نشان دهید که نمایش سری (۲)، بخش ۶۲ را می‌توان بدین شکل نوشت:

$$exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right] = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} J_n(x)\,t^n \qquad (t\neq 0)$$

بنابراین، این تابع نمایی، یک تابع مولد برای توابع بسل $J_n(x)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ است.

۶۴. صفرهای $J_{\circ}(x)$

یک شکل تعدیل یافتهٔ معادلهٔ بسل

$$x^{2}y''(x)+xy'(x)+(x^{2}-\nu^{2})y(x)=0 \qquad (۱)$$

که در آن جملهٔ شامل مشتق اول حضور ندارد، گاهی مفید است. آن فرم بسادگی با جایگذاری $y(x)=x^{c}u(x)$ در معادلهٔ (۱) و مشاهده اینکه ضریب $u'(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل حاصل

$$x^{2}u''(x)+(1+2c)xu'(x)+(x^{2}-\nu^{2}+c^{2})u(x)=0 \qquad (۲)$$

برای $c=-\frac{1}{2}$ صفر است، به دست می‌آید (مسألهٔ ۱، بخش ۶۶). آنگاه فرم تعدیل یافته مورد نظر از معادلهٔ (۱) به صورت زیر است:

$$x^{2}u''(x)+(x^{2}-\nu^{2}+\frac{1}{4})u(x)=0 \qquad (۳)$$

و واضح است که تابع $u=\sqrt{x}\,J_{\nu}(x)$ یک جواب از آن معادله است. بخصوص، وقتی $\nu=0$، می‌بینیم که تابع $u=\sqrt{x}\,J_{\circ}(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند.

$$u''(x)+(1+\frac{1}{4x^{2}})u(x)=0 \qquad (۴)$$

اکنون از معادلهٔ (۴) استفاده کرده، نشان می‌دهیم که صفرهای مثبت $J_{\circ}(x)$، یا ریشه‌های معادلهٔ $J_{\circ}(x)=0$ تشکیل یک دنبالهٔ صعودی از اعداد x_j $(j=1,2,\dots)$ می‌دهند به طوری که $x_j\to\infty$ هرگاه $j\to\infty$.[1]

---

۱. روش ما تعدیلی است از روشی که به وسیلهٔ *A.Czarecki , Amer. Math. Methly , vol.71, no.4 , pp. 403–404 , 1964* استفاده شده که توابع بسل $J_{\nu}(x)$ ، $-\frac{1}{2}\le\nu\le\frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیرد.

از آنجا شروع می‌کنیم که عملگر $L=\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}$ خودالحاق است (بخش ۴۱) و اتحاد لاگرانژ [مسألهٔ ۳ (ب)، بخش ۴۳] برای این عملگر به صورت زیر می‌باشد:

$$U(x)V''(x)-V(x)U''(x)=\frac{d}{dx}[U(x)V'(x)-U'(x)V(x)] \tag{۵}$$

که در آن $U(x)$ و $V(x)$ توابع دلخواه و دوبار مشتق‌پذیرند. می‌نویسیم:

$$V(x)=\sin x \qquad , \qquad U(x)=\sqrt{x}\,J_{۰}(x) \tag{۶}$$

از معادلهٔ (۴) می‌دانیم که:

$$U''(x)+U(x)=\frac{U(x)}{۴x^{۲}}$$

بعلاوه،

$$V''(x)+V(x)=۰$$

بنابراین طرف چپ اتحاد (۵) عبارت می‌شود از $\frac{U(x)V(x)}{(۴x^{۲})}$، و نتیجه می‌شود که :

$$\int_a^b \frac{U(x)V(x)}{۴x^{۲}}\,dx=\Big[U(x)\,V'(x)-U'(x)\,V(x)\Big]_a^b \tag{۷}$$

که در آن $۰<a<b$.

اکنون بسادگی نشان می‌دهیم که تابع ما $U(x)=\sqrt{x}\,J_{۰}(x)$ ، و در نتیجه $J_{۰}(x)$ حداقل یک صفر در هر بازهٔ

$$۲k\pi\le x\le ۲k\pi+\pi \qquad (k=۱,۲,\ldots)$$

دارد. برای انجام این کار فرض می‌کنیم که در تمام بازهٔ

$$۲k\pi\le x\le ۲k\pi+\pi$$

$U(x)\neq ۰$ و به تناقض می‌رسیم. بر طبق آن فرض برای همهٔ مقادیر x در آن بازه $U(x)>۰$ است یا برای همهٔ آن مقادیر x، $U(x)<۰$ ، زیرا $U(x)$ پیوسته است و نمی‌تواند تغییر علامت دهد، بدون اینکه مقدارش در بعضی از نقاط آن بازه صفر باشد.

فرض کنید که $U(x)>0$ هرگاه $2k\pi \le x \le 2k\pi+\pi$. در اتحاد (۷) بنویسید $a=2k\pi$ و $b=2k\pi+\pi$. چون $V(a)=V(b)=0$ ، $V'(a)=1$ و $V'(b)=-1$، آن اتحاد بدین صورت درمی‌آید:

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} U(x)\,\frac{\sin x}{4x^{2}}\,dx=-[U(2k\pi)+U(2k\pi+\pi)] \qquad (8)$$

در اینجا انتگران مثبت است وقتی که $2k\pi < x < 2k\pi+\pi$. بنابراین، مقدار طرف چپ این معادله مثبت است، در حالی که مقدار طرف راست آن منفی است و این یک تناقض است.

از طرف دیگر اگر برای $2k\pi \le x \le 2k\pi+\pi$, $U(x)<0$ باشد دو طرف معادلهٔ (۸) به ترتیب منفی و مثبت هستند. این مجدداً یک تناقض است. بنابراین $J_0(x)$ در هر بازهٔ

$$2k\pi \le x \le 2k\pi+\pi \qquad (k=1,2,\dots)$$

حداقل یک صفر دارد.

در واقع، در هر بازهٔ بستهٔ کراندار $a\le x\le b$، $J_0(x)$ می‌تواند حداکثر یک تعداد متناهی صفر داشته باشد. برای دیدن این مطلب، فرض می‌کنیم که بازهٔ $a\le x\le b$ شامل یک تعداد نامتناهی صفر باشد. از حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته، می‌دانیم که اگر مجموعه‌ای نامتناهی از نقاط در یک بازهٔ بسته و کراندار قرار گیرد، همواره یک دنباله از نقاط متمایز در آن مجموعه وجود دارد که به نقطه‌ای در آن بازه همگراست.[۱] پس، بخصوص، فرض ما مبنی براینکه بازهٔ $a\le x\le b$ شامل یک تعداد نامتناهی از صفرهای $J_0(x)$ است نتیجه می‌دهد که یک دنبال x_m $(m=1,2,\dots)$ از صفرهای متمایز وجود دارد، به طوری که $x_m\to c$ وقتی $m\to\infty$، که در اینجا c نیز یک نقطه‌ای در آن بازه است. چون تابع $J_0(x)$ پیوسته است، $J_0(c)=0$ ؛ و بنا به تعریف حد یک دنباله هر بازه به مرکز c صفرهای دیگری از $J_0(x)$ را شامل می‌شود. اما این حقیقت که $J_0(x)$ متحد با صفر نیست و یک نمایش سری مک لورن دارد که برای همهٔ مقادیر x درست است،

۱. برای مثال کتاب تیلور و مان (۱۹۸۳ صفحات ۵۱۹-۵۱۵) را که در کتابنامه آمده است، ببینید.

ایجاب می‌کند که بازه‌ای به مرکز c وجود دارد که شامل هیچ صفر دیگری نیست.[۱] چون این برخلاف آن چیزی است که هم اینک نشان داده شد ، بنابراین تعداد صفرها در بازهٔ $a \leq x \leq b$ نمی‌تواند نامتناهی باشد.

اکنون روشن است که در واقع، صفرهای مثبت $J_۰(x)$ می‌توانند به صورت یک دنبالهٔ صعودی از اعدادی که به بینهایت میل می‌کنند، مرتب شوند. جدول زیر تا چهار رقم اعشار دقت، مقادیر پنج صفر اول $J_۰(x)$ و مقادیر متناظر از $J_۱(x)$ را نشان می‌دهد [شکل ۶۲ (بخش ۵۹) را ببینید]. جداول کاملتر مقادیر عددی توابع بسل و توابع مربوط به آنها، به همراه صفرهای آنها، در کتابهای ذکر شده در کتابنامه دیده می‌شوند.[۲]

$$J_۰(x_j) = ۰$$

j	۱	۲	۳	۴	۵
x_j	۲/۴۰۵	۵/۵۲۰	۸/۶۵۴	۱۱/۷۹	۱۴/۹۳
$J_۱(x_j)$	۰/۵۱۹۱	−۰/۳۴۰۳	۰/۲۷۱۵	−۰/۲۳۲۵	۰/۲۰۶۵

۶۵. صفرهای توابع مربوطه

اگر برای دو عدد مثبت متمایز a و b، $J_n(a)=۰$ و $J_n(b)=۰$ باشند، آنگاه $x^{-n}J_n(x)$ نیز صفر است، هرگاه $x=a$ و هرگاه $x=b$. بنابراین از قضیه رول نتیجه می‌شود که برای حداقل یک مقدار x بین a و b مشتق $x^{-n}J_n(x)$ صفر می‌شود. اما (بخش ۶۱)

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right] = -x^{-n}J_{n+۱}(x) \qquad (n=۰,۱,۲,\ldots)$$

۱. یعنی صفرهای چنین تابعی منفرد هستند. یک بحث نسبتاً کلی‌تر در این مورد در کتاب مؤلف (۱۹۹۰ ص ۱۸۱) که در کتابنامه آمده، مطرح شده است.

۲. خصوصاً کتابهای تألیف شده توسط آبرا موتیس واستگن (۱۹۷۲)، ژانکه ایمده و لاچ (۱۹۶۰)، گری و ماتیو (۱۹۶۶) و واستن (۱۹۵۲) را ببینید.

و بنابراین، وقتی $n=۰,۱,۲,...$، حداقل یک صفر $J_{n+۱}(x)$ بین هر دو صفر مثبت $J_n(x)$ وجود دارد. همچنین، مثل $J_۰(x)$ (بخش ۶۴)، تابع $J_{n+۱}(x)$ می‌تواند حداکثر تعدادی متناهی صفر در هر بازهٔ کراندار داشته باشد.

ما پیش از این نشان داده‌ایم که صفرهای مثبت $J_۰(x)$ یک دنبالهٔ صعودی بیکران از اعداد تشکیل می‌دهند. اکنون نتیجه می‌شود که صفرهای $J_۱(x)$ باید یک چنین مجموعه‌ای تشکیل دهند. بنابراین همین مطلب برای $J_۲(x)$ و غیره صحیح است. یعنی، برای هر عدد صحیح نامنفی n، مجموعهٔ همهٔ صفرهای مثبت معادلهٔ $J_n(x)=۰$ یک دنبالهٔ صعودی $x=x_{nj}$ $(j=۱,۲,...)$ تشکیل می‌دهد که $x_{nj}\to\infty$ هرگاه $j\to\infty$.

تابع $y=J_n(x)$ در معادلهٔ بسل صدق می‌کند که یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی مرتبهٔ دوم است و مبدأ نقطهٔ تکین آن است. برطبق لم بخش ۴۴ در مورد یگانگی جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم، فقط یک جواب وجود دارد که برای $c>۰$، در شرایط $y(c)=y'(c)=۰$ صدق می‌کند؛ آن جواب در تمام دامنه، برابر با صفر است. در نتیجه، هیچ عدد مثبت c وجود ندارد که $J_n(c)=J_n'(c)=۰$ باشد. یعنی، $J_n'(x)$ نمی‌تواند در یک صفر مثبت $J_n(x)$ صفر شود؛ بنابراین $J_n(x)$ باید در آن نقطه تغییر علامت دهد.

فرض کنید a و b $(۰<a<b)$ دو صفر متوالی $J_n(x)$ باشند. اگر $J_n'(a)>۰$ آنگاه $J_n(x)>۰$ هرگاه $a<x<b$ و $J_n(x)$ در صفرش b نزولی است؛ یعنی $J_n'(b)<۰$. به طور مشابه، اگر $J_n'(a)<۰$، آنگاه $J_n'(b)>۰$. بنابراین مقادیر J_n' در صفرهای مثبت متوالی J_n متناوباً تغییر علامت می‌دهند.

اکنون تابع $hJ_n(x)+xJ_n'(x)$ را در نظر می‌گیریم که در آن h یک ثابت نامنفی است. صفرهای این تابع نیز در مسائل مقدار مرزی مشخصی پیش خواهند آمد. اگر a و b صفرهای مثبت متوالی $J_n(x)$ باشند، نتیجه می‌شود که مقادیر $hJ_n(x)+xJ_n'(x)$ در آن نقاط $x=a$ و $x=b$ باید به ترتیب $aJ_n'(a)$ و $bJ_n'(b)$ باشند. چون یکی از آن مقادیر مثبت و دیگری منفی است، پس آن تابع در یک نقطه یا در تعدادی متناهی از نقاط بین a و b صفر است. بنابراین یک دنبالهٔ صعودی از صفرهای مثبت دارد که به بینهایت میل

می‌کند.[1] نتایج اصلی را به صورت زیر جمع‌آوری می‌کنیم:

قضیه. برای هر n ثابت $(n=۰,۱,۲,...)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ

$$J_n(x)=۰ \qquad (۱)$$

یک دنبالهٔ صعودی $x=x_{nj}$ $(j=۱,۲,...)$ تشکیل می‌دهند طوری که $x_{nj}\to\infty$ هرگاه $j\to\infty$.
همچنین، ریشه‌های مثبت معادلهٔ

$$hJ_n(x)+xJ_n'(x)=۰ \qquad (h\geq ۰) \qquad (۲)$$

همیشه یک دنباله از آن نوع تشکیل می‌دهند، که در آن h ثابت است.

مشاهده می‌کنید که هرگاه n یک صحیح مثبت باشد، $x=۰$ ریشه هر دو معادلهٔ (۱) و (۲) است زیرا $J_n(۰)=۰$ $(n=۱,۲,...)$. آن همچنین یک ریشهٔ معادلهٔ (۲) است هرگاه $h=n=۰$.

اگر $x=c$ یک ریشهٔ معادلهٔ (۱) باشد، آنگاه $x=-c$ نیز یک ریشه است زیرا $J_n(-c)=(-۱)^nJ_n(c)$. این حکم برای معادلهٔ (۲) نیز صحیح است، زیرا با توجه به رابطهٔ بازگشتی زیر (بخش ۶۱):

$$xJ_n'(x)=nJ_n(x)-xJ_{n+۱}(x)$$

معادلهٔ (۲) را می‌توان بدین شکل نوشت:

$$(h+n)\,J_n(x)-xJ_{n+۱}(x)=۰ \qquad (۳)$$

و می‌بینیم که:

$$(h+n)\,J_n(-c)-(-c)\,J_{n+۱}(-c)=(-۱)^n\,[(h+n)\,J_n(c)-cJ_{n+۱}(c)]$$

بالاخره، گرچه در بحثی که به قضیه فوق منجر شد نیازی به مستثنا کردن h منفی نبود، آن مقادیر h در کاربردهای ما پیش نخواهد آمد.

---

۱. در حالت خاص و مهم $n=۰$، چند صفر اول برای مقادیر مثبت و مختلف h جدولبندی شده، برای مثال، در کتاب کارسلو و یاگر (۱۹۵۹ ص ۴۹۳) در مورد هدایت گرما که در کتابنامه آمده است.

۶۶. مجموعه‌های متعامد توابع بسل

همانگونه که در ابتدای این فصل نشان داده شد، البته تا حدی با استفاده از نماد متفاوت، کاربردهای فیزیکی در این فصل درگیر جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل زیر خواهند بود:

$$x^{2}\frac{d^{2}X}{dx^{2}}+x\frac{dX}{dx}+(\lambda x^{2}-n^{2})X=0 \qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{۱}$$

که فرم خودالحاق آن (بخش ۴۱) به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dX}{dx}\right)+\left(-\frac{n^{2}}{x}+\lambda x\right)X=0 \qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{۲}$$

به طور مشخص‌تر، نیاز خواهیم داشت تا یک مسألهٔ استورم- لیوویل تکین (بخش ۴۲)، متشکل از معادلهٔ دیفرانسیل (۱) و یک شرط مرزی از نوع

$$b_1 X(c)+b_2 X'(c)=0 \tag{۳}$$

را روی یک بازهٔ $0\le x\le c$ حل کنیم. ثابتهای b_1 و b_2 حقیقی‌اند و هر دو همزمان صفر نیستند، و X و X' باید روی تمام بازهٔ $0\le x\le c$ پیوسته باشند. در حالت خاص و مهم $b_2=0$ ، شرط مرزی (۳) عبارت است از:

$$X(c)=0 \tag{۴}$$

وقتی $b_2\neq 0$ ، شرط (۳) را در $\frac{c}{b_2}$ ضرب کرده آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$hX(c)+cX'(c)=0 \tag{۵}$$

که در آن $h=\frac{cb_1}{b_2}$. در حل مسألهٔ استورم-لیوویل خود، مناسب می‌بینیم که از صورت جدا شدهٔ شرط مرزی (۳) یعنی شرایط (۴) و (۵) استفاده کنیم و وقتی که از شرط (۵) استفاده می‌شود، همواره فرض خواهیم کرد $h\ge 0$.

به کارگیری فرع بخش ۴۳، روی حالت (الف) قضیه آن بخش، تضمین می‌کند که هر مقدار ویژهٔ مسألهٔ استورم- لیوویل تکین ما باید یک عدد حقیقی باشد. اکنون سه حالت ممکن λ صفر، مثبت یا منفی را در نظر می‌گیریم.

وقتی $\lambda=0$، معادلهٔ (۱) یک معادلهٔ کوشی-اویلر است (مسألهٔ ۳، بخش ۳۵ را ببینید):

$$x^2\frac{d^2X}{dx^2}+x\frac{dX}{dx}-n^2X=0 \tag{۶}$$

برای حل این مسأله، می‌نویسیم $x=\exp s$ و آن را به صورت زیر درمی‌آوریم:

$$\frac{d^2X}{ds^2}-n^2X=0 \tag{۷}$$

اگر n مثبت باشد، نتیجه می‌شود که $X=Ae^{ns}+Be^{-ns}$ که در آن A و B ثابت هستند، یعنی، $X(x)=Ax^n+Bx^{-n}$. به دلیل اینکه جواب ما باید روی بازهٔ $0\leq x\leq c$ پیوسته و در نتیجه کراندار باشد: لازم است $B=0$ باشد. بنابراین $X(x)=Ax^n$. اکنون بسادگی می‌بینیم که اگر قرار باشد هر کدام از شرایط (۴) یا (۵) صادق باشد آنگاه $A=0$، و تنها به جواب بدیهی $X(x)\equiv 0$ دست می‌یابیم. بنابراین اگر n مثبت باشد، صفر یک مقدار ویژه نیست.

از طرف دیگر، اگر $n=0$، معادلهٔ (۷) دارای جواب عمومی $X=As+B$ است ؛ و بنابراین وقتی $n=0$ جواب عمومی (۶) عبارت است از $X(x)=A\ln x+B$. آنگاه نیاز به پیوستگی ایجاب می‌کند $X(x)=B$ با اعمال شرط (۴) نتیجه می‌شود که $B=0$ وقتی که $h>0$، همین نتیجه از اعمال شرط (۵) حاصل می‌شود. اما وقتی $h=0$، شرط (۵) صرفاً به $X'(c)=0$ تبدیل می‌شود، و B دلخواه باقی می‌ماند. بنابراین اگر $n=0$ و شرط (۵) با $h=0$ استفاده شود، تابع ویژه زیر را داریم:

$$X(x)=1 \qquad \text{متناظر با} \qquad \lambda=0 \tag{۸}$$

این تنها حالتی است که در آن $\lambda=0$ یک مقدار ویژه است و هر تابع ویژه متناظر به آن مقدار ویژه یک مضرب ثابت از تابع (۸) است.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $\lambda>0$ و می‌نویسیم $\lambda=\alpha^2$ $(\alpha>0)$. آنگاه معادلهٔ (۱) بدین شکل است:

$$x^2\frac{d^2X}{dx^2}+x\frac{dX}{dx}+(\alpha^2x^2-n^2)X=0 \tag{۹}$$

و از مسألهٔ ۱۴، بخش ۶۱، می‌دانیم که جواب عمومی آن به صورت زیر است:

$$X(x)=C_1 J_n(\alpha x)+C_2 Y_n(\alpha x) \tag{10}$$

نیاز به پیوستگی جواب، نتیجه می‌دهد که $C_2=0$، زیرا $Y_n(\alpha x)$ در $x=0$ ناپیوسته است (بخش ۶۰ را ببینید). بنابراین هر جواب غیر بدیهی معادلهٔ (۹) که در آن شرایط صدق کند، باید مضربی ثابت از تابع $X(x)=J_n(\alpha x)$ باشد.

در اعمال شرط مرزی در $x=c$ تأکید می‌کنیم که نماد $J_n'(\alpha x)$ برای نمایش مشتق $J_n(s)$ نسبت به s به کار می‌رود که در $s=\alpha x$ محاسبه شده است. بنابراین $\frac{d}{dx}[J_n(\alpha x)]=\alpha J_n'(\alpha x)$، و برای شرایط (۴) و (۵) به ترتیب لازم است که

$$J_n(\alpha c)=0 \tag{11}$$

و

$$hJ_n(\alpha c)+(\alpha c)J_n'(\alpha c)=0 \tag{12}$$

توجه دارید که چون معادلهٔ (۲)، بخش ۶۵ را می‌توان به فرم (۳) همان بخش نوشت، معادلهٔ (۱۲) را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(h+n)J_n(\alpha c)-(\alpha c)J_{n+1}(\alpha c)=0$$

طبق قضیه بخش ۶۵، هر کدام از معادلات (۱۱) و (۱۲) تعدادی نامتناهی ریشهٔ مثبت

$$\alpha_j=\frac{x_{nj}}{c} \qquad (j=1,2,\ldots) \tag{13}$$

دارد که در آن x_{nj} $(j=1,2,\ldots)$ دنبالهٔ صعودی بیکران مذکور در آن قضیه است. البته در اینجا اعداد α_j به مقدار n و همچنین h در حالت معادلهٔ (۱۲) بستگی دارد. بنابراین مسألهٔ استورم-لیوویل ما دارای مقادیر ویژه $\lambda_j=\alpha_j^2$ $(j=1,2,\ldots)$ و توابع ویژهٔ متناظر به شرح زیر است:

$$X_j(x)=J_n(\alpha_j x) \qquad (j=1,2,\ldots) \tag{14}$$

توجه داریم که اگر اعداد α_j ریشه‌های مثبت معادلهٔ (۱۲) باشند، هرگاه $n=h=0$، که

تنها حالتی است که در آن $\lambda=0$ به عنوان یک مقدار ویژه به دست آمده بود، آنگاه آن معادله را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$J_1(\alpha c)=0 \tag{۱۵}$$

بنابراین اعداد α_j به طور مستقیم‌تر، به عنوان ریشه‌های مثبت معادلهٔ (۱۵) داده می‌شوند. همچنین، استثنای ناچیزی در نماد قائل شده، فرض می‌کنیم به جای اینکه زیرنویس j از یک شروع کند، مقادیر $j=2,3,\ldots$ را بگیرد. زیرنویس $j=1$ را برای نوشتن $\alpha_1=0$ و $\lambda_1=\alpha_1^2=0$ رزرو می‌کنیم. این کار به ما اجازه می‌دهد که مقدار ویژه $\lambda_1=0$ و تابع ویژه $X_1(x)=J_0(\alpha_1 x)=1$ را که پیش از این برای حالت $n=h=0$ به دست آمده، به حساب آوریم. توجه دارید که همچنین می‌توانیم این اعداد α_j $(j=1,2,\ldots)$ را به عنوان ریشه‌های نامنفی معادلهٔ (۱۵) توصیف کنیم.

بالاخره، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $\lambda<0$، یا $\lambda=-\alpha^2$ $(\alpha>0)$، و معادلهٔ (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2\frac{d^2X}{dx^2}+x\frac{dX}{dx}-(\alpha^2x^2+n^2)X=0 \tag{۱۶}$$

می‌توان در اینجا از جایگزینی $s=\alpha x$ استفاده کرده، معادلهٔ (۱۶) را به صورت زیر نوشت: (با مسألهٔ ۱۴، بخش ۶۱ مقایسه کنید)

$$s^2\frac{d^2X}{dx^2}+s\frac{dX}{ds}-(s^2+n^2)X=0 \tag{۱۷}$$

از مسأله ۱۵، بخش ۶۱، می‌دانیم که تابع بسل تعدیل یافتهٔ $X=I_n(s)=i^{-n}J_n(is)$ در معادلهٔ (۱۷) صدق می‌کند؛ و به دلیل اینکه آن یک نمایش سری توانی دارد که برای همهٔ مقادیر x همگراست، $X=I_n(\alpha x)$ در شرایط پیوستگی مورد نیاز مسألهٔ ما صدق می‌کند. مانند معادلهٔ (۹)، معادلهٔ (۱۶) نیز یک جواب دوم دارد که در $x=0$ ناپیوسته است و آن جواب مشابه $Y_n(\alpha x)$ است.[۱] بنابراین می‌دانیم که جز برای یک فاکتور ثابت دلخواه،

---

۱. برای دیدن یک بحث مشروح در این مورد، به کتاب ترانتر (۱۹۶۹ از ص ۱۶ ببعد) که در کتابنامه آمده
(ادامهٔ پاورقی در صفحهٔ بعد)

$X(x)=I_n(\alpha x)$.

اکنون نشان می‌دهیم که برای هر مقدار مثبت α، تابع $X(x)=I_n(\alpha x)$ نمی‌تواند در هیچکدام از شرایط مرزی (۴) یا (۵) صدق کند. در هر کدام از این حالات، اثبات ما بر این واقعیت مبتنی است که $I_n(x)>0$ هرگاه $x>0$، همان طور که در مسألهٔ ۱۵، بخش ۶۱، نشان داده شد.

چون $I_n(\alpha c)>0$ هرگاه $\alpha>0$، واضح است که شرط (۴) که برقراری $I_n(\alpha c)=0$ را لازم دارد برای هیچ عدد مثبت α صادق نیست. همچنین، با توجه به فرم دیگر معادلهٔ (۲) بخش ۶۵، یعنی فرم (۳) آن بخش، وقتی شرط (۵) روی تابع ما یعنی $X(x)=I_n(\alpha x)=i^{-n}J_n(i\alpha x)$، اعمال می‌شود، به صورت زیر درمی‌آید:

$$(h+n)i^{-n}J_n(i\alpha c)+\alpha c i^{-(n+1)}J_{n+1}(i\alpha c)=0$$

یا

$$(h+n)I_n(\alpha c)+\alpha c I_{n+1}(\alpha c)=0 \qquad (18)$$

چون $\alpha>0$، طرف چپ این معادلهٔ آخری مثبت است و یک بار دیگر، هیچ مقدار مثبت α نمی‌تواند ریشه آن باشد. پس نتیجه می‌گیریم که هیچ مقدار ویژهٔ منفی وجود ندارد.

اکنون ما مسألهٔ استورم- لیوویل تکین متشکل از معادلات (۱) و (۳) را کاملاً حل کرده‌ایم، که در آنجا چون فرض کرده‌ایم ثابت $h=\frac{cb_1}{b_2}$ نامنفی است، ثابتهای b_1 و b_2 در معادلهٔ (۳) هم علامتند، هرگاه هیچکدام صفر نباشند.

همهٔ مقادیر ویژه در اینجا توسط اعداد $\lambda_j=\alpha_j^2$ نمایش داده می‌شوند، که در آن α_jها به وسیلهٔ معادلهٔ (۱۳) ارائه می‌شوند و جز برای حالت $n=h=0$ که در آن $\lambda_1=0$، $\lambda_j>0$. چون اعداد x_{nj} به کار رفته در معادلهٔ (۱۳) یک دنبالهٔ صعودی بیکران تشکیل می‌دهند، روشن است که همین مطلب در مورد مقادیر ویژهٔ $\lambda_j=\alpha_j^2$ نیز درست است. یعنی $\lambda_j<\lambda_{j+1}$ و $\lambda_j\to\infty$ هرگاه $j\to\infty$.

نتایج بالا را در قضیه زیر خلاصه می‌کنیم.

ـ است رجوع کنید.

قضیه. فرض کنید n یکی از مقادیر $n=۰, ۱, ۲, ...$ را دارد. برای مسألهٔ استورم-لیوویل تکین متشکل از معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^۲ \frac{d^۲X}{dx^۲} + x\frac{dX}{dx} + (\lambda x^۲ - n^۲)X = ۰ \qquad (۰ < x < c) \tag{۱۹}$$

که به

$$x\frac{d^۲X}{dx^۲} + \frac{dX}{dx} + \lambda x X = ۰ \qquad (۰ < x < c)$$

تبدیل می‌شود هرگاه $n=۰$، و یکی از شرایط مرزی

$$X(c) = ۰ \tag{۲۰}$$

$$hX(c) + cX'(c) = ۰ \qquad (h \geq ۰ \quad , \quad h + n > ۰) \tag{۲۱}$$

$$X'(c) = ۰ \qquad (n = ۰) \tag{۲۲}$$

مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ متناظر عبارتند از:

$$\lambda_j = \alpha_j^۲ \qquad , \qquad X_j = J_n(\alpha_j x) \qquad (j = ۱, ۲, ...)$$

که در آن اعداد α_j به صورت زیر تعریف می‌شوند:

(الف) وقتی از شرط (۲۰) استفاده می‌شود، α_j $(j=۱, ۲, ...)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ زیر هستند:

$$J_n(\alpha c) = ۰$$

(ب) وقتی شرط (۲۱) به کار می‌رود، α_j $(j=۱, ۲, ...)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ

$$hJ_n(\alpha c) + (\alpha c)J_n'(\alpha c) = ۰$$

هستند که این معادله به صورت $(h+n)J_n(\alpha c) - (\alpha c)J_{n+۱}(\alpha c) = ۰$ نیز می‌تواند نوشته شود.

(ج) وقتی شرط (۲۲) به کار می‌رود، $\alpha_۱ = ۰$ و α_j $(j=۲, ۳, ...)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ

$$J_۰'(\alpha c) = ۰$$

هستند که این هم می‌تواند به صورت $J_۱(\alpha c) = ۰$ نوشته شود.

توجه کنید که ثابت h در شرط (۱) می‌تواند صفر باشد هرگاه n مثبت باشد

$(n=1,2,\ldots)$. برای آن مقدار h، شرط (۲۱) صرفاً $X'(c)=0$ است، و شرطی که در حالت (ب) به منظور تعریف α_j استفاده شد، به $J_n'(\alpha c)=0$ تبدیل می‌شود. همچنین توجه کنید که شرط (۲۲) همان شرط (۲۱) است، هرگاه $h=0$ و $n=0$. چون، همانگونه که در حالت (ج) بیان شد، اولین مقدار ویژه $\alpha_1=0$ است، در واقع اولین تابع ویژه عبارت است از:

$$X_1=J_0(\alpha_1 x)=J_0(0)=1$$

برای هر کدام از حالتها در آن قضیه، خاصیت تعامد

$$\int_0^c x\,J_n(\alpha_j x)\,J_n(\alpha_k x)\,dx=0 \qquad (j\neq k) \qquad (23)$$

از حالت (الف) قضیهٔ ۴۳، منتج می‌شود. مشاهده می‌کنید که این تعامد از توابع ویژه نسبت به تابع وزن x، روی بازهٔ $0<x<c$ با تعامد معمولی توابع $\sqrt{x}\,J_n(\alpha_j x)$ روی همان بازه یکی است. همچنین، بسته به مقادیر c و n و h بسیاری از مجموعه‌های متعامد، در اینجا نمایش داده می‌شوند. در دو بخش بعدی، این توابع ویژه را نرمال خواهیم کرد و فرمولهای ضرائب بسطهای سری فوریهٔ تعمیم یافتهٔ متشکل از توابع ویژه نرمال شده را به دست خواهیم آورد.

مسائل

۱. با جایگذاری $y(x)=x^c u(x)$؛ معادلهٔ بسل

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu^2)y(x)=0$$

را به معادلهٔ دیفرانسیل زیر

$$x^2u''(x)+(1+2c)xu'(x)+(x^2-\nu^2+c^2)u(x)=0$$

تبدیل کنید، که این معادله با $c=-\frac{1}{2}$ به معادلهٔ (۳) بخش ۶۴، تبدیل می‌شود.

۲. با استفاده از معادلهٔ (۳)، بخش ۶۴، یک جواب عمومی معادلهٔ بسل را بدست آورید، هرگاه $\nu=\frac{1}{2}$. سپس با استفاده از عبارات زیر (مسألهٔ ۱۲، بخش ۶۱):

$$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \qquad , \qquad J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

نشان دهید که چگونه $J_{-1/2}(x)$ و $J_{1/2}(x)$ حالات خاص از آن جواب هستند.

۳. با رجوع به قضیه بخش ۶۶، نشان دهید که مقادیر ویژه مسألهٔ استورم-لیوویل تکین

$$xX''+X'+\lambda xX=0 \qquad , \qquad X(2)=0$$

روی بازهٔ $0\le x\le 2$ عبارتند از اعداد $\lambda_j=\alpha_j^2$ $(j=1,2,\ldots)$، که در آن α_jها، ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_0(2\alpha)=0$ هستند و توابع ویژه متناظر عبارتند از $X_j=J_0(\alpha_j x)$ $(j=1,2,\ldots)$. به کمک جدول بخش ۶۴، مقادیر عددی $\alpha_1=1/2$، $\alpha_2=2/8$، $\alpha_3=4/3$ را تا یک رقم اعشار دقت به دست آورید.

۴. $U(x)=\sqrt{x}\,J_n(\alpha x)$ را در نظر بگیرید، که در آن n یکی از مقادیر دلخواه $n=0,1,2,\ldots$ و α عدد ثابت مثبتی است.

(الف) با استفاده از معادلهٔ (۳)، بخش ۶۴، نشان دهید:

$$U''(x)+\left(\alpha^2+\frac{1-4n^2}{4x^2}\right)U(x)=0$$

(ب) فرض کنید c نمایش یک مقدار ثابت مثبت باشد و بنویسید:

$$U_j(x)=\sqrt{x}\,J_n(\alpha_j x) \qquad (j=1,2,\ldots)$$

که در آن α_jها ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_n(\alpha c)=0$ هستند. با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) نشان دهید که:

$$(\alpha_j^2-\alpha_k^2)\,U_j(x)\,U_k(x)=U_j\,U_k''-U_k\,U_j''$$

(ج) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (ب) و اتحاد لاگرانژ [مسألهٔ ۳ (ب)، بخش ۴۳] برای عملگر خود-الحاق $L=\frac{d^2}{dx^2}$ نشان دهید که مجموعه توابع $\{U_j(x)\}$ $(j=1,2,\ldots)$ در قسمت

(ب) روی بازهٔ $0<x<c$ نسبت به تابع وزن واحد متعامد است. بنابراین به طریق دیگر ثابت کنید که مجموعهٔ توابع $\{J_n(\alpha_j x)\}$ $(j=1,2,\ldots)$ در حالت (الف) قضیه بخش ۶۶ روی آن بازه نسبت به تابع وزن x متعامد است.

۵. فرض کنید n برابر با یکی از مقادیر ۰ و ۱ و ۲ و... باشد

(الف) فرض کنید $J_n(ib)=0$ $(b\neq 0)$ و با استفاده از نتایج مسألهٔ ۱۵، بخش ۶۱ به یک تناقض برسید. نشان دهید که تابع $J_n(z)$ هیچ صفر موهومی محض $z=ib$ $(b\neq 0)$ ندارد.

(ب) چون نمایش سری $J_n(x)$ (بخش ۵۹) برای هر عدد مختلط z که به جای x قرار گیرد همگراست و چون همهٔ ضرائب توانهای z در این نمایش حقیقی‌اند، نتیجه می‌شود که، $J_n(\bar{z})=\overline{J_n(z)}$، که در آن $\bar{z}=x-iy$ مزدوج مختلط $z=x+iy$ است.[1] همچنین، اثبات تعامد در مسألهٔ ۴ برقرار می‌ماند، هرگاه α یک عدد مختلط غیرصفر باشد و مجموعه ریشه‌های α_j شامل هر ریشهٔ مختلط غیرصفر معادلهٔ $J_n(\alpha c)=0$ نیز باشد. با استفاده از این حقایق نشان دهید که اگر عدد مختلط $a+ib$ $(a\neq 0\,,\, b\neq 0)$ یک صفر $J_n(x)$ باشد، آنگاه $a-ib$ نیز یک صفر آن است و داریم:

$$\int_0^1 x\,|J_n((a+ib)x)|^2\,dx=\int_0^1 x\,J_n((a+ib)x)\,J_n((a-ib)x)\,dx=0$$

نشان دهید که چرا در واقع، مقدار انتگرال اول در اینجا مثبت است و با این تناقض، نتیجه بگیرید که $J_n(z)$ هیچ صفر به فرم $a+ib$ $(a\neq 0\,,\, b\neq 0)$ ندارد. نتیجه بگیرید که اگر $z=x_j$ $(j=1,2,\ldots)$ صفرهای مثبت $J_n(z)$ باشند، آنگاه تنها صفرهای دیگر، حقیقی یا مختلط، عبارتند از اعداد $z=-x_j$ $(j=1,2,\ldots)$، و در صورت مثبت بودن n صفر نیز یک جواب است.

---

۱. برای دیدن بحثی پیرامون سریهای توانی در صفحهٔ مختلط، به کتاب مؤلفین (فصل ۵، ۱۹۹۰) که در کتابنامه آمده مراجعه کنید.

۶۷. توابع متعامدیکه

از مسألهٔ ۱۴، بخش ۶۱، می‌دانیم که اگر α یک ثابت مثبت باشد، تابع

$$X(x)=J_n(\alpha x)$$

در معادله زیر صدق می‌کند:

$$(xX')'+(\alpha^2 x-\frac{n^2}{x})X=0 \qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{۱}$$

دو طرف این معادله را در $2xX'$ ضرب کرده، می‌نویسیم:

$$\frac{d}{dx}(xX')^2+(\alpha^2x^2-n^2)\frac{d}{dx}(X^2)=0$$

با انتگرالگیری از هر دو جمله در اینجا و استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء در جملهٔ دوم به معادلهٔ زیر پی می‌بریم:

$$\left[(xX')^2+(\alpha^2x^2-n^2)X^2\right]_0^c-2\alpha^2\int_0^c xX^2dx=0$$

که در آن c عددی ثابت است. واضح است که وقتی $n=0$، کمیت داخل آن کروشه‌ها در $x=0$ صفر می‌شود، و همین مطلب برای $n=1,2,\dots$ نیز درست است زیرا $X(0)=J_n(0)=0$. بنابراین به عبارت زیر می‌رسیم:

$$2\alpha^2\int_0^c x[J_n(\alpha x)]^2dx=\alpha^2c^2[J_n'(\alpha c)]^2+(\alpha^2c^2-n^2)[J_n(\alpha c)]^2 \tag{۲}$$

که اکنون از آن برای تعیین نرمهای همهٔ توابع ویژه در قضیه بخش ۶۶، استفاده می‌کنیم بجز تابع ویژهٔ نظیر به مقدار ویژهٔ صفر در حالت (ج) آنجا. به آن نرم، جداگانه رسیدگی خواهیم کرد.

(الف) فرض کنید که α_j $(j=1,2,\dots)$ ریشه‌های مثبت معادله زیر باشند:

$$J_n(\alpha c)=0 \tag{۳}$$

عبارت (۲) نشان می‌دهد که:

$$2\int_0^c x[J_n(\alpha_j x)]^2 dx = c^2[J_n'(\alpha_j c)]^2$$

این انتگرال در اینجا مربع نرم $J_n(\alpha_j x)$ روی بازهٔ $0<x<c$، با تابع وزن x است. همچنین (بخش ۶۱)

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

و بنابراین $J_n'(\alpha_j c) = -J_{n+1}(\alpha_j c)$. پس:

$$\left\| J_n(\alpha_j x) \right\|^2 = \frac{c^2}{2}[J_{n+1}(\alpha_j c)]^2 \qquad (j=1,2,\ldots) \tag{۴}$$

(ب) فرض کنید که α_j $(j=1,2,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ زیر باشند:

$$hJ_n(\alpha c) + (\alpha c)J_n'(\alpha c) = 0 \qquad (h\geq 0\ ,\ h+n>0) \tag{۵}$$

از معادلهٔ (۲) به دست می‌آوریم که:

$$\left\| J_n(\alpha_j x) \right\|^2 = \frac{\alpha_j^2 c^2 - n^2 + h^2}{2\alpha_j^2}[J_n(\alpha_j c)]^2 \qquad (j=1,2,\ldots) \tag{۶}$$

(ج) فرض کنید $\alpha_1 = 0$ و اینکه α_j $(j=2,3,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ زیر باشند:

$$J_0'(\alpha c) = 0 \tag{۷}$$

چون $J_0(\alpha_1 x) = J_0(0) = 1$،

$$\left\| J_0(\alpha_1 x) \right\|^2 = \int_0^c x\,dx = \frac{c^2}{2} \tag{۸}$$

با نوشتن $n=h=0$ در معادلهٔ (۶) عبارات زیر برای $\| J_0(\alpha_j c) \|^2$ $(j=2,3,\ldots)$ به دست می‌آیند:

$$\left\| J_0(\alpha_j x) \right\|^2 = \frac{c^2}{2}[J_0(\alpha_j c)]^2 \qquad (j=2,3,\ldots) \tag{۹}$$

برای اینکه معادلهٔ (۷) وقتی $n=h=\circ$، همان معادلهٔ (۵) است و در واقع محدودیت $h+n>\circ$ برای استخراج عبارت (۶) لازم نیست.

اکنون توابع ویژه متعامد $X_j(x)=J_n(\alpha_j x)$ از مسألهٔ استورم- لیوویل تکین ما می‌تواند به صورت نرمال شدهٔ زیر نوشته شود:

$$\phi_j(x)=\frac{J_n(\alpha_j x)}{\left\|J_n(\alpha_j x)\right\|} \qquad (j=۱,۲,\dots) \qquad (۱۰$$

نرمهایی که در اینجا برای توابع ویژه حالتهای (الف) و (ب) قضیه ۶۶، به کار می‌روند به ترتیب به وسیلهٔ معادلات (۴) و (۶) داده می‌شوند. در حالت (ج) آن نرمها به وسیلهٔ معادلات (۸) و (۹) داده می‌شوند. البته این واقعیت که مجموعه (۱۰) روی باز $\circ<x<c$ با تابع وزن x متعامدیکه است، به وسیله معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\int_\circ^c x\phi_j(x)\phi_k(x)\,dx=\begin{cases}\circ & j\neq k \quad \text{هرگاه}\\ ۱ & j=k \quad \text{هرگاه}\end{cases}$$

۶۸. سریهای بسل- فوریه

فرض کنید که f یک تابع قطعه‌ای پیوسته باشد که روی یک بازهٔ $\circ<x<c$ تعریف شده است. در اینجا برای تابع f سری فوریهٔ تعمیم یافتهٔ

$$\sum_{j=۱}^{\infty} c_j\,\phi_j(x)$$

را نسبت به توابع ویژهٔ نرمال شدهٔ (۱۰) بخش ۶۷ در نظر می‌گیریم. برطبق بخش ۱۲، ضرائب c_j در آن سری عبارتند از:

$$c_j=(f,\phi_j)=\int_\circ^c xf(x)\phi_j(x)\,dx=\frac{۱}{\left\|J_n(\alpha_j x)\right\|}\int_\circ^c xf(x)\,J_n(\alpha_j x)\,dx$$

بدین ترتیب با نوشتن $A_j=\dfrac{c_j}{\|J_n(\alpha_j x)\|}$، تناظر زیر را داریم:

$$f(x)\sim\sum_{j=۱}^{\infty} A_j J_n(\alpha_j x) \qquad (۰<x<c) \tag{۱}$$

که در آن

$$A_j=\frac{۱}{\left\|J_n(\alpha_j x)\right\|^۲}\int_۰^c xf(x)\,J_n(\alpha_j x)\,dx \qquad (j=۱,۲,\ldots) \tag{۲}$$

اکنون می‌توانیم از نرمهای به دست آمده در بخش ۶۷ استفاده کرده، عبارت (۲) را برای هر کدام از سه حالت (الف) و (ب) و (ج) که در آن بخش و در قضیه بخش ۶۶ مورد بحث واقع شد، جور کنیم.

قضیه ۱. فرض کنید A_j ها ضرائب در تناظر (۱) باشند. (الف) اگر α_j $(j=۱,۲,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ

$$J_n(\alpha c)=۰$$

باشند، آنگاه:

$$A_j=\frac{۲}{c^۲[J_{n+۱}(\alpha_j c)]^۲}\int_۰^c xf(x)\,J_n(\alpha_j x)\,dx \qquad (j=۱,۲,\ldots) \tag{۳}$$

(ب) اگر α_j $(j=۱,۲,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ

$$hJ_n(\alpha c)+(\alpha c)J_n'(\alpha c)=۰ \qquad (h\geq ۰ \quad , \quad h+n>۰)\ ,$$

باشند که این معادله به صورت $(h+n)\,J_n(\alpha c)-(\alpha c)\,J_{n+۱}(\alpha c)=۰$ نیز می‌تواند نوشته شود، آنگاه:

$$A_j=\frac{۲\alpha_j^۲}{(\alpha_j^۲c^۲-n^۲+h^۲)[J_n(\alpha_j c)]^۲}\int_۰^c xf(x)\,J_n(\alpha_j x)\,dx \quad (j=۱,۲,\ldots) \tag{۴}$$

(ج) اگر در سری (۱) $n=۰$ و اگر $\alpha_۱=۰$ و α_j $(j=۲,۳,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ

$$J_۰'(\alpha c)=۰$$

باشند که به صورت $J_1(\alpha c)=0$ نیز می‌تواند نوشته شود، آنگاه:

$$A_1=\frac{2}{c^2}\int_0^c xf(x)\,dx \tag{5}$$

و

$$A_j=\frac{2}{c^2[J_0(\alpha_j c)]^2}\int_0^c xf(x)\,J_0(\alpha_j x)\,dx \qquad (j=2,3,\ldots) \tag{6}$$

توجه کنید که وقتی $j=1$، عبارت (۶) به عبارت (۵) تبدیل می‌شود زیرا $J_0(0)=1$. به هر حال در کاربردها مناسبتر است که A_1 جداگانه رسیدگی شود و هرگاه از حالت (ج) استفاده می‌شود، بهتر است که تناظر (۱) را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)\sim A_1+\sum_{j=2}^{\infty}A_j\,J_0(\alpha_j x) \qquad (0<x<c)$$

تحت شرایطی مشابه آنچه که نمایش یک تابع با سری سینوسی یا کسینوسی فوریه‌اش تضمین می‌شود، ثابت می‌شود که تناظر (۱) در واقع یک تساوی است و در اثباتهای فوق، معمولاً از نظریهٔ توابع یک متغیرهٔ مختلط استفاده می‌شود. در اینجا یکی از این قضیه‌های نمایش را بدون اثبات بیان کرده، نظر خواننده را به کتابنامه جلب می‌کنیم.[1]

قضیه ۲. فرض کنید f نمایش تابعی است که روی یک بازهٔ $0<x<c$ قطعه‌ای هموار است و $f(x)$ در هر نقطهٔ ناپیوستگی f در آن بازه برابر با مقدار میانگین حدود یک طرفهٔ $f(x+)$ و $f(x-)$ تعریف می‌شود.

در این صورت

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j\,J_n(\alpha_j x) \qquad (0<x<c) \tag{7}$$

که در آن، بسته به معادلهٔ خاصی که اعداد α_j را تعیین می‌کند، ضرائب A_j توسط معادلهٔ

---

۱. این قضیه در کتاب واتسون (۱۹۵۲) ثابت شده است. همچنین کار تیشمارس (۱۹۶۲) و همچنین کتابهای گری و ماتیوس (۱۹۶۶) و باومن (۱۹۵۸) راکه در کتابنامه آمده‌اند، ملاحظه کنید.

(۳) یا (۴) یا جفت معادلات (۵) و (۶) تعریف می‌شوند.

عبارت (۷) را نمایش سری بسل فوریهٔ $f(x)$ گویند.

مثال ۱. تابع $f(x)=1$ $(0<x<c)$ را به یک سری از نوع

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j\, J_0(\alpha_j x)$$

بسط می‌دهیم که در آن α_j $(j=1,2,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادله $J_0(\alpha c)=0$ هستند. واضح است که حالت (الف) قضیه ۱ در اینجا به کار می‌رود و عبارت (۳) به ما نشان می‌دهد که:

$$A_j=\frac{2}{c^2[J_1(\alpha_j c)]^2}\int_0^c x J_0(\alpha_j x)\,dx \tag{۸}$$

این انتگرال، با جایگزینی $s=\alpha_j x$ و استفاده از فرمول انتگرالگیری (بخش ۶۱)

$$\int_0^x s J_0(s)\,ds=x J_1(x) \tag{۹}$$

بسادگی محاسبه می‌شود. به عبارت دقیقتر؛

$$\int_0^c x J_0(\alpha_j x)\,dx=\frac{1}{\alpha_j^2}\int_0^{\alpha_j c} s J_0(s)\,ds=\frac{c}{\alpha_j}J_1(\alpha_j c)$$

در نتیجه:

$$1=\frac{2}{c}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_j x)}{\alpha_j J_1(\alpha_j c)} \qquad (0<x<c) \tag{۱۰}$$

که در آن $\qquad J_0(\alpha_j c)=0 \qquad (\alpha_j>0)$

مثال ۲. برای نمایش تابع $f(x)=x$ $(0<x<1)$ در یک سری به صورت

$$A_1+\sum_{j=2}^{\infty} A_j\, J_0(\alpha_j x)$$

که در آن α_j $(j=2,3,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_1(\alpha)=0$ هستند، به حالت (ج) قضیه ۱ رجوع می‌کنیم. برطبق عبارت (۵)،

$$A_1 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

و از عبارت (۶) به دست می‌آوریم که:

$$A_j = \frac{2}{[J_0(\alpha_j)]^2} \int_0^1 x^2 J_0(\alpha_j x)\, dx \qquad (j=2,3,\ldots)$$

این انتگرال را با رجوع به فرمول کاهش توان (مسألهٔ ۴، بخش ۶۱ و پاورقی مربوط به آن مسأله را ببینید)

$$\int_0^x s^2 J_0(s)\, ds = x^2 J_1(x) + x J_0(x) - \int_0^x J_0(s)\, ds$$

و به خاطر آوردن $J_1(\alpha_j)=0$ می‌توان محاسبه کرد:

$$\int_0^1 x^2 J_0(\alpha_j x)\, dx = \frac{1}{\alpha_j^3} \int_0^{\alpha_j} s^2 J_0(s)\, ds = \frac{1}{\alpha_j^3}\left[\alpha_j J_0(\alpha_j) - \int_0^{\alpha_j} J_0(s)\, ds\right]$$

بنابراین:

(۱۱)

$$x = \frac{2}{3} + 2\sum_{j=2}^{\infty}\left[\alpha_1 J_0(\alpha_j) - \int_0^{\alpha_j} J_0(s)\, ds\right]\frac{J_0(\alpha_j x)}{\alpha_j^3 [J_0(\alpha_j)]^2} \qquad (0<x<1)$$

که در آن $\quad J_1(\alpha_j)=0 \qquad (\alpha_j>0)$

قضیهٔ بخش ۶۵ و هر دو قضیهٔ این بخش، برای هر عدد حقیقی دلخواه ν $(\nu>-\frac{1}{2})$ نیز که به جای n قرار گیرد صحیح هستند، اگر چه خواص تابع J_ν را به قدر کافی توسعه نداده‌ایم که اینگونه تعمیم‌ها را ثابت کنیم.

مشابه فرمولهای انتگرالی سینوسی و کسینوسی فوریه، برای توابع f روی

بازهٔ بیکران $x > 0$، یک نمایش انتگرالی برحسب جملات J_ν وجود دارد. آن نمایش برای یک ν ثابت $(\nu > -\frac{1}{2})$ به صورت زیر است:

$$f(x) = \int_0^\infty \alpha J_\nu(\alpha x) \int_0^\infty s f(s) J_\nu(\alpha s)\, ds\, d\alpha \qquad (x > 0)$$

که به عنوان فرمول انتگرالی هانکل شناخته می‌شود.[1] این فرمول معتبر است اگر F روی هر بازهٔ کراندار قطعه‌ای هموار باشد و اگر $\sqrt{x}\, f(x)$ از صفر تا بینهایت به طور مطلق انتگرال‌پذیر باشد و اگر $f(x)$ در هر نقطه ناپیوستگی با مقدار میانگینش تعریف شود.

اگر بازهٔ $0 < x < c$ با بازه‌ای مثل $a < x < b$ جایگزین شود که در آن $a > 0$، آنگاه مسألهٔ استورم- لیوول مورد بحث در بخش ۶۶ دیگر تکین نخواهد بود، هرگاه همان معادلهٔ دیفرانسیل استفاده شود و شرایط مرزی (۳) در آن بخش در هر کدام از نقاط انتهایی اعمال شود. لذا در حالت کلی، توابع ویژهٔ حاصل، شامل هر دو نوع تابع بسل J_n و Y_n هستند.

مسائل

۱. نشان دهید که:

$$x = 2\sum_{j=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{\alpha_j^2 J_1(\alpha_j)} \int_0^{\alpha_j} J_0(s)\, ds\right] \frac{J_0(\alpha_j x)}{\alpha_j J_1(\alpha_j)} \qquad (0 < x < 1)$$

که در آن α_j $(j = 1, 2, \ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_0(\alpha) = 0$ هستند.

۲. نمایش زیر را به دست آورید:

$$x^2 = \frac{c^2}{2} + 4\sum_{j=2}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_j x)}{\alpha_j^2 J_0(\alpha_j c)} \qquad (0 < x < c)$$

۱. کتاب *sneddon* (فصل ۱۹۵۱،۲) را که در کتابنامه آمده، ببینید. برای دیدن خلاصه‌ای از نمایشها برحسب توابع بسل، کار ویرایش شده توسط *Erdelyi* (۱۹۸۱ چاپ دوم فصل ۷) را ببینید که در کتابنامه آمده است.

که در آن α_j $(j=2,3,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_1(\alpha c)=0$ هستند.

۳. نشان دهید که اگر:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{وقتی } 0<x<1 \\ 0 & \text{وقتی } 1<x<2 \end{cases}$$

و $F(1)=\frac{1}{2}$، آنگاه:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_j)}{\alpha_j\,[J_1(2\alpha_j)]^2}\,J_0(\alpha_j x) \qquad (0<x<2)$$

که در آن α_j $(j=1,2,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_0(2\alpha)=0$ هستند.

۴. فرض کنید α_j $(j=1,2,\ldots)$ نمایش ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_0(\alpha c)=0$ هستند که در آن c یک عدد ثابت مثبت است.

(الف) بسط زیر را به دست آورید:

$$x^2=\frac{2}{c}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\alpha_j c)^2-4}{\alpha_j^3 J_1(\alpha_j c)}\,J_0(\alpha_j x) \qquad (0<x<c)$$

(ب) بسط (۱۰) در مثال ۱ بخش ۶۸، را با بسط قسمت (الف) این مسأله ترکیب کرده، نشان دهید که:

$$c^2-x^2=\frac{8}{c}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_j x)}{\alpha_j^3 J_1(\alpha_j c)} \qquad (0<x<c)$$

۵. ضرائب A_j $(j=1,2,\ldots)$ را در بسط زیر به دست آورید:

$$1=\sum_{j=1}^{\infty}A_j\,J_0(\alpha_j x) \qquad (0<x<c)$$

هرگاه $\alpha_1=0$ و α_j $(j=2,3,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_0'(\alpha c)=0$ باشند.

جواب: $A_1=1 \quad , \quad A_j=0 \qquad (j=2,3,\ldots)$

۶. (الف) نمایش زیر را به دست آورید:

$$1 = 2c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j J_1(\alpha_j c) J_0(\alpha_j x)}{(\alpha_j^2 c^2 + h^2)[J_0(\alpha_j c)]^2} \qquad (0 < x < c)$$

که در آن α_j $(j=1,2,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ زیر هستند.

$$hJ_0(\alpha c) + (\alpha c) J_0'(\alpha c) = 0 \qquad (h > 0)$$

[این نمایش را با نمایش (۱۰) مثال ۱ بخش ۶۸، و نمایش مسألهٔ ۵ مقایسه کنید].

(ب) نشان دهید که نتیجهٔ قسمت (الف) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$1 = \frac{2}{c} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j} \cdot \frac{J_1(\alpha_j c) J_0(\alpha_j x)}{[J_0(\alpha_j c)]^2 + [J_1(\alpha_j c)]^2} \qquad (0 < x < c)$$

۷. نشان دهید که اگر:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{وقتی } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{وقتی } 1 < x < 2 \end{cases}$$

و $f(1) = \frac{1}{2}$، آنگاه:

$$f(x) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j J_2(\alpha_j)}{(4\alpha_j^2 - 1)[J_1(2\alpha_j)]^2} J_1(\alpha_j x) \qquad (0 < x < 2)$$

که در آن α_j $(j=1,2,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_1'(2\alpha) = 0$ هستند.

راهنمایی: توجه کنید که وقتی در حالت (ب) قضیه ۱ بخش ۶۸، $h=0$ قرار گیرد، معادله‌ای که در آنجا α_jها را تعریف می‌کند، $J_n'(\alpha c) = 0$ می‌شود.

۸. فرض کنید n هر کدام از مقادیر مثبت $n=1,2,\ldots$ باشد، نشان دهید که:

$$x^n = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j J_{n+1}(\alpha_j)}{(\alpha_j^2 - n^2)[J_n(\alpha_j)]^2} J_n(\alpha_j x) \qquad (0 < x < 1)$$

که در آن α_j $(j=1,2,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_n'(\alpha)=0$ هستند. (راهنمایی مسألهٔ ۷ را ببینید.)

۹. نشان دهید که چرا مقادیر ویژه مسألهٔ استورم-لیوویل تکین

$$x^2X''+xX'+(\lambda x^2-1)X=0 \qquad , \qquad X(1)=0$$

روی بازهٔ $0<x<1$ ، عبارتند از اعداد $\lambda_j=\alpha_j^2$ $(j=1,2,\ldots)$ ، که در آن α_j ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_1(\alpha)=0$ هستند، و نشان دهید که چرا توابع ویژه متناظر عبارتند از: $X_j=J_1(\alpha_j x)$ $(j=1,2,\ldots)$. آنگاه نمایش زیر را برحسب آن توابع ویژه به دست آورید:

$$x=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_j x)}{\alpha_j J_2(\alpha_j)} \qquad (0<x<1)$$

۱۰ . همانگونه که در بخش ۶۸ اشاره شد، شرایطی روی f وجود دارند که تحت آن شرایط، نمایش (۷) در آنجا هنوز صحیح است، هرگاه n با ν $(\nu>-\frac{1}{2})$ جایگزین شود که ν لزوماً یک عدد صحیح نیست. بخصوص ، فرض کنید که

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j J_{1/2}(\alpha_j x) \qquad (0<x<c)$$

که در آن $\sqrt{x}\,f(x)$ قطعه‌ای هموار است و α_j ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_{1/2}$ هستند و [با عبارت (۳) بخش ۶۸ مقایسه کنید]

$$A_j=\frac{2}{c^2[J_{3/2}(\alpha_j c)]^2}\int_0^c xf(x)J_{1/2}(\alpha_j x)\,dx \qquad (j=1,2,\ldots)$$

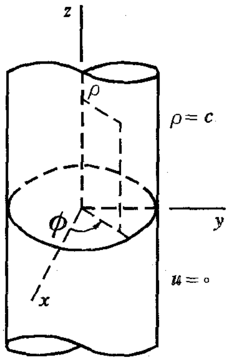
با استفاده از عبارات [مسائل ۱۲ (الف) و ۱۳ بخش ۶۱]

$$J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right) \quad \text{و} \quad J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

برای جایگزینی توابع بسلی که خواهید داشت، نشان دهید که این نمایش بسل- فوریه در واقع نمایش سری سینوسی فوریهٔ $\sqrt{x}\,f(x)$ روی بازهٔ $0<x<c$ است.

۶۹. دماهای داخل یک استوانه بلند

در دو مثال زیر، برای تعیین دماهای درون یک استوانه مستدیر بلند نامتناهی $\rho \leq c$ که سطح جانبی $\rho = c$ آن در دمای صفر نگه داشته شده (شکل ۶۴)، از توابع بسل استفاده خواهیم کرد. بقیه شرایط گرما طوری خواهند بود که دماها فقط به متغیر فضایی ρ و زمان t بستگی خواهند داشت، که در اینجا ρ فاصله تا محور استوانه است. فرض می‌کنیم که ماده تشکیل دهندهٔ این استوانهٔ توپر همگن آورده شود.



شکل ۶۴

مثال ۱. وقتی آن استوانه به شکل نشان داده شده در نمودار ۶۴ باشد و دماهای اولیه فقط با ρ تغییر کنند، دماهای $u = u(\rho, t)$ درون آن استوانه در حالت خاصی از معادلهٔ گرما در مختصات استوانه‌ای (بخش ۴)

$$u_t = k\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho\right) \qquad (0 < \rho < c \ , \ t > 0) \tag{1}$$

و شرایط مرزی زیر صدق می‌کنند:

$$u(c,t) = 0 \qquad (t > 0) \tag{2}$$

$$u(\rho, 0) = f(\rho) \qquad (0 < \rho < c) \tag{3}$$

همچنین، وقتی که $t > 0$، تابع u باید در سراسر آن استوانه، بخصوص، روی محور $\rho = 0$ پیوسته باشد. فرض می‌کنیم که f روی بازهٔ $0 < \rho < c$ قطعه‌ای هموار است و برای سهولت فرض می‌کنیم که در هر نقطه از آن بازه که f

ناپیوسته است f به صورت مقدار میانگین حدود یک طرفه‌اش تعریف شده باشد.

هر جوابی از معادلات همگن (۱) و (۲) که به نوع $u=R(\rho)T(t)$ هستند باید در شرایط زیر صدق کنند:

$$RT'=kT(R''+\frac{1}{\rho}R') \qquad , \qquad R(c)\,T(t)=0$$

با جدا کردن متغیرها در اولین معادله در اینجا داریم:

$$\frac{T'}{kT}=\frac{1}{R}(R''+\frac{1}{\rho}R')=-\lambda$$

که در آن $-\lambda$ ثابت جداسازی است. بنابراین:

$$\rho R''(\rho)+R'(\rho)+\lambda\rho R(\rho)=0 \quad , \quad R(c)=0 \qquad (0<\rho<c) , \tag{۴}$$

و

$$T'(t)+\lambda kT(t)=0 \qquad (t>0) \tag{۵}$$

در اینجا معادلهٔ دیفرانسیل برحسب R معادلهٔ بسل با پارامتر λ است که در آن $n=0$. مسألهٔ (۴)، به همراه شرایط پیوستگی روی R و R' روی بازهٔ $0\leq\rho\leq c$، یک حالت خاص از مسألهٔ استورم- لیوویل تکین قضیهٔ بخش ۶۶ است، هرگاه $n=0$ و شرط مرزی (۲۰) آنجا در نظر گرفته شود. برطبق این قضیه مقادیر ویژه λ_j از مسألهٔ (۴) عبارتند از $\lambda_j=\alpha_j^2$ $(j=1,2,\ldots)$ که در آن α_j ریشه‌های مثبت معادلهٔ زیرند:

$$J_0(\alpha c)=0 \tag{۶}$$

و $R_j=J_0(\alpha_j\rho)$ توابع ویژه متناظر هستند.

وقتی $\lambda=\lambda_j$، $T_j=exp(-\alpha_j^2\,kt)$ در معادلهٔ (۵) صدق می‌کند. بنابراین حاصلضرب‌های مطلوب به شکل زیر هستند:

$$u_j=R_j(\rho)T_j(t)=J_0(\alpha_j\rho)\,exp\,(-\alpha_j^2kt) \qquad (j=1,2,\ldots)$$

و ترکیب خطی تعمیم یافتهٔ این توابع،

$$u(\rho,t)=\sum_{j=1}^{\infty} A_j\, J_0(\alpha_j \rho)\exp(-\alpha_j^2 kt) \qquad (7$$

به طور صوری در شرایط همگن (۱) و (۲) مسألهٔ مقدار مرزی ما صدق می‌کند. همچنین در شرط اولیهٔ غیرهمگن (۳) صدق می‌کند، هرگاه ضرائب A_j طوری باشند که:

$$f(\rho)=\sum_{j=1}^{\infty} A_j\, J_0(\alpha_j \rho) \qquad (0<\rho<c)$$

این یک نمایش سری بسل-فوریهٔ معتبر است (قضیه ۲، بخش ۶۸) اگر ضرائب آن دارای مقادیر زیر باشند که با نوشتن $n=0$ در معادلهٔ (۳)، بخش ۶۸ به دست می‌آیند:

$$A_j=\frac{2}{c^2[J_1(\alpha_j c)]^2}\int_0^c \rho f(\rho)\, J_0(\alpha_j \rho)\, d\rho \qquad (j=1,2,\ldots) \qquad (8$$

بنابراین جواب صوری این مسألهٔ مقدار مرزی با معادلهٔ (۷) و ضرائب (۸) داده می‌شود که در آن α_j ریشه‌های مثبت معادلهٔ (۶) هستند. بنابراین فرمول دما را به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$u(\rho,t)=\frac{2}{c^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_j \rho)}{[J_1(\alpha_j c)]^2}\exp(-\alpha_j^2 kt)\int_0^c s f(s)\, J_0(\alpha_j s)\, ds \qquad (9$$

مثال ۲. اکنون فرض می‌کنیم که گرما در درون استوانهٔ مثال ۱ با یک آهنگ ثابت در هر واحد حجم تولید می‌شود و دماهای سطحی و اولیهٔ آن صفر هستند. دماهای $u=u(\rho,t)$ باید در شرایط زیر صدق کنند:

$$u_t=k\left(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho\right)+q_0 \qquad (0<\rho<c\ ,\ t>0) \qquad (10$$

که در آن q_0 یک ثابت مثبت است (بخش ۲)، و

$$u(c,t)=0 \qquad , \qquad u(\rho,0)=0 \qquad (11$$

البته لازم است که تابع u مانند جواب مثال ۱ در آن استوانه پیوسته باشد. به دلیل جملهٔ ثابت q_0، معادلهٔ دیفرانسیل (۱۰) غیرهمگن است و این استفاده از روش تغییر پارامترها را به ما پیشنهاد می‌کند که اولین بار در بخش ۳۳ از آن استفاده شد. به عبارت دقیقتر، از مثال ۱ بالا می‌دانیم که بدون جملهٔ q_0 توابع ویژه $R_j = J_0(\alpha_j \rho)$ ناشی می‌شوند که در آن $J_0(\alpha_j c) = 0$ $(\alpha_j > 0)$. بنابراین در جستجوی یک جواب از مسألهٔ مقدار مرزی فعلیمان هستیم که به فرم زیر باشد:

$$u(\rho,t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t)\, J_0(\alpha_j \rho) \tag{۱۲}$$

که در آن α_j همانهایی هستند که بیان شد.

از جایگزینی این سری در معادلهٔ (۱۰) و توجه به اینکه چگونه نمایش

$$q_0 = \frac{2q_0}{c} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_j \rho)}{\alpha_j\, J_1(\alpha_j c)} \qquad (0 < \rho < c)$$

از معادلهٔ (۱۰) مثال ۱ بخش ۶۸ نتیجه می‌شود، درمی‌یابیم که برای صدق کردن سری (۱۲) در معادلهٔ (۱۰) باید:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j'(t)\, J_0(\alpha_j \rho) = k \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t) \left[\frac{d^2}{d\rho^2} J_0(\alpha_j \rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} J_0(\alpha_j \rho) \right]$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2q_0\, J_0(\alpha_j \rho)}{c\alpha_j\, J_1(\alpha_j c)}$$

اما، برطبق قضیهٔ بخش ۶۶،

$$\frac{d^2}{d\rho^2} J_0(\alpha_j \rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} J_0(\alpha_j \rho) = -\alpha_j^2 J_0(\alpha_j \rho)$$

بنابراین:

$$\sum_{j=1}^{\infty} [A_j'(t) + \alpha_j^2 k A_j(t)]\, J_0(\alpha_j \rho) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2q_0}{c\alpha_j\, J_1(\alpha_j c)} J_0(\alpha_j \rho)$$

و با مساوی قرار دادن ضرائب جملات متناظر در دو طرف این معادله به معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

$$A_j'(t)+\alpha_j^{۲}kA_j(t)=\frac{۲q_۰}{c\alpha_j\, J_۱(\alpha_j c)} \qquad (j=۱,۲,\ldots) \tag{۱۳}$$

بعلاوه، از دومین شرط از شرایط (۱۱) داریم:

$$\sum_{j=۱}^{\infty} A_j(۰)\, J_۰(\alpha_j \rho)=۰ \qquad (۰<\rho<c)$$

در نتیجه،

$$A_j(۰)=۰ \qquad (j=۱,۲,\ldots) \tag{۱۴}$$

برای حل معادلهٔ دیفرانسیل خطی (۱۳)، دو طرف آن را در عامل انتگرالگیری

$$exp\int \alpha_j^{۲}k\,dt=exp\,\alpha_j^{۲}kt$$

ضرب می‌کنیم.

این کار ما را قادر می‌سازد که معادله دیفرانسیل فوق را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\alpha_j^{۲}kt}A_j(t)\right]=\frac{۲q_۰}{c\alpha_j\, J_۱(\alpha_j c)}\, e^{\alpha_j^{۲}kt}$$

سپس از دو طرف این معادله پس از تعویض t با τ، از $\tau=۰$ تا $\tau=t$ انتگرال گرفته، شرط (۱۴) را به خاطر می‌آوریم. نتیجه عبارت است از:

$$e^{\alpha_j^{۲}kt}A_j(t)=\frac{۲q_۰}{ck\alpha_j^{۳}J_۱(\alpha_j c)}\left(e^{\alpha_j^{۲}kt}-۱\right)$$

یا

$$A_j(t)=\frac{۲q_۰}{ck}\cdot\frac{۱-exp(-\alpha_j^{۲}kt)}{\alpha_j^{۳}J_۱(\alpha_j c)} \qquad (j=۱,۲,\ldots) \tag{۱۵}$$

بالاخره، با جایگزینی این عبارت برای ضرایب $A_j(t)$ در داخل سری (۱۲)، به یک فرمول دما می‌رسیم که مطلوب ماست :

$$u(\rho,t)=\frac{2q_0}{ck}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-exp(-\alpha_j^2kt)}{\alpha_j^3J_1(\alpha_jc)}J_0(\alpha_j\rho) \tag{۱۶}$$

که در آن $\quad J_0(\alpha_jc)=0 \qquad (\alpha_j>0)$

۷۰. انتقال حرارت در سطح استوانه

اجازه دهید که به جای شرط صفر بودن دمای سطح استوانهٔ نامتناهی در مثال ۱، بخش ۶۹، این شرط را قائل شویم که در سطح آن استوانه، انتقال حرارت به داخل محیط اطراف با دمای صفر صورت می‌گیرد. مانند بخش ۳ که در آنجا دربارهٔ قانون نیوتن برای انتقال حرارت سطحی بحث شد، فرض می‌شود شاری که از سطح می‌گذرد با اختلاف بین دمای سطح و دمای محیط اطرافش متناسب است. یعنی:

$$Ku_\rho(c,t)=-Hu(c,t) \qquad (K>0\ ,\ H>0)$$

که در آن K ضریب رسانایی گرمایی مادهٔ تشکیل دهندهٔ آن استوانه و H قدرت رسانایی سطحی آن است.

اکنون مسألهٔ مقدار مرزی برای تابع دما $u(\rho,t)$ به صورت زیر است:

$$u_t=k\left(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho\right) \qquad (0<\rho<c\ ,\ t>0) \tag{۱}$$

$$cu_\rho(c,t)=-hu(c,t) \qquad (t>0) \tag{۲}$$

$$u(\rho,0)=f(\rho) \qquad (0<\rho<c) \tag{۳}$$

ما نوشته‌ایم $h=\frac{cH}{K}$، و برای سهولت، می‌پذیریم که در غیر این صورت مقدار ثابت h، صفر باشد. در این حالت شرط (۲) فقط بیان می‌کند که سطح $\rho=c$ عایق‌بندی شده است.

هرگاه $u=R(\rho)T(t)$، جداسازی متغیرها مسألهٔ مقدار ویژهٔ زیر را نتیجه می‌دهد:

۴) $$\rho R''(\rho)+R'(\rho)+\lambda_\rho R(\rho)=0 \qquad hR(c)+cR'(c)=0 \qquad (0<\rho<c)$$

اگر $h>0$، برطبق قضیهٔ بخش ۶۶، مقادیر ویژه عبارتند از: $\lambda_j=\alpha_j^2$ $(j=1,2,\ldots)$، که در آن α_j ریشه‌های مثبت معادلهٔ زیرند:

۵) $$hJ_0(\alpha c)+(\alpha c)J_0'(\alpha c)=0$$

توابع ویژه متناظر عبارتند از $R_j=J_0(\alpha_j\rho)$ $(j=1,2,\ldots)$؛ و چون $T'(t)+\lambda kT(t)=0$، به حاصلضربهای زیر می‌رسیم:

$$u_j=R_j(\rho)T_j(t)=J_0(\alpha_j\rho)\exp(-\alpha_j^2kt) \qquad (j=1,2,\ldots)$$

پس جواب صوری مسألهٔ ما به صورت زیر است:

۶) $$u(\rho,t)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j J_0(\alpha_j\rho)\exp(-\alpha_j^2kt)$$

که در آن با توجه به عبارت (۴) بخش ۶۸،

۷) $$A_j=\frac{2\alpha_j^2}{(\alpha_j^2c^2+h^2)[J_0(\alpha_jc)]^2}\int_0^c \rho f(\rho)J_0(\alpha_j\rho)d\rho \quad (j=1,2,\ldots)$$

اگر $h=0$، شرط مرزی مسألهٔ مقدار ویژهٔ ما به $R'(c)=0$ تبدیل می‌شود. در آن حالت، قضیه بخش ۶۶ به ما می‌گوید که $\lambda_j=\alpha_j^2$ $(j=1,2,\ldots)$ که در آن $\alpha_1=0$ و α_j $(j=2,3,\ldots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_0'(\alpha c)=0$ یا

۸) $$J_1(\alpha c)=0$$

هستند. بعلاوه، توابع ویژه متناظر عبارتند از $R_1=1$ و $R_j=J_0(\alpha_j\rho)$ $(j=2,3,\ldots)$. بنابراین:

۹) $$u(\rho,t)=A_1+\sum_{j=2}^{\infty}A_j J_0(\alpha_j\rho)\exp(-\alpha_j^2kt)$$

با رجوع به عبارات (۵) و (۶) بخش ۶۸، می‌بینیم که آن ضرائب بدین صورت هستند:

$$A_۱=\frac{۲}{c^۲}\int_۰^c \rho f(\rho)\,d\rho \tag{۱۰}$$

$$A_j=\frac{۲}{c^۲[J_۰(\alpha_j c)]^۲}\int_۰^c \rho f(\rho)\,J_۰(\alpha_j\rho)\,d\rho \qquad (j=۲,۳,\ldots) \tag{۱۱}$$

یک تعداد از مسائل دمای حالت مانا در مختصات استوانه‌ای به توابع بسل منجر می‌شوند، که در مسائل ذیل می‌آیند. در آن مسائل، دماها مستقل از ϕ خواهند بود. بنابراین تابع $u=u(\rho,z)$ همساز خواهد بود و در معادلهٔ لاپلاس $\nabla^۲u=۰$ صدق می‌کند، که در آن (بخش ۴ را ببینید)

$$\nabla^۲u=u_{\rho\rho}+\frac{۱}{\rho}u_\rho+u_{zz} \tag{۱۲}$$

مسائل

۱. فرض کنید $u(\rho,t)$ نمایش جواب به دست آمده در مثال ۱، بخش ۶۹ باشد، هرگاه $c=۱$ و $f(\rho)=u_۰$ که $u_۰$ در آن ثابت است. با کمک جدول آخر بخش ۶۴، نشان دهید که سه جملهٔ اول سری $u(\rho,t)$ تقریباً به صورت زیرند:

$$u(\rho,t)=۲u_۰[۰/۸۰\,J_۰(۲/۴\rho)\,e^{-۵/۸kt}-۰/۵۳\,J_۰(۵/۵\rho)\,e^{-۳۰kt}$$
$$+\,۰/۴۳\,J_۰(۸/۷\rho)\,e^{-۷۶kt}-\ldots]$$

۲. نشان دهید که جواب مسألهٔ دما در مثال ۲، بخش ۶۹ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$u(\rho,t)=\frac{q_۰}{۴k}\left[c^۲-\rho^۲-\frac{۸}{c}\sum_{j=۱}^{\infty}\frac{J_۰(\alpha_j\rho)\exp(-\alpha_j^۲kt)}{\alpha_j^۳J_۱(\alpha_j c)}\right]$$

که در آن $\qquad J_۰(\alpha_j c)=۰ \qquad (\alpha_j>۰)$

راهنمایی : توجه کنید که برطبق مسألهٔ ۴ (ب) ، بخش ۶۸،

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_j \rho)}{\alpha_j^3 J_1(\alpha_j c)} = \frac{c}{8}(c^2-\rho^2) \qquad (0<\rho<c)$$

۳. در مثال ۲ ، بخش ۶۹، فرض کنید به جای q_0 ، $q(t)$ آهنگ تولید گرمای داخلی در هر واحد حجم باشد. تعمیم جواب به دست آمده در آن مثال را به صورت زیر به دست آورید:

$$u(\rho,t)=\frac{2}{c}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_j \rho)}{\alpha_j J_1(\alpha_j c)} \int_0^t q(\tau)\exp[-\alpha_j^2 k(t-\tau)]d\tau$$

که در آن $\qquad J_0(\alpha_j c)=0 \qquad (\alpha_j>0)$

۴. یک فرمول برای دماهای مانا $u(\rho,z)$ در استوانه توپر متشکل از سه رویهٔ $\rho=1$ و $z=0$ و $z=1$ به دست آورید، هرگاه روی جدارهٔ آن $u=0$ و ته آن عایق‌بندی شده و بالای آن $u=1$ باشد.

جواب: $$u(\rho,z)=2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_j \rho)}{\alpha_j J_1(\alpha_j)}\cdot\frac{\cosh\alpha_j z}{\cosh\alpha_j}$$

که در آن $\qquad J_0(\alpha_j)=0 \qquad (\alpha_j>0)$

۵. دماهای مانای کراندار $u(\rho,z)$ را در استوانهٔ نیم- نامتناهی $\rho\leq 1$ ، $z\geq 0$ به دست آورید، هرگاه روی قاعدهٔ آن $u=1$ و در سطح $\rho=1$ و $z>0$ ، برطبق قانون نیوتن (بخش ۷۰ را ببینید) ، انتقال حرارت به داخل محیط اطراف با دمای صفر صورت می‌گیرد.

جواب: $$u(\rho,z)=2h\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_j \rho)\exp(-\alpha_j z)}{J_0(\alpha_j)(\alpha_j^2+h^2)}$$

که در آن $\qquad hJ_0(\alpha_j)-\alpha_j J_1(\alpha_j)=0 \qquad (\alpha_j>0)$

۶. (الف) یک استوانه توپر از سه سطح $\rho=1$ و $z=0$ و $z=b$ $(b>0)$ تشکیل شده است. جدارهٔ آن عایق‌بندی شده، ته آن در دمای صفر نگه داشته می‌شود و دمای قاعدهٔ بالایی آن $f(\rho)$ است. فرمول زیر را برای دماهای مانای $u(\rho,z)$ در آن استوانه به دست آورید:

$$u(\rho,z)=\frac{2z}{b}\int_0^1 sf(s)\,ds+2\sum_{j=2}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_j\rho)}{[J_0(\alpha_j)]^2}\cdot\frac{\sinh\alpha_j z}{\sinh\alpha_j b}\int_0^1 sf(s)\,J_0(\alpha_j s)\,ds$$

که در آن α_2 و α_3 و ... ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_1(\alpha)=0$ هستند.

(ب) نشان دهید که وقتی در قسمت (الف) $f(\rho)=1$ $(0<\rho<1)$ باشد، جواب آنجا به $u(\rho,z)=\frac{z}{b}$ تبدیل می‌شود.

۷. تابع $u(\rho,z)$ درون استوانه متشکل از سه سطح $\rho=c$ و $z=0$ و $z=b$ $(b>0)$ همساز است. فرض کنید روی دو سطح اول $u=0$ و اینکه $u(\rho,b)=f(\rho)$ $(0<\rho<c)$، عبارت زیر را به دست آورید:

$$u(\rho,z)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j\,J_0(\alpha_j\rho)\frac{\sinh\alpha_j z}{\sinh\alpha_j b}$$

که در آن α_j ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_0(\alpha c)=0$ هستند و ضرائب A_j توسط معادلهٔ (۸) بخش ۶۹ داده می‌شوند.

۸. این مسألهٔ دیریکله (بخش ۷) را برای $u(\rho,z)$ حل کنید:

$$\nabla^2 u=0 \qquad (0<\rho<1\ ,\ z>0)$$

$$u(1,z)=0 \qquad u(\rho,0)=1$$

و u باید در دامنهٔ $\rho < 1$ و $z > 0$ کراندار باشد.

جواب:
$$u(\rho,z) = 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_j \rho)}{\alpha_j J_1(\alpha_j)} \exp(-\alpha_j z)$$

که در آن
$$J_0(\alpha_j) = 0 \qquad (\alpha_j > 0)$$

۹. برای دماهای $u(\rho,t)$ در یک صفحهٔ مستدیر نازک که از وجه‌های آن به داخل محیط اطراف با دمای صفر، انتقال حرارت صورت می‌گیرد مسألهٔ زیر را حل کنید:

$$u_t = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho - bu \qquad (0 < \rho < 1 \ , \ t > 0)$$

$$u(1,t) = 0 \qquad , \qquad u(\rho,0) = 1$$

که در آن b یک ثابت مثبت است.

جواب:
$$u(\rho,t) = 2\exp(-bt)\sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_j \rho)}{\alpha_j J_1(\alpha_j)} \exp(-\alpha_j^2 t)$$

که در آن
$$J_0(\alpha_j) = 0 \qquad (\alpha_j > 0)$$

۱۰. مسألهٔ ۹ را پس از جایگزینی شرط $u(1,t) = 0$ با این شرط انتقال گرما در لبه حل کنید:

$$u_\rho(1,t) = -hu(1,t) \qquad (h > 0)$$

۱۱. یک تعبیر فیزیکی از مسألهٔ مقدار مرزی زیر برای تابع $u(\rho,t)$ ارائه کنید (مثال ۲، بخش ۶۹ را ببینید):

$$u_t = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + q_0 \qquad (0 < \rho < 1 \ , \ t > 0)$$

$$u_\rho(1,t) = 0 \qquad u(\rho,0) = \alpha\rho^2 \ ,$$

که در آن q_0 و a ثابتهای مثبت هستند. ابتدا نشان دهید که چرا در جستجوی جوابی به

صورت زیر هستیم:

$$u(\rho,t)=A_1(t)+\sum_{j=2}^{\infty} A_j(t)J_0(\alpha_j\rho)$$

که در آن α_j $(j=2,3,\dots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_1(\alpha_j)=0$ هستند. سپس با استفاده از روش تغییر پارامترها، آن جواب را به دست آورید.

جواب:

$$u(\rho,t)=\frac{a}{2}+q_0 t+4a\sum_{j=2}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_j\rho)\exp(-\alpha_j^2 t)}{\alpha_j^2 J_0(\alpha_j)}$$

که در آن α_j همانهایی هستند که در بالا گفته شده‌اند.

۱۲. این مسألهٔ مقدار مرزی را به عنوان یک مسألهٔ دما در یک استوانه تعبیر کنید (بخش ۳ را ببینید):

$$u_t=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho \qquad (0<\rho<1\ ,\ t>0)$$

$$u_\rho(1,t)=B \qquad , \qquad u(\rho,0)=0$$

که در آن B یک ثابت مثبت است. آنگاه، پس از جایگزینی

$$u(\rho,t)=U(\rho,t)+\frac{B}{2}\rho^2$$

و به دست آوردن یک مسألهٔ مقدار مرزی برای $U(\rho,t)$، به جواب مسألهٔ ۱۱ رجوع کرده، فرمول دما را به صورت زیر به دست آورید:

$$u(\rho,t)=\frac{B}{4}\left[2\rho^2+8t-1-8\sum_{j=2}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_j\rho)\exp(-\alpha_j^2 t)}{\alpha_j^2 J_0(\alpha_j)}\right]$$

که در آن α_j $(j=2,3,\dots)$ ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_1(\alpha)=0$ هستند. [توجه کنید که جایگزینی که برای $u(\rho,t)$ در اینجا صورت گرفته، از این حقیقت به ذهن می‌رسد که $U_\rho(1,t)=0$.]

۱۳. یک استوانه بلند توپر $\rho\le 1$، با دمای یکنواخت A، در داخل یک استوانه توخالی بلند

$1 \le \rho \le 2$ از همان جنس در دمای B کیپ شده است. سپس سطح خارجی $\rho = 2$ در دمای B حفظ می‌شود. فرض کنید $u(\rho,t)$ نمایش دما در استوانه به شعاع ۲ باشد که اینگونه ساخته شده، و مسألهٔ مقدار مرزی برای این دماها را تشکیل دهید. سپس با جایگزینی

$$u(\rho,t)=U(\rho,t)+B$$

و به دست آوردن یک مسألهٔ مقدار مرزی برای $U(\rho,t)$ و رجوع به جواب مثال ۱ بخش ۶۹ فرمول دما را به صورت زیر به دست آورید:

$$u(\rho,t)=B+\frac{A-B}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_j)}{\alpha_j\,[J_1(2\alpha_j)]^2}\,J_0(\alpha_j\rho)\,exp\,(-\alpha_j^2 kt)$$

که در آن α_j ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_0(2\alpha)=0$ هستند. (این یک مسألهٔ دما در *shrunken fittig* است)

۱۴. این مسألهٔ مقدار مرزی را برای $u(x,t)$ حل کنید:

$$xu_t=(xu_x)_x-\frac{n^2}{x}u \qquad (0<x<c\ ,\ t>0)$$

$$u(c,t)=0 \qquad (t>0)$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad (0<x<c)$$

که در آن u برای $0\le x\le c$ ، $t>0$، پیوسته و n یک عدد صحیح نامنفی است.

جواب:
$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j\,J_n(\alpha_j x)\,exp\,(-\alpha_j^2 t)$$

که در آن α_j و A_j ثابتهای حالت (الف) قضیه ۱ بخش ۶۸ هستند.

۱۵. فرض کنید $u(\rho,z)$ نمایش یک تابعی است که درون استوانه‌ای همساز باشد که توسط سه سطح $\rho=c$ و $z=0$ و $z=b$ $(b>0)$ تشکیل می‌شود. با فرض اینکه روی قاعدهٔ بالایی و قاعدهٔ پایینی این استوانه $u=0$ و روی جدارهٔ آن $u(c,z)=f(z)$ باشد،

عبارت زیر را به دست آورید:

$$u(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{I_0\left(\frac{n\pi\rho}{b}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi c}{b}\right)} \sin\frac{n\pi z}{b}$$

که در آن

$$b_n=\frac{2}{b}\int_0^b f(z)\sin\frac{n\pi z}{b}\,dz$$

[مسألهٔ ۱۵ بخش ۶۱ و همچنین توضیحاتی را که به دنبال معادلهٔ (۱۷) بخش ۶۶ در مورد جوابهای آن شکل تعدیل یافتهٔ معادلهٔ بسل می‌آید ملاحظه کنید.]

۱۶. فرض کنید دماهای مانای $u(\rho,z)$ در یک استوانه نیم‌-نامتناهی $\rho \leq 1$ و $z \geq 0$، که قاعدهٔ آن عایق‌بندی شده، طوری باشند که $u(1,z)=f(z)$ ، که در آن

$$f(z)=\begin{cases} 1 & 0<z<1 \quad \text{هرگاه} \\ 0 & z>1 \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

با کمک فرمول انتگرال کسینوسی فوریه (بخش ۵۵) عبارت زیر را برای دماهای فوق به دست آورید:

$$u(\rho,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{I_0(\alpha\rho)}{\alpha I_0(\alpha)}\cos\alpha z\sin\alpha\,d\alpha$$

(به نکات آخر مسألهٔ ۱۵ توجه کنید)

۱۷. فرض کنید تابع $f(z)$ توسط فرمول انتگرال فوریه‌اش (بخش ۵۱) برای همهٔ مقادیر حقیقی z نمایش داده می‌شود، عبارت زیر را برای تابع همساز $u(\rho,z)$ داخل استوانه نامتناهی $\rho \leq c$ و $(-\infty<z<\infty)$ طوری به دست آورید که $u(c,z)=f(z)$ $(-\infty<z<\infty)$:

$$u(\rho,z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{I_0(\alpha\rho)}{I_0(\alpha c)}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cos\alpha(s-z)\,ds\,d\alpha$$

(نکات آخر مسألهٔ ۱۵ را ببینید.)

۷۱. ارتعاش یک پوستهٔ نازک مستدیر

به یک پوستهٔ نازک که روی قاب مستدیر ثابت $\rho=c$ در صفحهٔ $z=\circ$ کشیده شده، تغییر مکان اولیهٔ $z=f(\rho,\phi)$ داده می‌شود و از این موقعیت ساکن رها می‌شود. جابجایی‌های عرضی (عمودی) $z(\rho,\phi,t)$ که در آن ρ و ϕ و z مختصات استوانه‌ای هستند، توسط تابع پیوسته‌ای توصیف می‌شوند که در مسألهٔ مقدار مرزی زیر صدق می‌کند:

$$z_{tt}=a^{۲}\left(z_{\rho\rho}+\frac{۱}{\rho}z_{\rho}+\frac{۱}{\rho^{۲}}z_{\phi\phi}\right) \tag{۱}$$

$$z(c,\phi,t)=\circ \qquad (-\pi\leq\phi\leq\pi\ ,\ t\geq\circ) \tag{۲}$$

$$z(\rho,\phi,\circ)=f(\rho,\phi)\quad,\quad z_t(\rho,\phi,\circ)=\circ \qquad (\circ\leq\rho\leq c\ ,\ -\pi\leq\phi\leq\pi) \tag{۳}$$

که در آن تابع $z(\rho,\phi,t)$ نسبت به متغیر ϕ تناوبی با دوره تناوب ۲π است.
یک تابع به صورت $z=R(\rho)\Phi(\phi)T(t)$ در معادله (۱) صدق می‌کند اگر:

$$\frac{T''}{a^{۲}T}=\frac{۱}{R}\left(R''+\frac{۱}{\rho}R'\right)+\frac{۱}{\rho^{۲}}\frac{\Phi''}{\Phi}=-\lambda \tag{۴}$$

که در آن $-\lambda$ یک ثابت دلخواه است. مجدداً متغیرها را در دومین معادلهٔ از معادلات (۴) جدا کرده، می‌نویسیم $\frac{\Phi''}{\Phi}=-\mu$ آنگاه می‌بینیم که اگر R و Φ توابع ویژه مسائل استورم- لیوویل

$$\rho^{۲}R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\lambda\rho^{۲}-\mu)R(\rho)=\circ\quad,\quad R(c)=\circ\ , \tag{۵}$$

$$\Phi''(\phi)+\mu\Phi(\phi)=\circ \qquad \Phi(-\pi)=\Phi(\pi)\quad,\quad \Phi'(-\pi)=\Phi'(\pi) \tag{۶}$$

باشند و T طوری باشد که:

$$T''(t)+\lambda a^{۲}T(t)=\circ\quad,\quad T'(\circ)=\circ$$

آنگاه، تابع $R\Phi T$ در شرایط همگن صدق می‌کند و نسبت به ϕ تناوب لازم را دارد.
اگر μ یکی از مقادیر

$$\mu=n^{۲} \qquad (n=\circ,۱,۲,\dots)$$

را دارد قضیهٔ بخش ۶۶ را می‌توان در مورد مسألهٔ (۵) به کار گرفت، و اگر مسألهٔ (۶) را ابتدا در نظر بگیریم، می‌بینیم که در حقیقت ثابت μ باید یکی از آن مقادیر را داشته باشد. برای اینکه طبق بخش ۴۰ آنها مقادیر ویژهٔ مسألهٔ (۶) هستند. به عبارت دقیقتر، $\Phi(\phi)=\frac{۱}{۲}$ هرگاه $n=۰$؛ و $\Phi(\phi)$ می‌تواند هر ترکیب خطی از توابع $\cos n\phi$ و $\sin n\phi$ باشد، هرگاه $n=۱,۲,...$. از قضیهٔ بخش ۶۶ اکنون می‌بینیم که مقادیر ویژهٔ مسألهٔ (۵) عبارتند از: $\lambda_{nj}=\alpha_{nj}^{۲}$ $(j=۱,۲,...)$، که در آن α_{nj} ریشه‌های مثبت معادلهٔ زیر هستند:

$$J_n(\alpha c)=۰ \qquad (n=۰,۱,۲,...) \tag{۷}$$

و توابع ویژه متناظر عبارتند از $R(\rho)=J_n(\alpha_{nj}\rho)$. بنابراین $T(t)=\cos\alpha_{nj}at$. ترکیب خطی تعمیم یافتهٔ توابع $R\Phi T$،

$$z(\rho,\phi,t)=\frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{\infty}A_{۰j}\,J_۰(\alpha_{۰j}\rho)\cos\alpha_{۰j}at \tag{۸}$$

$$+\sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{j=۱}^{\infty}J_n(\alpha_{nj}\rho)(A_{nj}\cos n\phi+B_{nj}\sin n\phi)\cos\alpha_{nj}at$$

به طور صوری در همهٔ شرایط همگن صدق می‌کند. همچنین در شرط $z(\rho,\phi,۰)=f(\rho,\phi)$ صدق می‌کند اگر ضرائب $A_{۰j}$ و A_{nj} و B_{nj} طوری باشند که:

$$f(\rho,\phi)=\frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{\infty}A_{۰j}\,J_۰(\alpha_{۰j}\rho) \tag{۹}$$

$$+\sum_{n=۱}^{\infty}\left\{\left[\sum_{j=۱}^{\infty}A_{nj}J_n(\alpha_{nj}\rho)\right]\cos n\phi+\left[\sum_{j=۱}^{\infty}B_{nj}J_n(\alpha_{nj}\rho)\right]\sin n\phi\right\}$$

هرگاه $۰\le\rho\le c$ و $-\pi\le\phi\le\pi$.

سری (۹) برای هر مقدار ثابت ρ به سری فوریهٔ تابع $f(\rho,\phi)$ روی بازهٔ $-\pi\le\phi\le\pi$ تبدیل می‌شود، هرگاه:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{nj}\, J_n(\alpha_{nj}\rho)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho,\phi)\cos n\phi\, d\phi \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} B_{nj}\, J_n(\alpha_{nj}\rho)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho,\phi)\sin n\phi\, d\phi \quad (n=1,2,\dots)$$

برای هر n ثابت، سری طرف چپ هر کدام از این معادلات، نمایش سری فوریه- بسل تابع از متغیر ρ متناظر در طرف راست آن معادله روی بازهٔ $0<\rho<c$ است مشروط براینکه (بخش ۶۸):

$$A_{nj}=\frac{2}{\pi c^2[J_{n+1}(\alpha_{nj}c)]^2}\int_0^c \rho\, J_n(\alpha_{nj}\rho)\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho,\phi)\cos n\phi\, d\phi\, d\rho \qquad (10)$$

$$B_{nj}=\frac{2}{\pi c^2[J_{n+1}(\alpha_{nj}c)]^2}\int_0^c \rho\, J_n(\alpha_{nj}\rho)\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho,\phi)\sin n\phi\, d\phi\, d\rho \qquad (11)$$

بنابراین، جابجایی‌های $z(\rho,\phi,t)$ توسط معادلهٔ (۸) و ضرائب (۱۰) و (۱۱) داده می‌شوند. البته فرض می‌کنیم که f طوری است که سری عبارت (۸) خواص همگرایی و دیفرانسیل‌پذیری کافی دارد.

مسائل

۱. فرض کنید در بخش ۷۱، تابع تغییر مکان اولیه $f(\rho,\phi)$ ترکیبی خطی از یک تعداد متناهی از توابع $J_0(\alpha_{0j}\rho)$ و $J_n(\alpha_{nj}\rho)\cos n\phi$ و $J_n(\alpha_{nj}\rho)\sin n\phi$ $(n=1,2,\dots)$ باشد. نشان دهید که چرا در آن صورت، سری مکرر در عبارت (۸) آن بخش فقط یک تعداد متناهی جمله دارد و یک جواب صریح از آن مسأله مقدار مرزی است.

۲. فرض کنید جابجایی اولیهٔ پوستهٔ نازک در بخش ۷۱، تابعی فقط از متغیر ρ، یعنی $f(\rho)$ باشد و عبارت زیر را برای این جابجایی‌ها به دست آورید هرگاه $t>0$

$$z(\rho,t)=\frac{2}{c^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_j\rho)\cos\alpha_j at}{[J_1(\alpha_j c)]^2}\int_0^c sf(s)\,J_0(\alpha_j s)\,ds$$

که در آن α_j ریشه‌های مثبت $J_0(\alpha c)=0$ هستند.

۳. نشان دهید که اگر جابجایی اولیهٔ پوسته نازک در بخش ۷۱، $AJ_0(\alpha_k\rho)$ باشد که در آن A یک ثابت و α_k یک ریشهٔ مثبت معادلهٔ $J_0(\alpha c)=0$ هستند، آنگاه جابجایی‌های بعدی عبارتند از:

$$z(\rho,t)=AJ_0(\alpha_k\rho)\cos\alpha_k at$$

مشاهده می‌کنید که همهٔ این جابجایی‌ها برحسب t تناوبی هستند و یک دورهٔ تناوب یکسان دارند، بنابراین یک نت موسیقی می‌دهد.

۴. شرایط اولیهٔ (۳)، بخش ۷۱ را با شرطهای $z=0$ و $z_t=1$ در $t=0$ جایگزین کنید. این حالت وقتی است که پوستهٔ نازک و قاب آن با سرعت واحد در جهت z حرکت کنند و قاب را در لحظهٔ $t=0$ از حرکت باز داریم.

عبارت زیر را برای این جابجایی‌ها به دست آورید هرگاه $t>0$

$$z(\rho,t)=\frac{2}{ac}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_j at}{\alpha_j^2 J_1(\alpha_j c)}J_0(\alpha_j\rho)$$

که در آن α_j ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_0(\alpha c)=0$ هستند.

۵. فرض کنید جابجایی‌های عرضی (عمودی) میرا $z(\rho,t)$ در یک پوسته نازک که روی یک قاب مستدیر کشیده شده، در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$z_{tt}=z_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}z_\rho-2bz_t \qquad (0<\rho<1\,,\ t>0)$$

$$z(1,t)=0 \qquad , \qquad z(\rho,0)=0 \qquad , \qquad z_t(\rho,0)=v_0$$

ضریب ثابت میرایی $۲b$ طوری است که $\circ < b < \alpha_۱$ که در آن $\alpha_۱$ کوچکترین صفر مثبت $J_\circ(\alpha)$ است. جواب این مسألهٔ مقدار مرزی را به صورت زیر به دست آورید:

$$z(\rho,t) = ۲v_\circ e^{-bt} \sum_{j=۱}^{\infty} \frac{J_\circ(\alpha_j \rho)}{\alpha_j J_۱(\alpha_j)} \cdot \frac{\sin\left(t\sqrt{\alpha_j^۲ - b^۲}\right)}{\sqrt{\alpha_j^۲ - b^۲}}$$

که در آن $\qquad J_\circ(\alpha_j) = \circ \qquad (\alpha_j > \circ)$

۶. عبارت زیر را برای دماهای $u(\rho,\phi,t)$ در یک استوانه نامتناهی $\rho \leq c$ بـه دسـت آورید وقتی که روی سطح $\rho = c$ آن $u = \circ$ و در زمان $t = \circ$، $u = f(\rho,\phi)$:

$$u(\rho,\phi,t) = \frac{۱}{۲} \sum_{j=۱}^{\infty} A_{\circ j} J_\circ(\alpha_{\circ j}\rho) \exp(-\alpha_{\circ j}^۲ kt)$$

$$+ \sum_{n=۱}^{\infty} \sum_{j=۱}^{\infty} J_n(\alpha_{nj}\rho)(A_{nj}\cos n\phi + B_{nj}\sin n\phi) \exp(-\alpha_{nj}^۲ kt)$$

که در آن α_{nj} و A_{nj} و B_{nj} اعدادی هستند که در بخش ۷۱ تعریف شده‌اند.

۷. عبارتی برای دماهای $u(\rho,z,t)$ در یک استوانهٔ توپر $\rho \leq c$، $\circ \leq z \leq \pi$ به دست آورید که سطح کل آن را در دمای صفر نگه می‌داریم و دمای اولیهٔ آن مقدار ثـابت A است. نشان دهید که آن را می‌توان به صورت حاصلضرب A و توابع v و w نوشت

$$u(\rho,z,t) = Av(z,t)w(\rho,t)$$

که در آن:

$$V(z,t) = \frac{۴}{\pi} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(۲n-۱)z}{۲n-۱} \exp[-(۲n-۱)^۲ kt]$$

و

$$w(\rho,t) = \frac{۲}{c} \sum_{j=۱}^{\infty} \frac{J_\circ(\alpha_j\rho)}{\alpha_j J_۱(\alpha_j c)} \exp(-\alpha_j^۲ kt)$$

در اینجا α_j ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_\circ(\alpha c) = \circ$ هستند. همچنین نشان دهید که $v(z,t)$

دماها در یک قطعه $\circ \leq z \leq \pi$ و $w(\rho,t)$ دماهای داخل یک استوانه نامتناهی $\rho \leq c$ را نمایش می‌دهند که برای هر دو دمای مرزی صفر و دمای اولیه واحد است (مثال ۱ بخش ۳۲ و مثال ۱ بخش ۶۹ را ببینید).

۸. عبارت زیر را برای دماهای $u(\rho,\phi,t)$ در یک گوهٔ استوانه‌ای قائم‌الزاویه که از سطح $\rho=۱$ و صفحات $\phi=\circ$ و $\phi=\frac{\pi}{۲}$ تشکیل می‌شود، به دست آورید، هرگاه روی تمام سطح آن $u=\circ$ و در زمان $t=\circ$، $u=f(\rho,\phi)$:

$$u(\rho,\phi,t)=\sum_{n=۱}^{\infty} \sum_{j=۱}^{\infty} B_{nj}\, J_{۲n}(\alpha_{nj}\rho) \sin ۲n\phi \exp(-\alpha_{nj}^{۲} kt)$$

که در آن α_{nj} ریشه‌های مثبت معادلهٔ $J_{۲n}(\alpha)=\circ$ هستند و

$$B_{nj}\,[J_{۲n+۱}(\alpha_{nj})]^{۲}=\frac{۸}{\pi}\int_{\circ}^{\pi/۲} \sin ۲n\phi \int_{\circ}^{۱} \rho f(\rho,\phi) J_{۲n}(\alpha_{nj}\rho)\, d\rho\, d\phi$$

۹. نشان دهید که اگر صفحهٔ $\phi=\frac{\pi}{۲}$ در مسألهٔ۸ با یک صفحهٔ $\phi=\phi_{\circ}$ جایگزین شود، فرمول دماها در آن گوه عموماً توابع بسل J_{ν} از مراتب غیرصحیح را در بر خواهد داشت.

۱۰. مسألهٔ ۸ را حل کنید، هرگاه تمام سطح گوهٔ مذکور به جای اینکه در دمای صفر نگه داشته شود، عایق‌بندی شده باشد.

۱۱. مسألهٔ مقدار مرزی زیر را حل کنید:

$$u_{\rho\rho}+\frac{۱}{\rho}u_{\rho}-\frac{n^{۲}}{\rho^{۲}}u+u_{zz}=\circ \qquad (\circ<\rho<۱\ ,\ z>\circ)$$

$$u(۱,z)=\circ \qquad , \qquad u(\rho,\circ)=\rho^{n}$$

که در آن $u(\rho,z)$ در ناحیهٔ $\circ \leq \rho < ۱$ ، $z>\circ$ کراندار و پیوسته و n یک عدد صحیح مثبت است. (برای $n=\circ$ این مسأله به مسألهٔ دیریکله تبدیل می‌شود که در مسألهٔ ۸ بخش ۷۰ حل شد.)

جواب :
$$u(\rho,z)=۲\sum_{j=۱}^{\infty} \frac{J_{n}(\alpha_{j}\rho)}{\alpha_{j} J_{n+۱}(\alpha_{j})} \exp(-\alpha_{j} z)$$

که در آن $\qquad J_n(\alpha_j)=0 \qquad (\alpha_j>0)$

۱۲. فرض کنید تابع $u(\rho,\phi,z)$ در معادلهٔ پواسن (بخش ۳) $\nabla^2 u+ay=0$ داخل یک نیم استوانهٔ نیم- نامتناهی $0\le\rho\le 1$ و $0\le\phi\le\pi$ و $z\ge 0$ صدق می‌کند که در آن a یک ثابت است و فرض کنید که روی تمام سطح آن $u=0$. بنابراین، تابع u با فرض اینکه برای $0\le\rho<1$ و $0<\phi<\pi$ و $z>0$ کراندار و پیوسته باشد در مسألهٔ مقدار مرزی زیر صدق می‌کند:

$$u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho\frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi}+u_{zz}+a\rho\sin\phi=0 \qquad (0<\rho<1\ ,\ 0<\phi<\pi\ ,\ z>0)$$

$$u(1,\phi,z)=0 \quad , \quad u(\rho,\phi,0)=0 \quad , \quad u(\rho,0,z)=u(\rho,\pi,z)=0$$

از روش زیر برای حل آن استفاده کنید:

(الف) با نوشتن $u(\rho,\phi,z)=a\sin\phi\ v(\rho,z)$ مسألهٔ داده شده را به مسألهٔ زیر برحسب $v(\rho,z)$ تبدیل کنید که در آن v برای $0\le\rho<1$ و $z>0$ کراندار و پیوسته است.

$$v_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}v_\rho-\frac{1}{\rho^2}v+v_{zz}+\rho=0 \qquad (0<\rho<1\ ,\ z>0)$$

$$v(1,z)=0 \qquad v(\rho,0)=0$$

(ب) توجه کنید که وقتی $n=1$ چگونه جواب مسألهٔ ۱۱ باعث می‌شود که برای یافتن جوابی از مسألهٔ قسمت (الف) به شکل زیر از روش تغییر پارامترها استفاده می‌کنیم (مثال ۲، بخش ۶۹ را ببینید)

$$v(\rho,z)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j(z)\,J_1(\alpha_j\rho)$$

در اینجا $J_1(\alpha_j)=0\ (\alpha_j>0)$. این روش را به کار گرفته، مسألهٔ مقدار اولیه زیر در معادلات دیفرانسیل معمولی را به دست آورید:

$$A_j''(z)-\alpha_j^2A_j(z)=-\frac{2}{\alpha_j\,J_2(\alpha_j)} \quad , \quad A_j(0)=0$$

آنگاه با اضافه کردن یک جواب خاص این معادلهٔ دیفرانسیل، که مقداری است ثابت و با یک بررسی ساده به دست می‌آید، به جواب عمومی معادلهٔ مکمل $A_j''(z)-\alpha_j^2 A_j(z)=0$ (با مسألهٔ ۱۲ بخش ۳۸ مقایسه کنید) $v(\rho,z)$ را به دست آورید.

بنابراین به جواب

$$u(\rho,\phi,z) = 2a\sin\phi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-exp\left(-\alpha_j z\right)}{\alpha_j^3 J_2\left(\alpha_j\right)} J_1\left(\alpha_j \rho\right)$$

که در آن

$$J_1\left(\alpha_j\right)=0 \qquad \left(\alpha_j>0\right)$$

راهنمایی: در به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل معمولی برای $A_j(z)$ در قسمت (ب) می‌توان بسط بسل ـ فوریهٔ مورد نیاز برای ρ را با رجوع به بسطی که قبلاً در مسألهٔ ۹ بخش ۶۸ به دست آمده نوشت. همچنین لازم است که ملاحظه شود چگونه اتحاد زیر از آن مسأله بی‌درنگ نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2}{d\rho^2}J_1\left(\alpha_j\rho\right)+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}J_1\left(\alpha_j\rho\right)-\frac{1}{\rho^2}J_1\left(\alpha_j\rho\right)=-\alpha_j^2 J_1\left(\alpha_j\rho\right).$$

فصل ۸

چند جمله‌ایهای لژاندر و کاربردهایش

همان طور که بعداً در این فصل خواهیم دید (بخشهای ۷۷ و ۷۸) یک کاربرد روش جداسازی متغیرها در معادلهٔ لاپلاس، در مختصات کروی r و θ، پس از جایگذاری $x=\cos\theta$ منجر به معادلهٔ لژاندر می‌شود:

$$[(1-x^2)y'(x)]'+\lambda y(x)=0 \tag{1}$$

که درآن λ ثابت جداسازی است. نقاط $x=1$ و $x=-1$ به ترتیب با $\theta=0$ و $\theta=\pi$ متناظرند و فصل را چنین آغاز می‌کنیم که با استفاده از سریها، جوابهایی از معادلهٔ (۱) را کشف می‌کنیم که وقتی $-1\leq x\leq 1$ می‌توان از آنها استفاده کرد.

۷۲. جوابهای معادلهٔ لژاندر

برای حل معادلهٔ لژاندر، آن را به صورت

$$(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+\lambda y(x)=0 \tag{1}$$

نوشته و ملاحظه می‌کنیم، در حالی که $x=\pm 1$ نقاط تکین، $x=0$ یک نقطهٔ عادی است.

بنابراین در پی یافتن جوابی به شکل زیر هستیم:[۱]

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \tag{۲}$$

با جایگذاری سری (۲) در معادلهٔ (۱) اتحاد زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)a_j x^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} [j(j-1)+2j-\lambda]a_j x^j = 0$$

چون دو جملهٔ اول در سری اول عملاً صفرند و چون در سری دوم

$$j(j-1)+2j = j(j+1)$$

می‌توان نوشت:

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)a_j x^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} [j(j+1)-\lambda]a_j x^j = 0$$

سرانجام با نوشتن سری اول به شکل

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1)a_{j+2} x^j$$

به معادلهٔ زیر می‌رسیم که شامل یک سری است

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ (j+2)(j+1)a_{j+2} - [j(j+1)-\lambda]a_j \right\} x^j = 0 \tag{۳}$$

معادلهٔ (۳) یک اتحاد بر حسب x است، هر گاه ضرایب a_j در رابطهٔ بازگشتی

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1)-\lambda}{(j+2)(j+1)} a_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{۴}$$

صدق کنند.پس اگر ضرایب سری توانی (۲) در رابطهٔ (۴) صدق کنند، این سری در بازهٔ

---

۱. برای بحث درنقاط عادی و تحقیق درستی این جایگذاری، کتابهایی را که قبلاً در پانوشت بخش ۵۹ به آنها ارجاع داده‌ایم ببینید.

همگرایی خود نمایش یک جواب معادلهٔ لژاندر است. این امر a_0 و a_1 را به عنوان اعداد ثابت دلخواه باقی می‌گذارد.

اگر $a_1=0$ ، از رابطهٔ (۴) نتیجه می‌شود که $a_3=a_5=\ldots=0$.

بنابراین یک جواب نا بدیهی معادلهٔ لژاندر، شامل تنها توانهای زوج x ، عبارت است از:

$$y_1=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}x^{2k} \qquad (a_0\neq 0) \tag{5}$$

که در آن a_0 یک عدد ثابت دلخواه و نا صفر است و بقیهٔ ضرایب a_2 ، a_4 ، ... با استفادهٔ متوالی از رابطهٔ بازگشتی (۴) برحسب a_0 بیان می‌شوند. (مسألهٔ ۸ بخش ۷۵ ببینید.) جواب دیگری، شامل تنها توانهای فرد x ، با قراردادن $a_0=0$ و دلخواه گرفتن a_1 به دست می‌آید. به عبارت دقیق‌تر، سری

$$y_2=a_1x+\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} \qquad (a_1\neq 0) \tag{6}$$

به ازای هر مقدار نا صفر a_1 در معادلهٔ لژاندر صدق می‌کند، هرگاه a_3، a_5، ... بر طبق رابطهٔ (۴) برحسب a_1 نوشته شوند. البته این دو جواب مستقل خطی‌اند، زیرا مضرب ثابتی از یکدیگر نیستند.

بنابر رابطهٔ (۴) بدیهی است که مقدار λ روی همهٔ ضرایب سریهای (۵) و (۶) بجز اولین آنها اثر می‌گذارد. همان طور که در بخش ۷۳ خواهیم دید مقادیری از λ موجودند که باعث مختوم شدن سریهای (۵) و (۶) و تبدیل آنها به چند جمله‌ای می‌شوند. در حال حاضر فرض کنید سری (۵) مختوم نباشد،از رابطهٔ (۴) با $y=2k$ متوجه می‌شویم که:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{2(k+1)}x^{2(k+1)}}{a_{2k}x^{2k}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k(2k+1)-\lambda}{(2k+2)(2k+1)}x^2\right|=x^2$$

لذا بنابر آزمونهای ریشه و همگرایی مطلق، سری (۵) برای $x^2<1$ همگرا و برای $x^2>1$

واگراست. گر چه مشکل‌تر است ولی سری (۱) وقتی $x=\pm 1$ واگراست.[1]

برای سری (۶) استدلالهای مشابه به کار می‌رود. پس به طور خلاصه اگر λ طوری باشد که سری (۵) یا (۶) مختوم و چند جمله‌ای نشود، آن سری فقط وقتی همگراست که $-1<x<1$.

۷۳. چند جمله‌ایهای لژاندر

در کاربردها لازم است جوابی از معادلهٔ لژاندر را بدانیم که خود و مشتق آن در بازهٔ بستهٔ $-1\leq x\leq 1$ پیوسته باشد. اما از بخش ۷۲ می‌دانیم که هیچ یک از سریهای جواب

$$(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+\lambda y(x)=0$$

یعنی

$$y_1=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}x^{2k}\qquad (a_0\neq 0) \tag{1}$$

و

$$y_2=a_1x+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}\qquad (a_1\neq 0) \tag{2}$$

که در آنجا به دست آمد در آن شرایط پیوستگی صدق نمی‌کنند، مگر این که مختوم باشند.

حال فرض کنید که پارامتر λ در معادله لژاندر ،دارای یکی از مقادیر صحیح

$$\lambda=n(n+1)\qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{3}$$

باشد، که در این حالت رابطهٔ برگشتی (۴) بخش ۷۲ تبدیل به رابطهٔ زیر می‌شود:

$$a_{j+2}=\frac{j(j+1)-n(n+1)}{(j+2)(j+1)}a_j\qquad (j=0,1,2,\ldots) \tag{4}$$

چون $a_{n+2}=0$ و لذا $a_{n+4}=a_{n+6}=\ldots=0$ در نتیجه یکی از جوابهای y_1 و y_2 عملاً

---

۱. مثلاً، کتاب بل (۱۹۶۸ صفحات ۲۳۱–۲۳۰) را که در کتابنامه آمده است ببینید.

چند جمله‌ای است.

توجه کنید که اگر $n=0$ آنگاه $a_2=a_4=a_6=...=0$ و سری (۱) مختصراً $y_1=a$ می‌شود. اگر بعلاوه n هر یک از اعداد صحیح زوج ۲ ، ۴ ، ... باشد به طوری که $n=2m$ $(m=1,2,...)$ آنگاه $a_{2m}\neq 0$ و $a_{2(m+1)}=a_{2(m+2)}=...=0$.
بدین ترتیب سری (۱) تبدیل به چند جمله‌ای می‌شود که درجهٔ آن $2m$ یا n است.
از طرف دیگر اگر $n=1$ می‌بینیم که $y_2=a_1x$ و اگر n هر یک از اعداد صحیح فرد $n=2m+1$ $(m=1,2,...)$ باشد، آنگاه $a_{2m+1}\neq 0$ و $a_{2(m+1)+1}=a_{2(m+2)+1}=...=0$. بنابراین اگر n فرد باشد، سری (۲) یک چند جمله‌ای از درجهٔ n است.
پس اگر λ هر یک از مقادیر (۳) را داشته باشد، جواب (۱) در صورتی که n زوج باشد، تبدیل به چند جمله‌ای

$$y_1=a_0+a_2x^2+...+a_nx^n \qquad (a_n\neq 0) \tag{5}$$

می‌شود و جواب (۲) در صورتی که n فرد باشد، تبدیل به چند جمله‌ای

$$y_2=a_1x+a_3x^3+...+a_nx^n \qquad (a_n\neq 0) \tag{6}$$

می‌شود. ضرایب a_0 و a_1 اعدادی ثابت و دلخواه و نا صفر هستند و بقیهٔ ضرایب با استفاده مکرر از رابطهٔ (۴) تعیین می‌شوند. ملاحظه کنید که وقتی n زوج است، جواب (۲) سری نامتناهی باقی می‌ماند و وقتی n فرد است همین حکم در مورد جواب (۱) جاری است.

اگر n زوج باشد معمولاً مقداری به a_0 نسبت می‌دهند که وقتی ضرایب $a_2,...,a_n$ در عبارت (۵) به وسیلهٔ رابطهٔ (۴) تعیین شوند، ضریب نهایی a_n دارای مقدار زیر باشد:

$$a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \tag{7}$$

همان طور که در بخش ۷۵ نشان خواهیم داد، دلیل این شرط به خاطر آن است که مقدار چندجمله‌ای (۵) در $x=1$ مساوی یک شود. مقدار دقیق a_0 مورد نیاز در اینجا مهم نیست.

با استفاده از قرارداد ۱=!۰ توجه می‌کنیم که اگر $n=1$ ، $a_0=1$. در این حالت $y_1=1$.
اگر n فرد باشد a_1 را طوری می‌گیریم که ضرایب نهایی در عبارت (۶) نیز با ضابطهٔ (۷) داده شود.دلیل این انتخاب نیز نظیر دلیلی است که در بالا برای نسبت دادن مقداری به a_0 گفتیم. توجه کنید اگر $n=1$ آنگاه $y_2=x$ زیرا برای آن مقدار n داریم $a_1=1$.

در صورتی که $n=2,3,...$ می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۴) همهٔ ضرایبی را که در عبارات (۵) و (۶) قبل از a_n آمده‌اند، برحسب a_n نوشت.
برای انجام این کار، ابتدا ملاحظه می‌کنید که صورت کسر سمت راست رابطهٔ (۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$j(j+1)-n(n+1)=-[(n^2-j^2)+(n-j)]=-(n-j)(n+j+1)$$

سپس a_j را به دست می‌آوریم، نتیجه عبارت است از:

$$a_j=-\frac{(j+2)(j+1)}{(n-j)(n+j+1)}a_{j+2} \qquad (8$$

برای بیان a_{n-2k} برحسب a_n، حال از رابطهٔ (۸) برای نوشتن k معادلهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$a_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{(2)(2n-1)}a_n$$

$$a_{n-4}=-\frac{(n-2)(n-3)}{(4)(2n-3)}a_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$a_{n-2k}=-\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{(2k)(2n-2k+1)}a_{n-2k+2}$$

با مساوی قرار دادن حاصلضرب طرفهای سمت چپ این تساویها با حاصلضرب طرفهای سمت راست آنها و حذف عوامل مشترک a_{n-2} , a_{n-4} ,..., a_{n-2k+2} از طرفین

تساوی حاصل در می‌یابیم که:

$$a_{n-2k}=\frac{(-1)^k}{2^k(k!)}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}a_n \qquad (9)$$

سپس با جایگذاری عبارت (۷) به جای a_n در (۹) و ترکیب جملات مختلف به عوامل مناسب (مسألهٔ ۵ بخش ۷۵ را ببینید) به عبارت مطلوب می‌رسیم:

$$a_{n-2k}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!(n-k)!} \qquad (10)$$

طبق معمول ۱=!۰. در صورتی که اعداد ثابت نا صفر a_0 و a_1 طوری باشند که a_n دارای مقادیر (۷) باشد، بنابر رابطهٔ (۱۰) چند جمله‌ایهای (۵) و (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$p_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!(n-k)!}x^{n-2k} \qquad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (11)$$

که در آن $m=n/2$ هر گاه n زوج باشد و $m=(n-1)/2$ هر گاه n فرد باشد.

عبارت دیگری برای $p_n(x)$ در بخش ۷۵ ارائه خواهد شد. توجه کنید که چون $p_n(x)$ اگر n زوج باشد، چند جمله‌ای فقط شامل توانهای زوج x است و اگر n فرد باشد، چند جمله‌ای فقط شامل توانهای فرد x است، بسته به اینکه n زوج یا فرد باشد، تابعی زوج یا فرد است؛ یعنی،

$$p_n(-x)=(-1)^n p_n(x) \qquad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (12)$$

چند جمله‌ای $p_n(x)$ را چند جمله‌ای لژاندر درجهٔ n می‌نامند.برای چند مقدار اول n عبارت (۱۱) چنین می‌شود:

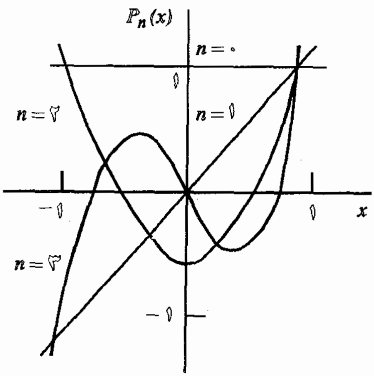
$$p_۰(x)=۱ \quad , \quad p_۱(x)=x \quad , \quad p_۲(x)=\frac{۱}{۲}(۳x^{۲}-۱)$$

$$p_۳(x)=\frac{۱}{۲}(۵x^{۳}-۳x) \qquad , \qquad p_۴(x)=\frac{۱}{۸}(۳۵x^{۴}-۳۰x^{۲}+۳)$$

$$p_۵(x)=\frac{۱}{۸}(۶۳x^{۵}-۷۰x^{۳}+۱۵x)$$

ملاحظه می‌کنید همان طور که پیش‌بینی شده بود، مقدار هر یک از این شش چند جمله‌ای در $x=۱$ مساوی یک است.

شکل ۶۵ را که در آن نمودار چهار چند جمله‌ای اول در بازهٔ $-۱\leq x\leq ۱$ رسم شده است، ببینید.



شکل ۶۵

دیده‌ایم که معادلهٔ لژاندر

$$(۱-x^{۲})y''(x)-۲xy'(x)+n(n+۱)y(x)=۰ \qquad (n=۰,۱,۲,...) \qquad (۱۳)$$

همیشه دارای جواب چند جمله‌ای $y=p_n(x)$ است که عبارت است از جواب (۵) (n زوج) یا جواب (۶) (n فرد) در صورتی که در این جوابها به ثابتهای دلخواه $a_۰$ و a_1 اعداد

مناسبی نسبت داده شود. جزئیات مربوط به صورت استاندهٔ جواب سری همراه را که به $Q_n(x)$ نمایش داده شده و تابع لژاندر نوع دوم نامیده می‌شود، جزو مسائل گذاشته‌ایم. البته از عبارت ایرانیک آخر بخش ۷۲ می‌دانیم که سری نمایش $Q_n(x)$ فقط وقتی همگراست که $-۱<x<۱$. با وجود این برای ما علم به اینکه $Q_n(x)$ و $Q_n'(x)$ یک زوج تابع پیوسته در بازهٔ بستهٔ $-۱\le x\le ۱$ نباشد، کافی است (مسألهٔ ۹ بخش ۷۶). چون $p_n(x)$ و $Q_n(x)$ مستقل خطی‌اند، جواب عمومی معادلهٔ (۱۳) عبارت است از:

$$y=C_۱\, p_n(x)+C_۲\, Q_n(x) \tag{۱۴}$$

که در آن $C_۱$ و $C_۲$ اعداد ثابت دلخواهی هستند.

۷۴. تعامد چند جمله‌ایهای لژاندر

فرض کنید $X(x)$ نمایش متغیر وابسته در معادلهٔ لژاندر با λ دلخواه باشد:

$$(۱-x^۲)\,X''(x)-۲xX'(x)+\lambda X(x)=۰ \tag{۱}$$

با نوشتن این معادله به صورت خود الحاق (بخش ۴۱)

$$[(۱-x^۲)X'(x)]'+\lambda X(x)=۰ \tag{۲}$$

می‌بینیم که حالت خاصی از معادلهٔ دیفرانسیل استورم-لیوویل است

$$[r(x)X'(x)]'+[q(x)+\lambda p(x)]\,X(x)=۰$$

که در آن $p(x)=۱$ ، $q(x)=۰$ و $r(x)=۱-x^۲$. تابع $r(x)$ در $x=\pm۱$ صفر می‌شود، بنابراین همان طور که قبلاً در مثال ۲ بخش ۴۲ خاطر نشان ساختیم معادلهٔ (۲) اینجا بدون شرایط مرزی یک مسألهٔ استورم-لیوویل در بازهٔ $-۱\le x\le ۱$ است که در آن X و X' باید در آن بازهٔ بسته پیوسته باشند.

قضیهٔ زیر همهٔ جوابهای این مسأله را به ما می‌دهد.

قضیه. مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ متناظر مسألهٔ استورم-لیوویل تکین (۲) در بازهٔ $-1 \leq x \leq 1$ عبارتند از:

$$\lambda_n = n(n+1) \quad , \quad X_n = P_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{۳}$$

که در آن $p_n(x)$ چند جمله‌ایهای لژاندرند.

اثبات را با یادآوری این مطلب از بخش ۷۳ آغاز می‌کنیم که $p_n(x)$ و $Q_n(x)$ جوابهای مستقل خطی معادلهٔ (۲) هستند، هر گاه λ یکی از مقادیر $\lambda = n(n+1)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ را دارا باشد. چون چند جمله‌ای $p_n(x)$ و مشتق آن در تمام بازهٔ $-1 \leq x \leq 1$ پیوسته‌اند و این حکم برای $Q_n(x)$ برقرار نیست، واضح است که شرایط پیوستگی X و X' فقط وقتی برقرار می‌شود که X مضرب ثابتی از $p_n(x)$ باشد. بنابراین λ_n و X_n مذکور در حکم قضیه در واقع مقادیر ویژه و توابع ویژه‌اند. آنچه باقی می‌ماند اثبات عدم وجود مقادیر ویژهٔ دیگر است.

برای انجام این کار، لحظه‌ای از بحث اصلی خارج شده، ملاحظه می‌کنیم که چون توابع ویژهٔ مزبور، همگی با مقادیر ویژهٔ متفاوت متناظرند، مجموعهٔ $\{p_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ در بازهٔ $-1 < x < 1$ با تابع وزن $p(x) = 1$ متعامد است. (قضیهٔ بخش ۴۳ را ببینید) یعنی:

$$\int_{-1}^{1} p_m(x) p_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n) \tag{۴}$$

با نمادی که برای حاصلضربهای داخلی به کار می‌رود، خاصیت (۴) را می‌نویسیم $(p_m, p_n) = 0$ $(m \neq n)$. بعداً (بخش ۷۶) قضیه‌ای خواهیم داشت که اگر تابع f در بازهٔ $-1 < x < 1$ قطعه‌ای هموار باشد، آنگاه سری فوریهٔ تعمیم یافتهٔ f نسبت به مجموعهٔ متعامد یکهٔ توابع

$$\phi_n(x) = \frac{p_n(x)}{\| p_n \|} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{۵}$$

در همهٔ نقاط بازهٔ $-1 < x < 1$ به جز در تعدادی متناهی نقطه به $f(x)$ همگراست. بنابراین مجموعهٔ $\{\phi_n(x)\}$ در فضای تابعی $C_p'(-1, 1)$ بسته است (بخش ۱۷ را ببینید).

حال فرض کنید که λ مقدار ویژهٔ دیگری باشد، متمایز از آنهایی که در قضیه آمده است و X نمایش تابع ویژهٔ نظیر λ. چون توابع ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ متمایز برهم عمودند، $(X,\phi_n)=\circ$ $(n=\circ,1,2,...)$ که در آن توابع ϕ_n تعریف شده‌اند. اما به خاطر بسته بودن $\{\phi_n(x)\}$ تابع X که در همهٔ بازهٔ $-1\leq x\leq 1$ پیوسته است، باید مقدارش در هر x از آن بازه صفر باشد. در نتیجه چون توابع ویژه نمی‌توانند متحد با صفر باشند، X یک تابع ویژه نیست. به استناد این تناقض، مقدار ویژهٔ دیگری موجود نیست و اثبات قضیه تمام می‌شود

اگر از بازهٔ $\circ\leq x\leq 1$ به جای $-1\leq x\leq 1$ استفاده‌شود،معادلهٔ دیفرانسیل (۲) همراه با هر یک از شرایط کرانه‌ای $X'(\circ)=\circ$ یا $X(\circ)=\circ$ نیز یک مسألهٔ استورم- لیوویل تکین است.

فرع. مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ متناظر مسألهٔ استورم- لیوویل تکین مرکب از معادلهٔ دیفرانسیل (۲) در بازهٔ $\circ<x<1$ و شرط مرزی $X'(\circ)=\circ$ عبارتند از:

$$\lambda_n=2n(2n+1) \quad , \quad X_n=p_{2n}(x) \qquad (n=\circ,1,2,...) \tag{۶}$$

اگر از شرط $X(\circ)=\circ$ استفاده شود، آنگاه مقادیر ویژه و توابع ویژه عبارتند از:

$$\lambda_n=(2n+1)(2n+2) \quad , \quad X_n=p_{2n+1}(x) \qquad (n=\circ,1,2,...) \tag{۷}$$

برای این که نحوهٔ به دست آمدن این جوابها را ببینیم، ابتدا جوابهای قضیه را وقتی شرط $X'(\circ)=\circ$ روی آنها قرار داده شود، درنظر می‌گیریم. چون فقط در حالتی که n یک عدد صحیح زوج باشد $p'_n(\circ)=\circ$، باید چند جمله‌ایهای $p_{2n+1}(x)$ $(n=\circ,1,2,...)$ را کنار گذاشت.بدین ترتیب مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ (۶) باقی می‌ماند. اگر از طرف دیگر شرط $X(\circ)=\circ$ اعمال شود، فقط وقتی که n عدد صحیح فردی باشد $p_n(\circ)=\circ$ و این امر منجر به مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ (۷) می‌شود.

بنابر قضیه بخش ۴۳، در مورد تعامد توابع ویژه، هریک از مجموعه‌های $\{p_{۲n}(x)\}$ $(n=۰,۱,۲,...)$ و $\{p_{۲n+۱}(x)\}$ $(n=۰,۱,۲,...)$ در بازهٔ $۰<x<۱$ با تابع وزن واحد متعامدند. یعنی:

$$\int_{۰}^{۱} p_{۲m}(x)p_{۲n}(x)\,dx=۰ \qquad (m\neq n) \tag{۸}$$

و

$$\int_{۰}^{۱} p_{۲m+۱}(x)p_{۲n+۱}(x)\,dx=۰ \qquad (m\neq n) \tag{۹}$$

که در آن $m,n=۰,۱,۲,...$. همان طور که از روی سریهای فوریهٔ شامل سینوس و کسینوس، سریهای فوریهٔ سینوسی و کسینوسی به دست آمد، برای هر تابع قطعه‌ای پیوسته در بازه $۰<x<۱$ از روی نمایشها در بازه $-۱<x<۱$ برحسب مجموعهٔ $\{p_n(x)\}$ نمایشهای معتبری در بازهٔ $۰<x<۱$ به دست می‌آید. بنابراین با استفاده از همان استدلالی که در قضیهٔ فوق برای مجموعه‌های بسته گفتیم، می‌توان نشان داد که در مسائل استورم-لیوویل این فرع هیچ مقدار ویژهٔ دیگری وجود ندارد.

۷۵. فرمول رادریگوس و نرمها

بنابر عبارت (۱۱) بخش ۷۳،

$$p_n(x)=\frac{۱}{۲^n n!}\sum_{k=۰}^{m}(-۱)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(۲n-۲k)!}{(n-۲k)!}x^{n-۲k} \tag{۱}$$

که در آن $m=n/۲$ هر گاه n زوج باشد و $m=(n-۱)/۲$ هر گاه n فرد باشد. چون

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{۲n-۲k}=\frac{(۲n-۲k)!}{(n-۲k)!}x^{n-۲k} \qquad (۰\leq k\leq m)$$

و به دلیل خطی بودن عملگر دیفرانسیل d^n/dx^n، عبارت (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\,x^{2n-2k} \tag{2}$$

در این مجموع وقتی اندیس k افزایش می‌یابد، توانهای x دوتا دوتا کم می‌شوند و کمترین توان $2n-2m$ است که اگر n زوج باشد، مساوی n و اگر n فرد باشد مساوی $n+1$ است. پس به وضوح می‌توان مجموع را توسیع داد، به طوری که k از ۰ تا n تغییر کند. زیرا چند جمله‌ای اضافه شده که معرفی می‌شود، از درجهٔ کمتر از n و لذا مشتق nام آن صفر است. چون مجموع حاصل ، بسط دو جمله‌ای $(x^2-1)^n$ است، در نتیجه از رابطهٔ (۲) داریم:

$$p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{3}$$

این فرمول رادریگوس برای چند جمله‌ایهای لژاندر است.

به کمک قاعدهٔ لایب نیتس برای مشتق nام $D^n[f(x)g(x)]$ حاصلضرب دو تابع :

$$D^n(fg)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}D^k(f)D^{n-k}(g) \tag{4}$$

که در آن همهٔ مشتقات لازم موجود و مشتق مرتبهٔ صفر هر تابع خود تابع است، می‌توان بسادگی از فرمول رادریگوس خواص مفیدی از چند جمله‌ایهای لژاندر را به دست آورد.

مثلاً توجه می‌کنیم که اگر قرار دهیم $u=x^2-1$ آنگاه:

$$u^n=(x^2-1)^n=(x+1)^n(x-1)^n$$

و از قاعدهٔ لایب‌نیتس نتیجه می‌شود که:

$$D^n u^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}D^k\left[(x+1)^n\right]D^{n-k}\left[(x-1)^n\right]$$

حال جملهٔ اول این مجموع عبارت است از:

$$D^{\circ}[(x+1)^n]D^n[(x-1)^n]=(x+1)^n n!$$

و جملات باقیمانده، همگی شامل عامل $(x-1)$ با توانی مثبت هستند. بنابراین مقدار مجموع وقتی $x=1$ برابر $2^n n!$ و از فرمول رادریگوس (۳) نتیجه می‌شود که:

$$p_n(1)=1 \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{۵}$$

ملاحظه کنید که چگونه از این رابطه و رابطهٔ $p_n(-x)=(-1)^n p_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ که در بخش ۷۳ به دست آمد، نتیجه می‌شود که:

$$p_n(-1)=(-1)^n \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{۶}$$

به عنوان کاربرد دیگری از فرمول رادریگوس ، قرار می‌دهیم:

$$2^{n+1}(n+1)!\,p_{n+1}(x)=D^{n+1}u^{n+1}=D^{n-1}(D^2u^{n+1})$$

که در آن $u=x^2-1$. اما

$$Du^{n+1}=2(n+1)xu^n$$

و لذا:

$$D^2u^{n+1}=2(n+1)(u^n+2nx^2u^{n-1})$$

$$=2(n+1)\,[u^n+2n(x^2-1)u^{n-1}+2nu^{n-1}]$$

$$=2(n+1)[(2n+1)u^n+2nu^{n-1}]$$

در نتیجه:

$$2^n n!\,p_{n+1}(x)=(2n+1)D^{n-1}u^n+2nD^{n-1}u^{n-1}$$

در اینجا با جایگذاری $2^{n-1}(n-1)!p_{n-1}(x)$ به جای $D^{n-1}u^{n-1}$ در می‌یابیم که

$$p_{n+1}(x)-p_{n-1}(x)=\frac{2n+1}{2^n n!}D^{n-1}u^n \tag{7}$$

از طرف دیگر، بنابر فرمول لایب نیتس (۴) می‌توان نوشت:

$$p_{n+1}(x)=\frac{D^n(Du^{n+1})}{2^{n+1}(n+1)!}=\frac{D^n(xu^n)}{2^n n!}=\frac{xD^n u^n+nD^{n-1}u^n}{2^n n!}$$

و چون $D^n u^n=2^n n!p_n(x)$،

$$p_{n+1}(x)-xp_n(x)=\frac{n}{2^n n!}D^{n-1}u^n \tag{8}$$

با حذف $D^{n-1}u^n$ بین این رابطه و رابطهٔ (۷) به رابطهٔ بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$(n+1)p_{n+1}(x)+np_{n-1}(x)=(2n+1)xp_n(x) \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{9}$$

همچنین توجه کنید که رابطهٔ

$$p'_{n+1}(x)-p'_{n-1}(x)=(2n+1)p_n(x) \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{10}$$

نتیجهٔ بدیهی رابطهٔ (۷) است.

حال نشان می‌دهیم که چگونه از رابطهٔ (۹) و شکل حاصل از آن

$$np_n(x)+(n-1)p_{n-2}(x)=(2n-1)xp_{n-1}(x) \qquad (n=2,3,\ldots) \tag{11}$$

که با قراردادن $n-1$ به جای n به دست می‌آید، می‌توان برای یافتن نرمهای $\|p_n\|=(p_n,p_n)^{1/2}$ چند جمله‌ایهای متعامد p_n استفاده کرد. با به خاطر داشتن $(p_{n+1},p_{n-1})=0$ و $(p_{n-2},p_n)=0$ به ترتیب از روابط (۹) و (۱۱) در می‌یابیم که

$$n(p_{n-1},p_{n-1})=(2n+1)(xp_n,p_{n-1}) \tag{12}$$

و

(۱۳ $$n(p_n\ ,\ p_n)=(۲n-۱)(xp_{n-۱}\ ,\ p_n)$$

انتگرالهای نمایش دهندهٔ $(xp_n\ ,\ p_{n-۱})$ و $(xp_{n-۱}\ ,\ p_n)$ یکی هستند و فقط باید این کمیتها را از روابط (۱۲) و (۱۳) حذف کنیم تا نتیجهٔ زیر به دست آید:

$$(۲n+۱)(p_n\ ,\ p_n)=(۲n-۱)(p_{n-۱}\ ,\ p_{n-۱})$$

یا

(۱۴ $$(۲n+۱)\|p_n\|^۲=(۲n-۱)\|p_{n-۱}\|^۲ \qquad (n=۲,۳,...)$$

بسادگی می‌توان مستقیماً تحقیق کرد که رابطهٔ (۱۴) وقتی $n=۱$ نیز برقرار است.

حال فرض کنید n عدد صحیح مثبت مشخصی باشد و با استفاده از رابطهٔ (۱۴) n معادلهٔ زیر را بنویسید:

$$(۲n+۱)\|p_n\|^۲=(۲n-۱)\|p_{n-۱}\|^۲$$

$$(۲n-۱)\|p_{n-۱}\|^۲=(۲n-۳)\|p_{n-۲}\|^۲\ ,$$

$$\vdots$$

$$(۵)\|p_۲\|^۲=(۳)\|p_۱\|^۲$$

$$(۳)\|p_۱\|^۲=(۱)\|p_۰\|^۲$$

با مساوی قراردادن حاصلضرب طرفهای سمت چپ با حاصلضرب طرفهای سمت راست و حذفهای مناسب، به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

$$(۲n+۱)\|p_n\|^۲=\|p_۰\|^۲ \qquad (n=۱,۲,...)$$

چون $\|p_0\|^2=2$ در نتیجه:

$$\|p_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{15}$$

بنابراین مجموعهٔ چند جمله‌ایهای

$$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,p_n(x) \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{16}$$

در بازهٔ $-1<x<1$ متعامدیکه است.

مسائل

۱. به استناد تعامد مجموعهٔ $\{p_n(x)\}$ بیان کنید چرا:

الف) $$\int_{-1}^{1} p_n(x)\,dx=0 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

ب) $$\int_{-1}^{1} (Ax+B)p_n(x)\,dx=0 \qquad (n=2,3,\ldots)$$

که در آن A و B اعدادی ثابت هستند.

۲. مستقیماً تحقیق کنید که چند جمله‌ایهای لژاندر

$$p_0(x)=1 \quad , \quad p_1(x)=x \quad , \quad p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \quad , \quad p_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

تشکیل مجموعهٔ متعامدی در بازهٔ $-1<x<1$ می‌دهند. نشان دهید که نمودار آنها به صورتی است که در شکل ۶۵ (بخش ۷۳) نشان داده شده است.

۳. با استفاده از این مطلب که مجموعهٔ $\{\phi_n(x)\}$ که با ضابطه (۱۶) بخش ۷۵ تعریف شد در بازهٔ $-1<x<1$ متعامدیکه است، نشان دهید که مجموعه‌های زیر در بازهٔ $0<x<1$ متعامدیکه‌اند:

الف) $$\left\{\sqrt{4n+1}\;p_{2n}(x)\right\} \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

ب) $\left\{\sqrt{4n+3}\ p_{2n+1}(x)\right\}$ $(n=0,1,2,...)$

راهنمایی: از راهنمایی مسألهٔ ۲ بخش ۱۱ استفاده کنید، با این تغییر که تابع زوج f در بازهٔ $-1<x<1$ تعریف‌شده است.

۴. از رابطهٔ بازگشتی (۱۰) بخش ۷۵ فرمول انتگرالگیری زیر را به دست آورید:

$$\int_a^1 p_n(x)\,dx=\frac{1}{2n+1}\,[p_{n-1}(a)-p_{n+1}(a)] \qquad (n=1,2,...)$$

۵. با ارائه جزئیات، نشان دهید چگونه عبارت (۱۰) بخش۷۳ برای ضرایب a_{n-2k} در چند جمله‌ایهای لژاندر از روی روابط (۷) و (۹) آن بخش به دست می‌آید.

راهنمایی: ملاحظه کنید که فاکتوریلهای موجود در رابطهٔ (۷) بخش ۷۳ را می‌توان چنین نوشت

$$(2n)!=(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-2k+1)(2n-2k)!$$

$$n!=n(n-1)\ldots(n-2k+1)(n-2k)!$$

$$n!=n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)!$$

۶. به کمک عبارت (۱۱) بخش ۷۳ برای $p_n(x)$ نشان دهید که وقتی $n=2,3,...$ اعداد ثابت a_0 و a_1 در روابط (۵) و (۶) آن بخش باید دارای مقادیر زیر باشند تا ضریب نهایی a_n دارای مقداری باشد که در رابطهٔ (۷) آن بخش مشخص شده است:

$$a_0=(-1)^{n/2}\ \frac{(1)(3)(5)\ldots(n-1)}{(2)(4)(6)\ldots(n)} \qquad (n=2,4,...)$$

$$a_1=(-1)^{(n-1)/2}\ \frac{(1)(3)(5)\ldots(n)}{(2)(4)(6)\ldots(n-1)} \qquad (n=3,5,...)$$

۷. این خواص چند جمله‌ایهای لژاندر را ثابت کنید که در آن : $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$:

الف) $p_{۲n}(۰) = (-۱)^n \dfrac{(۲n)!}{۲^{۲n}(n!)^۲}$ ب) $p'_{۲n}(۰) = ۰$

ج) $p_{۲n+۱}(۰) = ۰$ د) $p'_{۲n+۱}(۰) = (۲n+۱)p_{۲n}(۰)$

راهنمایی: برای قسمتهای (الف) و (د) به مسألهٔ ۶ استناد کنید.

۸. معادلهٔ لژاندر (۱) بخش ۷۲ اغلب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(۱-x^۲)y''(x) - ۲xy'(x) + \nu(\nu+۱)y(x) = ۰$$

که در آن ν عدد مختلط نامقیدی است. نشان دهید در صورتی که $\lambda = \nu(\nu+۱)$ رابطهٔ بازگشتی (۴) بخش ۷۲ را می‌توان به شکل زیر درآورد:

$$a_j = -\frac{(\nu-j+۲)(\nu+j-۱)}{j(j-۱)} a_{j-۲} \qquad (j = ۲, ۳, \ldots)$$

سپس همان طور که در حل معادلهٔ بسل (بخش ۵۹) عمل کردیم، با استفاده از این رابطه، جوابهای مستقل خطی زیر از معادلهٔ لژاندر را به دست آورد:

$$y_۱ = a_۰ \left\{ ۱ + \sum_{k=۱}^{\infty} (-۱)^k \frac{[\nu(\nu-۲)\ldots(\nu-۲k+۲)][(\nu+۱)(\nu+۳)\ldots(\nu+۲k-۱)]}{(۲k)!} x^{۲k} \right\}$$

$$y_۲ = a_۱ \left\{ x + \sum_{k=۱}^{\infty} (-۱)^k \frac{[(\nu-۱)(\nu-۳)\ldots(\nu-۲k+۱)][(\nu+۲)(\nu+۴)\ldots(\nu+۲k)]}{(۲k+۱)!} x^{۲k+۱} \right\}$$

که در آن $a_۰$ و $a_۱$ اعداد ثابت ناصفر دلخواهی هستند (بنابر بخش ۷۲ این دو سری وقتی $-۱ < x < ۱$ همگرایند).

۹. نشان دهید اگر ν عدد مختلط زیر باشد:

$$\nu = \frac{-1}{2} + i\alpha \qquad (\alpha > 0)$$

معادلهٔ لژاندر در مسألهٔ ۸ تبدیل به معادلهٔ زیر می‌شود

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) - (\frac{1}{4} + \alpha^2)y(x) = 0$$

سپس نشان دهید چگونه از جوابهای حاصل در مسألهٔ ۸ نتیجه می‌شود که توابع

$$p_\alpha(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha^2 + (\frac{1}{2})^2][\alpha^2 + (\frac{5}{2})^2] \dots [\alpha^2 + (\frac{4k-3}{2})^2] \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$q_\alpha(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha^2 + (\frac{3}{2})^2][\alpha^2 + (\frac{7}{2})^2] \dots [\alpha^2 + (\frac{4k-1}{2})^2] \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

جوابهای مستقل خطی این معادلهٔ دیفرانسیل هستند که در بازهٔ $-1 < x < 1$ معتبر است. این توابع لژاندر خاص در برخی مسائل مقدار مرزی در نواحی محدود بـه مـخروطها مطرح می‌شوند.

۱۰. توجه کنید که جوابهای y_1 و y_2 حاصل درمسألهٔ ۸ جوابهای (۵) و (۶) در بخش ۷۲ هستند وقتی که $\lambda = \nu(\nu+1)$. در صورتی کـه $\nu = n = 1, 3, 5, \dots$ و $\nu = n = 0, 2, 4, \dots$ ایـن جـوابـها، بـه تـرتیب، سـری نـامتناهی بـاقی مـی‌مانند. در صـورتی کـه $\nu = n = 2m$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$، تابع لژاندر Q_n نوع دوم به صورت y_2 تعریف می‌شود که در آن:

$$a_1 = \frac{(-1)^m \, 2^{2m} (m!)^2}{(2m)!}$$

و چنانچه $\nu = n = 2m+1$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$، Q_n به صورت y_1 تعریف می‌شود که در آن:

$$a_0 = -\frac{(-1)^m \, 2^{2m} (m!)^2}{(2m+1)!}$$

با استفاده از اینکه

$$ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (-1<x<1)$$

نشان دهید که:

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{و} \qquad Q_1(x)=\frac{x}{2}ln\frac{1+x}{1-x}-1=xQ_0(x)-1$$

۱۱. با استفاده از استقرای ریاضی روی عدد صحیح n درستی قاعدهٔ لایب نیتس (۴) بخش ۷۵ را تحقیق کنید.

۱۲. قرار دهید

$$F(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-1/2}$$

که در آن $|x|\le 1$ و t تاکنون قیدی ندارد.

الف) توجه کنید که برای یک مقدار یکتای θ $(0\le\theta\le\pi)$ $x=cos\ \theta$ و نشان دهید که:

$$F(x,t)=(1-e^{i\theta}t)^{-1/2}(1-e^{-i\theta}t)^{-1/2}$$

سپس با استفاده از اینکه $(1-z^2)^{-1/2}$ دارای بسط سری ماکلورانی است که هرگاه $|z|<1$ برقرار می‌باشد، بیان کنید چرا توابع $(1-e^{\pm i\theta}t)^{-1/2}$ را وقتی به عنوان توابعی از t در نظر گرفته شوند، می‌توان به وسیلهٔ سری ماکلورانی نمایش داد که هرگاه $|t|<1$ برقرار می‌باشند. در نتیجه حاصلضرب آن دو تابع نیز دارای چنین نمایشی است که وقتی $|t|<1$ برقرار است.[1] یعنی توابعی مانند $f_n(x)$ $(n=0,1,2...)$ موجودند به طوری‌که

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^n \qquad (|t|<1)$$

۱. برای بحث در این مطلب ، کتاب مؤلفین (۱۹۹۰ صفحات ۱۶۲-۱۶۱) را که در کتابنامه آمده است ببینید

ب) نشان دهید که تابع $F(x,t)$ در اتحاد زیر صدق می‌کند:

$$(۱-۲xt+t^۲)\frac{\partial F}{\partial t}=(x-t)F$$

و با استفاده از این نتیجه نشان دهید که توابع $f_n(x)$ در قسمت (الف) در رابطهٔ بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$(n+۱)f_{n+۱}(x)+nf_{n-۱}(x)=(۲n+۱)xf_n(x) \qquad (n=۱,۲,...)$$

ج) نشان دهید که دو تابع $f_۰(x)$ و $f_۱(x)$ در قسمت (الف) به ترتیب ۱ و x هستند و توجه کنید که حالا می‌توان از رابطهٔ بازگشتی حاصل در قسمت (ب) برای تعیین $f_n(x)$ وقتی $n=۲,۳,...$ استفاده کرد. آن رابطه را با رابطهٔ (۹) بخش ۷۵ مقایسه کرده، نتیجه بگیرید که توابع $f_n(x)$ در واقع چند جمله‌ایهای لژاندر $p_n(x)$ هستند، یعنی، نشان دهید که:

$$(۱-۲xt+t^۲)^{-۱/۲}=\sum_{n=۰}^{\infty}p_n(x)t^n \qquad (|x|\le ۱\ ,\ |t|<۱)$$

بنابراین تابع F یک تابع مولد برای چند جمله‌ایهای لژاندر است.

۱۳. اثبات دیگری برای خاصیت (بخش ۷۵) $p_n(۱)=۱$ $(n=۰,۱,۲,...)$ با استفاده از (الف) رابطهٔ بازگشتی (۹) بخش ۷۵ و استقرای ریاضی؛ (ب) تابع مولد حاصل در مسألهٔ ۱۲ (ج) ارائه دهید.

۷۶. سریهای لژاندر

در بخش ۷۵ دیدیم که مجموعهٔ چند جمله‌ایهای

$$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{۲n+۱}{۲}}\,p_n(x) \qquad (n=۰,۱,۲,...) \tag{۱}$$

در بازهٔ $-۱<x<۱$ متعامدیکه است. ثابتهای فوریه نسبت به این مجموعه (بخش ۱۲) برای تابع f که در بازهٔ $-۱<x<۱$ تعریف شده باشد، عبارتند از:

$$c_n=(f,\phi_n)=\sqrt{\frac{۲n+۱}{۲}}\int_{-۱}^{۱} f(x)p_n(x)\,dx$$

و سری فوریهٔ تعمیم یافتهٔ نظیر f عبارت است از:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} c_n\phi_n(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲n+۱}{۲}p_n(x)\int_{-۱}^{۱} f(s)p_n(s)\,ds$$

یعنی:

(۲)
$$f(x)\sim\sum_{n=۰}^{\infty} A_n\,p_n(x)\qquad(-۱<x<۱)$$

که در آن:

(۳)
$$A_n=\frac{۲n+۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} f(x)p_n(x)\,dx\qquad(n=۰,۱,۲,\ldots)$$

سری (۲) با ضرایب (۳) یک سری لژاندر است.در اینجا یک قضیهٔ نمایش را که برای توابع قطعه‌ای هموار به کار می‌رود، بدون اثبات بیان می‌کنیم.[۱]

قضیه. فرض کنید f نمایش تابعی قطعه‌ای هموار در بازهٔ $-۱<x<۱$ باشد و در هر نقطهٔ ناپیوستگی f در آن بازه مقدار تابع میانگین حدود یکطرفهٔ $f(x+)$ و $f(x-)$ تعریف شده باشد. در این صورت

(۴)
$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty} A_n\,p_n(x)\qquad(-۱<x<۱)$$

که در آن ضرایب A_n با ضابطهٔ (۳) تعریف شده‌اند.

---

۱. اثبات را، که نسبتاً طولانی است، در کتاب کریدر، کُولر، اُستبرگ و پرکینس (۱۹۶۶ صفحات ۴۳۲-۴۲۵) که در کتابنامه آمده است می‌توان دید. اثبات ساده‌ای از حالت خاص قضیه در کتاب رین‌ویل (۱۹۷۱ صفحات ۱۷۹-۱۷۷) که در کتابنامه آمده، دیده می‌شود.

بنابر بخش ۷۳، $p_{۲n}(x)$ $(n=۰,۱,۲,...)$ زوج و $p_{۲n+۱}(x)$ $(n=۰,۱,۲,...)$ فرد است. یعنی:

$$p_{۲n}(-x)=p_{۲n}(x) \qquad , \qquad p_{۲n+۱}(-x)=-p_{۲n+۱}(x)$$

پس بدیهی است که اگر تابع f در حکم قضیه زوج باشد، حاصلضرب $f(x)p_{۲n+۱}(x)$ فرد و نمودار $y=f(x)p_{۲n+۱}(x)$ نسبت به مبدأ متقارن است. از طرف دیگر، $f(x)p_{۲n}(x)$ زوج و نمودار $y=f(x)p_{۲n}(x)$ نسبت به محور yها متقارن است. در نتیجه:

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)p_{۲n}(x)\,dx = ۲\int_{۰}^{۱} f(x)p_{۲n}(x)\,dx$$

و

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)p_{۲n+۱}(x)\,dx = ۰$$

بنابراین از عبارت (۳) نتیجه می‌شود که ضرایب در نمایش (۴) عبارتند از:

$$(n=۰,۱,۲,...) \quad A_{۲n+۱}=۰$$

و

۵) $$A_{۲n}=(۴n+۱)\int_{۰}^{۱} f(x)p_{۲n}(x)\,dx \qquad (n=۰,۱,۲,...)$$

بنابراین اگر قضیه را برای توسیع زوج تابع f که در بازهٔ $۰<x<۱$ قطعه‌ای هموار است و در هر نقطهٔ ناپیوستگی مقدارش میانگین $f(x+)$ و $f(x-)$ است به کار بریم در می‌یابیم که:

۶) $$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty} A_{۲n}\,p_{۲n}(x) \qquad (۰<x<۱)$$

که در آن ضرایب $A_{۲n}$ دارای مقادیر (۵) هستند.

همین طور، اگر f تابعی فرد باشد، حاصلضربهای $f(x)p_{2n}(x)$ و $f(x)p_{2n+1}(x)$ به ترتیب فرد و زوج هستند. در این صورت بسادگی می‌توان نشان داد که اگر f تابعی قطعه‌ای هموار در $0 < x < 1$ باشد که مقدار $f(x)$ در هر نقطهٔ ناپیوستگی مساوی میانگین $f(x+)$ و $f(x-)$ تعریف شده باشد، آنگاه $f(x)$ دارای نمایش زیر است:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1}\, p_{2n+1}(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{7}$$

که در آن

$$A_{2n+1} = (4n+3) \int_0^1 f(x) p_{2n+1}(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

مثال. می‌خواهیم تابع $f(x) = 1$ $(0 < x < 1)$ را به یک سری از نوع (۷) که شامل چند جمله‌ایهای لژاندر از درجهٔ فرد است بسط دهیم. بنابر عبارت (۸)

$$A_{2n+1} = (4n+3) \int_0^1 p_{2n+1}(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

این انتگرال بسادگی به کمک فرمول انتگرالگیری (مسألهٔ ۴ بخش ۷۵) زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_a^1 p_n(x)\, dx = \frac{1}{2n+1} [p_{n-1}(a) - p_{n+1}(a)] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

بنابراین:

$$A_{2n+1} = p_{2n}(0) - p_{2(n+1)}(0) \tag{9}$$

در نتیجه:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} [p_{2n}(0) - p_{2n+2}(0)] p_{2n+1}(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{10}$$

چون [مسألهٔ ۷ (الف) بخش ۷۵]

$$p_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ضرایب (۹) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$A_{2n+1} = (-1)^n \frac{(4n+3)}{(2n+2)} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \tag{11}$$

بدین ترتیب، شکل دیگری از نمایش (۱۰) به دست می‌آید:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4n+3}{2n+2}\right) \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} P_{2n+1}(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{12}$$

مسائل.

۱. فرض کنید F نمایش توسیع فرد تابع $f(x)=1$ $(0<x<1)$ به بازهٔ $-1<x<1$ باشد که در آن $F(0)=0$. همچنین فرض کنید که g تابعی باشد که با ضابطه‌های زیر تعریف شده است:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -1<x<0 \quad \text{هرگاه} \\ 1 & 0<x<1 \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

و $g(0)=\frac{1}{2}$. در این صورت با توجه به

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F(x) \qquad (-1<x<1)$$

و استناد به بسط (۱۰) بخش ۷۶ نشان دهید که:

$$g(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0)] P_{2n+1}(x) \qquad (-1<x<1)$$

۲. فرض کنید f تابعی باشد که با ضابطه‌های زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1<x\le 0 \quad \text{هرگاه} \\ x & 0<x<1 \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

الف) بیان کنید چرا در هر نقطه از بازهٔ $-1<x<1$ ، $f(x)$ با سری لژاندر (۴) بخش ۷۶ خود نمایش داده می‌شود.

ب) نشان دهید که در سری قسمت (الف) $A_{2n+1}=0$ $(n=1,2,\ldots)$.

ج) چهار جملهٔ اول نا صفر سری قسمت (الف) را پیدا کرده، نشان دهید که:

$$f(x)=\frac{1}{4}p_0(x)+\frac{1}{2}p_1(x)+\frac{5}{16}p_2(x)-\frac{3}{32}p_4(x)+\ldots \qquad (-1<x<1)$$

۳. تحقیق کنید که به ازای هر x

الف) $x^2=\frac{1}{3}p_0(x)+\frac{2}{3}p_2(x)$ ب) $x^3=\frac{3}{5}p_1(x)+\frac{2}{5}p_3(x)$

۴. اولین سه جمله نا صفر در سری چند جمله‌ایهای لژاندر از مرتبهٔ زوج را که نمایش تابع $f(x)=x$ $(0<x<1)$ است بدست آورده، نشان دهید که

$$x=\frac{1}{2}p_0(x)+\frac{5}{8}p_2(x)-\frac{3}{16}p_4(x)+\ldots \qquad (0<x<1)$$

بیان کنید چرا این بسط وقتی $x=0$ برقرار می‌ماند و این سری نمایش چه تابعی در بازهٔ $-1<x<1$ است.

۵. با استفاده از فرع بخش ۱۶ در مورد ثابتهای فوریه C_n در بخش ۷۶ بیان کنید چرا اگر f در بازهٔ $-1<x<1$ قطعه‌ای پیوسته باشد، آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n+1}\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)\,dx=0$$

۶. فرض کنید f نمایش تابعی قطعه‌ای هموار در بازهٔ $0<x<1$ و در هر نقطهٔ ناپیوستگی در آن بازهٔ $f(x)$ مقدار میانگین حدود یکطرفهٔ $f(x+)$ و $f(x-)$ باشد.

الف) با پیدا کردن ثابتهای فوریهٔ f نسبت به مجموعهٔ متعامدیکه $\left\{\sqrt{4n+1}\,p_{2n}(x)\right\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ [مسألهٔ ۳ (الف) بخش ۷۵]، ضرایب (۵) بخش ۷۶ را که در بسط (۶) آن بخش ظاهر شد، به دست آورید.

ب) با استفاده از فرع بخش ۱۶ در مورد ثابتهای فوریه در قسمت (الف) نشان دهید که (با مسألهٔ ۵ مقایسه کنید):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n+1} \int_0^1 f(x)p_{2n}(x)\,dx = 0$$

۷. (الف) با یادآوری این مطلب که $p_m(x)$ چند جمله‌ای از درجهٔ m که تنها شامل توانهای فرد یا زوج x است (بخش ۷۳) بیان کنید چرا:

$$x^m = cp_m(x) + c_{m-2}x^{m-2} + c_{m-4}x^{m-4} + \ldots$$

که در آن ضرایب اعدادی ثابت هستند. با استفاده از همان استدلال برای x^{m-2} و غیره، نتیجه بگیرید که x^m ترکیب خطی متناهی از چند جمله‌ایهای $p_m(x)$ ، $p_{m-2}(x)$ ، $p_{m-4}(x)$ ، ... است.

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) خاطر نشان سازید که چرا

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p(x)dx =$$

که در آن $p_n(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر و $p(x)$ چند جمله‌ای دلخواه با درجهٔ کوچکتر از n است.

۸. فرض کنید n دارای یکی از مقادیر $n=1,2,\ldots$ باشد.

الف) با یادآوری نتیجهٔ مسألهٔ ۱ (الف) بخش ۷۵ بیان کنید چرا $p_n(x)$ باید حداقل یک‌بار در بازهٔ $-1<x<1$ تغییر علامت دهد. سپس فرض کنید x_1 ، x_2 ، ... ، x_k نمایش کل نقاط متمایز در آن بازه باشد که $p_n(x)$ در آنها تغییر علامت می‌دهد. چون هر چند جمله‌ای از درجهٔ n حداکثر n صفر متمایز دارد، داریم $1\le k\le n$.

ب) فرض کنید که تعداد نقاط x_1 ، x_2 ، ... ، x_k در قسمت (الف) طوری باشد که $k<n$ ، و چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)$$

با استفاده از نتیجه مسألهٔ ۷ (ب) نشان دهید که انتگرال

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p(x)\,dx$$

دارای مقدار صفر است و پس از توجه به این نکته که نقاط تغییر علامت $p_n(x)$ و $p(x)$ در بازهٔ $-1<x<1$ دقیقاً یکی است، بیان کنید چرا مقدار انتگرال نمی‌تواند صفر باشد. با رسیدن به این تناقض نتیجه بگیرید که $k=n$ و لذا صفرهای چند جمله‌ای لژاندر $p_n(x)$ همگی حقیقی و متمایز و در بازهٔ باز $-1<x<1$ واقعند.

۹. به روش زیر نشان دهید که به ازای هر مقدار n $(n=0,1,2,\ldots)$ تابع لژاندر نوع دوم $Q_n(x)$ (بخش ۷۳) و مشتق آن $Q_n'(x)$ یک زوج توابع پیوسته در بازهٔ بسته $-1\le x\le 1$ نیستند. فرض کنید عددی صحیح مانند N باشد به طوری که $Q_N(x)$ و $Q_N'(x)$ در آن بازه پیوسته باشند. پس توابع $Q_N(x)$ و $p_n(x)$ $(n\neq N)$ توابع ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ متمایز مسألهٔ استورم- لیوویل (۲) بخش ۷۴ هستند. بیان کنید چرا نتیجه می‌شود که:

$$\int_{-1}^{1} Q_N(x)p_n(x)\,dx=0 \qquad (n\neq N)$$

و سپس با استفاده از قضیه بخش ۷۶ نشان دهید که $Q_N(x)=A_Np_N(x)$ که در آن A_N عددی ثابت است. ولی این غیر ممکن است، زیرا $p_N(x)$ و $Q_N(x)$ مستقل خطی‌اند.

۷۷. مسائل دیریکله در نواحی کروی

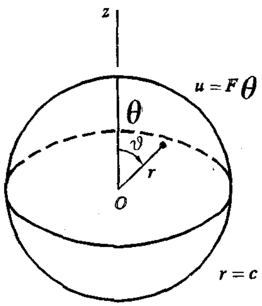
برای اولین کاربرد سری لژاندر، تابعی همساز در ناحیهٔ $r<c$ مانند u را تعیین می‌کنیم که روی سطح کروی $r=c$ (شکل ۶۶) مقادیر از قبل تعیین شدهٔ $F(\theta)$ را بگیرد. در اینجا r, ϕ و θ مختصات کروی و u مستقل از ϕ است. در نتیجه u در معادله لاپلاس (بخش ۴)

$$r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0 \qquad (r<c\ ,\ 0<\theta<\pi) \tag{1}$$

و شرط زیر صدق می‌کند:

$$u(c,\theta)=F(\theta) \qquad (0<\theta<\pi) \tag{۲}$$

تابع u و مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم آن باید در درون $(0\leq r<c\,,\,0\leq\theta\leq\pi)$ کره پیوسته باشند.



شکل ۶۶

از نظر فیزیکی، تابع u نمایش دمای مانا در کرهٔ صلب $r\leq c$ است که دمای روی سطح آن فقط وابسته به θ است؛ یعنی، دماهای سطحی بر هر دایرهٔ $r=c$ و $\theta=\theta_0$ یکنواختند. همچنین u نمایش پتانسیل الکترواستاتیک در فضای $r<c$ است که بدون بار می‌باشد و روی مرز $r=c$ داریم $u=F(\theta)$.

حال یک جواب معادلهٔ (۱) به شکل $u=R(r)\Theta(\theta)$ را که در شرایط پیوستگی مزبور صدق کند، درنظر می‌گیریم. جداسازی متغیرها نشان می‌دهد که برای عدد ثابتی مانند λ:

$$\frac{1}{\sin\theta\,\Theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=-\frac{r}{R}\,\frac{d^2}{dr^2}(rR)=-\lambda$$

در نتیجه، R باید در معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$r\frac{d^2}{dr^2}(rR)-\lambda R=0 \tag{۳}$$

صدق کند و در $0 \leq r < c$ پیوسته باشد. همچنین برای همان عدد ثابت λ:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\Theta=0 \qquad (0<\theta<\pi) \tag{۴}$$

که در آن Θ و Θ' در بازهٔ بستهٔ $0 \leq \theta \leq \pi$ پیوسته‌اند.

اگر در معادلهٔ (۴) جایگذاری $x=\cos\theta$ را انجام دهیم، چون

$$\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}=(1-\cos^2\theta)\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d\Theta}{d\theta}=-(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}$$

بسادگی نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right]+\lambda\Theta=0 \qquad (-1<x<1) \tag{۵}$$

که در آن Θ و مشتق آن نسبت به x در کل بازهٔ بسته $-1 \leq x \leq 1$ پیوسته‌اند. معادله (۵) عبارت است از معادلهٔ لژاندر در شکل خود الحاق آن؛ و از قضیهٔ بخش ۷۴ می‌دانیم که λ باید یکی از مقادیر ویژهٔ $\lambda_n=n(n+1)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ باشد و تابع ویژهٔ نظیر آن $\Theta_n=p_n(x)$. بنابراین توابع $\Theta_n(\theta)=p_n(\cos\theta)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ در معادلهٔ (۴) وقتی $\lambda=n(n+1)$ صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}p_n(\cos\theta)\right]+n(n+1)p_n(\cos\theta)=0 \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{۶}$$

با نوشتن معادلهٔ (۳) به شکل:

$$r^2R''+2rR'-\lambda R=0$$

می‌بینیم که یک معادلهٔ کوشی- اویلر است که پس از جایگذاری $r=\exp s$ (مسألهٔ ۳ بخش ۳۵ را ببینید) به یک معادلهٔ دیفرانسیل با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود. در صورتی که $\lambda=n(n+1)$ بسادگی می‌توان تحقیق کرد که جواب عمومی آن عبارت است از:

$$R=C_1r^n+C_2r^{-n-1}$$

برای پیوستگی R در $r=\circ$ لازم است $C_{\text{۲}}=\circ$ و لذا توابع مطلوب r عبارتند از:

$$(n=\circ,\text{۱},\text{۲},\ldots) \quad R_n(r)=r^n$$

بنابراین توابع $(n=\circ,\text{۱},\text{۲},\ldots)$ $u_n=r^n p_n(\cos\theta)$ در معادلهٔ لاپلاس و شرایط پیوستگی همراه آن صدق می‌کنند. به طور صوری، ترکیب خطی تعمیم یافتهٔ آنها

$$u(r,\theta)=\sum_{n=\circ}^{\infty} B_n r^n p_n(\cos\theta) \tag{۷}$$

یک جواب مسألهٔ مقدار مرزی است، هر گاه ضرایب B_n طوری باشند که $u(c,\theta)=F(\theta)$ یا

$$F(\theta)=\sum_{n=\circ}^{\infty} B_n c^n p_n(\cos\theta) \qquad (\circ<\theta<\pi) \tag{۸}$$

برای یافتن این اعداد ثابت، تابع جدید

$$f(x)=F(\cos^{-\text{۱}} x) \qquad (-\text{۱}<x<\text{۱}) \tag{۹}$$

را معرفی می‌کنیم که در آن مقادیر اصلی معکوس کسینوس گرفته شده‌اند. در این صورت اگر در رابطهٔ (۸) جایگذاریهای $A_n=B_n c^n$ و $\theta=\cos^{-\text{۱}} x$ را انجام دهیم، آن رابطه به رابطهٔ

$$f(x)=\sum_{n=\circ}^{\infty} A_n p_n(x) \qquad (-\text{۱}<x<\text{۱}) \tag{۱۰}$$

تبدیل می‌شود و بنابر قضیه بخش ۷۶ داریم:

$$A_n=\frac{\text{۲}n+\text{۱}}{\text{۲}}\int_{-\text{۱}}^{\text{۱}} f(x)p_n(x)\,dx \qquad (n=\circ,\text{۱},\text{۲},\ldots) \tag{۱۱}$$

فرض می‌کنیم که f در بازهٔ $-\text{۱}<x<\text{۱}$ قطعه‌ای هموار باشد، لذا بسط (۱۰) به ازای هر نقطهٔ x که f در آن پیوسته باشد برقرار است.

با توجه به تعریف (۹) تابع $f(x)$، با جایگذاری $x=\cos\theta$ در انتگرال (۱۱) می‌توان A_n را برحسب تابع اصلی $F(\theta)$ نوشت:

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} F(\theta)p_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta \qquad (n=0,1,2,\dots) \qquad (12$$

چون $B_n=A_n/c^n$ بنابراین اعداد ثابت لازم در عبارت (۷) بـه دست مـی‌آیند و جـواب صوری مسألهٔ دیریکله را می‌توان برحسب ضرایب (۱۲) به شکل زیر نوشت:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{r}{c}\right)^n p_n(\cos\theta) \qquad (r\le c) \qquad (13$$

توجه می‌کنیم تابع v ای که در ناحیهٔ نامحدود $r>c$ ، خارج سطح کروی $r=c$، همساز است، مـقادیر $F(\theta)$ را روی آن سـطح مـی‌گیرد و وقـتی $r\to\infty$ مـحدود است را مـی‌توان به روش مشابهی پیدا کرد. در اینجا در جواب $R=C_1r^n+C_2r^{-n-1}$ معادلهٔ (۳) باید $C_1=0$ تا وقتی $r\to\infty$ تـابع R مـحدود بـماند. و جـوابـهای مـعادلهٔ (۱) عـبارتند از $v_n=r^{-n-1}p_n(\cos\theta)$ $(n=0,1,2,\dots)$ بنابراین :

$$v(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}}\,p_n(\cos\theta) \qquad (r\ge c) \qquad (14$$

که در آن B_n این دفعه به ضرایب (۱۲) به وسیلهٔ رابطهٔ $A_n=B_n/c^{n+1}$ وابسته است. یعنی :

$$v(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} p_n(\cos\theta) \qquad (r\ge c) \qquad (15$$

۷۸ . دمای مانا در نیمکره

قاعدهٔ $r<1$ ، $\theta=\frac{\pi}{2}$ از نیمکرهٔ صلب $r\le 1$ ، $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ که قسمتی از آن در شکل ۶۷ نشان داده شده، عایق‌بندی شده است. شار گرما از طریق سطح نیمکروی به درون در مقادیر از قبل تعیین شدهٔ $F(\theta)$ نگه داشته می‌شود. به منظور مـانا بـودن دمـاها، آن مقادیر طوری هستند که میزان شار وارده از طریق سطح نیمکروی صفر است. یعنی F

در شرط زیر صدق می‌کند:

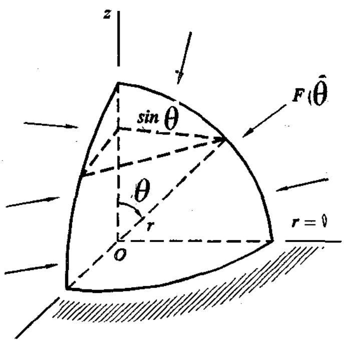
$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} F(\theta)\, ۲\pi \sin\theta\, d\theta = ۰$$

که بر حسبِ تابع

۱) $$f(x) = F(\cos^{-۱} x) \qquad (۰ < x < ۱)$$

می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

۲) $$\int_{۰}^{۱} f(x)\, dx = ۰$$



شکل ۶۷

اگر u نمایش دما به عنوان تابعی از r و θ باشد، آنگاه شرط عایق‌بندی شدن قاعده بنابر مسألهٔ ۱۳ بخش ۴ عبارت است از:

۳) $$u_\theta\left(r, \frac{\pi}{۲}\right) = ۰ \qquad (۰ < r < ۱)$$

مسألهٔ مقدار مرزی برای $u(r,\theta)$ مرکب است از معادلهٔ لاپلاس

۴) $$r\frac{\partial^۲}{\partial r^۲}(ru) + \frac{۱}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = ۰ \qquad (r < ۱ ,\ ۰ < \theta < \pi/۲)$$

شرط (۳) و شرط شار (بخش ۳ را ببینید)

$$ku_r(۱,\theta)=F(\theta) \qquad (۰<\theta<\pi/۲) \tag{۵}$$

که در آن k ضریب هدایت گرمایی است. فرض می‌کنیم تابع f که با ضابطهٔ (۱) تعریف شده روی بازهٔ $۰<x<۱$ قطعه‌ای هموار است. همچنین u باید در شرایط پیوستگی معمولی وقتی $۰\leq r<۱$ و $۰\leq\theta\leq\pi/۲$ صدق کند.

با نوشتن $u=R(r)\Theta(\theta)$ و جداکردن متغیرها در معادلات (۳) و (۴) شرایط زیر به دست می‌آیند:

$$r(rR)''-\lambda R=۰ \qquad (r<۱) \tag{۶}$$

که در آن R باید در بازهٔ $۰\leq r<۱$ پیوسته باشد و

$$\frac{۱}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+\lambda\Theta=۰ \quad , \quad \Theta'(\frac{\pi}{۲})=۰ \quad (۰<\Theta<\frac{\pi}{۲}) \tag{۷}$$

که در آن Θ و Θ' باید در بازهٔ $۰\leq\theta\leq\pi/۲$ پیوسته باشند.

جایگزینی $x=\cos\theta$ معادلات (۷) را به مسألهٔ استورم- لیوویل تکین مرکب از معادلهٔ لژاندر (بخش ۷۷ را ببینید)

$$\frac{d}{dx}[(۱-x^۲)\frac{d\Theta}{dx}]+\lambda\Theta=۰ \qquad (۰<x<۱)$$

و شرط اینکه

$$\frac{d\Theta}{dx}=۰ \qquad \text{هرگاه} \qquad x=۰$$

و

تبدیل می‌کند، که در آن Θ و $d\Theta/dx$ باید در بازهٔ $۰\leq x\leq۱$ پیوسته باشند. بنابر فرع بخش ۷۴ این مسألهٔ دارای مقادیر ویژهٔ $\lambda_n=۲n(۲n+۱)$ $(n=۰,۱,۲,...)$ و توابع ویژهٔ $\Theta_n=p_{۲n}(x)$ است، بنابراین $\Theta_n(\theta)=p_{۲n}(\cos\theta)$. جواب محدود متناظر برای معادلهٔ کوشی- اویلر (۶) عبارت است از $R_n=r^{۲n}$.

پس به طور صوری اگر ثابتهای B_n طوری باشند که شرط (۵) برقرار باشد،

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{2n} p_{2n}(\cos\theta)$$

برای آن شرط لازم است که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2kn B_n p_{2n}(x)=f(x) \qquad (0<x<1) \tag{8}$$

که در آن $x=\cos\theta$. این نمایش $f(x)$ در بازهٔ $0<x<1$ به صورت سری از چند جمله‌ایهای لژاندر از درجهٔ زوج (بخش ۷۶) است، هرگاه $2knB_n=A_{2n}$، که در آن

$$A_{2n}=(4n+1)\int_0^1 f(x)p_{2n}(x)\,dx \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{9}$$

و اگر f طوری باشد که شرط $A_0=0$ که دقیقاً همان شرط (۲) است، برقرار باشد. بدین ترتیب B_0 دلخواه باقی می‌ماند و

$$u(r,\theta)=B_0+\frac{1}{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}A_{2n}r^{2n}p_{2n}(\cos\theta) \qquad \left(r\le 1\ ,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right) \tag{10}$$

که در آن A_{2n} دارای مقادیر (۹) هستند.

ثابت B_0 عبارت است از دما در مبدأ $r=0$. جوابهای چنین مسائلی تنها با شرایط نویمن (بخش ۷) فقط تا مرحلهٔ ثابت جمعی دلخواه معین می‌شوند زیرا همهٔ شرایط مرزی فقط مقادیر مشتقات توابع همساز را از قبل تعیین می‌کنند.

مسائل

۱. فرض کنید u در سراسر ناحیه‌های $r<c$ و $r>c$ همساز باشد و وقتی $r\to\infty$، $u\to 0$ و روی سطح کروی $r=c$ داشته باشیم $u=1$. از نتایج حاصل در بخش ۷۷ نشان دهید که وقتی $r\le c$ داریم $u=1$ و وقتی $r\ge c$ داریم $u=c/r$.

۲. فرض کنید که به ازای هر ϕ، دماهای مانای $u(r,\theta)$ در کرهٔ صلب (توپر) $r\leq ۱$ طوری باشند که $u(۱,\theta)=F(\theta)$ که در آن:

$$F(\theta)=\begin{cases} ۱ & ۰<\theta<\frac{\pi}{۲} \quad \text{هرگاه} \\ ۰ & \frac{\pi}{۲}<\theta<\pi \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

برای آن دماها عبارت زیر را به دست آورید:

$$u(r,\theta)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}[p_{۲n}(۰)-p_{۲n+۲}(۰)]\,r^{۲n+۱}p_{۲n+۱}(\cos\theta)$$

۳. قاعدهٔ $r<۱$ ، $\theta=\pi/۲$ نیمکرهٔ توپر $r\leq ۱$ ، $۰\leq\theta\leq\pi/۲$ در دمای $u=۰$ نگهداری می‌شود، در حالی که روی سطح نیمکروی $r=۱$ ، $۰<\theta<\pi/۲$ داریم $u=۱$. عبارت زیر را برای دمای مانا در این جسم توپر به دست آورید.

$$u(r,\theta)=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}\left(\frac{۴n+۳}{۲n+۲}\right)\frac{(۲n)!}{۲^{۲n}(n!)^{۲}}\,r^{۲n+۱}p_{۲n+۱}(\cos\theta)$$

۴. قاعدهٔ $r<c$ ، $\theta=\pi/۲$ نیمکرهٔ توپر $r\leq c$ ، $۰\leq\theta\leq\pi/۲$ عایق‌بندی شده است.توزیع دما روی سطح نیمکروی عبارت است از $u=F(\theta)$. عبارت زیر را برای دمای مانا در این جسم توپر به دست آورید:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=۰}^{\infty}(۴n+۱)\left(\frac{r}{c}\right)^{۲n}p_{۲n}(\cos\theta)\int_{۰}^{۱}f(s)p_{۲n}(s)\,ds$$

که‌درآن $f(x)=F(\cos^{-۱}x)$ $(۰<x<۱)$. همچنین نشان دهید که $u(r,\theta)=۱$ هرگاه $F(\theta)=۱$.

۵. تابع u در ناحیهٔ نامحدود $r>c$ ، $۰\leq\phi\leq ۲\pi$ ، $۰\leq\theta\leq\pi/۲$ همساز و محدود است. همچنین در همهٔ نقاط روی سطح مرزی مسطح $r>c$ ، $\theta=\pi/۲$ داریم $u=۰$ و روی سطح مرزی نیمکروی $r=c$ ، $۰<\theta<\pi/۲$ داریم $u=F(\theta)$. عبارت زیر را بـه دست

آورید:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)\left(\frac{c}{r}\right)^{2n+2}p_{2n+1}(\cos\theta)\int_{0}^{1}f(s)p_{2n+1}(s)\,ds$$

که در آن $f(x)=F(\cos^{-1}x)$ $(0<x<1)$.

۶. شارگرمائی $ku_r(1,\theta)$ به داخل کرهٔ صلب در سطح $r=1$ آن ،تابع از قبل تعیین شدهٔ $F(\theta)$ است ، که در آن F طوری است که آهنگ زمانی* جریان گرما به داخل جسم صلب صفر است. بنابراین (بخش ۷۸ را ببینید)

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0$$

که در آن $f(x)=F(\cos^{-1}x)$ $(-1<x<1)$. با فرض اینکه در مرکز $r=0$ داشته باشیم $u=0$ ، عبارت زیر را برای دمای مانا در سراسر کرهٔ $0\leq r\leq 1$ به دست آورید:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n}\,r^{n}p_{n}(\cos\theta)\int_{-1}^{1}f(s)\,p_{n}(s)\,ds$$

۷. فرض کنید $u(r,\theta)$ نمایش دمای مانا در کرهٔ تو خالی $a\leq r\leq b$ باشد هرگاه:

$$u(a,\theta)=F(\theta)\quad,\quad u(b,\theta)=0\quad(0<\theta<\pi)$$

عبارت زیر را به دست آورید:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,\frac{b^{2n+1}-r^{2n+1}}{b^{2n+1}-a^{2n+1}}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}p_n(\cos\theta)$$

که در آن :

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{0}^{\pi}F(\theta)p_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\qquad(n=0,1,2,\ldots)$$

---

* net time rate of flow

۸. فرض کنید $u(x,t)$ نمایش دما در میلهٔ عایق‌بندی شده و همگن $-1 \le x \le 1$ در امتداد محور xها و ضریب هدایت گرمایی متناسب با $1-x^2$ باشد. معادلهٔ حرارت به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = b\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \qquad (b>0)$$

در اینجا b ثابت است زیرا فرض کردیم که حاصلضرب ثابتهای فیزیکی σ و δ که در بخش ۲ و در مسألهٔ ۸ بخش ۴ به کار رفت، ثابت است. توجه کنید که انتهاهای $x=\pm 1$ عایق‌بندی شده‌اند، زیرا رسانایی در آنجا صفر می‌شود. با فرض اینکه $u(x,0)=f(x)$ $(-1<x<1)$، عبارت زیر را به دست آورید:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\exp[-n(n+1)bt]\,p_n(x)\int_{-1}^{1}f(s)p_n(s)\,ds$$

۹. نشان دهید اگر در مسألهٔ ۸، $f(x)=x^2$ $(-1<x<1)$ آنگاه:

$$u(x,t)=\frac{1}{3}+\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\exp(-6bt)$$

۱۰. در سراسر نیمکرهٔ توپر $0\le r\le 1$، $0\le\theta\le\pi/2$ حرارت با یک آهنگ مانا و یکنواخت تولید و تمام سطح در دمای صفر نگهداشته می‌شود. بنابراین دمای مانا $u=u(r,\theta)$ در معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+q_0=0 \qquad \left(0<r<1\ ,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

و شرایط مرزی $u(1,\theta)=0$، $u(r,\pi/2)=0$ صدق می‌کند.
همچنین $u(r,\theta)$ در $r=0$ پیوسته است. بیان کنید چگونه با الهام گرفتن از مسألهٔ ۳ درصدد یافتن جوابی به شکل زیر برمی‌آییم

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(r)\,p_{2n+1}(\cos\theta)$$

و از روش تغییر پارامترها که ابتدا در بخش ۳۳ به کار رفت استفاده می‌کنیم. طی مراحل زیر جواب را بدین روش پیدا کنید:

الف) ملاحظه کنید که چگونه بیدرنگ از معادلهٔ (۶) بخش ۷۷ نتیجه می‌شود که:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}p_{2n+1}(\cos\theta)\right]=-(2n+1)(2n+2)p_{2n+1}(\cos\theta)$$

$$n=(0,1,2,\ldots)$$

سپس به کمک این اتحاد و بسط (۱۰) بخش ۷۶ مسألهٔ مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

$$r^2B_n''(r)+2rB_n'(r)-(2n+1)(2n+2)B_n(r)=-q_0A_{2n+1}r^2$$

$$B_n(1)=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

که در آن $A_{2n+1}=p_{2n}(0)-p_{2n+2}(0)$ و $B_n(r)$ باید در بازهٔ $0\leq r\leq 1$ پیوسته باشد.

ب) معادلهٔ دیفرانسیل قسمت (الف) را با اضافه کردن یک جواب خاص آن به جواب عمومی معادلهٔ مکمل به دست آورید (با مسألهٔ ۱۳ بخش ۳۸ مقایسه کنید). سپس با استفاده از شرایط لازم $B_n(r)$ که در قسمت (الف) بیان شد، جواب مسألهٔ مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی آنجا را کامل کنید.

بدین ترتیب به تابع دمای مطلوب برسید:

$$u(r,\theta)=\frac{q_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_{2n}(0)-p_{2n+2}(0)}{(2n-1)(n+2)}(r^2-r^{2n+1})\,p_{2n+1}(\cos\theta)$$

راهنمایی: ملاحظه کنید که معادلهٔ دیفرانسیل قسمت (الف) دارای جواب خاصی به شکل $B_n(r)=ar^2$ است که در آن a عددی ثابت است. همچنین توجه کنید که معادلهٔ مکمل در قسمت (ب) از نوع کوشی-اویلر است و آن را با روشی که در مسألهٔ ۳ بخش ۳۵ تشریح شد حل کنید.

۱۱. تعبیر فیزیکی از مسألهٔ مقدار مرزی زیر در مختصات کروی برای تابع همساز $u(r,\theta)$ ارائه دهید:

$$r\,\frac{\partial^{۲}}{\partial r^{۲}}(ru)+\frac{۱}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=۰\qquad(۱<r<b\ ,\ \theta_{۱}<\theta<\theta_{۲})$$

$$u(۱,\theta)=۰\qquad,\qquad u(b,\theta)=۰$$

$$u(r,\theta_{۱})=f(r)\qquad,\qquad u(r,\theta_{۲})=۰$$

که در آن $\pi>\theta_{۲}>\theta_{۱}>۰$. سپس با استفاده از توابع ویژهٔ نرمال شده‌ای که در مسألهٔ ۱۱ بخش ۴۵ پیدا کردیم و توابع p_α و q_α در مسأله ۹ بخش ۷۵ عبارت زیر را به دست آورید:

$$u(r,\theta)=\frac{۱}{\sqrt{r}}\sum_{n=۱}^{\infty}B_n\,\frac{F_n(\theta)}{F_n(\theta_{۱})}\,\sin(\alpha_n\ln r)$$

که در آن:

$$\alpha_n=\frac{n\pi}{\ln b}\qquad,\qquad B_n=\frac{۲}{\ln b}\int_{۱}^{b}\frac{f(r)}{\sqrt{r}}\sin(\alpha_n\ln r)\,dr$$

و

$$F_n(\theta)=p_{\alpha_n}(\cos\theta)\,q_{\alpha_n}(\cos\theta_{۲})-p_{\alpha_n}(\cos\theta_{۲})\,q_{\alpha_n}(\cos\theta)$$

فصل ۹

یکتایی
جوابها

در این فصل، به بررسی جوابهای انواع مشخصی از مسائل مقدار مرزی ، بخصوص بیشتر، به اثبات اینکه یک جواب مسألهٔ داده شده، تنها جواب ممکن است می‌پردازیم. در واقع امکان دارد که جوابهای چندگانه داشته باشیم، هرگاه در آن مسأله، پیوستگی یا کرانداری مناسب برای جواب و مشتقات آن خواسته نشود. این مطالب در مسألهٔ ۱۶، بخش ۵۸ نشان داده شده است.

قضیه بخش ۷۹ زیر به ما اجازه می‌دهد که همگرایی یکنواخت جوابهای به دست آمده به صورت سری را ثابت کنیم. همچنین این کار در تحقیق درستی آن جواب و اثبات یکتایی آن نیز مفید است. بقیه قضیه‌ها در آن فصل، شرایطی را می‌دهند که یک جواب تحت آن شرایط یکتاست. آنها فقط در مورد انواع خاصی از مسائل به کار می‌روند و کاربردهای آن بیشتر محدود می‌شوند، زیرا نیاز است که توابع درگیر در آن ، تا یک مرتبهٔ نسبتاً زیادی منظم باشند.

۷۹ . آزمون ابل برای همگرایی یکنواخت

اکنون بحثمان را با زمینهٔ مورد نیازی در بارهٔ همگرایی یکنواخت آغاز می‌کنیم.

فرض کنید $s_n(x)$ نمایش مجموع n جملهٔ اول سری از توابع $X_i(x)$ باشد که به مجموع $s(x)$ همگراست:

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \qquad , \qquad s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \tag{1}$$

فرض کنید که آن سری نسبت به x برای همهٔ مقادیر x در یک بازه، همگرای یکنواخت باشد. آنگاه (بخش ۲۲ را ببینید)، برای هر عدد مثبت ε، عدد صحیح مثبت n_ε مستقل از x وجود دارد که برای هر x در آن بازه:

$$\left| s(x) - s_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{هرگاه} \quad n > n_\varepsilon$$

فرض کنید j نمایش یک عدد صحیح مثبت باشد. آنگاه:

$$\left| s_{n+j} - s_n \right| = \left| s_{n+j} - s + s - s_n \right| \le \left| s - s_{n+j} \right| + \left| s - s_n \right| < \varepsilon$$

مشروط بر اینکه $n > n_\varepsilon$. بنابراین یک شرط لازم همگرایی یکنواخت آن سری این است که، برای همهٔ اعداد صحیح و مثبت j،

$$\left| s_{n+j}(x) - s_n(x) \right| < \varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad n > n_\varepsilon \tag{2}$$

شرط (۲) همچنین برای همگرایی آن سری برای هر x ثابت یک شرط کافی است، حتی اگر n_ε مستقل از x نباشد و این شرط به عنوان محک کوشی شناخته می‌شود. بنابراین نتیجه می‌دهد که مجموع $s(x)$ موجود است. پس برای هر n و x ثابت و برای هر ε داده شده، عدد صحیح مثبت $j_\varepsilon(x)$ وجود دارد که:

$$\left| s(x) - s_{n+j}(x) \right| < \varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad j > j_\varepsilon(x) \tag{3}$$

برای اینکه نشان دهیم شرط (۲) برای همگرایی یکنواخت کافی است، فرض می‌کنیم که n نمایش یک عدد صحیح ثابت بزرگتر از n_ε باشد که در آن n_ε با عدد ε ای متناظر است که شرط (۲) برای همهٔ مقادیر x برقرار است. بنابراین ، برای هر x ثابت شرط (۳) برقرار است هرگاه $j>j_\varepsilon(x)$ ؛ و چون :

$$\left| s-s_n \right| = \left| s-s_{n+j}+s_{n+j}-s_n \right| \leq \left| s-s_{n+j} \right| + \left| s_{n+j}-s_n \right|$$

از شرایط (۳) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$\left| s(x)-s_n(x) \right| < ۲\varepsilon \tag{۴}$$

هرگاه $j>j_\varepsilon(x)$ و $n>n_\varepsilon$. بنابراین ، برای $n>n_\varepsilon$ و برای همهٔ مقادیر x ، مقدار $|s(x)-s_n(x)|$ که مستقل از j است بدلخواه کوچک است. اکنون با توجه به اینکه n_ε مستقل از x است، همگرایی یکنواخت نتیجه می‌شود.

توجه کنید که x در اینجا ممکن است نمایش عضوهای $(x_۱, x_۲, \ldots, x_N)$ از یک مجموعهٔ در فضای N بعدی باشد. بنابراین همگرایی یکنواخت در این صورت نسبت به همهٔ N متغیر $x_۱, \ldots, x_N$ خواهد بود.

اکنون یک آزمونی برای همگرایی یکنواخت سری نامتناهی به دست می‌آوریم که جملاتش حاصلضرب انواع مشخصی از توابع هستند. کاربرد آن در بررسی درستی جوابهای صوری مسائل مقدار مرزی، در بخش ۲۸ نشان داده شده این آزمون به آزمون آبل معروف است و از توابع یک دنبالهٔ $T_i(t)$ $(i=۱,۲,\ldots)$ استفاده می‌کند که برای همهٔ مقادیر t در یک بازه به طور یکنواخت کراندار است. یعنی ، ثابت M مستقل از i وجود دارد که برای همهٔ مقادیر t در آن بازه

$$\left| T_i(t) \right| < M \qquad (i=۱,۲,\ldots) \tag{۵}$$

بعلاوه ، این دنباله نسبت به i یکنواست. بنابراین، برای هر t در آن بازه

$$T_{i+۱}(t) \leq T_i(t) \qquad (i=۱,۲,\ldots) \tag{۶}$$

یا

(۷ $$T_{i+1}(t) \geq T_i(t) \qquad (i=1,2,\ldots)$$

این آزمون را به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد وقتی جملات یک سری همگرای یکنواخت در توابع $T_i(t)$ از نوعی که گفته شد ضرب شود، سری جدید نیز همگرای یکنواخت است.

قضیه . سری

(۸ $$\sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)\, T_i(t)$$

نسبت به دو متغیر x و t با هم در یک ناحیهٔ R از صفحهٔ xt همگرای یکنواخت است، اگر سری

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)$$

نسبت به همهٔ xهایی که (x,t) در R قرار دارد، همگرای یکنواخت باشد و اگر برای همهٔ t هایی که (x,t) در R قرار دارند، توابع $T_i(t)$ نسبت به i $(i=1,2,\ldots)$ به طور یکنواخت کراندار و یکنوا باشد.

برای شروع اثبات ، فرض می‌کنیم که S_n نمایش مجموعهای جزئی سری (۸) باشد:

$$S_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)\, T_i(t)$$

آنطور که در بالا نشان داده شد، همگرایی یکنواخت آن سری اثبات خواهد شد، اگر ثابت کنیم که برای هر عدد مثبت ε عدد صحیح و مثبت n_ε مستقل از x و t نظیر می‌شود که اگر $n>n_\varepsilon$:

برای همهٔ اعداد صحیح $m=n+1\ ,\ n+2,\ldots$ و برای همهٔ نقاط (x,t) در R، داشته باشیم

$$\left| S_m(x,t) - S_n(x,t) \right| < \varepsilon$$

مجموع جزیی زیر را می‌نویسیم:

$$s_n(x) = X_1(x) + X_2(x) + \ldots + X_n(x)$$

در این صورت، برای هر جفت عدد صحیح m و n $(m>n)$، S_m-S_n را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X_{n+1}T_{n+1}+X_{n+2}T_{n+2}+\dots+X_mT_m=$$

$$=(s_{n+1}-s_n)T_{n+1}+(s_{n+2}-s_{n+1})T_{n+2}+\dots+(s_m-s_{m-1})T_m$$

$$=(s_{n+1}-s_n)T_{n+1}+(s_{n+2}-s_n)T_{n+2}-(s_{n+1}-s_n)T_{n+2}$$

$$+\dots+(s_m-s_n)T_m-(s_{m-1}-s_n)T_m$$

با جفت کردن جملات بطور یک در میان داریم:

$$S_m-S_n=(s_{n+1}-s_n)(T_{n+1}-T_{n+2})+(s_{n+2}-s_n)(T_{n+2}-T_{n+3}) \qquad (9$$

$$+\dots+(s_{m-1}-s_n)(T_{m-1}-T_m)+(s_m-s_n)T_m$$

اکنون فرض کنید که توابع T_i نسبت به i غیر صعودی باشند، بنابراین در شرط (۶) و همچنین در شرط کرانداری یکنواخت (۵)، صدق می‌کنند. پس عاملهای $T_{n+1}-T_{n+2}$، $T_{n+2}-T_{n+3}$، و غیره، در معادلهٔ (۹) نامنفی‌اند و $|T_i(x)|<M$.

چون سری با جملات $X_i(x)$ همگرای یکنواخت است پس برای هر عدد مثبت ε داده شده، یک عدد صحیح n_ε مستقل از x وجود دارد که برای همهٔ اعداد صحیح مثبت j

$$\left|s_{n+j}(x)-s_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{هرگاه} \quad n>n_\varepsilon$$

در این صورت اگر $n>n_\varepsilon$ و $m>n$، از معادلهٔ (۹) نتیجه می‌شود که:

$$|S_m-S_n|<\frac{\varepsilon}{3M}\left[(T_{n+1}-T_{n+2})+(T_{n+2}-T_{n+3})+\dots+|T_m|\right]$$

$$=\frac{\varepsilon}{3M}\left(T_{n+1}-T_m+|T_m|\right)\le\frac{\varepsilon}{3M}\left(|T_{n+1}|+2|T_m|\right)$$

بنابراین هرگاه $m>n>n_\varepsilon$

$$\left|S_m(x,t)-S_n(x,t)\right|<\varepsilon$$

و لذا همگرایی یکنواخت سری (۸) ثابت شد. وقتی توابع T_i نسبت به i غیر نزولی باشند اثبات شبیه بالاست.

هرگاه x را ثابت بگیریم، سری با جملات X_i یک سری از مقادیر ثابت است و تنها نیاز است که آن سری همگرا باشد. آنگاه قضیه فوق نشان می‌دهد که وقتی T_i ها کراندار و یکنوا هستند سری حاصل از جملات $X_iT_i(t)$ نسبت به t همگرای یکنواخت است.

با مشاهده اینکه اثبات ما به همگرایی یکنواخت سری با جملات X_i و ماهیت یکنوایی کراندار توابع T_i متکی است، تعمیمهای این قضیه به حالاتی که در آن X_iها توابعی از x و t هستند یا X_i و T_i هر دو توابعی از چند متغیرند، بدیهی می‌شوند.

۸۰. یکتایی جوابهای معادلهٔ گرما

فرض کنید D نمایش دامنه متشکل از همهٔ نقاط درون یک سطح بستهٔ S باشد و $\overline{D}$ بستار آن دامنه باشد، که از همهٔ نقاط داخل D و نقاط روی S تشکیل می‌شود. همواره فرض می‌کنیم که سطح بستهٔ S قطعه‌ای هموار باشد. یعنی سطحی پیوسته و متشکل از یک تعداد متناهی از قسمتهایی است که روی هرکدام از آنها، بردار نرمال واحد به طرف خارج وجود دارد که از نقطه به نقطه به طور پیوسته تغییر می‌کند. بنابراین اگر U تابعی است از z, y, x که در $\overline{D}$ پیوسته و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن هم در $\overline{D}$ پیوسته باشند، بنا به حالتی خاص از اتحاد گرین که در اینجا به آن نیاز خواهیم داشت، داریم:

$$\iint_S U\frac{dU}{dn}\,dA = \iiint_D \left(U\nabla^2 U + U_x^2 + U_y^2 + U_z^2\right) dV \tag{۱}$$

در اینجا dA جزء سطح S است، dV نمایش $dx\,dy\,dz$ است، و $\dfrac{dU}{dn}$ مشتق در جهت بردار نرمال واحد به طرف خارج بر S است.[۱]

---

۱. اتحاد (۱) با اعمال قضیه واگرایی گاوس روی میدان برداری $U \, grad \, U$ به دست می‌آید. کتاب *Taylor and Mann* را (۴۹۲-۴۹۳/۱۹۸۳) که در کتابنامه آمده است، ملاحظه کنید.

یک جسم توپر همگن در نظر بگیرید که درون آن دامنهٔ D باشد و $u(x,y,z,t)$ نمایش دماهای آن در زمان t است. یک مسألهٔ نسبتاً کلی در هدایت گرما به صورت زیر است:

$$u_t=k\nabla^2 u+q(x,y,z,t) \quad [t>0\ ,\ D \text{ در } (x,y,z)] \tag{۲}$$

$$u(x,y,z,0)=f(x,y,z) \quad [\overline{D} \text{ در } (x,y,z)] \tag{۳}$$

$$u=g(x,y,z,t) \quad [t\geq 0\ ,\ S \text{ روی } (x,y,z)] \tag{۴}$$

این مسألهٔ تعیین دماهای جسمی است با دماهای اولیهٔ $f(x,y,z)$ و دماهای سطحی $g(x,y,z,t)$ که می‌تواند گرما درون آن به طور پیوسته با آهنگی متناسب با $q(x,y,z,t)$ در هر واحد حجم تولید شود.

فرض کنید که آن مسأله دارای دو جواب :

$$u=u_1(x,y,z,t) \quad , \quad u=u_2(x,y,z,t)$$

باشد که هرگاه $t\geq 0$، هر دو جواب u_1 و u_2 توابعی پیوسته در ناحیهٔ بستهٔ $\overline{D}$، هستند، در حالی که اگر $t>0$ ، مشتقات مرتبه اول آن نسبت به t و اول و دوم آن نسبت به x, y, z در $\overline{D}$ پیوسته‌اند. چون u_1 و u_2 در شرایط خطی (۲) و (۳) و (۴) صدق می‌کنند، تفاضل آنها

$$U=(x,y,z,t)=u_1(x,y,z,t)-u_2(x,y,z,t)$$

در مسألهٔ همگن زیر صدق می‌کند:

$$U_t=k\nabla^2 U \quad [t>0\ ,\ D \text{ در } (x,y,z)] \tag{۵}$$

$$U(x,y,z,0)=0 \quad [\overline{D} \text{ در } (x,y,z)] \tag{۶}$$

$$U=0 \quad [t\geq 0\ ,\ S \text{ روی } (x,y,z)] \tag{۷}$$

بعلاوه U و مشتقات آن همان خواص پیوستگی را دارند که در بالا برای u_1 و u_2 فرض شد. اکنون نشان خواهیم داد که در D ، $U=0$ هر گاه $t>0$ ، بنابراین دو جواب u_1 , u_2

یکی هستند. یعنی اگر جواب آن مسأله لازم است که در شرایط پیوستگی ذکر شده، صدق کند آن مسأله مقدار مرزی برحسب u بیشتر از یک جواب نمی‌تواند داشته باشد.

پیوستگی U نسبت به x, y, z, t با همدیگر در ناحیهٔ $\overline{D}$ وقتی $t \geq ۰$، نتیجه می‌دهد که انتگرال

$$I(t) = \frac{۱}{۲} \iiint_D [U(x, y, z, t)]^۲ dV \qquad (۸$$

هرگاه $t \geq ۰$ تابعی پیوسته از t است، و طبق معادلهٔ (۶) $I(۰) = ۰$. همچنین نظر به پیوستگی U_t وقتی $t > ۰$ ، می‌توانیم از معادلهٔ (۵) استفاده کرده، بنویسیم:

$$I'(t) = \iiint_D UU_t \, dV = k \iiint_D U \nabla^۲ U dV \qquad (t > ۰)$$

به دلیل پیوستگی مشتقات U وقتی $t > ۰$، اتحاد (۱) را در مورد انتگرال آخری در اینجا به کار می‌گیریم. بنابراین هرگاه $t > ۰$:

$$\iiint_D U \nabla^۲ U dV = \iint_S U \frac{du}{dn} dA - \iiint_D (U_x^۲ + U_y^۲ + U_z^۲) \, dV \qquad (۹$$

امّا روی S داریم $U = ۰$ و $k > ۰$؛ در نتیجه:

$$I'(t) = -k \iiint_D (U_x^۲ + U_y^۲ + U_z^۲) \, dV \leq ۰$$

قضیه میانگین برای مشتقها در مورد $I(t)$ به کار می‌رود. یعنی، برای هر t مثبت، یک عدد $t_۱$ $(۰ < t_۱ < t)$ وجود دارد که:

$$I(t) - I(۰) = tI'(t_۱)$$

و چون $I(۰) = ۰$ و $I'(t_۱) \leq ۰$، نتیجه می‌شود که $I(t) \leq ۰$. اما، تعریف (۸) آن انتگرال نشان می‌دهد که $I(t) \geq ۰$.

بنابراین:

$$I(t) = ۰ \qquad (t \geq ۰)$$

و لذا، انتگران نامنفی $U^۲$ نمی‌تواند در هیچ نقطهٔ D مقدار مثبت داشته باشد. زیرا اگر چنین بود، پیوستگی $U^۲$ ایجاب می‌کرد که $U^۲$ در سراسر یک همسایگی از آن نقطه

مثبت باشد و نتیجه می‌شد که $I(t) > 0$. در نتیجه،

$$U(x, y, z, t) = 0 \qquad [t \geq 0\ ,\ \overline{D} \text{ در } (x, y, z)]$$

و به قضیه زیر برای یکتایی می‌رسیم:

قضیه ۱ . فرض کنید u در **شرایط منظم بودن** زیر صدق کند:

الف) تابعی است پیوسته از متغیرهای t, z, y, x با همدیگر، هرگاه نقطه (x, y, z) داخل ناحیهٔ بستهٔ $\overline{D}$ باشد و $t \geq 0$؛

ب) مشتقهای u که در معادلهٔ گرمای (۲) ظاهر می‌شوند، به همین صورت پیوسته‌اند، هرگاه $t > 0$.
آنگاه اگر u یک جواب از مسألهٔ مقدار مرزی (۲) ـ (۴) باشد، تنها جوابی است که در شرایط (الف) و (ب) صدق می‌کند.

هرگاه علاوه براینکه u باید در آن معادلهٔ گرما و شرایط مرزی صدق کند، شرایط (الف) و (ب) قضیه ۱ را اضافه کنیم، مسألهٔ مقدار مرزی ما به طور کامل بیان خواهد شد، مشروط بر اینکه جوابی داشته باشد؛ با عنایت به اینکه آن جواب، تنها جواب ممکن خواهد بود.

شرط پیوستگی u در $\overline{D}$ هرگاه $t=0$ ، مفید بودن آن قضیه را محدود می‌کند. واضح است که اگر f تابع دمای اولیهٔ در شرط (۳) در سراسر $\overline{D}$ پیوسته نباشد یا اگر در بعضی از نقاط روی S مقدار اولیهٔ $g(x, y, z, 0)$ از دمای سطحی داده شده با مقدار $f(x, y, z)$ متفاوت باشد، شرط مذکور برقرار نیست. در بعضی از حالات (می‌توان شرط پیوستگی در $t=0$ را برداشت.)

اثبات قضیهٔ ۱ لازم داشت که انتگرال

$$\iint_S U \frac{dU}{dn}\, dA$$

در معادلهٔ (۹) صفر شود یا مقداری منفی داشته باشد.این‌انتگرال صفر است زیرا روی S ، $U=0$. اما هرگز مثبت نیست اگر شرط (۴) با شرط مرزی زیر جایگزین شود:

$$\frac{du}{dn} + hu = g(x, y, z, t) \qquad [t > 0\ ،S \text{ روی } (x, y, z)] \tag{۱۰}$$

که در آن $h\geq \circ$. زیرا در این حالت روی S ، $\frac{dU}{dn}=-hU$ ؛ , $\frac{UdU}{dn}\leq \circ$. بنابراین ، قضیه بالا می‌تواند به صورت زیر اصلاح شود:

قضیه ۲. نتیجهٔ قضیهٔ ۱ صحیح است اگر شرط مرزی (۴) با شرط (۱۰) جایگزین شود، یا اگر شرط (۴) روی قسمتی از سطح S و شرط (۱۰) روی بقیهٔ سطح S برقرار باشد.

مثال. در مسأله توزیع دما داخل یک قطعه که وجه‌های $x=\circ$ و $x=c$ آن عایق‌بندی شده و دماهای اولیهٔ آن $f(x)$ است (بخش ۲۷ و ۲۸)، بنویسید $c=\pi$ و فرض کنید در بازهٔ $\circ\leq x\leq\pi$ تابع f پیوسته و تابع f' قطعه‌ای پیوسته‌باشد. آنگاه سری فوریهٔ کسینوسی تابع f روی آن بازه به $f(x)$ همگراست (بخش ۲۲). فرض کنید $u(x,t)$ نمایش مجموع سری

$$\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty} a_n e^{-n^۲kt}\cos nx \qquad (\circ\leq x\leq\pi\ ,\ t\geq\circ) \qquad (۱۱)$$

باشد که به عنوان یک جواب صوری آن مسأله به دست آمده است، $a_\circ$ و $a_n\,(n=۱,۲,...)$ ضرائب سری کسینوس فوریهٔ f هستند.

همانگونه که در بخش ۲۷ ، اشاره شد، این مسأله دما برای یک قطعه ، همان مسأله دمای مربوط به یک میله با سطح مقطع یک شکل است که قاعده‌های آن در صفحات $x=\circ$ و $x=\pi$ و سطح جانبی آن موازی محور xها ، عایق‌بندی شده‌اند $(\frac{du}{dn}=\circ)$. فرض کنید دامنهٔ D متشکل از نقاط درون آن میله باشد.

از آزمون آبل (بخش ۷۹) می‌بینیم که سری (۱۱) نسبت به t, x با هم در ناحیهٔ $\circ\leq x\leq\pi$ و $t\geq\circ$ از صفحهٔ xt همگرای یکنواخت است؛ بنابراین u در آنجا پیوسته است. اگر از سری (۱۱) نسبت به x یا t هر چند بار جمله به جمله مشتق بگیریم ، سری حاصل بر طبق آزمون $M-$ وایرشتراس (بخش ۲۲) همگرای یکنواخت است، هرگاه $t\geq t_\circ$، که در آن $t_\circ$ یک عدد مثبت است. در نتیجه ، اکنون می‌دانیم که u در همهٔ معادلات آن مسألهٔ مقدار مرزی صدق می‌کند (با بخش ۲۸ مقایسه کنید) و همچنین اینکه u_{xx}, u_x, u_t در ناحیهٔ $\circ\leq x\leq\pi$ و $t>\circ$ توابعی پیوسته‌اند. بنابراین ، u در شرایط منظم بودن (الف) و (ب) مزبور در قضیه ۱

صدق می‌کند و بنا به قضیه ۲ مجموع $u(x,t)$ از سری (۱۱) تنها جوابی است که در همهٔ آن شرایط صدق می‌کند.

۸۱. جوابهای معادلهٔ لاپلاس یا پواسن

فرض کنید U یک تابع همساز در یک دامنهٔ D از فضای سه بعدی باشد که توسط یک رویهٔ بستهٔ پیوستهٔ S محدود شده که قطعه‌ای هموار است. همچنین فرض کنید که U و مشتقات جزیی مرتبه اول آن در بستار $\overline{D}$ آن دامنه پیوسته باشند.در این صورت، چون:

$$\nabla^{۲} U(x,y,z) = ۰ \qquad [(x,y,z) \text{ در } D] \tag{۱}$$

اتحاد گرین (۱)، بخش ۸۰ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\iint_S U \frac{dU}{dn} dA = \iiint_D (U_x^{۲} + U_y^{۲} + U_z^{۲})\, dV \tag{۲}$$

این معادله برای تابع U برقرار است، حتی با وجودی که شرط پیوستگی مشتقهای دوم فقط در D، و نه در ناحیهٔ بستهٔ $\overline{D}$، خواسته شده است. بدون هیچ مشکلی می‌توان ثابت کرد که تعدیل شرایط معمول در قضیه واگرایی که از آن اتحاد گرین نتیجه می‌شود، امکان پذیر است، زیرا $\nabla^{۲} U = ۰$.[۱]

فرض کنید در همهٔ نقاط روی سطح S، $U = ۰$. در این صورت انتگرال اول در معادلهٔ (۲)، و در نتیجه انتگرال دوم در آن معادله، صفر می‌شود. امّا انتگران دومی در $\overline{D}$ نامنفی و پیوسته است. لذا در سراسر $\overline{D}$ باید صفر باشد؛ یعنی:

$$U_x = U_y = U_z = ۰ \qquad [(x,y,z) \text{ در } \overline{D}] \tag{۳}$$

در نتیجه، $U(x,y,z)$ ثابت اما روی S مقدار آن صفر و در $\overline{D}$ پیوسته است و بنابراین در سراسر $\overline{D}$، $U = ۰$.

فرض کنید به جای U، $\dfrac{dU}{dn}$ روی S صفر باشد؛ یا برای کلی‌تر کردن آن شرط،

---

۱. کتاب کِلوگ (صفحهٔ ۱۹۵۳/۱۱۹) را که در کتابنامه آمده است، ببینید.

فرض کنید که:

$$\frac{dU}{dn}+hU=0 \quad [S \text{ روی } (x,y,z)] \tag{۴}$$

که در آن $h\geq 0$ و h یک ثابت یا تابعی است از z,y,x. آنگاه روی S،

$$U\frac{dU}{dn}=-hU^2\leq 0$$

بنابراین اولین انتگرال در معادلهٔ (۲) کوچکتر یا مساوی صفر است. امّا انتگرال دوم بزرگتر یا مساوی صفر است. بنابراین باید صفر باشد. می‌بینیم که مجدداً شرایط (۳) نتیجه می‌شوند. پس U در $\overline{D}$ ثابت است. اگر U روی قسمتی از S صفر باشد و روی بقیهٔ آن در شرط (۴) صدق کند، بحث ما هنوز نشان می‌دهد که U در $\overline{D}$ ثابت است. در این حالت، ثابت مذکور باید صفر باشد.

فرض کنید u نمایش تابعی باشد که خود و مشتقات جزیی مرتبه اول آن در $\overline{D}$ پیوسته هستند. فرض کنید که آن تابع همچنین مشتقات پیوستهٔ مرتبه دوم در D دارد و در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$\nabla^2u(x,y,z)=f(x,y,z) \quad [D \text{ در } (x,y,z)] \tag{۵}$$

$$p\frac{du}{dn}+hu=g \quad [S \text{ روی } (x,y,z)] \tag{۶}$$

در اینجا g,h,p,f ثابتها یا توابع داده شده‌از z,y,x هستند. فرض می‌کنیم که $p\geq 0$ و $h\geq 0$.

معادلهٔ (۵) به معادلهٔ پواسن معروف است و تعمیمی است از معادلهٔ لاپلاس که هرگاه $f(x,y,z)$ در سراسر D متحد با صفر باشد، حاصل می‌شود. با آن معادله در فصلهای ۱ و ۴ روبرو شدیم. شرط مرزی (۶) شامل حالات خاص و مهم است. وقتی روی S یا قسمتی از S، $p=0$، مقدار u در آنجا داده می‌شود. وقتی $h=0$، مقدار $\frac{du}{dn}$ معین می‌شود. البته p و h نباید همزمان صفر باشند.

اگر $u=u_۱(x, y, z)$ و $u=u_۲(x, y, z)$ دو جواب این مسأله باشند، تفاضل آنها

$$U(x ,y ,z) = u_۱(x ,y ,z) - u_۲(x ,y ,z)$$

داخل D در معادله لاپلاس و روی S در شرط زیر صدق می‌کند

$$p\frac{dU}{dn}+hU=۰$$

علاوه بر این، U در شرایط منظم بودن مورد نیاز برای $u_۱$ و $u_۲$ صدق می‌کند. پس آن تابع در D همساز است، و U و مشتقات مرتبهٔ اول آن در $\overline{D}$ پیوسته‌اند. از نتایج به دست آمده در بالا برای توابع همساز، نتیجه می‌شود که U باید در سراسر $\overline{D}$ ثابت باشد. بنابراین روی S، $\frac{dU}{dn}=۰$. اگر روی S در بعضی نقاط $h\neq ۰$، آنگاه U در آنجا صفر می‌شود و در سراسر $\overline{D}$، $U=۰$. زیرا تابع همساز U روی سطح بستهٔ S صفر می‌شود و بدین ترتیب نمی‌تواند مقادیری غیر از صفر درون S داشته باشد.

تاکنون قضیه یکتایی زیر را برای مسائل الکترواستاتیک یا پتانسیل ثقلی، دماهای مانا و مسائل مقدار مرزی دیگر که معادلهٔ لاپلاس یا پواسن دارند، ثابت کرده‌ایم.

قضیه. فرض کنید $u(x, y, z)$ در شرایط منظم بودن در یک دامنهٔ D که توسط یک سطح بستهٔ S محدود شده، به شرح زیر صدق کنند: (الف) آن و مشتقات مرتبه اول آن در $\overline{D}$ پیوسته‌اند؛ (ب) مشتقات مرتبه دوم آن در D پیوسته‌اند: آنگاه، اگر u یک جواب از مسألهٔ مقدار مرزی (۵) - (۶) باشد، به جز احتمالاً برای $u+C$ که در آن C یک ثابت دلخواه است، آن تنها جوابی است که در شرایط (الف) و (ب) صدق می‌کند. این مقدار ثابت C باید صفر باشد و بنابراین جواب یکتاست، مگر اینکه در هر نقطه روی S، $h=۰$.

می‌توان نشان داد که این قضیه وقتی هم که D دامنهٔ نامحدود خارج سطح بستهٔ S باشد کاربرد دارد، مشروط بر اینکه u در این شرط اضافی صدق کند که قدر مطلق ru و $r^۲u_{xx}$ و $r^۲u_{yy}$ و $r^۲u_{zz}$ برای همهٔ مقادیر r بزرگتر از یک عدد ثابت کراندار باشند. در اینجا r فاصلهٔ نقطهٔ (x, y, z) تا مبدأ است.[۱] در این صورت چون وقتی $r\to\infty$، u

۱. کتاب کِلوگ (۱۹۵۳) را که قبلاً در این بخش به آن اشاره کردیم، ببینید.

صفر می‌شود. ثابت C صفر و جواب یکتاست. امّا توجه کنید که S یک سطح بسته است، بنابراین تعمیم فوق از آن قضیه ، به عنوان مثال، در مورد دامنه‌های نامحدود بین دو صفحه یا داخل یک استوانه کاربرد ندارد.

شرط (الف) در آن قضیه شرط سختی است ، زیرا لازم دارد که u و مشتقات مرتبه اول آن روی سطح S پیوسته باشند. برای مسائلی که در آن روی S ، $p=0$ ، بنابراین u روی تمام مرز از پیش تعیین شده، و اگر مشتقات آن در D پیوسته باشند، می‌توانیم شرط فوق را به این صورت خفیف کنیم که فقط پیوستگی خود u در $\overline{D}$ لازم باشد. این مستقیماً از یک نتیجه اساسی در نظریه پتانسیل نتیجه می‌شود: اگر یک تابعی به غیر از یک ثابت در D همساز و در $\overline{D}$ پیوسته باشد، آنگاه مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم آن در نقاطی روی S و نه در داخل D گرفته می‌شوند.[۱]

مثال. برای اینکه استفادهٔ آن قضیه را نشان دهیم، مسألهٔ مثال ۱ بخش ۳۴ را در نظر می‌گیریم که هدف آن تعیین دماهای مانای $u(x,y)$ در یک ورق مستطیلی است که دمای سه لبهٔ آن صفر و دمای لبهٔ چهارم آن توسط یک توزیع دمای داده شده، مشخص می‌شود. وجوه آن ورق عایق‌بندی شده‌اند. برای سهولت، فرض خواهیم کرد که آن ورقه مربع به طول π باشد. مادامی که روی وجوه آن $\dfrac{du}{dn}=0$ باشد، ضخامت ورق در این مسأله تأثیری ندارد.

دامنهٔ D درون ناحیهٔ متناهی است که توسط صفحات $x=0$ ، $x=\pi$ ، $y=0$ ، $y=\pi$ ، $z=z_1$ ، $z=z_2$ محدود شده، که در آن z_1 ، z_2 ثابت هستند. آنگاه S مرز آن دامنه است. تابع مطلوب u در D همساز است. آن روی سه قسمت $x=0$ ، $x=\pi$ ، $y=\pi$ از S صفر است؛ و روی قسمت $y=0$ آن $u=f(x)$. همچنین روی قسمتهای $z=z_1$ ، $z=z_2$، $u_z=0$.

---

۱. به طور فیزیکی آن نتیجه واضح به نظر می‌رسد، زیرا بیان می‌کند که دماهای مانای جسمی توپر که داخل آن گرما تولید نمی‌شود ، نمی‌تواند مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم درون آن داشته باشد.برای یک اثبات در سه بعد ،کتاب کِلوگ (۱۹۵۳) را که قبلاً دراین بخش ذکر شد، و برای دو بعدی کتاب مؤلفان (بخش۴۲ ، ۱۹۹۰) را که آن هم در کتابنامه آمده است ببینید.

بنابراین اگر u و مشتقات مرتبه اول آن در $\overline{D}$ پیوسته باشند،قضیه مزبور به کار می‌رود.

ابتدا ، فرض کنید که u مستقل از z باشد. آنگاه :

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0 \qquad (0<x<\pi \ , \ 0<y<\pi) \tag{۷}$$

$$u(0,y)=u(\pi,y)=0 \qquad (0\le y\le \pi) \tag{۸}$$

$$u(x,0)=f(x) \quad , \quad u(x,\pi)=0 \qquad (0\le x\le \pi) \tag{۹}$$

جواب صوری به دست آمده در بخش ۳۴ به صورت زیر در می‌آید:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh n(\pi-y)}{\sinh n\pi}\sin nx \tag{۱۰}$$

که در آن b_n ضرائب مربوط به سری سینوسی فوریهٔ تابع f روی بازهٔ $0<x<\pi$ هستند.

برای اینکه نشان دهیم تابع (۱۰) در شرایط منظم بودن صدق می‌کند؛ اجازه دهید فرض کنیم که f و f' پیوسته‌اند و f'' قطعه‌ای پیوسته و $f(0)=f(\pi)=0$. آنگاه نتایج به دست آمده در بخشهای ۲۲ و ۲۳ نشان می‌دهند که:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad , \quad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx \tag{۱۱}$$

و اینکه هر دوی آن سریها روی بازهٔ $0\le x\le\pi$ همگرای یکنواخت هستند. سری دوم که با مشتق‌گیری از سری اول به دست آمده، سری کسینوسی فوریهٔ f' روی $0<x<\pi$ است؛ و چون f' پیوسته و f'' قطعه‌ای پیوسته است ، نه تنها آن سری نه تنها همگرای یکنواخت است، بلکه سری قدر مطلق ضرائب آن $|nb_n|$ نیز همگراست. بنابراین از آزمون $M-$ وایرشتراس (بخش ۲۲) نتیجه می‌شود که سری زیر نیز نسبت به x همگرای یکنواخت است:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n \sin nx \qquad (0\le x\le \pi) \tag{۱۲}$$

حال نشان می‌دهیم که برای هر y ثابت، دنبالهٔ توابع

$$\frac{\sinh n(\pi-y)}{\sinh n\pi} \qquad (0 \leq y \leq \pi) \tag{۱۳}$$

که در سری (۱۰) ظاهر می‌شوند، با افزایش n یکنوا و غیر صعودی است. این واضح است، هرگاه $y=0$, $y=\pi$. آن همچنین برای $0<y<\pi$ درست است مشروط بر اینکه تابع

$$T(t)=\frac{\sinh \beta t}{\sinh \alpha t} \qquad (t>0 \ , \ \alpha>\beta>0)$$

با افزایش t، کاهش یابد. برای اینکه این مطلب را ببینیم می‌نویسیم:

$$T'(t)\sinh^2 \alpha t = \beta \sinh \alpha t \cosh \beta t - \alpha \sinh \beta t \cosh \alpha t$$

$$= -\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sinh(\alpha+\beta)t + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sinh(\alpha-\beta)t$$

$$= -\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\left[\frac{\sinh(\alpha+\beta)t}{\alpha+\beta} - \frac{\sinh(\alpha-\beta)t}{\alpha-\beta}\right]$$

$$= -\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta)^{2n}-(\alpha-\beta)^{2n}}{(2n+1)!}t^{2n+1}$$

چون جملات این سری مثبت هستند، $T'(t)<0$؛ لذا $T(t)$ با افزایش t کاهش می‌یابد.

همچنان، توابع با مقادیر مثبت

$$\frac{\cosh n(\pi-y)}{\sinh n\pi} \qquad (0 \leq y \leq \pi) \tag{۱۴}$$

که در سری بالا برای u_y ظاهر می‌شوند، هرگز مقدارشان با ازدیاد n ، افزایش نمی‌یابد زیرا مربع آنها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{\sinh^2 n\pi} + \left[\frac{\sinh n(\pi-y)}{\sinh n\pi}\right]^2 \tag{15}$$

که در آن هر جمله غیر صعودی است.

واضح است که برای همهٔ nها و yها در بازهٔ مربوط، مقادیر توابع (۱۳) فقط از صفر تا یک تغییر می‌کنند. توابع (۱۴) نیز به طور یکنواخت کراندارند. بنابراین آن توابع را می‌توان در آزمون آبل برای همگرایی یکنواخت (بخش ۷۹) به کار گرفت. از همگرایی یکنواخت سریها در معادلات (۱۱) و (۱۲) روی بازهٔ $0 \le x \le \pi$ نتیجه می‌شود که نه تنها سری (۱۰) نسبت به x و y با هم، در ناحیهٔ $0 \le x \le \pi$ و $0 \le y \le \pi$ از صفحهٔ xy همگرای یکنواخت است، بلکه سریهای حاصل از یک‌بار مشتق‌گیری جمله به جملهٔ سری (۱۰) نسبت به x یا y نیز همگرای یکنواختند.

در نتیجه سری (۱۰) نسبت به x و y مشتق‌پذیر است؛ همچنین مجموع $u(x,y)$ و u_x و u_y از آن سری در ناحیهٔ بستهٔ $0 \le x \le \pi$ و $0 \le y \le \pi$ پیوسته‌اند. واضح است که $u(x,y)$ در شرایط مرزی (۸) و (۹) صدق می‌کند.

قدرمطلق مشتقات مرتبه دوم، نسبت به x یا y، از جملات سری (۱۰)، از مقدار زیر نابیشتر هستند:

$$n^2 |b_n| \frac{\sinh n(\pi-y_0)}{\sinh n\pi} \tag{16}$$

هرگاه $0 \le x \le \pi$ و $y_0 \le y \le \pi$ ، که در آن $y_0 > 0$. فرض کنید که M طوری انتخاب شود که برای هر n، $|b_n| < M$. آنگاه، از نامساویهای

$$2\sinh n\pi \ge e^{n\pi}(1-e^{-2\pi}) \quad \text{و} \quad 2\sinh n(\pi-y_0) < e^{n(\pi-y_0)}$$

نتیجه می‌شود که عددهای (۱۶) از مقدار زیرکوچکترند:

$$\frac{M}{1-exp(-2\pi)}n^2 exp(-ny_0)$$

سری با این جملات، بر طبق آزمون نسبت، همگراست زیرا $y_0>0$؛ و بنابراین آزمون $M-$ وایرشتراس، همگرایی یکنواخت سریهای حاصل از مشتقات مرتبه دوم جملات سری (۱۰) را تضمین می‌کند، هرگاه $y_0\leq y\leq\pi$. لذا سری (۱۰) دوبار مشتق‌پذیر است؛ همچنین، u_{xx} و u_{yy} در ناحیهٔ $0\leq x\leq\pi$ و $0<y\leq\pi$ پیوسته‌اند.

چون جملات سری (۱۰) در معادلهٔ لاپلاس (۷) صدق می‌کنند، مجموع $u(x,y)$ از آن سری نیز در آن معادله صدق می‌کند. بدین ترتیب ثابت شد که u یک جواب مساله مقدار مرزی ما است. بعلاوه، u در شرایط منظم بودن مورد نظرمان صدق می‌کند، حتی نسبت به z چون مستقل از z است، و هر کجا، بخصوص، روی قسمتهای $z=z_1$ و $z=z_2$ از سطح S ، $u_z=0$. بنابراین، بر طبق قضیه بالا ، تابعی که توسط سری (۱۰) تعریف شده، تنها جواب ممکن است که در شرایط منظم بودن صدق می‌کند.

۸۲. جوابهای یک معادلهٔ موج

مسألهٔ زیر را برای جابجایی‌های عرضی (اریب) در یک تار کشیده شده در نظر بگیرید که تعمیمی است از مسأله‌ای که در بخش ۲۹ حل شد:

$$y_{tt}(x,t)=a^2y_{xx}(x,y)+\phi(x,t) \qquad (0<x<c\ ,\ t>0) \tag{1}$$

$$y(0,t)=p(t)\quad,\quad y(c,t)=q(t) \qquad (t\geq 0) \tag{2}$$

$$y(x,0)=f(x)\quad,\quad y_t(x,0)=g(x) \qquad (0\leq x\leq c) \tag{3}$$

اکنون نیاز داریم که y متعلق به دستهٔ C^2 در ناحیهٔ $R: 0\leq x\leq c\ ,\ t\geq 0$ باشد، به این معنی که y و مشتقات مرتبه اول و دوم آن از جمله y_{xt} و y_{tx} ، توابعی پیوسته در R

باشند. همانگونه که در بخش ۳۰ نشان داده شد، برای اینکه آن مسأله یک جواب از دسته توابع $C^{۲}$ داشته باشد، باید روی توابع داده شدهٔ g, f, q, p, ϕ محدودیت قائل شویم. فرض کنید که در آن دسته، دو جواب $y_{۱}(x,t)$ و $y_{۲}(x,t)$ وجود دارد. آنگاه تفاضل

$$Y(x,t) = y_{۱}(x,t) - y_{۲}(x,t)$$

متعلق به دستهٔ $C^{۲}$ در R است و در مسألهٔ همگن زیر صدق می‌کند:

$$Y_{tt}(x,t) = a^{۲} Y_{xx}(x,t) \qquad (\circ < x < c \ , \ t > \circ) \tag{۴}$$

$$Y(\circ,t) = \circ \quad , \quad Y(c,t) = \circ \qquad (t \geq \circ) \tag{۵}$$

$$Y(x,\circ) = \circ \quad , \quad Y_{t}(x,\circ) = \circ \qquad (\circ \leq x \leq c) \tag{۶}$$

ثابت خواهیم کرد که در سراسر R، $y = \circ$؛ بنابراین، همانگونه که در قضیه زیر گفته می‌شود، $y_{۱} = y_{۲}$.

قضیه . مسألهٔ مقدار مرزی (۱)-(۳) از دستهٔ $C^{۲}$ در ناحیهٔ R نمی‌تواند بیش از یک جواب داشته باشد.

برای شروع اثبات، توجه می‌کنیم که انتگران انتگرال زیر:

$$I(t) = \frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{c} \left(Y_{x}^{۲} + \frac{۱}{a^{۲}} Y_{t}^{۲}\right) dx \qquad (t \geq \circ) \tag{۷}$$

در شرایطی صدق می‌کند که:

$$I'(t) = \int_{\circ}^{c} \left(Y_{x} Y_{xt} + \frac{۱}{a^{۲}} Y_{t} Y_{tt}\right) dx \tag{۸}$$

چون $Y_{tt} = a^{۲} Y_{xx}$، این انتگران را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Y_{x} Y_{tx} + Y_{t} Y_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(Y_{x} Y_{t})$$

بنابراین نظر به معادلات (۵) که نتیجه می‌دهند:

$$Y_{t}(\circ,t) = \circ \qquad , \qquad Y_{t}(c,t) = \circ$$

می‌توانیم بنویسیم:

$$I'(t) = Y_x(c,t)\,Y_t(c,t) - Y_x(\circ,t)\,Y_t(\circ,t) = \circ \qquad (۹$$

بنابراین $I(t)$ ثابت است. اما معادلهٔ (۷) نشان می‌دهد که $I(\circ)=\circ$ زیرا $Y(x,\circ)=\circ$ و لذا $Y_x(x,\circ)=\circ$ ؛ همچنین $Y_t(x,\circ)=\circ$.

بنابراین $I(t)=\circ$. پس انتگران پیوستهٔ نامنفی آن انتگرال باید صفر باشد؛ یعنی:

$$Y_x(x,t) = Y_t(x,t) = \circ \qquad (\circ \le x \le c \;,\; t \ge \circ)$$

بنابراین Y ثابت است. در واقع $Y(x,t)=\circ$ چون $Y(x,\circ)=\circ$ ؛ و اثبات آن قضیه کامل شد.

اگر در هر کدام از شرایط یا هر دو شرط (۲)، به جای y ، y_x داده شود، اثبات یکتایی مزبور هنوز برقرار است، چون شرط (۹) مجدداً صادق است.

شرط پیوستگی مشتقات y سنگین است. مشتقات جوابهای بسیاری از مسائل ساده در یک معادلهٔ موج، ناپیوستگی دارند.

مسائل

۱. در مسألهٔ ۸، بخش ۳۳، در مورد دماهای $u(x,t)$ دریک قطعه، که دمای اولیهٔ آن $f(x)$ و در سراسر آن گرما با یک نسبت ثابت در هر واحد حجم تولید می‌شود، فرض کنید f پیوسته و f' قطعه‌ای پیوسته باشد $(\circ \le x \le \pi)$ و $f(\circ)=f(\pi)=\circ$. ثابت کنید که تابع $u(x,t)$ به دست آمده در آنجا تنها جواب آن مسأله است که در شرایط منظم بودن (الف) و (ب) مذکور در قضیه ۱ بخش ۸۰ صدق می‌کند.

۲. درستی جواب مسألهٔ ۸، بخش ۳۲ را بررسی کرده، ثابت کنید که آن تنها جواب آن مسأله است که در شرایط منظم بودن (الف) و (ب) مذکور در قضیه ۱، بخش ۸۰ صدق می‌کند.

توجه کنید که در این حالت، آزمون $M-$ وایرشتراس برای همهٔ اثباتهای همگرایی یکنواخت کفایت می‌کند.

۳. در مسألهٔ دیریکله برای یک مستطیل در مثال ۱، بخش ۳۴، فرض کنید f روی بازهٔ

$\circ < x < a$ قطعه‌ای هموار باشد. اگر $f(x)$ در نقاط ناپیوستگی‌اش به صورت میانگین $f(x+)$ و $f(x-)$ تعریف شده باشد، ثابت کنید که جواب صوری به دست آمده در آنجا در شرط $u(x,\circ+)=f(x)$ صدق می‌کند، هرگاه $\circ < x < a$.

۴. صورت کامل مسألهٔ مقدار مرزی دماهای حالت مانا در یک ورق مربع را بیان کنید که وجه‌ها و لبه‌های $x=\circ$ و $x=\pi$ و $y=\circ$ آن عایق‌بندی شده و لبهٔ $y=\pi$ آن در دمای $u=f(x)$ حفظ می‌شود. نشان دهید که اگر f و f' و f'' روی بازهٔ $\circ \leq x \leq \pi$ پیوسته باشند و $f'(\circ)=f'(\pi)=\circ$، آن مسأله جواب منحصر به فرد زیر را دارد:

$$u(x,y) = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \frac{\cosh ny}{\cosh n\pi} \cos nx$$

که در آن:

$$a_n = \frac{۲}{\pi} \int_\circ^\pi f(x) \cos nx \, dx \qquad (n=\circ,۱,۲,\ldots)$$

۵. دیسک نازک مثال بخش ۴۰ را با یک استوانه‌ای که توسط سطوح $\rho=۱$ ، $z=z_۱$ ، $z=z_۲$ محدود شده جایگزین کنید که روی دو قسمت انتهایی آن $u_z=\circ$. همچنین فرض کنید که $f(\phi)$ یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب ۲π باشد که مشتق دوم آن همه جا پیوسته است. سپس نشان دهید که تابع u که توسط معادلهٔ (۶) بخش ۴۰ داده می‌شود، تنها جواب آن مسأله دماهای ماناست که در شرایط منظم بودنی که مورد نظر ماست، صدق می‌کند.

۶. از یکتایی به دست آمده در بخش ۸۲ استفاده کرده، نشان دهید که جواب مسألهٔ ۱، بخش ۳۰ تنها جواب از دستهٔ $C^۲$ در ناحیهٔ $\circ \leq x \leq ۱$ و $t \geq \circ$ از صفحهٔ xt است.

۷. نشان دهید که جواب مسألهٔ ۳، بخش ۳۸، در دستهٔ $C^۲$ یکتاست.

۸. در بخش ۳۰ فرض کنید $f(x)$ طوری باشد که $f''(x)$ مشتق مرتبهٔ دوم $F(x)$ توسیع فرد متناوب آن در هر نقطهٔ x $(-\infty < x < \infty)$ موجود و پیوسته باشد. در این صورت نشان دهید که جواب (۱۰) آن بخش در دستهٔ $C^۲$ یکتاست.

کتابنامه

فهرست کتب و مقالات زیر که برای مطالعهٔ تکمیلی موضوعات گوناگون معرفی شده کامل نیست. نام کتب و مقالات اضافی در مراجع ذیل دریافت می‌شود.

Abramowitz, M., and I. A. Stegun (Eds.): *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York, 1972.

Apostol, T. M.: *Mathematical Analysis* (2d ed.), Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1974.

Bell, W. W.: *Special Functions for Scientists and Engineers*, D. Van Nostrand Company, Ltd., London, 1968.

Berg, P. W., and J. L. McGregor: *Elementary Partial Differential Equations* (Holden-Day, Inc., San Francisco, 1966), McGraw-Hill, Inc., New York.

Birkhoff, G., and G.-C. Rota: *Introduction to Ordinary Differential Equations* (4th ed.), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

Bowman, F.: *Introduction to Bessel Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

Boyce, W. E., and R. C. DiPrima: *Elementary Differential Equations* (5th ed.), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.

Broman, A.: *Introduction to Partial Differential Equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1989.

Brown, J. W., and F. Farris: On the Laplacian, *Math. Mag.*, vol. 59, no. 4, pp. 227–229, 1986.

Buck, R. C.: *Advanced Calculus* (3d ed.), McGraw-Hill, Inc., New York, 1978.

Budak, B. M., A. A. Samarskii, and A. N. Tikhonov: *A Collection of Problems on Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc., New York, 1988.

Byerly, W. E.: *Fourier's Series and Spherical Harmonics*, Dover Publications, Inc., New York, 1959.

Cannon, J. T., and S. Dostrovsky: *The Evolution of Dynamics, Vibration Theory from 1687 to 1742*, Springer-Verlag, New York, 1981.

Carslaw, H. S.: *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals* (3d ed.), Dover Publications, Inc., New York, 1952.

——— and J. C. Jaeger: *Conduction of Heat in Solids* (2d ed.), Oxford University Press, London, 1959.

Churchill, R. V.: *Operational Mathematics* (3d ed.), McGraw-Hill, Inc., New York, 1972.

——— and J. W. Brown: *Complex Variables and Applications* (5th ed.), McGraw-Hill, Inc., New York, 1990.

Coddington, E. A.: *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1989.

——— and N. Levinson: *Theory of Ordinary Differential Equations*, Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 1984.

Courant, R., and D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*, vols. 1 and 2, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

Davis, H. F.: *Fourier Series and Orthogonal Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1989.

Erdélyi, A. (Ed.): *Higher Transcendental Functions*, vols. 1–3, Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 1981.

Farrell, O. J., and B. Ross: *Solved Problems in Analysis as Applied to Gamma, Beta, Legendre, and Bessel Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1971.

Fourier, J.: *The Analytical Theory of Heat*, translated by A. Freeman, Dover Publications, Inc., New York, 1955.

Franklin, P.: *A Treatise on Advanced Calculus*, Dover Publications, Inc., New York, 1964.

Grattan-Guinness, I.: *Joseph Fourier, 1768–1830*, The MIT Press, Cambridge, MA, and London, 1972.

Gray, Alfred, and M. A. Pinsky: Gibbs' Phenomenon for Fourier-Bessel Series, *Expo. Math.* (in press).

Gray, Andrew, and G. B. Mathews: *A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics* (2d ed.), with T. M. MacRobert, Dover Publications, Inc., New York, 1966.

Hanna, J. R., and J. H. Rowland: *Fourier Series, Transforms, and Boundary Value Problems* (2d ed.), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.

Hayt, W. H., Jr.: *Engineering Electromagnetics* (5th ed.), McGraw-Hill, Inc., New York, 1989.

Herivel, J.: *Joseph Fourier: The Man and the Physicist*, Oxford University Press, London, 1975.

Hewitt, E., and R. E. Hewitt: The Gibbs-Wilbraham Phenomenon: An Episode in Fourier Analysis, *Arch. Hist. Exact Sci.*, vol. 21, pp. 129–160, 1979.

Hobson, E. W.: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Chelsea Publishing Company, Inc., New York, 1955.

Hochstadt, H.: *The Functions of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc., New York, 1986.

Ince, E. L.: *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1956.

Jackson, D.: *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, Carus Mathematical Monographs, no. 6, Mathematical Association of America, 1941.

Jahnke, E., F. Emde, and F. Lösch: *Tables of Higher Functions* (6th ed.), McGraw-Hill, Inc., New York, 1960.
Kaplan, W.: *Advanced Calculus* (4th ed.), Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1991.
———: *Advanced Mathematics for Engineers*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1981.
Kellogg, O. D.: *Foundations of Potential Theory*, Dover Publications, Inc., New York, 1953.
Kevorkian, J.: *Partial Differential Equations*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1990.
Körner, T. W.: *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1988.
Kreider, D. L., R. G. Kuller, D. R. Ostberg, and F. W. Perkins: *An Introduction to Linear Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1966.
Lanczos, C.: *Discourse on Fourier Series*, Hafner Publishing Company, New York, 1966.
Langer, R. E.: Fourier's Series: The Genesis and Evolution of a Theory, Slaught Memorial Papers, no. 1, *Am. Math. Monthly*, vol. 54, no. 7, part 2, pp. 1–86, 1947.
Lebedev, N. N.: *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications, Inc., New York, 1972.
———, I. P. Skalskaya, and Y. S. Uflyand: *Worked Problems in Applied Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 1979.
McLachlan, N. W.: *Bessel Functions for Engineers* (2d ed.), Oxford University Press, London, 1955.
MacRobert, T. M.: *Spherical Harmonics* (3d ed.), with I. N. Sneddon, Pergamon Press, Ltd., Oxford, England, 1967.
Magnus, W., F. Oberhettinger, and R. P. Soni: *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics* (3d ed.), Springer-Verlag, New York, 1966.
Oberhettinger, F.: *Fourier Expansions: A Collection of Formulas*, Academic Press, New York and London, 1973.
Özişik, M. N.: *Boundary Value Problems of Heat Conduction*, Dover Publications, Inc., New York, 1989.
Papp, F. J.: Two Equivalent Properties for Orthonormal Sets of Functions in Complete Spaces, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, vol. 22, pp. 147–149, 1991.
Pinsky, M. A.: *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications* (2d ed.), McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
Powers, D. L.: *Boundary Value Problems* (3d ed.), Academic Press, Orlando, FL, 1987.
Rainville, E. D.: *Special Functions*, Chelsea Publishing Company, Inc., New York, 1971.
——— and P. E. Bedient: *Elementary Differential Equations* (7th ed.), Macmillan Publishing Co., New York, 1989.
Rogosinski, W.: *Fourier Series* (2d ed.), Chelsea Publishing Company, Inc., New York, 1959.
Sagan, H.: *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc., New York, 1989
Sansone, G., and A. H. Diamond: *Orthogonal Functions* (rev. ed.), Dover Publications, Inc., New York, 1991.
Seeley, R. T.: *An Introduction to Fourier Series and Integrals*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1966.
Smirnov, V. I.: *Complex Variables—Special Functions*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1964.
Sneddon, I. N.: *Elements of Partial Differential Equations*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1957.

———: *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1951.
———: *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry* (3d ed.), Longman, New York, 1980.
———: *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1972.
Streeter, V. L., and E. B. Wylie: *Fluid Mechanics* (8th ed.), McGraw-Hill, Inc., New York, 1985.
Taylor, A. E., and W. R. Mann: *Advanced Calculus* (3d ed.), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.
Timoshenko, S. P., and J. N. Goodier: *Theory of Elasticity* (3d ed.), McGraw-Hill, Inc., New York, 1970.
Titchmarsh, E. C.: *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations*, Oxford University Press, London, part I (2d ed.), 1962; part II, 1958.
———: *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (3d ed.), Chelsea Publishing Company, Inc., New York, 1986.
Tolstov, G. P.: *Fourier Series*, Dover Publications, Inc., New York, 1976.
Tranter, C. J.: *Bessel Functions with Some Physical Applications*, Hart Publishing Company, Inc., New York, 1969.
Trim, D. W.: *Applied Partial Differential Equations*, PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1990.
Van Vleck, E. B.: The Influence of Fourier's Series upon the Development of Mathematics, *Science*, vol. 39, pp. 113–124, 1914.
Watson, G. N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (2d ed.), Cambridge University Press, Cambridge, England, 1952.
Weinberger, H. F.: *A First Course in Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.
Whittaker, E. T., and G. N. Watson: *A Course of Modern Analysis* (4th ed.), Cambridge University Press, Cambridge, England, 1963.
Zygmund, A.: *Trigonometric Series* (2d ed.), 2 vols. in one, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1977.

راهنمای کلی

I . در ترتیب الفبایی کلمات فارسی بین "ا" و "آ" تمیز نگذاشته‌ایم.

II . برای یک کلمهٔ مرکب که در ردیف جزء اول کلمه یافت نمی‌شود، به جزء دیگر آن رجوع شود.

واژه نما

واژه‌نامه
فارسی - انگلیسی

آزمون	*test*
اصلاح شده - تعدیل شده	*modified*
آبل	*Abel*
الحاق	*adjoint*
پاد متناوب	*antiperiadeic*
تابع اولیه	*antiderivative*
شتاب	*accelaration*
تحلیلی	*analytice*
اتحاد	*identity*
استقرا	*induction*
استقرای ریاضی	*mathematical*
استوانه	*cylinder*
استوانه‌ای	*cylindrical*
اریب	*transverse*
انتقال	*transfer*
اصلی	*Fundamental*
ارتعاش	*Vibration*
اویلر	*Euler*
الکترواستاتیک	*Electrostatic*
انتگرال	*Integral*
ناسره	*Improper*
انتگرالگیری	*Integration*
انتگران	*Integrand*
اصل	*Principle*
اصول	*Postulates*
استقلال	*independence*
آئرودینامیک	*Aerodynamics*
افقی	*horizontal*
الکترواستاتیک	*Electrostatic*
انحراف	*deviation*
استورم	*Sturm*
اصل برهمنهی	*Principle of superposition*
ابتدایی - اولیه	*initial*
آغازی	*initial*
انتگرال مکرر	*iterated integral*

بازگشتی	*Recurrence*
بازه	*interval*
بازهٔ اصلی	*fundamental*
باقیمانده	*remainder*
با مقدار حقیقی	*real – valued*
براون	*Brown*
بسته	*closed*
بیضوی	*Elliptic*
بردار	*vector*
برهمنهی	*superposition*
بدون تنش	*unstrained*
برنولی	*Bernoulli*

بسل	*Bessel*
پدیده	*phenomenon*

پارسوال	*Parseval*
پاد متناوب	*antiperiodic*
پتانسیل	*potential*
پیوسته	*continuous*
پیوستهٔ یکنواخت	*uniformly continuous*
پوسته(نازک)	*membrane*
پخش	*diffusion*
پارامتر	*parameter*

تابع	*function*
ـــ اولیه	*antiderivative*
ـــ پیوسته	*continuous function*
ـــ تحلیلی	*analytic function*
ـــ با مقادیر حقیقی	*real–valued function*
ـــ قطعه‌ای پیوسته	*piecewise continuous function*
ـــ مثلثاتی	*trigonometric function*
ـــ همساز	*Harmonic function*
ـــ مولد	*generating function*
ـــ زوج	*even function*
ـــ فرد	*odd function*
ـــ ویژه	*eigen function*
تحلیلی	*analytic*
تقریب	*approximation*
تمرکز	*concentration*
تراکم	*compression*
تسارنکی	*Czarnecki*
تراکم پذیر	*compressible*
توزیع	*diffusion*
تراکم ناپذیر	*incompressible*
تام	*entire*
توسیع	*extension*
تار	*string*
ترکیب	*combination*
تعمیم یافته	*generalized*
تیلده	*Tilde*
تغییر	*Variation*
تار مرتعش	*vibrating string*
تیلور	*Taylor*
تلگراف	*Telegraph*
تشدید	*resonance*
تکین	*singular*
تعامد	*orthogonality*
تبدیل	*transform*
تعدیل شده	*modified*
تقریب کمترین مربعات	*least square approximation*

ثقل	*gravity*

Interior	داخل
interior , inner	داخلی
temperature	دما
sequence	دنباله
d'Alembert	دالامبر
differential	دیفرانسیل
period	دورهٔ تناوب
steady temperature	دمای مانا
Dirichlet	دیریکله
Domain	دامنه
Kronecker's δ	دلتای کرونکر

Robin	رابین
conductance	رسانایی
conductivity	رسانایی
method	روش
relation	رابطه
recurrence relation	رابطهٔ بازگشتی
Rodrigues	رادریگوس
Riemann	ریمان
surface	رویه
even	زوج

---

velocity	سرعت
series	سری
surface	سطح
parabolic	سهموی
	سطح قطعه‌ای هموار

gravitational	ثقلی
constant	ثابت

---

partial	جزئی
solution	جواب
	جداسازی متغیرها
separation of variables	
separated	جدا شده

---

polynomial	چند جمله‌ای

Steady state	حالت مانا
limit	حد
domain	حوزه
ring	حلقه
motion	حرکت
real	حقیقی
thermal	حرارتی
heat	حرارت
product	حاصلضرب
one-sided limit	حد یکطرفه
limit in mean	حد در میانگین
inner product	حاصلضرب داخلی

---

linear	خطی
self-adjoint	خود الحاق
error	خطا
	خطای میانگین مربعات
mean square error	

concentration	غلظت

---

odd	فرد
corrolary	فرع
formula	فرمول
Frobenius	فروبنیوس
Fourier	فوریه
space	فضا
function space	فضای تابعی
factor	فاکتور

Vertical	قائم
chain rule	قاعدهٔ زنجیری
slab	قطعه
piecewise continuous	قطعه‌ای پیوسته
law	قانون
Newton's law of cooling	قانون سرمایش نیوتن

---

bounded	کراندار
bibliography	کتابنامه
Cauchy	کوشی
complete	کامل
cosine	کسینوس
elastic	کشسان
elasticity	کشسانی
kronecker	کرونکر
spherical	کروی

piece wise smooth surface

sine	سینوس

---

flux	شار
accelaration	شتاب
condition	شرط
boundary condition	شرط مرزی
analogy	شباهت

---

explicit	صریح
increasing	صعودی
Zero	صفر
formal	صوری

---

coefficient	ضریب
undetermined coefficients	ضرایب نامعین
spectrum	طیف

---

factor	عامل
ordinary	عادی
transverse	عرضی
transverse , vertical	عمودی
operator	عملگر
self-adjoint operator	عملگر خودالحاق
orthogonality	عمود بودن
linear operator	عملگر خطی
insulated	عایق بندی شده

denominator	مخرج
vibrating	مرتعش
cirular	مستدیر
cirular	مدور
independent	مستقل
derivative	مشتق
equation	معادله
ordinary	معمولی
eigenvalue	مقدار ویژه
iterated	مکرر
bounded	محدود
value	مقدار
component	مؤلفه
prism	منشور
generating	مولد
imaginary	موهومی
mean	میانگین
wave	موج
reliable	مورد اعتماد
musical	موسیقی
damping	میرا
bar	میله
coordinates	مختصات
problem	مسئله
left−hand derivative	مشتق چپ
right−hand derivative	مشتق راست

tension	کشش

wedge	گوه
gamma	گاما
heat	گرما
specific heat	گرمای ویژه
thermal	گرمایی - حرارتی
discrete	گسسته
Gibbs	گیبس

Laplace	لاپلاس
Laplacian	لاپلاسین
Lebesgue	لبگ - لوبگ
Legendre	لژاندر
Leibnitz	لایب نیتس
Lagrange	لاگرانژ
Liouville	لیوویل

periodic	متناوب
boundary	مرز
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامدیکه
variable	متغیر
average	متوسط
symmetric	متقارن
trigonometric	مثلثاتی
medium	محیط
complex	مختلط
terminate	مختوم

undetermined نامعین

Weierstrass وایرشتراس

weight وزن

Weber وبر

face وجه

---

smooth هموار

convergence همگرایی

همگرایی در میانگین

convergence in mean

همگرایی نقطه به نقطه

pointwise convergence

harmonic همساز

Hankel هانکل

Hartley هارتلی

conduction , conductance هدایت

homogeneous همگن

hyperbolic هذلولوی

Hooke هوک

conformal همدیس

---

monotonic یکنوا

uniform یکنواخت

uniqueness یکتائی

one – sided یکطرفه

modulus مدول

regular منظم

steady مانا

Region ناحیه

discontinuous ناپیوسته

Improper ناسره

note نت

normalized نرمال شده

decreasing نزولی

pointwise نقطه به نقطه

exponential نمایی

graph نمودار

Neumann نویمن

inequality نامساوی

mapping نگاشت

نگاشت همدیس

conformal mapping

Newton نیوتن

norm نرم

point نقطه

ordinary point نقطهٔ عادی

semi–infinite نیم نامتناهی

singular point نقطهٔ تکین

unstable ناپایدار

واژه نامه
انگلیسی - فارسی

Abel	آبل
adjoint	الحاق
aerodynamics	آئرودینامیک
antiperiodic	پاد متناوب
antiderivative	تابع اولیه
accelaration	شتاب
analytic	تحلیلی
approximation	تقریب
average	متوسط
Bernoulli	برنولی
Bessel	بسل
bibliography	کتابنامه
bounded	کراندار، محدود
boundary	مرز
Brown	براون
Cauchy	کوشی
criterion	شرط ــ
Cauchy's inequality	نامساوی ــ
chain rule	قاعدهٔ زنجیری
circular	مستدیر، مدور، دایره‌ای
closed	بسته
coefficient	ضریب
combination	ترکیب
complete	کامل

complex	مختلط
component	مؤلفه
concentration	تراکم - غلظت
conductance	رسانایی، هدایت
conductivity	رسانایی، هدایت
conformal	همدیس
mapping	نگاشت ــ
continuous	پیوسته
eigen values	مقادیر ویژهٔ ــ
continuous function	تابع پیوسته
piecewise	تابع قطعه‌ای پیوسته
uniformly	تابع پیوستهٔ یکنواخت
continuous spectrum	طیف پیوسته
convergence	همگرایی
in mean	ــ در میانگین
point wise	ــ نقطه به نقطه
corrolary	فرع
cosine	کسینوس، کسینوسی
cylinder	استوانه
cylindrical	استوانه‌ای
coordinates	مختصات ــ
czarnecki	تسارنکی
d'Alembert	دالامبر
damping	میرا

decreasing	نزولی
denominator	مخرج
derivative	مشتق
left - hand	ــ چپ
right hand	ــ راست
Differential	دیفرانسیل
equation	معادلهٔ ــ
operator	عملگر ــ
differentiation	مشتقگیری
diffusion	توزیع، پخش، نفوذ
coefficient of	ضریب ــ
diffusivity	ــ گرمایی
Dirichlet	دیریکله
condition	شرط ــ
kernel	هستهٔ ــ
problem	مسئلهٔ ــ
discontinuous	ناپیوسته
discrete	گسسته
spectrum	طیف ــ
domain	حوزه
eigenfunction	تابع ویژه
eigenvalue	مقدار ویژه
elastic	کشسان
bar	میلهٔ ــ
elasticity	کشسانی
electrostatice	الکترواستاتیک
elliptic	بیضوی

entire	تام
equation	معادله
error	خطا
function	تابع ــ
Euler	اویلر
Euler's constant	ثابت ــ
Euler's formula	فرمول ــ
even	زوج
explicit	صریح
exponential	نمایی
Extension	توسیع
face	وجه
factor	عامل - فاکتور
flux	شار
formal	صوری
Fourier	فوریه
constants	ثابتهای ــ
method	روش ــ
series	سریهای ــ
transform	تبدیل ــ
Fourier's law	قانون فوریه
Fourier's ring	حلقهٔ فوریه
Frobenius	فروبنیوس
method of	روش
Function	تابع
space	فضای تابعی
Fundamental	اصلی

interval	بازهٔ
gamma	گاما
function	تابع گاما
generalized	تعمیم یافته
generating	مولد
function	تابع ــــ
Gibbs	گیبس
phenomenon	پدیدهٔ ــــ
graph	نمودار
gravitational	ثقلی
gravity	ثقل
Hankel	هانکل
Hankel's integral formula	فرمول انتگرال هانکل
harmonic	همساز
function	تابع ــــ
Hartley	هارتلی
heat	گرما، حرارت
conduction	هدایت ــــ
equation	معادلهٔ ــــ
transfer	انتقال حرارت
homogeneous	همگن
equation	معادلهٔ ــــ
Hooke	هوک
Hooke's law	قانون ــــ
horizontal	افقی
hyperbolic	هذلولوی

identity	اتحاد
imaginary	موهومی
Improper	ناسره
integral	انتگرال ــــ
Increasing	صعودی
independent	مستقل
induction	استقرا
mathematical	استقرای ریاضی
inequality	نامساوی
initial	ابتدائی، آغازی، اولیه
Inner	داخلی
product	حاصلضرب ــــ
insulated	عایق بندی شده
Integral	انتگرال
Integrand	انتگران
Integration	انتگرالگیری
interior	داخل، داخلی
interval	بازه
iterated	مکرر
integral	انتگرال ــــ
kronecker	کرونکر
kronecker's δ	دلتای ــــ
Lagrange	لاگرانژ
Lagrange's identity	اتحاد ــــ
Laplace	لاپلاس
transform	تبدیل ــــ
Laplacian	لاپلاسین

تقریب کمترین مربعات
Least Squares approximation
Left - hand derivative مشتق چپ
Lebesgue لوبگ
Legendre لژاندر
function توابع ـــ
polynomials چند جمله‌ایهای ـــ
series سریهای ـــ
equation معادلهٔ ـــ
Leibnitz لایب نیتس
limit حد
in mean در میانگین
one sided یکطرفه
linear خطی
شرطمرزی ـــ
conditionboundary
combination ترکیب ـــ
differential دیفرانسیل ـــ
independence استقلال ـــ
operator عملگر ـــ
Liouville لیوویل
M – test آزمون *M*
mapping نگاشت
conformal ـــ همدیس
mean میانگین
convergence همگرایی در ـــ
square error خطای - مربعات

value مقدار ـــ
medium محیط
membrane پوسته، غشاء
analogy شباهت پوسته‌ای
method روش
ـــ جداسازی متغیرها
of separation of variables
روش جدا سازی متغیرها
separation of variables
modified اصلاح شده، تعدیل شده
توابع بسل اصلاح شده
Bessel functions
modulus مدول، قدر مطلق
monotonic یکنوا
motion حرکت
musical موسیقی
Neumann نویمن
condition شرط ـــ
Newton نیوتن
قانون سرمایش نیوتن
Newton's law of cooling
nonhomogeneous ناهمگن
normalized نرمال شده
norm نرم
note نت
odd فرد
function تابع ـــ

توسیع متناوب ــــ
periodic extension
one − sided یکطرفه
derivative مشتق ــــ
limit حد ــــ
operator عملگر
linear ــــ خطی
دیفرانسیل خطی
linear differential
ordinary معمولی، عادی
point نقطهٔ عادی
معادلهٔ دیفرانسیل معمولی
differential equation
orthogonal متعامد
orthogonality تعامد، عمود بودن
orthonormal متعامدیکه
parabolic سهموی
Parseval پارسوال
partial جزئی
معادلهٔ دیفرانسیل ــــ
differential equation
period دورهٔ تناوب
periodic متناوب - تناوبی
شرط مرزی
boundary condition
extension توسیع
function تابع

piecewise قطعه‌ای
continuous ــــ پیوسته
smooth function تابع هموار
سطح قطعه‌ای هموار
smooth surface
point wise نقطه به نقطه، نقطه‌ای
convergence همگرایی ــــ
poisson پوآسون
polynomial چند جمله‌ای
postulate اصل
potential پتانسیل
principle اصل
of superposition اصل برهمنهی
prism منشور
Real حقیقی
Real−valued با مقادیر حقیقی
Recurrence بازگشتی
relation رابطهٔ ــــ
Region ناحیه
Regular منظم
Reliable مورد اعتماد
Remainder باقیمانده
Resonance تشدید
Riemann ریمان
مشتق راست
Right−hand derivative
Ring حلقه

Robin	رابین
Rodrigues	رادریگوس
Schwarz	شوآرتس
self-adjoint	خودالحاق ــــ
operator	عملگر ــــ
Semi-infinite	نیم نامتناهی
separated	جدا شده
Separation	جداسازی
constant	ثابت ــــ
of variables	ــــ متغیرها
sequence	دنباله
series	سریها
sine	سینوس، سینوسی
singular	تکین
point	نقطهٔ ــــ
Slab	قطعه
smooth	هموار
solution	جواب - حل
space	فضا
specific	ویژه
heat	گرمای ویژه
spectrum	طیف
spherical	کروی
steady	مانا
state	حالت مانا
temperature	دمای مانا
string	تار

vibrating	ــــ مرتعش
Sturm	استورم
Superposition	برهمنهی
surface	سطح، رویه
conductance	رسانایی ــــ
symmettric	متقارن
Taylor	تیلور
Telegraph	تلگراف
temperature	دما
tension	کشش
terminate	مختوم
Thermal	گرمایی
Tilde	تیلده
transform	تبدیل
transverse	عمودی، عرضی
trigonometric	مثلثاتی
undetermined	نامعین
coefficients	ضرایب ــــ
uniform	یکنواخت
convergence	همگرایی ــــ
uniformly continuous	پیوستهٔ یکنواخت
uniqueness	یکتایی
unstable	ناپایدار
unstrained	بدون تنش
variation	تغییر
of parameters	ــــ پارامترها

vector	بردار
velocity	سرعت
vertical	قائم
vibrating	مرتعش
vibration	ارتعاش
wave	موج
weber	وبر
wedge	گوه
weierstrass	وایرشتراس
weight	وزن
zero	صفر